
Fyzika

Příručka
pro fakulty strojního inženýrství

Z. HORÁK, F. KRUPKA

SNTL/SVTL

ZDENĚK HORÁK — FRANTIŠEK KRÚPKA

Fyzika

Příručka pro fakulty strojního inženýrství

SNTL | SVTL

**Schváleno výnosem ministerstva školství a kultury
čj. 12 825/64-III/1 ze dne 12. března 1964
ako příručka pro strojní fakulty**

F y z i k a

**Příručka pro fakulty
strojního inženýrství**

PROF. RNDR. ZDENĚK HORÁK DRSC.

DOC. ING. DR. FRANTIŠEK KRUPKA

Praha 1966

Státní nakladatelství technické literatury
Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry

Učebnice technické fyziky, která podává zhuštěný výklad všech oborů fyziky s přihlédnutím k aplikacím v technice.

Je určena především pro posluchače fakult strojního inženýrství, ale mohou jí využít i technici a inženýři ve strojírenském průmyslu a v příbuzných průmyslových oborech.

;

Lektorovali Prof. Dr. Jozef Garaj a Doc. RNDr. Jan Schwarz

Redakce teoretické literatury — hlavní redaktor Ing. Vlastimil Čihák

© Prof. RNDr. Zdeněk Horák DrSc., Doc. Ing. Dr. František Krupka, 1966

Obsah

Předmluva	11	2.2.5. Pohyb na povrchu zemském . . .	79
1. Úvodní stat	13	2.2.6. Dráhový účinek síly, mechanická energie	82
1.1. Základní fyzikální pojmy	13	2.2.7. Dobový účinek síly, hybnost a impuls	89
1.1.1. Předmět a rozdělení fyziky	13	2.3. Gravitační pole	92
1.1.2. Fyzikální zákony a veličiny . . .	15	2.3.1. Pohyb planet, gravitační zákon . .	92
1.1.3. Částice a pole	17	2.3.2. Intenzita a potenciál gravitačního pole	95
1.2. Fyzikální jednotky	18	2.3.3. Pohyb v nehomogenním gravitačním poli	99
1.2.1. Měrové jednotky a jejich soustavy	18	2.4. Základy mechaniky soustavy hmotných bodů	103
1.2.2. Mezinárodní měrová soustava SI .	20	2.4.1. Princip vzájemného působení v soustavě bodů	103
1.2.3. Zákonné míry	21	2.4.2. Impulsové věty. Hmotný střed . . .	104
1.3. Základní představy atomové fyziky .	23	2.4.3. Pohyb tělesa s proměnnou hmotností	111
1.3.1. Proton, neutron, elektron	23	2.5. Základy mechaniky tuhých těles . . .	114
1.3.2. Atomová jádra	24	2.5.1. Poloha tuhého tělesa	114
1.3.3. Elektronový obal atomu	27	2.5.2. Zjednodušení prostorové soustavy sil	115
1.4. Molekuly a krystaly	28	2.5.3. Pohyb tuhého tělesa	116
1.4.1. Složení molekul	28	2.5.4. Pohybová energie tuhého tělesa . .	119
1.4.2. Látky různých skupenství	29	2.5.5. Moment setrvačnosti	121
1.4.3. Krystalová struktura	31	2.5.6. Pohybová rovnice pro pohyb tělesa kolem pevné osy	122
1.4.4. Hlavní typy krystalů	34	2.5.7. Kyvadlo	124
2. Mechanika	39	2.5.8. Volné osy	127
2.0. Pohyb, prostor a čas	39	2.5.9. Volný setrvačnick	128
2.1. Kinematika hmotného bodu	42	2.5.10. Setrvačnick podrobený vnějšímu působení	131
2.1.1. Pohyb hmotného bodu	42	2.6. Pružnost pevných těles	132
2.1.2. Přímocará pohyb hmotného bodu	48	2.6.1. Napětí	132
2.1.3. Kruhový pohyb	49	2.6.2. Tah a tlak	134
2.1.4. Vektorové znázornění kruhového pohybu	52	2.6.3. Pružnost ve smyku	139
2.1.5. Harmonický pohyb	54	2.7. Ráz těles	141
2.2. Dynamika hmotného bodu	57	2.7.1. Přehled úloh o rázu	141
2.2.1. Síla	57	2.7.2. Přímý středový ráz	143
2.2.2. Pohybové zákony	60	2.7.3. Šikmý ráz	147
2.2.3. Pohybové rovnice	64		
2.2.4. Sílové působení při relativním pohybu	70		

2.8. Mechanika kapalin a plynů	149	4.1.2. Teplotní roztažnost a rozpínavost	268
2.8.1. Obecné vlastnosti kapalin a plynů	149	4.1.3. Množství tepla, měrné teplo	272
2.8.2. Tlak v tekutinách	151	4.2. Šíření tepla	275
2.8.3. Atmosférický tlak	153	4.2.1. Vedení tepla	276
2.8.4. Povrchové napětí	154	4.2.2. Průchod tepla rozhraním	280
2.8.5. Pohyb tekutiny	159	4.3. Kinetická teorie plynů	281
2.8.6. Bernoulliho rovnice	161	4.3.1. Množství látky, kilomol	281
2.8.7. Věta o hybnosti	164	4.3.2. Kinetická teorie tepla	284
2.8.8. Vnitřní tření	165	4.3.3. Dokonalý plyn	285
2.8.9. Proudění potenciálové, laminární a turbulentní	167	4.3.4. Střední kvadratická rychlost, energie plynu	286
2.9. Einsteinova relativistická mechanika	171	4.3.5. Maxwellův zákon rozdělení rychlostí	291
2.9.1. Relativnost pohybu	171	4.3.6. Van der Waalova rovnice	294
2.9.2. Lorentzova transformace	173	4.3.7. Střední volná dráha molekul. Vazkost plynů	296
2.9.3. Relativistická kinematika	176	4.3.8. Zákon rovnoměrného rozdělení energie. Zákonitost kilomolových tepel	300
2.9.4. Relativistická dynamika	180	4.4. Termodynamika	303
2.9.5. Vlastní čas. Transformace síly	183	4.4.1. První hlavní věta	303
2.9.6. Gravitace a setrvačnost	185	4.4.2. Vratné změny ideálního plynu	307
2.9.7. Obecná teorie relativnosti	188	4.4.3. Přeměna tepla v mechanickou energii	313
2.9.8. Teorie relativnosti a kosmologie	192	4.4.4. Druhá hlavní věta	316
3. Akustika	197	4.4.5. Entropie	321
3.0. Rozdělení akustiky	197	4.4.6. Druhá hlavní věta jako princip růstu entropie	324
3.1. Kmity	198	4.4.7. Entropie a pravděpodobnost	328
3.1.1. Kmitání (oscilace)	198	4.4.8. Třetí hlavní věta	333
3.1.2. Harmonické kmitání	198	4.5. Fázové přeměny	334
3.1.3. Skládání stejnosměrných kmitů	204	4.5.1. Fázové pravidlo	334
3.1.4. Harmonická analýza	205	4.5.2. Tání a tuhnutí	336
3.1.5. Skládání kmitů stejných a blízkých period	208	4.5.3. Vypařování a kondenzace	338
3.1.6. Skládání různosměrných kmitů	210	4.5.4. Sublimace. Trojný bod	342
3.1.7. Tlumené kmity	212	4.5.5. Kritický stav	343
3.1.8. Nucené kmity oscilátoru	216	4.5.6. Zkapalňování plynů	347
3.1.9. Vázané oscilátory	221	4.5.7. Vlhkost vzduchu	348
3.2. Vlny	224	5. Elektřina a magnetismus	350
3.2.1. Vznik postupných vln	224	5.0. Úvod	350
3.2.2. Šíření vln v přímé řadě	225	5.1. Elektrostatické pole	351
3.2.3. Interference vln v přímé řadě	230	5.1.1. Základní poznatky o elektrických nábojích	351
3.2.4. Stojaté vlnění	231	5.1.2. Coulombov zákon	352
3.2.5. Grupová rychlost	234	5.1.3. Elektrostatické pole bodového náboje	354
3.2.6. Šíření vln v prostoru	235	5.1.4. Skládání polí bodových nábojů	355
3.2.7. Dopplerův princip	240	5.1.5. Gaussova věta	359
3.2.8. Vlnová rovnice	241	5.1.6. Pole spojitě rozložených nábojů	362
3.2.9. Rychlost elastických vln v pevných látkách	243	5.1.7. Elektrostatický potenciál	366
3.2.10. Rychlost podélných vln v kapalinách a plynech	245	5.1.8. Elektrický stav těles	370
3.2.11. Intenzita vlnění	247	5.1.9. Elektrostatické pole nabitých vodičů	373
3.3. Zvuk a ultrazvuk	249	5.2. Elektrické jevy v nevodících	377
3.3.1. Podstata zvuku, základní akustické veličiny	249	5.2.1. Dielektrická polarizace	377
3.3.2. Vlastnosti zvuku	253		
3.3.3. Subjektivní síla zvuku	255		
3.3.4. Praktické užití ultrazvuku	260		
4. Nauka o teple	264		
4.1. Teplota a teplo	264		
4.1.1. Definice teploty	264		

5.2.2.	Vliv prostředí na elektrostatické pole	381	5.7.1.	Magnetické pole v neomezeném homogenním prostředí	473
5.2.3.	Vektor elektrické indukce	386	5.7.2.	Magnetické pole v různorodém prostředí	477
5.2.4.	Elektrostatické pole v nestejnorodých prostředích	388	5.7.3.	Trvalé magnety a proudy v prostředí	480
5.2.5.	Vlastnosti izotropních dielektrik	392	5.7.4.	Magnetomotorické napětí	482
5.2.6.	Vlastnosti neizotropních dielektrik	393	5.7.5.	Vektorový potenciál. Magnetické obvody	485
5.2.7.	Kondenzátory	395	5.8.	Magnetické vlastnosti látek	488
5.2.8.	Elektrostatická energie	399	5.8.1.	Demagnetizace	488
5.2.9.	Měření elektrostatického potenciálu	402	5.8.2.	Látky v magnetickém poli	490
5.3.	Ustálené stejnosměrné proudy	403	5.8.3.	Diamagnetismus	493
5.3.1.	Makroskopický proud	403	5.8.4.	Paramagnetismus	494
5.3.2.	Vedení elektriny v kovech	407	5.8.5.	Feromagnetismus	495
5.3.3.	Elektrolyty	409	5.8.6.	Magnetomechanické jevy	503
5.3.4.	Základní vlastnosti polovodičů	411	5.8.7.	Magnetické veličiny jako obdoba veličin elektrostatických	505
5.3.5.	Polovodičové usměrňovače a diody	414	5.9.	Kvazistacionární stavy	507
5.3.6.	Tranzistory	416	5.9.0.	Úvod	507
5.3.7.	Termistory	418	5.9.1.	Elektrické pole indukované pohybem náboje v magn. poli	508
5.3.8.	Ionizace plynů	421	5.9.2.	Elektrické pole indukované časově proměnným proudem	510
5.3.9.	Výboj v plynech za normálního tlaku	422	5.9.3.	Zákon elektromagnetické indukce	511
5.3.10.	Výboj ve zředěných plynech	424	5.9.4.	Indukčnost	516
5.4.	Energetika elektrického proudu	425	5.9.5.	Přechodné jevy	519
5.4.1.	Výkon ustáleného stejnosměrného proudu	425	5.9.6.	Indukované harmonické střídavé napětí v otáčivé cívi	522
5.4.2.	Proudový obvod s elektromotorickou silou	427	5.9.7.	Obvod <i>RLC</i>	524
5.4.3.	Termoelektrické jevy	430	5.9.8.	Výkon a transformace střídavého proudu	528
5.4.4.	Praktický význam termoelektrických jevů	432	5.10.	Elektronika	531
5.4.5.	Chemické zdroje napětí	434	5.10.1.	Elementární náboj	531
5.5.	Elektrodynamické síly	437	5.10.2.	Elektrony	533
5.5.0.	Úvod	437	5.10.3.	Elektron v elektromagnetickém poli	535
5.5.1.	Silové působení nábojů při setrvačném pohybu	438	5.10.4.	Elektronické přístroje se žhavou katodou	539
5.5.2.	Pseudoelektrostatická síla	441	5.10.5.	Urychlovače elektronů. Betatron. Synchrotron	545
5.5.3.	Magnetické síly	443	5.11.	Teorie elektromagnetického pole	550
5.5.4.	Magnetické pole nabitě částice	445	5.11.0.	Úvod	550
5.5.5.	Působení magnetického pole na proudovou smyčku a na oběžný elektron	448	5.11.1.	Lorentzova teorie	550
5.5.6.	Magnetické pole oběžných elektronů	452	5.11.2.	Maxwellovy rovnice	552
5.6.	Stacionární magnetické pole	454	5.11.3.	Elektromagnetické vlny v dielektriku	555
5.6.0.	Úvod	454	5.12.	Elektromagnetické kmity a vlny	557
5.6.1.	Intenzita magnetického pole	454	5.12.1.	Oscilační výboj kondenzátoru	557
5.6.2.	Magnetické pole lineárních proudů	456	5.12.2.	Oscilační obvod s elektronkou	560
5.6.3.	Magnetické pole plošných proudů. Solenoid	458	5.12.3.	Záření otevřeného oscilátoru	561
5.6.4.	Magnetické pole prostorového proudu	462	5.12.4.	Základy radiotechniky	563
5.6.5.	Silové působení magnetického pole na proud	464	5.12.5.	Televize	569
5.6.6.	Síly mezi kondukčními proudy	468	5.12.6.	Radar	571
5.6.7.	Pole trvalých magnetů	470	6.	Optika	573
5.7.	Magnetické pole v prostředí	473	6.1.	Úvod do nauky o záření	573
5.7.0.	Úvod	473	6.1.1.	Obsah a rozdělení optiky	573

6.1.2.	Přehled známých druhů záření	574	6.7.	Elektronová a iontová optika	691
6.1.3.	Vývoj názorů na podstatu světla	575	6.7.1.	Základy elektronové optiky	691
6.1.4.	Rychlost světla	578	6.7.2.	Snímací televizní elektronky	696
6.2.	Geometrická optika	581	6.7.3.	Elektronové a iontové mikroskopy	699
6.2.1.	Základní pojmy	581	6.7.4.	Hmotnostní spektrografie	704
6.2.2.	Fermatův princip, zákony odrazu a lomu	582			
6.2.3.	Rozklad světla	585	7. Základy kvantové fyziky	707	
6.2.4.	Základní představy optického zobrazování	588	7.1.	Vlnová mechanika	707
6.2.5.	Zobrazení lomem na kulové ploše	594	7.1.1.	Základní představy vlnové mechaniky	707
6.2.6.	Zobrazení odrazem na kulové a rovinné ploše	597	7.1.2.	Schrödingerova rovnice	709
6.2.7.	Soustava dvou kulových lámavých ploch. Čočky	599	7.1.3.	Lineární harmonický oscilátor	713
6.2.8.	Centrovaná soustava tenkých čoček	605	7.1.4.	Kvantové stavy rotátoru	715
6.2.9.	Vady čoček a jejich odstranění	606	7.2.	Teorie elektronového obalu atomu	717
6.2.10.	Ohraničení svazků paprsků	610	7.2.1.	Vývoj teorií elektronového obalu atomu	717
6.2.11.	Zvětšení optickými přístroji. Lupa a okuláry	611	7.2.2.	Bohrův model vodíkového atomu	723
6.2.12.	Drobnohled (mikroskop)	614	7.2.3.	Vodíkové spektrum a spektra podobná	725
6.2.13.	Dalekohled	616	7.2.4.	Schrödingerova-Bornova teorie atomu vodíku	728
6.2.14.	Fotografický přístroj	618	7.2.5.	Kvantové stavy atomů	731
6.2.15.	Projekční přístroj	620	7.2.6.	Soustava chemických prvků	735
6.3.	Fotometrie	621	7.3.	Molekuly. Výměnné síly	740
6.3.1.	Světelná energie, světelný tok	621	7.3.1.	Vodíkové ionty a molekuly	740
6.3.2.	Záření bodového zdroje	625	7.3.2.	Kvantová teorie molekuly vodíku	742
6.3.3.	Záření plošného zdroje	627	7.3.3.	Heteropolární a homopolární molekuly	744
6.4.	Vlnová optika	630	7.3.4.	Kvantové stavy a spektra molekul	747
6.4.1.	Vlnové vlastnosti světla	630	7.3.5.	Výměnné síly	749
6.4.2.	Rýze interferenční jevy	631	7.4.	Statistická fyzika	752
6.4.3.	Užití interference. Michelsonův pokus	635	7.4.1.	Rozdělovací funkce	752
6.4.4.	Ohyb světla hranou, štěrbinou a mřížkou	638	7.4.2.	Klasická statistika Maxwellova-Boltzmannova	753
6.4.5.	Ohyb světla kruhovou clonkou	641	7.4.3.	Kvantová statistika Boseova-Einsteinova	755
6.4.6.	Význam ohybu pro rozlišovací schopnost optických přístrojů	643	7.4.4.	Fermiova-Diracova statistika	758
6.4.7.	Polarizace světla odrazem a lomem	645	7.4.5.	Kvantové zesilovače a generátory záření	759
6.4.8.	Dvojlom v krystalu	647	7.5.	Pevné látky	764
6.4.9.	Umělý dvojlom	649	7.5.1.	Debyova teorie molekulových tepel	764
6.4.10.	Rotační polarizace a disperze	651	7.5.2.	Elektronová teorie kovů	767
6.4.11.	Polarimetrie	653	7.5.3.	Základy pásmové teorie pevných látek	770
6.4.12.	Praktické užití polarizace	656	7.5.4.	Pásmová teorie vedení tepla a elektřiny v dokonalých krystalech	773
6.4.13.	Průchod světla prostředím	658	7.5.5.	Pásmová teorie polovodičů	775
6.4.14.	Spektroskopie	663			
6.5.	Teplotní a rentgenové záření	665	8. Jaderná fyzika	780	
6.5.1.	Teplotní záření pevných a kapalných látek	665	8.1.	Základní částice	780
6.5.2.	Záření černého tělesa	669	8.1.1.	Klasifikace základních částic	780
6.5.3.	Světelné zdroje	674	8.1.2.	Lehké částice	781
6.5.4.	Rentgenové záření	676	8.1.3.	Mezony a hyperony	785
6.6.	Kvantová optika	680			
6.6.1.	Fotoelektrický jev	680			
6.6.2.	Fotony	681			
6.6.3.	Fotonová teorie záření X	684			
6.6.4.	De Broglieovy vlny	686			

8.1.4. Struktura nukleonů	786	8.6.1. Obecné zákony přeměny prvků	854
8.1.5. Nové směry ve fyzice vysokých energií	788	8.6.2. Jaderné reakce vyvolané přirozeným radioaktivním zářením	857
8.2. Stavba atomového jádra	795	8.6.3. Transmutace urychlenými částicemi	860
8.2.1. Základní jaderné veličiny	795	8.6.4. Transmutace prvků neutrony. Štěpení jader	861
8.2.2. Vazební energie	798	8.7. Řízené uvolňování jaderné energie	862
8.2.3. Modely atomových jader	803	8.7.1. Jaderná energie	862
8.3. Jaderné záření	805	8.7.2. Štěpná řetězová reakce	865
8.3.1. Přirozená radioaktivita	805	8.7.3. Termonukleární energie	869
8.3.2. Záření alfa a beta	807	8.8. Fyzikální základy jaderné techniky	876
8.3.3. Záření gama	813	8.8.1. Úkoly jaderné techniky	876
8.3.4. Kosmické záření	817	8.8.2. Typy reaktorů	878
8.4. Detekce a dozimetrie jaderného záření	818	8.8.3. Výzkumné, zkušební a aktivní reaktory	881
8.4.1. Základní jednotky	818	8.8.4. Jaderné elektrárny	885
8.4.2. Ionizační komůrky	821	8.8.5. Výroba a užití radionuklidů	887
8.4.3. Počítače	824	Dodatky	892
8.4.4. Pozorování drah nabitých částic	833	D.1. Základní vektorové vzorce	892
8.5. Urychlovače iontů	841	Literatura	901
8.5.1. Základy teorie urychlovačů	841		
8.5.2. Lineární urychlovače	843		
8.5.3. Klasický cyklotron	845		
8.5.4. Synchrociklotron	847		
8.5.5. Protonové synchrotrony	849		
8.6. Transmutace prvků	854		

Předmluva

Před několika lety jsem byl vyzván ministerstvem školství a kultury k sepsání celostátní učebnice fyziky pro strojní fakulty. Požádal jsem docenta Krupku, jednoho ze svých spolupracovníků na knize *Technická fyzika*, aby do učebnice napsal stati o klasické mechanice, akustice, termice, geometrické optice a fotometrii. Sám jsem napsal úvodní stať 1, kapitolu 2.9 o relativnostní mechanice, stati 5 (elektřina a magnetismus), 6 (optika — kromě kapitol 6.2 a 6.3), 7 (kvantová fyzika), 8 (jaderná fyzika) a dodatky.

Kniha se liší v několika směrech od obvyklého typu učebnic fyziky pro vysoké školy technické. Především je kladen větší důraz na celkové pochopení fyzikálních pojmů, představ a fyzikálního způsobu myšlení než na encyklopedický souhrn faktů. Více než na úplnost informací o všech zjištěných skutečnostech se dbá na jejich vnitřní souvislosti. I když podáváme fyziku zásadně jako experimentální vědu, snažíme se jednotlivé poznatky odvozovat deduktivně z malého počtu obecných principů a zákonů a uspořádat je v logický systém, který usnadňuje orientaci ve složitosti pojmů a skutečností.

Hlavním úkolem výuky musí být výklad jevů, tj. jejich převádění na základní představy a obecné zákony. Makrofyzikální jevy — přímo pozorovatelné — lze uvádět ve vzájemnou souvislost především na základě mikrofyzikálních představ o molekulách, atomech, atomových jádrech a elementárních částicích. Některé jevy naopak je možno plně pochopit toliko z hlediska megafyzikálního, které má na zřeteli existenci velmi vzdálených kosmických útvarů — galaxií a jejich soustav.

Významným oborem, v němž se mikrofyzikální výklad prolíná s megafyzikálním, je elektromagnetismus, jehož obecné zákonitosti lze odvodit z mikrostruktury látek na jedné straně a z principů typické megafyzikální vědy, jakou je Einsteinova teorie. Jsem přesvědčen, že výklad elektřiny a magnetismu založený na vzájemném působení nabitých částic je konkrétně myslícím technikům přístupnější než fenomenologická teorie Maxwellova. Její matematická elegance je draze vykoupena obtížnou fyzikální interpretací formálně zavedených abstraktních pojmů. Nebylo snadným úkolem využít naznačených souvislostí vhodným způsobem k účelům výuky fyziky na vysokých školách technických. Je to dáno „nelineární“ strukturou fyziky, která netvoří jednoduše souvislý vědní obor. Nechceme-li jen popisovat jevy, ale zároveň vysvětlovat jejich povahu a příčiny — v jediném přednáškovém cyklu — narážíme na značné obtíže. Snažil jsem se zmírnit je tím, že jsem předřadil soustavnému probírání jednotlivých klasických i moderních fyzikálních oborů úvodní stať, která shrnuje aspoň nejzákladnější mikrofyzikální pojmy a představy. I když informace podané v úvodní stati jsou kusé, může s nimi student pracovat od samého začátku a postupně si své fyzikální myšlení prohlubovat a zdokonalovat. Tak získá nakonec mnohem lepší pochopení moderní fyziky než při obvyklém postupu.

Je nesporné, že takto pojatá metoda výuky je dosti náročná i pro posluchače. Stejně nesporné však je, že stále rostoucí požadavky na teoretické vzdělání strojních inženýrů

podobné pojetí vyžadují — aspoň od nejlepších z nich, kteří jednou budou postaveni na vedoucí místa. Proto jsme rozlišili drobným tiskem doplňkový text — po matematické i pojmové stránce obtížnější — od textu základního, jehož znalost bude požadována ode všech studentů. Doplňkový text bude sotva plně probírán v přednáškách při dnešním počtu hodin; nadaným posluchačům však jistě k jeho zvládnutí postačí individuální konzultace, které je zároveň vychovávají k samostatnému studiu.

Aby kniha nepřekročila dovolený rozsah, byli jsme nuceni vypustit z připraveného rukopisu popis měřicích metod a teorii chyb, které si studenti musí osvojit v teoretických i praktických cvičeních a studiím pomůcek, které každá katedra volí podle vlastního výběru. Ze stejného důvodu jsme vynechali i početní příklady v přesvědčení, že na různých fakultách jsou k dispozici vhodné sbírky příkladů.

Závěrem několik slov o terminologii. Řídili jsme se názvy i značkami uvedenými v návrhu vypracovaném terminologickou komisí JČMF. Zejména je všude v knize dosavadní termín hmota ve smyslu veličiny rovné podílu síly a zrychlení („masy“) důsledně nahrazen slovem hmotnost a místo hmoty ve smyslu látka užíváme posledního slova: látka. Hmotu ve smyslu filosofickém označujeme názvem matérie, takže slovo hmota z textu vylučujeme. Je to — aspoň pro přechodnou dobu — jediný způsob, jak se vyhnout nedorozumění. Chceme-li naučit studenty exaktnímu fyzikálnímu myšlení, nesmíme sami připouštět matení tak základních pojmů, jako jsou hmotnost a látka. Proto je třeba volit pro ně různé názvy, jak je tomu ve všech kulturních jazycích.

Naproti tomu jsem původně souhlasil s ponecháním dosavadního názvu váha pro tíhovou sílu. V poslední době bylo však při jednáních normalizační komise s vědeckými kolegií ČSAV dosaženo dohody o nahrazení slova váha termínem tíha v řadě vědních oborů. Proto jsem tuto změnu provedl dodatečně v korekturách, čímž jsem zároveň vyhověl interní směrnici SNTL o používání ČSN 01 1300.

Zdeněk Horák

1.1. Základní fyzikální pojmy

1.1.1. Předmět a rozdělení fyziky

Fyzika, jejíž jméno je odvozeno z řeckého slova „fysis“ (příroda), byla původně vědou o přírodě, tedy souhrnem všech přírodních věd, které se z ní průběhem staletého vývoje postupně oddělovaly. Tento proces bude pokračovat s rostoucím objemem fyzikálních poznatků, fyzika si však zachová i nadále ústřední postavení mezi všemi ostatními přírodovědnými obory jako základní přírodní věda s nejvyšším stupněm abstrakce a exaktnosti. Fyzikální poznatky mají nejobecnější charakter a vztahují se k nejzákladnějším přírodním jevům. Fyzikální poznatky jsou proto jednodušší a elementárnější, ale zároveň i hlubší než v ostatních přírodních vědách. A takové poznatky se stávají nutným podkladem pro ostatní vědy, jakmile přestávají být popisné a nabývají na exaktnosti. Proto fyzika proniká čím dále tím více do všech přírodních věd, zejména do chemie, geologie, meteorologie, biologie atd. O vztahu fyziky k vědám technickým jsme mluvili již v předmluvě. Její význam pro technické vědy je prostě dán skutečností, že fyzika se stále ve větší míře stává bezprostřední výrobní silou, která je určujícím faktorem v rozvoji moderních výrobních metod.

Přesné a jednoznačné odlišení vlastního oboru fyziky od oborů ostatních přírodních věd, zejména chemie, není snadné. Nejvýstižnější se zdá být toto vymezení předmětu fyziky:

Fyzika, vycházejíc z pozorování a pokusů, studuje obecné vlastnosti látek a polí, indukci dospívá k obecným kvantitativním zákonům a uvádí je v logickou soustavu tak, aby z ní deduktivně vyplývaly pozorované jevy.

Fyzika studuje především kvantitativní zákony vzájemného působení částic a polí, kdežto předmětem chemie jsou zákonitosti slučování atomů v molekuly a jejich rozkladu v atomy a studium vlastností prvků a sloučenin. Moderní chemii je možno chápat jako speciální přírodní vědu, která aplikuje fyziku atomů a molekul na prvky a sloučeniny.

Za stejných fyzikálních podmínek se uplatňují stejné vlastnosti rozmanitých látek, a proto se jeví účelným zaměřit se na obecné vlastnosti společné různým látkám za určitých podmínek. Některé makroskopické vlastnosti látek jsou dány jejich mikrostrukturou, avšak podmínky, za kterých je pozorujeme, budou mít zřetelné vliv na to, které z mikrostrukturních vlastností se mohou uplatnit. Látky nemůžeme za každých podmínek dělit na libovolně malé částice, a proto nám některé vlastnosti zůstávají skryty, dokud nepronikneme dosti hluboko do nitra částic. V článku 1.1.3 ukážeme, že mechanickými prostředky je možno dělit látky na elektricky neutrální částice, kterým říkáme *molekuly*. Pokud se molekuly nemění, mohou v látkách probíhat děje, které můžeme shrnout pod

názvem *mechanické děje*, z nichž vybíráme jako zvláštní druh *akustické jevy*. Některé z těchto jevů můžeme vnímat sluchem, některé nevnímáme (ultrazvuk), ačkoli se liší jen kvantitativně od jevů vnímatelných. Konečně od přímo pozorovatelných mechanických dějů odlišujeme mechanické děje, které se odehrávají na jednotlivých molekulách a mají zvláštní statistickou povahu, takže se makroskopicky projevují jako jevy kvalitativně odlišné od jevů mechanických. Řadíme je proto do zvláštní kategorie *jevů tepelných*.

Při popisu i výkladu jevů mechanických, akustických a tepelných vystačíme zhruba s představou, že látky se skládají z neutrálních molekul (nebo atomů). Za jistých podmínek se však uplatní jemnější struktura látek, zejména skutečnost, že neutrální molekuly (atomy) se skládají z opačně nabitých elektrických částic. Působením elektrických polí se mění rozložení nábojů ve vodičích i v izolantech a v ustáleném stavu, kdy pohyby nábojů v látce jsou neuspořádané (nejsou nijak usměrněny), pozorujeme jen *elektrostatické síly*, kterými na sebe působí náboje za klidu. Nejsou-li pohyby nábojů statisticky neuspořádané, převládá-li pohyb v některém směru, pozorujeme *elektrodynamické síly*, kterými na sebe působí pohybující se náboje. Těmito silami vykládáme magnetické pole v okolí elektrických proudů a permanentních magnetů. Mění-li se polohy nábojů periodicky, vznikají *elektrické kmity* a *elektromagnetické vlny*, které se šíří prostorem jako elektromagnetické záření, jehož velmi důležitými případy jsou světlo a rentgenové záření. Tato záření vznikají v látkách zejména při změnách pohybu nábojů v molekulách a v atomech. Při výkladu vzniku a pohlcování těchto záření vystačíme s představou, že nejvnitřnější část atomu (jádro) je neměnná. To odpovídá *fyzice elektronového obalu atomu*, avšak k vysvětlení *radioaktivity* přirozené i umělé, *transmutace prvků* a uvolňování *jaderné energie* je třeba zkoumat složení a přeměny samých atomových jader. Tyto jevy studuje nejnovější fyzikální obor *jaderná fyzika*.

Takové je hrubé rozdělení fyziky podle jednotlivých oborů, tj. podle druhu jevů, které zkoumá. Podle hlediska, z něhož při studiu fyzikálních jevů vycházíme, a podle metody, kterou zkoumání provádíme, dělíme fyziku na teoretickou, experimentální a praktickou. *Teoretická fyzika* se snaží fyzikální poznatky uspořádat a uvést ve vzájemnou souvislost. Formuluje obecné zákony a principy a vytváří představy, z nichž deduktivní cestou logiky a matematicky vyvozuje známé i nové poznatky. *Experimentální fyzika* vychází z pokusů, z nichž indukce dochází k obecným empirickým zákonům a vztahům, a ověřuje předpoklady a představy teoretické fyziky. *Praktická fyzika* se zabývá praktickým i teoretickým studiem měřicích metod, které zdokonaluje a zpřesňuje.

K tomu podotýkáme, že obě hlavní metody zkoumání, induktivní i deduktivní, jsou navzájem neodlučné. Každá teorie musí vycházet ze zkušeností a každý experimentální poznatek se musíme snažit pochopit v souvislosti s ostatními poznatky. Matematický postup teoretické fyziky je nutným požadavkem exaktnosti fyziky, neboť bez matematiky by fyzika nemohla formulovat kvantitativní zákony a odvozovat z nich konkrétní číselné výsledky. Bez experimentálního materiálu získaného přesným měřením by pak teoretická fyzika nemohla zdokonalovat a rozvíjet své teorie a představy, které by nebyly kontrolovány a korigovány pozorováním. O to, aby tato kontrola byla co nejspolehlivější, pečuje praktická fyzika.

Fyziku je možno dělit také podle účelu, který svým zkoumáním sleduje. Tak vlastní fyzikální problémy experimentální i teoretické řeší *ryzí (čistá) fyzika*, která provádí *základní výzkum* v různých fyzikálních oborech. Naproti tomu *aplikovaný výzkum* přísluší *fyzice užité* (aplikované). Užitou fyzikou je jednak geofyzika, astrofyzika i lékařská fyzika, jednak velmi rozsáhlý a rozmanitý obor *fyziky technické*.

V závěru tohoto článku pokládáme za potřebné objasnit ještě jeden závažný názor, který vyjádřil již Poincaré svým známým výrokem, že věda není pouhý souhrn poznatků, stejně jako hromada cihel a kamení není ještě dům. Z tohoto hlediska je třeba úroveň a dokonalost vědy posuzovat podle dosaženého stupně logické koherence mezi pozorovanými jevy. Úkolem fyziky musí tedy být nejen zjištěné skutečnosti shromažďovat a re-

gistrovat, ale zároveň je organizovat tak, aby bylo možno uspořádat je v logický systém s minimálním počtem nezávislých axiomů. S čím menším počtem nezávislých axiomů vystačíme, tím větší množství různých jevů bude možno navzájem skloubit vnitřními souvislostmi. Tím více jevů bude pak možno „vysvětlit“ pomocí ostatních a tím hlouběji proniknout do podstaty jevů. To má velký význam jak pro předvídaní a objevování nových poznatků, tak také pro zdokonalování logického výkladu, který je důležitý při výuce fyziky.

1.1.2. Fyzikální zákony a veličiny

Velká obecnost poznatků a vysoký stupeň abstrakce, které jsou pro fyziku příznačné, dávají možnost formulovat obecně platné zákony. Mnohé z nich jsou takové povahy, že mohou mít úlohu základních postulátů či principů, z nichž plynou logickou nebo matematickou dedukcí známé poznatky některých oborů fyziky. Takto axiomaticky vybudované teorie pracují s velmi obecnými pojmy, které se musí co nejtěsněji přimykát k skutečnosti, kterou mají popisovat a vykládat. Přes všechnu abstraktnost nesmí tu fyzika ztrácet charakter přírodní vědy a je důležité, aby obecné pojmy a vztahy připouštěly konkrétní interpretaci v příslušné oblasti pozorovaných jevů. Je však možno nezávisle na specifických zvláštích jednotlivých fyzikálních oborů vytyčit obecně platnou zásadu, s níž musí být v souladu fyzikální představy a zákony:

1.1 (1) *Všechny fyzikální jevy mají původ v materiálních objektech.*

Tato zásada je nutným důsledkem materialistického pojetí fyziky. Vyjadřuje pouze přesvědčení, že všechny fyzikální děje probíhají na materiálních objektech a vznikají působením materiálních objektů, v nichž mají také svou příčinu. Zásada 1.1 (1) musí být samozřejmě splněna ve všech vědních oborech a vyjadřuje zcela obecný materialistický princip. Plyne z něho řada závažných požadavků, z nichž uvedeme především dva:

1.1 (1a) *Fyzikální pojmy musí být definovány ve vztahu k materiálním objektům.*

1.1 (1b) *Fyzikální zákony vyjadřují vztahy mezi materiálními objekty.*

V dalších kapitolách se přesvědčíme o významu těchto obecných postulátů. V této úvodní stati se omezíme na několik poznámek obecné povahy. Nejprve ukážeme, že z principu 1.1 (1) plyne správnost důkazů plynoucích „z důvodů symetrie“, kterých se odedávna ve fyzice hojně užívá.

Vyazuje-li souhrn všech fyzikálních objektů, které mají (podle našich zkušeností) vliv na nějaký jev, souměrnost podle roviny, osy nebo bodu (středu souměrnosti), musí mít souměrnost stejného stupně také jev, který vzniká působením zmíněných objektů. Říká se obvykle, že „není důvodů“, aby tato symetrie byla u dotyčného jevu porušena. Pravá příčina je jistě v tom, že za učiněných předpokladů neexistuje materiální objekt, který by mohl nesymetrii jevu způsobit, a podle principu 1.1 (1) nemůže tedy taková nesymetrie vzniknout. Budeme mít častěji příležitost uplatnit tento *postulát symetrie* v různých oborech fyziky, zejména v elektrostatiice.

Z předešlé zmínky o symetrii jevů je tedy zřejmé, že princip 1.1 (1) vyžaduje, abychom hledali původ všech fyzikálních jevů jen v reálně existujících objektech, abychom však naopak neopomíjeli žádný z existujících materiálních objektů, které mohou mít význam pro odhalení příčinných souvislostí. Proto je žádoucí co nejúplnější znalost všech existujících objektů, která je podle závěrečné poznámky v předcházejícím článku podmínkou optimálního logického uspořádání fyzikálních poznatků. Tyto souvislosti můžeme dobře sledovat na vývoji fyziky, který od přímo pozorovatelných objektů postupně pronikal — experimentální i teoretickou cestou — až k nejmenším částicím na straně jedné a k nepředstavitelně dalekým oblastem vesmíru na straně druhé.

Podle velikosti lze dnes známé fyzikální objekty roztrždit zhruba do tří hlavních kategorií; jsou to:

1. *Makrofyzikální objekty*, které jsou přístupné přímému pozorování okem, optickým mikroskopem nebo dalekohledem průměrné velikosti. Jsou to pozemská tělesa, Slunce s planetami a stálice tvořící soustavu Mléčné dráhy (naší Galaxie).

2. *Mikrofyzikální objekty*, které jsou z části přístupny pozorování nejmodernějšími elektronovými a iontovými mikroskopy, z části lze jejich existenci dokázat nepřímými experimentálními metodami založenými na teoretických představách odvozených abstraktními úvahami. Jsou to zejména molekuly, atomy, ionty, atomová jádra a tzv. základní neboli „elementární“ částice.

3. *Megafyzikální objekty*, které jsou z části přístupny pozorování nejsilnějšími optickými dalekohledy, z části pouze mohutnými radioteleskopy, které přijímají rádiové vlny z nejvzdálenějších míst kosmického prostoru. Jsou to tzv. extragalaktické mlhoviny čili galaxie podobné naší Galaxii a zjištěné až ve vzdálenostech několika miliard světelných let.

Těmto třem kategoriím fyzikálních objektů odpovídají tři stupně výkladu experimentálně zjištěných jevů. Podle toho, ke které kategorii objektů přihlížíme při výkladu přímo pozorovaných makrofyzikálních („makroskopických“) jevů, je možno rozeznávat fyziku tří typů; je to:

1. *Makrofyzika*, která pracuje jen s makrofyzikálními objekty a nepřihlíží ani k mikrostruktuře látek a interakcím mikročástic, ani nepřipouští vliv kosmických těles na pozemské jevy. Patří k ní celá klasická fyzika s výjimkou molekulové fyziky (kinetická teorie tepla).

2. *Mikrofyzika*, která vykládá fyzikální jevy na základě vlastností mikrofyzikálních částic. Zahrnuje především tyto obory: molekulovou, atomovou a jadernou fyziku, dále fyziku pevných látek, fyziku vysokých energií a ovšem i kvantovou fyziku, která je teoretickým základem všech těchto oborů.

3. *Megafyzika*, která se liší od obou předešlých zásadně tím, že připouští a studuje vliv megafyzikálních objektů na fyzikální děje. Nepočítáme-li k ní „mimofyzikální“ vědy (astronomii, kosmologii a kosmogonii), můžeme říci, že megafyzikální metodou pracuje hlavně obecná teorie relativity a gravitace. Tato metoda však proniká i do jiných oborů (speciální teorie relativity, teorie setrvačnosti).

Závěrem se zmíníme o pojmu *fyzikální veličiny*, jehož zavedení je prvním předpokladem k vyjadřování kvantitativních vztahů mezi fyzikálními objekty. K pojmu veličiny dojdeme, jestliže se nám podaří najít způsob, jakým je možno srovnávat vlastnosti stejného druhu, které jeden nebo několik fyzikálních objektů jeví v různém stupni, v různé míře. Jak ukážeme v čl. 1.2.1, je možno přiřadit jednotlivým fyzikálním vlastnostem jednoznačně definované veličiny, které dovedeme na základě provedených měření vyjádřit ve vhodné zvolených jednotkách. Hodnotu nějaké veličiny X ve zvolených jednotkách, které označíme lomenými závorkami $[X]$, dostaneme jako součin

$$1.1. (2) \quad X'_i = \{X\} [X],$$

kde číslo $\{X\}$, rovné poměru

$$1.1 (3) \quad \{X\}' = \frac{X'_i}{[X]}$$

měřené veličiny X k příslušné jednotce $[X]$, nazýváme *velikostí* veličiny X v jednotkách $[X]$. Hodnota X každé veličiny je podle 1.1 (2) určena dvěma činiteli, kteří ji určují jak po stránce kvalitativní, tak po stránce kvantitativní. Obě předešlá slova jsou míněna fyzikálně a mají tento význam: O dvou veličinách stejného druhu (stejně fyzikální povahy), které

mají různé velikosti, říkáme, že mají stejnou kvalitu, ale různou kvantitu. Kvalita veličiny je určena *rozměrem* její jednotky $[X]$, kdežto kvantita veličiny je dána její velikostí $\{X\}$ v jednotkách $[X]$. Dvě různě velké veličiny stejného druhu (např. délka 1 m a délka 3 m) mají stejnou kvalitu,^{*)} ale různou kvantitu. Naopak dvě stejně velké veličiny různého druhu (např. hmotnost 2 kg a napětí 2 V) mají stejnou kvantitu, ale různou kvalitu. Dvě fyzikální veličiny nejsou tedy totožné, když se liší jen kvantitativně, ani když se liší jen kvalitativně. Přicházíme tak k této obecné definici:

1.1 (4) *Fyzikální veličina je jednotu kvantity a kvality fyzikální vlastnosti, jejíž je mírou.*

Z předešlého je zřejmo, že kvantitativní fyzikální zákony se vyjadřují „fyzikálními rovnicemi“, tj. vztahy mezi fyzikálními veličinami určujícími vlastnosti fyzikálních objektů. Protože však si mohou být rovny jen hodnoty veličin stejného druhu, musí kvalitativní činitele na obou stranách být stejní. Po zkrácení jejich společného rozměru u všech členů rovnice přechází tedy každá fyzikální rovnice v „matematickou rovnici“ mezi pouhými čísly (velikostmi veličin).

1.1.3. Částice a pole

Nositelem všech fyzikálních jevů je *matérie*, čímž rozumíme objektivní realitu, která existuje nezávisle na našem vědomí, kterým je obražena.^{**)}

Z hlediska makroskopického dělíme obvykle materiální objekty na dvě kategorie: *látku* a *pole*. Toto dělení není přesné ani jednoznačné. Z hlediska mikrofyzikálního, které budeme hledět uplatňovat v této knize co nejdůsledněji, je účelnější rozeznávat částice a pole. Konečně z hlediska kvantové fyziky rozeznáváme *částice* a *kvanta polí* (polní kvanta) nebo prostě dva druhy částic, totiž *permanentní (trvalé) částice* a *polní částice*. V této úvodní kapitole osvětlíme uvedené pojmy jen několika slovy.

Fyzikální objekty se skládají z permanentních částic, které na sebe vzájemně působí různými silami. Představujeme si, že silové působení částice na jinou částici se neděje přímo „na dálku“, ale je zprostředkováno *polem*, které působící částici obklopuje. Podle představ kvantové fyziky lze vzájemné působení (interakci) mezi částicemi vyložit jako účinek tzv. polních kvant (polních částic), která si trvalé částice mezi sebou vyměňují. Tato kvanta čili polní částice mají podobné vlastnosti jako trvalé částice, liší se však od nich zásadně tím, že mohou jednotlivě vznikat a zanikat. Naproti tomu trvalá částice může vzniknout nebo zaniknout jen za současného vzniku nebo zániku příslušné *anti-částice*. Trvalé částice se nazývají též *látkové částice*, protože látky v obvyklém slova smyslu (složené z atomů) vždycky obsahují nějaké trvalé částice (protony, neutrony, elektrony).

Jako příklad polních částic uveďme kvanta elektromagnetického pole neboli *fony* (čili „světelné částice“), které jsou podstatou elektromagnetického záření (např. světla) a zprostředkují silové působení mezi náboji. Podobně se v novější době připouští existence kvant gravitačního pole, která se nazývají *gravitony*. Polní částice zvané *mezony K* (čili *kaony*) a *mezony π* (čili *piony*) jsou kvanta jaderného pole (silového pole uvnitř atomových jader).

^{*)} Délka dřevěné tyče, délka hrany mosazného měřítka nebo délka vnitřního průměru skleněné trubice jsou kvalitativně stejné fyzikální veličiny, které měříme v týchž jednotkách bez zřetele ke kvalitativním rozdílům ve složení látek, na nichž je zjišťujeme.

^{**)} Tohoto názvu budeme ve fyzice důsledně užívat pro pojem, pro který se u nás ve filosofii ustálil název *hmota* a který je určen známou Leninovou definicí. (Materialismus a empiriokriticismus, str. 247.) Názvu *hmota* nebudeme však v této knize vůbec používat, abychom se vyhnuli nepřesnostem nebo nesprávnostem chápání tohoto slova, které mělo dosud ve fyzice několik různých významů.

Existence polí se projevuje silovým působením na částice a podle toho, na kterých vlastnostech částic závisí toto silové působení, rozeznáváme čtyři druhy polí nebo podle největšího názvosloví čtyři druhy *interakcí* mezi částicemi:

1. gravitační interakce,
2. slabá interakce (viz čl. 8.1.5),
3. elektromagnetická interakce,
4. silná interakce (viz čl. 8.1.5).

Složení a vnitřní stavbu látek je možno experimentálně zkoumat postupným jejich dělením. Ukazuje se, že látky nejsou neomezeně dělitelné a že je lze rozložit na jednotlivé částice, jejichž velikost a složitost závisí podstatně na způsobu, jakým dělení provádíme. Uvedeme přehled hlavních způsobů dělení látek podle druhu vynaložené energie:

Mechanická energie. Mechanickým dělením látky (elektricky neutrální) je možno získat nejmenší neutrální částice, kterým říkáme *molekuly*. Tak např. zlato lze roztepat na velmi tenkou vrstvu (pozlátko), která má nepatrnou tloušťku menší než 10^{-7} m (0,1 μ m). Podobně při vyfukování mýdlových bublin je možno dostat blány, jejichž nejmenší tloušťka činí podle měření J. Perrina $4,5 \cdot 10^{-9}$ m. Konečně rozptýlením některých kapalin na vodní hladině vznikají nesmírně tenké vrstvy (olejové filmy), jejichž tloušťka je např. u olejanu sodného řádu 10^{-9} m. Tato tloušťka odpovídá již průměru molekuly olejanu, z čehož je zřejmo, že vrstva je vytvořena z jediné vrstvy molekul této kapaliny (tzv. *monomolekulární vrstva*).

Tepelná energie. Vypařováním nebo sublimací těkavých látek se odtrhují s povrchu některé molekuly látky a tvoří její páry nad kapalinou. Množství unikajících molekul roste se stoupající teplotou a látka se při tom ochlazuje v souhlase s tím, že dělení látky (překonávání soudržnosti) způsobuje tepelná energie.

Při dosti vysokých teplotách se dokonce některé molekuly rozštěpí na kladné a záporné ionty a podobně je tomu při rozpouštění: některé látky (neelektrolyty) se při rozpouštění dělají jen na neutrální molekuly, jiné (elektrolyty) se vyznačují tím, že v roztoku se jejich molekuly štěpí na kladné a záporné ionty.

Elektromagnetická energie. Působením dosti silného elektrického pole se v plynech urychlují ionty, které štěpí další neutrální molekuly. Nabitě částice urychlené velmi silným elektrickým nebo proměnným magnetickým polem mohou dokonce měnit a rozkládat atomová jádra. Podobně může přeměnu atomových jader způsobit i elektromagnetické záření (např. záření γ).

1.2. Fyzikální jednotky

1.2.1. Měrové jednotky a jejich soustavy

Hlavním zdrojem fyzikálních poznatků je pozorování a zkušenost, které jsou jediným kritériem jejich správnosti. *Pozorováním* v užším smyslu rozumíme sledování dějů, které probíhají samovolně, bez našeho zásahu, naproti tomu *pokusem* neboli *experimentem* nazýváme studium jevů, které sami připravujeme tak, abychom z nich mohli zjistit některé zákonitosti, které nás zajímají. Pozorování v přírodě i pokusy připravené v laboratoři mohou být opět dvojí. Mohou být jen *kvalitativní* (popisné), je-li jejich účelem jen zjištění existence určitých fyzikálních jevů nebo vznik jistých dějů, anebo *kvantitativní*, mají-li poskytnout vztahy mezi velikostmi příčin a účinků, tedy číselné závislosti mezi hodnotami fyzikálních veličin.

Některé veličiny připouštějí svou povahou rozklad na menší části, a můžeme je tedy pokládat za součet těchto částí. Nazýváme je *množství* (*kvantita*, veličiny *extenzivní*) a je jich ve fyzice většina (délka, objem, hmotnost, tlak, teplo, elektrický náboj aj.). Rozložíme-li

extenzivní veličinu na vesměs stejné (menší) části, můžeme zjistit, kolik takových stejných částí veličina obsahuje. V takovém případě nazýváme tuto zvolenou menší část *mírou* nebo *jednotkou* oné veličiny, jejíž hodnotu můžeme určit počtem v něm obsažených jednotek, který nazýváme *velikostí* veličiny ve zvolených jednotkách.

U některých fyzikálních veličin však není nasnadě představit si je jako součet menších částí a jejich porovnání s podobnými veličinami stejného druhu dovoluje pouze zjistit, zda dvě veličiny jsou stejné nebo různé, aniž mohou být nalezeny číselné vztahy mezi veličinami, jež nejsou stejné. Abychom i zde získali exaktní vztahy mezi různými veličinami (téže fyzikální povahy), zvolíme pro určitý druh fyzikálních veličin řadu veličin téhož druhu, které sestavíme ve *stupnici* (škálu). Každou další veličinu pak určíme tím, že zjistíme, s kterou veličinou stupnice se shoduje, aniž hledáme číselné vztahy mezi jednotlivými členy (stupni) stupnice. Takové veličiny se nazývají *stavové* (*intenzivní* nebo krátce *intenzity*), při čemž stavem rozumíme určité místo na zvolené stupnici. Můžeme však i stavové veličiny uvést v číselné vztahy, přiřadíme-li každému místu stupnice jistou kvantitu, která je závislá na stavu dotyčné veličiny. Vyjádříme-li takto přiřazenou kvantitu v určitých jednotkách, můžeme její velikost charakterizovat i příslušnou stavovou veličinu a můžeme jí přisoudit určitou velikost nebo *výši* (*stupeň*), rovnou nebo úměrnou velikosti přiřazené kvantitě. Musíme si být ovšem vědomi, že takové přiřazení je do značné míry libovolné a že číselné vztahy mezi hodnotami stupnice jsou závislé na zvolené kvantitě. Jako příklady stavových veličin lze uvést čas, teplotu, potenciál, barvu aj. Můžeme totiž snadno zjistit, že dva okamžité děje se udály současně, ale velikost časové mezery, tj. dobu mezi dvěma okamžiky, nemůžeme přímo srovnávat s dobou mezi jinými dvěma okamžiky. Přiřadíme-li však oběma dobám číslo udávající, kolikrát se během doby opakuje nějaký stálý děj, který nazýváme periodickým, můžeme velikost obou časových intervalů pokládat za úměrnou počtu opakování děje; je to rovnocenné předpokladu, že opakováný děj vyžaduje vždy stejné „množství“ času. Tak docházíme k míře času, k *časové stupnici*; při tom není nijak zaručeno, že nám velikosti obou dob vyjdou ve stejném poměru, měříme-li čas jiným opakováním dějem, např. rotací zemskou, pokládající ji za rovnoměrnou. Podobně je tomu s měřením teploty, neboť je známo, že objemové změny různých látek nejsou navzájem úměrné, takže si nejsou přesně úměrné ani teplotní stupnice různých druhů teploměrů (rtuťových, plynových, kovových).

Přes tyto potíže s měřením stavových veličin lze říci, že každé fyzikální veličině můžeme přisoudit určitou velikost, danou počtem jednotek obsažených v jisté kvantitě, čili jak říkáme, můžeme každou fyzikální veličinu měřit.

Měřením fyzikální veličiny rozumíme určení její velikosti v daných jednotkách, tj. zjištění počtu jednotek v ní obsažených.

Fyzikální veličiny je zásadně možno měřit v libovolných jednotkách, volíme je však co nejúčelněji, aby výsledky měření, získané různými pracovníky v různých místech a v různých dobách, mohly být bezpečně srovnávány a kontrolovány. Proto měříme fyzikální veličiny v jednotkách stanovených přesně a jednoznačně, a to tak, aby jejich neproměnnost byla pokud možno zaručena. Lze toho dosáhnout buď tím, že udáme *experimentální předpis*, který stanoví postup, jakým se jednotka experimentálně realizuje, nebo prostě zvolíme za jednotku veličinu, kterou vykazuje určité jediné těleso a která sa nazývá *jednotka prvotní* nebo *prototyp* zvolené jednotky. Všechna měření dotyčné veličiny se pak srovnávají s pokud možno přesnými kopiemi prvotní jednotky, jejíž neproměnnost musí být zaručena v dostatečné míře. Příklady obou způsobů uvedeme v další části.

Tím bychom se mohli spokojit, kdybychom nepřihlíželi k fyzikálním zákonům, jimiž jsou navzájem poutány různé veličiny. Tyto zákony vyjadřujeme rovnicemi mezi dvěma nebo více fyzikálními veličinami. Velikost každé veličiny závisí však na zvolené jednotce, a to tak, že velikost téže veličiny v jednotkách k -krát větších je k -krát menší; naopak při zmenšení jednotky se velikost veličiny v témž poměru zvětší. Závisí tedy číselné hodnoty konstant ve fyzikálních rovnicích na vzájemném poměru zvolených jednotek a určitého

vyjádření fyzikálních vztahů dosáhneme jen určitou volbou jednotek. Zároveň tu máme možnost vhodnou volbou jednotek dosáhnout co nejjednoduššího vyjádření fyzikálních vztahů. Uvážíme-li konečně, že ve fyzice je více různých druhů veličin než vztahů platných mezi nimi, pochopíme, že *nejúčelnější postup při výběru fyzikálních jednotek je tento*:

Odečteme od počtu druhů fyzikálních veličin počet vztahů platných mezi nimi, čímž dostaneme počet veličin, které můžeme pokládat za nezávislé, a vybereme právě tolik fyzikálních veličin navzájem nezávislých, které nazveme základními. Při volbě jednotek těchto základních veličin, jejichž výběr lze ovšem provést různým způsobem, jsme vázáni pouze účelností a vhodností. Tak dostaneme *základní jednotky*, z kterých vycházíme při definici všech jednotek dalších, jež nazýváme *jednotkami odvozenými*. Přitom požadujeme, aby fyzikální rovnice, která uvádí odvozenou jednotku ve vztah s jednotkami základními, byla co nejjednoduššího tvaru, tj. aby všechny číselné faktory byly rovny jedné. Všechny takto definované odvozené jednotky tvoří spolu se základními jednotkami tzv. soustavu jednotek neboli *soustavu měr*, jejíž jednotky jsou, jak říkáme, *rozměrově koherentní*. Je-li tento princip důsledně dodržen pro všechny odvozené jednotky, nazýváme soustavu *ryzí*, mnohdy však spojujeme v soustavu jednotky dvou různých soustav, a pak jejich souhrn nazýváme soustavou *smíšenou*.

Je patrné, že základními jednotkami jsou všechny jednotky měrové soustavy jednoznačně určeny, takže přesnost a neproměnnost základních jednotek rozhoduje o týchž vlastnostech všech odvozených jednotek. Proto je volba základních veličin a jednotek velmi důležitá.

Ukazuje se, že se odvozené jednotky dají obecně vyjádřit jako součiny mocnin jednotek základních, což vyplývá ze skutečnosti, že odvozené fyzikální veličiny jsou vesměs definovány jako součinitelé ve vztazích vyjadřujících úměrnost. Je tomu podobně jako s jednotkami plošných a prostorových veličin (plochy a objemu), danými druhou a třetí mocninou délky. Pravíme, že plocha má dva, objem tři rozměry a stejného označení užíváme i pro mocnitele, jimiž jsou charakterizovány odvozené veličiny jako funkce jednotek základních. Původní způsob vyjadřování, známý z geometrie, byl však časem pozmeněn, a místo abychom řekli, že např. zrychlení má vzhledem k délce rozměr 1, vzhledem k času rozměr -2 , říkáme, že rozměr zrychlení je (délka)¹ (čas)⁻². Pouhé číslo, které i při tomto způsobu pokládáme za „bezrozměrné“, má pak ovšem důsledně rozměr 1 (nikoli 0). Pojem fyzikálního rozměru veličin nebo jejich jednotek může být velmi užitečný, ba lze ze vztahů platných pro rozměry veličin někdy i soudit na tvar fyzikálních rovnic, jimiž spolu souvisí. Vědní obor, který se podobnými otázkami obírá, nazývá se *teorie rozměrnosti* (*teorie dimenzí*), a zvláště jeho část zvaná nauka o *fyzikální podobnosti* je nepostradatelným teoretickým podkladem pro pokusy konané na *modelech* v aerodynamických a hydrodynamických laboratořích.

Až do poslední doby se užívalo běžně několika ryzích a několika smíšených měrových soustav. O mezinárodní měrové soustavě SI, která je dnes jedinou zákonem dovolenou soustavou u nás, pojednáme v příštím článku.

Tabulka (1.2) 1

Základní jednotky soustavy SI

Veličina		Jednotka	Značka
1	délka	metr	m
2	hmotnost	kilogram	kg
3	čas	sekunda (vteřina)	s
4	proud	ampér	A
5	teplotní rozdíl	stupeň	deg, °C, °K
6	svítivost	kandela	cd

1.2.2. Mezinárodní měrová soustava SI

Mezinárodní měrová soustava, která se zkráceně označuje SI (tj. *Système International d'Unités*), má šest základních veličin, které jsou s příslušnými jednotkami uvedeny v tab. (1.2) I. Základní jednotky jsou definovány takto:

1. Metr je délka rovná $1,650\,763\,73 \cdot 10^6$ vlnových délek (měřených ve vakuu) světla vyzařovaného atomem izotopu kryptonu 86 při přechodu elektronu z oběžné dráhy $2p_{10}$ na dráhu $5d_5$.

2. Kilogram je hmotnost mezinárodního prototypu kilogramu, uloženého v Mezinárodním úřadě pro váhy a míry v Sèvres (u Paříže).

3. Sekunda (vteřina) je $3,155\,692\,597\,47 \cdot 10^7$ díl tropického roku 1900, leden ve 12 hodin efemeridového času.

4. Ampér je proud, který při stálém průtoku dvěma rovnoběžnými přímými velmi dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu, umístěnými ve vakuu ve vzdálenosti 1 m od sebe, vyvolá sílu $2 \cdot 10^{-7}$ mks $^{-2}$ ($= 2 \cdot 10^{-7}$ newtonů) působící na 1 m délky každého z obou vodičů.

5. Teplotní stupeň je 273,16 díl teplotního rozdílu mezi absolutní nulou a teplotou trojného bodu vody, měřený v termodynamické teplotní stupnici. Ve stupnici začínající absolutní nulou se nazývá stupeň Kelvinův a značí se °K; ve stupnici, která začíná teplotou 273,15 °K, se nazývá stupeň Celsiův a značí se °C.

6. Kandela je svítivost $1/6 \cdot 10^{-5}$ m 2 (jedné šedesátiny cm 2) povrchu absolutně černého tělesa při teplotě tuhnutí platiny za tlaku $1,013\,25 \cdot 10^5$ m $^{-1}$ kg s $^{-2}$ (760 torrů).

Uvedené přesné definice základních jednotek SI budou blíže objasněny v příslušných kapitolách. Těmito základními jednotkami jsou jednoznačně stanoveny odvozené jednotky všech ostatních veličin a tvoří spolu se základními jednotkami ryzí (rozměrově koherentní) Mezinárodní měrovou soustavu SI.

1.2.3. Zákonné míry

Podle zákona o měrové službě z r. 1962 (č. 35/62 Sb.) jsou u nás platné *zákonné míry* stanoveny státní normou ČSN 01 1300, která platí od 1. 7. 1963. Zákonnými měrovými jednotkami jsou podle této normy především základní měrové jednotky, totožné se základními jednotkami 1 až 6 měrové soustavy SI, jak byly definovány v předešlém článku.

Kromě toho jsou zákonnými mírami také druhotné měrové jednotky, které se dělí na

a) *hlavní jednotky*, tj. jednotky odvozené koherentně ze šesti základních měrových jednotek, které spolu se základními tvoří úplnou ryzí soustavu SI;

b) *vedlejší jednotky*, které nepatří do soustavy SI, a proto je norma připouští z praktických ohledů jen na přechodnou dobu;

c) *násobky a díly* jednotek hlavních (a vedlejších na přechodnou dobu).

Vedlejší jednotky jsou některé z dosud užívaných jednotek různých soustav (absolutní, technické, praktické), které jsou však definovány přesně platnými převodními vztahy na základě hlavních jednotek soustavy SI. Převodní konstanty jsou vhodným způsobem zaokrouhleny, takže vedlejší jednotky vždy nesouhlasí přesně s původními jednotkami stejného jména a značky ve jmenovaných soustavách.

Podáme krátký výklad jen o nejdůležitějších z nich.

Objem

a) hlavní jednotka

$$\text{kryhlový metr} = 1 \text{ m}^3,$$

b) vedlejší jednotka

$$\text{litr} = 1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Síla

a) hlavní jednotka

$$\text{newton} = 1 \text{ N} = \text{m kg s}^{-2}$$

je síla, která udělí tělesu s hmotností 1 kg zrychlení 1 ms $^{-2}$,

b) vedlejší jednotka

$$\text{kilopond} = 1 \text{ kp} = 9,806 \text{ } 65 \text{ N}$$

je tíhová síla (váha), které podléhá ve vakuu těleso s hmotností 1 kg v místě s normálním tíhovým zrychlením $g_n = 9,806 \text{ } 65 \text{ m s}^{-2}$.

Tlak

a) hlavní jednotka

$$\text{newton na čtvereční metr (N m}^{-2}\text{),}$$

b) vedlejší jednotky

$$\text{bar} = 1 \text{ b} = 10^5 \text{ N m}^{-2},$$

$$\text{kilopond na čtvereční metr} = 1 \text{ kp m}^{-2} = \text{atmosféra} = 1 \text{ at} = 9,806 \text{ } 65 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-2},$$

$$\text{torr} = 1 \text{ torr} = 133,322 \text{ N m}^{-2}.$$

Poslední jednotka je rovna hydrostatickému tlaku rtuťového sloupce výšky 1 mm při teplotě rtuti 0 °C v místě normálního zrychlení g_n , nehledíme-li ke kapilární depresi.

Dynamická viskozita

a) hlavní jednotka

$$\text{newton sekunda na čtvereční metr} = 1 \text{ N s m}^{-2},$$

b) vedlejší jednotka

$$\text{poise} = 1 \text{ P} = 0,1 \text{ N s m}^{-2}.$$

Kinematická viskozita

a) hlavní jednotka

$$\text{čtvereční metr za sekundu} = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1},$$

b) vedlejší jednotka

$$\text{stok} = 1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Energie (a teplo)

a) hlavní jednotka

$$\text{joule} = 1 \text{ J} = \text{N m} = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-2}$$

je práce vykonaná silou 1 N na dráze 1 m, která má směr síly,

b) vedlejší jednotky

$$\begin{aligned} \text{kilopondmetr} &= 1 \text{ kpm} = 9,806 \text{ } 65 \text{ J}, \\ \text{watthodina} &= 1 \text{ Wh} = 3 \text{ } 600 \text{ J}, \\ \text{kilokalorie} &= 1 \text{ kcal} = 4 \text{ } 186,8 \text{ J}, \\ \text{elektronvolt} &= 1 \text{ eV} = \\ &= 1,602 \text{ } 06 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \end{aligned}$$

Výkon

a) hlavní jednotka

$$\text{watt} = 1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3},$$

b) vedlejší jednotka

$$\text{kůň} = 1 \text{ k} = 735,5 \text{ W}.$$

Zároveň se stručně zmíníme o násobných a dílčích jednotkách, které se zpravidla tvoří stupňovitě podle třetí mocniny deseti. Desetinné násobky a díly jednotek se vyjadřují předponami nebo jejich zkrácenými značkami, uve-

Tabulka (1.2) II

Násobky a díly jednotek

Předpona	Značka	Znamená jednotek
terra	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
mili	m	10^{-3}
mikro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
piko	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}
hekto	h	10^2
deka	da	10^1
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}

denými v tab. (1.2) II. Ve spodní části tabulky jsou uvedeny předpony a značky desetinných násobků a dílů, které se připouštějí v některých výjimečných případech.

Podle tab. (1.2) II by se měla milióntina metru pojmenovat a označit takto:

$$\text{mikrometr} = 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m.}$$

Vzhledem ke kolizi s názvem známého měřicího přístroje dovoluje se i dosavadní název *mikron*, nikoli však stará značka μ . Název milimikron a značku $\text{m}\mu$ je však třeba nahradit důsledným vyjádřením

$$\text{nanometr} = 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m.}$$

Poznámka. Zavedením soustavy SI se nesledoval jen hlavní úkol dosažení shody fyzikálních jednotek s jednotkami běžnými v elektrotechnické praxi. Nová měrová soustava byla zároveň přijata v tzv. *racionalizovaném* nebo stručněji *racionálním* tvaru, který navrhl již Heaviside (1822). Některé základní fyzikální zákony (gravitační, Coulombův, Biotův—Savartův) mají tvar zákona „převrácených čtverců“, který vyjadřuje nepřímou úměrnost intenzity gravitačního, elektrostatického i magnetického pole se čtvercem vzdálenosti. Podle stejného zákona klesá též intenzita světla bodového zdroje, což se vysvětluje tím, že se světelná energie ve vzdálenosti r rozloží stejnoměrně po kulové ploše, jejíž povrch má velikost $4\pi r^2$. Moderní fyzika chápe síly mezi částicemi, náboji a magnety jako působení zprostředkované gravitačním nebo elektromagnetickým polem nikoli jako přímé „působení na dálku“ a pokládá zákony převrácených čtverců za vyjádření nepřímé úměrnosti intenzity pole s povrchem koule opsané kolem zdroje. Z tohoto hlediska je správnější psát ve jmenovateli zmíněných zákonů výraz $4\pi r^2$ místo r^2 . Tak zavádíme iracionálního činitele 4π do rovnic, kde je oprávněn středovou souměrností pole, a zároveň lje vylučujeme z rovnic, kde nemá geometrické oprávnění. Tento postup odstraňující neodůvodněnou iracionalitu nazývá se *racionalizace*. (Srov. čl. 5.1.2, 5.1.3.)

1.3. Základní představy atomové fyziky

1.3.1. Proton, neutron, elektron

Atomy všech známých látek se skládají ze tří permanentních (látkových) částic: protonu, neutronu a elektronu, které počítáme mezi *základní* neboli tzv. *elementární částice*, sestavené v přehledné tab. (8.1) I. Každá látková částice je charakterizována několika veličinami, které podrobněji probereme v čl. 8.1.1. Pro následující výklad o složení látek nám postačí znalost dvou veličin, tj. *hmotnosti* a *náboje* částice. Pokud jde o geometrické vlastnosti částic, je zvykem pokládat je za kulová tělíska, jejichž velikost není snadno zjištěitelná. Lze mít za to, že jejich poloměr je řádu 10^{-15} až 10^{-14} m, ale tyto hodnoty mají spíše orientační význam.

Jak vyplývá z teorie relativnosti v dokonalém souhlase s pozorováním, není hmotnost částice stálá. Roste s její rychlostí u podle vzorce 2.9 (23), kde

$$1.3 (1) \quad c = 2,997\,9 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

je rychlost světla ve vakuu. Má tedy za klidu nejmenší hodnotu m_0 , která se nazývá *klidová hmotnost* částice a která je jednou z jejích charakteristických veličin.

Další důležitou veličinou částice je její elektrický náboj, který má pozoruhodnou vlastnost, že velikost náboje každé částice je malým celým násobkem tzv. *elementárního náboje*

$$1.3 (2) \quad e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ coulombů.}$$

Menší náboje než e nebyly nikdy pozorovány.

Proton p je částice s jedním kladným elementárním nábojem $+e$ a má klidovou hmotnost

$$1.3 (3) \quad m_p = 1,672\,4 \cdot 10^{-27} \text{ kg.}$$

Neutron n je částice bez náboje a má klidovou hmotnost

$$1.3 (4) \quad m_n = 1,674\,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg,}$$

tedy asi o 1 promile větší než proton.

Elektron e^- (záporný, negatron) má 1 záporný elementární náboj $-e$ a jeho klidová hmotnost

$$1.3 (5) \quad m_e = 0,910\,8 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

je tedy 1 836krát menší než klidová hmotnost protonu.

Podotýkáme ve vši stručnosti, že podle Diracovy teorie má existovat kromě každé z uvedených částic jí odpovídající „antičástice“, což bylo experimentálně potvrzeno. Nejdříve byl objeven „antielektron“ čili *pozitron* e^+ (kladný elektron), který má stejnou hmotnost jako negatron, ale náboj kladný $+e$. Zatímco záporný elektron je jednou z nejčastějších částic, je pozitron velmi vzácný. Byl objeven v kosmickém záření a uniká z některých umělých radioizotopů.

Vzácnost pozitronů vysvětlujeme skutečností, že při setkání kladného a záporného elektronu se jejich náboje zruší a obě částice se přemění v jednu (nebo ve dvě) polní částici velmi pronikavého elektromagnetického záření, která se nazývá *kvantum gama*, nebo *foton zánikového záření* a značí se písmenem γ . Popsaný děj vyjadřujeme „rovnici“

$$1.3 (6) \quad e^- + e^+ \rightarrow \gamma(+\gamma).$$

Je třeba aspoň stručně se zmínit o dvou neutrálních částicích, které mají stejnou velmi nepatrnou hmotnost. Nazývají se *neutrino* a *antineutrino* a značí se ν a $\bar{\nu}$.*)

Elektrony e^- a e^+ i neutrina ν a $\bar{\nu}$ jsou částice *stálé*. Samovolně se nepřeměňují, nerozpadají v jiné částice stejně jako proton, který je také stálou částicí. Neplatí to však o neutronu, který se přeměňuje v proton, záporný elektron a antineutrino podle schématu

$$1.3. (7) \quad n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Volný neutron (který není poután k jiným částicím) se takto rozpadá s dosti velkou pravděpodobností (za každou vteřinu se rozpadne asi 7 neutronů z 10 000). Volný neutron je tedy částicí nestálou („radioaktivní“), avšak neutrony v atomových jádrech jsou velmi stálé.

Podotýkáme, že je též možná obrácená přeměna protonu v neutron a pozitron, která však nemůže proběhnout samovolně, ale působením neutrina na proton.

Proton a neutron jsou patrně jen dva různé stavy téže částice, která se označuje názvem *nukleon*, společným pro obě částice.

1.3.2. Atomová jádra

Podle dnešních představ se všechny látky skládají ze tří druhů částic: protonů, neutronů a záporných elektronů. Při tom nejsou tyto částice v látkách pomíchány bez určitých pravidel. Nukleony, tj. protony a neutrony, se shlukují v částice s kladným nábojem (atomová jádra), které jsou obklopeny zápornými elektrony. Tak vznikají jednoduché i složitější útvary: neutrální atomy nebo ionty s převahou kladných nebo záporných nábojů.

*) V poslední době se zjistilo, že je třeba rozeznávat dva druhy neutrin ν_μ , ν_e a dva druhy antineutrin $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_e$ (viz čl. 8.1.2).

Vznik atomových jader se vysvětluje tzv. *jadernými silami* (viz kap. 8.2), které působí mezi dvěma velmi blízkými nukleony, tedy mezi dvěma protony nebo dvěma neutrony a ovšem i mezi protonem a neutronem. Tyto síly velmi rychle slábnou se vzdáleností nukleonů, a proto se nazývají *síly krátkého dosahu*. Jsou to síly přitažlivé, a proto vedou k seskupování nukleonů ve větší částice s kladným nábojem. Tyto částice přitahují svými kladnými náboji záporné elektrony. Připojením každého elektronu zmenší se kladný náboj o jeden elementární náboj, čímž se zmenší síla přitahující další elektrony. Jakmile náboje elektronů zcela zruší účinky kladných nábojů, stane se popsaná soustava *neutrálním atomem* některého z chemických prvků. Kladně nabitý shluk nukleonů nazýváme *jádrum* atomu, kolem něhož seskupené záporné elektrony tvoří *elektronový obal* atomu.

Chemické vlastnosti prvku jsou dány počtem a seskupením elektronů, které je určeno počtem kladných elementárních nábojů jádra. Tento počet je zřejmě roven počtu protonů obsažených v jádře; nazývá se *protonové* nebo *atomové číslo* a značí se Z . Počet všech nukleonů jádra, který je roven počtu protonů zvětšenému o počet neutronů, se nazývá *nukleonové* nebo *hmotnostní číslo* prvku a značí se A . Čísla Z a A , kterými je určeno složení jádra, přisuzujeme jako indexy k chemické značce prvku: ${}_Z^A J$, jak ukážeme na několika příkladech dále uvedených.

Ačkoliv se všechny nukleony navzájem přitahují, není stabilní libovolná soustava nukleonů. Ukázalo se, že jádra všech známých prvků jsou složena (kromě vodíku a lehčího izotopu He) z nejméně tolika neutronů jako protonů, neboť poměr $2 \leq A/Z \leq 2,6$. Nukleony jsou v jádře navzájem pevně vázány a k rozložení jader stálých (neradioaktivních) prvků je potřeba značné energie rovné *vazební energii* jádra. Všechny atomy téhož chemického prvku mají totéž protonové číslo Z , nemají však vždy stejná nukleonová čísla. Jejich jádra obsahují též počet protonů, ale počet neutronů se může lišit o několik jednotek. Říkáme, že takové atomy se stejným Z , ale různými A jsou *izotopy* téhož prvku. Téměř všechny prvky mají po několika izotopech (až 24).

Chemický prvek není tedy z hlediska atomové fyziky stejnorodý, a proto byl zaveden nový název *nuklid* pro látku složenou z vesměs stejných atomů určených týmiž čísly Z a A . Název izotop užíváme jen ve vztahu k určitému prvku; mluvíme tedy o různých izotopech téhož prvku, což jsou různé nuklidy se stejným Z .

Uvedeme příklady nejjednodušších atomových jader:

Proton p ($Z = 1, A = 1$) je jádrem atomu *obyčejného (lehkého) vodíku* ${}_1^1\text{H}$.

Deuteron D ($Z = 1, A = 2$) složený z 1 protonu a 1 neutronu je jádrem *těžkého vodíku* čili *deuteria* ${}_1^2\text{H}$.

Triton T ($Z = 1, A = 3$) složený z 1 protonu a 2 neutronů je jádrem radioaktivního vodíku ${}_1^3\text{H}$ zvaného *tritium* nebo *tritium*.

Helion α ($Z = 2, A = 4$) (totožný s částicí α) složený ze dvou protonů a 2 neutronů je jádrem stabilního izotopu hélia ${}_2^4\text{He}$.

Jeho nestálý izotop ${}_2^3\text{He}$ má v jádře 2 protony a 1 neutron.

Abychom mohli hmotnosti atomů jednoduše vyjadřovat a snadno navzájem srovnávat, zavádíme pojem *relativní hmotnosti atomu* čili *poměrné atomové hmotnosti*. Tato bezrozměrná veličina je definována poměrem*)

*) Touto novou definicí vztaženou na nejčastější izotop uhlíku ${}_{12}^{12}\text{C}$, obsažený v přírodním uhlíku v poměrném množství 98 %, byla prakticky sjednocena dřívější tzv. „fyzikální atomová hmota“

α_p (= 16 pro izotop ${}_{16}^{16}\text{O}$) s „chemickou atomovou vahou“,

α_{ch} (= 16 pro přírodní kyslík).

Pro „sjednocenou“ veličinu α platí totiž vztahy

$$1.3 \text{ (8a)} \quad \frac{\alpha_{ch}}{\alpha} = 1,000\,046, \quad \frac{\alpha_p}{\alpha} = 1,000\,318$$

místo dřívějšího

$$1.3 \text{ (8b)} \quad \frac{\alpha_p}{\alpha_{ch}} = 1,000\,272.$$

$$1.3 (8) \quad \alpha = 12 \frac{\text{hmotnost atomu}}{\text{hmotnost atomu } ^{12}_6\text{C}}$$

a říká nám, kolikrát je hmotnost atomu větší než jedna dvanáctina hmotnosti atomu izotopu uhlíku o hmotnostním čísle 12.

Relativní atomová hmotnost je vlastně velikost hmotnosti atomu, měřená v jednotkách hmotnosti rovných jedné dvanáctině hmotnosti neutrálního atomu izotopu $^{12}_6\text{C}$. Tuto jednotku zvanou *atomová jednotka hmotnosti* nebo prostě *jednotka hmotnosti* budeme značit u . Má hodnotu

$$1.3 (9) \quad u = 1,660\,32 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

Hmotnost m_a atomu s relativní atomovou hmotností α je tedy rovna součinu

$$1.3 (10) \quad m_a = \alpha u = \alpha \cdot 1,660\,32 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

Na základě tohoto vztahu můžeme vypočítat z relativní atomové hmotnosti libovolné částice její klidovou hmotnost. Tak dostáváme pro proton a neutron hodnoty 1.3 (3) a 1.3 (4) z jejich relativních atomových hmotností

$$1.3 (11) \quad \alpha_p = 1,007\,276, \quad \alpha_n = 1,008\,665.$$

Podobně dostaneme relativní atomovou hmotnost elektronu z 1.3 (5)

$$1.3 (12) \quad \alpha_e = 0,000\,549$$

a relativní atomovou hmotnost lehkého vodíku

$$1.3 (13) \quad \alpha_H = \alpha_p + \alpha_e = 1,007\,825.$$

Poměr základní jednotky hmotnosti v soustavě SI k atomové jednotce hmotnosti

$$1.3 (14) \quad N = \frac{1 \text{ kg}}{u} = 6,022\,9 \cdot 10^{26}$$

se nazývá *Avogadrovo číslo* a má význam v kinetické teorii látek a ve fyzikální chemii.

Jádra stálých nuklidů mají značnou vazební energii, kterou je třeba vynaložit k rozložení jádra na jednotlivé nukleony. Jádra některých nuklidů se však samovolně přeměňují a při tom vydávají záření, jak objevil Becquerel již r. 1896. Proto takové nuklidy i záření, které vydávají, nazýváme *radioaktivními*.

V přírodě byly objeveny tři řady *radioaktivních prvků*, tvořené prvky, které radioaktivními přeměnami postupně v sebe přecházejí. Je to řada urano-rádiová, jejímž výchozím (mateřským) prvkem je uran, který se přeměňuje v další prvky. Mezi nimi jsou nejznámější radioaktivní prvky rádium, plyn radon a polonium; řada končí stálým izotopem olova. Obdobné rodokmeny mají řady aktiniová a thoriová.

U všech radioaktivních prvků byla zjištěna platnost *exponenciálního zákona*

$$1.3 (15) \quad n = n_0 e^{-\lambda t},$$

podle něhož klesá počet n atomů radioaktivního prvku s časem. *Přeměnová (rozpadová) konstanta* λ souvisí s poločasem T vztahem

$$1.3 (16) \quad \lambda T = \ln 2,$$

kde poločasem rozumíme dobu, za kterou se počet atomů radioaktivního prvku zmenší na polovinu.

Přírozené radioaktivní prvky vydávají tři druhy záření: *Záření α* jsou velmi rychlé dvoj-mocné ionty hélia (tj. jádra hélia), které vyletují z jader mnohých radioaktivních prvků. Podle předešlého článku odnášejí z jádra hmotnost 4 u a 2 kladné elementární náboje. Prvek, který je zářičem alfa, přechází proto v prvek s nukleonovým číslem $A - 4$ o 4 jednotky menším a s protonovým číslem $Z - 2$ menším o 2 jednotky.

Záření β jsou velmi rychlé záporné elektrony, které vylétují z jader radioaktivních prvků, které se tím mění v prvek s atomovým číslem $Z + 1$ vyšším o 1, než má zářící prvek.

Záření γ je velmi pronikavé (krátkovlnné) elektromagnetické záření, jehož fotony se uvolňují přeskupením nukleonů v radioaktivním jádře.

Od roku 1919 provádějí fyzikové také umělé přeměny prvků, které bez vnějšího zásahu jsou stále (neradioaktivní), a v r. 1934 objevili manželé Joliotovi-Curieovi tzv. *umělou radioaktivitu*. Ostřelováním jader urychlenými nabitými částicemi, a zejména také neutrony je možno přeměnit téměř každý prvek v radioaktivní prvek, který je jeho *radioaktivním izotopem* nebo *radioizotopem* některého jiného stálého prvku. Tyto *umělé radionuklidy*, kterých je již známo asi tisíc, vysílají kromě záření α , β , γ také pozitrony a mohou být zdrojem i neutronového a protonového záření. O jejich vlastnostech a významných aplikacích ve vědách i v technice pojednáme v čl. 8.8.5.

1.3.3. Elektronový obal atomu

Atomové jádro se Z protony má kladný náboj Ze , a proto přitahuje elektrostaticky záporné elektrony. Neutrální atom se skládá z jádra obklopeného Z zápornými elektrony. Podle tzv. *modelové atomové teorie* si představujeme, že elektrony krouží kolem jádra v eliptických nebo kruhových drahách takovými rychlostmi, že odstředivé síly jsou v rovnováze s přitažlivými silami jádra. Celkový průměr atomů je řádu 10^{-10} m (několika angströmů), kdežto atomová jádra mají průměry řádu 10^{-15} až 10^{-14} m, tedy zhruba desetistíkrát menší. Ačkoli objem jádra je asi 10^{12} krát menší než objem celého atomu, je v něm soustředěna téměř všechna hmotnost atomu, z níž jen zlomky promile připadají na elektronový obal. Tím se vysvětluje snadné pronikání jader samých (atomů zbavených všech elektronů) i jiných částic látkami všech skupenství.

Elektronový obal atomu může vydávat elektromagnetické záření v oboru infračerveného, viditelného i rentgenového záření a také může toto záření pohlcovat. Podle modelové teorie mohou elektrony obíhat kolem jádra jen v některých eliptických drahách zvaných *kvantové*, jejichž poloosy a polohy v prostoru jsou předepsány teorií. Při přechodu z vyšší kvantové dráhy, v níž má elektron vyšší energii, na dráhu s nižší energií (blíží jádru) vyzáří atom světelné kvantum (foton), jehož energie se rovná rozdílu energií elektronu na obou drahách.

Pohltní-li naopak elektronový obal atomu foton, vystoupí některý z oběžných elektronů na vyšší kvantovou dráhu, na které má energii vyšší než na původní dráze, právě o energii pohlceného fotonu. Při návratu na původní dráhu vyše atom zase stejný foton nebo při sestupu na jinou dráhu foton příslušné energie. Tak může atom absorpce záření vhodných vlnových délek zvyšovat svou energii a dostat se do *vyššího kvantového stavu*.

V každém kvantovém stavu má elektron stálou celkovou energii (rovnou součtu kinetické a potenciální energie), která však není zcela určena rozměry oběžné dráhy. Každý elektron se totiž při oběhu kolem jádra zároveň otáčí kolem své osy *kolmé* k rovině dráhy. Tato rotace se nazývá *spin* elektronu a má vždycky stejně velkou rychlost, avšak smysl rotace může buď souhlasit se smyslem oběhu elektronu kolem jádra, nebo může být opačný. Přitom platí důležitý *Pauliho princip*: Na téže kvantové dráze mohou obíhat nejvýše dva elektrony, které musí mít opačné spiny.

Velikost a tvar každé kvantové dráhy jsou určeny hodnotami dvou celých, kladných čísel, která se nazývají *kvantová čísla*. Hlavní poloosa a eliptické dráhy je určena tzv. *hlavním kvantovým číslem* n podle rovnice

$$1.3 \quad (17) \quad a = n^2 a_1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

kde a_1 značí poloosu nejmenší možné dráhy „jednokvantové“, kterou dostaneme pro $n = 1$. Vedlejší poloosa b kterékoli n -kvantové dráhy je pak dána vzorcem

$$1.3 \quad (18) \quad b = n(l + 1) a_1.$$

kde vedlejší kvantové číslo l může nabývat celkem n hodnot

$$1.3 \quad (19) \quad l = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Pro každou hodnotu n hlavního kvantového čísla dostáváme tedy n oběžných drah, které mají stejně velkou hlavní poloosu, ale různé vedlejší poloosy od nejmenší poloosy $b = na_1$ až do největší $b = a$, kdy je dráha kruhová. Říkáme, že všechny tyto n -kvantové dráhy tvoří n -tou elektronovou slupku (neboli sféru). Tyto slupky se značí písmeny $K, L, M, \dots Q$, která odpovídají hlavním kvantovým číslům $n = 1, 2, \dots, 7$.

Mezi všemi kvantovými stavy atomu je nejčastější tzv. *základní* čili *nevzbuzený* stav, kterému přísluší nejmenší celková energie všech oběžných elektronů. Nejmenší energii by měl atom zřejmě tehdy, kdyby všechny elektrony obíhaly na nejnižší (jednokvantové) dráze. To však zakazuje princip Pauliho, který dovoluje obsazení každé dráhy nejvýše dvěma elektrony. Vidíme, že n -tá slupka může obsahovat jen jistý nejvýše přípustný počet elektronů. Je roven $2n^2$, jak ukážeme v čl. 7.2.5. V základním stavu atomu jsou pravidelně obsazeny nejnižší kvantové dráhy vždy dvěma elektrony s opačnými spiny, které se silně přitahují. Proto tvoří plně obsazené elektronové slupky velmi stabilní soustavy, které se jen nesnadno poruší.

Přechodem některých elektronů do vyšších kvantových drah se zvyšuje energie atomu, který se tak dostává do *vzbuzeného stavu*. Ale i v tomto vzbuzeném stavu zůstává atom *neutrální*. Teprve když získá některý z jeho elektronů energii potřebnou k úplnému odtržení od jádra, změní se neutrální atom v jednomocný *kladný ion*. Odtržením v elektronů vzniká v -mocný kladný ion. Naopak připoutáním dalších v elektronů přechází neutrální atom ve v -mocný *záporný ion*.

Pravděpodobnost přeměny neutrálního atomu v ion (ionizace atomu) závisí na stabilitě příslušného seskupení elektronů. Elektronový obal přechází snáze z méně stabilního stavu do stavu stabilnějšího než obráceně: atom má sklon k dosažení stavu odpovídajícího nejbližší plně obsazené slupce.

Uvedeme několik jednoduchých příkladů. Slupka K ($n = 1$) je plně obsazena dvěma elektrony. Proto atom vodíku složený z 1 protonu a 1 elektronu přejde snadno odtržením elektronu v kladný jednomocný ion (tj. proton). Může si však také doplnit slupku K zachycením dalšího elektronu a vytvořit záporný jednomocný ion. Naproti tomu hélium ($Z = 2$) má v neutrálním stavu plně obsazenou slupku K s 2 elektrony, a proto nesnadno tvoří ionty a je chemicky netečný. Atom třetího prvku lithia ($Z = 3$) může dosáhnout stabilního stavu ztrátou jednoho elektronu. Proto je Li kladně jednomocný kov.

Druhá slupka L ($n = 2$) potřebuje k plnému obsazení $2n^2 = 8$ elektronů. První dvě slupky má tedy plně obsazeny neutrální atom s 10 elektrony, tj. prvek s 10 protony v jádře ($Z = 10$). Je to rovněž inertní plyn neón. Plně obsazených dvou slupek K a L dosáhne však fluór ($Z = 9$) připoutáním 1 elektronu, a tvoří tedy záporně jednomocné ionty, kdežto kyslík ($Z = 8$) potřebuje k dosažení téhož stavu dva elektrony, a je proto záporně dvojmocný. Elektronový obal jedenáctého prvku sodíku dosáhne naopak nejbližšího stálého seskupení, když ztrátou 1 elektronu přejde v kladný jednomocný ion.

Podobným způsobem se vysvětlují známé chemické vlastnosti většiny prvků.

1.4. Molekuly a krystaly

1.4.1. Složení molekul

Neutrální atomy i z nich vytvořené ionty se mohou slučovat ve složitější útvary, zejména v molekuly. Nejsnáze vysvětlíme vytvoření molekul složených z opačně nabitých iontů, kterým říkáme *heteropolární molekuly*. Oba ionty jsou k sobě poutány elektrostatickou

silou Coulombovou. Tak molekula fluorovodíku HF vznikne spojením kladného iontu H^+ (protonu) a záporného iontu F^- . Podobně vznikne kyselina chlorovodíková HCl, protože neutrální atom chlóru ($Z = 17$) dosáhne připoutáním 1 elektronu stabilní konfigurace, jakou má elektronový obal inertního plynu argonu ($Z = 18$). Stejně vysvětlíme vznik molekuly soli NaCl. Spojením záporně dvojmocného iontu O^{--} s dvěma ionty H^+ vzniká neutrální molekula vody. Molekuly heteropolárních sloučenin tedy vznikají proto, že atomy, z nichž jsou složeny, přecházejí v kladné či záporné ionty, které se elektrostaticky přitahují a tvoří neutrální molekulu. K jejich roztržení je třeba jisté *disociační energie*.

Obtížnější je výklad vytvoření homopolárních molekul z neutrálních atomů, zejména molekul dvouatomových plynů složených ze dvou atomů téhož prvku. Dvouatomovou molekulu H_2 vodíku by bylo možno chápat jako spojení kladného iontu H^+ (protonu) a záporného iontu H^- (protonu s dvěma elektrony). Při tom však podle Pauliho principu musí mít elektrony v iontu H^- opačné spiny, aby mohly obíhat v téže dráze. Takové dva elektrony se však přitahují, a tím poutají oba atomy v jednu molekulu. Teprve vlnová mechanika vysvětlila vznik této přitažlivé síly mezi dvěma elektrony s opačnými spiny, která je příčinou, že molekulu H_2 mohou vytvořit dva atomy H s opačnými spiny elektronů, kdežto dva atomy se souhlasnými elektronovými spiny se odpuzují a molekulu nevytvoří. Při tom na spinech atomových jader, která se také otáčejí kolem svých os, nezáleží; mohou být v obou atomech téže vodíkové molekuly opačné (paravodík) i souhlasné (ortovodík). Přitažlivá síla mezi dvěma elektrony s opačnými spiny je příkladem tzv. *výměnné síly*. Výměnnými silami vysvětlujeme existenci všech homopolárních čili kovalentních vazeb, jak ukážeme v čl. 7.3.5. Tam také uvidíme, že vlnová mechanika poskytuje i kvantitativně správné informace o molekulách a dovede určit i prostorové rozložení homopolárních vazebních sil. Tak nám poskytuje informace o rozměrech molekul, jejich tvaru, momentech setrvačnosti a disociační energii.

Podobně jako atom složený z jádra a elektronového obalu může podle zásad kvantové fyziky nabývat jen jistých kvantových stavů a vydává záření při přechodu ze stavů s vyšší energií do stavů energeticky nižších, může také molekula měnit svůj kvantový stav, a to jednak změnou vzájemných poloh atomů tvořících molekulu, jednak změnou oběžných drah elektronů v atomech molekuly. Také rotační rychlost molekuly jako celku podléhá zákonům kvantové mechaniky, a tak jsou molekule předepsány různé kvantové stavy, které rozhodují o frekvencích elektromagnetického záření, které molekula vydává, kdykoli přechází do kvantového stavu s nižší energií. Naopak při absorpci fotonu přejde molekula do vyššího energetického stavu. Spektra molekul jsou složitější než spektra vydávaná atomy a nazýváme je *pásovými* na rozdíl od *čárových* spekter atomů.

Mezi nepřiliš blízkými molekulami působí slabé přitažlivé síly zvané van der Waalsovy, které jsou příčinou *soudržnosti* pevných a kapalných látek. Slábnou však velmi rychle se vzdáleností (nepřímo úměrně s 6. nebo vyšší mocninou vzdálenosti), a proto se v plynném skupenství uplatňují skoro zanedbatelně. Naopak při značjším přibližování molekul vznikají mezi nimi síly odpudivé, které rostou exponenciálně a v těsné blízkosti molekuly nabývají velikých hodnot. Tyto odpudivé síly jsou příčinou malé stlačitelnosti pevných a kapalných látek a jejich neprostupnosti.

1.4.2. Látky různých skupenství

Abychom vysvětlili, jak z molekul vznikají známé látky různých skupenství, představme si dvě molekuly, které se pohybují prostorem a přiblíží se k sobě na vzdálenost, kde mají převahu přitažlivé van der Waalsovy síly nad silami odpudivými. Obě molekuly se vychýlí ze svých přímých drah a jejich další osud bude zřejmě záviset na jejich relativní rychlosti a na jejich vzájemné potenciální energii v poli van der Waalsových sil. Je-li relativní rychlost molekul velká, takže jejich pohybové energie vzhledem k společnému těžišti jsou velké proti potenciální energii přitažlivých sil, neudrží se molekuly pohromadě a po setkání

se vzdálí se změněnými rychlostmi. Je-li však relativní rychlost dosti malá, nepřemohou setrvačné síly molekul síly van der Waalsovy a molekuly se po setkání budou trvale pohybovat kolem společného těžiště. Potkají-li se molekuly s mimoběžnými rychlostmi, budou konat krouživé pohyby kolem těžiště, kdyby se však pohybovaly proti sobě v téže přímce, dostanou se až do těsné blízkosti, kde se uplatní odpudivá síla a výsledkem budou kmitavé pohyby molekul na přímce vedené těžištěm.

Je zřejmé, že k takové soustavě dvou molekul se mohou připojovat další molekuly, pokud nemají příliš velkou kinetickou energii. Pak vytvoří velký počet molekul *soudržnou* látku, jejíž molekuly i větší části lnou k sobě. Jsou to látky ve *skupenství pevném a kapalném*. Jsou-li však pohybové energie molekul dosti velké, nedrží jednotlivé molekuly pohromadě a narážejíce na okolní tělesa (např. na stěny nádoby, ve které jsou uzavřeny) působí na ně tlakem. Jsou to látky *rozpínavé*, o nichž říkáme, že jsou ve *skupenství plynném*. Z toho je zřejmo, že chování molekul a vlastnosti látek, které se z nich skládají, závisí jednak na druhu molekul, jednak na rychlostech, jimiž se tyto molekuly pohybují. Rychlosti molekul — stejně jako ony samy — nejsou přístupny přímému pozorování našimi smysly ani nejjednoduššími přístroji, kterými sledujeme jen makroskopické jevy. Jak se makroskopicky projevují pohyby molekul, vyložíme podrobně v nauce o teple, zde uvedeme jen základní poznatky, které jsou nutné pro další výklad.

Podle představ kinetické teorie tepla vnímáme různé rychlosti molekul látek všech skupenství jako různé teploty těchto látek. Teplejší látka se liší od studenější jen tím, že její molekuly mají v průměru větší rychlost. Absolutní teplota (měřená ve stupních Kelvinových) je úměrná střední kinetické energii molekul. Při styku teplejší látky se studenější předávají rychlejší molekuly část své pohybové energie molekulám pomalejším, a proto přechází teplo (tepelná energie) s teplejší látky na studenější (chladnější).

Z této představy vyplývá, že jakékoli molekuly mohou při dosti nízkých teplotách, při nichž mají dosti malou energii, vytvořit látku soudržnou, která při dosti vysokých teplotách přejde v látku rozpínavou.

Vysvětlíme jen stručně základní vlastnosti látek různých skupenství.

Pevná tělesa. Pevná tělesa si představujeme jako souhrn molekul, které mají vyhrazeny jisté „rovnovážné“ polohy, z nichž se nemohou za obvyklých okolností znatelně vzdálit. Je-li molekula vychýlena z této rovnovážné polohy, vzniknou ihned síly, které mají původ v sousedních molekulách a nutí molekulu vrátit se zpět do rovnovážné polohy, v níž jediná může setrvávat v klidu, neboť v ní se všechny síly na molekulu působící právě ruší — jsou v rovnováze. Molekuly pevných těles jsou neustále v silovém poli ostatních (hlavně nejbližších) molekul, a proto se vychýlením každé z nich vychylují i sousední molekuly. Za obvyklých poměrů konají molekuly kmitavé pohyby kolem svých rovnovážných poloh.

Kapaliny. Zahříváme-li pevnou látku, zvyšuje se energie a rozkmit jejích molekul. Nárazy molekuly na molekulu nabývají na prudkosti, takže se molekuly mohou trvale vyšinout z původních rovnovážných poloh. Kromě vzájemného silového působení molekul, které dává molekulám potenciální energii, uplatňuje se při rostoucí teplotě více a více kinetická energie molekul. Při nízké teplotě je tato pohybová energie molekul proti jejich potenciální energii malá. Se zvyšováním teploty vzrůstá však pohybová energie molekul, takže se stálost jejich rovnovážných poloh, určených potenciální energií, zmenšuje. Tak se vzájemné postavení molekul uvolňuje, neboť některé z nich se nepatrně přemísťují, překonají-li svou pohybovou energii na okamžik přitažlivé síly mezi molekulami. Doba, po kterou se mohou některé molekuly pohybovat proti silám, kterými na ně působí sousední molekuly, prodlužuje se s rostoucí teplotou a vzájemné vzdálenosti molekul se zvětšují. Tím se dále zmenšuje vliv přitažlivých sil mezi molekulami, který při nižších teplotách byl rozhodující. Látka řidne — její hustota se zmenšuje.

Při zvětšených vzdálenostech mezi molekulami jsou vzájemné silové účinky molekul slabší; proti těmto molekulárním silám se mohou tedy snáze uplatnit vnější síly, např. i zemská tíže. Proto přechází zvyšováním teploty látka původně pevná ve hmotu tvárnou

(plastickou). Při dalším zvyšování teploty látka měkne a může přejít v látku tekutou, když i gravitační síla může měnit vzájemnou polohu molekul. I tekutá látka klade ovšem změnám vzájemných poloh molekul jistý odpor. Kapalina vzniklá zahříváním z pevné látky jeví zpočátku značné *vnitřní tření*. Toto vnitřní tření klesá se stoupající teplotou a látka se stává tekutější.

Mechanické vlastnosti kapalin jsou tedy charakterizovány tím, že molekuly nejsou sice již vázány na neproměnné rovnovážné polohy, ale že na ně ještě stále působí přitažlivé síly sousedních molekul. Látka drží pohromadě, jeví *soudržnost* čili *kohezi*. Proto se molekuly nemohou hromadně rozptýlit do prostoru. Jen některé povrchové molekuly, mají-li zvláště velkou rychlost, mohou se vymanit z přitažlivosti ostatních molekul a unikají do prostoru — kapalina se *vypařuje*.

Na povrchu kapalin je názorně patrné, že molekuly se vzájemně přitahují, neboť tu působí přitažlivé síly jednostranně, tj. směrem dovnitř kapaliny. To je příčinou známého jevu *povrchového napětí*. Kapalina přitahuje totiž své povrchové molekuly dovnitř a brání tak zvětšování svého povrchu, jak lze ukázat známými pokusy.

Dalším zvyšováním teploty se zvyšují také rychlosti molekul, takže přibývá molekul, které mohou překonat vliv vzájemné přitažlivosti a uniknout z kapaliny. S rostoucí teplotou se tedy zrychluje vypařování, které se děje proti tlaku okolního vzduchu. Jestliže konečně střední rychlost molekul je tak značná, že velké množství molekul může překonat nárazy molekul vzduchu a vzdálit se od povrchu kapaliny, nastává bouřlivé vypařování. a to nejen na povrchu, nýbrž i uvnitř kapaliny; pak říkáme, že kapalina *vře*. Kdyby kapalina byla ve vakuu, vytvořily by uniknuvší molekuly páru kapaliny. Molekuly tvořící páru mají již tak velké rychlosti, že se po většinu doby pohybují prakticky nezávisle na sobě. Jen v jistých okamžicích, kdy se dvě molekuly přiblíží těsně k sobě, zapůsobí na sebe a změní tak své rychlosti podobně jako při rázu pružných koulí. Potom se opět od sebe vzdálí a pohybují se zhruba rovnoměrně a přímočaře až do příští srážky.

Plyny. Přicházíme tak k dalšímu skupenství — k látkám plyným. Tu již nejsou ani rovnovážné polohy molekul, ani omezené vzdálenosti mezi nimi. Plyny nemají ani určitý tvar, ani určitý objem. Vysvětlujeme si to představou, že plyny jsou tak řídké, že u nich mizí vzájemné přitahování molekul, které se pohybují velkými rychlostmi zcela samostatně. Jen ve velmi krátkých okamžicích vzájemných srážek jednotlivých molekul se jejich rychlosti náhle změní. Jinak jejich pohybu nic nebrání, a proto se mohou pohybovat setrvačněstí tak dlouho, pokud jim v tom nezabrání vnější překážky. Proto vyplňují plyny objem nádoby úplně, a narážejíce na její stěny, působí na ně jistým tlakem, který roste s teplotou.

Plazma. Při velmi vysokých teplotách (několika tisíc stupňů) dosahuje energie některých molekul v plynu velikosti tzv. *ionizační energie*, která stačí k roztržení neutrální molekuly na kladné a záporné ionty. Při teplotách kolem 5 000 °C (v elektrickém oblouku) je plyn ionizován z několika procent, ale při teplotách řádu 10⁶ °C (dosažených např. při termojaderných procesech) podařilo se silným výbojem dosáhnout ve zředěných plynech skoro úplné ionizace. Takový stav látky složené z kladně a záporně nabitých částic se podstatně liší od plynů složených z neutrálních molekul. Pokládáme jej dnes za čtvrté skupenství a nazýváme jej *plazmatem*. Studium plazmatu má velký teoretický i praktický význam.

1.4.3. Krystalová struktura

V předešlém článku jsme nastínili, jak vznikají skládáním molekul látky různých skupenství. Tento výklad doplníme bližším popisem struktury krystalů, které jsou základním útvarem látek pevného skupenství.

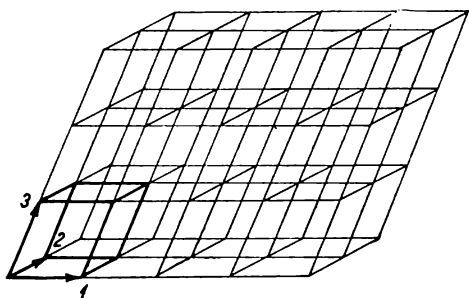
Krystalem rozumíme pravidelnou soustavu jednoho nebo několika druhů částic, uspořádaných v prostoru podle zákonů určených vlastnostmi těchto částic.

Tato definice se přesně vzato vztahuje na *dokonalé* krystaly, které se v přírodě ani nevyskytují. U skutečných krystalů pozorujeme, že pravidelnost uspořádání nebývá přesně dodržena v libovolně velkých objemech, že mají větší nebo menší počet poruch (kazů, nepravidelností), které vznikají vyšunutím některé molekuly z předepsané polohy, při čemž její místo je buď *prázdné* (neobsazeno), nebo je obsazeno jinou (cizí) molekulou (neryzost, nečistota). Poruchy se vyskytují jen s dosti malou pravděpodobností, a tak i skutečné krystaly projevují pravidelnost své mikrostruktury typickými makroskopickými vlastnostmi. Jsou především *homogenní* (stejnorodé), což znamená, že dva libovolné objemy krystalu s velkým počtem molekul mají prakticky stejné fyzikální vlastnosti. Krystaly jsou obecně *anizotropní* (nejsou izotropní), jejich vlastnosti v každém místě závisí ještě na směru, v němž je měříme. Tak mají např. pro deformace v různých směrech různé moduly pružnosti mají různou pevnost v různých rovinách (štěpnost) a světlo se jimi šíří rychlostí závislou na směru šíření i na směru polarizace atd. Krystalová struktura se jeví také navenek tím, že krystaly jsou omezeny rovinnými stěnami a mají určité geometrické vlastnosti. Rostou *apozicí*, tj. připojováním dalších vrstev molekul na přirozené stěny.

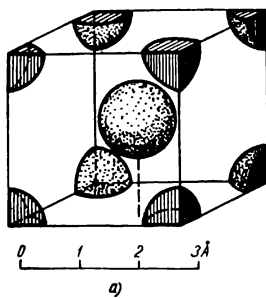
Tak tomu je ovšem u tzv. *monokrystalů* (jednokrystalů), ale velké množství látek (kovy) má stavbu *mikrokrystalickou*, čili jak říkáme, jsou *polykrystalické*. Jejich krystalické složení se neprojevuje ani zvláštním tvarem, ani anizotropií a lze je objevit teprve rentgenovou analýzou, i když jejich nestejnorodost je zřejmá mikroskopem.

Krystaly dělíme podle

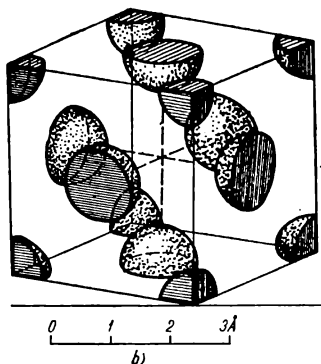
1. geometrického uspořádání částic,
2. stupně pravidelnosti,
3. druhu částic.



Obr. (1.4) 1. Elementární buňka (silně vytažená) krystalové mřížky



Obr. (1.4) 2. Krychlová mřížka a) prostorově středěná (stereocentrická), b) plošně středěná (planicentrická)



Geometrické uspořádání částic v krystalu je určeno *elementární buňkou* vymezenou v prostoru stěnami rovnoběžnostěnu, která je obsazena předepsaným způsobem částicemi (molekulami, atomy, ionty). Makroskopický krystal vznikne řazením velkého počtu elementárních buněk podél prodloužených hran rovnoběžnostěnu, které určují *tři krystalografické osy* 1, 2, 3 [obr. (1.4) 1]. Takovým postupným skládáním částic v jednotlivé buňky také krystaly ve skutečnosti rostou. Říkáme, že soustava elementárních buněk tvoří *krystalovou mřížku*, v níž se částice periodicky opakují podél všech tří krystalografických os.

Podle rozložení částic v elementární buňce rozeznáváme šest *krystalografických soustav*:

Trojklonná (triklinická), *jednoklonná* (monoklinická), *kosočtverečná* (rombická), *čtverečná* (tetragonální), *šesterečná* (hexagonální) a *krychlová* (kubická).

Pro další výklady je nejdůležitější soustava krychlová, u níž je elementární buňka krychle a v níž se setkáváme s mřížkami dvojího druhu.

a) *Prostorově středěná* (prostorově centrovaná, stereocentrická) kubická mřížka má

obsazeno všech 8 rohů a prostorový střed krychlové buňky, každý jednou molekulou [obr. (1.4) 2a].

b) *Plošně středěná* (planicentrická) kubická mřížka má obsazeno všech 8 rohů a kromě toho 6 středů stěn elementární buňky, každý jednou molekulou. [Prostorový střed buňky je neobsazen, obr. (1.4) 2b.]

V prostorově středěné mřížce krystaluje např. modifikace železa α , kdežto modifikace železa $\text{Fe}\gamma$ krystaluje v plošně středěné mřížce. Na obrázku (1.4) 2 jsou obě tyto mřížky znázorněny tak, že koule značí kladné ionty železa s poloměrem asi 1,3 Å, kdežto mřížková konstanta d (délka hrany elementární krychle) je v prvním případě 2,87 Å, ve druhém 3,56 Å. Tyto délkové poměry jsou zachovány na obrázku (1.4) 2.

Velikost elementární buňky lze zjistit rentgenovou analýzou krystalu, lze ji však také vypočítat z atomové hmotnosti a z hustoty ρ krystalu. Vypočteme ji snadno, uvědomíme-li si, že každá stěna krychle je společná dvěma sousedním krychlím, každá hrana čtyřem a každý roh osmi krychlím. Na jednu elementární krychli objemu d^3 připadá tedy ion středový celý, ionty usazené na stěnách jen z polovice, ionty na hranách ze čtvrtiny a z rohových iontů jen osmina, jak je znázorněno na obrázcích. Celkový počet iontů připadajících na jednu buňku je tedy u mřížky *stereocentrické*

$$1.4 (1) \quad n_1 = 1 + 8 \cdot \frac{1}{8} = 2,$$

kdežto u mřížky *planicentrické*

$$1.4 (2) \quad n_1 = 6 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{8} = 4.$$

Je-li tedy hmotnost iontu m a hustota krystalu ρ , bude

$$1.4 (3) \quad \rho = \frac{n_1 m}{d^3} \quad \text{čili} \quad d = \sqrt[3]{\frac{n_1 m}{\rho}}.$$

Vezmeme-li za hmotnost iontu prostě hmotnost atomu, bude patrně podle 1.3 (10)

$$1.4 (4) \quad m = \alpha \cdot u = \alpha \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg},$$

kde α je relativní atomová (obecně molekulová) hmotnost krystalu. Tak např. podle tabulky D II pro železo $\alpha = 55,85$, takže $m_{\text{Fe}\alpha} = 9,269 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$; ze známé hustoty $\rho_{\text{Fe}\alpha} = 7\,868 \text{ kgm}^{-3}$ plyne pak podle 1.4 (1) a 1.4 (3)

$$1.4 (5) \quad d_{\text{Fe}\alpha} = 2,87 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 2,87 \text{ Å}.$$

Podobně by vyšlo např. pro měď, jejíž mřížka je plošná středěná, podle 1.4 (2) a 1.4 (3)

$$1.4 (6) \quad \alpha = 63,54, \quad d_{\text{Cu}} = 3,61 \text{ Å}, \quad \rho = 8\,963 \text{ kgm}^{-3}.$$

Čísla 1.4 (1), 1.4 (2) ukazují, že planicentrická mřížka má dvakrát tolik látky než stejné velká mřížka stereocentrická. Je to *nejtěsnější* krychlová soustava částic. Skutečně krystaluje v planicentrické mřížce řada kovů. To ovšem neznamená, že je např. $\text{Fe}\gamma$ dvakrát tak husté jako modifikace $\text{Fe}\alpha$, neboť mřížková konstanta $\text{Fe}\gamma$ je větší než u železa $\text{Fe}\alpha$. Z uvedených hodnoty 1.4 (5) a $d_{\text{Fe}\gamma} = 3,56 \text{ Å}$ plyne podle 1.4 (1, 2, 3) skutečně

$$\frac{\rho_\alpha}{\rho_\gamma} = \frac{1}{2} \frac{d_{\text{Fe}\gamma}^3}{d_{\text{Fe}\alpha}^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{3,56}{2,87} \right)^3 = 0,96.$$

Obě modifikace železa jsou tedy přibližně stejně husté.

V krychlové soustavě krystalují také soli, z nichž nejznámějším příkladem je chlorid sodný NaCl. Tvoří mřížku znázorněnou na obr. (1.4) 3, kterou si můžeme představit jako

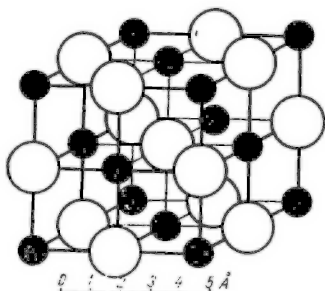
průnik (superpozici) dvou plošně středěných krychlových mřížek se stejnou konstantou $d = 5,642 \text{ \AA}$, takže vzdálenost dvou různých iontů N^+ a Cl^- je poloviční, tj. $2,821 \text{ \AA}$.

Na obrázku (1.4) 3 je znázorněn také poměr velikostí obou iontů, jejichž poloměry jsou

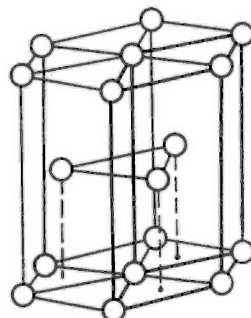
$$r_{\text{Cl}^-} = 0,95 \text{ \AA}, \quad r_{\text{Na}^+} = 0,52 \text{ \AA}.$$

Z ostatních soustav krystalografických se zmíníme jen o šesterečné (*hexagonální*) mřížce, která je při tzv. *nejtěsnějším uspořádání* znázorněna na obr. (1.4) 4. Krystaluje v ní např. zinek a magnézium.

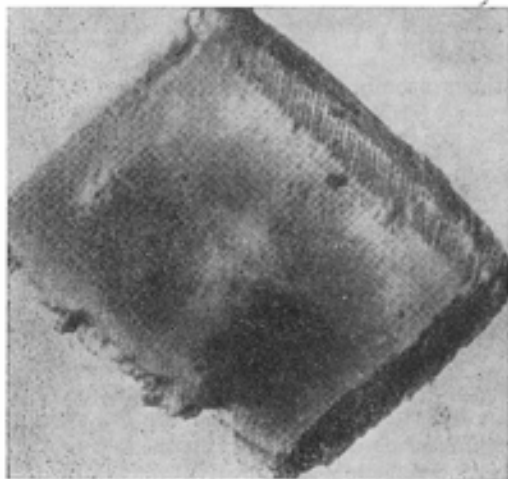
Je důležité poznamenat, že nejen sama existence molekul, ale i jejich pravidelné uspořádání v krystalech bylo v poslední době názorně prokázáno snímky organických makro-



Obr. (1.4) 3. Mřížka soli kamenné NaCl (bílé kroužky značí Na^+ , černé Cl^-)



Obr. (1.4) 4. Nejtěsnější šesterečná mřížka a její elementární buňka (silně vytažená)



Obr. (1.4) 5. Monokrystal viru tabákové nekrózy (stínováno zlatem, zvětšeno 45 000)

molekul elektronovým mikroskopem. Jako doklad přinášíme snímky Wyckoffovy, reprodukované na obrázcích (1.4) 5 a (1.4) 6.



Obr. (1.4) 6. Růst Rothamstedova proteinu (stínováno paládiem, zvětšeno 40 000)

1.4.4. Hlavní typy krystalů

V obou předešlých článcích jsme objasnili základní geometrické vlastnosti krystalové mřížky. Fyzikální vlastnosti látek však závisí také na druhu částic, které krystal tvoří. S tím souvisí základní otázka fyziky krystalů, totiž povaha sil, které k sobě váží částice,

z nichž je mřížka sestavena. Bližší studium těchto sil vede k poznatku, že mohou být několika druhů, a podle toho lze také krystaly třídit. Z praktického hlediska doplňujeme toto třídění zvláštní skupinou krystalů, totiž polovodiči. Nehledíme-li k amorfním (sklovitým) látkám, které se po stránce fyzikální řadí spíše mezi kapaliny, obsahuje celková klasifikace 5 typů pevných látek:

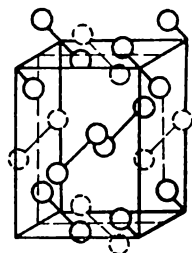
molekulové krystaly,
valenční krystaly,
iontové krystaly,
kovy,
polovodiče.

Některé skutečné látky mají vlastnosti smíšené a tvoří vlastně přechod mezi těmito typy.

Molekulové krystaly

Tento druh krystalů je tvořen jedním druhem částic, totiž stabilními *molekulami* nebo neutrálními atomy s úplnými elektronovými skupinami. Jsou k sobě poutány jen malými *kohezními silami van der Waalsovými*, takže jejich vlastnosti jsou určeny spíše vnitřní strukturou molekul než molekulární vazbou krystalovou. Proto mají *slabou soudržnost*, jsou mechanicky neodolné a mají také nízké *sublimační teplo*.

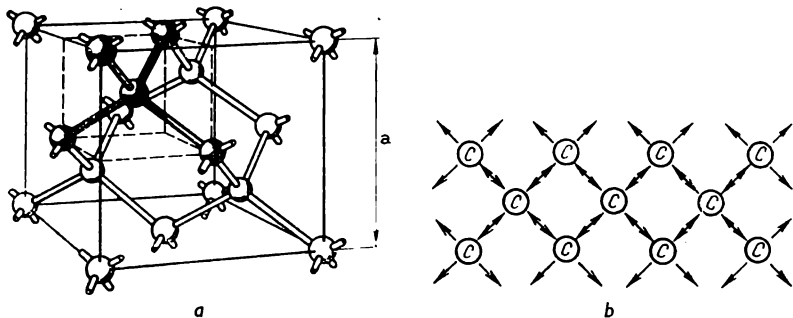
Pevné fáze vzácných plynů krystalují vesměs v planicentrické mřížce. Pevné hélium existuje jen za tlaku nejméně 25 atm. Chlór a jód krystalují ve stejné mřížce a jejich dvouatomové molekuly se chovají jako jedna částice, která má ovšem předepsanou orientaci (zaměření). Je to patrné ze schématu struktury jódu I_2 na obr. (1.4) 7.



Obr. (1.4) 7.
Elementární buňka
krystalu jódu I_2

Valenční krystaly

Valenční krystaly zvané též *kovalentní* jsou tvořeny neutrálními atomy středně lehkých prvků, poutanými k sobě kovalentními vazbami (čl. 7.3.3). Jsou elektricky *nevodivé*, *vysoce kohezní a velmi tvrdé*. Prototypem je *diamant*, jehož krystal je vytvořen z neutrálních atomů čtyřmocného uhlíku. Každý atom je poután kovalentní vazbou se čtyřmi sousedními



Obr. (1.4) 8. Struktura diamantu a) prostorové uspořádání uhlíkových atomů,
b) rovinový diagram dvojspinů

atomy. Základním elementem krystalu diamantu je tedy *čtyřstěn*, ale výsledná sestava atomů je průnikem čtyř jednoduchých kubických mřížek, jak je naznačeno na obr. (1.4) 8a, kde jednotlivé kovalentní vazby (dvojspiny) jsou zakresleny ve tvaru tyčinek, aby byla zdůrazněna pevnost této vazby. Na obr. (1.4) 8b jsou tyto vazby v rovinném diagramu

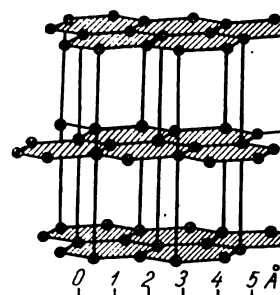
vyznačeny dvojitými šipkami a jednoduchými šipkami volné valenční elektrony. Dokonalý diamantový krystal je nevodivý, je-li však pravidelnost jeho struktury porušena, může se stát vodivým. Toho se užívá u diamantového počítače, který je význačným představitelem krystalových počítačů. (Viz čl. 8.4.3.)

Uhlíkové atomy mohou vytvořit také mřížku *šesterečnou* (hexagonální), jejíž uspořádání je zřejmé z obr. (1.4) 9. Tato mřížka byla zjištěna u tuhy (grafitu), v níž jsou atomy C těsně seskupeny v šestiúhelnících, které však tvoří navzájem dosti vzdálené rovnoběžné roviny. Kohezní energie tuhy je stejná jako u diamantu, a proto soudíme, že sousední atomy v téže rovině jsou poutány kovalentní vazbou. Naproti tomu je vazba mezi atomy různých rovin volnější, podobně jako u kovů. Tyto roviny se proto snadno přesouvají, což vysvětluje nepatrnou tvrdost a „mazivost“ grafitu. Volná vazba mezi těmito rovinami

Tabulka (1.4) I

Valenční krystaly

Krystal	Mřížková konstanta [Å]	Kohezní energie [$10^6 \text{ J} \cdot \text{kmol}^{-1}$]	Tvrdost relativní	Specifický odpor [Ωm]
diamant C	1,54	713	10	10^{12}
tuha C	1,42		0,5	$2 \cdot 10^{-3}$ při 0 °C
bór B		482	9,5	10^{16}
křemík Si	2,35	357		$8 \cdot 10^{-4}$
germanium Ge	2,43	357		$9 \cdot 10^{-4}$
šedý cín Sn	2,80	330		
karbid křemíku SiC	1,89	1 187	9	
kysličník křemičitý SiO ₂		1 701	7	10^{12}



Obr. (1.4.) 9.
Šesterečná mřížka
grafitu

umožňuje také značnou elektronovou vodivost tuhy, která na rozdíl od vodivosti kovů stoupá s rostoucí teplotou. Proto lze tuhu klasifikovat jako přechodový typ mezi valenčními krystaly a kovy.

V tab. (1.4) I jsou uvedeny nejdůležitější valenční krystaly a některé jejich konstanty. Křemík, germanium a šedý cín patří vlastně mezi polovodiče. První dva prvky mají stejnou mřížku jako diamant.

Některé látky mohou krystalovat v různých modifikacích, jejichž struktura závisí na podmínkách krystalizace, zejména na tlaku a teplotě. Je možno např. uměle vyrobit diamanty vhodné pro brusné kotouče, necháme-li uhlík krystalovat za velmi vysokého tlaku 70 000 atmosfér. Podobně lze získat kubickou modifikaci nitridu bóru BN krystalováním při tlaku 54 000 atmosfér. Při takových *ultravysokých* tlacích může také vzniknout kovová modifikace germania i jiné prakticky významné látky.

Iontové krystaly

Mřížka iontového krystalu je průnikem mřížky složené z kladných iontů a mřížky složené ze záporných iontů, které jsou k sobě poutány elektrostatickými *silami Coulombovými*. Jsou to především soli vysoce elektropozitivních kovů a vysoce elektronegativních prvků, jako jsou prvky halové, kyslík, síra a selen.

Kovy

Kovy jsou *polykrystalické látky*, složené z mikroskopických krystalků, které jsou spolu pevně spojeny. Jsou přitom seskupeny náhodně, tj. jejich vzájemná orientace je neuspo-

řádaná. Lze ovšem vytvořit takové krystalové jednotice, tj. *monokrystaly* (jednokrystaly), u nichž jsou mikroskopické krystalky seřazeny pravidelně, takže tvoří jediný krystal ve tvaru vlákna (drátu). Mřížka elementárních krystalků je složena z kladných iontů kovů, poutaných navzájem tzv. *kovovou vazbou*, kterou zprostředkují uvolněné valenční elektrony. Kovy se vyznačují velkou tepelnou a elektrickou vodivostí. Mohou to být buď *ryzí kovy* (jednoatomové), které obsahují jen jediný prvek (až na jisté nevyhnutelné „nečistoty“), nebo *slitiny*, které jsou složeny ze dvou nebo několika různých prvků.

Polovodiče

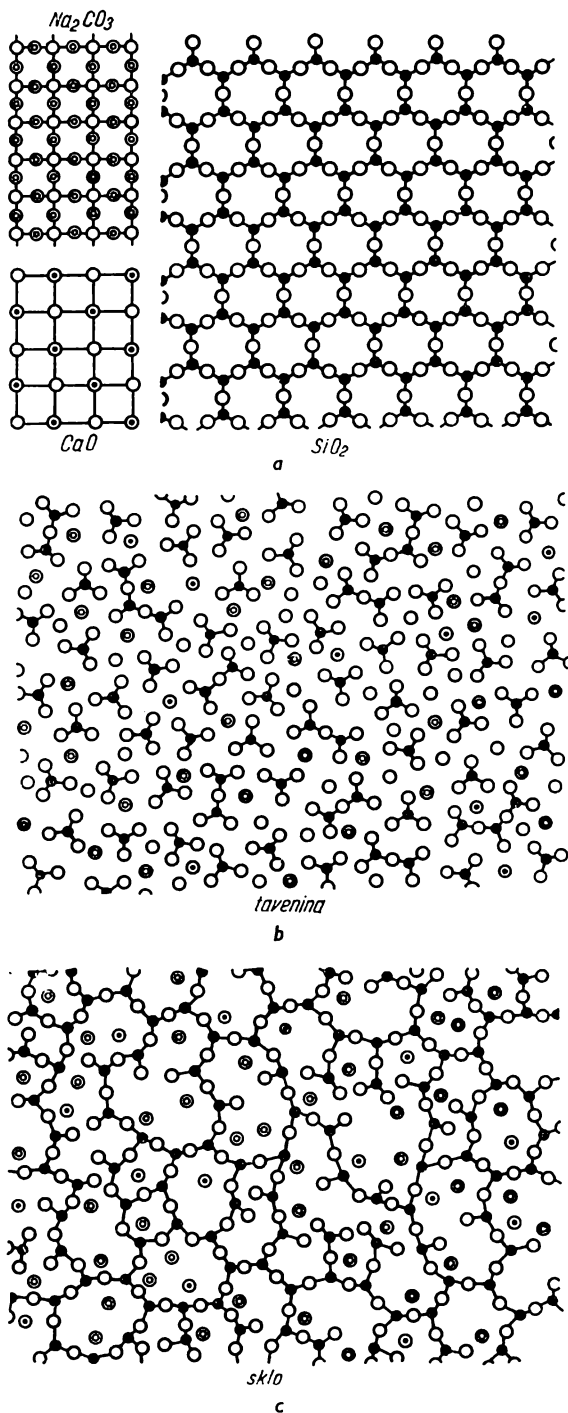
Polovodiče jsou látky, jejichž elektronová vodivost je zanedbatelná při velmi nízkých teplotách a roste se stoupající teplotou. Vodivost krystalů mohou změnit i nepatrné příměšeniny, tj. znečištění krystalu cizími atomy nebo ionty. Takovým atomům říkáme *nečistota* nebo *neryzost*. Kromě toho mohou i nepravidelnosti ve stavbě mřížky, které lze nazvat poruchami krystalu, mít vliv na vodivost polovodičů.

Z valenčních krystalů jsou známy jako polovodiče křemík, germanium, telur a selen. První dva prvky jeví značný růst vodivosti sestoupající neryzostí. Z iontových krystalů jmenujeme halové soli AgI, CuI, kysličníky CuO, ZnO, BaO, CoO, NiO, FeO, Fe₂O₃ atd., siřičky PbS, Ag₂S, CdS a konečně Ag₂Se.

O vlastnostech polovodičů a jejich praktickém použití pojednáme v částech 5.3.4 až 5.3.7 a jejich stručnou teorii podáme v čl. 7.5.5.

Uvedený přehled hlavních typů krystalů doplníme stručným popisem struktury látek amorfních čili sklovitých.

Smísíme-li několik různých krystalických látek a roztavíme je, vznikne tavenina, v níž je vazba mezi jejich atomy uvolněna a krystalická struktura rozrušena. Necháme-li taveninu dosti zvolna vychladnout, vytvoří se některé



Obr. (1.4) 10. Vznik struktury sodného skla při výrobě

složky s pravidelnou krystalickou strukturou. Zchladíme-li však taveninu rychle, molekuly „zamrznou“ v metastabilním stavu a vznikne „beztvará“ sklovitá látka se značně porušenou pravidelností struktury.

Jako příklad uvádíme sklo, které se vyrábí roztavením uhličitanu sodného Na_2CO_3 , kysličníku vápenatého CaO a kysličníku křemičitého SiO_2 . Jejich poměrná množství jsou zřejmá z dvojrozměrných schematických diagramů na obr. (1.4) 10a. Zahřátím se rozpadnou krystalové mřížky na malé skupiny molekul s náhodným uspořádáním jako v kapalinách [obr. (1.4) 10b]. Rychlým ochlazením se vytvoří sodné sklo s nepravidelnou strukturou znázorněnou na obr. (1.4) 10c.

2.0. Pohyb, prostor a čas

Pozorujeme-li přírodu, která nás obklopuje a jejíž součástí jsme, zjišťujeme, že představuje obraz ustavičné změny a pohybu. Kromě jiných složitějších forem pohybů a změn matérie, které zkoumá fyzika a jiné přírodní vědy, pozorujeme především u těles jejich vzájemné přemísťování. Tomuto druhu pohybu říkáme *mechanický pohyb*. Příslušný fyzikální obor, který se zabývá touto formou pohybu, ať už jde o změny vzájemné polohy těles jako celků, nebo jednotlivých částí těles, a jeho příčinami, které spatřujeme v jiných tělesech působících na sledované těleso silami, nazývá se *mechanika*.

Mluvíme-li o pohybu (v dalším výkladu jím budeme rozumět jenom mechanický pohyb), máme zcela přirozeně na mysli pohyb jednoho tělesa vzhledem k jinému tělesu. Podle volby tělesa, k němuž pohyb vztahujeme (tzv. *vztažného tělesa*), jeví se nám pohyb sledovaného tělesa různě. Jde-li např. o pohyb zavazadla v jedoucím vozidle, pak je toto zavazadlo v klidu vzhledem k vozidlu, je-li vozidlo vztažným tělesem, je však v pohybu vzhledem k zemskému povrchu, zvolíme-li za vztažné těleso Zemi. Sledujeme-li pohyb zavazadla z našeho hlediska, sami se nějak pohybující třeba v jiném vozidle, pozorujeme zase jiný pohyb. Vlastnost pohybu, záležející v tom, že jeho průběh závisí na volbě vztažného tělesa, nazýváme *relativností pohybu*. Je to objektivní vlastnost každého pohybu, a bylo by nesprávné vyvozovat z ní závěr, že by snad volbou vztažného tělesa, závislou na vůli pozorovatele, pohyb sám o sobě nějak na pozorovateli závisel. To, co pozorujeme u zúčastněných objektivně existujících těles, na která zrovna soustřeďujeme pozornost, je jejich skutečný na pozorovateli nezávislý pohyb, který jenom vzhledem k jednomu tělesu probíhá tak a vzhledem k jinému tělesu zase jinak.

Každý jev, a tedy i mechanický pohyb těles, izolujeme-li jej ze všeobecné vzájemné souvislosti s ostatními jevy, které s ním dohromady tvoří jednotný přírodní proces, má svou příčinu. Úkolem vědy je nejen jevy popisovat, ale objevit především jejich příčiny a vztahy mezi nimi a příslušnými účinky jakožto výsledky jejich působení. To je také obsahem fyzikálních zákonů, takže vzhledem k relativnosti pohybů měli bychom zákony mechaniky, vyjadřující vztahy mezi materiálními objekty z hlediska jejich vzájemného mechanického pohybu, formulovat tak, aby odrážely příslušnou zákonitost bez ohledu na to, které těleso považujeme za vztažné. Z tohoto stanoviska vychází *Einsteinova obecná teorie relativity*, která by měla proto tvořit východisko našich následujících úvah o pohybu, kdybychom se odvážili čistě logického přístupu k souboru problémů, který se nám při výkladu mechaniky nabízí. Matematická obtížnost této pozoruhodné teorie bohužel však brání zvládnout celou řadu konkrétních problémů; jenom velmi speciální úlohy lze vyšetřovat podrobně, a proto lze těžko činit celkové závěry, které se pak pochopitelně stávají předmětem vědeckého sporu.

Relativnostní mechanika jakožto určitá etapa vývoje fyzikálního poznání nerodí se z ničeho, ale vyrůstá ze své předchůdkyně, tj. z *klasické mechaniky Newtonovy*. Nezavrhuje všechny závěry, k nimž klasická mechanika dospívá, nýbrž dívá se na ni jako na uspokojivý obraz mechanických dějů jen určitého typu, totiž pohybů těles složených z velkého počtu atomů (makroskopických těles) a přístupných živému smyslovému nazírání, jejichž rychlosti jsou malé proti rychlosti šíření světla. Takové pohyby mají velký praktický význam, vyskytují se v nejrůznějších technických zařízeních, bez nichž by dnešní společenský pokrok byl nemyslitelný. Štěstí tedy zajisté za to se jimi zvlášť zabývat, k čemuž ovšem vystačíme s vývoody klasické mechaniky. Cesta přes klasickou mechaniku usnadní nám kromě toho také plné pochopení principů, z nichž vychází teorie relativnosti, kterou výklady o mechanickém pohybu zakončíme.

Klasická mechanika předpokládá při formulaci svých zákonů jistou základnu společnou všem mechanickým pohybům, kterou Newton nazval *absolutním prostorem*. K tomuto pojmu dojdeme asi touto úvahou:

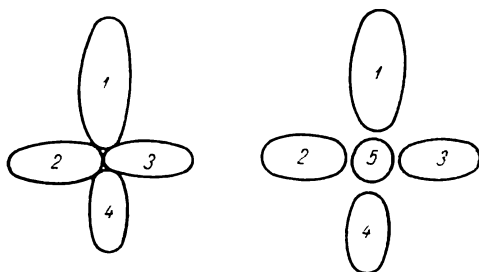
Pozorujeme-li předměty a tělesa kolem nás, zjišťujeme především, že jsou navzájem jistým způsobem rozmístěna, že každý předmět zaujímá mezi ostatními tělesy jistou polohu. Tělesa se při tom mohou navzájem dotýkat nebo mohou být od sebe vzdálena [obr. (2.0) 1]. V druhém případě je mezi nimi mezera umožňující vložit mezi ně další těleso (5 na obrázku), aniž by bylo třeba na okolních tělesech něco měnit. Do mezery můžeme vložit to či ono těleso a zase je vyjmout, při čemž se mezera zase objeví, takže se jeví jako něco samostatného, co existuje nezávisle na tělesech, jimiž ji lze vyplnit. Představíme-li si, že každé těleso je nakonec umístěno v takové mezeře mezi ostatními tělesy, můžeme soubor všech takových mezer myšlenkově oddělit od těles, jež je tvoří, a pokládat tento soubor za samostatnou fyzikální realitu, jejímž odrazem je právě pojem *prostoru*. Takto chápaný prostor jeví se nám tedy jako objektivně existující kontinuum, v němž jsou rozmístěna tělesa, z nichž každé z něho zaujímá určitou část.

Přeneseme-li nějaké těleso např. tvaru krychle na různá místa v prostoru, nepozorujeme normálně, že by se tvar tělesa a jeho rozměry při tomto přenášení nějak změnily (odmyslíme-li si ovšem různá působení jiných těles na přenášené těleso). Z toho usuzujeme, že všechna místa v prostoru jsou navzájem rovnocenná, že tedy nejsou privilegovaná místa, která by se něčím vyznačovala proti jiným místům v prostoru, a proto mluvíme o jeho *homogenitě*. Při tom nezáleží ani na směru posouvání zkušebního tělesa, všechny směry v prostoru jsou rovnocenné, prostor se nám tedy jeví též jako *izotropní*. Protože nepozorujeme, že by fyzikální vlastnosti těles měly na něj nějaký vliv, můžeme si jej představit jako něco neměnného a nezávislého na fyzikálním dění a přisoudit mu charakter absolutnosti. Homogenní, izotropní a neměnný prostor, který jsme na základě běžných pozorování myšlenkově oddělili od materiálních objektů, které jej ve skutečnosti tvoří, to je Newtonův absolutní prostor.

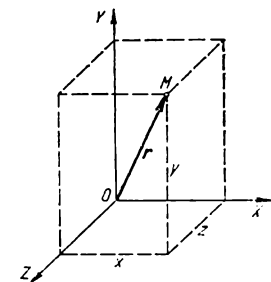
Dalším základním pojmem je *čas*, který vyjadřuje posloupnost vývoje materiálních dějů, jejich trvání, vzájemnou oddělenost jejich jednotlivých stavů apod. Také čas se nám jeví jako něco samostatného a nezávislého na pohyblivých se tělesech, který všude plyne stejně, a proto také jemu klasická mechanika přisuzuje absolutní vlastnosti jako prostoru. Nepozorujeme skutečně, že by např. čas měřený hodinami v jedoucím rychlíku plynul jinak než čas na některém nádraží.

Pojmy absolutní prostor a čas je nutno chápat jako fyzikální abstrakce, které jsou jako jiné abstrakce nutným krokem v procesu poznání. Relativní samostatnost jednotlivých stránek a vlastností předmětů a jevů umožňuje soustředit pozornost jen na některé z nich a v procesu poznání je oddělit a abstrahovat od ostatních. Tak známé pojmy bod, přímka a rovina, bez nichž by nebylo možné vybudovat geometrii, nejsou odrazem celé mnohotvárné rozprostraněnosti materiálních objektů do délky, šířky a výšky, která je každému z nich vlastní, ale jako vědecké abstrakce odrážejí jen určité stránky reálně existujících těles, které jsou hlavní a podstatné pro příslušné závěry.

Zavedení pojmu absolutního prostoru jakožto základny mechanického dění nezabavuje však klasickou mechaniku nutnosti použít vztažného tělesa k vyjádření pohybů dalších těles v prostoru a času. Ani klasická mechanika nemůže popsat pohyb jednoho tělesa, aniž by k tomu nepotřebovala druhého tělesa, na něž se pohyb prvního tělesa vztahuje. V dalším výkladu ale poznáme, že k formulaci principů mechaniky se nehodí každé těleso jako vztažné, nýbrž jen takové, které je v klidu nebo koná zcela určitý pohyb (přímočarý rovnoměrný). Ptáme-li se, vzhledem k čemu se má tento klid nebo speciální pohyb vztahovat, pak klasická mechanika postuluje, že právě vzhledem k absolutnímu prostoru. Zde je důvod, proč se tato mechanika neobejde bez pojmů absolutní prostor a čas, neboť aby se stala obecnou mechanikou, jejíž závěry platí nejen pro jisté zvolené vztažné těleso (např. pro Zemi, která se z hlediska názornosti jako takové nejvíce nabízí), ale pro celý vesmír, potřebuje společného jmenovatele pro veškeré dění v něm.



Obr. (2.0) 1. K výkladu pojmu prostor



Obr. (2.0) 2. Poloha bodu M v souřadnicové soustavě, určená souřadnicemi x , y a z a průvodičem r

K číselnému vyjádření polohy tělesa vzhledem ke vztažnému tělesu používáme *souřadnicové soustavy (systém)* pevně spojené se vztažným tělesem. Tuto soustavu tvoří tři roviny, které vztažné těleso vykazuje a které pro jednoduchost většinou volíme navzájem kolmé; protínají se v pravoúhlých *souřadnicových osách* X , Y a Z [obr. (2.0) 2]. Průsečík O těchto os, ležící v některém bodě vztažného tělesa, nazývá se *počátek vztažné souřadnicové soustavy*. Taková souřadnicová soustava je např. určena stěnami naší místnosti, v jejíž jednom rohu je její počátek. Prostor geometricky vytčený souřadnicovou soustavou nazývá Newtonova mechanika *relativním prostorem* a považuje ho za míru nebo pohyblivou část neměnného prostoru absolutního.

Poloha zvoleného bodu M nějakého tělesa ve vytčené souřadnicové soustavě, tedy vzhledem k vztažnému tělesu, je pak úplně určena třemi souřadnicemi x , y a z , udávajícími jeho vzdálenosti od tří souřadnicových rovin. Tyto souřadnice můžeme považovat za pravoúhlé průměty vektoru r [obr. (2.0) 2], nazvaného *polohový vektor (průvodič, radius-vektor)*, který směřuje z počátku O souřadnicové soustavy do polohy bodu M a jehož délka je dána vzdáleností této polohy od počátku O . Místo tří údajů pomocí souřadnic lze tedy symbolicky vyjádřit polohu bodu vzhledem ke vztažnému tělesu jednou vektorovou veličinou — průvodičem r , zahrnujícím v sobě tyto tři údaje.

Mechanika dělí se obvykle na *kinematiku* (geometrii pohybu), která se zabývá pohybem těles bez zřetele k jeho příčinám, a na *dynamiku*, která studuje souvislost mezi pohybem a silami působícími na vyšetřované těleso. Součástí dynamiky je *statika*, která se zabývá vyšetřováním rovnováhy sil. Protože se účinky sil na tělesa různého skupenství projevují různým způsobem, dělíme mechaniku z tohoto hlediska na *mechaniku pevných těles (geomechaniku)*, *mechaniku kapalin (hydromechaniku)* a *mechaniku plynů (aeromechaniku)*.

2.1. Kinematika hmotného bodu

2.1.1. Pohyb hmotného bodu

V předešlé kapitole jsme poznali, že reálná tělesa mají částicovou strukturu, skládající se z atomů a molekul. Tyto částice jsou ve srovnání s tělesy, která kolem sebe pozorujeme, velmi malé, a proto nemusíme při studiu vzájemného přemísťování těles k jejich velmi malému, i když konečnému objemu přihlížet a můžeme je považovat za pouhé body. Těleso si tedy lze představit jako soustavu bodů, z nichž každý při pohybu tělesa opisuje



Obr. (2.1) 1. Dráhy bodů při pohybu koule

v prostoru nějakou křivku, spojující všechna místa, jimiž příslušný bod při pohybu probíhá. Tyto křivky nazýváme *drahami bodů*. Pohyb tělesa je tedy charakterizován soustavou drah jeho jednotlivých bodů, které se ovšem navzájem mohou lišit, jak je vidět např. na obr. (2.1) 1, kde jsou nakresleny dráhy tří bodů koule, konající podobný pohyb jako Země kolem Slunce. Uvědomíme-li

si, že kromě pevných těles jsou také ještě kapaliny a plyny, které ve fyzice také zahrnujeme do pojmu tělesa, dojdeme k názoru, že úplný popis pohybu tělesa konečných rozměrů je možný jen pomocí drah jeho bodů; pohyb by nebyl úplně určen popisem části prostoru zasaženého pohybujícím se tělesem. Na obr. (2.1) 1 by tato část měla tvar prstence (anuloidu), ať se koule kolem své osy otáčí nebo neotáčí.

V dalším výkladu mechaniky nezůstaneme však u pouhého popisu pohybu a budeme hledat příčinu, proč někdy pozorujeme ten, jindy zase onen typ pohybu. Tato příčina bude zřejmě záležet ve vzájemném působení těles, která v přírodě existují, a proto z hlediska příčinné souvislosti mechanických jevů je nutno bodům, pomocí nichž popisujeme pohyb těles, přiřadit vlastnosti, které vystupují do popředí při zkoumání souvislosti mezi příčinou pohybu a pohybem samým. To vyjadřujeme tím, že místo o geometrických bodech, což by k pouhému popisu pohybu stačilo, mluvíme o *hmotných bodech*.

Při některých pohybech těles máme co činit s rozměry, proti nimž jsou vlastní rozměry tělesa nepatrné. Potom můžeme i celé makroskopické těleso nahradit hmotným bodem. Kdybychom měli např. pohyb Země kolem Slunce na obr. (2.1) 1 nakreslit ve správném měřítku, pak by při poloměru oběžné dráhy 10 m musela mít obíhající Země průměr jen asi 1 mm. Je zřejmé, že by pak úplně zmizely kvalitativní rozdíly mezi drahami jednotlivých bodů obíhající Země a vynikl by jen povšechný pohyb po velmi přibližně kruhové dráze, který je prakticky úplně určen pohybem středu Země. Zmíněný prstence omezující prostor, v němž se Země pohybuje, jeví se tedy ve srovnání s průměrem jen jako pouhá kružnice, která dostatečně vystihuje charakter pohybu Země kolem Slunce. Záleží tedy na přesnosti, jíž chceme při vyšetřování pohybu dosáhnout, a na úloze, kterou máme řešit, můžeme-li pohybující se těleso nahradit hmotným bodem. *Hmotný bod je tedy myšlený objekt, který z hlediska vzájemného působení s jinými hmotnými body má vlastnosti reálného tělesa, u něhož však jsou pomínuty znaky rozprostraněnosti, prostorové orientace, tvaru a všech ostatních kvalit, které se při vyšetřování mechanického pohybu neprojevují.*

Geometricky je dráha, kterou pohybující se hmotný bod v prostoru opisuje, určena vztahy mezi souřadnicemi x , y a z jednotlivých míst, jimiž bod při pohybu probíhá, např. jako průsečnice dvou ploch $F(x, y, z) = 0$ a $G(x, y, z) = 0$. Tyto vztahy určují tvar dráhy, která může být přímka, koná-li bod pohyb přímočarý, rovinná křivka, např. elipsa nebo křivky na obr. (2.1) 1 apod., nebo obecně prostorová křivka, např. šroubovice.

Nestačí nám však poznatek, že hmotný bod M přešel po jisté dráze z jedné polohy

do jiné, nýbrž zajímá nás otázka, za jaký čas se tak stalo a kde ve zvoleném okamžiku se hmotný bod nacházel. Ke třem proměnným souřadnicím, např. x, y, z , nebo s nimi ekvivalentnímu polohovému vektoru $\mathbf{r}$, které určují okamžitou polohu bodu vzhledem k zvolené soustavě souřadnic, přistupuje jako další proměnná čas t . Přecházíme tak z oblasti geometrie do oblasti *kinematiky*, vyšetřující časový průběh pohybu hmotného bodu. Tento pohyb [obr. (2.1) 2] bude tedy úplně popsán, známe-li pro každý čas t jeho polohu, určenou okamžitými souřadnicemi x, y, z , jež jsou průměty polohového vektoru bodu, čili jsou-li dány souřadnice jako spojitě funkce času

2.1 (1)

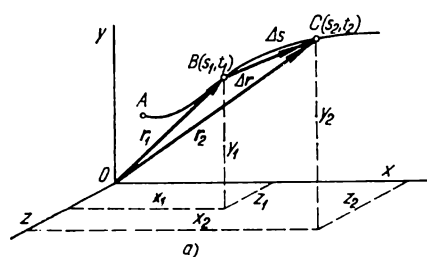
$$\boxed{x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),}$$

nebo průvodič $\mathbf{r}$ jako spojitá vektorová funkce času, kterou je zvykem psát ve tvaru

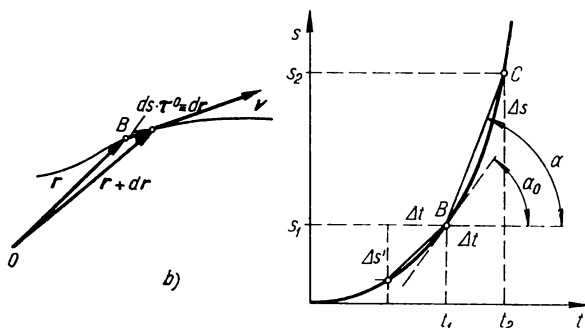
2.1 (2)

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t);}$$

nezávisle proměnnou t nazýváme *skalárním argumentem*. Třemi rovnicemi 2.1 (1) je křivka dráhy dána parametricky. Parametrického vyjádření se používá i v geometrii, kde však parametr t má jen význam pomocné proměnné, která je pouze prostředkem k jednomu



Obr. (2.1) 2. Křivočarý pohyb hmotného bodu



Obr. (2.1) 3. Závislost délky dráhy na čase

z možných způsobů analytického určení křivek. Naproti tomu v kinematice má parametr t základní význam času a rovnice 2.1 (1) nebo s nimi rovnocenná rovnice 2.1 (2) jsou jediným úplným popisem pohybu hmotného bodu.

K názornému popisu časového průběhu pohybu hmotného bodu zavádí kinematika dvě nové veličiny, jimiž jsou *rychlost* a *zrychlení*.

Byl-li pohybující se hmotný bod v čase t_1 v poloze B [obr. (2.1) 2] a v čase t_2 v poloze C, proběhl v době $t_2 - t_1 = \Delta t$ jistou obecně křivočarou dráhu, jejíž délka měřená podél dráhy je $s_2 - s_1 = \Delta s$. jsou-li s_1 a s_2 vzdálenosti bodů B a C od libovolného bodu A na dráze, měřené podél dráhy. Délku dráhy $\Delta s = 26$ km bychom např. četli na počítadle tachometru automobilu jedoucího z Českého Brodu, vzdáleného od Prahy $s_1 = 52$ km, do Kolína, vzdáleného od Prahy $s_2 = 78$ km. Podíl

2.1 (3)

$$v_{12} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

určuje *střední rychlost* bodu mezi polohami B a C. Tento podíl obecně závisí na velikosti zvoleného časového intervalu Δt , jak snadno seznáme, znázorníme-li si okamžitou délku s uražené dráhy měřenou od místa A podél dráhy, v závislosti na čase t [obr. (2.1) 3]. Toto

znázornění nazýváme *časovým rozvinutím* neboli *grafem pohybu*. Podíl $\Delta s/\Delta t$ geometricky udává směrnici sečny ($\operatorname{tg} \alpha$) v diagramu $s-t$. Zmenšujeme-li interval Δt , zmenšuje se také Δs , tj. poloha bodu C blíží se poloze B a zároveň úhel α na obr. (2.1) 3 se blíží jisté mezní hodnotě α_0 , jehož tangenta je směrnici tečny křivky $s=f(t)$ v okamžiku t_1 . Jiné hodnoty než α_0 úhel α nabýt nemůže, ať se okamžiku t_1 blížíme z pravé nebo z levé strany. Při neomezeném zmenšování intervalu Δt blíží se tedy i příslušná délka Δs uražené dráhy nule, podíl obou veličin blíží se však přitom mezní hodnotě, limitě, která má konečnou velikost,*) rovnou $\operatorname{tg} \alpha_0$ určující *okamžitou rychlost* v hmotného bodu v okamžiku t_1 .

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Tato limita, která definuje novou závislost na čase, nazývá se *diferenciální podíl*, *derivace funkce podle času* nebo též *časová změna* příslušné veličiny (zde délky dráhy), a protože $s=f(t)$, píšeme jednodušeji

2.1 (4)

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}f(t) = \dot{s}.$$

Okamžitá rychlost (přesněji jen její velikost, jak za chvíli poznáme), je tedy určena podílem elementárního přírůstku délky dráhy ds a elementárního přírůstku doby dt čili první derivací dráhy podle času. Bývá zvykem označovat derivaci podle času tečkou nad písmennou značkou příslušné veličiny.

Jednotkou rychlosti je jednotka délky dělená jednotkou času, tj. $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ nebo $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ apod. Číselně je tedy velikost rychlosti rovna délce dráhy, kterou by urazil hmotný bod např. za sekundu, kdyby během tohoto časového intervalu rychlost měla stálou velikost. Slovem číselně se má zdůraznit, že rychlost a délka dráhy nejsou totéž, protože nemají stejný *rozměr* neboli *dimenzi*, která obecně vyjadřuje vztah fyzikální veličiny k základním veličinám používané měrové soustavy.

Polohy B a C , jimiž hmotný bod na své dráze prochází, jsou vzhledem k zvolené soustavě souřadnic určeny také průvodiči $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$, [obr. (2.1) 2], přičemž při přechodu z polohy B do C se změní průvodič $\mathbf{r}_1$ o $\Delta \mathbf{r}$, tedy

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r},$$

podobně jako délka dráhy v poloze C je $s_2 = s_1 + \Delta s$. Podle pravidel vektorového sčítání má přírůstek $\Delta \mathbf{r}$ průvodiče $\mathbf{r}$ v časovém intervalu Δt konečné velikosti směr sečny ke křivočaré dráze mezi body B a C , přejde však při neomezeném zmenšování časového intervalu (tj. neomezeným přiblížením se bodu C k bodu B) v elementární přírůstek $d\mathbf{r}$, který spadá do dráhy a má touž velikost jako elementární délka dráhy ds v okolí bodu B , $|d\mathbf{r}| = ds$. Délka dráhy při křivočarém pohybu není ovšem vektor, naproti tomu elementární délka dráhy je elementární vektor, který má též směr jako tečna k dráze v příslušném místě. Zavedeme-li v tomto místě jednotkový vektor $\boldsymbol{\tau}^0$ ve směru tečny tak, aby mířil ve směru pohybu, pak elementární přírůstek dráhy můžeme jako vektor vyjádřit ve tvaru $ds \cdot \boldsymbol{\tau}^0$. Z geometrického názoru pak plyne, že elementární přírůstek $d\mathbf{r}$ průvodiče má nejen touž velikost jako elementární přírůstek ds dráhy, ale je s ním shodný i co do směru, tedy

$$d\mathbf{r} \equiv ds \cdot \boldsymbol{\tau}^0.$$

*) Např. podíl dvou velmi malých čísel 10^{-8} a 10^{-9} dává číslo 10, které je mnohonásobně větší než každé z obou malých čísel.

Násobíme-li nyní vztah $v = ds/dt$, jímž je určena velikost okamžité rychlosti, jednotkovým vektorem τ^0 , dostaneme vektor

2.1 (5)

$$\mathbf{v} = v\tau^0 = \frac{ds}{dt}\tau^0 = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}},$$

kteřý je zřejmě vektorem okamžité rychlosti hmotného bodu v příslušném místě dráhy. Docházíme tak k důležitému výsledku, že *okamžitá rychlost $\mathbf{v}$ je vektor, který má směr tečny ke křivočaré dráze v místě, v němž okamžitou rychlost určujeme, a míří ve směru pohybu.*

Nyní je teprve zřejmý význam průvodiče $\mathbf{r}$. Zatímco délka dráhy s , která obecně není vektorem, umožňuje určit jenom velikost v okamžité rychlosti hmotného bodu, lze z průvodiče $\mathbf{r}$, který je sám vektorem, určit okamžitou rychlost nejen co do velikosti, ale též co do směru. Podle 2.1 (5) je úplně určena první derivací průvodiče podle času.

Průvodič $\mathbf{r}$ má složky $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$ a $z\mathbf{k}$ ve směru os zvolené souřadnicové soustavy, k níž pohyb vztahujeme, a můžeme jej vyjádřit rovnicí

2.1 (6)

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

kde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jsou stálé jednotkové vektory ve směru souřadnicových os. Derivujeme-li tuto rovnici podle času, dostaneme

2.1 (7)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}.$$

V této rovnici mohou výrazy $(dx/dt)\mathbf{i}$, $(dy/dt)\mathbf{j}$ a $(dz/dt)\mathbf{k}$ na pravé straně znamenat pouze rychlosti, jakými pravouhlé průměry pohybujícího se hmotného bodu do směru souřadnicových os postupují ve směru těchto os, tj. jsou to *složky okamžité rychlosti ve směru os X , Y a Z* . Velikosti těchto složek, zvané *průměty okamžité rychlosti do směrů souřadnicových os*, pak jsou určeny vztahy

2.1 (8)

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Okamžitou rychlost lze tedy co do směru i velikosti vyjádřit ve tvaru

2.1 (9)

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}.$$

Známe-li průměty 2.1 (8) okamžité rychlosti, můžeme zjistit velikost rychlosti podle Pythagorovy věty

2.1 (10)

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

a směrové kosiny

2.1 (11)

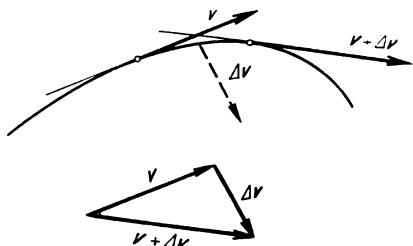
$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}.$$

Význam rovnice 2.1 (9) je hlubší, než se zdá na první pohled. Říká, že je možné nahradit rychlost hmotného bodu třemi rychlostmi v různých směrech (v našem případě navzájem kolmých). Nemá-li to vést ke sporům se skutečnými jevy, musí být dovolen i obrácený postup, tj. musí být možno nejen rozkládat rychlost bodu na složky, ale i podle pravidel vektorového sčítání skládat různé rychlosti příslušné témuž bodu. Zkušenost nasvědčuje, že tomu tak opravdu je. *Pravidlo o skládání rychlostí* a rovněž pohybů považujeme však za *axióm*, tj. nedokazatelné pravidlo, jehož oprávněnost vyplývá jedině ze skutečnosti:

ač se ho nesčetněkrát použilo, nebylo dosud nikdy v neshodě se skutečným průběhem pozorovaných jevů. Používá se ho s výhodou k zjednodušování pohybů, neboť obecně křivočarý pohyb můžeme zjednodušit tak, že si jej představujeme složen ze tří na sebe kolmých pohybů přímočarých, tj. $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ a $z = f_3(t)$, jež souborně jsou vyjádřeny rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Kdyby se při pohybu měnila pouze velikost rychlosti, a nikoli její směr, byl by to pohyb přímočarý, bod by se pohyboval po přímce. Dráha by byla dána rovnicí přímky v prostoru. Mění-li rychlost svůj směr, vznikne pohyb křivočarý. Obecně mění se přitom také velikost rychlosti. V časovém intervalu Δt změni se vektor $\mathbf{v}$ na $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$. Podle pravidla vektorového sčítání víme, že tento nový vektor rychlosti, který se od prvního liší jak velikostí, tak i směrem, dostaneme, jestliže k vektoru $\mathbf{v}$ vektorově přičteme $\Delta \mathbf{v}$ [obr. (2.1) 4].

Dělíme-li tento přírůstek rychlosti $\Delta \mathbf{v}$ časem Δt , v němž tato změna rychlosti nastane, dostaneme *průměrné zrychlení* $\Delta \mathbf{v}/\Delta t$ a *okamžité zrychlení*



Obr. (2.1) 4. Změna vektoru rychlosti při křivočarém pohybu

2.1 (12)

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

protože $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$.

Při křivočarém pohybu bývá vždy zrychlení, i když se velikost rychlosti nemění. Změna směru rychlosti je provázána vždy nějakým zrychlením.

Zrychlení je opět vektorem, jehož směr je totožný se směrem přírůstku rychlosti $d\mathbf{v}$ (nesouhlasí tedy obecně se směrem dráhy). Můžeme je podobně, jako jsme to učinili u rychlosti, rozložit do složek $a_x \mathbf{i}$, $a_y \mathbf{j}$, $a_z \mathbf{k}$ rovnoběžných se souřadnicovými osami, přičemž průměty okamžitého zrychlení do těchto os jsou určeny vztahy

$$2.1 (13) \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2},$$

kde dv_x , dv_y a dv_z jsou průměty vektoru přírůstku rychlosti $d\mathbf{v}$. Velikost zrychlení je pak

$$2.1 (14) \quad a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2}.$$

Svírá-li vektor $\mathbf{a}$ s osou X úhel α_1 , s osou Y úhel β_1 a s osou Z úhel γ_1 , pak

$$2.1 (15) \quad \cos \alpha_1 = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta_1 = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{a_z}{a}.$$

Vektorově tedy můžeme psát

$$2.1 (16) \quad \mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

Jednotkou zrychlení je jednotka rychlosti dělená jednotkou času, tedy $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$ apod.

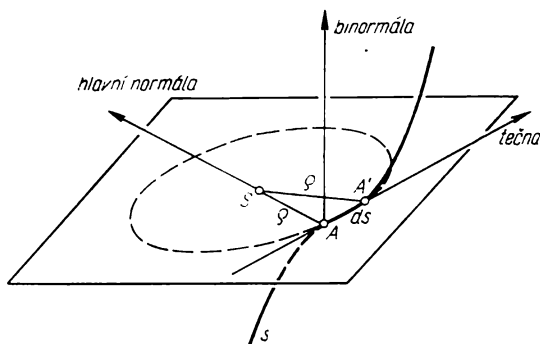
Bývá výhodné rozložit zrychlení $\mathbf{a}$, které má směr přírůstku $d\mathbf{v}$, do dvou na sebe kolmých složek, z nichž jedna má směr tečny ke křivce jako okamžitá rychlost a druhá má směr hlavní normály ke křivce. U prostorové křivky leží tečna a hlavní normála v tzv. *oskulační*

rovině, která je určena třemi soumезnými body na křivce nebo středem křivosti S a dvěma soumезnými body AA' [obr. (2.1) 5]. Malý oblouček dráhy ds , který bod opíše za elementární časový interval dt , můžeme totiž nahradit částí tzv. *kružnice křivosti* se středem v S , zvaném *střed křivosti* [obr. (2.1) 5], která má poloměr ρ .

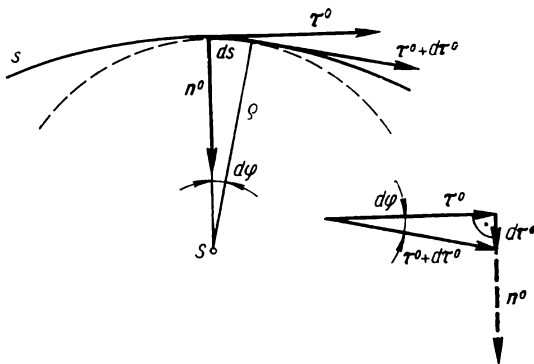
K odvození obou zmíněných složek zrychlení zavedme jednotkový vektor τ^0 ve směru tečny a jednotkový vektor n^0 ve směru hlavní normály, mířící do středu křivosti S dráhy ve vyšetřovaném místě [obr. (2.1) 6]. Okamžité zrychlení $\mathbf{a}$ dostaneme derivací okamžité rychlosti $\mathbf{v} = v\tau^0$ podle času; přitom nutno pamatovat, že při křivočarém pohybu se mění směr jednotkového vektoru τ^0 , takže je třeba jej také zahrnout do derivace; bude tedy

$$2.1 (17) \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \tau^0 + v \frac{d\tau^0}{dt} = \frac{dv}{dt} \tau^0 + v \frac{ds}{dt} \frac{d\tau^0}{ds} = \frac{dv}{dt} \tau^0 + v^2 \frac{d\tau^0}{ds}.$$

Přitom jsme provedli úpravu $v \frac{d\tau^0}{dt} = v \frac{d\tau^0}{dt} \frac{ds}{ds}$ a položili podle 2.1 (4) $\frac{ds}{dt} = v$.



Obr. (2.1) 5. Oskulační rovina a oskulační kružnice



Obr. (2.1) 6. K odvození normálového zrychlení

První člen v rovnici 2.1 (17), kterou jsme dostali, vyjadřuje vektor, který má směr pohybu vyšetřovaného hmotného bodu (směr tečny), a protože má význam zrychlení, je to zřejmě *tečná složka $\mathbf{a}_\tau$ celkového zrychlení*.

$$\frac{dv}{dt} \tau^0 = \frac{d^2s}{dt^2} \tau^0 = \mathbf{a}_\tau.$$

Velikost tečné složky zrychlení je tedy rovna časové změně (derivaci podle času) velikosti okamžité rychlosti $v = ds/dt$ neboli druhé derivaci délky dráhy s podle času. Přívrastkem „velikost“ má být zdůrazněna skutečnost, že elementární přírůstek dv velikosti rychlosti není obecně stejný jako velikost přírůstku $d\mathbf{v}$ vektoru rychlosti $\mathbf{v}$, tedy $dv \neq |d\mathbf{v}|$. Důkladem toho je např. křivočarý pohyb se stále stejně velkou rychlostí (rovnoměrný křivočarý pohyb). Při něm je $dv = 0$, ale přírůstek $d\mathbf{v}$ vektoru rychlosti není roven nule, protože rychlost jako vektor mění směr. Vektor $d\mathbf{v}$ vyjadřuje jak elementární změnu směru, tak elementární změnu velikosti vektoru $\mathbf{v}$ (popř. jenom jednu z obou změn, když druhá nenastává), kdežto přírůstek dv udává vždy jenom změnu velikosti rychlosti. Pouze při přímočarém pohybu, kdy směr rychlosti je stálý, platí $dv = |d\mathbf{v}|$.

Význam druhého členu rovnice 2.1 (17) vyplývá z významu vektoru $d\tau^0/ds$. Jednotkový vektor τ^0 má velikost rovnou jedné, takže skalární součin $\tau^0 \tau^0 = 1$. Diferenciál tohoto součinu musí být roven nule, tedy $d(\tau^0 \tau^0) = d\tau^0 \cdot \tau^0 + \tau^0 d\tau^0 = 0$. Skalární součin dvou vektorů je roven nule, jsou-li oba vektory navzájem kolmé. Z toho je zřejmé, že elementární změna $d\tau^0$ jednotkového vektoru τ^0 je vektor k němu kolmý, takže má směr hlavní normály

určený jednotkovým vektorem $\mathbf{n}^0$ a míří na tu stranu křivočaré dráhy, kde je její střed křivosti S , jak je zřejmé na obr. (2.1) 6. Na obrázku je také vidět, že při elementární změně $d\tau^0$ opsal vyšetřovaný hmotný bod dráhu o elementární délce $ds = \rho d\varphi$. Protože vektor τ^0 má jednotkovou velikost a je kolmý na hlavní normálu, je zřejmé velikost přírůstku $d\tau^0$ podle obr. (2.1) 6 rovna elementárnímu úhlu v obloukové míře, o který se natočí jak tečna,

tak normála, $|d\tau^0| = d\varphi = \frac{ds}{\rho}$, a tudíž vektor

$$\frac{d\tau^0}{ds} = \frac{|d\tau^0|}{ds} \mathbf{n}^0 = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}^0,$$

kde převrácená hodnota $\frac{1}{\rho}$ poloměru křivosti dráhy ve vyšetřovaném místě je křivost dráhy v tomto místě. Druhý člen ve vzorci 2.1 (17) nabývá tvaru

$$\frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}^0 = \mathbf{a}_n$$

a udává zřejmě složku výsledného zrychlení ve směru hlavní normály, která je určena čtvercem okamžité rychlosti, děleným poloměrem křivosti dráhy v příslušném místě. Tato složka vektoru zrychlení nazývá se *normálové zrychlení*, a protože směřuje do středu křivosti dráhy v příslušném místě, říká se mu též *dostředivé (centripetální) zrychlení*.

Zrychlení při pohybu po křivce, jejíž křivost $1/\rho$ se může od místa k místu měnit, je tedy výslednicí z tečného zrychlení $\mathbf{a}_\tau$ ve směru dalšího postupu bodu a z normálového zrychlení $\mathbf{a}_n$ kolmého k dráze v každém jejím bodě, tedy

2.1 (18)

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt} \tau^0 + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}^0.$$

Přitom udává tečné zrychlení časovou změnu velikosti rychlosti a normálové zrychlení charakterizuje změnu směru rychlosti.

Rozborem tohoto výsledku dojdeme snadno k názoru, že *zrychlení je veličina, která charakterizuje pohyby*, tj. určuje typ pohybu. Tak např. je-li vektor zrychlení $\mathbf{a}$ trvale roven nule, pak je rovno nule tečné i normálové zrychlení; to bude, když rychlost hmotného bodu má stálou velikost a křivost dráhy v každém jejím bodě je rovna nule. Dráha tedy bude přímá a příslušný pohyb bude přímočarý rovnoměrný. Je-li $\mathbf{a}_n = 0$, $\mathbf{a}_\tau \neq 0$, pak bude pohyb přímočarý a nerovnoměrný, bude-li přitom $\mathbf{a}_\tau = \text{const}$, bude přímočarý rovnoměrně zrychlený nebo zpžděný, podle toho, zda číslo určující velikost tečného zrychlení je větší nebo menší než nula. Je-li naproti tomu $\mathbf{a}_\tau = 0$ a $\mathbf{a}_n = \text{const}$ a příslušný vektor zůstává v rovině, pak vzhledem k tomu, že i $v = \text{const}$, bude mít dráha v každém svém bodě stálou křivost. Rovinnou křivkou stálé křivosti je kružnice, takže příslušný pohyb hmotného bodu bude kruhový a rovnoměrný. Při dalším výkladu poznáme ještě i na jiných příkladech (pohyb harmonický, centrální, kmity tlumené a nucené atd.), že zrychlení určuje typ pohybu; to ale neznamená, že by zrychlení pohyb úplně popisovalo. Kromě něho musíme znát pohybový stav (polohu a rychlost) hmotného bodu v některém okamžiku, nejčastěji v okamžiku $t = 0$, od něhož měříme čas, aby pohyb byl jednoznačně určen. Vyšetříme to pro přímočarý pohyb v následujícím článku.

2.1.2. Přímočarý pohyb hmotného bodu

Dráha je přímka, směr rychlosti pohybujícího se hmotného bodu je stálý, i celkové zrychlení omezující se na pouhé tečné zrychlení má stálý směr shodný se směrem rychlosti. Při popisu tohoto pohybu tedy vystačíme s pouhými velikostmi příslušných veličin.

Z daného zrychlení $a = dv/dt$ vypočteme integrací nejprve rychlost v ; ta je určena vztahem $v = ds/dt$, takže další integrací dostaneme délku dráhy s , tedy

$$2.1 (19) \quad v = \int a \, dt + v_0, \quad s = \int v \, dt + s_0,$$

kde v_0 a s_0 jsou integrační konstanty. Protože pohyb je úplně popsán teprve tehdy, je-li dána dráha jako funkce času $s = f(t)$, je z obou rovnic zřejmé, že k úplnému popisu pohybu pouhá znalost zrychlení nestačí. Kromě něho musíme znát ještě integrační konstanty v_0 a s_0 , které zřejmě určují pohybový stav hmotného bodu v okamžiku $t = 0$. Např. při rovnoměrně zrychleném pohybu je $a = \text{const}$, takže z 2.1 (19) dostáváme

$$2.1 (20) \quad v = v_0 + at, \quad s = s_0 + \int (v_0 + at) \, dt = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2,$$

což jsou známé rovnice rovnoměrně zrychleného pohybu, z nichž ihned pro $t = 0$ plyne $v = v_0$ a $s = s_0$. Znamenají tedy integrační konstanty počáteční rychlost bodu a jeho počáteční polohu měřenou od zvoleného výchozího místa. Položíme-li $s_0 = 0$, měříme dráhu od místa, v němž byl pohybující se bod v čase $t = 0$; je-li $v_0 = 0$, začíná rovnoměrně zrychlený pohyb z klidu, jako bychom bod v okamžiku $t = 0$ uvolnili. Jsou-li obě podmínky splněny, příslušné rovnice se zjednoduší na

$$2.1 (21) \quad v = at, \quad s = \frac{1}{2} at^2.$$

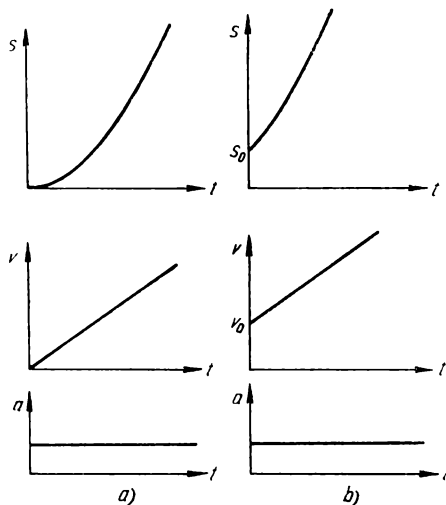
Časová závislost těchto pohybů je na obr. (2.1) 7. Je zřejmé, že se oba pohyby ve svém časovém průběhu, který se vyvine od okamžiku $t = 0$ [křivky $s = f(t)$], zřetelně navzájem liší, přestože je při nich stejné zrychlení, které z nich činí jenom pohyby téhož typu, tedy pohyby rovnoměrně zrychlené.

Jednoduché rovnice pro rovnoměrný pohyb hmotného bodu plynou z 2.1(20) pro $a = 0$:

$$2.1 (22) \quad v = v_0 = \text{const}, \quad s = s_0 + vt.$$

Rychlost má tedy stálou velikost, dráhy přibývá úměrně s časem.

Stejným způsobem se postupuje při vyšetřování průmětů obecného pohybu ve směru os vytčené souřadnicové soustavy, protože to jsou přímočaré pohyby, jak poznáme v čl. 2.2.3.



Obr. (2.1) 7. Rovnoměrně zrychlený pohyb: a – z klidu, b – z polohy s_0 počáteční rychlostí v_0

2.1.3. Kruhový pohyb

Zvláštním případem krivočarého pohybu je pohyb bodu po kružnici. Středem této kružnice kolmo k její rovině prochází *osa otáčení (rotace) O*, kolem níž bod obíhá. Kružnice má konstantní poloměr křivosti, $\rho = \text{const}$, rovný poloměru kruhové dráhy r . Délku dráhy bodu můžeme vyjádřit středovým úhlem φ (v obloukové míře)

$$2.1 (23) \quad s = r\varphi, \quad ds = r \, d\varphi$$

a všechny vztahy, jichž jsme užili pro délku např. při přímočarém pohybu, můžeme nyní převést na středový úhel φ [obr. (2.1) 8].

Velikost rychlosti podle 2.1 (4) a 2.1 (23)

$$2.1 (24) \quad v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Časovou změnu středového úhlu, tj. přírůstek středového úhlu dělený časem, nazýváme *úhlovou rychlostí*

$$2.1 (25) \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Jednotkou úhlové rychlosti je s^{-1} , protože středový úhel v obloukové míře je násobkem čísla π , tedy pouhé číslo.

Úhlová rychlost vyjadřuje, jak rychle se otáčí průvodič r , na jehož konci je hmotný bod, vykonávající kruhový pohyb. Velikost úhlové rychlosti je číselně rovna úhlu v obloukové míře, o který se natočí průvodič za jednotku času, kdyby otáčení bylo rovnoměrné.

Rychlost bodu, kterou nazýváme *obvodovou rychlostí*, je

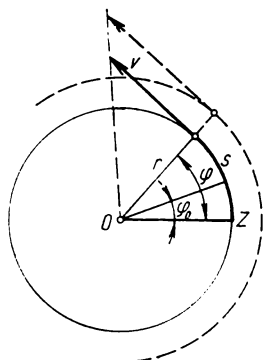
$$2.1 (26) \quad v = r\omega$$

a úhlová rychlost je

$$2.1 (27) \quad \omega = \frac{v}{r}.$$

Je tedy obvodová rychlost rotujícího bodu přímo úměrná jednak úhlové rychlosti, jíž se otáčí průvodič, jednak délce r průvodiče. Při stálé úhlové rychlosti obíhá hmotný bod tím rychleji, čím dále je od osy otáčení [obr. (2.1) 8].

Přírůstek úhlové rychlosti dělený přírůstkem času (tj. časovou změnu úhlové rychlosti) nazýváme *úhlovým zrychlením* ε :



Obr. (2.1) 8.
Kruhový pohyb

$$2.1 (28)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Jednotkou úhlového zrychlení je s^{-2} .

Úhlové zrychlení udává tedy číselně přírůstek úhlové rychlosti za jednotku času, kdyby úhlové rychlosti v tomto časovém intervalu přibývalo rovnoměrně.

Známe-li úhlové zrychlení ε , vypočteme z něho závislost úhlové rychlosti a středového úhlu na čase stejným postupem jako při přímočarém pohybu v čl. 2.1.2.

Zrychlení bodu má průmět do směru tečny a_t a průmět do směru normály a_n ; vzhledem k 2.1 (18)

$$2.1 (29) \quad a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon,$$

$$2.1 (30) \quad a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = v\omega.$$

Zvláštním případem kruhového pohybu je *rovnoměrný pohyb kruhový*, který se vyznačuje tím, že úhlová rychlost má stálou velikost, $\omega = \text{const.}$ (Úhlové zrychlení ε je nulové.) Z definice 2.1 (25) úhlové rychlosti plyne pro tento pohyb přímo

$$2.1 (31) \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad \omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}.$$

První vztah udává, jak se mění středový úhel s časem, měl-li bod v okamžiku $t = 0$ polohu danou úhlem φ_0 , měřeným od zvolené základní polohy [např. Z na obr. (2.1) 8]. Je-li bod v okamžiku $t = 0$ v základní poloze ($\varphi_0 = 0$), pak

$$2.1 (32) \quad \varphi = \omega t, \quad \omega = \frac{\varphi}{t}.$$

K proběhnutí oblouku $s = r\varphi = 2\pi r$ je třeba času T . Úhlovou rychlost můžeme pak vyjádřit také ve tvaru

$$2.1 (33) \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Protože pohyb je *periodický*, znovu a znovu se opakuje, nazýváme oběžnou dobu (tj. čas, který potřebuje bod k proběhnutí dráhy jednou kolem dokola) *periodou*. Převrácená hodnota periody je *frekvence* ν :

$$2.1 (34) \quad \nu = \frac{1}{T}.$$

Její jednotkou je s^{-1} , která se nazývá *hertz* (značka Hz).

Úhlovou rychlost, zvanou v tomto případě též *úhlová (kruhová) frekvence*, pak můžeme také psát

$$2.1 (35) \quad \omega = 2\pi\nu$$

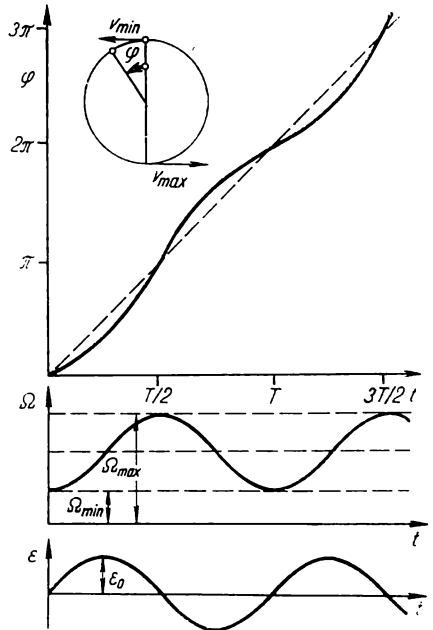
a obvodovou rychlost

$$v = r\omega = 2\pi r\nu.$$

Frekvence udává číselně, kolikrát se za jednotku časovou celý pohyb opakuje.

Často se má za to, že kruhový pohyb, který probíhá v stále stejném smyslu (nikoli kývavý pohyb), může být periodický jednom tehdy, je-li rovnoměrný (se stálou úhlovou rychlostí). Ale i nerovnoměrný pohyb po kružnici může být periodický s periodou T , frekvencí ν a úhlovou frekvencí ω , a to tehdy, když ve stejných po sobě následujících periodách T , v nichž hmotný bod oběhne kolem dokola (průvodič opiše plný úhel 2π), má úhlová rychlost, a tím také úhlové zrychlení stejný časový průběh. Potom má úhlová frekvence význam určený vztahem 2.1 (33), ale není shodná s úhlovou rychlostí otáčení průvodiče, jak tomu je u rovnoměrného kruhového pohybu. Ukážeme rozdíl mezi stálou úhlovou frekvencí periodického, ale nerovnoměrného kruhového pohybu a proměnnou úhlovou rychlostí otáčení na příkladu, který je na obr. (2.1) 9. Hmotný bod se otáčí s úhlovým zrychlením ε , které se s časem t mění podle sinusoidy s periodou $T = 2\pi/\omega$, přičemž v okamžiku $t = 0$ je středový úhel $\varphi = 0$ a hmotný bod má minimální úhlovou rychlost $\Omega_{\min}$. Podobný pohyb by konal např. hmotný bod na kružnici ve svislé rovině vlivem tíže, kdybychom mu v nejvyšší poloze udělili rychlost $\Omega_{\min}$ a nepůsobily by odpory třením. Přesné řešení tohoto pohybu by vyžadovalo, abychom vyšli z podmínky $\varepsilon \sim \sin \varphi$, jak poznáme v článku o fyzickém a matematickém kyvadle. Řešení za tohoto předpokladu je však obtížné, protože vede k tzv. eliptickým funkcím. Spokojíme se proto s tím, že průběh těchto funkcí je podobný jako na obr. (2.1) 9.

Protože sinus a kosinus jsou úhlověměrné funkce, je k vyjádření časových závislostí veličin na obr. (2.1) 9 třeba přepočítat čas t , který je nezávisle proměnnou, na úhel. Periodě T přísluší otočení o plný úhel 2π , takže času t přísluší úhel, který je k plnému úhlu v témže poměru jako t/T , tedy úhel $\frac{2\pi t}{T}$ nebo vzhledem k 2.1 (33) úhel ωt , je-li ω úhlová frekvence příslušná



Obr. (2.1) 9. Periodický nerovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici

periodě T . Pouhou úvahou ze zvolené časové závislosti ε a jednoduchou integrací a derivací podle času zjistíme, že závislosti veličin na obr. (2.1) 9 na čase jsou dány vztahy

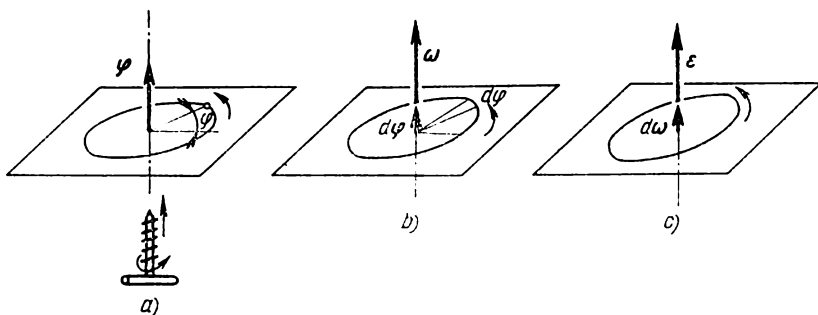
$$\varphi = At - \frac{B}{\omega} \sin \omega t, \quad \Omega = A - B \cos \omega t, \quad \varepsilon = \omega B \sin \omega t,$$

$$\text{v nichž } A = \frac{1}{2} (\Omega_{\max} + \Omega_{\min}) \quad \text{a} \quad B = \frac{1}{2} (\Omega_{\max} - \Omega_{\min}).^*)$$

Je zřejmé, že při rovnoměrném kruhovém pohybu se stejnou periodou T by středový úhel narůstal úměrně s časem podle vztahu $\varphi = At$, takže veličina A má význam úhlové frekvence ω , která zde je rovna aritmetickému průměru z maximální a minimální hodnoty časové proměnné úhlové rychlosti Ω hmotného bodu. Podobně bychom při složitějších závislostech úhlové rychlosti Ω na čase, kdyby byly periodické s periodou T , určili úhlovou frekvenci ω jako střední hodnotu funkce $\Omega = f(t)$ v periodě T . Příkladem na obr. (2.1) 9, který je nakreslen pro případ $\omega = 1$, je tedy prokázáno, že úhlová rychlost a úhlová frekvence jsou obecně různé veličiny, které je třeba navzájem rozlišovat, a jenom ve zvláštním případě rovnoměrného kruhového pohybu se sobě obě veličiny rovnají.

2.1.4. Vektorové znázornění kruhového pohybu

Veličiny, jimiž jsme popsali kruhový pohyb, tj. středový úhel, úhlovou rychlost, úhlové zrychlení, obvodovou rychlost a zrychlení hmotného bodu, lze znázornit též vektorově. Vektorové vyjádření je úplnější v tom smyslu, že z něho plynou nejen velikosti příslušných veličin, jak jsme je dosud vyjadřovali, ale zároveň též orientace kruhové dráhy v prostoru i vzájemná orientace jednotlivých veličin.



Obr. (2.1) 10. Vektorové znázornění kruhového pohybu

Abý hmotný bod konal kruhový pohyb, musí mít rovina kruhové dráhy v prostoru stálou orientaci. Tato orientace je určena prostorovou orientací osy otáčení, která je k rovině pohybu kolmá, a lze ji tedy určit vektorem ležícím v ose otáčení. Přiřadíme-li tomuto vektoru vhodný význam, lze jím zároveň vyjádřit i smysl otáčení. Díváme-li se totiž na kruhovou dráhu, pak se po ní hmotný bod může pohybovat tak, že středový úhel φ narůstá od zvolené základní polohy buďto proti směru pohybu hodinových ručiček (tento smysl otáčení považujeme za kladný, obr. (2.1) 8), nebo ve směru pohybu hodinových ručiček (záporný smysl otáčení). Je proto nasnadě přiřadit vektoru, jímž určíme směr osy otáčení v prostoru, význam středového úhlu. Vektor středového úhlu φ je tedy vektor kolmý k rovině úhlu procházející jeho vrcholem, jehož délka udává velikost středového úhlu a jehož smysl určuje smysl otáčení podle tohoto pravidla: vektor středového úhlu φ míří na tu stranu roviny kruhového pohybu, z níž vidíme narůstání středového úhlu (otáčení hmotného bodu) v kladném smyslu. Jiné pravidlo je, že vektor středového úhlu (do roviny pohybu), otáčíme-li jím ve stejném smyslu, jako je smysl narůstání středového úhlu [obr. (2.1) 10a].

Vzroste-li v elementárním časovém intervalu dt středový úhel o $d\varphi$, pak elementární přírůstek $d\varphi$ vektoru středového úhlu leží rovněž v ose otáčení, protože tato osa má při kruhovém pohybu

*) Kdyby šlo o pohyb hmotného bodu po kružnici vlivem tíže, dalo by se $\Omega_{\max}$ pro zvolené $\Omega_{\min}$ nebo obráceně vypočítat pomocí zákona zachování mechanické energie v čl. 2.2.6.

stálý směr v prostoru, a při daném smyslu otáčení míří také vždy na touž stranu jako vektor středového úhlu φ . Dělíme-li elementární přírůstek $d\varphi$ elementárním přírůstkem času dt , v němž přírůstek středového úhlu vznikl, dostaneme vektor konečné velikosti v ose rotace téhož smyslu, jako má vektor středového úhlu φ . Tento nový vektor je zřejmě vektorem úhlové rychlosti

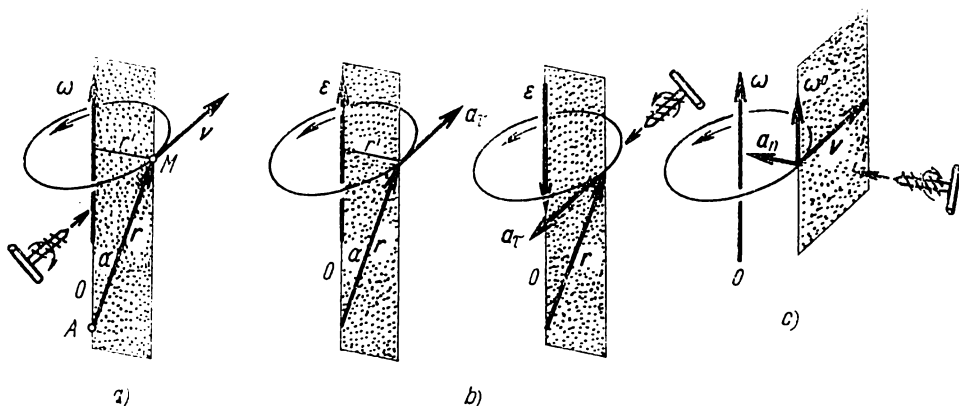
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

jehož velikost je určena vztahem 2.1 (25). Protože vektor úhlové rychlosti ω leží v ose rotace a má vždy též smysl jako vektor středového úhlu φ , určuje také on směr osy rotace v prostoru i smysl otáčení podle stejných pravidel jako vektor středového úhlu [obr. (2.1) 10b].

Není-li kruhový pohyb rovnoměrný, mění se velikost vektoru úhlové rychlosti, jeho směr v prostoru je však přitom stálý. Elementární změna $d\omega$ vektoru úhlové rychlosti, která vznikne v čase dt , leží tedy zase v ose rotace. Podíl

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

určuje vektor úhlového zrychlení, který sice leží v ose rotace, ale jehož smysl souhlasí se smyslem otáčení podle pravidel uvedených u vektoru středového úhlu jenom v případě, že se úhlová rychlost otáčení zvětšuje, tj. elementární přírůstek $d\omega$ vektoru úhlové rychlosti má též smysl



Obr. (2.1) 11. Vektorové znázornění obvodové rychlosti a zrychlení hmotného bodu při kruhovém pohybu

jako okamžitá úhlová rychlost ω [obr. (2.1) 10c]. Zmenšuje-li se vektor úhlové rychlosti (zpomalené otáčení), pak má změna $d\omega$ vektoru úhlové rychlosti opačný smysl než vektor okamžité úhlové rychlosti, a proto také vektor úhlového zrychlení ϵ má opačný smysl, než je smysl otáčení. Význam to ovšem má jen v případě, že ve zvoleném okamžiku má vyšetřovaný bod již jistou úhlovou rychlost konečné velikosti. Souhlasný nebo nesouhlasný smysl vektoru úhlového zrychlení ϵ se smyslem vektoru úhlové rychlosti ω , tedy se smyslem otáčení, vyjadřujeme značkami $+$ a $-$. Kladné úhlové zrychlení znamená tedy zrychlené otáčení, záporné úhlové zrychlení pak zpomalené otáčení.

Obvodová rychlost v je vektor, který má směr tečny ke kruhové dráze, a leží tedy v její rovině. Stojí kolmo k rovině proložené osou rotace O a průvodičem r určujícím polohu bodu M vzhledem k libovolnému bodu na ose rotace [obr. (2.1) 11a], neboť tato rovina je kolmá k rovině kruhové dráhy. Protože směr osy rotace v prostoru určuje vektor úhlové rychlosti ω , můžeme obvodovou rychlost v vyjádřit jako vektorový součin vektoru úhlové rychlosti ω a vektoru průvodiče r , spojujícího hmotný bod M s libovolným stálým místem na ose rotace [např. A na obr. (2.1) 11a],

$$2.1 (36) \quad v = \omega \times r.$$

Velikost tohoto vektorového součinu, určená vztahem $v = \omega r \sin \alpha = \omega r'$, je stejná jako podle vztahu 2.1 (26), neboť $r' = r \sin \alpha$ je poloměr kruhové dráhy; i smysl obvodové rychlosti odpovídá pravidlu pro vektorový součin vektorů ω a r .

Z obvodové rychlosti odvodíme celkové zrychlení $\mathbf{a}$ hmotného bodu derivací vektoru obvodové rychlosti 2.1 (36) podle času. Přitom nutno pamatovat, že vektor úhlové rychlosti má stálý směr, ale mění obecně svou velikost a průvodič $\mathbf{r}$ má zase stálou velikost, ale proměnný směr. Vektorový součin pro obvodovou rychlost je proto třeba derivovat podle času podle známého pravidla pro derivaci součinu dvou funkcí téže nezávisle proměnné (času v tomto případě). Při derivaci se nesmí zaměnit pořadí vektorů $\boldsymbol{\omega}$ a $\mathbf{r}$ ve vektorovém součinu, protože pro něj neplatí zákon komutativní. Dostaneme tedy

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Zrychlení je zde vyjádřeno jako vektorový součet dvou vektorů

$$2.1 (37) \quad \mathbf{a}_\tau = \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

z nichž první má velikost $a_\tau = \epsilon r \sin \alpha = \epsilon r'$ a je podle 2.1 (29) tečným zrychlením, druhý vektor $\mathbf{a}_n$ je patrně normálovým (dostředivým) zrychlením; vektory $\boldsymbol{\omega}$ a $\mathbf{v}$ jsou navzájem kolmé, takže velikost $a_n = \omega v$, což je ve shodě s výrazem 2.1 (30). Směr a smysl tečného zrychlení je ve shodě s pravidlem pro vektorový součin, jak je vidět na obr. (2.1) 11b; jeho smysl je určen smyslem vektoru úhlového zrychlení, rozhodujícího o tom, zda je otáčení zrychlené nebo zpomalené. Zavedeme-li jednotkový vektor $\boldsymbol{\omega}^0$ rovnoběžný s vektorem úhlové rychlosti v místě, v němž hmotný bod právě je, pak můžeme dostředivé zrychlení psát ve tvaru $\mathbf{a}_n = \omega(\boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{v})$, z něhož je podle pravidla pro vektorový součin ihned zřejmý směr i smysl tohoto zrychlení, jak je znázorněno na obr. (2.1) 11c.

2.1.5. Harmonický pohyb

Harmonický pohyb je zvláštním případem přímočarého pohybu kmitavého, při němž se bod pohybuje po přímce ze základní polohy O [obr. (2.1) 12a] do místa O_1 vzdáleného od O o A , tam se zastaví a vrací se zpět, přeběhne základní polohu O a pohybuje se do místa O_2 , jehož vzdálenost od O je rovněž A , zastaví se a vrací se zpět, pohybuje se směrem k O atd. Tento pohyb se neustále opakuje. Je-li závislost vzdálenosti (výchyly od základní polohy) na čase dána rovnicí 2.1 (38), říkáme tomuto kmitavému pohybu *jednoduchý pohyb harmonický*. Poloha O , kterou jsme nazvali základní, dělí vzdálenost $2A$ právě na polovinu. Říkáme jí též *rovnovážná poloha*, a to z hlediska příčiny tohoto pohybu, o níž pojednáme v čl. 2.2.3.

Harmonický pohyb koná průmět bodu pohybujícího se rovnoměrně po kružnici do některého průměru kružnice [nebo lépe do některé ze souřadnicových os, leží-li kružnice v rovině souřadnic, obr. (2.1) 12b]. Můžeme si to znázornit tak, že svazkem paprsků rovnoběžných s rovinou, v níž se kruhový pohyb děje, promítneme pohyb bodu na přímkou O_1O_2 . Stín bodu na této přímce pak koná pohyb harmonický.

Průmět bodu má od O vzdálenost

$$y = A \sin \varphi,$$

je-li A poloměr kružnice.

Při rovnoměrném kruhovém pohybu mění se středový úhel s časem t podle 2.1 (31), takže harmonický pohyb je popsán rovnicí

$$2.1 (38)$$

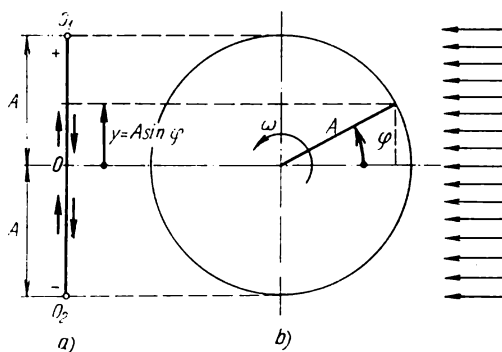
$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Veličině A říkáme *amplituda (výkmit)*, která udává velikost největší výchyly bodu z rovnovážné polohy. Má vždy kladnou hodnotu, zatímco okamžitá výchylka y je kladná nebo záporná podle znaménka sinu. Veličina ω , která při rovnoměrném kruhovém pohybu má význam jak stále úhlové rychlosti otáčení průvodiče, tak úhlové frekvence, ztrácí u harmonického pohybu význam úhlové rychlosti a vystupuje při něm výhradně jako *úhlová frekvence (úhlový kmitočet)*. To proto, že rovnoměrným kruhovým pohybem a jeho prů-

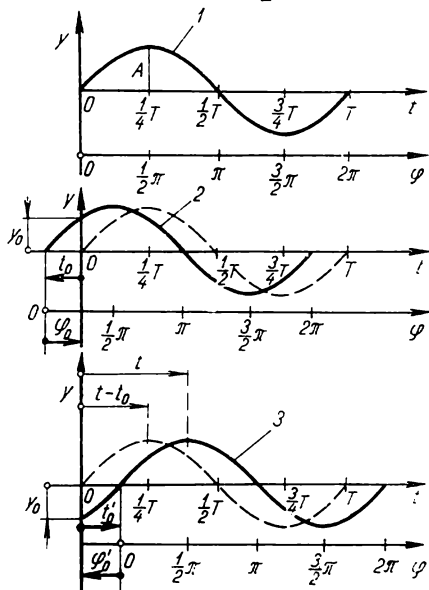
mětem harmonický pohyb jenom znázorňujeme, kdežto koná-li hmotný bod skutečně harmonický pohyb po přímce, kolem něhož se neotáčí. Úhlová frekvence vyjadřuje periodičnost pohybu a souvisí s frekvencí ν a periodou T vztahy $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$.

Význam úhlu φ u harmonického pohybu záleží v tom, že jím nahrazujeme čas t , který je při popisu pohybu pravou nezávisle proměnnou, abychom mohli použít sinu, který je úhloměrnou funkcí. Línéráním vztahem $\varphi = \omega t + \varphi_0 = 2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0$ převádíme tedy časovou stupnici na stupnici úhlovou. Úhel φ nazýváme u harmonického pohybu *fázovým úhlem* nebo jenom *fází*, a nikoli středovým úhlem jako u kruhového pohybu. Fázovým úhlem určujeme etapu periodického pohybu z hlediska rovnoměrného plynutí času.

Je zřejmé, že stupnice fázového úhlu φ a času t jsou obecně navzájem posunuty. Není-li tohoto posunutí, je mezi fázovým úhlem a časem přímá úměrnost, $\varphi = 2\pi \frac{t}{T}$ a okamžikům $t = 0, T/2, T, 3T/2, 2T, \dots$ přísluší fázové úhly $\varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$. Harmonický pohyb je popsán rovnicí $y = A \sin \omega t = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$ a vyznačuje se tím, že hmotný bod v okamžicích $t = 0, T, 2T, \dots$ prochází právě rovnovážnou polohou a pohybuje se dále ve směru, v němž



Obr. (2.1) 12. K určení rovnice harmonického pohybu



Obr. (2.1) 13. Časové rozvinutí harmonického pohybu

výchylka y má kladné znaménko [obr. (2.1) 13, křivka 1]. Vzájemné posunutí úhlové a časové stupnice vyjadřuje úhel φ_0 , který je zřejmě roven fázovému úhlu φ v okamžiku $t = 0$, který je počátkem časové stupnice (od něhož měříme čas). Říkáme proto úhlu φ_0 *fázové posunutí* nebo *počáteční fáze*, protože sinus tohoto úhlu udává počáteční nebo výchozí polohu kmitajícího bodu, určenou výchylkou $y_0 = A \sin \varphi_0$. K vzájemnému posunutí mezi fázovým úhlem a časem dochází tedy tehdy, když časové průběhy kmitavých pohybů, např. 2 a 3 na obr. (2.1) 13, jsou posunuty vzhledem k průběhu 1 na témže obrázku, který můžeme považovat za základní.

Fázovému posunutí φ_0 přísluší jisté *časové posunutí* t_0 kmitavého pohybu vzhledem k průběhu, který jsme nazvali základním, neboli časové posunutí počátku (nuly) časové stupnice proti počátku stupnice fázového úhlu. Z podmínky $\varphi = \omega t + \varphi_0 = 2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0 = 0$ vychází pro časové posunutí

$$2.1 \quad (39) \quad t_0 = -\frac{\varphi_0}{\omega} = -\frac{\varphi_0}{2\pi} T.$$

Použijeme-li k popisu harmonického pohybu časového posunutí t_0 místo fázového posunutí φ_0 , dostane rovnice 2.1 (38) pro tento pohyb tvar

2.1 (40)

$$y = A \sin \omega(t - t_0).$$

Takto napsaná rovnice harmonického pohybu nám říká, že v okamžiku t je stav popisovaného kmitavého pohybu takový jako v okamžiku $(t - t_0)$ u kmitavého pohybu se základním časovým průběhem, s nímž popisovaný pohyb srovnáváme. Je to naznačeno u průběhu 3 na obr. (2.1) 13.

Srovnáváme-li dva nebo více harmonických pohybů hmotných bodů, můžeme vždy časový průběh jednoho z nich považovat za základní a fázová a časová posunutí ostatních průběhů se pak budou vztahovat k zvolenému základnímu průběhu, např. 1 na obr. (2.1) 13. Na obrázku je vidět, že při průběhu 2 prochází hmotný bod rovnovážnými polohami a dosahuje maximální výchylky na obě strany dříve než při průběhu 1. Říkáme proto, že kmitavý pohyb 2 předbíhá nebo je napřed ve fázi před kmitavým pohybem 1. Přitom fázové posunutí $\varphi_0 > 0$ a časové posunutí $t_0 < 0$. Význačná jsou posunutí $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $t_0 = -\frac{T}{4}$

a $\varphi_0 = \pi$, $t_0 = -\frac{T}{2}$. Těmto posunutím přísluší pro výchylku hmotného bodu z rovnovážné

polohy rovnice $y = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A \cos \omega t$ a $y = A \sin(\omega t + \pi) = -A \sin \omega t$.

V prvním případě předbíhá kmitání základní kmitavý pohyb o čtvrt periody a v druhém o půl periody, přičemž výchylka hmotného bodu je v každém okamžiku právě opačná než při základním průběhu. Srovnávané kmitavé pohyby probíhají tedy právě s opačnými fázemi. Dalším zvětšováním fázového posunutí do 2π dojdeme posléze ke stejnému časovému průběhu, jako je základní průběh, tedy jako by fázové a časové posunutí byly rovny nule. Říkáme pak, že srovnávané kmitavé pohyby probíhají ve stejné fázi.

O předbíhání kmitavého pohybu ve fázi mluvíme zpravidla jenom v tom případě, kdy fázové posunutí $\varphi_0 < \pi$ a časové posunutí $t_0 > -\frac{T}{2}$. Je-li $\varphi_0 > \pi$, pak počítáme raději

s fázovým posunutím $\varphi'_0 = \varphi_0 - 2\pi$, které je menší než nula, a s příslušným časovým posunutím t'_0 , které je potom větší než nula. Říkáme pak, že kmitavý pohyb je ve svém průběhu opožděn nebo pozadu ve fázi proti základnímu průběhu, jak je tomu např. u průběhu 3 na obr. (2.1) 13 ve srovnání s průběhem 1. Hmotný bod při průběhu 3 dosahuje maximálních výchylek a prochází rovnovážnou polohou později než při průběhu 1. Jde-li o předbíhání nebo o opožďování kmitavého pohybu ve fázi, což je ovšem věcí úmluvy,

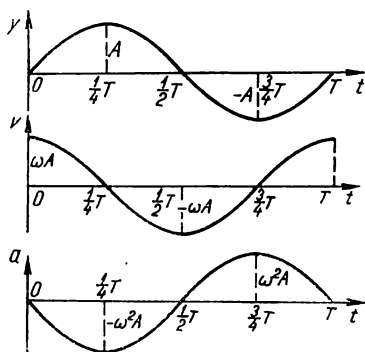
rozhodneme snadno na základě znaménka výchylky y_0 hmotného bodu v okamžiku $t = 0$: je-li kladné, je předbíhání, je-li záporné, je opožďování. Je-li $y_0 = 0$, pak jde buď o kmitavý pohyb ve fázi, nebo s opačnou fází vzhledem k pohybu se základním časovým průběhem.

Rychlost hmotného bodu při harmonickém pohybu určíme derivací výchylky podle času

$$2.1 (41) \quad v = \frac{dy}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

a zrychlení derivací rychlosti podle času

$$2.1 (42) \quad a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y.$$



Obr. (2.1) 14. Diagram harmonického pohybu

Protože úhlová frekvence je stálá, je harmonický pohyb charakterizován zrychlením, jež je stále úměrně výchylce a má opačné znaménko než výchylka. Máme zde další příklad pro to, jak zrychlení samo sice určuje typ pohybu, ale úplně jej nepopisuje. Při daném zrychlení mohou vzniknout harmonické pohyby s různými amplitudami a s různými fázovými posunutími, což záleží zřejmě na stavu kmitavého pohybu v okamžiku $t = 0$. Úplný diagram pohybu je na obr. (2.1) 14 pro $\varphi_0 = 0$. Z obrázku je zřejmé, že prochází-li hmotný bod rovnovážnou polohou O , má největší rychlost toho či onoho směru, jejíž velikost ωA jmenuje se *amplituda rychlosti* kmitavého pohybu. Dosáhne-li hmotný bod největší výchylky $\pm A$ [polohy O_1 a O_2 na obr. (2.1) 12], je jeho rychlost nulová, neboť tam mění znaménko. Na obr. (2.1) 14 je vidět, že časový průběh zrychlení má právě opačnou fázi než průběh výchylky hmotného bodu. Proto se bod vzdaluje z rovnovážné polohy zpožděným pohybem, vrací se však do ní zrychleně. Zrychlení dosahuje maximální velikosti $\omega^2 A$ zvané *amplituda zrychlení* v místech maximální výchylky O_1 nebo O_2 na té či oné straně, neboť tu mění rychlost směr, bod se musí zastavit a vrací se zpět. Přímo v okolí rovnovážné polohy pohybuje se bod po velmi kratičký okamžik téměř rovnoměrně, neboť zrychlení je tu nulové a rychlost dosahuje maxima.

2.2. Dynamika hmotného bodu

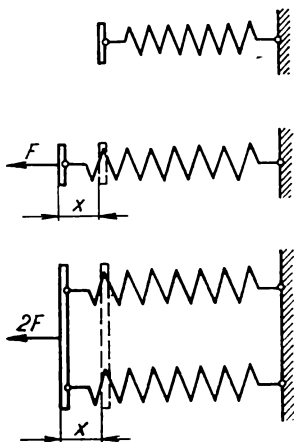
2.2.1. Síla

V předešlé kapitole jsme se zabývali popisem pohybů, aniž bychom se ptali, proč některý pohyb, který v přírodě pozorujeme, probíhá tak a jiný zase jinak. Jako každý jev tak i mechanický pohyb souviseje jistým způsobem s ostatními jevy, které s ním dohromady tvoří jednotný přírodní proces, má svou příčinu v jiných jevech a pohybech, a z tohoto hlediska se nám jeví jako účinek jisté příčiny. Příčina mechanického pohybu těles nemůže záležet v ničem jiném než ve vzájemném působení mezi tělesy nebo mezi jejich částmi. Tato působení mohou mít ovšem v tělesech samých nejrůznější původ, ale skutečnost, že se ve vztahu k jiným materiálním objektům projevují společným účinkem záležejícím v mechanickém pohybu, umožňuje operovat s nimi v myšlení pomocí jednoho a téhož pojmu *síly*.

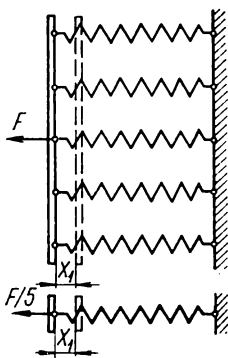
K tomuto pojmu jsme vedeni osobní zkušeností. Tak namáháním svých svalů můžeme vykonávat tlak nebo tah na těleso, při čemž těleso buď změní svůj tvar čili deformuje se (tzv. *statický účinek síly*), nebo změní svůj pohybový stav, tj. rychlost a směr pohybu, anebo je přivedeme z klidu do pohybu nebo obráceně (*dynamický účinek síly*). Při tom pocítujeme odpor, z něhož usuzujeme, že také těleso na nás působí silou, která jako odpor má zřejmě opačný směr než síla našich svalů, a nazýváme ji proto stejně tlakem nebo tahem. Od přímého projevu naší vlastní síly souvisejícího bezprostředně s pocitem hmatu jsme vedeni k názoru, že nejen člověk, ale i ostatní tělesa mohou navzájem na sebe působit silami. Tento názor podporuje také každodenní zkušenost, že tyto síly mají velmi často též účinek jako naše vlastní síla.

Tak můžeme např. šroubovou pružinu napnout buď tahem ruky, nebo tím, že na ni zavěšíme nějaké těleso. V obou případech je též účinek (prodloužení pružiny), a proto oprávněně zahrnujeme působení tělesa na pružinu v silová působení. Z tohoto jednoduchého pokusu plyne hned možnost měření velikosti sil. Napínáme-li pružinu rukou nebo držíme-li nezavěšené těleso v ruce, pocítujeme větší nebo menší námahu. Podle vystupňovaného pocitu námahy, který je zřejmě měřítkem vynaložené svalové síly, mohli bychom tedy posuzovat velikost jiných sil (zde konkrétně sílu, kterou Země přitahuje řečené těleso, nebo sílu, kterou vyvíjí deformovaná pružina). Tato míra by byla ovšem čistě subjektivní a nespolehlivá, a proto je nasnadě naopak posuzovat svalovou sílu a podobně jiné síly podle deformace pružiny např. takto:

Způsobí-li dvě síly jakéhokoli druhu roztážení téže pružiny o stejnou délku x , můžeme mít za to, že obě síly jsou stejné. Za jednotku síly můžeme pak zvolit takovou sílu, která určitou přesně definovanou pružinu (jednotkovou) roztáhne o jistou míru x [obr. (2.2) 1]. Měříme-li pak sílu, která způsobí roztážení dvou takových pružin o míru x , má měřená síla velikost rovnou dvěma jednotkám síly prve definovaným. Naproti tomu roztáhne-li jednotková síla pět stejných pružin o míru x_1 [obr. (2.2) 2], pak síla, která roztáhne jednu takovou pružinu o x_1 , je $1/5$ jednotky síly. Takto je možno zhotovit sadu pružin (podobně jako se zhotovují sady závaží), aniž musíme něco vědět o zákonitostech, jimiž se řídí jejich deformace. Takovou sadou by pak bylo možno měřit libovolné násobky a zlomky zvolené jednotky síly. Také by bylo možno experimentálně stanovit stupnici měření z prodloužení téže pružiny, napínané jednou, dvěma atd. pružinami jednotkovými.



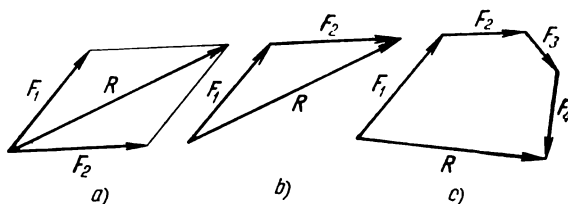
Obr. (2.2) 1. Měření násobků jednotkové síly F



Obr. (2.2) 2. Měření zlomků jednotkové síly F

V praxi se však ujalo měření síly v jinak definovaných jednotkách, a to v násobcích síly, která jistému tělesu, určenému na základě mezinárodní dohody, udělí předepsané zrychlení (čl. 2.2.2).

Z vlastní zkušenosti víme, že síly jsou vektory, tj. směrodatná pro jejich působení není



Obr. (2.2) 3. Skládání sil se společným působištěm

jen velikost, nýbrž i směr, v němž působí. Dále je třeba u síly udat také, v kterém místě na těleso působí, tj. musíme udat její působiště. Můžeme-li při vyšetřování pohybu příslušné těleso považovat za hmotný bod, pak toto působiště ovšem splývá s okamžitou polohou hmotného bodu. Říkáme proto, že síla působící na hmotný bod je vektorem vázaným na bod. V dokonale tuhém tělese můžeme naproti tomu působiště síly v jejím paprsku libovolně posunout, aniž se něco změní na jejím účinku (čl. 2.5.2), tzn. že v tuhém tělese je síla vektorem vázaným na přímku. Síla je tedy jednoznačně určena *velikostí* a *směrem*, popř. také *působištěm*. Ten či onen směr síly v jejím paprsku zdůrazňuje se často ještě slovem *mysl*.

Znárodnosti silového působení ve formě vektorů, tj. orientovanými úsečkami, souvisí bezprostředně se skutečností poznanou na základě experimentů, že lze síly skládat, popř. rozkládat podle *věty o rovnoběžníku (trojúhelníku) sil*. Tato věta není nic jiného než pravidlem geometrického sčítání vektorů jakéhokoli fyzikálního významu aplikovaným na silové působení.

Působí-li tedy na hmotný bod dvě síly F_1 a F_2 , můžeme je nahradit jedinou silou R , kterou dostaneme tak, že z vektorů F_1 a F_2 příslušným oběma silám sestrojíme rovnoběžník, jehož úhlopříčka určuje co do velikosti i směru výslednou sílu R [obr. (2.2) 3a]. Tato síla se jmenuje *výslednice* a obě síly, které ji tvoří, jsou jejími *složkami*. K sestrojení výslednice stačí jen jeden z obou trojúhelníků tvořících rovnoběžník sil (obr. b): ke konci vektoru první síly připojíme vektor druhé síly a vektor výslednice je určen spojnicí počátku prvního vektoru s koncem druhého vektoru.

Působí-li na hmotný bod více sil, připojujeme stejným způsobem postupně jednu sílu k druhé, zachovávající při tom jejich směr a velikost, čímž trojúhelník sil přejde v *silový mnohoúhelník*, který je obecně prostorový. Výslednice $\mathbf{R}$ je určena úsečkou, která tento mnohoúhelník uzavírá (obr. c). Symbolicky toto geometrické sčítání vyjadřujeme vektorovou rovnicí

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_1^n \mathbf{F}_i,$$

jsou-li $\mathbf{F}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ jednotlivé síly, jejichž působení nahrazujeme silou $\mathbf{R}$.

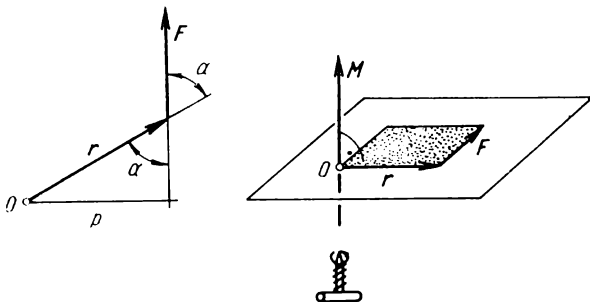
Zvláštní případ nastane, jestliže po složení všech sil dojdeme zase do bodu, z něhož jsme vyšli. Výsledná síla $\mathbf{R}$ je pak rovna nule, takže působící síly se navzájem ruší. V tomto případě mluvíme o jejich *rovnováze*.

Otáčivý účinek síly F vzhledem k libovolnému bodu O charakterizuje její *moment* (bod O pak nazýváme *momentovým bodem*). Moment M síly definujeme součinem ze síly a kolmé vzdálenosti p jejího paprsku od bodu O ,

$$M = Fp,$$

kde p je tzv. *rameno síly*. Je-li vzdálenost působistě síly od bodu O dána průvodičem délky r , který svírá se silou úhel α [obr. (2.2) 4], je kolmá vzdálenost neboli rameno $p = r \sin \alpha$, takže moment můžeme také psát

$$M = Fr \sin \alpha.$$



Obr. (2.2) 4. Moment síly

Odtud plyne, že moment je nulový pro $\alpha = 0$ (tj. prochází-li paprsek síly bodem O — paprsek síly splývá s průvodičem) a je největší pro $\alpha = 90^\circ$, kdy síla působí kolmo na průvodič.

Součin $Fr \sin \alpha$ vyjadřuje velikost vektorového součinu vektorů $\mathbf{r}$ a $\mathbf{F}$, takže moment můžeme psát také ve vektorovém tvaru jako vektorový součin průvodiče $\mathbf{r}$ a síly $\mathbf{F}$:

2.2 (1)

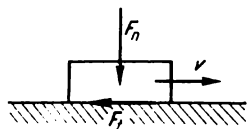
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Tím přisuzujeme momentu také směr, který je totožný se směrem osy jdoucí bodem O kolmo k rovině tvořené vektory $\mathbf{r}$ a $\mathbf{F}$. Této ose říkáme *osa otáčení* (*rotace*). Kladný smysl určíme podle pravidla pro vektorový součin: šroubujeme-li do roviny obou vektorů $\mathbf{r}$ a $\mathbf{F}$ pravotočivý šroub tak, jak síla $\mathbf{F}$ kolem bodu O ramenem otáčí, postupuje šroub v kladném smyslu vektoru momentu.

Zvláštní postavení mezi silami, k nimž je třeba přihlížet při vyšetřování pohybu těles, máme-li se pokud možno přiblížit skutečným poměrům, mají *síly tření*. Jejich zvláštnost záleží v tom, že ve formě odporů působí vždycky jen proti pohybu těles, zatímco jiné síly mohou pohyb jak podporovat, tak také brzdit.

Odpor, který vzniká při pohybu pevného tělesa po jiném tělese, k němuž je přitlačováno jistou silou, je projevem tzv. *vnějšího tření*. Odpor vzniká i tehdy, jsou-li obě tělesa vzhledem k sobě v klidu a vnější síly se snaží jejich relativní pohyb přivodit. Příslušné tření nazývá se *statické* nebo *tření za klidu* na rozdíl od *kinetického tření* nebo *tření za pohybu*, které se projevuje od okamžiku, kdy relativní pohyb těles jako celků skutečně nastane. Omezíme

se zde jen na *tření smykové* při posuvném pohybu tělesa po tělese,^{*)} které se také nazývá *vlečné tření*. Síla tření F_t působí vždy v tečné rovině společné styčné plochy obou těles a mří proti směru jejich vzájemného pohybu rychlostí v [obr. (2.2) 5]. Síla statického tření má opačný směr než složka vnější síly snažící se těleso po druhém tělese posunout, která připadá do tečné roviny styčné plochy. Dokud pohyb nenastane, je ovšem síla tření stále stejně velká jako tato složka vnější síly.



Obr. (2.2) 5. K zákonu smykového tření

Smykové tření řídí se jednoduchým *Amontonovým—Coulombovým zákonem*, podle kterého velikost síly tření F_t nezávisí na velikosti styčné plochy a je úměrná jen velikosti normálové síly F_n , kterou je jedno těleso přitlačováno k druhému tělesu:

2.2 (2)

$$F_t = \mu F_n.$$

Konstanta úměrnosti μ jmenuje se *součinitel smykového tření* a závisí na látkách obou těles, na jakosti styčných ploch (na jejich hladkosti, popř. drsnosti, které lze fyzikálně těžko definovat) a v jisté míře také na velikosti rychlosti v klouzání těles, takže zákon smykového tření je jednoduchý jenom formálně. Závislost součinitele smykového tření za pohybu na rychlosti v je málo výrazná, zejména při malých rychlostech, a zpravidla se k ní nepřihlíží. Vztahujeme-li však tohoto součinitele také na tření za klidu tak, že určuje maximální hodnotu, které síla tření může dosáhnout, aniž by ještě nastal vzájemný smyk těles, pak jeho velikost za klidu je znatelně větší než za pohybu. Z měření plynou tyto čistě informativní hodnoty (první číslo udává μ za klidu a druhé za pohybu): pro tření ocele na oceli 0,15 a 0,05, ocele na ledu 0,027 a 0,014, dřeva na kameni 0,7 a 0,3, kůže na kovu 0,6 a 0,3 apod.

Odpory, které vznikají při pohybu pevného tělesa v kapalinách nebo plynech, nazýváme *souborně odpory prostředí*. Ukazuje se, že kapalina nebo plyn lpí na povrchu tělesa, takže vnější tření je prakticky nekonečně velké a odpor je podmíněn zejména *vnitřním třením* v prostředí, vznikajícím při vzájemném přeskupování jeho jednotlivých částí, které pohybující se těleso musí před sebou rozhrnovat. Vnitřním třením v kapalinách a plynech se budeme zabývat v čl. 2.8.8.

2.2.2. Pohybové zákony

Dynamika (obecně můžeme říci klasická mechanika) je založena na třech základních principech Newtonových, které je zvykem vyjadřovat ve tvaru tří pohybových zákonů.

a) *První pohybový zákon (princip setrvačnosti)*. V předešlém článku jsme za příčinu mechanického pohybu těles prohlásili sílu, charakterizující vzájemné působení mezi tělesy. Skutečně nás denní zkušenost poučuje o tom, že těleso na vodorovné rovině se samo od sebe nedá do pohybu, nepůsobíme-li na ně silou. Těleso, které jsme uvedli do pohybu, se však za nějakou dobu zase zastaví. Příčinu pro to nebudeme ovšem hledat v tělese samém, neboť pozorujeme, že doba, za kterou se těleso zastaví, je značnou měrou ovlivněna vnějšími podmínkami pohybu. Vrhne-li např. vodorovně kouli na sypkém písku, zastaví se velmi brzo, vrhne-li ji ale na hladké lední ploše, bude se pohybovat značně delší dobu a doběhne mnohem dále. Změna pohybového stavu od okamžiku, kdy jsme přestali na těleso silově působit, souvisí zřejmě v odporech proti pohybu, které jsou v sypkém písku značně větší než na hladké lední ploše, tedy zase se silovým působením na těleso. Z toho lze soudit, že doba pohybu tělesa by se dala libovolně prodloužit, kdyby se podařilo dále zmenšit silové působení na těleso, jež má formu odporů proti pohybu. Myšlenka rozšířit

^{*)} Smykové tření se uplatňuje také při vzájemném otáčení těles kolem osy kolmé ke společné styčné ploše, jsou-li tělesa k sobě přitlačována. Zvláštní případ jeho působení nastane, jestliže styčná ploška je velmi malá, jak je tomu při dotyku obalých povrchů, např. při rotaci koule na desce kolem osy kolmé k desce. Příslušné tření nazývá se *vrtné*.

výsledky pozorování na mezní případ, kdy na těleso nepůsobí žádná síla, pochází od Galilea, který položil základ k větě, kterou dnes nazýváme *principem setrvačnosti*: *Každé těleso setrvává ve stavu klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, není-li vnějšími silami nuceno tento stav změnit.*

Případ, kdy na těleso nepůsobí žádná síla, vymyká se přímé experimentální kontrole, neboť se nemůžeme na Zemi vyhnout její přitažlivosti, ani nelze vyřadit gravitační působení hvězd ve vesmíru, nehledě k různým odporům vznikajícím stykem pohybujícího se tělesa s jinými tělesy. Obsah principu setrvačnosti není tedy samozřejmostí, ale geniální extrapolací našich zkušeností.

Podle principu setrvačnosti jsou z dynamického hlediska klid a rovnoměrný přímočarý pohyb rovnocenné *přirozené stavu tělesa*, což z přímého nazírání bezprostředně nevyplývá. Naopak do dob Galileových se soudilo, že každý pohyb bez výjimky, a tedy i rovnoměrný přímočarý pohyb, vyžaduje hnací síly. Podle principu setrvačnosti je s přirozeným stavem těles spojena základní vlastnost, kterou nazýváme *setrvačností* (odtud název tohoto principu). Jí se těleso jakoby brání proti změně svého přirozeného pohybového stavu. Výrazu „těleso se brání“ je ovšem třeba správně rozumět. Ve skutečnosti těleso samo ze sebe pohybu nebo změně pohybového stavu nikdy nezabrání. Podle Maxwella mohli bychom stejně říkat, že číška čaje se brání svému oslazení, protože se nestane sladkou dříve, dokud do ní nedáme cukr. I zde máme na mysli okolnost, že těleso se nedá do pohybu, popř. nezmění svoji rychlost dříve, dokud na ně nepůsobí jiné těleso nějakou silou. Setrvačnost jako každá fyzikální vlastnost má nejen stránku kvalitativní, ale také kvantitativní. Ta vyplyne z dalšího pohybového zákona.

b) *Druhý pohybový zákon (zákon síly)*. Ze všech pohybů vyznačuje se jedině rovnoměrný přímočarý pohyb nebo klid vlastností, že zrychlení je rovno nule. Při všech jiných pohybech je zrychlení a takové pohyby vyžadují podle principu setrvačnosti silové působení. Z toho lze soudit, že účinek silového působení na těleso se projevuje zrychlením tělesa. Tento úsudek však ještě nestačí k vyjádření kvantitativního vztahu mezi silou a zrychlením. Držíme-li např. v jedné ruce železnou kouli a v druhé ruce stejně velkou dřevěnou kouli, cítíme zřetelně, že železná koule tlačí na ruku větší silou než dřevěná. Pustíme-li obě tělesa, pak na ně působí zřejmě tytéž síly, jakými tlačila na ruce, přesto však pozorujeme, že koule padají se stejným zrychlením, neboť současně dopadnou na podlahu. Různě velké síly způsobily tedy stejná zrychlení, a obráceně, kdyby na obě koule působily stejné velké síly, pak by patrně zase zrychlení obou těles byla různě velká, a to u železné koule menší, u dřevěné koule větší. Projevuje se tu zřejmě kvantitativní stránka setrvačnosti obou těles, tj. odporu proti změně svého pohybového stavu. Objektivní vlastnost všech těles, která se projevuje v okolnosti, že při stejném vnějším působení nabývají různých zrychlení, nebo že k témuž zrychlení je u různých těles třeba různě velkého silového působení, charakterizujeme fyzikální veličinou, kterou nazýváme *hmotností*;^{*)} označujeme ji písmenem *m*. Je to skalární veličina, jejíž velikost (číselnou hodnotu) vyjadřujeme v násobcích hmotnosti označené 1 *kilogram*, kterou má jisté zvolené těleso (váleček ze slitiny platiny a iridia, uložený v mezinárodním Bureau des Poids et Mesures v Sèvres), zvané *mezinárodní prototyp kilogramu*.

Na základě uvedených faktů můžeme už sestavit kvantitativní vztahy mezi silou a jejím účinkem — zrychlením. Nejjednodušší možný vztah má tvar

$$2.2 \ (3) \quad a = k \frac{F}{m} \quad \text{nebo} \quad ma = kF.$$

^{*)} Tato veličina se v češtině dosud nazývala *hmota*, v cizí literatuře se jí říká *masa*. Protože slovo *hmota* má v češtině zároveň význam látky, která je nositelkou zmíněné vlastnosti, a kromě toho se ho užívá též jako filosofické kategorie k označení objektivní reality, docházelo vzájemnou záměnou významů tohoto termínu k hrubému zkreslování skutečnosti. Naproti tomu nemá slovo *hmotnost* v celém textu jiné významy než ty, které mu připisujeme v tomto článku. Řídíme se tím zároveň doporučením Československé státní normy o zákonných měrových jednotkách.

tj. je přímá úměrnost mezi zrychlením a působící silou u jednoho a téhož tělesa ($m = \text{const}$) a nepřímá úměrnost mezi zrychlením a hmotností v případech různých těles, na která působí stejné síly ($F = \text{const}$), tzn. při téže síle je zrychlení tím menší, čím větší setrvačností (posuzovanou hmotností m) je těleso nadáno. Přitom jsme použili vektorového vyjádření, protože pokusy ukazují, že při současném působení několika sil těleso nabývá takového zrychlení, jako kdyby na ně působila jediná síla, určená vektorovým součtem působících sil. Vektory zrychlení a síly mají tedy týž směr.

Uvedená rovnice uvádí ve vzájemný vztah příčinu a účinek u mechanického pohybu, což je obsahem druhého pohybového zákona. Při jeho formulaci je však třeba přihlídnout k tomu, že na základě dosavadních úvah nemůžeme rozhodnout, zda veličina m , kterou jsme nazvali hmotností, je neproměnná, za všech okolností stejná vlastnost tělesa, nebo zda závisí nějak na pohybovém stavu tělesa, tzn. zda těleso při různých rychlostech neprojevuje snad různě velkou setrvačnost. Ať tak či onak, charakterizuje okamžitý pohybový stav tělesa zřejmě součin z jeho hmotnosti m a rychlosti $\mathbf{v}$, tedy

$$2.2 (4) \quad \boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v};}$$

tento vektor, jehož směr je totožný se směrem rychlosti, nazýváme *hybností* tělesa. Vzpomeneme-li, že zrychlení je podle 2.1 (12) určeno časovou změnou rychlosti, tedy $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, pak součin $m\mathbf{a} = m(d\mathbf{v}/dt)$ ve vztahu 2.2 (3) je roven podílu $d(m\mathbf{v})/dt = d\mathbf{p}/dt$, je-li $m = \text{const}$. S ohledem na možnost, že hmotnost těles není neproměnná veličina, můžeme tedy rovnici 2.2 (3) psát opatrnějším způsobem ve tvaru

$$2.2 (5) \quad \boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = k\mathbf{F},}$$

aniž bychom něco změnili na předešlé úvaze, je-li $m = \text{const}$. Dostáváme se tak k formulaci druhého pohybového zákona v původním znění, jak ji podal sám Newton, který zmíněnou možnost už bral v úvahu:

Časová změna hybnosti tělesa je úměrná působící síle a má s ní stejný směr.

Novější teorie relativnosti, o které pojednáme v kapitole 2.9, skutečně vede k důsledku, že hmotnost m tělesa roste s velikostí rychlosti, již se těleso pohybuje. Změna hmotnosti se však projevuje teprve při rychlostech srovnatelných s rychlostí světla (např. u elementárních částic). Pokud rychlost pohybujícího se tělesa je malá proti rychlosti světla, je vzrůst hmotnosti s rychlostí tak nepatrný, že můžeme hmotnost pokládat za stálou veličinu. To je splněno při všech úlohách technické mechaniky, kde počítáme s rychlostmi asi stotisíckrát menšími, než je rychlost světla.

V klasické mechanice Newtonově se hmotnost m automaticky považuje za konstantní, a proto rovnice 2.2 (3) je ekvivalentní formulací druhého pohybového zákona podle 2.2 (5). Přitom konstanta úměrnosti k závisí na tom, v jakých jednotkách měříme všechny tři veličiny. Volíme-li tuto konstantu rovnou 1, nabude rovnice 2.2 (3) tvaru

$$2.2 (6) \quad \boxed{m\mathbf{a} = \mathbf{F}.}$$

Volbou konstanty zavedli jsme již zcela určitý způsob měření sil (kdybychom síly měřili např. podle velikosti deformace zvoleného tělesa, pak by ovšem konstanta mohla mít hodnotu jinou než 1). Ve fyzice se ujal způsob měření sil v jednotkách definovaných rovnicí 2.2 (6). Hlavní jednotkou síly je *newton* (značka N). Je to síla, která uděluje tělesu

s hmotností 1 kg zrychlení $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Vedlejší jednotkou je *kilopond* (kp) definovaný přesně platným vztahem

$$2.2 (7) \quad 1 \text{ kp} = 9,806 \ 65 \text{ N}.$$

Rovnice 2.2 (6) umožňuje kvantitativně srovnávat hmotnosti těles ze zrychlení, které jim udělí táž síla. Lze to provést různě, např. tak, že mezi tělesa, jejichž hmotnosti chceme srovnávat, vložíme třetí těleso schopné pružné deformace (pružinu, napjatou šňůru atd.) a předpokládáme, že působení na obě tělesa je stejné, je-li i deformace tohoto třetího tělesa táž. Získají-li dvě tělesa vlivem stejného vnějšího působení různých zrychlení a_1 a a_2 , pak poměr jejich hmotností m_1 a m_2 vyhovuje úměře

$$\frac{m_1}{m_2} = \left| \frac{a_2}{a_1} \right|.$$

Takto určená hmotnost nazývá se *setrvačná hmotnost*.

Důležitou silou je *tíha* (*váha**) G těles, tj. síla, jíž tělesa podléhají v tíhovém poli zemském. Touto silou tlačí těleso na vodorovnou podložku nebo napíná nějaký závěs, z jehož deformace lze její velikost staticky určit. Podle gravitačního zákona je tíha úměrná hmotnosti tělesa (kap. 2.3), která se nazývá *tíhová*. Tato hmotnost mohla by se lišit od setrvačné hmotnosti, takže např. železná a hliníková kulička stejné váhy mohly by za působení stejně velkých sil nabýt různě velkých zrychlení. Měly by pak stejnou tíhovou, ale různou setrvačnou hmotnost, což by se projevilo tím, že by ve vakuu padaly různě. Ale již Galilei poznal, že všechna tělesa padají (ve vakuu) se stejným zrychlením, zvaným *tíhové zrychlení* g . Známe-li setrvačnou hmotnost m tělesa a měříme-li jeho tíhu podle 2.2 (6) na základě tíhového zrychlení, které uděluje tělesu po jeho uvolnění, platí tedy

2.2 (8)

$$G = mg,$$

ale zároveň však $G = km_t$, značí-li m_t tíhovou hmotnost a k konstantu úměrnosti mezi ní a tíhou. Pro dvě tělesa musí tedy být

$$g = \frac{G_1}{m_1} = \frac{G_2}{m_2} = \frac{km_{t1}}{m_1} = \frac{km_{t2}}{m_2} = \text{const},$$

což je možné jen tehdy, je-li tíhová hmotnost úměrná hmotnosti setrvačné. Tato úměrnost plyne nejen z pozorování volného pádu, ale i z jiných pečlivě provedených pokusů, a byla experimentálně potvrzena s přesností řádově 10^{-8} (viz čl. 2.2.5). Volíme-li tedy pro tíhovou hmotnost stejnou jednotku jako pro setrvačnou hmotnost, a to 1 kilogram, jsou obě hmotnosti shodné, takže jsou zřejmě mírou jedné a téže vlastnosti materiálních objektů, projevující se různými způsoby: setrvačností a vzájemným přitahováním (gravitací).

Rovnice 2.2 (8) umožňuje srovnání hmotností těles na základě jejich tíhy (vážení), jež je při stejné přesnosti mnohem pohodlnější a jednodušší než srovnání hmotnosti ze zrychlení, které uděluje táž síla, jak jsme uvedli.

Srovnáme-li definici síly 1 kilopondy podle 2.2 (7) se vztahem 2.2 (8), přičemž $1 \text{ N} = 1 \text{ kgms}^{-2}$, pozorujeme, že kilopond je síla, která tělesu hmotnosti 1 kg uděluje zrychlení, které je rovno tzv. *normálnímu tíhovému zrychlení* $g_n = 9,806 \ 65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Nepřihlížíme-li tedy k proměnlivosti tíhového zrychlení na zemském povrchu, jež nečiní více než 0,5 % od normální hodnoty, je *tíha tělesa v kilopondech číselně rovna hmotnosti tělesa v kilogramu*.

*) Tomu o pojmu, který má jednoznačný význam *tíhové síly*, přisuzuje norma ČSN 01 1300 násilně i význam hmotnosti. Že tento postup normy je nevhodný, je podrobně zdůvodněno v článku Krupka F.: K názvosloví státní technické normy o měrových jednotkách, Strojírnoství 1963, č. 4, str. 309—312.

mech. Podobně měrná tíha γ , definovaná podílem tíhy G tělesa a jeho objemu V , je číselně rovna měrné hmotnosti neboli hustotě ρ definované podílem hmotnosti m tělesa a jeho objemu:

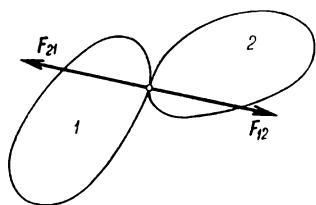
2.2 (9)

$$\gamma = \frac{G}{V},$$

$$\rho = \frac{m}{V},$$

a to měříme-li objem V v obou případech ve stejných jednotkách, např. v m^3 , váhu v kilopondech a hmotnost v kilogramech.

Podle státní normy o zákonných měrových jednotkách lze pro hmotnost těles užívat jedině hlavní jednotky kilogram a jejich násobků, např. tuny, gramu apod. Vedlejší jednotky pro hmotnost nejsou přípustné. V technických výpočtech se tedy nemá objevovat podíl $m = G/g$ v tzv. technických jednotkách $\text{kp} \cdot \text{s}^2$. Z převodního vztahu 2.2(7) mezi jednotkami kilopond a newton plyne zaokrouhleně $9,81 \frac{\text{N}}{\text{kp}} = 1$ nebo $\frac{1}{9,81} \frac{\text{kp}}{\text{N}} = 1$. Je-li tedy dána síla F v kp a máme z pohybové rovnice určit součin ma , v němž hmotnost je nutno udát v kg, pak sílu násobíme prvním z obou uvedených faktorů. Naopak máme-li ze součinu ma , v němž hmotnost je podle předpisu udána v kg, určit sílu F v kp, násobíme součin ma druhým z obou uvedených faktorů.



Obr. (2.2) 6. Vzájemné působení mezi tělesy

c) *Třetí pohybový zákon (princip akce a reakce)*. Síla, která působí na těleso, může pocházet jedině od těles, která vyšetřované těleso obklopují. Ze zkušenosti víme, že působí-li těleso 1 na těleso 2 silou F_{12} , působí těleso 2 na těleso 1 silou F_{21} , která je stejně velká, ale má opačný směr [obr. (2.2) 6]

$$F_{12} = -F_{21}.$$

Síly nepůsobí tedy nikdy jednotlivě, nýbrž vždy po dvou, protože vždy jde o vzájemné působení těles. Nazveme-li sílu F_{12} *akcí*, pak F_{21} je *reakcí* na sílu F_{12} a obráceně. Slovní formulací třetího pohybového zákona je tedy věta:

Vzájemné síly mezi dvěma tělesy mají vždy stejnou velikost a opačný směr (proto též princip vzájemného působení).

Přitom nezáleží, jakým způsobem těleso na sebe působí, zda přímo tlakem nebo tahem nebo prostřednictvím jiných těles, např. pružiny, napnutého vlákna apod.; mohou to být i síly působící „na dálku“, jako např. při gravitaci. Nezáleží také na tom, zda jedno těleso je v klidu a druhé se pohybuje, nebo zda se obě vzhledem k dalším tělesům pohybují. Je však třeba mít na zřeteli, že dvě síly řídící se principem akce a reakce jsou síly působící vždy na různá tělesa, takže sledujeme-li jen jedno z obou těles, nemůžeme obě síly skládat dohromady, neboť jen síla od druhého tělesa (akce) vyjadřuje působení na sledované těleso. Sloučíme-li však obě tělesa dohromady v jednu soustavu těles a hledáme výslednou sílu uvnitř této soustavy, pak síly řídící se principem akce a reakce můžeme počítat dohromady. Z tohoto hlediska umožňuje třetí Newtonův pohybový zákon přechod od dynamiky jednoho hmotného bodu k dynamice soustavy hmotných bodů, jak poznáme v kap. 2.4.

2.2.3. Pohybové rovnice

Z II. pohybového zákona, zákona síly, plyne rovnice 2.2 (6), která vyjadřuje úměrnost mezi působící silou a zrychlením tělesa. Vztahujeme-li pohyb k soustavě souřadnic $OXYZ$, má působící síla F průměty F_x, F_y, F_z do směru těchto souřadnicových os a podobně průměty zrychlení a jsou a_x, a_y, a_z . Můžeme proto zákon síly vyjádřený vektorovou rovnicí 2.2 (6) nahradit třemi rovnicemi pro průměty zúčastněných veličin:

2.2 (10)

$$\begin{aligned} ma_x &= m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \\ ma_y &= m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \\ ma_z &= m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \end{aligned}$$

Těmto rovnicím říkáme *pohybové rovnice*.

Zákon síly poskytuje tři nezávislé rovnice, z nichž lze určit pohyb tělesa vzhledem k zvolené soustavě souřadnic, známe-li průměty síly v každém okamžiku. Nepůsobí-li žádná síla, plyne z těchto rovnic, že zrychlení je nulové. Pohybové rovnice 2.2 (10) v uvedeném tvaru platí jen v souřadnicové soustavě, ve které platí také první pohybový zákon. Pohybové rovnice ve tvaru 2.2 (10) lze užít na tuhá tělesa, jestliže konají pohyb posuvný, který je úplně určen pohybem jediného geometrického bodu tělesa. Říkáme proto, že pohybové rovnice platí jen pro hmotný bod, čímž rozumíme těleso, jehož poloha v prostoru je jednoznačně určena polohou jediného bodu.

Obecně jsou průměty síly, která působí na hmotný bod, závislé na poloze bodu a nabývají s časem různých hodnot. V některých případech závisí i na jeho okamžité rychlosti, jak je tomu např. při pohybu v odporujícím prostředí. Pohyb hmotného bodu není také úplně stanoven průměty nebo složkami síly, neboť síla sama určuje jen zrychlení, zatímco okamžitá rychlost bodu závisí také na rychlosti, jakou se bod pohyboval v okamžiku, kdy síla začala působit. Souřadnice bodu a průměty jeho rychlosti v okamžiku, kdy síla začala působit, určují tzv. *počáteční podmínky*. Z hlediska fyzikálního jsou tyto podmínky dány předcházejícím pohybem bodu, ať už je výsledkem nějakého silového působení, nebo zákona setrvačnosti. Z hlediska matematického jsou pohybové rovnice diferenciální rovnice druhého řádu, jejichž obecný integrál obsahuje dvě integrační konstanty, které se určují ze známých počátečních podmínek. Obecně tedy máme

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x = f_x \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y = f_y \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z = f_z \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \end{aligned}$$

Pohybové rovnice umožňují tedy určit průběh rychlosti hmotného bodu při pohybu a dráhu hmotného bodu za působení vnějších sil nebo obráceně ze známé dráhy nebo známého průběhu rychlosti zjistit vnější síly, které daný pohyb způsobují.

Působí-li na těleso, jež můžeme považovat za hmotný bod, několik sil $F_1, F_2, \dots, F_n$, pak počítáme v rovnici 2.2 (6) s vektorovým součtem, tj. s výslednicí těchto sil. Mají-li všechny síly působící na hmotný bod stejný směr, je výslednice dána jejich algebraickým součtem. Průměty zrychlující síly v 2.2 (10) jsou pak průměty výslednice působících sil.

Jsou-li síly $F_1, F_2, \dots, F_n$, působící na hmotný bod, v rovnováze, tzn. že se navzájem ruší (jejich vektorový součet je roven nule), pohybuje se bod ve shodě s I. pohybovým zákonem.

Použití pohybových rovnic ukážeme na příkladu *šikmého vrhu* tělesa [obr. (2.2) 7].

Těleso, které můžeme považovat za hmotný bod, pohybuje se ve vzduchoprázdném prostoru přímočaře rovnoměrně rychlostí c a má v okamžiku $t = 0$ vzhledem k zvolené soustavě souřadnice x_0, y_0, z_0 . Kdyby na ně nepůsobila žádná síla, pohybovalo by se podle

prvního pohybového zákona stále rovnoměrně přímočaře. Dejme tomu, že těleso v okamžiku $t = 0$ vstoupí do zemského gravitačního pole. Od tohoto okamžiku bude na těleso působit jeho tíha — mg , která má směr a smysl záporné osy Y , takže ve shodě s druhým pohybovým zákonem nebude se již pohybovat přímočaře rovnoměrně, nýbrž se zrychlením, které má směr působící síly. Vyšetřit dráhu tělesa je nyní možné užitím pohybových rovnic. Úloha je stejná, jako kdybychom v místě o souřadnicích x_0, y_0, z_0 vystřelili střelu rychlostí c . Pohybové rovnice 2.2 (10) mají tvar:

(ve směru X nepůsobí žádná síla)

(v záporném směru osy Y působí tíha tělesa)

(ve směru osy Z nepůsobí žádná síla)

$$F_x = ma_x = 0,$$

$$F_y = ma_y = -mg,$$

$$F_z = ma_z = 0,$$

takže máme

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x = 0,$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y = -mg,$$

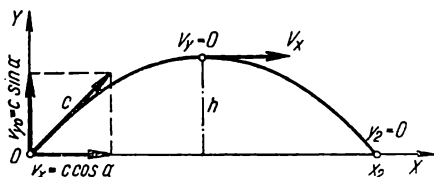
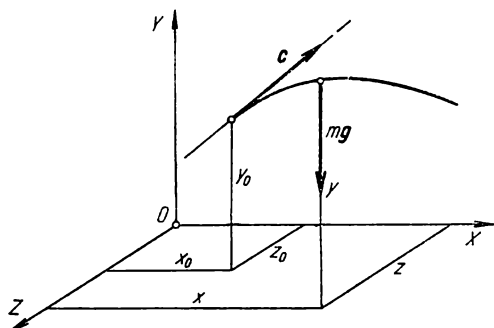
$$m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z = 0.$$

Pozorujeme, že ve všech rovnicích se m krátí, to znamená, pohyb, který vzniká působením gravitačního pole, nezávisí na hmotnosti hmotného bodu, všechna tělesa se v gravitačním poli a ve vakuu pohybují podle stejných zákonů. Můžeme pak pohybové rovnice psát ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dt} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dy}{dt} = \frac{dv_y}{dt} = -g,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dz}{dt} = \frac{dv_z}{dt} = 0.$$



Obr. (2.2) 7. Šikmý vrh

Integrací těchto rovnic dostaneme průměty okamžité rychlosti hmotného bodu do směru os zvolené souřadnicové soustavy. Z matematiky však víme, že v neomezeném (neurčitěm) integrálu se objevuje integrační konstanta, která může mít sice libovolnou číselnou hodnotu, ale ve fyzikálních rovnicích má zcela určitý význam. Je to proto, že vystupuje ve formě sčítance, který musí mít též rozměr jako závisle proměnná a ostatní členy v rovnici, kterou integrací dostaneme, takže její význam je též. Víme-li, že první integrály pohybových rovnic vedou k průmětům rychlosti hmotného bodu, pak je třeba i integračním konstantám v těchto integrálech přiřadit význam průmětů rychlosti. Podobně je tomu při další integraci. Proto v integrálech, které dostaneme integrací pohybových rovnic, označíme příslušné integrační konstanty hned tímž znakem jako závisle proměnnou a odlišíme je jenom indexem, např. nula.

Uvědomíme-li si, že derivace je rovna nule, je-li závisle proměnná konstantní, dostaneme z hořejších rovnic pro průměty rychlosti hmotného bodu

$$2.2 (11) \quad v_x = v_{x0}, \quad v_y = -gt + v_{y0}, \quad v_z = v_{z0},$$

kde v_{y0} je integrační konstanta a v_{x0} a v_{z0} jsou stálé hodnoty příslušné závisle proměnné, jejíž derivace podle času je rovna nule. Tyto rovnice můžeme psát ve tvaru

$$\frac{dx}{dt} = v_{x0}, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v_{y0}, \quad \frac{dz}{dt} = v_{z0}$$

a další integrací dostaneme

$$2.2 (12) \quad x = v_{x0}t + x_0, \quad y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 + y_0, \quad z = v_{z0}t + z_0,$$

kde x_0 , y_0 a z_0 jsou další integrační konstanty. Pozorujeme, že pouhá znalost působící síly [nebo vzhledem k 2.2 (6) zrychlení] nestačí k úplnému určení pohybu, neboť integrační konstanty mohou mít různé číselné hodnoty. Teprve známe-li pohybový stav hmotného bodu, tj. jeho rychlost a polohu vzhledem k vytčené soustavě souřadnic v některém okamžiku, můžeme integračním konstantám přiřadit takové hodnoty, aby řešení 2.2 (12) popisovalo daný pohyb. Řekli jsme, že v okamžiku $t = 0$, od něhož pohyb sledujeme, má bod souřadnice x_0 , y_0 a z_0 a jeho počáteční rychlost $\mathbf{c}$ má průměty do směru souřadnicových os, které označíme v_{x0} , v_{y0} a v_{z0} . To jsou počáteční podmínky, které určují pohybový stav hmotného bodu na začátku sledovaného pohybu. Dosadíme-li do rovnice 2.2 (11) a (12) $t = 0$, vidíme ihned, že $v_x = v_{x0}$, $v_y = v_{y0}$, $v_z = v_{z0}$ a $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, tzn. že integrační konstanty určují průměty rychlosti hmotného bodu a jeho souřadnice v okamžiku $t = 0$, a jsou tedy shodné s počátečními podmínkami, proto jsme je také shodně označili. Rovnice 2.2 (12) mají tvar $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ a $z = f_3(t)$, takže podle výkladu v čl. 2.1.1 úplně popisují pohyb hmotného bodu, který vznikne ze známého silového působení za daných počátečních podmínek.

Posuneme-li soustavu souřadnic tak, aby hmotný bod v okamžiku $t = 0$ procházel jejím počátkem, bude $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Další zjednodušení můžeme ještě provést, uvědomíme-li si, že zákon setrvačnosti platí též pro průměty pohybu. Protože ve směru osy Z nepůsobí žádná síla, nebude se bod vychylovat z roviny tvořené vektorem počáteční rychlosti $\mathbf{c}$ a vektorem jediné síly, která působí ve směru Y . Uspořádáme-li souřadnicovou soustavu tak, aby vektor $\mathbf{c}$ ležel v rovině OXY , bude se pohyb dít v této rovině a souřadnice z bude při celém pohybu nulová a rovněž rychlost v_z bude se rovnat nule. Svírá-li vektor počáteční rychlosti $\mathbf{c}$ bodu s osou X úhel α , budou podle obr. (2.2) 7 její průměty $v_{x0} = v_x = c \cos \alpha$, $v_{y0} = c \sin \alpha$, $v_{z0} = 0$, takže dosadíme-li tyto počáteční podmínky do řešení 2.2 (12), popisují vzniklý pohyb při takovém uspořádání souřadnicové soustavy rovnice

$$2.2 (13) \quad x = c \cos \alpha \cdot t, \quad y = c \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2, \quad z = 0.$$

Chceme-li znát rovnici dráhy jako křivku $y = f(x)$, vyloučíme parametr t , dosadíme-li za něj z první rovnice 2.2 (13) do druhé:

$$y = x \frac{c \sin \alpha}{c \cos \alpha} - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{c^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Protože koeficienty u x a x^2 jsou konstantní, má tato rovnice tvar $y = ax - bx^2$, což je rovnice paraboly. Při šikmém vrhu opisuje tedy hmotný bod ve vzduchoprázdnu parabolu.

Největší výšku h , které hmotný bod při svém pohybu dosáhne, a dobu t_1 , kterou k tomu potřebuje, dostaneme, jestliže svislou složku rychlosti bodu položíme rovnu nule ($v_y = 0$), neboť v tomto okamžiku mění svislá složka svůj smysl (před okamžikem t_1 má v_y směr kladné osy Y , po okamžiku t_1 směřuje v_y ve směru záporné osy Y). Derivujeme-li druhou rovnici 2.2 (13) podle t , dostaneme

$$\frac{dy}{dt} = v_y = c \sin \alpha - gt.$$

Pro $t = t_1$, $v_y = 0$, takže čas, za který dosáhne hmotný bod vrcholu své dráhy, je

$$t_1 = \frac{c \sin \alpha}{g}.$$

Dosadíme-li do 2.2 (13), dostáváme

$$h = y_1 = c \sin \alpha \cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2} \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{g}.$$

Největší výšky je tedy možno dosáhnout při $\sin^2 \alpha = 1$ čili pro $\alpha = 90^\circ$, což nastane, vrhneme-li (nebo vystřelíme-li) hmotný bod svisle vzhůru.

Dostřel je horizontální vzdálenost mezi bodem výstřelu a bodem doletu. Této vzdálenosti dané souřadnicí x_2 dosáhne bod patrně, když bude souřadnice y nulová čili v okamžiku t_2 vyhovujícím podmínce

$$y = c \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 0.$$

Jeden kořen této rovnice je $t = 0$, což přísluší okamžiku výstřelu, druhý kořen určuje dobu letu

$$t_2 = \frac{2c \sin \alpha}{g} = 2t_1.$$

Je to dvojnásobná doba proti době t_1 , kterou bod potřebuje k dosažení největší výšky. Dosaíme-li za t_2 do první rovnice 2.2 (13), dostaneme dostřel

$$x_2 = c \cos \alpha \cdot t_2 = \frac{2c^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{c^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Maximální dostřel bude patrně pro $\sin 2\alpha = 1$, tj. $2\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ$. Pro úhly výstupu $\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)$

a $\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right)$ je dostřel stejně velký, protože $\sin 2\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right)$. Uvedené vztahy platí, jak jsme již řekli, pouze pro vzduchoprázdno. Při pohybu střely vzduchem přistupuje jako další působící síla odpor vzduchu, který je u střel ve srovnání s jejich váhou tak značný, že má znatelný vliv na pohyb. Odpor vzduchu závisí v podstatě na rychlosti střely a na mnoha dalších činitelích, např. na rozměrech tělesa a na rozložení tlaku vzduchu nad povrchem zemským. Dráha, kterou střela opisuje, není parabola, nýbrž klesá strměji než stoupá. Takovým křivkám říkáme *balistické křivky* a zabývá se jimi tzv. *vnější balistika*. *Vnitřní balistika* pak studuje pohyb střely uvnitř hlavně.

Druhou možnost použití pohybových rovnic, a to ze známé dráhy pohybu vyšetřit sílu, která pohyb způsobuje, ukážeme na harmonickém pohybu hmotného bodu.

Harmonický pohyb je kinematicky definován rovnicí, která určuje vzdálenost bodu od rovnovážné polohy

$$y = A \sin (\omega t + \varphi_0),$$

takže zrychlení bodu

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = -A \omega^2 \sin (\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y.$$

Z této rovnice plyne

2.2 (14)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0.$$

Této rovnici říkáme *diferenciální rovnice harmonického pohybu*. Je to právě jedna ze tří diferenciálních pohybových rovnic 2.2 (10), z nichž k řešení pohybu stačí pouze jedna, neboť pohyb se děje v přímce, do které je možno položit jednu ze souřadnicových os. Násobíme-li zrychlení hmotností m bodu, dostaneme

$$m \frac{dy^2}{dt^2} = m a_y = -m \omega^2 y.$$

Srovnáme-li tuto rovnici s druhou pohybovou rovnicí 2.2 (10), dostaneme

2.2 (15)

$$F_y = m a_y = -m \omega^2 y = -K y,$$

kde $m \omega^2 = K$ je stálá hodnota (ω je konstantní úhlová frekvence). *Harmonický pohyb vzniká tedy, působí-li síla, která je stále úměrná výchylce z rovnovážné polohy a má při tom opačný směr (směřuje do rovnovážné polohy).*

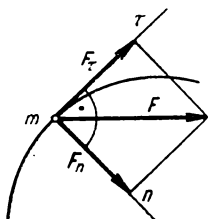
Takové případy jsou velmi časté a nastávají, když hmotný bod je působením sil v rovnovážné poloze stabilní (tj. je-li třeba k jeho vychýlení z této rovnovážné polohy vnějších sil). Takovou vlastnost vykazují především deformovaná pružná tělesa. Vnitřní síly se snaží deformace zrušit, směřují k rovnovážné poloze, a pokud je deformace malá, jsou podle známého Hookova zákona úměrné výchylce (deformaci). Deformované pružné těleso náhle uvolněné může proto tvořit vhodný zdroj síly pro harmonický pohyb.

V čl. 2.1.1 jsme poznali, že hmotný bod má při obecném pohybu po zakřivené dráze zrychlení $\mathbf{a}$, které nemá směr tečny ke křivce dráhy, a lze je proto rozložit na složku tečnou $\mathbf{a}_\tau = (dv/dt) \boldsymbol{\tau}^0$ a na složku kolmou (normálovou) $\mathbf{a}_n = (v^2/\rho) \mathbf{n}^0$, kde v je velikost okamžité rychlosti a ρ poloměr křivosti dráhy v místě, v němž zrychlení vyšetřujeme. Protože Newtonův druhý pohybový zákon, vyjádřený rovnicí $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, platí zcela obecně pro jakýkoli pohyb hmotného bodu (vyjímajíc případy, o nichž je pojednáno v následujícím článku), je zřejmé, že při křivočarém pohybu působí na bod síla téhož směru a smyslu, jako má zrychlení bodu ve vyšetřovaném okamžiku. Stejně jako zrychlení $\mathbf{a}$ rozkládáme i sílu $\mathbf{F}$ na složku tečnou $\mathbf{F}_\tau$ a složku normálovou $\mathbf{F}_n$, které jsou určeny vztahy

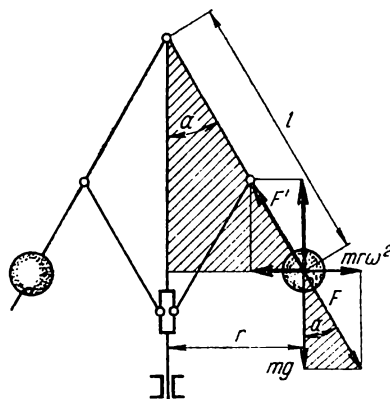
$$2.2 \quad (16), (17) \quad \boxed{\mathbf{F}_\tau = m\mathbf{a}_\tau = m \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau}^0, \quad \mathbf{F}_n = m\mathbf{a}_n = m \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}^0.}$$

jak je znázorněno na obr. (2.2) 8. Tečná složka $\mathbf{F}_\tau$ mění velikost rychlosti hmotného bodu, kolmá složka $\mathbf{F}_n$ mění směr rychlosti. Tato kolmá síla směřuje ke středu křivosti dráhy, a proto ji říkáme síla *dostředivá* (*centripetální*).

Při rovnoměrném pohybu hmotného bodu po zakřivené dráze, tedy při pohybu, při němž má rychlost stálou velikost, je tečná síla $\mathbf{F}_\tau$ trvale rovna nule a na hmotný bod působí jen síla dostředivá, která tudíž musí existovat vždy, je-li hmotný bod nějakým upevněním,



Obr. (2.2) 8. Rozklad síly na tečnou a normálovou složku



Obr. (2.2) 9. Odstředivý regulátor

kterému říkáme *vazba*, nucen pohybovat se po zakřivené dráze. Kdyby dostředivá síla náhle přestala na hmotný bod působit, nenutilo by jej již nic ke křivočarému pohybu, a proto by se podle Newtonova prvního pohybového zákona pohyboval přímočaře ve směru rychlosti, kterou měl v okamžiku, kdy dostředivá síla vymizela.

Dostředivá síla je tedy síla, kterou na pohybující se bod působí vazba nutící jej ke křivočarému pohybu. Podle Newtonova principu vzájemného působení (akce a reakce) působí hmotný bod na svou vazbu stejně velkou silou, ale opačného směru, kterou nazýváme silou *odstředivou* (*centrifugální*), protože míří od středu křivosti. Je-li dostředivá síla akcí, je odstředivá reakcí na ni, a obě síly působí proto na různá tělesa. Otáčí-li se např. kámen upevněný na provázku, působí na provázek silou odstředivou a napíná jej. Na nákolky lokomotivních kol působí v zatáčce koleje silou dostředivou, nákolky tlačí na koleje silou odstředivou apod.

K odstředivé síle je třeba přihlížet vždy, kdykoli nutíme vazbou těleso konat pohyb po zakřivené dráze. Nemají-li např. na koleje působit postranní tlaky, je třeba trať upravit tak, aby výsledná síla byla kolmá k rovině trati.

Účinku odstředivé síly je využito v celé řadě praktických zařízení, jako jsou známé odstředivky nebo odstředivé regulátory. Zmíníme se podrobněji jen o odstředivém regulátoru, jehož nejjednodušší typ je na obr. (2.2) 9. Koule rotující úhlovou rychlostí ω nastaví se tak, aby výslednice z tíhy koule mg a z odstředivé síly $m\omega^2 r$ měla směr ramena, na němž je koule upevněna. Pomníme-li hmotnost ramen a objímky, nastaví se rovnováha, jestliže

$$\frac{l \cos \alpha}{r} = \frac{mg}{m\omega^2 r} \text{ čili } \cos \alpha = \frac{g}{l\omega^2},$$

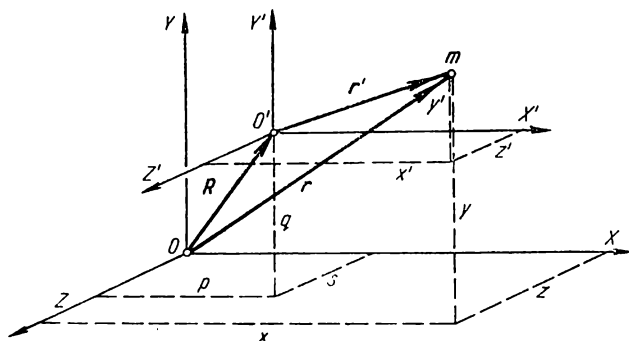
jak plyne z podobnosti vyčárkovaných trojúhelníků. V rovnovážném stavu působí tedy koule na rameno silou F [obr. (2.2) 9] a rameno působí na kouli stejně velkou silou F' opačného smyslu. Vodorovná složka síly F' je dostředivou silou, která je nutná k tomu, aby koule konala kruhový pohyb, svislá složka síly F' je v rovnováze s vahou koule. S rostoucí úhlovou rychlostí zvětšuje se úhel α (kosinus se zmenšuje), koule se rozestupují a objímka na ose se zvedá. Pro větší otáčky se objímka zatěžuje přidavným závažím. Zařízení se užívá např. k regulaci parního stroje tak, že objímka se vhodným mechanismem spojí s ventilem, který řídí přívod páry do stroje.

2.2.4. Silové působení při relativním pohybu

A. Inerciální soustavy

V článku 2.2.2 jsou uvedeny pohybové zákony, které říkají, jaký je pohyb těles, nepůsobí-li na ně síla, a co se děje, když na těleso síla působí. Pohyb však vztahujeme k soustavě souřadnic (kterou si nejčastěji myslíme spojenou s pevným tělesem) a tato vztážná soustava se může sama pohybovat vzhledem k jiné soustavě. Jde nyní o to, zda zůstávají pohybové zákony v platnosti bez zřetele na to, zda se soustava, ke které pohyb vztahujeme, buď sama pohybuje, a jak se pohybuje či nepohybuje, nebo zda pohybové zákony při pohybu vztážné soustavy již neplatí v téže formě.

Abychom to vyšetřili, předpokládáme dvě soustavy souřadnic $OXYZ$ a $O'X'Y'Z'$, které jsou navzájem posunuty tak, že stejnojmenné osy jsou rovnoběžné



Obr. (2.2) 10. Transformace souřadnic

[obr. (2.2) 10]. Hmotný bod m má vzhledem k soustavě $OXYZ$ souřadnice x, y, z , vzhledem k soustavě čárkované souřadnice x', y', z' a vzájemné posunutí obou soustav je v tomto jednoduchém případě určeno souřadnicemi p, q, s počátku O' vzhledem k soustavě $OXYZ$. Polohu m vzhledem k oběma soustavám a vzájemnou polohu obou počátků O a O' můžeme také udat průvodiči

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} \quad \text{a} \quad \mathbf{R} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + s\mathbf{k},$$

přičemž jsme pro obě soustavy použili stejných jednotkových vektorů ve směru os, protože jsme tyto osy volili navzájem rovnoběžné. Podle obr. (2.2) 10 platí

$$2.2 \text{ (18)} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R} \quad \text{nebo} \quad x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} + p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + s\mathbf{k}.$$

Pohybuje-li se bod m , nabývají jeho průvodiče a tím také souřadnice s časem různých hodnot. Pohybuje-li se kromě toho také soustava $O'X'Y'Z'$ vzhledem k soustavě $OXYZ$, mění se také průvodič $\mathbf{R}$ počátku O' a jeho souřadnice p, q, s s časem, ale zůstávají-li při

tomto pohybu osy souřadnic obou soustav stále rovnoběžné (vzájemný pohyb obou soustav je posuvný), nemění se jednotkové vektory ve směru souřadnicových os a zůstávají stále stejné v obou soustavách. Kromě nich jsou tedy všechny zmíněné veličiny funkcemi času. Derivací rovnice 2.2 (18) dostaneme vzhledem k tomu, že jednotkové vektory jsou stále

$$2.2 (19) \quad \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} = \frac{dx'}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k} + \frac{dp}{dt} \mathbf{i} + \frac{dq}{dt} \mathbf{j} + \frac{ds}{dt} \mathbf{k}.$$

Derivace souřadnic bodu podle času znamenají však podle 2.1 (8) průměty jeho rychlosti vzhledem k zvolené soustavě souřadnic, takže rovnice, kterou jsme dostali, říká, že vektor

rychlosti $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}$ bodu m vzhledem k soustavě $OXYZ$ se rovná vektoro-

vému součtu rychlosti $\mathbf{v}' = \frac{dx'}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}$ bodu vzhledem k soustavě $O'X'Y'Z'$

a rychlosti $\mathbf{u} = \frac{dp}{dt} \mathbf{i} + \frac{dq}{dt} \mathbf{j} + \frac{ds}{dt} \mathbf{k}$, kterou se tato soustava pohybuje vzhledem k soustavě $OXYZ$, tedy

$$2.2 (20) \quad \boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}.}$$

Předpokládáme-li, že soustava $OXYZ$ je základní (klidná) soustava, k níž vztahujeme pohyby ostatních těles, pak rychlost $\mathbf{v}$ sledovaného hmotného bodu vzhledem k této soustavě nazýváme *rychlostí absolutní*, rychlost $\mathbf{v}'$, jakou se bod pohybuje vzhledem k pohybující se soustavě $O'X'Y'Z'$, pak nazýváme *rychlostí relativní* a rychlost $\mathbf{u}$, jíž se okamžitá poloha hmotného bodu m v pohybující se soustavě $O'X'Y'Z'$ pohybuje vzhledem k základní soustavě, nazýváme *rychlostí unášivou*. Chápeme-li tedy pohyb hmotného bodu vzhledem k základní soustavě jako výsledný pohyb vznikající složením dvou současných navzájem nezávislých pohybů rychlostí $\mathbf{v}'$ a $\mathbf{u}$, jejichž vektorový součet určuje výslednou rychlost $\mathbf{v}$, pak je rovnice 2.2 (20) vektorovým vyjádřením známého *pravidla o skládání (superpozici) současných rychlostí* a platí všeobecně, ať je vzájemný pohyb obou soustav jakýkoli. Při obecném pohybu obou soustav bude ovšem rychlost $\mathbf{u}$, jakou se jednotlivá místa v soustavě $O'X'Y'Z'$ pohybují vzhledem k základní soustavě $OXYZ$, od místa k místu jiná a jen v jednoduchém případě vzájemného posuvného pohybu obou soustav, který nyní vyšetřujeme, je vektor $\mathbf{u}$ společný všem místům v pohybující se soustavě, což je charakteristickým znakem jejího posuvného pohybu.

Předpokládejme dále, že vektor rychlosti $\mathbf{u}$ je nejen v každém místě soustavy $O'X'Y'Z'$ stejný, ale i s časem neproměnný, tj. pro celou soustavu platí $\mathbf{u} = \text{const}$, takže soustava $O'X'Y'Z'$ se pohybuje přímočaře rovnoměrně vzhledem k soustavě $OXYZ$, kterou jsme zvolili za základní. Složky unášivé rychlosti vyjádřené třemi posledními členy v rovnici 2.2 (19) jsou tedy stále, takže derivací této rovnice dostaneme s ohledem na stálost jednotkových vektorů

$$2.2 (21) \quad \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k} = \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{k}.$$

Druhé derivace souřadnic podle času znamenají složky zrychlení, takže máme výsledek, že zrychlení $\mathbf{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{k}$ hmotného bodu v pohybující se soustavě $O'X'Y'Z'$

je stejné jako jeho zrychlení $\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k}$ v základní soustavě $OXYZ$.

Znásobíme-li tato zrychlení hmotností m vyšetřovaného bodu,

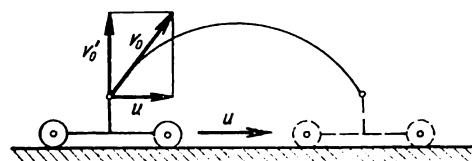
$$2.2 (22) \quad \boxed{m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} = \mathbf{F},}$$

dostaneme podle 2. Newtonova zákona sílu, která hmotnému bodu příslušná zrychlení uděluje. Předpokládáme ovšem, že v soustavě $OXYZ$, kterou jsme zvolili jako základní (považujeme ji za nehybnou), je to síla, kterou na hmotný bod působí okolní tělesa, tedy *skutečná síla*. Přesně stejná síla F působí ale podle hořejší rovnice také v druhotné pohybující se soustavě $O'X'Y'Z'$. Ruší-li se navzájem všechny síly, jimiž okolní tělesa na vyšetřovaný bod působí ($F = 0$), je jeho zrychlení v obou soustavách nulové a v obou se pohybuje přímočaře rovnoměrně nebo je v některé z nich v klidu. Docházíme tak k důležitému výsledku, že první i druhý Newtonův pohybový zákon platí nezměněně v obou soustavách a že je lhostejné, zda soustava je v klidu nebo se vzhledem ke klidné soustavě pohybuje přímočaře a rovnoměrně.

Klasická mechanika předpokládá existenci absolutního prostoru, takže výrok „soustava je v klidu“ znamená zřejmě, že je v klidu vzhledem k absolutnímu prostoru. Nemůžeme-li však po stránce silového působení navzájem rozlišit klid a pohyb, je-li tento rovnoměrný a přímočarý, jak máme rozhodnout, že těleso, s nímž je spojena soustava souřadnic, je v klidu v absolutním prostoru? S mechanickými prostředky bychom marně hledali reálné, absolutně nepohyblivé těleso; absolutní prostor takové těleso, s nímž by bylo možno spojit absolutní souřadnicovou soustavu, zřejmě neobsahuje. Z toho plyne, že absolutní pohyb v absolutním prostoru se vymyká přímému pozorování. Neztrácí ale potom pojem absolutního prostoru smysl? Nikoli. Newton k podpoře absolutního prostoru uvedl takové důvody, že

z hlediska klasické mechaniky jenelze vyvrátit. Poznáme je v dalších odstavcích tohoto článku.

Vzniká otázka, která soustava je tedy správnou soustavou, vzhledem k níž máme mechanický pohyb vyšetřovat. Vycházíme ze zkušenosti, že existují takové vztahné soustavy vytčené reálnými tělesy, v nichž pozorovaný průběh mechanických dějů souhlasí s výpočty provedenými na základě Newtonových pohybových zákonů; nazývají se



Obr. (2.2) 11. Svislý vrh na voze pohybujícím se rovnoměrně přímočaře

inerciální (setrvačné) soustavy, protože jejich základní vlastností je, že v nich platí princip setrvačnosti (setrvačnost je latinsky inertia). Takovými tělesy jsou např. stálíce, k nimž také patří naše Slunce. Heliocentrická soustava, jejíž počátek je ve středu Slunce (přesněji v těžišti sluneční soustavy) a jejíž osy směřují k určitým stálicím, má podle zkušenosti vlastnosti inerciální soustavy. *Inerciální jsou pak také další soustavy souřadnic, které jsou vzhledem k této soustavě, určené stálicemi, v klidu nebo v přímočarém rovnoměrném pohybu.* Všechny jsou rovnocenné jako základní soustavy, protože v nich platí Newtonovy pohybové zákony, jak jsme je formulovali. To je *klasický princip relativnosti Newtonovy dynamiky*. K inerciálním soustavám patří s dostatečnou přesností i soustava pevně spojená se Zemí. Při popisu většiny jevů na zeměkouli — zejména v technické mechanice — hodí se dobře jako základní soustava, protože našemu přímému názoru nejlépe vyhovuje, považujeme-li pohyb vzhledem k ní za absolutní.

K objasnění závěrů, k nimž jsme došli, představme si, že na voze, který se pohybuje stálou rychlostí u (unášivá rychlost), vrhne pozorovatel svisle vzhůru těleso počáteční rychlostí v_0 , která je relativní rychlostí tělesa vzhledem k vozu [obr. (2.2) 11]. Počáteční rychlost tělesa vzhledem k Zemi, kterou považujeme za absolutní, dostaneme podle rovnice 2.2 (20) vektorovým sečtením unášivé rychlosti u a počáteční relativní rychlosti v_0 . Absolutním pohybem je tedy šikmý vrh, jako kdyby těleso bylo na Zemi vrženo šikmo vzhůru rychlostí v_0 . Relativním pohybem (vzhledem k vozu) je však svislý vrh vzhůru rychlostí v_0 . Je-li rychlost vozu u stálá a neuvážujeme-li o odporech, padne těleso zase zpět na vůz na místo, z něhož bylo vrženo. Pozorovatel na voze, který o pohybu vozu nic neví, bude usuzovat, že na těleso, které hodí rychlostí v_0 , působí pouze jeho tíha, která je rovnoběžná se svislou osou jeho soustavy, a řekne, že se těleso chová přesně podle druhého pohybového zákona. Pozorovatel na Zemi bude pozorovat těleso vržené šikmo vzhůru rychlostí v_0 a z jeho dráhy usoudí, že na hmotný bod působí jako jediná síla jeho tíha čili že také v jeho soustavě se těleso pohybuje ve shodě s druhým pohybovým

zákonem. Oba pozorovatelé tedy, *pokud se silového působení týče*, pozorují totéž. Pohybové zákony platí tedy na voze se stejnou přesností jako na Zemi, s níž spojená soustava je prakticky inerciální. V obou soustavách probíhají fyzikální děje podle týchž zákonů a mechanickým měřením není možno rozhodnout, která soustava je v klidu a která se pohybuje. Kdybychom si představili, že vůz je v klidu a Země se pod ním pohybuje rychlostí $-\mathbf{u}$, pozorovali by oba pozorovatelé totéž. Potom by rychlost $\mathbf{v}'$ byla rychlost absolutní a $\mathbf{v}_0$ rychlost relativní, takže $\mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}_0 + (-\mathbf{u})$ a relativní rychlost vzhledem k Zemi $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}'_0 + \mathbf{u}$ vychází stejně jako prve.

Prisuzujeme-li na základě principu relativnosti dráze tělesa a dalším veličinám relativní charakter, neznamená to ovšem, že se vzdáváme objektivního obsahu těchto pojmů, jako by závisely na volbě vztažné soustavy provedené pozorovatelem. Vztažná soustava je vždy spojena s tělesem existujícím objektivně a nezávisle na nějakém pozorovateli, a proto i popis pohybu jiného tělesa vzhledem k takové soustavě odráží správně skutečnost nezávisle na člověku.

Přechod od jedné soustavy souřadnic k jiné soustavě souřadnic, který jsme v našem případě vyjádřili rovnicemi 2.2 (18), nazýváme *transformací souřadnic*. Při vzájemném přímočarém a rovnoměrném pohybu obou soustav rychlostí $\mathbf{u} = \text{const}$ nazývá se tato transformace *Galileiho transformace*. V případě, že v okamžiku $t = 0$ souřadnicové osy obou soustav splývají, je průvodič $\mathbf{R} = \mathbf{u}t$, a příslušná transformace je vyjádřena rovnicí

2.2 (23)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t.$$

Protože při přechodu z jedné inerciální soustavy do druhé nezmění Newtonovy rovnice svůj tvar, říkáme, že *Newtonovy pohybové rovnice jsou vzhledem ke Galileiho transformaci invariantní*.

B. Pohyb ve zrychlené soustavě

Koná-li soustava $O'X'Y'Z'$ vzhledem k inerciální soustavě $OXYZ$ nerovnoměrný posuvný (translační) pohyb, při němž zůstávají osy souřadnic obou soustav rovnoběžné, nebude už unášivá rychlost $\mathbf{u}$ stálá, což se při derivaci rovnice 2.2 (19) pro skládání rychlostí projeví tím, že derivace žádného členu v této rovnici podle času nevyzmizí. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k} &= \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{k} + \frac{d^2p}{dt^2} \mathbf{i} + \\ &+ \frac{d^2q}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{k}; \end{aligned}$$

poslední tři členy znamenají zřejmě složky zrychlení $\mathbf{a}_u = \frac{d^2p}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2q}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{k}$ nerovnoměrně se pohybující soustavy $O'X'Y'Z'$ vzhledem k inerciální soustavě $OXYZ$; nazýváme je *unášivým zrychlením*. To spolu se zrychlením $\mathbf{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{k}$, které je analogicky s příslušnou rychlostí $\mathbf{v}'$ *relativním zrychlením* vyšetřovaného hmotného bodu vzhledem k soustavě $O'X'Y'Z'$, určuje *absolutní zrychlení* $\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k}$ bodu vzhledem k inerciální soustavě ve shodě s pravidlem o skládání pohybů. Vidíme, že relativní zrychlení $\mathbf{a}'$ není již ani co do velikosti, ani co do směru shodné s absolutním zrychlením $\mathbf{a}$ jako při vzájemném rovnoměrném přímočarém pohybu obou soustav, ale

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_u.$$

Znásobíme-li tuto rovnici hmotností m vyšetřovaného bodu

2.2 (24)

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - m\mathbf{a}_u = \mathbf{F}'$$

a položíme-li analogicky s inerciální soustavou podle zákona síly i ve zrychlené soustavě součin z hmotnosti a zrychlení v této soustavě rovný síle F' , o níž máme za to, že toto zrychlení způsobuje, zjišťujeme, že je to jiná síla než síla $F = ma$, která na bod působí v inerciální soustavě. Těleso se vzhledem ke zrychlené soustavě $O'X'Y'Z'$ tedy pohybuje tak, jako když na ně kromě síly F působí ještě další síla

$$2.2 \quad (25) \quad F^* = -ma_u,$$

kteřá má opačný směr než zrychlení a_u soustavy $O'X'Y'Z'$ a jejíž velikost je rovna součinu z hmotnosti tělesa a zrychlení této soustavy souřadnic, k níž pohyb vztahujeme. Nazýváme ji *setrvačnou silou*.

Setrvačnou sílu zná každý z vlastní zkušenosti. Jsme-li ve vlaku, který jede rovnoměrně přímočaře, a odmyslíme-li si různé otřesy, které vznikají nerovností kolejí, nepozorujeme vůbec, že vlak jede. Jeho pohyb z něho samého nemůžeme zjistit. Jen díváme-li se z okna, tj. přibereme-li k pozorování další tělesa, např. vlak na vedlejší koleji, zjistíme pohyb. A tu se nám často zdá, že náš vlak stojí a vlak, který skutečně stojí na vedlejší koleji, je v pohybu. Pohyb, který pozorujeme, souvisí tedy s okolními tělesy, protože kdyby tato tělesa nebyla, žádný pohyb bychom nezjistili. Z toho plyne relativnost klidu nebo přímočarého rovnoměrného pohybu, o níž jsme pojednali v předešlém odstavci. Stačí ale, aby se rychlost vlaku začala zvětšovat větším tahem lokomotivy nebo naopak zmenšovat brzděním, a hned zjistíme, že vlak se pohybuje. V prvním případě zřetelně cítíme sílu, která nás tlačí na opěradlo, sedíme-li čelem ve směru pohybu, v druhém případě nás zase naklání kupředu. Tato síla je setrvačná síla F^* , která nás nenechá na pochybách, že se pohybuje, a to bez ohledu na tělesa obklopující vlak, která nemusíme pozorovat, abychom pohyb zjistili. Zrychlený pohyb tedy s okolními tělesy nesouvisí, protože jinak bychom museli v stojícím nebo v rovnoměrně přímočaře se pohybujícím vlaku také pozorovat setrvačnou sílu, kdyby se jiná tělesa, např. druhý vlak, pohybovala se zrychlením. Nic takového ale nepozorujeme. Na základě tohoto myšlenkového pochodu je tedy nasnadě zrychlenému pohybu přiřadit význam absolutnosti.

Newton se pokusil vysvětlit protiklad mezi relativním a absolutním pohybem svým proslulým *pokusem s vědrem*. Vědro naplněné vodou visí na silně zkrouceném laně, které je po uvolnění uvede do rychlé rotace kolem svislé osy. Zpočátku je hladina vody rovná, přestože relativní rychlost mezi vědrem a vodou je velká. Teprve roztočí-li se také voda vlivem tření, vystoupí hladina u stěn do výše a vznikne známý tvar rotačního paraboloidu. Relativní rychlost mezi vědrem a vodou je nyní rovna nule, vytvořil se však absolutní pohyb vody v prostoru, projeví se sklenutím jejího povrchu. Newton to považoval za důkaz existence absolutního prostoru, který sice není spojen s žádným tělesem, nicméně místo tělesem zaujímané je v absolutním prostoru. Je to absolutní místo, a změní-li těleso jedno absolutní místo za druhé, koná absolutní pohyb.

I když nás Newtonův absolutní prostor a nutnost považovat existenci prázdného prostoru za příčinu reálných procesů, souvisejících s účinky setrvačných sil, nijak neuspokojuje, nemůžeme z pozice klasické mechaniky proti tomu argumentovat. Teprve Einsteinova teorie relativnosti dokázala přesvědčivě otřást důkazy, že prostor a čas, o němž jsme dosud mlčky také předpokládali, že plyne všude stejně a na ničem nezávisle, mají samostatnou existenci. Pojednáme o ní v kapitole 2.9. Zatím se spokojíme tím, že podle této teorie je předpoklad samostatné existence prostoru a času oprávněn jen jako přiblížení v případě pomalých pohybů, tj. pomalých proti rychlosti šíření světla. Proto budeme poznatky, k nimž jsme došli, považovat jen za fyzikální abstrakci, která je uspokojivým odrazem objektivní reality v případě pomalých pohybů, na které se konec konců klasická mechanika omezuje.

Síly, jimiž na sebe navzájem působí reálná tělesa, označuje klasická mechanika jako *skutečné* (fyzikálně existující) a intuitivně jim přisuzuje charakter absolutnosti, tzn. ať je posuzujeme z kterékoli vztažné soustavy (na Zemi, na Slunci apod.), vždy lze jejich

existenci dokázat; z toho se usuzuje, že by se pozorovaly i v absolutním prostoru. Naproti tomu setrvačné síly, jež se objevují přechodem od inerciální vztažné soustavy k soustavě pohybující se se zrychlením, nemají původ v reálných tělesech; liší se od skutečných sil také tím, že je pozorujeme jen někde, a to na tělesech, která se pohybují zrychleně. Proto je v klasické mechanice nazýváme *zdánlivými* neboli *fiktivními silami*, které podle vztahu 2.2 (24) je třeba jen formálně připojit ke skutečným silám, aby i pro relativní zrychlení pozorované v zrychleně se pohybující soustavě jako obdoba 2. Newtonova pohybového zákona platilo, že součin hmotnosti bodu a jeho zrychlení v této soustavě je roven působící síle.

Má-li se těleso pohybovat se stejným zrychlením jako unášivá soustava, pak je třeba na ně působit skutečnou silou vyvozovanou např. vhodnou vazbou, která poutá těleso k unášivé soustavě. Podle principu akce a reakce působí pak těleso na svou vazbu stejně velkou silou opačného směru, než je směr zrychlení, danou rovněž vztahem 2.2 (25), která ovšem již není zdánlivou silou, ale je silou skutečnou. Vhodným názvem pro ni je *kinetická reakce*, neboť je reakcí tělesa na skutečnou sílu, která uděluje tělesu zrychlení. Takovou silou je např. odstředivá síla, o níž jsme pojednali v článku 2.2.3. Je třeba si uvědomit, že touto reakcí působí urychlované těleso na vazbu, kdežto zdánlivá síla je síla, kterou je třeba připojit ke skutečným silám působícím na vyšetřované těleso, aby druhý Newtonův pohybový zákon v celé své velkolepé generalizující koncepci platil též v soustavě, která se pohybuje zrychleně vzhledem k nějaké inerciální soustavě.

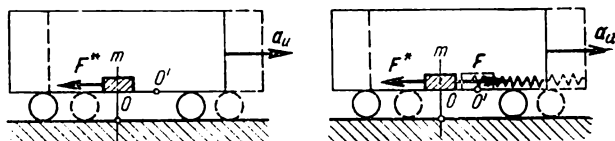
Abychom si tuto skutečnost dobře objasnili, vyšetřme ještě jeden jednoduchý případ. Mějme těleso hmotnosti m , které se může na podlaze vozu pohybovat bez tření [obr. (2.2) 12a]. Dále se vůz, tažený nějakým zařízením, do pohybu se zrychlením a_u , zůstává těleso vzhledem k Zemi v klidu, neboť na ně nepůsobí žádná skutečná síla. Vzhledem k vozu se však těleso pohybuje se zrychlením $-a_u$, jako by na ně ve voze působila zdánlivá síla $F^* = -ma_u$. Spojíme-li těleso s vozem nějakou vazbou, např. pružinou [obr. (2.2) 12b], bude těleso unášeno vozem, takže se vzhledem k Zemi pohybuje se stejným zrychlením jako vůz. Z hlediska pozorovatele na Zemi pohybuje se těleso proto, že na ně vazba působí skutečnou silou F a těleso napíná vazbu rovněž skutečnou silou $-F$ stejně velkou, avšak opačného směru.

Vzhledem k vozu je těleso v klidu. Pozorovatel ve voze však zjišťuje, že pružina je napjata, a že tedy na těleso pružina působí silou F , úměrnou její deformaci. Poněvadž však je těleso vzhledem k vozu v klidu, usoudí, že na těleso působí ještě jedna síla, a to síla F^* , stejně velká jako F , avšak opačného směru, která se silou pružiny F právě ruší. Protože žádná skutečná síla F^* na těleso nepůsobí, je zřejmé, že je to síla zdánlivá, kterou je nutno v soustavě vozu připojit ke skutečným silám působícím na těleso, aby pohybová rovnice 2.2 (24) jakožto obdoba Newtonova druhého pohybového zákona platila v soustavě tvořené vozem, který se pohybuje zrychleně.

Při svislém pohybu zdviže nebo těžní klece skládá se zdánlivá setrvačná síla, která ve zrychlené soustavě zdviže působí na těleso, s tíhou tělesa. Při zpomaleném stoupání nebo zrychleném klesání klece zdají se předměty v kleci lehčí. V těžní kleci, která by volně padala, nepozorovali bychom vůbec zemskou tíži, všechna tělesa by se v ní pohybovala podle zákona setrvačnosti, protože tíha těles je v rovnováze se zdánlivou setrvačnou silou. *)

C. Pohyb v otáčivé soustavě

Vyšetřme dále, jak se změní pohybové rovnice, vztahujeme-li pohyb hmotného bodu k soustavě, která se vzhledem k inerciální soustavě otáčí. Na obr. (2.2) 13 je soustava



Obr. (2.2) 12. a — těleso m je vzhledem k pozorovateli na trati v klidu, vzhledem k pozorovateli ve voze se pohybuje pod vlivem síly F^* , b — těleso m je vzhledem k pozorovateli ve voze v klidu, vzhledem k pozorovateli na trati se pohybuje pod vlivem síly F

*) Tento stav nazývá se *beztížný*, ačkoli tíha na těleso stále působí, ale chybí (nebo je menší) reakce podpory (např. podlahy v těžní kleci); tuto reakci jsme zvyklí vnímat jako svoji tíhu.

$O'X'Y'Z'$, která má s inerciální soustavou $OXYZ$ společný počátek O a osu Z , kolem níž se vzhledem k $OXYZ$ otáčí úhlovou rychlostí ω .

Při tomto vzájemném uspořádání obou soustav souřadnic je okamžitá poloha hmotného bodu v obou z nich určena týmž průvodičem $\mathbf{r}$, jehož složky vzhledem k oběma soustavám jsou ovšem různé.

$$2.2 \quad (26) \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}';$$

ěmu případu jsme označili také jednotkové vektory v obou soustavách různě, soustav už obecně nejsou stejnosměrné. Při tom jednotkové vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ otože se vztahují na inerciální soustavu, kdežto jednotkové vektory $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ svůj směr, protože soustava $O'X'Y'Z'$ se otáčí, na což je třeba pamatovat rovnice 2.2 (26), tzn. i jednotkové vektory $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ a $\mathbf{k}'$ je nutno zahrnout do

$$2.2 \text{ (27)} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

je-li $\mathbf{v}$ absolutní rychlost vzhledem k základní (inerciální) soustavě a $\mathbf{u}$ unášivá rychlost, tzn. rychlost, jakou se jednotlivá místa v soustavě $O'X'Y'Z'$ pohybují vzhledem k soustavě $OXYZ$. Protože soustava $O'X'Y'Z'$ rotuje kolem pevné osy OZ úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$, konají jednotlivá místa kruhový pohyb, a proto podle 2.1 (36) $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, jak jsme v foregoing vztahu hned uvedli.

Vzhledem k tomu, že vektor rychlosti hmotného bodu je určen derivací průvodiče $\mathbf{r}$ podle času, můžeme rovnici 2.2 (27) napsat ve tvaru

$$2.2 \quad (28) \quad \frac{d'\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Jde o derivaci jednoho a téhož průvodiče, poněvadž ale relativní rychlost $\mathbf{v}'$ není stejná jako absolutní rychlost $\mathbf{v}$, musí se i derivace navzájem lišit, a to o člen $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, který přihlíží ke změně směru průvodiče $\mathbf{r}$ v rotující soustavě následkem její rotace. Protože si můžeme každý vektor představit jako průvodič jeho koncového bodu, platí výsledek 2.2 (28) zcela obecně pro jakýkoli vektor $\mathbf{A}$ a rozlišíme pak jeho *relativní derivaci* vzhledem k rotující soustavě označenou čárkou, tedy $\frac{d'\mathbf{A}}{dt}$ od jeho *absolutní derivace* $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ vzhledem k inerciální (klidné) soustavě souřadnic, při čemž podle 2.2 (28)

$$\frac{d'\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}.$$

Člen $\omega \times \mathbf{A}$ vymizí, pohybují-li se obě soustavy navzájem posuvným pohybem*) nebo je-li vektor $\mathbf{A}$ rovnoběžný s osou rotace, tedy s vektorem ω , nebo ovšem je-li nulový.

Zrychlení $\mathbf{a}'$ hmotného bodu v rotující soustavě $O'X'Y'Z'$, které je zřejmě určeno relativní derivací podle času relativní rychlosti $\mathbf{v}'$ hmotného bodu vzhledem k této soustavě, dostaneme ihned, nahradíme-li v předpisu pro tuto derivaci vektor $\mathbf{A}$ vektorem $\mathbf{v}'$, tedy vzhledem k 2.2 (27)

*) Pokud jde jen o derivaci, tedy o početní operaci, liší se tento případ od rovnice 2.2 (20) v tom, že zde jde o derivaci jednoho a téhož vektoru, kdežto vektory v rovnici 2.2 (20) jsou derivacemi různých vektorů.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}' &= \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = \\
&= \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \\
&- \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.
\end{aligned}$$

Pro sílu $\mathbf{F}'$, která na hmotný bod hmotnosti m působí v otáčivé soustavě, dostáváme tak z poslední rovnice

$$\mathbf{F}' = m\mathbf{a}' = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

Vidíme, že ke skutečné síle $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, kterou na hmotný bod působí jiná reálná tělesa, přistupují v otáčivé soustavě další tři formální síly, jež jsou silami zdánlivými, neboť pouhou relativní derivací, tedy početní operací, nemohou (podle klasického hlediska) vzniknout skutečné síly podmíněné reálnou existencí materiálních objektů.

První z těchto sil

$$\mathbf{F}^* = -m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} = -m\mathbf{a}_u,$$

kde $\mathbf{a}_u$ je obvodové zrychlení rotující soustavy v té vzdálenosti od osy rotace, v níž je právě vyšetřovaný hmotný bod, je *zdánlivá setrvačná síla*, která zde vystupuje podobně jako 2.2 (25) při zrychleném posuvném pohybu soustavy vzhledem k inerciální soustavě. Vymizí, je-li otáčení rotující soustavy $O'X'Y'Z'$ rovnoměrné kolem osy stálého směru, tj. $\boldsymbol{\omega} = \text{const.}$

Další zdánlivá síla

$$2.2 (29) \quad \mathbf{F}_0^* = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$$

působí na hmotný bod při jakékoli rotaci soustavy, je-li v konečné vzdálenosti od osy rotace. Označíme-li $\mathbf{r}'$ složku průvodiče $\mathbf{r}$ v rovině kolmé k ose rotace obsahující bod M [rovina kružnice na obr. (2.2) 13], který je kolmý k vektoru $\boldsymbol{\omega}$ ležícímu na ose rotace, pak unášivá (obvodová) rychlost soustavy $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ má velikost $u = \omega r'$, a protože je kolmá k vektoru $\boldsymbol{\omega}$, má síla $\mathbf{F}_0^*$ velikost

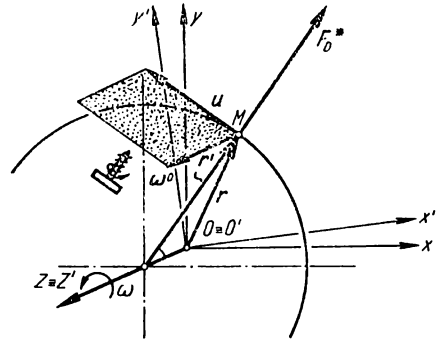
$$F_0^* = m\omega^2 r' = m \frac{u^2}{r'}.$$

Její směr je shodný se směrem průvodiče $\mathbf{r}'$ v rovině kolmé k ose rotace, jak poznáme ihned na obr. (2.2) 13, píšeme-li vzorec 2.2 (29) ve tvaru $\mathbf{F}_0^* = m\omega(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}^0)$ a použijeme-li známého pravidla pro směr vektorového součinu; přitom jsme $\boldsymbol{\omega}^0$ označili jednotkový vektor směru úhlové rychlosti. Protože mříží od osy rotace kolmo k ní, nazývá se *zdánlivá síla odstředivá*.

Poslední zdánlivá síla

$$2.2 (30) \quad \mathbf{F}_C^* = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$$

se nazývá *Coriolisova síla* podle fyzika, který relativní pohyb systematicky zpracoval a na výskyt tohoto členu upozornil. Uplatňuje se, má-li hmotný bod v rotující soustavě rela-



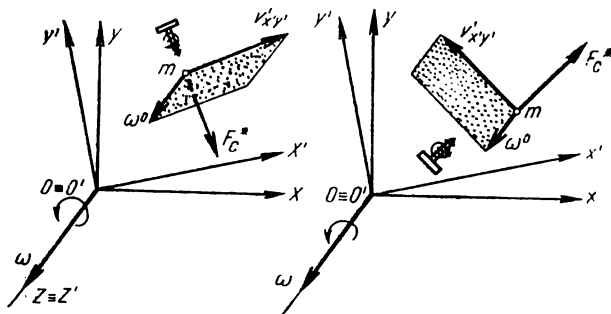
Obr. (2.2) 13. Pohyb v otáčivé soustavě

tivní rychlost $\mathbf{v}'$ jiného směru, než je směr osy rotace. Je-li bod v otáčivé soustavě v klidu (otáčí se se soustavou) nebo pohybuje-li se ve směru rovnoběžném s osou rotace, je vektorový součin v 2.2 (30) nulový a Coriolisova síla není patrná. Označíme-li $\mathbf{v}'_{x'y'}$ složku relativní rychlosti $\mathbf{v}'$ hmotného bodu v rovině kolmé k ose rotace, která má směr kolmý ke směru rovnoběžnému se směrem osy rotace (s vektorem $\boldsymbol{\omega}$), je velikost Coriolisovy síly

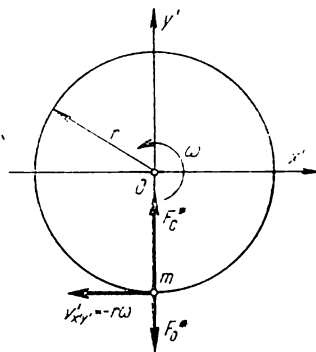
$$2.2 (31) \quad F_C^* = 2m\omega v'_{x'y'}.$$

Píšeme-li vzorec 2.2 (30) ve tvaru $\mathbf{F}_C^* = 2m\omega(\mathbf{v}'_{x'y'} \times \boldsymbol{\omega}^0)$, kde $\boldsymbol{\omega}^0$ je opět jednotkový vektor ve směru rovnoběžném s vektorem úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$, je zřejmé, že paprsek Coriolisovy síly leží v rovině kolmé k ose rotace a je kolmý ke složce $\mathbf{v}'_{x'y'}$ relativní rychlosti hmotného bodu vzhledem k rotující soustavě v této rovině. Její smysl snadno zjistíme, použijeme-li pravidla pro směr a smysl vektorového součinu; na obr. (2.2) 14 je v pohledu vyznačen směr Coriolisovy síly při dvou směrech složky $\mathbf{v}'_{x'y'}$ relativní rychlosti bodu v rovině kolmé k ose rotace.

Má-li tedy Newtonův druhý pohybový zákon platit též v otáčející se soustavě, musíme ke skutečné síle $\mathbf{F}$ připojit dodatečné členy, které mají formální podobnost se silami a které



Obr. (2.2) 14. Směr Coriolisovy síly



Obr. (2.2) 15. K výkladu působení fiktivních sil v otáčivé soustavě

jsme nazvali zdánlivou setrvačnou silou $\mathbf{F}^*$, zdánlivou odstředivou silou $\mathbf{F}_0^*$ a Coriolisovou silou $\mathbf{F}_C^*$, takže pohybová rovnice popisující pohyb hmotného bodu vzhledem k soustavě $O'X'Y'Z'$, otáčející se vzhledem k inerciální soustavě $OXYZ$, zní

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}^* + \mathbf{F}_0^* + \mathbf{F}_C^*.$$

Působení fiktivních sil můžeme si opět vyložit stejně jednoduše jako v předchozím článku B. Je-li např. bod hmotnosti m v klidu vzhledem ke klidné (inerciální) soustavě, protože na něj nepůsobí žádná skutečná síla, pak vzhledem k otáčivé soustavě, otáčející se rovnoměrně úhlovou rychlostí ω , se pohybuje po kruhové dráze poloměru $r \equiv r'$ v opačném smyslu úhlovou rychlostí $-\omega$, jako by na něj v otáčivé soustavě působila dostředivá síla velikosti $-m\omega^2 r$. Snadno ukážeme, že tato zdánlivá dostředivá síla je výslednicí zdánlivé síly Coriolisovy a zdánlivé síly odstředivé. Bod má vzhledem k otáčivé soustavě relativní rychlost $\mathbf{v}'_{x'y'} = -r\boldsymbol{\omega}$ [obr. (2.2) 15], takže Coriolisova síla má podle 2.2 (31) velikost $F_C^* = 2m\omega v'_{x'y'} = -2m\omega^2 r$. Její směr je kolmý na relativní rychlost bodu a směřuje podle obr. (2.2) 14 k ose rotace. Zdánlivá odstředivá síla $F_0^* = m\omega^2 r$ leží v téže paprsku jako Coriolisova síla a směřuje od osy rotace. Výslednicí obou sil je síla $\mathbf{F}' = \mathbf{F}_C^* + \mathbf{F}_0^* = -m\omega^2 r$, která je tedy zdánlivou dostředivou silou, která ze stanoviště rotující soustavy musí na hmotný bod působit, aby vzhledem k ní se pohyboval po kruhové dráze. Pozorovatel v klidné soustavě nemůže ovšem pozorovat žádnou sílu, která by na bod působila, neboť bod je vzhledem k němu v klidu. Otáčí-li se naproti tomu hmotný bod s rotující soustavou, takže je vzhledem k ní v klidu, nutí ho k tomu vazba, která na něj působí skutečnou silou dostředivou, jejíž účinek pozoruje pozorovatel jak v klidné soustavě, tak v soustavě otáčivé (napjatá pružina), neboť je to síla skutečná. Hmotný bod je vzhledem k rotující

soustavě v klidu proto, že na něj v této soustavě působí zdánlivá odstředivá síla, která se s dostředivou silou právě ruší. Coriolisova síla je v tomto případě rovna nule, poněvadž hmotný bod nemá vzhledem k otáčivé soustavě žádnou relativní rychlost.

Např. u odstředivého regulátoru [obr. (2.2) 9] jsou skutečnými silami působícími na kouli tah ramena F' a tíha koule mg . Svislá složka síly F' je v rovnováze s tíhou koule, vodorovná složka je dostředivá síla nutná k tomu, aby koule konala kruhový pohyb vzhledem ke klidné soustavě. Vzhledem k soustavě regulátoru, která se otáčí, je koule v klidu. Aby tomu tak bylo, je nutno k uvedeným skutečným silám působícím na kouli připojit ještě zdánlivou odstředivou sílu, která se ruší se skutečnou dostředivou silou. Pak jsou všechny síly působící na kouli v rovnováze, a koule je proto vzhledem k rotující soustavě v klidu.

Stejně je tomu i s tzv. *beztížným stavem* v umělých družicích obíhajících kolem Země. V otáčivé soustavě, v níž je družice i pozorovatel v klidu, působí kromě gravitační síly, která je skutečnou dostředivou silou, ještě stejně velká odstředivá síla, s níž se gravitační síla ruší. Z hlediska pozorovatele na Zemi (v inerciální soustavě) je beztížný stav způsoben jen tím, že na obíhající těleso nepůsobí reakce nějaké pevné podpory, jak jsme se zmínili na konci odstavce B tohoto článku.

Co se týče působení odstředivé síly, liší se tedy pozorování obou pozorovatelů v otáčivé soustavě a v klidné soustavě. Pozorovatel v otáčivé soustavě ji považuje za sílu, která působí na hmotný bod, kdežto druhý pozorovatel ji považuje za kinetickou reakci, jakou hmotný bod působí na vazbu, která jej nutí ke kruhovému pohybu. Je tedy v prvním případě odstředivá síla pouze silou fiktivní, kterou je nutno připojit ke skutečné síle, aby pohybová rovnice platila též v rotující neinerciální soustavě, v druhém případě je pak odstředivá síla silou skutečnou.

Podobně je tomu i s Coriolisovou silou. Je-li hmotný bod nějakým vedením v rotující soustavě nucen pohybovat se relativně k ní.

2.2.5. Pohyb na povrchu zemském

V odstavci A předešlého článku jsme se zmínili, že soustavu souřadnic spojenou se Zemí lze prakticky považovat za inerciální soustavu, a to proto, že pozorovaný průběh mechanických dějů zejména v technické mechanice souhlasí uspokojivě s výpočty provedenými podle Newtonových pohybových zákonů. Jen při několika jevech vznikají odchylky, které lze vysvětlit vlastním pohybem Země vzhledem k inerciální soustavě stálé, kterou podle zkušenosti považujeme za dokonalejší.

V podstatě koná Země dva základní pohyby:

1. Obíhá kolem Slunce ve střední vzdálenosti $149,5 \cdot 10^6$ km po eliptické dráze s velmi malou číselnou výstředností 0,0167 střední rychlostí $29,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; tento pohyb Země nazývá se *revoluce*.

2. Otáčí se kolem své osy velmi přibližně stálou úhlovou rychlostí, tzv. *rotace*

$$\omega = \frac{2\pi}{\text{hvězdný den}} = \frac{2\pi}{24 \text{ h} - 3 \text{ m } 56 \text{ s}} = \frac{2\pi}{86164 \text{ s}} = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

Při revoluci je dráha málo zakřivená, takže v časových úsecích, v nichž se vyšetřují mechanické děje na Zemi, jsou i při poměrně velké oběžné rychlosti jednotlivé části dráhy prakticky přímé; kromě toho je pro malou výstřednost eliptické dráhy oběžná rychlost téměř stálá — kolísá kolem své střední hodnoty během půl roku v rozmezí jen asi o $\pm 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Dostředivé zrychlení zeměkoule při revoluci, vznikající působením Slunce, je $0,0058 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a stejně velké je i odstředivé zrychlení. Měsícem vzniká na Zemi zrychlení jen asi $0,000034 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Obě zrychlení jsou nepatrná proti tíhovému zrychlení Země a jsou jím zcela překryta, proto se prakticky neprojevují při většině jevů na Zemi. Pozorujeme však na Zemi mohutný jev, který se dá vysvětlit přitažlivostí Slunce a Měsíce; jsou to tzv. *mořské slapy* neboli *příliv* a *odliv*.

Pokud se tedy revoluce týče, chová se Země téměř jako dokonalá inerciální soustava, proto nelze tento její pohyb bez pozorování vnějších těles (hvězd) ani mechanickými, ani elektromagnetickými nebo optickými pozemskými pokusy prokázat.

Jinak je to s rotací Země. jejíž úhlová rychlost je 365krát větší než úhlová rychlost

při revoluci. Odstředivé zrychlení, příslušné tomuto pohybu, má v různých místech povrchu Země (považujeme-li ji za kouli) podle obr. (2.2) 16 velikost

$$a_n = r'\omega^2 = R\omega^2 \cos \varphi.$$

Pro Prahu je úhel $\varphi = 50^\circ 5'$ (nedbáme-li rozdílu mezi zeměpisnou a zemětřednou šířkou — viz dále), a protože poloměr Země je $R \approx 6,37 \cdot 10^6$ m, je odstředivé zrychlení v Praze

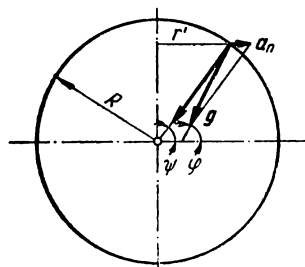
$$a_n = 6,37 \cdot 10^6 \cos 50^\circ 5' \cdot (7,29 \cdot 10^{-5})^2 = 2,59 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0,0026g,$$

to je více než $\frac{1}{4}\%$ zrychlení gravitačního. Toto zrychlení se vektorově skládá s gravitačním zrychlením, tj. se zrychlením, které by v příslušném místě směřovalo do středu Země, kdyby se neotáčela, ve výsledné pozorované tíhové zrychlení g ,*) které určuje pravou vertikálu. Je u nás nepatrně odchýlena směrem k jihu (*deviace těžnice*).

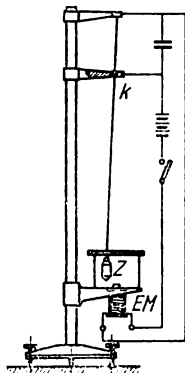
Odklon výsledného zrychlení způsobil, že se tvar Země, když byla v plastickém stavu, změnil tak, aby její povrch byl v každém místě kolmý na směr výsledného tíhového zrychlení. Tím Země nabyla velmi přibližně tvaru elipsoidu, zploštělého na pólech.**)

Úhel φ , který svírá normála k zemskému elipsoidu s rovinou rovníku, nazýváme *zeměpisnou (geografickou) šířkou*.

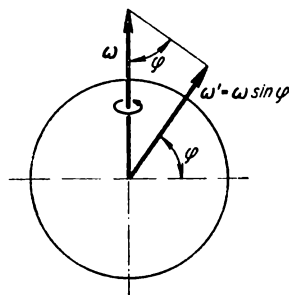
Úhlu ψ , který svírá spojnice středu Země a místa na povrchu zemském s rovinou rovníku, říkáme *zemětředná (geocentrická) šířka*.



Obr. (2.2) 16. Změna tíhového zrychlení rotací Země



Obr. (2.2) 17. Kyvadlo k demonstraci Foucaultova pokusu



Obr. (2.2) 18. Složka úhlové rychlosti ω' rotace Země v místě zeměpisné šířky φ

Různá velikost tíhového zrychlení na povrchu Země je tedy způsobena jednak různou vzdáleností od středu (zploštění Země, horstva), jednak různým odstředivým zrychlením, způsobeným rotací Země kolem vlastní osy (činí maximálně $a_n = 0,0338 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

Jako *normální tíhové zrychlení* se definuje zrychlení

$$g_n = 9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(přibližně rovné zrychlení na 45° severní šířky při hladině mořské). Význam normálního tíhového zrychlení je ten, že umožňuje jednoznačnou definici některých fyzikálních jednotek, např. vedlejší jednotky síly kilopond, jednotky tlaku apod., a že se výsledky měření provedených při skutečném tíhovém zrychlení v příslušném místě redukcí na tuto normální hodnotu tíhového zrychlení dají uvést na společný základ.

*) Rozlišujeme *gravitační zrychlení* podle gravitačního zákona 2.3 (12) a *tíhové zrychlení*, které je výslednicí gravitačního zrychlení a odstředivého zrychlení.

**) Poloměr rovníkový $a = 6378,4$ km a točnový $b = 6356,9$ km; zploštění $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{297}$.

Rotaci Země vzhledem k inerciálním soustavám můžeme zjistit kyvadlem, které se podle fyzika, který ho užil pro tento účel, jmenuje *Foucaultovo kyvadlo*. Foucault provedl svůj slavný pokus r. 1851 s koulí hmotnosti 30 kg, zavěšenou na ocelovém drátě délky 67 m v kupoli pařížského Panthéonu. Foucaultův pokus se však dá provést prostředky mnohem skromnějšími, ale stejně přesvědčivě. Aby se malé kyvadlo na obr. (2.2) 17 netlumilo, je pod závěsem opatřeno elektromagnetem *EM*, který v okamžiku, kdy se závěsná struna dotkne malého kroužku *k* a uzavře elektrický okruh s baterií, udělí železnému závaží *Z* dostředivý impuls. Aby se zmenšilo jiskření v kontaktu, je připojen paralelně kondenzátor. Necháme-li kyvadlo kývat po delší dobu, zjistíme na děleném kruhu, že se rovina kyvu stáčí ve smyslu denního pohybu Slunce, tedy od východu přes jih k západu, neboť vzhledem k inerciální soustavě nepůsobí na kývající hmotný bod jiná síla než jeho váha, která směřuje stále (velmi přibližně) do středu Země, a kyvadlo setrvačností zachovává v našem vesmíru touž rovinu kyvu, jež se neotáčí se soustavou Země. Kdybychom pokus prováděli na severní polkuli, činilo by otočení za den 360° , neboť rovina kyvu tam zůstává stálá a Země se pod kyvadlem otočí jednou kolem dokola. Za hodinu by otočení činilo

$$\omega = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ \text{ h}^{-1}.$$

Svislice v zeměpisné šířce φ svírá se zemskou osou úhel $90^\circ - \varphi$, a proto se rovina kyvu otáčí kolem této svislice jen úhlovou rychlostí rovnou složce na ni připadající, tedy podle obr. (2.2) 18 rychlostí $\omega' = \omega \sin \varphi$. V Praze činí otočení za hodinu

$$\omega' = 15^\circ \sin 50^\circ 5' = 11^\circ 30' \text{ h}^{-1},$$

což při správném rovinném kývání skutečně zjistíme měřením. Pozorovatel na povrchu zemském, který se pohybuje se Zemí, přisuzuje stáčení roviny kyvu kyvadla Coriolisově síle (při kývavém pohybu se pohybuje kývající těleso relativně k ose rotace, čímž vzniká Coriolisova síla).

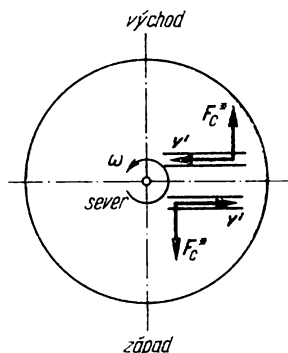
Při pohybech, kdy rychlost nemá směr zemské osy rotace, dochází ještě k jiným jevům. Na severní polokouli se projeví při volném pádu úchylka k východu. Elementárně to vysvětlíme tak, že těleso v okamžiku, kdy bylo puštěno, otáčelo se se Zemí od západu na východ obvodovou rychlostí rovnou součinu z jeho vzdálenosti od zemské osy a z úhlové rychlosti zemské rotace. Při pádu přichází do míst, jež leží blíže k rotační ose, a mají tedy menší obvodovou rychlost; proto je předbíhá a odchyluje se od svislého směru na východ. Ze stejného důvodu vybočí těleso vystřelené jižním směrem šikmo vzhůru ze své roviny napravo, díváme-li se od severu k jihu. Z hlediska pohybu tělesa v rotující soustavě Země přičítají se tyto odchylky působení Coriolisovy síly, jak je vidět na obr. (2.2) 19, na němž jsou vyznačeny její směry v případě, že složka relativní rychlosti tělesa v rovině rovníku, tedy kolmé k ose rotace, směřuje k ose rotace (volný pád — odchylka k východu) nebo od osy rotace (vrh vzhůru — odchylka na západ). Protože rotační rychlost Země i Coriolisova síla,* jsou malé, projeví se tyto odchylky zřetelně teprve při dostatečně velké výšce výstupu nebo sestupu a dostatečně dlouhé době trvání relativního pohybu; musí se s nimi počítat u tzv. *balistických střel*, které dosahují velkých výšek výstupu. Jsou však zkracovány nebo často vůbec překryty odchylkami způsobenými odporem vzduchu.

Existence Coriolisovy síly jakožto kinetické reakce dá se však bezpečně zjistit pravidelností některých odchylek u pohybů, které trvají delší dobu. Tak lze pozorovat (na severní polokouli), že se více opotřebují vnější že čtyř kolejnic než vnitřní u dvoukolejných tratí [obr. (2.2) 19], že řeky tekoucí přibližně severojižním směrem podmiňují pravý břeh více než levý a snaží se přeložit svůj tok napravo, takže pravý břeh je strmý a na levém břehu se tvoří nános, který bývá v dosti velké šířce rovinný a plochý.

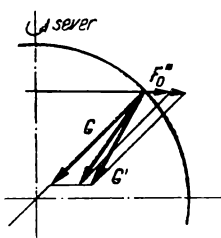
*) Při průmětu v' rychlosti tělesa do roviny kolmé k ose zemské je poměr Coriolisovy síly a tíhy tělesa

$$\frac{F_c^*}{G} = \frac{2\omega}{g} v' = \frac{2 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5}}{9,81} \cdot v' \approx 1,5 \cdot 10^{-5} v' \text{ (na zemském povrchu).}$$

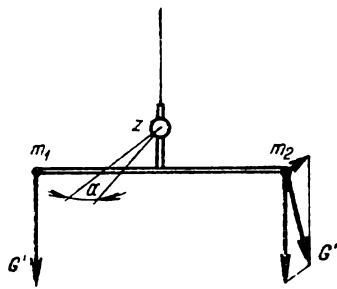
Vlivu odstředivé síly při rotaci Země na směr výsledné síly (tíhy) působící na tělesa na povrchu zemském využil maďarský fyzik Eötvös (1894) k experimentálnímu důkazu o rovnosti setrvačné a tíhové hmotnosti. Při výkladu o odklonu směru výsledného tíhového zrychlení vlivem rotace Země jsme totiž mlčky předpokládali rovnost obou hmotností, takže obě skládaná zrychlení byla číselně rovna silám přepočteným na jednotku jedné a téže hmotnosti tělesa. Odstředivá síla jako setrvačná síla je však úměrná setrvačné hmotnosti tělesa a tíha je zase úměrná jeho tíhové hmotnosti; kdyby obě hmotnosti nebyly stejné nebo aspoň navzájem úměrné, pak by na tělesa z různých látek se stejnou tíhovou hmotností, tedy o stejné tíze G , ale s různě velkou setrvačnou hmotností působily v témže místě na povrchu zemském různě velké odstředivé síly F_0^* [obr. (2.2) 20], což by se projevilo vzájemným odklonem směrů výsledných tíh G' , který se Eötvös pokusil zjistit svými torzními vážkami. Byly v podstatě vytvořeny lehkou tyčkou, zavěšenou uprostřed na dlouhém a velmi tenkém drátku. Na jednom konci tyčky bylo upevněno



Obr. (2.2) 19. Vznik Coriolisovy síly rotací Země



Obr. (2.2) 20. Podstata pokusu o rovnosti setrvačné a tíhové hmotnosti



Obr. (2.2) 21. Torzní vážky

těleso m_1 z platiny a na druhém konci stejně těžké těleso m_2 ze srovnávané látky [obr. (2.2) 21]. Kdyby nyní při orientaci tyčky od východu k západu na obě tělesa působily síly G' sice stejně velké, ale různého směru, působily by na tyčku krouticím momentem, který by se při otočení přístroje o 180° projevil zkroucením závěsného vlákna o jistý úhel α ; ten by se zjistil pomocí zrcátka z na obr. (2.2) 21 známou zrcátkovou metodou. Při těchto pokusech provedených s různými srovnávacími látkami nebylo však zjištěno zkroucení závěsného drátu o větší úhel než $6 \cdot 10^{-4}$ vteřin, čemuž při zvoleném uspořádání měřicího zařízení odpovídá rovnost setrvačné a tíhové

hmotnosti s přesností $\frac{m_1}{m_1 - m_2} = 2 \cdot 10^8$.

2.2.6. Dráhový účinek síly, mechanická energie

Účinek síly na pohyb tělesa, jež bylo před začátkem silového působení buď v klidu, nebo se již pohybovalo, můžeme kvantitativně posuzovat dvojím způsobem: buď podle dráhy, na níž síla na těleso působila, nebo podle doby, po kterou síla působila. Výsledek silového působení plyne ovšem pokaždé z druhého Newtonova pohybového zákona, jsou-li známy počáteční podmínky, avšak toto dvojí posuzování silového účinku vede k novým velmi užitečným fyzikálním pojmům, které, odrážejíce vlastnosti mnoha reálných dějů, usnadňují jejich popis a vyložení. Dojdeme k nim snadno, když zákon síly $m \mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$

upravíme tak, aby při posuzování účinku síly podle dráhy neobsahoval čas a aby naopak při vyšetřování dobového účinku neměla dráha význam. Příslušnými úpravami zjednoduší se též integrace pohybových rovnic, ovšem pro různá hlediska nedostaneme úplný popis pohybu, jaký by vyplynul z pohybové rovnice; pro mnohé účely to však stačí.

Zabývejme se nejprve *dráhovým účinkem síly*. K tomu účelu vynásobíme pohybovou rovnici skalárně vektorem elementu dráhy $ds \cdot \tau^\circ \equiv d\mathbf{r}$; vzpomeneme-li, že $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ je vektor okamžité rychlosti vyšetřovaného hmotného bodu, dostaneme

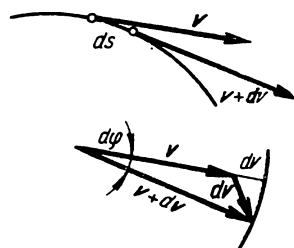
$$m \, d\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Skalární součin $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$ je roven součinu z velikosti okamžité rychlosti v a pravoúhlého průmětu elementární změny $d\mathbf{v}$ vektoru okamžité rychlosti $\mathbf{v}$ do jeho směru. Pro malý úhel $d\varphi$ [obr. (2.2) 22], o který se po dráze ds změní směr vektoru $\mathbf{v}$ okamžité rychlosti, je tento pravoúhlý průmět roven přírůstku dv velikosti rychlosti v , takže hořejší rovnice zní

$$m v \, dv = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Integrací této rovnice mezi krajními polohami vyšetřovaného hmotného bodu určenými průvodiči $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$, v nichž má rychlosti velikostí v_1 a v_2 , dostaneme

$$2.2 \quad (32) \quad \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$



Obr. (2.2) 22. K odvození kinetické energie

Tento výsledek vykládáme takto: libovolné vnější silové působení na vyšetřované těleso (hmotný bod) z hlediska dráhy, kterou těleso přitom proběhlo, určuje tzv. *dráhový integrál síly*, tj. *integrál skalárního součinu celkové síly $\mathbf{F}$ a elementárního posunutí $d\mathbf{r}$ jejího působení*.

$$2.2 \quad (33) \quad A = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

který se častěji nazývá *mechanická práce* podle činnosti v obecném životě, kterou při mechanickém přemístování těles posuzujeme vlastně stejně; např. zvedání břemene vyžaduje větší práci, děje-li se do větší výšky nebo je-li břemeno těžší, posunutí tělesa na vodorovné dráze při přemáhání tření dá větší práci, má-li se provést na větší vzdálenost.

Hlavní jednotkou mechanické práce je *joule* (J) rovný práci, kterou vykoná síla 1 newtonu působící na dráze 1 m ve směru dráhy, tedy $1 \text{ J} = \text{Nm}$. Vedlejšími jednotkami jsou kilopondmetr (kpm) = 9,806 65 J, watthodina (Wh) = 3 600 J a kilokalorie (kcal) = 4 186,8 J.

Mechanická práce vyjadřuje tu vnější stránku silového působení okolních těles na sledované těleso nebo tohoto tělesa na jiná tělesa, která je obklopují, tedy jejich činnost, takže i v tomto ohledu je pojem mechanické práce rovnocenný s pojmem práce v obecném životě. Naproti tomu výsledek působení, který se jeví v tom, že v pohybovém stavu tělesa nastane jemu vlastní kvantitativní změna, vyjadřuje levá strana rovnice 2.2 (32), kde figuruje rozdíl dvou velikostí veličiny

$$2.2 \quad (34) \quad W_k = \frac{1}{2} m v^2,$$

kteřá zřejmě charakterizuje těleso z hlediska stupně vývoje jeho mechanického pohybu vzhledem k ostatním tělesům, tedy jednu z jeho četných fyzikálních vlastností. Tuto vždy kladnou veličinu definovanou *polovičním součinem z hmotnosti tělesa a čtverce jeho rychlosti* nazýváme *kinetickou (pohybovou) energií* tělesa. Můžeme ji chápat jako míru konkrétního stavu mechanického pohybu tělesa vyjádřenou kvantitativně prací nějaké síly, tedy ve stejných nebo násobných jednotkách (např. joulech, kilopondmetrech nebo v kilokaloriích), přitom ovšem nejsou pojmy energie a práce shodné. Při vzájemném působení tělesa s okolními tělesy libovolnou obecně proměnnou silou, při němž se těleso pohybuje po jisté dráze, mění se tedy od místa k místu jeho pohybový stav, což se jeví v postupných změnách jeho kinetické energie, jejíž celková změna*) ΔW_k je podle 2.2 (32) rovna celkové práci působící síly na dráze, kterou těleso proběhlo:

$$2.2 (35) \quad \Delta W_k = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = A.$$

Integrál 2.2 (33) definující mechanickou práci A , jejíž elementární velikost

$$2.2 (36) \quad dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dW_k$$

se jeví ovšem v elementárním přírůstku dW_k kinetické energie, můžeme přímo vypočítat jen tehdy, známe-li, jak se síla co do velikosti i směru mění podél dráhy. Použijeme-li při tom pravidla, že skalární součin dvou vektorů je roven součinu z jejich velikosti a kosinu úhlu, který spolu svírají, je třeba si uvědomit, že velikost vektoru $d\mathbf{r}$ není dr , nýbrž ds , je-li s délka dráhy měřená podél dráhy. Je-li τ^0 jednotkový vektor ve směru tečny v příslušném místě dráhy, píšeme proto $d\mathbf{r} = ds \tau^0$. Naproti tomu dr vyjadřuje elementární změnu délky (velikosti) průvodiče r [podobně jako tomu je u rychlosti na obr. (2.2) 22]. Platí tedy

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \tau^0 ds = F ds \cos \alpha,$$

je-li α úhel mezi silou a tečnou k dráze.

Výpočet práce je jednoduchý, působí-li síla $\mathbf{F}$ stálého směru a velikosti na přímé dráze $\mathbf{s}$, která je nyní ve svém celku vektorem, nebo když taková síla působí i po libovolně zakřivené dráze. V prvním případě je práce určena prostě skalárním součinem ze síly a dráhy

$$2.2 (37) \quad A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs \cos \alpha$$

(svírá-li síla s drahou úhel α) čili *součinem z dráhy a z pravouhlého průmětu síly do směru dráhy* nebo, což platí v obou zvláštních případech, *součinem ze síly a z pravouhlého průmětu dráhy do směru síly*. Pro zakřivenou dráhu máme totiž [obr. (2.2) 23]

$$2.2 (38) \quad A = \int_0^h F ds \cos \alpha = F \int_0^h dh = Fh.$$

Při mnohých úlohách však ani práci z uvedených vzorců počítat nemusíme, protože její celkovou velikost můžeme určit z rozdílu kinetické energie pohybujícího se tělesa, známe-li jeho pohybový stav před vykonáním práce a po něm; je-li známa délka s proběhnuté dráhy, můžeme pak určit i průměrnou velikost síly ve směru pohybu ze vzorce $\bar{F} = \frac{A}{s}$.

V tom tkví praktický význam odvození rovnice 2.2 (32) z pohybové rovnice.

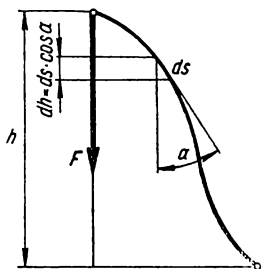
Přesto, že hodnota kinetické energie W_k tělesa je vždy kladná, může být její změna ΔW_k kladná nebo záporná, což závisí na znaménku práce A vnější síly, působící na těleso.

*) Změnou neboli *přírůstkem* při místním nebo časovém sledu veličiny rozumíme vždy rozdíl, který dostaneme, odečteme-li od nové veličiny starou veličinu; záporný přírůstek je pak *úbytek* neboli *pokles*.

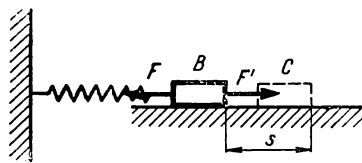
Je-li tato práce kladná, $A > 0$, tj. vnější síly působí na těleso ve směru jeho pohybu, pak je také $\Delta W_k > 0$, kinetická energie vzroste. Je-li práce vnějších sil záporná, $A < 0$ — vnější síly působí proti pohybu tělesa, které se již pohybovalo —, je také $\Delta W_k < 0$ čili kinetické energie tělesa ubývá. Pak je ale naopak kladná práce sil, jimiž těleso působí na svá okolní tělesa, protože tyto síly jsou podle principu akce a reakce stejně velké, ale opačně orientovány vzhledem k dráze tělesa než síly působící na těleso. Ubývá-li tedy kinetické energie tělesa, koná toto těleso samo práci proti vnějším silám, a to na účet své kinetické energie.

Celková práce sil působících na vyšetřované těleso může však na jistém úseku dráhy být také rovna nule, i když síly nejsou kolmé k dráze,*) takže kinetická energie tělesa se na tomto úseku dráhy nemění a těleso se pohybuje rovnoměrně (obecně křivočaře).

Tento poslední případ má velkou teoretickou důležitost, protože někdy vede k pojmu tzv. *potenciální energie*. Probereme jej proto podrobněji. Působme na těleso upevněné na konci pružiny, jejíž druhý konec je vetknutý do nehybné stěny [obr. (2.2) 24], vodorovnou silou F' tak, že se těleso posune vodorovně z místa B do místa C , kde se zastaví (k vlivu třetí nepříhlížíme). V obou polohách má kinetickou energii nulovou a můžeme si představit, že dráhu $\overline{BC} = s$ vykonalo rovnoměrným pohybem. (Na začátku pohybu



Obr. (2.2) 23. Průmět dráhy do směru stálé síly



Obr. (2.2) 24. Posuv tělesa z polohy B do polohy C silou F' , která je v každém okamžiku stejně velká jako tah pružiny F

je ovšem zrychlení a na konci opět zpomalení; práce k tomu potřebné se však navzájem ruší.) Práce vykonaná silou F' je rovna $\int_B^C F' ds$, ale kinetická energie se nezměnila v soulase s předpokladem, že pohyb tělesa byl rovnoměrný. To je možné podle I. pohybového zákona jen tehdy, když síla F' je v každém okamžiku v rovnováze se silou F , kterou pružina odporuje svému roztahení,

$$F' + F = 0.$$

Proto výsledná práce

$$\int_B^C (F' + F) ds = 0.$$

Píšeme-li tuto rovnici ve tvaru

$$\int_B^C F' ds + \int_B^C F ds = 0,$$

*) Při rovnoměrném kruhovém pohybu hmotného bodu je působící síla dostředivá stále kolmá na jednotlivé úseky dráhy, tedy na okamžitou rychlost, takže podle 2.2 (37) nekoná práci a kinetická energie hmotného bodu je konstantní.

vidíme, že sice síla F' vykonala kladnou práci, avšak síla F vykonala přitom práci zápornou:

$$\int_B^C F \, ds = - \int_B^C F' \, ds < 0.$$

Posunované těleso nezískalo kinetickou energii a práce vykonaná silou naší ruky jeví se jen v roztahení pružiny. Děj bychom mohli nechat proběhnout v obráceném sledu, kdybychom tah ruky postupně zmenšovali, až by se těleso vrátilo do původní polohy B . Tu by zase pružina vykonala práci proti tahu naší ruky. Z toho usuzujeme, že napjatá pružina, k jejímuž napnutí (roztahení nebo stlačení) je třeba vykonat práci, má schopnost sama konat práci, kterážto schopnost se přenáší na těleso, které je na ní upevněno. Proto přisuzujeme tělesu na napjaté pružině potenciální energii, která tělesu umožňuje, aby podobně jako kdyby mělo kinetickou energii, konalo práci proti vnějším silám (proti tahu ruky v uvedeném případě).

Těleso připevněné k pružině tvoří tedy mechanickou soustavu, jejíž potenciální energie se může přeměnit také v kinetickou energii tělesa, jestliže ji ve vychýlené poloze náhle uvolníme. Těleso pak bude kmitat tak dlouho, dokud se jeho energie nespotežuje odporem vzduchu a vnitřním třením pružiny.

Pro potenciální energii nemůžeme uvést jednotný vztah jako pro kinetickou energii, která je vyjádřena vždy tímž vzorcem 2.2 (34), pokud se vztahuje na hmotný bod (nebo na pevné těleso při posuvném pohybu). Matematická vyjádření potenciální energie se navzájem liší, a to podle povahy sil, jimiž na sebe různé objekty působí.

V popsaném případě se práce vykonaná napínající silou projevila v pružině jako *deformační energie*, která závisí na míře deformace soustavy. Vyšetříme ještě

další konkrétní případ, a to potenciální energii tělesa zvednutého nad zemský povrch.

Na hmotný bod působí v zemském gravitačním poli jeho tíha $G = -mg$, o níž předpokládáme, že je stálá co do směru i velikosti. Záporným znaménkem vyjadřujeme, že tíha má směr záporné osy Y zvolené souřadnicové soustavy [obr. (2.2) 25]. Abychom bod posunuli z polohy B do polohy C po libovolné dráze s s rovnoměrným pohybem, musíme na něj působit stejně velkou silou, jako je jeho tíha, avšak opačného smyslu, tedy silou $G' = -G = mg$. Vykonáme tím práci A' , která je podle 2.2 (38) rovna součinu ze stálé síly G' a z průmětu h dráhy s do směru síly (tedy do vertikálního směru). Označíme-li y_0 a y výšky bodů B a C nad libovolnou vodorovnou rovinou OXZ , pak

$$2.2 \quad (39) \quad A' = G'h = G'(y - y_0) = mgy - mgy_0.$$

Tato práce nezávisí tedy na délce dráhy s ani na jejím tvaru (pomíjíme-li tření) a závisí jen na konečné a počáteční poloze hmotného bodu v gravitačním poli. Zavedeme-li označení

2.2 (40)

$$W_p = mgy, \quad W_{p_0} = mgy_0$$

a veličiny W_p a W_{p_0} nazveme *potenciálními* nebo *polohovými energiemi* hmotného bodu v konečné poloze C a v počáteční poloze B , říká nám rovnice 2.2 (39), že práce síly G' přemáhající sílu pole G (tíhu bodu) není bez účinku, ale jeví se v přírůstku potenciální energie v gravitačním poli, čili

$$A' = W_p - W_{p_0} = \Delta W_p$$

nebo v elementárním tvaru

$$dA' = dW_p.$$

Poněvadž je podle našeho předpokladu síla G' přemáhající sílu pole G v každém okamžiku s touto silou v rovnováze, tj.

$$G = -G'.$$

je práce A , kterou vykonává síla pole, zřejmě

$$A = -A'$$

nebo v elementárním tvaru

$$2.2 (41) \quad dA = -dA' \text{ čili } dA = -dW_p.$$

Práce, kterou vykoná síla pole G (tíha), je tedy rovna úbytku potenciální energie hmotného bodu, tj. hmotný bod koná práci na újmu své potenciální energie, kterou získal práci síly přemáhající sílu pole.

Pohybuje-li se hmotný bod v gravitačním poli vlivem tíhy G , vykoná tato síla při elementárním posuvu elementární práci dA , která se podle 2.2 (36) projeví v přírůstku kinetické energie hmotného bodu dW_k , tedy

$$dA = dW_k.$$

Podle 2.2 (41) je práce dA zároveň rovna úbytku potenciální energie $-dW_p$, takže

$$dW_k + dW_p = 0 \quad \text{nebo} \quad d(W_k + W_p) = 0.$$

Integrací dostaneme

2.2 (42)

$$\boxed{W_k + W_p = \text{const}} \quad \text{nebo} \quad \boxed{\frac{1}{2} mv^2 + mgy = \text{const.}}$$

Součet W energie kinetické a potenciální můžeme pokládat za celkovou mechanickou energii hmotného bodu

2.2 (43)

$$W = W_k + W_p,$$

takže rovnici 2.2 (42) můžeme vyslovit velmi názornou větou:

Celková mechanická energie hmotného bodu se při pohybu v gravitačním poli nemění.

Pohybuje-li se tedy hmotný bod jenom pod vlivem své tíhy, mění se jeho energie kinetická a potenciální, ale součet obou energií, celková energie bodu, má stálou hodnotu. Tento výsledek nazýváme *zákonem zachování mechanické energie*. Zevšeobecňujeme tedy pojem mechanické energie hmotného bodu (tělesa) charakterizující jeho konkrétní mechanický stav tak, že připouštíme její závislost nejen na hmotnosti a rychlosti hmotného bodu, tedy na jeho pohybovém stavu, nýbrž též na jeho poloze v prostoru — správněji na jeho poloze vzhledem k jiným tělesům, která na něj působí dynamicky (vetknutý konec pružiny, Země). Je-li možné vyjádřit práci síly jako funkci polohy hmotného bodu, můžeme vždy rovnici 2.2 (36), která praví, že práce síly je v každém okamžiku rovna změně kinetické energie, vyjádřit ve tvaru zákona zachování mechanické energie, jak jsme to učinili u hmotného bodu v zemském gravitačním poli rovnicí 2.2 (42).

Mějme silové pole, které je v prostoru, když v každém jeho místě působí na hmotný bod síla jednoznačně určená velikostí a směrem, a to úměrná hmotnosti hmotného bodu. Posune-li se hmotný bod v tomto silovém poli z místa B do místa C [obr. (2.2) 26], vykoná se určitá práce. Síly rozdělujeme do dvou velkých skupin podle toho, zda vykonaná práce

závisí či nezávisí na cestě, po níž se bod posouvá. Ještě lépe to můžeme posoudit, zvolíme-li v silovém poli uzavřenou cestu složenou z cesty s , vedoucí z místa B do místa C , a z cesty s' , vedoucí z místa C zpět do místa B . Jestliže práce A , kterou vykoná pole při posuvu bodu po dráze s , je kladná, bude práce při převedení bodu zpět po dráze s' záporná (vzpomeňme na pružinu na začátku tohoto článku). Nezávisí-li práce na tvaru dráhy, budou obě práce až na znaménko zřejmě stejné, tj.

$$A = -A',$$

a celková práce po uzavřené dráze je pak rovna nule,

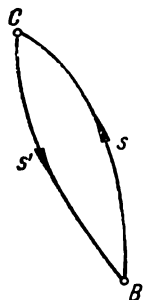
$$A + A' = 0.$$

Takové síly, jež tvoří silové pole, v němž práce nezávisí na tvaru dráhy, ale jen na poloze jejího počátečního a konečného bodu, nebo v němž práce po uzavřené dráze je nulová, nazývají se *síly konzervativní*, protože v takovém silovém poli platí zákon zachování (konzervace) mechanické energie. K takovým silám patří také zemská tíže, o níž blíže pojednáme v čl. 2.3.2. Vrhne-li např. ve vzduchoprázdném prostoru těleso svisle vzhůru určitou počáteční rychlostí, zmenšuje se při výstupu postupně jeho kinetická energie, kterou mělo při vrhu, protože těleso koná kladnou práci, přemáhající sílu pole (tíhu) na účet této své kinetické energie (práce síly pole je záporná), a tato práce se jeví v pří-

růstku jeho potenciální energie, která dosahuje v nejvyšším místě výstupu své největší hodnoty rovné kinetické energii tělesa při vrhu. Při zpětném pohybu koná zase stejně velkou kladnou práci síla pole (tíha) působící na těleso, takže kinetická energie tělesa postupně roste a ve stejné míře ubývá jeho potenciální energie. V tomto případě, kdy práce síly působící na těleso se jednoznačně projevuje změnou jeho potenciální energie, má v každém místě proběhnuté dráhy celková mechanická energie tělesa rovná součtu jeho okamžité kinetické a potenciální energie (v tomto případě je určena počáteční kinetickou energií tělesa) touž hodnotu, protože síla působící na těleso (zde jeho tíha) na proběhnuté uzavřené dráze žádnou práci nevykonala.

Jinak je tomu, působí-li na vržené těleso proti jeho pohybu také ještě odpor např. vzduchu nebo kapaliny. Tu těleso, překonávající při svém pohybu tyto odpory, koná stále kladnou práci, při výstupu na účet části své kinetické energie, kterou má v okamžiku vrhu, při sestupu zase na účet části své potenciální energie v nejvyšší poloze, čili podél celé své uzavřené dráhy koná kladnou práci na účet části své celkové mechanické energie. Těleso nevystoupí do téže výšky, jako kdyby odporů nebylo, a vrátí se menší rychlostí, než bylo vrženo. Celková práce, kterou konají síly působící na těleso na uzavřené dráze, není již nulová, ale má konečnou zápornou hodnotu, a působící síly se proto nazývají *nekonzervativní* čili *disipativní*, neboť v takovém silovém poli neplatí již zákon zachování mechanické energie, nýbrž nastává částečná přeměna mechanické energie v jiné druhy energie, v první řadě v teplo (disipace). Z toho je již zřejmé, že zákon zachování mechanické energie, který říká, že celková mechanická energie hmotného bodu v konzervativním silovém poli je stálá, je pouze zvláštním případem obecného zákona, který se nazývá *princip zachování energie* (nebo stručně *princip energie*), protože máme za to, že kladná práce, kterou na účet své mechanické energie koná pohybující se těleso, se zase projeví zvýšením nějaké energie u těles nebo prostředí obklopujících pohybující se těleso.

Ohromné množství vzájemně souvisejících skutečností ukazuje na to, že je možno objektivně nejobecněji charakterizovat stavy materiálních objektů (látek i polí), zkoumaných fyzikou, veličinou nazvanou obecně *energie*, určenou parametry vztahujícími se k danému stavu a zahrnujícími v sobě vzájemná působení; její změny při přechodu z jednoho stavu v jiný jsou určeny velikostí příslušné mechanické práce všech vnějších půso-



Obr. (2.2) 26.
Pohyb tělesa
v silovém poli
po uzavřené
dráze

bení. Není-li takových působení, je soustava osamocena (izolována) a její celková energie je konstantní; různé její formy mohou však uvnitř soustavy přecházet jedna v druhou. Jednou z těchto forem je mechanická energie, skládající se z energií kinetické a potenciální.

Na pojem mechanické práce bezprostředně navazuje další fyzikální veličina zvaná *výkon*, vystihující, jak rychle se práce koná neboli jak rychle přibývá nebo naopak ubývá toho či onoho druhu energie, jehož mírou je příslušná práce. Vykoná-li se práce dA v době dt , pak výkon P je definován podílem

$$2.2 \quad (44) \quad P = \frac{dA}{dt}.$$

Pohybuje-li se hmotný bod za působení síly F , pak elementární práce $dA = F \cdot dr$; protože podíl $dr/dt = v$ je vektor okamžité rychlosti bodu, je příslušný výkon určen skalárním součinem ze síly a okamžité rychlosti, jíž se pohybuje působíště síly, tedy

$$2.2 \quad (45) \quad P = F \cdot v.$$

Číselně udává výkon práci vykonanou v časové jednotce. Hlavní jednotkou je *watt* (W) rovný výkonu, při němž se vykoná práce 1 joulu za 1 sekundu, $1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$. Vedlejší jednotkou je *kilowatt* (kW), který se rovná výkonu 735,499 W.

Je-li výkon P stálý, tj. v stejně velkých časových intervalech se vykoná stejně velká práce, pak práce A vykonaná v době t je vzhledem k 2.2 (44) určena vztahem

$$A = Pt.$$

Lze proto také práci vyjadřovat jako součin výkonu a času. Jednotky práce, vyjádřené v jednotkách výkonu a času, jsou pak wattsekunda = $Ws = 1 \text{ J}$, watthodina = $Wh = 3600 \text{ J} = 367 \text{ kp} \cdot \text{m}$, kilowatthodina = $kWh = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J} = 367098 \text{ kp} \cdot \text{m}$.

Vlivem nevyhnutelných ztrát způsobených různými odpory proti pohybu je výkon každého stroje vždy menší než tzv. *příkon*, tj. energie přiváděná stroji v časové jednotce měřená výkonem zařízení (zdroje), jež stroji energii dodává. *Účinnost* η stroje rozumíme poměr výkonu stroje a potřebného příkonu, tedy

$$\eta = \frac{\text{výkon}}{\text{příkon}}.$$

Čím více se tento poměr blíží jedné, tím menší část příkonu ve stroji přichází nazmar, a tím lepší je konstrukce stroje.

2.2.7. Dobový účinek síly, hybnost a impuls

Dobový účinek síly zjistíme velmi snadno z pohybové rovnice $ma = m \frac{dv}{dt} = F$, násobíme-li ji elementární dobou dt ,

$$m dv = F dt.$$

Integrací této rovnice od okamžiku t_1 , kdy síla F začala na těleso (hmotný bod) působit při jeho rychlosti v_1 , do okamžiku, kdy silové působení skončí a těleso má rychlost v_2 , dostaneme

$$2.2 \quad (46) \quad mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt.$$

Účinek síly z hlediska doby trvání jejího působení vyjadřuje tzv. *časový integrál síly*

2.2 (47)

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt,$$

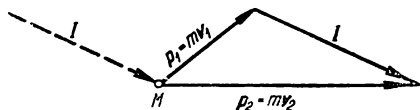
který se častěji nazývá *impuls síly* neboli *silový popud*; je to vektor na rozdíl od dráhového integrálu síly — práce —, která, jak jsme viděli, je skalární veličinou. Impuls síly působící na těleso se v jeho pohybovém stavu projeví změnou vektorové veličiny

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

kterou jsme již v čl. 2.2.2 nazvali *hybností*; ta charakterizuje pohybový stav tělesa z hlediska silového působení posuzovaného podle doby jeho trvání. Z rovnice 2.2 (46), kterou můžeme napsat ve tvaru

2.2 (48)

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{I},$$



Obr. (2.2) 27. Změna hybnosti hmotného bodu M impulsem síly I

tedy plyne, že *přírůstek (změna) hybnosti, způsobený silou za čas $t_2 - t_1$, je určen co do směru i velikosti silovým popudem čili impulsem síly* (tj. časovým integrálem síly). Na obr. (2.2) 27 je znázorněno, jak se

vlivem impulsu I změní hybnost $\mathbf{p}_1$ hmotného bodu M na $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{I}$. Název impuls znamená vlastně náraz a svědčí o tom, že silový popud je vhodný pro vystižení účinků tzv. *nárazových sil*, tj. sil, které působí velmi krátkou dobu a jsou velmi velké. Za jejich krátkého působení se jen málo změní poloha tělesa v prostoru, a proto způsobují zdánlivě náhlé změny rychlosti těles co do směru i velikosti.

Síly, které působí při nárazu, mají zpravidla proměnnou velikost, avšak jejich směr je stálý. Počítáme proto často se střední hodnotou nárazové síly $\bar{F}$, jako by síla měla při trvání nárazu stálou velikost, takže můžeme psát

2.2 (49)

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \bar{\mathbf{F}}(t_2 - t_1).$$

Trvá-li při dané změně hybnosti náraz delší dobu ($t_2 - t_1$ velké), je nárazová síla malá. Trvá-li však náraz velmi krátkou dobu, dosahuje síla velmi vysokých hodnot. Tím vysvětlíme některé známé jevy:

Při srážce vlaků, kdy nastává prudká změna jejich hybnosti za krátkou dobu, působí tak velké síly, že se může souprava roztřístit. Naproti tomu při zabrzdění vlaku, tedy při stejné změně hybnosti, která trvá delší dobu, nepůsobí působící síly žádnou škodu.

Závaží zavěšené na tenké niti můžeme zvolna zvedat a udělit mu i značnou hybnost. Chceme-li však závaží na niti zvednout rychle, tj. změna hybnosti má nastat v krátké době, vznikne tak velká nárazová síla, že se nit přetrhne.

Mírou otáčivého účinku síly vzhledem k zvolenému bodu O je její moment vzhledem k tomuto bodu, definovaný vektorovým součinem z vektoru průvodiče $\mathbf{r}$ působíště síly vzhledem k bodu O a vektoru síly $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Dosadíme-li sem za sílu z pohybové rovnice $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, dostaneme

$$2.2 (50) \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}). *)$$

Vektorový součin

$$2.2 (51)$$

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{b}$$

nazýváme *momentem hybnosti* hmotného bodu vzhledem k bodu O . Říkáme mu také *kinetický moment*, anebo jej můžeme krátce nazvat *točivostí*.

V článku 2.3.1 rovn. 2.3 (2) je vektorový součin

$$\frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

nazván plošná rychlost. Točivost bodu je tedy rovna dvojnásobné plošné rychlosti, násobené hmotností:

$$2.2 (52) \quad \mathbf{b} = 2m\mathbf{w}.$$

Rovnice 2.2 (50) napsaná ve tvaru

$$2.2 (53)$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{M}$$

říká, že časová změna točivosti hmotného bodu vzhledem k pevnému bodu O je co do směru i velikosti rovna momentu síly (vzhledem k témuž bodu), který na hmotný bod působí.

Analogicky s dobovým účinkem síly bude dobový účinek momentu vyjádřen rovnicí

$$2.2 (54)$$

$$\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \mathbf{L}.$$

Dobový účinek v tomto případě můžeme nazvat *rotačním impulsem* nebo *rotačním nárazem*, takže přírůstek točivosti hmotného bodu za čas $t_2 - t_1$ je co do velikosti i směru roven rotačnímu nárazu. Je-li moment $\mathbf{M}$ po dobu $t_2 - t_1$ stálý, pak

$$\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 = \mathbf{M}(t_2 - t_1).$$

Hybnost, popř. její moment, který jsme nazvali točivostí, charakterizují pohybový stav hmotného bodu podobně jako mechanická energie. V článku 2.4.2 poznáme, že také pojmy hybnost a točivost, aplikované na osamocenou mechanickou soustavu hmotných bodů, vedou k důležitým *zákonům zachování* hybnosti a točivosti. Žádáme-li tedy od veličiny, která má obecně charakterizovat mechanický stav soustavy, aby se v osamoceně soustavě zachovávala, pak vyhovují této podmínce jak energie, tak hybnost. Otázka, co je pravou mírou pohybového stavu tělesa, byla koncem 17. století předmětem dlouhého vědeckého sporu mezi stoupenci Descartovými a Leibnizem, v němž Leibniz pokládal za takovou míru součin mv^2 , který nazval „živou silou“, a dekartovci zase hybnost mv . Tento spor zůstal nerozhodnut, protože obě strany, jak jsme poznali v tomto a předešlém článku, posuzovali mechanický stav podle různého účinku síly, jedni podle dráhového, druzí podle dobového účinku; pokud jde o čistě mechanické jevy, měly tedy obě strany pravdu.

Jedná-li se o to, určit fyzikální veličinu, která by byla obecnou mírou všech konkrétních stavů a forem pohybů materiálních objektů, které fyzika zkoumá při jejich vzájemných přeměnách,

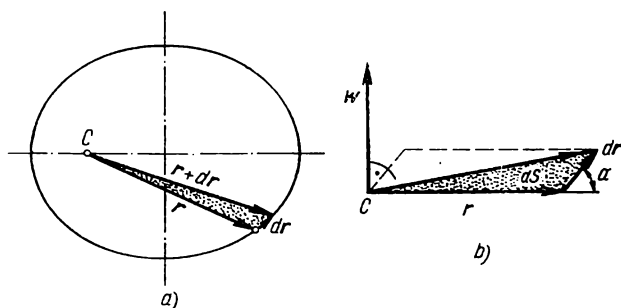
*) $\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$; protože $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, je vektorový součin $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$.

pak zkušenost vede k poznatku, že je to energie, protože lze pro libovolná vnější i vnitřní působení v soustavě (mechanicky, teplem, elektricky, zářením apod.) nalézt vždy ekvivalentní množství mechanické práce, jež určuje její změnu. Princip zachování energie se proto považuje za obecnější fyzikální zákon než zákon zachování hybnosti, který vyčleňuje vždy jen mechanickou stránku pohybů materiálních objektů, tedy v podstatě jejich prostorové přemístování, ať už jde o vzájemné působení makroskopických těles nebo nejmenších částic látek, např. jednotlivých atomů, atomových jader nebo elektronů. Uplatňuje se ovšem zároveň s principem energie, protože nakonec všechny formy pohybu zahrnují také pohyb mechanický; společně jsou zákony zachování fyzikálním vyjádřením nestvořitelnosti a nezničitelnosti matérie a jejího pohybu.

2.3. Gravitační pole

2.3.1. Pohyb planet, gravitační zákon

Z vlastní zkušenosti víme, že všechna tělesa jsou těžká. Není-li těleso podepřeno, „padá“ k Zemi s jistým zrychlením. To svědčí o tom, že mezi Zemí a tělesem působí síla, která způsobuje pohyb tělesa směrem k Zemi, není-li v rovnováze s reakcí podpory. Takové přitažlivé síly, kterým říkáme *síly gravitační*, působí mezi všemi tělesy, tedy také mezi tělesy nebeskými, a podmiňují zákonitost pohybu planet kolem Slunce. Tuto zákonitost



Obr. (2.3) 1. Centrální pohyb

vyjádřil Kepler svými třemi zákony, které, jak se později ukázalo, si vyžádaly jisté korekce:

1. *Planety obíhají kolem Slunce v elipsách od kruhu málo odlišných, v jejichž společném ohnisku je Slunce.*

2. *Plochy průvodičem (spojnicí středu planety a středu Slunce) ve stejných dobách opsané jsou si rovný.*

3. *Dvojmoči oběžných dob planet jsou v téže poměru jako trojmoči velkých poloos jejich drah.*

Z těchto tří jednoduchých zákonů, které úplně popisují pohyb planet, odvodil Newton obecně platný gravitační zákon. V čl. 2.2.3 jsme řekli, že z pohybových rovnic můžeme určit dráhu, známe-li působící sílu (případ šikmého vrhu), nebo můžeme ze známé dráhy odvodit sílu, která zkoumaný pohyb způsobuje (případ harmonického pohybu). Odvození gravitačního zákona je velkolepým příkladem druhé možnosti.

Z prvního Keplerova zákona plyne, že se planety pohybují v rovinných křivkách, elipsách, kolem stálého středu (*centra*), takže vektor zrychlení, a tedy i síla způsobující tento pohyb leží v rovině dráhy. To je první poznatek o působící síle.

Polohu planety, kterou můžeme považovat za hmotný bod, vzhledem k centru C udává průvodič $\mathbf{r}$ [obr. (2.3) 1a]. Za dobu dt se změní průvodič na $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, kde elementární přírůstek $d\mathbf{r}$ spadá do dráhy. Elementární plochu $d\mathbf{S}$ opsanou průvodičem (na obr. a vyčárkovanou) můžeme vyjádřit jako poloviční vektorový součin $\mathbf{r}$ a $d\mathbf{r}$:

$$2.3 (1) \quad d\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}).$$

(Elementární oblouček opsaný za dobu dt můžeme považovat za přímý, takže plocha rovnoběžníka o stranách $\mathbf{r}$ a $d\mathbf{r}$ je rovna $r dr \sin \alpha$, svírají-li $\mathbf{r}$ a $d\mathbf{r}$ spolu úhel α , obr. b, což je dvojnásobná velikost vektoru $d\mathbf{S}$.)

Dělíme-li plochu dS časem dt , za který byla opsána, dostaneme tzv. *plošnou rychlost*

$$\mathbf{w} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \frac{1}{dt} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right),$$

nebo vzhledem k tomu, že $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, také

$$2.3 (2) \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}).$$

Vektorový součin $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ nazývá se *moment rychlosti*, a proto je plošná rychlost určena polovičním momentem rychlosti vzhledem k centru. Tím přisuzujeme této veličině podobně jako úhlové rychlosti také směr, který je kolmý k rovině tvořené vektory $\mathbf{r}$ a $\mathbf{v}$ a leží v ose, která prochází centrem. Kladný směr se určí podle pravidla pro vektorový součin.

Druhý Keplerův zákon zvaný *zákon ploch* říká, že plochy opsané průvodičem ve stejných dobách jsou stejné, tedy také plochy dS opsané za dobu dt . To značí, že podíl dS/dt je stálý. Pohyb je charakterizován stálou plošnou rychlostí:

$$\mathbf{w} = \text{const.}$$

Derivací plošné rychlosti podle času (viz poznámku pod čarou v čl. 2.2.7, str. 91) dostaneme *plošné zrychlení*

$$2.3 (3) \quad \mathbf{q} = \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}),$$

které analogicky s plošnou rychlostí je určeno polovičním momentem zrychlení tělesa vzhledem k centru C .

Při planetárním pohybu je plošná rychlost stálá, a plošné zrychlení je tedy nulové, $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0$. Vektorový součin dvou vektorů je nulový, je-li buď jeden z obou vektorů nulový, nebo svírají-li oba vektory spolu úhel $\alpha = 0^\circ, 180^\circ$, tj. mají-li oba vektory stejný nebo opačný směr. Prvá možnost je tu vyloučena, protože ani $\mathbf{r}$, ani $\mathbf{a}$ není nulové (při každém křivočarém pohybu je nějaké zrychlení), takže zbývá pouze druhá možnost, že zrychlení spadá do téže přímky jako průvodič a má ovšem opačný směr než průvodič (zrychlení míří na tu stranu, z níž se křivka dráhy jeví jako dutá). Podle pohybové rovnice působí tedy mezi Sluncem a planetou síla, která leží stále ve spojnici obou těles. To je druhý poznatek o působící síle. Pohyb, při němž zrychlení (nebo působící síla) směřuje stále do téhož pevného bodu (centra) a závisí jenom na vzdálenosti od něho, nazýváme *centrálním*.

K určení velikosti této síly je nyní třeba zjistit velikost příslušného zrychlení. Keplerovy zákony neříkají nic o výstřednosti eliptických drah, budou tedy zřejmě platit také pro elipsu nulové výstřednosti, což je kružnice. Při rovnoměrném kruhovém pohybu je centrum ve středu křivosti dráhy, takže zrychlení je totožné se zrychlením dostředivým, které má velikost

$$2.3 (4) \quad a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} r,$$

kde T je oběžná doba.

Podle třetího Keplerova zákona platí

$$T^2 = \text{const} \cdot r^3,$$

kde velkou poloosu nahrazujeme poloměrem kružnice, neboť čtverce oběžných dob jsou

ve stejném poměru jako trojmoci velkých poloos, přičemž konstanta musí mít stálou hodnotu pro všechny planety. Zrychlení má pak hodnotu .

$$a = \frac{4 \pi^2 r}{\text{const} \cdot r^3} = k \frac{1}{r^2}$$

a síla, kterou působí Slunce na planetu, je-li m hmotnost planety, má velikost

$$2.3 (5) \quad F = ma = k \frac{m}{r^2}.$$

Avšak planeta působí také na Slunce podle principu vzájemného působení stejně velkou silou opačného smyslu, která musí mít k první síle souměrný tvar, tedy

$$2.3 (6) \quad F' = k' \frac{M}{r^2},$$

značí-li M hmotnost Slunce, přičemž $|F| = |F'|$. Pak $km = k'M$, a položíme-li $k/M = k'/m = \kappa = \text{const}$, $k = \kappa M$, $k' = \kappa m$ a dosadíme-li do 2.3 (5) nebo 2.3 (6), dostáváme

$$2.3 (7) \quad F = \kappa \frac{Mm}{r^2}.$$

Tento výsledek, který jsme odvodili pro sílu působící mezi Sluncem a planetou, zobecnil Newton na jakákoli tělesa s hmotnostmi m_1 a m_2 . Tím došel k formulaci *gravitačního zákona*, který říká:

Síla, kterou se přitahují dvě tělesa s hmotnostmi m_1 a m_2 , je přímo úměrná součinu obou hmotností a nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti r těles, tedy

$$2.3 (8) \quad \boxed{F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}},$$

kde konstanta κ se nazývá *gravitační konstanta*; její nejpravděpodobnější hodnota, jak se dnes udává:

$$2.3 (9) \quad \kappa = (6,670 \pm 0,007) \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} (\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}).$$

Tuto hodnotu zjistil Heyl na torzních vahách stejné konstrukce jako jsou Eötvösovy torzní váčky v čl. 2.2.5, jimiž ve vakuu měřil přitažlivé síly mezi ocelovými válci o hmotnostech 66 kg a malými kuličkami z platiny, zlata a skla, upevněnými na obou koncích vahadla torzních vah.

Rovnice 2.3 (8) platí přesně jen pro hmotné body, tj. pro tělesa, která za taková můžeme považovat, je-li jejich velikost zanedbatelná proti jejich vzdálenosti r , a pro homogenní koule, u nichž za r dosazujeme vzdálenost jejich středů.

Přitažlivé síly, kterými na sebe podle gravitačního zákona působí dva body o hmotnostech m_1 a m_2 , leží ovšem ve spojnici jejich středů. Označíme-li písmeny $\mathbf{r}_{12}$ vektor vedený z bodu 1 do bodu 2 a písmeny $\mathbf{r}_{12}^0$ jednotkový vektor stejného směru, pak $\mathbf{r}_{12} = r_{12} \mathbf{r}_{12}^0$ a skalární rovnici 2.3 (8) můžeme nahradit rovnicí vektorovou

$$2.3 (10) \quad \mathbf{F}_{12} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12}^0,$$

v níž $\mathbf{F}_{12}$ značí sílu, kterou působí bod s hmotností m_1 na bod s hmotností m_2 . Záporné znaménko vyjadřuje přitahování (síla má opačný směr než vektor $\mathbf{r}_{12}^0$).

Newtonův gravitační zákon vyhovuje s neobyčejnou přesností jak při všech pozorováních pozemských, tak i při pohybu těles naší sluneční soustavy, až na pohyb Merkurova perihélia, který vyložit nemůže. Přes to obsahuje v sobě záhadu, jakým způsobem se i „prázdným“

prostorem může na dálku přenášet silové působení jednoho tělesa na jiné libovolně vzdálené těleso, lhotejno zda mezi oběma tělesy jsou ještě jiná tělesa, či nejsou. Newton sám odmítl o původu gravitační síly nějak uvažovat svým známým výrokem „domněnek nevymýšlím“ a považoval svůj zákon jen za pouhý popis pozorovaných skutečností. Záhada bezprostředního a okamžitého působení na dálku (akce in distans) záležela v tom, že se nepřisuzovala žádná úloha prostoru, který tělesa obklopuje. Tělesa vzbuzují v okolním prostoru změnu tím, že kolem sebe vytvářejí *gravitační pole*, o němž jsme přesvědčeni, že má stejně reálnou existenci jako ostatní druhy matérie, takže vzájemné přitahování je způsobeno vzájemným působením těles a gravitačních polí. Tato pole dovedeme popsat na základě silových účinků pomocí Newtonova gravitačního zákona, jak ukážeme v dalším článku, obecněji pak diferenciálními rovnicemi, které plynou z Einsteinovy *obecné teorie relativity*. Obsahují Newtonův gravitační zákon jako zvláštní případ, je-li vzájemná rychlost přitahujících se těles malá proti rychlosti světla (viz čl. 2.9.7).

2.3.2. Intenzita a potenciál gravitačního pole

Silové vlastnosti gravitačního pole můžeme popsat bez zřetele na jeho fyzikální podstatu. K tomu jsou vhodné dva pojmy: *intenzita* a *potenciál*.

Mějme libovolné těleso, které je zdrojem gravitačního pole v prostoru. Vložíme-li do tohoto pole malé těleso*) (hmotný bod) s hmotností m' , pak gravitační pole v příslušném místě působí na vložené těleso jistou silou $\mathbf{F}$, která je tím větší, čím větší je hmotnost m' . Dělíme-li ji touto hmotností m' , dostaneme vektor

$$2.3 \quad (11) \quad \boxed{\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}}{m'}},$$

který už nezávisí na hmotnosti tělesa vloženého do gravitačního pole, a charakterizuje pole proto nezávisle na jiných tělesech. Tento vektor je *intenzita gravitačního pole*; je definována jako *podíl síly, jíž gravitační pole ve zvoleném místě působí na zkušební hmotný bod vložený do tohoto místa, a hmotnosti tohoto hmotného bodu*.

Ve zvláštním případě, že tělesem budícím gravitační pole je hmotný bod hmotnosti m , je gravitační síla v místě určeném polohovým vektorem $\mathbf{r} = r\mathbf{r}^0$, vedeným od bodu do tohoto místa, určena vztahem 2.3 (10), takže pro intenzitu gravitačního pole dostáváme

$$2.3 \quad (12) \quad \boxed{\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}}{m'} = -\kappa \frac{m}{r^2} \mathbf{r}^0}, \quad |\mathbf{K}| = K = \kappa \frac{m}{r^2}.$$

Intenzita gravitačního pole v libovolném místě je tedy vektor, totožný podle pohybové rovnice s vektorem zrychlení, které pole uděluje v témž místě všem tělesům bez zřetele na velikost jejich hmotnosti. V zemském gravitačním poli jsme toto zrychlení označili $\mathbf{g}$; síla, kterou Země přitahuje všechna tělesa na svém povrchu, je *tíha* tělesa $\mathbf{G}$, takže nebudáme-li rozdílu mezi gravitačním a tíhovým zrychlením (čl. 2.2.5), který vzniká rotací Země, je vzhledem k užívanému označení

$$2.3 \quad (13) \quad \mathbf{K} = \mathbf{g} = \frac{\mathbf{G}}{m'}.$$

Vidíme tedy, že gravitační pole můžeme úplně popsat vektorovým polem jeho intenzity. Známe-li pole intenzity, najdeme sílu, kterou pole působí na libovolný hmotný bod, násobíme-li intenzitu hmotností bodu:

$$2.3 \quad (14) \quad \mathbf{F} = m'\mathbf{K}, \quad \mathbf{G} = m'\mathbf{g}.$$

*) Přídavné jméno „malé“ se vztahuje na prostorovou rozprostraněnost tělesa, a nikoli na jeho hmotnost, která může být libovolná.

Gravitační pole můžeme však chápat také jako skalární pole, uijeme-li funkce zvané *potenciál*. V čl. 2.2.6 jsme poznali, že práce síly přemáhající sílu, již silové pole působí na těleso při jeho přemístění z jednoho místa do jiného místa, se projeví v přírůstku potenciální energie tělesa, nezávisí-li tato práce na délce proběhnuté dráhy, ale jenom na počáteční a konečné poloze tělesa a nezmění-li se při tomto přemístění kinetická energie tělesa. Na hmotný bod hmotnosti m' v gravitačním poli jiného hmotného bodu m ležícího v místě, které nazveme *gravitačním centrem* O vyšetřovaného pole [obr. (2.3) 2], působí v místě B , určeném průvodičem $\mathbf{r}_B = r_B \mathbf{r}^0$, přitažlivá síla $\mathbf{F}$. K jeho přenesení z tohoto místa do místa C , určeného průvodičem $\mathbf{r}_C$, je třeba síly $\mathbf{F}'$ opačného směru, která, bude-li stále stejně velká jako síla pole, $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$, vykoná vzhledem k 2.3 (10) práci

$$2.3 (15) \quad A' = \int_B^C \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{r} = \kappa m m' \int_B^C \frac{\mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{r}}{r^2}.$$

Skalární součin $\mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{r} = dr$ podle obr. (2.3) 2 udává zvětšení dr vzdálenosti r posouvání hmotného bodu m' od gravitačního centra O , bez ohledu na místní směr posouvání. Tak dostáváme pro práci A' síly $\mathbf{F}'$ přemáhající sílu pole

$$2.3 (16) \quad A' = \kappa m m' \int_B^C \frac{dr}{r^2} = \kappa m m' \left(-\frac{1}{r_C} + \frac{1}{r_B} \right) = -\frac{\kappa m m'}{r_C} - \left(-\frac{\kappa m m'}{r_B} \right).$$

Tato práce, ačkoli je kladná ($r_C > r_B$, takže $1/r_B > 1/r_C$), nezpůsobila změnu kinetické energie posouvání hmotného bodu m' (síla $\mathbf{F}'$ byla v každém místě stejně velká jako síla pole $\mathbf{F}$, která proto zároveň konala stejně velkou práci, ale opačného znaménka) a projevuje se jednoznačně ve změně veličiny

$$2.3 (17) \quad W_p = -\frac{\kappa m m'}{r}, \quad *)$$

která proto určuje potenciální energii hmotného bodu m' ve vyšetřovaném gravitačním poli tělesa m . Její velikost závisí ovšem na hmotnosti m' , je jí úměrná, ale dělíme-li ji touto hmotností m' , dostaneme novou veličinu zvanou *gravitační potenciál*

$$2.3 (18) \quad U(r) = \frac{W_p}{m'} = -\frac{\kappa m}{r},$$

který je jednoznačnou funkcí polohy v prostoru zaujatém gravitačním polem, určené zde vzdáleností r od gravitačního centra O ; charakterizuje toto pole z hlediska práce sil pole nebo sil působících proti silám pole, jak plyne z jeho odvození, a to obecně, protože již *nezávisí na velikosti hmotnosti m' tělesa*, na které síly pole působí. Jeho průběh se vzdáleností r od gravitačního centra je podle 2.3 (18) znázorněn větví rovnosměrné hyperboly [obr. (2.3) 3]; bereme-li tuto vzdálenost kladně, má tedy potenciál v celém prostoru, v němž je gravitační pole, zápornou hodnotu, což souvisí s tím, že těleso hmotnosti m všechna ostatní tělesa jenom přitahuje.**)

*) Potenciální energii hmotného bodu ve zvoleném místě lze udat také výrazem

$$W_p = -\frac{\kappa m m'}{r} + \text{const.},$$

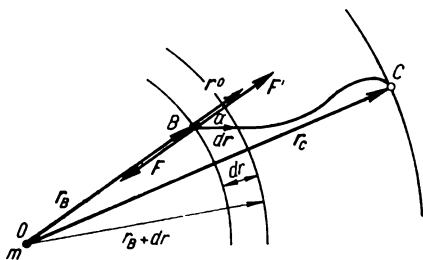
jak plyne ze zpětného dosazení do 2.3 (16), při němž se konstanta vyruší. Položíme-li ji však rovnou nule jako v 2.3 (17), zavádíme zcela určitý způsob popisu pole, jak plyne z dalšího textu.

**) Na rozdíl od elektrostatického pole, které na tělesa nesoucí elektrický náboj působí silami obou směrů podle znaménka náboje, jež může být kladné nebo záporné.

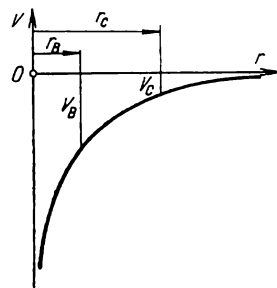
Není určen pro $r = 0$, tedy v místě hmotného bodu m , který gravitační pole budí (na téže místě nemůže být zároveň jiný hmotný bod), se vzdáleností r roste ($U_G > U_B$, jako je např. číslo -5 větší než číslo -10) a nabývá své největší hodnoty rovnající se nule pro $r \rightarrow \infty$. Přírůstek potenciálu $\Delta U = U_C - U_B$, rovný podle 2.3 (18) přírůstku potenciální energie ΔW_p tělesa hmotnosti m' dělenému touto hmotností, je podle předešlých rovnic

$$\begin{aligned} \Delta U = U_C - U_B &= -\frac{\kappa m}{r_C} - \left(-\frac{\kappa m}{r_B} \right) = \frac{1}{m'} (W_{pC} - W_{pB}) = \\ 2.3 (19) \quad &= \frac{\Delta W_p}{m'} = \frac{A'}{m'} \end{aligned}$$

určen prací A' , kterou vykonává síla F' , jež je v každém místě stejně velká jako síla pole F působící na bodové těleso hmotnosti m' při jeho přemístění v silovém poli z místa B do místa C , dělená hmotností m' . Tento přírůstek bude roven potenciálu v místě C , zvolíme-li jako vztažné místo B místo, v němž má potenciál nulovou hodnotu, kde se tedy gravitační pole už neprojevuje; to je však určeno vzdáleností $r_B \rightarrow \infty$, takže *potenciál gravitačního pole hmotného bodu v konečné vzdálenosti r od něho je definován prací A' , kterou*



Obr. (2.3) 2. K odvození gravitačního potenciálu



Obr. (2.3) 3. Průběh gravitačního potenciálu ($V \equiv U$)

vykonává síla F' přemáhající sílu pole F při přemístění zkušebního tělesa z nekonečna do místa ve vzdálenosti r , dělená hmotností m' zkušebního tělesa,)* tedy

$$2.3 (20) \quad U(r) = \frac{1}{m'} \int_{\infty}^r \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{r} = \int_{\infty}^r \mathbf{K}' \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^r \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r},$$

kde $\mathbf{K}' = \mathbf{F}'/m'$ je podle 2.3 (12) záporně vzatá intenzita pole $\mathbf{K} = \mathbf{F}/m'$, protože $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$. Tento integrál umožňuje zcela obecně přepočítat každé vektorové pole intenzity ve skalární pole potenciálu, má-li potenciál v nekonečnu nulovou hodnotu.

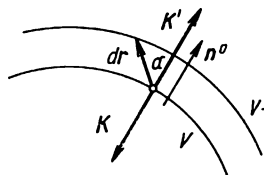
Koncové body průvodiče $\mathbf{r}$ téže velikosti, ale všech možných směrů tvoří plochu, na níž má podle 2.3 (18) potenciál touž hodnotu; nazývá se *hladina potenciálu* neboli *plocha ekvipotenciální*. V gravitačním poli hmotného bodu jsou hladiny potenciálu kulové plochy se středem v bodu splývajícím s hmotným bodem, který pole budí. Protože sousední místa na hladině vzdálené o ds mají též potenciál, nekona síla pole $\mathbf{K}$ při posunutí

*) Tato práce je zde ovšem záporná, protože síla F' působí při zvoleném směru průvodiče $\mathbf{r}$ proti směru posouvání, proto má také potenciál všude zápornou hodnotu. Kladnou práci koná síla F , která by se projevila přírůstkem kinetické energie posouvajícího tělesa, kdyby je opačná síla F' nezdržovala.

zkušební hmotného bodu po hladině o $ds \cdot \tau^0 \equiv d\mathbf{r}$ žádnou práci, takže se zřetelem na skalární součin v rovnici 2.3 (20) je *obecně intenzita pole všude kolmá k hladině potenciálu*, což v případě pole hmotného bodu je samozřejmé.

K přechodu z hladiny potenciálu U na hladinu vyššího potenciálu $U + dU$ je podle 2.3 (20) třeba práce $dU = \mathbf{K}' \cdot d\mathbf{r} = K' ds \cos \alpha$, kde α je úhel, který svírá posunutí $d\mathbf{r} = ds \cdot \tau^0$ s vektorem $\mathbf{K}'$, který leží v normále k hladinám potenciálu v příslušném místě. Přitom $ds \cdot \cos \alpha = dn$ je nejmenší (kolmá) vzdálenost obou hladin v tomto místě. Označíme-li $\mathbf{n}^0$ jednotkový vektor, který je kolmý k oběma sousedním hladinám a mří

v tom směru, v němž potenciál roste, dostáváme pro intenzitu gravitačního pole $\mathbf{K} = -\mathbf{K}'$ důležitý výsledek



2.3 (21)

$$\mathbf{K} = -\frac{dU}{dn} \mathbf{n}^0 = -\text{grad } U.$$

*)

Obr. (2.3) 4. Určení intenzity z potenciálu ($V \equiv U$)

Přírůstek (změna) veličiny dělený vzdáleností, v níž tento přírůstek nastal (číselně přírůstek na jednotkové vzdálenosti), nazýváme krátce *růstem* této veličiny a záporný růst jejím

spádem; volíme-li ze všech možných směrů, v nichž se veličina zvětší o touž hodnotu [obr. (2.3) 4], ten směr, v němž je dotyčná vzdálenost nejmenší, bude růst v tomto směru největší a nazýváme jej pak *gradientem* veličiny (značka **grad**), který je vektor. Rovnice 2.3 (21) tedy říká, že *intenzita pole je v každém místě určena co do směru i velikosti záporným gradientem potenciálu* neboli největším spádem potenciálu v tomto místě. Ten je ve směru kolmém k hladině, což je ve shodě se směrem intenzity, který jsme určili výše, a intenzita mří ve směru klesajícího potenciálu, tedy podle obr. (2.3) 3 směrem ke gravitačnímu centru, protože potenciál gravitačního pole je v celém prostoru záporný a nejmenší hodnotu má v těsné blízkosti gravitačního centra. Známe-li prostorové rozložení potenciálu, umožňuje vektorová rovnice 2.3 (21) určit v každém místě směr a velikost intenzity pole. Rovnice 2.3 (20) a (21), které jsme odvodili, platí zcela obecně pro každé konzervativní silové pole, které lze jednoznačně popsat pomocí intenzity nebo potenciálu.

Dosud jsme mluvili o gravitačním poli hmotného bodu, ale všechny výsledky, k nimž jsme došli, platí nezměně i pro gravitační pole na povrchu a vně homogenní plné koule nebo koule složené z homogenních soustředných vrstev, protože je vzhledem k souměrnosti shodné s gravitačním polem hmotného bodu ve středu koule téže hmotnosti, jako má celá koule; střed koule je gravitačním centrem pole vzbuzeného koulí.

Je-li M hmotnost Země, jejíž poloměr podle přibližné definice metru je $R = 40 \cdot 10^6 / 2\pi = 6,37 \cdot 10^6$ m, pak intenzita na povrchu Země, rovná podle 2.3 (13) tíhovému zrychlení (k rotaci Země zde nepřehlédíme), je vzhledem k 2.3 (12) určena vztahem

$$2.3 (22) \quad g_0 = \approx \frac{M}{R^2},$$

z něhož vypočteme hmotnost Země, protože známe střední hodnotu tíhového zrychlení.

Hmotnost Země je tedy

$$M = \frac{gR^2}{\approx} = \frac{9,81 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg.}$$

*) Píšeme-li vzorec ve tvaru $\mathbf{K} = -\frac{dU}{(dn \cdot \mathbf{n}^0)} \mathbf{n}^0$ ($\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{n}^0 = 1$), je zřejmé, že je-li $dn \cdot \mathbf{n}^0 > 0$, je i $dU > 0$, protože vektor $\mathbf{n}^0$ mří ve směru rostoucího potenciálu. Je-li $dn \cdot \mathbf{n}^0 < 0$, je také $dU < 0$, protože postupujeme ve směru, v němž potenciál klesá. Podíl $\frac{dU}{dn}$ má proto v obou případech kladnou hodnotu a určuje velikost intenzity K .

Snadno vypočteme střední hustotu Země z rovnice $M = (4/3) \pi R^3 \rho$:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \approx 5,52 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Hustota Země není však ve všech místech stejná, tak např. střední hustota hornin zemské kůry je pouze $2,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Vně povrchu Země klesá intenzita (gravitační zrychlení) se čtvercem vzdálenosti r od zemského středu, jako by v něm byl hmotný bod stejné hmotnosti, jako má Země, tedy

$$2.3 \quad (23) \quad g = \kappa \frac{M}{r^2}.$$

Podobně je přírůstek potenciální energie ΔW_p hmotného bodu hmotnosti m' při zvednutí s povrchu zemského do výšky h určen rovnicí 2.3 (19), odvozenou pro pole bodu s hmotností m , dosadíme-li do ní za hmotnost m hmotnost M Země a vzdálenosti $r_B = R$ a $r_C = R + h$ (R je opět zemský poloměr),

$$\begin{aligned} \Delta W_p &= m' \Delta U = \frac{-\kappa M m'}{R + h} + \frac{\kappa M m'}{R} = \kappa M m' \frac{h}{R(R + h)} = \\ &= m' \frac{\kappa M}{R^2} \frac{h}{1 + \frac{h}{R}}. \end{aligned}$$

Je-li výška h velmi malá proti poloměru Země R , můžeme zlomek h/R pominout proti 1 a se zřetelem k 2.3 (22) je

$$2.3 \quad (24) \quad \Delta W_p = m' \frac{\kappa M}{R^2} h = m' g_0 h.$$

Dostáváme tak pro přírůstek potenciální energie tělesa hmotnosti m' v zemském gravitačním poli přibližně vztah totožný se vztahem 2.2 (40), který platí ovšem jen tehdy, je-li výška h malá proti poloměru Země, takže můžeme v ní pokládat intenzitu gravitačního pole čili tíhové zrychlení za stálé.

2.3.3. Pohyb v nehomogenním gravitačním poli

Pole, v němž má intenzita všude stejnou velikost a směr, nazýváme *polem homogenním*. Tak můžeme v technické mechanice v oboru, v němž vyšetřujeme pohyb těles, zpravidla pokládat zemské gravitační pole za homogenní a pak také platí vztah 2.3 (24) prakticky přesně. Avšak ve vnější balistice a v mechanice výškových letů je často třeba přihlížet k nehomogenitě zemského gravitačního pole, jehož síly jsou centrální síly. Pohyby těles v gravitačním poli Země řídí se proto týmiž zákony jako pohyby planet kolem Slunce, tedy Keplerovými zákony. Platí to zejména pro Měsíc a umělé *družice Země* a tzv. *mezi-kontinentální balistické střely*, odmyslíme-li si ovšem vliv atmosféry.

Stálou rychlost, kterou těleso krouží kolem gravitačního centra po kruhové dráze, nazýváme *první kosmickou* neboli *kruhovou rychlostí* tělesa. Určíme ji snadno z podmínky, že příslušné dostředivé zrychlení $a_n = v_k^2/r$ (síla přepočtená na jednotkovou hmotnost tělesa) je právě rovno intenzitě gravitačního pole neboli gravitačnímu zrychlení g ve vzdálenosti r od gravitačního centra, $a_n = g$. Pro poloměr r kruhové dráhy je tedy kruhová rychlost

$$2.3 \quad (25) \quad v_k = \sqrt{gr} = \sqrt{\frac{\kappa M}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 R}{n}}, \quad r = nR,$$

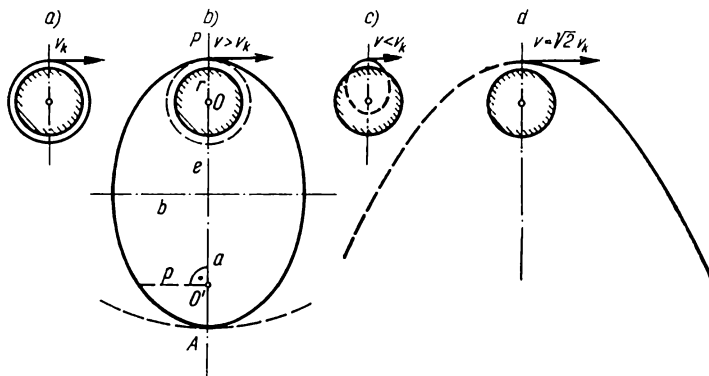
kde jsme dosadili ze vzorce 2.3 (23). Označíme-li g_0 zrychlení na povrchu zemském vzdáleném o R od gravitačního centra, pak zrychlení g ve vzdálenosti $r = nR$ je podle 2.3 (22) a (23) $g = g_0 \frac{R^2}{r^2}$; tím jsou dány poslední dva vztahy 2.3 (25). Tak dostáváme pro kruhovou

rychlost okolo Země ve vzdálenosti R jejího poloměru $v_{k_0} = \sqrt{g_0 R} = \sqrt{9,81 \cdot 6,37 \cdot 10^6} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ve vzdálenosti Měsíce, jehož dráha má poloměr $r = 384,404 \cdot 10^6 \text{ m}$, který je $n = 384,4/6,37 = 60,3$ krát větší než poloměr zemský, je kruhová rychlost $v_k = v_{k_0}/\sqrt{n} = 7,9 \cdot 10^3/7,76 = 1,02 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$.

S rostoucí vzdáleností od gravitačního centra klesá kruhová rychlost v_k , a to $v_k \sim 1/\sqrt{n}$, a zároveň klesá také úhlová rychlost kruhového pohybu

$$2.3 (26) \quad \omega = \frac{v_k}{nR} = \sqrt{\frac{g_0}{n^3 R}} = \frac{v_{k_0}}{R \sqrt{n^3}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{n^3}},$$

kde $\omega_0 = v_{k_0}/R = 7,9 \cdot 10^3/6,37 \cdot 10^6 = 1,24 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ je úhlová rychlost kruhového pohybu s poloměrem R rovným zemskému poloměru. Tato úhlová rychlost je tedy větší než úhlová rychlost Země $\omega_z = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, a protože s rostoucím n klesá, můžeme nalézt takové n , při



Obr. (2.3) 5. Pohyb v centrálním gravitačním poli

kterém je úhlová rychlost kruhového pohybu právě rovna úhlové rychlosti Země, $\omega = \omega_z$; podle 2.3 (26) vychází

$$n = \left(\frac{\omega_0}{\omega_z} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1,24 \cdot 10^{-3}}{7,292 \cdot 10^{-5}} \right)^{\frac{2}{3}} = 6,61.$$

Tomu odpovídá vzdálenost $r = nR = 42,1 \cdot 10^6 \text{ m}$ od zemského středu nebo $r - R = 35,7 \cdot 10^6 \text{ m}$ od zemského povrchu, tedy zhruba desetina vzdálenosti Měsíce od Země. Příslušná kruhová rychlost je $v_k = \omega_z \cdot nR = 7,292 \cdot 10^{-5} \cdot 42,1 \cdot 10^6 = 3,07 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jestliže v rovině rovníku ve vypočtené výšce nad Zemí udělíme družici takovouto rychlost ve směru kolmém k průvodiči, bude obíhat stejnou úhlovou rychlostí, jakou se otáčí Země, a bude proto stále nad jedním a týmž pozemským místem. Protože její poloha na obloze je stálá, je její název *stacionární družice*. Může sloužit jako znamenitá retranslační stanice pro televizní vysílání, která umožní, aby se vysíláním pokryla celá jedna polovina Země.

Má-li v dané vzdálenosti r od gravitačního centra rychlost tělesa v jinou velikost a jiný směr než příslušná kruhová rychlost v_k , která je samozřejmě kolmá k průvodiči r vedenému z centra, bude ovšem další pohyb tělesa vzhledem k silovému působení zase centrální, ale nebude to již pohyb rovnoměrný kruhový. Aby se další úvahy zjednodušily, předpokládejme, že počáteční rychlost tělesa je aspoň kolmá na průvodič [obr. (2.3) 5]. Je-li větší než příslušná kruhová rychlost, $v > v_k$, pak při daném gravitačním (dostředivém) zrychlení $g = \frac{v_k^2}{r} = \frac{v^2}{\rho}$ bude poloměr křivosti dráhy ρ v tomto místě větší než poloměr r

kruhové dráhy, $\varrho > r$, takže se těleso dostává do vzdálenějších míst od centra s větší potenciální energií. Protože v centrálním silovém poli, které je konzervativní, platí zákon zachování mechanické energie, roste potenciální energie tělesa na účet jeho kinetické energie a rychlost tělesa se bude zmenšovat; přitom podle druhého Keplerova zákona má těleso stálou plošnou rychlost $\mathbf{w} = \text{const}$, čímž se podle prvního Keplerova zákona vyznačuje pohyb po eliptické dráze, v jejímž jednom ohnisku je gravitační centrum. Předpokládejme tedy zatím, že pohyb tělesa bude eliptický s vrcholem v místě P , kde počáteční rychlost má velikost $v > v_k$.

Jsou-li podle obr. (2.3) 5b a a b délky hlavní a vedlejší poloosy, r vzdálenost vrcholu P od ohniska v centru O , $e = a - r$ lineární (délková) výstřednost, $\varepsilon = e/a$ numerická (číselná) výstřednost, p poloparametr (pořadnice bodu s průmětem v ohnisku) a ϱ poloměr křivosti ve vrcholech P a A , platí pro elipsu známé vztahy

$$2.3 (27) \quad e = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad p = \frac{b^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2), \quad \varrho = p, \quad a = \frac{r}{1 - \varepsilon}.$$

Poloměr křivosti ϱ dráhy ve vrcholu P je určen dostředivým zrychlením g ve vzdálenosti r od centra O , $v^2/\varrho = g = g_0 \frac{R^2}{r^2}$, takže pro poměr počáteční rychlosti v a příslušné kruhové rychlosti v_k vzhledem k 2.3 (25) a (27) dostáváme

$$2.3 (28) \quad \frac{v^2}{v_k^2} = \frac{\varrho}{r} = \frac{p}{r} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{r} = (1 + \varepsilon) \text{ nebo } \frac{\Delta v}{v_k} = \frac{v - v_k}{v_k} = \sqrt{1 + \varepsilon} - 1,$$

čili numerická výstřednost dráhy tělesa je určena poměrnou odchylkou $\Delta v/v_k$ počáteční rychlosti od kruhové rychlosti v daném místě. Pro malé ε je $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, takže

$$2.3 (29) \quad \frac{\Delta v}{v_k} \approx \frac{\varepsilon}{2};$$

při malých poměrných odchylkách počáteční rychlosti je jim tedy numerická výstřednost dráhy přibližně přímo úměrná. Např. u druhé sovětské družice vypuštěné v prosinci 1957 měla dráha numerickou výstřednost $\varepsilon = 0,1124$; pak $\sqrt{1 + \varepsilon} - 1 = 0,055$ a $\frac{\varepsilon}{2} = 0,056$ se navzájem mnoho neliší. Relativní odchylka počáteční rychlosti od kruhové rychlosti činila tedy 5,5 % (byla-li ovšem počáteční rychlost aspoň zhruba kolmá na průvodič).

Vrchol P eliptické dráhy kolem Země, který je Zemi blíže, nazýváme *perigeem*, protilehlý vzdálenější vrchol A pak *apogeem*. Přímkou, na níž leží oba vrcholy P a A a zároveň gravitační centrum O , se nazývá *apsida*.

Je-li počáteční rychlost v větší než příslušná kruhová rychlost v_k a má též směr, vznikne v daném místě perigeum [obr. (2.3) 5b], protože dráha má větší poloměr křivosti než kruhová dráha, jak jsme vysvětlili. Je-li naproti tomu počáteční rychlost v menší než kruhová rychlost v_k ve zvolené vzdálenosti, pak vzhledem k dané velikosti gravitačního zrychlení $g = v^2/\varrho = v_k^2/r$ bude dráha více zakřivena ($\varrho < r$) než kruhová dráha procházející tímto místem a vznikne v něm apogeum, jak je vidět na obr. (2.3) 5b, kdyby pohyb začal v bodě A .*) Nevznikne-li pohyb rychlostí $v < v_k$ v dostatečné výšce nad zemským povrchem, může perigeum ležet uvnitř Země a pak se ovšem uskuteční jen část eliptické dráhy kolem gravitačního centra Země (obr. c). Vhodnou volbou rychlostí lze dosáhnout,

*) Stejný výsledek dává vzorec 2.3 (28): pro $\Delta v/v_k < 0$ je $\varepsilon < 0$ a podle 2.3 (27) $a = r/(1 - \varepsilon) < r$.

že eliptická dráha protíná zemský povrch ve dvou zvolených místech; na tom je založena dráha *mezikontinentální balistické střely*.

Perigeální rychlost tělesa v_P a apogeální rychlost v_A , které jsou vždy kolmé na průvodiče r_P a r_A perigea a apogea vzhledem k centru O , souvisí spolu prostřednictvím stálé plošné rychlosti w podle 2.3 (2) vztahem

$$2.3 (30) \quad w = \frac{1}{2} r_P v_P = \frac{1}{2} r_A v_A = \text{const.}$$

Elipsa má s ostatními kuželosečkami společnou vlastnost, že vzdálenosti každého bodu těchto křivek od pevného bodu (ohniska) a od pevné přímky (řídící přímky) jsou ve stálém poměru, rovném numerické výstřednosti ε . Podle velikosti numerické výstřednosti ε vznikne:

elipsa,	$\varepsilon < 1$,
parabola,	$\varepsilon = 1$,
hyperbola,	$\varepsilon > 1$,
kružnice,	$\varepsilon = 0$.

Ze vzorce 2.3 (28) plyne, že kolem gravitačního centra vznikne pohyb po uzavřené dráze, která je obecně eliptická s apogeeem v místě počáteční rychlosti ($\varepsilon < 0$) nebo s perigeem v tomto místě ($0 < \varepsilon < 1$), nebo je kruhová ($\varepsilon = 0$), jen pokud velikost relativní odchylky $\Delta v/v_k$ nebo poměr v^2/v_k^2 nedosáhne jisté hodnoty, jíž přísluší numerická výstřednost $\varepsilon = 1$. Při této hodnotě ε přechází eliptický pohyb v pohyb po otevřené parabolické dráze (obr. d), při němž se těleso stále vzdaluje od gravitačního centra, až se posléze dostane z gravitačního pole. Ze vzorce 2.3 (28) vychází pro příslušnou perigeální rychlost tělesa

$$2.3 (31) \quad v_2 = v_k \sqrt{2}.$$

Velikost této rychlosti pro zemský povrch je $v_2 = 7,9 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{2} = 11,2 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a nazývá se *druhá kosmická* nebo *úniková (parabolická) rychlost*, protože těleso takovou rychlostí se vymaňuje z vlivu zemské přitažlivosti. Má-li posléze poměr v^2/v_k^2 takovou velikost, že $\varepsilon > 1$, bude se těleso od gravitačního centra trvale vzdalovat rychleji po hyperbolické dráze a opustí gravitační pole konečnou rychlostí, jak snadno zjistíme ze zákona zachování mechanické energie.

V místě počáteční (perigeální) rychlosti v má těleso hmotnosti m kinetickou energii

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \text{ a podle 2.3 (17) potenciální energii } W_p = -\frac{\kappa M m}{r}, \text{ která je podle}$$

2.3 (25) a (31) rovna též $W_p = -m v_k^2 = -\frac{1}{2} m v_2^2$. Vzdálenost, kde už není znatelného gravitačního působení (teoreticky $r \rightarrow \infty$), je charakterizována nulovou potenciální energií $W_p = 0$, takže dospěje-li těleso do této vzdálenosti rychlostí v_∞ , bude mít jen kinetickou energii $W_k = \frac{1}{2} m v_\infty^2$, která je rovna součtu obou předešlých energií:

$$2.3 (32) \quad \frac{1}{2} v_\infty^2 = \frac{1}{2} v^2 - v_k^2 \quad \text{nebo} \quad v_\infty^2 = v^2 - v_2^2.$$

Je zřejmé, že při počáteční rychlosti rovné únikové (parabolické) rychlosti, $v = v_2$, skončí těleso pohyb v gravitačním poli nulovou rychlostí. $v_\infty = 0$, je-li naproti tomu počáteční rychlost větší než úniková rychlost, $v > v_2$, má těleso ve vzdálenosti, kde se gravitační působení prakticky už neprojevuje, rychlost $v_\infty > 0$.

Předpokládali jsme, že gravitační pole je v prostoru osamocené; jde-li však o gravitační pole zemské, pak Země je v gravitačním poli Slunce, takže tělesa rychlostí rovnou nebo

větší, než je úniková rychlost zemská, se sice vymaní z gravitačního působení Země, ale stanou se oběžnicemi v silovém poli Slunce, ledaže by počáteční rychlost byla tak velká, že by se rovnala únikové (parabolické) rychlosti pro gravitační pole Slunce ve vzdálenosti Země od Slunce. Kruhovou rychlost Země kolem Slunce jsme uvedli již v čl. 2.2.5; je to známá hodnota $v = 29,8 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, takže úniková rychlost ze sluneční soustavy, zvaná též *třetí kosmická rychlost*, je podle 2.3 (31) $v_3 = 29,8 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{2} = 42,1 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Budeme-li chtít udělit tělesu takovou rychlost vzhledem k Slunci, využijeme k tomu ovšem kruhové rychlosti Země kolem Slunce. Úniková rychlost ze sluneční soustavy je o $42,1 \cdot 10^3$ — $29,8 \cdot 10^3 = 12,3 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ větší, takže kdyby Země neměla gravitační pole, stačila by tělesu vzhledem k Zemi tato rychlost; se zřetelem na zemské gravitační pole to však musí být rychlost v_∞ , kterou má těleso, když se již dostalo z vlivu tohoto pole, takže vzhledem k Zemi musí mít těleso rychlost v , kterou vypočteme ze vztahu 2.3 (32), $v^2 = v_\infty^2 + v_\infty^2 = 11,2^2 + 12,3^2 = 277,4 \text{ (km} \cdot \text{s}^{-1})^2$. Rychlost $v = \sqrt{277,4} = 16,7 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ je tedy perigeální rychlost, kterou vzhledem k Zemi ve směru jejího pohybu je nutno udělit tělesu, aby opustilo naši sluneční soustavu. Je to hodnota třetí kosmické rychlosti při využití rychlosti Země kolem Slunce.

Uvážíme-li, že rychlost střely opouštějící hlaveň děla bývá kolem $1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, je sotva možné dosáhnout výstřelem některé z uvedených kosmických rychlostí. Dostatečně velké rychlosti je však možné dosáhnout zrychleným pohybem trvajícím delší dobu, než je velmi krátká doba, v níž střela získává zrychlení v dělové hlavni. Potřebného zrychlení pohybu se dosahuje několikastupňovou raketou, která např. umělou družici vynese do výše několika set kilometrů a přitom jí udělí potřebnou kosmickou rychlost správného směru.

2.4. Základy mechaniky soustavy hmotných bodů

2.4.1. Princip vzájemného působení v soustavě bodů

Považujeme-li částice, z nichž se skládají tělesa, za hmotné body, můžeme výsledky, k nimž jsme došli v mechanice hmotného bodu, zobecnit na těleso a na soubor více těles. Hmotné body, z nichž se skládá těleso, nebo které náležejí několika tělesům, tvoří *soustavu hmotných bodů*. U jediného tělesa je soustava hmotných bodů omezena povrchem tělesa. Při několika tělesech tvoří soustavu hmotných bodů všechny body, které jsou uvnitř povrchů těchto těles. Často můžeme těleso nahradit jediným bodem, jak jsme to učinili v mechanice hmotného bodu. Za soustavu hmotných bodů můžeme pak považovat také soustavu takovýchto těles.

Volba soustavy závisí na úkolu, který chceme řešit. Studujeme-li např. pohyb tělesa na povrchu zemském, považujeme za samostatnou soustavu toto těleso. Zemi a tělesa na jejím povrchu můžeme však sloučit dohromady v jedinou soustavu, která jako celek koná centrální pohyb kolem Slunce, nebo můžeme za samostatnou soustavu považovat Slunce se všemi planetami. Pro ohromné vzdálenosti mezi planetami a Sluncem, proti nimž jsou velikosti těchto těles nepatrné, nahrazujeme je hmotnými body, a celou planetární soustavu pak můžeme považovat za soustavu několika málo hmotných bodů.

V mechanice soustavy hmotných bodů studujeme vliv *vnějších sil*, které mají svůj původ v tělesech, která k vyšetřované soustavě nepočítáme. Kromě těchto vnějších sil musíme však uvažovat také o *vnitřních silách*, kterými jednotlivé hmotné body vyšetřované soustavy na sebe navzájem působí. Dochází-li v jedné a téže soustavě k vzájemnému styku těles (viz např. ráz těles — kap. 2.7), působí na sebe silami, které mají charakter vnitřních sil. Podle gravitačního zákona působí na sebe tělesa gravitačními silami. Takové síly mohou být vnitřními silami, jestliže působí pouze mezi hmotnými body, jež počítáme ke zkoumané soustavě. Počí-

tá-me-li např. Zemi k zvolené soustavě hmotných bodů, jsou gravitační síly mezi Zemí a ostatními hmotnými body na jejím povrchu vnitřními silami. Považujeme-li však Zemi za cizí soustavu, která k vyšetřované soustavě nepatří, jsou váhy jednotlivých hmotných bodů nejtípcištějšími vnějšími silami.

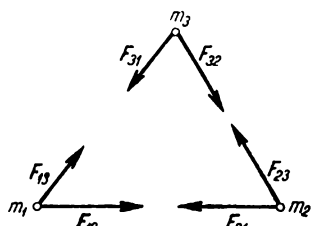
Působí-li hmotný bod m_1 na hmotný bod m_2 silou F_{12} [obr. (2.4) 1], pak podle principu vzájemného působení působí m_2 na m_1 silou F_{21} , která má stejnou velikost, ale opačný směr než F_{12} , takže

$$F_{12} = -F_{21} \text{ čili } F_{12} + F_{21} = 0.$$

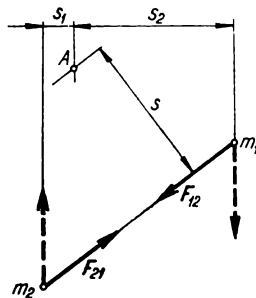
Jejich součet je tedy nulový. Při třech bodech

$$\underbrace{F_{12} + F_{21}}_0 + \underbrace{F_{13} + F_{31}}_0 + \underbrace{F_{23} + F_{32}}_0 = 0.$$

V libovolné soustavě lze tedy vnitřní síly, jimiž jednotlivé body na sebe působí, sdružit vždy po dvou silách stejné velikosti, ale opačného směru, takže jejich součet je nulový.



Obr. (2.4) 1. Vzájemné působení mezi body soustavy



Obr. (2.4) 2. Síly mezi dvěma body soustavy leží v téže přímce

Výslednice všech vnitřních sil soustavy je rovna nule.

K tomuto významnému důsledku třetího pohybového zákona se všeobecně u bodových soustav připojuje předpoklad, který má rovněž zásadní důležitost, i když se někdy ani výslovně neuvádí. Třetí pohybový zákon totiž říká, že síly, kterými na sebe působí dvě tělesa, jsou stejně velké a opačného směru, ale neříká nic o tom, zda tyto síly leží v téže

přímce. Leží-li obě síly v téže přímce, bude výsledný moment sil F_{12} a F_{21} působících mezi dvěma hmotnými body m_1 a m_2 vzhledem k libovolnému bodu A [obr. (2.4) 2] nulový, protože pak mají vzhledem k bodu A stejná ramena s . Kdyby neležely v téže přímce (na obrázku naznačeny čárkovaně), i když jsou stejně velké a působí v navzájem opačných směrech, nebyl by jejich výsledný moment vzhledem k libovolnému bodu nulový (ramena s_1 a s_2 vzhledem k bodu A jsou různá, jak je vidět na obrázku). Protože pokládáme za samozřejmé, že síly, jimiž na sebe působí dva hmotné body, leží v jejich spojnici, ruší se momenty vždy dvou sil působících mezi těmiž dvěma body, takže i *výsledný moment všech vnitřních sil soustavy vzhledem k libovolnému bodu v prostoru je nulový.*

Proto nemohou vnitřní síly způsobit pohyb soustavy jako celku. K tomu je třeba vždy vnějších sil. Kdyby tomu tak nebylo, mohla by se osamocená soustava sama od sebe roztočit, což odporuje zkušenosti.

2.4.2. Impulsové věty. Hmotný střed

Podle druhého pohybového zákona je časová změna hybnosti hmotného bodu rovna výsledné síle, která na tento bod působí. Pro i -tý bod soustavy platí tedy

$$2.4 (1) \quad \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i,$$

kde $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ je hybnost i -tého bodu a $\mathbf{F}_i$ je výsledná síla na bod působící. Na hmotný bod, který je součástí soustavy, působí kromě vnějších sil také vnitřní síly, takže výsledná síla $\mathbf{F}_i$ je dána vektorovým součtem výslednice všech vnějších sil $\mathbf{F}'_i$ a výslednice všech vnitřních sil $\mathbf{F}''_i$, které na bod působí, tedy

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}'_i + \mathbf{F}''_i.$$

Takové rovnice můžeme napsat pro všech n bodů soustavy tak, že za i dosadíme postupně $i = 1, 2, \dots, n$. Dostaneme tím celkem n rovnic, které můžeme sečíst:

$$2.4 (2) \quad \sum_1^n \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_1^n \mathbf{F}_i = \sum_1^n \mathbf{F}'_i + \sum_1^n \mathbf{F}''_i.$$

Z toho $\sum_1^n \mathbf{F}'_i = \mathbf{F}$ je zřejmě výslednice všech vnějších sil, které na soustavu působí, a $\sum_1^n \mathbf{F}''_i = 0$ je výslednice všech vnitřních sil mezi všemi body soustavy, která je rovna nule. Rovnici 2.4 (2), dosadíme-li $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$, můžeme vzhledem k tomu, že součet derivací je roven derivaci součtu, tedy psát

$$2.4 (3) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \sum_1^n m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{F},}$$

kde $\sum_1^n m_i \mathbf{v}_i$ je vektorový součet hybností všech hmotných bodů soustavy, tedy celková hybnost soustavy. Rovnice 2.4 (3) vyjadřuje tzv. *I. impulsovou větu* čili *větu o hybnosti soustavy*:

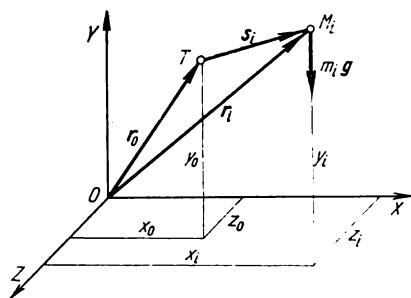
Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výsledné vnější síle.

Vyjadřujeme-li působení všech vnějších sil jejich výslednicí $\mathbf{F}$, je nasnadě také celou soustavu hmotných bodů nahradit jediným hmotným bodem, jehož hmotnost m je rovna hmotnosti celé soustavy, tj. $m = \sum_1^n m_i$, a který se bude chovat tak, jako kdyby na něj tato výsledná vnější síla působila. Podle 2.4 (3) musí být zřejmě jeho hybnost $m\mathbf{v}$ rovna celkové hybnosti soustavy, tedy

$$2.4 (4) \quad m\mathbf{v} = \sum_1^n m_i \mathbf{v}_i.$$

Vzniká otázka, kde je poloha tohoto myšleného hmotného bodu vzhledem k polohám jednotlivých skutečných hmotných bodů, které tvoří vyšetřovanou soustavu. Zvolíme-li si pevný bod O v prostoru jako počátek souřadnicové soustavy [obr. (2.4) 3], pak okamžité polohy jednotlivých hmotných bodů určují jejich průvodiče $\mathbf{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Označíme-li $\mathbf{r}$ průvodič, který udává okamžitou polohu onoho hmotného bodu, který z hlediska působení výsledné vnější síly zastupuje soustavu jako celek, můžeme vzhledem k tomu, že hmotnosti m_i jednotlivých bodů jsou stálé, vztah 2.4 (4) psát ve tvaru:

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{r}) = \frac{d}{dt} \sum_1^n m_i \mathbf{r}_i.$$



Obr. (2.4) 3. Hmotný střed soustavy hmotných bodů

Této rovnici vyhovuje průvodič

$$2.4 (5) \quad \mathbf{r} = \frac{1}{m} \sum_1^n m_i \mathbf{r}_i + \mathbf{c},$$

kde vektor $\mathbf{c}$ je integrační konstanta. Tato konstanta může být libovolný vektor, a proto si lze působení výslednice všech vnějších sil představit kdekoli v prostoru a kamkoli lze v myšlenkách umístit hmotný bod nahrazující soustavu. Působení výslednice vnějších sil na soustavu není žádnou podmínkou vázáno na určité místo, které by bylo v nějakém vztahu k polohám jednotlivých bodů soustavy.

Vektor $\mathbf{c}$ je sice libovolný, ale je to stálý vektor, tzn. že hmotný bod na jeho konci se působením výslednice $\mathbf{F}$ vnějších sil pohybuje stejně jako hmotný bod, který je na začátku vektoru $\mathbf{c}$ a jehož průvodič $\mathbf{r}_0$ je podle 2.2 (5) určen vztahem

$$2.4 (6) \quad \mathbf{r}_0 = \frac{1}{m} \sum_1^n m_i \mathbf{r}_i = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Poloha tohoto bodu [T na obr. (2.4) 3] už není libovolná, ale je jednoznačně určena polohami a hmotnostmi jednotlivých bodů, tvořících vyšetřovanou soustavu, neboť vzorec 2.2 (6) odpovídá obecnému pravidlu pro hledání střední hodnoty několika veličin, jimž přisuzujeme různé „váhy“, tzn. různě velký podíl na vyšetřovaném jevu. Těmito veličinami jsou v tomto případě polohové vektory $\mathbf{r}_i$ hmotných bodů soustavy a „váhami“ jejich hmotnosti m_i . Proto příslušné místo (geometrický bod) určené průvodičem $\mathbf{r}_0$ nazýváme *hmotným středem* soustavy nebo též *těžištěm*, ačkoli s tíží přímo nesouvisí. Je zřejmé, že změnou konfigurace soustavy změní se obecně i poloha jejího hmotného středu, snadno bychom však dokázali, že nezávisí na volbě počátku O vztažné souřadnicové soustavy. U tuhé soustavy hmotných bodů, v níž všechny vzájemné vzdálenosti jednotlivých bodů jsou neproměnné, je také poloha hmotného středu vzhledem ke všem bodům soustavy neproměnná, ať se soustava jakkoli posune, nebo otočí.

Důležitý je případ, že za počátek O souřadnicové soustavy volíme přímo hmotný střed T soustavy hmotných bodů, tj. $\mathbf{r}_0 = 0$. Označíme-li $\mathbf{s}_i$ průvodiče jednotlivých bodů soustavy vzhledem k hmotnému středu, pak podle obr. (2.4) 3 je $\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i$. Protože průvodič $\mathbf{r}_0$ je všem bodům soustavy společný, můžeme vztah 2.4 (6) psát ve tvaru $\sum_1^n m_i \mathbf{r}_0 = \sum_1^n m_i \mathbf{r}_i$, z něhož ihned plyne pro průvodiče $\mathbf{s}_i$ bodů soustavy vzhledem k hmotnému středu

$$2.4 (7) \quad \sum_1^n m_i \mathbf{s}_i = 0.$$

Vektorovou rovnici 2.4 (6), již je určena poloha hmotného středu vzhledem k počátku O zvolené souřadnicové soustavy, rozepíšeme snadno na tři vztahy pro průměty průvodičů $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}_i$ do souřadnicových os. Podle obr. (2.4) 3 máme

$$2.4 (8) \quad x_0 = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{m}, \quad y_0 = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{m}, \quad z_0 = \frac{\sum_1^n m_i z_i}{m},$$

kde x_0, y_0, z_0 jsou souřadnice hmotného středu T , x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jsou souřadnice

jednotlivých hmotných bodů soustavy a hmotnost $m = \sum_1^n m_i$ je celková hmotnost soustavy. Tím jsme dostali předpis pro praktický výpočet polohy hmotného středu.

Název *těžiště* pro hmotný střed plyne z nejběžnějšího silového působení na soustavy hmotných bodů, záležejícího v působení zemského gravitačního pole na jednotlivé hmotné body. Většinou jde o soustavy, jejichž velikost je proti velikosti Země malá. Gravitační pole na povrchu zemském pak můžeme v okolí vyšetřovaného tělesa považovat velmi přibližně za homogenní a tíhy jednotlivých hmotných bodů za rovnoběžné. Tíhy hmotných bodů jsou síly, které jednotlivým bodům udělují stejné tíhové zrychlení. Na hmotné body soustavy působí tedy soustava rovnoběžných sil, které všem hmotným bodům udělují stejné zrychlení co do směru i velikosti. Můžeme ji nahradit jedinou výslednicí, která určuje celkovou tíhu soustavy. Prochází bodem, vzhledem k němuž její moment je roven nule. Pro soustavu rovnoběžných sil platí, že moment výslednice k libovolnému bodu je dán vektorovým součtem momentů všech složek k témuž bodu. Označíme-li $\mathbf{s}_i$ průvodič i -tého hmotného bodu soustavy o tíze $m_i \mathbf{g}$ vzhledem k bodu na paprsku výslednice, pak moment této tíhy k tomuto bodu je $\mathbf{s}_i \times m_i \mathbf{g} = m_i \mathbf{s}_i \times \mathbf{g}$, a pro výslednici tíhových sil jednotlivých hmotných bodů tedy platí (s ohledem na distributivní zákon, jímž se řídí vektorový součin)

$$\sum_1^n (m_i \mathbf{s}_i \times \mathbf{g}) = \sum_1^n m_i \mathbf{s}_i \times \mathbf{g} = 0.$$

Má-li tomu tak být pro libovolný stálý vektor $\mathbf{g}$, musí být druhý vektor součinu rovný nule, tedy

$$\sum_1^n m_i \mathbf{s}_i = 0.$$

To je též podmínka, jako je 2.4 (7) pro hmotný střed; odtud plyne, že *hmotný střed neboli těžiště soustavy hmotných bodů je bod, v němž se protínají výslednice sil, které udělují všem bodům soustavy stejné zrychlení (co do směru i velikosti)*. Takovou soustavu sil lze prakticky realizovat jenom homogenním gravitačním (tíhovým) polem. Nehomogenní gravitační pole k pojmu těžiště nevede; výslednice sil, jimiž takové pole působí na jednotlivé hmotné body soustavy, prochází jiným bodem než těžištěm.

Význam hmotného středu vynikne teprve při formulování *II. impulsové věty*. Podle 2.2 (53) platí pro i -tý hmotný bod soustavy

$$2.4 (9) \quad \frac{d\mathbf{b}_i}{dt} = \mathbf{M}_i,$$

kde $\mathbf{b}_i$ je točivost (moment hybnosti) i -tého bodu vzhledem k libovolnému pevnému bodu O a $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ je výsledný moment výslednice $\mathbf{F}_i$ všech sil na hmotný bod působících vzhledem k témuž bodu O . Kromě vnějších sil, jejichž výslednice je $\mathbf{F}'_i$, působí na hmotný bod vnitřní síly, které mají výslednici $\mathbf{F}''_i$. Výsledná síla je dána vektorovým součtem výslednice vnějších sil $\mathbf{F}'_i$ a výslednice vnitřních sil $\mathbf{F}''_i$:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}'_i + \mathbf{F}''_i,$$

takže

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}'_i + \mathbf{F}''_i).$$

Podle distributivního zákona

$$\mathbf{M}_i = (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}'_i) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}''_i) = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}''_i.$$

Rovnici 2.4 (9) pro i -tý bod můžeme tedy psát

$$\frac{d\mathbf{b}_i}{dt} = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}''_i.$$

Sečteme-li n takových rovnic pro všechny body soustavy, přičemž ovšem vztahujeme točivosti i momenty k témuž pevnému bodu O , dostaneme

$$2.4 (10) \quad \sum_1^n \frac{d\mathbf{b}_i}{dt} = \sum_1^n \mathbf{M}'_i + \sum_1^n \mathbf{M}''_i.$$

Zde $\sum_1^n \mathbf{M}'_i$ je zřejmě vektorový součet momentů všech vnějších sil čili výsledný vnější

moment $\mathbf{M}$ vzhledem k pevnému bodu O , tedy $\sum_1^n \mathbf{M}'_i = \mathbf{M}$, a $\sum_1^n \mathbf{M}''_i$ je pak výsledný moment všech vnitřních sil vzhledem k témuž bodu O , který však podle čl. 2.4.1 je roven nule, tedy $\sum_1^n \mathbf{M}''_i = 0$. Součet na levé straně rovnice 2.4 (10) můžeme psát ve tvaru $\sum_1^n \frac{d\mathbf{b}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_1^n \mathbf{b}_i$, přičemž

$$\sum_1^n \mathbf{b}_i = \mathbf{b}$$

je zřejmě výsledná točivost soustavy, daná vektorovým součtem točivostí jednotlivých hmotných bodů vzhledem k libovolnému pevnému bodu O . Z rovnice 2.4 (10) tedy plyne

$$2.4 (11) \quad \boxed{\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{M}.}$$

To je *II. impulsová věta*, podle které časová změna točivosti soustavy hmotných bodů vzhledem k libovolnému pevnému bodu je rovna výslednému vnějšímu momentu vzhledem k témuž bodu.

Zvolme místo libovolného pevného bodu O hmotný střed T soustavy, určený průvodičem $\mathbf{r}_0$. Udává-li průvodič $\mathbf{s}_i$ polohu i -tého hmotného bodu vzhledem k hmotnému středu a průvodič $\mathbf{r}_i$ polohu téhož hmotného bodu vzhledem k pevnému bodu O [obr. (2.4) 3], pak

$$2.4 (12) \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \mathbf{s}_i \quad \text{a} \quad \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{s}_i}{dt^2}.$$

Násobíme-li pohybovou rovnici $m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i$ každého hmotného bodu vektorově zleva jeho průvodičem $\mathbf{r}_i$, dostaneme $\mathbf{r}_i \times m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$. Dosadíme-li za $\mathbf{r}_i$ a $\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}$ z 2.4 (12) a sečteme všechny rovnice pro n bodů soustavy, dostaneme dále

$$\sum_1^n \left[(\mathbf{r}_0 + \mathbf{s}_i) \times m_i \left(\frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{s}_i}{dt^2} \right) \right] = \sum_1^n [(\mathbf{r}_0 + \mathbf{s}_i) \times \mathbf{F}_i].$$

Protože $\mathbf{r}_0$ i $\frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2}$ jsou všem bodům soustavy společné, vychází roznásobením této rovnice

$$2.4 (13) \quad \begin{aligned} & \mathbf{r}_0 \times \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} \sum_1^n m_i + \sum_1^n m_i \mathbf{s}_i \times \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} + \mathbf{r}_0 \times \sum_1^n m_i \frac{d^2\mathbf{s}_i}{dt^2} + \sum_1^n \left(\mathbf{s}_i \times m_i \frac{d^2\mathbf{s}_i}{dt^2} \right) = \\ & = \mathbf{r}_0 \times \sum_1^n \mathbf{F}_i + \sum_1^n (\mathbf{s}_i \times \mathbf{F}_i). \end{aligned}$$

Druhý a třetí člen na levé straně je roven nule, protože podle 2.4 (7) $\sum_1^n m_i \mathbf{s}_i = 0$ a také

$\sum_1^n m_i \frac{d^2 \mathbf{s}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_1^n m_i \mathbf{s}_i = 0$. První člen na levé straně ruší se s prvním členem na pravé straně, protože $\sum_1^n \mathbf{F}_i$ je výslednice všech vnějších sil (výslednice vnitřních sil je rovna nule), za jejíž působení můžeme zvolit hmotný střed, takže

$$2.4 (14) \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} \sum_1^n m_i = m \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} = \sum_1^n \mathbf{F}_i \text{ nebo } m \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

je pohybová rovnice pro hmotný bod, jehož hmotnost je rovna celkové hmotnosti soustavy, $m = \sum_1^n m_i$, a na něj působí výslednice všech vnějších sil. Zbývá tedy z rovnice 2.4 (13) jenom

$$\sum_1^n \left(\mathbf{s}_i \times m_i \frac{d^2 \mathbf{s}_i}{dt^2} \right) = \sum_1^n (\mathbf{s}_i \times \mathbf{F}_i).$$

Tento výsledek můžeme psát ve tvaru*)

$$2.4 (15) \quad \frac{d}{dt} \sum_1^n \left(\mathbf{s}_i \times m_i \frac{d \mathbf{s}_i}{dt} \right) = \frac{d \mathbf{b}_0}{dt} = \mathbf{M}_0,$$

kde $\mathbf{b}_0$ je výsledná točivost soustavy hmotných bodů vzhledem k hmotnému středu a

$$\sum_1^n (\mathbf{s}_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{M}_0$$

výsledný moment všech vnějších sil působících na soustavu, rovněž vztažený k hmotnému středu.

II. impulsová věta 2.4 (11) je splněna také tehdy, zvolíme-li místo pevného bodu v prostoru za vztažný bod hmotný střed soustavy, který obecně není pevný, ale díky podmínce $\sum_1^n m_i \mathbf{s}_i = 0$ nevstupuje jeho zrychlení do rovnice pro působení celkového vnějšího momentu na soustavu hmotných bodů. *Vlastní pohyb hmotného středu, ať je jakýkoli, nemá tedy vliv na otáčení jednotlivých hmotných bodů kolem osy, která jím prochází.* V tom tedy záleží význam hmotného středu, který dva zdánlivě spolu nesouvisející pohybové zákony — I. a II. impulsovou větu — sjednocuje v jednotný přírodní zákon, jímž se řídí obecný pohyb obecné soustavy hmotných bodů. Z hlediska této jednoty je tedy přirozené považovat za působíště vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů její hmotný střed, což vede k těmto formulacím obou impulsových vět:

Hmotný střed (těžiště) soustavy pohybuje se jako hmotný bod, na který působí výslednice všech vnějších sil a jehož hmotnost je rovna celkové hmotnosti soustavy.

Časová změna točivosti soustavy vzhledem k jejímu hmotnému středu (těžišti) nebo vzhledem k libovolnému pevnému bodu je rovna výslednému vnějšímu momentu vzhledem k témuž bodu.

Ve zvláštním případě, kdy na soustavu nepůsobí vnější síly, nebo kdy výslednice vnějších sil je nulová, je $\mathbf{F} = 0$ a také $\mathbf{M} = 0$. Takovou soustavu nazýváme (dynamicky) *izolovanou* čili *osamocenou* (též *uzavřenou*) a platí pro ni věty o zachování hybnosti a točivosti:

Celková hybnost osamocené soustavy, rovná vektorovému součtu okamžitých hybností jednotlivých hmotných bodů soustavy, je stálá co do směru i velikosti.

Tuto větu můžeme také vyjádřit jako větu o zachování pohybu těžiště:

Těžiště osamocené soustavy pohybuje se podle zákona setrvačnosti (setrává v klidu nebo se pohybuje přímočaře rovnoměrně).

*) Viz poznámku pod čarou na str. 91.

Točivost osamocené soustavy, rovná vektorovému součtu točivostí jednotlivých hmotných bodů soustavy vzhledem k jejímu těžišti nebo k libovolnému pevnému bodu, je stálá co do směru i velikosti.

Význam těchto vět plyne z těchto jednoduchých příkladů:

Dělo se při výstřelu granátu pohybuje takovou zpětnou rychlostí, aby společné těžiště děla a granátu nezměnilo svou polohu vzhledem k místu, z něhož bylo vystřeleno, pomíjíme-li odpor při zpětném pohybu děla.*) Těžiště střepin explodovavšího granátu by se pohybovalo jako hmotný bod vystřelený šikmo vzhůru rychlostí, jakou byl vystřelen granát, kdyby nebylo odporu vzduchu, který je vnější silou.

Mrštíme-li nějakou tyčí, je její pohyb velmi složitý, koná posuvný pohyb a kromě toho se ještě otáčí. Její těžiště se však pohybuje jako hmotný bod, jehož hmotnost je rovna hmotnosti tyče a na který působí všechny síly, tedy tíha a odpor prostředí. Ve vzduchoprázdném prostoru by těžiště tyče opisovalo parabolu a tyč by rotovala kolem osy procházející těžištěm s točivostí stálou co do směru i velikosti.

Točivost i -tého bodu můžeme podle 2.2 (52) vyjádřit

$$b_i = 2m_i w_i,$$

kde w_i je plošná rychlost (plocha opsaná za jednotku času průvodičem, spojujícím i -tý hmotný bod s pevným bodem O nebo s těžištěm), takže celková točivost soustavy

$$2.4 (16) \quad b = \sum_1^n b_i = 2 \sum_1^n m_i w_i.$$

Věta o zachování točivosti je tedy zevšeobecněním druhého Keplerova zákona, který praví, že průvodič vedený od Slunce k planetě opisuje ve stejných dobách stejné plochy. Slunce a planeta tvoří izolovanou soustavu (neuvažujeme-li o vlivu ostatních planet), neboť na ni nepůsobí vnější síly. Centrální síly mezi Sluncem a planetou jsou vnitřními silami.

Při formulaci uvedených vět jsme vztahovali točivost a moment vnějších sil k „libovolnému pevnému bodu“. Podle čl. 2.2.4 nemůžeme však rozhodnout, která z inerciálních soustav je v klidu. Řčení „pevný bod“ může tedy znamenat jen bod klidný vzhledem k některé inerciální soustavě, která se ovšem vzhledem ke všem ostatním inerciálním soustavám pohybuje rovnoměrně přímočaře. Lze ostatně snadno ukázat, že se přechodem od vztažného bodu O k bodu O' , který se pohybuje vzhledem k bodu O stálou rychlostí, nezmění rovnice 2.4 (11). Není třeba ani počítat příslušnou transformaci, neboť víme, že se přechodem od jedné inerciální soustavy k jiné, rovněž inerciální soustavě, nezmění pohybové rovnice, z nichž rovnice 2.4 (11) plyne. Vidíme tedy, že v impulsových větách název pevný bod znamená bod pevný vzhledem k libovolné inerciální soustavě.

Impulsové věty, jež jsme odvodili pro soustavy hmotných bodů, platí i při své jednoduchosti ovšem pro všechny materiální objekty všech tří skupenství: pevného, kapalného a plynného. Ze stanoviska teoretického nejjednodušší je případ (*dokonale*) *tuhé soustavy*, čímž rozumíme soustavu hmotných bodů, jejichž vzájemné vzdálenosti jsou neproměnné. Můžeme si to představit tak, jako by body byly navzájem spojeny nevažitelnými zcela tuhými tyčemi. Naproti tomu mluvíme o soustavě zcela *volných hmotných bodů*, je-li jejich vzájemné uspořádání proměnné a mohou-li se vzájemné (relativní) vzdálenosti jednotlivých hmotných bodů zcela libovolně měnit.

Je zřejmé, že skutečná tělesa, ať z látky pevné, kapalné či plynné, můžeme nahradit soustavou ležící mezi těmito dvěma extrémy a blížíci se svou povahou více nebo méně prvnímu nebo druhému krajnímu případu. Vzhledem k veliké hustotě rozložení molekul v prostoru a jejich nepatrným rozměrům je však také možná představa o *spojitěm rozložení látky* v prostoru zaujatém tělesem, která připouští vyjádřit různé vlastnosti látek spojitými funkcemi a používat diferenciálního počtu. Je patrné, že obě představy nevedou ke sporu, pokud počítáme s diferenciály délek, objemu a hmotnosti, které jsou sice malé vzhledem k rozměrům a hmotnosti těles, jež jsou předmětem našich výzkumů, avšak stále ještě velké proti veličinám molekulárním. Tak můžeme také místo hmotnosti jednotlivých hmotných

*) Vzhledem k 2.4 (5) to ovšem platí také pro libovolný bod pevně spojený stálým vektorem c s těžištěm.

bodů brát diferenciál hmotnosti dm látky obsažené v nepatrném objemu dV a počítat např. hustotu tělesa ve vyšetřovaném místě jako podíl

$$2.4 (17) \quad \rho = \frac{dm}{dV}$$

hmotnosti k objemu, který ovšem obsahuje stále ještě veliký počet molekul. Máme za to, že v sousedních k sobě přiléhajících stejně velkých objemových elementech dV se tento veliký počet molekul navzájem neliší o více než o několik málo molekul, takže vzhledem k malé hmotnosti molekuly se hustota ρ od místa k místu v tělese mění prakticky spojitě. Pak můžeme celkovou hmotnost m tělesa vypočítat ze vztahu 2.4 (17) integrací provedenou přes celý objem V tělesa,

$$2.4 (18) \quad m = \int_V \rho \, dV,$$

známe-li ovšem, jak se hustota od místa k místu v tělese mění. Je-li hustota všude v celém tělese stálá, nazýváme je *homogenním* neboli *stejnorodým* a jeho hmotnost vypočteme ze vztahu

$$2.4 (19) \quad m = \rho \int_V dV,$$

v němž integrál závisí už jenom na geometrickém tvaru tělesa.

Podobně při výpočtu polohy těžiště takového tělesa přejdou ve vzorcích 2.4 (8) součty v integrály

$$2.4 (20) \quad x_0 = \frac{1}{m} \int_m x \, dm, \quad y_0 = \frac{1}{m} \int_m y \, dm, \quad z_0 = \frac{1}{m} \int_m z \, dm,$$

v nichž x_0 , y_0 a z_0 jsou souřadnice těžiště tělesa vzhledem k zvolené soustavě souřadnic, v níž mají jednotlivé elementy hmotnosti dm , nahrazující nyní hmotnost m_i bodů, souřadnice x , y a z . V homogenním tělese hustota $\rho = \text{const}$, takže dosadíme-li do 2.4 (20) $dm = \rho \, dV$, dostaneme pro souřadnice těžiště

$$2.4 (21) \quad x_0 = \frac{1}{V} \int_V x \, dV, \quad y_0 = \frac{1}{V} \int_V y \, dV, \quad z_0 = \frac{1}{V} \int_V z \, dV;$$

je zřejmé, že v homogenním tělese závisí poloha těžiště už jenom na jeho geometrickém tvaru, např. je-li to válec, kužel apod.

Výpočet těžiště se vždy zjednoduší, má-li těleso rovinu nebo osu souměrnosti. Je-li těleso homogenní, leží těžiště buď v rovině souměrnosti, nebo na ose souměrnosti. Souřadnicovou soustavu, k níž hledáme polohu těžiště, volíme pak tak, aby jedna ze souřadnicových rovin byla totožná s rovinou souměrnosti [tím se tři integrály 2.4 (21) zredukuje na dva], nebo má-li těleso osu souměrnosti, ztotožníme s ní jednu osu souřadnic. Stačí pak k určení polohy těžiště už jen jedna souřadnice.

2.4.3. Pohyb tělesa s proměnnou hmotností

Význam první impulsové věty ukážeme jednak při řešení rázu těles v kapitole 2.7, při němž jde o vyšetření pohybů těles vlivem sil pružnosti, jimiž tělesa na sebe působí, jednak v tomto článku při odvození pohybové rovnice pro pohyb tělesa s proměnnou hmotností.

Lze při tom vycházet v podstatě také z rázu, a to dokonale nepružného rázu mezi tělesem, na které soustřeďujeme pozornost, a jinými tělesy (látkami), jež spolu s ním tvoří zvolenou hmotnou soustavu.

Případ pohybu tělesa s proměnnou hmotností není tak neobvyklý, jak se snad na první pohled zdá. Vzpomeňme jen na jedoucí kropící vůz, jehož hmotnost se postupně zmenšuje o hmotnost vykropané vody, nebo na raketu, jejíž hmotnosti zase ubývá tím, že z ní velkou rychlostí tryskají plynné zplodiny hoření paliva, které si raketa nese s sebou. Příkladem tělesa, jehož hmotnosti při pohybu naopak přibývá, je kapka vody padající ve vzduchu nasyceném vodní párou, která se během pohybu kapky postupně sráží na jejím povrchu, nebo řetěz, jehož část leží shrnuta na stole a zbývající část klouže se stolu na podlahu, přičemž se postupně dostávají do pohybu články, které předtím byly v klidu, apod.

Sledované těleso tvoří spolu s látkou nebo s dalšími tělesy, jež se k němu během pohybu připojují nebo naopak oddělují, soustavu, o jejíž celkové hybnosti říká první impulsová věta, že její časová změna je rovna výsledné vnější síle působící na soustavu. Mějme tedy těleso hmotnosti m , které se v inerciální soustavě souřadnic (např. vzhledem k Zemi) v jistém okamžiku pohybuje rychlostí $\mathbf{v}$, a částici hmotnosti dm , která se vzhledem k téže soustavě pohybuje rychlostí $\mathbf{w}$; dohromady tvoří soustavu s hybností $m\mathbf{v} + dm \cdot \mathbf{w}$. Dopadne-li ve zvoleném okamžiku t částice na těleso, připojí se k němu a bude se dále pohybovat s ním, změní se v krátké době dt (měřené od zvoleného okamžiku t) rychlost $\mathbf{v}$ tělesa o $d\mathbf{v}$, takže soustava nabude nové hybnosti $(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$. Podíl změny hybnosti a doby, v níž tato změna nastala (časová změna hybnosti $d\mathbf{p}/dt$), je podle impulsové věty roven výsledné působící síle $\mathbf{F}$, takže dostáváme

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{dt} [(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - (m\mathbf{v} + dm \cdot \mathbf{w})] = \mathbf{F}.$$

Nedbáme-li nekonečně malého členu $dm d\mathbf{v}$ druhého řádu, můžeme také psát

$$2.4 (22) \quad \frac{1}{dt} [m d\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) dm] = \mathbf{F} \quad \text{nebo} \quad \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{F} + \mathbf{w} \frac{dm}{dt},$$

protože $\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \frac{dm}{dt} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Bývá užitečné zavést relativní rychlost $\mathbf{c} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$ částice vzhledem k vyšetřovanému tělesu (rychlost $\mathbf{v}$ je pro částici unášivou rychlostí). S relativní rychlostí má pak hořejší rovnice tvar

$$2.4 (23) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{c} \frac{dm}{dt}.$$

Hmotnost dm částice je zde totožná se změnou hmotnosti sledovaného tělesa;*) odvodili jsme proto *pohybovou rovnici tělesa s časově proměnnou hmotností*.

Uvedené tvary 2.4 (22) a (23) pohybové rovnice neliší se od Newtonova zákona síly vyjádřeného rovnicemi

$$2.4 (24) \quad \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{F}_{\text{celk}} \quad \text{nebo} \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}'_{\text{celk}},$$

v nichž, jak víme, $\mathbf{F}_{\text{celk}}$, popř. $\mathbf{F}'_{\text{celk}}$ znamenají celkovou sílu, která na těleso hmotnosti m

*) Zpravidla se při odvozování vychází z opačného případu, že oddělením se částice se hmotnost tělesa zmenšuje; pak ale hmotnost částice, která je vždy kladná, není totožná se změnou hmotnosti tělesa, protože tato změna, ačkoli je stejně velká, je záporná (nastává úbytek hmotnosti tělesa). Aby nevznikly obtíže se znaménky, je účelné v tomto případě odlišit navzájem obě hmotnosti tak, že hmotnost částice označíme např. dm' , přičemž změna hmotnosti tělesa $dm = -dm'$. Této komplikaci se vyhneme při postupu použitým v hlavním textu, aniž něco ubereme na obecnosti, spíše naopak, jak je zřejmé z dalšího rozboru získané pohybové rovnice.

působí. Tato síla se jenom u tělesa s proměnnou hmotností obecně skládá z vnější síly F , vyjadřující silové působení na vyšetřované těleso z *vnějšku*, tj. od těles, které k vyšetřované soustavě nepočítáme (např. gravitační působení Země nebo jiných nebeských těles, vyjádřené okamžitou tíhou mg tělesa, nebo odpor prostředí, v němž se těleso pohybuje apod.), a členů $w \frac{dm}{dt}$, popř. $c \frac{dm}{dt}$, které mají také rozměr síly a které vyjadřují silové působení na těleso *uvnitř* vyšetřované soustavy, tvořené tělesem a částicemi, jež se při pohybu k němu připojují nebo od něho oddělují. Vynásobíme-li rovnice 2.4 (22) a (23) dobou dt , vidíme ihned, že výrazy $w dm$ nebo $c dm$ znamenají hybnosti předané vyšetřovanému tělesu částicí, a to vztahujeme-li její pohyb buď k zvolené inerciální soustavě (např. k Zemi) rychlostí w , nebo vzhledem k vyšetřovanému tělesu relativní rychlostí c .

Z hlediska Newtonovy rovnice napsané v prvním tvaru 2.4 (24), v němž se počítá s proměnlivostí hmotnosti tělesa, redukuje se silové působení čistě na vnější silové působení F (např. na tíhu tělesa a odpor prostředí), je-li rychlost částic $w = 0$, protože částice nemají vzhledem k inerciální soustavě žádnou hybnost, což se vyskytuje u zmíněného klouzajícího řetězu nebo kapky padající ve vzduchu nasyceném vodní párou (při řešení pohybu musíme ovšem přihlížet k narůstání hmotnosti s časem). Avšak vzhledem k tělesu mají částice hybnost $c dm = -v dm$, ježž časová změna $-v \frac{dm}{dt}$ se projevuje v celkové síle F'_{celk} , formulujeme-li Newtonův zákon tak, že součin zrychlení tělesa a a jeho hmotnosti m (zde okamžité hmotnosti) je roven celkové působící síle F'_{celk} . Je-li naproti tomu $c = 0$ čili $w = v$, platí Newtonův pohybový zákon ve tvaru hmotnost krát zrychlení rovná se vnější působící síle, i když hmotnost tělesa je třeba proměnná.

Vyšetřme blíže jednoduchý a přitom velmi zajímavý případ, že nepůsobí vnější síla, tj. $F = 0$. Z rovnice 2.4 (23) je zřejmé, že na rozdíl od tělesa se stálou hmotností má těleso s proměnnou hmotností vzhledem k inerciální soustavě i bez vnější síly zrychlení

$$2.4 (25) \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{c}{m} \frac{dm}{dt},$$

je-li relativní rychlost $c \geq 0$, a to jen vlivem vnitřních sil v soustavě, tvořené tělesem a látkou, která se od něho odděluje nebo k němu připojuje. Velmi praktický význam tohoto poznatku je zjevný v *raketovém pohonu*, bez něhož bychom se nedostali nikdy dále, než kam sahá zemská atmosféra dostatečně velké hustoty.

Na obr. (2.4) 4 jsou naznačeny čtyři různé případy, při nichž mohou vzniknout zrychlené pohyby tělesa s proměnnou hmotností; pro jednoduchost předpokládáme, že všechny rychlosti jsou rovnoběžné, ačkoli je zřejmá i možnost měnit směr rychlosti v volbou vhodného směru relativní rychlosti c . Zrychlení je podle 2.4 (25) kladné, tj. rychlost v tělesa roste, když součin $c dm$ má směr rychlosti v , kterou považujeme za kladnou. To bude při přibývání hmotnosti tělesa ($dm > 0$), když rychlost $c > 0$, tj. má též směr jako rychlost v , nebo při ubývání hmotnosti tělesa ($dm < 0$), má-li rychlost c opačný směr než rychlost v , tj. $c < 0$. Naopak zrychlení bude záporné, rychlost tělesa se bude zmenšovat, když při přibývání hmotnosti ($dm > 0$) relativní rychlost $c < 0$ (tj. má opačný směr než rychlost v), nebo když při ubývání hmotnosti, $dm < 0$, částice opouštějí těleso relativní rychlostí $c > 0$, tedy téhož směru, jako má rychlost tělesa v .

V raketě jde vždy o ubývání její hmotnosti unikáním spalín ze spalovací komory rychlostí c , a to proti směru pohybu rakety při jejím urychlování, nebo ve směru pohybu při jejím brzdění. Podle 2.4 (25) je okamžité zrychlení rakety přímo úměrné výtokové rychlosti c plynů a časové změně hmotnosti rakety dm/dt , která je číselně rovna hmotnosti paliva, spálenému za jednotku času. Je-li toto množství stálé, pak zrychlení rakety roste, protože je nepřímo úměrné postupně se zmenšující hmotnosti m rakety, ovšem jen potud, pokud se pohonná látka nespoteřebuje.



Obr. (2.4) 4.
K pohybu tělesa
s proměnnou
hmotností

Pro přírůstek rychlosti rakety můžeme podle 2.4 (25) psát

$$d\mathbf{v} = \mathbf{c} \frac{dm}{m},$$

odkud integrací v mezích od hmotnosti m_0 , kterou má raketa při rychlosti $\mathbf{v}_0$, do její hmotnosti m ($m < m_0$) při rychlosti $\mathbf{v}$ dostáváme *základní rovnici rakety* (pro vzducho-prázdný prostor bez zřetele k tíži)

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{c} \ln \frac{m}{m_0} = -\mathbf{c} \ln \frac{m_0}{m},$$

kterou roku 1898 odvodil Konstantin Ciolkovskij, po němž je pojmenována. Ve shodě s tím, co jsme řekli ve spojení s obr. (2.4) 4, je $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 > 0$ (pohon), je-li $\mathbf{c} < 0$, a naopak $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 < 0$ (brzdění), je-li $\mathbf{c} > 0$, protože $\ln \frac{m_0}{m} > 0$. Je-li m_0 počáteční hmotnost rakety s palivem a m konečná hmotnost prázdné rakety (po spálení veškerého paliva), pak $m_0 - m$ je hmotnost paliva a poměr

$$\frac{m_0 - m}{m} = C$$

nazývá se *Ciolkovského číslo*. Raketa, jejíž pohyb začíná z klidu, může tedy dosáhnout ideální maximální rychlosti

$$v = c \ln(1 + C),$$

je-li c číselná hodnota výtokové rychlosti plynů. Je zřejmé, že je lépe, dosáhne-li se žádané max. rychlosti na konci spalovacího pochodu zvětšením relativní výtokové rychlosti c spalín než zvětšováním čísla C , tj. zvětšováním zásoby paliva v poměru k hmotnosti prázdné rakety.

2.5. Základy mechaniky tuhých těles

2.5.1. Poloha tuhého tělesa

Pevná tělesa blíží se svou povahou tuhé soustavě hmotných bodů, jejichž vzájemné vzdálenosti jsou neproměnné. U skutečných těles pevného skupenství nejsou však vzdálenosti částic, z nichž jsou složena, stálé. U tvrdých těles mění se sice jen nepatrně a je k tomu třeba značných sil, u těles poddajných nebo tvárných jsou však změny objemu a tvaru zřetelnější. Říkáme, že skutečná pevná tělesa jsou buď *pružná (elastická)*, nebo *plastická*.

Nicméně je pro mnohé úkoly velmi užitečné studium dynamiky tzv. *tuhých těles*, u nichž předpokládáme, že jejich částice tvoří absolutně tuhou soustavu s neproměnnými vzdálenostmi jednotlivých hmotných bodů.

Upevníme-li tuhé těleso tak, že jeden jeho bod, např. 1, nemůže v prostoru změnit svou polohu, mohou se ostatní body pohybovat po kulových plochách se středem v bodu 1 o poloměrech rovných jejich vzdálenostem od pevného bodu. Upevníme-li dva body tělesa, např. 1 a 2, mohou se ostatní body tělesa pohybovat po kružnicích, jejichž společnou osou je přímka, na níž leží body 1 a 2. Nemůže-li se kromě těchto dvou bodů pohybovat ještě další bod 3, který neleží na jejich spojnici, nemá těleso vůbec možnost se pohybovat, jeho poloha v prostoru (vzhledem k jiným tělesům) je jednoznačně určena. Z toho plyne, že *poloha tuhého tělesa v prostoru je úplně určena polohou tří z jeho bodů, které neleží v přímce*.

Poloha každého z těchto tří bodů je určena třemi souřadnicemi vzhledem k zvolené vztažné souřadnicové soustavě, takže pro polohy tří bodů tělesa máme celkem devět čísel. Všechny těchto devět čísel nemůžeme však libovolně volit, protože bychom tím mohli tři body tělesa umístit kamkoli do prostoru, což vzhledem k předpokládané tuhosti tělesa není možné. V jistých mezích lze volit nejvýše šest souřadnic a zbývající tři plynou ze vzdáleností vrcholu trojúhelníka vytvořeného zvolenými třemi body tělesa. Poloha tuhého tělesa je tedy jednoznačně určena šesti nezávislými parametry, a proto mu přisuzujeme *šest stupňů volnosti*. Říkáme tak počtu navzájem nezávislých veličin, které určují polohu útvaru vzhledem k zvolené soustavě souřadnic. Šest stupňů volnosti má ovšem jen tuhé těleso, jehož poloha není omezena žádnými podmínkami: pak můžeme za nezávislé parametry zvolit tři souřadnice jednoho bodu (např. hmotného středu), dvě souřadnice druhého bodu a jednu souřadnici třetího bodu.

Je-li těleso v jednom bodu upevněno, jsou souřadnice tohoto bodu pevně určené, takže ze šesti stupňů volnosti jsou tři už vyčerpány. Těleso upevněné v jednom bodě má proto už jen tři stupně volnosti, které přísluší např. dvěma souřadnicím druhého bodu a jedné souřadnici třetího bodu, který neleží na přímce určené prvním a druhým bodem.

Jsou-li posléze dva body tělesa pevné, zbývá jen jeden stupeň volnosti, tzn. že jen jednu souřadnici dalšího bodu, který neleží na přímce určené oběma pevnými body, lze v jistých mezích měnit. Těleso se může jen otáčet kolem osy určené pevnými body, a proto je v tomto případě výhodnější vyjádřit jednotlivé polohy tělesa úhlem otočení, měřeným ze zvolené základní polohy, který je vzhledem k předpokládané tuhosti tělesa všem jeho bodům společný. Jediný stupeň volnosti tělesa upevněného ve dvou bodech přísluší pak tomuto úhlu natočení.

2.5.2. Zjednodušení prostorové soustavy sil

Působí-li na těleso v téměř bodě dvě stejně velké protisměrné síly F a F' [obr. (2.5) 1], ruší se navzájem, jejich výslednice je nulová a na pohyb tělesa nemají vliv. Můžeme proto v kterémkoli bodě tělesa takové dvě síly připojit, aniž mají nějaký vliv na pohybový stav tělesa.

Podobně je tomu, působí-li obě síly F a F' nikoli sice v jediném bodě, avšak v téže přímce. Mohou způsobit pouze prodloužení (roztahení) nebo stlačení tělesa; pokládáme-li však těleso za dokonale tuhé, ruší se také účinek dvou stejně velkých sil opačného směru, působících v téže přímce.

Z toho plyne jednoduché pravidlo; že v tuhém tělese můžeme působíště dané síly F přenést do libovolného bodu B na téže přímce, neboť připojíme-li v bodě B dvě síly F' a F'' stejně velké jako F , avšak navzájem opačného směru, můžeme mít za to, že se ruší účinek F a F'' a zbývá síla F' , posunutá do bodu B .

Pokládáme proto sílu v tuhém tělese za vektor vázaný na přímku a můžeme ji ve směru této přímky libovolně posouvat.

Působí-li síla F v bodě A tuhého tělesa [obr. (2.5) 2], můžeme ji posunout do libovolného bodu tělesa O tak, že v tomto bodě připojíme dvě s ní rovnoběžné, stejně velké a protisměrné síly F' , F'' ($F'' = -F'$), které jsou v rovnováze. Vedle přenesené síly F' zbývají však ještě dvě stejně velké síly F a F'' , které jsou rovnoběžné a protisměrné a působí na těleso v různých působíštích. Neruší se navzájem, nýbrž tvoří nový elementární dynamický prvek, který nazýváme *dvojicí sil*.

Vypočteme její moment M vzhledem k libovolnému bodu O' , který je dán vektorovým součtem momentů obou sil k tomuto bodu. Protože $F'' = -F$, je podle obr. (2.5) 2

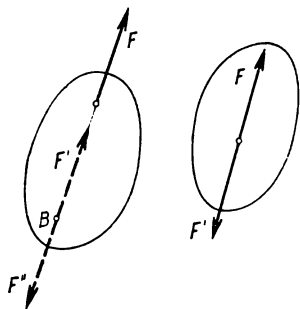
$$2.5 (1) \quad M = r_1 \times F + r_2 \times F'' = (r_1 - r_2) \times F = r \times F,$$

protože $r_1 - r_2 = r$ je vzdálenost působíšť obou sil dvojice, ať je vztažný bod O' kdekoli.

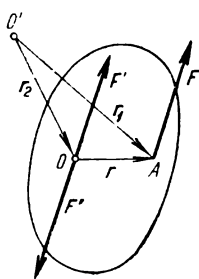
Moment dvojice sil tedy nezávisí na poloze vztažného bodu O' , který může být kdekoli v prostoru, tzn. že moment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ dvojici sil úplně charakterizuje a že to je *volný vektor*, který můžeme přenést do libovolného místa v tuhém tělese, zachováme-li jeho velikost a orientaci v prostoru. Podle pravidla pro vektorový součin je vektor dvojice sil [obr. (2.5) 3] kolmý k rovině, v níž leží obě síly dvojice, a míří ve směru, v němž postupuje pravotočivý šroub, zavrtáme-li ho do roviny dvojice sil a otáčíme-li jím tak, jak otáčí silová dvojice. Přitom průvodič $\mathbf{r}$ počítáme od síly $-\mathbf{F}$ k síle $+\mathbf{F}$. Kolmá vzdálenost obou sil nazývá se *rameno dvojice sil*.

Silová dvojice vznikající rovnoběžným posunutím síly v tuhém tělese se jmenuje *doplňková dvojice sil*. V dokonale tuhém tělese můžeme tedy každou sílu posunout do libovolného bodu O , připojíme-li doplňkovou dvojici sil, jejíž moment je co do směru i velikosti roven momentu původní síly vzhledem k novému působišti O . Vektor doplňkové dvojice sil je kolmý na rovinu určenou oběma polohami síly.

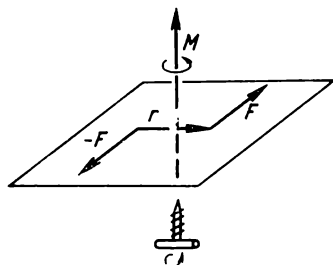
Působí-li na těleso soustava sil $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ v různých působištech, jejichž poloha je vzhledem k libovolnému bodu tělesa O dána průvodiči $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$, můžeme podle předchozího výkladu každou sílu $\mathbf{F}_i$ nahradit silou $\mathbf{F}'_i$, posunutou do bodu O , a doplňkovou silovou dvojici $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ sil $\mathbf{F}_i$ a $\mathbf{F}'_i$. Přenesené síly působí v témže bodě O , můžeme je



Obr. (2.5) 1. Přenesení síly v jejím paprsku



Obr. (2.5) 2. Rovnoběžné posunutí síly $\mathbf{F}$ do bodu ležícího mimo její paprsek



Obr. (2.5) 3. Vektor dvojice sil

tedy složit ve výslednici $\mathbf{R}$, kterou dostaneme jejich vektorovým součtem: $\mathbf{R} = \sum_1^n \mathbf{F}_i$. Tato výslednice působí také v bodě O . Rovněž doplňkové silové dvojice $\mathbf{M}_i$ sečteme vektorově ve výslednou dvojici sil $\mathbf{M} = \sum_1^n \mathbf{M}_i = \sum_1^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$.

Nahradili jsme tak v prostoru soustavu sil jedinou výslednicí $\mathbf{R}$ a jedinou doplňkovou silovou dvojicí $\mathbf{M}$, kterou jako volný vektor můžeme přenést do bodu O . V tomto obecném případě není ovšem vektor výsledné doplňkové dvojice sil kolmý na výslednici $\mathbf{R}$ jako při posunutí jediné síly. Obecně je směr výslednice $\mathbf{R}$ jiný než směr výsledné doplňkové dvojice sil $\mathbf{M}$.

Je možné ještě další zjednodušení, při němž výslednice prostorové soustavy sil i výsledná doplňková dvojice sil mají stejný směr. Paprsek výslednice při tomto maximálním zjednodušení obecně prostorové soustavy sil se pak jmenuje *centrální osa*.

2.5.3. Pohyb tuhého tělesa

Obecný pohyb tuhého tělesa je jednoznačně určen pohybem tří jeho bodů, které neleží v. jedné přímce. Lze jej nahradit dvěma základními druhy pohybů: *posuvným pohybem* a *otáčivým pohybem*.

1. *Posuvný (translační) pohyb*. Každá přímka nebo rovina v tělese zůstává stále rovnoběžná s původní polohou [obr. (2.5) 4]. Všechny body tělesa opisují stejné dráhy a mají v téže době stejné rychlosti a stejná zrychlení co do směru i velikosti. Pohyb tělesa je popsán pohybem jediného bodu, k němuž nejčastěji volíme hmotný střed (těžiště) tělesa.

2. *Otáčivý pohyb (rotace) kolem pevné osy*. Dva body na jedné přímce a tím všechny body na této přímce jsou v klidu [obr. (2.5) 5]. Tuto přímku nazýváme *osou rotace*. Má-li osa rotace stálý směr, opisují všechny body tělesa kruhové oblouky, jejichž středy leží na ose rotace. Každý bod tělesa koná kruhový pohyb, který je úplně popsán, víme-li, jak se středový úhel φ , měřený od jisté základní polohy, mění s časem, známe-li tedy funkci

$$\varphi = f(t).$$

Všechny body tělesa pak mají v každém okamžiku stejnou úhlovou rychlost

$$2.5 (2) \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

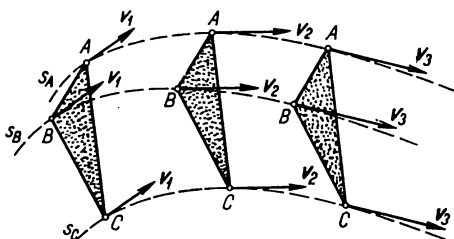
a stejné úhlové zrychlení

$$2.5 (3) \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

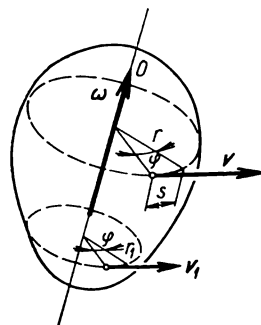
Pro každý bod rotujícího tělesa platí vše, co bylo řečeno o kruhovém pohybu hmotného bodu v čl. 2.1.3.

3. *Otáčení kolem okamžité osy*. Mění-li osa rotace v prostoru svou polohu, je velikost úhlové rychlosti opět dána vztahem 2.5 (2). Vektorem úhlové rychlosti však můžeme také udat směr osy rotace v prostoru. Obvodová rychlost bodu tělesa je pak co do směru i velikosti dána výrazem

$$2.5 (4) \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$



Obr. (2.5) 4. Posuvný pohyb



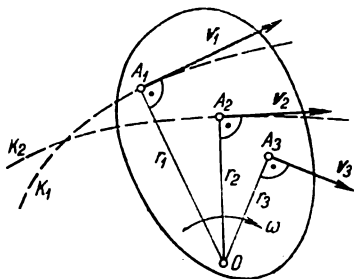
Obr. (2.5) 5. Otáčivý pohyb

kde $\mathbf{r}$ je průvodič, spojující bod s libovolným bodem na ose rotace. Vektor úhlové rychlosti je podobné povahy jako vektor síly v tuhém tělese. Je to vektor vázaný na přímku a pro skládání a rozkládání i posouvání úhlových rychlostí platí stejná pravidla jako pro síly. Silám se společným působištěm odpovídá rotace kolem os, které se protínají v jednom bodě, silové dvojici odpovídá dvojice úhlových rychlostí, což jsou dvě současné stejně velké rotace opačného smyslu kolem rovnoběžných os. Jsou rovnocenné s posuvným pohybem. Rychlost posuvného pohybu pak stojí kolmo k rovině úhlových rychlostí. Její směr se určí podle pravidla pro vektorový součin.

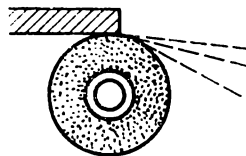
Každý elementární pohyb tělesa v prostoru lze rozložit na elementární otočení kolem okamžité osy a elementární posuv ve směru této osy. Takový pohyb koná šroub v matici, a proto nazýváme obecný pohyb tuhého tělesa pohybem šroubovým. Při obecném pohybu

změní za určitou dobu okamžitá osa rotace svou polohu v prostoru a nová poloha bude s předchozí polohou obecně mimoběžná.

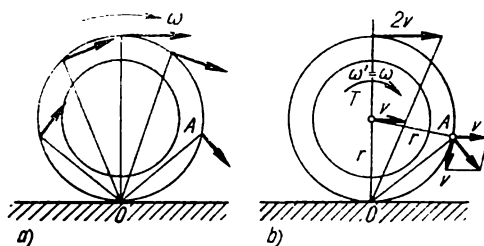
4. *Rovinný pohyb* tělesa vzniká, pohybují-li se všechny body tělesa v rovnoběžných rovinách. Příkladem je rotace tělesa kolem pevné osy. Elementární rovinný pohyb si můžeme představit jako elementární otočení kolem jistého bodu, zvaného *okamžitý střed otáčení* nebo *pól*. Elementární dráhu každého bodu nahrazujeme kruhovým obloučkem, jehož střed leží v okamžitém středu otáčení. Okamžité osy otáčení jsou navzájem rovnoběžné a kolmé k rovnoběžným rovinám, v nichž se děje pohyb bodů tělesa.



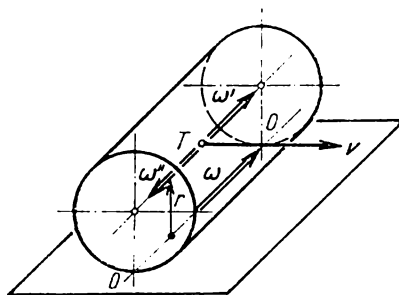
Obr. (2.5) 6. Rovinný pohyb



Obr. (2.5) 7. Otáčení kolem pevné osy



Obr. (2.5) 8. Otáčení kolem okamžité osy rotace



Obr. (2.5) 9. Valení válce

Těleso na obr. (2.5) 6 pohybuje se tak, že dva jeho body A_1 a A_2 se posouvají po křivkách K_1 a K_2 . Ve zvoleném okamžiku má bod A_1 rychlost v_1 a bod A_2 rychlost v_2 . Tyto rychlosti a rychlosti libovolných dvou bodů v tělese vůbec jsou ovšem vázány podmínkou, že jejich pravoúhlé průměty do spojnice obou bodů jsou stejné, protože vzhledem k tuhosti tělesa se body na své spojnici vůči sobě nemohou pohybovat (tzv. *podmínka tuhosti tělesa*). Tím se tuhé těleso liší od pružného pevného tělesa, kapalin a plynů. Normály k okamžitým rychlostem protínají se v bodě O , který je okamžitým středem otáčení, jímž prochází okamžitá osa rotace. Úhlová rychlost otáčivého pohybu, jímž nahrazujeme v tomto okamžiku pohyb tělesa, je $\omega = v_1/r_1 = v_2/r_2$. Okamžitá rychlost libovolného třetího bodu A_3 tělesa pak je $v_3 = \omega r_3$, kde r_3 je vzdálenost bodu A_3 od okamžité osy rotace.

Valení válce po rovině, při němž jednotlivé body válce opisují dráhy ležící v rovnoběžných rovinách kolmých k rovině valení, je rovněž rotace okolo okamžitých os O , jimiž jsou povrchové přímky, v nichž se válec postupně dotýká roviny; svědčí o tom velmi běžný jev — odstřikování bláta od kola jedoucího vozidla. Bláto neodstřikuje všeobecně ve směru tečném k otáčejícímu se kolu, jako např. jiskry od rotujícího brusného kotouče, jehož osa je v klidu [obr. (2.5) 7], ale ve směrech a rychlostmi znázorněnými na obr. (2.5) 8a.

Představíme-li si v ose souměrnosti válce, na níž leží jeho těžiště T , dvě navzájem protisměrné rotace stejně velkými úhlovými rychlostmi $\omega' = -\omega'$, které se navzájem v tuhém

tělese ruší, a neprojevují se proto při pohybu válce [obr. (2.5) 9], pak jsou-li tyto úhlové rychlosti stejně velké jako úhlová rychlost ω rotace kolem okamžité osy otáčení $\overline{OO}$, tvoří úhlové rychlosti ω a ω' dvojici, jejíž moment $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ je roven posuvné rychlosti těžiště (válce), jak jsme uvedli v textu pod vzorcem 2.5 (4). Zbývá pak ještě úhlová rychlost ω' a pohyb válce můžeme nyní chápat jako rotaci kolem těžištní osy touto úhlovou rychlostí $\omega' = \omega$, s níž se skládá posuvný pohyb válce (těžiště) rychlostí $\mathbf{v}$. Z tohoto hlediska je tedy výsledná rychlost každého bodu válce, např. bodu A na obr. (2.5) 8a, složena z obvodové rychlosti rotačního pohybu kolem těžištní osy a rychlosti posuvného pohybu těžiště, jak je pro bod A na obvodu válce znázorněno na obr. b. Na obvodu válce jsou ovšem obě složky výsledné rychlosti stejně velké a rovný $v = r\omega$.

Popisu pohybu pomocí okamžitých os otáčení se s výhodou užívá k řešení úloh z kinematiky, v níž se studují rychlosti a zrychlení částí mechanismů bez zřetele na síly, které způsobují vyšetřovaný pohyb.

Při dynamickém vyšetřování pohybů, kdy studujeme vliv působících sil, rozkládá se pohyb tělesa na posuvný pohyb okamžitou rychlostí těžiště a na otáčení kolem osy jdoucí těžištěm okamžitou úhlovou rychlostí. Proč k tomu ze všech bodů tělesa volíme právě těžiště, plyne z obou impulsových vět, z nichž první říká:

Těžiště tělesa (soustavy) pohybuje se jako hmotný bod, na který působí výslednice všech vnějších sil, jimž je těleso vystaveno a jehož hmotnost je rovna hmotnosti tělesa. Tato výslednice způsobuje tedy posuvný pohyb tělesa.

Druhá impulsová věta pak říká, že časová změna točivosti vzhledem k těžišti je rovna výslednému vnějšímu momentu vzhledem k tomuto bodu. Tato točivost je dána rotací tělesa okamžitou úhlovou rychlostí kolem osy jdoucí těžištěm a nezávisí na pohybu těžiště.

2.5.4. Pohybová energie tuhého tělesa

Představíme-li si těleso jako soustavu n hmotných bodů, vypočteme jeho úhrnnou energii jako součet kinetických energií všech hmotných bodů. Při obecném pohybu jsou rychlosti jednotlivých hmotných bodů různé. Celková pohybová energie je pak

$$2.5 (5) \quad W_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2,$$

kde m_i je hmotnost i -tého bodu a v_i jeho rychlost.

a) *Těleso koná pouze posuvný pohyb.* V tomto případě je rychlost všech bodů (a tedy i těžiště) stejná a rovna v . Dosadíme-li $v_i = v$ do 2.5 (5), bude

$$2.5 (6) \quad W_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2} m v^2,$$

kde $\sum_{i=1}^n m_i = m$ je celková hmotnost tělesa.

Kinetická energie tuhého tělesa při posuvném (translačním) pohybu je rovna kinetické energii těžiště s hmotností rovnou celkové hmotnosti tělesa.

b) *Těleso se otáčí kolem pevné osy.* Otáčí-li se těleso kolem osy O [obr. (2.5) 10] okamžitou úhlovou rychlostí ω , mají hmotné body vzdálené r_i od osy O rychlosti $v_i = r_i \omega$. Dosadíme-li za tyto obvodové rychlosti do 2.5 (5), pak celková pohybová energie rotujícího tělesa

$$2.5 (7) \quad W_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

protože ω je pro všechny body tělesa stejný.

Součtu

$$2.5 (8) \quad \sum_1^n m_i r_i^2 = J$$

říkáme *moment setrvačnosti* tělesa vzhledem k ose rotace.

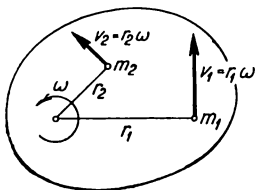
Kinetická energie tělesa rotujícího kolem pevné osy je rovna polovičnímu součinu jeho momentu setrvačnosti vzhledem k této ose a čtverce úhlové rychlosti:

$$2.5 (9) \quad W_k = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

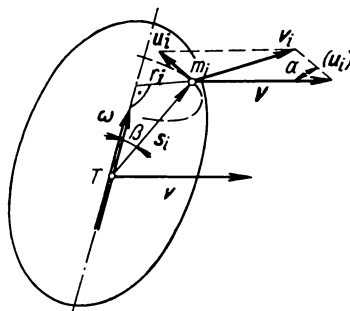
Vidíme analogii s kinetickou energií $W_k = \frac{1}{2} m v^2$ posuvného pohybu. Hmotnost tělesa zde nahrazuje moment setrvačnosti J , který přihlíží k rozložení hmotnosti v tělese, a posuvnou rychlost nahrazuje rychlost úhlová.

c) *Pohybová energie při obecném pohybu.* Podle čl. 2.5.3 nahrazujeme obecný pohyb tělesa v každém okamžiku posuvným pohybem rychlostí v a rotací úhlovou rychlostí ω kolem osy procházející těžištěm. Pohybová energie tělesa je pak dána součtem energie posuvného pohybu a energie otáčivého pohybu kolem osy jdoucí těžištěm

$$2.5 (10) \quad W_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2,$$



Obr. (2.5) 10. K pohybové energii při rotaci kolem pevné osy



Obr. (2.5) 11. K pohybové energii při obecném pohybu

kde m je hmotnost tělesa a J_0 moment setrvačnosti kolem osy jdoucí těžištěm, kolem níž se pohyb v daném okamžiku děje.

Důkaz provedeme takto: Rychlost v_i libovolného hmotného bodu s hmotností m_i je dána posuvnou rychlostí v , která je pro všechny body stejná, a obvodovou rychlostí u_i , určenou vektorovým součinem 2.5 (4). Výsledná rychlost i -tého bodu je rovna vektorovému součtu obou rychlostí; označíme-li s_i průvodič bodu vzhledem k těžišti, pak

$$v_i = v + u_i = v + \omega \times s_i.$$

Velikost této rychlosti i -tého bodu, kterou potřebujeme k výpočtu jeho kinetické energie, můžeme podle obr. (2.5) 11 vyjádřit kosinovou větou $v_i^2 = v^2 + u_i^2 - 2u_i v \cos \alpha$. Vzpomeneme-li na skalární součin dvou vektorů, můžeme psát $-2u_i v \cos \alpha = 2u_i v$, takže

$$v_i^2 = v^2 + u_i^2 + 2u_i v.$$

Celková pohybová energie tělesa je pak

$$2.5 (11) \quad W_k = \sum_1^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_1^n \frac{1}{2} m_i v^2 + \sum_1^n \frac{1}{2} m_i u_i^2 + \sum_1^n m_i u_i v.$$

První člen na pravé straně této rovnice je pohybová energie tělesa konajícího posuvný pohyb, neboť rychlost v je všem bodům společná a $\sum_1^n m_i$ je celková hmotnost tělesa, takže

$$2.5 (12) \quad \sum_1^n \frac{1}{2} m_i v^2 = \frac{1}{2} m v^2.$$

V druhém členu můžeme obvodovou rychlost položit $u_i = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i| = \omega s_i \sin \beta = \omega r_i$, kde r_i je vzdálenost i -tého hmotného bodu od osy rotace, takže

$$2.5 (13) \quad \sum_1^n \frac{1}{2} m_i u_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_1^n m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J_0 \omega^2,$$

kde J_0 je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose rotace, jdoucí těžištěm. Druhý člen udává pohybovou energii tělesa při rotaci rychlostí ω kolem osy jdoucí těžištěm.

Třetí člen můžeme upravit, dosadíme-li podle 2.5 (4) a použijeme-li platnosti distributivního zákona pro skalární a vektorový součin:

$$\sum_1^n m_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v} = \sum_1^n m_i \mathbf{v} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i) = \mathbf{v} \sum_1^n (\boldsymbol{\omega} \times m_i \mathbf{s}_i) = \mathbf{v} \left(\boldsymbol{\omega} \times \sum_1^n m_i \mathbf{s}_i \right).$$

Zde $\mathbf{s}_i$ jsou průvodiče spojující jednotlivé body tělesa s těžištěm, takže podle 2.4 (7) $\sum_1^n m_i \mathbf{s}_i = 0$.

Proto třetí člen na pravé straně rovnice 2.5 (11) je roven nule. Z toho plyne již rovnice 2.5 (10).

2.5.5. Moment setrvačnosti

Momentem setrvačnosti tělesa vzhledem k ose rotace nazvali jsme výraz 2.5 (8). Předpokládáme-li, že rozložení látky v tělese je spojitě, pak

$$2.5 (14) \quad J = \int_m r^2 dm,$$

je-li r vzdálenost elementu hmotnosti dm od osy rotace.

Je-li ρ hustota tělesa, lze moment setrvačnosti také psát

$$2.5 (15) \quad J = \int_V r^2 \rho dV,$$

kde dV je objemový element tělesa. Integrály v obou případech vztahují se na celé těleso, což je označeno písmeny m a V . Je-li těleso homogenní ($\rho = \text{const}$) a nazveme-li integrál

$J_V = \int_V r^2 dV$ *objemovým momentem setrvačnosti*, můžeme místo 2.5 (15) psát

$$2.5 (16) \quad J = \rho \int_V r^2 dV = \rho J_V.$$

Moment setrvačnosti můžeme také vyjádřit jako součin celkové hmotnosti tělesa a čtverce jisté střední vzdálenosti R , v níž by musela být soustředěna hmotnost tělesa, aby moment setrvačnosti byl roven momentu celého tělesa:

$$2.5 (17) \quad J = mR^2, \quad R = \sqrt{\frac{J}{m}}.$$

Vzdálenost R se nazývá *poloměr setrvačnosti (gyrační poloměr)* tělesa pro danou osu.

Moment setrvačnosti a také poloměr setrvačnosti závisí na poloze rotační osy vzhledem k tělesu a na rozložení hmotnosti v tělese. Čím větší jsou vzdálenosti r elementů s hmotností dm od osy rotace, tj. čím dále od osy rotace je hmotnost v tělese rozložena, tím větší je

moment setrvačnosti. Pro všechny rovnoběžné osy je nejmenší moment setrvačnosti k ose, která prochází těžištěm tělesa. Moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí bodem A rovnoběžně s těžištní osou T [na obr. (2.5) 12 jsou tyto osy kolmé k nákresně] je

$$J = \int r'^2 dm = \int [(a+x)^2 + y^2] dm = \int (a^2 + 2ax + r^2) dm,$$

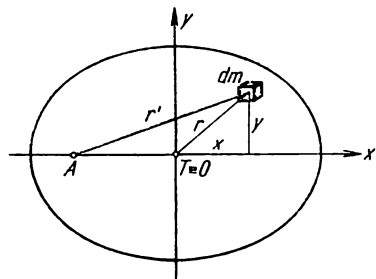
neboť $x^2 + y^2 = r^2$. Protože jsme počátek soustavy souřadnic OXY zvolili v těžišti, je podle 2.4 (20) $x_0 m = \int x dm = 0$, takže dostáváme

$$2.5 (18) \quad J = a^2 \int dm + \int r^2 dm \quad \text{čili}$$

$$J = ma^2 + J_0,$$

nebo vzhledem k 2.5 (17)

$$2.5 (19) \quad R^2 = a^2 + R_0^2.$$



Obr. (2.5) 12. K odvození Steinerovy věty ($AT = a$)

Zde a je vzdálenost obou os a J_0 a R_0 jsou moment a poloměr setrvačnosti k těžištní ose. Docházíme tak k výsledku, že moment setrvačnosti tělesa J k libovolné ose je roven momentu setrvačnosti hmotného bodu v těžišti, jehož hmotnost m je rovna hmotnosti tělesa, zvětšenému o moment setrvačnosti J_0 tělesa vzhledem k rovnoběžné těžištní jdoucí ose. To je Steinerova věta, která umožňuje vypočítat momenty setrvačnosti k libovolným osám, známe-li momenty setrvačnosti kolem os procházejících těžištěm. Zároveň z ní plyne, že vždy je $J > J_0$, jak jsme již dříve uvedli.

2.5.6. Pohybová rovnice pro pohyb tělesa kolem pevné osy

Podle 2.5 (9) má těleso otáčející se kolem pevné osy úhlovou rychlostí ω kinetickou energii

$W_k = \frac{1}{2} J \omega^2$. Kdyby nepůsobily žádné vnější síly, bude energie W_k stálá a otáčení bude rovnoměrné stálou úhlovou rychlostí ω . Aby nastala změna úhlové rychlosti a tím kinetické energie, je třeba vnějších sil, jejichž práce se podobně jako při posuvném pohybu v čl. 2.2.6 bude rovnat změně pohybové energie. Z této podmínky můžeme odvodit pohybový zákon pro otáčení tělesa kolem pevné osy.

Jak jsme vyložili v čl. 2.5.2, můžeme všechny síly působící na dokonale tuhé těleso rovnoběžně posunout do libovolného bodu tělesa, připojíme-li příslušné doplňkové silové dvojice. Provedme to v duchu pro bod O , který leží na dokonale tuhé ose rotace. Vnější síly posunuté do tohoto bodu dají výslednici $\mathbf{R}$, která protíná osu rotace, a proto nekoná práci, neboť její působíště je na pevné ose v klidu [obr. (2.5) 13a]. Všechny doplňkové dvojice sil dají výslednou dvojici o momentu $\mathbf{M}_1$, který nemá obecně směr osy rotace. Můžeme jej však rozložit na složku $\mathbf{M}'$ kolmou k ose rotace a na složku $\mathbf{M}$ ve směru osy rotace. Je zřejmé, že složka $\mathbf{M}'$ rovněž nekoná práci, neboť se snaží otáčet tělesem kolem osy kolmé k ose rotace, čemuž brání pevné uložení osy. Zbývá tedy jen složka $\mathbf{M}$, která otáčí tělesem kolem dané osy rotace, a proto jediná může konat práci. Tuto silovou dvojici o momentu velikosti M si můžeme znázornit dvojicí sil $\mathbf{F}$ a $\mathbf{F}'$ v rovině kolmé k ose rotace s ramenem r (obr. b) tak, že položíme

$$M = rF,$$

přičemž paprsek síly $\mathbf{F}'$ protíná osu, a proto tato síla podobně jako prve výslednice $\mathbf{R}$ práci nekoná.

Posune-li se působíště síly F o ds , vykoná síla elementární práci

$$2.5 (20) \quad dA = F ds = Fr d\varphi = M d\varphi,$$

neboť vzhledem k malému posunutí můžeme položit $ds = r d\varphi$. Touto elementární prací změní se pohybová energie W_k tělesa o dW_k . Pohybová energie závisí u tělesa při nehybné poloze osy rotace jen na úhlové rychlosti, takže vzhledem k 2.5 (9) $dW_k/d\omega = J\omega$ a

$$2.5 (21) \quad dW_k = J\omega d\omega.$$

Podle principu energie musí se výrazy 2.5 (20) a (21) sobě rovnat:

$$J\omega d\omega = M d\varphi.$$

Dělíme-li tuto rovnici časem dt , v němž nastává elementární pootočení $d\varphi$ tělesa, dostaneme

$$J\omega \frac{d\omega}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt}.$$

Podíl $d\varphi/dt$ je roven okamžité úhlové rychlosti ω otáčení tělesa a podíl $d\omega/dt$ je roven úhlovému zrychlení ε , takže

$$2.5 (22)$$

$$J\varepsilon = M.$$

To je *pohybový zákon pro otáčení tělesa kolem pevné osy*. Říká, že součin z momentu setrvačnosti tělesa k ose rotace a z úhlového zrychlení je roven momentu všech vnějších sil vzhledem k pevné ose rotace. Pozorujeme analogii s pohybovou rovnicí pro posuvný pohyb $ma = F$. Hmotnost tělesa zastupuje tu jeho moment setrvačnosti, který přihlíží k rozložení hmotnosti kolem osy rotace; zrychlení je tu vyjádřeno úhlovým zrychlením a síla momentem, neboť jde o otáčivý pohyb. Rovnice 2.5 (22) platí ovšem jen pro rotaci kolem pevné osy.

Nepůsobí-li žádné vnější síly, je zřejmé, že $M = 0$ a pak také $\varepsilon = 0$; těleso se otáčí rovnoměrně stálou úhlovou rychlostí ω . Jestliže $M = \text{const}$, je také $\varepsilon = \text{const}$ a těleso se otáčí rovnoměrně zrychleně, takže pohyb je popsán rovnicí

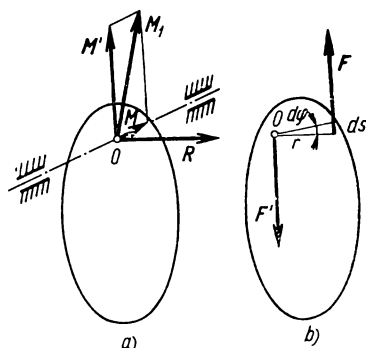
$$\omega = \omega_0 + \frac{M}{J} t$$

a při pohybu z klidu rovnicí

$$\omega = \frac{M}{J} t.$$

Při rotaci kolem pevné osy má vektor ω úhlové rychlosti v prostoru stálý směr a z působícího momentu se může uplatnit také jen složka M , která má touž orientaci jako osa rotace. Protože moment setrvačnosti J vzhledem k pevné ose v tělese je stálá veličina, můžeme pohybovou rovnici 2.5 (22) psát ve vektorovém tvaru

$$2.5 (23) \quad J\varepsilon = J \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} (J\omega) = \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{M}.$$



Obr. (2.5) 13. K odvození pohybové rovnice pro otáčivý pohyb

Tato rovnice není nic jiného než druhá impulsová věta 2.4 (11) aplikovaná na rotaci tělesa kolem pevné osy. Příslušná točivost b je v tomto případě určena součinem

2.5 (24)

$$b = J\omega$$

a je vektorem, který leží v ose rotace.

2.5.7. Kyvadlo

Fyzické kyvadlo je každé těleso otočné bez tření kolem vodorovné osy neprocházející těžištěm. Těleso je ve stálé rovnováze, je-li těžiště v nejnižší poloze, tj. leží-li na svislici protínající osu. Je-li φ okamžitá úhlová výchylka těžiště z rovnovážné polohy, mg tíha kyvadla, kterou si myslíme soustředěnu v těžišti, a a vzdálenost těžiště od osy, působí na kyvadlo moment [obr. (2.5) 14].

2.5 (25)

$$M = -mga \sin \varphi.$$

Moment tu působí proti výchylce a snaží se přivést kyvadlo zpět do rovnovážné polohy (proto jej označujeme záporným znaménkem). Kyvadlo koná rotační pohyb kolem pevné osy, takže platí pohybová rovnice

2.5 (26)

$$M = J\varepsilon = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga \sin \varphi,$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa k ose O . Největší možný moment $K = mga$ nazýváme *direkčním momentem*, analogicky s direkční silou při kmitavém pohybu harmonickém.

Po úpravě dostaneme

2.5 (27)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mga}{J} \sin \varphi = 0.$$

Pro malé výchylky z rovnovážné polohy můžeme přibližně položit $\sin \varphi \approx \varphi$, a píšeme-li

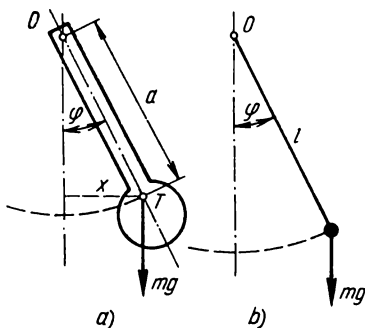
2.5 (28)

$$\frac{mga}{J} = \omega^2, \quad \text{kde } \omega = \text{const},$$

dostáváme rovnici

2.5 (29)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0,$$



Obr. (2.5) 14. Kyvadlo:

a — fyzické, b — matematické

kteřá je totožná s diferenciální rovnicí harmonického pohybu 2.2 (14), v níž ω^2 je čtverec úhlové frekvence.

Při velmi malých výchylkách kyvadla z rovnovážné polohy přejde tedy pohybová rovnice 2.5 (27) v diferenciální rovnici harmonického pohybu. Označíme-li T_0 dobu kmitu (periodu) při nahrazení kmitavého pohybu kyvadla pohybem harmonickým, pak podle 2.1 (33)

2.5 (30)

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{ga}},$$

kde R je poloměr setrvačnosti tělesa k ose kyvu. Při velmi malých výchylkách kyvadla z rovnovážné polohy nezávisí doba kmitu na *výkyvu* φ_m (tj. na maximální výchylce z rovnovážné polohy).

Dobou kyvu (půlkmitu) nazýváme polovinu doby kmitu

$$2.5 (31) \quad \tau_0 = \frac{T_0}{2} = \pi \sqrt{\frac{J}{mga}} = \pi \sqrt{\frac{R}{ga}}.$$

Je to doba, kterou potřebuje těleso k pohybu z rovnovážné polohy do krajní výchylky a zpět do rovnovážné polohy, nebo doba z jedné krajní výchylky do druhé krajní výchylky na opačné straně, kdežto doba kmitu je doba potřebná k proběhnutí celého kmitu.

Chyba vzniklá nahrazením skutečného pohybu kyvadla pohybem harmonickým činí při $\varphi_m = 1^\circ$ asi 0,002 %, při $\varphi_m = 5^\circ$ asi 0,05 %.

Při větších výkyvech musíme již dbát toho, že pohyb kyvadla není přesně harmonický, a dobu kyvu je třeba počítat z rovnice, která plyne z řešení diferenciální rovnice 2.5 (27). Pro dobu kyvu vychází

$$2.5 (32) \quad \tau = \tau_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_m}{2} + \dots \right].$$

Chceme-li měřit dobu kyvu kyvadla (např. při určování momentu setrvačnosti), potřebujeme dát kyvadlu takovou počáteční výchylku, abychom mohli pozorovat větší počet kyvů. Potřebujeme však vědět, jakou dobu kyvu by mělo kyvadlo, kdyby kývalo harmonicky. Nedbáme-li třetího členu nekonečné řady 2.5 (32) ani všech dalších, dostaneme pro dobu kyvu

$$2.5 (33) \quad \tau_0 \approx \tau \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} \right) = \tau - \frac{1}{4} k \tau.$$

Změříme tedy dobu kyvu τ kyvadla při větším výkyvu a redukujeme ji na „nulový výkyv“ (tj. na dobu kyvu, jakou by mělo těleso, kdyby kývalo přesně harmonicky) pomocí rovnice

2.5 (33). Součinitel $k = \frac{1}{4} \sin^2 (\varphi_m/2)$ bývá pro různé výkyvy φ_m sestaven v tabulce.

Matematickým kyvadlem nazýváme hmotný bod hmotnosti m zavěšený na tuhém vlákně délky l , jehož hmotnost je zanedbatelná. Moment setrvačnosti je tu dán součinem z hmotnosti bodu a čtverce jeho vzdálenosti od osy, kolem které kývá: $J = ml^2$.

Doba kyvu matematického kyvadla je pak podle 2.5 (31), dosadíme-li za $a = l$,

$$2.5 (34) \quad \tau_0 = \pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Délka l matematického kyvadla, které kývá stejně jako fyzické kyvadlo, nazývá se *redukováná délka fyzického kyvadla*. Mají-li být doby kyvu stejné, pak podle 2.5 (31) a (34)

$$2.5 (35) \quad \tau_0 = \pi \sqrt{\frac{J}{mga}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

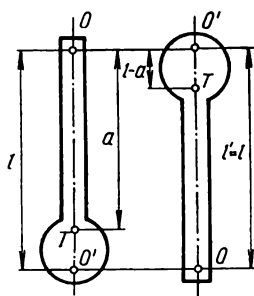
čili redukováná délka

$$2.5 (36) \quad l = \frac{J}{ma} = \frac{R^2}{a}.$$

Naneseme-li na přímku kolmou k ose O a jdoucí těžištěm tělesa od O redukovanou délku fyzického kyvadla, dostaneme bod O' [obr. (2.5) 15], zvaný *střed kyvu*. Tento bod má tu vlastnost, že těleso zavěšené na ose jdoucí bodem O' má stejnou dobu kyvu, jako když kývá kolem rovnoběžné osy jdoucí bodem O .

Důkaz je snadný. Je-li R_0 poloměr setrvačnosti tělesa vzhledem k ose jdoucí těžištěm T a R poloměr setrvačnosti k rovnoběžné ose kyvu O , pak redukováná délka podle 2.5 (19) a 2.5 (36) je

$$2.5 (37) \quad l = \frac{R^2}{a} = \frac{R_0^2}{a} + a \quad \text{čili} \quad \frac{R_0^2}{l - a} = a.$$



Obr. (2.5) 15. Reverzní kyvadlo

Kývá-li těleso kolem rovnoběžné osy jdoucí středem kyvu O' , má podle 2.5 (19) poloměr setrvačnosti $R'^2 = R_0^2 + (l - a)^2$, kde $l - a$ je nyní podle obr. (2.5) 15 vzdálenost osy O' od těžiště T , takže jeho redukovaná délka podle 2.5 (36), dosadíme-li zároveň ze 2.5 (37), je

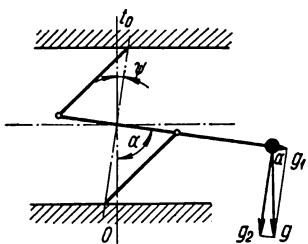
$$l' = \frac{R'^2}{l - a} = \frac{R_0^2}{l - a} + (l - a) = a + (l - a) = l.$$

Redukovaná délka je tedy stejná jako pro původní osu O , a proto kýve kyvadlo kolem rovnoběžné osy O' , jdoucí středem kyvu, se stejnou dobou kyvu jako kolem osy O . Doba kyvu kyvadla je stejná také pro osu, jež je s původní osou souměrná k těžišti, protože doba kyvu pro každé dvě osy souměrné k těžišti je stejná, jak plyne ze vzorce 2.5 (31). Vzdálenost této osy od osy kyvu, která se rovná $2a$, není ovšem redukovanou délkou, ledaže vzdálenost a je právě rovna poloměru setrvačnosti R_0 kyvadla vzhledem k těžištní ose, tedy $a = R_0$. Potom podle 2.5 (37) je skutečně redukovaná délka $l = 2a$ a obě sdružené osy se stejnou dobou kyvu jsou souměrné vzhledem k těžišti. Tento zvláštní případ vyznačuje se tím, že příslušná doba kyvu τ kyvadla

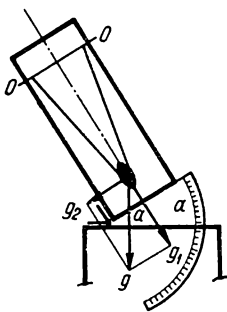
kolem obou os je minimální. Minimum funkce $\tau = f(a) = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{1}{g} \left(\frac{R_0^2}{a} + a \right)}$ dostaneme,

položíme-li $\frac{d}{da} \left(\frac{R_0^2}{a} + a \right) = 0$, odkud $a = R_0$. Minimální doba kyvu fyzického kyvadla je tedy určena vztahem

$$\tau_{\min} = \pi \sqrt{\frac{2R_0}{g}}.$$



Obr. (2.5) 16. Zöllnerovo kyvadlo



Obr. (2.5) 17. Machovo kyvadlo

Opatříme-li kyvadlo druhým břitem, vzdáleným od prvního břitu o redukovanou délku l , dostaneme *reverzní (převrtné) kyvadlo*, jehož doba kyvu kolem obou os je pro malé výchylky z rovnovážné polohy určena druhým vztahem 2.5 (35). Reverzní kyvadlo slouží k přesnému zjištění tíhového zrychlení na základě měření jeho doby kyvu.

Pro některé účely, např. při zjišťování směru tíhového zrychlení, zemětřesení apod., je třeba kyvadla s dlouhou dobou kyvu τ . K n -krát delší době kyvu je však podle 2.5 (35) nutno prodloužit délku kyvadla n^2 -krát, takže kyvadlo má pak již nevhodné rozměry. Dobu kyvu lze pohodlněji prodloužit, využijeme-li jen menší složky váhy neboli složky tíhového zrychlení, např. při zavěšení kyvadla podle obr. (2.5) 16 (*Zöllnerovo kyvadlo*) nebo u *Machova kyvadla* [obr. (2.5) 17], které může kývat jen v rovině kolmé k otáčivé ose OO . Svrátá-li rovina kyvu s vertikální rovinou úhel α , pak na kývání má vliv jen ta složka tíhového zrychlení, která do ní připadá, tedy $g_1 = g \cos \alpha$. Doba kyvu

$$\tau' = \pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}$$

zvětší se tedy v poměru $1 : \sqrt{\cos \alpha}$; např. pro $\alpha = 75,5^\circ$ je $\cos \alpha = 1/4$ a $\tau' = 2\tau$, takže kyvadlo kýve dvakrát pomaleji než ve svislé rovině. Pro $\alpha \rightarrow 90^\circ$ roste doba kyvu nade všechny meze, $\tau' \rightarrow \infty$, takže po nárazu by se kyvadlo pohybovalo rovnoměrně po kružnici, kdyby jeho pohyb nebyl brzděn třením. Machovým kyvadlem se pěkně demonstruje závislost doby kyvu kyvadla na velikosti tíhového zrychlení.

Rovnovážná poloha kyvadla s rovinou kyvu téměř vodorovnou je neobyčejně citlivá na změnu sklonu osy otáčení OO , popř. na změnu směru tíhového zrychlení; kyvadlo reaguje na tyto změny mnohonásobně větší změnou své rovnovážné polohy. Stálá rovnovážná poloha kyvadla na obr. (2.5) 16 leží v rovině tvořené svislou přímkou t (těžnicí) a osou otáčení OO . Změní-li se při úhlu sklonu osy otáčení $\psi = 2'$ poloha této roviny o $0,01''$, např. změnou směru těžnice, vznikne asi 1 700násobná změna rovnovážné polohy, tj. asi o $17''$. Zöllnerovo kyvadlo se proto hodí ke konstrukci *seizmografů* k registraci zemětřesení a *gravimetrů* k sledování *slapů zemské kúry*, tj. periodických pohybů pevné zemské kúry, vznikajících podobně jako mořské slapy (přiliv a odliv) přitažlivými silami gravitačních polí nebeských těles, zejména Měsíce a Slunce, a provázených malými změnami velikosti a směru tíhového zrychlení. K odstranění různých rušivých vlivů (teploty, tlaku, vlhkosti), na které jsou tyto jemné přístroje velmi citlivé, bývají instalovány v dosti velkých hloubkách pod zemským povrchem, nejčastěji v dolech.

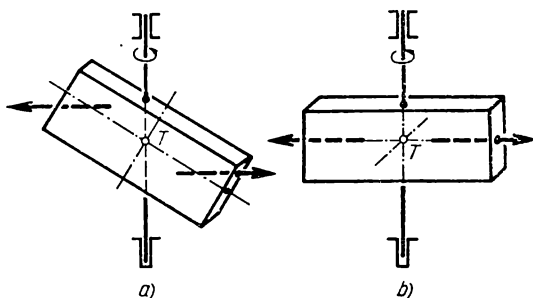
2.5.8. Volné osy

Těleso, které na rozdíl od kyvadla je otočné kolem osy jdoucí těžištěm, zůstane v rovnováze při libovolném pootočení, protože výsledný moment vah všech jeho hmotných částic vzhledem k těžišti je roven nule. Jeho celkovou tíhu přenáší osa na ložiska, v nichž působí tlaky, jež mají stálou velikost i směr. Rotuje-li však těleso kolem takové osy, mohou přesto vlivem odstředivých sil, jež působí v každém bodě tělesa, vzniknout v ložiskách ještě jiné tlaky, které mění svůj směr a způsobují tím velmi rychlé opotřebení ložisek. Tak je tomu např. u hranolu na obr. (2.5) 18a, jehož osa prochází jeho těžištěm. Odstředivé síly dávají dvojici, která se snaží rotační osu vychýlit z její polohy, čímž vznikají ony nepříznivé krouživé tlaky v ložiskách.

Tato závada se odstraní, budou-li jednotlivé částice tělesa vzhledem k rotační ose rozloženy tak, aby výslednice všech elementárních odstředivých sil a také jejich výsledná silová dvojice byly nulové. Příkladem je uložení hranolu na obr. b. Osa otáčení, která prochází těžištěm a nepodléhá přitom vlivu odstředivých sil, takže by zachovávala svoji orientaci jak v prostoru, tak v tělese samém, i kdyby to nebyla fyzická osa (hřídel) uložená v ložiskách (odmyslíme-li si působení váhy nebo podepřeme-li těžké těleso jen v jeho těžišti), nazývá se *volná osa*.

Podrobnější rozbor ukazuje, že v každém tuhém tělese i nehomogenním (např. v kusu kamene) existují vždy aspoň tři navzájem kolmé volné osy protínající se v těžišti tělesa. Vzhledem k nim má těleso momenty setrvačnosti, které se nazývají *hlavní momenty setrvačnosti*, proto se příslušným geometrickým osám v tělese také říká *hlavní osy setrvačnosti*. Proti momentům setrvačnosti vzhledem k jiným osám procházejícím těžištěm má obecně jeden z hlavních momentů největší velikost a druhý nejmenší velikost. Velikost třetího hlavního momentu setrvačnosti leží pak mezi oběma krajními hodnotami. Také ovšem mohou mít dva hlavní momenty setrvačnosti stejnou velikost, anebo mohou být všechny tři stejně velké.

Objasníme to u několika těles na obr. (2.5) 19 jednoduchého geometrického tvaru. Z názoru plyne, že jsou-li tělesa homogenní, tj. jejich hustota má v každém místě touž velikost, pak volnými osami jsou především osy souměrnosti procházející vždy těžištěm. Při takové souměrnosti přísluší každému hmotnému bodu na druhé straně osy ve stejné vzdálenosti od ní jiný souměrně položený hmotný bod téže hmotnosti, takže odstředivé síly u obou bodů se tuhostí tělesa navzájem ruší. Výpočtem podle vzorce 2.5 (14) nebo (16), který se probírá v matematice nebo v technické mechanice, vychází pro momenty setrvačnosti vzhledem k osám označeným 1, 2 a 3 na obrázku:



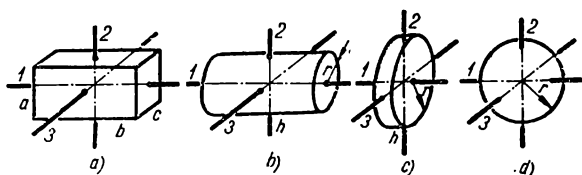
Obr. (2.5) 18. Odstředivé síly při rotaci

Kolmý hranol

$$J_1 = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2),$$

$$J_2 = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2),$$

$$J_3 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2),$$



Obr. (2.5) 19. K momentům setrvačnosti několika těles

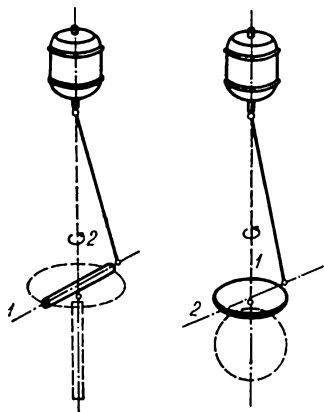
$$2.5 \text{ (38) válec} \quad J_1 = \frac{1}{2} m r^2, \quad J_2 = J_3 = \frac{1}{4} m \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right),$$

$$\text{koule} \quad J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{5} m r^2.$$

Součty čtverců ve vzorcích pro momenty setrvačnosti kolmého hranolu určují čtverce délek úhlopříček základěn kolmých k příslušné ose. Podle délek těchto úhlopříček mají hlavní momenty setrvačnosti různou velikost. Hranol na obr. *a* je tedy příkladem tělesa se třemi různě velkými hlavními momenty setrvačnosti a jenom se třemi volnými osami.

Příkladem tělesa, u něhož máme jen dvě hodnoty pro hlavní momenty setrvačnosti, je válec nebo kotouč na obr. *b* a *c*. Vzhledem k souměrnosti kolem osy *1* mají momenty setrvačnosti ke všem osám v rovině kolmé k ose *1* (např. *2* a *3* na obrázku) touž velikost. Tak je tomu u každého rotačního tělesa, tj. tělesa, jehož tvar by se dal vytvořit soustružením, a proto jsou v takových tělesech volnými osami nejen osa souměrnosti shodná s osou, kolem níž by se těleso při soustružení otáčelo, ale také všechny osy, které jsou k ní kolmé a protínají se s ní v těžišti tělesa. U rotačního válce jsou tyto osy (např. osy *2* a *3* na obr. *b*) zároveň i osami souměrnosti, ale u rotačního tělesa jiného tvaru (např. u rotačního kužele) osami souměrnosti nemusí být. Pro volnost osy není tedy nutnou podmínkou geometrická souměrnost tělesa vzhledem k ní.

U koule má ovšem moment setrvačnosti ke všem osám procházejícím těžištěm (středem) touž hodnotu. Každá osa v kouli jdoucí těžištěm je volná osa. Tak je tomu zřejmě i u těles jiného tvaru, mají-li hlavní momenty setrvačnosti touž velikost. Z podmínky $J_1 = J_2 = J_3$ plyne, že např. také u krychle nebo válce, u něhož právě $h = \sqrt{3}r$, je každá těžištní osa volnou osou.



Obr. (2.5) 20. Rotace kolem volné osy

Jednoduchým pokusem lze ukázat, že všechny volné osy v tělese však nejsou rovnocenné. Tyčka nebo kotouč zavěšené svisle na tenčím drátu [na obr. (2.5) 20 nakresleno čárkovaně] otáčejí se při pomalé rotaci spořádaně kolem svislé osy. Zvětšujeme-li otáčky motoru, nastává se podélná osa tyčky nebo základny kotouče do vodorovné roviny a obě tělesa pak při libovolně vysokých otáčkách už stabilně rotují kolem os kolmých k původním osám otáčení. Podle označení na obr. (2.5) 19 *b* a *c* je u tyčky $h > \sqrt{3}r$ a u kotouče naopak $h < \sqrt{3}r$, takže podle vzorců 2.5 (38) má tyčka větší hlavní moment setrvačnosti k osám kolmým k podélné ose a kotouč naopak k ose kolmé k základnám. Z pokusu tedy plyne, že u rotačních těles je stabilní jenom rotace kolem volné osy, již přísluší největší moment setrvačnosti. Naproti tomu rotace kolem osy, k níž má moment setrvačnosti nejmenší hodnotu, je labilní; stačí nepatrný rozruch, aby rotace kolem této osy přešla v rotaci kolem osy stabilní.

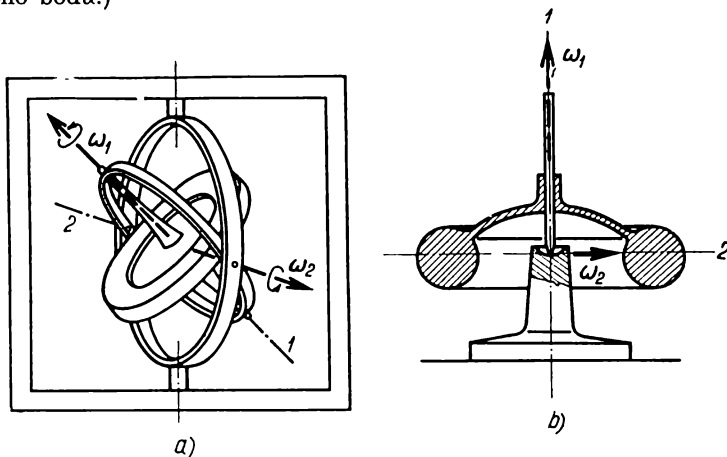
Elementární výklad tohoto jevu je asi tento: Odstředivé síly jakožto síly reakce mají snahu oddálit částice tělesa hmotnosti m pokud možno do velkých vzdáleností r od osy rotace. Je-li těleso tuhé, takže změna tvaru nemůže nastat, projevuje se tato snaha přechodem samé osy rotace v prasek, pro který má výraz $\Sigma m r^2$ maximální hodnotu. Zevrubnější rozbor však vede k závěru, že u tělesa, které má pro hlavní momenty setrvačnosti tři různé hodnoty, je stabilní také rotace kolem těžištní osy, k níž má moment setrvačnosti nejmenší velikost.

2.5.9. Volný setrvačnick

Při rotaci tělesa kolem pevné osy, o níž jsme pojednali v čl. 2.5.6, měla osa rotace pevnou polohu v tělese a kromě toho byla vně tělesa uložena v ložiskách. Při rotaci kolem volné osy v předešlém článku má také osa rotace v tělese pevnou orientaci, ale ložiska mohou

odpadnout, nepůsobí-li na těleso ani vnější síly (tíže), ani vnější dvojice sil. V nejobecnějším případě rotace tělesa není ani ložisek, ani stálé polohy osy rotace v tělese. Rotační osa prochází sice stále těžištěm tělesa, ale ustavičně mění v tělese svou orientaci.

Početní vyšetřování takovýchto obecných rotací patří k nejsložitějším úlohám mechaniky vůbec. Základní jevy, které se při tom pozorují, lze však poměrně snadno vyložit ve zvláštním případě rotace *setrvačnicku*, jímž ve fyzice nejčastěji rozumíme tuhé homogenní osově souměrné rotační těleso, jehož osa souměrnosti, zvaná *osa setrvačnicku*, má jeden pevný bod. Tato osa je volná osa a setrvačnicku se zpravidla dává takový tvar (tvar kotouče), aby jí příslušel největší hlavní moment setrvačnosti. (Přesnější název by byl symetrický setrvačnick, protože v dynamice těles se obecně setrvačnickem rozumí libovolné těleso otočné kolem pevného bodu.)



Obr. (2.5) 21. Realizace volného setrvačnicku

Je-li pevným bodem setrvačnicku těžiště, nepůsobí na něj tíže silovou dvojicí, a proto jej nazýváme *volným (bezsilovým) nebo astatickým setrvačnickem*. Lze jej nejlépe realizovat setrvačnickem v *Cardanově závěsu* na obr. (2.5) 21a, jehož vzájemně kolmé osy se protínají v těžišti setrvačnicku nebo *setrvačnickem Maxwellovým* na obr. b, podepřeným v těžišti.

Roztočíme-li volný setrvačnick přesně kolem jeho osy symetrie *1*, zachovává tato osa stálý směr v prostoru, protože je volnou osou a na setrvačnick vnější moment nepůsobí. Je to, jako kdyby těleso rotovalo kolem pevné osy uložené v ložiskách, a proto můžeme této rotaci přiřadit točivost (moment hybnosti) *b*, která je analogicky s rotací tělesa kolem pevné osy podle 2.5 (24) určena součinem

$$2.5 (39) \quad b = J\omega,$$

je-li *J* příslušný moment setrvačnosti a ω vektor úhlové rychlosti v ose rotace. Tak je tomu zřejmě při rotaci kolem kterékoli volné osy.

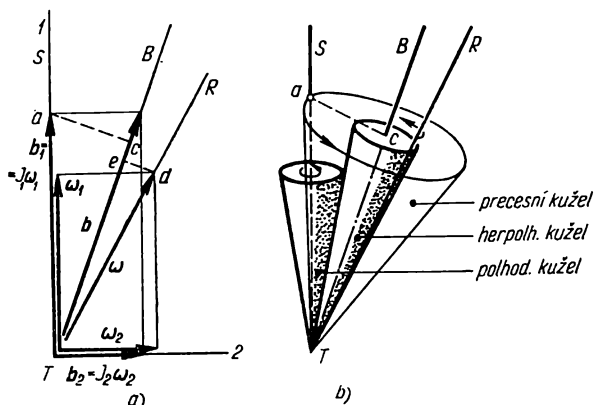
Podle druhé impulsové věty 2.4 (11) je časová změna točivosti rovna momentu *M* vnější silové dvojice; protože ale $\mathbf{M} = 0$, je $d\mathbf{b}/dt = 0$, a tedy

$$2.5 (40) \quad b = \text{const.}$$

U volného setrvačnicku je vždy točivost stálý vektor co do směru i velikosti, který v případě, že rotace se děje pře ně kolem volné osy, leží společně s příslušným vektorem úhlové rychlosti ω v této ose. Oba vektory zachovávají stálý směr v prostoru.

Udělme nyní volnému setrvačnicku, otáčejícímu se kolem své osy symetrie *1* úhlovou rychlostí, kterou nyní označme ω_1 , další rotaci úhlovou rychlostí ω_2 kolem některé jiné volné osy *2*, o níž víme, že je kolmá k ose *1*. Provedeme to třeba tak, že klepneme na vnitřní

kruhové na obr. (2.5) 21a, v němž je uložen roztočený setrvačník, nebo udělný náraz os rotačního Maxwellova setrvačníku na obr. 21b. J_1 a J_2 příslušné hlavní momenty setrvačnosti, pak oběma rotacím přísluší $\mathbf{b}_1 = J_1 \boldsymbol{\omega}_1$ a $\mathbf{b}_2 = J_2 \boldsymbol{\omega}_2$, které složeny vektorově dohromady na obr. (2.5) výslednou točivost setrvačníku $\mathbf{b}$. Sečteme-li vektorově také úhlové rychlosti dostaneme vektor $\boldsymbol{\omega}$ výsledné úhlové rychlosti, který určuje směr osy vý setrvačníku. Protože obecně nejsou hlavní momenty setrvačnosti J_1 a J_2 dílí úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_1$ a $\boldsymbol{\omega}_2$ jsou různé, mají obecně vektor točivosti $\mathbf{b}$ a vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ rychlosti různý směr v prostoru, takže mezi celkovou točivostí a výslednou úhlovou rychlostí setrvačníku neplatí obecně jednoduchý vztah 2.5 (39). Za to leží u osově souměrných rotačních těles vždy osa setrvačníku, vektor točivosti $\mathbf{b}$ a vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ v jedné rovině, protože všechny těžištní osy kolmé k ose setrvačníku jsou rovnocenné volné



Obr. (2.5) 22. a) vektor točivosti $\mathbf{b}$ a výsledná úhlová rychlost setrvačníku, b) pohyb osy setrvačníku a okamžité osy rotace

vektor točivosti $\mathbf{b} = \text{const.}$ Z trojúhelníku Tac a Tde na obr. (2.5) 22a je na první pohled zřejmé, že osa S setrvačníku a osa R při tom opisují kolem osy B kruhové kužele, znázorněné na obr. (2.5) 22b. Snadno nahlédneme, že rovina obou os S a R se kolem osy B otáčí rovnoměrně. Vezměme bod na ose S setrvačníku, který se pohybuje po kružnici. Jeho úhlová rychlost je stálá, je-li také jeho obvodová rychlost stálá. Ta však není ovlivněna úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}_1$, protože bod leží na příslušné ose, a je proto určena jedinečně úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}_2$. Protože ale tato úhlová rychlost je stálá, platí totéž i pro obvodovou rychlost.

Pohyb, který koná osa S setrvačníku, nazývá se *regulární precese* (někdy se mu také říká *nutace*, ačkoli se tím zpravidla rozumí jiný jev — viz závěr následujícího článku) a příslušný kužel, který osa S opisuje, se pak jmenuje *precesní kužel*.

Setrvačník koná tedy dva rotační pohyby: jeden kolem své osy S , což je tzv. *vlastní rotace* setrvačníku, a druhý (precesní pohyb) koná jeho osa kolem směru B vektoru točivosti. Složením obou rotací vznikne výsledná rotace úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$, jejíž osa R také opisuje kolem směru točivosti kruhový kužel stálou rychlostí, měnící při tom svůj směr jak v prostoru, tak v tělese samém, neboť opisuje i kolem osy setrvačníku kruhový kužel a prochází tak postupně různými body tělesa.

Bez důkazu budiž uvedeno, že pohyb lze názorně popsat valením kruhového kužele pevně spojeného se setrvačníkem, který s ním má společnou osu S , po kruhovém kuželi s osou B , který je pevný v prostoru a opisuje jej okamžitá osa rotace R . Kužel pevný v tělese se nazývá *polhodiový* a kužel pevný v prostoru *herpolhodiový*.

osy, jímž přísluší jedna a táž velikost hlavního momentu setrvačnosti. U rotačních těles můžeme tedy obráceně vektor $\boldsymbol{\omega}$ výsledné úhlové rychlosti v rovině obsahující tento vektor a osu setrvačníku rozložit vždy na složku $\boldsymbol{\omega}_1$ v ose setrvačníku a na složku $\boldsymbol{\omega}_2$ k ní kolmou. Složkami $J_1 \boldsymbol{\omega}_1$ a $J_2 \boldsymbol{\omega}_2$ je pak určena i výsledná točivost.

U volného setrvačníku musí být točivost $\mathbf{b}$ stálý vektor. Kromě toho jsou také J_1 , $\boldsymbol{\omega}_1$ a J_2 , $\boldsymbol{\omega}_2$ konstantní, takže i vektor $\boldsymbol{\omega}$ výsledné úhlové rychlosti musí zachovat svůj směr v rovině znázorněné na obr. (2.5) 22a, v níž leží točivost $\mathbf{b}$. Pohyb tedy může záležet jen v tom, že se rovina osy S setrvačníku a osy R výsledné rotace otáčí kolem osy B obsahující

2.5.10. Setrvačník podrobený vnějšímu působení

Působí-li na setrvačník roztočený kolem osy souměrnosti (osy setrvačníku) vnější síly dvojicí, můžeme její moment rozložit do směru osy rotace a do směru k ní kolmého. Složka ve směru osy setrvačníku zvětšuje nebo zmenšuje úhlovou rychlost vlastní rotace jako při rotaci tělesa kolem pevné osy v čl. 2.5.6, takže zajímavá bude spíše reakce setrvačníku na kolmou složku vnějšího momentu. Předpokládejme proto, že na setrvačník působí jenom moment $\mathbf{M}$ kolmý k ose setrvačníku. Takové vnější působení na setrvačník vznikne např. tehdy, jestliže setrvačník, roztočený kolem své osy, volně bez počátečního nárazu postavíme na podložku tak, aby se o ni opíral svou fyzickou osou v bodě O ležícím mimo jeho těžiště a osa při tom svírala se svislicí úhel α [obr. (2.5) 23]. Tíha setrvačníku spolu s reakcí v opěrném bodě O dává dvojici sil, jejíž moment $\mathbf{M}$ je kolmý k svislé rovině proložené osou setrvačníku a snaží se sklopit jeho osu směrem dolů.

Výpočet reakce setrvačníku na toto vnější působení je snadný jen za zjednodušujícího předpokladu, že vlastní rotace setrvačníku je velmi rychlá a že vnější dvojice je slabá. Setrvačník se otáčí kolem volné osy úhlovou rychlostí ω , a proto mu přísluší točivost $\mathbf{b} = J\omega$. Podle druhé impulsové věty 2.4 (11) změní se vlivem momentu $\mathbf{M}$ směr vektoru $\mathbf{b}$ v prostoru; s ohledem na velmi rychlou vlastní rotaci můžeme však předpokládat, že při tom nedojde k změně polohy osy rotace vzhledem k setrvačníku, takže se směr osy rotace mění přibližně stejně jako vektor točivosti. Druhou impulsovou větu můžeme tedy vyjádřit ve tvaru

$$2.5 (41) \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} \approx J \frac{d\omega}{dt}.$$

Vektor $d\omega$ má též směr jako moment $\mathbf{M}$, a je proto kolmý k svislé rovině proložené okamžitou polohou osy rotace. Tato rovina se tedy pootočí o elementární úhel $d\varphi$ kolem svislé osy $\overline{OV}$ [obr. (2.5) 23]. Zároveň se ale o stejný úhel pootočí také vektor $\mathbf{M}$ vnější dvojice sil, z čehož plyne, že osa setrvačníku se nepodá vnější silové dvojici a nesklopí se kolem bodu O směrem dolů, jak bychom snad očekávali, nýbrž opisuje precesní kužel kolem svislé přímky procházející podpěrným bodem O tak, že těžiště zůstává stále v téže výšce.

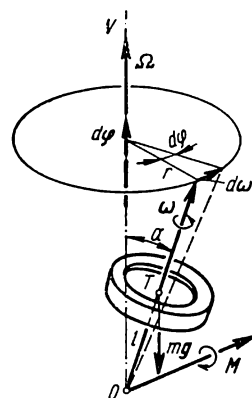
Snadno nalezneme vztah mezi úhlovou rychlostí Ω precesního pohybu, úhlovou rychlostí ω vlastní rotace setrvačníku a momentem vnější silové dvojice $\mathbf{M}$. Podle obr. (2.5) 23 je co do velikosti $d\omega = r d\varphi = \omega \sin \alpha \cdot d\varphi$ čili vektorově $d\omega = d\varphi \times \omega$. Podle 2.5 (41) tedy máme

$$2.5 (42) \quad \mathbf{M} = \frac{d\varphi}{dt} \times J\omega = \Omega \times J\omega,$$

neboť $\Omega = d\varphi/dt$ je úhlová rychlost precese. Označíme-li l vzdálenost těžiště T setrvačníku od podpěrného bodu O , pak $M = mgl \sin \alpha = \Omega J\omega \sin \alpha$ a pro velikost úhlové rychlosti precese vychází

$$2.5 (43) \quad \Omega = \frac{mgl}{J\omega};$$

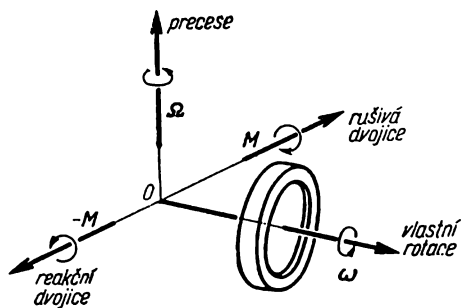
precesní úhlová rychlost Ω klesá tedy s rostoucí úhlovou rychlostí ω vlastní rotace těžkého setrvačníku, nezávisí však na úhlu sklonu α osy setrvačníku. Je-li tento úhel 90° , jak je znázorněno na obr. (2.5) 24, máme pro setrvačník jednoduché *směrové pravidlo*: působí-li



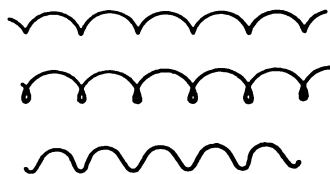
Obr. (2.5) 23. Precesní pohyb setrvačníku vlivem tíže

na něj rušivá dvojice sil, snaží se jeho osa rotace splynout po nejkratší cestě s osou rušivé dvojice.

Stáčíme-li naopak osu setrvačníku a nutíme jej tím konat precesní pohyb (příkladem je roztočená vrtule letadla v zatáčce), vzniká reakcí setrvačníku reakční silová dvojice, která má opačný smysl než moment, jenž by příslušnou precesi způsobil. Reakční silová dvojice má tedy smysl, v němž by osa setrvačníku po nejkratší cestě splynula s osou vnucené precese. Momentu této reakční dvojice se někdy říká *gyroskopický moment*.



Obr. (2.5) 24. K směrovým pravidlům u setrvačníku



Obr. (2.5) 25. Cykloidální nutační pohyb

Země jako setrvačník vykonává vlivem přitažlivých sil Slunce a Měsíce precesní pohyb, při němž osa Země opíše precesní kužel přibližně jednou za 26 000 let. Příčinou je zploštění Země a odklon osy zemské od kolmice k rovině dráhy Země kolem Slunce.

Precesní pohyb těžkého setrvačníku se jen přibližně shoduje s regulární precesí volného setrvačníku. Že pohyb osy těžkého setrvačníku není tak jednoduchý, můžeme se celkem snadno přesvědčit, opatříme-li konec jeho osy ostrým hrotem, k němuž přidržíme vodorovnou začaženou skleněnou desku. Tak zjistíme, že konec osy kolísá kolem vodorovné kružnice v drobných vlnkách, které mají tvar epicykloidy obyčejné, prodloužené nebo zkrácené [obr. (2.5) 25]. Tomuto kolísání říkáme *nutace* a celkovému průběhu pohybu *pseudoregulární precese*. Tyto jevy lze vysvětlit a odvodit matematickou teorií, z níž plyne, že těžký setrvačník může za jistých okolností konat regulární precesi.

2.6. Pružnost pevných těles

2.6.1. Napětí

Dosud jsme předpokládali, že tělesa pevného skupenství za působení vnějších sil nemění svůj tvar, že jsou dokonale tuhá. Ve skutečnosti každé těleso svůj tvar mění, začnou-li na něj jiná tělesa silově působit; říkáme, že se *deformuje (přetvoří)*. Při změně tvaru mění se přirozeně rovnovážné polohy částic, z nichž se těleso skládá, což má za následek, že mezi částicemi ihned vzniknou síly, které mají snahu přivodit původní rovnovážný stav. Deformace tělesa dosáhne konečného stavu, jsou-li síly mezi částicemi schopny odolávat vnějšímu působení. Přitom nevznikají jen na povrchu tělesa, kde bezprostředně vyrovnávají účinek vnějších sil, ale celé těleso je jimi vyplněno. Deformované těleso je tedy ve zvláštním stavu, kterému říkáme *stav napjatosti*. Charakterizujeme jej veličinou, která se nazývá *napětí*.

Obsah pojmu napětí snadno pochopíme na základě myšleného pokusu. Představme si uvnitř nedeformovaného tělesa, např. gumového hranolu na obr. (2.6) 1a, malou oblast z téže látky omezenou kulovou plochou. Napínáme-li hranol ve směru jeho podélné osy silami F , které se prostřednictvím tuhých přílohek rovnoměrně rozloží na obě základny, projeví se deformace uvnitř tělesa tím, že se koule přetvoří v trojosý elipsoid (obr. b).

Kdybychom jej vyňali z tělesa, nepodržel by svůj tvar, ale nabyl by zase původního kulového tvaru (předpokládáme, že materiál je *dokonale pružný*). Tvar elipsoidu zachováme, budeme-li na něj působit stejnými silami jako jeho okolí, nalézali se v deformovaném tělese. Nahrazujeme tím vnitřní působení okolí na vyšetřovanou část tělesa působením vnějším, které je přístupné kvantitativnímu vyjádření. Příslušné síly mají povahu *plošných sil*, jsouce rozděleny po ploše omezující vyšetřovanou část tělesa, takže na elementární část dS plochy připadá z celkové síly jistá malá část dF (obr. b). Podílem

2.6 (1)

$$\sigma = \frac{dF}{dS},$$

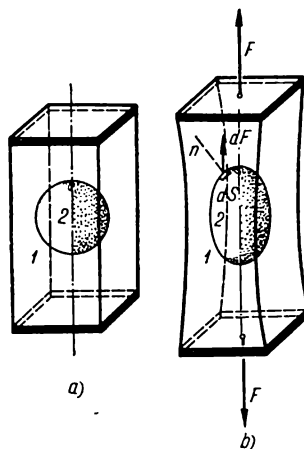
který má konečnou hodnotu, je definováno napětí v příslušném místě myšlené plochy oddělující navzájem různé části tělesa v napjatém stavu. Je zřejmé, že podle principu akce a reakce je síla, kterou působí jedna část tělesa na druhou, stejně velká, ale opačného směru než síla, kterou působí část druhá na prvou.

Obecně působí elementární síla dF v libovolném směru vzhledem k normále n příslušné plošky dS . Promítáme ji pak do normály a tečné roviny plošky, přičemž podíly příslušných průmětů dF_n a dF_t a velikost plošky dS určují *napětí normálové* σ_n a *napětí tečné* τ , tedy

2.6 (2)

$$\sigma_n = \frac{dF_n}{dS},$$

$$\tau = \frac{dF_t}{dS}.$$



Obr. (2.6) 1. K výkladu pojmu napětí

Normálové napětí má charakter *tahu* nebo *tlaku* na plošce dS dvou částí tělesa, které z obou stran k plošce přiléhají, zatímco *tečným napětím* je *podmíněna změna tvaru jednotlivých částí namáhaného tělesa*, rozumíme-li změnou tvaru přechod jednoho geometrického útvaru v jiný, např. krychle v hranol kolmý nebo kosý, koule v elipsoid apod. Je to zřejmé na obr. (2.6) 1. Kdyby na kulové ploše oddělující navzájem části 1 a 2 tělesa byla všude jen stejně velká normálová napětí, ať už v tahu, nebo v tlaku, zůstala by (až na poloměr) kulová plocha zachována. K přechodu v elipsoid je třeba, aby v jednotlivých místech plochy byla různě velká normálová napětí, s čímž bezprostředně souvisí přítomnost tečných napětí (šikmost elementárních sil dF vzhledem k ploškám dS).

Hlavní jednotkou napětí je $N \cdot m^{-2}$. V technické praxi se užívá vedlejší jednotky $kp \cdot cm^{-2} = 9,806\,65 \cdot 10^4 N \cdot m^{-2}$. Číselně udává napětí sílu působící na ploše jednotkového plošného obsahu. V dalším výkladu budeme vyšetřovat účinek normálového a tečného napětí zvlášť.

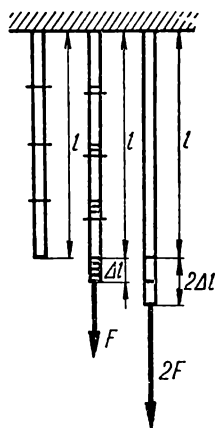
Kolem každého bodu tělesa si můžeme myslet malou oblast omezenou kulovou plochou, která se přemění v elipsoid, je-li těleso v napjatém stavu. Tři osy tohoto elipsoidu mají význačnou vlastnost: jen ve směru těchto tří os jsou obecně elementární síly dF od okolí obklopujícího elipsoid kolmé k jeho povrchu. V těchto směrech existují tedy jen napětí normálová, zatímco ve všech jiných směrech jsou napětí normálová i tečná. Tato tři napětí v navzájem kolmých směrech nazývají se *hlavní napětí*. Jedno z nich má největší a druhé nejmenší velikost; normálová napětí ve všech ostatních směrech, a tedy i třetí hlavní napětí mají velikost, která leží mezi oběma krajními hodnotami. Příslušné směry jsou určeny podmínkou, že tečná napětí v rovinách k nim kolmých musí vymizet.

Jsou-li v každém bodě napjatého tělesa tři hlavní napětí, mluvíme o *prostorové napjatosti*. Redukují-li se na dvě, pak jde o *rovinovou napjatost*, tzn. že v jednom směru, a to ve směru kolmém k rovině napjatosti nejsou napětí. Nejjednodušší je *napjatost přímková*, která vznikne při natahování nebo stlačování prizmatické tyče ve směru její osy, jako např. na obr. (2.6) 1. Jediné hlavní napětí je napětí ve směru napínání tyče, tedy kolmé k průřezům tyče. Napětí

ve směru druhých dvou hlavních os elipsoidu jsou nulová. Přesto nastane posunutí bodů na původní kulové ploše ve směru těchto příčných hlavních os elipsoidu vznikajícího v napjatém stavu. Tato deformace koule ve směru příčném ke směru napínání není tedy podmíněna zvláštním napětím, nýbrž základní vlastností pružných látek pevného skupenství při natahování nebo stlačování zároveň se příčně zkracovat nebo prodlužovat. Pojednáme o tom v následujícím článku.

2.6.2. Tah a tlak

Úkolem nauky o pružnosti je zjistit souvislost mezi deformacemi a napětími, která v tělesech budí vnější síly. K příslušné zákonitosti dojdeme snadno jednoduchou úvahou, jejíž výsledek pokus plně potvrzuje. Vyjdeme z nejjednoduššího případu přímkové napjatosti a sledujeme, jak se chová tyč na jednom konci upevněná [obr. (2.6) 2], budeme-li postupně



Obr. (2.6) 2. Tyč namáhána tahem

zvětšovat její zatížení. Zatížením tyče silou F prodlouží se její původní délka l o Δl . Pokud je tahová síla malá, je také malá deformace Δl a můžeme mít za to, že namáháním tyče se mechanické vlastnosti jejího materiálu nezměnily. Připojíme-li ještě jednu takovou sílu, působí na tyč stejných vlastností jako první síla, a prodlouží ji tedy opět o stejnou délku Δl . Síla $2F$ způsobí tedy deformaci $2\Delta l$. Podobně, připojíme-li třetí stejně velkou sílu, způsobí opět deformaci Δl , síla $3F$ dá tedy deformaci $3\Delta l$. Tak tomu bude patrně tak dlouho, pokud se deformací tyče nezmění její odpor proti další deformaci. Mezi činnou silou a deformací je tedy úměrnost, která pro malé deformace byla experimentálně potvrzena u velké řady látek a kterou vyslovil Hooke ve tvaru obecného zákona: „Deformace je úměrná napětí materiálu“, přičemž napětím Hooke rozuměl zatížení vnější silou,

$$2.6 (3)$$

$$\Delta l = \text{const} \cdot F.$$

Konstanta úměrnosti závisí patrně nejen na materiálu, z něhož je tyč zhotovena, nýbrž také na délce tyče l a na průřezu tyče S . Vyšetřme nejprve u tyče ze zvoleného materiálu vliv délky na konstantu úměrnosti. Rozdělme tyč značkami na stejné díly, abychom zjistili, jak se výsledná deformace rozloží podél tyče [obr. (2.6) 2]. Po zatížení tyče zjistíme, že vzdálenosti mezi jednotlivými značkami jsou nyní sice větší, avšak opět mezi všemi značkami stejné, tj. že se deformace rozložila rovnoměrně na celou délku tyče a že celková deformace je dána součtem vesměs stejných deformací jednotlivých dílů tyče. Tak tomu musí být, protože všechny části tyče jsou v klidu, a tedy síly působící na obou krajních průřezích libovolné části tyče se ruší. Každá část je tedy namáhána stejnou silou, a proto jsou stejné díly tyče stejně prodlouženy. Čím delší bude tyč, tj. kolikrát více zvolených dílů bude obsahovat, tolikrát větší bude celková deformace tyče Δl . To znamená, že konstanta úměrnosti ze vztahu 2.6 (3) je přímo úměrná délce tyče.

Podobnou úvahou zjistíme, že konstanta je nepřímo úměrná průřezu tyče S , neboť je-li k prodloužení tyče průřezu 1 cm^2 o Δl třeba síly F , pak stejné prodloužení Δl dvou stejných tyčí vyžaduje sílu $2F$. Myslíme-li si tedy tyč složenou z řady vláken o stejném celkovém průřezu, působí tah rovnoměrně rozložený na průřezu na každé vlákno silou úměrnou jeho průřezu. Protože tyto síly úměrné průřezu způsobují stejné prodloužení všech vláken, musí být konstanta nepřímo úměrná průřezu.

Spojíme-li oba popsané poznatky, můžeme psát

$$\text{const} = k \frac{l}{S},$$

takže vzhledem k 2.6 (3) dostaneme

$$2.6 (4) \quad \Delta l = k \frac{l}{S} F,$$

přičemž konstanta k závisí už jenom na materiálu tyče.

Dělíme-li prodloužení tyče Δl původní délkou l , dostaneme číselně deformaci jednotky délky tyče, která již nezávisí na délce tyče. Tomuto poměru — označujeme jej ε — říkáme *poměrné prodloužení* (*poměrné podélné prodloužení*):

$$2.6 (5) \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Je to poměrné číslo, bez rozměru.

V rovnici 2.6 (4) vystupuje podíl F/S , který podle výkladu v předešlém článku je normálové napětí

$$2.6 (6) \quad \sigma_n = \frac{F}{S},$$

protože myslíme-li si napnutou tyč kdekoli přerušenu příčným řezem, působí část tyče, která je nad tímto řezem, na spodní část silou F a touž silou opačného směru působí spodní část tyče na horní část; přitom předpokládáme, že se síla rovnoměrně rozloží na celý průřez tyče, proto můžeme diferenciální podíl, jímž je obecně určeno napětí, nahradit podílem celé síly a celého průřezu.

Hookův zákon tak nabývá tvaru

$$2.6 (7) \quad \varepsilon = k \sigma_n \quad \text{nebo} \quad \sigma_n = E \varepsilon,$$

zavedeme-li místo konstanty k novou konstantu $E = 1/k$. Na rozdíl od 2.6 (3) nezávisí Hookův zákon v této formě na rozměrech tělesa, protože vyjadřuje vztah mezi poměrnými veličinami. Obě konstanty jsou materiálové konstanty, z nichž k se jmenuje *součinitel protažení*; udává číselně, o kolik se prodlouží jednotka délková při jednotkovém napětí. U většiny materiálů, jež se řídí Hookovým zákonem, je to velmi malé číslo (např. pro ocel $k \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2 \cdot \text{kp}^{-1}$), a proto se raději používá jeho převrácené hodnoty E , která se nazývá *modul pružnosti v tahu* (*Youngův modul*). Je definován podílem napětí a příslušného poměrného prodloužení, ovšem v mezích, v nichž platí úměrnost mezi oběma veličinami. Jeho velikost pro některé kovy je v tab. (2.6) I.

Tabulka (2.6) I

Elastické konstanty některých látek

Materiál	Modul pružnosti v tahu E [kp . cm ⁻²]	Poissonův poměr μ	Stlačitelnost γ [cm ² . kp ⁻¹]	Modul pružnosti ve smyku G [kp . cm ⁻²]
Hliník	732 000	0,339	$1,3 \cdot 10^{-6}$	273 700
Měď	1 258 000	0,348	$0,7 \cdot 10^{-6}$	464 000
Železo	2 160 000	0,277	$0,62 \cdot 10^{-6}$	810 000

Modul E má stejný rozměr jako napětí, což svádí k tomu vidět v něm napětí, které by způsobilo protažení o celou původní délku ($\varepsilon = 1$). Žádný materiál, který se řídí Hookovým zákonem, však tak ohromné napětí nevydrží, a proto je takový výklad modulu pružnosti nesmyslný. Kromě toho není modul pružnosti vůbec napětím, i když má týž rozměr.

Kdybychom při napínání tyče zároveň přesně měřili plochu průřezu, zjistili bychom, že prodlužováním tyče se průřez zmenšuje úměrně se zatížením, že tedy i v tomto směru platí Hookův zákon.

Tyč čtvercového průřezu na obr. (2.6) 3 prodlouží se působením síly F o $\Delta l = l' - l$ a strany čtvercového průřezu se zmenší o $\Delta a = a - a'$. Jako jsme zavedli poměrné podélné prodloužení $\varepsilon = \Delta l/l$, zavádíme *poměrné příčné zkrácení**

$$\eta = \frac{\Delta a}{a}.$$

Podle Hookova zákona je také mezi poměrným zkrácením a napětím úměrnost, takže

$$\eta = k_1 \sigma_n,$$

kde k_1 nazýváme *součinitelem příčného zkrácení*. Dosadíme-li za σ_n z 2.6 (7), bude

$$2.6 (8) \quad \eta = k_1 E \varepsilon = \mu \varepsilon = \frac{1}{m} \varepsilon = \frac{1}{mE} \sigma_n,$$

kde konstantu m nazýváme *Poissonovou konstantou* a $\mu = 1/m$ *Poissonovým číslem* nebo *poměrem*. Obě konstanty jsou bezrozměrné materiálové konstanty, z nichž první udává, kolikrát je poměrné podélné prodloužení větší než poměrné příčné zkrácení. To je u každé látky jiné, a proto je třeba velikost Poissonovy konstanty individuálně určovat měření. Nicméně lze teoreticky zjistit meze, v nichž obě konstanty musí ležet, jak ukážeme v závěru tohoto článku.

Píšeme-li poměrné deformace při namáhání prizmatické tyče na obr. 2.6 (3) tahem ve tvaru $\varepsilon = (l' - l)/l$ a $\eta = (a - a')/a$, dostaneme pro rozměry l' a a' deformované tyče vzhledem k 2.6 (7) a (8) ihned jednoduché vztahy

2.6 (9)

$$a' = a(1 - \eta) = a \left(1 - \frac{\sigma_n}{mE} \right),$$

$$l' = l(1 + \varepsilon) = l \left(1 + \frac{\sigma_n}{E} \right),$$

v nichž l a a jsou rozměry tyče před deformací a σ_n je normálové napětí v tyči.

Všechny vztahy, jimiž jsme popsali namáhání tyče tahem, platí i pro namáhání tlakem, je-li tyč dostatečně krátká; stačí, dosadíme-li do nich za normálové napětí zápornou číselnou hodnotu, např. $\sigma_n = -200 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2}$. Potom vyjdou také pro poměrné deformace ε a η záporné číselné hodnoty, tj. $(l' - l)/l < 0$ a $(a - a')/a < 0$, čili $l' < l$ a $a' > a$.

To znamená, že tyč se tlakem ve směru délky zkracuje a napříč roztahuje. Změníme-li však při aplikaci na tlak předem znaménka v obecných vztazích např. 2.6 (9), pak do nich musíme za ε , η a σ_n dosazovat kladné číselné hodnoty, tzn. je třeba definovat $\varepsilon = (l - l')/l$ a $\eta = (a' - a)/a$.

*) *Poměrným zúžením nazýváme poměr $\Delta S/S \approx 2\eta$.*

Při stlačování tyče (prutu), která je dlouhá proti průřezu, mohou nastat komplikovanější jevy, při nichž osa tyče vybočí z původního směru a tyč se ohýbá. V tomto případě mluvíme o *vzpěru*, jehož teorie je složitější než pro prosté namáhání tlakem.

Uvedených vztahů upravených pro namáhání tlakem použijeme k vyšetření deformace tělesa, které je vystaveno *všestrannému kolmému tlaku*, jako kdybychom je ponořili do kapaliny, v níž je tlak p . Namáhaným tělesem nechť je hranol na obr. (2.6) 4, jehož hrany mají délky a , b a c . Kdyby tlak σ_n působil jen v jednom směru, např. ve směru hrany c , pak by se hranol v tomto směru zkrátil a v kolmých směrech naopak prodloužil, takže podle 2.6 (9) bychom měli $a' = a(1 + \eta)$, $b' = b(1 + \eta)$, $c' = c(1 - \varepsilon)$. Působí-li tlak také ve směru b , je i v tomto směru poměrné podélné zkrácení ε , ale zároveň i poměrné příčné prodloužení η ve směru hran a a c , takže $a' = a(1 + 2\eta)$, $b' = b(1 - \varepsilon + \eta)$, $c' = c(1 - \varepsilon + \eta)$. Působí-li posléze tlak i ve směru hrany a , je i v tomto směru poměrné podélné zkrácení ε a v příčných směrech poměrné příčné prodloužení η , takže délka hrany a po deformaci bude

$$a' = a(1 - \varepsilon + 2\eta),$$

a obdobně pro b' a c' . Při tom jsme ve všech směrech volili stejné poměrné deformace, protože předpokládáme stejný tlak ze všech stran. Čtenář snadno rozšíří provedenou úvahu i na případ, že v jednotlivých směrech působí různé tlaky.

Před deformací má hranol objem $V = abc$, který se deformací změní na

$$V' = abc(1 - \varepsilon + 2\eta)^3 \approx V[1 - 3(\varepsilon - 2\eta)],$$

pomineme-li po umocnění všechny členy druhého a vyššího řádu jako velmi malé, protože poměrné deformace ε a η jsou samy o sobě malé. Všeobecný význam mají poměrné změny tvaru namáhaných těles, a proto určíme ještě poměrnou změnu objemu tělesa. Při-
držíme-li se pravidla, že změna nějaké veličiny je určena rozdílem „nová hodnota příslušné veličiny minus její stará hodnota“, pak poměrná změna objemu tělesa podrobeného všestrannému tlaku je

$$2.6 (10) \quad \frac{V' - V}{V} = \frac{\Delta V}{V} = -3(\varepsilon - 2\eta) = -\frac{3(m-2)}{mE} \sigma_n,$$

dosadíme-li za ε a η ze vztahů 2.6 (7) a (8). Pozorujeme, že ve shodě s Hookovým zákonem je zase deformace (zde poměrná změna objemu) úměrná napětí σ_n . Úvaha má hlavně význam pro pružnost kapalin, u nichž je však zvykem napětí v tlaku σ_n nazývat prostě *tlakem* a označovat jej p . V hořejším vztahu se objevuje nový součinitel ($\sigma_n = p$)

$$2.6 (11) \quad \boxed{\gamma = -\frac{\Delta V}{V} \frac{1}{p}},$$

který se nazývá *objemová stlačitelnost*; je definován podílem relativního zmenšení objemu a zvýšení tlaku, jež příslušné zmenšení objemu způsobuje. Převrácená hodnota objemové stlačitelnosti je nový modul pružnosti, který se nazývá *modul objemové pružnosti* K . Vzhledem k 2.6 (10) je pro látky řídící se Hookovým zákonem

$$2.6 (12) \quad K = \frac{1}{\gamma} = \frac{mE}{3(m-2)} = \frac{E}{3(1-2\mu)},$$

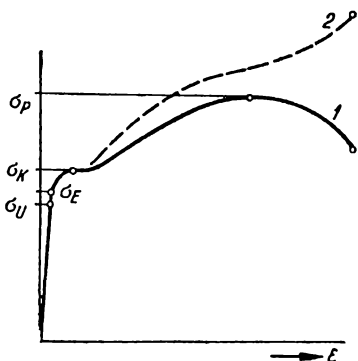
položíme-li $\mu = 1/m$.

Z tohoto vztahu ihned plynou meze, v nichž musí ležet velikost Poissonova poměru μ . Modul objemové pružnosti K musí být vždy kladný, protože jinak by se vzhledem k 2.6 (10)

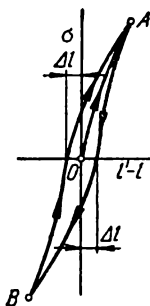
objem tělesa stlačováním zvětšoval, což odporuje zkušenosti. Stejně i modul E musí mít kladnou hodnotu, takže výraz v závorce jmenovatele hořejšího vztahu musí být kladný, tj. $\mu < 1/2$. Zároveň musí být $\mu > 0$, protože jinak by se prodlužováním tyče zároveň zvětšoval i její průřez. Pro Poissonův poměr tedy platí

$$0 < \mu < \frac{1}{2}.$$

Z měření plyne, že jeho hodnota leží mezi $1/4$ a $1/2$, průměrně bývá asi $\mu = 0,3$. Krajní hodnoty $\mu = 1/2$ nebo $m = 2$ dávají $\gamma = 0$, tj. $\Delta V = 0$, objem tělesa se zvýšením tlaku



Obr. (2.6) 5. Diagram závislosti napětí na poměrném prodloužení pro měkkou ocel: 1 — napětí vztahované na původní průřez, 2 — napětí vztahované na skutečný průřez



Obr. (2.6) 6. Doprůžování

nemění, těleso se chová jako *nestlačitelné*. Nestlačitelnost se předpokládá při mnohých úvahách v mechanice kapalin, ačkoli kapaliny jsou ve skutečnosti stlačitelnější než pevné látky.

Budeme-li tyč na obr. (2.6) 2 zatěžovat postupně většími silami a zjišťovat závislost prodloužení na napětí, ukáže se, že úměrnost mezi napětím a prodloužením, daná Hookovým zákonem, platí jen pro malé deformace. V celém rozsahu deformací až do přetržení tyče je tato závislost pro měkkou ocel dána křivkou na obr. (2.6) 5.

Napětí σ_v , které ještě je úměrné poměrnému prodloužení, nazýváme *mezi úměrnosti*. Odtiží-

me-li tyč, zmizí prakticky deformace, délka tyče se opět zkrátí na původní délku. Zatěžujeme-li dále do napětí σ_K , dosáhneme tzv. *meze pružnosti*, která se zpravidla neliší mnoho od meze úměrnosti. V tomto oboru se látka chová jako *dokonalě pružná*. Zatěžujeme-li materiál nad mez pružnosti, zjišťujeme po odtižení, že deformace nezmizí úplně, nýbrž že zůstává jistá *trvalá (plastická) deformace*. Mezi pružností by proto mělo být takové napětí, při němž po odlehčení není trvalá deformace. Je to zřejmě velmi neurčitá hodnota. Závisí na přesnosti přístrojů, jimiž se měří prodloužení, a proto je třeba ji stanovit úmluvou. V technické praxi rozumíme mezi pružností takové napětí, při kterém zůstává trvalé prodloužení menší než 0,01 až 0,003 % původní délky. V tomto rozsahu je velká část technicky důležitých materiálů, zejména ocel, pružná. Nad mezí pružnosti leží (u měkké oceli) tzv. *mez kluzu* nebo *mez průtažnosti* daná napětím σ_K . Tečna křivky v tomto bodě má téměř vodorovný směr. Tyč se prodlužuje, aniž se zatížení zvětšuje. Fyzikální vlastnosti materiálu se začínají značně měnit a materiál se zpevňuje. Pokračujeme-li ve zvyšování napětí, dosáhneme konečně tzv. *meze pevnosti* σ_p , pak se tyč přetrhne. Tyč se poruší v místě, v němž se při dosažení meze pevnosti začne průřez u některých kovů, např. u měkké oceli, značně zužovat. Proto při tomto pochodu napětí na obr. (2.6) 5 opět klesá, neboť je vztaheno na původní nezměněný průřez. Podobně se chová materiál při stlačování poměrně krátké tyče, u které nemůže nastat ohyb. U oceli např. je mez pružnosti při tlaku velmi přibližně stejná jako při tahu, rozdily však bývají v mezi pevnosti.

Jestliže nezmizí po odtižení deformace ihned, nýbrž jen její část, a zbytek až po nějaké době, říkáme tomuto jevu *doprůžování (elastická hystereze)*.

Doprůžování a odchylky od Hookova zákona se ukazují při opakovaném namáhání materiálu tahem a tlakem. Křivky napínání a stlačování tvoří smyčku, která je přehnaně znázorněna na obr. (2.6) 6. Při prvním zatížení tahem do meze pružnosti je závislost mezi napětím a prodloužením dána křivkou OA. Odlehčujeme-li tyč, probíhá zkracování po jiné křivce a při nulovém napětí má tyč ještě deformaci Δl . Je třeba tlaku, aby deformace Δl zmizela. Zvyšujeme-li tlak, tyč se zkracuje, deformace nabývá záporných hodnot. Je-li tyč po dosažení stavu B zbavena zatížení, je opět třeba tahu, aby deformace Δl zmizela. Smyčka na obr. (2.6) 6 nazývá se *hysterezní smyčka*. Plocha, kterou uzavírá, je úměrná práci, která se při tomto kruhovém ději mění v teplo a nelze ji nijak získat zpět.

2.6.3. Pružnost ve smyku

O namáhání prostým smykem (nebo stříhem) mluvíme tehdy, když jednotlivé vrstvy namáhaného materiálu se navzájem posouvají, aniž se mění jejich kolmá vzdálenost. Na obr. (2.6) 7 je malý hranolek, naznačený jednotlivými body, namáhán na smyk. Jednotlivé vrstvy se vzájemně posunuly (smýkly se po sobě). Vzdálenost mezi body v jednotlivých vrstvách zůstala stejná, rovněž tak se nezměnila vzdálenost mezi vrstvami. (Kdyby se měnily vzdálenosti bodů v jedné vrstvě nebo svislá vzdálenost vrstev, znamenalo by to, že kromě smyku tu působí ještě tah nebo tlak.) Taková deformace nastane, působí-li tečná síla F_t , jak je naznačeno. Předpokládáme přitom ovšem, že výška hranolu je dostatečně malá, aby nenastal ohyb.

Tečnou silou F_t , působící v rovině horní stěny hranolku o hranách a , b , c na obr. b , vzniká posunutí horní stěny o u . Podle Hookova zákona je tato deformace opět úměrná působící síle. Je zřejmé, že velikost deformace u je při stálé síle úměrná výšce hranolku b , neboť tečné síly mezi jednotlivými vrstvami musí být stejně velké, jakmile nastane rovnováha a vrstvy jsou v klidu. Proto je posunutí mezi dvěma sousedními vrstvami v celém hranolu stejné a posuv horní vrstvy je úměrný vzdálenosti od pevné podstavy. Můžeme proto podobně jako u tahu zavést tzv. poměrné posunutí

2.6 (13)

$$\gamma = \frac{u}{b},$$

které již na výšce b nezávisí. Je to změna původně pravého úhlu, vyjádřená v míře obloukové, protože pro malé deformace $u/b = \tan \gamma \approx \gamma$.

Dále je zřejmé, že deformace závisí také na velikosti plochy

$S = ac$, na které tečná síla F_t působí. Rozdělíme-li rovinou, rovnoběžnou s rovinou, v níž tato vnější síla působí, hranol na dvě části, pak spodní část, snažící se vzbuzenými vnitřními silami zabránit posunutí, působí na horní část silou stejně velkou jako F_t , ale opačného směru, a naopak horní část působí na spodní silou F_t . V ploše velikosti $S = ac$ rozdělující hranolek na dvě části charakterizuje tedy vnitřní působení obou částí na sebe síla velikosti F_t , což podle 2.6 (2) vede k *tečnému (smykovému) napětí*, které za předpokladu, že se síla rovnoměrně rozloží na celou plochu S , dostaneme, když tečnou sílu F_t dělíme plochou, v níž působí:

2.6 (14)

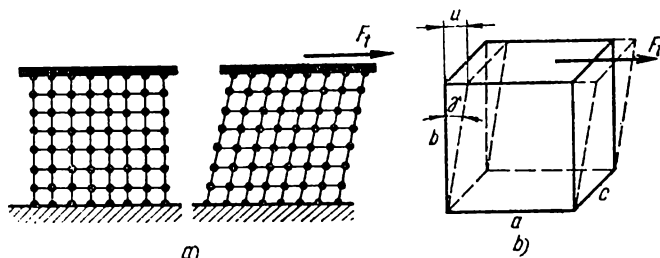
$$\tau = \frac{F_t}{S} = \frac{F_t}{ac}.$$

Hookův zákon pro smyk nabývá pak tvaru

2.6 (15)

$$\gamma = k\tau \quad \text{nebo} \quad \tau = G\gamma,$$

kde konstantu k lze nazvat součinitelem posunutí. Častěji se používá její převrácené hodnoty $G = 1/k$, která se analogicky s tahem a tlakem jmenuje *modul pružnosti ve smyku*. Má jako ostatní moduly pružnosti rozměr napětí, co do významu však není napětím, nýbrž konstantou úměrnosti mezi tečným napětím a poměrným posunutím.



Obr. (2.6) 7. Posunutí způsobené tečnou silou

Modul pružnosti ve smyku se také nazývá *modul torze*, protože prostý smyk se vyskytuje při zkrucování tyče kruhového průřezu, která je na obou koncích namáhána dvojicemi M_x navzájem opačného smyslu, jejichž vektory jsou rovnoběžné s osou tyče. Poměry se nezmění, jestliže tyč na jednom konci pevně upneme [obr. (2.6) 8a].

Vyřízneme-li z tyče elementární trubici (obr. b) o poloměru x a tloušťce stěny dx , vidíme názorně, že se elementární hranolek, omezený dvěma povrchovými přímkami, deformuje při zkrucování jako hranolek na obr. (2.6) 7. Zkroutili-li se tyč délky l na volném konci o úhel φ , pak poměrné posunutí

$$\gamma = \frac{x\varphi}{l} \quad *)$$

Toto posunutí vzniká tečným napětím τ , takže vzhledem k 2.6 (15) můžeme psát

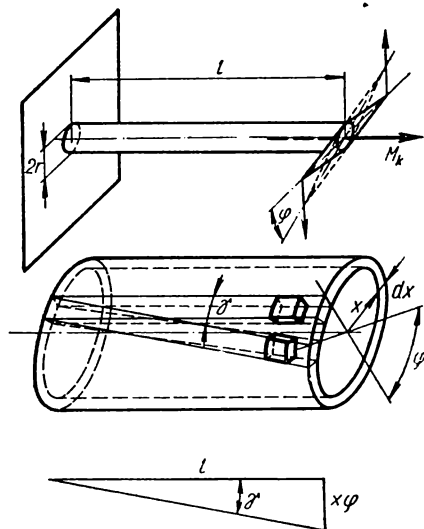
$$\tau = G \frac{x\varphi}{l}.$$

Tečné napětí na mezikruží poloměru x a tloušťky dx je dáno podílem tečné síly dF a plochy mezikruží dS , tedy

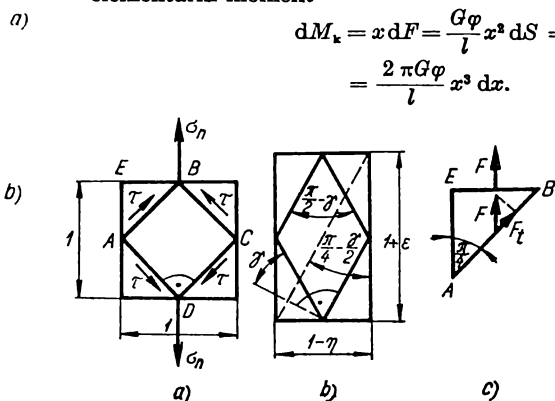
$$\tau = \frac{dF}{dS} = \frac{Gx\varphi}{l}.$$

Tato tečná síla dává vzhledem k ose válce elementární moment

$$\begin{aligned} dM_x &= x dF = \frac{G\varphi}{l} x^2 dS = \\ &= \frac{2\pi G\varphi}{l} x^3 dx. \end{aligned}$$



Obr. (2.6) 8. Kroucení tyče kruhového průřezu



Obr. (2.6) 9. Deformace krychle při jednostranném tahu

Po integraci v mezích od $x = 0$ do $x = r$ dostaneme konečný vztah mezi krouticím momentem M_x a zkroucením tyče φ ve tvaru

$$2.6 (16) \quad M_x = \frac{\pi G r^4}{2l} \varphi.$$

Pro vyšetřovaný případ namáhání tyče kroucením jsou veličiny l , r a G stálé, takže ve shodě s Hookovým zákonem máme opět úměrnost mezi deformací φ a zatížením krouticím momentem, $\varphi = \text{const} \cdot M_x$.

Úhel zkroucení φ je přímo úměrný délce a nepřímo úměrný čtvrté mocnině poloměru, tedy $\varphi \sim l/r^4$, proto se tenká dlouhá vlákna (např. křemenná) i malou dvojicí značně zkroutili. Toho se využívá k měření malých dvojic; příkladem je zjišťování rovnosti tíhové a setrvačné hmotnosti, o němž jsme se zmínili v čl. 2.2.5.

*) Úhel γ má malou hodnotu i při velkém zkroucení, pokud je průměr zkrucované tyče malý proti její délce. Např. při zkroucení drátu o poloměru $r = 0,5 \text{ mm}$ a délce $l = 500 \text{ mm}$ o plný úhel $\varphi = 2\pi$ je $\gamma = \frac{r\varphi}{l} = \frac{0,5 \cdot 2\pi}{500} = \frac{\pi}{500}$, takže $\gamma = \frac{180^\circ}{500} = 0,36^\circ = 20'$.

Chování materiálu z hlediska jeho elastických vlastností charakterizují moduly pružnosti v tahu E a ve smyku G a Poissonova konstanta m , popř. její převrácená hodnota μ .

Mezi těmito veličinami platí vztah

$$2.6 \quad (17) \quad G = \frac{mE}{2(m+1)} = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Souvislost s třetím modulem, a to modulem objemové pružnosti K , je pak dána vzorcem 2.6 (12).

U pružných těles má Poissonův poměr velikost v mezích $0 < \mu < 1/2$, jak jsme zjistili v čl. 2.6.2. Vzhledem k tomu plyne z hořejšího vztahu pro modul pružnosti ve smyku obecně

$$\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}.$$

Hodnoty v tab. (2.6) I, zjištěné měřením, potvrzují tento teoretický závěr.

Odvození hořejších vztahů lze provést takto: Na krychli o hraně rovné 1 působí v jednom směru normálové napětí σ_n , takže se deformuje způsobem, naznačeným na obr. (2.6) 9b. Podle 2.6 (9) nabývají hrany krychle délek $(1 + \varepsilon)$, $(1 - \eta)$, $(1 - \eta)$, jak je na obr. b uvedeno.

Deformaci krychle můžeme také popsat změnou γ původně pravého úhlu, který svíraly stěny hranolu $ABCD$ v krychli. Podle obr. b je

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right)} = \frac{1 - \eta}{1 + \varepsilon},$$

přičemž jsme použili známého vztahu pro tangens součtu dvou úhlů. Poměrné posunutí γ je velmi malé, takže můžeme položit $\operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) \approx \frac{\gamma}{2}$; avšak i poměrné deformace ε a η jsou velmi malé, takže vynecháme-li jejich vzájemné součiny, dostaneme z hořejšího vztahu

$$2.6 \quad (18) \quad \gamma \approx \varepsilon + \eta = \frac{m+1}{mE} \sigma_n,$$

přičemž jsme hned dosadili z 2.6 (7) a (8).

Deformace γ vznikne také, působí-li na stěnách hranolu $ABCD$ tečná napětí τ (obr. a), která určíme takto:

Na polovinu stěny krychle o ploše $S = 1/2$ působí síla $F = \sigma_n S = \sigma_n/2$ (obr. c). Stejná síla působí na stěnu AB hranolu. Její průmět do této stěny je tečná síla $F_t = F \cos \frac{\pi}{4} = \frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma_n}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$, která je velmi malá. Dělíme-li tuto tečnou sílu plošným obsahem stěny $\frac{1}{\sqrt{2}}$, dostaneme

$$F_t / \frac{1}{\sqrt{2}} = \sigma_n/2.$$

Dosadíme do 2.6 (18), dostaneme vzhledem k Hookovu zákonu pro smyk $\tau = G\gamma$ vztah moduly pružnosti ve smyku a v tahu.

2.7. Ráz těles

2.7.1. Přehled úloh o rázu

Pohybový stav těles se spojitě mění s časem, takže souřadnice jednotlivých bodů tělesa a jejich derivace jsou spojitě a konečně funkce času. Setkají-li se však za pohybu pevná tělesa, takže si vzájemně ve svých pohybech překážejí, pozorujeme prakticky náhlé změny rychlosti těles co do směru i velikosti. Při těchto dějích, kterým říkáme *nárazové*, jsou

přesněji řečeno dráhy některých bodů velmi značně zakřivené a zrychlení nabývá značných hodnot. Proto se projeví znatelná změna rychlosti za velmi krátkou dobu.

Změně rychlosti tělesa je úměrná změna hybnosti tělesa, která je podle 2.2 (48) rovna impulsu síly, tj. součinu síly a doby jejího působení, kdyby síla během svého působení byla stálá. Z toho plyne, že náhlou změnu rychlosti tělesa způsobují značně velké síly, jejichž účinek však trvá jen krátkou dobu. Tyto síly, které vzniknou a vzápětí zase zaniknou, nazýváme *nárazovými silami*. Proti nim jsou „obyčejné síly“ jako tíže a různé odpory prostředí nepatrné, takže změna pohybového stavu srážejících se těles způsobená „obyčejnými silami“ je zanedbatelná proti změně způsobené silami nárazovými. Nárazové síly mezi dvojicí těles splňují však v každém okamžiku princip akce a reakce, a jsou to vlastně *vnitřní síly*, které působí v soustavě hmotných bodů tvořících srážející se tělesa. Jednotlivé části soustavy jsou tedy vystaveny jen působení vnitřních sil, zatímco vnější síly, např. tíže, se prakticky neprojevují, to znamená, že příslušnou soustavu můžeme chápat jako dynamicky izolovanou. Podle obou impulsových vět (čl. 2.4.2) vyznačuje se izolovaná soustava stálou celkovou hybností a stálou celkovou točivostí. Během působení nárazových sil platí tedy tyto naprosto obecné věty:

Vektorový součet hybností obou těles se při rázu nemění.

Vektorový součet točivostí obou těles se při rázu nemění.

Tyto věty můžeme vyslovit také takto:

2.7 (1) *Celková hybnost obou těles po rázu je rovna jejich celkové hybnosti před rázem.*

2.7 (2) *Celková točivost těles po rázu je rovna jejich točivosti před rázem.*

Máme-li ale sledovat pohyb jednotlivých těles uvnitř jejich soustavy, která je jako celek izolována, nestačí k tomu uvedené obecné věty. K tomu je třeba aplikovat obě impulsové věty zvlášť na jednotlivá tělesa, z jejichž stanoviska jsou ovšem nárazové síly vnější síly. Nazveme-li tedy obecně impuls krátkodobé nárazové síly *nárazem*, platí podle I. impulsové věty pro každé těleso v příslušné soustavě, že *nárazová změna hybnosti tělesa (změna hybnosti jeho těžiště) je rovna celkovému vnějšímu nárazu*

2.7 (3) $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \mathbf{I}.$

Označíme-li $\mathbf{L}$ výsledný moment nárazové síly kolem těžiště, který stručně nazveme *točivý náraz*, dostaneme z II. věty impulsové další vektorovou rovnici

2.7 (4) $\mathbf{b} - \mathbf{b}_0 = \mathbf{L},$

která říká, že *nárazová změna točivosti pevného tělesa je rovna výslednému točivému nárazu*. Obě rovnice, které při aplikaci na jednotlivá tělesa musí ovšem vyhovovat obecným větám 2.7 (1) a (2) pro soustavu jako celek, jednoznačně určují změny pohybu uvnitř soustavy, způsobené nárazovými silami.

Obecný problém rázu je tedy tento: Jsou dána dvě pevná tělesa (nebo více) známého rozložení látky i mechanických vlastností a je dán jejich pohybový stav v okamžiku před rázem. Máme určit průběh rázu od prvního dotyku těles až do jejich odloučení, tj. rychlosti a deformace těles a velikosti i směr nárazových sil a dvojic při styku těles. Úplným řešením této úlohy byl by ovšem určen i pohyb těles po rázu, doba jeho trvání nebo i trvalé deformace a oscilace těles, která by se tedy po rázu nepohybovala jako tuhá tělesa stálého tvaru. Úplné řešení rázu je však jedno z nejsložitějších z celé mechaniky, a vymyká se proto z rámce našich výkladů. Omezíme se proto jen na *klasický problém*, který záleží v určení pohybu obou těles po rázu. Obecné řešení tohoto problému vyžaduje určení tří složek rychlosti těžiště každého z těles a tří složek rotace kolem těžiště. K řešení obecného problému je tedy zapotřebí celkem 12 rovnic. Obecná úloha se ovšem zjednoduší ve zvláštních případech, které můžeme roztrždit podle okolností, na nichž závisí podstatně průběh rázu:

- a) na rozložení hmotnosti v obou tělesech,
- b) na jejich vzájemném pohybu před samým rázem,
- c) na jejich konstantách pružnosti a
- d) na povaze jejich povrchů.

Předpokládáme, že se tyto povrchy na počátku rázu dotknou v jediném bodě O , který nazveme *bodem rázu* [obr. (2.7) 1].

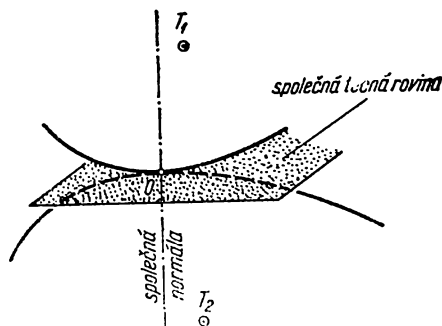
Středový (centrický) ráz nastane, jsou-li tvar a počáteční poloha těles takové, že obě těžiště T_1 a T_2 leží na společné normále v bodu rázu. Tuto normálu nazveme *osou rázu*. Tak je tomu vždy např. v důležitém případě rázu dvou koulí. V opačném případě je ráz *výstředný (excentrický)*.

Přímý ráz je vyznačen tím, že relativní rychlost, kterou se k sobě blíží před rázem povrchy těles v okolí bodu rázu, leží ve společné normále. Je-li relativní rychlost skloněna k této normále, říkáme, že *ráz je šikmý*. I v tomto případě může se úloha značně zjednodušit, je-li rovina vedená společnou normálou a vektorem relativní rychlosti rovinou souměrnosti pro obě tělesa. Pak v této rovině leží i jejich hmotné středy a říkáme, že ráz je *rovinný*. K jeho řešení stačí 8 nezávislých rovnic.

To jsou zvláštní případy, vyznačené speciálními okolnostmi a), b). Další kategorie c) dává důležité hledisko třídění rázu podle pružných vlastností těles. Při každém rázu vznikají v obou tělesech deformace (přetvoření), které dávají vznik deformačním silám. Je zřejmé, že chování všech skutečných těles při rázu je omezeno dvěma krajními případy: *rázem nepružným*, při kterém všechny deformace vzniklé při rázu jsou trvalé (plastické), a *rázem pružným*, při němž tělesa nabudou svého původního tvaru právě na konci rázu, kdy všechny deformace zcela vymizí. Skutečná tělesa jsou pak nedokonale pružná (polopružná).

Zbývá promluvit o kategorii d), tj. o vlivu povrchu těles na povahu nárazových sil. Je jasné, že při šikmém rázu, kdy tečná složka rychlosti povrchů obou těles není rovna nule, obecně vznikne *tečná síla nárazová*, jejíž velikost bude omezena drsností těles. Jen u těles dokonale hladkých nevzniknou ani při šikmém rázu tečné deformace. Drsná tělesa se však nejen stlačí ve směru kolmém k povrchu, ale také se povrchové vrstvy v okolí bodu rázu posunou. Tyto deformace z počátku porostou a po dosažení maxima se budou následkem vzpružování zmenšovat — budou mít tedy podobný průběh jako stlačení. *Drsná tělesa působí na sebe proto také tečným nárazem.*

Konečně může vzniknout i jistá dvojice tření, jestliže tělesa před rázem mají rozdílné rotace kolem společné normály. Při rázu se totiž zdeformovaná tělesa dotýkají v jisté „styčné plošce“, která je u pevných těles sice nepatrná, ale přece jen konečná. Vzniká značný tlak, protože rozměry plošky (obecně eliptické) jsou malé, a proto dvojice sil tření není zanedbatelná. Při takovém *vrtném rázu* se nejbližší části těles zkrucují a po dosažení maxima zase vzpružují, což může mít podstatný vliv na výsledný pohyb obou těles.



Obr. (2.7) 1. Bodový styk těles na počátku rázu

2.7.2. Přímý středový ráz

Nejjednodušší úlohou klasického rázu je přímý, středový ráz těles za předpokladu, že se tělesa chovají před rázem i po něm jako dokonale tuhá a že konají posuvný pohyb. Obvykle se mluví o *rázu koulí*, který je vždy středový a je zároveň přímý, pohybují-li se před rázem obě těžiště po téže přímce, která je ovšem osou rázu [obr. (2.7) 2]. Hmotnosti obou koulí

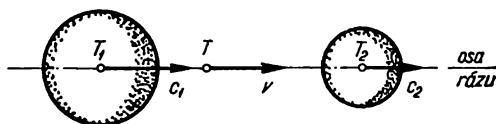
označíme m_1 a m_2 a jejich rychlosti před rázem c_1 a c_2 počítáme kladně ve směru pohybu jejich společného těžiště T . Rychlosti koulí v okamžiku, kdy ráz skončí (tj. v okamžiku, kdy na sebe přestanou silově působit), označíme v_1 a v_2 . Podle obecné věty 2.7 (1) je celková hybnost obou těles po rázu a před ním stejná a je rovná hybnosti těžiště, které se během celého rázu pohybuje stálou rychlostí v jako hmotný bod, jehož hmotnost je rovna celkové hmotnosti soustavy obou těles. Platí tedy obecně

2.7 (5)

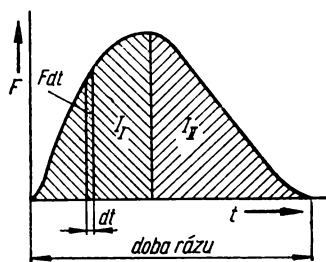
$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v,$$

odkud plyne rychlost v těžiště obou srážejících se těles.

Tato jediná rovnice nestačí však obecně k určení rychlostí v_1 a v_2 těles po rázu. Podle 2.7 (3) je třeba přihlížet také k silovému působení mezi tělesy, z něhož nám však postačí jen kvalitativní popis, plynoucí z přímého názoru.*) V okamžiku, kdy se tělesa dotknou, je síla mezi nimi nulová, roste však se vzájemnou deformací těles [obr. (2.7) 3]. Současně se zmenšuje relativní rychlost těžišť obou těles, až v jistém okamžiku klesne na nulu. V tomto okamžiku se obě těžiště T_1 a T_2 pohybují stejnou rychlostí, rovnou rychlosti v těžiště T soustavy obou těles. Deformace obou těles nabyly maximální hodnoty a také síly, jimiž tělesa na sebe působí, dosáhly svého vrcholu. Jsou-li tělesa aspoň částečně pružná, pokračuje ráz pochodem, který nazýváme *vzpružováním*. Ve snaze zbavit se své deformace působí tělesa na sebe dále silami téhož smyslu, jimiž se v pravém slova smyslu odstrkují.



Obr. (2.7) 2. Přímý ráz koulí



Obr. (2.7) 3. Schéma časového průběhu nárazové síly

Přitom se deformace zmenšují, síly opět klesají, roste však zase relativní rychlost těžišť obou těles, ovšem v opačném smyslu než při vzájemném stlačování. Můžeme také říci, že relativní rychlost středů koulí, která se až do největšího stlačení zmenšovala z hodnoty $c_r = c_1 - c_2 > 0$ až na nulu, bude se dále zmenšovat a nabude hodnot záporných, které porostou až do konce rázu.

Průběh rázu můžeme tedy rozdělit na dvě fáze I a II. První zahrnuje stlačování až do okamžiku, kdy obě tělesa mají společnou rychlost v a stlačení je maximální, v druhém období pak probíhá vzpružování. Označíme-li F_{21} sílu, kterou druhá koule působí na první kouli, pak první koule je v jednotlivých fázích rázu vystavena impulzům

$$2.7 (6) \quad I_I = \int_I F_{21} dt, \quad I_{II} = \int_{II} F_{21} dt.$$

Pro sílu F_{12} , kterou první koule působí na druhou, platí podle principu akce a reakce $F_{12} = -F_{21}$, takže impulsy na druhou kouli jsou proto

$$2.7 (7) \quad I'_I = \int_I F_{12} dt = -I_I, \quad I'_{II} = \int_{II} F_{12} dt = -I_{II}.$$

*) Teoreticky lze časový průběh kolmé tlaku a stlačení těles (koulí) během přímého rázu počítat z dosti složitých vzorců Hertzových, které byly zhruba experimentálně potvrzeny pro velmi pružné látky, jako je ocel a sklo.

V první fázi rázu změní se rychlosti c_1 a c_2 koulí na rychlost v , v druhé fázi tato společná rychlost přejde v rychlosti v_1 a v_2 , které mají koule na konci rázu. Příslušné změny hybnosti podle 2.7 (3) pak jsou

$$\begin{aligned} 2.7 (8) \quad m_1(v - c_1) &= I_I, & m_1(v_1 - v) &= I_{II}, \\ m_2(v - c_2) &= I'_I = -I_I, & m_2(v_2 - v) &= I_{II} = -I_{II}. \end{aligned}$$

Tyto impulsy jsou úměrné plochám příslušným oběma fázím rázu pod křivkou na obr.(2.7) 3, znázorňující časový průběh nárazové síly. Obecně nejsou stejně velké, protože křivka nemá souměrný průběh kolem svého maxima, nýbrž vlivem nedokonalé pružnosti, již se vyznačují všechna reálná tělesa, je její klesání více či méně rychlejší než její růst, a to podle povahy těles; práce nárazových sil nejví se tedy jen v deformační energii, která by byla schopná úplné a stejně rychlé zpětné přeměny v energii kinetickou, ale zčásti se v tělesech mění v teplo. Projevuje se tu také dopružování, při němž část deformace mizí rychle, ale zbytek teprve během doby, kdy tělesa už nejsou v kontaktu, takže tato část vypružování nemá na průběh rázu už žádný vliv.

Je zřejmé, že vzpružování bude tím lepší, čím více se časový průběh nárazové síly v druhé fázi rázu blíží zrcadlovému obrazu časového průběhu v první fázi rázu, tj. čím souměrnější je tento průběh vzhledem k pořadnici svého vrcholu. Potom se také velikosti impulsů I_I a I_{II} , znázorněných příslušnými plochami na obr. (2.7) 3, navzájem blíží a v krajním případě dokonalého vzpružování jsou přesně stejně velké, tj. $I_{II} = I_I$. Protože k určení rychlostí v_1 a v_2 koulí po rázu nepotřebujeme znát přesný časový průběh nárazové síly, ale jen velikosti impulsů, jak plyne ze vztahů 2.7 (8), je nasnadě vyjádřit vliv nedokonalé pružnosti těles na výsledek rázu poměrem k impulsů nárazových sil v obou fázích rázů, tedy

$$2.7 (9) \quad k = \frac{I_{II}}{I_I}.$$

Dělíme-li rovnice 2.7 (8) příslušnými hmotnostmi a odečteme-li ty, které jsou napsané pod sebou, navzájem od sebe, dostaneme dělením obou rozdílů

$$2.7 (10) \quad \boxed{\frac{v_1 - v_2}{c_1 - c_2} = -\frac{I_{II}}{I_I} = -k,}$$

tzn. poměr k je roven také záporně vzatému poměru $v_r : c_r$ relativních rychlostí koulí na konci a na začátku rázu.

Veličinu k nazval Newton *součinitelem restituce*; my jí budeme říkat stručně *vzpruživost*, protože se tím více blíží jedné, čím dokonaleji se tělesa vrací do původního tvaru.

Newton se domníval, že vzpruživost je konstanta materiálu a že je pro dvě tělesa z týchž látek stálou veličinou (při téže teplotě). Experimenty však nepotvrdily tak jednoduchý zákon, který by vyplýval ze stálosti tohoto součinitele a který by zněl:

Relativní rychlost nedokonalé pružných těles se přímým rázem zmenší ve stálém poměru a změní znaménko. Ukazuje se totiž, že vzpruživost je stálá jen přibližně a závisí nejen na velikosti a tvaru těles, ale ve značné míře také na prudkosti rázu. Čím prudší je ráz, tím větší jsou deformace a tím větší část těchto deformací zůstává trvalou. Proto vzpruživost klesá s rostoucí relativní rychlostí. Novější pokusy pak ukázaly, že k s klesající relativní rychlostí roste a blíží se jedné, takže můžeme říci, že pro dosti malé rychlosti chovají se všechna tělesa přibližně jako dokonale pružná.

Za předpokladu, že známe vzpruživost k , je rovnicemi 2.7 (5) a (10) klasický problém přímého rázu koulí již vyřešen, neboť z obou rovnic dostaneme jednoduchým počtem hledané rychlosti v_1 a v_2 obou koulí po rázu

$$2.7 (11) \quad v_1 = \frac{(m_1 - km_2)c_1 + (1+k)m_2c_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{(1+k)m_1c_1 + (m_2 - km_1)c_2}{m_1 + m_2}.$$

K zjišťování vzpruživosti látek je důležitý případ *rázu koule na pevnou stěnu*. Můžeme jej chápat jako ráz koule na druhou kouli, která je v klidu a jejíž hmotnost m_2 je velmi značná proti hmotnosti m_1 první koule. Při konečné hustotě musí pak být i poměr druhé koule velmi velký, takže jde pak o ráz koule na pevnou stěnu (přesněji řečeno na „poloprostor“). Položíme proto ve vztazích 2.7 (11) $c_1 = 0$, $m_2 \rightarrow \infty$, a tedy $m_1/m_2 \rightarrow 0$. Tak dostaneme

$$2.7 (12) \quad v_1 = \frac{(m_1/m_2 - k) c_1}{m_1/m_2 + 1} = -kc_1, \quad v_2 = 0.$$

To značí, že koule odskočí zpět rychlostí kc_1 , tedy rychlostí zmenšenou v poměru k . Je-li pevná stěna vodorovná a spadne-li na ni koule z výšky H , bude podle známého vztahu

$$c_1 = \sqrt{2gH}, \quad v_1 = -kc_1 = -k\sqrt{2gH}.$$

Koule tedy odskočí do výšky h dané vztahem

$$\sqrt{2gh} = -v_1;$$

dělením obou posledních rovnic vypočteme vzpruživost

$$k = -\frac{v_1}{c_1} = \sqrt{\frac{h}{H}}.$$

Této metody se skutečně užívá v technické praxi k měření vzpruživosti různých látek, zvláště k zjištění tzv. *dynamické pružnosti* umělých látek. Vzorky těchto látek ve tvaru destiček se zkoušejí tak, že se na ně nechá dopadnout ocelová kulička z výše H , změří se h a vypočte k . Není to vlastně vzpruživost umělé látky samé, ale vzpruživost při tomto rázu. Experimentálně však bylo zjištěno (a teoreticky zdůvodněno), že rychlost v_1 při rázu velmi pevného tělesa s tělesem poddajným (měkkým) je prakticky dána vzpruživostí tělesa měkkého, a proto můžeme hodnotu k v tomto případě pokládat za charakteristickou pro vzpružování zkoušené desky.

Vyšetřme ještě oba krajní případy přímého rázu koulí, z nichž první se vztahuje na *dokonale nepružná tělesa*. Deformace těchto těles jsou trvalé, a proto jakmile se rychlosti těles při rázu vyrovnají, přestanou na sebe silově působit a zůstávají trvale v dotyku. Ráz se tedy omezuje jen na první fázi, což vyjadřuje vzpruživost $k = 0$. Z obecných vztahů 2.7 (11) pak vychází pro společnou rychlost po rázu

$$2.7 (13) \quad v_1 = v_2 = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} = v.$$

Vidíme, že v tomto jednoduchém případě je pohyb obou koulí po rázu určen jedinou rovnicí 2.7 (5), která plyne z věty o zachování hybnosti.

I když neexistují tělesa dokonale nepružná, je dosti látek do té míry tvárných (plastických), že můžeme pro ně dobře užít rovnice 2.7 (13) a vypočítat z ní také ztrátu kinetické energie ΔW_k , k níž vždy dochází při nepružném rázu:

$$\Delta W_k = \frac{1}{2} m_1 c_1^2 + \frac{1}{2} m_2 c_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2)^2,$$

dosadíme-li za v ze vztahu 2.7 (13). Úbytek pohybové energie je tedy vždy kladný a spotřebuje se hlavně na deformační práci při stlačení koulí, projevující se jejich zahřátím, nehledíme-li k některým jiným ztrátám, způsobeným např. vznikem zvukových vln, apod. Obvykle posuzujeme v mechanice nepříznivě ztráty kinetické energie, ale v některých případech, kdy si přejeme změnit tvar plastických látek, užíváme právě rázu k tomu, abychom pohybovou energii měnili v energii deformační, např. při kování, tlučení, zatloukání pilot, hřebíků apod. Ve všech takových případech spotřebujeme značnou pohybovou energii kladiva, bucharu aj. nepružným rázem na deformační práci, jež způsobí změnu tvaru kovaného kusu nebo se projeví vniknutím piloty hlouběji do půdy, která se tím deformuje. Při kování je ovšem $c_2 = 0$, takže

$$\Delta W_k = \frac{1}{2} m_1 c_1^2 - \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}.$$

odkud je zřejmé, že deformační práce je tím větší, čím větší hmotnost m_2 má kovaný kus i s kovádkou, na které spočívá.

Druhý krajní případ je ráz *dokonale pružných těles*, která se vyznačují tím, že ještě během druhé fáze rázu se vrátí přesně do původního tvaru, takže veškerá deformační energie se opět uvolní v plné hodnotě ve formě energie kinetické. Impulsy příslušející oběma fázím rázu jsou stejně velké $I_{II} = I_I$, což vyjadřuje vzpruživost $k = 1$. Sečtením rovnic 2.7 (8) pro touž kouli ihned zjistíme, že celkový náraz, který dostane každá z koulí při dokonale pružném rázu, je dvakrát větší než za stejných podmínek při nepružném rázu, který se omezuje jen na první fázi. Ze vztahu 2.7 (10) pro $k = 1$ plyne $v_1 - v_2 = -(c_1 - c_2)$ čili *relativní rychlost pružných koulí změní při rázu jen znaménko*. Rychlosti v_1 a v_2 obou koulí po rázu dostaneme opět ze vztahu 2.7 (11), položíme-li v nich $k = 1$, tedy

$$2.7 (14) \quad v_1 = \frac{2m_2c_2 + (m_1 - m_2)c_1}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{2m_1c_1 + (m_2 - m_1)c_2}{m_1 + m_2}.$$

Snadno bychom vypočetli, že kinetická energie po rázu zůstává stejná jako před rázem, tzn. že pro dokonale pružný ráz platí věta o zachování mechanické energie, což ukazuje na to, že je to děj ryze mechanický.

Ze vzorců 2.7 (14) plynou některé známé výsledky. Jsou-li např. obě koule stejně těžké ($m_1 = m_2$), vyjde

$$v_1 = \frac{2m_1c_2}{2m_1} = c_2, \quad v_2 = c_1.$$

Stejně těžké pružné koule si při přímém rázu vymění rychlosti.

Kdyby druhá koule byla před rázem v klidu ($c_2 = 0$), vyšlo by při různých těžkých koulích

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} c_1, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} c_1.$$

Odtud vidíme, že těžší koule po nárazu na lehčí klidnou pokračuje v pohybu stejným směrem. Narazí-li na stejně těžkou klidnou kouli, zastaví se a odevzdá svou rychlost klidné kouli. Tento výsledek znal již Jan Marek v XVII. století.

Je-li konečná hmotnost m_2 velmi značná proti hmotnosti první koule, takže můžeme poměr $m_1 : m_2$ zanedbat proti 1, odskočí první koule zpět stejnou rychlostí a druhá koule zůstane v klidu, neboť z hořejších vztahů plyne $v_1 = -c_1$, $v_2 = 0$. To je vlastně případ rázu koule na pevnou stěnu, o němž jsme se už zmínili.

2.7.3. Šikmý ráz

V předcházejícím článku jsme probrali nejjednodušší případy rázu přímého, při němž jsme také předpokládali, že ráz je zároveň centrický (středový). Při rázu přímém nezáleží na drsnosti povrchů těles a předmětem tohoto článku bude stručný rozbor rázu šikmého, při kterém se uplatňuje také vliv tření. Budeme se zabývat zase jen nejjednoduššími úlohami a kromě toho budeme nejprve předpokládat, že povrchy těles jsou tak hladké, že síly tření se dají pomíjet, že tedy jde v tomto případě o tělesa *dokonale hladká* nebo stručněji *hladká*.

Šikmý ráz hladkých těles lze snadno rozřešit na základě výsledků odvozených pro ráz přímý, jak ukážeme nejprve na případě rázu koule na pevnou stěnu.

Šikmou rychlost koule před rázem c rozložíme na tečnou složku c_t a na kolmou složku c_n , a uvažujeme takto: Při dokonale hladkosti povrchů nevznikne mezi nimi tečná síla, a proto tělesa mohou na sebe působit jen kolmým tlakem, který bude záviset jen na kolmé složce relativní rychlosti. Vzhledem k tomu, že samozřejmě nevzniknou ani tečné deformace těles, bude mít stlačení stejný průběh jako při přímém rázu rychlostí c_n . Z toho plyne, že tečná složka rychlosti se nemění, kdežto kolmá složka se změní ve stejném poměru k jako při rázu přímém. Jsou tedy složky rychlosti hladké koule po rázu na stěnu

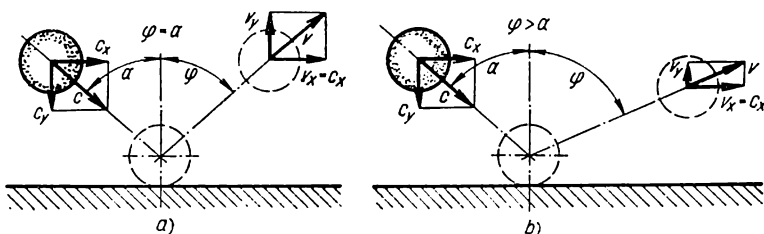
$$v_t = -kc_t, \quad v_n = c_n$$

v soulase s 2.7 (12). Z obr. (2.7) 4 je zřejmé, že úhel odrazu φ polopružné koule od hladké stěny je větší než úhel dopadu α . Oba úhly byly by přesně stejné, kdyby byla koule i stěna dokonale pružná a hladká.

Šikmý ráz dvou stejně těžkých pružných a hladkých koulí je zajímavý v případě, kdy jedna z nich je před rázem v klidu. Pak víme, že obě koule si vymění kolmé složky svých rychlostí a jejich tečné složky se nezmění. Jak je zřejmé z obr. (2.7) 5, odskočí po rázu obě koule *ve směrech k sobě kolmých* rychlostmi rovnými tečné a kolmé složce rychlosti pohyblivé koule. Četné příklady takového rázu pozorujeme při srážkách nejmenších částic látky, např. protonů nebo částic α ve Wilsonově mlžné komoře. Z obr. (2.7) 5 je také zřejmé, že kinetická energie obou koulí po rázu je skutečně rovna kinetické energii první koule před rázem:

$$W_k = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2) = \frac{1}{2} m (c_{1n}^2 + c_{1t}^2).$$

Předpokládali jsme mlčky, že koule před rázem i po rázu konaly pohyb ryze posuvný. Kdyby se jedna z koulí nebo obě také otáčely kolem svých středů, byla by jejich pohybová energie rovna součtu energie posuvného a rotačního pohybu. Protože však jsou koule hladké, jsou nárazové síly v bodě dotyku kolmé k oběma povrchům, a procházejí tedy hmotnými středy obou koulí. Proto je točivý náraz kolem těžiště, působící na každou z koulí, roven nule, a podle věty o zachování točivosti jsou rotace obou koulí po rázu stejné jako před rázem, a jejich rotační

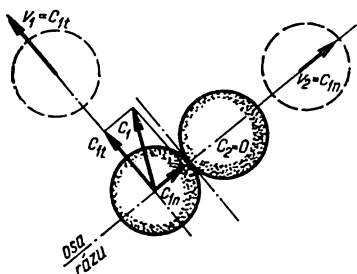


Obr. (2.7) 4. Šikmý ráz na stěnu: *a* — dokonale pružný, *b* — polopružný

energie se tedy rázem nemění. Je-li tedy pohyb obou koulí před rázem ryze posuvný, bude tomu tak i po rázu. Tuto vlastnost má ovšem obecně jen středový ráz hladkých těles.

Šikmý ráz drsných těles. Mezi tělesy hladkými vznikají i při šikmém rázu jen kolmé nárazové síly, které způsobují kolmé stlačení obou těles v okolí styčného místa. U drsných těles přistupují k těmto silám také tečné nárazové síly, které brání vzájemnému styku těles a zároveň způsobují i tečné deformace obou těles v okolí místa styku. Proto je výsledný náraz mezi tělesy šikmý a má ovšem pro obě tělesa stejnou velikost a opačný směr. Na obr. (2.7) 6 jsou vyznačeny kolmé složky tohoto nárazu I_n a $-I_n$ a složky tečné I_t a $-I_t$. Je zřejmé, že obecně nejsou momenty šikmých nárazových sil kolem hmotných středů těles rovny nule, a to ani v případě rázu středového, kdy tyto středy leží na společné normále (jako u koulí). Proto se mění i rotace těles kolem těžiště a vzniká složitý průběh rázu, jehož teorie je velmi nesnadná. Ukážeme však na dvou jednoduchých typických pokusech, které lze názorně vyložit elementární úvahou, k jakým jevům dochází při rázu drsných těles.

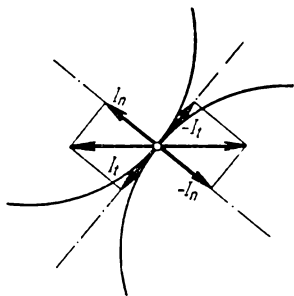
Ráz kladiva na roztočený kotouč. Na pryžový kotouč, otáčivý kolem pevné vodorovné osy *O*, nechme dopadnout dřevěné kladivo, otáčivé rovněž kolem pevné vodorovné osy *O'* [obr. (2.7) 7]. Je-li kladivo upraveno tak, že rovina jeho spodní stěny prochází (v libovolné poloze) osou *O'*, je ráz kladiva na klidný kotouč přímý a kotouč po odskoku kladiva zůstává v klidu. Roztočíme-li však kotouč před rázem, vznikne ráz šikmý, při kterém síly tření působí na kotouč točivým nárazem. Proto se točivost kotouče změní a snadno pochopíme ze zákonů tření, že při stejné prudkém nárazu může točivý náraz dosáhnout jen jisté maximální velikosti. Proto při rychlé rotaci se točivost kotouče zmenší nejvýše o jistou hodnotu, příslušející této maximální velikosti. Je-li však točivost kotouče před rázem menší než točivý náraz tření, zastaví se kotouč ještě před koncem rázu a vlivem vzpružování tečné deformace roztočí se v opačném smyslu. Je to děj zcela obdobný stlačení a restituci míče, který narazí na pevnou stěnu. Kotouč se tedy může po rázu točit v původním nebo i v opačném smyslu, nebo za vhodně volené rychlosti před rázem se po rázu netočit. Právě popsany jev se nepříznivě uplatňuje při nárazech kol podvozku letadla na zem při přistávání. Není-li postaráno o vhodné roztočení kol již před prvním dotykem se zemí, zvyšuje se zpětnou rotací kol točivý náraz, který způsobuje klopení letadla dopředu.



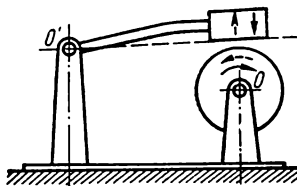
Obr. (2.7) 5. Šikmý ráz dvou hladkých koulí

Ráz roztočeného míče na drsnou desku. Roztočíme pryžový míč kolem svislé osy a pustíme jej na pevnou desku. Je-li deska dosti drsná a volíme-li dostatečnou výšku pádu, pozorujeme, že míč po odskoku se otáčí v opačném smyslu než před rázem [obr. (2.7) 8]. Při prudké rotaci a při malé výšce pádu se ovšem úhlová rychlost míče jen zmenší, ale nezmění směr. Je zřejmé, že výklad jevu je stejný jako v předešlém případě. Stačí si uvědomit, že při rázu vznikne vrtným třením točivý náraz kolem svislé osy, jehož velikost je zase omezena součinitelem tření. Zároveň nastává zkrut, který dosáhne maxima v okamžiku, kdy se rotace míče zastaví. Torzní deformace míče se však vzpružováním ihned začne zmenšovat, míč nabývá původního nezkrouceného stavu. Nastane-li to ještě při dotyku míče s deskou, roztočí se míč v opačném smyslu než před rázem.

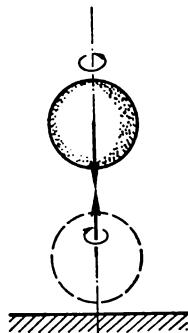
Uvedli jsme tyto dva pokusy s pryžovými tělesy, na nichž se dají dobře pozorovat typické jevy. Podobné děje však nastávají u všech látek, jak lze potvrdit měřením.



Obr. (2.7) 6. Nárazové síly při šikmém rázu dvou těles



Obr. (2.7) 7. Ráz kladiva na roztočený kotouč



Obr. (2.7) 8. Vrtný ráz koule na stěnu

2.8. Mechanika kapalin a plynů

2.8.1. Obecné vlastnosti kapalin a plynů

Kapaliny a plyny, nazývané souborně *tekutiny*, liší se z hlediska vnitřní struktury od látek pevného skupenství tím, že jejich molekuly nejsou už vázány na neproměnné rovnovážné polohy, ale mohou se navzájem volně posouvat. Tím lze vysvětlit řadu vlastností, jimiž se i v makroskopickém měřítku liší od pevných těles.

V pevném tělese, podrobeném vnějšímu silovému působení, vzniká jednak napětí normálové orientované kolmo k ploše dvou částí tělesa, které z obou stran k této ploše přiléhají, jednak napětí tečné v příslušné ploše. Stejně je tomu obecně i v tekutinách, jejichž molekuly také na sebe silově působí. Normálová napětí se v pevných tělesech mohou vyskytnout jako tahy nebo tlaky, přičemž látka odolává zhruba stejně oběma směrům namáhání. Naproti tomu tekutiny nekladou prakticky žádný odpor proti vzájemnému oddělení jednotlivých částí, tedy tahům, a proto je rozumné u tekutin nemluvit o normálovém napětí σ_n , ale rovnou o *tlaku* p , definovaném jako podíl síly, která působí kolmo k dané ploše a velikosti této plochy, tedy

2.8 (1)

$$p = \frac{F}{S}.$$

Sílu F nazýváme *tlakovou silou*, abychom ji odlišili od tlaku p , který je měrnou veličinou. Plocha S může být buď na povrchu (okraji) tekutiny (příslušný tlak je pak *vnější tlak*, jímž jiná tělesa působí na tekutinu, nebo jímž obráceně podle principu vzájemného působení tekutina působí na tato tělesa), nebo to může být plocha, v níž se uvnitř tekutiny stýkají

její jednotlivé části (příslušný tlak je pak *vnitřní tlak* v tekutině). Obecně nemusí být všude v tekutině stejně velký tlak; potom je místní tlak ovšem určen diferenciálním podílem $p = dF/dS$. O jednotkách tlaku pojednáme až na konci následujícího článku.

Tečným napětím vznikají v tělesech tvarové změny, jak jsme poznali v čl. 2.6.1. V tekutině jsou však částice snadno vzájemně pošinutelné, nejsouce vázány na žádné rovnovážné polohy, nemohou tedy klást trvalý odpor tečným napětím buzeným silami měnícím tvar tekutiny a dají se do vzájemného pohybu, který trvá tak dlouho, dokud tečná napětí nevymizí. *Rovnovážný stav tekutiny* (v tomto stavu jsou jednotlivé části tekutiny proti sobě v klidu) *vyznačuje se tím, že v tekutině nejsou nikde žádná tečná napětí*. Neschopností odolávat delší dobu tečným napětím se tedy vysvětluje, že tekutiny nemají vlastní tvar a přizpůsobují se tvaru nádoby. Přitom kapalina, může-li, vytvoří volnou hladinu, která je kolmá k působícím silám, z nichž nejobvyklejší je zřejmě zemská tíže, naproti tomu plyny, vynikající značnou rozpínavostí, vyplňují celý prostor nádoby, v níž jsou zavřeny, a nemají volný povrch.

S tečnými napětími, která se v tekutině vyskytují, pokud jsou její části v relativním pohybu, souvisí úkazy *vnitřního tření* (*vazkosti*) v tekutině; pojednáme o nich v čl. 2.8.8. Často však není třeba k nim přihlížet, proto se abstrakcí zavádí pojem *ideální tekutiny*, v níž ani za pohybu nejsou tečná napětí.

Rozdíl mezi kapalinami a plyny se projevuje v jejich reakci na vnější tlak, jemuž jsou vystaveny. Kapaliny jsou velmi málo stlačitelné, tzn. jejich *objemová stlačitelnost* γ , definovaná podílem poměrného zmenšení objemu při zvýšení tlaku a tohoto zvýšení tlaku [vzorec 2.6 (11)], je malé číslo, ačkoli je zpravidla větší než u pevných látek, např. kovů. Je třeba citlivých přístrojů, aby se zjistila závislost objemu kapaliny na vnějších silách. Nejde-li o tlaky zvlášť velké, lze kapaliny považovat za nestlačitelné, což odráží pojem *ideální kapalina*, vyznačující se naprostou nestlačitelností, a vzhledem k nadřazenému pojmu „ideální tekutina“ i dokonalou tekutostí, neomezenou při pohybu vnitřním třením. *Kapaliny jsou tedy látky, které mají prakticky stálý objem, ale snadno proměnlivý tvar*. Jakmile vnější tlak na kapalinu povolí, nabude zase přesně původního objemu. Kapaliny jsou tedy *dokonalé pružné*.

Naproti tomu plyny se dají stlačit snadno; jejich objem klesne přibližně na polovinu, vzroste-li vnější tlak na dvojnásobnou hodnotu. S velkou stlačitelností plynů souvisí jejich rozpínavost, o níž jsme se už zmínili. *Plyny jsou tedy látky, u nichž lze nejen snadno měnit jejich tvar jako u kapalin, nýbrž i jejich objem*.

U plynů je třeba k veličinám, charakterizujícím chování plynu, bezpodmínečně připojit i teplotu, která se u nich projevuje mnohem výrazněji než u pevných a kapalných látek, a proto o chování plynů pojednáme podrobněji až v nauce o teple. Při konfrontaci kapalin a plynů v mechanice tekutin vystačíme prozatím se známým experimentálně potvrzeným zákonem *Boyleovým—Mariottovým*, podle něhož objem V plynu, jehož tlak p se mění, avšak teplota zůstává stálá, je nepřímo úměrný tlaku, tedy

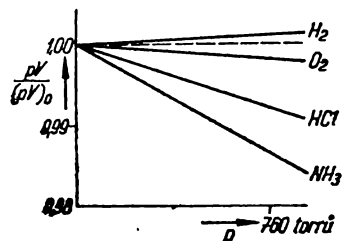
$$2.8 (2) \quad \boxed{V = \frac{\text{const}}{p}} \quad \text{nebo} \quad \boxed{pV = \text{const.}}$$

Má-li plyn hmotnost m , můžeme objem plynu nahradit jeho hustotou podle vztahu $\rho = m/V$. Protože hmotnost plynu se při jeho změnách zachovává, můžeme ji zahrnout do konstanty v hořejším vztahu a vyjádřit Boyleův zákon ve tvaru

$$2.8 (3) \quad \rho = \text{const } p,$$

tzn. nemění-li se teplota plynu, je jeho hustota přímo úměrná tlaku. Konstanta úměrnosti ovšem závisí na teplotě plynu.

Z přesných měření plyne, že skutečné plyny se neřídí zcela přesně Boylovým zákonem. Odchylky se nejnápadněji projeví, vyšetřujeme-li experimentálně závislost součinu pV na tlaku plynu p při stálé teplotě. Graficky jsou tyto odchylky znázorněny na obr. (2.8) 1, v němž jsou na ose pořadnic hodnoty $pV/(pV)_0$, kde $(pV)_0$ je mezní hodnota, k níž se blíží součin pV při velmi malém tlaku. Podle Boylova zákona měl by tento poměr být pro všechny tlaky konstantní a roven 1, což je na obrázku vyznačeno přerušovanou přímkou, rovnoběžnou s osou úseček. Plyn, pro který by to platilo přesně, nazýváme *ideálním*. Z obrázku je však zřejmé, že u skutečných plynů se součin pV liší od mezní hodnoty $(pV)_0$ tím více, čím vyšší je tlak. Nejlépe se Boylovým zákonem řídí kyslík, vodík a hélium, hůře chlorovodík, épavek a nejvíce se odchyluje kysličník uhličitý. Z obrázku plyne dále, že některé plyny jsou stlačitelnější než ideální plyn, tj. pro jejich stlačení je třeba menšího tlaku, než jaký plyne z Boylova zákona. Tak se chovají např. vzduch, kyslík, épavek, kysličník uhličitý a permanentní plyny (což jsou plyny, jejichž kritická teplota je značně nízká) s výjimkou vodíku a hélia. Naopak vodík a hélium se chovají jako méně stlačitelné. Při značně velkých tlacích se pak všechny plyny chovají jako málo stlačitelné.



Obr. (2.8) 1. Odchylky od Boylova zákona u skutečných plynů při teplotě 0 °C

2.8.2. Tlak v tekutinách

Tlak, jímž na malé plošce za relativního klidu proti sobě působí dvě části tekutiny, jež z obou stran k této plošce přiléhají, nazývá se *tlak hydrostatický* (u plynů také *aerostatický*). Vzniká jednak tíží, popř. také setrvačnými silami, jež na tekutinu působí, je-li v klidu vzhledem k neinerciální soustavě (např. v kapalině unášené rotující nádobou), jednak vnějšími silami, jež na tekutinu působí zpravidla prostřednictvím jisté části stěny nádoby (např. pístem ve válci). Tento tlak se řídí známým *Pascalovým zákonem*: *Působí-li na tekutinu vnější tlak pouze v jednom směru, pak uvnitř kapaliny působí v každém místě stejně velký tlak, a to ve všech směrech.*

Tento zákon bezprostředně souvisí se základní podmínkou, že v rovnovážném stavu tekutiny nemohou v ní existovat tečná napětí. Představme si v tekutině, která zcela vyplňuje nějakou nádobu, jistou část oddělenou od ostatní tekutiny kulovou plochou podobně jako při namáhání pevného tělesa na obr. (2.6) 1. Kdyby se při zvýšení tlaku v některém místě nádoby (např. pístem ve válci připojeném k stěně nádoby) kulová plocha přeměnila v elipsoid, znamenalo by to, že v tekutině jsou tečná napětí. Těm však tekutina nemůže klást trvalý odpor, takže buďto elipsoid vůbec nevznikne, jak tomu zajisté je při pomalém zvýšení tlaku, nebo při rychlém zvýšení tlaku sice vznikne, ale částice rychle sledují příslušná tečná napětí, přičemž se elipsoid navrácí do původního kulového tvaru. Ať tak, či onak, za nového rovnovážného stavu zůstává kulová plocha zachována a vlivem stlačitelnosti se jenom změní její poloměr. Pak ale na tuto plochu působí jen stejně velké tlaky všude kolmé k ploše, což znamená, že zvýšení vnějšího tlaku se všude v tekutině projevuje stejně velkým zvýšením tlaku bez ohledu na směr.

Na povrch kapaliny působí při volné hladině jako vnější síla pouze tlak ovzduší, zvaný atmosférický tlak, k němuž v dalším nepřihlížíme. V jiné vodorovné rovině působí na každou částici kapaliny váha všech částic, které jsou nad ní, a takto zatížené částice tlačí ovšem také na sousední částice na všechny strany. Tím se tlak v téže vodorovné rovině šíří na všechny strany až ke stěnám nádoby, které mu svou pevností odolávají. Hydrostatický tlak kapaliny v hloubce h pod hladinou, způsobený pouze tíží, najdeme snadno:

Oddělme v duchu od ostatní kapaliny v nádobě část ve tvaru válce nebo kolmého hranolu o průřezu S a výšce h rovné vzdálenosti základny hranolu od hladiny kapaliny [obr. (2.8) 2]. Tlaková síla F , jíž hranol působí v ploše S na dno nádoby nebo na část kapaliny, která je pod jeho základnou, je rovna jeho váze, takže je-li ρ hustota kapaliny a g tíhové zrychlení, $F = \rho g h S$. Pro tlak $p = F/S$ v hloubce h pod hladinou pak vychází

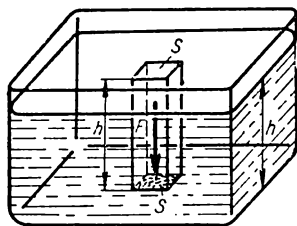
2.8 (4)

$$p = \rho g h.$$

(2.8)

151

Hydrostatický tlak je tedy úměrný hustotě kapaliny a roste úměrně s hloubkou pod povrchem. Významné je, že nezávisí na průřezu svislého sloupce kapaliny, pomocí něhož jsme ho vypočetli, z čehož ihned plyne, že nezávisí ani na tvaru a průřezu nádoby, tedy na množství kapaliny v nádobě. V každé nádobě libovolného tvaru si lze zřejmě vždy vytknout



Obr. (2.8) 2. Tlak v kapalině způsobený tíží

svislý sloupec kapaliny libovolně malého průřezu. Kapalina, která obklopuje tento sloupec, mohla by jeho tíhu ovlivnit jen prostřednictvím tečných sil na jeho plášti. Tím by však vznikla tečná napětí, která za rovnováhy v kapalině nemohou existovat. Z téhož důvodu je také tlak ve všech bodech kapaliny v téže vodorovné rovině stejný. Proto je pro hydrostatický tlak v rovnoběžných vodorovných rovinách rozhodující jejich svislá vzdálenost h od nejvýše položené, byť i elementární části kapaliny (je-li např. kapalinou zcela naplněna kulová nádoba).

I v plynu vzniká vlivem tíže hydrostatický tlak, který je však při obvyklých rozměrech nádob tak nepatrný proti vlastnímu tlaku plynu, že se k němu zpravidla nepřihlíží a tlak plynu v uzavřené nádobě se považuje všude za stejný. Hydrostatický tlak se zřetelně projevuje jen v ovzduší, které obklopuje Zemi do značné výšky (čl. 2.8.3).

Důležitým důsledkem hydrostatického tlaku způsobeného vlastní vahou tekutiny je *zákon Archimédův*, který říká, že *těleso je v tekutině nadlehčováno silou, která se rovná váze tekutiny téhož objemu, jako je objem tělesa obklopeného tekutinou* (popř. částí tělesa jejíž povrch je ve styku s tekutinou).

Na těleso ponořené do kapaliny působí ze všech stran hydrostatické tlaky, které jsou úměrné hloubce pod hladinou a působí kolmo na jednotlivé části povrchu tělesa. Vodorovné složky těchto tlaků se navzájem ruší a zbývají jen svislé složky, které jsou v menší hloubce menší než ve větší hloubce a dávají výslednici, která směřuje vzhůru. Kdyby místo tělesa byla kapalina, působily by na rozhraní stejné tlaky, přičemž by kapalina byla v rovnováze, takže výslednice svislých složek tlaků (vztlak) by pak byla právě rovna váze kapaliny nahrazující těleso. Stejná síla, rovná váze stejného objemu kapaliny, nadlehčuje tedy i ponořené těleso.

Hlavní jednotkou tlaku je $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$. Vedlejší jednotkou je *bar* (značka *bar*) rovný tlaku $10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. Další vedlejší jednotkou je $\text{kp} \cdot \text{m}^{-2} = 9,806\,65 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. Násobnou jednotkou je jednotka $\text{kp} \cdot \text{cm}^{-2}$, která se též nazývá *technická atmosféra* (značka *at*).

Podle 2.8 (4) je hydrostatický tlak sloupce kapaliny přímo úměrný výšce h sloupce. Vyjádříme-li měrnou tíhu kapaliny $\gamma = \rho g$ ve vedlejších jednotkách $\text{kp} \cdot \text{m}^{-3}$, pak pro vodu $\gamma \approx 10^3 \text{ kp} \cdot \text{m}^{-3}$ a hydrostatický tlak sloupce vody výšky $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ je právě roven tlaku $1 \text{ kp} \cdot \text{m}^{-2}$. Platí to ovšem přibližně, protože měrná tíha vody závisí jak na teplotě, tak na místním tíhovém zrychlení. Se zřetelem k přesnému vyjadřování neměl by se proto tlak udávat v $\text{mm H}_2\text{O}$, jak se to v technické praxi zpravidla dělá, je-li užitečné tlak tímto způsobem měřit, nýbrž místo toho užít přesného označení $1 \text{ kp} \cdot \text{m}^{-2} \approx 1 \text{ mm H}_2\text{O}$.

Totéž platí pro vyjadřování tlaku pomocí výšky rtuťového sloupce, udržujícího v rovnováze měřený tlak. Proti nepřesnému udání tlaku v mm Hg (bez dalších údajů zejména teploty rtuti) má jednoznačný význam jednotka *torr*, rovnající se hydrostatickému tlaku 1 mm svislého rtuťového sloupce hustoty $13\,595,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ při 0°C a normálním tíhovém zrychlení $9,806\,65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Vzhledem k hlavní jednotce tlaku je torr určen přesně platným vztahem

$$2.8 (5) \quad 1 \text{ torr} = 133,322 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 1,333\,22 \cdot 10^{-3} \text{ bar}.$$

Dále platí

$$2.8 (6) \quad 1 \text{ torr} = 1,359\,51 \cdot 10^{-3} \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2} (\text{at}) = 13,595\,1 \text{ kp} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Abychom výsledek měření tlaku vyjádřili v torrech, je třeba výšku rtuťového sloupce při dosavadní teplotě rtuti přepočítat na výšku, kterou by měl sloupec, kdyby teplota rtuti byla 0°C . Při tlacích kolem 760 torrů a mosazném měřítku k měření délky sloupce činí příslušná oprava $1/8\text{ mm}$ na každý stupeň teploty. Má-li rtuť teplotu t , pak pro rychlý odhad stačí odečíst od tlaku naměřeného v milimetrech $1/8 t$ (popř. přičíst, je-li $t < 0^\circ\text{C}$). Při velmi přesných měřeních je třeba provést další dvě opravy, a to vzhledem ke kapilární depresi rtuti v tlakoměrné trubici (oprava činí několik setin až desetin mm podle světlosti trubice) a vzhledem k tíhovému zrychlení v místě měření (příslušná oprava dělá při tlaku kolem 760 torrů v Praze asi $+0,3\text{ mm}$).

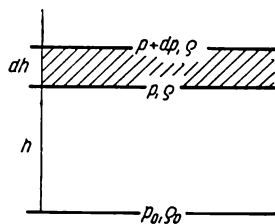
2.8.3. Atmosférický tlak

Ovzduší zvané *atmosféra* obklopuje Zemi do značné výšky; mezi vzdušným obalem Země a vzduchoprázdným meziplanetárním prostorem však není určitého rozhraní, protože hustoty vzduchu s výškou ubývá. Váhou ovzduší vzniká při zemském povrchu hydrostatický tlak, který se nazývá *atmosférický* (nebo též *barometrický*). Přesvědčíme se o něm známým pokusem *Torricelliovým*, který je znázorněn na obr. (2.8) 3. Naplníme-li trubici, na



Obr. (2.8) 3. Pokus Torricelliův

jedné straně uzavřenou, rtuť a pak ji obrátíme a její otevřený konec (který při obracení ovšem přidržíme) vložíme do nádobky se rtutí, nevyteče rtuť z trubice úplně, ale udrží se v ní sloupec délky přibližně 760 mm. Prostor v trubici, který rtuť uvolní, je vzduchoprázdný (*Torricelliovo vakuum*). Na hladinu rtuti v nádobce působí tedy jednak atmosférický tlak ovzduší, s nímž je ve styku, jednak hydrostatický tlak od rtuťového sloupce v trubici. Za rovnováhy musí být oba tlaky stejné, takže výška h rtuťového sloupce, která je hydro-



Obr. (2.8) 4. K odvození závislosti atmosférického tlaku na výšce

statickému tlaku rtuti $p = \rho gh$ úměrná, je vhodnou mírou pro velikost atmosférického tlaku; jednoznačný význam má ovšem jen tehdy, je-li známa hustota ρ rtuti za teploty měření a tíhové zrychlení g v místě pozorování. V zájmu vědecké přesnosti se proto tlak ovzduší měří v torrech.

Atmosférický tlak se poněkud mění se stavem ovzduší a s nadmořskou výškou. V Praze 2 v nadmořské výšce 215 m je průměrný atmosférický tlak asi 743 torrů, v Brně v nadmořské výšce 267 m je 739 torrů. Za normální atmosférický tlak je volen tlak 760 torrů.*) V jiných jednotkách, uvedených v závěru předešlého článku, má tento tlak velikost

$$2.8 \text{ (7)} \quad 760 \text{ torrů} = 1,013 \, 25 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 1,013 \, 25 \text{ bar} = 1,033 \, 2 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2} \text{ (at)}.$$

Podle toho jednotka tlaku 1 bar = 750,07 torrů. V meteorologii se používá ještě dílčí jednotky milibar (mbar) = 10^{-3} bar = 0,750 07 torr.

*) Tento tlak se dosud nazýval *fyzikální atmosféra* (značka atm). Toto označení není pojato do normy o zákonných měrových jednotkách, protože jako jednotky se tohoto tlaku prakticky nepoužívalo, nýbrž jen k vyjádření *normálního stavu* při měření. Doporučuje se tento stav vyjádřit jednotkou torr.

Při malých výškových rozdílech je pokles atmosférického tlaku úměrný přírůstku výšky jako u hydrostatického tlaku v kapalinách, měříme-li výšku ode dna. Při 760 torrech klesne atmosférický tlak o 1 torr, vystoupíme-li asi o 10,5 m. Při větších výškových rozdílech neklesá však tlak už lineárně s výškou, protože na základě úměrnosti s tlakem i hustota se s výškou zmenšuje.

Snadno odvodíme závislost atmosférického tlaku na výšce nad zemí za předpokladu, že teplota a tíhové zrychlení jsou konstantní a že hustota je podle Boylova zákona úměrná tlaku. Mysleme si ve výšce h nad zemí vrstvu vzduchu tloušťky dh [obr. (2.8) 4]. Na dolní plochu vrstvy působí větší tlak než na horní. Přírůstek tlaku je způsoben tíží jako v kapalině. Počítáme-li na rozdíl od kapalin přírůstek dh kladně ve směru rostoucí výšky nad zemí a předpokládáme-li, že hustota ρ je stálá ve vyšetřované vrstvě elementární tloušťky dh , pak podle 2.8 (4)

$$dp = -\rho g dh.$$

Z Boylova zákona 2.8 (3) plyne pro závislost hustoty na tlaku za stálé teploty

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p,$$

značí-li ρ_0 známou hustotu při základním tlaku p_0 . Z těchto rovnic dostáváme

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dh,$$

odkud integrací v mezích od p_1 do p_2 a od h_1 do h_2 vychází

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{\rho_0}{p_0} g (h_2 - h_1) = -\frac{\rho_0}{p_0} g \Delta h$$

nebo

$$2.8 (8) \quad p_2 = p_1 e^{-\frac{\rho_0 g \Delta h}{p_0}}.$$

Dosadíme-li ještě z Boylova zákona, dostaneme pro závislost hustoty vzduchu na výšce vzdušného sloupce

$$2.8 (9) \quad \rho_2 = \rho_1 e^{-\frac{\rho_0 g \Delta h}{p_0}}.$$

Za předpokladu stálé teploty vzduchu a stálého tíhového zrychlení klesá tedy atmosférický tlak i hustota vzduchu s výškou nad zemským povrchem podle exponenciální závislosti. Při teplotě 0°C a tlaku $p_0 = 760 \text{ torr} \approx 1,31 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ má suchý vzduch hustotu $\rho_0 = 1,293 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Dosadíme-li tyto hodnoty do vzorce 2.8 (8) spolu s $g \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, dostaneme

$$p_2 = p_1 e^{-\frac{\Delta h}{7,99}},$$

měříme-li rozdíl výšek v km. Pro $p_2 = p_1/2$ vychází $\Delta h = 5,54 \text{ km}$, tlak vzduchu tedy klesne na polovinu, vystoupíme-li do výšky 5,54 km. Platí to ovšem jen v atmosféře, jejíž teplota je všude stejná a rovna 0°C . Při jiných středních teplotách t vzduchu je třeba místo hustoty ρ_0 dosadit $\rho_0(1 - \gamma t)$, kde $\gamma = 0,00366^\circ \text{C}^{-1}$ je objemová roztažnost plynů. Uvedených vztahů se prakticky používá k *barometrickému měření výšek*. Při přesnějších měřeních je ovšem třeba provést opravy na proměnlivost tíhového zrychlení s nadmořskou výškou a se zeměpisnou šířkou a na vlhkost vzduchu.

2.8.4. Povrchové napětí

Kapaliny se chovají tak, jako by jejich povrch byl pokryt tenkou pružnou vrstvou, jež se snaží stáhnout povrch kapaliny, aby měl co nejmenší plošný obsah. Kdyby na kapalinu nepůsobily vnější síly, zaujala by kapalina tvar kulový, protože koule má ze všech těles stejného objemu nejmenší povrch. Přibližně kulový objem kapaliny vytváří se výrazněji ovšem jen tehdy, jsou-li vnější síly velmi malé proti povrchovým silám. Tak přibližně kulový tvar mají kapky při výtoku kapalin, drobné kapičky kapalin (vody) tvořící mlhu, drobné kapičky oleje nebo tuků v emulzi s vodou (např. mléko), kapičky rozlité rtuti apod. Po-

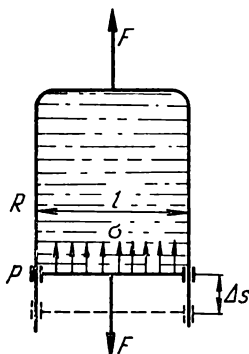
vrchová vrstva je velmi tenká (její tloušťka je asi 10^{-7} cm) a její fyzikální a chemické vlastnosti jsou poněkud jiné než vlastnosti vnitřních částí kapalin.

Protože povrchová vrstva se snaží stáhnout se na nejmenší velikost, je v ní zřejmě napětí, které nazýváme *povrchovým napětím* σ ; definujeme je jako sílu, která působí kolmo na délku myšleného řezu povrchem, dělenou touto délkou, a leží v rovině tečné k povrchu ve vyšetřovaném místě. Působí-li na úsečce délky dl dvě části povrchu, které z obou stran k ní přiléhají, v rovině povrchu silou dF kolmou k dl , pak

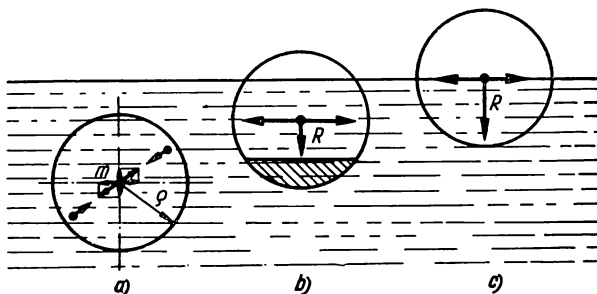
2.8 (10)

$$\sigma = \frac{dF}{dl}.$$

V povrchové bláně je vlivem povrchového napětí nahromaděna jistá energie, tzv. *energie povrchová*. Souvislost povrchového napětí s povrchovou energií lze nejlépe znázornit tímto pokusem (Maxwell): Ponoříme-li drátěný rámeček R s posuvnou příčkou P do mýdlového roztoku, vytvoří se na něm vlivem povrchového napětí tenká kapalinová blána s povrchovými vrstvami na obou stranách [obr. (2.8) 5].



Obr. (2.8) 5. Povrchové napětí a povrchová energie



Obr. (2.8) 6. K výkladu vzniku povrchového napětí

Povrchové napětí působí v jedné povrchové vrstvě na posuvnou příčku délky l silou σl . Protože příčku udržíme v rovnováze (se zřetelem na dvě povrchové vrstvy blány) silou $2\sigma l$, vykonáme při posunutí příčky o délku Δs práci $\Delta A = 2\sigma l \Delta s$, která se jeví jako zvětšení povrchové energie při zvětšení povrchu o $2l\Delta s$. Energie připadající na jednotku plochy je

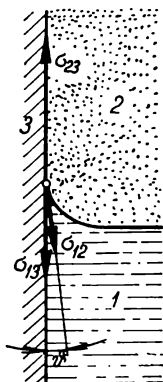
$$\frac{\Delta A}{2l\Delta s} = \frac{2\sigma l \Delta s}{2l\Delta s} = \sigma.$$

To znamená, že *plošná hustota energie* (což je levá strana této rovnice) je rovna povrchovému napětí. Plošná hustota energie, tj. číselně povrchová energie plošné jednotky, nazývá se *kapilární konstanta*.

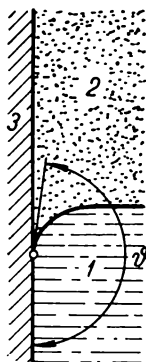
Povrchové napětí a kapilární jevy jsou vysvětlovány vzájemným působením přitažlivých sil molekul, tzv. *sil kohezních*. Povrchovou vrstvu si myslíme složenou z jedné vrstvy molekul. Při zvětšení povrchu kapaliny dostávají se některé molekuly zvnitřku na povrch, přičemž se musí překonat příslušné kohezní síly. Tak lze také vysvětlit, proč potřebujeme na zvětšení povrchu vynaložit jistou práci. Podle Laplaceovy teorie působí na každou molekulu látky přitažlivé síly sousedních molekul. Tyto přitažlivé síly mezi molekulami nejsou však gravitačního původu, neboť neklesají s druhou mocninou vzdálenosti, nýbrž vzájemné působení molekul klesá s mnohem vyšší mocninou (soudí se na osmou mocninu). Můžeme proto přitažlivou působnost každé

molekuly omezit na velmi malý kulový prostor, v jehož středu je uvažovaná molekula. Tento kulový prostor nazýváme *sferou molekulárního působení* a jeho poloměr ϱ nazýváme *poloměrem molekulárního působení* [obr. (2.8) 6a].

Rozložíme každou molekulární přitažlivou sílu v oblasti sféry jedné z molekul (m na obr. a) na složku rovnoběžnou s povrchem a složku k povrchu kolmou. Předpokládáme-li, že rozložení molekul v kapalině, a tudíž i ve sféře molekulárního působení kolem molekuly m je rovnoměrné,



Obr. (2.8) 7. Krajo-
vý úhel u kapaliny
smáčející stěnu



Obr. (2.8) 8. Krajo-
vý úhel u kapaliny
nesmáčející stěnu

ruší se navzájem vodorovné složky, neboť v obou polovinách sféry rozdělené rovinou kolmou k povrchu je přibližně stejný počet molekul. Výsledkem vodorovných složek je ovšem jisté napětí, které má u molekul na povrchu kapaliny charakter napětí povrchového. Výslednice složek kolmých k povrchu se ruší, jen pokud je vzdálenost molekuly od povrchu větší než poloměr molekulárního působení ϱ . Je-li však vzdálenost molekuly od povrchu menší než ϱ , nebude výslednice R složek přitažlivých sil kolmých k povrchu vyrovnána a bude směřovat do kapaliny, neboť vliv molekul, jež leží v kulovém úseku vyáčkovaném na obr. b, není vyvážen molekulami ve stejném kulovém úseku nad hladinou. Se zmenšující se vzdáleností od povrchu výslednice R poroste a dosáhne maximální hodnoty pro molekuly, jež leží právě na povrchu kapaliny (obr. c). Vlivem těchto kohezních (soudržných) sil je tlak na povrchu kapaliny menší než uvnitř a vzrůstá směrem dovnitř kapaliny (asi jako v kapalině, na jejíž molekuly působí tíže, roste hydrostatický tlak s rostoucí vzdáleností od hladiny), přičemž dosahuje

maximální hodnoty ve vzdálenosti rovné poloměru ϱ . Tento celkový vzrůst tlaku nazýváme *tlakem kohezním*. Kohezní tlak nelze přímo měřit, protože zavedeme-li tlakoměrnou sondu do kapaliny, měříme zase jen tlak na povrchu kapaliny, který je ve styku se sondou. Lze jej pouze odhadnout z teoretických podkladů (tak např. pro hodnotu kohezního tlaku vody je udávána hodnota 10 500 at). Pokusy bylo potvrzeno, že velikost kohezního tlaku souvisí se stlačitelností.

Pozorujeme-li stykové místo povrchu kapaliny se stěnou nádoby, zjišťujeme u různých kapalin různé veliké zdvžení okraje [obr. (2.8) 7] nebo naopak jeho snížení [obr. (2.8) 8]. Na okraji se stýkají tři prostředí, kapalina 1, vzduch (nebo jiný plyn) 2 a stěna pevného tělesa 3. Předpokládáme, že v tomto trojném rozhraní působí povrchová napětí, závislé na látkách jednotlivých prostředí. Při rovnováze musí platit

$$\sigma_{23} = \sigma_{13} + \sigma_{12} \cos \vartheta,$$

odkud

2.8 (11)

$$\cos \vartheta = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{13}}{\sigma_{12}}.$$

Úhel ϑ nazýváme *krajovým úhlem*. Jde-li o styk vždy těchto prostředí za stejných podmínek, je velikost tohoto úhlu vždy stejná. Velikost krajového úhlu závisí na rozdílu povrchového napětí stěny vzhledem ke vzduchu (plynu) a vzhledem ke kapalině. Tomuto rozdílu se říká též *adhezní konstanta*. Je-li adhezní konstanta kladná, je krajový úhel ostrý, kapalina stěnu smáčí (okraj kapaliny u stěny se zvedne). Tak je to například u vody ve skleněné nádobě. Naopak, je-li adhezní konstanta záporná, je krajový úhel tupý, kapalina stěnu nesmáčí (okraj kapaliny u stěny je snížen). Tak se např. chová rtuť ve skle. V řídkých případech je konstanta nulová. Platí to přibližně pro styk éteru, vzduchu a oceli.

Někdy $\sigma_{23} - \sigma_{13} > \sigma_{12}$. V tomto zvláštním případě by pro $\cos \vartheta$ vycházela hodnota větší než 1, krajový úhel by nebyl reálný. Kapalina se zvedne podél stěny vzhůru, až pokryje tenkou vrstvou celou stěnu. Krajový úhel je pak nulový, kapalina smáčí stěnu dokonale (lze to pozorovat

vat do jisté míry u éteru, alkoholu a u jiných organických látek). Druhý krajní případ je pro $\sigma_{13} - \sigma_{23} > \sigma_{12}$ (> 0), kdy pro $\cos \vartheta$ bychom dostali hodnotu menší než -1 . Tehdy by se vytvořila mezi pevnou stěnou a kapalinou velmi tenká vrstva vzduchu, jež by sahala až do jisté hloubky, v níž ji vytlačí hydrostatický tlak kapaliny. Takto se chovají látky, které stěnu vůbec nesmáčejí, krajový úhel je přímý, tj. rovný 180° . To lze pozorovat např. u roztavených kovů.

Stýkají-li se v jednom bodě vzduch a dvě kapaliny, jako např. na okraji olejové kapky na vodě [obr. (2.8) 9], skládají se rovněž tři povrchová napětí σ_{12} , σ_{13} a σ_{23} ve výslednici. Kapka se udrží pohromadě, jen směřuje-li tato výslednice do kapky, což zřejmě nastane, jestliže

$$\sigma_{12} + \sigma_{23} > \sigma_{13}.$$

To bude např. u kapky parafínového oleje. Jestliže naopak

$$\sigma_{13} > \sigma_{12} + \sigma_{23},$$

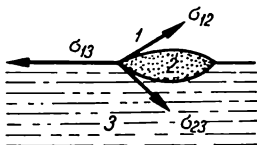
pohybují se molekuly na okraji kapky neomezeně ve směru povrchového napětí σ_{13} a kapka se roztáhne na velmi tenkou vrstvu po celém povrchu kapaliny. Tak je to např. u olivového oleje na vodě, kde $\sigma_{13} = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $\sigma_{12} = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ a $\sigma_{23} = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Na dosti velkém a velmi čistém vodním povrchu roztáhne se malá kapka oleje na vrstvu, jejíž tloušťka je rovna průměru sféry molekulárního působení, a nakonec se vrstva rozpadne, klesne-li tloušťka vrstvy řádově asi na 10^{-8} cm . Tohoto jevu bylo použito k výpočtu velikosti molekul.

Hladina kapaliny v úzké trubici ponořené do kapaliny není rovinná, její povrch se zakřivuje a tvoří tzv. *meniskus (vrchlík)* nahoru buď vyduť (konkávní), nebo vypouklý (konvexní) [obr. (2.8) 10]. Zároveň pozorujeme, že při vyduťném vrchlíku vystoupí kapalina výše, než je okolní vodorovný povrch kapaliny; tomuto jevu říkáme *kapilární elevace* (kapilarita znamená vzlínavost). Je-li naproti tomu vrchlík nahoru vypouklý, stojí kapalina v trubičce níž, než je okolní vodorovná hladina; vzniká *kapilární deprese*. Elementárně to vysvětlíme takto:

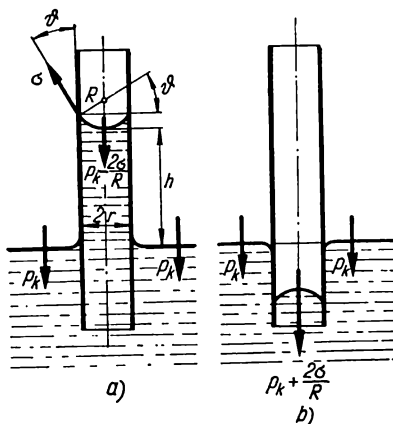
Při elevaci visí jakoby zdvižený sloupec kapaliny výšky h svou povrchovou blanou na vnitřní stěně trubičky. Svislá složka povrchového napětí při krajovém úhlu ϑ je $\sigma \cos \vartheta$, takže na celý vnitřní obvod trubice o polo-měru r připadá síla $2\pi r \sigma \cos \vartheta$, která udržuje rovnováhu s tíhou $\pi r^2 \rho h g$ zdviženého sloupce kapaliny hustoty ρ . Z rovnosti obou sil tedy plyne pro příslušné povrchové napětí

2.8 (12)

$$\sigma = \frac{r \rho h g}{2 \cos \vartheta}.$$



Obr. (2.8) 9. Kapka oleje na vodní hladině



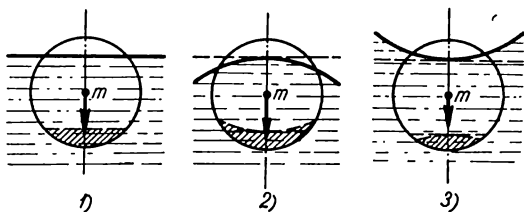
Obr. (2.8) 10. Kapilární elevace a deprese

Krajový úhel bývá často tak malý, že je možno položit $\cos \vartheta = 1$. Potom lze vzorec užít k měření povrchového napětí z výšky výstupu h v úzké trubičce (kapiláře) známého vnitřního průměru (s příslušnou opravou na objem kulového vrchlíku). Stejný vzorec platí i pro kapilární depresi.

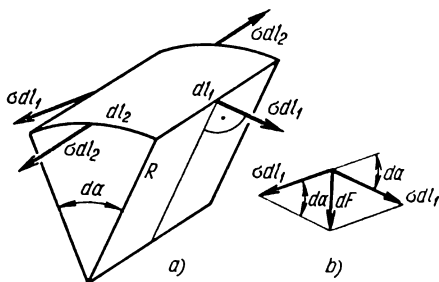
Kapilární elevace a deprese souvisí přímo se zakřivením povrchu kapaliny, při němž je změna tlaku při průchodu povrchovým rozhraním jiná než při rovinném povrchu. Navážeme-li

na obr. (2.8) 6, vysvitne to z této úvahy. Pro molekulu m ve stejné vzdálenosti pod povrchem rovinným (1), konvexním (2) a konkávním (3) je složka molekulárních sil, kolmá k povrchu, jež na ni působí z vnitřku kapaliny, větší při konvexním povrchu a naopak menší při povrchu konkávním než při povrchu rovinném. V prvním případě [2 na obr. (2.8) 11] chybí v horní části sféry molekulárního působení větší počet molekul, které by vyrovnaly tah od molekul ve spodní části sféry než při rovinném povrchu. V druhém případě (3 na obrázku) je tomu právě obráceně. Při zakřivení povrchu působí tedy povrchová vrstva na kapalinu tlakem, který se přičítá k tlaku, jímž by vrstva na kapalinu působila při rovinném povrchu. Tlak při rovinném povrchu kapaliny jsme nazvali tlakem kohezním. Přídavný tlak, který vzniká zakřivením povrchu, nazývá se *kapilární*.

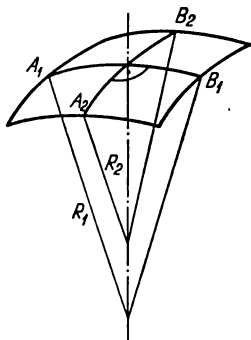
Kapilární tlak snadno vypočteme, vyjdeme-li z povrchového napětí σ . Předpokládejme nejprve, že povrch je válcový, a uvažujme o silách, které působí na plošný prvek omezený dvěma površkami délky dl_1 a dvěma křivkami délky dl_2 [obr. (2.8) 12a]. Napětí, která působí na



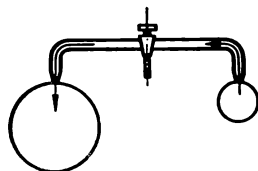
Obr. (2.8) 11. Molekulární síly v rovinném a zakřiveném povrchu kapaliny



Obr. (2.8) 12. Určení kapilárního tlaku pod zakřiveným povrchem kapaliny



Obr. (2.8) 13. Určení kapilárního tlaku pod zakřiveným povrchem kapaliny



Obr. (2.8) 14. Vzduch proudí z menší bubliny do větší

křivkách, jsou rovnoběžná s površkami, protože leží v povrchu, a nedávají tedy žádnou výslednici kolmou k povrchu. Naproti tomu síly, které působí na délkách dl_1 , nemají stejný směr, nýbrž svírají spolu úhel $d\alpha$. Dávají proto výslednici směřující na stranu, z níž povrch se jeví jako dutý. Tato výslednice má velikost $dF = \sigma dl_1 d\alpha$ a stojí kolmo k vyšetřované části povrchu (obr. b). Zavedeme-li poloměr křivosti plochy R , pak $dl_2 = R d\alpha$ a

$$dF = \frac{\sigma dl_1 dl_2}{R} = \frac{\sigma dS}{R},$$

neboť $dl_1 dl_2$ je plocha vyšetřované části povrchu. Podíl $dF/dS = p$ je však kapilární tlak, který má v tomto případě velikost

$$p = \frac{\sigma}{R}.$$

Při obecně zakřiveném povrchu můžeme v každém jeho bodě vést dva k sobě kolmé normálové řezy, na obr. (2.8) 13 A_1B_1 a A_2B_2 , v nichž má plocha největší a nejmenší poloměr křivosti R_1 a R_2 . Platí pak pro každou dvojici rovnoběžných stran plošného prvku stejná úvaha jako u válcové plochy. Tlak p_1 , způsobený zakřivením A_1B_1 o poloměru křivosti R_1 , je $p_1 = \sigma/R_1$, a tlak p_2 , vzbuzený zakřivením A_2B_2 o poloměru křivosti R_2 , je $p_2 = \sigma/R_2$. Kapilární tlak p , který vzniká u obecně zakřiveného povrchu, je pak součtem obou tlaků p_1 a p_2 :

$$2.8 (13) \quad p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Poloměr křivosti počítáme kladně, tvoří-li příslušný normálový řez povrchem křivku, jež je vzhledem k prostředí nad kapalinou konvexní (vypouklá), a záporně, je-li křivka konkávní (vydutá), neboť, jak snadno vidíme, má v druhém případě kapilární tlak opačný směr než v prvním případě a směřuje do prostředí, jež je nad kapalinou.

Je-li povrch zakřiven do tvaru kulové plochy, je poloměr křivosti R všech meridiánových řezů stejný a kapilární tlak má podle 2.8 (13) velikost

$$p = \pm \frac{2\sigma}{|R|},$$

kde kladné znaménko platí pro povrch směrem nahoru vypouklý a záporné pro povrch nahoru dutý. Vidíme, že kapilární tlak je nepřímě úměrný poloměru R plochy. Čím menší je poloměr R , tím větší je zakřivení a tím větší je kapilární tlak. To lze ukázat, vyfoukneme-li na koncích skleněné trubičky dvě mýdlové bubliny, jednu menší a druhou větší [obr. (2.8) 14]. Působením kapilárního tlaku je tlak uvnitř bubliny větší než vnější tlak vzduchu, a to tím více, čím menší je poloměr bubliny. Proto začne při otevření kohoutu proudit vzduch z menší bubliny do větší a větší bublina se zvětšuje a menší zmenšuje.

Při průchodu rozhraním mezi vzduchem a kapalinou stoupne tlak náhle o kohezní tlak p_k , je-li povrch kapaliny rovinný, a o $p_k \pm \frac{2\sigma}{|R|}$, je-li zakřiven do tvaru kulové plochy poloměru R .

Z tohoto ihned plyne nutnost elevace nebo deprese kapaliny v kapiláře, ponoříme-li ji do kapaliny v nádobě. Rovnováha vyžaduje, aby ve vodorovných rovinách byl všude stejný tlak, a to v kapalině, která je jak v nádobě, tak v trubici. Protože na povrch kapaliny působí všude stejný atmosférický tlak, platí podle obr. (2.8) 10

$$p_k^r = p_k \pm \frac{2\sigma}{|R|} \mp \rho gh,$$

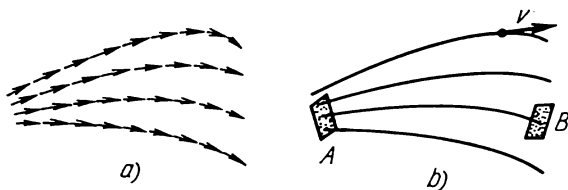
kde hornější znaménka platí pro depresi a spodní pro elevaci. Nahradíme-li poloměr R kulového vřchlíku poloměrem r trubice podle vztahu $r = R \cos \theta$, dostaneme pro povrchové napětí σ prve odvozený vzorec 2.8 (12).

2.8.5. Pohyb tekutiny

Pohyby tekutin jsou složitější než pohyby tuhých těles, protože částice tekutiny se mohou vzájemně přemísťovat, což u tuhých těles není. Nicméně i pohyb tekutin lze idealizovat podobně jako pohyby pevných těles, u nichž jsme dosáhli zjednodušení předpokladem, že jsou tuhá. Složitost pohybu tekutin souvisí především s úkazy vnitřního tření, a proto k němu prozatím nebudeme přihlížet a budeme následující úvahy vztahovat na abstrakci ideální tekutiny, v níž ani za pohybu nejsou tečná napětí. U kapaliny lze poměry navíc zjednodušit předpokladem, že kapalina je nestlačitelná. Výsledky, k nimž dojdeme, lze pak aplikovat též na pohyby skutečných tekutin, zavedeme-li místo skutečných rychlostí a tlaků jisté střední hodnoty a použijeme-li opravných koeficientů, což však už bývá více méně záležitost technické aplikace.

Každý pohyb vztahujeme k nějaké soustavě. Také pohyb tekutiny vyšetřujeme vzhledem k soustavě souřadnic, kterou si myslíme např. pevně spojenou s potrubím, jímž tekutina proudí, nebo s korytem, jímž proudí kapalina. Vzhledem k této soustavě má každá částice tekutiny v každém místě určitou rychlost. Znázorníme-li v některém okamžiku v každém místě vektor rychlosti malou šipkou [obr. (2.8) 15a], je zřejmé, že proudící

tekutina představuje *pole vektoru rychlosti*. Takto znázorněné vektory rychlosti obalují křivky, k nimž tečny v jednotlivých jejich bodech mají směr rychlosti v dotykovém bodě (obr. b). Těmto křivkám říkáme *proudnic* (*proudové čáry*) a můžeme jimi názorně zobrazit vektorové pole, které tekutina tvoří. Není-li proudění tekutiny ustálené, mění se obraz proudnic v každém okamžiku, a částice, která za krátkou dobu dospěje z místa *A* do místa *B*, bude mít v místě *B* jinou rychlost co do směru i velikosti, než jakou ukazoval obraz proudnic v okamžiku, kdy částice byla ještě v místě *A*. Při neustáleném proudění neudávají tedy proudnice dráhy, po nichž se částice kapaliny pohybují. Jen za ustáleného stavu, kdy se obraz proudnic s časem nemění, tj. kdy pole vektoru rychlosti má v čase neproměnný tvar, představují proudnice zároveň i dráhy, po nichž se pohybují částice tekutiny. V dalším výkladu se budeme zabývat *ustáleným (stacionárním) pohybem tekutiny*.



Obr. (2.8) 15. Proudnic

směru proudění. Tak na obr. (2.8) 15b procházejí např. v místě *A* plochou 1 cm^2 tři proudnice a v místě *B* stejně velkou plochou jen jedna. Rychlost kapaliny v místě *A* je tedy třikrát větší než v místě *B*.

Trubicový útvar, jehož plášť je tvořen proudnicemi, nazýváme *proudovou trubicí*. Hmotným vnitřkem elementární proudové trubice je *proudové vlákno*. Je-li proudění ustálené, pak pláštěm proudové trubice částice tekutiny ani nevstupují dovnitř, ani z ní nevystupují ven a každým průřezem trubice prochází ve stejných časových intervalech stejný počet částic, jejichž celková hmotnost je stálá. To je důsledek *zákona zachování hmotnosti látek*, který u proudících tekutin vyjádříme tzv. *rovnici kontinuity* neboli *spojitosti toku*.

Označme *S* velikost některého příčného průřezu proudové trubice a předpokládejme, že všechny částice mají v tomto průřezu stejnou rychlost *v*. Částice, které v okamžiku *t* právě procházejí zvoleným průřezem, dostanou se v době *dt*, měřené od okamžiku *t*, do vzdálenosti *v dt*, takže v době *dt* projdou průřezem částice, které jsou ve válci, jehož základna je *S* a výška je *v dt*, jehož objem je tedy *Sv dt*. Je-li *ρ* hustota tekutiny ve vyšetřovaném průřezu, pak hmotnost *dm* tekutiny, která v době *dt* projde tímto průřezem, je $dm = \rho Sv dt$. Podílem

$$2.8 (14) \quad Q_m = \frac{dm}{dt} = \rho Sv$$

definujeme tzv. *hmotnostní tok*, který číselně udává hmotnost tekutiny, která zvoleným průřezem projde za jednotku času.

Dělíme-li hmotnostní tok hustotou *ρ* tekutiny, dostaneme tzv. *objemový tok* *Q_V* neboli *průtok* tekutiny zvoleným průřezem,

$$2.8 (15) \quad Q_V = \frac{Q_m}{\rho} = \frac{dm}{\rho} \frac{1}{dt} = \frac{dV}{dt} = Sv.$$

Tato veličina číselně udává velikost objemu tekutiny, která za jednotku času proteče zvoleným průřezem proudové trubice.

Hustota *ρ* tekutiny závisí obecně na tlaku, a proto se podél proudové trubice mění. Jde-li však o proudění kapaliny, můžeme ji prakticky vždy považovat za kontaktní,

tj. kapalinu za nestlačitelnou. Objemový tok má proto význam zejména u proudících kapalin.

Za ustáleného proudění je hmotnostní tok tekutiny libovolným průřezem proudové trubice konstantní, tzn. že všemi průřezy proteče ve stejně velkých časových intervalech tekutina stejné hmotnosti. U nestlačitelné kapaliny je také objemový tok stálý (každým průřezem proudové trubice projde ve stejných dobách kapalina stejného objemu); *rovnici kontinuity* vyjadřující zákon zachování hmotnosti lze tedy psát ve tvaru

2.8 (16)

$$\rho S v = \text{const.}$$

popř.

$$S v = \text{const.}$$

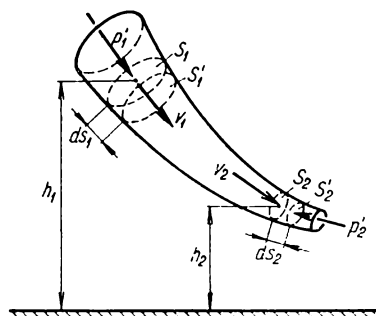
Těchto vztahů je možno užít i pro případy proudění tekutiny skutečnými trubicemi, jejichž vnitřní stěna pak vymezuje proudovou trubici. Dosazujeme do nich střední hodnoty průtočných rychlostí v příslušných průřezech, jde-li o proudění skutečných tekutin, u nichž není rychlost ve všech bodech průřezu stejná.

2.8.6. Bernoulliho rovnice

Mějme proudovou trubici, která se zužuje ve směru toku [obr. (2.8) 16], a předpokládejme nejprve, že jí proudí kapalina. Jak plyne z rovnice kontinuity, jsou rychlosti kapaliny v různých místech proudové trubice nepřímo úměrné průřezům, takže kapalina teče v užší části trubice rychleji než v širší. Mezi průřezy S_1 a S_2 má tedy kapalina zrychlení, k němuž je podle II. Newtonova pohybového zákona třeba nějaké síly, která působí na kapalinu ze strany širší části trubice. Taková zrychlující síla může vzniknout jen tím, že v různých částech proudové trubice jsou v kapalině různé tlaky. Zrychlující síla bude mít směr toku, jestliže v místech, kde je trubice širší a rychlost menší, bude tlak větší než v užších částech trubice, v nichž je rychlost větší. Je zřejmé, že *s rostoucí rychlostí tlak v kapalině klesá*. Kvantitativně vyjadřuje vzájemnou souvislost mezi tlakem a rychlostí proudící kapaliny Bernoulliho rovnice, kterou snadno odvodíme na základě věty, že *práce vnějších sil působících na těleso jeví se zvýšením jeho kinetické energie*.

K vnějším silám, které působí na část kapaliny v proudové trubici na obr. (2.8) 16 mezi průřezy S_1 a S_2 , patří jednak tíže, jednak tlakové síly $p'_1 S_1$ a $p'_2 S_2$,*) jimiž na tuto část působí kapalina, která je v proudové trubici ve směru toku před ní a za ní. Tlaky kolmé na plášť proudové trubice, působící kolem dokola, se navzájem ruší a tečné síly v plášti trubice nepůsobí, protože tečná napětí v ideální kapalině nejsou.

V krátké době dt posune se zvolená část kapaliny na horním konci o ds_1 a na spodním konci o ds_2 , takže bude mezi průřezy S'_1 a S'_2 . Mezi průřezy S'_1 a S'_2 nedochází ve vyšetřované části kapaliny k žádné změně potenciální a kinetické energie, protože za ustáleného pohybu nabývá každá částice téže potenciální a kinetické energie, jakmile přijde do téhož místa. Z toho ihned plyne, že práce, kterou vykoná tíže, bude taková, jako kdyby kapalina v prostoru mezi průřezy S_1 a S'_1 přímo přešla do prostoru mezi průřezy S_2 a S'_2 . Pro spojitost toku má kapalina v obou prostorech stejnou hmotnost dm , takže práce tíže je rovna úbytku potenciální energie kapaliny hmotnosti dm ve výškách h_1 a h_2 měřených od libovolné horizontální roviny, tedy $dm g(h_1 - h_2)$. Práce, kterou vykonají tlakové síly, je



Obr. (2.8) 16. Proudění kapaliny trubicí

*) Čárkou odlišujeme tlak v proudící tekutině od tlaku v klidné tekutině.

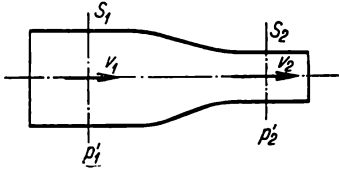
$p'_1 S_1 ds_1 - p'_2 S_2 ds_2$, přičemž jsme záporného znaménka použili proto, že tlaková síla na spodním konci zvolené části kapaliny působí proti směru pohybu. Celková práce vnějších sil jeví se v rozdílu kinetické energie kapaliny v prostorech mezi průřezy $S_1 S'_1$ a $S_2 S'_2$, kde kapalina má rychlosti v_1 a v_2 ,

$$2.8 (17) \quad \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 = dm g(h_1 - h_2) + p'_1 S_1 ds_1 - p'_2 S_2 ds_2.$$

Předpokládáme, že kapalina je nestlačitelná, takže kapalina hmotnosti dm má i stálý objem, tj. $S_1 ds_1 = S_2 ds_2$. Dělíme-li proto hořejší rovnici tímto objemem, dostaneme (zavedeme-li zároveň konstantní hustotu kapaliny ρ)

$$2.8 (18) \quad \boxed{\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p'_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p'_1 = \text{const.}}$$

Přitom jsme na jednu stranu rovnice převedli všechny členy vztahující se na týž průřez proudové trubice. Protože jsme oba průřezy zvolili zcela libovolně, je součet členů na jedné straně rovnice zřejmě stejný pro všechny průřezy proudové trubice, přesněji řečeno pro jedno a totéž proudové vlákno.



Obr. (2.8) 17. Průtok vodorovnou zužující se trubicí

Odvozená rovnice je důležitá *rovnice Bernoulliova*, vyjadřující princip zachování mechanické energie u ideální kapaliny. Z rozměrů jednotlivých veličin plyne, že první člen na levé straně rovnice je kinetická energie kapaliny jednotkového objemu, druhý člen představuje polohovou energii kapaliny jednotkového objemu vzbuzenou tíží, třetí člen pak potenciální tlakovou energii kapaliny jednotkového objemu vzbuzenou ostatními vnějšími silami. Dělíme-li rovnici konstantní hustotou ρ kapaliny, dostaneme jednotlivé energie vztahy na jednotkové hmotnosti kapaliny. Bernoulliova rovnice vyjadřuje tedy skutečnost, že v ideální nestlačitelné kapalině je součet všech tří energií, ať už jde o energii kapaliny jednotkového objemu, nebo jednotkové hmotnosti pro libovolné proudové vlákno, konstantní.

Vyšetřme ještě proudění ideální kapaliny vodorovnou trubicí proměnného průřezu, která se ve směru toku zužuje [obr. (2.8) 17]. V průřezu S_1 má kapalina tlak p'_1 a rychlost v_1 , v průřezu S_2 pak tlak p'_2 a rychlost v_2 . Oba průřezy jsou stejně vysoko nad libovolnou horizontální rovinou, $h_1 = h_2$. Protože $S_2 < S_1$, je podle rovnice kontinuity $v_2 > v_1$, takže mezi oběma průřezy nastane úbytek tlaku v kapalině, pro který z Bernoulliovy rovnice 2.8 (18) pro $h_1 = h_2$ vychází

$$2.8 (19) \quad p'_1 - p'_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2.$$

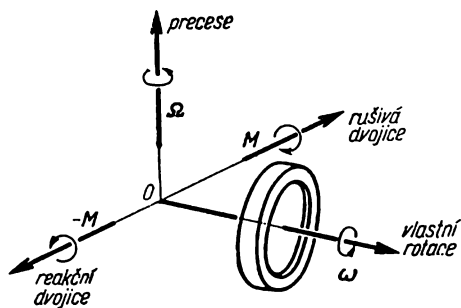
Vidíme, že úbytek tlaku v proudící kapalině je roven přírůstku pohybové energie kapaliny jednotkového objemu.

Bernoulliova rovnice platí pro libovolné průřezy proudové trubice, a můžeme ji proto aplikovat i na jeden a týž průřez. Je-li kapalina v klidu, má ve zvoleném průřezu tlak p , přičemž výraz $\frac{1}{2} \rho v^2$ příslušný tomuto průřezu je roven nule. Dá-li se do pohybu rychlostí v ,

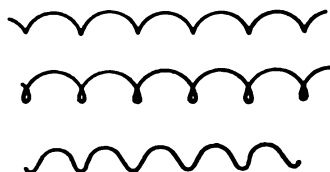
bude mít ve stejném místě jednotkový objem kapaliny kinetickou energii $\frac{1}{2} \rho v^2$ a tlak klesne z hodnoty p na hodnotu p' , pro kterou podle 2.8 (19) vychází

na něj rušivá dvojice sil, snaží se jeho osa rotace splynout po nejkratší cestě s osou rušivé dvojice.

Stáčíme-li naopak osu setrvačníku a nutíme jej tím konat precesní pohyb (příkladem je roztočená vrtule letadla v zatáčce), vzniká reakcí setrvačníku reakční silová dvojice, která má opačný smysl než moment, jenž by příslušnou precesi způsobil. Reakční silová dvojice má tedy smysl, v němž by osa setrvačníku po nejkratší cestě splynula s osou vnucené precese. Momentu této reakční dvojice se někdy říká *gyroskopický moment*.



Obr. (2.5) 24. K směrovým pravidlům u setrvačníku



Obr. (2.5) 25. Cykloidální nutační pohyb

Země jako setrvačník vykonává vlivem přitažlivých sil Slunce a Měsíce precesní pohyb, při němž osa Země opíše precesní kužel přibližně jednou za 26 000 let. Příčinou je zploštění Země a odklon osy zemské od kolmice k rovině dráhy Země kolem Slunce.

Precesní pohyb těžkého setrvačníku se jen přibližně shoduje s regulární precesí volného setrvačníku. Že pohyb osy těžkého setrvačníku není tak jednoduchý, můžeme se celkem snadno přesvědčit, opatříme-li konec jeho osy ostrým hrotem, k němuž přidržíme vodorovnou začaženou skleněnou desku. Tak zjistíme, že konec osy kolísá kolem vodorovné kružnice v drobných vlnkách, které mají tvar epicykloidy obyčejné, prodloužené nebo zkrácené [obr. (2.5) 25]. Tomuto kolísání říkáme *nutace* a celkovému průběhu pohybu *pseudoregulární precese*. Tyto jevy lze vysvětlit a odvodit matematickou teorií, z níž plyne, že těžký setrvačník může za jistých okolností konat regulární precesi.

2.6. Pružnost pevných těles

2.6.1. Napětí

Dosud jsme předpokládali, že tělesa pevného skupenství za působení vnějších sil nemění svůj tvar, že jsou dokonale tuhá. Ve skutečnosti každé těleso svůj tvar mění, začnou-li na něj jiná tělesa silově působit; říkáme, že se *deformuje (přetvoří)*. Při změně tvaru mění se přirozeně rovnovážné polohy částic, z nichž se těleso skládá, což má za následek, že mezi částicemi ihned vzniknou síly, které mají snahu přivodit původní rovnovážný stav. Deformace tělesa dosáhne konečného stavu, jsou-li síly mezi částicemi schopny odolávat vnějšímu působení. Přitom nevznikají jen na povrchu tělesa, kde bezprostředně vyrovnávají účinek vnějších sil, ale celé těleso je jimi vyplněno. Deformované těleso je tedy ve zvláštním stavu, kterému říkáme *stav napjatosti*. Charakterizujeme jej veličinou, která se nazývá *napětí*.

Obsah pojmu napětí snadno pochopíme na základě myšleného pokusu. Představme si uvnitř nedeformovaného tělesa, např. gumového hranolu na obr. (2.6) 1a, malou oblast z téže látky omezenou kulovou plochou. Napínáme-li hranol ve směru jeho podélné osy silami F , které se prostřednictvím tuhých přílohek rovnoměrně rozloží na obě základny, projeví se deformace uvnitř tělesa tím, že se koule přetvoří v trojosý elipsoid (obr. b).

Kdybychom jej vyňali z tělesa, nepodržel by svůj tvar, ale nabyl by zase původního kulového tvaru (předpokládáme, že materiál je *dokonale pružný*). Tvar elipsoidu zachováme, budeme-li na něj působit stejnými silami jako jeho okolí, nalézali se v deformovaném tělese. Nahrazujeme tím vnitřní působení okolí na vyšetřovanou část tělesa působením vnějším, které je přístupné kvantitativnímu vyjádření. Příslušné síly mají povahu *plošných sil*, jsouce rozděleny po ploše omezující vyšetřovanou část tělesa, takže na elementární část dS plochy připadá z celkové síly jistá malá část dF (obr. b). Podílem

2.6 (1)

$$\sigma = \frac{dF}{dS},$$

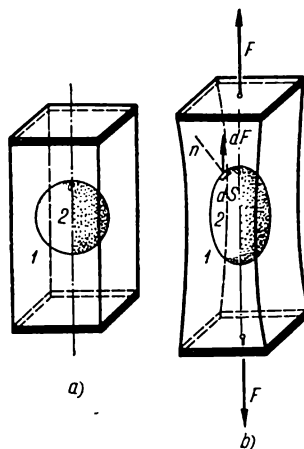
který má konečnou hodnotu, je definováno napětí v příslušném místě myšlené plochy oddělující navzájem různé části tělesa v napjatém stavu. Je zřejmé, že podle principu akce a reakce je síla, kterou působí jedna část tělesa na druhou, stejně velká, ale opačného směru než síla, kterou působí část druhá na prvou.

Obecně působí elementární síla dF v libovolném směru vzhledem k normále n příslušné plošky dS . Promítáme ji pak do normály a tečné roviny plošky, přičemž podíly příslušných průmětů dF_n a dF_t a velikost plošky dS určují *napětí normálové* σ_n a *napětí tečné* τ , tedy

2.6 (2)

$$\sigma_n = \frac{dF_n}{dS},$$

$$\tau = \frac{dF_t}{dS}.$$



Obr. (2.6) 1. K výkladu pojmu napětí

Normálové napětí má charakter *tahu* nebo *tlaku* na plošce dS dvou částí tělesa, které z obou stran k plošce přiléhají, zatímco *tečným napětím* je *podmíněna změna tvaru jednotlivých částí namáhaného tělesa*, rozumíme-li změnou tvaru přechod jednoho geometrického útvaru v jiný, např. krychle v hranol kolmý nebo kosý, koule v elipsoid apod. Je to zřejmé na obr. (2.6) 1. Kdyby na kulové ploše oddělující navzájem části 1 a 2 tělesa byla všude jen stejně velká normálová napětí, ať už v tahu, nebo v tlaku, zůstala by (až na poloměr) kulová plocha zachována. K přechodu v elipsoid je třeba, aby v jednotlivých místech plochy byla různě velká normálová napětí, s čímž bezprostředně souvisí přítomnost tečných napětí (šikmost elementárních sil dF vzhledem k ploškám dS).

Hlavní jednotkou napětí je $N \cdot m^{-2}$. V technické praxi se užívá vedlejší jednotky $kp \cdot cm^{-2} = 9,806\,65 \cdot 10^4 N \cdot m^{-2}$. Číselně udává napětí sílu působící na ploše jednotkového plošného obsahu. V dalším výkladu budeme vyšetřovat účinek normálového a tečného napětí zvlášť.

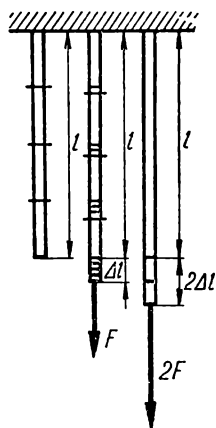
Kolem každého bodu tělesa si můžeme myslet malou oblast omezenou kulovou plochou, která se přemění v elipsoid, je-li těleso v napjatém stavu. Tři osy tohoto elipsoidu mají význačnou vlastnost: jen ve směru těchto tří os jsou obecně elementární síly dF od okolí obklopujícího elipsoid kolmé k jeho povrchu. V těchto směrech existují tedy jen napětí normálová, zatímco ve všech jiných směrech jsou napětí normálová i tečná. Tato tři napětí v navzájem kolmých směrech nazývají se *hlavní napětí*. Jedno z nich má největší a druhé nejmenší velikost; normálová napětí ve všech ostatních směrech, a tedy i třetí hlavní napětí mají velikost, která leží mezi oběma krajními hodnotami. Příslušné směry jsou určeny podmínkou, že tečná napětí v rovinách k nim kolmých musí vymizet.

Jsou-li v každém bodě napjatého tělesa tři hlavní napětí, mluvíme o *prostorové napjatosti*. Redukují-li se na dvě, pak jde o *rovinovou napjatost*, tzn. že v jednom směru, a to ve směru kolmém k rovině napjatosti nejsou napětí. Nejjednodušší je *napjatost přímková*, která vznikne při natahování nebo stlačování prizmatické tyče ve směru její osy, jako např. na obr. (2.6) 1. Jediné hlavní napětí je napětí ve směru napínání tyče, tedy kolmé k průřezům tyče. Napětí

ve směru druhých dvou hlavních os elipsoidu jsou nulová. Přesto nastane posunutí bodů na původní kulové ploše ve směru těchto příčných hlavních os elipsoidu vznikajícího v napjatém stavu. Tato deformace koule ve směru příčném ke směru napínání není tedy podmíněna zvláštním napětím, nýbrž základní vlastností pružných látek pevného skupenství při natahování nebo stlačování zároveň se příčně zkracovat nebo prodlužovat. Pojednáme o tom v následujícím článku.

2.6.2. Tah a tlak

Úkolem nauky o pružnosti je zjistit souvislost mezi deformacemi a napětími, která v tělesech budí vnější síly. K příslušné zákonitosti dojdeme snadno jednoduchou úvahou, jejíž výsledek pokus plně potvrzuje. Vyjdeme z nejjednoduššího případu přímkové napjatosti a sledujeme, jak se chová tyč na jednom konci upevněná [obr. (2.6) 2], budeme-li postupně



Obr. (2.6) 2. Tyč namáhána tahem

zvětšovat její zatížení. Zatížením tyče silou F prodlouží se její původní délka l o Δl . Pokud je tahová síla malá, je také malá deformace Δl a můžeme mít za to, že namáháním tyče se mechanické vlastnosti jejího materiálu nezměnily. Připojíme-li ještě jednu takovou sílu, působí na tyč stejných vlastností jako první síla, a prodlouží ji tedy opět o stejnou délku Δl . Síla $2F$ způsobí tedy deformaci $2\Delta l$. Podobně, připojíme-li třetí stejně velkou sílu, způsobí opět deformaci Δl , síla $3F$ dá tedy deformaci $3\Delta l$. Tak tomu bude patrně tak dlouho, pokud se deformací tyče nezmění její odpor proti další deformaci. Mezi činnou silou a deformací je tedy úměrnost, která pro malé deformace byla experimentálně potvrzena u velké řady látek a kterou vyslovil Hooke ve tvaru obecného zákona: „Deformace je úměrná napětí materiálu“, přičemž napětím Hooke rozuměl zatížení vnější silou,

$$2.6 (3)$$

$$\Delta l = \text{const} \cdot F.$$

Konstanta úměrnosti závisí patrně nejen na materiálu, z něhož je tyč zhotovena, nýbrž také na délce tyče l a na průřezu tyče S . Vyšetřme nejprve u tyče ze zvoleného materiálu vliv délky na konstantu úměrnosti. Rozdělme tyč značkami na stejné díly, abychom zjistili, jak se výsledná deformace rozloží podél tyče [obr. (2.6) 2]. Po zatížení tyče zjistíme, že vzdálenosti mezi jednotlivými značkami jsou nyní sice větší, avšak opět mezi všemi značkami stejné, tj. že se deformace rozložila rovnoměrně na celou délku tyče a že celková deformace je dána součtem vesměs stejných deformací jednotlivých dílů tyče. Tak tomu musí být, protože všechny části tyče jsou v klidu, a tedy síly působící na obou krajních průřezích libovolné části tyče se ruší. Každá část je tedy namáhána stejnou silou, a proto jsou stejné díly tyče stejně prodlouženy. Čím delší bude tyč, tj. kolikrát více zvolených dílů bude obsahovat, tolikrát větší bude celková deformace tyče Δl . To znamená, že konstanta úměrnosti ze vztahu 2.6 (3) je přímo úměrná délce tyče.

Podobnou úvahou zjistíme, že konstanta je nepřímo úměrná průřezu tyče S , neboť je-li k prodloužení tyče průřezu 1 cm^2 o Δl třeba síly F , pak stejné prodloužení Δl dvou stejných tyčí vyžaduje sílu $2F$. Myslíme-li si tedy tyč složenou z řady vláken o stejném celkovém průřezu, působí tah rovnoměrně rozložený na průřezu na každé vlákno silou úměrnou jeho průřezu. Protože tyto síly úměrné průřezu způsobují stejné prodloužení všech vláken, musí být konstanta nepřímo úměrná průřezu.

Spojíme-li oba popsané poznatky, můžeme psát

$$\text{const} = k \frac{l}{S},$$

takže vzhledem k 2.6 (3) dostaneme

$$2.6 (4) \quad \Delta l = k \frac{l}{S} F,$$

přičemž konstanta k závisí už jenom na materiálu tyče.

Dělíme-li prodloužení tyče Δl původní délkou l , dostaneme číselně deformaci jednotky délky tyče, která již nezávisí na délce tyče. Tomuto poměru — označujeme jej ε — říkáme *poměrné prodloužení* (*poměrné podélné prodloužení*):

$$2.6 (5) \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Je to poměrné číslo, bez rozměru.

V rovnici 2.6 (4) vystupuje podíl F/S , který podle výkladu v předešlém článku je normálové napětí

$$2.6 (6) \quad \sigma_n = \frac{F}{S},$$

protože myslíme-li si napnutou tyč kdekoli přerušenou příčným řezem, působí část tyče, která je nad tímto řezem, na spodní část silou F a touž silou opačného směru působí spodní část tyče na horní část; přitom předpokládáme, že se síla rovnoměrně rozloží na celý průřez tyče, proto můžeme diferenciální podíl, jímž je obecně určeno napětí, nahradit podílem celé síly a celého průřezu.

Hookův zákon tak nabývá tvaru

$$2.6 (7) \quad \varepsilon = k \sigma_n \quad \text{nebo} \quad \sigma_n = E \varepsilon,$$

zavedeme-li místo konstanty k novou konstantu $E = 1/k$. Na rozdíl od 2.6 (3) nezávisí Hookův zákon v této formě na rozměrech tělesa, protože vyjadřuje vztah mezi poměrnými veličinami. Obě konstanty jsou materiálové konstanty, z nichž k se jmenuje *součinitel protažení*; udává číselně, o kolik se prodlouží jednotka délková při jednotkovém napětí. U většiny materiálů, jež se řídí Hookovým zákonem, je to velmi malé číslo (např. pro ocel $k \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2 \cdot \text{kp}^{-1}$), a proto se raději používá jeho převrácené hodnoty E , která se nazývá *modul pružnosti v tahu* (*Youngův modul*). Je definován podílem napětí a příslušného poměrného prodloužení, ovšem v mezích, v nichž platí úměrnost mezi oběma veličinami. Jeho velikost pro některé kovy je v tab. (2.6) I.

Tabulka (2.6) I

Elastické konstanty některých látek

Materiál	Modul pružnosti v tahu E [kp . cm ⁻²]	Poissonův poměr μ	Stlačitelnost γ [cm ² . kp ⁻¹]	Modul pružnosti ve smyku G [kp . cm ⁻²]
Hliník	732 000	0,339	$1,3 \cdot 10^{-6}$	273 700
Měď	1 258 000	0,348	$0,7 \cdot 10^{-6}$	464 000
Železo	2 160 000	0,277	$0,62 \cdot 10^{-6}$	810 000

Modul E má stejný rozměr jako napětí, což svádí k tomu vidět v něm napětí, které by způsobilo protažení o celou původní délku ($\varepsilon = 1$). Žádný materiál, který se řídí Hookovým zákonem, však tak ohromné napětí nevydrží, a proto je takový výklad modulu pružnosti nesmyslný. Kromě toho není modul pružnosti vůbec napětím, i když má týž rozměr.

Kdybychom při napínání tyče zároveň přesně měřili plochu průřezu, zjistili bychom, že prodlužováním tyče se průřez zmenšuje úměrně se zatížením, že tedy i v tomto směru platí Hookův zákon.

Tyč čtvercového průřezu na obr. (2.6) 3 prodlouží se působením síly F o $\Delta l = l' - l$ a strany čtvercového průřezu se zmenší o $\Delta a = a - a'$. Jako jsme zavedli poměrné podélné prodloužení $\varepsilon = \Delta l/l$, zavádíme *poměrné příčné zkrácení**

$$\eta = \frac{\Delta a}{a}.$$

Podle Hookova zákona je také mezi poměrným zkrácením a napětím úměrnost, takže

$$\eta = k_1 \sigma_n,$$

kde k_1 nazýváme *součinitelem příčného zkrácení*. Dosadíme-li za σ_n z 2.6 (7), bude

$$2.6 (8) \quad \eta = k_1 E \varepsilon = \mu \varepsilon = \frac{1}{m} \varepsilon = \frac{1}{mE} \sigma_n,$$

kde konstantu m nazýváme *Poissonovou konstantou* a $\mu = 1/m$ *Poissonovým číslem* nebo *poměrem*. Obě konstanty jsou bezrozměrné materiálové konstanty, z nichž první udává, kolikrát je poměrné podélné prodloužení větší než poměrné příčné zkrácení. To je u každé látky jiné, a proto je třeba velikost Poissonovy konstanty individuálně určovat měření. Nicméně lze teoreticky zjistit meze, v nichž obě konstanty musí ležet, jak ukážeme v závěru tohoto článku.

Píšeme-li poměrné deformace při namáhání prizmatické tyče na obr. 2.6 (3) tahem ve tvaru $\varepsilon = (l' - l)/l$ a $\eta = (a - a')/a$, dostaneme pro rozměry l' a a' deformované tyče vzhledem k 2.6 (7) a (8) ihned jednoduché vztahy

2.6 (9)

$$a' = a(1 - \eta) = a \left(1 - \frac{\sigma_n}{mE} \right),$$

$$l' = l(1 + \varepsilon) = l \left(1 + \frac{\sigma_n}{E} \right),$$

v nichž l a a jsou rozměry tyče před deformací a σ_n je normálové napětí v tyči.

Všechny vztahy, jimiž jsme popsali namáhání tyče tahem, platí i pro namáhání tlakem, je-li tyč dostatečně krátká; stačí, dosadíme-li do nich za normálové napětí zápornou číselnou hodnotu, např. $\sigma_n = -200 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2}$. Potom vyjdou také pro poměrné deformace ε a η záporné číselné hodnoty, tj. $(l' - l)/l < 0$ a $(a - a')/a < 0$, čili $l' < l$ a $a' > a$.

To znamená, že tyč se tlakem ve směru délky zkracuje a napříč roztahuje. Změníme-li však při aplikaci na tlak předem znaménka v obecných vztazích např. 2.6 (9), pak do nich musíme za ε , η a σ_n dosazovat kladné číselné hodnoty, tzn. je třeba definovat $\varepsilon = (l - l')/l$ a $\eta = (a' - a)/a$.

*) *Poměrným zúžením nazýváme poměr $\Delta S/S \approx 2\eta$.*

Při stlačování tyče (prutu), která je dlouhá proti průřezu, mohou nastat komplikovanější jevy, při nichž osa tyče vybočí z původního směru a tyč se ohýbá. V tomto případě mluvíme o *vzpěru*, jehož teorie je složitější než pro prosté namáhání tlakem.

Uvedených vztahů upravených pro namáhání tlakem použijeme k vyšetření deformace tělesa, které je vystaveno *všestrannému kolmému tlaku*, jako kdybychom je ponořili do kapaliny, v níž je tlak p . Namáhaným tělesem nechť je hranol na obr. (2.6) 4, jehož hrany mají délky a , b a c . Kdyby tlak σ_n působil jen v jednom směru, např. ve směru hrany c , pak by se hranol v tomto směru zkrátil a v kolmých směrech naopak prodloužil, takže podle 2.6 (9) bychom měli $a' = a(1 + \eta)$, $b' = b(1 + \eta)$, $c' = c(1 - \varepsilon)$. Působí-li tlak také ve směru b , je i v tomto směru poměrné podélné zkrácení ε , ale zároveň i poměrné příčné prodloužení η ve směru hran a a c , takže $a' = a(1 + 2\eta)$, $b' = b(1 - \varepsilon + \eta)$, $c' = c(1 - \varepsilon + \eta)$. Působí-li posléze tlak i ve směru hrany a , je i v tomto směru poměrné podélné zkrácení ε a v příčných směrech poměrné příčné prodloužení η , takže délka hrany a po deformaci bude

$$a' = a(1 - \varepsilon + 2\eta),$$

a obdobně pro b' a c' . Při tom jsme ve všech směrech volili stejné poměrné deformace, protože předpokládáme stejný tlak ze všech stran. Čtenář snadno rozšíří provedenou úvahu i na případ, že v jednotlivých směrech působí různé tlaky.

Před deformací má hranol objem $V = abc$, který se deformací změní na

$$V' = abc(1 - \varepsilon + 2\eta)^3 \approx V[1 - 3(\varepsilon - 2\eta)],$$

pomineme-li po umocnění všechny členy druhého a vyššího řádu jako velmi malé, protože poměrné deformace ε a η jsou samy o sobě malé. Všeobecný význam mají poměrné změny tvaru namáhaných těles, a proto určíme ještě poměrnou změnu objemu tělesa. Při-
držíme-li se pravidla, že změna nějaké veličiny je určena rozdílem „nová hodnota příslušné veličiny minus její stará hodnota“, pak poměrná změna objemu tělesa podrobeného všestrannému tlaku je

$$2.6 (10) \quad \frac{V' - V}{V} = \frac{\Delta V}{V} = -3(\varepsilon - 2\eta) = -\frac{3(m-2)}{mE} \sigma_n,$$

dosadíme-li za ε a η ze vztahů 2.6 (7) a (8). Pozorujeme, že ve shodě s Hookovým zákonem je zase deformace (zde poměrná změna objemu) úměrná napětí σ_n . Úvaha má hlavně význam pro pružnost kapalin, u nichž je však zvykem napětí v tlaku σ_n nazývat prostě *tlakem* a označovat jej p . V hořejším vztahu se objevuje nový součinitel ($\sigma_n = p$)

$$2.6 (11) \quad \boxed{\gamma = -\frac{\Delta V}{V} \frac{1}{p}},$$

který se nazývá *objemová stlačitelnost*; je definován podílem relativního zmenšení objemu a zvýšení tlaku, jež příslušné zmenšení objemu způsobuje. Převrácená hodnota objemové stlačitelnosti je nový modul pružnosti, který se nazývá *modul objemové pružnosti* K . Vzhledem k 2.6 (10) je pro látky řídící se Hookovým zákonem

$$2.6 (12) \quad K = \frac{1}{\gamma} = \frac{mE}{3(m-2)} = \frac{E}{3(1-2\mu)},$$

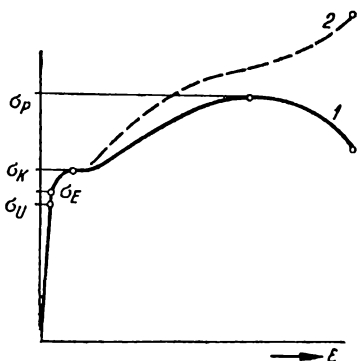
položíme-li $\mu = 1/m$.

Z tohoto vztahu ihned plynou meze, v nichž musí ležet velikost Poissonova poměru μ . Modul objemové pružnosti K musí být vždy kladný, protože jinak by se vzhledem k 2.6 (10)

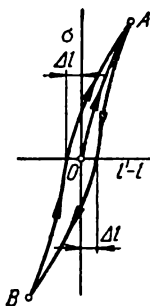
objem tělesa stlačováním zvětšoval, což odporuje zkušenosti. Stejně i modul E musí mít kladnou hodnotu, takže výraz v závorce jmenovatele hořejšího vztahu musí být kladný, tj. $\mu < 1/2$. Zároveň musí být $\mu > 0$, protože jinak by se prodlužováním tyče zároveň zvětšoval i její průřez. Pro Poissonův poměr tedy platí

$$0 < \mu < \frac{1}{2}.$$

Z měření plyne, že jeho hodnota leží mezi $1/4$ a $1/2$, průměrně bývá asi $\mu = 0,3$. Krajní hodnoty $\mu = 1/2$ nebo $m = 2$ dávají $\gamma = 0$, tj. $\Delta V = 0$, objem tělesa se zvýšením tlaku



Obr. (2.6) 5. Diagram závislosti napětí na poměrném prodloužení pro měkkou ocel: 1 — napětí vztahované na původní průřez, 2 — napětí vztahované na skutečný průřez



Obr. (2.6) 6. Doprůžování

nemění, těleso se chová jako *nestlačitelné*. Nestlačitelnost se předpokládá při mnohých úvahách v mechanice kapalin, ačkoli kapaliny jsou ve skutečnosti stlačitelnější než pevné látky.

Budeme-li tyč na obr. (2.6) 2 zatěžovat postupně většími silami a zjišťovat závislost prodloužení na napětí, ukáže se, že úměrnost mezi napětím a prodloužením, daná Hookovým zákonem, platí jen pro malé deformace. V celém rozsahu deformací až do přetržení tyče je tato závislost pro měkkou ocel dána křivkou na obr. (2.6) 5.

Napětí σ_v , které ještě je úměrné poměrnému prodloužení, nazýváme *mezi úměrnosti*. Odtiží-

me-li tyč, zmizí prakticky deformace, délka tyče se opět zkrátí na původní délku. Zatěžujeme-li dále do napětí σ_K , dosáhneme tzv. *meze pružnosti*, která se zpravidla neliší mnoho od meze úměrnosti. V tomto oboru se látka chová jako *dokonalě pružná*. Zatěžujeme-li materiál nad mez pružnosti, zjišťujeme po odtižení, že deformace nezmizí úplně, nýbrž že zůstává jistá *trvalá (plastická) deformace*. Mezi pružností by proto mělo být takové napětí, při němž po odlehčení není trvalá deformace. Je to zřejmě velmi neurčitá hodnota. Závisí na přesnosti přístrojů, jimiž se měří prodloužení, a proto je třeba ji stanovit úmluvou. V technické praxi rozumíme mezi pružností takové napětí, při kterém zůstává trvalé prodloužení menší než 0,01 až 0,003 % původní délky. V tomto rozsahu je velká část technicky důležitých materiálů, zejména ocel, pružná. Nad mezí pružnosti leží (u měkké oceli) tzv. *mez kluzu* nebo *mez průtažnosti* daná napětím σ_K . Tečna křivky v tomto bodě má téměř vodorovný směr. Tyč se prodlužuje, aniž se zatížení zvětšuje. Fyzikální vlastnosti materiálu se začínají značně měnit a materiál se zpevňuje. Pokračujeme-li ve zvyšování napětí, dosáhneme konečně tzv. *meze pevnosti* σ_P , pak se tyč přetrhne. Tyč se poruší v místě, v němž se při dosažení meze pevnosti začne průřez u některých kovů, např. u měkké oceli, značně zužovat. Proto při tomto pochodu napětí na obr. (2.6) 5 opět klesá, neboť je vztaheno na původní nezměněný průřez. Podobně se chová materiál při stlačování poměrně krátké tyče, u které nemůže nastat ohyb. U oceli např. je mez pružnosti při tlaku velmi přibližně stejná jako při tahu, rozdily však bývají v mezi pevnosti.

Jestliže nezmizí po odtižení deformace ihned, nýbrž jen její část, a zbytek až po nějaké době, říkáme tomuto jevu *doprůžování (elastická hystereze)*.

Doprůžování a odchylky od Hookova zákona se ukazují při opakovaném namáhání materiálu tahem a tlakem. Křivky napínání a stlačování tvoří smyčku, která je přehnaně znázorněna na obr. (2.6) 6. Při prvním zatížení tahem do meze pružnosti je závislost mezi napětím a prodloužením dána křivkou OA. Odlehčujeme-li tyč, probíhá zkracování po jiné křivce a při nulovém napětí má tyč ještě deformaci Δl . Je třeba tlaku, aby deformace Δl zmizela. Zvyšujeme-li tlak, tyč se zkracuje, deformace nabývá záporných hodnot. Je-li tyč po dosažení stavu B zbavena zatížení, je opět třeba tahu, aby deformace Δl zmizela. Smyčka na obr. (2.6) 6 nazývá se *hysterezní smyčka*. Plocha, kterou uzavírá, je úměrná práci, která se při tomto kruhovém ději mění v teplo a nelze ji nijak získat zpět.

2.6.3. Pružnost ve smyku

O namáhání prostým smykem (nebo stříhem) mluvíme tehdy, když jednotlivé vrstvy namáhaného materiálu se navzájem posouvají, aniž se mění jejich kolmá vzdálenost. Na obr. (2.6) 7 je malý hranolek, naznačený jednotlivými body, namáhán na smyk. Jednotlivé vrstvy se vzájemně posunuly (smýkly se po sobě). Vzdálenost mezi body v jednotlivých vrstvách zůstala stejná, rovněž tak se nezměnila vzdálenost mezi vrstvami. (Kdyby se měnily vzdálenosti bodů v jedné vrstvě nebo svislá vzdálenost vrstev, znamenalo by to, že kromě smyku tu působí ještě tah nebo tlak.) Taková deformace nastane, působí-li tečná síla F_t , jak je naznačeno. Předpokládáme přitom ovšem, že výška hranolu je dostatečně malá, aby nenastal ohyb.

Tečnou silou F_t , působící v rovině horní stěny hranolku o hranách a , b , c na obr. b , vzniká posunutí horní stěny o u . Podle Hookova zákona je tato deformace opět úměrná působící síle. Je zřejmé, že velikost deformace u je při stálé síle úměrná výšce hranolku b , neboť tečné síly mezi jednotlivými vrstvami musí být stejně velké, jakmile nastane rovnováha a vrstvy jsou v klidu. Proto je posunutí mezi dvěma sousedními vrstvami v celém hranolu stejné a posuv horní vrstvy je úměrný vzdálenosti od pevné podstavy. Můžeme proto podobně jako u tahu zavést tzv. poměrné posunutí

2.6 (13)

$$\gamma = \frac{u}{b},$$

které již na výšce b nezávisí. Je to změna původně pravého úhlu, vyjádřená v míře obloukové, protože pro malé deformace $u/b = \tan \gamma \approx \gamma$.

Dále je zřejmé, že deformace závisí také na velikosti plochy

$S = ac$, na které tečná síla F_t působí. Rozdělíme-li rovinou, rovnoběžnou s rovinou, v níž tato vnější síla působí, hranol na dvě části, pak spodní část, snažící se vzbuzenými vnitřními silami zabránit posunutí, působí na horní část silou stejně velkou jako F_t , ale opačného směru, a naopak horní část působí na spodní silou F_t . V ploše velikosti $S = ac$ rozdělující hranolek na dvě části charakterizuje tedy vnitřní působení obou částí na sebe síla velikosti F_t , což podle 2.6 (2) vede k *tečnému (smykovému) napětí*, které za předpokladu, že se síla rovnoměrně rozloží na celou plochu S , dostaneme, když tečnou sílu F_t dělíme plochou, v níž působí:

2.6 (14)

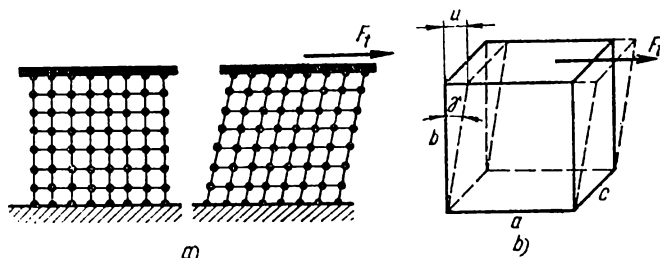
$$\tau = \frac{F_t}{S} = \frac{F_t}{ac}.$$

Hookův zákon pro smyk nabývá pak tvaru

2.6 (15)

$$\gamma = k\tau \quad \text{nebo} \quad \tau = G\gamma,$$

kde konstantu k lze nazvat součinitelem posunutí. Častěji se používá její převrácené hodnoty $G = 1/k$, která se analogicky s tahem a tlakem jmenuje *modul pružnosti ve smyku*. Má jako ostatní moduly pružnosti rozměr napětí, co do významu však není napětím, nýbrž konstantou úměrnosti mezi tečným napětím a poměrným posunutím.



Obr. (2.6) 7. Posunutí způsobené tečnou silou

Modul pružnosti ve smyku se také nazývá *modul torze*, protože prostý smyk se vyskytuje při zkrucování tyče kruhového průřezu, která je na obou koncích namáhána dvojicemi M_x navzájem opačného smyslu, jejichž vektory jsou rovnoběžné s osou tyče. Poměry se nezmění, jestliže tyč na jednom konci pevně upneme [obr. (2.6) 8a].

Vyřízneme-li z tyče elementární trubici (obr. b) o poloměru x a tloušťce stěny dx , vidíme názorně, že se elementární hranolek, omezený dvěma povrchovými přímkami, deformuje při zkrucování jako hranolek na obr. (2.6) 7. Zkroutili-li se tyč délky l na volném konci o úhel φ , pak poměrné posunutí

$$\gamma = \frac{x\varphi}{l} \quad *)$$

Toto posunutí vzniká tečným napětím τ , takže vzhledem k 2.6 (15) můžeme psát

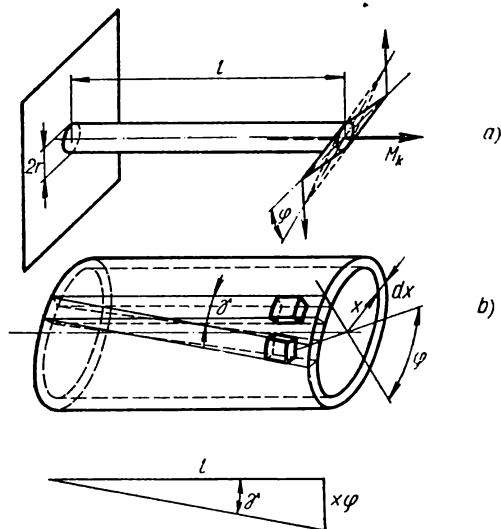
$$\tau = G \frac{x\varphi}{l}.$$

Tečné napětí na mezikruží poloměru x a tloušťky dx je dáno podílem tečné síly dF a plochy mezikruží dS , tedy

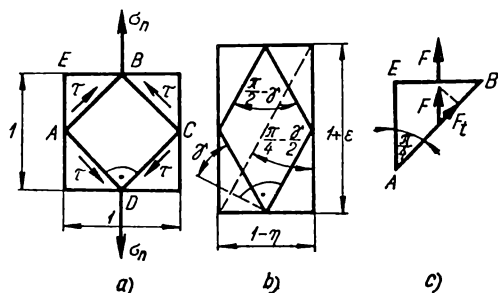
$$\tau = \frac{dF}{dS} = \frac{Gx\varphi}{l}.$$

Tato tečná síla dává vzhledem k ose válce elementární moment

$$\begin{aligned} dM_k &= x dF = \frac{G\varphi}{l} x^2 dS = \\ &= \frac{2\pi G\varphi}{l} x^3 dx. \end{aligned}$$



Obr. (2.6) 8. Kroucení tyče kruhového průřezu



Obr. (2.6) 9. Deformace krychle při jednostranném tahu

Po integraci v mezích od $x = 0$ do $x = r$ dostaneme konečný vztah mezi krouticím momentem M_k a zkroucením tyče φ ve tvaru

$$2.6 (16) \quad M_k = \frac{\pi G r^4}{2l} \varphi.$$

Pro vyšetřovaný případ namáhání tyče kroucením jsou veličiny l , r a G stálé, takže ve shodě s Hookovým zákonem máme opět úměrnost mezi deformací φ a zatížením krouticím momentem, $\varphi = \text{const} \cdot M_k$.

Úhel zkroucení φ je přímo úměrný délce a nepřímo úměrný čtvrté mocnině poloměru, tedy $\varphi \sim l/r^4$, proto se tenká dlouhá vlákna (např. křemenná) i malou dvojicí značně zkroutili. Toho se využívá k měření malých dvojic; příkladem je zjišťování rovnosti tíhové a setrvačné hmotnosti, o němž jsme se zmínili v čl. 2.2.5.

*) Úhel γ má malou hodnotu i při velkém zkroucení, pokud je průměr zkrucované tyče malý proti její délce. Např. při zkroucení drátu o poloměru $r = 0,5 \text{ mm}$ a délce $l = 500 \text{ mm}$ o plný úhel $\varphi = 2\pi$ je $\gamma = \frac{r\varphi}{l} = \frac{0,5 \cdot 2\pi}{500} = \frac{\pi}{500}$, takže $\gamma = \frac{180^\circ}{500} = 0,36^\circ = 20'$.

Chování materiálu z hlediska jeho elastických vlastností charakterizují moduly pružnosti v tahu E a ve smyku G a Poissonova konstanta m , popř. její převrácená hodnota μ .

Mezi těmito veličinami platí vztah

$$2.6 \quad (17) \quad G = \frac{mE}{2(m+1)} = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Souvislost s třetím modulem, a to modulem objemové pružnosti K , je pak dána vztahem 2.6 (12).

U pružných těles má Poissonův poměr velikost v mezích $0 < \mu < 1/2$, jak jsme zjistili v čl. 2.6.2. Vzhledem k tomu plyne z hořejšího vztahu pro modul pružnosti ve smyku obecně

$$\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}.$$

Hodnoty v tab. (2.6) I, zjištěné měřením, potvrzují tento teoretický závěr.

Odvození hořejších vztahů lze provést takto: Na krychli o hraně rovné 1 působí v jednom směru normálové napětí σ_n , takže se deformuje způsobem, naznačeným na obr. (2.6) 9b. Podle 2.6 (9) nabývají hrany krychle délek $(1 + \varepsilon)$, $(1 - \eta)$, $(1 - \eta)$, jak je na obr. b uvedeno.

Deformaci krychle můžeme také popsat změnou γ původně pravého úhlu, který svíraly stěny hranolu $ABCD$ v krychli. Podle obr. b je

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right)} = \frac{1 - \eta}{1 + \varepsilon},$$

přičemž jsme použili známého vztahu pro tangens součtu dvou úhlů. Poměrné posunutí γ je velmi malé, takže můžeme položit $\operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) \approx \frac{\gamma}{2}$; avšak i poměrné deformace ε a η jsou velmi malé, takže vynecháme-li jejich vzájemné součiny, dostaneme z hořejšího vztahu

$$2.6 \quad (18) \quad \gamma \approx \varepsilon + \eta = \frac{m+1}{mE} \sigma_n,$$

přičemž jsme hned dosadili z 2.6 (7) a (8).

Deformace γ vznikne také, působí-li na stěnách hranolu $ABCD$ tečná napětí τ (obr. a), která určíme takto:

Na polovinu stěny krychle o ploše $S = 1/2$ působí síla $F = \sigma_n S = \sigma_n/2$ (obr. c). Stejná síla působí na stěnu AB hranolu. Její průmět do této stěny je tečná síla $F_t = F \cos \frac{\pi}{4} = \frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma_n}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$, předpokládáme-li, že γ je velmi malé. Dělíme-li tuto tečnou sílu plošným obsahem stěny AB velikosti $1/\sqrt{2}$, dostaneme

$$\tau = F_t \sqrt{2} = \sigma_n/2.$$

Dosadíme-li toto napětí do 2.6 (18), dostaneme vzhledem k Hookovu zákonu pro smyk $\tau = G\gamma$ vztah 2.6 (17) mezi moduly pružnosti ve smyku a v tahu.

2.7. Ráz těles

2.7.1. Přehled úloh o rázu

Pohybový stav těles se spojitě mění s časem, takže souřadnice jednotlivých bodů tělesa a jejich derivace jsou spojitě a konečně funkce času. Setkají-li se však za pohybu pevná tělesa, takže si vzájemně ve svých pohybech překážejí, pozorujeme prakticky náhlé změny rychlosti těles co do směru i velikosti. Při těchto dějích, kterým říkáme *nárazové*, jsou

přesněji řečeno dráhy některých bodů velmi značně zakřivené a zrychlení nabývá značných hodnot. Proto se projeví znatelná změna rychlosti za velmi krátkou dobu.

Změně rychlosti tělesa je úměrná změna hybnosti tělesa, která je podle 2.2 (48) rovna impulsu síly, tj. součinu síly a doby jejího působení, kdyby síla během svého působení byla stálá. Z toho plyne, že náhlou změnu rychlosti tělesa způsobují značně velké síly, jejichž účinek však trvá jen krátkou dobu. Tyto síly, které vzniknou a vzápětí zase zaniknou, nazýváme *nárazovými silami*. Proti nim jsou „obyčejné síly“ jako tíže a různé odpory prostředí nepatrné, takže změna pohybového stavu srážejících se těles způsobená „obyčejnými silami“ je zanedbatelná proti změně způsobené silami nárazovými. Nárazové síly mezi dvojicí těles splňují však v každém okamžiku princip akce a reakce, a jsou to vlastně *vnitřní síly*, které působí v soustavě hmotných bodů tvořících srážející se tělesa. Jednotlivé části soustavy jsou tedy vystaveny jen působení vnitřních sil, zatímco vnější síly, např. tíže, se prakticky neprojevují, to znamená, že příslušnou soustavu můžeme chápat jako dynamicky izolovanou. Podle obou impulsových vět (čl. 2.4.2) vyznačuje se izolovaná soustava stálou celkovou hybností a stálou celkovou točivostí. Během působení nárazových sil platí tedy tyto naprosto obecné věty:

Vektorový součet hybností obou těles se při rázu nemění.

Vektorový součet točivostí obou těles se při rázu nemění.

Tyto věty můžeme vyslovit také takto:

2.7 (1) *Celková hybnost obou těles po rázu je rovna jejich celkové hybnosti před rázem.*

2.7 (2) *Celková točivost těles po rázu je rovna jejich točivosti před rázem.*

Máme-li ale sledovat pohyb jednotlivých těles uvnitř jejich soustavy, která je jako celek izolována, nestačí k tomu uvedené obecné věty. K tomu je třeba aplikovat obě impulsové věty zvlášť na jednotlivá tělesa, z jejichž stanoviska jsou ovšem nárazové síly vnější síly. Nazveme-li tedy obecně impuls krátkodobé nárazové síly *nárazem*, platí podle I. impulsové věty pro každé těleso v příslušné soustavě, že *nárazová změna hybnosti tělesa (změna hybnosti jeho těžiště) je rovna celkovému vnějšímu nárazu*

2.7 (3) $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \mathbf{I}.$

Označíme-li $\mathbf{L}$ výsledný moment nárazové síly kolem těžiště, který stručně nazveme *točivý náraz*, dostaneme z II. věty impulsové další vektorovou rovnici

2.7 (4) $\mathbf{b} - \mathbf{b}_0 = \mathbf{L},$

která říká, že *nárazová změna točivosti pevného tělesa je rovna výslednému točivému nárazu*. Obě rovnice, které při aplikaci na jednotlivá tělesa musí ovšem vyhovovat obecným větám 2.7 (1) a (2) pro soustavu jako celek, jednoznačně určují změny pohybu uvnitř soustavy, způsobené nárazovými silami.

Obecný problém rázu je tedy tento: Jsou dána dvě pevná tělesa (nebo více) známého rozložení látky i mechanických vlastností a je dán jejich pohybový stav v okamžiku před rázem. Máme určit průběh rázu od prvního dotyku těles až do jejich odloučení, tj. rychlosti a deformace těles a velikosti i směr nárazových sil a dvojice při styku těles. Úplným řešením této úlohy byl by ovšem určen i pohyb těles po rázu, doba jeho trvání nebo i trvalé deformace a oscilace těles, která by se tedy po rázu nepohybovala jako tuhá tělesa stálého tvaru. Úplné řešení rázu je však jedno z nejsložitějších z celé mechaniky, a vymyká se proto z rámce našich výkladů. Omezíme se proto jen na *klasický problém*, který záleží v určení pohybu obou těles po rázu. Obecné řešení tohoto problému vyžaduje určení tří složek rychlosti těžiště každého z těles a tří složek rotace kolem těžiště. K řešení obecného problému je tedy zapotřebí celkem 12 rovnic. Obecná úloha se ovšem zjednoduší ve zvláštních případech, které můžeme roztrždit podle okolností, na nichž závisí podstatně průběh rázu:

- a) na rozložení hmotnosti v obou tělesech,
- b) na jejich vzájemném pohybu před samým rázem,
- c) na jejich konstantách pružnosti a
- d) na povaze jejich povrchů.

Předpokládáme, že se tyto povrchy na počátku rázu dotknou v jediném bodě O , který nazveme *bodem rázu* [obr. (2.7) 1].

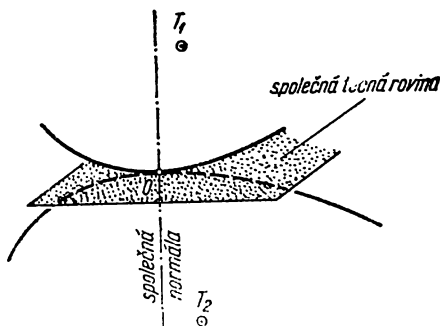
Středový (centrický) ráz nastane, jsou-li tvar a počáteční poloha těles takové, že obě těžiště T_1 a T_2 leží na společné normále v bodu rázu. Tuto normálu nazveme *osou rázu*. Tak je tomu vždy např. v důležitém případě rázu dvou koulí. V opačném případě je ráz *výstředný (excentrický)*.

Přímý ráz je vyznačen tím, že relativní rychlost, kterou se k sobě blíží před rázem povrchy těles v okolí bodu rázu, leží ve společné normále. Je-li relativní rychlost skloněna k této normále, říkáme, že *ráz je šikmý*. I v tomto případě může se úloha značně zjednodušit, je-li rovina vedená společnou normálou a vektorem relativní rychlosti rovinou souměrnosti pro obě tělesa. Pak v této rovině leží i jejich hmotné středy a říkáme, že ráz je *rovinný*. K jeho řešení stačí 8 nezávislých rovnic.

To jsou zvláštní případy, vyznačené speciálními okolnostmi a), b). Další kategorie c) dává důležité hledisko třídění rázu podle pružných vlastností těles. Při každém rázu vznikají v obou tělesech deformace (přetvoření), které dávají vznik deformačním silám. Je zřejmé, že chování všech skutečných těles při rázu je omezeno dvěma krajními případy: *rázem nepružným*, při kterém všechny deformace vzniklé při rázu jsou trvalé (plastické), a *rázem pružným*, při němž tělesa nabudou svého původního tvaru právě na konci rázu, kdy všechny deformace zcela vymizí. Skutečná tělesa jsou pak nedokonale pružná (polopružná).

Zbývá promluvit o kategorii d), tj. o vlivu povrchu těles na povahu nárazových sil. Je jasné, že při šikmém rázu, kdy tečná složka rychlosti povrchů obou těles není rovna nule, obecně vznikne *tečná síla nárazová*, jejíž velikost bude omezena drsností těles. Jen u těles dokonale hladkých nevzniknou ani při šikmém rázu tečné deformace. Drsná tělesa se však nejen stlačí ve směru kolmém k povrchu, ale také se povrchové vrstvy v okolí bodu rázu posunou. Tyto deformace z počátku porostou a po dosažení maxima se budou následkem vzpružování zmenšovat — budou mít tedy podobný průběh jako stlačení. *Drsná tělesa působí na sebe proto také tečným nárazem.*

Konečně může vzniknout i jistá dvojice tření, jestliže tělesa před rázem mají rozdílné rotace kolem společné normály. Při rázu se totiž zdeformovaná tělesa dotýkají v jisté „styčné plošce“, která je u pevných těles sice nepatrná, ale přece jen konečná. Vzniká značný tlak, protože rozměry plošky (obecně eliptické) jsou malé, a proto dvojice sil tření není zanedbatelná. Při takovém *vrtném rázu* se nejbližší části těles zkrucují a po dosažení maxima zase vzpružují, což může mít podstatný vliv na výsledný pohyb obou těles.



Obr. (2.7) 1. Bodový styk těles na počátku rázu

2.7.2. Přímý středový ráz

Nejjednodušší úlohou klasického rázu je přímý, středový ráz těles za předpokladu, že se tělesa chovají před rázem i po něm jako dokonale tuhá a že konají posuvný pohyb. Obvykle se mluví o *rázu koulí*, který je vždy středový a je zároveň přímý, pohybují-li se před rázem obě těžiště po téže přímce, která je ovšem osou rázu [obr. (2.7) 2]. Hmotnosti obou koulí

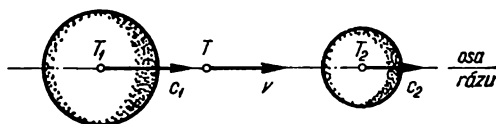
označíme m_1 a m_2 a jejich rychlosti před rázem c_1 a c_2 počítáme kladně ve směru pohybu jejich společného těžiště T . Rychlosti koulí v okamžiku, kdy ráz skončí (tj. v okamžiku, kdy na sebe přestanou silově působit), označíme v_1 a v_2 . Podle obecné věty 2.7 (1) je celková hybnost obou těles po rázu a před ním stejná a je rovná hybnosti těžiště, které se během celého rázu pohybuje stálou rychlostí v jako hmotný bod, jehož hmotnost je rovna celkové hmotnosti soustavy obou těles. Platí tedy obecně

2.7 (5)

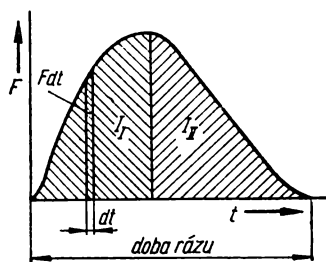
$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v,$$

odkud plyne rychlost v těžiště obou srážejících se těles.

Tato jediná rovnice nestačí však obecně k určení rychlostí v_1 a v_2 těles po rázu. Podle 2.7 (3) je třeba přihlížet také k silovému působení mezi tělesy, z něhož nám však postačí jen kvalitativní popis, plynoucí z přímého názoru.*) V okamžiku, kdy se tělesa dotknou, je síla mezi nimi nulová, roste však se vzájemnou deformací těles [obr. (2.7) 3]. Současně se zmenšuje relativní rychlost těžišť obou těles, až v jistém okamžiku klesne na nulu. V tomto okamžiku se obě těžiště T_1 a T_2 pohybují stejnou rychlostí, rovnou rychlosti v těžiště T soustavy obou těles. Deformace obou těles nabývaly maximální hodnoty a také síly, jimiž tělesa na sebe působí, dosáhly svého vrcholu. Jsou-li tělesa aspoň částečně pružná, pokračuje ráz pochodem, který nazýváme *vzpružováním*. Ve snaze zbavit se své deformace působí tělesa na sebe dále silami téhož smyslu, jimiž se v pravém slova smyslu odstrkují.



Obr. (2.7) 2. Přímý ráz koulí



Obr. (2.7) 3. Schéma časového průběhu nárazové síly

Přitom se deformace zmenšují, síly opět klesají, roste však zase relativní rychlost těžišť obou těles, ovšem v opačném smyslu než při vzájemném stlačování. Můžeme také říci, že relativní rychlost středů koulí, která se až do největšího stlačení zmenšovala z hodnoty $c_r = c_1 - c_2 > 0$ až na nulu, bude se dále zmenšovat a nabude hodnot záporných, které porostou až do konce rázu.

Průběh rázu můžeme tedy rozdělit na dvě fáze I a II. První zahrnuje stlačování až do okamžiku, kdy obě tělesa mají společnou rychlost v a stlačení je maximální, v druhém období pak probíhá vzpružování. Označíme-li F_{21} sílu, kterou druhá koule působí na první kouli, pak první koule je v jednotlivých fázích rázu vystavena impulzům

$$2.7 (6) \quad I_I = \int_I F_{21} dt, \quad I_{II} = \int_{II} F_{21} dt.$$

Pro sílu F_{12} , kterou první koule působí na druhou, platí podle principu akce a reakce $F_{12} = -F_{21}$, takže impulsy na druhou kouli jsou proto

$$2.7 (7) \quad I'_I = \int_I F_{12} dt = -I_I, \quad I'_{II} = \int_{II} F_{12} dt = -I_{II}.$$

*) Teoreticky lze časový průběh kolmé tlaku a stlačení těles (koulí) během přímého rázu počítat z dosti složitých vzorců Hertzových, které byly zhruba experimentálně potvrzeny pro velmi pružné látky, jako je ocel a sklo.

V první fázi rázu změní se rychlosti c_1 a c_2 koulí na rychlost v , v druhé fázi tato společná rychlost přejde v rychlosti v_1 a v_2 , které mají koule na konci rázu. Příslušné změny hybnosti podle 2.7 (3) pak jsou

$$\begin{aligned} 2.7 (8) \quad m_1(v - c_1) &= I_I, & m_1(v_1 - v) &= I_{II}, \\ m_2(v - c_2) &= I'_I = -I_I, & m_2(v_2 - v) &= I_{II} = -I_{II}. \end{aligned}$$

Tyto impulsy jsou úměrné plochám příslušným oběma fázím rázu pod křivkou na obr.(2.7) 3, znázorňující časový průběh nárazové síly. Obecně nejsou stejně velké, protože křivka nemá souměrný průběh kolem svého maxima, nýbrž vlivem nedokonalé pružnosti, již se vyznačují všechna reálná tělesa, je její klesání více či méně rychlejší než její růst, a to podle povahy těles; práce nárazových sil nejví se tedy jen v deformační energii, která by byla schopná úplné a stejně rychlé zpětné přeměny v energii kinetickou, ale zčásti se v tělesech mění v teplo. Projevuje se tu také dopružování, při němž část deformace mizí rychle, ale zbytek teprve během doby, kdy tělesa už nejsou v kontaktu, takže tato část vypružování nemá na průběh rázu už žádný vliv.

Je zřejmé, že vzpružování bude tím lepší, čím více se časový průběh nárazové síly v druhé fázi rázu blíží zrcadlovému obrazu časového průběhu v první fázi rázu, tj. čím souměrnější je tento průběh vzhledem k pořadnici svého vrcholu. Potom se také velikosti impulsů I_I a I_{II} , znázorněných příslušnými plochami na obr. (2.7) 3, navzájem blíží a v krajním případě dokonalého vzpružování jsou přesně stejně velké, tj. $I_{II} = I_I$. Protože k určení rychlostí v_1 a v_2 koulí po rázu nepotřebujeme znát přesný časový průběh nárazové síly, ale jen velikosti impulsů, jak plyne ze vztahů 2.7 (8), je nasnadě vyjádřit vliv nedokonalé pružnosti těles na výsledek rázu poměrem k impulsů nárazových sil v obou fázích rázů, tedy

$$2.7 (9) \quad k = \frac{I_{II}}{I_I}.$$

Dělíme-li rovnice 2.7 (8) příslušnými hmotnostmi a odečteme-li ty, které jsou napsané pod sebou, navzájem od sebe, dostaneme dělením obou rozdílů

$$2.7 (10) \quad \boxed{\frac{v_1 - v_2}{c_1 - c_2} = -\frac{I_{II}}{I_I} = -k,}$$

tzn. poměr k je roven také záporně vzatému poměru $v_r : c_r$ relativních rychlostí koulí na konci a na začátku rázu.

Veličinu k nazval Newton *součinitelem restituce*; my jí budeme říkat stručně *vzpruživost*, protože se tím více blíží jedné, čím dokonaleji se tělesa vrací do původního tvaru.

Newton se domníval, že vzpruživost je konstanta materiálu a že je pro dvě tělesa z týchž látek stálou veličinou (při téže teplotě). Experimenty však nepotvrdily tak jednoduchý zákon, který by vyplýval ze stálosti tohoto součinitele a který by zněl:

Relativní rychlost nedokonalé pružných těles se přímým rázem zmenší ve stálém poměru a změni znaménko. Ukazuje se totiž, že vzpruživost je stálá jen přibližně a závisí nejen na velikosti a tvaru těles, ale ve značné míře také na prudkosti rázu. Čím prudší je ráz, tím větší jsou deformace a tím větší část těchto deformací zůstává trvalou. Proto vzpruživost klesá s rostoucí relativní rychlostí. Novější pokusy pak ukázaly, že k s klesající relativní rychlostí roste a blíží se jedné, takže můžeme říci, že pro dosti malé rychlosti chovají se všechna tělesa přibližně jako dokonale pružná.

Za předpokladu, že známe vzpruživost k , je rovnicemi 2.7 (5) a (10) klasický problém přímého rázu koulí již vyřešen, neboť z obou rovnic dostaneme jednoduchým počtem hledané rychlosti v_1 a v_2 obou koulí po rázu

$$2.7 (11) \quad v_1 = \frac{(m_1 - km_2)c_1 + (1+k)m_2c_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{(1+k)m_1c_1 + (m_2 - km_1)c_2}{m_1 + m_2}.$$

K zjišťování vzpruživosti látek je důležitý případ *rázu koule na pevnou stěnu*. Můžeme jej chápat jako ráz koule na druhou kouli, která je v klidu a jejíž hmotnost m_2 je velmi značná proti hmotnosti m_1 první koule. Při konečné hustotě musí pak být i poměr druhé koule velmi velký, takže jde pak o ráz koule na pevnou stěnu (přesněji řečeno na „poloprostor“). Položíme proto ve vztazích 2.7 (11) $c_1 = 0$, $m_2 \rightarrow \infty$, a tedy $m_1/m_2 \rightarrow 0$. Tak dostaneme

$$2.7 (12) \quad v_1 = \frac{(m_1/m_2 - k) c_1}{m_1/m_2 + 1} = -kc_1, \quad v_2 = 0.$$

To značí, že koule odskočí zpět rychlostí kc_1 , tedy rychlostí zmenšenou v poměru k . Je-li pevná stěna vodorovná a spadne-li na ni koule z výšky H , bude podle známého vztahu

$$c_1 = \sqrt{2gH}, \quad v_1 = -kc_1 = -k\sqrt{2gH}.$$

Koule tedy odskočí do výšky h dané vztahem

$$\sqrt{2gh} = -v_1;$$

dělením obou posledních rovnic vypočteme vzpruživost

$$k = -\frac{v_1}{c_1} = \sqrt{\frac{h}{H}}.$$

Této metody se skutečně užívá v technické praxi k měření vzpruživosti různých látek, zvláště k zjištění tzv. *dynamické pružnosti* umělých látek. Vzorky těchto látek ve tvaru destiček se zkoušejí tak, že se na ně nechá dopadnout ocelová kulička z výše H , změří se h a vypočte k . Není to vlastně vzpruživost umělé látky samé, ale vzpruživost při tomto rázu. Experimentálně však bylo zjištěno (a teoreticky zdůvodněno), že rychlost v_1 při rázu velmi pevného tělesa s tělesem poddajným (měkkým) je prakticky dána vzpruživostí tělesa měkkého, a proto můžeme hodnotu k v tomto případě pokládat za charakteristickou pro vzpružování zkoušené desky.

Vyšetřme ještě oba krajní případy přímého rázu koulí, z nichž první se vztahuje na *dokonale nepružná tělesa*. Deformace těchto těles jsou trvalé, a proto jakmile se rychlosti těles při rázu vyrovnají, přestanou na sebe silově působit a zůstávají trvale v dotyku. Ráz se tedy omezuje jen na první fázi, což vyjadřuje vzpruživost $k = 0$. Z obecných vztahů 2.7 (11) pak vychází pro společnou rychlost po rázu

$$2.7 (13) \quad v_1 = v_2 = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} = v.$$

Vidíme, že v tomto jednoduchém případě je pohyb obou koulí po rázu určen jedinou rovnicí 2.7 (5), která plyne z věty o zachování hybnosti.

I když neexistují tělesa dokonale nepružná, je dosti látek do té míry tvárných (plastických), že můžeme pro ně dobře užít rovnice 2.7 (13) a vypočítat z ní také ztrátu kinetické energie ΔW_k , k níž vždy dochází při nepružném rázu:

$$\Delta W_k = \frac{1}{2} m_1 c_1^2 + \frac{1}{2} m_2 c_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2)^2,$$

dosadíme-li za v ze vztahu 2.7 (13). Úbytek pohybové energie je tedy vždy kladný a spotřebuje se hlavně na deformační práci při stlačení koulí, projevující se jejich zahřátím, nehledíme-li k některým jiným ztrátám, způsobeným např. vznikem zvukových vln, apod. Obvykle posuzujeme v mechanice nepříznivě ztráty kinetické energie, ale v některých případech, kdy si přejeme změnit tvar plastických látek, užíváme právě rázu k tomu, abychom pohybovou energii měnili v energii deformační, např. při kování, tlučení, zatloukání pilot, hřebíků apod. Ve všech takových případech spotřebujeme značnou pohybovou energii kladiva, bucharu aj. nepružným rázem na deformační práci, jež způsobí změnu tvaru kovaného kusu nebo se projeví vniknutím piloty hlouběji do půdy, která se tím deformuje. Při kování je ovšem $c_2 = 0$, takže

$$\Delta W_k = \frac{1}{2} m_1 c_1^2 - \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}.$$

odkud je zřejmé, že deformační práce je tím větší, čím větší hmotnost m_2 má kovaný kus i s kovádkou, na které spočívá.

Druhý krajní případ je ráz *dokonale pružných těles*, která se vyznačují tím, že ještě během druhé fáze rázu se vrátí přesně do původního tvaru, takže veškerá deformační energie se opět uvolní v plné hodnotě ve formě energie kinetické. Impulsy příslušející oběma fázím rázu jsou stejně velké $I_{II} = I_I$, což vyjadřuje vzpruživost $k = 1$. Sečtením rovnic 2.7 (8) pro touž kouli ihned zjistíme, že celkový náraz, který dostane každá z koulí při dokonale pružném rázu, je dvakrát větší než za stejných podmínek při nepružném rázu, který se omezuje jen na první fázi. Ze vztahu 2.7 (10) pro $k = 1$ plyne $v_1 - v_2 = -(c_1 - c_2)$ čili *relativní rychlost pružných koulí změní při rázu jen znaménko*. Rychlosti v_1 a v_2 obou koulí po rázu dostaneme opět ze vztahu 2.7 (11), položíme-li v nich $k = 1$, tedy

$$2.7 (14) \quad v_1 = \frac{2m_2c_2 + (m_1 - m_2)c_1}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{2m_1c_1 + (m_2 - m_1)c_2}{m_1 + m_2}.$$

Snadno bychom vypočetli, že kinetická energie po rázu zůstává stejná jako před rázem, tzn. že pro dokonale pružný ráz platí věta o zachování mechanické energie, což ukazuje na to, že je to děj ryze mechanický.

Ze vzorců 2.7 (14) plynou některé známé výsledky. Jsou-li např. obě koule stejně těžké ($m_1 = m_2$), vyjde

$$v_1 = \frac{2m_1c_2}{2m_1} = c_2, \quad v_2 = c_1.$$

Stejně těžké pružné koule si při přímém rázu vymění rychlosti.

Kdyby druhá koule byla před rázem v klidu ($c_2 = 0$), vyšlo by při různých těžkých koulích

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} c_1, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} c_1.$$

Odtud vidíme, že těžší koule po nárazu na lehčí klidnou pokračuje v pohybu stejným směrem. Narazí-li na stejně těžkou klidnou kouli, zastaví se a odevzdá svou rychlost klidné kouli. Tento výsledek znal již Jan Marek v XVII. století.

Je-li konečná hmotnost m_2 velmi značná proti hmotnosti první koule, takže můžeme poměr $m_1 : m_2$ zanedbat proti 1, odskočí první koule zpět stejnou rychlostí a druhá koule zůstane v klidu, neboť z hořejších vztahů plyne $v_1 = -c_1$, $v_2 = 0$. To je vlastně případ rázu koule na pevnou stěnu, o němž jsme se už zmínili.

2.7.3. Šikmý ráz

V předcházejícím článku jsme probrali nejjednodušší případy rázu přímého, při němž jsme také předpokládali, že ráz je zároveň centrický (středový). Při rázu přímém nezáleží na drsnosti povrchů těles a předmětem tohoto článku bude stručný rozbor rázu šikmého, při kterém se uplatňuje také vliv tření. Budeme se zabývat zase jen nejjednoduššími úlohami a kromě toho budeme nejprve předpokládat, že povrchy těles jsou tak hladké, že síly tření se dají pomíjet, že tedy jde v tomto případě o tělesa *dokonale hladká* nebo stručněji *hladká*.

Šikmý ráz hladkých těles lze snadno rozřešit na základě výsledků odvozených pro ráz přímý, jak ukážeme nejprve na případě rázu koule na pevnou stěnu.

Šikmou rychlost koule před rázem c rozložíme na tečnou složku c_x a na kolmou složku c_y , a uvažujeme takto: Při dokonale hladkosti povrchů nevznikne mezi nimi tečná síla, a proto tělesa mohou na sebe působit jen kolmým tlakem, který bude záviset jen na kolmé složce relativní rychlosti. Vzhledem k tomu, že samozřejmě nevzniknou ani tečné deformace těles, bude mít stlačení stejný průběh jako při přímém rázu rychlostí c_y . Z toho plyne, že tečná složka rychlosti se nemění, kdežto kolmá složka se změní ve stejném poměru k jako při rázu přímém. Jsou tedy složky rychlosti hladké koule po rázu na stěnu

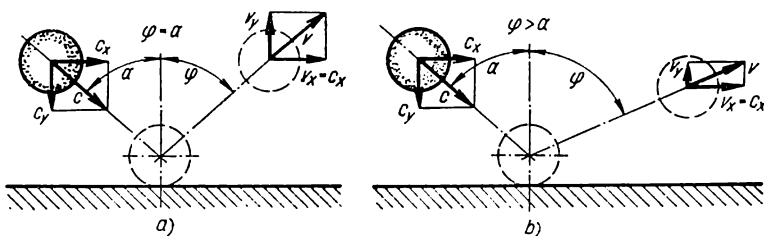
$$v_y = -kc_y, \quad v_x = c_x$$

v soulase s 2.7 (12). Z obr. (2.7) 4 je zřejmé, že úhel odrazu φ polopružné koule od hladké stěny je větší než úhel dopadu α . Oba úhly byly by přesně stejné, kdyby byla koule i stěna dokonale pružná a hladká.

Šikmý ráz dvou stejně těžkých pružných a hladkých koulí je zajímavý v případě, kdy jedna z nich je před rázem v klidu. Pak víme, že obě koule si vymění kolmou složku svých rychlostí a jejich tečné složky se nezmění. Jak je zřejmé z obr. (2.7) 5, odskočí po rázu obě koule *ve směrech k sobě kolmých* rychlostmi rovnými tečné a kolmé složce rychlosti pohyblivé koule. Četné příklady takového rázu pozorujeme při srážkách nejmenších částic látky, např. protonů nebo částic α ve Wilsonově mlžné komoře. Z obr. (2.7) 5 je také zřejmé, že kinetická energie obou koulí po rázu je skutečně rovna kinetické energii první koule před rázem:

$$W_k = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2) = \frac{1}{2} m (c_{1n}^2 + c_{1t}^2).$$

Předpokládali jsme mlčky, že koule před rázem i po rázu konaly pohyb ryze posuvný. Kdyby se jedna z koulí nebo obě také otáčely kolem svých středů, byla by jejich pohybová energie rovna součtu energie posuvného a rotačního pohybu. Protože však jsou koule hladké, jsou nárazové síly v bodě dotyku kolmé k oběma povrchům, a procházejí tedy hmotnými středy obou koulí. Proto je točivý náraz kolem těžiště, působící na každou z koulí, roven nule, a podle věty o zachování točivosti jsou rotace obou koulí po rázu stejné jako před rázem, a jejich rotační

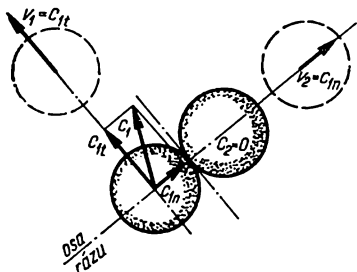


Obr. (2.7) 4. Šikmý ráz na stěnu: *a* — dokonale pružný, *b* — polopružný

energie se tedy rázem nemění. Je-li tedy pohyb obou koulí před rázem ryze posuvný, bude tomu tak i po rázu. Tuto vlastnost má ovšem obecně jen středový ráz hladkých těles.

Šikmý ráz drsných těles. Mezi tělesy hladkými vznikají i při šikmém rázu jen kolmé nárazové síly, které způsobují kolmé stlačení obou těles v okolí styčného místa. U drsných těles přistupují k těmto silám také tečné nárazové síly, které brání vzájemnému styku těles a zároveň způsobují i tečné deformace obou těles v okolí místa styku. Proto je výsledný náraz mezi tělesy šikmý a má ovšem pro obě tělesa stejnou velikost a opačný směr. Na obr. (2.7) 6 jsou vyznačeny kolmé složky tohoto nárazu I_n a $-I_n$ a složky tečné I_t a $-I_t$. Je zřejmé, že obecně nejsou momenty šikmých nárazových sil kolem hmotných středů těles rovny nule, a to ani v případě rázu středového, kdy tyto středy leží na společné normále (jako u koulí). Proto se mění i rotace těles kolem těžiště a vzniká složitý průběh rázu, jehož teorie je velmi nesnadná. Ukážeme však na dvou jednoduchých typických pokusech, které lze názorně vyložit elementární úvahou, k jakým jevům dochází při rázu drsných těles.

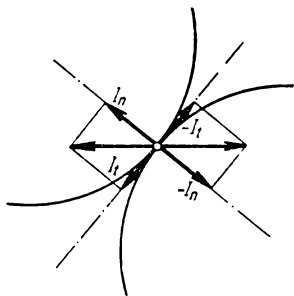
Ráz kladiva na roztočený kotouč. Na pryžový kotouč, otáčivý kolem pevné vodorovné osy O , nechme dopadnout dřevěné kladivo, otáčivé rovněž kolem pevné vodorovné osy O' [obr. (2.7) 7]. Je-li kladivo upraveno tak, že rovina jeho spodní stěny prochází (v libovolné poloze) osou O' , je ráz kladiva na klidný kotouč přímý a kotouč po odskoku kladiva zůstává v klidu. Roztočíme-li však kotouč před rázem, vznikne ráz šikmý, při kterém síly tření působí na kotouč točivým nárazem. Proto se točivost kotouče změní a snadno pochopíme ze zákonů tření, že při stejné prudkém nárazu může točivý náraz dosáhnout jen jisté maximální velikosti. Proto při rychlé rotaci se točivost kotouče zmenší nejvýše o jistou hodnotu, příslušející této maximální velikosti. Je-li však točivost kotouče před rázem menší než točivý náraz tření, zastaví se kotouč ještě před koncem rázu a vlivem vzpružování tečné deformace roztočí se v opačném smyslu. Je to děj zcela obdobný stlačení a restituci míče, který narazí na pevnou stěnu. Kotouč se tedy může po rázu točit v původním nebo i v opačném smyslu, nebo za vhodně volené rychlosti před rázem se po rázu netočit. Právě popsany jev se nepříznivě uplatňuje při nárazech kol podvozku letadla na zem při přistávání. Není-li postaráno o vhodné roztočení kol již před prvním dotykem se zemí, zvyšuje se zpětnou rotací kol točivý náraz, který způsobuje klopení letadla dopředu.



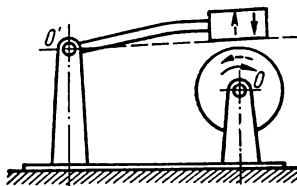
Obr. (2.7) 5. Šikmý ráz dvou hladkých koulí

Ráz roztočeného míče na drsnou desku. Roztočíme pryžový míč kolem svislé osy a pustíme jej na pevnou desku. Je-li deska dosti drsná a volíme-li dostatečnou výšku pádu, pozorujeme, že míč po odskoku se otáčí v opačném smyslu než před rázem [obr. (2.7) 8]. Při prudké rotaci a při malé výšce pádu se ovšem úhlová rychlost míče jen zmenší, ale nezmění směr. Je zřejmé, že výklad jevu je stejný jako v předešlém případě. Stačí si uvědomit, že při rázu vznikne vrtným třením točivý náraz kolem svislé osy, jehož velikost je zase omezena součinitelem tření. Zároveň nastává zkrut, který dosáhne maxima v okamžiku, kdy se rotace míče zastaví. Torzní deformace míče se však vzpružováním ihned začne zmenšovat, míč nabývá původního nezkrouceného stavu. Nastane-li to ještě při dotyku míče s deskou, roztočí se míč v opačném smyslu než před rázem.

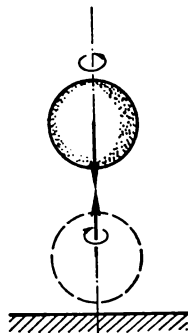
Uvedli jsme tyto dva pokusy s pryžovými tělesy, na nichž se dají dobře pozorovat typické jevy. Podobné děje však nastávají u všech látek, jak lze potvrdit měřením.



Obr. (2.7) 6. Nárazové síly při šikmém rázu dvou těles



Obr. (2.7) 7. Ráz kladiva na roztočený kotouč



Obr. (2.7) 8. Vrtný ráz koule na stěnu

2.8. Mechanika kapalin a plynů

2.8.1. Obecné vlastnosti kapalin a plynů

Kapaliny a plyny, nazývané souborně *tekutiny*, liší se z hlediska vnitřní struktury od látek pevného skupenství tím, že jejich molekuly nejsou už vázány na neproměnné rovnovážné polohy, ale mohou se navzájem volně posouvat. Tím lze vysvětlit řadu vlastností, jimiž se i v makroskopickém měřítku liší od pevných těles.

V pevném tělese, podrobeném vnějšímu silovému působení, vzniká jednak napětí normálové orientované kolmo k ploše dvou částí tělesa, které z obou stran k této ploše přiléhají, jednak napětí tečné v příslušné ploše. Stejně je tomu obecně i v tekutinách, jejichž molekuly také na sebe silově působí. Normálová napětí se v pevných tělesech mohou vyskytnout jako tahy nebo tlaky, přičemž látka odolává zhruba stejně oběma směry namáhání. Naproti tomu tekutiny nekladou prakticky žádný odpor proti vzájemnému oddělení jednotlivých částí, tedy tahům, a proto je rozumné u tekutin nemluvit o normálovém napětí σ_n , ale rovnou o *tlaku* p , definovaném jako podíl síly, která působí kolmo k dané ploše a velikosti této plochy, tedy

2.8 (1)

$$p = \frac{F}{S}.$$

Sílu F nazýváme *tlakovou silou*, abychom ji odlišili od tlaku p , který je měrnou veličinou. Plocha S může být buď na povrchu (okraji) tekutiny (příslušný tlak je pak *vnější tlak*, jímž jiná tělesa působí na tekutinu, nebo jímž obráceně podle principu vzájemného působení tekutina působí na tato tělesa), nebo to může být plocha, v níž se uvnitř tekutiny stýkají

její jednotlivé části (příslušný tlak je pak *vnitřní tlak* v tekutině). Obecně nemusí být všude v tekutině stejně velký tlak; potom je místní tlak ovšem určen diferenciálním podílem $p = dF/dS$. O jednotkách tlaku pojednáme až na konci následujícího článku.

Tečným napětím vznikají v tělesech tvarové změny, jak jsme poznali v čl. 2.6.1. V tekutině jsou však částice snadno vzájemně pošinutelné, nejsouce vázány na žádné rovnovážné polohy, nemohou tedy klást trvalý odpor tečným napětím buzeným silami měnícím tvar tekutiny a dají se do vzájemného pohybu, který trvá tak dlouho, dokud tečná napětí nevymizí. *Rovnovážný stav tekutiny* (v tomto stavu jsou jednotlivé části tekutiny proti sobě v klidu) *vyznačuje se tím, že v tekutině nejsou nikde žádná tečná napětí*. Neschopností odolávat delší dobu tečným napětím se tedy vysvětluje, že tekutiny nemají vlastní tvar a přizpůsobují se tvaru nádoby. Přitom kapalina, může-li, vytvoří volnou hladinu, která je kolmá k působícím silám, z nichž nejobvyklejší je zřejmě zemská tíže, naproti tomu plyny, vynikající značnou rozpínavostí, vyplňují celý prostor nádoby, v níž jsou zavřeny, a nemají volný povrch.

S tečnými napětími, která se v tekutině vyskytují, pokud jsou její části v relativním pohybu, souvisí úkazy *vnitřního tření* (*vazkosti*) v tekutině; pojednáme o nich v čl. 2.8.8. Často však není třeba k nim přihlížet, proto se abstrakcí zavádí pojem *ideální tekutiny*, v níž ani za pohybu nejsou tečná napětí.

Rozdíl mezi kapalinami a plyny se projevuje v jejich reakci na vnější tlak, jemuž jsou vystaveny. Kapaliny jsou velmi málo stlačitelné, tzn. jejich *objemová stlačitelnost* γ , definovaná podílem poměrného zmenšení objemu při zvýšení tlaku a tohoto zvýšení tlaku [vzorec 2.6 (11)], je malé číslo, ačkoli je zpravidla větší než u pevných látek, např. kovů. Je třeba citlivých přístrojů, aby se zjistila závislost objemu kapaliny na vnějších silách. Nejde-li o tlaky zvlášť velké, lze kapaliny považovat za nestlačitelné, což odráží pojem *ideální kapalina*, vyznačující se naprostou nestlačitelností, a vzhledem k nadřazenému pojmu „ideální tekutina“ i dokonalou tekutostí, neomezenou při pohybu vnitřním třením. *Kapaliny jsou tedy látky, které mají prakticky stálý objem, ale snadno proměnlivý tvar*. Jakmile vnější tlak na kapalinu povolí, nabude zase přesně původního objemu. Kapaliny jsou tedy *dokonalé pružné*.

Naproti tomu plyny se dají stlačit snadno; jejich objem klesne přibližně na polovinu, vzroste-li vnější tlak na dvojnásobnou hodnotu. S velkou stlačitelností plynů souvisí jejich rozpínavost, o níž jsme se už zmínili. *Plyny jsou tedy látky, u nichž lze nejen snadno měnit jejich tvar jako u kapalin, nýbrž i jejich objem*.

U plynů je třeba k veličinám, charakterizujícím chování plynu, bezpodmínečně připojit i teplotu, která se u nich projevuje mnohem výrazněji než u pevných a kapalných látek, a proto o chování plynů pojednáme podrobněji až v nauce o teple. Při konfrontaci kapalin a plynů v mechanice tekutin vystačíme prozatím se známým experimentálně potvrzeným zákonem *Boyleovým—Mariottovým*, podle něhož objem V plynu, jehož tlak p se mění, avšak teplota zůstává stálá, je nepřímo úměrný tlaku, tedy

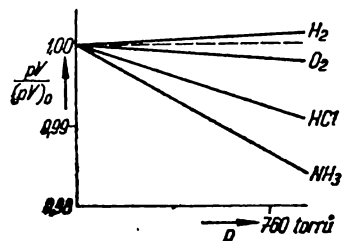
$$2.8 (2) \quad \boxed{V = \frac{\text{const}}{p}} \quad \text{nebo} \quad \boxed{pV = \text{const.}}$$

Má-li plyn hmotnost m , můžeme objem plynu nahradit jeho hustotou podle vztahu $\rho = m/V$. Protože hmotnost plynu se při jeho změnách zachovává, můžeme ji zahrnout do konstanty v hořejším vztahu a vyjádřit Boyleův zákon ve tvaru

$$2.8 (3) \quad \rho = \text{const } p,$$

tzn. nemění-li se teplota plynu, je jeho hustota přímo úměrná tlaku. Konstanta úměrnosti ovšem závisí na teplotě plynu.

Z přesných měření plyne, že skutečné plyny se neřídí zcela přesně Boylovým zákonem. Odchylky se nejnápadněji projeví, vyšetřujeme-li experimentálně závislost součinu pV na tlaku plynu p při stálé teplotě. Graficky jsou tyto odchylky znázorněny na obr. (2.8) 1, v němž jsou na ose pořadnic hodnoty $pV/(pV)_0$, kde $(pV)_0$ je mezní hodnota, k níž se blíží součin pV při velmi malém tlaku. Podle Boylova zákona měl by tento poměr být pro všechny tlaky konstantní a roven 1, což je na obrázku vyznačeno přerušovanou přímkou, rovnoběžnou s osou úseček. Plyn, pro který by to platilo přesně, nazýváme *ideálním*. Z obrázku je však zřejmé, že u skutečných plynů se součin pV liší od mezní hodnoty $(pV)_0$ tím více, čím vyšší je tlak. Nejlépe se Boylovým zákonem řídí kyslík, vodík a hélium, hůře chlorovodík, épavek a nejvíce se odchyluje kysličník uhličitý. Z obrázku plyne dále, že některé plyny jsou stlačitelnější než ideální plyn, tj. pro jejich stlačení je třeba menšího tlaku, než jaký plyne z Boylova zákona. Tak se chovají např. vzduch, kyslík, épavek, kysličník uhličitý a permanentní plyny (což jsou plyny, jejichž kritická teplota je značně nízká) s výjimkou vodíku a hélia. Naopak vodík a hélium se chovají jako méně stlačitelné. Při značně velkých tlacích se pak všechny plyny chovají jako málo stlačitelné.



Obr. (2.8) 1. Odchylky od Boylova zákona u skutečných plynů při teplotě 0 °C

2.8.2. Tlak v tekutinách

Tlak, jímž na malé plošce za relativního klidu proti sobě působí dvě části tekutiny, jež z obou stran k této plošce přiléhají, nazývá se *tlak hydrostatický* (u plynů také *aerostatický*). Vzniká jednak tíží, popř. také setrvačnými silami, jež na tekutinu působí, je-li v klidu vzhledem k neinerciální soustavě (např. v kapalině unášené rotující nádobou), jednak vnějšími silami, jež na tekutinu působí zpravidla prostřednictvím jisté části stěny nádoby (např. pístem ve válci). Tento tlak se řídí známým *Pascalovým zákonem*: *Působí-li na tekutinu vnější tlak pouze v jednom směru, pak uvnitř kapaliny působí v každém místě stejně velký tlak, a to ve všech směrech.*

Tento zákon bezprostředně souvisí se základní podmínkou, že v rovnovážném stavu tekutiny nemohou v ní existovat tečná napětí. Představme si v tekutině, která zcela vyplňuje nějakou nádobu, jistou část oddělenou od ostatní tekutiny kulovou plochou podobně jako při namáhání pevného tělesa na obr. (2.6) 1. Kdyby se při zvýšení tlaku v některém místě nádoby (např. pístem ve válci připojeném k stěně nádoby) kulová plocha přeměnila v elipsoid, znamenalo by to, že v tekutině jsou tečná napětí. Těm však tekutina nemůže klást trvalý odpor, takže buďto elipsoid vůbec nevznikne, jak tomu zajisté je při pomalém zvýšení tlaku, nebo při rychlém zvýšení tlaku sice vznikne, ale částice rychle sledují příslušná tečná napětí, přičemž se elipsoid navrácí do původního kulového tvaru. Ať tak, či onak, za nového rovnovážného stavu zůstává kulová plocha zachována a vlivem stlačitelnosti se jenom změní její poloměr. Pak ale na tuto plochu působí jen stejně velké tlaky všude kolmé k ploše, což znamená, že zvýšení vnějšího tlaku se všude v tekutině projevuje stejně velkým zvýšením tlaku bez ohledu na směr.

Na povrch kapaliny působí při volné hladině jako vnější síla pouze tlak ovzduší, zvaný atmosférický tlak, k němuž v dalším nepřihlížíme. V jiné vodorovné rovině působí na každou částici kapaliny váha všech částic, které jsou nad ní, a takto zatížené částice tlačí ovšem také na sousední částice na všechny strany. Tím se tlak v téže vodorovné rovině šíří na všechny strany až ke stěnám nádoby, které mu svou pevností odolávají. Hydrostatický tlak kapaliny v hloubce h pod hladinou, způsobený pouze tíží, najdeme snadno:

Oddělme v duchu od ostatní kapaliny v nádobě část ve tvaru válce nebo kolmého hranolu o průřezu S a výšce h rovné vzdálenosti základny hranolu od hladiny kapaliny [obr. (2.8) 2]. Tlaková síla F , jíž hranol působí v ploše S na dno nádoby nebo na část kapaliny, která je pod jeho základnou, je rovna jeho váze, takže je-li ρ hustota kapaliny a g tíhové zrychlení, $F = \rho g h S$. Pro tlak $p = F/S$ v hloubce h pod hladinou pak vychází

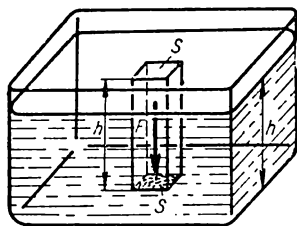
2.8 (4)

$$p = \rho g h.$$

(2.8)

151

Hydrostatický tlak je tedy úměrný hustotě kapaliny a roste úměrně s hloubkou pod povrchem. Významné je, že nezávisí na průřezu svislého sloupce kapaliny, pomocí něhož jsme ho vypočetli, z čehož ihned plyne, že nezávisí ani na tvaru a průřezu nádoby, tedy na množství kapaliny v nádobě. V každé nádobě libovolného tvaru si lze zřejmě vždy vytknout



Obr. (2.8) 2. Tlak v kapalině způsobený tíží

svislý sloupec kapaliny libovolně malého průřezu. Kapalina, která obklopuje tento sloupec, mohla by jeho tíhu ovlivnit jen prostřednictvím tečných sil na jeho plášti. Tím by však vznikla tečná napětí, která za rovnováhy v kapalině nemohou existovat. Z téhož důvodu je také tlak ve všech bodech kapaliny v téže vodorovné rovině stejný. Proto je pro hydrostatický tlak v rovnoběžných vodorovných rovinách rozhodující jejich svislá vzdálenost h od nejvýše položené, byť i elementární části kapaliny (je-li např. kapalinou zcela naplněna kulová nádoba).

I v plynu vzniká vlivem tíže hydrostatický tlak, který je však při obvyklých rozměrech nádob tak nepatrný proti vlastnímu tlaku plynu, že se k němu zpravidla nepřihlíží a tlak plynu v uzavřené nádobě se považuje všude za stejný. Hydrostatický tlak se zřetelně projevuje jen v ovzduší, které obklopuje Zemi do značné výšky (čl. 2.8.3).

Důležitým důsledkem hydrostatického tlaku způsobeného vlastní vahou tekutiny je *zákon Archimédův*, který říká, že *těleso je v tekutině nadlehčováno silou, která se rovná váze tekutiny téhož objemu, jako je objem tělesa obklopeného tekutinou* (popř. částí tělesa jejíž povrch je ve styku s tekutinou).

Na těleso ponořené do kapaliny působí ze všech stran hydrostatické tlaky, které jsou úměrné hloubce pod hladinou a působí kolmo na jednotlivé části povrchu tělesa. Vodorovné složky těchto tlaků se navzájem ruší a zbývají jen svislé složky, které jsou v menší hloubce menší než ve větší hloubce a dávají výslednici, která směřuje vzhůru. Kdyby místo tělesa byla kapalina, působily by na rozhraní stejné tlaky, přičemž by kapalina byla v rovnováze, takže výslednice svislých složek tlaků (vztlak) by pak byla právě rovna váze kapaliny nahrazující těleso. Stejná síla, rovná váze stejného objemu kapaliny, nadlehčuje tedy i ponořené těleso.

Hlavní jednotkou tlaku je $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$. Vedlejší jednotkou je *bar* (značka *bar*) rovný tlaku $10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. Další vedlejší jednotkou je $\text{kp} \cdot \text{m}^{-2} = 9,806\,65 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. Násobnou jednotkou je jednotka $\text{kp} \cdot \text{cm}^{-2}$, která se též nazývá *technická atmosféra* (značka *at*).

Podle 2.8 (4) je hydrostatický tlak sloupce kapaliny přímo úměrný výšce h sloupce. Vyjádříme-li měrnou tíhu kapaliny $\gamma = \rho g$ ve vedlejších jednotkách $\text{kp} \cdot \text{m}^{-3}$, pak pro vodu $\gamma \approx 10^3 \text{ kp} \cdot \text{m}^{-3}$ a hydrostatický tlak sloupce vody výšky $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ je právě roven tlaku $1 \text{ kp} \cdot \text{m}^{-2}$. Platí to ovšem přibližně, protože měrná tíha vody závisí jak na teplotě, tak na místním tíhovém zrychlení. Se zřetelem k přesnému vyjadřování neměl by se proto tlak udávat v $\text{mm H}_2\text{O}$, jak se to v technické praxi zpravidla dělá, je-li užitečné tlak tímto způsobem měřit, nýbrž místo toho užít přesného označení $1 \text{ kp} \cdot \text{m}^{-2} \approx 1 \text{ mm H}_2\text{O}$.

Totéž platí pro vyjadřování tlaku pomocí výšky rtuťového sloupce, udržujícího v rovnováze měřený tlak. Proti nepřesnému udání tlaku v mm Hg (bez dalších údajů zejména teploty rtuti) má jednoznačný význam jednotka *torr*, rovnající se hydrostatickému tlaku 1 mm svislého rtuťového sloupce hustoty $13\,595,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ při 0°C a normálním tíhovém zrychlení $9,806\,65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Vzhledem k hlavní jednotce tlaku je torr určen přesně platným vztahem

$$2.8 (5) \quad 1 \text{ torr} = 133,322 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 1,333\,22 \cdot 10^{-3} \text{ bar}.$$

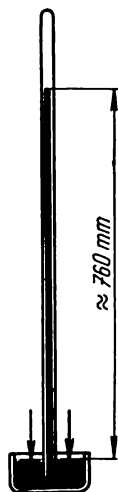
Dále platí

$$2.8 (6) \quad 1 \text{ torr} = 1,359\,51 \cdot 10^{-3} \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2} (\text{at}) = 13,595\,1 \text{ kp} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Abychom výsledek měření tlaku vyjádřili v torrech, je třeba výšku rtuťového sloupce při dosavadní teplotě rtuti přepočítat na výšku, kterou by měl sloupec, kdyby teplota rtuti byla 0°C . Při tlacích kolem 760 torrů a mosazném měřítku k měření délky sloupce činí příslušná oprava $1/8\text{ mm}$ na každý stupeň teploty. Má-li rtuť teplotu t , pak pro rychlý odhad stačí odečíst od tlaku naměřeného v milimetrech $1/8 t$ (popř. přičíst, je-li $t < 0^\circ\text{C}$). Při velmi přesných měřeních je třeba provést další dvě opravy, a to vzhledem ke kapilární depresi rtuti v tlakoměrné trubici (oprava činí několik setin až desetin mm podle světlosti trubice) a vzhledem k tíhovému zrychlení v místě měření (příslušná oprava dělá při tlaku kolem 760 torrů v Praze asi $+0,3\text{ mm}$).

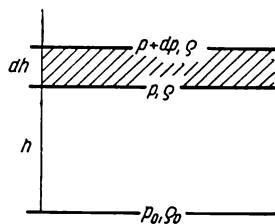
2.8.3. Atmosférický tlak

Ovzduší zvané *atmosféra* obklopuje Zemi do značné výšky; mezi vzdušným obalem Země a vzduchoprázdným meziplanetárním prostorem však není určitého rozhraní, protože hustoty vzduchu s výškou ubývá. Váhou ovzduší vzniká při zemském povrchu hydrostatický tlak, který se nazývá *atmosférický* (nebo též *barometrický*). Přesvědčíme se o něm známým pokusem *Torricelliovým*, který je znázorněn na obr. (2.8) 3. Naplníme-li trubici, na



Obr. (2.8) 3. Pokus Torricelliův

jedné straně uzavřenou, rtuť a pak ji obrátíme a její otevřený konec (který při obracení ovšem přidržíme) vložíme do nádoby se rtuť, nevyteče rtuť z trubice úplně, ale udrží se v ní sloupec délky přibližně 760 mm. Prostor v trubici, který rtuť uvolní, je vzduchoprázdný (*Torricelliovo vakuum*). Na hladinu rtuti v nádobce působí tedy jednak atmosférický tlak ovzduší, s nímž je ve styku, jednak hydrostatický tlak od rtuťového sloupce v trubici. Za rovnováhy musí být oba tlaky stejné, takže výška h rtuťového sloupce, která je hydro-



Obr. (2.8) 4. K odvození závislosti atmosférického tlaku na výšce

statickému tlaku rtuti $p = \rho gh$ úměrná, je vhodnou mírou pro velikost atmosférického tlaku; jednoznačný význam má ovšem jen tehdy, je-li známa hustota ρ rtuti za teploty měření a tíhové zrychlení g v místě pozorování. V zájmu vědecké přesnosti se proto tlak ovzduší měří v torrech.

Atmosférický tlak se poněkud mění se stavem ovzduší a s nadmořskou výškou. V Praze 2 v nadmořské výšce 215 m je průměrný atmosférický tlak asi 743 torrů, v Brně v nadmořské výšce 267 m je 739 torrů. Za normální atmosférický tlak je volen tlak 760 torrů.*) V jiných jednotkách, uvedených v závěru předešlého článku, má tento tlak velikost

$$2.8 \text{ (7)} \quad 760 \text{ torrů} = 1,013 \, 25 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 1,013 \, 25 \text{ bar} = 1,033 \, 2 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2} \text{ (at)}.$$

Podle toho jednotka tlaku 1 bar = 750,07 torrů. V meteorologii se používá ještě dílčí jednotky milibar (mbar) = 10^{-3} bar = 0,750 07 torr.

*) Tento tlak se dosud nazýval *fyzikální atmosféra* (značka atm). Toto označení není pojata do normy o zákonných měrových jednotkách, protože jako jednotky se tohoto tlaku prakticky nepoužívalo, nýbrž jen k vyjádření *normálního stavu* při měření. Doporučuje se tento stav vyjádřit jednotkou torr.

Při malých výškových rozdílech je pokles atmosférického tlaku úměrný přírůstku výšky jako u hydrostatického tlaku v kapalinách, měříme-li výšku ode dna. Při 760 torrech klesne atmosférický tlak o 1 torr, vystoupíme-li asi o 10,5 m. Při větších výškových rozdílech neklesá však tlak už lineárně s výškou, protože na základě úměrnosti s tlakem i hustota se s výškou zmenšuje.

Snadno odvodíme závislost atmosférického tlaku na výšce nad zemí za předpokladu, že teplota a tíhové zrychlení jsou konstantní a že hustota je podle Boylova zákona úměrná tlaku. Mysleme si ve výšce h nad zemí vrstvu vzduchu tloušťky dh [obr. (2.8) 4]. Na dolní plochu vrstvy působí větší tlak než na horní. Přírůstek tlaku je způsoben tíží jako v kapalině. Počítáme-li na rozdíl od kapalin přírůstek dh kladně ve směru rostoucí výšky nad zemí a předpokládáme-li, že hustota ρ je stálá ve vyšetřované vrstvě elementární tloušťky dh , pak podle 2.8 (4)

$$dp = -\rho g dh.$$

Z Boylova zákona 2.8 (3) plyne pro závislost hustoty na tlaku za stálé teploty

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p,$$

značí-li ρ_0 známou hustotu při základním tlaku p_0 . Z těchto rovnic dostáváme

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dh,$$

odkud integrací v mezích od p_1 do p_2 a od h_1 do h_2 vychází

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{\rho_0}{p_0} g(h_2 - h_1) = -\frac{\rho_0}{p_0} g \Delta h$$

nebo

$$2.8 (8) \quad p_2 = p_1 e^{-\frac{\rho_0 g \Delta h}{p_0}}.$$

Dosadíme-li ještě z Boylova zákona, dostaneme pro závislost hustoty vzduchu na výšce vzdušného sloupce

$$2.8 (9) \quad \rho_2 = \rho_1 e^{-\frac{\rho_0 g \Delta h}{p_0}}.$$

Za předpokladu stálé teploty vzduchu a stálého tíhového zrychlení klesá tedy atmosférický tlak i hustota vzduchu s výškou nad zemským povrchem podle exponenciální závislosti. Při teplotě 0°C a tlaku $p_0 = 760 \text{ torr} \approx 1,31 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ má suchý vzduch hustotu $\rho_0 = 1,293 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Dosadíme-li tyto hodnoty do vzorce 2.8 (8) spolu s $g \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, dostaneme

$$p_2 = p_1 e^{-\frac{\Delta h}{7,99}},$$

měříme-li rozdíl výšek v km. Pro $p_2 = p_1/2$ vychází $\Delta h = 5,54 \text{ km}$, tlak vzduchu tedy klesne na polovinu, vystoupíme-li do výšky 5,54 km. Platí to ovšem jen v atmosféře, jejíž teplota je všude stejná a rovna 0°C . Při jiných středních teplotách t vzduchu je třeba místo hustoty ρ_0 dosadit $\rho_0(1 - \gamma t)$, kde $\gamma = 0,00366^\circ \text{C}^{-1}$ je objemová roztažnost plynů. Uvedených vztahů se prakticky používá k *barometrickému měření výšek*. Při přesnějších měřeních je ovšem třeba provést opravy na proměnlivost tíhového zrychlení s nadmořskou výškou a se zeměpisnou šířkou a na vlhkost vzduchu.

2.8.4. Povrchové napětí

Kapaliny se chovají tak, jako by jejich povrch byl pokryt tenkou pružnou vrstvou, jež se snaží stáhnout povrch kapaliny, aby měl co nejmenší plošný obsah. Kdyby na kapalinu nepůsobily vnější síly, zaujala by kapalina tvar kulový, protože koule má ze všech těles stejného objemu nejmenší povrch. Přibližně kulový objem kapaliny vytváří se výrazněji ovšem jen tehdy, jsou-li vnější síly velmi malé proti povrchovým silám. Tak přibližně kulový tvar mají kapky při výtoku kapalin, drobné kapičky kapalin (vody) tvořící mlhu, drobné kapičky oleje nebo tuků v emulzi s vodou (např. mléko), kapičky rozlité rtuti apod. Po-

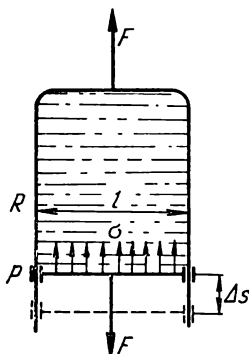
vrchová vrstva je velmi tenká (její tloušťka je asi 10^{-7} cm) a její fyzikální a chemické vlastnosti jsou poněkud jiné než vlastnosti vnitřních částí kapalin.

Protože povrchová vrstva se snaží stáhnout se na nejmenší velikost, je v ní zřejmě napětí, které nazýváme *povrchovým napětím* σ ; definujeme je jako sílu, která působí kolmo na délku myšleného řezu povrchem, dělenou touto délkou, a leží v rovině tečné k povrchu ve vyšetřovaném místě. Působí-li na úsečce délky dl dvě části povrchu, které z obou stran k ní přiléhají, v rovině povrchu silou dF kolmou k dl , pak

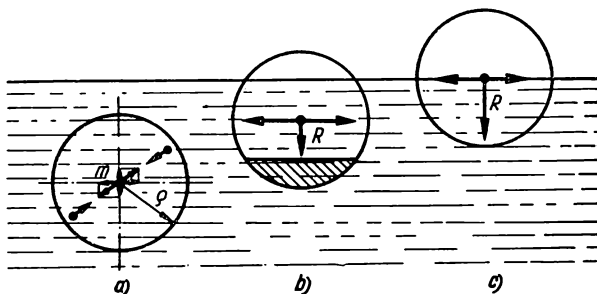
2.8 (10)

$$\sigma = \frac{dF}{dl}.$$

V povrchové bláně je vlivem povrchového napětí nahromaděna jistá energie, tzv. *energie povrchová*. Souvislost povrchového napětí s povrchovou energií lze nejlépe znázornit tímto pokusem (Maxwell): Ponoříme-li drátěný rámeček R s posuvnou příčkou P do mýdlového roztoku, vytvoří se na něm vlivem povrchového napětí tenká kapalinová blána s povrchovými vrstvami na obou stranách [obr. (2.8) 5].



Obr. (2.8) 5. Povrchové napětí a povrchová energie



Obr. (2.8) 6. K výkladu vzniku povrchového napětí

Povrchové napětí působí v jedné povrchové vrstvě na posuvnou příčku délky l silou σl . Protože příčku udržíme v rovnováze (se zřetelem na dvě povrchové vrstvy blány) silou $2\sigma l$, vykonáme při posunutí příčky o délku Δs práci $\Delta A = 2\sigma l \Delta s$, která se jeví jako zvětšení povrchové energie při zvětšení povrchu o $2l\Delta s$. Energie připadající na jednotku plochy je

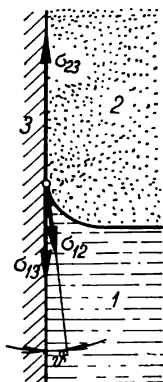
$$\frac{\Delta A}{2l\Delta s} = \frac{2\sigma l \Delta s}{2l\Delta s} = \sigma.$$

To znamená, že *plošná hustota energie* (což je levá strana této rovnice) je rovna povrchovému napětí. Plošná hustota energie, tj. číselně povrchová energie plošné jednotky, nazývá se *kapilární konstanta*.

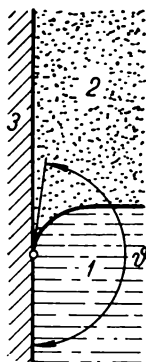
Povrchové napětí a kapilární jevy jsou vysvětlovány vzájemným působením přitažlivých sil molekul, tzv. *sil kohezních*. Povrchovou vrstvu si myslíme složenou z jedné vrstvy molekul. Při zvětšení povrchu kapaliny dostávají se některé molekuly zevnitřku na povrch, přičemž se musí překonat příslušné kohezní síly. Tak lze také vysvětlit, proč potřebujeme na zvětšení povrchu vynaložit jistou práci. Podle Laplaceovy teorie působí na každou molekulu látky přitažlivé síly sousedních molekul. Tyto přitažlivé síly mezi molekulami nejsou však gravitačního původu, neboť neklesají s druhou mocninou vzdálenosti, nýbrž vzájemné působení molekul klesá s mnohem vyšší mocninou (soudí se na osmou mocninu). Můžeme proto přitažlivou působnost každé

molekuly omezit na velmi malý kulový prostor, v jehož středu je uvažovaná molekula. Tento kulový prostor nazýváme *sferou molekulárního působení* a jeho poloměr ϱ nazýváme *poloměrem molekulárního působení* [obr. (2.8) 6a].

Rozložíme každou molekulární přitažlivou sílu v oblasti sféry jedné z molekul (m na obr. a) na složku rovnoběžnou s povrchem a složku k povrchu kolmou. Předpokládáme-li, že rozložení molekul v kapalině, a tudíž i ve sféře molekulárního působení kolem molekuly m je rovnoměrné,



Obr. (2.8) 7. Krajo-
vý úhel u kapaliny
smáčející stěnu



Obr. (2.8) 8. Krajo-
vý úhel u kapaliny
nesmáčející stěnu

ruší se navzájem vodorovné složky, neboť v obou polovinách sféry rozdělené rovinou kolmou k povrchu je přibližně stejný počet molekul. Výsledkem vodorovných složek je ovšem jisté napětí, které má u molekul na povrchu kapaliny charakter napětí povrchového. Výslednice složek kolmých k povrchu se ruší, jen pokud je vzdálenost molekuly od povrchu větší než poloměr molekulárního působení ϱ . Je-li však vzdálenost molekuly od povrchu menší než ϱ , nebude výslednice R složek přitažlivých sil kolmých k povrchu vyrovnána a bude směřovat do kapaliny, neboť vliv molekul, jež leží v kulovém úseku vyáčkovaném na obr. b, není vyvážen molekulami ve stejném kulovém úseku nad hladinou. Se zmenšující se vzdáleností od povrchu výslednice R poroste a dosáhne maximální hodnoty pro molekuly, jež leží právě na povrchu kapaliny (obr. c). Vlivem těchto kohezních (soudržných) sil je tlak na povrchu kapaliny menší než uvnitř a vzrůstá směrem dovnitř kapaliny (asi jako v kapalině, na jejíž molekuly působí tíže, roste hydrostatický tlak s rostoucí vzdáleností od hladiny), přičemž dosahuje

maximální hodnoty ve vzdálenosti rovné poloměru ϱ . Tento celkový vzrůst tlaku nazýváme *tlakem kohezním*. Kohezní tlak nelze přímo měřit, protože zavedeme-li tlakoměrnou sondu do kapaliny, měříme zase jen tlak na povrchu kapaliny, který je ve styku se sondou. Lze jej pouze odhadnout z teoretických podkladů (tak např. pro hodnotu kohezního tlaku vody je udávána hodnota 10 500 at). Pokusy bylo potvrzeno, že velikost kohezního tlaku souvisí se stlačitelností.

Pozorujeme-li stykové místo povrchu kapaliny se stěnou nádoby, zjišťujeme u různých kapalin různé veliké zdvžení okraje [obr. (2.8) 7] nebo naopak jeho snížení [obr. (2.8) 8]. Na okraji se stýkají tři prostředí, kapalina 1, vzduch (nebo jiný plyn) 2 a stěna pevného tělesa 3. Předpokládáme, že v tomto trojném rozhraní působí povrchová napětí, závislé na látkách jednotlivých prostředí. Při rovnováze musí platit

$$\sigma_{23} = \sigma_{13} + \sigma_{12} \cos \vartheta,$$

odkud

2.8 (11)

$$\cos \vartheta = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{13}}{\sigma_{12}}.$$

Úhel ϑ nazýváme *krajovým úhlem*. Jde-li o styk vždy těchto prostředí za stejných podmínek, je velikost tohoto úhlu vždy stejná. Velikost krajového úhlu závisí na rozdílu povrchového napětí stěny vzhledem ke vzduchu (plynu) a vzhledem ke kapalině. Tomuto rozdílu se říká též *adhezní konstanta*. Je-li adhezní konstanta kladná, je krajový úhel ostrý, kapalina stěnu smáčí (okraj kapaliny u stěny se zvedne). Tak je to například u vody ve skleněné nádobě. Naopak, je-li adhezní konstanta záporná, je krajový úhel tupý, kapalina stěnu nesmáčí (okraj kapaliny u stěny je snížen). Tak se např. chová rtuť ve skle. V řídkých případech je konstanta nulová. Platí to přibližně pro styk éteru, vzduchu a oceli.

Někdy $\sigma_{23} - \sigma_{13} > \sigma_{12}$. V tomto zvláštním případě by pro $\cos \vartheta$ vycházela hodnota větší než 1, krajový úhel by nebyl reálný. Kapalina se zvedne podél stěny vzhůru, až pokryje tenkou vrstvou celou stěnu. Krajový úhel je pak nulový, kapalina smáčí stěnu dokonale (lze to pozorovat

vat do jisté míry u éteru, alkoholu a u jiných organických látek). Druhý krajní případ je pro $\sigma_{13} - \sigma_{23} > \sigma_{12}$ (> 0), kdy pro $\cos \vartheta$ bychom dostali hodnotu menší než -1 . Tehdy by se vytvořila mezi pevnou stěnou a kapalinou velmi tenká vrstva vzduchu, jež by sahala až do jisté hloubky, v níž ji vytlačí hydrostatický tlak kapaliny. Takto se chovají látky, které stěnu vůbec nesmáčejí, krajový úhel je přímý, tj. rovný 180° . To lze pozorovat např. u roztavených kovů.

Stýkají-li se v jednom bodě vzduch a dvě kapaliny, jako např. na okraji olejové kapky na vodě [obr. (2.8) 9], skládají se rovněž tři povrchová napětí σ_{12} , σ_{13} a σ_{23} ve výslednici. Kapka se udrží pohromadě, jen směřuje-li tato výslednice do kapky, což zřejmě nastane, jestliže

$$\sigma_{12} + \sigma_{23} > \sigma_{13}.$$

To bude např. u kapky parafínového oleje. Jestliže naopak

$$\sigma_{13} > \sigma_{12} + \sigma_{23},$$

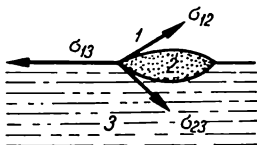
pohybují se molekuly na okraji kapky neomezeně ve směru povrchového napětí σ_{13} a kapka se roztáhne na velmi tenkou vrstvu po celém povrchu kapaliny. Tak je to např. u olivového oleje na vodě, kde $\sigma_{13} = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $\sigma_{12} = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ a $\sigma_{23} = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Na dosti velkém a velmi čistém vodním povrchu roztáhne se malá kapka oleje na vrstvu, jejíž tloušťka je rovna průměru sféry molekulárního působení, a nakonec se vrstva rozpadne, klesne-li tloušťka vrstvy řádově asi na 10^{-8} cm . Tohoto jevu bylo použito k výpočtu velikosti molekul.

Hladina kapaliny v úzké trubici ponořené do kapaliny není rovinná, její povrch se zakřivuje a tvoří tzv. *meniskus (vrchlík)* nahoru buď vyduť (konkávní), nebo vypouklý (konvexní) [obr. (2.8) 10]. Zároveň pozorujeme, že při vyduťném vrchlíku vystoupí kapalina výše, než je okolní vodorovný povrch kapaliny; tomuto jevu říkáme *kapilární elevace* (kapilarita znamená vzlínavost). Je-li naproti tomu vrchlík nahoru vypouklý, stojí kapalina v trubičce níž, než je okolní vodorovná hladina; vzniká *kapilární deprese*. Elementárně to vysvětlíme takto:

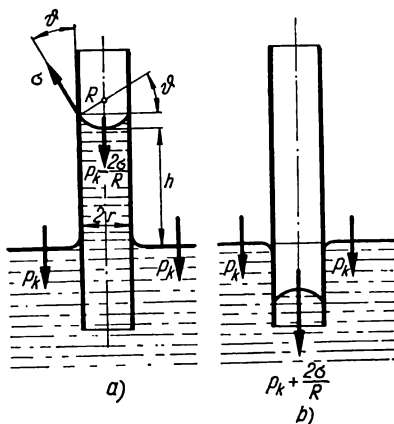
Při elevaci visí jakoby zdvižený sloupec kapaliny výšky h svou povrchovou blanou na vnitřní stěně trubičky. Svislá složka povrchového napětí při krajovém úhlu ϑ je $\sigma \cos \vartheta$, takže na celý vnitřní obvod trubice o polo-měru r připadá síla $2\pi r \sigma \cos \vartheta$, která udržuje rovnováhu s tíhou $\pi r^2 \rho h g$ zdviženého sloupce kapaliny hustoty ρ . Z rovnosti obou sil tedy plyne pro příslušné povrchové napětí

2.8 (12)

$$\sigma = \frac{r \rho h g}{2 \cos \vartheta}.$$



Obr. (2.8) 9. Kapka oleje na vodní hladině



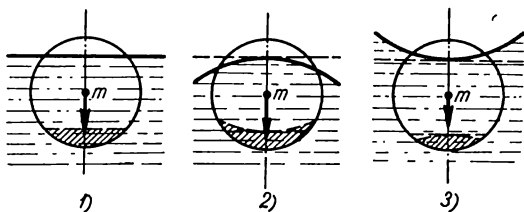
Obr. (2.8) 10. Kapilární elevace a deprese

Krajový úhel bývá často tak malý, že je možno položit $\cos \vartheta = 1$. Potom lze vzorec užít k měření povrchového napětí z výšky výstupu h v úzké trubičce (kapiláře) známého vnitřního průměru (s příslušnou opravou na objem kulového vrchlíku). Stejný vzorec platí i pro kapilární depresi.

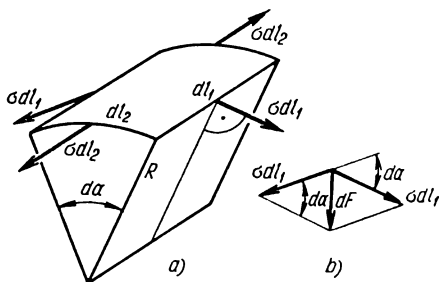
Kapilární elevace a deprese souvisí přímo se zakřivením povrchu kapaliny, při němž je změna tlaku při průchodu povrchovým rozhraním jiná než při rovinném povrchu. Navážeme-li

na obr. (2.8) 6, vysvitne to z této úvahy. Pro molekulu m ve stejné vzdálenosti pod povrchem rovinným (1), konvexním (2) a konkávním (3) je složka molekulárních sil, kolmá k povrchu, jež na ni působí z vnitřku kapaliny, větší při konvexním povrchu a naopak menší při povrchu konkávním než při povrchu rovinném. V prvním případě [2 na obr. (2.8) 11] chybí v horní části sféry molekulárního působení větší počet molekul, které by vyrovnaly tah od molekul ve spodní části sféry než při rovinném povrchu. V druhém případě (3 na obrázku) je tomu právě obráceně. Při zakřivení povrchu působí tedy povrchová vrstva na kapalinu tlakem, který se přičítá k tlaku, jímž by vrstva na kapalinu působila při rovinném povrchu. Tlak při rovinném povrchu kapaliny jsme nazvali tlakem kohezním. Přídavný tlak, který vzniká zakřivením povrchu, nazývá se *kapilární*.

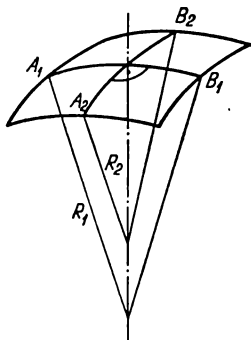
Kapilární tlak snadno vypočteme, vyjdeme-li z povrchového napětí σ . Předpokládejme nejprve, že povrch je válcový, a uvažujme o silách, které působí na plošný prvek omezený dvěma površkami délky dl_1 a dvěma křivkami délky dl_2 [obr. (2.8) 12a]. Napětí, která působí na



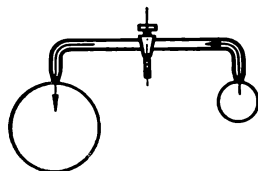
Obr. (2.8) 11. Molekulární síly v rovinném a zakřiveném povrchu kapaliny



Obr. (2.8) 12. Určení kapilárního tlaku pod zakřiveným povrchem kapaliny



Obr. (2.8) 13. Určení kapilárního tlaku pod zakřiveným povrchem kapaliny



Obr. (2.8) 14. Vzduch proudí z menší bubliny do větší

křivkách, jsou rovnoběžná s površkami, protože leží v povrchu, a nedávají tedy žádnou výslednici kolmou k povrchu. Naproti tomu síly, které působí na délkách dl_1 , nemají stejný směr, nýbrž svírají spolu úhel $d\alpha$. Dávají proto výslednici směřující na stranu, z níž povrch se jeví jako dutý. Tato výslednice má velikost $dF = \sigma dl_1 d\alpha$ a stojí kolmo k vyšetřované části povrchu (obr. b). Zavedeme-li poloměr křivosti plochy R , pak $dl_2 = R d\alpha$ a

$$dF = \frac{\sigma dl_1 dl_2}{R} = \frac{\sigma dS}{R},$$

neboť $dl_1 dl_2$ je plocha vyšetřované části povrchu. Podíl $dF/dS = p$ je však kapilární tlak, který má v tomto případě velikost

$$p = \frac{\sigma}{R}.$$

Při obecně zakřiveném povrchu můžeme v každém jeho bodě vést dva k sobě kolmé normálové řezy, na obr. (2.8) 13 A_1B_1 a A_2B_2 , v nichž má plocha největší a nejmenší poloměr křivosti R_1 a R_2 . Platí pak pro každou dvojici rovnoběžných stran plošného prvku stejná úvaha jako u válcové plochy. Tlak p_1 , způsobený zakřivením A_1B_1 o poloměru křivosti R_1 , je $p_1 = \sigma/R_1$, a tlak p_2 , vzbuzený zakřivením A_2B_2 o poloměru křivosti R_2 , je $p_2 = \sigma/R_2$. Kapilární tlak p , který vzniká u obecně zakřiveného povrchu, je pak součtem obou tlaků p_1 a p_2 :

$$2.8 (13) \quad p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Poloměr křivosti počítáme kladně, tvoří-li příslušný normálový řez povrchem křivku, jež je vzhledem k prostředí nad kapalinou konvexní (vypouklá), a záporně, je-li křivka konkávní (vydutá), neboť, jak snadno vidíme, má v druhém případě kapilární tlak opačný směr než v prvním případě a směřuje do prostředí, jež je nad kapalinou.

Je-li povrch zakřiven do tvaru kulové plochy, je poloměr křivosti R všech meridiánových řezů stejný a kapilární tlak má podle 2.8 (13) velikost

$$p = \pm \frac{2\sigma}{R},$$

kde kladné znaménko platí pro povrch směrem nahoru vypouklý a záporné pro povrch nahoru dutý. Vidíme, že kapilární tlak je nepřímě úměrný poloměru R plochy. Čím menší je poloměr R , tím větší je zakřivení a tím větší je kapilární tlak. To lze ukázat, vyfoukneme-li na koncích skleněné trubičky dvě mýdlové bubliny, jednu menší a druhou větší [obr. (2.8) 14]. Působením kapilárního tlaku je tlak uvnitř bubliny větší než vnější tlak vzduchu, a to tím více, čím menší je poloměr bubliny. Proto začne při otevření kohoutu proudit vzduch z menší bubliny do větší a větší bublina se zvětšuje a menší zmenšuje.

Při průchodu rozhraním mezi vzduchem a kapalinou stoupne tlak náhle o kohezní tlak p_k , je-li povrch kapaliny rovinný, a o $p_k \pm \frac{2\sigma}{R}$, je-li zakřiven do tvaru kulové plochy poloměru R .

Z tohoto ihned plyne nutnost elevace nebo deprese kapaliny v kapiláře, ponoříme-li ji do kapaliny v nádobě. Rovnováha vyžaduje, aby ve vodorovných rovinách byl všude stejný tlak, a to v kapalině, která je jak v nádobě, tak v trubici. Protože na povrch kapaliny působí všude stejný atmosférický tlak, platí podle obr. (2.8) 10

$$p_k^r = p_k \pm \frac{2\sigma}{R} \mp \rho gh,$$

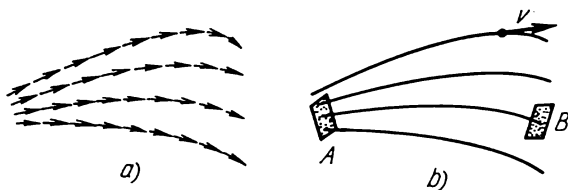
kde hornější znaménka platí pro depresi a spodní pro elevaci. Nahradíme-li poloměr R kulového vřchlíku poloměrem r trubice podle vztahu $r = R \cos \theta$, dostaneme pro povrchové napětí σ prve odvozený vzorec 2.8 (12).

2.8.5. Pohyb tekutiny

Pohyby tekutin jsou složitější než pohyby tuhých těles, protože částice tekutiny se mohou vzájemně přemísťovat, což u tuhých těles není. Nicméně i pohyb tekutin lze idealizovat podobně jako pohyby pevných těles, u nichž jsme dosáhli zjednodušení předpokladem, že jsou tuhá. Složitost pohybu tekutin souvisí především s úkazy vnitřního tření, a proto k němu prozatím nebudeme přihlížet a budeme následující úvahy vztahovat na abstrakci ideální tekutiny, v níž ani za pohybu nejsou tečná napětí. U kapaliny lze poměry navíc zjednodušit předpokladem, že kapalina je nestlačitelná. Výsledky, k nimž dojdeme, lze pak aplikovat též na pohyby skutečných tekutin, zavedeme-li místo skutečných rychlostí a tlaků jisté střední hodnoty a použijeme-li opravných koeficientů, což však už bývá více méně záležitost technické aplikace.

Každý pohyb vztahujeme k nějaké soustavě. Také pohyb tekutiny vyšetřujeme vzhledem k soustavě souřadnic, kterou si myslíme např. pevně spojenou s potrubím, jímž tekutina proudí, nebo s korytem, jímž proudí kapalina. Vzhledem k této soustavě má každá částice tekutiny v každém místě určitou rychlost. Znázorníme-li v některém okamžiku v každém místě vektor rychlosti malou šipkou [obr. (2.8) 15a], je zřejmé, že proudící

tekutina představuje *pole vektoru rychlosti*. Takto znázorněné vektory rychlosti obalují křivky, k nimž tečny v jednotlivých jejich bodech mají směr rychlosti v dotykovém bodě (obr. b). Těmto křivkám říkáme *proudnic* (*proudové čáry*) a můžeme jimi názorně zobrazit vektorové pole, které tekutina tvoří. Není-li proudění tekutiny ustálené, mění se obraz proudnic v každém okamžiku, a částice, která za krátkou dobu dospěje z místa *A* do místa *B*, bude mít v místě *B* jinou rychlost co do směru i velikosti, než jakou ukazoval obraz proudnic v okamžiku, kdy částice byla ještě v místě *A*. Při neustáleném proudění neudávají tedy proudnice dráhy, po nichž se částice kapaliny pohybují. Jen za ustáleného stavu, kdy se obraz proudnic s časem nemění, tj. kdy pole vektoru rychlosti má v čase neproměnný tvar, představují proudnice zároveň i dráhy, po nichž se pohybují částice tekutiny. V dalším výkladu se budeme zabývat *ustáleným (stacionárním) pohybem tekutiny*.



Obr. (2.8) 15. Proudnic

směru proudění. Tak na obr. (2.8) 15b procházejí např. v místě *A* plochou 1 cm^2 tři proudnice a v místě *B* stejně velkou plochou jen jedna. Rychlost kapaliny v místě *A* je tedy třikrát větší než v místě *B*.

Trubicový útvar, jehož plášť je tvořen proudnicemi, nazýváme *proudovou trubicí*. Hmotným vnitřkem elementární proudové trubice je *proudové vlákno*. Je-li proudění ustálené, pak pláštěm proudové trubice částice tekutiny ani nevstupují dovnitř, ani z ní nevystupují ven a každým průřezem trubice prochází ve stejných časových intervalech stejný počet částic, jejichž celková hmotnost je stálá. To je důsledek *zákona zachování hmotnosti látek*, který u proudících tekutin vyjádříme tzv. *rovnici kontinuity* neboli *spojitosti toku*.

Označme *S* velikost některého příčného průřezu proudové trubice a předpokládejme, že všechny částice mají v tomto průřezu stejnou rychlost *v*. Částice, které v okamžiku *t* právě procházejí zvoleným průřezem, dostanou se v době *dt*, měřené od okamžiku *t*, do vzdálenosti *v dt*, takže v době *dt* projdou průřezem částice, které jsou ve válci, jehož základna je *S* a výška je *v dt*, jehož objem je tedy *Sv dt*. Je-li *ρ* hustota tekutiny ve vyšetřovaném průřezu, pak hmotnost *dm* tekutiny, která v době *dt* projde tímto průřezem, je $dm = \rho Sv dt$. Podílem

$$2.8 (14) \quad Q_m = \frac{dm}{dt} = \rho Sv$$

definujeme tzv. *hmotnostní tok*, který číselně udává hmotnost tekutiny, která zvoleným průřezem projde za jednotku času.

Dělíme-li hmotnostní tok hustotou *ρ* tekutiny, dostaneme tzv. *objemový tok* *Q_V* neboli *průtok* tekutiny zvoleným průřezem,

$$2.8 (15) \quad Q_V = \frac{Q_m}{\rho} = \frac{dm}{\rho} \frac{1}{dt} = \frac{dV}{dt} = Sv.$$

Tato veličina číselně udává velikost objemu tekutiny, která za jednotku času proteče zvoleným průřezem proudové trubice.

Hustota *ρ* tekutiny závisí obecně na tlaku, a proto se podél proudové trubice mění. Jde-li však o proudění kapaliny, můžeme ji prakticky vždy považovat za kontaktní,

tj. kapalinu za nestlačitelnou. Objemový tok má proto význam zejména u proudících kapalin.

Za ustáleného proudění je hmotnostní tok tekutiny libovolným průřezem proudové trubice konstantní, tzn. že všemi průřezy proteče ve stejně velkých časových intervalech tekutina stejné hmotnosti. U nestlačitelné kapaliny je také objemový tok stálý (každým průřezem proudové trubice projde ve stejných dobách kapalina stejného objemu); *rovnici kontinuity* vyjadřující zákon zachování hmotnosti lze tedy psát ve tvaru

2.8 (16)

$$\rho S v = \text{const.}$$

popř.

$$S v = \text{const.}$$

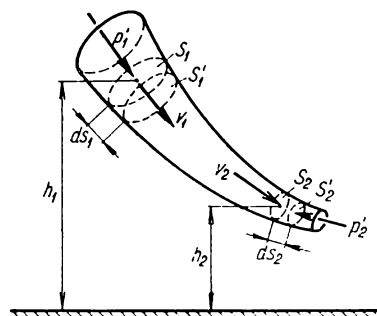
Těchto vztahů je možno užít i pro případy proudění tekutiny skutečnými trubicemi, jejichž vnitřní stěna pak vymezuje proudovou trubici. Dosazujeme do nich střední hodnoty průtočných rychlostí v příslušných průřezech, jde-li o proudění skutečných tekutin, u nichž není rychlost ve všech bodech průřezu stejná.

2.8.6. Bernoulliho rovnice

Mějme proudovou trubici, která se zužuje ve směru toku [obr. (2.8) 16], a předpokládejme nejprve, že jí proudí kapalina. Jak plyne z rovnice kontinuity, jsou rychlosti kapaliny v různých místech proudové trubice nepřímo úměrné průřezům, takže kapalina teče v užší části trubice rychleji než v širší. Mezi průřezy S_1 a S_2 má tedy kapalina zrychlení, k němuž je podle II. Newtonova pohybového zákona třeba nějaké síly, která působí na kapalinu ze strany širší části trubice. Taková zrychlující síla může vzniknout jen tím, že v různých částech proudové trubice jsou v kapalině různé tlaky. Zrychlující síla bude mít směr toku, jestliže v místech, kde je trubice širší a rychlost menší, bude tlak větší než v užších částech trubice, v nichž je rychlost větší. Je zřejmé, že *s rostoucí rychlostí tlak v kapalině klesá*. Kvantitativně vyjadřuje vzájemnou souvislost mezi tlakem a rychlostí proudící kapaliny Bernoulliho rovnice, kterou snadno odvodíme na základě věty, že *práce vnějších sil působících na těleso jeví se zvýšením jeho kinetické energie*.

K vnějším silám, které působí na část kapaliny v proudové trubici na obr. (2.8) 16 mezi průřezy S_1 a S_2 , patří jednak tíže, jednak tlakové síly $p'_1 S_1$ a $p'_2 S_2$,*) jimiž na tuto část působí kapalina, která je v proudové trubici ve směru toku před ní a za ní. Tlaky kolmé na plášť proudové trubice, působící kolem dokola, se navzájem ruší a tečné síly v plášti trubice nepůsobí, protože tečná napětí v ideální kapalině nejsou.

V krátké době dt posune se zvolená část kapaliny na horním konci o ds_1 a na spodním konci o ds_2 , takže bude mezi průřezy S'_1 a S'_2 . Mezi průřezy S'_1 a S'_2 nedochází ve vyšetřované části kapaliny k žádné změně potenciální a kinetické energie, protože za ustáleného pohybu nabývá každá částice téže potenciální a kinetické energie, jakmile přijde do téhož místa. Z toho ihned plyne, že práce, kterou vykoná tíže, bude taková, jako kdyby kapalina v prostoru mezi průřezy S_1 a S'_1 přímo přešla do prostoru mezi průřezy S_2 a S'_2 . Pro spojitost toku má kapalina v obou prostorech stejnou hmotnost dm , takže práce tíže je rovna úbytku potenciální energie kapaliny hmotnosti dm ve výškách h_1 a h_2 měřených od libovolné horizontální roviny, tedy $dm g(h_1 - h_2)$. Práce, kterou vykonají tlakové síly, je



Obr. (2.8) 16. Proudění kapaliny trubicí

*) Čárkou odlišujeme tlak v proudící tekutině od tlaku v klidné tekutině.

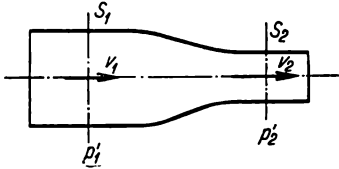
$p'_1 S_1 ds_1 - p'_2 S_2 ds_2$, přičemž jsme záporného znaménka použili proto, že tlaková síla na spodním konci zvolené části kapaliny působí proti směru pohybu. Celková práce vnějších sil jeví se v rozdílu kinetické energie kapaliny v prostorech mezi průřezy $S_1 S'_1$ a $S_2 S'_2$, kde kapalina má rychlosti v_1 a v_2 ,

$$2.8 (17) \quad \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 = dm g(h_1 - h_2) + p'_1 S_1 ds_1 - p'_2 S_2 ds_2.$$

Předpokládáme, že kapalina je nestlačitelná, takže kapalina hmotnosti dm má i stálý objem, tj. $S_1 ds_1 = S_2 ds_2$. Dělíme-li proto hořejší rovnici tímto objemem, dostaneme (zavedeme-li zároveň konstantní hustotu kapaliny ρ)

$$2.8 (18) \quad \boxed{\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p'_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p'_1 = \text{const.}}$$

Přitom jsme na jednu stranu rovnice převedli všechny členy vztahující se na týž průřez proudové trubice. Protože jsme oba průřezy zvolili zcela libovolně, je součet členů na jedné straně rovnice zřejmě stejný pro všechny průřezy proudové trubice, přesněji řečeno pro jedno a totéž proudové vlákno.



Obr. (2.8) 17. Průtok vodorovnou zužující se trubicí

Odvozená rovnice je důležitá *rovnice Bernoulliova*, vyjadřující princip zachování mechanické energie u ideální kapaliny. Z rozměrů jednotlivých veličin plyne, že první člen na levé straně rovnice je kinetická energie kapaliny jednotkového objemu, druhý člen představuje polohovou energii kapaliny jednotkového objemu vzbuzenou tíží, třetí člen pak potenciální tlakovou energii kapaliny jednotkového objemu vzbuzenou ostatními vnějšími silami. Dělíme-li rovnici konstantní hustotou ρ kapaliny, dostaneme jednotlivé energie vztahy na jednotkové hmotnosti kapaliny. Bernoulliova rovnice vyjadřuje tedy skutečnost, že v ideální nestlačitelné kapalině je součet všech tří energií, ať už jde o energii kapaliny jednotkového objemu, nebo jednotkové hmotnosti pro libovolné proudové vlákno, konstantní.

Vyšetřme ještě proudění ideální kapaliny vodorovnou trubicí proměnného průřezu, která se ve směru toku zužuje [obr. (2.8) 17]. V průřezu S_1 má kapalina tlak p'_1 a rychlost v_1 , v průřezu S_2 pak tlak p'_2 a rychlost v_2 . Oba průřezy jsou stejně vysoko nad libovolnou horizontální rovinou, $h_1 = h_2$. Protože $S_2 < S_1$, je podle rovnice kontinuity $v_2 > v_1$, takže mezi oběma průřezy nastane úbytek tlaku v kapalině, pro který z Bernoulliovy rovnice 2.8 (18) pro $h_1 = h_2$ vychází

$$2.8 (19) \quad p'_1 - p'_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2.$$

Vidíme, že úbytek tlaku v proudící kapalině je roven přírůstku pohybové energie kapaliny jednotkového objemu.

Bernoulliova rovnice platí pro libovolné průřezy proudové trubice, a můžeme ji proto aplikovat i na jeden a týž průřez. Je-li kapalina v klidu, má ve zvoleném průřezu tlak p , přičemž výraz $\frac{1}{2} \rho v^2$ příslušný tomuto průřezu je roven nule. Dá-li se do pohybu rychlostí v ,

bude mít ve stejném místě jednotkový objem kapaliny kinetickou energii $\frac{1}{2} \rho v^2$ a tlak klesne z hodnoty p na hodnotu p' , pro kterou podle 2.8 (19) vychází

2.8 (20)

$$p' = p - \frac{1}{2} \rho v^2 = p - p''.$$

Tato rovnice vyjadřuje důležitou větu: *Tlak p' v proudící kapalině je o kinetickou energii příslušející jednotkovému objemu menší než tlak p , jaký by byl v témže místě za klidu.*

Veličina p' se jmenuje *statický (hydrostatický) tlak* a výraz $\frac{1}{2} \rho v^2$ se nazývá *tlak dynamický (hydrodynamický) p''* . Součet p obou tlaků zvine *tlakem celkovým*.

Při značném zúžení trubice může tlak p' ve zúžené části být menší než vnější atmosférický tlak. Kdybychom nyní v zúžené části trubice udělali otvor, proudící kapalina by nejen nevytékala, nýbrž by ještě nasávala okolní prostředí (např. vzduch). Na tomto jevu je založeno mnoho důležitých přístrojů a zařízení, jako např. známá vodní vývěva.

U plynů se odvození Bernoulliho rovnice komplikuje tím, že práce vnějších sil se zčásti spotřebuje také na stlačení plynu; o to je pak zvýšení kinetické energie menší než u kapalin. Ze stejných důvodů jako u nich i zde se práce potřebná ke kompresi projevuje jenom u plynu, který je v prostorech omezených průřezy $S_1 S'_1$ a $S_2 S'_2$ proudové trubice na obr. (2.8) 16, tj. jako kdybychom jej ze stavu 1 v prvním prostoru stlačili tak, aby jeho stav byl shodný se stavem 2 v druhém prostoru.

Protože plyny nemají stálý objem, je nutné Bernoulliho rovnici vztahovat na množství plynu, které má jednotkovou hmotnost. Dělíme proto rovnici 2.8 (17) příslušnou hmotností dm a odečteme na pravé straně práci A_k v $J \cdot kg^{-1}$, kterou vykonají vnější síly při stlačení plynu jednotkové hmotnosti ze stavu 1 do stavu 2. Dostaneme tak jako výchozí vztah pro konečný tvar Bernoulliho rovnice u plynů

$$2.8 (21) \quad \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 = g(h_1 - h_2) + \frac{p'_1}{\rho_1} - \frac{p'_2}{\rho_2} - A_k.$$

K zmenšení objemu plynu, jehož tlak je p' , o $-dV$, je podle vztahu 4.4 (5), který je vloženo v kapitole o termodynamice, třeba práce $dA_k = -p' dV$. Protože u Bernoulliho rovnice jde o množství plynu jednotkové hmotnosti, má objem V význam měrného objemu, jemuž je rovna převrácená hodnota hustoty plynu, takže $dA_k = -p' d\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Celková práce k přechodu ze stavu 1 do stavu 2 závisí na tom, co se přitom s plynem děje. Zmínili jsme se už, že u plynů nelze nechat vlivu teploty plynu, a proto výpočet celkové práce A_k je v jádře záležitostí patřící do termodynamiky. Vlivu teploty se vyhneme, provedeme-li jen částečnou integraci elementární práce dA_k podle známého vzorce $\int u dv = uv - \int v du$, přičemž položíme $u = p'$ a $v = 1/\rho$. Tak dostaneme pro příslušnou kompresní práci v $J \cdot kg^{-1}$

$$A_k = - \int_1^2 p' d\left(\frac{1}{\rho}\right) = - \left(\frac{p'_2}{\rho_2} - \frac{p'_1}{\rho_1}\right) + \int_1^2 \frac{dp'}{\rho}.$$

Protože tíže se u plynů projevuje zcela nepatrně (nejde-li o enormní množství v atmosféře), lze v rovnici 2.8 (21) vypustit člen $g(h_1 - h_2)$, vyjadřující úbytek polohové energie plynu jednotkové hmotnosti, takže dosadíme-li kompresní práci A_k do 2.8 (21), dostaneme

$$2.8 (22) \quad \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 = - \int_1^2 \frac{dp'}{\rho}.$$

To je Bernoulliho rovnice pro ustálené proudění plynů bez vnitřního tření, podle níž zdrojem přírůstku kinetické energie je práce vnějších sil, budících v plynu vnitřní tlak, popř. tepelná energie, která má též účinek. Při malých tlakových rozdílech, kdy můžeme počítat se stálou, popř. střední hustotou plynu, přejde rovnice 2.8 (22) v rovnici 2.8 (19) platnou pro kapaliny, takže potom plyny proudí tak, jako kdyby byly nestlačitelné.

2.8.7. Věta o hybnosti

Při některých úvahách v oboru proudění tekutin, např. jde-li o síly při změně směru pohybu tekutiny, uplatňuje se poučka o dobovém účinku síly v čl. 2.2.7, podle níž změna hybnosti tělesa je rovna impulsu síly.

Mějme zakřivenou trubici, v níž vytkneme dva průřezy S_1 a S_2 , v nichž tekutina proudí rychlostmi $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ [obr. (2.8) 18]. Hmotnostní tok Q_m je za ustáleného proudění stálý, takže oběma průřezy poteče v době Δt tekutina téže hmotnosti $\Delta m = Q_m \Delta t$. Hybnosti tohoto množství tekutiny v obou průřezích jsou

$$\mathbf{p}_1 = \Delta m \mathbf{v}_1 = Q_m \Delta t \mathbf{v}_1 \text{ a } \mathbf{p}_2 = \Delta m \mathbf{v}_2 = Q_m \Delta t \mathbf{v}_2.$$

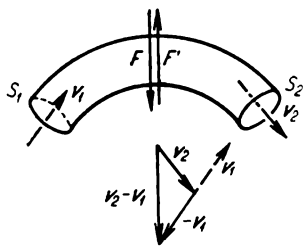
Obecně jsou obě hybnosti různé, protože i kdyby při stálém průřezu trubice rychlosti $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ měly stejnou velikost, liší se u zakřivené trubice navzájem směrem. Ve směru toku nastává proto v době Δt změna hybnosti tekutiny, která se co do směru i velikosti rovná impulsu $\mathbf{I}$ působící síly. Při ustáleném toku je tato síla po dobu Δt zajisté stejná, takže můžeme položit

$$\mathbf{I} = \mathbf{F} \Delta t = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = Q_m \Delta t (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1),$$

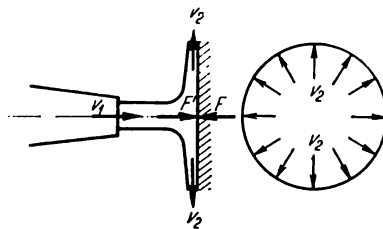
z čehož

$$\mathbf{F} = Q_m (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1).$$

Ke změně směru ustáleného proudu je tedy třeba, aby v příslušné části trubice působila na tekutinu stálá síla $\mathbf{F}$, jejíž směr je totožný s vektorovým rozdílem výstupní a vstupní



Obr. (2.8) 18. Síly při změně směru proudění tekutiny



Obr. (2.8) 19. Tlak proudu na rovinnou stěnu kolmou ke směru proudu

rychlosti. Podle principu akce a reakce působí proudící tekutina na touž část trubice stejně velkou celkovou silou $\mathbf{F}'$, avšak opačného směru:

2.8 (23)

$$\mathbf{F}' = -\mathbf{F} = Q_m (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

Důležitá je úloha nalézt tlakovou sílu $\mathbf{F}'$, kterou působí proud tekutiny při dopadu na rovinnou stěnu. Představme si stěnu kolmou na směr proudu [obr. (2.8) 19]. Je třeba rozhodnout o výrazu $Q_m \mathbf{v}_2$, který představuje hybnost odtékající tekutiny. Nepřihlížíme-li k tíži, můžeme mít za to, že se po dopadu na stěnu proud tekutiny rovnoměrně rozptýlí na všechny strany a že každé částici odtékajícího rozptýleného proudu přísluší souměrně položená částice s rychlostí stejně velkou, ale opačného směru. Vektorový součet hybností všech odtékajících částic je tedy roven nule, a proto také výsledná odtoková hybnost tekutiny $Q_m \mathbf{v}_2 = 0$. Síla, již proud tekutiny působí na stěnu, je tedy

$$\mathbf{F}' = Q_m \mathbf{v}_1,$$

má směr přitékajícího proudu a směřuje kolmo na stěnu.

Není-li stěna v klidu, nýbrž pohybuje-li se rychlostí $\mathbf{v}_2$ ve směru, v němž na ni dopadá proud tekutiny, nebude výsledná odtoková hybnost nulová, neboť složky hybnosti všech částic ve směru stěny se sice navzájem ruší jako v předešlém případě, avšak hybnost každé částice má ještě druhou složku ve směru pohybu stěny. Tyto složky se již navzájem neruší, nýbrž jejich součet dává odtokovou hybnost velikosti $Q_m \mathbf{v}_2$. Síla, kterou proud tekutiny působí na pohyblivou stěnu, má pak podle 2.8 (23) velikost

$$\mathbf{F}' = Q_m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

Při pohyblivé desce závisí tedy tlaková síla na relativní rychlosti $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ proudu vzhledem k desce. Působíště tlakové síly $\mathbf{F}'$ se posouvá rychlostí $\mathbf{v}_2$, čímž vzniká výkon proudu tekutiny:

$$P = \mathbf{F}' \mathbf{v}_2 = Q_m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_2.$$

Je nulový, když je stěna v klidu (tj. při $\mathbf{v}_2 = 0$) nebo když se stěna pohybuje stejně rychle jako tekutina (tj. při $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$). Je zřejmé, že existuje jistá rychlost $\mathbf{v}_2$ ($0 < \mathbf{v}_2 < \mathbf{v}_1$), při níž je výkon největší. Bude to patrné při takové rychlosti $\mathbf{v}_2$, pro jejíž velikost platí

$$\frac{dP}{dv_2} = 0, \text{ tj. } Q_m(v_1 - 2v_2) = 0.$$

Protože Q_m nemůže být rovno nule, má-li proud tekutiny konat práci, musí být $v_1 - 2v_2 = 0$, odkud

$$v_2 = \frac{1}{2} v_1.$$

Proud tekutiny má tedy největší výkon, pohybuje-li se stěna poloviční rychlostí, než je rychlost proudu tekutiny, tlačícího na stěnu. Úvaha platí přísně vzato pro lopatkové kolo. Kdyby se totiž stěna trvale posouvala ve směru proudu, rostl by sloupec tekutiny tryskající z trubice, takže za jednotku času dopadá menší množství tekutiny (nepřehlídíme-li ovšem k zakřivení paprsku kapaliny vlivem tíže nebo k expanzi proudu plynu do okolí). Podle 2.8 (14) hmotnostní tok z trubice $Q_{m1} = \rho S v_1$, je-li S_1 výstupní průřez. Délka paprsku roste s rychlostí v_2 , k čemuž je třeba toku $Q_{m2} = \rho S v_2$. Do výpočtu vstupuje tedy jen tok $Q_m = Q_{m1} - Q_{m2} = \rho S(v_1 - v_2)$.

Uvedeným postupem pak vychází, že max. výkon je při $v_2 = \frac{1}{3} v_1$. Prakticky se tlak proudu při změně směru proudění uplatňuje v turbínách.

2.8.8. Vnitřní tření

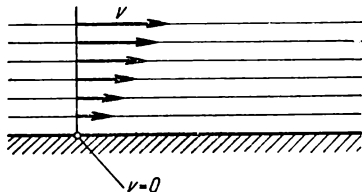
Proudí-li např. voda přímým korytem, pozorujeme, že vrstva vody těsně přiléhající ke dnu ležící dokonale k jeho povrchu, a je tedy v klidu. Rychlosti přibývá s rostoucí vzdáleností ode dna i od postranních stěn a nejrychlejší tok zjistíme na povrchu vody uprostřed koryta [obr. (2.8) 20]. Toto chování, které je společné všem proudícím tekutinám, vysvětlujeme působením *vnitřního tření*, které vzniká proto, že rychlost tekutiny není všude stejná vlivem přilnavosti (adheze) ke stěně. Protože rychlost proudění přechází spojitě od nuly do maximální rychlosti, nastává tření mezi sousedními vrstvami kapaliny, které mají nestejnou rychlosti. Kdyby se rychlost od vrstvy k vrstvě neměnila, nepůsobily by vrstvy na sebe: tečné napětí — tj. tečná síla mezi dvěma vrstvami, dělená velikostí styčné plochy — bylo by nulové. Z toho usoudil Newton, že tečné napětí, které působí k vyrovnání proměnlivé rychlosti v tekutině, je tím větší, čím více se mění rychlost od vrstvy k vrstvě. Tuto změnu rychlosti, kterou bychom pozorovali, postupující od vrstvy k vrstvě kolmo na směr proudění [obr. (2.8) 21], můžeme charakterizovat podílem dv/dy , kde dv je rozdíl rychlosti mezi dvěma sousedními vrstvami tekutiny, vzdálenými od sebe o dy ve směru kolmém k proudu. Podíl dv/dy nazýváme *gradientem rychlosti* nebo též *stoupáním* čili *růstem rychlosti*; Newton vyslovil hypotézu, že *tečné napětí je úměrné rychlostnímu gradientu*, což vyjadřuje rovnice

2.8 (24)

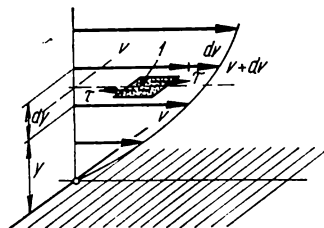
$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}.$$

Konstantu úměrnosti nazýváme *součinitelem viskozity (vnitřního tření)* nebo krátce *dynamickou viskozitou (dynamickou vazkostí)*.

Hlavní jednotkou dynamické viskozity plynoucí z rozměrů veličin ve vztahu 2.8 (24) je Ns m^{-2} . Je to dynamická viskozita laminárně*) proudící tekutiny, v níž při gradientu rychlosti 1/s napříč proudem vzniká tečné napětí 1 N m^{-2} . Vedlejší jednotkou je *poise* (značka P), který vyjadřuje dynamickou viskozitu $0,1 \text{ Nsm}^{-2}$. Jednotka poise je pozůstatek staré měrové soustavy cgs.



Obr. (2.8) 20. Proudění reálné tekutiny



Obr. (2.8) 21. Tečné napětí v proudící tekutině

Převrácenou hodnotu dynamické viskozity nazýváme *tekutostí (fluiditou)*. Bývá označována φ . Platí

$$\varphi = \frac{1}{\eta}.$$

Podíl dynamické viskozity a hustoty ρ tekutiny nazýváme *součinitelem kinematické viskozity* nebo *kinematickou viskozitou (kinematickou vazkostí)* ν . Podle definice

2.8 (25)

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}.$$

Hlavní jednotkou kinematické viskozity je m^2s^{-1} . Je to kinematická vazkost tekutiny s hustotou 1 kg m^{-3} , jejíž dynamická viskozita je 1 Nsm^{-2} . Vedlejší jednotkou je *stok* (St) = $10^{-4}\text{m}^2\text{s}^{-1}$. Plyne opět z měrové soustavy cgs.

V praxi se někdy měří kinematická viskozita kapalin, zejména olejů, v různých jiných jednotkách. Nejběžnější jednotkou jsou tzv. *Englerovy stupně*, které jsou určeny poměrem doby výtoku předepsaného objemu měřené kapaliny trubičkou z nádoby normalizovaného tvaru a doby výtoku stejného množství vody.

Četné pokusy ukázaly, že Newtonův vztah 2.8 (24) je skutečně u většiny tekutin splněn, což se projevuje tím, že konstanta úměrnosti η nezávisí již na rychlostním růstu. Výjimku činí *anomální kapaliny*, obsahující shluky většího počtu molekul (koloidní roztoky, suspenze, emulze apod.), u nichž viskozita závisí na rychlostním růstu; nazývají se *nenewtonské*.

Viskozita kapalin závisí na teplotě a tlaku. S rostoucí teplotou viskozita kapalin klesá, s rostoucím tlakem naopak vzrůstá. Vliv tlaku na viskozitu je však většinou zanedbatelný, vyjma tlaky zvláště vysoké. Měřením viskozity některých olejů bylo např. zjištěno, že při tlaku 12 000 at vzroste jejich viskozita až 10krát proti hodnotě při tlaku normálním.

Viskozitu plynů lze teoreticky určit z kinetické teorie plynů; je o tom pojednáno v čl. 4.3.7.

Pohybuje-li se těleso v tekutině, klade tekutina jeho pohybu odpor, který je při pomalém pohybu úměrný rychlosti. Pro kouli v neomezeném prostředí, jak odvodil Stokes, má odpor F velikost (při laminárním obtékání, tedy nepříliš velké rychlosti)

2.8 (26)

$$F = 6\pi\eta r v,$$

je-li η dynamická viskozita prostředí, v rychlost koule a r její poloměr.

*) Význam laminárního proudění je vyložen v následujícím článku.

Vyšetřme volný pád koule v tekutině známé viskozity. V počátečním okamžiku bude rychlost koule nulová. Působením tíže počne koule v tekutině padat, její rychlost se bude zvětšovat. S rostoucí rychlostí bude však vzrůstat i odpor, který bude klást tekutina padající kouli. Protože odporová síla není stálá, nýbrž závislá na rychlosti, bude pohyb koule nerovnoměrně zrychlený. Rychlost bude teoreticky sice vzrůstat trvale, prakticky však dosáhne jisté maximální hodnoty, tzv. *mezní rychlosti*, při níž bude síla zrychlující prakticky právě rovna odporu, který klade tekutina pohybu koule. Po dosažení této mezní rychlosti bude již další pohyb koule velmi přibližně rovnoměrný.

Pro mezní rychlost v_m platí, že se tíha koule zmenšená o vzlak právě rovná odporu F čili

$$V(s - \varrho)g = 6\pi\eta v_m,$$

značí-li $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ objem koule, s její hustotu, ϱ hustotu kapaliny a η její dynamickou viskozitu a g tíhové zrychlení. Úpravou dostaneme pro mezní rychlost v_m prakticky rovnoměrného pohybu

$$v_m = \frac{2}{9} \frac{gr^2(s - \varrho)}{\eta}.$$

Je zřejmé, že se při zmenšování poloměru koule velmi rychle zmenšuje mezní rychlost. Příkladem toho je např. velmi pomalá sedimentace mikroskopických částíček v zakalených kapalinách (v suspenzích) nebo drobných kapiček v emulzích.

2.8.9. Proudění potenciálové, laminární a turbulentní

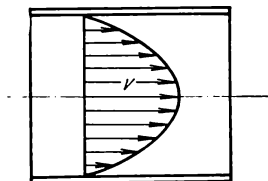
Malý objem tekutiny, který jsme vymezili v proudící tekutině, může konat obecně trojí pohyb, a to posuvný pohyb, otáčivý pohyb kolem jisté osy a dilatační pohyb, při němž se mění tvar pozorovaného objemu, tj. v některých směrech se protahuje a v jiných zase zkracuje. Proudění, při němž se objemové elementy tekutiny neotáčejí, se nazývá *nevtřivé* nebo *potenciálové*. Druhý název plyne ze skutečnosti, že rychlost tekutiny v každém místě je určena jako gradient (stoupání) jisté skalární veličiny, která je funkcí jenom souřadnic příslušného místa vzhledem k vyčtené soustavě souřadnic a která se nazývá *potenciál rychlosti*, podobně jako lze síly konzervativního silového pole určit záporným gradientem (spádem) funkce polohy zvané potenciál sil (znaménko gradientu je ostatně věcí úmluvy). V dokonalé tekutině, v níž není vnitřní tření, působí na libovolnou vyčtenou plochu i za pohybu vždy jen kolmé tlaky, které netvoří silové dvojice, jimiž je podmíněno otáčení. Kromě toho tvoří vnější síly (tíže) prakticky vždy konzervativní silové pole, v němž rovněž nejsou dvojice sil, takže neotáčely-li se objemové elementy tekutiny již dříve, nemůže ani později u nich vzniknout otáčivý pohyb. O tom hovoří *věta Helmholtzova*, podle níž nemohou se v dokonalé tekutině vlivem konzervativních sil vytvořit samy od sebe víry. Když však již na počátku pozorování víry v tekutině byly, budou se setrvačností udržovat stále se stejnou rotační rychlostí.

Proudění by tedy bylo potenciálové, kdyby na kouli, vloženou do rovnoměrného proudu, tekutina nepůsobila žádným tlakem, protože by na zadní polovině koule bylo právě takové rozložení rychlostí jako na přední polovině, kdyby ve všech místech libovolného kolmého průřezu proudové trubice byla rychlost proudění stejná, takže trubicí stálého průřezu by tekutina klouzala podél stěn jako tuhé těleso apod.

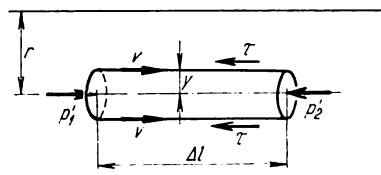
Proudění skutečných tekutin se liší od proudění ideální tekutiny, neboť na proudění má podstatný vliv právě vnitřní tření, které způsobuje, že se charakter proudění značně mění. Při proudění tekutiny malou rychlostí poměrně úzkou trubicí pozorujeme, že rychlost tekutiny není v každém místě průřezu stejná. Rozložení rychlostí, jehož průběh dostaneme, znázorníme-li rychlost částice v každém bodu kolmého průřezu vektorem, je v osovém řezu trubice parabolické [obr. (2.8) 22]. Takové proudění nazýváme *laminárním*. Při něm v přímé trubce stálého průřezu probíhají proudová vlákna rovnoběžně, neproplétají se a tekutina se nepromíchává.

Takové rozložení rychlostí nastává proto, že krajní vrstvy tekutiny lpí na stěnách (mezi stěnou a tekutinou je tření prakticky nekonečně velké) a vlivem vnitřního tření v tekutině zdržují se navzájem jednotlivé její vrstvy. Tekutina klade při průtoku trubici odpor, k jehož překonání je třeba tlaku.

Objasníme to na výpočtu rozložení rychlostí při laminárním proudění přímou trubicí stálého poloměru r . V trubici vytkneme souosý váleček délky Δl a poloměru y [obr. (2.8) 23], na jehož plášti má tekutina rychlost v . Protože k protlačení tekutiny tímto válečkem je třeba síly rovné odporu, který klade tekutina pohybu, musí na vstupní průřez působit tekutina, která je před ním, větším statickým tlakem p'_1 ve směru toku, než je tlak p'_2 , kterým působí tekutina za výstupním průřezem na tento průřez proti směru toku. Ve směru toku nastává tedy na délce Δl



Obr. (2.8) 22. Rozložení rychlostí při laminárním proudění tekutiny



Obr. (2.8) 23. Laminární průtok tekutiny úzkou trubicí

pokles tlaku $\Delta p' = p'_1 - p'_2$, takže na průřezovou plochu πy^2 vyšetřovaného válce působí ve směru toku tlaková síla

$$F = \pi y^2 \Delta p',$$

rovná co do velikosti odporu tekutiny proti proudění vzbuzeného vnitřním třením mezi pláštěm válce a tekutinou, která jej obklopuje. Na každou plošnou jednotku pláště válce působí tedy tečné napětí τ , takže je-li plocha pláště $2\pi y \Delta l$, je síla tření (odpor tření)

$$F' = 2\pi y \Delta l \tau.$$

Podle 2.8 (24) je tečné napětí způsobené vnitřním třením

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dy},$$

kde jsme záporným znaménkem vyjádřili skutečnost, že s rostoucí vzdáleností y od osy trubice rychlost v tekutiny klesá. Při ustáleném proudění musí být síly F a F' v rovnováze, takže

$$\pi y^2 \Delta p' = -2\pi y \Delta l \eta \frac{dv}{dy}.$$

Z této rovnice plyne pro úbytek rychlosti s přírůstkem dy vzdálenosti od osy trubice

$$dv = -\frac{1}{2\eta} \frac{\Delta p'}{\Delta l} y \, dy,$$

odkud integrací dostaneme

$$v = -\frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p'}{\Delta l} y^2 + k.$$

Integrační konstanta k je určena podmínkou, že na vnitřní stěně trubice je rychlost nulová ($y = r$, $v = 0$). Vychází pro ni $k = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p'}{\Delta l} r^2$, takže rozložení rychlosti v průřezu trubice je dáno vztahem

$$v = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p'}{\Delta l} (r^2 - y^2).$$

Měříme-li tedy y od osy trubice, je $v \sim (r^2 - y^2)$, takže koncové body vektorů rychlostí vyplňují v osovém řezu parabolu, jak jsme se o tom již zmínili [obr. (2.8) 22].

Známe-li rozložení rychlostí, vypočítáme snadno objemový tok Q_v . Plochou elementárního mezikruží o poloměru y a šířce dy proteče za jednotku času objem tekutiny

$$dQ_v = 2\pi y \, dy v = \frac{\pi}{2\eta} \frac{\Delta p'}{\Delta l} (r^2 - y^2) y \, dy.$$

Celkový objemový tok Q_v celým průřezem trubice dostaneme integrací v mezích od 0 do r :

$$2.8 \quad (27) \quad Q_v = \frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{\Delta p'}{\Delta l}.$$

Tento vztah vyjadřuje *zákon Hagenův—Poiseuilleův*, který říká: Objemový tok viskózní tekutiny při laminárním proudění trubici kruhového průřezu je přímo úměrný tlakovému spádu $\Delta p'/\Delta l$ a čtvrté mocnině poloměru trubice a je nepřímo úměrný dynamické viskozitě η .

Objemový tok můžeme vyjádřit také

$$Q_v = Su,$$

je-li $S = \pi r^2$ průtočný průřez trubice a u průměrná průtočná rychlost, takže

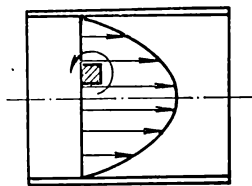
$$2.8 \quad (28) \quad u = \frac{Q_v}{S} = \frac{r^2}{8\eta} \frac{\Delta p'}{\Delta l}.$$

Tlakový spád $\Delta p'/\Delta l$, který je tu měřítkem odporu tekutiny proti proudění, je tedy úměrný první mocnině průměrné rychlosti, takže při laminárním proudění

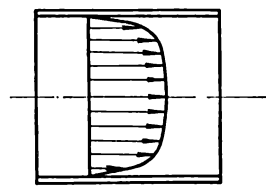
$$2.8 \quad (29) \quad F \sim \frac{\Delta p'}{\Delta l} \sim u.$$

Je to stejné jako u odporu, který prostřední klade pohybu koule podle Stokesova vzorce 2.8 (26), kde rovněž $F \sim u$. Znamená to, že také obtékání koule, má-li platit Stokesův vzorec, musí být laminární.

Proudění laminární skutečné tekutiny je vírové. Přesvědčíme se o tom snadno touto úvahou: Představme si malý objem tekutiny [obr. (2.8) 24], jehož spodní část se pohybuje rychleji než horní, a proto má tento objem snahu otáčet se kolem osy kolmé k nákrese v naznačeném smyslu. Vírová vlákna mají tvar soustředných kružnic, jejichž středy leží na ose trubice. Pro malou pohybovou energii částic a převládající vnitřní tření v tekutině nemohou se víry uvnitř trubice znatelně rozvinout. Proudění probíhá proto tak, jako by se skládalo ze sáních nekonečně tenkých vírových vláken tvaru koncentrických kružnic.



Obr. (2.8) 24. Vírová povaha laminárního proudění



Obr. (2.8) 25. Rychlostní profil při turbulentním proudění

Laminární proudění se může udržet jen do jisté kritické střední rychlosti. Při větších středních rychlostech začne převládat rušivý vliv vírů, proudění se zcela změní a proudová vlákna se začnou proplétat; říkáme, že vzniká *proudění turbulentní*.

Při turbulentním proudění rozvinou se znatelné víry v kapalině a nastává promíchávání kapaliny. Rychlost jednotlivých částic se nepravidelně mění, proudění vlastně již není ani stacionární, tj. částice nemají ve všech místech stálou rychlost co do směru a velikosti. Přesto je však možno zjistit průměrné rozložení rychlosti v průtočném průřezu, jež je pro osový řez naznačeno na obr. (2.8) 25. Rychlostní profil tedy již není parabolický jako při laminárním proudění, nýbrž rychlost je v celé vnitřní části trubice přibližně stálá, vyjma

tenkou vrstvou při stěně, v níž prudce stoupá přibližně úměrně se vzdáleností od stěny. Střední rychlost je tedy mnohem blíží maximální rychlosti než při laminárním proudění.

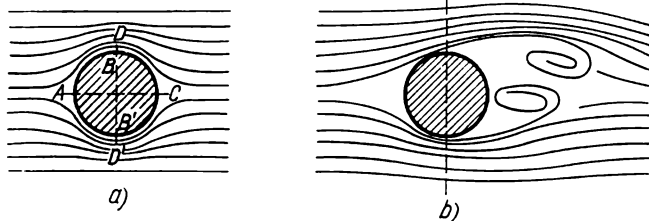
Odpor F proti průtoku, měřený opět tlakovým spádem $\Delta p'/\Delta l$ v proudící tekutině, není již úměrný střední rychlosti u , nýbrž roste přibližně s její druhou mocninou. Obecně

$$2.8 \quad (30) \quad F \sim \frac{\Delta p'}{\Delta l} \sim u^n,$$

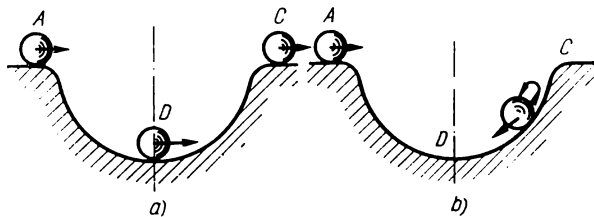
kde mocnitel n bývá 1,75 až 2.

Rozvinutí vírů při obtékání tělesa vloženého např. do proudu kapaliny můžeme znázornit takto:

Představme si nejprve nevířivé proudění, které vzniká, není-li v kapalině vnitřní tření. Při obtékání válce je v místech D a D' na obr. (2.8) 26a rychlost kapaliny největší, neboť tam nastává zhuštění proudnic, které jsou vloženy válce jakoby roztaženy od sebe. Přímou před tělesem a za ním v bodech A a C je kapalina prakticky v klidu, protože se proudění rozděluje v A na směry navzájem opačné a v C zase spojuje dohromady. V místech větší rychlosti vzniká pokles tlaku



Obr. (2.8) 26. Vznik vírů při obtékání tělesa



Obr. (2.8) 27. K výkladu vzniku vírů

o přírůstek kinetické energie objemové jednotky. Mezi body A a D (A a D') je tedy tlakový spád, který kapalinu urychluje. Mezi body D a C (D' a C) naproti tomu vzrůstá tlak, proti kterému mohou částice svou větší kinetickou energii v bodech D a D' naběhnout, takže mají za bodem C opět stejnou rychlost jako před bodem A . Částičky kapaliny se chovají jako kuličky, která se valí na vodorovné rovině bez tření do dolíku [obr. (2.8) 27a], v němž rozdíl výšek A a D představuje tlakový spád a D a C opět stoupnutí tlaku při obtékání. Na dně dolíku má kulička větší rychlost, může svou větší pohybovou energii překonat stoupání mezi D a C , takže v bodě C má opět stejnou rychlost jako v bodě A . Má-li však kulička překonávat tření, pak přírůstek kinetické energie, který získala pádem mezi body A a D , nestačí k tomu, aby vyběhla

z dolíku ven, nýbrž se mezi body D a C zastaví a vrátí zpět. Podobně u kapaliny s vnitřním třením: Kapalina lpí na tělese, tj. je na povrchu tělesa v klidu. Ve velmi tenké vrstvě, zvané *mezni*, stoupá rychlost z nulové hodnoty v bodě B na jistou hodnotu v bodě D . Vnitřním třením v mezni vrstvě může pak podobně jako u kuličky vzniknout mezi C a D zpětný proud. Tím vzniká otáčení elementárních objemů za válcem a vytvoří se dvojice vírů točících se v navzájem opačných směslech [obr. (2.8) 26b]. Kapalina, která teče kolem vírů, unáší střídavě jeden a pak druhý s sebou a vzniká známý jev, který pozorujeme při pohybu tělesa v kapalině nebo při obtékání tělesa kapalinou.

Z naznačeného modelu vzniku vírů plyne, že pro jejich vývoj bude jistě rozhodující poměr mezi průměrnou hodnotou kinetické energie objemové jednotky tekutiny $p'' = (1/2) \rho u^2$ a prací potřebnou na přemáhání vnitřního tření, která je zřejmě úměrná průměrnému tečnému napětí τ v tekutině. Jestliže poměr $p''/\tau \rightarrow \infty$ (v tekutině bez vnitřního tření), bude proudění potenciální. Při konečných hodnotách poměru p''/τ začne mít vliv vnitřní tření, tvoří se víry, proudění bude turbulentní. Posléze při malé hodnotě poměru p''/τ , kdy rychlost tekutiny je malá, převládá vliv tření. Víry, i když mají snahu se vytvořit, nemohou se rozvinout, protože vnitřní tření v tekutině jim v tom brání, a proudění bude laminární.

Kinetickou energii objemové jednotky p'' jsme nazvali dynamickým tlakem, který má tentýž rozměr jako napětí τ . Poměr obou veličin je proto bezrozměrný. Dosadíme-li za průměrné tečné napětí podle 2.8 (24) $\tau = \eta \frac{u}{r}$, kde u/r je průměrný gradient rychlosti tekutiny v trubici polo-

měru r , bude poměr $p^*/\tau = \left(\frac{1}{2} \rho u^2\right) / \left(\eta \frac{u}{r}\right)$. Vynecháme-li číselného součinitele a položíme-li podle 2.8 (25) $\eta/\rho = \nu$, dostaneme místo poměru p^*/τ veličinu zvanou *Reynoldsovo číslo*:

$$2.8 (31) \quad \text{Re} = \frac{ur}{\nu}.$$

Reynoldsovo číslo stejně jako poměr p^*/τ vhodně charakterizuje proudění. Při $\text{Re} \rightarrow \infty$ je proudění potenciální, pro velké Re je proudění turbulentní a malé Re znamená proudění laminární. Je zřejmé, že existuje jistá, tzv. *kritická hodnota* Re_k , pod níž je proudění laminární a nad níž je proudění turbulentní. Z pokusů plyne, že kritickou hodnotou je $\text{Re}_k \approx 1\,000$, takže kritická střední rychlost u_k z rovnice 2.8 (31)

$$u_k = \frac{1\,000\nu}{r} = \frac{2\,000\nu}{d},$$

dosadíme-li místo poloměru průměr $d = 2r$. Tak např. u vody, pro niž $\nu \doteq 0,01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$, vychází při průtoku trubicí průměru $d = 2 \text{ cm}$ kritická rychlost $u_k = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Do této rychlosti je proudění laminární, při větší rychlosti je proudění turbulentní.

Při proudění tekutiny v prostorech obecnějšího tvaru nahrazujeme průměr trubic vhodně definovanou charakteristickou délkou l . Pak obecně platí

$$\text{Re} = \frac{ul}{\nu}.$$

Reynoldsovo číslo má důležitý význam při studiu odporu, který kladou tělesa pohybu kapaliny nebo plynů. Je-li těleso tak velké, že není možné studovat odpory na originálu (letadlo, loď, automobil), můžeme je studovat na modelu. Výsledky získané na modelu budou však srovnatelné se skutečností jen tehdy, když se měření provádí při stejném Re , které je nutno podle tzv. *teorie podobnosti* přiřadit stavu proudění u originálu.

2.9. Einsteinova relativnostní mechanika

2.9.1. Relativnost pohybu

V čl. 1.1.2 jsme vyslovili obecný materialistický postulát, podle něhož fyzikální zákony vyjadřují vztahy mezi materiálními objekty. Z tohoto tvrzení plynou zásadní důsledky především pro mechanické pohyby.

Především musíme základní kinematické pojmy definovat tak, aby celá kinematika byla naukou o vztazích mezi materiálními objekty, a vyloučit pojmy, které nejsou definovány ve vztahu k nějakým materiálním objektům. Proto nemůžeme pracovat s Newtonovým „absolutním prostorem“ a „absolutním časem“, které přímo podle své definice jsou nezávislé na jakýchkoli tělesech nebo polích. Odtud plyne, že mechanický pohyb musí být vztahem mezi materiálními objekty, a že tedy platí zákon relativnosti všech pohybů:*)

$$2.9 (1) \quad \begin{array}{l} \text{Pojem absolutního pohybu nemá fyzikální smysl.} \\ \text{Absolutní pohyb je objektivně neexistující.} \end{array}$$

Hořejší zákon se týká všech pohybů, tedy nejen posuvných pohybů rovnoměrných a přímočarých, pro které zavedeme stručný název *setrvačné pohyby* (tj. podle zákona setrvačnosti), ale i na libovolné pohyby zrychlené, křivočaré nebo otáčivé, které nazveme *ne-setrvačnými pohyby*.

*) Názor, že absolutní prostor neexistuje a že všechny pohyby jsou jen relativní, zastával proti Newtonovi již Berkeley (1710). Později (1873) vyslovil Engels názor, že „pohyb jednotlivého tělesa neexistuje a lze jej chápat jen relativně“. Do fyziky zavedl tuto myšlenku Mach (1872), který stejně jako Berkeley byl přesvědčen, že setrvačné síly mají původ ve stálících (tzv. Machův princip).

Podívejme se nyní, v čem se Newtonova mechanika shoduje se zákonem 2.9 (1) a v čem se s ním rozchází. Shoda je zřejmě v tom, že na základě pohybových rovnic není možno experimentálně zjistit absolutní setrvačný pohyb, tj. rozhodnout, která ze dvou inerciálních vztažných soustav je v absolutním klidu a která je v setrvačném pohybu vzhledem k absolutnímu prostoru.

Nesouhlas se jeví v tom, že na základě týchž pohybových rovnic můžeme pozorováním objevit nesetrvačný pohyb vzhledem k absolutnímu prostoru, neboť neinericiální soustavy se objektivně vyznačují existencí setrvačných sil, které klasická fyzika nedovede vysvětlit účinkem žádných materiálních objektů, ale jen nesetrvačným pohybem vzhledem k absolutnímu prostoru, a proto je chápe jako síly zdánlivé (fiktivní).

Ačkoli absolutní prostor Newtonův není nijak konkrétně definován, je možno podle klasické mechaniky zjistit — aspoň v zásadě —, je-li zvolená soustava souřadnic inerciální, či neinericiální. To lze provést s takovou přesností, s jakou se dá realizovat „volná částice“ (nebo těleso), která se v každé inerciální soustavě pohybuje podle zákona setrvačnosti.

Ze všech dosavadních zkušeností, a zejména z velmi přesných pozorování astronomických vychází najevo, že inerciální soustavy jsou v rovnoměrném a přímočarém pohybu vzhledem k stálícím, lépe řečeno vzhledem k „vzdáleným tělesům nebeským“. Skutečnost, že „soustava pevně spojená se stálicemi“ je jednou z inerciálních soustav, neplyne nikterak z principů klasické mechaniky. Abychom tuto skutečnost mohli objasnit v dalším výkladu, musíme nejprve podat co možná přesnou definici soustavy „spojené se stálicemi“.

Jak vysvětlíme v čl. 2.9.6, je třeba připustit, že fyzikální děje jsou pod vlivem gravitačních účinků vzdálených těles nebeských, a to nejen stálic obsažených v systému Mléčné dráhy čili v naší Galaxii, ale i nesmírného množství dalších velmi vzdálených galaxií. Vzhledem k tomu, že ani v dnešní době není ještě rozřešena otázka prostorového rozložení těchto galaxií, zvláště pak otázka konečnosti vesmíru, omezíme své úvahy na „fyzikální vesmír“, tj. na souhrn galaxií, které mají měřitelný vliv na fyzikální děje probíhající v naší sluneční soustavě. Takto vymezený „vesmír“ budeme stručně nazývat *kosmos* a vztažnou soustavu s ním spojenou nazveme *kosmickou soustavou*.

Při definici této soustavy je ovšem nutno přihlížet k tomu, že kosmos se nechová jako tuhé těleso, protože jednotlivé hvězdy a galaxie mají rozmanité vzájemné rychlosti. Předpokládáme-li však, že lze pozorováním zjistit hmotnosti, polohy a rychlosti jednotlivých galaxií ve zvolené soustavě souřadnic, můžeme v této soustavě vypočítat celkovou hybnost $\mathbf{p}_*$ a točivost $\mathbf{b}_*$ kosmu. Dělíme-li vektor $\mathbf{p}_*$ celkovou hmotností M_* kosmu, dostaneme rychlost $\mathbf{V}_*$ těžiště kosmu. Podobně dělením točivosti $\mathbf{b}_*$ momentem setrvačnosti J_* kolem osy vedené počátkem soustavy rovnoběžně s $\mathbf{b}_*$ dostaneme vektor $\mathbf{\Omega}_*$ úhlové rychlosti kosmu.

Vektory $\mathbf{V}_*$ a $\mathbf{\Omega}_*$ je určen okamžitý relativní pohyb kosmické soustavy vzhledem ke zvolené pozorovací soustavě. Obecně by tyto vektory byly časově proměnné; kdybychom konali pozorování např. v soustavě s počátkem ve středu zemském, která by se otáčela zároveň se Zemí, měnil by se vektor $\mathbf{V}_*$ co do směru i velikosti, kdežto velikost vektoru $\mathbf{\Omega}_*$ by byla téměř stálá a jeho směr by ukazoval jen nepatrné sekulární změny způsobené precesí zemské osy.

Definujeme-li kosmickou soustavu popsáním způsobem, můžeme ve shodě se všemi dosavadními pozorováními prohlásit, že všechny

2.9 (2) *inerciální vztažné soustavy konají vzhledem ke kosmické soustavě setrvačný pohyb.*

Viděli jsme, že klasická mechanika vyhovuje požadavku 2.9 (1) pro setrvačné pohyby, nikoli však pro obecné pohyby nesetrvačné. V dalších částech této kapitoly ukážeme, jakou cestou dospěl vývoj fyziky k takovému stupni, že bylo možno vybudovat nejen mechaniku, ale celou fyziku v souladu se zákonem 2.9 (1), a tím i vyhovět materialistickému postulátu 1.1 (1). Uvidíme, že je to možné jedině plným respektováním megafyzikálního hlediska, které jsme vysvětlili v čl. 1.1.2. Tento vývoj se neuskutečnil bez mnoha překážek, pochybností a bojů se ztrnulostí a nepochopením. Odehrál se ve dvou hlavních etapách, které vy-

tyčil génius Alberta Einsteina, tvůrce teorie relativnosti. Vývoj pokračuje do dnešní doby a řada problémů nebyla zcela vyřešena, ale základní myšlenky nové teorie ovládly již celou moderní fyziku.

2.9.2. Lorentzova transformace

Ačkoli rovnice klasické mechaniky mají stejný tvar ve všech inerciálních soustavách, a nedovolují tedy zjistit absolutní klid a pohyb, trvali fyzikové na počátku tohoto století na pojmu absolutního prostoru, který byl fyzikálně určen hypotetickým světelným éterem, kterému přisuzovali absolutní nehybnost. K ověření této představy byla koncem minulého století provedena řada různých optických a elektrických pokusů, kterými mělo být zjištěno, zda světelný éter je skutečně nehybný. Zejména se řešila otázka tzv. *strhování éteru* a měřila se rychlost světla, které se šíří éterem ve směru a proti směru pohybu Země na její dráze kolem Slunce. Očekávalo se, že relativní rychlost světla vzhledem k Zemi bude v prvním případě menší a ve druhém případě větší o rychlost oběžného pohybu Země. Všechny podobné pokusy byly však negativní (viz např. Michelsonův pokus, čl. 6.4.3) a bylo zjištěno, že světlo se šíří ve směru rovnoběžném s pohybem Země i ve směru k němu kolmém stejnou rychlostí. Vznikla řada důmyslných teorií, které různým způsobem vysvětlovaly negativní výsledky těchto pokusů. Za zmínku stojí teorie Lorentzova, který vyslovil domněnku, že délky rovnoběžné se směrem pohybu se při velkých rychlostech pohybu zkracují (Lorentzova kontrakce délek). Ze své teorie odvodil (po něm nazvanou) *Lorentzovu transformaci*, která znamenala převratný zásah do vývoje fyziky. Poincaré (1904) vyslovil požadavek, který je dnes v teorii relativnosti známý jako **speciální princip relativnosti**:

2.9 (3) *Fyzikální zákony mají stejný tvar ve všech inerciálních soustavách souřadnic.*

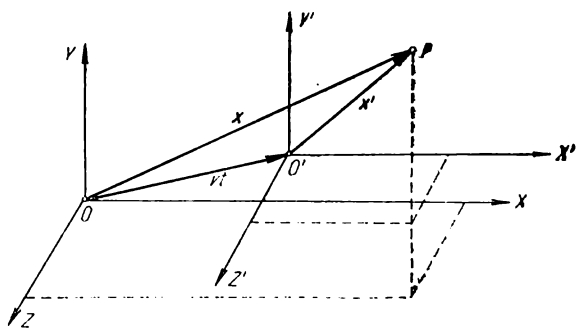
Tento princip „relativnosti setrvačných pohybů“ je zřejmě speciálním případem obecného zákona 2.9 (2) relativnosti pohybů, který je podle tohoto zákona třeba vztahovat na všechny fyzikální jevy, tedy nejen mechanické (což se všeobecně uznávalo), ale i na jevy optické, elektrické aj. Z principu 2.9 (3) tedy nutně vyplývá, že ani měřením rychlosti světla není možno dokázat absolutní pohyb Země a že pokusy, kterými se takový pohyb měl zjistit, musí být negativní.

Einstein přijal tento negativní výsledek jako experimentálně prokázaný fakt a povýšil jej na všeobecně platný *princip stálé rychlosti světla*. Podle tohoto principu je rychlost světla ve vakuu, měřená v libovolné inerciální soustavě, stejně velká (pokud nepůsobí silnější gravitační pole). Ačkoli tento princip je pouhým důsledkem principu Poincarého, vedl přímo ke vzniku speciální teorie relativnosti, když Einstein ze svého principu odvodil bez dalších hypotéz Lorentzovu transformaci.

Ukážeme nejprve, že princip stálé rychlosti světla je v rozporu s Galileiho transformací

$$2.9 (4) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{v}t,$$

uvedenou v článku 2.2.4A, která plyne z 2.2 (23), položíme-li $\mathbf{R} = \mathbf{v}t$. Zjednodušením obrázku (2.2) 10 dostaneme přehlednější obr. (2.9) 1, z něhož plyne vztah 2.9 (4), počítáme-li čas od okamžiku $t = 0$, kdy obě soustavy $S(Oxyz)$ a $S'(O'x'y'z')$ splývaly.



Obr. (2.9) 1. Obecná Lorentzova transformace

Předpokládejme, že vyšleme v tomto okamžiku ($t = 0$) ze společného počátku $O = O'$ obou soustav světelný signál, který se v soustavě S šíří rychlostí, jež má ve všech směrech stejnou velikost c . Světelný paprsek postupuje tedy ve směru libovolně zvoleného jednotkového vektoru $\mathbf{x}^0$ rychlostí $\mathbf{c} = c\mathbf{x}^0$ a dosáhne v čase t polohy určené průvodičem

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}t = ct\mathbf{x}^0.$$

Světlo se tedy rozšíří na kulovou vlnoplochu, která má rovnici

$$2.9 (5) \quad x^2 + y^2 + z^2 = |\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = c^2 t^2.$$

Podle Galileiho transformace 2.9 (4) má koncový bod paprsku polohový vektor

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{c} - \mathbf{v})t,$$

jehož velikost zřejmě závisí na směru vektoru $\mathbf{c}$, tedy na směru šíření světla. Princip stálé rychlosti světla však vyžaduje, aby se i v soustavě S' šířilo světlo rychlostí c ve všech směrech, aby tedy vlnoplocha byla kulová a měla poloměr ct' , kde t' značí čas měřený v soustavě S' . Vlnoplocha musí tedy mít v soustavě S' rovnici

$$2.9 (6) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = |\mathbf{x}'|^2 = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = c^2 t'^2.$$

Ježto $|\mathbf{x}'| \neq |\mathbf{x}|$, plyne srovnáním rovnic 2.9 (5) a 2.9 (6), že obecně $t' \neq t$. To je nejzávažnější důsledek speciálního principu relativnosti, neboť dokazuje, že nejen prostor, ale ani čas nemá absolutní význam: při přechodu k jiné inerciální soustavě se běh času mění, podobně jako se mění souřadnice bodu v prostoru.

Rovnice 2.9 (5) a 2.9 (6) platí současně, a proto musí být

$$|\mathbf{x}|^2 - c^2 t^2 = k(|\mathbf{x}'|^2 - c^2 t'^2),$$

je-li k nenulová konstanta. Protože pak obě soustavy S a S' jsou podle principu 2.9 (3) fyzikálně rovnocenné, musí platit zároveň vztah

$$|\mathbf{x}'|^2 - c^2 t'^2 = k(|\mathbf{x}|^2 - c^2 t^2).$$

Je tedy nutně $k = 1$ a výraz

$$2.9 (7) \quad |\mathbf{x}|^2 - c^2 t^2 = |\mathbf{x}'|^2 - c^2 t'^2$$

se při přechodu od S k S' nemění. Říkáme, že při hledané transformaci souřadnic a času musí být výraz 2.9 (7) *invariantní*. Předpokládáme-li, že se prostorové souřadnice i čas transformují lineárně, můžeme Galileiho transformaci 2.9 (4) zobecnit na tvar

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - (At - B)\mathbf{v}, \quad t' = Ct + D,$$

kde je třeba veličiny A, B, C, D volit tak, aby byla splněna podmínka 2.9 (7) pro všechny body prostoru v každém okamžiku. Dostí složitým počtem, který neuvádíme. bychom se přesvědčili, že tomuto požadavku vyhovují vztahy*)

$$2.9 (8a) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \left(\frac{\alpha - 1}{v^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} - \alpha t \right) \mathbf{v},$$

$$2.9 (8b) \quad t' = \alpha \left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c^2} \right),$$

kde

$$2.9 (9) \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad v < c.$$

*) Správnost tohoto tvrzení si ověříme ještě v tomto článku pro speciální transformaci 2.9 (12) a později pro obecné rovnice 2.9 (8) na základě vztahu 2.9 (30).

Tyto rovnice jsou obecným vyjádřením proslulé **Lorentzovy transformace**, podle níž se transformuje polohový vektor $\mathbf{a}$ a čas při přechodu od inerciální soustavy S k inerciální soustavě S' , se souhlasně rovnoběžnými pravouhlými osami. Vektor $\mathbf{v}$ značí stálou translační rychlost soustavy S' vzhledem k soustavě S .

Lorentzova transformace má fundamentální význam pro celou moderní fyziku a má řadu pozoruhodných vlastností.

Především musí vzhledem k rovnocennosti obou vztažných soustav platit pro obrácený přechod od S' k S rovnice, které dostaneme z 2.8 (8), zaměníme-li čárkované a nečárkované veličiny a nahradíme-li rychlost $\mathbf{v}$ relativní rychlostí $\mathbf{v}'$ soustavy S vzhledem k soustavě S' . Protože zřejmě

$$2.9 (10) \quad \mathbf{v}' = -\mathbf{v},$$

je obrácená transformace

$$2.9 (10a) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \left(\frac{\alpha - 1}{v^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}' + \alpha t' \right) \mathbf{v},$$

$$2.9 (10b) \quad t = \alpha \left(t' + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}'}{c^2} \right), \quad \alpha' = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \alpha.$$

Lorentzova transformace je zobecněním transformace Galileiho, kterou dostaneme pro $\alpha = 1$, což je hodnota plynoucí z 2.9 (9) v mezním případě $c \rightarrow \infty$.

V obecném případě, kdy $\alpha > 1$, liší se Lorentzova transformace od Galileiho transformace velmi podstatně. Z obecných rovnic 2.9 (8a) plyne, že vzdálenost dvou bodů, které jsou v soustavě S v klidu, se přechodem k soustavě S' obecně změní. Jsou-li současně polohy obou bodů dány polohovými vektory $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ a označíme-li

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_1',$$

dostaneme

$$2.9 (11) \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\alpha - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{v^2} \mathbf{v}.$$

Vektor $\mathbf{r}$ se tedy nemění jen tehdy, je-li kolmý k relativní rychlosti obou soustav. Velikost prostorové vzdálenosti dvou bodů je tedy

$$\begin{aligned} r'^2 &= r^2 + 2(\alpha - 1) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})^2}{v^2} + (\alpha - 1)^2 \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{v^2} \right)^2 v^2 = \\ &= r^2 + (\alpha^2 - 1) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})^2}{v^2} = r^2 + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})^2}{c^2 - v^2} = \frac{r^2}{c^2 - v^2} [c^2 - v^2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})^2]. \end{aligned}$$

Označíme-li $v_{\perp}$ složku rychlosti $\mathbf{v}$ kolmou ke směru spojnice obou bodů, bude

$$v^2 = v_{\perp}^2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}^0)^2,$$

neboť součin $\mathbf{v}$ v závorce je složka rychlosti $\mathbf{v}$ rovnoběžná s $\mathbf{r}$. Máme tedy vztah

$$2.9 (11') \quad r' = \sqrt{\frac{c^2 - v_{\perp}^2}{c^2 - v^2}} r.$$

Další vlastnosti Lorentzovy transformace si vysvětlíme na jejím jednodušším tvaru, kterým můžeme nahradit obecnou transformaci, když relativní rychlost $\mathbf{v}$ je rovnoběžná s kladným směrem souřadnicových os Ox a $O'x'$. Pak

$$v_x = v, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0,$$

takže

2.9 (12a)

$$x' = \alpha(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z,$$

2.9 (12b)

$$t' = \alpha \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

a obrácená transformace

2.9 (13a)

$$x = \alpha(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z',$$

2.9 (13b)

$$t = \alpha \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right),$$

jak bychom se přesvědčili přímým řešením rovnic 2.9 (12).

Na tomto nejobvyklejším vyjádření Lorentzovy transformace si snadno ověříme její charakteristickou vlastnost, že vyhovuje principu stálé rychlosti světla. Prolétne-li v okamžiku $t = 0$ počátkem soustavy S foton rychlostí c ve směru kladné osy Ox , dosáhne v čase t vzdálenosti $x = ct$. Pozorovatel, který sleduje pohyb fotonu v soustavě S' , zjistí v čase t' foton ve vzdálenosti dané podle 2.9 (12a) a 2.9 (13b) výrazem

$$x' = \alpha(c - v)t = \alpha^2(c - v) \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right),$$

odkud vzhledem k 2.9 (9) plyne

$$(c + v)x' = c^2 t' + vx',$$

takže

$$x' = ct'.$$

Pozorovatelé v obou soustavách zjistí tedy, že foton se pohybuje rychlostí světla c .

2.9.3. Relativnostní kinematika

Ačkoli Poincaréův princip i Lorentzova transformace, které jsou základními pilíři tzv. *speciální teorie relativnosti*, byly známy již před vznikem této teorie, přinesl Einsteinův pronikavý rozbor základních fyzikálních pojmů zcela nové pojetí prostoru a času. Ukázal zejména, že délka, čas a současnost jsou pojmy, které postrádají absolutní význam, a že výsledky jejich měření jsou závislé na vztažné soustavě, v níž měření konáme. To přirozeně vedlo k základním změnám v klasické kinematice, kterou bylo třeba nahradit *kinematikou relativnosti*.

Probereme stručně její nejdůležitější odchylky od klasické kinematiky: kontrakci délek, dilataci času a vzorec pro skládání rychlostí.

Kontrakce délek

Vzdálenost dvou bodů (např. konců tuhé tyče), které jsou v klidu v soustavě S' , je dána vektorem $l' = x'_2 - x'_1$. Jeho složky kolmé ke směru pohybu soustavy S' se Lorentzovou transformací 2.9 (13) nemění:

$$l_y = y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1 = l'_y, \quad l_z = l'_z,$$

avšak pro složku ve směru rychlosti plyne z 2.9 (12a)

$$l_x = x_2 - x_1 = \frac{x'_2}{\alpha} + vt_2 - \left(\frac{x'_1}{\alpha} + vt_1 \right).$$

Při tom značí t_1 a t_2 okamžiky měřené v soustavě S , v nichž pozorujeme polohy obou bodů. Při měření vzdálenosti v soustavě S , v níž se oba body (tyč) pohybují rychlostí v ve směru kladné osy Ox , musíme samozřejmě polohy bodů zjistit současně, tedy v téže okamžiku z hlediska soustavy S . Proto musíme volit $t_1 = t_2$, takže podle 2.9 (9)

$$2.9 (14) \quad l_x = \frac{x'_2 - x'_1}{\alpha} = \sqrt{1 - v^2/c^2} l'_x \leq l'_x.$$

Vidíme, že rozměry dokonale tuhého tělesa, které se vzhledem k pozorovateli pohybuje stálou rychlostí v , se mu jeví zkráceny v poměru $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, zatímco rozměry k rychlosti kolmé se jeví stejně velké jako za klidu: těleso jeví zploštění ve směru pohybu. Tento jev předpokládaný už Lorentzem (před vznikem teorie relativnosti) se nazývá *kontrakce délek* (Lorentzova).

Dilatace času

Při odvození vzorce pro kontrakci délek jsme délkou tyče rozuměli vzdálenost současných poloh jejích krajních bodů. Podobně dojdeme k vzorci pro dilataci času, změříme-li čas uplynulý mezi dvěma soumístnými událostmi (okamžitými bodovými jevy), např. mezi začátkem a koncem nějakého bodového děje.

Abychom zjistili, jakou dobu trvání děje naměří pozorovatel, vzhledem k němuž se místo děje pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí v , představme si ideální (dokonale přesné) hodiny H' , které se pohybují zároveň se soustavou S' , v níž mají stálou polohu na ose $O'x'$, určenou souřadnicí $x' = \text{konst.}$ V okamžiku t'_1 měřeném na hodinách H' míjejí tyto hodiny jiné ideální hodiny H_1 , které jsou v soustavě S v klidu v místě o souřadnicích $x_1, 0, 0$, a udávají podle 2.9 (13b) čas

$$t_1 = \alpha \left(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2} \right).$$

V okamžiku t'_2 měřeném na hodinách H' , kdy tyto hodiny míjí další ideální hodiny H_2 , které jsou v klidu v soustavě S v místě o souřadnicích $x_2, 0, 0$, ukazují hodiny H_2 čas

$$t_2 = \alpha \left(t'_2 + \frac{vx'_1}{c^2} \right),$$

takže

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \alpha(t'_2 - t'_1) = \alpha \Delta t',$$

čili

$$2.9 (15) \quad \Delta t' = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta t \leq \Delta t.$$

Tento vztah nám říká, že běh času měřený hodinami H' , které se v soustavě S pohybují rychlostí v , je v poměru α pomalejší než běh času měřený hodinami H , které jsou v soustavě S v klidu. Podle speciálního principu relativnosti nelze fyzikálním měřením rozhodnout, která ze soustav S a S' se pohybuje a která je v absolutním klidu. Je však objektivně zjištělné, že nějaká soustava je v klidu vzhledem k pozorovateli (měřicímu přístroji, hodinám), který čas měřil. Z rovnice 2.9 (15) pak plyne objektivní poznatek, že doba trvání děje probíhajícího v nějakém fyzikálním objektu se jeví pozorovateli, vzhledem k němuž se objekt pohybuje, delší než doba trvání téhož děje měřená na stejném objektu, který je vzhledem k pozorovateli v klidu. Tento výsledek, který neznamená nic více, než že čas není veličinou absolutní, jak se domníval Newton, nýbrž že doba téhož děje — např. perioda tiků ideálních hodin — měřená různými pozorovateli, tj. srovnávaná s různými hodinami, je tím delší, čím rychleji se pozorovatel (jeho hodiny) pohybuje vzhledem k místu

děje. Správný výklad tohoto „relativnostního efektu“, který je všeobecně známý jako *dilatace času*, se v posledních letech znovu stal předmětem živých diskusí v souvislosti s otázkou možného doletu kosmických raket. Protože dilatace času vzniká i z jiných příčin než setrvačným pohybem soustavy, v níž konáme měření, mluvíme ve speciální teorii relativnosti přesněji o *inerciální dilataci času*.

Einsteinův vzorec pro skládání rychlostí

Obvyklé pravidlo o vektorovém skládání rychlostí je podmíněno platností Galileiho transformace, neboť z Lorentzovy transformace plyne pro skládání rychlostí složitější vzorec.

V rovnici 2.9 (10b) je $\mathbf{v}$ stálý vektor a proto též α má stálou hodnotu. Je tedy

$$2.9 (16) \quad \frac{dt}{dt'} = \alpha \left(1 + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} \right) = \alpha \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2} \right),$$

kde

$$\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{x}'}{dt'}$$

značí zřejmě rychlost měřenou v soustavě S' . Derivací 2.9 (10a) vychází

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt'} = \mathbf{u}' + \left(\frac{\alpha - 1}{v^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}' + \alpha \right) \mathbf{v},$$

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt},$$

takže

$$2.9 (17) \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}' + \left(\frac{\alpha - 1}{v^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}' + \alpha \right) \mathbf{v}}{\alpha \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2} \right)}.$$

To je obecný transformační vzorec pro vektor rychlosti, který přejde ve známý klasický vzorec

$$2.9 (18) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v},$$

v mezním případě $c \rightarrow \infty$. Jsou-li rychlosti $\mathbf{u}'$ a $\mathbf{v}$ navzájem kolmé, dostaneme

$$2.9 (19) \quad \mathbf{u} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \mathbf{u}' + \mathbf{v}.$$

Jsou-li však spolu rovnoběžné, plyne z 2.9 (17) jednoduchý *Einsteinův vzorec*

$$2.9 (20) \quad \boxed{\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}' + \mathbf{v}}{1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2}}}.$$

V obou uvedených zvláštních případech vychází výsledná rychlost menší než vektorový součet obou skládaných rychlostí, což je nutný důsledek Lorentzovy transformace. Kdybychom skládali rychlosti podle vzorce 2.9 (18), dostali bychom složením dvou rychlostí větších než $c/2$ rychlost větší než c . Kdyby se soustava S' pohybovala vzhledem k S rychlostí řekněme $v = \frac{3}{4}c$ vpravo a soustava S'' stejnou rychlostí vlevo, vyšla by podle 2.9 (18)

relativní rychlost soustav S' a S'' rovná $1,5c$ a pro přechod mezi těmito fyzikálně přípustnými soustavami bychom nemohli užít Lorentzovy transformace, protože relativnostní činitel α je definován výrazem 2.9 (9) jen pro rychlosti $v < c$. Podle správného vzorce 2.9 (20) vychází ovšem pro relativní rychlost dvou soustav pohybujících se rychlostmi menšími než c vždycky hodnota menší než rychlost světla. Tak dostaneme v uvedeném příkladu

$$u = \frac{3/4c + 3/4c}{1 + 9/16} = \frac{24}{25}c = 0,96c.$$

Složením dvou světelných rychlostí dostaneme zase nejvýše rychlost c , a to jen když mají stejný směr, jak plyne z 2.9 (20):

$$u = \frac{c + c}{1 + 1} = c.$$

Kontrakce délek, dilatace času a vzorec pro skládání rychlostí jsou hlavní odchylky relativnostní kinematiky od klasické, a proto je třeba říci, do jaké míry byly ověřeny zkušeností.

Je zajímavé, že nejdříve byl experimentálně potvrzen vzorec pro skládání rychlostí, a to dávno před svým objevením. Plyne z něho totiž vzorec pro šíření světla v pohybujícím se prostředí, který odvodil Fresnel již r. 1818.

Je-li n absolutní index lomu prostředí, šíří se v něm světlo rychlostí $u' = c/n$. Pohybuje-li se prostředí samo ve směru šíření světla rychlostí v ve vztahné soustavě pozorovatele, naměří pozorovatel podle 2.9 (20) pro rychlost světla hodnotu

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = (u' + v) \frac{1 - \frac{u'v}{c^2}}{1 - \left(\frac{u'v}{c^2}\right)^2} = \frac{u'(1 - v^2/c^2) + v(1 - 1/n^2)}{1 - \frac{1}{n^2} v^2/c^2}.$$

Protože však rychlost prostředí $v \ll c$, můžeme s dostatečnou přesností psát

$$2.9 (21) \quad u = u' + (1 - 1/n^2) v.$$

To je právě vzorec odvozený Fresnelem na základě hypotézy, že proudící prostředí strhuje éter jen částečně, takže výsledná rychlost je menší než součet $u' + v$. Z Einsteinova vzorce to vyplývá bez jakýchkoli představ o éteru. Platnost vzorce 2.9 (21) byla potvrzena Fizeauovým pokusem (1851) se šířením světla proudící vodou, který opakovali Michelson a Morley (1878) s větší přesností. Tak lze pokládat správnost Einsteinova vzorce za bezpečně prokázanou.

Inerciální dilatace času byla poprvé zjištěna experimentálně Ivesem a Stilwellem (1938), kteří proměřovali spektrum světla vydávaného molekulárními ionty vodíku urychlenými v anodové trubici na rychlost rovnou $0,4\%$ rychlosti světla. Pozorovali, že spektrální čáry měly vlnové délky větší o $4,68 \cdot 10^{-12}$ m v dobré shodě s teoretickou hodnotou $4,72 \cdot 10^{-12}$ m, plynoucí ze vzorce 2.9 (15). Frekvence světelných kmitů se totiž dilatací času zmenšily, a tedy vlnové délky prodloužily, takže spektrální čáry se posunuly k červenému kraji spektra. Proto se tento jev často nazývá *rudý posuv* nebo též *příčný Dopplerův jev*, protože se dá zjistit jen při pozorování ve směru kolmém k rychlosti pohybu zdroje, kde není překrýván mnohem silnějším Dopplerovým jevem klasickým, při němž se naopak uplatňuje pouze „podélná“ složka relativní rychlosti zdroje ve směru pozorování. Na konci čl. 2.9.7 promluvíme o rudém posuvu způsobeném neinerciální a gravitační dilatací času.

Závěrem se zmíníme o zajímavém úkazu, který také potvrzuje existenci inerciální dilatace času a kromě toho souvisí úzce s kontrakcí délek. Při průchodu kosmického záření zemskou atmosférou vznikají částice zvané miony [viz tab. (8.1) I], které se pohybují rychlostmi velmi blízkými rychlosti světla, jak bylo zjištěno měřením jejich energie. U mionů zabrzdněných a uve-

dených do klidu byla zjištěna doba života $\tau = 2,2 \cdot 10^{-8}$ s, během níž by tyto nestálé částice mohly podle klasické fyziky doletět nejvýše do vzdálenosti $c\tau \approx 660$ m. Z četných měření však vychází najevo, že mohou v atmosféře urazit dráhy, které jsou desítkrát až padesátkrát delší.

Abychom to vysvětlili, označme S soustavu spojenou se Zemí a S' soustavu, která se pohybuje zároveň s mionem rychlostí v . Vzniku a zániku mionu nechť přísluší v S' hodnoty $x'_1 = x'_2$, $t'_2 - t'_1 = \tau$, kde τ je zmíněná vlastní doba života mionu za klidu. Jeho doba života měřená v S je tedy podle 2.9 (13)

$$t_2 - t_1 = \alpha \left(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2} \right) - \alpha \left(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2} \right) = \alpha \tau = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

a dráha, kterou mion urazí v soustavě S ,

$$l = x_2 - x_1 = \alpha(x'_2 + vt'_2) - \alpha(x'_1 + vt'_1) = \alpha v \tau = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} c\tau.$$

Ze zjištěné rychlosti v a dráhy l možno z poslední rovnice vypočítat vlastní dobu života τ , která skutečně souhlasí s uvedenou hodnotou měřenou u mionu v klidu. Tím je vysvětleno, že mion může urazit dráhu mezi dvěma místy, jejichž klidová vzdálenost mnohokrát přesahuje hodnotu $c\tau$, což ovšem neznamená, že se pohybuje nadsvětelnou rychlostí.

Podobný případ by mohl nastat i u rakety, kdyby se podařilo dát jí rychlost v blízkou c . Pozemský pozorovatel by zjistil, že raketa urazila za velmi dlouhou dobu $\alpha\tau$ dráhu $l = v\alpha\tau$, která odpovídá její rychlosti v a prodloužené době letu $\alpha\tau$. Kosmonaut v raketě by však naměřil v důsledku kontrakce délek, že za dobu τ , měřenou hodinami v raketě, urazil jen dráhu $l/\alpha = v\tau$. Je to v plném souhlase s tím, že relativní rychlost rakety a Země musí mít pro oba pozorovatele velikost v , a proto lze pokládat výsledek, že $l > c\tau$, za objektivní poznatek. Je tedy možno teoreticky připustit, že posádka kosmické lodě by mohla při rychlosti blízké rychlosti světla urazit během roku svého života dráhu delší, než je světelný rok.

2.9.4. Relativnostní dynamika

Newtonova pohybová rovnice

2.9 (22)

$$\frac{d(m\mathbf{u})}{dt} = \mathbf{F},$$

kde $\mathbf{u}$ je rychlost částice, platí ve všech inerciálních soustavách a nemění se Galileiho transformací, která může nahradit transformaci Lorentzovu, jen pokud rychlost $\mathbf{u}$ je velmi malá proti rychlosti světla. Pohybový zákon relativnostní mechaniky musí nutně mít tvar, který se nemění Lorentzovou transformací (musí být vzhledem k této transformaci kovariantní), a proto nemůže být totožný s Newtonovým zákonem 2.9 (22). Uvědomíme-li si však, že při malých rychlostech se klasická mechanika plně osvědčuje, přicházíme k názoru, že relativnostní zákon pohybový musí pro malé rychlosti splýnout se zákonem 2.9 (22). K takovému zobecnění pohybového zákona lze dospět užitím vektorového počtu ve čtyř-rozměrném prostoročase, jak učinil Minkowski. Ukázalo se, že v relativnostní mechanice platí sice formálně stejná rovnice 2.9 (22) jako v mechanice klasické, avšak hmotnost m pohybující se částice nemá stálou hodnotu. Závisí na rychlosti u částice podle vzorce*)

2.9 (23)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad u < c,$$

v němž konstanta m_0 se nazývá *klidová* (nebo *vlastní*) *hmotnost* částice na rozdíl od její *hmotnosti za pohybu* m , která je zřejmě vždy větší než klidová hmotnost m_0 .

*) Odvození viz na konci čl. 2.9.6.

Hmotnost je přesně rovna m_0 jen při $u = 0$; pohybuje-li se však částice rychlostí velmi malou proti rychlosti světla, není možno měřením zjistit rozdíl mezi hmotnostmi za pohybu a za klidu. Pohyb částice je pak dosti přesně popsán Newtonovou pohybovou rovnicí:

$$\frac{d(m_0 \mathbf{u})}{dt} = m_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Pohybový zákon 2.9 (22), v němž hmotnost m závisí na rychlosti podle 2.9 (23), splňuje podmínky kladené na pohybový zákon relativistní dynamiky a platí pro libovolné rychlosti menší než rychlost světla $u < c$. Ostatně správnost rovnice 2.9 (22) se v dnešní době neustále prakticky ověřuje při provozu velkých urychlovačů nabitých částic (elektronů a iontů).

Všechny látkové částice mají klidovou hmotnost různou od nuly a jejich hmotnost roste s rychlostí zprvu pomalu, pak stále rychleji zvláště v těsné blízkosti c [viz obr. (2.9) 2]. Částice, které se aspoň zhruba pohybují podle zákonů klasické mechaniky, se nazývají *částice klasické*. Je zvykem počítat k nim částice, jejichž hmotnost za pohybu nepřesahuje dvojnásobek hmoty klidové. Podle obr. (2.9) 2 musí být rychlost klasické částice menší než asi 87 % rychlosti světla. Rychlejší částice se pak nazývají *relativistní částice*. Konečně částice s rychlostí velmi blízkou rychlosti světla se označují názvem *ultrarelativistní* nebo *nadrelativistní*. Toto třídění částic podle velikosti *relativistního činitele* $\alpha = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ má význam v teorii moderních urychlovačů.

Rovnice 2.9 (22) a 2.9 (23) jsou základem relativistní dynamiky a snadno z nich odvodíme velmi důležitý vztah mezi hmotností a energií.

Působí-li na částici klidové hmotnosti m_0 síla $\mathbf{F}$, vykoná při posuvu $d\mathbf{l}$ elementární práci, kterou definujeme i v teorii relativnosti výrazem

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

Je-li částice v pozorovací soustavě v klidu, je práce potřebná k jejímu urychlení z klidu na rychlost $u \ll c$

$$2.9 (24) \quad A \approx \frac{1}{2} m_0 u^2 = W_k, \quad u \ll c.$$

Proto přisuzujeme částici v klasické mechanice pohybovou energii W_k rovnou práci A . Abychom přibližný vzorec 2.9 (24) zobecnili pro libovolné rychlosti $u < c$, uvažme, že podle 2.9 (23) je m funkcí u , a že se tedy během urychlování částice mění. Předpokládáme-li, že síla $\mathbf{F}$ má stálý směr, bude se částice posouvat ve směru síly a elementární práce

$$2.9 (25) \quad dA = F dl = \frac{d(mu)}{dt} dl = u d(mu) = mu du + u^2 dm.$$

Umocněním vztahu 2.9 (23) plyne

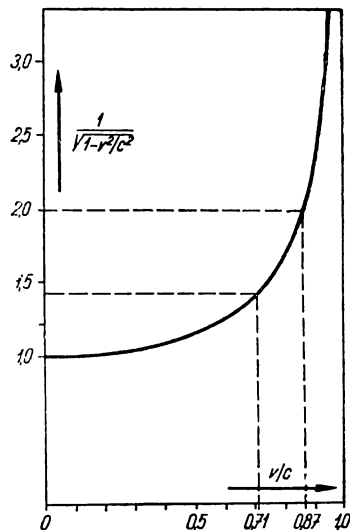
$$m^2(c^2 - u^2) = m_0^2 c^2,$$

takže

$$2m(c^2 - u^2) dm - m^2 2u du = 0,$$

čili

$$mu du + u^2 dm = c^2 dm.$$



Obr. (2.9) 2. Závislost relativistního činitele na rychlosti

Integrací 2.9 (25) dostaneme konečně

$$A = \int_{u=0}^u F \, dl = \int_{u=0}^u c^2 \, dm = \int_{m_0}^m c^2 \, dm = (m - m_0) c^2.$$

Chceme-li podržet platnost zákona zachování energie i v relativistické mechanice, musíme tedy definovat pohybovou energii částice výrazem

$$2.9 \quad (26) \quad W_k = (m - m_0) c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right),$$

který lze pro malé rychlosti rozvinout podle binomické věty

$$W_k = m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{u}{c} \right)^4 + \dots - 1 \right] \approx \frac{1}{2} m_0 u^2, \quad u \ll c.$$

Klasický vzorec 2.9 (24) platí tedy s dostatečnou přesností jen pro pomalé pohyby. Obecně roste ovšem s rostoucí rychlostí nejen energie, ale i hmotnost částice. Přírůstky obou těchto veličin jsou zřejmě vázány vztahem

$$\Delta W = c^2 \Delta m,$$

který je schopen zobecnění. Přisoudíme-li totiž částici i ve stavu klidu jistou *klidovou energii*:

$$2.9 \quad (27) \quad W_0 = c^2 m_0,$$

můžeme psát

$$2.9 \quad (27') \quad W_0 + W_k = c^2 m.$$

Tak dostaneme pro celkovou energii W , rovnou součtu klidové a pohybové energie, rovnici

$$2.9 \quad (28) \quad \boxed{W = c^2 m},$$

která vyjadřuje *Einsteinův vztah mezi hmotností a energií*. O jeho obecné platnosti v různých oborech fyziky, zvláště ve fyzice jaderné, se příležitostně přesvědčíme. Změna hmotnosti příslušná změně energie je zřídka měřitelná, neboť přírůstek hmotnosti o 1 kg by vyžadoval energii

$$2.9 \quad (29) \quad \begin{aligned} 1 \, \text{kg} \cdot c^2 &= (2,997 \, 9 \cdot 10^8 \, \text{m s}^{-1})^2 \, \text{kg} = \\ &= 8,987 \cdot 10^{16} \, \text{J} \approx 9 \cdot 10^{16} \, \text{Ws} \approx 25 \, \text{miliard kWh}. \end{aligned}$$

Celková energie 2.9 (28) stoupá urychleně podle křivky na obr. (2.9) 2, a dosažení rychlostí blízkých rychlosti světla vyžaduje tedy velmi značné energie. Z toho plyne, že rychlost světla ve vakuu je *mezní rychlost*, které nemůže dosáhnout žádná částice s nenulovou klidovou hmotností, a tím méně makroskopická tělesa. Tak např. k urychlení tělesa na rychlost 0,87c, kdy má právě dvojnásobnou hmotnost než za klidu, by bylo třeba dodat mu podle Einsteinova vzorce kinetickou energii rovnou jeho klidové energii. Na každý kilogram by tedy připadala ohromná energie 25 miliard kWh, kterou by bylo možno získat asi z 1 tuny jaderného paliva, při jehož štěpení je možno využít nejvýše 1⁰/₁₀₀ jeho klidové energie.

Přes formální shodu rovnice 2.9 (22) s Newtonovou pohybovou rovnicí liší se relativistická dynamika podstatně od dynamiky klasické. Rozepíšeme-li jmenovanou rovnici ve tvaru

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dm}{dt} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F},$$

vidíme, že obecně nemá zrychlení $d\mathbf{u}/dt$ částice směr působící síly. Podle 2.9 (28)

$$2.9 (29, a) \quad \frac{d\mathbf{m}}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dW}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dA}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{dt} = \frac{1}{c^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u},$$

takže

$$2.9 (29, b) \quad m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}.$$

Z této rovnice vidíme, že zrychlení má směr síly jenom ve dvou případech: je-li síla trvale kolmá nebo trvale rovnoběžná s rychlostí částice. V prvním případě vymizí druhý vektor na pravé straně hořejší rovnice, v druhém případě má tento vektor směr síly. Tento poznatek si připomeneme v čl. 5.10.3 při vyšetřování pohybu elektronu v elektromagnetickém poli.

2.9.5. Vlastní čas. Transformace síly

Výklad o relativnostní dynamice doplníme odvozením důležitého pojmu vlastního času a vzorce pro transformaci síly. Napišme nejprve rovnici 2.9(7) pro infinitesimální vektor $d\mathbf{x}$ a časový interval dt , čímž dostaneme

$$|d\mathbf{x}'|^2 - c^2 dt'^2 = |d\mathbf{x}|^2 - c^2 dt^2$$

čili

$$\left| \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} \right|^2 - c^2 = \left(\frac{dt}{dt'} \right)^2 \left[\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 - c^2 \right].$$

Odtud dostaneme vzhledem 2.9 (16) rovnici

$$2.9 (30) \quad 1 - \frac{u'^2}{c^2} = \alpha^2 \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2} \right)^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right),$$

kteřá nám bude dále užitečná. Plyne z ní především, že obecná Lorentzova transformace 2.9 (8) vyhovuje principu stálé rychlosti světla. Užijeme-li jí pro foton, který se pohybuje v soustavě S rychlostí $u = c$, je pravá strana rovna nule, takže nutně musí být také $u' = c$.

Se zřetelem k 2.9 (16) můžeme hořejší rovnici dát tvar

$$2.9 (31) \quad \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) dt^2 = \left(1 - \frac{u'^2}{c^2} \right) dt'^2,$$

což znamená, že výraz

$$d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2} dt = \sqrt{1 - u'^2/c^2} dt'$$

má ve všech inerciálních soustavách stejnou hodnotu. Má zřejmě význam přírůstek času měřeného v soustavě, v níž je rychlost tělesa nulová, tedy v klidové soustavě tělesa pevně s ním spojené. Veličina

$$2.9 (32) \quad \tau = \sqrt{1 - u^2/c^2} t$$

se nazývá *vlastní čas* tělesa (částice). Tak např. vlastní čas kosmické rakety je čas měřený posádkou rakety na hodinách, které jsou vzhledem k raketě v klidu.

Podobně vidíme z 2.9 (23), že výraz

$$2.9 (33) \quad m \sqrt{1 - u^2/c^2} = m' \sqrt{1 - u'^2/c^2} = m_0$$

je ve všech inerciálních soustavách roven klidové hmotnosti. Protože

$$u^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2},$$

můžeme vztah 2.9 (31) psát ve tvaru

$$2.9 (34) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2,$$

z něhož vidíme, že tato kvadratická diferenciální forma je při Lorentzově transformaci invariantní. Zavedeme-li nové označení

$$x = \xi_1, \quad y = \xi_2, \quad z = \xi_3, \quad jct = \xi_4, \quad (j = \sqrt{-1}),$$

bude tento poznatek vyjádřen rovnicí

$$-c^2 d\tau^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2 = \text{invariant}.$$

Můžeme ji pokládat za zobecnění známé rovnice

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \text{invariant},$$

kteřá je výrazem skutečnosti, že vzdálenost ds dvou soumězných bodů se při pohybu v euklidovském prostoru nemění. Proto je zvykem formu 2.9 (34) vykládat jako kvadrát elementární vzdálenosti (nebo *intervalu*) mezi dvěma souměznými body ve čtyřrozměrném „pseudoeuklidovském“ *prostorochasu* (neboli *světě*). Pohyb bodu (částice) je pak určen průběhem jisté „křivky“ v tomto čtyřrozměrném světě, která se nazývá *světová čára* (nebo *světová čára*) pohybujícího se bodu. Její „průmět“ do třírozměrného obyčejného prostoru je trajektorie bodu. Prostorochasová „geometrie“ se někdy nazývá správněji *chronogeometrie*.

Abychom dospěli k transformačnímu vzorci pro sílu, odvodíme se zřetelem k 2.9 (22) nejprve transformaci vektoru hybnosti $\mathbf{p}$, který definujeme obdobně jako v klasické dynamice součinem hmotnosti (za pohybu!) a rychlosti částice:

$$2.9 (35) \quad \mathbf{p} = m\mathbf{u} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Podle 2.9 (33) a 2.9 (17) máme

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = m' \frac{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \cdot \frac{\mathbf{u}' + \left(\frac{\alpha - 1}{v^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}' + \alpha \right) \mathbf{v}}{\alpha \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2} \right)}$$

a vzhledem k 2.9 (30)

$$2.9 (36) \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}' + \left(\frac{\alpha - 1}{v^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}' + \alpha m' \right) \mathbf{v}.$$

Protože se pohybový zákon 2.9 (22) nemění Lorentzovou transformací, musí se síla transformovat stejným způsobem jako časová derivace hybnosti. Vypočteme tedy

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt'} = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} + \left(\frac{\alpha - 1}{v^2} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} + \frac{\alpha}{c^2} \frac{d(c^2 m')}{dt'} \right) \mathbf{v}$$

a za $c^2 m'$ dosadíme podle 2.9 (28) celkovou energii W' částice měřenou v soustavě S' . Její časová změna se ovšem rovná okamžitému výkonu síly $\mathbf{F}'$ působící na částici v soustavě S' :

$$\frac{dW'}{dt'} = \frac{d(c^2 m')}{dt'} = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}'.$$

Protože pohybový zákon platí v obou soustavách, tedy

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = \mathbf{F}',$$

dostaneme

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt'} = \mathbf{F}' + \left[(\alpha - 1) \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}' + \alpha \frac{v^2}{c^2} \mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}' \right] \frac{\mathbf{v}}{v^2}.$$

a podle 2.9 (16)

$$2.9 (37) \quad \mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}' + \left[(\alpha - 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}') + \alpha \frac{v^2}{c^2} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{F}') \right] \frac{\mathbf{v}}{v^2}}{\alpha \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2} \right)}.$$

To je hledaná *transformační rovnice pro sílu*, z níž vidíme, že i *setrvačným pohybem vztažené soustavy se obecně mění jak velikost, tak i směr síly*. Podle této rovnice se netransformují jen mechanické síly (např. gravitační), ale vůbec všechny síly, tedy i elektrické, jak ukážeme v čl. 5.5.1.

Jsou-li relativní rychlost $\mathbf{v}$ soustav S a S' i rychlost $\mathbf{u}'$ v soustavě S' malé proti rychlosti světla, jsou hodnoty v^2/c^2 , $\alpha - 1$, $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}')/c^2$ malé druhého řádu ve v/c . Tu můžeme položit

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{F}'$$

jako v klasické mechanice.

2.9.6. Gravitace a setrvačnost

Jak bylo už řečeno, je speciální teorie relativity jen první etapou vývoje Einsteinovy teorie, jejímž konečným cílem bylo vybudování takových obecných fyzikálních zákonů, které by měly platnost v libovolných vztažných soustavách inerciálních i neinerciálních. Naznačíme v příštím článku hlavní myšlenky takové teorie, která přinesla nové pojetí prostoru a času a novou teorii gravitace. Abychom čtenáři usnadnili pochopení této náročné teorie, poukážeme v tomto článku nejprve na souvislost gravitačních a setrvačných sil, kterou lze vyvodit ze speciální teorie relativity a z materialistického postulátu elementárním postupem.

Z transformačního vzorce 2.9 (37) vidíme, že při přechodu od inerciální soustavy S' k jiné inerciální soustavě S se změní síla $\mathbf{F}'$ ve vektor $\mathbf{F}$, který má obecně jinou velikost i směr než původní síla $\mathbf{F}'$. Newtonův gravitační zákon nemůže tedy platit ve všech inerciálních soustavách souřadnic současně. Předpokládejme, že homogenní těleso P (např. koule) působí v inerciální soustavě S' , v níž je v klidu, na všechna ostatní tělesa nezávisle na jejich rychlostech podle Newtonova zákona 2.3 (10). Má-li těleso P klidovou hmotnost M_0 , přitahuje libovolnou částici hmotnosti m' gravitační silou

$$\mathbf{F}' = -\gamma \frac{M_0 m'}{r'^2} \mathbf{r}'^0,$$

je-li $\mathbf{r}'$ průvodič částice vedený ze středu tělesa P a měřený v soustavě S' . Ptejme se nyní, jak se změní gravitační síla, kterou působí těleso P na naši částici, měříme-li sílu v jiné inerciální soustavě S , v níž má těleso rychlost $\mathbf{v}$. Podle transformační rovnice 2.9 (37) můžeme tuto sílu psát ve tvaru

$$2.9 (38) \quad \mathbf{F} = -\gamma \frac{M_0 m'}{r'^2 \alpha \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2}\right)} \left\{ \mathbf{r}'^0 + \left[(\alpha - 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'^0) + \alpha \frac{v^2}{c^2} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}'^0) \right] \frac{\mathbf{v}}{v^2} \right\},$$

kteří nás poučuje, že těleso P , které se v pozorovací soustavě pohybuje rychlostí $\mathbf{v}$, působí na částici, která má vzhledem k P relativní rychlost $\mathbf{u}'$, silou, která závisí složitým způsobem nejen na vzdálenosti částice od P , ale také na rychlostech $\mathbf{v}$ a $\mathbf{u}'$. Uvědomíme-li si, že rychlosti těles nebeských dosahují velikosti asi $10^{-4} c$ až $10^{-3} c$, vidíme, že ve složené závorce převládá první člen, který má velikost rovnu 1, a zbývající dva členy jsou jen korekční. Těleso působí tedy i za pohybu především podle Newtonova zákona — tedy silou *gravitatickou* —, ale kromě toho i dalšími silami, které nemají směr spojnice tělesa s částicí a které shrneme pod názvem sil *gravodynamických*. Z hlediska speciální teorie relativity jsou tyto velmi malé síly obdobné silám elektrodynamickým, o nichž pojednáme v kapitole 5.5. V elektromagnetickém poli mají ovšem tyto síly velký praktický význam a souvisí s nimi i tzv. elektromagnetická indukce. Podobným „indukčním“ jevem v gravitačním poli můžeme vysvětlit setrvačnost těles bez hypotézy o „absolutním prostoru“.

Zvolme neinerciální soustavu $\tilde{S}$, která se vzhledem k soustavě S pohybuje se zrychlením $\mathbf{a} = -\dot{\mathbf{v}}$. Těleso P i částice mají v $\tilde{S}$ unášivé zrychlení $+\dot{\mathbf{v}}$, a na částici působí tedy v této soustavě — podle Newtonovy mechaniky — kromě sil gravitačních ještě setrvačná síla 2.2 (25):

$$2.9 (39) \quad \tilde{\mathbf{F}} = m\dot{\mathbf{v}}.$$

Předpokládáme-li, že rychlost $\mathbf{v}$ tělesa je velmi malá proti rychlosti světla, redukuje se gravitační síly na sílu gravitatickou $\mathbf{G}$ a pro časovou změnu celkové energie částice platí rovnice

$$\frac{d(c^2 m)}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{u},$$

obdobná rovnici 2.9 (29, a). Integrací dostaneme

$$(m - m_0) c^2 = \int_{v=0}^v \mathbf{G} \cdot \mathbf{u} \, dt = \int_{v=0}^v \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l} = -W_P,$$

kde $W_P < 0$ je potenciální energie částice, urychlené ze stavu klidu v nekonečnu gravitačním polem tělesa P . Setrvačná síla je tedy podle 2.9 (39)

$$\tilde{\mathbf{F}} = m\dot{\mathbf{v}} = \left(-\frac{W_P}{c^2} + m_0 \right) \dot{\mathbf{v}}$$

a skládá se ze dvou sil. První síla

$$2.9 \quad (40) \quad \tilde{\mathbf{F}}_P = -\frac{W_P}{c^2} \dot{\mathbf{v}}$$

je podmíněna gravitačním polem tělesa P , které se v soustavě $\tilde{S}$ pohybuje zrychleně. Lze ji podle speciální teorie relativity vyložit tím, že hmotnost ekvivalentní záporně vzaté potenciální energii částice v poli tělesa P má svou setrvačnost stejnou jako klidová hmotnost m_0 , které přísluší klasická setrvačná síla

$$2.9 \quad (41) \quad \tilde{\mathbf{F}}_* = m_0 \dot{\mathbf{v}}.$$

Obě tyto setrvačné síly vznikají jak z hlediska klasické mechaniky, tak z hlediska speciální teorie relativity zrychlením soustavy $\tilde{S}$ vzhledem k absolutnímu prostoru, jehož vztah ke kosmické soustavě nevyplývá ze žádné z těchto teorií a je ryze empirický. Víme ovšem, že výsledná intenzita gravitativního pole vesmíru je nulová a tuto skutečnost musí respektovat každý model vesmíru. To však neznamená, že je nutně nulový také potenciál vesmíru. Podobně jako v čl. 5.1.9 bychom ukázali, že intenzita gravitačního pole duté koule je všude uvnitř nulová, ale že potenciál má uvnitř koule stálou hodnotu rovnou potenciálu na jejím vnějším povrchu. Je tedy možné, že výsledný potenciál vesmíru má od nuly různou, všude stejnou hodnotu (zápornou!) a že setrvačná síla $\tilde{\mathbf{F}}_*$ vzniká zrychleným pohybem soustavy $\tilde{S}$ v gravitačním poli vesmíru ze stejné fyzikální příčiny, jako síla $\tilde{\mathbf{F}}_P$ vzniká zrychlením soustavy $\tilde{S}$ v gravitačním poli tělesa P .

Tato představa vykládá obě síly vzájemným působením materiálních objektů [u síly $\tilde{\mathbf{F}}_P$ je to těleso P , u síly $\tilde{\mathbf{F}}_*$ je to celý kosmos (fyzikální vesmír)]. Tím jsme se oprostili od idealistického pojmu absolutního prostoru a odstranili rozpor klasické fyziky s materialistickým postulátem, který pak můžeme aplikovat se všemi důsledky. Plyne z něho, že síla $\tilde{\mathbf{F}}_P$ nevznikne v soustavě, která se nepohybuje zrychleně vzhledem k P , že však vznikne v každé soustavě zrychleně vzhledem k tělesu P , i když není zrychlená vzhledem ke kosmické soustavě, a je tudíž inerciální.

Podle uvedeného výkladu plyne existence klasické i relativistické setrvačné síly z tohoto obecného zákona „indukované setrvačnosti“:

$$2.9 \quad (42) \quad \text{Zrychleným pohybem tělesa vzniká pole, které působí na libovolnou částici silou rovnou součinu zrychlení tělesa a hmotnosti ekvivalentní záporně vzaté potenciální energii částice v gravitačním poli tělesa.}$$

Tento zákon se sotva kdy podaří kontrolovat měřením v gravitačním poli jediného tělesa, protože jeho gravitativní pole je při běžných zrychleních nepoměrně silnější než silové pole 2.9 (40). Jinak je tomu se silou $\tilde{\mathbf{F}}_*$, která vzniká v poli celého kosmu. Podle zákona 2.9 (42) plyne z 2.9 (41)

$$2.9 \quad (43) \quad \tilde{\mathbf{F}}_* = m_0 \dot{\mathbf{v}} = -\frac{W_*}{c^2} \dot{\mathbf{v}},$$

kde $W_* < 0$ značí potenciální energii částice v gravitativním poli vesmíru. Zavedeme-li ještě potenciál vesmíru χ_* čili *kosmický potenciál* podle známé definice potenciálu

$$2.9 \quad (44) \quad \chi_* = \frac{W_*}{m_0},$$

dostaneme z hořejší rovnice

2.9 (45)

$$\chi_* = -c^2.$$

Kosmický potenciál má tedy stálou hodnotu rovnou záporně vzatému čtverci rychlosti světla ve vakuu. Jeho značnou velikostí lze vysvětlit, že setrvačné síly v neinerciálních soustavách jsou dobře pozorovatelné i v polích dosti blízkých těles nebeských a nejsou jimi překrývány jako ostatní gravitodynamické síly, které mají původ v těchto tělesech.

Ze stálosti kosmického potenciálu pak je zřejmé, že gravistatické pole celého vesmíru je nulové, a proto nebrání, aby se projevíly setrvačné síly.

Vymizení gravistatického pole vesmíru by umožnilo také pozorování gravitodynamických sil způsobených podle rovnice 2.9 (38) posuvem vesmíru relativní rychlostí $\mathbf{v}$ vzhledem k pozorovací soustavě. Skutečnost, že tyto síly nebyly nikdy pozorovány, lze vysvětlit představou, že celý vesmír je rozložen kolem nás symetricky, takže skalární součiny $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'^0$ a $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}'^0$ mají stejně často kladné a záporné hodnoty. Proto členy s $\mathbf{v}$ ve složené závorce výrazu 2.9 (38) počítané pro celý vesmír se navzájem ruší.

V příštím článku zhodnotíme souvislost setrvačných sil se vzdálenými nebeskými tělesy z hlediska Einsteinovy teorie gravitace, která je podstatnou součástí obecné teorie relativity. Zde se spokojíme poznámkou, že zákon 2.9 (42) má svou obdobu v elektromagnetismu, kde platí v soulase s obecným zákonem elektromagnetické indukce zákon 5.9 (8).

Závěrem upozorníme na fyzikální význam vztahu 2.9 (45), který je v úplné shodě s principem stálé rychlosti světla a vyjadřuje poznatek, že *rychlost světla ve vakuu je určena gravitačním potenciálem vesmíru*. Tento závažný poznatek vede k hlubšímu a konkrétnějšímu pochopení základních vztahů teorie relativity, především Einsteinova vztahu 2.9 (28) mezi hmotností a energií.

Dosadíme-li tam z 2.9 (45), dojdeme k názornému výsledku

$$2.9 (28') \quad W = -\chi_* m,$$

že celková energie částice je rovna záporně vzaté potenciální energii částice v kosmickém gravitačním poli a podobně klidová energie 2.9 (27)

$$2.9 (27') \quad W_0 = W_* = -\chi_* m_0.$$

Tuto energii je možno vyložit jako energii rovnou práci vykonané kosmickými gravitačními silami při vztážení částice z veliké vzdálenosti, kde je potenciál vesmíru nulový, do „vnitřku“ kosmu se záporným potenciálem χ_* . Z tohoto hlediska se nám jeví existence klidové energie i obecný vztah mezi hmotností a energií jako velmi přijatelný důsledek principu energie. Z tohoto principu plyne však též závislost 2.9 (23) hmotnosti na rychlosti částice, jejíž důkaz jsme v čl. 2.9.4 zůstali dlužni.

Podle zákona zachování energie musí být elementární práce vykonané setrvačnou silou $\tilde{\mathbf{F}}$ při posuvu $d\mathbf{l}$ rovna úbytku potenciální energie částice v kosmickém gravitačním poli:

$$\tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{l} = -d(\chi_* m),$$

takže z pohybové rovnice 2.9 (22) plyne

$$\frac{d(mu)}{dt} \cdot d\mathbf{l} = -d(\chi_* m).$$

Protože kosmický potenciál χ_* je konstantní a práce síly $\tilde{\mathbf{F}}$ působící na částici je obecně různá od nuly, vidíme, že hmotnost m nemůže být neproměnná a že nutně platí vztah

$$\frac{d(mu)}{dt} \cdot d\mathbf{l} = -\chi_* dm.$$

Protože však

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{u},$$

dostaneme násobením hořejší rovnice výrazem $2m$

$$2m \mathbf{u} \cdot d(mu) = -\chi_* 2m dm$$

čili

$$d(m^2 u^2) = -\chi_* d(m^2).$$

(2.9)

Integrací od $u = 0$ do u plyne tedy

$$m^2 u^2 = -\chi_*(m^2 - m_0^2),$$

značí-li m_0 hmotnost pro $u = 0$. Tak přicházíme k rovnici

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 + u^2/\chi_*}},$$

kteřá je vzhledem k 2.9 (45) totožná s 2.9 (23).

Názorný výklad podaný v tomto článku je svou podstatou typický megafyzikální výklad (viz čl. 1.1.2). Proto lze pokládat rov. 2.9(45), která uvádí rychlost světla ve vztah s gravitačním potenciálem vesmíru, za *základní megafyzikální rovnici*.

2.9.7. Obecná teorie relativnosti

Speciální teorie relativnosti vyhovuje jen částečně principu 2.9 (1) relativnosti pohybů, protože vychází z principu Poincaréova, který požaduje rovnocennost jen pro inerciální soustavy. Speciální teorie popřela sice existenci absolutní rychlosti, ale neoprostila se od pojmu absolutního zrychlení. V této otázce ulpěla na stanovisku klasické mechaniky, od níž se však liší zásadním nedostatkem: existenci absolutního prostoru nenahradila jinou hypotézou, kterou by byla schopna vyložit existenci setrvačných sil. Tato vnitřní rozporovitost speciální teorie se stala zřejmou brzy po jejím vzniku a Einstein si záhy uvědomil nutnost rozšířit princip relativnosti i na nesetrvačné pohyby, při kterých se uplatňují setrvačné síly. Řešení otázky původu těchto „zdánlivých“ sil je zřejmě první podmínkou zobecnění teorie relativnosti na libovolné pohyby.

Einstein založil (1915) svou novou obecnou teorii relativnosti na dvou těsně spjatých principech.

Obecný princip relativnosti:

2.9 (46) *Všechny vztažné soustavy jsou rovnocenné pro popis fyzikálních dějů.*

Princip ekvivalence:

2.9 (47) *Gravitační a setrvačné síly mají stejnou fyzikální povahu a pro oba tyto druhy sil platí stejné základní zákony.*

Prvním z těchto principů požadovaná rovnocennost všech — tedy inerciálních i neinerciálních — soustav souřadnic neznamená, že ve všech soustavách musí být rovnice fyziky totožné. Znamená to jen, že obecný tvar těchto rovnic, který vyjadřuje jejich obecný fyzikální význam, musí být stejný ve všech vztažných soustavách. Při tom se ovšem konkrétní matematická vyjádření téhož fyzikálního zákona v různých soustavách liší, ale jen v té míře, v jaké se liší vztahy dotyčných soustav k fyzikálním objektům, které zákon popisuje. Sama změna vztažné soustavy nemůže mít za následek změnu obecného zákona.

Vysvětlíme to konkrétněji na základním zákonu mechaniky. Má-li platit ve všech soustavách souřadnic stejný obecný pohybový zákon, znamená to, že ve všech soustavách je časová změna hybnosti částice rovna výslednici všech skutečných sil působících na částici. Proto nelze z hlediska obecného principu relativnosti připustit, aby se v některých soustavách časová změna hybnosti nerovnila výslednici skutečných sil. Obsahují-li tedy pohybové rovnice vztažené k neinerciálním soustavám členy, které se v rovnicích vztažených na inerciální soustavy nevyskytují, nemůžeme tyto členy vykládat jako zdánlivé (fiktivní) síly, ale jako síly skutečné, které musí mít původ ve skutečných materiálních objektech. Cestu k nalezení původu setrvačných sil ukazuje právě druhý princip obecné teorie relativnosti — princip ekvivalence.

Princip ekvivalence vychází z dávno známého poznatku, že všechna tělesa podléhají

v gravitačních polích stejnému zrychlení. To vedlo zřejmě již Newtona k tomu, že gravitační sílu mezi dvěma tělesy kladl úměrnou jejich hmotnostem. Dnes říkáme, že zvolil gravitační (těžkou) hmotnost rovnou setrvačné hmotnosti. Tato rovnost byla od této doby potvrzena se značnou přesností řadou pokusů. Bessel (1830) dokázal pokusy s kyvadly rovnost obou hmotností s relativní přesností 10^{-5} , Eötvös (1896) dokázal tuto rovnost s relativní přesností 10^{-8} a Dicke (1961) v Princetonu s rel. přesností 10^{-10} .

Nejpřesvědčivějším důkazem dokonalé rovnosti obou hmotností je však sama existence těles nebeských. Zhruba elipsoidový tvar Země, který se udržel během milionů let, kdy Země měla kapalné skupenství, svědčí o tom, že poměr odstředivých a gravitačních sil je pro všechny látky velmi přesně stejný. Tím spíše by se i sebeopatrnější rozdíl gravitační a setrvačné hmotnosti projevil v dobách, kdy planety obíhaly kolem Slunce v netuhém stavu. Při nedokonalé rovnosti obou hmotností by během milionů let došlo jistě k oddělení gravitačně různorodých látek a k dezintegraci planet. Podobně by se projevila nestejnost hmotností při rotaci Slunce a jiných nebeských těles plynného skupenství během miliard let jejich existence.

Princip ekvivalence je vlastně zobecněním experimentálního poznatku o přesné rovnosti gravitační a setrvačné hmotnosti, podobně jako princip stálé rychlosti světla je zobecněním negativních výsledků Michelsonova a jiných pokusů. Principu ekvivalence však nesmíme rozumět tak, že gravitační pole nějakého tělesa (např. Země nebo Slunce) je možno nahradit v libovolně velkém okolí tělesa setrvačným polem ve vhodně volené soustavě nebo zrušit v konečné části prostoru nějakou transformací souřadnic. Gravitační pole těles nazýváme proto permanentním gravitačním polem na rozdíl od polí setrvačných, která lze prostě „odtransformovat“.

Přece však můžeme ve smyslu principu ekvivalence pokládat i setrvačné pole za druh gravitačního pole, které má svůj původ v tělesech nebeských, stejně jako pole permanentní. V předešlém článku jsme ukázali, jak je možno konkrétně chápat vznik setrvačných sil v soustavě, která se vzhledem ke galaxiím tvořícím vesmír pohybuje zrychleně. Vyšli jsme sice z Newtonova zákona setrvačnosti a z Einsteinova vztahu mezi energií a hmotností, ale předpokládali jsme pohyb zrychlený vzhledem ke kosmické soustavě, takže jsme se obešli bez pojmu absolutního prostoru. Je to zřejmě v plném souhlasu s obecným principem relativnosti, protože inerciální soustavy mohou být mezi všemi vztažnými soustavami vyznačeny jediné setrvačným pohybem vzhledem ke kosmické soustavě nikoli k „absolutnímu prostoru“, nedefinovanému žádným materiálním objektem.

Po těchto úvodních úvahách přistoupíme k stručné charakteristice Einsteinovy obecné teorie. Její vedoucí myšlenka je založena na současném využití obou základních principů 2.9 (46) a 2.9 (47). Aby mohl navázat na speciální teorii, vyšel Einstein z nejjednoduššího případu, kdy nepůsobí žádné (prakticky velmi slabé) permanentní gravitační pole, a zvolil inerciální soustavu, ve které není ani setrvačné pole, a platí v ní tedy speciální teorie relativnosti.

Přejdeme-li nyní k nějaké neinerciální soustavě, která vzhledem ke kosmické soustavě koná pohyb zrychlený nebo i rotační, objeví se v takové soustavě setrvačné síly. To jsme poznali již v čl. 2.2.4 při studiu relativního pohybu v klasické mechanice. Přechodem k zrychlené soustavě jsme dostali setrvačnou sílu 2.9 (41) a přechodem k otáčivé soustavě sílu odstředivou a Coriolisovu. Podobně je tomu v obecné teorii relativnosti, kde je ovšem třeba užít transformace čtyř proměnných, tj. tří prostorových souřadnic a jedné časové proměnné. Takovou obecnou prostoročasovou transformací, jejímž důležitým zvláštním případem je transformace Lorentzova, dostaneme tedy obecné vyjádření fyzikálních zákonů, které platí v libovolné neinerciální soustavě a v nichž jsou zahrnuty i účinky setrvačných sil. Tak došel Einstein k veličinám, které vyjadřují působení setrvačných polí čili nepermanentních polí gravitačních. V duchu principu ekvivalence pak usoudil, že i permanentní gravitační pole, která mají původ v nebeských tělesech, se projeví ve fyzikálních zákonech existencí veličin obdobných veličinám příslušným polím nepermanentním.

Podmínkou správnosti takto získaných obecných rovnic, které vyjadřují fyzikální zákony za působení libovolných gravitačních polí, je zajisté jejich nezávislost na zvolené vztažné soustavě, jak to žádá obecný princip relativnosti.

Je to zvláště zřejmé z geometrické interpretace Einsteinových rovnic, z kterých zároveň vyplývá, že geometrie je experimentální vědou, na jejíž zákonitosti má vliv rozložení těles a polí v prostoru. V inerciálních soustavách platí v místech vzdálených od velkých těles velmi přibližně euklidovská geometrie, v níž je nejkratším spojením dvou bodů úsečka (část přímky). Vlivem gravitačního pole se však změní euklidovský prostor v *zakřivený prostor Riemannův*, kde je nejkratším spojením dvou bodů oblouk *geodetické křivky* podobně jako na křivé ploše (na kouli oblouk hlavní kružnice, na válci oblouk šroubovice).

Rovnocennost všech vztažných soustav vyžaduje ovšem neproměnnost fyzikálních rovnic při transformacích prostoročasových a pohyb tělesa v gravitačním poli je invariantně zobrazen příslušnou světočarou ve *čtyřrozměrném zakřiveném prostoročase* (světě). Pohybu částice, na kterou nepůsobí žádné jiné síly než gravitační, tedy pohybu „volné částice v gravitačním poli“ přísluší pak geodetická čára v prostoročase, jehož křivost je určena rozložením hmotnosti a energie v prostoru. Světočára fotonu, který se ve vakuu pohybuje rychlostí světla, je geodetická čára „nulové délky“.

Pohyb určený geodetickou čarou v zakřiveném prostoročase je ovšem možno vyložit také jako pohyb v euklidovském prostoru, v němž kromě gravitativního pole působí i síly gravitodynamické, jejichž existence vyplývá z rovnice 2.9 (38).

Z popsaného geometrického znázornění vyplývá, jak je třeba chápat rovnocennost vztažných soustav. Podobně jako transformací prostorových souřadnic se sice mění rovnice křivky v tří-rozměrném prostoru, nikoli však křivka sama, nemění se ani světočára pohybu částice přechodem k jiným prostoročasovým souřadnicím. Ačkoli konkrétní tvar pohybových rovnic je různý v různých inerciálních a neinerciálních soustavách, je jejich obecný fyzikální význam ve všech soustavách stejný, jak žádá obecný princip relativnosti. Neinerciální soustavy jsou tedy stejně oprávněny jako soustavy inerciální, v nichž ovšem mají pohybové rovnice jednodušší tvar, protože v nich vymizí setrvačné síly.

I v současné době se ještě objevuje názor, že neinerciální soustavy jsou rovnocenné s inerciálními jen „kinematicky“, nikoli však „dynamicky“. Namítá se, že práce vykonaná při roztočení setrvačnicku v soustavě pevně spojené se stálými naprosto není srovnatelná s fantasticky ohromným množstvím práce, kterou by vyžadovalo roztočení stálie kolem osy setrvačnicku v soustavě pevně spojené se setrvačnickem. Stanovisko obecné teorie relativnosti k této otázce je takové: K uvedení setrvačnicku z klidu do rotace vzhledem ke kosmické soustavě je třeba práce proto, že ho roztáčíme vzhledem ke galaxiím tvořícím vesmír, které jsou reálným zdrojem setrvačných sil. Kdyby setrvačnick nebyl obklopen galaxiemi, kdyby byl jediným existujícím tělesem, nemělo by smysl hovořit o jeho rotaci a také bychom ji nemohli nijak zjistit, a to ani podle odstředivých sil, které by na něj nepůsobily. Podobně nemá žádný fyzikální smysl „rotace celého vesmíru“ sama o sobě. Není zásadně nikterak možno přesvědčit se, rotuje-li celý vesmír, nebo stojí-li. Proto také „uvedení celého vesmíru do rotace“ je fikce postrádající jakéhokoli reálného významu, která proto také nemůže vyžadovat žádnou energii. Přejdeme-li tedy od soustavy S , v níž jsou setrvačnick i galaxie v klidu, k soustavě $\bar{S}$, v níž se celý vesmír i se setrvačnickem otáčí, bude i v této soustavě pohybová energie celého vesmíru stejná jako v soustavě původní. Uvedeme-li nyní setrvačnick do klidu v této nové soustavě $\bar{S}$, budeme k tomu potřebovat stejně velkou práci, jako kdybychom jej roztočili v soustavě S , v níž galaxie stojí. Jde tedy jen o dva různé pohledy na tutéž objektivní skutečnost, kterou je relativní rotace mezi setrvačnickem a ostatním vesmírem.

Toto stanovisko lze plně pochopit teprve, když se smíříme s názorem, že setrvačnost žádného tělesa není jeho svébytnou vlastností, nýbrž výsledkem gravitačních účinků celého kosmu, což jasně souvisí s tím, že podle předešlého článku je klidová energie tělesa určena jeho potenciální energií v gravitačním poli kosmu.

Einsteinova teorie gravitace vznikla zobecněním Newtonovy teorie založené na gravitačním zákonu, jehož platnost se potvrzuje s velkou přesností v celém rozsahu sluneční soustavy. Proto musí každá teorie gravitace vést v prvním přiblížení ke stejným výsledkům jako teorie Newtonova. Jedinou výjimkou, která se nedá z Newtonovy teorie zcela vysvětlit, je tzv. stáčení perihelu planety Merkura. Einsteinova teorie se skutečně ve svých důsledcích mnoho neliší od Newtonovy, ale přece se od ní liší, a to právě natolik, že z ní vyplývá pozvolné natáčení osy Merkurovy dráhy o úhel 42,9" za 100 let v dobré shodě s astronomickým pozorováním. To svědčí o tom, že Einsteinova teorie znamená vyšší stupeň vývoje, který přináší dokonalejší přiblížení skutečnosti. Obecná teorie relativ-

nosti nadto předpověděla dva další jevy, jejichž existence byla měřením potvrzena. Zmíníme se o nich jen v největší stručnosti.

Zakřivení světelných paprsků v gravitačním poli vzniká ze dvou příčin. Především se fotony pohybují po geodetických čarách v zakřiveném prostoru a kromě toho závisí rychlost světla na potenciálu gravitačního pole. V silném gravitačním poli, kde je potenciálový spád značný, je jednak prostor znatelně zakřiven, jednak rychlost světla dosti proměnná, takže se zakřivení paprsků stává měřitelným. Teoretickým rozбором vychází, že průchodem paprsků v blízkosti slunečního povrchu se jejich směr změní o úhel $1,75''$.

Tento jev byl skutečně pozorován při úplných zatměních Slunce [obr. (2.9) 3]. Fotograficky byly zaznamenány polohy hvězd v těsném okolí Slunce, což je při úplném zatmění možné. Srovnáním se vzájemnými polohami těchto hvězd fotografovaných na noční obloze v jiné roční době, kdy se Slunce promítá na jiné místo oblohy, byly skutečně zjištěny radiální posuvy hvězd směrem od Slunce. Měření provedená při zatmění v r. 1952 odpovídají zakřivení paprsků o úhel $1,70''$.

Gravitační dilatace času je jedním z důsledků principu ekvivalence, k němuž Einstein dospěl na základě dalšího předpokladu, že *zrychlení nemá vliv na běh času*. Je-li tento předpoklad správný, platí i v neinerciální soustavě vzorec 2.9 (15), který plyne ze speciální teorie relativity pro inerciální dilataci času. Při zrychleném pohybu soustavy značí ovšem v její okamžitou rychlost

$$v = at = it.$$

Vektor i je intenzita setrvačného pole, která souvisí s tzv. „dynamickým potenciálem“ χ tohoto pole stejným vztahem jako intenzita permanentního gravitačního pole, tj.

$$i = -\text{grad } \chi.$$

Při stálém zrychlení a ve směru osy Ox je

$$v = at, \quad x = \frac{1}{2} at^2, \quad i_x = -\frac{\partial \chi}{\partial x} = a,$$

takže

$$2.9 (48) \quad \chi = -ax = -\frac{1}{2} a^2 t^2 = -\frac{1}{2} v^2.$$

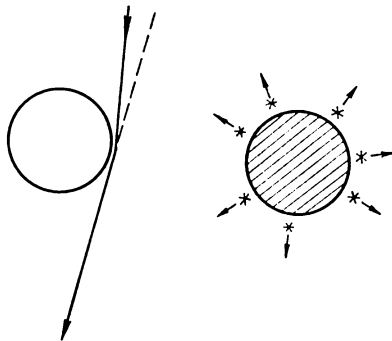
Podle vzorce 2.9 (15) plyne tedy čas t_χ v neinerciální soustavě pomaleji než čas t v inerciální soustavě:

$$2.9 (49) \quad \Delta t_\chi = \sqrt{1 + 2\chi/c^2} \Delta t,$$

neboť dynamický potenciál χ má zápornou hodnotu.

Stejně bychom dokázali, že tento vzorec platí i pro rovnoměrnou rotaci, při čemž

$$2.9 (50) \quad \chi = -\frac{1}{2} r^2 \omega^2 = -\frac{1}{2} v^2.$$



Obr. (2.9) 3. Zakřivení světelných paprsků v gravitačním poli Slunce

Konečně podle principu ekvivalence musíme přijmout platnost vzorce 2.9 (49) i pro permanentní pole. V gravitačním poli s potenciálem U plyne tedy čas t_U pomaleji než čas t_0 v místě s nulovým potenciálem, jak plyne ze vzorce

$$2.9 (51) \quad \Delta t_U = \sqrt{1 + 2U/c^2} \Delta t_0,$$

neboť gravitační potenciál U má všude zápornou hodnotu.

Jak jsme uvedli na konci čl. 2.9.3, byla inerciální dilatace času potvrzena zjištěním rudého posuvu ve spektru velmi rychlých iontů. Rudý posuv způsobený gravitační dilatací byl Einsteinem předvídan již r. 1911 a byl skutečně nejdříve pozorován ve slunečním spektru, v němž se projevuje relativní zmenšení frekvence o $2 \cdot 10^{-6}$, a ve spektru těžké družice Siriovy, kde je asi 30krát větší.

Teprve v poslední době byla dokázána existence gravitačního rudého posuvu i v gravitačním poli zemském. Podařilo se to užitím Mössbauerovy metody jaderné rezonanční absorpce záření izotopu Fe 57 (viz čl. 8.3.3). Touto metodou lze totiž zjišťovat i mizivě nepatrné poměrné změny frekvence řádu 10^{-15} . Pokusy provedenými r. 1960 v harwellském atomovém středisku a na Harvardské universitě při výškových rozdílech 12 až 21 metrů byla skutečně zjištěna změna frekvence uvedeného řádu odpovídající vzorci 2.9 (51).

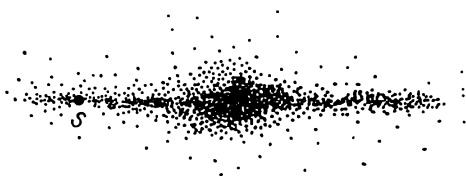
V témže roce byla touto metodou ověřena v Harwellu také existence neinerčiální dilatace tím, že pohlcovač záření byl uveden do rychlé rotace (s frekvencí až 500 Hz) a bylo měřeno posunutí absorpční čáry.

Tyto experimentální výsledky lze pokládat za potvrzení principu ekvivalence i Einsteinova předpokladu o nezávislosti běhu času na zrychlení.

2.9.8. Teorie relativnosti a kosmologie

Z obsahu článku 2.9.6 vysvítá, že fyzikální jevy, které pozorujeme v pozemských laboratořích, neprobíhají nezávisle na světě kolem nás, ale pod stálým vlivem kosmu, který určuje právě nejzákladnější fyzikální zákony. Teorie relativnosti přesahuje zřejmě rámec obvyklé makrofyzikální problematiky a stává se tak spojovacím článkem mezi fyzikou a kosmologií, což charakterizuje Einsteinovu teorii jako vědu spadající do oboru megafyziky*). Úzká* vzájemná souvislost těchto dvou věd je konkrétně vyjádřena vztahem 2.9 (45) mezi rychlostí světla a kosmickým potenciálem. Abychom mohli objasnit význam tohoto vztahu v kosmologii, je třeba nejprve uvést aspoň hlavní kosmologické poznatky.

Naše Sluneční soustava s celkovou hmotností asi $6 \cdot 10^{30}$ kg je součástí hvězdného systému *Mléčné dráhy*, který nazýváme též „naší“ *Galaxií*. Tento systém obsahuje pravděpodobně 200 až



Obr. (2.9) 4. Systém Mléčné dráhy



Obr. (2.9) 5. Spirální struktura naší Galaxie

*) Megafyzikální přístup uplatnili v kosmologii poprvé v historii astronomové Chéseaux (1744) a Olbers (1826). Uváděli, že kdyby byly hvězdy rovnoměrně rozloženy v nekonečném vesmíru, zářila by celá obloha (i v noci) jako povrch Slunce. Tento „Olbersův paradox“ lze vysvětlit konečností vesmíru, jeho rozpínáním i jinak. K jednoznačnému řešení však dnešní kosmologie dosud nedospěla.

400 miliard stálíc (s jejich planetárními soustavami), které je možno roztrždit do tří útvarů. [Obr. (2.9) 4.] Asi polovina všech stálíc tvoří plochý *kotouč* (*disk*). Jsou to většinou starší hvězdy, jejichž typickým představitelem je naše Slunce. Asi čtvrtina stálíc (zejména mladších hvězd) je rozložena v nesouvislé *spirále*, složené ze dvou mohutných ramen, a jednoho velmi slabého ramene, která se rozprostírají v blízkosti střední roviny disku. [Obr. (2.9) 5.] Oba tyto útvary mají společnou osu rotace, kolem které hvězdy v nich obsažené konají rotační pohyby vzhledem ke kosmické soustavě. Kromě toho konají stálíce ještě různé neuspořádané pohyby. Konečně zbývající čtvrtina stálíc je seskupena do kulového útvaru, který se nazývá *halo*. Skládá se z kulových hvězdokup, které jsou soustředěny hlavně kolem středu Galaxie [střední část obr. (2.9) 4]. Halo nejeví zřetelnou rotaci vzhledem ke kosmické soustavě. Naše Slunce *S* obíhá ve vzdálenosti 25 000 světelných let*) kolem osy Galaxie rychlostí asi 270 km s⁻¹. Průměr Galaxie činí asi 85 000 světelných let a její největší tloušťka v ose je rovna asi desettině průměru. Celková hmotnost Galaxie (složené zhruba ze 300 miliard sluncí) se odhaduje hodnotou

$$2.9 (52) \quad M_g \approx 2 \cdot 10^{41} \text{ kg}$$

a je rozložena zhruba ve střední vzdálenosti

$$2.9 (53) \quad R_g \approx 10^4 \text{ svět. roků} \approx 10^{20} \text{ m}$$

od středu Galaxie se střední hustotou řádově rovnou

$$2.9 (54) \quad \rho_g \approx 10^{-20} \text{ kg m}^{-3}.$$

Rychlosti hvězd v Galaxii odpovídají turbulentnímu proudění mezihvězdného plynu, z kterého vznikly. Hustotu, jíž je mezihvězdný plyn rozložen v oblasti Mléčné dráhy, je možno studovat na základě pozorování záření v oboru radiovln. Již r. 1944 předvídal Hulst existenci záření vlnové délky 21,11 cm (frekvence 1,420 · 10⁶ Hz), které vznikne, jestliže se ve vodíkovém atomu, v němž spiny jádra a elektronu jsou souhlasně rovnoběžné, „překlopí“ spin elektronu v opačný. Tuto „galaktickou“ vlnu skutečně pozorovali Ewen a Purcell (1951) a od té doby se sleduje rozložení mezihvězdného plynu touto metodou. Převrácení spinu je děj velmi vzácný, ačkoli atomy se souhlasnými spiny vznikají při každém setkání dvou vodíkových atomů, které si navzájem vymění elektrony s opačnými spiny. „Vodíkový signál“ je proto nesmírně slabý, takže radioteleskop s anténou průměru 20 m přijímá mizivý výkon 10⁻¹⁸ W (≈ 10 eV), což umožňují jedině molekulové zesilovače (masery, čl. 7.4.5).

Systém Mléčné dráhy je jen jednou z ohromného počtu dalších galaxií, které jsou roztroušeny v kosmickém prostoru, z nichž nejbližší je známá spirální mlhovina M 31 v Andromedě, vzdálená zhruba 1,5 · 10⁶ světelných roků. Astronomickým pozorováním bylo zjištěno několik desítek miliard takových a podobných galaxií, vzdálených mezi sebou průměrně několik miliónů světelných let. Lze je roztrždit do několika typů, z nichž nejznámější jsou eliptické a spirální mlhoviny, jejichž různé typy vidíme na obr. (2.9) 6. Galaxie nejsou v prostoru rozloženy rovnoměrně. Vytvářejí *kupy galaxií*, které obsahují stovky až tisíce galaxií, a jsou podle novějších výzkumů zhruba rovnoměrně rozloženy v kosmickém prostoru. Všechny tyto „mimogalaktické“ mlhoviny, které leží vně naší Mléčné dráhy, se shrnují pod názvem *metagalaxie* (meta značí v řečtině za, mimo). Přes „místní“ nepravdivost v rozložení galaxií je možno dosti pravdivě popsat strukturu vesmíru, předpokládáme-li, že tělesa nebeská jsou v kosmickém prostoru rozložena se stálou střední hustotou.

Nemůžeme se zde zabývat různými kosmologickými teoriemi. Pro účel, který v tomto článku sledujeme, postačí stručná informace o dnešních názorech na skladbu kosmu.

Podrobným rozбором spekter velkého počtu galaxií v posledních padesáti letech, pozorovaných zejména na 200palcovém dalekohledu (na Mount Wilson) Hubblem a Humasonem, byl objeven tzv. „*rudý posuv*“ spektrálních čar směrem k delším vlnám, který se dnes všeobecně vykládá představou, že jde o Dopplerův jev vzniklý tím, že všechny galaxie se od nás vzdalují rychlostmi úměrnými jejich vzdálenostem od naší Galaxie. Tento závažný poznatek se vyjadřuje *Hubbleovým zákonem*

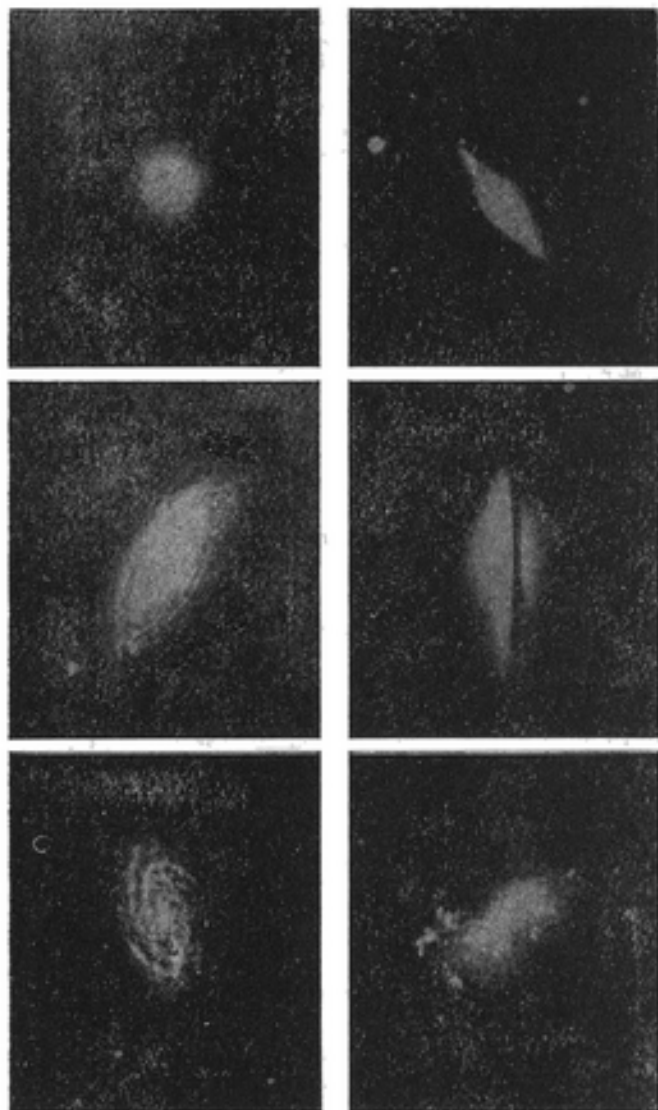
$$2.9 (55) \quad v = \gamma r,$$

kde konstanta

$$2.9 (56) \quad \gamma = \frac{23 \text{ km s}^{-1}}{10^6 \text{ svět. r.}} = 2,4 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1},$$

takže galaxie vzdálená milión svět. roků má radiální rychlost asi 23 km s⁻¹ ve směru rostoucího průvodiče *r*.

*) 1 svět. rok = 0,946 · 10¹⁶ m.



Obr. (2.9) 6. Různé typy galaxií. Hořejší dvě jsou eliptické, další jsou spirální až na poslední, která je nepravidelná

Protože za dnešního stavu vědy nedovedeme rudý posuv spektrálních čar ve světle, které k nám přichází z galaxií, vysvětlit jinak než Dopplerovým jevem, uznává se za správnou představu *rozpínavého vesmíru*. Podle novějších výzkumů se zdá, že rychlost rozpínání se již po dobu asi jedné miliardy let zmenšuje. Podle toho by se tedy expanze vesmíru zpomalovala, což by nasvědčovalo tomu, že rozpínání je úkaz dočasný. Vede to k myšlence, že vesmír není trvale rozpínavý, ale *pulsující*: střídavě se rozpíná a smršťuje s periodou rovnou podle dnešních odhadů 50 až 60 miliardám let.

Periodickou dilataci a kontrakci vesmíru by bylo možno vysvětlit asi tak, že vzdalující se galaxie postupně ztrácejí kinetickou energii, která se mění v potenciální energii v gravitačním poli ostatních galaxií. Největších rozměrů nabývá tedy vesmír v okamžiku, kdy tato potenciální energie dosáhne maxima a pak nastane vlivem gravitačních sil smršťování, při němž se galaxie zrychleným pohybem sbližují. To vede nakonec k soustředění všech galaxií do jednoho místa a k takovému zvýšení teploty, že mohou vzniknout termonukleární reakce. Tak dojde k výbuchu velmi koncentrované látky, po němž následuje nová expanze vesmíru.

K tomu je třeba říci, že k myšlence rozpínavého vesmíru dospěl teoreticky z Einsteinových rovnic pro gravitační pole již r. 1922 ruský matematik Friedman, který ukázal, že vesmír může mít v celém třírozměrném prostoru konečnou hustotu. Při tom může být křivost vesmíru ještě kladná, záporná nebo nulová. V prvním případě je vesmír v sebe uzavřen (nemá tedy hranice) a jeho celková hmotnost má konečnou velikost.

Představy o rozpínavém či pulsujícím vesmíru nabývají v posledních letech konkrétnějších forem, jak se kosmologické teorie zdokonalují. Z Hubblových měření vyplývá pro celkovou hmotnost rozpínavého vesmíru

$$2.9 (57) \quad M \approx 1,8 \cdot 10^{54} \text{ kg},$$

která je podle dnešních odhadů rozložena v kosmickém prostoru se stálou střední hustotou

$$2.9 (58) \quad \rho \approx 10^{-28} \text{ kg m}^{-3},$$

takže objem vesmíru

$$2.9 (59) \quad V = \frac{M}{\rho} \approx 1,8 \cdot 10^{82} \text{ m}^3.$$

A teď se vrátíme k rovnici 2.9 (45), která vyjadřuje důležitý vztah mezi kosmickým potenciálem a rychlostí světla. Ujijeme jí k řešení základní otázky, jakou část vesmíru máme považovat za kosmos, tj. za „fyzikální vesmír“, který určuje fyzikální jevy, zvláště setrvačnost těles a rychlost světla ve vakuu.

Nejprve přezkoušíme, jaký vliv má systém Mléčné dráhy. Podle 2.9 (52, 53) je potenciál ve střední části naší galaxie zhruba

$$\begin{aligned} \chi_s &= - \frac{\kappa M_s}{R_s} = - \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{41}}{10^{20}} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} = \\ &= - 4 \cdot 10^{11} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} = - \frac{4 \cdot 10^{11}}{9 \cdot 10^{16}} c^2 \approx 4 \cdot 10^{-6} c^2, \end{aligned}$$

tedy asi miliónkrát menší než potenciál kosmu. Gravitačním působením Mléčné dráhy nelze tedy vysvětlit setrvačnost těles. Její příčinu musíme hledat v mnohem hmotnějších souborech galaxií, které mají ovšem též mnohem větší vzdálenosti od nás než slálice v Mléčné dráze. Uvážíme-li, že galaxie, které se otáčejí vzhledem ke kosmické soustavě, mají silně zploštělý tvar, přicházíme k názoru, že značné odstředivé síly vznikají teprve působením velikého počtu galaxií. Proto vyšetříme potenciál expandujícího vesmíru. Nahradíme-li jej homogenní koulí poloměru R , dostaneme pro gravitační potenciál v jejím středu

$$-\chi = \kappa \rho \int_0^R \frac{4\pi r^2 dr}{r} = 2\pi \kappa \rho R^2$$

a podle 2.9 (59)

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \approx 1,8 \cdot 10^{82} \text{ m}^3.$$

Máme tedy

$$2.9 (60) \quad R \approx 1,6 \cdot 10^{27} \text{ m} \approx 160 \cdot 10^9 \text{ svět. roků}$$

a vzhledem k 2.9 (58)

$$\begin{aligned} -\chi &\approx 2\pi \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-28} \cdot 2,6 \cdot 10^{54} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} = 1,1 \cdot 10^{17} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} = \\ &= 1,2 c^2 \approx -\chi_*. \end{aligned}$$

Potenciál rozpínavého vesmíru je tedy dosti přesně roven potenciálu gravitačního pole kosmu, který podle podané teorie určuje setrvačné síly a rychlost šíření polí. Z toho lze usuzovat, že fyzikální zákony a představy, z kterých jsme vyšli, jsou ve shodě s moderními poznatky kosmologickými. Teoretický pojem kosmu zavedený v čl. 2.9.1 dostává tak velmi konkrétní obsah: je to prostě rozpínavý vesmír, jehož poloměr se odhaduje na 160 miliard světelných roků a který zřejmě zahrnuje celý kosmický prostor přístupný dnes astronomickým pozorováním. Je totiž známo, že největšími optickými dalekohledy vidíme galaxie až do vzdálenosti asi jedné miliardy

svět. let a nejmohutnějšími radioteleskopy můžeme přijímat elektromagnetické záření i z galaxií vzdálených až téměř sedm miliard svět. roků.

V předešlých úvahách jsme předpokládali, že fyzikální vesmír má konečnou rozlohu a konečnou hmotnost a že jeho gravitační pole je určeno Newtonovým potenciálem. Není bezpečně známo, zda za hranicemi dosud poznaného rozpínavého vesmíru existují další metagalaxie a nelze ani vyloučit, že vesmír má neomezenou rozlohu a nekonečnou hmotnost. Podaný výklad setrvačnosti i základní megafyzikální vztah 2.9 (45) zůstává však v platnosti i pro nekonečný vesmír, přejdeme-li od Newtonovy teorie ke kvantové teorii gravitace a připustíme-li, že kvanta gravitačního pole (gravitony) mají konečnou klidovou hmotnost, jak ukážeme v čl. 7.3.5.

3.0. Rozdělení akustiky

Akustikou se původně rozuměla *наука о слышимом звуку* a v tomto užším smyslu se tohoto slova dosud často užívá. V posledních desetiletích se však věnuje značná pozornost i mechanickým kmitům a vlnám mimo obor slyšitelných frekvencí 16 Hz až 20 000 Hz, které někdy považujeme za akustické frekvence v užším smyslu. Mají-li kmity a vlny jimi vzbuzené v okolním prostředí kmitočet nižší než slyšitelné zvuky, mluvíme o *infrazvuku*. Takové podzvukové vlny se šíří půdou a zdivem v okolí běžících strojů a jedoucích vozidel, mohou být způsobeny i nárazy větru na budovy a různá zařízení. Vznikají též otřesy půdy a zemětřesením a postupují zemskou půdou do velkých vzdáleností. Studium těchto vln se zabývá zvláštní obor geofyziky zvaný *seizmika*. Je-li frekvence vln vyšší než 20 kHz, nazýváme vlny *ultrazvukovými* (*nadzvukovými*). Podařilo se již vzbudit nadzvukové vlny ve velmi širokém oboru frekvencí až do kmitočtů řádu 10^5 kHz. Při střední rychlosti zvuku ve vzduchu $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ mají zvukové vlny největší dosažené frekvence vlnovou délku

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{10^8 \text{ s}^{-1}} = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 3,4 \text{ } \mu\text{m},$$

jež je blízká vlnové délce viditelného světla (světlo je ovšem příčné vlnění elektromagnetické).

Podstatou akustických vln všech frekvencí jsou elastické kmity látky, které se šíří od místa k místu rychlostí závislou na mechanických vlastnostech prostředí. Kmity pevných těles se přenášejí na jiná tělesa, na kapaliny i plyny, které je obklopují, a tak vznikají elastické vlny infrazvukové, zvukové a ultrazvukové. Z tohoto hlediska můžeme pokládat i kyvadlo, kmitající pružinu, chvějící se drát nebo nepokoj v hodinách za podzvukový generátor.

Podstata těchto kmitů, jakož i slyšitelných kmitů ladičky nebo struny klavíru i ultrazvukových oscilací křemenného oscilátoru je stejná, a proto je probíráme v téže kapitole, zvané akustika.

Podotýkáme, že význam kmitů a vln tím není zdaleka vyčerpán. Nesmírný význam kromě mechanických kmitů mají jistě elektromagnetické vlny a kmity, jejichž nejdůležitější příklad jsou vlny světelné. Přesto jsme nepokládali za vhodné výklad o kmitech a vlnách podávat v nejobecnějším smyslu kmitání a vlnění „nějaké fyzikální veličiny“, neboť jsme přesvědčeni, že čtenář snadno přeneseme pojmy a vztahy vyložené na konkrétních mechanických příkladech i na jakékoli kmity a vlny.

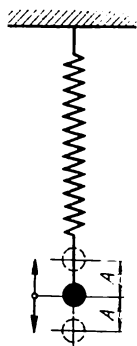
3.1. Kmity

3.1.1. Kmitání (oscilace)

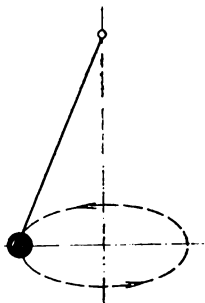
Pohyb kmitavým nebo krátce *kmitáním* (*oscilací*) nazýváme obecně takový pohyb hmotného bodu (nebo tělesa), při němž bod nepřekročí konečnou vzdálenost od jisté, tzv. rovnovážné polohy. V rovnovážné poloze jsou všechny síly působící na hmotný bod navzájem ve statické rovnováze. Je to tedy taková poloha, kterou by kmitající bod zaujal, kdyby byl v klidu. Je-li časový průběh kmitavého pohybu pravidelný, tj. opakuje-li se po stejném časovém intervalu T (periodě), nazýváme jej *kmitavým pohybem periodickým*.

Převrácená hodnota periody se nazývá *kmitočet* nebo *frekvence* ν , ježto číselně udává, kolikrát se kmit nebo jiný periodický děj opakuje za jednotku času. Hlavní jednotka frekvence $[\nu] = \text{s}^{-1}$ se nazývá *hertz* (značka Hz). Násobnými jednotkami jsou kilohertz = kHz = 10^3 Hz a megahertz = MHz = 10^6 Hz.

Nejjednodušší periodický kmitavý pohyb je takový, při němž se hmotný bod pohybuje po přímce. Pak nazýváme kmitající bod *lineárním oscilátorem*. Příkladem může být pohyb tělesa zavěšeného na spirální pružině, vychýlíme-li je z klidové (rovnovážné) polohy [obr. (3.1) 1] ve svislém směru o délku A a pak uvolníme. V tom okamžiku se začne uplatňovat síla pružiny, která směřuje do rovnovážné polohy a zrychluje těleso až do okamžiku, kdy



Obr. (3.1) 1.
Model lineárního
oscilátoru



Obr. (3.1) 2.
Kónické kyvadlo

těleso dospěje do rovnovážné polohy. V ní sice přestane síla pružiny působit, avšak těleso má jistou rychlost, a tedy kinetickou energii, takže se pohybuje dále. Zastaví se, až se kinetická energie, kterou mělo v okamžiku průchodu rovnovážnou polohou, celá spotřebuje na práci napínání pružiny, jejíž síla působí proti smyslu pohybu, neboť směřuje opět do rovnovážné polohy. Jakmile kinetická energie vymizí, začne se celý děj opakovat. Kdyby nebylo odporu prostředí, v němž se pohyb děje (např. vzduchu), a nedokonalosti materiálu pružiny, kmitalo by takto těleso stále. Takovému kmitání říkáme *netlumené*. Ve skutečnosti se však výkmit (amplituda) kmitů postupně zmenšuje, až se těleso zastaví v rovnovážné poloze. Takové kmitání nazýváme *tlumeným*. Kmitání může být *rovinné*, jež lze považovat za výsledný kmitavý pohyb složený z dvojího kmitání lineárního, nebo *prostorové*, složené z trojích lineárních oscilací. Příkladem plošného oscilátoru je *kónické kyvadlo* [obr. (3.1) 2], u něhož kmitající kulička opisuje kruhovou dráhu ve vodorovné rovině. Její potenciální energie je stálá a podle principu energie je nutně stálá i její kinetická energie. Koná tedy kulička kónického kyvadla rovnoměrný kruhový pohyb. Kdybychom se dívali na kuličku z některého bodu roviny její dráhy, jevil by se nám její pohyb jako harmonický pohyb po průměru kolmém ke směru pozorování. Příkladem prostorového oscilátoru je *sférické kyvadlo*, tj. hmotný bod vázaný na dokonale hladkou kulovou plochu. Může být přibližně realizováno malým těžkým tělískem zavěšeným na velmi lehkém vlákně stálé délky.

3.1.2. Harmonické kmitání

Podobně jako rovnoměrný kruhový pohyb je nejjednodušší kmitavý pohyb v rovině, lze pokládat jeho průmět do přímky za nejjednodušší kmitavý pohyb na přímce. Proto na-

zýváme harmonické kmity také *jednoduchými kmity*. V čl. 2.2.3 jsme poznali, že harmonické kmity vznikají působením síly, která roste úměrně s výchylkou a míří zpět k rovnovážné poloze. To je fyzikální důvod, proč má harmonický pohyb takový význam v nauce o kmitání. Víme totiž, že kmity a oscilace nastávají rozechvěním pružných těles, pro která platí Hookův zákon o úměrnosti síly a deformace. Jestliže tedy pružné těleso deformujeme a pak je ponecháme sobě samému, působí na jeho vychýlené částice elastické síly, úměrné jejich výchylkám, které se snaží zrušit, takže částice konají harmonické kmity. Platí to tím přesněji, čím menší jsou deformace, neboť tím dokonaleji je splněn Hookův zákon.

Ve větším rozsahu je podmínka úměrnosti mezi silou a výchylkou z rovnovážné polohy splněna u šroubových pružin, namáhaných tahem nebo tlakem. Síla, která se snaží zrušit výchylku z rovnovážné polohy, je

$$3.1 (1) \quad \boxed{F_y = -Ky}, \quad K = \text{const.}$$

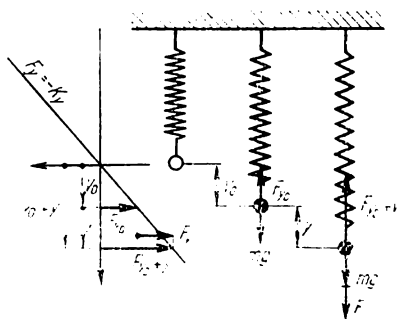
Zavěsíme-li na pružinu na jednom konci upevněnou těleso hmotnosti m , protáhne se váhou tělesa mg o délku y_0 [obr. (3.1) 3] proti nenapjatému stavu. Protože je rovnováha, platí $mg + F_{y_0} = 0$ čili podle 3.1 (1)

$$3.1 (2) \quad mg = -F_{y_0} = -(-Ky_0) = Ky_0.$$

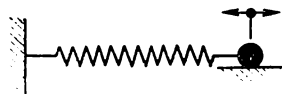
Natáhneme-li pružinu ještě o délku y , takže její celkové prodloužení je $y_0 + y$, je k tomu třeba další síly F' ; nová podmínka rovnováhy pak zní $mg + F' + F_{y_0+y} = 0$ čili $Ky_0 + F' - K(y_0 + y) = 0$. Vymizí-li náhle síla F' (těleso na natažené pružině náhle pustíme), působí pružina na těleso silou

$$3.1 (3) \quad -Ky = F_y,$$

která splňuje podmínku pro vznik harmonického pohybu. Snadno se přesvědčíme, že tomu je obdobně, jestliže pružinu z výchylky y_0 , při které je rovnováha, stlačíme. Uvolněné těleso



Obr. (3.1) 3. Silové působení u harmonického oscilátoru



Obr. (3.1) 4. K poučce, že stálá síla neovlivní časový průběh kmitů

bude tedy vykonávat jednoduchý harmonický pohyb (pomijíme-li ovšem vlastní hmotnost pružiny, odpor prostředí a odpory, které vznikají vnitřním třením v materiálu pružiny). Vidíme, že *váha tělesa změní jen jeho rovnovážnou polohu* [y_0 na obr. (3.1) 3], *avšak těleso koná zase harmonické kmity se stejnou periodou, jako kdyby tíže nepůsobila*.

Úplně stejně (se stejnou frekvencí) by kmitalo těleso stejné hmotnosti m na stejné pružině při uspořádání na obr. (3.1) 4, kdyby tu nebyly odpory třením, neboť jeho váha jako stálá síla nemá vliv na kmitavý pohyb.

Tělesu (hmotnému bodu), které takto kmitá, říkáme *harmonický oscilátor (kmitač)*.

Úhlovou frekvenci vypočteme podle rovnice 2.2 (15)

$$3.1 (4) \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

a dobu jedné periody podle 2.1 (33) ze vztahu

$$3.1 (5) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}.$$

Periodě říkáme také doba kmitu a frekvence kmitů je pak

$$3.1 (6) \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

Pohyb závisí na hmotnosti m tělesa, neboť zrychlení je jí nepřímě úměrné, tedy

$$3.1 (7) \quad a_y = -K \frac{y}{m}.$$

Čím větší je hmotnost m , tím pomaleji se celý pohyb děje. Doba kmitu však nezávisí na amplitudě A , tj. na největší výchylce z rovnovážné polohy (která v tomto případě je rovna patrně výchylce, z níž těleso pustíme). Periodičnost kmitů, která nezávisí na jejich amplitudě nebo na vnějších podmínkách, nazývá se *izochronismus*. Harmonické kmity jsou tedy izochronní.

Nanášíme-li sílu, která se při výchylce tělesa (oscilátoru) z rovnovážné polohy snaží vrátit je do této polohy, v závislosti na výchylce y , dostaneme tzv. *charakteristiku oscilátoru*. Aby vznikly harmonické kmity, musí být charakteristika přímková [obr. (3.1) 3] a její směrnici je konstanta K z rovnice 3.1 (1). Veličina K udává číselně velikost síly při jednotkové výchylce z rovnovážné polohy a nazýváme ji *direkční silou (tuhostí vazby oscilátoru)*.

Rovnici harmonického pohybu

3.1 (8)

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

podle níž je okamžitá výchylka y kmitajícího bodu z rovnovážné polohy rovna pravoúhlému průmětu vektoru (průvodiče) $\mathbf{A}$ stálé délky A , měřené z rovnovážné polohy, do směru Y kmitání, svírá-li průvodič $\mathbf{A}$ s kolmým směrem X okamžitý fázový úhel φ , který se s časem mění podle vztahu $\varphi = \omega t + \varphi_0$ [obr. (3.1) 5], můžeme psát též ve tvaru

$$3.1 (9) \quad y = A \cos \varphi_0 \sin \omega t + A \sin \varphi_0 \cos \omega t = A_x \sin \omega t + A_y \cos \omega t;$$

při tom

$$3.1 (10) \quad A_x = A \cos \varphi_0 \quad \text{a} \quad A_y = A \sin \varphi_0$$

jsou zřejmě složky vektoru $\mathbf{A}$ ve směru Y kmitů a ve směru X k němu kolmém v počátečním okamžiku $t = 0$, v němž vektor $\mathbf{A}$ svírá se směrem X úhel φ_0 . Jsou-li dány složky A_x a A_y , vypočteme amplitudu kmitů a počáteční fázi φ_0 ze vztahů

$$3.1 (11) \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \quad \text{tg } \varphi_0 = \frac{A_y}{A_x}.$$

Představa, že okamžitou výchylku harmonického oscilátoru můžeme považovat za pravoúhlý průmět průvodiče $\mathbf{A}$, otáčejícího se stálou úhlovou rychlostí ω kolem rovnovážné polohy, do směru kmitů, vede k jednoduchému, avšak velmi užitečnému vyjádření kmitavých pohybů komplexními čísly.

V pravoúhlé souřadnicové soustavě OXY [obr. (3.1) 6] máme průvodič $\overline{OP} = \mathbf{A}$. Jeho složky ve směru souřadnicových os jsou x i y , takže $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Odchýlíme-li se v dalším výkladu od obvyklého způsobu označování jednotkových vektorů ve směru souřadnicových os tím, že jednotkový vektor v kladném smyslu osy X označíme prostě 1 a jednotkový vektor v kladném smyslu osy Y označíme písmenem j , můžeme průvodič $\mathbf{A}$ vyjádřit symbolicky

$$3.1 (12) \quad \mathbf{A} = x + jy;$$

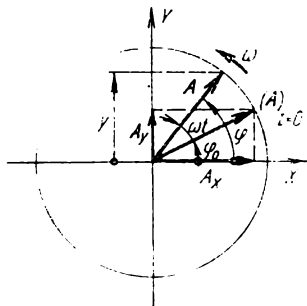
zde x a y jsou dvě reálná čísla, jež udávají souřadnice koncového bodu P průvodiče $\mathbf{A}$ v rovině OXY . Je-li 1 jednotkovým vektorem v kladném smyslu osy X , bude -1 patrně jednotkovým vektorem v opačném smyslu osy X . Násobení souřadnice x číslem -1 můžeme proto

považovat za rotaci bodu na ose X o 180° neboli o π kolem počátku O souřadnicové soustavy. Tato operace je algebraicky rovna dvojnásobení souřadnice x číslem $\sqrt{-1}$. Násobení souřadnice x jenom číslem $\sqrt{-1}$ můžeme proto považovat za rotaci bodu kolem počátku O o poloviční úhel než prve, tj. o 90° (o $\pi/2$). Souřadnice y je vzhledem k souřadnici x v rovině OXY pootočená právě o $\pi/2$ proti směru pohybu hodinových ručiček. Můžeme proto jednotkový vektor j v kladném směru osy Y položit rovný imaginární jednotce, $j = \sqrt{-1}$. Smysl důležité rovnice

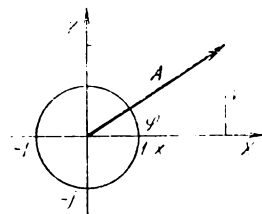
$$3.1 (13) \quad j^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$$

je tedy třeba vidět v tom, že vektor j přejde při rotaci o $\pi/2$ proti směru hodinových ručiček ve vektor -1 .

Symbolické vyjádření vektoru A ve tvaru 3.1 (12), při čemž j je dáno vztahem (13), nazýváme *číslem komplexním*. Je složeno z reálné části $x = \operatorname{Re}(A)$ a z imaginární části $y = \operatorname{Im}(A)$. V teorii komplexních čísel nazývá se vektor A *vektorový obraz komplexního čísla*. Lze tedy vektory v rovině symbolicky vyjádřit komplexními čísly a obráceně a počítání s takovými čísly se v mnohém shoduje s počítáním s vektory.*)



Obr. (3.1) 5. Harmonický pohyb jako průmět koncového bodu rotujícího vektoru A



Obr. (3.1) 6. Vektorový obraz komplexního čísla

Z obrázku (3.1) 6 plyne pro velikost A vektoru A a pro úhel φ , který udává jeho směr v rovině OXY ,

$$3.1 (14) \quad A = |A| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Číslo A se nazývá *absolutní hodnota komplexního čísla* nebo jeho *modul* a úhel φ jeho *argument*. Z obr. (3.1) 6 plyne dále

$$3.1 (15) \quad x = A \cos \varphi, \quad y = A \sin \varphi,$$

takže dosadíme-li tyto výrazy do 3.1 (12), dostaneme vyjádření vektoru A nebo obecně komplexního čísla jeho absolutní hodnotou a argumentem ve tvaru

$$3.1 (16) \quad A = A (\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

Podle Eulerova vzorce je

$$3.1 (17) \quad \cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j\varphi},$$

takže dalším způsobem vyjádření komplexního čísla, který je při znázornění komplexními čísly nejdůležitější, je

$$3.1 (18) \quad A = A e^{j\varphi}.$$

*) Komplexní čísla a jejich vektorové obrazy, jichž tu užíváme, neshodují se zcela s prostoro-
vými vektory vektorové analýzy a pro počítání s nimi neplatí stejná pravidla kromě zvláštních
případů, jako je např. sčítání vektorů v téže rovině. Nelze tedy přenášet pravidla vektor-
ové analýzy na komplexní čísla a jejich vektorové obrazy.

Podle 3.1 (17) je

$$3.1 (19) \quad e^{j\varphi} = 1, \quad e^{j\frac{\pi}{2}} = j, \quad e^{j\pi} = -1, \quad e^{j\frac{3}{2}\pi} = -j, \quad e^{j(\varphi \pm 2k\pi)} = e^{j\varphi} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

takže podle předchozího výkladu můžeme veličinu $e^{j\varphi}$ považovat za jednotkový vektor v rovině souřadnic OXY , který svírá s reálnou osou X fázový úhel φ , měřený proti směru pohybu hodinových ručiček. Jednotkový vektor $e^{j\varphi}$ se nazývá *verzor* $\underline{1}/\varphi$; udává směr vektoru $\mathbf{A}$ v rovině OXY a píše se tak, že se mezi šikmou a vodorovnou čárkou, jež představují vrchol úhlu, napíše fázový úhel φ . Vektor $\mathbf{A}$ můžeme tedy symbolicky psát též

$$\mathbf{A} = A \underline{1}/\varphi.$$

Položíme-li fázový úhel $\varphi = \omega t + \varphi_0$, otáčí se jednotkový vektor $e^{j\varphi}$ a také vektor $\mathbf{A}$ na obr. (3.1) 6 stálou úhlovou rychlostí ω proti směru pohybu hodinových ručiček kolem počátku O . Poloha vektoru $\mathbf{A}$ v okamžiku $t = 0$ je zřejmě určena počáteční fází φ_0 . Pravoúhlé průměty vektoru

$$3.1 (20) \quad \mathbf{A} = A e^{j(\omega t + \varphi_0)}$$

jak na reálnou, tak na imaginární osu

$$x = \operatorname{Re}(\mathbf{A}) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad y = \operatorname{Im}(\mathbf{A}) = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

představují tedy jednoduché harmonické kmity, jež jsou navzájem fázově posunuty o $\pi/2$. Kmitavé pohyby můžeme tedy vyjádřit (popisovat) místo trigonometrickými funkcemi také imaginárními exponenciálními funkcemi, s nimiž se počítá mnohem jednodušeji a elegantněji než s trigonometrickými funkcemi, jejichž součtové vzorce jsou těžkopádné.

Harmonické kmitání podle 3.1 (20) můžeme také psát ve tvaru

$$\mathbf{A} = A e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t} = \mathbf{A}_0 e^{j\omega t},$$

kde $\mathbf{A}_0 = A e^{j\varphi_0}$ představuje vektor délky A , který s reálnou osou svírá fázový úhel φ_0 , rovný počáteční fázi, tj. v okamžiku $t = 0$. Považujeme-li vektor $\mathbf{A}_0$ za amplitudu kmitů, pak komplexní hodnota amplitudy znamená vždy, že kmitání má fázové posunutí.

Ve fyzice však vždy počítáme s reálnými veličinami, a proto musíme výsledek počítání s komplexními čísly, který zpravidla vychází rovněž komplexně, převést do reálného oboru. To je velmi jednoduché. Ježto dvě komplexní čísla jsou si navzájem rovna jen tehdy, mají-li stejné reálné i imaginární části, splňuje zřejmě rovnici mezi komplexními čísly jak reálná, tak imaginární část každé strany. Oddělíme tedy ve výsledku reálnou a imaginární část, a jde-li o kmity, můžeme každé z nich zvlášť použít k výkladu vyšetřovaného jevu.

Uvažujme nyní o *energii harmonických kmitů* hmotného bodu hmotnosti m . Abychom hmotný bod vychýlili z rovnovážné polohy rovnoměrným pohybem, musíme na něj působit vnější silou F' , která je v každém okamžiku stejně velká jako síla F , kterou vyvozuje harmonická vazba, avšak opačného směru, tedy

$$F' = -F.$$

Při elementární výchylce dy vykoná vnější síla F' práci

$$dA' = F' dy = -F dy,$$

kteřá se jeví v přírůstku potenciální energie hmotného bodu vzhledem k potenciální energii v rovnovážné poloze, kterou klademe na roveň nule. Při výchylce y bude tedy mít hmotný bod vzhledem k 3.1 (4) a (7) potenciální energii

$$W_p = A' = - \int_0^y F dy = -m \int_0^y a dy = m\omega^2 \int_0^y y dy = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2,$$

a dosadíme-li za y z 3.1 (8), pak

$$3.1 (21) \quad W_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

Pohybová energie je určena prostě vztahem

$$3.1 (22) \quad W_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2 (\omega t + \varphi_0).$$

Pozorujeme, že obojí energie se periodicky mění s časem. Příslušné průběhy jsou na obr. (3.1) 7a, b. Čárkovaná křivka na obr. a znázorňuje pro srovnání okamžitou výchylku oscilátoru. Potenciální energie hmotného bodu dosahuje tedy největší hodnoty při $\omega t +$

$$+ \varphi_0 = \frac{1}{2} \pi, \frac{3}{2} \pi, \frac{5}{2} \pi, \dots \text{čili } \sin^2 (\omega t + \varphi_0) = 1,$$

když hmotný bod je v krajních polohách. V nich je naproti tomu kinetická energie kmitajícího bodu nulová [pro uvedené hodnoty je $\cos^2 (\omega t + \varphi_0) = 0$]. Kinetická energie dosahuje největší hodnoty při průchodu bodu rovnovážnou polohou, tj. pro $\omega t + \varphi_0 = 0, \pi, 2\pi, \dots$ čili $\cos^2 (\omega t + \varphi_0) = 1$. V tomto případě je zase potenciální energie nulová. Harmonický pohyb představuje tedy střídavě přeměnu potenciální energie v energii kinetickou a naopak. Obě energie mají přitom v každém okamžiku kladnou hodnotu. Celková mechanická energie W kmitajícího bodu, zvaná *intenzita kmitání*, je součet obou energií:

$$\begin{aligned} W &= W_p + W_k = \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 [\sin^2 (\omega t + \varphi_0) + \\ &\quad + \cos^2 (\omega t + \varphi_0)], \end{aligned}$$

3.1 (23)

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \text{const.}$$

V soulase se zákonem zachování mechanické energie má celková mechanická energie při netlumeném harmonickém kmitání stálou hodnotu, úměrnou hmotnosti, čtverci výkmitu (amplitudy) a čtverci kmitočtu.

Potenciální a kinetická energie mají stejné časové průběhy, které jsou jenom navzájem posunuty o fázový úhel $\pi/2$. Proto i plochy pod nimi příslušející jedné periodě jsou stejné. Znázorníme-li okamžité hodnoty obou energií jako na obr. (3.1) 7c, vidíme hned, že potenciální a kinetická energie jsou sice časově proměnné, ale během každé periody mají stejně velké střední hodnoty $\overline{W}$, rovnající se polovině celkové energie W oscilátoru, tedy

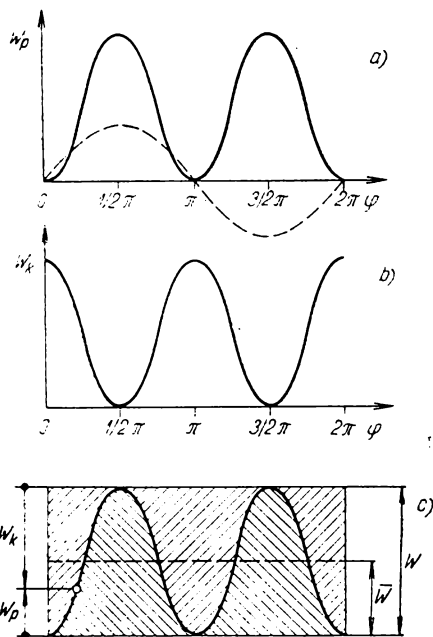
$$3.1 (24) \quad \overline{W} = \frac{1}{2} W = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2.$$

Položíme-li

$$v_0^2 = \frac{1}{2} \omega^2 A^2,$$

kde ωA je amplituda rychlosti kmitání oscilátoru, je průměrná hodnota kinetické energie rovna energii hmotného bodu při rychlosti

$$3.1 (25) \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega A \approx 0,707 \omega A.$$



Obr. (3.1) 7. Průběh potenciální a kinetické energie harmonického oscilátoru

Nebo položíme-li

$$y_0^2 = \frac{1}{2} A^2,$$

je průměrná hodnota potenciální energie rovna potenciální energii hmotného bodu při jeho výchylce z rovnovážné polohy o

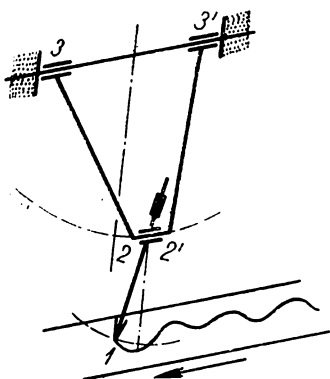
$$3.1 (26) \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} A \approx 0,707 A.$$

Rychlost v_0 a výchylku y_0 nazýváme *efektivní rychlostí* a *efektivní výchylkou* podobně jako u zvukových vln definujeme efektivní tlak a u střídavých elektrických proudů efektivní proud a napětí. Zavádíme tyto veličiny místo středních hodnot, který jsou při sinusovém průběhu proměnných veličin vždy rovny nule.

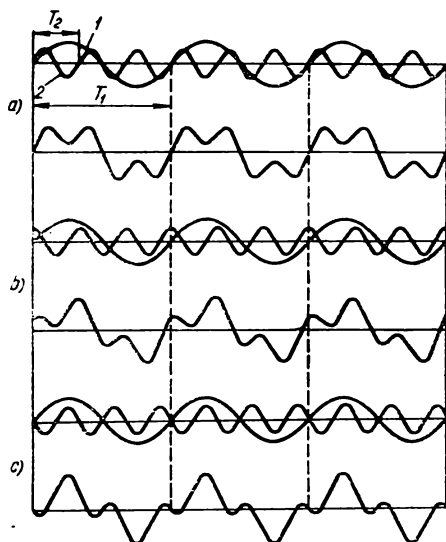
Při kmitech, o nichž jsme pojednali v tomto článku, působí na oscilátor jen síla, kterou vyvozuje pružná vazba oscilátoru. Žádná jiná časově proměnná síla na oscilátor nepůsobí. Takové kmity nazýváme *volnými* a jejich úhlovou frekvenci *vlastní úhlovou frekvencí* oscilátoru. V následujících článcích je vyloženo, že volné kmity oscilátoru přejdou v kmity jiného druhu, působí-li na oscilátor kromě pružné vazby ještě jiné časově proměnné síly.

3.1.3. Skládání stejnosměrných kmitů

Kmitavý pohyb hmotného bodu může být výsledkem několika dílčích kmitavých pohybů. Příkladem pro dvoje současné kmitání je pohyb koncového bodu 1 dvojitého kyvadla na obr. (3.1) 8, který při malých výchylkách z rovnovážné polohy kýve harmonicky kolem osy $22'$; tato osa sama kýve kolem další osy $33'$. Při rovnoměrném posuvu papíru ve



Obr. (3.1) 8. Ukázka skládání dvojího kmitání dvojítm kyvadlem



Obr. (3.1) 9. Skládání stejnosměrných kmitů

směru šipky nakreslil by na něm kývající hrot časové rozvinutí složeného kmitavého pohybu. Při skládání kmitů jde tedy o skládání dvou a více pohybů, pro které platí *princip superpozice*, tzn. má-li hmotný bod v daném okamžiku vykazovat z různých příčin výchylky u_1 , u_2 , ..., které jsou vektory, je jeho skutečná výchylka u rovna vektorovému součtu částečných výchylek

$$3.1 (27) \quad u = u_1 + u_2 + \dots$$

Nejjednodušší je případ, že všechny částečné kmity se dějí podél téže přímky. Výsledná výchylka y se pak rovná prostě algebraickému součtu všech výchylek. Jsou-li částečné kmity harmonické, je tedy

$$3.1 (28) \quad y = y_1 + y_2 + \dots = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots$$

Další početní zpracování tohoto součtu je však možné jen ve zvláštních případech. Obecně se dá úloha lépe řešit graficky. Znázorníme časové rozvinutí částečných kmitů a výchylky příslušné témuž okamžiku t algebraicky sečteme, čímž dostaneme časové rozvinutí výsledného kmitání [obr. (3.1) 9].

Vyšetřeme, jaká musí být splněna podmínka, aby výsledné kmitání bylo periodické, jsou-li i částečná kmitání periodická, tj. výsledné kmitání se bude po uplynutí jisté periody T opakovat se stejným časovým průběhem. Bude to zřejmě tehdy, jestliže siny v součtu 3.1 (28) budou mít v době $t + T$ stejnou hodnotu jako v době t . Obecně platí $\sin(x + 2n\pi) = \sin x$, je-li n celé číslo, $n = 1, 2, 3, \dots$, takže položíme-li $x = \omega t + \varphi$, bude uvedená podmínka splněna, jestliže

$$\omega_1 T = 2n_1 \pi, \quad \omega_2 T = 2n_2 \pi, \dots \text{ nebo } \frac{T}{T_1} = n_1, \quad \frac{T}{T_2} = n_2, \dots,$$

odkud

$$3.1 (29) \quad T = n_1 T_1 = n_2 T_2 = \dots \text{ nebo } \nu = \frac{\nu_1}{n_1} = \frac{\nu_2}{n_2} = \dots,$$

jsou-li $\nu_i = 1/T_i$ příslušné kmitočty. Výsledný kmit je tedy periodický jedině tehdy, je-li poměr period nebo kmitočtů dílčích kmitů poměrem celých čísel,

$$3.1 (30) \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Takové periody nebo kmitočty nazýváme *souměřitelnými*. Výsledné kmitání bude pak periodickou a obecně neharmonickou funkcí času, která se opakuje po uplynutí nejkratší doby 3.1 (29), na kterou připadá n_1 kmitů periody T_1 , n_2 kmitů periody T_2 atd.

Skládáním jednoduchých harmonických kmitů souměřitelných kmitočtů mohou vzniknout nejrozmanitější kmity často se složitým časovým průběhem, který závisí na počtu skládaných kmitů, na jejich kmitočtech, amplitudách a fázových posunutích.

Na obr. (3.1) 9 je znázorněno skládání dvou harmonických kmitů, jejichž frekvence a periody jsou v poměru $\nu_2 : \nu_1 = 3 : 1 = T_1 : T_2$. První kmitání, pro které platí index 1, lze volit vždy tak, že v okamžiku $t = 0$ právě začíná, tj. fázové posunutí $\varphi_1 = 0$. Druhé kmitání (index 2) má fázové posunutí φ_2 ; protože $\varphi_1 = 0$, je posunutí φ_2 zároveň posunutí φ druhého kmitání vzhledem k prvnímu kmitání. Fázovému posunutí φ přísluší časový rozdíl t_0 obou kmitů, pro který podle 2.1 (39) platí

$$-\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t_0}{T_2}.$$

Na obr. a) je poměrný časový rozdíl $t_0/T_2 = 0$, na obr. b) je $t_0/T_2 = 1/4$ a na obr. c) je $t_0/T_2 = 2/4$. Ve všech případech je výsledné kmitání periodické s periodou $T = T_1 = 3T_2$, není však už harmonické. Na časový průběh výsledného kmitání má význačný vliv vzájemné fázové posunutí obou částečných kmitů, jak je na obrázku zřetelně vidět.

3.1.4. Harmonická analýza

Je-li možné skládáním harmonických kmitů souměřitelných period dostat nejrozmanitější kmity, které jsou zase periodické, lze mít za to, že naopak libovolný periodický pohyb se dá rozložit na jednoduché harmonické pohyby souměřitelných kmitočtů, jež složený dohro-

mady by daly tento pohyb. Fourier ukázal, že lze skutečně každý periodický pohyb zcela formálně rozložit obecně na nekonečně mnoho harmonických kmitů, jejichž kmitočty jsou v jednoduchém poměru přirozených čísel,

$$3.1 \quad \nu : \nu_2 : \nu_3 : \dots = 1 : 2 : 3 : \dots$$

Jsou tedy celistvými násobky základního kmitočtu ν .

$$\nu_2 = 2\nu, \quad \nu_3 = 3\nu, \quad \dots, \quad \nu_k = k\nu,$$

kteřý je roven kmitočtu vyšetřovaného neharmonického pohybu.

Harmonické kmity, které přiřazujeme základnímu harmonickému kmitání o kmitočtu ν , nazýváme *vyššími harmonickými* nebo *aliquotními kmity* nebo též *vrchními harmonickými kmity* vyšetřovaného kmitání. O jejich periodách $T_k = 1/\nu_k = 2\pi/\omega_k$ platí

$$T_2 = \frac{T}{2}, \quad T_3 = \frac{T}{3}, \quad \dots, \quad T_k = \frac{T}{k} \quad (k \text{ je celé číslo});$$

na periodu T vyšetřovaného kmitání připadá tedy vždy celistvý počet period jeho vyšších harmonických. Výsledné kmitání, rovné algebraickému součtu základního kmitání a vyšších harmonických, můžeme tedy psát obecně ve tvaru

$$3.1 \quad y = f(t) = C_0 + C_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + C_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + C_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \dots$$

Vyjádříme-li každou složku ve tvaru

$$3.1 \quad C_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = C_k \cos \varphi_k \sin k\omega t + C_k \sin \varphi_k \cos k\omega t = A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t,$$

lze také psát ($C_0 = A_0$)

$$3.1 \quad y = f(t) = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + A_k \cos k\omega t + \dots \\ \dots + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_k \sin k\omega t + \dots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t.$$

Tečkami na konci řad jsme naznačili, že počet vyšších harmonických není nijak omezen. Takovou trigonometrickou řadu nazýváme *Fourierovou řadou*; určení amplitud C_k a fázových posuvů φ_k nebo koeficientů A_k a B_k jednotlivých harmonických složek nazýváme *harmonickou* neboli *Fourierovou analýzou* vyšetřovaného kmitání. Tak můžeme libovolné periodické kmitání $f(t)$ vyjádřit řadou 3.1 (32) nebo 3.1 (34) s libovolnou přesností, určíme-li dostatečný počet koeficientů A_k a B_k . Často však vystačíme s menším počtem vyšších harmonických.

Je zřejmé, že v každém kmitání nemusí být obsaženy všechny vyšší harmonické v pořadí daném rovnicí 3.1 (31). Tak např. kmitání na obr. (3.1) 9 obsahuje jen dvě harmonické, a to ty, jejichž kmitočty jsou v poměru 3 : 1. Amplitudy všech ostatních jsou prostě rovny nule.

Koeficienty Fourierovy řady lze určit početně ze známých vzorců, je-li znám analytický výraz funkce $f(t)$ periodického kmitání. Není-li tomu tak, např. jde-li o grafický záznam, získaný experimentálně registračním přístrojem, je třeba určit součinitele Fourierova rozvoje také graficky nebo numericky, což bývá většinou dost pracné. Byly proto sestaveny mechanické přístroje zvané *harmonické analyzátory*, jimiž je možno libovolný periodický průběh rychle a přesně zpracovat.

Například oscilografem byla snata křivka průběhu tlaku od zvukové vlny houslového tónu, zobrazená zjednodušeným grafem na obr. (3.1) 10. Harmonický analyzátor dal pro koeficienty Fourierova rozvoje tyto hodnoty:

$$\begin{array}{lllll} A_0 = 0, & A_1 = -67, & A_2 = 55, & A_3 = 5, & A_4 = 0, \\ B_1 = 151, & B_2 = 24, & B_3 = 27, & B_4 = 0. \end{array}$$

Dosadíme-li je do 3.1 (34), dostaneme

$$y = -67 \cos \omega t + 55 \cos 2\omega t + 5 \cos 3\omega t + 151 \sin \omega t + 24 \sin 2\omega t + 27 \sin 3\omega t.$$

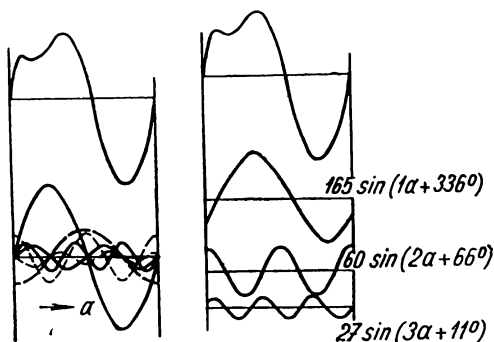
Lze tedy daný tlakový kmit vyjádřit součtem šesti druhů sinusových kmitů. Užijeme-li však známého vztahu pro sinus součtu dvou úhlů, můžeme sinus a kosinus téhož argumentu nahradit jednou funkcí, čímž dostaneme

$$y = 165 \sin(\alpha + 336^\circ) + 60 \sin(2\alpha + 66^\circ) + 27 \sin(3\alpha + 11^\circ),$$

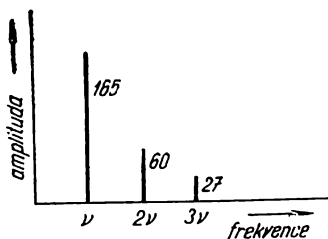
kde jsme součin $\omega t = \alpha$, který má význam úhlu, vyjádřili v míře stupňové. V tomto houslovém tónu uplatňují se tedy kromě základního jednoduchého tónu ještě dvě vyšší harmonické složky, které mají vzhledem k základnímu tónu různý fázový posuv. Šestero harmonických kmitů bez fázového posuvu lze tedy nahradit třemi harmonickými kmity fázově posunutými.

Zajímavé je zjištění Helmholtzovo, že fázové posunutí, které může podstatně změnit časový průběh kmitu, nemá podstatný vliv na jakost vnímaného zvuku. Souvisí to asi s tím, že ucho slyší i v akordu přímo jednotlivé tóny, tedy vnímá přímo harmonické složky, a nikoli výsledný kmit jako celek.

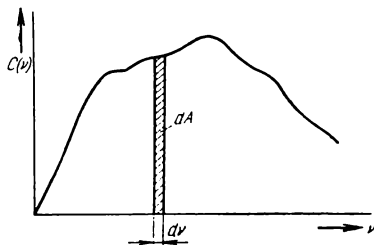
Znáznorníme-li jednotlivé harmonické složky, obsažené ve vyšetřovaném kmitu, řadou svislých úseček, jejichž vodorovné vzdálenosti udávají kmitočty a jejichž délky jsou úměrny amplitudám, dostaneme tzv. *frekvenční spektrum* složeného kmitu. Spektrum houslového tónu z předešlého příkladu je na obr. (3.1) 11. Spektrum samo nestačí ovšem k úplnému popisu studovaného kmitu, zvláště jeho časového průběhu. Jak jsme viděli, je k tomu třeba ještě znát fázová posunutí jednotlivých harmonických složek, která ve spektru nejsou patrná. V mnoha případech nás však spektrum dostatečně poučuje o vlastnostech vyšetřovaného kmitu, např. jde-li o barvu zvuku (čl. 3.3.2) apod.



Obr. (3.1) 10. Průběh tlaku zvukové vlny tónu houslí a jeho harmonické složky



Obr. (3.1) 11. Spektrum houslového tónu na obr. (3.1) 10



Obr. (3.1) 12. Příklad na spojité frekvenční spektrum

Periodické kmity mají vždy čárová spektra, naproti tomu neperiodické děje charakterizuje spektrum spojité vyznačující se tím, že spektrální čáry se nekonečně hustě k sobě kupí a vyplňují spojité buďto celý frekvenční obor od nulové frekvence až po frekvenci rostoucí nade všechny meze, nebo jen některé frekvenční obory [obr. (3.1) 12]. U spojitého

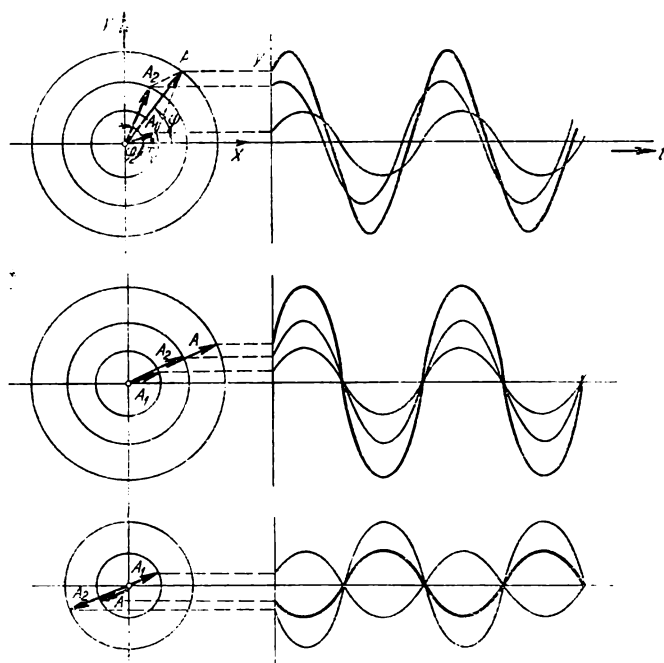
spektra nemají však pořadnice příslušející jednotlivým frekvencím jednoduchý význam amplitudy jako u čárového spektra. Kdyby totiž při znázornění kmitavého děje součtem obecně nekonečného počtu kmitavých pohybů každému z nich příslušela amplituda konečné velikosti, pak by energie výsledného děje rostla nade všechny meze, protože energie kmitání je přímo úměrná čtverci amplitudy, jak jsme poznali v čl. 3.1.2. Výsledný kmitavý pohyb má zajisté energii konečné velikosti, a proto může mít amplituda každého dílčího děje o frekvenci ν jen elementární velikost dA , která je znázorněna elementární ploškou omezenou křivkou grafu spojitého spektra a elementárním intervalem $d\nu$ obsahujícím frekvenci ν . Pořadnice spojitého spektra $C(\nu)$ vyjadřuje tedy diferenciální podíl

$$C(\nu) = \frac{dA}{d\nu},$$

který můžeme nazvat *spektrální hustotou amplitud* spojitého frekvenčního spektra. Číselně udává amplitudu připadající na frekvenční pásmo o šířce 1 Hz.

3.1.5. Skládání kmitů stejných a blízkých period

Zvláštním případem souměřitelných period jsou stejné periody dílčích harmonických kmitů $T_1 = T_2 = T$. Výsledné kmitání složené z takovéhoto dílčích kmitů má pak ovšem také touž periodu a představuje zase jednoduché harmonické kmitání. Poznáme to nejlépe



Obr. (3.1) 13. Skládání stejnosměrných kmitů se stejnými periodami

při znázornění dílčích kmitů průmětem koncového bodu rotujícího vektoru, jehož délka je rovna příslušné amplitudě [obr. (3.1) 13]. Mají-li dílčí kmitů amplitudy A_1 a A_2 a fázové posunutí φ_1 a φ_2 , pak výsledné kmitání má amplitudu určenou vektorem $A = A_1 + A_2$ a fázové posunutí φ , které je dáno polohou vektoru A vzhledem k poloze, zvolené pro všechny kmitů jako poloha základní. Otáčejí-li se vektory A_1 a A_2 stejnou úhlovou rychlostí $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi/T_1 = 2\pi/T_2$, pak vektor výsledné amplitudy má stálou velikost a otáčí se touž úhlovou rychlostí, z čehož už je zřejmé, že výsledné kmitání je zase harmonické. Mají-li dílčí kmitů stejné fáze, tj. $\varphi_1 = \varphi_2$, má výsledná amplituda největší hodnotu rovnou prostému součtu velikostí obou částečných amplitud; mají-li dílčí kmitů fáze li-

šící se o π , pak výsledná amplituda se rovná rozdílu částečných amplitud. Fázové posunutí výsledného kmitání je shodné s fázovým posunutím dílčího kmitání s větší amplitudou. Kdyby dílčí kmitů se vzájemným posunutím $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ měly stejné amplitudy, zrušily by se navzájem.

K početnímu řešení skládání stejnosměrných kmitů téže periody je nejvýhodnější znázornění kmitů komplexními čísly. Popisují-li podle 3.1 (20) dílčí kmitý imaginární části komplexních čísel $A_1 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}$ a $A_2 = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}$, pak výsledné kmitání je popsáno rovněž imaginární částí součtu obou komplexních čísel, tedy

$$A = A_1 + A_2 = (A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2}) e^{j\omega t}.$$

Výraz v závorce

$$\begin{aligned} A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2} &= A_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) + A_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) = \\ &= (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) + j (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) = a + jb \end{aligned}$$

můžeme jakožto komplexní číslo psát $A e^{j\varphi_0}$, takže rovnice výsledného kmitání je

$$A = A e^{j\varphi_0} e^{j\omega t} = A e^{j(\omega t + \varphi_0)} = A / \omega t + \varphi_0.$$

Použijeme-li vzorce 3.1 (17) a oddělíme-li imaginární část, dostaneme pro výsledné kmitání

$$\text{Im}(A) = y = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

kde velikost A výsledné amplitudy a fázové posunutí φ_0 výsledného kmitání jsou určeny vzorcem 3.1 (14), tedy $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ a $\text{tg } \varphi_0 = b/a$.

Zvláštní jev nastane při skládání dvou kmitání, jejichž frekvence ν_1 a ν_2 ($\nu_1 > \nu_2$) se jen málo navzájem liší, ale přitom jsou souněritelné. Pro jednoduchost předpokládejme, že dílčí kmitání mají stejnou amplitudu A . Protože je rozdíl fází dílčích kmitů proměnný, můžeme za okamžik, od něhož měříme čas, zvolit okamžik, v němž mají oba dílčí kmitý stejnou fázi φ . Výsledné kmitání má pak okamžikovou výchylku

$$3.1 (35) \quad y = A \sin(2\pi\nu_1 t + \varphi) + A \sin(2\pi\nu_2 t + \varphi),$$

a užijeme-li známého vztahu pro součet sinů dvou úhlů, dostaneme pro výsledné kmitání

$$3.1 (36) \quad y = 2A \cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t \sin \left(2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t + \varphi \right).$$

Obecně je to složitý časový průběh, který má však jednoduchý fyzikální význam, je-li právě rozdíl frekvencí $\nu_1 - \nu_2$ dílčích kmitů malý proti jejich velikosti. Pak se první činitel v hořejší rovnici,

$$A' = 2A \cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t,$$

mění s malou frekvencí

$$\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} = \nu_0,$$

kdežto druhý činitel se mění s velkou frekvencí, rovnou průměrné frekvenci obou kmitů

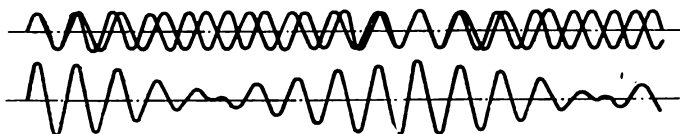
$$\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = \nu \approx \nu_1 \approx \nu_2.$$

Výsledné kmitání

$$y = A' \sin(2\pi\nu t + \varphi) = A' \sin(\omega t + \varphi)$$

lze tedy pokládat za sinusové kmitání s průměrnou frekvencí ν , jehož amplituda kolísá mezi nulou a $2A$ s periodou $T_0 = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2}{\nu_1 - \nu_2}$, jak je nakresleno na obr. (3.1) 14 pro $\nu_1 = 10 \text{ s}^{-1}$ a $\nu_2 = 9 \text{ s}^{-1}$. V horní části obrázku je znázorněn každý kmit zvlášť, ve spodní části průběh výsledného kmitání. Vidíme, že výsledné kmitání má periodu T zhruba rovnou oběma blízkým periodám T_1 a T_2 skládaných kmitů a jeho amplituda se mění s mnohem

menší periodou T_0 , během níž dosahuje absolutní hodnota amplitudy dvakrát největší hodnoty, tedy za sekundu $2\nu_0 = (\nu_1 - \nu_2)$ -krát. Z obrázku je zřejmé, že dílčí kmity se navzájem zesilují, jsou-li ve stejné fázi, a že se navzájem ruší při opačné fázi. Za sekundu předběhnou kmity o větší frekvenci ν_1 celkem $(\nu_1 - \nu_2)$ -krát pomalejší kmity o frekvenci ν_2 a právě tolikrát za sekundu se dílčí kmity setkají ve stejné fázi a zesilují se. Tento výsledek lze



Obr. (3.1) 14. Vznik rázů (záznějů)

vyslovit takto: Složením dvojího kmitání blízkých souměřitelných kmitočtů vznikne kmitání s průměrnou frekvencí, a to kmitání nárazové. V akustice nazýváme tento jev *rázy* nebo *zázněje* a říkáme, že počet rázů za sekundu je rovný rozdílu frekvencí skládaných kmitů.

Rázy lze snadno demonstrovat dvěma málo rozladěnými ladičkami. Znějí-li obě ladičky současně, splývá zvuk v jediný tón, který se však střídavě zesiluje a zeslabuje, ježto intenzita zvuku je úměrná čtverci výsledné amplitudy; sluchu se zdá, jako by výsledný tón střídavě vyrážel, a z toho plyne název tohoto jevu. V akustice jsou rázy důležitou pomůckou pro čisté sladení dvou tónů. Dva poněkud rozladěné tóny ladíme tak, aby se rázy, které při současném znění zřetelně slyšíme, zvolňovaly. Vymizí-li rázy, jsou oba tóny dokonale sladěny.

3.1.6. Skládání různosměrných kmitů

Výchylka bodu, který koná zároveň několik kmitů různosměrných, je podle principu superpozice v každém okamžiku vektorovým součtem jednotlivých výchylek. Mají-li dílčí kmity periody souměřitelné, opakuje se vždy pohyb po jisté době znovu a znovu; je to zase periodický kmit, který obecně probíhá prostorovou uzavřenou křivkou. Nejsou-li periody souměřitelné, je výsledný kmit neperiodický, pohyb se neopakuje přesně stejným způsobem. I když se bod vrátí do bodu, kterým již dříve prošel, nemá v obou případech stejný směr a rychlost. Dráha se tak neustále mění, a vyplnila by v dosti dlouhé době postupně jistý uzavřený prostor libovolně hustě. Při skládání dvou lineárních kmitů nesouměřitelných period pokryje stopa bodu část roviny hustou sítí proběhnutých částí dráhy, která se podobá jemné tkanině. Teprve když se podaří dosti přesně vyladit oba kmity tak, aby jejich periody byly v poměru malých celých čísel, dostaneme poměrně jednoduché uzavřené křivky, zvané *Lissajousovy obrazce*.

Vyšetříme pohyb, který vznikne složením dvou harmonických kmitů stejných amplitud a stejných úhlových frekvencí v navzájem kolmých osách X a Y . Je-li φ_0 fázový rozdíl mezi oběma kmity, můžeme je vyjádřit rovnicemi

$$x = A \sin \omega t, \quad y = A \sin (\omega t + \varphi_0).$$

Rovnici dráhy dostaneme, vyloučíme-li z obou rovnic čas t :

$$y = A (\sin \omega t \cos \varphi_0 + \cos \omega t \sin \varphi_0) = \cos \varphi_0 \cdot A \sin \omega t + \sin \varphi_0 \sqrt{A^2 - A^2 \sin^2 \omega t} = \cos \varphi_0 \cdot x + \sin \varphi_0 \sqrt{A^2 - x^2}.$$

Tak dostáváme vztah mezi x a y , který vyjadřuje dráhu bodu:

$$\sin \varphi_0 \sqrt{A^2 - x^2} = y - x \cos \varphi_0.$$

Umocněním této rovnice plyne po úpravě

$$x^2 - 2xy \cos \varphi_0 + y^2 = A^2 \sin^2 \varphi_0;$$

to je rovnice elipsy v pravouhlých souřadnicích, jejíž tvar závisí na fázovém rozdílu φ_0 .

Jestliže fázový rozdíl mezi oběma dílčími kmity $\varphi_0 = 0$, dostaneme

$$y = x.$$

To je rovnice přímky svírající s osou X úhel $\pi/4$, obr. (3.1) 15a. Je-li naproti tomu $\varphi_0 = \pi$, dostaneme rovněž přímku

$$y = -x,$$

kteřá je k první přímce kolmá (obr. e). Složením dvojích navzájem kolmých kmitů se stejnými nebo opačnými fázemi tedy harmonické kmitání v přímce půlí úhel obou částečných kmitů.

Je-li fázový rozdíl skládaných kmitů $\varphi_0 = \pi/2$ nebo $(3/2)\pi$, vychází pro dráhu výsledného kmitu

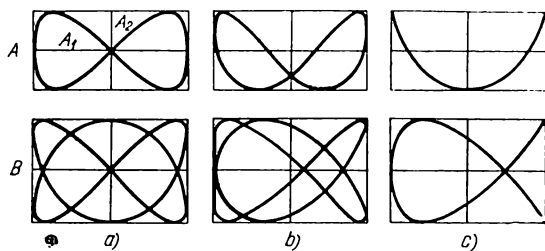
$$x^2 + y^2 = A^2,$$

což je rovnice kružnice o poloměru rovném amplitudě A skládaných kmitů.

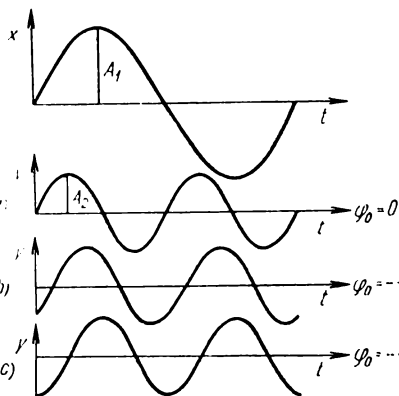
Vznikají *kmitý kruhové* neboli *cirkulární*, při nichž se bod pohybuje rovnoměrně po kružnici, a to buď ve směsu pohybu hodinových ručiček (*pravotočivý kruhový kmit*), nebo v opačném směsu (*levotočivý kruhový kmit*) podle toho, zda fázový rozdíl je $\pi/2$, nebo $(3/2)\pi$, jak se můžeme snadno přesvědčit z obr. c. Dílčí kmitý jsou v prvním případě

$$x = A \sin \omega t, \quad y = A \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = A \cos \omega t,$$

tj. v okamžiku $t = 0$ má kmitající bod ve směru X nulovou výchylku a ve směru Y výchylku A (bod B_1). V dalším okamžiku vznikne kladná výchylka x , avšak výchylka y , která se mění podle kosinusoidy, se zmenší, takže kmitající bod



Obr (3.1) 16. Lissajousovy obrazce

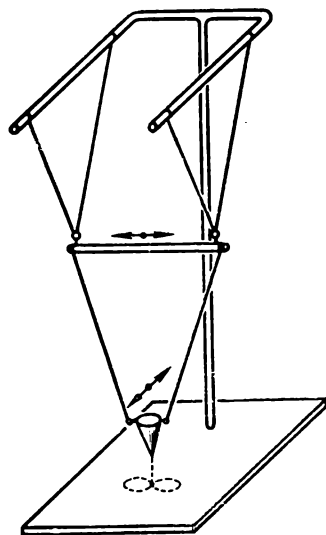


Obr. (3.1) 17. Časové rozvinutí částečných kmitů Lissajousových obrazců na obr. (3.1) 16a

bude v B_2 . Vzniká tedy v případě fázového posuvu $\varphi_0 = \pi/2$ pravotočivý kruhový kmit.

Je-li $\varphi_0 = \frac{3}{2}\pi$, $y = -A \cos \omega t$, tj. kmitající bod má v okamžiku $t = 0$ výchylku $y = -A$ a je v místě B_3 . V dalším okamžiku vznikne zase kladná výchylka x a menší výchylka y v záporném směru, takže bod se pohybuje v opačném směsu než hodinové ručičky.

Je-li fázový rozdíl φ_0 mezi oběma dílčími kmity v mezích $0 < \varphi_0 < \pi/2$ nebo $\frac{3}{2}\pi < \varphi_0 < 2\pi$, vznikají *kmity eliptické* znázorněné na obr. (3.1) 15b, a to v případě prvním ve smyslu pohybu hodinových ručiček (pravotočivé) v druhém případě ve smyslu opačném (levotočivé). Je-li naproti tomu fázový rozdíl φ_0 v mezích



Obr. (3.1) 18. Blackburnovo kyvadlo

$\pi/2 < \varphi_0 < \pi$ nebo $\pi < \varphi_0 < \frac{3}{2}\pi$, vznikají eliptické kmity na obrázku d, a to v prvním případě pravotočivé a v druhém levotočivé.

Mají-li vzájemně kolmé kmity různé periody i různé amplitudy, pak jejich složením vzniknou dráhy složitějšího tvaru. Takové složitější kmity jsou znázorněny na obr. (3.1) 16A pro poměr frekvencí $\nu_1 : \nu_2 = 1 : 2$ a pro poměr amplitud $A_1 : A_2 = 2 : 1$ ($A_1 = 2A_2$). U kmitů na obr. B je poměr frekvencí $\nu_1 : \nu_2 = 2 : 3$ a poměr amplitud $A_1 : A_2 = 3 : 2$ ($2A_1 = 3A_2$). První obrazce a) přísluší vždy případu, že oba částečné kmity současně začínají ve středu obrazce. Křivky c) vzniknou tehdy, jestliže oba částečné kmity probíhají současně krajní polohou. Časové rozvinutí částečných kmitů v řádku A je na obr. (3.1) 17. Je zřejmé, jak s fázovým posunutím φ_0 kmitů v Y-ovém směru vzhledem ke kmitům ve směru X přechází jeden tvar obrazce v druhý.

Lissajousovy obrazce lze demonstrovat jednoduchými přístroji. Nejznámější je tzv. *Blackburnovo kyvadlo* [obr. (3.1) 18]; je to přibližně matematické kyvadlo, jehož závěsná vlákna se dělí na dvě části, které kývají ve dvou k sobě kolmých rovinách. Spodní část kývá kolmo k nákrese a horní v rovině papíru. Z nádoby vytékající písek vytvoří obrazec různý podle poměru délek obou částí kyvadla.

3.1.7. Tlumené kmity

Volné harmonické kmity není možno přesně realizovat. Ukazuje se totiž, že amplituda kmitů, o níž jsme předpokládali, že je stálá, s časem klesá; říkáme, že kmity jsou tlumeny. Příčinou je odpor prostředí, v němž se kmity dějí, nejčastěji odpor vzduchu nebo nějaké kapaliny. Avšak i kdyby oscilátor (např. těleso na pružině) kmital ve vakuu, byly by kmity tlumeny, amplituda kmitů by se zmenšovala, protože k překonávání vnitřního tření v materiálu tělesa tvořícího pružnou vazbu je třeba jistého množství energie. Při každém cyklu se celková energie kmitů zmenší o množství, které se spotřebuje na překonávání odporů, a tím celková energie kmitů postupně klesá. Má-li se kmitavý pohyb udržet, je třeba ztráty na energii doplňovat z vnějšího zdroje. Tím se budeme zabývat v následujícím článku. Vyšetřeme nejprve, jak se mění harmonické kmity, nedoplňuje-li se energie spotřebovaná na překonávání odporů.

Při pohybu v odporujícím prostředí je odpor R velmi často úměrný rychlosti a působí ovšem v opačném smyslu, než má rychlost:

$$R = -Bv = -B \frac{dy}{dt},$$

kde B je konstanta úměrnosti mezi odporem a rychlostí kmitajícího tělesa. K síle $F = -Ky$, kterou na oscilátor působí harmonická vazba, přistupuje tedy další časově proměnná

síla R . Obě síly leží v téže přímce, takže na oscilátor působí jejich výslednice, rovná jejich součtu $R + F$. Pohybová rovnice pro tlumený kmitavý pohyb tedy zní

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = R + F = -B \frac{dy}{dt} - Ky.$$

nebo dosadíme-li $B/m = 2b$ a $K/m = \omega^2$, dostaneme

$$3.1 (37) \quad \boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0.}$$

To je diferenciální rovnice tlumeného kmitavého pohybu.

Je to lineární homogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty u proměnných ($1, 2b$ a ω^2). Každé takové rovnici libovolného řádu vyhovuje integrál

$$3.1 (38) \quad y = C e^{\alpha t},$$

jestliže α je kořen tak zvané *charakteristické rovnice*, která vznikne dosazením 3.1 (38) do diferenciální rovnice 3.1 (37). Rovnice obsahuje jedinou integrační konstantu C a je jejím partikulárním řešením. Obecné řešení diferenciální rovnice n -tého řádu musí obsahovat n obecných nezávislých konstant a dostaneme je součtem všech partikulárních řešení:

$$3.1 (39) \quad y = \sum_{i=1}^n C_i e^{\alpha_i t}.$$

Dosadíme-li partikulární integrál 3.1 (38) do rovnice (37), dostaneme po krácení

$$3.1 (40) \quad \alpha^2 + 2b\alpha + \omega^2 = 0.$$

Charakteristická rovnice je tedy v našem případě kvadratická a její kořeny

$$3.1 (41) \quad \alpha_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega^2}, \quad \alpha_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

poskytují dva partikulární integrály

$$y_1 = C_1 e^{\alpha_1 t}, \quad y_2 = C_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Obecné řešení diferenciální rovnice 3.1 (37) je tedy podle (39)

$$3.1 (42) \quad y = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}.$$

O tom, jaký pohyb vznikne, rozhodují kořeny α_1 a α_2 charakteristické rovnice, resp. poměr jejich konstant b a ω .

Jestliže $b/\omega < 1$, $b < \omega$, jsou oba kořeny komplexní:

$$\alpha_1 = -b + j\sqrt{\omega^2 - b^2}, \quad \alpha_2 = -b - j\sqrt{\omega^2 - b^2},$$

nebo položíme-li

$$3.1 (43) \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2},$$

mají kořeny tvar

$$\alpha_1 = -b + j\omega_1, \quad \alpha_2 = -b - j\omega_1.$$

Dosadíme-li je do 3.1 (42), pak obecný integrál diferenciální rovnice v tomto případě je

$$3.1 (44) \quad y = e^{-bt}(C_1 e^{j\omega_1 t} + C_2 e^{-j\omega_1 t}).$$

Abychom tento výsledek mohli vhodně vyložit, použijeme známých Eulerových vzorců

$$e^{j\omega_1 t} = \cos \omega_1 t + j \sin \omega_1 t, \quad e^{-j\omega_1 t} = \cos \omega_1 t - j \sin \omega_1 t.$$

Dosadíme-li z nich do 3.1 (44), dostaneme

$$\begin{aligned} y &= e^{-bt} (C_1 \cos \omega_1 t + jC_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t - jC_2 \sin \omega_1 t) = \\ &= e^{-bt} [j(C_1 - C_2) \sin \omega_1 t + (C_1 + C_2) \cos \omega_1 t]. \end{aligned}$$

C_1 a C_2 jsou libovolné integrační konstanty, takže můžeme místo nich zavést nové konstanty

$$j(C_1 - C_2) = A_z, \quad C_1 + C_2 = A_y;$$

dostaneme tak

$$y = e^{-bt}(A_z \sin \omega_1 t + A_y \cos \omega_1 t).$$

Výraz v závorkách je totožný s vyjádřením 3.1 (9) volných (netlumených) harmonických kmitů; položíme tedy analogicky s 3.1 (10)

$$A_z = A \cos \varphi_0, \quad A_y = A \sin \varphi_0,$$

kde nyní A a φ_0 jsou integrační konstanty.

Je-li konstanta $b < \omega$, má diferenciální rovnice tlumených kmitů řešení

$$3.1 (45) \quad y = Ae^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2}.$$

Srovnáním s rovnicí volných harmonických kmitů vidíme, že při $b < \omega$ vzniká kmitavý pohyb o stálé frekvenci ω_1 ; jeho amplituda A_1 však není stálá, ale zmenšuje se s časem podle vztahu

$$A_1 = A e^{-bt},$$

což je charakteristickým znakem tlumených kmitů. Jejich úhlová frekvence ω_1 je menší než vlastní úhlová frekvence ω , jakou by měl oscilátor, kdyby nebyl tlumen. Pohyb se tedy děje pomaleji, doba kmitu je větší:

$$3.1 (46) \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}.$$

Velikost konstanty b má tedy podstatný vliv na vzniklý pohyb; nazývá se *konstanta útlumu* a má stejný rozměr jako úhlová frekvence.

V okamžiku $t = 0$ je $y_0 = A \sin \varphi_0$. Udává tedy A amplitudu, jakou by měly volné netlumené kmity, a φ_0 počáteční fázi nebo fázové posunutí kmitů. Jestliže oscilátor vychýlíme z rovnovážné polohy a měříme čas od okamžiku, v němž jej uvolníme, pak pro $t = 0$ jsou $y = A$ a $\varphi_0 = \pi/2$. Pohyb, který vznikne, popisuje potom rovnice

$$y = A e^{-bt} \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) = A e^{-bt} \cos \omega_1 t.$$

Příslušný časový průběh je znázorněn na obr. 3.1 (19) pro případ, že $b/\omega = 0,2$. Na začátku pohybu má oscilátor výchylku A . Po uplynutí jednoho cyklu ($t = T_1$) má výchylku $A_1 = A e^{-bT_1}$, ježto $\cos \omega_1 T_1 = \cos \omega_1 \frac{2\pi}{\omega_1} = 1$. Poměr obou krajních výchylek na touž stranu $A/A_1 = e^{bT_1}$ je konstantní; jak se snadno přesvědčíme, je tomu tak pro kterékoli dvě krajní výchylky po sobě následující na touž stranu. Tomuto stálému poměru, který je bezrozměrný, říkáme *útlum* λ :

$$\lambda = e^{bT_1} = e^{\frac{2\pi b}{\omega_1}}.$$

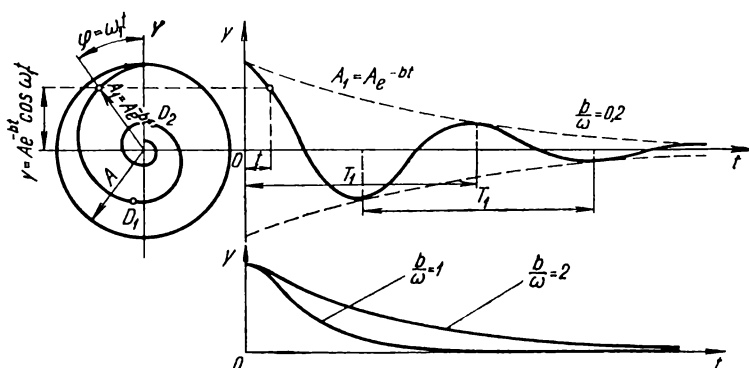
Přirozený logaritmus útlumu nazýváme *logaritmickým dekrementem* δ :

$$\delta = \ln \lambda = bT_1 = 2\pi \frac{b}{\omega_1}.$$

Tlumené kmity si můžeme podobně jako netlumené znázornit pravouhlým průmětem vektoru A_1 , otáčejícího se stálou úhlovou rychlostí ω_1 kolem rovnovážné polohy do směru kmitů, při čemž ovšem velikost vektoru A_1 není stálá, ale zmenšuje se s časem podle vztahu $A_1 = A e^{-bt}$. Koncový bod vektoru A_1 neopisuje tedy kružnici jako u netlumených kmitů, nýbrž spirálu, jak je pro případ kmitů začínajících při největší výchylce z rovnovážné polohy znázorněno na obr. (3.1) 19. Středový úhel vektoru A_1 se tu měří od směru kmitů $\varphi = \omega_1 t$, takže závislost velikosti vektoru A_1 na středovém úhlu můžeme psát

$$A_1 = A e^{-\frac{b}{\omega_1} \varphi}.$$

Z obrázku je zřejmé, že maximální výchylka z rovnovážné polohy na opačnou stranu, než je počáteční výchylka, ani další maximální výchylky nevznikají v místech, v nichž spirála protíná souřadnicovou osu, do níž pohyb vektoru A_1 promítáme; vznikají v místech D_1 , D_2 atd., tedy o něco dříve, než vektor A_1 dosáhne této osy. Časový průběh kmitů není už souměrný podle přímkou procházející vrcholem průběhu kolmo k časové ose; časová odlehlost mezi krajními



Obr. (3.1) 19. Tlumený kmitavý pohyb

výchylkami i mezi průchody oscilátoru rovnovážnou polohou je přitom však stálá a rovná $T_1/2$. Z tohoto hlediska má tlumený kmitavý pohyb vlastnost periodického pohybu. Protože se však následkem zmenšování amplitudy výchylky i rychlosti žádný stav kmitání neopakuje, je tlumené kmitání *pseudoperiodickým pohybem*.

Vzroste-li tlumení tou měrou, že konstanta útlumu je větší než vlastní úhlová frekvence oscilátoru $b > \omega$, pak úhlová frekvence ω_1 tlumených kmitů má podle 3.1 (45) imaginární hodnotu, tzn. že nevzniknou žádné reálné kmity. Položíme-li

$$\beta_1 = b + \sqrt{b^2 - \omega^2}, \quad \beta_2 = b - \sqrt{b^2 - \omega^2},$$

má podle 3.1 (42) příslušná pohybová rovnice řešení

$$y = C_1 e^{-\beta_1 t} + C_2 e^{-\beta_2 t}.$$

Znamená to, že nastává pohyb, při němž je závislost výchylky na čase dána superpozicí dvou exponenciálních křivek, které se s rostoucím časem asymptoticky blíží hodnotě $y = 0$. Při velkém tlumení se tedy oscilátor vychýlený z rovnovážné polohy do ní pozvolna vrací zpět, aniž ji překročí. Takovému pohybu říkáme pohyb *aperiodický*. Je znázorněn na obr. (3.1) 19 pro případ, kdy na začátku má oscilátor největší výchylku z rovnovážné polohy a nulovou rychlost.

Mezním případem aperiodického pohybu bude patrně ten, ve kterém právě $b = \omega$, tj. kdy konstanta útlumu má stejnou hodnotu jako vlastní úhlová frekvence volného kmitání.

V tomto případě jsou kořeny 3.1 (41) charakteristické rovnice stejné, takže popsaným postupem řešení diferenciální rovnice 3.1 (37) dostaneme pouze jeden partikulární integrál

$$y_1 = C_1 e^{-bt}.$$

Diferenciální rovnici vyhovuje však také integrál

$$y_2 = C_2 t e^{-bt},$$

jak se snadno přesvědčíme zpětným dosazením, takže obecné řešení rovnice 3.1 (37) má v mezním případě aperiodického pohybu tvar

$$3.1 (47) \quad y = y_1 + y_2 = C_1 e^{-bt} + C_2 t e^{-bt} = (C_1 + C_2 t) e^{-bt}.$$

Integrační konstanty se určí z počátečních podmínek. Má-li oscilátor v okamžiku $t = 0$ výchylku z rovnovážné polohy $y_0 = A$ a nulovou rychlost $v_0 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} y_0 = C_1 = A, \quad \frac{dy}{dt} = C_2 e^{-bt} - b(C_1 + C_2 t) e^{-bt}, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = \\ = C_2 - bC_1 = 0, \quad C_2 = bA, \end{aligned}$$

takže po dosazení konstant C_1 a C_2 do obecného řešení 3.1 (47) vychází pro tento zvláštní případ

$$y = A e^{-bt} (1 + bt).$$

Průběh je znázorněn též na obr. (3.1) 19. Pozorujeme, že výchylka se periodicky zmenšuje, avšak oscilátor se rovnovážné poloze blíží rychleji než při $b > \omega$. V obou případech se však oscilátor vrací do rovnovážné polohy asymptoticky, tj. teoreticky by jí měl dosáhnout až po nekonečně dlouhé době. Při mezním pohybu je však výchylka v době $t = T$ (kde T je perioda volného kmitání) již poměrně malá:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = b, \quad y = A e^{-\frac{2\pi}{T} T} \left(1 + \frac{2\pi}{T} T\right) = A e^{-2\pi}(1 + 2\pi) = 0,014A,$$

tj. asi 1,4 % výchylky A z rovnovážné polohy. Avšak při $t = (3/2) T$ je $y = 0,0001A$, tj. 0,1 ‰ maximální výchylky, tedy výchylka většinou již neměřitelná. Podobným výpočtem se přesvědčíme, že při větším tlumení než mezním ($b > \omega$) je doba potřebná k dosažení rovnovážné polohy v mezích přesnosti měření delší.

Tohoto mezního případu kmitavého pohybu je užito u měřicích přístrojů ručkového typu (galvanometrů, ampérmetrů apod.), u nichž chceme dosáhnout rovnovážné polohy příslušející měřené veličině (např. napětí elektrického proudu) co nejrychleji, bez kývání ručky. Jde tu zpravidla o tlumené torzní kmity. Jejich řešení je zcela stejné jako u lineárního oscilátoru.

3.1.8. Nucené kmity oscilátoru

V předchozím článku bylo vyloženo, že kmitá-li oscilátor v odporujícím prostředí, zmenší se při každém cyklu celková energie kmitů o množství, jehož je třeba k překonání odporů, a že za nějaký čas kmity vymizí. Chceme-li je udržet, musíme z vnějšího zdroje doplňovat energii, kterou oscilátor při každém cyklu pozbude; lze to provést prací vnější síly. Nemůže to však být stálá síla, neboť celková práce stálé síly je během jednoho cyklu rovna nule. Při pohybu oscilátoru [obr. (3.1) 20] z krajní polohy 1 do druhé krajní polohy 2 ve smyslu stálé vnější síly $F_v = Q$ vykoná tato síla práci $2QA$, je-li A amplituda kmitání, avšak při zpětném pohybu z polohy 2 do polohy 1 bude její práce $-2QA$, protože oscilátor se pohybuje v opačném smyslu, než v jakém působí síla Q . Celková práce stálé síly $2QA - 2QA$ je tedy rovna nule. Takovým způsobem nelze měnit celkovou energii kmitů, jak jsme již řekli v čl. 3.1.2. Stálá síla způsobí pouze posunutí rovnovážné polohy oscilátoru o $y_0 = Q/K$, kde K je tuhost pružné vazby. Celková práce bude však od nuly rozdílná, mění-li vnější síla svůj smysl vždy tak, aby působila ve smyslu pohybu. Protože pohyb oscilátoru je periodický, musí mít také vnější působící síla periodický časový

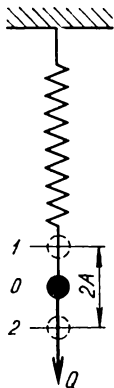
průběh, aby svou prací mohla oscilátoru trvale dodávat energii. Nejjednodušší periodicky proměnná síla má sinusový průběh

$$3.1 \quad (48) \quad F_v = Q \sin \Omega t,$$

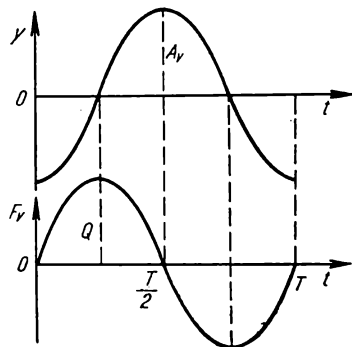
kde Q je její amplituda a Ω její úhlová frekvence. Jsou-li kmity oscilátoru vzhledem k časovému průběhu této síly ve fázi opožděny o čtvrt periody a má-li síla touž frekvenci jako oscilátor, pak působí stále ve směru pohybu oscilátoru, jak je zřejmé z obr. (3.1) 21.

Oscilátor se pohybuje z maximální záporné výchylky do maximální kladné výchylky a v této polovině periody má síla kladnou hodnotu, mříí tedy ve směru pohybu. V další polovině periody se oscilátor pohybuje z maximální kladné výchylky do maximální záporné výchylky a také síla F_v mění svůj smysl tak, že zase působí ve směru pohybu oscilátoru. Síla F_v , která má svůj původ mimo pružnou vazbu oscilátoru, koná tedy během celého cyklu kladnou práci. Od okamžiku, kdy začne působit, roste amplituda kmitů oscilátoru i jeho energie, která je úměrná čtverci amplitudy, a to až do té doby, kdy všechna práce vnější síly se spotřebuje na přemáhání odporů, jimiž se kmity tlumí. Pak dosahují amplituda a přibližně také energie kmitů ustálené hodnoty.

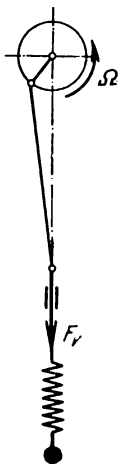
Nebýt vnější síly působící na oscilátor, oscilátor by buďto vůbec nekmital, nebo kdybychom jej jednorázovým působením rozkmitali, zanikly by časem vlivem tlumení jeho kmity. Kmitavý pohyb, který může oscilátor působením vnější časově proměnné síly konat libovolně dlouho, má tedy svůj původ v této síle, a proto příslušné kmitání je *nuceným kmitáním*. Vnější časově proměnná síla, která nucené kmitání způsobuje, nazývá se *síla budící*. Důležitý případ, o němž jsme dosud jednali, tj. že budící síla má touž frekvenci jako vlastní kmity oscilátoru, nazývá se *rezonance*. Při rezonanci je vliv budící síly na oscilátor největší, protože síla působí stále ve směru pohybu oscilátoru. Není-li budící síla naladěna na vlastní frekvenci oscilátoru, koná sice oscilátor také nucené kmity v témž rytmu, v němž na něj působí budící síla, jejich intenzita je však menší než při rezonanci. Je to proto, že mezi budící silou a nucenými kmity vznikne jiné fázové posunutí než $\pi/2$ jako při rezonanci, takže budící síla už nepůsobí stále ve směru pohybu, nýbrž v některých částech pohybu působí i proti němu. Je to zřejmé z obr. (3.1) 21, posuneme-li na něm v duchu sinusovku budící síly F_v poněkud



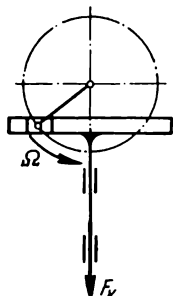
Obr. (3.1) 20. Působení stálé síly na oscilátor



Obr. (3.1) 21. Časový průběh budící síly a výchylky nucených kmitů oscilátoru při rezonanci



Obr. (3.1) 22. Realizace periodického průběhu budící síly klikovým mechanismem



Obr. (3.1) 23. Realizace sinusového průběhu budící síly

venci oscilátoru, koná sice oscilátor také nucené kmity v témž rytmu, v němž na něj působí budící síla, jejich intenzita je však menší než při rezonanci. Je to proto, že mezi budící silou a nucenými kmity vznikne jiné fázové posunutí než $\pi/2$ jako při rezonanci, takže budící síla už nepůsobí stále ve směru pohybu, nýbrž v některých částech pohybu působí i proti němu. Je to zřejmé z obr. (3.1) 21, posuneme-li na něm v duchu sinusovku budící síly F_v poněkud doleva nebo doprava.

Budící síla může vzniknout z různých příčin, např. dopadem vlnění na těleso

schopné oscilací. U mechanického modelu oscilátoru, jímž je těleso zavěšené na spirální pružině, lze periodický průběh budící síly realizovat např. klikovým mechanismem nebo kulisou, jak je pro názornost znázorněno na obr. (3.1) 22 a 23.

Vyšetřme početně účinek periodicky proměnné síly 3.1 (48) na harmonický oscilátor. Celkem na něj působí síly: od pružné vazby $-Ky$, odpor prostředí $-B \frac{dy}{dt}$ a vnější síla $Q \sin \Omega t$, takže bude platit pohybová rovnice

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -B \frac{dy}{dt} - Ky + Q \sin \Omega t.$$

Dosadíme-li jako v předešlém článku $2b = B/m$, kde b je konstanta útlumu a $\omega^2 = K/m$, při čemž ω je vlastní úhlová frekvence volných kmitů, jaké by oscilátor konal, kdyby naň kromě pružné vazby nepůsobily jiné časově proměnné síly, pak

$$3.1 (49) \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} + 2bm \frac{dy}{dt} + m\omega^2 y = Q \sin \Omega t.$$

Mimo člen na pravé straně je tato rovnice shodná s diferenciální rovnicí tlumených kmitů. Rušivý člen na pravé straně způsobuje, že rovnice již není homogenní. Její řešení lze provést na základě této věty: *Obecný integrál lineární nehomogenní diferenciální rovnice druhého řádu se skládá z obecného integrálu příslušné homogenní diferenciální rovnice a z partikulárního integrálu úplné nehomogenní rovnice.* Obecný integrál homogenní rovnice, tj. rovnici 3.1 (49) bez pravé strany, známe; v případě, že poměr $b/\omega < 1$, je dán rovnicí 3.1 (45). Zbývá určit partikulární integrál celé rovnice, což se u lineárních rovnic většinou dělá zkusmo. Zvolíme funkci téhož typu, jako je rušivý člen na pravé straně, a neznámé součinitele určíme tak, že tuto funkci dosadíme do úplné diferenciální rovnice; z identické platnosti takto vzniklé rovnice se součinitelé dají vypočítat. Úplné řešení diferenciální rovnice 3.1 (49) nuceného kmitání má tedy tvar

$$y = A e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + A_\gamma \sin(\Omega t + \gamma);$$

zde A a φ_0 jsou integrační konstanty, A_γ a γ jsou konstanty, které musí mít takový tvar, aby druhý člen jako partikulární integrál vyhovoval úplné rovnici. Výsledný pohyb se tedy skládá z tlumeného pohybu, který by oscilátor konal, kdyby periodicky proměnná vnější síla nepůsobila, a z netlumených harmonických kmitů stálé amplitudy a stálého fázového posuvu γ . Výkmit tlumeného pohybu klesá exponenciálně s časem a po uplynutí jisté doby (zakmitávací) zbývají tedy jen netlumené kmity, jejichž frekvence je rovna frekvenci budící periodické síly. Pak koná oscilátor již jen nucené kmity ve stejném rytmu, v jakém naň působí vnější periodicky proměnná síla. Jsou popsány rovnici

$$3.1 (50) \quad y = A_\gamma \sin(\Omega t + \gamma).$$

Ježto amplituda A_γ a fázový posuv nucených kmitů musí mít takové hodnoty, aby partikulární integrál 3.1 (50) vyhovoval úplné diferenciální rovnici 3.1 (49), zjistíme je zpětným dosazením tohoto integrálu do diferenciální rovnice; dostaneme tak

$$-mA_\gamma \Omega^2 \sin(\Omega t + \gamma) + 2bmA_\gamma \Omega \cos(\Omega t + \gamma) + m\omega^2 A_\gamma \sin(\Omega t + \gamma) = Q \sin \Omega t.$$

Tato rovnice musí být splněna pro všechna t . K určení dvou neznámých A_γ a γ stačí tedy volit dva časy tak, aby

$$\Omega t + \gamma = 0, \quad \Omega t + \gamma = \frac{\pi}{2},$$

což vede k rovnicím

$$2bmA_\gamma \Omega = -Q \sin \gamma, \\ -mA_\gamma \Omega^2 + mA_\gamma \omega^2 = Q \sin \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) = Q \cos \gamma.$$

Dělíme-li první rovnici druhou, dostaneme

$$3.1 (51) \quad \operatorname{tg} \gamma = - \frac{2b\Omega}{\omega^2 - \Omega^2},$$

a povýšíme-li je na druhou a sečteme, pak

$$3.1 (52) \quad A_v = \frac{Q/m}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}}.$$

Z rozboru těchto rovnic plyne:

1. Amplituda nucených kmitů je úměrná amplitudě budící síly a nepřímo úměrná hmotnosti oscilátoru.

2. Amplituda nucených kmitů je tím větší, čím menší je rozdíl mezi frekvencí budící síly a vlastní frekvencí oscilátoru a čím menší je útlum.

3. Amplituda nucených kmitů je maximální při takové úhlové frekvenci budící síly, při níž má jmenovatel v 3.1 (52) nejmenší hodnotu. Minimum jmenovatele dostaneme, když položíme derivaci výrazu pod odmocninou podle Ω na roveň nule:

$$-4\Omega(\omega^2 - \Omega^2) + 8b^2\Omega = 0.$$

Tato rovnice má dva kořeny: První kořen $\Omega_1 = 0$ udává zřejmě případ, kdy nevznikají žádné nucené kmity a oscilátor změní pouze svou rovnovážnou polohu o Q/K . Pro něj má jmenovatel hodnotu maximální. Hledanou minimální hodnotu jmenovatele udává tedy druhý kořen

$$3.1 (53) \quad \Omega_2 = \sqrt{\omega^2 - 2b^2}.$$

Při této úhlové frekvenci budící síly dosahuje amplituda nucených kmitů maximální hodnoty. Pozorujeme, že Ω_2 je tím menší než vlastní frekvence ω oscilátoru, čím větší je konstanta útlumu b . Dosadíme-li Ω_2 do 3.1 (52), dostaneme pro maximální hodnotu amplitudy nucených kmitů výraz

$$3.1 (54) \quad A_{v, \max} = \frac{Q}{m} \frac{1}{2b\sqrt{\omega^2 - b^2}} = \frac{Q}{2mb\omega_1},$$

kde ω_1 je úhlová frekvence tlumených kmitů, jaké by oscilátor konal, kdyby naň nepůsobila budící síla.

U netlumeného oscilátoru je $b = 0$, takže maximum amplitudy by mělo nastat při úhlové frekvenci budící síly přesně rovné vlastní frekvenci oscilátoru. V tomto případě však amplituda nucených kmitů roste nade všechny meze ($A_v \rightarrow \infty$), jak je patrné z rovnice 3.1 (52), dosadíme-li do ní $\Omega = \omega$ a $b = 0$. Nekonečně velkých hodnot by ovšem amplituda nucených kmitů dosáhla po uplynutí nekonečně dlouhé doby, neboť periodicky proměnná síla konečné velikosti by musela oscilátoru dodat nekonečné množství energie (které je úměrné čtverci amplitudy), k němuž by bylo třeba nekonečně dlouhé doby. Prakticky se s tímto případem nesetkáme, neboť vždy působí nějaký, byť i malý odpor, takže konstanta útlumu je vždy větší než nula.

Velmi důležitý případ, kdy budící síla má takovou frekvenci, že amplituda nucených kmitů dosahuje maximální hodnoty (působí-li síla dostatečně dlouho), nazýváme *rezonanci* (přesně *amplitudovou rezonanci*) mezi vlastními kmity a budící silou.

4. Kinetická energie oscilátoru při průchodu rovnovážnou polohou nenabývá maximální hodnoty při úhlové frekvenci Ω_2 budící síly, při níž je amplituda nucených kmitů maximální, nýbrž při frekvenci, která je přesně rovna vlastní frekvenci volných kmitů oscilátoru, jak snadno dokážeme. Amplituda rychlosti nucených kmitů je ΩA_v , takže kinetická energie oscilátoru při průchodu rovnovážnou polohou

$$W_k = \frac{1}{2} m \Omega^2 A_v^2.$$

Dosadíme-li ze vzorce 3.1 (52), pak

$$W_k = \frac{Q^2}{2m} \frac{\Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2},$$

a zavedeme-li poměr úhlových frekvencí

$$\frac{\Omega}{\omega} = u,$$

bude kinetická energie při průchodu rovnovážnou polohou

$$W_k = \frac{Q^2}{2m\omega^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{u} - u\right)^2 + 4\left(\frac{b}{\omega}\right)^2}.$$

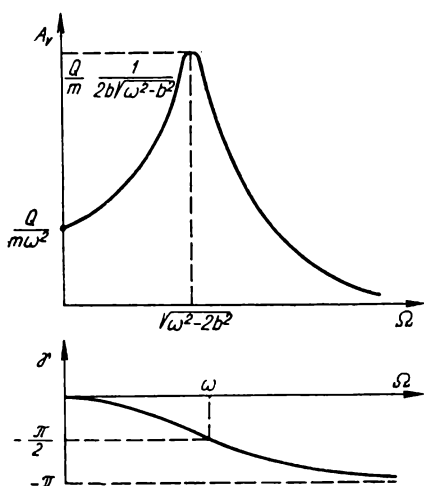
Při jinak stejných poměrech bude mít kinetická energie největší hodnotu, když jmenovatel tohoto výrazu bude nejmenší, což bude pro $1/u - u = 0$, odkud vychází $u = 1$, tedy $\Omega = \omega$. Tento případ můžeme nazvat *rezonancí rychlosti* nucených kmitů. Maximální hodnota kinetické energie je pak

$$3.1 (55) \quad W_{k \max} = \frac{Q^2}{8mb^2}.$$

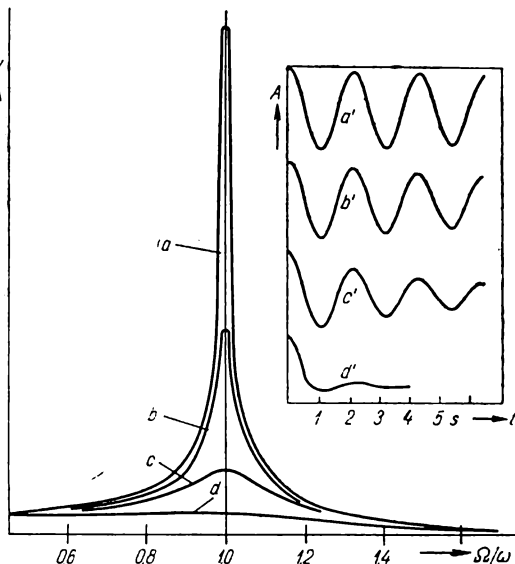
Příčinu, proč nedosahuje amplituda i kinetická energie současně maxima, je možno vidět v tom, že potenciální energie v bodech obratu oscilátoru, úměrná čtverci amplitudy, není totožná s jeho kinetickou energií, kterou má při průchodu rovnovážnou polohou, neboť kmitající soustava není konzervativní (neplatí v ní princip zachování mechanické energie) a k překonávání odporů je třeba jisté energie.

5. Roste-li úhlová frekvence Ω budící síly z hodnoty $\Omega = 0$, nabývá podle 3.1 (51) úhel γ záporné hodnoty; jde tedy vždy o fázové zpoždění mezi nucenými kmity a budící silou. Je-li $\Omega = \omega$, pak $\gamma = -\pi/2$ a blíží se hodnotě $-\pi$, když $\Omega \rightarrow \infty$. Při amplitudové rezonanci je fázový rozdíl mezi nucenými kmity a budící silou dán vztahem

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-\sqrt{\omega^2 - 2b^2}}{b} \cdot \frac{1}{W}$$



Obr. (3.1) 24. Amplituda a fázové posunutí nuceného kmitání v závislosti na úhlové frekvenci budící síly



Obr. (3.1) 25. Křivky rezonance rychlosti při různém útlumu

Tyto výsledky jsou zřejmé z grafického znázornění vzorců 3.1 (51) a (52) na obr. (3.1) 24.

Rezonance má praktický význam pouze při malém tlumení, když konstanta útlumu je značně menší než vlastní úhlová frekvence oscilátoru, $b \ll \omega$. Pak ale můžeme ve vzorci 3.1 (53) pominout $2b^2$ proti ω^2 a můžeme za rezonanci považovat prostě případ, kdy frekvence budící síly je stejně velká jako vlastní frekvence oscilátoru, $\Omega = \omega$, jak se to v praxi zpravidla dělá. Při malém tlumení dosahuje tedy prakticky současně maxima jak amplituda nucených kmitů, která má podle 3.1 (54) přibližnou velikost

$$A_{v \max} \approx \frac{Q}{2mb\omega},$$

tak energie kmitů daná vzorcem 3.1 (55). Fázové posunutí mezi nucenými kmity a budící silou můžeme pak při rezonanci položit rovno $-\pi/2$. Okamžitá výchylka oscilátoru z rovnovážné polohy je potom $y = A_v \sin(\Omega t + \gamma) = A_v \sin(\omega t - \pi/2) = -A_v \cos \omega t$, kdežto budící síla se mění podle vztahu $F_v = Q \sin \omega t$. Příslušné časové průběhy, znázorněné na obr. (3.1) 21, jsme už probrali v hlavním textu. Tím je zodpovězena otázka, jakým způsobem je třeba dodávat energii oscilátoru o hmotnosti m , aby se v odporujícím prostředí, charakterizovaném konstantou

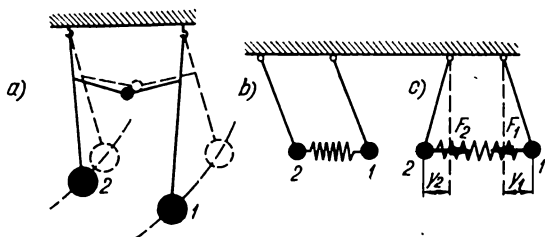
útlumu b , trvale udržely jeho vlastní harmonické kmity o úhlové frekvenci ω a amplitudě A . Je k tomu třeba harmonicky proměnné síly, která je s kmity oscilátoru v rezonanci, tj. má prakticky stejnou frekvenci a fázový předstih o čtvrt periody. Velikost amplitudy budící síly je přitom dána vztahem $Q = 2mb\omega A = 2bA\sqrt{Km}$.

Závislost energie nucených kmitů na budící frekvenci při různém tlumení udávají tzv. *rezonanční křivky*, které jsou tím strmější (rezonance je tím ostřejší), čím menší je tlumení soustavy. Je to patrné z obr. (3.1) 25, na němž jsou experimentální rezonanční křivky a, b, c, d téhož oscilátoru pro čtyři různé případy tlumení, které jsou znázorněny křivkami a', b', c', d' kmitů bez vnějšího buzení. Oscilátor reaguje prakticky jen na úzký obor kmitů (např. dopadajících vln) kolem vlastní frekvence. Lze to pěkně předvést dvěma ladičkami na rezonančních skřínkách. Rozezvučíme-li jednu, dopadá vlnění, které se od ní šíří, na druhou ladičku a rozezvučí ji též, i když je dosti daleko, jestliže je naladěna na přesně též tón. Rezonance nenastane, jsou-li ladičky byt jen nepatrně rozladěny. Chceme-li proto dodat kmitajícímu oscilátoru co největší množství energie, hledíme dosáhnout dokonalé rezonance (sladění).

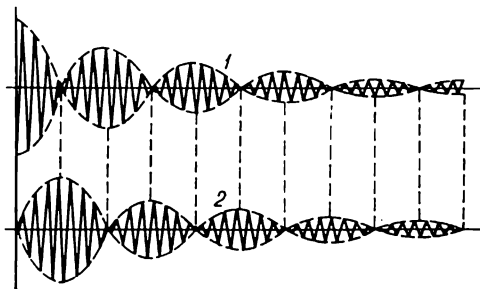
Někdy je naopak rezonance nežádoucí, neboť při slabém tlumení přechází značná energie z budícího zdroje na oscilátor, který je naladěný na budící frekvenci. Rezananční kmitý mohou pak nabýt tak velké amplitudy, že deformace jimi způsobené překročí mez pevnosti a kmitající části se mohou poškodit. Bývá to např. při tzv. *kritických otáčkách*, které jsou v rezonanci s vlastními kmitý hřídele, a mohou proto přivodit rychlé opotřebení nebo zničení jinak správně dimenzovaných strojních součástí.

3.1.9. Vázané oscilátory

I vnější periodická síla, jejíž účinek na oscilátor jsme studovali v předešlém článku, může mít původ v jiném oscilátoru, který na první oscilátor nějakým způsobem mechanicky působí. Takové dva oscilátory nazýváme *spřaženými* nebo *vázanými*. Důležitý a zajímavý



Obr. (3.1) 26. *a* — spřažená kyvadla (gravitační oscilátory), *b, c* — kyvadla s elastickou vazbou



Obr. (3.1) 27. Spřažené tlumené kmitání

je případ dvou stejných oscilátorů, jejichž pohyby na sebe vzájemně působí zařízením, které tvoří mezi nimi vazbu. Provedení takové vazby, která může být těsnější nebo volnější, ukážeme na dvou příkladech. Na obr. (3.1) 26a jsou naznačena kyvadla s rovinami kyvu kolmými k nákrešné, spřažená nitkou zatíženou malým závažím. Vazbu můžeme měnit vzdáleností nitky od závěsu nebo velikostí závažíčka. Na obr. *b* a *c* jsou kyvadla s elastickou vazbou, jejíž těsnost závisí na tuhosti pružiny. Kyvadla kývají v nákrešné.

S oběma popsány druhy vázaných oscilátorů provedeme tento pokus: Vychýlíme kyvadlo *1*, zatímco kyvadlo *2* podržíme v původní poloze, a potom obě uvolníme. Výkyv kyvadla *1* se ponenáhlu zmenšuje, ježto část jeho energie se vazbou přenáší na kyvadlo *2*, které začne kývat s rostoucím výkmitem. Přenášení energie z *1* na *2* pokračuje však i potom, kdy výkmit obou kyvadel je stejný, a trvá tak dlouho, až se kyvadlo *1* úplně zastaví a kyvadlo *2* kývá téměř se stejným výkmitem jako kyvadlo *1* na počátku pokusu. V tomto okamžiku je pohybový stav právě opačný než původní, a proto se děj opakuje při změnách úlohách obou kyvadel. Tak přechází energie z kyvadla na kyvadlo a vlivem útlumu postupně klesá, jak je graficky naznačeno na obr. (3.1) 27. Tak vypadají vázané kmitý

i u jiných oscilátorů, je-li jeden z nich na počátku v klidu. Je zřejmé, že u spřažených oscilátorů dochází k rázům čili záznejím, i když oba mají přesně stejnou dobu kmitu. Záznejí nevznikají tedy rozladěním oscilátorů, ale jejich vazbou, což dokážeme pokusně, měníme-li těsnost vazby. Čím těsnější je vazba, tím častější jsou rázy, neboť těsnější vazba přenáší energii z kyvadla na kyvadlo vydatněji (rychleji).

K rázům a k výměně energie nedochází jedině tehdy, když oba oscilátory na začátku vychýlíme stejně buď ve stejném smyslu [obr. (3.1) 26b], nebo souměrně vzájemně v opačném smyslu (obr. c). Kmity, které oscilátory v tomto případě konají, nazýváme *základními* nebo též *normálními kmity* vázaných oscilátorů.

Jsou-li oscilátory poněkud rozladěny, např. mají-li různou hmotnost, různě tuhou vlastní pružnou vazbu nebo různou délku závěsů, nastává rovněž výměna energie, avšak tak, že oscilátor, který je prvně vychýlen z rovnovážné polohy, bude mít minimum od nuly odlišné a nulové hodnoty dosahuje pouze amplituda kmitů toho oscilátoru, který je na začátku v klidu.

Abychom popsané pokusy vysvětlili teoreticky, představme si dva stejné netlumené harmonické oscilátory se stejnou vlastní úhlovou frekvencí ω . Mohou to být např. oscilátory na obr. (3.1) 26b, nepřihlížíme-li k rozdílu mezi kruhovou drahou a její tečnou v nejnižším bodě, což je při malých výkmitech přípustné. Není-li mezi nimi vazba, platí pro oba oscilátory stejné pohybové rovnice:

$$3.1 (56) \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\omega^2 y_1, \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\omega^2 y_2.$$

Vazba se projeví tím, že oscilátory na sebe působí stejně velkými, ale opačnými silami $F_1 = -F_2$, o nichž předpokládáme, že jsou úměrny rozdílu výchylek oscilátorů z rovnovážných poloh. To je odůvodněno skutečností, že při stejných výchylkách se vazba neprojevuje [pružina na obr. (3.1) 26b není napjatá], kdežto při malých opačných výchylkách vzniká síla, která je podobná jako většina elastických sil úměrná změně vzdálenosti mezi oběma kmitajícími tělesy. Na obr. c je tah nebo tlak pružiny úměrný její deformaci $y_1 - y_2$, při čemž je nakreslen případ, kdy $y_1 > 0$ a $y_2 < 0$. Vazba uděluje tedy oscilátoru zrychlení

$$3.1 (57) \quad a_1 = \frac{F_1}{m} = -\frac{K^*}{m} (y_1 - y_2), \quad a_2 = \frac{F_2}{m} = \frac{-F_1}{m} = \frac{K^*}{m} (y_1 - y_2),$$

kde m je hmotnost oscilátoru a K^* tuhost vazby mezi oscilátory. Celkové zrychlení obou oscilátorů bude tedy rovno součtu výrazů 3.1 (56) a (57), takže dosadíme-li $k = K^*/m$, kde k se nazývá *součinitel vazby*, platí pohybové rovnice

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\omega^2 y_1 - k(y_1 - y_2), \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\omega^2 y_2 + k(y_1 - y_2).$$

Řešení těchto současně platných diferenciálních rovnic provedeme nejsnáze tak, že je sečteme a odečteme od sebe:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (y_1 + y_2) &= -\omega^2 (y_1 + y_2), & \frac{d^2}{dt^2} (y_1 - y_2) &= -\omega^2 (y_1 - y_2) - \\ &- 2k(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Provedeme-li nyní substituci

$$3.1 (58) \quad x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2,$$

dostaneme dvě jednoduché rovnice harmonických kmitů

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = 0, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + (\omega^2 + 2k) x_2 = 0.$$

V každé rovnici máme již jen jednu závisle proměnnou, takže řešení můžeme napsat přímo, např. podle 3.1 (9)

$$3.1 (59) \quad x_1 = A'_1 \sin \omega t + A''_1 \cos \omega t, \quad x_2 = A'_2 \sin \omega' t + A''_2 \cos \omega' t,$$

kde jsme položili

$$3.1 (60) \quad \omega' = \sqrt{\omega^2 + 2k}.$$

Integrační konstanty A_1' , A_1'' , A_2' a A_2'' určíme z počátečních podmínek. Jestliže oscilátor 1 vychýlíme z rovnovážné polohy v kladném smyslu o A , zatímco druhý v rovnovážné poloze přidržíme, a oba současně pustíme v okamžiku $t = 0$ (od něhož měříme čas), znějí počáteční podmínky takto:

$$\text{pro } t = 0 \text{ je } y_1 = A, \frac{dy_1}{dt} = 0, \quad y_2 = 0 \text{ a } \frac{dy_2}{dt} = 0$$

a vzhledem k 3.1 (58)

$$\text{pro } t = 0 \text{ je } x_1 = x_2 = A, \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0.$$

Dosazením do 3.1 (59) dostaneme

$$A_1' = A_1'' = 0, \quad A_2' = A_2'' = A,$$

takže

$$3.1 (61) \quad x_1 = A \cos \omega t, \quad x_2 = A \cos \omega' t.$$

Podle 3.1 (58) jsou hledané výchylky oscilátorů

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2},$$

takže dosadíme-li za x_1 a x_2 z 3.1 (61), dostaneme

$$3.1 (62) \quad y_1 = \frac{A}{2} (\cos \omega t + \cos \omega' t) = A \cos \frac{\omega' - \omega}{2} t \cos \frac{\omega' + \omega}{2} t,$$

$$y_2 = \frac{A}{2} (\cos \omega t - \cos \omega' t) = A \sin \frac{\omega' - \omega}{2} t \sin \frac{\omega' + \omega}{2} t.$$

Výsledné kmity y_1 a y_2 každého oscilátoru vznikají tedy superpozicí dvojího harmonického kmitání 3.1 (61) s úhlovými frekvencemi ω a ω' . Je-li vazba mezi oscilátory volná, můžeme úhlovou frekvenci 3.1 (60) přibližně psát

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 + 2k} = \omega \sqrt{1 + \frac{2k}{\omega^2}} \approx \omega \left(1 + \frac{k}{\omega^2}\right) = \omega \left(1 + \frac{K^*}{K}\right),$$

kde $K^* = mk$ je tuhost vazby mezi oscilátory a $K = m\omega^2$ je tuhost vlastní pružné vazby každého oscilátoru. Při volné vazbě, kdy $K^* \ll K$, neliší se úhlová frekvence ω' mnoho od frekvence ω , takže u obou oscilátorů jde o skládání kmitů blízkých frekvencí, při němž vznikají rázy, které se opakují*) s frekvencí rovnou

$$\nu' - \nu = \frac{1}{2\pi} (\omega' - \omega) \approx \nu \frac{K^*}{K}.$$

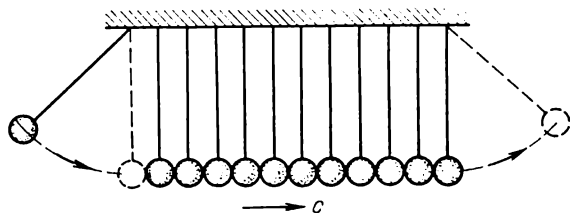
Ve dvou zvláštních případech rázy nevzniknou, a to, je-li trvale buď $x_2 = 0$, nebo $x_1 = 0$. Oba oscilátory vykonávají pak podle 3.1 (62) čistě harmonické kmity buď s frekvencí ω , nebo s frekvencí ω' . Podle 3.1 (58) nastane první případ, když oba oscilátory kmitají souhlasně se stejnou fází, jak je naznačeno na obr. (3.1) 26b, neboť pak je stále $y_1 = y_2$ a x_2 je trvale rovno nule. Vazba se neprojevuje, a oscilátory proto kmitají s vlastní frekvencí ω . Druhý případ nastane, když oscilátory kmitají protisměrně s opačnou fází (obráz. c), neboť pak je v každém okamžiku $y_1 = -y_2$ a x_1 je trvale rovno nule. V tomto případě se jeví účinek vazby ve větší frekvenci ω' . Tyto souhlasné a protisměrné kmity jsme nazvali základními kmity vázaných oscilátorů. Obecné kmity vázaných oscilátorů vznikají tedy superpozicí základních kmitů.

) Aby výsledné kmity každého oscilátoru byly periodické, musí být přísně vzato kmitočty ν' a ν základních kmitů souměřitelné, to znamená, že poměr $\nu'/\nu = 1 + K^/K$ musí být konečným nebo periodickým zlomkem; není-li tato podmínka splněna, vzniknou sice také rázy, neopakuji se však přesně periodicky.

3.2. Vlny

3.2.1. Vznik postupných vln

V předešlé kapitole jsme pojednali o kmitech hmotného bodu nebo tělesa (oscilátoru), které kmitalo jako jeden celek, při čemž pružnou vazbu nutnou k tomu, aby kmity vznikly, jsme si pro názornost představovali zprostředkovanou nějakou pružinou. Ve skutečnosti bývají kmity oscilátoru zřídka kdy v prostoru osamoceny, ale oscilátor náleží k celé soustavě oscilátorů, které na sebe navzájem působí jistými silami, takže vyšinutím jednoho z rovnovážné polohy vyšinou se sousední, kmity jednoho z nich nezůstanou omezeny jen na něj, ale projeví se také u ostatních. Je tomu stejně jako při vázaných kmitech, které jsme vy-



Obr. (3.2) 1. Šíření energie v řadě pružných koulí

že tuhost vlastní a vzájemné vazby je zhruba stejná nebo že vzájemné vazby mezi celou řadou oscilátorů plní zároveň funkci vlastní pružné vazby každého oscilátoru, bude se energie kmitů z jednoho oscilátoru na druhý přenášet podstatně rychleji; stejně si v řadě pružných koulí na obr. (3.2) 1 po nárazu první koule ostatní rychle navzájem předávají mechanickou energii (rovnou kinetické energii první koule při nárazu), a to vlivem sil pružnosti, jimiž na sebe při vzájemné deformaci působí. Dotýkají-li se koule navzájem dobře, ani po nárazu žádný vlastní pohyb koulí nepozorujeme, všechny jsou zdánlivě v klidu, soudíme ale, že přesto cosi jejich řadou proběhlo, protože poslední koule řady náhle odskočí. Není to však pohyb koulí jako celků (pohyb jejich těžišť), ale *pohyb jednotlivých stavů pružných deformací koulí*, charakterizovaných zde mechanickou (deformační) energií; jde tedy v podstatě o *šíření energie*. Stejně tomu bude i v materiálním prostředí, ať už pevného, kapalného, nebo plynného skupenství, jehož molekuly nebo objemové elementy se chovají jako soustava pružných koulí rozprostraněná na všechny strany. Při vychýlení nebo deformaci některého objemového elementu v některém místě čili při místním *rozruchu* přenáší se vlivem molekulárních sil změna stavu a zároveň energie k ní potřebná celým prostředím. Docházíme k důležitému výsledku, že energie pružných deformací se přenáší z jedné oblasti prostředí do druhých jako proud s jistou prostorovou hustotou. Podobně se přenáší také energie v jiných silových polích nejen v poli molekulárních sil, např. v elektromagnetickém poli, kde příslušná změna stavu pole se vztahuje na elektrickou a magnetickou intenzitu tohoto pole. Tomuto *přenosu energie prostorem* říkáme *záření* nebo *postupné vlnění*.

Druhý název plyne od nejznámějšího příkladu, jímž je rozvlnění vodní hladiny při nějakém rozruchu, např. větrem nebo při vhození kaménku do vody. Od místa rozruchu postupují vlnky kruhového tvaru se stále rostoucím poloměrem, při čemž v místě rozruchu následuje brzo po něm klid, stejně jako se při rázu v řadě pružných koulí první koule po nárazu zastaví — energie přejde na další místa.

Máme-li však prostorově omezené těleso, např. tyč nebo vodu v nádobě, pak vlnění vzniklé místním rozruchem se na stěnách tělesa odráží a vrací se zpět, takže v místě počátečního rozruchu vznikne původní změna znovu, podobně jako kdybychom poslední od-

šetřovali v čl. 3.1.9, kde vlivem vzájemné pružné vazby přešly harmonické kmity z jednoho oscilátoru na druhý a s nimi ovšem i jejich mechanická energie. Protože vzájemná vazba mezi oběma oscilátory byla podstatně volnější než vlastní pružná vazba každého z nich, trval přenos celé energie tak dlouho, že každý oscilátor mezitím vykonal celou řadu plných kmitů. Představíme-li si ale,

skočivší kouli při rázu v řadě pružných koulí nechali zase dopadnout zpět na řadu koulí; po jisté době zase odskočí první koule a při opakovaných nárazech by se rozruch neomezeně dlouho šířil sem a tam, kdyby nebylo energetických ztrát, u koulí např. vlivem jejich nedokonalé pružnosti. Je-li prostor zaujatý tělesem jen tak rozlehlý, že se odražená vlna při dané rychlosti šíření vrátí zpět do místa rozruchu dříve, než v něm pohyb částic nebo změna jejich stavu ustane, nepřestanou změny nebo pohyb v tomto i v ostatních místech vůbec, protože se celý děj může neomezeně dlouho opakovat (odmyslíme-li si ovšem tlumení vlivem vnitřního tření) podobně jako u vázaných oscilátorů v čl. 3.1.9, z nichž každý rovněž stále kmitá. Vlnění a jeho energie zůstávají v tomto případě omezeny na prostor tělesa a říkáme mu *stojaté vlnění* nebo též *chvění* (*vibrace*). Chvějící se těleso bývá zpravidla obklopeno nějakým prostředím, nejčastěji vzduchem, v němž je zdrojem rozruchu — říkáme, že těleso je *zářičem*, který do okolního prostředí *vysílá postupné vlny*, nebo že vydává *vlnové záření*, a mluvíme obdobně s optickým zářením o *spektru zářiče*, jak jsme se zmínili v čl. 3.1.4.

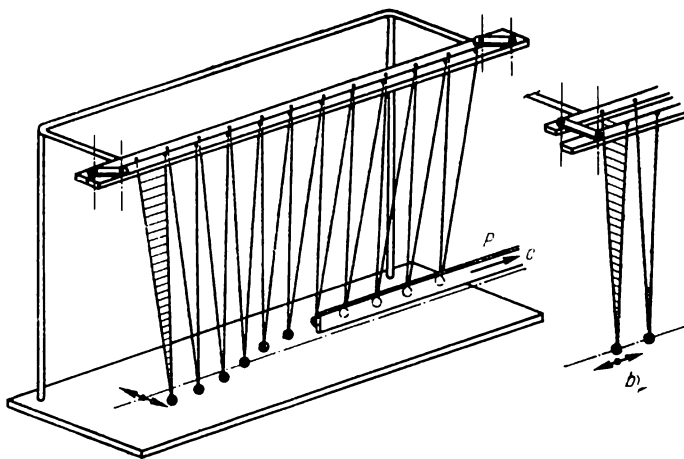
Je zřejmé, že energie postupných vln se odnímá zářiči, a to postupně, jak snadno nahledneme, vzpomene-li na energii W harmonických kmitů částice podle vzorce 3.1 (23),

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2.$$

Ke stejným kmitům potřebují molekuly nebo objemové elementy prostředí, jež jsou ve styku s pevným chvějícím se tělesem, mnohem menší energii, než mají objemové elementy tělesa, protože jejich hmotnost, jíž je energie kmitů úměrná, je mnohonásobně menší. Např. ladička rozechvěná úderem měkkého kladívka obsahuje značné množství energie dodané jí úderem, kterou dosti dlouho vyzařuje do vzduchu. Z jejího postupného útlumu však poznáváme, že její energie s časem ubývá. Vyzařování vln je tedy kromě přeměny mechanické energie v teplo vlivem vnitřního tření v látkách důležitou příčinou útlumu oscilátoru.

3.2.2. Šíření vln v přímé řadě

Vyšetříme podrobněji kinematiku vlnění v nejjednodušším případě šíření vlny v přímé řadě složené z jednotlivých hmotných bodů. Použijeme k tomu jednoduchého zařízení k demonstraci vlnění na obr. (3.2) 2, které se jmenuje *Machův vlnostroj*. Je to soustava stejných kyvadélek tvořených kuličkami, z nichž každá je ve stejné vzdálenosti od druhé kuličky zavěšena na dvou vláčkenech, které se nahoru rozbíhají, takže každá kulička může kývat jen v rovině kolmé k rovině závěsných vláken. Zvláštním zařízením lze roviny kývání všech kuliček současně stočit až o 90° . Nastavíme nejprve rovinu dvouvláknových závěsů všech kuliček tak, aby kývaly jen v rovinách kolmých k řadě, kterou dohromady tvoří, a dlouhým pravítkem vychýlíme všechny kuličky z rovnovážné polohy o A . Díváme-li se na bodovou řadu seshora, vidíme stav znázorněný rádkou *a*) na obr. (3.2) 3. Rovnovážná poloha jednotlivých kuliček je zakreslena přímkou OX , pravítko silněji vyznačenou úsečkou P . Uvolníme-li všechny kuličky současně, třeba tak, že pravítko P posuneme směrem



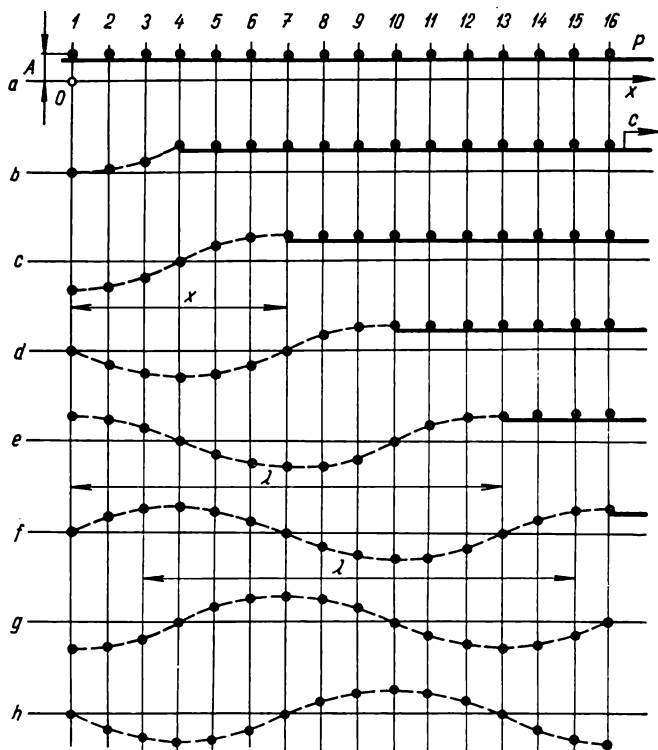
Obr. (3.2) 2. Machův vlnostroj

dolů, budou všechny kuličky kývat kolem své rovnovážné polohy se stejnou periodou T a se stejnou fází. Při malé počáteční výchylce A z rovnovážné polohy jsou to prakticky pohyby po úsečkách kolmých k bodové řadě a okamžitá příčná výchylka y všech kuliček z rovnovážné polohy je popsána rovnicí

$$3.2 (1) \quad y = f(t),$$

která platí pro všechny kuličky. V příkladu, který probíráme, konají kuličky jednoduchý harmonický pohyb, takže příslušná funkce má tvar $y = f(t) = A \cos \omega t = A \cos \frac{2\pi}{T} t$, což však pro výklad vzniku vlnění není podstatné. Kmitavý pohyb všech kuliček kolem rovnovážné polohy se stejnou fází, který pozorujeme, nepředstavuje ještě pohyb vlnivý.

Obraz vlnění vznikne, uvolňujeme-li kuličky postupně z vychýlené polohy tím, že pravítko P posouváme vpravo stálou rychlostí c . Zase kmitají uvolněné kuličky kolem své rovnovážné polohy se stejnou periodou T jako prve, ale jednotlivé kmity jsou navzájem ve fázi opožděny, a to tím více, čím dále je příslušná kulička od začátku bodové řady. Toto vzájemné fázové posunutí kmity jednotlivých bodů bodové řady je podstatou vlnění. Vznik vlny znázorňují jednotlivé řádky na obr. (3.2) 3. Jsou to jakoby okamžité fotografické snímky bodové řady v intervalech $T/4$. Rychlost c vypouštění kuliček je volena tak, že se uvolňuje 4. bod v okamžiku, kdy 1. bod vykoná právě $1/4$ kmity, 7. bod se uvolňuje v okamžiku, kdy 1. bod vykoná $1/2$ kmity a 4. bod $1/4$ kmity atd. V okamžiku uvolnění bodu



Obr. (3.2) 3. Vznik příčného vlnění v bodové řadě

vznikne jistý stav neboli fáze jeho kmity. Kmity bodů, které jsou před ním, nemají v témže okamžiku ovšem touž fázi, ale měly ji v době dřívější. Např. stav kmity 4. bodu v řádce b) je v okamžiku jeho uvolnění též jako 1. bodu před $T/4$ sekundami, stav kmity 7. bodu v řádce c) je v okamžiku t , kdy je uvolněn, stejný jako 1. bodu v okamžiku $t - T/2$ atd. Je zřejmé, že rychlost c posuvu pravítka, tj. rychlost vypouštění jednotlivých kuliček, je rychlost, kterou se bodovou řadou šíří táž fáze, a proto ji nazýváme *fázovou rychlostí*. Označíme-li např. vzdálenost 7. bodu od počátku O bodové řady x , pak tato vzdálenost, na kterou se v okamžiku $T/2$ rozšířila počáteční fáze kmity 1. bodu, je zřejmě určena vztahem $x = c \cdot T/2$, a stav kmity 7. bodu v okamžiku t je proto též jako stav kmity

1. bodu v okamžiku $t - \frac{T}{2} = t - \frac{x}{c}$. Platí to zřejmě pro libovolné dva body ve vzdále-

nosti x , tj. stav kmitů vybraného bodu v okamžiku t je takový jako stav kmitů bodu, který je od něho vzdálen o x , v okamžiku $t' = t - \frac{x}{c}$. Tato podstatná vlastnost vlnění vede přímo k analytickému vyjádření vlnivého pohybu. Popisuje-li funkce 3.2 (1), tedy $y = f(t)$, časový průběh kmitů jednoho bodu bodové řady, pak okamžitou výchylku u libovolného bodu této řady ve vzdálenosti x od bodu, u něhož časový průběh kmitů známe, v okamžiku t dostaneme, dosadíme-li do dané funkce za t dobu t' , tedy

$$3.2 (2) \quad u = f\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

To je obecný vztah zahrnující libovolnou vlnu šířící se bodovou řadou ve směru Ox . Jinou značkou u pro okamžitou výchylku jednotlivých bodů z rovnovážné polohy má být zdůrazněno, že tato výchylka nezávisí jen na čase jako y u ojedinelého oscilátoru, ale že též závisí na poloze (souřadnici x) příslušného bodu v bodové řadě.

Jsou-li kmity jednotlivých bodů periodické, jak tomu je u modelu vlnění, který vyšetřujeme, pak má i vzniklá vlna se vzdáleností x periodický průběh, jak je zřejmé na obr. (3.2) 3. Periodičnost tohoto průběhu charakterizuje vzdálenost zvaná *vlnová délka* λ . Je to vzdálenost, na kterou postoupí jistá fáze kmitů za dobu jedné periody T , tj. za dobu, v níž bod, od něhož vzdálenost λ měříme, vykoná jeden celý kmit. Protože se fáze šíří rychlostí c , platí zřejmě

$$3.2 (3) \quad \lambda = cT \quad \text{nebo} \quad c = \lambda\nu,$$

dosadíme-li místo periody T , s jakou kmitá každý bod řady, frekvenci ν těchto kmitů. Tyto vztahy uvádějí ve vzájemnou souvislost periodičnost časového průběhu kmitů jednotlivých bodů bodové řady s periodičností dráhového průběhu vlny. Na obr. (3.2) 3e vidíme, že v okamžiku, kdy 1. bod se po návratu do výchozí krajní polohy začíná zase pohybovat směrem k rovnovážné poloze, uvolňuje se 13. bod ve vzdálenosti λ a začíná se také pohybovat směrem k rovnovážné poloze. Kmity obou bodů mají tedy touž fázi a stejně je tomu tak u kteréhokoli dvou bodů vzdálených od sebe o λ . *Vlnová délka λ určuje tedy nejkratší vzdálenost mezi body, které kmitají se stejnou fází.*

První bod bodové řady na obr. (3.2) 3 kmitá harmonicky podle vztahu $y = A \cos \omega t$, a proto okamžitá výchylka u bodu ve vzdálenosti x od něho v okamžiku t je podle 3.2 (2)

$$u = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Zvolíme-li jako základní stav, kdy 1. bod prochází právě rovnovážnou polohou a jeho další pohyb se děje ve směru, v němž výchylka u je kladná [řádek d na obr. (3.2) 3], vyjádříme vlnu rovnice

$$3.2 (4) \quad u = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (ct - x),$$

dosadíme-li zároveň ze vztahu 3.2 (3). Je zřejmé, že jsou-li kmity bodů harmonické, okamžitý stav kmitů jednotlivých bodů je pro celou řadu určen neproměnnou sinusovkou, jejíž jeden oblouk přísluší poloviční vlně, která se posouvá fázovou rychlostí c , jak je názorně vidět na obr. (3.2) 3.

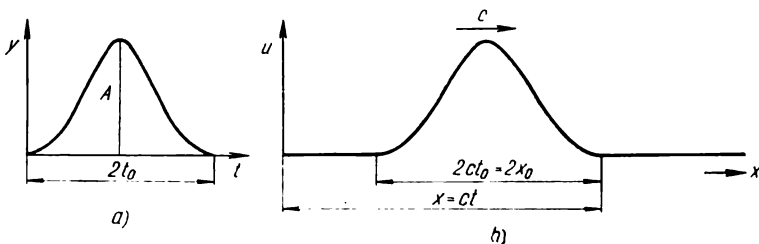
Použijeme-li k vyjádření časového průběhu kmitů jednotlivých bodů komplexního způsobu podle 3.1 (20), pak harmonická vlna na bodové řadě je popsána také imaginární částí komplexního výrazu

$$u = A e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}.$$

Vlnění, které jsme dosud probírali a které vzniklo příčnými kmity jednotlivých bodů vzhledem k jejich řadě, nazývá se *vlnění příčné*. Takové příčné vlně, při níž výchylky leží ve všech místech v téže rovině, říkáme *lineárně polarizovaná* na rozdíl od vlny nepolarizované, při níž se kmity dějí v různých směrech, kolmých ke směru řady.

Vlna může mít ovšem různé tvary, které závisí na časovém průběhu kmitů prvního bodu řady. Známy je pokus s delší gumovou hadicí, kterou na jednom konci upevníme a mírně ji natáhneme do vodorovného směru. Když volným koncem prudce trhneme nahoru a dolů, vytvoří se na hadici půlvlna, která běží stálou rychlostí c k druhému konci. Pohyb volného konce hadice můžeme přibližně popsat funkcí

$$y = A e^{-4\left(\frac{t-t_0}{t_0}\right)^2},$$



Obr. (3.2) 4. Šíření pulsu napjatým vláknem

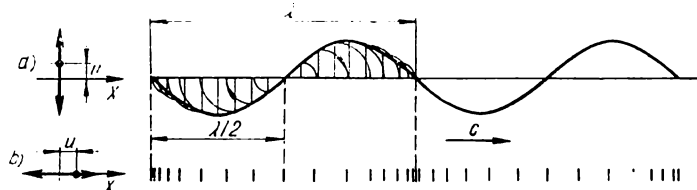
kde A je největší výchylka volného konce a $2t_0$ je doba trvání pohybu volného konce [obr. (3.2) 4a]. Funkce, kterou jsme zvolili, narůstá sice od $-\infty$ a klesá k nule v $+\infty$, ale při volbě součinitele 4 v exponentu čísla e je na začátku a na konci pulsu, tj. v dobách $t = 0$ a $t = 2t_0$, výchylka $y_0 = 0,0183A$; předpokládáme-li, že se dají pozorovat jen výchylky větší než y_0 , je to, jako kdyby y_0 bylo rovno nule. Výchylky u jednotlivých částí hadice ve vzdálenostech x od volného konce jsou pak podle 3.1 (2) popsány rovnicí

$$u = A e^{-4\left(\frac{t - \frac{x}{c}}{t_0}\right)^2} = A e^{-4\left(\frac{ct - x}{ct_0} - 1\right)^2}.$$

Pro $t < \frac{x}{c}$ je $u < y_0$, takže příslušná část hadice ve vzdálenosti x je v klidu, v okamžiku $t = \frac{x}{c}$ začne tato část konat tyž pohyb jako volný konec, kde vznikl rozruch, a pro $t \geq \frac{x}{c} + 2t_0$ je zase klid. Tvar napjaté hadice v okamžiku $t = \frac{x}{c}$ je znázorněn na obr. b. Je určen hořejší rovnicí, položíme-li v ní $t = \text{const}$ a za proměnnou považujeme jenom vzdálenost x . Tvar vlny je tedy shodný s časovým průběhem jednotlivých výchylek, délka základny $2x_0$ vlnového vrchu závisí ovšem na velikosti fázové rychlosti c a je určena vztahem $2x_0 = 2ct_0$. Tento příklad šíření rozruchu bodovou řadou, který je jeden z nejznámějších, jsme uvedli proto, abychom ukázali, že rovnice 3.2 (2) má obecnou platnost a že na tvaru příslušné funkce nezáleží.

Kmitá-li každá částice bodové řady ve směru řady, vzniká *vlnění podélné*. Pro okamžitou výchylku u každého bodu platí zase rovnice 3.2 (2) nebo (4), jsou-li kmity harmonické, jenže se u měří nyní od rovnovážné polohy každého bodu ve směru řady (ve směru šíření rozruchu je výchylka u kladná, v opačném směru pak záporná). Tvar podélné vlny proto snadno sestojíme, sklopíme-li výchylky příčné vlny do podélného směru, a to kladnou příčnou výchylku ve směru šíření, zápornou příčnou výchylku v opačném směru, jak je to

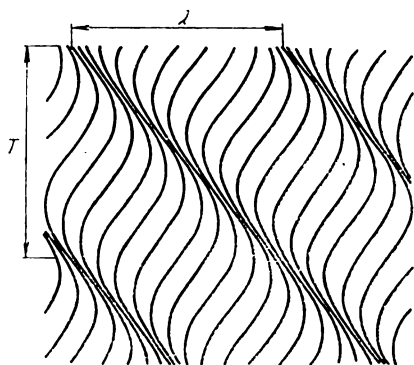
naznačeno na obr. (3.2) 5. Stejně lze ovšem postupovat u vlny libovolného tvaru. Tento přechod příčného vlnění v podélné lze pěkně pozorovat na Machově vlnostroji, stočíme-li současně roviny závěsných vláken příčně kývajících kuliček tak, že směr kývání jednotlivých kuliček poněkud přechází od příčného v podélný. Pozorujeme, že na rozdíl od příčné vlny, na níž rozeznáváme vrch a důl oddělené navzájem body, které právě procházejí rovnovážnou polohou, obsahuje podélná vlna zhuštění a zředění bodů kolem míst nulových výchylek, které stejně jako vrch a důl příčné vlny postupují stálou fázovou rychlostí c .



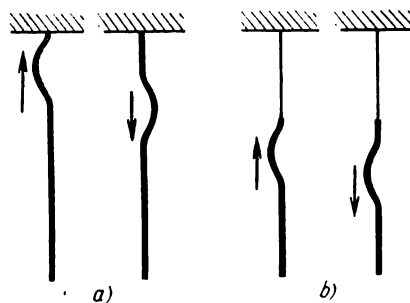
Obr. (3.2) 5. Postupná vlna: a — příčná, b — podélná

Průběh podélného vlnění lze dobře pozorovat na časovém rozvinutí kmitů jednotlivých bodů bodové řady ve směru kolmém k šíření vlny provedeném na obr. (3.2) 6. Každá sinusovka představuje časový průběh kmitů jednoho bodu řady. Vyřízneme v tvrdším papíře šterbinu asi 1 mm širokou a dlouhou, jako je šířka obrázku, kterou přiložíme na horní okraj obrázku. Posouváme-li šterbinou rovnoměrně směrem dolů, pozorujeme v ní pohyb jednotlivých bodů při podélném vlnění.

Bodová řada může končit buď pevným, nebo volným koncem. Vlněním, které dospěje na konec řady, vzniká vlnění postupující zpět, čemuž se říká *odraz vln*. Je-li konec řady pevný, nemůže kmitat a jeho reakcí vznikne síla, která změní výchylku posledního bodu v opačnou, jež se pak šíří řadou zpět [obr. (3.2) 7a]. Je to jako při rázu v řadě pružných



Obr. (3.2) 6. Postupné vlnění podélné, časově rozvinuté ve směru kolmém k bodové řadě



Obr. (3.2) 7. Odraz vlny: a — na pevném, b — na volném konci bodové řady

kouli, z nichž poslední se dotýká pevné stěny. Je-li naproti tomu poslední bod řady volný, vychýlí se a zpětným působením na předposlední bod jej vychýlí ve stejném smyslu. Proto se na volném konci řady odráží vlna se stejnou fází (obr. b). To zase plyne z představy posledních dvou bodů jako vázaných oscilátorů, z nichž klidný oscilátor přebírá vždy celou energii od kmitajícího. Co se děje s vlnami, které při odrazu proti sobě postupují, poznáme v článku 3.2.4.

3.2.3. Interference vln v přímé řadě

Šíř-li se v téže řadě dvě vlny současně, vzniká výsledné vlnění, jehož průběh je podle principu superpozice určen vektorovým součtem okamžitých výchylek v každém místě řady. Jsou-li obě vlny polarizovány v téže rovině, bude také výsledné vlnění polarizováno v této rovině a výchylky můžeme dostat algebraickým součtem, ve který zde přechází obecný součet vektorový. Říkáme, že nastává *interference vln*. Za příklad skládání dvou vln můžeme považovat obr. (3.1) 9, nahradíme-li si v něm osu časovou souřadnicovou osou OX , na níž jsou rovnovážné polohy jednotlivých bodů určeny souřadnicí x měřenou od levého konce. Každá sinusovka udává okamžité dílčí výchylky jednotlivých bodů z rovnovážné polohy, a proto jejich součtem je určen výsledný tvar vlny, která se ovšem posouvá po bodové řadě ve směru rostoucího x fázovou rychlostí c .

Důležitá je interference vln stejné vlnové délky, a tedy i stejné periody, souhlasí-li zároveň i směr kmitů obou vlnění, tj. jde-li buďto o dvě vlny podélné, nebo o dvě vlny příčné shodně polarizované. Výsledné vlnění, které vznikne složením obou vln, znázorňuje obr. (3.1) 13 pro skládání stejnosměrných kmitů se stejnými periodami, myslíme-li si zase časovou osu nahrazenou souřadnicovou osou OX , v jejímž směru se vlny šíří. Výsledná vlna má zase touž vlnovou délku jako dílčí vlny, její amplituda však závisí na dráhovém rozdílu obou dílčích vln, který je určen vzájemným fázovým posunutím dílčích kmitů jednotlivých bodů.

Srovnáme-li první rovnici 3.2 (4) pro sinusovou vlnu s rovnicí harmonického pohybu jednoho bodu, pozorujeme, že výraz $\frac{\omega x}{c} = \varphi$ určuje fázové posunutí kmitů bodu ve vzdálenosti x vzhledem ke kmitům bodu, který je ve vzdálenosti x před ním. V každém okamžiku je tedy fáze kmitů např. 1. bodu řady o $\frac{\omega x}{c}$ větší než fáze kmitů bodu, který je od něho vzdálen o x . Jsou-li tedy x_1 a x_2 vzdálenosti dvou bodů, jejichž dílčí kmity mají v témže okamžiku právě nulovou fázi, pak dílčí kmity prvního bodu řady mají fáze $\varphi_1 = \frac{\omega x_1}{c}$ a $\varphi_2 = \frac{\omega x_2}{c}$, takže jejich vzájemnému fázovému posunutí ($\varphi_2 - \varphi_1$) podle obr. (3.1) 13 přísluší dráhový rozdíl $(x_2 - x_1)$ dílčích vln

$$3.2 (5) \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\omega}{c} (x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1).$$

Podle obr. (3.1) 13 se obě dílčí vlny navzájem nejvíce zesilují, je-li vzájemné fázové posunutí dílčích kmitů $\varphi_2 - \varphi_1 = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$. Tomu přísluší dráhový rozdíl dílčích vln

$$d = x_2 - x_1 = 0, \lambda, 2\lambda, \dots = 2k \frac{\lambda}{2},$$

kde k je celé číslo. Je-li tedy dráhový rozdíl obou vln roven celému počtu vlnových délek nebo sudému počtu půlvln, pak amplituda výsledné vlny je největší a rovná se součtu obou částečných amplitud $A = A_1 + A_2$.

Obě dílčí vlny se naproti tomu navzájem nejvíce zeslabují, je-li vzájemné fázové posunutí dílčích kmitů $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$, tedy při dráhovém rozdílu

$$d = x_2 - x_1 = \frac{1}{2} \lambda, \frac{3}{2} \lambda, \frac{5}{2} \lambda, \dots = (2k - 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Je-li tedy dráhový rozdíl obou vln roven lichému počtu půlvln, má výsledná amplituda nejmenší hodnotu a rovná se rozdílu obou částečných amplitud, $A = A_1 - A_2$. Jsou-li přitom obě dílčí amplitudy stejné, vlny se vzájemně ruší a nastává klid.

3.2.4. Stojaté vlnění

Důležitý případ interference dvou stejných vln na bodové řadě nastává, šíří-li se obě vlny řadou v navzájem opačných směrech. Položíme-li počátek O souřadnice x do místa, v němž se obě proti sobě postupující vlny v okamžiku $t = 0$ setkají tak, že mezi dílčími kmity od obou vln není v tomto místě žádný fázový posuv [obr. (3.2) 8, první řádek], popisují vlnu 1 šířící se vpravo a vlnu 2 šířící se vlevo rovnice

$$u_1 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

$$u_2 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right).$$

Výsledná vlna je určena součtem obou částečných výchylek; použijeme-li známých vzorců pro sinus rozdílu a součtu dvou úhlů, dostaneme pro výsledné výchylky jednotlivých bodů řady

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = \\ &= 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}. \end{aligned}$$

Vidíme, že ve všech místech bodové řady vzniknou jednoduché harmonické kmity se stejnou fází, ale výsledná amplituda těchto kmitů

$$A_v = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

závisí na vzdálenosti x od místa, které jsme zvolili jako počátek O . Bez zřetele na znaménko bude výkmit největší v místech, pro která

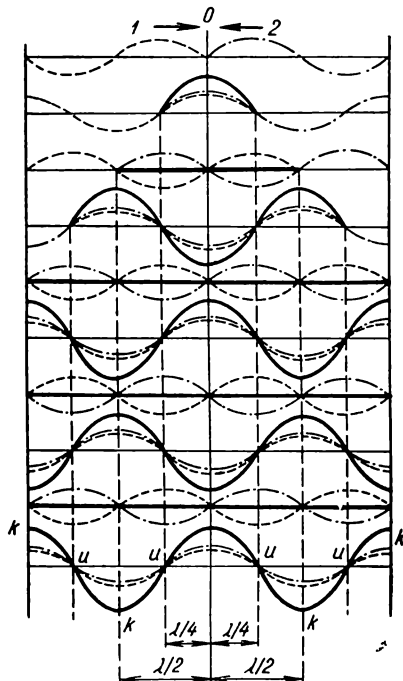
$$\begin{aligned} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} &= \pm 1, \text{ tedy pro } x = 0, \\ &\pm \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{2\lambda}{2}, \pm \frac{3\lambda}{2}, \dots \end{aligned}$$

Těmito místům, v němž kmity bodů mají největší amplitudu a která jsou od počátku O ve vzdálenostech rovných celému počtu půlvln nebo sudému počtu čtvrtvln, říkáme *kmitny* k . Mezi nimi leží tzv. *uzly* u , tj. místa, v nichž body jsou trvale v klidu. Pro ně výkmit stále je nulový, což je v místech, pro která

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0, \text{ tedy pro } x = \pm \frac{\lambda}{4}, \pm \frac{3\lambda}{4}, \pm \frac{5\lambda}{4}, \dots$$

Uzly jsou tedy od zvoleného počátku vzdáleny o lichý počet čtvrtvln. Je to naznačeno v případě příčného vlnění na obr. (3.2) 8, na němž jednotlivé řádky udávají stav vznikající výsledné vlny (plně vytažená čára) po čtvrtperiodách. Takové vlnění nazýváme *stojatým příčným vlněním*. Podobně je tomu i při interferenci dvou protichůdných vln podélných. I zde vzniknou kmitny vzdálené mezi sebou o půl vlny, v nichž se kmitavý pohyb děje s největším výkmitem. Mezi nimi uprostřed se vytvoří uzly, navzájem ovšem zase vzdálené o půl vlny, v nichž částice nekmitají a kolem nichž se střídavě zhušťují a zřeďují kmitající body řady. To je *stojaté vlnění podélné*.

Protože se body mezi uzly, které po sobě následují, pohybují buď proti sobě, nebo na-



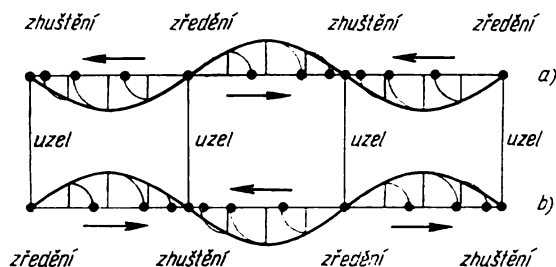
Obr. (3.2) 8. Vznik stojatého příčného vlnění

vzájem od sebe [obr. (3.2) 9a], jsou význačná místa podélné vlny, kde je zhuštění, vzdálena o vlnovou délku a stejně tak i místa, kde je největší zředění. V následující pólperiodě změní se však smysl pohybu všech bodů právě v opačný (obr. b), takže kde předtím vzniklo zředění, vznikne nyní zhuštění a obráceně. Nutno tedy rozlišovat *okamžitý stav* stojatého podélného vlnění, v němž jsou místa zhuštění vzdálena o vlnovou délku, a stejně tak i místa zředění, a *průměrný stav*, který pozorujeme při rychlých změnách pohybového stavu a v němž je vzdálenost míst zhuštění rovna polovině délky vlny.

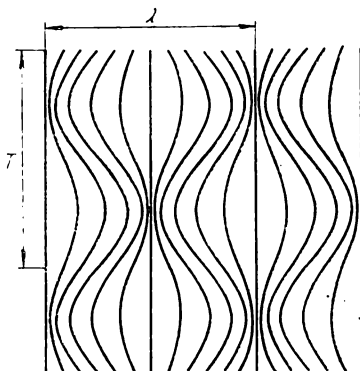
Je zřejmé, že význačná místa podélné vlny, zhuštění a zředění, tvoří se střídavě v uzlech, zatímco v kmitnách zůstává hustota stále stejná.

Podobně jako u postupného vlnění podélného poznáme nejlépe průběh stojatého podélného vlnění pomocí časového rozvinutí kmitů každého bodu řady. Je to provedeno na obr. (3.2) 10. Posouváme-li úzkou štěrbinu, která má směr bodové řady na obrázku seshora dolů, ukáže se ve štěrbíně obraz stojatého podélného vlnění.

Zásadní rozdíl mezi postupným a stojatým vlněním je tedy tento: *Při postupném vlnění kmitají všechny body řady se stejným výkmitem, avšak s různou fází, která se šíří fázovou rychlostí vlnění.* Postupné vlnění je určeno pohybem neproměnné vlnovky fázovou rychlostí.



Obr. (3.2) 9. Zhuštění a zředění při stojatém podélném vlnění



Obr. (3.2) 10. Podélné vlnění bodové řady, časově rozvinuté ve směru kolmém k bodové řadě

Při stojatém vlnění kmitají všechny body se stejnou fází ve všech bodech vzdálených o vlnovou délku, s opačnou fází v bodech vzdálených o půl vlny, avšak s výkmitem periodicky závislým na poloze bodu. Stojaté vlnění je určeno vlnovkou pevnou v prostoru, jejíž amplituda se ve všech místech současně (synchronně) periodicky mění.

Důležitost stojatého vlnění záleží ve skutečnosti, že vzniká v lineárních útvarech odrazem postupných vln na konci útvaru. Jak jsme řekli závěrem čl. 3.2.2, odráží se vlna na pevném konci bodové řady s obrácenou fází, tzn. že poměry na tomto konci jsou takové, jako by se zde trvale setkávaly dvě vlny, od nichž částečné výchylky jsou stejně velké, ale navzájem opačného směru, takže výsledná výchylka je nulová. Stojaté vlnění, ve které se skládá vlnění postupující kupředu a odražené vlnění šířící se zpětným směrem, má tedy na pevném konci vždy uzel.

Na volném konci bodové řady vzniká odraz s nezměněnou fází, a proto je zde stav, jako by se na tomto místě setkávaly dvě vlny, od nichž částečné výchylky jsou stejně velké a mají též směr, takže se navzájem zesilují. Stojaté vlnění, vzniklé interferencí vlny šířící se dopředu a vlny odražené na volném konci šířící se nazpět, má na tomto konci vždy kmitnu.

Snadno rozhodneme, jaké stojaté vlnění může vzniknout na bodové řadě, která je omezena na obou stranách. Stojaté vlnění na oboustranně omezené bodové řadě nazýváme také *chvěním* (např. tyče, struny apod.).

Má-li bodová řada oba konce pevné, mohou na ní vzniknout jen takové stojaté vlny, které mají na obou koncích uzly. Protože dva sousední uzly jsou vzdáleny o polovinu vlnové délky, musí být na délce l bodové řady celistvý počet půlvln, tedy

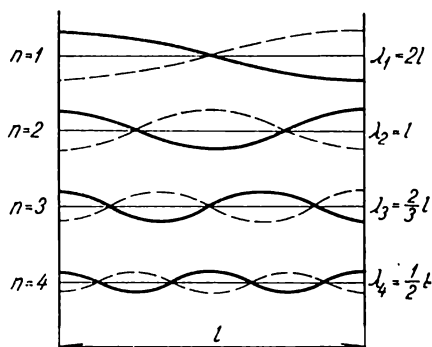
$$n \frac{\lambda_n}{2} = l, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

jak je naznačeno na obr. 3.2 (11) pro $n = 1, 2, 3, 4$. Vlnovky na obrázku udávají maximální výchylky jednotlivých bodů řady na obě strany při příčných kmitech, při podélných kmitech bychom je dostali sklopením jako na obr. (3.2) 9. Bodová řada tedy může chvět s frekvencemi

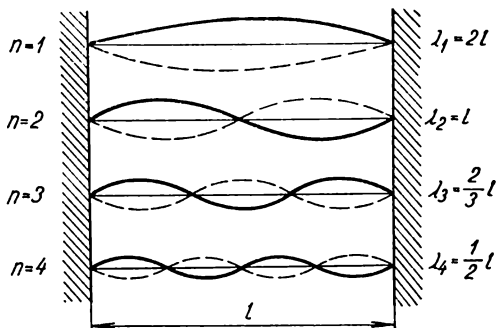
$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{n}{2l} c, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

je-li c rychlost šíření vln bodovou řadou. Základní chvění vznikne, vytvoří-li se na řadě jediná půlvlna, jejíž vlnová délka je $\lambda_1 = 2l$ a příslušná frekvence $\nu_1 = c/\lambda_1 = c/2l$. Frekvence ν_n vyšších harmonických, které mohou vzniknout, jsou potom celistvým násobkem základní frekvence, tedy $\nu_n = n\nu_1$.

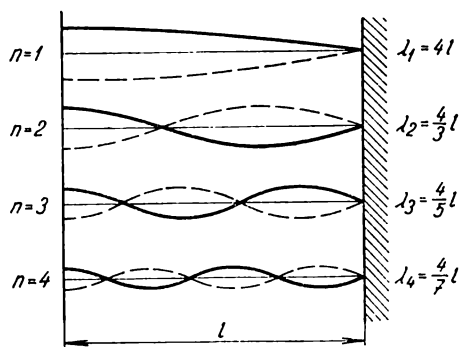
Ke stejnému výsledku dojdeme u bodové řady, jejíž oba konce jsou volné, jak je znázorněno na obr. (3.2) 12. Rozdíl proti předešlému případu záleží jen v tom, že na obou volných koncích má stojaté vlnění kmitny a základní chvění má uprostřed bodové řady místo kmitny uzly.



Obr. (3.2) 12. Chvění bodové řady s volnými konci



Obr. (3.2) 11. Základní a vyšší harmonické chvění bodové řady s pevnými konci



Obr. (3.2) 13. Chvění bodové řady s volným a pevným koncem

Má-li naproti tomu bodová řada jeden konec pevný a druhý konec volný, může chvět jen tak, že na pevném konci je vždy uzly a na volném konci vždy kmitna, takže na bodovou řadu se rozloží lichý počet čtvrtvln, jak je naznačeno na obr. (3.2) 13. Při základním chvění připadá na délku l jedna čtvrtvlna, takže vlnová délka $\lambda_1 = 4l$ a frekvence $\nu_1 = c/4l$. Pro vyšší harmonické potom platí

$$(2n - 1) \frac{\lambda_n}{4} = l, \quad \nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = (2n - 1) \frac{c}{4l} = (2n - 1) \nu_1.$$

Je-li tedy konec bodové řady volný a druhý pevný, pak vedle základního chvění mohou vzniknout vyšší harmonická chvění jen s takovými frekvencemi, které jsou lichým násobkem základní frekvence ν_1 .

Uvedenými způsoby mohou příčně chvět struna a podélně tenké tyče a vzduchové sloupce např. v píšťalách, přičemž rychlost šíření vlnění c , na níž závisí základní frekvence i frekvence

vyšších harmonických, je určena vzorci, které odvodíme v čl. 3.2.9 a 3.2.10. Kromě základního chvění vznikají prakticky vždy zároveň i vyšší harmonické, o jejichž počtu a amplitudě (intenzitě) rozhoduje způsob rozechvění příslušného útvaru; např. strunu lze rozechvět smýkáním smyčcem (u smyčcových nástrojů), drnkáním (u harfy, kytary apod.) nebo úderem kladívka (u klavíru, cimbálu). Výsledné chvění je pak skladbou individuálních chvění podle principu superpozice. Rozechvěné struny, tyče a vzduchové sloupce působí potom jako zdroje vlnění, od nichž se vlnění, vnímané jako zvuk, šíří do obklopujícího prostředí.

Je třeba podotknout, že příčné chvění tyčí řídí se složitějšími zákony, takže rozložení příčných vln i jejich frekvence se uvedenými vztahy nefidí. Částečné kmity netvoří harmonickou řadu vřehních kmitů, a proto je zvuk příčně rozechvěných tyčí pro sluch nepříjemný a nehodí se k hudebním účelům.

3.2.5. Grupová rychlost

Při skládání kmitů blízkých frekvencí nebo period v čl. 3.1.5 jsme poznali, že vznikají rázy nazvané podle časového průběhu kmitů, znázorněného na obr. (3.1) 14. Takové kmity bude zřejmě konat každý bod bodové řady, budou-li v řadě spolu interferovat dvě podélné nebo dvě shodně polarizované příčné vlny s málo odlišnými frekvencemi ν a ν' , které se bodovou řadou šíří touž fázovou rychlostí c . Podle 3.1 (36) a 3.2 (2) je výsledné vlnění popsáno rovnici

$$3.2 (6) \quad u = 2A \cos 2\pi \frac{\Delta\nu}{2} \left(t - \frac{x}{c} \right) \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c} \right) = A_{\nu} \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

která říká, že interferencí obou vln vzniká vlna přibližné frekvence $\nu \approx \nu'$, jejíž amplituda A_{ν} však není stálá, ale je sama periodickou funkcí času a vzdálenosti od zvoleného počátku

$$3.2 (7) \quad A_{\nu} = 2A \cos 2\pi \frac{\Delta\nu}{2} \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

kde $\Delta\nu = \nu - \nu'$ je rozdíl frekvencí obou částečných vln. Tvar vlny na bodové řadě znázorňuje rovněž obr. (3.1) 14, nahradíme-li v něm vodorovnou časovou osu souřadnicovou osou OX shodnou s bodovou řadou, nešíří-li se jí příčná vlna. Obálka této vlny znázorňuje pak průběh amplitudy kmitů jednotlivých hmotných bodů se vzdáleností x ve zvoleném okamžiku. Amplitudy mají nulovou hodnotu v místech x_n , pro něž argument kosinu v rovnici 3.1 (7) je roven lichému násobku $\pi/2$, tj.

$$2\pi \frac{\Delta\nu}{2} \left(t - \frac{x_n}{c} \right) = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

tedy v místech o souřadnicích

$$3.2 (8) \quad x_n = ct - \frac{2n - 1}{2} \frac{c}{\Delta\nu} = ct + \text{const.}$$

Vzájemná vzdálenost dvou sousedních míst v bodové řadě, v nichž příslušné body jsou v okamžitém klidu, je tedy stálá, na čase nezávislá a její velikost je rovna $\left| \frac{c}{\Delta\nu} \right| = \left| \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \right|$; *) tato místa však postupují v bodové řadě stálou rychlostí c , jak je patrné z rovnice 3.1 (8). Teoreticky nekonečně dlouhá vlna je tedy rozdělena na jednotlivé stejné skupiny neboli *grupy vln* délky $\lambda^2/\Delta\lambda$ šířící se rychlostí zvanou *grupová*, která je v tomto případě, kdy interferující vlny se šíří stejnou fázovou rychlostí, totožná s touto rychlostí.

Nebylo by třeba zavádět zvláštní grupovou rychlost, kdyby rychlost skupin vln byla vždycky totožná s fázovou rychlostí. Poznáme však hned, že v případě různých fázových rychlostí interferujících vln se grupy šíří jinou rychlostí, než je fázová rychlost výsledné vlny. Vlny mají různé fázové rychlosti, závisí-li tyto rychlosti na frekvenci nebo na délce vln. Tak je tomu např. při šíření světla sklem, v němž se červené světlo menšího kmitočtu (větší vlnové délky) šíří větší fázovou rychlostí než fialové světlo většího kmitočtu (kratší vlnové délky). Tím vzniká při lomu *rozklad (disperze) světla*, a proto nazýváme prostředí *disperzním*, šíří-li se v něm jednotlivé složky nějakého vlnění různou fázovou rychlostí.

*) Z $c = \lambda\nu = \text{const}$ plyne diferencováním $\lambda d\nu + \nu d\lambda = 0$, takže $\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{\nu}{\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$.

Vyšetřovaný případ interference dvou vln blízkých frekvencí a stejné amplitudy zobecníme nyní tak, že oběma vlnám přisoudíme různé, ale navzájem jen málo odlišné fázové rychlosti c a c' . Vzhledem k vztahům $c = \lambda\nu$ a $c' = \lambda'\nu'$ můžeme podle 3.2 (4) pro výslednou vlnu vzniklou interferencí obou dílčích vln psát

$$\begin{aligned} u &= A \sin 2\pi \frac{ct - x}{\lambda} + A \sin 2\pi \frac{c't - x}{\lambda'} = \\ &= 2A \cos \frac{2\pi}{2} \left[\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c'}{\lambda'} \right) t - \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) x \right] \sin \frac{2\pi}{2} \left[\left(\frac{c}{\lambda} + \frac{c'}{\lambda'} \right) t - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) x \right]. \end{aligned}$$

Položíme-li $c' = c + \Delta c$, $\lambda' = \lambda + \Delta \lambda$, při čemž přírůstky Δc a $\Delta \lambda$ jsou malé proti c a λ , a vynecháme-li po úpravě prvního členu ve jmenovateli součin $\lambda \Delta \lambda$ jako malý proti λ^2 , pak výsledné vlnění popisuje rovnice

$$u = 2A \cos \frac{2\pi}{2} \left(\frac{c\Delta\lambda - \lambda\Delta c}{\lambda^2} t - \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} x \right) \sin 2\pi \left[\frac{\nu + \nu'}{2} t - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) x \right].$$

Z argumentu sinu je zřejmé, že stejně jako v předešlém případě interference dvou vln blízkých frekvencí i nyní vzniká postupná vlna přibližně téže frekvence a vlnové délky, jaké mají obě dílčí vlny, a že amplituda kmitů je periodickou funkcí času a vzdálenosti od zdroje vln, jak udává argument kosinu. Místa nulové hodnoty amplitudy jsou dána podmínkou

$$\frac{2\pi}{2} \left(\frac{c\Delta\lambda - \lambda\Delta c}{\lambda^2} t - \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} x_n \right) = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

odkud]

$$3.2 (9) \quad x_n = \frac{c\Delta\lambda - \lambda\Delta c}{\Delta\lambda} t - \frac{2n - 1}{2} \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}.$$

Tato místa dělí nekonečně dlouhou vlnu opět na jednotlivé skupiny (grupy) vln délky $\lambda^2/\Delta\lambda$, které se však již nešíří fázovou rychlostí c výsledné vlny, ale odlišnou grupovou rychlostí

$$c_g = c - \lambda \frac{\Delta c}{\Delta \lambda},$$

jak plyne srovnáním vztahů 3.2 (9) a (8). Docházíme tak v případě elementárních rozdílů dc a $d\lambda$ k analytickému výrazu pro grupovou rychlost, který prvně odvodil Rayleigh

$$3.2 (10) \quad c_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda};$$

z tohoto výrazu je zřejmé, že grupová rychlost se od fázové rychlosti liší tím více, čím větší je podíl $dc/d\lambda$, tj. čím více závisí rychlost šíření vlny na vlnové délce. *) Grupová rychlost může být větší nebo menší než fázová rychlost, je-li diferenciální podíl $dc/d\lambda$ kladný nebo záporný. Šíří-li se vlny větší vlnové délky rychleji než vlny s kratší vlnovou délkou, pak $dc/d\lambda > 0$ a grupová rychlost je menší než fázová. To je případ *normální disperze* a setkáme se s ním např. při šíření světla sklem, jak jsme se již zmínili. Nezávisí-li fázová rychlost vlnění na vlnové délce, pak $dc/d\lambda = 0$ a grupová rychlost je totožná s fázovou rychlostí, jak jsme ukázali. Grupovou rychlostí šíří se energie vlny úměrná podle 3.1 (23) čtverci amplitudy kmitů.

3.2.6. Šíření vln v prostoru

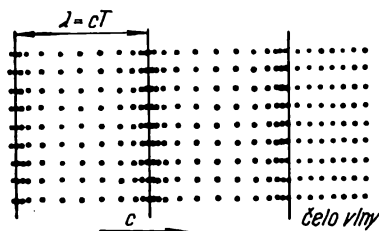
Představme si zdroj rozruchu, z něhož se šíří vlny na všechny strany v prostředí, které má všude stejné vlastnosti (je stejnorodé čili homogenní) a chová se stejně ve všech směrech (je izotropní). V takovém prostředí se bude vlnění šířit ve všech místech a všemi směry

*) Grupovou rychlost lze vyjádřit též pomocí frekvence jakožto nezávisle proměnné. Diferencováním rovnice $c = \lambda\nu$ dostaneme $\frac{dc}{d\lambda} = \nu + \lambda \frac{d\nu}{d\lambda}$, a dosadíme-li tento poměr do

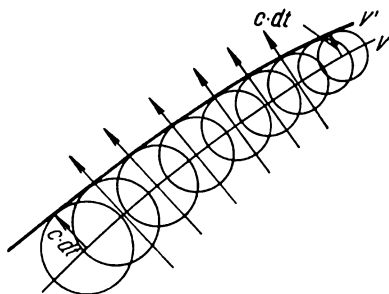
3.2 (10), vychází

$$3.2 (11) \quad c_g = c - \lambda\nu - \lambda^2 \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{d\nu}{d\left(\frac{\nu}{c}\right)}.$$

stejnou fázovou rychlostí c . Vlnění tedy dospěje za čas t na všechny strany stejně daleko, to je na povrch koule o poloměru $r = ct$, což platí dosti přibližně pro vzdálenosti r velké proti rozměrům zdroje, který pak pokládáme za bodový. Plochu, na niž dospěje vlnění současně ve všech jejích bodech, nazýváme *čelní vlnoplochu*. Vyznačuje se tím, že kmity všech bodů, jimiž tato plocha prochází, mají nulovou (počáteční) fázi. Kromě této čelní vlnoplochy existují ovšem další vlnoplochy, tvořící soubor míst, v nichž kmity mají touž fázi. Z nich jsou význačné ty, v jejichž jednotlivých místech jsou fáze kmitů o sudý násobek π větší než fáze kmitů na čelní vlnoploše. Je zřejmé, že vzdálenosti mezi nimi jsou rovné vlnové délce příslušného vlnění (jde-li o vlnění periodické). V případě homogenního izotropního prostředí, o kterém mluvíme, jsou všechny vlnoplochy soustředné kulové plochy se středem v místě, kde je zdroj.



Obr. (3.2) 14. Rovinná podélná vlna



Obr. (3.2) 15. Šíření vlny z vlnoplochy V na vlnoplochu V'

I když existence přesně kulových vlnoploch je podmíněna dokonalou homogenností a izotropností prostředí, mají vlnoplochy pro nekrytalické látky zásadní význam ve dvou krajních případech:

a) Vzdálenost od bodového zdroje je veliká. Vlnoplochy jsou pak koule značného poloměru, jejichž křivost se s rostoucí vzdáleností r zmenšuje, až posléze v dosti značné vzdálenosti od místa rozruchu můžeme malou část vlnoplochy přibližně považovat za rovinnou, v níž výchylky částic mají téměř stejnou velikost i směr. Docházíme tak k pojmu *rovinné vlny*, tj. vlnění šířící se v rovinných plochách, při čemž body téže vlnoplochy mají výchylky stejné velikosti i stejného směru; jednotlivé vlnoplochy postupují prostředím rovnoběžně za sebou.

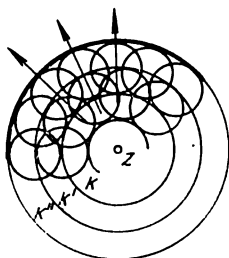
Výsledky odvozené pro šíření vln v přímé bodové řadě platí proto beze změny i pro rovinnou vlnu, představíme-li si mnoho přímých bodových řad rovnoběžně vedle sebe uspořádaných. Na obr. (3.2) 14 je znázorněna rovinná vlna podélná, která se vyznačuje vlnoplochami, na jejichž stranách se částice buďto nejvíce kupí k sobě (zhuštění), nebo naopak zase vzdalují od sebe (zředění); tato místa postupují fázovou rychlostí c .

b) Vzdálenost od bodového zdroje je malá. Pak můžeme (jsou-li stále ještě rozměry zdroje malé proti této vzdálenosti) předpokládat, že látka je v těsném okolí zdroje dostatečně stejnorodá, a že vlnoplocha je tedy koule. Je to elementární vlnoplocha, sestavená kolem zdroje. Kdyby ovšem prostředí nebylo izotropní, byly by i elementární vlnoplochy nekulové (např. elipsoidové apod.).

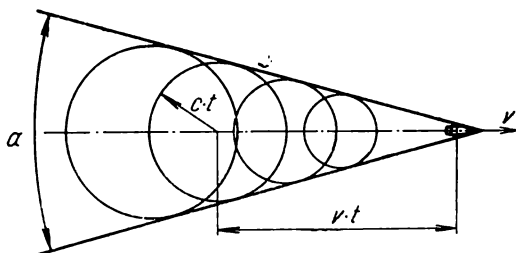
Na této myšlence elementárních vlnoploch se zakládá tzv. *Huygensův princip*, který se dá obecně vyslovit takto: *Vlnění (a vůbec každý rozruch) se šíří prostředím tak, že každý bod, do něhož vlnění dospěje, stává se zdrojem elementárního vlnění, které se rozšíří na elementární vlnoplochu, jejíž každý bod se stává středem další elementární vlnoplochy, a tak vlnění postupuje k dalším a dalším bodům prostředí.* K tomuto vyjádření Huygensova principu nutno dodat, že výsledný stav vlnění v prostředí je určen superpozicí všech elementárních

vlnění se zřetelem k interferenci. Teprve s tímto dodatkem, pocházejícím od Fresnela, je Huygensův princip (zvaný proto také *Huygensův—Fresnelův*) užitečným nástrojem k řešení rozmanitých problémů šíření vln.

Šíří-li se vlnění prostředím rychlostí c , dostaneme vlnoplochu V' , která vznikne za čas dt z původní vlnoplochy V , jako obálku elementárních vlnoploch o poloměrech $c dt$. Obálka je plocha, která se dotýká všech elementárních vlnoploch; dá se dokázat matematicky, že se výsledné vlnění všude ruší s výjimkou té části obálky, která obaluje vlnoplochy ze strany ležící ve směru šíření vln. Kolmice k obalové vlnoploše určují směr šíření vlny v příslušných místech a nazývají se *paprsky*. Na obr. (3.2) 15 je naznačen případ nehomogenního, ale izotropního prostředí; elementární vlnoplochy mají proto různé poloměry podle velikosti c v příslušném místě a jsou ovšem kulové.



Obr. (3.2) 16.
Kulové vlnoplochy



Obr. (3.2) 17. Brždění vodní hladiny plující lodí

Jsou známy jednoduché konstrukce vlnoploch v některých základních případech. Tak např. šíření vln z bodového zdroje v homogenním izotropním prostředí si musíme podle Huygensova principu představit tak, že vznikne nejprve elementární kulová vlnoplocha K kolem zdroje. Všechny body jejího povrchu stávají se však středy nových elementárních vlnoploch, jejichž obálka určuje další vlnoplochu K' , která je, jak je zřejmo z obr. (3.2) 16, koule se středem ve zdroji. Avšak i na povrchu koule K' vzniknou elementární zdroje a jim příslušné kulové vlnoplochy obalí opět kulovou vlnoplochu K'' , soustřednou s předešlými. Tak Huygensův princip názorně popisuje šíření kulové vlny z bodového zdroje.

Také všeobecně známý jev brždění, vznikající na vodní hladině za jedoucí lodí [obr. (3.2) 17], odvodíme snadno z postupného šíření kruhových vln na vodě. Oba přímé okraje brázdy jsou zřejmě obálkou kruhových vlnoploch s poloměry rostoucími úměrně s časem, a tedy i se vzdáleností od rovnoměrně plující lodí. Úhel brázdy α určuje rychlost šíření c vln podle vztahu

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v},$$

kde v je rychlost lodí.

Velmi názorné je odvození zákona o rovnosti úhlu odrazu a úhlu dopadu rovinné vlny na rozhraní dvou prostředí i zákona lomu.

Na rovinné rozhraní prostředí 1 a 2 nechť dopadá vlna s rovinnou vlnoplochou kolmou k nákrese, kterou protíná v přímce V_1 . Ježto je vlna rovinná, je stav ve všech rovinách rovnoběžných s nákresem stejný; v dalším výkladu se omezíme proto na řez nakreslený na obr. (3.2) 18. Rozruch dospěje tedy nejdříve do bodu A rozhraní a postupně zastihne ve stejných časových intervalech další body rozhraní $b, c, d, e, \dots$ až A' . Tyto body se postupně stávají středy elementárních kruhových vlnoploch jakožto řezů válcových vlnoploch, které obalí přímé čelo $A'B_1'$ odražené vlny. Přitom odražená vlna vycházející z A dorazí do bodu B_1' v témž okamžiku, v němž dopadající vlna z bodu B_1 dospěje na rozhraní

v místě A' . Tedy délky $\overline{AB_1} = \overline{B_1A'}$ jsou stejné a úhel odrazu α'_1 , měřený od kolmice dopadu v A' , rovná se úhlu dopadu α_1 , měřenému od kolmice dopadu v A .

Body rozhraní A, b, c, d, e se stávají také středy elementárních vlnocí, které se šíří nejen zpět do prostředí 1, ale také do prostředí 2, v němž se šíří vlnění fázovou rychlostí c_2 jinou, než je fázová rychlost c_1 v prostředí 1. Je-li $c_2 < c_1$, rozšíří se kruhová vlnocára z bodu A do bodu B_2 , jehož vzdálenost $\overline{AB_2}$ je menší než současně uražená dráha $\overline{B_1A'}$ v prostředí 1 v stejném poměru, v jakém c_2 je menší než c_1 , tedy podle obr. (3.2) 18

$$3.2 (12) \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{\overline{B_1A'}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_1A'} : \overline{AA'}}{\overline{AB_2} : \overline{AA'}} \quad \text{neboli}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}.$$

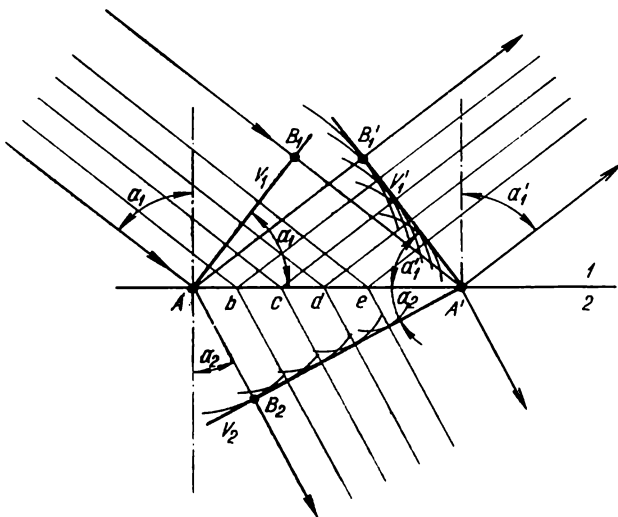
Značí-li α_2 úhel lomu, pak jsme odvodili známý Snellův zákon lomu: Poměr sinu úhlu dopadu k sinu úhlu lomu je rovný poměru fázových rychlostí v obou prostředích. Tento poměr se nazývá

index lomu a má pro každou dvojici prostředí hodnotu nezávislou na úhlu dopadu. Je zřejmo, že $\alpha_1 \geq \alpha_2$, jestliže $c_1 \geq c_2$.

Při vstupu z prostředí s větší rychlostí do prostředí s menší rychlostí šíření vln lomí se vlna ke kolmici, v opačném případě od kolmice. V posledním případě láme se vlna v pravém úhlu $\alpha_2 = \pi/2$, tedy do směru rozhraní, je-li úhel dopadu $\alpha_1 = \varepsilon$ takový, že

$$\sin \varepsilon = \frac{c_1}{c_2} < 1.$$

Tento úhel se nazývá mezní, protože je to největší úhel dopadu pro který ještě nastává kromě odrazu také lom. Pro všechny úhly větší než mezní nastává úplný



Obr. (3.2) 18. Odraz a lom rovinné vlny

odraz (totální reflexe), ježto neexistuje úhel lomu, jehož sinus by byl větší než 1. S výjimkou případů úplného odrazu nastává vždycky zároveň odraz i lom, ovšem rozdělení energie na odraženou a lomenou vlnu může být různé. Obecně lze říci, že srostoucím úhlem dopadu roste energie odražené vlny a klesá energie vlny lomené.

Pojem *paprsku*, který jsme zavedli při výkladu šíření vlnění na základě Huygensova principu, bezprostředně vede k názoru, že se vlnění kolem překážek, jež stojí v cestě částem vlnoploch při dalším postupu, šíří *přímochaře*, tzn. že za překážkou má vzniknout *stín*, do něhož je přechod čím ostřejší, čím menší rozměry má zdroj vlnění. Skutečně pozorujeme u světelného vlnění všechny úkazy související s jeho přímochařým šířením, naproti tomu zvukové vlny vnikají i do prostoru za překážkou nebo mimo otvor (zvuk slyšíme, i když stojíme např. vedle otvoru otevřeného okna). Odechylkám od přímochařého šíření říkáme *ohyb vlnění*.

Otázku, proč u zvuku běžně pozorujeme ohyb, kdežto u světla je to jev vzácný, který lze zjistit jen při pečlivě připravených laboratorních pokusech, zodpovíme na základě následující úvahy:

Mějme pro jednoduchost rovinnou vlnu a vyšetřeme účinek vlnění na části AB vlnoplochy V v bodě O , jehož vzdálenost od okamžité polohy vlnoplochy je $R \equiv \overline{OP}$ [obr. (3.2) 19]. Bod P

a proto lze podíl okrajového pásma při vytváření vlnění ve vyšetřovaném místě O zanedbat, je-li vzdálenost jednotlivých částí tohoto pásma od bodu O velká proti vzdálenosti pólu.

Při vytváření vlnění v některém bodu O před vlnoplochou V se podílí jen malá část vlnoplochy v okolí pólu P , v němž protíná vlnoplochu paprsek k ní kolmý, jdoucí bodem O , zatímco elementární vlnění ze všech ostatních bodů vlnoplochy se v místě O interferencí navzájem ruší. Účinná část vlnoplochy v okolí pólu závisí na vlnové délce λ vlnění a je malá, je-li i vlnová délka malá. Stačí proto malá překážka v pólu P , aby se vlnění do bodu O nedostalo. Vlnění se v tomto případě šíří přímočaře kolem překážky v paprscích kolmých na vlnoplochu.

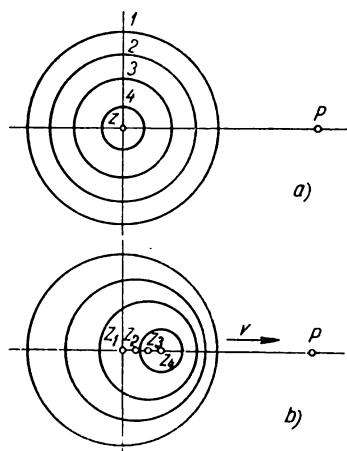
Je-li vlnová délka velká, je i účinná část vlnoplochy velká, takže menší překážka zakrýváající pól neovlivní mnoho vlnění v bodě O , které se k němu dostává z nezakryté části účinné plochy kolem pólu P . V tomto případě pozorujeme ohyb vlnění. Vzácnost ohybu světla záleží proto v nepatrné vlnové délce světla (řádově několik desetin mikronů), proti níž jsou běžné překážky obrovské. Zato zvukové vlny o frekvenci 20 Hz až 20 kHz, které jsou slyšitelné, mají vlnové délky v rozsahu 17 m až 17 mm, takže na běžných překážkách nebo v otvorech, jejichž rozměry měří řádově metry, se silně ohýbají.

3.2.7. Dopplerův princip

Dopplerův princip (objevený r. 1842 profesorem pražské techniky Christianem Dopplerem) týká se šíření vln z pohyblivého zdroje a vlivu jiných relativních pohybů na jejich frekvenci. Původně byly jím vyloženy jevy astrooptické, později se ho použilo i v akustice. V akustice potvrdil jeho platnost experimentálně Buys—Ballot.

Obecně lze Dopplerův princip vyjádřit takto: *Jestliže se oscilátor, který je zdrojem vlnění, a pozorovatel pohybují relativně k sobě nebo od sebe, pak při vzájemném přibližování je frekvence přijímaného vlnění vyšší a při vzájemném vzdalování naopak nižší.* Všimněme si dvou význačných případů.

1. *Zdroj se pohybuje vzhledem ke klidnému pozorovateli v klidném prostředí.* Vlnoplochy po čtyřech po sobě následujících periodách T jsou u klidného zdroje v řezu znázorněny na obr. (3.2) 20a. Pohybuje-li se zdroj stálou rychlostí v (obr. b), pak vyslal vlnoplochu 1 z místa Z_1 , vlnoplochu 2 však z jiného místa Z_2 , jehož vzdálenost od prvního místa je vT , vlnoplochu 3 z místa Z_3 , jehož vzdálenost od Z_2 je rovněž vT , atd. Je zřejmé, že směrem k pozorovateli P jsou vlnoplochy sraženější, tj. vlnová délka je o $\Delta\lambda = vT$ kratší, než kdyby zdroj byl v klidu. Protože se přitom nemění postup fází kmitů rychlostí c , přijímá pozorovatel P vlnění s frekvencí



Obr. (3.2) 20. Šíření vln z klidného a pohybujícího se zdroje

$$3.2 \quad (14) \quad \nu_z = \frac{c}{\lambda - \Delta\lambda} = \frac{c}{\lambda - vT} = \frac{c}{\frac{c}{\nu} - \frac{v}{\nu}} = \frac{c}{c - v} \nu,$$

je-li ν frekvence kmitů klidného zdroje. Snadno bychom z obr. b vyvodili frekvenci vnímanou pozorovatelem, kdyby se zdroj pohyboval rychlostí v jiným směrem než přímo k pozorovateli.

Kdyby se zdroj vzdaloval od pozorovatele touž rychlostí, prodloužila by se naopak zdán-

livá doba kmitu a frekvence by byla nižší, a to v poměru $\frac{c}{c+v}$, který plyne z hořejšího výrazu pro záporné v .

2. *Pozorovatel se pohybuje ve směru šíření vln (od zdroje) rychlostí u .* Zdroj i prostředí je v klidu, tedy pevným bodem projde $v = c/\lambda$ vln za sekundu, avšak pohybující se pozorovatel, vzhledem k němuž mají vlny relativní rychlost $c - u$, přijme jen

$$3.2 (15) \quad \nu_p = \frac{c-u}{\lambda} = \frac{c-u}{c} \nu$$

vln za sekundu. Pozorovaná frekvence ν_p je tedy zase menší, když se vzdálenost mezi pozorovatelem a zdrojem zvětšuje, a zřejmě je tomu naopak, když se zmenšuje.

Podobný případ pozorujeme, půjdeme-li delší dobu podél trati elektrické dráhy a budeme-li počítat zvlášť vlaky, jež nás v této době předjedou, a zvlášť vlaky jedoucí proti nám. I když budou absolutní časové intervaly (měřené nehybným pozorovatelem) mezi jednotlivými vlaky v obou případech stejné, napočítáme prvních méně než druhých.

Kdyby se současně pohyboval zdroj i pozorovatel, byla by přijímaná frekvence

$$\nu_{zp} = \frac{c}{c-v} \nu_p = \frac{c}{c-v} \frac{c-u}{c} \nu = \frac{c-u}{c-v} \nu.$$

Kdyby se stejným směrem pohybovalo zároveň i prostředí, v němž se vlnění šíří, rychlostí w , museli bychom do hořejšího vzorce za c dosadit $c + w$. Přitom počítáme všechny rychlosti kladně ve směru od zdroje k pozorovateli. Ze vzorců 3.2 (14) a (15) je zřejmo, že změna frekvence není stejná, přibližuje-li se v klidném prostředí stejně rychle zdroj k pozorovateli nebo obráceně pozorovatel ke zdroji. Frekvence se ovšem nemění, pohybuje-li se zdroj i pozorovatel stejným směrem stejnou rychlostí ($u = v$), takže se jejich vzájemná vzdálenost nemění. Pak se oba pohybují stejně vzhledem k prostředí, a proto se nemění jejich frekvence ani v opačném případě, kdy se pohybuje prostředí vzhledem ke klidnému zdroji i pozorovateli. Proto se např. větrem nemění výška tónů klidných zvukových zdrojů.

Dopplerův jev lze snadno pozorovat u zvuků vydávaných rychle jedoucím vozidly, letícím projektilům apod. Příslušný princip platí ovšem i pro světlo, pro které musí však být vlivem ohromné rychlosti světla relativní rychlost zdroje a pozorovatele mnohem větší, má-li se změna frekvence, závislá na poměru relativní rychlosti k rychlosti světla, projevit měřitelným posunutím spektrálních čar, vysílaných zdrojem. I pro největší známé rychlosti nebeských těles je poměr v/c nebo u/c malý proti jedné, a proto oba vzorce 3.2 (14) a (15) vedou prakticky k stejnému výsledku. Nedbáme-li totiž čtverce poměru v/c proti 1, dostaneme

$$\frac{\nu_z}{\nu} = \frac{c}{c-v} = \frac{c(c+v)}{c^2-v^2} = \frac{c+v}{c} \frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx \frac{c+v}{c}.$$

Proto můžeme prakticky zjišťovat jen relativní pohyby nebeských těles vzhledem k Zemi, tj. vzdalování a přibližování těles nebeských, rotaci Slunce atd., ač ovšem posunutí spektrálních čar může nastat i z jiných příčin, jako je Comptonův jev nebo silné gravitační pole některých stálic.

3.2.8. Vlnová rovnice

Doposud jsme se zabývali kinematikou vlnivého pohybu, při čemž tento pohyb v případě rovinné vlny podélné nebo příčné lineárně polarizované vyjadřovala obecně rovnice

$$u = f\left(t - \frac{x}{c}\right). \text{ Šířil-li se vlna v záporném směru souřadnicové osy } OX, \text{ popisuje ji zřejmě}$$

rovnice $u = F\left(t + \frac{x}{c}\right)$, která říká, že v místě $x > 0$ nastává výchylka o dobu x/c dříve než v počátku O . Prostředím se ovšem mohou vlny šířit současně v navzájem opačných směrech, např. následkem odrazu, jak jsme poznali při výkladu vzniku stojatého vlnění. Podle principu superpozice jsou výchylky výsledné vlny určeny součtem dílčích výchylek, tedy vztahem

$$3.2 (16) \quad u = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + F\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

Obě funkce, které v tomto vztahu vystupují, jsou zcela libovolné, závisejí na libovolném tvaru rozruchů šířících se prostředím oběma směry. Rovnice 3.2 (16) je proto nejobecnějším kinematickým vyjádřením rovinné vlny podélné nebo příčné lineárně polarizované.

Máme-li od kinematiky vlnění přejít k jeho dynamice a přihlížet také k příčinám vlnění, tj. k souvislosti vlnivého pohybu se silami, jimiž se vlnění prostředím přenáší, musíme zjistit příslušnou pohybovou rovnici, jako je rovnice $ma = \vec{F}$ v případě pohybu jednoho hmotného bodu. Dojdeme k ní snadno, vytvoříme-li druhé parciální derivace rovnice 3.2 (16) jednak podle času t a jednak podle souřadnice x . Vzpomeneme-li, že derivace složené funkce se rovná součinu derivací jednotlivých funkcí, z nichž se složená funkce skládá, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= f''\left(t - \frac{x}{c}\right) + F''\left(t + \frac{x}{c}\right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \left[f''\left(t - \frac{x}{c}\right) + F''\left(t + \frac{x}{c}\right) \right]. \end{aligned}$$

Ze srovnání obou rovnic plyne diferenciální rovnice

$$3.2 (17) \quad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}},$$

kteřá se nazývá *vlnová rovnice*. Je to hledaná pohybová rovnice pro rovinnou vlnu, jejíž fyzikální smysl je zřejmý. Na její levé straně je okamžité zrychlení buď jednoho bodu bodové řady, nebo objemového elementu rozvlněného prostředí, její pravá strana pak má podle zákona síly zřejmě význam podílu síly, působící v jednotlivých místech na bod nebo objemový prvek, a jejich hmotnosti, tedy číselně síly působící na prvek z jednotkovou hmotností. Úplným obecným řešením této rovnice je vztah 3.2 (16), z něhož jsme ji odvodili, jednotlivé členy rovnice 3.2 (16), které ji samy o sobě také vyhovují, jsou pak jejím partiikulárním řešením. Z toho plyne, že vlnová rovnice platí pro jakoukoli rovinnou vlnu podélnou nebo příčnou lineárně polarizovanou, ať jednoduchou, nebo jakkoli složenou, tedy i stojatou. Je však třeba si uvědomit, že jde jen o vlny netlumené, protože podle 3.2 (16) vznikají v jednotlivých místech postupem času výchylky se stejně velkým výkmitem, naproti tomu u tlumené vlny se výkmity výchylek s časem a se vzdáleností od místa rozruchu zmenšují, což rovnice 3.2 (16) nezahrnuje.

Týmž postupem, kterého jsme použili k odvození vlnové rovnice pro rovinnou vlnu podélnou nebo lineárně polarizovanou příčnou vlnu, dojdeme také k obecné vlnové rovnici pro libovolné netlumené vlnění prostorové. Šíří-li se rovinná vlna vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic v obecném směru určeném jednotkovým vektorem $\mathbf{r}^0$ kolmým k navzájem rovnoběžným vlnoplochám, pak okamžitou polohu některé vlnoplochy vzhledem k počátku O souřadnicové soustavy určuje vektor $\mathbf{r} = r\mathbf{r}^0$, kde r je vzdálenost této vlnoplochy. Násobíme-li vektor $\mathbf{r}$ skalárně jednotkovým vektorem $\mathbf{r}^0$, dostaneme vzhledem k tomu, že součin $\mathbf{r}^0 \cdot \mathbf{r}^0 = 1$, pro vzdálenost vlnoplochy $\mathbf{r} = r \cdot \mathbf{r}^0 = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$, kde x , y a z jsou průměry průvodiče $\mathbf{r}$

do souřadnicových os a kosiny průměty jednotkového vektoru $\mathbf{r}^0$ do týchž os. Omezíme-li se jen na vlnu šířící se v jednom směru, pak stav vlnění na příslušné vlnoploše je podle 3.2 (16) vyjádřen rovnicí

$$u = f\left(t - \frac{r}{c}\right) = f\left(t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{c}\right).$$

Derivujeme-li tuto rovnici opět parciálně dvakrát podle času t a dvakrát podle jednotlivých souřadnic x , y a z a diferenciální podíly $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ sečteme, při čemž součet čtverců směrových kosinů je roven jedné, dostaneme srovnáním tohoto součtu s $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ nejobecnější tvar vlnové rovnice pro netlumené vlnění

$$3.2 (18) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

jejíž levá strana se obvykle označuje symbolem Δu , kde Δ se nazývá Laplaceův diferenciální operátor. Rovnice má pak formálně jednoduchý tvar

$$3.2 (19) \quad \Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Nevyskytují se v ní směrové kosiny, takže platí obecně pro všechny směry. Jako parciální diferenciální rovnice platí v limitě pro velmi malý prostor, v němž však každou obecnou vlnu můžeme považovat za rovinnou. Vlnová rovnice 3.2 (18) nebo (19) platí proto pro vlny jakéhokoli tvaru v prostoru a vyjadřuje v limitě obecně libovolné i neperiodické vlnění, ať podélné, nebo příčné, polarizované, či nepolarizované, ovšem vždy netlumené.

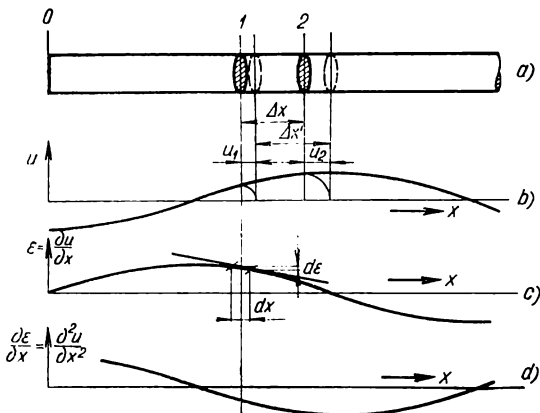
V moderní kvantové fyzice (vlnové mechanice), která v atomové teorii nahrazuje klasickou mechaniku Newtonovu, má tato rovnice stejný základní význam jako pohybové rovnice Newtonovy v mechanice těles.

3.2.9. Rychlost elastických vln v pevných látkách

Obecná úloha určit rychlost vln v pružných tělesech je složitá. Nejsnáze se dá určit rychlost podélných vln v tenké tyči, neboť zde vystačíme s vlnovou rovnicí 3.2 (17) jen s dvěma nezávisle proměnnými x a t , poněvadž k příčným rozměrům tyče nepřihlížíme, a vlna se šíří směrem osy tyče, kterou volíme za osu X .

Při podélném vlnění, postupujícím tyčí, kmitají jednotlivé průřezy v podélném směru kolem svých rovnovážných poloh, které přísluší stavu klidu, kdy se tyč vlna nešíří, a ve zvoleném okamžiku t mají podélné výchylky u . Průběh těchto okamžitých výchylek se vzdáleností x (měřená např. od průřezu O tyče) je v případě, že jde o harmonickou vlnu, znázorněn na obr. (3.2) 21b. Část tyče mezi průřezy 1 a 2 na obr. a má za klidu délku Δx ; postupuje-li tyčí vlna, pak v okamžiku t má tato část délku $\Delta x'$. Rozdíl obou délek, rovný rozdílu okamžitých posunutí u_1 a u_2 obou základů omezujících vyšetřovanou část tyče, tedy $\Delta x' - \Delta x = u_2 - u_1 = \Delta u$, je její deformace v okamžiku t . Příslušná poměrná deformace neboli poměrné prodloužení ε vztažené na její délku Δx za klidu je pak $\varepsilon = \Delta u / \Delta x$. Se zmenšující se vzdáleností Δx blíží se tento poměr zřejmě derivaci výchylky u podle x , při níž se čas nemění ($t = \text{const}$),

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$



Obr. (3.2) 21. Postup podélné vlny tyčí

Při podélném vlnění není tedy poměrné prodloužení ε všude v tyči stejné jako při napínání tyče na obou koncích stejně velkými silami navzájem opačného směru, o němž jsme pojednali v čl. 2.6.2, nýbrž mění se se vzdáleností x , jak je znázorněno na obr. c. Podle Hookova zákona je poměrné deformaci ε úměrná síla F , již ve zvoleném průřezu na sebe navzájem působí dvě části tyče, které z obou stran k tomuto průřezu přiléhají, a tato síla se proto podél tyče mění podobně jako poměrné prodloužení ε na obr. c.

Vytkneme-li např. kolem průřezu l element tyče délky dx , neruší se proto navzájem síly, jimiž na element působí části tyče přiléhající k jeho základnám, jako při prostém napínání tahem nebo tlakem, při němž je poměrné prodloužení všude v tyči stejné. Na element působí v podélném směru z té či oné strany síla dF úměrná rozdílu $d\varepsilon$ poměrných prodloužení ε v průřezech, které jej omezují. Přírůstek $d\varepsilon$, a tedy i síla dF , závisí na průběhu poměrného prodloužení v bezprostředním okolí vyšetřovaného průřezu l , tedy na sklonu tečny ke křivce na obr. c, znázorňující průběh ε se vzdáleností x . Směrnice této tečny je $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, a proto

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Je-li S plošný obsah průřezu tyče a E její modul pružnosti v tahu nebo tlaku, pak podle Hookova zákona

$$F = SE\varepsilon \quad \text{a} \quad dF = SE d\varepsilon = SE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Elementární síla dF uděluje vyšetřovanému elementu tyče elementární hmotnosti $dm = \rho S dx$, je-li ρ hustota tyče, zrychlení $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ve směru, v němž působí, určené pohybovou rovnicí $dm \cdot a = dF$. Vzhledem k hořejší rovnici tedy dostáváme

$$3.2 (20) \quad \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = SE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad \text{čili} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Tato rovnice je shodná s vlnovou rovnicí 3.2 (17) pro šíření rovinné vlny ve směru osy X , v níž čtverec fázové rychlosti c^2 je nahrazen podílem E/ρ . Z toho plyne, že podélné vlny se v tyči šíří fázovou rychlostí

$$3.2 (21) \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

která je tím větší, čím větší je modul pružnosti tyče a čím menší je její hustota.

Vzbudíme-li v pevném tělese libovolného tvaru náhlou místní deformaci v jistém směru, šíří se v tomto směru podélná vlna, při čemž pohyb od částice k částici se přenáší normálovým napětím látky. Ve směrech kolmých ke směru původní deformace postupuje vlna příčná, jejíž šíření je zprostředkováno tečným napětím. Ve všech ostatních směrech šíření vln vznikají pak šikmé výchylky.

Složitější výpočty, založené v podstatě na stejných fyzikálních úvahách jako odvození podélné vlny v tenké tyči, vedou pro rychlost příčné a podélné vlny k výsledkům:

$$3.2 (22), (23) \quad c_{\text{příčné}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad c_{\text{podélné}} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{m-1}{m+1} K},$$

kde G je modul pružnosti ve smyku, K modul objemové pružnosti a m Poissonova konstanta.

Použijeme-li pro Poissonovu konstantu její střední hodnoty $m = 3,3$, plyne ze vzájemných vztahů mezi moduly pružnosti $K = \frac{mE}{3(m-2)}$, $G = \frac{mE}{2(m+1)}$ pro fázové rychlosti příčné a podélné vlny přibližně

$$c_{\text{příčné}} = 0,62 \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c_{\text{podélné}} = 1,17 \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

čili $c_{\text{podélné}} = 1,89 c_{\text{příčné}}$; podélná vlna se tedy šíří přibližně dvakrát rychleji než vlna příčná. Zároveň vidíme, že rychlost podélných vln v prostředí zaujímajícím velký objem (teoreticky neomezený) je větší než v tenké tyči, což je způsobeno příčnou kontrakcí tyče. Záchvěvy kůry zemské zaznamenáváme velmi citlivými seizmografy. Protože se z ohniska zemětřesení (tzv. hypocentra) šíří vlnění podélné i příčné, je možno z časového rozdílu počátku podélného a příčného záznamu přístroje usuzovat na vzdálenost zemětřesení.

Podobným způsobem jako rychlost podélných vln v tyči odvodíme rychlost příčných vln v napjaté struně. Je-li struna napjata silou F a je-li její délková hustota μ , tj. hmotnost struny dělená její délkou, šíří se po ní příčné kmity rychlostí

$$3.2 \quad (24) \quad c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}.$$

Z tohoto přibližného vzorce vidíme, že rychlost je tím větší, čím větší je napětí struny $\sigma = F/S$ a čím menší je hustota struny ρ ; nebo při stejné napínací síle, čím lehčí je struna na jednotku délky. Představíme-li si strunu jako souhrn vázaných oscilátorů, chápeme, že s napětím struny roste těsnost jejich vazby, a proto se energie přenáší rychleji. Vzorec 3.2 (24) je jen přibližný, protože v něm nepřihlížíme k tuhosti (nedokonalé ohebnosti) struny.

3.2.10. Rychlost podélných vln v kapalinách a plynech

Na vodní hladině šíří se zároveň vlny příčné a podélné, jejichž složením vznikají vlny cirkulární, avšak uprostřed velkého množství kapaliny, tedy uvnitř většího prostoru vyplněného kapalinou, šíří se jen vlny podélné, ježto tečná napětí v kapalině jsou zanedbatelně malá proti kolmým (tlakovým) napětím. To platí tím spíše pro plyny. Kapalinami a plyny se tedy šíří jen podélné vlny, a to rychlostí určenou Laplaceovým vzorcem

$$3.2 \quad (25) \quad c = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

který plyne ze vzorce 3.2 (23) pro pevné látky, položíme-li v něm $m = 2$ (jako by nastávala změna objemu). U plynů závisí modul K na tom, jak se mění teplota při střídaném stlačování a zředování, způsobeném postupující vlnou, jak ihned uvidíme. Převrácená hodnota modulu K je stlačitelnost γ , což je poměrné zmenšení objemu, dělené změnou tlaku:

$$3.2 \quad (26) \quad \frac{1}{K} = \gamma = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}, \quad K = -V \frac{dp}{dV}.$$

Kdyby byla perioda vlny dosti dlouhá, aby se teploty stlačených a zředěných částí plynu mohly vyrovnat, šlo by o děj izotermický a z Boylova zákona by vyšlo $pV = \text{const}$ a $p dV + V dp = 0$, takže $K = -V \frac{dp}{dV} = p$ a rychlost podélných vln

$$c = \sqrt{\frac{p}{\rho}}.$$

To však nesouhlasí se skutečností pro akustické frekvence, při jejichž rychlých kmitech se prakticky teploty vůbec nevyrovňají, a proto platí Poissonův vztah pro děj adiabatický, tedy $pV^\kappa = \text{const}$, z něhož diferencováním plyne $V^\kappa dp + \kappa p V^{\kappa-1} dV = 0$, takže modul objemové pružnosti $K = -V \frac{dp}{dV} = \kappa p$, a proto

$$3.2 \quad (27) \quad c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}},$$

kde κ je Poissonova konstanta rovná poměru specifických tepel plynu při stálém tlaku a stálém objemu. Tento vzorec, zvaný *Laplaceův vzorec*, dává hodnoty, které jsou v dobré shodě s měřenými hodnotami rychlosti podélných vln.* Protože tyto vlny mohou budit zvukový vjem, nazýváme fázovou rychlost pružnostních vln v prostředích též *rychlostí šíření zvuku* (zkráceně jen *rychlostí zvuku*).

Při nepřilíši vysokém tlaku plynu můžeme podle stavové rovnice ideálního plynu pro poměr tlaku plynu p k jeho hustotě ρ položit

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{T}{T_0} = \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{t}{T_0}\right) = \frac{p_0}{\rho_0} (1 + \gamma t);$$

zde p_0 je zvolený základní tlak plynu při teplotě 0°C a ρ_0 je příslušná hustota plynu. Teplotní součinitel objemové roztlačnosti a rozpínavosti γ je pro všechny plyny stejný, blíží-li se svými vlastnostmi ideálnímu plynu, $\gamma \approx 1/273^\circ \text{C}^{-1}$. Pro rychlost zvuku v plynu tak dostáváme vzorec

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0} (1 + \gamma t)} \approx \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}} \left(1 + \frac{1}{2} \gamma t\right),$$

z něhož je zřejmé, že se rychlost zvuku mění jenom s teplotou plynu. Zvolíme-li $p_0 = 760 \text{ torr} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, pak pro suchý vzduch při 0°C ($\rho_0 = 1,293 \cdot \text{kgm}^{-3}$ a $\kappa = 1,405$) dostaneme

$$3.2 \quad (28) \quad c = c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \gamma t\right) = (331,82 + 0,61t) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

Tabulka (3.2) I

Rychlost zvuku v několika látkách při 0°C

Látky	Rychlost $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
kyslík	315
dusík	377
helium	971
vodík	1 261
aceton	1 190
benzol	1 324
voda	1 485
olovo	1 200
měď	3 710
sklo	5 000
železo	5 100

kde $c_0 = \sqrt{\kappa p_0 / \rho_0} = 331,82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ je rychlost zvuku v suchém vzduchu za normálních podmínek. Rychlost zvuku závisí kromě na teplotě také na vlhkosti vzduchu, protože hustota vlhkého vzduchu je menší než hustota suchého vzduchu. Protože však také Poissonova konstanta κ vlhkého vzduchu je poněkud menší, není závislost rychlosti zvuku na vlhkosti vzduchu příliš výrazná. Při 50 % vlhkosti je o 1% větší a při 100 % vlhkosti je o 2% větší než v suchém vzduchu téže teploty. S teplotou tyto přírůstky rostou.

Podle uvedených vzorců pro rychlost zvuku v látkách neměla by tato rychlost záviset na frekvenci, tedy na délce vlny. Tento závěr skutečně platí pro jednoatomové plyny, složené z molekul tvořených jediným atomem (např. u netečných plynů). Málo závisí na frekvenci také rychlost zvuku v kapalinách. Naproti tomu rychlost zvuku v několikaatomových plynech, jejichž molekuly obsahují dva nebo více atomů, závisí poněkud na frekvenci, a to zvláště v oboru vln nadzvukových. Slyšitelné zvuky šíří se však i v těchto plynech prakticky rychlostí určenou Laplaceovým vzorcem.

*) V malých uzavřených prostorech, např. v píšťalách, je rychlost vln poněkud menší než podle Laplaceova vzorce, který platí pro volný vzduch. Příčinou je vnitřní tření a tření vzduchu na stěnách, dále vedení tepla a předávání tepla stěnám.

3.2.11. Intenzita vlnění

V úvodním článku této kapitoly jsme se zmínili o tom, že vlněním se prostorem přenáší energie. Projde-li libovolnou plochou plošného obsahu S v době t , která je dlouhá ve srovnání s periodou T kmitů částic, energie $\overline{W}$, pak podíl

$$3.2 \quad (29) \quad \overline{P} = \frac{\overline{W}}{t}$$

nazýváme *tokem energie**) plochou S nebo *zářivým tokem* touto plochou, protože přenos energie prostorem nazýváme také zářením. Tato veličina udává výkon zprostředkovaný vlněním, a měří se proto ve wattech. Její číselná hodnota je rovna energii, která se za jednotku doby rozšíří na vlnoplochu plošného obsahu S . Všechny vlnoplochy obklopujícími zdroj záření prochází týž tok energie (stejně střední hodnoty), avšak rozprostírá-li se na stále větší a větší vlnoplochy, pak energie připadající za jednotku času na plošnou jednotku vlnoplochy je tím menší, čím větší plošný obsah S má vlnoplocha. Tuto skutečnost vystihuje veličina I zvaná *intenzita vlnění* nebo *hustota zářivého toku*, definovaná podílem elementárního toku energie $d\overline{P}$, jdoucího elementární ploškou dS kolmou ke směru šíření vln, a této plošky

$$3.2 \quad (30) \quad I = \frac{d\overline{P}}{dS}.$$

Číselně udává intenzita vlnění průměrnou energii, dopadající za jednotku doby na plochu jednotkového plošného obsahu kolmou na směr šíření vlny. Je to vlastně výkon dělený plochou, a proto intenzitu vlnění také nazýváme *měrným výkonem* dopadající vlny.

Je-li zdroj vlnění bodový a prostředí stejnorodé a izotropní, jsou vlnoplochy kulové plochy a jejich poloměr $r = ct$ roste úměrně s časem, kdežto jejich povrch roste se čtvercem poloměru, a tedy se čtvercem času. Protože se v tomto případě energie vyzářená zdrojem za jednotku času rovnoměrně rozprostírá na jednotlivé vlnoplochy, je zřejmé, že intenzity vlnění ubývá nepřímo úměrně čtverci vzdálenosti, správněji je nepřímo úměrná $4\pi r^2$, tj.

$I \sim \frac{1}{4\pi r^2}$, protože plošný obsah kulové plochy má takovou velikost. To je *zákon převrácených čtverců*, který platí ze stejných geometrických důvodů nejen pro všechny druhy záření, nýbrž i pro intenzitu pole gravitačního, elektrického a magnetického (ale nikoli v rozsahu atomových rozměrů, pro které již nemůžeme pokládat rozložení energie za spojitě).

U rovinné vlny, která není absorbována prostředím, jímž se šíří, má intenzita vlnění stálou velikost. Vypočítáme ji pro případ harmonické vlny. Celková energie harmonického oscilátoru je podle 3. 1(23)

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2,$$

kde A je amplituda kmitající částice. Kmitá-li tedy spojitě prostředí hustoty ρ , je *hustota energie* (tj. číselně energie v objemové jednotce)

$$3.2 \quad (31) \quad \overline{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2,$$

poněvadž hustota ρ je číselně hmotnost objemové jednotky. To platí i pro průměrnou hustotu energie harmonické vlny postupující ve směru osy X .

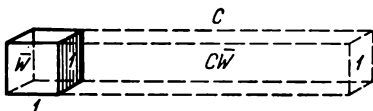
*) Přesněji je to střední hodnota toku energie, jak je vysvětleno v petitovém textu.

Energie $\bar{w}$ obsažená v objemové jednotce kmitajícího prostředí rozšíří se za jednotku času do vzdálenosti číselně rovné rychlosti c , jakou energie postupuje, takže plochou jednotkové velikosti [na obr. (3.2) 22 vyčárkovanou] za jednotku času projde energie $c\bar{w}$, obsažená v sloupci jednotkového průřezu a délky rovné velikosti c . Tato energie je číselně rovna intenzitě vlnění, takže dostáváme pro ni vztah

3.2 (32)

$$I = c\bar{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 c.$$

Intenzita vlnění roste tedy s hustotou ρ prostředí, s rychlostí vlnění c a se čtvercem frekvence a amplitudy. Další důležité vztahy pro intenzitu vlnění poznáme ještě v čl. 3.3.1.



Obr. (3.2) 22. K výpočtu intenzity vlnění

Při odvození intenzity vlnění jsme počítali tak, jako by tok a hustota energie byly stálé veličiny, ačkoli je zřejmé, že kdyby v objemových jednotkách prostředí, jímž se vlnění šíří, byla všude stejně velká energie, žádná energie by se nemohla šířit. Vyšetříme proto podrobněji šíření energie např. při postupném vlnění v tenké tyči. Hustota energie w definovaná přesně podílem $w = dW/dV$, kde dW je energie připadající na elementární objem dV kmitajícího prostředí, skládá se u mechanických vln z hustoty w_k kinetické energie a w_p , potenciální energie. Předpokládáme-li, že objemové elementy dV tyče kmitají

harmonicky, pak vlnění je popsáno rovnicí 3.2 (4). Hustotu kinetické energie $w_k = \frac{dW_k}{dV} = \frac{1}{2} \frac{dm}{dV} v^2 = \frac{1}{2} \rho v^2$ dostaneme, dosadíme-li za rychlost v kmitání první derivaci výchylky 3.2 (4) podle času při $x = \text{const}$, tedy

$$w_k = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Hustotu potenciální energie w_p vypočteme z práce potřebné k deformaci objemové jednotky tyče za předpokladu, že se nemění průřez tyče. Pak poměrné prodloužení ε je číselně rovno poměrné změně objemu, který má před deformací jednotkovou velikost. Na plošnou jednotku průřezu tyče působí síla číselně rovná napětí σ , při čemž podle Hookova zákona $\sigma = E\varepsilon$. Změní-li se poměrné prodloužení o $d\varepsilon$, vykoná síla, přemáhající napětí v tyči, elementární práci $\sigma d\varepsilon = E\varepsilon d\varepsilon$, takže hustota potenciální energie

$$w_p = E \int \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2.$$

Podle článku 3.2.9 je místní poměrné prodloužení v tyči, šíří-li se jí vlna, $\varepsilon = \partial u / \partial x$, takže dosadíme-li do hořejšího vztahu první derivaci výchylky 3.2 (4) podle souřadnice x při $t = \text{const}$ a použijeme-li zároveň vztahu 3.2 (21) pro rychlost vlnění, dostaneme pro hustotu potenciální energie též výraz jako pro hustotu kinetické energie, tedy $w_p = w_k$. Hustota celkové energie je potom

$$w = w_k + w_p = 2w_k = \rho \omega^2 A^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Celková mechanická energie kmitavých pohybů částic v elementárním objemu, tj. $dW = w dV$, není tedy stálá jako energie kmitů osamocенého oscilátoru, protože částice prostředí, jímž se vlnění šíří, nemají individuální vazby, nýbrž každá částice je vázána elastickými silami s okolními částicemi. Protože funkce vyjadřující hustotu energie má též argument jako funkce 3.2 (2) pro výchylku, je zřejmé, že energie kmitání postupuje ve směru šíření vlnění touž fázovou rychlostí c jako fáze kmitů. Kdybychom vyšetřovali hustotu energie výsledného vlnění složeného z částicných vlnění postupujících různými fázovými rychlostmi, tedy při disperzi (čl. 3.2.5), zjistili bychom, že energie postupuje grupovou rychlostí příslušnou výslednému vlnění. Jenom při zcela vyvinutém stojatém vlnění je energie obsažená v elementárních objemech stálá. Proto se při stojatém vlnění energie nešíří a zůstává omezena na prostor, v němž stojaté vlnění trvá.

Působí-li ovšem chvějící se těleso jako zářič, pak zajisté jeho energie ubývá, není-li doplňována, ale v celém chvějícím tělese současně.

Při postupném vlnění kolísá tedy hustota energie w v jednotlivých místech rozvlněného prostředí i tok energie P zvolenou plochou s časem, avšak intenzitu vlnění I definujeme na základě průměrného toku, který prochází jednotkovou plochou. Protože střední hodnota funkce $\cos^2 \varphi$ v intervalu $\varphi = 0$ až $\varphi = 2\pi$, což odpovídá jedné periodě T kmitů v jistém místě ($x = \text{const}$), je $1/2$, má hustota energie w rovinné vlny všude během každé periody T touž střední hodnotu $\bar{w}$ podle 3.2 (31), což vede pro intenzitu vlnění k výsledku 3.2 (32), k němuž jsme došli v hlavním textu.

3.3. Zvuk a ultrazvuk

3.3.1. Podstata zvuku, základní akustické veličiny

Zvukem rozumíme nejen sluchový vjem sluchového orgánu, ale i jeho vnější příčinu — uspořádaný kmitavý pohyb molekul, přenášený působením sil, jimiž na sebe molekuly vzájemně působí. Zvukem tedy nazýváme vlnění molekul. Zvuk se může šířit jen v látkách, nikoli ve vakuu.

Subjektivní zvukový vjem (počitek) vzniká chvěním sluchového orgánu, které je způsobeno dopadem zvukových vln na ušní bubínek. Chvění ušního bubínku se přenáší soustavou kostiček na vlastní sluchový orgán — vnitřní ucho —, jenž je vyplněn kapalinou. Ve vnitřním uchu je asi 23 000 nervových buněk, jež tvoří zakončení nervových přípojek. Nervové buňky umístěné na stěně sluchového orgánu mají tvar strun různých délek, jež jsou napjaty různou silou, takže sluchový orgán lze jeho funkcí přirovnat k známým rezonančním frekventoměrům.

Zvukové vlny záleží ve střídavém zhušťování a zředování vzduchu nebo jiného prostředí, v němž postupují rychlostí závislou na okamžitých podmínkách (na tlaku, teplotě a vlhkosti prostředí). Rychlosti šíření těchto vln, tj. jejich fázové rychlosti, říkáme *rychlost šíření zvuku* a značíme ji c .

Podobně jako náš sluchový orgán rozechvívají se i jiná tělesa dopadem zvukových vln, jež se pak šíří nejen ve vzduchu, ale i v každém plynu, v kapalinách i v pevných látkách. Proto v nauce o zvuku studujeme veškerá podélná i příčná vlnění různých prostředí a též chvění těles zvaných *akustické (zvukové) zdroje*, od nichž se toto vlnění šíří.

Zvukové vlny se šíří různými prostředím různou rychlostí, při čemž se zeslabují. Jejich intenzity ubývá šířením na větší a větší vlnoplochy, částečným pohlcováním (absorpcí) v prostředí a při odrazu na tělesech. V dalším výkladu se omezíme na zvukové vlny podélné, v akustice nejběžnější, jimiž se zvuk šíří v tekutinách (v kapalinách a v plynech). Protože se ani „neslyšitelné“ zvuky neliší zásadními fyzikálními vlastnostmi od „slyšitelných“, budou odvozené vztahy platit pro jakýkoliv zvuk bez omezení kmitočtu.

Při podélném vlnění, jímž se zvuk šíří, kmitají jednotlivé částice prostředí uspořádaně kolem jistých středních poloh, které zaujímají v prostředí, dokud se jím nešíří zvuk. Vychýlení u objemového elementu prostředí ze střední polohy při vlnění nazýváme *akustickou (zvukovou) výchylkou*. Je-li zvuková vlna šířící se ve směru souřadnicové osy X rovinná a harmonická, je okamžitá hodnota akustické výchylky objemového elementu, vzdáleného o x od počátku rozruchu, určena v okamžiku t vztahem 3.2 (4), v němž nyní amplitudu A označíme u_0 , tedy

$$3.3 (1) \quad u = u_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

kde u_0 je *amplituda akustické výchylky*. Neabsorbuje-li se rovinná vlna s rostoucí vzdáleností x od zvukového zdroje, má amplituda akustické výchylky stálou hodnotu.

Proměnná rychlost v , kterou uspořádaně kmitají částice nebo objemové elementy pro-

středí při vlnění kolem střední polohy, nazývá se *akustická (zvuková) rychlost*. Pro rovinnou harmonickou vlnu ji dostaneme derivací akustické výchylky podle času, tedy

$$3.3 (2) \quad v = \frac{\partial u}{\partial t} = \omega u_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = v_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

při čemž veličina

$$3.3 (3) \quad \boxed{v_0 = \omega u_0}$$

je *amplituda akustické rychlosti*. Akustická rychlost může nabývat hodnot jak kladných, tak i záporných, a to v mezích velikosti v_0 . Nesmíme ji zaměňovat s rychlostí zvuku c , kterou se zvukové vlny šíří v prostředí a která je pro každé izotropní prostředí stálou veličinou.

Podobně bychom mohli odvodit i zrychlení objemového elementu prostředí při podélném vlnění, ale příčinou zrychlení nějaké části tekutiny je změna tlaku (síla na plošnou jednotku) v tekutině, a proto odvodíme raději rovnici pro tlak prostředí při podélném vlnění.

Vytkněme si v prostředí malý objemový element s podstavou S kolmou ke směru šíření rovinné vlny, jehož výška ve směru postupu vlny je dx . Je-li hustota prostředí ρ , bude hmotnost vytčeného elementu $dm = \rho S dx$. Působí-li na jednu podstavu ve směru pohybu objemového elementu tlaková síla $S p'$ a na druhou, vzdálenou o dx , proti pohybu tlaková síla $-S(p' + dp')$, pak celková síla působící na element je

$$dF = -S(p' + dp') + S p' = -S dp'.$$

Tato síla udělí elementu o hmotnosti dm ve zvoleném místě x zrychlení

$$\frac{dF}{dm} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{S}{\rho S} \frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}.$$

Použili jsme parciálních derivací, protože u , v a p' závisí na dvou nezávisle proměnných x a t . Z této rovnice vypočteme tlak plynu při podélném vlnění s rovinnou vlnoplochou, dosadíme-li do ní derivaci akustické rychlosti 3.3 (2) podle času, tedy

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \rho \omega^2 u_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Integrací dostáváme

$$3.3 (4) \quad p' = \rho c \omega u_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + p,$$

kde integrační konstanta p značí tlak v tekutině, nešíří-li se jí žádné vlnění. Z této rovnice je zřejmé, že byl-li tlak tekutiny před průchodem zvukových vln všude stejný a rovný p , pak při šíření zvukových vln má místní tlak prostředí hodnotu $p' = p_a + p$, kde přídatný tlak

$$3.3 (5) \quad p_a = p_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

je tzv. *akustický (zvukový) tlak*, jenž nabývá hodnot jak kladných, tak záporných. Amplituda tohoto tlaku je podle 3.3 (4) a (3) dána vztahy

$$3.3 (6) \quad \boxed{p_0 = \rho c \omega u_0 = \rho c v_0}$$

Tlak tekutiny kolísá tedy kolem klidového tlaku se stejnou periodou nebo frekvencí jako akustická výchylka u a akustická rychlost v , ale tlakové kmity jsou o čtvrtperiodu fázově posunuty vzhledem k akustické výchylce a jsou u rovinné postupné vlny ve fázi s akustickou rychlostí.

Při stojatém vlnění akustická rychlost a tlak již nejsou ve fázi. Stejným způsobem, kterého jsme užili k odvození akustické rychlosti a tlaku rovinné postupné vlny, dostaneme totiž pro stojaté vlnění

$$v = 2v_0 \cos \omega \frac{x}{c} \cos \omega t \quad \text{a} \quad p_a = 2p_0 \sin \omega \frac{x}{c} \sin \omega t,$$

zvolíme-li počátek souřadnice x tak jako v čl. 3.2.4. Členy $\cos \omega t$ a $\sin \omega t$ udávají, že při stojatém vlnění je mezi akustickou rychlostí a tlakem fázový posuv právě $\pi/2$. Dále je z obou rovnic zřejmé, že akustický tlak má kmitny v těch místech, kde má akustická rychlost uzly, a obráceně. Můžeme tedy také říci, že akustický tlak je proti akustické rychlosti posunut o délku $\lambda/4$. Také při jiné vlnoploše postupného vlnění než rovinné je mezi akustickou rychlostí a tlakem jistý fázový posuv.

Píšeme-li rovnici 3.3 (6) ve tvaru

$$3.3 (7) \quad \boxed{\frac{p_0}{v_0} = z,}$$

pozorujeme jistou analogii s Ohmovým zákonem pro obvod střídavého proudu. Amplituda akustického tlaku p_0 zde odpovídá amplitudě střídavého elektrického napětí a amplituda akustické rychlosti v_0 amplitudě střídavého elektrického proudu; proto se veličina z nazývá *akustický vlnový odpor* (*impedance*). U rovinné vlny platí též vztah také mezi okamžitými hodnotami akustického tlaku p_a a akustické rychlosti v , protože obě veličiny jsou ve fázi, při čemž akustický vlnový odpor má podle 3.3 (6) velikost

$$3.3 (8) \quad \boxed{z = \rho c.}$$

Nejsou-li obě veličiny ve fázi, platí vztah 3.3 (7) jen pro vrcholné nebo efektivní hodnoty (viz dále) akustického tlaku a rychlosti a akustický vlnový odpor má velikost

$$3.3 (9) \quad z = \rho c \cos \varphi,$$

je-li φ fázový posuv mezi akustickou rychlostí a akustickým tlakem. Např. pro kulovou vlnu délky λ šířící se od bodového zvukového zdroje je ve vzdálenosti r od zdroje

$$3.3 (10) \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda/2\pi r)^2}}.$$

Je zřejmé, že fázový posuv je velmi malý pro $r \gg \lambda$ a blíží se nule pro $r \rightarrow \infty$. Je-li tedy vzdálenost místa, v němž vlnu vyšetřujeme, od zdroje velká proti vlnové délce zvuku, blíží se kulová vlna v jednotlivých částech vlnoplochy svými vlastnostmi rovinné vlně.

Akustický tlak udává se zpravidla ve vedlejších jednotkách $\mu\text{bar} = 10^{-1} \text{ N m}^{-2} = \text{dyn. cm}^{-2}$, zvaných mikrobar. Akustický vlnový odpor vzduchu při teplotě 20°C , tlaku 760 torrů a relativní vlhkosti 50 %, kdy má vzduch hustotu $\rho = 0,00120 \text{ g. cm}^{-3}$, je $z = \rho c = 0,00120 \cdot 34436 = 41,3 \text{ g. cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} = 41,3 \mu\text{bar. s. cm}^{-1} = 413 \text{ N. s. m}^{-3}$.

Pro intenzitu vlnění zvanou v akustice též *intenzita zvukového pole* nebo *intenzita (síla) zvuku* odvodili jsme vzorec 3.2 (32), v němž nyní amplitudu akustické výchylky označme u_0 , tedy

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2 c.$$

Pro rovinnou vlnu dostáváme tak vzhledem k 3.3 (3) a (6)

$$3.3 (11) \quad I = \frac{1}{2} p_0 v_0 = \frac{1}{2} v_0^2 \rho c = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho c}.$$

Poněvadž amplituda akustického tlaku p_0 odpovídá amplitudě napětí a amplituda akustické výchylky v_0 amplitudě elektrického střídavého proudu, mají vzorce 3.3 (11) shodný tvar se vzorci pro výkon střídavého proudu, není-li mezi napětím a proudem fázový posuv. Položíme-li podobně jako u střídavých proudů

$$3.3 (12) \quad p_e = \frac{p_0}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad v_e = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

a nazveme-li tyto veličiny *efektivním akustickým tlakem* a *efektivní akustickou rychlostí*, dostaneme pro intenzitu rovinné zvukové vlny důležité vztahy

$$3.3 (13) \quad I = p_e v_e = v_e^2 \rho c = \frac{p_e^2}{\rho c},$$

z nichž se zpravidla určuje intenzita zvuku. Udává se v jednotkách $\mu\text{W} \cdot \text{cm}^{-2}$ = $10^{-6} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ = $10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Efektivní hodnoty mají stejný význam jako u střídavých proudů. Jsou to stálé hodnoty, které by daly stejnou střední intenzitu zvuku jako časově proměnné hodnoty p_s a v . Je-li mezi akustickým tlakem a akustickou rychlostí fázový posuv φ , jako např. u kulové vlny, můžeme bez odvození analogicky s obecným vzorcem pro výkon střídavého proudu přímo psát

$$3.3 (14) \quad I = p_e v_e \cos \varphi,$$

kde pro kulovou vlnu je $\cos \varphi$ určen vztahem 3.3 (10).

Výkonem zvuku P rozumíme energii, která za jednotku času projde libovolnou plochou S , tedy

$$3.3 (15) \quad P = IS.$$

Tento vzorec platí ovšem jen tehdy, má-li v celé ploše S zvuk touž intenzitu. Není-li tomu tak, je nutno výkon zvuku zjistit integrací přes vyšetřovanou plochu.

Abychom si udělali představu o velikosti akustické rychlosti a akustické výchylky, vypočteme jejich efektivní hodnoty pro tón frekvence 1 000 Hz a značné hladiny hlasitosti 94 fónů (viz čl. 3.3.3), jíž přísluší akustický tlak 10 μbar , který je již velmi silný. Položíme-li akustický vlnový odpor vzduchu $\rho c = 40 \mu\text{bar} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-1}$, pak podle 3.3 (6) a vzhledem k 3.3 (12)

$$v_e = \frac{p_e}{\rho c} = \frac{10}{40} = 0,25 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

a efektivní akustická výchylka podle 3.3 (3)

$$u_e = \frac{u_0}{\sqrt{2}} = \frac{v_e}{\omega} = \frac{v_e}{2\pi\nu} = \frac{0,25}{2\pi \cdot 1\,000} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ cm}.$$

Podobně pro stejně silný tón ve vodě o vlnovém akustickém odporu $\rho c = 1,46 \cdot 10^5 \mu\text{bar} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-1}$ dostaneme $v_e = 6,9 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ a $u_e = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$. Z těchto dvou příkladů je zřejmé, jak neobyčejně malé jsou tyto veličiny. V pevných látkách a kapalinách je i při tak silném zvuku velikost výchylek částic řádově rovna průměru molekuly, v plynu musí být kmity molekul intenzivnější, aby vznikl akustický tlak 10 μbar , jaký má např.

zvuk silného klaksonu automobilu. Při ultrazvuku, u něhož lze dosáhnout značných měrných výkonů, mají ovšem obě veličiny mnohem větší hodnoty.

Zvuková vlna dopadající na nějakou překážku ve zvukovém poli působí na ni kromě proměnného akustického tlaku ještě jistým stálým tlakem, který se nazývá *tlak akustického (zvukového) záření II*. Tento tlak je podle Langevina přímo roven hustotě energie vlnění, zvané v akustice *hustota zvuku* $\bar{w}$, která má rozměr tlaku. Podle 3.2 (32) je hustota zvuku podílem intenzity zvuku I a rychlosti zvuku c , takže Langevinův tlak záření při pohlcení zvuku překážkou

$$3.3 (16) \quad \Pi = \bar{w} = \frac{I}{c}.$$

Je-li zvuk překážkou dokonale odražen, pak tlak akustického záření na překážce je $\Pi = 2\bar{w}$. Tento tlak vzniká tím, že střední hodnota akustického tlaku je ve skutečnosti od nuly různá. To jsme při odvozování akustického tlaku u rovinné vlny nezjistili, poněvadž jsme za hustotu prostředí přenášejícího zvuk přibližně dosazovali její klidovou hodnotu. Při přesném výpočtu bychom zjistili, že se při akustickém vlnění střední hodnota hustoty prostředí proti klidovému stavu změní, takže střední hodnota tlaku prostředí je různá od tlaku za klidu.

V oboru slyšitelných zvuků je tlak akustického záření velmi malý a nelze pozorovat znatelnou změnu vlastností prostředí, jímž se zvuk šíří. Například u tónu frekvence 1 000 Hz při efektivní hodnotě akustického tlaku ve vzduchu asi 10^{-5} at ≈ 10 μ bar je tlak záření řádově jen 10^{-10} at $\approx 10^{-4}$ μ bar. Značných akustických tlaků a hustot energie lze však dosáhnout ultrazvukem. Tlak záření se pak zvláště projevuje při odrazu ultrazvukových vln na rozhraní dvou různých prostředí. Tak může na povrchu kapaliny silným tlakem záření vzniknout vír nebo vířidlo (fontána), podle něhož lze poznat, že v kapalině je silné ultrazvukové pole.

3.3.2. Vlastnosti zvuku

Jsou-li zvukové vlny buzeny nepravidelnými mechanickými rozruchy, kolísá akustický tlak ve zvukové vlně nepravidelně a neperiodicky a příslušný zvuk nazýváme *nehudebním*. Vnímáme jej jako hukot, praskot, šramot, vrzání, prostě jako hluk.

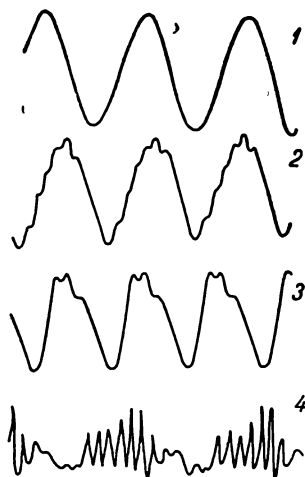
Vzniká-li naproti tomu zvuk přísně periodickými pohyby těles, takže také akustický tlak zvukového pole je periodickou funkcí času, nazýváme zvuk *hudebním*, při kterém může v uchu vznikat vjem působící příjemně, čehož se využívá v hudbě. Hudební zvuky se skládají z jednotlivých *tónů* (buzených např. hudebními nástroji nebo hlasovým ústrojím), u nichž však nemusí mít akustický tlak přesně harmonický průběh, jaký je u jednoduchého zvuku, který nazýváme *čistým* nebo *jednoduchým tónem*. Obecně není u hudebních tónů průběh kmitů sinusový, nýbrž je určen jinou periodicky se opakující křivkou, která se od sinusové křivky více nebo méně liší. Na obr. (3.3) 1 jsou tvary časových křivek kmitů, které konají: 1 — ladička, 2 — struna houslí, 3 — vzduchový sloupec ve flétně a 4 — v klarinetu. Podobně na obr. (3.3) 2 jsou akustické kmity příslušné různým hláskám lidské řeči. Na všech těchto obrazech se děj opakuje po jisté době — příslušné zvuky mají tedy jistou frekvenci. Při stejné frekvenci se tóny vydávané různými zdroji nebo hlasovým ústrojím při různých hláskách liší průběhem kmitů uvnitř každé periody. I tyto kvalitativní rozdíly můžeme vystihnout kvantitativně harmonickou analýzou zvuku.

Jak jsme viděli v čl. 3.1.4, lze pokládat každý periodický kmit za souhrn spolu probíhající harmonických kmitů s frekvencemi rovnými celistvým násobkům jisté základní frekvence, rovné převrácené hodnotě periody výsledného kmitu. Lze tedy říci, že všechny zvuky (s výjimkou zvuků nehudebních) jsou složeny z harmonického kmitání neboli *tónu základního* a jistého počtu *vyšších harmonických* neboli *aliquotních tónů* násobných frekvencí a různých amplitud, klesajících obvykle s rostoucí frekvencí.

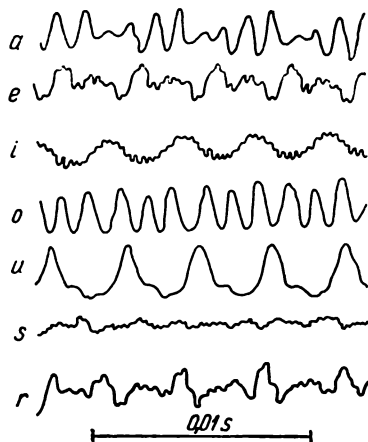
Jak ukázaly četné pokusy a výsledky harmonické analýzy, vydávají zvukové zdroje vždy jistý počet vrchních tónů harmonických, ale jejich intenzita u některých zdrojů je malá. Tak např. je to u ladičky, kdežto píšťaly a struny vydávají také vyšší harmonické s větší intenzitou podle úpravy a způsobu chvění. Na sílu jednotlivých složek lze značně působit rezonancí přilehlých součástí zdroje, hlavně vhodnými dutinami, které se uplatňují jako *rezonátory*. Podle známého poznatku (v čl. 3.1.8) nabývají nucené kmity největší

intenzity, souhlasí-li jejich frekvence s frekvencí vlastních kmitů rezonátorů, a proto rezonanční skříňky zvukových zdrojů zesilují stejně všechny tóny. Rezonanční křivka je však dosti široká zvláště pro silně tlumené rezonátory, které reagují na široký obor tónů po obou stranách svého vlastního tónu. Toho se využívá u některých hudebních nástrojů, zejména smyčcových.

Lidský hlas obsahuje velký počet harmonických složek (mezi něž je energie různě rozdělena), které rozhodují o druhu vyslovené hlásky. Tvoření hlásek závisí ovšem podstatně na rezonanci dutiny hrtanové a ústní (částečně i nosní). Jejich měkké stěny působí tlumivě a umožňují zesilovat široký obor tónů kolem jejich vlastní frekvence. Tóny této frekvence, na které jsou dutiny naladěny, nazývají se *formanty*. Hlavní formant ústní dutiny se mění podle polohy ja-



Obr. (3.3) 1. Časové rozvinutí kmitů:
1 – ladičky, 2 – houslové struny,
3 – vzduchového sloupce ve flétně,
4 – v klarinetu



Obr. (3.3) 2. Akustické kmity
příslušející různým hláskám lidské řeči

zyka, vzdálenosti zubů a rtů v oboru asi 175 až 3 700 Hz. Vedlejší formant neproměnné dutiny hrtanové má kmitočet kolem 400 Hz. Oběma dutinami se zesilují nejvíce vrchní složky hlasu, které leží v okolí formantů, a tím se mění povaha vydávaného složeného zvuku. Jednotlivé hlásky jsou charakterizovány frekvencí hlavního formantu, na který je naladěna ústní dutina. Formant nejnižší frekvence má samohláska *a* (175 Hz), která při obyčejné řeči obsahuje prakticky jen základní tón. To je důvod, proč zvuk ladičky nebo široké zavřené píšťaly, který také obsahuje skoro jen základní tón, zní podobně jako samohláska *a*. Formanty postupně vyšší frekvence příslušejí samohláskám *o* a *e* a formant nejvyšší frekvence (3 700 Hz) má samohláska *i*, což můžeme zhruba sledovat na obr. (3.3) 2. Některé souhlásky (např. *s* a *f*) vznikají jako šelesty při průchodu vzduchu zúženými místy; mají pak velmi početné a vysoké vrchní tóny harmonické proměnné intenzity a blíží se vlastně již nehudebním zvukům, jak lze rozeznat na grafu kmitů souhlásky *s* na obr. (3.3) 2. Jiné souhlásky (např. *b* a *k*) vznikají tím, že rty, zuby nebo jazyk rychle otvírají průchod vzduchu; jsou to krátkodobé nepravidelné zvuky.

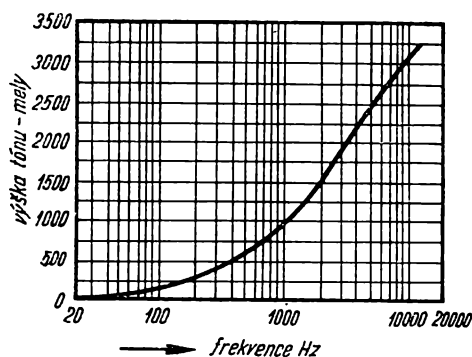
Při současném znění dvou tónů máme někdy dojem, že oba tóny k sobě nepatří, že se v souzvuku navzájem ruší, jindy zase, že dva tóny k sobě patří, takže jejich současné znění je pro sluch příjemné a lahodné. Dvojzvuk může tedy být *disonantní* (*nelibozvučný*) nebo *konsonantní* (*libozvučný*). Pradávným poznatkem je, že konsonance je nejdokonalejší, je-li poměr kmitočtů současně znějících tónů vyjádřen přirozenými čísly 1, 2, 3, ... Konsonantní tedy jsou dvojzvuky tónů, jejichž frekvence jsou v poměru malých celých čísel. Konsonance je tím dokonalejší, čím menší jsou tato čísla. Naproti tomu disonance je patrně způsobena záznějemi, které vznikají interferencí kmitů málo odlišných frekvencí.

Vyšší harmonické složky hudebního zvuku, které dostaneme harmonickou analýzou, tvoří právě konsonantní dvojzvuky, jejichž současné znění je libozvučné. Počet harmonických složek obsažených ve vyšetřovaném tónu a poměr jejich intenzit k intenzitě základního tónu, jehož frekvence dává *objektivní (fyzikální) výšku* složeného tónu,*) určují tzv. *barvu (zabarvení) zvuku*. Zvuk, v němž jsou obsaženy četné vrchní tóny, jejichž intenzita klesá s jejich pořadovým číslem, působí dojmem plnosti (varhany). Jsou-li jen některé z vyšších harmonických složek silné, nabývá zvuk jisté pronikavosti a lesku (housle). Jsou-li však některé vysoké složky příliš silné, je zvuk ostrý až křepavý (staré klavíry). Naproti tomu zvuk, který obsahuje jen malý počet slabých vrchních harmonických, zní dutě (zavřená široká píšťala). Při harmonické analýze jsme viděli, že jednotlivé harmonické složky jsou navzájem fázově posunuty. Tyto fázové posuvy mají však na barvu zvuku jen zcela nepatrný vliv. Je to následek *Ohmova akustického zákona*, podle něhož vnímáme sluchem pouze čisté tóny, jimž přísluší harmonické kmity akustického tlaku; složené tóny rozkládá sluch na jednotlivé čisté tóny, které vnímá zvlášť pro sebe, takže celkem nezáleží na vzájemném fázovém posuvu.

Zmínili jsme se v hlavním textu, že objektivní (fyzikální) výška čistého tónu je určena jeho frekvencí, u složených tónů frekvencí základní složky. Od této objektivní výšky je třeba odlišit *subjektivní výšku zvuku*. Je to subjektivní vlastnost čistého nebo složeného tónu, která umožňuje lidskému uchu určit polohu tónu na frekvenční stupnici. Z četných pokusů plyne, že subjektivní výška tónu není totožná s objektivní výškou tónu po fyzikální stránce. To znamená, že subjektivní počítky výšky dvou tónů nejsou obecně v téže poměru jako frekvence obou tónů.

Závislost subjektivní výšky čistých tónů téže intenzity na frekvenci tónů zjišťovali pokusně Stevens a Volkmann tak, že skupina deseti posluchačů měla za úkol rozdělit tři různé frekvenční obory vhodně volených krajních frekvencí vždy na čtyři stejně velké výškové intervaly. Například průměrné hodnoty frekvencí, které naslouchající nastavili tak, aby obor frekvencí 200 až 6 500 Hz rozdělili na čtyři stejně velké výškové intervaly, byly 867, 2 022 a 3 393 Hz. Pro výšku tónu byla zvolena jednotka nazvaná *mel* (od slova melody), definovaná tak, že výška tónu frekvence 1 000 Hz a hladiny intenzity 40 dB (viz následující článek), je právě 1 000 melů. Závislost výšky čistých tónů v melech na jejich frekvenci v hertzech, zjištěná uvedeným způsobem, je znázorněna křivkou na obr. (3.3) 3. Tato křivka určuje tedy stupnici pro subjektivní výšku tónů. Je zřejmé, že nulovou výšku má přibližně tón frekvence 20 Hz, tj. nejhlubší tón, od něhož začínáme mít teprve dojem výšky. Z grafu vidíme, že tón frekvence 1 000 Hz se nám jeví dvakrát vyšší než tón 400 Hz, ačkoli frekvence obou tónů jsou v poměru $1\,000 : 400 = 2.5$.

Výška složených tónů a zvuků, lze-li u nich o výšce vůbec mluvit, závisí kromě frekvence a intenzity jako u čistých tónů také poněkud na tvaru vlny. Určujeme proto výšku zvuku subjektivním srovnáním s čistým tónem, jehož akustický tlak se mění harmonicky. Podle mezinárodní dohody je objektivní výška vyšetřovaného zvuku dána frekvencí čistého tónu hladiny intenzity 40 dB, který má při subjektivním srovnání stejnou výšku, jakou má zkoumaný tón. Subjektivní výšku v melech lze pak určit z grafu na obr. (3.3) 3.



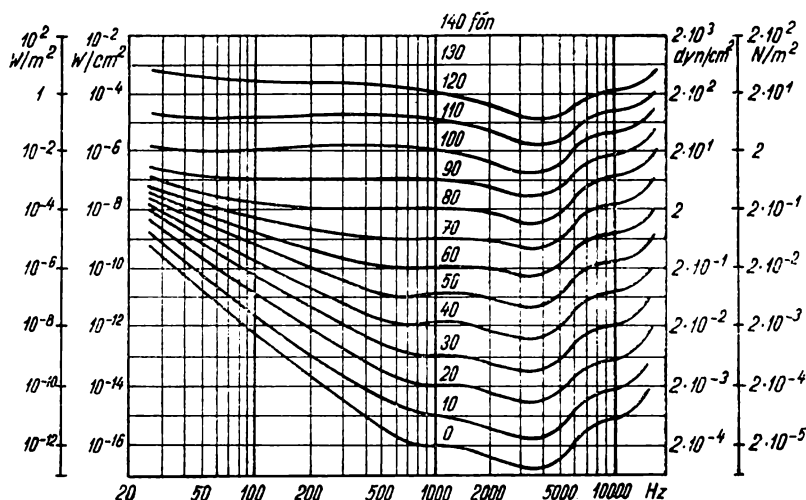
Obr. (3.3) 3. Subjektivní výška tónu

3.3.3. Subjektivní síla zvuku

Subjektivní síla zvuku, vnímaná normálním lidským uchem, liší se značně od objektivní síly zvuku, jíž je intenzita zvuku neboli měrný výkon, určený vztahy 3.3 (13). Myslíme tím, že zvýšení intenzity zvuku nezpůsobí ve stejné míře zesílení subjektivního pocitu, který přitom vnímáme. Plyne to již z toho, že u každého tónu vzniká zvukový vjem teprve tehdy,

*) Objektivní výška tónu je určena frekvencí základní složky, i když její amplituda je menší než amplituda vyšších harmonických.

dostoupí-li akustický tlak nebo intenzita zvukové vlny jisté hodnoty, která je u různých vysokých tónů různá. Je-li akustický tlak menší než tato tzv. *prahová hodnota*, není tón ještě slyšitelný. Prahové hodnoty efektivního akustického tlaku tónů různé frekvence leží na křivce [na obr. (3.3) 4 označené 0 fon] zvané *spodní mez (práh) slyšení*. Obor slyšitelnosti není však omezen jen zdola, neboť příliš velký akustický tlak (intenzita) znemožňuje vnímání akustických vln jako zvuku. Překročí-li proto akustický tlak jistou mez, máme v uchu pocit bolesti a neslyšíme již zvuk. Také tyto horní mezní hodnoty akustického tlaku jsou pro tóny různé frekvence různé a leží na křivce zvané *horní mez slyšení (práh bolesti)*.



Obr. (3.3) 4. Křivky stejné hladiny hlasitosti

Z obr. (3.3) 4 je zřejmé, že nejširší obor slyšitelnosti přísluší čistému tónu frekvence 1 000 Hz s prahovými hodnotami efektivního akustického tlaku $2 \cdot 10^{-4}$ uubarů a 200 uubarů a intenzity 10^{-16} W . cm⁻² a 10^{-4} W . cm⁻². Poměr horní a spodní prahové intenzity tohoto tónu rovný 10^{12} je tedy nesmírně velký a je velmi obtížné nalézt nějaké vhodné měřítko pro počítky sluchového vjemu mezi oběma po fyzikální stránce neobyčejně vzdálenými mezemi slyšitelnosti.

Vztah mezi popudy a počítky vyjadřuje obecně *psychofyzický zákon Weberův—Fechnerův*, který však má při fyzikálních měřeních jen omezenou platnost, jak uvidíme na konci tohoto článku. Podle tohoto zákona je obecně *změna nějakého počítku přímo úměrná relativní změně popudu* (fyzikální veličiny, která počíteč budí). Označíme-li počíteč písmenem *a* a příslušnou veličinu, která jej způsobuje, *b*, pak podle Weberova—Fechnerova zákona

$$3.3 (17) \quad da = \text{const.} \cdot \frac{db}{b}$$

nebo po integraci

$$3.3 (18) \quad a = \text{const.} \cdot \ln \frac{b}{b_0},$$

je-li b_0 prahová hodnota intenzity popudu. Roste tedy intenzita počítku lineárně s logaritmem intenzity popudu neboli počíteč roste řadou aritmetickou, roste-li popud řadou geometrickou.

Podle Weberova—Fechnerova zákona měla by tedy subjektivní síla zvukového vjemu růst s logaritmem fyzikální intenzity zvuku, což vedlo k zavedení logaritmické stupnice pro sílu zvuku, která má především tu výhodu, že jí lze celý obor slyšitelnosti, zahrnující fyzikální intenzity, jež jsou v poměru až 10^{12} , obsáhnout pohodlnými čísly. Veličina, která určuje logaritmickou stupnici pro měření síly zvuku, nazývá se *hladina intenzity* nebo *hladina zvuku* a označuje se písmenem B . Mezinárodní dohodou bylo stanoveno, že při desetinásobném zvýšení intenzity zvuku má hladina intenzity vzrůst o jednu jednotku, nazvanou podle vynálezce telefonu A. G. Bella 1 *bel*, při čemž nula stupnice je určena buď tak, že pro prahovou hodnotu I_0 příslušného zvuku je hladina intenzity B rovna nule, nebo častěji se klade $B = 0$ pro $I_0 = 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$, což je prahová intenzita čistého tónu frekvence 1 000 Hz. Hladina zvuku B intenzity I je tedy v belech jednoznačně určena

$$3.3 (19) \quad B = \log \frac{I}{I_0}.$$

Pro praktická měření je však 1 bel poměrně velkou jednotkou, a proto se užívá jednotky desekrát menší, zvané *decibel*, tedy

$$3.3 (20) \quad 1 \text{ decibel} = 1 \text{ dB} = \frac{1}{10} \text{ belu}.$$

Hladina intenzity v decibelech je pak vzhledem k 3.3 (19) a (13) dána vztahy

$$3.3 (21) \quad B = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \left(\frac{p_e}{p_{e0}} \right)^2 = 20 \log \frac{p_e}{p_{e0}},$$

kde p_{e0} je prahová hodnota efektivního akustického tlaku vyšetřovaného zvuku nebo tónu frekvence 1 000 Hz. Z posledního vztahu 3.3 (21) plyne pro veličinu B též název *hladina zvukového tlaku*. Zvýšení nebo snížení hladiny intenzity I_2 v decibelech lze ovšem udat též vzhledem k libovolně zvolené intenzitě I_1 . Pak $B_{21} = 10 \log (I_2/I_1)$. Pro $B_{21} = 1 \text{ dB}$ plyne pak $I_2/I_1 = \sqrt[10]{10} = 1,259$, takže zvuk bude o 1 dB silnější, zvýší-li se jeho intenzita v poměru 1,259, tedy přibližně o 26 %.

Hladina intenzity je fyzikální veličina, která je měřítkem fyzikální intenzity zvuku a nemá nic společného se subjektivní silou zvukového vjemu. Mají-li např. dva tóny frekvence 200 a 1 000 Hz hladiny intenzity, měřené od příslušných prahových hodnot obou tónů, rovné 80 dB, nebudeme oba tóny slyšet stejně hlasitě, ale tón 200 Hz bude hlasitější než tón 1 000 Hz. Měříme-li hladinu intenzity obou tónů od prahové hodnoty tónu 1 000 Hz, pak se nám zase tón 1 000 Hz bude jevit silnějším než tón 200 Hz. Důvod je v tom, že citlivost sluchu je značně závislá na frekvenci, jak plyne z průběhu dolní mezní křivky slyšitelnosti na obr. (3.3) 4.

Abychom dospěli k nějakému měřítku pro subjektivní sílu zvukového vjemu, považujeme Weberův—Fechnerův zákon za přesně platný pro tón 1 000 Hz (jemuž přísluší nejširší obor slyšitelnosti, jak jsme se již zmínili) a pokládáme hladinu intenzity tohoto tónu, měřenou od jeho prahové hodnoty, za měřítko subjektivní síly libovolného jiného zvuku, budí-li tón 1 000 Hz v uchu stejně silný zvukový vjem jako vyšetřovaný zvuk. Hladina intenzity *srovnávacího* (*referenčního*) tónu 1 000 Hz, při níž se tento tón v místě poslechu jeví stejně hlasitým jako vyšetřovaný zvuk, nazývá se pak *hladinou hlasitosti* vyšetřovaného zvuku. Hladina hlasitosti je tedy vzhledem k 3.3 (21) dána vztahy

$$3.3 (22) \quad A = 10 \log \frac{I}{I_0} = 20 \log \frac{p_e}{p_{e0}},$$

kde podle mezinárodní dohody

$$3.3 (23) \quad I_0 = 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2} = 10^{-10} \mu\text{W} \cdot \text{cm}^{-2} = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

je prahová intenzita srovnávacího tónu 1 000 Hz (průměr z pozorování většího počtu posluchačů) a p_{e0} je prahový efektivní akustický tlak téhož tónu; tento tlak pro vzduch teploty 20 °C, vlhkosti 50 % a tlaku 760 torr u rovinné nebo kulové vlny ve větší vzdálenosti od zdroje, tedy při vlnovém akustickém odporu $\rho c = 413 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$, má podle 3.3 (13) hodnotu

$$3.3 (24) \quad p_{e0} = \sqrt{I_0 \rho c} = \sqrt{10^{-12} \cdot 413} = 2,03 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = \\ = 2,03 \cdot 10^{-4} \mu\text{bar} \approx 2 \cdot 10^{-4} \mu\text{bar}.$$

Tato přibližná prahová hodnota akustického tlaku se podle mezinárodní dohody bere za základ při měření hladiny hlasitosti na základě akustického tlaku a přísluší jí vzhledem k 3.3 (24) akustický vlnový odpor $400 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3} = 40 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, který má vzduch, ovšem přesně jen za určitého stavu.

Měříme-li intenzitu srovnávacího tónu ve $\text{W} \cdot \text{cm}^{-2}$ a efektivní akustický tlak v μbar , hladina hlasitosti je vzhledem k prahovým hodnotám těchto veličin určena vztahy

$$A = 10 \log I + 160 = 20 \log p_e + 73,98.$$

Jednotka hladiny hlasitosti zvaná fon (phon, značka Ph) je vzhledem k rovnici 3.3 (21) stejně velká jako decibel, tj. zvuk se nám bude jevit o 1 Ph silnější, vzroste-li jeho hladina hlasitosti o 26 %, což je právě nejmenší rozdíl, který normální ucho ještě postřehne.

Hladinu hlasitosti libovolného zvuku určujeme tedy tak, že měníme intenzitu (akustický tlak p_e) srovnávacího tónu 1 000 Hz a srovnáváme sílu subjektivního vjemu u obou zvuků. Jakmile se nám oba zvuky (měřený zvuk a srovnávací tón) zdají stejně hlasité, pak příslušná hladina intenzity srovnávacího tónu v decibelech (určená intenzitou I nebo akustickým tlakem p_e) dává hladinu hlasitosti vyšetřovaného zvuku ve fonech.

Tímto způsobem byl určen vztah mezi intenzitou (nebo hladinou intenzity) a hladinou hlasitosti čistých tónů libovolné frekvence, a to ze středních hodnot pozorování většího počtu naslouchajících osob. Tento vztah je podle Fletchera a Munsona znázorněn *křivkami stejné hladiny hlasitosti* na obr. (3.3) 4, které ve fonech od nuly do 120 Ph udávají pro každou frekvenci intenzitu, hladinu intenzity v dB nebo akustický tlak potřebný k dosažení uvedených hladin hlasitosti. Křivky platí pro případ, že oba zvuky, srovnávací i vyšetřovaný tón, dopadají jako rovinné vlny zepředu na hlavu naslouchajícího a jsou po každé slyšeny oběma ušima. Z obrázku je zřejmé, že se hladina intenzity v decibelech shoduje s hladinou hlasitosti ve fonech jen v dosti úzkém frekvenčním oboru kolem srovnávacího tónu frekvence 1 000 Hz. Například tónům frekvence 300 Hz a 1 000 Hz stejné hladiny intenzity 40 dB přísluší hladiny hlasitosti 30 Ph a 40 Ph (tón 300 Hz slyšíme tedy slaběji) a k dosažení stejné hladiny hlasitosti 40 Ph u obou tónů je nutno zesílit intenzitu tónu frekvence 300 Hz asi na 50 dB. Křivka 0 Ph přísluší prahu slyšitelnosti a křivka 120 Ph počínajícímu pocitu bolesti v uchu. Je zřejmé, že hladina hlasitosti značně závisí na frekvenci zejména v oboru tónů nízké a vysoké frekvence a malé intenzity. Naproti tomu při vyšších intenzitách liší se hladiny hlasitosti různých tónů od hladiny intenzity již méně, což znamená, že při vyšších intenzitách nastává jisté vyrovnání citlivosti ucha na různé frekvence tónů.

Četné pokusy ukázaly, že člověk je schopen určit, při kterých hladinách hlasitosti se mu subjektivní zvukový vjem jeví dvakrát nebo třikrát silnější, zvyšuje-li se intenzita zvuku, a naopak, kdy se mu při snižování intenzity jeví o polovinu nebo o čtvrtinu slabší. Avšak stejné zvýšení nebo snížení hladiny hlasitosti neodpovídá stejné velkému zesílení nebo zeslabení subjektivního vjemu, např. tón frekvence 1 000 Hz a hladiny intenzity (hlasitosti) 50 dB nevnímáme ani zdaleka o polovinu slaběji než tón stejné frekvence, avšak hladiny intenzity 100 dB.

Subjektivní míru zvukového vjemu nazýváme *hlasitostí*. Poněvadž lidský sluchový orgán je schopen rozlišit zlomkovou nebo násobnou část hlasitosti, lze nalézt vztah mezi touto subjektivní veličinou a hladinou hlasitosti nebo intenzity např. takto: Několik osob poslouchá tón zvolené hladiny intenzity, který budi jistou hlasitost. Potom se hladina intenzity např. snižuje tak dlouho, až naslouchající udají, že slyší tón o polovinu slaběji, že tedy hlasitost klesla na polovinu, a potom se změří příslušná hladina intenzity. Stevens zpracoval výsledky, k nimž se tímto a podobným způsobem dospělo v několika laboratořích, a zjistil, že u tónu frekvence 1 000 Hz způsobí dvojnásobnou nebo poloviční hlasitost zvýšení nebo snížení hladiny intenzity o 10,0 dB, a to v celém rozsahu od nejnižších k nejvyšším hladinám intenzity. (Nalezená hodnota je mediánem 178 hodnot, z nichž každá je sama průměrem hodnot zjištěných u většího počtu osob.) Tento jednoduchý výsledek určuje již závislost hlasitosti na hladině intenzity. Označíme-li písmenem h hlasitost při hladině intenzity B a h_0 hlasitost při hladině intenzity B_0 , pak při $B - B_0 = 10$ je $h/h_0 = 2$, takže logaritmuje-li zlomek, dostaneme

$$\frac{\log h - \log h_0}{B - B_0} = \frac{\log 2}{10}$$

čili v semilogaritmických souřadnicích je závislost hlasitosti na hladině intenzity přímkou se směrnicí $(\log 2)/10$. Abychom dostali stupnici hlasitosti, musíme zvolit jednotku pro tuto veličinu. Za jednotku hlasitosti byl zvolen 1 *son*, což je hlasitost, kterou vnímá průměrný posluchač, naslouchá-li oběma ušima referenčnímu tónu 1 000 Hz při hladině intenzity 40 dB. Položíme-li tedy $h_0 = 1$ a $B_0 = 40$, dostaneme

$$3.3 (25) \quad \log h = 0,03B - 1,2.$$

Tato rovnice udává závislost hlasitosti v sonech na hladině intenzity v decibelech tónu frekvence 1 000 Hz. Avšak hladina intenzity referenčního tónu je hladinou hlasitosti libovolného zvuku, slyšíme-li referenční tón stejně hlasitě jako vyšetřovaný zvuk, takže rovnice 3.3 (25) platí obecně také pro hladinu hlasitosti libovolného zvuku ve fonech, tedy

$$3.3 (26) \quad \log h = 0,03A - 1,2.$$

Zjistíme-li tedy subjektivním srovnáním vyšetřovaného zvuku s referenčním tónem hladinu hlasitosti A zvuku ve fonech, určíme jeho hlasitost v sonech z rovnice 3.3 (26). Plyne z ní, že na prahu slyšení, tj. pro $A = 0$, není hlasitost nulová, ale vychází pro ni malá hodnota 0,06 sonu. Souvisí to patrně s tím, že hlasitost není libovolně dělitelná (má kvantovou povahu), a začínáme-li zvuk vůbec slyšet, má jeho hlasitost již konečnou hodnotu.

Položíme-li pro referenční tón $B = 10 \log \frac{I}{I_0}$, kde $I_0 = 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$, plyne z 3.3 (25) pro závislost hlasitosti tohoto tónu v sonech na jeho intenzitě ve $\text{W} \cdot \text{cm}^{-2}$ rovnice

$$3.3 (27) \quad h = 4 \cdot 10^3 \cdot I^{0,3}.$$

Diferencujeme-li tuto rovnici, dostaneme $dh \sim \frac{dI}{I^{0,7}}$, a srovnáme-li tento výsledek s rovnicí 3.3 (17), dojdeme k závěru, že Weberův — Fechnerův psychofyzický zákon platí zde opravdu jen málo přibližně. Ukazuje se, že se stejnou mocninou intenzity roste také hlasitost tónu jiné frekvence, avšak konstanta úměrnosti je jiná a dá se určit z křivek stejné hladiny hlasitosti.

Hladiny hlasitosti a hlasitosti různých zdrojů udává tabulka (3.3) I.

Tabulka (3.3) I

Hladina hlasitosti a hlasitost různých zvuků

	Ph	son
dolní mez slyšitelnosti (práh slyšitelnosti)	0	0,06
šumění listí, šepot	10 až 20	0,13 až 0,25
normální hovor ve vzdálenosti 1 m	50	2
pouliční hluk	60 až 70	4 až 8
silně reprodukováná hudba	80	16
houkačka auta	90	32
pneumatická kladiva	100	64
nýtování	110	128
hluk motoru letadla ve vzdálenosti několika metrů	120	256
horní mez slyšitelnosti (práh bolesti)	130	512

3.3.4. Praktické užití ultrazvuku

Tyč délky l upnutá uprostřed a podélně rozechvěná vydává základní tón o kmitočtu $\nu_1 = c/2l$. Kmitající konec tyče funguje jako zdroj zvukového vlnění šířícího se do okolního prostředí, jehož frekvence je nepřímo úměrná délce l tyče. Čím kratší je tyč, tím vyšší je frekvence základního tónu, až při jisté délce tyče přestane být zvuk slyšet — z oboru slyšitelných zvuků dostáváme se do oboru *ultrazvuku*. Dolní mez ultrazvukových frekvencí je kolem 20 kHz. Této frekvenci přísluší při rychlosti šíření zvuku v tyčce $c \approx 5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ délka 12,5 cm. K buzení ultrazvukových vln je tedy třeba rozkmitávat tyčky kratší než asi 10 cm (popř. dvakrát tak dlouhé, upneme-li je na dvou místech). Existuje řada způsobů, jak je podélně rozkmitat, v moderní ultrazvukové technice se však obvykle používá dvou způsobů, a to *magnetostrikčního* a *piezoelektrického*. První způsob záleží v tom, že některá feromagnetika při zmagnetování změni svou délku, takže tyčka z takové látky se ve střídavém elektromagnetickém poli periodicky zkracuje a prodlužuje. Intenzita vln vyzařovaných konci tyčky bude největší při rezonanci mezi vlastními kmity a kmity střídavého pole. Magnetostrikčních oscilátorů nelze použít při frekvencích vyšších než asi 90 kHz, protože rezonující tyč je pak příliš krátká. Zato lze dosáhnout značných intenzit 200 W · cm⁻² i více. Ke srovnání, intenzita zvuku od rádiového přijímače, nastaveného na normální poslech v pokoji, je 10⁻⁹ W · cm⁻².

Druhý způsob buzení ultrazvukových frekvencí, piezoelektrický, záleží v deformaci výbrusů křemenných krystalů nebo krystalů titanicitanu barnatého, vloží-li se na vhodné plochy elektrické napětí (viz piezoelektrický jev, čl. 5.2.6). Využije-li se vysokých harmonických kmitů základního kmitání, lze dosáhnout frekvence až 10⁶ kHz a intenzit ultrazvuku kolem 50 W · cm⁻².

Nadzvukové vlny jsou velmi krátké, a proto se šíří kolem nepříliš malých překážek prakticky přímočaře a odrážejí se podle zákona rovnosti úhlu dopadu a úhlu odrazu. Na rozdíl od slyšitelných vln zeslabují se nadzvukové vlny značně při průchodu vzduchem a jinými plyny, podstatně méně se zeslabují v kapalinách a pevných látkách. Ve všech případech se zeslabují tím více, čím kratší je jejich vlnová délka neboli čím vyšší je jejich kmitočet.

Jako u všech druhů záření (elektromagnetického i částicového) je u rovinné akustické vlny v limitě poměrné zeslabení $-dI/I$ intenzity záření při průchodu tenkou vrstvou prostředí tloušťky dx přímo úměrné této tloušťce,

$$3.3 \quad (28) \quad -\frac{dI}{I} = \beta dx,$$

kde konstanta úměrnosti β se nazývá *součinitel pohltivosti*. Integrací dostaneme

$$3.3 \quad (29) \quad \ln \frac{I_x}{I_0} = -\beta x \quad \text{nebo} \quad \frac{I_x}{I_0} = e^{-\beta x},$$

kde I_0 je intenzita zvuku v místě $x = 0$ a I_x intenzita ve vzdálenosti x . Součinitel β je tedy podle druhého vztahu 3.3 (29) rovný převrácené hodnotě takové tloušťky x vrstvy, pro niž $I_x/I_0 = 1/e \approx 1/2,72$. Zavedeme-li dekadický logaritmus podle vztahu $\log(I_x/I_0) = \log e \cdot \ln(I_x/I_0) = -\log e \cdot \beta x$, pak součin $\beta \log e = 0,4343 \beta = b$ je *dekadický součinitel pohltivosti*, který je rovný převrácené hodnotě tloušťky vrstvy x , v níž se zvuk zeslabí na desetinu původní intenzity, tedy $I_x/I_0 = 1/10$. Potom

$$3.3 \quad (30) \quad \frac{I_x}{I_0} = 10^{-bx} = \tau^x,$$

kde $\tau = 1/10^b$ je *propustnost* vrstvy jednotkové tloušťky.

V plynech a v kapalinách roste od jistých kmitočtů pohltivost β přímo úměrně se čtvercem kmitočtu ν , u kovů pak zhruba úměrně s kmitočtem, takže podíly β/ν^2 , popř. β/ν by měly být na kmitočtu nezávislé látkové konstanty. Přibližně je např. pro

vzduch (suchý, 20 °C) $\frac{\beta}{\nu^2} = 2,7 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-1} \cdot \text{s}^2$, $\frac{b}{\nu^2} = 1,17 \cdot 10^{-13} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^2$,

vodu (20 °C) $\frac{\beta}{\nu^2} = 5 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^{-1} \cdot \text{s}^2$, $\frac{b}{\nu^2} = 2,17 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^{-1} \cdot \text{s}^2$ (do 100 kHz nezávislé prakticky na kmitočtu),

hliník $\frac{\beta}{\nu} = 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^{-1} \cdot \text{s}$, $\frac{b}{\nu} = 0,52 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^{-1} \cdot \text{s}$.

Tloušťka vrstvy zeslabující intenzitu ultrazvuku např. na polovinu je pak podle 3.3 (30) určena vztahem $x = \frac{\log 2}{\left(\frac{b}{\nu^2}\right) \nu^2}$, z něhož plynou hodnoty v tabulce (3.3) II.

Malá absorpce ultrazvuku ve vodě umožňuje využít ho např. k zjišťování překážek a jejich vzdáleností pod vodou, což podle tabulky nelze jím provést na větší vzdálenost ve vzduchu (k tomu se užívá radaru), nebo k navázání telegrafního a telefonního spojení pod vodní hladinou, a to do vzdálenosti asi 15 km, což má význam hlavně pro ponorky.

Z hlediska průmyslové výroby má větší význam *zkoušení materiálů ultrazvukem*, jež má některé výhody proti ostatním metodám zkoušení materiálů, při nichž rovněž nenastává jeho porušení, např. prozařování rentgenovým zářením nebo radioaktivním zářením γ apod., a to pro pohodlnou manipulaci s příslušnou aparaturou, která je poměrně malá.

Tabulka (3.3) II

Vrstvy zeslabující ultrazvuk na poloviční intenzitu

Prostředí	$\nu = 100$	$\nu = 500$	$\nu = 1\,000 \text{ kHz}$
Vzduch	$x = 2,6 \text{ m}$	0,1 m	0,026 m
Voda	$x = 1\,400 \text{ m}$	56 m	14 m
Hliník	$x = 58 \text{ m}$	2,3 m	0,58 m

Kazy lze v materiálu pomocí ultrazvukových vln zjistit na základě toho, že se v pevných látkách, zejména v kovech, šíří bez značnější absorpce, kdežto ve vzduchu se podstatně silněji pohlcují, jak je zřejmé z tab. (3.3) II; kromě toho se na rozhraní pevné látky a vzduchu odrážejí. Dopadne-li tedy např. v odlitku ultrazvuková vlna na kaz nebo dutinu vyplněnou vzduchem, zesiluje se odražená vlna nebo se zeslabí propustující nadzvuková vlna.

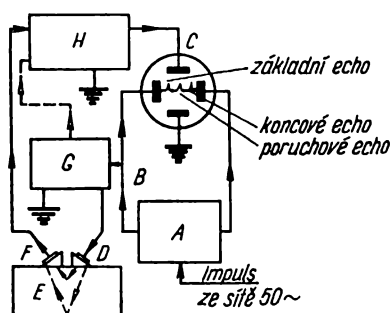
Schéma zařízení na ultrazvukové zkoušení materiálu upravené pro technický provoz je na obr. (3.3) 5. Na rovinou stěnu zkoušeného předmětu *E* se přitiskne (s kapkou oleje pro dobrý styk) piezoelektrická hlavička (vysílač) *D*, která v každé periodě (1/50 s) městské elektrické sítě vyšle krátký ultrazvukový impuls do předmětu. Vysílač rozkmitává generátor *G* uvedený v činnost při každém impulsu *B* ze sítě zařízením *A*, které zároveň vytváří časovou základnu na stínítku *C* katodového osciloskopu podle tloušťky zkoumaného vzorku. Okamžik impulsu se zaznamená na stínítku *C* osciloskopu výchylkou světelné stopy (základní echo). Ultrazvukový impuls se šíří do předmětu, na protější straně na rozhraní se vzduchem se odráží, vrátí se zpět a vzbudí v krystalovém přijímači *F* elektrické kmito, jež se zesílí v zesilovači *H* a způsobí další výchylku světelné stopy na osciloskopu (koncové echo). Vzdálenost obou výchylek odpovídá zpoždění odražené vlny. Je-li v desce kaz, odráží se od něho část vlny do přijímače *F* dříve a na osciloskopu vznikne slabší výchylka (poruchové echo) mezi počáteční a koncovou výchylkou světelné stopy. Tak lze zjistit zhruba i polohy kazů (trhlin, bublin, lunkrů apod.).

Zařízení lze upravit také tak, že pracuje jen s jednou krystalovou hlavičkou, která funguje zároveň jako vysílač i jako přijímač krátkodobých zvukových impulsů [obr. (3.3) 6].

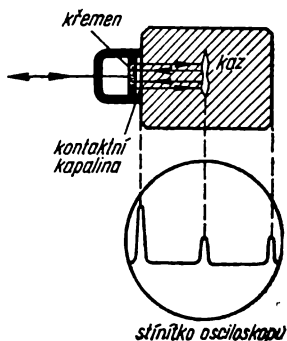
Uvedeným způsobem lze pouze zjistit přítomnost kazu a jeho polohu v předmětu, ale tvar a velikost kazu se při tom určit nedají. Zlepšení ultrazvukového zkoušení materiálu

v tomto směru se dosahuje zařízením k zviditelnění ultrazvukových vln, známým jako *Pohlmannův článek*, který dává věrný obraz tvaru kazu v materiálu podobně jako rentgenové stínítko při prozařování materiálu rentgenovým zářením.

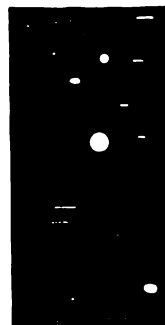
Pohlmannův článek [obr. (3.3) 7] je plochá kyveta, jejíž jednu stranu tvoří tenká membrána, na kterou dopadají ultrazvukové vlny, a druhou stranu rovinná skleněná deska. Kyveta je naplněna xylem, v němž jsou suspendovány drobné hliníkové kotoučky o průměru asi $20\text{ }\mu\text{m}$ a tloušťce asi $1,5\text{ }\mu\text{m}$, které jsou za klidu orientovány do všech možných směrů. Dopadá-li na membránu ultrazvukové vlnění, chovají se kotoučky podobně jako Rayleighova destička (viz Praktická fyzika, čl. 50), tj. mají snahu orientovat se tak, aby jejich plocha byla kolmá ke směru dopadajícího vlnění. Při šikmém osvětlení působí kotoučky srovnané přibližně do kolmého směru jako drobná zrcátka, takže článek pozorovaný v odraženém světle se jeví světlejším v místech, na která dopadá ultrazvuk s větší intenzitou, a tmavší tam, kde jeho intenzita je menší. Tak lze získat obraz kazu, v němž se procházející ultrazvuk silněji pohlcuje.



Obr. (3.3) 5. Schéma zařízení na zkoušení ultrazvukem



Obr. (3.3) 6. Zkoušení materiálu ultrazvukem



Obr. (3.3) 8. Kmitání suspendovaných částic způsobené ultrazvukem

Působení ultrazvuku na různé látky. Rychlé změny tlaku vznikající v látkách, jimiž se šíří ultrazvuk, vedou ke kmitavým pohybům (k vibracím) částic, jak je pěkně vidět na obr. (3.3) 8. Větší částice parafínu vznášející se ve vzduchu mají rozměr kolem $4\text{ }\mu\text{m}$ a kmitají ve vodorovném ultrazvukovém poli 10 kHz jen s malou amplitudou. Ostatní částice s různými průměry až do $0,3\text{ }\mu\text{m}$ kmitají tím více, čím jsou menší. U tekutých látek lze těchto mikroskopických otřesů užít k odplynování, tj. k vypuzení pohlcených plynů z různých kapalin i z roztavených kovů nebo skla.

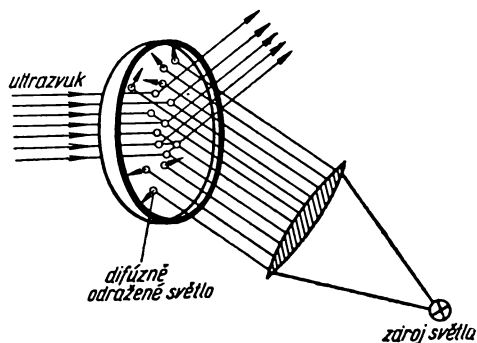
V kapalinách se tvoří vlivem ultrazvuku drobné prázdné prostory (dutiny), a tak vzniká *kavitace*, která může porušit i povrch kovových předmětů ponořených ve vodě. Vzniká-li naproti tomu kavitace v kapalině z jiných příčin, např. vlivem pohlceného vzduchu nebo jiných plynů, lze na její existenci v kapalině usuzovat z absorpce ultrazvuku v kapalině.

Ultrazvukem můžeme podporovat i dokonalejší rozptýlení drobných částic nějaké látky v kapalině, tedy tvoření velmi jemných disperzních soustav, jako jsou suspenze, emulze, pěny nebo koloidní roztoky, složené ze submikroskopických shluků molekul rozptýlených v kapalině. To se uplatňuje i při výrobě jemnozrnných fotografických emulzí, když jde o nejjemnější rozptýlení částic halových solí stříbra v želatině. Ultrazvuku lze užít také naopak ke srážení suspendovaných částic ve větší zrnka, tedy ke *koagulaci* drobných kapiček nebo částíček vznášejících se v plynech. Tak je možno např. srážet mlhu, odstraňovat prach a kouř apod. Je to zřejmé na obr. (3.3) 9, kde křivkami *a*, *a'* je znázorněn časový průběh srážení chlorovodíku a tabákového kouře bez ultrazvuku a křivkami *b*, *b'* za pů-

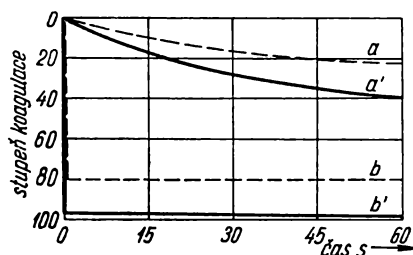
sobení ultrazvuku frekvence 6,5 až 25 kHz. Na svislé ose je shora dolů nanesen stupeň koagulace v procentech.

Je přirozené, že se podobné mechanické účinky ultrazvuku projeví také *zvýšením teploty*, ježto usměrněné kmitavé pohyby částic v ultrazvukovém poli způsobují i zvýšení neuspořádaných tepelných vibrací jednotlivých molekul. Zvýšení teploty je tím větší, čím více látka ultrazvuk absorbuje. Tak dochází zejména v organických látkách k zvýšení teploty, které může činit např. u žloutku 11 °C, u tuku dokonce 25 °C za 30 s při ozařování objemu 2 cm³ ultrazvukem kmitočtu 250 kHz s energií 450 W. Se zahříváním tkáně ultrazvukem souvisí i jiné účinky, jako zrychlování některých chemických reakcí, zhoubné působení na menší živočichy, na bakterie, kvasinky apod.

Praktický význam má také ultrazvuk při *spájení* hliníku a slitin hliníku, které je jinak velmi ztíženo rychlým vznikem tenké, avšak husté a chemicky odolné vrstvy kysličníku vlivem vzduchu. Tato vrstva se účinně rozruší kmitavým pohybem páječky buzeným magnetostrikčně, jehož kmitočet leží v oboru ultrazvuku.



Obr. (3.3) 7. Pohlmannův článek



Obr. (3.3) 9. Srážení chlorovodíku a kouře ultrazvukem

Ultrazvuk umožňuje také opracování nejtvrdějších látek, při němž na rozdíl od jiných způsobů opracování se používá nástroje z měkčího materiálu, než je obráběný předmět. Tak lze vrtákem vhodného profilu, kmitajícím v podélném směru s kmitočtem asi 25 kHz, vyvrtat otvory libovolného tvaru do tvrdých kovů, skla, keramických látek apod.

4.1. Teplota a teplo

4.1.1. Definice teploty

Pojem teplota je jistě každému běžný, ačkoliv jak poznáme, není přesná a všeobecně platná definice teploty nikterak snadná. Prozatím postačí uvědomit si, že teplota je mírou pocitů, jež při styku s fyzikálními tělesy vnímáme tak, že se nám tělesa jeví buď jako vlažná, teplá a horká, nebo chladná, studená a mrazivá. Tyto odstupňované teplotní pocity jsou zcela subjektivní, jak dokazuje známý pokus, při němž se nám jedno a totéž množství vody o teplotě místnosti při ponoření ruky zdá buď teplé, nebo chladné podle toho, zda přímo před tím vyjmeme ruku z ledové vody, nebo z horké vody. Lidské pocity jsou tedy příliš nespolehlivé, aby bylo možno na nich založit skutečné měření teplotního stavu nebo teploty tělesa.

Ze zkušenosti však víme, že při styku dvou těles se mění všeobecně nejen jejich teploty, tj. jedno těleso se podle našich pocitů ohřívá a druhé ochlazuje, nýbrž mění se také mnohé jiné fyzikální vlastnosti obou těles, a to zřejmě zcela nezávisle na našich pocitech. Takovými změnami mohou být např. změna délky kovové tyče, změna objemu kapaliny, změna tlaku plynu za stálého objemu, změna objemu plynu za stálého tlaku, změna elektrického odporu vodiče, kvantitativní nebo kvalitativní změny záření nějakého tělesa apod. Je jen málo fyzikálních veličin, které by se při ohřívání nebo ochlazování tělesa neměnily.

Přestanou-li se při styku dvou těles jejich teploty měnit, přestanou i změny jiných fyzikálních vlastností obou těles. Zcela nezávisle na našich subjektivních teplotních pocitech můžeme tedy dvěma tělesům přisoudit touž teplotu tehdy, jestliže se při jejich styku přestane měnit některá vybraná fyzikální vlastnost, jejíž změnu lze přesně měřit. Tak můžeme spolehlivě a nezávisle na našich pocitech zjistit rovnost teplot dvou těles.

Zajímá nás však nejen zjišťování rovnosti teplot dvou těles nebo látek, ale také zjišťování stejně velkých teplotních rozdílů v různých oborech teploty. K tomu je třeba dohodou označit jednotlivé teplotní stavy čísly a zavést tak *stupnici teploty*. Stupnice je obecně určena nultým (základním) bodem, velikostí jednoho stupně a pravidlem, podle kterého po sobě následující stupně přiřazujeme proměnlivým teplotním stavům. K definici teplotní stupnice budeme volit takové pravidlo, aby a) fyzikální zákony tepelných jevů byly co nejjednodušší a aby b) teplota se dala měřit co nejsnadněji.

Z experimentálního pozorování *rozpínavosti plynů* (změny tlaku při zahřívání za stálého objemu) a jejich *roztlačnosti* (změny objemu při zahřívání za stálého tlaku) vyplývá, že

v chování všech plynů, zejména tzv. permanentních plynů*) jsou jen malé odchylky, které se zmenšují tím více, čím menší je hustota plynů, tj. čím nižší je jejich počáteční tlak. Zmenšováním hustoty blíží se tedy všechny plyny svým chováním tzv. *ideálnímu plynu*, a platí pro ně *Gay—Lussacův zákon*: *Plyny se roztahují a rozpínají stejně, a to nezávisle na tlaku při roztahování a na objemu při rozpínání, je-li tlak během roztahování a objem během rozpínání stálý.*

Tento zákon poskytuje hledané pravidlo pro definici teplotní stupnice, které vyhovuje první z uvedených podmínek, aby zákony roztlačnosti a rozpínatosti byly alespoň u plynů co nejjednodušší, a to položíme-li prostě úměrnost mezi tlakem ideálního plynu a jeho teplotou, nebo mezi jeho objemem a teplotou. Tato úměrnost bude pak platit velmi přibližně i pro reálné plyny za obvyklých poměrů, protože nepatrné odchylky nemají praktický význam. Označíme-li tlak plynu p a teplotu definovanou na základě změny tlaku značkou T , objem plynu V a teplotu definovanou na základě změny objemu značkou T' , bude tedy teplota definována vztahy

$$4.1 (1) \quad p = kT \text{ nebo } V = k'T',$$

z nichž první je znázorněn na obr. (4.1) 1. Je zřejmé, že je nutno přiřadit zvolenému teplotnímu stavu jistou číselnou hodnotu T_0 nebo T'_0 , aby jednotlivé teplotní stavy byly očíslovány, při čemž objem a základní tlak příslušné tomuto stavu mohou být libovolné (p_0 nebo p'_0 vedou k téže teplotní stupnici), pokud lze ovšem plyn považovat za ideální. Stejně je tomu, volíme-li druhý vztah 4.1 (1). Konstanty k a k' jsou tedy určeny podíly

$$4.1 (2) \quad k = \frac{p_0}{T_0} \quad \text{a} \quad k' = \frac{V_0}{T'_0}$$

a je nutno vyšetřit, zda se liší teplotní stupnice podle toho, zda volíme k definici teploty rozpínatost, nebo roztlačnost ideálního plynu. Pro takový plyn platí zároveň známý *Boylův—Mariottův zákon*: *Tlak plynu je za stálé teploty nepřímo úměrný jeho objemu*, tedy

$$4.1 (3) \quad p = \frac{\text{const}}{V} \text{ nebo } pV = \text{const},$$

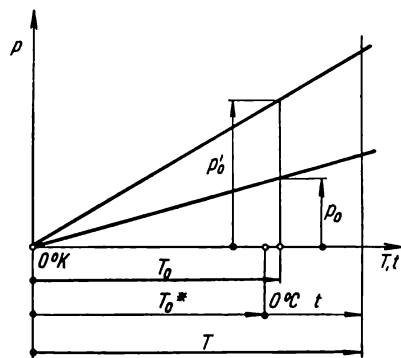
a protože hustota ρ plynu je nepřímo úměrná objemu plynu, je podle téhož zákona tlak plynu přímo úměrný jeho hustotě

$$4.1 (4) \quad p = \text{const } \rho.$$

Rozpínání plynu podle 4.1 (1) děje se při stálém objemu V_0 , proto snižme tlak plynu p , který má při teplotě T , definované prvním vztahem 4.1 (1), při této stálé teplotě na počáteční tlak p_0 tím, že jej necháme roztáhnout na objem V , který je podle 4.1 (3) určen vztahem

$$4.1 (5) \quad p_0 V = p V_0.$$

Násobíme-li tedy levou rovnici 4.1 (1), v níž konstanta je určena podílem 4.1 (2), objemem V_0 , tj. $pV_0 = \frac{p_0 V_0}{T_0} T$, dostaneme vzhledem k 4.1 (5)



Obr. (4.1) 1. Teplota definovaná rozpínatostí ideálního plynu

*) Plyny, které se při teplotě laboratoře nedají zkapatnit ani sebevětším zvýšením tlaku; poněvadž se však dá nakonec každý plyn zkapatnit předchozím ochlazením na tzv. podkritickou teplotu, není v podstatě žádný zvláštní rozdíl mezi permanentními a ostatními plyny.

4.1 (6)

$$V = \frac{V_0}{T_0} T$$

čili poměry T/T_0 a T'/T'_0 jsou totožné a definice teplot podle rozpínavosti nebo roztažnosti ideálního plynu vedou ke stejné teplotní stupnici, přiřadí-li se zvolenému základnímu teplotnímu stavu v obou případech též číselná hodnota $T_0 = T'_0$.

Podle 10. Generální konference pro míry a váhy v roce 1954 byl za základní teplotní bod zvolen trojný bod vody, tj. takový rovnovážný stav, v němž mohou společně existovat všechny tři fáze H_2O (led, voda a pára); příslušný teplotní stav byl označen číslem

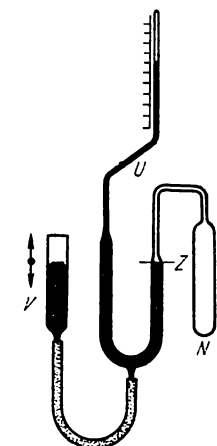
4.1 (7)

$$T_0 = 273,16 \text{ } ^\circ\text{K} \quad (\text{přesně}).*)$$

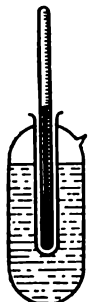
Tím je tedy určena teplotní stupnice nazvaná *absolutní termodynamická stupnice Kelvina***); jednotlivé teplotní stavy jsou na ní označovány stupni Kelvinovými ($^\circ\text{K}$). Nula této stupnice, tedy $0 \text{ } ^\circ\text{K}$, se nazývá *absolutní nulová teplota (absolutní nula)*. Teplotní stupeň označuje se kromě kroužkem za příslušnou číselnou hodnotou také značkou deg (od francouzského degré, tj. stupeň) na rozdíl od dřívějšího označení grad, kterážto značka je nyní vyhrazena jenom pro vyjádření gradientu, tj. maximálního růstu skalární veličiny. Jde-li o stupně Kelvinovy, píšeme tedy deg K.

Ptáme-li se na *velikost teplotního stupně, pak je to 273,16. díl teplotního rozdílu mezi absolutní nulou a teplotou trojného bodu vody, měřený v termodynamické stupnici teploty*.

Jde nyní o praktickou realizaci této stupnice. U plynu se snadněji pozoruje rozpínavost než roztažnost a plynový teploměr, v němž objem plynu je stálý, je schematicky znázorněn na obr. (4.1) 2. Nádobka N s plynem, podle jehož rozpínavosti se určuje teplota nějakého prostředí, vnoří se do tohoto prostředí a tlak plynu udává rozdíl hladin rtuti v U-trubici. Stálý objem plynu se udržuje tím, že se hladina rtuti v kratším rameni U-trubice posune zvedáním nebo snížením vyrovnávací nádržky V se rtutí tak, aby sahala vždy k téže



Obr. (4.1) 2. Schéma plynového teploměru na stálý objem



Obr. (4.1) 3. Nádobka k realizaci trojného bodu vody

značce Z . Základní tlak p_0 plynu měl by být velmi malý, na obr. (4.1) 1 však vidíme, že čím nižší volíme tento základní tlak, tím menší tlakové změny přísluší stejné velikým teplotním intervalům, takže volba příliš nízkého základního tlaku vedla by k mnohem větším chybám měření než odchylné chování skutečného plynu od plynu ideálního. Lépe je postupovat tak, že teplotu téhož teplotního stavu, např. teplotu tavení nebo varu čisté

*) Výklad je veden tak, aby vynikla skutečnost, že podle poslední mezinárodní dohody je teplotní stupnice definována na základě jen jednoho teplotního bodu. Uvedená číselná hodnota, která je mu přiřazena, navazuje na dřívější definici stupnice, založené na dvou teplotních bodech, a to na bodu tání ledu (0°) a bodu varu vody (100°). Číslo o setinu menší, tedy 273,15 (viz dále) je rovnou právě převrácené hodnotě teplotního součinitele objemové roztažnosti ideálního plynu (čl. 4.1.2), zjištěné podle starší definice teplotní stupnice. Tím nevznikají prakticky žádné rozdíly při měření teploty podle té či oné definice stupnice.

**) Název stupnice plyne odtud, že poměr teplot dvou těles lze položit také rovný poměru dvou tepelných množství — teple odebranému a teple odevzdanému libovolnou teploměrnou látkou ve vratném Carnotově cyklu (čl. 4.4.3), pracujícím mezi oběma teplotami, takže měření teploty lze přenést na měření množství tepla. Teplotní stupnice, vytvořená tímto způsobem, byla by totožná se stupnicí definovanou na základě rozpínavosti a roztažnosti ideálního plynu.

látky za téhož vnějšího tlaku, změříme dvěma nebo i více plynovými teploměry s touž náplní, ale s různě vysokým základním tlakem p_0 přijatelné velikosti. Navzájem odlišné teploty takto zjištěné znázorníme pak jako funkce základního tlaku p_0 a teplotu, kterou by udával plynový teploměr plněný ideálním plynem, určíme extrapolací na tlak $p_0 = 0$. Tak lze zjistit korekce, kterými je třeba opravit údaje libovolného plynového teploměru, abychom teplotu měřili podle rozpínavosti ideálního plynu, tedy na termodynamické teplotní stupnici. Takové korekce lze provést ještě jinak, např. na základě tzv. Joulova — Thomsonova jevu, který pozorujeme při expanzi plynu škrtícím otvorem z vyššího tlaku na nižší. Při takové expanzi se reálný plyn zpravidla buď ochlazuje, nebo otepluje, kdežto u ideálního plynu by se teplota nezměnila. Ochlazení nebo oteplení je měřítkem „nedokonalosti“ reálného plynu a oprava na termodynamickou teplotu se z něho dá vypočítat.

Teplotní stav, zvaný trojný bod vody, lze snadno realizovat skleněnou válcovou nádobkou s dvojími stěnami [obr. (4.1) 3]. Prostor mezi stěnami, z něhož byl vyčerpán vzduch, naplní se zčásti velmi čistou vodou, která za vyšší teploty, než udává 4.1 (7), je pak v rovnováze se svou párou. Po zmrazení vody v nádobce mrazicí směsí a po uložení nádobky do obyčejné ledové lázně vytvoří se po nějaké době rovnovážný stav mezi všemi třemi fázemi H_2O , který udržuje přesně konstantní teplotu i po dobu několika dnů. Do středu nádobky se pak ukládá zkoušený teploměr, např. nádobka N plynového teploměru na obr. (4.1) 2.

Pro všechny jiné účely než definitorické, kdy není třeba vrcholné přesnosti, stačí užít jako základního teplotního stavu jiného blízkého stavu, který se dá experimentálně jednodušeji realizovat, a to rovnovážného stavu ledu a vody za normálního atmosférického tlaku (760 torrů), tzv. *bodu tání ledu*, který na absolutní termodynamické teplotní stupnici má číselnou hodnotu

4.1 (8)

$$T_0^* = 273,15 \text{ } ^\circ\text{K},$$

nikoli však již přesnou jako hodnota 4.1 (7), ale případná další desetinná místa závisejí na vývoji měřicí techniky.

Pro praktické účely lze zavést novou teplotní stupnici tím, že teplotní stav 4.1 (8), tedy bod tání ledu, vyznačíme číslem nula. Tato nová stupnice, která má vzhledem k předešlé absolutní termodynamické stupnici posunutou nulu, ale jinak je určena stejně na základě roztažnosti nebo rozpínavosti ideálního plynu, se nazývá *termodynamická stupnice Celsiova* a teplotní stavy se na ní označují ve *stupních Celsiových* ($^\circ\text{C}$, deg C). Příslušnou transformací provedeme snadno podle obr. (4.1) 1; teplota ve stupních Celsiových značená t souvisí s teplotou T ve stupních Kelvinových jednoduchým vztahem

4.1 (9)

$$t = T - T_0^* \text{ nebo } T = T_0^* + t.$$

Při praktickém měření teploty byl by ovšem neúnosný uvedený postup měření plynovým teploměrem s provedením příslušných korekcí, o nichž jsme se zmínili, ale i kdybychom se zrekli těchto korekcí, které ostatně nejsou velké (řádově desetiný stupeň při základním tlaku teplotměrného plynu $p_0 = 1\,000$ torrů), sama manipulace s plynovým teploměrem je neohrabaná a zahrnuje jisté další korekce, kterých nelze již nechat (např. opravu na vlastní roztažnost nádobky N , na jinou teplotu plynu v kapiláře, spojující nádobku N s tlakoměrem, než v nádobce N apod.). V praxi je třeba teplotu měřit mnohem pohodlněji tak, aby to vyhovovalo druhému z obou pravidel pro měření teploty, uvedených na začátku tohoto článku. Měří se např. známými rtuťovými a pentanovými teploměry, v nichž je využito objemové změny použitých látek s teplotou, odporovými teploměry založenými na změně elektrického odporu spirálky z platinového nebo jiného vhodného drátku s teplotou, termoelektrickými články apod. Přizpůsobení údajů těchto teploměrů termodynamické stupnici Celsiové je provedeno s přesností dostačující pro běžnou fyzikální a technickou praxi takto:

Na termodynamické teplotní stupnici byla přesně určena teplota jen několika málo vhodně

vybraných teplotních stavů, které se přesně reprodukuje za daného vnějšího tlaku. Jsou to:

1. bod varu kyslíku za tlaku 760 torrů = $-182,970\text{ }^{\circ}\text{C}$,
2. bod tání ledu = $0,0\text{ }^{\circ}\text{C}$,
3. bod varu vody za tlaku 760 torrů = $100\text{ }^{\circ}\text{C}$,
4. bod varu síry za tlaku 760 torrů = $444,600\text{ }^{\circ}\text{C}$,
5. bod tání stříbra = $960,8\text{ }^{\circ}\text{C}$,
6. bod tání zlata = $1\,063,0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Na těchto pevných bodech kalibrují se vhodně volené teploměry a teploty, které leží mezi pevnými body, určí se z údajů těchto teploměrů podle předepsaných vzorců. Tak mezi bodem varu kyslíku a bodem tání antimonu ($630,5\text{ }^{\circ}\text{C}$), který leží mezi bodem varu síry a bodem tání stříbra, je užito odporového teploměru, mezi bodem tání antimonu a bodem tání zlata termoelektrického článku, nad bodem tání zlata pak teploměrů (pyrometrů), v nichž se k měření teploty využívá záření, které vydávají vysoce zahřátá tělesa. Z příslušných vzorců uvedeme pro názornost jen jeden, a to vzorec, z něhož se určují teploty ležící mezi bodem tání ledu a bodem tání antimonu. Má tvar

$$R = R_0(1 + At + Bt^2),$$

kde R je elektrický odpor platinového odporového teploměru při teplotě t ; R_0 , A a B jsou konstanty přístroje, které se určí takto: Přístroj se ponoří do lázně s tajícím ledem, která má teplotu $t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$, a změří se jeho odpor R_0 . Pak se změří odpor $R = R_{100}$ při bodu varu vody $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$ a odpor $R = R_s$ při bodu varu síry $t = 444,6\text{ }^{\circ}\text{C}$. Dosadíme-li hodnoty R a t nejprve pro bod varu vody spolu s hodnotou R_0 do uvedeného vzorce a pak pro bod varu síry, dostaneme dvě rovnice $R_{100} = R_0(1 + 100A + 100^2B)$ a $R_s = R_0(1 + 444,6A + 444,6^2B)$, z nichž lze zbyvajících dvě konstanty přístroje A a B vypočítat.

Uvedené body varu a tavení čistých látek s přiřazenými číselnými hodnotami ve $^{\circ}\text{C}$ a předpisy k určování teplot mezi těmito body tvoří tzv. *mezinárodní teplotní stupnici z r. 1948*. Číselné hodnoty teplot na této stupnici jsou přísně vzato totožné s termodynamickou teplotou jen v příslušných pevných bodech, ovšem s přesností, s níž tyto body na termodynamické stupnici byly určeny a které se jeví v posledním desetinném místě zjištěných číselných hodnot.*) Interpolace vzorce byly voleny tak, aby se podle dnešního stavu měřicí techniky s největší pravděpodobností nelišily ani teploty mezi pevnými body v mezích stejné přesnosti od termodynamické teploty (což bylo překontrolováno tím, že se na termodynamické stupnici určily další teplotní body, zvané sekundární, a srovnaly se s hodnotami, které dává mezinárodní teplotní stupnice), takže podle dnešního stavu jsou obě stupnice prakticky shodné, proto se i teploty podle mezinárodní stupnice označují ve stupních Celsia.

Prakticky lze tedy teplotu měřit uvedenými teploměry kalibrovanými popsáním způsobem, ale poněvadž je tato kalibrace dosti nákladná a samozřejmě i pracná, má-li být provedena pečlivě, kalibrují se zpravidla podle těchto přístrojů méně pracnými způsoby podle žádané přesnosti další sekundární přístroje (kapalinové teploměry, jiné odporové teploměry a termoelektrické články apod.), a teprve jimi se prakticky měří teploty.

4.1.2. Teplotní roztažnost a rozpínavost

Teplotní roztažnosti a rozpínivosti ideálních plynů použili jsme v předešlém článku k definici teplotní stupnice. Je tedy přímá úměrnost mezi objemem nebo tlakem plynu a jeho absolutní teplotou, roztahuje-li se plyn za stálého tlaku nebo rozpíná-li se za stálého objemu. Obě úměrnosti přejdou v lineární závislost, zavedeme-li Celsiovu teplotu podle definice 4.1 (9):

$$4.1\ (10) \quad V = \frac{V_0}{T_0^*} T = \frac{V_0}{T_0^*} (T_0^* + t) = V_0 \left(1 + \frac{1}{T_0^*} t \right) = V_0(1 + \gamma t), \quad p = \text{const}$$

*) Nula stupnice je určena přesně definicí, bod varu vody nemá desetinná místa, která by vyjadřovala přesnost jeho číselné hodnoty proto, že původně i tato hodnota byla stanovena přesně a stupnice byla určena těmito dvěma pevnými body. Poněvadž však od roku 1954 je určena přesná absolutní teplota trojbody vody, měla by být přesnost čísla, přiřazeného bodu varu vody, rovněž vyjádřena jistým počtem desetinných míst.

a analogicky

$$4.1 \quad (11) \quad p = \frac{p_0}{T_0^*} T = p_0(1 + \gamma t), \quad V = \text{const.}$$

Nová veličina, která se tu objevuje,

$$4.1 \quad (12) \quad \gamma = \frac{1}{T_0^*} = \frac{1}{273,15} \approx 0,003 \, 661 \, ^\circ\text{C}^{-1},$$

nazývá se *teplotní součinitel objemové roztažnosti* plynů (krátce *objemová roztažnost*), jde-li o závislost objemu na teplotě, a *součinitel rozpínavosti* (krátce *rozpínavost*), jde-li o závislost tlaku na teplotě.

Význam obou součinitelů, kteří u ideálních plynů mají touž velikost, vyplyne, píšeme-li např. rovnici 4.1 (10) ve tvaru

$$4.1 \quad (13) \quad \gamma = \frac{V - V_0}{V_0} \frac{1}{t} = \frac{\Delta V}{V_0} \frac{1}{t};$$

poměr $\Delta V/V_0$ znamená poměrné zvětšení objemu plynu vzhledem k jeho objemu V_0 při teplotě $t = 0 \, ^\circ\text{C}$, takže součinitel γ číselně udávájí poměrné zvětšení objemu a tlaku plynu připadající na jednotkové zvýšení teploty plynu, a to je-li buď tlak, nebo objem stálý.

Protože i látky jiného skupenství než plynného zvětšují svůj objem při zvýšení teploty, má i u nich význam objemová roztažnost, definovaná týmž vztahem 4.1 (13); na rozdíl od roztažnosti plynů značí se β , takže píšeme

$$\beta = \frac{V - V_0}{V_0} \frac{1}{t} = \frac{\Delta V}{V_0} \frac{1}{t} = \frac{\Delta V}{V_0} \frac{1}{\Delta t}.$$

Také u pevných látek a kapalin v nepříliš velkém teplotním intervalu zjišťujeme zpravidla lineární závislost mezi objemem a teplotou látky, kterou vyjadřujeme vztahem

$$V = V_0(1 + \beta t)$$

obdobným vztahu 4.1 (10), takže v příslušném teplotním intervalu má objemová roztažnost β , stejně jako součinitel γ u plynů, stálou velikost. Pak je lhostejno, zda při určování součinitele β volíme teplotní interval od $0 \, ^\circ\text{C}$ do teploty t nebo interval Δt mezi teplotou t_1 (např. $20 \, ^\circ\text{C}$) a teplotou t_2 (např. $40 \, ^\circ\text{C}$) a touž hodnotu pro součinitele objemové roztažnosti dostaneme přirozeně také, vyjdeme-li z diferenciálního podílu dV/dt , tedy

$$4.1 \quad (14) \quad \beta = \frac{dV}{V_0} \frac{1}{dt}.$$

Z takto definovaného součinitele objemové roztažnosti dostaneme integrací výše uvedený lineární vztah $V = V_0(1 + \beta t)$ jen tehdy, jestliže objem V_0 , vzhledem k němuž relativní změnu objemu látky dV/V_0 vztahujeme, je stálý objem (v našem případě objem při $0 \, ^\circ\text{C}$), který se integrace nezúčastní. Kdybychom naproti tomu relativní zvětšení objemu látky vztahovali na okamžitý objem V látky při teplotě t , od které měříme elementární přírůstek teploty dt , a definovali součinitele β ve tvaru $\beta = \frac{dV}{V} \frac{1}{dt}$, pak při stálém β , jímž se má vyšetřovaný teplotní obor vyznačovat, dostaneme integrací exponenciální vztah $V = V_0 e^{\beta t}$ místo vztahu lineárního.

U pevných látek a kapalin má však součinitel β velmi malou číselnou hodnotu, např. pro železo $\beta = 33 \cdot 10^{-6} \, ^\circ\text{C}^{-1}$, měď $\beta = 42 \cdot 10^{-6} \, ^\circ\text{C}^{-1}$, sklo $\beta = 25 \cdot 10^{-6} \, ^\circ\text{C}^{-1}$, rtuť $\beta = 1,82 \cdot 10^{-4} \, ^\circ\text{C}^{-1}$, vodu $\beta = 2 \cdot 10^{-4} \, ^\circ\text{C}^{-1}$ apod., takže rozvineme-li uvedený exponenciální vztah

v exponenciální řadu $V = V_0 \left[1 + \beta t + \frac{(\beta t)^2}{2} + \dots \right]$, můžeme v ní pro dostatečně nízké teploty t , do kterých platí stálost β , pominout všechny členy řadu vyššího než prvního, takže zbývá prakticky zase jen vztah lineární. Z toho plyne, že obě zmíněné definice součinitele objemové roztažnosti vedou k prakticky týmž číselným hodnotám.

Vyšetřujeme-li závislost objemu látky na teplotě ve větším teplotním rozmezí, zjistíme, že roztahování už není rovnoměrné (závislost objemu na teplotě už není znázorněna přímkou, ale nějakou křivkou). Schopnost látek v jednotlivých teplotních stavech se roztahovat charakterizujeme i v tomto případě součinitelem objemové roztažnosti β , definovaným diferenciálním vztahem 4.1 (14), který ovšem vede k různým číselným hodnotám podle polohy elementárního teplotního intervalu dt na teplotní stupnici (jde-li např. o interval dt kolem 20 °C nebo kolem 100 °C). Objemová roztažnost β je tedy obecně funkcí teploty, $\beta = f(t)$. U kapalin a pevných látek prakticky nezávisí na tlaku, jemuž je látka vystavena.

Mění-li se objem látek s teplotou, mění se také hustota ρ látek zahřátím. Zavádíme proto *součinitele teplotní závislosti hustoty* β' , kterého definujeme obdobně jako objemovou roztažnost β výrazem

$$\beta' = \frac{d\rho}{\rho_0} \frac{1}{dt},$$

v němž ρ_0 je hustota látky při teplotě 0 °C. Dosadíme-li do 4.1 (14) za objem $V_0 = m/\rho_0$ a za přírůstek objemu $dV = -\frac{m}{\rho^2} d\rho$, při čemž můžeme položit $\rho^2 \approx \rho_0^2$, protože hustota látky se při nepřilíši vysoké teplotě jen nepatrně liší od hustoty při 0 °C, zjistíme, že $\beta' \approx -\beta$, takže závislost hustoty látky na teplotě vyjadřuje rovnice

$$4.1 (15) \quad \rho = \rho_0(1 + \beta' t) \approx \rho_0(1 - \beta t),$$

je-li v příslušném teplotním rozmezí součinitel β stálý.

K vyjádření teplotní závislosti délkových rozměrů pevného tělesa zavádí se ještě *teplotní součinitel délkové roztažnosti* (krátce *délková roztažnost*) α . Jeho hodnota při teplotě t látky je definována stejně jako součinitel β nebo β' , nahradíme-li v příslušných vztazích objem nebo hustotu délkou

$$4.1 (16) \quad \alpha = \frac{dl}{l_0} \frac{1}{dt},$$

kde l_0 je délka tělesa při teplotě 0 °C. Látky izotropické, mající ve všech směrech stejné vlastnosti, roztahují se všemi směry stejně. U krychle o hranách l a objemu $V = l^3$ je elementární přírůstek objemu $dV = 3l^2 dl$. Její objem při teplotě 0 °C je $V_0 = l_0^3$. Položíme-li opět $l^2 \approx l_0^2$, protože pevné látky se roztahují jen málo a obě délky se mohou jen velmi nepatrně navzájem lišit, pak ze vztahů 4.1 (14) a (16) plyne

$$\beta \approx 3\alpha$$

čili délková roztažnost je prakticky třikrát menší než objemová roztažnost. Platí to i pro tělesa jiného tvaru než krychle, protože zde počítáme s poměrnými veličinami; i dutina zvětšuje svůj objem tak, jako by byla vyplněna látkou stěn. Neplatí to ovšem u anizotropických látek, jako jsou krystaly (s výjimkou soustavy krychlové), které se v různých směrech roztahují různě. Kovy, které mají také krystalickou strukturu, chovají se však, pokud se teplotní roztažnosti týče, jako látky izotropické, protože krystalky v kovu jsou drobné a jsou seskupeny v nahodilých sestavách.

Stav každé čisté látky jistého skupenství je určen hmotností, teplotou, tlakem a objemem (nebo hustotou) látky. Tyto veličiny nejsou však nezávislé, mezi nimi je jistý vztah, který se nazývá *stavová rovnice*. Vyšetřujeme-li určité množství nějaké látky, je její hmotnost při tom stálá a vlastními stavovými veličinami jsou pak již jen teplota, tlak a objem. U pevných látek a kapalin nezávisí vzhledem k jejich malé stlačitelnosti za obvyklých poměrů objem prakticky na tlaku, takže není-li tlak příliš velký, zbývají jen dvě stavové veličiny, objem a teplota. Jejich vzájemná závislost je dána vztahem 4.1 (14), známe-li součinitele β . Je-li např. lineární funkcí teploty, $\beta = \beta_1 + 2\beta_2 t$, dostaneme integraci 4.1 (14)

$$V = V_0(1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2),$$

integrujeme-li od teploty $t = 0^\circ\text{C}$, při níž má látka objem V_0 , do teploty t . To je tedy příklad na stavovou rovnici látky uvádějící ve vztah dvě stavové veličiny, které stav látky charakterizují.

Stavové rovnice kapalin a pevných látek mají více méně jen povahu interpolačních vzorců platících v jistém omezeném oboru. V širokém oboru platící stavové rovnice lze sestavit jen pro plyny, u nichž se ovšem význačnou měrou projevuje tlak. Velmi snadno nalezneme *stavovou rovnici ideálních plynů*, které se řídí zákony Gay—Lussacovým a Boyleovým. Při tom je výhodné pracovat s absolutní teplotou. Nechť má plyn počáteční tlak $p_0 = 760$ torrů, teplotu $T_0 = 273,15^\circ\text{K}$ a objem V_0 . Zvýšíme-li při stálém tlaku p_0 teplotu na hodnotu T , nabude plyn objemu x , který je podle Gay—Lussacova zákona

$$x = \frac{V_0}{T_0} T;$$

zvýšíme-li pak při stálé teplotě T tlak z p_0 na p , zmenší se objem z hodnoty x na V , pro který platí podle Boyleova zákona

$$pV = xp_0.$$

Vyloučením x z obou rovnic dostaneme stavovou rovnici

$$4.1 (17) \quad pV = \frac{p_0 V_0}{T_0} T = \text{const} \cdot T.$$

Velikost konstanty $p_0 V_0 / T_0$, určená počátečním stavem plynu, závisí přirozeně na množství plynu, jemuž je úměrná; často, zejména v technické praxi, vztahuje se na 1 kg plynu a nazývá se pak *plynová konstanta*. V tomto případě má objem V plynu ovšem význam měrného objemu v , který je roven převrácené hodnotě hustoty ρ plynu, $v = 1/\rho$. Protože i za stejných poměrů je měrný objem každého plynu jiný, má takto určená plynová konstanta u různých plynů různou hodnotu. Pro ideální plyny platí však také Avogadrův zákon (čl. 4.3.1), z něhož vyplývá, že kilogrammolekuly všech plynů mají za stejného tlaku a stejné teploty stejný objem, a to při tlaku $p_0 = 760$ torrů $= 1,013\,25 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ a teplotě $T_0 = 273,15^\circ\text{K}$ objem $v_{k0} = 22,414 \text{ m}^3 \cdot \text{kmol}^{-1}$, zvaný *normální kilomolový objem*. Je proto výhodné vztahovat plynovou konstantu na kilogrammolekulu, neboť pak má pro všechny plyny touž hodnotu (pokud ovšem platí Avogadrův zákon); označuje se pak R a nazývá se *univerzální plynová konstanta*,

$$4.1 (18) \quad R = \frac{1,013\,25 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2} \cdot 22,414 \text{ m}^3 \cdot \text{kmol}^{-1}}{273,15^\circ\text{K}} = \\ = 8\,314 \text{ joule} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}.$$

Má rozměr práce na kilomol a stupeň Kelvina a lze ji též přepočítat na kalorie pomocí převodního vztahu 4.1 (22), tj. $1 \text{ kcal} = 4\,187 \text{ J}$:

$$4.1 \quad (19) \quad R = 8\,314 : 4\,187 = 1,986 \approx 2 \text{ kcal} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}.$$

Platí tedy pro všechny ideální plyny jedna a táž stavová rovnice

$$4.1 \quad (20) \quad pv_k = RT,$$

kde v_k je nyní objem jednoho kilomolu plynu, zvaný *kilomolový objem* (viz čl. 4.3.1).

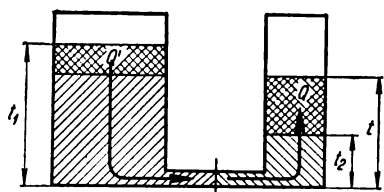
Máme-li m kg plynu, jehož kilomolová hmotnost je M kg $\cdot$ kmol $^{-1}$, pak představuje plyn množství $n = m/M$ kilomolů a platí

$$4.1 \quad (21) \quad pV = nRT,$$

kde V je nyní ovšem objem všech m kg nebo n kilomolů plynu. Tato stavová rovnice platí dostatečně přesně i pro skutečné plyny, jsou-li velmi vzdáleny stavu zkuplnění. Jinak vyžaduje úpravu, o níž pojednáme v čl. 4.3.6.

4.1.3. Množství tepla, měrné teplo

V čl. 4.1.1 jsme připomněli známý poznatek, že při dotyku dvou různě teplých těles nastává vyrovnání teplot; teplejší těleso se ochladí a chladnější se ohřeje tak, aby měla obě stejnou



Obr. (4.1) 4. K fluidové představě tepla

teplotu. Je tu jakási analogie se dvěma nádobami naplněnými kapalinou do různé výšky, obr. (4.1) 4. Spojíme-li obě nádoby, vyrovnají se hladiny, a to tak, že z nádoby s vyšší hladinou přeteče část kapaliny do nádoby s nižší hladinou. Přitom množství kapaliny, které oteče z jedné nádoby, rovná se množství, které do druhé nádoby přiteče, takže se celkové množství kapaliny v obou nádobách nezmění. Podobně si můžeme při vyrovnání teplot t_1 a t_2 dvou těles, které odpovídají výškám hladin v analogii na obr. (4.1) 4, představit, že jistá veličina, kterou nazveme teplem, přechází z teplejšího tělesa na chladnější, při čemž teplo

Q' vydané teplejším tělesem se právě rovná teplu Q , které přijme těleso chladnější (nepůsobí-li ovšem obě tělesa na sebe chemicky a jsou-li dokonale izolována). Celkové teplo soustavy obou těles zůstává stálé, takže pro vyrovnávání teplot platí zřejmě *zákon zachování tepla*.

„Fluidová“ teorie tepla, podle níž je teplo jakási nevažitelná substance (tepelné fluidum, kalorikum), které ani nevzniká, ani nezaniká, ale přechází jen z těles teplejších na chladnější, udržela se téměř až do poloviny 19. stol. Přestože nedovedla vysvětlit některé jevy, např. zahřívání těles při maření mechanické energie prací sil přemáhajících tření, má ten význam, že zavedla jednotku pro množství tepla, které se užívá dodnes.

Za jednotku tepla byla zvolena *kalorie*, označovaná cal, což je takové množství tepla, jímž se při normálním atmosférickém tlaku ohřeje 1 g odvzdušněné vody ze 14,5 na 15,5 $^\circ\text{C}$. V technické praxi se užívá častěji kilokalorie (velké kalorie), označované kcal a rovné 1 000 cal. Je to teplo, jež ohřeje za normálního tlaku 1 kg vody ze 14,5 na 15,5 $^\circ\text{C}$. (Teplotní interval je třeba zvlášť definovat, neboť k ohřátí 1 g vody o jeden stupeň v jiném oboru teplot je třeba jiného množství tepla než 1 cal.) Takto definovaná kilokalorie nazývá se *patnáctistupňová* nebo *Maxwellova* a označuje se také kcal $_{15}$. Kromě ní byly ještě definovány jiné kalorie.

Domněnka, že teplo je nějaká zvláštní látka, byla bezpečně vyvrácena nesčetnými pokusy provedenými v první polovině 19. stol. především Joulem, a to aby se vysvětlilo, proč se třením tělesa zahřívají. Zjistilo se totiž, že mechanická práce vynaložená při těchto

pokusech a vzniklé teplo jsou vždy v témže poměru nezávisle na tom, jakým způsobem se přeměna mechanické energie v teplo udála, zda třením, nebo stlačením nějakého plynu apod. Z toho lze soudit, že teplo je jen jistý druh energie tak jako energie mechanická, a že tedy zákon zachování tepla není zvláštním zákonem, ale je obsažen v obecném *principu zachování energie*: Při přeměnách tepla v mechanickou energii nebo v jiné druhy energie je úbytek tepelné energie úměrný přírůstku energie mechanické nebo jiné a naopak. Nenastává-li energetická přeměna, má celková tepelná energie uzavřené soustavy stálou hodnotu.

Stejně jako mechanickou energii tělesa měříme prací sil, které na těleso působí, nebo naopak prací sil, jimiž těleso působí na okolní tělesa (jde-li o úbytek jeho mechanické energie), můžeme i množství tepla, které těleso přijme nebo vydá, měřit prací sil, odpovídající příslušnému zvýšení nebo snížení energetického obsahu tělesa. Ačkoli se vzájemnou souvislostí mezi tepelnou energií a mechanickou prací budeme podrobně zabývat až v kapitole nazvané termodynamika, zmiňujeme se o ní už teď proto, abychom ukázali, že teplo jakožto druh energie žádnou zvláštní jednotku nevyžaduje; i u něho vystačíme s jednotkami společnými pro všechny druhy energie, tj. s jednotkami mechanické práce, mezi nimiž dáme přednost joulu jakožto hlavní jednotce měrové soustavy SI. Kilokalorie není tedy jednotkou zvláštní fyzikální veličiny, ale vedlejší jednotkou pro energii nebo i mechanickou práci, které se však z historických důvodů v technické praxi používá jen pro jistý druh energie, a to pro energii tepelnou. S hlavní jednotkou měrové soustavy SI—joulem—souvisí přesně platným převodním vztahem

4.1 (22)

$$1 \text{ kilokalorie} = 4\,186,8 \text{ joulu.}$$

Z hlediska překonané fluidové teorie tepla určovalo toto číslo velikost tzv. „mechanického ekvivalentu tepla“, popř. jeho převrácená hodnota velikost „tepelného ekvivalentu mechanické práce“, interpretovaných jako konstanty úměrnosti mezi teplem jakožto zvláštní veličinou na jedné straně a různými druhy energie na druhé straně. Protože však podle dnešních představ o různých veličinách nejde, není název ekvivalent oprávněn, jako není oprávněn u prostých čísel 9,806 65 nebo 1 000 v převodních vztazích mezi kilopondmetrem a joulem nebo tunou a kilogramem.

Číslo 4 186,8 v převodním vztahu 4.1 (22) má ovšem své dějiny. Vhodně upravenými kalorimetry, v nichž se mechanická energie známé velikosti, akumulovaná zvednutým závažím nebo napnutou pružinou, mění v teplo buď třením pevných těles, nebo vnitřním třením v kapalinách, se množství vzniklého tepla měřilo v kaloriích na základě stoupnutí teploty zvoleného množství vody. Přesnější byly elektrické kalorimetry, v nichž se odporem v topném tělese měnila elektrická energie v teplo. Tak se zjistilo, že

4.1 (23)

$$1 \text{ kcal}_{15} = 4\,185,5 \text{ joulu} = 426,80 \text{ kilopondmetru} \approx 427 \text{ kpm} \approx \frac{1}{860} \text{ watthodiny.}$$

Pro mezinárodní parní tabulky byla na 5. mezinárodní konferenci o vlastnostech páry (Londýn r. 1906) přijata zvláštní *mezinárodní kilokalorie*, definovaná přesně platným převodním vztahem 4.1 (22), který plyne z toho, že se tato jednotka položila na roveň 1/860 tzv. mezinárodní watthodiny

(Wh_{int}) , která je rovna 1,000 19 W měrové soustavy SI. Pak je $1 \text{ kcal} = \frac{4\,186,8}{1,000\,19 \cdot 3\,600} \text{ Wh}_{\text{int}} = \frac{1}{860,01} \text{ Wh}_{\text{int}} = 1,000\,31 \text{ kcal}_{15}$, takže dnešní kilokalorie určená vztahem 4.1 (22) je nepatrně větší než patnáctistupňová. Při technických výpočtech to má význam celkem podřadný.

K stejnému oteplení různých látek téže hmotnosti je třeba různého množství tepla. Abychom tyto rozdíly vystihli, zavádíme veličinu *měrné* neboli *specifické teplo* c , definované jako množství tepla dQ , kterým se teplota látky z teploty t zvýší na teplotu $t + dt$, dělené hmotností látky m a zvýšením teploty dt , tedy

4.1 (24)

$$c = \frac{dQ}{dt} \frac{1}{m}.$$

(4.1)

273

Ježto měrné teplo dosti málo se mění s teplotou, je prakticky číselně rovno teplu potřebnému k ohřátí látky s jednotkovou hmotností o jeden stupeň (z teploty $t - 0,5^\circ\text{C}$ na $t + 0,5^\circ\text{C}$).

Podobně se definuje objemové teplo c_{ob} , tj. číselně množství tepla, jehož je třeba k ohřátí látky, jejíž objem má jednotkovou velikost, o jeden stupeň. Vzhledem k tomu, že hustota látky $\rho = m/V$, je objemové teplo

$$4.1 (25) \quad c_{\text{ob}} = \rho c.$$

Je-li známa závislost měrného tepla látky na její teplotě ve formě $c = f(t)$, vypočítáme teplo Q_{12} , potřebné k zvýšení teploty látky s hmotností m z t_1 na t_2 , integrací vztahu 4.1 (24).

Při praktických výpočtech však většinou stačí, počítáme-li s *průměrným (středním) měrným teplem* $\bar{c}$ ve vyšetřovaném teplotním oboru, které je určeno výrazem, jehož mezní hodnotou je právě 4.1 (24), tedy

$$4.1 (26) \quad \bar{c} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \frac{1}{m},$$

kde $\bar{c}$ prisuzujeme střední teplotě intervalu Δt .

Výpočet množství tepla ΔQ , jehož je třeba k ohřátí m kg látky o $\Delta t = t_2 - t_1$, se pak zjednoduší, neboť z hořejšího vztahu (položíme-li $\Delta Q = Q_{12}$) plyne

$$4.1 (27) \quad Q_{12} = \bar{c}m(t_2 - t_1).$$

Součin $\bar{c}m$ nazýváme *tepelnou kapacitou látky*; je to číselně množství tepla, jehož je třeba k ohřátí m kg látky o 1°C .

Tepelná kapacita cm směsi látek o hmotnostech $m_1, m_2, \dots$, kg, které mají měrná tepla $c_1, c_2, \dots$, je rovna součtu tepelných kapacit $c_1m_1, c_2m_2, \dots$ jednotlivých látek, takže měrné teplo směsi je

$$4.1 (28) \quad c = \frac{c_1m_1 + c_2m_2 + \dots}{m},$$

kde $m = m_1 + m_2 + \dots$ je celková hmotnost směsi. Toto pravidlo platí též pro slitiny kovů. Jsou-li poměrné části kovů x_1 a x_2 o měrných teplech c_1 a c_2

$x_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ a $x_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ (při čemž $x_1 + x_2 = 1$), pak měrné teplo slitiny

$$c = x_1c_1 + x_2c_2.$$

Při mnohých úvahách je užitečný pojem *kilomolového tepla* C . Je to množství tepla potřebné k malému zvýšení teploty látky, dělené množstvím látky v kilomolech a zvýšením teploty; číselně je rovno množství tepla potřebného k ohřátí kilogrammolekuly látky o 1°C . Je-li M_μ kilomolová hmotnost látky, pak její kilomolové teplo

$$4.1 (29) \quad \boxed{C_\mu = M_\mu c.} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{1 kilomol} \\ \uparrow \end{matrix}$$

Podobně máme také u prvků kilomolové teplo, zvané též *atomové teplo*, což je číselně množství tepla, potřebné k zahřátí 1 kilomolu prvku o 1°C . Je-li M_a kilomolová hmotnost prvku, pak

$$4.1 (30) \quad \boxed{C_a = M_a c.}$$

Měrné teplo závisí obecně na tom, jaká změna se s vyšetřovanou látkou udála. Rozlišujeme dva základní případy:

1. Při ohřívání nemění se vnější tlak p působící na těleso, mění se pak ovšem objem tělesa a příslušné měrné nebo kilomolové teplo je pak určeno pro stálý tlak; označuje se c_p nebo C_p .

2. Při ohřívání nemění se objem V tělesa, takže musí růst tlak působící na těleso; příslušné měrné nebo kilomolové teplo je pak určeno pro stálý objem tělesa a označuje se c_v nebo C_v .

U pevných látek a kapalin rozumí se měrným teplem zpravidla teplo při stálém tlaku, které se jen nepatrně liší od druhého měrného tepla, takže k celkem bezvýznamným rozdílům není ani třeba přihlížet. U plynů se však obě měrná tepla navzájem zřetelně liší a vždy je $C_p > C_v$. Poměr obou měrných nebo kilomolových tepel

$$4.1 \quad (31) \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_p}{C_v}$$

se nazývá *Poissonova konstanta*, která je vždy větší než jedna. O jejím významu a o zákonitostech kilomolových tepel pojednáme později.

Měření množství tepla, a tedy i měrného tepla je založeno na zákonu zachování tepla. Přivedeme-li těleso tepelné kapacity $m_1 c_1$ a teploty t_1 do tepelného styku s druhým tělesem kapacity $m_2 c_2$ a nižší teploty t_2 , vyrovnají se teploty obou těles na společnou teplotu t . Není-li tepelných ztrát a jsou-li obě tělesa navzájem chemicky netečná, je teplo $m_1 c_1 (t_1 - t)$, vydané teplejším tělesem, rovno teplu $m_2 c_2 (t - t_2)$, přijatému chladnějším tělesem, tedy

$$4.1 \quad (32) \quad m_1 c_1 (t_1 - t) = m_2 c_2 (t - t_2).$$

Tato rovnice, která se nazývá *směšovací pravidlo*, určuje množství tepla vyměněné mezi oběma tělesy. Ze směšovacího pravidla lze např. vypočítat výslednou teplotu t po vyrovnání teplot

$$4.1 \quad (33) \quad t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

nebo měrné teplo jednoho tělesa, známe-li měrné teplo druhého tělesa a zjistíme-li měřením velikost ostatních veličin v rovnici 4.1 (32). Tak určujeme měrné teplo směšovacími kaloriemetry.

4.2. Šíření tepla

Z analogie mezi teplem a hypotetickou kapalinou plyne velmi názorně, že každý teplotní rozdíl mezi tělesy nebo jednotlivými částmi tělesa, jemuž odpovídá různá výška hladin kapaliny, se časem vyrovná tím, že teplo jako proud proudí z míst s vyšší teplotou k místům, kde je teplota nižší. Protože je teplo zvláštní druh energie. jde tu ovšem o proud energie.

Šíří-li se teplo tím způsobem, že energii si vyměňují jen bezprostředně spolu sousedící částice látky, pak tento způsob šíření tepla se nazývá *vedení (kondukce) tepla*.

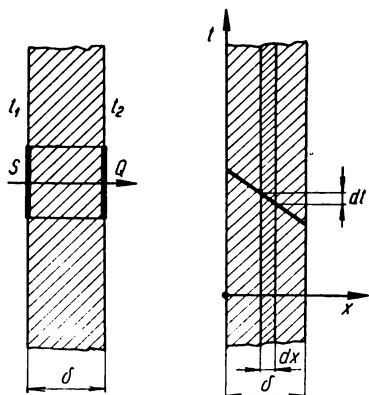
Dalším způsobem šíření tepla je *proudění (konvekce) tepla*, k němuž dochází tehdy, když částice látky mění v prostoru svou polohu ve větším měřítku, unášejíce přitom svou energii s sebou. Takový děj nastává v proudících kapalinách a plynech; není-li v proudící látce všude stejná teplota, pak je proudění současně provázeno přechodem energie od částice k částici. Tak v kapalinách nebo v plynech, zahříváme-li je zdola, vzniká proudění, neboť

dolní části se zahřátím roztahují, stávají se řidšími, stoupají vzhůru a přinášejí do chladnějších míst teplo. Chladnější části kapaliny naproti tomu klesají do míst bližších zdroji tepla a rychle se ohřívají. Teplo se tedy v tomto případě přenáší kromě vedení také prouděním kapaliny nebo plynu. Proudění kapaliny vzniklé pouze rozdílem hustot v kapalině nazýváme *prouděním volným* nebo *přirozeným*. Naproti tomu nazýváme proudění kapaliny nebo plynu, vzniklé vnějšími silami (čerpadlem, ventilátorem apod.) nezávisle na transportu tepelné energie, *prouděním nuceným*. Užívá se ho v technické praxi k zesílení přenosu tepla konvekci.

Uvedené způsoby šíření tepla jsou vázány na látku. Třetí způsob šíření tepla, tzv. *tepelné záření* nebo *sálání*, je zcela jiné povahy, neboť se jím přenáší tepelná energie z tělesa na těleso, i když prostor mezi tělesy není vyplněn látkou. Rozdíl se jeví také v tom, že přenos energie zářením mezi dvěma tělesy probíhá, i když teplota prostředí mezi nimi je podstatně nižší nebo vyšší, než je teplota obou těles (např. výměna tepelné energie mezi Sluncem a Zemí), kdežto vedení nebo konvekce tepla se děje vždy jen ve směru klesající teploty. Tepelné záření je stejné povahy jako záření světelné a patří do skupiny fyzikálních jevů, jež souhrnně nazýváme *elektromagnetickým zářením*; o jeho fyzikálních vlastnostech je pojednáno až v čl. 6.5.1.

4.2.1. Vedení tepla

Udržíme-li povrchy rovinné desky [obr. (4.2) 1], jež jsou velké proti její tloušťce δ , na stálých teplotách t_1 a t_2 ($t_1 > t_2$), vznikne po jisté době rovnovážný stav, při němž prostupuje teplo deskou z povrchu vyšší teploty t_1 k povrchu nižší teploty t_2 . Teplo Q , jež projde za dobu τ plochou S (malou proti povrchu desky), je podle zkušenosti přímo úměrné velikosti plochy S , teplotnímu rozdílu ($t_1 - t_2$) a době τ a nepřímo úměrné tloušťce desky δ , tedy



Obr. (4.2) 1. Vedení tepla stejnorodou deskou

4.2 (1)

$$Q = \lambda S \tau \frac{(t_1 - t_2)}{\delta}.$$

Konstantu úměrnosti nazýváme *součinitelem tepelné vodivosti* (tepelnou vodivostí) materiálu desky. Udává číselně množství tepla, které projde za jednotku doby krychlí o jednotkové hraně mezi dvěma protilehlými stěnami, mezi nimiž je teplotní rozdíl 1°C , jsou-li ostatní stěny krychle dokonale tepelně izolovány. Hlavní jednotkou je $[\lambda] = \text{J} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} = \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$, v technické praxi se užívá vedlejší jednotky $[\lambda] = \text{kcal} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$.

Součinitel tepelné vodivosti charakterizuje schopnost látek vést teplo a podle jeho velikosti dělíme látku na dobré a špatné vodiče tepla. Dobrymi vodiči

tepla jsou kovy, jež jsou také dobrými vodiči elektrického proudu. Ostatní pevné látky mimo tuhu pak jsou špatnými vodiči tepla a lze jich užít jako tepelných izolantů. Součinitel tepelné vodivosti mění se s teplotou, avšak nikoliv značně, takže ve většině praktických problémů (nejsou-li teplotní difference příliš velké) je možno počítat se středními hodnotami. Schopnost ryzích kovů vést teplo je vždy větší než u kovů znečištěných nebo slitin. Vysvětlujeme to tím, že v krystalické mřížce kovů jsou nehomogenity vzniklé přítomností cizích atomů, které ruší pravidelnost mřížky a ztěžují přenášení energie. Vedení tepla v kovech je zesilováno pohybem tzv. volných elektronů, jež také zprostředkují vedení elektrické energie kovem,

jsou-li urychlovány elektrickým polem. Souvislost mezi součinitelem tepelné vodivosti a součinitelem elektrické vodivosti, který charakterizuje látky z hlediska jejich schopnosti vést elektrický náboj, vyjadřuje Lorentzův — Lorenzův zákon.

Tabulka (4.2) I

Součinitelé tepelné vodivosti při 18 °C

Látka	λ [kcal . m ⁻¹ . s ⁻¹ . °C ⁻¹]	Látka	λ [kcal . m ⁻¹ . s ⁻¹ . °C ⁻¹]
Stříbro	0,101	Led	0,000 5
Měď	0,090	Sklo	0,000 22
Hliník	0,050	Voda	0,000 14
Zinek	0,030	Cihlové zdívo	0,000 1 až 0,000 2
Cín	0,015	Vodík	0,000 04
Železo	0,014 až 0,016	Papír	0,000 03
Olovo	0,008 2	Vzduch	0,000 005 7

Ze všech látek mají nejmenšího součinitele tepelné vodivosti plyny. Proto je dosti malá vodivost u látek, jež v drobných dutinách obsahují vzduch, který v nich nemůže znatelně proudit; užívá se jich jako dobrých tepelných izolantů. Jsou to např. skelná nebo strusková vlna, pěnový beton, cihly apod. Vodivost takových látek však závisí na vlhkosti, a to tak, že vodivost vlhkých látek je značně větší. Nejlepším tepelným izolantem je vakuum (v němž se ovšem zase znatelněji projevuje tepelné záření). Vakua je k tepelné izolaci využito v tzv. *Dewarových nádobách*; jsou to nádoby s dvojitými stěnami, mezi nimiž je dosti vysoké vakuum. Tepelné záření je sníženo postříbřením vnitřních povrchů dvojitých stěn.

Z jednoduchého případu vedení tepla deskou je zřejmé, jak teplo, analogicky s hypotetickou tekutinou, proudí z vyšší teplotní hladiny, která je shodná s povrchem desky teploty t_1 , na nižší hladinu na protějším povrchu desky, kde je teplota t_2 , a to ve směru kolmém k oběma hladinám, což vystihuje podíl

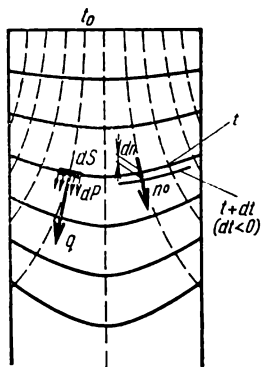
$$4.2 (2) \quad \frac{t_1 - t_2}{\delta} = - \frac{t_2 - t_1}{\delta},$$

v němž δ je kolmá vzdálenost obou teplotních hladin. Rozdíl dvou hodnot veličiny, který dostaneme při jejich místním sledu odečtením hodnoty vztahující se na vzdálenější místo od bližší hodnoty, dělený vzdáleností, v níž tento rozdíl vzniká, nazýváme *spádem* příslušné veličiny. Teplo Q , které se vedením šíří deskou, je tedy za jinak stejných podmínek přímo úměrné spádu teploty v desce, a to maximálnímu spádu, protože pro δ , které je nejkratší vzdáleností obou teplotních hladin, má podíl 4.2 (2) největší hodnotu. Obrátíme-li pořadí hodnot v čitateli tohoto podílu, změní se ovšem jeho znaménko a mluvíme pak o *růstu* teploty. Je-li růst maximální, jmenuje se *gradient* příslušné veličiny, takže můžeme také prohlásit, že teplo šířící se deskou je úměrné zápornému gradientu teploty. Tím je určen zároveň i směr šíření tepla; je shodný se směrem, v němž spád (záporný růst) je maximální, tj. ve směru kolmém k oběma teplotním hladinám.

Tento výsledek zobecníme snadno na libovolný případ vedení tepla. I v nestejnomořně zahřátém tělese existují vždy plochy, v jejichž každém bodě má teplota stejnou hodnotu. To jsou *plochy konstantní teploty* představující *teplotní hladiny* jisté výšky. U rovinné desky byly teplotními hladinami oba její povrchy a roviny s povrchy rovnoběžné. V obecném případě mohou být teplotními hladinami různé plochy, které se však nikde v tělese nemohou protínat, protože v jednom a téže bodě tělesa, které je spojitě vyplněno látkou, nemohou být současně dvě různé teploty. Hladiny nemohou být uvnitř tělesa také nějak omezeny

a končí buďto na povrchu tělesa, nebo probíhají zcela uvnitř něho, při čemž musí být do sebe uzavřeny. Na obr. (4.2) 2 je naznačen řez příbližnými teplotními hladinami v tyči na horním konci zahříváné na teplotu t_0 a uložené v prostředí (např. ve vzduchu) o nižší teplotě; v tomto řezu se hladiny jeví jako *izotermny*, tj. křivky konstantní teploty, které jsou na obrázku znázorněny plně vytaženými čarami.

Podobně jako u rovinné desky postupuje i v obecném případě teplo z vyšší teplotní hladiny na nižší teplotní hladinu, a to zase všude ve směru kolmém k hladinám, v němž je spád maximální. Tento směr může být ovšem v každém místě jiný, a proto zavedeme místní teplotní spád diferenciálním podílem $-\frac{dt}{dn}$, ve který přejde podíl 4.2 (2), jestliže se nejkratší vzdálenost mezi dvěma sousedními hladinami v bezprostředním okolí vyšetřovaného místa blíží nule. Tento podíl má v každém místě prostoru vyhraněný směr, a to kolmý k teplotní hladině probíhající příslušným místem; vyjadřujeme jej ve formě vektoru



Obr. (4.2) 2. Řez hladinami konstantní teploty v tělese

$$4.2 (3) \quad -\frac{dt}{dn} \mathbf{n}^0 = -\text{grad } t,$$

kde $\mathbf{n}^0$ je jednotkový vektor, kolmý k hladině a mířící ve směru, v němž vzdálenost n roste, tj. $dn > 0$. Je přirozené tento směr ztotožnit se směrem postupu tepla, tedy se směrem klesající teploty, tzn. $dt < 0$.*)

Intenzitu vedení tepla ve vyšetřovaném místě, v němž má teplotní spád jistou hodnotu, určuje veličina zvaná *hustota tepelného toku*. Analogicky proudící tekutině rozumíme tepelným tokem P zvolenou plochou podíl tepla dQ , které projde v době $d\tau$ touto plochou, a doby $d\tau$, tedy

$$4.2 (4) \quad P = \frac{dQ}{d\tau}.$$

Hlavní jednotkou tepelného toku je $J \cdot s^{-1} = W$, vedlejší jednotkou je $kcal \cdot s^{-1}$. Číselně udává množství tepla procházející vytčenou plochou za jednotku času. Elementární částí dS plochy prochází elementární tepelný tok dP . Leží-li ploška dS_n v teplotní hladině, takže je kolmá ke směru postupu tepla v příslušném místě, pak *hustota tepelného toku* $\mathbf{q}$ je vektor, jehož velikost je určena podílem dP/dS_n a jehož prostorová orientace je shodná s orientací normály k hladině, tedy

$$4.2 (5) \quad \mathbf{q} = \frac{dP}{dS_n} \mathbf{n}^0.$$

Vektor hustoty tepelného toku vede k zobrazení pohybu tepla v látkách za ustáleného stavu, které je formálně stejné jako zobrazení ustáleného proudění tekutiny proudnicemi. V tělese vedoucím teplo můžeme totiž sestavit čáry, v jejichž jednotlivých bodech mají tečný směr příslušné hustoty tepelného toku $\mathbf{q}$. Tyto čáry probíhají vždy kolmo k teplotním hladinám a určují směr pohybu tepla v látce, podobně jako proudnice v tekutině udávají směr pohybu částic tekutiny. Podobně jako hustota proudnic poukazuje na velikost rychlosti proudění, tak také hustotou proudových čar, zobrazujících pohyb tepla v látce, lze znázornit velikost hustoty tepelného toku v příslušné oblasti. Na obr. (4.2) 2 jsou tyto čáry nakresleny přerušovaně. Náznorně ukazují, jak se teplo, vstupující do tyče horním zahříváním koncem, rozprostírá v tyči a jak hustota tepelného toku se vzdáleností od horního konce postupně klesá (hustota čar se

*) Kdybychom postupovali proti toku tepla, pak by jednotkový vektor $\mathbf{n}^0$ mířil ve směru rostoucí teploty a bylo by $dt > 0$, takže vektor 4.2 (3) by měl opačný směr než vektor $\mathbf{n}^0$ a mířil by zase ve směru toku tepla.

zmenšuje), protože teplo přechází také z povrchu tyče do okolí o nižší teplotě (některé proudové čáry končí na povrchu tyče). Kdyby tyč byla na svém povrchu dokonale tepelně izolována, probíhaly by proudové čáry všemi průřezy tyče stejně hustě a rovnoběžně s její osou (teplotní hladiny by byly rovnoběžné roviny) čili teplo vstupující horním průřezem do tyče by procházelo všemi dalšími průřezy se stejnou hustotou q .

Hlavní jednotkou hustoty tepelného toku je $W \cdot m^{-2}$, vedlejší $kcal \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$. Podobně jako intenzita vlnění, kterou jsme charakterizovali přenos energie při postupném vlnění, představuje i hustota tepelného toku měrný výkon vztažený na plošnou jednotku kolmou ke směru šíření tepla, který se v tělese v příslušném místě přenáší vedením tepla.

V jednoduchém případě vedení tepla deskou, popsaném rovnicí 4.2 (1), je velikost hustoty tepelného toku prostě $q = \frac{Q}{S\tau}$, při čemž q je úměrné teplotnímu spádu 4.2 (2). Táž úměrnost platí zřejmě i v obecném případě vedení tepla, použijeme-li teplotního spádu 4.2 (3); docházíme tak k rovnici

4.2 (6)

$$q = -\lambda \frac{dt}{dn} n^0 = -\lambda \text{grad } t,$$

která je základní rovnicí vedení tepla a nazývá se též *Fourierův zákon*.

Rovnicí 4.2 (6) je také obecně definován součinitel tepelné vodivosti λ , který může být od místa k místu prostředí vedoucího teplo různý, a to jako podíl hustoty tepelného toku a teplotního spádu v příslušném místě.

Nezávisí-li hustota tepelného toku v tělese na čase, je vedení tepla *ustálené (stacionární)*. Přitom může být q v různých místech tělesa různý co do směru i velikosti, jak je tomu např. v příkladu na obr. (4.2) 2. Nejjednodušším případem vedení tepla je ovšem případ, kdy hustota tepelného toku je v celém tělese určena tímž vektorem. Pak teplota v tělese klesá vždy lineárně, jak se snadno přesvědčíme u rovinné desky na obr. (4.2) 1. Vytkneme-li si v ní tenkou rovinnou vrstvu tloušťky dx , změní se mezi oběma rovinami, které vrstvu ohraničují, teplota o $-dt$ a hustota tepelného toku

$$4.2 (7) \quad q = -\lambda \frac{dt}{dx}.$$

Integrujeme-li tuto rovnici od t_1 do t a od 0 do x , dostaneme vztah

$$t - t_1 = -\frac{q}{\lambda} x,$$

z něhož je při stálém q zřejmý lineární pokles teploty v desce se vzdáleností x , jak je na obr. (4.2) 1 naznačeno.

Závisí-li hustota tepelného toku v tělese na čase, jde o *neustálené (nestacionární) vedení tepla*, které je složitější než ustálené. Příslušnou rovnici, jež vyjadřuje neustálené vedení tepla v elementárním objemu dV tělesa, určíme snadno při jednorozměrném vedení tepla, kdy teplo se šíří jenom v jednom směru, např. x , v desce na obr. (4.2) 1. Protože hustota tepelného toku q určuje množství tepla proudící plochou jednotkové velikosti za jednotku času, znamená podíl

$-\frac{\partial q}{\partial x}$ číselně zmenšení hustoty tepelného toku při průtoku objemem jednotkové velikosti.

(Používáme parciální derivace, protože q závisí jak na vzdálenosti x , tak také na čase τ .) Teplo $-\frac{\partial q}{\partial x}$ zůstane tedy v objemové jednotce látky za časovou jednotku a projeví se tím, že teplota

látky jednotkového objemu se za časovou jednotku zvýší o $\frac{\partial t}{\partial \tau}$. (Přitom jsme zase použili

parciální derivace, protože také teplota závisí na místě i čase.) Je-li c měrné teplo látky a ρ hustota látky, tj. číselně hmotnost objemové jednotky, platí podle 4.1 (27)

$$4.2 (8) \quad -\frac{\partial q}{\partial x} = c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau},$$

což je rovnice vyjadřující neustálené jednorozměrné vedení tepla v jednotlivých místech tělesa. Počet proměnných, které v ní vystupují, snížíme dosazením za q z 4.2 (7). Tak dostaneme známou *diferenciální rovnici vedení tepla*

$$4.2 (9) \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}.$$

Má-li teplotní spád také složky ve směrech souřadnicových os y a z , takže vedení tepla je trojrozměrné, platí rozšířená rovnice, která vznikne z hořejší rovnice, přičteme-li k druhé derivaci teploty podle x -ové souřadnice také její druhé derivace podle souřadnic y a z stejně jako ve vlnové rovnici pro šíření vlnění prostorem.

Řešením diferenciální rovnice vedení tepla dostaneme teplotu t v tělese jako funkci místa určeného souřadnicí x při jednorozměrném vedení tepla, popř. všech tří souřadnic při trojrozměrném vedení a času τ , tedy $t = f(x, \tau)$ nebo $t = (x, y, z, \tau)$. K řešení je třeba znát tzv. *počáteční a krajové podmínky*, tj. rozdělení teploty v tělese v okamžiku $\tau = 0$, od něhož počítáme čas, a teplotní poměry na okraji tělesa, které souvisejí s přechodem tepla do jiných látek, popř. s tepelným zářením povrchu tělesa.

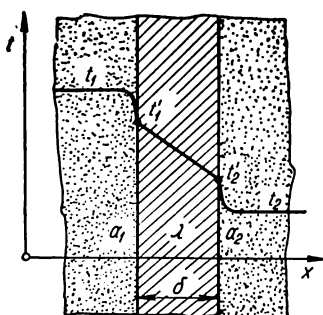
V diferenciální rovnici vedení tepla objevuje se nová konstanta úměrnosti

$$4.2 (10) \quad a = \frac{\lambda}{c\rho},$$

kterou nazýváme *součinitelem teplotní vodivosti* nebo zkráceně *teplotní vodivostí*. Je to látková konstanta, která látku charakterizuje z hlediska, jak „vede teplotu“, tj. jak rychle se v ní vyrovnávají teplotní rozdíly. Např. měď a vodík mají podle tab. (4.2) I značně rozdílné součinitele tepelné vodivosti, takže za týchž podmínek vede měď zhruba 2 000krát více tepla než vodík. Zato jejich součinitelé teplotní vodivosti jsou skoro stejní, a to pro měď $a = 1,07 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ a pro vodík $1,35 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Teplotní rozdíly se proto budou v obou látkách vyrovnávat přibližně stejně rychle, ačkoliv bychom čekali, že pro mnohem menší schopnost plynů vést teplo to tak nebude. Příčina je ta, že rychlost vyrovnávání teplot je nepřímo úměrná hustotě, která je u plynů také mnohem menší než u kovů.

4.2.2. Průchod tepla rozhraním

Při přestupu tepla z kapaliny nebo plynu do stěny nebo obráceně pozorujeme za ustáleného stavu rozdělení teploty, jak je ukazuje obr. (4.2) 3. V tekutině je teplota stálá až na tenkou vrstvu při stěně, v níž teplota náhle klesá, takže stěna má teplotu nižší, než je teplota tekutiny. Tak je tomu, přechází-li teplo z tekutiny do stěny. Při obráceném proudění tepla má zase stěna vyšší teplotu, než je teplota tekutiny. Přibližně stejná teplota uvnitř kapaliny



Obr. (4.2) 3.
Průchod tepla stěnou

nebo plynu vzniká prouděním čili konvekcí tepla v tekutině, při němž se teploty rychle vyrovnávají. Prudký pokles teploty v samé blízkosti rozhraní, jež od sebe odděluje prostředí tekutého a pevného skupenství, dá se vyložit takto:

V proudící tekutině vzniká při stěně tenká vrstva zvaná *mezní*, v níž je proudění prakticky laminární (čl. 2.8.9). Při takovém proudění nekříží se proudnice a částice tekutiny se pohybují rovnoběžně se stěnou. Průchod tepla napříč mezní vrstvou děje se tedy jen vedením, jako kdyby tekutina byla v klidu. Velký teplotní spád v mezní vrstvě vzniká pak malou tepelnou vodivostí kapalin nebo plynů.

Má-li tekutina teplotu t_1 a povrch stěny na obr. (4.2) 3 teplotu t_2 , je množství tepla Q , které za čas τ projde plochou S z tekutiny do stěny, podle zkušenosti vyjádřeno *Newtonovým vztahem*

$$4.2 (11) \quad Q = \alpha S \tau (t_1 - t'_1),$$

takže hustota tepelného toku

$$4.2 (12) \quad q = \frac{Q}{S\tau} = \alpha(t_1 - t'_1)$$

je opět úměrná teplotnímu rozdílu $(t_1 - t'_1)$ jako při vedení tepla.

Konstanta úměrnosti α nazývá se *součinitel přestupu tepla*; udává číselně množství tepla, které přejde prouděním a vedením jednotkovou plochou do tekutiny (kapaliny nebo plynu) nebo naopak za jednotku času při teplotním rozdílu 1°C mezi tekutinou a stěnou. Hlavní jednotka $[\alpha] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$, vedlejší jednotkou je často $[\alpha] = \text{kcal} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{h}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$.

Snadno určíme průchod tepla z tekutiny 1 do tekutiny 2 rovinou stěnou na obr. (4.2) 3.

Za ustáleného stavu vstupuje do stěny z teplé tekutiny stejné množství tepla jako ze stěny do chladné tekutiny, takže je-li α_1 součinitel přestupu z tekutiny 1 do stěny a α_2 též veličina pro přestup ze stěny do tekutiny 2, pak

$$q = \alpha_1(t_1 - t'_1) = \frac{\lambda}{\delta}(t'_1 - t'_2) = \alpha_2(t'_2 - t_2)$$

a

$$4.2 (13) \quad t_1 - t'_1 = \frac{q}{\alpha_1}, \quad t'_1 - t'_2 = q \frac{\delta}{\lambda}, \quad t'_2 - t_2 = \frac{q}{\alpha_2}.$$

Sečtením a po úpravě dostaneme

$$4.2 (14) \quad q = k(t_1 - t_2),$$

kde

$$4.2 (15) \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

Neznámé teploty povrchů stěny dostaneme, dosadíme-li za q ze vztahu 4.2 (14) do (13). Konstanta k nazývá se *součinitel průchodu (prostupu) tepla* stěnou nebo *průteplivost* stěny. Udává číselně množství tepla, které projde za jednotku času jednotkovou plochou stěny z teplejší tekutiny do chladnější při teplotním rozdílu 1°C mezi oběma tekutinami. Má stejné jednotky jako součinitel přestupu tepla.

Rovnici 4.2 (14) můžeme přirovnat k známému Ohmovu zákonu $I = U/R$ pro vedení elektrického proudu. Hustota tepelného toku q odpovídá elektrickému proudu I a teplotní rozdíl $t_1 - t_2$ potenciálnímu rozdílu na vodiči neboli napětí U . Potom převrácená hodnota součinitele k odpovídá elektrickému odporu R , a proto se $1/k$ nazývá *měrný tepelný odpor průchodní*. Členům $1/\alpha_1$, $1/\alpha_2$ a δ/λ , jejichž součtem je určen, můžeme analogicky elektrickému odporu při sériovém řazení (za sebou) přiřadit význam dílčích odporů; podíly $1/\alpha_1$ a $1/\alpha_2$ se nazývají *měrné přestupní tepelné odpory* a podíl δ/λ je *měrný tepelný odpor stěny*. Přídavného jména „měrný“ je u všech zmíněných tepelných odporů použito proto, že se vztahují na plošnou jednotku povrchu stěny. Skládá-li se stěna z n rovnoběžných vrstev, z nichž každá má měrný tepelný

odpor δ_i/λ_i , pak z uvedené analogie plyne, že stěna má celkový měrný tepelný odpor $\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, kterým je třeba nahradit ve vztahu 4.2 (15) podíl δ/λ .

4.3. Kinetická teorie plynů

4.3.1. Množství látky, kilomol

Dosud jsme se při popisu základních tepelných jevů omezovali na to, co je přímo pozorovatelné, používáme při tom pojmů, jako je teplota, tlak, objem, množství tepla atd., které svým obsahem odrážejí vlastnosti látek, jimiž se v makroskopickém měřítku projevují ve vztahu k okolnímu světu. Teplo se při tom chovalo jako nějaká tekutina, kterážto obdoba

nám umožnila kvantitativně popsat šíření tepla látkou. Zmínili jsme se však hned, že teplo není žádnou zvláštní substancí, jak se dříve mělo za to, ale že to je energie a proud tepla v látce, že je proudem energie. Poněvadž jsme však o energii zatím jednali jako o míře mechanického pohybu, vzniká otázka, co se v látce pohybuje, když látka jako celek — v makroskopickém měřítku — je v klidu. Je zřejmé, že k pochopení tepelných jevů nestačí dívat se na látku jen jako na jistý celek, ale že je třeba soustředit pozornost na atomy a molekuly, z nichž se látky skládají. Cílem dalšího výkladu tedy bude vysvětlit makroskopické vlastnosti těles, charakterizované přímo měřitelnými fyzikálními veličinami, jako je teplota, tlak, hustota, měrné teplo apod., na základě představy, že látka je složena z velkého počtu částic — atomů a molekul. Fyzikální obor, který ke zkoumání tepelných jevů přistupuje z tohoto hlediska, nazývá se *kinetická teorie látek*.

Atomy a molekuly látek odlišuje navzájem v první řadě jejich *poměrná atomová hmotnost* α a *poměrná molekulová hmotnost* μ . Definovali jsme je v čl. 1.3.2 jako čísla, která udávají, kolikrát je hmotnost atomu nebo molekuly větší než $1/12$ hmotnosti izotopu uhlíku ^{12}C . Označíme-li u velikost $1/12$ skutečné hmotnosti atomu uhlíku a m skutečnou hmotnost např. molekuly nějaké látky, pak poměrná molekulová hmotnost této molekuly $\mu = m/u$. Mějme M_1 kg nějaké látky libovolného skupenství obsahující n_1 molekul poměrné molekulové hmotnosti μ_1 , a tedy skutečné hmotnosti $m_1 = \mu_1 u$, a označme indexem 2 tytéž veličiny pro nějakou jinou látku. Poměr hmotností obou látek

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{n_1 m_1}{n_2 m_2} = \frac{n_1 \mu_1}{n_2 \mu_2}.$$

Jsou-li hmotnosti M_1 a M_2 číselně rovny právě poměrným molekulovým hmotnostem μ_1 a μ_2 , pak $n_1 = n_2$, tj. počet částic v obou množstvích látek je stejný. Protože se chceme v dalším výkladu soustředit na chování látek z hlediska jejich částicové struktury, vnucuje se myšlenka, posuzovat množství látky nikoli podle její celkové hmotnosti, tíhy, nebo podle objemu, jak se to dělá i v běžném životě, ale podle počtu částic, z nichž se látka skládá. Zavedeme proto novou veličinu zvanou *množství látky*, jejíž jednotkou je 1 *kilomol* (*kilogrammolekula*) definovaný takto: 1 kilomol je množství látky obsahující tentýž počet molekul (nebo částic), kolik je přesně atomů ve 12 kg izotopu uhlíku ^{12}C . Veličina M , jejíž velikost je rovna poměrné molekulové hmotnosti μ látky nebo atomové hmotnosti α prvku, je tedy hmotnost jednotkového množství látky, tedy jednoho kilomolu, tzn. jednoho a téhož počtu částic. Nazývá se *kilomolová hmotnost* a její hlavní jednotkou je $[M] = \text{kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Toto pojetí kilomolu odpovídá návrhu ISO pro veličiny a jednotky ve fyzikální chemii a molekulární fyzice z konce roku 1961 a liší se od dosavadního pojetí, podle něhož znamenal kilomol tolik kg nějaké látky, kolik činí její poměrná molekulová hmotnost. Takto pojatý kmol byl jen zvláštní jednotkou hmotnosti, která se má ke kg jako např. tuna nebo gram, jenže příslušný násobek kg, rovný poměrné molekulové nebo atomové hmotnosti, byl u každé konkrétní látky jiný. Jestliže se dříve vyjadřoval rozměr hmotnosti kilomolu ve formě $\text{kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$, nemělo to smysl, jako nemá smysl, řekneme-li, že rozměr hmotnosti jedné tuny je $\text{kg} \cdot \text{t}^{-1}$. Naproti tomu není v nové koncepci kmol už jednotkou hmotnosti, ale jednotkou nové veličiny — množství látky —, vytvořené nezávisle na hmotnosti, tíze nebo objemu látek, a objevuje se proto ve všech rozměrových vztazích.

Počet molekul kilomolu libovolné látky jakéhokoliv skupenství udává *Avogadrova konstanta*, zvaná také *Avogadrovo číslo*, ačkoliv pouhé číslo to není, protože má rozměr kmol^{-1} . Avogadro jeho velikost nezjistil, ale první v tomto směru byl Loschmidt (čl. 4.3.6) a proto se v německé literatuře nazývá Loschmidtovo číslo. Nejnovější hodnota Avogadrovy konstanty*) je

$$4.3 (1) \quad N = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}.$$

*) Uvedená číselná hodnota platí v nové fyzikální stupnici poměrných atomových hmotností, vycházející z izotopu ^{12}C . Ve starší fyzikální stupnici založené na izotopu ^{16}O $N = 6,025 \text{ kmol}^{-1}$.

Představu o nesmírné velikosti Avogadrovy konstanty N si můžeme udělat takto: Mysleme si, že molekuly v jednom litru vody, nějak označené, jsou rovnoměrně rozptýleny do všech moří, jež jsou na Zemi. Nabereme-li pak z moře opět jeden litr vody, bude obsahovat stále ještě více než 600 000 z těchto označených molekul.

Gay—Lussac zjistil, že plyny se slučují za stejného tlaku a stejné teploty buď ve stejných objemech, nebo v násobných objemech, čili slučují-li se dva nebo více plynů beze zbytku, jsou jejich objemy za stejných poměrů v poměru malých a celých čísel. Např. 1 l vodíku a 1 l chlóru dají 2 l chlorovodíku, nebo sloučením 2 l vodíku a 1 l kyslíku vzniknou 2 l vodní páry. Molekula vodíku H_2 se skládá ze dvou atomů H a molekula kyslíku O_2 se rovněž skládá ze dvou atomů O . K vzniku molekuly vodní páry H_2O , která se skládá z molekuly vodíku a jednoho atomu kyslíku, je tedy třeba, aby se molekula vodíku spojila s „polovinou“ molekuly kyslíku. Označíme-li x počet molekul ve 2 l vodíku, pak jejich spojením s $x/2$ molekulami kyslíku vznikne zřejmě x molekul vodní páry. Poněvadž x molekul vodíku a x molekul vodní páry zaujímá za zvolených poměrů též objem 2 l a $x/2$ molekul kyslíku objem 1 l, je zřejmé, že *stejně objemy plynů obsahují za stejného tlaku a stejné teploty stejný počet molekul*. To je slavná Avogadrova hypotéza, která se dnes nazývá *Avogadrův zákon*. Je třeba podotknout, že jak zákon jednoduchých objemových poměrů při slučování plynů, tak i Avogadrův zákon platí přesně vzato jen pro plyny, chovající se jako ideální plyn.

Je-li tedy podle Avogadrova zákona ve stejných objemech plynů stejný počet molekul, pak *kilomoly všech plynů*, které obsahují vždy stejný počet molekul, *zaujímají za stejné teploty a stejného tlaku stejný objem*. Platí to ovšem přesně, jen pokud platí Avogadrův zákon, tj. u ideálních plynů, ale odchylky nejsou ani u reálných plynů vzdálených stavu zkapalnění znatelné. Pro normální podmínky, tj. tlak 760 torrů a teplotu $0^\circ C$, je objem kilomolu plynu ve stupnici $1^\circ C$

$$4.3 (2) \quad v_{k0} = 22,414 \text{ m}^3 \cdot \text{kmol}^{-1}.$$

Nazývá se *normální kilomolový objem*. Obecně je *kilomolový objem* látky definován podílem objemu látky a jejího množství v kilomolech; je to tedy *měrný objem* vztažený místo na hmotnost látky na množství v kilomolech. Kilomolový objem v_k je určen součinem kilomolové hmotnosti M a měrného objemu v podle hmotnosti, tedy

$$v_k = Mv.$$

Podíl Avogadrovy konstanty a normálního kilomolového objemu plynu nazývá se *Loschmidtova konstanta* n_0 :

$$4.3 (3) \quad n_0 = \frac{N}{v_{k0}} = \frac{6,023 \cdot 10^{26}}{22,414} = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

Udává číselně počet molekul, jež obsahuje m^3 plynu za normálních podmínek ($0^\circ C$ a 760 torrů). U skutečných plynů liší se kilomolový objem plynu za normálních podmínek tím více od hodnoty v_{k0} a tím také počet molekul v 1 m^3 od hodnoty n_0 , čím větší je jejich hustota.

Pomocí Avogadrovy konstanty můžeme určit skutečnou hmotnost jednotlivých atomů nebo molekul. Tak např. hmotnost molekuly kyslíku

$$m_{O_2} = \frac{M_{O_2}}{N} = \frac{32 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}}{6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}} = 5,31 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

Avogadrova konstanta umožňuje také učinit si představu o velikosti molekul. Kilomol vody má hmotnost 18 kg, takže 1 kg kapalně vody, který má objem 10^{-3} m^3 , představuje množství $1/18 \text{ kmolu}$, 10^{-3} m^3 vody obsahuje tedy $6,023 \cdot 10^{26} : 18 = 3,35 \cdot 10^{25}$ molekul vody. Na jednu molekulu připadá objem $\frac{10^{-3}}{3,35 \cdot 10^{25}} \approx 3 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$. Předpokládáme-li, že v kapalině jsou

molekuly rozloženy těsně jedna u druhé, vychází pro velikost jedné molekuly $\sqrt[3]{3 \cdot 10^{-29}} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Ke stejné řádové velikosti dojdeme též jinými úvahami.

4.3.2. Kinetická teorie tepla

Botanik Brown shledal, že pylová zrnka, vznášející se ve vodě, která pozoroval mikroskopem, nejsou v klidu, nýbrž v ustavičném trhavém pohybu, jehož směr se zcela nepravidelně mění. Přitom zjistil, že pohyb zrněk je tím živější, čím menší jsou zrnka. Brown se původně domníval, že tento pohyb je projevem života, že je původu organického. Ukázalo se však, že tzv. *Brownův pohyb* je patrný na všech částicích podobné velikosti, suspendovaných v kapalinách, i na částicích prachu ve vzduchu, a že jeho rychlost roste se stoupající teplotou. Mnoho různých dohadů o příčinách Brownova pohybu muselo nakonec ustoupit tomuto výkladu:

Představujeme si, že molekuly tvořící kapalinu jsou ve stálém pohybu, při němž se pohybují všemi směry. Nárazy molekul na větší částici se nijak neprojeví, ježto takřka současně je napadena velikým množstvím molekul ze všech stran, takže nárazy udělené jí sousedními molekulami se celkem navzájem ruší. Je velmi nepravděpodobné, že náraz v nějakém směru převládne, a převládne-li, je příliš slabý, aby částici znatelně vychýlil. Proto částice velmi velké proti molekulám zůstávají takřka v úplném klidu. Je-li však částice vznášející se v kapalině dosti malá, má povrch také malý a počet molekul, které mohou mít vliv na její pohyb současně, není již tak nesmírný. Pak stačí k znatelnému vychýlení částice malá nerovnoměrnost v rozdělení nárazů působících na její povrch. Předpokládáme-li, že pohyb molekul v okolí částice je neuspořádaný, tj. že všechny směry jsou stejně zastoupeny, a že rychlosti molekul jsou různé veliké, chápeme, že výsledek jejich nárazu na částici vede k popsání Brownova pohybu. Ježto pak tento viditelný pohyb roste s teplotou kapaliny, musíme mít za to, že i jeho příčina — neviditelný pohyb molekul — je tím rychlejší, čím vyšší je teplota.

Závislost rychlosti Brownova pohybu na teplotě souvisí s jiným všeobecně známým poznatkem. Kdykoli se viditelné pohyby těles zpomalují třením nebo odporem prostředí, tělesa se zahřívají. Podle zákona setrvačnosti setrvává každé těleso v klidu nebo v přímočarém rovnoměrném pohybu, nepůsobí-li na ně vnější síly. Víme však ze zkušenosti, že tento zákon neplatí přesně, jestliže se stýkají tělesa o různých rychlostech, i když je nějak vyrovnáno působení gravitace. Pak dochází k zahřívání těles, což je zvláště nápadné při brzdění, při otáčení osy v ložisku, při pohybu náboje v hlavni, při letu meteoru v ovzduší atd. Všechny tyto jevy mají ten společný rys, že viditelný pohyb se zmenšuje a zároveň se zvyšuje teplota těles. Srovnáme-li to s dříve uvedeným poznatkem o Brownově pohybu, vnucuje se nám myšlenka, že zvýšení teploty lze vysvětlit zvýšením pohybu molekul. Jinak řečeno, zmenšení viditelného pohybu těles neznamená vlastně zmenšení mechanické energie, nýbrž pouze změnu viditelného pohybu v pohyb neviditelných částic — molekul. Tento výsledek lze výstižněji formulovat takto: Uspořádaný pohyb molekul se mění v pohyb neuspořádaný, který nazýváme *pohybem tepelným*. Molekuly jsou tak malé, že jejich neuspořádaný pohyb, který nevede ke změnám polohy nebo tvaru tělesa, nemůžeme pozorovat; vnímáme jej jen tak, že tělesu přisuzujeme jistou teplotu. Pohyb molekul stává se viditelným teprve tehdy, je-li tak uspořádaný, že přivodí pohyb tělesa jako celku.

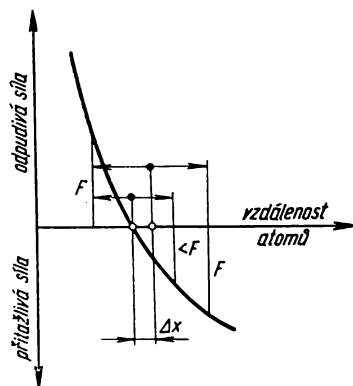
Ríkáme-li, že se třením mechanická energie mění v energii tepelnou, je to jen formální výrok, který je vyjádřením našeho přesvědčení, že se celková energie neztrácí — jak učí zákon zachování energie. Mnohem názornější a pochopitelnější je tato nová představa, podle níž se při tření mění část viditelného (uspořádaného) pohybu molekul v pohyb neviditelný (neuspořádaný). Přitom se ovšem pohybová energie ztracená při zpomalení tělesa jako celku objeví ve stejné velikosti jako zvýšení pohybové energie molekul.

Představou, že neuspořádaný pohyb částic je tím živější, čím vyšší je její teplota, lze kromě mnoha jiných jevů názorně vysvětlit také vedení tepla v látkách a roztahování těles při zahřátí.

V tělesech, zejména pevného skupenství, jsou částice neustále v silovém poli ostatních

částic (hlavně nejbližších), a vychýlení každé z nich proto způsobuje vychýlení sousedních částic. Nemá-li těleso ve všech svých částech stejnou teplotu, vyrovnává se vzájemným působením částic energie jejich kmitavého pohybu, takže teplejší části tělesa s větší energií částic se ochlazují a chladnější části tělesa s menší energií částic se ohřívají.

Roztahování těles zahřátím souvisí s průběhem silového působení mezi částicemi tělesa v okolí rovnovážné polohy, naznačeném na obr. (4.3) 1. V přímém okolí rovnovážné polohy atomu jsou přitažlivé a odpudivé síly působící na atom přibližně stejné a úměrné výchylce, což odpovídá Hookovu zákonu, avšak při větších výchylkách z rovnovážné polohy je odpudivá síla větší než přitažlivá. Ježto se s rostoucí teplotou zvětšuje výkmit tepelného kmitavého pohybu, převládá odpudivá síla, která atom tlačí zpět do rovnovážné polohy proti přitažlivé síle, a proto se rovnovážná poloha, kolem níž atom kmitá, a tím vzájemná poloha atomů v mřížce, posune o takovou vzdálenost Δx , aby přitažlivá a odpudivá síla v krajních polohách byla stejná. Tak nastává roztahování těles se stoupající teplotou. Nemohlo by k němu dojít, kdyby odpudivé a přitažlivé síly byly kolem rovnovážné polohy rozloženy souměrně.



Obr. (4.3) 1. Posunutí rovnovážné polohy atomu v krystalové mřížce s rostoucím výkmitem tak, aby přitažlivá a odpudivá síla v krajních polohách byla stejná

4.3.3. Dokonalý plyn

Kinetická teorie látek se dá kvantitativně poměrně snadno zpracovat u *dokonalého* nebo *ideálního plynu*, který definujeme takto: Dokonalý plyn je složen z velkého počtu velmi malých částic stejné hmotnosti ve tvaru stejně velkých koulí dokonale pružných a hladkých, jejichž rozměry jsou zanedbatelné proti rozměrům prostoru, který je dokonalým plynem vyplněn. Vzájemné působení těchto částic — molekul plynu — je rovněž zanedbatelné, mimo velmi krátké okamžiky jejich vzájemných srážek. S výjimkou těchto okamžiků pohybují se molekuly rovnoměrně a přímočaře, pokud nedostihnou stěny nádoby, v níž je plyn uzavřen a od níž se odrážejí jako pružné koule. K tzv. kohezním silám tu tedy není třeba přihlížet.

V dokonalém plynu konají molekuly nepravidelný pohyb rovnoměrný s nespojitě proměnnou rychlostí i směrem (ve skutečnosti jsou to nerovnoměrné pohyby, místy značně zakřivené). Přitom počet molekul plynu v témž objemu zůstává prakticky stálý a jeho hustota je stejná ve všech částech prostoru, který vyplňuje (malé rozdíly může způsobit gravitace). Tento stav plynu se trvale udržuje, předpokládáme-li, že pohyb molekul je dokonale neuspořádaný (chaotický). Molekuly se pohybují všemi směry, které jsou všechny stejně oprávněny, a tedy také obsazeny stejným počtem molekul. To ovšem platí také pro pohyby protisměrné: oběma směry se podél libovolné přímky pohybuje stejný počet molekul. To vše platí však jen při velkém počtu molekul, a to tím přesněji, čím větší je celkový počet molekul.

Všechny molekuly plynu nemají ovšem stejnou rychlost, neboť neustálými srážkami se rychlost jejich pohybů mění, a to zcela nepravidelně, ježto srážky se dějí rozmanitým způsobem. Tak se mění velmi rychle a střídavě rychlost jednotlivých molekul, lze však předpokládat, že celková energie izolovaného (osamocенého) plynu zůstává podle principu zachování energie stálá. Je-li m_i hmotnost molekuly a v_i její obecně proměnná rychlost, můžeme tedy pro izolovaný plyn o n molekulách položit

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \text{const.}$$

4.3.4. Střední kvadratická rychlost, energie plynu

Úvahy kinetické teorie plynů se značně zjednoduší zavedením pojmu *střední kvadratická rychlost molekul*. Je to rychlost, kterou by musely mít všechny molekuly plynu, aby jeho celková energie byla rovna skutečné energii. Kdyby všech n molekul plynu mělo stejnou rychlost C , byla by jeho energie

$$4.3 (4) \quad \sum_1^n \frac{1}{2} m C^2 = \frac{1}{2} C^2 \sum_1^n m = \frac{1}{2} n m C^2,$$

značí-li $\sum_1^n m = nm$ úhrnnou hmotnost plynu. Rychlost C je tedy určena podmínkou

$$\frac{1}{2} n m C^2 = \sum_1^n \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m \sum_1^n v_i^2$$

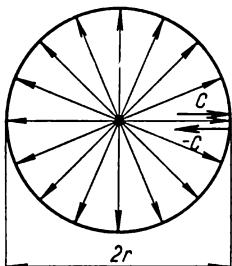
čili

4.3 (5)

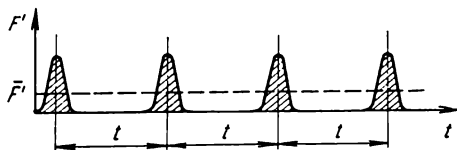
$$C^2 = \frac{\sum_1^n v_i^2}{n}.$$

Velikost střední kvadratické rychlosti najdeme jednoduchou úvahou:

Představme si, že kilogrammolekula plynu o N molekulách je uzavřena v kulové nádobě poloměru r [obr. (4.3) 2], a předpokládejme, že všechny molekuly mají stejnou rychlost C , při



Obr. (4.3) 2. Zjednodušený model dokonalého plynu v kulové nádobě



Obr. (4.3) 3. Impulsy odevzdané nárazem molekuly stěně

čemž nechť plyn má energii, která je rovna jeho skutečné energii. Abychom vystihli skutečnost, že rychlosti molekul mají všechny možné směry, předpokládejme, že se molekuly pohybují po všech průměrech koule, a to tak, že na každý plošný element povrchu koule naráží stejný počet molekul. Při tom nepřihlížíme k vzájemným srážkám molekul, což můžeme učinit vzhledem k tomu, že pomíjíme jejich rozměry, tj. pokládáme je za hmotné body.

Naráží-li molekula rychlostí C kolmo na stěnu, je změna její hybnosti rovna impulsu síly F , jíž stěna na molekulu působí, tedy $-mC - mC = \int F dt$. Molekula na stěnu působí silou F' opačného směru, jejíž impuls $\int F' dt = 2mC$. Představíme-li si silové působení mezi molekulou a stěnou jako při rázu pružné koule, jsou impulsy, které táž molekula odevzdá při střídavých nárazech stěně, znázorněny ploškami pod křivkami na obr. (4.3) 3,

kde $t = \frac{2r}{C}$ je doba letu molekuly mezi nárazy. Při velké frekvenci budou se nárazy jevit tak, jako by molekula na stěnu působila stálou silou $\bar{F}'$, kterou dostaneme, nahradíme-li

velký počet n plošek skutečných impulsů plochou obdélníka, tedy $\bar{F}' \cdot nt = n \int F' dt = = n \cdot 2mC$, takže střední hodnota silového působení jedné molekuly na stěnu $\bar{F}' = \frac{2mC}{t} = = \frac{mC^2}{r}$. Z celkového počtu N_0 molekul dopadá na plošnou jednotku stěny $\frac{N_0}{4\pi r^2}$ molekul, jejichž výsledná síla na plošnou jednotku stěny potom má velikost $\frac{N_0}{4\pi r^2} \frac{mC^2}{r}$. To se rovná zřejmě účinku stálého tlaku na stěnu. Plyn tedy tlačí na stěnu měrným tlakem

$$4.3 (6) \quad p = \frac{N_0 m C^2}{4\pi r^3} = \frac{M_0 C^2}{4\pi r^3},$$

kde $M_0 = N_0 m$ je celková hmota plynu v kg. Násobíme-li tento výraz kilomolovým objemem plynu $v_k = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ kmol}^{-1}$, dostaneme vztah

$$4.3 (7) \quad p v_k = \frac{1}{3} N m C^2 = \frac{1}{3} M C^2,$$

v němž N je Avogadrova konstanta v kmol^{-1} a M kilomolová hmotnost v $\text{kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$. V tomto výrazu již není poloměr r kulové nádoby, takže platí všeobecně pro libovolný tvar nádoby. Za stálé teploty je zřejmě C stálé, neboť také energie plynu je stálá. Pravá strana 4.3 (7) je tedy konstantní, takže

$$p v_k = \text{const.}$$

Tím jsme odvodili experimentální zákon Boyleův.

Z představy, že tlak plynu na stěnu nádoby vzniká nárazem molekul plynu, vyplývá hned také Daltonův zákon, podle něhož *částečný (parciální) tlak plynu ve směsi několika navzájem chemicky netečných plynů je roven tlaku, jaký by plyn měl, kdyby za téže teploty zaujímal objem směsi sám; celkový tlak směsi plynů je pak roven součtu částečných tlaků jednotlivých složek*. Je samozřejmé, že celkový účinek nárazů molekul na stěnu je roven součtu účinků od jednotlivých druhů molekul.

Srovnáním 4.3 (7) se stavovou rovnicí 4.1 (20) zjistíme, že

$$\frac{1}{3} N m C^2 = RT,$$

takže

$$4.3 (8) \quad C = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

kde jsme dosadili Boltzmannovu konstantu

$$4.3 (9) \quad k = \frac{R}{N} = \frac{8\,314}{6,023 \cdot 10^{26}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot ^\circ\text{K}^{-1} \approx 3,3 \cdot 10^{-27} \text{ kcal} \cdot ^\circ\text{K}^{-1},$$

což je plynová konstanta přepočtená na jednu molekulu. Vzorec 4.3 (8) lze psát ve tvaru

$$4.3 (10) \quad C = \sqrt{\frac{3RT}{M}};$$

dosadíme-li $R = 8\,314 \text{ J} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}$, dostaneme jednoduchý vztah

$$4.3 (11) \quad C = 157,96 \sqrt{\frac{T}{M}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

v němž M je kilomolová hmotnost, číselně rovná poměrné molekulové hmotnosti plynu.

Z rovnice 4.3 (8) plyne pak důležitý výsledek: *Střední energie molekuly (jednoatomového)*) plynu je úměrná absolutní teplotě*

$$4.3 (12) \quad u = \frac{1}{2} m C^2 = \frac{3}{2} kT.$$

Tím nabývá pojem *teploty* zcela konkrétní podoby. Je makroskopickým, tedy přímému měření přístupným projevem kinetické energie neuspořádaného pohybu nejmenších částic látky, kterou nelze přímo měřit. Násobíme-li tuto rovnici Avogadrovou konstantou N , dostaneme další důležitý vztah

$$4.3 (13) \quad U = Nu = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} RT,$$

který říká, že celková kinetická energie molekul v kilomolu dokonalého (jednoatomového) plynu je rovna třem polovinám součinu plynové konstanty a absolutní teploty. Tato energie nazývá se *vnitřní energie plynu*.

Kromě střední kvadratické rychlosti molekul C lze definovat ještě jiné významné rychlosti. Tak ze vztahu 4.3 (12) plyne rychlost c , definovaná tak, že energie molekuly pohybující se touto rychlostí má energii právě rovnu kT , takže

$$4.3 (14) \quad c = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Tato rychlost se nazývá *nejpravděpodobnější rychlost molekul*, neboť, jak plyne z Maxwellovy teorie rozdělení rychlostí molekul, o níž píšeme v dalším článku, vyskytují se v plynu v největším počtu molekuly, jejichž rychlosti jsou blízké této rychlosti, a naopak molekuly, jejichž rychlosti jsou o mnoho menší nebo větší, než je rychlost c , vyskytují se řidčeji. Podle 4.3 (8) souvisí nejpravděpodobnější rychlost se střední kvadratickou rychlostí vztahem

$$4.3 (15) \quad c = \sqrt{\frac{2}{3}} C \approx 0,816C.$$

Význam má též *průměrná rychlost molekul* $\bar{v}$, určená aritmetickým průměrem rychlostí všech molekul, tedy

$$4.3 (16) \quad \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i.$$

Souvisí se střední kvadratickou rychlostí C vztahem

$$4.3 (17) \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} C \approx 0,921C.$$

Průměrná rychlost je tedy poněkud větší než pravděpodobná rychlost a je menší než střední kvadratická rychlost. Poměr všech tří definovaných rychlostí je stálý a nezávisí ani na teplotě plynu, ani na druhu plynu. Tyto rychlosti se ostatně navzájem liší velmi málo a experimentálně lze rozdíl mezi nimi těžko zjistit.

Výpočtem ze vzorců 4.3 (11), (15) a (17) plyne tabulka (4.3) I, která udává tři druhy rychlostí molekul pro některé plyny při teplotě $t = 18^\circ\text{C}$ ($T = 291,15^\circ\text{K}$).

*) Pro plyny, jejichž molekuly jsou složeny ze dvou nebo více atomů, má číselný faktor v rovnici 4.3 (12) jiné hodnoty, srov. čl. 4.3.8.

Tabulka (4.3) I

Rychlosti molekul při teplotě 18 °C

Plyn	M	C	c	$\bar{v}$
H ₂	2 kg · kmol ⁻¹	1 906 m · s ⁻¹	1 555 m · s ⁻¹	1 755 m · s ⁻¹
He	4	1 348	1 100	1 242
N ₂	28	509	415	469
Vzduch	29	500	408	461
O ₂	32	476	388	438
CO ₂	44	406	331	374

Tyto rychlosti se dají přímo měřit jen obtížně, jejich velikost však můžeme nepřímou kontrolovat na základě různých jevů.

Tak např. podle Laplaceova vzorce je rychlost zvuku c_z v plynu určena výrazem 3.2 (27):

$$c_z = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}},$$

kde p , ρ a κ je tlak, hustota a Poissonova konstanta plynu. Z rovnice 4.3 (7) však dostaneme

$$4.3 (18) \quad p = \frac{1}{3} \frac{M}{v_k} C^2 = \frac{\rho}{3} C^2,$$

takže

$$4.3 (19) \quad c_z = \sqrt{\frac{\kappa}{3}} C.$$

Pro vzduch je $\kappa = 1,41$, tedy $c_z = 0,685 \, 6C$. Tento vztah dobře souhlasí se skutečností. Podle tabulky (4.3) I je $C = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, což dává rychlost zvuku $342,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, která je v úplné shodě s hodnotou $342,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pro 18 °C, která plyne ze vzorce 3.2 (28).

Podobně lze z rychlosti C vypočítat rychlost, jakou vytéká plyn velmi úzkým otvorem. Rychlost je i tu úměrná C , jak ukázal Graham měřeními výtoku plynů dírkovaným mosazným plechem. Podle 4.3 (10) je C nepřímou úměrnou odmocnině z kilomolové hmotnosti plynu, totéž platí tedy pro výtokovou rychlost. Tím se také vysvětluje známý jev, že rychlost transfúze plynu průlinčitou stěnou je nepřímou úměrnou odmocnině z kilomolové hmotnosti plynu.

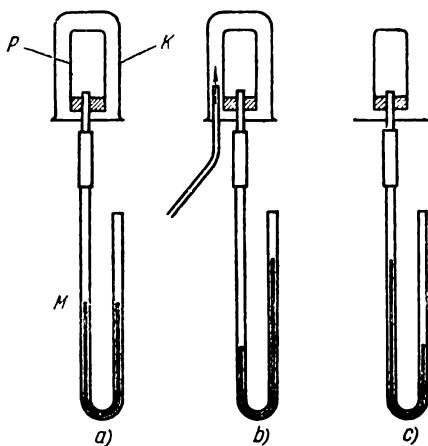
O skutečnosti, že řidší plyn difunduje rychleji než hustší, přesvědčíme se jednoduchým pokusem [obr. (4.3) 4]. Průlinčitou nádobu P spojenou s manometrem M poklopíme kádinkou K . Proudí-li svítiplyn pod kádinku, vznikne v P přetlak, který stoupne do maxima a pak se zmenšuje na nulu. Přerušíme-li tok svítiplynu, objeví se za chvíli podtlak v nádobě P . Vysvětlení plyne ze skutečnosti, že přetlak vznikne rozdílem v počtu molekul, které prostupují stěnou oběma směry, a tento rozdíl je úměrný rozdílu hustot na obou stranách stěny, což platí pro každý plyn zvlášť.

Zajímavá metoda, které užil Stern k měření rychlosti molekul nebo atomů při různé teplotě, na rozdíl od ostatních metod, jimiž lze ověřit důsledky kinetické teorie plynů, má tu výhodu, že umožňuje měřit rychlosti těchto částic přímo. Například stříbro, které má bod tání 961 °C, vytvoří při zahřátí na vyšší teplotu stříbrné páry z atomů stříbra, v nichž se atomy pohybují jistou střední rychlostí. Vypařuje-li se stříbro ve vakuu, unikají jeho atomy touto průměrnou rychlostí. Stern uspořádal měření rychlosti atomů takto [obr. (4.3) 5]:

Z postříbřeného platinového drátku d , žhaveného elektrickým proudem, odpařovaly se

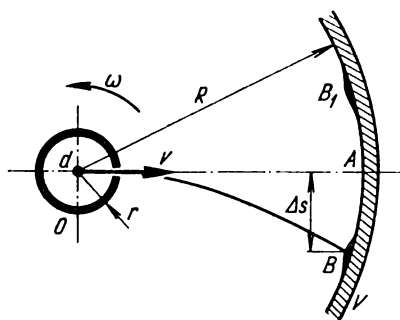
atomy stříbra při teplotě 1 200 °C. Drátek byl umístěn v dutém hřídeli O skleněného válce V , z něhož byl co nejdokonaleji vyčerpán vzduch. Úzkou štěrbinou unikal tenký paprsek letících atomů stříbra kolmo od osy válce a dopadal na jeho vnější stěnu. Tak vznikl na protějším místě A stěny válce stříbrný nálet, tvořený tenkou vrstvou atomů stříbra. Můžeme si to představit tak, jako by ze štěrbin duté osy zařízení vyletovaly jistou rychlostí v hmotné body nebo droboučké kuličky.

Roztočíme-li válec, posune se místo B náletu stříbra proti směru rotace, protože plášť má větší obvodovou rychlost než štěrbiná dutého hřídele O , kterou atomy unikají. Otáčí-li se zařízení úhlovou rychlostí ω , je obvodová rychlost bodu A rovna ωR ; doba letu částice ze štěrbiny hřídele O na plášť válce V je $\frac{R-r}{v}$; v této době posune se bod A o



Obr. (4.3) 4. Transfúze vzduchu a svítiplynu průlinčitou nádobou: a — vzduch difunduje stěnou průlinčité nádoby dovnitř i ven stejně rychle, uvnitř i vně je tedy stejný tlak; b — vpouštíme-li svítiplyn pod kádinku, vznikne jeho rychlejší transfúzí přetlak uvnitř nádoby; c — po odstranění kádinky vznikne v nádobě rychlejší transfúzí svítiplynu ven podtlak

$$\overline{AB} \equiv \Delta s = \frac{\omega}{v} R(R-r).$$



Obr. (4.3) 5. Měření rychlosti atomů podle Sterna

Otáčíme-li tedy válcem postupně v obou směrech stejnou úhlovou rychlostí, dostaneme dva proužky stříbra ve vzdálenosti $2\Delta s$, kterou lze změřit; z předešlého vzorce můžeme pak vypočítat rychlost v atomů stříbra.

Tak dostal Stern při 2 700 a 2 400 ot. min^{-1} proužky, jejichž středy měly vzdálenost 1,26 a 1,12 mm. Těmito vzdálenostem přísluší rychlosti atomů stříbra 585 a 557 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, kdežto střední kvadratická rychlost atomů stříbra o kilomolové hmotnosti 107,88 $\text{kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ je při 1 200 °C podle 4.3 (11)

$$C = 157,96 \sqrt{\frac{T}{M}} = 157,96 \sqrt{\frac{1\,473}{107,88}} \approx 584 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Shoda výsledků je velmi dobrá vzhledem k nepřesně definovaným „středům“ proužků a k nesnadnému měření teploty stříbrných par.

Tak byla kinetická teorie v hlavních věcech vesměs potvrzena, ale je nutno si uvědomit, že může přesně platit jen pro ideální plyn, který splňuje předpoklady učiněné při jeho definici.

4.3.5. Maxwellův zákon rozdělení rychlostí

Rychlosti molekul se ustavičnými srážkami zcela nepravidelně mění, a proto otázka, jaké jsou skutečné okamžité rychlosti molekul, patrně je teoreticky nezodpověditelná.*) Lze však předpokládat, že za rovnovážného stavu bude mít z celkového počtu n molekul plynu jistá stálá jejich část Δn rychlosti, jejichž velikost leží mezi v a $v + \Delta v$.

Počet Δn závisí jak na celkovém počtu n molekul, tak na velikosti intervalu Δv a na jeho poloze na stupnici rychlostí, tj. leží-li např. mezi 20 a 25 m · s⁻¹ nebo mezi 1 000 a 1 005 m · s⁻¹. Proto zavádíme poměrný počet molekul, který připadá na interval jednotkové velikosti, tedy $\frac{\Delta n}{n} \cdot \frac{1}{\Delta v}$. Tato veličina sice již nezávisí na celkovém počtu molekul, je-li tento počet velmi velký, ale závisí ještě na velikosti a poloze Δv . Blíží-li se však Δv bez omezení nule, nebude za ustáleného stavu limita

$$4.3 (20) \quad \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{\Delta v} \frac{1}{n} = \frac{dn}{dv} \frac{1}{n} = \eta(v)$$

již záviset na ničem jiném než na velikosti rychlosti v , která určuje polohu elementárního intervalu dv na stupnici rychlostí molekul. Tuto limitu nazýváme *funkcí rozdělení rychlostí molekul*. S podobným výrazem se setkáváme také v teorii náhodných chyb a nazýváme jej *relativní četností náhodných chyb*. Rozdělovací funkci můžeme tedy nazvat také *relativní četností rychlostí molekul*.

Funkci rozdělení velikosti rychlostí molekul libovolného směru odvodil po prvé Maxwell ve tvaru

$$4.3 (21) \quad \eta(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{c^3} e^{-\frac{v^2}{c^2}} v^2,$$

kde c je při rovnovážném stavu plynu konstanta. Její význam vyplyne, položíme-li si otázku, jaká je rychlost, které se blíží rychlosti největšího počtu molekul plynu. Bude dána podmínkou, že pro ni je relativní četnost rychlostí největší, takže

$$\frac{d\eta(v)}{dv} = 0$$

neboli podle 4.3 (21)

$$\frac{d}{dv} (e^{-\frac{v^2}{c^2}} v^2) = \frac{2v}{c^2} e^{-\frac{v^2}{c^2}} (c^2 - v^2) = 0.$$

Tento výraz se rovná nule pro $v = 0$, $v \rightarrow \infty$ a pro $v = \pm c$. Pro první dva kořeny je četnost nulová, žádné molekuly plynu nejsou ani v klidu, ani se nepohybují nekonečně rychle, takže hledané maximum četnosti dávají poslední dva kořeny; konstanta c je tedy nejprav-

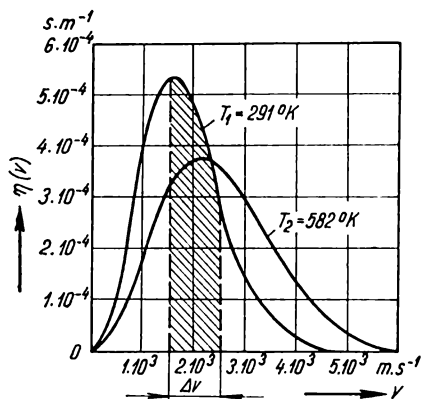
*) Otázka, kolik molekul má rychlost zcela určité velikosti, rovněž nemá smysl. Je to, jako bychom se při velkém shromáždění lidí zeptali, kdo je z přítomných přesně na minutu starý 40 let. Asi by se nepřihlásil nikdo. Zeptáme-li se však, kolik je přítomných, jejichž věk je mezi 39. a 41. rokem, přihlásí se jich několik, a to tím více, čím větší volíme interval a čím více lidí je přítomno. Počet přihlášených závisí ovšem také na tom, v kterém oboru věkové stupnice interval volíme. Kdybychom uvedený věkový interval zvolili u studentů přítomných na přednášce v prvním ročníku denního studia, asi by se také nepřihlásil nikdo. Zato bychom zjistili větší počty připadající na intervaly mezi 19. a 20. rokem, 20. a 21. rokem atd.

děpodobnější rychlost molekul. Její závislost na fyzikálních podmínkách rovnovážného stavu plynu podle Maxwellovy teorie jsme uvedli již v předchozím článku ve tvaru

$$c = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Maxwellova funkce rozdělení rychlostí, která se také nazývá *Maxwellův zákon rozdělení rychlostí*, je graficky znázorněna na obr. (4.3) 6, a to pro vodík, jehož molekula má hmotnost $m = 3,3 \cdot 10^{-27}$ kg, při teplotě $t_1 = 18^\circ\text{C}$, tj. $T_1 = 291,15^\circ\text{K}$, a při teplotě $T_2 = 2T_1 = 582,30^\circ\text{K}$. Křivka pro nižší teplotu T_1 má maximum při $v = c_1 = 1,56 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

[podle tabulky (4.3) I] a křivka pro teplotu T_2 při rychlosti $c_2 = c_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = c_1 \sqrt{2} = 2,2 \cdot$



Obr. (4.3) 6. Grafické znázornění Maxwellova zákona rozdělení rychlostí molekul

$\cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. S rostoucí teplotou posouvá se tedy maximum rozdělovací funkce směrem k větším hodnotám rychlosti, neboť proti poměrům při nižších teplotách má větší počet molekul velké rychlosti a menší počet molekul má malé rychlosti.

Poměrný počet molekul $\frac{\Delta n}{n}$, jež mají rychlost ležící mezi v a $v + \Delta v$, vypočteme z 4.3 (21) integrací takto:

$$4.3 (22) \quad \frac{\Delta n}{n} = \int_v^{v+\Delta v} \eta(v) dv.$$

Integrál je zřejmě dán vyčárkovanou plochou pod křivkou četnosti, omezenou intervalem Δv zvolené velikosti [obr. (4.3) 6].

Zvolíme-li interval Δv dosti malý, můžeme příslušnou plochu na obr. (4.3) 6 nahradit obdélníkem, jehož výška je rovna střední pořadnici ve zvoleném intervalu, a k vypočtu počtu molekul, jejichž rychlosti leží v tomto intervalu, můžeme užít přímo rovnice 4.3 (21), vyjádříme-li střední hodnotu relativní četnosti ve tvaru $\bar{\eta}(v) \approx \frac{\Delta n}{n} \frac{1}{\Delta v}$. Tak má např. relativní četnost pro vodík při teplotě $T_1 = 291^\circ\text{K}$ a při rychlosti $v = 1,5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ podle obr. (4.3) 6 velikost $\eta(v) = 5,29 \cdot 10^{-4} \text{ s} \cdot \text{m}^{-1}$. Zvolíme-li interval $\Delta v = 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, pak poměrný počet molekul, jejichž rychlosti leží v mezích od $v - \Delta v/2 = 1\,000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $v + \Delta v/2 = 2\,000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, je

$$\frac{\Delta n}{n} \approx \eta(v) \Delta v = 5,29 \cdot 10^{-4} \text{ s} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,529 = 52,9\%.$$

Zě všech molekul vodíku má tedy 52,9% molekul rychlost ve zvoleném intervalu. Toto procento je ovšem jen přibližné, protože jsme interval Δv volili již značně veliký. Přibližné rozdělení molekul vodíku při 18°C na jednotlivé intervaly rychlosti, určené tímto způsobem, je v tabulce na následující stránce.

Z tabulky je zřejmé, že největší počet molekul z celkového počtu má rychlosti, jež leží v intervalu, v němž také leží nejpravděpodobnější rychlost c . Kdybychom volili interval Δv příliš velký, např. kdyby nás zajímalo, jaký počet molekul má rychlost větší, než je jistá zvolená rychlost, nemůžeme již použít rozdělovací funkce přímo, nýbrž je třeba provést integraci podle 4.3 (22).

Vzájemné nárazy mezi molekulami plynu, jimiž se rychlosti molekul ustavičně mění, tvoří složitý děj, jehož skutečný průběh se vymyká našemu poznání. Neznáme tedy příčiny pohybu molekuly tou či onou rychlostí do takových podrobností, abychom tuto rychlost mohli předpovědět, a proto pohyb molekuly považujeme za *jev náhodný*. Je to analogie s náhodností např. při vrhu kostky, kdy také předem nevíme, které číslo padne, nebo s náhodou, že hlavní výhra v loterii připadne hráči *X*.

Interval $10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	$\eta(v)$ $10^{-4} \text{ s} \cdot \text{m}^{-1}$	Procentní část z celkového počtu molekul, jejichž rychlosti leží v udaných intervalech při $t = 18^\circ \text{C}$
$0 < v < 1$	1,34	13,4
$1 < v < 2$	5,29	52,9
$2 < v < 3$	2,85	28,5
$3 < v < 4$	0,47	4,7
$4 < v < 5$	0,03	0,3

Uskutečnění náhodného jevu, který je výsledkem nějakého pokusu, přisuzujeme jistou *pravděpodobnost*, definovanou takto: Jestliže mezi n stejně možnými případy (výsledky, které mohou při pokusu nastat se stejným oprávněním) je ν případů příznivých (takových, že vedou určitě k jevu, jehož pravděpodobnost hledáme), pak pravděpodobnost P jevu je určena poměrem

$$P = \frac{\nu}{n}.$$

Máme-li např. v osudí 60 bílých a 40 černých kuliček, které se liší jen barvou, je pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kuličku, $P = 60/100$, a pravděpodobnost, že tažená kulička bude černá, $P' = 40/100$. Jsou-li všechny možné případy jevu příznivé, pak tento jev je *jistý* a jeho pravděpodobnost je rovna jedné. Není-li naproti tomu mezi všemi možnými případy ani jeden případ příznivý pro realizaci jevu, pak takový jev je *nemožný* a jeho pravděpodobnost je rovna nule.

O nahodilých jevech říkáme, že se navzájem vylučují (jsou disjunktní), jestliže výskyt jednoho jevu vylučuje výskyt jiného jevu. Např. tažení černé kuličky z osudí vylučuje možnost současného tažení bílé kuličky, nebo zasažení cíle střelou z pušky vylučuje možnost cíl současně minout. Pro disjunktní jevy platí *věty o sčítání a násobení pravděpodobností*. První z nich říká: Máme-li několik vzájemně se vylučujících jevů, pak pravděpodobnost výskytu aspoň jednoho z nich (tj. prvního nebo druhého, nebo kteréhokoliv jiného) je rovna součtu pravděpodobností těchto jevů. Příslušnou pravděpodobnost nazýváme *úhrnnou*. Např. úhrnná pravděpodobnost, že z osudí, o němž jsme mluvili, vytáhneme buďto bílou, nebo černou kuličku, je rovna součtu $P + P' = 1$; skutečně je to jistota, neboť jiné než bílé a černé kuličky v osudí nejsou.

Na základě věty o násobení pravděpodobností určujeme *pravděpodobnost složenou*, vztahující se na současný výskyt několika navzájem se vylučujících jevů: Pravděpodobnost P_s , že nastane současně nebo v p po sobě následujících pokusech p jevů s pravděpodobnostmi $P_1, P_2, \dots, P_p$, je určena součinem

$$P_s = P_1 P_2 \dots P_p.$$

Pravděpodobnost, že se též jev s pravděpodobností P bude opakovat p -krát, je tedy dána mocninou P^p . Tak např. pravděpodobnost, že vytáhneme z osudí dvakrát po sobě černou kuličku, je $P_s = P'P' = 0,4^2 = 0,16$ a pravděpodobnost, že vytáhneme třikrát po sobě

bílou, je $P_g = P^3 = 0,6^3 = 0,216$. Předpokládáme ovšem, že vytaženou kuličku hodíme zase zpět do urny. Kdybychom tak neučinili, ubude při každém tahu z počtu jak příznivých, tak možných případů vždy jeden, takže pravděpodobnost, že z urny vytáhneme např. 3 bílé kuličky, bude $P_g = (60/100) \cdot [(60 - 1)/(100 - 1)] \cdot [(60 - 2)/(100 - 2)] = 0,212$. Složená pravděpodobnost nám bude užitečná při termodynamických úvahách v čl. 4.4.7.

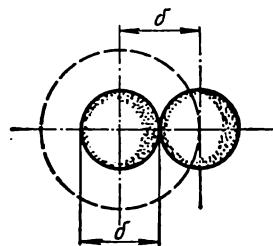
Vraťme se nyní zase k neuspořádanému pohybu molekul plynu. Řekli jsme, že zlomek $\Delta n/n$ určuje poměrný počet molekul, jejichž rychlosti leží ve zvoleném intervalu velikosti Δv . Pro náhodný jev záležející v tom, že molekula plynu má rychlost v tomto intervalu, určuje zřejmě číslo $\Delta n = \nu$ počet případů příznivých pro realizaci tohoto jevu, naproti tomu číslo n určuje počet všech možných případů, neboť každá molekula může mít jinou rychlost. Poměrný počet molekul $\Delta n/n$, určený integrálem 4.3 (22) nebo přibližně součinem $\Delta n/n \approx \eta(v) \Delta v$, udává tedy pravděpodobnost, že mezi všemi molekulami plynu se vyskytne molekula, jejíž rychlost leží v udaných mezích. Jako poměr $\Delta n/n$ je tato pravděpodobnost znázorněna plochou pod křivkou četnosti omezenou příslušným rychlostním intervalem Δv .

Je zřejmé, že celá plocha pod křivkou četnosti má velikost rovnou jedné, tj. pro $\Delta n = n$, neboť rychlosti všech molekul plynu jsou větší než 0 a menší než ∞ . (Pravděpodobnost, že rychlost molekuly leží mezi 0 a ∞ , je rovna jedné čili je to jistota.) Z toho zároveň plyne, že plochy omezené křivkami četnosti při různých teplotách jsou stejně velké.

Z obr. (4.3) 6 také vidíme, že čím menší je plocha omezená tímto intervalem, tím menší je počet molekul, jejichž rychlosti leží ve zvoleném intervalu, a tím menší je tedy pravděpodobnost, že rychlost molekuly leží v tomto intervalu. Kdybychom volili interval nulový čili kdybychom se tázali, kolik molekul má rychlost zcela určité velikosti, byla by i plocha nulová. To znamená, že pravděpodobnost tohoto případu by byla nulová, jak jsme již poznamenali na začátku tohoto článku.

4.3.6. Van der Waalsova rovnice

Představy, na nichž jsme založili kinetickou teorii plynů, vycházejí z předpokladu, že vlastní objem molekul plynu je zanedbatelný a že přitažlivé síly mezi molekulami — síly kohezní — jsou bez vlivu na jejich pohyb. Je pochopitelné, že tyto předpoklady mohou



Obr. (4.3) 7.
Dotyk dvou molekul

být splněny jen přibližně, a to tím lépe, čím větší je prostor zaujatý plynem v poměru k vlastnímu objemu molekul, čím větší je průměrná vzdálenost mezi molekulami a čím vyšší je jejich energie. Tedy celkem tím spíše, čím řidší je plyn, tj. čím nižší je tlak a čím vyšší je teplota. Skutečně vidíme, že stavová rovnice, vyjadřující přesnou platnost spojených zákonů Boylova a Gay—Lussacova, vede v krajním případě nízkých teplot (tedy velké hustoty čili malého měrného objemu) k zřejmému nesouhlasu se skutečností. S klesající teplotou musel by se totiž objem plynu při konečném tlaku blížit nule, což je logický důsledek nedbání objemu molekul. Abychom tento objem zohlednili, uvažme, že ke středu kterékoli molekuly průměru δ mohou se ostatní molekuly přiblížit svými středy jen na

vzdálenost δ , takže vnitřek koule o poloměru rovném průměru molekuly je pro středy všech ostatních molekul nepřístupný [obr. (4.3) 7].

Chceme-li v tomto směru opravit stavovou rovnici, musíme objem zaujatý plynem zmenšit o součet objemů všech těchto koulí. Musíme si ovšem uvědomit, že takto odčítáme každou zakázanou sféru dvakrát, což je patrné z další úvahy.

Vložíme-li do prostoru zaujatého plynem (předpokládáme, že jde o kmol plynu) nejprve jedinou molekulu, bude mít její střed k dispozici celý prostor kromě vrstvy tloušťky $\delta/2$

podél stěny nádoby, které nedbáme. Přidáme-li další molekulu, bude její střed omezen na prostor velikosti $v_k - \omega$, značí-li $\omega = \frac{4}{3} \pi \delta^3$ objem koule poloměru δ . Podobně je středu třetí molekuly vyhrazen jen objem $v_k - 2\omega$ a obecně může střed k -té molekuly zaujmout jen nějakou polohu uvnitř objemu $v_k - (k - 1) \omega$. Nelze ovšem připustit, aby některé molekuly měly větší volnost pohybu než jiné; tato úvaha má jen jednoduše ukázat cestu k správnému výsledku, který plyne z přesného výpočtu, že průměrný objem, přístupný středu kterékoli z celkového počtu N molekul, je

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} [v_k + (v_k - \omega) + (v_k - 2\omega) + \dots + v_k - (N - 1) \omega] = \\ & = \frac{1}{N} N \frac{2v_k - (N - 1) \omega}{2} = v_k - \frac{1}{2} (N - 1) \omega = v_k - b, \end{aligned}$$

kde

$$4.3 \quad (23) \quad b = \frac{1}{2} (N - 1) \omega \approx N \frac{\omega}{2} = \frac{2}{3} \pi N \delta^3,$$

zanedbáme-li 1 proti velkému číslu N .

Můžeme tedy molekuly nahradit bezrozměrnými body s podmínkou, že prostor, v němž se tyto body mohou pohybovat, zmenšíme o b , tj. o polovinu prostoru vyplněného oněmi zakázanými koulemi, což je zřejmě čtyřnásobný vlastní objem molekul, jejichž poloměr je $\delta/2$. Pro takto zmenšený objem plynu můžeme pak přijmout platnost původní stavové rovnice, v níž je tedy objem v_k kilogrammolekuly zmenšen na prostor $v_k - b$.

Zbývá ještě ujasnit si působení *kohezních sil*, tj. přitažlivých sil mezi molekulami. Jak se koheze zmenší vnější tlak plynu, zjistíme takto: Uvnitř plynu se síly působící na některou molekulu navzájem ruší, ale u stěn recipientu je působení těchto sil jednostranné a působí dovnitř plynu. Proto je tlak plynu na stěny menší než uvnitř plynu, a to o malou hodnotu, která, jak uvidíme, je úměrná čtverci hustoty plynu. Této hodnotě říkáme *kohezní tlak*.

Molekuly plynu v okrajové vrstvě jsou také přitahovány povrchovými molekulami stěny, nebylo by však správné soudit, že toto přitahování kompenzuje přitažlivost vlastních molekul plynu v tom smyslu, že zmenšuje kohezní tlak, neboť podle principu akce a reakce nemohou molekuly stěny zvýšit tlak působící na ně samé. Podrobněji vyloženo: Molekuly plynu jsou molekulami stěny zrychlovány těsně před nárazem na stěnu, ale zpomalovány po odskoku, a to tak, že velikost obou rychlostí je stejně velká ve vzdálenosti od stěny, kde přitažlivost jejich molekul již mizí. Proto je celková nárazová změna hybnosti molekul plynu stejná, jako by neexistovala přitažlivost stěny. Naproti tomu způsobí přitažlivost vlastních molekul plynu, že se zmenší rychlost dopadu jeho molekul na stěnu, a tedy také impuls udělený stěně.

Přitažlivé síly mezi molekulami se velmi rychle zmenšují se vzdáleností molekul. Proto každá molekula je přitahována jen molekulami nejbližšími až do jisté vzdálenosti D , za níž se již kohezní síly neuplatňují. Hodnota, o kterou se zmenší vlivem těchto sil tlak působící na stěnu, bude patrně tolikrát větší, kolikrát více molekul naráží na plochu stěny jednotkové velikosti, neboť každá z nich bude přibrzděna přitažlivými silami vnitřních molekul. Tyto přitažlivé síly, působící na každou krajní molekulu, budou však samy tolikrát větší, kolikrát více molekul ji přitahuje. Počet přitahovaných molekul je však úměrný hustotě plynu a totéž platí o počtu přitahujících molekul, který se rovná počtu molekul ležících v okrajové vrstvě plynu tloušťky D . Vidíme tedy, že kohezní tlak je úměrný čtverci hustoty plynu. Hustota je však nepřímo úměrná měrnému objemu a ovšem také objemu kilogramovému. Je-li tedy tlak změřený na stěně nádoby p , nebude pro tento tlak platit stavová rovnice. Můžeme však očekávat, že bude platit pro tlak uvnitř plynu, kde se kohezní síly navzájem ruší, a kde je tedy tlak plynu roven součtu

$$\text{měřený tlak na stěnu} + \text{kohezní tlak} = p + \frac{a}{v_k^2};$$

zde v_k je objem kilomolu a a je jistá konstanta. Podobně místo celého objemu nádoby musíme přihlížet jen k objemu, který je středům molekul skutečně přístupný, tedy k objemu $v_k - b$. Tak docházíme k stavové rovnici van der Waalsově

$$4.3 (24) \quad \left(p + \frac{a}{v_k^2} \right) (v_k - b) = RT$$

čili podle 4.3 (23)

$$4.3 (25) \quad \left(p + \frac{a}{v_k^2} \right) \left(v_k - \frac{2}{3} \pi N \delta^3 \right) = RT,$$

kde N je Avogadrova konstanta a δ je průměr molekuly. Rovnice 4.3 (24) a (25) platí pro kilomol plynu. Pro m kilogramů plynu kilomolové hmotnosti M , což odpovídá $n = m/M$ kilomolům, musíme psát van der Waalsovu rovnici ve tvaru

$$4.3 (26) \quad \left(p + n^2 \frac{a}{v_k^2} \right) (v_k - nb) = nRT.$$

Van der Waalsova rovnice vyhovuje celkem velmi dobře pro fázi plynou, méně však při přechodu fáze plyné v kapalnou. Lze z ní odvodit mnohé pozoruhodné poznatky, jak ukážeme v dalším článku.

4.3.7. Střední volná dráha molekul. Vazkost plynů

Dráha, kterou urazí molekula mezi dvěma srážkami, je zajisté velmi různá. Lze však očekávat, že její průměrná délka bude záviset na hustotě plynu a na velikosti jeho molekul. Mysleme si nejprve, že všechny molekuly jsou v klidu a jen jedna z nich se pohybuje střední rychlostí $\bar{v}$. Za sekundu narazí tato molekula na všechny molekuly, jejichž středy leží v prostoru zasaženém za 1 s koulí poloměru δ , která letí rychlostí $\bar{v}$. Velikost tohoto prostoru, jak je ostatně zřejmo z obr. (4.3) 8, je $\pi \delta^2 \bar{v}$. Tento prostor obsahuje zřejmě

$z' = \pi \delta^2 \bar{v} \frac{N}{v_k}$ molekul (N je Avogadrova konstanta a v_k kilomolový objem; podíl N/v_k

vyjadřuje tedy, kolik molekul obsahuje průměrně 1 m³ plynu). *Střední volná dráha*, tj. střední hodnota dráhy, kterou molekula urazí mezi dvěma po sobě jdoucími srážkami, je za těchto předpokladů rovna podílu

$$4.3 (27) \quad \frac{\text{dráha molekuly za 1 s}}{\text{počet srážek za 1 s}} = \frac{\bar{v}}{z'} = \frac{v_k}{\pi N \delta^2} = \lambda'.$$

Tak by to bylo, kdyby (jak jsme předpokládali) jen jedna molekula byla v pohybu a ostatní byly v klidu, avšak skutečnost je jiná. Proto musíme absolutní rychlost molekuly $\bar{v}$ nahradit rychlostí relativní, která ovšem bude vzhledem ke každé z ostatních molekul jiná. Přesto můžeme odhadnout střední relativní rychlost (střední hodnotu vzájemných rychlostí molekul). Mají-li totiž dvě molekuly rychlosti $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ stejné velikosti, ale různého směru, pak čtverec jejich relativní rychlosti podle obr. (4.3) 9

$$u^2 = \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 - 2\bar{v}_1\bar{v}_2 \cos \varphi,$$

při čemž obě rychlosti $\bar{v}_1$ a $\bar{v}_2$ mohou mít všechny možné směry. Proto má $\cos \varphi$ stejně často hodnoty kladné i záporné a střední hodnota posledního členu je při velkém počtu molekul rovna nule. Ježto pak střední rychlost je pro obě molekuly stejná a rovna $\bar{v}$, je střední hodnota čtverce relativních rychlostí $\bar{u}^2 = 2\bar{v}^2$. Pohybují-li se tedy kromě vyšetřované

molekuly i ostatní stejnou rychlostí $\bar{v}$, můžeme použít dřívějšího vztahu 4.3 (27), nahradíme-li v něm absolutní rychlost $\bar{v}$ střední hodnotou rychlosti relativní $\bar{u} = \bar{v}/\sqrt{2}$, jejíž vztah k rychlosti $\bar{v}$ vyplynul z předešlých úvah. Pak bude také skutečný počet srážek za 1 s roven $z = z'/\sqrt{2}$. Dráha molekuly za 1 s je ovšem stále rovna absolutní rychlosti $\bar{v}$ molekuly a skutečná střední volná dráha

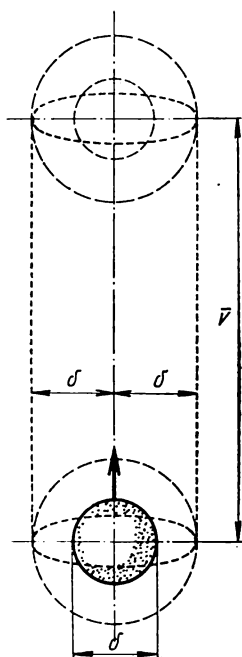
$$4.3 (28) \quad \lambda = \frac{\bar{v}}{z} = \frac{l\lambda'}{\sqrt{2}} = \frac{v_k}{\sqrt{2} \pi N \delta^2}.$$

V tomto vzorci znamená N/v_k počet molekul v objemové jednotce. Vidíme, že střední volná dráha nezávisí ani na objemu plynu, ani na jeho teplotě, je však nepřímě úměrná tlaku plynu, tedy

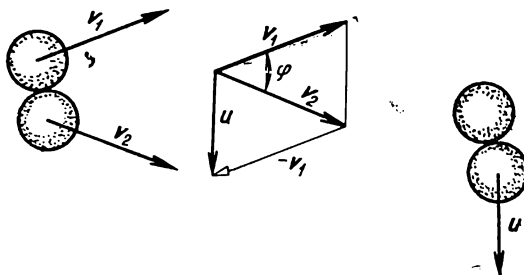
$$4.3 (29) \quad \lambda \sim \frac{1}{p},$$

neboť počtu molekul v objemové jednotce čili hustotě je přímo úměrný tlak plynu. Při malých tlacích řádu 10^{-6} torrů může střední volná dráha dosáhnout řádově hodnoty až 10 m.

Střední volná dráha souvisí s vnitřním třením plynů. Roztočíme-li v plynu kruhový kotouč kolem jeho rotační osy, bude se kotouč třením o plyn brzdít a zároveň se okolní plyn



Obr. (4.3) 8. Prostor zasažený letící molekulou



Obr. (4.3) 9. Relativní rychlost molekul

uvede po obou stranách kotouče do rotačního pohybu. Známá příčina toho je vnitřní tření plynu, které vzniká, kdykoliv dvě sousední vrstvy plynu mají různé rychlosti.

Podle kinetické teorie představujeme si jev takto: Molekuly plynu jsou v pohybu, a proto vnikají z rychlejší vrstvy do pomalejší a obráceně, čímž se první vrstva zpomaluje a druhá zrychluje, pokud se rychlosti obou vrstev nevyrovnají. Je patrné, že toto vyrovnávání rychlostí mezi rychlejšími a pomalejšími molekulami bude tím účinnější, čím hlouběji do sousedních vrstev mohou molekuly vnikat, tedy čím větší bude jejich volná dráha.

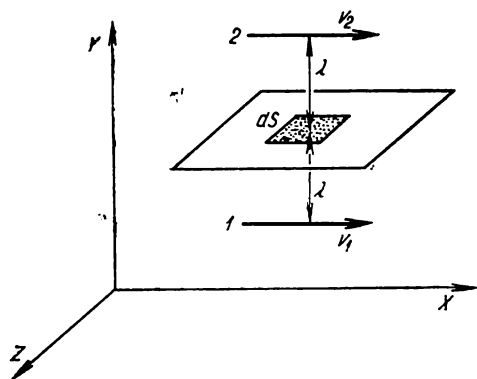
Dynamickou viskozitu (součinitele vnitřního tření) plynů lze odvodit jednoduchou úvahou. Podle 4.3 (7) je tlak plynu na stěnu

$$4.3 (30) \quad p = \frac{1}{3} \frac{N}{v_k} m C^2 = \frac{1}{3} n_0 m C^2,$$

kde $n_0 = N/v_k$ je počet molekul v objemové jednotce. Je-li plyn uzavřen v nádobě tvaru krychle, vyvozuje podle tohoto vzorce tlak na každou její stěnu třetina všech molekul, které se chovají

tak, jako by se pohybovaly ve třech navzájem kolmých směrech stejnou rychlostí C . Můžeme proto neuspořádaný pohyb molekul nahradit stejně rychlými pohyby ve třech navzájem kolmých směrech, v nichž se pohybuje stejný počet molekul. Toho použijeme k odvození dynamické viskozity.

Mějme v proudícím plynu malou plošku dS , rovnoběžnou s vrstvami plynu, které se vlivem vnitřního tření pohybují různými rychlostmi [obr. (4.3) 10]. Kromě uspořádaného pohybu



Obr. (4.3) 10. K odvození součinitele vnitřního tření v plynech

konají molekuly ještě neuspořádaný pohyb, který si nahradíme třemi navzájem kolmými pohyby ve směru souřadnicových os XYZ , znázorněných na obr. (4.3) 10. Ve směru OY kolmém k plošce dS pohybuje se tedy třetina všech molekul, a to v kladném smyslu osy Y $1/6$ molekul a v záporném smyslu rovněž $1/6$. Pohybují-li se molekuly rychlostí C , pak za sekundu proletí plochou dS šestina molekul, jež jsou obsaženy v hranolu s výškou C a se základnou dS . Je-li n_0 počet molekul v objemové jednotce, projde plochou dS za sekundu $\frac{1}{6} n_0 C dS$ molekul a počet molekul, který plochou dS projde za dobu dt , je tedy

$$4.3 (31) \quad dn = \frac{1}{6} n_0 C dS dt.$$

Beze srážek dosáhnou plošky dS jen ty molekuly, jež vyletují z vrstvy 1 [obr. (4.3) 10], jejíž vzdálenost od dS je rovna právě střední volné dráze λ . Pohybuje-li se vrstva 1 rychlostí v_1 , přenese dn molekul plochou dS hybnost

$$4.3 (32) \quad dn \cdot m v_1 = \frac{1}{6} n_0 C dS dt \cdot m v_1.$$

Předpokládejme, že hustota plynu je všude stálá, a že tedy také počet molekul v objemové jednotce n_0 je stálý. Pak z vrstvy 2, jež se pohybuje rychlostí v_2 a jež je ve vzdálenosti λ nad ploškou dS , přeneseme stejný počet dn molekul touto ploškou v opačném smyslu hybnost

$$dn \cdot m v_2 = \frac{1}{6} n_0 C dS dt \cdot m v_2.$$

Molekuly přenesou tedy plochou dS v obou směrech hybnost

$$4.3 (33) \quad dn \cdot m(v_2 - v_1) = \frac{1}{6} n_0 C dS dt \cdot m(v_2 - v_1).$$

Rozdíl rychlostí vrstev 1 a 2 můžeme vyjádřit ve tvaru

$$v_2 - v_1 = \frac{dv}{dy} 2\lambda,$$

kde dv/dy je gradient rychlosti uspořádaného pohybu molekul v proudícím plynu a 2λ je vzájemná vzdálenost obou vrstev, která je velmi malá. Dosadíme-li to do 4.3 (33) a označíme-li součin $n_0 m = \rho$, kde ρ je hustota plynu, dostaneme

$$4.3 (34) \quad \frac{dn \cdot m(v_2 - v_1)}{dt} = \frac{1}{3} \rho C \lambda \frac{dv}{dy} dS.$$

Podle Newtonova pohybového zákona je časová změna hybnosti rovna působící síle, takže pravá strana rovnice 4.3 (34) je zřejmě velikost síly, kterou v plošce dS působí pomalejší vrstva 1 na rychlejší vrstvu 2 a obráceně. Dělíme-li tuto sílu velikostí plošky dS , dostaneme tečné napětí τ mezi vrstvami proudícího plynu:

$$\tau = \frac{1}{3} \rho C \lambda \frac{dv}{dy}.$$

Srovnáme-li tento výsledek s definicí dynamické viskozity η podle vzorce 2.8 (24), poznáváme, že

$$4.3 (35) \quad \eta = \frac{1}{3} \varrho C \lambda.$$

Tento vzorec vyjadřuje hledanou souvislost mezi vnitřním třením a veličinami, které z hlediska kinetické teorie charakterizují molekulární strukturu plynu: se střední kvadratickou rychlostí C a střední volnou dráhou λ .

Vzorec 4.3 (35) jsme odvodili za velmi zjednodušujících předpokladů, abychom mohli náznorně nahlédnout do mechanismu vyšetřovaného jevu. Přesnější odvození hodnoty dynamické viskozity, které provedli Chapman a Enskog, vede jen k málo odlišnému výrazu

$$\eta = 0,461 \varrho C \lambda.$$

Dosadíme-li za střední kvadratickou rychlost ze vzorce 4.3 (10) a za střední volnou dráhu ze vzorce 4.3 (28) a položíme-li $\varrho = M/v_k$, dostaneme

$$\eta = 0,461 \frac{M}{v_k} \sqrt{\frac{3RT}{M}} \frac{v_k}{\sqrt{2} \pi N \delta^2} = \frac{0,461}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{RMT}}{N \delta^2}.$$

Dosadíme-li ještě také číselné hodnoty pro R a N a ostatní veličiny, pak

$$4.3 (36) \quad \eta = 2,72 \cdot 10^{-26} \frac{\sqrt{MT}}{\delta^2} \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Vidíme, že vnitřní tření ideálního plynu nezávisí ani na tlaku plynu, ani na hustotě, ale jen na teplotě. Dynamická viskozita je přímo úměrná odmocnině z absolutní teploty

$$4.3 (37) \quad \eta \sim \sqrt{T},$$

a roste tedy s teplotou na rozdíl od kapalin, jejichž viskozita se s rostoucí teplotou zmenšuje. Původ této závislosti, která byla měřeními potvrzena, je v tom, že viskozita η je úměrná střední rychlosti molekul, která roste s odmocninou z absolutní teploty.

Kinematická viskozita ν , definovaná podílem

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho},$$

závisí zato na tlaku plynu a je mu nepřímou úměrná, neboť $\varrho \sim p$:

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho} \sim \frac{\eta}{p} \sim \frac{\sqrt{T}}{p}.$$

Při stálé teplotě klesá tedy kinematická viskozita s rostoucím tlakem. Je-li dáno ν_0 při základním tlaku p_0 a teplotě T_0 , můžeme vypočítat kinematickou viskozitu ν při tlaku p a při téže teplotě T_0 z úměry

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{p_0}{p} \quad \text{čili} \quad \nu = \frac{\nu_0 p_0}{p}.$$

Přesná měření ukazují, že tyto výsledky platí s dostatečnou přesností, pokud lze plyn považovat za ideální. U vzduchu je např. dynamická viskozita nezávislá na tlaku v rozmezí 0,05 at až 20 at. Při tlaku 50 at vzroste η u vzduchu o 10 % a při tlaku 200 at dokonce o 100 %. Rovněž závislost dynamické viskozity na teplotě je u skutečných plynů složitější, než udává vzorec 4.3 (37), a vystihuje ji např. *Sutherlandův vzorec*

$$\eta = \frac{A \sqrt{T}}{1 + \frac{C}{T}},$$

kde A a C jsou individuální konstanty. Dynamická viskozita skutečných plynů roste tedy rychleji než úměrně s odmocninou z absolutní teploty.

Změříme-li dynamickou viskozitu plynu, můžeme ze vzorce 4.3 (36) vypočítat průměr molekuly δ a pak ze vzorce 4.3 (28) střední volnou dráhu molekul λ při libovolných poměrech. Tyto

hodnoty jsou pro několik plynů za normálních podmínek (0 °C, 760 torrů) uvedeny v tab. (4.3) II.

Podobně můžeme určit i další konstanty nebo veličiny. Určíme-li např. měřením konstantu b ve van der Waalsově rovnici 4.3 (24) pro některý plyn, pro nějž vypočteme průměr molekuly δ , můžeme z 4.3 (23) vypočítat Avogadrovu konstantu N . Tak bylo zjištěno, že pro argon $b =$

$= 0,063 \text{ m}^3 \cdot \text{kmol}^{-1}$ čili že vlastní objem molekul kilomolu asi $0,016 \text{ m}^3$, odkud plyne $N = 6,0 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$. Stejným výpočtem vychází pro některé plyny hodnota N o něco menší, poněvadž jejich molekuly jsou dvouatomové, a proto nesplňují tak dobře předpoklady o vlastnostech dokonalého plynu.*) Prostor vyplněný argonem za normálních podmínek je tedy prakticky skoro prázdný, neboť jeho molekuly zabírají jen asi 1/1 500 kilomolového objemu $v_{k0} =$

$= 22,41 \text{ m}^3 \cdot \text{kmol}^{-1}$. Co se týče průměru molekuly δ , je třeba si uvědomit, že to ve skutečnosti není průměr malé koule, nýbrž poloměr sféry, jež je pro ostatní molekuly nepřístupná. Následkem elektrické struktury atomů a molekul vzni-

ká tato sféra vzájemným působením elektrických nábojů obou srážejících se částic. Avšak i z jiných úvah plyne, že lineární rozměr prostoru, který zaujímají elektrony atomu, má řádově velikost 10^{-10} m .

Známe-li N , můžeme z experimentální hodnoty R určit Boltzmanovu konstantu k a z 4.3 (12) vypočítat střední energii jedné molekuly. Tak vychází při 0 °C pro všechny jednoatomové plyny

$$u_0 = \frac{3}{2} kT_0 = 5,66 \cdot 10^{-21} \text{ joulu.}$$

Z předešlých údajů můžeme také vypočítat průměrný počet srážek jedné molekuly za sekundu: ze vzorce 4.3 (28)

$$z = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \sqrt{2} \pi n_0 \delta^2 \bar{v},$$

kde $n_0 = N/v_k$ je počet molekul v objemové jednotce. V posledním sloupci tabulky (4.3) II jsou uvedena čísla z , z nichž vidíme, že na molekulu plynu připadá za normálních podmínek za sekundu průměrně 6 až 15 miliard srážek.

4.3.8. Zákon rovnoměrného rozdělení energie. Zákonitost kilomolových tepel

Střední hodnota pohybové energie jedné molekuly kteréhokoli jednoatomového plynu je při absolutní teplotě T dána vzorcem

$$u = \frac{3}{2} kT$$

a úhrnná energie kilomolu plynu

$$U = Nu = \frac{3}{2} RT.$$

*) Poprvé určil tímto způsobem číslo N Loschmidt, proto bývá nazýváno také Loschmidtovým číslem. Přesnost určení Avogadrovky konstanty na základě úvah kinetické teorie plynů je však poměrně malá. Dnes uznávaná hodnota 4.3 (1) čísla N plyne z měření elementárního elektrického náboje, které zároveň dává také toto důležité číslo.

Chceme-li tedy zvýšit teplotu kilomolu jednoatomového plynu při stálém objemu o 1°C , potřebujeme k tomu teplo rovnomocné energii

$$C_v = U_{T+1} - U_T = \frac{3}{2} R(T+1) - \frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} R =$$

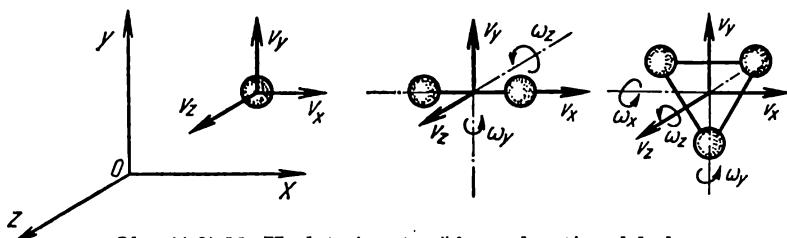
$$4.3 (38) \quad = 2,980 \text{ kcal} \cdot ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1} \approx 3 \text{ kcal} \cdot ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}.$$

Toto množství tepla nazýváme *kilomolovým teplem plynu při stálém objemu* a podle rovnice 4.3 (38) je toto teplo nezávislé na teplotě a je stejně velké pro všechny jednoatomové plyny. To se skutečně potvrzuje pro tzv. vzácné plyny (He, Ne, Ar, Kr, ...), což je důkazem, že se jejich molekuly opravdu chovají jako dokonale pružné hladké koule. Naproti tomu plyny, jejichž molekuly jsou složeny ze dvou atomů, mají kilomolové teplo při stálém objemu větší než plyny jednoatomové. Plyny několikaatomové mají pak teplo při stálém objemu opět větší než dvouatomové.

Tyto skutečnosti lze vystihnout jednoduchým zákonem rovnoměrného rozdělení energie, který lze odvodit z kinetické teorie a který je znám pod jménem *ekvipartiční teorém*:

Energie molekuly je rozdělena stejnoměrně na všechny platné stupně volnosti molekuly, při čemž na každý platný stupeň připadá energie

$$4.3 (39) \quad u_1 = \frac{1}{2} kT.$$



Obr. (4.3) 11. K platným stupňům volnosti molekul

Aby tento teorém dostal fyzikální smysl, musíme definovat pojem *platný stupeň volnosti*. Počet stupňů volnosti obecné mechanické soustavy je dán počtem nezávislých proměnných (parametrů), které určují její polohu v prostoru. Hmotný bod v rovině má tedy 2, hmotný bod v prostoru 3 stupně volnosti. Za nezávislé parametry volíme nejčastěji pravoúhlé souřadnice bodu. Tuhé těleso otočné kolem pevné osy má 1 stupeň volnosti, těleso otočné kolem pevného bodu má 3 a úplně volné těleso v prostoru má 6 stupňů volnosti. V posledním případě lze za parametry zvolit např. tři souřadnice jednoho bodu, dvě souřadnice druhého bodu a jednu souřadnici třetího bodu. Stupeň volnosti lze si názorně představit také jako počet nezávislých složek rychlosti tělesa (tři složek posuvného a tři složek rotačního pohybu).

Od tohoto pojmu obvyklého v kinematice musíme rozeznávat pojem *platného stupně volnosti*, který definujeme takto: *Počet platných stupňů volnosti se rovná počtu nezávislých parametrů, které určují energii soustavy.*

Užijeme-li této definice pro jednoatomovou molekulu dokonalého plynu [obr. (4.3) 11], vidíme, že se její energie redukuje na pohybovou energii, ježto molekulární síly jsou zanedbatelné, a proto nemusíme přihlížet k potenciální energii molekuly v poli těchto sil. Tato energie závisí kvadraticky na 3 složkách rychlosti posuvného pohybu molekul. K její závislosti na složkách rotace nemusíme přihlížet jednak proto, že energie rotačního pohybu se srážkami nemění (pokud se ovšem molekula chová jako hladká koule), jednak proto, že tato rotační energie, daná vztahem $(1/2) J\omega^2$, je vzhledem k malým rozměrům

jednoatomových molekul nepatrná proti energii pohybu translačního. Tak dostáváme skutečně pro energii jedné molekuly hodnotu 4.3 (12) a pro kilomolové teplo při stálém objemu hodnotu 4.3 (38).

U dvouatomové molekuly, kterou si představujeme ve tvaru „činky“ (dipólu) [obr. (4.3) 11], můžeme pomíjet jen energii příslušnou rotaci kolem spojnice X středů obou atomů tvořících molekulu, ježto rotaci kolem zbývajících os Y a Z , kolmých ke spojnici X , přísluší energie podstatně větší. Vzdálenost atomů je totiž velká proti jejich poloměrům setrvačnosti. Rotace kolem os Y a Z se také při srážkách molekul může změnit, i když atomy pokládáme za hladké koule. Z těchto důvodů přisuzujeme dvouatomové molekule 5 platných stupňů volnosti a podle ekvipartičního teorému je její střední energie

$$u = 5u_1 = \frac{5}{2} kT.$$

Kilomolové teplo dvouatomových plynů je pak

$$4.3 (40) \quad C_v = \frac{5}{2} R \approx 5 \text{ kcal. } ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}.$$

Kromě posuvného a rotačního pohybu mohou atomy vykonávat ještě kmitavé pohyby uvnitř molekuly, jimž je nutno připsat další platné stupně volnosti. Kmity kolem spojnice dvou atomů mají dva platné stupně volnosti, z nichž jeden připadá na kinetickou energii a druhý na energii potenciální. Kmity se u dvouatomových molekul uplatňují teprve při vyšších teplotách, při nichž proto kilomolové teplo při stálém objemu nabývá hodnoty $\frac{7}{2} R$. To je ve shodě s experimentálními výsledky, jak je patrné z tab. (4.3) III, v níž jsou uvedena kilomolová tepla několika dvouatomových plynů při stálém objemu. Z tabulky je zřejmé, že při nepříliš vysokých teplotách mají kilomolová tepla C_v hodnoty blízké 5 kcal. $^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Tabulka (4.3) III

Kilomolová tepla C_v dvouatomových plynů v kcal. $^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$

$t [^\circ\text{C}]$	0	100	200	500	1 200	2 000
H_2	4,87	4,93	5,05	5,16	5,67	6,28
$\text{N}_2, \text{O}_2, \text{CO}$	4,99	5,05	5,15	5,26	5,75	6,30
HCl	5,00	5,09	5,27	5,46	6,13	6,9

Konečně u několikaatomových molekul musíme mít zřetel na všechny tři rotace [obr. (4.3) 11], takže molekula má pak 6 platných stupňů volnosti (nepřehlízíme-li k vibrační energii), její střední energie je tedy

$$u = 6u_1 = 3kT$$

a kilomolové teplo několikaatomových plynů bude

$$4.3 (41) \quad C_v = \frac{6}{2} R = 3R \approx 6 \text{ kcal. } ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}.$$

Značnější odchylky kilomolových tepel u několikaatomových plynů od této hodnoty jsou rovněž způsobeny kmitavými pohyby atomů uvnitř molekuly, které se u různých plynů uplatňují při různých teplotách. Většinou převyšují kilomolová tepla hodnotu 6 kcal. $^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$ již při teplotě laboratoře. Tak např. pro vodní páru $C_v = 6,65 \text{ kcal. } ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$, pro metan CH_4 $C_v = 6,51 \text{ kcal. } ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$, zato pro chloroform CHCl_3 je $C_v = 15,2 \text{ kcal. } ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$ a u etylalkoholu $\text{C}_2\text{H}_5\text{O}$ je $C_v = 18,9 \text{ kcal. } ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$. Příčinou značně velkého kilomolového tepla u složitých molekul je značný počet platných stupňů volnosti kmitů atomů v molekule.

Stálost kilomolových tepel plynů se potvrzuje, pokud jejich teplota není příliš blízká absolutní nule. Blíží-li se k tomuto bodu, plyn degeneruje a některé jeho konstanty se blíží nule, mezi nimi i kilomolové teplo při stálém objemu. Vysvětlení těchto složitějších jevů dává kvantová teorie. Přesto můžeme dřívější poznatky shrnout v toto jednoduché pravidlo, které platí při nepříliš nízkých teplotách pro všechny plyny: *Kilomolové teplo při stálém objemu, vyjádřené ve vedlejších jednotkách kcal . °K⁻¹ . kmol⁻¹, je rovno počtu platných stupňů volnosti molekul plynu.*

Zákon rovnoměrného rozdělení energie vysvětluje také známé *pravidlo Dulongovo—Petitovo*, jež říká, že kilomolová tepla pevných prvků jsou přibližně stejná a rovná 6 kcal⁻¹ . °K⁻¹ . kmol⁻¹. Atom pevné látky má jednak tři platné stupně volnosti, které odpovídají třem složkám rychlosti posuvného (kmitavého) pohybu, jednak tři platné stupně, které odpovídají tomu, že energie atomu závisí na jeho poloze vzhledem k atomům sousedním. Úhrnná energie atomu je tedy součtem kinetické energie, která závisí na třech složkách rychlosti, a energie potenciální, která závisí na třech polohových souřadnicích těžiště atomu mezi atomy ostatními (sousedními). Atom má tedy celkem šest platných stupňů volnosti a kilomolové teplo je rovno šesti vedlejším jednotkám. Dulongovo—Petitovo pravidlo vyhovuje u mnohých prvků, především u kovů, jak ukazuje tab. (4.3) IV.

Tabulka (4.3) IV

Kilomolová tepla některých prvků v kcal . °K⁻¹ . kmol⁻¹ při 25 °C

Prvek	C	Prvek	C	Prvek	C
Al	5,7	Zn	5,6	Sn	6,1
Fe	5,9	Pd	5,9	Sb	5,9
Ni	5,9	Ag	5,8	Ir	6,0
Cu	5,6	Cd	5,9	Pt	5,9
Au	5,9	Pb	5,9	Bi	6,2

Kilomolové teplo, tedy i měrné teplo těchto prvků mění se za obvyčné teploty jen málo s teplotou, avšak při velmi nízkých teplotách se kilomolové teplo s klesající teplotou značně zmenšuje a odchyluje od Dulongova—Petitova pravidla. Značné odchylky od tohoto pravidla již při teplotě laboratoře mají kilomolová tepla těchto prvků:

C (diamant) $C = 1,46 \text{ kcal} \cdot \text{°K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$,
 B $C = 3,34 \text{ kcal} \cdot \text{°K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$,
 Be $C = 3,85 \text{ kcal} \cdot \text{°K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$,
 Si $C = 4,95 \text{ kcal} \cdot \text{°K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Ukazuje se však, že se i u těchto prvků atomové teplo při zvyšování teploty blíží hodnotě 6 kcal . °K⁻¹ . kmol⁻¹. Tak např. atomové teplo diamantu nabývá při teplotě 1 000 °C hodnoty asi 5,5.

Klasická kinetická teorie nedovedla vysvětlit, proč kilomolová tepla pevných prvků a kilomolová tepla plynů rostou s teplotou. Uspokojivý popis těchto složitých závislostí podala teprve kvantová teorie (čl. 7.5.1).

4.4. Termodynamika

4.4.1. První hlavní věta

Termodynamika se zabývá zákony, jimiž se řídí přeměna tepelné energie v jiné druhy energie, především v energii mechanickou. Je založena na dvou (nebo třech) hlavních větách odvozených ze zkušenosti, které se navzájem doplňují.

Probereme nejprve první hlavní větu, která vyjadřuje *princip zachování energie*. Podle tohoto principu se energie nemůže ani ztratit, ani vzniknout z ničeho, takže její celková velikost pro osamocenou (izolovanou) soustavu*) je stálá (časově neproměnná). Přitom ovšem může jeden druh energie přecházet v energii jiného druhu, avšak vždy tak, že přírůstek jedné energie je právě roven úbytku energie jiné. Proto při každé přeměně tepla v mechanickou energii rovná se úbytek tepla vykonané práci (měříme-li obě veličiny ve stejných jednotkách) a při opačné přeměně rovná se vzniklé teplo vynaložené mechanické práci.

První hlavní větu můžeme vyslovit názorně takto: *Není možno sestavit stroj, který by trvale nebo periodicky dodával mechanickou energii, aniž by při tom nespotořboval ekvivalentní množství jiné energie*. Takový myšlený stroj se nazývá *perpetuum mobile prvního druhu* a první hlavní věta jeho existenci vylučuje. Podle první hlavní věty je i obrácené tvrzení správné: Není možný stroj, který by trvale spotřeboval mechanickou energii, aniž by při tom nevznikala energie jiného druhu.

Doslova znamená *perpetuum mobile* něco, co se stále (samo od sebe) pohybuje. Takový ustavičný pohyb, který probíhá i bez přívodu energie, je ovšem v přírodě možný a máme pro něj řadu příkladů: Planety obíhající kolem Slunce, družice vyslané na oběžnou dráhu kolem Země apod. V termodynamice znamená však *perpetuum mobile* více, a to zařízení, které kromě stálého pohybu koná také ještě užitečnou práci.

Ze stanoviska kinetické teorie jsou tepelné děje v tělesech vlastně čistě mechanické, a proto bychom mohli mluvit o zachování mechanické energie. Tyto děje nejsou ovšem „makromechanické“, můžeme je však pokládat za „mikromechanické“. Ve smyslu principu energie musíme mít za to, že celková energie soustavy, zvaná vnitřní energie U , která záleží v pohybové a v potenciální energii molekul, změní se jen tehdy, dostane-li se soustavě energie zvenčí, dodané jako mechanická energie prací vnějších sil, které na soustavu působí, nebo jako tepelná energie. Rozdíl mezi oběma druhy energie se jeví z hlediska kinetické teorie jen v tom, že tepelná energie dodaná soustavě a zčásti i její vnitřní energie jsou pohybové energie neuspořádaných pohybů molekul, kdežto energie mechanická vzniká z uspořádaných pohybů molekul těles, která na soustavu působí.

Vyjádříme-li oba druhy energie v hlavních jednotkách — v joulech — musí se tedy přírůstek vnitřní energie soustavy rovnat součtu tepelné energie Q a mechanické energie W , dodaných soustavě z vnějšku, při čemž mechanická energie W je rovna práci A vnějších sil, které na soustavu působí,**) tedy

$$4.4 (1) \quad U_2 - U_1 = Q + A,$$

měla-li soustava před dodáním tepla a mechanické energie vnitřní energii U_1 a po něm U_2 . To je *I. hlavní věta termodynamická*, kterou můžeme psát ve tvaru diferenciálního

$$4.4 (2) \quad dU = \delta Q + \delta A,$$

kde dU značí malou změnu vnitřní energie soustavy, δQ teplo a δA mechanickou energii dodanou soustavě z vnějšku prací nějakých sil. Přitom jsme označili změnu vnitřní energie dU , abychom naznačili, že je to *úplný diferenciál funkce stavu*, která závisí jen na veličinách určujících stav a nezávisí na způsobu, jakým se soustava dostane do svého stavu ze stavu původního.

*) Soustava je osamocená, jestliže okolní tělesa, která ji obklopují, ale která k ní nepočítáme, na ni nijak nepůsobí.

**) Nemá tím být řečeno, že mechanická energie je totožná s prací sil, nýbrž že velikost dodané mechanické energie posuzujeme podle vykonané práce, charakterizující vnější stránku vzájemného působení mezi tělesy.

Například pro $U = U(T, V)$, kde T je absolutní teplota soustavy a V její objem, platí

$$4.4 \quad (3) \quad dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

a konečná změna vnitřní energie při přechodu soustavy ze stavu 1 do stavu 2 je

$$4.4 \quad (4) \quad U_2 - U_1 = \int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV.$$

Ježto v prvním integrálu je objem V stálý a v druhém je stálá teplota T , je zřejmé, že oba integrály závisí jen na počátečním stavu (T_1, V_1) a na konečném stavu (T_2, V_2) a nezávisí na integrační cestě, tj. na způsobu přechodu z 1 do 2.

Množství tepla a mechanická energie potřebná na práci jsou naproti tomu různé podle toho, jakým způsobem se soustava mezi oběma stavy 1 a 2 měnila. Nelze je tedy vyjádřit jako funkce závislé jen na počátečním a na konečném stavu soustavy. Součet jejich změn je ovšem podle rovnice 4.4 (2) v každém libovolně krátkém intervalu rovný přírůstků vnitřní energie; je tedy právě tak nezávislý na způsobu, jakým soustava přejde ze stavu počátečního do konečného. V tom záleží vlastní jádro první hlavní věty, jak plyne z tohoto příkladu:

K ohřátí 1 m^3 vzduchu z 0°C na 100°C a ke kompresi ohřátého vzduchu na $0,5 \text{ m}^3$ je třeba celkové energie $Q_1 + A_1$ [obr. (4.4) 1]. Stlačíme-li nejprve stejný objem vzduchu teploty 0°C na $0,5 \text{ m}^3$ a pak jej teprve ohřejeme na 100°C , potřebujeme celkovou energii $Q_2 + A_2$. Kdyby bylo např.

$$(Q_1 + A_1) < (Q_2 + A_2),$$

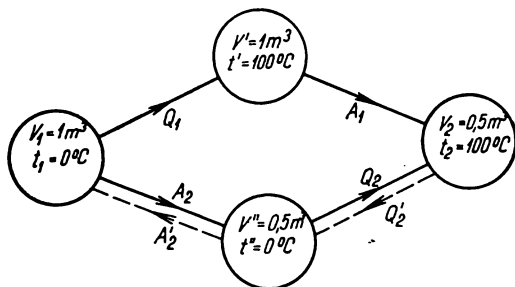
mohli bychom vzduch prvním způsobem, který spotřebuje méně energie, přivést do stavu, kdy má objem $0,5 \text{ m}^3$ a teplotu 100°C , a pak druhým způsobem, kdyby byl vratný (viz čl. 4.4.2), přivést jej v obráceném sledu zase do počátečního stavu, kdy má objem 1 m^3 a teplotu 0°C . Tím bychom získali energii (označíme-li ji čárkou na rozdíl od energie dodané soustavě)

$$(Q'_2 + A'_2) - (Q_1 + A_1)$$

a měli bychom zařízení, jímž by se získávala energie z ničeho, tedy perpetuum mobile prvního druhu. Poněvadž takový stroj není možný, je zřejmé celková energie (součet tepla a mechanické energie), o kterou se zvýší vnitřní energii vzduchu, v obou případech stejná a závisí jen na počátečním stavu ($V_1 = 1 \text{ m}^3, T_1 = 273^\circ \text{K}$) a na konečném stavu ($V_2 = 0,5 \text{ m}^3, T_2 = 373^\circ \text{K}$), nikoli na způsobu přechodu z 1 do 2.

Analytickou formulací principu energie čili první hlavní věty termodynamické je tedy výrok, že *elementární změna vnitřní energie dU libovolné soustavy je vždy úplným diferenciálem*.

Mechanickou energii dodanou plynu lze vyjádřit konkrétněji. Především je jasné, že se mechanicky může působit na plyn jen silami, které přenáší stěna nádoby, tedy jen změnou polohy stěny (např. pístem ve válci). Předpokládejme, že se nekonečně málo změní poloha části stěny, jejíž plošný obsah je S , posune-li se tato část o délku dn ve směru své normály dovnitř nádoby [obr. (4.4) 2]. Je-li p tlak plynu na stěnu nádoby, pak $pS = F'$ je síla, již



Obr. (4.4) 1. K nezávislosti změny vnitřní energie na způsobu přechodu ze stavu 1 do stavu 2

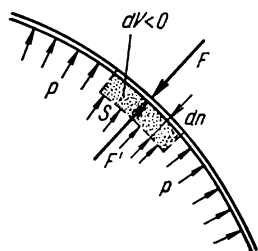
plyn tlačí na uvažovanou část stěny. Mechanickou energii plynu dodáme, bude-li konat kladnou práci vnější síla F , která na část stěny působí z vnějšku.

Část stěny je před působením síly F v klidu, a skončí-li působení síly po vykonání práce, je zase v klidu; nenastal přírůstek ani její kinetické energie, ani kinetické energie uspořádaného pohybu molekul plynu, tedy je to, jako by pohyb části stěny proběhl rovnoměrným pohybem, k čemuž je třeba, aby celková síla působící na stěnu byla rovna nule, což bude, když vnější síla F je stejně velká jako vnitřní síla F' plynu na část stěny plochy S , ale opačného smyslu, tedy $F = -F'$. Poněvadž předpokládáme jen velmi malé posunutí části stěny dn , nezmění se při tom tlak p plynu, takže mechanická energie, kterou plynu dodáme prací vnější síly, je

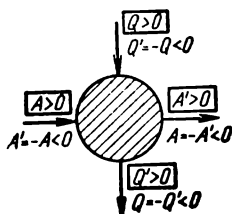
$$4.4 (5) \quad \delta A = F dn = -F' dn = -pS dn = -p dV,$$

protože $S dn = dV$ je změna objemu V plynu. Je zřejmé, že tato práce je kladná, zmenší-li se objem plynu, tj. $dV < 0$; kdyby se objem plynu zvětšil a $dV > 0$, byla by práce δA záporná, takže vzhledem k podmínce $F = -F'$ by byla naopak kladná práce $\delta A'$ síly F' , jíž plyn působí prostřednictvím pohyblivé části stěny na okolní tělesa,

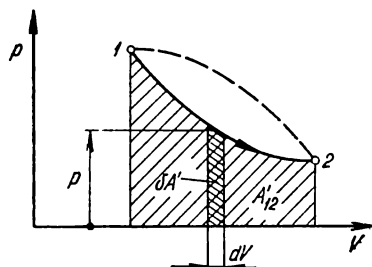
$$4.4 (6) \quad \delta A' = F' dn = pS dn = p dV = -F dn = -\delta A.$$



Obr. (4.4) 2. Elementární změna objemu



Obr. (4.4) 3. K dohodě o volbách znamének



Obr. (4.4) 4. Znázornění práce v diagramu $p-V$

Je-li tedy $dV < 0$, pak $\delta A > 0$, mechanická energie se plynu dodává, je-li $dV > 0$, pak $\delta A' > 0$ a plyn koná sám práci, přemáhaje vnější síly, jimiž okolní tělesa na něj působí, a to na úkor své vnitřní energie, nebo jiných energií, zejména tepelné, kterou z vnějšího zdroje nějakým způsobem nabírá.

V dalším výkladu budeme označovat energii vydanou plynem (soustavou) čárkou u příslušné písmenné značky a energii přijatou nečárkovaně. Energie s čárkovanou (nečárkovanou) značkou je tedy kladná, když ji soustava vydává (přijímá), v obráceném případě by byla záporná, jak je naznačeno na obr. (4.4) 3.

Práci vykonanou plynem nebo mechanickou energii dodanou plynu prací vnějších sil můžeme výhodně znázornit v diagramu $p-V$, v němž na osu úseček nanášíme objem plynu V a na osu pořadnic jeho tlak p [obr. (4.4) 4]. Každý bod v tomto diagramu představuje určitý stav plynu. Přechází-li plyn ze stavu 1 do stavu 2, je průběh této změny znázorněn nějakou křivkou. Elementární práce plynu $\delta A' = p dV$ je pak znázorněna naznačenou elementární ploškou. Celková práce, kterou plyn vykoná při přechodu ze stavu 1 do stavu 2, je zřejmé

$$4.4 (7) \quad A'_{12} = \int_1^2 p dV;$$

je zobrazena součtem všech elementárních ploch, tedy celkovou plochou pod křivkou v intervalu 1—2. Je zřejmé, že celková práce A'_{12} při nějaké změně nezávisí jen na po-

částečním a konečném stavu plynu, ale také na způsobu přechodu (cestě) plynu z počátečního stavu do konečného. Je-li tato cesta jiná [je znázorněna např. přerušovanou čarou na obr. (4.4) 4], má také celková práce A'_{12} jinou hodnotu. Z matematického hlediska je diferenciál funkce proměnných veličin, jehož integrál závisí na integrační cestě, *neúplným diferenciálem*, a proto jsme elementární práci označili δA a podobně teplo δQ .

Dosadíme-li za elementární práci $\delta A = -p \, dV$ do rovnice 4.4 (2) vyjadřující I. hlavní větu termodynamickou v diferenciálním tvaru, dostaneme vztah

$$4.4 (8) \quad \delta Q = dU + p \, dV,$$

který platí obecně pro jakoukoliv látku (soustavu) zvoleného množství. Prakticky použitelným se však stane teprve tehdy, známe-li závislost vnitřní energie na veličinách charakterizujících stav látky, je-li např. u reálných plynů dána funkce $U = f(T, V)$. U ideálního plynu závisí vnitřní energie toliko na absolutní teplotě, např. u jednoatomového plynu, jde-li o množství jednoho kilomolu, $U = \frac{3}{2} RT$ (čl. 4.3.8). Dosadíme-li kilomolové teplo při stálém objemu, $C_v = \frac{3}{2} R$, pak elementární změna vnitřní energie kilomolu plynu

$$4.4 (9) \quad dU = C_v \, dT,$$

což platí ovšem i pro víceatomový plyn, použijeme-li vhodné velikosti kilomolového tepla. Objem V plynu je pak objemem jednotkového množství plynu, tedy kilomolovým objemem v_k . Pro jiné než jednotkové množství plynu, tedy pro n kilomolů plynu, má objem v_k ovšem význam *měrného objemu*, definovaného jako podíl objemu V plynu a jeho množství n v kilomolech, který je nepřímo úměrný hustotě ρ plynu, tedy v elementárním tvaru

$$4.4 (10) \quad v_k = \frac{dV}{dn} \sim \frac{1}{\rho}.$$

Uvědomíme-li si, že jde o měrný objem, můžeme index k v dalším textu vypustit, a rovnice 4.4 (8) vyjadřující I. hlavní větu termodynamickou pro ideální plyn má potom tvar

$$4.4 (11) \quad \delta Q = C_v \, dT + p \, dv,$$

kterého v dalším výkladu častěji použijeme.

4.4.2. Vratné změny ideálního plynu

Na obr. (4.4) 4 jsme zakreslili křivkami změnu, kterou plyn prodělal při přechodu z výchozího stavu 1 do konečného stavu 2. Způsob přechodu jsme také nazvali *cestou*, po které plyn přešel z jednoho stavu do stavu druhého. Vyšetřeme, za jakých okolností je možné znázornit křivkou v p – v -diagramu, který je jedním z tzv. *stavových diagramů*, cestu takového přechodu. Je to možné u změn, která probíhá v elementárním objemu plynu, při čemž ovšem p a v jsou tlak a měrný objem v příslušném místě, v němž jsme elementární objem vyčlenili. Počítáme-li však např. práci, kterou vykoná plyn jako celek, nejde o místní změny v plynu a křivka přechodu musí udávat cestu veškerého plynu. K tomu je zřejmě třeba, aby ve všech místech prostoru zaujatého plynem byl stejný tlak p a stejný měrný objem v nebo stejná hustota ρ plynu, což bude, když plyn bude v rovnovážném stavu. Potom stav plynu charakterizuje jediný tlak a jediný měrný objem, jimž přísluší teplota, která je všude v plynu stejná, jinými slovy, veličiny charakterizující stav plynu jako celek řídí se příslušnou stavovou rovnicí. Aby plyn byl v rovnovážném stavu, musí být v mechanické i tepelné rovnováze se svým okolím, tj. teplota okolí plynu, s nímž je ve styku, musí

být stejná jako vlastní teplota plynu; tlak, jímž např. pohyblivá část stěny (nádoby) působí na plyn, musí být týž jako tlak plynu na stěnu. Je-li však plyn v rovnováze, nemůže nastat žádná změna (jak ostatně plyne z pojmu rovnováhy), takže stojíme před rozparem: na jedné straně má být plyn v naprosté rovnováze, na druhé straně se má jeho celkový stav měnit. Nezbyvá tedy než uchýlit se k abstrakci; předpokládáme, že stav plynu se mění, ale že přitom soumězně stavy, jimiž plyn prochází, jsou stavy rovnovážné, tj. tlak všude v plynu je stále shodný s tlakem okolí a jeho teplota je rovněž táž jako teplota okolních těles, s nimiž je plyn v tepelném styku. Protože by se, přísně vzato, za těchto okolností s plynem nic nedělo, připustíme jen velmi malé rozdíly tlaků a teplot mezi plynem a okolím. Čím menší budou tyto rozdíly, tím pomaleji budou ovšem změny v plynu probíhat a tím více se přiblížíme zmíněné abstrakci. Takové změny stavu, které se udržují v chodu elementárními tlakovými a teplotními rozdíly, nazývají se *kvazistacionární*. Vyznačují se důležitou vlastností: Změníme-li znaménko elementárních tlakových a teplotních diferencí, změni se smysl průběhu změny. Protože však plyn procházel prakticky rovnovážnými stavy, je zřejmé, že při změně smyslu bude procházet zase týmiž stavy, jimiž už jednou prošel, a dosáhne zase přesně téhož výchozího stavu. Pro tuto vlastnost, která je důležitá z hlediska termodynamických úvah, nazýváme kvazistacionární děje tohoto druhu také *vratnými (reverzibilními) změnami*.

Vratné změny jsou tedy spojitým sledem soumězných stavů, z nichž v každém je plyn (obecně látka nebo soustava) v rovnováze, tzn. v kterémkoliv ze stavů, jimiž plyn při změně prochází, může být libovolně dlouho, aniž se s ním něco děje. Stavové veličiny, tj. tlak, teplota a měrný objem, řídí se v každém okamžiku příslušnou stavovou rovnicí a určují stav plynu jako celek. Libovolně malými změnami tlaku nebo teploty lze smysl vratné změny změnit v opačný.

Ve skutečnosti nejsou ovšem změny v plynech vratné. Mají-li mít stavové změny plynů praktický význam, nemůžeme čekat kdoví jak dlouho, než se žádaná změna uskuteční. Žejména při přeměnách energie musí příslušné změny probíhat v určitém tempu, k čemuž je třeba, aby byla dostatečně porušena rovnováha plynu. Jde-li o rychlý přechod tepla z okolí do plynu, je třeba nejen značného teplotního rozdílu mezi okolím a plynem, ale i v samém plynu musí panovat teplotní spády směrem do jeho vnitřku, aby se vstupující tepelný tok mohl vedením a konvekcí rozšířit do celého plynu. Při obráceném přechodu tepla z plynu do okolí musí mít teplotní spády zase opačný smysl a musí směřovat z vnitřku plynu ven. Z toho je zřejmé, že probíhá-li v plynu nerovnovážný děj, nemůžeme jej v libovolném okamžiku změnit v opačný tak, aby se plyn vrátil do výchozího stavu a při zpáteční cestě se postupně navracel do všech předcházejících stavů. Děje probíhající v plynech a obecně v látkách vůbec jsou ve skutečnosti *nevratné (íreverzibilní)*, tzn. chceme-li dosáhnout děje, který by probíhal v opačném smyslu, musíme i rovnováhu porušit v opačném smyslu, přičemž však vznikne děj, který probíhá jinak než prvotní děj a končí také jiným stavem, než byl výchozí stav prvního děje.

Také při rychlé výměně mechanické energie mezi plynem a okolím jsou děje v plynu nevratné. Koná-li plyn práci proti vnějším silám tak, že tlačí na píst ve válci, pak při konečné rychlosti pístu pohybují se s ním i vrstvy plynu, které jsou s ním ve styku, zatímco v blízkosti klidných stěn válce jsou jiné části plynu v klidu. Tím vzniká v plynu proudění, které má za následek, že tlak plynu ve směru ode dna válce k pístu klesá. Tlak na píst je menší než střední tlak v plynu, a tedy i práce, kterou vykoná plyn při konečné změně svého objemu, je menší než práce, kterou by vykonal, kdyby tlak plynu byl všude stejný a rovný střední hodnotě okamžitého tlaku. Při opačném pohybu pístu, tj. koná-li práci síla přemáhající tlak pístu, vznikne proudění směrem od pístu ke dnu válce, tlak plynu na píst je větší než na dno válce, a vnější síla musí proto přemáhat větší tlak, než je střední hodnota okamžitého tlaku, vykonávaje tak větší práci. Z toho je zřejmé, že práce, kterou vykoná plyn při expanzi konečnou rychlostí, je menší než při vratné expanzi, která by probíhala velmi pomalu při střední hodnotě okamžitého tlaku plynu, a že práce potřebná k rychlé kompresi plynu je větší než práce plynu při rychlé expanzi. Z hlediska výměny energie probíhá tedy expanze jinak než komprese, což je znamením toho, že děje v plynu jsou nevratné. Přitom jsme nepřihlíželi k tření, jemuž nelze zabránit a jímž vzniká teplo vždy téhož znaménka, ať změny v plynu probíhají tak, či onak.

Bez idealizace vratných stavových změn látek byla by termodynamika neobyčejně komplikovaná. Praxe však ukazuje, že termodynamické úvahy založené na vratných změnách nevedou k větším odchylkám od skutečných poměrů, protože v plynech a parách vnitřní rovnováha vzniká velmi rychle.

V termodynamice mají základní význam některé jednoduché vratné děje, které jsou vyznačeny různými podmínkami, zejména takové, při nichž se jedna ze stavových veličin nemění (zůstává stálá). V dalším výkladu budeme důsledně předpokládat, že jde o 1 kilomol ideálního plynu, takže pro tyto děje platí stavová rovnice

$$4.4 (12) \quad p v = R T.$$

a) Změna za stálého objemu (izochorická změna)

Má-li plyn v počátečním stavu 1 tlak p_1 a objem v_1 , určíme jeho teplotu ze stavové rovnice

$$p_1 v_1 = R T_1.$$

Teplotu T_2 plynu v konečném stavu 2, v němž má tlak p_2 a objem $v_2 = v_1 = \text{const}$, vypočteme rovněž ze stavové rovnice

$$p_2 v_2 = p_2 v_1 = R T_2.$$

Dělíme-li druhou rovnici rovnici první, pak

$$4.4 (13) \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Při stálém objemu je tlak ideálního plynu přímo úměrný absolutní teplotě (*Gay-Lussacův zákon*). Isochorická změna je v diagramu $p-v$ znázorněna svislou úsečkou 1—2 [obr. (4.4) 5], která se nazývá *izochora*. Poněvadž je objem plynu stálý, nekoná plyn práci a přivedené teplo je podle I. hlavní věty rovno přírůstku vnitřní energie plynu, tedy

$$4.4 (14) \quad Q_{12} = U_2 - U_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_v dT = C_v(T_2 - T_1) = C_v(t_2 - t_1).$$

Při izochorické změně se tedy plyn jen ohřívá, je-li $Q_{12} > 0$, nebo ochlazuje, je-li $Q_{12} < 0$. V obou případech je změna teploty ideálního plynu přímo úměrná teplu, které plyn přijme nebo odevzdá.

b) Změna za stálého tlaku (izobarická změna)

Užijeme-li stavové rovnice pro počáteční stav plynu 1 a konečný stav 2, při němž je tlak plynu stálý, $p_1 = p_2 = \text{const}$, dostaneme stejným způsobem jako u předešlé změny

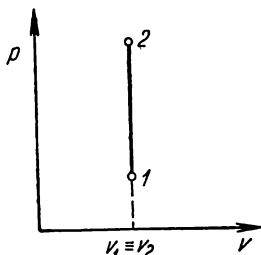
$$4.4 (15) \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Při stálém tlaku je objem ideálního plynu přímo úměrný absolutní teplotě (*Gay-Lussacův zákon*).

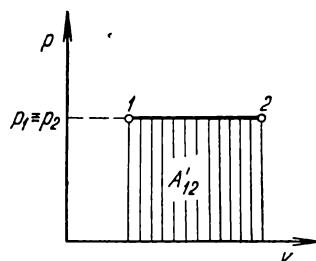
Izobarická změna je v diagramu $p-v$ znázorněna úsečkou 1—2, rovnoběžnou s osou v [obr. (4.4) 6] a nazývá se *izobara*.

Teplo, které je třeba plynu dodat, aby jeho objem vzrostl při stálém tlaku z v_1 na v_2 , vypočteme opět z I. hlavní věty 4.4 (11):

$$4.4 (16) \quad Q_{12} = \int_{T_1}^{T_2} C_v dT + p_1 \int_{v_1}^{v_2} dv = C_v(T_2 - T_1) + p_1(v_2 - v_1).$$



Obr. (4.4) 5. Isochorická změna v diagramu $p-v$



Obr. (4.4) 6. Izobarická změna v diagramu $p-v$

Přijatým teplem Q_{12} se tedy plyn jednak ohřeje z teploty T_1 na teplotu T_2 , jeho vnitřní energie se zvýší, jednak plyn vykoná mechanickou práci velikosti

$$4.4 (17) \quad A'_{12} = p_1(v_2 - v_1).$$

Tato práce je v diagramu $p-v$ znázorněna plochou obdélníka pod izobarou 1—2. V souladu s principem energie je teplo Q_{12} , které absorbuje plyn při izobarickém ohřátí, větší než při stejně velkém ohřátí za stálého objemu, a to o mechanickou práci, kterou plyn při izobarické změně vykoná.

Avšak práci A'_{12} můžeme vyjádřit zvýšením teploty plynu, dosadíme-li do 4.4 (17) ze stavové rovnice $p_1 v_2 = RT_2$ a $p_1 v_1 = RT_1$. Potom

$$4.4 (18) \quad \begin{aligned} A'_{12} &= R(T_2 - T_1), \\ Q_{12} &= C_v(T_2 - T_1) + R(T_2 - T_1). \end{aligned}$$

Teplo, jehož je třeba k ohřátí kilomolu plynu při stálém tlaku o 1°C , nazýváme *kilomolovým teplem při stálém tlaku* a označujeme je C_p . Dostaneme je z rovnice 4.4 (18), položíme-li v ní $T_2 - T_1 = t_2 - t_1 = 1^\circ\text{C}$, tedy

$$4.4 (19) \quad \boxed{C_p = C_v + R.}$$

To je důležitá *Mayerova rovnice*, která udává vztah mezi kilomolovými tepley při stálém tlaku C_p a stálém objemu C_v . Plyne z ní, že plynová konstanta kilomolu plynu je číselně rovna práci, kterou vykoná plyn při zahřátí o 1°C za stálého tlaku, a o tuto práci je kilomolové teplo plynu při stálém tlaku větší než jeho kilomolové teplo při stálém objemu.

Poměr obou kilomolových tepel jsme v čl. 4.1.3 nazvali *Poissonovou konstantou* κ . Vzhledem k definici kilomolových tepel jsou v témže poměru také měrná tepla plynu při stálém tlaku c_p a stálém objemu c_v , takže

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v}.$$

Z Mayerovy rovnice plyne pro Poissonovu konstantu vztah

$$4.4 (20) \quad \kappa = 1 + \frac{R}{C_v}.$$

Protože kilomolové teplo C_v je podle ekvipartičního teorému čl. 4.3.8 v jednotkách $\text{kcal} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}$ rovno počtu platných stupňů volnosti molekuly, a závisí tedy na počtu a uspořádání atomů v molekule plynu, plyne ze vzorce 4.4 (20), že také hodnota Poissonovy konstanty závisí na počtu atomů v molekule. Pro jednoatomový plyn je $C_v = 3 \text{ kcal} \cdot ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$, takže položíme-li $R = 2 \text{ kcal} \cdot ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$, pak

$$4.4 (21) \quad \kappa = 1 + \frac{R}{C_v} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \approx 1,67.$$

Pro dvouatomový plyn je $C_v = 5 \text{ kcal} \cdot ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$, takže

$$4.4 (22) \quad \kappa = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1,40.$$

Konečně pro tříatomové a víceatomové plyny je $C_v = 6 \text{ kcal} \cdot ^\circ\text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$ a

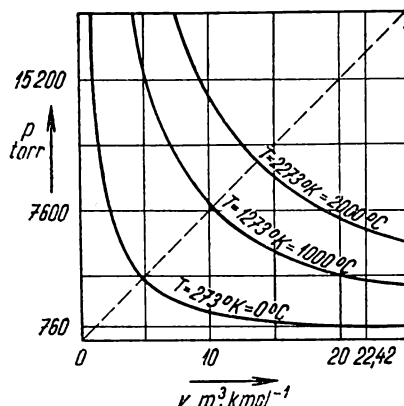
$$4.4 (23) \quad \kappa = 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3} \approx 1,33.$$

Jak tyto teoretické hodnoty souhlasí s měřením, vidíme z tabulky (4.4) I. V tomto případě klasická kinetická teorie ideálního plynu uspokojivě souhlasí s výsledky zjištěnými u skutečných plynů.

Tabulka (4.4) I

Poissonova konstanta několika plynů zjištěná měřením

Plyn	κ	Plyn	κ
He	1,66	CO ₂	1,301
Ar	1,66	N ₂ O	1,270
H ₂	1,409	NH ₃	1,313
N ₂	1,405	CH ₄	1,319
O ₂	1,399	SO ₂	1,272



Obr. (4.4) 7. Izotermická změna v diagramu $p-v$

c) Změna za stálé teploty (izotermická změna)

Při této změně je teplota plynu stálá, takže ze stavové rovnice pro počáteční stav 1 a konečný stav 2 plyne

$$4.4 (24) \quad p_1 v_1 = p_2 v_2 = RT_1 = RT_2 = \text{const.}$$

Při stálé teplotě je součin z tlaku a objemu plynu stálý (*Boylův zákon*). Izotermická změna je v diagramu $p-v$ znázorněna rovnousoou hyperbolou zvanou *izoterma*, která má asymptoty ležící v souřadnicových osách. Na obr. (4.4) 7 je v diagramu $p-v$ zakresleno plnými čarami několik izoterm pro různé stálé teploty. Je patrné, že s absolutní teplotou se mění jejich poloha i tvar.

Při elementární expanzi je třeba dodat plynu teplo, jehož velikost vzhledem k tomu, že $dT = 0$, je podle 4.4(11)

$$4.4 (25) \quad \delta Q = p dv = \delta A'.$$

Veškeré teplo dodané plynu při vratné izotermické expanzi spotřebuje se na mechanickou práci, kterou plyn vykoná proti vnějším silám, a naopak při vratné izotermické kompresi vydá plyn teplo, které je rovně práci vynaložené k jeho stlačení $\delta Q' = \delta A$. Vnitřní energie plynu je tedy při této změně stálá. Dosadíme-li do 4.4 (25) za okamžitý tlak p plynu ze stavové rovnice, dostaneme pro elementární změnu

$$4.4 (26) \quad \delta Q = \delta A' = RT \frac{dv}{v}.$$

Z této rovnice vypočteme integrací teplo, které plyn spotřebuje k expanzi ze stavu 1, v němž má tlak p_1 , objem v_1 a teplotu T_1 , do stavu 2 o tlaku p_2 , objemu v_2 a teplotě $T_2 = T_1 = \text{const}$, tedy

$$4.4 (27) \quad Q_{12} = A'_{12} = RT_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = RT_1 \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

Při izotermické kompresi je třeba plynu odnímat teplo, aby jeho teplota byla stálá a vnitřní energie se neměnila, a to stejně velké teplo, jako je kompresní práce.

d) Změna adiabatická

Tato změna probíhá v plynu při dokonalé tepelné izolaci, při níž nedochází k výměně tepla mezi plynem a jeho okolím ani obráceně. Plynu lze ovšem zvenčí dodávat mechanickou energii, nebo může sám konat práci proti vnějšímu tlaku. Tato změna je dána podmínkou $\delta Q = 0$, takže z I. hlavní věty dostaneme

$$4.4 (28) \quad C_v dT + p dv = 0.$$

Jak se při vratné adiabatické změně mění stavové veličiny, zjistíme, připojíme-li k rovnici 4.4 (28) ještě stavovou rovnici v diferenciálním tvaru

$$p dv + v dp = R dT.$$

Dosadíme-li za dT z této rovnice do 4.4 (28) a položíme-li podle Mayerovy rovnice $C_v + R = C_p$, dostaneme

$$C_p \frac{dv}{v} + C_v \frac{dp}{p} = 0 \quad \text{nebo} \quad \kappa \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0,$$

kde κ je Poissonova konstanta. Integrujeme-li poslední rovnici, dostaneme

$$\kappa \ln v + \ln p = \ln \text{const}$$

nebo

$$4.4 (29) \quad p v^\kappa = \text{const.}$$

Tato rovnice se nazývá *Poissonova* a vyjadřuje vztah mezi tlakem a objemem plynu při vratné adiabatické změně. Geometricky je tato závislost dána křivkou, kterou nazýváme *adiabatou*. Je na obr. (4.4) 8 znázorněna plnou čarou. Pozorujeme, že adiabata je všude strmější než izoterma, která je na témže obrázku nakreslena přerušovanou čarou, neboť Poissonova konstanta je u všech plynů větší než jedna.

Při adiabatickém ději klesá teplota plynu s rostoucím objemem, a obráceně při adiabatickém zmenšování objemu se plyn zahřívá. Podél adiбаты není tedy teplota stálá a teplotu znázorněnou na obr. (4.4) 8 má plyn při adiabatické změně jen v tom stavu, který je určen průsečíkem s příslušnou izotermou.

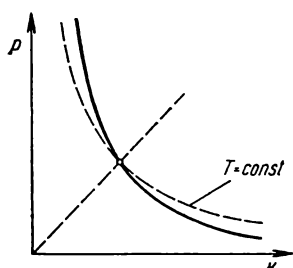
Práci, kterou vykoná kilogrammolekula plynu při adiabatické expanzi, dostaneme z rovnice 4.4 (28)

$$\delta A' = p dv = -C_v dT,$$

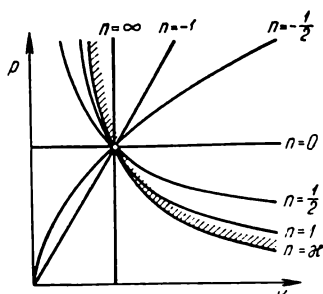
integrujeme-li ji od stavu 1 do stavu 2, tedy

$$4.4 (30) \quad A'_{12} = \int_1^2 p dv = -C_v \int_{T_1}^{T_2} dT = -C_v(T_2 - T_1) = C_v(T_1 - T_2).$$

Je zřejmé, že při adiabatické expanzi z objemu v_1 na objem v_2 je práce plynu rovna úbytku jeho vnitřní energie $-C_v(T_2 - T_1)$. Při adiabatické kompresi projeví se naopak vynaložená práce v přírůstku vnitřní energie plynu. Přitom $T_2 > T_1$, takže práce plynu A'_{12} vychází ovšem záporně, což znamená, že plyn sám mechanickou energii spotřebuje a že kladnou práci $A_{12} = -A'_{12}$ konají vnější síly potřebné ke kompresi.



Obr. (4.4) 8. Adiabatická změna a srovnání s izotermickou změnou



Obr. (4.4) 9. Polytropy s různými exponenty

e) Změna polytropická

Vratná izotermická změna vyžaduje dokonalou výměnu tepla mezi plynem a okolím, vratná adiabatická změna probíhá zase v plynu při dokonalé tepelné izolaci. Ve skutečnosti nelze přesně dosáhnout těchto krajních případů a expanze nebo komprese plynů probíhá podle křivek, jež leží mezi izotermou a adiabatou. Skutečné expanzní a kompresní děje můžeme v p – v -diagramu geometricky zobrazit hyperbolami typu

$$pv^n = \text{const},$$

kde mocnitél n má ve většině případů hodnotu, která leží mezi ∞ (adiabatou) a 1 (izotermou). Tyto křivky nazýváme *polytropami* a změny, které se jimi dají znázornit, nazýváme *polytropickými*. Předpokládáme ovšem, že i polytropické změny jsou vratné.

Všechny vratné změny, o nichž jsme v tomto článku psali, lze ostatně považovat za zvláštní případy polytropické změny. Je-li totiž $n = 0$, pak $pv^0 = \text{const}$ čili $p = \text{const}$ a dostáváme izobaru. Pro $n = 1$ je $pv^1 = \text{const}$ čili $pv = \text{const}$ a dostáváme izotermu. Pro $n = \infty$ dostá-

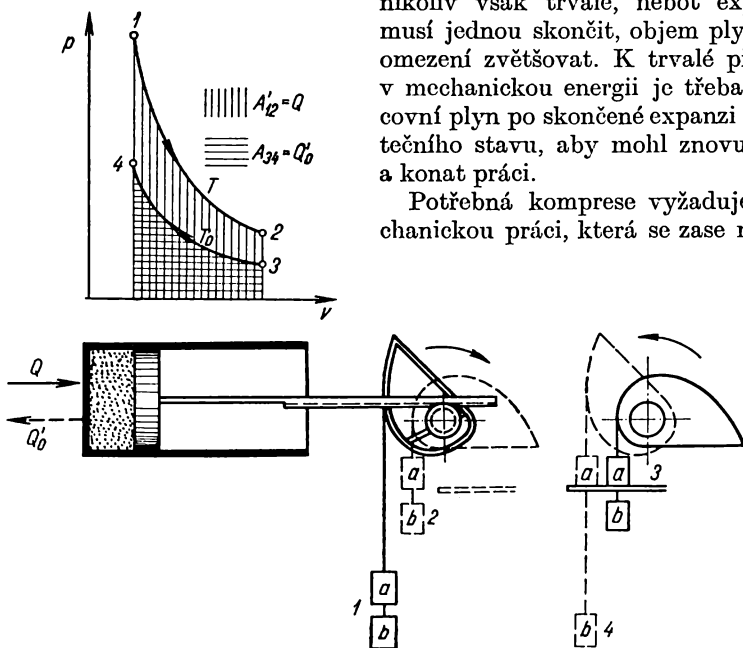
neme $pv^\infty = \text{const}$, což je adiabata, a konečně pro $n \rightarrow \infty$ dostaneme $pv^\infty = \text{const}$, $p^\infty v = \text{const}$, $p^0 v = \text{const}$, takže $v = \text{const}$ a změna je izochorická. Polytropy s různými exponenty jsou znázorněny na obr. (4.4) 9.

4.4.3. Přeměna tepla v mechanickou energii

Při izotermické expanzi $1 \rightarrow 2$ komprimovaného plynu, uzavřeného pístem ve válci, lze tepelnou energii Q , kterou plyn nabírá z nějakého zdroje, úplně přeměnit v energii mechanickou, a to prostřednictvím mechanické práce A'_{12} , kterou plyn koná proti vnějším silám [obr. (4.4) 10]. Vhodným převodem mohli bychom dosáhnout toho, aby odpor, který plyn překonává, byl stále stejně veliký jako tlaková síla plynu na píst, takže kdyby změna probíhala dostatečně pomalu, byla by vratná. Mechanická energie, vzniklá z nabraného tepla, mohla by mít např. formu energie zvednutého závaží ($a + b$). Takto tedy lze principiálně tepelnou energii Q prostřednictvím práce A'_{12} beze zbytku přeměnit v mechanickou energii,

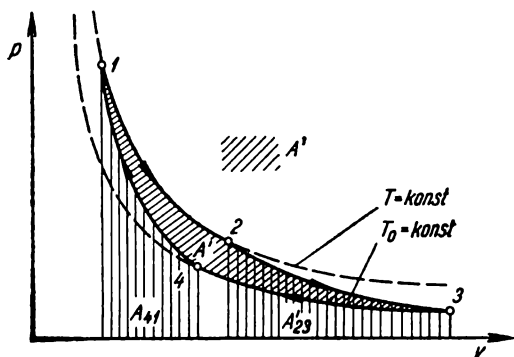
nikoliv však trvale, neboť expanze plynu musí jednou skončit, objem plynu nelze bez omezení zvětšovat. K trvalé přeměně tepla v mechanickou energii je třeba přivést pracovní plyn po skončené expanzi zase do počátečního stavu, aby mohl znovu expandovat a konat práci.

Potřebná komprese vyžaduje ovšem mechanickou práci, která se zase mění v teplo.



Obr. (4.4) 10. Přeměna tepla v energii zvednutého závaží (a)

Kdybychom plyn komprimovali při téže teplotě T , při níž expandoval, a kdybychom vzniklé teplo Q' odváděli do zásobníku, z něhož při expanzi plyn teplo čerpal, byla by při dokonalé vratnosti obou dějů kompresní práce A_{21} stejně velká jako expanzní práce A'_{12} a pracovní zisk takového stroje by byl nulový. Abychom získali mechanickou energii, musíme plyn komprimovat při nižší teplotě T_0 , kdy tlaky jsou menší, k čemuž je třeba menší práce A_{34} , a musíme odvádět teplo Q'_0 při tom vzniklé do jímáče o nižší teplotě T_0 , než je teplota T zdroje tepla Q . K vykonání menší kompresní práce by tedy stačilo, aby jen závaží b schematického stroje na obr. (4.4) 10 kleslo zpět do výchozí polohy, zatímco závaží a bychom mohli zadržet ve zvýšené poloze, a tím akumulovat jeho mechanickou energii. Opakováním tohoto myšleného pochodu bylo by tedy možné zvedat závaží a pomocí nich shromažďovat mechanickou energii na úkor části tepelné energie, nabrané z vhodného zdroje tepla.



Obr. (4.4) 11. Carnotův kruhový děj v diagramu $p-v$

Je třeba ještě uvážit fáze $2 \rightarrow 3$ a $4 \rightarrow 1$ uvažovaného procesu, jichž je třeba k tomu, aby se pracovní plyn dostal z vyšší teploty T na teplotu T_0 , a obráceně z teploty T_0 na T , aby mohl znovu pracovat. Kdybychom k tomu použili izochorických změn, musela by se

procesu přeměny tepla v mechanickou energii zúčastnit další tělesa, protože při těchto změnách vyměňuje plyn teplo s okolím. Jedinou změnou, při níž klesá nebo stoupá teplota bez výměny tepla s okolím, je změna adiabatická. Aby tedy bylo možné zůstat u minimálního počtu dvou těles, jichž je při přeměně tepla v mechanickou energii zřejmě třeba jako zdroje a jímáče tepla, použijeme adiabatické expanze $2 \rightarrow 3$ k snížení teploty plynu z T na T_0 a adiabatické komprese $4 \rightarrow 1$ k dosažení výchozího stavu [obr. (4.4) 11]. Adiabatické změny $2 \rightarrow 3$ a $4 \rightarrow 1$ nemají vliv na celkový výsledek transformace tepla v mechanickou energii, protože podle 4.4 (30) je expanzní práce $A'_{23} = C_v(T - T_0)$ stejně velká jako práce potřebná k adiabatické kompresi $A_{41} = C_v(T - T_0)$, takže se v energetické bilanci navzájem vyruší. Jejich úkolem je jenom spojit se s oběma izotermami $1 \rightarrow 2$ a $3 \rightarrow 4$ navzájem v *kruhový děj (cyklus)*, jímž obecně rozumíme soubor takových změn v nějaké soustavě, při nichž se soustava opět vrátí do původního stavu. Vratný kruhový děj je ve stavovém diagramu znázorněn uzavřenou křivkou.

Kruhový děj — cyklus — skládající se z izotermické a adiabatické expanze pracovní látky (plynu nebo páry), po nichž následuje izotermická a adiabatická komprese do výchozího stavu, nazývá se *Carnotův kruhový děj (cyklus)* podle francouzského inženýra Sadi Carnota, který sledoval účinnost tepelných strojů. Při izotermických změnách je pracovní látka v tepelném styku se zdrojem nebo jímáčem tepla, nabírajíc nebo vydávajíc teplo Q a Q'_0 , při adiabatických změnách je tepelně dokonale izolována, konajíc při expanzi práci na úkor své vnitřní energie ($\Delta U < 0$) a spotřebovujíc při kompresi zase mechanickou energii ve prospěch své vnitřní energie ($\Delta U > 0$), při čemž celková změna vnitřní energie látky je ovšem nulová (pokud je cyklus vratný).

Různé kruhové děje, sestavené za účelem přeměny tepla v mechanickou energii, charakterizuje jejich *tepelná účinnost* η , která je určena poměrem získané mechanické energie, měřené celkovou prací A' , kterou pracovní látka při kruhovém ději vykonala, k celkové tepelné energii Q , přivedené pracovní látkou,

$$\eta = \frac{A'}{Q}.$$

Každý takový kruhový děj, ať je jeho průběh jakýkoliv, se v podstatě skládá z expanze,

při níž objem pracovní látky roste, a z komprese, při níž objem pracovní látky se zase zmenšuje (v obecném případě může být při kruhovém ději několik expanzí a kompresí). Protože plochy pod křivkami znázorňujícími v p — v -diagramu stavové změny jsou úměrné příslušné práci, kterou látka vykonala nebo již byla energie dodána, je zřejmé, že plocha omezená uzavřenou čarou znázorňující v p — v -diagramu příslušný kruhový děj, je úměrná celkové práci A' , kterou látka při kruhovém ději vykonala. U Carnotova cyklu na obr. (4.4) 11 je práce A' , znázorněná plochou 12341.

Není-li pracovní látka v tepelném styku s více než dvěma tělesy, při čemž z teplejšího tělesa nabírá teplo Q a chladnějšímu část Q'_0 z tohoto tepla odvádí, nebo vzniká-li např. teplo Q z chemické energie přímo reakcí v pracovní látce, pak podle zákona zachování energie je práce $A' = Q - Q'_0$, takže tepelná účinnost

$$\eta = \frac{Q - Q'_0}{Q}.$$

Tento poměr může u vratného Carnotova cyklu záviset jenom na teplotách T a T_0 zdroje a jmače tepla, jak je dokázáno v následujícím článku. Měříme-li teploty T a T_0 na základě rozpínavosti nebo roztlačnosti ideálního plynu [čl. 4.1.1], vychází pro tepelnou účinnost vratného Carnotova cyklu

$$4.4 \quad (31) \quad \boxed{\eta = \frac{A'}{Q} = \frac{Q - Q'_0}{Q} = \frac{T - T_0}{T}.$$

Tento vztah bychom snadno odvodili z energetických poměrů při jednotlivých vratných změnách, z nichž se Carnotův cyklus skládá. Při tom počáteční a konečné objemy plynu při jednotlivých změnách musí splňovat podmínku $v_3/v_4 = v_2/v_1$, aby cyklus byl uzavřen. Účinnost Carnotova cyklu však mnohem pohodlněji odvodíme zavedením nové funkce — entropie — v čl. 4.4.5.

Z rozboru možnosti přeměny tepla v mechanickou energii plynou tedy tyto důležité závěry:

1. K trvalé přeměně tepla v mechanickou energii je třeba tepelného stroje (motoru), v němž probíhá kruhový děj.
2. Aby přeměna tepelné energie končila ziskem mechanické energie, musí mít teplo možnost přecházet z teplejšího tělesa (ze zdroje tepla) na chladnější těleso (jmač tepla). Je tedy třeba přinejmenším dvou zásobníků tepla (lázní) různých teplot.
3. Pouze část tepla nabraného z teplejšího zdroje koná práci a zbytek odevzdá pracovní látka chladnějšímu jmači. Tepelná účinnost každého tepelného stroje je vždy menší než jedna.

Tyto poznatky zevšeobecňuje druhá hlavní věta termodynamická, o níž pojednáme v následujícím článku.

Vyšetřme ještě, jak se změní poměry, změníme-li smysl Carnotova cyklu, při němž pořadí vratných změn podle obr. (4.4) 11 bude 4—3, 3—2, 2—1, 1—4. Při izotermické expanzi 4—3 nabírá plyn teplo Q_0 z chladnějšího zásobníku teploty T_0 a při izotermické kompresi 2—1 odevzdá teplejšímu zásobníku teploty T teplo $Q' = Q_0 + A$, kde A je mechanická práce, kterou je třeba vynaložit z vnějška na kompresi 2—1. Na rozdíl od Carnotova cyklu, o němž jsme hovořili dříve, mění se v cyklu pracujícím v opačném smyslu mechanická energie v teplo, avšak zároveň se odnímá chladnějšímu tělesu teplo, které se společně s vynaloženou mechanickou energií přivádí na těleso teplejší.

Jestliže se teplo Q_0 odnímá např. okolnímu vzduchu teploty $t_0 = -10^\circ\text{C}$ ($T_0 = 263^\circ\text{K}$) a teplo Q' se přivádí nějakému topnému tělesu teploty $t = 70^\circ\text{C}$ ($T = 343^\circ\text{K}$), pak podle 4.4 (31)

$$\frac{A}{Q'} = \frac{T - T_0}{T} = \frac{80^\circ\text{K}}{343^\circ\text{K}} = 0,233,$$

takže topnému tělesu se přivádí teplo $Q' = \frac{1}{0,233} A = 4,3A$, které je 4,3krát větší než spotře-

bovaná mechanická energie velikosti A . Kdyby se energie A v topném tělese měnila v teplo přímo, např. třením, nebo kdyby se stejně velká elektrická energie měnila v odporovém topném tělese v Joulovo teplo, získali bychom pouze teplo rovnocenné energii A ; ve stejných jednotkách by tedy bylo $Q' = A$. Zařízení, které vynaložením mechanické nebo jiné energie přečerpává teplo z nižší teplotní hladiny na vyšší teplotní hladinu, nazývá se *tepelné čerpadlo*. Užívá se ho k úspornému vytápění.

Stejným způsobem pracuje *chladicí stroj*, který odnímá teplo Q_0 tělesu nižší teploty T_0 , než je teplota T okolí, a odnáte teplo spolu s vynaloženou mechanickou energií A , tedy $Q' = Q_0 + A$, odvádí okolnímu vzduchu nebo chladicí vodě teploty T . Poměr

$$\varepsilon = \frac{Q_0}{A} = \frac{T_0}{T - T_0}$$

nazývá se *účinnost chlazení* nebo *číslo výkonnosti chladicího zařízení*. Udává množství tepla, které zařízení odejme chlazenému tělesu vynaložením jednotkové mechanické energie z vnějšího zdroje. Je-li např. třeba udržovat teplotu tělesa na 0°C a má-li okolí teplotu 20°C , pak $\varepsilon = 273^\circ\text{K} / 20^\circ\text{K} = 13,6$, takže za ideálních podmínek lze každou jednotkou dodané mechanické energie odejmout chlazenému tělesu 13,6 jednotky tepelné.

Podstatná na tomto ději je skutečnost, že k ochlazení chladnějšího tělesa je třeba vynaložit mechanickou energii z vnějšíka.

Ze vztahu 4.4 (31) pro tepelnou účinnost vratného Carnotova cyklu plyne také název *termodynamická teplota*, kterého jsme použili již v čl. 4.1.1. Přiřadíme-li teplotě T_0 vhodnou číselnou hodnotu, např. $T_0 = 273,16$ pro trojný bod vody, je teplota T tělesa, kterou chceme určit, určena vztahem

$$T = T_0 \frac{Q}{Q_0},$$

v němž Q je teplo, které přijme látka pracující ve vratném Carnotově cyklu od tělesa teploty T , a Q_0 je teplo, které látka odevzdá tělesu se základní teplotou T_0 . Tím je měření teploty převedeno na měření množství tepla, tedy energie, a to nezávisle na pracovní látce, protože účinnost Carnotova cyklu na jejích vlastnostech nezávisí (čl. 4.4.4). Prakticky se to ovšem nedá provést, protože žádný tepelný stroj pracující na principu Carnotova cyklu, a to zejména vratně pracující, pochopitelně sestavit nelze. Úvaha má jen ukázat, že principiálně je možná definice teplotní stupnice, oprostěná od specifikace nějaké teploměrné látky, kterou obsahují definice starších teplotních stupnic, založené na roztahování nebo rozpínání konkrétních látek s teplotou (např. stupnice rtuťová, vodíková apod.). Ve skutečnosti se při realizaci teplotní stupnice ovšem bez konkrétních látek neobejdeme, protože jiné než konkrétní látky, z nichž jsou formována individuální tělesa (rtuťový sloupec, dané množství určitého plynu v nádobě apod.) v přírodě k dispozici nemáme. Pomocí vhodných korekcí můžeme však teploty zjištěné na základě teplotních změn konkrétních látek opravit na hodnoty, které by pro tyto teploty dával termodynamický způsob měření na základě účinnosti Carnotova cyklu. Opravené teploty jsou potom sjednoceny na společném základě nezávislé už na použité teploměrné látce, a přísluší jim proto název *termodynamické teploty*. Lze to ovšem provést jen s jistou přesností, která závisí na volbě vhodné metody použité k určení příslušných korekcí a na stavu měřicí techniky. Není proto divu, že číselné hodnoty termodynamických teplot přiřazené teplotním stavům, které tvoří tzv. mezinárodní stupnici (čl. 4.1.1), se postupem času ustavičně zpřesňují.

4.4.4. Druhá hlavní věta

Podle první hlavní věty termodynamické jsou v přírodě možné jen takové děje, při nichž celková energie všech těles, které se dějů zúčastní, se nemění. Avšak nikoliv všechny děje, u nichž je splněna tato podmínka a jež si můžeme představit, mohou skutečně v přírodě probíhat. O tom však první hlavní věta nic neříká, a proto ji doplňuje druhá hlavní věta,

kteřa charakterizuje pochody, které sice nejsou v rozporu s první hlavní větou (se zákonem zachování energie), které však ve zvolených souborech těles probíhat nemohou.

Vyšetřujeme-li nějaký fyzikální děj, nemůžeme vzít v úvahu všechna tělesa v přírodě. Vybereme jen ta, jejichž vlastnosti či stránky jsou pro vyšetřovaný jev podstatné, a oddělíme je od ostatních těles, jejichž vliv na zkoumaný jev je nepodstatný, tím, že si je představujeme jako soustavu těles nebo látek, která je v okolním světě osamocená (uzavřená, izolovaná). Izolace se ovšem vztahuje jen na ten jev nebo soubor jevů, pro které je působení okolních těles bezvýznamné, a nemusí platit pro jiné jevy, u nichž tomu tak není.

Fyzikální změny a procesy, které probíhají v takovéhoto izolovaných soustavách, nazýváme *přirozenými (pozitivními)*. Máme bezpočet příkladů pro takové změny a z vlastní zkušenosti víme také, v jakém směru probíhají. Z hlediska termodynamiky jsou významné tři skupiny změn:

a) *Přeměna mechanické energie v teplo*. Víme, že mechanickou energii lze velmi snadno a beze zbytku (např. třením) přeměnit v teplo. Tak např. se roztočené kolo na hřídeli časem zastaví (i ve vakuu) a jediný výsledek je ohřátí ložiska a hřídele. Nikdo však nezažil, že by se ložisko s hřídelem opět ochladilo a kolo se zase roztočilo. Při nepružném nárazu padajícího kamene na zem přemění se jeho mechanická energie v teplo. Obrácený pochod, tzn. kámen, který by se zase zvedl do výšky, však nikdo ještě neviděl, ačkoli se zákonem zachování energie jsou tyto obrácené děje slučitelné.

b) *Přechod tepla z tělesa vyšší teploty na těleso nižší teploty*. Při tomto přechodu se teplejší těleso ochlazuje a chladnější ohřívá tak dlouho, až nastane rovnovážný stav a obě tělesa budou mít stejnou teplotu. Obrácený pochod, že by se zvyšovala teplota teplejšího tělesa a chladnější těleso že by se ještě více ochlazovalo, není v soustavě, která je stejně uzavřena jako při přirozeném pochodu, možný. Nikdy např. neobtěžuje chladná voda v řece část své vnitřní energie k tomu, aby nás při koupeli ohřála.

c) *Expanze plynu do vakua*. Máme-li nádobu, která je přepážkou rozdělena na dvě části, z nichž v jedné je plyn a druhá je prázdná, pak při odstranění přepážky se plyn vřdycky rychle rozpne tak, že vyplní i prázdnou část a rozptýlí se rovnoměrně po celém objemu nádoby. Podobně probíhá jen v jednom směru i difúze plynů, a to vřdycky tak, že každý plyn zaujme celý objem prostoru, který je všem plynům k dispozici. Nikdy se molekuly voňavky rozptýlené ve vzduchu pokoje nevrátí dobrovolně zpět do otevřené lahvičky.

Všechny uvedené přirozené děje v uzavřených soustavách vyznačují se tím, že probíhají pouze v jednom směru — jsou tedy *nevratné*. Jejich nevratnost záleží v tom, že změny, které při nich v soustavě vznikly, se nedají opatřeními provedenými uvnitř soustavy zrušit tak, aby se obnovil zase výchozí stav. To je podstatný rozdíl, jímž se nevratné změny liší od změn vratných, o nichž byla zmínka v čl. 4.4.2. Např. v soustavě tvořené tepelnou lázní, plynem ve válci a zařízením k akumulaci mechanické energie [obr. (4.4) 10] lze změny vzniklé vratnou izotermickou expanzí plynu zrušit vratnou kompresí plynu a přivodit tak výchozí stav expanze. Přitom se obou dějů probíhajících v navzájem opačných směrech zúčastní táž množství tepelné a mechanické energie lišící se podle směru jenom znaménky. Proběhla-li naproti tomu v plynu nevratná expanze, nelze prostředky, jež jsou k dispozici v uvažované soustavě, zdaleka dosáhnout výchozího stavu, a to už proto ne, že expanzní práce plynu je menší než práce potřebná ke kompresi, jak jsme poznali už v čl. 4.4.2. Chceme-li výchozího stavu dosáhnout, musíme soustavu otevřít a přibrat k ní další tělesa jako zdroje mechanické energie. To už však není táž soustava, v níž probíhal nevratný děj. Jinými slovy, máme-li zrušit změnu, která jednou vznikla nevratným pochodem v nějaké soustavě, je k tomu třeba přibrat další tělesa, která k soustavě předtím nepatřila a jejichž stav se pak vždy zato nějak změní. Docházíme tak k důležitému závěru. *Neexistují procesy, které by probíhaly v přesně obráceném směru než přirozené (nevratné) změny stavu*. Kdybychom totiž konstruovali děj, který by ve svých jednotlivých fázích probíhal obráceně než nevratný děj, pak bychom mohli všechny změny vzniklé při nevratném ději úplně odstranit, což odporuje pojmu nevratnosti.

Děje, které probíhají obráceně než přirozené děje, nazýváme *nepřirozenými (negativními)*. Vzhledem k uvedeným přirozeným dějům to jsou přeměna tepla v mechanickou energii, přechod tepla z tělesa nižší teploty na těleso vyšší teploty, rozdělení plynů z jejich směsí apod. Nepřirozené se nazývají proto, že ve stejných soustavách, v jakých by probíhaly příslušné přirozené děje, nemohou nastat. Lze je v soustavách více méně uměle přivodit jen zásahem zvenku, tzn. přibráním dalších těles, jak už jsme uvedli. Přibraná tělesa se však zúčastní vždy tak, že změna, kterou prodělává jejich stav, je vždy přirozená, tzn. že nepřirozená změna vyžaduje *kompenzaci* ve formě nějakého přirozeného děje. O ději, který probíhá bez kompenzace, říkáme pak, že probíhá „sám o sobě“ nebo „samovolně“. Nepřirozený děj tedy sám o sobě v přírodě probíhat nemůže.

Příklady je mnoho. Tak při nevratné expanzi koná plyn, který je ve styku s nějakou tepelnou lázní, práci na úkor nabraného tepla. Nepřirozeným dějem je tu přeměna nabraného tepla v mechanickou energii např. zvednutí závaží. V soustavě složené jenom z lázně a závaží je tato přeměna nemožná, ačkoliv obrácená přeměna, která je přirozená, je zcela běžná. Prostředníkem při nepřirozeném ději je pracovní plyn ve válci s příslušným zvedacím zařízením, v němž probíhá kompenzační přirozený děj, a to expanze plynu a přechod tepla z lázně do chladnějšího plynu.

V předešlém čl. 4.4.3 jsme došli k závěru, že k trvalé přeměně tepla v mechanickou energii je třeba tepelného stroje a dvou různě teplých zásobníků tepla, zdroje a jímače. Nepřirozená přeměna tepla v mechanickou energii je zde kompenzována přirozeným přechodem aspoň části tepla z tělesa vyšší teploty na těleso nižší teploty. Probíhá-li proces obráceně a teplo se převádí z tělesa nižší teploty na těleso vyšší teploty, je tento nepřirozený děj kompenzován přirozenou přeměnou mechanické energie v teplo.

Kdyby nepřirozená přeměna tepla v mechanickou energii mohla probíhat bez kompenzace, byla by velmi užitečným dějem, neboť bychom mohli např. ochlazováním vzduchu nebo mořské vody snadno získat prakticky neomezené množství mechanické energie. Stroj, který by pracoval takovýmto způsobem, nemohl by sice pracovat doslova nekonečně dlouho, ale teoreticky aspoň tak dlouho, pokud by neochladil zásobník tepla na tak nízkou teplotu, že by se tento pochod již nevyplácel. To by bylo vlastně něco podobného jako perpetuum mobile, jehož existenci popírá první hlavní věta. Proto se stroj, který by umožňoval přeměnu tepla v mechanickou energii bez nějaké kompenzace jen tím, že by ochlazoval jedinou tepelnou lázeň, jmenuje *perpetuum mobile druhého druhu*.

Jde nyní o to, vyjádřit směr přirozených pochodů v přírodě nikoli individuálně, jak jsme to doposud činili, ale obecným zákonem, který by se vztahoval na všechny přirozené děje. To je právě obsahem druhé hlavní termodynamické věty, kterou lze vyslovit různě.

Např. Clausius vyjádřil druhou hlavní větu takto:

Teplo nemůže samovolně přecházet ze studenějšího tělesa na teplejší.

Thomson a Planck zevšeobecnilí poznatek, který plyne z Carnotova ideálního cyklu, v němž se jen část nabraného tepla zužitkuje ke konání mechanické práce a zbytek tepla odevzdává pracovní látka chladnějšímu jímači. Podle nich lze druhou hlavní větu vyslovit takto:

Není možno sestavit periodicky pracující stroj, který by nezpůsoboval nic jiného, než že by ochlazoval tepelnou lázeň a konal rovnomocnou práci.

Protože takový stroj by byl perpetuum mobile druhého druhu, konstatuje Ostwald při formulaci druhé hlavní věty jenom krátce:

Není možno sestavit perpetuum mobile druhého druhu.

Uvedli jsme již větu, že neexistují procesy, které by probíhaly v přesně obráceném směru než nevratné změny stavu. Protože vratné změny mohou probíhat v obou směrech, plyne odtud, že v blízkosti každého stavu uzavřené soustavy, dosažitelného vratnou změnou, existují stavy, kterých soustava nemůže nabýt vratnou změnou, ale jen změnou nevratnou (přirozenou), nebo do nichž vůbec nemůže dospět. Tento nejabstraktnější tvar druhé hlavní věty, který pochází od Carathéodoryho, uvádíme jako další příklad pro zvláštnost tohoto zákona, záležející v tom, že na rozdíl

od jiných fyzikálních zákonů připouští různé formulace. Lze to odůvodnit tím, že se obírá nejrozmanitějšími jevy, tedy jeho mnohostranností.

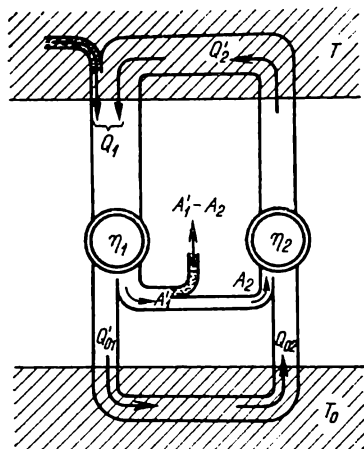
Uvedená znění druhé hlavní věty termodynamické liší se navzájem jen formou, ale co do obsahu jsou ekvivalentní. Neplatí-li jedna, neplatí ani druhá. Předpokládejme např., že stroj, jehož existenci Ostwald vylučuje, by byl možný. Mohli bychom ho použít k ochlazení tělesa téže teploty, jako je teplota okolí, a z tak nabraného tepla získat mechanickou energii. Tato energie by se mohla prací tření obratem přeměnit v teplo i s vyšší teplotní hladinou, než mělo teplo odebrané. Pomocí perpetua mobile II. druhu bychom tedy mohli způsobit děj, jež vylučuje Clausiova formulace druhé hlavní věty, že by totiž teplo přecházelo z chladnějšího tělesa na teplejší, aniž by se dělo cokoli jiného. Je zřejmé, že z platnosti Ostwaldovy věty plyne zároveň i platnost Clausiovy věty. Že je tomu i obráceně, dokážeme snadno např. na Carnotově cyklu. Odebereme Carnotovým cyklem teplejší lázni teplo Q_1 , z něhož část Q_2 přejde do chladnější lázně a zbytek $Q - Q_2$ se zužitkuje ke konání práce A' . Kdyby mohlo teplo samo od sebe přejít z tělesa nižší teploty na těleso vyšší teploty, mohli bychom z chladnější lázně teplo Q_2 , které dostala, převést zpět do teplejší lázně bez jakýchkoliv jiných změn, takže by nakonec teplejší lázeň jako jediná ztratila teplo $Q - Q_2$, jehož by se beze zbytku využilo k práci A' , jiných změn by nebylo. To by ale bylo perpetuum mobile II. druhu, takže platnost Clausiovy věty má za následek i platnost Ostwaldovy věty.

Že také Carathéodoryova věta je jenom jinou formou jednoho a téhož obsahu druhé hlavní věty termodynamické, tj. vystihnout společnou vlastnost všech přírodních dějů záležející ve směru, jímž se v přírodě vyvíjejí, poznáme nejlépe, dáme-li druhé hlavní větě exaktní formu zavedením funkce zvané „entropie“. V čl. 4.4.6 ukážeme, že Carathéodoryho výrok vede k témuž výsledku jako např. Clausiova věta.

Odpověď na otázku, jak tedy ze slovní formulace druhé hlavní věty vyplývá směr, v němž se přírodní děje v soustavách vyvíjejí, je velmi prostá. Přidržíme-li se názorné věty Ostwaldovy, pak prostě tím, že obrácený (nepřirozený) směr by umožnil existenci perpetua mobile druhého druhu. Kdyby např. mohl v přírodě probíhat obrácený proces, než je vznik tepla prací tření, pak by měl právě vlastnost perpetua mobile druhého druhu, takže z platnosti Ostwaldovy věty plyne zároveň i nemožnost takového procesu. Expanduje-li plyn izotermicky do vakua, nemá co přemáhat, a nekoná proto žádnou práci. Kdyby mohl probíhat obrácený děj, při němž by se dal plyn přivést na menší objem bez vynaložení mechanické práce, bylo by možno ihned sestavit perpetuum mobile II. druhu: Plyn by konal práci při izotermické expanzi, přičemž by potřebnou energii odnámal ve formě tepla tepelné lázni a pak by se bez vynaložení práce stlačil na původní objem. Z nemožnosti perpetua mobile II. druhu plyne tedy, že plyn nemůže zmenšit svůj objem bez vynaložení práce. Přirozený směr (expanze bez konání práce) naproti tomu neumožňuje konstrukci perpetua mobile II. druhu, a proto je právě přirozeným směrem.

V čl. 4.4.3 jsme při výkladu Carnotova cyklu předpokládali, že příslušný stroj pracuje vratně. Z druhé hlavní věty termodynamické vyplývá, že vratný Carnotův cyklus vykonaný jakoukoli látkou má stejnou účinnost, která nezávisí na vlastnostech pracovní látky. Abychom to dokázali, představme si dva vratné stroje 1 a 2, pracující mezi stejnými lázněmi teplot T a T_0 ($T > T_0$), v nichž je užito dvou různých pracovních látek různého počátečního objemu [obr. (4.4) 12].

Předpokládejme, že oba stroje mají různou účinnost, např. že $\eta_1 > \eta_2$. Odebírají-li oba stroje z teplé lázně stejná množství tepla Q_1 a Q_2 ($Q_1 = Q_2$), znamená to, že stroj s lepší účinností η_1 vykoná práci A'_1 , která je větší, než je práce A'_2 stroje s větší účinností η_2 . To je však podle principu zachování energie možné jen tehdy, odevzdá-li stroj s větší



Obr. (4.4) 12. K důkazu, že termická účinnost vratného Carnotova cyklu závisí jen na teplotách obou tepelných zásobníků, mezi nimiž cyklus probíhá

účinností η_1 chladnější lázni méně tepla než horší stroj s účinností η_2 ($Q'_{02} > Q'_{01}$). Bylo by tedy možné spojit oba stroje dohromady tak, aby lepší stroj poháněl svou prací A'_1 horší stroj, který by pracoval jako tepelná pumpa v opačném smyslu; dostali bychom nový cyklus, při němž by se chladnější lázni odebíralo více tepla, než se jí přivádí, a rozdíl $Q_{02} - Q'_{01}$ by se projevil jako pracovní zisk $A'_1 - A_2$. Tepelná zásoba teplé lázně by se přitom neměnila, neboť by se jí přivádělo tolik tepla Q'_2 , kolik by se ho odvádělo (Q_1).

Soustrojí bychom mohli uspořádat také tak, že by lepší stroj přiváděl chladné lázni totéž teplo Q'_{01} , které horší stroj odvádí (Q_{02}), protože však první stroj má větší účinnost, musel by zase teplejší lázni odnímat více tepla, než přivádí stroj s menší účinností, takže rozdíl $Q_1 - Q'_2$ by se opět projevil pracovním ziskem $A'_1 - A_2$ [obr. (4.4) 12].

Oběma způsoby by tedy mohl periodicky pracovat tepelný stroj, který by nedělal nic jiného, než odebíral jediné lázni teplo $Q_{02} - Q'_{01}$ nebo $Q_1 - Q'_2$ a beze zbytku je měnil v mechanickou energii (zvedal by např. nějaké závaží). To by bylo perpetuum mobile II. druhu, jehož existenci druhá hlavní věta vylučuje, takže musíme připustit, že účinnosti všech vratných cyklů pracujících mezi stejnými tepelnými zásobníky jsou stejné, tedy $\eta_1 = \eta_2$, a že nemohou záviset ani na pracovní látce, ani na jejím počátečním objemu nebo tlaku, nýbrž závisí jediné na teplotách obou zásobníků.

Snadno dokážeme, že účinnost libovolného nevratného tepelného stroje je vždy menší než účinnost vratného stroje. Předpokládejme, že stroj 1 z předešlého výkladu je libovolný nevratný stroj a tepelný stroj 2 že je vratný. Kdyby účinnost η_1 nevratného stroje byla větší než účinnost η_2 vratného stroje, bylo by možné sestavit perpetuum mobile II. druhu, jak jsme ukázali, což je vyloučené. Kdyby účinnost obou strojů byla stejná, mohli bychom prací stroje 1 pohánět chladicí stroj 2, který by pak chladnější lázni odnímal totéž teplo, které jí stroj 1 přivádí, a teplejší lázni by dodával totéž teplo, které stroj 1 odebírá. Na zúčastněných tělesech bychom nepozorovali žádné změny a celý cyklus by mohl stejně probíhat v opačném smyslu; cyklus by byl vratný, což odporuje našemu předpokladu. Zbývá tedy jediné možnost, že účinnost η_1 nevratného pracujícího stroje je menší než účinnost η_2 vratného stroje, tj.

$$4.4 \quad (32) \quad \eta_1 < \eta_2 \text{ čili } \eta_1 = \frac{A'_1}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q'_{01}}{Q_1} < \frac{T - T_0}{T}.$$

Znamená to, že práce, kterou vykoná nevratný stroj při přechodu tepla z teplejšího tělesa na chladnější, nestačí k převedení příslušného tepla v opačném smyslu.

Z druhé hlavní věty plyne tedy tato *Carnotova věta*:

Účinnost všech vratných Carnotových cyklů pracujících s týmiž lázněmi je stejná a závisí jen na teplotách obou lázní; účinnost libovolného nevratného cyklu nemůže být větší než účinnost vratného Carnotova cyklu pracujícího mezi týmiž maximálními teplotami jako nevratný děj.

Skutečný tepelný stroj bude tím dokonalejší, čím méně se jeho tepelná účinnost η liší od účinnosti vratného Carnotova stroje pracujícího mezi týmiž teplotami. Do kondenzační parní turbíny vstupuje např. přehřátá vodní pára teploty 500 °C a odtékající kondenzát má teplotu 32 °C. Ideální tepelná účinnost je $\eta = (T - T_0)/T = 468 \text{ K}/773 \text{ K} = 0,61$, takže k práci lze v nejlepším případě využít asi jen 60 % z celkové tepelné energie páry. Pro nevratnost skutečného děje v takové turbíně a pro různé ztráty dosahuje se v praxi jen asi poloviny této hodnoty, takže celková účinnost $\eta \approx 30 \%$.

Teplo, které se nezužítuje pro mechanickou práci, se ovšem ve shodě s první hlavní větou neztrácí, ale přejde jen na chladnější těleso (na chladicí vodu kondenzátoru) a pobudí schopnosti, aby se ho využilo v téže tepelném stroji na mechanickou práci. Z hlediska pracovního využití je proto teplo, jež je na vyšší teplotní hladině, cennější než stejné velké množství tepla na nižší teplotní hladině. Při nevratném přechodu tepla z tělesa vyšší teploty na těleso nižší teploty dochází tedy k částečnému *znehodnocení (degradaci) tepelné energie*. Poněvadž je přeměna tepla v jiné druhy energie omezena, považujeme teplo za méněcennější druh energie na rozdíl od ušlechtilých druhů, jako je energie mechanická, elektrická apod. To se projevuje i v ceně, neboť 1 kWh tepelné energie obsažené v uhlí stojí v domácnosti zhruba 10 až 20 haléřů, kdežto 1 kWh elektrické energie stojí 30 až 80 haléřů.

4.4.5. Entropie

Podobně jako první hlavní věta termodynamická zavádí funkci stavu — vnitřní energii U — zavádí i druhá hlavní věta zvláštní funkci stavu, kterou Clausius nazval *entropií*.

Mějme kilomol ideálního plynu. Malé změny jeho stavu, určené změnou objemu dv a teploty dT (změny třetí stavové veličiny — tlaku — plynou již ze stavové rovnice), dosáhneme, dodáme-li mu teplo δQ , pro něž podle první hlavní věty 4.4 (11) platí

$$\delta Q = dU + p dv = C_v dT + p dv$$

čili podle stavové rovnice 4.4 (12)

$$4.4 (33) \quad \delta Q = C_v dT + \frac{RT}{v} dv.$$

Pro dodané teplo jsme volili označení δQ , abychom naznačili, že nejde o úplný diferenciál čili přírůstek nějaké funkce stavu, takže součet elementárních přírůstků δQ závisí na způsobu přechodu plynu z počátečního do konečného stavu, tj. na integrační cestě mezi oběma stavy. Z matematiky je znám tzv. *integrační faktor*, který je funkcí proměnných vystupujících ve výrazu pro neúplný diferenciál a má tu vlastnost, že násobíme-li jím neúplný diferenciál, přejde tento diferenciál v úplný. Tak můžeme např. neúplný diferenciál práce $\delta A' = p dv$ snadno přeměnit v úplný diferenciál, násobíme-li jej $1/p$. Pak podíl $\delta A'/p$ je již úplný diferenciál, a to dv , takže integrál $\int_1^2 \delta A'/p = v_2 - v_1$ závisí již jen na stavech

charakterizovaných objemy v_2 a v_1 , lhostejno, co se mezi oběma stavy s plynem dělo. Převrácená hodnota tlaku plynu, tedy $1/p$, je tu integračním faktorem.

Podobně přejde neúplný diferenciál δQ v nový úplný diferenciál, který označme dS , násobíme-li jej integračním faktorem $1/T$, tedy převrácenou hodnotou absolutní teploty plynu, jak se snadno přesvědčíme z 4.4 (33):

$$\frac{\delta Q}{T} = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} = dS.$$

Poněvadž u ideálního plynu C_v a R jsou konstanty, můžeme tuto rovnici beze všeho integrovat, aniž k tomu musíme znát způsob přechodu plynu mezi dvěma stavy, tedy integrační cestu:

$$4.4 (34) \quad S - S_0 = C_v \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} + R \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = C_v \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{v}{v_0}.$$

Závisí-li kilomolové teplo na teplotě, zahrneme příslušnou závislost do integrace podle teploty, takže i pak bude přírůstek $S - S_0$ záviset jenom na T_0 , v_0 a na T , v , lhostejno, co se s látkou mezi oběma stavy dělo. Podíl

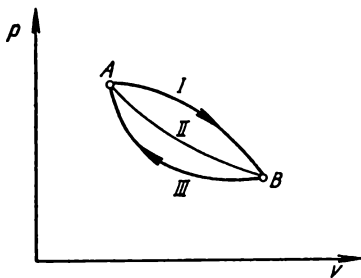
$$4.4 (35) \quad \boxed{\frac{\delta Q}{T} = dS}$$

je tedy úplný diferenciál funkce stavu plynu $S(T, V)$, kterou nazýváme *entropií*.

U ideálního plynu je tato funkce rovnicí 4.4 (34) určena, můžeme ovšem zjistit jen rozdíl hodnot, kterých nabývá pro dva stavy plynu. Přitom je třeba si uvědomit, že jsme rozdíl entropií pro oba stavy plynu vypočetli integrací výrazu $\frac{\delta Q}{T}$, tedy součtem velmi malých podílů tepel $\delta Q_1, \delta Q_2, \dots$ a příslušných teplot $T_1, T_2, \dots$, za nichž plyn tato tepla nabírá,

při čemž jsme dosazovali ze stavové rovnice, která platí přesně jen pro plyn v rovnováze. Avšak za přísně rovnovážného stavu nenastávají žádné změny v plynu, jinak by nebyl v rovnováze. Žádáme-li tedy, aby se stav plynu měnil a aby přitom platila stavová rovnice, musíme se omezit na krajní případ velmi pomalých změn, při nichž má plyn možnost po

každé velmi malé změně svého stavu, která vlastně poruší jeho tlakovou a teplotní rovnováhu, opět nabýt rovnováhy, než dojde k změně další, takže prochází vlastně velmi přibližně samými rovnovážnými stavy. Jedině po takové cestě, pro kterou platí stavová rovnice v každém okamžiku, dostaneme právě změnu příslušející rozdílu entropií v konečném a v počátečním stavu plynu. Takové změny jsme nazvali *vratnými*, neboť je zřejmo, že pak platí stavová rovnice i pro změnu probíhající obráceným směrem, při níž zase plyn probíhá jen ustálenými (rovnovážnými) stavy, takže pak stavová rovnice platí i pro cestu zpět.



Obr. (4.4) 13. Vratné cesty mezi stavy A a B

Z toho vidíme dále, že integrál $\int \frac{\delta Q}{T}$, vzatý po libovolné vratné cestě ze stavu A do B, musí mít touž hodnotu, neboť jeho hodnota závisí jen na počátečním a na konečném stavu, a je tedy nezávislá na cestě, kterou plyn přejde z jednoho stavu do druhého, byla-li ovšem cesta vratná.

Myslíme-li si např. tři vratné cesty I, II, III se společným počátečním stavem A a společným konečným vztahem B [obr. (4.4) 13], bude

$$\int_{A(I)}^B \frac{\delta Q}{T} = \int_{A(II)}^B \frac{\delta Q}{T} = \int_{A(III)}^B \frac{\delta Q}{T}.$$

Přejdeme-li po některé cestě, např. III, ze stavu B zpět do stavu A, vytvoříme s cestou I kruhový děj, pro který vzhledem k hořejší rovnosti platí

$$\int_{A(I)}^B \frac{\delta Q}{T} + \int_{B(III)}^A \frac{\delta Q}{T} = \int_{A(I)}^B \frac{\delta Q}{T} - \int_{A(III)}^B \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Z toho plyne, že při vratném kruhovém ději, během něhož se látka vrátí do původního stavu — procházejíc vesměs stavy rovnovážnými — je nutně

$$4.4 \quad (36) \quad \oint_{(\text{vrat})} \frac{\delta Q}{T} = 0,$$

kde symbolem $\oint$ označujeme křivkový integrál podél uzavřené křivky. K tomu je však nutno, abychom soustavně počítali s přivedeným teplem Q , které je v případě, že látka teplo naopak cívá, podle obr. (4.4) 3 záporné.

Celkem můžeme podle těchto výsledků vyslovit tuto obecnou definici entropie:

Změna entropie při libovolném přechodu plynu ze stavu A do stavu B je určena integrálem

$$4.4 \quad (37) \quad S_B - S_A = \int_{A(\text{vrat})}^B \frac{\delta Q}{T},$$

vzatým po libovolné vratné cestě vedoucí ze stavu A do stavu B. Tepla δQ jsou přitom vždy tepla přivedená.

K této definici připojme, že celková entropie dvou plynů je rovna součtu jejich entropií. Plyne to vlastně z hořejší definice: Probíhají-li dva plyny týmiž teplotami, je celkové dodané teplo rovno součtu tepel dodaných každému z nich, takže

$$4.4 \quad (38) \quad \Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{\delta Q_1 + \delta Q_2}{T} = \int \frac{\delta Q_1}{T} + \int \frac{\delta Q_2}{T} = \Delta S_1 + \Delta S_2.$$

Entropie je tedy podobně jako vnitřní energie *veličinou aditivní (sčitatelnou)*. Z toho dále plyne, že entropie stejně jako vnitřní energie je úměrná množství plynu.

Další podobnost mezi entropií a vnitřní energií je v tom, že se žádná z těchto dvou veličin nemění v osamoceném (izolovaném) plynu. Entropie se nemění při vratných dějích adiabatických, při nichž je plyn tepelně izolován, neboť pak je stále $\delta Q = 0$, a tedy $S = S_0$. Proto bývají vratné adiabatické děje též nazývány *izoentropickými*.

Určujeme-li množství látky počtem kilomolů, pak hlavní jednotkou entropie $[S] = \text{J} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}$ a vedlejší jednotkou $\text{kcal} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}$. Vztahujeme-li velikost entropie na jednotku hmotnosti, je její hlavní jednotkou $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}$ a vedlejší jednotkou $\text{kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}$.

Rovnice 4.4 (34) platí přesně jen pro ideální plyny, avšak definice entropie 4.4 (37) se přenáší i na jiné látky skupenství kapalného i pevného. Je však třeba přihlížet k tomu, že u skutečných plynů a látek jiného skupenství závisí vnitřní energie nejen na absolutní teplotě jako u ideálních plynů, ale také na další stavové veličině, většinou na objemu nebo hustotě. Položíme-li podle první hlavní věty termodynamické $\delta Q = dU + p dv$, dostaneme obecný výraz pro elementární přírůstek entropie ve tvaru

$$4.4 \quad (39) \quad dS = \frac{dU + p dv}{T},$$

z něhož vypočteme konečnou změnu entropie integrací 4.4 (37).

U pevných látek a kapalin je při nepříliš vysokém tlaku přírůstek vnitřní energie zpravidla mnohem větší než expanzní práce látky, a proto lze v hořejší rovnici vynechat člen $p dv$, takže elementární přírůstek entropie je prostě

$$dS = \frac{dU}{T} = \frac{C dT}{T},$$

kde C je kilomolové teplo látky, které ovšem obecně závisí na teplotě. Změna entropie při změně teploty z T_0 na T je pak

$$4.4 \quad (40) \quad S - S_0 = \int_{T_0}^T \frac{C dT}{T}.$$

Definice 4.4 (37) určuje jenom rozdíl entropií příslušných dvěma stavům. Proto můžeme její hodnotu pro určitý stav zvolit, např. položit ji na roveň nule. V praxi se obvykle počítá entropie pro 1 kg látky a při 0°C se entropie volí rovna nule. Podle třetí hlavní věty termodynamické 4.4.8 měli bychom za nulovou pokládat hodnotu entropie při absolutním bodu mrazu (0°K).

K objasnění pojmu entropie vypočteme přibližně entropii jednoho kilogramu vody a jednoho kilogramu nasycené vodní páry při 100°C . Při pomalém zahřívání je třeba pro přírůstek teploty dT dodat teplo $\delta Q = c dT$, kde $c \approx 1 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}$ je měrné teplo vody, takže

$$\Delta S_1 = \int_{273}^{373} \frac{c dT}{T} = [c \ln T]_{273}^{373} = 0,312 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}.$$

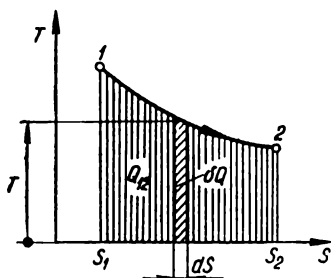
Abychom z 1 kg vody teplé 100 °C dostali nasycenou páru stejné teploty, je třeba dodat skupenské teplo vypařovací, které je při normálních tlakových podmínkách rovno 539 kcal . kg⁻¹. Při tomto ději se teplota nemění, a proto vzroste entropie o hodnotu

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{539}{373} = 1,445 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}.$$

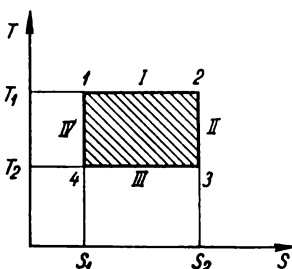
Celková entropie 1 kg nasycené vodní páry

$$\Delta S = 0,312 + 1,445 = 1,757 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}.$$

Entropie S , která je funkcí stavu soustavy, lze spolu s další stavovou veličinou, např. s absolutní teplotou T , výhodně použít k určení stavu soustavy, podobně jako se stav soustavy udává např. tlakem p a objemem v . V diagramu, v němž na osu úseček nanášíme entropii S a na osu pořadnic absolutní teplotu T , bude každý bod zobrazovat určitý stav soustavy (např. plynu) a průběh



Obr. (4.4) 14. Diagram $T-S$



Obr. (4.4) 15. Carnotův cyklus v diagramu $T-S$

změny stavu bude znázorněn nějakou křivkou [obr.(4.4) 14]. Diagram $T-S$ se nazývá *tepelný*.

Podle definice elementárního přírůstku entropie je teplo δQ , nabrané plynem při teplotě T , vyjádřeno vztahem $\delta Q = T dS$, a proto je v diagramu $T-S$ zobrazeno plochou proužku nad změnou dS , která je na obrázku šikmo vyčárkována. Teplo Q_{12} , které plyn nabere při konečné vratné změně ze stavu 1 do stavu 2, je pak znázorněno plochou $S_1 S_2 2 1 S_1$.

Podobně jako jsou izochorická změna a izobarická změna v diagramu $p-v$ znázorněny vel-

mi jednoduše úsečkami rovnoběžnými s osou p nebo v , tak jsou úsečkami v diagramu $T-S$ znázorněny zase druhé dvě vratné změny, a to izotermická změna úsečkou rovnoběžnou s osou S ($T = \text{const}$) a adiabatická změna úsečkou rovnoběžnou s osou T , protože při této změně $\delta Q = 0$ čili $dS = 0$, a proto $S = \text{const}$. Vratný Carnotův cyklus, který se skládá ze dvou izoterm a dvou adiat, je proto v diagramu $T-S$ znázorněn prostě stranami obdélníka 1234 na obr. (4.4) 15. To umožňuje velmi jednoduchý výpočet jeho tepelné účinnosti.

Při izotermické expanzi I nabere pracovní látka teplo $Q_1 = \int_1^2 T_1 dS = T_1(S_2 - S_1)$, znázorněné v diagramu $T-S$ plochou pod úsečkou $1 \rightarrow 2$. Při izotermické kompresi $3 \rightarrow 4$ je vyměněné teplo $Q_2 = \int_3^4 T_2 dS = T_2(S_4 - S_3) = T_2(S_1 - S_2)$ opět znázorněno plochou pod příslušnou úsečkou. Protože $S_1 < S_2$, je toto teplo Q_2 , vypočtené ze změny entropie jako přijaté teplo, záporné, tzn. že plyn teplo nepřijímá, ale odvádí. Podle obr. (4.4) 3 je odvozené teplo $Q'_1 = -Q_2 = T_2(S_2 - S_1)$, takže tepelná účinnost tohoto cyklu je podle 4.4 (31) dána vztahem

$$\eta = \frac{Q_1 - Q'_1}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

který jsme bez odvození uvedli už v čl. 4.4.3. Práce $A' = Q_1 - Q'_1$, kterou vykoná pracovní látka při jednom Carnotově cyklu, je v diagramu $p-v$ znázorněna plochou obdélníka 1234. Stejně jako v diagramu $p-v$ je tedy i v diagramu $T-S$ plocha omezená čarou znázorňující příslušný kruhový děj úměrná práci, kterou pracovní látka při jednom oběhu vykoná nebo kterou je třeba vynaložit podle toho, jaký je smysl oběhu.

4.4.6. Druhá hlavní věta jako princip růstu entropie

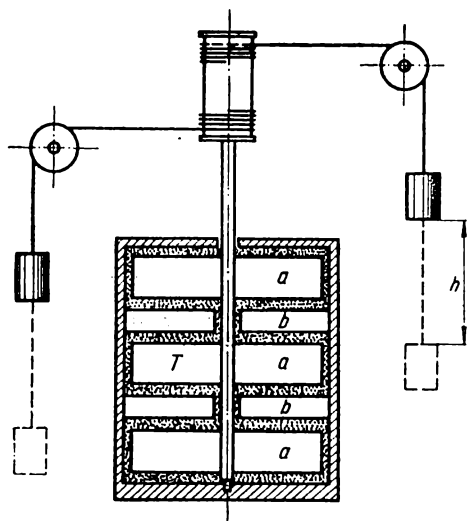
Entropie S je veličina, která má větší význam, než jaký snad plyne z výkladu v předešlém článku, neboť umožňuje analyticky formulovat také druhou hlavní větu termodynamickou, a tak kvantitativně vyjádřit nevratnost tepelných pochodů.

Abychom získali názor o souvislosti entropie s nevratností nějakého děje, vyšetřeme chování entropie při některých typicky nevratných dějích. Takovým dějem je např. přeměna mechanické energie v teplo třením.

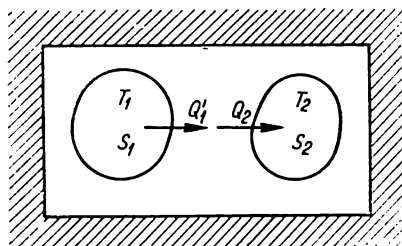
Mějme soustavu, kterou tvoří zvednuté závaží jisté potenciální energie, zařízení na přeměnu mechanické energie v teplo třením a těleso (lázeň) teploty T poměrně velké tepelné kapacity. Příkladem je zařízení na obr. (4.4) 16, v němž vzniká teplo třením otáčejících se lopatek (a) ve vodě, jejíž rotaci brání pevné lopatky (b). Jímačem tepla teploty T je celý obsah nádoby. Klesne-li závaží o výšku h a je-li brzděno třením, vykoná práci A' , při které třením vznikne teplo $\Delta Q = \Delta A'$. Toto teplo přijme těleso teploty T , jehož entropie se tak změní o hodnotu $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$, neboť předpokládáme, že těleso má velkou tepelnou kapacitu, takže se jeho teplota při bráním tepla ΔQ ztelně nezmění. Toto přivedené teplo

je kladné, a proto je také změna entropie tělesa kladná. Zjišťujeme, že při tomto nevratném ději entropie celé soustavy vzrostla.

Ukážeme dále, jak se změna entropie izolované soustavy dvou různě teplých těles 1 a 2 při přirozeném přechodu tepla z teplejšího tělesa 1 na chladnější těleso 2 [obr. (4.4) 17]. Vydá-li teplejší těleso 1 teplo $\delta Q_1'$, pak při dokonalé izolovanosti soustavy musí chladnější



Obr. (4.4) 16. Přeměna mechanické energie v teplo třením



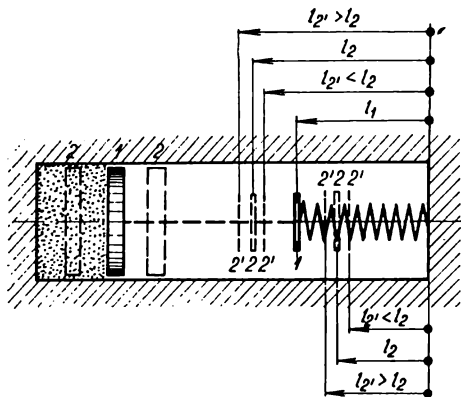
Obr. (4.4) 17. Přechod tepla v izolované soustavě

těleso 2 stejně velké množství tepla δQ_2 získat, $\delta Q_2 = \delta Q_1'$. Příslušné elementární přírůstky entropie obou těles musíme však počítat z tepel přijatých, a proto položíme $\delta Q_1' = -\delta Q_1$, kde δQ_1 je teplo tělesem 1 přijaté, které je ovšem záporné. Jsou-li T_1 a T_2 teploty obou těles, pak změna entropie prvního tělesa $dS_1 = \delta Q_1/T_1 = -\delta Q_2/T_1$ a změna entropie druhého tělesa $dS_2 = \delta Q_2/T_2$. Změna celkové entropie soustavy bude tedy podle 4.4 (38)

$$dS = dS_1 + dS_2 = \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \delta Q_2.$$

Má-li být $\delta Q_2 > 0$, tj. teplo přechází na těleso 2, pak musí být $T_2 < T_1$, takže $dS > 0$. Při přirozeném pochodu v izolované soustavě, jakým je přechod tepla z teplejšího tělesa na chladnější, tedy opět celková entropie soustavy roste. Změna entropie může být ovšem libovolně malá, jsou-li teploty těles dosti blízké. Pak nedochází prakticky v soustavě k výměně tepla a soustava je blízká teplotní rovnováze. Probíhají v ní téměř vratné děje, při nichž se entropie skoro nemění. Při vratném ději adiabatickém v uzavřené soustavě může tedy být entropie stálá, ale entropie takové soustavy nemůže nikdy klesat, má-li platit Clausiova formulace druhé hlavní věty termodynamické.

Děje probíhající v osamocených soustavách, u nichž tedy nenastává výměna tepla s okolím, jsou vždy děje adiabatické. Při těchto dějích však látka, konkrétně plyn, může konat mechanickou práci, nebo naopak mechanickou energii spotřebuje. Vyšetříme ještě chování entropie při obecném nevratném adiabatickém ději, při němž dochází k přeměně mechanické energie. Představme si proto, že izolovanou soustavu tvoří nějaký plyn uzavřený ve válci a tepelně izolovaný vzhledem k okolí a zařízení k akumulaci mechanické energie, např. závaží, které se zvedá nebo klesá, nebo pružina, která mění svou délku. Situaci má objasnit obr. (4.4) 18, na němž je vypuštěn případný mechanismus pro převod síly plynu na zásobník mechanické energie (na obrázku je to pružina) nebo obráceně, protože na něm nezáleží.



Obr. (4.4) 18. Schéma obecnějšího adiabatického děje

Předpokládejme, že plyn prodělá nevratnou adiabatickou změnu tím, že přejde z počátečního stavu 1, kdy má objem v_1 a vnitřní energii U_1 , do libovolného konečného stavu 2, v němž má objem v_2 a vnitřní energii U_2 (může to být expanze nebo komprese). Protože děj je adiabatický, je rozdíl vnitřních energií roven mechanické energii, která se buď nahromadí tím, že plyn koná práci, nebo naopak spotřebuje pro práci proti tlaku plynu. Tuto mechanickou energii můžeme vyjádřit rozdílem délek l_1 a l_2 pružiny v počátečním a konečném stavu.

Porovnejme tento děj, o němž předpokládáme, že je nevratný, s vratným adiabatickým dějem, který vede ke konečnému stavu 2', v němž má plyn rovněž objem $v_{2'} = v_2$. Konečný stav 2' bude ovšem jiný než stav 2 a oba stavy se budou lišit patrně jen vnitřní energií plynu, neboť o objemech předpokládáme, že jsou v konečných stavech stejné. Pak bude ovšem také jiná délka pružiny $l_{2'}$. Kdyby totiž i vnitřní energie $U_{2'}$ a U_2 byly stejné, byl by děj $1 \rightarrow 2$ vratný, což odporuje předpokladu, který jsme učinili. Jsou nyní dvě možnosti:

$$U_{2'} > U_2 \quad \text{a} \quad U_{2'} < U_2.$$

Přitom musí být podle principu energie a podle obr. (4.4) 18

$$l_{2'} > l_2 \quad \text{a} \quad l_{2'} < l_2,$$

protože rozdíl $l_1 - l_2$, popř. $l_2 - l_1$ je mírou vzniklé nebo spotřebované mechanické energie.

Vyšetříme nejprve první možnost. Abychom přešli ze stavu 2' do stavu 2, musíme zmenšit vnitřní energii plynu z $U_{2'}$ na U_2 při stálém objemu, což lze provést jen odebráním tepla. Zároveň je třeba odebráním teplem zkrátit pružinu z délky $l_{2'}$ na délku l_2 , tedy odebráním tepla úplně přeměnit v mechanickou energii. Podle Carathéodoryovy věty (čl. 4.4.4) mohou být však v blízkosti každého stavu dosažitelné vratnou změnou (v našem případě stav 2') jen stavy, kterých soustava může nabýt přirozenou změnou nebo do nichž vůbec nemůže dospět. Protože přeměna tepla v mechanickou energii je děj nepřirozený, znamená to, že existuje-li stav 2, nemůže existovat stav 2', v němž $U_{2'} > U_2$.

Přirozenou změnou lze v izolované soustavě ze stavu 2' dospět do stavu 2 jedině tehdy, je-li $U_{2'} < U_2$, takže také $l_{2'} < l_2$. Může se to stát tak, že pružina se prodlouží na délku l_2 a práce, kterou vykoná, využijeme na vývin tepla třením. Tímto teplem lze zvýšit vnitřní energii plynu z $U_{2'}$ na U_2 .

Vyšetřovaný nevratný adiabatický děj jsme tedy rozdělili na dva po sobě následující děje: na vratný adiabatický děj a na nevratný děj, při němž se mechanickou prací (třením) vyvinuje teplo. Změna entropie soustavy $dS = \delta Q/T$ je při vratné adiabatické změně nulová, ježto $\delta Q = 0$. Při následujícím nevratném ději mění se plyn při stálém objemu, ale jeho vnitřní energie roste, $dU > 0$, takže také $dS > 0$. Docházíme tedy zase k závěru, že při nevratném adiabatickém ději, tj. při přirozeném ději v izolované soustavě, entropie soustavy roste, zatímco při vratné adiabatické změně se nemění.

Přirozené změny, probíhající v izolovaných soustavách, mají tedy společnou vlastnost, že při nich entropie soustav, jež je součtem entropií jednotlivých jejích částí, vzrůstá. Jen v mezním případě, kdy děje probíhající v izolované soustavě, které jsou nutně adiabatické, se blíží dějům vratným, může přírůstek entropie být velmi malý, prakticky nulový. Můžeme tedy vyslovit zásadu:

V izolovaných soustavách jsou možné jen takové změny, při nichž entropie soustavy vzrůstá nebo zůstane nezměněna.

Poslední případ se vztahuje k vratným změnám, jež vyžadují, aby soustavy byly v termodynamické rovnováze. Protože se soustavy při nevratných změnách blíží rovnovážnému stavu za současného růstu entropie, dosahuje velikost entropie při rovnováze soustavy své maximální hodnoty.

Rovnováha izolované soustavy se vyznačuje maximální entropií.

Podmínky

$$4.4 \quad (41) \quad \boxed{dS \geq 0} \quad \text{nebo} \quad \boxed{S_2 - S_1 \geq 0},$$

kteří charakterizují směr přirozených dějů v izolovaných soustavách nebo jejich rovnováhu, jsou matematickou formou druhé hlavní věty, která se proto také nazývá *princip růstu entropie*.

K předešlým závěrům lze dojít také na základě Carnotovy věty (čl. 4.4.4). Podle ní je účinnost nevratného kruhového děje mezi teplotami T_1 a T_2 menší než účinnost vratného Carnotova cyklu mezi týmiž teplotami, takže nabere-li pracovní látka při nevratném ději teplo Q_1 a odvede-li teplo Q_2 , plyne z 4.4 (32), že $Q_2/Q_1 > T_2/T_1$. Vydané teplo Q_2 je vlastně záporné teplo přijaté, $Q_2 = -Q_2$, takže předešlou nerovnost lze psát ve tvaru

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0 \quad \text{nebo} \quad \sum \frac{Q_n}{T_n} < 0.$$

Neprobíhá-li kruhový děj jen při dvou teplotách T_1 a T_2 , ale při spojitě proměnlivých teplotách tak, že při okamžité hodnotě teploty T nabere látka elementární teplo δQ , přejde hořejší součet v limitě zřejmě v integrál po uzavřené cestě

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0.$$

(nevrat)

Při kruhovém ději, při němž soustava přejde z počátečního stavu A nevratnou cestou do konečného stavu B , z něhož se vrátí vratnou cestou do původního stavu A , můžeme tento integrál rozdělit na dva integrály

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} + \int_B^A \frac{\delta Q}{T} < 0 \quad \text{nebo} \quad \int_A^B \frac{\delta Q}{T} - \int_A^B \frac{\delta Q}{T} < 0.$$

$A(\text{nevrat}) \quad B(\text{vrat}) \quad A(\text{nevrat}) \quad A(\text{vrat})$

Podle definice 4.4 (37) je $\int_A^B \frac{\delta Q}{T}$ změna entropie soustavy při přechodu ze stavu A do stavu B , takže

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} - (S_B - S_A) < 0 \quad \text{nebo} \quad (S_B - S_A) - \int_A^B \frac{\delta Q}{T} > 0.$$

$A(\text{nevrat}) \quad A(\text{nevrat})$

Z této úvahy plyne důležitý poznatek, že pro obecný nevratný děj je rozdíl entropií soustavy v konečném a počátečním stavu větší než integrál $\int_A^B \frac{\delta Q}{T}$, kde δQ je elementární teplo, které soustava nabírá v jednotlivých částech nevratného děje. Kladný rozdíl $(S_B - S_A) - \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$ je tedy vhodnou mírou nevratnosti vyšetřovaného děje. Pro vratný děj je tento rozdíl roven nule.

$$4.4 \quad (42) \quad \oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0,$$

kde znaménko rovnosti platí podle 4.4 (36) pro vratný děj kruhový, je vhodným matematickým vyjádřením druhé hlavní věty termodynamické pro kruhové děje. Vyjadřuje skutečnost, že při libovolném kruhovém ději, při němž se teplo mění v mechanickou energii, nemohou být všechna δQ , která soustava přijímá, kladná, ale některá musí být také záporná. To znamená, že část tepla musí soustava někam odvádět, takže všechno nabrané teplo se nezužítkuje pro mechanickou práci. Působí-li při nevratném ději odpory tření, takže vykonaná práce je menší, a v soustavě vzniká třením teplo, je třeba k dosažení výchozího stavu odvádět více tepla než při vratném kruhovém ději. To vyjadřuje znaménko nerovnosti v 4.4 (42).

4.4.7. Entropie a pravděpodobnost

Věty o entropii v předešlém článku jsou jen matematickým vyjádřením druhé hlavní věty termodynamické a neposkytují samy bližší vysvětlení, proč vůbec druhá hlavní věta platí. Teprve Boltzmann odůvodnil a objasnil druhou hlavní větu na podkladě kinetické teorie, při čemž se ukázalo, že druhá hlavní věta je vlastně zákonem statistickým.

Z hlediska kinetické teorie teplo jeví se přirozený děj, jímž je přeměna mechanické energie v teplo, např. třením, tak, že uspořádaný pohyb molekul pohybujícího se tělesa se mění v pohyb neuspořádaný. Přesněji řečeno: Úbytek energie uspořádaných pohybů molekul se projeví stejně velkým přírůstkem energie pohybů neuspořádaných. Obrácená nepřirozená přeměna by pak znamenala neuspořádaný tepelný pohyb molekul v tělese uspořádat tak, aby rychlosti všech molekul získaly stejně velkou složku jistého směru. Je samozřejmé, že je snazší porušit uspořádání pohybů nebo poloh souhrnu velkého počtu částic než naopak uspořádat neuspořádaný (chaotický) pohyb podle předepsaných zákonů, když nemůžeme působit individuálně na každou z částic přímo. Objasněme si to názorným příkladem: Představme si sazbu stránky nějaké knihy, sestavenou z jednotlivých typů (písmen), rozloženou na dně krabice. Snadno se nám jistě podaří otřásáním krabice porušit původní sazbu stránky, ale je nemyslitelné pokračovat v této činnosti a přitom doufat, že se nám jednou objeví na dně krabice původní sazba stránky nebo alespoň některé její věty. Nelze ovšem tvrdit, že nemohou vzniknout některá (zvláště kratší) slova nebo skupiny slov, je však nesmírně málo pravděpodobné, že by vznikla určitá, předem zvolená slova, nebo dokonce věty. A tato pravděpodobnost nepředstavitelně rychle klesá s rostoucí délkou vět, neboť se rovná součinu pravděpodobností, s jakými vznikají slova v nich obsažená, které již samy o sobě jsou nepatrné.

Podobně je tomu s molekulami plynu. Každý jeho stav co do rozložení molekul v prostoru můžeme uskutečnit mnoha způsoby. Nezáleží totiž na tom, která molekula je na určitém místě, neboť záměnou dvou stejných molekul se stav nezmění. A tu je jasné, že různé stavy je

možno realizovat různým počtem individuálních rozdělení molekul, tedy různým počtem případů. Proberme nejprve jednoduchý případ.

Dejme tomu, že se plyn skládá ze dvou stejných molekul, které označme a a b . Jsou-li molekuly v nádobě krychlového tvaru, udává jejich rozmístění do obou polovin nádoby vedlejší tabulka. Rozložení I znamená, že obě molekuly jsou v levé polovině nádoby; při II. rozložení je v každé polovině po jedné molekule, což lze provést způsoby 2 a 3, jak je z tabulky zřejmé. Posléze

Rozložení		Polovina nádoby		Pravdě- podobnost
makro- stav	mikro- stav	levá	pravá	
I	1	a, b	—	1/4
II	2	a	b	2/4 = 1/2
	3	b	a	
III	4	—	a, b	1/4

při III. rozložení jsou obě molekuly v pravé polovině nádoby. Způsob rozložení molekul do jednotlivých polovin nádoby (obecně na jednotlivé vhodně zvolené prostoro-
rové a rychlostní obory) určuje *mikrostav* molekul. Mikrostavy 2 a 3 v tabulce liší se navzájem jen tím, že obě molekuly si vyměnily úlohu. Molekuly jsou však stejné, experimentálně nerozoznatelné, a proto se jejich záměnou nezmění žádná makroskopicky pozorovatelná vlastnost plynu, např. jeho hustota, kdyby molekul bylo v nádobě víc. Naproti tomu stavy s rozložením molekul I, II a III se navzájem makroskopicky liší, neboť jsou to různé stavy, není-li v jedné polovině nádoby žádná molekula a všechny jsou v druhé polovině anebo jsou-li molekuly rovnoměrně rozloženy v celé nádobě. Takové stavy, které lze na základě makroskopicky pozorovatelných vlastností, jako je např. hustota, tlak, teplota pod., navzájem rozlišit, nazývají se *makrostavy*. Týž makrostav určují tedy ty mikrostavy, které se nám jeví z makroskopického hlediska jako totožné.

Jde nyní o to, určit pravděpodobnost výskytu zvoleného makrostavu. Jako pravděpodobnost nějakého jevu nebo stavu jsme v čl. 4.3.5 definovali poměr počtu příznivých (žádoucích) případů k počtu všech (stejně) možných případů. Při rozložení dvou molekul v obou polovinách nádoby máme celkem 4 možné případy. Ptáme-li se na pravděpodobnost makrostavu I, pak počet příznivých případů je roven počtu způsobů, jimiž lze tento stav uskutečnit, a to je u tohoto stavu jenom jeden způsob. Stejně je tomu u makrostavu III, a proto je pravděpodobnosti jejich výskytu pouze 1/4. Naproti tomu makrostav II lze uskutečnit dvěma způsoby, a proto příslušná pravděpodobnost je $2/4 = 1/2$. Z tohoto jednoduchého příkladu je zřejmé, že „počet příznivých“ případů, potřebný k výpočtu pravděpodobnosti makrostavu, je určen počtem mikrostavů, které vedou k témuž makrostavu. Počet všech možných případů je naproti tomu určen počtem všech různých, teoreticky myslitelných mikrostavů látky, které jsou danými podmínkami a rozdělením prostoru na jednotlivé části (v našem příkladu na dvě stejně velké části) úplně určeny. Jejich počet je pro všechny makrostavy stejný, a proto se místo pravděpodobnosti makrostavu brává jenom počet mikrostavů příslušných danému makrostavu, jemuž je jeho pravděpodobnost úměrná. V teoretické termodynamice se proto jako *termodynamická pravděpodobnost* definuje prostě počet různých mikrostavů, které makrostavu přísluší. Při velkém počtu molekul je to vždy velmi velké číslo.

Neuspořádaný pohyb molekul v nádobě si můžeme představit jako pohyb kuliček v čtvercové krabici, kterou nepravidelně pohybuje. Kdybychom v pravidelných intervalech zjišťovali rozložení kuliček v obou polovinách, např. tak, že bychom je fotografovali, zjistili bychom, že v krabici se dvěma kuličkami je nejčastěji po jedné v obou polovinách, méně často jsou obě v levé nebo pravé polovině. Přitom by se poměr počtu zjištěných rozložení k celkovému počtu zjištění blížil číslům uvedeným v posledním sloupci tabulky tím více, čím vícekrát bychom rozložení zjišťovali a čím nepravidelnější by byl pohyb krabice. Např. při 1 000 pozorování bychom zjistili asi 250krát, že obě kuličky jsou vlevo nebo vpravo, a velmi přibližně 500krát, že je po jedné v každé polovině. Můžeme ovšem zjistit třeba také čísla 247 nebo 255 a 503 nebo 495. *Zákon velkých čísel* říká, že teprve při počtu pokusů rostoucím nade všechny meze blíží se počet nastavších případů stále více počtu pokusů násobenému pravděpodobností, že případy nastanou. Řekneme-li tedy, že při čtyřech pokusech zjistíme obě kuličky jednou v jedné z obou polovin nádoby, pak jde o *statistický průměr*, který se při malém počtu pokusů ovšem nemusí uskutečnit.

Není těžké nalézt vztah pro pravděpodobnost rozdělení libovolného počtu molekul na dvě poloviny zmíněné nádoby. Označíme-li si písmeny P a L pravou a levou polovinu, pak rozložení molekul uvedená v tabulce jsou určena druhou mocninou dvojčlenu $(P + L)$, tedy $(P + L)^2 = 1P^2L^0 + 2P^1L^1 + 1P^0L^2$. Každý člen udává jedno rozložení, tedy makrostav. Exponenty přitom určují počet molekul v polovinách P nebo L a koeficienty počet způsobů, jímž lze příslušné rozdělení uskutečnit, tedy počet mikrostavů. Snadno se přesvědčíme, že rozdělení tří molekul je určeno třetí mocninou uvedeného dvojčlenu, takže rozdělení n molekul je zřejmá dáno vztahem $(P + L)^n$. Rozvineme-li jej použitím známé binomické věty, pak každý člen $\binom{n}{k} P^{n-k} L^k$ udává jedno rozdělení. Počet způsobů, jimiž se dá uskutečnit, tedy počet příznivých

případů, určuje binomický součinitel $\binom{n}{k}$, zatímco počet možných případů je dán součtem všech binomických součinitelů, který je roven 2^n . Stav, při němž v pravé polovině nádoby je $n-k$ molekul a v levé polovině je k molekul, má tedy pravděpodobnost

$$P = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{\binom{n}{n-k}}{2^n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ze známého Pascalova trojúhelníku pro binomické součinitele plyne, že součinitele mají tím větší hodnotu, čím více se číslo k blíží $\frac{n}{2}$. Nejpravděpodobnější je proto rovnoměrné rozložení částic do obou polovin nádoby. Každý řádek Pascalova trojúhelníku začíná a končí číslem 1, tj. pro $k = 0$ a $k = n$. Nejméně pravděpodobné jsou proto stavy, kdy jedna polovina nádoby je plná částic a druhá je prázdná; příslušná pravděpodobnost $P = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

V hořejším vzorci je $n!$ počet permutací všech n částic, tedy počet všech možných přeskupení částic v celém prostoru. Protože vzájemná přeskupení k částic v jedné a téže části nádoby a stejné i přeskupení $n-k$ částic v druhé části nádoby nevedou k novým mikrostavům, je počet mikrostavů určen jen $k!(n-k)!$ -tou částí z celkového počtu $n!$ přeskupení všech částic. Rozdělíme-li proto prostor obecně na j prostorových buněk, je počet mikrostavů příslušejících makrostavu, vyznačujícímu se tím, že z celkového počtu n částic je n_1 částic v 1. buňce, n_2 v 2. buňce, n_3 v 3. buňce atd., dán vztahem

$$W = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_j!} = \frac{n!}{\prod n_i!}.$$

To je výraz pro *termodynamickou pravděpodobnost*, z něhož vychází klasická statistika. Určuje počet mikrostavů příslušejících témuž makrostavu.

Pohybuje-li se molekula nepravidelně v nádobě, pak během dlouhé doby τ pozorování projde všemi místy prostoru omezeného stěnami nádoby, který má velikost V . Ve všech stejně velkých částech ΔV prostoru bude stejně dlouhou dobu $\Delta \tau$ a najdeme ji v těchto částech se stejnou pravděpodobností. Protože s jistotou (s pravděpodobností rovnou jedné) ji zjistíme někde v celém objemu V nádoby, je pravděpodobnost p , že bude v části ΔV , zřejmá

$$4.4 \quad (43) \quad p = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \tau}{\tau}.$$

Můžeme tedy říci, že *pravděpodobnost jevu je také určena zlomkem dlouhé doby pozorování, v němž se jev uskuteční*. Se stejnou pravděpodobností budou v téže části ΔV objemu nádoby i další vzájemně na sebe nepůsobící molekuly. Pravděpodobnost P , že v téže části bude n molekul současně, je složená pravděpodobnost, která se podle čl. 4.3.5 rovná součinu pravděpodobností jednotlivých jevů, tedy

$$4.4 \quad (44) \quad P = p^n = \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^n.$$

To souhlasí s výsledkem v předchozím petitovém textu pro $\Delta V/V = 1/2$.

Při rozdělení nádoby na dvě stejně velké části jsme zjistili, že nejpravděpodobnější je rovnoměrné rozdělení molekul na obě poloviny. Snadno ukážeme, že volíme-li i velmi malou část ΔV objemu plynu, je při velkém počtu molekul nesmírně málo pravděpodobné, že tato část zůstane i krátkou dobu prázdná. Za normálních podmínek udává počet molekul v 1 cm^3 plynu Loschmidtovo číslo $n_0 = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. Jaká je pravděpodobnost, že v objemu $V = 1 \text{ cm}^3$ nebude část $\Delta V = 1 \text{ mm}^3$ obsazena žádnou molekulou, tzn. že všechny molekuly se zdržují v objemu $V - \Delta V$? Podle 4.4 (43) dostaneme nepředstavitelně malé číslo

$$P = \left(\frac{V - \Delta V}{V}\right)^{n_0} = \left(1 - \frac{1}{10^3}\right)^{1,7 \cdot 10^{19}} = 10^{-1,2 \cdot 10^{16}},$$

rovné převrácené hodnotě čísla, jehož řád je 10^{16} . Kdyby měl jev trvat $\Delta\tau = 1$ s, ukázal by se jednou v době $\tau = 10^{1,2 \cdot 10^{16}}$ s a tato doba by se znatelně nezkrátila, kdybychom se spokojili s nejmenším, dnešními prostředky ještě změřitelným časovým intervalem $\Delta\tau$. Proti době τ je bezvýznamné i stáří zemské kůry, které se podle nedávno objevených hornin odhaduje na 5 miliard let, což je asi 10^{17} sekund. Z tohoto příkladu je zřejmé, že při velkém počtu molekul nejsou sice větší odchylky od jejich rovnoměrného rozdělení zásadně vyloučené, jsou však mizivě málo pravděpodobné; příslušná pravděpodobnost velmi rychle klesá s rostoucím počtem molekul.

V rovnovážném stavu má plyn přirozeně všude touž hustotu. Spojíme-li to s poznatkem, že rovnoměrné rozložení molekul má maximální pravděpodobnost, jsme vedeni k závěru, že *rovnovážný stav je takový stav, který je vyznačen maximální pravděpodobností*. Není myslitelné, že by plyn sám od sebe svůj rovnovážný stav měnil, protože by tím vznikaly stavy méně pravděpodobné. Takové stavy však mohou vzniknout, jestliže zásahem do soustavy rovnováhu porušíme. V tom okamžiku nastane samovolná změna, která se vyvíjí jen jedním směrem, a to vždy od počátečního méně pravděpodobného stavu přes stavy se stále rostoucí pravděpodobností do stavu nejpravděpodobnějšího, jimž je nový rovnovážný stav. Při výpočtu bychom ovšem museli přihlížet nejen k prostorovému rozložení molekul, ale také k rozdělení jejich rychlostí podle Maxwellova zákona. Tím je odůvodněna jednosměrnost přirozených dějů v přírodě a jejich nevratnost, protože při obráceném směru by se plyn dostával do stavů se stále menší a menší pravděpodobností.

Srovnáme-li to s poznatkem odvozeným pro entropii z druhé hlavní věty, že rovnováha izolované soustavy se vyznačuje maximální entropií, vnucuje se nám domněnka, že entropie nějak souvisí s pravděpodobností stavu plynu. Touto základní otázkou se zabýval teoreticky Boltzmann a došel k přesvědčení, že *pro všechny látky je entropie funkcí pravděpodobnosti stavu*, což ovšem nelze v celé obecnosti dokázat. Na základě této domněnky, která se nazývá *Boltzmannův princip*, je možno tuto funkci opravdu určit. Označme tuto funkci

$$4.4 \quad (45) \quad S = f(P)$$

a představme si, že máme dvě látky, jejichž stavy mají pravděpodobnosti P_1 a P_2 a jejichž entropie příslušné těmto stavům jsou S_1 a S_2 . Je však možno pokládat souhrn těchto dvou látek rovněž za termodynamickou soustavu a určit celkovou entropii této soustavy, která podle 4.4 (38) je rovna

$$4.4 \quad (46) \quad S = S_1 + S_2.$$

Pokládáme-li obě látky za jedinou soustavu, můžeme se také ptát po pravděpodobnosti jejího stavu, který je definován tím, že první látka je ve stavu o entropii S_1 a druhá současně ve stavu o entropii S_2 . Pravděpodobnost tohoto stavu je zřejmě opět složená pravděpodobnost, vyjádřená součinem

$$P = P_1 P_2.$$

Je-li Boltzmannův princip správný, musí ve smyslu našeho označení 4.4 (45) platit současně vztahy

$$S = f(P) = f(P_1 P_2), \quad S_1 = f(P_1), \quad S_2 = f(P_2)$$

a hledaná funkce musí mít podle 4.4 (46) vlastnost vyjádřenou rovnicí

$$f(P_1 P_2) = f(P_1) + f(P_2).$$

Na první pohled je zřejmé, že příslušnou vlastnost má funkce $C \ln P$, a proto položíme

$$4.4 \quad (47) \quad S = C \ln P + K,$$

kde jsme připojili další konstantu K , ježto entropie je zjištěna až na neurčitou konstantu.

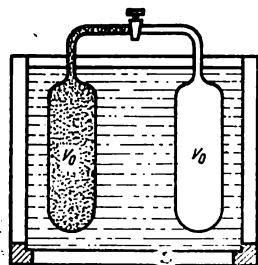
Zbývá určit obě konstanty C a K . Napišeme-li rovnici 4.4 (47) pro libovolný jiný stav vyšetřované látky, který má pravděpodobnost P_0 ,

$$S_0 = C \ln P_0 + K,$$

dostaneme pro změnu entropie

$$4.4 (48) \quad S - S_0 = C \ln \frac{P}{P_0}.$$

Zbývající konstantu C určíme na základě klasického pokusu Gay-Lussacova, jímž ukázal, že vnitřní energie plynu závisí jen na teplotě a nezávisí na jeho objemu (u skutečných plynů to platí jen přibližně).



Obr. (4.4) 19.
Gay-Lussacův pokus

Představme si dvě nádoby stejných objemů v_0 spojené trubicí s kohoutkem a uložené v kalorimetru za účelem tepelné izolace [obr. (4.4) 19]. Gay-Lussac naplnil jednu z takových nádob plynem a druhou co nejlépe vyčerpával. Když otevřel kohout, plyn vyplnil obě nádoby, ale teplota se nezměnila. Plyn se rozpínal do vakua, a proto práci nekonal ($A' = 0$). Také k výměně tepla nedošlo ($Q = 0$), a proto podle první hlavní věty zůstala i vnitřní energie plynu nezměněna ($U = U_0$), ačkoliv objem vzrostl na dvojnásobný. Z toho Gay-Lussac usoudil, že U závisí jen na T .

Najdeme změnu entropie, která nastane při takovém ději, jestliže plynu je právě jeden kilomol. Dosadíme-li do 4.4 (34) $T = T_0$ a $v = 2v_0$, pak

$$4.4 (49) \quad S - S_0 = C_v \ln \frac{T_0}{T_0} + R \ln \frac{2v_0}{v_0} = R \ln 2.$$

Podle 4.4 (44) je poměr pravděpodobnosti P konečného rovnovážného stavu a pravděpodobnosti P_0 nerovnovážného stavu, který vznikne v okamžiku otevření kohoutu,

$$4.4 (50) \quad \frac{P}{P_0} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^N} = 2^N,$$

je-li N počet molekul v kilomolu plynu, takže srovnáním vztahů 4.4 (48) a (49) dostaneme Boltzmannovu konstantu

$$C = \frac{R}{N} = k.$$

Rovnice 4.4 (48), vyjadřující vzájemný vztah mezi entropií soustavy a pravděpodobností jejího stavu, nabývá tedy konečného tvaru

$$4.4 (51) \quad S - S_0 = k \ln \frac{P}{P_0}.$$

Děj probíhající při Gay-Lussacově pokusu je nevratný, neboť entropie při tomto adiabatickém ději podle 4.4 (49) stoupne. Chápeme dobře, že se plyn nemůže sám od sebe vrátit do první nádoby, nikoli proto, že by tento děj byl zásadně nemožný, ale proto, že je mizivě málo pravděpodobný, jak plyne z výrazu 4.4 (50). Nepravděpodobnost tohoto děje záleží jediné v nesmírné velikosti Avogadrova čísla N . Musíme tedy připustit, že při velmi malém množství molekul by nebyla vyloučena možnost, aby se plyn po nesmírně krátkou dobu udržel ve stavu odlišném od stavu nejpravděpodobnějšího, při němž je počet molekul v obou nádobách stejný.

4.4.8. Třetí hlavní věta

Třetí hlavní věta termodynamická se týká chování látek v samé blízkosti absolutní nulové teploty a umožňuje určit absolutní hodnotu entropie, pro kterou z druhé hlavní věty termodynamické plynou jen rozdíly.

Experimentálním výzkumem látek při velmi nízkých teplotách se zjistilo, že se některé jejich vlastnosti v blízkosti absolutní teplotní nuly nemění s teplotou a že jisté fyzikální a fyzikálně chemické veličiny jsou při velmi nízkých teplotách prakticky rovny nule. Je to např. měrné teplo, elektrický odpor vodičů, teplotní roztažnost. Nejsou-li vlastnosti látek v samé blízkosti absolutního bodu mrazu závislé na teplotě, nemůžeme již vnějším působením snižovat jejich teplotu, takže třetí hlavní větu lze podle Plancka vyslovit takto:

Čistou pevnou látku nelze konečným pochodem ochladit na absolutní nulovou teplotu.

V blízkosti absolutní teplotní nuly zamrzává zřejmě tepelný pohyb molekul, protože teplota je přece makroskopickým projevem tohoto pohybu, takže nerovnovážné stavy (např. ne zcela rovnoměrné rozložení částic) mohou libovolně dlouho existovat. Z toho lze soudit, že pravděpodobnost všech stavů ležících v blízkosti absolutní nuly je stejná. Je-li tedy $P = P_0$, plyne z Boltzmannovy rovnice 4.4 (51) $S - S_0 = k \ln (P/P_0) = 0$, tzn. že entropie všech látek je v blízkosti absolutní nuly neproměnná a je možno položit ji pro $T = 0$ rovnou nule. Poněvadž tím je dána hodnota entropie pro jeden stav, lze z ní počítat její hodnotu i pro všechny jiné stavy. Pokud jde o nehomogenní látky (směsi), je věc komplikována přírůstkem entropie, vzniklým smíšením látek; jde-li však o plyny, není tento problém důležitý, neboť lze očekávat, že při absolutní nule není žádná látka v plynném skupenství.

Všechny důsledky třetí hlavní věty termodynamické nebyly ještě potvrzeny, ale řada jevů, které s ní souvisí, byla již podrobně studována teoreticky i pokusně. Experimentálně zjištěný průběh molekulových tepel v oboru nízkých teplot byl v souhlase s třetí větou vyložena kvantovou teorií (čl. 7.5.1), také uspokojivá teorie tzv. *supravodivosti kovů* byla už vypracována. Zde podáme o supravodivosti jen stručný přehled pokusných výsledků.

Holandský badatel Kammerling-Onnes, který v Leidenu vybudoval laboratoř pro nízké teploty, zkoumal vodivost kovů v oboru teplot 1,5 až 5 °K. Zjistil překvapující jev, že při teplotě několika stupňů nad absolutní nulou zmizel prakticky odpor některých kovů. Odpor rtuť klesl při teplotě 4 °K až na milióntinu odporu, který měla rtuť při teplotě o několik stupňů vyšší, odpor cínu byl prakticky nulový za teplot pod 3,7 °K, talia pod 2,5 °K a odpor olova dokonce již při teplotách nižších než 7,2 °K. U některých kovů se mu však nepodařilo za teplot, kterých dosáhl, dojít k suprařidivému stavu (např. u Cu, Cd, Pt, Au, Fe).

Pro zajímavost uvádíme, že v olověném prstenci, ve kterém byl vzbuzen indukci proud 320A, tekla elektrický proud i tehdy, když se odstranil zdroj napětí. Zmenšoval se jen zvolna (za 30 min asi o 1 % původní hodnoty), a proto procházel proud olověným drátem, udržovaným na teplotě tekutého hélia, ještě po dobu několika dnů po odstranění zdroje napětí. V tabulce (4.4) II jsou pro řadu kovů uvedeny absolutní teploty T_c , při nichž přecházejí kovy do suprařidivého stavu.

Podle třetí hlavní věty můžeme tedy absolutní nulovou teplotu považovat za mezní teplotu, k níž se sice můžeme těsně přiblížit, které však dosáhnout nemůžeme.

Od možnosti dosáhnout teoreticky nejnižší teploty jsme tedy asi stejně vzdáleni jako od možnosti dosáhnout nekonečně vysoké teploty, neboť ve směru stoupající teploty neexistuje

Tabulka (4.4) II

Teploty, při nichž se některé kovy stávají suprařidivými

Kov	T_c	Kov	T_c	Kov	T_c
Hf	0,3	Al	1,14	Hg	4,16
Cd	0,6	Tb	1,33	Ta	4,27
Zr	0,7	Tl	2,47	V	4,29
Ga	1,07	In	3,38	Pb	7,2
Ti	1,13	Sn	3,72	Zn	7,86
				Nb	9,22

prozatím nějaké omezení, ačkoli byly vysloveny různé teorie o nejvyšší dosažitelné teplotě. Na tuto skutečnost však nepoukazuje ani Kelvinova teplotní stupnice, ani stupnice Celsiova, jíž užíváme. Bylo by proto správnější užívat aspoň v oboru nízkých teplot logaritmické teplotní stupnice, na níž by teplotní stav, označený na Kelvinově stupnici nulou, měl hodnotu $-\infty$. Logaritmická stupnice by pak sama v sobě zahrnovala nedosažitelnost tohoto teplotního stavu.

4.5. Fázové přeměny

4.5.1. Fázové pravidlo

Podle předešlého výkladu nazýváme termodynamickou soustavou soubor částic, vymezený nějakým objemem V . V nejjednodušším případě obsahuje taková soustava molekuly jenom jednoho typu, v obecnějším případě se skládá z molekul různého typu. Každý typ molekul představuje jistou chemicky čistou látku. Navzájem nezávislé chemicky čisté látky obsažené v termodynamické soustavě nazýváme jejími *složkami*; jejich počet v soustavě označujeme písmenem s . Je to tedy počet různých typů molekul v soustavě, které na sebe chemicky nepůsobí.

Každý soubor molekul, tedy látka, může existovat v různých modifikacích, z nichž každá je fyzikálně stejnorodá a liší se od ostatních modifikací. Např. pevný, kapalný a plynný stav téže látky jsou její tři modifikace, také různé krystalické stavy téže látky představují různé modifikace. Např. kosočtverečná a jednoklonná síra jsou různé modifikace síry v pevném stavu, lišící se jak navzájem, tak i od dalších dvou modifikací, jimiž jsou síra v kapalném a plynném stavu. V soustavě o dvou složkách H_2O a $NaCl$ jsou možné modifikace: led, pevná sůl, roztok a vodní pára. Takovéto modifikace se obecně nazývají *fáze*. Fázi tedy rozumíme stejnorodý (homogenní) soubor molekul, který je v příslušné soustavě ostře ohraničen od jiných souborů molekul, jež tvoří jiné fáze (ostré ohraničení je ovšem míněno z hlediska makroskopického). Přitom nemusí být fáze chemicky čistá látka, tedy soubor molekul jednoho a téhož typu, a může se skládat i z molekul různého typu (např. roztok, směs plynů apod.). Počet navzájem odlišných fází přítomných v termodynamické soustavě označujeme písmenem f .

Soustava se tedy obecně skládá z s složek, jež tvoří f fází. Např. soustava skládající se ze dvou různých typů molekul, které na sebe vzájemně nepůsobí (tedy ze dvou různých plynů v nějaké nádobě), má dvě složky ($s = 2$), které však pro dokonalou mísitelnost plynů tvoří jenom jednu fázi ($f = 1$), a to plynnou. V takové soustavě nejsou dva soubory molekul, které jsou fyzikálně nějak ohraničeny, ale jenom jeden soubor. Naproti tomu v soustavě o jedné složce ($s = 1$) mohou být přítomny dvě fáze ($f = 2$), např. tvoří-li soustavu jenom voda, může být částečně v pevném a v kapalném stavu čili přítomny jsou dva soubory molekul jednoho typu, které jsou navzájem ohraničeny. Přitom nezáleží na tom, zda pevná fáze tvoří souvislý celek nebo oddělené krystalky. Dvě omezeně mísitelné kapaliny ($s = 2$) při vzájemném nasycení svých roztoků vytvářejí dvě oddělené kapalně fáze ($f = 2$). Podobně roztok nasycený pevnou látkou a přebytkem pevné látky ($s = 2$) se skládá z fáze pevné a kapalně ($f = 2$). Zahrneme-li do soustavy i páru kapaliny, v níž je pevná látka rozpuštěna, přibude další fáze plynná ($f = 3$). Tvoří-li soustavu pouze jediná fáze, která má v každém místě stejné vlastnosti a stejné složení, nazýváme soustavu *homogenní*. Soustava o více fázích se jmenuje *heterogenní*.

Rovnováha soustavy je takový její stav, při němž se soustava sama od sebe nemění, tj. nepřibývá ani neubývá žádné z jejích fází. Fáze, které v rovnovážném stavu mohou být vedle sebe libovolně dlouho přítomny, nazýváme pak *koexistujícími*. Rovnováha soustavy vyznačuje se tedy neomezenou koexistencí fází, z nichž se skládá.

Jak jsme poznali v předešlé kapitole 4.4, lze rovnovážný stav soustavy jakožto celek popsat třemi makroskopickými parametry, jimiž jsou stavové veličiny tlak p , teplota T

a objem V , nebo měrný objem v . Rovnováha ovšem vyžaduje, aby v každém místě soustavy byla stejná teplota a tlak, tzn. že tělesa obklopující soustavu musí na ni působit tímž tlakem jako soustava na ně a musí mít také stejnou teplotu, jako má soustava. V homogenní soustavě je pak v každém místě také též měrný objem v a táž hustota ρ , zato v heterogenní soustavě tomu tak nebude, protože hustoty různých fází se obecně navzájem liší (např. hustota kapalně vody je za obvyklých poměrů podstatně větší než hustota vodní páry). Proto i průměrný měrný objem soustavy bude nejen závislý na tlaku a teplotě, ale také na množství jednotlivých fází, které jsou přítomny. Fáze, které jsou fyzikálně stejnorodé látky, se samy o sobě řídí svými stavovými rovnicemi, tzn. je-li dán tlak a teplota soustavy, pak měrné objemy a hustoty koexistujících fází jsou jednoznačně určeny, avšak pro heterogenní soustavy jako celek nelze sestavit jedinou stavovou rovnici obvyklého významu; teplotou a tlakem není jednoznačně určen průměrný měrný objem nebo celý objem soustavy, tzn. že rovnovážný stav heterogenní soustavy (na rozdíl od homogenní soustavy) na objemu zřejmě vždycky nezáleží, a nezáleží proto ani na poměrném množství přítomných fází, pokud jejich počet je stálý. Vyšetřeme nejprve, kolik fází může být vůbec přítomno v obecné soustavě o více složkách.

Stav soustavy jako celek se zřetelem k jejímu okolí charakterizují dvě proměnné veličiny (parametry), a to teplota a tlak; k nim přistupují další parametry, vyjadřující rozdělení přítomných složek na jednotlivé fáze. Těmito vnitřními parametry jsou zajisté poměry hmotností (koncentrace) složek, tvořících jistou fázi.

Při s složkách je složení každé fáze určeno $(s - 1)$ poměry hmotností těchto složek. Je-li celkem f fází, je těchto poměrů $(s - 1)f$, což je zároveň počet vnitřních parametrů soustavy. Přičteme-li k nim i dva parametry, které určují stav soustavy jako celek, máme celkem $(s - 1)f + 2$ parametrů. Rovnovážný stav soustavy vyžaduje, aby poměrné rozdělení s složek na f fází bylo stálé; musí tedy existovat jisté vztahy mezi parametry určujícími stav soustavy (jistě rovnice), zvané *podmínky rovnováhy*, které určují, v jakém poměru se každá složka rozloží na jednotlivé fáze. Pro každou složku je tedy třeba $(f - 1)$ podmínek, a protože všech složek je s , určuje rozložení těchto s složek na f fází celkem $s(f - 1)$ podmínek rovnováhy. Je zřejmé, že těchto podmínek nemůže být více, než je počet parametrů, které určují stav soustavy, tedy $s(f - 1) \leq (s - 1)f + 2$ čili

$$f \leq s + 2.$$

To je důležitý výsledek, který říká, že v termodynamické soustavě nemůže za rovnováhy počet f fází překročit o více než dvě počet s navzájem nezávislých složek. Rovnítko v uvedeném vztahu znamená, že rovnovážný stav soustavy je jednoznačně určen, tzn. je-li počet fází roven právě počtu složek zvětšenému o dvě, mohou fáze koexistovat jenom při zcela určitých hodnotách parametrů, určujících stav soustavy. Je-li však počet f přítomných fází menší, je také počet $s(f - 1)$ rovnovážných podmínek menší než počet $(s - 1)f + 2$ parametrů, které určují rovnovážný stav soustavy, takže

$$v = (s - 1)f + 2 - s(f - 1)$$

parametrů se zřejmě může navzájem nezávisle měnit, aniž se změní počet f fází. Změny v parametrů mají ovšem za následek také změny ostatních parametrů, které však již nejsou navzájem nezávislé, ale jsou změnami v veličin jednoznačně určeny. Je zřejmé, že v soustavě, v níž $f < s + 2$, existuje jistá volnost ve volbě v parametrů, tzn. že soustava může být v rovnováze při různých hodnotách v parametrů, které můžeme volit nebo vnějším působením měnit, aniž se počet fází změní. Počet v navzájem nezávislých veličin (parametrů), které lze měnit při zachování počtu fází v soustavě, nazývá se *počet stupňů volnosti* termodynamické soustavy. K dvěma stupňům volnosti, které může mít soustava jako celek a které přísluší teplotě a tlaku, přistupuje tedy u vícetříčkových soustav ještě možnost volby koncentračních poměrů jejich složek.

Z hořejší rovnice plyne pro celkový počet v stupňů volnosti soustavy o s složkách, tvořících f fází, jednoduchý vztah

4.5 (1)

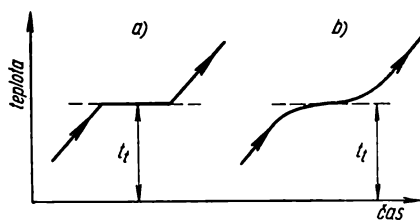
$$v = s - f + 2,$$

který se nazývá *Gibbsovo fázové pravidlo*.

Soustavy, jejichž počet stupňů volnosti je roven nule, nazýváme *invariantními*. Takovou soustavu tvoří např. tři fáze jedné a téže složky ($v = 1 - 3 + 2 = 0$); mohou být ve vzájemné rovnováze jen při zcela určitém tlaku a teplotě. Tento stav se nazývá *trojný bod*. Soustavu o jednom stupni volnosti nazýváme *monovariantní* (*univariantní*), o dvou stupních volnosti *bivariantní* (*divariantní*) atd. Monovariantní je např. soustava, kterou tvoří jedna složka ve dvou fázích. Může to být třeba kapalina a její pára. Ze 4.5 (1) vychází $v = 1 - 2 + 2 = 1$, takže jenom jednu veličinu, např. teplotu, můžeme měnit, ale pak každé teplotě přísluší již zcela určitý tlak soustavy. Kdybychom změnili navzájem nezávisle dvě proměnné, teplotu i tlak, pak by jedna z fází ubýla a vznikla by soustava bivariantní, u níž lze teplotu a tlak navzájem nezávisle měnit.

4.5.2. Tání a tuhnutí

Pozorujme chování chemicky čisté látky, jejíž pevnou fází zahříváme. Látka tvoří soustavu o jedné složce a jedné fázi, takže podle fázového pravidla má $v = 1 - 1 + 2 = 2$ stupně volnosti. Látka je vystavena vnějšímu atmosférickému tlaku, čímž jeden stupeň volnosti je vyčerpán, zbývající druhý udává, že další stavová veličina — teplota — se může libovolně měnit. Skutečně pozorujeme při zahřívání,



Obr. (4.5) 1. Průběh teploty při tání

že teplota látky s časem roste. Je-li zahřívání stejnoměrné a dosti pomalé (např. ve vodní lázni) a nepřehlídíme-li k závislosti měrného tepla látky na teplotě, roste teplota látky prakticky úměrně s časem [obr. (4.5) 1a]. Při daném tlaku může tedy pevná fáze látky existovat za různých teplot, které ve směru klesající teploty nejsou nijak omezeny, zato ve směru rostoucích teplot omezení existuje. Při jisté teplotě začne pevná fáze přecházet ve fázi kapalnou. Jakmile malá část pevné fáze zkapalní, je v soustavě o jednu fázi navíc, takže počet stupňů volnosti soustavy klesne na jeden, $v = 1 - 2 + 2 = 1$, který je však už vyčerpán tlakem soustavy. Proto se teplota soustavy už nemůže nezávisle na tlaku měnit, nýbrž danému tlaku přísluší zcela určitá teplota, která se nazývá *teplota tání* nebo *bod tání* t_t . Je to teplota, při které mohou za daného tlaku koexistovat pevná a kapalná fáze jedné a téže látky. Dodáváme-li soustavě dále teplo, nemění se její teplota do okamžiku, kdy všechna látka roztaje. Pak ubude v soustavě jedna fáze a počet stupňů volnosti soustavy zase stoupne o dvě. Teplota jediné kapalně fáze se může zase nezávisle na tlaku měnit, jak je na obr. (4.5) 1a naznačeno.

Při odnímání tepla pozorujeme obrácený děj. Teplota nejprve klesá až k teplotě tuhnutí, jež pro čisté látky se přesně rovná teplotě tání. Po dobu tuhnutí se teplota soustavy nemění a začne zase klesat teprve tehdy, když všechna látka ztuhla.

Stálost teploty tání nebo tuhnutí po dobu, kdy přibývá množství jedné fáze a ubývá množství druhé fáze, je důležitou kontrolou chemické čistoty dané látky. Je-li látka znečištěna menším množstvím jedné nebo více látek, je časový průběh teploty v oboru fázové přeměny dán zpravidla čarou poněkud zaoblenou, jejíž střední část není přesně vodorovná ani přesně přímková [obr. (4.5) 1b]. Za bod tání t_t lze vzít střední teplotu v místě nejmenšího spádu.

Přerušíme-li v jistém okamžiku, kdy už jsou pohromadě dvě fáze látky, dodávání tepla a soustavu izolujeme, nebude se soustava sama od sebe měnit, tzn. nebude přibývat ani ubývat žádné z obou fází. Dodáváme-li dále teplo, přibývá kapalné fáze a ubývá pevné fáze, odnímáme-li teplo, je tomu právě obráceně. Teplota se přitom nemění, takže dodané teplo spotřebuje soustava zřejmě ke vzniku jistého množství kapalné fáze a odebrané teplo naopak uvolňuje, vznikne-li z kapalné fáze jisté množství pevné fáze. Těmto teplům říkáme *skupenské teplo tání a tuhnutí* Q_t . Je-li třeba tepla Q_t , aby pevná fáze hmotnosti m se přeměnila za stálé teploty tání v kapalnou fázi téže hmotnosti, pak podíl

$$4.5 (2) \quad i_t = \frac{Q_t}{m}$$

je *měrné skupenské teplo tání*. Udává číselně teplo potřebné k fázové přeměně 1 kg látky. Stejně je definováno i *měrné skupenské teplo tuhnutí*. Dělíme-li skupenské teplo množstvím přeměněné fáze v kilomolech, dostaneme tzv. *kilomolové skupenské teplo* L_t , které číselně udává teplo potřebné k fázové přeměně 1 kmolu látky. Je-li M kilomolová hmotnost látky, je mezi kilomolovým a měrným skupenským teplem vztah $L_t = M i_t$. Měrná nebo kilomolová skupenská tepla tání a tuhnutí jsou za týchž podmínek stejně velká.

Při fázové přeměně změní se hustota a měrný objem látky. Při změně objemu koná soustava práci proti vnějšímu tlaku, takže část skupenského tepla se spotřebuje k vykonání této práce. Při tání je však tato práce nepatrná, takže skupenské teplo se v podstatě neprojevuje jinak než právě jen změnou skupenství (teplota je stálá), a proto se mu dříve říkalo *teplo utajené (latentní)*.

Protože soustava obou fází má jeden stupeň volnosti, mohou v ní obě fáze koexistovat za různých tlaků p . Teprve je-li dán tlak soustavy, je teplota tání jednoznačně určena. Jaký vliv má zvýšení tlaku o dp na teplotu tání, vyjadřuje *Clapeyronova rovnice* (odvodíme ji v dalším článku)

$$dT = \frac{[T_t(v_2 - v_1)]}{l_t} dp,$$

v níž dT je změna teploty tání, udané zde jako absolutní teplota T_t , a v_1 , v_2 jsou měrné objemy pevné a kapalné fáze. Táním se zpravidla objem zvětšuje, takže pevná fáze, majíc větší hustotu, klesá v kapalně fázi ke dnu. Zvětšení objemu činí např. u olova 3,4 %, u kadmia 4,7 %, u rtuti 3,7 %. Je-li $v_2 > v_1$, pak se zvětšením tlaku bod tání zvyšuje, např. u olova o 0,008 °C, u zinku o 0,006 °C a u kadmia o 0,003 °C při zvýšení tlaku o 1 at.

Některé látky při tání však svůj měrný objem naopak zmenšují a při tuhnutí zvětšují, takže pevná fáze má menší hustotu než kapalina a plave na kapalně fázi. Sem patří voda, která tuhne zvětší svůj objem o 9,1 %. Průvodním jevem tuhnutí vody je např. roztržení potrubí nebo nádob naplněných vodou, rozrušování skal a zdiva mrazem apod. Podobně se chová vizmut, antimon, šedá litina a některé slitiny. Je-li měrný objem kapalné fáze menší než měrný objem pevné fáze, $v_2 < v_1$, pak $dT < 0$ a látky při vyšším tlaku tají již za nižší teploty.

U vody se o snížení bodu tání při větším tlaku přesvědčíme pokusem s regulací ledu, při tvoření sněhových koulí, táním ledu pod bruslemi, s čímž souvisí změna smykového tření v mnohem menší tření kapalinové, sesouváním ledovců apod. Pokus s *regulací* (tj. znovuzmrznutím) můžeme provést s ledovým kvádrem, který na obou koncích podepřeme. Uprostřed délky ovíneme kvádr smýčkou z tenkého drátu, na nějž pověsíme větší závaží (asi 10 kg). Při dosti velkém měrném tlaku, kterým působí drát na kvádr, led pod drátem taje, drát se pomalu zařezává do ledu, který však nad drátem opět mrzne. Drát tak projde celým kvádrem, jenž zůstane prakticky neporušen.

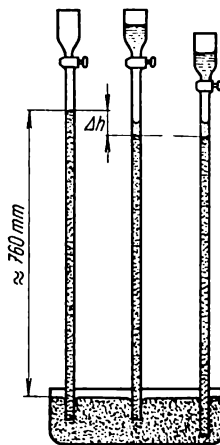
Kapalná fáze některých látek může existovat i pod bodem tuhnutí; říkáme pak, že kapalina je *přechlazena*. Např. vodu zbavenou vzduchu lze ochladit až na -10 °C i více. Jakmile

však do přechlazené kapaliny vhodíme krystalek pevné fáze, začne kapalina ihned tuhnout, při čemž se uvolněným skupenským teplem zahřívá na teplotu tuhnutí, příslušnou danému tlaku. Analogickým jevem je *přehřátí* pevných látek, které bylo pozorováno na naftalenu ($C_{10}H_8$).

Tabulka (4.5) I

Teplota tání a měrné skupenské teplo tání některých látek při tlaku 760 torrů

Látka	Teplota tání [°C]	Měrné skupenské teplo tání [kcal · kg ⁻¹]
rtuť	—38,87	2,7
voda	0,0	79,7
cin	231,9	14,5
olovo	327,3	5,92
zinek	419,5	24,5
hliník	660,1	94,6
stříbro	960,8	25,1
zlato	1 063,0	15,4
nikl	1 453	71,6
platina	1 769	24,1
wolfram	3 380	45,8



Obr. (4.5) 2. Určení tlaku nasycené páry v Torricelliově trubici

4.5.3. Vypařování a kondenzace

Máme-li vyšetřovat přeměnu kapalně fáze v plynnou, musíme volit takové podmínky, aby žádné jiné látky ani atmosferický vzduch nepůsobily na vyšetřovanou soustavu. Kapalinu proto musíme vpravit do vzduchoprázdneho prostoru. Nejlépe se k tomu hodí vakuum v Torricelliově trubici, která je na horním konci opatřena nálevkou [obr. (4.5) 2]. Rtuť v trubici vystoupí do výšky h , která je úměrná barometrickému tlaku vzduchu ($h \approx \approx 760$ mm). Vpravíme-li pomocí kohoutku do vakua nad rtuťovým sloupcem jisté množství zkoumané kapaliny z nálevky, pozorujeme, že rtuťový sloupec klesne o hodnotu Δh , která je mnohem větší, než by příslušelo váze vpravené kapky. Je zřejmé, že část kapalně fáze se zde změnila ve fázi plynnou a že v prostoru nad rtuťovým sloupcem koexistují pak dvě fáze jedné složky. Tato soustava má podle Gibbsova fázového pravidla jeden stupeň volnosti, tzn. že rovnováha mezi kapalinou a párou může nastat při kterékoliv teplotě t , ale pak už je rovnovážný tlak p určen. Při dané teplotě soustavy shodné s teplotou okolí je jeho měřítkem právě klesnutí Δh rtuťového sloupce (po příslušných opravách).

Pára, která je v rovnováze se svou kapalinou, nazývá se *nasycená* nebo *sytá* a její tlak se jmenuje *tlak nasycené páry* (dříve se říkalo napětí neboli tenze nasycené páry). Že tento tlak závisí jen na teplotě, a nikoli také na objemu, jak by plynulo ze stavové rovnice, kdyby plynná fáze byla jedinou fází v prostoru, poznáme snadno, vpravíme-li do prostoru v Torricelliově trubici další a další kapky kapaliny, o něž se zmenší celkový objem plynné fáze, nebo ponoříme-li trubici hlouběji do spodní nádoby. Snížení Δh rtuťového sloupce se nezmění (nehledíme-li na vliv váhy kapek). Má-li tedy pára, která je v rovnováze s kapalinou, stále stejný tlak a stejnou teplotu, má podle příslušné stavové rovnice i stálý měrný objem a stálou hustotu, již je úměrný počet molekul v objemové jednotce. Zmenší-li se celkový objem nasycené páry, musí proto jistý počet molekul přejít v kapalnou fázi, má-li zůstat počet molekul v objemové jednotce páry stejný, tj. pára zčásti zkapalní (kondenzuje). Zvětší-li se naopak celkový objem páry, musí příslušný úbytek molekul v objemové

jednotce doplnit na stálý počet další molekuly z kapaliny, kapalina se vypařuje. Pára je tedy *sycena* kapalinou, odtud její název.

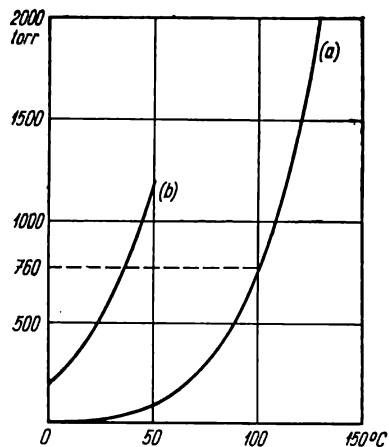
Změny objemu dosáhneme změnou vnějšího tlaku např. na píst ve válcové nádobě. Je-li vnější tlak větší než tlak nasycené páry v nádobě, který přísluší dané teplotě, pára zkapalní, až zbude jen kapalná fáze. Při menším vnějším tlaku vypaří se kapalina úplně. Nejsou-li při rostoucím objemu páry k dispozici už žádné molekuly kapaliny, které by ji sytily, bude se hustota páry zmenšovat a měrný objem zvětšovat, takže ani tlak nebude stálý, ale nastaví se podle daného objemu a teploty ve shodě se stavovou rovnicí. Pára, která není ve styku s příslušnou kapalinou a jako jediná fáze v prostoru má dva stupně volnosti, nazývá se *přehřátá pára*. Za dané teploty je její tlak vždy menší než tlak páry nasycené, jak se snadno přesvědčíme, vpravíme-li do vakua Torricelliho trubice tak malé množství kapaliny, že se úplně vypaří. Zjistíme, že snížení Δh rtuťového sloupce je v tomto případě menší, než je-li za téže teploty přítomna i kapalná fáze.

Samy páry mohou mít také větší tlak, než je tlak nasycených par za téže teploty; nazývají se *přesycené*. Nesmějí však v nich být tzv. *kondenzační jádra*, tj. drobná zrnka prachu nebo elektricky nabitá částice, na nichž se páry začínají srážet. Jakmile v nich vznikne jediná kapka kapaliny, ihned se přebytečné páry srazí tak, že tlak klesne na hodnotu, která přísluší nasycené páře. Pára, která obsahuje drobné kapičky kapaliny, které se v ní volně vznášejí tvoříce mlhu, nazývá se *mokrá pára*.

Zahříváme-li Torricelliho trubici s kapalinou a párou, zjistíme, že tlak nasycené páry s teplotou rychle roste. Změnou teploty trubice můžeme tedy zjistit závislost tlaku nasycených par p na teplotě t soustavy v rovnováze, kterou lze vyjádřit buď tabulkou, nebo graficky. Pro vodu je tato závislost znázorněna křivkou *a* na obr. (4.5) 3. Jiné látky mají ovšem jiné křivky pro tlak nasycené páry, např. pro éter platí křivka *b* na obr. (4.5) 3.

Zpravidla je volný povrch kapaliny ve styku se vzduchem. V tomto případě vznikne těsně nad povrchem kapaliny vrstvička nasycené páry, jež difúzí přechází do okolního vzduchu, kde její tlak klesá na tlak přehřáté páry. Přitom ubývá molekul ve vrstvičce, takže kapalina ji musí stále sytit dodáváním dalších molekul. Tomuto jevu říkáme *vypařování*. Jeho charakteristickým znakem je, že pára vzniká jen na volném povrchu kapaliny, ale zato při každé teplotě. Difúze par do vzduchu probíhá pomalu, a proto je vypařování za obvyklých poměrů jen pomalé. Roste-li teplota kapaliny, roste podle obr. (4.5) 3 i tlak nasycené páry nad povrchem kapaliny, a proto také vzroste rychlost vypařování. Zvýšíme-li teplotu tak, že tlak nasycených par je právě roven tlaku okolního vzduchu, může se pára nad povrchem kapaliny rozpínat umožňující tak rychlejší tvoření nové páry tím, že jí jaksi uvolňuje prostor nad povrchem kapaliny. Jsou-li v kapalině malé bublinky vzduchu, vznikají nasycené páry i v nich, a protože mohou přemáhat tlak na kapalinu, značně bubliny rozšiřují a s klokotem vystupují z povrchu kapaliny. Tomuto bouřlivému vypařování, při němž nevznikají páry jen na povrchu, ale také uvnitř kapaliny, říkáme *var*.

Za daného tlaku vzniká var jen při určité teplotě, kterou nazýváme *teplotou (bodem) varu*. Tato teplota je shodná s teplotou nasycených par, a je proto určena křivkou na obr. (4.5) 3. Jinými slovy, v rovnovážné soustavě kapaliny a její páry můžeme považovat také tlak za nezávisle proměnnou veličinu. Ke každému tlaku p přísluší pak určitá teplota t , při níž vedle sebe existují kapalná a plynná fáze, jak je tomu i ve vroucí kapalině. Proto se teplota



Obr. (4.5) 3. Tlak nasycené vodní páry (*a*) a éterové páry (*b*) v závislosti na teplotě

nasyčené páry příslušná danému tlaku nazývá také bod varu. Na obr. (4.5) 3 čteme pro tlak 760 torrů u vody ovšem teplotu varu 100 °C. Snížíme-li vývěvou tlak nad povrchem vody, odsávající zároveň vzniklé páry, dosáhneme stejně bouřlivého varu jako při obvyklých 100 °C už při teplotě místnosti. Název teplota varu pro teplotu nasyčených par je tedy oprávněn v celém oboru tlaků.

K fázové přeměně, která probíhá za stálé teploty, je opět třeba skupenského tepla, zvaného *skupenské teplo vypařovací* nebo také *výparné teplo*. Potřebujeme-li k přeměně kapalně fáze látky o hmotnosti m v plynnou fázi téže hmotnosti za stálé teploty varu teplo Q_v , pak podíl $l_v = Q_v/m$ určuje *měrné skupenské teplo vypařovací* nebo *měrné výparné teplo*. Dělíme-li teplo Q_v množstvím látky v kilomolech, dostaneme *kilomolové výparné teplo*. Protože mezi vypařováním a varem je rozdíl jen v rychlosti a bouřlivosti fázové přeměny, je zřejmé, že měrné skupenské teplo varu je rovno měrnému výparnému teplu látky při téže teplotě.

Při vypařování nebo varu odnímá látka potřebné skupenské teplo svému okolí, při kondenzaci je naopak uvolňuje a předává je tělesům, která soustavu obklopují. Není-li při vypařování přívodu skupenského tepla z okolí, vydává je kapalina ze své zásoby energie, a proto teplota soustavy klesá. Vypařování a klesání teploty lze urychlit odsáváním vzniklých par, jak jsme se už zmínili. Teplota kapaliny přestane klesat, jakmile mezi kapalinou a okolními tělesy vznikne tak velký teplotní rozdíl, při němž teplo přecházející z okolí do kapaliny je právě rovno příslušnému výparnému teplu za dané teploty kapaliny. Tohoto jevu se prakticky využívá k ochlazování okolí např. v chladicích strojích.

Nasyčená pára má vždy značně větší měrný objem v_2 (menší hustotu), než je měrný objem v_1 kapalně fáze, s níž je pára v rovnováze. Část skupenského tepla, potřebného ke konání práce při zvětšování objemu, je proto podstatně větší než při tání. Pro měrné výparné teplo plyne z I. hlavní termodynamické věty 4.4 (8) při stálém tlaku p fázový přeměny

$$l_v = (u_2 - u_1) + p(v_2 - v_1),$$

v němž u_1 a u_2 jsou vnitřní energie kapalně a plynné fáze vztažené na jednotku hmotnosti. Část $(u_2 - u_1)$ skupenského tepla, potřebná k zvýšení vnitřní energie, představuje *vnitřní výparné teplo* a druhá menší část $p(v_2 - v_1)$ k vykonání práce je *vnější výparné teplo*, které lze vypočítat z tlaku nasyčené páry a z měrných objemů kapalně a plynné fáze. Je vždy menší než vnitřní výparné teplo, ale není zanedbatelné jako při tání.

Teplota varu, při níž se vaří kapalina za normálního atmosférického tlaku (760 torrů) nazývá se *normální teplota (bod) varu*. Normální teploty varu a příslušná měrná skupenská tepla některých látek jsou v tab. (4.5) II.

Grafické znázornění vzájemné závislosti mezi stavovými veličinami, charakterizujícími rovnovážný stav koexistujících fází, nazývá se *fázový* nebo *rovnovážný diagram*. Fázový diagram pro rovnováhu kapalně a plynné fáze vody v souřadnicové rovině $p-t$ je křivka a

na obr. (4.5) 3. Znovu je nakreslena na obr. (4.5) 4a. Nalevo a napravo od ní jsou stavy, které přísluší jen jediné fázi. Např. ve stavu 1, tj. při tlaku p_1 a teplotě t_1 , může být látka jen v kapalném stavu a ve stavu 3 (tlak p_3 a teplota $t_3 = t_1$) může být látka trvale zase jen ve stavu plynném. Na křivce pak jsou stavy koexistence obou fází, např. stav 2 a 2', tj. při tlaku p_2 a teplotě $t_2 = t_1$. Křivka odděluje tedy navzájem stavy existence jen jediné fáze a koexistence dvou fází, a můžeme ji proto nazvat také *mezí křivkou*, nebo *mezí čarou*.

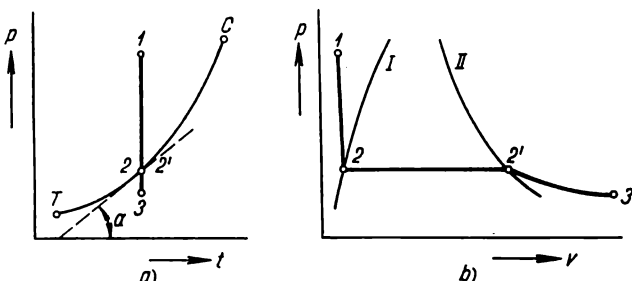
Tabulka (4.5) II

Normální teplota varu a měrné výparné teplo několika látek při normální teplotě varu

Látka	Normální teplota varu [°C]	Měrné výparné teplo [kcal · kg ⁻¹]
voda	100	538,7
éter	34,6	86
alkohol	78,4	201
rtuť	357	67,8
dusík	—195,8	47,6
kyslík	—183,0	50,9

Za koexistence dvou fází (stav 2 nebo 2' na obr. a) má kapalná fáze měrný objem v_2 a hustotu $\rho_2 = 1/v_2$ a plynná fáze má měrný objem v_2' a hustotu ρ_2' , které můžeme určit z příslušných stavových rovnic pro individuální fáze. Měrné objemy v_2 a v_2' , nebo hustoty ρ_2 a ρ_2' , obou fází se značně od sebe liší, a proto průměrný měrný objem nebo hustota soustavy, v níž jsou přítomny obě fáze, záleží

na tom, kolik je jedné fáze a kolik je druhé fáze. To však z fázového diagramu v souřadnicích $p-t$ (obr. a) nelze vyčíst, protože stav koexistence je dán jediným bodem na mezní křivce (např. $2 \equiv 2'$) lhostejno, kolik z obou fází je přítomno. Z tohoto hlediska je výhodný fázový diagram v souřadnicové rovině $p-v$ [obr. (4.5) 4b], v němž se mezní křivka z obr. a rozštěpí na dvě. První, označená I a zvaná *dolní mezní křivka*, přísluší měrným objemům kapalná fáze, druhá, označená II a zvaná *horní mezní křivka*, přísluší zase měrným objemům



Obr. (4.5) 4. Fázové diagramy: a – v souřadnicové rovině $p-t$, b – v souřadnicové rovině $p-v$

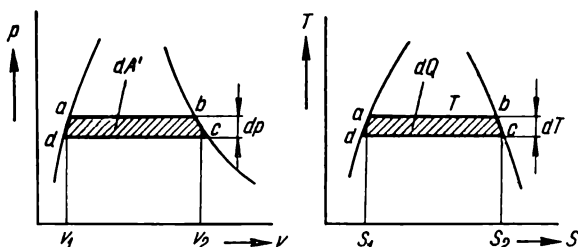
plynné fáze, a to za stavu koexistence obou fází. Protože za koexistence je tlak konstantní (bod $2 \equiv 2'$ na obr. a), leží na úsečce rovnoběžné s osou v mezi oběma mezními křivkami (úsečka $22'$ na obr. b) průměrné měrné objemy soustavy složené z obou fází, tedy směsi kapalná a plynná fáze. Ježto i teplota je konstantní, představuje tato úsečka zároveň izotermu v oboru, kdy jsou nerušeně vedle sebe dvě fáze. V diagramu $p-t$ se tato izoterma redukuje na bod $2 \equiv 2'$.

Zopakujme si ještě jednou přeměnu kapalná fáze v plynnou. Snižujeme-li tlak kapaliny ze stavu I na obr. (4.5) 4a, b za stálé teploty t_1 (např. zvětšováním objemu nádoby), pak s rostoucím měrným objemem kapalná fáze tlak prudce klesá, protože kapalina je málo stlačitelná. Ve stavu 2 začne přeměna v plynnou fázi, kterou jsme nazvali varem. Vroucí kapalina má měrný objem v_2 . Dalším zvětšováním objemu, nyní už za stálého tlaku p_2 , ubývá vroucí kapalná fáze a přibývá plynná fáze, kterou jsme nazvali nasycenou párou. Měrné objemy směsi vroucí kapaliny a nasycené páry, která se jmenuje mokrá pára, leží nyní někde na úsečce $22'$. Posléze se veškerá vroucí kapalina přemění v nasycenou páru (stav $2'$). V tomto okamžiku je měrný objem celé soustavy shodný s měrným objemem v_2' nasycené páry. Dalším zvětšováním objemu (křivka $2'3$) stane se pára přehřátou. Jako plyn je značně stlačitelnější než kapalina, a proto větším změnám měrného objemu přísluší podstatně menší změny tlaku. Postupujeme-li v obráceném směru, tj. zvyšujeme-li tlak přehřáté páry za stálé teploty z počátečního stavu 3, pak ve stavu $2'$ začne kondenzace (jsou-li přítomna kondenzační jádra) a ve stavu 2 je kondenzace veškeré páry skončena. Čára $122'3$ v $p-v$ -diagramu je tedy úplnou izotermou při přeměně kapalná fáze v plynnou nebo obráceně. V $p-t$ -diagramu je znázorněna úsečkou 13. Podobné mezní křivky můžeme sestavit i pro koexistenci jiných fází, jak ještě ukážeme.

Mezní křivka pro koexistenci kapalná a plynná fáze ve fázovém diagramu na obr. (4.5) 4a začíná v bodě T, který nazýváme *trojným bodem*. O jeho významu pojednáme v následujícím článku 4.5.4. Konec mezní křivky je v bodě C, který se jmenuje *kritický bod*. Výklad o tomto stavu je v čl. 4.5.5.

Fázový diagram v souřadnicové rovině $p-v$, který je podle čl. 4.4.1 zároveň pracovním diagramem, umožňuje snadné odvození Clapeyronovy rovnice, které jsme použili už v čl. 4.5.2. Výhodné je všimnout si také ještě příslušného tepelného diagramu v souřadnicích $T-S$, tedy absolutní teploty a entropie [obr. (4.5) 5]. Protože teplotě T a měrnému objemu v každé z obou fází přísluší jistá hodnota entropie S , podobně jako to pro ideální plyn vyjadřuje rovnice 4.4 (34), máme také v tepelném diagramu dvě mezní čáry. Na izoternách mezi nimi leží pak stavy, v nichž je směs obou fází.

Vykonejme s 1 kg (popř. 1 kilomolem) kapaliny takový kruhový děj. Kapalinu ze stavu a přeměníme úplně v nasycenou páru (stav b). Potom nepatrně snížíme tlak páry o dp , čímž teplota klesne o dT (stav c), a páru při tomto nižším tlaku a nižší teplotě zase zkapalníme (stav d), načež kapalinu opětným zvýšením tlaku přivedeme zase do výchozího stavu a . Při tomto kruhovém ději vykoná látka práci dA' znázorněnou vyčárkovanou ploškou v diagramu $p-v$, k níž se podle



Obr. (4.5) 5. K odvození Clapeyronovy rovnice

principu energie spotřebuje stejné velké množství tepla dQ , které je znázorněno vyčárkovanou ploškou v diagramu $T-S$. V limitě jsou obě plošky úzkými proužky délky $(v_2 - v_1)$ a $(S_2 - S_1)$ a šířky dp a dT , takže vzhledem k tomu, že $dA' = dQ$, platí

$$(v_2 - v_1) dp = (S_2 - S_1) dT.$$

Plochy pod izotermami v tepelném diagramu (např. plocha abS_2S_1a) znázorňují množství tepla vyměněného při stavové změně, takže je-li T střední tep-

lota při obou přeměnách, je zřejmé $T(S_2 - S_1) = l$ střední hodnota skupenského tepla obou fázových přeměn. Dosadíme-li za rozdíl entropií do hořejší rovnice, dostaneme *Clapeyronovu rovnici*

$$4.5 (3) \quad l = T(v_2 - v_1) \frac{dp}{dT},$$

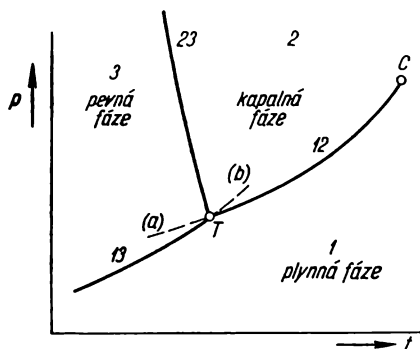
která platí při každé fázové přeměně v soustavě o jedné složce. Můžeme z ní počítat změnu teploty ΔT fázové přeměny při změně tlaku o Δp , známe-li ostatní veličiny, jak jsme uvedli v čl. 4.5.2, nebo z ní vypočítáme měrné skupenské teplo, které přísluší přeměně při teplotě T a tlaku p , kdy obě „čisté“ fáze mají měrné objemy v_1 a v_2 . Podíl dp/dT je určen směrnici mezní křivky v diagramu $p-t$ [obr. (4.5) 3a], tj. $dp/dT = \tan \alpha$.

4.5.4. Sublimace. Trojný bod

Také pevná a plynná fáze téže látky mohou být v rovnováze za tlaku a teploty, jejíž vzájemnou souvislost znázorňuje příslušná mezní křivka. V diagramu $p-t$ na obr. (4.5) 6 to je křivka označená 13. Na povrchu pevné fáze dochází k podobnému jevu, jako je vypařování na povrchu kapaliny, tedy k přeměně pevné fáze v plynnou. Takováto přímá přeměna bez předchozího tání nazývá se *sublimace*. Tlak nasycené páry nad pevnou fází je však u většiny látek za obvyklých teplot velmi malý, a proto probíhá sublimace těchto látek do vzduchu tak pomalu, že se ani nedá pozorovat. Jen některé látky s vyšším tlakem nasycené páry nad pevnou fází sublimují rychleji, např. sníh, který se za suchého studeného počasí pomalu „ztrácí“. Také zmrzlé prádlo uschne, aniž led roztaje. Podobně se chová i jóda a pevný kysličník uhličitý (tzv. suchý led), jakož i páchnoucí látky vůbec, protože zápach je podmíněn přítomností par příslušné látky ve vzduchu.

Také k sublimaci látky je třeba jistého množství tepla, které nazýváme *sublimačním*. *Měrné (kilomolové) sublimační teplo* je pak číselně rovno teplu k sublimaci 1 kg (kilomolu) látky za dané teploty.

Soustava složená ze tří fází téže čisté látky (např. led, voda a pára) nemá podle fázového pravidla žádný stupeň volnosti, je invariantní. Rovnováha proto mů-



Obr. (4.5) 6. Rovnovážný diagram s trojným bodem

že nastat jen při zcela určité teplotě a určitém tlaku. Tento stav je ve fázovém diagramu $p-t$ na obr. (4.5) 6 znázorněn bodem T , do něhož se sbíhají tři mezní křivky, určující rovnovážné stavy vždy mezi dvěma fázemi, a to křivka 13 mezi pevnou a plynnou fází, křivka 23 mezi pevnou a kapalnou fází a křivka 12 mezi kapalnou a plynnou fází. Proto se stav koexistence tří fází nazývá *trojný bod*. Pro vodu je trojný bod určen hodnotami

$$4.5 (4) \quad p = 4,6 \text{ torru}, T = 273,16 \text{ }^\circ\text{K (přesně)}, t = 0,01 \text{ }^\circ\text{C},$$

u kyslíčnicku uhlíčitěho $p = 5,28 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2}$, $t = -56,6 \text{ }^\circ\text{C}$.

Tři mezní křivky rozdělují souřadnicovou rovinu $p-t$ na tři obory 1, 2 a 3. Stavy v jednotlivých oborech přísluší jen jedné fázi, stavy na mezních křivkách koexistenci dvou fází, jak bylo vyloženo. Prodloužení (a) mezní křivky 12 přísluší přechlazení kapalně fáze, tedy rovnováže mezi přechlazenou kapalinou a její párou. Podobně znázorňuje prodloužení (b) mezní křivky 13 přehřátí pevné fáze.

Přeměníme-li za tlaku a teploty, jež přísluší trojnému bodu, nejprve pevnou fází v kapalnou, a nato kapalinu v páru, dostaneme se do téhož stavu jako při přímé přeměně pevné fáze ve fázi plynnou. Proto při tlaku a teplotě trojného bodu platí

$$l_{13} = l_{12} + l_{23},$$

jsou-li l_{13} , l_{12} a l_{23} měrná skupenná tepla sublimace, vypařování a tání. Pro vodu vychází podle tabulek (4.5) I a II

$$l_{13} = 79,7 + 538,7 = 618,4 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Může-li se pevná fáze látky vyskytovat v různých modifikacích, mluvíme o *polymorfii*, která se u chemických prvků nazývá *alotropie*. Příklady pro to je mnoho. Už na začátku čl. 4.5.1 jsme se zmínili o tom, že je kosočtverečná a jednoklonná síra, uhlíkové atomy mohou vytvořit buď šesterečnou (hexagonální) mřížku (pevnou fází nazýváme grafitem), nebo kubickou mřížku (diamant). Každá modifikace se v rovnovážném diagramu objevuje jako zvláštní fáze (vyjma optické antipody, tj. krystaly, jejichž stavba je vzájemným zrcadlovým obrazem, např. pravotočivá a levotočivá kyselina vinná), takže máme pak jenom jednu plynnou a jednu kapalnou fází, ale řadu pevných fází, mezi nimiž mohou také existovat rovnovážné stavy. Rovnovážný diagram je pak komplikovanější, protože obsahuje řadu mezních křivek a trojných bodů. I u vody bylo kromě běžné se vyskytující hexagonálně krystalizující modifikace ledu objeveno za vysokých tlaků pět dalších modifikací (od 2 000 do 22 000 $\text{kp} \cdot \text{cm}^{-2}$). V rovnovážném diagramu je pak kromě normálního trojného bodu dalších šest, z nichž čtyři určují rovnováhu mezi dvěma modifikacemi ledu a vodou a zbývající dva rovnováhu mezi třemi různými modifikacemi ledu.

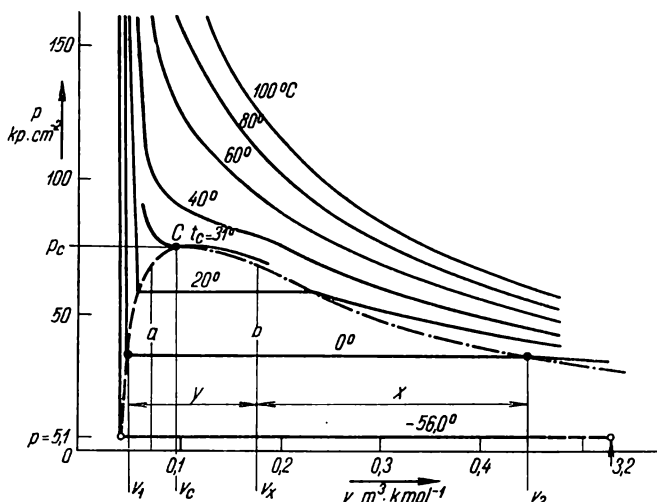
4.5.5. Kritický stav

Vyšetříme-li při přeměně plynu v kapalinu stlačováním plynu za stálé teploty (např. CO_2 uzavřeného pístem ve válci) průběh izoterm při různé vysokých teplotách, zjistíme, že s rostoucí teplotou se v diagramu $p-v$ přímá část jednotlivých izoterm mezi oběma mezními křivkami zkracuje [obr. (4.5) 7]. Zároveň se obě mezní křivky k sobě přibližují, až se posléze ve vrcholném bodě C navzájem plynule spojí. Stav soustavy, určený bodem C ve fázovém diagramu, nazýváme *kritickým*. Přísluší mu kritická teplota t_c nebo T_c a kritický tlak p_c . Vyznačuje se tím, že úsečka koexistence dvou fází degeneruje na bod obratu kritické izoterm ($t_c = \text{const}$) s vodorovnou tečnou.

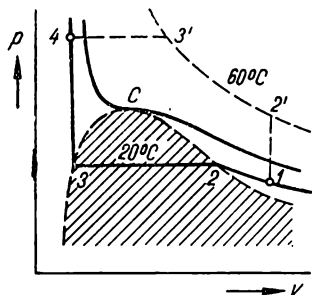
Jestliže v podkritickém stavu mají vroucí kapalina a nasycená pára různé měrné objemy, na základě nichž lze obě fáze navzájem rozlišit, pak v kritickém stavu mají též měrný objem a touž hustotu, takže veškerý rozdíl mezi oběma fázemi mizí. I vnitřní energie obou fází je stejná, a výparné teplo je proto nulové. Mizí rozhraní mezi oběma fázemi, povrchové napětí klesá na nulu.

Při vyšších teplotách než kritická teplota, zvaných *nadkritické*, nemají izotermly již v žádném bodě tečnu rovnoběžnou s osou v a sebevětším tlakem nelze dosáhnout kapalného stavu. Na obr. (4.5) 7 pozorujeme také, že čím vyšší je teplota látky než kritická teplota, tím více se izotermly blíží izotermám dokonalého plynu řídícího se Boylovým zákonem $p v = \text{const.}$

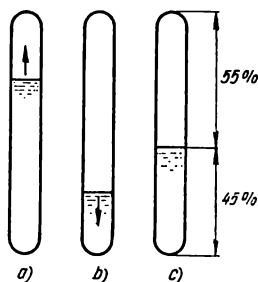
Spojené mezní křivky oddělují stavy, v nichž jsou pohromadě kapalná a plynná fáze [vyčárkovaný obor na obr. (4.5) 8], od stavů, v nichž může trvale existovat pouze jediná fáze. Je to fáze plynná nebo kapalná? Stlačujeme-li plyn izotermicky ze stavu 1 na obr. (4.5) 8 (např. při teplotě 20 °C), začne ve stavu 2 zka-



Obr. (4.5) 7. Izotermly kysličníku uhlíčitého



Obr. (4.5) 8. Přeměna fází CO_2 s kondenzací a bez kondenzace



Obr. (4.5) 9. Znáznornění přeměny kapalně a plynné fáze CO_2

palňovat, ve stavu 3 je úplně zkapalněn a ve stavu 4 máme stlačenou kapalinu. Stavů 4 můžeme však dosáhnout také tak, že plyn ze stavu 1 nejprve izochoricky ohřejeme, aby ve stavu 2' měl teplotu např. 60 °C, pak ho izotermicky stlačíme do stavu 3' a nato ho při tlaku příslušejícím stavu 4 izobaricky ochladíme na 20 °C. Čárkovaná cesta se vyhnula oboru kondenzace, a proto na ní také nikde nevzniklo žádné rozhraní mezi kapalinou a plynem ani se nepozoruje vznik mlhy tvořené droboučnými kapičkami. Předpokládáme proto, že na konci čárkované cesty je táž fáze jako na začátku, tedy plynná fáze. Naproti tomu při cestě procházející oborem koexistence dvou fází zřetelně pozorujeme zkapalňování; nejprve vznikne mlha a pak rozhraní mezi kapalinou a párou. Látku v témže konečném stavu považujeme tedy jednou za kapalinu, jindy za plyn podle toho, jakou cestou při-

slušného stavu dosáhneme. Vzhled je ovšem pokaždé stejný. To svědčí o spojitosti kapalného a plynného stavu, čili mělo by být možné stavy látky v obou fázích vyjádřit jedinou stavovou rovnicí.

Fázové přeměny lze pěkně pozorovat na kysličníku uhlíčitým v stejně velkých zatavených trubičkách [obr. (4.5) 9]. Před zatavením je naplníme tak, aby při teplotě 0 °C měrný objem směsi kapalně a plynné fáze byl v trubičce a) menší, v b) větší a v c) právě rovný kritickému měrnému objemu. Snadno vypočteme, jak musíme trubičku c) naplnit. Označíme-li indexem 1 veličiny vztahující se na fázi kapalnou a indexem 2 veličiny pro plynnou fázi, pak měrný objem směsi

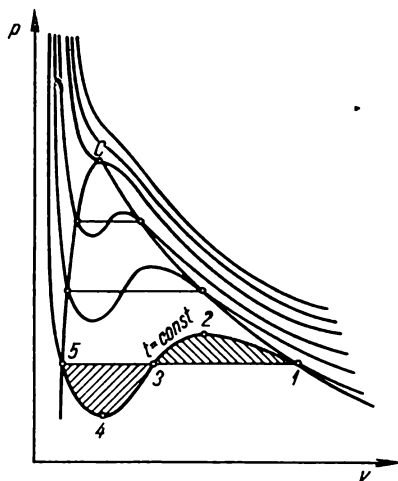
$$v_s = \frac{V_1 + V_2}{m_1 + m_2} = \frac{v_1 m_1 + v_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Dosadíme-li jednou $m_2 = m - m_1$ a podruhé $m_1 = m - m_2$, kde m je hmotnost celé soustavy, dostaneme pro poměr hmotností obou fází ve směsi $\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2 - v_z}{v_z - v_1}$. Tento poměr je tedy určen délkou úseček x a y na obr. (4.5) 7. Pro poměr objemů obou fází pak vychází $\frac{V_1}{V_2} = \frac{v_1(v_2 - v_z)}{v_2(v_z - v_1)}$. Měrné objemy kapalně a plynně fáze CO_2 při teplotě 0°C jsou $v_1 = 1,09 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ a $v_2 = 10,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$, kritický měrný objem podle tabulky (4.5) III $v_c = 2,16 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$. Pro $v_z = v_c$ tedy z horějšího vztahu dostáváme $\frac{V_1}{V_2} = 0,81 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{V} - \bar{V}_1} = \frac{\bar{V} - \bar{V}_2}{\bar{V}_2}$, odkud plyne $\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}} = 0,45$ a $\frac{\bar{V}_2}{\bar{V}} = 0,55$. Naplníme-li tedy trubičku c) při teplotě 0°C , jak je na obrázku naznačeno, pak měrný objem jejího obsahu je právě roven kritickému měrnému objemu. Zahříváme-li trubičky ve vodní lázni, je zahřívání izochorické, a proto v trubičce a) hladina stoupá, v trubič-

Tabulka (4.5) III

Kritické hodnoty několika látek

Látka	Kritická teplota t_c [$^\circ\text{C}$]	Kritický tlak p_c [kp . cm $^{-2}$]	Kritický měrný objem v_c [$10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$]
hélium	—267,9	2,34	15,0
vodík	—239,9	13,2	32,3
dusík	—147,1	35	3,22
kyslíčnk			
uhlíčitý	31,0	75	2,16
éter	194	38	3,9
voda	374,2	225,8	4,04



Obr. (4.5) 10. Izotermy kyslíčnk uhlíčetého podle van der Waalsovy rovnice

co b) naproti tomu klesá ve shodě s izochorami a) a b) na obr. (4.5) 7. V třetí trubičce c) se zato výška hladiny nemění, až při teplotě 31°C , což je kritická teplota CO_2 , mizí viditelné rozhraní mezi kapalinou a plynnou fází, hladina zmizí. Při ochlazování objeví se hladina zase na původním místě, což je doprovázeno zvláštní opalescencí, která souvisí s kolísáním hustoty. Při teplem pohybu molekul dochází k fázové přeměně hned tu, hned tam, při čemž vznikají mikroskopické zprvu nestálé kapičky, které se teprve při větším počtu v objemové jednotce spojí tak, že vznikne viditelné rozhraní mezi oběma fázemi.

Stavovou rovnici skutečných plynů je van der Waalsova rovnice (čl. 4.3.6), která pro kilomol látky má tvar

$$4.5 (5) \quad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT.$$

Vyšetřeme, jak se shodují výsledky podle van der Waalsovy rovnice s experimentálními výsledky. Rovnici 4.5 (5) můžeme uvést na tvar

$$4.5 (6) \quad v^3 - \left(b + \frac{RT}{p}\right)v^2 + \frac{a}{p}v - \frac{ab}{p} = 0.$$

Izoterm, které vyjadřují závislost mezi tlakem a objemem při stálé teplotě, vypočtené podle této rovnice, jsou křivky třetího stupně a mají např. pro CO_2 tvar naznačený na obr. (4.5) 10. Rovnice 4.5 (6) dává tedy pro zvolený tlak p a teplotu T plynu buď tři reálné

kořeny pro v v podkritickém stavu, nebo jeden reálný kořen (dva jsou komplexní) v nadkritickém stavu. Srovnáme-li průběh izoterm podle van der Waalovy rovnice s jejich skutečným průběhem na obr. (4.5) 7, pozorujeme, že v nadkritickém oboru a v podkritickém oboru v těch stavech, kdy může existovat pouze jediná fáze, vyhovuje van der Waalova rovnice dobře, avšak v oboru mezi oběma mezními křivkami, v němž existují vedle sebe dvě fáze, je průběh teoretické izotermy zcela odlišný. Podařilo se pozorovat pouze krajní části 12 a 54 teoretické křivky mezi stavy 1 a 5. Plyny mohou mít vyšší tlak, než jaký přísluší napětí nasycené páry, což nastane, když v plynu nebo v páře nejsou kondenzační jádra, na nichž se vylučují kapičky kapaliny (část křivky 12). Naproti tomu odpovídá část křivky 51 přehřáté kapalině. Avšak stavy mezi 1 a 5 nejsou stabilní, při sebemenší poruše se rychle vytvoří rovnovážný stav, odpovídající vodorovné části skutečné izotermy. Uskutečnit stavy mezi body 2 a 4 se dosud nepodařilo.

Podle Maxwella a Clausia je začátek 1 a konec 5 zkvalitnění na van der Waalově teoretické izotermě položen tak, aby vyčárkované plochy 1231 a 3453 na obr. (4.5) 10, které vymezuje úsečka vypařování nebo zkvalitnění (spojnice bodů 1 a 5), byly stejné. Abychom to dokázali, předpokládáme naopak, že např. plocha 3453 je větší než plocha 1231. Pak bychom mohli vytvořit kruhový děj skládající se z van der Waalovy izotermy 12345 a z izoterm 135. Při vhodné volbě smyslu oběhu získala by se mechanická energie úměrná rozdílu velikostí obou ploch, a to na újmu tepla odebraného jedinému zdroji tepla o teplotě, při níž by izotermický kruhový děj probíhal. To podle druhé hlavní věty termodynamické není možné, a proto musíme připustit, že obě plochy jsou stejně velké.

Kritický stav C je určen tím, že tři reálné kořeny rovnice 4.5 (6) pro objem v , které má v podkritickém stavu, splynou v jediný trojnásobný kořen v_c . Z toho plyne, že v kritickém stavu přejde rovnice 4.5 (6) ve tvar

$$(v - v_c)^3 = 0$$

čili

$$v^3 - 3v_c v^2 + 3v_c^2 v - v_c^3 = 0.$$

Srovnáme-li koeficienty této rovnice s koeficienty rovnice 4.5 (6), dostaneme (klademe-li pro kritický stav $p = p_c$, $T = T_c$)

$$3v_c = \frac{RT_c}{p_c} + b, \quad 3v_c^2 = \frac{a}{p_c}, \quad v_c^3 = \frac{ab}{p_c}.$$

Z těchto tří rovnic vyjdou řešením buď kritické hodnoty

$$v_c = 3b, \quad p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad T_c = \frac{8}{27} \frac{a}{bR},$$

nebo známe-li kritické hodnoty, konstanty a , b , R van der Waalovy rovnice:

$$4.5 (7) \quad a = 3p_c v_c^2, \quad b = \frac{v_c}{3}, \quad R = \frac{8}{3} \frac{p_c v_c}{T_c}.$$

Kritický kilomolový objem v_c (popř. měrný objem) dá se určit jen s dosti malou přesností, protože izoterma je v kritickém bodě rovnoběžná s osou v . Proto je výhodnější vyjádřit konstanty a , b rovnicemi, které neobsahují v_c . Dosadíme-li za v_c z třetí rovnice 4.5 (7) do první a druhé rovnice, dostaneme

$$4.5 (8) \quad a = \frac{27}{64} \frac{R^2 T_c^2}{p_c}, \quad b = \frac{1}{8} \frac{RT_c}{p_c}.$$

Jako příklad vypočítáme konstanty a a b van der Waalovy rovnice pro kyslík uhlíkatý, který má podle tabulky (4.5) III kritický tlak $p_c = 75 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2} = 75 \cdot 9,81 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$

a kritickou teplotu $T_c = 304 \text{ }^\circ\text{K}$. Plynová konstanta $R = 8\,314 \text{ J} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$, takže podle 4.5 (8)

$$a = \frac{27 \cdot 8\,314^2 \cdot 304^2}{64 \cdot 75 \cdot 9,81 \cdot 10^4} = 3,66 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^4 \cdot \text{kmol}^{-2},$$

$$b = \frac{8\,314 \cdot 304}{8 \cdot 75 \cdot 9,81 \cdot 10^4} = 4,29 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{kmol}^{-1}.$$

Povšimneme-li si třetí rovnice 4.5 (7), zjišťujeme, že se liší od stavové rovnice ideálního plynu jen číselným koeficientem

$$\frac{RT_c}{p_c v_c} = \frac{8}{3} = 2,67,$$

zvaným *kritický koeficient*, který má být pro všechny plyny stejný. Ukazuje se však, že u skutečných plynů je kritický koeficient vždy vyšší. U řady látek je asi 3,7. To je dalším důkazem, že van der Waalsova rovnice nereprodukuje přesně chování reálných plynů, je však ve shodě s obecnými vlastnostmi plynů. Byla sestavena řada dalších stavových rovnic, které poněkud lépe souhlasí s experimentálními výsledky, jsou však značně složitější a žádná z nich se nedá tak jednoznačně vyložit jako rovnice van der Waalsova.

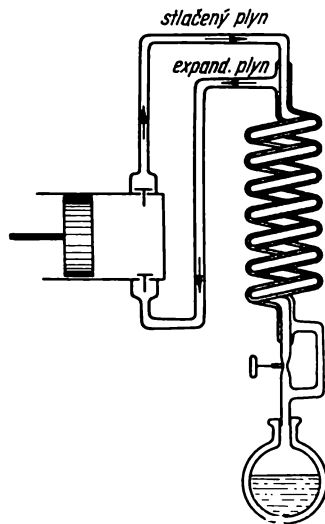
4.5.6. Zkapalňování plynů

V předešlém článku jsme poznali, že zkapalnění plynů není možné, dokud má plyn vyšší teplotu, než je jeho kritická teplota, ať zvyšujeme tlak jakkoli, neboť nadkritická izoterma nemá vodorovnou část, v níž by kondenzace mohla probíhat. Má-li být plyn zkapalněn, je třeba jej ochladit před kompresí pod kritickou teplotu. Potřebného ochlazení permanentních plynů (plyny, které se za normální teploty nedají zkapalnit pouhým zvýšením tlaku) se dříve dosahovalo prudkým vypařováním některých zkapalněných a ochlazených látek, např. SO_2 , NH_3 , CO_2 , C_2H_4 apod.

Otočíme-li láhev (bombu), v níž je pod vysokým tlakem asi 70 $\text{kp} \cdot \text{cm}^{-2}$ v rovnováze kapalný a plynný CO_2 , otvorem dolů, stříká z něho po otevření ventilu kapalný kysličník uhličitý. Kapalina není při atmosférickém tlaku stabilní a rychle se vypařuje. Výparné teplo nemohou okolní tělesa dosti rychle dodávat, a proto je vydává zbývající kapalina, přičemž její teplota klesne na tak nízkou hodnotu, že kapalina ztuhne. Pevný kysličník uhličitý při normálním tlaku jenom sublimuje, k čemuž potřebuje sublimační teplo. Tím je zaručeno, že tzv. suchý led zůstane chladný (teplota asi $-79 \text{ }^\circ\text{C}$).

Nověji se k ochlazení permanentních plynů na podkritickou teplotu využívá *Joulova—Thomsonova jevu*, jenž závisí na ochlazování reálných silně stlačených plynů prudkou expanzí, při níž příslušný plyn nekoná práci proti vnějším silám. Na tomto principu pracuje *Lindův stroj* na zkapalňování vzduchu [obr. (4.5) 11]. Vzduch stlačený na 200 at a ochlazený studenou vodou expanduje škrticím ventilem na nižší tlak (asi 20 at), při čemž se ještě více ochladí. Toto ochlazení při první expanzi však nestačí ke zkapalnění, a proto se ochlazený vzduch vede zpět do kompresoru tak, že cestou ochlazuje jiný stlačený vzduch, který přichází ke škrticímu ventilu, aby v něm expandoval. Opakováním tohoto pochodu ochladí se posléze vzduch na takovou teplotu, že při expanzi škrticím ventilem zkapalní.

Kapalný vzduch je směsí dvou kapalin, dusíku a kyslíku. Bod varu obou kapalin je



Obr. (4.5) 11. Princip Lindova stroje na zkapalňování vzduchu

různý. Za atmosférického tlaku je bod varu dusíku $-195,8\text{ }^{\circ}\text{C}$ a bod varu kyslíku $-183\text{ }^{\circ}\text{C}$. Odpařováním se tedy kapalný vzduch stává bohatší kyslíkem, protože dusík se vypařuje rychleji. Odpaří-li se tři čtvrtiny kapalného vzduchu, obsahuje zbytek 53 % kyslíku.

Vodík a hélium se při obyčejných teplotách expanzí škrtící přepážkou neochlazují, nýbrž naopak oteplují, a proto se popsaného způsobu nedá přímo použít k jejich zkapalnění. Vodík je třeba nejprve tekutým vzduchem (hélium tekutým vodíkem) ochladit pod tzv. *inverzní teplotu* a další ochlazování se pak již děje stejným způsobem jako při zkapalňování vzduchu. Inverzní teplota plynu, závislá na jeho tlaku, vyznačuje se tím, že při ní se plyn expanzí ani neotepluje, ani neochlazuje.

Joulův—Thomsonův jev je důsledkem přitažlivých a odpuzivých sil mezi molekulami, jimiž se reálný plyn liší od plynu ideálního. Reálné plyny se (aspoň přibližně) řídí van der Waalsovou rovnicí, v níž korekce a přihlíží k přitažlivým silám mezi molekulami a korekce b vystihuje skutečnost, že středy molekul se nemohou k sobě přiblížit na libovolně malou vzdálenost, takže charakterizuje v podstatě účinek odpuzivých sil mezi molekulami.

Předpokládáme nejprve, že u plynu převládá vliv korekce b tak, že korekci a lze zanedbat. Vzroste-li při expanzi plynu jeho měrný objem, vzroste i střední vzdálenost mezi molekulami a střední hodnota potenciální energie vzájemného působení mezi molekulami klesá. Je-li děj adiabatický (z plynu nepřechází teplo do okolí), nemůže se úbytek potenciální energie molekul projevit jinak než přírůstkem střední kinetické energie molekul, a tedy ohřátím plynu.

Je-li naproti tomu zanedbatelná korekce a a v plynu převládají (až na okamžiky srážek) přitažlivé síly mezi molekulami, pak při zvětšení měrného objemu zvětšením střední vzdálenosti mezi molekulami roste střední hodnota potenciální energie molekul. To se projeví úbytkem jejich střední kinetické energie, a tedy ochlazením plynu.

Vlivy charakterizované oběma korekcemi a a b se mohou ovšem navzájem rušit. Pak se při expanzi plynu jeho teplota nemění; příslušnou teplotu jsme v hlavním textu nazvali inverzní.

4.5.7. Vlhkost vzduchu

Vzduch obsahuje vždy proměnlivé množství vodních par, jež jsou zpravidla v přehřátém stavu. Vodní pára vzniká ustavičným vypařováním vody z volných hladin moří, řek a jezer a z povrchu země (půdy), s nimiž jsou spodní vrstvy atmosférického vzduchu ve styku.

Absolutní vlhkost vzduchu Φ je hmotnost m vodní páry obsažené v objemu V vzduchu, dělená tímto objemem:

4.5 (9)

$$\Phi = \frac{m}{V}.$$

Zpravidla se hmotnost m udává v gramech a objem V v m^3 , takže $[\Phi] = \text{g} \cdot \text{m}^{-3}$.

Absolutní vlhkost nevyjadřuje dost zřetelně, jak je vzduch vlastně vlhký, protože to závisí na tom, kolik vodní páry může být vůbec za dané teploty ve vzduchu obsaženo. Proto zavádíme *relativní vlhkost* φ , definovanou poměrem hmotnosti m vodní páry obsažené ve vzduchu k hmotnosti $m_{\max}$ vodní páry, kterou by obsahoval stejný objem vzduchu, kdyby byl za téže teploty vodními parami nasycen,

4.5 (10)

$$\varphi = \frac{m}{m_{\max}}.$$

Tento poměr můžeme vyjádřit také ve tvaru

4.5 (11)

$$\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_{\max}},$$

kde Φ je absolutní vlhkost při dané teplotě a $\Phi_{\max}$ je absolutní vlhkost vzduchu, který je při téže teplotě vodními parami nasycen.

Podle Boylova zákona je za stálé teploty tlak plynu úměrný hustotě plynu (v našem případě podílu m/V), takže absolutní vlhkost je úměrná tlaku vodních par e obsažených ve vzduchu, tj. $\Phi \sim e$. Tlak přehřáté páry je vždy menší než tlak E nasycené páry při stejné teplotě. Proto za té nebo oné teploty stává se vodní pára nasycenou, vzroste-li její hustota tak, že tlak par je právě rovný tlaku nasycené vodní páry E při téže teplotě. Maximální absolutní vlhkost vzduchu při této teplotě je tedy $\Phi_{\max} \sim E$. Tak dostáváme pro relativní vlhkost vzduchu vzhledem k 4.5 (11) vztah

4.5 (12)

$$\varphi = \frac{e}{E},$$

v němž tlak E nasycených par závisí jenom na teplotě, a nikoli na tlaku vzduchu, neboť je to tlak, při kterém za dané teploty může být pára v rovnováze s kapalnou vodou, což je možné jen při jediné hodnotě tlaku. Tlak E je tedy určen stejnou mezní křivkou, jako je křivka a na obr. (4.5) 3.

Rosným bodem τ nazýváme teplotu, při níž je vzduch vodními parami nasycen. Klesne-li teplota vzduchu obsahujícího nasycenou vodní páru poněkud pod rosný bod, zkondenzuje část vodní páry. Podobně vložíme-li do vlhkého vzduchu předmět (např. zrcátko) trochu nižší teploty, než je rosný bod, zarosí se jeho povrch. Toho lze využít k zjištění tlaku e přehřátých par ve vzduchu. Chladným předmětem se nezmění tlak okolního vzduchu ani tlak vodní páry. Zjistíme-li proto z příslušné mezní křivky v p — t -diagramu nebo z tabulky tlak nasycené vodní páry při teplotě τ , máme zároveň tlak e . Rosným bodem je velmi přibližně střední hodnota z teploty ochlazovaného tělesa, když se zarosí, a z teploty (poněkud vyšší), když orosení zmizí.

5.0. Úvod

Pojem elektrického náboje byl do fyziky zaveden k vysvětlení elektrických jevů a představoval původně zvláštní substanci či fluidum, jehož množství v tělese určovalo míru, v jaké se u tělesa projevovaly elektrické vlastnosti. Vzhledem k tomu, že nebyla zjištěna existence samotných nábojů, které by neměly zároveň i jiné vlastnosti částic, jako je hmotnost, spin, apod., je patrně správnější pohlížet na náboj jako na veličinu, která je mírou nikoli množství „elektřiny“, ale spíše mírou jisté vlastnosti mikročástice, která se projevuje silovými účinky na podobné mikročástice v jejím okolí. Toto pojetí náboje je podepřeno také tím, že elektrické náboje samy nemůžeme vnímat, ani jinak přímo pozorovat a jejich přítomnost se dá zjistit jen nepřímou, když se silové působení mezi nabitými částicemi přenáší na tělesa, která je obsahují. I při tomto pojetí můžeme používat zjednodušeného vyjadřování, které je velmi běžné; tak budeme mluvit nejen o silách mezi nabitými částicemi, ale stručněji i o silách mezi náboji, o pohybu nábojů apod. Při tom však si budeme vědomi toho, že náboj je vždy vázán na nějakou částici, jejíž elektrické vlastnosti charakterizuje.

Základní vlastností nabitých částic je jejich silové působení na jiné nabitě částice, které lze nejjednodušeji popsat, pokud jsou částice v klidu. Říkáme, že nabitá částice vytváří v okolním prostoru elektrické pole, které zprostředkuje silové působení mezi částicemi. Vylučujeme bezprostřední působení na dálku, a proto pokládáme elektrické pole — podobně jako všechny ostatní druhy polí — za materiální objekt stejně reálný jako částice sama. Elektrické pole nelze odloučit od nabitých částic a můžeme je pokládat v jistém smyslu za „pokračování“ částice v okolním prostoru, který má určité fyzikální vlastnosti, i když neobsahuje žádné látkové částice.

Vlastnosti elektrického pole jsou dosti složité a rozmanité, neboť silové účinky mezi nabitými částicemi závisí podstatně i na jejich pohybech. Proto rozeznáváme pole *elektrostatické*, které obklopuje náboj v klidu, od pole *elektrodynamického*, které vzniká při pohybu náboje. Toto druhé pole se v některých případech projevuje ve formě pole magnetického, jindy ve formě elektrického pole vzniklého elektromagnetickou indukcí. Tím se vysvětlují magnetické jevy a všechny klasické zákonitosti elektromagnetických polí jako výsledky silového působení mezi nabitými částicemi.

Tato jednotnost nauky o elektřině a magnetismu se ještě více zdůrazňuje a prohlubuje skutečností, že celá klasická teorie elektromagnetického pole spočívá v podstatě na jediném zákonu — Coulombovu —, který se tak stává fundamentálním zákonem celého elektromagnetismu. Stačí totiž užít na elektrostatické pole obecně platných principů teorie relativity, abychom dospěli deduktivní logickou cestou ke klasickým zákonům elektromagnetismu, jak je ve své geniální koncepci rozvinul I. C. Maxwell a dále zpracoval

H. A. Lorentz. Z toho plyne překvapující jednoduchost pojetí celé nauky o elektřině a magnetismu jako nauky o jediném základním elektrostatickém poli, které plně charakterizuje a vyčerpává specifické vlastnosti elektrických nábojů.

V příštích kapitolách této stati pojednáme nejprve o elektrostatických polích nábojů v klidu, potom o ustálených proudech a pak přejdeme k elektrodynamice rovnoměrných pohybů nábojů, jejíž důležitou část tvoří nauka o magnetickém poli stacionárních proudů a magnetostatika. Studium zrychlených pohybů nábojů nás pak přivede k obecnému zákonu elektromagnetické indukce a ke kvazistacionárnímu elektromagnetickému polí. Konečně pro rychle proměnná nestacionární pole odvodíme úplnou soustavu Maxwellových—Lorentzových rovnic a probereme elektrické kmity a šíření elektromagnetických vln.

O elektromagnetickém záření pojednáme ve stati 6.

5.1. Elektrostatické pole

5.1.1. Základní poznatky o elektrických nábojích

Atomy všech prvků obsahují kromě elektricky neutrálních i nabitě částice, které jsou neoddělitelnou součástí každého fyzikálního tělesa (látkového objektu). Každá i elektricky neutrální část jakékoli látky obsahuje tedy kladné i záporné náboje, jejichž průměrné množství snadno odhadneme. Podle čl. 1.3.2 je počet protonů v jádře každého prvku rovný zhruba jeho poloviční atomové hmotnosti a kolem jádra neutrálního atomu obíhá stejný počet záporných elektronů. Na každou atomovou jednotku hmotnosti 1.3 (9) připadá tedy zhruba jeden elementární náboj 1.3 (2). Podle 1.3 (14) obsahuje tedy 1 kg kterékoli látky (nenabitě) přibližně

$$\frac{1 \text{ kg}}{1 \text{ u}} = N,$$

tedy Avogadrovo číslo elementárních nábojů z poloviny kladných z poloviny záporných. V každém kilogramu kterékoli elektricky neutrální látky je tedy obsaženo zhruba*)

$$\frac{1}{2} Ne \approx 4,8 \cdot 10^7 \text{ C},$$

tj. asi 50 miliónů coulombů kladného a stejné množství záporného náboje. Pokud jsou atomy neutrální, jsou tyto náboje dokonale promíseny a těleso se jeví na venek elektricky neutrální (neelektrické). Základní poznatky o nábojích, které vyplývají z dosavadních zkušeností, je možno vyjádřit několika obecně platnými zákony:

5.1 (1) I. Zákon zachování náboje: Náboj je nevytvořitelný a nezničitelný.

Tento zákon se často vyslovuje jako **zákon superpozice**, který praví: *Při současném působení několika nábojů je účinek každého náboje týž, jako by náboj působil sám.*

Zákon superpozice je nutným důsledkem zákona zachování náboje, protože velikost náboje nemůžeme posoudit jinak než podle jeho účinků. Kdyby se tedy přivedením dalšího náboje změnil účinek náboje původního, museli bychom to pokládat za porušení zákona zachování náboje. Můžeme jej vyjádřit také větou:

*) Coulomb = 1 C = 1 As je jednotka náboje rovná náboji prošlému průřezem vodiče za vteřinu při ustáleném stejnosměrném proudu jednoho ampéru.

Celkové množství náboje v osamoceném (nebo aspoň elektricky izolovaném) systému se rovná algebraickému součtu všech nábojů v systému a nemění se.

5.1 (2) **II. Zákon invariantnosti náboje:** *Náboj je při Lorentzově transformaci invariantní.*

Tato vlastnost náboje není nikterak samozřejmá, uvážíme-li, že i hmotnost se při této transformaci mění podle rovnice 2.9 (23). Zákon invariantnosti souvisí se zákonem zachování náboje, z něhož se dá za jistých předpokladů odvodit.

III. Zákon Coulombův: *Částice P s nábojem Q působí ve své klidové soustavě na částici p s nábojem q elektrostatickou silou*

$$5.1 (3) \quad \mathbf{F}_{es} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Qq}{4\pi r^2} \mathbf{r}^0,$$

kde ϵ_0 je univerzální konstanta a $\mathbf{r}^0$ značí jednotkový vektor polohového vektoru $\mathbf{r}$ vedeného od první částice k druhé.

Podrobný rozbor tohoto fundamentálního zákona nauky o elektřině a magnetismu provedeme v příštím článku. Zde uvedeme pro úplnost ještě

IV. Zákon o kvantování náboje: *Všechny náboje — kladné i záporné — jsou celistvými násobky dále nedělitelného elementárního náboje, který má velikost 1.3 (2):*

$$5.1 (4) \quad e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ coulombů.}$$

Existence „elementárního kvanta“ náboje je v souladu s „kvantováním“ řady jiných veličin (např. energie) v moderní fyzice.

5.1.2. Coulombův zákon

Se zřetelem k základnímu významu Coulombova zákona popíšeme aspoň stručně pokusy, kterými Coulomb dospěl r. 1785 ke svému zákonu. Pracoval s nabitými kovovými kuličkami a elektrostatické síly mezi nimi měřil torzními vážkami [obr. (5.1) 1].

Kulička k upevněná na raménku délky $2a$ vyváženém nenabitou kuličkou k' visí na tenkém vlákně. Přibližujeme-li ke kuličce k nabitý nábojem q další kuličku K nabitou nábojem Q stejného znaménka, odpuzuje se, a zastavíme-li kuličku K v původní poloze kuličky k , ustálí se raménko v poloze odchýlené o úhel φ . Je-li torzní dvojice vlákna M , je úhel φ určen podmínkou rovnováhy mezi M a momentem odpudivé síly F kolem osy OZ , vzdálené od ní o délku $a \cos \varphi/2$. Lze tedy F vypočítat ze vztahu 2.6 (16)

$$Fa \cos \varphi/2 = M = \frac{\pi G r^4}{2l} \varphi,$$

který vznikne dosazením za M podle vzorce pro zkrut válce. Coulomb tímto způsobem zjistil, že síla F klesá nepřímou úměrně se čtvercem vzdálenosti středů obou kuliček. Odvozením této závislosti pro kulové náboje je její platnost dokázána pro bodové náboje jen přibližně, neboť účinek nabitě koule v jejím okolí je shodný s účinkem stejně velikého náboje soustředěného v jejím středu jen při rovnoměrném rozložení náboje na povrchu koule. Rovnoměrné rozložení náboje je však na obou koulích porušeno tím více, čím jsou si blíže. Nicméně se ukázalo, že nepřímá úměrnost s druhou mocninou vzdálenosti je zaručena s velikou

relativní přesností (řádu $1 : 10^9$) a že Coulombův zákon platí i pro vzdálenosti rovné průměru atomových jader (řádu 10^{-14} m).

Vyslovili jsme zákon 5.1 (3) pro nabité částice, ačkoli by bylo přesnější mluvit o bodových nábojích. Učinili jsme tak proto, aby aspoň z prvního vyjádření elektrostatického zákona bylo zřejmé, že náboje jsou vždy vázány na mikročástice (elektrony, protony, mezony atd.). Pak je ovšem třeba předpokládat, že vzdálenost r obou mikročástic je makroskopicky velká proti jejich rozměrům.

Rovnice 5.1 (3) vyjadřuje Coulombův zákon v tzv. racionalizovaném (nebo racionálním) tvaru, který se liší od neracionalizovaného tvaru jen činitelem 4π ve jmenovateli. Oba tvary se liší jen označením konstanty úměrnosti, nikoli fyzikálním obsahem. Účelnost racionalizovaného tvaru zákonů „převrácených čtverců“ vysvětlíme v příštím článku.

Při popisu Coulombových pokusů jsme se nezmínili o tom, jak zjistil úměrnost síly mezi kuličkami s jejich náboji. Vzhledem k tomu, že se existence náboje — pokud není v pohybu — neprojevuje jinými účinky než elektrostatickou silou, bylo by možno úměrnost této síly s velikostí náboje prokázat jen tím, že by se potvrdila platnost zákona superpozice při skládání nábojů. Že je síla úměrná velikosti náboje Q , plyne totiž přímo z tohoto zákona. Náznorně řečeno: náboj Q se skládá z jistého počtu elementárních nábojů, které působí nezávisle na sobě, a proto je celkový účinek úměrný jejich počtu. Stejně samozřejmá je úměrnost síly s nábojem q , neboť na každý elementární náboj, který je součástí q , působí ve stejném místě stejná síla od náboje Q .

V předešlém článku jsme uvedli, že veličina ϵ_0 v rovnici 5.1 (3) je univerzální konstanta, což znamená, že má za všech fyzikálních podmínek touž hodnotu. Velikost každé univerzální konstanty závisí ovšem na zvolených jednotkách, pokud nejde o ryzí číslo (s rozměrem rovným 1). Konstanta ϵ_0 má však podle 5.1 (3) rozměr

$$[\epsilon_0] = \frac{[\text{náboj}]^2}{[\text{síla}] [\text{délka}]^2}.$$

takže v soustavě SI

$$[\epsilon_0] = \frac{(\text{coulomb})^2}{\text{newton} \cdot (\text{metr})^2} = \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2},$$

Abychom hned od počátku zakotvili v mysli čtenáře obvyklé vyjádření ϵ_0 , zavedeme do tohoto výrazu známé jednotky

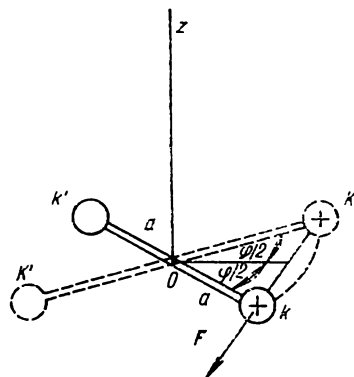
$$\begin{aligned} \text{volt} = 1 \text{ V} &= \frac{\text{joule}}{\text{coulomb}} = \frac{\text{Nm}}{\text{C}}, \\ \text{farad} = 1 \text{ F} &= \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}} = \frac{\text{C}}{\text{V}} = \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}}. \end{aligned}$$

Je tedy

$$[\epsilon_0] = \frac{\text{farad}}{\text{metr}} = \text{Fm}^{-1}$$

a v čl. 5.6.6 odvodíme z definice ampéru, že permitivita vakua má v těchto jednotkách hodnotu

$$5.1 (5) \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}.$$



Obr. (5.1) 1. Coulombovy torzní vážky

V rovnici 5.1 (3) se neobjevuje rychlost částice p a z toho plyne důležitý výsledek, že v poli náboje, který je v pozorovací soustavě v klidu, podléhají jiné náboje silám, které jsou nezávislé na jejich rychlostech. Pole příslušné náboji, který má stálou polohu v pozorovací soustavě, v níž síly měříme, nazýváme proto polem *elektrostatickým*. Stručně to vyslovíme větou, že *náboj v klidu je zdrojem elektrostatického pole*.

Zda a jak se mění elektrostatické pole, měříme-li jeho působení v soustavě, v níž není zdroj pole nehybný, je možno odvodit ze zákona Coulombova jediné na základě teorie relativity. Uvidíme v kap. 5.5, že i velmi pomalé pohyby zdroje pole mohou vést ke vzniku značných sil známých jako síly elektrodynamické, po případě magnetické.

Jsou-li však oba náboje v klidu v pozorovací soustavě, má podle rovnice 5.1 (3) síla, kterou působí náboj q na náboj Q , stejnou velikost, ale opačný směr než síla, kterou působí náboj Q na q . Elektrostatické síly mezi klidnými náboji vyhovují tedy třetímu Newtonovu zákonu o rovnosti akce a reakce.*) Tento zákon platí tedy bez výjimky v elektrostatice, která se zabývá výhradně statickými stavy, kdy jsou všechny náboje v klidu.

K tomu podotýkáme, že nabitě mikročástice jsou ve všech látkách v neustálém termickém pohybu, a proto je předpoklad, že náboje jsou v klidu, přesně vzato nesplnitelný. Avšak termické pohyby jsou chaotické, takže střední rychlost všech elementárních nábojů tvořících makroskopický „bodový“ náboj může být rovna nule, nejsou-li pohyby elementárních nábojů nějakým vnějším vlivem uspořádány. A takové vlivy právě v elektrostatice vylučujeme.

5.1.3. Elektrostatické pole bodového náboje

Jak jsme řekli hned v úvodu k této stati, je třeba pohlížet na pole kolem náboje jako na fyzikální realitu, která má materiální povahu. Jedině tak překleneme starý rozpor klasické fyziky, která Newtonovu gravitačnímu „působení na dálku“ přizpůsobila i pojetí elektrického a magnetického pole. Připouštěl to právě stejný tvar gravitačního a elektrostatického zákona do té doby, než Maxwell vybudoval podle Faradayových názorů svou fenomenologickou teorii elektromagnetického pole, která naopak vycházela z vlastností pole jako základního objektu nauky o elektřině a magnetismu. Historickou zásluhou Maxwellovou je objev, že elektromagnetické pole se šíří v prostoru rychlostí světla v soulase s dnešním názorem, že ani látkové, ani polní částice nemohou překročit rychlost světla ve vakuu.

Materiální povaha elektrostatického pole vede k představě, že vzájemné působení mezi náboji je zprostředkováno působením pole v místě nabitě částice, které tak může působit na částici přímo. Dodnes se udržují některé Faradayovy představy zvláště o silových čarách (síločarách) a trubících.

Elektrostatické pole náboje Q působí na další bodový náboj q silou, která je podle 5.1 (3) úměrná tomuto náboji. Dělíme-li ji tedy nábojem q , dostaneme vektor

$$5.1 (6) \quad \mathbf{E}_s = \frac{\mathbf{F}_{es}}{q} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0,$$

který je v každém místě s průvodičem $\mathbf{r}$ určen zdrojem pole, tj. bodovým nábojem Q . Vektor $\mathbf{E}_s$ se nazývá *intenzita elektrostatického pole* vzbuzeného bodovým nábojem Q , jemuž je úměrná. Charakterizuje toto pole a určuje sílu, kterou pole působí na libovolný náboj q , jakožto součin intenzity a tohoto náboje:

$$5.1 (7)$$

$$\mathbf{F}_{es} = q \mathbf{E}_s.$$

*) O platnosti zákona stejného vzájemného působení v elektrodynamice pojednáme v čl. 5.5.1.

Jednotka intenzity je

$$5.1 (8) \quad [E_s] = \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}} = \frac{\text{joule}}{\text{coulomb}} \text{ m}^{-1} = \frac{\text{volt}}{\text{metr}}.$$

Sestrojíme-li v každém bodě prostoru v okolí částice P s nábojem Q vektor intenzity, dostaneme *vektorové pole*, které nám názorně popisuje vlastnosti elektrostatického pole. Podle 5.1 (6) má intenzita všude směr polohového vektoru vedeného z P a její velikost klesá nepřímou úměrou se čtvercem vzdálenosti. V poli osamocené nabitě částice P najdeme snadno čáry, které mají všude směr vektoru E_s . Jsou to přímky vycházející z částice P a nazývají se *silové čáry* nebo *síločáry* elektrostatického pole. Každým bodem mimo náboj prochází jediná síločára, jejíž (orientovaná) tečna určuje v každém místě směr intenzity pole, a tedy i směr zrychlení, které udílí pole kladnému bodovému náboji v tomto místě.

Počet síločar je neomezený, ale vedeme-li konečný počet síločar z náboje Q a nepřidáváme-li k nim v okolních bodech další síločáry, řídne síť síločar s rostoucí vzdáleností, neboť jejich hustota ve vzdálenosti r , daná jejich celkovým počtem děleným povrchem $4\pi r^2$ koule poloměru r , klesá nepřímou úměrou se čtvercem vzdálenosti, tedy podle stejného zákona jako intenzita pole [obr. (5.1) 2]. Můžeme si představit, že pole slábne proto, že se rozšiřuje s rostoucí vzdáleností na větší kulové plochy a jeho intenzita je tedy nepřímou úměrou jejich velikosti $4\pi r^2$, kteroužto závislost názorně vyjadřuje racionalizovaný tvar 5.1 (3) Coulombova zákona.

Abychom si učinili představu o velikosti elektrostatických sil, vypočteme intenzitu elektrostatického pole, které by vzbudil bodový náboj jednoho coulombu (kdyby bylo možno ho realizovat) ve vzdálenosti $r = 1$ km.

Podle 5.1 (6) a 5.1 (5)

$$E_s = \frac{1 \text{ C}}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}} = \frac{8,987 \cdot 10^9}{r^2} \text{ Vm}$$

a pro uvedenou vzdálenost

$$E_s = 8,987 \cdot 10^3 \text{ Vm}^{-1}.$$

Dvě částice s náboji jednoho coulombu by se tedy ještě na vzdálenost 1 km odpuzovaly ohromnou silou:

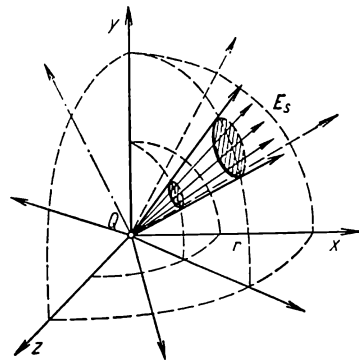
$$5.1 (9) \quad F_{es} = 1 \text{ C} \cdot E_s = 8987 \text{ N} \approx 916 \text{ kp}.$$

5.1.4. Skládání polí bodových nábojů

Podle zákona superpozice dostaneme intenzitu pole vzbuzeného dvěma nabitými částicemi P_1 a P_2 vektorovým součtem intenzit vzbuzených náboji Q_1 a Q_2 obou částic [obr. (5.1) 3]:

$$5.1 (10) \quad E_s = E_{s1} + E_{s2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1^2} \mathbf{r}_1^0 + \frac{Q_2}{r_2^2} \mathbf{r}_2^0 \right),$$

kde $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ značí polohové vektory zvoleného místa A vedené z částic P_1 a P_2 . Položíme-li



Obr. (5.1) 2. Úbytek hustoty síločar v poli bodového náboje Q

osu Ox do spojnice obou částic a osu Oy tak, aby půlila jejich vzdálenost $l = 2d$, dostaneme z 5.1 (10) složky intenzity jako funkce souřadnic x, y bodu A

$$5.1 (11) \quad E_{sx} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left(Q_1 \frac{x-d}{r_1^3} + Q_2 \frac{x+d}{r_2^3} \right),$$

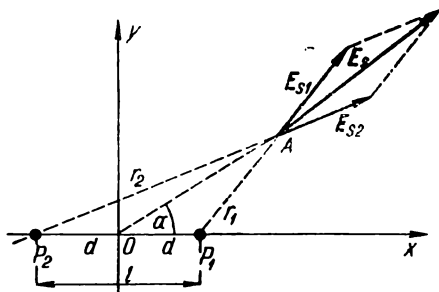
$$E_{sy} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left(Q_1 \frac{y}{r_1^3} + Q_2 \frac{y}{r_2^3} \right).$$

Siločáry, jež se musí všude dotýkat vektoru intenzity, jsou tedy určeny diferenciální rovnici

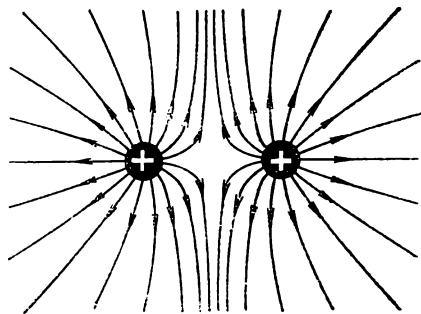
$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_{sy}}{E_{sx}},$$

která se dá obecně integrovat.

Důležitý je případ, kdy oba náboje mají stejnou velikost Q a znaménka buď stejná, nebo opačná. Nejnázornější představu o vlastnostech pole nám dávají siločáry, jejichž směr určuje směr intenzity pole a jejichž hustota je úměrná velikosti intenzity. Pro dva stejně velké kladné náboje je průběh siločar zřejmý z obr. (5.1) 4. Na obr. (5.1) 5 vidíme průběh siločar



Obr. (5.1) 3. Skládání polí dvou bodových nábojů



Obr. (5.1) 4. Silové pole dvou stejných nábojů

v poli vzbuzeném tzv. *elektrickým dipólem (dvojpolém)*, složeným ze dvou stejně velkých opačných nábojů.

Elektrické dipóly velmi malých rozměrů se vyskytují v elektricky neutrálních i zelektrovaných látkách a mají základní význam pro vlastnosti izolantů. Pole takového „elementárního dipólu“ je znázorněno na obr. (5.1) 6. Pro dipól složený z nábojů $+Q$ a $-Q$ plyne z 5.1 (10) a 5.1 (11) vektor intenzity

$$E_s = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right)$$

o složkách

$$5.1 (12) \quad E_{sx} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{x-d}{r_1^3} - \frac{x+d}{r_2^3} \right), \quad E_{sy} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) y.$$

V místě ležícím na ose dipólu (na spojnici nábojů) ve vzdálenosti r od jeho středu dostaneme podle obr. (5.1) 3

$$E'_{sx} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{r-d}{(r-d)^3} - \frac{r+d}{(r+d)^3} \right) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{4rd}{(r^2-d^2)^2}, \quad E'_{sy} = 0.$$

Velikost intenzity je tedy

$$5.1 (13) \quad E'_s = E'_{sx} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Ql}{r^3(1-\lambda^2)^2}, \quad \lambda = \frac{d}{r} = \frac{l}{2r}.$$

Zavedeme-li jako *moment dipólu* vektor

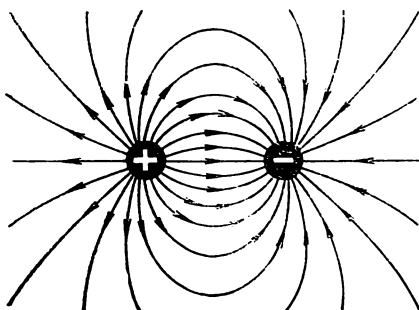
$$5.1 (14) \quad \boxed{\mathbf{p} = Ql},$$

kde $\mathbf{l}$ je polohový vektor kladného náboje vzhledem k zápornému, dostaneme

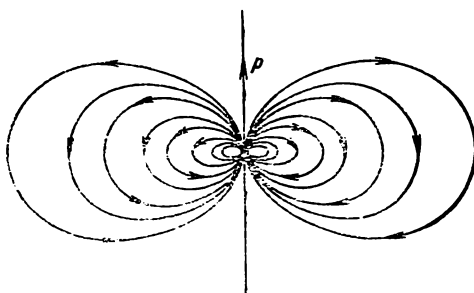
$$5.1 (15) \quad E'_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mathbf{p}}{r^3(1-\lambda^2)^2}.$$

V místě ležícím na příčné ose dipólu ve vzdálenosti r od jeho středu je zřejmě $r_1 = r_2 = \sqrt{r^2 + d^2}$, takže podle 5.1 (12)

$$5.1 (16) \quad E''_{sx} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-2d}{(r^2 + d^2)^{3/2}}, \quad E''_{sy} = 0.$$



Obr. (5.1) 5. Silové pole dvou stejně velkých opačných nábojů



Obr. (5.1) 6. Silové pole elementárního dipólu

Intenzita má tedy opačný směr než $\mathbf{p}$ a je určena vektorem

$$5.1 (17) \quad E'_s = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p}}{r^3(1+\lambda^2)^{3/2}}.$$

Vidíme, že v obou osových polohách je intenzita pole dipólu úměrná jeho momentu a ve vzdálenosti velké proti jeho délce klesá nepřímo úměrně s třetí mocninou vzdálenosti od středu dipólu.

Složky intenzity vypočteme snadno i v obecné poloze, je-li její vzdálenost $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ od středu dipólu velké proti délce dipólu. Pak můžeme vynechat členy druhého a vyššího řádu v d/r a položit

$$r_1^2 = (x-d)^2 + y^2 = r^2 - 2xd, \quad r_2^2 = (x+d)^2 + y^2 = r^2 + 2xd,$$

takže podle 5.1 (12)

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\epsilon_0}{Q} E_{sx} &= \frac{x-d}{(r^2-2xd)^{3/2}} - \frac{x+d}{(r^2+2xd)^{3/2}} = \frac{x-d}{r^3} \left(1 + 3\frac{xd}{r^2}\right) - \\ &- \frac{x+d}{r^3} \left(1 - 3\frac{xd}{r^2}\right) = \frac{1}{r^3} \left(-2d + \frac{6x^2d}{r^2}\right) = \frac{2d}{r^5} (3x^2 - r^2) = \frac{l}{r^5} (2x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Podobně dostaneme

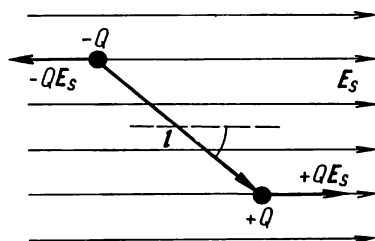
$$\frac{4 \pi \epsilon_0}{yQ} E_{xy} = \frac{1}{r^3} \left[1 + 3 \frac{xd}{r^2} - \left(1 - \frac{3xd}{r^2} \right) \right] = \frac{6xd}{r^5} = \frac{3lx}{r^5}.$$

Složky pole vzbuzené dipólem momentu p ve velké vzdálenosti r od středu dipólu ve směru skloněném k ose dipólu o úhel α jsou tedy

$$5.1 (18) \quad E_{ss} = \frac{p}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{r^3}, \quad E_{sv} = \frac{p}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{r^3}.$$

Elektrický dipól je nejběžnější soustava nábojů. Připojíme-li k němu další bodové náboje, dostaneme složitější soustavu nábojů, jejíž výsledné pole a vzájemné působení bychom mohli studovat stejnými metodami jako u dipólu.

Abychom objasnili chování dipólu v poli dalších nábojů, probereme dva jednoduché příklady.



Obr. (5.1) 7. Elektrický dipól v homogenním poli

1. Silové působení elektrostatického pole na elektrický dipól

Homogenním polem rozumíme pole, jehož intenzita je vektor nezávislý na poloze v prostoru. Protože velikost intenzity je všude stejná, je stejná i hustota siločar, které protupují pole jako rovnoběžné, od sousedních přímek stejně vzdálené přímky, ve směru pole.

V homogenním poli intenzity E_s působí na póly dipólu [obr. (5.1) 7] síly $+QE_s$ a $-QE_s$ stejně velké, opačného směru, které tedy působí na dipól silovou dvojicí, jejíž moment je dán vektorovým součinem

$$5.1 (19) \quad M = l \times QE_s = p \times E_s.$$

Tento moment vymizí, jsou-li vektory p a E_s rovnoběžné. Stabilní je však jen poloha, kdy moment dipólu je souhlasně rovnoběžný s intenzitou. Je-li dipól orientován obráceně, je v poloze labilní. Kdyby pole nebylo homogenní, nebyly by síly působící na oba póly stejně velké a kromě otáčivé dvojice by podléhal dipól také posuvné síle tím větší, čím více by se obě síly lišily, tedy čím nehomogennější by bylo pole v místě dipólu a čím větší by byl jeho moment. Je zřejmé, že dipól orientovaný souhlasně s polem, tj. ve stabilní poloze, je nehomogenním polem tažen ve směru rostoucího pole, kdežto opačně orientovaný dipól je z pole vypuzován.

V nehomogenním poli nejsou totiž velikosti $Q(E_s)_+$ a $Q(E_s)_-$ sil působících na $+Q$ a na $-Q$ stejné. Proto podléhá dipól posuvné síle velikosti

$$F_p = Q \Delta E_s, \quad \Delta E_s = (E_s)_+ - (E_s)_-.$$

Je-li dipól dosti krátký, můžeme pro ΔE_s užít vztahu D (27'), čímž dostaneme přibližný vzorec

$$5.1 (19') \quad F_p = Q (\text{grad } E_s) \cdot l = \vec{p} \cdot \text{grad } E_s.$$

2. Silové působení dipólu na dipól

Úlohu budeme řešit za těchto jednoduchých předpokladů [obr. (5.1) 8].

a) Oba dipóly jsou dokonale tuhé — vzdálenosti l a l' jejich nábojů se vnějším polem nemění.

b) Momenty obou dipólů p , p' leží v přímce.

c) Vzdálenost r mezi středy dipólů je velká proti délkám l a l' .

Podmínkami b), c) zjednoduší se rovnice 5.1 (15) na vztah

$$5.1 (20) \quad E'_s = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

který pro oba náboje $+Q'$ a $-Q'$ dává síly

$$F_1 = Q'E'_s = \frac{2pQ'}{4\pi\epsilon_0(r+l'/2)^3}, \quad F_2 = -Q'E'_s = -\frac{2pQ'}{4\pi\epsilon_0(r-l'/2)^3}.$$

Vzhledem k c) lze psát

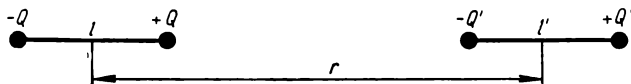
$$F_1 \approx \frac{2pQ'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 - \frac{3}{2} l'/r\right), \quad F_2 \approx -\frac{2pQ'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 + \frac{3}{2} l'/r\right),$$

takže výsledná síla působící na druhý dipól je

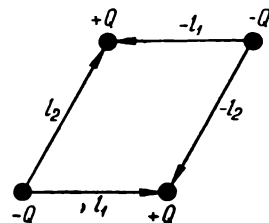
$$5.1 (21) \quad F = F_1 + F_2 \approx -\frac{2pQ'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \frac{3l'}{r} = -\frac{3pp'}{2\pi\epsilon_0 r^4}$$

čili je úměrná součinu momentů dipólů a nepřímo úměrná čtvrté mocnině jejich vzdálenosti. Záporné znaménko značí, že se oba dipóly při stejném znaménku momentů p, p' přitahují, při opačných momentech odpuzují.

Lineární soustava dvou dipólů znázorněná na obr. (5.1) 8, v níž leží všechny náboje na přímce, je zvláštním případem obecnější rovinné soustavy dvou dipólů se stejně velkými opačnými momenty, která se nazývá *kvadrupól (čtyřpól)* a je nakreslena na obr. (5.1) 9.



Obr. (5.1) 8. Dva sousedé dipóly



Obr. (5.1) 9.
Kvadrupól (čtyřpól)

Dipóly, kvadrupóly atd., obecně *multipóly*, mají velký teoretický význam v molekulové a atomové fyzice. Tak elektrické pole iontových molekul lze v jejich okolí dobře nahradit polem elementárního dipólu. Podobně pole deuteronu lze vytvořit superpozicí pole bodového náboje a pole elementárního kvadrupólu.

5.1.5. Gaussova věta

Elektrostatické pole je zcela určeno vektorovým polem jeho intenzity a vlastností tohoto vektorového pole jsou tedy dány vlastnosti elektrostatického pole. Důležitou charakteristikou vektorového pole je divergence, která určuje výtok vektoru z jednotkového objemu. Pro vektorové pole intenzity, jejíž složky $E_{sx}(x, y, z)$, $E_{sy}(x, y, z)$, $E_{sz}(x, y, z)$ jsou funkce souřadnic zvoleného místa v poli, ji vypočteme ze vzorce D (31):

$$5.1 (22) \quad \operatorname{div} \mathbf{E}_s = \nabla \cdot \mathbf{E}_s = \frac{\partial E_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial E_{sy}}{\partial y} + \frac{\partial E_{sz}}{\partial z}.$$

Podle 5.1 (6)

$$E_{sx} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r_x^0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{x}{r},$$

tedy

$$\frac{\partial E_{sx}}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - x \frac{3}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \right).$$

Avšak

$$5.1 (23) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r},$$

takže

$$\frac{\partial E_{sx}}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right)$$

a podobně pro derivace podle ostatních dvou souřadnic. Sečtením všech tří derivací dostaneme

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_s = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3-3}{r^3}.$$

Tento zlomek vymizí ve všech bodech, kde $r \neq 0$. Máme tedy výsledek, že divergence intenzity elektrostatického pole bodových nábojů je ve všech místech mimo náboje rovna nule:

$$5.1 (24)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_s = 0.$$

Fyzikální smysl této rovnice poznáme, vzpomeneme-li, že podle vzorce D (32) divergence vektoru $\mathbf{E}_s$

$$5.1 (25) \quad \operatorname{div} \mathbf{E}_s = \frac{dN(V)}{dV},$$

kde $dN(V)$ je výtok vektoru $\mathbf{E}_s$ z objemového prvku dV . Tok vektoru $\mathbf{E}_s$ ploškou $d\mathbf{S}$ je definován skalárním součinem

$$5.1 (26) \quad dN(S) = \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S},$$

kde $d\mathbf{S}$ je orientovaný plošný prvek, který má velikost dS a směr zvolené kladné normály k plošce. Tok celou plochou S je pak dán plošným integrálem vzatým přes plochu S :

$$5.1 (27) \quad N(S) = \int_S \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S}.$$

Výtok z objemu V části prostoru ohraničené uzavřenou plochou S je tedy

$$5.1 (28) \quad N(V) = \oint_{S(V)} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S},$$

kde $\oint$ značí plošný integrál vzatý přes celý povrch uzavřené plochy. Na uzavřené ploše volíme (jako kladný) směr vnější normály k ploše $S(V)$, takže vektor $d\mathbf{S}$ míří kolmo ven z prostoru uzavřeného plochou. Při opačné volbě by integrál 5.1 (28) změnil znaménko a vyjadřoval by vtok $\mathbf{E}_s$ do objemu V . Podle 5.1 (25) můžeme výtok psát ve tvaru

$$5.1 (29) \quad N(V) = \int_V dN(V) = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E}_s dV.$$

Tým jsme odvodili Gaussovu větu známou z matematiky

$$5.1 \quad (30) \quad \oint_{S(V)} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E}_s dV,$$

která převádí plošný integrál libovolného vektoru na objemový integrál jeho divergence. Je-li $\mathbf{E}_s$ intenzita elektrostatického pole, je její divergence rovna nule a tedy i výtok z libovolné části pole, která neobsahuje náboje, je nulový.

Volíme-li však uzavřenou plochu $S(V)$ tak, aby obsahovala náboj Q [obr. (5.1) 10], dostaneme podle 5.1 (6)

$$N(V) = \oint_{S(V)} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \oint_{S(V)} \frac{\mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{S}}{4\pi r^2}.$$

Podle obrázku je součin $\mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{S}$ roven průmětu plošky $d\mathbf{S}$ do roviny kolmé k průvodiči vedenému z místa částice P , tedy až na veličiny vyššího řádu jejímu průmětu dS_0 ze středu P na kouli poloměru r . Podle definice prostorového úhlu ω však

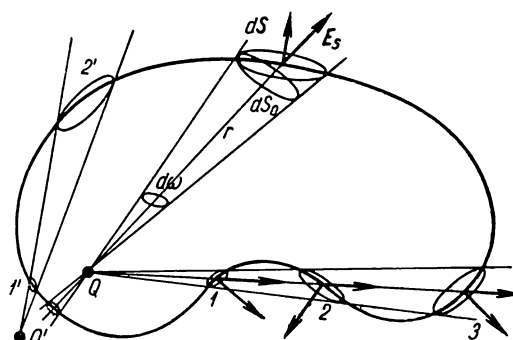
$$5.1 \quad (31) \quad dS_0 = \mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{S} = r^2 d\omega,$$

tedy

$$\oint_{S(V)} \frac{dS_0}{4\pi r^2} = \oint_{S(V)} \frac{d\omega}{4\pi} = 1.$$

Výtok vektoru $\mathbf{E}_s$ z libovolné uzavřené plochy obklopující částici P s nábojem Q

$$N(V) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Obr. (5.1) 10. Silový tok bodového náboje uzavřenou plochou

a z obr. (5.1) 10 vidíme, že nezáleží na tvaru plochy $S(V)$. Každý elementární kužel ve-

dený z bodu uvnitř plochy protne ji totiž nutně v lichém počtu plošek, pro něž se střídají znaménka skalárních součinů 5.1 (31). Proto se elementární toky dvěma po sobě jdoucími ploškami navzájem ruší (např. pro plošky 1 a 2) a zbývá tok jedinou ploškou (ploškou 3). Naproti tomu všechny elementární kužele s vrcholem vně plochy $S(V)$ ji nutně protínají v sudém počtu plošek (např. 1' a 2'), u nichž se toky navzájem ruší, a proto náboj Q' ležící vně plochy $S(V)$ nepřispívá k výtoku z prostoru uzavřeného plochou $S(V)$.

Poslední rovnice platí zřejmě pro každý bodový náboj ležící kdekoli uvnitř plochy $S(V)$. Podle principu superpozice musí tedy být výsledný výtok z objemu V roven algebraickému součtu výtoků příslušných všem nábojům ležícím v tomto objemu. Platí tedy **Gaussova věta** (elektrostatická)

$$5.1 \quad (32) \quad N(V) = \oint_{S(V)} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum Q_i}{\epsilon_0},$$

kterou vyslovíme takto:

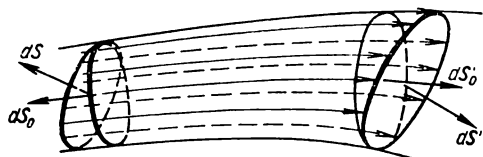
$$5.1 \quad (33) \quad \text{Výtok intenzity z libovolné části elektrostatického pole je roven algebraickému součtu nábojů obsažených v této části pole, dělenému permitivitou vakua.}$$

Tok intenzity nějakou plochou se často nazývá *silový tok* (elektrostatický) a znázorňuje se po způsobu Faradayovu *silovými trubicemi* (silotrubicemi). V obecném elektrostatickém poli vytvořeném libovolně rozloženými náboji si zvolíme malou orientovanou plošku dS , kterou prochází silový tok 5.1 (26). Podíl toku a průmětu dS_0 plošky dS do roviny kolmé k siločarám

$$\frac{dN(S)}{dS_0} = \frac{\mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S}}{dS_0} = \frac{E_s dS_0}{dS_0} = E_s,$$

rovný velikosti intenzity v tomto místě, se nazývá *hustota silového toku*. Siločáry vedené obvodem plošky dS tvoří silovou trubici, jejíž stěnu žádná siločára neprotíná [obr. (5.1) 11]. Výtok intenzity z libovolné části trubice, kde není nábojů, musí být nulový, a protože tok stěnou trubice je nulový, musí být součet toků oběma čelními plochami roven nule:

$$dN(S) + dN'(S) = 0.$$



Obr. (5.1) 11. Silová trubice

Při tom ovšem míří oba vektory $d\mathbf{S}$ i $d\mathbf{S}'$ ven z trubice, takže $dN(S) < 0$. Změníme-li smysl vektoru $d\mathbf{S}$ v opačný, svírají pak oba vektory ostrý úhel s $\mathbf{E}_s$ a oba toky jsou kladné. Platí tedy rovnice

$$E_s dS_0 = E'_s dS'_0$$

nejen pro krajní, ale pro všechny řezy trubicí, takže její kolmé průřezy jsou nepřímo úměrné intenzitě a silový tok po celé délce je stejný. Silový tok se zřejmě měří v jednotkách

$$[N] = [E_s][S] = \frac{N}{C} m^2 = \frac{J}{C} m = Vm$$

a volíme-li trubici tak, aby silový tok jedním průřezem měl předepsanou hodnotu, podrží ji podél celé trubice. Je-li silový tok rovný 1 Vm, nazývá se trubice *jednotková*. Můžeme tedy říci, že silový tok plochou se číselně rovná počtu jednotkových trubic, které jí prostupují. Např. v poli intenzity $E_s = 10^4 \text{ Vm}^{-1} = 10 \text{ Vmm}^{-1}$ má jednotková trubice kolmý průřez

$$S_0 = \frac{1 \text{ Vm}}{10^4 \text{ Vm}^{-1}} = 1 \text{ cm}^2.$$

Zobrazení elektrostatického pole silovými trubicemi, které vystupují z kladných a zanikají v záporných nábojích, odpovídá představám Faradayovým, který právě pružnými vlastnostmi silotrubic — podélně napínaných a příčně stlačovaných — vysvětloval silové působení mezi náboji.

Maxwell ukázal, že skutečně je možno vlastnosti nejen elektrostatických, ale i obecných elektromagnetických polí vyjádřit jistým tenzorem napětí, který má význam i v relativistické elektrodynamice.

5.1.6. Pole spojitě rozložených nábojů

Doposud jsme jednali o polích vzbuzených jednotlivými „bodovými náboji“, což odpovídá Coulombovu zákonu a zhruba také skutečnosti, protože náboj každého nabitého tělesa se skládá z elementárních nábojů nesených mikročásticemi. V makroskopických rozměrech však nemusíme k této „zrnitosti“ náboje přihlížet a můžeme předpokládat, že náboj je

rozložen spojitě s hustotou konečné velikosti, která se rovněž spojitě mění od místa k místu. Takový postup je ve fyzice běžný a dává možnost považovat látky všech skupenství za spojitě prostředí (kontinuum). Prostorová hustota náboje

$$5.1 \quad (34) \quad \varrho^* = \frac{dQ}{dV},$$

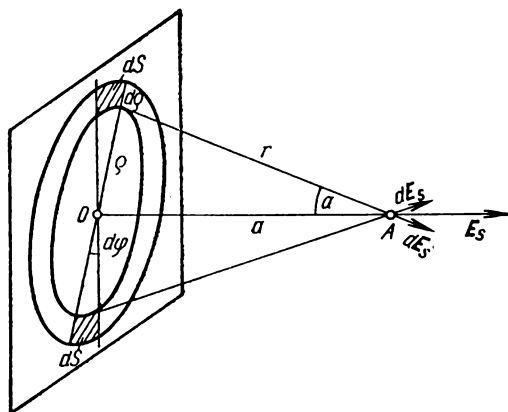
plošná hustota

$$5.1 \quad (35) \quad \sigma = \frac{dQ}{dS}$$

a délková (lineární)

$$5.1 \quad (36) \quad \tau = \frac{dQ}{dl}$$

jsou dostatečně přesně definovány, volíme-li diferenciály objemu, plochy a délky sice makroskopicky „nekonečně malé“, ale tak velké, aby příslušné diferenciály náboje obsahovaly ještě velmi velké množství elementárních nábojů. Za těchto okolností můžeme pokládat náboje dQ za „bodové“ a užít k výpočtu polí jimi vzbuzených (ve vzdálenostech makroskopicky konečných) Coulombova zákona. Výsledné pole dostaneme podle zákona superpozice integrací.



Obr. (5.1) 12. K výpočtu intenzity pole rovinného náboje

Jako příklad tohoto postupu hledíme intenzitu pole vzbuzeného nábojem rozloženým na nekonečné rovině se stálou plošnou hustotou σ v místě A vzdáleném od nabité roviny o délku a . Podle obr. (5.1) 12 budí dva protilehlé plošné elementy dS mezikruží, vyřáté z něj úhlem $d\varphi$, výslednou intenzitu, jejíž směr leží v ose $\overline{OA}$ mezikruží a která má podle 5.1 (6) velikost

$$2 \frac{\sigma dS}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{\sigma \cos \alpha}{2 \pi \epsilon_0 r^2} \varrho \, d\varphi \, d\varrho$$

a celé mezikruží dává výslednou intenzitu

$$dE_s = \frac{\sigma \cos \alpha}{2 \pi \epsilon_0 r^2} \varrho \, d\varphi \int_0^\pi d\varphi = \frac{\sigma \cos \alpha}{2 \epsilon_0 r^2} \varrho \, d\varrho.$$

Avšak

$$\varrho^2 = r^2 - a^2 \Rightarrow \varrho \, d\varrho = r \, dr,$$

takže

$$dE_s = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \cos \alpha \frac{dr}{r} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \frac{a \, dr}{r^2}$$

a integrací přes celou rovinu dostaneme výslednou intenzitu

$$5.1 \quad (37) \quad E_s = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \int_{r=a}^\infty a \frac{dr}{r^2} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left[-\frac{a}{r} \right]_a^\infty = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}.$$

Výpočet je dosti pracný a málo přehledný i v tomto jednoduchém případě. Ukážeme, že pro odvození polí spojitých nábojů může být výhodnější Gaussova věta, jejíž slovní formulaci jsme záměrně volili tak, aby zůstala v platnosti i pro spojitě rozložené náboje prostorové, plošné a lineární. Matematické vyjádření Gaussovy věty také snadno upravíme pro spojitě náboje. Nahradíme-li v 5.1 (32) součet bodových nábojů podle 5.1 (34) integrálem

$$\sum_i Q_i = \int_V \varrho^* \, dV,$$

dostaneme se zřetelem k větě 5.1 (30) vztah

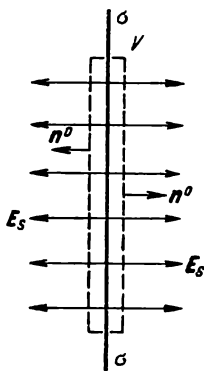
$$\int_V \left(\operatorname{div} \mathbf{E}_s - \frac{\rho^*}{\varepsilon_0} \right) dV = 0,$$

který musí platit pro objem V libovolné části pole. V místě, kde je náboj rozložen s hustotou ρ^* , musí tedy být splněna rovnice

$$5.1 (38) \quad \operatorname{div} \mathbf{E}_s = \frac{\rho^*}{\varepsilon_0},$$

která přejde v jednodušší rovnici 5.1 (24) v místě, kde není náboj (např. ve vakuu).

Konkrétním příkladům užití Gaussovy věty předešleme důležitou poznámku o její ekvivalenci s Coulombovým zákonem, z něhož jsme ji odvodili bez dalších hypotéz. Z Gaussovy věty je možno přímo vypočítat jen výtok z vnitřku každé uzavřené plochy, známe-li rozložení nábojů. Tak dostaneme hodnotu plošného integrálu 5.1 (28), ze které není obecně možno určit všechny tři složky vektoru intenzity. To však nevylučuje možnost určit velikost i směr intenzity v některých případech, kdy lze z podmínek úlohy získat další informace o vyšetřovaném poli. Takovou typickou podmínkou je souměrnost předpokládaného rozložení nábojů.*)



Obr. (5.1) 13. Elektrostatické pole rovnoměrně nabitě roviny

Ukážeme to na odvození Coulombova zákona z Gaussovy věty. Kolem bodové částice P s nábojem Q jako středu sestrojíme kulovou plochu K a počítáme výtok intenzity z vnitřku této plochy. Snadno nahlédneme, že integrál 5.1 (28) nemůžeme vypočítat, pokud neučiníme nějaké předpoklady o závislosti vektoru $\mathbf{E}_s$ na poloze v prostoru. Teprve když předpokládáme, že v důsledku středové souměrnosti nabitě částice má i její pole stejnou souměrnost vzhledem k P , můžeme tvrdit, že $\mathbf{E}_s$ má směr průvodiče $\mathbf{r}$ a všude na kulové ploše K stejnou velikost. Pak plyne skutečně z Gaussovy věty

$$\oint_K \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S} = E_s \oint dS = E_s \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

čímž je Coulombův zákon odvozen.

Využití symetrie pole nám umožní určit z Gaussovy věty též pole stejnoměrně nabitě roviny. Předpokládejme, že náboj je rozložen na neomezené rovině se stálou plošnou hustotou σ a uijíme Gaussovy věty na přímý váleček V , jehož podstavy rovnoběžné s nabitou rovinou leží po obou stranách souměrně k ní [obr. (5.1) 13]. Je-li plošný obsah každé z podstav S , vytíná váleček z nabitě roviny plochu velikosti S a obklopuje tedy celkové množství $S\sigma$ náboje. Směr pole nabitě roviny zjistíme snadno, uvědomíme-li si, že libovolná její normála je její osou souměrnosti a že pole soustavy nábojů, která má osu nebo rovinu souměrnosti, je rovněž souměrné vzhledem k téže ose nebo rovině. V libovolném bodě osy má tedy intenzita směr této osy, takže intenzita pole nekonečné roviny stejnoměrně pokryté nábojem je ve všech bodech prostoru kolmá k rovině. Kromě toho musí být pole souměrné též vzhledem k nabitě rovině, a proto musí mít intenzita po obou stranách roviny stejnou velikost, ale opačný smysl. Je-li σ kladné, míří intenzita na obou stranách od nabitě roviny, takže silový tok každou podstavou je roven podle 5.1 (28) součinu její plochy

*) Důkazů plynoucích „z důvodů symetrie“, přesněji řečeno z předpokladu „homogenosti a izotropie prostoru“, se ve fyzice vždycky hojně užívalo. Hypotéza, že účinek má stejnou souměrnost jako jeho příčina, vyplývá přímo z materialistického postulátu 1.1 (1) a je plně oprávněna.

S a intenzity E_s pole vzbuzeného nabitou rovinou. Na obou podstavách je intenzita souhlasně rovnoběžná s vnější normálou, takže celkový tok oběma podstavami

$$E_s S + E_s S = 2E_s S.$$

Silový tok pláštěm válce je však roven nule, protože celá plocha pláště je rovnoběžná se směrem pole. Podle Gaussovy věty tedy

$$N(V) = 2E_s S = \frac{S\sigma}{\varepsilon_0},$$

odkud

$$5.1 \quad (39) \quad E_s = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} n^0,$$

značí-li n^0 jednotkový vektor ve směru vnější normály k podstavě válce V .

Odvozený výsledek, který souhlasí s 5.1 (37), platí pro libovolnou výšku válce, tedy v libovolné vzdálenosti od roviny: těsně u ní i v místech vzdálených. Pole je tedy v celém pravém poloprostoru homogenní a siločáry jsou rovnoběžné, všude stejně husté (navzájem stejně vzdálené) přímky. Z rovnice 5.1 (39) pro pole jedné nabitě roviny lze vypočítat podle principu superpozice intenzitu výsledného pole libovolné soustavy rovnoběžných rovin. Máme-li např. dvě roviny pokryté nábojem s hustotami σ_1 a σ_2 , jsou jimi vzbuzené intenzity

$$E_{s1} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} n_1^0, \quad E_{s2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} n_2^0$$

a výsledné pole

$$E_s = E_{s1} + E_{s2} = \frac{1}{2\varepsilon_0} (\sigma_1 n_1^0 + \sigma_2 n_2^0).$$

Důležité jsou dva případy

a) Dvě stejně nabitě roviny ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$) mají výsledné pole znázorněné na obr. (5.1) 14. Mezi oběma rovinami mají jednotkové vektory n_1^0 a n_2^0 opačný smysl, kdežto vně obou rovin jsou souhlasně rovnoběžné. Proto je pole mezi rovinami nulové a vně rovin homogenní pole s intenzitou

$$5.1 \quad (40) \quad E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

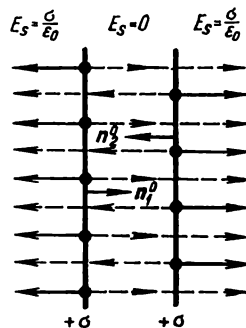
dvojnásobnou, než má pole jedné roviny.

b) Dvě opačně nabitě roviny ($\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$) dávají pole

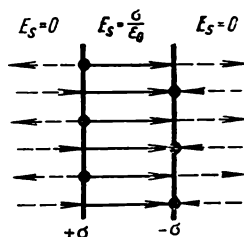
$$5.1 \quad (41) \quad E_s = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (n_1^0 - n_2^0),$$

takže výsledné pole podle obr. (5.1) 15 mezi rovinami má intenzitu 5.1 (40) a v celém zbývajícím prostoru vymizí.

Ačkoli odvozené výsledky platí přesně jen pro nekonečné roviny, lze jich užít i pro nabitě desky konečných rozměrů, omezíme-li se na místa, jejichž kolmá vzdálenost od desek je malá proti vzdálenosti od okrajů desek.



Obr. (5.1) 14. Elektrostatické pole dvou stejně nabitých rovnoběžných rovin



Obr. (5.1) 15. Elektrostatické pole dvou opačně nabitých rovin

Intenzita pole nekonečné roviny pokryté nábojem se stálou plošnou hustotou je konstantní vektor stálé velikosti i směru. V takovém poli, které se nazývá *homogenní* neboli *stejnorodé* pole, jsou siločáry navzájem rovnoběžné přímky a jednotkové trubice jsou válcové plochy, které mají v celém poli stejný průřez.

5.1.7. Elektrostatický potenciál

V čl. 2.3.2 jsme ukázali, že gravitační pole libovolné soustavy těles je konzervativní pole, v němž je definován potenciál $U(x, y, z)$ v nějakém bodě B jako práce vykonaná polem při vzdálení zkušební částice z tohoto bodu do nekonečna, dělená hmotností částice. Potenciál souvisí s intenzitou $\mathbf{K}$ gravitačního pole vztahy 2.3 (20) a 2.3 (21)

$$U = + \int_B^{\infty} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^B \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}, \quad \mathbf{K} = - \text{grad } U.$$

Vzhledem k stejnému tvaru Coulombova a gravitačního zákona lze očekávat, že obdobně lze definovat v každém elektrostatickém poli *elektrostatický potenciál* φ , který souvisí s intenzitou pole stejnými vztahy jako U s $\mathbf{K}$.

Existence elektrostatického potenciálu plyne přímo ze základní vlastnosti pole $\mathbf{E}_s$, které je polem nevírovým.

O tom se snadno přesvědčíme, vypočteme-li vektor $\text{rot } \mathbf{E}_s$ podle vzorců D (35, 36). V poli jednoho bodového náboje Q je

$$\frac{\partial E_{sx}}{\partial y} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r^3} \cdot \frac{r_x}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{r^3} \right) = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r^3} \right)$$

a podle 5.1 (23)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3}{r^4} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{3y}{r^5},$$

takže

$$\text{rot}_x \mathbf{E}_s = \frac{\partial E_{sz}}{\partial y} - \frac{\partial E_{sy}}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3zy}{r^5} + \frac{3yz}{r^5} \right) = 0.$$

Opakováním výpočtu pro E_{sy} a E_{sz} bychom dokázali, že platí vztahy

$$(5.1 \ 42) \quad \frac{\partial E_{sx}}{\partial y} = \frac{\partial E_{sy}}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_{sx}}{\partial z} = \frac{\partial E_{sz}}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_{sy}}{\partial x} = \frac{\partial E_{sx}}{\partial y}.$$

Můžeme je shrnout v jedinou vektorovou rovnici

$$5.1 \ (43) \quad \text{rot } \mathbf{E}_s = 0,$$

která zůstává v platnosti i pro výsledné pole libovolného počtu bodových nábojů, protože rotace součtu vektorů se rovná součtu jejich rotací. Pole s nulovou rotací je však polem nevírovým, pro které platí podle D (39) rovnice

$$5.1 \ (44) \quad \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

V elektrostatickém poli platí tedy rovnice

$$5.1 \ (45) \quad \oint_C \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = 0$$

a podle D (41) je jeho intenzita gradientem jisté skalární funkce souřadnic, kterou označíme $-\varphi(x, y, z)$, takže bude

$$5.1 \ (46) \quad \mathbf{E}_s = -\text{grad } \varphi = -\nabla \cdot \varphi.$$

Nazveme-li funkci φ *elektrostatickým potenciálem* (potenciálem elektrostatického pole), máme hledanou obdobu gravitačního potenciálu U .

Protože gradient je vektor o složkách

$$\text{grad}_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \text{grad}_y \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

můžeme vektorovou rovnici 5.1 (46) nahradit třemi složkovými rovnicemi

$$5.1 (47) \quad E_{sx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_{sy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_{sz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

neboť potenciál je obecně funkcí všech tří souřadnic. Jeho změnu při malém posuvu $d\mathbf{l}$ o složkách dx, dy, dz vypočteme jako úplný diferenciál

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \mathbf{grad} \varphi \cdot d\mathbf{l}$$

čili

$$d\varphi = -\mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l}.$$

Z toho plyne, že přírůstek potenciálu při přechodu z místa (1) do místa (2) je dán křivkovým integrálem

$$5.1 (48) \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \int_{(1)}^{(2)} d\varphi = - \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l},$$

který závisí jen na souřadnicích výchozího a koncového bodu integrační dráhy, protože $d\varphi$ je úplný diferenciál. Přírůstek potenciálu při přechodu mezi dvěma body pole je tedy jednoznačně stanoven integrálem 5.1 (48) jako v každém nevírovém poli. Platí to zajisté i o úbytku, tj. záporně vzatém přírůstku

$$5.1 (49) \quad U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l},$$

který nazýváme *napětím* mezi body (1) a (2). Abychom dostali určité hodnoty potenciálu ve všech bodech pole, stačí tedy volit hodnotu potenciálu v některém bodě. Protože pole slábne se vzdáleností od nábojů a intenzita v nekonečně vzdálených bodech je nulová, je rozumné také potenciál v nekonečnu volit rovný nule. Učiníme-li tak, je potenciál v libovolném bodě B dán integrálem

$$5.1 (50) \quad \varphi(B) = \int_{\infty}^B d\varphi = \int_B^{\infty} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l}.$$

Potenciál v nějakém bodě pole je integrál intenzity pole vzatý po libovolné dráze z toho bodu do nekonečna.

Této abstraktní definici můžeme dát názornější fyzikální význam, který jsme poznali u gravitačního potenciálu U . Násobíme-li poslední rovnici nějakým nábojem q ($\neq 0$), dostaneme

$$q\varphi = \int_B q\mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = \int_B \mathbf{F}_{es} \cdot d\mathbf{l} = A,$$

značí-li A práci vykonanou polem při vzdálení náboje q z B do nekonečna, která se v konzervativním poli rovná úbytku potenciální energie. Položíme-li tedy potenciální energii W v nekonečnu na roven nule, bude

$$5.1 (51) \quad q\varphi = A = W(B) - W(\infty) = W(B).$$

Z toho plyne nejjednodušší definice potenciálu:

$$5.1 (52) \quad \text{Potenciál v nějakém místě elektrostatického pole je potenciální energie libovolného náboje v tom místě, dělená tímto nábojem.}$$

Tato definice souhlasí s jinou dosti obvyklou definicí, která zní: *Elektrostatický potenciál v nějakém místě je práce vykonaná polem při vzdálení libovolného náboje z tohoto místa do nekonečna, dělená oním nábojem.*

Také se říká: *Potenciál v nějakém místě se číselně rovná práci potřebné k přenesení 1 coulombu z nekonečna do toho místa.*

K tomu připojíme důležitý poznatek, který plyne z definice napětí 5.1 (49):

Práce vykonaná polem při průchodu náboje ve směru intenzity pole napětím U_{12} je rovna součinu napětí a náboje:

$$5.1 (53) \quad A_{12} = qU_{12}.$$

Ze všech předešlých vzorců vychází, že potenciál má rozměr práce dělené nábojem a že jeho jednotka je

$$[\varphi] = \frac{\text{joule}}{\text{coulomb}} = \frac{\text{J}}{\text{As}} = \frac{\text{W}}{\text{A}} = \text{volt} = 1 \text{ V}.$$

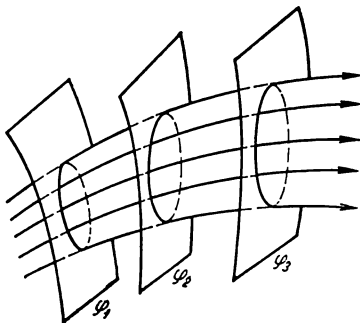
Obecný vztah 5.1 (46) mezi potenciálem a intenzitou elektrostatického pole můžeme vyjádřit stručnou větou:

5.1 (54) *Intenzita elektrostatického pole je spád čili záporně vzatý gradient potenciálu.*

Této větě můžeme dát geometrický význam, definujeme-li *hladiny potenciálu* čili *ekvipotenciální plochy*. Ve všech bodech takové plochy stálého potenciálu má potenciál touž hodnotu. Označíme-li ji φ_0 , má příslušná hladina potenciálu rovnici

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0.$$

Při libovolném elementárním posuvu δl o složkách δx , δy , δz , který je tečný k této ploše (leží v její tečné rovině), musí zůstat potenciál stálý. Proto jeho změna



Obr. (5.1) 16. Siločáry a hladiny v obecném elektrostatickém poli

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \delta y + \\ &+ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \delta z = \delta\varphi_0 = 0, \end{aligned}$$

takže podle 5.1 (47)

$$5.1 (55) \quad -(E_{sx}\delta x + E_{sy}\delta y + E_{sz}\delta z) = -\mathbf{E}_s \cdot \delta l = 0.$$

Skalární součin intenzity s libovolným posuvem, který leží v hladině, je tedy nulový. To znamená, že intenzita je všude v poli kolmá k hladinám potenciálu a silokřivky protínají tyto plochy kolmo. Říkáme, že *silokřivky jsou ortogonální trajektorie ekvipotenciálních ploch*. Je to znázorněno na obr. (5.1) 16

pro tři hladiny se stálými potenciály $\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3$, protínající silovou trubici ve třech kolmých řezech. Kladný směr siločar míří ve směru klesajícího potenciálu, protože intenzita je rovna spádu potenciálu.

Toto uspořádání siločar a hladin plyne přímo ze známé vlastnosti gradientu, že stojí kolmo k hladinám skalárního pole a míří ve směru rostoucích hodnot příslušné skalární funkce. Rovnice 5.1 (55) je ostatně z hlediska fyzikálního samozřejmá. Podle definice potenciálu se při posuvu náboje po ploše stálého potenciálu nemění potenciální energie náboje. Proto nemůže konzervativní pole konat při takovém posuvu práci, což vyžaduje, aby skalární součin síly a posuvu byl nulový.

Dodejme, že z obecného vztahu mezi potenciálem a intenzitou, vyjádřeného skalárními rovnicemi 5.1 (47), plyne jednoduše rovnice 5.1 (43), neboť

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{E}_s = \frac{\partial E_{sz}}{\partial y} - \frac{\partial E_{sy}}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0, \dots, \dots$$

Naopak z obecné rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_s = \frac{\varrho^*}{\varepsilon_0},$$

která platí v místech, kde náboj je spojitě rozložen s prostorovou hustotou ϱ^* , dostaneme podle 5.1 (47)

$$-\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = \frac{\varrho^*}{\varepsilon_0}.$$

To je známá *Poissonova rovnice* pro elektrostatický potenciál. Píšeme ji obvykle ve tvaru

$$5.1 (56) \quad \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = -\frac{\varrho^*}{\varepsilon_0},$$

kde Δ značí *Laplaceův operátor* D(40). V místech s nulovou hustotou náboje přejde hořejší rovnice v jednodušší rovnici *Laplaceovu*:

$$5.1 (57) \quad \boxed{\Delta \varphi = 0.}$$

Uvedené vzorce platí pro potenciál libovolného elektrostatického pole. Z principu superpozice polí vyplývá věta o *superpozici potenciálů*:

Potenciál pole složeného z několika polí je roven algebraickému součtu potenciálů jednotlivých polí.

Výsledné pole je totiž

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_{s1} + \mathbf{E}_{s2} + \dots$$

a výsledný potenciál v bodě B

$$\varphi = \int_B^\infty (\mathbf{E}_{s1} + \mathbf{E}_{s2} + \dots) \cdot d\mathbf{l} = \int_B^\infty \mathbf{E}_{s1} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^\infty \mathbf{E}_{s2} \cdot d\mathbf{l} + \dots = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

Předcházející teoretický výklad doplníme dvěma jednoduchými příklady:

1. Potenciál nabitě částice

Pole v okolí částice P s bodovým nábojem Q má intenzitu

$$\mathbf{E}_s = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0$$

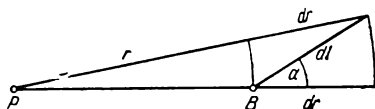
a potenciál v bodě B je podle 5.1 (50)

$$\varphi = \int_B^\infty \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_B^\infty \frac{\mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{l}}{r^2}.$$

Skalární součin posuvu $d\mathbf{l}$ s jednotkovým vektorem $\mathbf{r}^0$ ve směru průvodiče $\mathbf{r}$ je podle obr. (5.1) 17 roven $\cos \alpha \, dl = dr$, takže

$$\int_B^\infty \frac{\mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{l}}{r^2} = \int_B^\infty \frac{dr}{r^2} = - \left[\frac{1}{r} \right]_B^\infty.$$

Označíme-li tedy r vzdálenost PB , bude potenciál v této vzdálenosti



Obr. (5.1) 17. Elementární změna průvodiče

5.1 (58)

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Potenciál bodového náboje Q je tedy funkcí jenom vzdálenosti r od Q , takže hladiny potenciálu jsou kulové plochy ($r = \text{konst.}$) opsané kolem náboje. Protože intenzita má všude směr průvodiče $\mathbf{r}$, jsou

siločáry skutečně kolmé ke kulovým hladinám, jak je vidět z obr. (5.1) 2. Potenciál klesá nepřímo úměrně s první mocninou r a v nekonečnu vymizí.

2. Potenciál homogenního pole

Hladiny potenciálu v homogenním poli jsou roviny kolmé k siločarám. Položíme-li osu x do směru siločar, bude mít intenzita jedinou nenulovou složku

$$E_s = E_{sx} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

a potenciál ve vzdálenosti x

$$\varphi = -E_s x + \text{konst.}$$

Spád potenciálu je tedy konstantní:

$$- \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{x_2 - x_1} = E_s$$

a napětí mezi dvěma hladinami

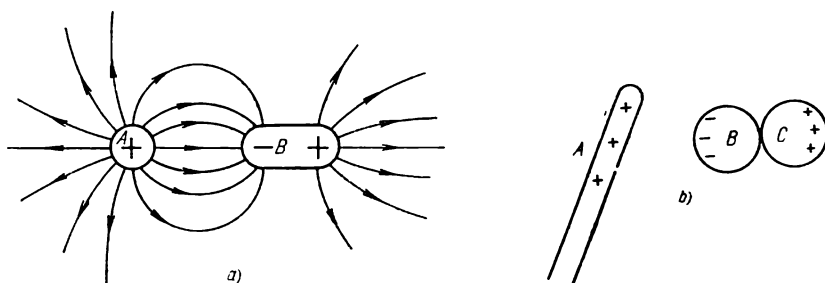
$$5.1 (59) \quad U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = (x_2 - x_1) E_s.$$

5.1.8. Elektrický stav těles

Účinek dvou blízkých stejně velkých nábojů opačného znaménka se ve větší vzdálenosti prakticky ruší, jak vidíme např. z průběhu siločar v okolí elementárního dipólu na obr. (5.1) 6. Siločáry jsou uzavřené, neboť začínají i končí v dipólu a se vzdáleností velmi rychle řídnou. Proto tělesa, která obsahují jen neutrální molekuly (nebo neutrální atomy), v nichž jsou opačné náboje, nejví elektrické vlastnosti, pokud nějakým vnějším vlivem neporušíme stejnoměrné uspořádání nábojů. Opačné náboje jsou v neutrálních molekulách navzájem poutány elektrostatickými silami, a proto ani pod vlivem silných vnějších polí nenastane znatelný pohyb nábojů, nevzniká v nich trvalý elektrický proud.

Taková látka je elektricky nevodivá, je to *nevodič* neboli *izolant*, který se též nazývá *dielektrikum*. Některé látky však obsahují nabitě částice, které nejsou vázány na stálé polohy, jak je tomu u kovů obsahujících volné elektrony. V takových látkách je možno vnějším polem vyvolat usměrněný pohyb těchto částic (v kovech pohyb elektronů), které se tak stávají nositeli proudu. Kovy a ostatní látky, které vedou proud, nazýváme *vodiči*.

Ani vodiče nejeví však elektrické vlastnosti bez vnějších zásahů. Vůbec všechny látky přecházejí samovolně do neelektrického stavu, v němž jsou jejich náboje dokonale promíseny a který je přirozeným rovnovážným stavem vodičů i nevodičů. Elektrické vlastnosti projeví těleso teprve tehdy, když se nám podaří stejnoměrné uspořádání nábojů porušit a nahromadit náboje jednoho znaménka na některých místech a náboje opačného znaménka na místech jiných. Známe i způsoby, kterými lze rozdělit původně stejná množství kladných a záporných nábojů na dvě tělesa tak, že po jejich odloučení má jedno z těles převahu kladného, druhé převahu záporného náboje; pravíme, že první těleso je zelektrováno kladně, druhé záporně. U izolantů to lze provést třením. Tak např. skleněná tyč třená amalgamovanou kůží se nabíjí kladně, kdežto kůže dostane stejně velký náboj záporný. Naproti tomu se ebonitová tyč nabíjí záporně, třeme-li ji srstí, která převezme kladný náboj. Tyto jevy si vysvětlujeme tím, že se záporné elektrony, tvořící obal atomů, v prvním případě uvolňují z povrchu skla a přejdou na kůži, kdežto v druhém případě naopak elektrony unikají z třené srsti a hromadí se na povrchu ebonitové tyče. Dotykem můžeme neutrální těleso zelektrovat proto, že se souhlasné náboje odpuzují a povrch tělesa nebývá dokonale nevodivý. Tak se stane, že část náboje zelektrovaného tělesa přejde na jiné těleso, které má menší převahu stejného náboje nebo dokonce převahu náboje opačného. Proto pozorujeme sdílení náboje dotykem a vyrovnání nábojů opačně nabitých těles nebo



Obr. (5.1) 18. Elektrostatická indukce: *a* — vznik pólů ve vodiči, *b* — nabíjení indukce

úplné zrušení stejně velkých nábojů opačně zelektrovaných těles. Konečně třetí způsob elektrování je založen na jevu zvaném *elektrostatická indukce* nebo *influence*, který zvláště dobře pozorujeme na vodičích a který lze popsat takto [obr. (5.1) 18a]: Přibližujeme-li k neelektrickému vodiči *B* kladně nabitě těleso *A*, poruší se silovým působením náboje rovnovážné rozložení nábojů ve vodiči *B*, neboť kladné náboje jsou odpuzovány a záporné přitahovány k *A*; tak vzniknou ve vodiči *B* dva elektrické póly opačného znaménka, takže se toto těleso změní v jakýsi dipól. Proto mluvíme také o polarizaci původně neutrálního tělesa. Podle elektronové teorie vysvětlujeme popsáný děj u kovů tak, že volně pohyblivé elektrony jsou přitahovány na část povrchu vodiče *B* nejbližší k vodiči *A*, takže osamocené náboje kladných iontů v odvrácené části vodiče se projeví kladným nábojem. Protože však pole slabne se vzdáleností od nabitěho tělesa *A* a množství kladného i záporného náboje jsou stejná, převládá přitažlivost mezi bližšími náboji nad odpuzováním vzdálenějších. Tak si indukci vysvětlujeme přitahování nenabitěho tělesa tělesem zelektrovaným.

Indukce je důležitým prostředkem nabíjení vodičů, neboť spojíme-li vzdálenější část vodiče *B* vodivě buď přímým dotykem, nebo drátem, vlhkou nití, dotykem prstů apod. s jiným vodičem *C*, přejde odpuzovaný souhlasný náboj na tento vzdálenější vodič (podle elektronové teorie zruší se tento kladný náboj elektrony přitahovány z druhého vodiče) a vznikne opět kladný náboj na vzdálenějším vodiči [obr. (5.1) 18b]. Přerušíme-li pak vodivé spojení mezi *B* a *C* dřívě, než oddálíme nabitou tyč *A*, je výsledkem pokusu rozdělení náboje na záporně nabitý vodič *B* a kladně nabitý vodič *C*. Střední vodič *B* nabijeme

nejdokonaleji, spojíme-li jej vodivě se zemí, tj. uzemníme-li jej a tak souhlasný náboj odvedeme do země, načež uzemnění přerušíme, dokud opačný náboj je zadržován na vodiči B .

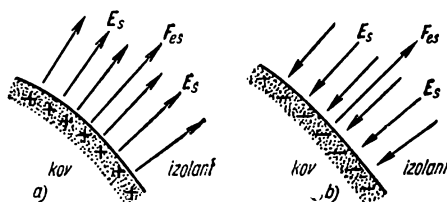
Na elektrostatické indukci je založena řada indukčních elektrostatických generátorů.

Při nabíjení vodičů vzniká v nich pohyb nábojů, což dokazuje, že elektrické pole působí i uvnitř vodivých látek, tedy i v kovech. Tento pohyb nábojů trvá ovšem jen po dobu nabíjení vodiče nebo na počátku indukce, pokud se těleso A blíží k B a vytváří oddělení nábojů kladných od záporných. Jakmile se pohyb těles A a B zastaví, nastane ustálený stav, při němž jsou všechny náboje v klidu. Podle Coulombova zákona, který platí nezávisle na prostředí, vznikne přiblížením tělesa A ve vodiči B elektrické pole, které nutí volné náboje k pohybu ve směru siločar. Záporně nabitě volné elektrony postupují do míst vyššího potenciálu, který se tím snižuje. Potenciální rozdíly v různých místech kovu se tím zmenšují, potenciální spád klesá, takže pole uvnitř kovu slábne. Pohyb volných nábojů ustane teprve tehdy, když se potenciální rozdíly zcela vyrovnají a pole v kovu zanikne. Pak jsou již všechny volné náboje v klidu, jejich rozložení ve vodiči je *statické*. Máme tedy výsledek:

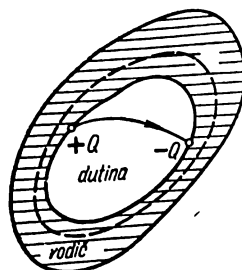
Za rovnovážného statického stavu je všude uvnitř vodiče potenciál stejný a pole nulové.

Uvnitř vodiče je tedy intenzita

$$\mathbf{E}_s = 0,$$



Obr. (5.1) 19. Elektrostatické pole na povrchu vodiče nabitého a — kladně, b — záporně



Obr. (5.1) 20. Nevodivá dutina ve vodiči

což znamená, že vymizí i její divergence. Protože však podle 5.1 (38)

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_s = \frac{\rho^*}{\epsilon_0},$$

musí být v celém objemu vodiče nulová hustota náboje, tedy $\rho^* = 0$. Z toho ovšem neplyne, že vodič nelze vůbec nabít, neboť náboj může být v klidu na povrchu vodiče, tj. na rozhraní vodiče a izolantu. Pak tam musí vzhledem k hořejšímu vztahu být také nulová intenzita, která však nesmí volné náboje uvádět do pohybu. To je zřejmě možné jen tehdy, když vektor $\mathbf{E}_s$ má na povrchu vodiče takový směr a smysl, že na volné náboje tam působí síla kolmá k povrchu směrem ven z vodiče, tedy do izolantu, který jejich pohyb nepřipouští. Je to znázorněno na obr. (5.1) 19a pro kladně nabitý a na obr. (5.1) 19b pro záporně nabitý vodič. Z toho plyne, že volný náboj sídlí jen na povrchu vodiče.

Zajímavá je otázka rozložení náboje na vodiči s uzavřenou dutinou vyplněnou izolantem nebo vakuem, jak je znázorněno na obr. (5.1) 20. Abychom ji rozřešili, sestrojíme uzavřenou plochu S , která obklopuje dutinu a leží celá uvnitř prostoru vyplněného vodičem. Intenzita je všude na ploše S rovna nule, a proto je i celkový výtok z této plochy nulový. Algebraický součet nábojů uvnitř plochy S je tudíž nulový. Nejsou-li tedy v dutině žádné náboje, musí být celkový náboj na vnitřním povrchu vodiče roven nule. Kdyby však na tomto povrchu byla stejná množství kladných a záporných nábojů — na vodiči volně pohyblivých —, přitahovaly by se a navzájem zrušily.

Dokážeme to přesněji: Z kladného náboje $+Q$ na vnitřním povrchu by vycházely siločáry, který by musely procházet dutinou (ve vodiči $\mathbf{E}_s = 0$) a končit na vnitřním povrchu v náboji $-Q$. Všechny body tohoto povrchu mají však stejný potenciál, takže by podle 5.1 (48) muselo být

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = 0$$

pro všechny možné křivky spojující body 1 a 2 povrchu s náboji $+Q$ a $-Q$. To není možné jinak, než když $\mathbf{E}_s = 0$ v celé dutině a když tedy na vnitřním povrchu vodiče nejsou žádné náboje, které by byly zdrojem siločar. Tím jsme dokázali důležitou větu:

5.1 (60)

Volný náboj sídlí jen na povrchu vodiče. Je-li ve vodiči uzavřená nevodivá dutina, v níž není nábojů, je v celém vodiči a všude v dutině pole nulové a potenciál stejný jako na vnějším povrchu vodiče. Na jeho vnitřním povrchu není volný náboj.

Vodivý uzavřený obal odstiňuje tedy vnější elektrické pole. V praxi se často k odstínění pole užívá tzv. *Faradayovy klece*, což je drátěná síť, která obklopuje stíněný prostor.

Platnost věty 5.1 (60) se dá ukázat jednoduchým pokusem s *Faradayovým válcem*. Nabijeme-li dutý válec kovový, můžeme dotykem zkusmé kuličky přenášet z něho náboj na kolektor elektroskopu, jehož lístky se více rozestupují, opakujeme-li pokus tak, že se dotýkáme různých míst na vnějším povrchu válce. Jestliže se však kuličkou dotkneme vnitřního povrchu válce, nejví elektroskop zvýšení náboje. Dotykem uvnitř válce se žádný náboj kuličky nesdělí.

5.1.9. Elektrostatické pole nabitých vodičů

Z poznatků předešlého článku vyplývá především, že celý vnější povrch nabitého vodiče má týž potenciál, jinak řečeno, je hladinou potenciálu. Z toho vidíme, že siločáry musí být všude kolmé k povrchu, jak jsme se už zmínili. Je-li povrch nabit kladně, vystupují z něho siločáry ven do izolantu, je-li nabit záporně, směřují siločáry z izolantu do povrchu vodiče. V obou případech jde o rovnovážný stav, při němž jsou volné náboje drženy v klidu, protože v obou případech míří síly na ně působící do izolantu, který nábojům nedává možnost pohybu.

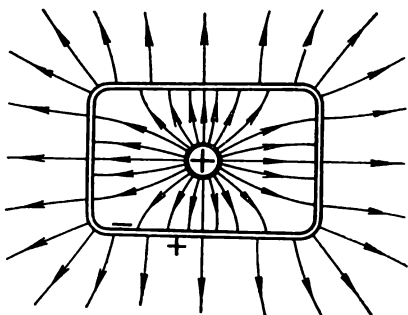
Průběh pole v okolí vodičů je znázorněn na obr. (5.1) 18a. Z kladně nabitě koule A vystupují siločáry kolmo a část jich vstupuje rovněž kolmo do levé části povrchu vodiče B . Uvnitř tělesa B je ovšem pole nulové, ale siločáry vystupují v jeho pravé části kolmo z povrchu. Všechny siločáry vycházející z kladně nabitých těles končí na záporně nabitých tělesech nebo posléze zanikají v okolních tělesech (např. ve stěnách, stropu a podlaze laboratoře), která jsme přímo nenabíli, ale na jejichž povrchu se elektromagnetickou indukcí hromadí záporný náboj. Celkové množství indukovaných kladných nábojů rovné celkové velikosti indukovaných záporných nábojů rovná se volnému náboji indukujícího tělesa. V čl. 5.9.2 zdůvodníme názor, že algebraický součet všech nábojů ve vesmíru je nulový.

Na obr. (5.1) 21 je znázorněn případ kladně nabitě kovové koule, zavěšené na nevodivém vláknu uprostřed nenabitě kovové schránky. Siločáry vystupují radiálně z koule a vstupují kolmo do vnitřního povrchu schránky, na němž vzniká indukovaný záporný náboj stejné velikosti jako kladný náboj koule. Stejně velký kladný náboj je rozložen po vnějším povrchu schránky takovým způsobem, že pole v kovové vrstvě schránky vymizí. Z vnějšího povrchu vycházejí siločáry do okolního prostoru, při čemž celkový silový tok vně schránky je přesně roven toku vystupujícímu z nabitě koule.

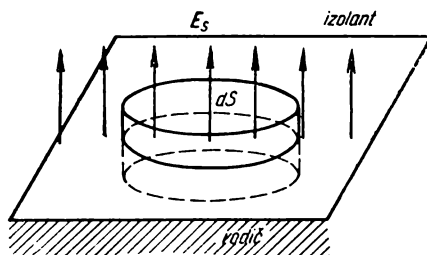
Tento výsledek není ve sporu s větou 5.1 (60), která platí za předpokladu, že v dutině nejsou náboje. Vidíme zároveň, že uzavřený dutý vodič neodstiňuje pole nábojů ležících v jeho dutině. Kovový obal propouští elektrické pole do okolí, aniž se zmenší celkový počet jednotkových silových trubice.

Směr intenzity pole vzbuzeného nabitým vodičem tedy známe. Její velikost pak souvisí jednoduchým vztahem a hustotou volného náboje na povrchu vodiče. Vzhledem k tomu, že známe směr intenzity, bude patrně vhodné užít k určení její velikosti Gaussovy věty. Abychom zjistili intenzitu E_s pole v těsné blízkosti povrchu nabitého vodiče, zvolme na povrchu vodiče velmi nízký váleček s podstavami rovnoběžnými s povrchem, z nichž jedna leží vně a druhá uvnitř vodiče, jak je naznačeno na obr. (5.1) 22.

Je-li plášť válečku kolmý k povrchu vodiče, tedy rovnoběžný s intenzitou, je její tok pláštěm roven nule. Stejně je roven nule tok intenzity podstavou válečku, která leží uvnitř vodiče, kde není pole. Z toho vidíme, že celkový výtok z objemu válečku je roven $E_s dS$,



Obr. (5.1) 21. Pole nabité koule obklopené kovovou schránkou



Obr. (5.1) 22. Pole na povrchu kladně nabitého vodiče

značí-li dS plošný obsah jedné podstavy. Podle Gaussovy věty je tento výraz roven náboji obsaženému uvnitř válečku, dělenému permitivitou vakua ϵ_0 . Náboj obsažený ve válečku se však rovná součinu plošné hustoty σ náboje a plošky dS . Platí tedy vztah

$$E_s dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma dS$$

čili

$$5.1 (61) \quad E_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \mathbf{E}_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}^0,$$

značí-li $\mathbf{n}^0$ jednotkový vektor ve směru vnější normály.

Kdybychom znali plošnou hustotu náboje na povrchu vodiče, znali bychom také velikost a směr intenzity na rozhraní vodiče a dielektrika. Obecné řešení problému rozložení náboje je velmi obtížné, ale v některých případech je určeno tvarem vodiče, např. u koule a válce.

1. Pole nabitě vodivé koule

Nabijeme-li nábojem Q plnou nebo dutou kovovou kouli poloměru R , usadí se náboj na jejím vnějším povrchu, a to vzhledem k její středové souměrnosti se stálou hustotou

$$\sigma = \frac{Q}{4 \pi R^2}.$$

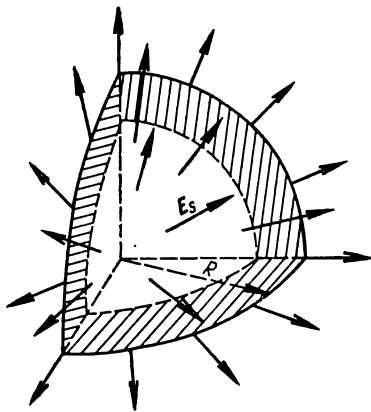
Velikost intenzity je tedy podle 5.1 (61) těsně u povrchu koule

$$E_s = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4 \pi R^2}$$

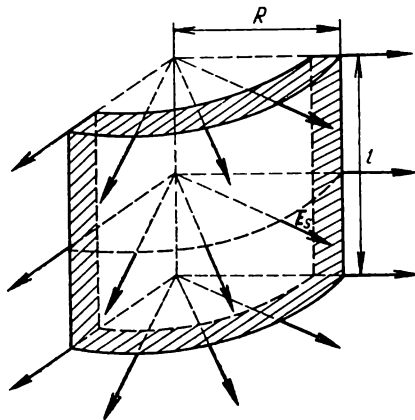
a její směr je kolmý k povrchu. Je to směr průvodiče vedeného ze středu koule, takže

$$5.1 \quad (62) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} r^0.$$

Proto nejbližší hladina, která siločáry protíná kolmo, má také tvar soustředné koule, a to musí platit vzhledem k souměrnosti pro všechny hladiny potenciálu, takže siločáry v celém vnějším prostoru jsou přímky jdoucí středem koule a mají průběh naznačený na obr. (5.1) 23, kdežto uvnitř koule je všude nulové pole. Vnější pole E_s těsně u povrchu je zřejmě totožné s polem E_s , které by vytvořil bodový náboj stejné velikosti ve vzdálenosti R .



Obr. (5.1) 23. Pole kladně nabitě kovové koule



Obr. (5.1) 24. Pole části kladně nabitého kovového válce

Intenzitu pole v libovolné vzdálenosti $r > R$ od středu určíme užitím Gaussovy věty na soustřednou kouli K poloměru r . Podle 5.1 (32) je

$$\oiint_K E_s \cdot dS = E_s \oiint_K dS = E_s 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

neboť vektor E_s stojí kolmo k povrchu koule a má na ní stálou velikost E_s , pro kterou odtud vychází

$$E_s = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Je tedy pole vně nabitě koule stejné jako pole jejího náboje soustředěného v jejím středu.

Také potenciál, který je všude uvnitř koule stejný jako na povrchu, má vně koule stejné hodnoty jako potenciál stejného náboje soustředěného ve středu koule:

$$5.1 \quad (63) \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \text{ pro } r \leq R, \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ pro } r \geq R.$$

To je důležitý poznatek, který umožňuje nahradit bodový náboj, který lze těžko realizovat, stejnoměrně nabitou kovovou koulí.

2. Pole nabitého vodivého válce

Mějme velmi dlouhý kovový válec (dutý nebo plný) poloměru R [obr. (5.1) 24]. Ve střední části válce bude vliv vzdálených konců neznatelný a budeme proto předpokládat, že se náboj na povrchu válce rozloží se stálou plošnou hustotou σ . Na části válce výšky l je rozložen náboj

$$Q_l = 2\pi R l \sigma.$$

Intenzita pole, která je kolmá k plášti válce, má podle 5.1 (61) na povrchu válce velikost

$$E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q_l}{\varepsilon_0 2 \pi R l} = \frac{\tau}{2 \pi \varepsilon_0 R},$$

kde podíl

$$\tau = \frac{Q_l}{l}$$

je délková hustota náboje rozloženého na povrchu válce s plošnou hustotou σ , počítaná pro jednotkovou délku jeho osy. Abychom zjistili intenzitu v libovolné vzdálenosti r od osy válce, užijeme Gaussovy věty na rotační válec výšky l a poloměru r , souosý s nabitým válcem. Podle 5.1 (32)

$$\oint_{S_l} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_l}{\varepsilon_0},$$

kde vektor $\mathbf{E}_s$ je kolmý k plášti válce a rovnoběžný s jeho podstavami. Proto je skalární součin $\mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S}$ všude na podstavách roven nule a na plášti je roven součinu velikosti obou vektorů. Je tedy

$$E_s \oint_S dS = \frac{Q_l}{\varepsilon_0}$$

a po integraci přes plášť válce

$$E_s 2 \pi r l = \frac{Q_l}{\varepsilon_0},$$

takže

$$5.1 \quad (64) \quad E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R}{r} = \frac{\tau}{2 \pi \varepsilon_0 r}.$$

Intenzita klesá tedy nepřímou úměrou se vzdáleností od osy válce a závisí jen na množství náboje na válci jednotkové výšky, nikoli na poloměru nabitého válce. Můžeme tedy říci, že *elektrostatické pole vně velmi dlouhého (nekonečného) rotačního válce je stejné jako pole nabitého přímkového vodiče* (velmi dlouhého drátu), na němž je soustředěn náboj se stejnou délkovou hustotou jako na válci.

3. Pole nabitě vodivé desky

Mějme rovinnou kovovou desku, na kterou přeneseme celkové množství náboje Q . Omezíme-li se na malou část desky vzdálenou od jejích okrajů, můžeme předpokládat, že náboj bude rozložen po obou površích tak, že hustota σ bude ve všech místech této střední části a po obou stranách stejná. Není-li totiž v okolí desky elektrických nábojů, není podle principu 1.1 (1) možné, aby na jedné straně byl náboj rozložen jinak než na druhé. Oba rovinné povrchy desky jsou tedy částí téže ekvipotenciální plochy a mají stejný potenciál, který má touž hodnotu i všude uvnitř desky.

Těsně u povrchu desky je podle 5.1 (61) intenzita kolmá k desce a má po obou stranách desky velikost

$$5.1 \quad (65) \quad E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

která je pro všechny body ve střední části desky vzdálené od jejích krajů velmi přibližně stejná. Pole je tedy zhruba homogenní, a to nejen na samém povrchu desky, ale s malými odchylkami i v místech, jejichž vzdálenost od desky je malá proti vzdálenosti od krajů desky.

Výsledek 5.1 (65) pro pole po obou stranách nabitě vodivé desky jsme odvodili za předpokladu, že deska je vodivá a že se proto náboj rozloží stejně hustě po obou jejích stěnách tak, že pole uvnitř desky vymizí. V čl. 5.1.6 jsme však odvodili též výsledek pro pole dvou stejně nabitých rovin (ve vakuu). I mezi nimi je pole nulové a vně obou rovin homogenní se stálou intenzitou σ/ε_0 .

Z toho je zřejmé, že pole dvou stejných povrchových nábojů rozložených po stěnách kovové desky je v celém prostoru totožné s polem týchž nábojů ve vakuu. To je v souladu s naším dřívějším tvrzením, že silové působení mezi náboji nezávisí na prostředí, které je obklopuje. Pole uvnitř nabitě desky nevymizí proto, že by kov překážel působení mezi náboji, ale jen proto, že svou vodivostí umožní vytvoření povrchových nábojů na stěnách desky, čehož vlastní příčinou je právě vzájemné odpuzování souhlasných nábojů i uvnitř kovu.

5.2. Elektrické jevy v nevodičích

5.2.1. Dielektrická polarizace

V čl. 5.1.8 jsme se zabývali rozložením volných nábojů na vodičích a ukázali jsme, že náboj sídlí na povrchu, tj. na rozhraní mezi vodičem a nevodičem. Elektricky nevodivé látky — izolanty neboli dielektrika — obsahují stejně jako vodiče (např. kovy) nesmírné množství nabitých částic, jejichž náboje se v makroskopických objemech navzájem ruší. Dielektrika jeví se nám proto elektricky neutrální, pokud je zachováno rovnoměrné rozložení nábojů v prostoru vyplněném látkou. To se zdá být zaručeno právě tou vlastností dielektrik, kterou se liší od vodičů, totiž nemožností přemísťování nábojů v nevodičích. V čl. 5.1.1 jsme však ukázali, jak velké množství náboje obsahuje každá látka: pouhý miligram každé látky chová přibližně 50 C kladného a 50 C záporného náboje. Proto je pochopitelné, že i velmi malé posunutí nábojů může být pozorovatelné pro jejich množství. Proto se otázkou rozložení nábojů v dielektriku budeme zabývat blíže.

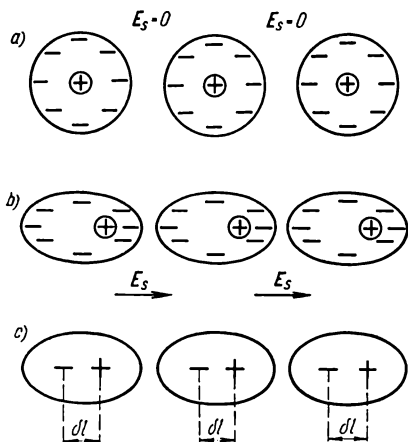
Především je třeba říci, že také dielektrika jsou v nepatrné míře vodivá, a to i ve slabších elektrických polích, protože se v nich trvale udržuje jistý malý počet nabitých částic (elektronů, iontů), které se v elektrickém poli mohou v látce pohybovat s určitou volností. K této mizivě malé vodivosti izolantů nebudeme nyní přihlížet, ale ujasníme si možnosti, které dovolují aspoň malé posunutí nábojů vlivem elektrického pole. Ani látky pevného skupenství nejsou dokonale tuhé. Z nauky o pružnosti je známo, že nejmenší částice (molekuly) pevných látek mohou měnit vzájemnou polohu vlivem sil deformujících těleso. Při tom vznikají síly pružnosti (mechanická napětí), které jsou úměrné deformacím a které dovolují při každém mechanickém namáhání tělesa jen jisté malé posunutí molekul (pokud se nepřekročí mez pevnosti materiálu). Souvisí to se skutečností, že objem látky není zcela vyplněn molekulami a že molekuly se opět skládají z atomů, které mají v molekulách jisté možnosti polohových změn. Konečně i elektrony tvořící vnější obal atomových jader jsou rozloženy v mnohokrát větším objemu, než zaujímají sama jádra. Je tedy pochopitelné, že náboje nejsou ani v dielektriku vázány na zcela neproměnné polohy. Jejich rozložení se může působením vnějšího elektrického pole do jisté míry měnit. Tím se ve stejné míře poruší vzájemná kompenzace nestejnomyenných nábojů, takže látka — ačkoli nadále obsahuje stejné množství kladných i záporných nábojů — jeví někde převahu kladného, jinde převahu záporného náboje. Látka tak projevuje existenci elektrických pólů, a proto mluvíme o *polarizaci dielektrika*. Již z tohoto hrubého obrazu struktury látek vysvítá, že se polarizace může uskutečnit několika způsoby, které stručně popíšeme:

1. Atomová polarizace vzniká vzájemným posuvem kladné nabitě jádra a záporně nabitě elektronového obalu atomu. Každý oběžný elektron tvoří s jedním protonem v jádře elektrický dipól, který má jistý (sice nepatrný, ale konečný) elektrický moment. Elektrony obíhají však kolem jádra s vysokou frekvencí, která řádově souhlasí s kmitočetou světla, a proto všechny dipóly mění neustále svůj směr v prostoru, takže časová střední velikost výsledného elektrického momentu je rovna nule. Střední hodnota momentu je totiž dána vzdáleností střední polohy („těžiště“) elektronů od jádra, která se rovná nule, pokud jsou obalové elektrony seskupeny souměrně kolem jádra. Elektronový obal lze ostatně pokládat za kulovou vrstvu náboje s jistou střední hustotou, která působí navenek jako bodový náboj v jejím středu [obr. (5.2) 1a]. Teprve působením vnějšího elektrického

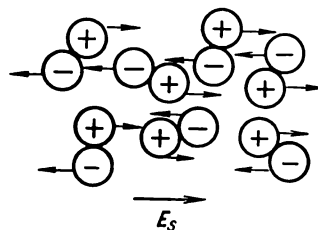
pole se tato souměrnost poruší: jádro je taženo ve směru pole, elektrony ve směru opačném. Tak nastane „elektrická deformace“ atomu a střed elektronového obalu pak nesplyvá se středem jádra [obr. (5.2) 1b]. Střední hodnota výsledného elektrického momentu již není nulová, takže atom se změní v elektrický dipól s jistým elektrickým momentem, který je úměrný vzájemnému posuvu δl kladných a záporných nábojů [obr. (5.2) 1c]. Protože atomová polarizace vzniká posunutím elektronů vzhledem k jádru, říká se jí také *elektronová polarizace*.

2. Iontová polarizace vzniká u látek, jejichž molekuly jsou složeny ze dvou nebo více iontů. Takové molekuly se nazývají též *polární (pólové)*, protože mají elektrické póly a tedy jistý nenulový elektrický moment i bez působení vnějšího elektrického pole. V pevných látkách jsou molekuly těsně vázány s molekulami sousedními, a proto nemohou měnit libovolně svou polohu ani posuvem, ani otáčením. Nicméně se může v jistých mezích

měnit vzájemná poloha iontů v molekule, a tu nastává jev zcela obdobný atomové polarizaci. Každá polární molekula má ovšem i bez vnějšího pole elektrický moment, ale vzhledem k neusměrněným polohám molekul je výsledný moment velkého počtu molekul



Obr. (5.2) 1. Atomová polarizace



Obr. (5.2) 2.. Orientační polarizace

nulový. Je-li však látka v elektrickém poli, nastane usměrněná deformace molekul, protože kladné ionty se ve všech molekulách posunou ve směru pole a záporné ionty proti tomuto směru. Tak se v homogenním poli k vektoru momentu každé molekuly připojí další vektor stejného směru, takže výsledný nulový moment všech molekul se změní v elektrický moment rovnoběžný se směrem pole.

3. Orientační polarizace (směrová) vzniká rovněž v látkách složených z iontových molekul, jsou-li tyto molekuly do té míry volné, že se mohou stáčet působením vnějšího pole. Tak je to v kapalinách a plynech, v nichž se polární molekuly mohou volně otáčet, a proto se jejich orientace neustále a nepravidelně mění nárazy sousedních molekul. Tyto nárazy jsou tím silnější, čím vyšší je teplota látky. Směry elektrických momentů jednotlivých molekul se tedy neustále mění podle zákonů statistické fyziky, ale výsledný moment libovolného objemu látky, který obsahuje dosti velký počet molekul, se rovná nule. Vložíme-li však látku do elektrického pole, přibude k neuspořádaným, střídavým točivým momentům, vznikajícím termickým pohybem molekul, točivý moment, kterým na dipóly všech molekul působí vnější elektrické pole. Tento moment se podle vzorce 5.1 (19) rovná nule, jestliže směr elektrického momentu má směr elektrického pole, a je největší, stojí-li dipól kolmo ke směru pole [obr. (5.2) 2]. Usměrnovací účinek pole je však stále rušen termickými pohyby molekul, a proto je při každé teplotě možný jen jistý stupeň orientace molekul, který je tím vyšší, čím silnější je elektrické pole. Rovněž orientační polarizace — podobně jako iontová — přidává k elektrickému momentu všech iontových molekul vektor rovnoběžný se směrem pole, ale liší se od iontové atomové polarizace tím, že jeví tzv. *sytnost*

(schopnost nasycení, podobně jako magnetizace). Elektrický moment jistého objemu látky, způsobený orientační polarizací, roste při postupném usměrňování molekul. Stočí-li se momenty všech (nebo skoro všech) molekul do směru pole, přestanou se dále stáčet. Orientační polarizace se pak dalším zesilováním pole nedá již zvýšit — bylo dosaženo nasycení. Stupeň usměrnění dipólů při nasycení klesá s rostoucí teplotou. Naproti tomu atomová i iontová polarizace může růst bez takového omezení a u mnoha dielektrik rostou jimi způsobené elektrické momenty atomů a molekul s intenzitou pole, ovšem jen v mezích daných elektrickou pevností dielektrika. Moment příslušný orientační polarizaci roste však úměrně s intenzitou pole jen potud, pokud je pole dosti slabé. V silnějších polích roste stále pomaleji a blíží se asymptoticky sytné hodnotě, které by orientační polarizace dosáhla při dokonalém usměrnění všech dipólů do směru pole. Dielektrika, ve kterých roste polarizace úměrně s intenzitou pole, nazývají se *lineární dielektrika* na rozdíl od dielektrik *nelineárních*.

Jsou-li molekuly dielektrika jednoatomové, vzniká v nich jen polarizace atomová, jsou-li to molekuly polární, vzniká v nich také polarizace iontová, a připouští-li kromě toho jejich vazba s ostatními molekulami stáčení jejich dipólů, vzniká i polarizace orientační.

Při atomové polarizaci znázorněné schematickým obrázkem (5.2) 1b nastává posunutí všech kladných nábojů ve směru pole (vpravo) za současného posunutí všech záporných nábojů proti směru pole (vlevo). Podobně je tomu při polarizaci iontové a orientační [obr. (5.2) 2] a snadno se přesvědčíme, že můžeme změny způsobené v rozložení nábojů dielektrika elektrostatickým polem při všech druzích polarizace vystihnout formálně stejným popisem:

Kladné náboje, rozložené v celém prostoru dielektrika se stálou prostorovou hustotou ϱ^* , posunou se o jistou délku ve směru elektrického pole, zatímco se záporné náboje rozložené se stejnou hustotou posunou o stejnou délku ve směru opačném. Tím vznikne v elementárním objemu dV elektrický moment, který je úměrný velikosti dV , má směr pole a je roven součtu dipólových momentů všech molekul (atomů). Tento elektrický moment určíme podle obr. (5.2) 3 takto: Zvolme v homogenním dielektriku dvě velmi blízké hladiny potenciálu H_- a H_+ , vzdálené od sebe o dl . Ze siločar kolmých k oběma hladinám vytvoříme pak tenkou silovou trubici, která hladiny protne v ploškách dS_- a dS_+ . Tak vznikne prostorový prvek, jakási buňka, která je omezena částí silotrubic a dvěma blízkými hladinami potenciálu. Budeme ji říkat *hladinová buňka* nebo krátce buňka. Značí-li vektor δl_+ elektrickou deformaci na hladině H_+ , tj. relativní posunutí kladných nábojů vzhledem k záporným, obnaží se na hladině buňky vrstva kladných nábojů, která má objem $dS_+ \delta l_+$ a obsahuje tedy náboj

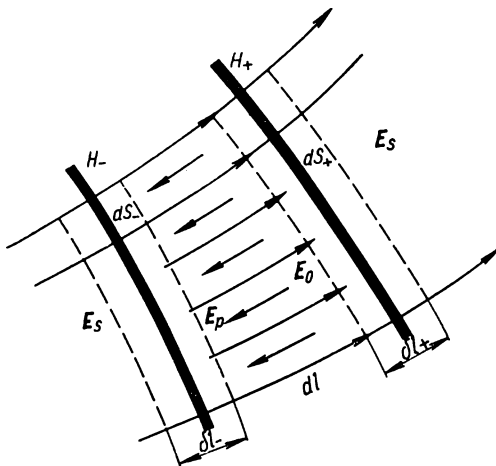
$$dQ_+ = \varrho^* dS_+ \delta l_+.$$

Avšak

$$5.2 (1) \quad \sigma_+ = \frac{dQ_+}{dS_+} = \varrho^* \delta l_+$$

je zřejmě plošná hustota kladného náboje vyloučeného polarizací, takže

$$dQ_+ = \sigma_+ dS_+.$$



Obr. (5.2) 3. Polarizace elementární buňky

Předpokládejme nyní, že dielektrikum je lineární, že tedy relativní posuv δI nábojů je *úměrný intenzitě pole*

$$5.2 (2) \quad \delta I = k E_s.$$

Silový tok $E_s dS$ je podél celé trubice stejný, a proto je stejný i součin $dS \delta I = k E_s dS$. Jsou tedy množství vyloučených kladných i záporných nábojů stejná:

$$5.2 (3) \quad dQ_- = q^* dS_- \delta I_- = -q^* dS_+ \delta I_+ = -dQ_+.$$

Polarizací tedy vznikl ve zvolené hladinové buňce elektrický dipól, jehož moment

$$5.2 (3') \quad d\mathbf{p} = dQ_+ d\mathbf{l} = q^* dS_+ \delta I d\mathbf{l}.$$

Protože pak objem buňky

$$dV = dS dl$$

a vektory $d\mathbf{l}$ a δI mají stejný směr, můžeme psát se zřetelem k 5.2 (1)

$$d\mathbf{p} = q^* \delta I_+ \cdot dV = \sigma_+ dV \delta I_+^0.$$

Elektrický moment buňky je tedy úměrný jejímu objemu a podíl

$$5.2 (4) \quad \mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} = \sigma_+ \delta I_+^0 = \sigma_p dI^0,$$

již na rozměrech buňky nezávisí a nazývá se *vektor polarizace*. Je to vlastně hustota elektrického momentu v polarizovaném dielektriku a jeho velikost je podle hořejší rovnice rovna hustotě kladného náboje vyloučeného polarizací na hladině buňky. Tato hustota se nazývá hustota *polarizačního náboje*, a proto jsme ji označili indexem p . Protože prostorová hustota kladných nábojů v dielektriku je na působícím poli nezávislá, plyne z předpokládané úměrnosti 5.2 (2) také úměrnost mezi polarizací a intenzitou pole:

$$5.2 (5) \quad \mathbf{P} = q^* \delta I_+ = q^* k E_s,$$

která se pro slabá a časově neproměnná pole dosti přesně potvrzuje měřením. Vysvětluje se to tím, že síly, které vznikají v látce elektrickou deformací, jsou úměrné velikosti deformace jako při mechanické deformaci pružných těles.

Místo konstanty k se obvykle zavádí konstanta úměrnosti α mezi elektrickým momentem $\mathbf{p}_a$ jednoho polarizovaného atomu (nebo molekuly) a intenzitou pole:

$$5.2 (6) \quad \mathbf{p}_a = \alpha E_s.$$

Součinitel α se nazývá *polarizovatelnost* nebo *součinitel polarizace* dielektrika a je vždy kladný, protože moment $\mathbf{p}_a$ má směr souhlasný se směrem intenzity pole.

Obsahuje-li atom (molekula) Z kladných elementárních nábojů e v jádře, pak

$$5.2 (7) \quad q^* = n_0 Z e.$$

kde n_0 je prostorová hustota, s níž jsou atomy rozloženy v dielektriku. Polarizaci vypočteme, sečteme-li momenty všech atomů v buňce a dělíme jejím objemem, čili když moment $\mathbf{p}_a$ jednoho atomu násobíme n_0 :

$$5.2 (8) \quad \mathbf{P} = n_0 \mathbf{p}_a = n_0 \alpha E_s.$$

Velikost tohoto vektoru je podle 5.2 (4) rovna hustotě polarizačních nábojů na hladinách buňky:

$$5.2 (9) \quad \sigma_p = n_0 \alpha E_s = P.$$

5.2.2. Vliv prostředí na elektrostatické pole

Nadpis tohoto článku není v rozporu s naším dřívějším tvrzením v čl. 5.1.2, že Coulombův zákon platí nezávisle na prostředí. Jsou-li tělesa, nabitá známým množstvím volných nábojů, obklopena nějakým prostředím, nepozbývá Coulombův zákon platnosti pro tyto náboje, ale naopak se jeho platnost rozšiřuje i na polarizační náboje na rozhraní nabitých těles a prostředí. Podle principu superpozice musíme pole těchto vázaných nábojů složit s polem nábojů volných, abychom dostali výsledné pole. Na základě výsledků předešlého článku není nesnadné stanovit pole polarizačních nábojů.

Tyto náboje vázané na čelní plochy H_+ a H_- elementární buňky nevznikají jen v jedné osamocené buňce, ale ve velkém počtu buněk, jak je schematicky naznačeno na obr. (5.2) 4. Proto vznikají plošné polarizační náboje v celém rozsahu hladin a pole vzbuzené dvěma sousedními hladinami H_+ a H_- se tedy podle čl. 5.1.6 omezuje na tenkou vrstvu mezi nimi. Proto také okolní buňky nemají vliv na toto pole, které můžeme pokládat za homogenní a počítat podle vzorce 5.1 (40).

Označíme-li tedy E_p elektrostatické pole vzbuzené polarizačními náboji rozloženými na hladinách H_+ a H_- s plošnou hustotou $+\sigma_p$, $-\sigma_p$, bude

$$5.2 (10) \quad E_p = - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} dI^0,$$

neboť E_p směřuje od H_+ k H_- , tedy proti směru E_s . Uvnitř buňky se tedy překládá přes původní pole E_s vzbuzené okolními náboji pole intenzity

$$5.2 (11) \quad E_p = - \frac{n_0 \alpha}{\epsilon_0} E_s.$$

Kladný číselný součinitel

$$5.2 (12) \quad \kappa = \frac{n_0 \alpha}{\epsilon_0}$$

se nazývá *dielektrická susceptibilita* prostředí. Máme tedy vztahy

$$5.2 (13) \quad E_p = -\kappa E_s, \quad P = +\kappa \epsilon_0 E_s,$$

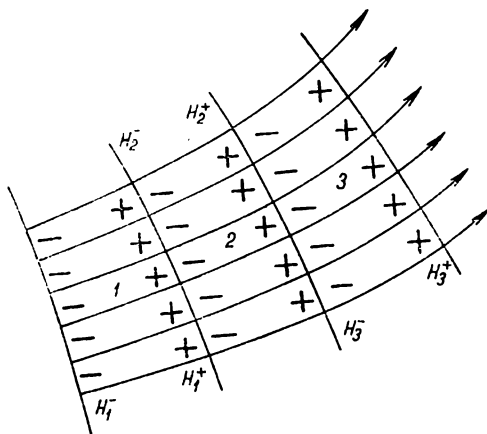
v nichž značí vektor E_s intenzitu skutečného pole, která existuje v buňce, tedy pole vzbuzeného všemi skutečnými náboji. Polarizace musí totiž být v každém místě úměrná skutečnému poli, nikoli poli, které by v tom místě bylo, kdyby se dielektrikum nepolarizovalo. Označíme-li E_0 intenzitu pole, které má původ jen ve volných nábojích okolních nabitých těles, je zřejmé výsledné skutečné pole

$$5.2 (14) \quad E_s = E_0 + E_p = E_0 - \kappa E_s,$$

odkud

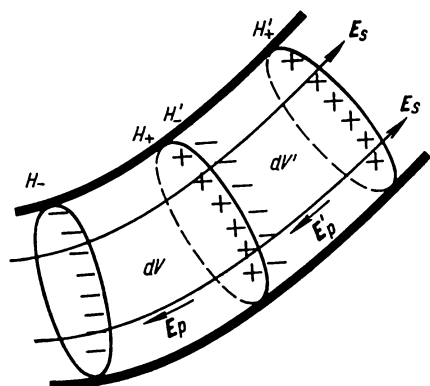
$$5.2 (15) \quad E_0 = (1 + \kappa) E_s.$$

(5.2)



Obr. (5.2) 4. Polarizace v konečném objemu dielektrika

Polarizací elementární buňky dielektrika vzniknou na jejích protilehlých hladinách vrstvy opačných nábojů s plošnou hustotou σ_p , úměrnou intenzitě pole. Tyto dvě vrstvy nábojů vytvářejí právě přidavné pole $\mathbf{E}_p$, které zeslabuje vnější pole uvnitř buňky dV . Zcela



Obr. (5.2) 5. Vázané náboje dvou sousedních buněk v silové trubici

stejně by se chovala sousední buňka dV' téže silové trubice [obr. (5.2) 5] i další její části. Plošné náboje na hladinách H_- a H_+ by zase vzbudily uvnitř buňky dV' polarizační intenzitu $\mathbf{E}'_p = \sigma'_p/\epsilon_0$, kdežto všude vně této buňky by se účinek hladin H'_- a H'_+ rušil. Při tom by vrstva kladného náboje H_+ první buňky byla překryta stejně hustou vrstvou záporného náboje H'_- buňky sousední, takže oba plošné náboje na rozhraní by se rušily. Z toho vidíme, že ostatní buňky téže silové trubice nemají vliv na pole uvnitř buňky dV . Avšak mezi hladinami H_- a H_+ by zase vzniklo přibližně homogenní pole polarizační, které by mělo v buňce dV hodnotu $\mathbf{E}_p$ a v buňce dV' blízkou hodnotu $\mathbf{E}'_p$. Že ani buňky sousedních trubic, které mají s buňkou společné části pláště silové trubice, nemají vliv

na pole uvnitř dV , jsme již vysvětlili. Z toho plyne oprávnění rozšířit odvozený výsledek na libovolný objem V dielektrika, jehož elektrický moment je podle 5.2 (4)

$$5.2 (16) \quad \mathbf{p} = \int_V d\mathbf{p} = \int_V \mathbf{P} dV.$$

Při tom integrálem vektoru $d\mathbf{p}$ rozumíme vektor, jehož složky jsou rovny integrálům složek dp_x , dp_y , dp_z . Tedy

$$p_x = \int_V dp_x = \int_V P_x dV, \quad p_y = \int_V dp_y, \quad p_z = \int_V dp_z.$$

Pro homogenní dielektrikum v homogenním elektrostatickém poli (tedy zhruba mezi deskami rovinného kondenzátoru) přešel by hořejší integrál v součin stálého vektoru $\mathbf{P}$ a celkového objemu V :

$$5.2 (17) \quad \mathbf{p} = V\mathbf{P}.$$

Z této úvahy seznáváme, že při polarizaci dielektrika se posouvají sice náboje obou známek v celém jeho objemu, avšak změny hustoty nábojů nastávají jen na okrajích dielektrika, tj. na jeho rozhraní s vakuem nebo vodičem, nebo také na rozhraní dvou dielektrik s různými permitivitami. Oba plošné náboje, které se objevují na protilehlých površích dielektrika, jsou stejně velké a nelze je ani přemístit, ani oddělit od dielektrika.

Je-li rozhraní hladinou vnějšího elektrostatického pole, je intenzita $\mathbf{E}_p$, která má vždy směr opačný než vnější pole, kolmá k rozhraní a souvisí s hustotou σ_p polarizačních nábojů vztahem 5.2 (9). Svírá-li rozhraní s hladinou vnějšího pole úhel ψ [obr. (5.2) 6], prochází plochou dS' rozhraní stejný tok intenzity $\mathbf{E}_p$ jako plochou dS , omezenou touž silovou trubicí na hladině vnějšího potenciálu. Na rozhraní je tedy náboj rozložen s hustotou σ'_p , pro kterou podle Gaussovy věty platí vztah

$$\sigma_p dS = \sigma'_p dS',$$

při čemž

$$dS = dS' \cos \psi,$$

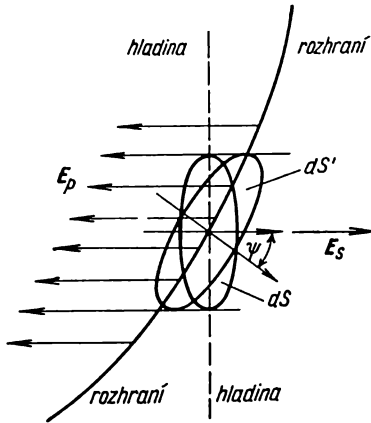
je-li ψ úhel sevřený intenzitou $\mathbf{E}_s$ a vnější normálou k rozhraní, která míří ven z polarizovaného prostředí. Je tedy

$$5.2 (18) \quad \sigma'_p = \sigma_p \cos \psi,$$

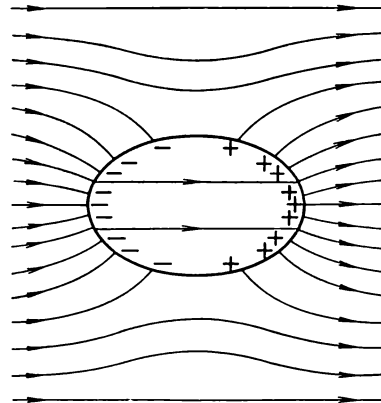
takže podle 5.2 (9)

$$5.2 (19) \quad \sigma'_p = n_0 \alpha E_s \cos \psi = n_0 \alpha E_{sn},$$

značí-li E_{sn} průmět intenzity $\mathbf{E}_s$ do směru vnější normály k rozhraní. Hustota σ'_p vychází tak i se správným znaménkem. Vidíme, že hustota polarizačního náboje je největší tam, kde je rozhraní kolmé k vnějšímu poli a nulová tam, kde je rozhraní s polem rovnoběžné. Je to naznačeno na obr. (5.2) 7, kde je zakreslen průběh siločar v elektrostatickém poli, které vznikne vložením rotačního elipsoidu z homogenního dielektrika do homogenního pole ve vakuu. Výpočtem plyne, že pole uvnitř elipsoidu je za uvedených podmínek homogenní a rovnoběžné s původním polem.



Obr. (5.2) 6. Silový tok na rozhraní dvou prostředí



Obr. (5.2) 7. Deformace siločar způsobené vložením rotačního elipsoidu z dielektrické látky do homogenního pole

Podle předcházejícího výkladu se polarizační náboje „obnažují“ jen na okraji dielektrika, zatímco se na vnitřních hladinách opačné polarizační náboje navzájem ruší. Neruší se ovšem elektrické momenty jednotlivých buněk dielektrika, ale naopak se vektorově sčítají podle své definice 5.2 (3'). Existence momentu v celém objemu polarizovaného dielektrika se jeví právě v tom, že hustota momentu, tj. vektor polarizace $\mathbf{P}$, je od nuly různý. Také vzorec 5.2 (15) zůstává v platnosti v celém dielektriku, jak plyne z principu superpozice. Přidáme-li na každou vnitřní hladinu dvě stejně husté vrstvy kladného a záporného náboje, nezmění se celkové rozložení nábojů a při tom musí v každé buňce vzniknout pole $\mathbf{E}_p$, jak jsme dokázali. Že polarizační pole $\mathbf{E}_p$ existuje v celém objemu dielektrika, ačkoli jsou vnitřní hladiny bez nábojů, je pochopitelné z toho, že všechny siločary vystupující z kladné vrstvy polarizačních nábojů na rozhraní vodiče a dielektrika postupují napříč dielektrikem a končí teprve na vrstvě záporných nábojů na protilehlém rozhraní.

Tím je prokázána všeobecná platnost vzorce 5.2 (15), který se častěji píše v jednodušším tvaru

$$5.2 (20) \quad \mathbf{E}_0 = \epsilon_r \mathbf{E}_s,$$

kde

$$5.2 (21) \quad \epsilon_r = 1 + \kappa \geq 1$$

$$\mathbf{E}_0 = \epsilon_r \mathbf{E}_s,$$

$$\epsilon_r = 1 + \kappa \geq 1$$

se nazývá *poměrná* čili *relativní permitivita* prostředí (dielektrika). Kromě ní se zavádí *absolutní permitivita* prostředí

5.2 (22)

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0, \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$

Měří se v jednotkách $[\varepsilon] = \text{Fm}^{-1}$ stejně jako permitivita vakua ε_0 . Druhá rovnice vysvětluje název bezrozměrné veličiny ε_r . Je zřejmé, že prostředí s nulovou susceptibilitou κ (které by se vůbec nepolarizovalo), by mělo $\varepsilon = \varepsilon_0$ a relativní permitivitu $\varepsilon_r = 1$. Dosazením těchto hodnot do vzorců pro dielektrikum přejdeme ke vzorcům pro vakuum.

Pole vzbuzené nabitými tělesy v dielektriku relativní permitivity ε_r je podle 5.2 (20) ε_r -krát slabší než ve vakuu. Nikoli snad proto, že by prostředí bránilo působení nábojů, ale proto, že se přítomností prostředí zmenší hustota náboje na rozhraní těles a prostředí. Pro pole $\mathbf{E}_0$ vzbuzené volnými náboji na tělesech platí vzorec 5.1 (40), takže jejich hustota na tělesech

$$5.2 (23) \quad \sigma_0 = \varepsilon_0 E_0$$

a vzhledem k 5.2 (10)

$$5.2 (24) \quad \sigma_p = \varepsilon_0 E_p.$$

Skutečná hustota náboje na okrajích dielektrika

$$5.2 (25) \quad \sigma = \sigma_0 - \sigma_p = \varepsilon_0(E_0 - E_p) = \varepsilon_0 E_s = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r} E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r}$$

je tedy ε_r -krát menší než hustota volných nábojů. To plně vysvětluje, proč intenzita pole v celém prostoru vyplněném homogenním prostředím je v poměru jeho relativní permitivity menší.

Tento obecně platný poznatek musí být správný i pro libovolnou část pole bodového náboje Q_0 , které si můžeme myslit vytvořeno volným nábojem rozloženým s plošnou hustotou $Q_0/4\pi r^2$ na libovolně malé kulové ploše opsané kolem bodového náboje Q_0 . V prostředí relativní permitivity ε_r vytvoří tento náboj stejné pole jako skutečný náboj

$$5.2 (26) \quad Q = \frac{Q_0}{\varepsilon_r}$$

a intenzita tohoto pole je podle Coulombova zákona

$$5.2 (27) \quad \mathbf{E}_s = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0.$$

Se zřetelem k 5.2 (26) můžeme však psát Coulombův zákon pro intenzitu pole v homogenním prostředí též ve tvaru

$$5.2 (28) \quad \mathbf{E}_s = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r^2} \mathbf{r}^0,$$

který se liší od 5.2 (27) tím, že skutečný náboj je nahrazen volným nábojem a permitivita vakua permitivitou prostředí. To je běžný způsob vyjádření Coulombova zákona, v němž se ovšem obvykle nevyznačuje, že platí jen pro volný náboj, jak jsme učinili my (indexem nula).

Z obou uvedených tvarů Coulombova zákona je zřejmá závislost vektoru $\mathbf{E}_s$ na prostředí. V prvním tvaru je sice ε_0 stálé, ale skutečný náboj Q závisí na prostředí. Ve druhém tvaru je naopak volný náboj Q_0 stálý a permitivita ε závisí na prostředí.

Důvod pro nahrazení zákona 5.2 (27) rovnicí 5.2 (28) je ryze praktický. Ve fyzikálních i elektrotechnických zařízeních potřebujeme totiž znát intenzitu elektrostatického pole vzbuzeného v různých prostředích zelektrovanými tělesy, zejména nabitými vodiči. Množství volného náboje jednoho znaménka, které jsme přivedli na vodič, dá se měřením zjistit, avšak obvykle neznáme hustotu plošných nábojů vzniklých na povrchu dielektrika jeho polarizací. Proto je výhodné počítat intenzitu pole právě jen z volných nábojů, které známe, a z permitivity prostředí ϵ_r nebo ϵ , která charakterizuje dielektrikum.

Toto hledisko je úplně odůvodněno požadavky praxe, ale nelze je chápat jako omezení všeobecné platnosti Coulombova zákona. Stejně nesprávné je pohlížet na „vázané“ polarizační náboje jako na nějaké „nepravé“ či „fiktivní“ náboje proto, že se chovají jinak než náboje volné. Fyzikálně není mezi nimi rozdíl a vázané náboje se mohou stát volnými, např. ionizací dielektrika. Existence „fiktivních“ nábojů by znamenala jisté narušení zákona zachování náboje.

Z hlediska fyzikálního by předpoklad závislosti Coulombových sil na prostředí byl velmi závažný. Taková představa by byla obdobná názoru, že Archimédův zákon je třeba vykládat závislostí gravitační konstanty na prostředí mezi tělesy. Homogenní koule hmotnosti M působí ve vakuu podle Newtonova zákona na tělísko hustoty ρ a objemu dV silou

$$dF = -k \frac{M \rho dV}{r^2} r^0.$$

Je-li však prostor mezi koulí a tělískem vyplněn prostředím hustoty σ ($< \rho$), působí na tělísko vztlak okolního prostředí

$$df = +k \frac{M \sigma dV}{r^2} r^0,$$

rovný „tíze“ tělískem vytlačeného prostředí v gravitačním poli koule (např. Země). Výsledná síla

$$dF + df = -\frac{kM}{r^2} (\rho - \sigma) dV \cdot r^0$$

je tedy menší, jako by gravitační konstanta k měla v prostředí zmenšenou hodnotu

$$k' = \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right) k.$$

Pro $\sigma > \rho$ by konstanta k' byla dokonce záporná.

Tabulka (5.2) I

Poměrná permitivita různých látek

Materiál	Poměrná permitivita ϵ_r	Materiál	Poměrná permitivita ϵ_r
vzduch	1,000 585 (0 °C)	sklo	5 až 7,5
vodík	1,000 264 (0 °C)	slída	6 až 7
CO ₂	1,000 960 (0 °C)	porcelán	6,65
N ₂	1,000 602	azbest	7
tvrdá guma	2,55	mramor	7 až 8
kondenzátorový papír	2,5 až 3,0	mikalex	7,5
jantar	2,6 až 2,8	termikond	15 až 25
křemen tavený	3,2 až 3,75	tikond	25 až 80
(krystal)	3,5 až 4,5	etylalkohol	25,8 (20 °C)
síra	3,0 až 3,8	nitrobenzen	37,8 (15 °C)
		voda	81,1 (18 °C)

5.2.3. Vektor elektrické indukce

Teorie, kterou zde podáváme, vychází z existence nabitých částic a z jejich vzájemného silového působení, které je vyjádřeno Coulombovým zákonem. Proto je základním vektorem naší teorie intenzita pole, rovná podílu síly a náboje, která naprosto stačí k popisu i výkladu všech vlastností elektrostatického pole.

V Maxwellově teorii má však důležitou úlohu další vektor $\mathbf{D}$, který charakterizuje „napětí v éteru“ a který Maxwell nazval *elektrickým posunutím*. U nás je obvyklejší název *elektrická indukce*. Protože je tento vektor z našeho hlediska nadbytečný, pojednáme o něm jen krátce.

Elektrická indukce je definována v libovolném prostředí jako součin jeho absolutní permitivity a intenzity elektrostatického pole

5.2 (29)

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}_s = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}_s,$$

který je pro nás jeho definicí v libovolném dielektriku. Z této formální definice vektoru $\mathbf{D}$ odvodíme jeho základní fyzikální vlastnosti, kterými se liší od vektoru $\mathbf{E}_s$. Oba vektory jsou v homogenním a izotropním prostředí souhlasně rovnoběžné a jejich velikosti jsou úměrné. Tato vlastnost indukce je podmíněna tím, že vektor polarizace $\mathbf{P}$ je podle 5.2 (13) rovnoběžný s $\mathbf{E}_s$, neboť rovnici 5.2 (29) můžeme psát ve tvaru

5.2 (30)

$$\mathbf{D} = (1 + \kappa) \epsilon_0 \mathbf{E}_s = \epsilon_0 \mathbf{E}_s + \mathbf{P}.$$

Vektor $\mathbf{E}_s$ i skalár ϵ jsou závislé na prostředí, ale o vektoru $\mathbf{D}$ to neplatí. Z 5.2 (20) a 5.2 (22) plyne totiž vztah

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0,$$

který říká, že elektrická indukce je ve všech prostředích rovna součinu permitivity vakua a intenzity pole vzbuzeného volnými náboji. Je proto zcela určen volnými náboji, jak vidíme názorně ze vztahu

5.2 (31)

$$\mathbf{D} = \sigma_0$$

plynoucím z 5.2 (23). Protože je vektor $\mathbf{D}$ rovnoběžný s intenzitou, můžeme říci, že na povrchu nabitého vodiče je elektrická indukce kolmá k jeho povrchu a má velikost rovnou plošné hustotě volných nábojů na vodiči. Vidíme, že podle definice je elektrická indukce vektor nezávislý na dielektriku, a tím je dán zásadní rozdíl mezi indukcí a intenzitou pole.

Tyto vlastnosti elektrické indukce bychom odvodili z její definice 5.2 (29) také, kdybychom vyšli z Coulombova zákona. Tak bychom dostali, jak plyne ihned z 5.2 (28), pro elektrickou indukci bodového náboje Q_0 v homogenním dielektriku

5.2 (32)

$$\mathbf{D} = \frac{Q_0}{4 \pi r^2} \mathbf{r}^0.$$

Odtud dostaneme také jednotku elektrické indukce

5.2 (33)

$$[\mathbf{D}] = \frac{\text{coulomb}}{\text{metr}^2} = \text{As m}^{-2}$$

v soulase s 5.2 (31). Označíme-li tedy tok elektrické indukce nějakou plochou

5.2 (34)

$$\Psi(S) = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S},$$

vidíme, že se tento *elektrický indukční tok*, jak se také nazývá, měří v jednotkách

5.2 (35)

$$[\Psi] = \text{C} = \text{As}.$$

To plně odpovídá fyzikálnímu významu indukčního toku, pro který platí věta obdobná Gaussově větě o silovém toku v elektrostatickém poli. V homogenním a izotropním dielektriku je totiž

$$\Psi(S) = \iint_S \varepsilon \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon \iint_S \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon N(S),$$

kde N je silový tok 5.1 (27). Podobně je výtok indukce z objemu V uzavřené plochy $S(V)$

$$\Psi(V) = \oiint_{S(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon \oiint_{S(V)} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon N(V).$$

Výtok intenzity $N(V)$ je podle Gaussovy věty 5.1 (32)

$$N(V) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i.$$

Gaussova věta platí v libovolném prostředí za samozřejmého předpokladu, že do posledního vzorce dosazujeme za náboje Q_i skutečné náboje obsažené v objemu V . V dielektriku jsou tyto náboje podle 5.2 (26) ε_r -krát menší než volné náboje Q_{i0}

$$5.2 (36) \quad Q_i = \frac{Q_{i0}}{\varepsilon_r},$$

takže

$$5.2 (37) \quad \Psi(V) = \oiint_{S(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}(V) = \sum_i Q_{i0}.$$

Tato rovnice vyjadřuje *Gaussovu větu o elektrické indukci*:

Indukční tok uzavřenou plochou se rovná algebraickému součtu všech volných nábojů plochou obklopených.

Podobně dostaneme z rovnice 5.1 (38) pro divergenci elektrické indukce v homogenním dielektriku

$$5.2 (38) \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}_s) = \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E}_s = \frac{\varepsilon \varrho^*}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r \varrho^*,$$

neboť ε má v homogenním dielektriku stálou hodnotu, která nezávisí na souřadnicích. Protože vzhledem k 5.2 (36) je prostorová hustota volných nábojů

$$\varrho_0^* = \varepsilon_r \varrho^*,$$

máme důležitý vztah

$$5.2 (38') \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho_0^*,$$

který vyjádříme větou:

Divergence elektrické indukce je rovna prostorové hustotě volných nábojů.

Z této i z Gaussovy věty vidíme, že zdrojem indukčního toku (nebo indukčních čar a indukčních trubíc) jsou jediné volné náboje. V místech, kde není volných nábojů, je indukční pole nezřídlové:

$$5.2 (39) \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0.$$

Indukční pole je v homogenním prostředí vždycky nevírové stejně jako pole silové, neboť z 5.1 (43) vyplývá

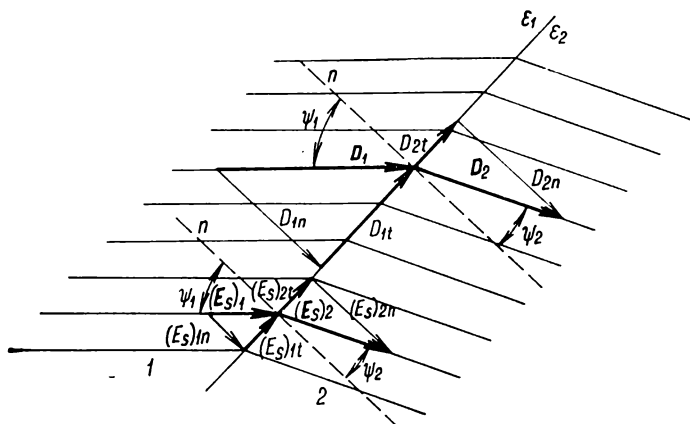
$$5.2 (40) \quad \operatorname{rot} \mathbf{D} = 0.$$

Skutečnost, že vázané polarizační náboje nepřispívají k indukčnímu toku, je přímým důsledkem definice elektrické indukce. Plynou z ní vzorce, které se od vzorců pro intenzitu liší v podstatě tím, že v nich jsou skutečné náboje nahrazeny náboji volnými. Nepřehlídí se tedy k existenci nábojů polarizačních a to je jediný důvod, proč tyto náboje vůbec nevstupují do vztahů platných pro elektrickou indukci a že nejsou ani zřídlem indukčního toku. Příčina je pouze ve způsobu, jakým je definována indukce a bylo by nesprávné přisuzovat „nepravým“ vázaným nábojům jinou fyzikální povahu než nábojům volným, jak jsme již uvedli v závěru předcházejícího článku.

Vektor elektrické indukce je ve vakuu a v homogenních prostředích neužitečný a má význam hlavně pro studium polí v nehomogenních prostředích.

5.2.4. Elektrostatické pole v nestejnorodých prostředích

Studium polí v nestejnorodých prostředích se spojitě proměnnou permitivitou je nesnadné. Spojitě proměnné prostředí můžeme však pokládat za mezní případ prostředí vrstevnatého, které se skládá z homogenních vrstev různých prostředí a které je pro vyšetřování elektrických polí přístupnější. Proto objasníme vlastnosti pole v nehomogenním prostředí rozbořením pole na rozhraní dvou homogenních prostředí s různými permitivitami ϵ_1, ϵ_2 .



Obr. (5.2) 8. Lom silových a indukčních čar na rozhraní dvou prostředí

Směr elektrostatického pole v prostředí 1 nechť svírá úhel ψ_1 s kolmicí n k rozhraní, takže podle obr. (5.2) 8

$$(E_s)_{1t} = (E_s)_1 \sin \psi_1, (E_s)_{1n} = (E_s)_1 \cos \psi_1.$$

Abychom našli vektory $(E_s)_2, D_2$ v prostředí 2 těsně za rozhraním, odvodíme jejich tečné a normálové složky. Pokládáme-li rozhraní v malém rozsahu za rovinné a pole v prostředích 1 a 2 v okolí rozhraní za homogenní, vznikne polarizací prostředí 1 na rozhraní plošný náboj hustoty σ'_{p1} . Kdyby bylo rozhraní kolmé k $(E_s)_1$, byla by hustota náboje určena rovnicí $\sigma'_{p1} = n_{01}\alpha_1(E_s)_1$. Protože se polarizační náboje objevují jen na povrchu dielektrika (uvnitř se ruší) a plošnou jednotkou rozhraní protéká pouze silový tok $(E_s)_1 \cos \psi_1 = (E_s)_{1n}$, je hustota náboje na rozhraní

$$\sigma'_{p1} = \sigma_{p1} \cos \psi_1 = n_{01}\alpha_1(E_s)_{1n}$$

v soulase s rovnicemi 5.2 (18, 19).

Tento plošný náboj vzbuzuje pole kolmé k rozhraní, které podle 5.2 (13, 12) má intenzitu

$$E_{p1} = -\frac{n_{01}\alpha_1}{\epsilon_0} (E_s)_{1n} = -\alpha_1(E_s)_{1n}.$$

Kolmá složka intenzity v prostředí 1 je tedy dána rovnicí

$$(E_s)_{1n} = E_{0n} - \kappa_1(E_s)_{1n},$$

čili

$$(1 + \kappa_1)(E_s)_{1n} = \varepsilon_{r1}(E_s)_{1n} = E_{0n}.$$

Obdobným způsobem dokážeme, že pro normálovou složku intenzity v prostředí 2 platí vztah

$$\varepsilon_{r2}(E_s)_{2n} = E_{0n},$$

neboť polarizaci prostředí 2 se na rozhraní indukuje záporný náboj, takže siločáry pole E_{p2} míří od prostředí 2 k prostředí 1, tedy zase proti E_{0n} . Spojením obou posledních rovnic vychází po násobení ε_0

$$5.2 (41) \quad \varepsilon_1(E_s)_{1n} = \varepsilon_2(E_s)_{2n}.$$

Obě pole způsobená polarizací jsou těsně u rozhraní kolmá k rozhraní, a proto nemění tečné složky intenzity, které jsou tedy v obou prostředích rovny tečné složce intenzity ve vakuu:

$$5.2 (42) \quad (E_s)_{1t} = (E_s)_{2t} = E_{0t}.$$

Složky elektrické indukce v okolí rozhraní obou prostředí dostaneme ze složek intenzity, neboť podle definice 5.2 (29) platí pro obě prostředí rovnice

$$D_{1t} = \varepsilon_1(E_s)_{1t}, \quad D_{1n} = \varepsilon_1(E_s)_{1n}, \quad D_{2t} = \varepsilon_2(E_s)_{2t}, \quad D_{2n} = \varepsilon_2(E_s)_{2n}$$

a vzhledem k 5.2 (41, 42)

$$5.2 (43) \quad D_{1n} = D_{2n}, \quad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}.$$

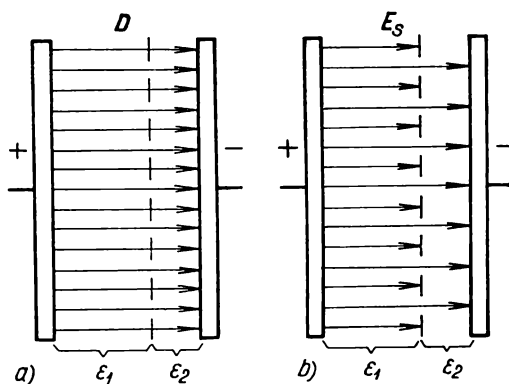
Silové a indukční čáry, které jsou jak v prvním, tak ve druhém prostředí spolu rovnoběžné, splňují tedy na rozhraní podmínku

$$5.2 (44) \quad \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\operatorname{tg} \psi_2} = \frac{(E_s)_{1t}}{(E_s)_{1n}} : \frac{(E_s)_{2t}}{(E_s)_{2n}} = \frac{D_{1t}}{D_{1n}} : \frac{D_{2t}}{D_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Tento zákon lomu se neshoduje se známým zákonem lomu pro vlnění (mechanické i elektromagnetické), který vyjadřuje stálost poměru sinů úhlu dopadu a úhlu lomu. Odvozené rovnice platí i pro rozhraní mezi dielektrikem a vakuem.

Rovnost kolmých složek indukce na rozhraní je právě výhodou tohoto vektoru, který prostupuje kolmým rozhraním, jako by bylo prostředí homogenní, a mění se tedy i v nespojitě proměnném izotropním prostředí spojitě. Z toho vyplývá důležitý závěr, že různost prostředí nemá vliv na indukční tok rozhraním, protože tok je určen kolmou složkou indukce. Vzhledem k právě dokázané spojitosti indukčního toku na rozhraní dvou prostředí usuzujeme, že rovnicí 5.2 (37) vyjádřená *Gaussova věta o elektrostatickém indukčním toku* platí i v nehomogenním prostředí. Na obr. (5.2) 9a je znázorněn kolmý průchod indukčních čar a na obr. (5.2) 9b průchod silových čar rozhraním dvou dielektrik.

Lom siločar můžeme pozorovat na obr. (5.2) 7, který znázorňuje kvantitativně pole, jež vznikne v případě, kdy povrch elipsoidu je rozhraním mezi vnitřním dielektrikem s větším



Obr. (5.2) 9. Indukční a silové čáry v kondenzátoru s dvěma vrstvami dielektrik

dielektrickou konstantou, než má vnější dielektrikum. Obecné řešení této úlohy ukazuje, že *uvnitř rotačního elipsoidu*, jehož osa má směr vnějšího homogenního pole, vzniká homogenní pole rovnoběžné s vnějším polem.

Omezíme se na řešení pole v prázdné elipsoidové dutině v homogenním dielektriku, a to pro tři nejjednodušší případy:

a) Štíhlý rotační elipsoid s osou ve směru pole

[obr. (5.2) 10]

Rozhraní mezi vakuem v dutině ($\epsilon_1 = \epsilon_0$) a okolním dielektrikem ($\epsilon_2 = \epsilon$) je až na okolí obou vrcholů elipsoidu prakticky rovnoběžné s intenzitou $\mathbf{E}_s$ pole v dielektriku a všechny body uvnitř dutiny jsou velmi blízké rozhraní. Proto můžeme použít rovnice 5.2 (42, 41) a dosadit do nich

$$(E_s)_{2t} = E_s, \quad (E_s)_{2n} = 0,$$

takže bude

$$(E_s)_{1t} = E_s, \quad (E_s)_{1n} = 0.$$

Obr. (5.2) 10. Podélná štíhlá dutina v dielektriku

Intenzita pole ve štíhlé dutině rovnoběžná se směrem pole je tedy co do směru i velikosti stejná jako v okolním dielektriku.

$$5.2 \quad (45) \quad \mathbf{E}_{D||} = \mathbf{E}_s.$$

b) Plochý rotační elipsoid s osou ve směru pole

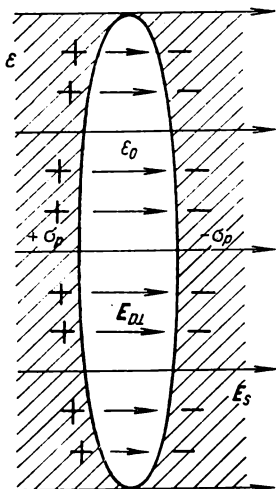
[obr. (5.2) 11]

Je-li elipsoid velmi plochý, jde vlastně o plochou příčnou dutinu (mezeru) kolmou ke směru pole $\mathbf{E}_s$ v dielektriku, jejíž rozhraní je prakticky všude kolmé k $\mathbf{E}_s$. Je tedy

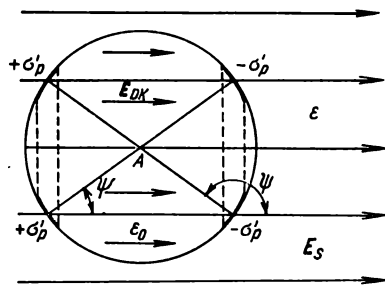
$$(E_s)_{2t} = 0, \quad (E_s)_{2n} = E_s$$

a

$$(E_s)_{1t} = 0, \quad \epsilon_0(E_s)_{1n} = \epsilon E_s.$$



Obr. (5.2) 11. Příčná plochá dutina v dielektriku



Obr. (5.2) 12. Kulatá dutina v dielektriku

V ploché příčné dutině má tedy intenzita pole zase stejný směr jako intenzita v okolním dielektriku, ale velikost má v poměru relativní permitivity dielektrika větší:

$$5.2 \quad (46) \quad \mathbf{E}_{D\perp} = \epsilon_r \mathbf{E}_s.$$

Se zřetelem k 5.2 (21, 13) můžeme též psát

$$5.2 (47) \quad \mathbf{E}_{\text{DL}} = (1 + \kappa) \mathbf{E}_s = \mathbf{E}_s + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}.$$

c) Kulová dutina v dielektriku

[obr. (5.2) 12]

Na hranici dutiny indukují vnější pole $\mathbf{E}_s$ náboj s proměnnou hustotou

$$\sigma'_p = \sigma_p \cos \psi = n_0 \alpha \mathbf{E}_s \cos \psi,$$

která je na levé polovině koule ($0 \leq \psi < \pi/2$) kladná a na pravé polovině záporná ($\pi/2 < \psi \leq \pi$). Výpočtem, který uvádíme drobným tiskem, bychom odvodili intenzitu výsledného homogenního pole v dutině

$$5.2 (48) \quad \mathbf{E}_{\text{DK}} = \left(1 + \frac{\kappa}{3}\right) \mathbf{E}_s = \mathbf{E}_s + \frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P}.$$

V úzké mezeře v dielektriku rovnoběžné s polem je tedy pole stejné jako v dielektriku, v úzké mezeře kolmé k poli je pole silnější o $\mathbf{P}/\varepsilon_0$ a v kulové dutině má intenzitu zvětšenou jen o třetinu posledního výrazu.

Abychom určili výslednou intenzitu $\mathbf{E}'_K$, vzbuzenou ve středu kulové dutiny polarizačními náboji na jejím povrchu, rozdělíme si povrch koule na velmi úzké pásy kolmé na směr pole. Intenzita $d\mathbf{E}'_K$, vzbuzená ve středu A jedním takovým pásem, leží zřejmě v jeho ose souměrnosti a její velikost dE'_K dostaneme tedy, sečteme-li složky intenzit vzbuzených jednotlivými elementy pásu rovnoběžné s $\mathbf{E}_s$. Protože všechny elementy mají od středu A stejnou vzdálenost a , bude

$$dE'_K = \frac{\sigma'_p dS}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cos \psi,$$

kde plocha pásu

$$dS = 2\pi a \sin \psi \cdot a d\psi.$$

Výslednou intenzitu $\mathbf{E}'_K$ dostaneme integrací přes celý povrch koule (se zřetelem k obr. (5.2) 12)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_K &= \int_0^\pi d\mathbf{E}'_K = \frac{\mathbf{E}_s^0}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \int_0^\pi \sigma'_p \cos \psi \cdot dS = \\ &= \frac{\mathbf{E}_s^0}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \int_0^\pi n_0 \alpha \mathbf{E}_s \cos \psi \cdot \cos \psi \cdot 2\pi a \sin \psi \cdot a d\psi, \end{aligned}$$

neboť $\mathbf{E}'_K$ má směr jednotkového vektoru $\mathbf{E}_s^0$ ve směru pole. Podle 5.2 (12) a 5.2 (13)

$$\mathbf{E}'_K = \frac{n_0 \alpha}{2\varepsilon_0} \mathbf{E}_s \int_{\psi=\pi}^{\psi=0} \cos^2 \psi \cdot d(\cos \psi) = \frac{\kappa}{2} \mathbf{E}_s \frac{1}{3} [\cos^3 \psi]_\pi^0 = \frac{1}{3} \kappa \mathbf{E}_s = \frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P}.$$

Přičtením tohoto vektoru k $\mathbf{E}_s$ dostaneme pak pro celkovou intenzitu výsledného homogenního pole v kulové dutině výraz 5.2 (48).

Rovnice 5.2 (45, 47, 48) můžeme shrnout v jediný vzorec

$$\mathbf{E}_{\text{DE}} = (1 + \hat{N}\kappa) \mathbf{E}_s,$$

kde $\mathbf{E}_{\text{DE}}$ značí intenzitu pole uvnitř elipsoidové dutiny, klademe-li

$$\hat{N}_{||} = 0, \quad \hat{N}_\perp = 1, \quad \hat{N}_K = \frac{1}{3}.$$

Bezrozměrné číslo $\hat{N}$ se nazývá *depolarizační faktor* a jeho velikost závisí na poměru λ délky rotační osy elipsoidové dutiny k průměru jejího kolmého hlavního řezu podle tabulky (5.2) II.

Tabulka (5.2) II

Teoretické hodnoty depolarizačního faktoru

λ	0 deska	1 koule	10	20	50	100	500	∞ drát
$\hat{N}$	1	1/3	0,020 3	0,006 8	0,001 4	0,000 4	0,000 024	0

Podobným postupem, jakým jsme odvodili rovnice pro pole $E_{D||}$, $E_{D\perp}$, E_{DK} a E_{DE} uvnitř dutin různého tvaru, dostali bychom vzorce pro pole $E_{T||}$, $E_{T\perp}$, E_{TK} , E_{TE} v elipsoidových těliscích různých tvarů vložených do homogenního pole E_0 ve vakuu. Mají-li tělíska relativní permitivitu $\varepsilon_r = 1 + \kappa$, platí pro ně vzorce:

$$5.2 (49) \quad E_{T||} = E_0, \quad E_{T\perp} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}, \quad E_{TK} = \frac{E_0}{1 + \kappa/3}, \quad E_{TE} = \frac{E_0}{1 + \hat{N}\kappa},$$

kde depolarizační faktor $\hat{N}$ má zase hodnoty uvedené v tab. II. Obecně je intenzita v dielektrickém tělisku slabší než v okolí, jak je znázorněno na obr. (5.2) 7, protože pole vzniklé jeho polarizací míří proti poli vnějšímu a nazývá se proto *depolarizační*.

5.2.5. Vlastnosti izotropních dielektrik

V čl. 5.2.1 jsme popsali tři druhy polarizace, které všechny mají kvalitativně stejný výsledek, totiž vytvoření usměrněných dipólů v dielektriku a vznik povrchových vázaných nábojů. V dalších článcích jsme podali kvantitativní popis polarizace bez zřetele k jednotlivým druhům polarizace. V tomto článku ukážeme, jak se uplatňují v různých látkách jednotlivé způsoby polarizace a promluvíme o některých průvodních jevech polarizace v izotropních dielektrících.

Atomová polarizace je jev, který vzniká ve všech nevodících. Iontová polarizace je však možná jen u látek s polárními molekulami nehledě na jejich skupenství, kdežto orientační polarizace se uplatňuje pouze tehdy, když polární molekuly mohou měnit orientaci, tedy v látkách kapalných a plyných.

Jednoduchá teorie, kterou jsme podali, vyhovuje dosti dobře jen pro malé hodnoty susceptibility. Proto vztah:

$$5.2 (50) \quad \varepsilon_r - 1 = \kappa = \frac{n_0 \alpha}{\varepsilon_0},$$

jenž plyne z 5.2 (21, 12), vyhovuje jen tehdy, je-li intenzita E_p pole vzbuzeného polarizací malá proti intenzitě E_s vnějšího pole. Obecně platí přesnější rovnice *Clausiusova—Mossovia*

$$5.2 (51) \quad \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n_0 \alpha}{3\varepsilon_0}.$$

Některé látky s pólovými molekulami se v elektrickém poli chovají obdobně jako feromagnetické látky v poli magnetickém. Taková nelineární dielektrika se nazývají *feroelektrické* nebo *seignettoelektrické* látky, protože tyto vlastnosti byly poprvé objeveny Kurčatovem a Kobekem u Seignettovy (Rochellovy soli), což je normální vínan sodnodraselný ($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 + 4 \text{H}_2\text{O}$). Při teplotách vyšších než tzv. *Curieův bod* má konstantní susceptibilitu a polarizace $P = \kappa E_s$ je úměrná intenzitě vnějšího pole [obr. (5.2) 13a]. Při teplotě

tách nižších je však $\propto$ závislé na E_s a pozoruje se elektrická hystereze, která se při kruhové změně E_s projeví hysterezní smyčkou [obr. (5.2) 13b], velmi podobnou křivce známé u feromagnetických látek. Nad Curieovým bodem se feroelektrické látky, stejně jako jiná dielektrika se stálou permitivitou, chovají obdobně jako paramagnetické látky v magnetickém poli. a proto je nazýváme *paraelektrickými* (parelektrickými).

Feroelektrické látky se vyznačují velkými hodnotami poměrné permitivity. Je to např. fosforečnan draselný (KH_2PO_4), titaničitany BaTiO_3 (minerál perovskit) a LiTiO_3 (minerál ilmenit). Koloidní roztok BaTiO_3 má např. $\epsilon_r = 1\,400$.

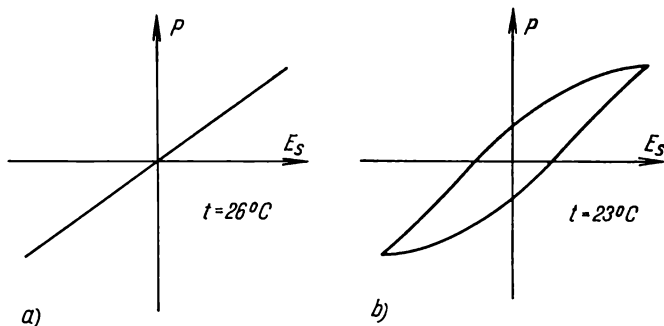
Feroelektrické látky mají významné vlastnosti, kterých by bylo možno využít prakticky, kdyby tomu nebránila značná závislost těchto vlastností na teplotě. V poslední době bylo objeveno, že některá feroelektrika (např. triglycinsulfát) jsou schopná svou teplotu automaticky udržovat v blízkosti Curieova bodu. Této „teplotní stabilizace“ se u nás využilo při konstrukci tzv. *tandelu* (tj. teplotně autostabilizovaného nelineárního dielektrického elementu), který může v řadě elektronových zařízení nahradit polovodiče, proti nimž má některé výhody.

Některé feroelektrické látky, jako směs pryskyřice a vosku, polarizované silným elektrickým polem v tekutém stavu, podržují znatelný elektrický moment i bez elektrického pole, necháme-li je ztuhnout v tomto polarizovaném stavu. Pro obdobu s permanentními magnety nazývají se takové trvale zeлектроvané látky *elektrety*.

Jsou známa též dielektrika obdobná svými vlastnostmi látkám antiferomagnetickým (viz čl. 5.8.5). Taková dielektrika se proto nazývají *antiferoelektrická* a patří k nim kromě jiných tyto látky: $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ (s Curieovým bodem -126°C), $\text{NH}_4\text{H}_2\text{AsO}_4$ (-57°C), $\text{Ag}_2\text{H}_3\text{IO}_6$. Antiferoelektrické jsou i sloučeniny, v nichž je vodík nahrazen těžkým vodíkem.

S polarizací dielektrika souvisí dva další jevy. První z nich má název *elektrostrikce*, čímž rozumíme změny geometrických rozměrů dielektrického tělesa při zeлектроvání. Elektrické dipóly vzniklé polarizací dielektrika se ve směru pole navzájem elektrostaticky přitahují. Přiblížení molekul však znamená mechanické deformace, kterým brání síly pružnosti. Proto se přibližování molekul zastaví, jakmile nastane rovnováha mezi elektrickými a pružnostními silami. Tak vznikne smrštění dielektrika ve směru pole, které dosahuje při potenciálním rozdílu několika set voltů poměrných hodnot řádu 10^{-8} (tedy milióntin procenta). Podobně při stlačení dielektrika vznikne mezi jeho povrchy velmi nepatrný potenciálový rozdíl. Elektrostriční jevy nemají proto praktický význam.

Také při ohřátí a při ochlazení některých nevodících se objeví na jejich povrchu náboje, což je tzv. jev *pyroelektrický*. Zahřívání má tu podobný účinek jako při elektrostriční napínání dielektrika, ochlazování jako jeho stlačování.



Obr. (5.2) 13. Závislost polarizace Seignettovy soli na intenzitě elektrického pole: a — nad Curieovým bodem, b — pod Curieovým bodem

5.2.6. Vlastnosti neizotropních dielektrik

V čl. 5.2.1 jsme podali elementární teorii dielektrické polarizace izotropních izolantů, která platí pro pevné, kapalné i plynné skupenství.

Předpokládali jsme, že elektrický moment dipólu vzniklého polarizací roste úměrně s intenzitou pole a že jeho směr je souhlasný se směrem tohoto vektoru. Vyjádřili jsme to vektorovou rovnicí 5.2 (6), která je rovnocenná třem rovnicím složkovým:

$$5.2 (52) \quad (p_a)_x = \alpha E_{sx}, \quad (p_a)_y = \alpha E_{sy}, \quad (p_a)_z = \alpha E_{sz}.$$

Znamená to, že polarizovatelnost α je stejná ve směrech všech tří souřadnicových os. Avšak v neizotropních monokrystalech není poměr deformace k působící síle stejný pro všechny krystalografické směry. Stejná síla způsobí u nich různě velké deformace v různých krystalografických směrech. Podobně se chovají takové krystaly i při polarizaci. Např. v některých iontových krystalech nastává různě velké posunutí iontů podle směru pole, což můžeme vysvětlit tím, že polarizovatelnost α není ve všech směrech stejně velká. Pak již poměr složek vektoru $\mathbf{p}_a$ není roven poměru složek vektoru $\mathbf{E}_s$ a tyto vektory nejsou spolu již rovnoběžné. Ani vektor polarizace $\mathbf{P}$ nemá obecně směr pole a rovnice 5.2 (13) pozbývá platnosti. Jednoduché složkové rovnice

$$5.2 (53) \quad P_x = \kappa \varepsilon_0 E_{sx}, \quad P_y = \kappa \varepsilon_0 E_{sy}, \quad P_z = \kappa \varepsilon_0 E_{sz}$$

vyjadřující vektorový vztah 5.2 (8) je pak třeba nahradit složitějšími lineárními vztahy mezi složkami obou vektorů:

$$5.2 (54) \quad \begin{aligned} P_x &= \kappa_{11}\varepsilon_0 E_{sx} + \kappa_{12}\varepsilon_0 E_{sy} + \kappa_{13}\varepsilon_0 E_{sz}, \\ P_y &= \kappa_{21}\varepsilon_0 E_{sx} + \kappa_{22}\varepsilon_0 E_{sy} + \kappa_{23}\varepsilon_0 E_{sz}, \\ P_z &= \kappa_{31}\varepsilon_0 E_{sx} + \kappa_{32}\varepsilon_0 E_{sy} + \kappa_{33}\varepsilon_0 E_{sz}. \end{aligned}$$

Místo jediné (skalární) elektrické susceptibility zavádíme tedy celkem 9 konstant. Podle rovnice 5.2 (30) nemá tedy ani vektor indukce $\mathbf{D}$, který touto rovnicí definujeme v neizotropních látkách, směr intenzity pole. Je obecnější lineární funkcí vektoru $\mathbf{E}_s$, což vyjádříme třemi složkovými rovnicemi

$$5.2 (55) \quad \begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{11}E_{sx} + \varepsilon_{12}E_{sy} + \varepsilon_{13}E_{sz}, \\ D_y &= \varepsilon_{21}E_{sx} + \varepsilon_{22}E_{sy} + \varepsilon_{23}E_{sz}, \\ D_z &= \varepsilon_{31}E_{sx} + \varepsilon_{32}E_{sy} + \varepsilon_{33}E_{sz}. \end{aligned}$$

Lineární závislost mezi složkami dvou vektorů nacházíme v různých oborech fyziky, zejména v teorii prostorové napjatosti pružných těles, kde právě vznikl pojem tenzoru. Říkáme, že součinitel ε_{ik} a ovšem také součinitel $\kappa_{ik}\varepsilon_0$ v rovnicích 5.2 (54) jsou složkami *tenzoru 2. řádu*. Takový tenzor je určen obecně devíti složkami. Má-li tenzor vlastnost vyjádřenou rovnicemi

$$5.2 (56) \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}, \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13},$$

je to symetrický tenzor a k jeho určení stačí šest složek. Tenzor určený součiniteli lineárních vztahů 5.2 (55) mezi indukcí a intenzitou se nazývá *dielektrický tenzor*. Lze dokázat, že je to tenzor symetrický, určený šesti nezávislými permitivitami. Úplnou souměrnost pozorujeme u krystalů soustavy krychlové, u nichž jsou všechna ε_{ik} pro $i \neq k$ rovna nule a zbývající tři konstanty mají stejnou hodnotu:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon.$$

U takových krystalů dielektrický tenzor degeneruje ve skalární permitivitu ε a platí rovnice

$$D_x = \varepsilon E_{sx}, \quad D_y = \varepsilon E_{sy}, \quad D_z = \varepsilon E_{sz}$$

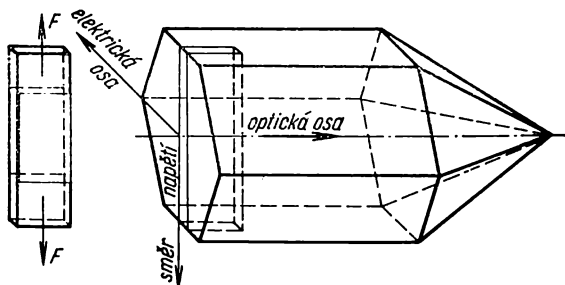
v soulase s 5.2 (29). Krystaly soustavy krychlové nejvíce anizotropii a indukce v nich má směr intenzity pole, stejně jako v látkách nekystalických.

U krystalů, které nejsou středově souměrné (jsou acentrické), vzniká velmi intenzivní úkaz, který nazýváme *piezoelektrickým jevem*. Podrobíme-li destičku vyříznutou z krystalu křemene podle obr. (5.2) 14 tlaku nebo tahu ve směru kolmém k optické i k elektrické ose, destička i molekuly krystalu se deformují a tím se změní poloha nábojů způsobem nazna-

čeným na obr. (5.2) 15. Tak vzniknou, podobně jako při dielektrické polarizaci, stejně velké opačné povrchové náboje na protilehlých plochách destičky. Opatříme-li ji staniolovými polepy nebo postříbíříme-li její protilehlé stěny, můžeme mezi nimi zjistit „piezoelektrické napětí“. Tahem působícím na piezoelektrickou destičku, která se podle svého objevitele nazývá Curieova, vzniká tedy polarizace. Tlakem stejně silným vznikne stejně velká polarizace opačného smyslu, což se projeví obráceně rozloženými náboji. Pokusy ukazují, že hustota náboje na jedné ploše σ_+ ($= -\sigma_-$) je úměrná působícímu mechanickému napětí nebo měrnému tlaku:

5.2 (57)

$$\sigma_+ = k \frac{F}{S},$$



Obr. (5.2) 14. Curieova destička

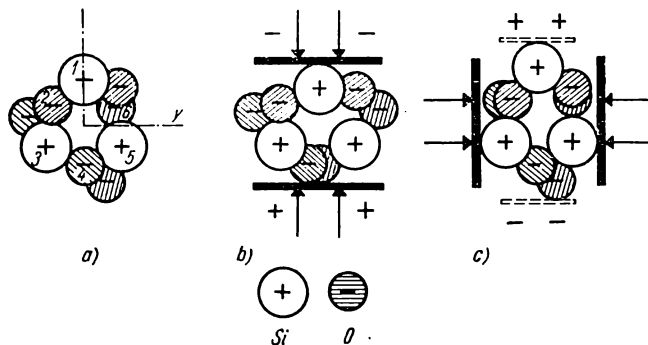
kde F je síla působící na plochu S průřezu destičky. Konstanta k je piezoelektrická konstanta, která má pro křemen hodnotu

5.2 (58)

$$k = 2,30 \cdot 10^{-12} \text{V}^{-1} \text{m}.$$

Stejně intenzívně jako tento *přímý* (direktní) piezoelektrický jev projevuje se i *obrácený* (reciproký) piezoelektrický jev: Vložíme-li na polepy destičky potenciálový rozdíl, deformuje se destička tak, že se její rozměry změní úměrně potenciálovému rozdílu.

Přímý i obrácený piezoelektrický jev umožňuje přeměnu mechanických deformací a tlaků na elektrické veličiny zvláště, vzájemnou přeměnu mechanických kmitů a elektrických oscilací. Má mnohá důležitá použití jak v měřicí technice (měření potenciálových rozdílů, radioaktivních preparátů), tak v technické akustice (krystalové mikrofony, přenosky,



Obr. (5.2) 15. Molekula křemene při deformacích

piezoelektrické generátory ultrazvukové), v radiotechnice (stabilní oscilátory, krystalové filtry) i jinde (krystalové čili křemenné hodiny).

5.2.7. Kondenzátory

Intenzita pole v okolí bodového náboje je úměrná velikosti náboje. Totéž platí pro potenciál, volíme-li jej v nekonečnu rovný nule. Podobně je potenciál v poli nabitého vodiče úměrný hustotě plošného náboje na jeho vnějším povrchu. Stálý poměr celkového náboje vodiče k jeho potenciálu (který je všude na vodiči stejný) se nazývá *kapacita* vodiče. Čím je tento poměr pro nějaký vodič větší, tím větší náboj je možno na něj přenést, aniž by potenciál přestoupil přípustnou hodnotu. Kapacita vodiče se zřejmě měří v jednotkách

$$\frac{\text{coulomb}}{\text{volt}} = \text{A s V}^{-1} = \text{farad} = 1 \text{ F}$$

a má určitou hodnotu jen tehdy, když potenciálem vodiče rozumíme potenciál vzbuzený pouze jeho vlastním nábojem. Podle principu superpozice závisí totiž výsledný potenciál nabitého vodiče i na okolních nabitých vodičích, jež vzbuzují pole s jistým potenciálem v místě prvního vodiče, který se algebraicky přičítá k potenciálu prvního vodiče. Přítomností okolních nabitých vodičů se náboj prvního vodiče nezmění, ale změní se jeho výsledný potenciál, který jediné můžeme měřit. Proto má praktický význam jen kapacita počítaná z výsledného potenciálu. Naproti tomu nepočítáme ji však ze skutečného náboje, nýbrž z náboje volného a nepřihlížíme tedy k nábojům polarizačním, které nás při tom nezajímají. Kapacitu vodiče posuzujeme totiž podle množství volného náboje, který na něj smíme přenést.

Z toho, co jsme řekli, vyplývá, že je možno zvětšit kapacitu osamělého vodiče tím, že k němu přiblížíme opačně nabitý vodič, který sníží jeho potenciál, přesněji řečeno potenciálový rozdíl proti okolním tělesům. Značného účinku dosáhneme patrně těsným přiblížením druhého vodiče, který můžeme zároveň volit tak, aby první vodič byl co nejvíce odstíněn od vlivu dalších nabitých těles. Kapacita je za těchto podmínek prakticky nezávislá na vnějších polích. Na takto upravených vodičích je skutečně možno udržet náboj s velkou hustotou — značně jej kondenzovat —, a proto se takové soustavy vodičů nazývají *kondenzátory*. Jeden vodič („kolektorový“) se nabíjí, druhý („kondenzátorový“) se obvykle uzemní, takže se na něm indukuje prakticky stejně velký opačný náboj a celý indukční tok z kladně nabitého vodiče vstupuje do druhého vodiče. Pak je možno definovat kapacitu takto:

Kapacita kondenzátoru je podíl volného náboje na jednom vodiči a napětí na kondenzátoru:

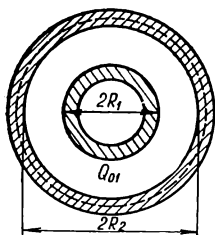
5.2 (59)

$$C = \frac{Q_0}{U}.$$

Prostor mezi vodiči („polepy“) kondenzátoru bývá vyplněn vhodným dielektrikem, čímž se zvětší jeho kapacita, jak uvidíme.

Z teoretického hlediska je nejjednodušší a nejdokonalejší kondenzátor kulový [obr. (5.2) 16]. Skládá se ze dvou soustředných kovových koulí, mezi nimiž je izolant s permitivitou ϵ . Budeme předpokládat, že izolant je homogenní (a izotropní), takže ϵ má všude stejnou hodnotu.

Známe-li volný náboj Q_{01} na vnitřní kouli, stačí určit již jen napětí mezi oběma koulemi, které vypočteme podle vzorce 5.1 (49):



Obr. (5.2) 16.
Kulový kondenzátor

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l},$$

kde $\mathbf{E}_s$ je intenzita pole v dielektriku mezi oběma koulemi. Podle čl. 5.1.9 je však pole vzbuzené vnější koulí v tomto prostoru nulové, a proto dosadíme za $\mathbf{E}_s$ pole $\mathbf{E}_{s1}$ vytvořené vnitřní koulí. Podle 5.2 (27, 28)

$$\mathbf{E}_{s1} = \frac{Q_{01}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0 = \frac{Q_{01}}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{r}^0.$$

Protože je v kovu pole nulové, budeme integrovat jen od vnějšího poloměru R_1 vnitřní koule do vnitřního poloměru R_2 vnější koule:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_{01}}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q_{01}}{4\pi\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_{01}}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \\ &= \frac{Q_{01}}{4\pi\epsilon} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}. \end{aligned}$$

Napětí mezi koulemi je tedy nezávislé na náboji vnější koule. Ať má tato koule jakýkoli volný náboj, sídlí na jejím vnějším povrchu. Na jejím vnitřním povrchu se objeví při nabití vnitřní koule indukovaný náboj $-Q_{01}$ a na vnějším povrchu indukovaný náboj $+Q_{01}$ podobně jako na obr. (5.1) 21. Indukovaný náboj $-Q_{01}$ je vždycky na vnitřním povrchu vnější koule, jak plyne z Gaussovy věty se zřetelem k tomu, že výtok intenzity z kulové plochy vedené kovem vnější koule musí být nulový.

Kapacita kulového kondenzátoru

$$C_K = \frac{Q_{01}}{U_{12}} = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

je tedy zcela určena permitivitou a rozměry dielektrické vrstvy. Označíme-li její tloušťku $d = R_2 - R_1$ a geometrický průměr ploch obou kulových rozhraní

$$\bar{S} = \sqrt{4\pi R_1^2 \cdot 4\pi R_2^2} = 4\pi R_1 R_2,$$

dostaneme přesný vzorec

$$5.2 (60) \quad C_K = \epsilon \frac{\bar{S}}{d}.$$

V praxi se často užívá různých druhů kondenzátoru válcového. Jsou to dva sousedé kovové válce s mezerou vyplněnou dielektrikem. Je-li vnější povrch vnitřního válce o poloměru R_1 a výšce h pokryt volným nábojem se stálou plošnou hustotou σ_0 [obr. (5.2) 17a], je

$$Q_{01} = \sigma_0 2\pi R_1 h$$

a označíme-li

$$\tau_0 = \frac{Q_{01}}{h},$$

bude podle 5.1 (64) napětí na kondenzátoru

$$5.2 (60') \quad U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E_s \cdot dr = \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

kde R_2 je vnitřní poloměr vnějšího válce. Kapacita kondenzátoru je tedy

$$5.2 (61) \quad C_V = \frac{Q_{01}}{U_{12}} = \frac{\tau_0 h}{U_{12}} = 2\pi\epsilon \frac{h}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Předpokládali jsme, že hustota náboje na vnitřním válci je všude stejná, což je dosti přesně splněno jen v místech vzdálených od konců válce (od okraje polepů). Je-li pak tloušťka $d = R_2 - R_1$ vrstvy dielektrika malá proti délce, tj. proti výšce válcové plochy, můžeme pokládat τ_0 za stálé a pole mezi válci za prakticky odstíněné od cizích nábojů. Pak platí 5.2 (61) dosti přesně a kapacita je nezávislá na okolních nábojích.

Je-li kromě toho tloušťka vrstvy velmi malá proti poloměrům R_1 a R_2 , můžeme přibližně položit

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) \approx \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{d}{R_1},$$

takže

$$5.2 (62) \quad C_V \approx 2\pi\epsilon \frac{R_1 h}{d} = \epsilon \frac{S_1}{d}, \quad S_1 = 2\pi R_1 h.$$

Tento přibližný vzorec pro kapacitu válcového kondenzátoru s plochou vnitřního válce S_1 a vrstvou dielektrika tloušťky d platí tím přesněji, čím tenčí je vrstva a větší délka válce, tj. čím plošší je vrstva dielektrika. Proto se při přesném měření ke krátkým válcovým kondenzátorům připojují na obou koncích ochranné prstence, které mají stejný potenciál jako příslušné válce kondenzátoru. Zabraňují siločarám v rozptýlu a odstraňují vliv vnějších polí. Praktickými příklady válcového kondenzátoru jsou leidenská láhev [obr. (5.2) 17b] a kondenzátory keramické [obr. (5.2) 17c].

Deskový kondenzátor se skládá ze dvou kovových desek oddělených tenkou vrstvou dielektrika (vzduchu, skla, slídy, ...). Nabijeme-li je stejně velkými opačnými náboji, rozloží se po jejich povrchu zhruba rovnoměrně s hustotami $\pm\sigma_0$. Je-li vrstva dielektrika velmi plochá (malá tloušťka d a velká plocha S), je v ní — s výjimkou okrajů — pole takřka homogenní s intenzitou 5.1 (40)

$$E_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon}$$

kolmou k povrchům desek. Náboje jsou v tomto případě rozloženy na rozhraní dielektrika a desek; o tom se snadno přesvědčíme užitím Gaussovy věty na válcovou plochu, jejíž jedna základna leží uvnitř kladné desky, druhá na její vnější straně, kde je pole nulové stejně jako v kovu. Proto je výtok intenzity z válce nulový. Na vnějším povrchu desky tedy není náboj a totéž platí i pro zápornou desku.

Napětí mezi deskami

$$U_{12} = \int_{(1)}^{(2)} E_s \cdot dl = E_s d = \frac{\sigma_0 d}{\epsilon},$$

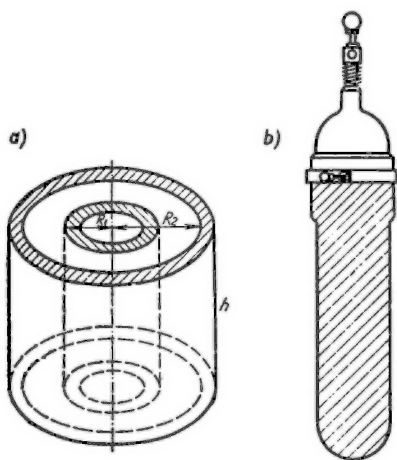
náboj kladné desky

$$5.2 (63) \quad Q_0 = \sigma_0 S$$

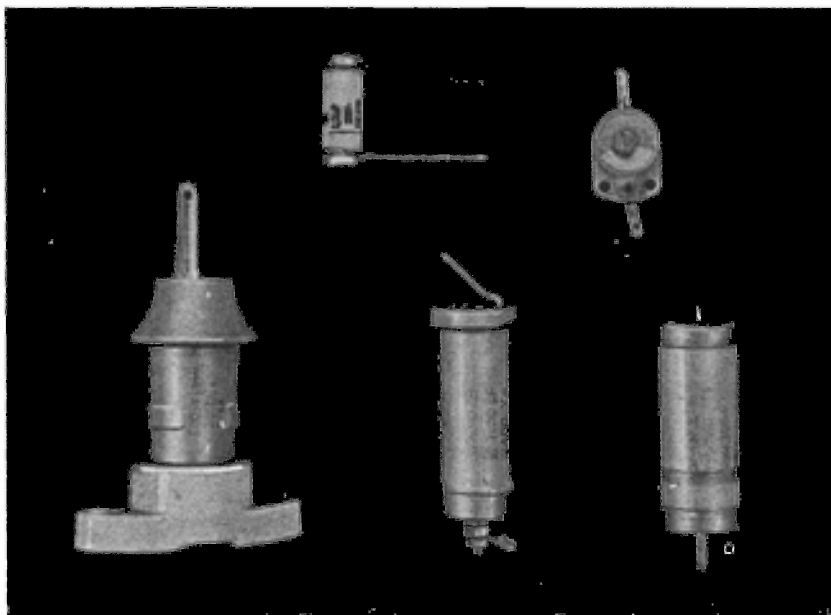
a kapacita je dána výrazem

$$5.2 (64)$$

$$C_D = \epsilon \frac{S}{d},$$



c)



Obr. (5.2) 17. Válcový kondenzátor: a — schéma, b — leidenská láhev, c — keramické kondenzátory

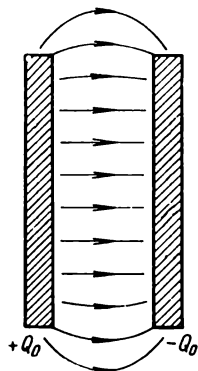
který platí jen přibližně vzhledem k rozptylu siločar na okrajích desek, jak je naznačeno na obr. (5.2) 18. Platí ovšem tím přesněji, čím plošší je vrstva dielektrika a pro velmi plochý kondenzátor plyne tento vzorec i ze vzorců 5.2 (60, 62) pro kulový a válcový kondenzátor. Nazveme-li podíl plochy S k tloušťce mezery d plochostí kondenzátoru, platí obecná věta:

Kapacita velmi plochého kondenzátoru se rovná součinu jeho plochosti a permitivity dielektrika.

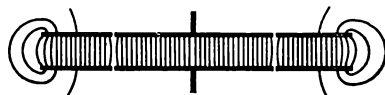
Podle této věty můžeme počítat např. kapacitu svitkových i jiných kondenzátorů.

Použitím ochranných prstenců, udržovaných na stejných potenciálech jako desky kondenzátoru, se dosahuje takřka homogenního pole a dosti přesné platnosti vzorce 5.2 (64) i pro méně plochý kondenzátor, jak je vidět z obr. (5.2) 19.

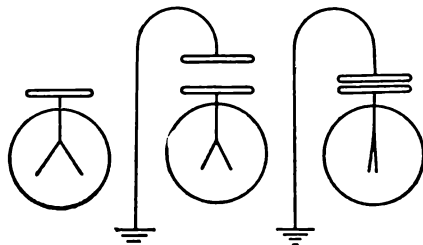
O nepřímé závislosti kapacity deskového kondenzátoru na vzdálenosti desek se přesvědčíme jednoduchým pokusem [obr. (5.2) 20]. Přibližování uzemněné desky se stálým potenciálem se snižuje potenciální rozdíl mezi ní a druhou deskou. Roste tudíž kapacita kondenzátoru, který tvoří obě desky.



Obr. (5.2) 18. Siločáry v deskovém kondenzátoru



Obr. (5.2) 19. Deskový kondenzátor s ochrannými prstenci



Obr. (5.2) 20. Růst kapacity kondenzátoru při zmenšování vzdálenosti desek

Závislosti kapacity na tloušťce mezery mezi polepy kondenzátoru se využívá u *kapacitních snímačů* (čidel) k měření různých veličin a při regulaci v četných technických oborech.

5.2.8. Elektrostatická energie

Mějme kondenzátor nabitý nábojem Q_0 na napětí $U = Q_0/C$. Přeneseme-li ze záporného polepu na kladný polep tak malý náboj dQ_0 , že nemusíme dbát změny napětí, vykonáme práci

$$dA = dQ_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = U dQ_0 = \frac{Q_0 dQ_0}{C}.$$

Úhrnnou práci potřebnou k nabití původně nenabitého kondenzátoru, tedy k postupnému přenesení celého náboje Q_0 na kladný polep, vypočteme integrací

$$5.2 \text{ (65)} \quad A = \int_{Q_0=0}^{Q_0} \frac{Q_0 dQ_0}{C} = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} Q_0 U = \frac{1}{2} C U^2.$$

Vynaložená práce je uložena v kondenzátoru jako elektrostatická potenciální energie nábojů na polepech a vrátila by se při vybití kondenzátoru jako kinetická energie elektronů urychlených polem, kdyby se odporem vedení nepřeměnila v teplo. Elektrostatická energie W_s kondenzátoru je spojena s existencí pole mezi polepy a tato souvislost je zvlášť jedno-

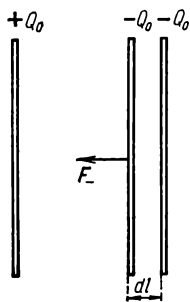
duchů u kondenzátoru deskového, kdy má pole všude stejnou intenzitu $E_s = U/d$. Je tedy vzhledem k 5.2 (63, 31)

$$5.2 \quad (66) \quad W_s = \frac{1}{2} \sigma_0 S E_s d = \frac{1}{2} E_s D V,$$

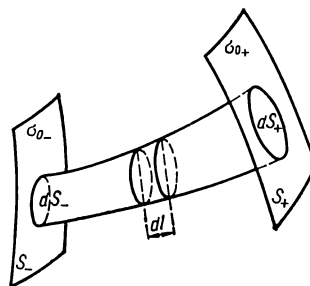
značí-li V objem homogenního pole v kondenzátoru. Je tomuto objemu úměrná a můžeme si představit — ve smyslu Faradayových názorů —, že elektrostatická energie je v poli rozložena s prostorovou hustotou

$$5.2 \quad (67) \quad w_s = \frac{1}{2} E_s D = \frac{\varepsilon}{2} E_s^2,$$

která má v celém objemu homogenního pole stálou hodnotu. Lze ji odvodit také jinak. Záporná deska s nábojem $-Q_0$ je kladnou deskou přitahována silou [obr. (5.2) 21]



Obr. (5.2) 21. K výpočtu práce vykonané při posuvu desky kondenzátoru



Obr. (5.2) 22. Silová trubice mezi dvěma nabitými plochami

$$5.2 \quad (68) \quad F_- = -Q_0 E_{s+} = -\frac{1}{2} Q_0 E_s = -\frac{1}{2} \sigma_0 S E_s,$$

neboť pole E_{s+} kladné desky má podle čl. 5.1.9 poloviční intenzitu než výsledné pole E_s od obou desek. Odsuneme-li tedy rovnoměrným pohybem zápornou desku o délku dl , vykonáme práci

$$dA = -F_- dl = \frac{1}{2} \sigma_0 E_s S dl = \frac{1}{2} E_s D dV.$$

Při tom jsme zvětšili objem pole o dV , takže podíl

$$\frac{dA}{dV} = \frac{dW_s}{dV} = \frac{1}{2} E_s D = w_s$$

má význam prostorové hustoty energie v poli. Můžeme ji odvodit pro libovolné pole mezi dvěma nabitými plochami S_+ a S_- [obr. (5.2) 22], které jsme vytvořili tím, že jsme přenesli náboje $\sigma_0- dS_- = \sigma_0+ dS_+$ podél indukčních trubic z S_- na S_+ . Při malém posuvu náboje $\sigma_0 dS$ na hladině S do sousední hladiny vzdálené o dl vykonáme práci, kterou vzhledem k 5.2 (31) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$dW_s = \sigma_0 dS \mathbf{E}_{s-} \cdot d\mathbf{l} = D dS \mathbf{E}_{s-} \cdot d\mathbf{l},$$

kde $\mathbf{E}_{s-}$ je pole vytvořené plochou S_- v místě plošky dS . Protože $d\mathbf{l}$ má směr indukce, lze psát $D d\mathbf{l} = \mathbf{D} dl$, takže

$$dW_s = \mathbf{E}_{s-} \cdot \mathbf{D} dS dl.$$

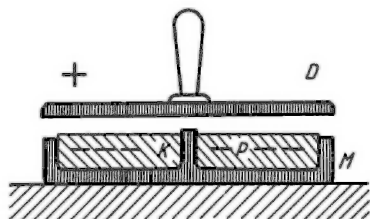
Při tom je jako prve $E_s = \frac{1}{2} E_s$ a zvětšení objemu pole $dV = dS dl$, takže

5.2 (69)

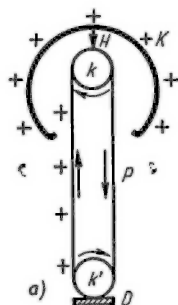
$$w_s = \frac{1}{2} E_s \cdot D.$$

To je obecný vzorec pro hustotu energie v elektrostatickém poli, který platí, i když vektory E_s a D nemají stejný směr, tedy i v neizotropním dielektriku.

Z předešlého výkladu vyplývá, že k vytvoření elektrostatického pole je nutno oddělit od sebe kladné a záporné náboje a dosáhnout převahy kladných nábojů na jednom a převahy záporných na jiném tělese. Při tom je třeba přemáhat přitažlivé síly mezi opačnými náboji a vykonaná práce se objeví jako elektrostatická energie pole. Zařízení, kterými toho dosahujeme a v nichž se přeměňuje mechanická nebo jiná energie v energii elektrostatického pole, se nazývají *elektrostatické zdroje* či *generátory*. Nejstarší primitivní zdroje byly *třecí*, ale později se ukázaly výhodnější *indukční zdroje*, jakým je např. elektrofor, Wimshurstova elektrika (influenční) i tzv. van de Graaffův generátor.



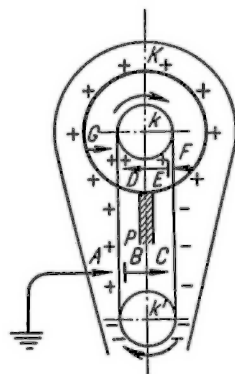
Obr. (5.2) 23. Elektrofor



Obr. (5.2) 24. Pásový elektrostatický generátor: a — schéma, b — školní typ

Jednoduchý je princip *elektroforu*, naznačeného schematicky na obr. (5.2) 23. Je to kruhová kovová mísa M , vyplněná vrstvou parafínu P , nad jejíž horní povrch maličko vystupuje osový kovový kolík K . Zelektrojujeme-li parafínovou vrstvu např. třením srstí, dostane záporný náboj. Přiblížíme-li pak shora kovovou desku D tak, aby se dotkla kolíku K , odvede se záporný náboj indukovaný v desce D mísou do země a na desce zůstane kladný náboj. Zdviháme-li desku, klesá kapacita kondenzátoru tvořeného deskou D a mísou M , stoupá potenciál desky a dosáhne vysoké hodnoty při úplném oddělení desky D , která má vzhledem k zemi jen malou kapacitu. Deskou můžeme tedy nabít libovolný vodič a pokus mnohokrát opakovat. Při tom zůstává záporný náboj parafínu nezměněn a nabíjení desky D se děje na účet mechanické práce, kterou konáme při vzdalování této desky.

V novější době se užívá *pásových generátorů* třecích i indukčních. Na obr. (5.2) 24a je schéma jednoduchého *třecího* generátoru. Nekonečný pás P z hedvábí nebo z igelitu či perlonu je napjat přes dvě válcové kladky k a k' . Spodní kladka k' se udržuje v pohybu a na pásu se třením o destičku D z umělé hmoty uvolňuje kladný náboj. Náboj je pásem unášen vzhůru a odsáván hrotem H . Tak se koule K nabíjí kladně, až dosáhne dosti vysokého napětí řádu 10^5 V. Obrázek (5.2) 24b ukazuje model pásového generátoru vhodného ke školním pokusům.



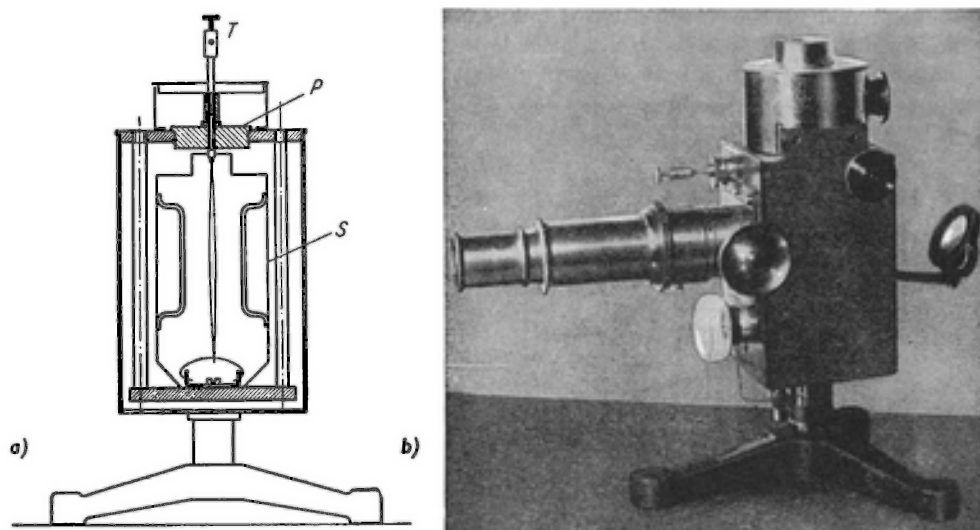
Obr. (5.2) 25. Van de Graaffův generátor

Indukční pásový generátor známý pod jménem van de Graaffův generátor pracuje podle obr. (5.2) 25. Nechť má vodič BC složený z desky a ostrého hrotu malý počáteční záporný náboj. Proti desce B stojí hrot A saje tento záporný náboj do země a srší na pás náboj kladný, který je unášen vzhůru ke hrotu G , jenž přivádí kladný náboj na kouli K . Současně je kladný náboj odsáván hrotem D spojeným s kotoučem E . Tento kotouč indukuje záporný náboj na hrotu F , který jej vysrší na sestupující stranu pásu P .

5.2.9. Měření elektrostatického potenciálu

Elektrostatické síly jsou základním projevem existence nábojů a jejich polí a na zjišťování těchto sil se zakládá měření elektrostatických veličin.

Při praktickém měření elektrostatických potenciálů používá se přístrojů zvaných elektrometry, z nichž popíšeme dva přístroje *vláknové*.



Obr. (5.2) 26. Dvouvláknový elektrometr: *a* — schéma, *b* — snímek

Dvouvláknový elektrometr je sestaven podle obr. (5.2) 26. V ose vodivé skřínky S jsou napjata těsně vedle sebe dvě svislá tenká vodivá vlákna, izolovaná jantarovým prstencem P od S . Vlákna jsou dolními konci upevněna na pružném křemenném vlákně, zahnutém do oblouku, které obě vlákna mírně napíná. Nabijeme-li obě vlákna (sdělením náboje tyčince T nebo indukci) na jistý potenciál proti skříně S , která může být uzemněna, nebo nabita na libovolný potenciál, roztoustoupí se obě vlákna, jak je naznačeno na obr. (5.2) 26. Jejich největší vzdálenost (uprostřed) a ovšem také výchylka každého z nich z původní polohy je velmi přibližně úměrná potenciálnímu rozdílu mezi vlákny a skřínkou. Poloha vláken (uprostřed) se pozoruje drobně, který má v ohniskové rovině okuláru jemně dělenou stupnici. Ostrý obraz vláken je dobře patrný v jasném poli, osvětleném zrcátkem umístěným vzadu.

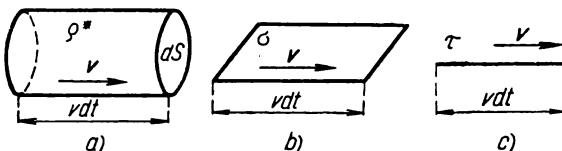
Jednovláknový elektrometr je přístroj podobný předešlému, s jediným vláknem, které probíhá mezi dvěma svislými břity, které se nabíjejí na různé potenciály. Vláknem se vodivě spojí s jedním z nich, kterým je pak odpuzováno, kdežto druhý břit je přitahuje. Výchylka se pozoruje mikroskopem se stupnicí.

Vláknové elektrometry jsou velmi vhodné pro srovnávací měření; pro absolutní měření se ovšem musí cejchovat.

5.3. Ustálené stejnoměrné proudy

5.3.1. Makroskopický proud

Nejmenší látkové částice jsou v ustavičném pohybu a nesou elektrické náboje obou znamének. Jejich pohyby jsou za normálního stavu látky statisticky neuspořádané, a proto nemají za následek pozorovatelný pohyb náboje. Libovolným myšleným řezem tělesa projde za stejnou dobu stejné množství nábojů v obou směrech. Říkáme, že tělesem neprochází makroskopický proud, kterým rozumíme uspořádaný, usměrněný pohyb nábojů, při kterém projde průřezem vodiče jisté nenulové množství náboje v jednom směru. Při tom procházejí průřezem obecně náboje obojí polarity, ale tak, že převahu má tok kladného náboje v jednom směru, který definujeme jako směr proudu. Velikost či „sílu proudu“ posuzujeme podle množství kladného náboje prošlého za jednotku doby. Dělíme-li náboj dQ , prošlý zvoleným průřezem tělesa za dobu dt , touto dobou, dostaneme skalární veličinu



Obr. (5.3) 1. Hustota proudu: a — prostorového, b — plošného, c — lineární proud (proudové vlákno)

5.3 (1)

$$I = \frac{dQ}{dt},$$

která se nazývá stručně *proud*.*) Měříme ji v jednotkách

$$1 \text{ A} = \text{ampér} = \frac{\text{coulomb}}{\text{sekunda}} = \text{Cs}^{-1},$$

jejichž přesnou definici podáme v čl. 5.6.6.

Obecně je proud děj prostorový, který může probíhat různě v různých místech vodiče. Velikost proudu (tok náboje) v nějakém místě posuzujeme podle *hustoty prostorového proudu* (hustoty prostorového toku náboje). Je to vektor

5.3 (2)

$$\mathbf{i} = \frac{dI}{dS} \mathbf{v}^0,$$

který má velikost rovnou proudu procházejícímu ploškou dS , kolmou k rychlosti $\mathbf{v}$ náboje a směr proudu určený jednotkovým vektorem $\mathbf{v}^0$ ve směru rychlosti kladných nábojů. Proud dI je množství náboje dQ prošlého za dobu dt a značí-li ϱ^* prostorovou hustotu proudícího náboje, je podle obr. (5.3) 1a

$$dQ = \varrho^* dV = \varrho^* dS v dt, \quad dI = \frac{dQ}{dt} = \varrho^* v dS,$$

takže

5.3 (3)

$$\mathbf{i} = \varrho^* v \mathbf{v}^0 = \varrho^* \mathbf{v}.$$

*) Pro odlišení od „proudu“ jakožto jevu by se měla veličina 5.3 (1) označovat logicky správným a jednoznačným názvem *tok náboje*.

Proudí-li náboj po ploše (např. po povrchu vodiče), je to plošný proud a jeho hustotu definujeme výrazem

$$5.3 (4) \quad j = \frac{dI}{dl} v^0,$$

kde dI je proud protékající úsečkou dl kolmou k v^0 . Podle obr. (5.3) 1b je obdobně

$$dQ = \sigma dlv dt, \quad dI = \sigma v dl,$$

značí-li σ plošnou hustotu náboje. *Hustota plošného proudu* (plošného toku náboje) je tedy

$$5.3 (5) \quad j = \sigma v.$$

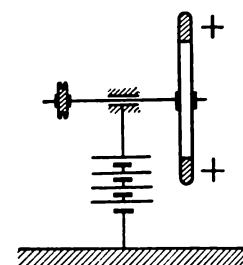
Konečně pro proud I vedený lineárním vodičem (proudovým vláknem), na němž je rozložen náboj s délkovou hustotou τ , bude podle obr. (5.3) 1c

$$5.3 (6) \quad dQ = \tau v dt, \quad I = \tau v.$$

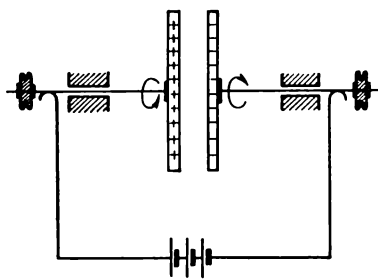
Uspořádaného pohybu nábojů stejného znaménka je možno dosáhnout v zásadě dvojím způsobem: makroskopickým pohybem nabitých částic nebo těles, které uvedeme do pohybu

mechanickými silami, nebo mikroskopickým pohybem nejmenších částic látky, které nesou po jednom nebo několika elementárních nábojích. V prvním případě, kdy je elektrický proud podmíněn makroskopickým pohybem látky, vzniká tzv. *konvekční proud*, v druhém případě jde o *kondukční proud*, který obecně není provázen makroskopickým pohybem látky.

Konvekční proud lze vytvořit pohybem jakékoli látky (vodiče i nevodiče), má-li látka



Obr. (5.3) 2. Konvekční proud vzniklý rotací nabitého prstence



Obr. (5.3) 3. Konvekční proud vzniklý protisměrnou rotací desek nabitého kondenzátoru

ka převahu jednoho druhu náboje. U izolantu je to samozřejmé, protože náboj se v něm nemůže pohybovat, a je tedy izolantem unášen. U vodičů je to možné proto, že náboje (např. volné elektrony) v nich sice nejsou vázány na neproměnné polohy, ale vodiče kladou pohybu nábojů odpor, který způsobí, že i vodiče (kovy) unášejí náboje aspoň částečně.

Konvekční proud můžeme demonstrovat jednoduchým pokusem [obr. (5.3) 2]. Roztočíme-li kovový prstenec spojený vodičem s jedním pólem baterie, jejíž druhý pól uzemníme, vznikne v okolí prstence stejné magnetické pole, jako kdyby prstencem obíhal elektrický proud. Intenzita tohoto ekvivalentního proudu je určena množstvím náboje, který při rotaci projde myšleným nehybným průřezem prstence za jednotku doby:

$$I = Qf,$$

je-li Q celkový náboj prstence a f frekvence jeho rotace. Při nepatrné kapacitě prstence by však náboj Q byl dosti malý, a proto je výhodnější užít (místo jednoho rotujícího prstence) deskového kondenzátoru, jehož vzájemně opačně nabitě kruhové desky se prudce otáčejí proti sobě [obr. (5.3) 3]. Tak vznikají dva blízce uzavřené proudy stejného smyslu a jejich magnetická pole se sčítají.

Kondukční proudy vznikají ve vodičích (kovech, polovodičích, elektrolytech) a v ionizovaných plynech. Nositeli proudu jsou tu volné elektrony nebo ionty, které nejsou vázány na neproměnné polohy a které se tedy mohou ve vodivých látkách pohybovat mezi ostat-

ními částicemi. Tyto částice jsou buď neutrální, a proto na ně vnější elektrické pole nepůsobí, nebo jsou vázány na málo proměnné polohy v krystalové mřížce. Překážejí pohybu nositelů náboje a kladou tak odpor vedení elektriny.

Mějme elektricky vodivou homogenní látku, která obsahuje nositele proudu, tj. pohyblivé částice s nábojem e_0 rozložené v látce s prostorovou hustotou n_0 . Prostorová hustota volného náboje, tj. náboje, který se může účastnit vedení proudu, je tedy

$$5.3 (7) \quad \varrho_0^* = n_0 e_0.$$

Pokud nepůsobí na látku vnější elektrické pole, pohybují se molekuly i nositelé proudu statisticky neuspořádaně, takže výsledný elektrický proud je nulový. Předpokládejme nyní, že působením vnějších elektrických nábojů vznikne v celém objemu látky homogenní, časově stálé elektrostatické pole intenzity $\mathbf{E}_s$. Je-li hmotnost nositele proudu m_0 , dosáhl by vlivem stálé síly $e_0 \mathbf{E}_s$ za čas t mechanické hybnosti

$$m_0 \mathbf{v} = e_0 \mathbf{E}_s t,$$

kdyby se během této doby nesrazil s jinými částicemi. Uvnitř časového intervalu $\langle 0, \bar{t} \rangle$, kde $\bar{t}$ je střední doba letu nositele mezi dvěma srážkami, roste tedy jeho rychlost úměrně s časem, takže jeho průměrná rychlost je poloviční než na konci této doby. Proto je střední rychlost všech nositelů proudu rovna

$$5.3 (8) \quad \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} \frac{e_0}{m_0} \bar{t} \mathbf{E}_s.$$

Tato střední rychlost má směr elektrického pole a překládá se přes neuspořádaný pohyb nositelů proudu, který k proudu nepřispívá. Rychlost $\bar{\mathbf{v}}$ je v obvyklých elektrostatických polích malá proti rychlosti těchto neuspořádaných pohybů, proto je v prvním přiblížení střední doba letu $\bar{t}$ nezávislá na intenzitě pole $\mathbf{E}_s$. Tak vzniká působením tohoto pole elektrický proud, jehož prostorová hustota vzhledem k 5.3 (8)

$$5.3 (9) \quad \mathbf{i} = \varrho_0^* \bar{\mathbf{v}} = n_0 e_0 \bar{\mathbf{v}} = n_0 \bar{\mathbf{v}}_0^* = \frac{n_0 e_0^2 \bar{t}}{2 m_0} \mathbf{E}_s.$$

Hustota kondukčního proudu je tedy úměrná intenzitě elektrického pole

$$5.3 (10) \quad \boxed{\mathbf{i} = \gamma \mathbf{E}_s},$$

kde konstanta úměrnosti

$$5.3 (11) \quad \gamma = \frac{n_0 e_0^2 \bar{t}}{2 m_0}$$

je tak zvaná *měrná (specifická) elektrická vodivost* látky.

Rovnice 5.3 (10) vyjadřuje **Ohmův zákon v diferenciálním tvaru:*)**

Hustota ustáleného proudu v nějakém místě vodiče se rovná součinu jeho měrné vodivosti a intenzity elektrostatického pole v tomto místě.

*) Fyzikální zákony, které se týkají veličin v jediném místě prostoru (nebo v jediném okamžiku), definovaných diferenciálními podíly, nazýváme *diferenciálními* zákony na rozdíl od zákonů *integrálních*, které uvádějí v souvislost veličiny vztahované na celá tělesa nebo jejich části. Ve skutečnosti jde v tomto druhém případě o veličiny průměrné, vyjádřené konečnými diferenciálními. Od zákonů diferenciálních lze přejít k integrálním zákonům integrací.

K vedení proudu používáme nejčastěji drátů, pro které je výhodný integrální tvar Ohmova zákona. Odvodíme jej pro homogenní vodič ve tvaru válce průřezu S a délky l .

Budeme dále předpokládat, že proud je *ustálený*, tj. časově neproměnný. Podle 5.3 (10) musí být také časově neproměnné pole $\mathbf{E}_s$, což vyžaduje, aby se neměnilo rozložení náboje ve vodiči. To znamená, že se náboj nemůže nikde ve vodiči ani ztrácet, ani hromadit. Tím je vyjádřen *zákon spojitosti (kontinuity) proudu*, který říká, že náboj protéká vodičem jako nestlačitelná kapalina. Pak ovšem každým průřezem vodiče musí za stejnou dobu projít stejné množství náboje, a proto musí být při stálém průřezu všude stejná hustota proudu. Vzhledem k 5.3 (.0) musí tedy být $\mathbf{E}_s$ i místně stálé.

Vložíme-li tedy na základny válce stálé napětí U , vznikne ve vodiči homogenní pole, jehož intenzita má velikost

$$E_s = \frac{U}{l}$$

a které ve vodiči vzbudí proud

$$5.3 (12) \quad I = Si = S\gamma \frac{U}{l}.$$

Tento proud je tedy úměrný, napětí, při čemž konstanta úměrnosti

$$5.3 (13) \quad G = \gamma \frac{S}{l}$$

se nazývá *elektrická vodivost* vodiče. Místo vodivosti se častěji užívá *odporu*

$$5.3 (14) \quad \boxed{R = \frac{1}{G} = \varrho \frac{l}{S}, \quad \varrho = \frac{1}{\gamma},}$$

kde ϱ je *měrný odpor* vodiče, který už na jeho rozměrech nezávisí. Jednotkou odporu je

$$5.3 (15) \quad [R] = 1 \Omega = \text{VA}^{-1} = \text{ohm}$$

a

$$5.3 (16) \quad [\varrho] = \Omega \text{ m}, \quad [\gamma] = \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

V elektrotechnické praxi se užívá častěji jednotky

$$5.3 (17) \quad [\varrho]' = 10^9 [\varrho],$$

která se číselně rovná odporu drátu délky 1 m a průřezu 1 mm². Dosazením 5.3 (13) do 5.3 (12) dostaneme hledaný zákon

$$5.3 (18) \quad I = GU$$

nebo

$$5.3 (19) \quad \boxed{U = RI.}$$

To je **Ohmův zákon** v integrálním tvaru, který platí pro ustálený stejnosměrný proud ve vodičích libovolného tvaru, jak bychom snadno dokázali na základě zákona spojitosti

proudu. Vysvětlíme jen stručně, proč pole mezi svorkami baterie sleduje drát, kterým svorky spojíme, při libovolném tvaru drátu.

Každý vodič, kterým má procházet ustálený stejnosměrný proud, musí být vodivě uzavřen. Uskutečňíme-li vodivý styk mezi svorkami a konci drátu, jsou záporné elektrony u kladného pólu vtaženy do svorky a tím se obnaží kladné náboje iontů v krajním řezu drátu. Tak vznikne vrstva kladných nábojů, které vytvoří elektrické pole kolmé k řezu. Toto pole opět odsaje elektrony z nejbližšího řezu drátu a tím se pole posune ve směru osy do vnitřku drátu. Protože proud je všude stejný, je hustota vrstvy kladného náboje také stálá podél osy drátu. Pole se tedy šíří podél osy drátu stálého průřezu s nezměněnou intenzitou nezávisle na tvaru drátu. Při proměnném průřezu zůstává celkový proud $I = Si$ stálý, a proto podle 5.3 (10) klesá intenzita pole E_s nepřímo úměrně s rostoucím průřezem vodiče. Totéž platí i o spádu potenciálu, který se tedy podél vodiče nestejněho průřezu mění úměrně odporu, jak to žádá Ohmův zákon.

5.3.2. Vedení elektřiny v kovech

Elektronovou teorii kovů založili Drude (r. 1900) a Lorentz na představě, o které jsme již několikrát hovořili, že kovy jsou polykrystalické látky s tzv. *kovovou vazbou*. Chemické i fyzikální vlastnosti kovů mají totiž prvky (a jejich slitiny), jejichž atomy mají jeden nebo několik záporných elektronů, zvaných valenční elektrony, ve vnější neúplné slupce. *Valenční elektrony* jsou k atomu slabě poutány a lze je dosti snadno odtrhnout. Každý mikroskopický monokrystalek kovu má tedy pevnou krystalovou mřížku z kladně nabitých ionizovaných atomů (zbavených jednoho nebo několika obvodových elektronů) a mezi těmito kladnými ionty bloudí statisticky proměnnými směry i rychlostmi *volné elektrony* odtržené od atomů. Elektrostatický potenciál se uvnitř kovu mění periodicky od iontu k iontu, ale lze jej v prvním přiblížení pokládat za stálý. Volné elektrony uvnitř kovu se tedy mohou celkem volně pohybovat (pokud jim v tom nebrání srážky s ionty) jako na hladině potenciálu. Proto přirovnáváme volné elektrony k molekulám plynů a mluvíme o *elektronovém plynu* v kovech a o *střední volné dráze* elektronu, kterou průměrně urazí elektron mezi dvěma srážkami. Při zvyšování teploty kovu však tento elektronový plyn téměř nepřijímá energii, tedy *elektronové specifické teplo* je malé proti specifickému teplu kovu. To vysvětlila teprve *kvantová elektronová teorie* Sommerfeldova. Sommerfeld klasickou teorii pozměnil dalšími dvěma předpoklady, že se totiž energie valenčních elektronů mění nespojité podle kvantové teorie a že hladiny jejich energie jsou v každém monokrystalu obsazeny ve shodě s vylučovacím principem Pauliho. K dokonalejšímu výkladu vlastností kovu a hlavně polovodičů však ani Sommerfeldova teorie nestačila a tak vznikla r. 1930 tzv. *pásmová teorie* pevných látek.

V předešlém článku jsme vyložili, jak vzniká působením vnějšího elektrického pole ve vodičích ustálený proud. Výklad doplníme několika poznámkami o elektrické vodivosti kovů. Zkušenost ukazuje, že odpor kovů roste přibližně úměrně s absolutní teplotou. Tato skutečnost se podle klasické elektronové teorie vykládá tím, že zvětšením amplitud termických kmitů krystalové mřížky se zvětšuje pravděpodobnost srážky elektronu s ionty. Tím se zkracuje střední volná dráha elektronů, a tedy i doba $\bar{t}$, po kterou jsou zrychlovány elektrickým polem. Proto klesá specifická vodivost γ daná výrazem 5.3 (11). Podle vlnové mechaniky si musíme vznik elektrického odporu představit jako následek rozptylu elektronových vln na iontech krystalové mřížky. Závislost odporu kovů na Celsiově teplotě t° je zhruba lineární:

$$5.3 (20) \quad R = R_0(1 + \alpha t^\circ),$$

neboť jejich *teplotní součinitel odporu* α jsou přibližně stálí. Mají pro různé kovy velmi různé kladné hodnoty, které jsou pro některé slitiny blízké nule. Takové slitiny jsou vhodné pro konstrukci odporových etalonů. Při měření teploty odporovými teploměry je třeba

přihlížet k tomu, že odpor kovů neroste přesně lineárně, přece však platí dosti přesně jednoduchá rovnice

5.3 (21)

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \text{konst } T,$$

která vyjadřuje **Lorentzův – Lorenzův zákon**: *Podíl tepelné a elektrické vodivosti má pro všechny kovy stejnou hodnotu, úměrnou absolutní teplotě. Konstanta úměrnosti má podle elektronové teorie hodnotu*

$$5.3 (22) \quad 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 2,23 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2 \text{ } ^\circ\text{K}^{-2},$$

kde e je elementární náboj a k Boltzmannova konstanta. Z vlnové mechaniky vychází poněkud větší hodnota, a to

$$5.3 (23) \quad \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 3,29 \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 2,44 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2 \text{ } ^\circ\text{K}^{-2}.$$

Tabulka (5.3) I

Měrný elektrický odpor ϱ a teplotní součinitel odporu α některých čistých kovů

Měrný odpor ϱ vztažený na krychli o hraně 1 m při 20 °C, teplotní součinitel odporu α v teplotním intervalu 0° až 100 °C, určený vztahem $\alpha = \frac{\varrho_{100} - \varrho_0}{100}$

Kov	ϱ [Ω m]	α [°C ⁻¹]	Kov	ϱ [Ω m]	α [°C ⁻¹]
Ag	0,014 9 . 10 ⁶	4,1 . 10 ⁻³	Na	0,043 4 . 10 ⁻⁶	5,46 . 10 ⁻³
Al	0,024 1	4,3	Nb	0,131	4,0
Au	0,020 4	3,9	Ni	0,060 5	6,9
Be	0,06	6,5	Os	0,097	4,2
Bi	1,2	4,4	Pd	0,109	3,7
Ca	0,04	4,2	Pt	0,098	3,92
Cd	0,766	4,2	Rb	0,11	5,3
Co	0,056	6,5	Re	0,198	3,1
Cr	0,19	—	Rh	0,044	4,4
Cs	0,19	5,0	Ru	0,076	—
Cu	0,015 5	4,33	Sb	0,386	5,1
Fe	0,10	5,6	Sn	0,10	4,6
Ga	0,40	3,96	Sr	0,31	3,8
Hf	0,30	4,4	Ta	0,124	3,6
In	0,082	4,9	Th	0,13	3,96
Ir	0,046	4,1	Tl	0,150	5,18
K	0,064	5,4	Ti	0,475	4,25
Li	0,086	4,9	U	0,31	2,1
Mg	0,038	4,13	V	0,21	3,5
Mg	0,046	4,41	W	0,049 1	4,82
Mn	0,23; 0,91; 7,1	0,5; 1,3; 0,2	Zn	0,048	4,1
Mo	0,05	4,7	Zr	0,41	4,4

Uvedené poznatky se týkají normálního stavu kovů a neplatí pro stav supravodivý. Dodejme, že při přechodu do supravodivého stavu mění se nespojitě také specifické teplo a tepelná vodivost kovu. Kromě toho závisí kritická teplota, pod níž je kov supravodivý, na vnějším magnetickém poli. De Haas a Voogd zjistili ve známé leidské kryoskopické

laboratoři, že kritická teplota klesá s rostoucí intenzitou pole. S tím patrně souvisí typická vlastnost supravodičů, že uvnitř nich je vždy magnetická indukce B rovna nule.

Pokus o teoretické vysvětlení supravodivosti učinil jednak Heisenberg, jednak Born. V dnešní době se pracuje v tomto oboru velmi intenzivně teoreticky i experimentálně.

Některé supravodivé slitiny jsou vhodné ke konstrukci *supravodivých magnetů*, jimiž lze vzbudit enormně silná magnetická pole. Užijeme-li např. solenoidu vinutého ze slitiny niobu a zirkonu, lze jím vést tak silný proud, že vytvoří ve vzduchu pole s indukcí až 7 T ($7 \cdot 10^4$ gaussů) a ze slitiny Nb_3Sn až 14 T. Poslední slitina má nejvyšší dnes známou kritickou teplotu 18 °K.

Tabulka (5.3) II

Některé odporové slitiny

Měrný odpor ρ . Teplotní součinitel odporu α (0° až 100 °C)

Slitina	Složení	ρ [Ωm]	α [°C ⁻¹]
Nové stříbro	60 % Cu, 17 % Ni, 23 % Zn	$0,30 \cdot 10^{-6}$	$+0,35 \cdot 10^{-3}$
Nikelin	67 % Cu, 30 % Ni, 3 % Mn	0,40	+0,11
Manganin	86 % Cu, 2 % Ni, 12 % Mn	0,43	+0,02
Konstantan	54 % Cu, 45 % Ni, 1 % Mn	0,50	+0,03
Novokonstantan	83 % Cu, 4 % Al, 1 % Fe, 12 % Mn	0,45	—0,04
NBW 173	80 % Ag, 17 % Mn, 3 % Sn	0,58	—0,105
Contrazid	60 % Ni, 15 % Cr, 15 % Fe,		
	7 % Mo, 2 % Mn, 1 % Si	1,16	+0,09
Megapyr	75 % Fe, 20 % Cr, 5 % Al	1,4	+0,04
Kanthal	72 % Fe, 20 % Cr, 5 % Al, 3 % Co	1,45	+0,06

Podobně jako odporové teploměry jsou založeny na změně odporu s teplotou, zakládají se *odporové tenzometry* na změně odporu způsobené deformací vodiče. Vhodně upravený drátový tenzometr se připevňuje acetátovým nebo bakelitovým lepidlem na namáhanou součást a z poměrné změny odporu se určuje poměrná deformace.

5.3.3. Elektrolyty

Vedení elektřiny v kovech jsme v předešlém článku vyložili pohybem volných elektronů, tj. obvodových elektronů odtržených od atomů kovu, jež se tak mění v kladné ionty. Tyto ionty kmitají kolem rovnovážných poloh v krystalové mřížce kovu a neúčastní se vedení elektřiny. Protože pak elektrický náboj se v kovu nikde nehromadí, nepůsobí průchod proudu změny v rozložení atomů v kovu a nemá proto chemické účinky. Říkáme, že kovy mají elektronovou vodivost na rozdíl od látek, v nichž při průchodu proudu nastává makroskopický pohyb iontů a jejichž vodivost nazýváme *iontovou*. Takové látky, které vedou proud svými ionty, nazýváme *elektrolyty*, a děj, který v nich při průchodu proudu probíhá, se nazývá *elektrolýza*, protože je to vlastně chemický rozklad látky elektrickým proudem. Nejznámější elektrolyty jsou kapalné (roztoky a taveniny), ale jsou známy i pevné elektrolyty a rovněž průchod proudu plynem je umožněn pohybem iontů (čl. 5.3.8). Vedení proudu v roztocích bylo experimentálně prozkoumáno a teoreticky vysvětleno již dříve než před sto lety, kdežto mechanismus iontové vodivosti v pevných elektrolytech je složitější a zčásti obdobný dějům probíhajícím v polovodičích. Zmíníme se o něm stručně na konci článku.

Podrobnější studium elektrolýzy vedlo k představě, že elektrolyty jsou tzv. *heteropolární sloučeniny*, jejichž molekuly vznikají spojením dvou iontů opačné polarity, jež jsou udržo-

vány pohromadě elektrostatickými silami Coulombovými (plynoucími z Coulombova zákona). Nejvýznačnější příklady jsou kyseliny HCl , H_2SO_4 a jejich soli NaCl , KCl , CuSO_4 , FeSO_4 atd. Krystal kuchyňské soli NaCl je složen z kladných a záporných iontů Na^+ a Cl^- . Říkáme, že molekuly NaCl jsou *disociovány* (rozštěpeny). Stejně je tomu i v roztoku soli ve vodě, jejíž molekuly vniknou mezi ionty mřížky a uvolní pevnou vazbu mezi nimi. Ve skutečnosti dochází v roztocích k neustálému slučování iontů a opětnému štěpení, takže molekuly jsou disociovány jen částečně, zvláště v koncentrovaných roztocích. V roztocích velmi zředěných, v nichž je pravděpodobnost setkání dvou opačných iontů malá, je disociace téměř úplná. V roztoku jsou tedy ionty pohyblivé, a proto jsou zrychlovány elektrickým polem, které vznikne, vložíme-li do roztoku kovové elektrody s dostatečně velkým napětím. Kladná elektroda — anoda — přitahuje záporné ionty (zvané též anionty) a záporná elektroda — katoda — přitahuje kladné ionty (kationty). Tak nastává pochod kladných i záporných iontů v opačných směrech, což je vzhledem k jejich nesouhlasným nábojům ekvivalentní dvěma proudům stejného směru, které dávají výsledný proud rovný jejich součtu. Stejně silný proud pokračuje ovšem v elektrodách i v ostatních částech vodivého obvodu. V kovových elektrodách a k nim připojených kovových vodičích, které uzavírají elektrický obvod, mohou se však pohybovat jen volné elektrony; záporné ionty elektrolytu se při dosažení anody zbavují přebytečných elektronů, které pokračují v pohybu kovovým vodičem ke katodě. Na rozhraní katody a elektrolytu se pak spojují s kladnými ionty a ruší jejich přebytečné kladné náboje. Kladné i záporné ionty se tedy pohybují jen v elektrolytu mezi oběma elektrodami; na nich se mění v neutrální atomy (nebo skupiny atomů), jejichž další osud závisí na chemickém prostředí, s nímž jsou ve styku. Ponoříme-li např. do roztoku CuSO_4 měděné elektrody a vložíme-li na ně stejnosměrné napětí, putují kationty Cu^{++} ke katodě, kde ztrácejí náboj a vylučují se jako neutrální atomy mědi. Anionty SO_4^{--} přicházejí do styku s ionty Cu^{++} na povrchu měděné anody a slučují se s nimi v molekuly CuSO_4 , které se ovšem v roztoku znovu štěpí. Výsledkem elektrolyzy je tedy přírůstek mědi na katodě a stejně velký úbytek mědi na anodě, avšak průměrná koncentrace roztoku se nemění. Jen poblíž elektrod mají kladné a záporné ionty různé koncentrace, což je způsobeno tím, že se oba druhy iontů nepohybují stejně rychle. Tak je to i v jiných případech, jak se zjistilo měřením tzv. pohyblivosti iontů, kterou definujeme jako poměr jejich rychlosti, jež je úměrná intenzitě elektrického pole v roztoku, k potenciálnímu spádu. Největší je pohyblivost vodíkového iontu (protonu), která ve vodním roztoku (při 18°C) činí $3,3 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{V} \cdot \text{m}^{-1}}$ a záporného iontu OH^- , která je $1,8 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$.

Pohyblivosti ostatních iontů jsou několikrát menší. Pohyblivosti v roztocích jsou o 4 až 5 řádů nižší než pohyblivosti elektronů v kovech.

Zákonitosti elektrolyzy objevil Faraday (r. 1833) a vyslovil je dvěma zákony. První říká, že *množství vyloučené látky závisí jen na množství prošlého náboje a je mu úměrné*. Druhý zákon vyjadřuje závislost kvantitativně a zní: *K vyloučení kilovalu kterékoli látky je třeba téhož množství elektriny, zvaného Faradayův náboj*:

5.3 (24)

$$F_0 = 9,650 \cdot 10^7 \text{ coulombů.}$$

Kiloval (neboli *chemický kilogramekvivalent*) je množství chemicky ekvivalentní kilogram-atomu vodíku; je to tedy kilogramatom dělený mocenstvím, u radikálů je to kilogram-molekula (součet kilogramatomů všech atomů obsažených v iontu) dělená mocenstvím radikálu. Označíme-li tedy kiloval značkou kval, bude

5.3 (25)

$$1 \text{ kval} = \frac{\text{kilogramatom}}{\text{mocenství}} = \left(\frac{\text{kmol}}{\text{mocenství}} \right)$$

a Faradayův elektrolytický zákon bude vyjádřen rovnicí

$$5.3 \quad (26) \quad \frac{n_{kv}}{kval} = \frac{Q}{F_0},$$

která vyjadřuje úměrnost mezi prošlým nábojem Q a množstvím n_{kv} vyloučené látky vyjádřeným počtem n_{km} kilomolů. Konstanta úměrnosti

$$F = \frac{Q}{n_{kv}} = \frac{F_0}{kval},$$

zvaná *Faradayova konstanta* nebo stručně *faraday*, má pro všechny látky stejnou hodnotu

$$F = 9,650 \cdot 10^7 \text{ C kval}^{-1},$$

která se od Faradaya náboje liší jen rozměrem.

Kiloval je jednotkou množství látky (stejně jako kilomol nebo kilogramatom) a nikoli jednotkou hmotnosti. Hmotnost připadající na jeden kiloval se nazývá *kilovalová hmotnost*. Značí se M_{kv} a má rozměr

$$[M_{kv}] = \text{kg kval}^{-1}.$$

Pro vodík, kyslík, stříbro a dvojmocnou měď je

$$5.3 \quad (27) \quad M_{kv}(\text{H}) = \frac{1,008 \text{ 0}}{1} = 1,008 \text{ 0 kg kval}^{-1},$$

$$M_{kv}(\text{O}) = \frac{15,999}{2} = 7,999 \text{ 5 kg kval}^{-1},$$

$$5.3 \quad (28) \quad M_{kv}(\text{Ag}) = \frac{107,87}{1} = 107,87 \text{ kg kval}^{-1},$$

$$M_{kv}(\text{Cu}) = \frac{63,54}{2} = 31,77 \text{ kg kval}^{-1}.$$

Projde-li tedy elektrolytem náboj 96,50 milionů coulombů, vyloučí se 1 kg a 8 g vodíku a stejně velký náboj přenese 7,999 5 kg kyslíku, 107,87 kg stříbra nebo 31,77 kg dvojmocné mědi. Obráceně proud 1 ampéru vyloučí za vteřinu 0,010 5 miligramu vodíku, 0,082 9 miligramů kyslíku, 1,118 miligramu stříbra a 0,329 4 miligramu dvojmocné mědi. Těchto výsledků se využívá k přesnému měření proudu, zvláště ke kontrole normálních ampérmetrů. Přístroje, kterými se měří, nazývají se *coulometry* (též *voltametry*).

Za jinak stejných podmínek je i v elektrolytech proud úměrný napětí na elektrodách a platí tedy Ohmův zákon

$$U = RI,$$

kde R je odpor elektrolytu, který závisí nejen na druhu a koncentraci roztoku, ale i na velikosti a tvaru jím zaujatého prostoru (daného nádobou) a ovšem také na velikosti a poloze elektrod.

5.3.4. Základní vlastnosti polovodičů

Polovodiče jsou třetím druhem pevných vodičů, k němuž počítáme vodiče, které nejsou ani kovy, ani elektrolyty. Jsou to *nekovy s elektronovou vodivostí*, a proto je někdy označujeme přesnějším názvem elektronové polovodiče, abychom je odlišili od pevných elektro-

lytů, s nimiž mají některé společné vlastnosti, zejména typickou vlastnost všech polovodičů: *zvětšování elektrické vodivosti s rostoucí teplotou*. Vysvětluje se to stejným mechanismem uvolňování nositelů proudu, které se v polovodičích i v pevných elektrolytech děje tepelnými vibracemi krystalové mřížky. Liší se však mezi sebou povahou těchto nositelů: u polovodičů jsou to elektrony, u elektrolytů ionty. Elektronovou vodivost mají polovodiče společnou s kovy, od nichž se však nápadně odlišují obrácenou závislostí vodivosti na teplotě, která u kovů s rostoucí teplotou klesá, u polovodičů naopak stoupá. Při hlubokých teplotách blízkých absolutní nule nabývají kovy značné vodivosti, popřípadě přecházejí do supravodivého stavu, zatímco polovodiče (i pevné elektrolyty) se při hlubokých teplotách blíží svými vlastnostmi izolantům. Také závislost vodivosti na ryznosti je u kovů obrácená než u polovodičů. Vysvětlujeme to tím, že hustota volných elektronů v kovu nezávisí na teplotě a jejich pohyblivost je tím větší, čím pravidelnější je mřížka. Dokonale periodická mřížka neklade pohybu elektronů odpor. Tak je tomu u ideálního krystalu při nulové absolutní teplotě. S rostoucí teplotou zvětšují se amplitudy termických oscilací, které stejně jako nepravidelnosti krystalu a cizí atomy porušují pravidelné uspořádání mřížky a tím snižují pohyblivost elektronů v kovu. V polovodičích naopak s rostoucí teplotou i s rostoucím počtem cizích atomů se usnadňuje uvolňování volných (vodivostních) elektronů, kterým kmitý mřížky nekladou tak velký odpor jako v kovech. Elektrony v polovodičích mají totiž při obvyklé teplotě asi 300krát menší energii než elektrony v kovech a přísluší jim podle představ vlnové mechaniky téměř dvacetkrát delší vlny, které se na tepelných kmitech téměř nerozptylují.

Od kovů se polovodiče liší také malou elektrickou vodivostí, která je nepatrná proti vodivosti kovů a malou hustotou vodivostních elektronů proti hustotě elektronů v kovech. Konečně mají některé polovodiče až desetkrát větší termoelektrické napětí než kovy a některé projevují také *fotovodivost*, která vzniká uvolňováním vodivostních elektronů absorpcí světla. Tento děj se někdy nazývá *vnitřní fotoelektrický jev*. Vodivost polovodičů se může zvýšit také pohlcováním rentgenového záření nebo rychlých elektronů či radioaktivního záření α .

Z uvedených základních charakteristik polovodičů vyplývá, že mají řadu vlastností společných s kovy a elektrolyty. Jejich název však naznačuje, že pokud jde o schopnost vést elektrický proud, leží mezi kovy a izolanty. Prvním se svými vlastnostmi přibližují při vysokých, druhým při nízkých teplotách.

Podle krystalové struktury lze rozdělit známé polovodiče na několik druhů:

Polovodivé prvky jsou křemík (Si), germanium (Ge), selen (Se) a telur (Te). Jsou to vesměs *valenční krystaly*, jejichž vodivost rychle roste s teplotou a množstvím příměsí (cizích atomů).

Z iontových krystalů jsou to jodidy AgI, CuI, kysličníky CuO, Cu₂O, ZnO, BaO, CoO, NiO, FeO, Fe₂O₃, Fe₃O₄ atd., siřníky PbS, Ag₂S, CdS, selenidy Ag₂Se, PbSe a teluridy Ag₂Te, PbTe. Poslední z uvedených kysličníků Fe₃O₄ (magnetovec) je nejjednodušším příkladem ferimagnetických polovodičů zvaných ferity, o nichž blíže pojednáme v čl. 5.8.5.

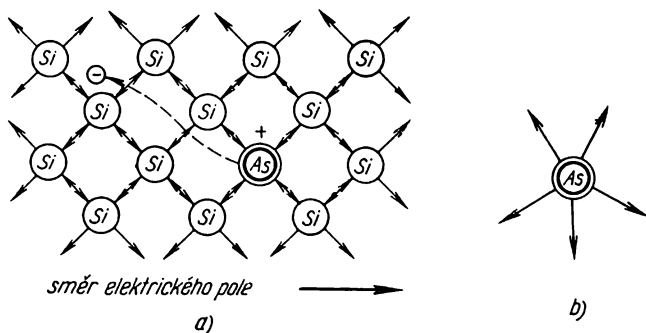
Polovodivé vlastnosti mají některé slitiny obsahující antimon nebo magnézium (ZnSb, CdSb, Mg₃Sb₂, Mg₂Si, Mg₂Ge, Mg₂Sn, Mg₃Sb₂). Rovněž některá organická barviva (metylénová modř a různé ftalocyaniny) i jiné organické sloučeniny (např. antracén) se chovají jako polovodiče. Jsou známy též kapalně polovodiče s elektronovou vodivostí, jejichž existence není teoreticky vysvětlena. Některé polovodivé krystaly podržují své vlastnosti i při tání a v kapalném skupenství (Te, Te₂S), některé však táním ztrácejí polovodivost a blíží se svými vlastnostmi buď kovům (Ge), nebo izolantům (Se).

Pokud jde o mechanismus vedení proudu, dělíme polovodiče na dvě kategorie: *polovodiče typu n* (s negativními nositeli proudu) a *polovodiče typu p* (s pozitivními nositeli). Rozeznají se buď podle znaménka termoelektromotorického napětí, nebo změřením Hallovy konstanty, která podle 5.6 (34) je u typu *n* záporná, u typu *p* však kladná. Některé polovodivé látky patří vždycky k jednomu z obou typů, jiné mohou přecházet z jednoho typu

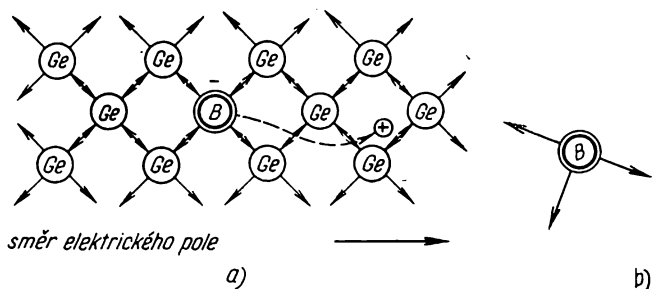
na druhý. Tak je tomu např. u křemíku a germania, u nichž vysvětlujeme vznik nositelů proudu zhruba takto:

Oba tyto polovodiče jsou valenční krystaly, v nichž jsou čtyřmocné neutrální atomy vázány vždy se čtyřmi sousedními atomy čtyřmi kovalentními vazbami. Dokonalé krystaly toho druhu (prototypem je diamant), neznečištěné cizími atomy, nevedou proud a polovodivost Si a Ge je způsobena právě přítomností cizích atomů v jejich krystalové mřížce. Mějme např. Si znečištěný nepatrným množstvím atomů arzenu, který má pět valenčních elektronů [obr. (5.3) 4]. Z těchto pěti elektronů mohou však se čtyřmi sousedními atomy Si vytvořit kovalentní vazby jen 4 elektrony.

Přebytečný záporný valenční elektron je k atomu As jen slabě poután. Proto může být i při mírně vysokých teplotách účinkem tepelných vibrací od atomu As odtržen a v elektrickém poli urychlen. Takovým způsobem vznikají v křemíku znečištěném arzenem vodivostní elektrony, které se mohou v krystalu přemisťovat zvláště ve směru elektrického pole [obr. (5.3) 4a]. Tato jednoduchá představa vysvětluje (aspoň kvalitativně) skutečnost, že křemík se stopami arzenu je polovodič typu *n*. Polovodičem téhož typu je ovšem i germanium znečištěné arzenem nebo jiným pětimocným prvkem, např. fosforem nebo antimonem. Příměšený pětimocný prvek se v tomto případě nazývá *donor* (dárce), protože dává krystalu vodivostní elektrony. Představme si však, že by v krystalu germania byly přítomny atomy nějakého trojmocného prvku, např.



Obr. (5.3) 4a — Schéma mřížky křemíku znečištěného arzenem; b — neutrální atom arzenu s 5 valenčními elektrony (donor)



Obr. (5.3) 5a — Schéma mřížky germania znečištěného bórem; b — neutrální atom bóru s 3 valenčními elektrony (akceptor)

bóru [obr. (5.3) 5a, b]. Takovému atomu, který má jen 3 valenční elektrony, chybí jeden elektron k obsazení všech 4 kovalentních vazeb se sousedními atomy Ge. Proto zůstane jeden valenční elektron některého ze sousedních atomů Ge bez kovalentní vazby a může být za spolupůsobení tepelných kmitů převzat atomem B. Tak vznikne v místě cizího atomu záporný ion, a naopak z atomu Ge vznikne odtržením elektronu kladný ion. Oba tyto ionty jsou ovšem vázány na svá místa v krystalové mřížce a nemohou se účastnit vedení proudu. Avšak na uprázdněné místo elektronu v atomu Ge může přejít některý elektron od sousedního atomu Ge, čímž se prázdné místo přenese na sousední atom Ge. Na tento děj můžeme však pohlížet jako na difúzi prázdného místa krystalem, která bude ovšem tím snazší, čím silnější budou tepelné kmity mřížky. Odchodem elektronu vznikne však na prázdném místě převaha kladného náboje a protože záporné elektrony se budou přednostně přesouvat ve směrech rostoucího potenciálu, budou se jimi uprázdněná místa posouvat přednostně ve směru potenciálového spádu. Proto můžeme pokládat prázdná místa po elektronech za kladně nabitě *díry* (čili dutiny) a můžeme si představit, že tyto

pozitivní díry vedou v tomto případě proud v krystalech. Pravíme, že takový polovodič má *děrovou* (dutinovou) *vodivost* a že patří k polovodičům typu *p*, které vedou proud pozitivními děrami. Cizí prvek trojmocný, kterým u germania a křemíku může být též Al, Ga nebo In, se v tomto případě nazývá *akceptor*, protože přejímá a váže valenční elektrony, čímž vytváří kladné díry volně pohyblivé v krystalové mřížce. O správnosti této představy nás přesvědčuje experimentální zjištění Hallovy konstanty, která pro takové polovodiče skutečně vychází kladná (viz čl. 5.6.5).

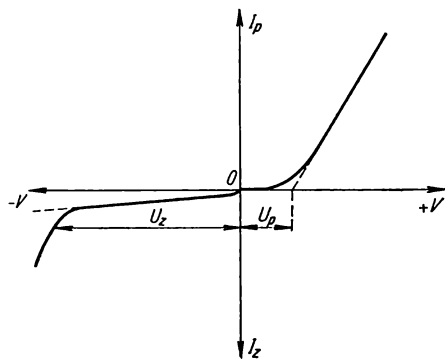
Některé polovodiče mají jen elektronovou vodivost (např. ZnO, TiO₂, Al₂O₃, WO₃), jiné jen děrovou (např. Se, Cu₂O, U₂O, V₂O₅). Některé polovodiče vedou však proud oběma způsoby a jejich Hallova konstanta je určena rozdílem obou vodivostí. U takových polovodičů může být Hallův jev nepozorovatelný, ačkoli elektrony i díry mají velkou pohyblivost.

S existencí dvou různých polovodičů typu *n* a typu *p* souvisí důležité jevy, které pozorujeme na rozhraní polovodičů různých typů a na rozhraní polovodičů a kovů.

Podle starších názorů na podstatu supravodivosti mohly být dobrými supravodiči jen kovy a slitiny, které mají velkou hustotu volných elektronů. Avšak v roce 1957 Bardeen, Cooper a Schreiffer navrhli model supravodivosti, z něhož usoudil Cohen, že i polovodiče mohou být dobrými supravodiči. Tento teoretický názor byl potvrzen r. 1964, kdy se experimentálně zjistilo, že známé polovodivé látky telurid germania a titanát stroncia jsou supravodiče.

5.3.5. Polovodičové usměrňovače a diody

Povrchová vrstva polovodiče nebo kovu se může lišit od jeho vnitřku chemickým složením. Tak např. povrch hliníku bývá pokryt tenkou vrstvou kysličníku hlinitého nebo na styku kysličníku mědného s mědí vzniká kyslíkem chudá vrstva. Kromě toho vznikají na rozhraní mezi polovodičem a kovem nebo mezi dvěma vodiči s velmi různým kontaktním potenciálem (viz čl. 5.4.5) *hraniční vrstvy* s jinými elektrickými vlastnostmi, než má vnitřek krystalu. U takových vodičů je také velmi různá potenciální energie vazby elektronů nebo děr s vodičem. Dotýkají-li se povrchy takových látek vodivě, přecházejí elektrony nebo díry do látky, kde mají menší energie, a tím vzniká potenciálový rozdíl, který nakonec



Obr. (5.3) 6. Schematický průběh voltampérové charakteristiky usměrňovače

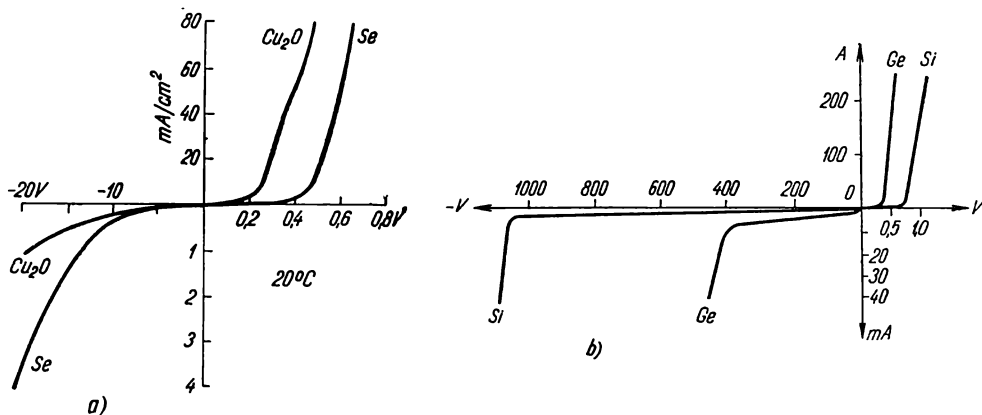
vyrovná rozdíl kontaktních potenciálů. Nastane to při jisté hustotě náboje v hraniční vrstvě, která podle své polarizace nebo zvětšuje koncentraci nositelů proudu. Kladný náboj v elektronových vodičích vzniká v hraniční vrstvě převahou kladných nábojů iontů způsobenou odchodem elektronů z vrstvy. Tím se stává vrstva u elektrod méně vodivou. Na povrchu děrových vodičů však vzniká kladný náboj nahromaděním děr, a proto je vrstva u elektrody vodivější než vnitřek vodiče.

Velkou praktickou důležitost má silná závislost odporu hraničních vrstev na směru proudu. Přiložíme-li např. k povrchové vrstvě polovodiče typu *n*, která je nevodivá proto, že z ní unikly elektrony, elektrodu s napětím takového směru, že z vrstvy vypuzuje elektrony,

vzroste tloušťka vrstvy a tím i její odpor. Při napětí opačného směru se však přilivem elektronů vrstva stane vodivější. To je usměrňovací účinek rozhraní kov—polovodič, který posuzujeme podle tzv. *usměrňovacího poměru* rovného poměru proudů, které jdou rozhraním při stejně velkých opačných napětích. Hodnotu tohoto poměru pro každý usměrňovač lze číst z jeho voltampérové charakteristiky, jejíž schematický průběh ukazuje

obr. (5.3) 6. Pravá část křivky ukazuje, že proud I_p v propustném směru roste zhruba lineárně s rostoucím napětím pro napětí větší než prahové napětí U_p . V závěrném směru propustí usměrňovač jen velmi slabý proud I_z , který stoupá s napětím velmi pomalu přibližně lineárně, pokud napětí nepřekročí hodnotu tzv. *Zenerova napětí* U_z . Usměrňovací účinek je tedy omezen na hodnoty mezi U_p a U_z . Voltampérové charakteristiky polykrystalických usměrňovačů (kuproxu Cu_2O a selenu Se) vidíme na obr. (5.3) 7a a na obr. (5.3) 7b jsou charakteristiky monokrystalických usměrňovačů Ge a Si . U technických usměrňovačů dosahuje usměrňovací poměr hodnot řádu 10^3 až 10^4 , což nelze vysvětlit usměrňovacím účinkem rozhraní polovodiče a kovu.

Ukázalo se však, že technologický postup výroby kuproxových a selenových usměrňovačů vytváří na styku polovodiče s kovem hraniční polovodivé vrstvy s opačnými typy vodivosti. Rentgenovou analýzou bylo skutečně zjištěno, že tepelné zpracování selenového



Obr. (5.3) 7. Voltampérové charakteristiky: a — polykrystalických usměrňovačů Cu_2O a Se
b — monokrystalických usměrňovačů Ge a Si

usměrňovače vede k tomu, že na styku selenu typu p s elektrodou vzniká vrstva selenidu kadmia typu n . Značný usměrňovací účinek rozhraní $n-p$ mezi dvěma vodiči typu n a typu p se vykládá tím, že rozhraním prochází při stejné velikosti napětí mnohem silnější proud, když elektrony a díry postupují proti sobě směrem k rozhraní, než když se pohybují opačně, vzdalujíce se od rozhraní. Teoretické výsledky odvozené pro rozhraní $p-n$ Davydovem a Gubanovem jsou v souladu s experimentálními poznatky Ioffeové.

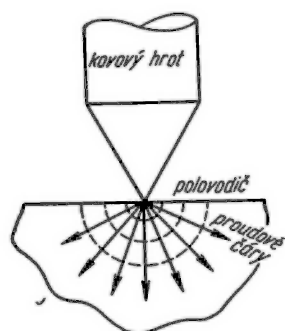
Také usměrňovací působení Ge a Si se vysvětluje stykem polovodičů opačných typů. Účinek hraničních vrstev, které mívají tloušťku 10^{-7} m, se ovšem projeví teprve tehdy, když jejich odpor je mnohem větší než odpor celého krystalu. Proto je třeba, aby málo vodivé hraniční vrstvy měly dostatečnou tloušťku. Má-li však kovová elektroda tvar ostrého hrotu, mají proudové čáry v polovodiči průběh naznačený na obr. (5.3) 8 a proud je v okolí hrotu soustředěn na nepatrný objem hraniční vrstvy, který má značný odpor. Proto mají vlastnosti vrstvy rozhodující vliv na průchod proudu kontaktem, což se projeví silným usměrňovacím účinkem.

Tohoto poznatku se užívalo k usměrňování vysokofrekvenčních proudů již na počátku vývoje radiotechniky v tzv. krystalových přijímačích, v nichž detekci obstarával styk kovového hrotu s drobným krystalkem galenitu, karborunda nebo pyritu. Dnes se k tomu účelu užívá tzv. *krystalových diod* germaniových nebo ze syntetických silikonů. Jejich starším druhem jsou *hrotové diody* vhodné pro malé výkony.

Původní krystalové detektory pracovaly jen při nalezení vhodného místa dotyku na

povrchu krystalku, které (podle dnešních názorů) mělo opačný typ vodivosti než vnitřek krystalu. U germaniových a křemíkových diod se přechod $p-n$ vytváří uměle vhodnou přípravou a formováním (ohřevem krystalu v okolí hrotu silným proudem), při čemž z elektrody do krystalu pronikají vhodné příměsi schopné změnit typ jeho vodivosti. Na obr. (5.3) 9 vidíme snímek miniaturní hrotové diody s přechodem $p-n$ na styku wolframového hrotu s monokrystalkem germania typu n . Germaniová elektroda je kladným pólem usměrněného napětí. Je vhodná např. pro sdělovací zařízení.

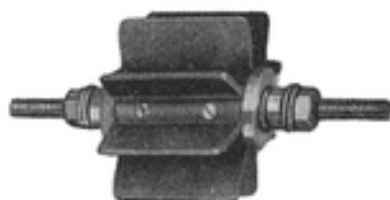
Pro usměrňování silnějších proudů jsou vhodné *plošné krystalové diody*, u nichž přechod $p-n$ se vytvoří na části povrchu krystalu difúzí příměsí. U germaniových diod lze užít např.



Obr. (5.3) 8. Proudové čáry v okolí hrotového kontaktu



Obr. (5.3) 9. Čs. germaniová hrotová dioda 1 NN41



Obr. (5.3) 10. Čs. germaniový plošný výkonný usměrňovač 51 NP70 do 20 A s chladičími žebry

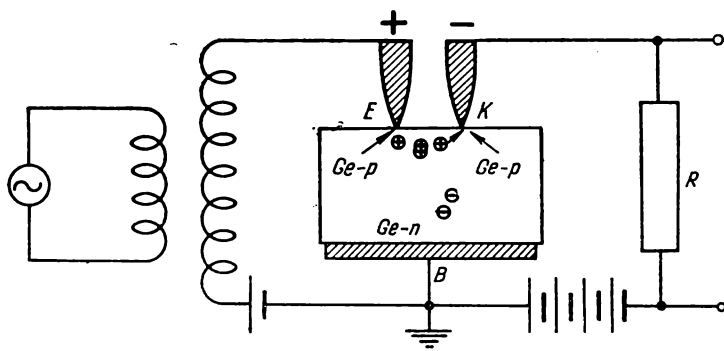
difúze roztaveného india do Ge typu n . Největších výkonů bylo dosaženo plošnými diodami křemíkovými. Závěrná napětí, která usměrňovač ještě prakticky usměrní, dosahují až 1 000 V a proudy 10 A. Výkonovou plošnou diodu s přechodem $p-n$, vytvořeným nalegováním indiového kontaktu na monokrystalek Ge— n , vidíme na obr. (5.3) 10.

V posledních letech nabývají významu řízené křemíkové diody zvané *tyristory*. Proti tyatronům (čl. 5.10.4) mají malé rozměry, značnou životnost, malé řídicí výkony, velkou účinnost a odolnost. Nesnesou však delší přetížení. Užívají se jako řízené usměrňovače, u elektrických lokomotiv, k regulaci osvětlení atd.

5.3.6. Tranzistory

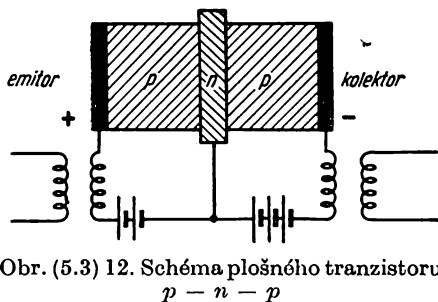
V novější době se kromě krystalových diod užívá také krystalových triod, které jsou známy pod jménem *tranzistory* a jejichž princip objevili r. 1948 Bardcen a Brattain. Tranzistor je vlastně dvojice krystalových diod se společným germaniovým monokrystalkem, která stejně jako vakuová trioda slouží k zesilování. Vyročíme funkci krystalové diody na tzv. *hrotovém tranzistoru*. Je to krystalek germania typu n obr. (5.3) 11, jehož jedna stěna je ve vodivém styku s kovovou základní elektrodou B (tzv. *báze*), která je uzemněna. K protější stěně jsou přitisknuty dva ostré kovové hroty (drátky wolframové nebo z fosforového bronzu tloušťky 50 až 100 mikronů), vzdálené od sebe o několik (až 100) mikronů. U obou kontaktů jsou vytvořeny povrchové vrstvy typu p , takže jsou to dobře formované hrotové diody. Jejich propustný směr je v obou případech z hrotu do krystalu, protože při průchodu proudu tímto směrem postupují elektrony z vnitřku krystalu (Ge— n) a díry z povrchové vrstvy (Ge— p) proti sobě. Na hrot E vložíme malé napětí (zlomek voltu) kladné proti bázi B a na druhý hrot K větší napětí (několik desítek voltů) záporné proti B . Hrot E se nazývá *emitor* (emisní nebo zdrojová elektroda) a hrot K *kolektor* (sběrná elektroda) z těchto důvodů:

Kladně nabitý emitor E vzbuzuje ve svém okolí intenzivní pole elektrické [srovn. obr. (5.3) 8], které odsává volné elektrony z krystalu, a tím vytváří prostorový náboj, který nutí elektrony v nejbližším okolí opouštět svá místa a vytvářet tak kladné díry, které se šíří krystalem. Tento děj, který se nazývá *injekce* (vstřík) děr do germania typu n , představuje proud v propustném směru diody tvořené emitorem E , který tak emituje značné množství děr do $\text{Ge}-n$. Tyto díry jsou však silně přitahovány intenzivním polem záporně nabitého a velmi blízkého kolektoru K , který kladné díry sbírá, ale odpuzuje volné elektrony, které postupují k základní elektrodě B . Vstříknutím děr přidáváme krystalu



Obr. (5.3) 11. Schéma hrotového tranzistoru

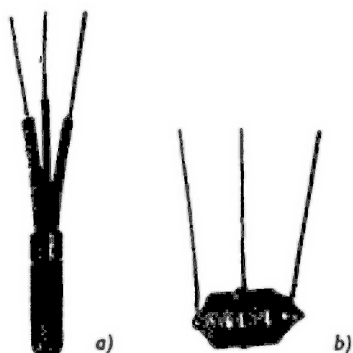
$\text{Ge}-n$ další nositele opačného náboje a tak zvyšujeme jeho vodivost a zesilujeme proud, který obíhá v obvodu kolektoru přes značný odpor R v závěrném směru diody tvořené hrotem K . Z toho vyplývá, že změny proudu v obvodu emitoru vyvolávají změny proudu v kolektoru a ukazuje se, že proudové změny v obvodu kolektoru jsou stejného nebo vyššího řádu než změny v obvodu emitoru. Uvážíme-li však, že sběrným kontaktem jde proud ve směru závěrném, vidíme z nesymetrického průběhu voltampérové charakteristiky přechodu $p-n$ na obr. (5.3) 7, že změny napětí na odporu R vyvolané změnou proudu v kolektorovém obvodu budou mnohokrát větší než změny napětí v obvodu emitoru, které způsobily příslušné změny proudu procházejícího v tomto obvodu ve směru propustném. Velmi slabé kmity napětí, které se překládají v emitorovém obvodu přes stejnosměrné napětí, projeví se tedy podobnými kmity v obvodu kolektorovém, kde však budou mít mnohokrát větší výkon. V tranzistorech dnes běžně vyráběných dosahuje se skutečně v oboru vysokofrekvenčních kmitů výkonového zesilovacího činitele kolem 60 (až 20 dB).



Obr. (5.3) 12. Schéma plošného tranzistoru $p-n-p$

Hrotové tranzistory germaniové a křemíkové mají řadu výhodných vlastností. Levnost a snadnost výroby, malé rozměry, trvanlivost a velká pohyblivost nositelů proudu jim zaručuje přednostní využití v radio-okačních zařízeních i v oboru centimetrových vln a v automatických počítacích strojích. Mají však jednu společnou nepříznivou vlastnost, totiž malý výkon. Tato nesnáze byla překonána teprve konstrukcí tzv. *plošných tranzistorů*. Plošný tranzistor typu $p-n-p$ je schematicky znázorněn na obr. (5.3) 12. Liší se od hrotového tranzistoru jednak tím, že základní elektroda B je nahrazena tenkou vrstvou polovodiče (Ge nebo Si) opačného vodivostního typu, vytvořenou uprostřed původního polovodičového krys-

talku. Obr. (5.3) 12 podává Shockleyovo uspořádání $p-n-p$, při němž přechod $p-n$ je v obvodu emitoru zapojen v propustném směru, přechod $n-p$ v obvodu kolektoru naopak ve směru závěrném. Kladné díry difundují z emitorové části krystalu typu p tenkou vrstvou n do kolektorové části typu p . Tím se přenášejí změny proudu v emitorovém obvodu do obvodu kolektorového. Odpor tohoto obvodu je však



Obr. (5.3) 13. Čs. miniaturní nízkofrekvenční germaniové plošné tranzistory $p-n-p$:
a — typy 10 NU70 až 12 NU70,
b — typy 1 NU40 až 4 NU40



Obr. (5.3) 14.
Čs. germaniový tranzistor
 $p-n-p$: typy 30 NU70
až 32 NU70

v závěrném směru mnohokrát větší než odpor emitorového obvodu ve směru propustném, a proto změny proudu ve sběrném obvodu vyvolávají mnohokrát větší změny výkonu než změny výkonu v emisním obvodu. Obdobně pracuje tranzistor typu $n-p-n$ s opačně uspořádanými typy vodivosti.

Na obr. (5.3) 13a je plošná trioda vhodná pro koncové stupně do výkonu 0,25 W, na obr. (5.3) 13b je subminiaturní plošná trioda pro malý výkon 20 mW a na obr. (5.3) 14 plošná trioda o výkonu 5 W pro koncové stupně zesilovačů akustických frekvencí.

Plošné tranzistory vynikají nad hrotové tranzistory nejen mnohem vyšším výkonem (50 až 80 W), ale také vyšším zesilovacím činitelem 100 000 (40–50 dB). Lze jich však užít vzhledem k větší kapacitě jen pro nižší frekvence, než s jakými pracují tranzistory hrotové.

Polovodičové elektronické součástky jsou v urychleném vývoji a hledají se nové materiály i dokonalejší konstrukce. Nejnovější *krystalové tetrody* se čtyřmi elektrodami mají kromě základní elektrody ještě tři sobě blízké dotykové hroty tvořící rovnostranný trojúhelník. Dva z nich jsou emitery, třetí kolektorem. Tyto drobné přístroje nahrazují složité několikamřížkové směšovací elektronky a pracují na frekvencích až $2 \cdot 10^8$ Hz.

5.3.7. Termistory

V tomto článku uvedeme další praktické aplikace polovodičů, které využívají typické závislosti jejich elektrické vodivosti na teplotě.

Pro prostorovou koncentraci volných nábojů (buď elektronů, nebo děr) v polovodiči plyne ze statistických úvah vzorec

$$n_0 = n_{\infty} e^{-\Delta E/2kT},$$

kde T značí absolutní teplotu, k Boltzmannovu konstantu, ΔE ionizační energii potřebnou k odtržení nositele proudu od atomu a n_{∞} koncentraci, které by volné náboje dosáhly při nekonečně vysoké teplotě. Pro měrný odpor polovodiče plyne odtud podobný vzorec

$$\varrho = \varrho_{\infty} e^{B/T},$$

kde B je veličina, která ve skutečnosti závisí poněkud na teplotě. Logaritmováním dostaneme rovnici rovnoosé hyperboly

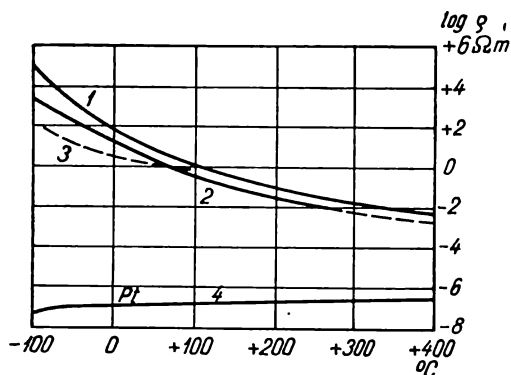
$$\ln \left(\frac{\varrho}{\varrho_{\infty}} \right) = B \frac{1}{T}$$

mezi logaritmem poměrného odporu a absolutní teplotou T . Kvalitativní shodu ukazuje obr. (5.3) 15, kde jsou odpory tří polovodičů srovnány s odporem platiny. Závislost logaritmu měrného odporu na $1/T$ je ovšem lineární.

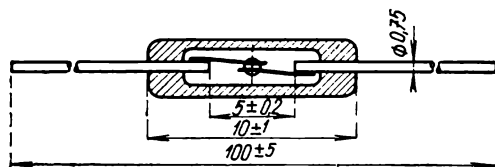
Z obr. (5.3) 15 je znovu patrné, že teplotní závislost odporu polovodičů je mnohem silnější než u kovů a lze ji tedy mnohem lépe využít k měření teploty i k jiným praktickým účelům.

Polovodičové odporové teploměry se nazývají *termistory**) a vyrábějí se z různých polovodivých materiálů, nejčastěji směsí vhodných kyslíčků kovů (hlavně přechodových)

ZnO , NiO , CuO , Mn_3O_4 , UO_2 (urdox), TiO_2 , MnO_2 , Mn_2O_3 , některých feritů i jiných materiálů. Pro hromadnou výrobu je výhodné spékání práškových polovodičů, čímž lze získat potřebné parametry, hlavně vhodný měrný odpor a jeho teplotního součinitele. Vlastnosti



Obr. (5.3) 15. Teplotní závislost měrného odporu na teplotě: 1. polovodičová směs Mn_2O_3 a NiO , 2. polovodičová směs Mn_2O_3 , NiO a CO_2O_3 , 3. ferit $\text{ZnO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$, 4. ryzí platina



Obr. (5.3) 16. Schéma čs. perlečkového termistoru (přímo žhaveného) 10 NR10

materiálu se ovšem v jistých mezích mění, zejména v první době po vyrobení. Stabilizace se urychluje umělým stárnutím, které probíhá po dobu několika dnů za vyšších teplot, než je provozní teplota termistoru. Po několika měsících má uměle zestárlý termistor již prakticky ustálené parametry, takže teploty získané měřením jsou reprodukovatelné v mezích asi $0,01^\circ\text{C}$. Termistory se zhotovují v několika druzích:

Perlečkový termistor se získá tak, že úzká mezera mezi konci dvou tenkých drátků ($\varnothing = 0,025$ až $0,15$ mm) ze slitiny Pt a Ir se zakápně polovodivým práškem rozmíchaným s vodou a po uschnutí se vypaluje v peci při teplotě $1\,000$ až $1\,400^\circ\text{C}$. Tak vznikne mezi drátky polovodivý odpor ve tvaru drobné perličky ($\varnothing = 0,15$ až $1,5$ mm), na kterou se natavuje ochranný skleněný povlak. Termistor může být ještě zataven do skleněné nádoby vzduchoprázdne nebo plněné plynem. Na obr. (5.3) 16 je načrtnut československého termistoru s perličkou zatavenou do skleněné baňky. Časová konstanta**) < 1 s. Je vhodný k měření vysokofrekvenčních výkonů, k stabilizaci napětí aj. Snímek nepřímého žhaveného perlečkového termistoru zataveného ve vyčerpané skleněné baňce 20×40 mm² je na obr. (5.3) 17.

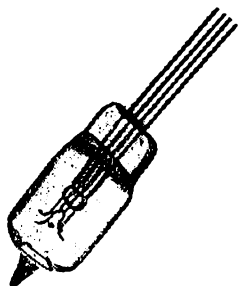
Tyčinkový termistor je polovodivý odpor tvaru tyčinky (průměru $0,8$ až $6,5$ mm, délky $1,5$ až 50 mm), vylisované protlačováním husté kaše z mletého polovodiče a organického pojidla kalibrovanými tryskami. Tyčinky se řezou, suší, spékají. Kontakty ve tvaru čepiček se vpalují stříbrnou pájkou nebo připékají k tyčince, která se chrání lakem nebo smaltem proti vlivu prostředí. Tyčinkové termistory mívají časové konstanty větší (až několik vteřin) než perlečkové. Na obr. (5.3) 18 je snímek tyčinkového termistoru vhodného ke kompenzaci měděných odporů (asi $9\,\Omega$).

*) Zkratka angl. názvu Thermally sensitive resistor (odpor citlivý na teplotu).

**) Tj. doba, za kterou se teplotní rozdíl mezi termistorem a okolím zmenší na $1/e = 0,367$ (tedy skoro na třetinu) počáteční hodnoty (srov. čl. 5.9.5).

Destičkový termistor se lisuje z polovodivé kaše a spéká do tvaru kruhové destičky (průměr 1,5 až 30 mm, tloušťka 0,8 až 6,5 mm). Je vhodný k měření teploty povrchů.

Fóliový termistor se vyrábí z kaše z velmi jemného prášku, která se nanese nebo nastříká na broušenou skleněnou desku. Spékáním se získá fólie (délky 1 až 10 mm, šířky 0,2 až 1 mm, tloušťky 0,001 až 0,04 mm) s vpalovanými kontakty. Tento typ má nepatrnou časovou konstantu (setiny vteřiny) a je vhodný pro bolometry.



Obr. (5.3) 17. Čs. nepřímý žhavený perličkový termistor 40 NR11. Dva střední drátky vedou proud do topné spirály



Obr. (5.3) 18. Čs. tyčinkový termistor TROO6

Termistory mají stále rostoucí význam v různých vědních i technických oborech a užívá se jich nejen k měření různých veličin, ale i k stabilizaci, automatické regulaci a dálkovému řízení.

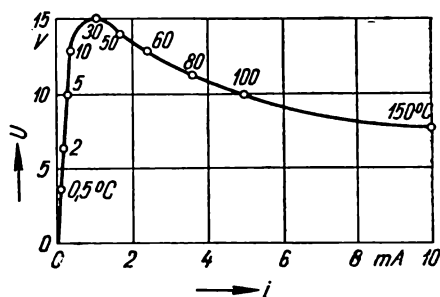
Měřicí metody využívají silné závislosti odporu termistorů na teplotě, což přináší řadu výhod.

V termometrii se uplatňují termistory v oboru teplot od -70°C do 200°C a jejich přesnost může při užití kompenzační metody dosáhnout až 10^{-4}°C . Perličkové termistory mají nepatrné rozměry, malou tepelnou kapacitu a malou časovou konstantu. Jsou proto vhodné k zjišťování okamžité teploty v předepsaném místě stejně jako termoelektrické články, proti nimž mají výhodu velkého odporu (který snižuje vliv přívodů) a možnosti užití k měření velmi slabých střídavých proudů, které se snadno zesilují.

Měření malých rychlostí proudících kapalin a plynů se zakládá na vlivu rychlosti proudění na ochlazování topného („žhaveného“) termistoru perličkového nebo tyčinkového. Vliv teplotních změn se kompenzuje zapojením druhého termistoru, který je chráněn před prouděním.

Vlivu prostředí na ochlazování termistoru se užívá i k měření výšky hladiny kapalin (které vedou teplo lépe než vzduch) nebo k měření vakua. Vnitřek nádoby měřícího termistoru je v tomto případě spojen s čerpaným prostorem, nádoba kompenzačního termistoru je uzavřena a reaguje jen na změny teploty. Termistory mohou nahradit též „suchý“ i „vlhký“ teploměr při měření vlhkosti aspiračním psychrometrem.

Další mnohostranné uplatnění termistorů umožňují jejich svérázné voltampérové charakteristiky. Na obr. (5.3) 19 vidíme charakteristiku statickou (při ustáleném stavu) perličkového termistoru, k jejíž bodům jsou připsány jeho teploty měřené proti teplotě okolí. S rostoucím proudem napětí U nejprve stoupá zhruba úměrně (podle Ohmova zákona), dosáhne však maxima a pak zpomaleně klesá. Je to způsobeno prudkým klesáním odporu při ohřívání termistoru procházejícím proudem. Statická charakteristika platí jen pro ustálený stav, pokud se proud mění, musí se nařadit charakteristikou dynamickou, jejíž průběh závisí na řadě



Obr. (5.3) 19. Statická voltampérová charakteristika perličkového termistoru

Na existenci klesající větve statické charakteristiky stabilizace napětí. Připojením kovového odporu v sérii s termistorovým odporem bočního

(se stoupajícími charakteristikami) lze totiž dosáhnout pro jistý obor proudu stálého napětí, které ani neroste, ani neklesá.

Dálková regulace elektrických zařízení se dá provádět termistorem (nepřímo žhaveným), jehož odpor měníme zesilováním a zeslabováním proudu, který jím posíláme. U rozhlasových přijímačů a televizorů se užívá tyčinkových termistorů s paralelním vysokohmovým odporem jako *omezovačů přepětí* v síti a jako ochrany žhavených vláken elektronek. Také *časovaná relé* mohou být ovládána termistorem, který skuteční spojení teprve po jisté době (několika vteřin až několika minut), během níž se Joulovým teplem procházejícího proudu ohřeje natolik, že při sníženém odporu propustí proud potřebný k zapnutí relé.

5.3.8. Ionizace plynů

V čl. 5.3.3 jsme řekli, že molekuly elektrolytů, které tvoří elektricky vodivé roztoky, jsou rozštěpeny na kladné a záporné ionty. Tato disociace neutrálních molekul na ionty je v koncentrovaných roztocích jen částečná, ale v roztocích velmi zředěných téměř úplná. Ionty umožňují vedení elektřiny v nekovových kapalinách. Kapaliny, které neobsahují ionty, např. čistá voda, mají velmi nepatrnou vodivost.

Tuto úvahu můžeme přenést na plyny, o nichž víme, že jsou za normálních poměrů prakticky nevodivé, že tedy jsou velmi dobrými izolanty. Z toho soudíme, že plyny obsahují obvykle velmi málo iontů a stanou se vodivými jen za jistých okolností, které z nějaké příčiny jsou příznivé vzniku a udržování iontů, nebo jak říkáme *ionizaci plynu*. Ionty v plynech se totiž při setkání s opačně nabitými částicemi (s elektrony nebo ionty) mění zase v neutrální atomy nebo molekuly, a proto je třeba nejen ke vzniku, ale i k udržení ionizace neustále ionty tvořit. Prostředky, kterými toho dosahujeme, mohou být různé; je to:

a) *Vysoká teplota*. Mají-li molekuly plynu tak velkou kinetickou energii, že mohou vzájemnými srážkami způsobit odtržení elektronů od atomu, plyn se ionizuje.

b) *Elektrické pole*. Obsahuje-li plyn nepatrné množství iontů, mohou tyto ionty být urychleny elektrickým polem do té míry, že získají dostatečnou energii, aby nárazem na molekulu odtrhly některé z elektronů.

c) *Radioaktivní záření* α , β . Částice α a β jsou velmi rychlé, nabité částice, a proto ionizují plyn podobně jako ionty urychlené polem v případě b).

d) *Elektromagnetické záření*. Absorpcí krátkovlnného záření, např. ultrafialového světla, paprsků X nebo γ , může získat oběžný elektron energii potřebnou k odtržení od jádra.

V prvních třech případech jde o *ionizaci nárazem*. Nejmenší energie, kterou musí částice mít, aby zbavila atom jednoho elektronu, vyjadřuje se obvykle v elektronvoltech a je v těchto jednotkách rovna velikosti napětí ve voltech, jímž je třeba urychlit elektron, aby mohl způsobit ionizaci. Toto napětí se nazývá *ionizační potenciál* atomu.

Ionizací nárazem vysvětlujeme především existenci nepatrného počtu iontů v plynech i za obvyklých teplot. Víme totiž, že některé molekuly mohou dosáhnout mnohem větších rychlostí, než je jejich střední kvadratická rychlost, a tak se udržuje jistý počet iontů v plynu. Působíme-li na tyto ionty elektrickým polem, urychluje je na jejich volné dráze, při čemž energie, kterou tak získají a která je úměrná napětí, jímž ionty prošly, je tím větší, čím delší je střední volná dráha. Proto při barometrickém tlaku, kdy je střední volná dráha molekul nepatrná, je zapotřebí velmi vysokého spádu potenciálu, aby vznikla další ionizace podle b). Naproti tomu ve zředěných plynech je střední volná dráha molekul (a iontů) mnohem delší, a proto stačí i nižší napětí k průchodu proudu, který vzniká tím, že polem urychlené ionty ionizují další atomy a tak roste počet iontů a množství jimi přeneseného náboje. To vede zřejmě k *samostatnému výboji* v plynu. Tento výboj potřebuje podle předešlého výkladu za obvyklých tlaků velmi vysoký spád (řádu 10^6 Vm^{-1}) a může mít

trojí povahu: *tichého výboje*, při němž ionty vznikají v celém prostoru, *jiskrového výboje*, při němž se přenáší velké množství náboje po dráze silně ionizované a konečně *výboje obloukového*, který vznikne těsným přiblížením elektrod, které se proudem rozžhaví a emitují rychlé elektrony, schopné vytvořit velké množství iontů. Vyšší teplota usnadňuje ionizaci plynů, které se stávají vodivými i za obvyklého tlaku, jak se můžeme přesvědčit jednoduchým pokusem. Vložíme-li do Bunsenova plamene konce dvou drátů s napětím 220 V, můžeme zjistit galvanoměrem, že hořícími plyny prochází slabý proud, který ihned přestane, zhasneme-li plamen. S rostoucí teplotou roste ionizace plynů a při teplotách nad 5 000 °C jsou plyny již velmi dobrými vodiči. Ionizace plynu dosahuje poměrně vysokého stupně, neboť plyn obsahuje asi 1 % nabitých částic (iontů a elektronů). Přitom ovšem se jejich náboje navzájem ruší. Takový „kvazineutrální“ stav plynu má jisté zvláštní vlastnosti a byl pro něj zaveden název *plazma*. Ionizace plynů má dvojí význam pro výzkum látek. Jednak studiem podmínek a zákonitostí ionizace získáváme cenné poznatky o složení atomů a jejich energetických stavech, jednak můžeme v případech c) a d) zjišťovat a měřit radioaktivní a elektromagnetické záření. Nejříve se užívalo ionizace jen k měření intenzity korpuskulárního a krátkovlnného záření. Časem byly zdokonaleny měřicí metody do té míry, že je nyní možno zjišťovat nebo pozorovat i jednotlivé částice a fotony.

5.3.9. Výboj v plynech za normálního tlaku

K výboji ve vzduchu může dojít i za atmosférického tlaku, dosáhne-li potenciálový spád, tj. intenzita pole, dostatečné výšky kolem 4 MV m⁻¹. Napětí potřebné k výboji ve vzduchu neroste úměrně s délkou jiskry, jak je vidět z tab. (5.3) III, v níž jsou uvedena v kilovoltech napětí nutná k vytvoření jiskry délky od 1 mm do 50 mm, mezi kuličkami polooměru 1 cm ve vzduchu při 18 °C za normálního tlaku. Tabulky lze užít k přibližnému určení napětí.

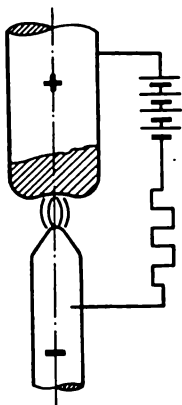
Tabulka (5.3) III

Napětí potřebné k jiskrovému výboji ve vzduchu (760 torrů)

1	2	3	4	6	8	10	15	20	30	40	50	mm
4,8	8,1	11,4	14,5	20,4	26	30,8	39,3	47	57	64	69	kV

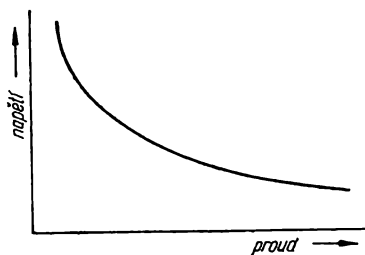
Elektrický výboj v atmosférickém vzduchu vzniká někdy i tam, kde je nežádoucí. Tak při přerušení velmi silného proudu kovovým vypínačem nastává krátkotrvající obloukový výboj, který poškozuje kontakty. Na dálkovém vedení vysokého napětí pozorujeme jev zvaný *koróna*, který vzniká tím, že na vypuklých částech povrchu vodiče je hustota náboje tím větší, čím větší je zakřivení povrchu. Tak dochází na hrotech, rozích a hranách k výboji v místech, kde je spád potenciálu větší než asi 4 MVm⁻¹ = 4 kV · mm⁻¹ [srov. tab. (5.3) III]; výboj se projevuje světélkováním a jiskřením. Koróna je nevitáným jevem na dálkových vedeních o napětí nad 100 000 V, na nichž způsobuje značné ztráty energie, jsou-li dráty vedení příliš tenké. Proto se užívá dutých vodičů, jejichž povrch má menší křivost než plný vodič stejného odporu. Jiskrový výboj je vlastně krátkotrvající obloukový výboj, který je technicky důležitý a obvykle se děje mezi dvěma tyčinkami z retortového uhlí, zvanými uhlíky. Obloukový výboj nastane, jestliže dva uhlíky, spojené se zdrojem stejnosměrného napětí nejméně 30 až 40 V (zapalovací napětí), přivedeme nejprve do přímého styku, až se jejich konce rozežhaví, a pak je mírně oddálíme (asi na 3 mm). Vznik oblouku si vysvětlujeme tím, že mezi oběma uhlíky se vytvoří vrstva silně ionizovaného vzduchu teploty nad 5 000 °C (plazma). Elektrony unikající z rozžhavené katody jsou mezi oběma uhlíky zrychlovány elektrickým polem, ionizují nárazem vzduch a při dopadu na kladný

uhlík zvyšují jeho teplotu na více než 4 000 °C, kdežto záporný uhlík má teplotu asi o 500 °C nižší. Proto kladný uhlík, který se vypaluje do tvaru kráteru, svítí běleji než záporný uhlík, kterého ubývá méně a který se zahrocuje [obr. (5.3) 20]. Velmi silně ionizovaná vrstva vzduchu má vyšší teplotu než kladný kráter, její svítivost je však menší, a proto se jako zdroje velmi intenzivního světla, např. v promítačích a reflektorech, užívá raději kráteru. Elektrický oblouk má zajímavou vlastnost, že při slabém proudu potřebuje vyšší napětí než při proudu silnějším. Důvod je v tom, že při silnějším proudu mají uhlíky vyšší teplotu, a proto katoda vysílá více elektronů, což je příčinou silnější ionizace. Napětí na oblouku není přímo úměrné proudu jako u jiných vodičů, ale nepřímá, takže oblouk má *klesající charakteristiku* tvaru hyperboly [obr. (5.3) 21]. Proto je oblouk sám nestabilní a je nutno mu předřazovat vhodný kovový odpor se stoupající charakteristikou tak, aby oblouk hořel se stálou intenzitou. Obloukovou lampu automaticky reguluje diferenciální regulátor,



Obr. (5.3) 20. Elektrický oblouk mezi dvěma uhlíky

který zaručuje stálou vzdálenost obou elektrod. O jeho zdokonalení se zasloužil Křižík. V technické praxi se užívá elektrického oblouku nejen jako zdroje světla, ale také jako zdroje velmi soustředěné energie tepelné, zvláště v *obloukových pecích* a při *obloukovém svařování*.



Obr. (5.3) 21. Klesající charakteristika elektrického oblouku

Oblouk se může vytvořit také mezi dosti blízkými kovovými elektrodami. Takový oblouk vzniká např. v *bodové lampě wolframové*. Je to skleněná baňka tvaru obyčejné žárovky, plněná dusíkem. Mezi dvěma blízkými wolframovými elektrodami velmi malých rozměrů vytvoří se drobný oblouk, při čemž zejména anoda je velmi intenzivním a prakticky bodovým zdrojem světla, jehož jas ovšem nedostihuje jas uhlíkového kráteru. Důležitým zdrojem záření je oblouková lampa rtuťová a sodíková. *Rtuťová lampa* vysílá viditelné i ultrafialové světlo, a proto se vyrábí z taveného křemene, který propouští ultrafialové paprsky. Moderní rtuťové lampy mají wolframové elektrody, mezi nimiž se vytváří obloukový výboj ve rtuťových parách, jež dosáhnou teploty kolem 8 000 °C. Vysílá řadu spektrálních čar krátkovlnných (vlnové délky asi 2 400 Å) a několik čar viditelného světla, zvláště fialovou, modrou, zelenou a žlutou. Je-li lampa studená, je rtuť kapalná, a vložíme-li na ni napětí (asi 100 V), musíme zahřátí vytvořit rtuťové páry, aby mohl vzniknout oblouk. Dříve se toho dosahovalo krátkodobým nakloněním lampy, takže rtuť spočila úzkým praménkem obě elektrody a tak vznikly rtuťové páry, které umožnily obloukový výboj nejprve v místě přerušení praménku a pak podél celé trubice (mezi elektrodami). Toho není třeba u novějších lamp, do nichž se přidává trochu některého vzácného plynu, který vede proud, pokud je lampa studená. Tím se postupně rtuť vypařuje a výboj sílí, až se všechna rtuť promění v páry. Nové zapálení lampy je možné až po vychladnutí, protože zapalovací napětí při velkém tlaku rtuťových par je velmi vysoké. Obdobně je konstruována *sodíková lampa*, která vydává hlavně žluté světlo (známá sodíková dvojité čára), které je zhruba jednobarevné. Obě popsané obloukové lampy jsou velmi úsporné v provozu, a proto se jich stále více užívá k osvětlování veřejných prostranství.

5.3.10. Výboj ve zředěných plynech

Jak jsme vyložili v předešlém článku, vyžaduje výboj v plynech za atmosférického tlaku vysoký potenciálový spád. Ve zředěných plynech, v nichž je hustota molekul malá, a tedy střední volná dráha mnohem větší, lze dosáhnout výboje daleko slabším elektrickým polem. Takový výboj nazýváme *doutnavým*. Dosáhneme ho, připojíme-li k sekundárnímu vinutí induktoru trubici s dvěma elektrodami, nejlépe hliníkovými (hliník se při výboji rozprašuje méně než ostatní kovy), a z trubice pomalu odčerpáváme vzduch. Má-li trubice délku aspoň několika decimetrů, nedochází zpočátku vůbec k výboji. Snížíme-li tlak asi na 40 torrů, nastane výboj, který se projeví souvislou červenou křivkou, která vychází z anody, ale nesahá až ke katodě a hadovitě mění svůj vlnový průběh. Při dalším čerpání se tato červená čára rozšiřuje a zkracuje: vytvoří se tzv. *anodový sloupec*, který je oddělen od katody *tmavým prostorem Faradayovým* a na katodě se objevuje *doutnavé katodové světlo*. Postupné snižování tlaku mění jevy v trubici tak, že se anodový sloupec stává bledším a vrstevnatým a katodové světlo pokrývá celou plochu katody. Při tlaku 0,1 torru se oranžové katodové světlo rozšiřuje k anodě a vzdaluje se od katody pokryté jasně žlutou světelnou vrstvou, od níž je katodové světlo odděleno *tmavým prostorem Crookesovým* (čili Hittorfovým). Konečně při snížení tlaku na 0,02 torrů mizí světelné úkazy uvnitř trubice, ale stěny trubice samy zeleně fluoreskují, nejintenzivněji v místech proti katodě.

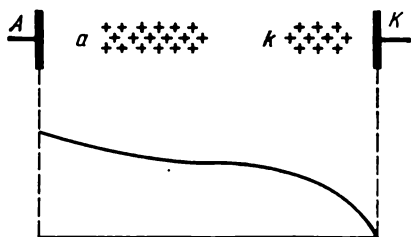
Tyto jevy se dají v hlavních rysech vysvětlit podrobnějším rozbořem ionizačních pochodů v trubici.

Vyložíme především, jak nastává výboj. Elektrony a ionty při jistém zředění (při dosti velké volné dráze) dosáhnou v elektrickém poli takové energie, že mohou samy ionizovat další neutrální molekuly plynu. Touto nárazovou ionizací se rozmnožuje zároveň počet elektronů a iontů, které jsou také polem zrychlovány, čímž vznikne lavinový vzrůst počtu nabitých částic. Při tom však kladné ionty s hmotou řádově tisíckrát větší dostávají ve stejném poli zrychlení menší v témž poměru. Prodlévají tedy mnohem déle v prostoru mezi elektrodami než snadno zrychlitelné lehké elektrony, čímž vzniká v trubici kladný prostorový náboj. Proto neklesá potenciál v trubici rovnoměrně jako na homogenním vodiči, nýbrž zhruba podle křivky nakreslené na obr. (5.3) 22. Kladný prostorový náboj působí však na zkušební bodový náboj v místě *a* poblíž anody opačnou silou než anoda, kdežto v místě *k* poblíž katody silou stejného směru. Proto se jím v místě *a* zeslabuje a v místě *k* zesiluje intenzita elektrického pole, rovná spádu potenciálu. Tak pozorujeme ve *spádovém prostoru* u katody náhlý katodový pokles potenciálu. Tím se vysvětluje vznik katodového doutnavého světla, neboť v místech velkého spádu dochází k „buzení“ molekul a k záření. Naproti tomu v místech málo proměnného potenciálu nevznikají světelné jevy, je-li trubice dosti široká; lze skutečně ukázat vhodně upraveným pokusem, že se kladné světlo neobjevuje v širokém recipientu, z něhož vyčerpáme vzduch; teprve když tam vložíme skleněný váleček, objeví se uvnitř válečku kladné světlo. Je tím silnější, čím užší je trubice, z čehož soudíme, že vzniká vlastně působením stěn trubice. Kladný sloupec světelný se uchyluje v magnetickém poli jako proud vycházející z anody a je tedy zřejmé, že jsou to svítící kladné ionty, které jsou nositeli prostorového náboje. Kladný sloupec mizí i v tenké trubici, když značným odčerpáním plynu zmenšíme dostatečně počet vznikajících iontů. Při velkém zředění na tlak 0,02 torru molekuly plynu v trubici prakticky již nepřekážejí pohybu elektronů ani iontů, které se šíří prostorem zhruba přímočaře a dosahují na své značné volné dráze ohromných rychlostí. Pak již vlastně nejde o vedení elektřiny v plynech, ale o šíření nabitých částic prázdňným prostorem, což nazýváme *korpuskulárním zářením* (částicovým).

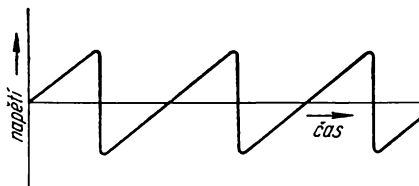
Anodového světla se užívá k osvětlování v *Geisslerových trubicích* (zvaných stručně také *výbojky*), které jsou dnes často upravovány jako tzv. *zářivky*.

Také katodové světlo má praktický význam a užívá se ho v neónových *doutnavkách*. Mají tvar obyčejných žárovek, jsou však plněny neónem pod malým tlakem 8 až 10 torrů

a mají dvě blízké elektrody buď ve tvaru prstence a kloboučku (vrchlíku), nebo ve tvaru dvojité závitnice. Při stejnosměrném napětí je katoda obalena oranžovým světlem, při střídavém napětí svítí střídavě obě elektrody, jak lze pozorovat rotujícím zrcátkem. Stačí jim velmi slabý proud několika miliampérů (ba dokonce jen 0,1 miliampéru), takže neónové doutnavky jsou velmi úsporné (tzv. kontrolky). Doutnavý výboj potřebuje k udržení nižší napětí než k svému vzbuzení. Proto je tzv. *zapalovací napětí* výbojky i doutnavky vyšší než napětí provozní. S tím souvisí možnost užívat doutnavky jako zdroje tzv. *pilovitých kmitů*, které jsou důležité u některých elektronických přístrojů (osciloskop). Připojíme-li k doutnavce bočně kondenzátor s předřazeným velkým odporem, nabíjí se kondenzátor tak dlouho, až dosáhne zapalovacího napětí doutnavky. V tom okamžiku nastane výboj, který se však přeruší, jakmile napětí kondenzátoru klesne na tzv. *zhasínací*



Obr. (5.3) 22. Rozložení napětí ve výbojové trubici



Obr. (5.3) 23. Pilovité kmity napětí

napětí. Příčina je v tom, že vlivem anodového sloupce, který u doutnavky ovšem nezařít, má doutnavka při velmi slabém proudu klesající charakteristiku (podobně jako elektrický oblouk). Proto výboj pokračuje, pokud doutnavkou prochází také vybíjecí proud z kondenzátoru, i při nižším napětí, jež nestačí na udržení výboje při slabém proudu, který předřazený odpor propouští ze zdroje, když kondenzátor je prakticky vybit. Jakmile výboj přestane, začne se kondenzátor znovu nabíjet, potom se náhle vybije a děj se periodicky opakuje. Proto má napětí pilovitý průběh znázorněný na obr. (5.3) 23.

Jako generátorů pilovitých kmitů se hojně používá výbojek se žhavou katodou, s anodou a řídicí mřížkou, tzv. *tyatronů*, o nichž promluvíme v čl. 5.10.4.

5.4. Energetika elektrického proudu

5.4.1. Výkon ustáleného stejnosměrného proudu

V předešlé kapitole jsme se zabývali vedením elektřiny v kovech, elektrolytech, polovodičích i v plynech a předpokládali jsme, že nositelé náboje podléhají časově stálému elektrickému poli E_s . Za těchto podmínek udržuje se ve vodiči ustálený stejnosměrný proud, jehož hustota je v každém místě podle Ohmova zákona v diferenciálním tvaru 5.3 (10) úměrná intenzitě pole. Pro libovolnou trubici proudovou zvolenou ve vodiči platí Ohmův zákon v integrálním tvaru 5.3 (19), kde U je napětí na příslušné části vodiče (mezi koncovými hladinami potenciálu). Je to vlastně úbytek potenciálu na vodiči měřený ve směru proudu, který jsme definovali rovnicí 5.1 (49)

$$5.4 (1) \quad U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l},$$

jako dráhový integrál intenzity pole mezi krajními hladinami. Tento integrál je (v souhlase

s definicí potenciálu) roven práci vykonané polem při přenesení náboje Q z hladiny 1 na hladinu 2, dělené nábojem Q . Za dobu t přenese stálý proud I náboj $Q = It$ a za tuto dobu vykoná pole práci

$$5.4 (2) \quad A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(1)}^{(2)} Q \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = QU_{12} = U_{12}It.$$

Je úměrná době průchodu proudu, takže výkon na vodiči

$$P_{12} = \frac{A_{12}}{t} = U_{12}I$$

je stálý. Užijeme-li Ohmova zákona 5.3 (19), můžeme získaný výsledek napsat ve tvaru

$$5.4 (3) \quad \boxed{P = UI = RI^2 = \frac{1}{R} U^2}$$

a vyslovit větou: *Výkon stálého stejnosměrného proudu je roven součinu proudu a napětí na vodiči.*

V soustavě SI měříme výkon proudu ve wattech neboli voltampérech:

$$[P] = VA = W, \quad 1 \text{ kW} = \text{kilowatt} = 1\,000 \text{ W}$$

a práci (elektrickou energii) v jednotkách

$$[A] = CV = \text{Ws} = \text{joule}$$

nebo

$$1 \text{ kWh} = \text{kilowatthodina} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Ws} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ joule}.$$

Podle 5.4 (3) se spotřebuje při průchodu proudu I vodičem odporu R za každou vteřinu energie RI^2 s číselně rovná výkonu proudu. Co se stane s touto energií, jakým způsobem se vynaložená energie projeví? Při stálém stejnosměrném proudu teče náboj vodičem jako nestlačitelná kapalina, nikde se nehromadí, ani neubývá, jeho rozložení ve vodiči se nemění. Při stálém proudu nemůže se však zvětšovat ani uspořádaná rychlost nositelů proudu ve směru potenciálového spádu. Má-li však vodič neproměnnou polohu i tvar, nekoná se ani mechanická práce. Z toho usuzujeme, že práce vykonaná elektrickým polem se musí přeměnit v pohybovou energii neuspořádaných pohybů atomů (molekul) vodiče: v energii tepelnou. Je to pochopitelné vzhledem k tomu, že polem zrychlené volně pohyblivé nabitě částice, které vedou proud, předávají energii svého usměrněného pohybu částicím vázaným na stálé rovnovážné polohy v mřížce a tak zvyšují energii jejich termických kmitů. Zkušenost potvrzuje, že za uvedených podmínek se skutečně veškerá elektrická energie přemění v tzv. *Joulovo teplo*, jehož změřením je možno ověřit platnost rovnice 5.4 (2). Měříme-li teplo v kaloriích, můžeme elektrickým kalorimetrem určit z rovnice 5.4 (2) hodnotu mechanického ekvivalentu tepla.

Při průchodu proudu se tedy vodič ohřívá, ale jeho teplota stoupá jen potud, pokud se tepelné ztráty způsobené vyzařováním a sdílením tepla okolnímu prostředí (vzduchu, izolaci, lázni apod.) nevyrovnají teplu vyvinutému proudem. Pak nastane ustálený stav a teplota vodiče se již (při stálém proudu) nemění. S rostoucí teplotou se ovšem mění také odpor vodiče, a proto při zvyšování napětí na vodiči neroste proud podle přímky, nýbrž podle křivky, která se nazývá *charakteristika vodiče*. Joulova tepla se hojně užívá v praxi, a to k dosažení vyšších teplot, např. u elektrických kamén a ohříváčů, nebo i velmi vysokých teplot, při nichž se část elektrické energie přeměňuje v energii světelnou, např. u žárovek. V laboratorních jsou běžné elektrické odporové píčky, u nichž je na porcelánové

trubici navinut odporový drát (např. niklo-chrómový), který je obklopen izolační vrstvou osinkovou nebo křemelinovou, s ochranným válcem. Pro vyšší teploty než 1 000 °C se užívá platinových pásků nebo se porcelánová trubka nahradí grafitovou, kterou se pak přímo vede topný proud.

5.4.2. Proudový obvod s elektromotorickou silou

Podle Ohmova zákona 5.3 (19) může vodičem procházet ustálený proud, udržujeme-li nějakým způsobem na jeho koncích stálé napětí. Při tom konají elektrostatické síly práci, která se mění v teplo. Tato práce se však nemůže konat na vrub elektrostatické energie pole, které se při ustáleném proudu nemění. Z toho vidíme, že k udržení ustáleného proudu ve vodiči je třeba nějakým způsobem dodávat energii, která by nahrazovala ztráty energie způsobené průchodem proudu. Bez zdroje energie není možno dosáhnout ustáleného stavu s usměrněným pohybem náboje, neboť při konečné kapacitě vodiče se potenciálové rozdíly tak dlouho vyrovnávají, až nastane ustálený stav, při kterém je potenciál v celém objemu vodiče stejný, jak je tomu v elektrostati.

Jak jsme ukázali v čl. 5.3.1, protéká náboj vodičem při ustáleném proudu jako nestlačitelná kapalina a nikde se nehromadí, ani neztrácí. Z toho plyne, že všechna proudová vlákna i proudové trubice jsou v sebe uzavřeny. Existují tedy jen uzavřené (nikde nepřerušené) ustálené proudy a každý takový uzavřený proudový obvod má ve všech průřezích stejný ustálený proud. V uzavřeném proudovém obvodu obíhá tedy stálé množství náboje po uzavřených proudových čarách. Při tom se oběh kladných nábojů děje v homogenním vodiči ve směru klesajícího potenciálu (oběh záporných nábojů ve směru opačném). Při uzavřeném oběhu musí ovšem kladné náboje někde vystoupit zase na místa vyššího potenciálu, což znamená pohyb proti elektrostatickým silám. K tomu je zajiště třeba nějaké síly, která elektrostatickou sílu přemáhá a umožňuje pohyb nábojů proti působení pole. Této síle, která „pohání“ elektrinu a udržuje proud v obvodu, náleží logicky název *elektromotorická síla*. Tímto názvem však běžně rozumíme „sílu elektrického zdroje“ a měříme ji napětím, které zdroj udržuje v proudovém obvodu. Abychom se vyhnuli dvoznačnosti, ponecháme názvu elektromotorická síla její správný význam, a napětí, které tato síla udržuje, nazveme *elektromotorickým napětím* (zdrojovým napětím).

Je-li potenciál jednoznačnou funkcí, která se spojitě mění podél obvodu, musí být integrál 5.4 (1) vzatý podél uzavřeného obvodu v souladu s 5.1 (45) roven nule

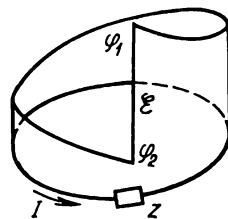
$$5.4 (4) \quad \oint \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

rozumíme-li ovšem vektorem $\mathbf{E}_s$ intenzitu elektrostatického pole uvnitř vodiče tvořícího obvod. Při ustáleném proudu platí tato rovnice jako v elektrostati, protože rozložení elektrostatického potenciálu podél obvodu je časově stálé. Je schematicky naznačeno na obr. (5.4) 1 pro jednoduchý vodič se zdrojem o elektromotorickém napětí

$$\mathcal{E} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Potenciál klesá podél vodiče spojitě z hodnoty φ_1 na hodnotu φ_2 a ve zdroji prudce stoupne na výchozí hodnotu φ_1 . Ačkoli elektromotorická síla, která uvnitř zdroje ruší elektrostatické pole $\mathbf{E}_s$, není elektrostatickou silou, můžeme si ji formálně nahradit elektrostatickým polem, které uvnitř zdroje má intenzitu

$$5.4 (5) \quad \mathbf{E}_{c|lm} = -\mathbf{E}_s$$



Obr. (5.4) 1. Jednoduchý proudový obvod se zdrojem elektromotorického napětí

a umožňuje tak nábojům vystoupit na vyšší potenciál φ_1 . Označíme-li výslednou intenzitu

$$\mathbf{E}_s^* = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{elm},$$

bude vzhledem k 5.4 (4)

$$\oint \mathbf{E}_s^* \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_{elm} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{elm} \cdot d\mathbf{l}.$$

Protože vektor $\mathbf{E}_{elm}$ je různý od nuly jen uvnitř zdroje, je poslední integrál i co do znaménka roven elektromotorickému napětí. Platí tedy vztah:

5.4 (6)

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_s^* \cdot d\mathbf{l},$$

který lze pokládat za obecnou definici elektromotorického napětí působícího v uzavřeném proudovém obvodu.

Někdy se tato definice vztahuje prostě na intenzitu $\mathbf{E}_s$ elektrostatického pole a nikoli na výsledné pole $\mathbf{E}_s^*$. Pak ovšem je třeba nahradit zdroj prostě potenciálovým skokem a pokládat potenciál v místě zdroje za nespojitý (dvojnásobný). Pak skutečně platí vzorec 5.4 (6) pro samotnou intenzitu $\mathbf{E}_s$ elektrostatického pole ve vodiči.

Z definice je zřejmé, že elektromotorické napětí se číselně rovná potenciální energii, kterou získá jednotkový náboj při průchodu zdrojem. Je tedy výkon zdroje

5.4 (7)

$$P = \mathcal{E}I$$

a tento výkon se při ustáleném proudu v neproměnném vodiči přemění v Joulovo teplo. Podle 5.4 (3) je tedy

5.4 (8)

$$\mathcal{E} = RI,$$

značí-li R odpor celého vodivého obvodu. Tento vztah vyjadřuje Ohmův zákon pro uzavřený obvod v nejjednodušším případě. Při řešení složitějších úloh o soustavách vodičů se vychází rovněž z principů, na nichž jsme založili výklady tohoto článku. Vodivá *sít* se skládá z libovolného počtu vodičů (větví), které vytvářejí jednak *uzly*, v nichž se stýkají dva nebo více vodičů (v uzlech se síť větví), jednak uzavřené obvody (okruhy, „oka“). Ukazuje se, že se při řešení takových sítí vystačí se dvěma obecnými zákony, které získáme celkem samozřejmým zobecněním dřívějších výsledků:

I. Kirchhoffův zákon. *Součet proudů vstupujících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vystupujících:*

5.4 (9)

$$\Sigma I = \Sigma I'.$$

Počítáme-li proudy vystupující z uzlu jako záporné proudy vstupující, můžeme tento zákon vyslovit větou: Algebraický součet všech proudů vstupujících do uzlu se rovná nule a vyjádřit rovnici

5.4 (10)

$$\Sigma I = 0.$$

II. Kirchhoffův zákon. *Algebraický součet ohmických napětí v uzavřeném obvodu se rovná algebraickému součtu všech elektromotorických napětí zapojených v obvodu:*

5.4 (11)

$$\Sigma RI = \Sigma \mathcal{E}.$$

Zákon I vyjadřuje vlastně jen princip spojitosti proudu, kdežto zákon II je pouhým zobecněním rovnice 5.4 (8) pro uzavřenou proudovou smyčku s libovolným počtem vodičů a elektromotorických napětí.

Užitím Kirchhoffových zákonů se snadno odvodí známá pravidla pro řadové i bočné zapojení vodičů, dobře známá z elementárních učebnic.

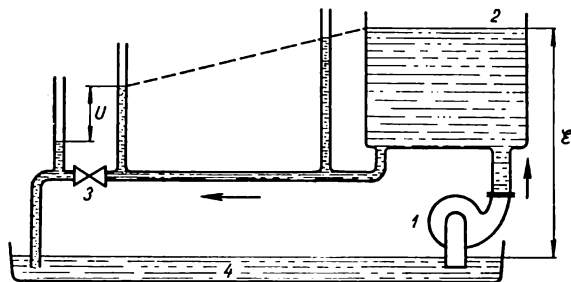
Abychom důležité pojmy elektromotorické síly a elektromotorického napětí blíže osvětlili, ukážeme, jak lze dostat trvalý elektrický proud z elektrických generátorů.

Již při popisu funkce nejjednoduššího zdroje napětí, elektroforu, v čl. 5.2.8 jsme vyložili, že při oddalování kladně nabitě desky od záporně nabitě vrstvy parafínu roste potenciál desky. Při tom přemáháme (kromě váhy desky) elektrostatickou přitažlivou sílu mezi opačnými náboji desky a parafínu mechanickou silou. Spojíme-li desku vodičem o velkém odporu (např. vlhkou nití) se zemí, odchází pomalu náboj do země, ale při tom je možno udržet potenciál desky konstantní, protože kapacita kondenzátoru deska—parafín se vzdalováním desky zmenšuje. Tak by bylo možno vytvořit po jistou dobu stálý proud, který by vytvářela mechanická elektromotorická síla. Pohodlnější a trvaleji je možno udržovat proud rotačními generátory, jako je Wimshurstova elektrika nebo van de Graaffův generátor. Ve všech těchto generátorech koná se mechanická práce přemáháním přitažlivé síly mezi opačnými náboji, které oddalujeme. Posledně jmenovaným generátorem, v němž se obíhající pásem přenáší náboj spojitě, je možno vytvořit stálé elektromotorické napětí a ustálený, časově neproměnný proud. Snadno ověříme i platnost rovnice 5.4 (5), neboť při rovnoměrném pohybu je síla udržující pohyb úměrná přenášenému náboji a síla E_{el} připadající na jednotku náboje je při tom v rovnováze s intenzitou E_e elektrostatického pole.

Ve všech jmenovaných generátorech vzniká elektromotorická síla mechanickým působením na pohyblivé části, které náboje unášejí a vyzdvihují na vyšší potenciál. Proudové tekoucí uvnitř těchto zdrojů napětí jsou tedy proudy konvekční a k jejich vytvoření lze proto užít jak kovů, tak izolantů.

Popsané děje si můžeme představit jako činnost „čerpadla elektriny“, které přečerpává náboj na hladinu vyššího potenciálu, odkud proudí uzavřeným oběhem, v němž se ohmickým odporem mění energie dodaná „čerpadlem“ v Joulovo teplo. Tuto hydraulickou analogii můžeme podrobněji sledovat na obr. (5.4) 2. Čerpadlo 1 vhání vodu do výše položené nádrže 2, z níž voda vytéká potrubím do škrtkového ventilu 3 a odtud se vrací do spodní nádrže 4. Vztlak čerpadla je obdobou elektromotorické síly E_{el} a hydrostatický tlak měřený od hladiny spodní nádrže je obdobou potenciálu. Klesá podél potrubí z hodnoty $\mathcal{E}$ na hladině 2 a pokles U tlaku na škrtkovém ventilu 3 je obdobný napětí na odporu. Průtočné množství vody — obdobné elektrickému proudu — je v celém oběhu stejné.

Uvedli jsme nejprůhlednější případ vzniku elektromotorické síly, který je jedním z méně důležitých zdrojů proudu. O dalších zdrojích pojednáme v příslušných kapitolách podle fyzikální povahy těchto zdrojů. Proto uzavřeme tento článek jen stručným přehledem zdrojů napětí, seřazených podle druhů energie v tab. (5.4) I.



Obr. (5.4) 2. Hydraulická obdoba proudového obvodu

Tabulka (5.4) I

Přehled zdrojů stejnosměrného napětí

Energie	Zdroje
mechanická	elektrostatické generátory piezoelektrické krystaly
chemická	galvanické články akumulátory palivové články
elektrodynamická (magnetická)	generátory stejnosměrného proudu (dynamo)
zářivá (světelná)	hradlové fotonky sluneční baterie
jaderná	jaderné baterie

5.4.3. Termoelektrické jevy

Vznik Joulova tepla ve vodiči není jediný tepelný děj související s elektrickým proudem. Je to pochopitelné vzhledem k tomu, že termický pohyb molekul nemá vliv jen na teplotu látky, ale také na pohyb nebo i množství nositelů náboje. Skutečně již přes sto let jsou známy tři termoelektrické jevy, které nejprve stručně popíšeme.

Seebeckův jev (1821). Mezi koncovými průřezy vodiče se udržuje napětí ΔU , jestliže mezi nimi je teplotní rozdíl ΔT . Při malých rozdílech je napětí ΔU úměrné teplotnímu rozdílu

5.4 (12)

$$\Delta U = \alpha \Delta T,$$

kde α je termoelektrický koeficient vodiče. Má u kovů hodnoty řádu 10^{-6} až 10^{-5} V deg⁻¹ a u polovodičů 10^{-5} až 10^{-3} V deg⁻¹. Hodnoty α jsou kladné nebo záporné a jejich znaménko souhlasí se znaménkem Hallovy konstanty. Termoelektrický koeficient se mění s teplotou rozmanitým způsobem. U některých polovodičů byly zjištěny teplotní obory, v nichž má α stálou hodnotu.

Seebeckův jev se obvykle pozoruje a využívá k různým účelům v uzavřeném obvodu složeném ze dvou různých vodičů 1 a 2 (kovových nebo polovodivých), jejichž konce mají dokonalý vodivý styk zaručený spájením.

Udržujeme-li rozdíl ΔT mezi teplotami T a $T' = T + \Delta T$ obou spojů, vzniknou v obvodu dvě napětí

$$\Delta U_1 = \alpha_1 \Delta T, \quad \Delta U_2 = \alpha_2 \Delta T,$$

kteřá dávají vznik výslednému elektromotorickému napětí:

5.4 (13)

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta U_1 - \Delta U_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T = \alpha_{12} \Delta T.$$

Veličina α_{12} , rovná algebraickému rozdílu hodnot α_1 a α_2 , nazývá se termoelektrický koeficient dvojice vodičů 1—2.

Elektromotorické napětí $\Delta \mathcal{E}$, které se stručněji nazývá *termonapětí* (nebo termoelektromotorická síla, termosíla), udržuje v obvodu složeném z vodičů, který se nazývá *termoelektrický článok* (termočlánek), trvalý proud (termoelektrický proud). Tím se vyvíjí Joulovo teplo, ale vodiče se neohřívají stejnoměrně, protože se tu uplatňují dva další termoelektrické jevy: Peltierův a Thomsonův.

Peltierův jev (1834). Ve vodivém spoji dvou vodičů 1 a 2 se při průchodu stálého proudu vyvíjí teplo s výkonem

5.4 (14)

$$P_P = \Pi_{12} I.$$

Peltierův koeficient Π_{12} roste pro každou dvojici vodičů s teplotou a nezávisí na směru proudu, takže tepelný výkon P_P mění znamení zároveň s proudem. Prochází-li tedy proud termoelektrickým obvodem, má proud se zřetelem k pořadí vodičů ve spojích opačné směry, a proto jeden spoj ohřívá a druhý ochlazuje. Je to obrácený děj než termoelektrický jev, při němž teplotní rozdíl ve spojích termočlánu vyvolává proud. Oba jevy se zřejmě navzájem provázejí, při čemž jejich účinky jsou zaměřeny proti sobě: proud vznikající teplotním rozdílem vytvořeným vnějším tepelným zdrojem má takový směr, že teplotní rozdíl zmenšuje a proud udržovaný v termočlánu vnější elektromotorickou silou vytváří teplotní rozdíl, který podle Seebecka dává proud opačného směru.

To je v soulase s **obecným fyzikálním principem**, který zní takto:

Vnější zásah do stavu nějaké fyzikální soustavy vyvolává v ní vždy takové změny, které směřují k udržení původního stavu.

V novější době objevil Bridgman tzv. *vnitřní Peltierův* (nebo Bridgmanův) jev: změna směru proudu v anizotropních krystalech vede k uvolnění nebo k pohlcení tepla.

Thomsonův jev (1851). Prochází-li homogenním vodičem, ve kterém není všude stejná teplota, proud i , vyvíjí nebo pohlcuje se v něm teplo. Tepelný výkon dP_T v objemovém prvku dV dělený tímto prvkem je hustota tepelného výkonu

$$5.4 (15) \quad p = \frac{dP_T}{dV};$$

je úměrná skalárnímu součinu hustoty elektrického proudu a teplotního gradientu:

$$5.4 (16) \quad p = -\Theta i \cdot \text{grad } T,$$

kde Thomsonův koeficient Θ je funkcí teploty. Teplotní gradient vyvolává ve vodiči tepelný tok a z 5.4 (16) vidíme, že teplo se v něm uvolňuje nebo pohlcuje, podle toho, jsou-li směry elektrického proudu a tepelného toku souhlasné nebo opačné.

Všechny tři popsané termoelektrické jevy souvisí navzájem. Ukázali jsme již, že Peltierův vznik teplotního rozdílu mezi spoji okruhu dvou vodičů, kterými prochází proud, je děj inverzní ke vzniku proudu v okruhu s teplotním rozdílem udržovaným mezi spoji. Vyjádříme-li ve 5.4 (14) proud I hustotou proudu $i = I/S$, dostaneme vztah podobný 5.4 (16):

$$\frac{P_P}{S} = \Pi_{12} i,$$

který říká, že plošná hustota tepelného výkonu ve spoji je úměrná hustotě proudu. Naopak má-li proud a teplotní spád $-\partial T/\partial l$ stejný směr rovnoběžný s osou vodiče, je tepelný výkon uvolněný v příčné vrstvě tloušťky dl dán vzhledem k 5.4 (15, 16) vztahem

$$5.4 (17) \quad dP_T = p dV = pS dl = \Theta i S \frac{\partial T}{\partial l} dl = \Theta I dT,$$

podobným rovnicí 5.4 (14). Fyzikální podstatu vztahů mezi jednotlivými termoelektrickými jevy vysvětlil již W. Thomson před sto lety termodynamickými úvahami.

Z mikrofyzikálních představ o vedení proudu v kovech a polovodičích vyplývá, že Seebeckův jev vzniká tím, že v teplejší části vodiče mají nositelé náboje větší energii (v polovodičích i větší prostorovou hustotu, tj. koncentraci), a proto difundují ve větším množství do chladnějších míst než nositelé z chladnějších míst do teplejších. Tím vzniká jednostranná převaha nábojů kladných nebo záporných, a proto znaménka koeficientů souhlasí se znaménkem nositelů nábojů, kterých je ve vodiči více. Podle 5.6.5 má tedy koeficient α u každého vodiče stejné znaménko jako Hallova konstanta. Podobně jako tato konstanta může koeficient α být nulou, jestliže nositelé proudu jsou z poloviny kladní a z poloviny záporní. Proto polovodiče se smíšenou vodivostí (typu n a p) mají malý koeficient α . Mezi kovy mají skoro nulovou Hallovu konstantu cín a olovo, a proto těmto kovům můžeme přisoudit také nulové termoelektrické koeficienty α . Je zajímavé, že Seebeck již r. 1882 sestavil kovy i jiné vodiče podle algebraické velikosti termoelektrického napětí do „termoelektrické řady“, v níž je olovo téměř uprostřed, a že termoelektrické koeficienty α_{12} se obvykle vztahují k olovu. Některé teoretické vztahy dovolují však určit z měření termoelektrických napětí absolutní hodnoty koeficientu α , ovšem s nevelkou přesností asi $1 \mu V \text{ deg}^{-1}$. V tab. (5.4) II jsou pro kovy i polovodiče uvedeny střední hodnoty α , jejichž odečtením dostaneme koeficient α_{12} pro zvolenou dvojici vodičů. Většina polovodičů má zřejmě o řád větší termoelektrické koeficienty než kovy, což je pochopitelné vzhledem k tomu, že v nich s teplotou roste nejen energie, ale ve značné míře i koncentrace nositelů nábojů, kdežto v kovech množství volných elektronů na teplotě nezávisí.

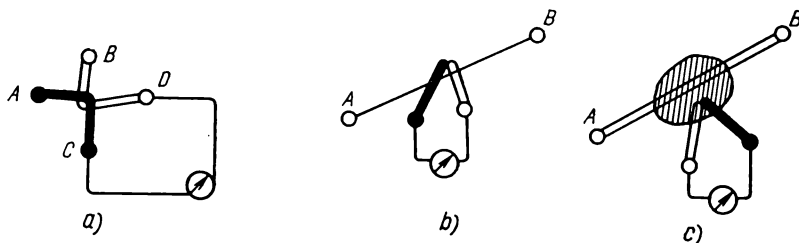
Termoelektrické řady

Kovy (Justi 1948)	α [$\mu\text{V deg}^{-1}$]	Polovodiče (Meissner 1935)	α [$\mu\text{V deg}^{-1}$]
Bi	—80	MoS	—770
konstantan	—39	ZnO	—714
Co	—21	Fe ₂ O ₃ (400 °C)	—613
Ni	—20	FeO	—500
K	—14	Fe ₃ O ₄	—430
Pd	—8	FeS ₂ , MgO ₃ H ₂	—200
Na	—7	SnO	—139
Pt, Hg	—5	Fe ₂ O ₃ (50 °C)	—60
Al, Mg	—1,5	C (grafit)	—3,5
Pb, Sn	—1,0	CuS	+7
Cs	—0,5	FeS	+26
manganin	0,5	Si	+44
Ir, Rh	1,0	Te	+49
Zn, Ag, Au	1,5	Fe Ti O ₃	+140
Cu	2,0	Ni O	+240
W	2,5	Mn ₂ O ₃	+385
Cd	3,5	Se	+1 000
Mo	6,5	Cu ₂ O	+474 až 1 150
Fe	12,5	Cu	+1 120
Sb	42		

5.4.4. Praktický význam termoelektrických jevů

Měřicí technika

Nejstarší a nejčastější způsob užití termoelektrických jevů je měření teploty, především teplotních rozdílů. Je známa řada různých termoelektrických teploměrů (termočlánků), pro které se volí vhodné dvojice kovů podle podmínek měření a požadované přesnosti.



Obr. (5.4) 3. Termoelektrické měniče: a — termokříž, b — dotkový měnič, c — bezdotkový měnič

Termočlánky se hodí i k měření jiných veličin, které mohou způsobit změny teploty jednoho spoje termočlánku, čímž se měření převádí na měření proudu nebo napětí. Jsou to zejména různé druhy *termoelektrických měničů*, kterých se dnes hojně užívá k měření střídavých proudů od nízkých až do nejvyšších frekvencí (do $3 \cdot 10^9$ Hz). Na obr. (5.4) 3 jsou náčrtky jejich různých

typů: a) *termokříž* tvořený dvěma zahnutými drátky z různých materiálů. Měřený střídavý proud vedený svorkami *A, B* ohřívá spoj a termoelektrický proud se měří přístrojem zapojeným k svorkám *C, D*. Pro cejchování stejnosměrným proudem je výhodnější *dotykový měnič* b) nebo *bezdotykový měnič* c), jehož spoj je elektricky izolován (např. skleněnou perlou) od topného drátku *AB*. Vhodně upravených termočlánků, např. Bi—Ag, Bi—Te, Pt—Te, lze užít i k detekci záření, zvláště dlouhovlnného záření infračerveného. Při nepatrných rozměrech mají velmi malou setrvačnost a jejich citlivost se dá zvýšit řadovým zapojením většího počtu termočlánků, jejichž termoelektrická napětí se pak sčítají (tzv. *termosloup*).

Termoelektrické generátory

Možnost výroby elektrické energie přímou přeměnou energie tepelné v termoelektrickém generátoru zkoumal Rayleigh již r. 1885. Přesvědčil se ovšem o velmi nepatrné účinnosti (několik promile) stejně jako Altenkirch, který se otázkou znovu zabýval r. 1909. Zvýšení účinnosti je možné jen užitím polovodičů s mnohem většími termoelektrickými koeficienty, než mají kovy, jak upozornil Joffe, který r. 1929 odhadl možnou účinnost polovodičových generátorů na několik procent. Dnes se skutečně dosahuje v SSSR a v USA účinnosti mezi 3 až 7 % a lze očekávat, že se bude spoluprací fyziků a techniků dále zvyšovat.

Termoelektrických generátorů o malých výkonech se již prakticky užívá a ukázaly se vhodnými i k přeměně zářivé energie Slunce v energii elektrickou. Termoelektrické *solární baterie* se osvědčily jako zdroje pro radiotechnická zařízení v umělých družicích. Mají několikrát větší účinnost než sluneční baterie fotoelektrické. Zdá se, že z dnes užívaných termoelektrických materiálů je nejvýhodnější kombinace slitiny ZnSb s vizmutem a s antimonem. Při padesátinásobném soustředění záření pomocí reflektorů bylo dosaženo teplotního rozdílu 247 °C a celkové účinnosti 3,35 %. Na obr. (5.4) 4 vidíme snímky solární baterie s 25 články tohoto typu, která v tropických krajích při jasné obloze (průměrný teplotní rozdíl 70 °C, účinnost 0,65 %) by měla měrný elektrický výkon 5 Wm⁻².

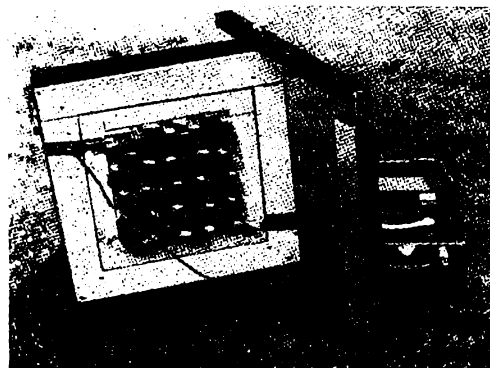
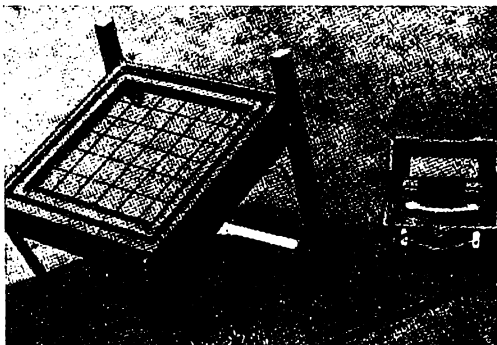
Termoelektrické chlazení

V termoelektrickém generátoru se vnějším tepelným výkonem udržuje jeden spoj na teplotě *T'* vyšší než teplota *T* druhého spoje a tím vzniká elektrický proud, který odevzdává výkon spotřebiči s odporem *R*. Nahradíme-li spotřebič zdrojem stejnosměrného proudu opačného směru, zvyšuje se teplota *T* a snižuje teplota *T'*, protože se v prvním spoji pohlcuje Peltierův výkon *P_v*.

To je princip „Peltierovy chladničky“, jejíž řešení je obdobné řešení termoelektrického generátoru, při čemž ovšem *T' < T* ≈ 300 °K. Účinnost chlazení je dána poměrem chladicího výkonu *P_{ch}* pohlceného chladným spojem při teplotě *T'* k výkonu zdroje vnějšího elektromotorického napětí *ℰ*, udržujícího proud *I* v okruhu:

$$K_{ch} = \frac{P_{ch}}{\mathcal{E}I}.$$

Zdá se, že praktické využití Peltierova jevu v chladicí technice se rozvine v nedaleké budoucnosti. Na stejném principu je zřejmě možno založit i termoelektrické ohřívání nebo vytápění.



Obr. (5.4) 4. Solární baterie s 25 termoelektrickými články: nahoře přední strana, dole zadní strana s chladicími křídélky

5.4.5. Chemické zdroje napětí

V tabulce (5.4) I na konci čl. 5.4.2 jsme uvedli chemickou energii jako možný zdroj stejnosměrného elektromotorického napětí v galvanických člancích a v akumulátorech. První jsou nejstaršími zdroji elektrické energie a dnes nemají již velký praktický význam, kdežto akumulátory jsou velmi běžným zdrojem proudu.

Vznik elektromotorického napětí v těchto zdrojích se vysvětluje tím, že na rozhraní dvou vodičů se udržuje *elektrická dvojvrstva* s potenciálovým rozdílem. Tato skutečnost souvisí s řadou elektrických poznatků, z nichž nejstarší je *Voltův jev*, jehož objev následoval brzy po známých pokusech Galvaniho. Volta zjistil (1797), že na styčné ploše dvou různých kovů vzniká potenciálový rozdíl zvaný *kontaktní (stykový) potenciál*, který je pro dvojici kovů charakteristický. Sestavil kovy (a uhel) v řadu

5.4 (18) $+ \text{Zn, Pb, Sn, Fe, Cu, Au, Ag, Pt, C} -$,

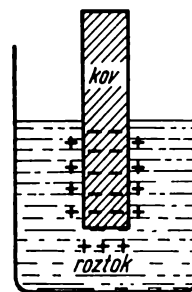
v níž každý člen se při styku s kovy, které v řadě následují, nabíjí kladně, a s kovy, které mu předcházejí, záporně. Potenciálový rozdíl mezi krajními kovy libovolně sestaveného obvodu nezávisí na druhu kovů zapojených mezi nimi a rovná se kontaktnímu potenciálu, který vzniká mezi krajními kovy při přímém styku. V uzavřeném okruhu složeném z libovolných kovů stejné teploty nevzniká proto elektromotorické napětí. Trvalý proud lze udržet v takovém okruhu jen při nestejné teplotě (jak jsme shledali v čl. 5.4.3), nebo zařadíme-li do okruhu kromě dvou různých kovů aspoň jeden elektrolyt.

Popsané poznatky svědčí o tom, že na rozhraní vodičů je jiné rozložení nábojů než uvnitř. Kvalitativní vysvětlení této skutečnosti není snadné. Volné elektrony v kovu mají jistou pohybovou energii a některé z nich mohou opustit povrch kovu. Tím se ovšem povrch kovu nabíjí kladně a přitahuje zpět uniklé elektrony, které tvoří při povrchu kovu vrstvu záporných nábojů. Tak vzniká elektrická dvojvrstva s kladným potenciálovým rozdílem kovu proti okolí. Velikost tohoto rozdílu závisí jak na druhu kovu (i na jeho příměsích), tak na teplotě. Při styku dvou různých kovů vzniká mezi nimi kontaktní potenciál, který v obvodu s všude stejnou teplotou nedává výsledné elektromotorické napětí.

Tabulka (5.4) III

Napětí kovů vzhledem k vodíkové elektrodě

Elektroda	Napětí [V]	Elektroda	Napětí [V]
Li	−3,02	Ni	−0,25
K	−2,92	Pb	−0,126
Na	−2,71	H ₂	0
Mg	−2,25	Cu	+0,34
Zn	−0,762	Ag	+0,81
Fe	−0,44	Hg	+0,86
Cd	−0,402	Au	+1,5

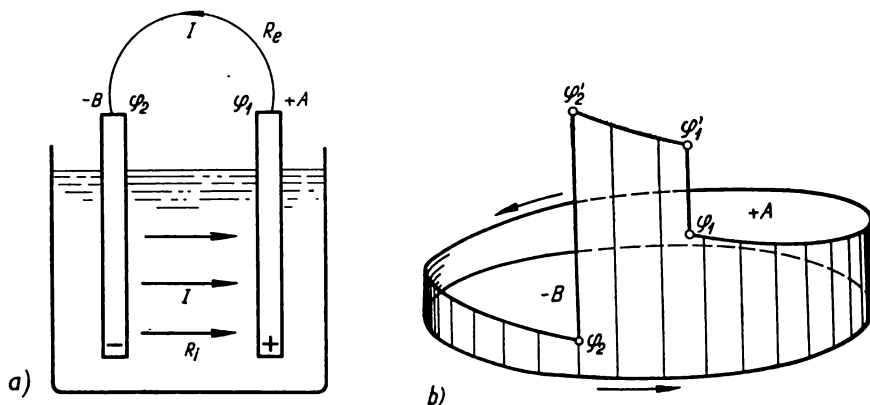


Obr. (5.4) 5. Elektrická dvojvrstva na povrchu kovu v kapalině

Abychom vysvětlili vznik elektrické dvojvrstvy na povrchu kovu ponořeného do elektrolytu, uvažujme takto:

Soli kovů jsou dobře rozpustné ve vodě, kdežto kovy samy se ve vodě nerozpouštějí. Při tom kov i jeho sůl obsahují ve své krystalové mřížce stejné kladné ionty, které při rozpouštění soli vstupují do roztoku. Jak vysvětlíme, že tytéž ionty se z krystalu kovu neuvolňují? Příčina je ta, že při rozpouštění krystalu soli vstupují do roztoku zároveň s kladnými ionty též ionty záporné, kdežto volné elektrony obsažené v krystalu kovu do kapaliny nevstupují. Z této skutečnosti plyne významný poznatek: Unikají-li kladné ionty do

kapaliny, nabývají převahy záporné náboje elektronů v kovu a tak vzniká elektrické pole, které přitahuje kladné ionty zpět k povrchu kovu. Tím se zpomaluje a konečně zastaví další vylučování iontů z kovu a zároveň se vytvoří povrchová dvojvrstva kladných a záporných nábojů [obr. (5.4) 5]. Proto jsou kovy prakticky nerozpustné, avšak elektrolyt obklopující povrch kovu má kladný potenciál vzhledem ke kovu a velikost tohoto napětí, které se nazývá *elektrolytický potenciál*, je charakteristická pro dvojici kovu a elektrolytu. Jeho absolutní hodnotu není možno určit experimentálně, ale rozdíl napětí mezi kovy ponořenými do téhož roztoku nám poskytují zároveň rozdíly elektrolytických potenciálů těchto kovů. Zpravidla se uvádějí relativní hodnoty vzhledem k tzv. *vodíkové elektrodě*, což je platina pokrytá platinovou černí s pohlceným vodíkem a ponořená do roztoku, který obsahuje 1,008 kg (tj. 1 kilogramion) vodíkových iontů v 1 m³. Tyto relativní potenciály jsou uvedeny v tab. (5.4) III. Je z ní patrné, že mezi deskou zinkovou a deskou měděnou, ponořenými do zředěné kyseliny sírové, bude potenciálový rozdíl 0,34 V — (−0,76) V = = 1,1 V, který můžeme skutečně změřit voltmetrem. Tak docházíme k závěru, že takové



Obr. (5.4) 6. Proudový obvod článku: a — schéma zapojení, b — průběh potenciálu

zařízení může být zdrojem elektromotorické síly, a nazýváme je *galvanickým článkem*. (V tomto případě se zařízení nazývá *Voltův článek*.)

Na obr. (5.4) 6a je schematicky vyznačen elektrický obvod, který vytvoříme, spojíme-li póly +A a −B galvanického článku vodičem odporu R_e , takže jím prochází stálý proud I ve směru šipky. Elektrolytem prochází stejně silný proud I , jenž však vzhledem ke spojitosti proudových vláken vede kladný náboj od záporné elektrody −B ke kladné elektrodě +A. Odpor R_i části obvodu, kde se proud vede elektrolytem, nazývá se *vnitřní odpor* článku na rozdíl od odporu R_e vnějšího vedení. Pro toto vnější vedení platí Ohmův zákon

$$5.4 \quad (19) \quad U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = R_e I.$$

Podobně platí pro vnitřní část obvodu

$$5.4 \quad (20) \quad U'_{21} = \varphi_2' - \varphi_1' = R_i I,$$

značí-li U'_{21} napětí měřené ve směru proudu, tj. rozdíl potenciálu φ_2 na povrchu elektrolytu těsně u elektrody −B a potenciálu φ_1' na povrchu elektrolytu těsně u elektrody +A. Sečtením obou posledních rovnic dostaneme vztah

$$5.4 \quad (21) \quad R_e I + R_i I = U_{12} + U'_{21} = \varphi_1 - \varphi_1' + \varphi_2' - \varphi_2.$$

Vidíme, že výraz napravo nemůže být roven nule, dodává-li článek proud (neboť $R_e > 0$, $R_i > 0$). Z toho vyplývá, že se potenciál mezi elektrolytem a elektrodami v něm ponořenými mění nespojitě, a to tak, že se u obou elektrod vytvoří potenciálové „skoky“ $\varphi_1 - \varphi'_1$ a $\varphi_2 - \varphi'_2$ stejného znaménka, a to takové, že uvnitř elektrolytu má spád potenciálu směr opačný než napětí na elektrodách [obr. (5.4) 6b]. Algebraický součet těchto potenciálových skoků, měřených kladně ve směru proudu uvnitř elektrolytu,

$$5.4 (22) \quad \mathcal{E} = \varphi_1 - \varphi'_1 - (\varphi_2 - \varphi'_2)$$

se však podle 5.4 (21) rovná součtu ohmických napětí na vnějším i vnitřním obvodu:

$$5.4 (23) \quad \mathcal{E} = (R_e + R_i) I.$$

Je to tedy podle 5.4 (8) nebo 5.4 (11) *elektromotorické napětí* článku. Stejná hodnota by vyšla podle 5.4 (6) integrací podél celého uzavřeného okruhu přes vnější odpor R_e vedení i přes vnitřní odpor R_i článku.

Zavedeme-li do 5.4 (23) ohmické napětí 5.4 (19) na vnějším odporu, dostaneme

$$5.4 (24) \quad \mathcal{E} = U_{12}(1 + R_i/R_e)$$

čili

$$U_{12} = \frac{\mathcal{E}}{1 + R_i/R_e}.$$

Napětí U_{12} na svorkách článku, které jsou spojeny vnějším vedením odporu R_e , je tedy vždycky nižší než elektromotorické napětí a říkáme mu *svorkové napětí*. Vnitřní odpor článku (i akumulátoru) bývá však dosti malý (zlomek Ω), a proto můžeme pokládat svorkové napětí článku U_v měřené voltmetrem s velikým odporem R_v za přibližně rovné elektromotorickému napětí, není-li při tom ovšem článek zatížen jiným spotřebičem. Říkáme, že elektromotorické napětí se rovná svorkovému napětí nezatíženého (otevřeného) zdroje. Připojíme-li ke svorkám paralelně ještě jiný spotřebič o známém odporu R_s , naměříme menší svorkové napětí U_s , pro které platí podle 5.4 (24) vztah

$$5.4 (25) \quad U_s(1 + R_i/R_s) = \mathcal{E} \approx U_v,$$

z něhož lze vypočítat vnitřní odpor článku.

Proud je elektrolytem přenášen ionty, které se vylučují na elektrodách a tím se u některých článků chemicky mění povrch elektrod i jejich elektrolytický potenciál. Tento jev se nazývá *elektrolytická polarizace* a má nepříznivé následky u některých článků, jejichž elektromotorické napětí se při odvádění proudu z článku postupně snižuje a které proto nazýváme nestálými. Voltův článek je příkladem velmi nestálého článku, neboť při odebrání proudu se měď pokrývá vyloučeným vodíkem, čímž se polarizuje. I když se zinková elektroda nemění (zinek přechází do elektrolytu a tvoří s ionty SO_4^{--} molekuly ZnSO_4), vzniká tím stoupající polarizační napětí opačného směru. Článek se stane stálým, užijeme-li dvou kapalin oddělených průlinčitou stěnou, která zabraňuje míšení kapalin a přitom dovoluje průchod iontů. Tak je upraven *článek Daniellův*, u něhož je měď obklopena roztokem CuSO_4 a zinek zředěnou kyselinou H_2SO_4 . Pak při průchodu proudu zase zinek přechází do elektrolytu a tvoří roztok ZnSO_4 rostoucí koncentrace, protože záporné ionty SO_4^{--} procházejí stěnou a osamocené ionty Cu^{++} se pak vylučují na měděné elektrodě. Tato elektroda tedy narůstá, kdežto zinková ubývá, ale kvalitativně se žádná z nich nemění. Klesá ovšem koncentrace roztoku CuSO_4 , a proto v technické úpravě (Meidingerově) tento článek má zásobu krystalků modré skalice.

Praktický význam mají dosud tzv. *suché články*, užívané v kapesních bateriích. Jsou to v podstatě *Leclanchéovy* salmiakové články s rosolovitým elektrolytem. Jejich úprava je zřejmá z obr. (5.4) 7, kde je nakreslena tzv. plochá baterie, složená ze tří článků spojených

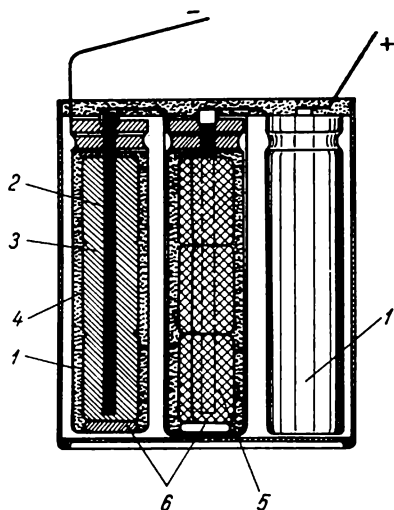
za sebou, takže její elektromotorická síla je $3 \cdot 1,5 \text{ V} = 4,5 \text{ V}$. Kladným pólem každého článku je uhlíková tyčinka s mosaznou čepičkou, obklopená váčkem se směsí burelu MnO_2 a koks, která působí jako *depolarizátor*: zabraňuje vylučování vodíku, oksydující jej na vodu. Takto upravená elektroda je ponořena do roztoku salmiaku NH_4Cl , zhuštěného škrobovým mazem a jinými přísadami, uloženého v zinkové nádobce ve tvaru válečku, jenž tvoří zároveň zápornou elektrodu. Svrhu je baterie zalita asfaltem, kterým jsou vyvedeny mosazné pásky, k nimž připojujeme spotřebič.

Pro přesné měření napětí jsou důležité velmi stále *normální články*, z nichž je nejznámější kadmiový článek Westonův.

Z chemických zdrojů proudu mají největší význam galvanické články, které se někdy nazývají sekundární (druhotné) nebo *polarizační*, obecně *akumulátory*, protože v nich nejprve shromažďujeme (akumulujeme) elektrický náboj, který z nich potom odvádíme, čímž získáme zpět elektrickou energii, vynaloženou při nabíjení akumulátoru. Akumulátor je vlastně galvanický článek, který úmyslně polarizujeme dostatečně dlouhým průchodem proudu, čímž vznikne dosti trvalé polarizační napětí, které při spojení elektrod udržuje po jistou dobu průchod proudu. Vydátnost akumulátoru posuzujeme podle množství náboje, jenž je v něm nahromaděn a který můžeme z něho při odebírání proudu získat zpět. Toto množství je *kapacita akumulátoru* a vyjadřuje se obvykle v ampérhodinách, čímž je udáno, po kolik hodin můžeme z akumulátoru brát proud 1 ampér. Účinnost akumulátoru lze posuzovat z dvojího hlediska, buď podle náboje, nebo podle energie. Nábojová účinnost je dána poměrem vydaného náboje k přijatému, kdežto pracovní účinnost, rovná poměru vydané elektrické energie k energii dodané, je poněkud nižší, protože při nabíjení musíme elektrinu dopravovat do akumulátoru při vyšším napětí, než má akumulátor, když z něho proud odebíráme.

Ve srovnání s kondenzátory, které také „kondenzují“ elektrickou energii, obsahují běžné akumulátorové baterie větší množství náboje, ovšem při dosti nízkém napětí. Tak např. akumulátorová baterie 12voltová na 60 Ah představuje kondenzátor s ohromnou kapacitou 180 000 faradů.

Dnes se užívá několika druhů akumulátorů: olověných, ocelových (NiFe), stříbrných, niklo-kadmiových, rtuťových (RM) i jiných.



Obr. (5.4) 7. Suché články v „ploché baterii“: 1 – zinkový obal, 2 – uhlíkový roubík, 3 – směs burelu a tuhy, 4 – roztok salmiaku, 5 – plátěný obal, 6 – podložka

5.5. Elektrodynamicke síly

5.5.0. Úvod

V předešlých kapitolách jsme studovali elektrické pole nehybných nábojů, přesněji řečeno nábojů, které jsou v klidu vzhledem k pozorovací soustavě. Jinými slovy studovali jsme pole, které náboje vytvářejí ve vlastní klidové soustavě. Nyní přikročíme k vyšetření síle mezi náboji, které se pohybují vzhledem k pozorovací soustavě. V této kapitole se omezíme na setrvačné pohyby a budeme předpokládat, že se náboje pohybují v pozorovací sou-

stavě rovnoměrně a přímočaře. Coulombův zákon nám neřká nic o tom, jaké pole vytvářejí náboje za pohybu, a proto se silové působení pohyblivých nábojů řešilo tak, že na podkladě experimentálních poznatků byly formulovány nové zákony o působení pohyblivých nábojů nebo proudů, a to bez souvislosti s Coulombovým zákonem. Teprve teorie relativnosti poskytla možnost objevit přímou souvislost mezi elektrostatickým a magnetickým polem, jak ukážeme v dalším výkladu.

V čl. 2.9.5 jsme shledali, že síla působící na nějakou částici se mění Lorentzovou transformací podle vzorce 2.9 (37), který má naprosto všeobecnou platnost. Proto jsme ho užili v čl. 2.9.6 na gravitační síly a se stejným oprávněním tak učiníme i pro elektrostatickou sílu, kterou podle Coulombova zákona působí na okolní náboje klidný náboj. Protože podle teorie relativnosti má význam jen relativní pohyb, můžeme dospět k síle, kterou působí náboj za pohybu, přejdeme-li od klidové soustavy náboje Lorentzovou transformací k libovolné jiné inerciální soustavě, kterou zvolíme za novou pozorovací soustavu. V příštím článku uvidíme, že v této nové soustavě, v níž se částice budící pole pohybuje rovnoměrně přímočaře, je její silové pole jiné než v klidové soustavě částice. Při malých rychlostech nabitých částic se působení mezi nimi liší relativně jen velmi málo od síly elektrostatické. Obecně jde totiž o „relativnostní efekty“ druhého řádu, avšak za vhodných podmínek — které jsou běžně splněny i v elektrotechnické praxi — mohou být odchylky od elektrostatického pole velmi podstatné. U nenabitých těles se nám ty odchylky dokonce jeví jako nové síly, které se vyznačují silnými dynamickými účinky mezi vodiči protékajícími proudy. Tyto „neelektrostatické“ síly, známé jako magnetické nebo elektromagnetické, označíme souhrnným názvem *elektrodynamické síly*.

Shledáváme tedy, že přechodem od klidové soustavy náboje k jiné inerciální soustavě se mění jeho ryze elektrostatické pole v pole elektromagnetické. To znamená zásadní změnu názorů na podstatu elektrostatického a magnetického pole. Žádné z těchto polí nemá absolutní fyzikální význam, obě jsou jen relativní aspekty elektromagnetického pole, které tvoří jednotu pole elektrostatického a magnetického. Přechodem k jiné pozorovací soustavě se mění elektrostatické nebo ryze magnetické pole v elektromagnetické pole složené z obou druhů polí. Rozlišování obou těchto polí je možno názorně vysvětlit jako vliv „perspektivy ve čtyřrozměru“, neboť Lorentzova transformace znamená otočení prostoročasové soustavy. Podle směru pozorování „vidíme“ elektrostatickou nebo magnetickou „stránku“ téže fyzikální skutečnosti. Proto mohl Minkowski vybudovat relativnostní elektrodynamiku na jediném „elektromagnetickém čtyřtenzoru“, který shrnuje vlastnosti obou polí.

Této formální jednotnosti elektromagnetického pole se dostává fyzikálního zdůvodnění konstatováním, že obě jeho části jsou přímým důsledkem platnosti Coulombova zákona a principu relativnosti. Magnetismus je tedy nejdéle známým relativnostním efektem a jeho existence mohla být stejně pádným důvodem ke vzniku speciální teorie relativnosti jako Michelsonův pokus. V čl. 5.9.2 poznáme, že i obecný princip relativnosti má důležitý význam v teorii elektromagnetismu.

5.5.1. Silové působení nábojů při setrvačném pohybu

V čl. 2.9.5 pojednávajícím o Einsteinově relativnostní dynamice jsme odvodili důležitý vzorec 2.9 (37), který určuje, jak se Lorentzovou transformací mění síla při přechodu od jedné inerciální soustavy S' k jiné inerciální soustavě S . Protože tento vzorec je zcela obecný a platí tedy pro každou sílu, můžeme ho užít i na elektrostatickou sílu

$$5.5 (1) \quad F_{es} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0,$$

kterou působí podle Coulombova zákona 5.1 (3) klidná částice P s nábojem Q na kteroukoli

jinou částici p s nábojem q . Transformací podle 2.9 (37) dospějeme (postupem, který uvádíme dále drobným tiskem) ke vzorci

$$5.5 (2) \quad \mathbf{F} = \gamma \mathbf{F}_{\text{es}} \left\{ \mathbf{r}^0 + \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0) \right\}$$

čili

$$5.5 (3) \quad \mathbf{F} = \gamma \left\{ \mathbf{F}_{\text{es}} + \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}_{\text{es}}) \right\}, \quad u \ll c, \quad v \ll c,$$

kde

$$5.5 (4) \quad \gamma = \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}.$$

V těchto rovnicích značí $\mathbf{u}$ rychlost, kterou se částice p s nábojem q pohybuje v pozorovací soustavě, $\mathbf{v}$ značí rychlost, kterou se v téže soustavě pohybuje částice P s nábojem Q a $v_{\perp}$ je složka rychlosti $\mathbf{v}$ kolmá k průvodiči $\mathbf{r}$ vedenému od P k p . $\mathbf{F}_{\text{es}}$ je elektrostatická síla, kterou působí částice P , klidná v pozorovací soustavě, na částici p , a $\mathbf{F}$ je celková síla, kterou na p působí táž částice P , jestliže se pohybuje v pozorovací soustavě rychlostí $\mathbf{v}$. Uvedený vzorec 5.5 (3) platí dosti přesně, jen pokud jsou rychlosti $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ malé proti rychlosti světla a síla $\mathbf{F}$ se liší podle tohoto vzorce od $\mathbf{F}_{\text{es}}$ jen o malé veličiny 2. řádu v $u/c \ll 1$, $v/c \ll 1$. Přesto mohou být rozdíly mezi výslednými silami $\mathbf{F}_{\text{es}}$ a $\mathbf{F}$, které působí na tělesa za vhodně volených podmínek (např. na nenabitě vodiče protékané proudy) velmi nápadné.

Označíme-li tedy S' klidovou soustavu částice P , dostaneme sílu $\mathbf{F}$, kterou působí na náboj q v soustavě S , která se vzhledem k S' pohybuje stálou rychlostí $-\mathbf{v}$, podle vzorce 2.9 (37). Všechny veličiny vztahené k soustavě S' označíme čárkou, takže bude

$$5.5 (5) \quad \mathbf{F}' = \mathbf{F}'_{\text{es}} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \mathbf{r}'^0 = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r'},$$

kde $\mathbf{r}'$ je průvodič vedený od částice P k částici p , měřený v klidové soustavě S' částice P . Píšeme-li tedy

$$5.5 (6) \quad \mathbf{F}' = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r'^2}, \quad \mathbf{F}' = F' \frac{\mathbf{r}'}{r'},$$

dostaneme pro sílu $\mathbf{F}$, kterou působí částice s nábojem Q na částici s nábojem q pohybující se v její klidové soustavě S' rychlostí $\mathbf{u}'$, podle 2.9 (37)

$$5.5 (7) \quad \mathbf{F} = \frac{F'/r'}{\alpha \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2} \right)} \left\{ \mathbf{r}' + (\alpha - 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}') \frac{\mathbf{v}}{v^2} + \frac{\alpha}{c^2} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}') \mathbf{v} \right\}.$$

Pro malé rychlosti $\mathbf{u}'$, $v \ll c$ můžeme položit vzhledem k 2.9 (9) $\alpha - 1 = \frac{1}{2} v^2/c^2$ a v členech, které obsahují c^2 ve jmenovateli a jsou tedy samy velmi malé 2. řádu, psát se zřetelem k 2.9 (11):

$$\alpha \approx 1, \quad \mathbf{r}' \approx \mathbf{r}.$$

Tak dostaneme

$$\mathbf{F} = \frac{F' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\left(1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) r'} \left\{ \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \mathbf{v} + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}}{c^2} \mathbf{v} \right\}.$$

Podobně můžeme ve výrazech $\frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2}$ a $\frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}}{c^2} \mathbf{v}$ použít přibližného vztahu

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v},$$

který plyne z 2.9 (17) vypuštěním členů 2. řádu. Bude pak

$$\mathbf{F} = \frac{F' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\left(1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right) r'} \left\{ \mathbf{r} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \mathbf{v} \right\}.$$

Závorku ve jmenovateli nahradíme přibližným výrazem

$$1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \approx \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \approx \frac{1 - v^2/c^2}{1 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/c^2},$$

takže

$$\mathbf{F} = \frac{F'}{\sqrt{1 - v^2/c^2} r'} \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \left\{ \mathbf{r} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \mathbf{v} \right\}$$

a omezíme-li se opět na členy 2. řádu,

$$\mathbf{F} = \frac{F'}{r' \sqrt{1 - v^2/c^2}} \left\{ \mathbf{r} + \frac{1}{c^2} [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{r}] \right\}.$$

Vzhledem k známému vzorci D (23) dostaneme tedy

$$5.5 (8) \quad \mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r'^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}} \left\{ \mathbf{r} + \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \right\}$$

a zavedeme-li sem Coulombovu sílu elektrostatickou 5.5 (1), kterou by působila na částici p klidná částice P , získáme se zřetelem k 2.9 (11') rovnici

$$5.5 (9) \quad \mathbf{F} = \frac{F_{es}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{c^2 - v_1^2}{c^2 - v^2} \right)^{3/2}}} \left\{ \mathbf{r}^0 + \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0) \right\},$$

která je totožná s 5.5 (2) a platí, jen když rychlosti obou částic jsou malé proti rychlosti světla.

Snadno však odvodíme obdobný vzorec pro sílu, kterou působí částice P s nábojem Q a malou rychlostí $\mathbf{v}$ na náboj q s libovolnou rychlostí $\mathbf{u}'$ menší než c . Předpokládáme-li tedy, že rychlosti v , u' splňují podmínky

$$5.5 (10) \quad v \ll u' < c,$$

jsou výrazy

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2}, \quad \frac{\alpha}{c^2} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}') \mathbf{v}$$

malé 1. řádu, ale výrazy $\alpha - 1$, $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ řádu 2. Omezíme-li se tedy na členy 1. řádu a členy vyšších řádů pomineme, můžeme ve vzorci 5.5 (7) klást $\alpha = 1$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$, takže

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{F'}{1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \left\{ \mathbf{r}^0 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}^0}{c^2} \mathbf{v} \right\} = F' \left(1 - \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \left\{ \mathbf{r}^0 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}^0}{c^2} \mathbf{v} \right\} = \\ &= F' \left\{ \mathbf{r}^0 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}^0}{c^2} \mathbf{v} - \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2} \mathbf{r}^0 \right\}. \end{aligned}$$

Podle 5.5 (1, 5) však $\mathbf{F}' = \mathbf{F}_{es}$ a užijeme-li zase vzorce pro trojnásobný vektorový součin, dostaneme

$$5.5 (11) \quad \mathbf{F} = F_{es} \left\{ \mathbf{r}^0 + \frac{1}{c^2} \mathbf{u}' \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0) \right\}$$

nebo

$$5.5 (12) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_{es} + \frac{1}{c^2} \mathbf{u}' \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}_{es}).$$

V posledních vzorcích můžeme se zřetelem na podmínku 5.5 (10) položit $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$, čímž dostaneme výrazy

$$5.5 (13) \quad \mathbf{F} = F_{es} \left\{ \mathbf{r}^0 + \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0) \right\} = \mathbf{F}_{es} + \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}_{es}),$$

které vzniknou z 5.5 (8, 9), klademe-li $\gamma = 1$.

Celková síla 5.5 (3) se skládá ze dvou vektorů. První z nich

$$5.5 (14) \quad \mathbf{F}_e = \gamma \mathbf{F}_{es} = \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v_1^2/c^2)^{3/2}} \cdot \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0$$

má směr a přibližně i velikost elektrostatické síly Coulombovy a nezávisí stejně jako tato síla na rychlosti částice p , na kterou působí.

Takové síly, které působí na nabitě částice nezávisle na rychlosti, kterou se tyto částice pohybují v pozorovací soustavě, a jsou úměrné velikosti jejich náboje, se nazývají *elektrické síly*. Patří k nim zřejmě elektrostatická síla $\mathbf{F}_{es}$ a další síly, které poznáme později.

Druhý vektor

$$5.5 (15) \quad \mathbf{F}_{mag} = \frac{\gamma}{c^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{F}_{es})$$

má obecně jiný směr než elektrostatická síla a závisí nejen na rychlosti částice P , která je zdrojem této síly, ale také na rychlosti částice p , na kterou síla působí. Je-li jedna z těchto dvou částic v klidu, síla $\mathbf{F}_{mag}$ vymizí. Nemá tedy povahu obvyklých sil elektrických, které účinkují i na klidné náboje, a je vlastní podstatou magnetických jevů. Proto ji nazveme *magnetickou silou* vzbuzenou nábojem při setrvačném pohybu.

Výklad tohoto článku, v němž jsme z teorie relativnosti odvodili síly mezi náboji v pohybu, ukončíme důležitou poznámkou. Jak je zřejmé z obecného výrazu 5.5 (3) pro sílu, kterou působí částice P s rychlostí $\mathbf{v}$ na částici p pohybující se rychlostí $\mathbf{u}$, není tento výraz souměrný v rychlostech $\mathbf{v}$ a $\mathbf{u}$. Zaměníme-li tedy obě částice P a p , přejde sice vektor $\mathbf{r}$ ve vektor $-\mathbf{r}$, ale síla $\mathbf{F}$ obecně nepřejde v sílu $-\mathbf{F}$. To znamená, že síla $\mathbf{F}$ nespĺňuje formálně třetí axiom Newtonovy mechaniky o rovnosti vzájemného působení. Přece však lze podrobnějším rozбором ukázat, že zákon zachování hybnosti je splněn pro každou elektrodynamickou soustavu, vezmeme-li v počet také hybnost elektromagnetického pole, jak to vyžaduje teorie relativnosti.

5.5.2. Pseudoelektrostatická síla

Nazvali jsme vektor 5.5 (14) elektrickou silou, protože má typickou vlastnost elektrických sil, že jejím zdrojem je nabitá částice a že působí na všechny ostatní nabitě částice nezávisle na jejich rychlostech. Leží ve spojnici obou částic P a p a je úměrná oběma nábojům Q a q . Sílu 5.5 (14) si můžeme představit jako výslednici dvou sil

$$5.5 (16) \quad \mathbf{F}_e = \gamma \mathbf{F}_{es} = \mathbf{F}_{es} + \mathbf{F}_{ps},$$

z nichž první je síla elektrostatická 5.5 (1), druhá patří k silám elektrodynamickým a je dána výrazem

$$5.5 (17) \quad \mathbf{F}_{ps} = (\gamma - 1) \mathbf{F}_{es}.$$

Pro malé rychlosti $v \ll c$, na které stále omezujeme své úvahy, můžeme položit se zřetelem k 5.5 (4)

$$\gamma \approx (1 - v^2/c^2) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v_1^2}{c^2} \right) \approx 1 - v^2/c^2 + \frac{3}{2} \frac{v_1^2}{c^2}$$

a sílu 5.5 (17) psát podle obr. (5.5) 1 ve tvaru

$$5.5 (18) \quad \mathbf{F}_{ps} = \frac{3v_1^2 - 2v^2}{2c^2} \mathbf{F}_{es} = \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \Theta - 1 \right) \mathbf{F}_{es}.$$

Tato síla je zhruba v poměru v^2/c^2 menší než síla elektrostatická a její existence je tedy relativnostní úkaz 2. řádu. Má zřejmě souhlasný nebo opačný směr než elektrostatická

síla F_{es} a je ovšem proti této síle velmi malá 2. řádu. Má tedy vlastnosti podobné vlastnostem síly F_{cs} , a proto sílu F_{ps} nazveme *pseudoelektrostatickou silou*.

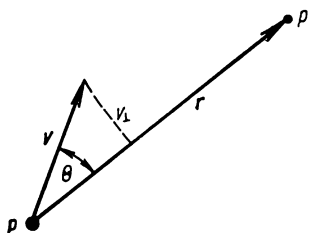
Z poslední rovnice vidíme, že pseudoelektrostatická síla působí radiálně — stejně jako elektrostatická síla — na všechny strany od letící částice, ale její velikost i smysl závisí na úhlu Θ , který svírá směr F_{ps} se směrem pohybu částice. Pro úhel $\Theta_0 = 55,3^\circ$ daný podmínkou

$$\frac{3}{2} \sin^2 \Theta_0 = 1$$

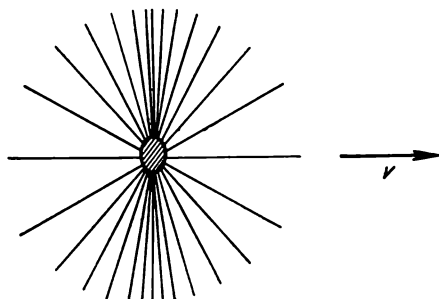
je $F_{ps} = 0$, pro úhly větší má souhlasný, pro úhly menší opačný směr než F_{cs} . V prvním případě zesiluje, ve druhém zeslabuje elektrostatickou sílu a siločáry výsledného pole jsou tedy přímky, které jsou řidší kolem směru pohybu náboje a hustší v okolí roviny kolmé k pohybu. Na obr. (5.5) 2 je to znázorněno pro záporný elektron, který je následkem Lorentzovy kontrakce délek „zploštěn“ ve směru pohybu. Tak si můžeme názorně vysvětlit i „zploštění“ jeho elektrického pole. Poměr

$$F_{ps} : F_{cs} = \gamma - 1$$

má největší kladnou hodnotu $\frac{1}{2} v^2/c^2$ ve směru kolmém, největší zápornou hodnotu $-v^2/c^2$ ve směru rovnoběžném s rychlostí elektronu.



Obr. (5.5) 1. Příčná složka v_1 , rychlosti částice P působící pseudoelektrostatickou silou na částici p



Obr. (5.5) 2. Pole pohybujícího se elektronu

Pseudoelektrostatické síly jsou relativnostním úkazem druhého řádu, a proto mají význam jen pro nabitě částice s vysokou energií, které se pohybují rychlostmi srovnatelnými s rychlostí světla. Proto se jimi nebudeme podrobněji zabývat. Připomeneme jen, že i pro pseudoelektrostatické síly plyne ze zákona zachování náboje platnost principu superpozice stejně jako pro síly elektrostatické. Máme-li tedy neelektrické těleso, které jak víme, obsahuje ohromné množství stejnoměrně promísených kladných a záporných částic, vznikají jeho pohybem pseudoelektrostatické síly, které se navzájem ruší. To platí i pro nenabitě vodiče, kterými protéká proud, neboť usměrněné pohyby nositelů proudu mají rychlosti malé proti rychlostem termických pohybů, takže střední kvadratické rychlosti kladných i záporných nábojů liší se tak málo, že hodnoty $\gamma - 1$ pro náboje obou znamének jsou prakticky stejně velké. Podobně nepůsobí pseudoelektrostatické síly buzené náboji v pohybu (např. proudy) na neelektrická tělesa ani tehdy, když je v nich pohyb nábojů nějak usměrněn (nenabitě vodiče nebo magnety), protože jsou nezávislé na rychlostech těchto nábojů.

Pseudoelektrostatická síla je stejně jako síla elektrostatická úměrná náboji, na který působí, a proto je vhodné zavést podobně jako v elektrostatice *intenzitu pseudoelektrostatického pole*

$$5.5 (19) \quad E_{ps} = \frac{F_{ps}}{q} = (\gamma - 1) E_s.$$

Pseudoelektrostatická síla působící na libovolný náboj q je pak dána součinem

$$F_{ps} = q E_{ps}$$

a výslednou sílu

$$5.5 \quad (20) \quad \mathbf{F}_e = q(\mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{ps}) = q\gamma \mathbf{E}_s$$

můžeme pokládat za pouhou relativnostní modifikaci Coulombovy síly, která se od této síly liší jen o veličiny druhého a vyšších řádů.

5.5.3. Magnetické síly

Vyšetříme nyní fyzikální význam vektoru $\mathbf{F}_{\text{mag}}$, který je dán výrazem 5.5 (15). Spokojíme-li se pro malé rychlosti $\mathbf{v}$ přibližnou hodnotou $\gamma = 1$, dostaneme

$$5.5 \quad (21) \quad \mathbf{F}_{\text{mag}} = \frac{1}{c^2} F_{es} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0) = \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}_{es})$$

$$5.5 \quad (21') \quad \mathbf{F}_{\text{mag}} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0).$$

Je to síla, které podléhá částice p s nábojem q a rychlostí $\mathbf{u}$ v okolí částice P s nábojem Q , která se pohybuje malou stálou rychlostí $\mathbf{v}$. Tento přibližný vzorec, v němž pomíjíme členy řádu v^2/c^2 proti jedné, je dostatečně přesný pro všechny běžné případy magnetických polí ustálených proudů a magnetů. Sílu $\mathbf{F}_{\text{mag}}$ jsme v předešlém článku označili názvem magnetická síla, protože magnetickými silami rozumíme síly, které působí mezi magnety nebo mezi magnety a elektrickými proudy nebo konečně mezi vodiči protékajícími proudem. Ve všech případech předpokládáme tělesa elektricky neutrální, neboť síly způsobené převahou náboje jednoho znaménka počítáme k silám elektrickým.

Jak vidíme z vzorce 5.5 (21), dosahuje magnetická síla, kterou působí pomalý náboj Q na kterýkoli jiný libovolně rychlý náboj q (s rychlostí $u < c$), nejvýše velikosti

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} \leq \frac{v}{c} \mathbf{F}_{es},$$

a proto je měřitelná jen tehdy, když na náboj q působí magneticky více nábojů Q různých znamének, jejichž elektrické síly se z největší části navzájem ruší. Nejčastěji máme co činit s magnetickými silami nenabitých vodičů a magnetů. Kdyby současně působila i jiná nabitá tělesa (s pomalými náboji), byla by výsledná síla dána vektorovým součtem síly elektrické a magnetické podle vzorce 5.5 (3).

Magnetické síly mezi náboji mají stejně obecnou existenci jako síly elektrické, neboť nejmenší částice všech těles jsou v neustálém termickém pohybu a dosahují při tom značných rychlostí. Jsou tedy zdrojem magnetických sil, které však obvykle nepozorujeme, protože se síly od jednotlivých nabitých částic navzájem ruší. Označíme-li Q_i náboje těchto částic P_i obsažených v malém objemu ΔV tělesa a $\mathbf{v}_i$ jejich rychlosti, bude podle 5.5 (21') magnetická síla působící na tutéž částici p s nábojem q

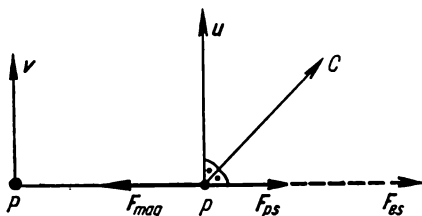
$$\sum_i (\mathbf{F}_{\text{mag}})_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \mathbf{u} \times [(\sum_i Q_i \mathbf{v}_i) \times \mathbf{r}^0],$$

kde jsme předpokládali, že částice p je tak daleko od elementu ΔV , že její průvodiče vedené od všech částic P_i jsou prakticky stejné. Mají-li rychlosti $\mathbf{v}_i$ statisticky různé velikosti i směry, je $\sum_i Q_i \mathbf{v}_i = 0$, i když všechny náboje Q_i mají stejná znaménka. Proto ani nabitě těleso, pokud je v klidu, nevzbuzuje v okolí magnetické pole. Tím spíše to platí o nenabitě těleso ($\sum_i Q_i = 0$), i když je uvedeme do pohybu. Teprve když uvedeme do pohybu nabitě těleso, vznikne konvektivní proud a s ním i magnetické pole, neboť všechny částice P_i v prvku ΔV mají stejnou rychlost a $\sum_i Q_i \mathbf{v}_i$ je nenulový vektor. Ve vodičích (i nenabitých) můžeme dosáhnout aspoň

částečně uspořádaného pohybu nabitých částic jednoho znaménka, působíme-li na ně elektrostatickým polem. Pak je také $\sum Q_i \mathbf{v}_i \neq 0$ a výsledná síla se projeví magnetickým polem kondukčního proudu, které ovšem působí jak na osamělé částice v pohybu, tak i na vodiče protékané proudem.

Pozorovatelné magnetické síly mohou vzniknout i za jiných podmínek. Periodický pohyb téže nabitě částice v uzavřené dráze může mít podobný magnetický účinek jako pohyb mnoha různých částic letících za sebou. Proto musíme připustit, že se magnetické síly projeví i tehdy, když tělesem sice neprochází makroskopický proud, ale když nabitě částice v něm konají periodické pohyby aspoň do té míry uspořádané, že se síly $\mathbf{F}_{\text{mag}}$ od různých obíhajících částic zcela neruší. Takové obíhající částice — elektrony — jsou obsaženy ve velkém množství v každé látce, ale magnetické pole nebudí, pokud dráhy elektronů nejsou aspoň částečně orientovány tak, aby se magnetické účinky jednotlivých elektronů zesilovaly. Taková orientace elektronových drah právě charakterizuje zmagnetované látky.

Obr. (5.5) 3. Magnetická a pseudoelektrostatická síla za rovnoběžného pohybu nabitých částic



Magnetická síla, kterou částice P působí na částici p , je vždycky kolmá k rychlosti částice p a obecně ne-

leží ve spojnici obou částic. Jsou-li však obě rychlosti $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžné a kolmé k spojnici částic, padne magnetická síla

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}_{\text{es}})$$

podle obr. (5.5) 3 do spojnice nábojů. Vektor

$$\mathbf{C} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{F}_{\text{es}})$$

je totiž kolmý k $\mathbf{u}$, takže

$$5.5 (22) \quad \mathbf{F}_{\text{mag}} = -\frac{uv}{c^2} \mathbf{F}_{\text{es}}.$$

Je to síla přitažlivá, kdežto pseudoelektrostatická síla 5.5 (18)

$$5.5 (23) \quad \mathbf{F}_{\text{ps}} = +\frac{v^2}{2c^2} \mathbf{F}_{\text{es}}$$

je podle předešlého článku silou odpudivou. Výsledná síla

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{es}} + \mathbf{F}_{\text{ps}} + \mathbf{F}_{\text{mag}} = \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{uv}{c^2}\right) \mathbf{F}_{\text{es}}$$

je tedy rovněž odpudivá. Kdyby obě částice měly stejné rychlosti $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, bylo by

$$5.5 (24) \quad \mathbf{F}_{\text{mag}} = -\frac{v^2}{c^2} \mathbf{F}_{\text{es}}$$

a výsledná síla

$$5.5 (25) \quad \mathbf{F} = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \mathbf{F}_{\text{es}} \approx \sqrt{1 - v^2/c^2} \mathbf{F}_{\text{es}}.$$

Magnetická a pseudoelektrostatická síla by se pro $u = v/2$ zrušily a výslednice by byla rovna elektrostatické síle.

Kdyby se částice pohybovaly proti sobě ($\mathbf{u} = -\mathbf{v}$), změnila by znaménko jen magnetická síla, síly elektrické nikoli. Výsledná síla mezi náboji je ovšem vždycky odpudivá, neboť síly $\mathbf{F}_{\text{ps}}$ a $\mathbf{F}_{\text{mag}}$ jsou obvykle jen „korekční“ relativistní úkazy. Jen pro dva svazky velmi rychlých iontů by tyto síly byly pozorovatelné. Jinak je tomu ovšem, když jde o dva rovnoběžné nenabitě vodiče, kterými procházejí proudy souhlasným směrem. Takové vodiče se přitahují,

protože elektrické síly mezi nimi se ruší, a na této přitažlivé síle je založena definice 5.6 (38) jednotky proudu v soustavě SI, tj. ampéru.

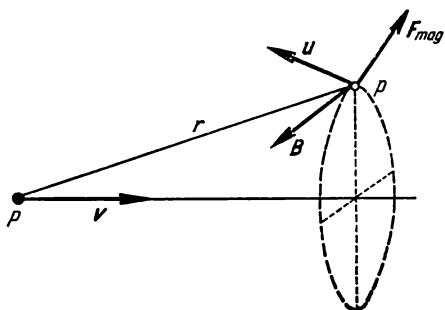
Magnetické síly jsou stejně jako síly pseudoelektrostatické velmi malé 2. řádu, přesto mají praktický význam i při zcela pomalých pohybech nabitých částic, jestliže síly magnetické nevymizí zároveň se silami elektrostatickými. Ruší-li se totiž elektrostatické síly, které samy o sobě jsou značné, je možno dobře pozorovat síly magnetické, i když jsou ve srovnání s elektrostatickými silami nesmírně malé.

Ve zvláštním případě znázorněném na obr. (5.5) 3 působí podle 5.5 (22) částice p na částici P magnetickou silou $-F_{\text{mag}}$, neboť elektrostatická síla, kterou působí p na P , je $-F_{\text{es}}$. V tomto případě splňuje tedy magnetická síla třetí Newtonův axiom o rovnosti akce a reakce, který ve své podstatě znamená zachování hybnosti. Obecně síly mezi pohybujícími se částicemi nesplňují princip akce a reakce, jak jsme poznamenali na konci čl. 5.5.1.

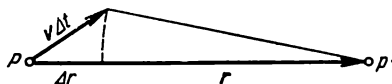
5.5.4. Magnetické pole nabitě částice

Měřitelná magnetická síla vzniká obvykle jen současným působením velkého počtu nabitých částic, jejichž elektrické síly se navzájem ruší. Taková magnetická síla je ovšem výslednicí magnetických sil vzbuzených jednotlivými nabitými částicemi, jak plyne ze zákona superpozice. Proto vyšetříme především vlastnosti magnetické síly, jejímž zdrojem je jedna nabitá částice.

Částice P s nábojem Q , která se pohybuje stálou rychlostí $\mathbf{v}$, působí na částici p s nábojem q , která má rychlost $\mathbf{u}$, magnetickou silou 5.5 (21'). Můžeme ji psát ve tvaru



Obr. (5.5) 4. Magnetická síla v poli letícího náboje



Obr. (5.5) 5. Změna vzdálenosti pohybující se částice P od klidné částice p

$$5.5 (26) \quad \mathbf{F}_{\text{mag}} = q\mathbf{u} \times \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0) = q\mathbf{u} \times \mathbf{B},$$

kde vektor

$$5.5 (27) \quad \mathbf{B} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0)$$

je v každém místě prostoru zcela určen působící částicí P . Jejím pohybem je tedy definováno vektorové pole $\mathbf{B}$, které má důležitou vlastnost, že magnetická síla, kterou působí částice P na částici p , je dána vektorovým součinem 5.5 (26). Fyzikálně to znamená, že v okolí částice P se rozprostírá *magnetické pole*, které se vyznačuje tím, že každý pohyblivý náboj podléhá v něm jisté magnetické síle stanovené vektorovým polem $\mathbf{B}$ v místě tohoto náboje, jak je znázorněno na obr. (5.5) 4. Vektorem $\mathbf{B}$ je magnetické pole částice P plně charakterizováno, podobně jako vektor $\mathbf{E}$, charakterizuje elektrostatické pole. Vektor $\mathbf{B}$ se nazývá z historických důvodů *vektorem magnetické indukce* nebo prostě *magnetickou indukcí* pole částice P .

K tomu připojíme důležitou poznámku: Řekli jsme již, že elektrické pole se šíří prostorem rychlostí světla. Proto se magnetické účinky letící částice projeví ve vzdálenosti r od její okamžité polohy se zpožděním $\Delta t = r/c$. Za tuto kratičkou dobu se nezmění rychlost $\mathbf{v}$ částice P , protože je stálá. Změní se však její vzdálenost r od částice p o hodnotu Δr , která se podle obr. (5.5) 5 rovná

$$\Delta r = -(\mathbf{v}\Delta t) \cdot \mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}^0}{c} r.$$

Poměrná změna vzdálenosti je tedy

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}^0}{c} \leq \frac{v}{c}$$

a při malé rychlosti $v \ll c$ k ní nemusíme přihlížet.

Vektor $\mathbf{B}$ souvisí jednoduchým vztahem s intenzitou $\mathbf{E}_s$ elektrostatického pole, které by budila částice P , kdyby byla v klidu:

$$5.5 (28) \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_s).$$

Čtverec rychlosti světla není v tomto výrazu výhodný a je dávným zvykem zavádět v magnetismu konstantu

$$5.5 (29) \quad \boxed{\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2},}$$

která se nazývá *magnetická permeabilita vakua*. Je to stejně jako ϵ_0 univerzální konstanta a má podle 5.6 (38') a v soulase s 5.1 (5) hodnotu

$$5.5 (30) \quad \mu_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\text{F m}^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Cs}^{-1}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1} = \\ = 1,256\,64 \cdot 10^{-6} \text{ Hm}^{-1},$$

kde jsme označili $\text{H} = \text{VsA}^{-1}$.*) Magnetickou indukci měříme podle 5.5 (28) v jednotkách zvaných *tesla* = T:

$$5.5 (31) \quad \frac{\text{Vm}^{-1}}{\text{ms}^{-1}} = \text{Vsm}^{-2} = \text{Wb m}^{-2} = \text{T},$$

kde $\text{Vs} = \text{Wb}$ se nazývá *weber*.

Pro další úvahy je vhodné zavést vektor *elektrické hybnosti* nabité částice. Definujeme jej jako součin náboje částice a její rychlosti:

$$5.5 (32) \quad \mathbf{v}^* = Q\mathbf{v}.$$

Měří se v jednotkách Am a je elektrickou obdobou „mechanické“ hybnosti, která je součinem hmotnosti a rychlosti částice. Pak dostaneme z 5.5 (27)

$$5.5 (33) \quad \boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi r^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (\mathbf{v}^* \times \mathbf{r}^0),}$$

takže magnetická síla působící na částici s elektrickou hybností

$$5.5 (34) \quad \mathbf{u}^* = q\mathbf{u}$$

je rovna

$$5.5 (35) \quad \boxed{\mathbf{F}_{\text{mag}} = \mathbf{u}^* \times \mathbf{B}.$$

*) V čl. 5.9.4 uvidíme, že H je jednotkou indukčnosti a nazývá se *henry*.

Tento výraz pro magnetickou sílu je téměř stejně jednoduchý jako výraz 5.1 (7) pro sílu elektrostatickou, ale vektorové pole $\mathbf{B}$ má jiné vlastnosti než pole $\mathbf{E}_s$. Ve všech místech elektrostatického pole, kde nejsou nabitě částice, platí rovnice 5.1 (24) a 5.1 (43):

$$5.5 (36) \quad \operatorname{div} \mathbf{E}_s = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_s = 0.$$

Pro vektor $\mathbf{B}$ plyne z 5.5 (28) vzhledem k známému pravidlu D (22)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_s) = \frac{1}{c^2} \mathbf{E}_s \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \\ &= -\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_s) \end{aligned}$$

čili

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E}_s \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}_s.$$

Protože však $\mathbf{v}$ je stálý vektor, platí všude mimo částici P rovnice

$$5.5 (37) \quad \boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0}$$

v souhlase s druhou rovnicí 5.5 (36).

Abychom vypočetli

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{B} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z},$$

pišme podle 5.5 (28)

$$c^2 B_x = v_x E_{sy} - v_y E_{sx}, \quad c^2 B_y = v_z E_{sx} - v_{xz} E_{sx}.$$

Složky v_x, v_y, v_z jsou stálé, tedy

$$c^2 \operatorname{rot}_x \mathbf{B} = v_x \frac{\partial E_{sy}}{\partial y} - v_y \frac{\partial E_{sx}}{\partial y} - v_z \frac{\partial E_{sx}}{\partial z} + v_{xz} \frac{\partial E_{sx}}{\partial z},$$

a protože

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_s = \frac{\partial E_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial E_{sy}}{\partial y} + \frac{\partial E_{sz}}{\partial z},$$

dostaneme

$$c^2 \operatorname{rot}_x \mathbf{B} = -\left(v_x \frac{\partial E_{sx}}{\partial x} + v_y \frac{\partial E_{sx}}{\partial y} + v_z \frac{\partial E_{sx}}{\partial z}\right).$$

Částice p má souřadnice x, y, z a označíme-li X, Y, Z souřadnice částice P , bude

$$\begin{aligned} E_{sx} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x-X}{r^3}, \quad r = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}, \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= -\frac{\partial r}{\partial X}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial Y}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial Z}, \end{aligned}$$

takže

$$\frac{\partial E_{sx}}{\partial x} = -\frac{\partial E_{sx}}{\partial X}, \quad \frac{\partial E_{sx}}{\partial y} = -\frac{\partial E_{sx}}{\partial Y}, \quad \frac{\partial E_{sx}}{\partial z} = -\frac{\partial E_{sx}}{\partial Z}.$$

Poněvadž

$$v_x = \frac{dX}{dt}, \quad v_y = \frac{dY}{dt}, \quad v_z = \frac{dZ}{dt},$$

je

$$c^2 \operatorname{rot}_x \mathbf{B} = \frac{\partial E_{sx}}{\partial X} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial E_{sx}}{\partial Y} \frac{dY}{dt} + \frac{\partial E_{sx}}{\partial Z} \frac{dZ}{dt} = \frac{dE_{sx}}{dt}.$$

Tak přicházíme k důležité rovnici

$$5.5 \quad (38) \quad \boxed{\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial t}},$$

která je jednou ze základních rovnic teorie elektromagnetického pole.

Při pohybu jediné nabitě částice se však v pevném bodě pozorovací soustavy vždycky mění elektrostatické pole, které částice unáší s sebou. Proto je časová změna intenzity $\mathbf{E}_s$ a tedy i rotace magnetické indukce různá od nuly. Vidíme tedy, že *magnetické pole pohybujícího se náboje je nezřídlové a vírové*. Magnetické indukční čáry jsou v sebe uzavřeny a nikde nevznikají, ani nekončí. Jsou to zřejmě kružnice souměrné podle přímky, po které se budící částice pohybuje. Jedna z těchto kružnic je zakreslena (čárkovaně) na obr. (5.5) 4.

Všechny poznatky odvozené v této kapitole jsou dosti přesné jen při malých rychlostech nabitých částic, které ve svém okolí budí pomalu proměnné elektrické a magnetické pole. Souhrn obou polí tvoří za těchto podmínek *kvazistacionární elektromagnetické pole*. Stacionární (časově neproměnné) elektromagnetické pole by vzniklo např. v okolí svazku rychlých elektronů nebo iontů.

5.5.5. Působení magnetického pole na proudovou smyčku a na oběžný elektron

Dosud jsme nevysvětlili, co má síla $\mathbf{F}_{\text{mag}}$ společného s magnetismem. Vyplyne to ze způsobu, jakým vektorové pole $\mathbf{B}$ působí na oběžné elektrony v atomech, neboť proudy magneticky ekvivalentní elektronům kroužícím kolem jádra atomu v elektronovém obalu jsou právě ony hypotetické proudy, kterými již Ampère vykládal magnetické vlastnosti látek.

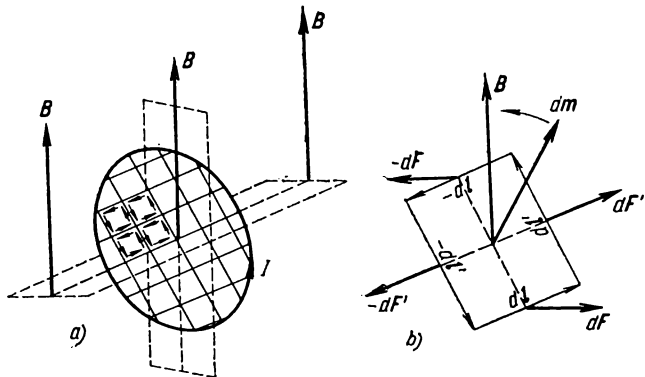
Elektrony obíhají (podle modelové atomové teorie) kolem jader atomů po drahách nepatrného průměru (řádu 10^{-10} m) s velikou frekvencí řádu 10^{14} až 10^{15} Hz. Proto lze magnetické pole vzbuzené v makroskopické vzdálenosti od nabitě částice pokládat za homogenní v rozsahu elektronové dráhy. Při přechodu elektronu do protilehlého bodu oběžné dráhy změní se směr jeho rychlosti v opačný a tím přejde i síla 5.5 (35), která na něj působí, ve stejné velkou sílu opačného směru. Je tedy zřejmé, že střední hodnota takto proměnné síly je nulová. Proto elektron kroužící s vysokou frekvencí nepodléhá v magnetickém poli měřitelné posuvné síle. Přece však atom s oběžným elektronem podléhá v magnetickém poli točivému momentu, jehož střední hodnotu lze z rovnice 5.5 (35) přesně vypočítat. Ujijeme zde jiného, názornějšího postupu založeného na myšlence, že časovou střední hodnotu periodicky proměnného točivého momentu působícího na oběžný elektron je možno nahradit momentem, kterým by působilo magnetické pole na časově stálý lineární proud ekvivalentní pohybu náboje $-e$ po oběžné dráze elektronu. Tento ekvivalentní proud I_{e1} obíhá vzhledem k zápornému náboji elektronu v opačném smyslu než elektron a určíme jej takto: Je-li $T = \frac{1}{f}$ perioda oběhu, projde každým místem dráhy za jednotku doby náboj $-ef \cdot 1$ s; toto průměrné množství náboje projde za jednotku doby proudovým vláknem, kterým protéká proud

$$5.5 \quad (39) \quad I_{e1} = -ef = -\frac{e}{T},$$

čímž je úloha převedena na stanovení účinku magnetického pole na eliptické proudové vlákno. Vyšetříme tento účinek nejprve pro rovinnou proudovou smyčku libovolného tvaru v homogenním poli.

Předpokládejme, že podle obr. (5.5) 6a míří vektor $\mathbf{B}$ svisle vzhůru, a protněme rovinu smyčky řadou vodorovných rovin. Soustavou spádových přímk doplníme tak vzniklé

vodorovné přímky na pravouhlou síť přímek, která dělí plochu dráhy na elementární obdélníčky. Představme si, že obvod každého obdélníčka je obtékán proudem I ve stejném smyslu. Jak je naznačeno na obr. (5.5) 6a, jdou po každé straně všech vnitřních obdélníků dva stejné proudy opačného směru, u nichž se magnetické účinky ruší. Jen na vnějších stranách, které dohromady tvoří původní smyčku, není proud rušen žádným sousedním proudem. Výsledný magnetický účinek pole na všechny elementární obdélníkové proudy musí tedy být rovný účinku pole na celou smyčku.



Obr. (5.5) 6 a — Proudová smyčka v magnetickém poli; b — silová dvojice působící na elementární obdélníkový proud

Abychom mohli určit magnetické síly 5.5 (35), působící na proudové prvky v jednom obdélníčku, musíme najít elektrickou hybnost prvku proudu. Proud obíhající lineárním vodičem je způsoben pohybem náboje, který je stejnoměrně rozložen na vodiči s délkovou hustotou τ . Je-li u rychlost náboje, projde průřezem vodiče za dobu dt náboj obsažený na délce $dl = u dt$, tj.

$$dQ = \tau dl = \tau u dt = I dt.$$

Je tedy

$$5.5 (40) \quad I = \frac{dQ}{dt} = \tau u$$

a elektrická hybnost proudového prvku, jehož délka a směr jsou určeny vektorem $d\mathbf{l}$ je podle 5.5 (32)

$$5.5 (41) \quad d\mathbf{u}^* = dQ \cdot \mathbf{u} = I d\mathbf{l}.$$

O její velikosti nerozhoduje tedy odděleně ani množství náboje, ani jeho rychlost, ale jen jejich součin a je dána proudem násobeným délkou prvku. A teď už snadno vyšetříme silové působení pole na kterýkoli z obdélníků podle obr. (5.5) 6b. Strany každého z nich jsou vektory $d\mathbf{l}$, $d\mathbf{l}'$, $-d\mathbf{l}$, $-d\mathbf{l}'$ s kladným smyslem voleným souhlasně s oběhem proudu (s oběhem kladných nábojů) a orientovaná plocha obdélníčku je vektor kolmý k rovině smyčky:

$$5.5 (42) \quad d\mathbf{S} = d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}'.$$

Elektrické hybnosti prvních dvou proudových prvků jsou

$$d\mathbf{u}^* = I d\mathbf{l}, \quad d\mathbf{u}^{*'} = I d\mathbf{l}'$$

a příslušné magnetické síly 5.5 (35)

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{u}^* \times \mathbf{B} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad d\mathbf{F}' = I d\mathbf{l}' \times \mathbf{B}.$$

Zbývající dva prvky podléhají silám, které se od těchto sil liší jen znaménkem. Proto se posuvný účinek všech čtyř sil ruší a kromě toho síly $d\mathbf{F}'$ a $-d\mathbf{F}'$ leží v přímce. Zbývá tedy jen točivý moment dvojice sil $d\mathbf{F}$ a $-d\mathbf{F}$, které leží v různých vodorovných rovinách:

$$d\mathbf{M} = -d\mathbf{l}' \times d\mathbf{F},$$

neboť průvodič vedený od působíště záporné síly k působíšti kladné síly je $-d\mathbf{l}'$. Užijeme-li známého vzorce D (23) pro trojnásobný vektorový součin, dostaneme

$$d\mathbf{M} = -d\mathbf{l}' \times (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = I (d\mathbf{l}' \cdot d\mathbf{l}) \mathbf{B} - I (d\mathbf{l}' \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{l}.$$

Podle téhož vzorce však

$$I (d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \times \mathbf{B} = I \mathbf{B} \times (d\mathbf{l}' \times d\mathbf{l}) = I (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}) d\mathbf{l}' - I (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}') d\mathbf{l},$$

a protože $d\mathbf{l}' \perp d\mathbf{l}$ a $\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}$, jsou oba poslední výrazy totožné, takže podle 5.5 (42)

$$5.5 (43) \quad d\mathbf{M} = I d\mathbf{S} \times \mathbf{B}.$$

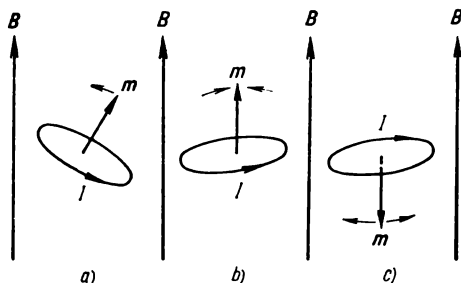
Vektor

$$5.5 (44) \quad d\mathbf{m} = I d\mathbf{S}$$

je kolmý k rovině elementárního obdélníčku a míří směrem postupu pravotočivého šroubu otáčeného ve smyslu oběhu proudu. Nazývá se *magnetický moment* a vektor příslušný celé smyčce plochy S je rovný vektorovému součtu všech $d\mathbf{m}$:

$$5.5 (45) \quad \mathbf{m} = \int d\mathbf{m} = \int I d\mathbf{S} = I \int d\mathbf{S}.$$

Je-li smyčka rovinná, jak jsme předpokládali, je její magnetický moment



5.5 (46)

$$\mathbf{m} = I \mathbf{S}$$

rovný součinu proudu a plochy smyčky orientované podle smyslu oběhu proudu, jak jsme již řekli. Je-li pole $\mathbf{B}$ v rozsahu smyčky homogenní, působí na smyčku výsledným točivým momentem

5.5 (47)

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

Obr. (5.5) 7. Proudová smyčka v magnetickém poli: a — v obecné, b — v stabilní, c — v labilní poloze

který se snaží otočit vektor magnetického momentu do směru pole. Stane-li se tak, točivý moment vymizí a smyčka je ve stabilní poloze, protože se při vychýlení vrací účinkem mo-

mentu $\mathbf{M}$ do této polohy. Moment $\mathbf{M}$ vymizí sice, i když vektory $\mathbf{m}$ a $\mathbf{B}$ jsou protisměrné, ale tato poloha je zřejmě labilní. [Srovn. obr. (5.5) 7.]

Z našeho odvození je patrné, že poslední rovnice platí v homogenním poli pro libovolnou smyčku, i když není rovinná, počítáme-li ovšem její magnetický moment podle obecného vzorce 5.5 (45).

Vraťme se teď k elektronu obíhajícímu kolem jádra atomu. Podle 5.5 (39) má magnetický moment

$$\mathbf{m}_{el} = I_{el} \mathbf{S} = -e \frac{\mathbf{S}}{T},$$

je-li $\mathbf{S}$ vektor plochy jeho dráhy, která je i při záporném náboji elektronu orientována podle oběhu proudu kladných nábojů. Podle modelové teorie obíhá elektron po eliptické dráze se stálou plošnou rychlostí

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{S}}{T},$$

a jeho magnetický moment

$$\mathbf{m}_{el} = -e\mathbf{w}$$

je tedy také stálý vektor. Obecně platí pro magnetický moment částice s nábojem Q , obíhající po uzavřené dráze s plošnou rychlostí $\mathbf{w}$, vzorec

$$5.5 (48) \quad \mathbf{m} = Q\mathbf{w} = \mathbf{w}^*.$$

Nazveme-li součin náboje a plošné rychlosti *plošnou elektrickou hybností* částice, máme fyzikální význam magnetického momentu částice dán její plošnou elektrickou hybností:

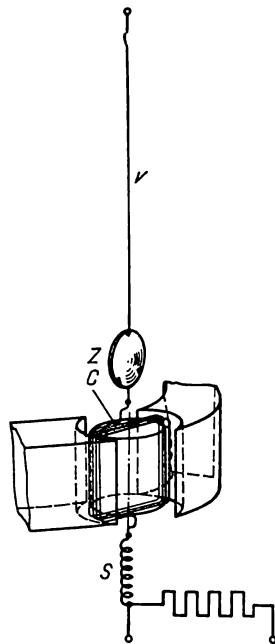
$$5.5 (49) \quad \mathbf{m} = \mathbf{w}^* = Q \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{v}^*),$$

značí-li $\mathbf{a}$ okamžitý průvodič částice vedený ze středu přitažlivých sil. Můžeme tedy říci, že *oběžný elektron má magnetický moment rovný jeho plošné elektrické hybnosti* nebo polovičnímu momentu jeho elektrické hybnosti vzhledem k jádru.

V souhrnu dospíváme k poznatku, že v prostoru, kde je rozloženo vektorové pole $\mathbf{B}$, působí na oběžné dráhy elektronů v atomech točivé momenty, které je hledí orientovat tak, aby jejich plošné elektrické hybnosti byly souhlasné rovnoběžné se směrem pole. Stane-li se tak (aspoň z části), má pak látka jistý výsledný vektor $\mathbf{m}$. Látka s usměrněnými drahami elektronů však vzbuzuje ve svém okolí rovněž své vlastní pole $\mathbf{B}$, které působí podobně na jiné látky s usměrněnými plošnými hybnostmi elektronů, jak dokážeme v příštím článku.

Na působení točivého momentu 5.5 (47) na proudovou smyčku v magnetickém poli se zakládá funkce nejužívanějších proudoměrných přístrojů s měřicí cívkou (systém Deprez-d'Arsonval). Nejcitlivější z nich jsou zrcátkové galvanoměry, jejichž schéma vidíme na obr. (5.5) 8.

Lehká plochá cívka C je zavěšena na vodivém vlákně V (což bývá tenounký drátek nebo bronzový pásek), kterým se do ní přivádí proud. Její druhý konec je vodivě připojen několika závity tenkého drátu („spirálou“ S) k spodnímu kontaktu se svorkou. Cívka C , navinutá na obdélníkovém rámečku, volně prochází při stáčení úzkou válcovou mezerou mezi póly silného magnetu a nehybným vnitřním válcem z měkkého železa. Nulová poloha cívky a lehounkého zrcátka Z upevněného nad cívkou je určena nezkrouteným vláknem; volí se tak, aby cívka ležela v rovině obou pólů magnetu. Prochází-li cívku (velmi slabý) proud, ustálí se cívka v poloze, v níž se moment magnetického pole právě vyrovná torzní dvojici krouceného vlákna. V úzké válcové mezeře, v níž se cívka otáčí, je magnetické pole takřka přesně radiální a torzní dvojice je úměrná výchylce. Kromě toho je magnetické pole vodiče úměrné procházejícímu proudu; popsaný galvanoměr má tedy důležitou vlastnost, že *výchylka je úměrná proudu*. Platí to (ve značném rozsahu) pro úhlovou výchylku; pozorujeme-li ovšem zrcátkovou metodou, je čtení na stupnici úměrné jen při dosti malých výchylkách.



Obr. (5.5) 8. Schéma zrcátkového galvanoměru Deprez-D'Arsonval

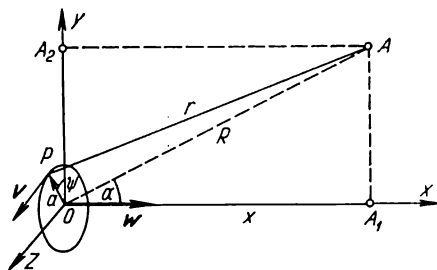
Původní způsob měření zrcátkovým galvanoměrem se stupnicí a dalekohledem nebo značkovou lampou není praktický. Proto se dnes často konstruují zrcátkové galvanoměry tak, že zařízení pro měření výchylky je pevně spojeno s přístrojem a soustředěno na malý prostor.

Dosáhne se toho např. tak, že se paprsek dopadající ze značkové lampy na zrcátko několikrát odrazí mezi dvěma obdélníkovými zrcátky, takže jeho stopa se pohybuje po průsvitné stupnici umístěné na skřínce přístroje, na níž čteme výchylku zrcátka stejně jako při obvyklé zrcátkové metodě.

Citlivost zrcátkových galvanoměrů se charakterizuje počtem ampérů, který způsobí změnu čtení o 1 mm na stupnici vzdálené 1 m od zrcátka. Toto číslo je ovšem tím menší, čím je galvanoměr citlivější, a proto je pro ně vhodnější název *konstanta galvanoměru* než dřívější název *citlivost*. U obvyklých druhů (s měřicí cívkou) bývá tato konstanta řádu 10^{-8} až 10^{-9} A (výjimečně 10^{-10} až 10^{-11} A) na dílek stupnice.

5.5.6. Magnetické pole oběžných elektronů

Abychom se přesvědčili, že látka s usměrněnými magnetickými momenty oběžných elektronů je zdrojem magnetického pole, je třeba vyšetřit pole $\mathbf{B}$ vzbuzené kroužícím elektronem. Jak ukážeme v doplňkovém textu, platí obecně pro pole obíhající částice se stálou plošnou rychlostí $\mathbf{w}$ ve vzdálenosti R velké proti rozměrům oběžné dráhy přibližné vzorce:



Obr. (5.5) 9. Magnetické účinky kroužícího náboje

$$5.5 (50) \quad \bar{B}_1 = \frac{2\mu_0 m}{4\pi R^3},$$

$$\bar{B}_2 = -\frac{\mu_0 m}{4\pi R^3},$$

kde $\mathbf{m} = Q\mathbf{w}$ je magnetický moment. Vidíme, že (v A_1) na ose dráhy má pole $\bar{B}_1$ směr plošné elektrické hybnosti částice, v rovině dráhy (v A_2) má pole $\bar{B}_2$ směr opačný a poloviční velikost.

Dosadíme-li do hořejších rovnic za $\mathbf{m}$ vektor $\mathbf{m}_{el} = -e\mathbf{w}$, máme již složky indukce magnetického pole oběžného elektronu. K odvozeným vzorcům se ještě vrátíme, zde jen upozorníme na jejich obdobu se vzorci 5.1 (15) a 5.1 (17) pro pole elektrického dipólu.

Pole $\mathbf{B}$ jediného elektronu se periodicky mění, ale ve skutečnosti pozorujeme účinky ohromného počtu elektronů. Jejich pohyby nejsou synchronovány, mají všechny možné fáze, takže výsledné pole je časově stálé, nehledíme-li k nepozorovatelnému statistickému kolísání. Proto má pro vlastnosti makroskopického pole význam právě *střední hodnota pole rotující částice*, za kterou vezmeme nabitou částici s nábojem Q , s nímž budeme počítat jako s kladným. Vypočteme ji v obecné poloze A podle obr. (5.5) 9. Částice P s nábojem Q necht krouží v rovině OYZ se stálou plošnou rychlostí $\mathbf{w}$, a má tedy stálou plošnou elektrickou hybnost 5.5 (48). V libovolném okamžiku budí částice P podle 5.5 (33) v místě A , určeném průvodičem $\mathbf{r}$, magnetické pole

$$5.5 (51) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi r^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\mathbf{v}^* \times \mathbf{r}),$$

jehož velikost i směr se při oběhu částice periodicky mění. Abychom našli střední hodnotu vektoru $\mathbf{B}$, stačí vypočítat střední hodnoty složek B_x , B_y , neboť vektor $\mathbf{B}$ určitě leží v rovině OXY , vzhledem k níž je oběžná dráha souměrná. Podle obr. (5.5) 9 mají body A a P souřadnice

$$A(x, y, 0); \quad P(0, a \cos \varphi, a \sin \varphi), \quad \varphi = \omega t.$$

Vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{r}$ mají složky

$$v_x = 0, \quad v_y = -a\omega \sin \omega t, \quad v_z = a\omega \cos \omega t,$$

$$r_x = x, \quad r_y = y - a \cos \omega t, \quad r_z = -a \sin \omega t,$$

takže

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = x^2 + y^2 + a^2 - 2ay \cos \omega t = R^2 + a^2 - 2ay \cos \omega t.$$

Podle vzorce pro vektorový součin

$$\begin{aligned}(\mathbf{v} \times \mathbf{r})_x &= v_y r_z - v_z r_y = a^2 \omega \sin^2 \omega t - a \omega y \cos \omega t + a^2 \omega \cos^2 \omega t = \\ &= a^2 \omega - a \omega y \cos \omega t, \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{r})_y &= v_z r_x - v_x r_z = a \omega x \cos \omega t\end{aligned}$$

a podle 5.5 (51) tedy

$$B_x = \frac{\mu_0 Q \omega}{4\pi r^3} (a^2 - a y \cos \omega t), \quad B_y = \frac{\mu_0 Q \omega}{4\pi r^3} a x \cos \omega t, \quad B_z = 0.$$

Avšak $\omega dt = d\psi$ a střední hodnoty složek

$$\begin{aligned}5.5 \quad (52) \quad \bar{B}_x &= \frac{1}{T} \int_0^T B_x dt = \frac{\mu_0 Q}{4\pi T} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - a y \cos \psi) d\psi}{(R^2 + a^2 - 2ay \cos \psi)^{3/2}}, \\ \bar{B}_y &= \frac{\mu_0 Q}{4\pi T} \int_0^{2\pi} \frac{a x \cos \psi d\psi}{(R^2 + a^2 - 2ay \cos \psi)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Integrace je snadná pro bod A_1 na ose dráhy, pro který je

$$y_1 = 0, \quad R_1 = x.$$

Protože

$$5.5 \quad (53) \quad \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi = 0,$$

je složka $\bar{B}_y$ rovna nule. Pole má tedy směr osy OX a střední velikost

$$5.5 \quad (54) \quad \bar{B}_1 = \frac{\mu_0 Q}{4\pi T} \cdot \frac{2\pi a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 m}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Vlastnosti makroskopického pole studujeme však ve vzdálenosti R , velké proti poloměru dráhy částice. Proto se omezíme na výpočet střední hodnoty za předpokladu, že $a \ll R$. Pak můžeme rozvinout jmenovatele výrazu 5.5 (52) podle binomické věty:

$$\frac{a^2 - a y \cos \psi}{(R^2 + a^2 - 2ay \cos \psi)^{3/2}} = \frac{a^2 - a y \cos \psi}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{3ay}{R^2 + a^2} \cos \psi + \dots \right],$$

a pomineme-li poměr a^2/R^2 proti jedné, dostaneme

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R^5} (a^2 - a y \cos \psi) (R^2 + 3ay \cos \psi) = \\ &= \frac{1}{R^5} (R^2 a^2 - R^2 a y \cos \psi + 3a^2 y \cos \psi - 3a^2 y^2 \cos^2 \psi).\end{aligned}$$

Vzhledem k známým vztahům

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos \psi \sin \psi d\psi = 0$$

a ke vztahu 5.5 (48) plyne z 5.5 (52)

$$\bar{B}_x = \mu_0 \frac{Q \pi a^2}{4\pi T} \cdot \frac{2x^2 - y^2}{R^5} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} \cdot \frac{2x^2 - y^2}{R^2},$$

neboť plocha dráhy dělená oběžnou dobou je rovna plošné rychlosti částice. Proto můžeme psát

$$5.5 \quad (55) \quad \bar{B}_x = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \cdot \frac{2x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Stejným postupem odvodíme

$$5.5 \quad \bar{B}_y = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \cdot \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}, \quad \bar{B}_z = 0.$$

Vzorce 5.5 (55, 56) můžeme psát přehledněji, označíme-li α úhel sevřený průvodičem R , vedeným ze středu oběžné dráhy částice do místa pozorování. Pak

$$x = R \cos \alpha, \quad y = R \sin \alpha,$$

a střední hodnoty složek magnetického pole

$$5.5 \quad \bar{B}_x = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha),$$

$$\bar{B}_y = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} 3 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \bar{B}_z = 0$$

klesají tedy nepřímou úměrně s třetí mocninou vzdálenosti od kroužící částice. Pak pro body na ose oběžné dráhy ($\alpha = 0$) a pro body ležící v rovině dráhy ($\alpha = \pm \pi/2$) je $\bar{B}_y = 0$. Platí tedy ve velké vzdálenosti od částice přibližné vzorce 5.5 (50).

5.6. Stacionární magnetické pole

5.6.0. Úvod

V předešlých dvou kapitolách jsme shledali, že osamocená nabitá částice budí v okolním prostoru elektromagnetické pole, které se projevuje elektrostatickými, pseudoelektrostatickými i magnetickými silami. Tato pole jsou časově proměnná a při pomalých setrvačných pohybech budících částic mají některé zvláštní jednoduché vlastnosti. Proto taková pomalu proměnná pole odlišujeme od rychle proměnných polí názvem *kvazistacionární* pole. Při současném působení velkého množství částic lze dosáhnout toho, že pole je makroskopicky časově stálé.*) Taková *stacionární* pole provázejí ustálené stejnosměrné proudy. Tak např. svazek katodových paprsků (urychlených elektronů) nebo svazek iontů, vystupujících z nějakého urychlovače, vzbuzuje stacionární elektromagnetické pole. Zvláště jednoduchá stacionární pole pak vytvářejí ustálené (stejnosměrné) indukční proudy v nenabitých vodičích. V jejich okolí se navzájem ruší účinky elektrických sil od opačně nabitých částic, takže nic nebrání, aby se plně uplatnilo ryze magnetické pole, které vzhledem k veliké hustotě pohyblivých nábojů může dosáhnout velké intenzity. Podobně i magnety, pokud jsou v klidu a nejsou nabity, jsou zdrojem ryze magnetických stacionárních polí. Taková pole jsou předmětem výkladu v této kapitole.

5.6.1. Intenzita magnetického pole

Z našeho pojetí magnetického pole jakožto relativnostního efektu, který vzniká pohybem nabitých částic, je magnetické pole úplně charakterizováno vektorem magnetické indukce $\mathbf{B}$, z něhož plynou všechny vlastnosti tohoto pole. Se zřetelem k dosud platným zvyklostem pokládáme však za vhodné zavést — aspoň formálně — i v této knize další vektor $\mathbf{H}$,

*) Pohybem jednotlivých částic s elementárními náboji (např. elektronů nebo jednomocných iontů) může vzniknout — přesně vzato — jen nespojitý elektrický proud, jehož relativní statistické kolísání klesá ovšem s rostoucím počtem částic, které vytvářejí proud. Proto se nám proudy obvyklé síly jeví spojitě a jen u zcela slabých proudů lze pozorovat kolísání velmi citlivým zařízením. Nepravidelné změny elektrického proudu jsou jednou z příčin tzv. *šumu* elektronek.

který se nazývá *intenzita magnetického pole* podle svého významu ve staré fluidové teorii magnetismu. Ve vakuu je tento vektor definován jednoduchým vztahem

$$5.6 (1) \quad \boxed{\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B},}$$

který je obdobný vztahu 5.2 (29) mezi intenzitou a indukcí elektrostatického pole. Fyzikální význam vektoru $\mathbf{H}$ poznáme v čl. 5.6.7. Zavedeme-li vektor $\mathbf{H}$ do rovnice 5.5 (47), dostaneme vztah

$$5.6 (2) \quad \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{H},$$

který vybízí k nahrazení vektoru $\mathbf{m}$ novým vektorem:

$$5.6 (3) \quad \mathbf{p}_m = \mu_0 \mathbf{m} = \mu_0 I \mathbf{S} = \mu_0 \mathbf{w}^*.$$

Nazývá se *dipólový* nebo *Coulombův* magnetický moment proudové smyčky nebo obíhající částice. Tak dostaneme pro točivý moment výraz

$$5.6 (4) \quad \mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{H}$$

formálně shodný s výrazem 5.1 (19) pro točivý moment, kterým působí na elektrický dipól momentu $\mathbf{p}$ elektrostatické pole intenzity $\mathbf{E}_s$. Jednotky nově zavedených vektorů jsou podle 5.5 (30, 31) a 5.6 (3)

$$5.6 (5) \quad [\mathbf{H}] = \frac{[\mathbf{B}]}{[\mu_0]} = \frac{\text{Vs m}^{-2}}{\text{Vs A}^{-1} \text{m}^{-1}} = \text{A m}^{-1},$$

$$5.6 (5') \quad [\mathbf{p}_m] = [\mu_0 I \mathbf{S}] = \text{Vs A}^{-1} \text{m}^{-1} \text{A m}^2 = \text{Vsm} = \text{Wb m}.$$

Z definice vektoru $\mathbf{H}$ plyne vzhledem k 5.5 (33), že intenzita magnetického pole jedné částice

$$5.6 (6) \quad \mathbf{H} = \frac{Q}{4\pi r^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0) = \frac{\mathbf{v}^* \times \mathbf{r}^0}{4\pi r^2}$$

a že intenzita pole vzbuzeného libovolným počtem částic je vektorovým součtem intenzit polí všech částic.

Vektory $\mathbf{B}$ a $\mathbf{H}$ se liší (ve vakuu a v homogenním prostředí) jen konstantním činitelem, a proto je možno ke studiu polí užít kteréhokoli z nich. Pro pole makroskopických proudů se nejčastěji užívá intenzity $\mathbf{H}$, a proto odvodíme elementární zákon pro intenzitu těchto polí.

Předpokládejme, že v malém objemu dV se pohybuje mnoho nabitých částic, jejichž rychlosti jsou aspoň částečně uspořádány, takže částice mají nenulovou výslednou elektrickou hybnost $d\mathbf{v}^*$. Superpozicí jejich magnetických polí ve vzdálenosti r velké proti rozměrům objemu dV vznikne tedy pole o intenzitě

$$5.6 (7) \quad d\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{v}^* \times \mathbf{r}^0}{4\pi r^2},$$

kde $\mathbf{r}^0$ je jednotkový vektor ve směru průvodiče $\mathbf{r}$ [obr. (5.6) 1]. To je již hledaný zákon v nejobecnějším tvaru, z kterého snadno odvodíme vzorec pro pole různých proudových prvků.

Jsou-li v objemu dV rozloženy náboje s prostorovou hustotou ϱ^* a mají-li všechny stejnou rychlost $\mathbf{v}$, je elektrická hybnost

$$5.6 (8) \quad d\mathbf{v}^* = \varrho^* dV \cdot \mathbf{v} = dQ \cdot \mathbf{v} = i dV,$$

kde $\mathbf{i}$ je hustota prostorového proudu 5.3 (3). Někdy jde o vyšetření pole plošného proudu, který je způsoben pohybem nábojů po nějaké ploše. Je-li $\mathbf{j}$ hustota plošného proudu, mají podle 5.3 (5) náboje na plošce dS elektrickou hybnost

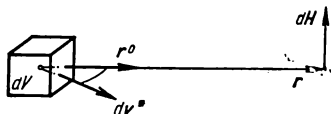
$$5.6 (9) \quad d\mathbf{v}^* = \sigma dS \cdot \mathbf{v} = \mathbf{j} dS.$$

Konečně elektrická hybnost prvku $d\mathbf{l}$ lineárního proudu (proudového vlákna) je podle 5.3 (6)

$$5.6 (10) \quad d\mathbf{v}^* = \tau d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v} = I d\mathbf{l},$$

kde τ je délková hustota náboje na vodiči.

Dosazením hořejších výrazů pro $d\mathbf{v}^*$ do 5.6 (7) plyne příspěvek příslušného proudového prvku k intenzitě pole. Pro prvek lineárního proudu platí tedy vzorec



Obr. (5.6) 1. Intenzita magnetického pole vzbuzeného proudovým prvkem

5.6 (11)

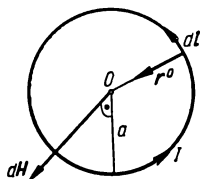
$$d\mathbf{H} = I \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}^0}{4\pi r^2},$$

který vyjadřuje **Biotův—Savartův—Laplaceův zákon** v obvyklé formě. Z tohoto „elementárního“ zákona lze určit výsledné pole libovolného vodiče integrací přes všechny jeho proudové prvky.

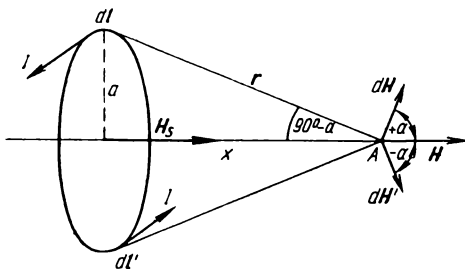
5.6.2. Magnetické pole lineárních proudů

Magnetické pole kruhového proudového vlákna

Abychom usnadnili pochopení složitějších úloh, ukážeme, jak se pracuje s Biotovým—Savartovým—Laplaceovým zákonem na nejjednodušším možném příkladu: Stanovíme nejprve intenzitu magnetického pole ve středu kruhové proudové smyčky.



Obr. (5.6) 2. Magnetické pole ve středu kruhového proudového vlákna



Obr. (5.6) 3. Magnetické pole kruhového proudu v místě A

Podle obr. (5.6) 2 jsou v tomto případě všechny proudové prvky $d\mathbf{l}$ na kružnici poloměru a kolmé k jednotkovému vektoru $\mathbf{r}^0$ mířícímu ke středu O kružnice, takže $|d\mathbf{l} \times \mathbf{r}^0| = dl$. Příspěvek $d\mathbf{H}$ každého prvku vlákna je podle 5.6 (11) kolmý k rovině kružnice a míří před nákresem. Stačí tedy sečíst velikosti dH všech vektorů $d\mathbf{H}$, což provedeme integrací po obvodu celého vlákna

$$H = \oint dH = \oint \frac{I |d\mathbf{l} \times \mathbf{r}^0|}{4\pi a^2} = \frac{I}{4\pi a^2} \oint dl = \frac{I}{4\pi a^2} 2\pi a.$$

Máme tedy jednoduchý vzorec pro intenzitu uprostřed kruhového proudového vlákna

5.6 (12)

$$H_s = \frac{I}{2a},$$

jejíž velikost je prostě rovna proudu dělenému průměrem proudového vlákna. Je kolmá k rovině proudu a má směr postupu pravotočivého šroubu otáčeného ve smyslu oběhu proudu [srovn. obr. (5.6) 3]. Často se místo tohoto „pravidla pravotočivého šroubu“ užívá **Ampèrova pravidla pravé ruky**:

Vložíme-li pravou ruku na proud tak, aby prsty ukazovaly směr proudu, tj. směr pohybu kladného náboje, a dlaň aby byla obrácena k místu, v němž pole zjišťujeme, ukazuje palec směr magnetického pole.

Intenzitu magnetického pole kruhového proudového vlákna vypočteme snadno také v libovolném bodě A na ose kruhového vlákna. Víme totiž, že vzhledem k souměrnosti vlákna k ose musí mít výsledné pole směr této osy. Vidíme ostatně přímo z obr. (5.6) 3, že dva protilehlé proudové prvky $d\mathbf{l}$ a $d\mathbf{l}'$ dávají dva stejné velké vektory $d\mathbf{H}$ a $d\mathbf{H}'$, které leží v nákrese a svírají s osou úhly $+\alpha$ a $-\alpha$. Jejich výslednice leží tedy v ose a to platí i pro výsledné pole všech proudových prvků. Stačí tedy sečíst průměty $\cos \alpha \cdot d\mathbf{H}$ příspěvků ode všech prvků vlákna, abychom dostali velikost intenzity výsledného pole

$$H = \oint \cos \alpha dH = \oint \frac{I \cos \alpha}{4\pi r^2} |d\mathbf{l} \times \mathbf{r}^0|.$$

Avšak průvodič $\mathbf{r}$ má stejnou velikost pro všechny prvky a stojí k nim kolmo, tedy

$$|d\mathbf{l} \times \mathbf{r}^0| = dl.$$

Také úhel α je při integraci stálý, takže

$$H = \frac{I \cos \alpha}{4\pi r^2} \oint dl = \frac{I \cos \alpha}{4\pi r^2} 2\pi a.$$

Podle obr. (5.6) 3

$$r^2 = x^2 + a^2, \quad \cos \alpha = \frac{a}{r}$$

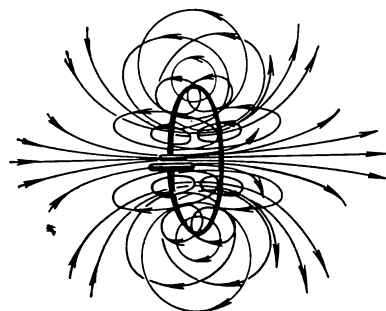
a intenzita ve vzdálenosti x od roviny kruhového vlákna

$$5.6 (13) \quad H = \frac{a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} I.$$

Pro $x = 0$ plyne odtud znovu výraz 5.6 (12). Naopak hořejší vzorec plyne zase ze vzorce 5.5 (54) pro magnetickou indukci kroužícího náboje Q , dosadíme-li tam podle 5.5 (46) za magnetický moment

$$m = IS = \pi a^2 I, \quad I = \frac{Q}{T}.$$

Magnetické pole kruhového proudového vlákna je ovšem stejné jako pole kroužícího náboje i v ostatních bodech prostoru. Jeho siločáry jsou rozloženy symetricky kolem osy vlákna, jak vidíme z obr. (5.6) 4. Ve všech vzdálenostech je průběh siločar stejný jako v okolí elektrického dipólu [obr. (5.1) 6], jak jsme dokázali v čl. 5.5.6.



Obr. (5.6) 4. Siločáry magnetického pole kruhového vodiče

Magnetické pole přímkového proudu

Přímý, velmi tenký a dlouhý vodič protékáný stálým proudem I budí ve vzdálenosti velké proti tloušťce vodiče magnetické pole, které můžeme v okolí střední části vodiče počítat s dostatečnou přesností jako pole nekonečného proudového vlákna (lineárního proudu).

Pole vytvořené přímkovým proudem je zřejmě souměrné kolem proudového vlákna, a proto je stejné ve všech rovinách proložených vláknem. Stačí tedy najít závislost výsledného pole na vzdálenosti R od proudového vlákna [obr. (5.6) 5]. Značí-li $\mathbf{r}$ vektor $\overrightarrow{PA}$, vzbudí v bodě A podle rovnice 5.6 (11) proudový prvek délky dl magnetické pole intenzity

$$d\mathbf{H} = I \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}^0}{4\pi r^2}.$$

Směr $d\mathbf{H}$ je pro všechny proudové prvky kolmý k rovině AKP a totéž platí i pro výsledné pole. Jeho velikost dostaneme tedy prostou integrací;

$$H = \int dH = \int_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{I \sin \gamma}{4\pi r^2} dl,$$

Obr. (5.6) 5. Magnetické pole přímkového proudu

značí-li γ úhel sevřený proudem a průvodičem a měříme-li délku proudového vlákna např. od paty K kolmice, spuštěné na vlákno z bodu A . Soumžné průvodiče vedené koncovými body P, P' prvku dl vymezují na kružnici opsané bodem P kolem A oblouček ds , který se liší jen o veličiny nekonečně malé vyššího řádu od kolmého průmětu prvku dl na kružnici:

$$ds = \cos(\gamma - \pi/2) dl = \sin \gamma \cdot dl.$$

Označíme-li β úhel sevřený úsečkou AP a kolmicí AK , bude

$$R = r \cos \beta, \quad ds = r d\beta,$$

takže

$$H = \int_{\beta=-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{I}{4\pi r^2} r d\beta = \frac{I}{4\pi R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \beta d\beta = \frac{I}{4\pi R} \cdot 2.$$

Magnetické pole přímkového proudu I je tedy všude kolmé k rovině určené proudovým vláknem a bodem pozorování a je nepřímou úměrné první mocnině vzdálenosti od proudu:

5.6 (14)

$$H = \frac{I}{2\pi R}.$$

Magnetické siločáry mají proto tvar soustředných kružnic, jak je naznačeno na obr. (5.6) 5.

5.6.3. Magnetické pole plošných proudů. Sclenoid

Plošné proudy mají význam v teorii magnetických vlastností látek. Magnetické pole uzavřeného plošného proudu obíhajícího po povrchu tenkého válce, jehož průměr $2a$ je malý proti vzdálenosti R místa pozorování od středu válce, se dá vypočítat ze vzorců 5.5 (57).

Velmi snadný je výpočet pro dvě zvláštní polohy, které pro magnetická měření zavedl Gauss.

První Gaussova poloha je na obr. (5.6) 6 vyznačena bodem G_1 , ležícím na podélné ose válce, druhá Gaussova poloha bodem G_2 , ležícím v jeho příčné rovině souměrnosti.

Pro intenzitu magnetického pole vzbuzeného v první Gaussově poloze plošným proudem, obhájícím po plášti válce poloměru a a délky L s časově i místně stálou hustotou j , platí obecný vzorec

$$5.6 (15) \quad H_1 = \frac{j}{2} \left[\frac{R + L/2}{\sqrt{(R + L/2)^2 + a^2}} - \frac{R - L/2}{\sqrt{(R - L/2)^2 + a^2}} \right].$$

K odvození tohoto vzorce lze použít vzorců pro kruhové proudové vlákno. Stačí zvolit za plošný prvek dS povrch elementárního prstence vymezeného na plášti válce dvěma blízkými rovinami kolmými k ose válce. Jsou-li vzdálenosti obou souměrných rovin od levého konce válce ξ a $\xi + d\xi$, má prsteneček šířku $d\xi$ a obíhá po něm proud.

$$dI = j d\xi.$$

Tento nekonečně slabý proud budí podle 5.6 (13) v místě G_1 na ose válce, vzdáleném od středu prstence o délku x , magnetické pole

$$5.6 (16) \quad dH_1 = \frac{a^2 j}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} d\xi.$$

Výsledné pole vzbuzené v G_1 celým plošným válcovým proudem dostaneme pak integrací od levého kraje k pravému kraji válce:

$$H_1 = \int_{\xi=0}^L dH_1 = \int_{\xi=0}^L \frac{a^2 j}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} d\xi.$$

Zavedeme-li integrační proměnnou

$$x = \frac{L}{2} + R - \xi, \quad dx = -d\xi,$$

bude

$$H_1 = -\frac{a^2 j}{2} \int_{x=R+L/2}^{R-L/2} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}},$$

a dosadíme-li sem

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \text{const},$$

dostaneme konečně obecný vzorec 5.6 (15).

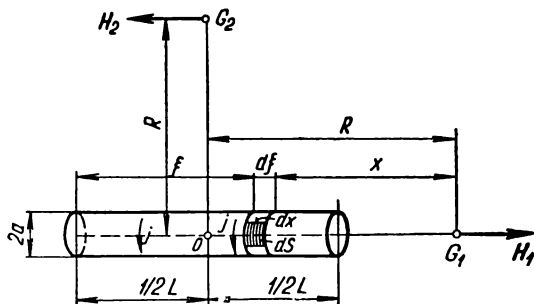
Vzorec 5.6 (15) platí pro libovolné hodnoty R , L , a .

Pro $R = 0$

$$5.6 (17) \quad (H_1)_{R=0} = \frac{jL}{2\sqrt{L^2/4 + a^2}}$$

a pro velmi štíhlý válec, jehož průměr je velmi malý proti jeho délce L ,

$$2a \ll L,$$



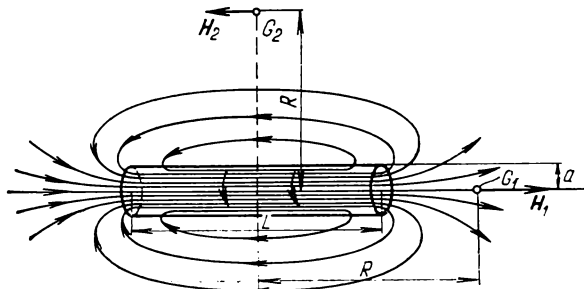
Obr. (5.6) 6. Gaussovy polohy pro plošný proud obtékající plášť válce

dostaneme jednoduchý a důležitý vzorec

5.6 (18)

$$H_1 = j.$$

Tento výsledek platí dosti přesně i pro R různé od nuly, je-li malé proti L . Můžeme tedy vyslovit větu:



Obr. (5.6) 7. Magnetické pole plošného proudu obtékajícího plášť válce

Intenzita magnetického pole uvnitř štíhlého válce obtékaného plošným proudem je ve všech bodech dosti vzdálených od konců válce rovna hustotě plošného proudu a má směr kludné osy proudu.

Dokázali jsme to jen pro body na ose válce, ale pole má zřejmě průběh znázorněný několika siločarami na obr. (5.6) 7, a je tedy v prostřední části válce velmi přibližně homogenní.

Ze vzorce 5.6 (15) snadno odvodíme, že magnetické pole je nejsil-

nější uprostřed válce a na obě strany souměrně slábne. Na krajích válce, tj. pro $R = \pm L/2$, klesne intenzita pole na hodnotu

$$5.6 (19) \quad (H_1)_{R=L/2} = \frac{jL}{2\sqrt{L^2 + a^2}},$$

která pro velmi štíhlý válec je

$$5.6 (20) \quad (H_1)_{R=L/2} = \frac{j}{2} = \frac{1}{2} (H_1)_{R=0}.$$

U obou konců válce je tedy intenzita poloviční než uprostřed.

Je-li konečně

$$R + L/2 \gg a,$$

můžeme rovnici 5.6 (15) upravenou na tvar

$$H_1 = \frac{j}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{(R + L/2)^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{(R - L/2)^2}}} \right]$$

rozvinout podle binomické věty a vynechat členy 4. a vyšších řádů:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{j}{2} \left[1 - \frac{a^2}{2(R + L/2)^2} - \left(1 - \frac{a^2}{2(R - L/2)^2} \right) \right] = \\ &= \frac{a^2 j}{4} \left[\frac{1}{(R - L/2)^2} - \frac{1}{(R + L/2)^2} \right] = \frac{a^2 j}{4} \cdot \frac{2LR}{(R^2 - L^2/4)^2}. \end{aligned}$$

Avšak

5.6 (21)

$$I_c = Lj$$

je celkový proud obtékající celý plášť válce, takže

5.6 (22)

$$H_1 = \frac{a^2 L j}{2R^3(1 - L^2/4R^2)^2} = \frac{a^2 I_c}{2R^3(1 - L^2/4R^2)^2},$$

kde

$$A = \frac{L}{2R}.$$

V druhé Gaussově poloze je podobně jako v první poloze výsledná intenzita

$$5.6 \quad (23) \quad H_2 = - \frac{a^2 I_c}{4R^3(1 + A^2)^{3/2}}$$

rovnoběžná s osou válce. Její záporné znaménko ukazuje, že magnetické pole v druhé Gaussově poloze míří proti směru pole v první poloze, jak je naznačeno na obr. (5.6) 6. Ve vzdálenostech velkých proti rozměrům válcového proudu je

$$5.6 \quad (24) \quad H_1 \approx \frac{a^2 I_c}{2R^3} = -2H_2$$

v soulase se vzorcí 5.5 (50).

Při výpočtu intenzity magnetického pole v druhé Gaussově poloze G_2 budeme především předpokládat, že

$$a \ll R,$$

že tedy bod G_2 leží v příčné rovině souměrnosti válce ve vzdálenosti R velké proti jeho poloměru. Nejprve vypočteme intenzitu dH_y vzbuzenou prstencem šířky dx a magnetického momentu dm podle 5.5 (56):

$$dH_y = \frac{dm}{4\pi} \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

kde

$$5.6 \quad (25) \quad dm = S dI = S j dx = \pi a^2 j dx,$$

a píšeme-li R místo y ,

$$H_y = \frac{3}{4} a^2 j R \int_{\alpha=-L/2}^{+L/2} \frac{x dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = 0.$$

Funkce $f(x)$ za integrační značkou je totiž lichá, tedy $f(-x) = -f(x)$ a meze se liší jen znaménkem. Proto integrál vymizí.

V druhé Gaussově poloze tedy

$$H_y = 0, \quad H_x = 0$$

a výsledná intenzita se redukuje na složku v ose válce. Píšeme-li opět $y = R$, je podle 5.5 (55) a 5.6 (25)

$$H_2 = H_x = \frac{a^2 j}{4} \int_{x=-L/2}^{+L/2} \frac{2x^2 - R^2}{(x^2 + R^2)^{5/2}} dx.$$

Výraz za integrační značkou je však diferenciál funkce

$$- \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}},$$

jak se snadno přesvědčíme, takže platí 5.6 (23).

Magnetické pole solenoidu a toroidu

Vytvořit plošný proud kroužící po plášti válce se spojitou a stálou hustotou není snadné. Můžeme jej však velmi přibližně uskutečnit proudem vedeným hustě vinutou cívkou z tenkého izolovaného drátu na válci. Proud obíhá sice ve šroubovici, má-li však šroubovice velmi malé stoupání (tenký drát), můžeme závity pokládat za kruhové smyčky kolmé

k ose válce. Taková hustě vinutá cívka, jejíž tloušťka je malá proti její délce, nazývá se *solenoid*. Připadá-li na celou délku L cívky celkem n závitů a protéká-li každým závitem proud I , vytvoří solenoid přibližně stejné magnetické pole jako plošný proud kroužící po plášti válce týchž rozměrů s hustotou

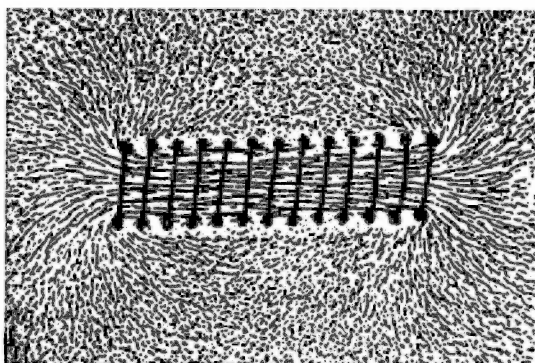
$$5.6 \quad (26) \quad j = \frac{n}{L} I = zI,$$

kde z je hustota závitů (hustota vinutí) solenoidu. Součin zI hustoty závitů a proudu v ampérech se obvykle nazývá počet ampérzávitů. Budeme zde užívat správnějšího názvu *hustota ampérzávitů* a rovnici

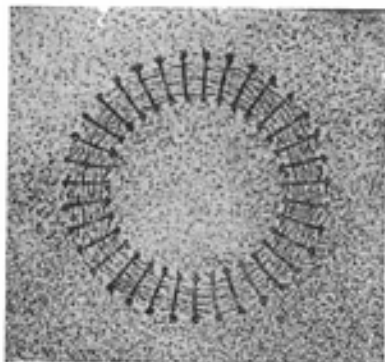
$$5.6 \quad (27) \quad H_{s,1} = zI$$

plynoucí z 5.6 (18) vyslovíme větou:

Intenzita magnetického pole uvnitř velmi dlouhého a tenkého solenoidu je v soustavě SI rovna hustotě ampérzávitů. Jinak řečeno: hustota siločar uprostřed štíhlého solenoidu je rovna hustotě ampérzávitů.



Obr. (5.6) 8. Magnetické siločary solenoidu zviditelněné pilinovými obrazy



Obr. (5.6) 9. Magnetické siločary toroidu zviditelněné pilinovými obrazy

Platí to jen v místech vzdálených od krajů solenoidu; na jeho krajích je intenzita podle 5.6 (20) poloviční. Siločary mají průběh naznačený na obr. (5.6) 7, což potvrzuje snímek pilinových obrazců na obr. (5.6) 8.

Vzorec 5.6 (27) platí přibližně i pro magnetické pole velmi štíhlé válcové cívky s osou stočenou do kružnice, jejíž poloměr je velký proti poloměru závitů. Uvnitř takové prstenkové cívky, kterou nazýváme též *toroidem*, je skoro homogenní v sebe uzavřené magnetické pole s kruhovými siločarami, jejichž hustota se rovná hustotě ampérzávitů [obr. (5.6) 9].

5.6.4. Magnetické pole prostorového proudu

Jako příklad stacionárního prostorového proudu si představme nabitě částice (elektrony, protony nebo obecně ionty), které mají stálou elektrickou hybnost a vytvářejí přímý svazek částic (iontů) kolmého průřezu ΔS , jehož rozměry jsou malé proti délce svazku $2|b|$. Jeho prostorový prvek

$$dV = \Delta S db$$

má podle 5.6 (8) elektrickou hybnost

$$d\mathbf{v}^* = i\Delta S d\mathbf{b} = i\Delta S d\mathbf{b}$$

a intenzita magnetického pole vzbuzeného tímto prvkem podle 5.6 (7)

$$d\mathbf{H} = \frac{i\Delta S(d\mathbf{b} \times \mathbf{r}^0)}{4\pi r^2}.$$

Celková intenzita $\mathbf{H}$ v bodě A v kolmé rovině souměrnosti Oxy [obr. (5.6) 10] svazku plyne obdobným postupem, jakým jsme došli k rovnici 5.6 (14) pro pole přímkového proudu. Platí pro ni důležitý vztah

5.6 (28)

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}.$$

Tato rovnice platí pro časově neproměnný proud, tedy pro stacionární magnetické pole. Není tedy ve sporu s rovnicí 5.5 (38), kterou jsme odvodili pro místa mimo nabitě částice v nestacionárním (kvazistacionárním) poli. Hořejší rovnice platí naopak v místech s nenulovou proudovou hustotou. K oběma rovnicím se ještě vrátíme.

Rovnici 5.6 (28) odvodíme takto: Velikost intenzity

$$H = \frac{i\Delta S}{4\pi R} \int_{-\beta_0}^{+\beta_0} \cos \beta d\beta = \frac{i\Delta S}{4\pi R} 2 \sin \beta_0$$

čili podle obr. (5.6) 10

$$H = \frac{i\Delta S}{2\pi R} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}}.$$

Násobíme-li jednotkovým vektorem ve směru $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}^0 = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{R}^0}{b}, \quad \left(\mathbf{R}^0 = \frac{\mathbf{R}}{R} \right),$$

dostaneme

$$\mathbf{H} = \frac{i\Delta S}{2\pi R} \cdot \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{R}^0}{\sqrt{b^2 + R^2}}.$$

Zvolme nyní v rovině Oxy uzavřenou křivku K danou rovnicí $R = R(\varphi)$, která obepíná svazek, a vypočteme křivkový integrál

$$\oint_K \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{i\Delta S}{2\pi} \oint_K \frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{R}^0) \cdot d\mathbf{l}}{R \sqrt{b^2 + R^2}}$$

pro zvolenou křivku. Poněvadž vzhledem k D (22)

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{R}^0) \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{R}^0 \times d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{b} = Rb d\varphi,$$

bude

$$\oint_K \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{i\Delta S}{2\pi} \oint_K \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + R^2/b^2}}$$

a podle Stokesovy věty D (39)

$$\frac{i\Delta S}{2\pi} \oint_K \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + R^2/b^2}} = \iint_S \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}.$$

Při tom značí S plochu křivky K a $d\mathbf{S}$ její orientovaný plošný prvek. Zvolíme-li křivku tak, aby těsně obepínala svazek, můžeme pravou stranu nahradit součinem $\text{rot } \mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{S}$. Vynecháme-li pak na levé straně rovnice pod odmocninou čtvereč $(R/b)^2$ proti jedné, dostaneme

$$\frac{i\Delta S}{2\pi} 2\pi = \text{rot } \mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{S}.$$

Vektor $\mathbf{H}$ je kolmý k vektoru $\Delta \mathbf{S}$, tedy ke směru $\mathbf{b}$, a proto v soustavě $Oxyz$ je $H_z = 0$. Kromě toho je intenzita v rovině Oxy určitě maximální, protože od středu O k oběma koncům svazku souměrně klesá. Máme tedy

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0,$$

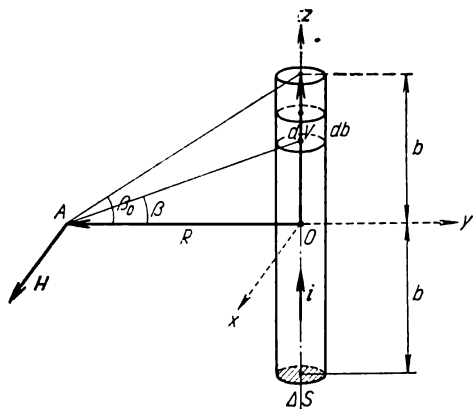
takže podle D (36)

$$\text{rot}_x \mathbf{H} = 0, \\ \text{rot}_y \mathbf{H} = 0.$$

Jsou tedy vektory $\text{rot } \mathbf{H}$, $\Delta \mathbf{S}$ a $\mathbf{i}$ rovnoběžné a hořejší rovnice dává

$$i\Delta S = |\text{rot } \mathbf{H}| \Delta S.$$

Rotace intenzity pole vzbuzeného uprostřed proudového vlákna rovná se tedy co do směru i velikosti hustotě proudu, jak to vyjadřuje vztah 5.6 (28).



Obr. (5.6) 10. Magnetické pole svazku nabitých částic

5.6.5. Silové působení magnetického pole na proud

Podle základního vzorce 5.5 (35) působí magnetické pole s indukcí $\mathbf{B}$ na částici s elektrickou hybností $\mathbf{u}^*$ silou

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \mathbf{u}^* \times \mathbf{B}.$$

Prvek lineárního proudu I délky $d\mathbf{l}$ má elektrickou hybnost 5.6 (10), a proto podléhá v magnetickém poli síle

$$5.6 (29) \quad d\mathbf{F}_{\text{mag}} = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}),$$

kteřá je kolmá ke směru prvku $\mathbf{i}$ ke směru pole.

Než přikročíme k podrobnějšímu studiu těchto sil na konkrétních příkladech, připomeňme znovu, že magnetické síly působí sice na všechny náboje, které se v pozorovací soustavě pohybují, že však jsou pozorovatelné jen u indukčních proudů v nenabitých vodičích, u nichž nejsou překrývány mnohem většími silami elektrostatickými. U proudů nesených svazky velmi rychlých nabitých částic, elektronů nebo iontů jsou sice magnetické síly měřitelné, ale jsou provázány současným působením elektrostatických a pseudo-elektrostatických sil, které jsou nejméně stejného řádu jako síly magnetické. Proto omezíme další výklady na indukční proudy v nenabitých vodičích. V tomto případě podléhají vodiče jen silám magnetickým, které dostaneme vektorovým sečtením (integrací) elementárních sil 5.6 (29).

Tato integrace je zvlášť jednoduchá, když je pole $\mathbf{B}$ homogenní a vodič přímý. Pak je celková síla

$$5.6 (30)$$

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

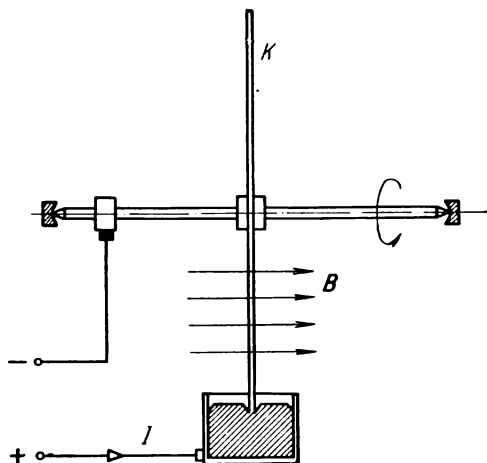
úměrná délce vodiče a magnetické indukcii.

Na existenci této síly je založena funkce elektrických motorů a proudoměrných přístrojů s měřicí cívkou (galvanoměrů s deprezským systémem). Proto není třeba zvláště ji experimentálně dokladat. Přece však pokládáme za účelné zmínit se o poučném pokusu s *Barlowovým kolečkem* [obr. (5.6) 11]. Prochází-li kovovým kotoučem K proud I od jeho obvodu, kam se přivádí rtuť, do níž okraj kotouče zasahuje, radiálně k hřídelíku, otáčí se kotouč v příčném magnetickém poli B tak, že spodní okraj se pohybuje za náskresnu v souhlase s hřejší rovnicí. Pokus názorně ukazuje, že kov klade pohybu volných elektronů mechanický odpor, který je příčinou elektrického odporu. Magnetické pole totiž působí jen na volné elektrony, a nikoli na ionty, které jsou vzhledem ke kotouči v klidu, a mají tedy při rotaci kotouče stejnou vodorovnou rychlost unášivou jako elektrony. Proto se magnetické síly způsobené unášivým pohybem kladných a záporných částic navzájem ruší.

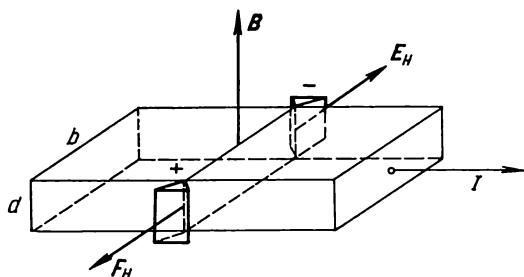
Tento pokus může probíhat také obráceně: otáčíme-li kotoučem, vzniká v něm radiální proud (viz Faradayův kotouč v čl. 5.9.0).

Dalším — velmi významným — projevem silových účinků magnetického pole na nositele proudu ve vodiči je známý Hallův jev.

Hall provedl r. 1879 tento pokus: Vodivý (např. kovový) pásek tloušťky d a šířky b opatřil na obou bočních okrajích kontakty, aby mohl měřit příčné elektrické napětí U_H mezi okraji, když páskem procházel rovnoběžně s okraji proud I [obr. (5.6) 12]. Pozoroval, že



Obr. (5.6) 11. Barlowovo kolečko



Obr. (5.6) 12. Hallovo pole ve vodivém pásku s kladnou Hallovou konstantou

mezi oběma okraji vzniklo napětí, jestliže na pásek působil magnetickým polem kolmým k povrchu pásku. Toto napětí U_H bylo přímo úměrné proudu I , magnetické indukci B a nepřímo úměrné tloušťce pásku:

$$U_H = \tilde{R} \frac{IB}{d}.$$

Zavedeme-li sem hustotu proudu i podle vztahu $I = bdi$, dostaneme pro příčný spád potenciálu

$$E_H = \frac{U_H}{b} = \tilde{R}Bi$$

a vzhledem k tomu, že vektory B , i a E_H jsou navzájem kolmé, máme pro *Hallovo pole* E_H rovnici

$$5.6 \quad (31) \quad E_H = \tilde{R}(B \times i),$$

v níž *Hallova konstanta* $\tilde{R}$ má pro některé vodiče kladnou, pro jiné zápornou hodnotu.

Popsaný Hallův jev vysvětlíme takto:

Účastní-li se proudu jediný druh nositelů proudu s nábojem e_0 , které jsou v pásku rozloženy s prostorovou hustotou n_0 , je podle 5.3 (9)

$$\mathbf{i} = e_0 \bar{\mathbf{v}} = n_0 e_0 \bar{\mathbf{v}},$$

značí-li $\bar{\mathbf{v}}$ střední rychlost nositele proudu. Na každého z nich působí však podle 5.5 (35) síla

$$\mathbf{F}_H = e_0 \bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{B},$$

která jej odchyluje k jednomu okraji pásku, kde proto hustota nositelů vzrůstá. Tak vzniká na okraji převaha nábojů e_0 a tím i příčný potenciálový spád E_H opačného směru, než má $\mathbf{F}_H$. Tím se účinek magnetického pole postupně zeslabuje a vymizí zcela, jakmile příčné elektrostatické pole způsobené nahromaděním nositelů na okraji pásku se právě vyrovná magnetické síle. V tomto ustáleném stavu je tedy pole E_s shodné s Hallovy polem E_H , takže

$$e_0 E_H = -F_H = -e_0 \bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}.$$

Odtud plyne vztah

$$5.6 \quad (32) \quad E_H = -\bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{i}}{n_0 e_0},$$

který přejde v rovnici 5.6 (31), položíme-li

$$5.6 \quad (33) \quad \tilde{R} = \tilde{R}_0 = \frac{1}{n_0 e_0}.$$

Tento výsledek jsme odvodili za nejjednodušších předpokladů podobných předpokladům užitým v čl. 5.3.1. Hodnota Hallovy konstanty však závisí na střední volné dráze a době letu nositelů, a proto má pro různé vodiče různé hodnoty, což lze vystihnout výrazem

$$5.6 \quad (34) \quad \tilde{R} = A \tilde{R}_0 = \frac{A}{n_0 e_0},$$

kde A leží mezi 1 a 2. Pro kovy a pro iontové krystaly za nízkých teplot je $A = 1$, protože naše jednoduchá teorie dosti dobře vystihuje skutečný stav v těchto vodičích. V iontových krystalech je při vysokých teplotách $A = 1,1$. Pro vodivé valenční krystaly dává teorie při malé koncentraci cizích iontů $A = 3\pi/8 = 1,18$ a při velké koncentraci $A = 1,93$. *Znaménko $\tilde{R}$ souhlasí podle 5.6 (34) se znaménkem nositelů proudu.* Pro kovy s volnými elektrony je $e_0 = -e$, a proto je u nich Hallova konstanta záporná. Pro některé polovodiče je kladná, pro jiné záporná. Znalost Hallovy konstanty nás poučuje o znaménku a hustotě nositelů proudu a lze ji použít i k určení tzv. *pohyblivosti* nositelů proudu. Z Ohmova diferenciálního zákona plyne

$$\mathbf{i} = n_0 e_0 \bar{\mathbf{v}} = \gamma \mathbf{E}_s,$$

takže střední rychlost $\bar{\mathbf{v}}$ nositelů je úměrná intenzitě pole $\mathbf{E}_s$. Podíl těchto dvou vektorů má tedy stálou velikost a nazývá se pohyblivost nositelů proudu

$$5.6 \quad (35) \quad u = \frac{\bar{v}}{E_s} = \frac{\gamma}{n_0 e_0}, \quad [u] = \text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}.$$

Číselně se u rovná střední rychlosti nositelů při potenciálovém spádu 1 Vm^{-1} . Z 5.6 (35, 33) dostáváme pro ni vztahy

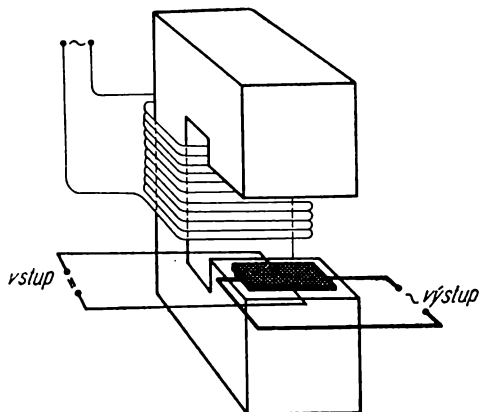
$$5.6 \quad (36) \quad \gamma = n_0 e_0 u, \quad u = \tilde{R}_0 \gamma = \frac{\tilde{R} \gamma}{A},$$

které umožňují výpočet pohyblivosti ze změřené měrné vodivosti a Hallovy konstanty.

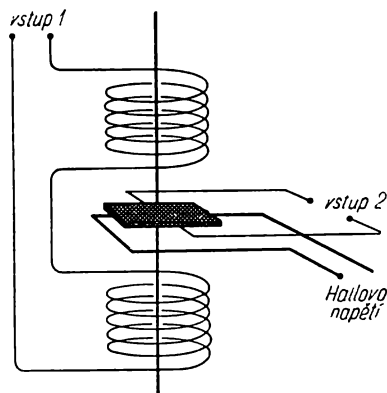
V čl. 5.3.4 jsme poukázali na význam Hallova jevu při studiu polovodičů. Jak vidíme ze vzorce 5.6 (34) pro Hallovu konstantu, je její velikost nepřímo úměrná hustotě nositelů proudu,

a proto je Hallův jev při stejném magnetickém poli a stejné hustotě proudu mnohem silnější u polovodičů než u kovů (v mědi připadá jeden volný elektron na každý atom, kdežto v antimonidu india připadá při teplotě síně jeden nositel proudu asi na milión atomů). Proto se užívá Hallova jevu zvláště u polovodičů, a to jednak ke studiu jejich vlastností, jednak přímo k praktickým aplikacím.

Na Hallovu jevu je především založeno měření magnetických polí. Polovodivý pásek s postranními kontakty se vloží do měřeného pole a posílá se jím slabý, přesně známý proud a měří se Hallovo napětí. Voltmetr, kterým je měříme, může být kalibrován přímo v jednotkách magnetické indukce nebo intenzity.



Obr. (5.6) 13. Měníč a zesilovač stejnosměrných proudů



Obr. (5.6) 14. Násobící obvod

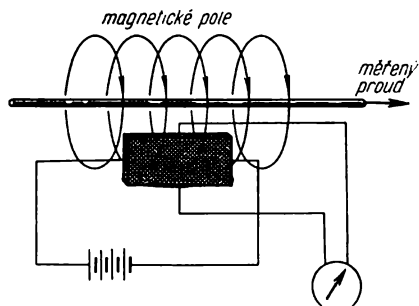
Měníč a zesilovač stejnosměrných proudů založený na Hallově jevu pracuje takto: [Obr. (5.6) 13.] Vstupní stejnosměrný proud se vede do Hallova krystalu vloženého kolmo do střídavého magnetického pole buzeného elektromagnetem. Tím vzniká v krystalu rovněž střídavé Hallovo napětí, které se pak zesiluje obvyklým způsobem elektronicky.

Hallovo napětí je úměrné proudu i magnetickému poli, které je samo úměrné proudu v budicí cívce. Na tom lze založit konstrukci *násobícího obvodu*, který udává součin libovolných dvou veličin, které lze převést na proud. [Obr. (5.6) 14.]

Konečně je možno z Hallova napětí určit i proud ve vodiči, jehož magnetické siločáry protínají kolmo polovodivý krystal. Přecejchováním voltmetru dostaneme tak „bezkontaktní“ ampérmetr pro stejnosměrné i střídavé proudy v rozsahu od mA až do 10³ A. [Obr. (5.6) 15.]

Hallův jev je provázen *Ettinghausenovým jevem*, který záleží v tom, že zároveň s Hallovým napětím vzniká také příčný teplotní rozdíl. Je tomu tak proto, že nositelé náboje konají kromě usměrněného pohybu vyvolaného elektrickým polem také neuspořádaný pohyb termický, protože se jejich individuální rychlosti značně liší. Náboje, které mají větší tepelné rychlosti ve směru proudu, mají výslednou rychlost největší a podléhají největší Lorentzově síle. Tedy v kovu se „teplé“ elektrony nahušťují silněji k okraji pásku než „studené“, což vysvětluje v podstatě vznik příčného teplotního rozdílu. V poslední době se činí pokusy využít Ettinghausenova jevu k chlazení (podobně jako jevu Peltierova).

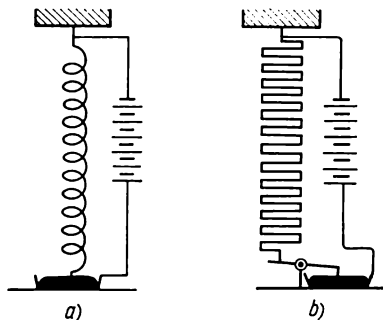
Oba popsané jevy patří mezi *galvanomagnetické jevy*, k nimž se řadí dva obdobné jevy *termomagnetické*. Liší se od galvanomagnetických jen tím, že vznikají ve vodivém pásku, kterým místo galvanického proudu prochází tepelný tok. Vzniká přitom jak příčné napětí (*Nernstův jev*), tak i teplotní rozdíl (*Righiův—Leducův jev*). Nernstův jev by se patrně mohl uplatnit při přímé přeměně tepelné energie v elektrickou.



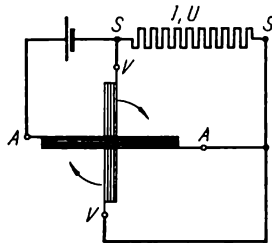
Obr. (5.6) 15. Bezkontaktní ampérmetr

5.6.6. Síly mezi indukčními proudy

Zjistili jsme, že vodič protékající proudem podléhá v magnetickém poli síle, což vlastně znamená, že na vodič působí dynamicky zdroj onoho magnetického pole. Může jím být magnet nebo také vodič protékající proudem. Z toho plyne vzájemné působení proudů, které je ovšem přímým následkem sil mezi náboji v pohybu, který je pro nás základním poznatkem odvozeným z Coulombova zákona a Lorentzovy transformace. Nyní nás budou zajímat jen magnetické účinky, které nejsou rušeny mnohem silnějšími silami elektrostatickými jen mezi proudy indukčními, jejichž nositeli jsou elektricky neutrální (nenabitě) vodiče. Na takové proudy se omezíme v dalším výkladu.



Obr. (5.6) 16 a — Petřinova spirála, b — meandrová spirála



Obr. (5.6) 17. Schéma wattmetru

Síly mezi vodiči je možno demonstrovat jednoduchým pokusem. Na obr. (5.6) 16a je načrtnuto zařízení známé jako *Petřinova pružina* („spirála“): Je to zavěšená šroubovitá pružina s dolním koncem ponořeným do rtuti. Zapnutím klíče se uzavře vodivý obvod a pružina se smrští, takže se proud přeruší a pružina se opět protáhne. Tak se znovu uzavře vodivý obvod, kterým opět projde proud. To se periodicky opakuje a pružina

pracuje jako přerušovač proudu s nízkou frekvencí. Obráceně by se chovala meandrová pružina, která by se při průchodu proudu naopak prodloužila. Přerušovala by periodický proud, kdyby byla opatřena pákovým kontaktem podle obr. (5.6) 16b. Je tomu tak proto, že vodiče protékané souhlasně rovnoběžnými proudy se přitahují, kdežto vodiče s protisměrnými proudy se odpuzují. Odtud přímo plyne, že dva kruhové vodiče se při souhlasném směru proudu přitahují, při opačném směru odpuzují a že dva zkřížené kruhové vodiče na sebe působí točivým momentem, který se snaží o splnutí jejich magnetických momentů. Toho se využívá u *elektrodynamických měřicích přístrojů*, zvláště u *wattmetrů*, jejichž schéma podává obr. (5.6) 17.

Pevnou cívku AA malého odporu, zapjatou do okruhu baterie sériově s měřeným spotřebičem SS, prochází též proud I jako spotřebičem. Druhou pružně zavěšenou cívku VV o velkém odporu však prochází jen slabý proud, který je úměrný napětí U na spotřebiči. Otáčivý moment, kterým na sebe cívky působí, je přibližně úměrný součinu obou proudů, a tedy také součinu UI , tj. výkonu proudu ve spotřebiči.

Snadný je výpočet síly, kterými na sebe působí dva rovnoběžné přímé dráty protékané proudy, předpokládáme-li, že dráty jsou nekonečně dlouhé. Celková síla mezi nimi by byla ovšem teoreticky nekonečně velká, protože je v homogenním poli úměrná délce vodiče. Protože však nekonečný přímkový proud I budí podle 5.6 (14) magnetické pole konečné velikosti

$$H = \frac{I}{2\pi R},$$

bude síla, kterou nekonečný vodič s proudem I_1 působí na délku l druhého vodiče s proudem I_2 ve vzdálenosti R , rovněž konečná. Podle 5.6 (30) má tato síla velikost

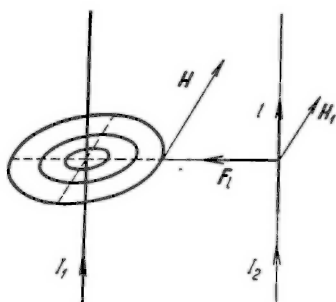
$$F_l = |I_2 \mathbf{J} \times \mathbf{B}_1| = \mu_0 |I_2 \mathbf{J} \times \mathbf{H}_1|$$

a podle [obr. (5.6) 18] leží v rovině obou drátů, k nimž je kolmá. Proudí-li kladné náboje v obou drátech svisle vzhůru, přitahuje drát 1 délku l drátu 2 silou

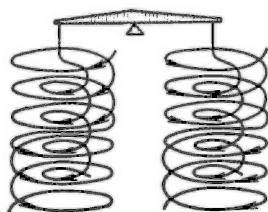
$$5.6 \quad (37) \quad F_l = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi R} l.$$

Na tomto jednoduchém výsledku je založena definice jednotky proudu v soustavě SI. Definice zní takto:

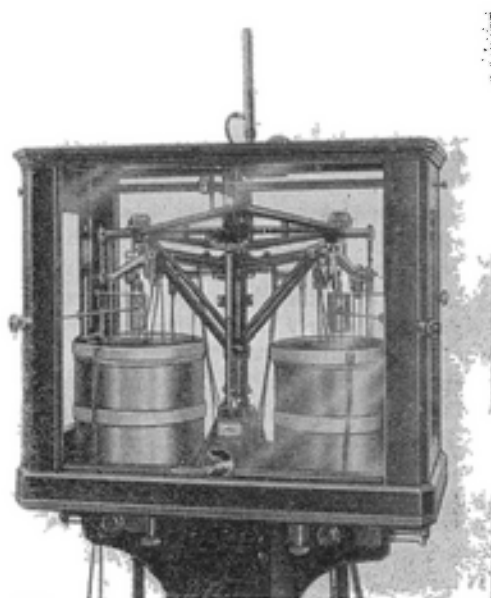
5.6 (38) *Nekonečný přímý vodič kruhového průřezu přitahuje ve vakuu každý metr stejného rovnoběžného vodiče ve vzdálenosti 1 m silou $2 \cdot 10^{-7}$ newtonu, prochází-li oběma vodiči stejným směrem stálý proud 1 ampéru.*



Obr. (5.6) 18. K definici ampéru



Obr. (5.6) 19. Proudové váhy (schéma)



Obr. (5.6) 20. Snímek proudových vah

Ukážeme, že z této definice skutečně plynou pro univerzální konstanty μ_0 a ϵ_0 hodnoty, kterých od počátku užíváme. Dosazením do 5.6 (37) za sílu podle hořejší definice plyne

$$\mu_0 \cdot \frac{1 \text{ A}^2}{2\pi \text{ m}} \cdot 1 \text{ m} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N},$$

tedy

5.6 (38')

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$$

ve shodě s 5.5 (30).

Definice ampéru je založena na síle mezi nekonečnými přímými vodiči, ale přece je použitelná k praktické realizaci jednotky proudu, neboť je možno z ní odvodit sílu mezi dvěma cívkami zasunutými do sebe, kterou lze velmi přesně měřit tzv. *proudovými vahami* (*Ayrtonovými*). Pod každým z obou závěsů analytických vah je umístěna pevná cívka se svislou osou, jejíž horní polovina je opačně vinuta než polovina dolní. Uvnitř každé z pevných cívek visí na konci vahadla další souosá cívka, jak je schematicky naznačeno na obr. (5.6) 19. Při sériovém zapojení všech šesti cívek je cívka zavěšená na pravém

rameni vahadla horní polovinou pevné cívky odpuzována a dolní polovinou přitahována. Na cívku na levém závěsu působí však síly opačného směru, takže na obou stranách působí na vahadlo momenty stejného smyslu, které můžeme zjistit podle závaží, kterým uvedeme váhy do rovnovážné polohy. Sílu mezi cívkami můžeme vypočítat podle jednoduchého vzorce Jonesova, který lze odvodit z 5.6 (29):

$$F = (M_2 - M_1) I j.$$

V tomto vzorci značí F sílu, kterou působí šroubovitě vinutá cívka protékána proudem I na sousedý válcový plošný proud hustoty j a M_1 , M_2 vzájemné indukčnosti*) šroubové cívky a koncových kružnic válcového proudu. Na základě hořejšího vzorce je tedy možno vypočítat ze známého geometrického uspořádání cívek proud procházející všemi cívkami v jednotkách určených definicí 5.6 (38).

Při velmi pečlivém provedení těchto vah, které ukazuje obr. (5.6) 20, lze takto realizovat jednotku proudu se značnou relativní přesností 10^{-5} , známe-li se stejnou přesností tíhové zrychlení v místě vah.

5.6.7. Pole trvalých magnetů

Feromagnetickými látkami, které tvoří trvalé (neboli permanentní) magnety, se budeme podrobněji zabývat v čl. 5.8.5 a v článku 5.8.6 poznáme, že feromagnetismus vzniká především účinkem spinu elektronů (viz čl. 1.3.3) a že jejich oběžný pohyb má jen podřadný význam. Přidržíme-li se názorné představy, že spin elektronu znamená jeho rotaci kolem vlastní osy, jde v obou případech o vířivý pohyb náboje, který můžeme nahradit velmi malou proudovou smyčkou, a který tedy podle našich dřívějších poznatků dává vznik magnetickému poli. Z toho usuzujeme, že síly buzené makroskopickými indukčními proudy jsou v podstatě totožné se silami, které pozorujeme v okolí zmagnetovaných látek.

Předpokládejme, že látka je zmagnetována do nasycení, že tedy všechny tyto „atomové“ či „molekulové“ proudové smyčky jsou orientovány rovnoběžně. Pak stejně velké objemy takto do nasycení zmagnetované látky, které obsahují velký počet atomů molekul, budou mít stejné magnetické momenty rovné momentu jednoho atomu molekuly násobenému jejich počtem. Z toho je zřejmé, že celkový magnetický moment m je úměrný objemu V magnetu, takže vektor

$$5.6 (39) \quad \boxed{M^* = \frac{m}{V}}$$

má v celém magnetu stejnou velikost i směr. Je mírou zmagnetování látky, a proto se nazývá *intenzita magnetizace* nebo prostě *magnetizace*.

Měří se podle 5.5 (46) v jednotkách

$$5.6 (40) \quad [M^*] = \frac{[m]}{m^3} = [IS] m^{-3} = Am^{-1}.$$

Abychom k vyšetření pole magnetu mohli užít vzorců odvozených v předešlých článcích, zvolme si válcový magnet délky L kruhového průřezu s poloměrem a . Předpokládejme, že každý atom má magnetický moment m_a rovnoběžný s osou magnetu, a myslíme si každý takový „magnetický“ atom čili „molekulární magnet“ nahrazen proudovou smyčkou atomových rozměrů. Je-li S_a plocha smyčky, kolem níž krouží stálý proud (Ampérův molekulární proud) I_a , bude

$$5.6 (41) \quad m_a = I_a S_a.$$

*) Viz čl. 5.9.4.

V každém kolmém řezu magnetu probíhá tedy nesmírné množství proudů I_a , které se všude uvnitř řezu co do magnetických účinků navzájem ruší a na obvodu řezu se spojují v kruhový proud stejné intenzity, jak vidíme z obr. (5.6) 21. Výsledný proud na obvodu každého řezu je makroskopicky stálý a tím spíše to platí pro hustotu j plošného proudu, který vznikne na povrchu magnetu sečtením všech obvodových proudů na prstenci jednotkové šířky. Hustota j souvisí jednoduše s magnetizací. Celkový magnetický moment

$$5.6 (42) \quad m = M^*V = M^*SL$$

dostaneme totiž také sečtením magnetických momentů dm elementárních prstenců šířky dx podle 5.6 (25):

$$m = \int_{x=0}^L dm = \int_{x=0}^L S dI = \int_{x=0}^L S j dx = S j L.$$

Srovnáním obou výrazů pro m plyne

$$5.6 (43) \quad M^* = j,$$

takže magnetické pole válcového magnetu o známé magnetizaci můžeme počítat jako pole válcového proudu hustoty j rovné magnetizaci. Pro obě Gaussovy polohy tak dostaneme z 5.6 (21, 22, 23) vzorce

$$5.6 (44) \quad H_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{R^3(1 - A^2)^2},$$

$$H_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{m}{R^3(1 + A^2)^{3/2}},$$

kde $A = L/2R$.

K tomu je třeba dodat, že tyto vzorce platí dosti přesně jen pro velmi štíhlé tyčové magnety (např. zmagetované dráty), kdežto pro magnety obvyklých tvarů je třeba nahradit plnou délkou L magnetu tzv. *redukovanou délkou* l , která bývá v mezích $3/4$ až $5/6$ L . Je to způsobeno skutečností, že čím menší je délka magnetu v poměru k jeho průměru, tím obtížněji lze dosáhnout dokonale homogenní magnetizace. Příčinou je demagnetizace (viz čl. 5.8.1), která zeslabuje magnetizaci nejvíce u obou konců magnetu. Položíme-li tedy do vzorců 5.6 (44) místo A

$$5.6 (45) \quad \lambda = \frac{l}{2R} = \frac{3}{4} A \div \frac{5}{6} A = \frac{3L}{8R} \div \frac{5L}{12R},$$

získáme prakticky upotřebitelné vzorce

$$5.6 (46) \quad H_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{R^3(1 - \lambda^2)^2}, \quad H_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{m}{R^3(1 + \lambda^2)^{3/2}}.$$

Magnetické pole tyčového magnetu se skutečně velmi podobá poli válcového proudu nebo solenoidu stejného tvaru, jak vidíme ze známých pilinových obrazců.

Zbývá ještě poznamenat, že z naší teorie vyplývají také známé poznatky o silovém působení mezi magnety. Mohli bychom to provést přímým výpočtem sil působících na proudové smyčky v nehomogenním poli, ale užijeme raději analogie mezi polem magnetu a polem elektrického dipólu, která nás přivede také k objasnění stanoviska původní fluidové teorie magnetismu.

Elektrostatické pole v okolí elektrického dipólu a magnetické pole v okolí solenoidu nebo plošného proudu obíhajícího plášť válce mají zhruba stejný průběh. O tom nás přesvědčuje především stejný tvar obecných vzorců 5.1 (18) pro složky elektrického pole velmi krátkého dipólu s elektrickým momentem p a rovnic

$$\bar{H}_x = \frac{B_x}{\mu_0} = \frac{p_m}{4\pi\mu_0} \frac{2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{R^3}, \quad \bar{H}_y = \frac{p_m}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{R^3},$$

kteřé plynou ze vzorců 5.5 (57) pro složky magnetického pole $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ kroužící nabitě částice s dipólovým momentem $\mathbf{p}_m = \mu_0 \mathbf{m}$. I dipól konečné délky l a solenoid stejné délky L vytvářejí kvantitativně stejná pole při stejných momentech, jak lze soudit z toho, že intenzita elektrického pole v obou Gaussových polohách je dána rovnicemi 5.1 (15) a 5.1 (17), zcela obdobnými rovnicím 5.6 (44), které jsme pro intenzitu magnetického pole magnetu odvodili ze vzorců pro válcový proud.

Také chování elektrického dipólu v elektrickém poli a kroužícího náboje nebo proudové smyčky v magnetickém poli je kvantitativně popsáno stejnými rovnicemi 5.1 (19) a 5.5 (47) nebo 5.6 (4).

Z toho vyplývá podle čl. 5.1.4, že magnet v poli jiného magnetu podléhá točivému momentu, který jej stáčí do souhlasné rovnoběžné polohy a v této stabilní poloze je druhým magnetem přitahován silou, která má podle 5.1 (19') velikost

$$5.6 (46') \quad F_m = m \cdot \text{grad } B.$$

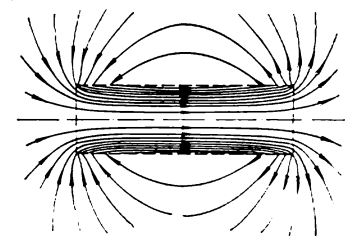
Popsané chování magnetů dalo právě podnět k vybudování *fluidové teorie* formálně zcela obdobné teorii elektrostatického pole. Základem této teorie je *Coulombův zákon magnetostatický*, který předpokládá, že magnetický pól Q_m působí ve vakuu na pól q_m silou

$$5.6 (47) \quad F(q_m) = \frac{Q_m q_m}{4\pi\mu_0 r^2} r^0.$$

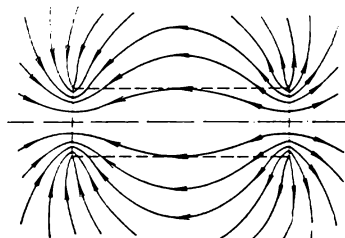
Intenzita magnetického pole pólu Q_m je pak definována jako vektorové pole

$$5.6 (48) \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{F}(q_m)}{q_m} = \frac{Q_m}{4\pi\mu_0 r^2} r^0,$$

jehož magnetické siločáry vystupují z kladného a vstupují do záporného pólu.



a)



b)

Obr. (5.6) 22. Pole tyčového magnetu: a — průběh indukčních čar, b — průběh siločar

Pól Q_m jsme v rovnici 5.6 (47) zavedli ryze formálně a jeho fyzikální význam vyplyne z toho, že dipól složený z bodových pólů $+Q_m$ a $-Q_m$ má moment

$$5.6 (49) \quad \mathbf{p}_m = Q_m \mathbf{l},$$

je-li $\mathbf{l}$ vektor vedený z $-Q_m$ do $+Q_m$. Má-li pak platit rovnice 5.6 (4), musí být moment magnetu totožný s dipólovým momentem 5.6 (3), tedy vzhledem k 5.6 (39)

$$Q_m \mathbf{l} = \mathbf{p}_m = \mu_0 \mathbf{m} = \mu_0 \mathbf{M}^* V = \mu_0 \mathbf{M}^* S L,$$

kde S a L jsou průřez a délka magnetu. Předpokládáme-li, že póly štíhlého válcového magnetu leží na jeho koncích, dostaneme

$$5.6 (50) \quad Q_m = \mu_0 \mathbf{M}^* S = J S,$$

při čemž vektor

$$5.6 (51) \quad J = \mu_0 \mathbf{M}^* = \frac{\mathbf{p}_m}{V}$$

definujeme jako *magnetickou polarizaci*. Můžeme si pak představit póly magnetu jako kladné a záporné „magnetické náboje“ rozložené na čelních plochách magnetu s hustotou

$$5.6 (52) \quad \frac{Q_m}{S} = J$$

rovnou velikosti magnetické polarizace. „Magnetické náboje“ na pólech magnetu jsou tedy obdobné elektrickým polarizačním nábojům, které jsou na povrchu dielektrika rozloženy s hustotou 5.2 (9) rovnou velikosti elektrické polarizace P .

Coulombův magnetostatický zákon je zákonem fenomenologickým a vliv prostředí na magnetostatické pole je proto třeba vyjádřit nahrazením konstanty μ_0 konstantou μ závislou na prostředí podobně jako v elektrostatickém zákonu 5.2 (28). Protože ve vakuu platí vztah 5.6 (1), jsou si vektory $\mathbf{H}$ a $\mathbf{B}$ úměrné a rozložení obou vektorových polí ve vakuu je shodné, jak seznáme srovnáním průběhu indukčních a silových čar homogenně zmagnetovaného tyčo-

vého magnetu na obr. (5.6) 22a, b. Zároveň vidíme, že indukční čáry odpovídají rozložení vektorového pole $\mathbf{B}$, jak jsme je odvodili pro plošný proud cirkulující na povrchu válce. Průběh siločar však odpovídá průběhu elektrických siločar v poli dipólu a nápadně se uvnitř magnetu liší od průběhu indukčních čar. Z toho je zřejmé, že vztah mezi vektory $\mathbf{B}$ a $\mathbf{H}$ nemůže být uvnitř magnetu stejný jako ve vakuu. Blížší vysvětlení této skutečnosti, která je způsobena vlivem rozhraní mezi magnetem a vakuem, podáme v čl. 5.8.1.

5.7. Magnetické pole v prostředí

5.7.0. Úvod

Magnetické pole je projevem sil mezi nabitými částicemi, které se pohybují v pozorovací soustavě a jsou jako všechny silové účinky mezi náboji nezávislé na prostředí, které náboje obklopuje. Protože však atomy všech látek obsahují nabitě částice, projeví se prostředím tím, že se k účinkům makroskopických proudů a magnetů připojí účinky pohyblivých nábojů prostředí, zvláště elektronového obalu atomů.

Otázka interakce mezi magnetickým polem a prostředím není tak jednoduchá jako v elektrostatice. Analogie elektrostatiky a magnetostatiky je ve skutečnosti velmi neúplná a pravá fyzikální podstata magnetismu se zkrsluje tím, že základní magnetické pojmy vznikly zároveň s teorií fluidovou vytvořenou podle elektrostatického vzoru.

5.7.1. Magnetické pole v neomezeném homogenním prostředí

Ve naší teorii magnetického pole je základním vektorem magnetická indukce. Vyjádřili jsme ji pro pole vzbuzené jedinou nabitou částicí rovnicí 5.5 (33), z níž plyne podle principu superpozice, že magnetická indukce vzbuzená libovolným počtem částic s elektrickými hybnostmi $\mathbf{v}^*$

$$5.7 (1) \quad \mathbf{B} = \sum \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (\mathbf{v}^* \times \mathbf{r}^0)$$

nebo při spojitě rozloženém náboji

$$5.7 (2) \quad \mathbf{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (d\mathbf{v}^* \times \mathbf{r}^0).$$

Tyto rovnice platí i pro magnetické pole v libovolném prostředí, ovšem za samozřejmého předpokladu, že $\mathbf{v}^*$ a $\mathbf{B}$ značí skutečné elektrické hybnosti a skutečnou indukci pole. Není tedy úkolem studia magnetického pole v prostředí zobecnit rovnice 5.7 (1,2), ale najít skutečné vektory $\mathbf{v}^*$, které vzniknou přítomností prostředí v poli proudů a magnetů.

V tomto článku budeme řešit tento úkol za nejjednodušších podmínek.

Prostor, v němž je homogenní magnetické pole, vyplňme neohrazeným paramagnetickým prostředím. Paramagnetickými nazýváme látky, které se v magnetickém poli slabě zmagnetují, a to tak, že tím vzniklý magnetický moment má všude stejný směr souhlasně rovnoběžný s indukcí magnetujícího pole. Mírou zmagnetování látky je prostorová hustota magnetického momentu, kterou stručně nazýváme magnetizací. Definovali jsme ji pro homogenně zmagnetované látky rovnicí 5.6 (39), kterou při nestejnoměrném zmagnetování nahrazujeme obecnější definicí

$$5.7 (3) \quad \mathbf{M}^* = \frac{d\mathbf{m}}{dV},$$

kde $d\mathbf{m}$ je magnetický moment objemového prvku dV . Místo vektoru $\mathbf{M}^*$ se často užívá magnetické polarizace $\mathbf{J} = \mu_0 \mathbf{M}^*$, definované pro homogenně zmagnetovaný permanentní

magnet jako prostorová hustota dipólového momentu 5.6 (3). Při nehomogenním zmagnetování není hustota dipólového momentu stálá a pak definujeme magnetickou polarizaci výrazem

$$5.7 (4) \quad \mathbf{J} = \mu_0 \mathbf{M}^* = \frac{d\mathbf{p}_m}{dV}.$$

Předpokládejme, že prostředí je *magneticky dokonale měkké* (a izotropní), což znamená, že magnetická polarizace $\mathbf{J}$ prostředí roste s indukcí $\mathbf{B}$ magnetického pole a zároveň s ní vymizí. Jsou-li oba vektory sobě úměrné

$$5.7 (5) \quad \mathbf{J} = \kappa_m \mathbf{B}$$

čili

$$5.7 (6) \quad \mathbf{M}^* = \kappa_m \mathbf{H},$$

říkáme, že prostředí je také *magneticky pružné*. Bezrozměrná konstanta κ_m charakterizuje magnetické chování látky a nazývá se její *magnetická susceptibilita*. U permanentních magnetů nevymizí polarizace v nulovém poli. Takové látky jsou *magneticky tvrdé*, neboť závislost $\mathbf{J}$ na $\mathbf{B}$ je slabší. Polarizace dokonalých (ideálních) magnetů je na vnějším magnetickém poli nezávislá. Je to mezní případ *dokonale tvrdého magnetika*. Úměrnost 5.7 (5) platí dosti přesně pro látky paramagnetické a diamagnetické; z feromagnetických látek vyhovuje vztahu 5.7 (5) dosti dobře jen měkké železo, a to ve slabých polích.

Mějme tedy homogenní paramagnetické neohraničené prostředí v homogenním magnetickém poli. Susceptibilita κ_m má kladnou hodnotu malou proti jedné a vektor $\mathbf{B}$ je stálý místně i časově. Podle 5.7 (5) pak také vektor $\mathbf{J}$ má všude stejnou velikost i směr, prostředí se v poli slabě a stejnoměrně zmagnetuje. Vysvětlujeme si to tím, že pole způsobí (aspoň částečné) usměrnění elektronových drah v molekulách a tak vytvoří paralelně uspořádané proudové smyčky (elektrické víry). Můžeme si to schematicky představit jako soustavu velkého počtu elementárních plošných válcových proudů (solenoidů) s poloměry rovnými poloměru elektronových drah a s osami rovnoběžnými se směrem pole. Každý z těchto elementárních válcových proudů vzbuzuje podle 5.6 (18, 43) magnetické pole, které vně válce je nulové a uvnitř válce má stálou indukci

$$5.7 (7) \quad B_p = \mu_0 H_p = \mu_0 j_p = \mu_0 M^* = J,$$

značí-li j hustotu elementárního válcového proudu. Indexy p jsme vyznačili, že jde o veličiny vzniklé magnetickou polarizací magnetika. V měkkém magnetiku tedy vzhledem k 5.7 (5,6)

$$5.7 (8) \quad B_p = J = \kappa_m B$$

nebo

$$5.7 (9) \quad H_p = M^* = \kappa_m H.$$

Pole B_p vzniklé magnetováním prostředí se podle principu superpozice skládá s polem B_0 , které by stejné magnetické zdroje vzbudily, kdyby se prostředí nezmagnetovalo, a proto výsledná indukce

$$5.7 (10) \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_p.$$

Podle 5.7 (8) tedy

$$5.7 (11) \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \kappa_m \mathbf{B},$$

takže

$$5.7 (12) \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}_0}{1 - \kappa_m}.$$

Susceptibilita κ_m neferomagnetických látek má však hodnotu malou proti jedné, takže můžeme psát

$$\frac{1}{1 - \kappa_m} = \frac{1 + \kappa_m}{1 - \kappa_m^2} \approx 1 + \kappa_m.$$

Tak dostáváme dostatečně přesný vztah

$$5.7 (13) \quad \mathbf{B} = (1 + \kappa_m) \mathbf{B}_0$$

neboli

$$5.7 (14)$$

$$\mathbf{B} = \mu_r \mathbf{B}_0,$$

položíme-li

$$5.7 (15)$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \kappa_m.$$

Veličina $\mu = \mu_r \mu_0$ se nazývá (*absolutní*) *permeabilita prostředí* a má též rozměr jako permeabilita vakua. Bezrozměrná veličina μ_r , zvaná *relativní (poměrná) permeabilita prostředí*, je pro vakuum rovna jedné.

U paramagnetických látek je $\mathbf{B}_p$ souhlasně rovnoběžné s magnetujícím polem, a podle 5.7 (8) je tedy $\kappa_m > 0$, $\mu_r > 1$. Vidíme tedy, že paramagnetické prostředí způsobilo zesílení původního pole. Nikoli však proto, že by se zesílilo původní pole původních zdrojů samých, ale proto, že prostředí se jejich polem zmagnetovalo a tím vznikl nový zdroj magnetického pole.

Ukážeme to snadno, předpokládáme-li, že magnetující pole $\mathbf{B}_0$ je vytvořeno solenoidem, jehož závity prochází proud I_0 . Je-li hustota závitů solenoidu z , představuje solenoid podle 5.6 (18) válcový plošný proud hustoty

$$5.7 (16) \quad j_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = H_0 = z I_0.$$

To však není skutečná hustota plošného proudu na povrchu solenoidu (je-li dosti štíhlý), neboť vytváří pole jen ve svém vnitřku. Proto se prostředí zmagnetuje jen uvnitř solenoidu, a to zhruba homogenně, kdežto vně solenoidu je $\mathbf{B}_p = \mathbf{J} = \kappa_m \mathbf{B}_0 = 0$. Elementární válcové proudy vyplňují tedy stejnoměrně jen vnitřek solenoidu, kde mají všude stejnou hustotu j_p , a proto se navzájem ruší; zbývá však nenulový plošný proud na povrchu solenoidu. Má zřejmě také hustotu j_p , takže na povrchu cirkuluje ve skutečnosti plošný proud hustoty

$$5.7 (17) \quad j = j_0 + j_p,$$

a protože

$$5.7 (18) \quad B_0 = \mu_0 j_0, \quad B = \mu_0 j,$$

je vztah 5.7 (17) jen jiným vyjádřením vztahu 5.7 (10). Z posledních dvou rovnic plyne pak vzhledem k 5.7 (14), že skutečný plošný proud na povrchu solenoidu má hustotu

$$5.7 (19) \quad j = \mu_r j_0,$$

jako by vinutím solenoidu protékal proud $I = \mu_r I_0$.

Vidíme tedy, že indukce magnetického pole solenoidu je v paramagnetickém prostředí v poměru jeho relativní permeability silnější než v prázdném prostoru, a to proto, že sku-

tečný plošný proud na povrchu solenoidu je v témže poměru silnější než jeho makroskopická část.

Je třeba zdůraznit, že je zvykem popisovat magnetické vlastnosti látek z hlediska experimentálního fyzika nebo technika, kteří počítají jen s makroskopickými proudy a permanentními magnety a nikoli s elementárními proudovými víry v magnetiku. Toto fenomenologické stanovisko je odůvodněno praktickou potřebou, která vedla k tomu, že vliv prostředí se formálně vystihuje zavedením permeability prostředí, kterou je možno pro každé magnetikum experimentálně zjistit. Pak ovšem se v rovnicích 5.7 (1,2) budou vyskytovat jen elektrické hybnosti makroskopických proudů. Označíme-li je $\mathbf{v}_0^*$, budou indukce vzbuzená jen makroskopickými proudy

$$5.7 (20) \quad \mathbf{B}_0 = \sum \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (\mathbf{v}_0^* \times \mathbf{r}^0),$$

při čemž podle 5.7 (19)

$$5.7 (21) \quad \mathbf{v}_0^* = \frac{\mathbf{v}^*}{\mu_r}.$$

Skutečný vektor indukce, vzbuzený všemi opravdu působícími nabitými částicemi s elektrickými hybnostmi $\mathbf{v}^*$, je zase dán rovnicí 5.7 (1), kterou ovšem můžeme se zřetelem k 5.7 (14) psát ve tvaru

$$5.7 (22) \quad \mathbf{B} = \sum \frac{\mu}{4\pi r^2} (\mathbf{v}_0^* \times \mathbf{r}^0).$$

Obě rovnice 5.7 (1) a 5.7 (22) jsou tedy fyzikálně totožné a jejich formální odlišnost znamená, že pro silová působení mezi náboji platí různé zákony ve vakuu a v prostředí. Index nula u vektorů $\mathbf{B}_0$ a $\mathbf{v}_0^*$ značí, že mají původ výhradně v proudech nebo magnetech, kterých vědomě používáme jako zdrojů vytvářejících magnetické pole. Proto bychom je měli raději nazývat *jmenovitými* (*nominálními*) veličinami na rozdíl od skutečných veličin, na jejichž hodnoty má vliv i prostředí, které ke zdrojům pole nepočítáme. Elektrické hybnosti $\mathbf{v}_0^*$ jsou zcela obdobné volným nábojům v elektrostatice, kterými nabíjíme zdroje elektrostatického pole. Rovněž je zřejmá obdoba rovnice 5.7 (22) s fenomenologickým tvarem 5.2 (28) elektrostatického Coulombova zákona.

Obě posledně jmenované rovnice jsou správné a prakticky výhodné, protože odpovídají experimentálnímu přístupu k elektrickým a magnetickým jevům.

Zatím jsme zjistili vliv nekonečného homogenního prostředí jen na indukci, který je vyjádřen vztahem 5.7 (14), který znovu plyne z rovnic 5.7 (20, 21, 22). Vztahy mezi skutečnými a nominálními hodnotami ostatních magnetických veličin dostaneme snadno z předpokladu, že pro skutečné hodnoty platí stejné rovnice jako ve vakuu. Tak částice s elektrickou hybností $\mathbf{u}^*$ podléhá v prostředí síle 5.5 (35)

$$5.7 (23) \quad \mathbf{F} = \mathbf{u}^* \times \mathbf{B},$$

neboť $\mathbf{u}^*$ se přítomností prostředí nezmění, pokud $\mathbf{F}$ značí sílu působící jen na částici, nikoli na okolní prostředí. Síla v prostředí

$$5.7 (24) \quad \mathbf{F} = \mathbf{u}^* \times \mu_r \mathbf{B}_0 = \mu_r \mathbf{F}_0$$

je tedy μ_r -krát větší než ve vakuu a totéž platí i pro sílu působící na proudový prvek

$$5.7 (25) \quad d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mu_r d\mathbf{F}_0$$

a točivý moment, kterému podléhá v prostředí proudová smyčka,

$$5.7 (26) \quad \mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \mathbf{m}_0 \times \mu_r \mathbf{B}_0 = \mu_r \mathbf{M}_0,$$

protože $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$.

Pokud jde o intenzitu magnetického pole, definovali jsme ji vztahem 5.6 (1), který zůstává v platnosti i v prostředí, ovšem pro nominální veličiny:

$$5.7 (27) \quad \mathbf{H}_0 = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0.$$

Kdybychom též vztah podrželi pro skutečné vektory $\mathbf{H}$ a $\mathbf{B}$, lišily by se obě pole jen stálým faktorem i v libovolném prostředí a jeden z obou vektorů by se stal zbytečným. Uvidíme v čl. 5.7.3, že plné obdoby pole magnetů s elektrostatickým polem se dosáhne, definujeme-li v prostředí permeability μ intenzitu pole obecnějším vztahem

$$5.7 (28) \quad \boxed{\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}.}$$

Pak vzhledem k 5.7 (14, 15)

$$5.7 (29) \quad \mathbf{H} = \frac{\mu_r}{\mu} \mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mathbf{H}_0.$$

Má-li pak rovnice 5.6 (4) platit pro skutečné i pro nominální hodnoty

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{p}_{m0} \times \mathbf{H}_0,$$

musí být podle 5.7 (26) splněn vztah

$$\mathbf{p}_m \times \mathbf{H} = \mu_r (\mathbf{p}_{m0} \times \mathbf{H}_0) = \mu_r \mathbf{p}_{m0} \times \mathbf{H}.$$

Z toho plyne, že v prostředí je dipólový moment

$$\mathbf{p}_m = \mu_r \mathbf{p}_{m0},$$

a že je tedy třeba definovat jej v prostředí výrazem

$$5.7 (30) \quad \mathbf{p}_m = \mu_r \mu_0 \mathbf{m}_0 = \mu \mathbf{m} = \mu I \mathbf{S}.$$

Hlavní poznatky odvozené v tomto článku lze shrnout takto:

$$5.7 (31) \quad \textit{Homogenní neohraničené měkké magnetikum nepůsobí změny intenzity magnetického pole kondukčních proudů, avšak magnetická indukce jejich pole a síly mezi těmito proudy se vlivem prostředí zvětší v poměru relativní permeability prostředí.}$$

Z toho vyplývá, že Biotův—Savartův—Laplaceův zákon platí beze změny i v homogenním neohraničeném prostředí.

Hořejší věta je správná jen za podmínek v ní uvedených a neplatí v prostředí nestejnorodém, zvláště ne v případech, kdy vodiče jsou obklopeny několika prostředími různých magnetických vlastností. Proto neplatí hořejší věta pro pole magnetů, neboť části prostoru, které zaujímají magnety, nemohou být vyplněny jiným magnetikem, takže prostředí není v celku ani homogenní, ani neohraničené. Proto je otázka vlivu prostředí na pole magnetů a na silové působení mezi magnety a proudy dosti složitá a k jejímu řešení je nutno vyšetřit vlastnosti magnetického pole v prostoru vyplněném různými magnetiky.

5.7.2. Magnetické pole v různorodém prostředí

Obecný problém magnetického pole v nehomogenním prostředí je velmi nesnadný, a proto se obvykle řeší některé jednodušší úlohy, které se týkají prostředí různorodého v tom smyslu, že se skládá z několika homogenních magnetik různých vlastností, která se stýkají

v rozhraní různých tvarů. Zejména se studuje — podobně jako v elektrostati — vliv dutin na pole v homogenním prostředí.

Než přistoupíme k řešení konkrétních úloh, ukážeme, že rovnice 5.7 (5), vyjadřující základní vlastnost dokonale měkkých a pružných magnetik, neplatí jen pro homogenní neomezené prostředí. Platí i pro prostředí, jehož permeabilita má v nejbližším okolí částice určitou jednoznačnou hodnotu, i když se v dalším okolí jakkoli mění. Magnetická polarizace prostředí je totiž určena hodnotou susceptibility v těsném okolí částice a v největším magnetickým polem v tomto okolí; totéž platí i o magnetické síle působící na částici. Síla F v rovnici 5.7 (23) je proto úplně určena magnetickou indukcí B v místě částice a je nezávislá na vlastnostech prostředí v ostatních částech prostoru.

Právě odvozeného poznatku užijeme při řešení jednoduché, ale důležité úlohy:

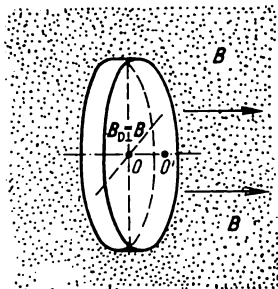
Mějme v nekonečném homogenním prostředí válcovou dutinu s osou rovnoběžnou se směrem pole.

Magnetickou polarizací ve vnějším magnetiku vzniká magnetický moment, jehož hustota je dána polarizací J prostředí. Usměrněním molekulárních proudů vzniká na plášti válce omezujícího dutinu válcový proud, který podle obr. (5.7) 1 vzbuzuje opačné magnetické síly než pole vnější. Výsledné indukční pole je tedy slabší než v okolním homogenním prostředí. Míra tohoto zeslabení závisí však na rozměrech dutiny a lze ji snadno najít ve dvou krajních případech, totiž u příčné ploché nebo u štíhlé podélné dutiny.

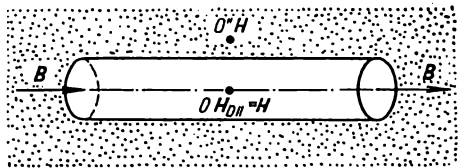
a) Příčná plochá dutina

Je-li dutina velmi plochá, tj. je-li výška válce velmi malá proti jeho průměru [obr. (5.7) 2], je celkový plošný proud I na velmi nízkém válci slabý a poloměr válce a velký, takže k poli tohoto proudu nemusíme přihlížet. Z toho vyplývá, že elektrodynamická síla, kterou

na nabitou částici (např. elektron) působí vnější magnetické pole, je uvnitř ploché dutiny velmi přibližně stejná, jako by plošný proud na jejím obvodu neobíhal, tedy jako by



Obr. (5.7) 2. Příčná plochá dutina v magnetiku



Obr. (5.7) 3. Podélná štíhlá dutina v magnetiku

prostředí stejnoměrně vyplňovalo dutinu. Z toho soudíme, že náboj ve středu O dutiny podléhá stejné síle jako náboj v blízkém místě O' v prostředí. Vzhledem k obecné platnosti rovnice 5.7 (23) můžeme tedy položit sobě rovnými síly působící na náboj v O a v O' . Tak dostaneme

$$\mathbf{u}^* \times \mathbf{B}_{D1} = \mathbf{u}^* \times \mathbf{B},$$

značí-li $\mathbf{B}_{D\perp}$ vektor indukce v příčné dutině. To však musí platit pro libovolnou hybnost $\mathbf{u}^*$, takže

$$5.7 (32) \quad \mathbf{B}_{D\perp} = \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Je-li tedy v dutině vakuum, je podle 5.7 (14) a 5.6 (1)

$$5.7 (33) \quad \mathbf{H}_{D\perp} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{D\perp} = \frac{\mu \mathbf{H}}{\mu_0} = \mu_r \mathbf{H}.$$

V ploché příčné dutině je tedy magnetická indukce stejná, ale intenzita pole je μ_r -krát větší než v okolním homogenním magnetiku permeability μ .

b) Štíhlá podélná dutina

Předpokládejme nyní, že naopak průměr dutiny je velmi malý proti její délce, která má směr pole [obr. (5.7) 3]. Na plášti štíhlého válce je rozložen polarizační proud s hustotou j_p , určenou rovnicí 5.7 (7), ale opačného směru, než kdyby prostředí vyplňovalo dutinu a bylo v ní polarizováno, jak je zřejmé z obr. (5.7) 1. Proto vytvářejí tyto proudy uvnitř prázdné dutiny dodatečné magnetické pole, jehož indukce je podle 5.7 (8) přibližně rovna

$$\mathbf{B}' = -\mathbf{B}_p = -\mathbf{J}.$$

Pole $\mathbf{B}'$ vzniká v dutině proto, že není vyplněna stejným prostředím jako celý okolní prostor, a je třeba je vektorově sečíst s polem $\mathbf{B}$, které by v místě dutiny vzniklo, kdyby byla také vyplněna okolním magnetikem. V okolním prostředí je tedy

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

kdežto v dutině podle 5.7 (10) je indukce

$$5.7 (34) \quad \mathbf{B}_{D\parallel} = \mathbf{B} + \mathbf{B}' = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_p - \mathbf{B}_p = \mathbf{B}_0.$$

V dutině je vakuum, a proto vzhledem k 5.7 (29)

$$\mathbf{H}_{D\parallel} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{D\parallel} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 = \mathbf{H}_0,$$

takže

$$5.7 (35) \quad \mathbf{B}_{D\parallel} = \frac{1}{\mu_r} \mathbf{B}, \quad \mathbf{H}_{D\parallel} = \mathbf{H}.$$

To znamená, že ve štíhlé podélné dutině je intenzita magnetického pole stejná, ale magnetická indukce je μ_r -krát menší než v okolním prostředí.

Srovnáním poznatků odvozených v a) a b) dostaneme vztah

$$5.7 (36) \quad \mu_r = \frac{H_{D\perp}}{H_{D\parallel}},$$

který říká, že intenzita magnetického pole v příčné ploché mezeře v prostředí relativní permeability μ_r je μ_r -krát silnější než v podélném kanálu.

Obě studované dutiny a) a b) jsou vlastně krajní případy dutiny tvaru elipsoidu, pro kterou jsme podrobněji vyšetřovali elektrostatické pole v čl. 5.2.4. Závěry tam učiněné pro příčnou i podélnou mezeru souhlasí s právě odvozenými výsledky. Bližším rozбором bychom zjistili, že to platí i pro obecný elipsoid.

Také další poznatky o elektrostatickém poli, odvozené v čl. 5.2.4, platí i pro pole magnetostatické, což je celkem samozřejmé vzhledem k analogii magnetostatického a elektrostatického pole, kterou jsme poznali v čl. 5.6.7. Postup našeho odvození byl jiný, protože

jsme vycházeli od orientace „elektrických vírů“ v prostředí. Kdybychom vyšli z představy o magnetické polarizaci jakožto usměrňování dipólů, byl by postup odvození i formálně stejný jako v elektrostatice.

Odvozené rovnice 5.7 (32, 33, 35) jsou zřejmě zvláštní případy obecných vztahů

$$5.7 \quad (37) \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2},$$

$$5.7 \quad (38) \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}, \quad H_{1t} = H_{2t},$$

které platí pro normálové a tečné složky vektorů $\mathbf{B}$ a $\mathbf{H}$ na rozhraní prostředí 1 a 2. Jsou zcela obdobné rovnicím odvozeným v čl. 5.2.4 pro $\mathbf{D}$ a $\mathbf{E}$ a plyne z nich zákon lomu silových a indukčních čar v magnetickém poli:

$$5.7 \quad (39) \quad \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\operatorname{tg} \psi_2} = \frac{H_{1t}}{H_{1n}} : \frac{H_{2t}}{H_{2n}} = \frac{B_{1t}}{B_{1n}} : \frac{B_{2t}}{B_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Tato rovnice je formálně shodná s 5.2 (44) a úhly ψ_1 , ψ_2 mají stejný význam jako na obr. (5.2) 8.

Při přechodu z prostředí s menší permeabilitou do prostředí s větší permeabilitou se tedy indukční čáry lámou od kolmice a tím se zhušťují. Na tom se zakládá magnetické stínění prostoru uvnitř dutého obalu z feromagnetického kovu. Indukční čáry se stáhnou dovnitř kovu a v dutině zbývá jen velmi slabé pole. Takovým železným pancířem je možno chránit některé měřicí přístroje (např. galvanoměry s pohyblivou magnetkou) před vnějším (např. zemským) polem.

5.7.3. Trvalé magnety a proudy v prostředí

Při vyšetřování vlivu prostředí obklopujícího magnety na pole jimi vytvořené a na vzájemné působení magnetů i na působení mezi magnety a makroskopickými proudy musíme si uvědomit, že trvalé magnety jsou vždy tělesa pevného skupenství, do nichž nemůže vniknout okolní prostředí. Proto může být prostředí homogenní jen vně magnetů, které v něm vytvářejí dutiny geometricky shodné s magnety. Abychom úlohu co nejvíce zjednodušili, omezíme se na dokonalé permanentní magnety, z dokonale tvrdého feromagnetika, které se v libovolném poli již nemagnetují. Prostor zaujatý takovým magnetem, jehož polarizace se vnějším polem nemění, chová se tedy jako magnetikum s permeabilitou vakua. Z poznatků předešlého článku vyplývá, že chování magnetů obklopených nějakým prostředím závisí na tvaru magnetů.

Vyšetříme nejprve silové působení makroskopických proudů na magnety obklopené homogenním prostředím. Toto působení je výsledkem elektrodynamických sil mezi makroskopickými proudy a molekulárními proudy permanentních magnetů. Jsou dány obecnou rovnicí 5.7 (23), kam je třeba dosadit skutečné vektory $\mathbf{u}^*$ a $\mathbf{B}$, příslušné elektrické hybnosti molekulárních proudů a indukci uvnitř magnetu. Přibližné řešení úlohy v obou krajních případech plochého a tyčového magnetu dostaneme snadno z výsledků odvozených v předešlém článku.

Plochý magnet

Vložme velmi plochý magnet (příčně zmagnetovaný ocelový kotouč) do homogenního prostředí s permeabilitou μ , kolmo ke směru pole. Podle rovnice 5.7 (32) je indukce $\mathbf{B}$ v magnetu stejná jako v okolním prostředí, a proto budou na všechny molekulární proudy působit podle rovnice 5.7 (23) stejné elektrodynamické síly, jako by prostředí vyplňovalo

i vnitřek magnetu, a bylo tedy v celém prostoru homogenní. Plochý magnet podléhá proto podle 5.7 (22) v příčném magnetickém poli makroskopických proudů síle úměrné permeabilitě okolního prostředí.

Tyčový magnet

Vložíme-li do prostředí štíhlý válcový magnet rovnoběžně s polem, vznikne v prostředí dutina (kanál), v níž je podle 5.7 (35) magnetická indukce μ_r -krát menší než v okolním prostředí. Síly, které působí na molekulární proudy magnetu, jsou tedy ve stejném poměru slabší, než kdyby tyto proudy byly přímo v prostředí, kde by na ně působily síly podle 5.7 (24) úměrné μ_r . Tyčový magnet podléhá tedy v podélném magnetickém poli silám nezávislým na prostředí. Tyto síly by ovšem byly od nuly různé jen v nehomogenním poli nebo při malém vychýlení magnetu ze směru pole. V prvním případě by na magnet působily posuvné síly, ve druhém otáčivý moment.

Abychom zjistili, jaké je silové působení mezi magnety v homogenním prostředí, ptejme se nejprve, jaké magnetické pole vytvoří dokonalý permanentní magnet v neomezeném homogenním prostředí permeability $\mu = \mu_r \mu_0$, které jej obklopuje. Podle čl. 5.7.1 se prostředí polarizuje všude v okolí magnetu, kde magnet budí nenulové vektorové pole $\mathbf{B}$ dané rovnicí 5.7 (1). V této rovnici značí $\mathbf{v}^*$ skutečnou elektrickou hybnost, která se liší od jmenovité hybnosti jen v místech, kde se prostředí zmagnetuje. V celém objemu homogenního prostředí se však polarizační proudy vzájemně ruší a mohou vzniknout jen na rozhraní, tedy v našem případě jen na povrchu magnetu, jestliže se na něm mění polarizace J nespojitě. Pole magnetu M je sice soustředěno uvnitř magnetu, kde není polarizovatelné prostředí ($\kappa_m = 0$), a u jeho čelních ploch, ale v těsném okolí jeho válcového povrchu nevzniká polarizační plošný proud. Je tedy třeba do rovnice 5.7 (1) dosadit za $\mathbf{v}^*$ elektrickou hybnost $\mathbf{v}_0^*$, jakou mají molekulární proudy magnetu ve vakuu. Uvnitř magnetu M je tedy vektor $\mathbf{B}$ stejný, jako kdyby magnet byl ve vakuu, a podle 5.7 (37) vystupuje jeho čelními plochami kolmo do okolního prostředí bez nespojitě změny. Skutečný vektor $\mathbf{B}$ je proto v celém homogenním prostředí stejný, jako kdyby magnet byl ve vakuu. Situace se nezmění, vložíme-li do prostředí solenoid, kterým prochází proud, neboť se tím nevytvoří v prostředí makroskopická dutina. Proto působí magnet na solenoid i v prostředí stejně jako ve vakuu. Jinak je tomu ovšem, vložíme-li do prostředí další permanentní magnet M' , který vytlačí prostředí z objemu, který zaujímá, a vytvoří v něm dutinu vyplněnou dokonale tvrdým magnetikem, které se již v poli magnetu M nepolarizuje, a chová se tedy jako prostředí s permeabilitou vakua μ_0 . Čelními plochami magnetu vstupuje vektor $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ beze změny do magnetu M' . Pole $\mathbf{B}$ polarizuje ovšem prostředí v okolí jeho válcového povrchu, na němž vzniká plošný polarizační proud, který podle 5.7 (8) budí uvnitř magnetu M' indukci

$$\mathbf{B}'_p = -\kappa_m \mathbf{B}',$$

neboť plošný proud obíhá podle obr. (5.7) 1 v opačném smyslu, než kdyby se polarizovalo prostředí uvnitř magnetu M' . Na jeho molekulární proudy působí tedy výsledná indukce

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'_p = \mathbf{B}_0 - \kappa_m \mathbf{B}'$$

čili

$$\mathbf{B}' = \frac{\mathbf{B}_0}{1 + \kappa_m} = \frac{1}{\mu_r} \mathbf{B}_0.$$

Magnety M a M' obklopené nekonečným prostředím s relativní permeabilitou μ_r působí tedy na sebe silou μ_r -krát slabší než ve vakuu:

$$\mathbf{F}(MM') = \frac{1}{\mu_r} \mathbf{F}_0(MM').$$

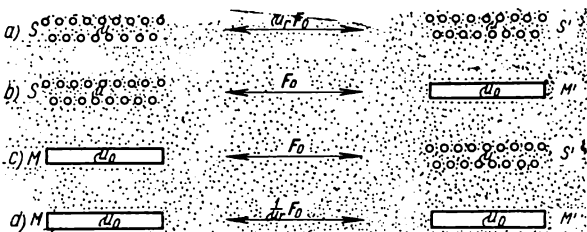
Z odvození je zřejmé, že rozdíl v silovém působení mezi tyčovými magnety a solenoidy v homogenním magnetiku je způsoben typickou vlastností dokonalých permanentních magnetů, že jejich magnetizace nezávisí na vnějším poli a že okolní prostředí nevniká do prostoru, který zaujímají. Mohli bychom je tedy v předešlých úvahách nahradit prázdnými (tj. „evakuovanými“) solenoidy. Je to znázorněno na schematickém obrázku (5.7) 4.

Odvozené poznatky platí dosti přesně pro štíhlé tyčové magnety z tvrdého feromagnetika, pro které právě dokázal Coulomb experimentálně platnost svého magnetostatického zákona vyjádřeného ve vakuu rovnici 5.6 (47). Podle hořejšího vztahu je třeba tuto rovnici nahradit v homogenním prostředí obecnější rovnici

$$5.7 \text{ (40)} \quad F(q_{m0}) = \frac{1}{\mu_r} \frac{Q_{m0} q_{m0}}{4\pi\mu_0 r_{12}^2} r_{12}^0 = \frac{Q_{m0} q_{m0}}{4\pi\mu_r r_{12}^2} r_{12}^0$$

a podobně intenzitu pole vzbuzeného bodovým magnetickým pólem Q_{m0} v homogenním prostředí permeability μ je třeba vyjádřit vzorcem

$$5.7 \text{ (41)} \quad H = \frac{1}{\mu_r} H_0 = \frac{Q_{m0}}{4\pi\mu_r r_{12}^2} r_{12}^0.$$



Obr. (5.7) 4. Vzájemné silové působení solenoidů a magnetů v homogenním prostředí

Při tom jsme připojili k veličinám, na které nemá prostředí vliv, index 0, který u pólu Q_{m0} má naznačit, že uvedené vztahy byly odvozeny pro *ideální magnety*, jejichž dipólové momenty, a tedy ani jejich póly (velikosti „magnetických nábojů“) nezávisí na vnějším poli.

Z poslední rovnice dostáváme konečně pro indukci bodového magnetického pólu:

$$B = \mu H = \frac{\mu}{\mu_r} H_0 = \mu_0 H_0 = B_0.$$

Indukce bodového magnetického pólu je tedy v homogenním prostředí stejná jako ve vakuu, jak je přímo patrné ze vzorce

$$B = \frac{Q_{m0}}{4\pi r_{12}^2} r_{12}^0,$$

který plyne z rovnice 5.7 (41) stejně jako v elektrostatičce. Tím se doplňuje analogie mezi magnetostatickým a elektrostatičkým polem, která ovšem je jen formální a není fyzikálně odůvodněna existencí magnetického náboje.

Poznámka. Analogie elektrostatičkého a magnetostatičkého pole by mohla vést ke zkresleným názorům na fyzikální význam vektorů B a H . Jak jsme již několikrát zdůraznili, je v elektrodynamické teorii základním vektorem magnetického pole indukce B , jejíž definice odvozená ze zákona o silovém působení nábojů ji uvádí v jednoznačnou souvislost s elektrodynamickými silami a z které také plyne chování tohoto vektoru v poli buzeném v prostředí. Tento vektor sám o sobě stačí k popisu vlastností magnetických polí a vektor intenzity H je vlastně nadbytečný. Oba vektory B i H byly zavedeny již ve fluidové teorii permanentních magnetů, a to podle vzoru stejně pojmenovaných elektrostatičkových vektorů D a E . To je pravý důvod analogie, která je úplná ovšem jen pro pole tyčových magnetů. Při tom intenzitě E odpovídá H a indukci D vektor B . Kdybychom k sobě přiradili v obou polích fyzikálně rovnocenné vektory E a B , nedostali bychom formálně obdobné vztahy ani pro tyčové magnety, protože fyzikální analogie mezi E a B je dosti vzdálená a neúplná. O tom svědčí zvláště diamagnetismus a gyromagnetické jevy, které v elektrostatičce nemají obdoby.

5.7.4. Magnetomotorické napětí

Nejednou jsme již upozornili na formální obdobu mezi elektrostatičkým polem klidných nábojů a stacionárním polem trvalých magnetů. V tomto článku vysvětlíme další důležité pojmy, které byly do nauky o magnetismu převzaty přímo z elektrostatičky.

Rovnicí 5.1 (49) jsme definovali napětí mezi dvěma body (1) a (2) v elektrostatickém poli. Podobně se definuje *magnetické napětí*:

$$5.7 (42) \quad U_m = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

jako dráhový integrál intenzity magnetického pole a (skalární) magnetický potenciál v místě P :

$$5.7 (43) \quad \varphi_m(P) = \int_P^{\infty} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}.$$

Tento integrál je jednoznačnou funkcí dolní meze jen v těch částech pole, kde jsou splněny podmínky

$$5.7 (44) \quad \text{rot } \mathbf{H} = 0$$

čili

$$5.7 (45) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

které jsme v elektrostatice vyjádřili rovnicemi 5.1 (43) a 5.1 (45). V magnetickém poli platí však rovnice 5.5 (38) a 5.6 (28), které znějí

$$5.7 (46) \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}.$$

První rovnice platí obecně v nestacionárním poli a přejde v 5.7 (44), je-li pole časově stálé. Druhá rovnice platí sice pro stacionární pole, ale v místech, jimiž protéká proud. I tato rovnice přejde v 5.7 (44) v magnetickém poli vzbuzeném jen *klidnými permanentními magnety*. V takových polích je tedy skalární magnetický potenciál jednoznačný s podmínkou, že integrační cesta v 5.7 (42, 43) nemá bodů společných s magnety. Pak také platí rovnice

$$5.7 (47) \quad \mathbf{H} = -\text{grad } U_m$$

obdobná rovnici 5.1 (46) známé z elektrostatiky.

Jinak je tomu v magnetickém poli (i stacionárním) vzbuzeném proudy ve vodičích. Pak už není vzhledem k druhé rovnici 5.7 (46) pole všude nevírové a není splněna přirozeně ani podmínka 5.7 (45). Podle Stokesovy věty D (39) je totiž

$$5.7 (48) \quad \oint_{C(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S},$$

kde poslední integrál je podle definice hustoty proudu roven celkovému proudu, který prochází vnitřkem uzavřené integrační cesty C integrálu na levé straně. Definujeme-li tedy integrál

$$5.7 (49) \quad \mathcal{E}_m = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

obdobný integrálu 5.4 (6) jako *magnetomotorické napětí*, dospíváme k rovnici

$$5.7 (50) \quad \boxed{\mathcal{E}_m = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \Sigma I,}$$

kde ΣI znamená celkový proud prostupující vnitřkem uzavřené křivky C . Tato rovnice vyjadřuje jeden ze základních poznatků elektrodynamiky:

Magnetomotorické napětí působící v libovolné uzavřené křivce ve stacionárním magnetickém poli se rovná celkovému proudu procházejícímu vnitřkem křivky.

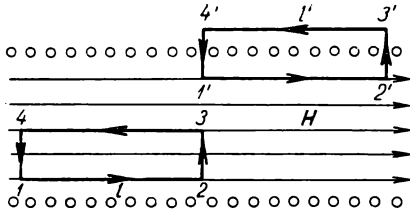
Magnetomotorické napětí se zřejmě měří v ampérech a je číselně rovno práci, kterou by pole vykonalo, kdyby magnetický pól velikosti 1 Vs oběhl jednou kolem křivky, na které napětí působí. Je rovno nule pro každou uzavřenou křivku, jejímž vnitřkem neprochází žádný proud.

Jako velmi jednoduchý příklad užití hořejší věty odvodíme z ní znovu intenzitu pole ve štíhlém solenoidu. Předpokládejme, že jde o střední část solenoidu, kde je pole přibližně homogenní. Vyšetřme nejprve magnetomotorické napětí pro obdélníkovou dráhu 12341, jejíž všechny části leží uvnitř solenoidu [obr. (5.7) 5]. Dostaneme

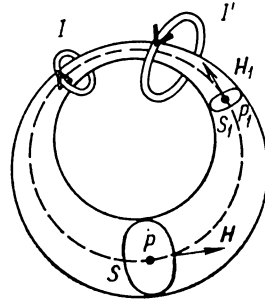
$$\mathcal{E}_m = \oint_{12341} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l},$$

neboť integrály podél stran 23 a 41, kolmých na směr $\mathbf{H}$ (rovnoběžný s osou solenoidu) vymizí. V prvním integrálu vpravo má $d\mathbf{l}$ souhlasný, ve druhém však opačný směr než $\mathbf{H}$, a proto

$$\mathcal{E}_m = Hl - Hl = 0.$$



Obr. (5.7) 5. K výpočtu magnetomotorického napětí v poli solenoidu



Obr. (5.7) 6. Prstencová indukční trubice

To je ve shodě s větou 5.7 (50), protože dráha 12341 neobepíná žádný proud. Počítáme-li však magnetomotorické napětí pro obdélníkovou dráhu $I'2'3'4'1'$, jejíž strana $I'2'$ leží uvnitř solenoidu, strana $3'4'$ vně solenoidu těsně u závitů, bude

$$\mathcal{E}'_m = \oint_{I'2'3'4'1'} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{I'}^{2'} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{3'}^{4'} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Hl,$$

neboť na vnější straně solenoidu těsně u závitů je pole prakticky nulové. Podle věty 5.7 (50) musí tedy platit vztah

$$Hl = kI,$$

je-li k počet závitů na délce l a I proud v jednom závitě. Odtud tedy vychází

$$5.7 (51) \quad H = \frac{k}{l} I = \alpha I$$

v úplné shodě s dřívějším výsledkem 5.6 (27).

5.7.5. Vektorový potenciál. Magnetické obvody

Skalární magnetický potenciál φ_m není vhodný ke studiu polí v okolí elektrických proudů. Pro tato pole, a to nejen stacionární, ale zvláště nestacionární rychle proměnná pole, je důležitý *vektorový potenciál*. Pro nabítou částici s elektrickou hybností $\mathbf{v}^*$ je definován výrazem

$$5.7 (52) \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v}^*}{r},$$

který platí pro skutečnou hybnost $\mathbf{v}^*$ i v prostředí permeability μ , kde lze psát též

$$\mathbf{A} = \mu \frac{\mathbf{v}_0^*}{4\pi r},$$

značí-li $\mathbf{v}_0^* = \mathbf{v}^*/\mu$, jmenovitou hybnost. Jeho nejobecnější definice

$$5.7 (52') \quad \mathbf{A} = \int \frac{\mu \mathbf{i}}{4\pi r} dV$$

platí v celém rozsahu pole, tedy i uvnitř elektrických vodičů s hustotou proudu $\mathbf{i}$.

Význam vektorového potenciálu je v tom, že souvisí s magnetickou indukcí jednoduchým vztahem

$$5.7 (53) \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A},$$

který nahrazuje „magnetostatickou“ rovnici 5.7 (47) a který snadno odvodíme. Vektor $\mathbf{v}^*$ nezávisí na souřadnicích x, y, z bodu, v němž potenciál počítáme, takže

$$\begin{aligned} \text{rot}_z \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[v_z^* \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) - v_y^* \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi r^2} \left(v_z^* \frac{y}{r} - v_y^* \frac{z}{r} \right) = +\frac{\mu_0}{4\pi r^2} (v_y^* r_z^0 - v_z^* r_y^0) = B_z \end{aligned}$$

a stejně pro ostatní složky. Z 5.7 (53) plyne okamžitě

$$5.7 (54) \quad \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

neboť rotace každého vektoru je nezářidlové pole, jehož divergence všude vymizí. Podle Stokesovy věty D (39) platí tedy pro libovolnou plochu $S(V)$ uzavírající objem V rovnice

$$5.7 (55) \quad \oint_{S(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

která vyjadřuje Gaussovu větu pro magnetickou indukci. Platí zcela obecně, tedy i v nestejnorodém prostředí. Výtok magnetické indukce z libovolné části pole je tedy nulový, z čehož vyplývá, že *všechny indukční čáry jsou uzavřené*. V magnetickém poli není zdrojů indukčního toku a nejsou jimi ani póly magnetů, které jsou ovšem zdrojem siločar [srovn. obr. (5.6) 22]. Magnetický indukční tok plochou S

$$5.7 (56) \quad \Phi = \int \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

je tedy stejný pro každý průřez téže indukční trubice, která je ovšem vždycky uzavřená. Vidíme, že indukční tok Φ má stejnou vlastnost jako ustálený elektrický proud, který má stálou hodnotu podél celého uzavřeného vodiče. Tuto analogii můžeme sledovat dále a tak dojdeme k pojmu *magnetického obvodu* podobného elektrickému obvodu složenému z elektrických vodičů.

Mysleme si v magnetickém poli plochu konečné velikosti všude kolmou k indukčním čarám [obr. (5.7) 6]. Indukční čáry protínající (kolmo) plochu S leží uvnitř nebo na povrchu jisté v sebe uzavřené prstencové indukční trubice a tok Φ všemi jejími průřezy je stejný. Označíme-li příčkou střední hodnoty veličin B, H a μ na ploše S , můžeme psát

$$5.7 (57) \quad \Phi = \int \int_S B dS = \bar{B}S = \bar{\mu} \bar{H}S.$$

Je zřejmé, že střední hodnota každé z uvedených veličin se rovná jejich hodnotě v některém bodě P uvnitř průřezu S . Předpokládáme-li, že indukční trubice byla zvolena tak, aby neprotínala žádný proud ani magnet, bude integrál 5.7 (50) stejný pro všechny indukční čáry v trubici. Můžeme tedy magnetomotorické napětí počítat integrací právě podél střední indukční čáry vedené bodem P . Bude tedy

$$5.7 (58) \quad \mathcal{E}_m = \oint H \, dl = \Sigma I,$$

kde ΣI značí celkový proud, který se ve zvláštním případě zvoleném na obrázku rovná algebraickému součtu obou proudů, tedy $\Sigma I = I - I'$. Podle 5.7 (57) platí tedy vztah

$$5.7 (59) \quad \mathcal{E}_m = \Sigma I = \oint \frac{\Phi}{\mu S} \, dl = \Phi \oint \frac{dl}{\mu S},$$

který dále zjednodušíme. Křivkový integrál podél střední indukční čáry z libovolného bodu P do bodu P_1 se nazývá *magnetický odpor* čili *reluktance* příslušné části trubice:

$$5.7 (60)] \quad R_{m1} = \int_P^{P_1} \frac{dl}{\mu S}.$$

Podobně

$$R_{m2} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{dl}{\mu S}, \quad R_{m3} = \int_{P_2}^{P_3} \frac{dl}{\mu S}, \dots$$

Celková reluktance úplné uzavřené indukční trubice je ovšem

$$5.7 (61) \quad R_m = \oint \frac{dl}{\mu S},$$

takže rovnici 5.7 (59) můžeme pak psát ve tvaru tzv. *zákona Hopkinsonova*:

$$5.7 (62) \quad \mathcal{E}_m = R_m \Phi.$$

Je to úplně obdoba známého Ohmova zákona 5.4 (8) pro ustálený proud v uzavřeném elektrickém obvodu.

Je zřejmé, že celkový magnetický odpor R_m prstencové trubice můžeme pokládat za součet magnetických odporů libovolného počtu jejich úseků zařazených za sebou:

$$5.7 (63) \quad R_m = \sum_k R_{mk}.$$

Magnetické odpory zařazené za sebou se tedy sčítají jako elektrické odpory vodičů spojených řadově (v sérii).

Podobně si můžeme představit, že se zvolená indukční trubice skládá ze dvou nebo více paralelních dílčích trubic rovněž uzavřených, které vzniknou podélným rozdělením původní trubice. Označíme-li $\mathcal{E}'_m, \mathcal{E}''_m, \dots; R'_m, R''_m, \dots; \Phi', \Phi'', \dots$ veličiny příslušné dílčím prstencovým trubicím, bude

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}'' = \dots = \mathcal{E}_m, \quad \Phi' + \Phi'' + \dots = \Phi.$$

Pak platí rovnice 5.7 (62) pro všechny trubice, takže

$$\frac{\mathcal{E}'_m}{R'_m} = \Phi', \quad \frac{\mathcal{E}''_m}{R''_m} = \Phi'', \dots;$$

jejich sečtením dostaneme

$$5.7 (64) \quad \frac{1}{R_m} = \frac{1}{R'_m} + \frac{1}{R''_m} + \dots$$

Při paralelním řazení indukčních trubic se tedy sčítají převrácené reluktance.

Jak lze Hopkinsonovým zákonem řešit magnetické obvody, ukážeme na dvou jednoduchých příkladech.

1. Prstencový elektromagnet

Prstencové jádro stálého průřezu S z měkkého železa s úzkou vzduchovou mezerou tloušťky l_v je stejnoměrně ovinuto n závity [obr. (5.7) 7]. Je-li tloušťka mezery malá proti délce jádra l_z , nemusíme dbát nepatrného rozptylu indukčních čar v mezeře a předpokládat, že indukční trubice má tvar úplného uzavřeného toroidu všude se stejným kruhovým průřezem (i ve vzduchové mezeře). Pak je indukční tok po celém obvodu stejný:

$$5.7 (65) \quad \Phi = S\bar{B} = \text{const.}$$

Obecně definované veličiny $\mathcal{E}_m$ a R_m mají tu podle 5.7 (58, 60, 63) hodnoty

$$\mathcal{E}_m = nI = l_z I, \quad R_m = R_{mz} + R_v,$$

kde

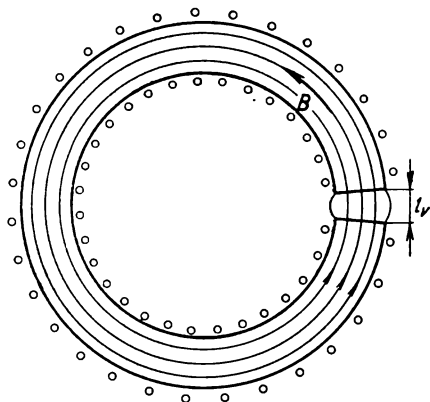
$$R_{mz} = \frac{l_z}{\mu_z S}, \quad R_{mv} = \frac{l_v}{\mu_v S}$$

a μ_z a μ_v značí permeability železa a vzduchu.

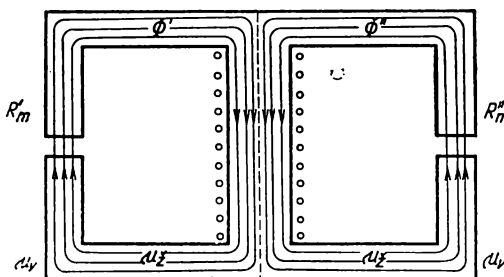
Vzhledem k 5.7 (62, 65) dává tedy Hopkinsonův zákon vztah

$$\mathcal{E}_m = nI = \left(\frac{l_z}{\mu_z} + \frac{l_v}{\mu_v} \right) \bar{B},$$

z něhož vypočteme magnetomotorickou sílu, vyjá-



Obr. (5.7) 7. Prstencový elektromagnet



Obr. (5.7) 8. Větvený magnetický obvod

dřenou celkovým počtem ampérvzávitů, potřebnou k dosažení žádané magnetické indukce.

Nepřihlížíme-li k rozptylu ve vzduchové mezeře, je podle 5.7 (37) indukce v železe B_z i ve vzduchové mezeře B_v stejná, takže intenzita pole v mezeře je

$$5.7 (66) \quad H_v = \frac{\mu_z}{\mu_v} H_z \approx \frac{\mu_z}{\mu_0} H_z = \mu_{rz} H_z,$$

tedy v poměru relativní permeability μ_{rz} železa větší než v jádře. Elektromagnety k výzkumným účelům se z technických důvodů nekonektují ve tvaru prstence, ale vhodnými pólovými nastavci z měkkého železa se dosáhne podobného soustředění magnetických siločar do vzduchové mezery, popř. jejich zahrocením se dosáhne v malém prostoru velmi silného pole, které však potom bývá nehomogenní (což někdy také vyžadujeme).

2. Větvený magnetický obvod

Jako příklad větveného magnetického obvodu řešíme obvod nakreslený na obr. (5.7) 8. Celkový indukční tok se zřejmě dělí do dvou indukčních trubíc s různými odpory R'_m a R''_m , ale se stejným magnetomotorickým napětím

$$\mathcal{E}'_m = \mathcal{E}''_m = \mathcal{E}_m = nI$$

a celkový tok Φ se rovná součtu obou dílčích toků

$$5.7 (67) \quad \Phi = \Phi' + \Phi''.$$

Užitím Hopkinsonova zákona na obě trubice dostaneme

$$5.7 (68) \quad R'_m \Phi' = nI, \quad R''_m \Phi'' = nI.$$

Vidíme, že indukční toky jsou v nepřímém poměru reluktancí nebo v přímém poměru magnetických „vodivostí“:

$$\Phi'_m : \Phi''_m = \frac{1}{R'_m} : \frac{1}{R''_m}.$$

Pro trubici vzniklou spojením obou těchto trubíc, tedy pro celý složený obvod, dostaneme pak rovnici

$$R_m \Phi = nI,$$

kde celková reluktance R_m je určena vztahem

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R'_m} + \frac{1}{R''_m}$$

plynoucím z 5.7 (67) a 5.7 (68) v soulase s 5.7 (64).

K tomuto stručnému výkladu o řešení magnetických obvodů poznamenáváme, že permeabilita feromagnetických látek závisí na intenzitě magnetického pole (čl. 5.8.5), k čemuž je třeba přihlížet stejně jako k rozptylu toku ve vzduchových mezerách.

5.8. Magnetické vlastnosti látek

5.8.1. Demagnetizace

Magnetické vlastnosti látek pozorujeme tak, že zkušební tělísko ze zkoumané látky vložíme do magnetického pole vytvořeného ve vakuu nebo v nějakém prostředí (nejčastěji ve vzduchu) a zjišťujeme jeho chování. V tělísku se vytvoří magnetické pole, jehož intenzita závisí na poměru permeabilit obou prostředí. Má-li vnitřní magnetikum menší permeabilitu než vnější prostředí, je intenzita pole uvnitř tělíska větší než ve vnějším prostředí. V opačném případě je intenzita pole uvnitř menší než vně, a proto mluvíme o *demagnetizaci* čili *odmagnetování*. Tyto poznatky jsou zobecněním závěrů učiněných v čl. 5.7.2 o magnetickém poli v dutině uvnitř homogenního prostředí. Obecnější poznatky pro dvě různá prostředí můžeme snadno aspoň kvalitativně ověřit úvahou obdobnou postupu užitému ve zmíněném článku. Je-li totiž válecek na obr. (5.7) 1 vyplněn prostředím menší permeability než permeabilita okolního prostředí, je polarizace vně válce silnější než uvnitř něho. Proto vzniká na plášti válce plošný proud, který sice zeslabuje indukční pole uvnitř válce, ale v takovém poměru, že vzhledem k nižší permeabilitě vnitřního magnetika intenzita uvnitř válce ještě vzroste. Má-li naopak vnitřní magnetikum větší permeabilitu než okolí, mají sice povrchové proudy na válci takový směr, že magnetická indukce uvnitř vzroste, ale jen do té míry, že intenzita pole je ve vnitřním magnetiku slabší než v okolí. Míra zesílení nebo zeslabení magnetického pole závisí pro každou dvojici magnetik ještě na tvaru tělíska.

Pokud jde o kvantitativní rozbor problému, není třeba jej řešit znovu pro magnetické pole, poněvadž je tu plná obdoba s polem elektrostatickým, jak jsme ukázali na jednoduchých případech již v čl. 5.7.2. Proto můžeme výsledky odvozené na konci čl. 5.2.4 pro tělíska tvaru rotačního elipsoidu v homogenním elektrostatickém poli prostě převzít, nahradíme-li elektrické veličiny ϵ_r a κ veličinami magnetickými μ_r a κ_m . Zeslabení magnetického pole v elipsoidovém magnetiku proti poli v okolním vakuu se běžně nazývá *demagnetizace* (místo depolarizace) a také číslo N se nazývá *demagnetizační faktor*. Tabulka (5.2) II jeho teoretických hodnot zůstává ovšem v platnosti stejně jako vzorec 5.2 (49). Máme tedy pro tělísko tvaru rotačního elipsoidu z magnetika susceptibility κ_m obecný vzorec

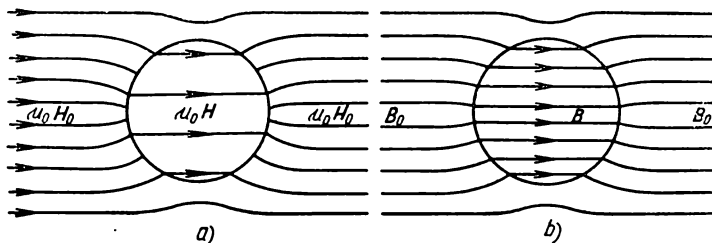
$$5.8 (1) \quad H_{TE} = \frac{H_0}{1 + \kappa_m},$$

kde $\mathbf{H}_0$ je intenzita pole ve vakuu kolem tělíska. Podle tabulky (5.2) II působí demagnetizace nejsilněji v tenké příčné vrstvě magnetika ($\hat{N} = 1$), kde indukce nemá prakticky větší hodnotu než v okolním vakuu:

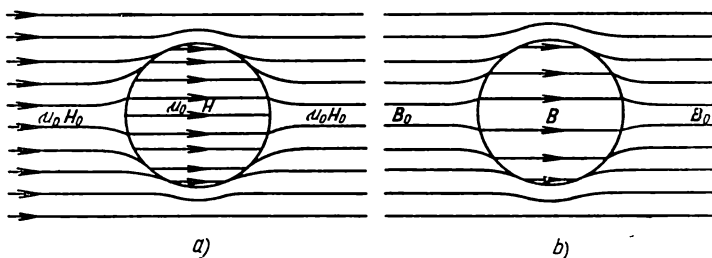
$$5.8 (2) \quad \mathbf{H}_{\text{deska}} \approx \frac{\mathbf{H}_0}{1 + \kappa_m}, \quad \mathbf{B}_{\text{deska}} \approx \mathbf{B}_0.$$

Ve velmi tenkém drátě ($\hat{N} = 0$) demagnetizace prakticky vymizí, takže

$$5.8 (3) \quad \mathbf{H}_{\text{drát}} \approx \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{B}_{\text{drát}} \approx \mu_r \mathbf{B}_0.$$



Obr. (5.8) 1. Průběh intenzity (a) a indukce (b) magnetického pole koule s relativní permeabilitou > 1 , vložené do homogenního pole v prázdném prostoru



Obr. (5.8) 2. Průběh intenzity (a) a indukce (b) magnetického pole koule s relativní permeabilitou < 1 , vložené do homogenního pole v prázdném prostoru

Konečně uvnitř koule vložené do homogenního pole ve vakuu má demagnetizační faktor hodnotu $\hat{N} = 1/3$, a vznikne v ní tedy homogenní pole určené vektory

$$5.8 (4) \quad \mathbf{H}_{\text{koule}} = \frac{\mathbf{H}_0}{1 + (\kappa_m/3)} = \frac{3\mathbf{H}_0}{2 + \mu_r} = \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{H}_0,$$

$$5.8 (5) \quad \mathbf{B}_{\text{koule}} = \mu \mathbf{H}_{\text{koule}} = \frac{3\mu_r}{2 + \mu_r} \mathbf{B}_0 = \frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{B}_0.$$

Průběh intenzity a indukce v kouli a v jejím okolí je znázorněn na obrázcích (5.8) 1a, 1b za předpokladu, že permeabilita μ koule je větší než μ_0 v okolním prostoru. Z posledních rovnic vidíme, že pro $\mu < \mu_0$ je intenzita uvnitř koule větší a naopak indukce je menší než vně koule [obr. (5.8) 2a, 2b].

Význam demagnetizačního faktoru $\hat{N}$ a důvod jeho pojmenování osvětlíme blíže úvahou o demagnetizačním poli $\mathbf{H}_d$, které vzniká zmagnetováním elipsoidu a zeslabuje vnější pole v poměru daném rovnicí 5.8 (1). Platí tedy vztah

$$5.8 (6) \quad \mathbf{H}_{\text{TE}} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d = \frac{\mathbf{H}_0}{1 + \hat{N}\kappa_m},$$

z něhož plyne

$$5.8 (7) \quad H_d = - \frac{\hat{N}\kappa_m}{1 + \hat{N}\kappa_m} H_0.$$

Záporné znaménko ukazuje, že intenzita demagnetizačního pole míří proti vnějšímu poli. V neohraničeném prostředí je podle čl. 5.7.1 magnetická intenzita táž jako ve vakuu, avšak v elipsoidu je v poměru $1 : (1 + \hat{N}\kappa_m)$ slabší stejně jako magnetizace $\mathbf{M}_{TE}^*$, která je jí úměrná. Podle 5.7 (6) a 5.8 (6) je totiž

$$5.8 (8) \quad \mathbf{M}_{TE}^* = \kappa_m \mathbf{H}_{TE} = \frac{\kappa_m}{1 + \hat{N}\kappa_m} \mathbf{H}_0 = \frac{\mu_r - 1}{1 + \hat{N}\kappa_m} \mathbf{H}_0.$$

Demagnetizační pole 5.8 (7) je nejsilnější, když $\hat{N} = 1$, a vymizí, když $\hat{N} = 0$, jak je tomu v neomezeném stejnorodém prostředí.

Z toho vidíme, že zmagnetováním vzniká v tělisku demagnetizační pole, jehož intenzita má směr opačný než vnější pole, a je tím slabší, čím je tělisko ve směru pole štíhlejší. V čl. 5.6.7 jsme ukázali, že magnetické pole štíhlého válcového proudu i tyčového magnetu jsou v jejich okolí shodná s polem magnetického dipólu tvořeného dvěma opačnými magnetickými náboji rozloženými na čelních plochách magnetu s hustotou rovnou jeho polarizaci. Konečně jsme v čl. 5.7.3 odvodili, že intenzita pole permanentních tyčových magnetů je v homogenním neomezeném prostředí v poměru jeho relativní permeability slabší než ve vakuu v souladu s Coulombovým magnetostatickým zákonem 5.7 (41).

Z uvedených skutečností je zřejmo, že elektrodynamická teorie potvrzuje všechny poznatky fluidové teorie magnetostatického pole tyčových magnetů, které z ní plynou pro magnetickou intenzitu a indukci ve vakuu i v různých prostředích.

K předešlému výkladu je třeba dodat, že jev demagnetizace se projevuje jen u intenzity pole, která je uvnitř tělíska slabší než ve vakuu. Neplatí to pro indukci, která je v paramagnetické látce silnější, jak vidíme z obr. 5.8 (1b) a jak plyne z 5.8 (1):

$$\mathbf{B}_{TE} = \mu \mathbf{H}_{TE} = \frac{1 + \kappa_m}{1 + \hat{N}\kappa_m} \mathbf{B}_0 \geq \mathbf{B}_0,$$

protože $0 \leq \hat{N} \leq 1$.

5.8.2. Látky v magnetickém poli

Zkušební tělísko z homogenního magnetika, jehož magnetické vlastnosti chceme studovat, zvolíme ve tvaru rotačního elipsoidu. Pak můžeme jeho chování v homogenním poli předvídat podle teorie vyložené v předešlém článku.

Řekli jsme již, že pole uvnitř elipsoidu je homogenní, takže magnetizace je v celém elipsoidu stejná, a jeho magnetický moment

$$5.8 (9) \quad \mathbf{m}_{TE} = \mathbf{M}_{TE}^* V = \frac{\kappa_m V}{1 + \hat{N}\kappa_m} \mathbf{H}_0 = \frac{\mu_r - 1}{1 + \hat{N}\kappa_m} V \mathbf{H}_0$$

má tedy stejný směr jako vnější pole, je-li $\kappa_m > 0$ ($\mu > \mu_0$), a směr obrácený, je-li $\kappa_m < 0$ ($\mu < \mu_0$). Snadno nahlédneme, že to platí, i když osa elipsoidu není rovnoběžná s vnějším polem nebo když tělísko nemá tvar elipsoidu. Pak sice jeho magnetizace není v celém tělisku stejná, ale na její znaménko (mysl) to nemá vliv.

Abychom mohli posoudit chování zmagnetované látky v magnetickém poli, vyjádíme z potenciální energie permanentního magnetu s magnetickým momentem $\mathbf{m}$ v homogenním poli $\mathbf{B}$. Podle rovnice 5.5 (47) vykoná moment $\mathbf{M}$ při zmenšení úhlu ψ mezi vektory $\mathbf{m}$ a $\mathbf{B}$ o $d\psi$ elementární práci

$$dA = M(-d\psi) = - |\mathbf{m} \times \mathbf{B}| d\psi = -mB \sin \psi d\psi$$

a příslušná změna potenciální energie

$$dW_p = -dA = mB \sin \psi \, d\psi.$$

Označíme-li $(W_p)_1$ potenciální energii magnetu kolmého ke směru pole, bude

$$W_p - (W_p)_1 = \int_{\pi/2}^{\psi} mB \sin \psi \, d\psi = -mB \cos \psi = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}.$$

Ať zvolíme aditivní konstantu $(W_p)_1$ jakkoli, má W_p algebraicky největší hodnotu pro $\psi = \pi$ a nejmenší hodnotu pro $\psi = 0$. Položíme-li pro jednoduchost $(W_p)_1 = 0$, bude vzhledem k 5.7 (28, 30)

$$\begin{aligned} 5.8 \quad (10) \quad W_p &= -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -m_p \cdot H, \\ (W_p)_{\max} &= mB, \quad (W_p)_{\min} = -mB. \end{aligned}$$

Změnu polohy mohou však způsobit konzervativní síly jen tehdy, když konají kladnou práci, při čemž se ve stejné míře zmenšuje potenciální energie. Homogenní pole může tedy vychýlit z klidu magnet ve všech polohách kromě polohy $\psi = 0$, kdy je potenciální energie minimální a nemůže se již zmenšit. Z toho plyne, že *poloha magnetu souhlasně rovnoběžná se směrem pole je stabilní*, kdežto protisměrná poloha labilní. Tento výsledek je ve shodě s dřívějším poznatkem o proudové smyčce [viz obr. (5.5) 7], lze ho však přímo použít jen pro tělíska magneticky tvrdá. Je-li tělísko z dokonale měkkého magnetika, zmagnetuje se v každé poloze tak, že jeho magnetizace i celkový magnetický moment jsou rovnoběžné se směrem pole. Jak plyne z 5.8 (8, 9) jsou vektory $\mathbf{M}_{TE}^*$ a $\mathbf{m}_{TE}$ pro paramagnetické tělísko ($\kappa_m > 0$) souhlasně rovnoběžné s vektorem $\mathbf{H}_0$, pro diamagnetické tělísko ($\kappa_m < 0$) pak mají směr opačný.

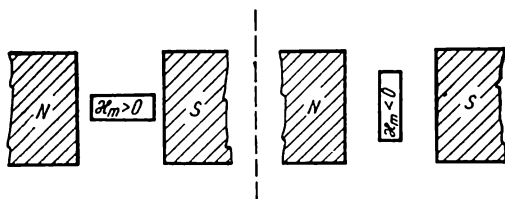
V obou případech však koná pole při magnetování tělíska kladnou práci a vykonaná práce roste s rostoucí magnetizací. Pokud je tělísko v takové poloze, že změnou jeho orientace může vzrůst jeho magnetizace, může pole při takové změně vykonat kladnou práci. Víme však, že obecně je těleso ve stabilní rovnováze, jestliže při výchylce nemohou působící síly vykonat kladnou práci. Proto se tělísko ustálí v každém případě v takové poloze, která se vyznačuje maximální magnetizací. Závislost magnetizace na poloze tělíska vzhledem k poli je podle rovnice 5.8 (8) způsobena závislostí demagnetizačního faktoru na tvaru tělíska. Magnetizace v elipsoidovém tělisku má velikost

$$M_{TE}^* = \frac{|\kappa|}{1 + \hat{N}\kappa_m} H_0,$$

neboť jmenovatel je vždycky kladný vzhledem k tomu, že pro neferomagnetické látky $|\kappa_m| \ll 1$ a $0 \leq \hat{N} \leq 1$. Proto dosáhne magnetizace maximální velikosti v takové poloze, pro kterou je jmenovatel nejmenší. Je-li tedy κ_m kladné, nastane to patrně v poloze s nejmenší hodnotou $\hat{N}$, tedy podle tab. (5.2) II v poloze podélné. Je-li však κ_m záporné, můžeme psát

$$1 + \hat{N}\kappa_m = 1 - \hat{N} |\kappa_m|$$

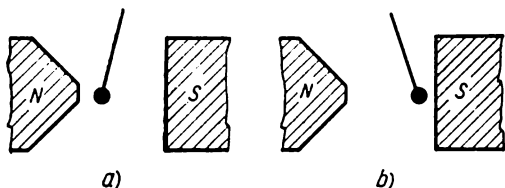
a M_{TE}^* dosáhne maxima při největší možné hodnotě $\hat{N}$, tedy v poloze příčné. Máme tedy výsledek: *v homogenním poli se ustálí (nekulové) paramagnetické tělísko v podélné poloze, kdežto diamagnetické tělísko v poloze příčné*. Tyto stabilní polohy jsou zakresleny na obr. (5.8) 3.



Obr. (5.8) 3. Stabilní poloha paramagnetické ($\kappa_m > 0$) a diamagnetické ($\kappa_m < 0$) tyčinky v homogenním poli

Zbývá ještě vyšetřit chování paramagnetických a diamagnetických těles v nehomogenním magnetickém poli.

Paramagnetické těleso se ustálí v nehomogenním poli především ve stabilní orientaci, v níž je nejsilněji zmagnetováno, a kromě toho podléhá stejné síle jako elektrický dipól nebo permanentní magnet v nehomogenním poli. Podle článků 5.1.4 a 5.6.7 působí na paramagnetické těleso síla ve směru největšího růstu magnetického pole — je vtahováno do míst silnějšího pole. Diamagnetické těleso se ustálí rovněž v orientaci s nejsilnější magnetizací, která má ovšem opačný směr než pole, a proto je zrychlováno ve směru největšího spádu pole — je z pole vypuzováno.

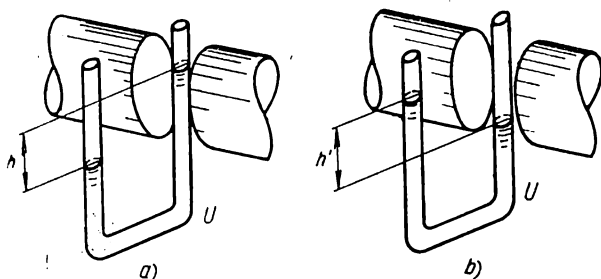


Obr. (5.8) 4. Hliníková (a) a vizmutová (b) kulička v nehomogenním magnetickém poli

Na obr. (5.8) 4 je to znázorněno kuličkami: a) paramagnetickou (alumniovou) a b) diamagnetickou (vizmutovou), zavěšenými v silně nestejnorodém poli mezi kónickým a rovinným pólovým nástavcem magnetu.

Podle popsaného chování různých látek v magnetickém poli je možno bez jakéhokoli měření soudit na znaménko jejich permeability. Zjistíme-li měřením magnetický moment m_{TE} homogeně zmagnetovaného tělíska, můžeme z něho vypočítat magnetizaci a z rovnice 5.8 (8) určit i číselnou hodnotu jeho susceptibility (nebo permeability).

Podobné účinky magnetického pole lze experimentálně zjistit i u látek kapalných a plyných. Tak např. paramagnetická kapalina v trubici U vystoupí o výšku h v rameně zasahujícím mezi póly magnetu, kde na ni působí vodorovné magnetické pole. Naopak sloupec kapaliny diamagnetické je z pole vytlačován a klesne o výšku h' [obr. (5.8) 5]. Na tomto jevu je založena jedna z metod měření permeability kapalin. Působení magnetického pole na plyn se dá ukázat vložení čadivého plamene mezi kónické póly magnetu. Plamen se rozštěpí na dvě části, které se vychylují ven z pole. To svědčí o tom, že plamen je složen ze žhoucích diamagnetických plynů a částic (sazí).



Obr. (5.8) 5. Silové působení magnetického pole na a — paramagnetickou, b — diamagnetickou kapalinu

Tabulka (5.8) I

Magnetické susceptibility některých naferomagnetických látek

Paramagnetika $\chi_m > 0$		Diamagnetika $\chi_m < 0$	
Neodym	+0,003 1	Vizmut	—0,000 18
Mangan	0,001 0	Uhlík	0,000 10
Chrom	0,000 33	Zlato	0,000 031
Hliník	0,000 021	Olovo	0,000 017
Kyslík	0,000 002 0	Zinek	0,000 013
Vzduch	0,000 000 4	Měď	0,000 010
		Síra	0,000 010
		Voda	0,000 009

Všechny tyto poznatky jsou vlastně zvláštními případy obecných zákonitostí, které platí pro chování libovolného magnetického tělíska uvnitř prostředí s jinou permeabilitou. Skutečně lze potvrdit po-

zorováním, že se paramagnetické tělísko chová v silnějším paramagnetickém prostředí stejně jako diamagnetické tělísko ve vakuu nebo jako dutina v paramagnetickém prostředí.

Číselné hodnoty magnetické susceptibility různých paramagnetických a diamagnetických látek uvádíme v tab. (5.8) I. Teoretické vysvětlení diamagnetismu a paramagnetismu podáváme v příštích dvou článcích. O látkách feromagnetických, které se od paramagnetických látek odlišují svou zvláštní povahou, pojednáme v dalším článku 5.8.5.

5.8.3. Diamagnetismus

Ačkoliv v atomech všech prvků obíhají elektrony kolem jádra a kromě toho rotují kolem vlastní osy (spin), nemá každý atom nebo molekula nenulový magnetický moment. Podle atomové teorie se totiž u většiny prvků vzájemně ruší magnetické momenty způsobené spinem elektronů i momenty vzniklé jejich oběhem kolem jádra. Na takové „nemagnetické“ atomy nebo molekuly bez magnetického momentu nepůsobí sice magnetické pole ani výslednou posuvnou silou, ani výsledným točivým momentem, ale způsobuje změny v oběhu jednotlivých elektronů; tyto změny jsou stejné pro dva elektrony obíhající proti sobě na drahách stejného typu.

Elektron obíhající se stálou plošnou rychlostí $\mathbf{w}$ má jednak magnetický moment 5.5 (48)

$$5.8 (11) \quad \mathbf{m} = -e\mathbf{w},$$

jednak také jistou točivost čili „mechanický“ moment hybnosti 2.2 (52)

$$5.8 (12) \quad \mathbf{b} = 2m_e\mathbf{w},$$

značí-li m_e klidovou hmotnost elektronu. Podíl

$$5.8 (13) \quad \frac{m}{b} = -\frac{1}{2} \frac{e}{m_e}$$

je tedy roven polovičnímu specifickému náboji elektronu. Podobně vychází pro dipólový magnetický moment daný vztahem 5.6 (3)

$$5.8 (14) \quad \frac{p_m}{b} = -\frac{\mu_0}{2} \frac{e}{m_e}.$$

Záporné znaménko je v souladu s tím, že u záporného elektronu mají vektory $\mathbf{m}$ a $\mathbf{p}_m$ opačný směr než $\mathbf{b}$.

V magnetickém poli $\mathbf{B}$ podléhá elektron točivému momentu 5.5 (47)

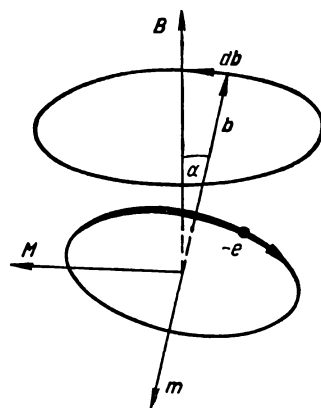
$$5.8 (15) \quad \mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = -e\mathbf{w} \times \mathbf{B},$$

kterému se však elektron obíhající s vysokou frekvencí nepoddává, ale reaguje na něj vzhledem k své značné točivosti podobně jako prudce roztočený setrvačnický [obr. (5.8) 6].

Z teorie setrvačnicku je známo, že volný setrvačnický koná pod vlivem vnějšího točivého momentu regulární precesi, při níž osa setrvačnicku — přesněji řečeno vektor jeho točivosti — opisuje kužel s frekvencí, která závisí na úhlu sevřeném vnějším momentem a točivostí. Je-li tento úhel pravý, má precese frekvenci určenou rovnicí 2.5 (42),

$$5.8 (16) \quad \Omega = \frac{M}{b},$$

kde M je velikost vnějšího momentu a b velikost vektoru točivosti.



Obr. (5.8) 6. Larmorova precese oběžného elektronu v magnetickém poli

Proto oběžné elektrony konají v magnetickém poli precesní pohyby, při nichž vektor jejich točivosti opisuje kužel kolem osy rovnoběžné s magnetickým polem [obr. (5.8) 6]. Takový pohyb elektronu v magnetickém poli se nazývá *Larmorova precese*, protože Larmor první podal její teorii a ukázal, že frekvence této precese nezávisí na sklonu magnetického momentu elektronu ke směru pole.

Precesní moment má vždy opačný směr než vnější pole. Jestliže tedy atomy nebo molekuly nějaké látky, na kterou nepůsobí magnetické pole, mají nulový magnetický moment, vznikne v látce vložení do magnetického pole protisměrný magnetický moment — látka je diamagnetická.

To platí i pro látky, jejichž atomy mají nenulový magnetický moment, jestliže jsou složeny vesměs z molekul s nulovým momentem. Tak je to např. u vodíku, jehož molekuly jsou dvouatomové. V každém z těchto atomů obíhá jeden elektron po dráze poloměru $a_1 = 0,529 \cdot 10^{-10}$ m, a to v opačných smyslech, takže se dráhové magnetické momenty ruší. Také spiny elektronů v obou atomech jsou navzájem opačné, a spinové magnetické momenty se tedy rovněž ruší, takže vodík je plyn diamagnetický.

Diamagnetismus je vlastností všech látek a jemu příslušná záporná susceptibilita má hodnoty velmi malé proti 1, takže relativní permeabilita je tedy jen o málo menší než 1. Protože pak termické pohyby molekul nemají vliv na uspořádání elektronů v atomech, nezávisí susceptibilita (a tedy ani permeabilita) diamagnetických látek na teplotě.

5.8.4. Paramagnetismus

V předešlém článku jsme ukázali, že vlastnosti diamagnetických látek lze uspokojivě vyložit z předpokladu, že jejich atomy nebo molekuly mají nulový magnetický moment. Není-li tomu tak, působí vnější pole na takové atomy nebo molekuly usměrňujícím momentem, a je-li nehomogenní, působí na ně též posuvnou silou, která takovou látku vtahuje do míst silnějšího pole. Látka se tedy zmagnetuje souhlasně se směrem pole, které se tím zesílí, takže magnetizace a susceptibilita jsou kladné a relativní permeabilita je větší než 1. Látka se chová jako paramagnetická nebo feromagnetická.

Nenulový magnetický moment atomu může vzniknout dvojím způsobem: buď tak, že se neruší úplně dráhové magnetické momenty elektronů, nebo tak, že se neruší jejich momenty spinové. V prvním případě se látka v magnetickém poli slabě zmagnetuje, při čemž její susceptibilita má kladnou hodnotu malou proti jedné, ale řádově větší, než je velikost susceptibility diamagnetických látek. Říkáme, že takové látky jeví *slabý paramagnetismus*. Podstatně větší magnetizace dosahují látky, v jejichž atomech nejsou navzájem vyváženy všechny spinové magnetické momenty ve vnitřních drahách elektronového obalu jádra. U těchto látek pozorujeme proto tzv. *silný paramagnetismus*. Některé z nich jsou dokonce feromagnetické, jak vysvětlíme v příštím článku. Silný paramagnetismus vzniká u tzv. *přechodových prvků*, jak jsou např. Cr, Mn, Pd, Pt, aj. Tyto prvky mají v některé vnitřní elektronové slupce liché elektrony, jejichž spinové momenty nejsou kompenzovány. Nekompenzované spinové momenty vnějších elektronových drah jsou stejně jako liché dráhové momenty příčinou slabého paramagnetismu.

Paramagnetické látky liší se od diamagnetických nejen velikostí a znaménkem susceptibility, nýbrž i závislostí susceptibility na teplotě. Jak zjistil experimentálně P. Curie, je paramagnetická susceptibilita nepřímo úměrná absolutní teplotě látky:

5.8 (17)

$$\chi_m = \frac{C}{T}.$$

Naznačíme jen stručně teoretické zdůvodnění tohoto **Curieova zákona**, k jehož odvození by bylo třeba užít tzv. fyzikální statistiky Boltzmannovy. Podle rovnice 5.8 (10) má magnet

s magnetickým momentem $\mathbf{m}$ v magnetickém poli s indukcí $\mathbf{B}$ potenciální energii, která má hodnotu

$$W_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -mB \cos \psi,$$

položíme-li energii v příčné poloze, kolmé ke směru pole, rovnu nule. K vychýlení magnetu ze souhlasné rovnoběžné polohy do příčné polohy je tedy třeba vynaložit práci

$$A = -W_p = mB.$$

Podobně je tomu s atomem (nebo molekulou) paramagnetické látky; kdyby měla látka absolutní nulovou teplotu, stočilo by pole magnetické momenty všech atomů do směru intenzity. Při každé jiné teplotě T má však atom (molekula) podle čl. 4.3.8 jistou tepelnou energii

$$u = \frac{\nu}{2} kT,$$

kde k je Boltzmannova konstanta a ν počet platných stupňů volnosti. S touto střední energií narážejí na každou molekulu sousední molekuly a tak ji vychylují ze směru pole. Proto se látka zmagnetuje jen částečně; z teorie vyplývá, že se skutečná magnetizace má k úhrnnému magnetickému momentu dokonale uspořádaných atomů v objemové jednotce jako energie A , potřebná k vychýlení jedné molekuly ze souhlasného do příčného směru, k tepelné energii molekuly u :

$$\frac{M^*}{n_0 m_a} = \frac{A}{u}.$$

Ve vzorci značí m_a magnetický moment jednoho atomu (molekuly) a n_0 prostorovou hustotu atomů.

Předpokládáme-li, že $\nu = 6$, dostaneme vzhledem k 5.7 (6)

$$\kappa_m = \frac{\mu_0 M^*}{B} = \frac{\mu_0 n_0 m_a^2}{3kT}.$$

Tento zákon se pro nepřiliš nízké teploty dobře potvrzuje a je ho možno užít k výpočtu magnetických momentů molekul, které lze ovšem zjišťovat i jinými metodami.

Z načrtnuté teorie paramagnetismu je zřejmé, že odvozené vzorce pro susceptibilitu nemohou být správné pro libovolné magnetické pole. Magnetizace M^* nemůže totiž dosáhnout libovolně vysokých hodnot, protože uspořádáním všech magnetických molekul do směru pole nabude magnetizace maximální možné hodnoty, kterou již nelze zvětšovat zesilováním pole. Této *sytné magnetizace* nelze však dosáhnout ani nejsilnějšími poli, která dovedeme vytvořit, a proto můžeme při obvyklých teplotách pokládat susceptibilitu κ_m , a tedy i permeabilitu za veličinu nezávislou na intenzitě magnetického pole.

Závěrem dodáváme, že volné elektrony v kovu nepřispívají jen k diamagnetismu, ale též k paramagnetismu kovu, protože více volných elektronů orientuje své spiny do směru souhlasného se směrem pole než do směru opačného.

5.8.5. Feromagnetismus

Feromagnetické látky zaujímají mezi všemi magnetiky zvláštní postavení, a to jak z hlediska teoretického, tak zvláště pro svůj význam praktický. Příčina je především v tom, že je možno v nich vzbudit i dosti slabým magnetickým polem velmi silnou magnetizaci, kterou feromagnetické látky podržují i po odstranění vnějšího pole (permanентní magnety).

Feromagnetismus pozorujeme u čtyř prvků uvedených v tab. (5.8) II a u různých slitin těchto kovů. Kromě toho byl zjištěn i u několika *Heuslerových slitin*, které neobsahují feromagnetické prvky. Nazýváme tak některé slitiny manganu s cínem, hliníkem, arzénem,

Tabulka (5.8) II

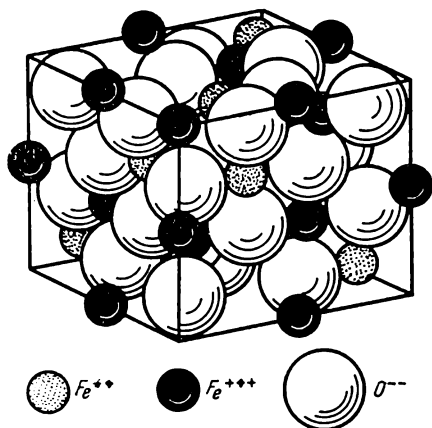
Konstanty některých feromagnetik

Látka	Sytná magnetizace M_s^* při 0 °K	Curieův bod	
Prvky			
Železo Fe	$1,75 \cdot 10^6 \text{ Am}^{-1}$	770 °C	1 043 °K
Kobalt Co	1,45	1 127	1 400
Nikl Ni	0,51	358	631
Gadolinium Gd	1,98	16	289
Heuslerovy slitiny			
Cu ₂ Mn Al	0,58	330	603
Mn Bi	0,675	357	630
Mn Sb	0,71	314	587
Mn As	0,87	45	318
Ferity			
Fe O . Fe ₂ O ₃	0,485	575	848
Mn O . Fe ₂ O ₃	0,358	510	783
Ni O . Fe ₂ O ₃	0,24	590	863
Cu O . Fe ₂ O ₃	0,29	455	728
Mg O . Fe ₂ O ₃	0,143	310	583

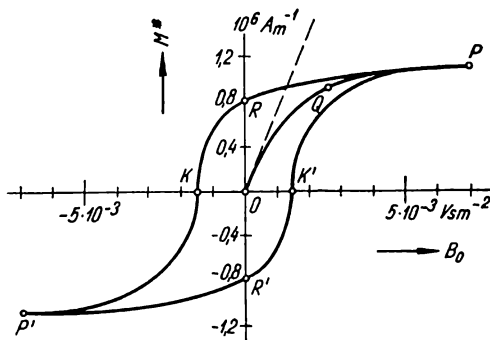
antimonem, vizmutem nebo bórem a s mědí, např. Cu Al Mn (61,5% Cu, 23,5% Mn, 15% Al).

V novější době nabývají stále rostoucího praktického významu i nekovová feromagnetika, totiž polovodivé sloučeniny železa a kyslíku nebo i jiných prvků: Cu, Mg, Ni, Ba, Pb, Sr. Jsou to tzv. *ferity*, z nichž chemicky nejjednodušší je odedávna známý přirozený magnet, minerál *magnetovec* (magnetit) Fe₃O₄ (neboli FeO . Fe₂O₃). Ferity jsou kyslíčnky s tzv. *inverzní spinelovou krystalovou mřížkou*, jejíž elementární buňka v krystalu magnetovce je znázorněna na obr. (5.8) 7. Obsahuje 32 záporných iontů O²⁻, 16 kladných iontů Fe⁺⁺⁺ a 8 kladných iontů Fe⁺⁺. Mřížka magnetovce je vlastně složena ze dvou podmřížek: trojmocné ionty Fe⁺⁺⁺ tvoří oktaedrickou mřížku a dvojmocné ionty Fe⁺⁺

mřížku tetraedrickou. Tato dvojitá krystalografická mřížka je charakteristická pro ferity



Obr. (5.8) 7. Elementární buňka magnetovce Fe₃O₄



Obr. (5.8) 8. Hysterezní smyčka oceli

a určuje jejich magnetické vlastnosti, jak uvidíme dále. Ferity jsou polovodiče se značným měrným elektrickým odporem (až $10^6 \Omega \text{ m}$), a proto se v nich prakticky neindukují Foucaultovy proudy ani ve vysokofrekvenčních střídavých polích. K některým jejich vlastnostem se v tomto článku ještě vrátíme.

Susceptibilita feromagnetických látek má značnou kladnou hodnotu, která však podstatně závisí nejen na teplotě, ale i na samé intenzitě pole, kterým právě jsou nebo již před tím byly látky magnetovány. Tyto vlastnosti se obvykle sledují při cyklickém magnetování, které se provádí na prstencových vzorcích, aby se neprojevila demagnetizace (popsaná v čl. 5.8.1).

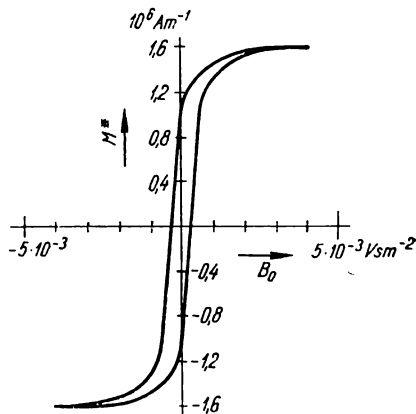
Kdybychom měřili magnetizaci oceli, která ještě nebyla vůbec magnetována, zvyšující indukci B_0 magnetického pole od nejmenších hodnot až asi do $0,01 \text{ T}$ (100 gaussů), zjistili bychom, že magnetizace roste nejprve dosti rychle, ale pak se růst zpomaluje, až ustane docela. Tento průběh je na obr. (5.8) 8 vyznačen křivkou OQP , která se nazývá *panenská křivka*. Dalším zesilováním pole již nelze magnetizaci zvýšit nad hodnotu v bodě P , kterou nazýváme *sytnou magnetizací*. Jestliže pole opět zeslabujeme, klesá magnetizace ocelového prstence zprvu pozvolna, potom rychleji, nikoli však po původní panenské křivce, ale po méně strmé křivce PR , takže po úplném odstranění pole magnetizace nevymizí, ale podrží jistou kladnou hodnotu OR . Označujeme ji M_r^* a nazýváme ji *magnetickou remanencí* (zbytkovou magnetizací). K jejímu odstranění (zrušení) je třeba působit na ocelový prstenec magnetickým polem opačného směru, než má pole původní a jehož indukce má na obr. (5.8) 8 velikost OK . Indukce B_c nebo intenzita H_c příslušného magnetického pole se nazývá *koercitivní pole* (síla). Zesilujeme-li dále magnetické pole opačného směru, dosáhneme také sytné magnetizace, a to pro stejně silné pole opačného směru, než je pole potřebné k dosažení sytné magnetizace ve směru původního pole. Příslušné hodnoty B_0 a M^* jsou určeny souřadnicemi bodu P' souměrně položeného k bodu P vzhledem k počátku O . Kdybychom pak zeslabili vnější pole až na nulu a znovu je nechali růst do kladných hodnot, měnila by se magnetizace podle křivky $P'R'K'P$. Tak bychom dostali uzavřenou *hysterezní smyčku*, která by se po jistém počtu cyklů zcela ustálila ve tvaru naznačeném na obr. (5.8) 9.

Čím větší jsou koercitivní pole a remanence, tím je magnetikum *magneticky tvrdší*: naopak čím menší je koercitivní pole, tím je magnetikum *magneticky měkké*. Pro trvalé magnety se hodí tvrdá magnetika: kalené oceli wolframové, chrómové a molybdenové, kdežto pro elektromagnety napájené střídavým proudem volí se měkké železo se slabým koercitivním polem, aby energie přeměněná při každém přemagnetování v teplo byla co nejmenší. Hysterezní křivku měkkého železa vidíme na obr. (5.8) 9.

Je mnohem užší než smyčka oceli na obr. (5.8) 8 a plocha jí uzavřená je menší, ačkoli sytná magnetizace měkkého železa je větší než u oceli. *Plocha hysterezní smyčky je číselně rovna energii ztracené při jednom magnetizačním oběhu v objemové jednotce feromagnetika*, jak snadno odvodíme ze vzorce 5.8 (10) pro energii magnetu v magnetickém poli. Protože M^* je objemová hustota magnetického momentu, který je všude rovnoběžný s polem, je M^*B velikost hustoty energie. Součin $M^* dB$ je tedy přírůstek hustoty energie při elementárním zvýšení dB indukce pole, během něhož můžeme pokládat magnetizaci za stálou. Proto výraz

$$5.8 (18) \quad w = \oint M^* dB,$$

kde se integrace provede podél celého magnetizačního cyklu, je roven práci vykonané při tomto cyklu magnetickým polem, dělené objemem feromagnetika. Protože po oběhnutí cyklu se látka vrátí do původního magnetického stavu, promění se zřejmě tato práce v teplo.



Obr. (5.8) 9. Hysterezní smyčka měkkého železa

Protože pak integrál na pravé straně rov. 5.8 (18) dává plochu hysterezní smyčky, je tím věta dokázána. Tvar hysterezní smyčky nás tedy názorně poučuje o vlastnostech feromagnetik. Tak např. z hořejších obrázků vidíme, že ztráty v měkkém železe jsou mnohem menší než v oceli.

Tabulka (5.8) III

Feromagnetické materiály

(magnetická remanence M_r^* , koerzivní pole H_c , maximální hodnota relativní permeability μ_r , sytná magnetizace M_s^*)

Materiál	Složení [%]	M_r^* [10^{-6} Am $^{-1}$]	H_c [10^{-2} Am $^{-1}$]	$10^{-3} (\mu_r)_{\max}$	$10^{-6} M_s^*$ [Am $^{-1}$]
1 % uhlíková ocel	98,5 Fe + 1,0 C + + 0,5 Mn	0,72	41		
5 % wolframová ocel	94,3 Fe + 5,0 W + + 0,7 C	0,84	56		
3,5 % chromová ocel	95,0 Fe + 3,5 Cr + + 1,0 C + 0,5 Mn	0,76	53		
36 % kobaltová ocel	54,4 Fe + 0,8 C + + 3,75 W + 5,75 Cr	0,77	181		
Alnico I A	60,5 Fe + 12,0 Al + + 22,5 Ni + 5,0 Co	0,53	430	0,014	
Platinová slitina	76,7 Pt + 23,3 Co	0,36	2 149		
Dynamové plechy	99,5 Fe + 0,5 Si 96,75 Fe + 3,25 Si		0,39—0,51 0,28—0,41	5,5 6	1,7 1,6
Transformátorové plechy	96 Fe + 4 Si		0,13—0,33	6,3—9	1,6
Litina	95 Fe + 3 C + 2 Si		1,27	0,6	
Železo „Armco“	99,8 Fe		0,80	7	1,7
Železo redukované ve vodíku	99,98 Fe		0,040	275	1,72
Kov μ (Mu Metall)	20 Fe + 74 Ni 5 Cu + 1 Mn		0,012—0,04	80—110	0,68
Permalloy 78,5	20,9 Fe + 78,5 Ni + + 0,6 Mn		0,04—0,05	100—105	0,86
Supermalloy	15 Fe + 79 Ni + + 5 Mo + 0,5 Mn		0,003	800—1 000	0,64
Heuslerova slitina	61 Cu + 26 Mn + + 13 Al		3,2—4,0	0,25	0,44

Zmenšení ztrát a s nimi související ohřev feromagnetika je žádoucí i z toho důvodu, že zvýšením teploty se zhoršují magnetické vlastnosti feromagnetika. Zejména sytná magnetizace M_s^* klesá u všech kovů s rostoucí teplotou. Hodnoty M_s^* uvedené v tab. (5.8) II znamenají nejvyšší hodnoty magnetizace, kterých by se dosáhlo, kdyby bylo možno kovy ochladit na absolutní bod mrazu. Permeabilita feromagnetik není konstantou, nýbrž funkcí intenzity pole, která ve slabých polích obvykle roste s jejich intenzitou. Dosáhnoucí maxima, klesá k nule, již se těsně přiblíží při nasycení. Maximální hodnoty permeability jsou u některých feromagnetik velmi značné, jak vidíme z tab. (5.8) III. Jsou v ní uvedeny charakteristické veličiny některých feromagnetických materiálů. Tabulka popisuje vlast-

nosti šesti magneticky tvrdých feromagnetik se silným koercitivním polem H_0 a devíti měkkých feromagnetik se slabým koercitivním polem. Tyto měkké materiály se vyznačují zvláště velkou maximální permeabilitou (zejména slitiny Permalloy a Supermalloy).

Jak jsme již řekli, nemá permeabilita (a ovšem ani susceptibilita) feromagnetické látky stálou hodnotu. Závisí dokonce nejen na síle magnetického pole v okamžiku měření, ale také na tom, jaké pole působilo na látku před tímto okamžikem. Proto není vztah 5.7 (28), podle něhož se permeabilita rovná poměru B/H , dosti vhodný k definici μ pro feromagnetika. Definujeme pro ně raději tzv. *diferenciální permeabilitu*

$$\mu_d = \frac{dB}{dH}.$$

Tato veličina se určí ze směrnice magnetizační křivky, která má v každém bodě této křivky jednoznačnou a vždycky konečnou kladnou hodnotu.

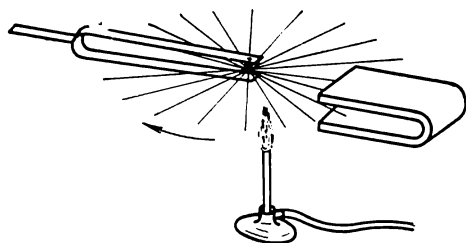
Všechny feromagnetické látky mají společnou vlastnost, že jejich sytná magnetizace klesá s rostoucí teplotou a že při dosažení jisté teploty zvané *Curieův bod* přestávají být feromagnetiky a nad touto teplotou se chovají jako látky paramagnetické. Pak se také jejich susceptibilita mění s absolutní teplotou T podle *Weissova zákona*:

$$5.8 \quad (19) \quad \chi_m = \frac{\text{const}}{T - \Theta}, \quad T > \Theta,$$

kde Θ je absolutní teplota příslušná Curieovu bodu. Je to úplná obdoba Curieova zákona pro paramagnetické látky, v něj rovnice 5.8 (19) přejde pro $\Theta = 0$.

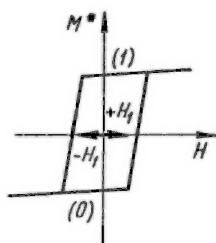
Ztrátu feromagnetismu při vyšších teplotách lze pěkně demonstrovat tímto pokusem [obr. (5.8) 10]: Vodorovně feromagnetické dráty, vybíhající radiálně z lehce otáčivé svislé osy, zasahují svými konci mezi póly podkovovitého magnetu. Udržujeme-li plamenem teplotu drátů poblíž jedné strany magnetu nad Curieovým bodem, přitahuje magnet dráty na straně plamene mnohem slaběji než studené dráty na opačné straně. Proto se osa s dráty otáčí ve směru šipky. Teploty Θ uvedené v tab. (5.8) II jsou vesměs nižší než body tání příslušných kovů, takže tyto kovy jsou v kapalném skupenství jen paramagnetické. To souhlasí se zcela obecným poznatkem, že feromagnetismus pozorujeme jen u látek pevných (tuhých).

Při magnetování feromagnetik střídavým magnetickým polem vznikají v nich značné energetické ztráty, a to nejen magnetickou hysterezí, ale též tzv. *magnetickým zpožděním* a Foucaultovými vířivými proudy. Magnetizace dosahuje totiž ustálené hodnoty teprve v jisté době po vzbuzení pole, která závisí na intenzitě pole a na feromagnetické látce a činí až několik minut. Ztráty způsobené hysterezí a zpožděním jsou úměrné frekvenci pole, kdežto ztráty vzniklé vířivými proudy rostou s jejím čtvercem. Aby se ztráty zmenšily, užívá se pro střídavou magnetizaci měkkých feromagnetik, která se dělí na tenké plechy nebo dráty, jež kladou vířivým proudům značný odpor. Tento způsob však selhává při velmi vysokých frekvencích, pro které jsou výhodné práškové materiály vzniklé lisováním feromagnetického prášku (zrnek měkkého feromagnetika) s vhodným pojidlem (šelakem, pryskyřicí, vodním sklem apod.). Taková vysokofrekvenční feromagnetika (zvaná též *magnetodielektrika*) se někdy nanášejí na pásy papíru a lisují se do vhodného tvaru (např. ferocart). Lze jich užít až do frekvencí 120 MHz.

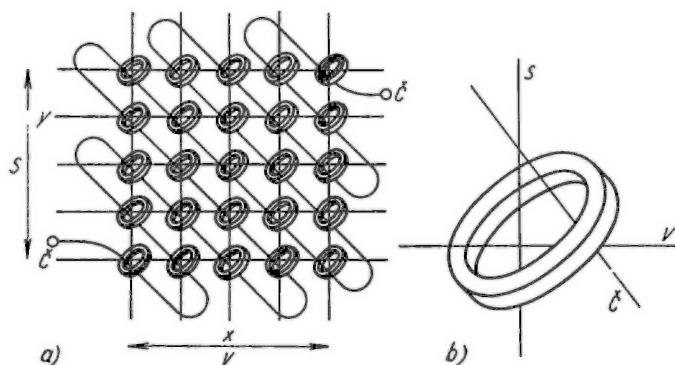


Obr. (5.8) 10. Feromagnetický tepelný motorek

Značného snížení ztrát vířivými proudy se dosahuje zvláště u feritů. Ferity, které krystalují v soustavě kubické, jsou magneticky měkké a dá se u nich vhodným zpracováním dosáhnout velmi dobrých magnetických vlastností. Jsou to sloučeniny typu $MO \cdot Fe_2O_3$, kde M značí dvojmočný kov (Fe, Cu, Mg, Mn, Ni). Od r. 1950 jsou známy také tvrdé ferity typu $MO \cdot 6 Fe_2O_3$ ($M = Ba, Pb, Sr$), které krystalují v šesterečné soustavě. V poslední době byla vypracována technologie řady různých druhů feritů, které mají rozmanité vlastnosti vhodné pro aplikace v mnoha moderních technických oborech, především ve vysokofrekvenční mikrovlnné technice (radiolokace, televizní retranslace) a v telekomunikaci (magnetostrikční ferity). Vyrábějí se také orientované tvrdé ferity (s usměrněnou krystalizací, např. barnaté) a ferity se slabým koercitivním polem a s pravoúhlou hysterezní smyčkou (např. manganohorečnatý), které mají velký význam v automatické a řízení výroby i pro velké samočinné počítačové stroje. Blíže výklad podáme jen o konstrukci tzv. *paměťových elementů* automatických počítačových strojů.

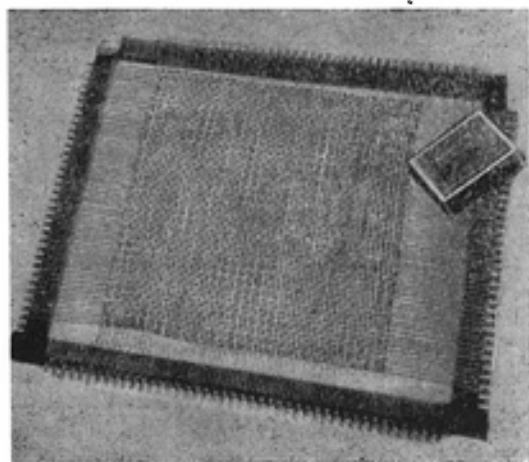


Obr. (5.8) 11. Pravoúhlá smyčka měkkého feritu



Obr. (5.8) 12. Feritová paměť se selekčními vodiči S , V a čtecím vodičem C

Paměť takového elementu je založena na magnetické remanenci drobného feritového prstence, takřka pravoúhlou hysterezní smyčkou [obr. (5.8) 11], který může zaujmout jeden ze dvou stabilních stavů: stav (0) je dán magnetizací jednoho směru [na obr. (5.8) 11 zápornou], stav (1) magnetizací opačnou (kladnou). Prstence je indukčně vázán se dvěma vodiči voličmi (selekčními) S , V a jedním vodičem čtecím C , jak je schematicky znázorněno na obr. (5.8) 12b. Paměťové elementy jsou sestaveny do čtvercové matice [obr. (5.8) 12a] tak, že každý svislý vodič S prochází všemi elementy téže řádky (s pořadnicí y).



Obr. (5.8) 13. Čtvercová matice paměťových elementů

Čtecí vodič C prochází všemi elementy matice. Údaj, který si má stroj zapamatovat, vyjádříme v dvojkové číselné soustavě tím, že patřičné elementy převedeme („překlopíme“) z počátečního (všem elementům společného) stavu (0) do stavu (1). Provedeme to tak, že vodiči S a V příslušnými zvolenému elementu (x, y) pošleme současně stejné magnetizační proudové impulsy $+H_1$ takové velikosti, že jeden impuls sám nestačí k přemagnetování prstence, ale zaručí to dva současně impulsy $+H_1$. Proto se překlopí do stavu (1) jen element (x, y), ale ostatní elementy zůstanou ve stavu (0).

Při čtení záznamu pošleme však oběma selekčními vodiči příslušnými zvolenému elementu stejné impulsy opačného znaménka $-H_1$. Je-li element ve stavu (0), magnetizace prstence se nezmění a čtecí vodič zůstane bez proudu. Je-li však element ve stavu (1), překlopí se do stavu (0) a čtecím vodičem proběhne impuls indukovaný změnou znaménka indukčního toku. Přechodem se ovšem záznam vymaže, a požadujeme-li, aby byl trvalý, musíme jej vhodným způsobem obnovit. Praktické provedení feritové paměti vidíme na obr. (5.8) 13.

Konečně je třeba dodat, že některé sloučeniny, např. F_2Fe , FeO , MnO , MnS , aj. projevují vlastnost, která se v posledních letech podrobněji studuje a nazývá se *anti feromagnetismus*. Susceptibilita těchto sloučenin stoupá s klesající absolutní teplotou jako u feromagnetických látek, dosáhne však při dosti nízké teplotě maxima a při dalším snižování teploty opět klesá. Tak např. F_2Fe má největší susceptibilitu při $T = 79^\circ K$, FeO při $T = 198^\circ K$. Tyto teploty jsou obdobné Curieovu bodu a vyznačují se rovněž jako tento bod nepravidelností v průběhu závislosti specifického tepla, roztažnosti a stlačitelnosti na teplotě. Pro obě jmenované sloučeniny železa lze klesání susceptibility s rostoucí teplotou vyjádřit vztahy stejného tvaru obdobnými Weissovu zákonu:

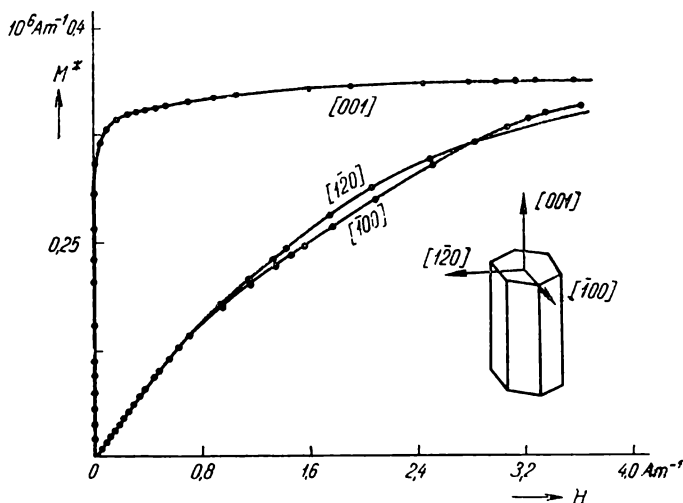
5.8 (19)

$$5.8 (20) \quad \chi_m = \frac{3,88^\circ K}{T + 117^\circ K} \text{ pro } T > 79^\circ K, \quad \chi_m = \frac{6,24^\circ K}{T + 570^\circ K} \text{ pro } T > 198^\circ K.$$

Popis vlastností feromagnetických látek doplníme stručným výkladem o teorii feromagnetismu.

Jak ukážeme v příštím článku, má silný paramagnetismus i feromagnetismus stejnou podstatu: vzniká usměrňováním atomů, jejichž spinové magnetické momenty se navzájem zcela neruší. V obou případech je to způsobeno neúplným obsazením některé vnitřní slupky elektronového obalu atomu. Tak atom železa má v tak zvané slupce M čtyři elektrony s nekompenzovanými spiny stejného směru, a proto má magnetický moment rovný čtyřem Bohrovým magnetonům.

Podstatné rozdíly mezi vlastnostmi látek paramagnetických a feromagnetických nelze tedy vysvětlit různými magnetickými vlastnostmi jejich atomů, o čemž svědčí i skutečnost, že dostatečným zvýšením teploty přejdou feromagnetické látky v paramagnetické, ačkoli se při tom složení atomů nemění. Připomeneme-li ještě, že feromagnetismus je zásadně omezen na látky skupenství tuhého, dojdeme nutně k závěru, že feromagnetismus je podmíněn vzájemným působením blízkých atomů, přesněji řečeno sousedních atomů v krystalové mřížce látky. Potvrzuje to poznatek, že magnetizace feromagnetických monokrystalů není stejně snadná ve všech krystalografických směrech. Na obr. (5.8) 14 jsou nakresleny experimentální magnetizační křivky pro tři krystalografické směry monokrystalu kobaltu, který krystaluje v šesterečné

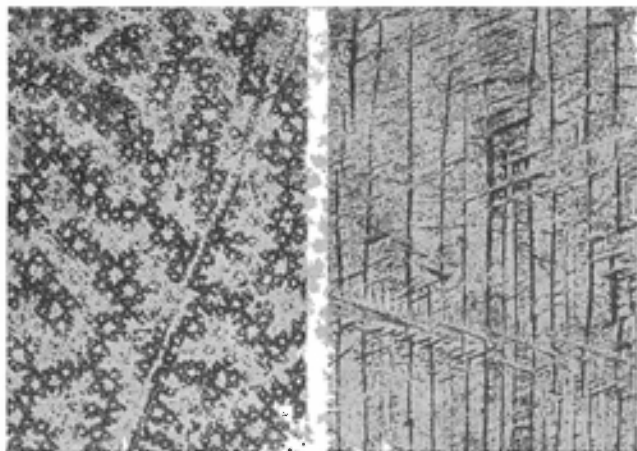


Obr. (5.8) 14. Experimentální magnetizační křivky krystalu kobaltu ve směru $[001]$ snadné magnetizace a ve dvou směrech $[120]$, $[100]$ nesnadné magnetizace

podmíněn vzájemným působením blízkých atomů, přesněji řečeno sousedních atomů v krystalové mřížce látky. Potvrzuje to poznatek, že magnetizace feromagnetických monokrystalů není stejně snadná ve všech krystalografických směrech. Na obr. (5.8) 14 jsou nakresleny experimentální magnetizační křivky pro tři krystalografické směry monokrystalu kobaltu, který krystaluje v šesterečné

soustavě. Vidíme, že ve směru *snadné magnetizace*, rovnoběžném s hexagonální osou krystalu [001],*) lze dosáhnout již velmi slabým polem magnetizace blízké nasycení, kdežto ve směrech *nesnadné magnetizace* $[\bar{1}20]$ a $[\bar{1}00]$ roste magnetizace ve slabých polích pomaleji.

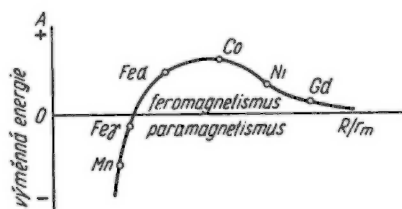
Jak plyne ze studia paramagnetismu, nestačí usměrňovací působení užívaných magnetických polí udržet magnetické momenty atomů ve směru pole proti rušivému vlivu termického chvění krystalové mřížky. Možnost dosáhnout sytné magnetizace a sama



Obr. (5.8) 15. Mikroskopické obrazce na kobaltovém monokrystalu: a — na povrchu kolmém k hexagonální ose, b — na povrchu s ní rovnoběžném

existence permanentních magnetů vedou nutně k předpokladu, že se ve feromagnetických látkách sousední atomy samy navzájem usměrňují a udržují v paralelním uspořádání. To vyjádřil již P. Weiss (r. 1907) hypotézou o *molekulárním poli*, které ve feromagnetických krystalech orientuje navzájem rovnoběžně magnetické momenty atomů (molekul) v malých objemech látky. V každém takovém objemu, řádu 10^{-3} až 10^{-5} mm³, které se nazývají *Weissovy oblasti* (*domény*), udržuje se tedy trvale sytná magnetizace i bez vnějšího pole. Směry jednotlivých oblastí jsou ovšem neuspořádané, takže látka má celkový magnetický moment nulový. Teprve působením vnějšího pole nastává nejdříve přesouvání rozhraní mezi doménami ve prospěch domén s větší kladnou složkou magnetizace ve směru pole a v silnějších polích vznikají též náhlé změny orientace v menších i větších částech Weissových oblastí (objemu 10^{-6} až 10^{-5} mm³). Důkazem toho je *Barkhausenův jev*, který ukazuje, že v silném magnetickém poli přibývá magnetizace stupňovitě po malých skocích. Svědčí o tom proudové nárazy, jež vznikají v cílce obklopující magnetovaný kov. Lze je zjistit buď akusticky (se zesilovačem), nebo oscilograficky. Weissovy oblasti nesmíme zaměňovat s mikrokrystalky polykrystalických kovů. Jejich existence se v poslední době podrobně studuje podle mikroskopických obrazců, které vznikají na povrchu feromagnetických kovů, pokryjeme-li je suspenzí koloidních částic kysličníku Fe₂O₃. Na obr. (5.8) 15 vidíme takové obrazce na povrchu kobaltového monokrystalu. Tmavé plošky vyznačují rozhraní mezi Weissovými oblastmi.

Fyzikální povahu Weissova molekulárního pole vysvětlila teprve moderní kvantová fyzika. Ukazuje se, že síly, které udržují orientaci atomů proti rušivému vlivu termických pohybů, nejsou síly magnetické, nýbrž jsou to tzv. *výměnné síly*, jejichž existence vyplývá z vlnové mechaniky. Důležité je, že potenciální energie těchto sil, tzv. *výměnná energie* A , závisí na vzájemné vzdálenosti R sousedních atomů, a to způsobem znázorněným tzv. *Bethovou křivkou* na obr. (5.8) 16, kde r_m značí poloměr „magnetické“ slupky atomu obsahující nekompenzované



Obr. (5.8) 16. Bethova křivka závislosti výměnné energie na vzdálenosti atomů v krystalu kovu

*) Trojčísli v lomené závorce jsou tzv. *Millerovy indexy*, kterými se označují krystalografické směry (viz např. knihu uvedenou v seznamu literatury pod č. [30]).

spinové momenty elektronů. Na křivce je několik bodů označeno chemickými značkami kovů, pro které se poměr R/r_m rovná vzdálenosti bodů od osy A . Je-li $A > 0$, působí výměnné síly usměrňujícím vlivem na magnetické atomy a magnetizace kovu je stabilní. Proto při větších meziatomových vzdálenostech řadí se atomy souhlasně rovnoběžné a vytvářejí Weissovy oblasti, jako např. u Fe_α , Co, Ni, Gd. Jsou-li vzdálenosti mezi atomy menší, takže A má malé hodnoty kladné, nebo záporné, je krystal paramagnetický, a konečně většími zápornými hodnotami A lze vysvětlit antiferomagnetismus. Je-li totiž $A < 0$, vnucují výměnné síly atomům polohy se střídavě orientovanými (antiparalelními) spiny, čímž se rozrušuje paramagnetické uspořádání magnetických momentů. Nastává to při dosti nízké teplotě Curieově, při níž látka mění krystalickou strukturu a přechází s klesající teplotou do stavu antiferomagnetického, při němž se magnetické momenty střídavě uspořádaných spinů navzájem ruší. Také feromagnetismus Heuslerových slitin se dá vysvětlit patrně tím, že v jejich mřížce jsou vzdálenosti mezi atomy Mn větší v krystalech manganu, takže A je pak kladné. To platí ovšem jen pod Curieovým bodem, jehož absolutní teplota souvisí s výměnnou energií teoretickým vztahem

$$5.8 \quad (21) \quad \Theta = \frac{z}{2k} A,$$

kde z je tzv. *koordináční číslo*, určující, kolik „sousedních“ atomů obklopuje atom v krystalické mřížce, a k značí Boltzmannovu konstantu. Správnost tohoto vztahu si můžeme aspoň zhruba ověřit, srovnáme-li velikosti pořadnic bodů Fe_α , Co, Ni, Gd Bethovy křivky s prvními čtyřmi hodnotami uvedenými v posledním sloupci tabulky (5.8) II.

Ferity se svými vlastnostmi liší od ostatních feromagnetik, a proto se někdy zařazují do zvláštní skupiny látek *ferimagnetických*. Jejich teorii podal Néel (1948) a ukázal, že ferity, které mají podle obr. (5.8) 7 dvě krystalograficky odlišné podmřížky, mají v jedné z nich magnetické momenty souhlasně rovnoběžné jako feromagnetika, zatímco v druhé podmřížce jsou tyto momenty antiparalelní. Ferimagnetické látky jsou tedy vlastně antiferomagneticky nevykompenzované látky. Konečně některé látky (CoCl_2 , FeCl_2 , NiCl_2 , Co_3Mg) projevují při hlubokých teplotách (kapalného vodíku nebo hélia) i jisté anomálie v magnetizaci (např. hysterezi bez nasyčení), a nazývají se proto někdy *metamagnetické*.

Podotýkáme, že teorie magnetismu dosud nedovede uspokojivě vysvětlit všechny pozorované zákonitosti, ale zdá se, že její základní představy jsou správné. O tom svědčí zejména *magnetomechanické jevy*, o kterých pojednáme v příštím článku.

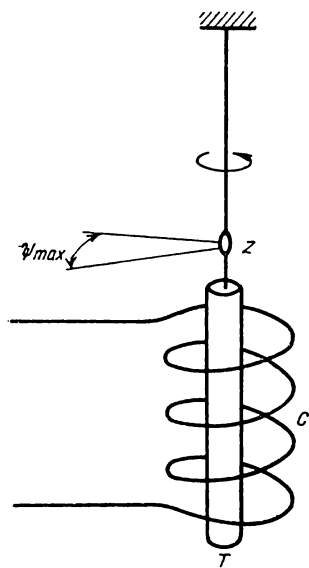
5.8.6. Magnetomechanické jevy

Podobně jako při elektrické polarizaci vznikají i při magnetizaci látky vnitřní síly mezi jejími molekulami, které se projevují změnou některých mechanických veličin. Zmagnetováním feromagnetické látky změní se např. její pružnostní konstanty a nastává podélná nebo příčná kontrakce. Tento jev, který nazýváme *magnetostrikcí*, má i praktický význam, jak jsme uvedli při výkladu o magnetostrikčním ultrazvukovém generátoru. Obrácený magnetostrikční jev záleží v tom, že se mechanickými deformacemi mění magnetizace. Tak např. podélným napínáním nebo stlačováním mění se magnetizační křivka feromagnetického drátu nebo tyčky (*Vilariův jev*). Rovněž kroucením drátu se mění jeho magnetizační křivka a při současném napínání a kroucení se oba vlivy skládají.

Kroucení, podélné magnetování a cirkulární magnetování feromagnetického drátu jsou děje, které se vzájemně ovlivňují. Tak např. současným působením magnetizační cívky souosé s vřetovcovou tyčí a podélného proudu vedeného tyčí, který ji cirkulárně magnetuje, se tyč zkrucuje. Tohoto *Wiedemannova jevu* bylo v novější době prakticky užito v měřicí technice. Při zkrucování železného drátu protékaného střídavým proudem indukuje se totiž v cílce navlečené na drát elektromotorické napětí, z něhož lze určit dvojici, kterou je drát zkrucován.

Magnetostrikce se dá stejně dobře vysvětlit teorií fluidovou i elektrodynamickou. Teoreticky důležitější je však další magnetomechanický jev, který se někdy přesněji nazývá *gyromagnetický*. Tento jev potvrdil zásadní správnost elektrodynamické teorie magnetismu a kromě toho ukázal, že feromagnetismus má původ v nekompenzovaných spinech elektronů.

Již v čl. 5.8.3 jsme ukázali, že oběžný elektron v atomu se chová jako setrvačnick, a má tedy jistou mechanickou točivost (moment hybnosti), při čemž poměr magnetického momentu k mechanické točivosti je určen výrazem 5.8 (13). Z toho plyne, že s magnetickým momentem je nerozlučně spjata mechanická točivost, že se tedy při zmagnetování látky změní mechanická točivost, a obráceně že změna mechanické točivosti musí způsobit i změnu magnetického momentu, tj. magnetizace. Existenci prvního efektu potvrdili v letech 1915 až 1925 zejména Einstein a de Haas, Beck, Arwidsson, Bates, Joffe a Kapica, kdežto obrácený efekt v témž údobí podrobněji proměřili S. J. Barnett a L. J. H. Barnett.



Obr. (5.8) 17. Měření točivého impulsu při zmagnetování železné tyčinky

Pokud jde o první efekt, je možno pokus uspořádat několika způsoby. Železná tyčinka T se zavěsí ve svislé poloze na tenké skleněné nebo křemenné vlákno a obklopí se souosou magnetizační cívkou C [obr. (5.8) 17]. Není-li tyčinka vůbec zmagnetována, jsou směry magnetických momentů jednotlivých Weissových oblastí neuspořádané a výsledná mechanická točivost tyčinky je rovna nule. Projde-li cívkou proudový náraz, zmagnetuje se tyčinka trvale, při čemž se Weissovy oblasti natočí tak, že se jejich elektrické i mechanické točivosti orientují aspoň částečně do svislého směru. Pak ovšem má tyčinka nenulovou mechanickou točivost svislého směru rovnou vektorovému součtu točivostí všech atomů. K tomu je třeba jistého točivého impulsu, který vypočteme z rovnice 5.8 (13). Předpokládáme-li, že feromagnetismus záleží v usměrnění dráhových magnetických momentů elektronů a je-li n_0 počet „magnetických“ oběžných elektronů v objemové jednotce tyčinky, bude magnetický moment tyčinky objemu V

$$m_T = n_0 m V = M^* V$$

a točivost (mechanický moment) elektronů v orientovaných drahách

$$5.8 (22) \quad b_T = n_0 b V.$$

Podle 5.8 (13) tedy

$$5.8 (23) \quad \frac{m_T}{b_T} = \frac{M^* V}{b_T} = \frac{m}{b} = -\frac{1}{2} \frac{e}{m_e}.$$

Při náhlém zmagnetování tyčinky proudovým nárazem v magnetizační cívce dostane tedy tyčinka úhlovou rychlost ω , danou známým vztahem 2.5 (39)

$$b_T = -J\omega,$$

kde J značí její moment setrvačnosti. Rychlost ω a tím i b_T je možno vypočítat z první (maximální) výchylky $\psi_{\max}$ paprsku odraženého od zrcátka Z na stupnici. Také lze užít rezonančních kmitů, které vzniknou, prochází-li cívkou střídavý proud s frekvencí rovnou frekvenci vlastních torzních kmitů tyčinky na vlákně. Jiným způsobem studovali gyromechanický jev Joffe a Kapica, kteří r. 1917 zahřáli zmagnetovanou tyčinku nad Curieův bod. Rozrušením uspořádané orientace Weissových oblastí tepelnými pohyby zmizí magnetizace, ale celková mechanická točivost tyčinky se podle zákona zachování hybnosti nemůže změnit. Proto se tyčinka zavěšená ve svislé poloze roztáhne kolem své osy.

První pokus o zjištění točivého impulsu při zmagnetování učinili r. 1915 Einstein a de Haas; zdálo se, že z rovnice 5.8 (23) vypočtený specifický náboj elektronů souhlasí se známou hodnotou. Opakované pokusy však prokázaly, že *Einsteinův efekt*, jak se tento pokus nazývá, dává pro železo i nikl velmi přibližně poloviční hodnotu točivosti b_T , že tedy místo rovnice 5.8 (23) platí rovnice s dvojnásobným číselným faktorem, tedy rovnice

$$5.8 (24) \quad \frac{m_T}{b_T} = -\frac{e}{m_e}.$$

K stejnému výsledku vedlo i studium obráceného jevu. S. J. Barnettovi se skutečně podařilo zmagnetovat železo, nikl a kobalt rychlou rotací, při čemž poměr m_z/b_z měl přibližně hodnotu 5.8 (24). Z toho je třeba usuzovat, že pro feromagnetické látky nemá poměr magnetického momentu k mechanické točivosti hodnotu 5.8 (13), ale hodnotu dvojnásobnou.

Tento rozpor teorie s experimentem byl vysvětlen, teprve když se zjistilo, že poměr magnetického momentu elektronu způsobeného jeho rotací kolem vlastní osy (spinem) k jeho točivosti je dvojnásobný než poměr týchž veličin pro elektron obíhající kolem jádra atomu, a má tedy právě hodnotu 5.8 (24). Učiníme-li předpoklad, že převážná část magnetizace nevzniká u feromagnetických látek skládáním dráhových magnetických momentů oběžných elektronů, nýbrž jejich magnetických momentů spinových, dosáhneme dobré shody teorie s měřeními. Tento předpoklad se prokázal jako naprosto správný a stal se základním poznatkem moderní teorie magnetismu.

5.8.7. Magnetické veličiny jako obdoba veličin elektrostatických

Od samého začátku jsme výklad o magnetismu stavěli na elektrodynamické teorii, jejíž základním vektorem je magnetická indukce, která nemá mnoho podobností s intenzitou, základním vektorem elektrostatického pole. Přesto je pole permanentních magnetů obvyklého tvaru (tyčových) obdobné poli elektrostatickému a vlastnosti paramagnetických a feromagnetických látek jsou podobné vlastnostem dielektrických a feroelektrických látek. Při tom si však odpovídají stejnojmenné vektory, tedy jednak intenzity $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$, jednak indukce $\mathbf{D}$ a $\mathbf{B}$. Jak jsme již několikrát uvedli, je tomu tak proto, že vektory $\mathbf{H}$ a $\mathbf{B}$ byly vytvořeny fluidovou teorií právě podle vzoru elektrostatických vektorů $\mathbf{E}$ a $\mathbf{D}$. I když v poli makroskopických proudů mají vektory $\mathbf{H}$ a $\mathbf{B}$ jiné vlastnosti než v poli magnetů a ztratily svůj původní fyzikální smysl, podržujeme je a jejich názvy i v dnešním pojetí magnetismu. Jednak z důvodů historických, jednak proto, že fluidová teorie umožňuje názorné vyjadřování a jednoduché výpočty, zakládá se dosud nauka o magnetismu na představě, že magnety jsou soustavy magnetických dipólů. Domníváme se však, že je třeba bezvýhradně vycházet z představ dnešní fyziky, ale že při tom není třeba zbavovat se výhod, které skýtá při výkladu obdoba magnetického pole s polem elektrostatickým. Zdůrazníme-li, že z důvodů historických odpovídá ryze formálně vektoru $\mathbf{H}$ vektor $\mathbf{E}$ a vektoru $\mathbf{B}$ vektor $\mathbf{D}$, můžeme bez nebezpečí využít této formální obdoby k přehlednému uspořádání magnetických veličin a k snadnějšímu zvládnutí a zapamatování jejich jednotek, rozměrů i vztahů mezi nimi.

Elektrostatické a magnetické veličiny lze skutečně sestavit ve dva dokonale paralelní systémy veličin, jejichž rozměry si přesně odpovídají a přecházejí v sebe navzájem pouhou záměnou jednotek volt a ampér, jak je zřejmo z tab. (5.8) IV. K značkám a jednotkám veličin jsme připojili jejich rozměry a hlavní vztahy, aby byla patrna úplná analogie sobě příslušných veličin. Rozměry jsme pro větší přehlednost vyjádřili ve čtyřech základních jednotkách: m, s, A, V. Věříme, že tabulka poslouží i jako užitečná mnemotechnická pomůcka.

Analogie všech sobě přiřazených veličin je zřejmá, jen obdoba mezi kapacitou a indukčností (vlastní) se zdá být fyzikálně dosti vzdálená. Je však možno definici kapacity kondenzátoru přiblížit definici indukčnosti, nahradíme-li elektrický náboj (jemu rovným) indukčním tokem Ψ vystupujícím z jeho kladné desky. Tak dostaneme vztah

$$C = \frac{\Psi}{U},$$

který se liší od definice L jen záměnou U a I .

Formální obdoba elektrických a magnetických veličin

Elektrické		Magnetické	
Náboj Q = indukční tok Ψ $\Psi = \iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$	$C = \text{As}$ coulomb	$\text{Wb} = \text{Vs}$ weber	Magnet. pól (náboj) Q_m = indukční tok Φ $\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
Indukce $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}_s$ = hustota indukčního toku $D = \frac{d\Psi}{dS} = \epsilon E_s$	$\text{As} \cdot \text{m}^{-2}$	$T = \text{Vs} \cdot \text{m}^{-2}$ tesla	Indukce $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ = hustota indukčního toku $B = \frac{d\Phi}{dS} = \mu H$
Potenciál $\varphi = \int_{\infty}^{\infty} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l}$ elektromotorické napětí $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l}$	V volt	A ampér	Potenciál (skalární) $\varphi_m = \int_{\infty}^{\infty} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ magnetomotorické napětí $\mathcal{E}_m = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$
Intenzita pole $\mathbf{E}_s = -\text{grad } \varphi$	Vm^{-1}	Am^{-1}	Intenzita pole $\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m$
Kapacita $C = \frac{Q}{U}$	$F = \text{AsV}^{-1}$ farad	$H = \text{Vs} \cdot \text{A}^{-1}$ henry	Indukčnost vlastní $L = \frac{\Phi}{I}$
Permitivita $\epsilon = \epsilon_0(1 + \kappa)$	$\text{Fm}^{-1} =$ $= \text{AsV}^{-1} \text{m}^{-1}$	$\text{Hm}^{-1} =$ $= \text{VsA}^{-1} \text{m}^{-1}$	Permeabilita $\mu = \mu_0(1 + \kappa_m)$
Moment dipólu $\mathbf{p} = Q\mathbf{l}$	Asm	Vsm	Moment dipólu $\mathbf{p}_m = Q_m \mathbf{l} = \mu_0 I \mathbf{S}$
Polarizace $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{V}$	Asm^{-2}	Vsm^{-2}	Polarizace $\mathbf{J} = \frac{\mathbf{p}_m}{V}$
Hustota energie v poli $w_s = \frac{1}{2} \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{D}$	AVsm^{-3}	VAsm^{-3}	Hustota energie v poli $w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$
Energie kondenzátoru $W_s = \frac{1}{2} CU^2$	VsA	AsV	Energie proudu cívky $W_m = \frac{1}{2} LI^2$

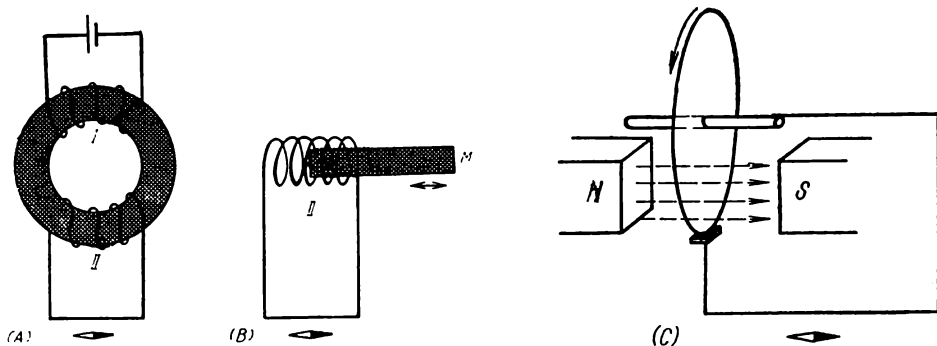
5.9. Kvazistacionární stavy

5.9.0. Úvod

Předcházející kapitolu jsme věnovali studiu vlastností stacionárních magnetických polí, jež mají původ v nabitých částicích, které se v pozorovací soustavě pohybují rovnoměrně. Taková časově neproměnná pole vznikají v okolí ustálených proudů v nehybných vodičích nebo v okolí magnetů, které jsou rovněž v klidu v pozorovací soustavě.

V této kapitole pokročíme dále a budeme vyšetřovat jednak pole pohyblivých vodičů a magnetů, jednak pole časově proměnných proudů. Nebudeme však řešit problém nestacionárních stavů v celé obecnosti, ale omezíme se na pomalu proměnné stavy, které se nazývají *kvazistacionární*, jak jsme se zmínili už na konci čl. 5.5.4 a v úvodu ke kapitole 5.6.

Kvazistacionární stavy se patrně budou svými vlastnostmi blížit stavům stacionárním tím více, čím pomalejší budou jejich změny. Je jasné, že „pomalost“ je pojem relativní a že



Obr. (5.9) 1. Faradayovy pokusy s elektromagnetickou indukcí

stupeň kvazistacionárnosti je dán rychlostí, jakou se pole šíří prostorem. Tak např. prochází-li obvodem střídavý proud, bude průběh děje ve vodiči a v jeho okolí podstatně záviset na tom, v jakém poměru bude perioda proudu k době potřebné k rozšíření střídavého pole do vzdálenosti rovné rozměrům vodiče. Bude-li tato doba nesmírně krátká proti periodě proudu, nebude třeba přihlížet ke konečné rychlosti šíření pole a bude možno připustit, že se proud mění v celém vodiči stejně, že má v každém okamžiku ve všech průřezích stejnou hodnotu, jak je tomu u proudu stacionárního.

Zákony takových kvazistacionárních, pomalu proměnných proudů a polí se budeme zabývat v této kapitole. Budeme předpokládat, že vliv konečné rychlosti, kterou se šíří změny pole, není znatelný, takže bude možno podržet i pro stavy kvazistacionární platnost některých vztahů odvozených pro stavy stacionární. Nicméně uvidíme, že i velmi pomalu proměnné stavy se liší od stavů ustálených existencí neobyčejně významného jevu: elektromagnetické indukce.

Když Oersted r. 1820 objevil, že elektrický proud vzbuzuje magnetické pole, soustředil se úsilí fyziků na pokusy, které by prokázaly obrácenou souvislost mezi elektrinou a magnetismem: vzbuzení elektrického proudu magnetickým polem. Toto úsilí bylo korunováno úspěchem teprve zásluhou Faradayovou, který se tak stal objevitelem elektromagnetické indukce.

V době od srpna do října 1831 provedl Faraday postupně tři základní pokusy [obr. (5.9) 1].

(A) Železný prstenec ovinul dvěma cívkami, z nichž první I připojil přes klíč k baterii

a konce druhé II spojil delším drátem, poblíž kterého umístil magnetku. Při spojení a při přerušení proudu v první cívce zjistil vychýlení magnetky, a to v opačných směrech.

(B) Když první cívku odstranil a místo ní umístil do druhé cívky II tyčový magnet M , pozoroval vychýlení magnetky, jen pokud byl magnet v pohybu.

(C) Měděný kotouč kolmý ke směru pole velkého elektromagnetu opatřil na obvodu klouzavým dotykem, od něhož vedl drát k ložisku kovové osy kotouče. Když kotouč rotočil, zjistil, že obvodem protéká proud.

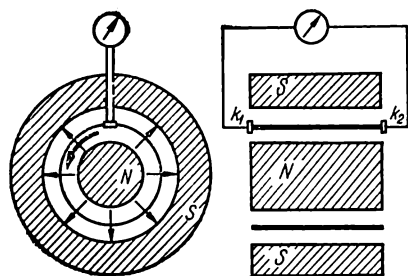
Těmito pokusy uskutečnil Faraday všechny podstatné případy elektromagnetické indukce, které v průběhu dalšího výkladu vysvětlíme z hlediska elektromagnetické teorie. Náš postup bude právě opačný než sled Faradaových pokusů. Od pohybu nábojů v magnetickém poli přes pohyb magnetu vzhledem ke klidným nábojům přejdeme k proměnným proudům, které jsou vlastně výsledkem zrychleného pohybu nabitých částic. Tak dojdeme k obecnému indukčnímu zákonu, z jehož bohatých aplikací probereme aspoň nejzávažnější.

5.9.1. Elektrické pole indukované pohybem náboje v magnetickém poli

Pokus (C) s Faradayovým kotoučem souvisí úzce s pokusem s Barlowovým kolečkem [obr. (5.6) 11] a s Hallovým jevem [obr. (5.6) 12]. Společnou příčinou všech těchto úkazů je síla, které podléhají pohyblivé nabitě částice — nositelé proudu ve vodiči — v magnetickém poli:

$$5.9 (1) \quad \mathbf{F} = \mathbf{u}^* \times \mathbf{B}.$$

Otáčeli-li se kotouč směrem plně vytažené šipky [obr. (5.9) 1C], jsou kladné ionty i záporné volné elektrony v dolní polovině kotouče unášeny směrem dozadu (za nákresnu). Magnetické pole, které míří vpravo, tlačí podle 5.9 (1) ionty, jejichž elektrická hybnost $\mathbf{u}^*$ má směr oběžné rychlosti, směrem dolů k posuvnému kontaktu, kdežto volné elektrony s opačnou elektrickou hybností vzhůru k ose kotouče. Snadno nahlédneme, že kdyby byl v mědi možný pohyb kladných iontů, vznikl by v obvodu proud stejného smyslu jako pohybem volných elektronů. Proud vzniká v mědi ovšem jen pohybem elektronů, kdy-



Obr. (5.9) 2. Homopolární generátor

bychom však užili kotouče z polovodiče typu p , změnil by se smysl proudu, a kdyby měl kotouč elektronovou i děrovou vodivost, byl by výsledný proud součtem proudů vzniklých oběma druhy nositelů proudu. Užitím Faradayova kotouče není tedy možno rozeznat typ polovodiče, což je možné zjištěním znaménka Hallovy konstanty. Je tomu tak proto, že u Faradayova kotouče lze zjistit jen směr elektrické hybnosti nositelů proudu a směr jejich rychlosti nerozhoduje. Kombinací obou měření by bylo možno určit poměr hustot volných elektronů a děr v polovodiči.

Tohoto způsobu buzení proudu pohybem vodiče v magnetickém poli se využívá v poněkud jiné úpravě u *homopolárního* (*unipolárního*) generátoru, jehož schéma vidíme na obr. (5.9) 2. Dutý měděný válec se otáčí kolem své osy mezi sousedními válcovými pólovými nástavci magnetu, z nichž vnitřní N je plný, vnější S je dutý. Měděný válec je opatřen na obou okrajích klouzavými kontakty k_1 , k_2 , které odvádějí proud protékající válcem při otáčení v naznačeném smyslu.

Přistupme nyní k rozboru Faradayova pokusu (B), který se liší od (C) především tím, že vodič (cívka II) je v klidu a pohybuje se magnet se svým polem. Toto pole je nehomogenní, a proto se pohybem magnetu zároveň mění vektor $\mathbf{B}$ v prostoru cívky. K této poslední

skutečnosti zatím nepřihlížejme a ptejme se, bude-li na volné elektrony v drátě cívky působit podle naší teorie nějaká síla.

Vzorec 5.9 (1) jsme odvodili za předpokladu, že

$$5.9 (2) \quad \mathbf{u}^* = q\mathbf{u}$$

je elektrická hybnost částice p s nábojem q , měřená v pozorovací soustavě S , v níž se p pohybuje stálou rychlostí $\mathbf{u}$, a $\mathbf{B}$ je vektor indukce, jehož zdroj (vodič protékaný proudem nebo magnet) je v klidu vzhledem k pozorovateli. Tyto zdroje nejsou nabité, a proto nepůsobí na náboj q žádná jiná síla než magnetická síla 5.9 (1). Přejdeme nyní k jiné inerciální vztahné soustavě S'' , která se pohybuje stálou rychlostí $-\mathbf{V}$ v pozorovací soustavě S . Jsou tedy obě soustavy inerciální a pro přechod od S k S'' platí Lorentzova transformace, ze které jsme odvodili transformační vzorec 2.9 (38). Tato rovnice má zcela obecnou platnost, a můžeme jí tedy použít i na magnetickou sílu 5.9 (1). Je-li rychlost V velmi malá proti rychlosti světla, změní se síla 5.9 (1) přechodem k soustavě S'' jen o veličiny, které jsou velmi malé 2. řádu ve srovnání s původní velikostí síly v soustavě S . Proto můžeme s dostatečnou přesností položit magnetickou sílu v soustavě S'' rovnou magnetické síle působící v klidové soustavě S zdroje pole. Tato soustava má v nové soustavě S'' rychlost $\mathbf{V}$ a to je zároveň rychlost zdroje v soustavě S'' . Protože je rychlost V malá proti c , můžeme Einsteinův vzorec pro skládání rychlostí nahradit klasickým vzorcem a psát

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}'' - \mathbf{V},$$

kde $\mathbf{u}''$ značí rychlost částice p v soustavě S'' . Na pravé straně je však relativní rychlost částice p vzhledem ke zdroji pole. Označíme-li ji $\mathbf{u}_r$, dostaneme pro sílu $\mathbf{F}''$ měřenou v soustavě S'' vzhledem k 5.9 (2) výraz*)

$$5.9 (3) \quad \mathbf{F}'' = q(\mathbf{u}_r \times \mathbf{B}).$$

Tak jsme dokázali, že vzorec 5.9 (1) pro magnetickou sílu, které podléhá částice s elektrickou hybností $\mathbf{u}^*$ v klidové soustavě zdroje pole, platí obecně pro relativní pohyb částice vzhledem k zdroji. Nezáleží tedy na rychlosti částice p v pozorovací soustavě, která může být i rovna nule. Proto magnet nebo indukční proud; jsou-li v pohybu, působí i na náboj, který je vzhledem k pozorovací soustavě v klidu.

Vzorec 5.9 (3) je obecnější než 5.9 (1) a vyjadřuje sílu, která působí na nabitou částici bez ohledu na její rychlost v pozorovací soustavě. Tato síla má tedy charakter síly elektrické a může uvést do pohybu i náboj, který je v klidu vzhledem k pozorovací soustavě. Proto ji nepočítáme mezi síly magnetické a pokládáme ji za projev elektrického pole, které vzniklo pohybem zdroje magnetického pole v pozorovací soustavě. Síla $\mathbf{F}''$ je skutečně ekvivalentní elektrickému poli intenzity

$$5.9 (4) \quad \mathbf{E}_{ip} = \frac{\mathbf{F}''}{q} = \mathbf{u}_r \times \mathbf{B},$$

které se nazývá *elektrické pole indukované pohybem* zdroje magnetického pole v pozorovací soustavě. Proto jsme pole 5.9 (4) označili indexem „ip“, abychom je odlišili od dalšího indukovaného pole, o kterém pojednáme v příštím článku.

Jako příklad vypočteme pole $\mathbf{E}_{ip}$ pro Faradayův kotouč, který se otáčí úhlovou rychlostí ω . Relativní rychlost volných elektronů v kotouči vzhledem k magnetu je ve vzdálenosti r od osy

$$\mathbf{u}_r = \omega \times \mathbf{r}$$

*) Tuto rovnici jsme odvodili jen pro nenabitý zdroj magnetického pole, a nikoli pro zdroj nabitý, např. pro konvekční proudy, které působí na částici zároveň elektrostaticky.

a pohybové indukované pole

$$5.9 (5) \quad E_{ip} = (\omega \times r) \times B = (B \cdot \omega) r - (B \cdot r) \omega = (B \cdot \omega) r,$$

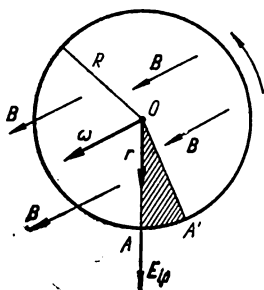
neboť pole je kolmé k rovině kotouče, takže $B \perp r$.

Indukované pole mříří tedy svisle dolů, mají-li vektory ω a B souhlasný směr jako na obr. (5.9) 3, v opačném případě směřuje svisle vzhůru. Vidíme, že proud obíhá v každém případě v takovém smyslu, že síla 5.9 (1), kterou na nositele proudu působí pole B , má opačný směr než oběžná rychlost kotouče. To je v souladu s obecným **pravidlem Lenzovým**: *Směr indukovaného pole je vždy takový, že brání změně, která je jeho příčinou.*

Velikost indukovaného pole je

$$5.9 (5) \quad E_{ip} = B\omega r$$

a stejně velké indukované pole vzniká v homopolárním generátoru, je-li r poloměr měděného bubnu a B střední velikost magnetické indukce v mezeře mezi pólovými nástavci.



Obr. (5.9) 3. Pole indukované rotací Faradayova kotouče

5.9.2. Elektrické pole indukované časově proměnným proudem

Vraťme se teď k nejstaršímu Faradayovu pokusu (A), kterým dokázal, že vznik nebo zánik proudu v jedné cívice způsobil proudový náraz v druhé cívice. Podobný účinek má ovšem každá změna proudu a na tom je založena funkce transformátorů.

Z hlediska elektrodynamické teorie znamená změna proudu ve vodiči se stálou hustotou nositelů náboje nutně změnu rychlosti nabitých částic nesoucích proud, neboť jejich množství ve vodiči je stálé. K vysvětlení pokusu (A) a podobných jevů (funkce transformátorů) je tedy třeba vyšetřit pole, které vzniká zrychleným pohybem náboje. K řešení této úlohy uijeme stejného postupu, jakým jsme v čl. 2.9.6 řešili problém gravitačního pole zrychleného tělesa. V závěru téhož článku jsme už poukázali na to, že zákon 2.9 (42), který jsme tam odvodili pro gravitační pole, je obdobný zákonu, jehož správnost se v elektromagnetickém poli potvrzuje.

Při odvození tohoto zákona se omezíme na hlavní myšlenky postupu vyloženého v čl. 2.9.6.

Mějme v inerciální soustavě S částici P s nábojem Q a malou rychlostí v a další částici p s nábojem q , která se pohybuje rovněž malou rychlostí u . V soustavě S působí první částice na druhou částici silou 5.5 (8), která se vzhledem k malým rychlostem částic redukuje na elektrostatickou sílu F_{es} danou vzorcem 5.5 (1).

V neinerciální soustavě $\tilde{S}$, která se vzhledem k S pohybuje se zrychlením $a = -\dot{v}$, mají obě částice unášivé zrychlení $+\dot{v}$, a působí na ně tedy setrvačné síly. Na částici p tedy působí kromě F_{es} ještě setrvačná síla

$$5.9 (6) \quad \tilde{F} = m\dot{v},$$

kde hmotnost m částice p souvisí s její pohybovou energií W_k Einsteinovým vztahem

$$mc^2 = m_0c^2 + W_k.$$

Byla-li částice p původně v klidu v místě s nulovým potenciálem, získala působením síly F_{es} energii

$$W_k = \int F_{es} \cdot dl,$$

o kterou poklesla její potenciální energie v poli částice P . Máme tedy vztah

$$W_k = -\Delta W_p = -W_p = -q\varphi,$$

kde φ je potenciál elektrostatického pole vzbuzeného částicí P v místě částice p . Bude tedy

$$m = -\frac{1}{c^2} q\varphi + m_0,$$

a setrvačná síla 5.9 (6)

$$\vec{F} = m_0 \dot{\vec{v}} - \frac{q\varphi}{c^2} \dot{\vec{v}}$$

se tedy skládá ze dvou sil. První je klasická setrvačná síla způsobená podle čl. 2.9.6 zrychleným pohybem neinerciální soustavy $\tilde{S}$ v kosmické soustavě. Druhá síla je podmíněna elektrostatickým potenciálem částice P a můžeme ji co do účinku nahradit elektrickým polem:

$$5.9 (7) \quad \mathbf{E}_{ia} = -\frac{\varphi}{c^2} \dot{\mathbf{v}}.$$

Existenci tohoto pole jsme zatím dokázali jen v neinerciální soustavě $\tilde{S}$ jako důsledek zvětšení setrvačnosti částice p příslušného její kinetické energii. Z hlediska obecného principu relativnosti však musí být pole $\mathbf{E}_{ia}$ nezávislé na zrychlení vzhledem ke kosmické soustavě, protože je určeno jediné polem částice P . Proto musíme předpokládat, že pole $\mathbf{E}_{ia}$ má původ jen v relativním zrychlení částice P vzhledem k pozorovací soustavě. Tak docházíme k důležitému závěru:

5.9 (8) *Zrychleným pohybem nabitě částice vzniká indukované pole intenzity rovné záporně vzatému součinu zrychlení částice a jejího elektrostatického potenciálu děleného čtvercem rychlosti světla.*

Tento závěr je se všemi svými důsledky v plné shodě se zkušeností, jak ukážeme v příštím článku.

Pole $\mathbf{E}_{ia}$ budeme nazývat *akceleračním*) indukovaným polem*, abychom je odlišili od indukovaného pole pohybového. Akcelerační pole má velmi podobnou příčinu jako setrvačné pole, které je ovšem původu gravitačního. Lze říci, že indukce způsobená časovou změnou proudu je projevem „elektrické setrvačnosti“ obdobné „setrvačnosti gravitační“, která je však pozorovatelná jen při zrychleních vzhledem ke kosmické soustavě.

Klasické setrvačné síly mají povahu ryze gravitační a neúčastní se na nich znatelně síly elektrické. Kdyby totiž elektrostatický potenciál vesmíru nebyl roven nule, působilo by pole 5.9 (7) na všechny náboje silami, které by měly pro záporně nabitě částice opačný směr než pro částice kladné. Takový neobvyklý jev nebyl nikdy pozorován, a proto je třeba předpokládat, že *elektrostatický potenciál vesmíru je nulový*, a že tedy celkový *algebraický součet všech nábojů ve vesmíru je roven nule*.

5.9.3. Zákon elektromagnetické indukce

Obě indukovaná pole $\mathbf{E}_{ip}$ a $\mathbf{E}_{ia}$ mají povahu elektrických polí nikoli magnetických, protože působí na náboje nezávisle na rychlostech těchto nábojů v pozorovací soustavě. Niemeně mají společnou jednu vlastnost, kterou se od jiných elektrických polí $\mathbf{E}_s$ a $\mathbf{E}_{ps}$ liší: jsou to pole vírová.

*) V elektrotechnice se toto pole často nazývá *transformační indukované pole*, protože je na něm založena transformace střídavých proudů.

Abychom to dokázali, vyjádříme nejprve podle 5.5 (33) a D (23) vektor 5.9 (4) ve tvaru

$$\mathbf{E}_{ip} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi r^2} [\mathbf{u}_r \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0)] = \frac{\mu_0 Q}{4\pi r^3} [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{v} - (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{v}) \mathbf{r}].$$

Protože $\mathbf{u}_r$ a $\mathbf{v}$ jsou na souřadnicích nezávislé, dostaneme pro parciální derivaci složky $(E_{ip})_z$ podle y

$$\begin{aligned} \frac{\partial (E_{ip})_z}{\partial y} &= \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left[(u_{rx}x + u_{ry}y + u_{rz}z) \frac{v_z}{r^3} - (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{v}) \frac{z}{r^3} \right] = \\ &= \frac{\mu_0 Q}{4\pi r^3} \left[u_{ry}v_z - \frac{3}{r} (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}^0) yv_z + \frac{3}{r} (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{v}) yz \right]. \end{aligned}$$

Vzhledem k D (36) tedy

$$\text{rot}_x \mathbf{E}_{ip} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi r^3} \left[u_{ry}v_z - u_{rz}v_y - \frac{3}{r} (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}^0) (yv_z - zv_y) \right]$$

a další dvě složky plynou cyklickou záměnou, takže

$$5.9 (9) \quad \mathbf{rot} \mathbf{E}_{ip} = \mathbf{rot} (\mathbf{u}_r \times \mathbf{B}) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi r^3} [3(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}^0) (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0) - \mathbf{v} \times \mathbf{u}_r].$$

Podobně vypočteme rotaci pole 5.9 (7). Dosazením za potenciál částice P z 5.1 (58) dostaneme nejprve

$$5.9 (10) \quad \mathbf{E}_{ia} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \dot{\mathbf{v}},$$

a pokládáme-li nyní za proměnnou jen vzdálenost r , bude

$$\text{rot}_x \left(\frac{\dot{\mathbf{v}}}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\dot{v}_z}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{v}_y}{r} \right) = - \frac{\dot{v}_z}{r^2} \cdot \frac{y}{r} + \frac{\dot{v}_y}{r^2} \cdot \frac{z}{r},$$

takže

$$\mathbf{rot} \left(\frac{\dot{\mathbf{v}}}{r} \right) = - \frac{\mathbf{r}^0}{r^2} \times \dot{\mathbf{v}}.$$

Vychází tedy

$$5.9 (11) \quad \mathbf{rot} \mathbf{E}_{ia} = - \frac{\mu_0 Q}{4\pi r^2} (\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}^0)$$

a je zřejmé, že rotace obou indukovaných polí jsou obecně různé od nuly, jestliže se mění vektor $\mathbf{B}$. Jeho časovou změnu, která je způsobena relativním pohybem částice p vzhledem k budiči částici P , vypočteme, pokládáme-li jako prve za proměnný jen vektor $\mathbf{r}$. Bude tedy

$$\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_p = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \left[\mathbf{v} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \right],$$

a protože [vzhledem k obr. (5.1) 17] $d\mathbf{r} = d\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}^0 = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \left(\frac{-3}{r^4} \right) \frac{dr}{dt} = \\ &= \frac{1}{r^3} \mathbf{u}_r - \frac{3\mathbf{r}}{r^4} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r}^0 \right) = \frac{1}{r^3} \{ \mathbf{u}_r - 3(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}^0) \mathbf{r}^0 \}, \end{aligned}$$

máme vztah

$$5.9 (12) \quad \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_p = \frac{\mu_0 Q}{4\pi r^3} [\mathbf{v} \times \mathbf{u}_r - 3(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}^0) (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0)].$$

Podobně vypočteme časovou změnu vektoru $\mathbf{B}$ způsobenou zrychlením budící částice P , pokládáme-li za proměnnou pouze její rychlost $\mathbf{v}$:

$$5.9 (13) \quad \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{\mathbf{a}} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi r^2} (\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}^0).$$

Srovnáním hořejších výsledků plynou vztahy

$$5.9 (14) \quad \text{rot } \mathbf{E}_{\text{ip}} = - \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{\mathbf{p}}, \quad \text{rot } \mathbf{E}_{\text{ia}} = - \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{\mathbf{a}},$$

kteří nám říkají, že jak při pohybové indukci, tak při indukci akcelerační se *rotace indukovaného pole rovná záporně vzaté časové změně vektoru magnetické indukce*. Kdyby se měnila poloha magnetu nebo indukčního proudu a současně i velikost proudu, vznikalo by výsledné indukované pole

$$5.9 (15) \quad \mathbf{E}_{\text{i}} = \mathbf{E}_{\text{ip}} + \mathbf{E}_{\text{ia}}$$

a časová změna vektoru indukce by byla

$$5.9 (16) \quad \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{\mathbf{p}} + \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{\mathbf{a}}.$$

Platila by tedy rovnice

$$5.9 (17) \quad \boxed{\text{rot } \mathbf{E}_{\text{i}} = - \frac{d\mathbf{B}}{dt}},$$

kteří vyjadřuje obecný **zákon elektromagnetické indukce v diferenciálním tvaru**.

Pro praktické účely je výhodnější jeho integrální tvar, který odvodíme užitím Stokesovy věty D (39). Násobíme-li skalárně hořejší rovnici orientovaným plošným prvkem $d\mathbf{S}$ a integrujeme přes libovolnou spojitou plochu S , ohraničenou uzavřenou křivkou C , dostaneme

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{E}_{\text{i}} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Integrál vpravo je však indukční tok plochou S :

$$5.9 (18) \quad \Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

a integrál vlevo převedeme na křivkový integrál

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{E}_{\text{i}} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{E}_{\text{i}} \cdot d\mathbf{l},$$

kteří podle 5.4 (6) představuje *indukované elektromotorické napětí*

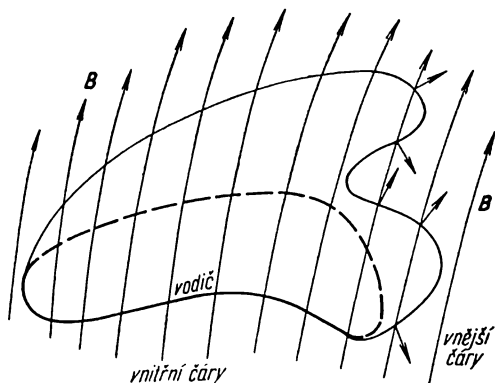
$$5.9 (19) \quad \mathcal{E}_{\text{i}} = \oint_C \mathbf{E}_{\text{i}} \cdot d\mathbf{l},$$

kteří udržuje indukovaný proud v lineárním uzavřeném obvodu daném křivkou C . Spojením těchto výsledků plyne **integrální zákon elektromagnetické indukce**, známý pod jménem **Faradayův indukční zákon**:

$$5.9 (20) \quad \boxed{\mathcal{E}_{\text{i}} = - \frac{d\Phi}{dt}}.$$

Při tom se elektromotorické napětí $\mathcal{E}_i$ počítá jako kladné, udržuje-li proud, jehož magnetický moment svírá ostrý úhel se směrem pole budícího toku Φ . Pak tento zákon v sobě zahrnuje i Lenzovo pravidlo.

Všechny předešlé poznatky jsme odvodili jen pro pole jediné nabitě částice. Avšak libovolné magnetické pole vzniká superpozicí polí nabitých částic a pro operace, kterých jsme užili, platí aditivní zákon. Proto naše výsledky platí obecně.



Obr. (5.9) 4. Indukční toky všemi plochami omezenými vodičem jsou stejné

Další poznámka se týká indukčního toku „plochou vodiče“, který je definován integrálem 5.9 (18) vzatým přes část povrchu vymezenou vodičem na libovolné spojitě (jednoduše souvislé) ploše jím proložené. Tok Φ je geometricky určen počtem jednotkových indukčních trubic, které procházejí vnitřkem vodiče (jsou do něho „navlečeny“). Protože jsou všechny magnetické indukční trubice uzavřené, je zřejmé, že jejich počet je jednoznačně určen vodičem samým. Že nezáleží na tvaru plochy proložené vodičem, můžeme se přesvědčit pohledem na obr. (5.9) 4, obdobný obr. (5.1) 10.

Vzorec 5.9 (20) je přes svou formální jednoduchost velmi obecný a při správné aplikaci nevede k chybným výsledkům. Při jeho užití na obvody složené z plošných nebo prostorových vodičů s klouzavými kontakty mohou však vzniknout pochybnosti při stanovení indukčního toku a jeho časové změny. Pak je bezpečnější vyjít ze vzorce 5.9 (15) a dosadit tam za E_{ip} výraz 5.9 (4). Tak dostaneme

$$\mathcal{E}_i = \oint_C E_{ip} \cdot dl + \oint_C E_{ia} \cdot dl = \oint_C (u_r \times B) \cdot dl + \iint_S \text{rot } E_{ia} \cdot dS$$

a podle 5.9 (14)

$$5.9 (21) \quad \mathcal{E}_i = \oint_C (u_r \times B) \cdot dl - \iint_S \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) \cdot dS.$$

Ukážeme to na příkladu Faradayova kotouče, který se otáčí v časově neměnném magnetickém poli. Je tedy $(\partial B / \partial t)_a = 0$ a podle 5.9 (5)

$$\mathcal{E}_i = \oint_C (u_r \times B) \cdot dl = \oint E_{ip} \cdot dl = \oint (B \cdot \omega) r \cdot dl.$$

Protože však u_r je podle obr. (5.9) 3 všude rovno nule s výjimkou části obvodu, kde proud je veden rotujícím kotoučem ve směru poloměru od O k A , je $dl = dr$, takže

$$\mathcal{E}_i = \int_{r=0}^R (B \cdot \omega) r \cdot dr = \int_0^R B \omega r dr = \frac{1}{2} \omega B R^2.$$

Při výpočtu indukovaného elektromotorického napětí ze vzorce 5.9 (20) je třeba přihlížet k tomu, že sice se proud odvádí z kotouče v prostoru nehybnými kontakty v O a A , že však mezi nimi se vodič pohybuje. Vektor B je kolmý k rovině kotouče, jehož poloměr OA se za dobu dt posune do polohy OA' a opíše plošku $dS = \frac{1}{2} R^2 \omega dt$. Vzhledem k tomu je možno si představit, že část obvodu mezi O a A je dána proměnnou čarou $OA'A$, takže velikost časové změny indukčního toku

$$\left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{B dS}{dt} = \frac{1}{2} \omega B R^2.$$

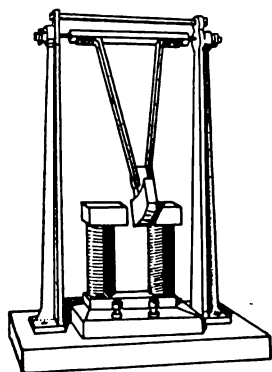
Dostáváme tedy stejně velkou hodnotu $\mathcal{E}_1$ jako prve a smysl, ve kterém v obvodu působí, zjistíme podle Lenzova pravidla. Je zřejmé, že kdybychom nevzali v úvahu rotaci kotouče a pokládali i část obvodu OA za nehybnou, vyšlo by nám $\mathcal{E}_1 = 0$. Výpočet podle vzorce 5.9 (21) je zcela jednoznačný, a proto bezpečnější.

Nyní promluvíme o některých jevech, které prokazují platnost Lenzova pravidla.

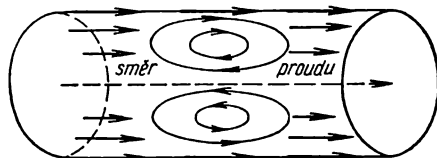
Při uskutečňování změn, které budí indukci, musíme konat práci rovnocennou energii potřebné k udržování indukovaných proudů, a to se právě jeví jako odpor, který musíme vnějšími silami přemáhat. Názorně to ukazuje pokus s *Waltenhofenovým kyvadlem* [obr. (5.9) 5]. Plná kovová (nejlépe měděná) deska kývající mezi póly elektromagnetu se velmi rychle utlumí, zavedeme-li proud do budících cívek. Nahradíme-li však plnou desku deskou s příčnými výřezy, pozorujeme, že útlum kyvů je v magnetickém poli skoro stejně slabý, jako když elektromagnetem proud neprochází. Pohybem plné desky v magnetickém poli se v ní indukují proudy, které vznikají kruhovými pohyby volných elektronů v kovu. Tyto *vířivé proudy* zvané *Foucaultovy* mají podle Lenzova pravidla takový směr, že brzdí pohyb desky, který je budí. Deska s výřezy však klade těmto proudům značný odpor, který vířivé proudy velmi zeslabí, takže spotřebují jen energii malou proti energii kyvadla.

Vířivé proudy, které vznikají v kovových tělesech při jejich pohybu v magnetickém poli, mají značný praktický význam. Příznivě se projevují u měřicích přístrojů, kde se jich využívá k dosažení *optimálního útlumu*, nepříznivě se uplatňují u vodičů ve střídavém magnetickém poli (např. u elektromagnetů na střídavý proud a transformátorů).

Vířivé proudy v plných vodičích jsou také příčinou důležitého *povrchového jevu* čili



Obr. (5.9) 5. Waltenhofenovo kyvadlo



Obr. (5.9) 6. Vířivé proudy příčinou skinefektu

skinefektu. Projevuje se tím, že hustota střídavého proudu, zvláště vysokofrekvenčního, není v celém průřezu vodiče stejná: hustoty ubývá od povrchu, v jehož blízkosti je největší, směrem k ose vodiče, kde může klesnout až na nulu. Vysvětlení podává obr. (5.9) 6, kde čárkovaná šipka na ose válcového vodiče značí okamžitý směr střídavého proudu. Teorie ukazuje, že vířivé proudy indukované při periodické změně proudu ve válci mají takový smysl, že u povrchu vodiče mají souhlasný, u jeho osy však opačný směr než okamžitý střídavý proud. Hustota indukovaného proudu se ovšem v každém místě skládá s hustotou původního proudu a tak se proud u povrchu vodiče zesiluje, ale uvnitř zeslabuje, což má za následek zdánlivé zmenšení průřezu a zvýšení odporu. Proto se k vedení vysokofrekvenčních proudů užívá dutých vodičů. Na skinefektu založil Vologdin metodu *povrchového kalení kovů*.

S elektrickým povrchovým jevem souvisí *magnetický povrchový jev* (magnetický skin), který vzniká proto, že magnetické pole proudu ubývajícího od povrchu k ose vodiče je také v ose slabší než na povrchu. To se projevuje u feromagnetik nerovnoměrným rozložením magnetické indukce $\mathbf{B}$, čímž se zmenšuje vlastní indukce vodiče.

Závěrem si připomeňme, že na začátku tohoto článku jsme řekli, že obě indukovaná pole $\mathbf{E}_{ip}$ a $\mathbf{E}_{ia}$ mají povahu polí elektrických. Liší se však od polí elektrostatických a pseudo-

elektrostatických jednak tím, že jsou to pole vírová, jednak tím, že jsou vlastně původu magnetického. Z toho vidíme, že různé druhy polí, které jsme poznali, lze třídit z různých hledisek, jak je zřejmé z tabulky (5.9) I.

Tabulka (5.9) I

Klasifikace elektromagnetických polí

Hledisko	Mikrofyzikální (teoretické)	Makrofyzikální (experimentální)	Fenomenologické (praktické)
Pole	elektrostatické	elektrostatické	elektrické magnetické
	elektrodynamické	pseudo- elektrostatické indukované	
		magnetické	

Dělení elektromagnetického pole na elektrostatické a elektrodynamické odpovídá jejich mikrofyzikální podstatě (třídění podle podstaty), kdežto dělení na elektrické a magnetické pole odpovídá praktickému hledisku, které posuzuje pole podle vnějších vlastností (třídění popisné, formální).

5.9.4. Indukčnost

Proudový obvod vzbuzuje ve svém okolí magnetické pole. Tak vzniká jistý indukční tok, který prostupuje okolními vodiči a ovšem také vodičem samým. Indukční tok, který vodič posílá svou vlastní plochou, je podle 5.9 (18)

$$\Phi_v = \iint_S \mathbf{B}_v \cdot d\mathbf{S}.$$

Při tom značí $\mathbf{B}_v$ magnetickou indukci pole vzbuzeného proudem I , procházejícím uzavřeným lineárním vodičem C . V homogenním prostředí permeability μ platí pro ni podle Biotova—Savartova zákona 5.6 (11) a podle 5.7 (28) vzorec

$$\mathbf{B}_v = \mu I \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}^0}{4\pi r^2}.$$

Proud I je totiž ve všech průřezech vodiče C stejný, a tedy při integraci podél vodiče stálý. Křivkový integrál

$$\mathbf{K} = \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}^0}{4\pi r^2}$$

definuje zřejmě jisté vektorové pole $\mathbf{K}$, které je úplně určeno jen geometrickými vlastnostmi vodiče C . Vlastní indukční tok je pak

$$\Phi_v = I \cdot \mu \iint_S \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S}$$

čili

5.9 (22)

$\Phi_v = LI,$

kde

$$5.9 \quad (23) \quad L = \mu \int_S \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S}.$$

Veličina L se nazývá *koeficient vlastní indukce* vodiče nebo stručněji (*vlastní*) *indukčnost* (též *samoindukčnost*) vodiče. Je zcela určena tvarem a rozměry („geometrií“) vodiče a permeabilitou okolního prostředí. Rovnice 5.9 (22) vyjadřuje úměrnost mezi vlastním indukčním tokem a proudem. Můžeme ji pokládat za definiční rovnici indukčnosti a vyslovit ji větou: *Vlastní indukční tok prostupující vodičem je rovný součinu jeho indukčnosti a proudu.*

Indukčnost se měří v jednotkách zvaných henry:

$$[L] = \frac{[\Phi]}{[I]} = \frac{V_s}{A} = V_s A^{-1} = 1 \text{ henry} = 1 \text{ H}.$$

Indukčnost je důležitá konstanta vodiče, která má význam zejména u cívek s větším počtem závitů. Takové cívky mají velkou vlastní indukčnost, protože indukční tok prostupuje všemi jejich závity, a celkový tok je rovný součinu počtu závitů a toku plochou jedné smyčky. Snadno to dokážeme pro válcový solenoid, jehož vinutí má tvar šroubovice, takže můžeme volit za plochu vodiče pravoúhlou plochu šroubovou, vytvořenou úsečkami vedenými kolmo od osy cívky k vinutí [obr. (5.9) 7a]. Nepřehlédneme-li k rozptylu indukčních čar na koncích, je uvnitř solenoidu podle 5.6 (27) homogenní pole

$$B_v = \mu z I$$

rovnoběžné s osou solenoidu. Proto je vlastní tok

$$\Phi_v = \int_S \mathbf{B}_v \cdot d\mathbf{S} = \int B_v dS_0,$$

značí-li dS_0 kolmý průmět prvku $d\mathbf{S}$ šroubové plochy do roviny kolmé k ose. Zvolíme-li za dS povrch vymezený na ploše dvěma osou vedenými rovinami, jež svírají úhel $d\alpha$, bude podle obr. (5.9) 7b

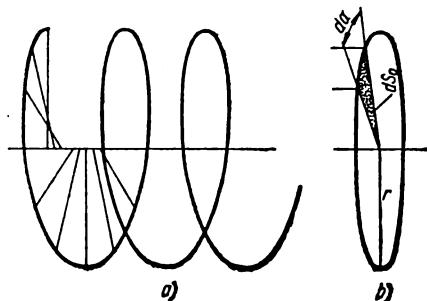
$$dS_0 = \frac{1}{2} r^2 d\alpha$$

a integrací přes všech Z závitů dostaneme

$$\Phi_v = \int_{\alpha=0}^{2\pi Z} B \frac{1}{2} r^2 d\alpha = B \frac{r^2}{2} 2\pi Z.$$

Je tedy Φ_v rovno Z -násobnému toku jedním závitem a vlastní indukčnost podle 5.9 (22)

$$5.9 \quad (24) \quad L = \mu \pi r^2 \frac{Z^2}{l} = \mu z^2 V = \mu_r \mu_0 z^2 V.$$



Obr. (5.9) 7. Šroubová plocha proložená solenoidem

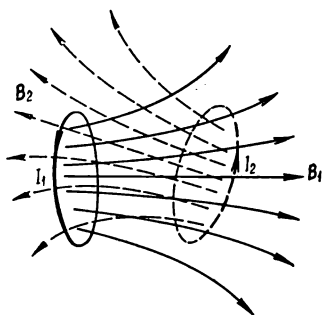
Příklad: Pro cívku délky 1 m, průměru 10 cm s 10 000 závitů ve vzduchu je $\mu_r = 1$, $z = 10^4 \text{ m}^{-1}$, $V = \frac{\pi}{400} \text{ m}^3$. Má tedy indukčnost

$$L = 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^8 \frac{\pi}{4} 10^{-2} \text{ H} = \pi^2 \cdot 0,1 \text{ H} = 0,987 \text{ H} \approx 1 \text{ H}.$$

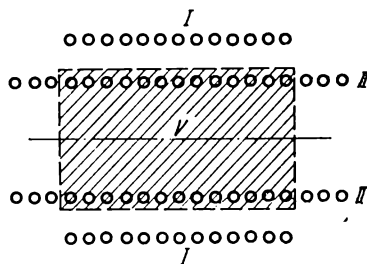
Výsledek je ovšem přibližný, protože se nepřihlíží k rozptylu indukčních čar. Rozptyl bychom podstatně zmenšili, kdybychom osu cívky stočili do kruhu, čímž bychom dostali prstencovou cívku o středním poloměru 318 mm, jaké se užívá pro prstencové elektromagnety.

Vzorec 5.9 (24) platí také pro štíhlou prstencovou cívku podobně jako vzorec 5.6 (27), neboť pole uvnitř závitů je velmi přibližně homogenní.

Podobně jako vlastní indukční tok je při daném proudu určen vlastní indukčností vodiče, jsou vzájemné indukční toky mezi dvěma vodiči určeny *koefficientem vzájemné indukce*, který budeme krátce nazývat jejich *vzájemnou indukčností*. Prochází-li totiž prvním



Obr. (5.9) 8. Vzájemné indukční toky mezi vodiči



Obr. (5.9) 9. Dvě sousední cívky s velkou vzájemnou indukčností

vodičem na obr. (5.9) 8 proud I_1 , je indukční pole $\mathbf{B}_1$ v jeho okolí úměrné proudu I_1 , a ve druhém vodiči vzniká tedy indukční tok Φ_{12} rovněž úměrný proudu I_1 :

$$\Phi_{12} = M_{12}I_1,$$

značí-li M_{12} konstantu úměrnosti. Prochází-li naopak druhým vodičem proud I_2 , vzbuzuje v prvním vodiči tok úměrný proudu I_2 :

$$\Phi_{21} = M_{21}I_2.$$

Veličiny M_{12} a M_{21} jsou v homogenním prostředí úměrné jeho permeabilitě a závisí jen na vzájemném uspořádání obou vodičů. Podrobný výpočet ze vzorců obdobných vzorcům 5.9 (23) vede k závěru, že jsou stejné:

$$M_{12} = M_{21} = M,$$

takže vzájemnou elektromagnetickou indukci mezi dvěma vodiči lze charakterizovat jedinou veličinou

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

zvanou *vzájemná indukčnost*.

Vzájemná indukčnost se prakticky uplatňuje nejčastěji u dvou sousedních cívek nebo u cívek se společným železným jádrem (u transformátorů). Jako příklad vypočteme *vzájemnou indukčnost* dvou sousedních indukčních cívek zasunutých do sebe [obr. (5.9) 9].

Pokládejme obě cívky za solenoidy, v nichž je magnetické pole velmi přibližně stejnorodé a má intenzitu

$$H = zI.$$

Prochází-li tedy vnější cívkou s hustotou závitů z_1 proud I_1 , prochází každým závitom průřezu S_2 vnitřní cívky indukční tok

$$B_1 S_2 = \mu z_1 I_1 S_2$$

a všemi Z_2 závity vnitřní cívky tok

$$\Phi_{12} = Z_2 \mu z_1 I_1 S_2.$$

Označíme-li tedy l délku osy společnou oběma cívám, bude $Z_2 = lz_2$ a vzájemná indukčnost obou cívek

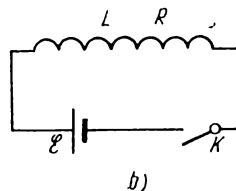
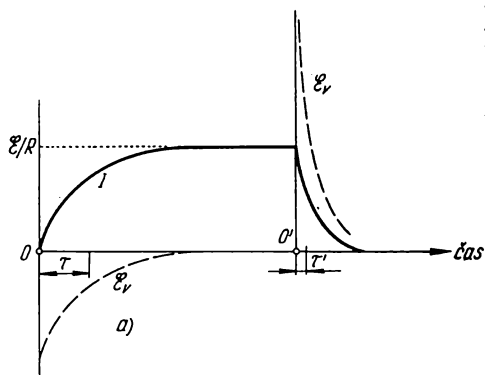
$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \mu z_1 z_2 l S_2 = \mu z_1 z_2 V,$$

značí-li V objem společný oběma cívám (objem vnitřní cívky). Tento výraz se záměnou indexů 1 a 2 nezmění, takže nezávisí na tom, která z cívek indukční tok vysílá a která jej přijímá. Kdyby obě cívky byly stejně hustě navinuty na téže jádře permeability μ , měly by vzhledem k 5.9 (24) vzájemnou indukčnost rovnou vlastní indukčnosti každé z nich.

5.9.5. Přechodné jevy

Vliv vlastní i vzájemné indukce se projevuje hlavně při změně indukčního toku, tedy u proudů časově proměnných — neustálených. To však neznamená, že indukční jevy nevznikají v obvodech se stálým (stejnosměrným) elektromotorickým napětím. Pro takové

obvody platí Ohmův zákon, který se experimentálně potvrzuje, měříme-li ustálený proud. Podrobnějším studiem bychom však zjistili, že při zapnutí proudu nenabude proud okamžitě plné hodnoty určené Ohmovým zákonem, ale stou-



Obr. (5.9) 10 a — Exponenciální průběh proudu I při spojení (O) a při přerušení (O') obvodu. Časový průběh samoindukčního elektromotorického napětí $\mathcal{E}_v$; b — elektrický obvod s odporem R a indukčností L

pá — sice velmi rychle, ale spojitě — z nulové hodnoty v bodě O na maximální hodnotu $\mathcal{E}/R$, jak je naznačeno na obr. (5.9) 10a křivkou I . Podobně při přerušení obvodu klíčem (bod O') nevymizí proud okamžitě, ale klesá spojitě k nule. Je to umožněno krátce trvajícím výbojem (elektrickým obloukem) ve vzdušné mezeře mezi vzdalujícími se kontakty klíče. Tyto velmi rychle, ale spojitě probíhající *přechodné jevy* objasníme matematickým rozбором založeným na indukčním zákonu.

Mějme jednoduchý elektrický obvod [obr. (5.9) 10b] s odporem R a indukčností L , do něhož v čase $t = 0$ zapojíme klíčem K stálé elektromotorické napětí $\mathcal{E}$. Vedle tohoto napětí působí však v obvodu elektromotorické napětí $\mathcal{E}_v$ indukované v obvodu časovou změnou vlastního indukčního toku:

$$\mathcal{E}_v = - \frac{d\Phi_v}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Podle druhého Kirchhoffova zákona

$$RI = \mathcal{E} + \mathcal{E}_v = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt},$$

takže časový průběh proudu je určen diferenciální rovnicí prvního řádu se stálými koeficienty:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}.$$

Obecné řešení dostaneme, přičteme-li k obecnému řešení I_h homogenní rovnice (bez pravé strany)

$$L \frac{dI_h}{dt} + RI_h = 0$$

libovolné zvláštní řešení I_p (partikulární integrál) úplné rovnice

$$L \frac{dI_p}{dt} + RI_p = \mathcal{E}.$$

Řešení homogenní rovnice je snadné:

$$\frac{dI_h}{I_h} = - \frac{R}{L} dt, \quad \ln I_h = - \frac{R}{L} t + K$$

čili

$$I_h = e^{\left(-\frac{R}{L}t + K\right)} = C e^{-t/\tau}, \quad C = e^K.$$

Při tom $C = e^K$ je integrační konstanta a $\tau = L/R$ je tzv. *časová konstanta* obvodu. Také partikulární integrál I_p najdeme snadno, zvolíme-li za I_p stálou hodnotu. Pak

$$RI_p = \mathcal{E}$$

a obecné řešení

$$I = I_h + I_p = C e^{-t/\tau} + \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Integrační konstantu C určíme tak, aby pro $t = 0$ bylo $I = 0$:

$$C = - \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Máme tedy řešení

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau = \frac{L}{R},$$

z něhož najdeme také průběh indukovaného elektromotorického napětí

$$\mathcal{E}_v = -L \frac{dI}{dt} = - \frac{L\mathcal{E}}{R\tau} e^{-t/\tau} = -\mathcal{E} e^{-t/\tau},$$

který je na obr. (5.9) 10a znázorněn čárkovanou křivkou. Při zapnutí klíče ($t = 0$) je tedy indukované elektromotorické napětí stejně velké, ale opačného smyslu než $\mathcal{E}$. Jeho velikosti exponenciálně ubývá, takže se proud asymptoticky blíží ustálené hodnotě $\mathcal{E}/R$. Po uplynutí doby rovné časové konstantě τ dosáhne proud hodnoty $(1 - 1/e) 100 \% = 63,3 \%$ ustáleného proudu. Po čtyřnásobné době 4τ zesílí proud na 98% ustálené hodnoty, které by teoreticky dosáhl až po nekonečně dlouhé době.

Přesné řešení přechodného jevu, který vzniká při náhlém přerušení obvodu vypnutím klíče K , je nesnadné, protože odpor elektrického obvodu mezi kontakty není stálý. S rostoucí vzdáleností kontaktů ovšem odpor velmi rychle roste, a proto dostaneme přibližně správné řešení, předpokládáme-li, že celkový odpor obvodu od okamžiku vypnutí klíče má velmi velkou stálou hodnotu $R' \gg R$. Pak platí diferenciální rovnice

$$L \frac{dI}{dt} + R'I = \mathcal{E},$$

jejíž obecný integrál má stejný tvar jako dříve:

$$I = C' e^{-\frac{R'}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R'}.$$

Měříme-li nyní čas od okamžiku vypnutí klíče, bude pro $t = 0$, $I = \mathcal{E}/R$, takže

$$C' = \mathcal{E} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) \approx \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Přibližný průběh proudu po vypnutí klíče je tedy dán exponenciální funkcí

$$I \approx \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau'} + \frac{\mathcal{E}}{R'}, \quad \tau' = \frac{L}{R'},$$

která asymptoticky klesá k velmi malé hodnotě $\mathcal{E}/R'$. Časová konstanta je zřejmě při vypnutí klíče menší než při spojení proudu. Proto je také indukované elektromotorické napětí při vypnutí klíče

$$(\mathcal{E}_v)_{t=0} = -L \left(\frac{dI}{dt} \right)_{t=0} = + \frac{R'}{R} \mathcal{E}$$

větší než elektromotorické napětí zdroje a má s ním stejné znaménko.

Samoindukční jevy můžeme názorně vysvětlit také z hlediska energetického. Po zapnutí klíče nemůže proud okamžitě nabýt konečné velikosti, protože s jeho existencí je spojena existence magnetického pole, které má jistou energii. Při konečném výkonu zdroje elektromotorického napětí je proto třeba konečné doby k vytvoření magnetického pole. Naopak při vypnutí klíče nemůže energie magnetického pole v okolním prostoru okamžitě zmizet. Proto proud klesá jen v té míře, jak ubývá této energie, která se postupně mění v Joulovo teplo.

Energii magnetického pole vzbuzeného proudem I procházejícím vodičem s indukčností L můžeme snadno vypočítat jako práci, kterou vynaložil zdroj elektromotorického napětí na překonání samoindukčního napětí $\mathcal{E}_v$, které v něm vzniká vlastní indukci při vzrůstání proudu z nuly na maximální ustálenou hodnotu. Při přenesení náboje $dQ = I dt$ proti indukovanému elektromotorickému napětí $\mathcal{E}_v$ vykoná zdroj práci

$$dW_m = -\mathcal{E}_v I dt = - \left(-L \frac{dI}{dt} \right) I dt = LI dI.$$

Integrujeme-li tedy od $I = 0$ do ustálené hodnoty I proudu, dostaneme patrně energii potřebnou k vytvoření celého magnetického pole:

$$5.9 \quad (25) \quad W_m = \int_0^I LI \, dI = \frac{1}{2} LI^2.$$

Tato *energie magnetického pole* proudu se promění v Joulovo teplo při exponenciálním doznívání proudu po přerušení obvodu.

Z tohoto jednoduchého vzorce odvodíme snadno obecný vzorec pro energii magnetického pole. Užijeme-li ho pro štíhlý toroid, pro jehož indukčnost platí podle předešlého článku rovnice 5.9 (24), dostaneme pro energii jeho pole

$$W_m = \frac{1}{2} \mu z^2 I^2 V.$$

Pole štíhlého toroidu je však soustředěno v jeho vnitřku a je tam zhruba homogenní. Pro průměrnou intenzitu tohoto pole platí pak stejný vzorec 5.6 (27)

$$H = zI$$

jako pro vnitřek štíhlého solenoidu. Energie pole uvnitř prstencové cívky

$$W_m = \frac{1}{2} \mu H^2 V$$

je tedy úměrná objemu tohoto pole. Se zřetelem k jeho stejnorodosti si tedy můžeme představit, že energie je v poli rozložena s prostorovou hustotou

$$5.9 \quad (26) \quad w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} HB.$$

V nehomogenním poli magnetickém je tato hustota místně proměnná a v neizotropním prostředí platí obecnější vzorec

$$5.9 \quad (27) \quad \boxed{w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B},}$$

obdobný vzorec 5.2 (69) pro hustotu energie v poli elektrostatickém.

5.9.6. Indukované harmonické střídavé napětí v otáčivé cívce

Představme si rovinou drátěnou smyčku např. pravoúhlou, otáčivou kolem osy OO kolmé k indukčním čarám homogenního magnetického pole mezi póly magnetu, které podle obr. (5.9) 11 míří vodorovně vpravo. Je-li plocha smyčky S a její stálá úhlová rychlost ω , bude v čase t normála smyčky n skloněna k indukčním čarám v úhlu $\alpha = \omega t$, měříme-li čas od okamžiku, kdy normála n_0 měla směr pole. Je-li $\mathbf{B}$ indukce v poli, pak indukční tok smyčkou v čase t je

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \omega t.$$

Indukční tok se periodicky mění a tím se ve smyčce indukuje podle 5.9 (20) elektromotorické napětí:

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t.$$

Toto indukované elektromotorické napětí se tedy mění rovněž periodicky a jeho průběh je znázorněn sinusovkou. Říkáme, že se ve smyčce indukuje *harmonické střídavé napětí*, jehož okamžitá hodnota*)

$$u = U_0 \sin \omega t$$

a jehož amplituda (vrcholná hodnota) má velikost

$$5.9 (28) \quad U_0 = BS\omega.$$

Je úměrná indukci (ve zvoleném prostředí intenzitě pole), ploše smyčky a její úhlové rychlosti; otáčí-li se v magnetickém poli cívka o Z závitů, bude ovšem amplituda indukovaného napětí Z -krát větší než pro jednu smyčku. Není-li na smyčce připojeno jiné napětí, můžeme z ní odebírat proud, spojíme-li konce drátu s kovovými kroužky (měděnými, navzájem izolovanými) a přiložíme-li k nim dva kovové nebo tuhé kartáčky k_1 a k_2 [obr. (5.9) 11]. Uzavřeme-li obvod ohmickým odporem (s velmi malou vlastní indukčností), nemusíme přihlížet k samoindukčnímu napětí v obvodu a můžeme počítat proud podle Ohmova zákona.

Avšak rovnice

$$5.9 (29) \quad i = \frac{u}{R} = \frac{U_0}{R} \sin \omega t$$

platí jen přibližně, neboť vzhledem k vlastní indukčnosti jsou poměry složitější, jak poznáme v následujícím článku.

Výpočet elektromotorického napětí v otáčivé smyčce, který jsme provedli podle vzorce 5.9 (20), je velmi jednoduchý a výsledek je naprosto jednoznačný, protože šlo o napětí indukované pohybem tuhého lineárního vodiče bez klouzavých kontaktů.

K stejnému výsledku vede vzorec 5.9 (21), ale výpočet je obecně složitější. Zvolíme proto smyčku tvaru obdélníka, jehož dvě strany a_1, a_2 , (délky a) jsou rovnoběžné s osou rotace, druhé dvě strany b_1, b_2 (délky b) jsou k ní kolmé. Podle obr. (5.9) 11 je

$$u_r \perp \omega, \quad B \perp \omega,$$

tedy vektor

$$E_{ip} = u_r \times B$$

je rovnoběžný s ω . Proto je pro strany b_1 a b_2 skalární součin

$$E_{ip} \cdot dl = 0$$

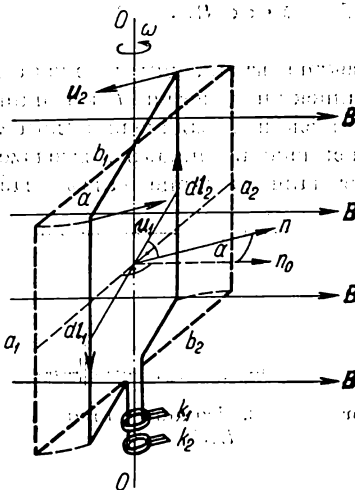
a elektromotorické napětí

$$\mathcal{E}_i = \oint E_{ip} \cdot dl = \int_{(a_1)} (u_1 \times B) \cdot dl_1 + \int_{(a_2)} (u_2 \times B) \cdot dl_2,$$

kde $(a_1), (a_2)$ značí integrační cesty podél stran a_1, a_2 ve směru oběhu. Podle obr. (5.9) 11 je

$$u_2 = -u_1, \quad dl_2 = -dl_1,$$

*) V elektrotechnice je zvykem značit časově proměnné elektrické veličiny (na rozdíl od veličin stálých) malými písmeny: u (napětí), i (proud), p (výkon), q (náboj). V teorii střídavých proudů se přidržíme tohoto označení a doufáme, že proměnný proud i nebude zaměňován se stejně označenou velikostí hustoty prostorového proudu definovaného rovnicí 5.3 (2).



Obr. (5.9) 11. Otáčivá smyčka v homogenním magnetickém poli

takže

$$\mathcal{E}_1 = 2 \int_{(a_1)} (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}_1 = 2u_1 B a, \sin \alpha,$$

neboť vektorový součin $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}$ má velikost $u_1 B \sin \alpha$ a směr vektoru $d\mathbf{l}_1$. Protože pak

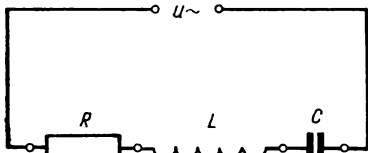
$$u_1 = \frac{b}{2} \omega, \quad ab = S,$$

máme jako prve

$$\mathcal{E}_1 = BS\omega \sin \omega t.$$

5.9.7. Obvod RLC

Vyšetřme případ, kdy v obvodu se střídavým harmonickým napětím je zařazena cívka s ohmickým odporem R a s indukčností L a kondenzátor s kapacitou C [obr. (5.9) 12]. Kdybychom do takového odporu zapojili jen stejnosměrné elektromotorické napětí (např. články nebo akumulátor), procházel by obvodem proud jen tak dlouho, než by se kondenzátor nabil na stejné napětí opačného směru. Pak by celkové elektromotorické napětí v obvodu bylo nulové a proud by ustal. Pro stejnosměrný proud znamená tedy kondenzátor nekonečně veliký odpor.



Obr. (5.9) 12. Proudový obvod RLC

Vložíme-li však na takový obvod střídavé napětí

$$5.9 (30) \quad u = U_0 \sin \omega t,$$

vznikne v obvodu rovněž střídavý proud, kterým se kondenzátor střídavě nabíjí a vybíjí a tento děj se může opakovat bez omezení. Z toho soudíme, že střídavý proud může kondenzátorem procházet.

Zvolme kladný smysl oběhu v obvodu a mějme na mysli okamžik, kdy vnější napětí u je kladné ($u > 0$). Má-li zároveň proud i směr odpovídající tomuto napětí, počítáme jej kladně ($i > 0$). Při takovém proudu se napětí u_C na kondenzátoru — podle hořejší poznámky o stejnosměrném proudu — změní za dobu dt o zápornou hodnotu

$$5.9 (31) \quad du_C = - \frac{i dt}{C},$$

neboť $i dt$ je velikost náboje přivedeného na jednu desku kondenzátoru.

Vedle vnějšího střídavého napětí u a napětí u_C vzniká v obvodu s indukčností L také samoindukční napětí, poněvadž indukční tok

$$\Phi_v = Li$$

je stejně jako proud rovněž časově proměnný. Podle indukčního zákona toto napětí

$$5.9 (32) \quad u_L = - \frac{d\Phi_v}{dt} = -L \frac{di}{dt}.$$

V obvodu působí tedy celkem tři elektromotorická napětí u , u_C a u_L , a proto podle druhého zákona Kirchhoffova

$$Ri = \Sigma \mathcal{E} = u + u_C + u_L,$$

je-li R výsledný ohmický odpor celého obvodu. Dosazením z 5.9 (32) dostaneme rovnici

$$Ri = u - L \frac{di}{dt} + u_C,$$

která obsahuje proměnné napětí u_C , jehož okamžitou hodnotu neznáme. Derivujeme-li však podle času, získáme vztah

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{du_C}{dt},$$

▼ němž můžeme derivace podle času vyjádřit z rovnic 5.9 (30, 31). Tak dostaneme diferenciální rovnici druhého řádu

$$5.9 (33) \quad L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \omega U_0 \cos \omega t.$$

To je rovnice stejného typu jako rovnice nucených harmonických kmitů, a proto také řešení bude stejného typu. Obecné řešení rovnice 5.9 (33) obsahuje exponenciální funkci, která s časem rychle klesá. V dalším výkladu nebudeme však přihlížet k přechodným jevům, které vznikají při zapnutí nebo vypnutí střídavého napětí a které tato exponenciální funkce popisuje, a budeme hledat intenzitu ustáleného střídavého proudu ve vyšetřovaném obvodu RLC , což znamená, že řešení má tvar

$$5.9 (34) \quad i = I_0 \sin (\omega t - \varphi).$$

Neznámé konstanty I_0 a φ určíme tak, že derivace této funkce

$$\frac{di}{dt} = \omega I_0 \cos (\omega t - \varphi), \quad \frac{d^2 i}{dt^2} = -\omega^2 I_0 \sin (\omega t - \varphi)$$

dosadíme do 5.9 (33), čímž dostaneme

$$\begin{aligned} & -\omega^2 L I_0 \sin (\omega t - \varphi) + \omega R I_0 \cos (\omega t - \varphi) + \frac{I_0}{C} \sin (\omega t - \varphi) = \\ & = \omega U_0 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Tento vztah musí platit pro všechny okamžiky t , jelikož však z něho chceme určit dvě konstanty I_0 a φ , stačí dosadit za t dvě různé hodnoty. Volíme-li s výhodou*)

$$\omega t - \varphi = 0, \quad \omega t - \varphi = \pi/2,$$

dostaneme dvě jednoduché rovnice

$$\begin{aligned} \omega R I_0 &= \omega U_0 \cos \varphi, \\ -\omega^2 L I_0 + \frac{I_0}{C} &= \omega U_0 \cos (\varphi + \pi/2) \end{aligned}$$

a po úpravě

$$\begin{aligned} R I_0 &= U_0 \cos \varphi, \\ I_0 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) &= U_0 \sin \varphi, \end{aligned}$$

odkud plyne ihned

$$5.9 (35, 36) \quad I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

*) Možná námitka: Ustálené řešení platí dosti přesně až po uplynutí jisté doby. Kdybychom k tomu chtěli přihlížet, mohli bychom volit

$$\omega t - \varphi = 2k\pi/2, \quad \omega t - \varphi = (2k + 1)\pi/2.$$

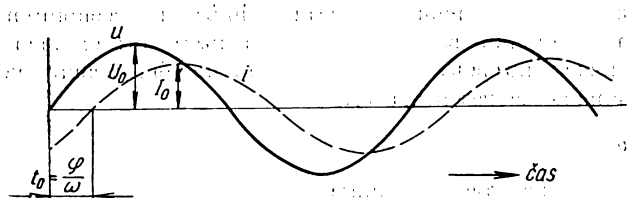
Časový průběh proudu je tedy podle 5.9 (34)

$$5.9 (37) \quad i = \frac{U_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{Z} \sin(\omega t - \varphi),$$

kde

$$5.9 (38) \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{U_0}{I_0}$$

se nazývá *zdánlivý odpor* nebo *impedance* obvodu pro střídavý proud. Z rovnice 5.9 (37) vidíme, že proud má stejně jako napětí sinusový průběh, je však proti napětí fázově posunut a kromě toho i jeho vrcholná hodnota I_0 je obecně menší než amplituda, které by proud dosáhl, kdyby v okruhu byl jen ohmický odpor bez cívky a bez kondenzátoru.



Obr. (5.9) 13. Časový průběh střídavého napětí a proudu s fázovým rozdílem φ

Provedeme stručný rozbor zvláštních případů, které zahrnuje naše obecné řešení.

Především poznamenejme, že obvod bez kondenzátoru můžeme pokládat za obvod s kondenzátorem, který je vyřazen spojením nakrátko. Na kondenzátoru s polepy spojenými nakrátko je však při libovolně velkém náboji nulové napětí, což znamená, že má neomezeně velkou kapacitu. Obvod bez kondenzátoru je tedy mezním případem obecného obvodu, který dostaneme pro $C \rightarrow \infty$. Pokud tedy $\omega \neq 0$, přejdou hořejší rovnice ve vztahy

$$5.9 (39) \quad Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

Střídavý proud, který vzniká v obvodu s ohmickým odporem a s indukčností, je tedy obecně zpožděn o fázový úhel φ , jak je naznačeno na obr. (5.9) 13 čárkovanou sinusovkou. Důležité jsou oba krajní případy:

1. Obvod s ohmickým odporem

Ačkoli každý uzavřený obvod má jistou nenulovou indukčnost L , může nastat případ, kdy $L \ll R$, takže při dosti nízké frekvenci napětí u je také

$$\omega^2 L^2 \ll R^2.$$

Pro takový obvod platí přibližné vzorce

$$5.9 (40) \quad Z \approx R, \quad \varphi \approx 0, \quad i \approx \frac{U_0}{R} \sin \omega t = \frac{u}{R}$$

shodné se vzorci pro ustálený stejnosměrný proud. Zdánlivý odpor Z se tedy redukuje na ohmický odpor zvaný též *rezistance*.

2. Obvod s indukčností

Je-li naopak ohmický odpor $R \ll L$, pak při nepříliš nízké frekvenci vnějšího napětí můžeme položit

$$R \ll \omega L,$$

čímž dojdeme k přibližným vzorcům

$$5.9 (41) \quad Z \approx \omega L, \quad \operatorname{tg} \varphi \rightarrow +\infty, \quad \varphi \approx \pi/2,$$

$$5.9 (42) \quad i \approx \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t - \pi/2) = -\frac{U_0}{\omega L} \cos \omega t.$$

Proto nazýváme výraz

$$5.9 (43) \quad \omega L = X = R_{\text{ind}}$$

indukčním odporem nebo *reaktancí* (též *induktancí*).

Tyto vzorce platí dosti přesně pro hustě vinuté cívky s mnoha závity, které se často nazývají *tlumivky*. Takové cívky tlumí totiž velmi silně zvláště střídavé proudy vyšších frekvencí, neboť odpor 5.9 (43), který jim kladou, je úměrný ω . Proud je zpožděn za napětím o čtvrt periody.

3. Obvod s kondenzátorem

Není-li kapacita C kondenzátoru příliš velká a ani frekvence střídavého napětí u příliš vysoká, může se stát, že ohmický i indukční odpor jsou malé proti členu s kapacitou

$$R \ll \frac{1}{\omega C}, \quad \omega L \ll \frac{1}{\omega C}.$$

Pak můžeme položit

$$5.9 (44) \quad Z \approx \frac{1}{\omega C}, \quad \operatorname{tg} \varphi \rightarrow -\infty, \quad \varphi \approx -\pi/2,$$

$$5.9 (45) \quad i = \omega C U_0 \sin(\omega t + \pi/2) = \omega C U_0 \cos \omega t.$$

Zdánlivý odpor

$$5.9 (46) \quad R_{\text{kap}} = \frac{1}{\omega C}$$

se v tomto případě nazývá *kapacitní odpor* či *kapacitance*. Proud v obvodu se samotným kondenzátorem (přesněji s malým ohmickým odporem a malou indukčností) je opět harmonický a předchází napětí o čtvrt periody. Kapacitance je nepřímo úměrná frekvenci, a amplituda je tedy úměrná frekvenci. Z toho je zřejmé, že kondenzátory propouštějí střídavé proudy tím více, čím vyšší je jejich frekvence. Naopak kladou velký odpor proudům nízkofrekvenčním a vůbec nepropouštějí proudy stejnosměrné. Prakticky se užívá této vlastnosti kondenzátoru k odstranění jiskření při vypínání proudu, které způsobuje oscilační, tedy střídavý výboj mezi kontakty. Kondenzátorem (zvaným antenor) můžeme přivést do radiopřijímače vysokofrekvenční proudy malé intenzity, které vznikají v městské síti dopadem rozhlasových vln, a při tom zneškodnit proud nízké frekvence (50 Hz), buzený silným napětím z elektrárny.

4. Obvod RLC v rezonanci

Obecně je zdánlivý odpor Z , který klade obvod RLC střídavému proudu, větší než odpor R , který klade též obvod proudu stejnosměrnému ($\omega = 0$). Ze vzorce 5.9 (38) vidíme, že vlivy indukčnosti a kapacity působí proti sobě, a proto aspoň částečně se navzájem ruší. Může nastat i úplná kompenzace těchto vlivů, je-li frekvence vloženého napětí taková, že je splněna podmínka

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

Má-li tedy perioda

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

napětí u hodnotu

$$5.9 \quad (47) \quad T = 2\pi \sqrt{LC},$$

je zdánlivý odpor Z , který klade obvod harmonickému střídavému proudu, roven odporu ohmickému. V tomto případě má impedance zřejmě nejmenší možnou hodnotu, a proud v obvodu je tedy maximální. V čl. 5.12.1 poznáme, že je tomu tak proto, že obvod RLC je vlastně elektrickým oscilátorem, jehož vlastní kmitová doba je právě dána vzorcem 5.9 (47) známým pod jménem *Thomsonův vzorec*. Vidíme, že v tomto případě je obvod v rezonanci s vnějším napětím, a proto na napětí této frekvence nejsilněji reaguje a rozkmitá se s největší amplitudou. Z rovnice 5.9 (36) je zřejmé, že v případě rezonance také fázové zpoždění je nulové — proud je ve fázi s napětím, neboť zpoždění způsobené indukčností a předstih způsobený kapacitou se právě kompenzují. Oba tyto vlivy jsme odvodili matematicky. Fyzikálně lze vyložit zpožďovací účinek cívky z principu energie takto: Při vzrůstu napětí vytváří rostoucí proud stále silnější magnetické pole, jehož energie roste podle 5.9 (25) se čtvercem proudu. Stoupá-li tedy proud, připadá část energie dodávané zdrojem střídavého napětí na zvyšování energie magnetického pole buzeného proudem. Proto vzrůstá proud pomaleji než napětí. Naopak při klesání napětí se proud nezmenšuje úměrně, protože magnetické pole slábne a přebytek energie zpomaluje zmenšování proudu.

Probrali jsme zde jen nejjednodušší případy obvodu RLC , v němž byly ohmický odpor, indukčnost a kapacita zařazeny za sebou (sériově). Složitější případy větvených obvodů s paralelně zapojenými vodiči se řeší obdobně. V elektrotechnice se k řešení takových úloh běžně užívá komplexního (symbolického) vyjádření střídavých proudů pomocí rotujících vektorů.

5.9.8. Výkon a transformace střídavého proudu

V předešlém článku jsme odvodili, že v obecném případě, kdy střídavé harmonické napětí 5.9 (30) působí v obvodu s odporem R , indukčností L a kapacitou C , vznikne v obvodu rovněž harmonický proud, určený rovnicí 5.9 (34). Vidíme tedy, že platí současně

$$5.9 \quad (48) \quad u = U_0 \sin \omega t, \quad i = I_0 \sin (\omega t - \varphi) = \frac{U_0}{Z} \sin (\omega t - \varphi),$$

kde impedance Z je rovna podílu U_0/I_0 . Vztah $U_0 = ZI_0$, který má tvar Ohmova zákona, neplatí však pro okamžité hodnoty u a i napětí a proudu, ale jen pro jejich hodnoty vrcholné.

Vyšetřme, jaká je energie W dodaná střídavým proudem, pro který platí rovnice 5.9 (48). Lze očekávat, že výkon proudu nebude v každém okamžiku stejný; okamžitý výkon je zřejmě dán vztahem

$$p = \frac{dW}{dt},$$

značí-li dW energii dodanou proudem v elementárním čase dt , tj. práci vykonanou zdrojem proudu při pohybu nositelů náboje. Podle vzorce 5.4 (3) bude tento okamžitý výkon

$$p = \frac{ui \, dt}{dt} = ui = U_0 I_0 \sin \omega t \cdot \sin (\omega t - \varphi).$$

Položíme-li ve známém vzorci

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta),$$

$$\alpha = \omega t, \quad \beta = \omega t - \varphi,$$

můžeme psát

$$p = \frac{1}{2} U_0 I_0 [\cos \varphi - (2\omega t - \varphi)].$$

Okamžitý výkon se tedy skládá z časově stálé části $\frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi$ a z periodicky proměnné části $-\frac{1}{2} U_0 I_0 \cos (2\omega t - \varphi)$, která má dvojnásobnou frekvenci než proud i a napětí u .

Abychom určili střední hodnotu výkonu, vypočteme práci W_T vykonanou proudem za jednu periodu:

$$\begin{aligned} W_T &= \int_t^{t+T} p \, dt = \frac{1}{2} U_0 I_0 \int_t^{t+T} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] \, dt = \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \left[T \cos \varphi - \int_t^{t+T} \cos \left(\frac{4\pi t}{T} - \varphi \right) dt \right]. \end{aligned}$$

Poslední integrál je však roven nule, jak plyne z průběhu kosinusovky, neboť je roven ploše, která se skládá ze stejně velkých částí kladných a záporných. Průměrný výkon proudu v době rovné celistvému násobku periody T má tedy stálou hodnotu

$$5.9 \quad (49) \quad P = \frac{W_T}{T} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi.$$

V obvodu bez indukčnosti a kapacity je proud ve fázi s napětím ($\varphi = 0$). Pak střední výkon

$$P_s = \frac{1}{2} U_0 I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}} = UI,$$

kde jsme položili

$$5.9 \quad (50) \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0 \approx 0,707 U_0, \quad I = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 \approx 0,707 I_0.$$

Hodnoty U a I nazýváme *efektivním napětím* a *efektivním proudem*, neboť jsou to hodnoty stejnosměrného proudu, který by v obvodu s ohmickým odporem měl stejný výkon jako vyšetřovaný proud. Snadným výpočtem se přesvědčíme, že efektivní hodnoty jsou rovny kvadratickým středům proměnných veličin u a i :

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u^2 \, dt = \frac{U_0^2}{2}, \quad I^2 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i^2 \, dt = \frac{I_0^2}{2}.$$

Pro tyto efektivní hodnoty platí zřejmě také Ohmův zákon ve tvaru

$$5.9 \quad (51) \quad U = ZI.$$

Us tálený střídavý proud, který má časově neproměnné hodnoty U_0 a I_0 , má ovšem také stálé hodnoty efektivní U a I , kterými popisujeme napětí a proud. Říkáme-li např., že

městská síť má napětí 220 V, znamená to efektivní napětí; skutečné okamžité napětí proudu kolísá mezi vrcholnými hodnotami

$$\pm U_0 = \pm \sqrt{2} \cdot U = \pm 1,414 \cdot 220 \text{ V} = \pm 311 \text{ V}.$$

Podobně při efektivním proudu $I = 6 \text{ A}$ prochází vedením střídavý proud, který kolísá mezi vrcholnými hodnotami

$$\pm I_0 = \pm \sqrt{2} I = \pm 1,414 \cdot 6 \text{ A} = \pm 8,38 \text{ A}.$$

Celkové množství náboje prošlé kterýmkoli průřezem vodiče za celý počet period je ovšem nulové, protože náboj prošlý v jedné polovině periody se vrátí zpět v druhé polovině. V tomto smyslu je tedy průměrný proud roven nule.

Je-li ovšem v okruhu kromě ohmického odporu zařazena také indukčnost a kapacita, musíme průměrný výkon počítat ze vzorce 5.9 (49), který vzhledem k 5.9 (50) zní

5.9 (52)

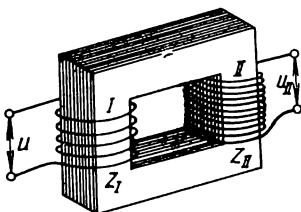
$$P = UI \cos \varphi.$$

Kosinus fázového posuvu φ se nazývá *účinník* a součin efektivního napětí a proudu se jmenuje *zdánlivý výkon*:

5.9 (53)

$$P_s = UI.$$

Skutečný výkon P , rovný zdánlivému výkonu násobenému účinníkem ($P = P_s \cos \varphi$), se udává ve watttech. Abychom zdánlivý výkon odlišili od skutečného výkonu, udáváme někdy zdánlivý výkon ve *voltampérech* (VA). Ačkoli jednotka voltampér je totožná s wattem, vyvinul se tento způsob označování jednotek výkonu z praxe. Zdánlivý výkon P_s představuje totiž maximální výkon, který může proud podat, a jeho znalost je důležitá pro volbu elektrických strojů v elektrárnách a pro určení rozměrů vedení. Proto se také výkon elektráren udává ve voltampérech.



Obr. (5.9) 14. Transformátor

Kvazistacionární proudy mají veliký význam v elektrotechnice.

Podstatnou výhodou střídavých proudů je možnost snadné *transformace*, tj. přeměny na proud téže frekvence o vyšším nebo nižším napětí. Elektrotechnická zařízení vhodná k takové transformaci se nazývají transformátory.

Každý transformátor se skládá ze dvou cívek (vinutí) se značnou vzájemnou indukčností. Vysokých hodnot indukčnosti se nejnázne dosáhne tím, že se obě cívky navinou na uzavřený rám (složený ze vzájemně izolovaných železných plechů k zamezení vířivých proudů) [obr. (5.9) 14]. Do jedné z cívek zvané *primární* (I) se vede střídavý proud, čímž se v druhé cívkce zvané *sekundární* (II) indukuje střídavý proud stejné frekvence, ale různého napětí a intenzity. Předpokládáme-li pro jednoduchost, že všechny indukční čáry vysílané primární cívkou v celkovém počtu Φ protupují cívkou sekundární, budou indukční toky oběma cívkami (o Z_I a Z_{II} závitěch)

$$\Phi_I = Z_I \Phi, \quad \Phi_{II} = Z_{II} \Phi.$$

Nedochází-li tedy k rozptylu indukčních čar, jsou okamžité indukční toky v cívkách v poměru počtů jejich závitů. Jsou-li obě cívky uzavřeny a vložíme-li na cívkou (I) sinusové napětí

$$u_I = U_0 \sin \omega t,$$

jsou toky Φ_I a Φ_{II} proměnné a v obou cívkách vzniká vlastní indukce i vzájemnou indukce napětí. Nejjednodušší je případ, kdy cívka (II) je otevřena (zapjata přes velmi značný

odpor). Pak jí vůbec neprochází proud a cívka (I) se chová jako indukční cívka velmi velké indukčnosti. Nedbáme-li jejího ohmického odporu, prochází jí podle 5.9 (22,42) okamžitý indukční tok,

$$\Phi_I = L_I i_I = L_I \frac{U_0}{\omega L_I} \sin(\omega t - \pi/2) = -\frac{U_0}{\omega} \cos \omega t$$

a v sekundární cívkce se indukuje napětí

$$\begin{aligned} u_{II} &= -\frac{d\Phi_{II}}{dt} = -Z_{II} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Z_{II}}{Z_I} \frac{d\Phi_I}{dt} = \\ &= -\frac{Z_{II}}{Z_I} U_0 \sin \omega t = -\frac{Z_{II}}{Z_I} u_I. \end{aligned}$$

V otevřené sekundární cívkce vzniká tedy také sinusové napětí, ale opačného znaménka než na primární cívkce, a je *větší v poměru počtu závitů sekundární cívkky k počtu závitů cívkky primární*. To platí pro okamžitá, vrcholná i efektivní napětí v cívkách. Vhodnou volbou počtu závitů můžeme zřejmě dosáhnout libovolně vysokého (transformace vzhůru) i libovolně nízkého (transformace dolů) napětí. Zvýšením napětí se ovšem zeslabí proud a naopak, jak plyne z podmínky

5.9 (54)

$$U_I I_I = U_{II} I_{II},$$

kteřá vyjadřuje, že průměrný výkon v obou cívkách je stejný. Lze-li tedy pomíjet ztrátu energie v transformátoru, mění se velikost proudu při transformaci v obráceném poměru napětí. Aby ztráty byly co nejmenší, vyrábějí se jádra z tzv. transformátorových plechů z velmi měkkého železa s malou koercitivní silou, které jsou navzájem izolovány (např. papírem) k zamezení vířivých proudů.

5.10. Elektronika

5.10.1. Elementární náboj

Základ k objevení elektronu položil Faraday svými výzkumy o elektrolýze. Podle zákona vysloveného v 5.3.3 se při vyloučení jednoho kilovalu (chemického kilogramekvivalentu) přenese Faradayův náboj 5.3 (24).

Kiloval v -mocného prvku obsahuje podle 5.3 (25) N/v atomů, kde

$$N = 6,023 \cdot 10^{26}$$

je Avogadrovo číslo. Na jeden ion připadá tedy náboj

$$q = \frac{F_0}{N/v} = v \frac{F_0}{N}.$$

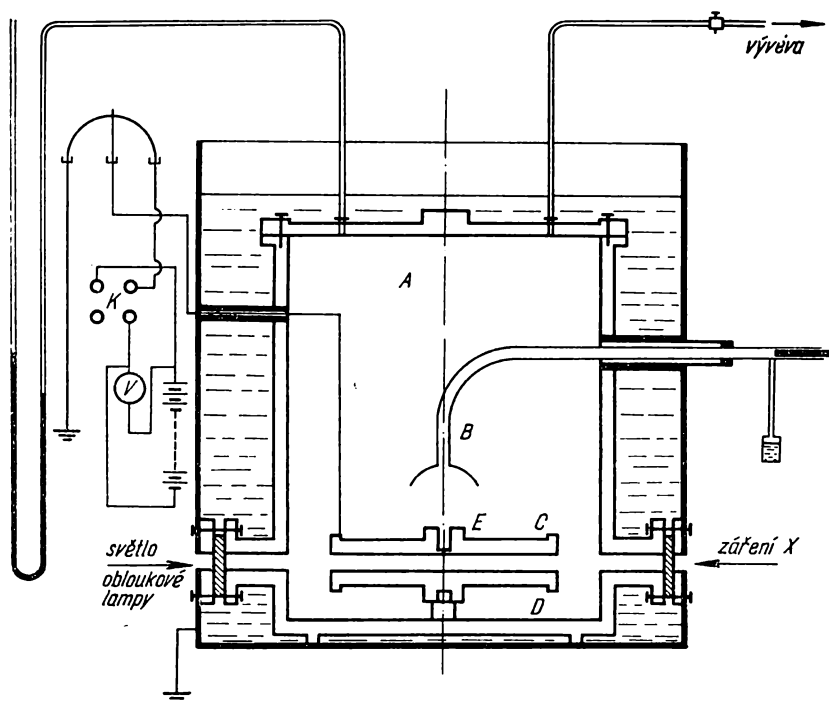
Náboj v -mocného iontu je tedy v průměru rovný kladnému nebo zápornému v -násobku náboje

$$5.10 (1) \quad e = \frac{F_0}{N} = \frac{9,650 \cdot 10^7 \text{ C}}{6,023 \cdot 10^{26}} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C},$$

neseného kladným jednomocným iontem.

Již Stoney (r. 1894) a později Helmholtz vyslovili domněnku, že hodnota $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ není jen nějakou statistickou střední hodnotou náboje jednomocných iontů při elektrolýze, ale spíše skutečným *elementárním nábojem*, tj. nedělitelným „atomem elektriny“ v tom smyslu, že všechny elektrické náboje kladné i záporné jsou celistvými násobky tohoto elementárního množství e . Naprosto spolehlivě a jednoznačně potvrdil existenci elementárního náboje R. A. Millikan. Jeho metoda, kterou prováděl svá přesná a nesnadná měření, vznikla zdokonalením metody Wilsonovy, jenž měřil náboj drobných olejových kapiček, velmi pomalu klesajících ve vzduchovém kondenzátoru s vodorovnými deskami.

Millikan konal měření takto [obr. (5.10) 1]: Zředěný vzduch v nádobě A (uložené v termostatu) byl udržován na stálé teplotě a tlaku. Pod rozprašovačem B byl umístěn kondenzátor, jehož horní deska C měla otvory (z nichž vyznačen otvor E) a byla spojena



Obr. (5.10) 1. Millikanova aparatura na měření elementárního náboje

komutátorem K s jedním pólem vysokého napětí, kdežto spodní deska D byla uzemněna. Nejprve byl kondenzátor bez napětí. Když vnikla mikroskopická kapička oleje, glycerínu nebo rtuti (z rozprašovače) mezi desky, byl otvor uzavřen, vzduch byl ionizován svazkem paprsků X , kapička byla osvětlena zleva obloukovou lampou a pozorována zpredu dalekohledem. Z doby průchodu mezi dvěma vodorovnými vlákny v ohniskové rovině okuláru byla určena rychlost pádu kapičky, která brzy dosáhla tzv. mezní rychlosti v_0 , určené podle Stokesova zákona 2.8 (26) podmínkou

$$5.10 \ (2) \quad 6\pi\eta r v_0 = G,$$

značí-li G váhu kapičky poloměru r , zmenšenou o vztlak vzduchu viskozity η . Potom byla horní deska nabitá na kladný nebo záporný potenciál 5 až 10 kV tak, aby kapička stoupala

vzhůru. Kapička se totiž při setkání s iontem vzduchu nabije nábojem q_1 , takže pro její rychlost vzhůru platí rovnice

$$6\pi\eta r v_1 = E_s q_1 - G,$$

je-li E_s intenzita pole. Změní-li se náboj kapičky (setkáním s jiným iontem) na hodnotu q_2 , změní se rychlost jejího stoupání na v_2 podle rovnice

$$6\pi\eta r v_2 = E_s q_2 - G.$$

Dělíme-li rozdíl obou posledních rovnic

$$6\pi\eta r (v_2 - v_1) = E_s (q_2 - q_1)$$

rovnici 5.10 (2), dostaneme

$$5.10 (3) \quad q_2 - q_1 = \frac{G}{E_s v_0} (v_2 - v_1).$$

Potom byl kondenzátor vybit a znovu změřena rychlost v_0 . Tak byla jediná kapička mnohokrát proměřena a po každé byla z náhlé změny její rychlosti vypočtena podle dřívější rovnice změna jejího náboje. K určení G stačilo dosadit do 5.10 (2) $G = \frac{4}{3} \pi r^3 (s - \delta) g$ a vypočítat r ze známé hustoty δ vzduchu a z hustoty s kapičky. Millikan zjistil, že skutečně změny nábojů 5.10 (3) byly vždy malými celými násobky téže hodnoty blízké hodnotě 5.10 (1).

Ve skutečnosti bylo třeba dělat opravu na to, že u mikroskopických kapek se uplatnil vliv mezer mezi molekulami zředěného vzduchu. Pro velikost této opravy plyne teoretická hodnota řádově rovná poměru střední volné dráhy l molekul k poloměru kapičky r . Při pozdějších měřeních se přihlíželo i k Brownovu pohybu ve zředěném vzduchu. Výsledek zase potvrdil celistvost násobků náboje e .

Tyto experimentální výsledky a velký počet dalších poznatků vedl fyziky k přesvědčení, že každý náboj, kladný i záporný, je celistvým násobkem elementárního náboje e , který je již nedělitelný.

5.10.2. Elektrony

Posuzujeme-li Millikanovo měření z hlediska atomové teorie, shledáme, že měřením nábojů různých iontů zjišťoval vlastně velikost náboje jednoho nebo několika elektronů. Kladné a záporné ionty vznikají totiž odtržením nebo připojením elektronů k neutrálním atomům, a proto musíme očekávat, že tyto náboje jsou nutně malými celými násobky náboje elektronu. Millikanova měření dokazují vlastně jen, že všechny elektrony (záporné) mají stejné náboje. Náboje i jiné vlastnosti těchto základních částic, obsažených v atomech všech látek je však možno zjišťovat i přímými metodami na elektronech uvolněných z atomů. Tato možnost je dána existencí volných elektronů v kovech a v polovodičích, neboť známe řadu způsobů, jak volné elektrony oddělit od těchto látek a sledovat jejich chování ve vakuu nebo ve zředěných plynech.

Všem těmto metodám „extrakce“ volných elektronů je společné, že elektronům ve vodiči dodáme nějakým způsobem energii potřebnou k tomu, aby mohly opustit objem vodiče. Pokud jsou elektrony uvnitř kovu, podléhají všestrannému působení kladných iontů krystalové mřížky, a proto jsou do značné míry „volné“ pohyblivé. Na povrchu kovu však působí přitažlivé síly iontů jednostranně a nedovolí elektronům opustit kov, pokud nemají postačující kinetickou energii, aby tyto přitažlivé síly překonaly. Je-li tato podmínka splněna, unikají volné elektrony z vodiče, nastává *emise* neboli *výron elektronů*.

Uvedeme přehledně jen nejdůležitější druhy elektronové emise, a to v pořadí, jak byly objeveny:

1. **Výron elektronů ze studené katody;** umožní se silným elektrostatickým polem, které dává vznik tzv. *katodovému záření* (Hittorf r. 1869).
2. **Termoelektronový (termionický) výron** ze žhavé katody, umožněný vysokou teplotou kovu (Edison r. 1883).
3. **Fotoelektrický výron,** způsobený absorpcí viditelného světla nebo krátkovlnného záření (Hertz r. 1887, Hallwachs r. 1888).
4. **Ostřelování katody rychlými kladnými ionty,** které spolupůsobí při vzniku katodových paprsků.
5. **Sekundární emise** (druhotný výron) z povrchu kovu nebo polovodiče, způsobená absorpcí rychlých elektronů, získaných některým ze způsobů 1 až 4 (je-li třeba ještě urychlených) nebo absorpcí záření β .

V tomto článku promluvíme stručně o vzniku a vlastnostech katodových paprsků.

K výronu elektronů ze studené katody dochází v tzv. *Crookesově trubici*. Je to skleněná trubice s dvěma elektrodami, z níž je vyčerpán vzduch na tlak nižší než 0,02 torru. Katoda, která má tvar dutého vrchlíku, se spojí se záporným pólem vysokého stejnosměrného napětí nebo induktoru, anoda, která bývá umístěna po straně, s pólem kladným. Za těchto okolností vystupuje kolmo z katody záření zvané katodové, které se šíří přímočaře velkou rychlostí a způsobuje při dopadu na sklo trubice žlutozelenou fluorescenci. Záření může tenkým hliníkovým okénkem unikat z trubice do vzduchu, kde se v krátké vzdálenosti úplně absorbuje. V elektrickém poli se katodové záření uchyluje jako záporný náboj a uvádí do pohybu lehké překážky (Crookesův mlýnek). Má tedy pohybovou energii, a proto přisuzujeme elektronům také jistou hmotnost. Její velikost lze určit na základě pohybu elektronů v elektrickém a magnetickém poli. Měřením, jehož teorii podáme v příštím článku, se ukázalo, že pro elektrony zrychlené napětím asi do 100 V má poměr velikosti náboje elektronu e k jeho hmotnosti m_e hodnotu

$$5.10 (4) \quad \frac{e}{m_e} = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ As kg}^{-1}.$$

Tento poměr se (podobně jako pro ostatní nabitě částice) nazývá *specifický náboj* elektronu (má velikost náboje připadajícího na 1 kg elektronů). Odtud můžeme hned určit hmotnost elektronu na základě skutečnosti, že náboj elektronu má velikost rovnou elementárnímu náboji 5.10 (1):

$$5.10 (5) \quad m_e = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}}{1,759 \cdot 10^{11} \text{ As kg}^{-1}} = 0,911 \cdot 10^{-30} \text{ kg}.$$

Tuto hodnotu nazýváme *klidovou hmotností elektronu*, ježto se ukázalo, že specifický náboj 5.10 (4) se zmenšuje s rostoucí rychlostí elektronu. Tento experimentální fakt vysvětlujeme tím, že náboj e se nemění, že však hmotnost elektronu vzrůstá podle vzorce

$$5.10 (6) \quad m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

kde u je rychlost elektronu, c rychlost světla ve vakuu a m hmotnost elektronu za pohybu.

Tato závislost hmotnosti elektronu na jeho rychlosti byla právě jedním z podnětů k vybudování teorie relativnosti. Dnes víme, že obdobná rovnice 2.9 (23) vyjadřuje zcela obecný vztah, který platí pro všechny částice (tělesa), a že důvod, proč byla její platnost nejdříve zjištěna u elektronů, je v tom, že elektrony v katodovém záření mají tak velkou rychlost, že závislost jejich hmotnosti na rychlosti mohla být odhalena. Elektrony dosahují

již v dosti slabých polích rychlostí srovnatelných s rychlostí světla, jak je zřejmo z tab. (5.10) I, což se vysvětluje ohromnou hodnotou 5.10 (4) jejich specifického náboje. Elektron s nepatrnou klidovou hmotností (je asi 1 836krát lehčí než proton) se velmi snadno urychluje a dosahuje např. 20 % rychlosti světla již účinkem napětí asi 10 000 voltů. Proto musíme kinetickou energii, kterou získá elektron i v nepřilí silném poli, počítat podle relativnostního vzorce 2.9 (26):

$$5.10 (7) \quad W_k = (m - m_0) c^2.$$

5.10.3. Elektron v elektromagnetickém poli

V čl. 5.5.1 jsme odvodili vzorce 5.5 (8, 9) pro silové působení nabitě částice P na jinou nabitou částici p při malých rychlostech obou částic. V témže článku jsme pak ukázali, že tyto vzorce je možno zjednodušit, jestliže rychlost $\mathbf{v}$ částice P je dosti malá proti rychlosti $\mathbf{u}$ částice p . Pak můžeme užít přibližného vzorce 5.5 (13)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{es} + \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}_{es}).$$

Protože však elektrostatická síla

$$\mathbf{F}_{es} = q\mathbf{E}_s$$

a magnetická indukce podle 5.5 (28)

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_s),$$

můžeme hořejší rovnici psát ve tvaru

$$5.10 (8) \quad \mathbf{F} = q[\mathbf{E}_s + \mathbf{u} \times \mathbf{B}].$$

Tato síla, které podléhá v elektromagnetickém poli bodový náboj q pohybující se rychlostí $u < c$, se nazývá *Lorentzova síla*, protože Lorentz ji odvodil pro elektrony. Naše odvození platí sice jen pro pole jediné částice, ale podle principu superpozice zůstává v platnosti i v poli libovolného počtu částic, pokud jsou jejich rychlosti malé proti rychlosti náboje q .

Tato podmínka je splněna právě při pohybu elektronů ve svazku katodového záření, které dosahují značných rychlostí, zatímco volné náboje na nabitých tělesech, nositelé proudu ve vodičích i elektrony v magnetech mají rychlosti malé proti rychlosti světla. Sílu, která působí na elektron v elektrostatickém a v magnetickém poli, dostaneme z posledního vzorce, položíme-li $q = -e$:

$$5.10 (9) \quad \mathbf{F}_e = -e(\mathbf{E}_s + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = -e\mathbf{E}_s + e(\mathbf{B} \times \mathbf{u}).$$

Pohyb elektronu v obecném elektromagnetickém poli je dosti složitý, ale prakticky význam mají hlavně jednoduché zvláštní případy, na jejichž řešení se omezíme.

Probereme odděleně vliv elektrostatického pole a stacionárního pole magnetického a budeme o těchto polích předpokládat, že jsou homogenní.

Tabulka (5.10) I

Rychlost a hmotnost elektronu v závislosti na napětí

Urychlující napětí	Rychlost	Hmotnost	m/m_0
10^2 V	$5,95 \cdot 10^6$ m/s	$9,12 \cdot 10^{-31}$ kg	1,001
10^3	$1,87 \cdot 10^7$	9,15	1,004
10^4	$5,85 \cdot 10^7$	9,30	1,02
10^5	$1,65 \cdot 10^8$	11,0	1,2
10^6	$2,83 \cdot 10^8$	29,2	3,2
$3,1 \cdot 10^6$	$2,97 \cdot 10^8$	64,6	7,1

Elektron v elektrostatickém poli

podléhá síle $-e\mathbf{E}_s$, a jeho pohyb je tedy určen relativnostní rovnicí 2.9 (22)

$$5.10 (10) \quad \frac{d(m\mathbf{u})}{dt} = -e\mathbf{E}_s,$$

jejíž obecné řešení není jednoduché, ačkoli síla je stálá v prostoru i čase. Podle rovnice 2.9 (29b) má totiž zrychlení elektronu směr síly jen tehdy, když jsou tyto dva vektory buď spolu rovnoběžné, nebo k sobě kolmé. První případ nastane při pohybu elektronu v podélném elektrostatickém poli, rovnoběžném s rychlostí elektronu.

Budeme pro jednoduchost předpokládat, že elektron byl v čase $t = 0$ v klidu. Dosadíme-li pak do 5.10 (10) z 5.10 (6), bude

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = - \frac{e}{m_0} \mathbf{E}_s,$$

a zvolíme-li stálý směr vektoru $\mathbf{E}_s$ za kladný směr osy x , dostaneme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = -a, \quad a = \frac{e}{m_0} E_s > 0.$$

První integrál

$$\frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = -at$$

dává

$$5.10 (11) \quad u = \frac{dx}{dt} = \frac{-at}{\sqrt{1 + (at/c)^2}}$$

a další integraci provedeme za předpokladu, že v čase $t = 0$ byl elektron v místě $x = 0$. Položíme-li $z = at/c$, bude

$$x = -\frac{c^2}{2a} \int_0^z \frac{d(z^2)}{\sqrt{1 + z^2}} = -\frac{c^2}{a} [\sqrt{1 + z^2} - 1] = -\frac{c^2}{a} [\sqrt{1 + (at/c)^2} - 1]$$

a po úpravě

$$5.10 (12) \quad (x - c^2/a)^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{a^2}.$$

Znáznorníme-li tuto závislost x na t v pravoúhlých souřadnicích, dostaneme hyperbolu h , jejíž asymptota má směrnici c , jak vidíme z obr. (5.10) 2. Rychlost elektronu tedy sice neustále stoupá, ale blíží se asymptoticky rychlosti světla, které nikdy nedosáhne, jak plyne též z rov. 5.10 (11):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{cat}{\sqrt{c^2 + a^2 t^2}} = c.$$

Proto se pohyb relativnostní částice za působení stálé síly nazývá *hyperbolický pohyb* (po přímce). Není to tedy pohyb rovnoměrně zrychlený, který budí stálá síla podle klasické mechaniky a který je na obrázku znázorněn čárkovanou parabolou p .

Naznačme ještě řešení pohybu elektronu v příčném poli elektrostatickém, které má směr kolmý k původní rychlosti $\mathbf{u}_0$ elektronu, kterou vltne do pole např. mezi deskami kondenzátoru [obr. (5.10) 3]. Na počátku pohybu ($t = 0$) je tedy $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = 0$, takže podle 2.9 (29b)

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = e\mathbf{E}_s,$$

značí-li u a E_s kladné velikosti vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{E}_s$.

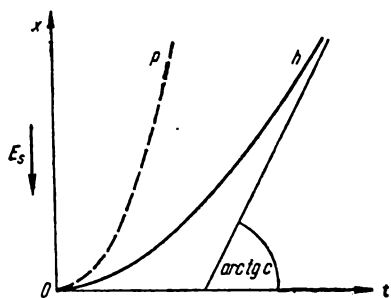
Po jistou dobu je tedy aspoň přibližně $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} \approx 0$, takže $u^2 \approx u_0^2$, a hmotnost m se tedy málo mění. Proto můžeme po jistou dobu po vniknutí elektronu do podélného pole pokládat jeho zrychlení ve směru osy y

$$a = \frac{e}{m} E_s$$

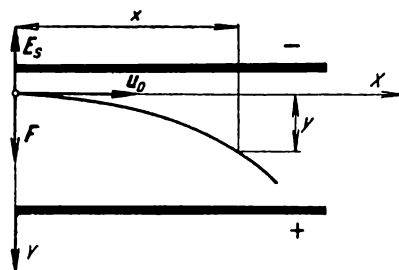
za stálé a jeho dráhu vyjádřenou rovnicemi

$$x = ut, \quad y = \frac{1}{2} at^2$$

za oblouk paraboly (podobně jako při vodorovném vrhu tělesa v homogenním zemském gravitačním poli).



Obr. (5.10) 2. Hyperbolický pohyb elektronu v homogenním elektrostatickém poli



Obr. (5.10) 3. Pohyb elektronu v příčném elektrostatickém poli

I pro obecný pohyb elektronu v elektrostatickém poli lze však odvodit velmi jednoduchý poznatek o energii, kterou získá při průchodu známým napětím $U > 0$. Podle 5.10 (7) a 5.1 (49) je tato energie

$$5.10 (13) \quad W_k = (m - m_e) c^2 = -e \int \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = +eU,$$

neboť skalární součin za integrační značkou má v každém okamžiku zápornou hodnotu. Tento výsledek platí pro libovolnou nabitou částici s kladným nebo záporným nábojem q . Vždycky ji pole uvede do pohybu takovým směrem, že výsledný zisk kinetické energie je kladný:

$$5.10 (14)$$

$$W_k = |qU|.$$

Vidíme, že elektron získá průchodem mezi dvěma body pole s potenciálovým rozdílem 1 voltu energii

$$e \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C V},$$

která se v atomové fyzice jako jednotka energie nazývá *elektronvolt*:

$$5.10 (15)$$

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Parabola a hyperbola na obr. (5.10) 2 splývají v rozsahu malých rychlostí a pro takové pomalé elektrony, jejichž rychlost nepřesahuje 1 % až 2 % rychlosti světla, je možno místo

přesného vzorce 5.10 (7) použít pro kinetickou energii klasického vzorce a nahradit 5.10 (13) jednodušší rovnici

$$\frac{1}{2} m_e u^2 = eU.$$

Odtud plyne vzhledem k 5.10 (4) přibližný vzorec pro rychlost, které dosáhne elektron průchodem pole o napětí U ,

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = \sqrt{2 \cdot 1,759 \cdot 10^{11} \text{ As kg}^{-1}} \cdot \sqrt{U} = \\ 5.10 (16) \quad &= \sqrt{35,18 \cdot 10^{10} \text{ W s V}^{-1} \text{ kg}^{-1}} \cdot \sqrt{U} = 593 \{\sqrt{U}\} \text{ km s}^{-1}, \end{aligned}$$

kde $\{\sqrt{U}\}$ značí číselnou hodnotu odmocniny z napětí ve voltech.

V tab. (5.10) I jsou uvedeny výsledky měření, které provedli Kirchner (r. 1932) a Dunnington (r. 1933). Je z ní patrné, jak hmotnost elektronu urychleně vzrůstá z hodnoty $9,12 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, blízké klidové hmotnosti 5.10 (5), při rychlosti rovné asi 2% rychlosti světla, až na sedminásobek klidové hmotnosti při rychlosti, která je jen o zlomek procenta menší než rychlost světla. Tyto výsledky plně vyhovují rovnici 5.10 (6), což nepřekvapuje, protože zjištěná závislost specifického náboje elektronu na rychlosti byla jedním z přímých podnětů k vybudování teorie relativnosti.

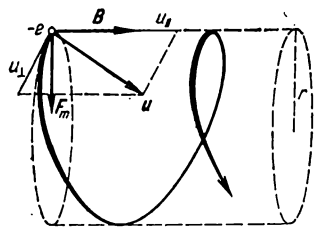
Z tabulky vidíme také, že rychlost měřená při napětí 100 V souhlasí přibližně s hořejším vzorcem; pro 10^4 V je o něco menší a pro 10^6 V už je rychlost asi poloviční než podle tohoto vzorce. Svědčí to opět o vzrůstu setrvačné hmotnosti elektronu s rostoucí rychlostí.

Elektron ve stálém magnetickém poli

Pohyb elektronu ve stacionárním magnetickém poli je možno řešit obecně, neboť Lorentzova síla se tu redukuje na sílu magnetickou

$$5.10 (17) \quad \mathbf{F}_m = e(\mathbf{B} \times \mathbf{u}),$$

která je trvale kolmá k rychlosti elektronu a ovšem i k magnetické indukci $\mathbf{B}$. Z toho plyne podle předešlého výkladu, že zrychlení elektronu má stále směr síly, a je tedy též kolmé k okamžité rychlosti elektronu. Magnetická síla tedy nekoná práci a kinetická energie elektronu ani velikost jeho rychlosti se nemění. Proto je stálá i hmotnost elektronu a jeho pohybová rovnice zní



Obr. (5.10) 4. Pohyb elektronu v homogenním magnetickém poli

$$\frac{d(m\mathbf{u})}{dt} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = e(\mathbf{B} \times \mathbf{u}).$$

Při libovolném pohybu v homogenním stacionárním magnetickém poli působí tedy na elektron síla, která trvale leží v rovině kolmé k vektoru $\mathbf{B}$, je kolmá k okamžité rychlosti elektronu a má stálou velikost

$$\mathbf{F}_m = eB\mathbf{u}_\perp,$$

značí-li $u_\perp$ složku rychlosti elektronu kolmou ke směru pole [obr. (5.10) 4]. Z toho plyne, že se nemění ani složka $u_\parallel$ rychlosti elektronu ve směru pole, ani velikost kolmé složky $u_\perp$. Tečné zrychlení elektronu je tedy nulové a normálové zrychlení kolmé k poli má stálou hodnotu

$$5.10 (18) \quad a_n = \frac{eBu_\perp}{m}.$$

Podle čl. 2.1.1 má tedy trajektorie elektronu hlavní normálu kolmou ke směru pole a poloměr křivosti r , který plyne ze známé rovnice

$$\frac{u_{\perp}^2}{r} = a_n = \frac{eBu_{\perp}}{m}.$$

Elektron opisuje tedy šroubovici na kruhovém válci s osou rovnoběžnou se směrem pole; válec má poloměr

$$5.10 \quad (19) \quad r = \frac{mu_{\perp}}{eB}.$$

Pohybuje-li se *elektron v příčném poli magnetickém*, má trvale rychlost stálé velikosti kolmou ke směru pole a koná *rovnoměrný pohyb kruhový* v rovině kolmé ke směru pole. Poloměr kružnice je přímo úměrný rychlosti elektronu a nepřímo úměrný indukci magnetického pole.

Je třeba zdůraznit, že elektrony ani jiné nabitě částice nelze urychlovat stacionárním magnetickým polem, jak plyne z hořejšího výkladu. Lze však urychlovat nabitě částice nestacionárním magnetickým polem, jak poznáme v čl. 5.10.5.

5.10.4. Elektronické přístroje se žhavou katodou

Elektronové svazky uvolněné z kovů nebo polovodičů některým ze způsobů 1 až 5 uvedených v čl. 5.10.2 jsou vynikajícím nástrojem moderní experimentální fyziky a jejich studium je předmětem speciálního vědního oboru zvaného *elektronika*. Praktickými aplikacemi se zabývá *technická elektronika*. Odvětvím elektroniky je tzv. *elektronová optika*, která užívá elektronových svazků vhodně upravených působením elektrických a magnetických polí k rozmanitým účelům.

Největší praktický význam mají termoelektronový a fotoelektrický výron. V tomto článku probereme první z nich a popíšeme nejdůležitější elektronické přístroje na něm založené. O fotoelektrickém výronu pojednáme v čl. 6.6.1 a základy elektronové optiky vyložíme v čl. 6.7.1.

Termoelektronový výron. Již Edison zjistil (r. 1883), že rozžhavené kovové vlákno vysílá ve vakuu elektrony, je-li nabito na záporný potenciál. Tento jev byl studován podrobněji Richardsonem (r. 1901), a proto se také nazývá *Richardsonův jev*. Ve vyčerpané baňce žhavlil Richardson elektrickým proudem wolframové nebo platinové vlákno, které spojil se záporným pólem baterie, jejíž kladný pól spojil s kovovým válečkem obklopujícím vlákno. Proud, který vznikl mezi žhavou katodou a válcovou anodou, měřil galvanoměrem a zjistil, že při stálé teplotě vlákna vzrůstal proud s napětím mezi katodou a anodou, až při jistém napětí dosáhl nasycení. Tento nasycený proud urychleně stoupal s absolutní teplotou vlákna. Richardson také první podal na základě klasické představy o elektronovém plynu teorii tohoto jevu, který nazval *termionickým výronem* (emisí). Elektrony emitované žhavou katodou se nazývají *termoelektrony*, a proto se výron ze žhavé katody jmenuje také *termoelektronová emise*. Richardson předpokládal, že z kovu mohou uniknout jen ty elektrony, které mají ve směru kolmém k povrchu dostatečně velkou rychlost, aby mohly překonat potenciální hráz, jež zabraňuje unikání volných elektronů z kovu. Je-li potenciál anody o málo vyšší nebo dokonce nižší než potenciál katody, zůstávají elektrony uniklé z vlákna v jeho blízkosti a vytvoří „elektronový oblak“ kolem katody, který svým „prostorovým nábojem“ brání dalšímu vysílání elektronů. Zvyšováním kladného napětí mezi anodou a katodou se dosáhne účinnějšího odsávání tohoto prostorového náboje; elektrony přecházejí při stoupajícím napětí v rostoucí počet na anodu — proud mezi oběma elektrodami se zesiluje, až při dosti velkém napětí všechny elektrony uvolněné ze žhavé katody přecházejí na anodu. Proud je tedy nasycen a dalším zvyšováním napětí jej nelze

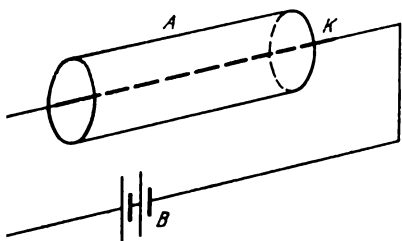
již zesílit. Zvýšíme-li však teplotu vlákna, má více elektronů energii postačující k uniknutí z katody. K odvedení všech těchto elektronů na anodu je třeba vyššího napětí, při němž je ovšem nasycený proud silnější než při nižší teplotě. Richardsonova teorie termionické emise, založená na klasické kinetické teorii plynů, vyhovuje však jen přibližně. Správný vztah mezi hustotou i termionického proudu elektronů vystupujícího z povrchu kovu při absolutní teplotě T

$$5.10 \quad (20) \quad i = AT^2 e^{-W/kT}, \quad A = \frac{2\pi m_e e k^2}{h^3} \approx 1,2 \cdot 10^6 \text{ Am}^{-2} \text{ deg}^{-2}$$

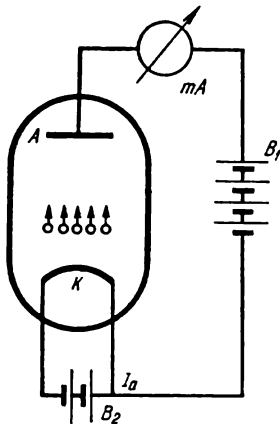
plyne z kvantové teorie (Fermi a Dirac). Tato rovnice se jmenuje *Richardsonova—Dushmanova*, protože byla poprvé odvozena Dushmanem z termodynamických úvah.

Uvedená teoretická hodnota A však nesouhlasí s experimentálními hodnotami, které leží pro různé kovy v mezích 0,3 až 0,6 $\cdot 10^6 \text{ Am}^{-2} \text{ deg}^{-2}$. Dále značí k Boltzmannovu konstantu známou z teorie plynů a W je výstupní práce, které je třeba k uvolnění elektronu z kovu.

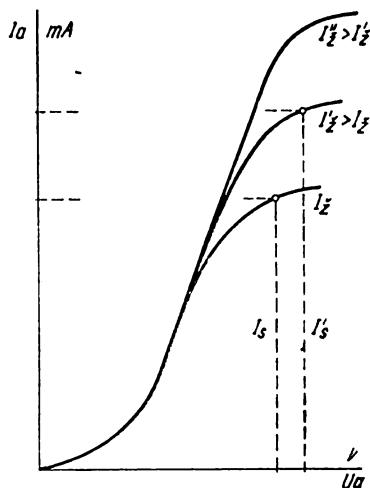
Elektronické přístroje jsou dnes velmi rozšířené a rozmanité a můžeme probrat jen nejdůležitější. Jsou to zejména přístroje užívající elektronů vysílaných žhavou katodou. Rozecňáváme dva druhy katod: *Přímo žhavená katoda* je kovové vlákno (drátek wolframový), popřípaděs povlakem jiného kovu nebo kyslíčnicku kovu, žhavené



Obr. (5.10) 5. Princip diody



Obr. (5.10) 6. Anodový obvod diody



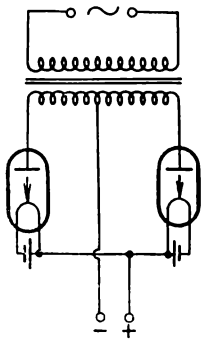
Obr. (5.10) 7. Anodové charakteristiky diody

proudem z několikavoltové žhavicí baterie; *nepřímo žhavená katoda* vysílá elektrony z válcové vrstvy kyslíčnicků kovů (barya, thoria), která obklopuje vlastní wolframové žhavicí vlákno a je od něho elektricky izolována.

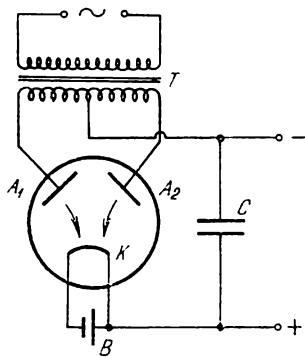
Elektronky. Žhavená katoda je podstatnou součástí dnes již všestranně užitečných elektronek (elektronových lamp), z nichž stručně popíšeme nejjednodušší.

Dioda je vysoce vyčerpaná skleněná (nebo kovová) baňka s přímo nebo nepřímo žhavenou katodou K , která je obklopena válcovou anodou A [obr. (5.10) 5]. Termoelektrony unikající z katody jsou přitahovány kladnou anodou a tak mezi oběma elektrodami prochází elektrický proud I_a zvaný *anodový*, který může obíhat v uzavřeném anodovém obvodu [obr. (5.10) 6]. Ačkoli množství všech elektronů emitovaných katodou je dáno její teplotou (určenou proudem ze žhavicí baterie B_2) a velikostí jejího povrchu, můžeme anodový proud měnit v širokém rozsahu změnou anodového napětí U_a anodové baterie B_1 . Unikáním elektronů z katody nabývá převahy kladný náboj iontů, který elektrostaticky přitahuje uvolněné elektrony zpět. Kdyby tedy bylo U_a rovno nule, vytvořily by termoelektrony kolem katody prostorový náboj, zabráňující emisi dalších elektronů, a bylo by také $I_a = 0$. Čím vyšší napětí vložíme na anodu, tím více elektronů se odtrhne z oblaku obklopujícího

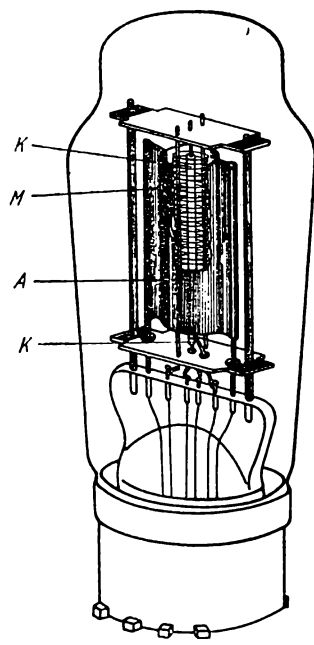
katodu a tím více nových elektronů může opustit katodu. Proto anodový proud I_a stoupá s rostoucím U_a , ovšem jen potud, pokud není prostorový náboj zcela odstraněn. Pak už všechny termoelektrony jsou odsávány k anodě a další zvyšování anodového napětí nemůže zvýšit anodový proud, který dosáhl sytné hodnoty I_s . Průběh popsané závislosti I_a a U_a je geometricky znázorněn křivkami zvanými *anodové charakteristiky diody* [na obr. (5.10) 7 pro tři různé teploty, dosažené třemi různými hodnotami žhavicího proudu I_z]. Pokud není dioda přetížena tak, že se anoda rozzhává velkým množstvím dopadajících elektronů, emituje termoelektrony jen katoda, a proud může tedy procházet jen směrem od anody ke katodě. Z toho plyne *usměrňovací účinek diody*, kterého se také užívá u usměrňovačů. Aby se při tom neztratil proud probíhající v každé půlperiodě obráceným směrem, zařazují



Obr. (5.10) 8. Usměrňovač se dvěma diodami



Obr. (5.10) 9. Usměrňovač s duodiódou



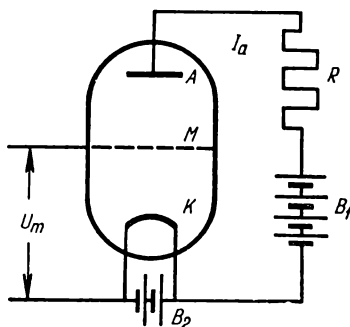
Obr. (5.10) 10. Trioda

se dvě diody proti sobě [obr. (5.10) 8] nebo se užívá dvojcestné diody s dvěma anodami A_1 , A_2 , zvané *duodiody* [obr. (5.10) 9].

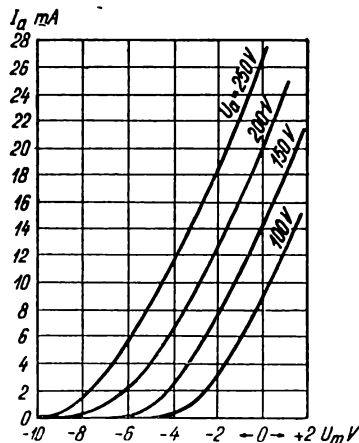
Usměrnování střídavých proudů nezůstane patrně jediným praktickým úkolem diod. V posledním desíletí se usilovně pracuje na různých konstrukcích diodových *termoeisňích měničů*, které umožňují *přímou přeměnu tepelné energie na elektrickou*. Užívá se buď katod s nižší potenciální hrází (např. aktivovaný kysličník barnatý má výstupní práci 2,2 eV), nebo katod s vyšší potenciální hrází (např. ryzí tantal s výstupní prací 4,13 eV). Účinnost termoelektronových měničů nemůže ovšem překročit „termodynamickou“ účinnost Carnotova cyklu se stejným teplotním rozdílem. Za dnešního stavu vývoje bylo dosaženo při teplotách nad 2 000 °C účinnosti 15 až 20 % a měrného výkonu 20 W cm⁻².

Trioda. Na anodový proud lze působit velmi účinně, vřadíme-li mezi katodu a anodu další elektrodu zvanou *mřížka*, jež má tvar řídky vinuté šroubovice, aby část elektronů mohla jí projít k anodě. Takové elektronky se třemi elektrodami se nazývají *triody* a jeden druh praktického provedení je znázorněn na obr. (5.10) 10. Katoda KK je obklopena drátěnou „řídicí“ mřížkou M a válcovou anodou A . Schematicky vyznačujeme triodu a její zapojení způsobem patrným z obr. (5.10) 11. Zde můžeme působit na anodový proud jak změnou anodového napětí U_a , tak také změnou mřížkového napětí U_m , které vkládáme mezi mřížku a katodu K žhavenou žhavicí baterií B_2 . Abychom vystihli závislost I_a na obou těchto veličinách, zjišťujeme dvě charakteristiky: *statická převodní charakteristika* nebo stručněji charakteristika triody je křivka závislosti I_a na U_m při stálém anodovém napětí. Naproti tomu *anodová charakteristika* triody je křivka závislosti I_a na U_a při stálém mřížkovém napětí. Průběh převodních charakteristik pro různá anodová napětí je

patrný z obr. (5.10) 12 a průběh anodových charakteristik pro různá mřížková napětí je zakreslen na obr. (5.10) 13. Z průběhu převodní charakteristiky schematicky znázorněného na obr. (5.10) 14b odvodíme důležitý poznatek, že trioda může působit jako zesilovač slabých střídavých napětí [obr. (5.10) 14a].



Obr. (5.10) 11. Zapojení triody



Obr. (5.10) 12. Převodní charakteristiky triody Philips

Vložíme-li na mřížku, které jsme dali stálé záporné předpětí CO , střídavé napětí U_m , kolísá toto napětí mezi hodnotami AO a BO . Anodový proud tedy kolísá mezi hodnotami I_A a I_B , které určují amplitudu střídavého proudu v anodovém obvodu. Z toho je zřejmé, že kmity anodového proudu budou tím větší, čím strmější bude charakteristika triody v okolí „pracovního bodu“ C . Proto má velký praktický význam směrnice převodní charakteristiky

$$5.10 (21) \quad S = \frac{\partial I_a}{\partial U_m},$$

která se nazývá *strmost triody*. Čím větší je amplituda anodového proudu, tím větší je také amplituda střídavého napětí U_a , které vzniká na odporu R , zařazeném do anodového obvodu. Poměr přírůstku anodového napětí k přírůstku mřížkového napětí

$$5.10 (22) \quad \mu = \frac{\partial U_a}{\partial U_m}$$

se nazývá *zesilovací činitel* a jeho převrácená hodnota P je tzv. *průnik triody*:

$$5.10 (23) \quad P = \frac{1}{\mu} = \frac{\partial U_m}{\partial U_a}.$$

Vzájemným násobením rovnic 5.10 (21) a 5.10 (23) plyne

$$5.10 (24) \quad SP = \frac{\partial I_a}{\partial U_m} \cdot \frac{\partial U_m}{\partial U_a} = \frac{\partial I_a}{\partial U_a} = \frac{1}{R_1},$$

kde se R_1 (převrácená hodnota směrnice anodové charakteristiky) nazývá *vnitřní odpor triody*:

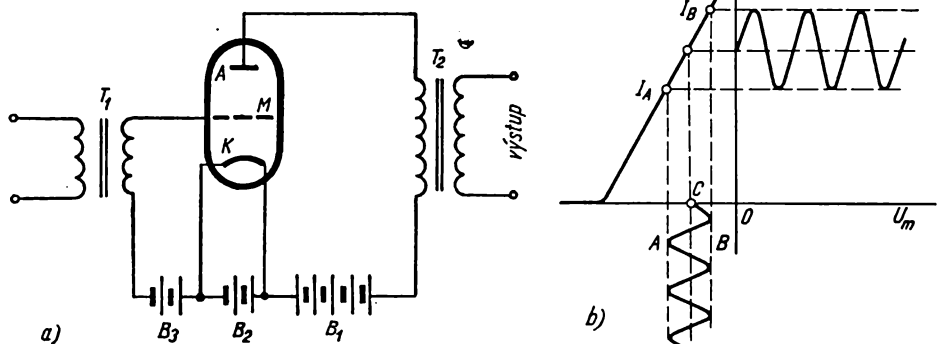
$$5.10 \quad (25) \quad R_1 = \frac{\partial U_a}{\partial I_a}.$$

Vztah 5.10 (24) můžeme tedy psát ve tvaru *Barkhausenovy rovnice*

$$5.10 \quad (26) \quad R_1 SP = 1.$$

Nejznámější je užití zesilovacích triod v radiotechnice a telefonii, ale zesilovací triody mají velký význam i v jiných oborech technické a vědecké činnosti.

Elektronky s několika mřížkami.
Při zesilování střídavého napětí triodou kolísá anodové napětí. Proměnný potenciál anody narušuje působení řídicí mřížky na emitované



Obr. (5.10) 14. Zesilovací funkce triody

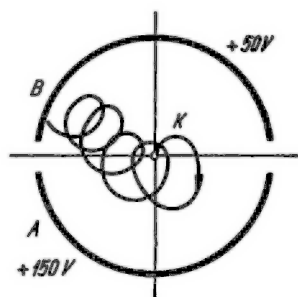
elektrony, a proto se tento nežádoucí vliv anody odstiňuje další *stínící mřížkou*, vloženou mezi řídicí mřížku a anodu. Tak dostaneme elektronku se čtyřmi elektrodami, tj. *tetrodu*, která je známa jako *stíněná elektronka*. Dokonalejší provedení dostaneme, umístíme-li mezi stínící mřížku a anodu další, tzv. *brzdící mřížku*, spojenou s katodou. V takové elektronce o pěti elektrodách, zvané *pentoda*, je odstraněn nepříznivý vliv sekundárních elektronů, unikajících z anody ostřelované elektrony zrychlenými stínící mřížkou. Ze složitějších elektronek s větším počtem mřížek uvádíme *oktodu* s osmi elektrodami, která vlastně nahrazuje dvě elektronky (triody a pentodu).

Magnetron. K buzení velmi krátkých vln jsou vhodné elektronky, u nichž je elektrostatické působení řídicí mřížky nahrazeno magnetickým polem. Kdybychom diodu vložili do magnetického pole rovnoběžného s katodou, tedy s osou válcové anody, opisovaly by elektrony vystupující z katody zakřivenou dráhu, jejíž poloměr křivosti r by byl určen v každém místě rovnici 5.10 (19), kde u_1 je k ose kolmá rychlost elektronů, která závisí na anodovém napětí. Vznikne-li na anodě střídavé napětí s periodou stejného řádu, jako je doba letu elektronů s katody na anodu, opisují elektrony složité dráhy tvaru naznačeného na obr. (5.10) 15 a tak vzniká v anodovém okruhu střídavý proud vysoké frekvence. To je princip magnetronu, který se dnes konstruuje v několika různých druzích, vhodných k výrobě kmitů velmi vysoké frekvence. Je to *magnetron s rozštěpenou anodou*, rozdělenou na sudý počet segmentů [na obr. (5.10) 15 na dva půlválce A, B] s tzv. dynatronovými kmity, dále *Žáčkův magnetron* s tzv. elektronickými kmity a konečně dnes nejdůležitější

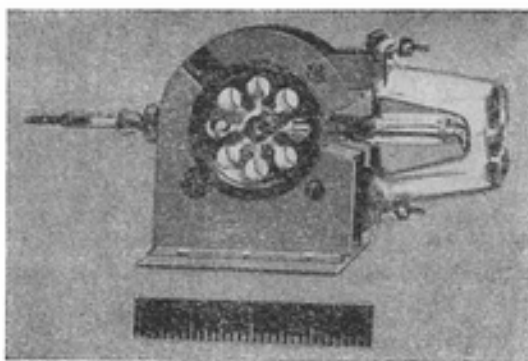
typ, zvaný *magnetron dutinový*, který je velmi dobrým generátorem centimetrových vln. Jeho anoda se skládá ze segmentů oddělených rezonančními dutinami. Praktické provedení takového magnetronu s osmi dutinami pro 10 cm vlny výkonu asi 100 kW je zřejmé ze snímku na obr. (5.10) 16.

Tyratrony. Elektronky, jejichž hlavní druhy jsme stručně popsali, se přesněji nazývají *vakuové elektronky*. Naplníme-li takovou elektronku parami rtuti, některým vzácným plynem, směsí vzácných plynů nebo vodíkem, dostaneme *plynovou elektronku*. Můžeme říci, že je to elektronka plněná plynem nebo výbojka se žhavou katodou, anodou a s jedním nebo několika mřížkami. Nejjednodušší z nich je *plynová dioda*.

Popíšeme činnost „plynové triody“, tj. *tyratronu* s jednou (řídící) mřížkou. Má-li tato mřížka dosti velké záporné předpětí, neprochází proud anodovým obvodem; říkáme, že tyratron je uzavřen. Snižujeme-li záporné předpětí, začnou elektrony emitované katodou pronikat na anodu a tak vzniká anodový proud stejně jako ve vakuové triodě. Jakmile však klesne záporné předpětí do té míry, že emitované elektrony dosáhnou ionizační energie, štěpí se jejich nárazy molekuly plynu na kladné ionty a elektrony. Dalším snížením záporného předpětí mřížky nebo zvyšováním anodového napětí dosáhnou také ionty



Obr. (5.10) 15. Dráha elektronů v magnetronu s dynamoelektrickými kmity



Obr. (5.10) 16. Dutinový magnetron pro vlny v pásmu 10 cm (měřítko v palcích)

ionizační energie a jejich počet lavinovitě vzroste: v tyratronu vzniká výboj čili, jak říkáme, tyratron hoří. Silně ionizovaný plyn, který se podobně jako v elektrickém oblouku nazývá *plazma*, dodává stále nové ionty, které odevzdávají kladný náboj mřížce, čímž vzniká mřížkový proud. Není-li tento proud příliš silný, je možno tyratron deionizovat vydatným záporným napětovým impulsem přivedeným na mřížku a tak zastavit výboj.

Tak pracují tyratrony s menším výkonem (se slabým anodovým proudem), užívané např. jako zdroje pilovitých kmitů (zejména pro časové základny katodových osciloskopů). Konstruují se s přímou katodou obklopenou šroubovitě vinutou mřížkou a válcovou anodou [jako běžné druhy triody, obr. (5.10) 10].

Řízení tyratronů se provádí různými způsoby. Prakticky nejdůležitější je *střídavé řízení*, při němž se anodový a mřížkový obvod napájí harmonickým proudem stejné frekvence. Tak je možno zapálit tyratron změnou stejnosměrného mřížkového napětí buď při stálém anodovém napětí, nebo při stálých střídavých napětích na anodě a na mřížce, nebo také změnou fázového posuvu mezi anodovým a mřížkovým napětím.

Tyratronů se užívá v praxi jako řízených usměrňovačů, v elektronických relé a spínacích zařízeních, k samočinné synchronizaci otáček a k řešení rozmanitých úkolů a elektronické regulaci (např. teploty, osvětlení, napětí generátorů), řízení (např. hnacích motorů, odporového svařování, kopírovacích obráběcích strojů) a kontroly (výrobních procesů).

5.10.5. Urychlovače elektronů. Betatron. Synchrotron

Betatron. Podle tab. (5.10) I lze udělit elektronu napětím tří miliónů voltů rychlost blízkou rychlosti světla, při čemž hmotnost elektronu vzroste asi na sedminásobek jeho klidové hmotnosti.

Při tom má elektron energii 3 MeV a je jasno, že při dalším zvyšování jeho pohybové energie roste dále jeho hmotnost, čímž vznikají jisté obtíže, chceme-li dále zrychlovat elektrony elektrostatickým polem. K získání dostatečného množství elektronů s velmi značnou energií (několika desítek až set MeV), které dávají vznik velmi tvrdému záření X, sestrojil Kerst (r. 1941) zvláštní *indukční urychlovač — betatron* — na tomto principu:

Podle indukčního zákona Faradayova vzniká v uzavřeném vodiči, jehož plochou prochází proměnný indukční tok Φ , indukované elektromotorické napětí

$$5.10 (27) \quad \mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Toto elektromotorické napětí urychluje volné elektrony obsažené ve vodiči, ale jejich pohyb je brzděn odporem vodiče. Kdybychom mohli urychlovat elektrony ve vakuu, nebrzdil by odpor jejich pohyb a elektrony by mohly dosáhnout ohromné energie (aniž by ovšem jejich rychlost dosáhla rychlosti světla). Nahradíme-li však vodič vyčerpanou trubicí ve tvaru kruhového prstence, musíme se postarat o to, aby se elektrony udržely v kruhové dráze poloměru R uvnitř trubice. Toho lze dosáhnout magnetickým polem kolmým k rovině dráhy elektronů, jehož indukce má podle 5.10 (19) velikost ($u = u_1$)

$$5.10 (28) \quad B_R = \frac{mu}{eR}.$$

Je-li Φ indukční tok plochou dráhy elektronu, indukuje se na celém obvodu dráhy elektromotorické napětí 5.10 (27), takže podél dráhy vzniká potenciálový spád

$$\frac{\mathcal{E}_i}{2\pi R}.$$

Je ekvivalentní elektrostatickému poli intenzity

$$E_{ia} = \frac{\mathcal{E}_i}{2\pi R},$$

které působí na elektron tečnou silou

$$5.10 (29) \quad F = -E_{ia}e = \frac{e}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Tato tečná síla zrychluje elektron na kruhové dráze, takže jeho hybnost se za čas dt změní o hodnotu

$$5.10 (30) \quad d(mu) = F dt = \frac{e}{2\pi R} d\Phi.$$

Chceme-li v betatronu urychlit elektron na velmi vysokou energii, musíme dosáhnout toho, aby se udržel na stabilní kruhové dráze stálého poloměru R po mnoho oběhů, během nichž jeho rychlost vzroste z velmi malé rychlosti $u \approx 0$ až na rychlost u libovolně blízkou rychlosti světla. Elektron se udrží v klidu, jen pokud $B = 0$, tj. $\Phi = 0$. Integrací rovnice 5.10 (30) od $u = 0$, $\Phi = 0$ do u , Φ dostaneme tedy

$$\int_{u=0}^u d(mu) = mu = \frac{e}{2\pi R} \Phi.$$

Protože však

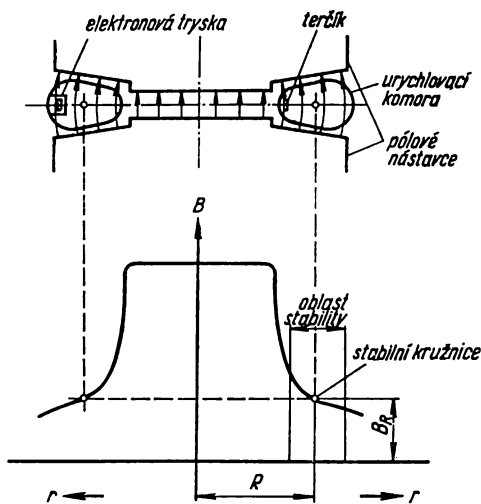
$$\Phi = \pi R^2 \cdot B_{stř},$$

kde $B_{stř}$ značí střední hodnotu indukce uvnitř kruhové dráhy elektronu, plyne z 5.10 (28) tzv. *betatronová podmínka*:

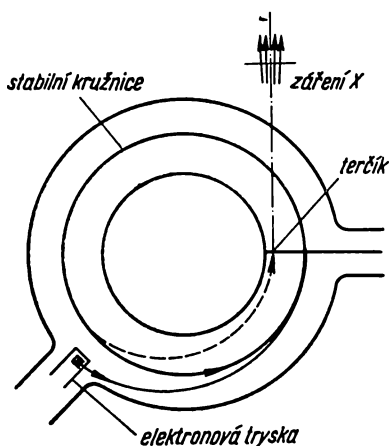
$$5.10 \quad (31) \quad B_{stř} = 2B_R,$$

podle níž musí být magnetické pole uvnitř stabilní dráhy silnější než na jejím obvodu, a to tak, aby střední hodnota $B_{stř}$ indukce uvnitř dráhy byla dvojnásobná než indukce B_R podél dráhy.

Horější základní vztahy pro funkci betatronu jsme odvodili z Faradayova indukčního zákona, který vzhledem k své značné obecnosti má dosti formální charakter. Jeho platnost pro uzavřené elektrické obvody nás bezprostředně neopravňuje k užití na letící elektron, a podané odvození nepůsobí tedy zvláště přesvědčivě. Proto pokládáme za účelné aspoň naznačit, jak vyplývají vztahy pro betatron přímo z působení mezi nabitými částicemi (v tomto případě elektrony), jak to odpovídá mikrofyzikálnímu výkladu elektromagnetismu v této knize.



Obr. (5.10) 17. Osový řez betatronem a radiální závislost magnetické indukce



Obr. (5.10) 18. Dráhy elektronů v prstencové urychlovací trubici

Proměnné magnetické pole vzniká v prstencové trubici betatronu změnou rychlosti volných elektronů ve vinutí (budících cívkách) C elektromagnetu. Je-li τ délková hustota volných nábojů ve vinutí elektromagnetu a v jejich okamžitá rychlost, je podle 5.3 (6) náboj na délkovém prvku dl_1 vinutí $dQ = \tau dl_1$, okamžitý proud $I = \tau v$ a jeho časová změna

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d(\tau v)}{dt} = \tau \dot{v}.$$

Délkový prvek dl_1 vzbudí tedy podle 5.9 (10) akcelerační indukované pole

$$dE_{1a} = - \frac{dQ \dot{v}}{4\pi \epsilon_0 c^2 r_{12}} = \frac{-\mu_0}{4\pi r_{12}} \tau \dot{v} dl_1 = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dl_1}{r_{12}} \cdot \frac{dI}{dt},$$

značí-li r_{12} vzdálenost elektronu v prstencové trubici od prvku dl_1 . Na elektron působí tedy výsledné indukované pole

$$E_{1a} = - \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{dl_1}{r_{12}} \right] \frac{dI}{dt},$$

úměrné časové změně proudu v budících cívkách, a tedy i časové změně magnetické indukce. Indukované akcelerační pole E_{ia} urychluje elektrony na stabilní dráze D , na jejímž obvodu působí indukované elektromotorické napětí

$$\mathcal{E}_i = \oint_D E_{ia} \cdot dl_2 = - \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_D \oint_C \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r_{12}} \right] \frac{dI}{dt}.$$

Z teoretické elektrodynamiky je však známo, že výraz v lomené závorce je vzájemná indukčnost M obvodů C a D . Z poslední rovnice plyne tedy vzhledem k čl. 5.9.4

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -M \frac{dI}{dt} = \\ &= -\frac{d}{dt} (MI) = -\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

ve shodě s 5.10 (27).

Tečná síla 5.10 (29) urychluje elektrony na jejich kruhové dráze ve vakuové trubici betatronu, a to při každém oběhu, pokud ovšem indukční tok Φ jejich drahou roste, čehož nemůžeme dosáhnout trvale. Užívá se proto střídavého pole, a aby se při zmenšování toku zase elektrony nezpomalily, je nutno urychlené elektrony na konci první čtvrtiny magnetického kmitu odstranit z pole a ihned jich užít k vytvoření záření X. Jak je to všechno prakticky vyřešeno, vyložíme na technickém popisu československého průmyslového betatronu.

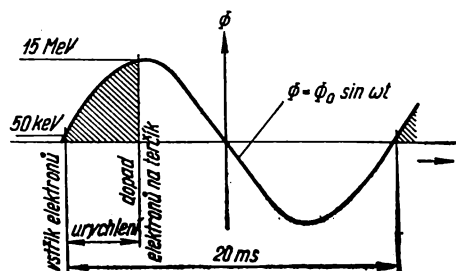
Na obr. (5.10) 17 vidíme osový řez urychlovací prstencovou komorou mezi pólovými nástavci elektromagnetu napájeného střídavým proudem síťové frekvence 50 Hz. Tvar pólových nástavců je volen tak, aby byla splněna betatronová podmínka 5.10 (31), jak si můžeme ověřit na grafickém vyjádření závislosti magnetické indukce na vzdálenosti od osy ve spodní části obrázku.

V řezu kolmém k ose urychlovací trubice [obr. (5.10) 18] vidíme elektronovou trysku, z níž jsou vstříkované (vstřelované) elektrony s energií 35 až 50 keV v tečném směru do prstencové komory. Vstřík elektronů trvá 2 μ s a opakuje se vždy po 20 ms na počátku každé periody budícího proudu ve vinutí elektromagnetu [obr. (5.10) 19]. Vstříknuté elektrony jsou nejprve slabým magnetickým polem přivedeny na stabilní kruhovou dráhu, na které vykonají během méně než 5 ms asi $1,6 \cdot 10^4$ oběhů, během nichž roste s magnetickou indukcí zároveň i energie (rychlost i hmotnost) elektronů, až dosáhne hodnoty 15 MeV. Nato je jejich dráha spirálovitě stočena k vnitřní stěně urychlovací trubice, kde dopadnou na wolframový terčík. Této „kontrakce“ dráhy se dosáhne nárazově buzenými kontrakčními cívkami, které vytvoří krátkodobé magnetické pole. Při každém dopadu urychlených elektronů na terčík vznikne velmi tvrdé rentgenové záření, které je schopno proniknout ocelové předměty tloušťky 400 až 500 mm. Je tedy možno užít podobných průmyslových betatronů ke kontrole odlitků velkých rozměrů, a staly se proto velmi účinným nástrojem *průmyslové defektoskopie*.

Snímek na obr. (5.10) 20 ukazuje československý betatron po sejmutí krytu a olověného stínění a obr. (5.10) 21 jeho vnější úpravu.

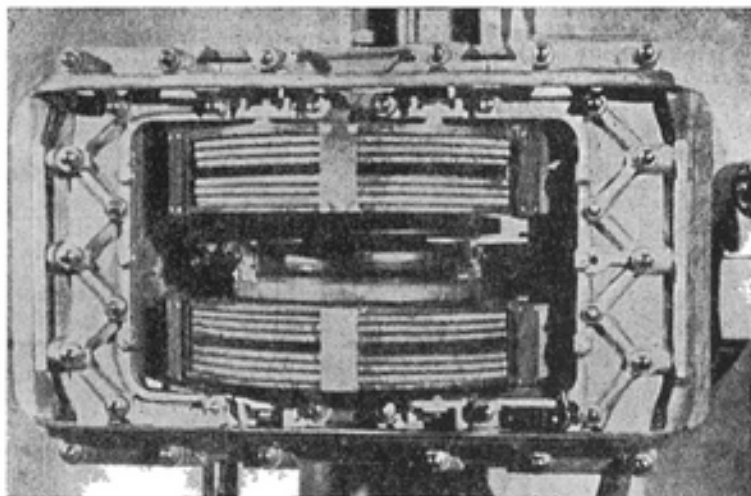
V betatronech dosahují elektrony běžně energie několika desítek MeV. Již r. 1945 byl sestaven betatron s energií 100 MeV. Rychlost elektronů v takovém betatronu se přiblíží tak těsně rychlosti světla, že se elektrony opožďují proti světlu jen o 4 km za vteřinu. V případě elektronu s energií 100 MeV je už jeho hmotnost za pohybu rovna 196 klidovým hmotnostem.

Je však třeba zdůraznit, že energii elektronů v betatronu nelze stupňovat bez omezení pouhým zvětšováním obvodu jejich dráhy a zvyšováním počtu oběhů. Příčinou tohoto omezení je skutečnost, že ztráty způsobené elektromagnetickým zářením (které vydává



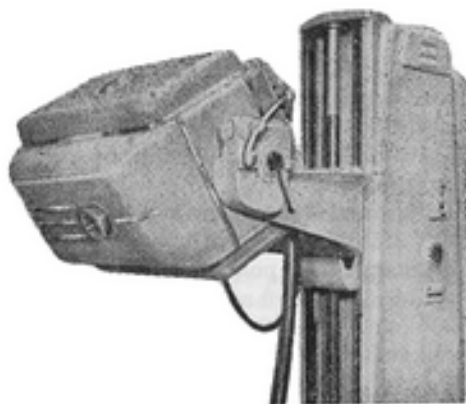
Obr. (5.10) 19. Časový sled dějů v betatronu

každá nabitá částice při kruhovém oběhu) rostou se čtvrtou mocninou energie částice. Tak např. v betatronu na 100 MeV vyzáří elektron na konci urychlovacího děje při každém oběhu energii 12 eV dosti malou proti energii 400 eV, kterou při jednom oběhu získá. Ale



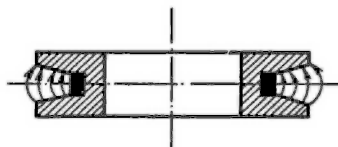
Obr. (5.10) 20. Snímek betatronu při sejmutém krytu a olověném stínění

ztráty zářením se urychleně zvětšují s rostoucí energií, a teoreticky by se vyrovnaly se ziskem při energii kolem 300 MeV. To je skutečně největší energie elektronů, které na betatronu dosáhl jeho vynálezce Kerst. Další zvyšování energie elektronů vyžaduje podstatné zvýšení zisku energie při jednom oběhu, jak je tomu u *synchrotronu*, jehož princip stručně vyložíme.



Obr. (5.10) 21. Vnější úprava čs. průmyslového betatronu s ovládacím stolem

Elektronové synchrotrony jsou velmi výkonné urychlovače založené na tzv. *principu fázové stability*, objeveném Vekslerem (r. 1944) a McMillanem (r. 1945). V synchrotronu se zrychlují elektrony (podobně jako v betatronu) v prstencové vakuové trubici,



Obr. (5.10) 22. Osový řez elektronovým synchrotronem

v níž jsou udržovány proměnlivým magnetickým polem. Toto magnetické pole je však vytvářeno jen v prostoru urychlovací trubice prstencovým magnetem, jak je naznačeno v osovém řezu na obr. (5.10) 22. Elektrony vstříknuté do urychlovací trubice již s velkou energií jsou dále urychlovány elektrostatičticky při průchodu mezi urychlovacími elektrodami. Urychlovací trubice je totiž na vnitřním i vnějším povrchu pokovená kromě několika (např. čtyř) mezer ve vnitřním povlaku. Tím vzniknou na vnitřní stěně trubice vodivé

segmenty (např. čtvrtkruhové) a na ně se vkládá střídavé napětí. Toto napětí musí být ovšem přesně synchronováno s oběhem elektronů, aby mělo v každém okamžiku takový směr, že elektrony jsou při průchodu mezerami znovu a znovu urychlovány.

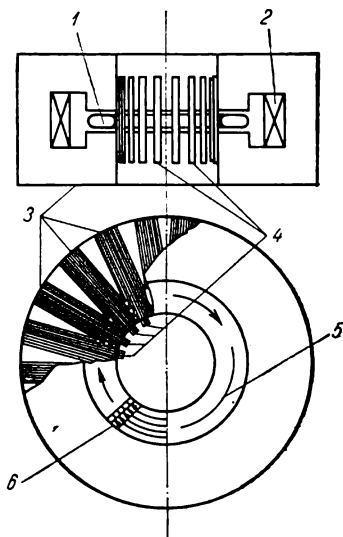
Takto konstruovaný „ryzí synchrotron“ znamená velkou úsporu materiálu, protože při něm odpadá celá střední část elektromagnetu. Vyžaduje ovšem, aby elektrony byly vstřikovány s vysokou počáteční energií. Proto se synchrotrony konstruují nejčastěji tak, aby mohly pracovat na počátku každého urychlovacího cyklu jako betatron, a teprve když dosáhnou energie potřebné k oběhu na stabilní dráze, zapne se elektrický oscilátor, který dává segmentům střídavé napětí synchronované s oběhem elektronů. Takto zařízené synchrotrony se často nazývají *betasynchrotrony*.

V betasynchrotronu se vkládá urychlovací trubice dovnitř prstencového elektromagnetu [obr. (5.10) 23], aby bylo možno užít feromagnetických tyčí s malým buzením k splnění betatronové podmínky 5.10 (31). Jimi se na počátku urychlovacího cyklu zesílí pole uvnitř elektronové dráhy. Dosáhnou však sytné magnetizace v okamžiku, kdy urychlovač začne pracovat jako synchrotron.

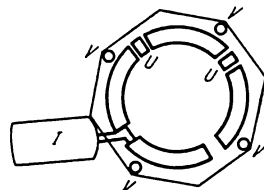
V r. 1954 vyzkoušel Wilson prakticky nový princip synchrotronu se silnou fokusací (srovn. čl. 8.5.5), který při průměru prstencového magnetu 10 m dává elektronům energii blízkou 1 GeV (10^9 eV). Při této energii je rychlost elektronů již jen o 0,4 ms⁻¹ menší než rychlost světla ve vakuu a jejich hmotnost $m = 1\,960\,m_0$. Ke konci urychlovacího procesu jsou tedy elektrony hmotnější než atomy vodíku a obíhají stálou úhlovou rychlostí, takže není třeba modulovat frekvenci oscilátoru. Elektrony se totiž při tak velké energii chovají již jako dokonale nadrelativnostní částice (viz čl. 8.5.1), a proto se takový ryzí synchrotron nazývá někdy „nadrelativnostní“.

Na obr. (5.10) 24 vidíme schéma italského elektronového synchrotronu (Frascati u Říma) se čtyřmi kvadranty prstencového magnetu, dvěma urychlovacími mezerami U a čtyřmi vývody V . Injektorem I se vstřelují elektrony s počáteční energií 2,5 MeV do prstencové urychlovací trubice, kde obíhají na stabilní dráze o průměru 7,2 m. Elektrony dosahují energie 1 GeV v magnetickém poli maximální indukce 0,926 T. V r. 1963 byl v Charkově uveden v činnost urychlovač elektronů, který na dráze 240 m dodá elektronům energii 2 GeV a v Cambridgi (USA) byl postaven urychlovač, který elektronům obíhajícím na kruhové dráze poloměru 36 m uděluje energii 6 GeV. To ovšem neznamená konec vývoje; naopak je třeba počítat s dalším zvyšováním energie. Stačí uvést, že např. na Stanfordské universitě v Kalifornii projektují lineární urychlovač, který má elektronům udělit na dráze 3 500 m energii 45 GeV.

Výklad o elektronových urychlovacích doplníme stručnou zmínkou o tzv. *mikrotronu* čili *elektronovém cyklotronu*, jehož princip podal Veksler (1945). Funkce tohoto přístroje je založena na skutečnosti, že hmotnost nadrelativnostního elektronu roste velmi rychle s rostoucí energií. Proto je možno i dosti nízkým urychlovacím napětím dosáhnout při každém oběhu fázového zpoždění 2π (nebo jeho násobku), takže elektron vstupuje do urychlovací mezery vždy ve stejné fázi. Elektrony v mikrotronu obíhají v časově stálém homogenním magnetickém poli, což je jeho výhodou proti betatronu.



Obr. (5.10) 23. Osový řez betasynchrotronem: 1 — vakuová komora, 2 — magnetizační cívky, 3 — magnetický obvod, 4 — tyče s malým sytím, 5 — dráha elektronů, 6 — urychlovací mezera



Obr. (5.10) 24. Schéma elektronového synchrotronu 1 GeV

5.11. Teorie elektromagnetického pole

5.11.0. Úvod

V dosavadním výkladu o elektromagnetických jevech jsme postupovali od nejjednodušších vlastností elektrických nábojů k složitějším, až se nám podařilo odvodit všechny podstatné zákonitosti kvazistacionárních polí. Východiskem nám byl elektrostatický zákon Coulombův, na který jsme užili obecně platných principů teorie relativity.

Tento postup je v jistém smyslu právě opačný než postup vývoje fyziky v posledních sto letech. Teorie elektromagnetismu byla totiž hlavně zásluhou Maxwellovou vybudována již r. 1873 jako uzavřený vědní obor založený axiomaticky na několika diferenciálních rovnicích, z kterých Maxwell odvodil nejen všechny známé poznatky o elektromagnetickém poli, ale velkorysou syntézou objevil zcela nové vlastnosti tohoto pole, zejména existenci elektromagnetických vln v dielektriku. Byly to právě Maxwellovy rovnice, které umožnily rychlý a úspěšný rozvoj teorie relativity, protože jejich exaktní a velmi jednoduchá forma poskytovala této obtížné teorii pevný opěrný bod.

Maxwellova teorie je příkladem dokonalé fenomenologické teorie, ačkoli byla založena na představě světelného éteru, který byl podle Faradayových názorů nositelem všech vlastností elektromagnetického pole. Když pak právě teorie relativity oprostila fyziku od pojmu absolutního prostoru a „nehybného“ éteru, bylo třeba hledat původ elektromagnetismu v konkrétnějších představách. Holandský fyzik H. A. Lorentz, který r. 1895 položil základy moderní *elektromagnetické teorie*, přeměnil Maxwellovu teorii na teorii vycházející z existence elektronů a jiných nabitých částic, které již nebyly pouhými průsečíky siločar jako v představách Faradayových, ale fyzikální realitou základního významu.

V této kapitole ukážeme nejprve, jak lze z výsledků odvozených v předešlých kapitolách dospět k Lorentzovým i Maxwellovým rovnicím elektromagnetického pole, a pak teprve pojednáme o teorii Maxwellově a o nejdůležitějších objevech, k nimž vedla.

5.11.1. Lorentzova teorie

Zákonitosti, které jsme pro elektromagnetické pole dedukovali z elektrodynamické teorie, jsou vyjádřeny mnoha rovnicemi. Přece však je možno po vzoru Maxwellově shrnout poznatky v nich obsažené do několika obecných vztahů.

Snadno shledáme, že všechny podstatné vlastnosti elektromagnetického pole, které jsme poznali, jsou zachyceny těmito šesti rovnicemi*):

$$5.1 \quad (38, 43) \quad \operatorname{div} \mathbf{E}_s = \frac{\rho^*}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_s = 0,$$

$$5.5 \quad (37, 38) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial t},$$

$$5.6 \quad (28), \quad 5.9 \quad (17) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}^* = \mathbf{i}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

V těchto rovnicích, které jsme odvodili za předpokladu, že rychlosti nábojů jsou malé proti rychlosti světla, značí $\mathbf{E}_s$ elektrostatické pole a

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{ip} + \mathbf{E}_{ia}$$

*) Vektor $\mathbf{H}$ jsme označili hvězdičkou z důvodu uvedeného dále.

elektrické pole indukované. Z rovnic 5.9 (4,7)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ip} &= \mathbf{u}_r \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_s), \\ \mathbf{E}_{ia} &= -\frac{\varphi}{c^2} \dot{\mathbf{v}} = -\frac{Q\dot{\mathbf{v}}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} = -\frac{E_s}{c^2} r\dot{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

vidíme, že poměry velikostí

$$E_{ip} : E_s \approx \frac{uv}{c^2}, \quad E_{ia} : E_s \approx \frac{r\dot{v}}{c^2}$$

jsou velmi malé 2. řádu. Proto můžeme s dostatečnou přesností nahradit v rovnicích 5.1 (38, 43) a 5.5 (38) vektor $\mathbf{E}_s$ vektorem celkového elektrického pole

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i$$

a kromě toho plyne z 5.9 (17) vzhledem k 5.1 (43)

$$\text{rot } \mathbf{E}_i = \text{rot } (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s) = \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Vektor $\mathbf{B}$ v rovnici 5.5 (38) je magnetická indukce vzbuzená časovou změnou elektrostatického pole $\mathbf{E}_s$, kdežto vektor $\mathbf{H}^* = \mathbf{B}^*/\mu_0$ je intenzita magnetického pole vzbuzeného prostorovým proudem v místě, kde má proud hustotu

$$5.11 (1) \quad \mathbf{i} = \varrho^* \mathbf{v}.$$

Obecně může ovšem magnetické pole vznikat současně z obou příčin, a proto pro výslednou magnetickou indukci $\mathbf{B} + \mathbf{B}^*$, pro kterou užijeme obvyklého symbolu $\mathbf{B}$, bude platit obecný vztah:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Shrneme-li hořejší výsledky, můžeme — se zřetelem k 5.5 (29) — původních šest rovnic 5.1 (38) až 5.9 (17) nahradit čtyřmi vztahy

$$\begin{aligned} 5.11 (2) \quad \text{(I)} \quad c^2 \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{\varrho^* \mathbf{v}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \text{(II)} \quad \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(III)} \quad \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\varrho^*}{\epsilon_0}, \\ \text{(IV)} \quad \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

To jsou však *Lorentzovy* neboli *Maxwellovy—Lorentzovy rovnice* elektromagnetického pole, které se obvykle píšou ve tvaru, který bychom dostali nahrazením indukce $\mathbf{B}$ intenzitou magnetického pole podle vztahu

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{H}.$$

Z hlediska naší teorie jsou však základními vektory elektromagnetického pole vektory $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, a proto jsme formulovali rovnice pole pro tyto vektory. Také je třeba poznamenat, že jsme tyto rovnice odvodili jen pro kvazistacionární pole, neboť jsme předpokládali, že rychlosti nábojů jsou malé proti rychlosti světelné.

Lorentz neodvodil rovnice (I) až (IV) ze své teorie, nýbrž k nim dospěl úpravou rovnic Maxwellových, jejichž formulaci přizpůsobil hledisku elektronové teorie. Lorentz vycházel z představy, že kladný náboj není jen formálním označením místa, z něhož vystupují silové čáry, a záporný náboj označením místa, kde siločáry končí, ale že tato místa jsou vyznačena reálnou existencí nabitých částic, z nichž se skládají všechny látky: pevné a kapalně vodiče i nevodiče a vůbec všechna prostředí, plyny nevyjímajíc. Tyto částice — molekuly, atomy, ionty a elektrony — jsou obklopeny prostorem, v němž existuje elektromagnetické pole. Toto pole má od částice k částici značně proměnné vlastnosti, je to *mikrofyzikální* pole, jehož místní hodnoty v rozměrech řádu velikosti atomů nemůžeme přímo pozorovat. Je možno zjišťovat a měřit jen střední hodnoty veličin charakterizujících toto mikrofyzikální pole. Tyto střední hodnoty budou tím stálější (méně kolísající), čím větší počet částic (molekul, atomů) bude obsažen v části prostoru, v níž zjišťujeme střední hodnoty. Konáme-li pozorování v objemech velmi velkých proti objemům jednotlivých atomů a molekul a měříme-li hodnoty veličin v časových intervalech dlouhých proti kmitovým dobám molekul nebo oběžným dobám elektronů apod., získáme hodnoty nezávislé na velikosti objemu a časového intervalu. Takto zjištěné veličiny můžeme pokládat za charakteristické pro *makrofyzikální* pole v daném místě a čase, jestliže objemy a časové intervaly, v nichž jsme je zjišťovali, jsou sice velké z hlediska mikrofyzikálního, ale dosti malé z hlediska makrofyzikálního. Názvem makrofyzikální stručně vyjadřujeme, že ve zvoleném objemu a časovém intervalu se pozorovatelně nemění vlastnosti pole prostorovou nestejnorodostí a časovou proměnlivostí.

Lorentzova teorie přihlíží k existenci všech nabitých částic, pro jejichž náboje — volné i polarizační — platí stejné zákony. Tím je započteno působení všech skutečných nábojů a tím i vliv prostředí. Tyto náboje vytvářejí pole ve vakuu, a proto v Lorentzových rovnicích přicházejí jen univerzální konstanty ϵ_0 a μ_0 stejné pro všechna prostředí a platí vztahy

$$5.11 (3) \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

To činí přebytečnými dva ze čtyř vektorů $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$, které ovšem mají význam makrofyzikálních polí stejně jako skalární pole ϱ^* .

Ke čtyřem rovnicím (I) až (IV) připojil Lorentz jako pátou rovnici 5.10 (8) nebo 5.10 (9)

$$5.11 (4) \quad (\text{V}) \quad \mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

která vyjadřuje *Lorentzovu sílu* působící na elektron. Z toho, co zde bylo ve vší stručnosti řečeno o Lorentzově teorii, je jasné, že jsme od počátku ve všech částech nauky o elektřině a magnetismu co možno důsledně uplatňovali hledisko Lorentzovy teorie.

5.11.2. Maxwellovy rovnice

Abychom dospěli z rovnic (I) až (IV) k Maxwellovým rovnicím, zavedeme do nich další dva vektory $\mathbf{D}$ a $\mathbf{H}$ podle vztahů 5.11 (3). Vynásobíme-li první rovnici ϵ_0 , bude

$$c^2 \epsilon_0 \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varrho^* \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

a užijeme-li vztahu $c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1$ a rovnice 5.11 (1), dostaneme

$$5.11 (5) \quad \begin{array}{ll} \text{(I M)} & \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \text{(II M)} & \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(III M, IV M)} & \operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho^*, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{array}$$

To jsou proslulé *Maxwellovy rovnice*, které spolu se vztahy 5.11 (3) platí ovšem ve smyslu Maxwellovy fenomenologické teorie jen pro elektromagnetické pole ve vakuu. Přihlížíme-li totiž jen k jmenovitým (nominálním) polím vzbuzeným volnými náboji, makroskopickými proudy a permanentními magnety, a nikoli k polím vzbuzeným polarizačními náboji v okolním dielektriku a magnetizační prostředí, musíme tyto vlivy vyjádřit zavedením materiálových veličin ϵ a μ . Pak ovšem je třeba nahradit rovnice 5.11 (3) obecnějšími vztahy 5.2 (29) a 5.7 (28), které se připojují k tzv. *hlavním* Maxwellovým rovnicím (I M) až (IV M) jako dvě *vedlejší* rovnice.

Ohmův zákon v diferenciálním tvaru 5.3 (10) a Lorentzova rovnice (V), kterou již Maxwell pojal do své teorie, se obvykle uvádí jako další dvě vedlejší rovnice.

Doplňme-li tedy čtyři hlavní Maxwellovy rovnice dalšími čtyřmi vedlejšími rovnicemi

$$\begin{aligned} & \text{(V M)} & \mathbf{i} &= \gamma \mathbf{E}, \\ 5.11 \text{ (6)} & \text{(VI M), (VII M)} & \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \\ & \text{(VIII M)} & \mathbf{F} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \end{aligned}$$

máme úplný systém osmi rovnic (I M) až (VIII M); na nichž vybudoval Maxwell svou teorii elektromagnetického pole.

Někdy se osmá (Lorentzova) rovnice nahrazuje rovnicí pro hustotu energie elektromagnetického pole

$$5.11 \text{ (7)} \quad \text{(VIII M')} \quad w = w_s + w_m = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}),$$

která plyne sečtením výrazů 5.2 (69) a 5.9 (27) pro hustotu elektrostatické a magnetické energie.

Zatímco druhá hlavní Maxwellova rovnice (II M) vyjadřuje vlastně jen obecný zákon elektromagnetické indukce, je první hlavní rovnice ve tvaru (I M) plodem Maxwellovy tvůrčí invence. Abychom poznali fyzikální význam této rovnice, vypočteme divergenci obou stran:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right).$$

Protože však divergence rotace libovolného vektorového pole je identicky rovna nule, máme důležitou rovnici

$$5.11 \text{ (8)} \quad \operatorname{div} \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0,$$

která říká, že součet obou vektorů v závorce je nezřídlové pole. Vektor

$$5.11 \text{ (9)} \quad \mathbf{i}_M = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

rovný časové změně elektrické indukce má zřejmě rozměr hustoty prostorového proudu a nazývá se obvykle hustota *Maxwellova proudu*. Původní Maxwellův název „proud posunutí“ nebo „posuvný proud“ neodpovídá dnešním názorům. Fyzikální smysl rovnice 5.11 (8) se nám objeví, užijeme-li rovnice 5.2 (38'), podle níž je divergence vektoru elektrické indukce rovna hustotě volných nábojů:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_0^*.$$

Protože diferenciální operace div a $\partial/\partial t$ jsou záměnné, je

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D}) = \frac{\partial \rho_0^*}{\partial t}$$

a máme rovnici

$$5.11 \quad (10) \quad \operatorname{div} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho_0^*}{\partial t} = 0,$$

kteřá názorně ukazuje, že rovnice 5.11 (8) vyjadřuje *podmínku kontinuity* celkového proudu složeného z kondukčního a z Maxwellova proudu. Vidíme, že zesílení kondukčního proudu je možné jen v místě, kde se zároveň zmenšuje prostorová hustota volného náboje. S tím právě souvisí časová změna vektoru indukce. Rovnice 5.11 (8) vyjadřuje tedy, že celkový proud je spojitý. Zobrazíme-li totiž průchod proudu proudovými čarami, jejichž hustotu volíme v každém místě pole rovnou velikosti hustoty celkového proudu v Am^{-2} , jsou proudové čáry všude spojitě, nikde nezačínají, ani nekončí. Proudové pole je tedy nezřídlové a všechny proudové čáry jsou uzavřené. Rovnice 5.11 (8) je matematickým vyjádřením Maxwellovy hypotézy, že *všechny elektrické proudy jsou uzavřeny*. Podle této hypotézy pokračuje kondukční proud $\mathbf{i}$ v izolantu jako Maxwellův proud, jehož hustota je stejná jako hustota kondukčního proudu. Je-li kondukční proud stálý (časově neproměnný), je rozložení nábojů stacionární a vektor $\mathbf{D}$ je stálý. Pak se celkový proud redukuje na proud kondukční a pro jeho magnetické pole $\mathbf{H}^*$ platí rovnice 5.6 (28). Je-li však hustota kondukčního proudu časově proměnná, je také vektor $\mathbf{D}$ proměnný a pro magnetické pole platí rovnice (I M), která říká, že Maxwellův proud má stejné magnetické účinky jako kondukční proud téže hustoty.

Správnost této Maxwellovy myšlenky je v plném souhlasu s experimentální zkušeností. Z hlediska elektrodynamické teorie je přítomnost časové změny vektoru elektrické indukce v první Maxwellově rovnici přímým a naprosto nutným důsledkem definice vektoru magnetické indukce, ke které jsme dospěli užitím Lorentzovy transformace na Coulombovu sílu. Platnost první Maxwellovy rovnice je z hlediska elektrodynamické teorie nezávislá na fyzikální interpretaci Maxwellova proudu, kterému neodpovídá reálný pohyb nábojů.

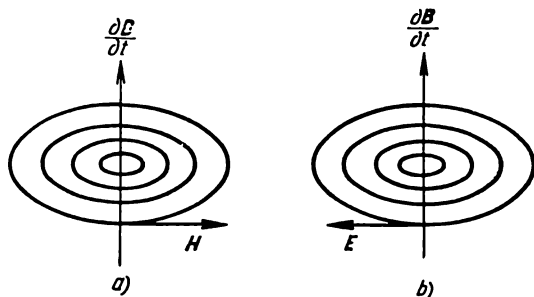
Třetí Maxwellova rovnice (III M) je v souhlase s tím, že vektorové pole $\mathbf{D}$ je zřídlové, a čtvrtá hlavní rovnice (IV M) konečně jen potvrzuje, že magnetické pole určené vektorem $\mathbf{B}$ je polem vírovým. Druhá Maxwellova rovnice však ukazuje, že v magnetickém poli vzniká také indukované pole elektrické, jehož rotace je různá od nuly ve všech bodech pole, v nichž

se magnetická indukce mění s časem. To znamená, že časově proměnné magnetické pole dává vznik vírovému poli elektrickému. Je to obdoba vírového pole magnetického vznikajícího podle první Maxwellovy rovnice v časově proměnném poli elektrickém. Tato vzájemnost či reciprocita časově proměnných elektrických a magnetických polí je znázorněna na obr. (5.11) 1.

Maxwellovy rovnice prokazují, že elektrické a magnetické pole tvoří vlastně jediný fyzikální celek, který nazýváme elektromagnetickým polem. Tento poznatek jsme již zdůraznili v čl. 5.5.0. Hlavní zásluhou Maxwellovou je, že nejen shrnul teorii elektřiny a magnetismu do malého počtu diferenciálních rovnic, ale že těmto rovnicím dal jednoduchý a zároveň do té míry obecný tvar, že platí i pro libovolně rychle proměnné elektromagnetické pole, tedy i pro nestacionární elektromagnetická pole.

Tímto geniálním zobecněním starších poznatků otevřel fyzikálnímu bádání zcela nové obzory, zejména pak objevil teoreticky existenci elektromagnetických vln a elektromagnetického záření.

Tímto geniálním zobecněním starších poznatků otevřel fyzikálnímu bádání zcela nové obzory, zejména pak objevil teoreticky existenci elektromagnetických vln a elektromagnetického záření.



Obr. (5.11) 1. Vzájemnost časově proměnných elektrických a magnetických polí: a — vírové magnetické pole $\mathbf{H}$ vytvořené proměnným polem elektrickým $\mathbf{D}$, b — vírové elektrické pole $\mathbf{E}$ vytvořené proměnným polem magnetickým $\mathbf{B}$

5.11.3. Elektromagnetické vlny v dielektriku

Maxwellovy rovnice platí pro izotropní látky, které jsou elektricky i magneticky měkké, tedy prakticky pro všechny nekystalické látky s výjimkou feromagnetik.

Nahradíme-li v rovnici (I M) hustotu vodivého proudu $\mathbf{i}$ podle (V M), dostane první Maxwellova rovnice tvar

$$5.11 (15) \quad \mathbf{rot} \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Je-li prostředí také homogenní, jsou veličiny ε a μ prostorově i časově konstantní, a je-li prostředí kromě toho dokonale nevodivé, je všude jeho měrná vodivost $\gamma = 0$. V homogenním dielektriku (neferomagnetickém), které neobsahuje volné náboje, je pak také hustota náboje $\rho^* = 0$; platí tedy vzhledem k 5.11 (5,6) rovnice

$$5.11 (16) \quad \mathbf{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$5.11 (17) \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$5.11 (18) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Každá z rovnic 5.11 (16, 17) obsahuje oba vektory $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$. Maxwell však ukázal, že z hořejších rovnic lze odvodit jednak diferenciální rovnici pro vektor $\mathbf{E}$, jednak diferenciální rovnici pro vektor $\mathbf{H}$. Tyto rovnice, které měly pro vývoj fyziky základní význam, odvodíme takto:

Z obecně platné rovnice pro dvojnásobný vektorový součin D (23) plyne pro libovolné vektorové pole $\mathbf{v}$ vzorec D (44).

Užijeme-li ho na vektor $\mathbf{E}$, dostaneme nejprve

$$5.11 (19) \quad \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$$

a vzhledem k 5.11 (17, 18)

$$-\mu \mathbf{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

čili

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rot} \mathbf{H}) = \nabla^2 \mathbf{E},$$

neboť na pořadí derivací podle času a podle souřadnic nezáleží. Nahradíme-li $\mathbf{rot} \mathbf{H}$ podle 5.11 (16), bude

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \nabla^2 \mathbf{E}.$$

Platí tedy pro vektor intenzity elektrického pole rovnice

$$5.11 (20) \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Obdobným postupem bychom odvodili stejnou rovnici pro intenzitu magnetického pole:

$$5.11 (21) \quad \nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Čtverec operátoru nabla je však Laplaceův symbol

$$5.11 (22) \quad \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

známý z obecné vlnové rovnice

$$5.11 (23) \quad \Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

kde v je rychlost, kterou se vlna šíří prostředím v libovolném směru v prostoru. V této rovnici značí $u(x, y, z, t)$ skalární funkci místa a času, kdežto rovnice 5.11 (21, 22) platí pro vektorová pole $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$. Rozepíšeme-li je však pro složky těchto vektorů

$$5.11 (24) \quad \nabla^2 E_x = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \dots, \dots,$$

$$5.11 (25) \quad \nabla^2 H_x = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}, \dots, \dots,$$

vidíme, že pro složky E_x, E_y, E_z a H_x, H_y, H_z platí rovnice tvaru 5.11 (23), položíme-li

$$5.11 (26) \quad \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}.$$

Tak došel Maxwell k pozoruhodnému závěru, že v dielektriku nebo ve vakuu se může šířit vlnění, které záleží v tom, že změny intenzity elektrického a magnetického pole postupují prostorem rychlostí v vyjádřenou tímto vzorcem. Elektrické a magnetické vlny nejsou ovšem na sobě nezávislé, neboť vektory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$ jsou vázány vztahy 5.11 (16, 17). To musíme mít na paměti při řešení vlnových rovnic 5.11 (24, 25). Jsou to dvě soustavy parciálních diferenciálních rovnic, jejichž obecné integrály obsahují neznámé integrační funkce. K jejich určení je třeba znát především tzv. *počáteční podmínky*, vyjadřující stav vlnění v některém okamžiku (pro který obvykle klademe $t = 0$). Znalost počátečních podmínek postačí k určení integračních konstant při řešení obyčejných diferenciálních rovnic, avšak stanovení neznámých funkcí při řešení parciálních rovnic vyžaduje kromě toho znalost tzv. *okrajových podmínek*, které popisují stav vlnění na okrajích elektromagnetického pole. Oboje uvedené podmínky je třeba volit tak, aby vyhovovaly rovnicím 5.11 (16, 17).

Posledně jmenované rovnice vážou oba vektory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$ navzájem, takže elektrické a magnetické vlnění tvoří nedělitelný celek. Proto mluvíme o *elektromagnetickém vlnění* nebo *vlnách*, které se šíří rychlostí

$$5.11 (27) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}.$$

Ve vakuu se tedy elektromagnetické vlny šíří rychlostí

$$5.11 (28) \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c,$$

kteřá je podle 5.5 (29) rovna rychlosti šíření změn elektromagnetického pole a je stejná s rychlostí světla ve vakuu. Tato shoda rychlostí elektromagnetických a optických vln ve vakuu vedla Maxwella k elektromagnetické teorii světla, která se velmi dobře osvědčila (viz čl. 6.1.3).

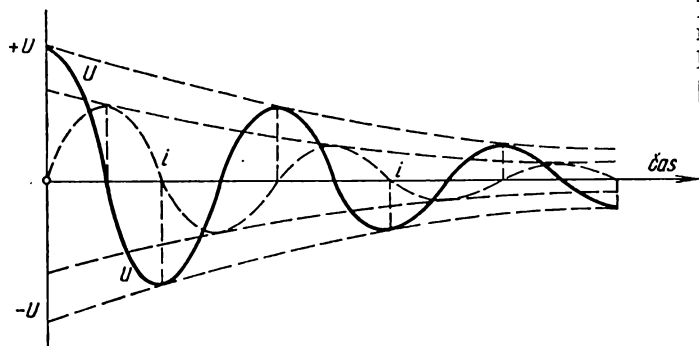
Experimentálně potvrdil existenci elektromagnetických vln H. Hertz r. 1888, jak ukážeme v čl. 5.12.3.

5.12. Elektromagnetické kmity a vlny

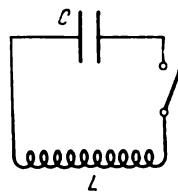
5.12.1. Oscilační výboj kondenzátoru

Feddersen (r. 1859) pozoroval jiskrový výboj leidenské láhve v rychle se otáčejícím zrcátku a seznal, že se neděje jedinou jiskrou, nýbrž několika drobnými jiskrami, které prošlehnají v jiskřišti střídavě oběma směry s ubývajícím intenzitou. Průběh takového oscilačního výboje kondenzátoru, při němž proud i napětí koná tlumené kmity nakreslené na obr. (5.12) 1, dá se teoreticky podrobně odůvodnit. Nejprve však ukážeme, jak lze tento důležitý experimentální fakt snadno pochopit na základě principu energie. Pro větší názornost si odmyslíme ztráty způsobené vznikem Joulova tepla, což znamená, že ne-

přihlížíme k ohmickému odporu obvodu, který nechť má kapacitu C a indukčnost L [obr. (5.12) 2].



Obr. (5.12) 1. Tlumené kmity při oscilačním výboji



Obr. (5.12) 2. Oscilační obvod s kapacitou a indukčností

Nabijeme-li kondenzátor kapacity C na napětí u nábojem q , vložíme do něho podle 5.2 (65) elektrostatickou energii

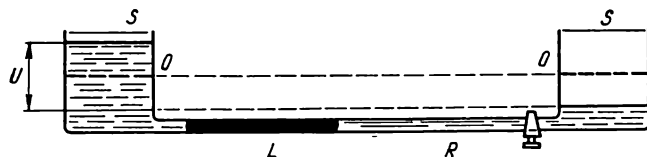
$$5.12 (1) \quad W_s = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

Zapneme-li klíč v obvodu, který spojuje oba polepy kondenzátoru vedením o indukčnosti L , začne se kondenzátor vybíjet proudem, který nabývá na síle až do okamžiku, kdy se potenciál na obou deskách vyrovná. V tomto okamžiku klesne elektrostatická energie v kondenzátoru na nulu, ale proud má největší intenzitu, takže elektrodynamická energie, uložená v magnetickém poli a vyjádřená vztahem 5.9 (25)

$$5.12 (2) \quad W_m = \frac{1}{2} L i^2,$$

dosahuje rovněž maxima. Od té doby se udržuje proud (nebo výboj) jen indukovaným napětím, které má směr původního napětí, pokud proud klesá. Proto kondenzátorem protéká i nadále slábnoucí proud (stejněho směru jako při vybíjení), kterým se ovšem kondenzátor postupně nabíjí na opačné napětí. Jsou-li ztráty Joulovým teplem zanedbatelné proti počáteční energii kondenzátoru, dosáhne takto kondenzátor skoro stejně velkého opačného napětí, když proud ustane. V tom okamžiku se zase všechna magnetická energie vrátila do kondenzátoru jako elektrostatická. Tu se stav obvodu liší od původního stavu jen znaménkem napětí na kondenzátoru, a proto se popsaný děj opakuje s jediným rozdílem, že proud obvodem probíhá obráceně než dříve. Velmi dobře lze osvětlit celý děj na hydraulickém modelu obvodu, který je načrtnut na obr. (5.12) 3. Dvě stejné válcové nádoby o stálém

průřezu S necht jsou spojeny dlouhou vodorovnou trubičkou, obsahující dokonale těsnící píst L , který se v trubici pohybuje téměř bez tření, např. sloupec rtuti. Uzávěme trubici kohoutkem a naplníme levou nádobu úplně a pravou jen nad ústí trubice. Je-li volný obsah trubice mezi pístem a pravou nádobou rovný obsahu jedné nádoby, začne při otevření kohoutku kapalina proudit z levé nádoby do pravé, vytlačující píst trubici vpravo. Při



Obr. (5.12) 3. Hydraulický model oscilačního obvodu

tom nabudou kapalina proudící v trubici a píst jí unášený jisté pohybové energie, a proto se tok nezastaví v okamžiku, kdy se obě hladiny vyrovnají v poloze $O-O$. Děje-li se vše bez tření, zastaví se tok teprve v okamžiku, kdy se veškerá kinetická energie přemění zase

v hydrostatickou energii kapaliny v pravé nádobě a děj se opakuje periodicky se stálou energií. Vidíme, že zde polepům kondenzátoru odpovídají obě nádoby (rezervoáry), jeho kapacitě plocha jejich řezu a původnímu napětí U rozdíl hladin na počátku pokusu. Dokonalá tekutost kapaliny vylučuje ztrátu, k níž by jinak došlo, kdyby trubice kladla odpor proudění. Konečně můžeme zhruba hmotnost nebo délku pístu pokládat za úměrnou indukčnosti obvodu, je-li jeho hustota značně větší než hustota kapaliny, takže potom je kinetická energie přibližně úměrná součinu hmotnosti pístu a čtverce jeho rychlosti úměrné elektrickému proudu v obvodu.

Předešlou energetickou úvahu je možno sledovat i matematicky. Podle principu energie musí být při zanedbatelném odporu celková energie v obvodu stálá, tedy vzhledem k 5.12 (1, 2)

$$5.12 (3) \quad W_s + W_m = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 = \text{const},$$

odkud plyne derivací

$$5.12 (4) \quad \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = 0.$$

Proměnný náboj q na kladné desce kondenzátoru a okamžitý proud i v obvodu však nejsou nezávislé. Počítáme-li proud kladně, když obíhá ve smyslu působení okamžitého napětí na kondenzátoru, je $i > 0$, když $dq < 0$, tj. když se náboj na kladné desce zmenšuje. Proud je tedy roven časovému úbytku náboje, takže

$$5.12 (5) \quad i = -\frac{dq}{dt}, \quad \frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}.$$

Vyloučíme-li na základě těchto vztahů proud i z 5.12 (4), dostaneme diferenciální rovnici

$$5.12 (6) \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0,$$

z níž vidíme, že náboj na kondenzátoru se mění podle sinusovky s periodou

$$5.12 (7) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Protože napětí na kondenzátoru $u = q/C$ je úměrné okamžitému náboji q , platí stejná diferenciální rovnice i pro napětí a ovšem i pro okamžitý proud, jak bychom se přesvědčili další derivací rovnice 5.12 (4) nebo 5.12 (6). Všechny jmenované veličiny konají tedy ne-

tlumené harmonické kmity s periodou 5.12 (7). Říkáme, že v obvodu se zanedbatelným ohmickým odporem vznikají *netlumené elektrické oscilace* a jejich frekvenci

$$5.12 (8) \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

nazýváme *vlastní frekvenci* obvodu. Tak jsme získali znovu *Thomsonův vztah* 5.9 (47), k němuž jsme došli v čl. 5.9.7 jiným způsobem.

Thomsonův vztah říká, že vlastní kmitová doba netlumených oscilací je úměrná odmocnině součinu indukčnosti a kapacity. Tato závislost je u hydraulického modelu zcela pochopitelná, neboť čím širší jsou nádoby (čím větší je S), tím déle trvá při stejném proudu naplnění pravé nádoby do původní výše kapaliny v levé nádobě. Při stejném obsahu nádob pak trvá jejich naplnění tím déle, čím pomaleji kapalina proudí, a je zřejmé, že při stejné energii je její rychlost nepřímo úměrná odmocnině z hmotnosti pohybující se látky, která je v podstatě určena hmotností pístu.

Přístupme nyní k případu tlumených oscilací, které jsou provázeny přeměnou elektromagnetické energie v Joulovo teplo. Pak už výraz 5.12 (3) není konstantní, ale jeho časový pokles je roven Joulovu výkonu. Platí tedy rovnice

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 \right) = Ri^2$$

čili vzhledem k 5.12 (5) po zkrácení i

$$\frac{q}{C} - L \frac{di}{dt} = Ri.$$

Další derivací podle času plyne tedy

$$5.12 (9) \quad L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0,$$

což je známá diferenciální rovnice *tlumených kmitů*. Srovnáme-li ji s rovnicí 5.9 (33) pro průchod střídavého proudu obvodem s odporem R , indukčností L a kapacitou C , vidíme, že tato rovnice přejde v 5.12 (9), jestliže vnější střídavé napětí odstraníme (položíme $U_0 = 0$). Pak nucené kmity nevzniknou a v obvodu zbývají jen tlumené kmity, jejichž vlastnosti zjistíme řešením hořejší diferenciální rovnice. Její řešení je ostatně dobře známo z nauky o tlumených kmittech. Položíme-li zde

$$b = \frac{R}{2L},$$

dostaneme podle čl. 3.1.7

$$5.12 (10) \quad i = i_0 e^{-bt} \sin(\omega_1 t - \varphi),$$

$$5.12 (11) \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - b^2}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Tento vzorec je zobecněním Thomsonova vztahu 5.12 (7), ve který přejde, když $R \ll L$. Naopak při velmi velkém odporu a malé indukčnosti a kapacitě se může stát, že

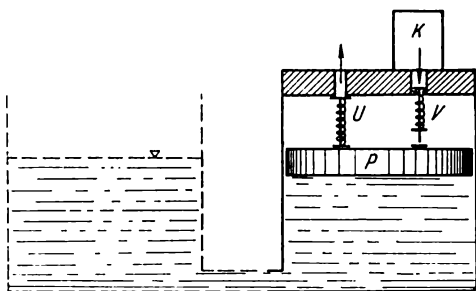
$$\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC} \quad \text{čili} \quad R^2 C \geq 4L^2.$$

Pak ovšem je výboj aperiodický a nedochází vůbec k oscilacím.

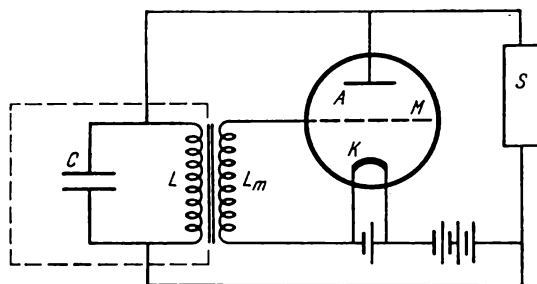
5.12.2. Oscilační obvod s elektronikou

Každý skutečný obvod má jistý ohmický odpor, a proto se v něm neudrží trvalé elektrické kmity, jestliže mu nedodáváme energii k vyrovnání ztrát. Kapalinový sloupec v manometru se velmi brzy ustálí vnitřním třením, zvláště je-li trubice tenká. Můžeme však snadno vymyslet jednoduché mechanické zařízení, které při vhodné úpravě je schopno udržovat kmity trvale: Uzávěrme jednu nebo obě nádoby krytem se dvěma ventily U , V , které spojují vnitřek nádoby s okolním vzduchem a s přetlakovou komorou K [obr. (5.12) 4]. Jsou-li oba ventily ovládány plovákem P , který zavře ventil U a otevře ventil V v okamžiku naplnění nádoby, dostane sloupec kapaliny tlakový náraz, který dodá kapalině při každém kmitu jistou energii. Upravíme-li pokus tak, aby tato energie právě nahradila ztrátu vzniklou třením při jednom kmitu, koná kapalina netlumené kmity.

Podobně lze udržet i elektrické kmity v oscilačním kmitavém obvodu, užijeme-li zesilovače, který připojíme k okruhu takovým způsobem, aby obvod sám reguloval kmity v anodovém obvodu triody v rytmu svých oscilací. Toho dosáhneme zapojením naznačeným na obr. (5.12) 5. Vzniknou-li v obvodu (omezeném čárkovaným obdélníkem) elektrické



Obr. (5.12) 4. Mechanické zařízení k udržování netlumených hydraulických kmitů



Obr. (5.12) 5. Elektronový generátor netlumených kmitů

kmity, indukuje cívka L kmity stejné frekvence v cívkce L_m , jejíž jeden konec je spojen s katodou K a druhý s mřížkou M triody. Tak vznikají na mřížce slabé napěťové kmity, které vzbuzují zesílené pulsující napětí v anodovém okruhu se spotřebičem S , pokud nezaniknou oscilace v původním oscilačním obvodu. Odvětvíme-li část anodového proudu tak, aby napájel kondenzátor C v oscilačním obvodu, budou se kmity udržovat a tím budou zároveň trvale buzeny zesílené kmity v anodovém obvodu.

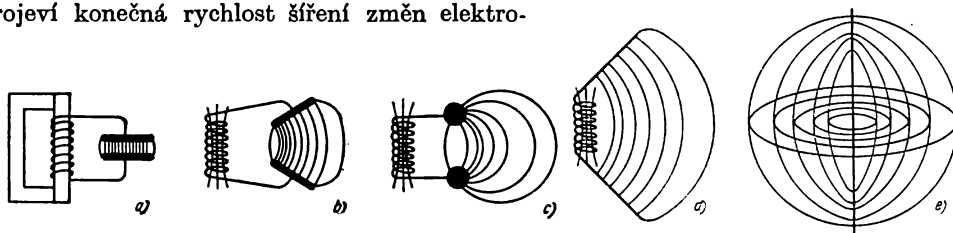
Tento způsob zapojení se nazývá *zpětná vazba* a celé zařízení se jmenuje *elektronový generátor oscilací* nebo *elektronový vysílač*. Volbou kapacity C a indukčnosti L lze získat elektrické oscilace velmi různých frekvencí až do řádu 10^8 Hz. Vhodnou úpravou lze dosáhnout ještě vyšších frekvencí. V několika posledních desetiletích se staly elektrické kmity vysokých frekvencí základem celého odvětví elektrotechniky, které vedlo jednak k dnešnímu rozvoji praktické radiotechniky, jednak umožnilo mnohé aplikace ve výzkumu a vědeckém bádání.

Zpětná vazba je důležitým příkladem *vazby* dvou kmitavých obvodů. Obecně rozumíme vazbou takové zapojení dvou oscilátorů, při němž jejich kmity na sebe vzájemně působí. V uvedeném schématu na obr. (5.12) 5 je *vazba indukční*, protože se vzájemné působení děje indukcí. Jsou možné i jiné druhy vazby (např. kapacitní), která také může být těsnější nebo méně těsná podle stupně vzájemného působení obvodů. Množství energie, která přechází z obvodu na obvod, závisí ovšem také na poměru vlastních frekvencí obvodů. Je největší v případě rezonance, kdy obě frekvence jsou přibližně stejné.

5.12.3. Záření otevřeného oscilátoru

Udržíme-li netlumené kmity v uzavřeném obvodu, spotřebujeme jistou energii na úhradu ztrát způsobených ohmickým odporem. V kondenzátoru vzniká elektrostatické pole a podobně indukční cívka vytváří střídavé pole magnetické. Jsou-li desky kondenzátoru těsně u sebe a obsahuje-li cívka uzavřené železné jádro, omezuje se elektrické i magnetické pole prakticky na nejbližší okolí obvodu. Takový obvod nakreslený na obr. (5.12) 6a se proto nazývá *uzavřený kmitavý obvod*. Pootevíráme-li desky kondenzátoru a odstraníme-li železné jádro v indukční cívce, rozloží se elektrické i magnetické pole také znatelně do okolního prostoru [obr. (5.12) 6b] a obě pole se ještě více rozšíří do okolí v úpravě 6c a 6d, kde desky kondenzátoru nahradíme kuličkami nebo pouhými dráty. Konečně v případě 6e, kdy je celý obvod nahrazen pouhým přímým vodičem, tedy kusem rovného drátu, vytvoří se elektrické a magnetické pole tvaru naznačeného polokruhovými siločarami elektrickými a uzavřenými kruhovými siločarami magnetickými. Takový obvod, jehož elektromagnetické pole se rozprostírá do okolního prostoru, nazývá se *otevřený kmitavý obvod* nebo *otevřený oscilátor*. Poslední případ přímého drátu je vlastně kmitající dipól zvaný *lineární oscilátor*. Jeho kapacita i indukčnost jsou ovšem velmi malé, a proto vlastní kmitý takového dipólu mají podle Thomsonova vzorce velmi krátkou dobu kmitu, tj. velmi vysokou frekvenci.

Při oscilacích velmi vysoké frekvence se však projeví konečná rychlost šíření změn elektro-



Obr. (5.12) 6. Přechod od uzavřeného obvodu k dipólu

magnetického pole, které se postupně rozšíří do různých vzdáleností od oscilátoru až po dobu, kterou potřebuje změna pole k uběhnutí příslušné vzdálenosti rychlostí světla. Celkem jednoduché je to v případě pole magnetického, u kterého se to projeví jen tím, že soustředné kruhové siločáry v okolí kmitajícího lineárního oscilátoru houstnou, řídnou a mění svůj směr v opačný podle frekvence oscilací a zhuštění i zředění postupujícího prostorem rychlostí světla [obr. (5.12) 7]. Je to jistá obdoba šíření zvuku vzduchem, kde také zhuštění a zředění molekul se šíří prostorem v podobě akustických vln.

Konečná rychlost šíření má poněkud složitější důsledky pro pole elektrické. Tuto otázku rozřešil Hertz v jednoduchém případě dipólu. Průběh elektrického pole v jednotlivých čtvrtperiodách je znázorněn na obr. (5.12) 8:

- Napětí na dipólu je právě rovno nule. — Elektrické pole vymizelo.
- V první čtvrtperiodě má dipól vrcholné napětí a za tu dobu se již siločáry rozšířily do okolí v naznačeném tvaru.
- Mezi první a druhou čtvrtperiodou klesá napětí oscilátoru a pole se šíří dále do prostoru.
- V okamžiku ukončení druhé čtvrtperiody má dipól opět nulový elektrický moment, a proto z něho nevycházejí siločáry. Proto vzdálenější části siločar, které postupují se šířícím se polem, musí být ve vakuu (obecně v izolantu) uzavřeny.
- Na konci třetí čtvrtperiody oddělují se již uzavřené siločáry od dipólu a na jejich místo přicházejí další siločáry, které mají opačný směr než v b), ježto dipól je nyní nabit obráceně (má opačné vrcholné napětí).

Tak se tvoří skupiny uzavřených elektrických siločar, které se vzdalují rychlostí světla od oscilátoru všemi směry. Na obr. (5.12) 9 jsou nakresleny tři takové soustavy uzavřených

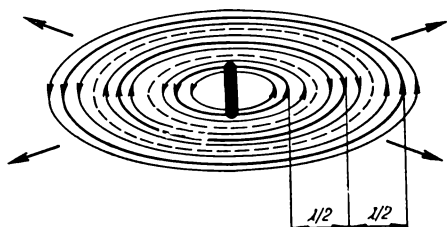
siločar (v osovém řezu). Tloušťka každého útvaru je rovna poloviční vlnové délce elektrické vlny.

Ve vakuu se podle 5.11 (26) elektromagnetické vlny šíří rychlostí světla c , kdežto ve všech ostatních prostředích rychlostí menší (stejně jako světlo). Ježto většina izolantů má skoro přesně $\mu_r = 1$, rychlost vln je přibližně

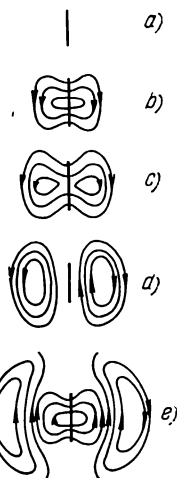
$$5.12 (12) \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}.$$

Tak např. ve vodě ($\epsilon_r = 81,1$) se elektromagnetické vlny šíří rychlostí zhruba devětkrát menší než ve vzduchu:

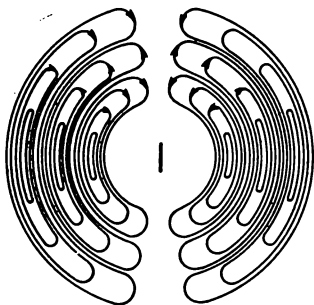
$$5.12 (13) \quad v = \frac{c}{\sqrt{81,1}} \approx \frac{c}{9} = 33\,300 \text{ km s}^{-1}.$$



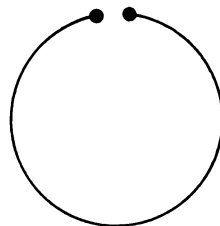
Obr. (5.12) 7. Šíření magnetických vln v okolí dipólu



Obr. (5.12) 8. Šíření elektrického pole lineárního oscilátoru



Obr. (5.12) 9. Záření Hertzova dipólu

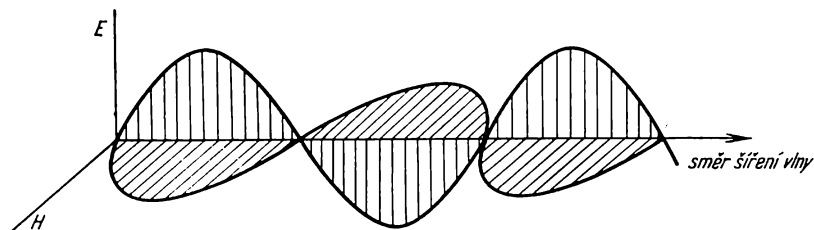


Obr. (5.12) 10. Hertzův drátový oscilátor

R. 1888 se Hertzovi skutečně podařilo tyto elektromagnetické vlny pozorovat. Své pokusy prováděl jednoduchými drátěnými oscilátory s jiskřištěm [obr. (5.12) 10], kterých užíval jednak jako zdroje tlumených elektrických oscilací, jednak jako rezonátorů, kterými elektromagnetické vlny (o vlnové délce asi 2 m) zjišťoval (přijímal). Při tom plně potvrdil teoretické výsledky Maxwellovy. Tím byly položeny fyzikální základy dnešní vysokofrekvenční elektrotechnice, jež v rychlém rozvoji dospěla k rozhlasu, televizi a radaru.

Elektromagnetické vlnění je podle čl. 5.11.3 příčné vlnění, při němž periodicky proměnné síly, elektrická a magnetická, jsou kolmé ke směru šíření vln. Kromě toho jsou obě tyto síly kolmé navzájem. U vln, které vyzařuje lineární oscilátor, je to přímo patrné pro všechny body v rovině souměrnosti oscilátoru, kolmé k jeho ose. Zde je směr elektrického pole rovnoběžný, směr magnetického pole kolmý k oscilátoru, jak vidíme z obr. (5.12) 6 až 9. Ve smyslu Faradayových představ o elektrických a magnetických silových čarách, jejichž

hustota je v každém místě rovna intenzitě elektrického a magnetického pole, můžeme si postupnou vlnu elektromagnetickou představit názorně jako periodické zhušťování a zředování siločar, které se šíří prostorem rychlostí světla kolmo k siločarám elektrickým a magnetickým. Při tom ještě směry obou polí se mohou měnit. Je-li směr elektrického, a tedy i magnetického pole neproměnný, mluvíme o *lineárně polarizované elektromagnetické vlně*,



Obr. (5.12) 11. Polarizovaná elektromagnetická vlna

jejíž šíření je v případě sinusové vlny nakresleno na obr. (5.12) 11. Taková polarizovaná vlna vzniká ve větší vzdálenosti od lineárního oscilátoru (antény) podél jeho kolmé roviny souměrnosti.

Elektromagnetické vlnění v nejširším smyslu zahrnuje i světlo a jiné druhy vlnového elektromagnetického záření.

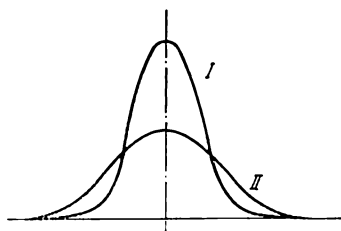
5.12.4. Základy radiotechniky

Základem radiotechniky v nejobecnějším smyslu jsou v podstatě tři druhy fyzikálních dějů: Vysílání vysokofrekvenčních elektromagnetických vln vysílačem, jejich šíření prostorem a příjem v přijímacím zařízení. Elektromagnetická vlna, která nám takto poskytuje spojení mezi vysílači a přijímací stanicí, nazývá se *nosná vlna*, ježto po vhodné úpravě, tzv. *modulaci*, můžeme jí použít k přenosu různých značek, signálů, zvuku atd. Podle toho rozeznáváme radiotelegrafii (bezdrátovou telegrafii), radiofonii (rozhlas), televizi a radar. Omezíme se na výklad fyzikálních principů, na nichž je založena konstrukce vysílačů a přijímačů, šíření vln různých vlnových délek, modulace a demodulace v těchto odvětvích radiotechniky.

Vysílač. Je to v podstatě elektronkový generátor netlumených kmitů, který je regulován, tj. udržován na stálém kmitočtu *piezoelektrickým* (křemenným) *oscilátorem*. Tento uzavřený obvod je spřažen s otevřeným obvodem, jehož hlavní součástí je *anténa*, z níž „vyzařují“ elektromagnetické vlny do prostoru. Anténa v nejjednodušším tvaru je lineární oscilátor, jehož jeden konec je uzemněn, a kmitá proto jako polovina dipólu. Kmity se na ni přenášejí z elektronkového oscilátoru vhodnou vazbou (např. indukční). Podmínkou účinného vyzařování antény je, aby její délka byla ve vhodném poměru k vlnové délce vysílané nosné vlny. Aby anténou protékaly dostatečně silné střídavé proudy, musí mít zhruba délku rovnou nejméně čtvrtině vlnové délky nosné vlny. Anténa může být buď svislá, nebo vodorovná a pro kratší vlny bývá i jinak upravena. Anténa vyzařuje energii hlavně kolmo ke své délce a na tom je založena konstrukce *směrových antén*, které vysílají energii převážně určitým směrem.

Přijímač. Děj v přijímači je celkem vzato obrácený než ve vysílači. Elektromagnetické vlny dopadají na anténu a v jejím obvodu vzbuzují elektrické kmity stejné frekvence. Tyto kmity se obvykle zesilují (vedou se na mřížku zesilovače) a potom se usměrňují nebo se zesiluje proud předem usměrněný. Podmínkou dosti silného příjmu je ovšem správné naladění přijímače na frekvenci nosné vlny vysílané vysílačem tak, aby oscilační obvod byl v rezonanci s dopadající vlnou. Při tom je velmi důležitá otázka *selektivnosti*, tj. schop.

nosti přijímače vybírat z dopadajících vln různých frekvencí vlnu té frekvence, na kterou je přijímač naladěný. Každý obvod reaguje v zásadě na kmity všech frekvencí, nejsilněji však na kmity, jejichž frekvence je rovna vlastní frekvenci. Selektivnost obvodu posuzujeme podle tzv. *rezonanční křivky*, která je grafem závislosti intenzity kmitů, vzbuzených v obvodu přijímanou vlnou, na *rozladění*, tj. na rozdílu kmitočtu přijímané vlny a vlastního kmitočtu obvodu. Na obr. (5.12) 12 je rezonanční křivka I selektivnějšího přijímače a křivka II méně selektivního přijímače. Aby bylo možno přijímat jen velmi úzký frekvenční (vlnový) obor, sestavují se přijímače z několika ladicích obvodů, které postupně zužují přijímané pásmo, až se dosáhne velmi vysoké selektivnosti.



Obr. (5.12) 12. Rezananční křivky

Radiotechnické spojení

Zásadně by bylo možno užít k radiotechnickému spojení nosné vlny kterékoli vlnové délky z oboru elektromagnetických vln, které dovedeme vyrobit s dostatečnou energií, přesněji řečeno s dostatečným výkonem v anténě. Za dnešního stavu vysokofrekvenční techniky se dosahuje různé délky vln od 1 mm až asi do 20 km. Podle radioelektrických pravidel, schválených Mezinárodní telekomunikační konvencí r. 1947, bylo zavedeno desetinné třídění elektromagnetických vln, jak je uvedeno v tab. (5.12) I.

Tabulka (5.12) I

Mezinárodní desetinné třídění elektromagnetických vln (1947)

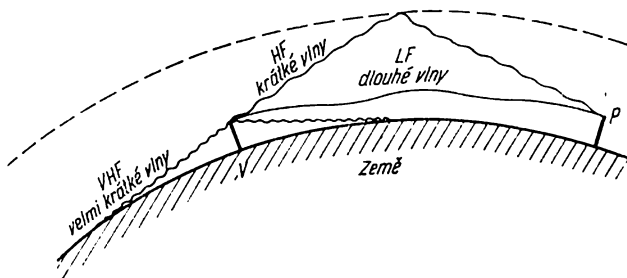
Značka	Označení vln podle frekvence	Frekvence MHz	Označení vlny	Vlnová délka v metrech
VLF	velmi nízké	pod 0,03	myriametrové	nad 10 000
LF	nízké	0,03—0,3	kilometrové	10 000—1 000
MF	střední	0,3—3	hektometrové	1 000—100
HF	vysoké	3—30	dekametrové	100—10
VHF	velmi vysoké	30—300	metrové	10—1
UHF	ultravysoké	300—3 000	decimetrové	1—0,1
SHF	superiorní	3 000—30 000	centimetrové	0,1—0,01
EHF	extrémně vysoké	30 000—300 000	milimetrové	0,01—0,001

Z praktického hlediska je ovšem nutno dát přednost takovým vlnovým délkám, jejichž vysílání je technicky nejvýhodnější a které mají takové fyzikální vlastnosti, že i jejich příjem na velké vzdálenosti je snadno uskutečnitelný. Podle toho, co bylo řečeno o rozměrech antény, je jasné, že k vysílání vln střední frekvence (hektometrových) s vlnovou délkou několika set metrů je třeba antény řádově aspoň délky 100 m, která je velmi nákladná, kdežto pro vlny délky např. 40 m je již anténa 20 m dlouhá velmi účinným zdrojem. Pokud jde o úspornost vysílacího zařízení, jsou tedy výhodnější krátké vlny, které lze poměrně snadno vyslat s potřebným výkonem. Při radiotechnickém spojení záleží ovšem na množství energie, které dojde až k přijímači, a toto množství je závislé jednak na vzdálenosti, jednak na způsobu šíření vln prostorem. Z nauky o vlnění je známo, že se vlny obecně nešíří přímočaře, že dochází k ohybu vln, který je tím větší, čím delší je vlnová délka. Proto se dlouhé vlny ohýbají a šíří i podél zakřiveného povrchu zeměkoule, kdežto střední vlny překonávají jen menší nerovnosti povrchu zemského. Konečně krátké a velmi krátké vlny se šíří skoro přímočaře a mohou přímo dopadnout jen na místa, která jsou

„viditelná“ z vysílači antény. Přímochaře šíření velmi krátkých vln (zvaných kvazioptické) omezuje dosah televizních vysílačů a naopak umožňuje funkci radaru.

Přece však můžeme přijímat krátké vlny i na velké vzdálenosti, což je umožněno jejich odrazem na tzv. *ionosféře*. Ve výši asi 100 km nad povrchem zemským vznikají účinkem slunečního záření vrstvy ionizovaných plynů. Tyto vodivé vrstvy, z nichž nejznámější je *vrstva Heavisidova*, chovají se podobně jako kovové zrcadlo a na nich se odrážejí krátké vlny zpět k povrchu Země. Na obr. (5.12) 13

je schematicky znázorněno šíření elektromagnetických vln různé délky mezi vysílačem *V* a přijímačem *P*. Z obrázku vidíme, proč příjem krátkých vln na větší vzdálenosti, podmíněný odrazem v ionosféře, trpí tzv. *únikem* neboli *fadingem*. Nazýváme tak kolísání intenzity příjmu, jež vysvětluje nestálost odrazových vrstev, které působením různých vlivů mění svou výšku i tvar. S tím souvisí i nepříznivý účinek soumraku na krátkovlnný příjem. Konečně může na volbu frekvence nosné vlny působit i požadovaná rychlost modulace, o čemž promluvíme dále.



Obr. (5.12) 13. Šíření elektromagnetických vln na Zemi

Modulace

Způsob, jakým na nosnou vlnu vkládáme sdělovací značky nebo zvuk, řídí se účelem, kterého chceme dosáhnout. Je známo několik druhů *modulace*, z nichž vyložíme nejprve nejjednodušší z nich, který se osvědčil v radiotelegrafii. Užíváme-li k dorozumění Morseových značek, stačí přerušovat záření antény v rytmu teček a čárek této abecedy. Přerušované nosné vlny se v přijímači použije opět k vytvoření Morseových značek (akusticky nebo zápisem). Vysílání značek lze provádět buď ručně, nebo automaticky perforovaným páskem, běžícím libovolnou rychlostí.

V radiofonii, tj. v radiotelefonii a při rozhlasovém vysílání, jde v podstatě o přenášení akustických kmitů, jejichž frekvence je podstatně nižší než frekvence nosné vlny. Je tu problém modulace vysokofrekvenčních elektromagnetických vln nízkofrekvenčními akustickými kmity, které leží v pásmu frekvencí mezi 16 až 16 000 Hz. Dobrý příjem však vystačí s přenášením užšího pásma 30 až 10 000 Hz.

Modulaci nosné vlny akustickými frekvencemi lze provést tak, že měníme některou z veličin, určujících nosnou vlnu, v rytmu akustických kmitů. Sinusová nosná vlna je vyzařována anténou, kterou prochází střídavý proud vyjádřený rovnicí

$$5.12 (14) \quad i = A \sin(\omega t + \varphi),$$

kde amplituda A , kruhová frekvence $\omega = 2\pi f$ a fáze φ mají stálé hodnoty. Přeměníme-li v mikrofonu mechanické kmity akustické vlny na střídavé proudy stejné frekvence, můžeme dosáhnout toho, že jedna z jmenovaných veličin se periodicky mění s touto akustickou frekvencí. Tak uskutečňujeme modulaci amplitudovou, frekvenční nebo fázovou.

Amplitudovou modulaci dostaneme modulovanou vlnu, jejíž časový průběh je znázorněn na obr. (5.12) 14c. Matematicky vyjádříme modulovanou vlnu c , položíme-li v 5.12 (14) místo stálé amplitudy výraz

$$A_m = A + a \sin \Omega t,$$

kde a , Ω jsou amplituda a kruhová frekvence modulující vlny b . Průběh modulované vlny je tedy

$$i_m = A_m \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t + \varphi) + a \sin \Omega t \sin(\omega t + \varphi),$$

čili užijeme-li vzorce

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta),$$

pak

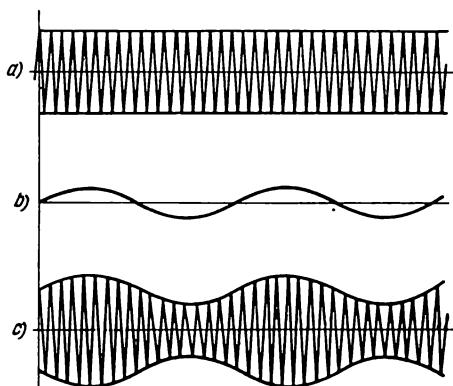
$$5.12 (15) \quad i_m = A \sin (\omega t + \varphi) + \frac{a}{2} \{ \cos [(\omega - \Omega) t + \varphi] - \cos [(\omega + \Omega) t + \varphi] \}.$$

Z toho vidíme, že se modulovaná vlna skládá z původní nosné vlny a ze dvou postranních vln o frekvencích rovných součtu a rozdílu frekvence modulované vlny a modulující frekvence. K věrnému přenosu amplitudově modulované vlny by tedy bylo třeba reprodukovat celé pásmo šířky 2Ω kolem frekvence nosné vlny.

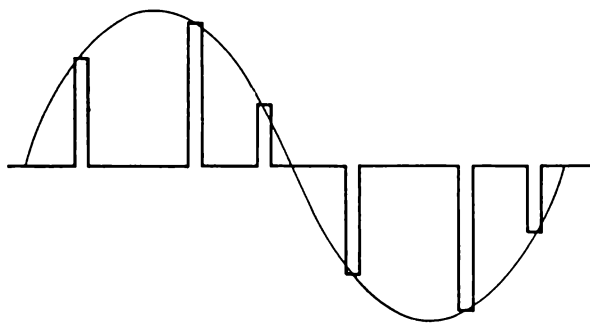
Frekvenční modulace záleží v periodické změně vysoké frekvence nosné vlny, při čemž tato frekvence kolísá kolem původní stálé hodnoty v rytmu nízké frekvence. Matematickým rozбором, který je dosti složitý, bychom zjistili, že při frekvenční modulaci je původní nosná vlna provázena nekonečným počtem dvojitych postranních pásem, rovných součtům a rozdílům frekvence nosné vlny a vyšších harmonických kmitů modulačních. Mají různé amplitudy, vyjádřené Besselovými funkcemi. Frekvenční modulace je výhodnější než amplitudová jen na krátkých vlnách.

Fázová modulace, založená na periodickém kolísání fázového posuvu, vede k složitějším změnám nosné vlny, protože při ní dochází zároveň ke kolísání frekvence.

Kromě těchto tří klasických způsobů modulace vznikla v novější době další, tzv. *impul-*



Obr. (5.12) 14. Amplitudová modulace:
a — nosná vlna, b — modulující vlna,
c — modulovaná vlna



Obr. (5.12) 15. Přenos harmonické vlny amplitudově modulovanými impulsy

sová modulace, která byla vypracována na základě radarové techniky k vysílání a příjmu velmi krátkých vlnových nárazů (impulsů); tyto nárazy tu nahrazují souvislou vlnu řadou impulsů, jejichž amplitudy odpovídají obrysu přenášeného signálu, jak je znázorněno na obr. (5.12) 15 pro případ nízkofrekvenční sinusovky, přenášené amplitudově modulovanými impulsy. Místo toho je možno periodicky měnit trvání impulsů, čímž dostaneme šířkově modulované impulsy.

K realizaci popsaných druhů modulace se užívá vhodných modulátorů, konstruovaných na různých principech. V rozhlasu je dosud nejužívanější amplitudová modulace, kterou (kromě modulace přímo v anténě) lze provést buď na mřížce, nebo na anodě. V obou případech se vysokofrekvenční nosná vlna vede z oscilátoru přes několik zesilovačů, ale modulátor působí jen na některý z nich. Nejčastější je *anodová modulace Heisingova*, která je založena na přičítání střídavého modulačního napětí k stejnosměrnému anodovému napětí. Tak lze dosáhnout úplně (100%) modulace.

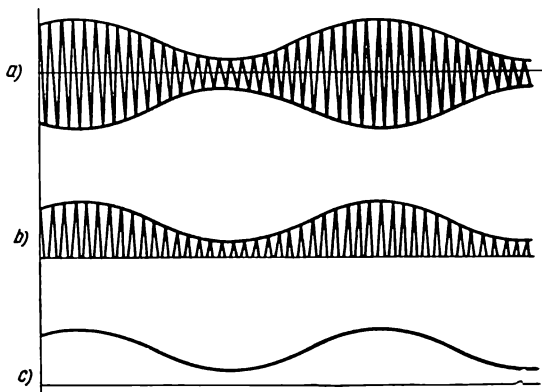
Detekce (demodulace)

Modulaci nosné vlny vtiskujeme jí nízkofrekvenční signál, který vysokofrekvenční nosná vlna přenese z vysílače na přijímač. Úkolem přijímače je jednak přijmout nosnou vlnu, jednak s ní sejmut vtisknutý signál, pokud možno v původním tvaru, tj. bez zkreslení. Tento druhý úkol, kterému se říká *detekce* nebo *demodulace*, provádějí přístroje zvané *detektory*, které jsou vestavěny do přijímačů. Detektorem získáme z vysokofrekvenční modulované vlny nízkofrekvenční střídavé proudy. Činnost detektorů je v podstatě činnost usměrňovací, jak je názorně patrné v případě demodulace amplitudově modulované vlny *a* [obr. (5.12) 16]. Jejím usměrněním *b* dostaneme totiž stejnosměrný proud, jehož velikost kolísá s modulační frekvencí vlny *c*. Je to vlastně stálý stejnosměrný proud, k němuž se přičítá střídavý proud akustické frekvence.

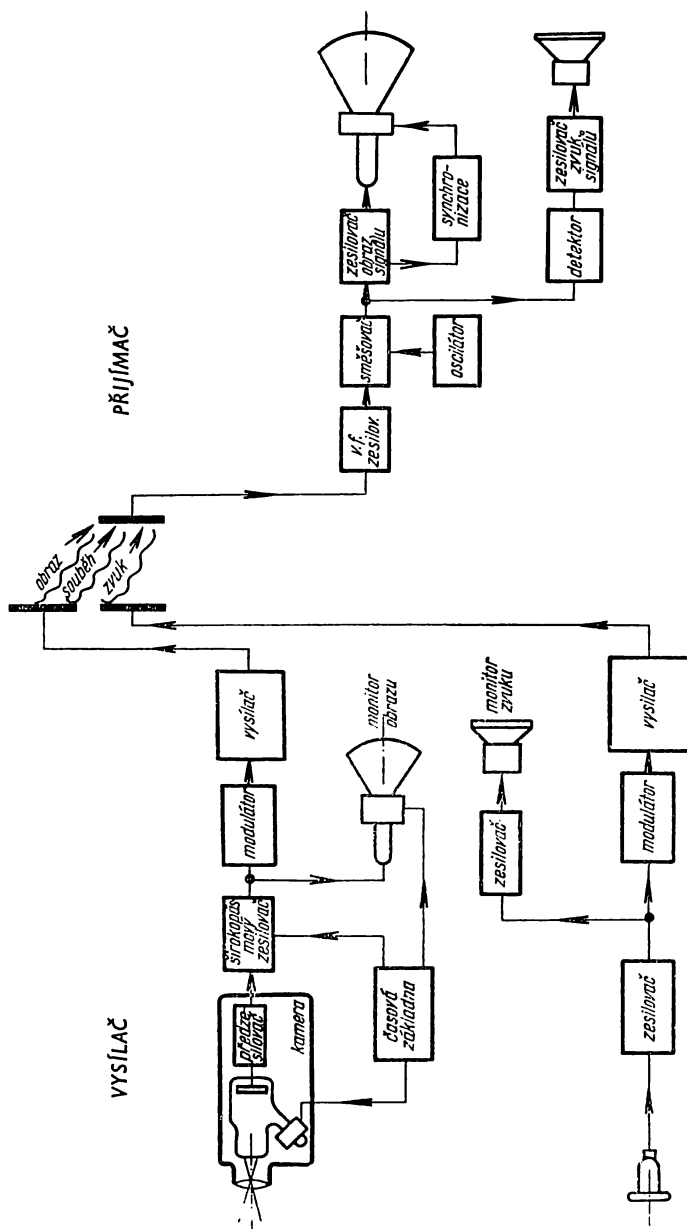
Nejjednodušší krystalový detektor je založen na „ventilovém“ působení některých polovodiivých krystalů, které propouštějí ostrým kovovým hrotem, jenž se jich dotýká, proud jen jedním směrem a tak usměrňují slabé proudy. Krystalových detektorů (s krystalkem galenitu nebo karborunda) se užívalo u nejstarších krystalových přijímačů a v poslední době se konstruují *krystalové diody* (germaniové nebo ze synteticky vyrobených silikátů), které jsou výhodné i pro nejkratší vlny (viz čl. 5.3.5).

Jinak se dosud hojně užívá detektorů diodových, a to jak diodových, triodových, tak i detektorů více-mřížkových. K demodulaci amplitudy se nejvíce užívá diodového detektoru, který při dobré moderní konstrukci dává téměř nezkrácenou detekci i při hluboké modulaci rozhlasových stanic. Detekce frekvenčně modulovaných vln se provádí zvláštními demodulátory zvanými *diskriminátory*, jejichž působením se dostanou střídavé proudy s periodickým průběhem napětí, odpovídajícím modulačním kmitům. Před tyto diskriminátory se zařazují pravidelně tzv. *omezovače*, které upravují amplitudu frekvenčně modulované vlny na stálou hodnotu. Tím se také zmírní kolísání amplitudy způsobené fadingem a různými poruchami.

V moderní radiotechnice má důležitý význam *heterodynní detekce*, a to jak pro radiotelegrafii, tak i pro radiotelefonii. Při heterodynním příjmu netlumených telegrafních signálů se nosná vlna frekvence f_n skládá s kmity místního oscilátoru zvaného *heterodyn*, který má frekvenci f_h . Jak jsme vyložili v akustice, vzniknou tak *zázněje* (rázy) o frekvenci rovné rozdílu $f_n - f_h$. Při vhodné volbě frekvence dostaneme v telefonu nízkofrekvenční proudy přiměřené periody. Tato metoda má velký význam pro moderní rozhlasový přijímač zvaný *superheterodyn*. K dosažení velké selektivity je totiž třeba zařadit v přijímači několik laděných obvodů, jejichž přeladování na různé vysílače by bylo velmi zdoluhavé. Proto se všechny obvody (např. 7) vyladí přesně na vlnu vhodné frekvence, která se dobře zesiluje (např. 465 kHz), a na tuto vlnu se převede přijímaná vlna heterodynovou metodou. Má-li se např. přijmout vlna frekvence $f_n = 10\,000$ kHz, přivede se na detektor zároveň s ní z místního oscilátoru frekvence $f_h = 9\,535$ kHz, která s ní dává výslednou vlnu střední frekvence 465 kHz. Při tom je tato střední frekvence stejně modulovaná jako přijatá nosná vlna. Přijímače se tedy ladí tak, že se vestavěný oscilátor naladí na vhodnou frekvenci f_h .



Obr. (5.12) 16. Demodulace amplitudově modulované vlny: *a* — modulovaná nosná vlna, *b* — demodulovaná (usměrňovaná) nosná vlna, *c* — stejnosměrný proud kolísající s modulační frekvencí



Obr. (5.12) 17. Schéma elektronické televize

5.12.5. Televize

Základním principem bezdrátového přenosu obrazů je modulace nosné vlny podle jasnosti jednotlivých míst obrazu, který modulátor předepsaným způsobem „prohlédne“. Přenášení nepohyblivých obrazů je poměrně jednoduché vzhledem k tomu, že doba prohlížení obrazu není příliš omezena. Naproti tomu přenášení obrazů pohyblivých musí překonat velkou potíž, která je v tom, že k dosažení spojitě proměnného obrazu je třeba celý obraz prohlédnout za jednu pětadvacetinu vteřiny. Chceme-li rozeznat světlé a tmavé body, které jsou od sebe vzdáleny např. 1 mm, musíme při velikosti stínítka $20 \times 20 \text{ cm}^2$ prohlédnout $4 \cdot 10^4$ světelných bodů za 1/25 vteřiny. To znamená, že musíme počítat s modulační frekvencí, která dosahuje řádově asi 1 MHz. Z toho plyne především, že frekvence nosné vlny, která má být modulována tak rychle proměnným proudem, musí být ještě vyšší a dále že k prohlížení obrazu je nutno užít elektronického zařízení, které jediné je schopno sledovat tak nesmírně rychlé změny.

Proto se užívá k bezdrátovému přenosu živých obrazů velmi krátkých, několikametrových nebo decimetrových vln.

Ke snímání obrazu slouží dnes již výhradně tzv. *snímací elektronky*, zejména *ikonoskop* a *superikonoskop*, v poslední době *ortikon* a *superortikon*. Podobně v televizních přijímačích (televizorech) se užívá elektronových obrazovek elektrostatických a elektromagnetických. Všechna tato zařízení patří mezi elektronoptické přístroje, které budou probrány v elektronové a iontové optice. Zde se omezíme na vysvětlení jejich funkce v televizních vysílačích a přijímačích.

Obr. (5.12) 17 podává povšechné skupinové (blokové) schéma elektronické televize. Obraz vysílané scény se promítá fotografickým objektivem snímací kamery na mozaiku snímací elektronky ikonoskopu. Na mozaice se během expozice jednoho obrázku (0,04 s) vytvoří jeho elektrický záznam nahromaděním nábojů úměrných místnímu osvětlení. Tento záznam prohlédne během expozice úzký elektronový svazek uzavírající proud, který v důsledku nestejných nábojů na mozaice má proměnnou velikost podle místního náboje mozaiky. Tak se vytváří *obrazový signál*, který se zesiluje širokopásmovým zesilovačem a přivádí k modulátoru. Modulátor mění v souhlase s časovým průběhem signálu amplitudu nosné vlny, kterou vysílá anténa vysílače obrazového signálu. Časový průběh jednotlivých snímků a pohyb elektronového svazku ve snímací elektronce se řídí elektrickými impulsy z přesného základního oscilátoru, který tvoří *časovou základnu* vysílače. Tyto impulsy jsou dvojího druhu: snímkové impulsy určují rytmus jednotlivých snímků (snímkový kmitočet) a řádkové impulsy ovládající pohyb elektronového svazku, který prohlíží mozaiku po řádcích (jako při čtení knihy) nebo častěji ob řádek (prokládané řádkování, které dává klidnější obraz.) Časová základna reguluje zvláštními impulsy také kmitočet vysílače obrazového signálu, který vysílá snímkové a řádkové impulsy zároveň s vlastním obrazovým signálem jakožto *úplný televizní signál*. Současně s obrazem se snímá zvuk mikrofonem, z něhož se vede přes zesilovač k modulátoru, který moduluje kmitočet nosné vlny *zvukového signálu*, vysílaný buď samostatnou anténou, nebo anténou pro televizní signál. Jakost vysílání se kontroluje obrazovým i zvukovým *monitorem*.

Televizní a zvukový signál se zachycuje jednou anténou a vede se do televizního přijímače (televizoru), kde se nejprve oba signály společně zesílí širokopásmovým vysokofrekvenčním zesilovačem. Dokonalejší přijímače jsou založeny (podobně jako rozhlasové superhety) na principu superheterodynu, který jsme vysvětlili na konci předešlého článku. U televizních superhetů se vedou signály do směšovače, kde se vytvoří pomocí vlastního oscilátoru rozdílový kmitočet zvukový a televizní. První se po dalším zesílení a detekci vede do nízkofrekvenčního zesilovače a k reproduktoru. Úplný televizní signál, z něhož se nejprve odfiltruje zvukový signál, se zesílí a po detekci se od něho v oddělovacím zesilovači oddělí synchronizační impulsy, které se dále zpracují tak, aby se jimi zajistil přesný souběh pohybu elektronového svazku v obrazovce přijímače s pohybem elektronového svazku ve snímací

elektronce. Zbývající vlastní obrazový signál se po dalším zesílení přivádí na řídicí elektronku obrazovky. Napětí na této elektrodě se mění v rytmu modulace obrazového signálu, čímž se mění množství elektronů pronikajících clonkou elektronové trysky a intenzita elektronového svazku v obrazovce. Tento svazek kreslí tedy na stínítku obrazovky fluorescenční obrazec, jehož jas odpovídá v každém okamžiku osvětlení mozaiky ve snímáči elektronce.

Je třeba dodat, že zpětný běh elektronového svazku z konce jednoho řádku na začátek řádku následujícího a střídání snímků by narušovaly obraz, a proto se tzv. *zatemňovacími signály* uzavře mezi dvěma řádky a mezi dvěma snímky elektronová tryska.

U naší televizní soustavy (podle sovětské normy) s 625 řádky a 50 pulsů za vteřinu (s lichými a sudými řádky) je doba kreslení jednoho řádku $64 \mu\text{s}$, doba zatemňovacího signálu řádkového $10,2 \mu\text{s}$ a snímkového $1\,500 \mu\text{s}$. Zpětný běh svazku mezi řádky je řízen synchronizačními impulsy řádkovými, které mají trvání $5,1 \mu\text{s}$, kdežto doba impulsů snímkových je $192 \mu\text{s}$. Jak bylo vloženo v předešlém článku, je třeba vzhledem k 5.12 (15) při amplitudové modulaci kmitočtem $F = \Omega/2\pi$ přenášet frekvenční pásmo šířky $2F$. Pro československou televizní soustavu je $2F = 6,5 \text{ MHz}$ a volí se šířka pásma 8 MHz , což odůvodňuje použití širokopásmových zesilovačů.

Televizní vysílač na Cukráku má délku nosné vlny obrazového signálu $6,025 \text{ m}$ (frekvence $49,75 \text{ MHz}$) a délku nosné vlny zvukového signálu $5,330 \text{ m}$ ($56,25 \text{ MHz}$). Brněnský vysílač pracuje na vlnách $1,505 \text{ m}$ ($199,25 \text{ MHz}$) a $1,457 \text{ m}$ ($205,75 \text{ MHz}$). Kmitočet nosné vlny zvukového signálu je v obou případech o $6,5 \text{ MHz}$ vyšší než kmitočet signálu televizního. Tento rozdíl je menší než šířka přenášeného pásma (8 MHz), a proto vystačíme s jednou anténou pro oba signály.

Jak už bylo řečeno, pracují televizní vysílače na vlnách délky několika metrů, které se kolem dosti velkých překážek prakticky neohýbají a šíří se na povrchu zemském prakticky přímočaře jako světlo. Proto se tyto vlny nazývají kvazioptické a jejich přímý příjem je možný zhruba jen v rozsahu „rozhledu“ s antény. Dosah televizního vysílání je dán přibližným vzorcem

$$D = \sqrt{h \cdot \text{km}^{-1}} \cdot 100 \text{ km},$$

kde h značí výšku vysílací nebo přijímací antény nad okolní krajinou. Tak při anténovém stožáru výšky 250 m postaveném na rovině je dosah vysílače $D = \sqrt{0,25} \cdot 100 \text{ km} = 50 \text{ km}$, kdežto při stožáru 300 m postaveném ve výši 700 m nad okolní krajinou je dosah dvojnásobný (100 km). Proto se stavějí televizní antény na vyvýšených místech, kam se vysoko-frekvenční kmity přivádějí vysokofrekvenčním vedením, např. koaxiálním (souosým) kabelem. Dosah televizního vysílače lze podstatně zvětšit nepřímým přenosem z vysokopoložených retranslačních stanic, které přijímají televizní program anténami s parabolickými reflektory a opět vysílají do okolí. Retranslační stanice může být i na letadle, které krouží ve značné výši nad Zemí, např. ve stratosféře (tzv. *stratovize*) nebo na *telekomunikačních družicích* např. *stacionární*, která sleduje rotaci Země ve výši $37\,900 \text{ km}$.

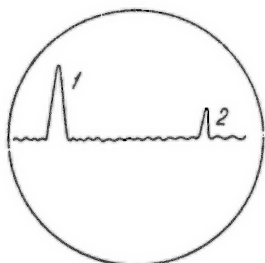
Televizní přenosy vysokofrekvenčním kabelem se uplatňují také v řadě různých vědeckých a technických oborů, zvláště tam, kde přímé pozorování důležitých procesů je z různých důvodů obtížné. Na televizních obrazovkách je možno podrobně sledovat průběh lékařských operací, různých výrobních postupů (ve zkušebnách armatur a vysokého napětí, ve slévárnách a hutích), stav některých zařízení v jaderných reaktorech a elektrárnách, zvláště v místech se silným radioaktivním zářením.

Velmi úspěšně se uplatňuje televize i v rychlotelegrafii, kde bylo zařízením Ultrafax dosaženo přenosu až $500\,000$ slov za minutu. Televizní přenos se osvědčil i v elektronové mikroskopii a při letecké navigační službě ve spojení s radarem.

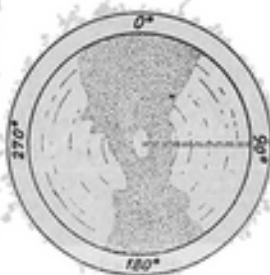
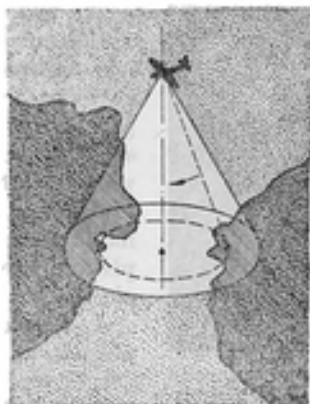
Závěrem dodáváme, že se v posledních letech začíná i prakticky rozvíjet barevná televize na několika různých principech.

5.12.6. Radar

Toto známé krátkovlnné radiotechnické zařízení (jehož jméno se skládá ze začátečních písmen označení „radio direction and ranging“) je založeno na přerušovaném osvětlování velmi krátkými vlnami vlnové délky několika cm. Anténa vysílá tzv. *pulsy (tepy)* mikrovln, tj. vyžáří vždy najednou značnou elektromagnetickou energii, potom se vysílání přeruší.



Obr. (5.12) 18. Záznam signálu (1) a jeho ozvěny (2) radarem

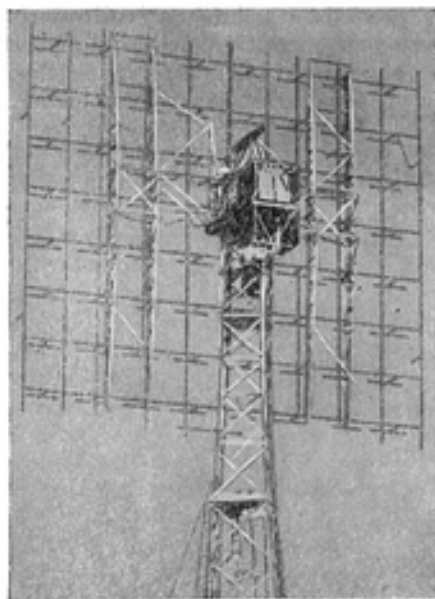


Obr. (5.12) 19. Osvětlování zemského povrchu radarem

Tyto tepy se opakují asi tisíckrát za vteřinu, avšak každý tep má trvání jen po dobu asi 1 mikrosekundy. Hned po skončení každého tepu se přepne anténa na přijímač a po tisícině vteřiny se vše opakuje. Anténa je směrová, takže vysílaný puls se soustředí do poměrně úzkého prostorového úhlu. Anténa hned zase přijímá odraženou vlnu, která se vrátí podle vzdálenosti překážky za velmi krátkou dobu (1 km odpovídá asi 7 mikrosekundám). Indikátorem *echa* (ozvěny odražených vln) je skoro pravidlem obrazová elektronka, která mů-

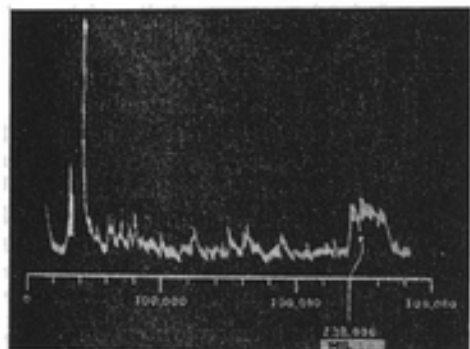


Obr. (5.12) 20. Radarový obraz konvoje lodí



Obr. (5.12) 21. Směrová anténa (složená z dipólů)

že být upravena dvojím způsobem. První způsob odpovídá katodovému osciloskopu a je zařízen tak, že současně s každým tepem se dá do pohybu světelná stopa od levého konce vodorovného průměru stínítka [obr. (5.12) 18]. Na počátku této stopy vytvoří vysílaný tep ostrou výchylku 1, která se v menším měřítku opakuje při návratu echa 2. Vzdálenost obou výchylek dává při známé rychlosti stopy na stínítku vzdálenost překážky. Tak lze určit vzdálenost překážky dokonce s přesností několika metrů. Druhý způsob



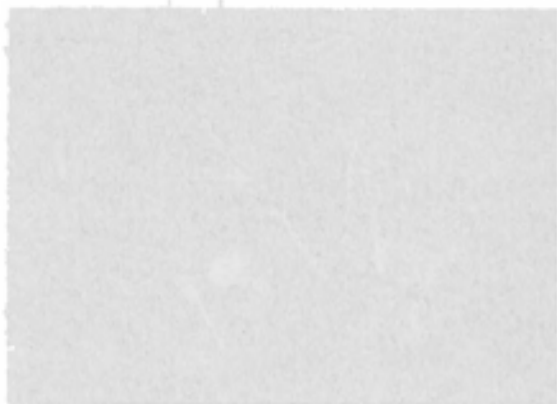
Obr. (5.12) 22. Radarový záznam radiovln odražených od Měsíce (1 míle = 1,61 km)

umožňuje také zjištění směru, v němž překážka leží. Anténa (umístěná pod letadlem) vysílá pulsy do malého prostorového úhlu, jehož osa opisuje kužel kolem svislé přímky tak, že se ozařuje celé kruhové pole pod letadlem [obr. (5.12) 19]. Světelná stopa na stínítku se dá do pohybu při každém tepu, vyjde však vždy ze středu stínítka a proběhne k okraji radiálně v tu stranu, kam je právě vychýlena anténa od svislice. Návrat odražené vlny se při tom neprojevuje příčnou výchylkou stopy, ale tím, že stopa v tom okamžiku silně zazáří. Ačkoli anténa opíše celý kužel teprve až za několik vteřin, vidíme najednou obraz celého zorného pole, je-li stínítko ze speciální fluorescenční látky s velkou setrvačností. Na obr. (5.12) 20 je radarový obraz konvoje lodí

opouštějících přístav; obraz vznikne proto, že pevnina a lodi odrážejí centimetrové vlny intenzivněji než mořská hladina.

Na obr. (5.12) 21 je snímek směrové antény (složené z dipólů), kterou se podařilo (v lednu 1946) zachytit radarem odraz radiových vln od Měsíce. Na obr. (5.12) 22 je záznam signálu a ozvěny radiových vln o délce 1 m, kterými byl uskutečněn tento první „styk“ s mimozemským tělesem.

Od té doby pokročil vývoj radarové techniky do té míry, že bylo možno pokusit se o zjištění odrazu na nejbližších planetách. V roce 1961 se skutečně podařilo přijmout signál odražený od Venuše vzdálené od nás přes 40 miliónů kilometrů a v r. 1963 od Marsu na vzdálenost 100 miliónů kilometrů.



6.1. Úvod do nauky o záření

6.1.1. Obsah a rozdělení optiky

Optika značí ve svém původním významu část fyziky pojednávající o světle, které vnímáme očima a které je nejdůležitější ze všech prostředků, jimiž získáváme poznatky o vnějším světě. Světlo má mnoho společných vlastností s rozsáhlým oborem fyzikálních jevů, které nazýváme *zářením*. Nauka o světle se tak stává částí nauky o záření, která se zabývá studiem různých druhů záření, o jejichž existenci a vlastnostech se přesvědčujeme sice nepřímou, ale stejně přesně a spolehlivě jako u viditelného světla. Proto je výhodné studovat vlastnosti světla nikoli osamoceně, ale v souvislosti s příbuznými druhy záření, a rozšířit tak obor optiky i na ostatní druhy záření. V nejširším pojetí optiky by tudíž bylo jejím úkolem nejen studium vlastností záření, ale i fyzikální výklad o podmínkách jeho vzniku. A tu je jasno, že světlo i ostatní druhy záření jsou tak základním jevem, že k tomuto výkladu je možno dojít jen na základě hlubších poznatků o složení látek, o jejich nejmenších částicích. Záření je právě nejvýznamnějším prostředkem k studiu struktury látek, která určuje i ostatní jejich vlastnosti, ať už mechanické, tepelné, elektrické, nebo magnetické. Z toho je jasno, že výklad o vzniku světla a záření vůbec by zasahoval do všech částí fyziky a tak by neúčelně vybočoval z rámce uceleného vědního oboru, jakým má být i optika. Základní poznatky o vzniku a pohlcování světla uvedeme proto až v posledních statích knihy.

Takto obecně pojatá optika — jako nauka o záření — rozpadá se na užší obory pojednávající o jednotlivých druzích záření. Obsah optiky je však možno třídit i podle jiného hlediska, totiž podle vlastností, na které klademe hlavní důraz. To lze názorně vyložit na světle, kde toto třídění odpovídá právě historickému vývoji. Nejprve bylo sledováno chování světla v prostředích (zejména ve vzduchu), vyplňujících dosti velké části prostoru kolem překážek dosti rozměrných, čímž se dospělo k jednoduchým a matematicky snadno zvládnutelným zákonům geometrické povahy o přímočarém šíření, o odrazu a lomu světla, o jeho rychlosti a intenzitě. Tak byl položen základ k tzv. geometrické optice a fotometrii (světloměřství), které se staly základem praktické a technické optiky.

Teprve později se ukázalo, že zákony geometrické optiky platí jen přibližně a že odchylky jsou tím značnější, čím menší jsou rozměry částí prostoru, v nichž zkoumáme šíření světla. Tak se dospělo k interferenci a ohybu světla. Když pak byl objeven i rozklad (disperze) a polarizace světla, bylo jasno, že světlo má vlastnosti příčného vlnění. Tak vznikl nový obor optiky, který na rozdíl od optiky geometrické byl nazván fyzikální optikou. Tento název není vhodný, ježto vlnová povaha světla nevystihuje plně celou fyzikální podstatu

světla ani jiných druhů záření. Z některých jevů totiž vyplývá, že se světlo nechová jako vlnění se spojitě rozloženou a libovolně dělitelnou energií, nýbrž projevuje tzv. *kvantovou* povahu, kterou se přibližuje jiným druhům záření, jež nazýváme korpuskulárním (tělískovým, částicovým). To souvisí s obecnými vlastnostmi částic vystiženými teprve moderní kvantovou fyzikou. Proto nahradíme název fyzikální optika názvem vlnová optika.

Z uvedených vlastností světla, které projevují všechny známé druhy záření, vyplývá užitečnost dělení optiky na tyto tři hlavní obory bez zřetele na druh záření:

1. *Optika geometrická* studuje zákony záření založené na přímočarém šíření, které platí v rozměrech velkých proti vlnové délce.

2. *Optika vlnová* studuje vlnové vlastnosti záření, pokud jde o tak velké množství zářivé energie, že není třeba přihlížet k její nespojitosti.

3. *Optika kvantová* studuje elementární vlastnosti záření, zvláště vznik a absorpci, při nichž se zřetelně uplatňuje kvantová povaha záření.

6.1.2. Přehled známých druhů záření

Z hlediska moderní fyziky je možno nejobecněji definovat záření jako *uspořádaný pohyb částic*. Podle povahy pohybujících se částic pak rozeznáváme různé druhy záření.

V čl. 1.1.3 jsme vysvětlili, že oběma základním formám existence matérie odpovídají dva druhy částic: látkové a polní. Pohybem látkových částic, které jsou permanentní a mají klidovou hmotnost různou od nuly, vzniká *záření částicové* (korpuskulární, tělískové). Pohybem polních částic vzniká záření, které nazýváme *vlnovým zářením*. Tento název je odůvodněn tím, že u polních částic vystupuje vlnová povaha zřetelněji než u částic látkových, které mají ovšem také vlnové vlastnosti. Podle vlnové mechaniky, na jejíchž zásadách spočívá dnešní kvantová fyzika, má korpuskulární i vlnové záření mnoho společných vlastností. Nejvýznačnější z nich je dána skutečností, že oba druhy záření jsou provázeny *šířením energie v prostoru*.

Korpuskulární záření se nejčastěji skládá z velmi rychlých nabitých částic. Jsou to především katodové záření a radioaktivní záření β , složené z rychlých elektronů, dále záření *anodové* (čili *kanálové*), složené z kladných iontů, urychlených ve vyčerpané trubici. Konečně sem patří i další druhy radioaktivního záření: α (héliová jádra), pozitronové (kladné elektrony) a protonové (vodíková jádra).

Usměrněným pohybem neutrálních atomů nebo molekul vytváříme *atomové* nebo *molekulové paprsky* (svazky) a pohybem neutronů vzniká záření *neutronové* (zejména v jaderných reaktorech).

Velmi pronikavé korpuskulární záření je obsaženo v kosmickém záření a nejpronikavější záření vůbec je záření složené z neutrin (a antineutrin).

O všech uvedených korpuskulárních zářeních pojednáme v dalších kapitolách; v tomto článku promluvíme ještě o záření vlnovém. Existence vlnového záření byla předvídána teoreticky: k elektromagnetickým vlnám dospěl ve své teorii již Maxwell a k existenci gravitačních vln vede Einsteinova teorie gravitace. Řada novějších prací se zabývá studiem gravitačního záření jak z hlediska vlnové teorie, tak z hlediska teorie kvantové, avšak existence gravitačních vln ani kvant gravitačního pole, zvaných gravitony, nebyla dosud pozorováním potvrzena.

Experimentálně byla zjištěna existence polní částice, známé pod jménem *foton* (světelné kvantum). Obecněji rozumíme pod názvem foton *kvantum elektromagnetického záření*, které se šíří vakuem rychlostí světla c . Různé druhy tohoto záření se mezi sebou liší jen různými kmitočty ν a různými vlnovými délkami λ , které spolu ve vakuu souvisí vztahem

$$6.1 \quad (1) \quad \lambda \nu = c;$$

délka vlny je totiž dráha uražená vlnou za kmitovou dobu T , takže

$$6.1 \quad (2) \quad \nu = \frac{1}{T}, \quad \lambda = cT.$$

Ve spektroskopii se uvádí též *vln počet* ϱ , rovný počtu vln na nějaké délce dělenému touto délkou

$$6.1 \quad (3) \quad \varrho = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}, \quad \nu = \varrho c.$$

Které ze známých druhů záření patří do rozsáhlé kategorie záření elektromagnetického, je zřejmé z tab. (6.1) I, která je sestavena podle stoupajících kmitočtů, tedy podle klesajících vlnových délek. Tyto délky jsou vyznačeny na svislé logaritmické stupnici v metrech. Na tomto místě se omezíme jen na několik povšechných poznámek k této tabulce, protože hlavní obory elektromagnetického záření budou probírány ve zvláštních článcích.

Rozhlasové vlny tvoří spolu s *Hertzovými vlnami* a *mikrovlnami* elektromagnetické (vlny) záření v užším slova smyslu. Hertzovy vlny jsou velmi krátké vlny o délce řádu několika centimetrů, které byly vůbec první uměle vytvořené elektromagnetické vlny. Hertz na nich pomocí jednoduchými drátěnými oscilátory s jiskřištěm potvrdil správnost Maxwellovy teorie elektromagnetického pole. Vln této frekvence se užívalo jako nosných vln elektromagnetických impulsů u radarových přístrojů; dnes se přechází k mikrovlnám délky 3 až 10 cm.

Krátší vlny vytvořené elektrickými metodami mají vlnovou délku řádu 1 mm a tvoří vlnový přechod od záření elektromagnetického v užším slova smyslu k záření *infračervenému*, k *viditelnému* světlu. Postupujeme-li dále ke kratším vlnám, přicházíme k světlu *ultrafialovému*, po němž následuje široký obor *rentgenového záření* neboli záření X, které dělíme na *měkké* záření X o delších vlnách a na záření *tvrdé* o vlnách kratších. Vlnové délky tvrdého záření se již překrývají s vlnovými délkami měkkého záření γ , kdežto tvrdé záření γ má vlny ještě asi tisíckrát kratší. Záření γ vzniká v jádře atomů a vysílají je některé radioaktivní prvky.

Ještě kratší vlny byly pozorovány v tzv. *kosmickém záření*, jehož elektromagnetická (vlnová) složka se nazývá také záření *ultragama* nebo záření *penetrantní* (pronikavé). O kosmickém a zánikovém záření pojednáme ve zvláštních článcích 8.3.4 a 6.6.2.

6.1.3. Vývoj názorů na podstatu světla

První fyzikální teorie světla vznikly v 2. polovině 17. stol. Byla to především *Huygensova vlnová (vlnulační) teorie*, která pokládá světlo za podélné vlnění velmi řídkého prostředí, zvané *světelný éter*. Tato představa o světle vznikla zřejmě jako obdoba vlnění zvukového, kdežto přímočaré šíření světla a zákon odrazu vedl Newtona k názoru, že světlo je složeno z rychle letících částic, vysílaných zdrojem. *Newtonova emanační teorie (emisní, výronová)*, kterou bychom dnes nazvali spíše korpuskulární teorií, vysvětlovala celkem dobře nejednodušší zákony geometrické optiky i aberaci, kdežto k vysvětlení interferenčních jevů (např. barvy tenkých vrstev) bylo nutno teorii dodatečně přizpůsobit. Naproti tomu nedovedla vlnová teorie dosti přesvědčivě vyložit přímočaré šíření světla, a proto byla dávána přednost teorii emanační až asi do roku 1800, kdy byl objeven ohyb světla. Brzy potom (r. 1808) objevil Malus polarizaci světla, což vedlo k oživení a zdokonalení teorie vlnové v tom smyslu, že vlnění podélné bylo nahrazeno vlněním příčným (Young r. 1817). Na základě této nové představy podařilo se Fresnelovi vybudovat podrobnou matematickou teorii, která dovedla vysvětlit všechny tehdy známé optické jevy, a dokonce správně předpověděla tzv. kónickou refrakci v dvouosých krystalech. Kromě toho Foucaultovo měření rychlosti světla ve vodě odhalilo zásadní rozpor Newtonovy teorie se skutečností, a tak

Přehled elektromagnetického záření

ν Hz	λ m				
10^4	10^4				Elektro- magnetické vlny (v užším smyslu)
10^5	10^3	1 až 15 km	dlouhé	Rozhlasové vlny	
10^6	10^2	200 až 700 m	střední		
10^7	10^1	2 až 100 m	krátké, velmi krátké		
10^8	10^0				
10^9	10^{-1}	0,1 až 2 m	Hertzovy vlny		
10^{10}	10^{-2}				
10^{11}	10^{-3}	1 až 100 mm	Mikrovlny		
10^{12}	10^{-4}				
10^{13}	10^{-5}	10 až 1 000 μm	Infračervené záření (tepelné sálání)		
10^{14}	10^{-6}	0,75 až 10 μm	Infračervené	světlo	
10^{15}	10^{-7}	0,35 až 0,75 μm	Viditelné		
10^{16}	10^{-8}	0,35 až 0,014 μm	Ultrafialové		
10^{17}	10^{-9}	10 až 1 000 Å	Měkké záření X	Záření X	
10^{18}	10^{-10}		Tvrdé záření X		
10^{19}	10^{-11}	0,1 až 10 Å	Měkké záření γ	Záření γ	
10^{20}	10^{-12}	0,001 až 0,1 Å	Tvrdé záření γ		
10^{21}	10^{-13}	1 až 100 X			→ Zánikové záření
10^{22}	10^{-14}				
10^{23}	10^{-15}	> 0,001 X	Penetrantní záření (ultragama)	Elektromagnetická složka kosmického záření	

vlnová teorie byla všeobecně uznána, přestože se nikdy nedosáhlo uspokojivého řešení hlavního problému vlnové teorie, totiž přesného popisu a výkladu mechanických vlastností předpokládaného světelného éteru. Později vznikla další nesnáz, a to při studiu šíření světla v pohyblivém prostředí; otázka „strhování éteru“ dlouho zaměstnávala teoretické i experimentální fyziky a byla jednou z příčin, které vedly k teorii relativity. V tom směru byl nejzávažnějším proslulý *Michelsonův pokus*, provedený r. 1881, aby byl experimentálně řešen problém šíření světla na Zemi obíhající kolem Slunce.

Tento pokus a mnoho dalších pokusů vedlo k závěru, že se světlo šíří stejnou rychlostí ve směru i proti směru oběhu Země, tj. jak říkáme „světelný éter je dokonale strhován“, a postrádá tedy nehybnost v absolutním prostoru, která mu byla vlnovou teorií přisuzována jako základní vlastnost. Skutečnost, že teorií očekávaný „éterový vítr“ nebyl pozorován, urychlila nástup nové *elektromagnetické teorie* světla.

Obě nejstarší teorie světla, undulační a emanační, které převádějí světlo na děje mechanické, jsou velmi názorné. Každá z obou teorií vystihuje jen jednu stránku podstaty světla, a proto žádná z nich není dnes přijatelná. Moderní fyzika nevystačí dokonce ani s pozdější elektromagnetickou teorií světla, která správně pokládá světlo jen za nepatrnou část rozsáhlého oboru elektromagnetického záření.

Ze základního předpokladu této teorie, že světlo je v podstatě elektromagnetické vlnění, plyne především pro rychlost světla v v prostředí o permitivitě ϵ a magnetické permeabilitě μ platnost vzorců 5.11 (27, 28):

$$6.1 \quad (4) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}.$$

Absolutní index lomu n_0 libovolného (homogenního izotropního) prostředí je tedy

$$6.1 \quad (5) \quad n_0 = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}.$$

Kdyby index lomu nezávisel na vlnové délce záření (na barvě světla), platil by tedy pro látky, pro které $\mu_r = 1$, tzv. *Maxwellův vztah* mezi permitivitou a indexem lomu světla:

$$6.1 \quad (6) \quad \epsilon_r = n_0^2.$$

Tento vztah platí skutečně dosti přesně u plynů, ale u neferomagnetických izolantů jen pro nepříliš krátké elektromagnetické vlny. Měříme-li permitivitu staticky (při stálém elektrickém poli), nelze očekávat, že odpovídá indexu lomu tak krátkovlnného záření, jako je světlo. Proto nepřekvapí, že Maxwellovu vztahu nevyhovuje index lomu zjištěný optickým měřením. Nicméně byla zjištěna platnost vztahu 6.1 (6) pro plyny a u látek o známém disperzním vzorci (vyjadřujícím závislost indexu lomu na vlnové délce) pro index lomu extrapolovaný pro velmi dlouhé vlny.

Pokud jde o polarizované světlo, předpokládal Fresnel, že se kmity éteru dějí v rovině kolmé k polarizační rovině. Při polarizaci odrazem splývá tato rovina s rovinou dopadu. Naproti tomu Neumannova teorie vedla k závěru, že se optické kmity dějí rovnoběžně s rovinou polarizační. Podle elektromagnetické teorie se při odrazu polarizuje elektromagnetická vlna tak, že elektrické kmity jsou kolmé k rovině dopadu a magnetické kmity jsou s ní rovnoběžné, tj. rovnoběžné s rovinou polarizační. K rozhodnutí této otázky, která vedla k dlouhým sporům mezi zastánci obou teorií, bylo nutno zjistit, která z vln skutečně je nositelkou světelných úkazů. Pokusy vykonané Wienerem, Drudem, Nerstem aj. vedly k výsledku, že chemické (fotografické) a fluorescenční účinky světla způsobuje *elektrická vlna*, a tak byl starý spor rozhodnut ve prospěch teorie Fresnelovy (viz čl. 6.4.2A).

Elektromagnetická teorie světla byla později rozšířena i na další krátkovlnné záření, zvláště na rentgenové, které bylo z počátku pokládáno za pouhé elektromagnetické impulsy

nebo za podélné vlnění éteru. Teorie byla postupně zdokonalována a prohlubována a bylo možno se domnívat, že jejím vybudováním bude podán na dlouhou dobu uspokojivý výklad optických dějů, které tak byly zahrnuty do jiného rozsáhlého oboru fyziky, totiž elektřiny. Ještě koncem 19. stol. se však poznalo, že světlo má jisté zvláštní vlastnosti, které se klasické teorii vymykají. K poznatku, že klasická teorie světla nevystihuje skutečnost, dospěl Planck při snaze odůvodnit platnost vyzařovacího zákona, který byl v naprostém souhlasu s experimenty. Byl nutně veden k myšlence přímo revoluční, která se stala základem celé moderní kvantové fyziky. Tuto myšlenku vyslovil jako známou *kvantovou hypotézu*, podle níž záření o kmitočtu ν může se vyzařovat nebo pohlcovat jen po celistvých kvantech velikosti

$$6.1 (7) \quad \varepsilon = h\nu, \text{ kde } h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

je *Planckova konstanta (účinkové kvantum)*.

Z této kvantové hypotézy se během několika let vyvinul základní princip kvantové fyziky; tento princip, pokud jde o záření, vedl k pojmu *fotonu*, který je základem dnešních představ o podstatě světla. Vedl k tomu především *fotoelektrický jev*, který objevil Hertz v témže roce, v němž se svými známými pokusy zasloužil o skvělý úspěch elektromagnetické teorie. Fotoelektrický jev, který bude podrobně vyložen v čl. 6.6.1, vedl k názoru, že každé světelné kvantum se soustředí ve velmi malém prostoru. Tak se fyzika do jisté míry vrátila k emisní teorii Newtonově; pokládá světlo za souhrn nesmírného počtu fotonů, z nichž každý má energii rovnou kvantu $h\nu$ a letí prostorem rychlostí světla. Představa o fotonech byla později doplněna v tom smyslu, že každý foton má také svou hmotnost (za pohybu), že světlo má zároveň povahu záření vlnového i korpuskulárního. Při šíření světla prostorem má převahu charakter částicový, kdežto při styku s prostředím se více uplatňuje charakter vlnový. Tyto skutečnosti budou podrobněji vyloženy v dalších článcích, zde je však nutno doplnit výklad důležitým zjištěním, že také různé druhy záření, které byly v předešlých článcích uvedeny jako záření korpuskulární, jeví při styku s látkami vlnové vlastnosti podobně jako světlo. Tuto skutečnost předpověděla kvantová teorie (*vlnová mechanika*), která se dnes zdá způsobitou vyložit všechny známé fyzikální poznatky bez dodatkových hypotéz.

6.1.4. Rychlost světla

V kapitole 2.9 jsme poznali, že rychlost světla ve vakuu má stálou hodnotu, která nezávisí na volbě inerciální soustavy, v níž rychlost světla měříme. V téže kapitole jsme dospěli k rovnici 2.9 (45), kterou můžeme psát ve tvaru

$$6.1 (8) \quad c = \sqrt{-\chi_*}.$$

Fyzikální význam tohoto vztahu je velmi závažný. Je totiž jasno, že rovnost, kterou vyjadřuje, nemůže být náhodná a že rychlost světla nemůže patrně mít vliv na velikost kosmického potenciálu χ_* , který je dán rozložením galaxií ve vesmíru. Musíme naopak mít za to, že struktura vesmíru je určena jeho vývojem a že rychlost světla je jen jednou z fyzikálních veličin, jejichž hodnota je spoluurčena vlastnostmi „fyzikálního vesmíru“, který jsme nazvali kosmem. Závislost rychlosti světla na kosmickém potenciálu se jeví zcela přirozenou, uvážíme-li, že je totožná s rychlostí šíření gravitačního a elektromagnetického pole. Je to zajisté v souladu se zásadami megafyziky a se skutečností, že rychlost světla je podle obecné teorie relativnosti také závislá na potenciálu místního gravitačního pole.

Rychlost světla ve vakuu, měřená v libovolné inerciální soustavě souřadnic v místech, kde gravitační potenciál makrofyzikálních těles vymizí, je tedy *univerzální fyzikální konstanta*, určená přímo kosmickým potenciálem podle vztahu 6.1 (8). Tento vztah nám do-

voluje také získat velmi přesnou hodnotu kosmického potenciálu na základě experimentálních hodnot rychlosti světla ve vakuu. Rychlost c je tedy nejen základní konstantou teorie relativity, ale její význam přesahuje rámec fyziky, neboť je zároveň důležitou konstantou kosmologickou. Proto popíšeme aspoň nejjednodušší metody jejího měření.

Rychlost světla, která je nejvyšší přípustnou rychlostí všech částic, je proti jiným známým rychlostem tak nesmírně velká, že se vymyká přímému měření obvyklými metodami, které ještě dobře vyhovují i při měření rychlosti zvuku (zhruba milionkrát menší). Ačkoli již starověký Empedokles vyslovil názor, že světlo potřebuje jistou dobu k tomu, aby přešlo z místa na místo, neměl ještě ani Galilei představu o velikosti světelné rychlosti. Pokoušel se změřit ji z doby šíření světelného signálu mezi dvěma stanicemi se svítilnami vzdálenými několik kilometrů. První, kdo určil aspoň přibližně rychlost světla, byl Römer (r. 1675), který správně vyložil konečnou rychlost světla pozorování, že doba mezi dvěma zatměními jednoho z Jupiterových měsíčků vycházela kratší v období, kdy se Země k Jupiteru blížila, než v období, kdy se od něho vzdalovala. O půl století později (r. 1728) jiný hvězdář Bradley vypočetl rychlost světla z úkazu zvaného *aberace*. Zjistil, že stálice pozorované kolmo ke směru oběžného pohybu Země kolem Slunce zdají se vychýleny směrem pohybu Země o aberační úhel

$$6.1 (9) \quad \alpha'' = 20,44'',$$

a správně tuto aberaci vysvětlil způsobem zřejmým z obr. (6.1) 1. Světelný paprsek dopadá do středu objektivu dalekohledu rychlostí c kolmo k rychlosti Země, jejíž průměrná roční hodnota

$$6.1 (10) \quad v = 29,7 \text{ km s}^{-1}.$$

Za dobu t šíření paprsku od objektivu k okuláru, za kterou paprsek urazí dráhu ct , posune se dalekohled se Zemí o délku $d = vt$, a proto musíme dalekohled sklonit o úhel α tak, aby světlo dopadlo do středu ohniskové roviny okuláru. Z obr. (6.1) 1 vidíme, že pro aberační úhel α , který určuje odchylku směru relativní rychlosti světla vzhledem k Zemi od směru jeho rychlosti vzhledem k stálícím, platí vztah

$$6.1 (11) \quad \frac{d}{ct} = \frac{v}{c} = \tan \alpha \approx \alpha,$$

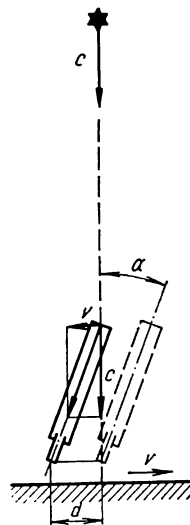
při čemž

$$6.1 (12) \quad \alpha = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \alpha'' = 4,848 2 \cdot 10^{-6} \cdot 20,44 = 0,000 099 10 \text{ radiánu}.$$

Pro rychlost světla vychází tedy podle 6.1 (10)

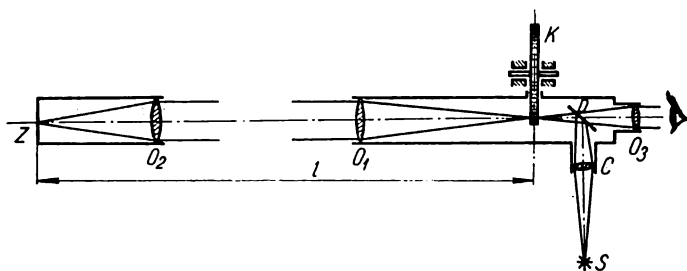
$$c = \frac{v}{\alpha} = \frac{29,7}{0,000 099 1} \text{ km s}^{-1} = 299,7 \cdot 10^3 \text{ km s}^{-1}.$$

Obě tato určení rychlosti světla jsou založena na astronomických pozorováních. Römer ovšem měřil rychlost světla na ohromné dráze několika set milionů kilometrů, kdežto Bradley zjistil z aberace rychlost světla na nepatrné vzdálenosti mezi objektivem a okulárem svého dalekohledu. Pozdější metody měření rychlosti světla užívají pozemských zdrojů a liší se od astronomických metod hlavně tím, že světlo probíhá zvolenou vzdálenost v obou směrech (tam a zpět).



Obr. (6.1) 1. Vznik aberace stálic

První taková měření provedl Fizeau (r. 1849) v experimentální úpravě znázorněné na obr. (6.1) 2. Svazek paprsků vysílaný zdrojem S a odražený skleněnou deskou D se soustředí spojkou C na obvod ozubeného kola K . Kolo se prudce otáčí a vytváří tak sled velmi krátkých světelných signálů, které se po průchodu objektivem O_1 dalekohledu šíří rovnoběžným svazkem na čočku O_2 , která je soustřeďuje na zrcátko Z ve vzdálenosti l od kola K .



Obr. (6.1) 2. Fizeauova metoda ozubeného kola

Po odraze se paprsky vrací zpět a jsou pozorovány okulárem O_3 . Zvyšujeme-li rovnoměrně otáčky ozubeného kola, pozorujeme periodické zeslabování a zesilování odraženého světla, neboť při dosti pomalém otáčení zastihne světelný signál při svém návratu touž mezeru, kterou prošel, a projde nezeslaben; pootočí-li se však kolo za dobu $2l/c$ tak, že mezeru vystřídá neprůhled-

ný zub, signál neprojde do okuláru. Při dvojnásobné úhlové rychlosti je však zub opět vystřídán mezerou atd. Fizeau měl kolo se $z = 720$ zubů a se stejným počtem mezer a zjistil, že při vzdálenosti $l = 8,633$ km nastává v okuláru poprvé tma při $n = 12,60$ ot/s.

Za vteřinu proběhne ohniskem nz zubů a nz mezer, takže kolo se pootočí o půl mezery a půl zubu v čase

$$\frac{1}{2nz} = \frac{2l}{c},$$

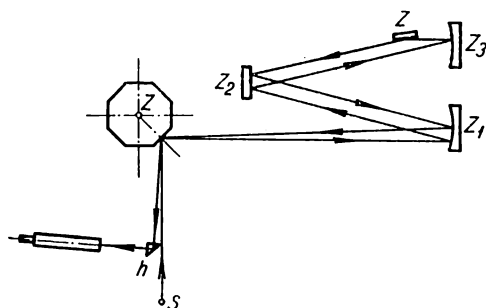
ježž potřebuje světelný paprsek k proběhnutí dráhy $2l$. Tak dostal Fizeau poněkud velkou hodnotu

$$c = 4nzl = 313\,000 \text{ kms}^{-1},$$

ale pozdější měření v dokonalejším uspořádání vedla již k hodnotám dosti správným.

Brzy potom (r. 1850) uskutečnil Foucault Aragem navrženou metodu rotujícího zrcátka, kterou zdokonalil zvláště Michelson (r. 1878).

V novější úpravě (r. 1927) dosáhl na pečlivě změřené délkové základně 35 385,53 m relativní přesnosti 10^{-5} , která byla později překonána. Tuto metodu lze upravit i laboratorně. Paprsek z bodového zdroje (štěrbiny) S odráží se na stěně osmibokého zrcátka Z a po několika odrazech na řadě dalších zrcadel [na obr. (6.1) 3 na třech, označených Z_1, Z_2, Z_3] vrací se zpět na touž stěnu zrcadla Z . Aby mohl být paprsek odražený od Z zachycen hranolkem h , vkládá se mu po odraze na Z_3 do cesty drobné zrcátko, které jej mírně odkloní. Hranolkem h se odražený paprsek přivede do pozorovacího dalekohledu s okulárovým mikrometrem. Zrcadla Z_1 a Z_3 jsou konkávní a soustřeďují paprsky do ohniska ležícího v místě odrazu na Z . Otáčí-li se osmiboké zrcadlo Z velkou rychlostí, pootočí se během cesty paprsku mezi zrcadly o jistý malý úhel, který lze vypočítat z posunutí obrázku zdroje změřeného okulárovým mikrometrem. Ze známé rychlosti otáčení zrcadla Z se pak určí doba t průchodu světla na lomené dráze mezi Z a Z_3 a z ní i rychlost světla. Řadou odrazů lze i v laboratoři dosáhnout dráhy několika set metrů,



Obr. (6.1) 3. Michelsonova metoda měření rychlosti světla

jíž odpovídá doba t řádu $1 \mu\text{s}$ (10^{-6} s). Je-li T doba otočení zrcadla Z , je úhlová změna α° polohy obrazu ve stupních dána vztahem

$$\frac{\alpha^\circ}{2} : 360 = t : T,$$

neboť α° je rovno dvojnásobnému pootočení zrcadla Z . Odtud plyne např. pro $T = 1/300$ s odchyška

$$\alpha^\circ = 720 \cdot 10^{-6} \cdot 300 \approx 0,2^\circ = 12',$$

kterou lze změřit ještě s uspokojivou relativní přesností, určíme-li stejně přesně i otáčky zrcadla Z . Lze to provést např. srovnáním s kmitovou dobou ladičky, s níž synchronujeme otáčky zrcadla Z . Kontrolu synchronizace lze provést např. vytvořením eliptické Lissajousovy křivky na stínítku katodového osciloskopu.

Rychlost světla a vůbec rychlost elektromagnetického záření různých vlnových délek je předmětem stále přesnějších měření.

Nejpravděpodobnější hodnota odvozená z dosavadních měření je

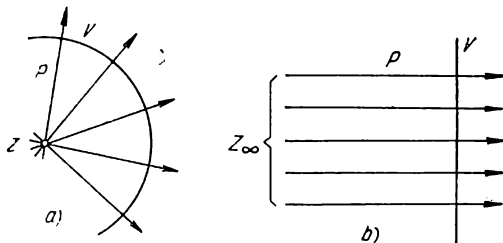
$$6.1 \quad (13) \quad c = 2,997\,9 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}.$$

Rychlost světla je dnes známa se značnou relativní přesností řádu 10^{-6} . To dává možnost přesného zjišťování vzdáleností nejen pozemských, ale i mimozemských těles. K tomu se s úspěchem užívá radaru. Jak jsme uvedli na konci čl. 5.12.6, lze tímto způsobem „proměřovat“ i sluneční soustavu. Na základě odrazu radarového signálu (frekvence 23,88 MHz) od Venuše 1961 byla dokonce zpřesněna hodnota astronomické jednotky a změněna rotace Venuše kolem vlastní osy.

6.2. Geometrická optika

6.2.1. Základní pojmy

Nejdůležitější pojmy, s nimiž jsme se setkali při výkladu šíření vlnění prostorem (kap. 3.2), byly *vlnoplocha*, tj. plocha, v jejíchž jednotlivých místech má kmitání touž fázi, nebo plocha, na kterou vlnění dorazí současně ve všech jejích bodech, a *paprsek*, tj. čára, která probíhá kolmo k vlnoplochám a jejíž tečna v příslušném místě nějaké vlnoplochy určuje směr dalšího postupu vlnění. Šíří-li se vlnění nestejnorodým (nehomogenním) prostředím, tj. takovým, které nemá ve všech svých částech stejné vlastnosti, mohou být paprsky křivočaré, rovněž šíří-li se vlnění kolem překážek, jejichž rozměry jsou blízké vlnové délce, ohýbají se paprsky a vzniká jev zvaný *ohybnost*. Je-li ale zdroj vlnění rozměrově velmi malý, takže je prakticky bodový, a obklopuje-li ho homogenní izotropní prostředí, postupuje vlnění z něho v soustředných kulových vlnoplochách se středem ve zdroji a paprsky jsou přímky, které se navzájem ve zdroji protínají. Hlavním znakem šíření vlnění v homogenním izotropním prostředí tedy je, že se toto šíření ve všech směrech děje *přímocha* a že je lze charakterizovat přímkami neboli přímými paprsky, které vystupují ze zdroje tvoří *svazky paprsků*. Takové svazky přímých paprsků, jejichž počátek je v bodovém zdroji, nazývají se *homocentrické* [obr. (6.2) 1].



Obr. (6.2) 1. Homocentrický svazek paprsků (Z – zdroj, P – paprsek, V – vlnoplocha): a – v okolí bodového zdroje, b – ve velké vzdálenosti od bodového zdroje

Nejnápadnější vlastností světla je právě jeho přímočaré šíření. Dopadá-li světlo z nějakého zdroje na předměty, které jeho dalšímu postupu brání, vrhají tyto předměty stíny, které ukazují jejich tvar. Obrysy stínů jsou zvláště ostré, když zdroj pokryjeme až na velmi malou plošku, představující prakticky svítící bod, a lze je sestavit geometrickou konstrukcí, vedou-li se tečné přímký ze svítícího bodu k tělesu, jak se to dělá v deskriptivní geometrii.

Vyšetřujeme-li tedy šíření světla v homogenním izotropním prostředí, můžeme to provést na základě představy, že světlo prostorem postupuje ve formě svazků přímých světelných paprsků, které se ovšem při dopadu na rozhraní, oddělující navzájem různá prostředí, odrážejí a lámou podle zákonů platných pro jakékoliv vlnění.

Setkají-li se dvě vlny, má nastat jejich interference, tj. obě vlny se mají navzájem zesilovat nebo zeslabovat, takže se mohou navzájem i úplně zrušit. U světla normálně nic takového nepozorujeme, a proto můžeme k uvedeným jednoduchým představám o šíření světla prostorem připojit ještě další, že jednotlivé světelné paprsky postupující prostorem z téhož zdroje nebo z různých zdrojů si navzájem nepřekáží a každý postupuje tak, jako by ostatní paprsky nebyly. To vyjadřuje *zákon o vzájemné nezávislosti paprsků*, který spolu se *zákonem přímočarého šíření světla a zákony odrazu a lomu světelných paprsků* tvoří základ velmi důležitého oboru fyziky, *geometrické optiky*, zabývající se základní teorií optických přístrojů, které doplňují oko při pozorování vzdálených nebo malých blízkých předmětů, dávají skutečné obrazy předmětů apod.

Uvedené zákony ovšem nestačí k výkladu všech vlastností optických přístrojů. Otázka, jaké podrobnosti lze ještě rozeznat na pozorovaném předmětu, se dá řešit jen s přihlédnutím k odchylkám od přímočarého šíření světla, tedy k jeho ohybu a k interferenčním jevům, jimiž se zabývá vlnová optika. Při výkladu jasu a osvětlení obrazů je zase třeba vycházet ze zákonů fotometrických.

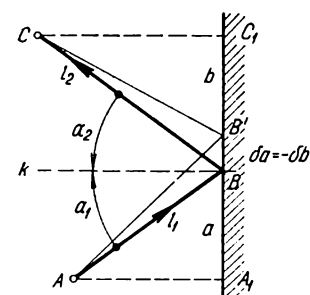
6.2.2. Fermatův princip, zákony odrazu a lomu

O zákonech odrazu a lomu jsme pojednali už v kapitole 3.2 při výkladu vlnění, kde jsme je odvodili z Huygensova—Fresnelova principu, který vyjadřoval mechanismus šíření vlnění prostorem. Oba zákony i zákon přímočarého šíření jsou obsaženy také v obecném *Fermatově principu*, který lze pokládat za základní princip geometrické optiky. Podle něho se světlo šíří v prostoru z jednoho bodu do druhého po takové dráze, že doba potřebná k proběhnutí této dráhy má extrémní hodnotu. Jinými slovy, po všech možných sousedních

drahách spojujících dva body na témž světelném paprsku šířilo by se světlo buď delší, nebo kratší dobu, popř. by doba zůstávala stále stejná.

Tak plyne z Fermatova principu ihned přímočaré šíření světla v homogenním izotropním prostředí: podél přímky, která je nejkratším spojením dvou bodů, potřebuje světlo nejkratší dobu, aby dospělo z jednoho bodu do druhého bodu.

Dopadne-li paprsek l_1 na plochu v bodě B [obr. (6.2) 2], nazýváme rovinu proloženou paprskem l_1 a kolmicí k vztyčenou v bodě B *rovinou dopadu*. Úhel α_1 , který svírá dopadající paprsek l_1 s kolmicí dopadu k , je *úhel dopadu*. Z bodu B vystupuje odražený paprsek l_2 , který s kolmicí k svírá *úhel odrazu* α_2 . Odražený paprsek leží v rovině dopadu, postupuje na



Obr. (6.2) 2.
Odraz světelného paprsku

druhé straně od kolmice dopadu a svírá s ní stejně velký úhel jako dopadající paprsek. Měříme-li úhly α_1 a α_2 od příslušných paprsků ke kolmici jen do 90° a počítáme je kladně ve smyslu pohybu hodinových ručiček, jak je zvykem v geometrické optice, vyjadřuje *zákon odrazu (reflexe)* rovnice

$$\alpha_2 = -\alpha_1;$$

je z ní zřejmé, že dopadající a odražený paprsek leží na různých stranách kolmice dopadu.

Velikost úhlu odrazu α_2 , který přísluší úhlu dopadu α_1 , určíme z podmínky, že skutečná dráha paprsku procházejícího body A , B a C je kratší než kterákoli ze sousedních drah, takže také čas potřebný k proběhnutí skutečné dráhy je kratší než pro jakékoli jiné dráze vedoucí z bodu A do některého bodu zrcadlicí roviny a z něho do bodu C .

Položme podle obr. (6.2) 2

$$\overline{AB} = l_1 \text{ a } \overline{BC} = l_2$$

a pak označme a a b průměty těchto úseček do zrcadlicí roviny; pak

$$6.2 (2) \quad l_1^2 = \overline{AA_1}^2 + a^2, \quad l_2^2 = \overline{CC_1}^2 + b^2.$$

Posuňme nyní bod dopadu B v rovině dopadu o malou vzdálenost do bodu B' . Tím se úsečky a a b změní o δa a δb , avšak $a + b = \text{const}$, takže

$$6.2 (3) \quad \delta a + \delta b = 0.$$

Zároveň se změní úsečky l_1 a l_2 o δl_1 a δl_2 .*) Úsečky $\overline{AA_1}$ a $\overline{CC_1}$ se při tom nezmění, takže z 6.2 (2) plyne

$$6.2 (4) \quad \delta l_1 = \frac{a}{l_1} \delta a, \quad \delta l_2 = \frac{b}{l_2} \delta b.$$

Dráha $AB'C$ se tedy liší od dráhy ABC o délku

$$6.2 (5) \quad \delta l_1 + \delta l_2 = \delta(l_1 + l_2) = \frac{a}{l_1} \delta a + \frac{b}{l_2} \delta b.$$

Skutečná dráha paprsku má vzhledem k sousedním drahám extrémní hodnotu (v našem případě zřejmě minimální); skutečná dráha je proto určena podmínkou pro extrém: první variace dráhy musí být rovna nule, tedy

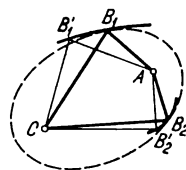
$$6.2 (6) \quad \delta(l_1 + l_2) = 0.$$

Položíme-li 6.2 (5) na roveň nule, dostaneme vzhledem k 6.2 (3)

$$\frac{a}{l_1} = \frac{b}{l_2} \quad \text{čili} \quad \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 \quad \text{nebo} \quad \alpha_1 = \alpha_2,$$

což je až na znaménko, které je zde věci úmluvy, zákon odrazu. Posuneme-li bod dopadu B paprsku kolmo k rovině dopadu o malou vzdálenost, pak $\delta l_1 = \delta l_2 = 0$ čili rovnice 6.2 (6), která je nutnou a dostačující podmínkou pro minimum, je rovněž splněna.

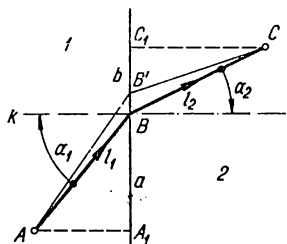
Při rovinném rozhraní šíří se světlo vždy po nejkratší dráze; extrém vyjádřený rovnicí 6.2 (6) je tedy vždy minimem. Při odrazu nebo také lomu na zakřivené ploše není tak jisté, zda je dráha světla minimální. Představme si, že body A a C na obr. (6.2) 3 jsou v ohniskách rotačního elipsoidu [obr. (6.2) 3]; pak je zákon odrazu splněn pro libovolný bod elipsoidu, neboť platí $l_1 + l_2 = \text{const}$, a tedy $\delta(l_1 + l_2) = 0$. Dotýká-li se elipsoid nějaké zrcadlicí plochy zevnitř (plocha má v místě dopadu menší křivost než elipsoid), je skutečná dráha paprsku AB_1C nejkratší ze všech možných sousedních drah, např. AB'_1C na obr. (6.2) 3. Dotýká-li se však elipsoid zrcadlicí plochy vně (plocha má větší křivost než elipsoid v místě dotyku), pak je skutečná dráha světla AB_2C nejdelší ze všech možných sousedních drah, např. AB'_2C [obr. (6.2) 3]. Při odrazu na zakřivené zrcadlicí ploše není tedy dráha světla vždy minimální, ale je vždy extrémní vzhledem ke všem ostatním možným sousedním drahám. Podobně je tomu při lomu. Ve zvláštním případě mohou být všechny dráhy spojující dva body prostoru stejné, jak je to např. při odrazu na zmíněném elipsoidu. Takové plochy se nazývají *Cartesiové*.



Obr. (6.2) 3.
Cartesiova plocha

*) Protože jde o myšlené (virtuální) posuvy, označujeme elementární změny variačním symbolem δ , pro který platí stejná pravidla jako pro diferencování.

Paprsek, který z jednoho prostředí vnikne do druhého prostředí, mění na rozhraní obou prostředí svůj směr. Touto jevu říkáme *lom světla*. Úhel α_1 , který svírá paprsek l_1 dopadající na rozhraní v bodě B , s kolmicí k vztyčenou v tomto bodě [obr. (6.2) 4], je opět úhlem dopadu; úhel α_2 mezi lomeným paprskem l_2 a kolmicí k je *úhlem lomu* a rovina proložená lomeným paprskem a kolmicí dopadu je *rovinou lomu*. Podle *zákona lomu* splývá rovina lomu s rovinou dopadu a siny úhlu dopadu a úhlu lomu jsou v témže poměru jako rychlosti světla v obou prostředích, tedy



6.2 (7)

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

je-li v_1 rychlost světla v prvním prostředí a v_2 rychlost světla v druhém prostředí. V geometrické optice se místo stálého poměru rychlostí světla v obou prostředích zavádí index lomu. *Absolutní index lomu* n nějakého prostředí je definován poměrem rychlosti c světla ve vakuu k rychlosti v světla téhož druhu v prostředí,

Obr. (6.2) 4. Lom světla

6.2 (8)

$$n = \frac{c}{v}.$$

Označíme-li n_1 a n_2 absolutní indexy lomu dvou prostředí, pak

$$6.2 (9) \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{c} \frac{c}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

čili rychlosti světla v obou prostředích jsou v obráceném poměru absolutních indexů lomu obou prostředí. Zákon lomu pro přechod světelného paprsku z prostředí 1 do prostředí 2 nabývá tak tvaru

6.2 (10)

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad \text{nebo} \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Poměr

$$6.2 (11) \quad \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

nazývá se *relativní index lomu* prostředí 2 vzhledem k prostředí 1.

K odvození zákona lomu z Fermatova principu [obr. (6.2) 4] použijeme stejného značení jako na obr. (6.2) 2. Čas t , který potřebuje paprsek, aby z bodu A dospěl po lomu do bodu C , je určen vztahem

$$6.2 (12) \quad t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = (n_1 l_1 + n_2 l_2) \frac{1}{c},$$

kde podle 6.2 (8) indexy lomu $n_1 = c/v_1$ a $n_2 = c/v_2$.

Podle Fermatova principu je skutečná dráha paprsku ABC dána podmínkou

$$6.2 (13) \quad \delta t = 0 \quad \text{nebo} \quad \delta(n_1 l_1 + n_2 l_2) = 0.$$

Podle obr. (6.2) 4 platí pro malé posunutí bodu dopadu B do bodu B' vztahy 6.2 (3) a 6.2 (4), z nichž vzhledem k 6.2 (13) plyne $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$, tedy zákon lomu 6.2 (10).

Součet součinů z indexu lomu n , a délky dráhy l v příslušném prostředí, tedy obecně $\sum n_i l_i$, nazýváme *optickou drahou* paprsku. Je to patrně dráha, kterou by paprsek proběhl ve vakuu rychlostí c v témž čase, který potřebuje k proběhnutí skutečné dráhy v různých prostředích. Šíří-li se světlo v nestejnorodém prostředí, je třeba rozdělit geometrickou dráhu paprsku na tak malé úseky dl , aby byl index lomu podél nich stálý. Elementární optická dráha je pak

ndl a celá optická dráha mezi body A a C je určena integrálem $\int_A^C ndl$ vzatým podél křivky, po níž se světlo šíří z bodu A do bodu C . Podle Fermatova principu šíří se pak světlo podél takové křivky, pro kterou je optická dráha extrémní. To vede k požadavku, aby první variace optické dráhy byla rovna nule, tedy obecně

$$6.2 \quad (14) \quad \delta \int_A^C ndl = 0.$$

Tato rovnice je obecnou matematickou formulací Fermatova principu.

Paprsky tvoří v každém okamžiku soustavu normál k příslušné vlnoploše, která je ortogonální plochou paprsků. V izotropním homogenním prostředí přísluší homocentrickému svazku paprsků kulové vlnoplochy. Po libovolném počtu lomů a odrazů na rozhraních různých prostředí přísluší homocentrickému svazku opět nějaká vlnoplocha, která ovšem již nemusí mít kulový tvar, čili i po libovolném počtu odrazů a lomů zůstává homocentrický svazek paprsků svazkem normál ortogonálních ploch. Tuto skutečnost, která je z hlediska vlnové optiky zcela samozřejmá, vyjadřuje *Malusova věta: Soustava paprsků, které jsou normálami nějaké plochy, zůstává i po libovolném počtu lomů a odrazů soustavou normál.*

Poněvadž podle definice vlnoplocha svazku paprsků je geometrickým místem všech bodů, do nichž se světelné paprsky rozšíří ve stejné době, je zřejmé, že všechny paprsky téhož svazku potřebují k proběhnutí různých prostředí od jedné vlnoplochy k jiné vlnoploše touž dobu.

Podle 6.2 (12) je doba t , kterou potřebuje paprsek k proběhnutí dráhy mezi dvěma vlnoplochami, vyjádřena vztahem

$$t = \frac{1}{c} \sum_i n_i l_i,$$

v němž $\sum_i n_i l_i$ je optická dráha paprsku. Tato doba je pro všechny paprsky téhož svazku mezi dvěma vlnoplochami stálá čili pro všechny paprsky téhož svazku platí mezi dvěma vlnoplochami

$$6.2 \quad (15) \quad \sum_i n_i l_i = \text{const},$$

ježto c je stálá rychlost světla ve vakuu. Mezi dvěma libovolnými vlnoplochami (ortogonálními plochami) jsou tedy optické dráhy všech paprsků homocentrického svazku stejné. V bodech, v nichž se všechny paprsky takových svazků protínají, splývají ovšem vlnoplochy s těmito body.

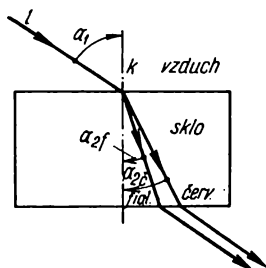
6.2.3. Rozklad světla

Rychlost v šíření světla v každém prostředí je vždy menší než rychlost jeho šíření c ve vakuu. Při přechodu světla z vakua do nějakého prostředí má proto index lomu $n = c/v$ hodnotu větší než jedna a podle zákona lomu je úhel lomu menší než úhel dopadu; nastává *lom ke kolmici*. Naopak při přechodu světelného paprsku z prostředí do vakua je příslušný index lomu $1/n = v/c < 1$, úhel lomu je větší než úhel dopadu paprsku na rozhraní mezi prostředím a vakuem a vzniká *lom od kolmice*. Ze dvou látek (prostředí) nazýváme *opticky hustší* látku, v níž se světlo šíří menší rychlostí, a *opticky řidší* látku, v níž rychlost šíření světla je větší. Chceme-li optickou hustotu prostředí posuzovat podle indexu lomu, musíme k tomu použít absolutního indexu lomu. Čím má prostředí větší absolutní index lomu, tím je opticky hustší. Vzduch, jehož absolutní index lomu má střední hodnotu $n = 1,000\,28$ (při teplotě 20°C a tlaku asi 760 torrů), je jen nepatrně opticky hustší než vakuum, v němž je právě $n = 1$, a proto se v technické optice zpravidla nepřihlíží k rozdílu mezi oběma indexy lomu a *relativní index lomu prostředí vzhledem ke vzduchu se klade rovný absolutnímu indexu lomu prostředí*.

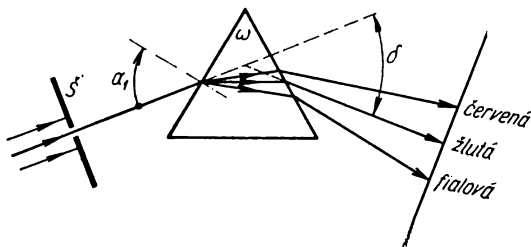
Zatím co ve vakuu se světlo všech možných vlnových délek šíří touž rychlostí c , v látkách závisí rychlost šíření v na vlnové délce světla, která určuje vjem barvy při vstupu světla do oka. Čím větší je vlnová délka světla, tím rychleji se v látce šíří a tím menší je příslušný index lomu. Proto se při šikmém dopadu paprsku bílého světla z vakua nebo ze vzduchu

do optického prostředí nejméně odchyluje barva červená, postupně se více odchyluje oranžová, žlutá, zelená, modrá a nejvíce fialová [obr. (6.2) 5]. Tento jev dokazuje, že světlo, které vnímáme jako bílé, necharakterizuje jediná vlnová délka, ale že je souborem jednoduchých (jednobarevných) světél, z nichž každé charakterizuje jistá vlnová délka. Tento jev nazývá se *rozklad (disperze) světla*. Zmenšuje-li se index lomu s rostoucí délkou vlny, jak tomu zpravidla bývá, je *disperze normální*. Roste-li naopak index lomu s rostoucí délkou vlny, což pozorujeme jen výjimečně v okolí absorpčních pruhů (čl. 6.4.13), nazývá se rozklad *anomální disperze*.

Při lomu paprsku bílého světla planoparalelní skleněnou deskou (deska, jejíž obě strany jsou přesně rovinné a rovnoběžné), obr. (6.2) 5, však žádný rozklad světla nepozorujeme. Protože jednoduchý světelný paprsek realizovat nemůžeme, je dopadající paprsek I v nejlépeším případě velmi úzký svazek rovnoběžných paprsků, z něhož každý se dvakrát láme a vystupuje z desky rovnoběžně posunut. Vystupující svazek se proto od vstupujícího svazku liší jen tím, že je poněkud širší a že je rovnoběžně posunut. Byl-li vstupující svazek bílé světlo z velmi vzdáleného bodového zdroje, jeví se vystupující svazek zase jako bílé světlo, přicházející z jednoho a téhož vzdáleného bodového zdroje bílého světla.



Obr. (6.2) 5. Rozklad světla lomem



Obr. (6.2) 6. Lom a rozklad světla hranolem

Rozklad budeme pozorovat, rozdělíme-li lomem dopadající paprsek (přesněji úzký svazek rovnoběžných paprsků) ve svazek rozbíhajících se paprsků, což se jeví tak, jako by paprsky rozbíhajícího se svazku přicházely z různých bodových zdrojů jednobarevného světla. Lze to provést *hranolem*, jímž v optice rozumíme průhledné prostředí, omezené dvěma rovinnými lámavými stěnami, které spolu svírají lámavý úhel ω a protínají se v lámavé hraně [obr. (6.2) 6]. Každá rovina kolmá k lámavé hraně je *hlavní řez hranolu*. Světelný paprsek procházející v hlavním řezu hranolem se dvakrát láme a po výstupu je od původního směru odchýlen o úhel δ , který závisí na úhlu dopadu α_1 , na indexu lomu n a také ovšem na lámavém úhlu ω .

Při lomu rovnoběžného svazku bílého světla hranolem (svazek je omezen např. štěrbinou rovnoběžnou s lámavou hranou hranolu) je tedy odchylka δ pro každou vlnovou délku (barvu) jiná a na stínítku se objeví pestrý a spojitý sled barev, který se nazývá *spektrum (vidmo)*.

Štěrbinu rovnoběžnou s lámavou hranou a osvětlenou rovnoběžným svazkem jednobarevného světla zobrazí tedy hranol ve směru sice odchýleném o úhel δ , ale jinak nezměněně ve stejné barvě a tím ostřeji, čím přesněji je svazek paprsků rovnoběžný a kolmý na rovinu štěrbin. Při bílém světle naproti tomu způsobuje rozklad sklem hranolu, že obraz štěrbin je roztážen a neostrý a obsahuje postupně vedle sebe všechny barvy, které na okrajích mizí do ztracena, protože očima dovedeme vnímat jen vlnové délky světla, ležící v jistém oboru vlnových délek, a to ve směru k oběma okrajům tohoto oboru se spojitě ubývající citlivostí. Vidíme už teď, že rozklad světla se při optickém zobrazování lomem projevuje nepříznivě, jak ještě poznáme v článku o vadách čoček.

Abychom mohli posoudit a srovnávat rozklad světla v různých látkách, je třeba určit indexy lomu pro různé barvy. V praktické optice se k tomu užívá několika jednobarevných (monochromatických) záření, která se podle Fraunhofera označují písmeny latinské abecedy. V tabulce (6.2) I jsou uvedeny značky záření, vlnové délky, prvky, které v plynném a žhoucím stavu příslušné záření vysílají, a barvy záření.

Tabulka (6.2) I

Fraunhoferovy čáry

Značka	Vlnová délka Å	Prvek	Barva
A' A B C	7 682 7 594 6 867 6 563	K O O H	červená
D d	5 893 5 876	Na He	žlutá
e E	5 461 5 269	Hg Fe, Ca	zelená
F g G'	4 861 4 358 4 341	H Hg H	modrá
G h H	4 308 4 047 3 969	Fe, Ca Hg Ca	fialová

Spektrální čáry záření A, B, C, D, E, F, G, H mají ve spektru stejné polohy jako tmavé čáry, které lze pozorovat ve slunečním spektru, a nazývají se *Fraunhoferovy čáry*.

Abychom mohli jedním číslem aspoň přibližně vyjádřit disperznost látek, zavádíme tzv. *střední disperzi*, definovanou rozdílem indexů lomu pro čáry F a C, tedy

$$6.2 (16) \quad n_F - n_C = \text{střední disperzi},$$

a *relativní disperzi*, což je poměr střední disperze k indexu lomu pro čáru D, zmenšenému o jednu, tedy

$$6.2 (17) \quad \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} = \text{relativní disperzi}.$$

Relativní disperze je důležitá v úvahách o achromazii čoček (čl. 6.2.9). U optických skel, jež jsou základním materiálem, z něhož se zhotovují prvky optických přístrojů, má relativní disperze vesměs malé hodnoty, a proto se uvádí její převrácená hodnota zvaná *Abbeovo číslo* ν :

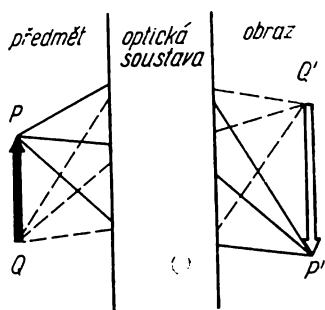
$$6.2 (18) \quad \nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}.$$

Abbeova čísla leží mezi 70 (pro skla se slabou disperzí) a 20 (silně rozkládající skla). Podle velikosti indexu lomu n_D pro žlutou čáru D, která leží u optických skel mezi 1,45 a 1,9, a velikosti Abbeova čísla ν dělí se optická skla na čtyři základní druhy: korunová skla obyčejná (n_D malé, ν velké) a těžká (n_D velké, ν velké) a flintová skla obyčejná (n_D velké, ν malé) a lehká (n_D malé, ν malé).

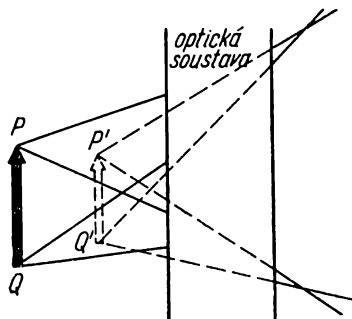
6.2.4. Základní představy optického zobrazování

Hlavní úlohou geometrické optiky je zobrazit vhodným způsobem na jiném místě svítící předměty, které samy vydávají světlo, nebo osvětlené předměty, odrážející část světla, které na ně dopadá z jiných těles. Představíme-li si tedy předmět jako soustavu bodových světelných zdrojů, pak z každého jeho bodu vychází svazek světelných paprsků [obr. (6.2) 7], který jsme nazvali homocentrickým. Obrazem některého bodu předmětu vytvořeným optickým zařízením (zobrazovací soustavou) rozumíme bod, v němž se protínají všechny homocentrické paprsky vycházející z příslušného bodu předmětu a prošlé optickým zařízením. Na obr. (6.2) 7 je P' obrazem bodu P nebo obráceně. Jestliže se paprsky vycházející z téhož bodu předmětu po průchodu soustavou skutečně protínají (paprsky po průchodu soustavou tvoří sbíhavý svazek), je jejich společný průsečík *skutečným (reálným) obrazem* předmětového bodu. Body P' a Q' na obr. (6.2) 7 jsou tedy skutečné obrazy bodů P a Q příslušného předmětu.

Homocentrické světelné paprsky vycházející z bodu předmětu mohou však po průchodu optickým zařízením tvořit také rozbíhavý svazek a neprotínat se ve skutečnosti v žádném



Obr. (6.2) 7. Skutečný obraz vytvořený optickou soustavou



Obr. (6.2) 8. Zdánlivý obraz vytvořený optickou soustavou

bodě. Protínají-li se však v jediném bodě po prodloužení v opačném směru, než je šíření světla, nazývá se tento bod *zdánlivý* nebo *neskutečný (virtuální) obraz* příslušného bodu předmětu. Paprsky se chovají totiž po průchodu optickou soustavou jako homocentrický svazek, vystupující ze zdánlivého bodového obrazu. Body P' a Q' na obr. (6.2) 8 jsou tedy zdánlivými obrazy bodů P a Q předmětu, nebo mohou být body P a Q skutečnými obrazy zdánlivých předmětových bodů P' a Q' (tj. zdánlivých obrazů vytvořených jinou optickou soustavou).

Při optickém zobrazování snažíme se dosáhnout toho, aby obraz nebyl zkreslen a aby byl geometricky podobný předmětu. K tomu především je třeba, aby se bod na předmětu zobrazil zase jako bod, aby se přímka určená dvěma předmětovými body zobrazila opět jako přímka a konečně aby rovině odpovídala opět rovina. Po geometrické stránce nazýváme jedno-jednoznačnou příbuznost dvou prostorů *kolineací*, jestliže bodu, přímce a rovině v jednom prostoru (předmětovém) odpovídá zase bod, přímka a rovina v druhém (obrazovém) prostoru. Body, přímky a roviny, které si při kolineárním zobrazení přísluší, nazýváme *sdrúženými (konjugovanými)*.

Charakterizujeme-li jak předmětový prostor, v němž je zobrazovaný předmět, tak obrazový prostor, v němž vznikne obraz předmětu, pravouhlými soustavami souřadnic $OXYZ$ a $O'X'Y'Z'$, pak polohy jednotlivých bodů předmětu v jeho prostoru určují souřadnice x , y a z a polohy odpovídajících bodů v obrazovém prostoru souřadnice x' , y' a z' .

Vzájemné vztahy mezi souřadnicemi sdružených bodů jsou pak vyjádřeny *zobrazovacími rovnicemi*.

Praktický význam má zobrazování *osově souměrné* např. kolem souřadnicových os OX a $O'X'$, jež se pak nazývají *hlavní osy* předmětového a obrazového prostoru. Leží-li hlavní osy v téže přímce, je zobrazování *centrované*. Při souměrném zobrazení kolem os OX , $O'X'$ jsou ovšem osy OY a OZ , a tedy také osy $O'Y'$ a $O'Z'$ navzájem zcela rovnocenné a stačí proto omezit úvahy o zobrazení na jedinou meridiánovou rovinu proloženou osou OX a shodnou nejlépe se souřadnicovou rovinou OXY a s odpovídající rovinou $O'X'Y'$ [obr. (6.2) 9]. Počátky O a O' obou souřadnicových soustav mohou přitom být různé (obrázek *a*) nebo shodné (obrázek *b*). Ve druhém případě sice osy obou souřadnicových soustav splývají, ale jde tu stále o dva různé prostory, které jsou sdružené a navzájem se jenom prolínají.

K početnímu vyjádření zobrazení pomocí zobrazovacích rovnic je třeba přesně se řídit dohodou o znaménkách zúčastněných veličin (*znaménkovou konvencí*), která je zavedena v praktické optice.

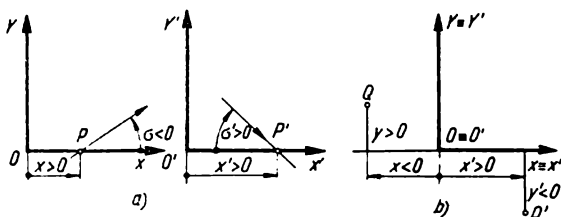
1. Se souřadnicemi v obou prostorech se počítá stejně jako v geometrii. Přitom orientace centrovaných hlavních os OX a $O'X'$, na nichž mají souřadnice x a x' kladné hodnoty,

je vždy taková, že souhlasí s postupem světla v předmětovém prostoru. Předpokládá se zpravidla, že světlo přichází od levé strany k pravé, a tento směr se považuje za kladný. Leží-li tedy předmětový bod P za počátkem O souřadnicové soustavy předmětového prostoru ve směru postupu světla v tomto prostoru [obr. (6.2) 9a], je jeho x -ová souřadnice kladná, např. $x = 12,5$ cm, leží-li před ním [bod Q na obr. (6.2) 9b], je x -ová souřadnice záporná, např. $x = -10,3$ cm. Stejně je tomu u obrazového bodu P' ; je-li P' před O' ve směru postupu světla v předmětovém prostoru, pak $x' < 0$, je-li P' za O' , pak $x' > 0$. Pořadnice y a y' bodů Q a Q' ležících mimo hlavní osu v meridiánové rovině, v níž zobrazení vyšetřujeme, jsou pak kladné nebo záporné podle toho, leží-li bod nad nebo pod hlavní osou (vlevo nebo vpravo od směru postupu světla v předmětovém prostoru), jak plyne z obvyklé orientace souřadnicových os OY a $O'Y'$ vzhledem k osám OX a $O'X'$. Podle znaménkové konvence jsou tedy x -ové úsečky mířící do příslušného počátku vpravo (vlevo), tj. ve směru (proti směru) šíření světla v předmětovém prostoru kladné (záporné). Pořadnice y -ové jsou kladné (záporné), míří-li od hlavní osy nahoru (dolů), tj. vlevo (vpravo) od směru postupu světla v předmětovém prostoru.

2. Zobrazení se uskutečňuje přímými paprsky (přímkami) procházejícími předmětovým bodem P , jež zobrazovací soustava přemění ve sdružené paprsky v obrazovém prostoru, protínající se v obrazovém bodu P' sdruženém s bodem P . Význam mají úhly, které paprsky svírají s hlavní osou a s kolmicí dopadu na lámavé nebo odrážející plochy, jimiž se zobrazení uskutečňuje. Jak už jsme uvedli při formulaci zákonů odrazu a lomu, měříme v geometrické optice úhly jen do 90° a od paprsku ke kolmici dopadu. K tomu přistupuje další pravidlo, že úhel mezi paprskem a hlavní osou měříme od hlavní osy k paprsku. Narůstá-li úhel při takto zvolených výchozích přímkách, od nichž úhly měříme, ve směru (proti směru) pohybu hodinových ručiček, je úhel kladný (záporný). Na obr. (6.2) 9a je úhel σ záporný, např. $\sigma = -20,5^\circ$, a úhel σ' je kladný, např. $\sigma' = 10,8^\circ$.

Zobrazením chceme předměty zviditelnit na jiném místě buď v téže velikosti, nebo častěji ve zvětšeném měřítku. Příslušné *zvětšení* pak definujeme poměrem dvou vhodně zvolených sdružených veličin. Význam mají tato tři zvětšení:

1. *Příčné (laterální) zvětšení* (při elementárním výkladu většinou výstižně jenom



Obr. (6.2) 9. Znárodnění předmětového prostoru $OXYZ$ a obrazového prostoru $O'X'Y'Z'$ v meridiánové rovině OXY a $O'X'Y'$: *a* — při různých počátcích O a O' , *b* — se splývajícími počátky $O \equiv O'$

zvětšení zvané), určené poměrem y -ových pořadnic sdružených bodů v obrazovém a předmětovém prostoru:

$$6.2 (19) \quad m = \frac{y'}{y}.$$

2. Úhlové (angulární) zvětšení zvané také konvergenční poměr, určené poměrem tangent úhlů σ' a σ (popř. jenom poměrem velikostí obou úhlů, jsou-li malé), které sdružené paprsky (obrazový a předmětový) svírají s hlavní osou:

$$6.2 (20) \quad g = \frac{\operatorname{tg} \sigma'}{\operatorname{tg} \sigma} \quad \text{nebo} \quad g = \frac{\sigma'}{\sigma}.$$

3. Osové (axiální) zvětšení nebo zvětšení do hloubky určené poměrem dvou elementárních sdružených úseček na hlavní ose:

$$6.2 (21) \quad a = \frac{dx'}{dx}.$$

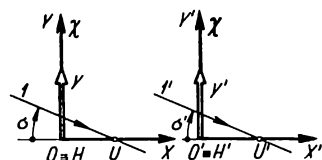
Toto zvětšení je třeba definovat poměrem elementárních délek, protože — jak ukazuje geometrický rozbor kolineárního zobrazení — závisí samo na vzdálenosti x předmětového bodu, popř. na vzdálenosti x' sdruženého obrazového bodu, na rozdíl od příčného zvětšení, které při kolineárním zobrazení na délce pořadnice y , popř. y' samo nezávisí čili pro celou rovinu kolmou k hlavní ose OX , $O'X'$ je stejné. Znamená to, že ani v případě dokonale kolineárního zobrazení není zobrazení ve směru hlavní osy geometricky podobným zobrazením. Naproti tomu plyne z vlastnosti příčného zvětšení, že sice závisí na x (jak poznáme při rozboru zobrazení lomem světelných paprsků), ale nezávisí na y , že obrazci v rovině kolmé k hlavní ose přísluší geometricky podobný obrazec v rovnoběžné rovině. Za střední osové zvětšení mezi vzdálenostmi x_1 a x_2 volíme poměr $\bar{a} = \frac{x'_2 - x'_1}{x_2 - x_1}$.

Příčné a úhlové zvětšení mohou teoreticky nabývat hodnot mezi $+\infty$ a $-\infty$, kdežto osové zvětšení může mít hodnoty jenom mezi 0 a $+\infty$, protože případ $a < 0$ nelze realizovat. Znamená by, že to, co je na předmětu vpředu a vzadu ve směru chodu světelných paprsků, by na obraze bylo obrácené, což nelze uskutečnit.

Zvláštní význam mají sdružené body, pro které má příčné a osové zvětšení velikost právě rovnou jedné.

1. Příčným zvětšením $m = +1$ jsou definovány dva sdružené body H a H' na hlavní ose, které se nazývají hlavní body zobrazovací soustavy. Roviny jimi proložené kolmé k hlavní ose jsou pak hlavní roviny χ a χ' zobrazovací soustavy. Jejich význam je ten, že úsečka délky y kolmá k hlavní ose v hlavní rovině χ předmětového prostoru se zobrazí v hlavní rovině χ' obrazového prostoru jako stejně dlouhá úsečka směřující na touž stranu, tedy $y' = y$. Hlavní body se zpravidla volí jako počátky O a O' obou souřadnicových soustav předmětového a obrazového prostoru [obr. (6.2) 10]. Někdy oba hlavní body, a tedy také počátky souřadnicových soustav spolu splývají [obr. (6.2) 9], jak je tomu při zobrazení lomem na kulové ploše, tenkými čočkami apod.

2. Úhlovým zvětšením $g = +1$ jsou definovány dva sdružené body U a U' na hlavní ose, které nazýváme uzlovými body zobrazovací soustavy. Význam těchto bodů je ten, že k paprsku jdoucímu v předmětovém prostoru bodem U a svírajícímu s hlavní osou úhel σ



Obr. (6.2) 10. Význam hlavních a uzlových bodů zobrazovací soustavy

přísluší v obrazovém prostoru sdružený paprsek jdoucí druhým uzlovým bodem U' a svírající s hlavní osou též úhel σ' , tedy $\sigma = \sigma'$. Sdružené paprsky procházející uzlovými body jsou tedy navzájem rovnoběžné. Obecně jsou polohy uzlových bodů a hlavních bodů různé. Ve zvláštních případech však uzlové a hlavní body navzájem splývají, a to u čoček nebo soustav čoček, má-li prostředí před nimi a za nimi stejný index lomu, jak tomu u optických přístrojů zpravidla bývá; u tenkých čoček v stejnorodém prostředí (např. ve vzduchu) splývají dokonce všechny čtyři body v jediný bod, který je shodný se středem tenké čočky.

3. Má-li kolineární přiřazenost předmětového a obrazového prostoru platit v celém rozsahu obou prostorů, pak také velmi vzdáleným (teoreticky nekonečně vzdáleným) bodům v předmětovém prostoru musí příslušet jisté sdružené body v obrazovém prostoru. Možné jsou jenom dva případy, za a) že příslušné sdružené body v obrazovém prostoru leží v konečné vzdálenosti od zobrazovací soustavy, nebo za b) že jsou v obrazovém prostoru také v nekonečnu.

a) Nekonečně vzdálenému bodu (*úběžnému bodu*) na hlavní ose v předmětovém prostoru přísluší v obrazovém prostoru sdružený bod na hlavní ose, který se jmenuje *ohnisko F' obrazového prostoru (obrazové ohnisko)*. Je-li tento sdružený bod v konečné vzdálenosti, pak musí naopak existovat v konečné vzdálenosti v předmětovém prostoru na hlavní ose bod F , jehož sdružený obrazový bod leží na hlavní ose nekonečně daleko v obrazovém prostoru. Význačný bod F nazývá se *ohnisko předmětového prostoru (předmětové ohnisko)*. Protože obě ohniska F a F' , jsou-li v konečné vzdálenosti, jsou sdružena s úběžnými body v obrazovém a předmětovém prostoru, nejsou sdružena navzájem, tj. obrazové ohnisko není obecně obrazem předmětového ohniska a obráceně.

Roviny φ a φ' proložené ohnisky F a F' kolmo k hlavní ose, a tedy rovnoběžné se souřadnicovými rovinami OYZ a $O'Y'Z'$ nazývají se *předmětová a obrazová ohnisková rovina*. Protože zobrazení je podle předpokladu souměrné kolem hlavní osy, jsou obě ohniskové roviny sdružené s úběžnými rovinami v obrazovém a předmětovém prostoru. To znamená, že všechny velmi vzdálené (teoreticky nekonečně vzdálené) body v předmětovém prostoru, které leží i mimo hlavní osu, se zobrazí v obrazové ohniskové rovině a všechny body v předmětové ohniskové rovině mají svůj obraz v úběžnu v obrazovém prostoru.

Vzdálenost předmětového ohniska F od předmětového hlavního bodu H , měřená ve směru od H k F , nazývá se *předmětová ohnisková vzdálenost f* , vzdálenost obrazového ohniska F' od obrazového hlavního bodu H' , měřená rovněž od bodu H' k F' , nazývá se *obrazová ohnisková vzdálenost f'* . Úsečky f a f' obecně ovšem také nejsou sdružené. Ohniskové vzdálenosti f a f' mohou být kladné nebo záporné podle toho, zda ve shodě se znaménkovou konvencí úsečky $\overrightarrow{HF}$ nebo $\overrightarrow{H'F'}$ míří ve směru nebo proti směru postupu světla v předmětovém prostoru [na obr. (6.2) 11 je $f < 0$, např. $f = -24,5$ cm, a $f' > 0$, např. $f' = 20,3$ cm].

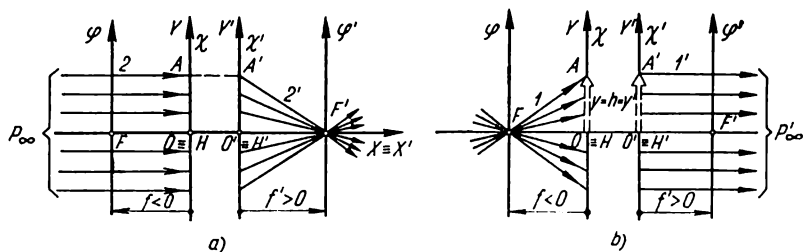
b) Příklad, že úběžnému bodu v předmětovém prostoru přísluší v obrazovém prostoru také úběžný bod, že tedy obrazové ohnisko a tím také předmětové ohnisko leží v nekonečnu obrazového a předmětového prostoru, vede ke způsobu zobrazení, jemuž říkáme *teleskopické*, protože se vyskytuje u dalekohledu. Ohniskové vzdálenosti jsou pak nekonečně velké a zobrazovací soustava se pak nazývá také *afokální (bezohnisková)*. V tomto případě jsou ovšem úběžná ohniska a úběžné ohniskové roviny sdružené.

Ohniska, hlavní a uzlové body nazývají se *základní body* zobrazovací soustavy. Jimi a příslušnými rovinami kolmými k hlavní ose lze zobrazovací soustavy schematizovat.

Vlnoplochy homocentrického svazku paprsků, vystupujících z úběžného bodového zdroje světla, mají v konečnu nekonečně velký poloměr křivosti, takže jejich části jsou částmi navzájem rovnoběžných rovin, k nimž jsou paprsky kolmé [obr. (6.2) 16]. Z úběžného předmětového bodu na hlavní ose přichází proto do zobrazovací soustavy svazek paprsků rovnoběžných s hlavní osou, jimž v obrazovém prostoru přísluší svazek sdružených paprsků,

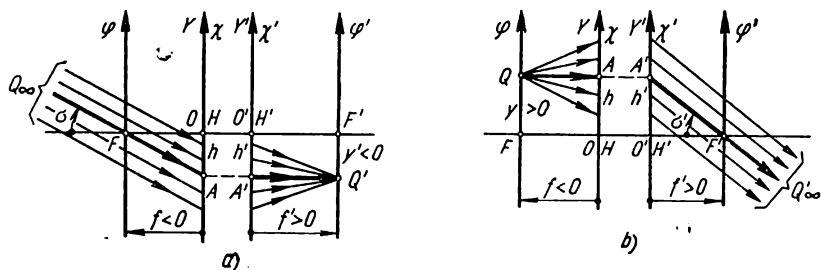
které se protínají buď skutečně, nebo jen zdánlivě v obrazovém ohnisku F' , protože je sdruženo s úběžným předmětovým bodem P_∞ [obr. (6.2) 11a]. Podobně přísluší svazku paprsků protínajících se v předmětovém ohnisku F svazek sdružených paprsků v obrazovém prostoru, které jsou rovnoběžné s hlavní osou, protože předmětové ohnisko má obraz P'_∞ v úběžnu obrazového prostoru [obr. (6.2) 11b].

Pokud jde o vzdálenost rovnoběžných paprsků od hlavní osy a sklon sdružených paprsků vzhledem k hlavní ose, využíváme vlastnosti hlavních rovin, že úsečky v předmětové hlavní rovině χ o délce $y = h$, určené průsečíkem A , např. paprsků 1 nebo 2 s touto rovinou, přísluší stejně dlouhá úsečka v obrazové hlavní rovině χ' ($y' = h$), jejímž koncovým bodem A' musí tedy procházet paprsky 1' a 2' sdružené s paprsky 1 a 2.



Obr. (6.2) 11a — Zobrazení úběžného bodu P_∞ na hlavní ose v obrazovém ohnisku F' ; b — úběžný obraz P'_∞ předmětového ohniska F

Podobně přicházejí od úběžných předmětových bodů ležících mimo hlavní osu, např. od bodu Q_∞ , svazky rovnoběžných paprsků, jež jsou ovšem šikmé vzhledem k hlavní ose a svírají s ní úhel σ ; přísluší jim sdružené paprsky v obrazovém prostoru, které se navzájem protínají v obrazovém bodu Q' , který leží v obrazové ohniskové rovině φ' [obr. (6.2) 12a]. Poloha tohoto bodu je určena paprskem ze šikmého svazku, procházejícím



Obr. (6.2) 12a — Obraz Q úběžného předmětového bodu Q_∞ , b — úběžný obraz Q'_∞ bodu Q v předmětové ohniskové rovině

předmětovým ohniskem F , jehož sdružený paprsek v obrazovém prostoru je rovnoběžný s hlavní osou. Naopak přísluší homocentrickým svazkům paprsků vystupujícím z jednotlivých bodů předmětové ohniskové roviny [např. Q na obr. (6.2) 12b] svazky sdružených paprsků v obrazovém prostoru, které jsou navzájem rovnoběžné a skloněné vzhledem k hlavní ose o úhel σ' , protože sdružený obraz Q'_∞ leží v nekonečnu mimo hlavní osu. Úhel σ' je určen paprskem rovnoběžným s hlavní osou, k němuž sdružený paprsek prochází obrazovým ohniskem F' .

Při teleskopickém zobrazení by každému svazku rovnoběžných paprsků příslušel svazek sdružených paprsků, které by zase byly rovnoběžné.

Je zřejmé, že polohu úběžného předmětového bodu Q_∞ , popř. úběžného obrazového

bodu Q_∞ nelze udát jinak než směrem (úhlem σ , popř. σ') svazku rovnoběžných paprsků vzhledem k hlavní ose zobrazovací soustavy. Tangenta úhlu σ nebo σ' nazývá se *zdánlivá (úhlová) velikost* předmětu nebo obrazu. Naproti tomu úsečky y a y' , popř. h a h' představují *lineární (příčnou) velikost* předmětu a obrazu.

Z konstrukcí na obr. (6.2) 12a, b plynou užitečné vztahy

$$6.2 \quad (22) \quad \frac{h'}{\operatorname{tg} \sigma} = f, \quad \frac{h}{\operatorname{tg} \sigma'} = f',$$

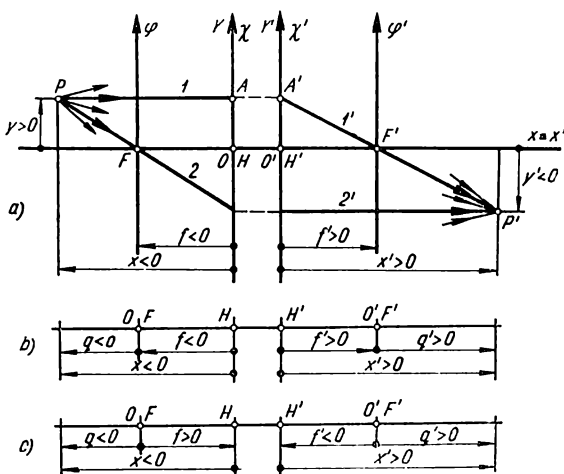
kteří umožňují přepočítat úhlové vzdálenosti (např. mezi hvězdami na obloze) na délky v ohniskové rovině obrazového prostoru zobrazovací soustavy. Plyne z nich zároveň i *Gaussova definice ohniskových vzdáleností*, kterou lze slovy vyjádřit takto:

Ohnisková vzdálenost předmětového (obrazového) prostoru je podíl lineární velikosti obrazu (předmětu) ležícího v ohniskové rovině k zdánlivé velikosti předmětu (obrazu) nekonečně vzdáleného.

Schematizujeme-li zobrazovací soustavu základními body a příslušnými rovinami, které jimi procházejí kolmo k hlavní ose, můžeme na základě uvedených poznatků již provést jednoduchou konstrukci obrazu P' , který přísluší předmětovému bodu P při kolineárním zobrazení [obr. (6.2) 13]. Bod P' je dán průsečíkem alespoň dvou paprsků v obrazovém prostoru, které přísluší dvěma paprskům v předmětovém prostoru, vystupujícím z předmětového bodu P . Paprsku 1, který je v předmětovém prostoru rovnoběžný s hlavní osou, přísluší v obrazovém prostoru paprsek $1'$, který prochází ohniskem F' , a naopak paprsku 2, který v předmětovém prostoru prochází ohniskem F , přísluší v obrazovém prostoru paprsek $2'$, rovnoběžný s hlavní osou. Průsečík A paprsku 1 s hlavní rovinou χ zobrazí se v hlavní rovině χ' ve stejné vzdálenosti od osy v bodu A' . Bodem A' a ohniskem F' je určen směr paprsku $1'$. Stejně je tomu u paprsků 2 a $2'$. Tím je konstruován obraz P' bodu P .

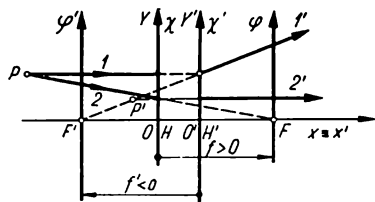
Základní představy optického zobrazování jsme vložili na zobrazovací soustavě, která se nazývá *čočková*, protože soustavu tohoto typu tvoří čočky. Byla to zároveň i soustava spojná, protože svazku rozbíhavých nebo rovnoběžných paprsků v předmětovém prostoru příslušel v obrazovém prostoru svazek sbíhavých paprsků, které se navzájem skutečně protínaly, dávající tak skutečný obraz zobrazovaného bodu. Charakteristickým znakem

čočkové spojný soustavy je, že ohniskové vzdálenosti $f < 0$, $f' > 0$, takže ve směru postupu světla v předmětovém prostoru leží předmětové ohnisko F před předmětovým hlavním bodem H a obrazové ohnisko F' za obrazovým hlavním bodem H' . Použijeme-li stejných zásad ke konstrukci obrazu i v případě, že pořadí ohnisek je opačné, tj. $f > 0$ a $f' < 0$, snadno poznáme, že zobrazovací soustava je pak roztylná; svazku rozbíhavých nebo rovnoběžných paprsků v předmětovém prostoru přísluší v obrazovém prostoru zase svazek rozbíhavých paprsků, které se ve skutečnosti nikde neprotínají a jenom při zpětném prodloužení proti směru chodu světla dávají zdánlivý obraz P' zobrazovaného předmětového bodu P [obr. (6.2) 14].



Obr. (6.2) 13a — Konstrukce obrazu P' bodu P v čočkové spojný soustavě; b, c — volba počátků souřadnicových soustav v ohniscích

Vycházejíce z požadavků, které by ideálně kolineární zobrazení mělo splňovat, vybudovali jsme vlastně už logicky také teorii tohoto zobrazení. Neboť považujeme-li ohniskové vzdálenosti f a f' za konstanty zobrazovací soustavy, můžeme z podobnosti trojúhelníků v konstrukci obrazu P' předmětového bodu P na obr. (6.2) 13 velice snadno odvodit příslušné zobrazovací rovnice, jež vyjadřují analyticky vztahy mezi souřadnicemi x a y



Obr. (6.2) 14. Konstrukce zdánlivého obrazu P' bodu P v čočkové rozptylné soustavě

bodu P v předmětovém prostoru a souřadnicemi x' a y' jeho obrazu P' v obrazovém prostoru. Abychom se vyhnuli zbytečnému opakování, odvodíme je až při výkladu realizace zobrazení pomocí optických prvků.

Na závěr obecných úvah o kolineárním zobrazování se zmíníme ještě o další možnosti volby počátků O a O' souřadnicových soustav předmětového a obrazového prostoru, která bývá někdy užitečná, a to v ohniscích F a F' zobrazovací soustavy. Příslušná transformace je vyjádřena vztahy

$$6.2 \quad (23) \quad x = q + f, \quad x' = q' + f',$$

jsou-li q a q' x -ové souřadnice předmětového bodu P a jemu příslušného obrazového bodu P' , měřené od ohnisek [obr. (6.2) 13b]. Pořadnice y -ové se touto transformací nezmění. Při tom se stále ohniskové vzdálenosti f a f' měří od hlavních bodů, k čemuž je třeba přihlížet při uplatňování znaménkové konvence.

Tak je to zvykem v praktické optice, ačkoli přirozenější by bylo při přechodu k novým počátkům v ohniscích měřit od nich také ohniskové vzdálenosti [obr. (6.3) 13c]. Pak by si ovšem ohniskové vzdálenosti navzájem vyměnily znaménka [na obrázku c) je $f > 0$ a $f' < 0$ proti obrázku b), kde $f < 0$ a $f' > 0$], a transformace 6.2 (23) by měla tvar

$$x = q - f, \quad x' = q' - f'.$$

Zobrazovací rovnice, vyjádřené pomocí souřadnic q , y a q' , y' , nazývají se pak *Newtonovy zobrazovací rovnice*.

6.2.5. Zobrazení lomem na kulové ploše

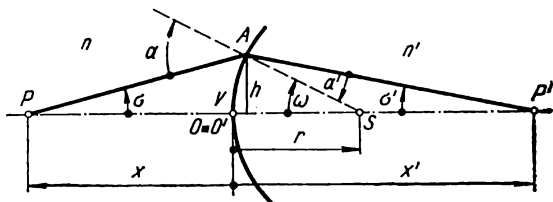
V předchozím článku jsme definovali základní pojmy optického zobrazování, aniž jsme se starali, zda je lze vůbec fyzikálně realizovat. Nyní se budeme zabývat jednotlivými optickými prvky, kterými lze skutečně dostat optické obrazy zvolených předmětů. Takovým základním prvkem může být jakákoli lámací nebo odrazující plocha, oddělující dvě opticky různá prostředí vhodných vlastností. Optická zařízení jsou pak kombinací různých prvků, z nichž se ještě dnes téměř výhradně užívá kulových nebo rovinných ploch, poněvadž jsou po výrobní stránce nejjednodušší. Tyto prvky tvoří zpravidla osově centrovanou soustavu. Přímka, na níž leží středy křivosti jednotlivých prvků soustavy, nazývá se *optická osa*, která je hlavní osou příslušné zobrazovací soustavy.

Kolineární zobrazení libovolně velkých rovinných předmětů kolmých k optické ose libovolně širokými svazky paprsků nelze fyzikálními prostředky přesně realizovat. Pouze bod lze širokými svazky paprsků zobrazit přesně opět jako bod, a to odrazem nebo lomem na Cartesiových plochách (čl. 6.2.2). Tyto plochy mají však pouze teoretický význam, a to nikoli snad proto, že bychom je nedovedli dost přesně vyrobit, ale proto, že jejich tvar závisí na poloze předmětového bodu, takže jinému sousednímu bodu přísluší jiná Cartesiova plocha. Jedinou Cartesiovou plochou nelze širokými svazky zobrazit ani délkový prvek, tím méně prvek plošný.

Jediným zobrazovacím prvkem lze dosáhnout kolineárního zobrazení jen tehdy, omezíme-li se na body ležící tak blízko optické osy, že lze siny a tangenty úhlů, které svírají paprsky s osou, nahradit oblouky (arkusy) a vzdálenosti od osy délkami kruhových oblouků,

jejichž středy leží na optické ose. Takové paprsky nazýváme *nulovými* nebo *paraxiálními*.*) Prostor kolem optické osy, v němž lze paprsky považovat za nulové, nazývá se *Gaussův nitkový prostor*. Výjimku tvoří jen rovinné zrcadlo, u něhož je zobrazení kolineární i při libovolně širokých svazcích paprsků.

Vyšetřeme zobrazení lomem na jediné kulové ploše, oddělující navzájem dvě homogenní optická prostředí s absolutními indexy lomu n a n' . Poloměr r kulové plochy počítáme kladně, je-li plocha k dopadajícím paprskům obrácena vypuklou stranou [obr. (6.2) 15]. Optická osa tohoto zobrazovacího prvku je určena svítícím bodem P a středem křivosti S . Paprsek totožný s optickou osou dopadá na kulovou plochu kolmo, a zachovává proto svůj směr. Obraz P' bodu P leží pak na optické ose a jeho vzdálenost x' od vrcholu V kulové plochy, který volíme za společný počátek $O \equiv O'$ souřadnicových soustav předmětového a obrazového prostoru, je určena průsečíkem dalšího paprsku svazku vystupujícího z bodu P po lomu na kulové ploše. Vyberme paprsek, který svírá s optickou osou úhel σ , dopadá na kulovou plochu v bodu A pod úhlem α , láme se v úhlu α' a svírá po lomu s optickou osou úhel σ' .



Obr. (6.2) 15. Zobrazení osového bodu lomem na kulové ploše

Podle zákona lomu je mezi úhly α a α' vztah

$$n \sin \alpha = n' \sin \alpha',$$

který můžeme pro nulové paprsky nahradit jednodušším vztahem

$$6.2 \text{ (24)} \quad n\alpha = n'\alpha'.$$

Je-li ω úhel, který svírá průvodič $\overline{AS}$ s optickou osou, vzhledem k dohodě o znaménkách úhlů plyne z trojúhelníka PAS na obr. (6.2) 15 ($\omega > 0$, $\alpha > 0$, $\sigma < 0$)

$$\alpha = \omega - \sigma$$

a podobně z trojúhelníka SAP' ($\omega > 0$, $\alpha' > 0$, $\sigma' > 0$)

$$\alpha' = \omega - \sigma',$$

takže rovnici pro lom vyšetřovaného paprsku můžeme psát ve tvaru

$$6.2 \text{ (25)} \quad n(\omega - \sigma) = n'(\omega - \sigma').$$

Je-li dále x vzdálenost předmětového bodu P od vrcholu V kulové plochy a h vzdálenost bodu dopadu A od optické osy, pak přibližně pro nulové paprsky ($\sigma < 0$, $x < 0$, ostatní veličiny jsou kladné)

$$\sigma = \frac{h}{x}, \quad \sigma' = \frac{h}{x'}, \quad \omega = \frac{h}{r}.$$

Dosadíme-li tyto poměry do 6.2 (25), dostaneme

$$6.2 \text{ (26)} \quad n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x} \right) = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x'} \right).$$

*) Prakticky jsou to paprsky, jejichž úhly svírané s optickou osou a úhly dopadu jsou menší než 2° , neboť $\arcsin 0,034\,91 = 2^\circ$ a $\sin 2^\circ = 0,034\,90$; obě hodnoty se liší jen o jednu na pátém desetinném místě.

Tímto vztahem je určena vzdálenost x' obrazu P' bodu P na optické ose nezávisle na velikosti úhlu σ ani na výšce h . To znamená, že při zobrazení velmi úzkým svazkem paprsků, v němž i krajní paprsky svírají s osou velmi malý úhel, přísluší bodu P na ose jediný bodový obraz P' — zobrazení je kolineární (body P a P' jsou sdružené). Poznáme to ostatně ihned, píšeme-li rovnici 6.2 (26) ve tvaru

$$6.2 (27) \quad \frac{n'}{x'} - \frac{n}{x} = \frac{n' - n}{r}.$$

Zavedeme-li ohniskové vzdálenosti f a f' , charakterizující zobrazovací prvek, tak, že položíme

$$6.2 (28) \quad f = -\frac{nr}{n' - n}, \quad f' = \frac{n'r}{n' - n},$$

dostaneme zobrazovací rovnici

$$6.2 (29) \quad \boxed{\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1},$$

kteřá platí také pro kolineární zobrazení na obr. (6.2) 13a. Z podobnosti trojúhelníků na tomto obrázku plynou vztahy $y/f' = -y'/(x' - f')$ a $y'/f = -y/(x - f)$, z nichž srovnáním poměrů y'/y vychází hořejší rovnice.

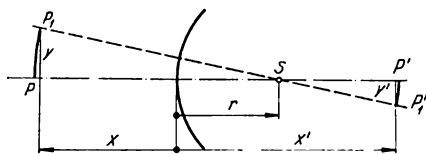
Snadno se přesvědčíme, že konstanty f a f' jsou ohniskové vzdálenosti kulové lámavé plochy. Roste-li vzdálenost $-x$ nade všechny meze, blíží se vzdálenost obrazu od vrcholu

kulové plochy hodnotě $\frac{n'r}{n' - n}$. Obrazem úběžného bodu je však ohnisko F' , takže podíl $\frac{n'r}{n' - n}$ je obrazová ohnisková vzdálenost kulové plochy, měřená od jejího vrcholu. Podobně je tomu s předmětovou ohniskovou vzdáleností, která plyne z podmínky $x' \rightarrow \infty$.

Ze vzorců 6.2 (28) plynou pro ohniskové vzdálenosti důležité vztahy

$$6.2 (30) \quad \frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n} \quad \text{a} \quad f' + f = r.$$

Ukážeme ještě, že se i krátká úsečka kolmá k optické ose zobrazí opět jako úsečka kolmá k ose, že tedy i zobrazení v kolmém směru k ose je kolineární, nevybočuje-li ovšem předmět svou velikostí z Gaussova nitkového prostoru. Pootočíme optickou osu PS na



Obr. (6.2) 16. Zobrazení úsečky kolmé k optické ose

obr. (6.2) 15 kolem středu kulové plochy S o malý úhel, jak je naznačeno na obr. (6.2) 16. Předmětový bod zaujme polohu P_1 . Každému bodu na obloučku PP_1 přísluší bod na obloučku $P'P'_1$. Je-li délka obloučku PP_1 velmi malá, to znamená, je-li úhel, o který jsme pootočili optickou osu, malý, můžeme obloučky PP_1 a $P'P'_1$ nahradit úsečkami délky y a y' , kolmými k optické ose. Z toho je již zřejmé, že se v prostoru paraxiálních paprsků, v němž je toto přiblížení přípustné, zobrazí krátká úsečka y kolmá

k ose opět jako úsečka y' , rovněž kolmá k ose, a obrazem malé rovinné plochy kolmé k optické ose bude zase rovinná plocha kolmá k ose. Snadno vidíme, že obraz větší rovinné plochy kolmé k ose nebude již rovinný, ale bude jistým způsobem zkřiven.

Z podobnosti trojúhelníků na obr. (6.2) 16 vzhledem k tomu, že $x < 0$ a že obraz je převrácený (což vyjadřujeme záporným znaménkem), plyne

$$6.2 (31) \quad \frac{y'}{y} = -\frac{x' - r}{r - x}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za r z druhé rovnice 6.2 (30) a použijeme-li rovnice 6.2 (29), dostaneme pro příčné zvětšení

$$6.2 (32) \quad m = \frac{y'}{y} = \frac{f}{f-x} = \frac{f'-x'}{f'}.$$

Tyto vztahy plynou rovněž přímo z podobnosti trojúhelníků v konstrukci kolineárního zobrazení na obr. (6.2) 13a. Příčné zvětšení lze též vyjádřit pomocí x -ových souřadnic. Dosadíme-li do 6.2 (31) z 6.2 (26), dostaneme po úpravě

$$6.2 (33) \quad m = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \frac{x'}{x}.$$

Pro $x = x' = 0$ vychází z předešlých rovnic příčné zvětšení $m = +1$. To znamená, že rovina proložená vrcholem V kulové plochy kolmo k optické ose představuje obě hlavní roviny χ a χ' , které u jediné zobrazovací kulové plochy splývají. Kulovou zobrazovací plochu lze tedy schematizovat hlavní rovinou totožnou s vrcholovou rovinou, optickou osou, která je zřejmě hlavní osou zobrazovací soustavy, a ohniskovými vzdálenostmi, jež jsou určeny vzorci 6.2 (28) nebo 6.2 (29) a jež jsou měřeny od hlavní roviny.

Zmíníme se ještě o důležitém vztahu mezi lineární a úhlovou velikostí předmětu a obrazu. Pro nulové paprsky můžeme úhlové zvětšení vyjádřit poměrem σ'/σ , který podle obr. (6.2) 15 a vzorce 6.2 (33) je roven

$$6.2 (34) \quad g = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{x}{x'} = \frac{n}{n'} \frac{y}{y'} = \frac{n}{n'} \frac{1}{m}.$$

Odtud plyne *Helmholtzova—Lagrangeova rovnice*

$$6.2 (35) \quad ny\sigma = n'y'\sigma'.$$

Vzhledem k tomu, že obraz vytvořený jednou kulovou plochou může být předmětem druhé kulové plochy, lze tuto rovnici vyslovit takto: Součin z indexu lomu, příčné velikosti a úhlové velikosti obrazu vytvořeného jednou nebo několika kulovými plochami, oddělujícími různá optická prostředí, je stálý. Říkáme, že součin ny, σ , je *invariantou paraxiálního zobrazení*.

6.2.6. Zobrazení odrazem na kulové a rovinné ploše

Dalším základním prvkem, jímž lze fyzikálně uskutečnit kolineární zobrazení, je kulová plocha odrážející světelné paprsky. Protože zákon odrazu $\alpha_2 = -\alpha_1$ plyne formálně ze zákona lomu $n_2 \sin \alpha_2 = n_1 \sin \alpha_1$ pro $n_2/n_1 = -1$, přejdou zobrazovací rovnice pro jednu lámavou plochu ve vzorce pro kulové zrcadlo, položíme-li v nich $n' = -n$. Tak dostaneme z rovnic 6.2 (28) pro ohniskové vzdálenosti kulového zrcadla vzorec

$$f = f' = \frac{r}{2}.$$

U kulového zrcadla splývají obě ohniska v jediný bod F , který leží ve střední vzdálenosti mezi vrcholem V a středem křivosti S kulové plochy. Vystačíme zde tedy s jedinou ohniskovou vzdáleností f , kterou měříme od vrcholu V . Ze zobrazovací rovnice 6.2 (29) plyne pak vzorec

$$6.2 (36) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} = \frac{2}{r},$$

který je *zobrazovací rovnici pro zrcadlo*. Podobně dostaneme ze vzorce 6.2 (32) pro příčné zvětšení, dosadíme-li za f z předešlé rovnice

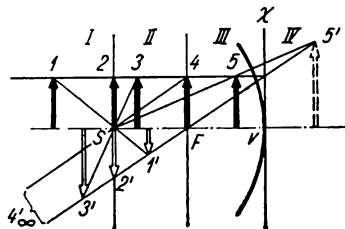
$$6.2 (37) \quad m = \frac{y'}{y} = \frac{f}{f-x} = \frac{f-x'}{f} = -\frac{x'}{x}.$$

Z těchto vzorců pro $x = 0$ a $x' = 0$ plyne $m = +1$, takže stejně jako u kulové lámavé plochy splývají hlavní roviny χ a χ' s tečnou rovinou ve vrcholu V zrcadla. Uzlové body jsou určeny podmínkou, že úhlové zvětšení je pro ně rovno $+1$. Z poměru $\sigma'/\sigma = x/x' = 1$ a ze zobrazovací rovnice 6.2 (36) vychází $x = x' = r$, takže také oba uzlové body splývají v jediný bod, který je totožný se středem křivosti S kulové plochy. (Papřsek jdoucí středem S dopadá na kulovou plochu kolmo, a odráží se proto v témže směru.)

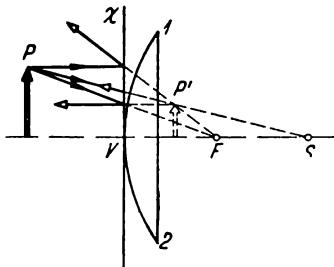
Kulová zrcadla dělíme na *dutá* nebo *konkávní* a *vypuklá* nebo *konvexní* podle toho, zda zrcadlí vnitřní, nebo vnější strana kulového vrchlíku. Pro stavbu optických přístrojů je důležitější zrcadlo duté, kdežto zrcadlo vypuklé má mimo nepatrné výjimky celkem podřadný význam. U dutého zrcadla je poloměr r měřený od vrcholu V podle znaménkové konvence záporný a vzhledem k 6.2 (28) je také ohnisková vzdálenost záporná, tedy

$$r < 0, \quad f < 0 \text{ (pro duté zrcadlo).}$$

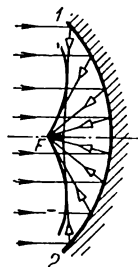
Schematizujeme-li duté zrcadlo optickou (hlavní) osou (určenou středem křivosti S a vrcholem V), ohniskem F a tečnou rovinou ve vrcholu χ , jež je hlavní rovinou, můžeme snadno sestavit obraz předmětu, jak je naznačeno na obr. (6.2) 17. Papřsku rovnoběžnému s optickou osou přísluší papřsek jdoucí ohniskem F , jehož směr je určen průsečíkem rovnoběž-



Obr. (6.2) 17. Vzájemná poloha předmětu a obrazu u dutého kulového zrcadla



Obr. (6.2) 18. Zobrazení vypuklým zrcadlem



Obr. (6.2) 19. Kaustika u dutého zrcadla

ného papřsku s hlavní (vrcholovou) rovinou. Papřsek jdoucí středem křivosti S , který je uzlovým bodem, odráží se v témže směru zpět. Tím je konstrukce obrazu předmětového bodu hotova.

Vypuklé zrcadlo se liší od dutého jen opačným znaménkem poloměru křivosti r , který je kladný, takže i ohnisková vzdálenost je kladná,

$$r > 0, \quad f > 0 \text{ (pro vypuklé zrcadlo).}$$

Na obr. (6.2) 18 je vyznačena konstrukce obrazu P' předmětu P , která je stejná jako u dutého zrcadla. Je zřejmé, že ve vypuklém zrcadle má předmět vždy zdánlivý, přímý a zmenšený obraz za zrcadlem mezi vrcholem V a ohniskem F (homocentrický svazek papřsků, vystupujících z bodu P , tvoří po odrazu na vypuklé kulové ploše vždy rozbíhavý svazek).

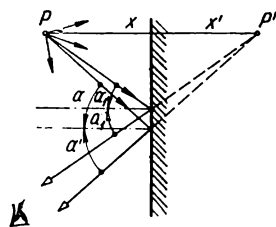
U kulových zrcadel je zobrazení kolineární (bodové) jen v Gaussově nitkovém prostoru. Dopadá-li na zrcadlo většího *průměru* nebo *apertury* [apertura je délka tětiny 1, 2 na obr. (6.2) 17 nebo 18] a malého poloměru křivosti široký svazek papřsků rovnoběžných s optickou osou (úhly dopadu papřsků na kulovou plochu jsou poměrně veliké), neprotínají se odražené papřsky na optické ose v jediném bodě (v ohnisku), ale v celé řadě bodů, které tvoří tzv. *kaustickou čáru*. Kromě toho obalují odražené papřsky jistou plochu, která se nazývá *kaustická* [obr. (6.2) 19], jak se snadno přesvědčíme konstrukcí odražených papřsků. Kaustická čára a kaustická plocha tvoří dohromady tzv. *kaustiku*. Tato kaustika vybíhá v bod F , který je ze všech jejích bodů nejjasnější a který je zřejmě ohniskem zrcadla, neboť

do něho se odrážejí paprsky, které jsou blízké optické ose. Zobrazení kulovým zrcadlem není tedy obecně bodové a odchylka od kolineárního zobrazení nazývá se *otvorová vada*. Stejnou vadu pozorujeme také při zobrazení lomem na kulové ploše nebo čočkou. Jak poznáme v čl. 6.2.9, mají čočky kromě otvorové vady ještě také vadu chromatickou (barevnou). Tuto vadu kulová zrcadla nemají, a proto se jich užívá ke konstrukci astronomických dalekohledů zvaných reflektory (čl. 6.2.13).

U vojenských světlometů, automobilových reflektorů a vůbec k osvětlovacím účelům se používá parabolických zrcadel, která odrážejí i nenulové paprsky vyšlé z bodového zdroje v ohnisku rovnoběžně s optickou osou. Poněvadž však nelze prakticky uskutečnit bodový svítící zdroj, rozbíhají se i v parabolickém zrcadle odražené paprsky v kužel s malým vrcholovým úhlem, což však většinou není na závadu.

Zvláštním případem kulového zrcadla je *rovinné zrcadlo*, k němuž přejdeme, klademe-li v zobrazovací rovnici poloměr křivosti $r = \infty$. Protože $f = f' = r/2$, je zřejmé, že také ohniskové vzdálenosti jsou nekonečné, takže zobrazení je podle čl. 6.2.4 teleskopické. Ze zobrazovací rovnice 6.2 (36) plyne dále $x' = -x$ čili předmět a obraz leží na opačných stranách rovinného zrcadla, a to souměrně. Obraz je vždy zdánlivý, přímý a stejně velký jako předmět, neboť z rovnice 6.2 (37) plyne pro $x' = -x$ příčné zvětšení $m = +1$.

Z jednoduché konstrukce na obr. (6.2) 20 je zřejmé, že kolineární zobrazení se tu uskutečňuje zcela přesně i pro body libovolně vzdálené od osy (tj. od kolmice na zrcadlicí rovinu) libovolně širokými svazky paprsků. Zobrazování rovinným zrcadlem je jediné optické zobrazování, které nemá žádné vady. Jeho užitečnost je však značně omezena, neboť tu nejsou faktory n'/n a r , jejichž vhodnou volbou lze měnit poměr vzdáleností předmětu a obrazu, jakož i zvětšení. Zrcadlením na rovinné ploše se pouze přenáší předmět nebo obraz vytvořený jiným optickým zařízením v nezměněném tvaru na jiné místo.



Obr. (6.2) 20. Zdánlivý obraz vytvořený rovinným zrcadlem

6.2.7. Soustava dvou kulových lámavých ploch. Čočky

Dosud tvořila samostatnou zobrazovací soustavu jediná plocha, oddělující navzájem dvě různá prostředí. Obraz vytvořený jednou zobrazovací soustavou může však být předmětem pro další zobrazovací soustavu. Děje-li se zobrazení paraxiálními paprsky, pak bude zobrazení kolineární nejen u první soustavy, ale také u druhé soustavy, je-li i u ní splněna podmínka, že paprsky, jimiž se zobrazení realizuje, jsou vzhledem k ní paraxiální. To bude zřejmě tehdy, když např. kulové plochy budou mít společnou optickou osu, čili budou-li *centrované*. Výsledný obraz, který dá kombinace zobrazovacích ploch, bude pak sdružený s vlastním předmětem, z čehož plyne, že kombinaci dvou a obecně libovolného počtu kolineárních zobrazení lze nahradit jediným výsledným zobrazením, charakterizovaným jednou soustavou základních bodů. Vyšetříme to u centrované soustavy dvou lámavých kulových ploch, oddělujících navzájem prostředí s různými indexy lomu n_1 , n_2 a n_3 . Mají-li obě prostředí před soustavou a za ní *stejný* index lomu ($n_1 = n_3$) — je-li např. celá soustava ve vzduchu —, jsou podmínky zobrazení stejné jako u *čoček*, jak nazýváme opticky průhledná tělesa, omezená zpravidla dvěma kulovými plochami nebo jednou kulovou plochou a jednou plochou rovinnou.

Máme tedy dvě kulové lámavé plochy o poloměrech r_1 a r_2 [obr. (6.2) 21]. Optickou (hlavní) osou je paprsek, na němž leží středy křivosti obou kulových ploch. Vzájemná poloha těchto ploch je určena vzdáleností d vrcholů V_1 a V_2 , která je vždy kladná (měříme ji od vrcholu V_1 první lámavé plochy ve směru postupu světla). Předpokládejme, že poloměry obou kulových ploch jsou kladné, jak je naznačeno na obr. (6.2) 21. Ohniskové vzdá-

lenosti měřené od vrcholů kulových ploch (od hlavních rovin) jsou podle 6.2 (28) určeny vztahy

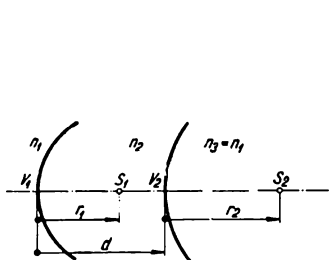
$$f_1 = -\frac{n_1 r_1}{n_2 - n_1}, \quad f'_1 = \frac{n_2 r_1}{n_2 - n_1}, \quad f_2 = -\frac{n_2 r_2}{n_3 - n_2}, \quad f'_2 = \frac{n_3 r_2}{n_3 - n_2}.$$

Omezují-li obě kulové plochy čočku tloušťky d s absolutním indexem lomu n_2 , uloženou v homogenním prostředí, např. ve vzduchu s indexem lomu n_1 , pak $n_3 = n_1$, a proto je výhodné zavést do těchto rovnic relativní index lomu prostředí čočky vzhledem k prostředí, které ji obklopuje, tedy $n = n_2/n_1 = n_2/n_3$. Tak dostaneme

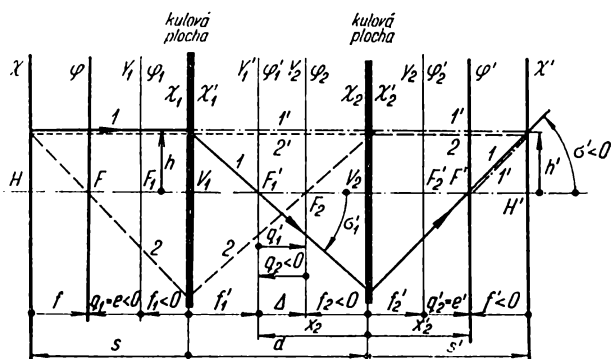
$$6.2 (38) \quad f_1 = -\frac{r_1}{n-1}, \quad f'_1 = \frac{nr_1}{n-1}, \quad f_2 = \frac{nr_2}{n-1}, \quad f'_2 = -\frac{r_2}{n-1}.$$

Násobíme-li spolu levé a pravé strany dvou rovnic, zjistíme, že

$$6.2 (39) \quad f_1 f_2 = f'_1 f'_2 = -\frac{nr_1 r_2}{(n-1)^2}.$$



Obr. (6.2) 21. Schéma tlusté čočky



Obr. (6.2) 22. Chod paprsků centrovanou kombinací dvou lámavých ploch (pro paraxiální paprsky jsou kulové plochy znázorněny rovinami)

Pro obě lámavé kulové plochy platí podle 6.2 (29) zobrazovací rovnice

$$\frac{f_1}{x_1} + \frac{f'_1}{x'_1} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{f_2}{x_2} + \frac{f'_2}{x'_2} = 1.$$

K zjednodušení dalšího výpočtu je výhodné upravit je na Newtonův tvar transformací 6.2 (23); dostaneme

$$6.2 (40) \quad q_1 q'_1 = f_1 f'_1 \quad \text{a} \quad q_2 q'_2 = f_2 f'_2,$$

kde souřadnice q_1 a q_2 jsou vzdálenosti předmětových bodů od předmětových ohnisek F'_1 a F'_2 a q'_1 , q'_2 jsou vzdálenosti sdružených obrazových bodů od obrazových ohnisek F_1 a F_2 . Přitom ohniskové vzdálenosti měříme stále od hlavních bodů, jež leží ve vrcholech V_1 a V_2 obou kulových ploch.

Vzájemnou polohu obou centrovaných zobrazovacích soustav, z nichž každou tvoří jedna lámavá plocha, lze udat kromě tloušťkou d , která je vzdáleností hlavních rovin $\chi_1 \equiv \chi'_1$ a $\chi_2 \equiv \chi'_2$ jednotlivých zobrazovacích soustav, také tzv. *optickým intervalem* Δ , který určuje vzdálenost ohniskové roviny φ_2 od ohniskové roviny φ'_1 . Podle znaménkové konvence je optický interval $\Delta = \overrightarrow{F'_1 F_2}$ kladný (záporný), leží-li ve směru dopadu světla obrazové ohnisko F'_1 první soustavy před (za) předmětovým ohniskem F_2 druhé soustavy.

Kombinací obou centrováných zobrazovacích soustav chceme nyní nahradit jedinou výslednou soustavou, charakterizovanou výslednými základními body a příslušnými rovinami. K tomu účelu vyšetříme průchod světelného paprsku I na obr. (6.2) 22 složenou zobrazovací soustavou; paprsek I je v předmětovém prostoru rovnoběžný s optickou (hlavní) osou. V obrazovém prostoru první (přední) soustavy prochází paprsek I ohniskem F'_1 , které je obrazem úběžného bodu na hlavní ose v první soustavě. Bod F'_1 zobrazí druhá (zadní) soustava bodem F'' na hlavní ose, jímž prochází paprsek I v obrazovém prostoru této soustavy. Bod F'' je patrně obrazem úběžného bodu na hlavní ose, vytvořeným kombinací obou soustav, a je proto obrazovým ohniskem výsledného zobrazení. Položíme-li podle obr. (6.2) 22

$$\overrightarrow{F'_1 F_2} = -q_2 = \Delta, \quad \overrightarrow{F'_2 F''} = q'_2 = e',$$

dostaneme ze zobrazovací rovnice 6.2 (40)

$$6.2 (41) \quad e' = -\frac{f_2 f'_2}{\Delta}.$$

Vzdálenost e' vychází kladně, je-li $f_2 < 0$, $f'_2 > 0$ a $\Delta > 0$, což je ve shodě s obr. (6.2) 22.

Obrazem výsledného předmětového ohniska F obou soustav je úběžný bod v obrazovém prostoru. Paprsek 2, jdoucí bodem F a ohniskem F_2 , je tedy po průchodu oběma soustavami rovnoběžný s hlavní osou. Položíme-li podle obrázku

$$\overrightarrow{F_1 F} = q_1 = e, \quad \overrightarrow{F'_1 F_2} = q'_1 = \Delta,$$

vychází z příslušné zobrazovací rovnice 6.2 (40)

$$6.2 (42) \quad e = \frac{f_1 f'_1}{\Delta}.$$

Vzdálenost e je v našem případě ve shodě s obr. (6.2) 22 záporná, neboť $f_1 < 0$, $f'_1 > 0$ a $\Delta > 0$. Vzdálenostmi e a e' jsou určeny polohy ohniskových rovin φ a φ' výsledného zobrazení. Jeho ohniskové vzdálenosti určíme takto:

Je-li χ' obrazová hlavní rovina výsledného zobrazení, musí paprsek rovnoběžný s hlavní osou a protínající rovinu χ' ve vzdálenosti h' od hlavní osy postupovat dále do obrazového ohniska F'' . Podle obr. (6.2) 22 je tedy rovina χ' určena průsečíkem paprsku I rovnoběžného s hlavní osou ve vzdálenosti h' a sruženého paprsku I' jdoucího ohniskem F' . Podobně je tomu u předmětové hlavní roviny χ .

K početnímu určení ohniskových vzdáleností výsledného zobrazení vyjdeme z úhlů σ'_1 a σ' , které paprsek I svírá s hlavní osou. Za předpokladu, že paprsek je paraxiální, podle obr. (6.2) 22 $\sigma'_1 = h/f'_1$ a $\sigma' = h'/f'$ a úhlové zvětšení podle 6.2 (34)

$$\frac{\sigma'}{\sigma'_1} = \frac{x_2}{x'_2} = \frac{f_2 - \Delta}{f'_2 + e'} = \frac{f'_1}{f'},$$

protože $h = h'$. Vhodnější vzorec pro f' dostaneme, dosadíme-li ještě za e' ze vztahu 6.2 (41). Použijeme-li potom stejným způsobem paprsku 2 v přední zobrazovací soustavě, dostaneme pro výsledné ohniskové vzdálenosti vztahy

$$6.2 (43) \quad \boxed{f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} \quad \text{a} \quad f = \frac{f_1 f_2}{\Delta},}$$

jimiž jsou polohy hlavních rovin χ a χ' výsledného zobrazení určeny. Ohniskové vzdálenosti f a f' měříme ovšem zase od hlavních bodů k ohniskům, při čemž se řídíme znaménkovou

konvencí. Ve shodě s obr. (6.2) 22 vychází $f' < 0$, jsou-li f'_1, f'_2 a Δ kladné, a $f > 0$, mají-li f_1 a f_2 stejná znaménka a je-li Δ kladné.

Vzorce pro ohniskové vzdálenosti, které jsme odvodili, platí pro kolinéární zobrazení obecně, zprostředkuje-li je libovolná centrovaná kombinace dvou kolinéárních soustav, z nichž každou charakterizují její ohniskové vzdálenosti, a jejichž vzájemnou polohu určuje optický interval. Máme-li jich použít u čočky, je třeba upravit je tak, aby obsahovaly veličiny, které jsou na čočce přímo měřitelné, tj. poloměry křivosti r_1, r_2 ploch, které čočku omezují, tloušťku čočky d a index lomu materiálu, z něhož je čočka zhotovena. Podle obr. (6.2) 22 souvisí tloušťka d čočky s optickým intervalem vztahem

$$d = f'_1 + \Delta - f_2,$$

takže optický interval je vzhledem k 6.2 (38) vyjádřen vztahem

$$6.2 (44) \quad \Delta = d - f'_1 + f_2 = \frac{d(n-1) - n(r_1 - r_2)}{n-1}.$$

Výslednou obrazovou ohniskovou vzdálenost kombinace obou zobrazovacích ploch vypočteme ze vztahu 6.2 (43):

$$6.2 (45) \quad f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = \frac{nr_1 r_2}{(n-1)[d(n-1) - n(r_1 - r_2)]}.$$

Tím je určena obrazová ohnisková vzdálenost f' a zároveň i předmětová ohnisková vzdálenost f , protože podle 6.2 (30) $f'/f = -n_3/n_1$, což platí zcela obecně, jak lze snadno dokázat pomocí vztahů 6.2 (43). Je-li $n_1 = n_3$, jak tomu např. je u čočky ve vzduchu, $f = -f'$.

U čoček obklopených stejným prostředím, např. vzduchem, užívá se kromě ohniskových vzdáleností s výhodou též převrácené hodnoty obrazové ohniskové vzdálenosti, která se nazývá *optická mohutnost* nebo též *lámanost* D čočky, tedy

$$6.2 (46) \quad D = \frac{1}{f'}.$$

Ohniskové vzdálenosti se v technické optice měří zpravidla v jednotkách cm. Optická mohutnost se však měří v jednotkách m^{-1} . Tato jednotka má název *dioptrie*, tedy

$$6.2 (47) \quad [D] = \text{dioptrie} = m^{-1}.$$

Mezi ohniskovou vzdáleností v cm a optickou mohutností v m^{-1} platí vztah

$$6.2 (48) \quad D = \frac{100}{f'}.$$

Například čočka, jejíž optická mohutnost je 2 dioptrie, má ohniskovou vzdálenost $f' = 100/D = 100/2 = 50$ cm.

Pro optickou mohutnost čočky plyne z 6.2 (45) po úpravě vztah

$$6.2 (49) \quad D = \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2 d}{nr_1 r_2}.$$

Zavedeme-li křivosti čočkových ploch v meridiánovém řezu

$$\varrho_1 = \frac{1}{r_1}, \quad \varrho_2 = \frac{1}{r_2},$$

lze rovnici 6.2 (49) přepsat na tvar

$$6.2 (50) \quad D = (n-1) (\varrho_1 - \varrho_2) + \frac{(n-1)^2}{n} \varrho_1 \varrho_2 d.$$

Výsledné ohniskové vzdálenosti měříme od výsledných hlavních rovin čočky, a proto je třeba ještě určit vzdálenost s výsledné předmětové hlavní roviny χ od předního vrcholu čočky V_1 a vzdálenost s' výsledné obrazové hlavní roviny χ' od zadního vrcholu V_2 čočky. Podle obr. (6.2) 22

$$s = f_1 + e - f, \quad s' = f'_1 + e' - f',$$

kde vzdálenosti e a e' jsou určeny vztahy 6.2 (41) a 6.2 (42). Vzhledem k 6.2 (43) dostaneme tak

$$s = f_1 + \frac{f_1 f'_1}{\Delta} - \frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{f_1}{\Delta} (\Delta + f'_1 - f_2) = \frac{f_1}{\Delta} d.$$

Podle 6.2 (43) a 6.2 (38)

$$\frac{f_1}{\Delta} = \frac{f}{f_2} = \frac{(n-1)f}{nr_2} = -\frac{(n-1)f'}{nr_2},$$

takže pro vzdálenost s vychází

$$6.2 (51) \quad s = -\frac{n-1}{n} \frac{f'd}{r_2} = -\frac{r_1 d}{d(n-1) - n(r_1 - r_2)}$$

a podobně

$$6.2 (52) \quad s' = -\frac{n-1}{n} \frac{f'd}{r_1} = -\frac{r_2 d}{d(n-1) - n(r_1 - r_2)}.$$

Z obou posledních rovnic plyne

$$6.2 (53) \quad \frac{s'}{s} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Tím jsme určili polohu hlavních rovin χ , χ' a hlavních bodů H , H' , v nichž hlavní roviny protínají optickou osu.

Ohniskovými vzdálenostmi f' a $f = -f'$, vyjádřenými vztahem 6.2 (45), nebo optickou mohutností a hlavními body, jejichž polohy v čočce jsou určeny vzorci 6.2 (51) a 6.2 (52), je čočka opticky úplně určena.

Podle způsobu zobrazení dělíme čočky na *spojné* (*spojky*), jež tvoří zobrazovací soustavu, definovanou veličinami

$$f' > 0, \quad f = -f' < 0, \quad D > 0,$$

a na čočky *rozptylné* (*rozptylky*), jež představují soustavu, charakterizovanou veličinami

$$f' < 0, \quad f = -f' > 0, \quad D < 0.$$

Vlastnosti čoček závisí nejen na velikostech a znaménkách obou poloměrů křivosti r_1 a r_2 , jak se často uvádí, ale též na tloušťce d . Ukážeme to na příkladu čočky dvojevypuklé, u níž $r_1 > 0$ a $r_2 < 0$, při čemž ovšem předpokládáme, že relativní index lomu $n > 1$. Je-li $d(n-1) < n(r_1 - r_2)$, tj. je-li tloušťka čočky malá, plyne z 6.2 (44) $\Delta < 0$ a z 6.2 (45) vzhledem k tomu, že $r_2 < 0$, je $f' > 0$; čočka je tedy spojná. Zvětšíme-li tloušťku d tak, že je právě $d(n-1) = n(r_1 - r_2)$, pak $\Delta = 0$ a obě ohniskové vzdálenosti jsou nekonečné. Čočka tvoří soustavu teleskopickou. Je-li konečně tloušťka čočky tak velká, že $d(n-1) > n(r_1 - r_2)$, pak $\Delta > 0$ a $f' < 0$, dvojevypuklá čočka je rozptylná.

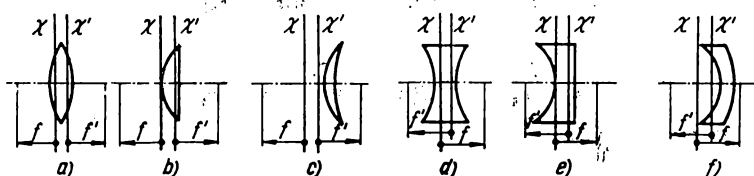
Podobným rozбором dojdeme k různým druhům čoček, jejichž běžné tvary jsou nakresleny na obr. (6.2) 23. První tři jsou spojky, a to a) dvojevypuklá (bikonvexní),

b) ploskovypuklá (plankonvexní), *c)* dutovypuklá (konkávkonvexní nebo kladný meniskus), další čočky jsou rozptylky, a to *d)* dvojdutá (bikonkávni), *e)* ploskodutá (plankonkávni) a *f)* vypuklodutá (konvexkonkávni nebo záporný meniskus). Na obrázku jsou vyznačeny polohy hlavních rovin a ohniskové vzdálenosti. U ploskovypuklé nebo ploskoduté čočky, u níž jeden poloměr je nekonečně veliký, splývá vždy jedna hlavní rovina s tečnou rovinou ve vrcholu kulové plochy. Plyne to ze vzorců 6.2 (51) a 6.2 (52), z nichž pro $r_1 \rightarrow \infty$ vychází $s = d/n$ a $s' = 0$ a pro $r_2 \rightarrow \infty$, $s = 0$ a $s' = -d/n$.

Známe-li polohy hlavních rovin čočky a ohniskové vzdálenosti, provedeme konstrukci obrazu podle obr. (6.2) 13 nebo (6.2) 14 podle toho, zda jde o spojku, nebo rozptylku. Snadno lze dokázat, že u čočky v homogenním prostředí splývají uzlové body s hlavními body. Toho lze také využít při konstrukci obrazu; dva sdružené paprsky procházející hlavními body jsou rovnoběžné (úhlové zvětšení je rovno jedné). Početně určíme polohu obrazu a příčné zvětšení ze zobrazovacích rovnic 6.2 (29) a 6.2 (32), položíme-li v nich $f = -f'$, tedy

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}, \quad m = \frac{y'}{y} = \frac{f' - x'}{f'} = \frac{x'}{x}.$$

To jsou zobrazovací rovnice pro čočku.



Obr. (6.2) 23. Různé druhy čoček

V technické optice se často užívá čoček, jejichž tloušťky jsou malé proti poloměrům křivosti. Abstrakcí je nekonečně tenká čočka nebo prostě *tenká čočka*, u níž $d \rightarrow 0$. Tím se velmi zjednoduší vztahy, které jsme odvodili pro tlustou čočku. Tak plyne z 6.2 (51) a 6.2 (53) $s = 0$ a $s' = 0$ čili obě hlavní roviny χ a χ' splývají s rovinou čočky, kterou si představujeme jako tenký lístek. Pro obrazovou ohniskovou vzdálenost takové čočky plyne z 6.2 (45)

$$6.2 (54) \quad f' = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)};$$

pro předmětovou ohniskovou dálku platí ovšem stejně $f = -f'$. Optická mohutnost

$$6.2 (55) \quad D = \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = (n-1)(\varrho_1 - \varrho_2) = (n-1)\sigma,$$

kde $\sigma = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \varrho_1 - \varrho_2$, nazývá se *vypuklost* čočky.

Zobrazovací rovnice platí ovšem nezměněně, jenže ohniskové vzdálenosti a vzdálenosti předmětu a obrazu měříme prostě od povrchů čočky. Také konstrukce obrazu je též jako na obr. (6.2) 13 a (6.2) 14, jenže obě hlavní roviny splývají v jedinou rovinu, představující tenkou čočku pro paraxiální paprsky.

Spojky mohou dávat různé obrazy podle polohy předmětu vzhledem k čočce; pokud jsou skutečné, jsou vždy obrácené a mohou být zmenšené, stejně velké nebo zvětšené. Přímý obraz je u spojek vždy zvětšený a zdánlivý.

Rozptylka dává pro skutečné předměty pouze zdánlivé a zmenšené obrazy. Rozptylka může však zdánlivý předmět, např. obraz vytvořený spojkou, je-li ve vhodné vzdálenosti, zobrazit ve skutečný a zvětšený obraz.

6.2.8. Centrovaná soustava tenkých čoček

Dvě tenké čočky o ohniskových vzdálenostech f_1 a f_2 , uspořádané souose ve vzdálenosti v od sebe, jsou kombinací dvou optických soustav, jejichž optický interval je podle obr. (6.2) 24

$$\Delta = v - f_1 + f_2 = v - f_1' - f_2'.$$

Výsledná obrazová ohnisková vzdálenost podle vztahu 6.2 (43) je

$$6.2 (56) \quad f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - v}.$$

Pro optickou mohutnost soustavy dostáváme tak vzorec

$$6.2 (57) \quad D = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{v}{f_1' f_2'} = D_1 + D_2 - D_1 D_2 v.$$

Vzdálenost e výsledné ohniskové roviny φ od předmětové ohniskové roviny φ_1 první čočky a vzdálenost e' výsledné ohniskové roviny φ' od obrazové ohniskové roviny φ_2' druhé čočky jsou vzhledem k 6.2 (41) a (42) určeny vztahy

$$6.2 (58) \quad e = -\frac{f_1'^2}{\Delta}, \quad e' = \frac{f_2'^2}{\Delta},$$

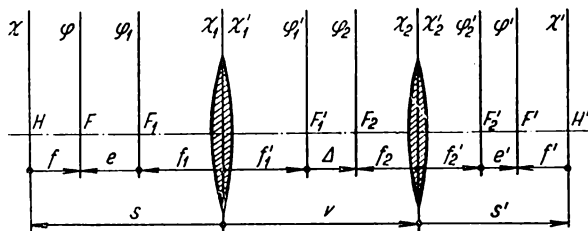
poněvadž obě čočky jsou obklopeny stejným prostředím, takže $f_1 = -f_1'$ a $f_2 = -f_2'$. Stejně snadno určíme vzdálenost s výsledné první hlavní roviny χ od první čočky (přesněji od přední hlavní roviny první čočky) a vzdálenost s' výsledné druhé hlavní roviny χ' od druhé čočky (od zadní hlavní roviny druhé čočky).

Podle obr. (6.2) 24

$$s = f_1 + e - f, \\ s' = f_2 + e' - f',$$

takže dosadíme-li ze vzorců v tomto článku, dostaneme

$$s = \frac{v f_1'}{f_1' + f_2' - v}, \\ s' = \frac{-v f_2'}{f_1' + f_2' - v}, \\ \frac{s'}{s} = -\frac{f_2'}{f_1'}.$$



Obr. (6.2) 24. Centrovaná soustava dvou čoček

Dotýkají-li se dvě tenké čočky nebo jsou-li čočky tak konstruovány, že hlavní rovina χ_1' první čočky splývá s hlavní rovinou χ_2 druhé čočky, je $v = 0$ a platí prostě

$$D = D_1 + D_2.$$

Dvě tenké čočky těsně k sobě přiléhající chovají se jako jediná tenká čočka, jejíž optická mohutnost je rovna součtu mohutností obou čoček. Pro k tenkých čoček, které se dotýkají, platí pak zřejmě

$$6.2 (59) \quad D = D_1 + D_2 + \dots + D_k \quad \text{nebo} \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} + \dots + \frac{1}{f_k'}$$

a vzhledem k 6.2 (55)

$$6.2 (60) \quad D = \frac{1}{f'} = \sum_{i=1}^k (n_i - 1)(\varrho_i - \varrho_i'),$$

kde ϱ_i a ϱ_i' jsou křivosti i -té čočky na předmětové a obrazové straně.

Při konečné vzdálenosti v dvou čoček mohou nastat různé případy zobrazení. Jsou-li obě čočky spojné, tj. $f'_1 > 0$ a $f'_2 > 0$, je soustava spojná ($D > 0$) a je nejlámavější, když $v = 0$. S rostoucím v klesá D , až při $v = f'_1 + f'_2$ klesne na nulu, tj. ohniskové dálky jsou nekonečné. Soustava je teleskopická. Takové soustavy se užívá v astronomických dalekohledech. Jak jsme se již zmínili, jejím charakteristickým znakem je zvláštnost, že rovnoběžný svazek paprsků vstupující do soustavy, který by se měl sbíhat v jednom bodě v ohniskové rovině obrazového prostoru [obr. (6.2) 12], vystupuje ze soustavy opět jako rovnoběžný, neboť obrazová ohnisková rovina je úběžná. Je-li $v > f'_1 + f'_2$, pak $D < 0$, soustava je rozptylná a tím lámavější, čím větší je vzájemná vzdálenost v obou čoček.

Jsou-li obě čočky rozptylné, tj. $f'_1 < 0$ a $f'_2 < 0$, je také jejich kombinace rozptylná, $D < 0$, a to při libovolném $v > 0$. S rostoucím v roste lámavost soustavy.

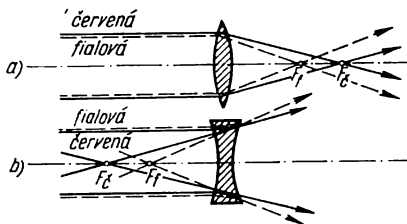
Je-li jedna čočka spojná (např. $f'_1 > 0$) a druhá rozptylná ($f'_2 < 0$) tak, že $f'_1 + f'_2 > v > 0$, pak vzhledem k 6.2 (56) je soustava obou čoček rozptylná, $D < 0$; při $v = f'_1 + f'_2$ je soustava efokální a konečně při $v > f'_1 + f'_2$ stává se spojnou a s rostoucím v lámavější. Je-li pak $f'_1 > 0$ a $f'_2 < 0$, avšak $f'_1 + f'_2 < 0$, je soustava obou čoček při všech $v > 0$ spojná a její lámavost s rostoucím v roste.

6.2.9. Vady čoček a jejich odstranění

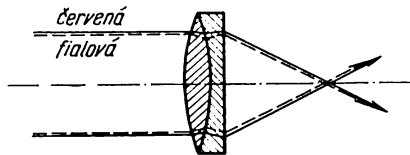
Jak jsme již poznali při odvozování jednoduchých rovnic v předchozích článcích, zobrazí čočka bod předmětu opět jako bod jedině tehdy, když se zobrazení děje nulovými paprsky. Kromě toho musí být světlo dopadající na čočku jednobarevné, aby se svazek v čočce lámal při jediném indexu lomu. Za jiných podmínek je zobrazení čočkou zatíženo několika vadami, jež se projevují současně, o nichž však promluvíme odděleně. Nazývají se také *aberrace optického zobrazení*.

A. Vada barevná

Jak je vyloženo v čl. 6.2.3, nastává při průchodu „bílého“ (složeného) světla disperzním prostředím, jakým je čočka, rozklad světla na jednotlivé barevné složky, neboť pro každou barvu (vlnovou délku) je index lomu jiný. Tento rozdíl se nejvíce projevuje u barev, jež jsou na okrajích spektra, tedy u paprsků barvy červené a fialové. Fialové paprsky se lámou více než červené a tak se svazek paprsků rovnoběžný s optickou osou láme do řady ohnisek;



Obr. (6.2) 25. Chromatická vada u spojky a rozptylky



Obr. (6.2) 26. Achromatická kombinace spojky a rozptylky,

na okraji bližším k čočce (u spojky) je ohnisko F_f pro fialovou barvu a na vzdálenějším okraji ohnisko F_c pro barvu červenou [obr. (6.2) 25a]. U rozptylky je rovněž ohnisko (zdánlivé) pro fialovou barvu F_f blíže k čočce a ohnisko F_c pro červenou barvu dále od čočky, avšak ve směru dopadu světla je pořadí ohnisek opačné (obr. b). Obraz takto vzniklý je v jisté rovině kolmé k ose ostrý pouze pro jednu barvu a je ohraničen jinými barvami. Poněvadž pořadí ohnisek u spojky a rozptylky ve směru dopadu paprsků je opačné, je možné vhodnou kombinací spojky z korunového skla a rozptylky z disperznějšího materiálu (flintového skla) barevnou vadu aspoň částečně odstranit, což nazýváme *achromatizací optické soustavy* [obr. (6.2) 26]. Pro mnohé účely stačí achromatizace dosažená dvěma čočkami z téhož druhu skla, které k sobě nepřiléhají a jejichž vzdálenost je rovna aritmetickému průměru ohniskových vzdáleností (viz čl. 6.2.11).

B. Otvorová (kulová) vada

Tuto vadu jsme poznali již u sférického zrcadla. Vzniká, dopadá-li na čočku široký svazek paprsků monochromatického záření, vystupující z předmětového bodu P na optické ose. Vymežíme-li z takového svazku kruhovou clonkou paraxiální svazek paprsků a clonkou tvaru mezikruží svazek okrajových paprsků, jak je naznačeno na obr. (6.2) 27a, nesbíhají se všechny paprsky po průchodu čočkou do jediného bodu, ale paraxiální paprsky se protínají v bodě P_s a okrajové paprsky v bodě P_k . U spojné čočky leží bod P_k tím blíže k čočce než bod P_s , čím dále od optické osy dopadají okrajové paprsky na čočku. Vzdálenost $\overrightarrow{P_s P_k} = \Delta x$ nazývá se *otvorová vada*. U spojky je $\Delta x < 0$, neboť ji měříme od paraxiálního obrazu P_s .

Stejně jako u sférického zrcadla obalují lomené paprsky *kaustickou plochu* [obr. (6.2) 27b]. Kromě toho vytvoří paprsky celého svazku na ose světelnou úsečku zvanou *kaustická čára*. Délka této čáry je vymezena obrazem vytvořeným paprsky nulovými a průsečíky krajních paprsků s osou. Kaustická plocha a kaustická čára nazývají se souhrnně *kaustika*.

Tato vada způsobuje, že obrazem bodu na ose není v žádné rovině kolmé k ose bod, nýbrž neostrá malá ploška, neboť zachytíme-li obraz např. v rovině jdoucí bodem P_s , vznikají kolem jasného středu méně jasné kruhové plochy, a to působením paprsků jdoucích mezi oběma krajními body kaustické čáry. Řezy kaustikou kolmé k optické ose jsou naznačeny na obr. (6.2) 27c.

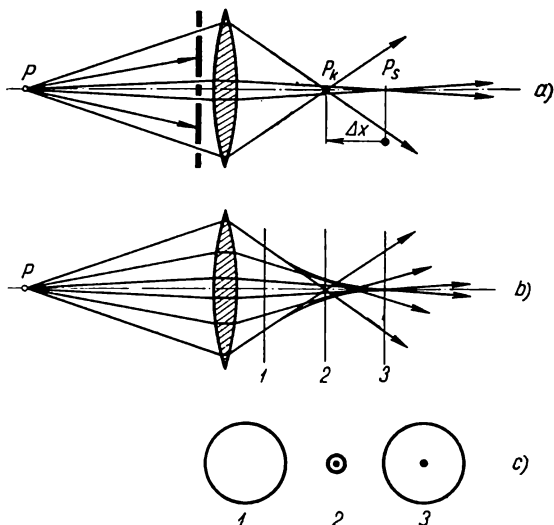
Zostření obrazu lze dosáhnout odelením krajových paprsků, avšak omezením svazku paprsků klesá velmi rychle světlost obrazu. Otvorovou vadu můžeme podobně jako vadu chromatickou částečně kompenzovat kombinací spojky s rozptylkou (nebo kombinací několika čoček), neboť jak snadno vidíme, lámou se v rozptylce paprsky vzdálenější od optické osy do virtuálního ohniska, jež rovněž leží blíže k čočce než ohnisko nulových paprsků, avšak v opačném pořadí než u rozptylky. U rozptylky tedy $\Delta x > 0$.

Dosáhneme většinou jen splynutí v jediný bod obrazů P_s a P_k , vytvořených paraxiálními a okrajovými paprsky. Pro tyto paprsky je pak sférická vada odstraněna úplně, avšak pro střední paprsky zůstává malá aberace, která však již tak nevadí. Říkáme, že soustava je otvorově korigována pro bod P na optické ose.

Soustava korigovaná pro osový bod P není obecně korigována zároveň též pro sousední bod, ležící v rovině kolmé k ose a procházející bodem P . Aby se plošný prvek kolmý k optické ose kolem bodu P zobrazil bodově v podobný plošný prvek kolmý k optické ose kolem sdruženého bodu P' , musí být příčné zvětšení y'/y , vztahující se na oba sdružené body P a P' , pro libovolné sklon paprsků vzhledem k optické ose stálé. Rozbor ukazuje, že tomu tak bude, je-li poměr sinů osových sklonů σ a σ' libovolných sdružených paprsků stálý. Jsou-li n a n' indexy lomu prostředí před a za optickou soustavou, v nichž jsou předmětový a obrazový bod P a P' , má příslušná podmínka tvar obdobný rovnici 6.2 (35), a to

$$6.2 \quad (61) \quad n'y' \sin \sigma' = ny \sin \sigma;$$

nazývá se *sinusová podmínka*. Sdružené body P a P' na optické ose, pro jejichž okolí je tato podmínka splněna, nazývají se *aplanatické*.

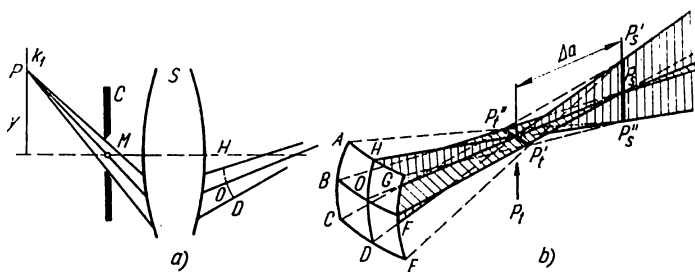


Obr. (6.2) 27. Otvorová vada spojky

C. Astigmatismus

Širokými paprsky můžeme ostře zobrazit jen malou plošku kolem bodu na optické ose zobrazovací soustavy. Často je však třeba zobrazit také poměrně velkou rovinu; lze to patrně provést jen velmi úzkými svazky paprsků, vymezenými vhodně clonkami z širokého svazku, který by optickou soustavou mohl procházet. Nejčastěji se užívá kruhových clonek, jejichž střed leží na optické ose soustavy. Střední paprsek PM homocentrického svazku vystupujícího z předmětového bodu P a omezeného clonkou C , který prochází středem M clonky, nazývá se *hlavní paprsek* [obr. (6.2) 28a]. Je-li vyšetřovaný bod P předmětu ve velké vzdálenosti y od optické osy, dopadá úzký svazek paprsků značně šikmo na zobrazovací soustavu S . Ukážeme, že ani v ideálním případě svazku paprsků z elementárního otvoru nezobrazí se bod vzdálený od osy jako bod; zobrazení tedy není bodové (stigmatické), nýbrž je *nebodové (astigmatické)*.

Dopadá-li na optickou soustavu homocentrický svazek paprsků vystupující z bodu na optické ose, je hlavní paprsek tohoto svazku totožný s optickou osou soustavy, takže svazek je před vstupem do soustavy i po výstupu z ní souměrný kolem optické osy. Vlnoplochy paprsků před soustavou jsou kulové, po výstupu ze soustavy nejsou obecně již kulové, jsou však rotační vzhledem k optické ose, takže meridiánové řezy vlnoplochy jsou vesměs stejné křivky. Tím vzniká kaustická plocha, která je rovněž rotační.



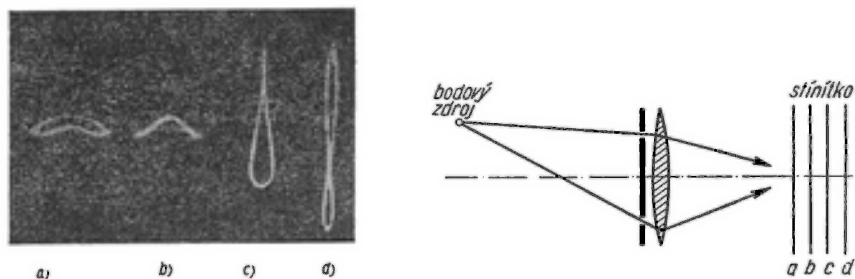
Obr. (6.2) 28. Vznik astigmatismu při šikmém dopadu úzkého svazku paprsků

Jestliže však na optickou soustavu dopadá šikmý svazek, jehož hlavní paprsek je s optickou osou různoběžný, nebudou vlnoplochy svazku po výstupu ze soustavy tvořit rotační plochy, nýbrž to budou nějaké plochy obecnější. Budiž $ACEGA$ na obr. (6.2) 28b vlnoplocha velmi úzkého a šikmého svazku paprsků na obr. (6.2) 28a po výstupu z optické soustavy. Na každé obecně zakřivené ploše můžeme v každém jejím bodě vést dva k sobě kolmé normálové řezy zvané hlavní, v nichž má plocha největší a nejmenší poloměr křivosti (*hlavní poloměry křivosti*). V případě, který vyšetřujeme, necht' je DOH hlavní řez s největším poloměrem křivosti a BOF hlavní řez s nejmenším poloměrem křivosti. Střed křivosti řezu DOH je v bodě P_t a střed křivosti BOF je v bodě P_s . Vlnoplochu elementárního plošného obsahu můžeme si tedy představit vytvořenou velmi malou rotací kruhového obloučku DOH poloměru $\overline{OP_t}$ kolem osy $P'_sP''_s$, ležící v rovině tohoto obloučku, nebo rotací kruhového obloučku BOF poloměru $\overline{OP_s}$ kolem osy $P'_tP''_t$, ležící v rovině obloučku BOF . Z toho je již zřejmé, že se paprsky, které jsou podle Malusovy věty (čl. 6.2.2) normálami vyšetřované vlnoplochy, neprotínají v jediném bodě na hlavním paprsku OP_tP_s svazku, takže i úzký šikmý svazek paprsků, který byl před vstupem do optické soustavy homocentrický, stává se po výstupu ze soustavy astigmatický.

Z povahy vzniku plošného prvku vlnoplochy je zřejmé, že se astigmatický svazek paprsků protíná ve dvou krátkých úsečkách $P'_tP''_t$ a $P'_sP''_s$, které se nazývají *fokály*. Jejich vzdálenost je *astigmatický rozdíl* Δa . Je zřejmé, že čím méně se liší hlavní poloměry křivosti (blíží-li se vyšetřovaná vlnoplocha tvarem ploše kulové), tedy při menším sklonu hlavního

paprsku vzhledem k optické ose, tím menší je astigmatický rozdíl. Zužováním svazku paprsků clonkami menšího průměru nelze však obě fokály k sobě přiblížit, dosáhne se tím pouze jejich zkrácení. Bod mimo osu se tedy nezobrazuje jako bod, nýbrž ve dvou polohách jako krátké úsečky a v polohách mezi těmito úsečkami jako malé světlé plošky.

Tak je tomu, je-li svazek paprsků dopadající na optickou soustavu velmi úzký. Při širokém svazku paprsků, jehož hlavní paprsek je značně odchýlen od směru optické osy, vzniká podobně jako u svazku vystupujícího z bodu na ose kaustika s jedinou rovinou souměrnosti. Bod se pak nezobrazí ani jako úsečka, nýbrž v rovinách různě vzdálených od optické soustavy vznikají složité obrazce, které svým tvarem i rozdělením světelné intenzity připomínají komety. Proto se astigmatismus pro široké paprsky nazývá *koma* [obr. (6.2) 29].



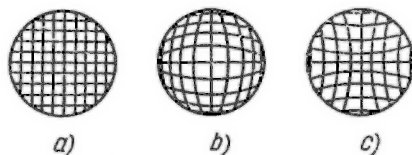
Obr. (6.2) 29. Koma při šikmém dopadu okrajových paprsků na čočku; experimentální uspořádání a vzhled komy při různých polohách stínítka *a, b, c, d*

Podobně jako u předchozích vad lze astigmatismus odstranit kombinací soustav dvou nebo více čoček od sebe vzdálených a tak volených, aby astigmatické rozdíly byly stejně velké, ale opačného znaménka. Soustava čoček — někdy velmi složitá —, u níž se astigmatismus znatelně neprojevuje, nazývá se *anastigmat*.

Astigmatismus působí rušivě při zobrazování předmětů, které vidíme ze středu čočky pod velkým zorným úhlem, zejména při fotografování, a proto je k dokonalému zobrazování třeba dobrých anastigmatů. Při pozorování předmětů dalekohledem je naproti tomu zorný úhel poměrně malý, není tedy třeba objektivu dalekohledů opravovat na astigmatismus.¹

D. Zkreslení obrazu

K uvedeným vadám, jež vznikají při zobrazování bodu, přistupuje při zobrazování předmětů konečných rozměrů ještě další vada, která způsobuje, že obraz není přesně geometricky podobný předmětu, nýbrž je zkreslen. Zkreslení vzniká, jestliže jsou vnější části předmětu zvětšeny více nebo méně než vnitřní. Zkreslení obrazu se dá dobře znázornit rastrem [obr. (6.2) 30a]. Mají-li vnější části předmětu větší příčné zvětšení y'/y , vzniká zkreslení *poduškovité* (obr. c); je-li zvětšení čočky na obvodě obrazu menší než kolem jeho středu, vzniká zkreslení *soudkovité* (obr. b). Tato vada se odstraňuje tím, že se optická soustava vytvoří ze dvou oddělených souměrných soustav, mezi nimiž je uprostřed clona. Tím se dosáhne, že každá z obou soustav by dala zkreslení právě opačného smyslu, takže výsledné zkreslení je již zanedbatelné. Soustava, u níž nenastává zkreslení, nazývá se *ortoskopická*.



Obr. (6.2) 30. Zkreslení znázorněné čtvercovým rastrem (*a*). Zkreslení soudkovité (*b*) a poduškovité (*c*)

E. Zklenutí obrazu

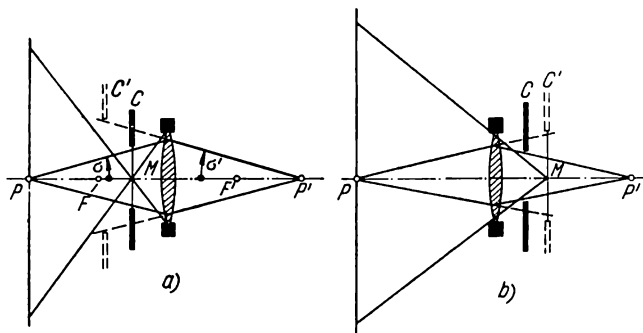
Tato vada záleží v tom, že body ležící v rovině kolmé k optické ose nezobrazují se v rovině k ose kolmé, nýbrž na zakřivené ploše vypuklé nebo vyduté, takže v rovině kolmé k ose nemůžeme dostat obraz, který je v celém rozsahu stejně ostrý. Tato vada souvisí s astigmatismem a bývá u anastigmatů odstraněna zároveň s astigmatismem.

6.2.10. Ohraničení svazků paprsků

V předešlém článku jsme poznali, že mnohé vady a nedokonalosti při zobrazování čočkami lze zmenšit zúžením svazků paprsků, které z jednotlivých bodů předmětu vstupují do zobrazovací soustavy. Užívá se k tomu nejčastěji kruhových clonek; jsou to neprůhledné destičky kolmé k optické ose s kruhovým otvorem, jehož střed leží zpravidla na optické ose. Není-li užito zvláštních clonek, omezují se svazky paprsků neprůhlednými objímkami, v nichž jsou zasazeny čočky nebo jiné zobrazovací prvky.

Clonka vymezující svazek paprsků, kterými se uskutečňuje zobrazení zvoleného předmětového bodu na optické ose, nazývá se *clonka otvorová* (*aperturní* nebo též *hlavní*). Každý paprsek svazku omezeného otvorovou clonkou prochází celou optickou soustavou. Obraz otvorové clonky vytvořený všemi částmi optické soustavy, které jsou před touto clonkou (vzhledem k směru postupu paprsků z předmětového bodu), nazývá se *vstupní pupila*, obraz otvorové clonky vytvořený částmi optické soustavy, které jsou za ní, jmenuje se *výstupní pupila*. Výstupní pupila je tedy obrazem vstupní pupily vytvořeným celou optickou soustavou. Je-li otvorová clonka uspořádána před optickou soustavou, je zřejmě zároveň vstupní pupilou. Tak je to u clonky soustavy skládající se z jediné čočky [obr. (6.2) 31a]. Clonka C , jejíž průměr je menší než průměr objímký čočky, je otvorovou clonkou, neboť svazek paprsků vystupující z předmětového bodu P na ose, který clonka propustí, projde celý čočkou. Clonka je tu zároveň vstupní pupilou. Výstupní pupilou je její obraz C' , vytvořený čočkou, který je v případě znázorněném na obr. (6.2) 31a zdánlivý, poněvadž clonka C leží mezi čočkou a předmětovou ohniskovou rovinou. Z bodu P' jeví se totiž svazek paprsků, který se v něm sbíhá, jako by byl omezen clonkou C' . Podobně je-li otvorová clonka za čočkou (obr. b), je obraz C' otvorové clonky C vstupní pupilou a výstupní pupila je totožná s otvorovou clonkou.

Optická soustava se zpravidla skládá z několika čoček a clonek. Vstupní pupilu najdeme



Obr. (6.2) 31. Vstupní a výstupní pupila

zobrazování clonek stačí zpravidla vzorce a konstrukce pro paraxiální paprsky, při čemž čočky považujeme za nekonečně tenké.

Úhel 2σ homocentrického svazku vystupujícího z předmětového bodu P na optické ose a omezeného vstupní pupilou [obr. (6.2) 31] nazývá se *otvorový* (*aperturní*) *úhel* optické

pak tak, že zobrazíme postupně všechny clonky a objímký čoček částmi optické soustavy, které jsou před nimi, do předmětového prostoru. Otvor, který se z vyšetřovaného předmětového bodu P jeví pod nejmenším úhlem, je vstupní pupilou. Výstupní pupila je obrazem vstupní pupily vytvořeným celou soustavou. Je zřejmé, že změnil-li předmětový bod P na optické ose svou polohu, může se stát vstupní pupilou jiný otvor. K zobra-

soustavy pro předmětový bod P a $\sin \sigma$ je pak *číslnou aperturou* nebo *číslným otvorem* soustavy.

Je zřejmé, že optická soustava nemůže zobrazit zvolenou předmětovou rovinu kolmou k optické ose do libovolné příčné vzdálenosti od osy, ale jen její část zvanou *zorné pole*, kterým je větší nebo menší kruh kolem bodu na optické ose, je-li optická soustava centrována. Zorné pole neomezuje otvorová clonka, ale některá jiná clonka nebo objímka soustavy čoček. Zobrazíme-li podobně jako při určování vstupní pupily do předmětového prostoru postupně všechny clonky a objímky částmi optické soustavy, které jsou před nimi, vidíme tyto obrazy ze středu M vstupní pupily jako soustředné kruhové otvory zvané *průhledy*. Zorné pole na předmětové rovině omezuje patrně ten otvor nebo průhled, který ze středu M vstupní pupily vidíme pod nejmenším úhlem, zvaným *zorný úhel*, neboť jenom paprsky propuštěné tímto otvorem mohou procházet optickou soustavou. Nazýváme jej *vstupním průhledem*. Jeho obraz vytvořený celou optickou soustavou je *výstupní průhled*. Hmotná clonka, jejímž obrazem vytvořeným částmi soustavy, jež jsou před ní, je vstupní průhled a obrazem vytvořeným částmi soustavy, jež jsou za ní, je výstupní průhled, nazývá se *clonka zorného pole* nebo jen *polní clonka*. Na obr. (6.2) 31a, b je vstupním průhledem a zároveň clonkou zorného pole objímka čočky.

6.2.11. Zvětšení optickými přístroji. Lupa a okuláry

Přirozenou optickou zobrazovací soustavou je oko, jejíž hlavní zobrazovací prvek — oční čočka — zobrazuje předměty vnějšího světa na sítnici. Na sítnici vznikají tedy skutečné obrázky, které jsou stejně jako u každé jiné spojky převrácené (je-li předmět před předmětovým ohniskem), přesto však vidíme předměty v přímé poloze, protože od nejbližšího mládí jsme zvyklí promítat vjemy oka z něho ven. Vzdálenost obrázků je pevně určena vzdáleností čočky od sítnice. Abychom předměty, které jsou v různé vzdálenosti, viděli ostře, musí se měnit ohnisková vzdálenost čočky, což se dělá jejím větším zakřivením napnutím tzv. ciliárních svalů, a to je-li předmět prakticky blíže než asi 5 m. Zaostřování oka na bližší předměty do vzdálenosti asi 10 cm nazývá se jeho *akomodace*. Hledíme-li na vzdálené předměty, říkáme pak, že se díváme neakomodovaným okem. V praktické optice pokládá se za nejvhodnější k pozorování drobných předmětů, např. písma, při čtení vzdálenost l od oka rovná 25 cm; tato vzdálenost nazývá se *konvenční zraková vzdálenost* nebo *vzdálenost zřetelného vidění*.

Poměrně složitá optická soustava oka, v níž před a za čočkou jsou různá prostředí a čočka sama také není stejnorodá, dá se redukovat na jednoduchou fiktivní kulovou lámavou plochu s poloměrem křivosti 5,6 mm a ohniskovými vzdálenostmi $f = -17,0$ mm a $f' = 22,6$ mm, jejíž střed křivosti S je ve vzdálenosti 7,1 mm za vrcholem rohovky pokrývající oko zepředu.

Velikost předmětu posuzujeme podle velikosti obrazu na sítnici, který dostaneme, spojíme-li okrajové body pozorovaného předmětu s bodem S , ležícím prakticky v zadním vrcholu oční čočky [obr. (6.2) 32].

Týž předmět jeví se nám menší nebo větší, je-li dále nebo blíže u oka, a různě velké předměty v různých vzdálenostech mohou se nám jevit stejně velké, vidíme-li je pod tímž úhlem σ zvaným *zorný úhel*. Normální oko rozliší ještě dva body od sebe, je-li zorný úhel aspoň 1 oblouková minuta, ať jsou tyto body blízko, nebo daleko. Aby se i při omezené rozlišovací schopnosti neozbrojeného oka daly pozorovat buď blízké a skutečně malé předměty, nebo předměty, které se jen pro velkou vzdálenost jako malé jeví, užívá se různých optických přístrojů, v nichž se lomem nebo odrazem světelných paprsků přicházejících z pozorovaných předmětů zvětšuje zorný úhel svazku paprsků vstupujících do oka a tím obrázek na sítnici. Zvětšení Z , které optický přístroj dává, posuzuje se pak podle poměru zorného úhlu σ' , pod nímž je předmět vidět v přístroji neakomodovaným okem,

a zorného úhlu σ , pod nímž je vidět pouhým okem (pozorují-li se vzdálené předměty):

6.2 (62)

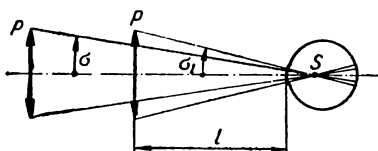
$$Z = \frac{\sigma'}{\sigma}.$$

Při pozorování blízkých drobných předmětů, kdy je třeba akomodace oka, posuzuje se zvětšení vzhledem k zornému úhlu σ_l , pod nímž by se předmět jevil v konvenční zrakové vzdálenosti l , tedy

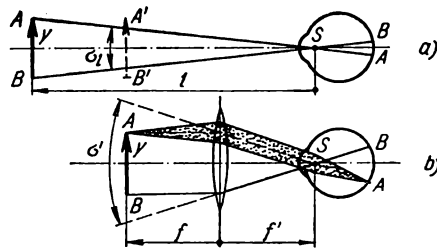
6.2 (63)

$$Z = \frac{\sigma'}{\sigma_l}.$$

Nejjednodušší optický přístroj k pozorování drobných předmětů nebo podrobností na nějakém předmětu je *lupa*. Je to buď jednoduchá spojná čočka, která se hodí na zvětšení až trojnásobné, nebo na větší zvětšení (až 30násobné) vhodná kombinace čoček tvořících spojnou soustavu, v níž bývají sníženy účinky vady chromatické a otvorové (lupa aplana-tická), popř. i vliv astigmatismu (lupa anastigmatická). Lupy mají malou ohniskovou vzdálenost, protože zvětšení, které dávají, je jí nepřímo úměrné.



Obr. (6.2) 32. Velikost obrazu na sítnici oka



Obr. (6.2) 33. Zvětšení lupou při neakomodovaném oku

Umístíme-li lupu tak, že pozorovaný předmět je v její ohniskové rovině, vstupuje do oka z každého bodu předmětu svazek rovnoběžných paprsků, jako kdyby jednotlivé body předmětu, a tedy celý předmět byly v nekonečnu. Předmět se pak pozoruje neakomodovaným okem v zorném úhlu σ' [obr. (6.2) 33b], který je větší než zorný úhel σ_l , v němž se týž předmět jeví neozbrojenému oku z konvenční vzdálenosti $l = -25$ cm (obr. a). Na obrázku je zřetelně vidět zvětšovací účinek lupy, neboť pouhým přiblížením předmětu k oku na touž vzdálenost, v níž je při pozorování lupou (poloha A' , B' na obrázku a) se zorný úhel zvětší jen bezvýznamně. Na obr. b je také naznačen svazek paprsků, který z jednoho předmětového bodu A vstupuje do oka. Je omezen otvorovou clonkou, jíž je zornice oka. Chod paprsků je kreslen tak, jako kdyby lupa i oko byly tenké čočky se splývajícími hlavními rovinami (u oka proloženými středem S).

Pro malé úhly σ_l a σ' můžeme položit $\sigma_l = y/l$, $\sigma' = y/f$, takže zvětšení lupy při pozorování neakomodovaným okem podle 6.2 (63)

6.2 (64)

$$Z = \frac{\sigma'}{\sigma_l} = \frac{y}{f} : \frac{y}{l} = \frac{l}{f},$$

při čemž $Z > 0$, protože $l < 0$ a $f < 0$. Čím menší má lupa ohniskovou vzdálenost, tím více zvětšuje, ale tím více se také projevují vady, je-li lupou jednoduchá spojka.

Přiblížíme-li předmět k lupě na menší vzdálenost, než je předmětová ohnisková vzdálenost, leží také zdánlivý obraz v konečné vzdálenosti od lupy. Často se lupa nařídí tak, aby vznikl virtuální obraz výšky y' právě v konvenční vzdálenosti od čočky (vzdálenosti mezi

čočkou a okem nedbáme). Příslušné zvětšení Z je potom shodné s příčným zvětšením podle vztahu 6.2 (32), tedy $m = (f' - x')/f'$. Pro $x' = l$ a $f = -f'$ vychází

$$6.2 (65) \quad Z_l = m = \frac{l}{f} + 1.$$

Jsou-li ohniskové vzdálenosti malé, neliší se obě zvětšení v uvedených případech mnoho.

Podobnou funkci jako lupy mají *okuláry*, jichž se používá ve složitějších přístrojích k pozorování okem, jako jsou mikroskopy a dalekohledy. V těchto přístrojích vytvoří nejprve reálný obrázek pozorovaného předmětu spojná čočka nebo častěji spojná soustava čoček přivrácená k předmětu a zvaná *objektiv* a tento obrázek se pak okem pozoruje skrz okulár fungující jako lupa. Jednoduchá čočka nevyhovuje zpravidla jako okulár (vyjma tzv. holandský dalekohled), protože by se příliš nepříznivě projevovaly vady chromatické a otvorová. U okulárů lze obě vady poměrně snadno snížit na malou míru, že prakticky nevadí, soustavou dvou ploskovypuklých čoček, z nichž první, obrácená k objektivu, se nazývá *sběrná čočka (kolektiv)* a druhá na straně oka *oční čočka*. Základní dva typy okulárů nejčastěji užívané jsou *Huygensův* a *Ramsdenův*.

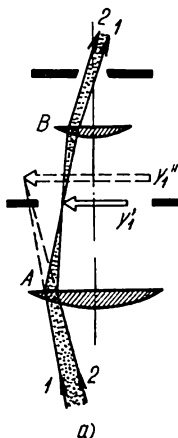
U *Huygensova okuláru* jsou obě ploskovypuklé čočky obráceny vypuklými plochami k objektivu [obr. (6.2) 34]. Sběrná čočka A , která má větší ohniskovou vzdálenost (pro silné zvětšení až 3krát), uchyluje paprsky přicházející z objektivu směrem k ose dříve, než vznikne skutečný obraz y_1'' ; vlivem této čočky vzniká obraz y_1' o něco menší. Vlastním okulárem je oční čočka B , kterou se y_1' pozoruje jako lupou. V tomto okuláru koriguje se otvorová i barevná vada vhodnou souhrou obou ploskovypuklých čoček. Tím, že paprsek 1 vstupující do sběrné čočky blíže k jejímu okraji vystupuje z druhé čočky blíže k ose, opravuje se vada otvorová (obr. a). Paprsek bílého světla se v sběrné čočce rozkládá v paprsky různé barvy, z nichž je paprsek červený (obr. b) vzhledem k ose skloněn méně než fialový, ježto prochází čočkou blíže k okraji, a oba paprsky vstupují do oka pozorovatele rovnoběžně. Rovnoběžné paprsky se pak neakomodovanému oku jeví, jako by přicházely z jediného bodu. K odstranění chromatické vady stačí, aby obě čočky z téhož druhu skla měly vzájemnou vzdálenost, která je rovna aritmetickému průměru obrazových ohniskových vzdáleností obou čoček.

Dosadíme-li do vzorce 6.2 (57) pro optickou mohutnost D soustavy dvou tenkých čoček jejich vypuklosti σ_1 a σ_2 podle 6.2 (55), dostaneme

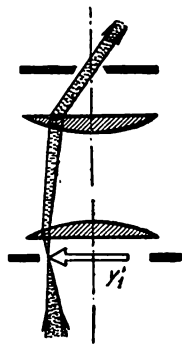
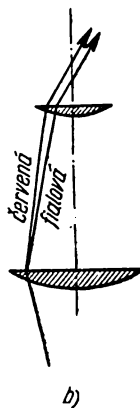
$$D = (n - 1) (\sigma_1 + \sigma_2) - (n - 1)^2 \sigma_1 \sigma_2 v,$$

kde v je vzájemná vzdálenost obou čoček. Barevná vada se neprojeví, má-li optická mohutnost D soustavy při malých změnách indexu lomu n stálou hodnotu čili je-li derivace D podle n rovna nule:

$$\frac{dD}{dn} = \sigma_1 + \sigma_2 - 2(n - 1) \sigma_1 \sigma_2 v = 0.$$



Obr. (6.2) 34. Chod paprsků v Huygensově okuláru



Obr. (6.2) 35. Chod paprsků v Ramsdenově okuláru

Odtud plyne vzhledem k 6.2 (55) pro vzdálenost v čoček

$$v = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(n-1)\sigma_1} + \frac{1}{(n-1)\sigma_2} \right] = \frac{1}{2} (f'_1 + f'_2),$$

jak jsme uvedli.

Ramsdenův okulár, druhý základní typ okuláru, je jednodušší. Je to v podstatě pouhá lupa, skládající se ze dvou ploskovypuklých čoček o stejných ohniskových vzdálenostech, uspořádaných blízko u sebe a obrácených k sobě vypuklými stranami [obr. (6.2) 35]. Vzdálenost obou čoček by měla být rovna jejich ohniskové vzdálenosti, aby byla odstraněna chromatická vada, avšak pak by podle 6.2 (56) padly výsledné ohniskové roviny právě do obou čoček, což není výhodné, protože by se s obrazem vytvořeným objektivem zvětšovala i zrnka prachu na povrchu sběrné čočky a bylo by je ostře vidět. Proto se obě čočky kladou poněkud blíže k sobě ($v \approx \frac{2}{3} f'_1$). Zbývá pak malá chromatická vada, která je však přijatelná. Obraz y'_1 vytvořený objektivem leží před sběrnou čočkou. Do její roviny se vkládá stupnice k určování velikosti předmětu. Ježto se u tohoto typu okuláru dvěma prostými čočkami nedá zcela odstranit barevná vada, jak jsme se zmínili, zhotovují se okuláry Ramsdenova typu z několika čoček.

6.2.12. Drobnohled (mikroskop)

Drobnohled je centrovaná soustava dvou složených spojných čoček. Přední čočka převrácená k předmětu (objektiv) má velmi malou ohniskovou vzdálenost f'_1 řádu několika mm, zadní čočka u oka (okulár) má ohniskovou vzdálenost f'_2 několika cm. Obě čočky jsou ovšem složité optické soustavy. Optický interval Δ objektivu má kladnou hodnotu velkou proti ohniskovému vzdálenostem (zpravidla 160 mm). Aby se oko při pozorování drobnohledem nenamáhalo zaostřováním (akomodací), klade se předmět y mezi dvě tenká sklíčka na stolek mikroskopu do malé vzdálenosti před přední ohniskovou rovinu φ_1 objektivu, který vytvoří zvětšený a převrácený reálný obraz y'_1 v přední ohniskové rovině φ_2 okuláru; okulár zobrazí tedy předmět v nekonečno, takže pozorujeme neakomodovaným okem pod zorným úhlem σ' . Chod paprsků v mikroskopu je znázorněn na obr. (6.2) 36. Objektiv a okulár jsou zde schematizovány jako tenké čočky.

Zvětšení objektivu je určeno příčným zvětšením m podle vzorce (6.2) 32. Obraz y'_1 vytvořený objektivem v ohniskové rovině φ_2 okuláru má od hlavní roviny objektivu vzdálenost $x'_1 = f'_1 + \Delta$, a proto zvětšení objektivu

$$Z_1 = \frac{y'_1}{y} = \frac{f'_1 - (f'_1 + \Delta)}{f'_1} = -\frac{\Delta}{f'_1} = \frac{\Delta}{f_1} < 0.$$

Okulárem se pozoruje reálný obraz y'_1 jako lupou neakomodovaným okem, takže zvětšení okuláru je jako u lupy:

$$Z_2 = \frac{l}{f_2} > 0.$$

Celkové zvětšení mikroskopu určené poměrem 6.2 (63) je tedy podle obr. (6.2) 36 (nahradíme-li tangenty arkusy)

$$Z = \frac{\sigma'}{\sigma_l} = \frac{y'_1}{f_2} : \frac{y}{l},$$

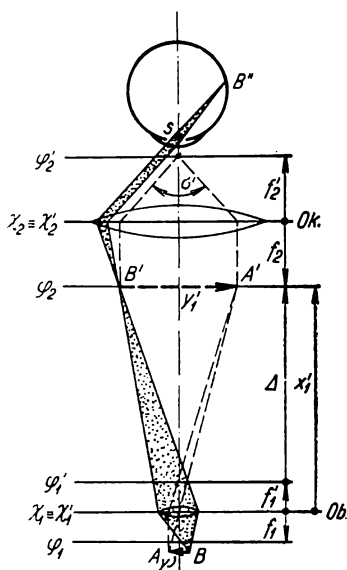
odkud vzhledem k uvedeným samostatným zvětšením objektivu a okuláru plyne pro celkové zvětšení mikroskopu

$$6.2 (66) \quad \boxed{Z = Z_1 Z_2 = \frac{\Delta}{f_1} \frac{l}{f_2} < 0.}$$

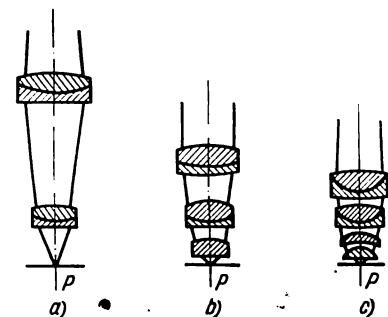
Zvětšení drobnohledu je rovnou součinu zvětšení objektivu a zvětšení okuláru a je nepřímě úměrné ohniskovým vzdálenostem objektivu a okuláru. Velká zvětšení tedy vyžadují, aby jak objektiv, tak i okulár měly malou ohniskovou vzdálenost (při standardní hodnotě optického intervalu).

Zvětšení objektivu a okuláru bývají uvedena (v absolutních hodnotách) na objektivěch (Z_1 dosahuje hodnot až 120) i na okuláru (Z_2 dosahuje hodnot až 30) a jejich vhodnou volbou dosáhneme žádaného zvětšení. Obě soustavy čoček v mikroskopu, objektiv i okulár, musí být uspořádány tak, aby byly na nejmenší míru sníženy vady otvorová a barevná. Okuláry bývají v podstatě standardního typu; může to být buď Huygensův nebo Ramsdenův okulár, u nichž jsou popř. optické vady lépe opraveny tím, že buď sběrná nebo oční čočka je složena ze dvou nebo i více čoček.

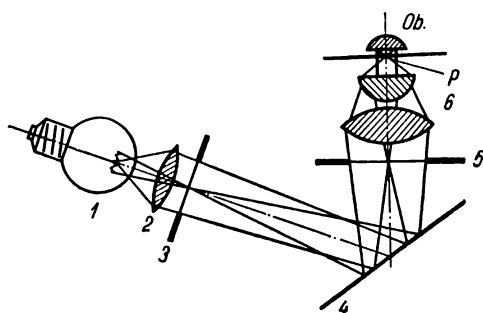
Do okuláru vstupuje poměrně úzký svazek paprsků, proto se vady kompenzují poměrně snadno. Jinak je to u objektivu, do kterého vstupují velmi široké svazky paprsků, jak je vidět i na obr. (6.2) 36. Je to proto, že svazek rovnoběžných paprsků musí po výstupu z mikroskopu přenášet dostatek světla, což je nutná podmínka pro dobrou viditelnost



Obr. (6.2) 36. Chod paprsků mikroskopem



Obr. (6.2) 37. Objektivy mikroskopů
(P – pozorovaný předmět)



Obr. (6.2) 38. Schéma osvětlovací soustavy mikroskopu

pozorovaného předmětu. Malá vzdálenost předmětu od objektivu vyžaduje proto velmi široký rozbíhavý vstupní svazek, s nímž je konečný výstupní svazek sdružen. Korekce objektivů na všechny vady vyžaduje u moderních přístrojů soustavu skládající se až z deseti čoček zhotovených z různých druhů skla. Tak vznikají objektivy zvané *achromáty* a *apochromáty*.

Achromáty [obr. (6.2) 37a, b], užívané pro menší zvětšení, skládají se ze dvou achromatických čoček, k nimž se připojuje vpředu polokulová čelní čočka. Barevná vada je u nich opravena pro červenou a modrou barvu a otvorová vada většinou pro barvu žlutozelenou, na kterou je oko nejcitlivější.

Apochromáty (obr. c) jsou objektivy, v nichž je barevná vada odstraněna pro tři barvy a chyba otvorová pro dvě různé barvy. Jejich zvláštností je, že u některých druhů je

úmyslně ponechána část chromatické vady, kterou opravuje kompenzační okulár, s nímž pak apochromát tvoří nedílný celek.

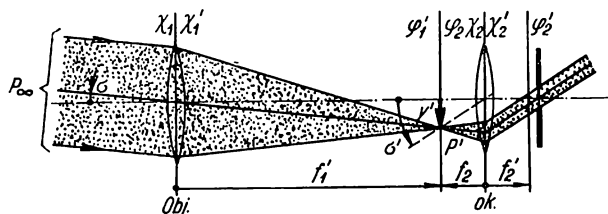
Dostatečně světlého obrazu dosahuje se v drobnohledu buď odrazem světla na rovinném nebo dutém zrcátku, nebo se mezi zrcátko a předmět vkládá soustava čoček zvaná *kondenzor*. Skládá se většinou ze dvou nebo tří čoček a má za úkol soustředit široký svazek paprsků, odrážející se od zrcátka, na pozorovaný předmět. Úhel kužele světelných paprsků vznikající kondenzorem má být aspoň tak velký, jak to vyžaduje objektiv (číselná apertura kondenzoru — čl. 6.2.10 — má být aspoň taková jako u objektivu).

Schéma osvětlovací soustavy dobrého mikroskopu je na obr. (6.2) 38. Skládá se ze světelného zdroje 1, který spojná čočka 2 zobrazuje pomocí zrcátka 4 do roviny irisové clony 5, uspořádané před kondenzorem 6, a kondenzor sám zobrazuje druhou irisovou clonu 3 do roviny pozorovaného předmětu *P*. Funkce clony 3 záleží v tom, že omezuje osvětlení předmětu na tu část, která se právě pozoruje, clonou 5 reguluje se množství světla dopadajícího na předmět. O rozlišovací schopnosti mikroskopu pojednáme v čl. 6.4.6.

6.2.13. Dalekohled

Dalekohled se podobně jako drobnohled skládá ze dvou soustav čoček. Jeho základním typem je *dalekohled hvězdářský (Keplerův)*, kterého se i ve fyzikální laboratoři běžně užívá jako čtecího dalekohledu ke čtení na stupnici. Okulár je nejčastěji Ramsdenova nebo Huygensova typu, objektiv je vždy složená čočka tak uspořádaná, aby byla kompenzována vada chromatická a otvorová. Ježto do dalekohledu vstupují paprsky, které svírají s osou malé úhly, není třeba opravovat astigmatismus. O to je objektiv dalekohledu jednodušší než u drobnohledu.

Okulár i objektiv jsou tedy spojné soustavy, jejichž polohu upravíme tak, abychom viděli neakomodovaným okem. To nastane tehdy, když obraz *y'* předmětu *y* padne do přední ohniskové roviny φ_2 okuláru. Zpravidla se dalekohledem pozorují velmi vzdálené předměty, z jejichž jednotlivých bodů k nám přicházejí



Obr. (6.2) 39. Chod paprsků ve hvězdářském dalekohledu

svazky prakticky rovnoběžných paprsků, jako by předmět byl v nekonečnu. Pak je obraz *P'* vzdáleného bodu P_∞ v obrazové ohniskové rovině φ_1' objektivu, která proto splývá s předmětovou ohniskovou rovinou φ_2 okuláru. Optický interval je roven nule, a výsledné ohniskové vzdálenosti celé soustavy dalekohledu jsou proto podle 6.2 (56) nekonečně velké; dalekohled zaostřený na nekonečno tvoří teleskopickou zobrazovací soustavu, do které vstupují a ze které vystupují rovnoběžné svazky paprsků, lišící se různými sklony σ a σ' vzhledem k optické ose [obr. (6.2) 39].

Pro zvětšení podle 6.2 (62) a obr. (6.2) 39 dostáváme (opět nahrazujeme tangenty arkusy při malých úhlech)

$$6.2 \text{ (67)} \quad Z_\infty = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{y'}{f_2} : \frac{y'}{f_1} = -\frac{f_1}{f_2} < 0,$$

protože $f_1 = -f_1'$. Pro velká zvětšení je tedy třeba, aby objektiv měl velkou ohniskovou vzdálenost a okulár naopak malou ohniskovou vzdálenost.

Je-li pozorovaný předmět o příčné délce *y* ve vzdálenosti *x* od objektivu, která je srovnatelná s ohniskovou vzdáleností f_1 objektivu (proti níž nelze f_1 zanedbat), pak zorný úhel σ ,

pod nímž pozorujeme předmět pouhým okem, je dán zhruba poměrem $\sigma = y/x$ (nedbáme délky dalekohledu proti x) a zvětšení v tomto případě

$$Z = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{y'}{f_2} : \frac{y}{x} = \frac{y'}{y} \frac{x}{f_2} = m \frac{x}{f_2} = \frac{x}{f_1 - x} \frac{f_1}{f_2},$$

protože poměr $y'/y = m$ je příčné zvětšení objektivu, které je dáno vztahem 6.2 (32). Pro $x \rightarrow \infty$ přechází toto zvětšení v prve uvedené zvětšení Z_∞ .

U dalekohledu tvoří otvorovou clonku zpravidla obruba objektivu, která je zároveň i vstupní pupilou. Její obraz vytvořený okulárem je výstupní pupila zvaná též *oční kruh*; leží poněkud za obrazovou ohniskovou rovinou okuláru [obr. (6.2) 40]. Nejlépe se dalekohledu využije, když oční kruh právě splývá se zornicí oka, protože potom veškeré světlo, které vstupuje do dalekohledu, také vniká do oka.

Je-li p průměr vstupní pupily (otvorové clonky) a p' průměr výstupní pupily (očního kruhu), pak podle obr. (6.2) 40 $p/f'_1 = p'/f'_2$, takže velikost zvětšení dalekohledu zaostřeného na nekonečno je vzhledem k 6.2 (67) také určena poměrem

6.2 (68)

$$|Z_\infty| = \frac{p}{p'}.$$

Nejsou-li v dalekohledu (hvězdařském) zvláštní clonky, omezuje velikost zorného pole okulár, jehož objímka působí jako clonka zorného pole (čl. 6.2.10). Aby bylo zorné pole ostře ohraničeno a nenastalo odelánění, užívá se často zvláštní clonky zorného pole, která se vkládá do předmětové ohniskové roviny okuláru, v níž leží obraz předmětu vytvořený objektivem, pozorujeme-li neakomodovaným okem. Obraz této clonky vytvořený objektivem je vstupním průhledem, který splývá s předmětovou rovinou.

Velikost zorného pole posuzujeme zpravidla podle vrcholového úhlu kužele s vrcholem ve středu vstupní pupily (objektivu), uvnitř něhož leží body viditelné dalekohledem. U dalekohledu zaostřeného na nekonečno je úhel $\omega = d/f'_1$ (pro malý úhel ω), je-li d průměr clonky zorného pole a f'_1 ohnisková vzdálenost objektivu, jak je vidět na obr. (6.2) 40.

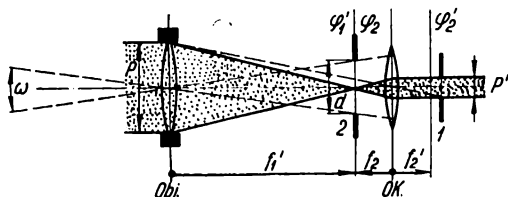
Poněvadž zvětšení dalekohledu je tím větší, čím větší je ohnisková vzdálenost f'_1 objektivu, je zřejmé, že zorné pole dalekohledu je tím menší, čím více dalekohled zvětšuje. Při stálém zvětšení zvětší se zorné pole větším průměrem polní clonky. Zorné pole nezávisí tedy na průměru objektivu.

Hvězdařský dalekohled dává obrazy převrácené, jak je zřejmé jak z obr. (6.2) 39 (σ a σ' mají navzájem opačná znaménka), tak i ze vzorce 6.2 (67) pro zvětšení, které vychází záporné, jsou-li $f_1 < 0$ a $f_2 < 0$.

Převrácení obrazu nevadí, užívá-li se dalekohledu ve fyzikální laboratoři ke čtení na stupnici nebo k astronomickým účelům. Ruší-li však, že obraz je převrácený, např. při pozemském pozorování, je možno užít několika úprav, kterými vzniká obraz vzpřímený. Dalekohled upravený pro pozorování v terénu se nazývá *pozemský*.

Vzpřímení obrazu lze dosáhnout vložením spojné soustavy mezi objektiv a okulár za reálný obraz vytvořený objektivem, nebo odrazem paprsků na stěnách dvou pravouhlých skleněných hranolů, jejichž boční hrany jsou k sobě postaveny kolmo.

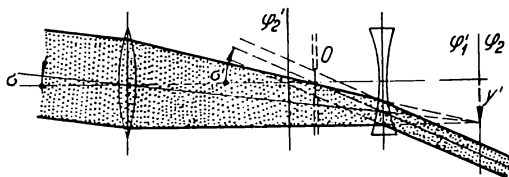
Prímý obraz dává také *dalekohled holandský* nebo *Galileův*, v němž okulár tvoří čočka rozptylná [obr. (6.2) 41]. Rozptylka je tak nastavena, aby její předmětová ohnisková rovina φ_2 splývala s obrazovou ohniskovou rovinou objektivu φ'_1 . Pak láme rozptylka



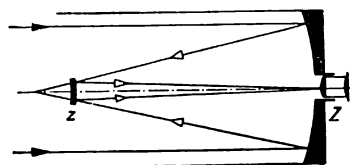
Obr. (6.2) 40. Vstupní a výstupní pupila při teleskopickém zobrazení (1 — oční kruh, 2 — clonka zorného pole)

(okulár) sbíhavé paprsky dříve, než jimi spojka (objektiv) vytvoří obraz y' nekonečně vzdáleného předmětu ve své ohniskové rovině φ'_1 , takže vystupují z dalekohledu rovnoběžné. Oku se pak jeví pozorovaný předmět v nekonečnu pod větším zorným úhlem σ' , který je téhož smyslu jako zorný úhel σ , pod kterým se předmět pozoruje neozbrojeným okem, takže obraz je přímý a zvětšený. Nevýhodou tohoto dalekohledu je, že při větším zvětšení má velmi malé zorné pole, že oční kruh O , jímž všechny paprsky procházejí, je zdánlivý, takže zornice oka nemůže s ním splynout jako v hvězdářském dalekohledu. Do oka vstupuje proto jen část paprsků prošlých objektivem, takže obraz je méně světlý. Užívá se ho proto skoro výhradně jako divadelního kukátka s dvojnásobným až čtyřnásobným zvětšením.

K astronomickým pozorováním se užívá dalekohledů *zrcadlových*, zvaných také *reflektory*, v nichž je spojná čočka objektivu nahrazena dutým kulovým nebo parabolickým zrcadlem. Jak jsme vyložili, zobrazí duté zrcadlo nekonečně vzdálený předmět ve své ohniskové rovině, která je však na téže straně jako předmět. Je proto třeba odražené paprsky vytvářející obraz tak odchýlit, aby bylo možno obraz pozorovat okulárem. Dosahuje se toho dalšími zrcadly buď rovnými, nebo kulovými vypuklými, jak je patrné na obr. (6.2) 42, např. u zrcadlového dalekohledu Cassegrainova, v němž se paprskům



Obr. (6.2) 41. Chod paprsků holandským dalekohledem



Obr. (6.2) 42. Zrcadlový dalekohled

odraženým od hlavního zrcadla Z vkládá do cesty druhé malé vypuklé zrcátko z , aby obraz vznikl v místě hlavního zrcadla, které je uprostřed provrtáno. Tento obraz se buďto pozoruje okulárem, nebo se zachycuje na fotografickou desku.

Zrcadlové dalekohledy mají tu přednost, že nemají vadu chromatickou a že se světlo nezeslabuje tak značně jako při průchodu čočkami. Zrcadla mají však vadu otvorovou, takže lze užít jen poměrně malého zorného pole. Aby se daly pozorovat i hvězdy, které jsou pro velkou vzdálenost velmi slabé*), musí do dalekohledu vstupovat hodně světla, které objektiv dalekohledu soustřeďuje do bodového obrazu ve své ohniskové rovině, a to bude, má-li objektiv velký průměr. Největší čočkové dalekohledy mají průměr objektivu kolem 1 m. Sklo se totiž chová jako viskózní kapalina, pomalu teče a prohýbá se a čočky se musí v dosti krátkých časových intervalech (1 až 2 roky pro čočku průměru 1 m) přebírušovat. Největší současný dalekohled světa má objektiv ve formě zrcadla průměru 5 m. Zde je zrcadlo žebrované a vypořádáno, a netrpí proto tolik prohýbáním. Přebírušovat se ovšem musí rovněž. Při stavbě velkých dalekohledů se dnes dává přednost dalekohledům zrcadlovým.

6.2.14. Fotografický přístroj

Je to přístroj k optickému snímání reálných obrazů zvolených předmětů na vrstvu citlivou na světlo, která je nanášena na fotografické desce nebo filmu. Deska nebo film je na zadní straně skříňky opatřené uvnitř matným černým nátěrem (aby nerušil odraz světla na

*) Intenzita světla z bodového zdroje, jakým se vzdálená hvězda jeví, klesá se čtvercem vzdálenosti, protože vlnění se rovnoměrně rozprostírá na větší a větší kulové vlnoplochy plošného obsahu $4\pi r^2$.

stěnách), v přední stěně skříňky je spojná čočka, správněji spojná soustava čoček — *objektiv* — vytvářející na desce obraz. Jednoduchá čočka jako objektiv nevyhovuje, protože jenom malá část obrazu v blízkém okolí optické osy by byla uspokojivá, v dalším okolí by se projevil všechny možné vady optického zobrazování. Objektiv by měl malý *zorný úhel*, tj. úhel sevřený krajními paprsky, jež vytvářejí ještě dokonalý obraz. Vady lze odstranit jen vhodnou kombinací několika (až šesti) čoček; u dobrých objektivů, které pak bývají velmi složité, je to provedeno téměř dokonale i pro velké zorné úhly. Ty bývají u normálních objektivů 35 až 60°, u tzv. širokoúhlých objektivů však až 140° i více.

Předmět v nekonečnu zobrazí se v ohniskové rovině objektivu, bližší předmět zobrazí se v rovině, jejíž vzdálenost od objektivu je tím větší, čím bližší je předmět. U fotografického přístroje se dá proto nastavit vzdálenost objektivu od roviny, v níž vzniká ostrý obraz.

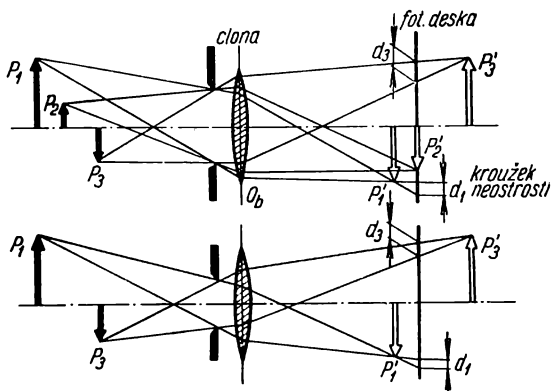
Jakost snímku pořízeného fotografickou komorou řídí se také množstvím světla propuštěného objektivem a dopadnuvšího na citlivou vrstvu. Projde-li objektivem příliš mnoha světla, je snímek přexponován, v opačném případě je podexponován. Množství světla, jehož je za daných okolností třeba, aby vznikl správný snímek, vymezuje (kromě clony — viz dále) *uzávěrka* fotografické komory. Užívá se v podstatě dvou typů uzávěrek: *objektivové (centrální) uzávěrky*, uspořádané uvnitř objektivu, a *šterbinové uzávěrky*, umístěné těsně před deskou nebo filmem.

Každé rovině fotografovaného předmětu přísluší jediná poloha roviny, v níž vzniká ostrý obraz. Předměty v jiných rovinách jeví se pak jako neostře. Na obr. (6.2) 43 je zřejmé, že objektiv zaostřený na předmět P_2 dává na fotografické desce pouze ostrý obraz P'_2 tohoto předmětu a ostatní obrazy P'_1 a P'_3 předmětů P_1 a P_3 budou neostře, protože jejich ostré obrazy vznikají před nebo za fotografickou deskou. Každý bod obou těchto předmětů zobrazí se jako malý kroužek, tzv. *kroužek neostrosti (rozptylový kroužek)*. Tyto kroužky budou tím větší, čím dále jsou předměty P_1 a P_3 od předmětu P_2 , na který je přístroj zaostřen. Mají-li však kroužky neostrosti dostatečně malý průměr (0,1 až 0,2 mm), menší, než je velikost zrna použitého fotografického materiálu, jeví se oku jako bod, takže neostrost tohoto druhu není na závadu. Vzdálenost dvou předmětových rovin, v jejichž rozmezí se předměty zobrazují dostatečně ostře, je *obrazová hloubka* objektivu. Na obr. (6.2) 43 je zřejmé, že rozptylové kroužky se zmenší, zúží-li se kužele paprsků, vystupujících z každého bodu fotografovaných předmětů. Dosahuje se toho *irisovou clonou* se spojitě měnitelným otvorem, uspořádaným v objektivu. Cloněním tedy roste hloubka obrazová.

Irisová clona je podle čl. 6.2.10 clonou otvorovou a jejím průměrem se řídí osvětlení citlivé vrstvy fotografické desky. Vstupní pupilou je obraz otvorové clonky vytvořený částí objektivu, která je před clonou. Průměr vstupní pupily bývá u běžných druhů objektivů asi o 12 % až 16 % větší než průměr otvorové clonky. Čím je průměr p vstupní pupily menší, tím méně světelných paprsků z fotografovaného předmětu vstupuje do objektivu. Světelný tok (čl. 6.3.1) objektivem je proto úměrný p^2 .

Podle vzorce 6.2 (32) je při zobrazování čočkou zvětšení předmětu určeno poměrem

$$\frac{y'}{y} = \frac{f}{f-x} = -\frac{f}{q};$$



Obr. (6.2) 43. Zvětšení obrazové hloubky cloněním

při stejné vzdálenosti q předmětu od předmětové ohniskové roviny a při stejné lineární velikosti y předmětu je tedy lineární velikost obrazu

$$y' \sim f',$$

tedy úměrná ohniskové vzdálenosti. Plocha obrazu je pak úměrná čtverci ohniskové vzdálenosti f'^2 . Osvětlení obrazu (tj. podle čl. 6.3.2 světelný tok dopadající na plochu, dělený velikostí plochy) je podle toho úměrné $(p/f')^2$. Expoziční doba je tedy nepřímo úměrná poměru $(p/f')^2$, neboť čím větší je osvětlení, tím menší stačí doba expozice, takže

$$6.2 (69) \quad \text{expoziční doba} \sim \left(\frac{f'}{p}\right)^2.$$

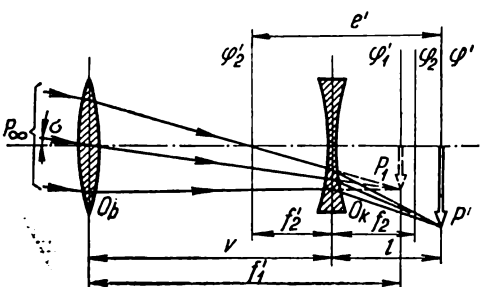
Poměr p/f' nazýváme *relativním (poměrným) otvorem objektivu* a závisí na něm *světelnost* objektivu, což je podíl osvětlení obrazu k jasů fotografovaného předmětu. Relativní otvor se obvykle udává zlomkem $1 : c$, kde číslo clony $c = f' : p$ udává, kolikrát je průměr vstupní pupily obsažen v ohniskové vzdálenosti objektivu.

Jsou-li expoziční doby v poměru $1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 = 1^2 : 1,41^2 : 2^2 : 2,8^2 : 4^2 : 5,6^2$,

odpovídají jim podle 6.2 (69) čísla clony $1 : 1,41 : 2 : 2,8 : 4 : 5,6$. Čísla clony jsou na objektivu vyznačena v takovém pořadí, že expozice od jednoho k druhému je vždy dvojnásobná.

Hlavní konstanty fotografického objektivu jsou tedy: ohnisková vzdálenost, nejmenší číslo clony a zorný úhel.

K fotografování velmi vzdálených předmětů užívá se zvláštního typu objektivu, tzv. *teleobjektivu*. Skládá se ze dvou čoček: spojky přivrácené k fotografovaným předmětům a rozptylky na straně fotografické desky.



Obr. (6.2) 44. Chod paprsků v teleobjektivu

ky [obr. (6.2) 44]. Spojka a rozptylka bývají většinou soustavy, u nichž jsou korigovány vady. Je to tedy v podstatě *holandský dalekohled*, upravený vhodně jako fotografický objektiv. Předností tohoto objektivu je, že při velké ohniskové vzdálenosti, jíž je třeba k fotografování vzdálených předmětů, je zadní ohnisková rovina poměrně blízko rozptylky, takže tohoto objektivu lze užít u komory opatřené normálním výtahem.

6.2.15. Projekční přístroj

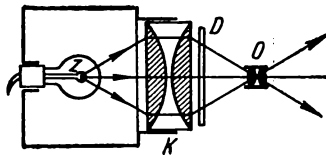
Ve fotografickém přístroji promítá objektiv zmenšený obraz vzdálených předmětů na fotografickou desku ležící v blízkosti jeho obrazové ohniskové roviny, objektiv projekčního přístroje naopak vrhá zvětšený obraz osvětleného předmětu (např. skleněného diapozitivu) v blízkosti jeho předmětové ohniskové roviny na projekční stěnu ve větší vzdálenosti od přístroje. Fotografický přístroj může tedy v zásadě fungovat jako projekční přístroj, nahradí-li se fotografická deska vhodně osvětleným diapozitivem.

Protože se při zvětšené projekci světlo procházející diapozitivem rozloží na značně velkou plochu obrazu, je třeba předmět velmi silně osvětlit, má-li být obraz dostatečně jasný. Nestačí však velmi silný (pokud možno bodový) světelný zdroj (silná žárovka nebo oblouková lampa) ve skříni přístroje [obr. 6.2) 45], ale je třeba se postarat, aby svazek světelných paprsků prošlých předmětem prošel také objektivem O . To obstarává *kondenzor* K , který vytváří reálný obraz zdroje v místě objektivu; skládá se zpravidla ze dvou ploskovypuklých čoček, obrácených k sobě vypuklými plochami (k zmenšení vlivu kulové vady). Těsně za kondenzor (ve směru postupu světla) vkládá se diapozitiv D . Bývá zpravidla v těsné

blízkosti předmětové ohniskové roviny objektivu, protože promítací stěna bývá dosti daleko, takže vzdálenost objektivu od kondenzoru je prakticky rovna ohniskové vzdálenosti objektivu. Je zřejmé, že ohnisková vzdálenost kondenzoru nemůže být libovolná, ale volí se nejlépe poloviční, než je ohnisková vzdálenost objektivu. Nastaví-li se pak vzájemná vzdálenost zdroje a kondenzoru tak, aby byla rovna dvojnásobné ohniskové vzdálenosti kondenzoru, vzniká obraz zdroje nezměněně jenom obráceně právě v objektivu a kromě toho je průchod světelných paprsků kondenzorem souměrný, což je výhodné. Přesvědčíme se o tom jednoduchou konstrukcí jako u obyčejné čočky.

Jako projekční objektiv se hodí každý dobrý fotografický objektiv dostatečně velkého relativního otvoru (s dostatečně velkou světlostí), ovšem obráceně postavený než při fotografování. Projekční přístroj, v němž se zobrazovací předmět prosvěcuje, nazývá se *diaskop*.

K promítání neprůhledných předmětů užívá se projekčních přístrojů zvaných *episkopy*, v nichž se předmět, např. stránka knihy, ve vodorovné poloze silně osvětlí světelným zdrojem a dutými zrcadly, a paprsky odražené od předmětu se po odrazu na rovinném zrcadle vedou do objektivu. Obraz na projekční stěně bývá zpravidla méně jasný, protože osvětlený předmět větší část světelných paprsků jednak absorbuje, jednak rozptyluje do směrů, v nichž nemohou přispět při zobrazení. Kombinací obou zmíněných přístrojů je *epidiaskop*.



Obr. (6.2) 45. Schéma projekčního přístroje

6.3. Fotometrie

6.3.1. Světelná energie, světelný tok

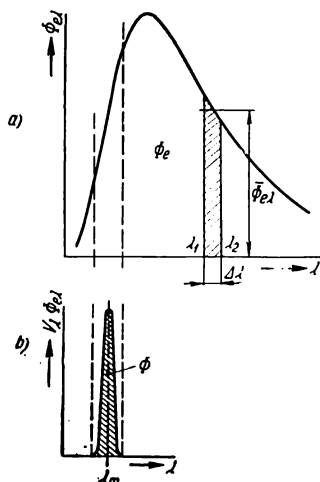
Světelná energie je zářivá energie, připadající na viditelný obor elektromagnetického záření. Ze zdroje záření šíří se zářivá energie na všechny strany rychlostí světla c ; zářivá energie procházející nějakou plochou za jednotku času nazývá se *zářivý tok* touto plochou a označuje se Φ_e . Zářivý tok udává výkon přenášený zářením, a měří se proto ve wattech.

Běžnými světelnými zdroji jsou tělesa zahřátá na vysokou teplotu (např. vlákno v žárovce), jejichž záření se skládá ze záření o různých vlnových délkách λ . Rozložením celkové zářivé energie, kterou takovýto zdroj vydává, na jednotlivé vlnové délky budeme se podrobněji zabývat až v kapitole 6.5; abychom však pochopili význam veličiny, kterou lze vystihnout schopnost záření vzbudit zrakový vjem, je účelné naznačit toto rozložení aspoň kvalitativně už nyní. Je to provedeno křivkou na obr. (6.3) 1a, která přísluší jisté teplotě zářiče. Plocha omezená křivkou a osou úseček, jež mají význam vlnových délek λ , určuje celkový zářivý tok Φ_e , vydávaný zdrojem. Část $\Delta\Phi_e$ z tohoto celkového toku, která připadá na zvolený interval $\Delta\lambda$ vlnových délek, omezený délkami λ_1 a λ_2 , je pak na obrázku znázorněna vyčárkovanou ploškou. Z toho už plyne význam příslušné pořadnice grafu. Je-li interval $\Delta\lambda$ malý, je střední pořadnice v tomto intervalu určena podílem $\Phi_{e\lambda} = \Delta\Phi_e/\Delta\lambda$, který v limitě $\Delta\lambda \rightarrow 0$ přejde v diferenciální podíl

$$6.3 (1) \quad \Phi_{e\lambda} = \frac{d\Phi_e}{d\lambda}.$$

Podíl $\Phi_{e\lambda}$, který nazýváme *monochromatickým (jednobarevným) zářivým tokem*, udává číselně zářivý tok, připadající na interval vlnových délek jednotkové velikosti (kdyby všem zářivý tok v tomto intervalu byl rovnoměrně rozložen na všechny vlnové délky, které interval obsahuje).

Podobně jako je lidské ucho různě citlivé na tóny různé výšky, tj. na akustické vlnění různé vlnové délky nebo frekvence, tak také oko reaguje na záření různé barvy (různé vlnové délky) s různou citlivostí. Tak je všeobecně známo, že infračervené a ultrafialové záření nevyvolá v oku žádný zrakový vjem, ani při sebevětší intenzitě, zato záření vlnové délky, na kterou je oko citlivé, budí již při velmi malém zářivém toku dosti silný zrakový vjem.



Obr. (6.3) 1 a — Rozložení zářivého toku na jednotlivé vlnové délky, b — světelný tok

Obor vlnových délek záření, která v oku budí zrakový vjem (*obor viditelného záření*), sahá zhruba od 0,4 do 0,75 μm . Tento obor je na obr. (6.3) 1a naznačen svislými čárkovanými přímkami. Z celkového zářivého toku Φ_e zářiče tedy jen jistá část, která je na obrázku znázorněna plochou omezenou křivkou a svislými přímkami, má schopnost vzbudit zrakový vjem. Jak velká je tato část v poměru k celkovému zářivému toku, závisí na teplotě zářiče. Je-li jím černé těleso (čl. 6.5.2), je největší při teplotě asi 6 000 °K a činí přibližně 50 % z celkového zářivého toku. V nejlepším případě se tedy asi polovina zářivé energie uplatňuje jako světlo. Není jisté náhodou, že tomu tak je právě u Slunce, jehož povrchová teplota je zhruba rovna nejprůhodnější teplotě 6 000 °K. Ve svém vývoji se oko zřejmě přizpůsobilo Slunci jakožto přirozenému světelnému zdroji, a proto jsou pro ně i u umělého zářiče nejvýhodnější stejné poměry jako u Slunce.

Avšak oko není stejně citlivé pro celý obor viditelného záření. Nejméně je citlivé na vlnové délky ležící na okrajích oboru viditelného záření, citlivější je na vlnové délky, jež jsou asi uprostřed tohoto oboru, a nejcitlivější je na žlutozelené světlo vlnové délky 0,555 μm .

Není snadné zjistit experimentálně závislost veličiny, která by charakterizovala citlivost oka na světlo různé barvy, na příslušné vlnové délce. Obtížnost tohoto úkolu záleží v tom, že oko není schopno určit, kolikrát je světelný vjem, vzbuzený jistým zářivým tokem vstupujícím do oka, větší, popř. menší než světelný vjem vzbuzený jiným zářivým tokem. Na základě zrakového vjemu lze jen poměrně přesně rozhodnout, že dvě plochy ležící vedle sebe jsou stejně silně osvětleny. Ale i k tomu je třeba, aby světla, jimiž osvětlení obou ploch vzniká, měla přibližně touž barvu. Proto postupujeme takto: osvětlíme jednu plochu světlem, jehož vlnové délky leží v malém intervalu obsahujícím vlnovou délku λ_m , na kterou je oko nejcitlivější; příslušný zářivý tok je $\Delta\Phi_{em}$. Zároveň osvětlíme druhou plochu světlem, jehož vlnové délky leží ve stejně velkém intervalu kolem vlnové délky λ_1 , která se mnoho neliší od délky λ_m , takže barva obou světél je zhruba stejná; příslušný zářivý tok je $\Delta\Phi_{e1}$. Abychom pozorovali stejně silné osvětlení obou ploch, musí být zřejmě $\Delta\Phi_{e1} > \Delta\Phi_{em}$, protože oko je na světlo vlnové délky λ_1 méně citlivé než na světlo vlnové délky λ_m . Poměr

$$6.3 (2) \quad V_{\lambda_1} = \frac{\Delta\Phi_{em}}{\Delta\Phi_{e1}} < 1$$

vyjadřuje proto vhodně citlivost oka na světlo vlnové délky λ_1 ve srovnání s maximální citlivostí na světlo vlnové délky $\lambda_m = 0,555 \mu\text{m}$ a nazývá se *poměrná světelná účinnost jednobarevného záření* (v tomto případě vlnové délky λ_1). Zvolíme-li další interval kolem vlnové délky λ_2 blízke λ_1 , určíme podobně $V_{\lambda_2} = \Delta\Phi_{e1}/\Delta\Phi_{e2}$ a po dosazení za $\Delta\Phi_{e1}$ z hořejšího vztahu dostaneme $V_{\lambda_2} = V_{\lambda_1} \cdot V_{\lambda_1} = \Delta\Phi_{em}/\Delta\Phi_{e2}$, tj. poměrnou světelnou účinnost jednobarevného záření vlnové délky λ_2 . Pokračujeme-li takto dále v celém oboru viditelného záření a vyrovnáme-li soubor získaných bodů plynulou křivkou, dostaneme závislost po-

měrné světelné účinnosti jednobarevného záření V_λ na vlnové délce λ , znázorněnou na obr. (6.3) 2 křivkou 1. Z této křivky je zřejmé, že tok záření vlnové délky např. $0,65 \mu\text{m}$ (červené světlo) musí být asi desetkrát větší než tok záření vlnové délky $0,555 \mu\text{m}$ (žlutozelené světlo) touž plochou, má-li v oku vzniknout stejně intenzivní zrakový vjem.

Poměrná světelná účinnost V_λ umožňuje vyjádřit, jak asi lidské oko zhodnotí zářivý tok, který připadá na obor viditelného záření [na obr. (6.3) 1a znázorněný plochou omezenou svíslými čárkovanými přímkami], a má tedy schopnost vzbudit zrakový vjem. Je-li $d\Phi_e$ elementární tok připadající na elementární interval $d\lambda$ vlnových délek, pak součin $V_\lambda d\Phi_e = V_\lambda \Phi_{e\lambda} d\lambda$, zavedeme-li podle 6.3 (1) monochromatický zářivý tok, určuje vzhledem k 6.3 (2) ekvivalentní tok $d\Phi_{em}$ záření vlnové délky λ_m , jímž v oku vznikne stejně silný zrakový vjem jako tokem $d\Phi_e$ záření vlnové délky λ . Integrál

$$6.3 (3) \quad \Phi = \int_0^\infty V_\lambda d\Phi_e = \int_0^\infty V_\lambda \Phi_{e\lambda} d\lambda,$$

znázorněný vyčárkovanou plochou na obr. (6.3) 1b, pak určuje celkový tok záření vlnové délky λ_m , který v oku budí stejně intenzivní zrakový vjem jako zářičem vydávaný zářivý tok připadající na obor viditelného záření nebo celkový zářivý tok, který zářič vysílá na všech vlnových délkách, protože energie vyzařovaná mimo obor viditelného záření nemá konec konců vliv na sílu zrakového vjemu. Proto jsme v integrálu 6.3 (3) mohli volit uvedené meze, neboť mimo viditelný obor je poměrná světelná účinnost rovna nule.

Odpověď na otázku, jak normální lidské oko zhodnotí zářivý tok Φ_e , který z pozorovatelného zářiče do něho vstupuje, je tedy tato: z hlediska intenzity zrakového vjemu (tedy nikoli barvy) pocítuje oko zářivý tok Φ_e jako tok záření Φ vlnové délky λ_m , na kterou je nejcitlivější, budící v něm stejně silný vjem jako tok Φ_e . Jinou možnost než navzájem srovnávat u subjektivních počítků nemáme.

Zářivý tok Φ , charakterizující zhodnocení výkonu přenášeného zářením normálním lidským okem vzhledem k rozdílné citlivosti na různé barvy, nazýváme *světelným tokem*. Jeho velikost ve wattech lze principiálně určit vyčíslením integrálu 6.3 (3), je-li pro vyšetřovaný světelný zdroj známa závislost monochromatického toku $\Phi_{e\lambda}$ na vlnové délce λ , tedy křivka na obr. (6.3) 1a (která ovšem má u různých zářičů a za různých podmínek různý tvar). Pohodlnější je však světelné toky vyšetřovaných zdrojů srovnávat na základě rovnosti intenzity subjektivních vjemů se světelným tokem, který vydává určitý zářič za stanovených podmínek, a zvolit tento světelný tok za jednotku. Podle mezinárodní dohody je jednotkou světelného toku zvanou *lumen* (značka lm) světelný tok, který vysílá absolutně černé těleso do celého poloprostoru při teplotě tuhnoucí platiny (1769°C za tlaku 760 torrů) plochou velikosti $5,305 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$.

Pro černé těleso je závislost monochromatického toku $\Phi_{e\lambda}$ na vlnové délce λ určena Planckovým vyzařovacím zákonem (čl. 6.5.2). Dosadíme-li do integrálu 6.3 (3) tuto závislost pro teplotu tuhnoucí platiny, dostaneme numerickou integraci

$$6.3 (4) \quad \Phi = 0,00147 \text{ W} = 1 \text{ lm} \text{ nebo } 1 \text{ W} = 680 \text{ lm}.$$

To jsou převodní vztahy mezi jednotkou světelného toku lumen a jednotkou watt. Máme-li tedy světelný tok určit z integrálu 6.3 (3) v jednotkách lumen, je třeba integrál násobit převodním číslem $K_m = 680 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$.

Poměr světelného toku Φ k příslušnému zářivému toku Φ_e touž plochou, tedy

$$K = \frac{\Phi}{\Phi_e},$$

nazývá se *světelná účinnost záření* (dříve *viditelnost*). Např. u černého tělesa při teplotě

tuhnoucí platiny je $\Phi = 0,001\,47\text{ W}$ a podle Stefanova—Boltzmannova zákona (čl. 6.5.2) je příslušný zářivý tok $\Phi_e = 0,476\text{ W}$, takže $K = 0,001\,47/0,476 = 0,003\,1$. Toto číslo udává zlomek úhrnného zářivého toku zdroje, který by byl schopen vzbudit stejně intenzivní zrakový vjem jako úhrnný tok, kdyby zdroj vyzařoval tuto část výkonu při vlnové délce λ_m , na kterou je oko nejcitlivější. Číslo K by bylo rovno jedné, kdyby oko na záření všech vlnových délek bylo stejně citlivé jako na záření vlnové délky λ_m , nebo kdyby zdroj veškerou energii vyzařoval při vlnové délce λ_m . Potom by účinnost zdroje z hlediska jeho schopnosti vzbudit zrakový vjem jisté intenzity byla maximální a na každý watt jeho příkonu by podle 6.3 (4) připadal světelný tok 680 lm. Pripadá-li však část energie vyzařované zdrojem také na vlnové délky, na které je oko méně citlivé nebo na které vůbec nereaguje, pak jednotce příkonu přísluší menší světelný tok, který vyjde v lumenech, jestliže prve určené číslo K násobíme činitelem $K_m = 680\text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$. U černého tělesa při teplotě tuhnoucí platiny vychází $K = 0,003\,1 \cdot 680 = 2,1\text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$. Měříme-li tedy světelný tok v lumenech a výkon zářiče ve wattech, pak číslo K_m představuje maximální světelnou účinnost záření; jeho převrácená hodnota

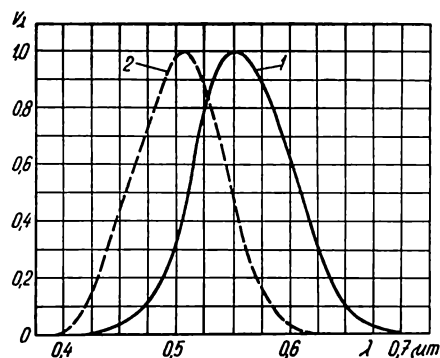
$$1/K_m = 0,001\,47\text{ W} \cdot \text{lm}^{-1}$$

se proto nazývá *minimální mechanický ekvivalent světla*.

Pro jednobarevné záření vlnové délky λ je podle 6.3 (2) světelná účinnost $K_\lambda = V_\lambda$, měříme-li světelný i zářivý tok ve wattech, a $K_\lambda = K_m V_\lambda$, měříme-li světelný tok v lumenech. Potom poměrnou světelnou účinnost jednobarevného záření lze také definovat jako poměr jeho světelné účinnosti K_λ a světelné účinnosti K_m jednobarevného záření vlnové délky $\lambda_m = 0,555\text{ }\mu\text{m}$, na které je oko nejcitlivější, tedy

$$V_\lambda = \frac{K_\lambda}{K_m}.$$

Uvedené údaje pro poměrnou světelnou účinnost platí jen při dosti intenzivním osvětlení. Při přechodu od denního světla v soumrak posune se celá křivka $V_\lambda = f(\lambda)$ směrem ke kratším vlnovým délkám, tj. při slabém osvětlení je citlivost oka na červené straně spektra (větší vlnové délky) menší a na modré straně spektra (kratší vlnové délky) je větší. To je tzv. *Purkyňův jev*, který lze pozorovat takto: máme dva papíry, červený a modrý, z nichž se nám při obvyklém denním osvětlení zdá modrý papír tmavší než červený. Zatemníme-li značně místnost, ale ne úplně, zdá se nám, jakmile se oko přizpůsobí tmě, že modrý papír je světlejší než červený.



Obr. (6.3) 2. Poměrná světelná účinnost: 1 — při vidění čípkovém (denním), 2 — při vidění tyčinkovém (soumrakovém)

Purkyňův jev se vysvětluje činností tzv. *tyčinek* a *čípků*, uložených v sítnici oka, na kterou se promítají reálné obrázky předmětů. Tyčinky jsou mnohem citlivější než čípky a je jich v sítnici asi 14krát více než čípků, neumožňují však rozlišovat barvy. Barevné vjemy vznikají jen při dostatečně intenzivním podráždění čípků. Za dosti silného osvětlení sítnice převládá tedy vnímání čípků, při němž rozlišujeme barvy. Příslušné vidění se nazývá *čípkové*, *fotopické* nebo *denní*. Při velmi slabém osvětlení převládá vnímání tyčinkami, takže vidíme jen různé odstíny

modrošedé. Vidění se pak nazývá *tyčinkové*, *skotopické* nebo *soumrakové*. I při tyčinkovém vidění je ovšem citlivost oka na různé vlnové délky různá. Nejcitlivější je na jednobarevné záření vlnové délky $0,507\text{ }\mu\text{m}$. Příslušná maximální světelná účinnost $K_m = 1\,740\text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$. Poměrná světelná účinnost V_λ určená stejným způsobem jako při denním vidění (za základ srovnání se ovšem bere záření vlnové délky $0,507\text{ }\mu\text{m}$) je v závislosti na vlnové délce λ znázorněna na obr. (6.3) 2 přerušovanou křivkou označenou číslicí 2.

6.3.2. Záření bodového zdroje

Zdrojem měřitelného množství světelné energie může být zajisté jen těleso konečných rozměrů, avšak pozorujeme-li zdroj ze vzdálenosti, která je velká proti jeho rozměrům. můžeme bez zřetele na jeho tvar předpokládat, že světlo vychází z jediného geometrického bodu.

Kužel, jehož vrcholem je svítící bod Z a jehož plášť se skládá ze světelných paprsků, tvoří *světelnou trubici* [obr. (6.3) 3]. Světelné paprsky určují směr šíření energie, a proto pláštěm trubice nevystupuje žádná energie ani dovnitř, ani ven, takže světelný tok jdoucí libovolným průřezem trubice je stálý (předpokládáme ovšem, že se světelná energie v prostředí, jímž se šíří, neabsorbuje). Kužel světelné trubice vytíná na kulových plochách $K_1, K_2, \dots$ se společným středem ve zdroji Z plochy $S_1, S_2, \dots$. Tyto plochy rostou se čtvercem poloměrů kulových ploch $r_1, r_2, \dots$, avšak poměry

$$6.3 (5) \quad \omega = \frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2} = \dots$$

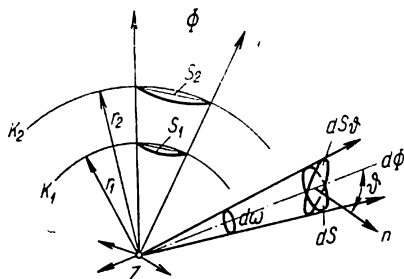
jsou pro touž světelnou trubici konstantní a určují její *prostorový úhel*, obecně prostorový úhel kužele. Prostorový úhel ω je tedy číselně určen plochou, kterou vytíná kužel, vymezující prostorový úhel, z kulové plochy, opsané z vrcholu kužele jednotkovým poloměrem. Jednotka prostorového úhlu jmenuje se *steradián* (značka sr); je to prostorový úhel, jemuž příslušející kužel vytíná z koule jednotkového poloměru plochu vrchlíku jednotkové velikosti. Protože povrch koule je $4\pi r^2$, je podle 6.3 (5) plný prostorový úhel roven 4π .

Pro zvolenou světelnou trubici jsou tedy světelný tok Φ i prostorový úhel ω stálé, takže také podíl obou veličin je stálý. Volíme-li prostorový úhel elementární, tedy $d\omega$, pak podíl příslušného elementárního světelného toku $d\Phi$ a tohoto prostorového úhlu

$$6.3 (6) \quad I = \frac{d\Phi}{d\omega}$$

určuje novou fotometrickou veličinu, kterou nazýváme *svítivostí* bodového zdroje. Osu světelného kužele, jemuž přísluší prostorový úhel $d\omega$, můžeme zvolit v kterémkoli směru, takže pomocí svítivosti I lze vyjádřit, jak se světelný tok vysílaný zdrojem rozloží do jednotlivých směrů v prostoru. Toto rozložení nebývá u skutečných zdrojů rovnoměrné, což vystihuje svítivost I tím, že má v různých směrech různou velikost.

Jednotka svítivosti je v měrové soustavě SI základní fotometrickou jednotkou. Nazývá se *kandela* (značka cd) a je definována takto: Kandela je rovna 1/60 kolmé svítivosti čtverečního centimetru černého tělesa při teplotě tuhnutí platiny (1769 °C za tlaku 760 torrů).*) Jednotka světelného toku — lumen — je potom jednotka druhotná, určená světelným tokem, který do kužele s prostorovým úhlem 1 steradiánu vysílá bodový zdroj, jehož svítivost je ve všech směrech rovna 1 kandele. (Souvislost této definice lumenu s jeho definicí, kterou jsme uvedli při výkladu světelného toku, je vysvětlena v závěru následujícího článku.)



Obr. (6.3) 3. K definici svítivosti a osvětlení plošky bodovým zdrojem

*) Zlomek 1/60 byl zvolen proto, aby kandela byla přibližně rovna starším jednotkám svítivosti zvaným *svíčky* (Hefnerova svíčka HK, mezinárodní svíčka SI), které byly realizovány lampami, v nichž se spalovala různá paliva.

Dopadá-li na povrch tělesa světelný tok Φ , pak část $d\Phi$ tohoto toku dopadající na plošný element dS povrchu, dělená velikostí tohoto elementu, nazývá se *osvětlení* (intenzita osvětlení) E tělesa ve vyšetřovaném místě, tedy

$$6.3 (7) \quad E = \frac{d\Phi}{dS}.$$

Osvětlení je číselně rovné světelnému toku, dopadajícímu na plošnou jednotku osvětlovaného tělesa. Jednotka osvětlení nazývá se *lux* (značka lx); je to osvětlení, při kterém na plochu 1 m^2 dopadá rovnoměrně rozložený světelný tok 1 lumenu ($1 \text{ lx} = 1 \text{ lm} \cdot \text{m}^{-2}$).

Je-li ploška dS , pro kterou určujeme osvětlení bodovým zdrojem, kolmá k ose světelného kužele, v němž na ni světelný tok dopadá [obr. (6.3) 3], pak podle 6.3 (5) prostorový úhel tohoto kužele $d\omega = dS/r^2$. Při šikmém dopadu (úhel dopadu je ϑ) dopadá též světelný tok na plošku $dS_\vartheta = dS/\cos \vartheta = r^2 d\omega/\cos \vartheta$, takže v místě plošky dS_ϑ vznikne osvětlení

$$6.3 (8) \quad E = \frac{d\Phi}{dS_\vartheta} = \frac{d\Phi}{r^2 d\omega} \cos \vartheta = \frac{I}{r^2} \cos \vartheta.$$

Osvětlení plochy bodovým zdrojem roste tedy přímo úměrně se svítivostí I zdroje v příslušném směru a ubývá s dvojmocí vzdálenosti r od zdroje a s kosinem úhlu dopadu ϑ .

Má-li bodový zdroj ve všech směrech stejnou svítivost I , pak světelný tok, který vysílá do plného prostoru, je podle 6.3 (6) $\Phi = 4\pi I$. Obklopíme-li zdroj kulovou plochou, jejíž střed je ve zdroji, pak osvětlení této plochy má velikost $E = \Phi/S = \Phi/4\pi r^2 = I/r^2$ ve shodě s odvozeným vztahem. Můžeme tedy říci, že osvětlení 1 lx způsobí bodový zdroj ve všech směrech stejné svítivosti 1 cd na plášti koule opsané kolem zdroje poloměrem 1 m.

Tabulka (6.3)I

Některá typická osvětlení

	Osvětlení [lx]
Přímé sluneční osvětlení v poledne	10^5
Ve slunný den ve stínu stromu	10^4
V zatažený den venku	až 10^3
Výborné osvětlení místnosti	10^2 až $2 \cdot 10^2$
Osvětlení k pohodlnému čtení	30
Při úplňku v noci	$2 \cdot 10^{-1}$

Součin z osvětlení E plochy a doby t , po kterou osvětlení trvá, tedy

$$e = Et,$$

nazýváme *osvitem* (*expozicí*) plochy. Jednotka je *luxsekunda* (značka lx·s), což je osvit plochy při jejím osvětlení 1 luxem po dobu 1 sekundy. Podobně je definována *luxhodina* (lx·h).

Vzorec 6.3 (8) pro osvětlení E plochy je výchozím vztahem pro vizuální srovnávání svítivosti různých zdrojů

na základě rovnosti osvětlení. Zmínili jsme se již v předešlém článku, že na základě zrakového vjemu lze poměrně přesně určit, jsou-li dvě plochy nebo dvě části téže plochy, které současně pozorujeme, stejně osvětleny. Měníme proto vzdálenosti r_1 a r_2 dvou srovnávaných zdrojů o svítivostech I_1 a I_2 od stejnorodé plochy tak dlouho, až se nám ukáže stejné osvětlení plochy od obou zdrojů. Při kolmém dopadu světla plyne z rovnosti osvětlení

$$6.3 (9) \quad E = \frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2} \text{ nebo } \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Tím převádíme srovnávání svítivosti zdrojů na srovnávání dvou délek, které je pohodlné a poměrně přesné. Zařízení upravené tak, aby se osvětlení od srovnávaných zdrojů dala současně pozorovat, nazývají se *fotometry*.

Intenzita světelného vjemu vzbuzená bodovým zdrojem závisí na světelném toku $\Delta\Phi$ vstupujícím do oka. Jsou-li $\Delta\omega$ prostorový úhel, pod nímž by bylo vidět oční pupilu průměru p z místa, v němž je bodový zdroj, r vzdálenost zdroje od oka a I svítivost zdroje, pak tento tok

$$\Delta\Phi = I\Delta\omega = \frac{\pi p^2}{4} \frac{I}{r^2}.$$

Srovnávání svítivosti zdrojů naznačené v hlavním textu a volba jednotky svítivosti umožňují tedy přiřadit intenzitám světelných vjemů jisté číselné hodnoty; to znamená, že světelný tok tolik a tolik lumenů vzbudí v oku vždy stejně silný subjektivní vjem, ať jeho zdrojem je jakýkoli zářič (ovšem za předpokladu, že záření mají zhruba stejné spektrální složení). Tím však není řečeno, že by dvakrát, třikrát atd. větší světelný tok v lumenech vzbudil také dvakrát, třikrát atd. silnější subjektivní vjem. Světelný tok vstupující do oka vyjadřuje jen podráždění sítnice čili popud, jemuž přísluší zajisté jistý počitek, nelze však tvrdit, že by byl popudu úměrný. Lze jen předpokládat, že podobně jako u sluchu závislost počítka na popudu vyjadřuje Weberův—Fechnerův psychofyzický zákon (čl. 3.3.3), podle něhož by skutečná síla zrakového vjemu (počitek) měla být úměrná logaritmu světelného toku (popudu) vstupujícího do oka. Protože však na rozdíl od sluchu oko nemá schopnost určit číselně, kolikrát je skutečný subjektivní vjem větší nebo menší než jiný, stává se aplikace Weberova—Fechnerova zákona na světelné vjemy problematickou.

6.3.3. Záření plošného zdroje

Nejsou-li rozměry zdroje zanedbatelné proti vzdálenosti, v níž pozorujeme jeho světelné účinky, musíme na těleso hledět jako na plošný zdroj. Vytkneme-li na povrchu takového zdroje plošku ΔS , která je velmi malá, můžeme ji považovat za svítící bod a definovat její svítivost stejně jako u bodového zdroje. Z celkového světelného toku $\Delta\Phi$, který ploška vysílá do celého poloprostoru, připadá na elementární prostorový úhel $d\omega$ podle obr. (6.3) 4a část $d(\Delta\Phi)_\vartheta$. Svítivost plošky ve směru určeném úhlem ϑ udává pak podíl

6.3 (10)

$$\Delta I_\vartheta = \frac{d(\Delta\Phi)_\vartheta}{d\omega}.$$

Je-li ploška ΔS elementární, má ovšem i její svítivost ve všech směrech elementární velikost. Svítivost plochy konečné velikosti ve zvoleném směru je pak součtem svítivostí jednotlivých plošek, na které jsme plochu rozdělili.

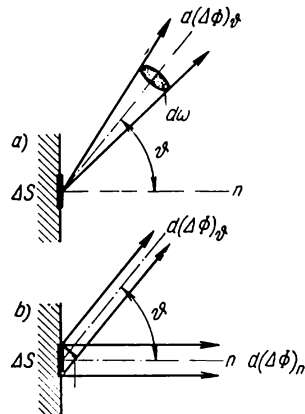
Prostorový úhel $d\omega$, jímž určujeme svítivost plošky, je nekonečně malý; proto světelný tok $d(\Delta\Phi)_\vartheta$, který svítící bod nahrazující plošku ΔS vysílá ve zvoleném směru do prostorového úhlu $d\omega$, je zřejmě shodný se světelným tokem, šířícím se z plošky ΔS v paprscích, které jsou všechny rovno běžné s daným směrem [obr. (6.3) 4b]. Tento svazek rovnoběžných paprsků je tím užší, čím větší je jeho odklon ϑ od kolmice k plošce ΔS a tím menší je zřejmě také světelný tok $d(\Delta\Phi)_\vartheta$, který se v něm z plošky ΔS do daného směru šíří. Předpokládáme ovšem, že celkový světelný tok $\Delta\Phi$ vysílaný ploškou ΔS do poloprostoru je rovnoměrně rozložen do všech směrů. Světelný tok $d(\Delta\Phi)_\vartheta$ je tedy úměrný příčnému průřezu ΔS_ϑ světelné trubice, jejíž plášť tvoří paprsky rovnoběžné se zvoleným směrem. Plocha ΔS_ϑ je rovna pravoúhlému průmětu plošky ΔS do roviny kolmé k vyšetřovanému směru záření.

6.3 (11)

$$\Delta S_\vartheta = \Delta S \cos \vartheta$$

a udává *zdanlivou velikost* svítící plošky ΔS . Potom světelný tok $d(\Delta\Phi)_\vartheta$ ve směru odchýleném od normály n svítící plošky ΔS o úhel ϑ je určen vztahem

$$d(\Delta\Phi)_\vartheta = d(\Delta\Phi)_n \cos \vartheta,$$



Obr. (6.3) 4. K svítivosti a jasů plošného zdroje

je-li $d(\Delta\Phi)_n$ světelný tok, který ploška ΔS vysílá v kolmém směru.*) Dělíme-li tuto rovnici prostorovým úhlem $d\omega$, představující si opět plošku ΔS jako svítící bod, dostaneme vztah mezi svítivostí ΔI_ϑ ve směru odchýleném od kolmice o úhel ϑ a svítivostí ΔI_n ve směru kolmém k ploše:

6.3 (12)

$$\Delta I_\vartheta = \Delta I_n \cos \vartheta.$$

To je *zákon Lambertův*, podle něhož svítivost izotropního rovinného plošného zdroje v každém jeho bodě klesá s kosinem odklonu od kolmice k ploše zdroje. Zářiče, které září podle Lambertova zákona, nazývají se *kosinové*.

Podílem svítivosti ΔI_ϑ plošky ve zvoleném směru a zdánlivé velikosti ΔS_ϑ plošky je určena měrná svítivost neboli *jas* L_ϑ plošného zdroje v daném místě a směru. Číselně je jas roven svítivosti plochy, jejíž průmět do roviny kolmé k danému směru má jednotkovou velikost. Dělíme-li spolu rovnice 6.3 (12) a (11), dostaneme pro jas kosinového zářiče

6.3 (13)

$$L_\vartheta = \frac{\Delta I_\vartheta}{\Delta S_\vartheta} = \frac{\Delta I_n}{\Delta S} = L_n$$

čili jas plošky nezávisí na sklonu ϑ její normály od směru, v němž plošku pozorujeme, a je stejný jako v kolmém směru. Platí-li to pro každou malou část zakřiveného povrchu zářícího tělesa, pak se má povrch ve všech místech jevit stejně jasný. Skutečně se nám u některých zářících těles zdá, že každý bod povrchu září stejně všemi směry, v nichž se na těleso díváme. Tak se např. rozžhavená koule nebo dutina jeví jako kotouč až po okraj stejně zářící, podobně jako se povrch některých těles odrážejících nebo rozptylujících světlo zdá všude stejně jasný (Měsíc v úplňku, mléčná žárovka).

Jas jakožto měrná veličina nezávisí na rozměrech předmětu a nezávisí ani na vzdálenosti předmětu od oka, protože je přímo úměrný svítivosti, která se se vzdáleností nemění. Proto se nám také např. dva listy papíru stejně osvětlené jeví stejně jasné, i když jeden je blízko a druhý daleko. Těmito poznatky je tedy platnost Lambertova zákona u některých zářičů potvrzena. Zároveň z nich plyne, že pro intenzitu zrakového vjemu vzbuzeného plošným zdrojem nejsou směrodatné svítivost zdroje a zdánlivá velikost plochy samy o sobě, nýbrž podíl obou veličin, tj. jas plochy.

Jednotkou jasu je *nit* (značka nt), což je jas roviny, jejíž plocha 1 m^2 má kolmou svítivost rovnou 1 kandeles ($1 \text{ nt} = \text{cd} \cdot \text{m}^{-2}$).

Světelné zdroje dělíme na vlastní a nevlastní. K *vlastním zdrojům* počítáme tělesa (látky), u nichž jsou splněny podmínky, za nichž vzniká světlo přímo v tělese (Slunce, žárovky, plamen, výbojka, světélkující barvy). Naproti tomu látky, které samy nezáří, ale odrážejí a rozptylují dopadající světlo, nazýváme *nevlastními zdroji* (Měsíc, mraky, reflektor, papír, stěna a vůbec všechny osvětlené předměty).

Všechny zdroje záření, ať vlastní, nebo nevlastní, nezáří však podle Lambertova zákona. Z vlastních zdrojů se jím neřídí žhavé plyny. Tak např. Slunce, jehož svítící povrchová vrstva zvaná *fotosféra* je v plynném stavu, jeví se nám na okraji méně jasné, neboť fotosféra absorbuje část vyzařované energie. Je to zřetelně vidět na fotografickém snímku slunečního povrchu.

*) Rovnoměrné rozdělení světelného toku $\Delta\Phi$ do všech směrů v poloprostoru vyznačuje se zřejmě tím, že kulová plocha obklopující svítící plošku ΔS se středem v této plošce je v každém místě stejně osvětlena. Malé části této kulové plochy mají velikost ΔS_ϑ , takže z rovnosti osvětlení v jednotlivých místech

$$E = \frac{d(\Delta\Phi)_\vartheta}{\Delta S_\vartheta} = \frac{d(\Delta\Phi)_n}{\Delta S} = \text{const}$$

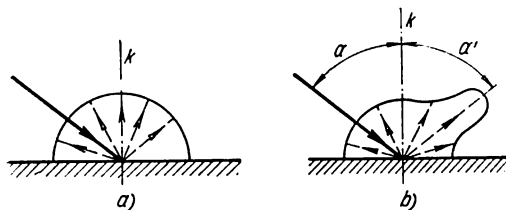
plyne také uvedená směrová závislost světelného toku.

Jas nevlastních zdrojů závisí jednak na osvětlení, jednak na směru, v němž pozorujeme příslušnou část povrchu, a konečně na fyzikální povaze zdroje. Při dopadu světla na povrch nevlastního zdroje se část světelného toku pohlcuje nebo i propouští a zbytek se odráží. Ve fotometrii mají největší význam matné (nelesklé) povrchy, které co největší část světla všech barev odrážejí, které tedy mají *odrazivost* (tj. poměr odraženého světelného toku k toku dopadajícímu) pro všechny barvy co možná blízkou jedné. Matné, jemně zrnité povrchy odrážejí totiž světlo ve všech směrech, nejvíce ovšem ve směru podle zákona o rovnosti úhlu dopadu a odrazu [tento zákon je velmi přesně splněn jen u dokonale vyleštěných kovových a podobných ploch (obr. (6.3) 5b)]. Čím drsnější je povrch, tím více se rozdělení jasu liší od zákona odrazu a blíží se rozdělení podle Lambertova zákona, který platí přesně jen pro dokonale *difúzní plochy*, u nichž je každé místo dopadu světelného paprsku zdrojem celého svazku paprsků šířících se rovnoměrně na všechny strany [obr. (6.3) 5a]. Tomuto ideálu dokonale rozptylujícího povrchu blíží se povrch nepolévaného porcelánu, neklíženého papíru, čerstvě napadlého sněhu, sádry a křídly. Na obrázcích je délka čárkovaných vektorů úměrná velikosti jasu odrážející plochy v příslušném směru.

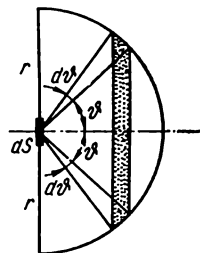
Tabulka (6.3) II

Jas některých zdrojů

Zdroj	Jas [nt]
Slunce	$2 \cdot 10^9$
Wolframové vlákno při teplotě 2 700 °K	$1 \cdot 10^7$
Bílý papír při slunečním osvětlení	$2,5 \cdot 10^4$
Zářivka	$6 \cdot 10^3$
Plamen svíčky	$5 \cdot 10^3$
Obloha při mírné oblačnosti	$3 \cdot 10^3$
Měsíc	$3 \cdot 10^3$
Bílý papír při měsíčním osvětlení	$3 \cdot 10^{-2}$



Obr. (6.3) 5. Difúzní odraz



Obr. (6.3) 6. K výpočtu světlení plošného zdroje

Zbývá definovat poslední fotometrickou veličinu, která se jmenuje *světlení* (intenzita světlení) H . Ve zvoleném místě povrchu zářícího tělesa je určena podílem světelného toku $d\Phi$, který malá ploška dS kolem zvoleného místa vysílá do celého poloprostoru, a této plošky:

6.3 (14)

$$H = \frac{d\Phi}{dS}.$$

Světlení je číselně rovno světelnému toku, který plocha jednotkové velikosti vyzařuje do celého poloprostoru. Udává se v jednotkách $\text{lm} \cdot \text{m}^{-2}$, které nemají zvláštní název. Světlení je určeno stejným podílem jako osvětlení, obě veličiny se však liší tím, že světlení závisí na světelném toku, který ploška dS vysílá, kdežto osvětlení na toku, který na vytknutou plošku dopadá.

Snadno odvodíme vztah mezi světlením a jasnem malé plošky pro kosinový zářič. Podle obr. (6.3) 6 si zvolme za prvek $d\omega$ prostorového úhlu úhel omezený dvěma kužely o vrcholových úhlech 2θ a $2\theta + 2d\theta$. Tyto kužele vytínají na povrchu koule poloměru r opsané ze středu vyšetřované plošky ΔS plochu $2\pi r \sin \theta \cdot r d\theta$ [na obr. (6.3) 6 vytečkovanou], takže elementární prostorový úhel $d\omega = (2\pi r^2 \sin \theta \cdot d\theta)/r^2 = 2\pi \sin \theta d\theta$. Z celkového světelného toku $\Delta\Phi$, který ploška vysílá do celého poloprostoru, připadá na prostorový úhel $d\omega$ tok

$$d(\Delta\Phi)_\theta = \Delta I_\theta d\omega = L_\theta \Delta S \cos \theta d\omega = 2\pi L_\theta \Delta S \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

Integraci od $\vartheta = 0$ do $\vartheta = \pi/2$, při níž můžeme jas $L_\vartheta = L$ považovat za konstantní, protože jde o kosinový zářič, dostaneme

$$6.3 \quad (15) \quad \Delta\Phi = \pi L \Delta S = \pi \Delta I_a \quad \text{čili} \quad H = \pi L.$$

Světlení malé plošky ΔS kosinového zářiče je tedy π -krát větší než její jas; světelný tok $\Delta\Phi$, který ploška vysílá do celého poloprostoru po jedné straně zářičiho povrchu, je rovněž π -krát větší než její plošná svítivost ΔI_a ve směru kolmém k povrchu. Tento výsledek platí ovšem jen pro kosinový zářič, u něhož jas je ve všech směrech stejný.

Z prvního vztahu 6.3 (15) plyne definice lumenu, kterou jsme udali v čl. 6.3.1. Je-li plošná svítivost 1 cm^2 černého tělesa $I_a = 60 \text{ cd}$, pak světelný tok Φ vycházející z plochy 1 cm^2 je $\pi \cdot 60 \text{ lm}$. Světelný tok jednoho lumenu vychází tedy z plochy $(1/60 \pi) \text{ cm}^2 = 5,305 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2$.

6.4. Vlnová optika

6.4.1. Vlnové vlastnosti světla

Již v čl. 6.1.1 jsme uvedli, že světlo je jen velmi úzkým oborem elektromagnetického záření. Šíří se prostorem jako postupné elektromagnetické vlnění, které má všechny obecné vlastnosti společné různým druhům příčného vlnění, jak jsme vyložili na konci čl. 5.11.3.

Vlnová optika (dříve nazývaná na rozdíl od optiky geometrické *fyzikální optika*) je obor optiky, který se zabývá jevy založenými na vlnové povaze světla. Je to především interference a ohyb světla, což jsou jevy, které lze pozorovat u každého vlnění — podélného i příčného. Dalším předmětem vlnové optiky je polarizace, která dokazuje, že světlo je vlnění příčné. Kromě těchto jevů a jejich praktických aplikací probereme v této kapitole aspoň stručně také základní úkazy pozorované při průchodu světla prostředím, zejména pohlcování, rozptyl a rozklad světla. V tomto úvodním článku promluvíme nejprve o podmínkách, za kterých je možno pozorovat interferenci a ohyb světla.

Interference a ohyb světelných vln se projevují podobným způsobem jako u mechanických a akustických vln. Kvantitativně se ovšem optické jevy liší od mechanických, ježto vlnová délka světla je podle tab. (6.1) I menší než $1/1\,000 \text{ mm}$, a proto často nastává interference, aniž se současně projeví odchylky od přímočarého šíření světla. Takové jevy nazýváme *ryze interferenčními*, kdežto jevy, při nichž dochází k interferenci i v prostorech nepřístupných světlu přímočarým šířením, nazýváme *jevy ohybovémi*, ač jejich příčinou je rovněž interference světla.

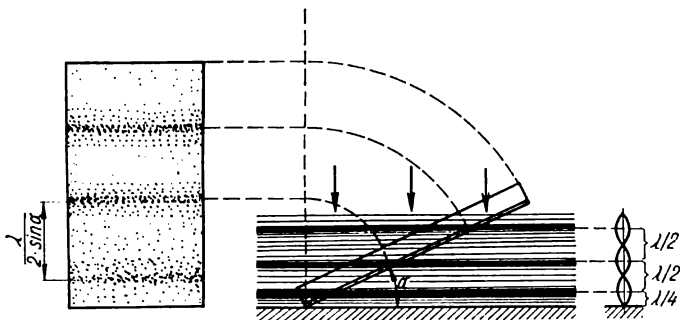
K tomu přistupuje další okolnost, která má zásadní důležitost pro vznik pozorovatelných interferenčních jevů a která vyplývá z poznatku, že *pozorovatelný interferenční jev může nastat jen mezi dvěma koherentními vlnami, které mají časově neproměnný fázový rozdíl*. Při interferenci dopadající a odražené vlny a při všech jevech ohybových je o koherenci vln postaráno samočinně tím, že spolu interferují dvě části téže vlny. Je jasné, že není možno předpokládat, že týž atom vydává světlo po libovolnou dobu nepřetržitě a se stálým fázovým posuvem. Neznamená to ovšem, že by paprsky vyslané dvěma různými atomy navzájem neinterferovaly, avšak neustále se měnící fáze obou paprsků dávají vznik nesmírně rychle proměnnému a nestálému (nestacionárnímu) rozdělení světelné intenzity, které se vymyká pozorování. Aby vznikl pozorovatelný ustálený stav, musí interference vznikat mezi částmi téže světelné vlny, vycházející z týchž atomů. Při větších dráhových diferencích mezi oběma částmi vlny pak ani tato podmínka nestačí, je-li vzájemné zpoždění dvou interferujících paprsků větší než doba, po kterou atom kmitá periodicky bez náhlých nespojitých změn fáze. Z toho všeho plyne, že v optice je k dosažení interference nutno křížit části světla vycházející z téhož zdroje a nesmí se překročit jistý maximální dráhový rozdíl obou světél.

6.4.2. Ryze interferenční jevy

Nejjednodušší případy interference odpovídají teoretickým výsledkům odvozeným v čl. 3.2.3 pro interferenci vln v přímé řadě. Jde zřejmě o interferenci rovinných vln stejnosměrných nebo protisměrných, neboť ve všech paprscích kolmých k rovinné vlnoploše je stav vlnění stejný. Proto lze děj pokládat za interferenci v rovnoběžném svazku paprsků a převzít výsledek zmíněného článku.

A. Vznik stojatých vln při kolmém osvětlení kovového zrcadla

Dopadá-li rovinná vlna jednobarevného světla vlnové délky λ kolmo na rovinné kovové zrcadlo neferomagnetické, odrazí se zpět, čímž podle čl. 3.2.4 vzniknou stojaté vlny. Tento teoretický výsledek potvrdil Wiener (r. 1890) jednoduchým a velmi poučným pokusem [obr. (6.4) 1]. Rovnoběžnému svazku paprsků dopadajících kolmo na stříbrné zrcadlo vložil v cestu přesně planparalelní skleněnou desku, skloněnou velmi nepatrně k rovině zrcadla o úhel α a pokrytou velmi tenkou citlivou vrstvou fotografické emulze. Světlo proniká emulzí, odráží se skoro beze ztrát na zrcadle a vytvoří stojaté vlny. V kmitnách těchto vln vznikne po vyvolání desky zčernání rozložené v příčných prouzcích, rovnoběžných se zrcadlem. To skutečně Wiener pozoroval a zjistil, že těsně u hrany desky, dotýkající se zrcadla, zčernání nevzniká. První černý proužek vznikne v kolmé vzdálenosti $\lambda/4$ od zrcadla a každý následující o $\lambda/2$ dále od předcházejícího. Na fotografické desce jsou tedy vzdálenosti proužků od hrany desky, dotýkající se zrcadla, $\lambda : (4 \sin \alpha)$, $3\lambda : (4 \sin \alpha)$, ... atd. Z hlediska elektromagnetické teorie světla má tato experimentální skutečnost zásadní význam. Ježto jde o odraz příčného elektromagnetického vlnění na rozhraní kolmém ke směru šíření, účastní se vlnění jen tečné sil tečné k rozhraní. V článcích 5.2.4 a 5.7.2 jsme dokázali, že tečné složky intenzity elektrického i magnetického pole se na rozhraní mění spojitě (nikoli skokem), což značí, že tečná složka intenzity elektrického pole je po obou stranách rozhraní stejná, a totéž platí pro tečnou složku intenzity magnetického pole. Poloha uzlů elektrické i magnetické vlny závisí tedy na vlastnostech prostředí, od něhož se elektromagnetická vlna odráží. Uvnitř kovu je elektrické pole nulové, a proto musí být jeho tečná složka rovna nule i těsně u povrchu zrcadla v dielektriku. To znamená, že na povrchu kovu je uzlová rovina elektrické stojaté vlny. Magnetické pole však existuje i v neferomagnetickém kovu, a proto bude mít jeho tečná složka velikost od nuly různou: stojatá magnetická vlna má na povrchu kovu kmitnu. Z toho usuzujeme, že elektrická vlna se na kovu odráží s opačnou fází, ale magnetická vlna beze změny fáze. Z toho je zřejmé, že zčernání, které má maximum ve vzdálenosti $\lambda/4$ od zrcadla, je způsobeno elektrickou silou, a nikoli magnetickou, která má kmitnu v rovině zrcadla, kde zčernání nevzniká. Tento poznatek souhlasí i s jinými pokusy, které vesměs svědčí o tom, že *světelné účinky elektromagnetického záření způsobuje elektrická síla*, nikoli magnetická. Je to ve shodě s novější představou o latentním obrazu, vznikajícím osvětlením fotografické desky, který je podmíněn ionizací atomů halových solí stříbra v emulzi. Je pochopitelné, že ionizaci působí právě síla elektrická, nikoli magnetická.



Obr. (6.4) 1. Vznik stojatých světelných vln ve fotografické emulzi podle Wienera

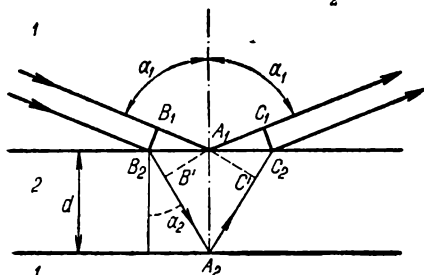
B. Interference v tenkých vrstvách

Na všude stejně tenkou planoparalelní vrstvu prostředí 2 o indexu lomu n_{21} vzhledem k okolnímu prostředí 1 omezenou dvěma spolu rovnoběžnými rovinami nechť dopadá pod úhlem α_1 rovinná vlna, která se odráží i láme [obr. (6.4) 2]. Lomený paprsek $B_2A_2C_2$ se však odráží zpět na spodním rozhraní, a po lomu v C_2 vystupuje rovnoběžně s odraženým paprskem, s nímž interferuje na sítnici neakomodovaného oka nebo v ohniskové rovině spojné čočky. Fázové zpoždění lomené vlny proti odražené vlně je rovno rozdílu jejich fází na vlnoploše C_1C_2 a je tedy stejné pro kterékoli dva paprsky vybrané z obou vln, pokud byly ve vlnoploše B_1B_2 ve fázi. Časové zpoždění τ souvisí však s fázovým rozdílem φ vztahem

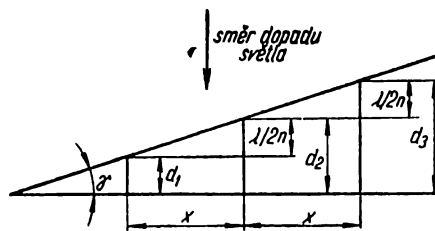
$$\varphi = \omega\tau = \frac{2\pi}{T}\tau = \frac{2\pi v}{vT}\tau = \frac{2\pi}{\lambda}v\tau = \frac{2\pi}{\lambda}\delta,$$

kde v je rychlost světla, λ vlnová délka a $\delta = v\tau$ dráhový rozdíl v daném prostředí. Dráhový rozdíl δ_2 v prostředí 2 přepočteme na dráhový rozdíl δ_1 v prostředí 1 podle vztahů

$$\delta_1 = v_1\tau = \frac{v_1}{v_2}v_2\tau = n_{21}\delta_2.$$



Obr. (6.4) 2. Interference v tenké planoparalelní vrstvě



Obr. (6.4) 3. Interference na klínové vrstvě

Je-li prostředí 1 vzduch, je $n_{21} = n$ a $\delta_1 = n\delta_2 = \delta$, což značí dráhový rozdíl ve vzduchu přibližně rovný optické dráze.

Podle rovnice pro φ je tedy také δ nezávislé na volbě srovnávaných paprsků, a můžeme je proto určit např. pro paprsky $B_1A_1C_1$ a $B_2A_2C_2$, které se podle obr. (6.4) 2 odrážejí v bodech A_1 , A_2 ležících na téže kolmici, vzhledem k níž jsou oba paprsky souměrné. Mezitím co první dorazí z B_1 do A_1 , dosáhne lomená vlna polohy A_1B' kolmé k B_2A_2 a za stejně dlouhou dobu urazí ovšem dráhu $C'C_2$. Lomená vlna se tedy zpozdí proti odražené vlně celkem o délku $\delta_2 = B'A_2C' = 2d \cos \alpha_2$, které odpovídá ve vzduchu dráhový rozdíl

$$\delta = n\delta_2 = 2nd \cos \alpha_2.$$

Podle zákona lomu

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n_{21} = n,$$

$$\cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{n^2}}.$$

Píšeme-li tedy $\alpha_1 = \alpha$, bude dráhový rozdíl

$$6.4 (1) \quad \delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

K tomu je ovšem nutno připojit ještě rozdíl $\lambda/2$, ježto jeden paprsek se odráží na hustším prostředí s opačnou fází a druhý na řidším prostředí se stejnou fází podobně jako při

odrazu vln na pevném a volném konci (čl. 3.2.4). Celkový dráhový rozdíl mezi oběma paprsky je tedy

$$6.4 (2) \quad \Delta = \delta + \lambda/2 = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \lambda/2$$

a závisí na tloušťce vrstvy d a na úhlu dopadu α . Podle čl. 3.2.3 budou se odražené paprsky zesilovat, když bude Δ rovno sudému počtu půlvln, měřeno ve vzduchu, když tedy

$$6.4 (3) \quad 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \lambda/2 = 2k\lambda/2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Při kolmém dopadu ($\alpha = 0$) nastane tedy v odraženém světle zesílení pro

$$6.4 (4) \quad d = \frac{2k-1}{4n} \lambda$$

a zeslabení prakticky na nulu pro

$$6.4 (5) \quad d = \frac{k}{2n} \lambda,$$

čímž docházíme znovu k případu stojatých vln. Při šikmém dopadu bude intenzita odraženého světla záviset také na úhlu dopadu a je zřejmé, že pro každou dosti malou tloušťku d existuje jeden nebo více úhlů, pod nimiž se světlo odráží s maximální nebo minimální (nebo nulovou) intenzitou. Z velikosti těchto úhlů lze podle rovnice 6.4 (3) určit ze známé tloušťky vrstvy (destičky) o známém indexu lomu *vlnovou délku* jednobarevného světla.

Odvozené výsledky platí pro celou plochu vrstvy a pro veškeré dopadající světlo, jsou-li veličiny d , λ a n stálé. Snadno však výsledky zobecníme.

Především pro *klínovou vrstvu* bude mít d v každém místě jinou hodnotu, a proto při odrazu pod pevným úhlem α bude se podle 6.4 (2) fázový posuv Δ měnit se vzdáleností od hrany klínu, jak snadno nahlédneme z obr. (6.4) 3, kresleného pro kolmý dopad. Jsou na něm naznačeny tloušťky $d_1, d_2, d_3, \dots$, pro něž se světlo ruší a které se podle 6.4 (5) liší vždy o $\lambda/2n$. Uprostřed mezi nimi nastávají ovšem podle 6.4 (4) světelná maxima, takže pozorujeme v odraženém monochromatickém světle *tmavé a světlé interferenční proužky*. Vzájemná vzdálenost dvou sousedních světlých anebo sousedních tmavých proužků je podle obr. (6.4) 3

$$6.4 (6) \quad x = \frac{\lambda}{2n} : \operatorname{tg} \gamma \approx \frac{\lambda}{2n\gamma},$$

značí-li γ úhel klínu v míře obloukové. Proužky jsou tím řidší, čím menší je klínovitost vrstvy.

Zobecnění hořejších výsledků pro bílé nebo jiné složené světlo se spojitým spektrem vede zřejmě k závěru, že pro každou barvu světla nastanou maxima a minima ve vzdálenostech úměrných vlnové délce. Při interferenci na přesně planoparalelní vrstvě dostaneme v bílém světle různě zbarvené světlo podle tloušťky vrstvy, jež rozhoduje o tom, které vlnové obory se zesilují a které zeslabují. Při interferenci na klínové vrstvě se interferenční proužky rozloží podle jednotlivých barev ve stejném pořadí jako ve spektru. Dostaneme duhově zbarvené proužky s okraji modrými (fialovými) a červenými. To lze pozorovat např. tzv. *Newtonovými skly* [obr. (6.4) 4]. Přitiskneme-li k rovinné skleněné destičce vypuklou plochu plankonvexní čočky s velkým poloměrem křivosti R , pozorujeme v odraženém světle tmavý střed a soustředné *Newtonovy kroužky*, duhově zbarvené. Vznikají interferencí na tenké vzduchové vrstvě, neboť světlo vlnové délky λ se zesiluje ve vzdálenosti r_k od středu, v níž

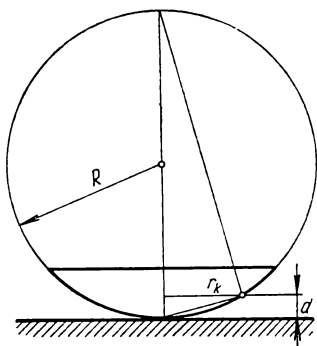
je tloušťka d vzduchové vrstvy ($n \approx 1$) podle 6.4 (4) rovna lichému počtu čtvrtvln. Ježto podle obr. (6.4) 4

$$6.4 (7) \quad r_k^2 = (2R - d) d,$$

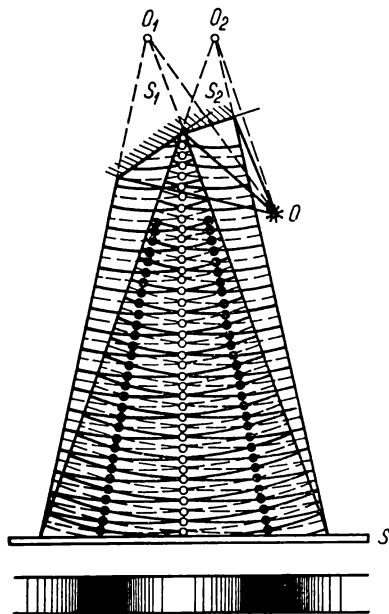
můžeme ze změřeného poloměru k -tého kroužku vypočítat vlnovou délku světla.

C. Interference světla ze dvou bodových zdrojů

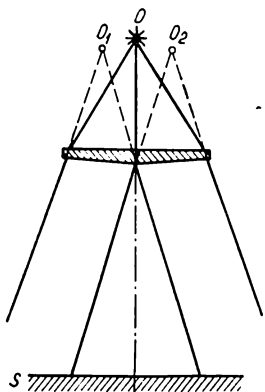
Ukončíme výklad o interferenci poukazem na interferenční jev, který vzniká v prostoru, kde se překrývá světelné záření vycházející ze dvou přibližně bodových nebo rovnoběžných lineárních zdrojů. Matematická teorie jevu je snadná, proto jen stručně ukážeme, jak byla



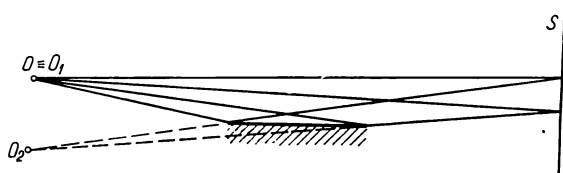
Obr. (6.4) 4. Vznik Newtonových kroužků



Obr. (6.4) 5. Vznik koherentních svazků paprsků Fresnelovými zrcadly



Obr. (6.4) 6. Fresnelův dvojhranol. Světlo zdroje O se láme tak, jako by vycházelo ze dvou virtuálních zdrojů O_1 a O_2



Obr. (6.4) 7. Lloydův pokus

splněna podmínka koherence obou zdrojů. Uskutečnil ji Fresnel dvěma způsoby: zrcátky a dvojhranolem. *Fresnelova zrcátka* jsou dvě zrcátka jen nepatrně navzájem skloněná, ležící téměř v téže rovině, jak je nakresleno na obr. (6.4) 5, takže vytvoří dva velmi blízké virtuální obrazy O_1 , O_2 téhož bodového (nebo lineárního) zdroje O . V prostoru společném oběma světelným svazkům S_1 , S_2 vzniknou maxima a minima, která lze pozorovat na stí-

nítku S , vzdáleném několik metrů od zrcátek. Zdroje O_1, O_2 jsou koherentní, ježto vznikly odrazem světla vycházejícího ze společného zdroje O . Dva blízké koherentní zdroje lze vytvořit také lomem na dvou tenkých hranolech (*Fresnelův dvojhranol*, obr. (6.4) 6). Ještě jednodušeji toho dosáhl Lloyd takřka tečným odrazem svazku paprsků od jediného zrcátka. V tomto případě je jeden zdroj skutečný, druhý virtuální [obr. (6.4) 7].

6.4.3. Užití interference. Michelsonův pokus

S interferencí se setkáváme i v denním životě. Jsou to především známé *barvy tenkých vrstev*, které pozorujeme např. na velmi tenkých vrstvách oleje nebo benzínu rozprostřených po vodním povrchu. Pozorujeme zvláště na okrajích mastných skvrn duhově zbarvené pruhy, které mění barvy podle místní tloušťky vrstvy a podle směru pozorování. Také mýdlové bubliny, které bývají ještě tenčí, jeví duhové zbarvení, které je vzhledem k málo proměnné tloušťce bubliny stejnoměrnější a má povlnnější přechody mezi barvami. Interferenční jevy vznikající na velmi tenké vzduchové vrstvě mezi dvěma leštěnými stěnami skleněných hranolů a destiček nebo mezi velmi dokonalými, téměř rovinnými stěnami ocelových měrek a přesnou planparalelní skleněnou destičkou nás dobře informují o zbývajících nedokonalostech jejich povrchů.

Je dokonce možno užít interference i k srovnání přesných měrek. Interferenční měřicí metody jsou vzhledem k nepatrné délce světelných vln velmi přesné a užívá se jich ve vědeckých i výzkumných ústavech, ba i přímo v praxi ke kontrole povrchů a tloušťky různých povlaků, nanášených např. ve vakuu. V posledních letech se vyrábějí objektivy (fotografické i u dalekohledů) s tzv. *antireflexní vrstvou*, jejíž nepatrná tloušťka je volena tak, aby se zeslabilo světlo odražené na plochách čoček objektivu.

Pokud jde o interferenční metody měřicí, připomeneme jen interferenční dilatometr, kterým lze měřit teplotní roztažnost pevných látek ze změny polohy interferenčních proužků, způsobené změnou teploty.

Velmi důležitý význam mají tyto metody pochopitelně při měření vlnové délky světla. Byla sestavena řada přístrojů zvaných *interferometry*.

Popíšeme podrobněji jen *Michelsonův interferometr*, jehož schéma je naznačeno na obr. (6.4) 8a. Spojkou S vytvořený rovnoběžný svazek paprsků (z nichž je kreslen jen jediný) dopadá pod úhlem 45° na rovinnou stěnu planparalelní skleněné destičky d , kde se odrazí i láme. Tato (přední) stěna je slabě postříbřena, aby odražený i lomený paprsek měly stejnou intenzitu. Tak se dopadající světlo dělí v bodě A na dva svazky:*)

1. Odražené paprsky dopadají kolmo na zrcadlo Z_1 , které je vrací zpět do bodu A , odkud po lomu v A jdou do dalekohledu D .

2. Lomené paprsky dopadají kolmo na zrcadlo Z_2 , které je rovněž vrací do A , kde se odrazí a po lomu přijdou také do dalekohledu D . Druhý svazek přitom ovšem projde celkem třikrát destičkou d , svazek první však jen jednou. Proto se mu vkládá do cesty stejná a rovnoběžná destička d_1 (kompenzační). Pak jsou dráhy obou svazků stejné, jsou-li zrcadla Z_1 a Z_2 stejně daleko od bodu A . V ohnisku objektivu se tedy oba svazky zesilují. Posuneme-li však jedno ze zrcadel ve směru paprsků o čtvrtinu vlnové délky, zruší se oba svazky interferencí a střed zorného pole bude tmavý. Kolem středu vidíme pak *interferenční kroužky* (v bílém světle barevné, v jednobarevném jasné a temné), které odpovídají místům stejného sklonu paprsků, jež nevstupují do dalekohledu přesně rovnoběžně s optickou osou. Tak je tomu při dokonalé kolmosti obou zrcadel k osovému paprsku. K pozorování však lze užít také *interferenčních proužků* (slabě zakřivených), které vzniknou při zcela mírném vzájemném sklonu zrcadel. Obvykle má jedno z nich pevnou vzdálenost, lze však

*) Na nepostříbřené zadní stěně destičky se světlo prakticky jen láme, a nedochází na ní proto k dalšímu znatelnému dělení paprsků.

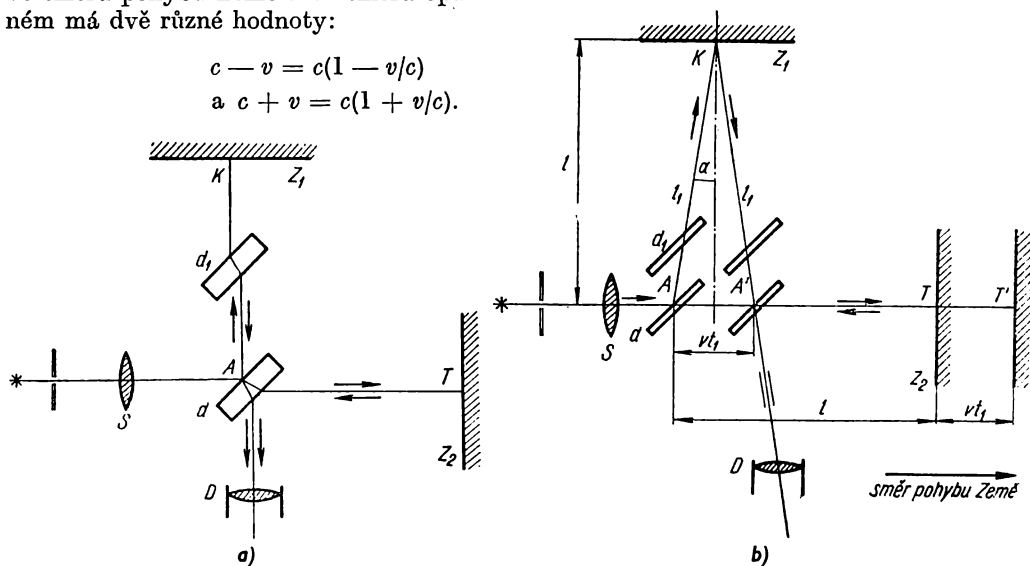
měnit jeho sklon regulačními šroubky. Druhé zrcadlo má pevný sklon a jeho vzdálenost se mění přesným mikrometrickým šroubem s dělenou hlavicí a podélnou stupnicí. Posouváme-li totiž toto zrcadlo jedním směrem, putují interferenční proužky zorným polem dalekohledu (interferenční kroužky se buď rozestupují, nebo stahují ke středu pole). Přitom projde pevným bodem pole tolik světlých proužků, o kolik půlvln se změní vzdálenost posuvného zrcadla. Tak lze měřit *vlnovou délku* jednobarevného světla.

Jiné typy interferometru sestavil Jamin, Rožděstvenskij, Fabry, Perot aj.

Za historicky nejvýznamnější užití interferometrie lze pokládat známý Michelsonův pokus (1881), kterým byla prokázána nezávislost rychlosti světla na pohybu Země kolem Slunce a při němž bylo použito právě Michelsonova interferometru. Podle Huygensovy vlnové teorie se světlo šíří v „nehybném“ éteru rychlostí c , a podle Galileiho klasické transformace 2.9 (4) by tedy měl pozemský pozorovatel zjistit, že rychlost světla měřená ve směru pohybu Země a ve směru opačném má dvě různé hodnoty:

$$c - v = c(1 - v/c)$$

$$\text{a } c + v = c(1 + v/c).$$



Obr. (6.4) 8. Princip Michelsonova pokusu:

a — chod paprsků v interferometru klidném vzhledem k éteru, *b* — chod paprsků v interferometru, který je unášen Zemí, obíhající kolem Slunce

Ačkoli průměrná rychlost Země na oběžné dráze kolem Slunce

$$v = 29,7 \text{ km s}^{-1}$$

je dosti malá ve srovnání s rychlostí světla, bylo možno platnost hořejších rovnic přezkoušet experimentálně a dokázat s velkou přesností, že rychlost světla v obou směrech je stejně velká. Tento výsledek vedl Einsteina k formulaci důležitého principu stálé rychlosti světla.

Předpokládejme, že je Michelsonův interferometr unášen Zemí rychlostí v ve směru paprsku AT . Pohybem přístroje vzhledem k éteru se změní chod paprsků, jak je naznačeno na obr. (6.4) 8b. Má-li totiž paprsek kolmý ke směru pohybu Země po odrazu na zrcadle Z_1 zastihnout destičku d v místě A' , musí v klidném éteru vykonat dráhu AKA' , k níž potřebuje čas

$$t_1 = \frac{2l_1}{c} = \frac{2l}{c \cos \alpha} ;$$

avšak

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} AA' : l_1 = \frac{1}{2} vt_1 : \frac{1}{2} ct_1 = \frac{v}{c},$$

takže

$$t_1 = \frac{2l}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Vzdálenost destičky d od Z_2 je stále rovna l , avšak relativní rychlost světla ve směru pohybu Země je $c - v$, kdežto po zpětném odrazu na Z_2 má velikost $c + v$. Proto je doba průchodu paprsku tečného k oběžné dráze Země od destičky d na zrcadlo Z_2 a zpět na destičku d za pohybu

$$t_2 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = l \frac{2c}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Časové opoždění tohoto paprsku proti paprsku kolmému

$$\tau = t_2 - t_1 \approx \frac{l}{c} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{l}{c} \beta^2,$$

kde

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{29,7}{300\,000} \approx 10^{-4}.$$

Kdyby byla délka $l = 15$ m, mělo by zpoždění hodnotu

$$\tau = \frac{15}{3 \cdot 10^8} 10^{-8} \text{ s} = 0,5 \cdot 10^{-15} \text{ s},$$

které odpovídá dráhový rozdíl

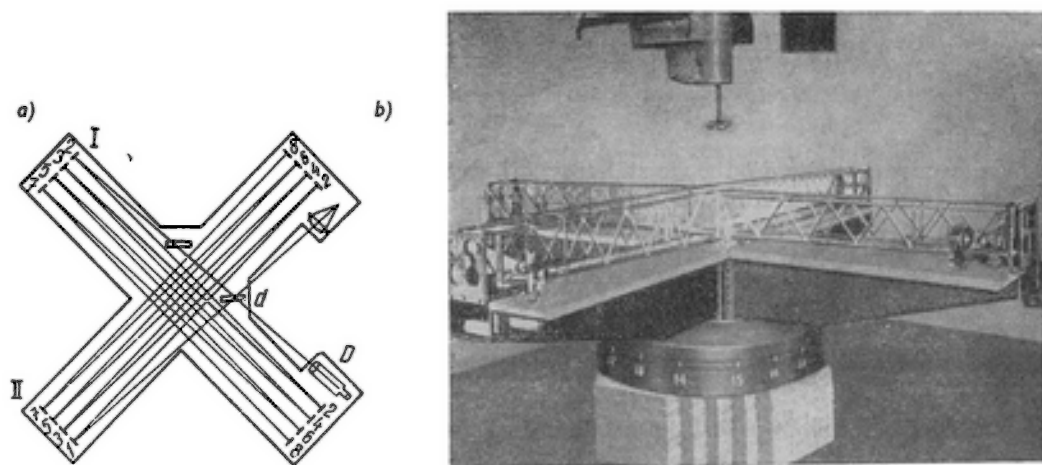
$$c\tau = 3 \cdot 10^8 \cdot 0,5 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Kdybychom tedy přístroj otočili kolem svislé osy o pravý úhel, polohy obou k sobě kolmých paprsků by se zaměnily a jejich dráhový rozdíl by změnil znaménko, takže by se vlastně změnil o dvojnásobek hořejšího dráhového rozdílu, tedy o

$$2c\tau = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,3 \mu\text{m}.$$

Kdybychom pak použili k měření žlutého světla o vlnové délce $0,6 \mu\text{m}$, činil by tento rozdíl právě polovinu vlnové délky, a interferenční proužky by se tedy posunuly o šířku světlého (nebo tmavého) proužku. Z toho je zřejmé, že při zvolené vzdálenosti $l = 15$ m bylo by možno bezpečně zjistit i malý zlomek očekávaného dráhového rozdílu obou paprsků. Tak velké vzdálenosti nebylo snadné dosáhnout u otáčivého přístroje, u něhož musela být zaručena stalost rozměrů ve vysoké míře. Proto Michelson zečtyřnásobil dráhu obou paprsků opakovaným odrazem na osmi zrcadlech. Interferometr byl montován na

masívní konstrukci plovoucí na rtuti, aby se dal bez otřesů a deformací otočit kolem svislé osy [obr. (6.4) 9]. Nieméně Michelson nepozoroval posunutí proužků a nepozorovali je ani jiné fyzikové, kteří pokus opakovali s přesností umožňující zjištění posuvu až 1 000krát menšího.



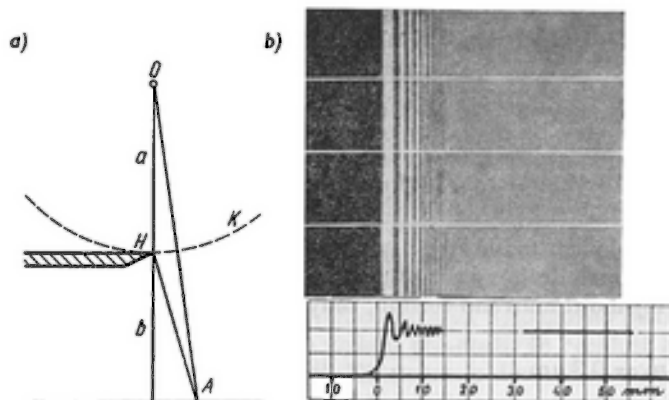
Obr. (6.4) 9a — Schéma Michelsonova přístroje, b — snímek zařízení pro Michelsonův pokus

6.4.4. Ohyb světla hranou, štěrbínou a mřížkou

Podle článku 6.4.1 nazýváme ohybovými jevy takové interferenční jevy, při nichž neplatí zákon přímočarého šíření světla a při nichž se světelné paprsky zahýbají kolem překážek.

Fresnel studoval podrobně ohybové jevy, které vznikají v samé blízkosti překážek při průchodu světla z bodového (nebo lineárního) zdroje. Při takových jevech, které nazýváme

Fresnelovými ohybovými jevy, jde vlastně o řešení problému interference kulových vln, ovšem podle Huygensova principu. Sem náleží zejména ohybové jevy vznikající při zobrazování optickými přístroji, o čemž promluvíme v čl. 6.4.6. Zde uvedeme jen důležitý případ *ohybu na přímé hraně*. Ohyb tohoto druhu vzniká vždy, když je světelný svazek omezen tělesem s neprůhlednou hranou. Na obr. (6.4) 10a je hrana H osvětlena jednobarevným bodovým zdrojem O ; osvětlení stínítka v místě A je výsledkem přímého šíření

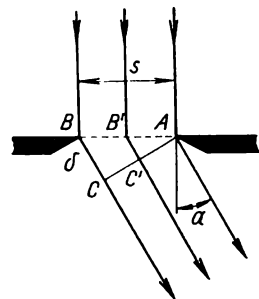


Obr. (6.4) 10. Ohyb na přímé hraně: a — chod paprsků, b — ohybové proužky

světla z elementárních zdrojů na vlnoploše K , zejména v samé blízkosti hrany H . Záleží ovšem na fázovém rozdílu jednotlivých složek, což vede ke vzniku *ohybových proužků*, rovnoběžných s hranou H . Pozorování je v úplné shodě s teorií. Na obr. (6.4) 10b je snímek ohybového jevu na přímé hraně, osvětlené úzkou štěrbínou (rovnoběžnou s H) světlem

vlnové délky $4,6 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,46 \text{ }\mu\text{m}$, ze vzdálenosti $a = 24 \text{ m}$ a pozorovaného na stínítku ve vzdálenosti $b = 15,5 \text{ m}$. Ve spodní části je teoretická křivka rozdělení intenzity světla. Uvedený snímek představuje ohyb světla vycházejícího z dosti vzdáleného zdroje, takže vlnoplocha je prakticky rovinná. To je vlastně již přechod k jevům, které nastávají při ohybu svazku rovnoběžných paprsků s přesně rovinnými vlnoplochy a jmenují se *ohybové jevy Fraunhoferovy*. Prakticky nejdůležitější je ohyb na velkém počtu jemných navzájem rovnoběžných štěrbin, osvětlených rovnoběžným světlem.

Nejprve však probereme Fraunhoferův *ohyb jednou štěrbinou*. Štěrba AB šířky s [obr. (6.4) 11], osvětlená kolmo dopadajícím jednobarevným světlem, stává se v celé své otevřené ploše zdrojem elementárních vln podobně jako rozhraní mezi dvěma prostředím při lomu a odrazu. Ze všech bodů mezi oběma hranami štěrby, jimž v řezu nakresleném na obr. (6.4) 11 odpovídají body A , B , šíří se kulové vlnoplochy. Protože však paprsky vystupující ze štěrby všemi směry navzájem interferují, nešíří se světlo za štěrbinou stejnoměrně na všechny strany, jak hned dokážeme. Vybereme si ze všech paprsků rovnoběžný svazek vystupující ze štěrby pod úhlem α . V rovinné vlnoploše AC , kolmé ke směru světla, mají jednotlivé paprsky svazku různou fázi podle délky proběhnuté dráhy. Je-li např. δ zpoždění krajního paprsku BC za druhým krajním paprskem v A , je zpoždění osového paprsku $B'C'$ poloviční, tedy $\delta/2$. Fázový rozdíl všech ostatních paprsků roste úměrně se vzdáleností paprsku od A k B . Tak ke každému paprsku p mezi A a B' najdeme mezi B' a B paprsek p' (vzdálený od p o půl šířky štěrby), zpožděný proti p o $\delta/2$. Z toho vidíme, že se všechny paprsky budou navzájem rušit, bude-li toto zpoždění rovno lichému počtu půlvln, bude-li tedy odchylka α svazku taková, že se δ rovná sudému počtu půlvln čili celému počtu vln



Obr. (6.4) 11.
Ohyb štěrbinou

$$6.4 (8) \quad \delta = s \sin \alpha = k\lambda, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ve směrech α_k , které vyhovují rovnici

$$6.4 (9) \quad \sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{s}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

se tedy světlo nešíří, neboť se ruší interferencí, spojíme-li paprsky svazku např. spojnou čočkou. Mezi tmavými místy, která tak vznikají ve směrech α_k , pozorujeme však místa světlá. Tzv. *hlavní maximum* světelné intenzity leží ve směru kolmém k rovině štěrby, neboť v tom směru se všechny paprsky zesilují. *Vedlejší maxima* vznikají pak po obou stranách maxima hlavního pro takové odchylky β_k od směru dopadu, pro které nastává největší částečné zesílení mezi dvěma sousedními úhly α_k , pro něž nastává tma. Vidíme např., že pro úhel β_1 , který vyhovuje podmínce

$$\frac{s}{3} \sin \beta_1 = \frac{\lambda}{2},$$

ruší se dva a dva paprsky vzdálené od sebe o třetinu šířky štěrby. Tedy dvě třetiny paprsků se zruší a zbývající třetina zůstává. Stejně je tomu pro libovolný *lichý* počet částečných svazků, takže obecně vzniknou maxima, když

$$6.4 (10) \quad \frac{s}{2k+1} \sin \beta_k = \frac{\lambda}{2}.$$

Vznikají světlé a tmavé pruhy, jejichž intenzity rychle ubývá. Kolem nejsilnějšího hlavního maxima leží souměrně slabší maxima, jak je zřejmé z obr. (6.4) 12.

Stejně bychom mohli početně sledovat *ohyb dvěma štěrbinami nebo i větším počtem rovnoběžných štěrbin*. Rozložení maxim a minim je patrné z částí *a až d* obr. (6.4) 13 při ohybu na třech až šesti štěrbinách a z částí *e a f* pro 10 a 250 štěrbin. Vidíme z nich, že se připojením dalších štěrbin hlavní maxima postupně zužují, jejich ostrost roste se stoupajícím



Obr. (6.4) 12. Ohyb jednobarevného rovnoběžného světla na jedné štěrbině

počtem štěrbin. Přitom se mezi nimi objevují v rostoucím počtu drobná podružná maxima, jejichž intenzita klesá s počtem štěrbin. Kdybychom zvyšovali počet štěrbin, přešla by konečně maxima ve velmi ostré čáry, jejichž poloha souvisí s vlnovou délkou, a vedlejší maxima by vymizela, jak vidíme ze snímku *f*. Na tom je založena konstrukce *ohybových*

mřížek. V nejjednodušším provedení jsou to rovinné mřížky na průchod nebo na odraz. Liší se jen tím, že první jsou ryty na skle, druhé na kovovém zrcadle. Obsahují velký počet velmi tenkých a hustých rovnoběžných vrypů (několik set až tisíc na mm), které činí sklo neprůhledným (u kovů ruší pravidelný odraz). Tyto vrypů tedy představují neprůhledné mezery mezi štěrbinami. Naznačíme jen stručně, jak dojdeme k podmínce maxim při velmi velkém počtu štěrbin, co možná nejpravidelněji rozložených a stejných [obr. (6.4) 14]. Označme *d* vzájemnou vzdálenost středů dvou sousedních štěrbin, která je rovna součtu šířky jedné štěrbin a jedné mezery. Nazývá se *konstanta mřížky* a její převrácená hodnota je rovna lineární hustotě vrypů, tj. jejich počtu na jednotku délky. Dopadá-li rovnoběžný svazek kolmo na mřížku, stanou se všechny body uvnitř štěrbin zdroji elementárních vln, které mají stejnou fázi a šíří se všemi směry. Jestliže světlo vystupující z mřížky pod úhlem α pozorujeme dalekohledem zaostřeným na nekonečno, vybereme ze všech paprsků jen ty, které jsou odchýleny od kolmice o úhel α . Podle obr. (6.4) 14 mají paprsky vystupující ze středů jednotlivých štěrbin S_k mezi sebou stejné dráhové difference $d \sin \alpha$. Splňuje-li tedy úhel α podmínku

$$6.4 \text{ (11)} \quad \delta = d \sin \alpha = r\lambda, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

zesilují se střední paprsky *všech* štěrbin a totéž platí i pro stejnohlé paprsky, které dělí šířky všech štěrbin ve stejném poměru. Liší-li se však dráhový rozdíl stejnohlých paprsků v sousedních štěrbinách o racionální zlomek půlvlny, tedy např. o $p/q \cdot \lambda/2$, bude rozdíl mezi paprsky *k-té* a $(k + q)$ -té štěrbin rovno $p \cdot \lambda/2$ a světla obou štěrbin se zesílí pro *p* sudé, ale zruší se pro *p* liché. Pokud tedy není *p* sudé, což by odpovídalo podmínce 6.4 (11), najdeme při *velkém* počtu štěrbin vždy dvě a dvě štěrbin, jejichž světla se navzájem ruší. Z toho soudíme, že se paprsky zesilují jen ve směrech, které splňují podmínku 6.4 (11), že tedy vznikají světlé pruhy — maxima — pro úhly $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, určené vztahy

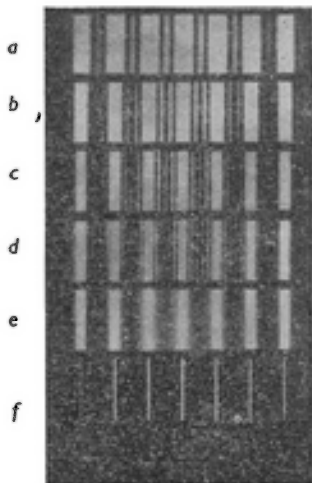
$$6.4 \text{ (12)} \quad \sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{d}, \quad \sin \alpha_2 = 2 \frac{\lambda}{d}, \quad \dots, \quad \sin \alpha_r = r \frac{\lambda}{d}.$$

Tato maxima jsou tím ostřejší (užší), čím větší je počet štěrbin (vrypů), neboť tím dokonaleji se ruší světla v ostatních směrech. Celé číslo *r* se nazývá *řád* maxima.

Především výsledky platí pro ohyb monochromatického světla. Dopadá-li na mřížku světlo složené (bílé), tvoří se ostrá maxima pro různé vlnové délky v různých směrech, a tedy v různých vzdálenostech od maxima nultého řádu, které má stejnou polohu pro všechny vlnové délky. Tak vznikají po obou stranách tohoto bílého maxima barevné čáry 1., 2. a vyšších řádů, které tvoří spektra 1., 2. a vyšších řádů. Úhly α_k bývají dosti malé, a proto jejich velikosti a ovšem i vzdálenosti jednotlivých spektrálních čar od nulového maxima jsou podle 6.4 (12) dosti přesně *úměrny vlnovým délkám*. Taková spektra se nazývají *normální*.

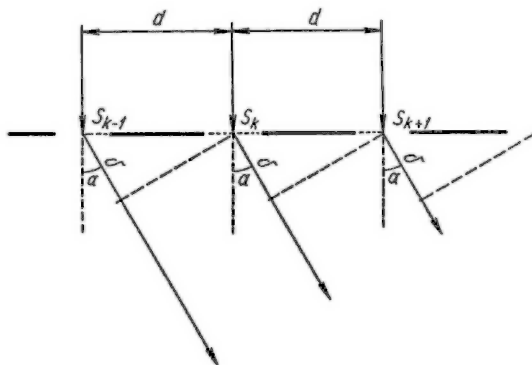
Ve spektrech vytvořených ohybovou mřížkou je červené světlo více odchýleno než fialové, na rozdíl od spekter vytvořených hranolem, kde je tomu naopak. Dvě spektrální čáry vlnových délek λ_1 a λ_2 mají podle 6.4 (12) ve spektru řádu r na stínítku vzdáleném o ohniskovou vzdálenost f' vzájemnou vzdálenost

$$6.4 (13) \quad f' \sin \alpha_{r1} - f' \sin \alpha_{r2} = \frac{f' r}{d} (\lambda_1 - \lambda_2).$$



Obr. (6.4) 13. Ohyb světla na větším počtu šterbin

Avšak hodnota $1/d$ je rovna hustotě vrypů, tedy počtu vrypů na jednotku délky. Z toho vidíme, že vzájemná vzdálenost dvou blízkých čar lišících se o $\Delta\lambda$ je úměrná tomuto



Obr. (6.4) 14. Ohyb světla mřížkou na průhled

rozdílu, hustotě vrypů a řádu spektra. Z přesnějšího výpočtu plyne, že relativní rozlišovací schopnost mřížky je rovna součinu celkového počtu N vrypů a řádu spektra, tedy

$$6.4 (14) \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = rN.$$

Přitom značí $\Delta\lambda$ nejmenší rozdíl vlnových délek, které ještě rozeznáme. U rovinných mřížek na průchod a na odraz je třeba pozorovat spektra optickým přístrojem, např. dalekohledem, v jehož optických soustavách se světlo absorbuje a tak se zeslabují intenzity spektrálních čar, zvláště v oboru vlnových délek světla, které sklo pohlcuje (v oboru světla ultrafialového a infračerveného). Tato nevýhoda je odstraněna u konkávních mřížek rytých na válcovém kovovém zrcadle, které samo vytváří ostrý obraz spektra. Z teorie plyne, že se spektra všech řádů zobrazují ostře na kružnici, která prochází šterbinou (zdrojem) i mřížkou, a má tedy průměr rovný poloměru křivosti zrcadla mřížky. Tato kružnice se nazývá Rowlandova kružnice podle fyzika, který takového uspořádání poprvé použil.

6.4.5. Ohyb světla kruhovou clonkou

Velký význam pro zobrazování optickými přístroji má Fresnelův ohyb na *kruhovém otvoru* nebo *stínítku*.

Probereme nejprve první případ. Kruhový otvor poloměru r je osvětlen zdrojem S ležícím na ose otvoru ve vzdálenosti a od roviny otvoru [obr. (6.4) 15]. Fresnel podal teorii jevu založenou na tzv. půlvlnových pásmech (zónách), která na kulové vlnoploše

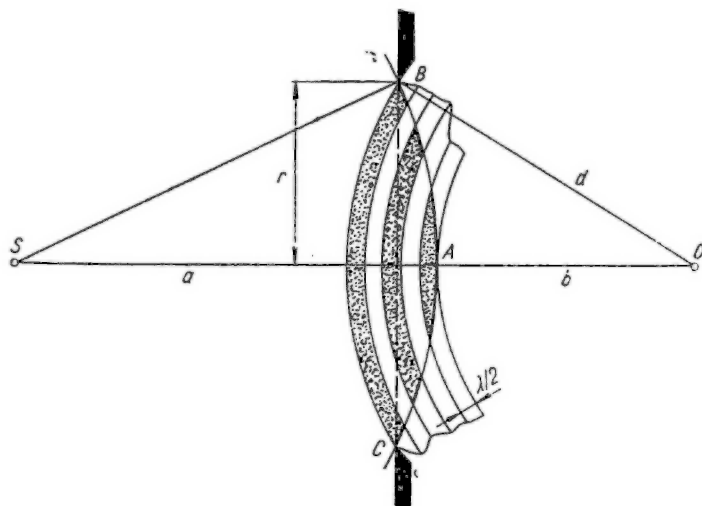
ABC vytíná soustava koulí opsaných kolem místa pozorovatele O tak, že poloměry dvou nejblížešších koulí soustavy se liší vždy o $\lambda/2$. Účinky dvou sousedních pásem na vlnoploše se totiž v O velmi přibližně ruší, a proto bude světelný účinek maximální, když počet pásem v otvoru bude lichý:

$$6.4 (15) \quad d - b = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

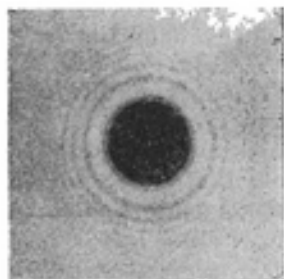
Bude-li však počet pásem sudý, bude účinek takřka nulový (minimální):

$$6.4 (16) \quad d - b = 2k \frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$

Vidíme tedy, že podle velikosti délek a , b , r může vzniknout ohybem v bodě O na ose buď světlo, nebo tma. Na základě toho počítal již Fresnel vlnovou délku z rovnice, které bychom



Obr. (6.4) 15. Fresnelův ohyb na kruhovém otvoru



Obr. (6.4) 16. Ohyb světla kuličkou (a) a stejně velkým otvorem (b)

stejně jako otvoru. Takové zařízení je vlastně komplementární k tzv. tmavé komoře (dírkové) a lze jím skutečně „zobrazovat“, jak je zřejmé z obr. (6.4) 17, který byl vytvořen ocelovou kuličkou $2r = 4$ cm ($a = 12$ m, $b = 18$ m). Při takových vzdálenostech

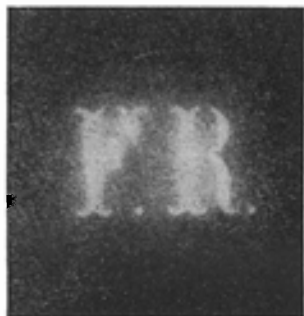
snadno odvodili z pouček elementární geometrie. Je důležité a zajímavé poznamenat, že zcela obdobný ohybový jev vznikne osvětlením neprůhledného kruhového stínítka. Platí dokonce tzv. *Babinetova věta*, podle níž je ohybový jev v místech mimo osu stejný, ať jde o kruhový otvor, nebo o stejně velké kruhové stínítko (doplňkové clonky). Neplatí to ovšem pro obraz clonky vytvořený podle zákonů geometrické optiky, který vznikne v samé blízkosti spojnice zdroje a středu otvoru (stínítka). Jak ukazuje teorie, vznikne na této ose při neprůhledném kruhovém stínítku vždy světlý bod (světelné maximum), což nelze tvrdit u otvoru. Pěkně to potvrzuje obr. (6.4) 16, kde vlevo je ohyb červeného světla kolem ocelové kuličky průměru $2r = 5$ mm, osvětlené „bodovým“ zdrojem průměru 0,2 mm ze vzdálenosti $a = 6,5$ m, pozorovaný na stejně vzdáleném stínítku ($b = a$). Vpravo je ohyb stejně velkým kruhovým otvorem za stejných podmínek. Vidíme tedy, že k zobrazování vzdálenějších menších předmětů lze užít kruhového stínítka

se Fresnelův ohyb blíží *ohybu Fraunhoferovu*, který byl teoreticky podrobně zpracován. Došlo se k výsledku, že kruhové obrazce, vytvořené na stínítku v ohniskové rovině spojné čočky, mají světelná minima na kružnicích o poloměrech

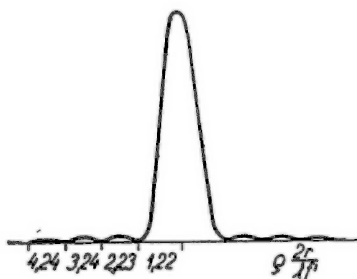
$$6.4 (17) \quad \varrho = f' \sin \alpha = \frac{z}{2} f' \frac{\lambda}{r},$$

kde f' značí zadní ohniskovou vzdálenost spojky a kde čísla z rostou zhruba jako čísla celá:

$$6.4 (18) \quad z = 1,22; 2,23; 3,24; 4,24; \dots$$



Obr. (6.4) 17. Obraz vytvořený „objektivem“ ve tvaru kuličky



Obr. (6.4) 18. Rozdělení intenzity světla při ohybu kruhovým otvorem

Rozdělení intenzity v osovému řezu je znázorněno na obr. (6.4) 18. Poloměr střední světlé plošky, tj. maxima nultého řádu, je tedy

$$6.4 (19) \quad \varrho = 0,61 f' \frac{\lambda}{r}.$$

Je přímo úměrný vlnové délce světla a nepřímo úměrný poloměru kruhového otvoru.

6.4.6. Význam ohybu pro rozlišovací schopnost optických přístrojů

V geometrické optice jsme podali teorii zobrazování za předpokladu, že se světlo šíří přísně přímočaře. Platnost tohoto předpokladu byla podtržena i v čl. 6.2.9, pojednávajícím o optických vadách čoček. Je zřejmé, že následkem ohybu světla neexistuje zásadně „bodové“ zobrazení. I při zobrazení nejmenšího předmětu jde vlastně vždy o ohybový jev, který vzniká ohybem světla na drobné překážce, jak je tomu např. u mikroskopu. Avšak i sama zobrazovací soustava čoček způsobuje, že vznikají ohybové jevy, a to na kruhové clonce (vstupní pupile) optického přístroje. Konečně i v oku samém nastává ohyb při vstupu světla do oka zornic. Odtud plyne závěr, že *rozlišovací schopnost optických přístrojů je omezena ohybem světla, a proto je tím větší, čím kratší je vlna užitého světla.*

Podáme stručné odvození rozlišovací schopnosti dalekohledu.

Při pozorování hvězdy dalekohledem vzniká ohyb světla na obrubě objektivu, která tvoří vstupní pupilu. Paprsky vstupují do dalekohledu velmi přibližně rovnoběžně s osou vstupního otvoru, a proto můžeme použít vzorce 6.4 (19) pro poloměr maxima nultého řádu. Zkušenosť ukazuje, že můžeme rozeznat ještě dva body, jejichž ohybové obrazce se překrývají tak, že nulté maximum jednoho padne do prvního minima obrazce druhého bodu. U dalekohledu nás ovšem spíše zajímá úhlový rozdíl dvou velmi vzdálených před-

mětů, které ještě rozlišíme. Podle 6.4 (17) až 6.4 (19) je tento úhlový rozdíl, zvaný *rozlišovací mez*,

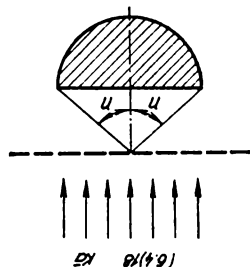
$$6.4 (20) \quad \alpha \approx \sin \alpha = \frac{\varrho}{f'} = 0,61 \frac{\lambda}{r} \approx \frac{\lambda}{2r} = \frac{\lambda}{D}.$$

Dalekohledem tedy rozeznáme nejmenší úhel rovný (v obloukové míře) poměru vlnové délky světla k průměru objektivu. Rozlišovací schopnost, určená převrácenou hodnotou

$$6.4 (21) \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,61} \frac{r}{\lambda} \approx 0,82 \frac{D}{\lambda},$$

je tedy úměrná průměru D objektivu a nepřímo úměrná vlnové délce světla.

Načtneme ještě Abbeovu teorii rozlišovací schopnosti mikroskopu, kterou posuzujeme podle nejmenší vzdálenosti dvou míst preparátu, jež ještě od sebe rozeznáme.



Obr. (6.4) 19. Numerická apertura mikroskopu

Předpokládejme, že pozorujeme mikroskopem lineární mřížku osvětlenou kondenzorem rovnoběžným svazkem kolmým k preparátu [obr. (6.4) 19]. Je-li u odklon krajních paprsků, které ještě vstupují do objektivu, od optické osy, pozorujeme okulárem ohybové proužky vytvořené v jeho ohniskové rovině, které vznikají interferencí paprsků obsažených v kuželi s vrcholovým úhlem $2u$. Kdyby úhel u byl menší než úhel α_1 , příslušný maximum prvního řádu, pozorovali bychom jen maximum nultého řádu, vytvořené paprsky rovnoběžnými s optickou osou objektivu. Tyto paprsky mají stejný chod, jako kdyby mřížka před objektivem vůbec nebyla, a proto bychom pozorovali stejnoměrně osvětlené pole. Teprve když do objektivu přijdou paprsky odchýlené ohybem na mřížce, pozorujeme její přítomnost. Je tedy zřejmé, že můžeme rozlišit jednotlivé čáry mřížky, je-li úhel u aspoň stejně velký jako úhel α_1 . Podle 6.4 (12) máme tedy podmínku

$$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{d} = \sin u.$$

Je-li mezi objektivem a preparátem prostředí s indexem lomu n , má v něm světlo vlnovou délku $\lambda = \lambda_0/n$, je-li λ_0 vlnová délka ve vakuu. Tak dostáváme pro vzdálenost, kterou můžeme rozeznat, vztah

$$6.4 (22) \quad d = \frac{\lambda}{\sin u} = \frac{\lambda_0}{n \sin u} = \frac{\lambda_0}{A}.$$

Výraz $A = n \sin u$ nazval Abbe *číslnou* (numerickou) *aperturou* objektivu. Délka d se nazývá *rozlišovací mez*.

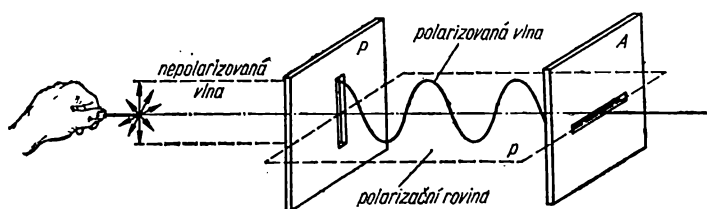
Odvozený výsledek platí pro kolmé osvětlení preparátu; při šikmém osvětlení a vůbec při pozorování svítících bodových (nikoli lineárních) předmětů lze rozlišit vzdálenosti zhruba poloviční,

$$6.4 (23) \quad d \approx \frac{\lambda_0}{2n \sin u} = \frac{\lambda_0}{2A},$$

jak lze teoreticky odvodit na základě rovnice 6.4 (19) pro Fraunhoferův ohyb kruhovou clonkou. Nejmenší pozorovatelná délka je tedy u optického mikroskopu rovna poloviční vlnové délce světla, dělené číselnou aperturou, jejíž hodnoty ani při imerzi nemohou být podstatně větší než jedna. Z toho plyne, že *mikroskopem lze pozorovat částice, jejichž velikost je nejméně rovna asi půlvlně světla, v němž pozorujeme*. Tento výsledek platí pro libovolné záření vlnové povahy a použijeme ho i pro elektronový mikroskop v čl. 6.7.3.

6.4.7. Polarizace světla odrazem a lomem

Dosud jsme stále vycházeli ze základního předpokladu, že světlo je vlnění charakterizované kmitočtem a vlnovou délkou. Při výkladu o stojatých vlnách jsme usoudili, že světelné kmity se chovají při odrazu na kov jako kmity elektrické. To nám připomíná, že objev polarizace vedl k představě světla jako příčného vlnění a později k elektromagnetické teorii světla. Účelem tohoto a několika příštích článků bude blíže objasnit příčnou povahu světelných vln a její význam pro teorii i praxi. Světelný paprsek vydávaný obvyklými zdroji (Sluncem, plamenem, žárovkou, výbojkou) chová se naprosto stejně ve všech rovinách jím proložených, nemá různé vlastnosti boční. Proto bylo světlo původně pokládáno za podélné vlnění. Avšak i příčné vlny mohou se chovat souměrně vzhledem ke směru šíření, mění-li se směr kmitů velmi rychle a zcela nepravidelně (statisticky). Je zde obdoba s interferencí, která také nenastává mezi světly nekoherentními, jejichž fázový rozdíl se rychle a nepravidelně mění, ačkoli obě světla jsou periodické děje. Teprve vybereme-li synchronně kmitající části světelné vlny, pozorujeme stacionární interferenční obrazce a stejně je tomu i se směrem kmitů (kmitosměrem). Vybereme-li totiž kmity některého směru, můžeme zjistit různé chování paprsku v různých směrech k němu kolmých, čehož příčinou je usměrnění příčných kmitů. Příčnou vlnu, jejíž kmity leží v pevné rovině



Obr. (6.4) 20. Mechanický model polarizace

proložené směrem šíření, nazýváme *lineárně polarizovanou*. Tak mluvíme o (lineárně) polarizovaném světle, o polarizované vlně elektromagnetické (u antény) apod. Vytvoření polarizované vlny z nepravidelně kmitajícího příčného vlnění lze pěkně ukázat na mechanickém modelu obr. (6.4) 20. Kmitáme-li jedním koncem hadice střídavě ve všech směrech, šíří se po hadici nepolarizovaná vlna. Provlékáme-li však hadici pevnou štěrbinou, šíří se za ní již jen polarizovaná vlna, jejíž kmity jsou rovnoběžné se štěrbinou. Rovinu p proloženou směrem postupu vlny kolmo ke směru kmitů nazýváme *rovinou polarizační*. Štěrba P je tu mechanickým polarizátorem. Kdybychom polarizované vlně postavili do cesty další štěrbinu A rovnoběžnou s P , procházely by jí vlny nerušeně, kdybychom však štěrbinu pootočili, vycházely by z ní polarizované vlny s amplitudou rovnou složce amplitudy polarizované vlny do směru štěrby A . Kdybychom konečně štěrbinu A , které v optice odpovídá *analyzátor*, otočili do směru kolmého k P , zabránili bychom postupu vln za štěrbinu: *Zkříženým analyzátozem a polarizátorem vlnění neprochází*.

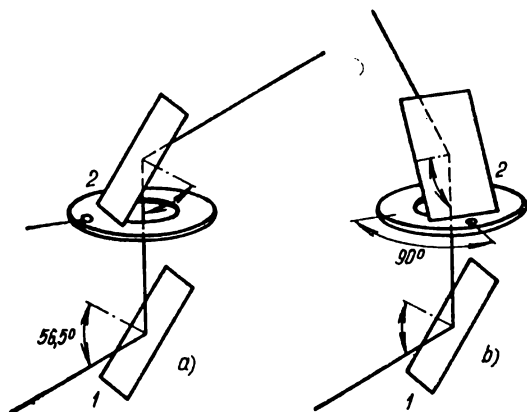
Světlo lze polarizovat několika způsoby: odrazem, lomem a průchodem některými krystaly nebo látkami, které se stávají anizotropními působením mechanickým, elektrickým nebo magnetickým.

Probereme první dva případy, které nastávají současně při dopadu světla na rozhraní dvou prostředí. Světelná vlna se dělí na vlnu odraženou a lomenou, z nichž každá se přitom polarizuje. K tomuto poznatku vedl pozoruhodný *pokus Malusův* (r. 1808) [obr. (6.4) 21]: Světlo dopadající na skleněnou desku 1 pod úhlem $56,5^\circ$ se odráží stejně silně, otáčíme-li deskou kolem dopadajícího paprsku. Opakujeme-li totéž se světlem již jednou takto odraženým, pozorujeme, že intenzita světla po druhém odrazu je největší, když obě desky jsou rovnoběžné [obr. (6.4) 21a], slábne však při otáčení druhé desky 2 kolem paprsku

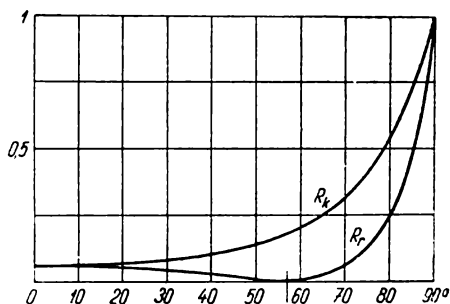
na ni dopadajícího a vymizí úplně, když obě kolmice dopadu jsou k sobě kolmé (desky jsou zkříženy, obr. (6.4) 21b]. Při jiném úhlu dopadu (odlišném od $56,5^\circ$) se tento úkaz jeví jen částečným zeslabením dvakrát odraženého paprsku.

Z Malusova jevu je jasné, že odrazem na skle ztrácí světlo svou souměrnost kolem směru šíření — paprsek má jiné vlastnosti v rovině dopadu při prvním odrazu než v rovině k ní kolmé, což se projeví při druhém odrazu. Vysvětlení podal Fresnel v tom smyslu, že se při dopadu světla pod úhlem $56,5^\circ$, odrážejí jen kmity *kolmé k rovině dopadu*, kterou nazval *polarizační*. Při dopadu na druhou desku ve zkřížené poloze jsou všechny kmity dopadajícího světla s touto rovinou rovnoběžné,

a proto se neodrážejí. Úplný výklad plyne z elektromagnetické teorie světla:

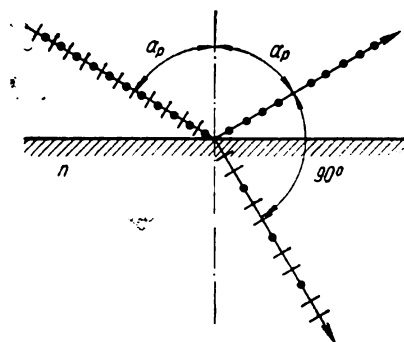


Obr. (6.4) 21. Polarizace světla odrazem



Obr. (6.4) 22. Odrazivost v závislosti na úhlu dopadu měřeném od kolmice

Nepolarizované (neboli přirozené, obyčejné) světlo je elektromagnetické vlnění, v němž se směr vektoru elektrické i magnetické intenzity neustále zcela nepravidelně mění tak, že žádný směr nepřevládá. Při dopadu na rozhraní se elektromagnetická vlna odráží i láme, při čemž poměrné množství energie odražené vlny k množství energie dopadající, tj. *odrazivost* (reflekční schopnost), závisí na směru vektoru elektrické intenzity, která právě má fotografické i fluorescenční účinky. Odrazivost roste s rostoucím úhlem dopadu měřeným od kolmice, ale jinak pro vlnu polarizovanou v rovině dopadu a jinak pro vlnu polarizovanou v rovině kolmé, jak je zřejmé z obr. (6.4) 22;



Obr. (6.4) 23. Částečná polarizace při odrazu a lomu

R_k tu značí odrazivost pro vlnu, v níž stojí elektrické kmity kolmo k rovině dopadu, R_p odrazivost pro vlnu s elektrickým vektorem ležícím v této rovině. Graf platí pro korunové sklo o indexu lomu $n = 1,52$ a ukazuje, že $R_p = 0$ pro úhel dopadu $\alpha_p = 56,5^\circ$. Při dopadu pod tímto úhlem se vlna s elektrickými kmitky v rovině dopadu, tedy polarizovaná kolmo k rovině dopadu, vůbec neodráží, a proto je odražené světlo *úplně polarizováno* v rovině dopadu. Proto se tento úhel nazývá *polarizační* a z teorie plyne pro jeho velikost vzorec *Brewsterův*

$$6.4 (24)$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_p = n,}$$

který dobře souhlasí s měřením. Fyzikálně tento vzorec znamená, že při dopadu pod polarizačním úhlem jsou odražený a lomený paprsek k sobě kolmé [obr. (6.4) 23].

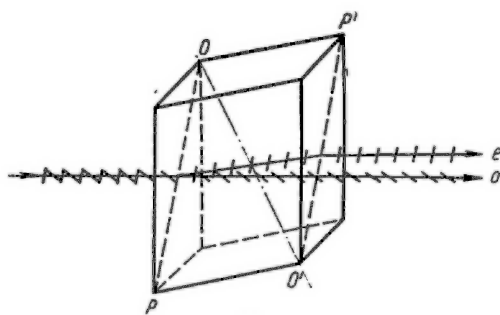
Z průběhu křivky R_k vidíme, že odrazivost světla polarizovaného v rovině dopadu je rovna jedné jen při tečném dopadu ($\alpha = 90^\circ$); vždy se tedy část takového světla také lomí. Z toho plyne, že lomené světlo není ani při dopadu pod polarizačním úhlem úplně polarizováno. Nicméně převládají v lomeném světle kmity rovnoběžné s rovinou dopadu, jak je znázorněno na obr. (6.4) 23, kde tečky značí kmity kolmé, čárky kmity rovnoběžné s rovinou papíru. Úplné polarizace odrazem lze užít k získání dokonale polarizovaného světla. I lomem lze dosáhnout světla téměř dokonale polarizovaného, necháme-li světlo projít řadou většího počtu skleněných destiček. Odrážející destička nebo řada destiček propouštějících světlo jsou dva z dřívě užívaných polarizátorů, kterých lze ovšem užít i jako analyzátorů jako při Malusově pokusu.

6.4.8. Dvojlom v krystalu

Snellův zákon lomu plyne z Huygensova principu za předpokladu, že rychlost světla v látce je ve všech směrech stejně velká. Takové látky nazýváme opticky *izotropní*. Ukazuje se, že tuto vlastnost mají plyny, většina kapalin a pevné látky nekystalické, pokud se nestanou anizotropními působením mechanickým, elektrickým nebo magnetickým. To platí



a)



b)

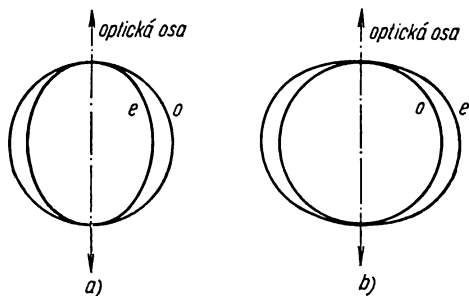
Obr. (6.4) 24. Dvojlom v krystalu vápence: a — zdvojený obraz písma, b — průchod řádného o a mimořádného e paprsku vápencovým klencem

i o krystalech krychlové soustavy (jako diamant, kamenná sůl aj.), ač ovšem tyto krystaly jsou anizotropní co do mechanických i jiných vlastností. Krystaly všech ostatních soustav (čtverečné, šesterečné, kosočtverečné, jednoklonné i trojklonné) jsou i opticky anizotropní: Světlo se jimi nešíří všemi směry stejně rychle a kromě toho u některých z nich pozorujeme zvláštní jev zvaný *dvojlom*.

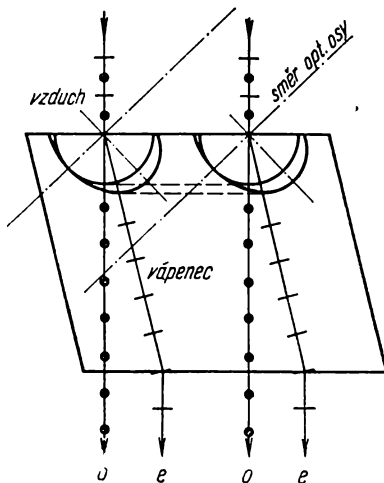
Dvojlom pozoroval již Bartholinus (r. 1669) u krystalu islandského vápence (CaCO_3), který krystaluje v soustavě šesterečné ve tvaru klence [romboedru, obr. (6.4) 24]. Dopadá-li přirozené světlo kolmo na stěnu takového klence, rozdělí se na dva paprsky (svazky). Jeden z nich označený o se nazývá *řádny* paprsek, ježto se chová „řádne“ ve smyslu zákona Snellova a vychází v nezměněném směru z krystalu. Naproti tomu paprsek e zvaný *mimořádný*, ačkoli je také částí kolmo dopadajícího svazku, odchyluje se od kolmice a láme se v rovině proložené dopadajícím paprskem a tzv. hlavní osou OO' krystalu; tato rovina $OPO'P'$ se nazývá *hlavní řez*. Oba paprsky jsou dokonale lineárně polarizovány. Řádný paprsek se řídí Snellovým zákonem i při šikmém dopadu, avšak mimořádný paprsek se jím neřídí a vybočuje z roviny dopadu. Jedině dopadá-li přirozené světlo kolmo na destičku, vybroušenou z krystalu kolmo k optické ose krystalu, nedochází k dvojlomu. Krystaly, které mají jedinou osu té vlastnosti, že se světlo při průchodu v jejím směru neštěpí,

nazýváme *jednoosými* (vápenec a jiné šesterečné i čtverečné krystaly). Krystaly soustavy kosočtverečné, jednoklonné a dvojklonné jsou opticky *dvojsové*, tj. mají dvě optické osy, tedy dva směry, jimiž postupuje světlo bez štěpení.

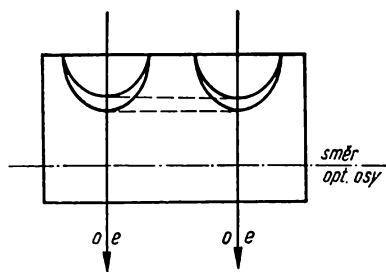
Teoretické vysvětlení těchto jevů podali hlavně Huygens a Fresnel: Kmity různého směru se jednoosým krystalem šíří různým způsobem, a proto jim přísluší různé vlnoplochy. Neuspořádané kmity přirozeného světla se rozloží na složky do hlavního řezu a kolmo k němu. Kmity kolmé vytvoří řádný paprsek (polarizovaný v hlavním řezu), kmity rovnoběžné s hlavním řezem tvoří paprsek mimořádný (polarizovaný kolmo k hlavnímu řezu). Kmity kolmé k hlavnímu řezu se v jednoosém krystalu šíří ve všech směrech stejně rychle, a mají tedy vlnoplochu kulovou, avšak kmity rovnoběžné se nešíří stejně rychle, takže za vlnoplochu mají rotační elipsoid s osou rotace rovnoběžnou s optickou osou.



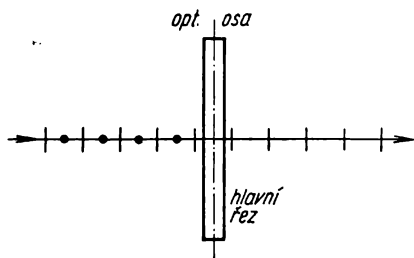
Obr. (6.4) 25. Vlnoplochy jednoosých krystalů: a – pozitivního, b – negativního



Obr. (6.4) 26. Vznik dvojlomu na přirozené stěně krystalu vápence



Obr. (6.4) 27. Šíření světla destičkou rovnoběžnou s optickou osou



Obr. (6.4) 28. Turmalínová destička

Rozeznáváme *pozitivní a negativní jednoosé krystaly*, jejichž příklady jsou křemen a vápenec, které se podle obr. (6.4) 25 liší tím, že v prvním případě kulová vlnoplocha řádného paprsku *o* obklopuje elipsoid (podlouhlý) paprsku mimořádného *e*, v druhém případě je tomu naopak (elipsoid je zploštělý). Ve směru optické osy jsou rychlosti šíření obou kmitů stejné. Při nekulové vlnoploše je třeba zobecnit *pojmem paprsku* a definovat jej jako spojnicí středu elementární vlnoplochy s jejím bodem dotyku s výslednou vlnoplochou (obálkou elementárních vlnoploch). Tato spojnice udává směr postupu světla, který není obecně kolmý k vlnoploše. Vysvitne to ze zobecněné konstrukce dvojlomu při kolmém dopadu na přirozenou stěnu vápencového klence [obr. (6.4) 26]. Oba paprsky zůstávají v rovině hlavního řezu, zvolené za nákretnu. Vidíme, že řádný paprsek *o* je kolmý ke kulové vlnoploše, kdežto mimořádný paprsek *e* nesplývá s kolmicí k tečné rovině elipsoidové vlnoplochy.

Ještě snazší konstrukcí [obr. (6.4) 27] dojdeme k tomuto poznatku: Při dopadu přírodního světla kolmo na destičku vybroušenou rovnoběžně s optickou osou záporného jednoosého krystalu (křemene) postupují oba paprsky o a e , kolmo k sobě polarizované, původním směrem, ale různými rychlostmi: Řádný paprsek rychleji než mimořádný, ježto $n_o < n_e$. Kmity obou paprsků mají tedy po průchodu destičkou jistý dráhový rozdíl úměrný tloušťce destičky. Proto vychází z destičky podle čl. 3.1.6 obecně elipticky polarizované světlo. Poloha os a excentricita elipsy závisí na dráhovém rozdílu a tím i na tloušťce destičky. Volíme-li tloušťku tak, aby dráhový rozdíl byl $\lambda/4$, máme tzv. *čtvrtvlnovou destičku*. Taková destička vytvoří *kruhově* (cirkulárně) polarizované světlo, v němž se „světelný vektor“ stálé velikosti rovnoměrně otáčí kolem pevného směru paprsku.

Tak je to při stejné intenzitě obou paprsků. Některé dvojlomné krystaly pohlcují různě silně světlo podle směru polarizace. Tak např. destička vybroušená z krystalu *turmalínu* rovnoběžně s optickou osou pohlcuje řádný paprsek a propouští mimořádný, takže již při tloušťce asi 2 mm dává světlo polarizované kolmo k hlavnímu řezu [obr. (6.4) 28]. Tento jev se nazývá *dichroismus* a krystaly, které jej projevují, *dichroické*. Stejnou vlastnost má i herapatit, který je prakticky důležitý proto, že propouští světlo jen slabě zbarvené, kdežto turmalín absorbuje značnou část spektra.

Podobně vysvětlil Fresnel optické chování krystalů dvojsoých, u nichž je vlnoplohou plocha čtvrtého stupně, která nahrazuje dvě plochy druhého stupně jednoosých krystalů. Z jejího tvaru předpověděl Hamilton dokonce i tzv. kuželový lom (kónickou refrakci), k němuž skutečně dochází při dopadu světla ve směru optické osy na plochu zbroušenou kolmo k této ose.

6.4.9. Umělý dvojlom

Jak jsme řekli v čl. 6.4.8, polarizuje se světlo také průchodem nekystalickými látkami, stanou-li se dvojlomnými vhodným působením mechanickým, elektrickým nebo magnetickým. Tak můžeme v látkách izotropních vzbudit umělou anizotropii, která se projevuje *umělou dvojlomností*. Probereme po řadě uvedené způsoby.

Dvojlom způsobený mechanickým napětím

Mechanická napětí v látkách mohou vyvolat anizotropii, nejsou-li ve všech směrech stejně velká. Proto se amorfní látky stávají dvojlomnými, vzniknou-li v nich z nějaké příčiny vnitřní napětí. K tomu dochází u některých látek při tuhnutí a chladnutí nebo při mechanickém namáhání tlakem, tahem, ohybem nebo krutem.

Vysvětlíme to na nejjednodušším příkladě pravoúhlé destičky, na jejíž dvě protilehlé stěny působí kolmý tlak [obr. (6.4) 29]. Z teorie pružnosti plyne, že v destičce vznikají napětí, která jsou různá v různých místech a pro různé směry v témže místě. Sledujeme-li tedy jen případ rovinné napjatosti v řezu rovnoběžném s vnějším napětím, jeví se účinek tím, že v každém místě přísluší jednomu směru největší σ_1 a jinému směru nejmenší napětí σ_2 , kteréžto směry jsou k sobě kolmé. Napětí σ_1 a σ_2 se nazývají *hlavní napětí* a mezi jejich hodnotami leží hodnoty napětí ve všech ostatních směrech. Dopadá-li přirozené světlo kolmo na destičku, chová se jako dvojlomná, při čemž oba paprsky jsou polarizovány ve směrech hlavních napětí. Jestliže pro deformace destičky platí zákon Hookův (čl. 2.6.2), je rozdíl indexů lomu obou paprsků úměrný rozdílu hlavních napětí. Rozdíl optických drah paprsků

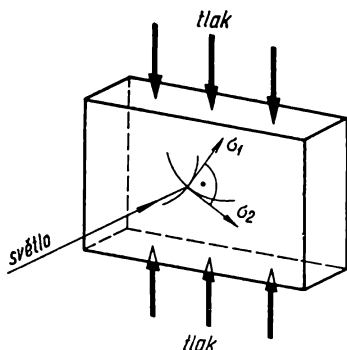
$$6.4 \quad (25) \quad \Delta = (n_1 - n_2) d = K(\sigma_1 - \sigma_2) d,$$

a tedy jejich fázový rozdíl

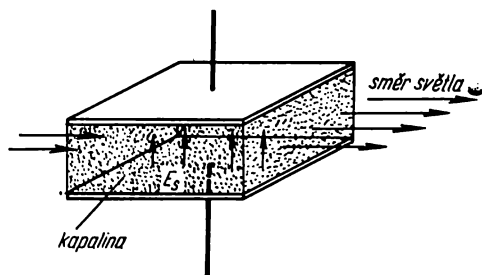
$$6.4 \quad (26) \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{\lambda_0} = \frac{d}{\lambda_0} K(\sigma_1 - \sigma_2).$$

kde d je tloušťka destičky. Konstanta K může být kladná nebo záporná a nazývá se *fotoelastická konstanta*. Sklo, kamenná sůl, pryskyřice, vosk, celuloid aj. chovají se při příčném tlaku jako negativní, při tahu jako pozitivní jednoosé krystaly. Flintové sklo s velkým obsahem olova se chová obráceně.

Mechanicky vzniklý dvojlom je někdy nevítaný. Objevuje se často např. i u optických skel, neboť dokonale jednolomné optické sklo není snadné vyrobit. Jen velmi pomalým a pečlivým chlazením taveniny lze zabránit vzniku vnitřního pnutí v čočkách a hranolech. I slabý tlak může způsobit pozorovatelný dvojlom, což je naopak jev užitečný, neboť na něm je založena *fotoelastická metoda* zjišťování napětí v průsvitných modelech (čl. 6.4.12).



Obr. (6.4) 29. Dvojlom způsobený tlakem



Obr. (6.4) 30. Kerrův elektrooptický jev

Dvojlom v elektrickém poli

Vznik dvojlomu působením elektrického pole objevil Kerr (r. 1875) a po něm se tento úkaz nazývá *Kerrův jev* (elektrooptický). Vložíme-li kyvetu s nitrobenzenem nebo sirouhlíkem mezi desky nabitého kondenzátoru, stane se dvojlomnou látkou, která se chová jako jednoosý krystal s optickou osou rovnoběžnou se směrem elektrického pole. V uspořádání nakresleném na obr. (6.4) 30, kde světlo prochází kapalinou kolmo k elektrickému poli intenzity E_s , nemění se směr paprsků, ale oba paprsky mají podle teorie po výstupu z destičky rozdíl optických drah

$$6.4 (27) \quad \Delta = (n_e - n_o) l = B \lambda_0 E_s^2,$$

kde l je dráha paprsku v kapalině a fázový rozdíl

$$6.4 (28) \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{\lambda_0} = B l E_s^2.$$

Fázový rozdíl je tedy úměrný tloušťce kapalinové vrstvy l a čtverci intenzity elektrického pole E_s (tedy i napětí na kondenzátoru). *Kerrová konstanta* B je kladná pro látky zvané *elektroopticky pozitivní* (obě uvedené kapaliny). Pro jiné látky — *elektroopticky negativní*, jako chloroform a paraldehyd — je B záporné. Největší hodnotu má Kerrova konstanta pro nitrobenzen; činí při 20 °C

$$6.4 (29) \quad B = 2,44 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1} \text{ V}^{-2}.$$

O praktickém užití Kerrova jevu promluvíme v čl. 6.4.12.

Dvojlom v magnetickém poli

Podobný účinek jako elektrické pole, ač podstatně slabší, má pole magnetické, což se projevuje jevem *Cottonovým—Moutonovým*. V příčném poli magnetického H se světelný paprsek procházející nitrobenzenem beze změny směru šíří různou rychlostí podle směru svých kmitů: kmity rovnoběžné se směrem pole H postupují pomaleji než kmity k poli kolmé. Kmity kolmé k poli tvoří řádný paprsek s indexem lomu n_o , menším než má paprsek mimořádný s indexem $n_e > n_o$. Pro dráhový rozdíl obou paprsků platí vztah obdobný vztahu 6.4 (27):

$$6.4 (30) \quad \Delta = (n_e - n_o) l = C \cdot \lambda_0 l H^2,$$

kde C značí Cottonovu—Moutonovu konstantu. Tato konstanta je kladná pro nitrobenzen, pro sirouhlík záporná. Je ovšem třeba i pro nitrobenzen velmi silných magnetických polí, aby vznikl měřitelný dvojlom, a proto se tento jev v praxi neuplatnil.

6.4.10. Rotační polarizace a disperze

Některé krystaly (např. křemen) a některé kapaliny jsou opticky aktivní, což se projevuje tím, že stáčejí polarizační rovinu lineárně polarizovaného světla, které jimi prochází. Tento jev zvaný *rotační polarizace* objevil u křemene Arago (r. 1811) a Biot (r. 1815) jej zjistil u některých organických kapalin (roztoku třtinového cukru aj.). Vyskytují se dva druhy opticky aktivních látek: *pravotočivé*, které stáčejí polarizační rovinu ve smyslu chodu hodin, díváme-li se paprsku vstříc, a *levotočivé*, stáčejí polarizační rovinu v opačném smyslu. Tak např. rozeznáváme křemen levotočivý a pravotočivý, kyselina vinná je rovněž dvojí povahy a kromě toho směs stejných množství kyseliny „pravovinné“ a „levovinné“, zvaná kyselina hroznová, je opticky inaktivní (nestáčí rovinu polarizační). Pro rotační polarizaci platí *Biotovy zákony*:

1. Stočení je úměrné tloušťce prošlé vrstvy.
2. Stočení ve stejné látce pravotočivé a levotočivé se liší jen znaménkem.
3. Stočení způsobené několika vrstvami se algebraicky sčítá.
4. Stáčívost klesá s rostoucí vlnovou délkou světla.

Přitom rozumíme *stáčívostí* (α) pevné látky stočení α polarizační roviny, dělené tloušťkou l vrstvy (kolmé ke směru paprsku)

$$6.4 (31) \quad (\alpha) = \frac{\alpha}{l}.$$

Pro roztoky definujeme *měrnou stáčívost* $[\alpha]$ jako stočení α polarizační roviny, dělené tloušťkou vrstvy a objemovou koncentrací k :

$$6.4 (32) \quad [\alpha] = \frac{\alpha}{l \cdot k}.$$

V praxi se vyjadřuje koncentrace roztoku častěji hmotnostními procenty p . Je-li hustota roztoku ρ , je $p = 100 k/\rho$, takže

$$6.4 (33) \quad [\alpha] = \frac{100 \alpha}{l p \rho}.$$

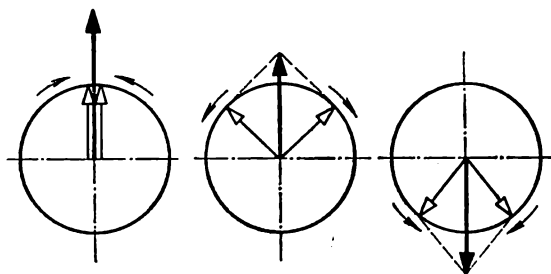
Ze 4. Biotova zákona plyne, že se složené světlo rozkládá rotační polarizací na jednotlivé barvy. Tento úkaz se nazývá rotační disperze (rozklad) světla (na rozdíl od disperze hranolem). Přesnější vyjádření 4. zákona zní

$$6.4 (34) \quad (\alpha) = \frac{A}{\lambda^2},$$

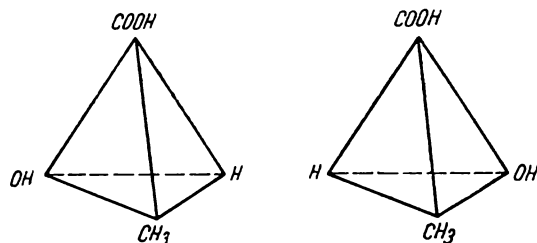
kde A je konstanta. Tento vztah platí dosti přibližně s výjimkou jistých oborů, kolem nichž se pozoruje *anomální disperze*. Pak je třeba užít složitější rovnice, kterou odvodil z elektro- nové teorie Drude:

$$6.4 (35) \quad (\alpha) = \sum_m \frac{A_m}{\lambda^2 - \lambda_m^2}.$$

Zde jsou λ_m délky vln, které aktivní látka značně pohlcuje a které zjistíme z polohy tmavých absorpčních pruhů ve spektru látky. Teoretický výklad rotační disperze podal Fresnel na podkladě své elastické teorie světla. Předpokládal, že opticky činná látka rozloží



Obr. (6.4) 31. Skládání protisměrných kruhových kmitů



Obr. (6.4) 32. Dva tvary molekuly kyseliny mléčné

látky jsou zrcadlové obrazy molekul látky levotočivé. Příkladem je molekula kyseliny mléčné na obr. (6.4) 32, která má tvar čtyřstěnu. Podobně je tomu u kyseliny vinné, která je opticky aktivní, je-li molekula nesouměrná, ale inaktivní, je-li souměrná jako u kyseliny mezovinné se dvěma souměrně položenými uhlíky.

Pravotočivou látku rozeznáváme od levotočivé pozorováním v bílém světle na základě 4. zákona Biotova, podle sledu barev, které pozorujeme při otáčení analyzátozem, viz čl. 6.4.12.

Podobně jako dvojlom lze i rotační polarizaci vyvolat v některých pevných a kapalných látkách podélným magnetickým polem, rovnoběžným se směrem procházejícího světla. Tento úkaz se nazývá po svém objeviteli *magnetooptický jev Faradayův*. Měřením se zjistilo,

lineární kmit světla procházejícího libovolným směrem na dva kmity eliptické, v nichž světelný vektor obíhá v opačných smyslech. Ve směru optické osy jsou obě takto vzniklé světelné vlny kruhově polarizovány a postupují látkou různými rychlostmi; je-li rychlost pravotočivého kmity větší než levotočivého, vznikne takové fázové posunutí obou cirkulárních kmitů, že výsledný lineární kmit se stočí vpravo — látka je pravotočivá. U látek levotočivých je tomu naopak. O teoretické možnosti tohoto výkladu svědčí obr. (6.4) 31 a experimentálně byl tento výklad potvrzen tím, že byl skutečně zjištěn rozdíl indexů lomu opačně cirkulárně polarizovaných paprsků.

Aktivnost kapalin vykládáme jako vlastnost molekulární, způsobenou nesouměrností jejich molekul, kterou posuzujeme podle polohy tzv. *asymetrického uhlíku* v molekule. Pravotočivá a levotočivá látka (téhož složení) se liší jen tím, že molekuly pravotočivé

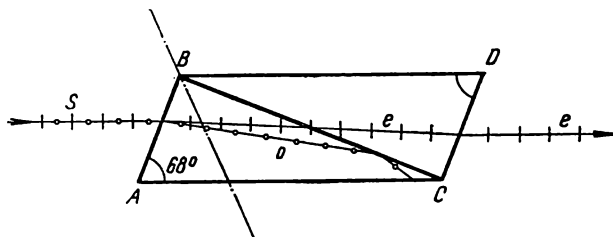
že takto uměle vyvolaná stáčivost kapalin je úměrná intenzitě magnetického pole (nikoli jejímu čtverci jako u jevu Cottonova—Moutonova).

Od tohoto jevu je třeba odlišovat magnetooptický jev Kerrův, který záleží ve stáčení polarizační roviny světla při odrazu na ploše silně zmagnetovaného železa (na pólu elektromagnetu).

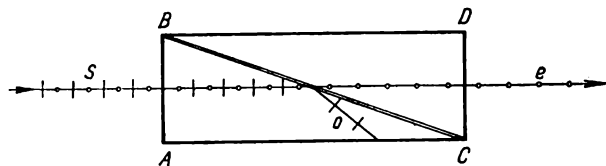
6.4.11. Polarimetrie

Podstatnými součástmi každého *polarizačního přístroje* neboli *polarimetru* je *polarizátor*, který mění přirozené (nepolarizované) světlo ve světlo polarizované, a *analyzátor*, kterým zjišťujeme povahu světla polarizovaného polarizátorem po průchodu zkoumaným preparátem. Pro obě tyto součásti se dříve užívalo hranolů vhodně upravených z dvojlomných krystalů tak, aby dávaly jediný svazek dokonale polarizovaného světla (polarizátory jednopaprskové). Omezíme se na popis krystalových jednopaprskových hranolů, kterých lze užít stejně dobře jako polarizátorů i jako analyzátorů.

Nikol (Nicolův hranol) je nejznámější polarizační zařízení. Jeho úprava a chod paprsků je zřejmý z obr. (6.4) 33. Přirozené světlo dopadá na stěnu AB krystalu islandského vápence, zbroušenou do úhlu 68° , a v krystalu se rozdělí na řádný paprsek o , kmitající kolmo k rovině papíru, a na paprsek mimořádný e , kmitající v rovině papíru. Hranol je rozdělen úhlopříčným řezem BC a znovu slepen kanadským balzámem, který má pro řádný paprsek tak malý index lomu, že se tento paprsek na rozhraní BC úplně odrazí a je pohlcen začerněnou boční stěnou AC . Mimořádný paprsek prochází řezem beze změny směru a vystupuje zadní stěnou CD z nikolu rovnoběžně s původním směrem.



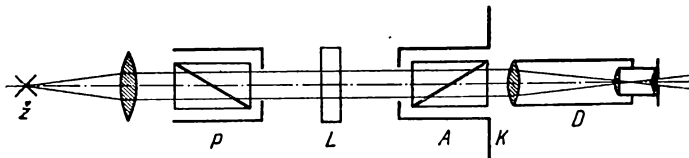
Obr. (6.4) 33. Nikol (optická osa krystalu leží v rovině papíru)



Obr. (6.4) 34. Glanův—Thompsonův hranol (optická osa kolmá k rovině papíru)

Glanův—Thompsonův hranol

[obr. (6.4) 34] je zdokonalená úprava nikolu. Přirozené světlo dopadá kolmo na přední stěnu krystalu islandského vápence, oba paprsky o a e však postupují společně až k řezu BC , v němž je krystal slepen kanadským balzámem (terpentýnem, lněným olejem). Zde se řádný paprsek úplně odrazí a zaniká



Obr. (6.4) 35. Jednoduchý polarizační přístroj

v začerněné boční stěně AC . Mimořádný paprsek e vystupuje původním směrem zadní stěnou.

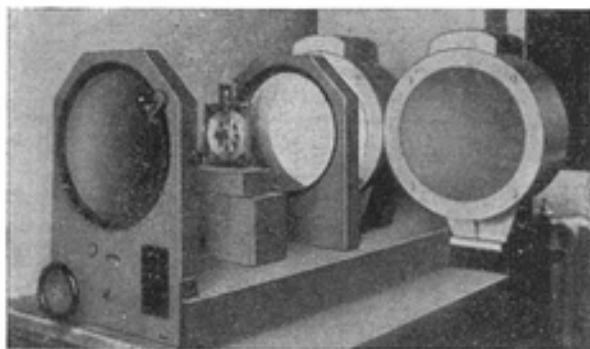
Na obr. (6.4) 35 je schematicky naznačen *jednoduchý polarizační přístroj*, kterým se

měří stočení polarizační roviny světla, způsobené preparátem vloženým mezi polarizátor P a analyzátor A . Analyzátor má dělený kruh K a rameno s dvěma nonii. Je-li polarizační rovina analyzátoru stočena o 90° proti rovině polarizátoru (oba krystaly jsou zkříženy), světlo neprochází. Vložíme-li však mezi ně opticky aktivní látku L , rozjasní se pole dalekohledu D a tma nastane po otočení analyzátoru o úhel α , který je roven právě stočení polarizační roviny světla vycházejícího z polarizátoru.

Popsané přístroje mají nevýhodu v tom, že kvalitní vápencové krystaly větších rozměrů jsou vzácné a drahé, takže běžné polarimetry pracují s málo světelnými nikoly. Proto se stále více užívá modernějších *polarizačních filtrů* ve tvaru desek nebo fólií, založených na dichroismu, který byl popsán v čl. 6.4.8. Drobné krystalky dichroické látky se nanesou na skleněnou desku nebo na nějakou průhlednou fólii a jejich usměrněním se získá zařízení o ploše až několika dm^2 , které poskytuje lineárně polarizované světlo. Polarizační filtry



Obr. (6.4) 36. Zeissový polarizační filtr Bernotar (podle Milbauera)



Obr. (6.4) 37. Jednoduchý polarizační přístroj s velkými herapatitovými filtry (podle Milbauera)

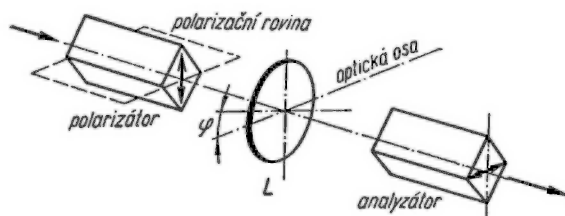
se dnes vyrábějí z krystalků chininové soli zvané *herapatit* podle Herapatha, který ji připravil smísením síranu chininu s vhodným množstvím kyseliny sírové, jodovodíkové a jodu. Na obr. (6.4) 36 vidíme tři Zeissový filtry. První dva mají polarizační roviny rovnoběžné, a proto druhý filtr propouští světlo polarizované prvním. Polarizační rovina třetího filtru je kolmá k rovině druhého, a proto se plocha, v níž se poslední dva filtry překrývají, jeví tmavou. Obr. (6.4) 37 ukazuje moderní provedení jednoduchého polarizačního přístroje s polarizačními filtry velkého průměru pro přímé pozorování prosvícených modelů.

Polarimetry mají velkou praktickou důležitost, ale studium vlastností polarizovaného světla má též značný vědecký význam. Zmíníme se jen stručně o jevech, jejichž příčinou je interference polarizovaného světla a které shrnujeme pod názvem *chromatická polarizace*. Jsou podstatně různé, jde-li o interferenci v rovnoběžném svazku polarizovaných paprsků nebo ve svazku sbíhavém (konvergentním). V prvním případě můžeme užít jednoduché-

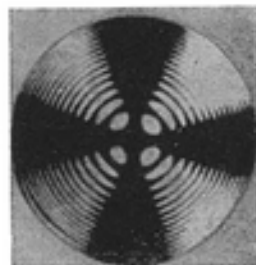
ho uspořádání podle obr. (6.4) 35, kde L značí nyní destičku vybroušenou z jednoosého krystalu rovnoběžně s optickou osou. Podle čl. 6.4.8 propouští destička řádný paprsek (kmitající kolmo k optické ose) a mimořádný paprsek (kmitající rovnoběžně s osou), které vystupují z destičky s jistým fázovým rozdílem, úměrným její tloušťce. V tomto případě vstupuje do destičky světlo lineárně polarizované polarizátorem, a proto výsledek závisí na sklonu optické osy destičky k polarizační rovině polarizátoru a analyzátoru. Předpokládejme, že jsou oba nikoly zkříženy a že je mezi ně vložena destička tak, aby směr její osy souhlasil s polarizační rovinou polarizátoru. Tuto polohu nazýváme *normální*, protože v tomto případě se vložením destičky pozorovaný úkaz nezmění. Světlo se v destičce neštěpí,

neboť vznikne jen řádný paprsek, a vidíme tudíž zase tmavé pole. Stejný výsledek dostaneme otočením o pravý úhel, a proto pozorujeme tmou celkem ve čtyřech polohách destičky. Je-li však optická osa destičky odkloněna od polarizační roviny polarizátoru o úhel φ , vznikne v ní paprsek řádný i mimořádný [obr. (6.4) 38] s amplitudami

$$P_o = P \cos \varphi, \quad P_e = P \sin \varphi,$$



Obr. (6.4) 38. Dvojlomná destička mezi zkříženými nikoly



Obr. (6.4) 39. Inkolory a izochromáty v jednoosém krystalu

je-li P amplituda světla vystupujícího z polarizátoru. Z nich vybere analyzátor jen složky

$$A_o = P_o \sin \varphi = P \cos \varphi \sin \varphi,$$

$$A_e = P_e \cos \varphi = P \sin \varphi \cos \varphi,$$

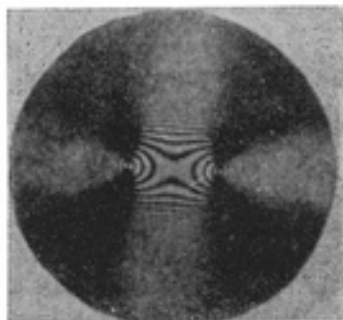
takže pozorujeme světelné kmity amplitudy

$$A = A_o + A_e = 2P \sin \varphi \cos \varphi = P \sin 2\varphi.$$

Amplituda dosahuje maxima pro $\sin 2\varphi = 1$, $\varphi = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$, tj. ve všech čtyřech polohách, v nichž optická osa destičky pólí úhel zkřížených nikolů. Konáme-li pokus s bílým světlem, bude fázový rozdíl mezi oběma paprsky různý pro různé barvy, a proto budou maxima zbarvena podle tloušťky destičky. Kdybychom oba nikoly nastavili souhlasně, dostali bychom maxima v doplňkových (komplementárních) barvách. To jsou základní jevy chromatické polarizace v paralelním světle.

Kdyby svazek polarizovaného světla, procházející dvojlomnou destičkou, byl sbíhavý, čehož snadno dosáhneme vřazením spojných čoček mezi destičku a oba nikoly, dostali bychom interferenci zajímavé obrazce, neboť optické dráhy paprsků v destičce by byly různé pro paprsky osové a okrajové a tak by vznikla tmavá místa (tvořící inkolory ve tvaru kříže) a mezi nimi zbarvená maxima, složená z barevných kroužků zvaných izochromáty [obr. (6.4) 39]. Destičky vyříznuté kolmo k optické ose vytvářejí obrazce jiného tvaru. Výbrusy dvojosých krystalů tvoří interferenční obrazce tvaru zřejmého z obr. (6.4) 40.

Popsané interferenční jevy jsou důležitou pomůckou při kontrole dokonalé izotropie průhledných látek, zvláště optického skla, které se vnitřním pnutím může stát dvojlomným (čl. 6.4.9).



Obr. (6.4) 40. Interferenční obrazce tvořené dvojosým krystalem

6.4.12. Praktické užití polarizace

Polarizační filtry

Polarizační filtry mají důležitou vlastnost, že propouštějí jen světlo polarizované v některé rovině. Toho se užívá k zhasnutí nebo tlumení nežádoucích světél. Důležitým příkladem jsou pokusy odstranit tímto způsobem oslnění světlem vozidel za tmy. Vozy mají polarizační filtry na reflektorech a na čelním skle před řidičem (které lze upravit jako brýle). Nastaví-li všechna vozidla polarizační rovinu všech filtrů ve směru odchýleném od svislého o 45° např. vpravo vzhledem k řidiči, vidí každý řidič světlo svých reflektorů odražené od překážek jen málo zeslabeno, ale světla protijedoucích vozidel silně tlumená.

Polarizačních filtrů lze užít i k zmírnění nepříjemných odlesků při fotografování, zejména u snímků za výkladní skříní, u osob s brýlemi apod.

Fotoelasticimetrie

Umělého dvojlomu vzbuzeného mechanickými silami (čl. 6.4.9) lze užít k zjišťování rozložení mechanických napětí v rovinných modelech z průhledných látek (celuloidu, plexiskla, různých pryskyřic apod.). Podmínkou je, aby model byl dosti tenký a aby neměl

vlastní pnutí. Stav rovinné napjatosti v modelu při zvoleném zatížení odvozuje se z průběhu světelných obrazců, jež vzniknou interferencí rovnoběžného polarizovaného světla, kterým model prosvěcujeme. Pozorování se provádí nejlépe, užijeme-li jako polarizátoru i analyzátoru dosti velkých polarizačních filtrů.

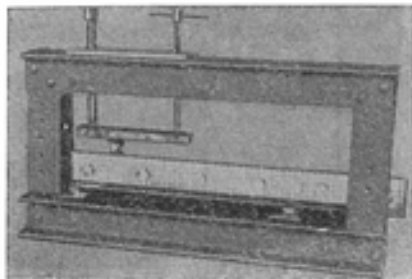
Předpokládejme, že polarizátor a analyzátor jsou zkříženy, jak je naznačeno na schematickém obrázku (6.4) 41]. Vložíme-li mezi ně model dokonale prostý všech napětí, zůstane pole tmavé. Vzniknou-li však v modelu mechanická napětí, projeví se to vyjasněním pole s výjimkou míst, v nichž hlavní napětí, která jsou k sobě kolmá, mají směry rovnoběžné s polarizačními rovinami obou filtrů. Protože směr i velikost hlavních napětí v modelu se mění od místa k místu spojitě, tvoří tato místa souvislou černou čáru. Otočíme-li model kolem směru světla o nějaký úhel, změní se poloha této čáry. Dalším natáčením modelu dostaneme další černé čáry, které se nazývají *izokliny*, tj. čáry stejného sklonu; z jejich průběhu můžeme určit směry hlavních napětí v modelu [obr. (6.4) 42].

Chceme-li zjistit také velikosti těchto napětí, použijeme křivek, které se nazývají

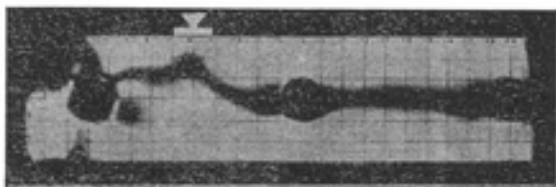
Obr. (6.4) 41. Schéma pozorování deformovaného modelu v lineárně polarizovaném světle (podle Milbauera)

izochromáty. Jejich vznik plyne z rovnice 6.4 (26) pro fázový posuv ϵ způsobený deformací [srovn. obr. (6.4) 41]. Tento fázový posuv, který je úměrný rozdílu hlavních napětí v příslušném místě modelu, závisí na vlnové délce, a proto se interferencí vytvoří čáry stejné barvy, tj. izochromáty, které spojují místa stejného posuvu ϵ , a tedy i stejného rozdílu hlavních napětí [obr. (6.4) 43]. Duhovým zabarvením se dobře odlišují od bezbarvých

izoklín. K úplnému řešení rovinné napjatosti je třeba znát hodnoty všech napětí, především rozdílů hlavních napětí (které určují smyková napětí v týchž místech), a ovšem i jejich absolutní hodnoty. K tomu byly vymyšleny různé metody, jimiž se zde nemůžeme zabývat.

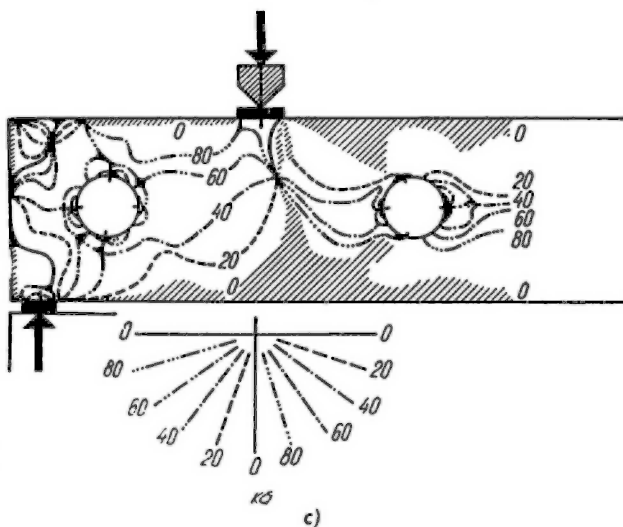


a)



b)

Obr. (6.4) 42. Studie napjatosti v trámu oslabeném několika otvory: *a* – skleněný model v zatěžovacím rámu, *b* – snímek izoklín, podél níž směry hlavních napětí svírají stálý úhel 60 setinných stupňů s polarizačními rovinami polarizačních filtrů, *c* – celkový náčrt izoklín pro různé směry hlavních napětí vyznačené v orientačním vějíři



c)

Kerrův článek

V čl. 6.4.9 popsaný elektrooptický Kerrův jev umožňuje sestavit zařízení, kterým je možno elektricky ovládat intenzitu světelného svazku a tak řídit světelný tok bez zřetele na rychlost změn.

Takovým zařízením, které moduluje světlo prakticky bez setrvačnosti, je Kerrův čili Karolusův článek. Je to kyveta s nitrobenzenem a s dvěma velmi blízkými elektrodami (vzdálenými od sebe asi 0,1 mm), na které se vkládá elektrické napětí. V uspořádání naznačeném na obr. (6.4) 44 vstupuje do Kerrova článku *K* rovnoběžné světlo lineárně polarizované polarizátorem *P* a z článku vstupuje do analyzátoru *A*, který ve zkrácené poloze světlo nepropouští. Vznikne-li však na deskách napětí, stane se nitrobenzen dvojlomným a pole se rozjasní, nesplyvá-li ovšem směr elektrického pole s polarizační rovinou nikolu *P* nebo *A*. Jak plyne z teorie jevu, je toto rozjasnění největší, svírá-li směr pole s rovinami obou nikolů 45°. Závisí ovšem podstatně na intenzitě elektrického pole. Tuto závislost lze odvo-

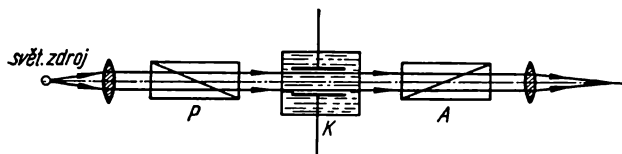


Obr. (6.4) 43. Izochromáty v modelu zatíženém uprostřed osamělou silou

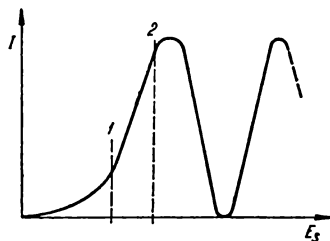
dit z rovnice 6.4 (28) pro fázový rozdíl řádného a mimořádného paprsku a ze známého poznatku, že intenzita světla je totiž úměrná čtverci amplitudy kmitů.

Výpočtem plyne, že proměnnou část $I_{\sim}$ světelné intenzity závislou na intenzitě elektrického pole E_s (tedy na napětí vloženém na článek) lze psát ve tvaru funkce

$$6.4 (36) \quad I_{\sim} = \text{const} \cdot \sin^2 \left(\frac{B E_s^2}{2} \right),$$



Obr. (6.4) 44. Schéma Kerrova článku



Obr. (6.4) 45. Charakteristika Kerrova článku

jejíž průběh ukazuje charakteristika Kerrova článku na obr. (6.4) 45. Vhodnou úpravou dá se dosáhnout toho, že se pracuje v přímé části první vstoupné větve charakteristiky mezi body 1 a 2 a pak je světelný tok úměrný intenzitě pole (napětí).

Tak lze modulovat světelný tok elektrickými kmity libovolné frekvence nebo jiným dějem, který převedeme na proměnné napětí. Kerrova článku se užívá např. k přeměně akustických kmitů na periodicky proměnný světelný tok, kterým se osvětluje film. Tím vznikne optický záznam zvuku, z něhož můžeme zvuk reprodukovat, osvětlíme-li světlem prošlým běžícím filmem fotonku, z níž po zesílení vedeme proud do reproduktoru.

6.4.13. Průchod světla prostředím

Šíří-li se světelná vlna nějakým prostředím, působí světlo na prostředí a prostředí na světlo. Vzájemné působení se projevuje hlavně třemi způsoby: *rozkladem* (disperzí), *pohlcováním* (absorpcí) a *rozptylem* (difúzí).

Popíšeme nejprve stručně nejdůležitější experimentální úkazy a pak naznačíme jejich výklad a vzájemnou souvislost na základě elektromagnetické teorie. Přitom nebudeme podrobněji mluvit o dějích, které jsou projevem kvantových vlastností světla a které budou vyloženy v kap. 6.6, pojednávající o kvantové optice.

A. Rozklad (disperze) světla

Prochází-li bílé světlo hranolem, rozkládá se na barevné svazky. Tento úkaz objevil a popsal profesor Karlovy university Jan Marek (Marcus Marci) a uveřejnil ve spise *De arcu coelesti*, pojednávajícím o duze a o barvách těles. Spis vyšel r. 1668, tedy osmnáct let před vydáním Newtonovy optiky (r. 1686), v níž byl rozklad světla rovněž popsán.

K přesnějšímu studiu a měření jednotlivých barevných složek světla, tvořících spektrum příslušného zdroje, užíváme spektrometru, spektroskopu nebo spektrografu (viz např. obr. (6.4) 51]. V dalekohledu nebo na stínítku pozorujeme spektrum složené z různobarevných obrazů štěrbiny, které jsou rozloženy tak, že nejméně je odchýleno světlo červené, poněkud více světlo oranžové, žluté, zelenožluté, zelené, modré a nejvíce světlo fialové. Čím užší je šterbina, tím tenčí jsou její barevné obrazy; u některých zdrojů se nám zužováním šterbiny podaří rozdělit spektrum na jednotlivé od sebe oddělené spektrální čáry, u jiných se nám to nepodaří a spektrum se jeví jako spojitě osvětlený pás bez tmavých mezer. To je *spektrum spojitě*, jaké vysílají žhoucí pevná a kapalná tělesa. Naproti tomu

spektrum *nespojité* — *čárové* — vysílají prvky v plynném stavu, zejména plyny jednoatomové, kdežto plyny složené z celých molekul mají spektra čárová, v nichž se vyskytují široké barevné pásy složené z nesmírného počtu jemných čar, přerušované tmavými obory. Spektra vydávaná volnými molekulami nazýváme proto *pásovými*. Ve spektrech vytvořených ohybovou mřížkou, která nazýváme *normálními*, je vzdálenost dvou spektrálních čar velmi přibližně úměrná rozdílu jejich vlnových délek. To neplatí o spektrech vytvořených hranoly. U některých látek pozorujeme dokonce tzv. *anomální disperzi*, která se projevuje v okolí vlnových délek, které tyto látky nejsilněji absorbují. V oborech anomální disperze roste odchylka světla s rostoucí vlnovou délkou, mimo tyto obory naopak odchylka s rostoucí vlnovou délkou klesá.

Jak značně látka rozkládá světlo, posuzujeme buď podle střední disperze, rovné rozdílu $n_F - n_C$ absolutních indexů lomu pro spektrální čáry F a C, nebo podle relativní disperze

$$\frac{n_F - n_C}{n_D - 1},$$

kde n_D je index lomu pro žlutou čáru D [$\lambda_D = 5893 \cdot 10^{-10}$ m, viz obr. (6.4) 46]. V tabulce (6.4) I jsou uvedeny příslušné hodnoty pro některé průhledné látky.

Tabulka (6.4) I

Závislost indexu lomu na barvě

	C	D	F	$n_F - n_C$
Voda (20 °C)	1,331	1,333	1,337	0,006
Korunové sklo	1,516	1,519	1,525	0,009
Flintové sklo	1,614	1,619	1,631	0,017
Sírouhlík	1,619	1,628	1,653	0,034

Při přesné definici disperze musíme ovšem přihlížet k tomu, že index lomu se nemění s vlnovou délkou rovnoměrně, takže disperze téhož skla je různá v různých místech spektra podle toho, jak rychle se v příslušném místě index lomu mění. Disperze je tedy určena derivací indexu lomu podle vlnové délky $dn/d\lambda$.

Všechny popsané druhy spekter se nazývají *emisní* na rozdíl od spekter *absorpčních* (viz dále).

B. Pohlcování (absorpce) světla

Obecně není hustota světelného toku v prostředí všude stejná, neboť prostředí propouští jen část světla v původním směru, jinou část světelné energie pohlcuje (absorbuje) a další část rozptyluje v různých jiných směrech.

Pojednáme hlavně o tzv. *pravé absorpci*, při níž se pohlcená světelná energie mění v kinetickou energii neuspořádaného pohybu molekul absorbující látky, tj. v energii *tepelnou*. O luminiscenci, při níž se pohlcená energie mění zase v energii světelnou, promluvíme v čl. 6.5.3.

Pro absorpci platí experimentální zákon, který odvodíme z předpokladu, že vrstvy stejné, velmi malé tloušťky ds zeslabí světlo vždy o stejnou poměrnou část, úměrnou tloušťce vrstvy. Označíme-li dI tuto změnu světelné intenzity I , bude

$$\frac{dI}{I} = -\beta ds,$$

kde konstanta β zvaná *součinitel absorpce* závisí na prostředí a na vlnové délce světla. Integrací plyne

$$6.4 (37) \quad I = I_0 e^{-\beta s},$$

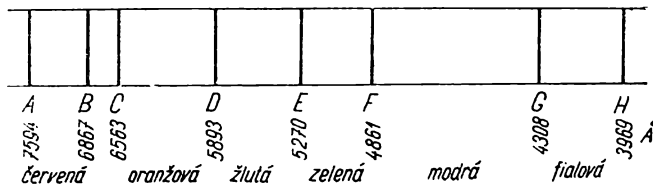
kde I_0 je intenzita v místě $s = 0$. Rovnice 6.4 (37) se píše obvykle ve tvaru

$$6.4 (38) \quad I = I_0 10^{-\alpha s}, \text{ kde } \alpha = \beta \log e,$$

nebo ve tvaru *Lambertova zákona*

$$6.4 \quad (39) \quad I = I_0 \tau^\alpha, \quad \tau = e^{-\beta} = 10^{-\alpha}.$$

Konstanta τ se nazývá *propustnost* (transmise) a její záporný logaritmus α je takzvaný *extinkční součinitel* α . Je rovný převrácené hodnotě tloušťky vrstvy, která zeslabí světlo na desetinu původní intenzity. Podle Beera je součinitel α u roztoků úměrný koncentraci. Absorpce závisí na vlnové délce, což se jeví zvláště u některých roztoků, které silně po-



Obr. (6.4) 46. Nejsilnější Fraunhoferovy čáry

hlucují některou část (nebo některé části) spektra. Na tom je založeno *kolorimetrické měření* koncentrace roztoků.

Důležitý je případ tzv. *selektivní (výběrové) absorpce*, která se projevuje tím, že látka pohlcuje jen některé vlnové délky, a to buď jednotlivé spektrální čáry, nebo širší pásy,

nebo i celé rozsáhlé obory spektra. Spektrum, které vznikne průchodem bílého světla látkou, nazýváme jejím *absorpčním spektrem*. Je stejně důležité jako spektrum emisní a podle zkušeností (v soulase s teorií) je vlastně negativem — doplňkem spektra emisního, s nímž dává zase spojitě spektrum. Přechod od emisní čáry nebo spektra k absorpčnímu nazýváme proto *obrácením čáry* nebo spektra. Nejznámější je pokus s obrácením žluté sodíkové čáry D, která se objeví jako tmavá absorpční čára ve spojitěm spektru bílého světla (např. z obloukové lampy), prošlého sodíkovými parami (např. plamenem zbarveným sodíkem).

Velký praktický význam mají absorpční čáry vzniklé ve slunečním spektru při průchodu světla tzv. obracející vrstvou plynného obalu Slunce a zemským ovzduším. Tyto čáry známe pod jménem *Fraunhoferovy čáry*; odpovídají emisním čarám některých známých prvků a nejintenzivnější z nich jsou vyznačeny ve schématu spektra na obr. (6.4) 46.

C. Rozptyl (difúze) světla

Rozptyl světla vzniká v látkách, které příliš světlo neabsorbují — jsou tedy průsvitné (i když nejsou průhledné, čiré). Je to známý *Tyndallův jev* a lze jej pozorovat v látkách všech skupenství, zvláště pak v některých kapalinách a parách. Rozptyl se projevuje odchylováním světla od původního směru do všech možných úhlů φ [obr. (6.4) 47], ostrých i tupých; proto při pohledu ze strany vidíme světelný kužel, vytvořený postupujícím svazkem paprsků. Obr. (6.4) 48 ukazuje *Tyndallův jev*, vzniklý rozptylem světla na ultramikroskopických částicích (průměru asi $2 \cdot 10^{-8}$ m) kyslíčnicku wolframu v žárovce plněné plynem.

Nesmíme tento jev zaměňovat s rozptylem světla na makroskopických částicích, např. ve vzduchu znečištěném prachem, kouřem, mlhou nebo v kalných kapalinách. V podstatě je ovšem každý rozptyl světla ohyb na velmi malých shlucích molekul, které bývají menší než vlnová délka světla. Ukazuje se, že světlo se rozptyluje tím více, čím je krátkovlnnější a jeho intenzity ubývá s rostoucím úhlem rozptylu. Proto má rozptýlené světlo barvu modravou a naopak světlo prošlé barvu žlutočervenou. Zvláště u par blízkých zkapalnění je možno pozorovat modravou *opalescenci*, kterou vysvětlil Rayleigh jako ohyb světla na nerovnoměrnostech hustoty, způsobených statistickým kolísáním rozložení molekul v prostoru. Stejně je třeba vysvětlovat modrost oblohy, kterou pozorujeme i ve vysokých polohách, kde je vzduch velmi čistý.

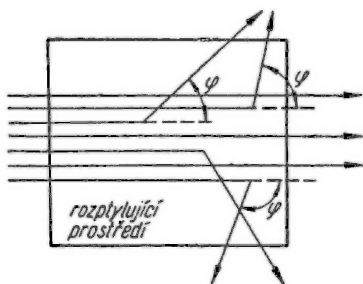
Při studiu rozptylu světla byl zjištěn velmi důležitý *jev Ramanův*. Byl nejprve předvídan teoreticky (Smekal r. 1923, Kramers, Heisenberg r. 1925) a experimentálně byl zjištěn

Ramanem a Krishnanem (r. 1928), kteří shledali, že světlo rozptýlené různými látkami v pravém úhlu ke směru vstupujícího svazku přísně monochromatického světla obsahuje kmitočty, které se liší od kmitočtu dopadajícího světla o hodnoty charakteristické pro rozptylující látku. Většinou je nově vzniklý kmitočet ν' nižší než původní ν a jejich rozdíl $\Delta\nu = \nu - \nu'$ se nazývá *Ramanův kmitočet*. To odpovídá Stokesovu pravidlu pro fluorescenci. Někdy však také je $\nu' > \nu$ a takové čáry se nazývají „anti-Stokesovy“. V obou případech jsou rozdíly $\Delta\nu$ závislé na rozptylující látce, nikoli na původní frekvenci dopadajícího záření.

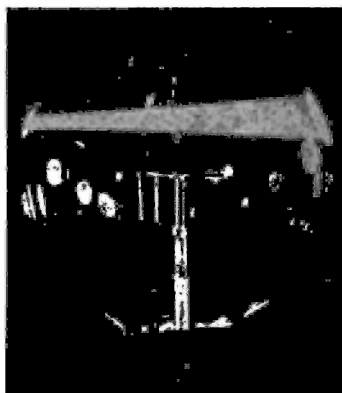
Ramanův jev vysvětlila jednoduchým způsobem kvantová teorie (čl. 7.3.4).

D. Nástin teorie absorpce a disperze

Elektromagnetická teorie vykládá selektivní absorpci rezonancí elektrických dipólů obsažených v dielektriku. Dopadají-li na látku elektromagnetické vlny světelné, vzniká v ní střídavé elektrické pole, které způsobuje periodicky proměnnou polarizaci jejích molekul. Dopadající vlny budí tedy nucené kmity elektrických dipólů, které podle čl. 3.1.8 přijímají tím větší energii, čím blíže je frekvence dopadajícího světla jejich vlastní frekvenci. Nejvíce se rozkmitají náboje dipólů za rezonance a pak mluvíme o *rezonanční absorpci*, která se projevuje tím, že látka pohlcuje zvláště silně frekvence, které odpovídají frekvencím volných kmitů nábojů v dipólech. Z toho plyne dříve zmíněný experimentální poznatek o souhlasné poloze emisních a absorpčních čar (obrácení spektrálních čar). S tím souvisí také závislost indexu lomu na vlnové délce.



Obr. (6.4) 47. Schéma Tyndallova jevu



Obr. (6.4) 48. Tyndallův jev v žárovce plněné plynem

Abychom tuto souvislost blíže vysvětlili, vyjdeme z Maxwellova vztahu 6.1 (6) mezi absolutním indexem lomu n_0 a relativní permitivitou ϵ_r :

$$6.4 \quad (40) \quad n_0 = \sqrt{\epsilon_r}.$$

Je jasné, že index lomu závisí na vlnové délce proto, že na ní závisí konstanta ϵ_r . Avšak tato veličina se liší od jedné tím více, čím větší je polarizace P dielektrika, jak je zřejmé z rovnice

$$6.6 \quad (41) \quad P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) E_s,$$

která plyne z 5.2 (13, 21). Polarizace závisí ovšem na frekvenci dopadající vlny stejně jako amplitudy nucených kmitů dipólů v dielektriku. Můžeme přímo položit polarizační moment p_k každého dipólu úměrný amplitudě jeho kmitů a psát

$$p_k \sim A_k;$$

výsledný moment objemové jednotky pak dostaneme jako součet momentů všech dipólů v ní obsažených. Výsledná polarizace je tedy

$$6.4 \quad (42) \quad P = \sum_k p_k \sim \sum_k A_k,$$

kde A_k značí amplitudu nucených kmitů různých elektronů téhož atomu (molekuly), které

ovšem mohou mít různé vlastní frekvence, jež označíme ν_k . Je-li kruhová frekvence světelné vlny $\Omega = 2\pi\nu$ a nedbáme-li útlumu ($b = 0$), můžeme pro každou amplitudu psát podle vzorce 3.1 (52)

$$A_k = \frac{B_k}{\omega_k^2 - \Omega^2} E_*,$$

kde B_k je konstanta a E_* značí amplitudu elektrického pole dopadající vlny. Vzhledem k 6.4 (41, 42) bude tedy

$$P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) E_* \sim \sum_k \frac{B_k}{\omega_k^2 - \Omega^2} E_*$$

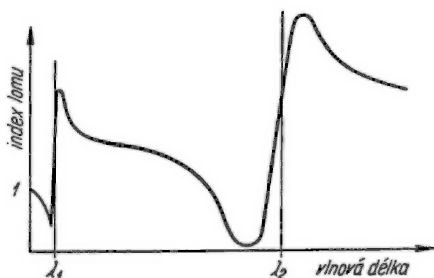
nebo

$$6.4 (43) \quad \epsilon_r - 1 \sim \sum_k \frac{B_k/\epsilon_0}{\omega_k^2 - \Omega^2} = \sum_k \frac{C_k}{\nu_k^2 - \nu^2}, \quad C_k = \text{const}$$

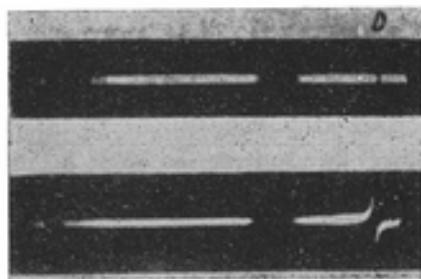
a vzhledem k 6.4 (40), píšeme-li $n_0 = n$,

$$6.4 (44) \quad n^2 - 1 = \sum_k \frac{C_k}{\nu_k^2 - \nu^2}.$$

Přitom značí $\nu = c/\lambda$ frekvenci dopadajícího světla a hodnoty ν_k ($k = 1, 2, \dots$) frekvence absorpčních čar (nebo pásů) prostředí. Tento přibližný disperzní vzorec souhlasí zhruba zejména



Obr. (6.4) 49. Závislost indexu lomu na vlnové délce ideální látky



Obr. (6.4) 50. Anomální disperze sodíkové páry

pro plyny s měřenou závislostí indexu lomu n na vlnové délce — samozřejmě mimo absorpční pásy. Přesnější teoretický vzorec

$$6.4 (45) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \sum_k \frac{b_k}{\nu_k^2 - \nu^2},$$

který plyne stejným postupem z Clausiovy—Mossotiovy rovnice 5.2 (51), vyhovuje velmi dobře pro plyny a páry; ani pro kapaliny a pevné látky nepřesahují odchylky 1 % indexu lomu. Závislosti indexu lomu na kmitočtu světla určené vzorcem 6.4 (44, 45) se liší tím méně, čím je index lomu blíží jedné a lze pak psát

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \approx \frac{n^2 - 1}{3} \approx \frac{2}{3} (n - 1).$$

Odtud vidíme, že se index lomu mění v okolí absorpčních frekvencí podstatně jinak než pro jiné frekvence:

$$6.4 (46) \quad n \approx 1 + \frac{3}{2} \sum_k \frac{b_k}{\nu_k^2 - \nu^2} = 1 + \frac{3}{2} \sum_k \frac{b_k}{c^2} \frac{\lambda^2 \cdot \lambda_k^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2}.$$

U průhledných látek, které nemají ve viditelném oboru absorpční čúry, stoupá mírně index lomu s frekvencí světla ν . Naproti tomu má v okolí vlnových délek absorpčních čar průběh

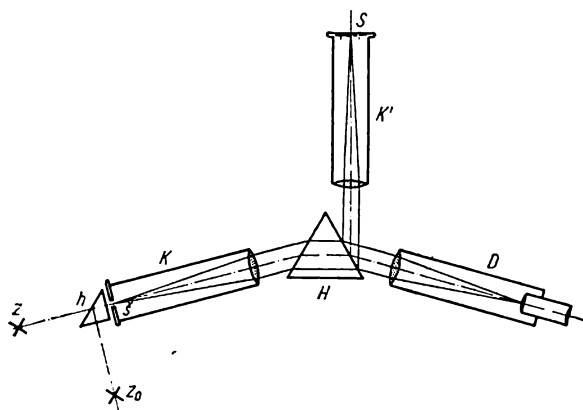
naznačený na obr. (6.4) 49 pro dvě absorpční čáry λ_1 , λ_2 . Praktické potvrzení ukazuje obr. (6.4) 50, kde na hořejším snímku je absorpční spektrum sodíkových par s dvojitou čarou D; na dolním je totéž spektrum odchýlené při průchodu hranolem, který je tu tvořen (nahrazen) oblakem srážejících se natriových par. Na straně delších vln je $n > 1$, kdežto na straně krátkých vln je $n < 1$. Mimo okolí absorpční čáry D je index lomu přibližně rovný 1.

Vzorec 6.4 (46) také vysvětluje, proč index lomu všech látek je pro velmi krátké vlny prakticky stálý a rovný 1. Je-li totiž λ velmi malé, tedy ν velmi velké proti všem rezonančním frekvencím ν_k , je druhý člen prakticky nulový.

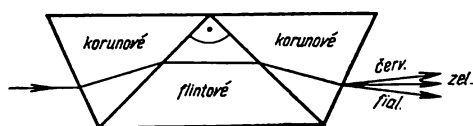
6.4.14. Spektroskopie

Vědní obor, který se zabývá zkoumáním spekter, nazývá se *spektroskopie* nebo *spektrografie* a jeho výsledky měly a mají i nadále velký význam vědecký a praktický. Podáme jen stručný přehled přístrojů a metod a upozorníme na nejdůležitější použití, zejména na *spektrální analýzu*.

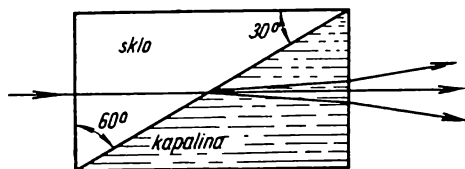
Nejběžnějším přístrojem spektroskopickým je *hranolový spektroskop*, jehož schéma ukazuje obr. (6.4) 51. Liší se od spektrometru obvykle tím, že hranol H , šterbinový kolimátor K



Obr. (6.4) 51. Spektroskop



Obr. (6.4) 52. Amiciův přímohledný hranol

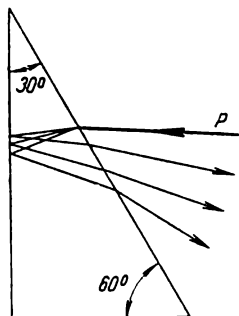


Obr. (6.4) 53. Zengerův přímohledný hranol

i dalekohled D mají pevnou polohu, příslušející minimální úchylce žlutého světla. Kromě toho bývá u něho ještě jeden další kolimátor stupnicový K' , kterým se po odraze na stěně hranolu vytvoří obraz pomocné stupnice S v ohniskové rovině dalekohledu D , kterou pozorujeme zároveň se spektrem. Tato stupnice umožňuje určit vlnové délky čar podle jejich odchylky. Před šterbinu kolimátoru K lze přiklonit hranolek h , který odrazí do spodní poloviny šterbiny S světlo ze srovnávacího zdroje Z_0 . Tak vidíme obě srovnávaná spektra nad sebou.

K dosažení větší disperze se užívá několika hranolů postavených tak, aby se jimi světlo postupně uchylovalo a rozkládalo. Pro praktické účely je výhodný tzv. *přímohledný spektroskop*, který však má obvykle malou disperzi. V něm je obyčejný hranol nahrazen přímohledným hranolem, který světlo sice rozkládá, ale střední část spektra z něho vystupuje původním směrem. *Amiciho hranol* je soustava složená ze dvou stejných hranolů korunových a jednoho flintového, který má lámavý úhel pravý [obr. (6.4) 52]. Oba korunové hranoly mají lámavý úhel takový, aby se odchylka zeleného paprsku právě rušila. Oba druhy skel mají však různou disperzi, takže převládá odchylka fialového světla způsobená flintovým hranolem, kdežto u červeného světla je tomu naopak. Zenger užil ke konstrukci přímohledného hranolu skla a vhodně volené směsi kapalin, kterou naplnil hranolovou nádobku z broušeného skla [obr. (6.4) 53].

Moderní spektroskopy a *spektrografy*, které se od spektroskopů liší tím, že se spektrum promítá na fotografickou desku nebo film, mívají tzv. *autokolimační hranol* [obr. (6.4) 54]. Na tento hranol se vrhá úzký rovnoběžný světelný svazek P , propuštěný štěrbinou v takovém směru, že dopadá přibližně kolmo na zadní stěnu hranolu, od níž se odráží a dále rozkládá. Výhoda je v tom, že při stejné disperzi lze užít též čočky (nebo soustavy) pro vstupující i pro vystupující svazek lomený. To je třeba zvláště ocenit u spektrografů pro *ultrafialové* a pro *infračervené* světlo, ježto u nich jak hranol, tak čočky musí propouštět toto záření. Pro krátkovlnné světlo ultrafialové je proto nutná optika *křemenná* (z taveného křemene) a pro „infra-spektrografy“ optika z *kazivce*.



Obr. (6.4) 54. Autokolimační hranol

Kromě hranolových spektrografů se též užívá *interferometrů* (6.4.3), a zvláště *ohybových mřížek* (6.4.4). Mřížkové spektrografy mají před hranolovými spektrografy přednost jednak v úměrnosti mezi vzdáleností a vlnovou délkou čar (dávají tzv. *normální spektra*), jednak v menší absorpci záření, zvláště v úpravě *Rowlandově* s konkávní mřížkou na odraz, která nepotřebuje čočky.

Nejdůležitějším úkolem spektroskopie (spektrografie) je *spektrální rozbor* čili *analýza látek*. Zakládá se na skutečnosti, že prvky vysílají určitá charakteristická spektra složená z čar, které můžeme zjistit ve spektru vyšetřované látky (sloučeniny, slitiny, směsi). To je princip *kvalitativní* spektrální analýzy. Měříme-li však také intenzitu jednotlivých čar

příslušných některému prvku, můžeme určit též jeho množství, což je úkolem *kvantitativního* spektrálního rozboru. Kvalitativní rozbor měl důležitý význam při objevování nových prvků, a to nejen na Zemi, ale i na Slunci a jiných nebeských tělesech (viz např. prvek hélium, pojmenovaný podle Slunce, na němž byl spektroskopicky objeven).

Při spektrálním rozboru je ovšem nutno dosáhnout toho, aby látka vydávala záření buď viditelné, nebo zjistitelné fotografickou cestou, fotoelektrickým článkem nebo jinak. Říkáme, že atomy (molekuly) a ionty, z nichž je látka složena, musí být vzbuzeny, aby vydávaly záření. Podle způsobu buzení pak rozlišujeme různé zdroje světla.

Při spektrální analýze se původně užívalo světla slunečního, později nesvítivého plamene Bunsenova kahanu, zbarveného stopami zkoumané látky, vložené do plamene platinovým drátkem. Látka se plamenem rozžhává a vydává záření; nedostaneme však úplné spektrum všech prvků, ježto teplota Bunsenova plamene (kolem 1 700 °C) stačí jen k buzení některých atomů, např. alkalických prvků (Na, K, Li atd). Proto se k získání spekter kovů užívá hlavně dvou způsobů: elektrického oblouku a jiskry. Tak dostaneme dvě různá spektra:

1. *Obloukové spektrum* získáme, jestliže vpravíme do uhlíku obloukové lampy tyčinku z vyšetřovaného kovu a po zapálení oblouku uhlíky oddálíme, a to tak, abychom mohli pozorovat jen čárové spektrum vyslané parami kovu, nikoli žhavým uhlíkem, který má spektrum spojité. Z atomové teorie plyne, že obloukové spektrum vydávají neutrální atomy. Ostrost čar se zvýší použitím přerušovaného obloukového výboje, který se osvědčil i v praktických aplikacích (při zkoušení minerálů apod.).

2. *Jiskrové spektrum* vznikne při jiskrovém výboji mezi kovovými elektrodami, při čemž záření vydávají ionty (tj. ionizované atomy zbavené jednoho nebo několika elektronů). Vztah obou spekter vyložíme v čl. 7.2.3.

Spektra plynů získáme nejlépe výbojkami.

Kvantitativní spektrální rozbor, založený na měření intenzity spektrálních čar příslušných jednotlivým prvkům, prováděl se až dosud tak, že fotografický negativ spektra byl proměřen zvláštním přístrojem zvaným *mikrofotometr*. Tímto přístrojem se zjišťuje zčernání desky v místě jednotlivých spektrálních čar měřením intenzity světla propouštěného deskou. K objektivnímu fotometrování lze užít termoelektrických nebo fotoelektrických článků

ve spojení se zesilovačem. Velmi výhodné jsou registrační *mikrofotometry*, které zapisují přímo křivku zčernání desky v závislosti na vlnové délce světla. V nejnovější době byly konstruovány mřížkové spektrografy o veliké disperzi, kterými je možno měřit velmi rychle a přesně bez fotografické desky, jež je nahrazena velmi citlivými *počítači Geigerovými-Müllerovými* (viz čl. 8.4.3) nebo *fotoelektrickými násobiči elektronů* (čl. 6.7.1). Tyto přístroje zvané *kvantometry* mohou provádět přesné a velmi rychlé analýzy takřka automaticky.

Ukončíme výklad přehledem nejdůležitějších praktických aplikací.

Nejstarší a velmi běžné je využití spektroskopických metod jednak v astrofyzice (zkoumání složení hvězd, atmosféry, planet apod.), jednak v nebeské mechanice a kosmologii, kde z posunutí spektrálních čar lze podle Dopplerova principu (čl. 3.2.7) vypočítat rychlost vzdalování nebo přibližování hvězd, rotaci Slunce, dvojhvězd, pohyby mlhovin, rozpínání vesmíru atd.

V přítomné době se spektrální analýzy mnohostranně užívá v rozmanitých oborech průmyslových, v chemii, v lékařství, v potravinářství aj.

V hutnictví se užívá spektrálního rozboru ke zjišťování jakosti rudy, složení taveniny, strusky i kychtových plynů. Podobně ve slévárnách se kontroluje tavenina, ingoty, různé druhy ocelí i lehkých kovů. V koksárnách se spektrálně analyzuje uhlí a extrakty z koksu.

Spektrální rozbor je také velmi užitečný při kontrole výrobků, analýze olejů, v gumárenství při zjišťování prvků, které porušují gumu (jako mangan nebo arzén). V mineralogii a geologii lze zjišťovat složení minerálů a hornin, kontrolovat čistotu lučebnin, ve sklářství jakost skla, pravost drahých kovů, přítomnost některých plynů atd.

6.5. Teplotní a rentgenové záření

6.5.1. Teplotní záření pevných a kapalných látek

V tab. (6.1) I jsme uvedli přehled různých druhů elektromagnetického záření. V předešlých článcích jsme podrobně pojednali o vlastnostech světla, kdežto elektromagnetickými vlnami v užším smyslu jsme se zabývali v kapitolách 5.11 a 5.12. V této kapitole probereme další dva důležité obory elektromagnetického záření. Nejprve vyložíme zákonitosti záření, které vydávají pevné a kapalné látky, a v čl. 6.5.4 popíšeme vlastnosti rentgenového záření.

Látky všech skupenství vydávají elektromagnetické záření, které má původ v termických pohybech jejich nabitých částic a které se souborně nazývá *teplotní (temperaturní) záření*. Při teplotách nižších než asi 525 °C je toto záření neviditelné a označuje se nejčastěji názvem *infračervené záření* nebo stručně *(tepelné) sálání*. Se zvyšováním teploty stoupá celkové množství vyzářené energie a záření se přesouvá do oboru kratších vlnových délek.

Ani moderní kvantová fyzika nedospěla dosud k úplné teorii teplotního záření, ačkoli četné otázky byly zevrubně teoreticky i experimentálně zkoumány. Při výkladu základních poznatků můžeme se spokojit představou, že na povrchu těles je v činnosti velký počet elementárních zářičů (elektromagnetických oscilátorů), z nichž se šíří zářivá energie do prostoru vzduchoprázdného nebo vyplněného nějakým prostředím.

Zářivou energii, kterou vysílá povrch zářícího tělesa nějakou plochou za jednotku času, tedy výkon přenášený zářením, nazvali jsme v čl. 6.3.1 *zářivým tokem* Φ_e . Vycházejíce ze zářivého toku, můžeme stejným způsobem, jakým jsme v kap. 6.3 definovali fotometrické pojmy, definovat analogické pojmy energetické, které se od fotometrických pojmů liší jen tím, že u nich nejde o schopnost budit zrakový vjem. Tak odpovídá světlení (intenzitě světlení) energetická veličina *intenzita vyzařování* H_e , definovaná podílem zářivého toku $d\Phi_e$, který vyzařuje malá ploška dS zdroje do celého poloprostoru, a této plošky, tedy

$$6.5 (1) \quad H_e = \frac{d\Phi_e}{dS}.$$

Měříme-li zářivý tok ve wattech, pak jednotkou intenzity vyzařování je $W \cdot m^{-2}$.

Fotometrické svítivosti odpovídá energetická *zářivost* I_e zdroje ve zvoleném směru, která je podílem části $d\Phi_e$ zářivého toku, vycházející ze zdroje ve zvoleném směru do malého prostorového úhlu $d\omega$, a tohoto prostorového úhlu, tedy

$$6.5 (2) \quad I_e = \frac{d\Phi_e}{d\omega}.$$

Jednotkou zářivosti je $W \cdot \text{steradián}^{-1}$.

Fotometrickému jasů odpovídá energetická veličina zvaná *zář* L_e . Je to podíl zářivosti dI_e plošky dS zdroje ve zvoleném směru a průmětu této plošky do roviny kolmé k zvolenému směru, tedy

$$6.5 (3) \quad L_e = \frac{dI_e}{dS \cos \vartheta},$$

kde $dS \cos \vartheta$ jsme v čl. 6.3.3 nazvali zdánlivou velikostí zářící plošky. Jednotkou záře je $W \cdot m^{-2} \cdot \text{steradián}^{-1}$.

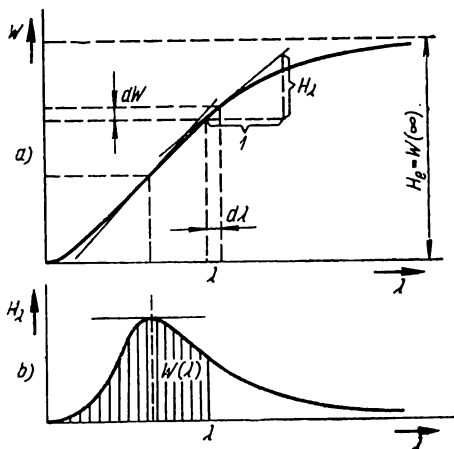
Ozáření (intenzitou ozáření) E_e , které odpovídá fotometrickému osvětlení, nazýváme podíl zářivého toku $d\Phi_e$ dopadajícího na plošku dS na povrchu ozařovaného tělesa a této plošky, tedy

$$6.5 (4) \quad E_e = \frac{d\Phi_e}{dS}.$$

Jednotky ozáření jsou stejné jako jednotky intenzity vyzařování.

Obecně nemusí každá ploška tělesa vzbuzeného k záření vyšší teplotou vysílat stejný zářivý tok, a proto budeme zákony teplotního záření vyjadřovat pomocí intenzity vyzařování. Známe-li rozdělení intenzity vyzařování na povrchu zářícího tělesa, pak vzhledem k 6.5 (1) zářivý tok, který vyzařuje vyšetřovaná část povrchu tělesa konečného plošného obsahu S , vypočteme integrací přes plochu S :

$$6.5 (5) \quad \Phi = \iint_S H_e dS.$$



Obr. (6.5) 1a — Závislost kumulativního vyzařování W na vlnové délce λ , b — závislost monochromatického vyzařování H_λ na vlnové délce

Spektrálním rozбором teplotního záření vydávaného pevnými a kapalnými tělesy se shledalo, že jeho spektrum je i v nejsilnějších spektroskopech spojitě. Jinak řečeno, tělesa vyzařují vlny všech délek λ spojitě vyplňujících celý spektrální obor od nejkratších vln (teoreticky $\lambda = 0$) až do vln libovolné délky (teoreticky $\lambda \rightarrow \infty$). V krajních bodech intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ je ovšem vyzařovaná energie nulová.

Abychom vystihli, jak je celková energie, kterou vyzáří plošná jednotka povrchu tělesa za vteřinu všemi směry a ve všech vlnových délkách, které těleso vysílá, rozdělena na

různé vlny, definujeme *monochromatické (jednobarevné) neboli spektrální vyzařování* H_λ jako část energie (vyzařenou malou ploškou povrchu během jisté doby do celého polo-prostoru), která připadá na vlny obsažené v nekonečně malém intervalu $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ dělenou šířkou intervalu $d\lambda$, ploškou a dobou. Jednotkou monochromatického vyzařování je tedy $W \cdot m^{-3}$. Vztah mezi intenzitou vyzařování a monochromatickým vyzařováním pochopíme nejlépe takto:

Představme si, že bychom měřili energii $W(\lambda)$, vyzářenou jednotkovou plochou za 1 s, v oboru vln od nuly (tj. od nejkratších vln) až do vlny λ . Kdybychom měření provedli (při stálé teplotě) pro řadu hodnot λ , dostali bychom křivku tvaru naznačeného zhruba na obr. (6.5) 1a; vidíme, jak veličina $W(\lambda)$, kterou lze nazvat *součtovým* nebo *kumulativním vyzařováním*, stoupá se zvětšováním spektrálního oboru, v němž ji měříme. Pak můžeme H_λ definovat jako limitu

$$H_\lambda = \lim_{d\lambda \rightarrow 0} \frac{W(\lambda + d\lambda) - W(\lambda)}{d\lambda},$$

tedy jako derivaci funkce $W(\lambda)$ podle λ :

$$6.5 (6) \quad H_\lambda = \frac{dW(\lambda)}{d\lambda}.$$

Z obr. (6.5) 1a vidíme, že monochromatické vyzařování má hodnotu přibližně rovnou intenzitě vyzařování připadající na jednotkový vlnový interval; dále je zřejmé, že

$$W(\lambda) = \int_0^\lambda H_\lambda d\lambda$$

a intenzita vyzařování

$$6.5 (7) \quad H_e = W(\infty) = \int_0^\infty H_\lambda d\lambda.$$

Tyto vztahy jsou názorně patrné z grafu na obr. (6.5) 1b, na němž je nakreslena křivka závislosti H_λ na λ . Plocha omezená křivkou a vodorovnou osou má až k úsečce λ velikost $W(\lambda)$ a celá plocha je rovna intenzitě vyzařování H_e . Tato plocha má konečnou velikost, neboť křivka $H_\lambda(\lambda)$ se blíží asymptoticky k ose λ .

Těleso záření nejen vysílá, ale také může záření, které na ně dopadá, pohlcovat (absorbovat). Každá látka záření částečně odráží, částečně propouští a zbytek pohlcuje. Toto pohlcené záření se mění v tělese hlavně v tepelnou energii, někdy se může jevit pohlcená energie zase jako zářivá (v případě luminiscence). Poměr energie pohlcené povrchovou plochou k energii dopadající na touz povrchovou plochu nazýváme *poměrnou pohltivostí (relativní absorpcí)* nebo krátce *pohltivostí* a označujeme α .

Teplotní záření v uzavřené dutině, které můžeme pozorovat zvenčí malým otvorem, se v jistém smyslu podobá dokonalému plynu. Každá část vnitřního povrchu dutiny září a současně záření vysílané jinými částmi povrchu odráží i pohlcuje. Předpokládáme-li, že dutina je vzduchoprázdňá (vakuum), je v každém elementu prostoru nějaké množství zářivé energie, neboť elektromagnetické vlnění nese jistou energii. Je-li teplota stěn dutiny ustálená — časově i místně stálá —, je také záření uvnitř dutiny ustálené a v každé objemové jednotce je obsaženo jisté množství zářivé energie, které určuje *hustotu zářivé energie*. Záření působí také jistým tlakem na plochu, na niž dopadá. Můžeme říci, že tu máme „energetický plyn“, který má svou hustotu i tlak. Lze tedy užít i v tomto případě podobných úvah, jaké v termodynamice platí pro plyny, a odvozovat z nich různé zákony, obdobné zákonům termodynamickým.

Vycházejí z takových představ, došel Kirchhoff (r. 1860) k důležitému zákonu, že *poměr intenzity vyzařování H_e k pohltivosti α závisí jen na absolutní teplotě tělesa*. Tento Kirchhoffův zákon pro úhrnné záření lze vyjádřit rovnicí

$$6.5 (8) \quad \boxed{\frac{H_e}{\alpha} = f(T)},$$

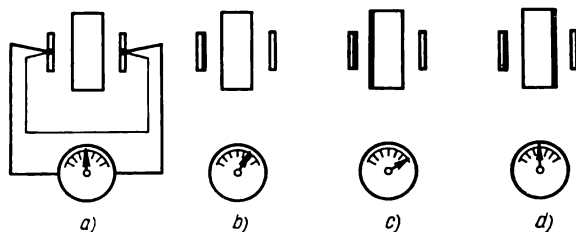
která říká, že tento podíl je funkcí jediné proměnné T , a že je tedy nezávislý na vlastnosti tělesa (na jeho chemickém složení, na úpravě povrchu apod.). Tento zákon platí však také pro každou délku vlny zvlášť, tedy i pro monochromatické vyzařování a monochromatickou pohltivost, jen s tím rozdílem, že podíl H_λ/α_λ závisí pak také na délce vlny, kterou vybereme z celkového záření. *Kirchhoffův zákon pro monochromatické záření* má proto tvar

$$6.5 (9) \quad \frac{H_\lambda}{\alpha_\lambda} = F(T, \lambda),$$

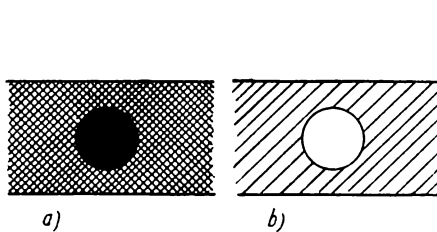
kde F značí funkci dvou proměnných T a λ a kde H_λ , α_λ je monochromatické vyzařování a monochromatická pohltivost pro záření s vlnovou délkou λ . Kirchhoffův zákon vyjadřuje velmi důležitou skutečnost, že těleso absorbuje nejsilněji právě ty spektrální čáry, které nejsilněji vyzařuje, jak bylo již uvedeno v čl. 6.4.13 při výkladu o *selektivní absorpci*.

Platnost Kirchhoffova zákona 6.5 (8), který vyjadřuje úměrnost intenzity vyzařování s pohltivostí při stálé teplotě, se dá potvrdit jednoduchým *pokusem Ritchieovým* [obr. (6.5) 2].

Lesklý (např. poniklovaný) kovový válec udržujeme horkou vodou nebo elektrickým proudem na vyšší teplotě než okolí. Po obou stranách válce jsou souměrně postaveny dva stejné lesklé plechové kotouče a na každém z nich je připevněn jeden spoj termoelektrického



Obr. (6.5) 2. Ritchieův pokus



Obr. (6.5) 3. Tmavý kruh na chladném kovu (a) září na žhavém kovu s větším jasnem než kov (b)

článku, takže připojený galvanoměr se vychýlí, když plechové kotouče nemají stejnou teplotu. Zahříváme-li střední válec, galvanoměr se nevychyluje, protože obě základny válce vyzařují stejně. [Obr. (6.5) 2a.] Pokryjeme-li však pravou plochu levého kotouče vrstvou sazí, vychýlí se galvanoměr, protože černý povrch kotouče silněji absorbuje než lesklý povrch pravého kotouče [obr. (6.5) 2b]. Výchylka galvanoměru ještě vzroste, když začerníme také levou základnu středního válce, protože jeho černý povrch vyzařuje silněji než lesklý povrch. [Obr. (6.5) 2c.] Otočíme-li však topný válec o 180° do polohy (d), vrátí se galvanoměr na nulu. Z posledního případu pak soudíme, že množství tepla, která si střední válec vyměňuje s oběma kotouči, jsou stejná. Označíme-li tedy H_1 , α_1 intenzitu vyzařování a pohltivost lesklého povrchu a H_ϵ , α_ϵ tytéž veličiny pro černý povrch, je výsledek pokusu vyjádřen vztahem

$$\alpha_\epsilon H_1 = \alpha_1 H_\epsilon \quad \text{čili} \quad \frac{H_1}{\alpha_1} = \frac{H_\epsilon}{\alpha_\epsilon}.$$

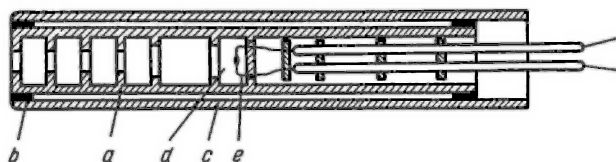
Z toho plyne, že poměr intenzity vyzařování k pohltivosti je pro lesklou i černou plochu stejný v soulase s 6.5 (8).

Pokus Ritchieův ukazuje, že těleso, které se při obvyklém osvětlení jeví černým (má pro viditelné záření pohltivost blízkou jedné), skutečně také více pohlcuje a vyzařuje

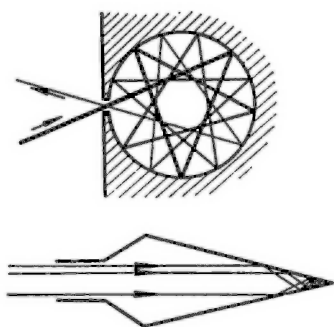
i v oboru infračerveném. Lze to pozorovat na platinovém plíšku, na němž je tuší namalován černý kruh. Při teplotě místnosti jeví se nám kruh tmavší než plíšek, poněvadž pohlcuje více světla. Rozžhavíme-li však plíšek plamenem, jeví se nám zase kruh jasnější než ostatní části plíšku, což svědčí o tom, že pohltivější plocha kruhu září s větší intenzitou než méně pohltivá plocha plíšku při téže teplotě [obr. (6.5) 3].

6.5.2. Záření černého tělesa

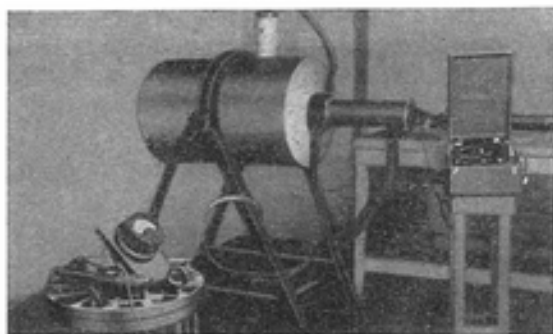
Kirchhoffův zákon pro úhrnné záření dá se vyslovit jednodušeji, zavedeme-li pojem *dokonalé (absolutně) černého tělesa*. Čím větší je pohltivost α v oboru viditelného světla, tím tmavší se jeví povrch tělesa při osvětlení. V mezním případě těleso pohlcuje veškeré záření dopadající na jeho povrch. Taková dokonalá černá tělesa, která by měla $\alpha = \alpha_0 = 1$, přesně vzato nejsou; přesto však lze „dokonalou černost“ uskutečnit dosti jednoduchým způsobem. Je totiž zřejmé, že malý otvor dutiny, jejíž vnitřní povrch je pokud možno černý (matně černě natřený, po-



Obr. (6.5) 5. Realizace černého tělesa podle Holborna a Kurlbauma



Obr. (6.5) 4. Realizace absolutně černého tělesa



Obr. (6.5) 6. Černý zářič s přímo vytápěnou grafitovou trubicí

krytý sazemi), pohltí prakticky všechno záření a jeví se zvenčí jako povrch *černého tělesa*, jak budeme stručně nazývat těleso dokonale černé. Nejvhodnější je úzká válcová, kulová nebo kuželová dutina s malým otvorem [obr. (6.5) 4], v níž se vstupující záření opakovanými odrazy prakticky zcela pohltí.

Takový jev pozorujeme běžně u otevřených oken, díváme-li se na ně z ulice. Je-li velikost oken malá proti rozměrům místnosti, pak se opakovaným odrazem i na dosti dobře odrážejících stěnách místnosti z velké části pohltí zářivý tok vstupující do místnosti. Z okna vystupuje ven jen malá část ze vstupujícího toku, takže okno se nám zvenčí jeví jako tmavá nebo i černá plocha bez zřetele na barvu stěn místnosti.

Prakticky se černý zářič realizuje různými elektricky vytápěnými píčkami, z nichž je jedna znázorněna na obr. (6.5) 5. Tvoří ji trubka *a* z ohnivzdorného materiálu, potažená na vnější straně tenkou topnou platinovou fólií, žhavenou elektrickým proudem. Souso s azbestovým izolačním pláštěm *c* je trubka *a* udržována azbestovými manžetami *b*. Vlastní zářivá dutina, chráněná několika clonami, je označena písmenem *d*. Teplota dutiny se měří termoelektrickým článkem *e* z Pt a PtRh. Obr. (6.5) 6 ukazuje laboratorní pro-

vedení černého zářiče tvořeného grafitovou trubicí, přímo vytápěnou proudem jí vedeným až do teploty 1 800 °C.

Mají-li stěny dutiny vysokou teplotu T , září vzhledem k 6.5 (8) otvor v dutině s největší intenzitou, jaká je při teplotě T možná, neboť pohltivost otvoru je velmi blízká 1. Záření vystupující otvorem z dutiny je proto prakticky stejné jako záření černého tělesa.

Označíme-li H_0 intenzitu vyzařování černého tělesa, dostaneme rovnici 6.5 (8) ve tvaru

$$6.5 (10) \quad H_0 = f(T).$$

Proto lze vyjádřit Kirchhoffův zákon větou: *Intenzita vyzařování černého tělesa závisí jen na jeho absolutní teplotě.* Pohltivost dokonale černého tělesa musí být zřejmě rovna jedné pro všechny vlnové délky, tj.

$$6.5 (11) \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_{0\lambda} = 1,$$

takže Kirchhoffův zákon má pro monochromatické záření černého tělesa podle 6.5 (9) jednoduchý tvar

$$6.5 (12) \quad H_{0\lambda} = F(T, \lambda).$$

Určení neznámých funkcí $f(T)$ a $F(T, \lambda)$ bylo hlavním předmětem teoretického a experimentálního bádání v druhé polovině minulého století.

Snazším úkolem bylo jistě určit funkci $f(T)$ v rovnici 6.5 (10), která vyjadřuje závislost intenzity vyzařování na absolutní teplotě. K experimentálnímu zjištění této závislosti užil Stefan (r. 1879) kuželové dutiny [obr. (6.5) 4] a došel k tomuto vztahu:

$$6.5 (13) \quad H_0 = \sigma T^4, \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{deg}^{-4}.$$

To je tzv. **Stefanův—Boltzmannův zákon**. Uvedená hodnota *Stefanovy—Boltzmannovy konstanty* σ plyne z novější Planckovy teorie. Boltzmann odvodil totiž vztah 6.5 (13) teoreticky užitím termodynamických zákonů na energetický plyn uvnitř černé dutiny, uzavřené dokonale odrážejícím pístem. Posunutím pístu proti tlaku záření vykoná se práce $p \, dV$, takže i tu platí rovnice 4.4 (8). Vyjádříme-li pak podmínku, že změna entropie 4.4 (35) je úplný diferenciál, dojdeme k výsledku, že energie dutiny je úměrná čtvrté mocnině teploty. Tato energie je však úměrná intenzitě vyzařování, z čehož plyne 6.5 (13).

Z Kirchhoffova zákona můžeme vypočítat intenzitu vyzařování každého tělesa, známe-li jeho pohltivost. Obecně však platí, že černé těleso září více než kterékoli jiné těleso za stejné teploty. Praktický význam Stefanova zákona je velký. Podle něho lze určit teplotu zářícího tělesa, které můžeme pokládat aspoň přibližně za „černé“. Tak se např. z energie slunečního záření dopadajícího na Zemi dá vypočítat teplota slunečního povrchu. Ze známé hodnoty tzv. *solární konstanty* 1,35 kWm⁻², která vyjadřuje ozáření zemského povrchu Sluncem, vychází tak pro povrchovou teplotu Slunce 5 900 °K. Stefanův zákon umožňuje také vypočítat tepelné ztráty vzniklé sáláním. Plyne z něho rovněž známý Newtonův předpoklad užívaný v kalorimetrii, že tepelné ztráty Δq jsou při málo odlišných teplotách velmi přibližně úměrné rozdílu teplot $\Delta T = T_1 - T_2$:

$$\Delta q \sim T_1^4 - T_2^4 = (T_1^2 + T_2^2) (T_1 + T_2) (T_1 - T_2) = 4T^3 \Delta T,$$

značí-li T střední teplotu obou těles.

Stefanův zákon neřeší problém záření černého tělesa úplně. K tomu bylo třeba určit ještě neznámou funkci $F(T, \lambda)$ v rovnici 6.5 (12), která říká, že monochromatické vyzařo-

vání černého tělesa je funkcí dvou proměnných: absolutní teploty T a délky vlny λ . Určit tuto funkci bylo ovšem mnohem obtížnější než určit závislost intenzity vyzařování pouze na teplotě. Nejprve se podařilo Wienovi (r. 1896) zjistit podle termodynamických vět, že hledaná funkce má tvar

$$6.5 \quad (14) \quad H_{0\lambda} = \frac{1}{\lambda^5} \varphi(\lambda T),$$

kde φ je funkce již jen jediné proměnné, totiž součinu λT . I tento neúplný výsledek vedl Wiena k řešení otázky, kterou délku vysílá černé těleso za některé teploty nejsilněji, tj. které barvě ve spojitém spektru černého tělesa přísluší největší monochromatické vyzařování. Hledaná vlna je patrně dána podmínkou

$$\frac{\partial H_{0\lambda}}{\partial \lambda} = 0,$$

takže podle 6.5 (14)

$$-\frac{5}{\lambda^6} \varphi(\lambda T) + \frac{1}{\lambda^5} \varphi'(\lambda T) T = 0$$

čili

$$\lambda T \cdot \varphi'(\lambda T) - 5\varphi(\lambda T) = 0,$$

kde φ' značí derivaci funkce φ .

I když neznáme funkci φ , můžeme odtud určit délku vlny λ^* , které přísluší maximální monochromatické vyzařování, předpokládáme-li, že známe aspoň jeden reálný kořen poslední rovnice pro součin λT . Označíme-li jej b , bude

$$6.5 \quad (15) \quad \boxed{\lambda^* T = b; \quad b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{deg},}$$

kteřážto hodnota konstanty b vychází výpočtem z Planckova zákona 6.5 (22). Odvozená rovnice vyjadřuje tzv. *Wienův zákon posuvu*, neboť z ní plyne, že se maximum monochromatického vyzařování s rostoucí absolutní teplotou posouvá ke kratším vlnovým délkám. Souhlasí to se známou zkušeností, že tělesa vysílají při zvyšování teploty nejprve jen dlouhovělné tepelné záření, které přechází asi při 525 °C do tmavomodré barvy. Se stoupající teplotou přechází barva žhavého tělesa od červené ke žluté, která se stává stále bělejší, až se barva světla při několika tisících stupních již málo liší od barvy „bílého“ světla slunečního, v jehož spektru je nejsilněji zastoupena žlutozelená barva s délkou vlny asi $\lambda^* \approx 0,5 \mu\text{m} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Podle 6.5 (15) vychází tedy pro teplotu slunečního povrchu hodnota

$$T = \frac{b}{\lambda^*} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{5 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \text{ °K} \approx 5\,800 \text{ °K},$$

což je v uspokojivém souhlase s dřívější hodnotou plynoucí ze Stefanova zákona.

Wien se pokusil odvodit také tvar funkce $\varphi(\lambda T)$. Vycházeje z klasické statistiky, odvodil závislost zvanou *Wienův zákon*

$$6.5 \quad (16) \quad \varphi(\lambda T) = c_1 e^{-c_2/\lambda T} \quad (c_1, c_2 = \text{const}),$$

jež se však ukázala jen částečně správná. Souhlasila se skutečným rozložením energie ve spektru, pokud součin λT měl malé hodnoty, tedy jen pro kratší vlny, tj. pro viditelný a ultrafialový obor spektra vysílaného černým tělesem při dostatečně nízkých teplotách. Pro vlastní tepelné záření nesouhlasí Wienův zákon s měřením. Průběh monochromatického

vyzařování v této dlouhovlnné části spektra podařilo se však uspokojivě vyjádřit funkcí

$$6.5 (17) \quad \varphi(\lambda T) = c_3 \lambda T \quad (c_3 = \text{const}),$$

kterou rovněž teoreticky odvodil Rayleigh a Jeans. Osvědčila se zvláště při vyšších teplotách a dlouhých vlnových délkách.

Toto rozpolcení v závislosti téže fyzikální veličiny na dva zákony různého tvaru nemohlo pochopitelně být definitivně přijato, a proto se pokračovalo v pokusech sjednotit oba zákony v zákon jediný. Řešení bylo ostatně po stránce formální velmi prosté, jak ukázal Planck r. 1900. Oba zákony se dají spojit v jediný, přijmeme-li pro funkci $\varphi(\lambda T)$ tvar

$$6.5 (18) \quad \varphi(\lambda T) = \frac{c_1}{e^{c_2/\lambda T} - 1}.$$

Pro malé hodnoty součinu λT má exponenciální funkce hodnoty mnohem větší než jedna, a proto můžeme jedničku ve jmenovateli vynechat, čímž dojdeme k rovnici 6.5 (16). Pro velké hodnoty součinu λT můžeme se však v rozvoji exponenciální funkce omezit na dva první členy, čímž dostaneme

$$6.5 (19) \quad \varphi(\lambda T) = \frac{c_1}{1 + \frac{c_2}{\lambda T} + \dots - 1} = \frac{c_1}{c_2} \lambda T;$$

stačí položit $c_3 = c_1/c_2$, abychom došli k 6.5 (17). Tak dospěl Planck k výrazu 6.5 (18), který sice velmi dobře vyhovoval v celém oboru vln a pro všechny teploty, nebylo však snadné zdůvodnit jej teoreticky.

Představujeme si, že po vnitřní stěně dutiny jsou rozloženy elektromagnetické oscilátory (zářiče), jimiž mohou být elektrické náboje, konající harmonické kmity různých kmitočtů. Od nich se podle klasické fyziky šíří elektromagnetické vlny dutinou — oscilátory září. Naopak každý oscilátor může pohltit vlnění na něj dopadající, zvláště vlnění stejné frekvence, jakou oscilátor vysílá (jeho vlastní frekvence je v rezonanci s dopadajícím zářením). Takový lineární oscilátor (kmitající v přímce) má dva platné stupně volnosti určené energií potenciální a kinetickou, na něž podle zákona o rovnoměrném rozdělení energie [čl. 4.3.8] připadá energie $2 \cdot \frac{1}{2} kT$, takže střední hodnota energie všech oscilátorů by měla být $\bar{w} = kT$. Tento výsledek klasické statistiky vede však k zákonu 6.5 (17), který nevyhovuje v celém oboru teplot a pro všechny vlnové délky.

Podrobným studiem otázky odvození funkce vyzařování 6.5 (18) došel Planck k přesvědčení, že v klasické statistice je nesprávný právě předpoklad, který byl až do té doby pokládán za naprosto nepochybný, totiž předpoklad o *neomezené dělitelnosti (plynulé měnitelnosti)* energie. Experimentálně potvrzenou funkcí 6.5 (18) bylo možno totiž teoreticky získat jen za zcela převratného předpokladu, který se z počátku nazýval **Planckova kvantová hypotéza**:

Emise a absorpce zářivé energie může se dít jen po celistvých násobcích „kvanta“, $\varepsilon = h\nu$, kde ν je vlastní frekvence oscilátoru a h je účinkové kvantum (Planckova konstanta) 6.1 (7).

Neplatí tedy klasický předpoklad, že střední energie všech zářičů jsou stejné a rovné součinu kT . Ve skutečnosti závisí střední energie zářičů na jejich frekvenci podle vztahu $\bar{w} = \frac{\varepsilon}{e^{c_2/kT} - 1}$, který plyne jen z uvedeného předpokladu. Položíme-li $\nu = c/\lambda$, kde c je rychlost světla ve vakuu 6.1 (13), plynou z kvantové domněnky pro konstanty v rovnici 6.5 (18) vztahy

$$6.5 (20) \quad c_1 = 2\pi h c^2, \quad c_2 = \frac{hc}{k},$$

kde k je Boltzmannova konstanta 4.3 (9). Číselné hodnoty obou konstant c_1 a c_2 pak jsou

$$c_1 = 3,741\,3 \cdot 10^{-16} \text{ J} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1},$$

$$6.5 \quad (21) \quad c_2 = 1,438\,8 \cdot 10^{-12} \text{ m} \cdot \text{deg}.$$

Planckův zákon spektrálního rozdělení monochromatického vyzařování má tedy vzhledem k 6.5 (14) tvar

$$6.5 \quad (22) \quad H_{0\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5 (e^{c_2/\lambda T} - 1)} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/k\lambda T} - 1)}.$$

Černé těleso je kosinovým zářičem, a proto platí mezi zářím L_0 a intenzitou vyzařování H_0 černého tělesa vztah 6.3 (15), který jsme ve fotometrii odvodili pro jas a světlení kosinového zářiče, tedy

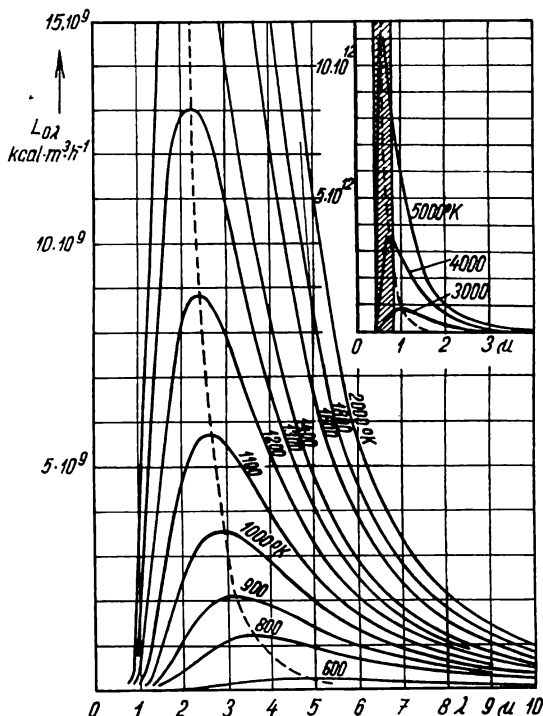
$$6.5 \quad (23) \quad L_0 = \frac{1}{\pi} H_0.$$

Stejně souvisí monochromatická zář $L_{0\lambda}$ s monochromatickým vyzařováním $H_{0\lambda}$ vztahem

$$6.5 \quad (24) \quad L_{0\lambda} = \frac{1}{\pi} H_{0\lambda}.$$

Při tom rozumíme *monochromatickou zář* elementární monochromatický tok, vycházející z plošky zdroje ve vyšetřovaném směru do malého prostorového úhlu a připadající na vlny obsažené v nekonečně malém intervalu vlnových délek, dělený šířkou tohoto intervalu, příslušným prostorovým úhlem a zdánlivou velikostí plošky. Jednotka monochromatické záře je $\text{W} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{steradián}^{-1}$. Spektrální rozdělení monochromatické záře je tedy přímo úměrné rozdělení monochromatického vyzařování určenému vztahem 6.5 (22) a liší se jen v konstantě c_1 , která má pro monochromatickou zář hodnotu $c_1 = 2hc^2 = 1,191 \cdot 10^{-16} \text{ J} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Závislost monochromatické záře černého tělesa v jednotkách $\text{kcal} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{steradián}^{-1}$ na vlnové délce v μm , určená Planckovým zákonem, je pro 14 různých absolutních teplot graficky znázorněna na obr. (6.5) 7. Je z něho zřejmé, že s rostoucí teplotou roste urychleně plocha křivky rovná úhrnné záři a zároveň se maximum křivky posouvá ke kratším vlnovým délkám. První závislost souhlasí se zákonem Stefanovým—Boltzmannovým, který ostatně plyne přímo dosazením z 6.5 (22) do 6.5 (7), druhou závislost vyjadřuje Wienův zákon posuvu 6.5 (15). Rovněž tento zákon plyne ze zákona 6.5 (22) i se správnou hodnotou konstanty b . Planckův zákon se plně osvědčil jako zákon platný v celém známém rozsahu teplot i vlnových délek. Avšak jeho největší význam záleží v tom, že nejen změnil od základu tehdejší názory na světlo a stal se východiskem fotonové teorie světla, ale vedl přímo ke kvantové teorii, na níž je vybudována celá moderní fyzika.



Obr. (6.5) 7. Grafické znázornění Planckova vyzařovacího zákona (obor viditelného záření vyčárkován)

6.5.3. Světelné zdroje

Zdroje světla můžeme z teoretického hlediska třídit podle způsobu, jakým je buzeno svítící těleso. Látky všech tří skupenství mohou být buzeny *vysokou teplotou* nebo *absorpcí záření*, kdežto plyny — zvláště zředěné — lze vzbudit také elektrickým polem. Podle buzení rozeznáváme tři hlavní kategorie světelných zdrojů:

A. Zdroje teplotní vydávají světlo jako součást svého teplotního záření. U těchto zdrojů nejde jen o to, aby měly dostatečnou intenzitu vyzařování, ale aby měly také dobrou světelnou účinnost, tj. aby co největší část jejich záření připadla na viditelné spektrum. Především tedy — bez zřetele na chemickou podstatu zdroje — je nutno, aby zdroj zářil za dosti vysoké teploty. Tím se podle Stefanova—Boltzmannova zákona dosáhne nejen vysoké intenzity vyzařování, ale podle Planckova (nebo podle Wienova) zákona také většího podílu viditelného světla v celkovém teplotním záření. Pokud jde o výběr materiálu a úpravu jeho povrchu, plyne ze zákona Kirchhoffova, že nejvhodnějším zdrojem je těleso absolutně černé. I když se ideálu černého tělesa dosti blíží zářící dutina, přece je jasné, že pro mnohé zdroje záření nelze tento požadavek ani přibližně splnit, z čehož plyne nutnost rozšířit teorii černého zářiče také na *zdroje nečerné*. K tomu účelu je třeba vyjít z obecného tvaru Kirchhoffova zákona 6.5 (9), podle něhož monochromatické vyzařování libovolného tělesa souvisí podle rovnice 6.5 (12) s vyzařováním černého tělesa při téže teplotě jednoduchým vztahem

$$6.5 (25) \quad H_{\lambda} = \alpha_{\lambda} H_{0\lambda}.$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že záření tělesa je obecně závislé na tom, jak se mění jeho monochromatická pohltivost α_{λ} s vlnovou délkou. Látky, které mají pro různé vlny různé pohltivosti, budou také jevit různě velké odchylky od záření černého tělesa. Zvláště to lze pozorovat u látek se selektivní absorpcí, které v absorpčním oboru projevují náhlé změny vyzařování. To jsou tzv. *selektivní zářiče*, jejichž teorie není ještě uspokojivě propracována.

Jsou však tělesa, jejichž monochromatickou pohltivost můžeme v dosti značném rozsahu vlnových délek pokládat za stálou a položit rovnu úhrnné pohltivosti:

$$\alpha_{\lambda} = \alpha < 1.$$

Takové zářiče nazýváme *šedými*. Podle 6.5 (25) platí pro ně

$$6.5 (26) \quad H_{\lambda} = \alpha H_{0\lambda};$$

šedý zářič vyzařuje zřejmě všechny vlnové délky s energií zmenšenou ve stálém poměru α proti černému tělesu stejné teploty. Integrací rovnice 6.5 (26) plyne

$$\int_0^{\infty} H_{\lambda} d\lambda = \alpha \int_0^{\infty} H_{0\lambda} d\lambda$$

čili podle 6.5 (7, 13)

$$6.5 (27) \quad H_0 = \alpha H_0 = \alpha \sigma T^4.$$

Intenzita vyzařování šedého zářiče je tedy α -krát menší než u černého tělesa při stejné teplotě. Z toho vidíme, že u teplotních zdrojů musí mít svítící látka co největší pohltivost ve viditelném oboru, tedy při daném chemickém složení musí být co nejhustší, tj. ve skupenství pevném nebo kapalném. Plyny vzhledem ke své nepatrné absorpci září s velmi nepatrnou intenzitou, a proto jsou jako teplotní zdroje světla zcela nevhodné. Příkladem je nesvítivý plamen, který je vlastně zářící plyn. Svítivý plamen vydává při nižší teplotě mnohem intenzivnější světlo, které vychází z rozzhavených částíček nespáleného uhlíku.

Dalším příkladem je plynový hořák, který svítí, jen má-li punčošku z pevné látky, která se hořícím plynem rozžhává.

B. Zdroje výbojové. Světlo vydávané výbojovými zdroji liší se podstatně od světla zdrojů teplotních tím, že je složeno z jednotlivých čar nebo spektrálních pásů, které sice mohou ležet uvnitř i vně viditelného oboru, avšak nemají spektrum spojité, které nutně doplňuje i viditelnou část spektra pevných látek, zvláště na straně dlouhých vln. Infračervené a tepelné záření chybí prakticky u zdrojů výbojových, jejichž světlo se proto nazývá *studené světlo*.

O volbě látky pro tyto zdroje platí pravý opak toho, co jsme řekli o zdrojích kategorie A. Poněvadž jsou výbojové zdroje buzeny nárazy iontů zrychlovaných elektrickým polem, je nutno, aby pole mohlo na ionty působit po dostatečně dlouhé dráze, která by jim dovolila získat za přijatelně vysokého napětí energii potřebnou nejen k buzení, ale i k ionizaci dalších atomů. To je možné jen v látce dostatečně řídké, jako jsou velmi zředěné plyny, v nichž střední volná dráha molekul má postačující délku.

C. Zdroje luminiscenční. *Luminiscenci* rozumíme světelné záření, které vydávají látky pod účinkem různých vlivů: působením světla (fotoluminiscence), chemickými pochody (chemiluminiscence) nebo elektrickými silami (elektroluminiscence). Luminiscence se obvykle dělí na *fosforescenci*, jež se vyznačuje tím, že látka ozářená světlem vysílá záření ještě nějakou dobu po skončení osvětlení, a na *fluorescenci*, při níž záření trvá prakticky jen po dobu osvětlování látky. Fluorescenci jeví látky všech tří skupenství, při čemž vydávají záření složené z jednotlivých čar nebo pásů.

Jedním z prvních, kdo se zabýval podrobnějším studiem fluorescence, byl Stokes. Zjistil, že fluoreskující látky vydávají záření složené z různých vlnových délek, které jsou obvykle větší než vlnová délka světla, která fluorescenci způsobuje. Fluorescenční záření může však obsahovat také stejnou vlnovou délku jako původní světlo. Vysvětlení těchto vlastností z hlediska atomové teorie je snadné: jde tu o buzení atomů absorpcí světla (viz čl. 7.2.2).

Také světlo fluorescenčních zdrojů je „světlo studené“. Jejich nejběžnějším druhem jsou *zářivky*, tj. výbojky, jejichž skleněné stěny jsou zevnitř pokryty vrstvou fluorescenční látky. Tím se zvýší účinnost zvláště u výbojek, které značnou část zářivé energie vydávají v ultrafialovém světle, jež se při fluorescenci mění ve světlo viditelné.

Světelné zdroje lze tedy rozřadit takto:

A. Teplotní zdroje:

Pevné látky

1. žhavené plamenem

- a) svítivý plamen se žhavenými částicemi uhlíku (svíčka, petrolejová lampa s knotem, acetylenová lampa),
- b) nesvítivý plamen s punčoškou z kysličníku thorcia a ceru (Auerův plynový hořák, lampa na lihové nebo petrolejové páry),

2. žhavené elektricky

- a) Joulovým teplem (žárovky, Nernstova lampa),
- b) přechodné typy mezi A a B (různé druhy obloukových lamp).

B. Výbojové zdroje:

Zředěné plyny buzené elektrickým polem

1. v kladném světelném sloupci (výbojky, zvláště rtuťové a neónové),
2. v záporném světle doutnavém (doutnavky, zvláště neónové).

C. Luminiscenční zdroje:

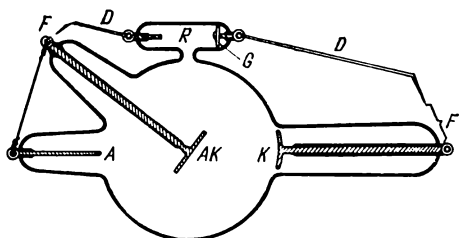
1. pevné látky buzené zářením plynů (buzených výbojem jako v B, zářivky, tj. fluorescenční výbojky),
2. pevné látky buzené radioaktivním zářením (světélkující barvy),
3. kvantové generátory světla
 - a) plynové lasery (luminiscence plynů),
 - b) krystalové lasery (luminiscence pevných látek),
 - c) polovodičové lasery (elektroluminiscence přechodu $p - n$).

6.5.4. Rentgenové záření

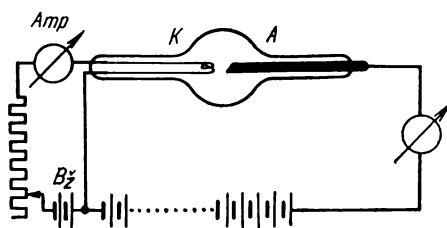
Roentgen (r. 1895) objevil, že ze stěny katodové trubice, v místech, kam dopadají katodové paprsky, vychází velmi pronikavé záření, které nazval *zářením X*. Je to elektromagnetické záření s velmi krátkými vlnami obvykle v rozsahu asi 10^{-11} až 10^{-7} m, tj. $0,1 \text{ \AA}$ až $1\,000 \text{ \AA}$ [viz tab. (6.1) I]. Zdrojem záření X v tomto běžném vlnovém rozsahu jsou *rentgenové trubice*, kdežto elektrony urychlené v betatronech a elektronových synchrotronech způsobují nesmírně pronikavé rentgenové záření s vlnovými délkami řádu 10^{-12} m až 10^{-15} m. Takové záření X patří podle tab. (6.1) I již do oboru radioaktivního záření γ a kosmického záření.

Rentgenové trubice jsou v podstatě dvojí: iontové se studenou katodou a Coolidgeovy se žhavou katodou.

Iontová trubice [obr. (6.5) 8] je starší druh rentgenové trubice, velmi podobný původní trubici Roentgenově. Skleněná bára s dvěma hliníkovými elektrodami (zahrocenou anodou *A* a miskovitě vydutou katodou *K*) je vyčerpána na tlak asi 10^{-3} torrů. Počáteční malý počet iontů se napětím několika kilovoltů urychluje a tvoří nárazem další ionty. Záporné ionty

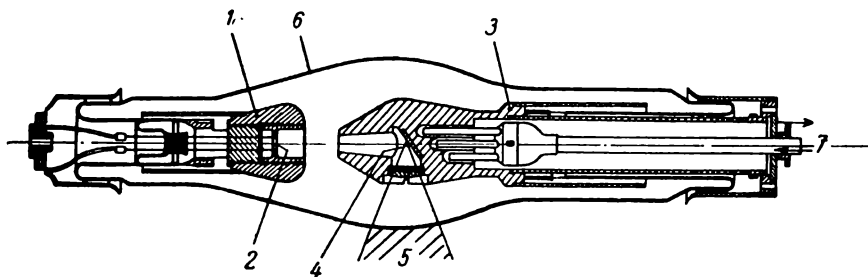


Obr. (6.5) 8. Iontová trubice s regeneračním zařízením



Obr. (6.5) 9. Schéma zapojení Coolidgeovy trubice

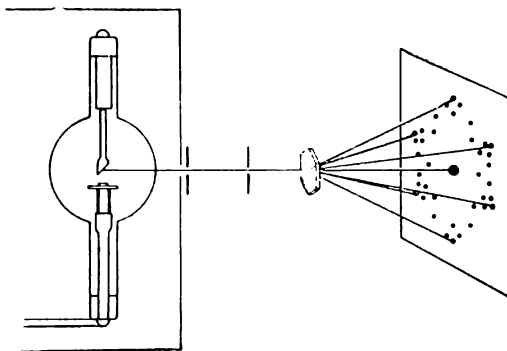
(elektrony) se pohybují rychleji k anodě než těžší kladné ionty ke katodě. Tím vznikne u katody značný potenciálový spád, který vrhá kationty na katodu, z níž vyraží volné elektrony. Tyto elektrony se vymršťují kolmo z konkávního povrchu katody, takže po zrychlení v elektrickém poli dopadají ve středu křivosti katody na třetí elektrodu *AK* spojenou vodivě s anodou a zvanou *antikatoda*.



Obr. (6.5) 10. Novější elektronová (Coolidgeova) trubice: 1 — katoda, 2 — žhavená spirála, 3 — anoda, 4 — ohnisko anody, 5 — záření X, 6 — sklo, 7 — chlazení

Antikatoda se vyrábí z platiny, wolframu nebo jiného těžko tavitelného kovu, jednak aby snesla zahřátí způsobené dopadem elektronů, jednak proto, že účinnost přeměny katodového záření na rentgenové je u těžších kovů vyšší. Anoda nemá při vlastní funkci trubice podstatný význam, ale podržuje se v konstrukci trubice proto, že je užitečná při odplyňování elektrod. To se děje pod napětím co nejdokonalejším vyčerpáním trubice, při čemž se antikata od anody odpojí, aby se nerozprašovala. (Hliník se při výboji rozprašuje méně než jiné kovy.) Povrch elektrod a rozprašený kov na skle trubice pohlcuje totiž plyn. Množství pohlceného plynu klesá

však se zatížením trubice (s intenzitou výboje). Proto tlak v trubici roste se zatížením, takže elektrony nedosahují v hustším plynu tak velké energie a vznikající záření X se stává měkčím (méně pronikavým). Naopak při malém zatížení pohlcuje se stále více plynu a jeho tlak v trubici klesá, takže energie elektronů stoupá a záření se stává tvrdším. Tomuto „tvrdnutí“ trubice, které má ještě jiné (méně zřejmé) příčiny, se čelí různými *regeneračními zařízeními*, která zvýší tlak přivedením nepatrného množství plynu dovnitř trubice. To lze provést nahřátím trubičky spojené s prostorem trubice a obsahující vhodnou látku, z níž se tak vypudí trochu plynu v ní pohlceného. Na obr. (6.5) 8 vidíme jedno z takových zařízení, které působí samočinně. K bání iontové trubice je připojena výbojová trubička *R* se slídovou destičkou *G*, jejíž elektrody mají zahrocené dráty *DD*. Vzdálenosti *FF* hrotů od přívodu k anodě a ke katodě iontové trubice lze nastavit tak, aby při zvýšení napětí na trubici nad přípustnou hodnotu nastal výboj v trubičce *R*. Při tomto výboji uvolňuje se z destičky *G* okludovaný plyn a výboj trubičkou *R* přestane, jakmile napětí klesne na původní výši. Hlavní nevýhodou, kterou nelze u iontové trubice odstranit, je závislost intenzity záření na jeho tvrdosti. S rostoucím tlakem roste totiž množství iontů v trubici a tím i množství elektronů dopadajících na antikatodu. Čím je tedy záření X měkčí, tím větší je jeho intenzita, a naopak čím tvrdší je záření X, tím je slabší.



Obr. (6.5) 11. Průchod záření X destičkou krystalu,

Elektronová (Coolidgeova) trubice nemá tyto nevýhody, protože její žhavená katoda vysílá elektrony v množství určeném teplotou (žhavením) katody a trubice je prakticky dokonale vyčerpána. Na obr. (6.5) 9 je schéma zapojení elektronové trubice, v němž *A* značí antikatodu a *K* katodu žhavenou proudem z baterie B_z . Protože 99,9 % příkonu se mění v teplo, musí být antikatoda (která zároveň zastupuje anodu) uměle chlazená. Trubice toho druhu sestrojili nejdříve Coolidge (r. 1913) a Lilienfeld a od té doby byly opětovně upravovány a zdokonalovány. Obr. (6.5) 10 ukazuje novější provedení Coolidgeovy trubice, v níž termoelektrony unikají ze žhaveného vlákna ve válcové dutině katody, která je elektrostaticky odpuzuje a tak je soustřeďuje na malou ohniskovou plochu na antikatodě.

Ačkoli se záření X liší od optického záření jen kvantitativně, je rozdíl mezi jejich vlnovými délkami tak značný, že ke studiu rentgenového záření se běžně volí metody kvalitativně odlišné od spektroskopických metod optických. Nejčastěji se využívá jevů, které vznikají při průchodu záření X krystaly nebo při jeho odrazu na stěně krystalu.

První myšlenku uskutečnili podle Laueova návrhu Friedrich a Knipping. Prozařovali destičku krystalu rentgenovými paprsky [obr. (6.5) 11] a zjistili, že se paprsky zesilovaly jen v určitých směrech, takže vytvořily na fotografické desce pravidelnou soustavu osvětlených plošek. Na obr. (6.5) 12 vidíme takový *Laueův diagram* vytvořený průchodem záření X destičkou tloušťky 0,5 mm vyříznutou z krystalu sirníku zinečnatého ZnS . Pod snímkem je teoretické schéma diagramu podle teorie Laueovy.

Metoda Laueova je velmi užitečná ke studiu krystalové struktury, ale méně vhodná ke studiu spektrálního složení rentgenového záření. Jaké jsou vlnové délky tohoto záření, lze s velkou přesností zjistit tzv. *rentgenovými spektrografy*. Tyto přístroje užívají buď Braggovy metody odrazu na přirozené ploše krystalu, nebo Debyeovy—Scherrerovy metody průchodu krystalovým práškem, které stručně vyložíme.

Dopadá-li na rovinnou plochu krystalu rovnoběžný svazek paprsků X pod úhlem θ doplňkovým k úhlu dopadu [obr. (6.5) 13], odráží se na krajní vrstvě iontů pod stejným úhlem. Zároveň však vniká do krystalu a odráží se na vnitřních vrstvách iontů pod stejným úhlem. Paprsky odraženého svazku se nesejdou ve stejné fázi, jak je patrné z obr. (6.5) 13 pro paprsek odražený na iontu A_1 v první vrstvě a pro paprsek odražený na iontu A_2 druhé vrstvy.

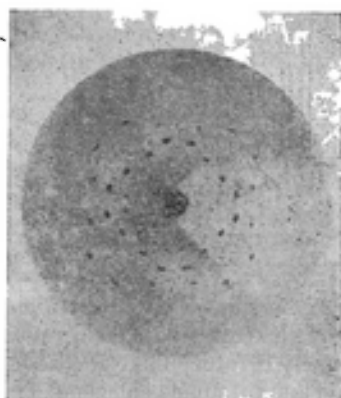
V rovině vlnoplochy A_1B (kolmé k svazku) jsou oba paprsky ve stejné fázi a po odrazu postupují s fázovým rozdílem, který mají v rovině A_1C . Druhý paprsek je v této rovině zpožděn o délku

$$BA_2 + A_2C = 2d \sin \vartheta,$$

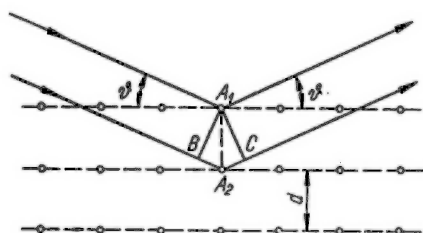
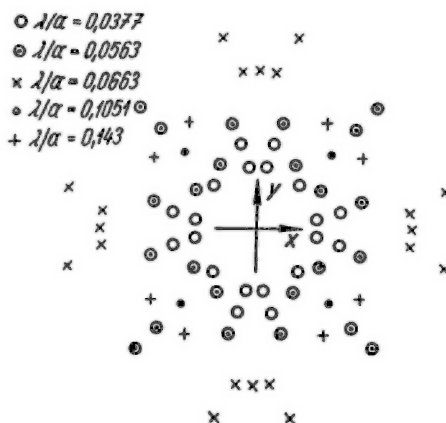
je-li d vzdálenost dvou sousedních vrstev iontů, rovnoběžných s povrchem krystalu. Oba odražené paprsky se zesilují, je-li jejich dráhový rozdíl celistvým násobkem vlnové délky, tj. je-li splněna tzv. *Braggova rovnice*

6.5 (28)

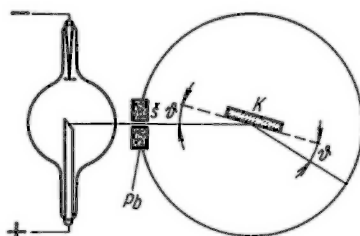
$$2d \sin \vartheta = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$



Obr. (6.5) 12. Laueův diagram krystalu ZnS



Obr. (6.5) 13. Odraz rovinné vlny záření X na přirozené ploše krystalu



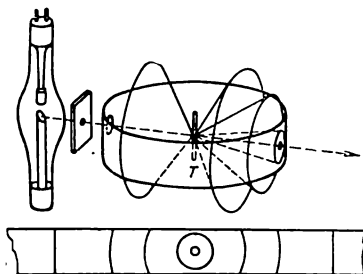
Obr. (6.5) 14. Rentgenový spektrograf na odraz

Na této rovnici je založena *metoda Braggova*: Svazek paprsků X, vymezený olověnou štěrbinou S , dopadá na otáčivou destičku krystalu K [obr. (6.5) 14]. Je-li záření monochromatické, odráží se od krystalu jen v těch polohách destičky, v nichž úhel ϑ vyhovuje Braggově rovnici. Jestliže na válcové ploše obklopující krystal umístíme pás fotografického filmu, dostaneme čáry, z jejichž polohy můžeme určit ϑ a pro krystal o známé konstantě d také λ . Je-li záření složeno z několika vln, dostaneme na filmu řadu čar — *spektrum paprsků X*.

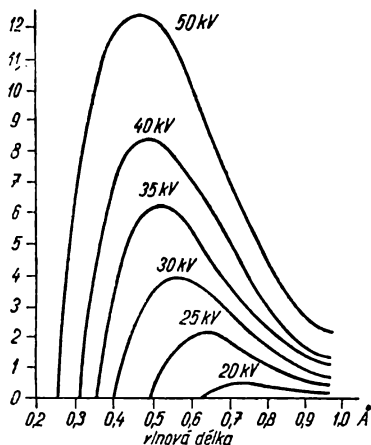
Metoda byla zdokonalena M. de Broglie a zvláště Siegbahnem, který sestavil na tomto principu vakuový spektrograf, výhodný ke studiu měkkého záření X, které se ve vzduchu rozptyluje a zeslabuje. Tento spektrograf je upraven tak, aby bylo možno užít divergentního

svazku paprsků. Dosáhne se toho tím, že se olověná štěrbinová S umístí na válcové ploše, na níž je připevněn citlivý film. Pak se divergentní paprsky vycházející ze štěrbinové sejdou po odrazu na krystalu v téměř téže místě filmu.

Metoda Debyeova—Scherrerova má proti Braggově metodě výhodu v tom, že u ní nevadí nepravidelnost krystalu. Každý přirozený krystal jeví totiž jisté chyby, které vzniknou tím, že krystal nenarůstá naprosto stejnoměrně v celém objemu. Chyby krystalu snižují přesnost měření, a proto Debye a Scherrer užili místo jednoho krystalu jemného krystalového prášku, který zkomprimovali do tvaru tenké tyčinky T [obr. (6.5) 15]. Drobné krystalky jsou v tyčince orientovány zcela nepravidelně a jejich stěny mají všechny možné směry.



Obr. (6.5) 15. Spektrograf Debyeův—Scherrerův



Obr. (6.5) 16. Rozložení energie ve spojitém spektru záření X, vycházejícího z wolframové antikathody

Paprsky X procházející práškem se ovšem podle Braggovy rovnice odrážejí jen na plochách, které mají ke směru paprsků sklony vyhovující Braggově rovnici 6.5 (28). Paprsky vystupující z tyčinky vytvoří tedy jisté kuželové plochy, souměrné kolem původního svazku paprsků. Ujijeme-li podobné úpravy jako pro otáčivý krystal na obr. (6.5) 14, dostaneme na filmovém pásu řadu zakřivených čar, z nichž lze vypočítat délku vlny ze známé mřížkové konstanty, nebo naopak ze známé délky vlny odvodit vlastnosti užitých krystalických látek.

Četná spektrografická měření ukázala, že rentgenové spektrum obsahuje dva druhy záření:

1. *Brzdné (impulsové, nárazové) záření*, které má spojitě spektrum, složené z velkého množství slabých čar všech frekvencí až do jisté nejvyšší frekvence. Zatímco na straně dlouhých vln (nízkých frekvencí) ubývá intenzity ve spektru pozvolna, roste intenzita směrem ke krátkým vlnám (vysokým frekvencím) do maxima a potom rychle klesá na nulu pro zcela určitou vlnovou délku $\lambda_{\min}$, pro kterou platí zákon *Duanův—Huntův*

6.5 (29)

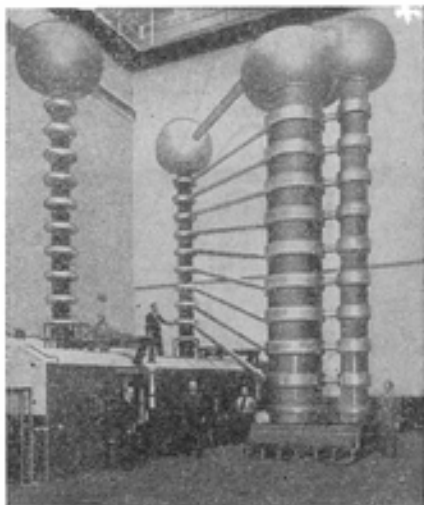
$$U\lambda_{\min} = \text{const} (= 12,34 \text{ kV}\text{\AA});$$

konstanta tu má uvedenou číselnou hodnotu, měříme-li $\lambda_{\min}$ v $\text{\AA}$ (angströmech) a napětí U na trubici v kV (kilovoltech). Tento experimentální zákon plyne též z kvantové teorie (viz čl. 6.6.3) a lze jej ověřit z grafického vyjádření intenzity ve spektru brzdného záření, měřeném pro různá napětí, na obr. (6.5) 16.

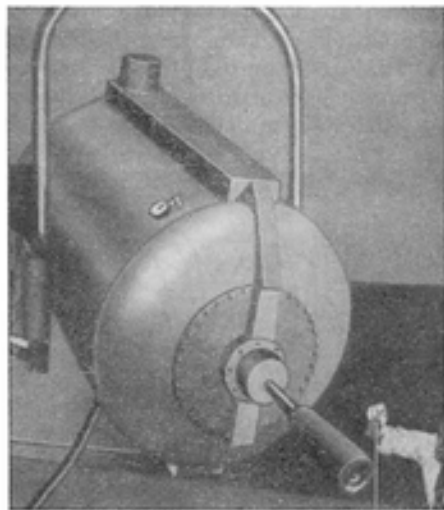
2. *Charakteristické záření* má nespojitě čárové spektrum, složené z jednotlivých čar podobně jako optická spektra vysílaná atomy plynu. Vlnové délky těchto čar závisí na jakosti antikathody, neboť toto záření vysílají atomy antikathody při přechodu elektronu obíhajícího v některé vnější dráze, vzdálené od jádra, do dráhy vnitřní, blízké jádru, jak

podrobněji vyložíme v čl. 7.2.6. Vlnové délky čar charakteristického záření nemohou být menší než vlnová délka $\lambda_{\min}$ určená vztahem 6.5 (29).

Ze zákona 6.5 (29) můžeme tedy snadno vypočítat nejkratší možnou vlnu záření X, které dostaneme při známém napětí mezi katodou a anodou. Přitom je zřejmé, že energie elektronů dopadajících na antikatodu, která má stejný potenciál jako anoda, je rovna tolika elektronvoltům, kolik voltů má napětí na trubici. Z rovnice 6.5 (29) je jasné, že např. při



Obr. (6.5) 17. Zařízení pro velmi pronikavé záření X, které vzniká dopadem elektronů zrychlených vysokým napětím 1,4 MV



Obr. (6.5) 18. Tlakový tankový generátor s vestavěnou trubicí pro rentgenové zkoušení odlitků tlustých až několik centimetrů

napětí $U = 12,34 \text{ kV}$ má nejkratší vlna délku $1 \text{ \AA}$, při napětí $U = 123,4 \text{ kV}$ je tato délka $0,1 \text{ \AA} = 10^{-11} \text{ m}$ a při napětí $U = 1\,234 \text{ kV}$, tedy asi $1 \frac{1}{4} \text{ MV}$, dosáhne se nejkratší vlnové délky $0,01 \text{ \AA} = 10^{-12} \text{ m}$. Mohutné zařízení pro vytvoření takového záření je na obr. (6.5) 17. Záření X této tvrdosti, která je vlastní tvrdým paprskům γ , užívá se k lékařským účelům a také v průmyslu. Na obr. (6.5) 18 je generátor paprsků X vlnové délky $6 \cdot 10^{-13} \text{ m}$, které vzniknou při napětí 2 milionů voltů.

Nejtvrdší rentgenové záření, vlnové délky až 10^{-15} m , poskytují betatrony a elektronové synchrotrony, které jsme podrobněji popsali v čl. 5.10.5.

6.6. Kvantová optika

6.6.1. Fotoelektrický jev

Fotoelektrický jev, o kterém jsme se zmínili již v článcích 5.10.2 a 5.10.4, byl objeven na základě zjištění, že se zinek při osvětlení ultrafialovým světlem nabíjí kladně. Časem se ukázalo, že se podobně chovají i jiné kovy a že lze tento jev vyložit jednoduchým předpokladem, že světlo dopadající na čistý povrch kovu (nebo polovodiče) může z něho za jistých podmínek uvolňovat elektrony (záporné, tj. negatrony). Experimentálně je možno fotoelektrický jev studovat tak, že se čistý povrch kovu ve vyčerpané baňce ozařuje

světlem a uvolněné elektrony se elektrostaticky přitahují drátěnou smyčkou, která má proti kovu kladný potenciál. Spojíme-li kov a smyčku vnějším vedením, můžeme změřit *fotoelektrický proud* přenášený vakuem *fotoelektrony* uvolněnými z osvětleného povrchu kovu (*fotokatody*) na kladnou smyčku — anodu. Při stálém napětí mezi anodou a fotokatodou je fotoelektrický proud úměrný počtu elektronů uvolněných za vteřinu z fotokatody. Dělením fotoelektrického proudu plochou povrchu katody dostaneme pak *hustotu fotoelektrického proudu*, která při stejnoměrném osvětlení již na velikosti povrchu nezávisí.

Má-li naopak smyčka záporný potenciál proti osvětlenému kovu, brzdí záporné elektrony vymršťované z jeho povrchu a při dostatečně vysokém záporném napětí na smyčce ustane fotoelektrický proud zcela. Tak lze určit kinetickou energii, se kterou jsou elektrony z kovu vymršťovány, jako součin elementárního náboje e a velikosti U záporného napětí, které právě stačí zastavit fotoelektrický proud.

Takovými pokusy byly zjištěny tyto zákonitosti:

1. *Hustota fotoelektrického proudu je úměrná osvětlení.*
2. *Energie elektronů uvolňovaných jednobarevným světlem roste lineárně s kmitočtem světla.* Velmi jednoduchý teoretický výklad těchto poznatků podal Einstein (r. 1905), vycházející z představy, že jde o přímé působení Planckových světelných kvant na elektrony. Předpokládal, že každý fotoelektron dostane celou energii jednoho kvanta $\varepsilon = h\nu$, avšak při opuštění kovu ztratí z této energie část rovnou výstupní práci w_0 potřebné k překonání potenciální hráze na povrchu kovu. Vystoupí tedy z kovu s pohybovou energií

$$6.6.(1) \quad W_k = h\nu - w_0,$$

která nemůže být záporná. Znamená to, že každému kovu přísluší jistý nejmenší kmitočet ν_0 , který musí světlo mít, aby mohlo z kovu vyloučit fotoelektrony. Tento kmitočet je určen rovnicí

$$6.5 (2) \quad h\nu_0 = w_0$$

a nazývá se *charakteristický kmitočet* kovu. Podle dřívějšího výkladu platí tedy *Einsteinova rovnice*

$$6.6 (3) \quad eU = h(\nu - \nu_0),$$

která byla mnohokrát experimentálně ověřována. Velmi přesná měření konal zvláště *Millikan* a určil jednak hodnotu konstanty h , jednak charakteristické kmitočty pro různé kovy. Svými přesnými pokusy na složitém experimentálním zařízení potvrdil, že konstanta h má skutečně v mezích pozorovacích chyb hodnotu 6.1 (7) Planckovy konstanty, plynoucí z jiných měření. Charakteristické kmitočty mají pro různé kovy různé hodnoty.

Pro sodík je $\nu_0 = 5,15 \cdot 10^{14}$ Hz, a fotoelektrický jev nastává tedy v tomto případě při dopadu světla kratší vlny než $\lambda_0 = 5825$ Å. To značí, že výstupní práce je pro sodík

$$6.6 (4) \quad w_0 = h\nu_0 = 3,4 \cdot 10^{-19} \text{ J} \approx 2,1 \text{ eV}.$$

Lze to vyjádřit představou, že na povrchu sodíku je tzv. *potenciální hráz* výšky 2,1 V.

6.6.2. Fotony

Skutečnosti zjištěné při studiu fotoelektrického jevu ukazují, že světelná energie vyzařovaná zdrojem není spojitě rozložena po vlnoploše, jak předpokládá klasická fyzika (teorie undulační i elektromagnetická). Kdyby tomu tak bylo, muselo by energie dopadající na jediný elektron ubývat s rostoucí vzdáleností zdroje od povrchu kovu a při dosti velké vzdálenosti by slabší zdroj mohl uvolnit elektrony teprve po době několika hodin. Tak např. při osvětlení sodíku zdrojem o svítivosti jedné svíčky (kandely) ze vzdálenosti 3 m dopadá na 1 m² kolmého povrchu za vteřinu přibližně energie 10⁻³ Js. Tedy na plochu oběžné

dráhy elektronu v atomu, tj. na plošku řádu 10^{-20} m^2 , dopadne za vteřinu jen energie 10^{-23} Js . Naproti tomu energie, kterou získá fotoelektron při dopadu žlutého světla o délce vlny $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, je zhruba $4 \cdot 10^{-19} \text{ Js}$, tj. asi 40 000krát více. Vzhledem k tomu, že ve spektru světelného etalonu připadá jen asi třetina energie na vlnové délky kratší než λ_0 která ještě může uvolňovat elektrony ze sodíku, trvalo by 120 000 vteřin, tj. asi 33 hodin než by se v jednom atomu nahromadila energie potřebná k uvolnění jediného elektronu. Ale skutečnost je jiná: fotoelektrony se uvolňují při dopadu světla okamžitě, a to i při velmi slabém osvětlení. Přitom je jejich počet sice malý, ale každý z nich má stejnou energii jako při osvětlení tímž zdrojem zblízka. Z toho lze soudit, že představa o spojitěm rozložení světelné energie po vlnoploše nevystihuje skutečnost. Jsme naopak vedeni k představě že světelná energie vychází ze zdroje po částech, které mají velikost $\varepsilon = h\nu$ a které Planck nazval světelná kvanta. Tato kvanta světelné energie jsou podle předešlého výkladu prostoro-ově velmi soustředěna a chovají se proto jako velmi malá tělíska — částčky energie — která Einstein nazval fotony.

K úplnějšímu výkladu o vlastnostech fotonů dojdeme na základě Einsteinova vztahu mezi hmotností a energií:

$$6.6 (5) \quad W = mc^2.$$

Má-li foton energii $\varepsilon = h\nu$, můžeme mu přisoudit také hmotnost (za pohybu)

$$6.6 (6) \quad m_\nu = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}, \quad \varepsilon = h\nu,$$

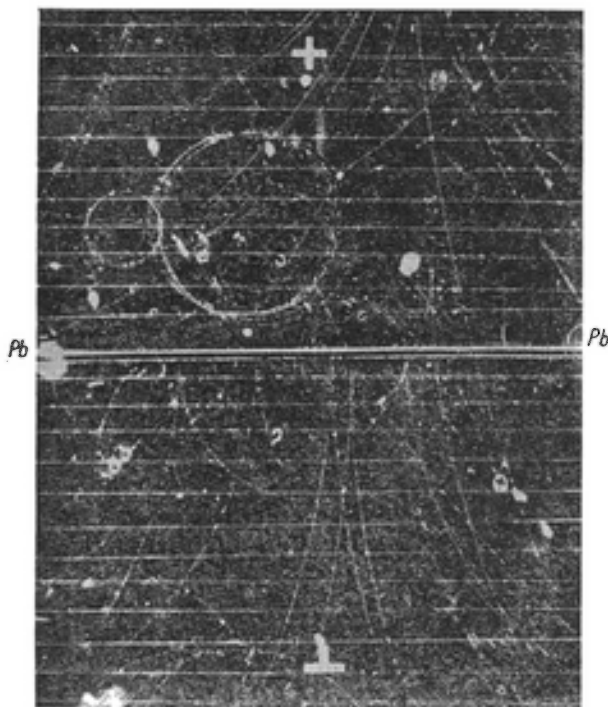
jejíž velikost je tedy úměrná frekvenci světla ν . Podobně můžeme fotonu letícímu rychlostí c (ve vakuu) přisoudit hybnost

$$6.6 (7) \quad p_\nu = m_\nu c = \frac{h\nu}{c},$$

kteřá určuje jeho setrvačnost. Tak máme fotony charakterizovány jako mechanické částice, jež mají také svou váhu jako všechny částice látkové. Tak si můžeme názorně vysvětlit zakřivení světelných paprsků v gravitačním poli, které však podle Newtonovy mechaniky vychází poloviční než zakřivení, předpověděné obecnou teorií relativnosti (srovn. čl. 2.9.7).

Fotony jsou ovšem částice polní a nepočítáme je k látkovým částicím, protože to nejsou částice permanentní. Přece však je možno přeměnit některé látkové částice na fotony a naopak fotony přeměnit na částice látkové.

V prvním případě jde o fotony tzv. *zářivého záření*, které lze pozorovat při setkání záporného elektronu s kladným elektronem (s pozitronem). Tu se jejich náboje navzájem zruší a obě částice se „vyzáří“, tj. promění se ve dva fotony velmi tvrdého záření, které proto nazýváme *zářivé*. Energie



Obr. (6.6) 1. Vznik elektronových dvojic při průchodu pronikavého záření X olovem Pb v mlžné komoře s magnetickým polem

klidové hmotnosti elektronu je podle 5.10 (5), 5.10 (15) a 2.9 (29)

$$m_e c^2 = 0,911 \cdot 10^{-30} \cdot 8,987 \cdot 10^{16} \text{ J} = 0,819 \cdot 10^{-13} \text{ Ws} = 0,511 \text{ MeV}.$$

Tuto energii má podle 6.1 (7) foton o frekvenci

$$\nu = \frac{\varepsilon}{h} = \frac{m_e c^2}{h} = \frac{0,819 \cdot 10^{-13} \text{ Ws}}{6,624 \cdot 10^{-34} \text{ Ws}} = 1,24 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}.$$

Vzniknou-li tedy dva fotony, má každý z nich energii asi 0,5 MeV, vznikne-li jeden foton, má energii zhruba 1 MeV. Zánikové záření má tedy frekvenci $1,24 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}$, která leží v oboru záření γ a kterou skutečně pozoroval Joliot.

K obrácenému ději, totiž přeměně fotonu na látkové částice, může dojít, pronikne-li foton do samé blízkosti atomového jádra, kterému odevzdá malou část své hybnosti. Je-li energie fotonu větší než energie příslušná hmotnosti dvou elektronů, může vzniknout dvojice elektronů („elektronová dvojčata“), tj. negatron a pozitron, jejichž celková pohybová energie je

$$W_k = h\nu - 2m_e c^2.$$

Vznik dvojic elektronů čili elektronových párů byl pozorován u kosmických paprsků α a u záření γ , vydávaného radioaktivními prvky ThC'' ($h\nu = 2,6 \text{ MeV}$) a Be ($h\nu = 5 \text{ MeV}$). V novější době byl pozorován i vznik elektronových dvojic z fotonů nesmírně pronikavého záření X , vytvořeného synchrotronem dopadem elektronů s energií 322 MeV, jak ukazuje obr. (6.6) 1.

Musíme si být vědomi, že se fotony při styku s prostředím již nechovají jako částice klasické mechaniky, ale jako vlnění, které má podle 6.6 (6) přesně definovaný kmitočet

$$6.6 (8) \quad \nu = \frac{m_e c^2}{h}$$

a vlnovou délku

$$6.6 (9) \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_e c} = \frac{h}{p_\nu}.$$

Hmotnost i hybnost fotonů jsou ovšem nesmírně malé, jak je zřejmé z tabulky (6.6) I.

Tabulka (6.6) I

Hmotnost a hybnost některých fotonů

	λ [m]	ν [Hz]	m_ν [kg]	p_ν [kgm s ⁻¹]
Rozhlasová vlna (stř.)	300	10^8	$7,35 \cdot 10^{-45}$	$2,206 \cdot 10^{-36}$
Žlutá barva	$0,5 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{14}$	$4,41 \cdot 10^{-36}$	$1,32 \cdot 10^{-27}$
Zánikové záření	$2,4 \cdot 10^{-12}$	$1,24 \cdot 10^{20}$	$9,20 \cdot 10^{-31}$	$2,76 \cdot 10^{-22}$
Kosmické záření	10^{-16}	$3 \cdot 10^{23}$	$2,206 \cdot 10^{-27}$	$6,62 \cdot 10^{-19}$

Hmotnost fotonu viditelného světla je rovna pouhým pěti milióntinám hmotnosti elektronu, teprve foton velmi tvrdého zánikového záření je stejně hmotný jako elektron, kdežto foton nejtvrdšího známého záření je již těžší než vodíkový atom. Je ovšem nutno mít na paměti, že jsou to hmotnosti fotonů pohybujících se rychlostí světla a že hmotnost klidová je pro všechny fotony rovna nule. Také *hybnost fotonů* se počítá pro jejich světelnou rychlost a uplatňuje se při pohybu světelného zdroje. (Dopplerův princip lze odvodit i na základě kvantové teorie.) Nejnázorněji však o existenci hybnosti fotonů svědčí jevy popsané v následujícím článku.

6.6.3. Fotonová teorie záření X

Fotonová teorie světla se velmi dobře osvědčuje i pro záření rentgenové. Ukážeme to na dvou příkladech: na obráceném fotoelektrickém jevu a na jevu Comptonově.

V článku 6.6.1 jsme poznali, že pro fotoelektrický jev, který záleží v uvolňování elektronů dopadajícími fotony, platí Einsteinova rovnice. Při vzniku paprsků X naopak dopadají na kov elektrony a kov vysílá fotony rentgenového záření. Proto se tento jev nazývá *obracený fotoelektrický jev* a je nasnadě domněnka, že se při něm promění pohybová energie jednoho dopadajícího elektronu v energii jednoho vyzařovaného fotonu, tedy

$$W_k = h\nu.$$

Tato rovnice se liší od 6.6 (1) jen v tom, že v ní chybí člen w_0 , že tedy nepřehlídíme k energii, kterou elektron získá průchodem potenciální hrází při vniknutí do kovu. Můžeme tak učinit proto, že příslušná práce má velikost několika elektronvoltů a není třeba k ní přihlížet při celkové energii elektronů eU , která bývá řádu 10^4 až 10^5 eV. Tak docházíme ke vztahu

$$h\nu_{\max} = eU,$$

kde $\nu_{\max}$ je největší možná frekvence záření X. Odtud plyne pro nejkratší vlnovou délku $\lambda_{\min}$:

$$\begin{aligned} U\lambda_{\min} &= \frac{hc}{e} = \frac{6,624 \cdot 10^{-34} \text{ Js}^2 \cdot 2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = \\ &= 12,4 \cdot 10^{-7} \text{ Vm} = 12,4 \text{ kVÅ} \end{aligned}$$

v dobrém souhlase s experimentální rovnicí 6.5 (29), vyjadřující zákon Duaneův—Huntův.

Nyní podáme stručnou kvantovou teorii Comptonova jevu.

Rentgenové záření se při průchodu látkami zeslabuje jednak absorpcí, jednak rozptylem. Absorpce je značnější jen u prvků s velkou atomovou hmotností (u kovů, kostí), u lehkých prvků je absorpce velmi malá, a proto můžeme v nich dobře pozorovat rozptyl záření X. Zjistilo se, že rozptýlené paprsky obsahují kromě původního záření také záření měkčí než původní.

A. H. Compton (r. 1923) studoval podrobně rozptyl paprsků X (z molybdenové antikatody) v tuhově desce a měřil rozptýlené záření Braggovým spektrometrem. V rozptýleném záření našel zdvojené spektrální čáry; z nich jedna odpovídala původní délce vlny λ , druhá však měla vlnu $\lambda' > \lambda$. Rozdíl obou vln $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ (*Comptonův posuv*) byl tím větší, čím větší byla úhlová odchylka ϑ rozptýleného záření od původního směru.

Comptonův jev je tím zřejmější, čím tvrdší jsou paprsky. Byl pozorován také při rozptýlu v jiných, zvl. v lehčích prvcích (Li, Be, Mg, Al, Cu, S, Ag). Teorii jevu podal sám Compton (současně s Debyem). Vyložil jej jednoduchým předpokladem, že *jde o srážku fotonu s elektronem, který je prakticky volný*, tj. je slabě poután k atomu. Compton předpokládal, že pro tento ráz platí zákon zachování energie a že se vektorový součet hybností obou částic při rázu nezmění. Zachování energie a hmotnosti vyžaduje, aby součet energií fotonu ε a elektronu mc^2 se při rázu nezměnil. Před rázem má elektron dosti malou „termickou“ rychlost, takže se jeho hmotnost málo liší od klidové hmotnosti m_e . Platí tedy přibližná rovnice

$$6.6 (10) \quad \varepsilon + m_e c^2 = \varepsilon' + mc^2,$$

kde $\varepsilon = h\nu$ je energie fotonu před rázem, $\varepsilon' = h\nu'$ jeho energie po rázu a m je hmotnost elektronu po rázu za rychlosti u . Podle obr. (6.6) 2a je zřejmé

$$(mu)^2 = p_\gamma^2 + p_e^2 - 2p_\gamma p_e \cos \vartheta$$

čili podle 6.6 (7)

$$6.6 (11) \quad h^2(\nu^2 - 2\nu\nu' \cos \vartheta + \nu'^2) = c^2 m^2 u^2.$$

Abychom vyloučili neznámou rychlost elektronu, pišme rovnici 6.6 (10) ve tvaru

$$h(\nu - \nu') + m_e c^2 = mc^2$$

a její čtverec

$$h^2(\nu^2 - 2\nu\nu' + \nu'^2) + 2hc^2 m_e(\nu - \nu') + m_e^2 c^4 = m^2 c^4$$

odečtíme od 6.6 (11):

$$2h^2\nu\nu'(1 - \cos \vartheta) - 2hc^2 m_e(\nu - \nu') = - \left[m^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) - m_e^2 \right] c^4.$$

Avšak pravá strana je podle 5.10 (6) rovna nule, takže dělením $2h\nu\nu'$ dostaneme

$$\left(\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} \right) m_e c = h(1 - \cos \vartheta).$$

Pro vlnové délky $\lambda = c/\nu$, $\lambda' = c/\nu'$, příslušné frekvencím ν a ν' , plyne tedy

$$6.6 (12) \quad \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \vartheta)$$

a Comptonův posuv

$$6.6 (13) \quad \Delta\lambda = A(1 - \cos \vartheta) = 2A \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Hodnota konstanty

$$6.6 (14) \quad A = \frac{h}{m_e c} = \frac{6,624 \cdot 10^{-34} \text{ m}}{9,108 \cdot 10^{-31} \cdot 2,998 \cdot 10^8} = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

se dobře shoduje s výsledkem přesných měření (Gingrich r. 1930), podle kterých $A = 0,024\,24 \text{ Å} \pm 0,000\,04 \text{ Å}$.

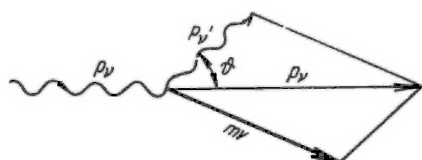
Geometricky lze rovnici 6.6 (13) znázornit v polárních souřadnicích kardioidou (srdcovkou) [obr. (6.6) 2b]. Zvolíme-li směr dopadajícího svazku za polární osu a sestrojíme-li kardioidu, která ji protíná v počátku a v bodu vzdáleném o $2A$ proti směru záření, je Comptonův posuv dán délkou průvodiče vedeného ke kardioidě ve směru rozptýleného paprsku. Paprsek rozptýlený *kolmo* k původnímu směru má posuv $\Delta\lambda = A$. Jak roste Comptonův posuv s úhlem rozptylu, ukazují snímky 1, 2, 3 na obr. (6.6) 2c.

Teoreticky dochází ke Comptonovu jevu při každé srážce fotonu s elektronem; je-li však hmotnost fotonu velmi malá proti hmotnosti elektronu, neplatí 6.6 (10) ani 6.6 (12) dosti přesně, neboť $\varepsilon \ll m_e c^2$. Pak je Comptonův posuv neměřitelně malý, ježto ztráta hybnosti fotonu je nepatrná (lehký foton odskočí od mnohem těžší částice podobně jako míč od stěny). Proto je Comptonův jev pozorovatelný jen při rozptylu záření složeného z fotonů s velkou hmotností jako záření X nebo γ a nelze jej pozorovat v oboru viditelného světla. Comptonův posuv je rovněž neměřitelně malý při srážce fotonu s elektronem pevně vázaným k jádru, neboť pro takovou srážku je třeba v 6.6 (12) nahradit m_e hmotností jádra $m_j \gg m_e$. Proto je posunutá čára tím intenzivnější, čím více volných nebo slabě poutaných elektronů obsahuje rozptylující látka.

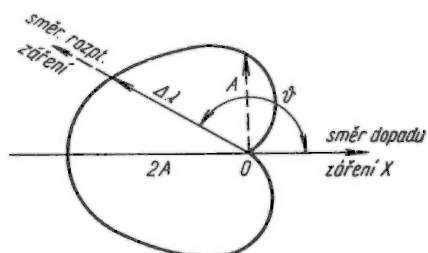
Avšak i atomy látek s velkým počtem slabě poutaných obvodových elektronů (jako je např. tuha) obsahují také vnitřní elektrony pevně vázané k jádru, a proto pozorujeme v rozptýleném záření zároveň s posunutou čarou vždycky též čaru původní. Tato původní čára je zvláště intenzivní při rozptýlu v těžkých prvcích (s velkým počtem vnitřních elektronů).

Správnosti podaného výkladu Comptonova jevu nasvědčuje též skutečnost, že v novější době byla potvrzena současnost emise odraženého elektronu s emisí rozptýleného fotonu v časovém rozmezí $1,5 \cdot 10^{-11}$ s.

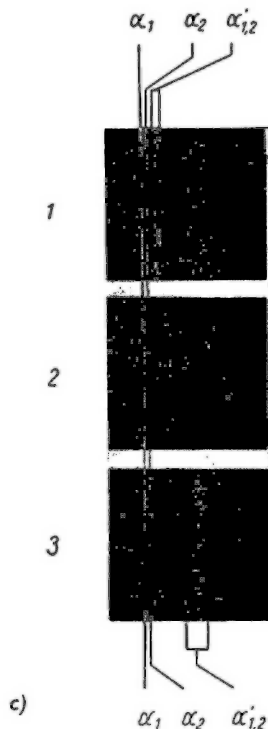
K tomu je nutno dodat, že přes veškerou názornost, s níž tato „klasická“ kvantová teorie vykládá fotoelektrický a obrácený jev, jakož i efekt Comptonův, nedovede uspokojivě vyložit vlnové vlastnosti světla. Úplné vysvětlení korpuskulárních i vlnových vlastností



a)



b)



c)

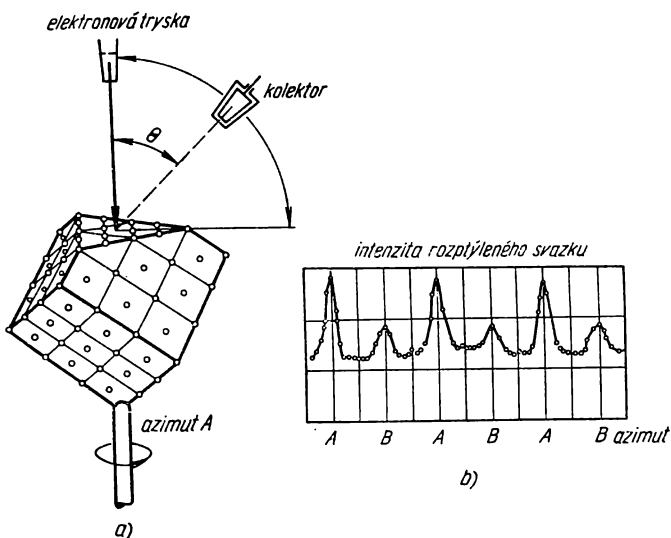
Obr. (6.6) 2a — Ráz fotonu s elektronem, b — geometrické znázornění závislosti Comptonova posuvu na úhlu rozptýlu, c — vzrůst Comptonova posuvu s úhlem rozptýlu: 1. $\theta = 63,6^\circ$, 2. $\theta = 90^\circ$, 3. $\theta = 135^\circ$, α_1, α_2 jsou spektrální čáry vstupujícího záření, $\alpha'_{1,2}$ posunuté čáry záření rozptýleného v úhlu θ

elektromagnetického záření podává teprve novější kvantová teorie záření, založená na kvantování elektromagnetického pole, jejíž zevrubný výklad by však přesahoval rámec této knihy.

6.6.4. De Broglieovy vlny

Fotonová teorie světla nepopírá vlnovou povahu světla, avšak přisuzuje mu zároveň charakter částicový. Světlo se chová jako vlnění i jako proud fotonů. Bylo by možno usuzovat, že tato dvojakost je příznačná pro polní částice, jakými jsou právě fotony. Ukázalo se však, že i látkové částice (s nenulovou klidovou hmotností) projevují jisté vlnové vlastnosti, jak bylo poprvé experimentálně prokázáno u elektronů Davissonem a Kunsmanem v r. 1923.

Dalšími pokusy, které provedli zejména Davisson a Germer (1927), se potvrdilo, že elektronový svazek se při dopadu na monokrystal krystalu niklu chová podobně jako rentgenové záření. Byl zjištěn *selektivní odraz* svazku, který se projevuje tím, že se elektrony neodrážejí pod různými úhly stejně intenzívně. Platí pro ně rovnice obdobná Braggově rovnici, známá pro záření X. Také elektrony dopadající kolmo na některou krystalografickou rovinu krystalu se rozptylují nejsilněji do jistých význačných směrů. Na obr. (6.6) 3a je schematicky znázorněna úprava takového pokusu s kolmým dopadem elektronového svazku na osmisténovou plochu monokrystalu niklu (s plošně centrovanou kubickou mřížkou). Elektrony s energií 54 eV se rozptylují přednostně v úhlu $\Theta = 50^\circ$ od kolmice, kde jsou sbírány kolektorem (ionizační komůrkou). Jejich množství závisí periodicky také na azimutu (tj. na úhlu roviny rozptylu, který svírá s krystalografickými směry), jak vidíme z grafického průběhu ionizačního proudu v závislosti na azimutu na obr. (6.6) 3b.



Obr. (6.6) 3. Rozptyl elektronů na monokrystalu niklu: *a* – uspořádání pokusu, *b* – periodická závislost intenzity rozptýleného svazku na azimutu

Uvidíme, že vlnové vlastnosti mají všechny mikročástice v soulase se smělou myšlenkou, kterou vyslovil již v r. 1924 Louis de Broglie, a tak se stal zakladatelem tzv. **vlnové mechaniky**.

O dalším vývoji a úspěších kvantové teorie, která z de Broglieovy hypotézy vyplynula, pojednáme podrobněji v kapitole 7.1. Zde se omezíme na stručný výklad o tzv. *de Broglieových* (doprovodných čili „materiálních“) vlnách.

Přitom nebudeme sledovat myšlenkový postup de Broglieův, ale vyjdeme ze vztahů 6.6 (6, 7)

$$m_\nu c^2 = \varepsilon = h\nu, \quad p_\nu = m_\nu c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

které definují hmotnost a hybnost fotonu. Známe-li veličiny m_ν a p_ν , můžeme z nich se zřetelem k Einsteinově vztahu 6.6 (5) vypočítat frekvenci ν a vlnovou délku světelných vln

$$\nu = \frac{m_\nu c^2}{h} = \frac{W_\nu}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{p_\nu},$$

kde jsme označili $W_\nu (= \varepsilon)$ energii fotonu. Tyto rovnice snadno zobecníme pro libovolnou částici s energií W a hybností p , přisoudíme-li jí frekvenci

$$6.6 (15) \quad \nu = \frac{W}{h} = \frac{mc^2}{h}$$

a vlnovou délku

$$6.6 (16) \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv},$$

kde m je hmotnost částice s rychlostí v . Odtud plyne pro rychlost šíření těchto vln, která je určena rovnicí obdobnou rovnici 6.1 (1)

$$6.6 \quad (17) \quad V = \lambda \nu = \frac{mc^2}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v},$$

takže mezi rychlostí částice a rychlostí de Broglievých vln platí vztah

$$Vv = c^2.$$

Vzhledem k tomu, že rychlost částice je vždy menší než rychlost světla, vychází pro de Broglieovy vlny rychlost *větší než rychlost světla ve vakuu*. To ovšem neodporuje teorii relativnosti, neboť zde nejde o rychlost pohybu látkové částice nebo energie, nýbrž o rychlost šíření vln, jejichž povahu není snadno vystihnout. Ačkoliv vlnová mechanika vyřešila již mnoho velmi obtížných problémů v dobrém souhlase se skutečností, není otázka interpretace de Broglievých vln ještě úplně objasněna. De Broglie sám si je představoval jako *doprovodné vlny*, které řídí pohyb částic, jež provázejí. Zdá se však, že nejlépe vyhovuje představa tzv. *pravděpodobnostních vln*, které svou amplitudou v každém místě prostoru určují pravděpodobnost výskytu částic, jak ukážeme v čl. 7.1. Rychlost V je *fázová rychlost* těchto vln, kterou postupuje místo stejné fáze a kterou se šíří vlnoplocha.

Také rychlost částice v , kterou vlny doprovázejí, má z hlediska vlnové mechaniky zcela určitý fyzikální význam. V čl. 3.2.5 jsme ukázali, že při šíření vln v prostředí, v němž rychlost vln závisí na vlnové délce (tedy v disperzním prostředí), postupuje energie nikoli fázovou rychlostí V , nýbrž rychlostí c_{gr} , kterou nazýváme *grupovou* (skupinovou) rychlostí. Je určena vzorcem 3.2 (10)

$$c_{gr} = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda},$$

který platí pro každé vlnění, jehož fázová rychlost závisí na vlnové délce. Tak je tomu i u vln de Broglievých, jejichž délka 6.6 (16) závisí podle 5.10 (6) na rychlosti v vztahem:

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{h}{m_0} \sqrt{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

Vzhledem k 6.6 (17) je však V funkcí v , a závisí tedy na λ , takže grupová rychlost vln

$$c_{gr} = V - \lambda \frac{dV}{dv} \cdot \frac{dv}{d\lambda} = \frac{c^2}{v} - \lambda \frac{dV}{dv} : \frac{d\lambda}{dv}.$$

Dosadíme-li z předposlední rovnice

$$\frac{d\lambda}{dv} = - \frac{h}{m_0 v^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

dostaneme vzhledem k 6.6 (16)

$$6.6 \quad (17') \quad c_{gr} = \frac{c^2}{v} - \lambda \left(- \frac{c^2}{v^2} \right) \cdot \left(\frac{-m_0 v^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{h} \right) = \frac{c^2}{v} - \frac{c^2}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = v.$$

Ačkoli je tedy fázová rychlost vln de Broglievých větší než rychlost světla, je jejich grupová rychlost právě rovna rychlosti částice, která nemůže překročit rychlost světla ve vakuu. Na této jednoduché souvislosti pohybu částice a jejich doprovodných vln založil Schrödinger představu, že částice je vlastně jakýmsi shlukem (svazkem, klubkem) vln, který přenáší energii rychlostí shodnou s rychlostí částice. Tato názorná představa má však některé zásadní nedostatky a nelze na ní vybudovat exaktní teorii.

Význam vlnové mechaniky pochopíme nejlépe srovnáním s optikou geometrickou a fyzikální, které vlastně de Brogliovi dalo podnět k vytvoření vlnové mechaniky. Zákony geometrické optiky (zejména o přímočarém šíření světla) platí jen v rozměrech velkých proti délce světelné vlny. Jakmile chceme správně popsat děje, které probíhají v rozměrech srovnatelných s vlnovou délkou světla — např. průchod světla velmi úzkou štěrbínou nebo těsně kolem ostré hrany —, nevystačíme s geometrickou optikou (*makrooptikou*) a musíme přihlížet k vlnové podstatě světla, kterou vykládá fyzikální optika (*mikrooptika*). V makrooptice můžeme tedy pokládat světlo za výron částic (podle Newtonovy emanační teorie), naproti tomu v mikrooptice se neobejdeme bez vlnové teorie.

Podobně je tomu v mechanice: pokud se omezíme na *makromechaniku*, která pojednává o dějích probíhajících ve větším měřítku, vystačíme s představou, že látky jsou složeny z částic, které se řídí zákony klasické mechaniky. Teprve když chceme studovat průběh dějů v malých rozměrech atomových, průchod částic krystalovou mřížkou, pohyby elektronů v atomech atd., poznáváme, že makromechanika neplatí, že je nutno přihlídnout k vlnové povaze částic. Tak docházíme k vlnové mechanice (*mikromechanice*), která je zcela obdobná vlnové optice.

A tu nás nepřekvapí, že nejprve byly objeveny zákony platné ve větším měřítku, které jsou přístupnější pozorování. Zákony geometrické optiky byly známy mnohem dříve, než se vůbec přišlo na vlnovou povahu světla. Stejně tomu bylo i v mechanice. Klasická mechanika platí beze sporu v rozměrech přístupných přímému pozorování. Zde bylo ovšem ještě obtížnější objevit vlnovou povahu částic, neboť *de Broglieova vlna*

$$6.6 \quad (18) \quad \lambda = \frac{h}{mv}$$

je i pro nejmenší částice nesmírně nepatrná. Pro molekulu nejjednoduššího prvku — vodíku — má délku asi 1 Å. Dosadíme-li totiž do hořejší rovnice přibližné hodnoty

$$m = 3,3 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad v = 2\,000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

vyjde

$$\lambda_{\text{H}} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{3,3 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 10^3} \text{ m} \approx 10^{-10} \text{ m}.$$

Tedy vlnová délka, příslušná molekule vodíku při teplotě asi 0 °C, má velikost atomu vodíku. Tato vlna je stejného řádu jako vlna záření X, u něhož byla vlnová podstata objevena mnohem později než u světla. Chápeme tedy, že vlnové vlastnosti látkových částic zůstaly dlouho utajeny a že zákony klasické mechaniky byly pokládány za exaktní, dokud fyzika nepokročila až ke studiu dějů v atomech samých.

Je pozoruhodné, že de Broglieova hypotéza se plně osvědčila a exaktní platnost jeho vzorce 6.6 (18) pro vlnovou délku částice se bez výjimky potvrzuje. Ukazují to přesná měření difrakce korpuskulárního záření, zvláště elektronových svazků. Elektrony nevnikají ovšem do krystalu s nezměněnou rychlostí, a proto se elektronový svazek při vstupu do krystalu láme podobně jako světlo interferující na planoparalelní desce. Proto pro elektrony neplatí Braggova rovnice 6.5 (28), kterou jsme podle obr. (6.5) 13 odvodili pro rentgenové záření, které se na povrchu krystalu neláme. Místo ní platí rovnice

$$6.6 \quad (19) \quad 2d \sqrt{n^2 - \cos^2 \vartheta} = k\lambda,$$

kterou dostaneme z rovnice 6.4 (3) pro interferenci v tenké vrstvě. položíme-li $\alpha = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ a vynecháme-li vlevo fázový posuv $\lambda/2$ vzniklý odrazem na zadní stěně vrstvy.

Pro index lomu n elektronového svazku dává de Broglieova teorie přibližnou hodnotu

$$n = \sqrt{1 - \frac{W_p}{W_k}},$$

kde W_k je kinetická energie elektronu a W_p jeho potenciální energie, kterou má uvnitř krystalu.

Pro nevodivé krystaly je $W_p > 0$ a $n < 1$, pro kovy však $W_p < 0$ a $n > 1$. Pro kovy $W_p \approx -10$ eV až -20 eV a je pro všechny rychlosti stejná, naproti tomu W_k roste s urychlujícím napětím, a proto s rostoucím napětím se index blíží 1. Je to patrné z tab. (6.6) II pro odraz elektronů na krystalu niklu ($d = 2,15 \cdot 10^{-10}$ m).

Tabulka (6.6) II

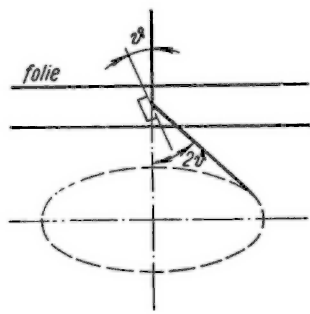
Index lomu krystalu niklu pro katodové záření

W_k	λ	n	W_p
54 eV	1,67 Å	1,12	—13 eV
106	1,19	1,06	—11,5
160	0,97	1,05	—14
189	0,89	1,04	—15
310	0,70	1,03	—16

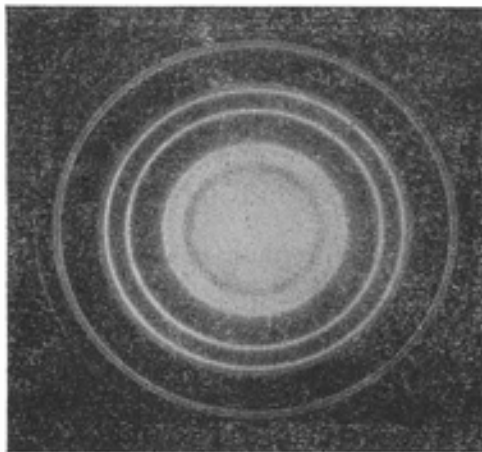
Ohyb elektronů je možno pozorovat na velmi tenkých lístcích (fóliích) různých kovů (Au, Ag, Al), tloušťky 10^{-8} až 10^{-9} m, jak ukázal G. P. Thompson (r. 1927). Na desce postavené kolmo ke směru katodových paprsků vzniknou koncentrické kruhy, odpovídající ohybu elektronů na mikroskopických krystalcích fólie, které mají všechny polohy a sklony.

Ohyb elektronů je možno pozorovat na velmi tenkých lístcích (fóliích) různých kovů (Au, Ag, Al), tloušťky 10^{-8} až 10^{-9} m, jak ukázal G. P. Thompson (r. 1927). Na desce postavené kolmo ke směru katodových paprsků vzniknou koncentrické kruhy, odpovídající ohybu elektronů na mikroskopických krystalcích fólie, které mají všechny polohy a sklony.

Zesílení nastává podle obr. (6.6) 4a ve směrech odchýlených o úhly rovné dvojnásobkům úhlů ϑ , určených rovnicí 6.6 (19). Tak bylo prokázáno, že elektrony se skutečně chovají jako částice i jako vlnění, jehož vlnová délka souhlasí právě s teoretickou délkou de Broglieovy vlny. Tento vlnový charakter není ovšem, jak to odpovídá představám vlnové mechaniky, nijakou zvláštností elektronů. Byl zjištěn také ohyb jiných látkových částic, např.



a)



b)

Obr. (6.6) 4a — Schéma ohybu elektronů fólií, b — ohyb elektronů při průchodu zlatou fólií

částic α (jader héliových), protonů (Dempster r. 1930) i celých dvouatomových molekul vodíku. Ohyb těchto molekulárních paprsků studovali Esterman a Stern (r. 1930) a dostali ze směru nejintenzivnějšího odrazu pro délky vln hodnoty, které souhlasí s de Broglieovými délkami vln, vypočtenými pro nejpravděpodobnější rychlost molekul za příslušné teploty.

V tab. (6.6) III jsou uvedeny délky de Broglieových vln pro molekuly hélia a vodíku pro tři absolutní teploty.

Experimenty souhlasí s teorií s přesností 0,3 až 1 %, což je vzhledem k obtížnosti měření shoda velmi dobrá. Z tab. (6.6) III je zřejmé, že poměr vlnových délek pro oba plyny je stálý. Při stejné teplotě mají molekuly obou plynů stejnou energii

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2,$$

a tedy poměr vlnových délek podle 6.5 (18)

$$6.6 \quad (20) \quad \lambda_1 : \lambda_2 = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} = \frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Molekuly hélia jsou jednoatomové a mají relativní atomovou hmotnost ≈ 4 , kdežto molekuly vodíku jsou dvouatomové s relativní hmotností ≈ 2 ; skutečně je v tabulce (6.6) III poměr obou vlnových délek $\sqrt{2}$.

Tabulka (6.6) III

De Broglieovy vlny pro molekuly hélia a vodíku

	100 °K	295 °K	590 °K
He	0,97 Å	0,57 Å	0,41 Å
H ₂	1,37	0,81	0,57

6.7. Elektronová a iontová optika

6.7.1. Základy elektronové optiky

K pozorování okolního světa můžeme v zásadě použít každého záření, které dovedeme nějakým způsobem zjišťovat čili *detegovat*. Pak můžeme pozorovat předměty, které ono záření vydávají, nebo předměty, které záření modifikují, tj. mění jeho intenzitu, směr šíření nebo jeho složení.

Vyšším požadavkem je ovšem zvyšovat množství a přesnost informací, které pozorováním získáváme, užitím *optických přístrojů*. Jedním z hlavních úkolů optických přístrojů je zvětšování rozlišovací schopnosti ve srovnání s přímým pozorováním očima ve viditelném světle.

V předešlé kapitole jsme poznali, že všechny druhy záření mají vlastně vlnovou povahu, a proto je možno očekávat, že o rozlišovací schopnosti bude při použití kteréhokoli záření rozhodovat délka příslušné de Broglieovy vlny. Zákony, podle kterých se šíří různé druhy záření, vlnového i korpuskulárního, jsou velmi obdobné zákonům šíření optického záření. Platí to zejména o elektronových a iontových svazcích, které je možno ovládat přístroji založenými na stejných principech jako známé optické přístroje pro viditelné světlo. Proto mluvíme o *elektronové a iontové optice*, jejíž základní zákony vyložíme v tomto článku. Přitom budeme uvažovat jen o svazcích dosti „pomalých“ částic, jejichž rychlost je malá proti rychlosti světla. Budeme tedy mít na mysli částice klasické, jejichž hmotnost můžeme pokládat za stále rovnou hmotnosti klidové. Je-li např. m_0 klidová hmotnost iontu, který má Z elementárních nábojů e , udělí mu podle 5.10 (16) napětí U rychlost

$$6.7 \quad (1) \quad u = \sqrt{\frac{2ZeU}{m_0}}$$

a podle 6.6 (18) je de Broglieova vlnová délka iontu

$$6.7 \quad (2) \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0ZeU}}.$$

Tento vztah (platný jen pro pomalé částice) dává pro elektrony ($Z = 1$, $m_0 = m_e$) v jednotkách SI hodnotu

$$6.7 (3) \quad \lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2em_e}} \frac{1}{\sqrt{U}} \approx 1,23 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\{\sqrt{U}\}} \text{ m.}$$

Tedy již při napětí 151 V je $\lambda_e \approx 1 \text{ Å}$ a při 15 100 V dokonce jen 0,1 Å, tedy více než 10 000krát kratší než vlna ultrafialového světla. Ještě kratší je při stejném napětí doprovozná vlna iontů, a proto elektronové (i iontové) svazky dovolují konstruovat „optické“

přístroje, při jejichž konstrukci nemusíme ani přihlížet k vlnové povaze elektronů, neboť vzhledem k nesmírně malé vlnové délce se elektronové paprsky šíří prakticky přímočaře, a platí pro ně tedy velmi přesně zákony geometrické optiky. Přitom lze přirovnat tuto elektronovou optiku k optice světelné na základě tohoto pokusu [obr. (6.7) 1]:

Nechť se elektrony svazku vycházejícího z elektronové trysky T' [srovn. obr. (6.7) 4] pohybují v prostoru P konstantního potenciálu φ stálou rychlostí u , na kterou byly urychleny z klidu napětím U rovným potenciálu φ . Prostor P je zdola uzavřen vodivou stěnou S' opatřenou tenounkým hliníkovým okénkem. Průchodem svazku takovým *Lenardovým*

okénkem se znatelně nezmění ani jeho intenzita, ani rychlost elektronů. Vstoupí-li však elektrony dalším Lenardovým okénkem ve stěně S' do druhého prostoru P' s konstantním potenciálem $\varphi' > \varphi$, zapůsobí na ně v mezeře mezi stěnami S a S' elektrostatické pole kolmé k těmto stěnám. Toto kolmé pole nezmění složku u_t rychlosti elektronů rovnoběžnou s rozhraním obou prostorů, takže

$$u'_t = u_t.$$

Podle vztahu 6.7 (1) je však rychlost elektronu v místě s potenciálem φ úměrná odmocnině z potenciálu, tedy

$$u' : u = \sqrt{\varphi' : \varphi}.$$

Z obrázku pak vidíme, že

$$\sin \alpha = \frac{u_t}{u}, \quad \sin \alpha' = \frac{u'_t}{u'},$$

odkud plyne *zákon lomu elektronového svazku*

$$6.7 (4) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \sqrt{\frac{\varphi'}{\varphi}} = n$$

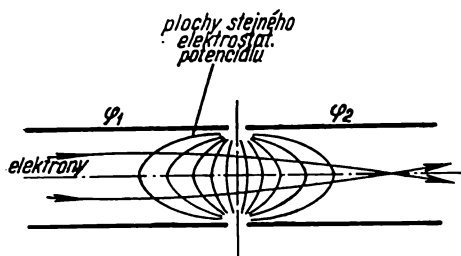
na rovinném rozhraní dvou různých potenciálů. Je zřejmá obdoba tohoto zákona se známým Snellovým zákonem lomu světla, z níž plyne také obdobnost celé elektronové optiky s optikou světelnou, užijeme-li ovšem obdobných optických zařízení. Analogie není však úplná, protože se na rozhraní různých optických prostředí mění index lomu nespojitě, kdežto v elektronové optice jde vždy o spojitou změnu potenciálu elektrického (nebo magnetického) pole. Proto se elektronový paprsek láme při šikmém průchodu ekvipoten-

ciálními vrstvami, jež jsou nekonečně tenké, podobně jako paprsek světelný při průchodu nehomogenním prostředím. Tak např. při průchodu nabitým deskovým kondenzátorem opisují elektrony parabolu (jako těleso při vodorovném vrhu), tedy spojitou křivku, podobně jako světelné paprsky procházející nehomogenní atmosférou při atmosférické refrakci.

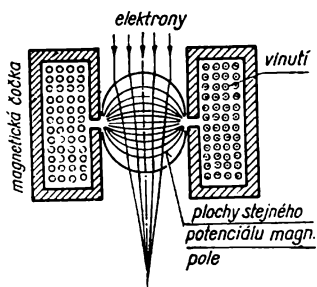
Jako čoček se v elektronové optice užívá elektrostatických nebo magnetických soustav se značně zakřivenými plochami stejného potenciálu.

Elektrostatická (elektrická) čočka neobvyklejšího typu se vytvoří dvěma souosými kovovými válci s různými potenciály. Je znázorněna na obr. (6.7) 2, v němž jsou zakresleny ekvipotenciální plochy a dráhy elektronových paprsků osového svazku. Na obr. (6.7) 3 je schéma *magnetické čočky*, tvořené vhodně pancéřovanou (armovanou) cívkou, takže plochy stejného magnetického potenciálu mají zhruba tvar rotačních elipsoidů. Působením jejího pole se rovnoběžný osový svazek elektronů soustředí v jediném bodě (ohnisku čočky).

Tak se podařilo napodobit optické soustavy užívané pro světlo, a to tak důsledně, že u elektronických čoček se objevily obdobné vady jako u čoček optických. Je totiž zřejmé,



Obr. (6.7) 2. Elektrostatická čočka tvořená dvěma válci různého potenciálu



Obr. (6.7) 3. Magnetická čočka tvořená pancéřovou cívkou

že i v elektronové optice, kde vliv ohybu je pro nepatrnou vlnovou délku malý, dostaneme dokonalý obraz jen za těchto podmínek:

1. velmi malé rozměry předmětu i obrazu,
2. velmi malý odklon paprsků od osy,
3. velmi malá hustota elektronového záření,
4. mechanicky dokonalá konstrukce čoček.

Nejsou-li splněny podmínky 1 a 2, vzniknou podobně jako u skleněných čoček jednak *geometrické vady* (sférická vada, koma, zklenutí pole, astigmatismus a zkreslení), jednak vada *chromatická* (barevná). Chromatická vada vzniká tím, že se pomalejší elektrony stejným polem odchylují více než rychlejší, což podle 6.6 (18) znamená, že index lomu roste s délkou vlny. Ježto pak elektronové záření vysílané žhavou katodou není monochromatické a obsahuje elektrony různé (spojitě proměnné) rychlosti, vzniká chromatická vada, kterou lze korigovat elektronickým „zrcadlem“, jehož chromatická aberace má opačné znaménko než u čočky.

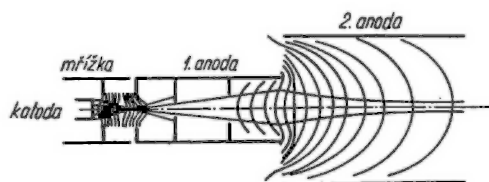
Podmínka 3 je dána skutečností, že se záporné elektrony navzájem odpuzují, takže elektronový svazek se poněkud rozptyluje, a to tím více, čím menší jsou vzájemné vzdálenosti elektronů, tedy čím větší je jejich hustota. Elektrodynamické přitahování souběžně se pohybujících elektronů je totiž podle čl. 5.5.3 vždycky slabší než elektrostatické odpuzování.

Paprsky by se mohly také rozptylovat, kdyby se nešířily v dosti vysokém vakuu. Střední volná dráha elektronů roste s klesajícím tlakem. Tak např. při normálním tlaku

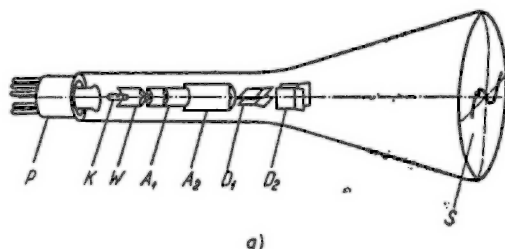
vzduchu má velikost jen několika desetin milimetru, při tlaku obvyklém ve výbojové trubici kolem 0,2 torru velikost několika centimetrů, kdežto ve vysokém vakuu řádu 10^{-6} torrů mohou již elektrony proletět dráhu několika desítek i set metrů beze srážky.

Zcela obdobně lze uvažovat i o svazcích iontových, které však mají vzhledem k mnohem větším rozměrům iontů ještě menší volné dráhy, a potřebují proto ještě dokonalejší vakuum než elektrony. Kromě toho pronikají jen nesnadno pevnými látkami.

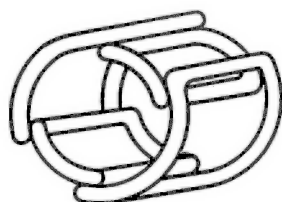
Souhrnem lze říci, že elektronová a iontová optika má proti světelné optice ještě některé zdroje vad, ale naproti tomu umožňuje nepoměrně větší rozlišovací mohutnost, které nelze dosáhnout jinými prostředky.



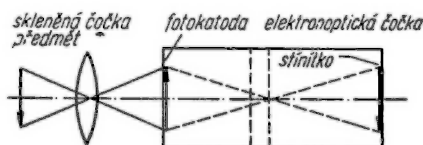
Obr. (6.7) 4. Schéma dvoučočkové elektrostatické elektronové trysky



Obr. (6.7) 5. Elektrostatická obrazovka (a) pro katodový osciloskop (b)



Obr. (6.7) 6. Jednoduché uspořádání vychylovacích cívek elektromagnetické obrazovky



Obr. (6.7) 7. Schéma fotoelektrické obrazovky

Nejobvyklejším zdrojem elektronového svazku je *elektronová tryska* (čili elektronové dělo), jehož schéma podává obrázek (6.7) 4. Elektrony vystupující kolmo ze žhavené katody jsou soustředěny v ohnisku první čočky (zvané mřížka) a vcházejí do druhé čočky vytvořené polem první a druhé anody, z níž vystupuje osový svazek elektronů.

Obrazovky (obrazové elektronky) jsou v podstatě katodové trubice s elektronovou tryskou a fluorescenčním stínítkem. Jejich nejjednodušším typem je obrazovka *elektrostatická* pro *katodové osciloscropy* (oscilografy) [obr. (6.7) 5]. Elektrony emitované žhavou katodou *K* jsou odpuzovány Wehneltovým válcem (mřížkou) *W*, který má proti *K* záporný potenciál. Tak se elektrony soustředí do úzkého osového svazku, jenž prochází dalšími válci s kladným potenciálem (1. anoda *A*₁, 2. anoda *A*₂), které zrychlují elektrony a mimo

to zdokonalují fokusaci způsobenou mřížkou. Svazek elektronů prochází dvěma páry destiček a zanechává viditelnou stopu na fluorescenčním stínítku S . Vložíme-li napětí na první dvojici destiček D_1 , vychýlí se stopa ve směru svislém, nabitím dvojice D_2 vychýlí se ve směru vodorovném. Vývody od všech elektrod jsou seskupeny v patici P .

Mřížka W se nazývá nověji *řídící elektroda*, protože změnou napětí na této elektrodě, které bývá mezi -10 až $+10$ V (proti žhavé katodě), lze měnit množství elektronů ve svazku dopadajícím na stínítko a tím i jas fluorescence.

Pro televizní přijímače, v nichž se této možnosti využívá (čl. 5.12.5), jsou vhodnější *obrazovky elektromagnetické*, u nichž je elektrostatické vychylování elektronového svazku nahrazeno vychylováním magnetickým. Dosáhne se toho dvěma vychylovacími cívkami [obr. (6.7) 6] nasazenými na hrdlo obrazovky, jejichž magnetická pole jsou kolmá k sobě i k ose trubice. Hlavní výhodou těchto obrazovek je jejich malá délka (jsou o třetinu kratší než elektrostatické), a proto se jich v televizi užívá téměř bez výjimky. Nevýhodou je jejich větší váha a nepříznivý vliv iontů, které při elektrostatickém vychylování nevadí a které je třeba někdy odstranit zvláštním opatřením („iontová past“).

Vnitřní stěna obrazovky se pokrývá vodivým povlakem koloidního grafitu, který je uzemněn, aby odváděl náboje náhodně nahromaděné na stěně trubice.

Všechny druhy a úpravy obrazovek mají společnou vlastnost, která je dána ohromnou rychlostí elektronů: každá změna napětí na vychylovacích destičkách nebo cívkách projeví se skoro současně na stínítku — záznam nemá prakticky setrvačnost, která vadí u přístrojů založených na pohybu mechanických součástí (ukazatelů apod.). Proto je katodová trubice zvláště vhodná pro oscilátory a oscilografy, kterými lze studovat velmi rychlé děje, např. průběh napětí střídavých proudů atd.

Jiný druh katodové trubice, zvaný *fotoelektrická obrazovka* nebo *měníč obrazu*, je zřejmý z obr. (6.7) 7. Světelný obraz předmětu se vytváří skleněnou čočkou na fotokatodě. Emitované elektrony se elektronickými čočkami vrhají na fluorescenční stínítko, kde vytvoří intenzivní (event. zvětšený nebo zmenšený) obraz. Výhoda zařízení je v tom, že lze vysokým napětím velmi zvýšit fotoelektrický proud z fotokatody a že lze takto zviditelnit i obraz vytvořený neviditelnými paprsky (např. ultrafialovými nebo infračervenými). K pozorování vzdálených předmětů v infračerveném světle lze na tomto principu sestavit tzv. *elektronový dalekohled*.

Obraz vytvořený obrazovkou lze zesílit také užitím sekundární emise elektronů, na které je založena konstrukce velmi užitečných elektronických zařízení zvaných **násobiče elektronů**.

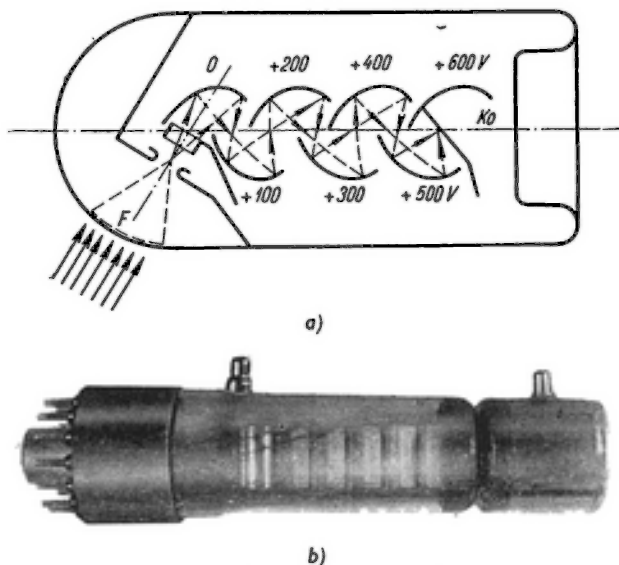
Povrch některých kovů, oxydovaných a zpracovaných vhodným způsobem ve spojení s alkalickými prvky, vysílá při dopadu rychlých elektronů (100 až 1 000 eV) pomalé elektrony sekundární v několikanásobném počtu. Tyto elektrony mohou být urychleny tak, že uvolní z dalšího kovového povrchu nové sekundární elektrony ve zvětšeném počtu, které po urychlení budí emisi ještě většího počtu sekundárních elektronů z další elektrody. Tak se emisí z každé elektrody znásobí počet elektronů a na tomto principu byl sestaven velký počet různých násobičů elektronů, které se často nazývají *fotonásobiče*, protože primárními elektrony, které budí sekundární emisi, bývají fotoelektrony uvolňované z osvětlované fotokatody. Nejstarší násobiče elektronů potřebovaly k vedení sekundárních elektronů příčné magnetické pole, více se však osvědčily násobiče s elektrostatickým vedením. Běžně se vyrábějí *Zworykinovy fotonásobiče* s elektrostatickým vedením, jejichž listové elektrody mají tvar tak zakřivených válcových ploch, aby elektrony dopadaly postupně na další elektrody. Na obr. (6.7) 8a vidíme schéma přímého násobiče a na obr. (6.7) 8b jeho snímek. Světlo dopadající na průsvitnou fotokatodu F uvolňuje fotoelektrony, které dopadají na elektrodu O . Z ní vystupující sekundární elektrony urychlené napětím 100 V budí sekundární emisi na elektrodě $+100$ a z ní emitované elektrony jsou vrženy na elektrodu $+200$ atd. Mnohonásobně zesílený proud elektronů končí na sběrací elektrodě (kolektoru) Ko a vytváří napětí na zatěžovaném odporu. Obdobně pracuje cirkulární násobič [obr. (6.7) 9]

s fotokatodou 0, s deseti zakřivenými listovými elektrodami 1 až 10. a kolektorem 11.

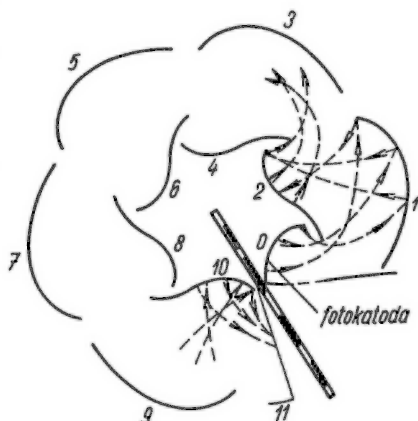
Pro sériovou výrobu je vhodný žaluziový násobič Vekšinského, který má podle obr. (6.7) 10 fotokatodu F i emitující elektrody K_1 až K_3 složené ze žaluzií. Před každou elektrodou je urychlující mřížka a zesílený proud elektronů končí na anodě A připojené k zatěžovacímu odporu R . Napětí mezi dvěma sousedními mřížkami je kolem 200 V.

Násobiče elektronů vynikají nad elektronkové zesilovače malým poměrným šumem a dobrou frekvenční charakteristikou. Jediným násobičem lze dosáhnout zesílení 10^5 až 10^7 .

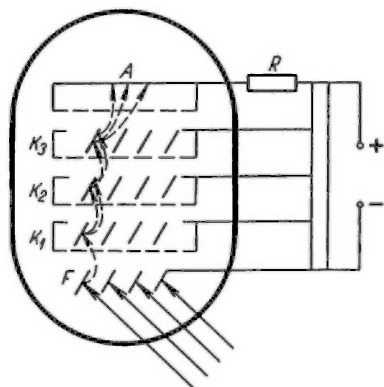
Předešlý výklad o elektronové optice ukazuje, že geometrická optika elektronových svazků je zcela obdobná geometrické optice viditelného světla. Podle vlnové mechaniky musíme mít za to, že i vlnové vlastnosti elektronových svazků se projeví obdobně jako



Obr. (6.7) 8. Zworykinův přímý násobič; a — schéma, b — snímek přístroje



Obr. (6.7) 9. Zworykinův cirkulární násobič elektronů



Obr. (6.7) 10. Žaluziový násobič Vekšinského

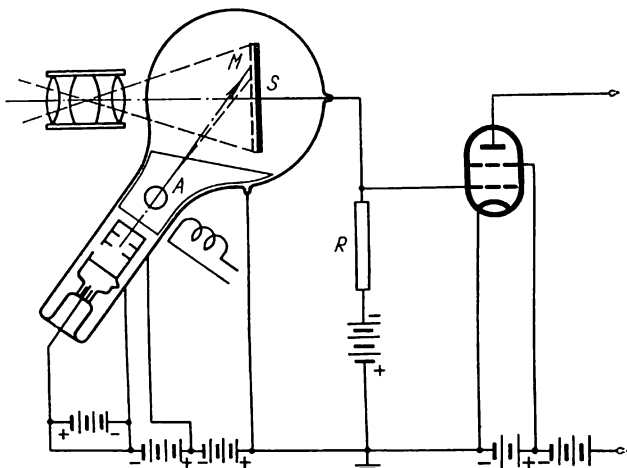
u světla dalšími jevy, jako je interference, ohyb a polarizace. Difrakci elektronů jsme popsalí v čl. 6.6.4 a v poslední době se také rozvíjí elektronová interferometrie metodami známými z interferometrie světelné, např. užitím zařízení obdobného Fresnelovu dvojhnanolu. Naproti tomu jsou polarizační jevy u elektronových svazků méně výrazné, protože polarizace elektronů se netýká jejich náboje, ale jen spinu a magnetického momentu. Částečnou polarizaci jeví záření β a fotoelektrony emitované zmagnetovanými kovy.

6.7.2. Snímací televizní elektronky

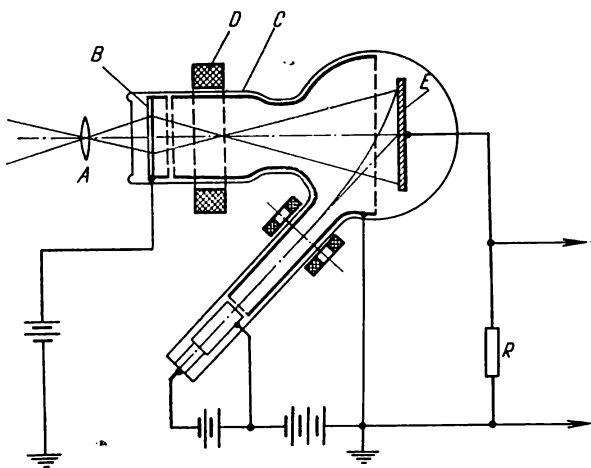
Televizní kamery čili *snímací elektronky* jsou nejdůležitější a nejnáročnější zařízení elektronické televize (čl. 5.12.5). Popíšeme jen hlavní typy v pořadí, v jakém se vyvíjely:

Ikonskop [obr. (6.7) 11] se podobá obrazovce s magnetickým vychylováním elektronového svazku, který však nekreslí fluorescenční stopu na čelní stínítku, ale „prohlíží“ světelný obraz

promítnutý na mozaikovou destičku. Složitým technologickým postupem se na (levém) povrchu slídivé destičky (tloušťky 0,08 mm) vytvoří mikroskopická zrníčka stříbra, navzájem elektricky izolovaná a aktivovaná cesiovým povlakem, takže tvoří mozaiku M z drobkounkých fotokatod (velikosti 1 až 4 μm) citlivých zvláště na červené světlo. Druhá strana (pravá) slídivé destičky je stejnoměrně pokovená. Tato souvislá vodivá vrstva S zvaná *signálová deska* tvoří s jednotlivými fotokatodami miniaturní kondenzátorky. Promítneme-li fotografickým objektivem na mozaiku obraz snímané scény, uvolní se z každé fotokatody elektrony v množství úměrném osvětlení. Uvolněné fotoelektrony přejdou na kladně nabitou sběrovou anodu A , vzniklou poostříbřením části vnitřního povrchu trubice. Fotokatody dostanou tak různý kladný potenciál 2 až 3 V proti signálové desce podle místního jasu snímaného obrazu. Snímací svazek rychlých elektronů (energie asi 1 500 eV), který přebíhá po řádcích mozaiky, způsobuje v ní emisi sekundárních elektronů v počtu 4- až 5násobném, které se zčásti vrací na mozaiku, zčásti přecházejí na sběrací anodu A , která je přes zatěžovací odpor R spojena se signálovou deskou S . Tím se uzavře na krátkou dobu, než potenciální rozdíl mezi mozaikou a druhou anodou elektronové trysky klesne na malou hodnotu asi 1,5 V, proud v obvodu odporu R , na němž vznikne krátkodobý napěťový impuls, kterého se po zesílení užije k modulaci nosné vlny televizního vysílače. Děj se opakuje na všech kondenzátorech mozaiky, čímž vznikne během každého snímku (25 $\times$ za vteřinu) úplný záznam osvětlení podél všech řádků snímaného obrazu, který vytvoří obrazový signál řídící průběh jasu na obrazovce televizoru. Sekundární elektrony, které se vrací na mozaiku, ruší kladné náboje vzniklé osvětlením. Při značnější sekundární emisi může se tak vymazat (zvláště ve střední části mozaiky) přenášený obraz, což se jeví jako *temná skvrna* zvaná též *rušivý zatemňovací signál* sekundárních elektronů. Tuto častou vadu ikonoskopu vyvažuje jeho velká rozlišovací schopnost, jež je dána průměrem elektronového svazku, který je mnohokrát větší než zrníčka stříbra.



Obr. (6.7) 11. Ikonoskop

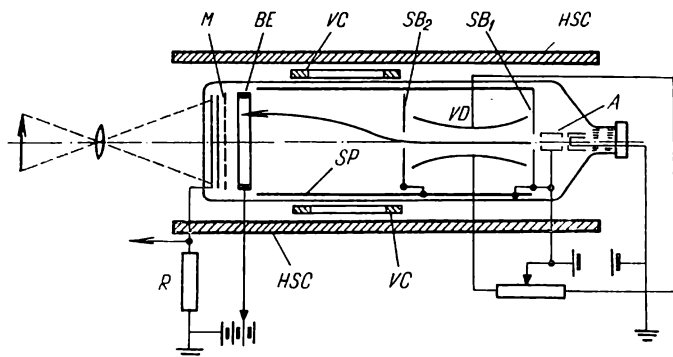


Obr. (6.7) 12. Superikonoskop

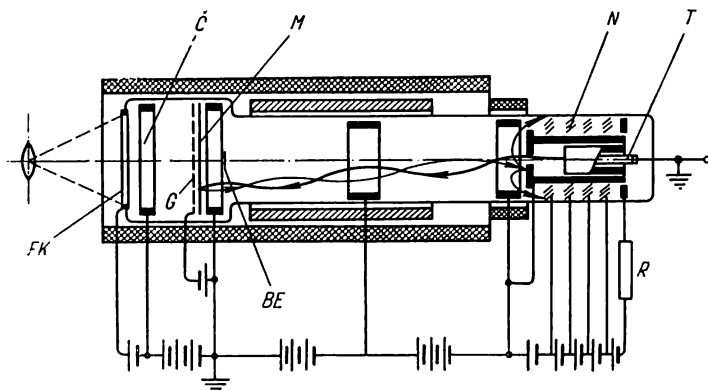
Superikonoskop [obr. (6.7) 12] se liší od ikonoskopu tím, že fotoelektrická citlivá vrstva je oddělena od mozaiky. Optickým objektivem A se promítá obraz scény na citlivou vrstvu B a emitované fotoelektrony se nejprve urychlí napětím mezi kovovým prstencem na obvodu desky B a vodivým povlakem C na stěně trubice. Magnetickou čočkou D se pak vytvoří zvětšený elektronický obraz na vlastní mozaice E se signální deskou, která funguje stejně jako u ikonoskopu. Výhodou superikonoskopu je několikrát větší citlivost a vzhledem k malým rozměrům (asi $2,5 \times 3 \text{ cm}^2$) optického obrazu na vrstvě B velká hloubka ostrosti objektivu s malou ohniskovou délkou.

Ortikon [obr. (6.7) 13] je novější druh snímáček elektrony se svazkem pomalých elektronů a s urychlujícím napětím mezi mozaikou a anodou. Je to vyčerpaná válcová skleněná trubice průměru 80 mm a délky 300 mm s elektronovou tryskou, která je na rozdíl od ikonoskopu umístěna v ose trubice. Katoda trysky je uzemněna, kdežto anoda A s potenciálem asi 100 V je vodivě spojena s vychylovacími destičkami VD , se sběracími clonkami SB_1 a SB_2 a se stínícím

povlakem *SP* na vnitřním povrchu trubice. Obě clonky ohraničují elektrické pole vychylovacích destiček a kromě toho sbírají spolu se stínícím povlakem sekundární elektrony emitované mozaikou *M*. Elektronový svazek vystupující z trysky je vychylován elektrostaticky destičkami *VD* a příčným magnetickým polem buzeným dvojicí vychylovacích cívek *VC*. Kromě toho se v trubici udržuje hlavní směrovací cívkou *HSC* dosti silné osové magnetické pole (4 000 až 10 000 Am⁻¹) tak, aby libovolně vychýlený elektronový svazek dopadal na mozaiku kolmo. Před dopadem jsou však elektrony brzdící elektrodou *BE* přibrzděny z energie 100 až 300 eV na takovou energii (pod 30 eV), aby počet sekundárních elektronů byl menší než počet elektronů primárních. Na vnější straně mozaiky je opět průhledná kovová vrstva nanesená na slidové fólii (signálová deska), přes kterou se obraz snímané scény promítá fotografickým objektivem na mozaiku. Signálová deska je uzemněna přes odpor *R*, takže bez osvětlení má mozaika potenciál katody. Proto se svazek pomalých elektronů nemůže dotknout neosvětlených prvků mozaiky a vrací se od nich zpět k anodě. Osvětlená místa mají však v důsledku fotoemise kladné náboje, a proto na tato místa elektrony svazku dopadají, pokud ovšem se jejich dopadem nezruší kladné napětí osvětlených míst proti katodě. Tímto vybíjením mozaikových kondenzátorů vzniká na odporu *R* mezi signálovou deskou a zemí výstupní obrazový signál, který je úměrný osvětlení.



Obr. (6.7) 13. Ortikon



Obr. (6.7) 14. Superortikon

la odstraněn ani v dalších typech ortikonu, jako je ortikon s násobičem elektronů a ortikon s antimonovou mozaikou.

Superortikon [obr. (6.7) 14] vznikl z ortikonu podobnou úpravou jako superikonoskop z ikonoskopu, totiž oddělením fotoemísni vrstvy od mozaiky. Velké obtíže spojené s praktickou realizací této úpravy podařilo se překonat teprve po několikaleté výzkumné práci, která nakonec vedla ke konstrukci velmi dokonalé snímací elektronky.

Snímaný obraz se promítá objektivem s krátkou ohniskovou délkou na broušenou skleněnou desku s fotoemísni vrstvou *FK*. Fotoelektrony řízené magnetickou čočkou *Č* vytvoří elektronový obraz na skleněné fólii *M* tloušťky 2 až 3 μ m, jejíž cesiový povlak působí jako mozaika s činitelem sekundární emise 4 až 5. Jeho efektivní hodnota je však kolem 3, protože část fotoelektronů zadržuje drátěná mřížka *G* (tak jemná, aby se nezobrazovala) s napětím +1 až +2V proti

*) Je to zachyceno v názvu ortikon, který je zkratkou označení ortikonoskop, tj. ikonoskop s ortogonálním snímacím svazkem.

obrazové straně fólie M . Mřížka G přitahuje sekundární elektrony emitované fólií a omezuje náboje na M . Tím zaručuje stabilitu i při nejsilnějším místním přesvětlení a znemožňuje stabilizační zvrat. Snímací elektronový svazek urychlený napětím $+200$ V vychází z osově umístěné trysky T a je usměrněn osovým magnetickým polem (asi $5\,000\text{ Am}^{-1}$) tak, aby dopadal kolmo na fólii. Vychylování v obou směrech je magnetické a elektrony opisují drobné obloučky cykloid. Před dopadem na fólii jsou přibrzděny brzdící elektrodou BE , která jim po dopadu udělí zpáteční rychlost. Tenká skleněná fólie je polovodičivá, takže elektrony snímacího svazku mohou neutralizovat náboje nahromaděné sekundární emisí na obrazové straně fólie, a proto má vracející se paprsek proměnnou intenzitu, jejíž změny jsou úměrné osvětlení. Zpětný elektronový paprsek dopadá na vstupní elektrodu válcového žaluziového násobiče N , který obklopuje trysku T . Při čtyřtupňovém až pětistupňovém zesílení obrazového signálu má superortikon citlivost asi tisíckrát větší než ortikon a čtyřtisíckrát větší než ikonoskop. Přitom u něho nevzniká ani střední temná skvrna, ani stabilizační zvrat. Jeho rozlišovací schopnost je však asi 400 až 500 řádků, tedy horší než u obou jmenovaných snímacích elektronek. Superortikon je naprosto stabilní v provozu a svou citlivostí blíží se citlivosti oka předstihuje i filmové a fotografické kamery.

6.7.3. Elektronové a iontové mikroskopy

Optickým mikroskopem můžeme ve světle vlnové délky λ_0 rozeznat podle 6.4 (23) nejmenší vzdálenost

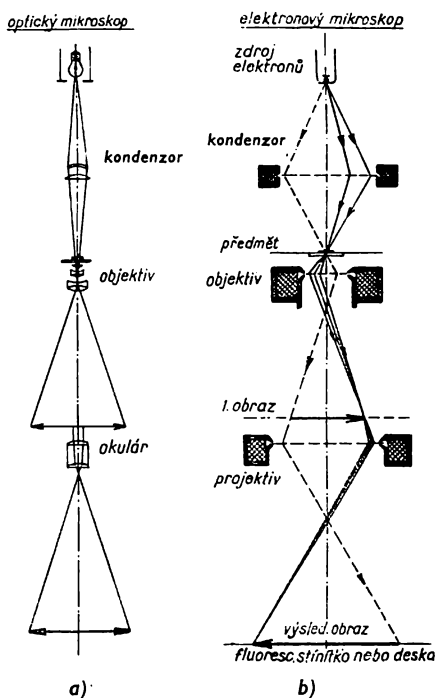
$$6.7\ (5) \quad d \approx \frac{\lambda_0}{2A}, \quad A = n \sin u,$$

kde A je apertura, n index lomu prostředí mezi předmětem a objektivem a u značí úhel sevřený s optickou osou krajními paprsky svazku vstupujícího do objektivu. V čl. 6.7.1 jsme ukázali že v optice korpuskulárního záření platí stejné zákony jako v optice vlnového záření, jehož vlnová délka souhlasí s délkou příslušné de Broglieovy vlny. Ze vzorce 6.7 (3) vidíme, že tyto vlny jsou u elektronů, již při snadno dosažitelných napětích, řádu 10^{-11} m, tedy desettisíckrát kratší než vlny světelné. Z hořejšího vzorce 6.7 (5) lze usuzovat, že užitím elektronových svazků by bylo možno velmi zvýšit rozlišovací schopnost optických přístrojů, což se skutečně podařilo u *elektronových mikroskopů*.

Jsou to přístroje zcela obdobné mikroskopům optickým, jak je patrné z obr. (6.7) 15, který podává schéma *magnetického mikroskopu*, jehož všechny čočky jsou magnetické.

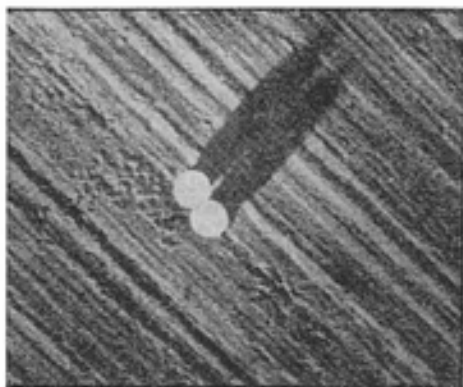
Stavějí se však i mikroskopy *elektrostatické* a mikroskopy s obojím druhem čoček. Elektrony se urychlují vysokým napětím řádu 10^4 až 10^5 V a dosahuje se přímého zvětšení až 100 000. Apertura moderních mikroskopů je v mezích 10 až 20 úhlových minut, což dává rozlišovací mez 7 až 13 Å.

Tato vrcholná rozlišovací schopnost vyžaduje ovšem u preparátů splnění mnoha podmínek a tak se časem vyvinula složitá mikroskopická technika mnohem náročnější než u světelného mikroskopu. Především musí být preparáty velmi tenké (u organických látek asi 1 μm) a musí snést vysoké vakuum a nárazy elektronů při ozařování v mikroskopu. Některé preparáty se nanášejí přímo na jemnou síť (průměr ok 0,1 mm), jiné vyžadují

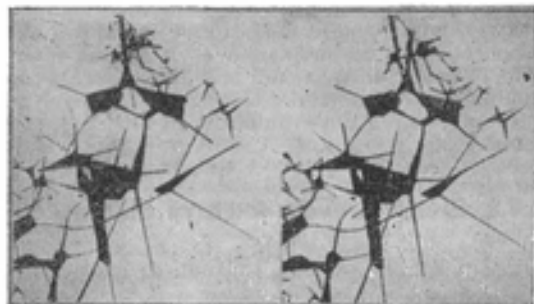


Obr. (6.7) 15. Schéma optického (a) a elektronového (b) mikroskopu s magnetickými elektrostatickými čočkami

ještě podklad, kterým bývá tenounká blanka kolódiová nebo z kysličníku aluminia. Posledních dvou látek se užívá také ke zhotovování otisků (odlitéků) povrchu látek neprostupných pro elektrony (zvláště povrchu kovů). Aby se zvýšil kontrast a aby se zjistila výška nerovností povrchu, užívá se stínování atomovými svazky dopadajícími pod velmi malým úhlem na plochu preparátu. Tak vzniknou stíny, z jejichž délky a ze známého úhlu dopadu

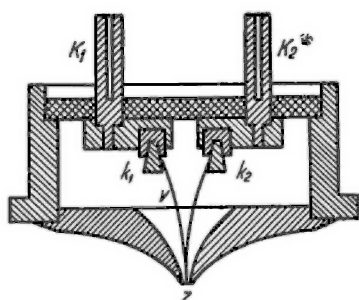


Obr. (6.7) 16. Povrch mosazi leštěný jedním směrem za slabého tlaku

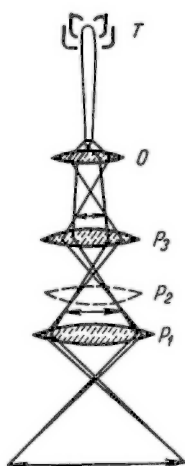


Obr. (6.7) 17. Stereoskopický snímek krystalu kysličníku zinečnatého (ZnO) elektronovým mikroskopem; zvětšení 7 600krát

atomů lze vypočítat výšku nerovností. Roku 1949 se zjistilo, že plastická hmota *polystyrén* tvoří drobnohledné kuličky, jejichž průměr je skoro vždy stejný ($2\,593 \pm 40$) Å. Podobně *latex* tvoří kuličky přibližně stálého průměru 3 650 Å. Toho lze užít k měření výškových rozdílů na stínovaných preparátech. Obrázek (6.7) 16 ukazuje snímek leštěného povrchu mosazi. Lze na něm z délky stínů vržených polystyrénovými kuličkami odhadnout výšku vroubků na preparátu, tj. na negativním kolódiovém otisku. Profil původního mosazného povrchu je tedy obrácený: vyvýšeninám odpovídají rýhy a naopak.



Obr. (6.7) 18. Žhavená katoda elektronové trysky



Obr. (6.7) 19. Optická soustava elektronového mikroskopu Tesla

Stínovaný preparát poskytuje plastický prostorový dojem, kterého se ovšem dosáhne v dokonalejší míře snímky *stereoskopickými*. K tomu stačí zhotovit dva snímky pro dva různé sklony preparátu vzhledem k ose mikroskopu. Vhodné naklonění preparátu umožňuje zvláštní mechanismus. Jestliže se na takové snímky [obr. (6.7) 17] díváme tak, že pravým okem pozorujeme pravý a levým okem levý obraz, nabudeme velmi pěkné představy o prostorovém uspořádání preparátu mikrokrystalků ZnO.

Jako příklad praktického provedení elektronového mikroskopu popíšeme *stolní elektronový mikroskop Tesla*. Zdrojem svazku termoelektronů je tryska *T*, jejíž detail vidíme na obr. (6.7) 18.

Žhavené wolframové vlákno *V* držené kolíčky *k*₁, *k*₂ tvoří ostrý záhyb *Z* s poloměrem zakřivení 0,1 mm, z něhož vystupuje tenký elektronový svazek usměrněný Wehneltovým válcem. Žhavicí proud se do vlákna přivádí kolíčky *K*₁, *K*₂. Elektronový svazek je dále upraven a urychlen

anodami elektronové trysky T tak, aby ve svislém směru vstoupil do objektivu O , který je prvním členem optické soustavy mikroskopu. Na obr. (6.7) 19 jsou všechny její čočky, které jsou vesměs magnetické, kresleny jako skleněné spojky pro viditelné světlo. Ohnisková dálka objektivu O se mění změnou proudu a tím se zaostruje obraz. Z objektivu vstupuje svazek do projektoru čili projektivu, který se skládá ze tří částí: hlavního projektoru P_1 , pomocného projektoru P_2 a zmenšovacích čoček P_3 . Hlavní projektor pracuje při stálém magnetickém buzení a je zapojen při všech zvětšeních. Pomocný projektor s měnitelným buzením dává zvětšení v horním rozsahu od 4 000 do 30 000. Spodní rozsah zvětšení 1 000 až 4 000 lze pokrýt užitím hlavního projektoru ve spojení se zmenšovacím čočkou buzenou nastavitelným proudem.

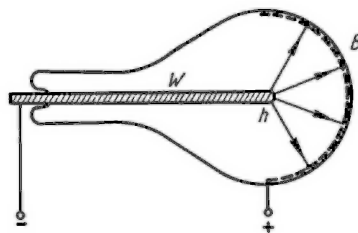
Popsaný mikroskop, jehož snímek s připojeným zdrojem napětí vidíme na obr. (6.7) 20, má při napětí 50 kV rozlišovací mez asi 30 Å, která odpovídá vlnové délce 0,053 Å. Potřebného vakua 10^{-4} torru se dosahuje rotační a difúzní olejovou vývěvou.

Vývoj a zdokonalování elektronových mikroskopů stále pokračuje ve snaze snížit rozlišovací mez až na 2 Å, která by dovolila zobrazení jednotlivých atomů jako bodů. Zatím se u elektronových mikroskopů výjimečně dosahuje rozlišovací meze pod 5 Å a iontovými mikroskopy s rozlišovací mezí 3 Å se podařilo skutečně zobrazit jednotlivé atomy na povrchu kovového hrotu. Popíšeme jen stručně princip těchto speciálních metod.

V běžně užívaných univerzálních elektronových mikroskopech se — podobně jako v mikroskopech optických — pozorovaný předmět prozařuje elektronovým svazkem. V některých případech, zvláště ke studiu povrchu kovů, jsou však výhodnější různé druhy



Obr. (6.7) 20. Elektronový mikroskop Tesla BS 242A se zdrojem napětí

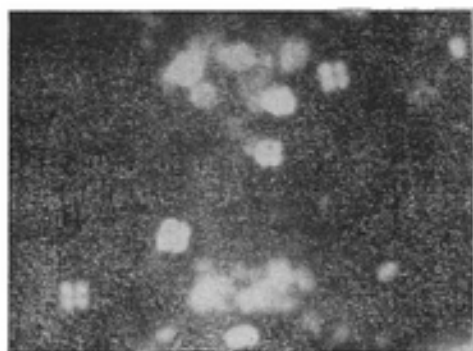


Obr. (6.7) 21. Schéma polního mikroskopu

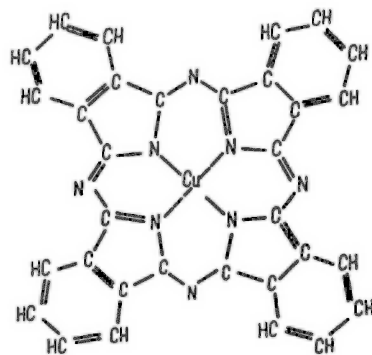
tzv. *emisního elektronového mikroskopu*. Funkce emisního mikroskopu se zakládá na emisi (výronu) elektronů z povrchu kovů a podle druhu emise rozeznáváme mikroskop *termionický* (vhodný ke studiu oxidových katod v elektronkách), *fotoelektrický* nebo konečně tzv. *polní mikroskop* založený na emisi elektronů ze studené katody (katodových paprsků) působením velmi silného pole.

Vysvětlíme princip polního mikroskopu na přístroji, který sestavil Müller r. 1936 a jehož jednoduché schéma vidíme na obr. (6.7) 21. Má-li záporně nabitý hrot h wolframového drátku W ve vyčerpané baňce tvar kulového vrchlíku, vystupují kolmo z jeho povrchu elektrony a dopadají na kladně nabitě polokulové fluorescenční stínítko na vnitřní stěně baňky B . Je-li emise na celém povrchu hrotu h stejně intenzivní, má stínítko všude stejný jas. Některé látky (např. různé kysličníky) lpící v nepatrném množství na povrchu kovu zvyšují emisi elektronů a jejich rozložení na povrchu hrotu je pak možno pozorovat podle rozložení jasu na stínítku v mnohonásobném zvětšení, daném poměrem poloměru stínítka k poloměru hrotu h . Tak je možno dosáhnout zvětšení až 100 000 a rozlišovací schopnosti až 20 Å, které stačí k zjišťování jednotlivých makromolekul organických látek. Na obr. (6.7) 22a vidíme obraz povrchu hrotu s několika na něm usazenými molekulami ftalocyaninové soli $C_{22}H_{16}N_8Cu$, jejichž struktura je zřejmá

z obr. (6.7) 22b. Pozoruhodná je shoda tvaru světlých skvrn na stínítku s rozložením atomů v molekule; k přesnějšímu rozeznání jejich poloh by bylo třeba rozlišovací mez ještě o řád zvýšit, čehož lze opravdu dosáhnout, užije-li se k zobrazování místo elektronů iontů lehkých plynů.

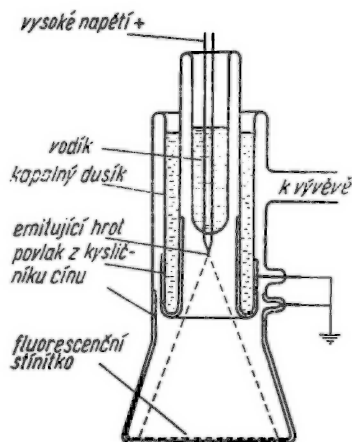


a)



b)

Obr. (6.7) 22a) Snímek molekul ftalocyaninové soli polním mikroskopem; b) struktura molekuly ftalocyaninové soli $C_{32}H_{16}N_8Cu$



Obr. (6.7) 23. Schéma iontového mikroskopu



Obr. (6.7) 24. Rozložení atomů na rheniovém hrotu

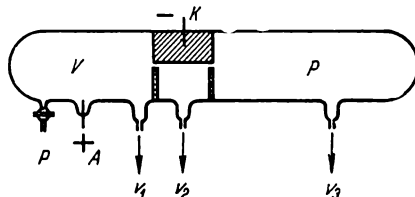
Výhodnost iontového mikroskopu proti elektronovému nepřekvapí, uvážíme-li, že ionty jsou několikrát hmotnější než elektrony. Proto jim podle 6.7 (2) při stejné energii přísluší aspoň o řád kratší de Broglieova vlna a ve stejném poměru větší rozlišovací mez. V roce 1956 se skutečně Müllerovi podařilo uvést do chodu *iontový mikroskop*, jehož schéma podává obr. (6.7) 23. Ostrý kovový hrot o poloměru křivosti kolem $0,1 \mu m$ je kapalným vodíkem udržován

na teplotě 20°K uvnitř baňky s fluorescenčním stínítkem, naplněné silně zředěným héliem (pod tlakem 10^{-3} torrů). Atomy hélia, které se přiblíží těsně k hrotu, kde je neobyčejně silné elektrostatické pole intenzity až 45 GVm^{-1} , jsou ionizovány a odmrštěny velkou rychlostí kolmo od povrchu hrotu. Vzhledem k nepatrným rozměrům hrotu lze očekávat, že je tvořen jediným monokrystalem, a je známo, že ionizace héliových atomů je intenzivnější v těsné blízkosti hran atomových rovin tohoto monokrystalu než u rovinných částí jeho povrchu. Proto se objevují na fluorescenčním stínítku světlé rozptýlové kroužky, které nám zobrazují polohy jednotlivých atomů v krystalové mřížce hrotu. Tak je možno studovat rozložení atomů na hranách krystalových rovin kovového hrotu při zvětšení až $2 \cdot 10^6$. Rozlišovací mez 3 Å dovoluje skutečně zjištění poloh jednotlivých atomů, jak vidíme na obr. (6.7) 24. Světlé body ukazují polohy atomů rhenia na hrotu poloměru 800 Å . Tmavé plochy jsou neporušené atomové roviny monokrystalu, nad nimiž je ionizace neznatelná.

6.7.4. Hmotnostní spektrografie

Jednou z nejdůležitějších aplikací iontové optiky je konstrukce přístrojů, kterými je možno zjišťovat přesné hmotnosti iontů podle jejich pohybu v elektrických a magnetických polích. Tyto přístroje zvané nejčastěji *hmotnostní spektrografy* mají základní význam ve fyzice atomového jádra, zvláště při studiu izotopů. Jejich funkce je založena na rozboru tzv. *anodového záření*, které je též známo pod jménem *kladné* nebo *kanálové* záření.

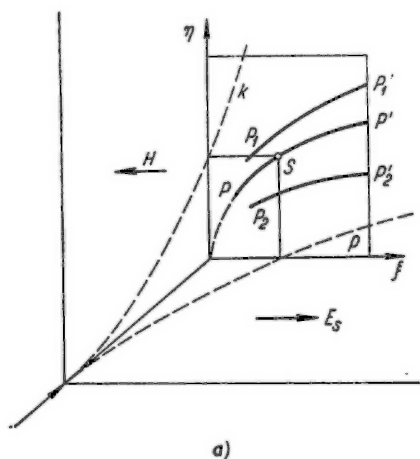
Anodové záření vzniká podobně jako záření katodové ve výbojové trubici při tlaku několika setin torrů. K experimentálnímu vyšetření tohoto záření byla sestavena řada různých druhů anodových trubic. Schéma jednoho z užívaných typů představuje obr. (6.7) 25. Skleněná trubice se zatavenou anodou A je rozdělena tělesem katody K na vlastní výbojovou trubici V a na pozorovací prostor P . Do části V se nasává zkoumaný plyn kapilárou p a je udržován vývěvou v_1 na tlaku kolem $0,01$ torrů. Ionizací plynu vzniklé kladné ionty mají při tomto zředění dosti dlouhou střední volnou dráhu, na které jsou urychlovány elektrickým polem. Pohybují se směrem ke katodě, která má dva jemné otvory (kanálky). Tyto otvory vymezí z proudu iontů úzký rovnoběžný svazek anodového záření. Toto záření vstupuje do pozorovacího prostoru, v němž je udržován vývěvou v_3 tlak řádu 10^{-4} torrů mnohem nižší než v prostoru V . Udržení tlakového rozdílu mezi V a P usnadňuje vývěva v_2 . Tak se dosáhne toho, že v poměrně hustším plynu ve V vzniká dostatečný počet iontů a záření je dosti intenzivní, ale přitom málo rušené srážkami s molekulami mnohem řidšího plynu v P .



Obr. (6.7) 25. Anodová trubice

Zkoumání anodových paprsků má význam pro zjišťování relativní atomové hmotnosti prvků, neboť z jejich úchylek v příčném elektrickém a magnetickém poli lze určit specifický náboj e/m_0 . Pro kladné ionty platí rovnice obdobné rovnicím uvedeným v čl. 5.10.3 pro elektrony, z nichž po vyloučení rychlosti u plyne e/m_0 , a známe-li náboj iontů, i jejich hmotnost m_0 . Měření je zatíženo okolnostmi, že ionty plynu nevznikají v téže vzdálenosti od anody (a tím méně na anodě samé nebo v ní), ale ionizací neutrálních atomů v různých místech výbojové trubice. K tomu se přihlíželo při konstrukci moderních přístrojů na zjišťování izotopů, které mají v jaderné fyzice velký význam a nazývají se *hmotnostní spektroskopy*. Svou podstatou jsou ovšem naprosto odlišné od spektroskopů určených k zjišťování spekter optických i rentgenových, avšak poskytují tzv. „hmotnostní spektra“ různých prvků, která mají podobný vzhled jako čárová spektra elektromagnetického záření.

Většina hmotnostních spektroskopů, zvláště moderní přístroje s velkou citlivostí a značnou rozlišovací schopností, dávají trvalý záznam spektra. Takové přístroje se nazývají *hmotnostní spektrografy*. Poskytují nejčastěji fotografický záznam spektra, což je umožněno

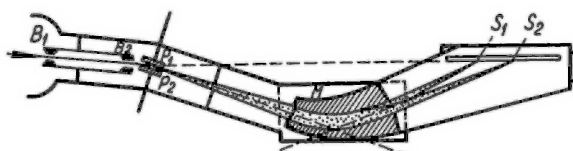


skutečností, že i ionty zanechávají stopu ve fotografické emulsi. Různé konstrukce se liší způsobem, jakým se užívá elektrického a magnetického pole k soustředění (fokusaci) iontů o stejném specifickém náboji na touž čáru na fotografické desce nebo filmu, i když mají různé rychlosti co do velikosti nebo co do směru. To nebylo ještě v dostatečné míře splněno u nejstarší metody parabolické (J. J. Thomson r. 1912), při níž se působilo na úzký rovnoběžný svazek iontů současně příčným elektrickým polem E_s i magnetickým polem H [obr. (6.7) 26]. Vlivem elektrického pole se paprsky zakřivují do paraboly p , vlivem magnetického pole do kružnice k , jak jsme poznali v čl. 5.10.3. Na fotografické desce po-



Obr. (6.7) 26a) Thomsonova parabolická metoda, b) Thomsonovy paraboly vytvořené anodovými paprsky, složenými ze záporných iontů vodíku H^- a ze záporných iontů těžkého vodíku D^-

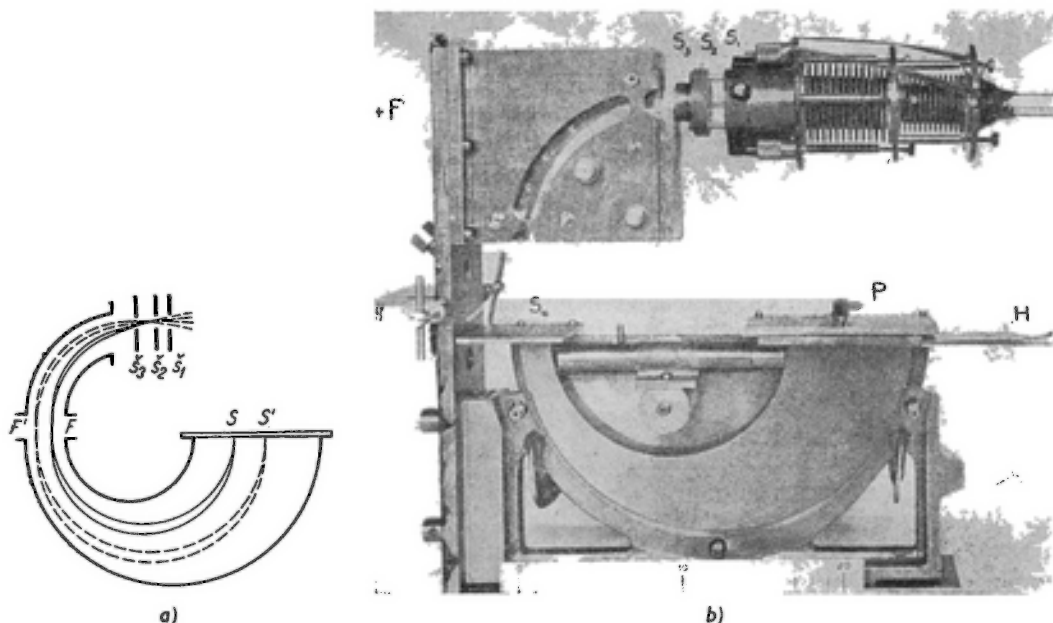
stavené kolmo k anodovým paprskům vznikne tedy současným působením obou polí stopa v místě S . Z příslušných dvou rovnic lze odvodit, že všechny ionty, které mají stejný specifický náboj, ale různě velké rychlosti, protnou desku přibližně v parabolickém oblouku PP' .



Obr. (6.7) 27. Schéma Astonova spektrografu

Obsahuje-li prvek několik izotopů, dostaneme několik parabol, např. P_1P_1' nebo P_2P_2' , z nichž odvodíme poměr atomových hmotností izotopů. Tato jednoduchá metoda je málo citlivá, neboť vyžaduje tenký a rovnoběžný svazek iontů, které se pro týž izotop rozloží na dosti dlouhý oblouk paraboly (pro vzácné izotopy je třeba dlouhých expozií).

Zvýšení citlivosti lze dosáhnout dvojím způsobem. Buď se soustředí do téhož místa fotografické desky různé rychlé ionty rovnoběžného svazku (rychlostní fokusace), nebo stejně rychlé ionty divergentního svazku (směrová fokusace). Rychlostní fokusace není nutná, jestliže užijeme pomalých iontů (které vzniknou nárazy elektronů) a urychlíme je silným napětím (např. 10^3 V), jak učinil Dempster (r. 1918). Aston (r. 1919) dosáhl rychlostní fokusace tak, že nechal projít ionty nejprve elektrickým a pak magnetickým polem, jak je zřejmo z obr. (6.7) 27. Úzký svazek iontů vymezený štěrbinami B_1 , B_2 projde nejprve deskovým kondenzátorem P_1P_2 a pak příčným magnetickým polem M , jehož siločáry



Obr. (6.7) 28a) Schéma Dempsterova spektrografu s dvojitou fokusací; b) snímek. Ionty vznikají oscilačním výbojem mezi kovovými elektrodami v komoře vpravo nahoře, opatřené žebrovým chladičem, jsou urychlovány mezi štěrbinami S_1 , S_2 a jsou štěrbinou S_3 omezeny na úzký divergentní svazek

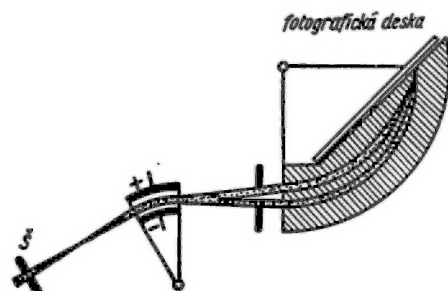
vstupují zpredu do nákrasny. Obsahuje-li rovnoběžný svazek např. dva izotopy téhož prvku s hmotnostmi m_1 , m_2 , setkají se ionty prvního izotopu v místě S_1 , ionty druhého v S_2 a ostatní ionty se sejdou v jiných bodech téže přímky S_1S_2 , která jde středem kondenzátoru a nazývá se *Astonova přímka*. Platí to ovšem jen přibližně, pokud zakřivení drah iontů je dosti malé, jak plyne z odvození, které zde neuvádíme.

U moderních hmotnostních spektrografů se dosahuje vysoké citlivosti spojením obou fokusací. *Dempsterův spektrograf* s dvojitou fokusací je konstruován podle schematického obrázku [(6.7) 28a]. Svazek iontů (omezený štěrbinami S_1 , S_2 , S_3) prochází čtvrtkruhovým elektrickým polem a půlkruhovým polem magnetickým. Elektrické pole soustředí ionty stejné rychlosti u , ale různých směrů, do téhož bodu F , z něhož vstupují do magnetického pole, které je soustředí do místa S . Ionty jiné rychlosti u' projdou bodem F' a sejdou se opět v S' . Vhodnou volbou intenzit obou polí se dosáhne toho, že obě místa S a S' na fotografické desce splynou pro ionty stejného specifického náboje.

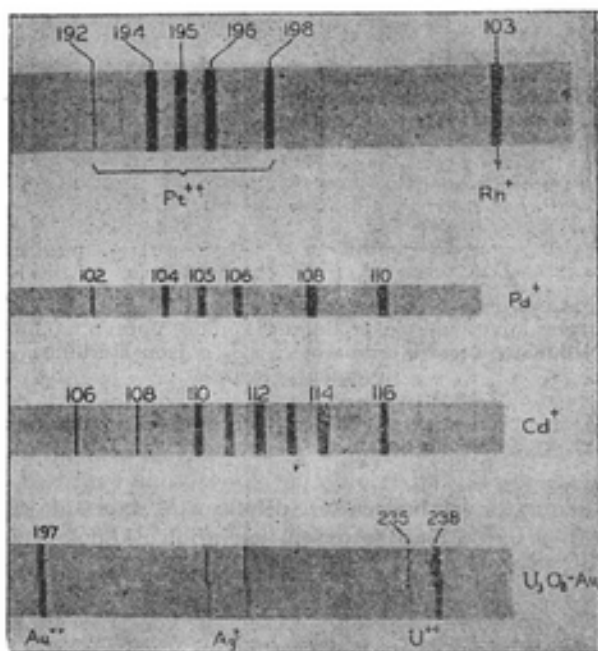
Z dalších spektrografů s dvojitou fokusací uvádíme přístroj sestavený Mattauchem a Herzogem (r. 1936), kteří dosáhli směrové fokusace divergentního svazku tím, že rovinné desky

kondenzátoru v Astonově spektrografu nahradili válcovými deskami, jak ukazuje obr. (6.7) 29.

Hmotnostní spektrografy vytvoří na fotografické desce (filmu) spektrum zkoumaného prvku, jehož každá čára přísluší jednomu izotopu. Proměřením spektra se získají nejen přesné atomové hmotnosti izotopů (z polohy čar), ale i jejich poměrná množství (podle zčernání desky, tj. podle hustoty vyloučeného stříbra v místě čáry). Obr. (6.7) 30 ukazuje



Obr. (6.7) 29. Mattauchova—Herzogova modifikace Astonova spektrografu. Rozbíhavý svazek iontů, vycházející ze štěrbin S , rozdělí se sice podle rychlostí iontů, ale spojí se právě na fotografické desce v ostrou čáru



Obr. (6.7) 30. Hmotnostní spektra některých prvků. K jednotlivým čarám jsou připsána nukleonová čísla iontů

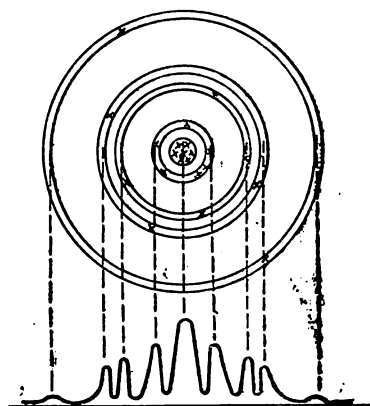
hmotnostní spektra několika kovů, získaná Dempsterovým spektrografem. V posledním spektru rozeznáváme zřetelně dva izotopy uranu s hmotnostmi 238 (99,3 %) a 235 (0,7 %). Vzácný izotop U 235, který je nejdůležitějším palivem jaderným, byl objeven Dempsterem na popsaném spektrografu.

7.1. Vlnová mechanika

7.1.1. Základní představy vlnové mechaniky

V čl. 6.6.4 jsme vyložili základní myšlenku vlnové mechaniky, která vychází z de Broglievy hypotézy o vlnové povaze všech částic: polních i látkových. V témže článku jsme popsali základní experimentální poznatky, které jednoznačně potvrzují správnost de Broglievy rovnice 6.6 (18), která určuje délku vln, které každou částici provázejí a řídí její pohyb.

Nyní pojednáme podrobněji o fyzikálním významu de Broglievých vln, k němuž dospějeme na základě rozboru difrakce elektronů při průchodu kovovou fólií. Jak jsme viděli na obr. (6.6) 4, hromadí se elektrony na kružnicích, jejichž poloměry jsou určeny úhly splňujícími Braggovu rovnici. Přitom je možno experimentálně sledovat dopad jednotlivých elektronů na různá místa fluorescenčního stínítka, který se projeví bodovým zábleskem čili scintilací na stínítku. Proto by nebylo správné se domnívat, že difrakční kružnice vznikají rozptýlením každého elektronu po celém obvodu jedné nebo několika kružnic. Každý z elektronů svazku si zachovává svou samostatnou existenci, ale jeho pohyb je ovládán doprovodnými vlnami. Elektrony dopadají nejčastěji na kružnice, kde se doprovodné vlny zesilují, a na nichž má tedy intenzita doprovodných vln největší hodnoty. Jen v mizivém počtu se objevují na místě mimo tyto kružnice, kde je intenzita doprovodných vln velmi malá. Je to znázor-



Obr. (7.1) 1. Rozložení elektronů na stínítku po průchodu tenkým kovovým listem

něno na obr. (7.1) 1, kde jsou křížky vyznačena místa dopadu elektronů. V jeho dolní části je narysován průběh hustoty elektronů v závislosti na vzdálenosti od osy dopadajícího elektronového svazku, jaký bychom zjistili při velkém počtu elektronů. Ukazuje se, že hustota rozložení elektronů je úměrná intenzitě doprovodných vln. Z nauky o vlnění je známo, že intenzita vlny je úměrná čtverci její amplitudy (výkmitu). Docházíme tedy k závěru, že de Broglievy vlny řídí či vedou pohyb částic tak, že jejich hustota je úměrná čtverci amplitudy těchto vln. Tak je tomu při velkém počtu částic a nyní jde o to, jak vyložit působení těchto vln na jedinou částici. Bylo by možno si představit, že se každá jednotlivá částice rozdělí do prostoru na celou vlnoplochu příslušných

de Broglievých vln, avšak, jak bylo již řečeno při ohybu elektronů a jak nutně plyne z výkladu fotoelektrického i Comptonova jevu, neshoduje se toto pojetí s experimenty ani u elektronů, ani u fotonů. Proto se dnes všeobecně přijímá názor, že každá jednotlivá částice podružuje svou celistvost a zůstává soustředěna ve velmi malé části prostoru, ale její pohyb se řídí statistickými zákony v tom smyslu, že hustota částic je v každém místě prostoru úměrná čtverci amplitudy doprovodných vln. Vlnová mechanika neumožňuje tedy stanovit jednoznačně okamžitou polohu každé jednotlivé částice; určuje jen pravděpodobnost, s jakou se částice vybraná namátkou vyskytne v daném místě.

Je ovšem samozřejmé, že úhrnná pravděpodobnost, že částice leží kdekoli v prostoru, je rovna 1 a že pravděpodobnost, že střed částice splyne s určitým geometrickým bodem, je nulová. Pravděpodobnost výskytu bude mít konečnou hodnotu jen pro určitou konečnou část prostoru a pro velmi malý prostorový prvek dV bude úměrná jeho velikosti:

$$7.1 (1) \quad dP = D(x, y, z) dV,$$

kde kladná funkce $D(x, y, z)$ je hustota pravděpodobnosti, jejíž průměrná hodnota se číselně rovná pravděpodobnosti, že střed částice leží v jednotkovém objemu.

Výsledky těchto úvah můžeme vyslovit větou: *Hustota pravděpodobnosti výskytu částice je úměrná čtverci amplitudy její doprovodné vlny.* Stanovíme-li tedy amplitudu doprovodných vln částice jako funkci polohy a času, můžeme říci, že se v daném místě a v daném okamžiku částice octne s takovou a takovou pravděpodobností. Vzhledem k tomu bylo by možno zvat de Broglieovy vlny *vlnami pravděpodobnostními* nebo *vlnami pravděpodobnosti*. Z toho plyne, že můžeme sice např. říci, kolik procent částic dopadne na tu nebo onu část plochy, nikoli však, které částice to budou, ani kde přesně najdeme některou vybranou částici. Ve vlnové mechanice je zvykem nazývat veličiny, jejichž hodnoty přesně neznáme a pro něž dovedeme stanovit jen pravděpodobnost, *hodnotami neurčitými* čili *neostrými*. Naproti tomu veličiny, jejichž velikost můžeme v daném případě přesně určit, zveme *určitými* čili *ostrými*. Skutečností, že některé veličiny jsou neurčité, liší se právě vlnová mechanika od klasického pojetí částice, což souvisí s tím, že přisuzuje částicím vlnový charakter. Tak nemůžeme např. ve svazku světelných paprsků určit polohu každého fotonu, známe však jeho energii i hybnost (podle frekvence). Podobně je tomu s polohou elektronu ve svazku katodových paprsků, jejichž energii určuje jednoznačně napětí na trubici. Tu je tedy energie i hybnost přesně známa, kdežto poloha je „neostrá“.

Může nastat také opačný případ, kdy poloha částice je dosti přesně známa, ale její energie je neostrá. Tak je tomu na příklad při nárazu elektronu na antikatodu, při němž vznikne impulsové záření X. Tu se vytvoří tzv. *vlnový shluk* neboli *vlnové klubko*, který má sice malé rozměry, obsahuje však množství frekvencí (vlnových délek). Známe tedy polohu každého fotonu v tomto vlnovém shluku, ale energie fotonů a hybnost jsou v jistých mezích neurčité.

Vylíčené skutečnosti vyjadřuje přesněji tzv. *Heisenbergův vztah*, který má ve vlnové mechanice všeobecnou platnost. Abychom tento nový princip kvantové fyziky čtenáři pokud možno přiblížili, zdůvodníme jej v jednoduchém zvláštním případě částice, kterou pozorujeme ve světle vlnové délky λ . V takovém světle můžeme polohu částice určit s chybou, která je dána rozlišovací mezí užitého přístroje. Podle 6.4 (23) je rozlišovací mezí řádově rovna vlnové délce λ . Osvětlíme-li však částici, abychom ji mohli pozorovat, dopadají na ni fotony, z nichž každý má podle 6.6 (7) hybnost

$$p_\nu = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Tím se změní hybnost p částice nejméně o hodnotu

$$\Delta p \approx p_\nu = \frac{h}{\lambda},$$

při čemž zároveň její poloha určená souřadnicí q je neurčitá v mezích daných délkou

$$\Delta q \approx \lambda.$$

Neurčitost Δq je tedy řádově rovna vlnové délce světla, v němž konáme pozorování, takže

$$\Delta q \cdot \Delta p \approx h.$$

Protože ve skutečnosti neosvětlíme částici jediným fotonem, je nutno předpokládat, že

7.1 (2)

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq h,$$

kde znaménko rovnosti přísluší jen teoreticky přípustnému meznímu případu. Poslední nerovnost, známá pod jménem Heisenbergův vztah nebo *princip neurčitosti*, vyjadřuje tento obecně platný poznatek:

Součin neurčitosti polohy a hybnosti částice je vždy větší než Planckova konstanta.

K stejnému výsledku bychom došli, kdybychom předpokládali, že částice sama svítí. Pak ji sice nemusíme osvětlovat, ale její hybnost se podle zákona akce a reakce změní o hodnotu p , při vyslání každého fotonu.

Je zajiště možno zvýšit přesnost určení polohy částice užitím krátkovlnného záření, ale pak se ve stejném poměru zvětší hybnost fotonů. Úvaha zůstává zřejmě v platnosti i pro pozorování elektronovým mikroskopem.

7.1.2. Schrödingerova rovnice

V předešlém článku jsme naznačili způsob, jakým vlnová mechanika sjednotila korpuskulární a vlnové vlastnosti částic. Nyní ukážeme, jak tato nová kvantová teorie řeší problém pohybu částic v silových polích. Vhodnou matematickou metodu vypracoval (r. 1926) Schrödinger, který vyšel ze základní de Broglieovy myšlenky a ukázal, že vlnová rovnice pro doprovozní vlny představuje fundamentální vztah moderní kvantové fyziky.

Pro šíření vln v prostoru platí obecná vlnová rovnice 3.2 (19)

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

kde vlnová funkce u závisí na souřadnicích x, y, z bodu na vlnoploše a na čase t . Označíme-li tuto funkci $\Psi(x, y, z, t)$, jak je zvykem ve vlnové mechanice, a fázovou rychlost vlny V místo c , dostaneme vlnovou rovnici ve tvaru

$$7.1 (3) \quad \nabla^2 \Psi = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2},$$

kde

$$7.1 (4) \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

je diferenciální operátor, který se často označuje Laplaceovým symbolem Δ .

Vlnová funkce Ψ závisí jak na souřadnicích, tak na čase. Je-li však vlna harmonická, můžeme funkci Ψ rozložit na součin dvou funkcí, z nichž jedna závisí pouze na souřadnicích, druhá jen na čase. Řešení rovnice 7.1 (3) lze psát pro harmonickou vlnu ve tvaru

$$7.1 (5) \quad \Psi = A e^{j(2\pi vt - \varphi)}, \quad j = \sqrt{-1},$$

kde A je amplituda, ν frekvence a φ fázový posuv vlny. Fázový posuv je obecně funkcí souřadnic, ale nezávisí na čase, takže výraz

$$7.1 (6) \quad \psi(x, y, z) = A e^{-j\varphi}$$

(7.1)

závisí jen na souřadnicích a nazývá se *amplitudová funkce (vlnová)*. Lze tedy psát Ψ ve tvaru součinu

$$7.1 (7) \quad \Psi = A e^{2\pi\nu j t} \cdot e^{-j\varphi} = \psi(x, y, z) \cdot e^{2\pi\nu j t}.$$

Pro funkci ψ plyne z 7.1 (3) rovnice, která neobsahuje již čas t jako čtvrtou proměnnou. Z poslední rovnice dostaneme parciální derivaci podle souřadnic a podle času

$$\nabla^2 \Psi = \nabla^2 \psi \cdot e^{2\pi\nu j t}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \psi e^{2\pi\nu j t} (2\pi\nu j)^2$$

a dosazením do vlnové rovnice 7.1 (3)

$$\nabla^2 \psi \cdot e^{2\pi\nu j t} = - \frac{4\pi^2\nu^2}{V^2} \psi \cdot e^{2\pi\nu j t}$$

čili

$$7.1 (8) \quad \nabla^2 \psi + \frac{4\pi^2\nu^2}{V^2} \psi = 0,$$

a užijeme-li vztahu $\lambda\nu = V$, máme rovnici

$$7.1 (9) \quad \nabla^2 \psi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi = 0.$$

To je známá „bezčasová“ vlnová rovnice pro amplitudovou vlnovou funkci $\psi(x, y, z)$, která se někdy nazývá *amplitudová rovnice*. Platí pro libovolné harmonické vlnění a můžeme ji užít i pro doprovodné vlny de Broglieovy. V tomto případě je třeba dosadit za λ ze vzorce 6.6 (18), čímž dostaneme

$$7.1 (10) \quad \nabla^2 \psi + \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2} \psi = 0.$$

Tato rovnice obsahuje však čtverec rychlosti částice, která je obecně časově proměnná, a to znemožňuje řešení metodami obvyklými u parciálních diferenciálních rovnic. Je-li však pohyb částice tak pomalý, že není třeba přihlížet k závislosti její hmotnosti m na rychlosti, můžeme pro její kinetickou energii užít klasického vzorce

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2.$$

Předpokládáme-li dále, že se částice pohybuje v konzervativním silovém poli, v němž má potenciální energii $W_p(x, y, z)$, je celková energie částice stálá:

$$W = W_k + W_p = \text{const.}$$

Upravíme-li tedy rovnici 7.1 (10) na tvar

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \cdot \frac{1}{2} m v^2 \psi = 0,$$

můžeme položit

$$\frac{1}{2} m v^2 = W - W_p.$$

Tak docházíme k nejjednoduššímu tvaru proslulé **Schrödingerovy rovnice**

7.1 (11)

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (W - W_p) \psi = 0,$$

kteřý platí pro částici hmotnosti m v konzervativním silovém poli. Lze ji ještě formálně zjednodušit, zavedeme-li konstantu

$$7.1 (12) \quad \hbar = \frac{h}{2\pi},$$

kteřá má význam *kvantové jednotky točivosti*. Tak dostaneme „bezčasovou“ Schrödingerovu rovnici

$$7.1 (13) \quad \nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (W - W_p) \psi = 0,$$

kteřá je základní rovnicí kvantové fyziky. Její význam je v tom, že převádí řešení fyzikálních problémů na matematickou úlohu řešení parciální diferenciální rovnice. Řešíme-li ji, dostaneme amplitudu de Broglievých vln jako funkci souřadnic, kteřá nás informuje o rozložení pravděpodobnosti výskytu částice v různých místech prostoru.

Podle předešlého článku je totiž hustota D pravděpodobnosti výskytu částice úměrná čtverci amplitudy ψ , ale konstanta úměrnosti není předem známa. Přece však je možno určit jednoznačně hustotu D , a to na základě jejího fyzikálního významu. Výraz 7.1 (1) dává pravděpodobnost dP , že střed částice leží uvnitř prostorového prvku dV , a integrál

$$P = \int_{V_\infty} dP = \int_{V_\infty} D dV,$$

vzatý přes celý prostor, je tedy roven pravděpodobnosti, že částice leží kdekoli v prostoru. To je ovšem jistota, takže

$$7.1 (14) \quad \int_{V_\infty} D dV = 1.$$

Položíme-li $D = \beta^2 \psi^2$, kde β je reálná nenulová konstanta, dostaneme

$$7.1 (15) \quad \int_{V_\infty} \beta^2 \psi^2 dV = 1.$$

Stačí tedy volit

$$\frac{1}{\beta^2} = \int_{V_\infty} \psi^2 dV,$$

aby podmínka 7.1 (14) byla splněna.

Avšak diferenciální rovnice 7.1 (13) je lineární a homogenní, a proto funkce ψ je určena až na stálého činitele. Je-li ψ řešením jmenované rovnice, je jím také součin $\bar{\psi} = a\psi$, kde a je konstanta. Zvolíme-li pak $a = \beta$, splňuje funkce $\bar{\psi}$ vzhledem k 7.1 (15) podmínku

$$7.1 (16) \quad \int_{V_\infty} \bar{\psi}^2 dV = 1,$$

kteřá se nazývá *normovací podmínka*. Řešení, kteřé ji splňuje, nazývá se *normovaná funkce*. Tato funkce je jediná a platí pro ni vztah

$$7.1 (17) \quad D = \bar{\psi}^2 \quad (\bar{\psi} = \beta\psi),$$

kteřým je rozložení pravděpodobnosti zcela určeno.

Řešení Schrödingerovy rovnice je obecně komplexní a pak ovšem je třeba místo čtverce funkce ψ vzít čtverec *absolutní hodnoty*

$$|\psi|^2 = \psi \cdot \psi^*,$$

kde ψ^* značí komplexní funkci sdruženou k ψ . Normovací podmínka pro toto komplexní řešení zní

$$7.1 (18) \quad \int_{V_\infty} \bar{\psi} \cdot \psi^* dV = 1,$$

a je-li splněna, platí pro hustotu pravděpodobnosti vzorec

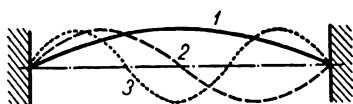
$$7.1 (19) \quad D = \bar{\psi} \cdot \psi^*.$$

Lze jej vyjádřit větou:

7.1 (20) *Hustota pravděpodobnosti výskytu částice je rovna čtverci absolutní hodnoty normované amplitudy de Brogliových vln.*

Tato věta platí pro reálné i komplexní řešení Schrödingerovy rovnice, která nám tedy v každém případě určuje rozložení pravděpodobnosti výskytu částice v prostoru.

Na začátku tohoto článku jsme uvedli, že Schrödingerova rovnice je základem moderní kvantové fyziky. Z dosavadního výkladu však není zřejmé, jakým způsobem může tato



Obr. (7.1) 2. Vlnová funkce pohybu částice mezi dvěma dokonale pružnými stěnami

rovnice vést ke „kvantování“ energie, které zavedl do fyziky Planck svou slavnou hypotézou o světelných kvantech (srov. čl. 6.5.2). Proto ukážeme na jednoduchém příkladu, že Schrödingerova rovnice vede sama ke kvantování energie, a to bez jakýchkoli dodatečných hypotéz.

Představme si částici, která se pohybuje mezi dvěma stěnami, na nichž se pružně odráží sem a tam [obr. (7.1) 2].

Vlnová funkce, která vyjadřuje tento pohyb a jejíž čtverec je úměrný hustotě pravděpodobnosti výskytu částice, musí mít na povrchu obou stěn nulovou hodnotu, neboť pravděpodobnost výskytu částice mimo prostor mezi stěnami je rovna nule. Stojaté vlny doprovázející pohyb částice musí tedy mít průběh naznačený na obr. (7.1) 2 vlnovkami 1, 2, 3 a příslušné vlnové délky λ vyhovují podmínce

$$n \frac{\lambda}{2} = L, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

kde L je vzdálenost mezi stěnami. Podle de Broglieova vzorce 6.6 (18) je tedy kinetická energie částice, pokládáme-li ji za klasickou,

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{h}{m\lambda} \right)^2 = \frac{h^2}{8ms^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Odtud plyne, že energie částice nemůže nabývat libovolných spojitě proměnných hodnot. Jsou dovoleny jen hodnoty energie úměrné čtvercům celých čísel $n = 1, 2, 3, \dots$. Podobné *kvantové podmínky* vyplývají pro energii i v mnoha dalších případech, požadujeme-li, aby řešení Schrödingerovy rovnice bylo všude spojitě a konečné. Požadavek spojitosti a konečnosti je zřejmě nutný, má-li řešení Schrödingerovy rovnice mít fyzikální význam. Proto takové řešení nazýváme *fyzikálním řešením* a hodnoty energie, pro které je řešení vskutku fyzikální, nazýváme *vlastními hodnotami*. Amplitudové funkce ψ , které při těchto hodnotách energie vyhovují Schrödingerově rovnici, se pak nazývají *vlastní funkce*. V příštích dvou článcích probereme dva základní problémy, u nichž vlnová mechanika vede naznačeným způsobem ke *kvantování energie*.

Je třeba upozornit, že toto kvantování není vždy oprávněno, jak ukážeme na triviálním příkladu pohybu volné částice. Se zřetelem k tomu, že na částici nepůsobí žádné síly, můžeme si úlohu zjednodušit předpokladem, že se částice pohybuje po přímce a že její kinetická i potenciální energie je konstantní. Můžeme tedy zvolit $W_p = 0$ a psát vlnovou rovnici ve tvaru

$$7.1 (21) \quad \nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} W \psi = 0.$$

Položíme-li pak osu x do směru pohybu částice, bude ψ pouze funkcí x a

$$\nabla^2 \psi \equiv \frac{d^2 \psi}{dx^2}.$$

Parciální rovnice 7.1 (21) přejde tak v obyčejnou diferenciální rovnici rovinné harmonické vlny

$$7.1 (22) \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \omega^2 \psi = 0, \quad \omega = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mW},$$

kteřá má řešení

$$\psi = C e^{\pm j \omega x}.$$

V obou směrech osy x se tedy mohou šířit doprovodné vlny, pro jejichž fázovou rychlost V plyne srovnáním rovnic 7.1 (8) a 7.1 (21) vztah

$$\frac{2\pi\nu}{V} = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mW}.$$

Grupová rychlost doprovodné vlny je tedy podle 6.6 (17, 17')

$$v = \frac{c^2}{h\nu} \sqrt{2mW} = \sqrt{\frac{2W}{m}}$$

a rovná se skutečně rychlosti částice, jejíž celková energie

$$W = \frac{1}{2} mv^2.$$

Rovnice 7.1 (22) má zřejmě fyzikální řešení pro všechny kladné hodnoty W , které jsou tedy vlastními hodnotami energie. Říkáme, že vlnová rovnice volné částice má *spojité spektrum* vlastních hodnot.

7.1.3. Lineární harmonický oscilátor

Lineárním harmonickým oscilátorem rozumíme částici, která koná harmonické kmity v přímce. Položíme-li do této přímky osu Ox , s jejímž počátkem $x = 0$ splývá střed částice v okamžiku průchodu rovnovážnou polohou, závisí síla působící na částici na její výchylce podle známého vztahu

$$F = -m\omega^2 x.$$

Přitom značí $\omega = 2\pi\nu$ úhlovou frekvenci částice a její potenciální energie, rovná záporně vzaté práci síly F ,

$$7.1 (23) \quad W_p = - \int_0^x F dx = \int_0^x m\omega^2 x dx = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$$

Schrödingerova rovnice 7.1 (11) přechází v tomto případě v obyčejnou diferenciální rovnici

$$7.1 (23') \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (W - 2\pi^2 m \nu^2 x^2) \psi = 0,$$

protože funkce ψ závisí jen na x . Jak ukážeme níže, má tato rovnice fyzikální řešení (všude spojitě a konečně) jen tehdy, když celková energie částice splňuje podmínku

$$7.1 (24) \quad W = \frac{1}{2} h\nu + n h\nu, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Tato rovnice určuje tedy vlastní hodnoty energie, které přísluší jednotlivým hodnotám celého čísla n . Tak vede vlnová mechanika bez dalších hypotéz ke **kvantování energie oscilátoru**, které je dáno tímto předpisem:

7.1 (25) *Celková energie lineárního harmonického oscilátoru se může měnit jen po celistvých násobcích kvanta $\varepsilon = h\nu$ a její nejmenší hodnota je rovna polovině tohoto kvanta.*

Tento závažný výsledek má všeobecnou platnost a musíme jej přijmout i pro elektromagnetické lineární oscilátory, které jsou zdrojem teplotního záření těles. Tak moderní kvantová teorie potvrzuje známou *Planckovu hypotézu* 6.1 (7) a doplňuje ji poznatkem, že energie oscilátoru nemůže klesnout na nulu. Tím se prakticky nemění platnost Planckova zákona o záření, ale nemožnost dosažení nulové energie oscilátoru má zásadní význam. Z hlediska kinetické teorie můžeme tento nový poznatek chápat jako podepření platnosti III. hlavní věty termodynamické, která nepřipouští dosažení absolutní nulové teploty, které by vyžadovalo úplné utlumení termických kmitů molekul.

Naznačíme jen stručně, jak přicházíme ke kvantování energie při řešení rovnice 7.1 (23'). Zjednodušíme ji substitucí

$$7.1 (26) \quad \xi = 2\pi \sqrt{\frac{m\nu}{h}} x,$$

z níž plyne

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{d\xi^2} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = 4\pi^2 \frac{m\nu}{h} \frac{d^2\psi}{d\xi^2},$$

takže

$$\frac{4\pi^2 m\nu}{h} \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{4\pi^2 m\nu}{h} \left(\frac{2W}{h\nu} - \frac{4\pi^2 m\nu}{h} x^2\right) \psi = 0$$

nebo

$$7.1 (27) \quad \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (K - \xi^2) \psi = 0, \quad K = \frac{2W}{h\nu}.$$

To je lineární diferenciální rovnice 2. řádu, jejíž součinitel u ψ není konstantní. Zkusme pro ni řešení

$$\psi_0 = C e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \quad C = \text{const.}$$

Derivací dostaneme

$$\frac{d\psi_0}{d\xi} = -\xi\psi_0, \quad \frac{d^2\psi_0}{d\xi^2} = -\psi_0 + \xi^2\psi_0 = (\xi^2 - 1)\psi_0.$$

Tato funkce vyhovuje tedy diferenciální rovnici

$$\frac{d^2\psi_0}{d\xi^2} + (1 - \xi^2)\psi_0 = 0,$$

kterou dostaneme z 7.1 (27), položíme-li $K = 2W/h\nu = 1$.

Zkusme dále složitější funkci $\psi_1 = C 2\xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$.

Její derivace jsou: $\frac{d\psi_1}{d\xi} = \left(\frac{1}{\xi} - \xi\right)\psi_1$ a $\frac{d^2\psi_1}{d\xi^2} = (\xi^2 - 3)\psi_1$.

Tato funkce vyhovuje tedy rovnici

$$\frac{d^2\psi_1}{d\xi^2} + (3 - \xi^2)\psi_1 = 0$$

plynoucí z 7.1 (27) pro $K = 2W/h\nu = 3$.

Obecně bychom došli k výsledku, že funkce

$$7.1 (28) \quad \psi_n = CH_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2},$$

v níž

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

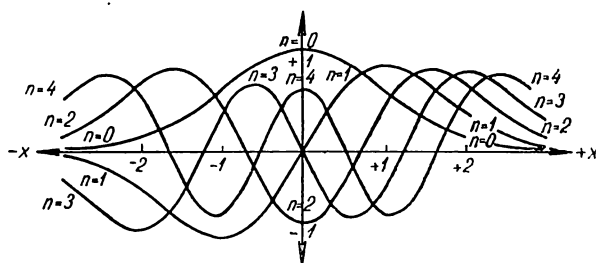
značí tzv. *Hermittův* polynom n -tého stupně, vyhovuje rovnici 7.1 (27) pro

$$K = \frac{2W}{\hbar\nu} = 2n + 1,$$

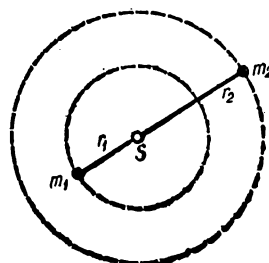
ve shodě s prve uvedeným vztahem 7.1 (24). Vlastní hodnoty 7.1 (28) funkce ψ obsahují neurčenou konstantu C , kterou však můžeme určit z normovací podmínky 7.1 (16). Pak každé vlastní hodnotě energie W_n přísluší jediná normovaná vlastní funkce

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt{\frac{4\pi m\nu}{\hbar}} H_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2}.$$

Průběh prvních pěti normovaných funkcí ψ_n pro $n = 0, 1, 2, 3, 4$ je podle Schrödingera znázorněn na obr. (7.1) 3.



Obr. (7.1) 3. Prvních pět normovaných vlastních funkcí lineárního harmonického oscilátoru



Obr. (7.1) 4. Rotátor

7.1.4. Kvantové stavy rotátoru

Mějme soustavu dvou částic (např. dvouatomovou molekulu) s hmotnostmi m_1, m_2 , které jsou pevně k sobě vázány tak, že jejich vzdálenost r je stálá [obr. (7.1) 4]. Tato soustava, která se může otáčet kolem libovolné osy, jdoucí jejím těžištěm S , se nazývá *tuhý rotátor*.

Vzhledem k tomu, že vzdálenosti r_1, r_2 obou částic od S splňují vztahy

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad r = r_1 + r_2,$$

lze celkový moment setrvačnosti rotátoru

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

psát ve tvaru

$$I = m_1 r_1^2 + m_1 r_1 r_2 = m_1 r_1 (r_1 + r_2) =$$

$$7.1 (29) \quad = \frac{m_1 r_1}{r_1 + r_2} r^2 = \frac{m_1 r_1}{r_1 + \frac{m_1}{m_2} r_1} r^2 = m^* r^2,$$

kde m^* je tzv. *redukovaná hmotnost* rotátoru, určená vztahem

$$7.1 (30) \quad m^* = \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{nebo} \quad \frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Při neproměnné vzdálenosti r je vzájemná potenciální energie částic stálá, a můžeme ji tedy volit rovnu nule. Pak je celková energie rotátoru rovna kinetické energii

$$W = W_k = W - W_p = \frac{1}{2} m^* r^2 \omega^2,$$

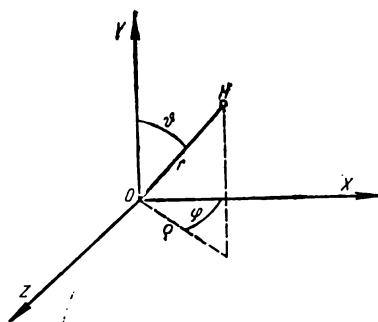
a Schrödingerova rovnice tedy zní

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m^*}{\hbar^2} W \psi = 0.$$

Nejjednodušší řešení bychom dostali, kdybychom pokládali osu otáčení rotátoru za pevnou v prostoru. Pak by měl rotátor jediný stupeň volnosti podobně jako lineární oscilátor.

Pro fyzikální aplikace je však důležité řešit problém tuhého rotátoru s volnou osou. K tomu je vhodno užít prostorových polárních souřadnic r, ϑ, φ , které podle obr. (7.1) 5 souvisí s pravouhlými souřadnicemi x, y, z známými vztahy

$$\begin{aligned} 7.1 (31) \quad x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \vartheta. \end{aligned}$$



Obr. (7.1) 5. Prostorové polární souřadnice

K sestavení Schrödingerovy rovnice pro amplitudovou funkci, vyjádřenou v polárních souřadnicích, potřebujeme především Laplaceův operátor

v těchto souřadnicích. Vzhledem k tuhosti rotátoru je tu ovšem $r = \text{const}$. Za této podmínky plyne z transformačních vztahů 7.1 (31) hledaná amplitudová rovnice ve tvaru

$$7.1 (32) \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\hbar^2} I W \psi = 0.$$

Z matematiky je však známo, že spojitě a konečně řešení má parciální diferenciální rovnice

$$7.1 (33) \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial S_l}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 S_l}{\partial \varphi^2} + l(l+1) S_l = 0,$$

kde l je nezáporné celé číslo.

Jejím řešením je tzv. *obecná kulová (sférická) funkce* S_l , tj. lineární kombinace funkcí

$$7.1 (34) \quad S_{l,m}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} P_l^m(\cos \vartheta),$$

kde

$$7.1 (35) \quad P_l^m(\cos \vartheta) = \sin^m \vartheta \frac{d^m P_l(\cos \vartheta)}{(d \cos \vartheta)^m}.$$

Při tom musí celá čísla m, l splňovat podmínky

$$7.1 (36) \quad 0 \leq |m| \leq l$$

a $P_l(\cos \varphi)$ značí *Legendrův polynom*, daný tzv. *hypergeometrickou řadou*

$$\begin{aligned} P_l(\cos \varphi) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2l-1)}{l!} \left[\cos^l \vartheta - \frac{l(l-1)}{(2l-1)} \cos^{l-2} \vartheta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2l-1)(2l-3)} \cos^{l-4} \vartheta - \dots \right]. \end{aligned}$$

Podstatné je, že rovnice 7.1 (32) má fyzikální (tj. spojitě a konečně) řešení jen tehdy, když má tvar 7.1 (33), tedy jen tehdy, nabývá-li energie některé z vlastních hodnot

$$7.1 (37) \quad W_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Přitom jsou l a m celá čísla, která nazýváme *kvantovými*. Ke každému kvantovému číslu l přísluší podle 7.1 (36) $2l+1$ hodnota kvantového čísla

$$m = -l, -(l-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (l-1), l,$$

a tedy každé vlastní hodnotě W_l přísluší $2l+1$ různých vlastních funkcí ψ . Fyzikální význam této skutečnosti je ten, že při každé dovolené energii W_l může osa rotátoru zaujmout ještě $2l+1$ různých poloh v prostoru, což vede k *prostorovému kvantování*.

V takovém případě jako u volného rotátoru, u něhož též vlastní hodnotě energie přísluší více než jedna vlnová funkce a který se v kvantové fyzice vyskytuje častěji, mluvíme o *degeneraci*. Znamená to, že obecně různé hladiny energie, příslušné několika různým vlnovým funkcím, splývají v jedinou; říkáme proto, že příslušná vlastní hodnota, a tedy i *energetická hladina, je mnohonásobná* [u volného rotátoru $(2l+1)$ -násobná]. Je zřejmé, že k takové degeneraci dochází obecně tehdy, když celkový počet stupňů volnosti je větší než počet *platných* stupňů volnosti, který se rovná počtu nezávislých parametrů, na nichž závisí energie.

Při degeneraci, kterou bychom česky nazvali nejlépe *splynutím energetických hladin*, můžeme získat další řešení amplitudové rovnice kombinací různých funkcí ψ , příslušných též energii. Jsou-li totiž ψ_a , ψ_b dvě takové funkce příslušné energii W , přesvědčíme se snadno, že amplitudové rovnici vyhovuje také funkce

$$7.1 (38) \quad \psi = \alpha\psi_a + \beta\psi_b,$$

kde α , β jsou konstanty reálné či komplexní. Podobný výsledek platí i pro lineární kombinace libovolného počtu vlnových funkcí příslušných též vlastní hodnotě energie.

7.2. Teorie elektronového obalu atomu

7.2.1. Vývoj teorií elektronového obalu atomu

V čl. 1.3.3 jsme načrtli základní vlastnosti planetárního modelu atomu, které odpovídají jednoduchým představám modelové teorie. V tomto úvodním článku se pokusíme vylíčit hlavní etapy cesty, kterou se ubíral vývoj atomové fyziky a kterými se budeme podrobněji zabývat v dalších článcích této kapitoly věnované elektronovému obalu atomu.

V nauce o elektřině a magnetismu jsme viděli, že z různých látek, zejména z kovů, je možno uvolňovat záporné elektrony, jejichž vlastnosti jsou nezávislé na látce, která je emituje. Naproti tomu se anodové záření skládá z kladných iontů, které mají různé velké náboje a různé hmotnosti velmi přibližně rovné hmotnostem neutrálních atomů příslušné látky. Se zřetelem k tomu, že elektrony jsou zhruba 2000krát lehčí než neutrální atomy nebo kladné ionty, je zřejmé, že atomy obsahují kladně nabitě částice, jejichž hmotnosti jsou mnohem větší než hmotnost elektronu. Prvním úkolem atomové teorie je tedy vytvořit představu o uspořádání kladných a záporných částic v neutrálním atomu. O jeho řešení se nejprve pokusil J. J. Thomson, který si představoval atom jako kouli stejnoměrně vyplněnou kladným nábojem, uvnitř které jsou rozmístěny záporné elektrony. Atom vydává elektromagnetické záření, které má původ v kmitavých pohybech elektronů. Rutherfordovy pokusy s rozptylem záření však ukázaly, že od tohoto statického modelu je třeba přejít

k planetárnímu modelu s těžkým kladně nabitým jádrem, k němuž jsou elektrostaticky poutány záporné elektrony.

Popíšeme jen stručně chování záření α při průchodu kovovou fólií a ukážeme, jaký význam má pro představu o složení atomů.

Neprostupnost se pokládá za základní vlastnost těles, kterou projevují jak pevné a kapalné látky, tak plyny. Přesto mohou jednotlivé molekuly difundovat rozhraním látek, což lze velmi dobře vysvětlit kinetickou teorií. Míšení látek difúzí je ovšem velmi pozvolné, neboť střední volná dráha l je u plynů velmi malá — řádu několika milióntin centimetru —, jak plyne ze vzorce 4.3 (28)

$$7.2 (1) \quad l = \frac{1}{\sqrt{2} \pi n_0 \delta^2},$$

kde δ je průměr molekul a n_0 jejich počet v objemové jednotce. Tento vzorec platí pro jakékoli (kulové) částice, tedy i pro atomy v kovu, pro které je řádově $\delta \approx 10^{-10}$ m, $n_0 \approx 10^{29}$. Tak vychází střední volná dráha atomu v kovu

$$l_{\text{kov}} \approx 10^{-10} \text{ m},$$

a proto probíhá difúze v kovech velmi zvolna. Naproti tomu je známo, že některé kladné ionty mohou pronikat látkami mnohem snáze než neutrální atomy nebo molekuly. Bylo to pozorováno zejména u částic α , o nichž Rutherford zjistil, že mohou proniknout pozlátkem tlustým 0,4 μm , tedy na vzdálenost 4 000krát větší, než by pronikl atom kovu mezi ostatními atomy. Přitom se jen asi jedna z 20 000 částic odchýlí o více než 90°. Částice α mohou tedy projít velkým počtem atomů, aniž podstatně změni svůj směr, což Rutherford vysvětlil představou, že kladný náboj je vázán na velmi malou částici, jejíž hmotnost se prakticky rovná hmotnosti atomu a kolem níž jsou seskupeny záporné elektrony. Tato částice se nazývá *jádro* atomu a elektrony tvoří jeho *elektronový obal*. Při průchodu mezi „lehkými“ elektrony se nezmění dráha mnohem těžší částice α . Teprve při těsném přiblížení k „těžkému“ jádru atomu se působením elektrostatické síly částice α odpudí a změní se znatelně její dráha.

Ukážeme, že velikost jádra můžeme odhadnout na základě známého jevu, že při průchodu částic α vzduchem činí dolet podle druhu radioaktivního nuklidu 2,5 až asi 9 cm. Srovnáme-li to s délkou střední volné dráhy molekul v plynech, vidíme, že *jádro* musí mít velmi nepatrné rozměry. Podle 7.2 (1) je střední volná dráha l nepřímo úměrná čtverci průměru molekuly δ . Stejný vztah platí ovšem i pro dráhu l_j jádra atomu o průměru δ_j , takže

$$7.2 (2) \quad \frac{\delta_j}{\delta} = \sqrt{\frac{l}{l_j}}.$$

Předpokládáme-li tedy, že se částice α při průchodu vzduchem odchýlí znatelně jen při srážce s atomovým jádrem a že jádra plynů tvořících vzduch mají zhruba stejný průměr δ_j jako částice α , můžeme δ_j vypočítat ze 7.2 (2), odhadneme-li velikost l_j . Ze známých snímků paprsků α ve Wilsonově mlžné komoře, která umožňuje přímo pozorovat stopy jejich drah ve vzduchu, je zřejmé, že z několika set drah sotva několik jeví změnu směru způsobenou srážkou s jádrem některého z atomů obsažených ve vzduchu. Je-li tedy pravděpodobnost, že např. při doletu 6 cm dojde k srážce s jádrem, rovna jedné setině, znamená to, že

$$l_j \approx 6 \text{ cm} \cdot 100 \approx 6 \text{ m}.$$

Jinak řečeno, kdyby částice α nebyly brzděny při průchodu vzduchem, uletěly by průměrně dráhu 6 m, než by se srazily s jádrem některého atomu. Dosadíme-li tedy do 7.2 (2) podle tab. (4.3) II $l \approx 6 \cdot 10^{-8}$ m, dostaneme

$$\frac{\delta_j}{\delta} \approx \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{-8}}{6}} \approx 10^{-4}.$$

Průměr jádra atomu je tedy zhruba 10 000krát menší než průměr atomu, což pro $\delta \approx 10^{-10}$ m dává $\delta_j \approx 10^{-14}$ m. Tato hodnota souhlasí s výsledky Rutherfordovými i jiných badatelů. Ukazuje se skutečně, že atomová jádra mají průměr 10^{-14} až 10^{-15} m. Tak dospěl Rutherford (r. 1911) k první zásadně správné představě o složení atomu, která je od té doby známa jako **Rutherfordův model atomu**:

Atom každého prvku je složen z jádra, v němž je soustředěna téměř veškerá hmotnost atomu a které nese celistvý počet kladných elementárních nábojů. Kolem jádra obíhají v eliptických drahách elektrony v takovém počtu, že atom je v celku elektricky neutrální.

Elektrony přitahované kladným jádrem podle Coulombova zákona se mohou udržet mimo jádro, jen pokud obíhají po eliptických drahách, na kterých je Coulombova síla v rovnováze se silou odstředivou. Z ryze mechanického hlediska jde o centrální pohyb stejného typu, jaký konají planety v gravitačním poli Slunce. Elektrony však mají náboj a při jejich periodickém pohybu vzniká periodicky proměnné elektromagnetické pole, jehož změny se šíří prostorem jakožto elektromagnetické záření. To je v soulase se známým poznatkem, že atomy vydávají záření, k čemuž je ovšem třeba jisté energie. Úbytek energie atomu se projeví tím, že elektrony se blíží jádru, až konečně jsou do něho strženy — atom je z hlediska klasické fyziky nestabilní [obr. (7.2) 1a]. Bližší rozbor ukazuje, že by mohl existovat jen po dobu kratší jedné mikrosekundy. Kromě toho by se při klesání elektronu k jádru spojitě zkracovala oběžná doba elektronu, a látka složená z nesmírného počtu atomů by tedy vydávala spojitě spektrum. To je v rozporu se známou skutečností, že atomy plyných prvků mají nespojitě čárové spektrum, kterou nelze vyložit spojitými procesy klasické fyziky. Je naopak nasnadě myšlenka, že nespojitost čárových spekter vyzařovaných volnými atomy souvisí s nespojitostí zářivé energie, vyjádřenou Planckovou kvantovou hypotézou. Správnost této myšlenky potvrdil další vývoj atomové teorie, která nastoupila novou úspěšnou cestu zásluhou Nielse Bohra.

Bohr (r. 1913) převzal Rutherfordovu představu planetárního modelu a podržel také klasickou podmínku rovnováhy mezi Coulombovou a odstředivou silou

$$7.2 (3) \quad \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r},$$

kde Z je počet kladných nábojů jádra (protonové neboli atomové číslo), m_e klidová hmotnost a v oběžná rychlost elektronu. Oprostil se však od některých předpokladů klasické fyziky a nahradil je novými předpoklady, které znamenají první aplikaci zásad kvantové fyziky v atomové teorii. Tyto nové předpoklady jsou vyjádřeny třemi *Bohrovými postuláty*:

I. Elektron může trvale kroužit kolem jádra jen v některé z kruhových drah, jejíž poloměr r splňuje rovnici 7.2 (3) a jednu z podmínek

$$7.2 (4) \quad 2\pi r m_e v = nh, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

kde h je Planckova konstanta. Celé kladné číslo n se nazývá *hlavní kvantové číslo* a dráhy splňující tuto podmínku se nazývají *kvantové dráhy* [obr. (7.2) 1b].

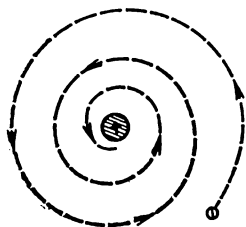
II. Pokud obíhá elektron v některé z kvantových drah, atom nezáří, jeho energie je stálá.

III. Při přechodu elektronu na jinou kvantovou dráhu, v níž má nižší energii, vyzáří atom foton, jehož energie se rovná úbytku energie elektronu. Naopak při absorpci fotonu přejde elektron na jinou kvantovou dráhu, na níž má energii vyšší o energii pohlceného fotonu.

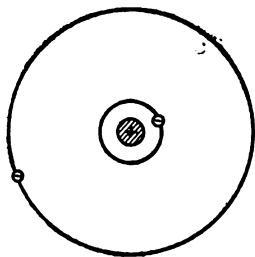
Jediné rozumné zdůvodnění Bohrových postulátů lze spatřovat v tom, že výsledky z nich plynoucí jsou ve velmi dobré shodě s pozorovanými spektrálními čarami, nehledíme-li k jejich *jemné struktuře*. Tato jemná struktura byla zjištěna v silných spektrografech, které ukazují, že každá ze spektrálních čar se skládá obecně z několika jemnějších čar velmi blízkých kmitočtů. Tak se ukázalo, že čáry vodíkového spektra nejsou jednoduché,

ale dvojité čili že jsou to těsné *dublety*. Stejnou jemnou strukturu mají spektrální čáry vyzařované atomy prvků prvního sloupce Mendělejevovy periodické soustavy. Spektrální čáry neutrálních atomů prvků druhého sloupce a čáry jednou ionizovaných atomů třetího sloupce jsou buď jednoduché (*singlety*), nebo trojitě (*triplety*).

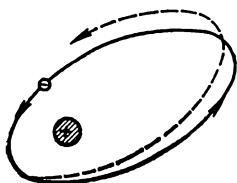
Jemnou strukturu spektrálních čar pokusil se vysvětlit Sommerfeld. Se zřetelem k tomu, že Coulombův a gravitační zákon mají stejný tvar, učinil předpoklad, že elektrony mohou obíhat kolem jádra v eliptických drahách podobně jako planety kolem Slunce. Očekával, že kvantování drah jednak co do velikosti (hlavní poloosy) jako v Bohrově teorii, jednak co do



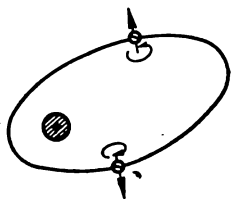
a — Rutherfordův planetární model (nestabilní) se spojitým spektrem (v rozporu s pozorováním)



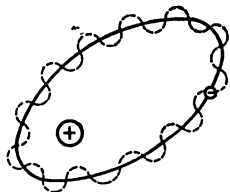
b — Bohrov model se stabilními kruhovými drahami (vysvětluje hrubou strukturu čárových spekter volných atomů)



c — Sommerfeldův model s elektrony obíhajícími po drahách tvaru růžice (částečné vysvětlení jemné struktury čar)



d — Uhlenbeckův—Goudsmitsův model s elektrony rotujícími kolem vlastní osy kolmé k rovině dráhy (nakresleny dva elektrony s opačnými spiny)



e — de Broglieův model s celistvým počtem doprovodných vln na obvodu elektronové dráhy

Obr. (7.2) 1. Hlavní etapy vývoje modelové teorie atomu

tvaru dráhy (excentricity) povede ke štěpení spektrálních čar, které při kruhových drahách jsou jednoduché. Toto kvantování provedl podle vzoru Bohrovy podmínky 7.2 (4), kterou vhodným způsobem zobecnil pro obě polární souřadnice r a φ elektronu vztahené k jádru atomu. Při tom zavedl kromě hlavního kvantového čísla n další kvantové číslo k a tato dvě celá čísla určovala v Sommerfeldově teorii hlavní a vedlejší poloosu a , b kvantových eliptických drah elektronů podle rovnice

$$7.2 (5) \quad a = n^2 a_1, \quad b = n k a_1,$$

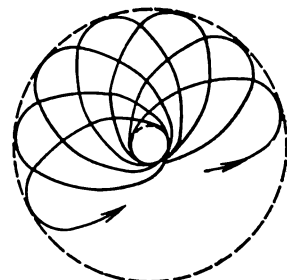
kde Sommerfeldovo číslo k splňuje podmínky

$$7.2 (6) \quad 1 \leq k \leq n.$$

Pak je vedlejší poloosa b skutečně nejvýše rovna hlavní poloose a pro $n = 1$ jsou obě rovny poloměru a_1 nejmenší možné kruhové dráhy.

Ukázalo se však, že sama eliptičnost elektronových drah nevede k štěpení čar na několika-násobné. Teprve užitím speciální teorie relativnosti na pohyb oběžných elektronů podařilo se Sommerfeldovi dosáhnout aspoň částečného vysvětlení jemné struktury. Závislost hmotnosti elektronu na jeho rychlosti způsobuje totiž stáčení hlavní osy eliptické dráhy,*) takže elektron opisuje kolem jádra dráhu ve tvaru „růžice“, znázorněné na obr. (7.2) 2 a (7.2) 1c. Energie elektronů na takových drahách jsou pak navzájem poněkud odlišné podle tvaru (excentricity) dráhy, i když mají tyto dráhy stejně velké hlavní poloosy. Tak se vysvětluje, že při přechodu elektronu na různé dráhy se stejnou hodnotou hlavního kvantového čísla n se vyzařují fotony s různou energií, a tedy i s různými kmitočty.

Snaha zjistit přesné zákonitosti čárových spekter prvků vedla k postupnému zdokonalování spektrografů, zejména k zvyšování jejich rozlišovací schopnosti. To umožnilo získání nových poznatků o spektrálních čarách, a tak byla atomová teorie postavena před nové obtížné úkoly. O mnohých ze spektrálních čar, které se dříve pokládaly za jednoduché, bylo např. prokázáno, že jsou to velmi těsné dublety, a tato dvojitost čar přivedla Uhlenbecka a Goudsmita na myšlenku, že elektrony v atomovém obalu konají kromě translačního pohybu po eliptických drahách také rotační pohyb kolem vlastní osy. Elektrony mají podle této představy kromě hybnosti také jistý moment hybnosti vzhledem ke středu jádra, který budeme nazývat jejich *dráhovou točivostí*. Vlastní rotace elektronu kolem jeho těžiště však dává elektronu ještě další točivost rovnou součinu jeho momentu setrvačnosti vzhledem k těžišti elektronu, která se nazývá *spinová točivost* nebo prostě *spin* elektronu. Je to vektor, který má směr rotační osy (úhlové rychlosti) elektronu. Spin se také často nazývá rotace elektronu (nebo jiné částice) kolem vlastní osy. Avšak obíhající i rotující elektron představuje uzavřený pohyb náboje a má podobně jako každá proudová smyčka jistý magnetický moment, a to jak *dráhový*, tak i *spinový* magnetický moment. První z nich stojí kolmo na rovinu oběžné dráhy a druhý má směr rotační osy elektronu. Jejich smysl je vždycky opačný než smysl úhlové rychlosti elektronu (záporného). Výsledkem obou těchto momentů jsou magnetická pole, takže rotující elektron má jistou energii v magnetickém poli ostatních oběžných elektronů. Aby vysvětlili dvojitost spektrálních čar, vyslovili Uhlenbeck a Goudsmit hypotézu, že *spin elektronu je kolmý k rovině jeho oběžné dráhy a má vždycky stejnou velikost*. Magnetický spinový moment je tedy buď souhlasně, nebo nesouhlasně rovnoběžný s magnetickým momentem dráhovým [obr. (7.2) 1d]. Při těchto dovolených spinech je



Obr. (7.2) 2. Růžice opísaná elektronem kolem jádra podle relativistické teorie Sommerfeldovy

*) Tento efekt plynoucí ze speciální teorie relativnosti se jeví podobně jako stáčení perihelu Merkura, které lze však kvantitativně vysvětlit jen obecnou teorií relativnosti (srov. čl. 2.9.7).

energie elektronu nepatrně rozdílná a podle toho elektrony s opačnými spiny při stejných kvantových přechodech vyzařují poněkud rozdílné spektrální čáry.

To byl významný, ale poslední úspěch modelové teorie atomů, která musela být konečně opuštěna a nahrazena dokonalejší teorií založenou na zásadách vlnové mechaniky. Než k ní přejdeme, upozorníme na zajímavý poznatek, že Bohrovy a Sommerfeldovy kvantové podmínky vyplývají dosti přirozeně ze základního vzorce pro délku de Broglieovy vlny

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Dosadíme-li odtud za $m_e v$ do 7.2 (4), dostaneme totiž výsledek

$$2\pi a = n\lambda,$$

který říká, že kvantové dráhy elektronu jsou dány podmínkou, že *obvod dráhy se rovná celistvému počtu doprovodných vln elektronu*.

Tato vlnově mechanická interpretace Bohrovy teorie, znázorněná na obr. (7.2) 1e, ukazuje pozoruhodnou souvislost Bohrových postulátů s moderní kvantovou fyzikou. I v tomto de Broglievě modelu atomu se elektron pokládá za částici, která obíhá po eliptické dráze kolem jádra. Jeho pohyb je provázen vlněním lokalizovaným na téže oběžné dráze, a proto je třeba i de Broglievu představu o atomu přiřadit k dřívějším modelovým teoriím. Je to zřejmé i z toho, že z ní plyne stejná struktura spekter jako z Bohrovy a Sommerfeldovy teorie.

Všechny uvedené představy o elektronovém obalu atomu jsou jen v částečné shodě se spektroskopickými poznatky. Nejen proto, že se jim nepodařilo plně vystihnout jemnou strukturu čar, ale nevedly k logickému odůvodnění tzv. *výběrových pravidel*, kterými je třeba doplnit tyto teorie, které připouštějí existenci mnoha čar, které nebyly ve spektrech atomů nikdy pozorovány. Nadto nejsou tyto teorie schopny podat informace o intenzitách jednotlivých čar, a konečně vedou v některých případech k rozporům se zkušeností.

Tyto závažné skutečnosti přesvědčily fyziky, že představy založené na pozorování makroskopických těles nejsou způsobilé k popisu mikrokosmu a že je třeba k výkladu dějů probíhajících uvnitř atomů vytvořit vhodné mikrofyzikální metody. Tyto metody si nemohou pochopitelně podržet stejný stupeň názornosti jako modelové teorie založené na makroskopických představách klasické fyziky a jejich zavedení znamená patrně definitivní odklon od konkrétních pojmů k abstraktním — matematicky definovaným — pojmům moderní fyziky.

Velmi užitečným nástrojem se při tom stala vlnová mechanika ve Schrödingerově pojetí, jehož hlavní zásady jsme uvedli v předešlé kapitole. Jak jsme tam ukázali, vede Schrödingerova rovnice ke kvantování energie, které je typickým jevem atomové fyziky. Zároveň však přechází od klasického popisu pohybu částice k stanovení hustoty pravděpodobnosti jejího výskytu v prostoru. Na této zásadě založili Schrödinger a Born model atomu, v němž se nepředpokládá, že elektron obíhá kolem jádra na přesně definované dráze, ale hledá se pouze vlnová funkce ψ , jejíž čtverec určuje hustotu pravděpodobnosti výskytu elektronu v různých místech v okolí jádra. Tak představují být elektrony v atomovém obalu lokalizovány a jejich polohy v prostoru jsou vymezeny jen statistickými zákony založenými na počtu pravděpodobnosti.

Schrödingerův—Bornův model atomu má některé nedostatky zejména v tom, že nevystihuje jemnou strukturu spektrálních čar ani tak dokonale jako model Uhlenbeckův—Goudsmitův. Znamená však podstatný pokrok atomové teorie, zejména proto, že připouští středově symetrické rozložení záporného náboje kolem jádra. „Kulový tvar“ atomu odpovídá mnohem lépe experimentálním poznatkům (i kinetické teorii plynů) než „plochý tvar“ spojený s představou rovinných oběžných drah elektronů. Největší význam vlnové mechanického pojetí elektronového obalu je však v tom, že se stalo východiskem nové —

velmi abstraktní, ale zároveň velmi úspěšné — *teorie Diracovy*, jejíž zásady jen stručně naznačíme.

Schrödingerova teorie určuje hustotu pravděpodobnosti výskytu elektronu na základě vlnové funkce, která je obecně komplexní, ale skalární veličinou. Dirac nahrazuje tuto skalární funkci (určenou v každém místě jediným komplexním číslem) souhrnem čtyř komplexních čísel, která definují tzv. *spinor*. Při tom zásadně pracuje s Einsteinovou relativnostní mechanikou, ale je třeba zdůraznit, že spinor není časoprostorovým vektorem, ačkoli má některé podobné vlastnosti jako „čtyřvektory“.

Pro spinor přiřazený vhodným způsobem elektronu předpokládá Dirac platnost parciální diferenciální rovnice obdobné vlnové rovnici Schrödingerově. Tím, že nahradil skalární vlnovou funkci elektronu spinorem, dosáhl Dirac obecného matematického vyjádření spinu elektronu, a tak se mu podařilo vytvořit úplnou teorii jemné struktury spektrálních čar bez jakýchkoli dodatečných hypotéz.

Vysoce abstraktní teorie Diracova byla později v některých podrobnostech zdokonalena, ale její matematický formalismus tím nedoznal podstatných změn. Dnes představuje tato teorie konečnou fázi fyziky elektronového obalu atomu. Princip Diracovy metody však se osvědčil jako velmi plodná obecná myšlenka, neboť jeho rovnice podřazuje (až na některé nepatrné rozdíly) platnost i pro jiné částice, pokud mají stejný spin jako elektron. Z vlastností Diracovy rovnice vyplynul velmi závažný teoretický důsledek, že ke každé částici by měla existovat příslušná *antičástice*, která se u nabitě částice liší především znaménkem náboje. Existence takových částic (antielektron = pozitron, antiproton, antineutron) byla později experimentálně prokázána, a proto je Diracova teorie přes svou vysokou abstraktnost všeobecně uznávána. Dodáváme, že tuto teorii rozšířil na částice s dvojnásobným spinem de Broglie, který zavedl spinor o 16 složkách.

Na přehledném obr. (7.2) 1 je znázorněn vývoj základních představ o elektronovém obalu atomu a v dalších částech této kapitoly pojednáme zevrubněji o jeho nejdůležitějších vlastnostech.

7.2.2. Bohrov model vodíkového atomu

Vyložíme Bohrovu teorii vodíkového atomu za nejjednodušších předpokladů: Budeme pokládat hmotnost elektronu za stálou (rovnou klidové hmotnosti m_e) a za velmi malou proti hmotnosti jádra (protonu), takže elektron obíhá kolem nehybného středu jádra. Při tom se omezíme na dráhy kruhové o poloměru a . Pak můžeme dosadit do rovnice rovnováhy mezi Coulombovou a odstředivou silou 7.2 (3) $Z = 1, r = a$. Pro oběžnou rychlost elektronu $v = a\omega$, která je stejně jako jeho úhlová rychlost ω stálá, plyne tedy podmínka

$$7.2 (7) \quad \frac{m_e v^2}{a} = m_e a \omega^2 = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 a^2}$$

čili

$$7.2 (8) \quad a = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 m_e v^2}.$$

Připojíme-li k tomuto vztahu rovnici 7.2 (4)

$$2 \pi a m_e v = n \hbar, n = 1, 2, 3, \dots,$$

která vyjadřuje I. Bohrov postulát, můžeme pro každou hodnotu hlavního kvantového čísla n vypočítat a i v . Tak dostaneme ze 7.2 (7,4)

$$7.2 (9) \quad v = \frac{e^2}{2 \epsilon_0 \hbar} \frac{1}{n}$$

a dosazením do 7.2 (8)

$$7.2 (10) \quad a = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2}{\pi m_e e^2} n^2.$$

Na této n -kvantové dráze obíhá elektron s frekvencí

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi a} = \frac{m_e e^4}{4\varepsilon_0^2 \hbar^3} \frac{1}{n^3}.$$

Označíme-li hodnoty předešlých veličin pro jednokvantovou dráhu indexem 1, dostaneme vztahy

$$7.2 (11) \quad a_1 = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2}{\pi m_e e^2} = 5,291 \cdot 10^{-11} \text{ m} \approx 0,53 \text{ Å}, \quad a = n^2 a_1;$$

$$7.2 (12) \quad v_1 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 \hbar} = 2,188 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 0,0074c, \quad v = \frac{v_1}{n};$$

$$7.2 (13) \quad f_1 = \frac{m_e e^4}{4\varepsilon_0^2 \hbar^3} = 6,579 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} = 2N, \quad f = \frac{f_1}{n^3} = \frac{2N}{n^3}.$$

Při tom značí

$$7.2 (14) \quad N = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 \hbar^3} = 3,290 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

tzv. *Rydbergův kmitočet*, který má v teorii atomových spekter základní význam. K určení frekvence spektrálních čar vysílaných atomem vodíku potřebujeme ještě znát celkovou energii W_n elektronu v n -kvantové dráze. Je součtem potenciální a kinetické energie elektronu. Potenciální energie náboje v libovolném místě elektrostatického pole je rovna potenciálu v tom místě násobenému nábojem. Pro záporný elektron bude tedy

$$7.2 (15) \quad W_p = -e \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Podle 7.2 (7) je kinetická energie

$$7.2 (16) \quad W_k = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a},$$

a tedy celková energie

$$7.2 (17) \quad W_n = -\frac{e}{8\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 \hbar^2} = -\frac{Nh}{n^2}.$$

Celková energie je tedy záporná, což souhlasí s tím, že proton a elektron se přitahují a že klademe potenciální energii v nekonečnu rovnu nule. S rostoucím n energie algebraicky roste, a proto má elektron na dráze s vyšším kvantovým číslem n větší energii než na dráze s nižším kvantovým číslem $s < n$. Podle 7.2 (11) jsou však poloměry kvantových drah úměrné čtverci hlavního kvantového čísla, a proto podle III. Bohrova postulátu vyšle elektron při přechodu ze vzdálenější n -kvantové dráhy na jádru bližší s -kvantovou dráhu foton s energií rovnou úbytku energie elektronu:

$$\varepsilon = h\nu = W_n - W_s = -\frac{Nh}{n^2} + \frac{Nh}{s^2}$$

čili

$$7.2 (18) \quad \nu = N \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Při tom n je kvantové číslo počáteční dráhy, v níž elektron kroužil před vysláním fotonu, a s je kvantové číslo konečné dráhy, do které elektron „spadl“ během záření. Atom září při přechodu elektronu z výšekvantové dráhy do nižekvantové, tj. podle 7.2 (10) nebo 7.2 (11) z větší (vzdálenější) dráhy do menší dráhy (bližší jádru). Obrácený přechod elektronu by nastal při absorpci fotonu.

Obíhá-li elektron na nejnižší stabilní dráze, má jeho energie nejmenší možnou hodnotu (vylučujeme pád elektronu do jádra). Říkáme, že atom je v *základním, normálním* či *nevzbuzeném stavu*. Aby mohl atom zářit, musí být vzbuzen, elektron musí vystoupit na vyšší dráhu. To se může stát např. právě popsanou *absorpcí fotonu* nebo *nárazem* látkové částice buď *neutrální* (atomu, molekuly za vyšší teploty), nebo částice *nabitě* (elektronu, iontu urychleného elektrickým polem).

7.2.3. Vodíkové spektrum a spektra podobná

Než přejdeme k výkladu o tom, jak předešlé výsledky souhlasí se spektroskopickým pozorováním, musíme upozornit na to, že kmitočty počítané ze 7.2 (18) souhlasily sice velmi dobře se známými hodnotami, ale měly přece pravidelné odchylky. Ukázalo se, že odchylky lze zhruba odstranit zdokonalením teorie v tom smyslu, že přihlížíme k *pohybu jádra*. Je totiž jasno, že také elektron přitahuje jádro, takže obě částice obíhají kolem společného těžiště. Tato úloha je už dávno řešena v nebeské mechanice a celkem snadným počtem vychází, že jednoduchá teorie s nehybným jádrem zůstává v platnosti s podmínkou, že nahradíme hmotnost elektronu *redukovanou hmotností* m^* , která je určena rovnicí 7.1 (30)

$$7.2 (19) \quad m^* = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{m_j}},$$

kde m_j značí hmotnost jádra. Nahradíme-li ve vzorci 7.2 (14) pro N hmotnost m_e hmotností m^* , dostaneme opravený Rydbergův kmitočet. Ve spektroskopii je však zvykem určovat spektrální čáry vlnočtem definovaným rovnicí 6.1 (3). Bude tedy Rydbergův vlnočet

$$7.2 (20) \quad R_\infty = \frac{N}{c} = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 c h^3} = 1,097\,37 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

příslušet nehybnému jádru, které by muselo mít ovšem nekonečně velkou hmotnost $m_j \rightarrow \infty$. Při konečné hmotnosti jádra bude však atom vysílat vlnočty dané „zlepšeným vzorcem Bohrovým“:

$$7.2 (21) \quad \sigma = R_{m_j} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = s + 1, \quad s + 2, \dots,$$

kde

$$7.2 (22) \quad R_{m_j} = \frac{m^* e^4}{8 \epsilon_0^2 c h^3} = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m_e}{m_j}}.$$

Pro vodík vzhledem k tomu, že podle tab. DÍ je poměr hmotnosti protonu ke hmotnosti elektronu

$$7.2 (23) \quad \frac{m_p}{m_e} = 1\,836,$$

dostaneme

$$7.2 (24) \quad R_H = \frac{R_\infty}{1 + \frac{1}{1\,836}} = \frac{R_\infty}{1,000\,544\,6} = 1,096\,78 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

Podle přesných spektroskopických měření má tato konstanta hodnotu

$$7.2 (25) \quad R_H = 10\,967\,758 \text{ m}^{-1},$$

odkud plyne výpočtem pro R_∞ experimentální hodnota

$$7.2 (26) \quad R_\infty = 10\,973\,731 \text{ m}^{-1}.$$

Vlnočty čar vyslaných vodíkem jsou tedy podle 7.2 (21) určeny vzorcem

$$7.2 (27) \quad \sigma = R_H \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = s + 1, \quad s + 2, \dots,$$

kde můžeme položit $s = 1, 2, 3, \dots$. Z toho je zřejmé, že čáry vodíkového spektra lze roztrždit do několika (teoreticky nekonečně mnoha) řad nebo sérií čar, z nichž každá je charakterizována pevným číslem s , které značí kvantové číslo stabilní dráhy, do které elektron sestoupí po vyzaření fotonu. Každá série je tedy souhrn čar, které odpovídají přechodu elektronu z libovolné vyšší dráhy do téže stabilní dráhy (s kvantovým číslem s). Tyto čáry leží mezi dvěma krajními čarami o vlnóčtech

$$7.2 (28) \quad \sigma_1 = R_H \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{(s+1)^2} \right),$$

$$7.2 (29) \quad \sigma_\infty = R_H \frac{1}{s^2},$$

kde σ_1 je vlnóčet první čáry a σ_∞ vlnóčet mezní čáry neboli hrany série (pro $n \rightarrow \infty$). Vzorec 7.2 (27) se shoduje s měřením se značnou přesností (asi 0,000 5 %), jak bylo zjištěno proměřením vodíkového spektra. Tabulka (7.2) I podává přehled známých sérií s roky jejich objevení. V druhém sloupci je uvedeno kvantové číslo jejich základní dráhy, v 3. a 4. sloupci vlnóčty první čáry a hrany každé série.

Tabulka (7.2) I

Série čar vodíkového spektra a jejich vlnóčty

Série	s	1. čára	Hrana
Lymanova r. 1914	1	82 303 cm ⁻¹ ultrafial.	109 737 cm ⁻¹ ultrafial.
Balmerova r. 1885	2	15 241 cm ⁻¹ červená	27 434 cm ⁻¹ ultrafial.
Paschenova r. 1909	3	5 335 cm ⁻¹ infračerv.	12 197 cm ⁻¹ infračerv.
Brackettova r. 1922	4	2 469 cm ⁻¹ infračerv.	6 858 cm ⁻¹ infračerv.
Pfundova r. 1924	5	1 341 cm ⁻¹ infračerv.	4 389 cm ⁻¹ infračerv.

Na obr. (7.2) 3 je vyznačena poloha čar nejstarší známé vodíkové série Balmerovy, který již r. 1885 vyjádřil její zákonitost vzorcem

$$\lambda = C \frac{n^2}{n^2 - 4}, \quad n = 3, 4, 5, \dots,$$

kde C je konstanta. Píšeme-li tento vzorec ve tvaru

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{4}{C} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right),$$

vidíme, že se Balmerova závislost shoduje se vzorcem 7.2 (27) pro $s = 2$. Na obr. (7.2) 4 jsou znázorněny přechody elektronů, které přísluší jednotlivým sériím tabulky podle

Bohrovy teorie. Poloměry kruhových drah rostou podle 7.2 (10) a 7.2 (11) úměrně se čtvercem kvantového čísla.

Tyto úspěchy jednoduché Bohrovy teorie byly později doplněny dalšími: Na základě vzorce 7.2 (22) byl r. 1932 objeven *těžký vodík* (*deuterium*). Urey, Brickvedde a Murphy zjistili totiž, že vodíkové čáry jsou provázeny slabšími čarami o vyšším vlnočtu, což lze podle 7.2 (21) vyložit tím, že některé atomy vodíku mají větší hmotnost než m_H . Kvantitativní shody s měřením se dosáhlo předpokladem, že vodík obsahuje také izotop o hmotnosti

$$m_D = 3,346 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \approx 2m_H,$$

takže podle 7.2 (24)

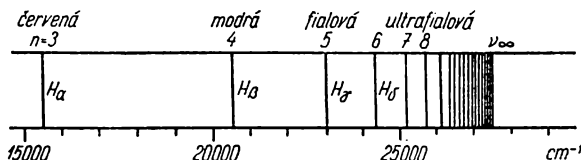
$$R_D = \frac{R_\infty}{1 + \frac{1}{2 \cdot 1836}} = 10\,970\,744 \text{ m}^{-1}.$$

Poměr množství obou izotopů $H : D = 4\,700 : 1$. Později byl objeven další izotop vodíku *tritium* o hmotnosti $3m_H$, který je mnohem vzácnější než těžký vodík, neboť na 10^8 atomů lehkého vodíku připadá jediný atom tritéria.

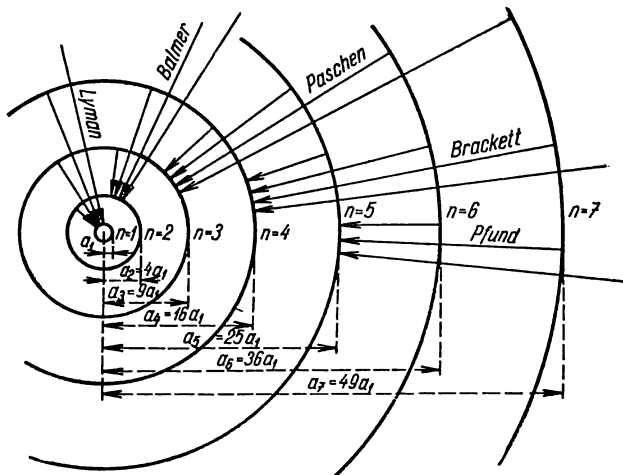
Všechny uvedené výsledky se týkají nejjednoduššího prvku, vodíku. Vyšší prvky, tj. prvky vyšší atomové váhy, jak je známe z periodické soustavy prvků, mají atomy složitější; přitom je protonové číslo Z zároveň pořadovým číslem prvku. V neutrálním stavu (pokud atom není ionizován) krouží kolem jádra Z elektronů. Problém uspořádání drah těchto elektronů je obtížný, ale není nesnadno zjistit na základě chemických a optických vlastností vyšších prvků určité zákonitosti platné pro jejich elektronový obal. Na tomto místě uvedeme, že některé prvky mají spektrum podobné struktury jako vodík, a to buď *obloukové spektrum* (vysílané neutrálními atomy), nebo *jiskrové* (vysílané atomy jednou nebo vícekrát ionizovanými). Tyto atomy nebo ionty podobné vodíku vysílají čárová spektra, pro jejichž vlnočty platí podobně jako pro vodík přibližný vzorec

$$7.2 (30) \quad \sigma = \frac{Z^2 R_\infty}{1 + \frac{m_e}{m_j}} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right) = Z^2 R_m \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

značí-li Z protonové číslo a m_j hmotnost jádra. Tak např. pro ionty He^+ ($Z = 2$, $A = 4$) plyne ze spektroskopických měření $R_{\text{He}} = (10\,972\,240,3 \pm 0,4) \text{ m}^{-1}$. Na základě této



Obr. (7.2) 3. Balmerova série



Obr. (7.2) 4. Kvantové přechody elektronů při emisi vodíkových sérií

teorie bylo rozpoznáno, že dvě známé série čar *Pickeringova* (r. 1897) a *Fowlerova* (r. 1912), přisuzované dříve vodíku, jsou částí heliového spektra; dostaneme je ze vzorce 7.2 (30) pro $s = 2$ a $s = 3$. První série, objevená původně ve spektru stálice ζ -Puppis, byla skutečně nalezena v jiskrovém spektru hélia.

Podobné série vysílá také Li^{++} ($Z = 3$) a Be^{+++} ($Z = 4$), které pozorujeme v jejich jiskrových spektrech. Naproti tomu obloukové spektrum Li má složení podobné jako vodík. A to platí všeobecně pro spektra neutrálních atomů alkalických kovů Na, K, Rb, Cs, které stejně jako H a Li jsou v prvním sloupci periodické soustavy. Lze to vyložit (jak uvidíme později) představou, že elektrony těchto atomů jsou tak uspořádány, že všechny, kromě jednoho, tvoří uzavřený útvar s výsledným nábojem $+e$ a kolem tohoto celku krouží zbývající (obvodový, optický) elektron, který se tedy chová zhruba jako elektron ve vodíkovém atomu. Vodíku podobná spektra byla dále pozorována u ionizovaných prvků dalších sloupců (např. Mg^+ , Al^{++} , Si^{+++}).

7.2.4. Schrödingerova—Bornova teorie atomu vodíku

Problém vodíkového atomu z hlediska vlnové mechaniky se redukuje na řešení Schrödingery rovnice pro elektron v elektrostatickém poli protonu. Ve vzdálenosti r od středu protonu má elektron podle 7.2 (15) potenciální energii

$$7.2 \text{ (31)} \quad W_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

a příslušná vlnová rovnice 7.1 (11) tedy zní

$$7.2 \text{ (32)} \quad \nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} \left(W + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0.$$

Při tom pokládáme elektron za klasickou částici se stálou klidovou hmotností m_e .

Obecné řešení parciální diferenciální rovnice druhého řádu 7.2 (32) je dosti složité a závisí podstatně na okrajových podmínkách, které vlnové funkce $\psi(x, y, z)$ předepíšeme. Některé jednoduché podmínky vedou také k jednoduchým řešením, která připouštějí snadnou fyzikální interpretaci. Proto probereme nejdříve jednoduché případy (A, B) a pak teprve přistoupíme k obecnému řešení (C).

A. Středově symetrické řešení dostaneme, předpokládáme-li, že vlnová funkce ψ závisí jen na vzdálenosti r elektronu od středu jádra. Snadným výpočtem shledáme, že v tomto případě vyhovuje rovnici 7.2 (32) vlnová funkce tvaru

$$7.2 \text{ (33)} \quad \psi = e^{-r/r_1},$$

jestliže

$$7.2 \text{ (34)} \quad r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}, \quad W = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = W_1.$$

K vlnové funkci 7.2 (33) dojdeme, položíme-li

$$\psi(x, y, z) = \psi(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Pak bude

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{d\psi}{dr}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{d\psi}{dr} + \frac{x}{r} \frac{d^2 \psi}{dr^2} \frac{\partial r}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \frac{d\psi}{dr} + \frac{x^2}{r^2} \frac{d^2 \psi}{dr^2}; \end{aligned}$$

derivace podle y a z budou obdobné. Podle 7.1 (4) tudíž

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi &= \frac{1}{r} \left(3 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \right) \frac{d\psi}{dr} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \frac{d^2\psi}{dr^2} = \\ &= \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr};\end{aligned}$$

dosazením do 7.2 (32) dostaneme rovnici

$$7.2 (35) \quad \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} \left(W + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0,$$

které vyhovuje exponenciální funkce

$$\psi = e^{-r/r_1},$$

je-li splněna podmínka plynoucí dosazením do 7.2 (35)

$$\frac{1}{r_1^2} - \frac{2}{r_1 r} + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} \left(W + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = 0.$$

To musí platit pro všechny hodnoty r , a proto se musí rušit zvlášť členy nezávislé na r a zvlášť členy obsahující r , tj.

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} W = 0, \quad -\frac{2}{r_1} + \frac{2\pi m_e e^2}{\epsilon_0 h^2} = 0.$$

Jaký je fyzikální smysl tohoto řešení? Především vidíme, že předpokládané souměrné řešení může splnit vlnovou rovnici jen tehdy, má-li celková energie elektronu zcela určitou hodnotu W_1 uvedenou v 7.2 (34). Je-li tomu tak, je pravděpodobnost jeho výskytu v objemovém prvku dV podle 7.1 (1,17)

$$dP = \bar{\psi}^2 dV = \beta^2 \psi^2 dV.$$

Avšak funkce 7.2 (33) má stejné hodnoty pro všechny body koule, opsané poloměrem r kolem středu jádra, takže pravděpodobnost, že elektron leží v kulové vrstvě tloušťky dr , bude

$$dP_k = \beta^2 \psi^2(r) \cdot 4\pi r^2 dr \sim r^2 e^{-2r/r_1} dr.$$

Průběh podílu dP_k/dr je naznačen na obr. (7.2) 5, z něhož je patrné, že má maximum pro $r = a = r_1$, jak plyne také snadným počtem.

Srovnáme-li hodnoty 7.2 (34) s výsledky 7.2 (11, 17) Bohrovy teorie, vidíme, že nejpravděpodobnější vzdálenost r_1 elektronu od jádra je délka poloměru a_1 jednokvantové dráhy kruhové a že hodnota energie W_1 souhlasí přesně s energií W_1 , kterou má elektron v tomto základním, nevzbuzeném stavu. Dosadíme-li známé hodnoty za m_e , e , h , ϵ_0 , dostaneme hodnotu

$$7.2 (36) \quad -W_1 = 13,60 \text{ eV},$$

která dobře souhlasí s experimentálně zjištěnou ionizační energií, potřebnou k odtržení elektronu od jádra. Proti „klasické“ kvantové fyzice je tu však podstatný rozdíl v tom, že pravděpodobnost výskytu elektronu ve vzdálenostech menších nebo větších než Bohrov poloměr je sice menší než pro tuto vzdálenost, ale přesně nulová je jen pro $r = 0$ a pro $r \rightarrow \infty$. Při dané celkové energii W , která je ovšem záporná, je vzdálenost elektronu „neostrá“, elektron se může vyskytnout s jistou pravděpodobností v libovolné vzdálenosti

od jádra. S rostoucí vzdáleností však potenciální energie klesá, a proto kinetická energie počítaná ze vztahu

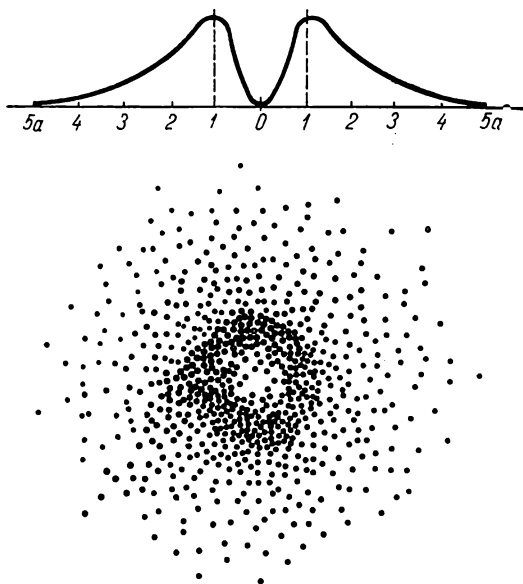
$$W_k = W - W_p$$

by pro dosti velké $r(> 2a_1)$ musela mít zápornou hodnotu. Proto je klasický elektron, obíhající kolem jádra s energií W , ve svém pohybu omezen *potenciální hradbou* (bariérou),

která mu brání překročit vzdálenost $\varrho = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 W}$, pro kterou $W_k = 0$. Naproti tomu vlnová mechanika připouští proniknutí této hradby s jistou konečnou pravděpodobností.

S touto skutečností souvisí tzv. *tunelový efekt*, známý především v jaderné fyzice.

Uvedený rozbor nejjednoduššího řešení amplitudové rovnice pro vodíkový atom ukazuje, že se vlnová mechanika v jistém smyslu méně liší od klasické fyziky než původní kvantová teorie Bohrova, která předpisovala elektronům jednoznačně určené ojedinelé dráhy, aniž byla schopna vyložit povahu nespojitého děje, kterým přechází elektron z dráhy do dráhy. Vlnová mechanika se s touto „klasickou“ kvantovou teorií shoduje v tom, že energie má zcela určité hodnoty, ale připouští, že se elektron může vyskytnout v libovolné vzdálenosti od jádra, ač ovšem s různě velkou pravděpodobností. I když všechny nevzbuzené vodíkové atomy mají stejnou energii, přece se mohou elektrony různých atomů vyskytovat v různých vzdálenostech od jádra. Při velkém množství atomů má ovšem nejvíce elektronů vzdálenost předepsanou Bohrovou teorií.



Obr. (7.2) 5. Rozložení pravděpodobnosti výskytu elektronů v atomu vodíku

Je třeba zdůraznit, že řešení 7.2 (33) není jediným symetrickým řešením vlnové rovnice 7.2 (32). Je jich nekonečně mnoho a každému z nich přísluší jedna z energií W_n daných vzorcem 7.2 (17) pro $n = 1, 2, \dots$

B. Vlnové funkce p jsou příkladem nesymetrického řešení rovnice 7.2 (32) a jsou **definovány** výrazy

$$7.2 (37) \quad \psi_x = xf(r), \quad \psi_y = yf(r), \quad \psi_z = zf(r),$$

kde funkce $f(r)$ splňuje jistou diferenciální rovnici, která pro ni plyne dosazením funkcí 7.2 (37) do Schrödingerovy rovnice. Funkce ψ_x, ψ_y, ψ_z se nazývají *vlnové funkce p* a jimi určené statistické rozložení elektronů je zhruba naznačeno na obr. 7.2 (6). Všechny tři vlnové funkce p jsou totiž rovny nule ve středu atomu a vymizí také v nekonečnu. Samozřejmě jsou prakticky nulové už v dosti malé vzdálenosti od jádra. Funkce ψ_x je kromě toho nulová v celé rovině YZ , a proto se rozprostírá hlavně podél osy X ; podobné rozložení vzhledem k zbývajícím osám mají i ostatní funkce. Statistické hustoty elektronů jsou tedy rozloženy podél tří k sobě kolmých směrů. Existence těchto tří význačných směrů funkcí p je důležitá pro vysvětlení tvaru molekul podle 7.2 (37).

C. Obecné řešení Schrödingerovy rovnice pro vodíkový atom se s výhodou vyjadřuje v prostorových polárních souřadnicích r, ϑ, φ , kterých jsme užili pro rotátor v čl. 7.1.4.

Tam jsme předpokládali, že rotátor je dokonale tuhý, a že tedy je průvodič r konstantní. Řešením Schrödingerovy rovnice je v tom případě obecná kulová funkce dvou proměnných $S_l(\vartheta, \varphi)$ daná lineární kombinací výrazů 7.1 (34). Průvodič elektronu vzhledem k jádru je ovšem obecně proměnný, a proto bude řešením rovnice 7.2 (32) funkce všech tří souřadnic.

Předpokládáme-li, že hledaná vlnová funkce $\psi(r, \vartheta, \varphi)$ je součinem dvou funkcí, z nichž jedna závisí jen na průvodiči a druhá jen na zbývajících proměnných ϑ, φ , že tedy

$$7.2 (38) \quad \psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \Theta(\vartheta, \varphi),$$

zjistíme, že rovnici vyhovíme, zvolíme-li za $\Theta(\vartheta, \varphi)$ některou z funkcí 7.1 (34). Učiníme-li tak, musí funkce $R(r)$ splňovat diferenciální rovnici

$$7.2 (39) \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[\frac{2m_e}{\hbar^2} \left(W + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi},$$

kde l je libovolné nezáporné celé číslo, které jsme zavedli v čl. 7.1.4. Řešení této rovnice se dá vyjádřit ve tvaru

$$7.2 (40) \quad R(\varrho) = e^{-\varrho/2} \varrho^l L_{n+l}^{(n+l)}(\varrho),$$

kde nová proměnná

$$\varrho = \frac{2}{\hbar} \sqrt{-2m_e W} \cdot r$$

a n je celé kladné číslo. Výraz $L_p^{(q)}(\varrho)$ značí q -tou derivaci tzv. p -tého *Laguerrova polynomu*

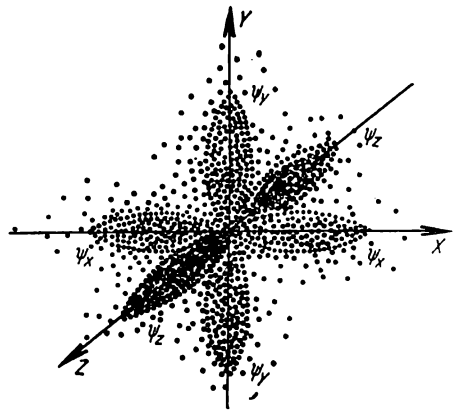
$$7.2 (41) \quad L_p(\varrho) = e\varrho \frac{d^p}{d\varrho^p} (\varrho^p \cdot e^{-\varrho}).$$

Ze 7.2 (40) vidíme, že $R(\varrho)$ závisí na hodnotě celého čísla n , které přistupuje ke dvěma kvantovým číslům l a m obsaženým ve zvolené funkci $S_{l,m}$. Dosazením do 7.2 (38) dostáváme tedy se zřetelem k 7.1 (34) vlnovou funkci závislou na třech kvantových číslech n, l, m

$$7.2 (42) \quad \psi_{n,l,m} = C_m P_l^{(m)}(\cos \vartheta) e^{im\varphi} e^{-\varrho/2} \varrho^l L_{n+l}^{(n+l)}(\varrho),$$

kde C_m jsou konstanty.

Vzhledem k tomu, že Schrödingerova rovnice je lineární homogenní, vyhovuje jí totiž každá lineární kombinace vlnových funkcí příslušných dovoleným hodnotám kvantových čísel n, l, m .



Obr. (7.2) 6. Prostorové rozložení vlnových funkcí p

7.2.5. Kvantové stavy atomů

V předešlém článku jsme shledali, že obecné řešení Schrödingerovy rovnice pro elektron v poli protonu obsahuje tři celistvá čísla n, l, m , která jsme podobně jako u rotátoru nazvali kvantovými čísly. Existence kvantových čísel ve vlnové mechanice je typická, ačkoli již v dřívějších modelových teoriích elektronového obalu byla tato čísla zavedena. V teorii Bohrově i Sommerfeldově bylo zavedení hlavního čísla n i vedlejšího čísla k do značné míry libovolné a teprve Schrödingerova—Bornova teorie postavila kvantování elektronového obalu na matematický základ. Tato teorie poopravila některé omyly starších teorií, jejichž názorné představy o eliptických drahách elektronů se nicméně nadále podřizují. Místo o kvantových stavech atomu se hovoří o kvantových drahách, ačkoli to někde znamená

rozpor této klasické představy se spektroskopickými poznatky. Jinak kvantová čísla modelových teorií souvisí jednoduchým způsobem s kvantovými čísly Schrödingerovy teorie. Bohrova *hlavnímu kvantovému číslu* n odpovídá stejně označené číslo zavedené ve výrazu 7.2 (40) a číslo l v témže výrazu se liší jen o jednotku od Sommerfeldova *vedlejšího čísla* k , které splňuje podmínku 7.2 (6). Položíme-li totiž

$$l = k - 1,$$

dostaneme

$$7.2 (43) \quad 0 \leq l \leq n - 1,$$

což je v souladu s tím, že podle 7.1 (37) musí být l nezáporné celé číslo. Konečně kvantové číslo m splňuje podmínky 7.1 (36)

$$7.2 (44) \quad 0 \leq |m| \leq l,$$

které jsme uvedli při výkladu o rotátoru, takže může pro každé l nabýt kterékoli z $2l + 1$ hodnot

$$7.2 (45) \quad m = -l, -(l-1), \dots, -1, 0, +1, \dots, l-1, l.$$

Číslo m určuje prostorové kvantování tuhého rotátoru a v atomové teorii se nazývá *magnetické kvantové číslo*, protože souvisí s názornou představou modelové teorie o „prostorovém

Obr. (7.2) 7. Zeemanův jev, pozorovaný na známém sodíkovém dubletu. Vznik kvartetu a sextetu je v soulase s kvantovou teorií

kvantování elektronových drah“ v magnetickém poli. Touto představou se totiž vysvětluje tzv. *Zeemanův jev*, který byl objeven už r. 1896. Projevuje se štěpením spektrálních čar na několik velmi blízkých složek působením magnetického pole na zářící atom. Obr. (7.2) 7 ukazuje Zeemanův jev pozorovaný na známém sodíkovém dubletu ve žluté části spektra. V horní části jsou obě jeho složky D_1 , D_2 (s vlnovými délkami 5 895,63 Å a 5 889,97 Å) bez magnetického pole. V dolní části je vlivem magnetického pole složka D_1 rozložena na 4, složka D_2 na 6 souměrně rozložených spektrálních čar. Modelová teorie vykládá Zeemanův jev tak, že v magnetickém poli zaujmou elektronové dráhy obecně $2l + 1$ různých poloh, v nichž mají dráhové magnetické momenty různé energie (jako různé orientované magnety). Proto se v magnetickém poli rozpadne původní jediná „energetická hladina“ na $2l + 1$ hladin. Přejedem elektronů na tyto různé hladiny vznikají tedy fotony s poněkud různými energiemi, a tak se původně jediná čára rozštěpí na několik čar. Způsob rozkladu popsala ve shodě s pozorováním teprve moderní kvantová teorie, která přihlíží také ke spinovým magnetickým momentům elektronů.

Jak jsme vyložili v čl. 7.2.1, je třeba předpokládat, že spin elektronu (jeho spinová točivost) má vždycky stejnou velikost a směr kolmý k rovině oběžné dráhy. To je v podstatě jistý druh kvantování, který lze vystihnout zavedením dalšího kvantového čísla. Z Bohrovy podmínky 7.2 (4) plyne, že dráhová točivost elektronu

$$7.2 (46) \quad b = m_e r v = n \frac{\hbar}{2\pi} = n\hbar, \quad n = 1, 2, \dots$$

Proto se konstanta 7.1 (12)

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

nazývá kvantová jednotka točivosti; ukazuje se, že spinová točivost elektronu je vždycky rovna právě polovině této jednotky. Spin elektronu je tedy

$$7.2 (47) \quad b_s = \pm \frac{\hbar}{2} = \pm \frac{h}{4\pi} = \dots,$$

kde znaménko $+$ značí směr souhlasný s dráhovým momentem elektronu a znaménko $-$ směr opačný. Můžeme tedy položit

$$7.2 (48) \quad b_s = s\hbar, \quad s = \pm \frac{1}{2}$$

a pokládat s za *spinové kvantové číslo*, které se ovšem od čísel n, l, m liší tím, že má jen dvě dovolené hodnoty, které nejsou celistvé. Avšak při přechodu od jednoho dovoleného spinu $+\hbar/2$ k druhému dovolenému spinu $-\hbar/2$ se číslo s mění rovněž o $+1$ nebo -1 jako ostatní kvantová čísla.

Právě uvedené poznatky o kvantování dráhové i spinové točivosti elektronů vedou logicky ke kvantování magnetických momentů, které podle modelové teorie přísluší točivosti elektronů. Budeme je nyní značit μ (místo m), jak je zvykem v atomistice. Pro podíl dráhového magnetického momentu μ a dráhové točivosti jsme odvodili výraz 5.8 (13)

$$7.2 (49) \quad \frac{\mu}{b} = -\frac{1}{2} \frac{e}{m_e},$$

z něhož vyplývá se zřetelem k 7.2 (46), že dráhový magnetický moment

$$7.2 (50) \quad \mu = -n \frac{e}{m_e} \frac{\hbar}{2} = -n\mu_B,$$

a je tedy celistvým násobkem jistého magnetického momentu, který má velikost

$$7.2 (51) \quad \mu_B = \frac{e}{m_e} \frac{\hbar}{2} = 0,927 \, 3 \cdot 10^{-23} \, \text{A m}^2$$

a nazývá se *Bohrův magneton*, protože podle Bohrovy teorie je to dráhový moment elektronu v jednokvantové dráze ($n = 1, l = 0$). Podle vlnové mechaniky je však dráhový moment elektronu s vedlejším kvantovým číslem l *)

$$7.2 (52) \quad \mu = \sqrt{l(l+1)} \mu_B.$$

Všechny kvantové stavy s $l = 0$ mají tedy nulový magnetický moment v soulase s chováním příslušných čar v magnetickém poli. Protože však podíl μ_s/b_s má pro spin dvojnásobnou hodnotu 5.8 (24)

$$7.2 (53) \quad \frac{\mu_s}{b_s} = -\frac{e}{m_e} = 2 \frac{\mu}{b},$$

plyne z 7.2 (48, 51), že

$$\mu_s = \pm \mu_B,$$

že tedy Bohrův magneton je vlastně velikost spinového magnetického momentu elektronu.

Shrneme-li předešlé poznatky, vidíme, že elektron v neutrálním vodíkovém atomu může být v různých kvantových stavech, které jsou zcela určeny čtyřmi kvantovými čísly: hlavním číslem n , vedlejším l , magnetickým m a spinovým s . Přitom má číslo n libovolnou kladnou celistvou hodnotu a čísla l, m, s splňují podmínky 7.2 (43, 44, 48).

Uvedené výsledky se týkají vodíkového atomu, avšak již v čl. 7.2.3 jsme shledali, že některé složitější atomy, s větším počtem elektronů, vyzařují podobná spektra jako atom vodíku, což si v dalším výkladu vysvětlíme. Obecně je teorie elektronového obalu složeného z mnoha elektronů velmi nesnadná, protože je třeba při ní vzít zřetel k vzájemným vlivům

*) Srovnej činitele $l(l+1)$ ve Schrödingerově rovnici 7.2 (39) pro vodíkový atom.

jednotlivých elektronů, které jsou součástí elektronového obalu téhož atomu. Existuje však jistý obecně platný poznatek, který vyjadřuje jednu závažnou vlastnost vzájemného působení elektronů, která rozhoduje o uspořádání elektronů v tzv. *základním* stavu všech atomů.

Základním stavem rozumíme takový kvantový stav, který atom přenechaný sám sobě trvale podržuje. Je to zřejmě stav s minimální možnou energií, protože ke změně takového stavu je třeba dodat atomu nějakou (kladnou) energii, aby mohl přejít do některého „vyššího“ kvantového stavu, v němž má větší energii. U vodíkového atomu je základním čili nevzbuzeným stavem zřejmě jednokvantový stav, charakterizovaný čísly $n = 1$, $l = 0$, $s = \frac{1}{2}$, v němž má elektron nejmenší energii. Tato úvaha platí ovšem i pro atomy s libovolným počtem elektronů: Kdyby byly všechny jeho elektrony v jednokvantovém stavu, měl by atom skutečně nejmenší energii.

Ukazuje se však, že atomy nemohou tohoto absolutního minima energie dosáhnout. Kdyby tomu tak bylo, mohly by všechny elektrony současně zaujmout jednokvantový stav (mohly by podle modelové teorie obíhat všechny na téže jednokvantové dráze) a pak by všechny atomy měly patrně průměr rovný dvojnásobnému Bohrovu poloměru. Uvidíme dále, že velikost atomů narůstá s počtem oběžných elektronů podle jistých zákonitostí, z čehož usuzujeme, že týž kvantový stav nemůže být obsazen libovolným počtem elektronů. O tom platí velmi jednoduchý předpis, který se nazývá

7.2 (54) Pauliův vylučovací princip: *V jednom atomu může mít kterýkoli kvantový stav jen jediný elektron.*

Jinak řečeno: *V jednom atomu nemohou mít dva elektrony současně všechna čtyři kvantová čísla stejná.*

V modelové teorii nabývá Pauliův princip velmi názorného významu: *V téže dráze mohou současně obíhat nejvýše dva elektrony s opačnými spiny.*

Pauliův princip vylučuje tedy, aby všechny elektrony byly zároveň v jednokvantovém stavu, a je zřejmé, že základní stav libovolného atomu je definován podmínkou:

V základním stavu má atom nejmenší energii ze všech stavů dovolených vylučovacím principem.

Se zřetelem k názornosti, s jakou je vyjádřen Pauliův princip v modelové teorii, přidržme se nadále představ této teorie. Víme, že všechny kvantové dráhy, které mají společné hlavní kvantové číslo n , mají stejně velké hlavní poloosy. Můžeme tedy říci, že tyto dráhy mají stejnou velikost, že tvoří jakousi vrstvu blízkých drah. Proto říkáme, že všechny n -kvantové dráhy tvoří n -tou *slupku* (nebo *sféru*) atomu. Elektronové slupky značíme po řadě velkými písmeny $K, L, M, N, O, P, Q, \dots$ a nejvýše přípustný počet elektronů v libovolné slupce je zřejmě dán počtem navzájem různých kvantových čísel l, m, s příslušných zvolenému n . Spinové číslo s může vždycky mít jen dvě různé hodnoty ± 1 , kdežto magnetické číslo m může nabýt pro každé l celkem $2l + 1$ hodnot 7.2 (45). Celkový počet různých kombinací hodnot l, m, s dostaneme tedy podle 7.2 (43), když utvoříme součet aritmetické řady o n členech

$$7.2 (55) \quad \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n \frac{1+2(n-1)+1}{2} = 2n^2.$$

Největší možný počet elektronů v n -té slupce je tedy $2n^2$, přičemž každá kvantová dráha je obsazena dvěma elektrony s opačnými spiny. Plné obsazení jednotlivých slupek uvádíme v tab. (7.2) II.

V základním čili nevzbuzeném stavu krouží 2 elektrony v jednokvantové dráze, 8 elektronů ve dvoukvantových drahách, 18 v trojquantových atd. Žádný další elektron nemůže na obsazené místo sestoupit, a proto atom nemůže zářit, pokud se některé místo nevlní.

To se může stát nárazem jiné částice — např. atomu téhož prvku (*buzení nárazem*). Tím si vysvětlujeme, že látky za vyšší teploty září. Je-li energie termických pohybů postačující k vysunutí některého elektronu na vyšší dráhu, vyše atom foton, jakmile týž nebo jiný elektron přejde do uprázdněné dráhy. Podobně může být atom vzbuzen *absorpce fotonu* o dostatečné energii.

Tabulka (7.2) II

Nejvyšší dovolené obsazení prvních šesti elektronových slupek

7.2.6. Soustava chemických prvků

R. 1869 sestavil ruský chemik *Mendělejev* tehdy známé prvky podle stoupajících atomových hmotností do tzv. *periodické soustavy*, která je uvedena v tab. D II, ovšem v pozmeněném stavu. Shoduje se to s novějším poznatkem, že je třeba řadit prvky podle atomového čísla Z , rovného počtu protonů v jádře, nikoli podle atomové hmotnosti. Vznikly tím jen málo významné přesuny asi 4 dvojice sousedních prvků, ale podstatné je, že tento způsob je úplně jednoznačný. Na jakém experimentálním základu lze určit protonová čísla různých prvků?

Hlavní číslo n	Počet drah n^2	Počet elektronů $2n^2$	Slupka
1	1	2	<i>K</i>
2	4	8	<i>L</i>
3	9	18	<i>M</i>
4	16	32	<i>N</i>
5	25	50	<i>O</i>
6	36	72	<i>P</i>

Pro ionizované prvky, které byly zbaveny všech elektronů kromě jednoho, platí rovnice 7.2 (30), z nichž plynou vlnočty čar, které tyto ionizované prvky vysílají. Nepřihlížíme-li pro jednoduchost k malému posunutí čar vlivem vychýlení jádra, kterého u těžších prvků není třeba dbát, můžeme pro tyto prvky položit $R_1 = R_\infty$ a z rovnice 7.2 (30) dostaneme pro poměr vlnočtů čar téže serie vysílané dvěma různými prvky

$$\varrho_1 : \varrho_2 = Z_1^2 : Z_2^2.$$

Vlnočty stejnohlých čar jsou tedy úměrné čtvercům protonových čísel. U vyšších prvků není snadno zbavit jádro všech elektronů kromě jednoho. Ukázalo se však, že i pro tyto prvky jsou vlnočty dány vzorcí podobnými rovnici 7.2 (30), a z hořejší úměry je zřejmé, že mnohé z nich jsou řádově tisíckrát vyšší než u vodíku a odpovídají vlnočtům záření *X*. Moseley (r. 1913 a 1914) studoval charakteristické rentgenové záření prvků a zjistil obeenou platnost vztahu

$$7.2 (56) \quad \sqrt{\frac{\varrho}{R_1}} = \text{const} (Z - k),$$

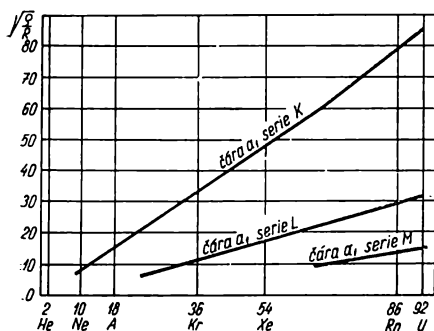
který vyjadřuje *Moseleyův zákon*. Liší se od 7.2 (30) tím, že číslo Z je zmenšeno o jistou hodnotu k , která se nazývá *odstiňovací konstanta*.

Tato konstanta má různé hodnoty pro různé série. Tak pro série *K* odpovídající vodíkové sérii Lymanově (elektrony přestupují do jednokvantových drah) je $k = 1$ a pro série *L* odpovídající sérii Balmerově (přeskoku do dvoukvantové dráhy) je $k = 7.4$. Hodnoty konstanty k jsou tím vyšší, čím vyšší je základní dráha série. Vysvětlujeme si to tím, že elektrony, které obíhají mezi jádrem a základní drahou, odstíňují (odelánějí) elektrické pole jádra a tím zdánlivě zmenšují jeho kladný náboj.

Geometricky je zákon 7.2 (56) znázorněn Moseleyovými přímkami, které jsou pro první čáry tří sérií *K*, *L*, *M* nakresleny na obr. (7.2) 8. Z pozorovaných spekter paprsků *X* se tedy dá přímo určit protonové číslo Z prvku, tj. jeho pořadové číslo v periodické soustavě.

V tab. D II je před značkou prvku uvedeno jeho pořadové číslo Z a pod ním relativní atomová hmotnost prvku. Postupujeme-li od nejnižšího prvku k nejvyššímu, nezjišťujeme

u nich stále nové a nové chemické vlastnosti. Naopak vlastnosti prvků se postupně opakují, a proto je Mendělejev sestavil do dvojrozměrné tabulky, která má 7 period a 9 grup. Tím dosáhl toho, že chemické vlastnosti prvků se v každé periodě mění stejným způsobem mezi prvním a posledním prvkem periody, takže prvky stejných vlastností stojí pod sebou v téže sloupci tabulky a tvoří jednu z grup. Prvky téže grupy mají stejné mocenství (valenci), a to



Obr. (7.2) 8. Moseleyovy přímky

co do velikosti i co do znaménka (kladná valence — kyslíková — platná pro slučování s vodíkem a ostatními kladnými ionty). Tak v I. grupě jsou prvky s kladnou jednotkovou valencí (H a monovalentní kovy), v II. grupě prvky kladně dvojmocné atd. až do IV. grupy. Následující prvky v 2. a 3. periodě jsou záporně trojmocné, dvojmocné a jednomocné. V dalších periodách, které mají více prvků, dosahuje mocenství čísla 7 až 8. Všechny periody končí nultou grupou, v níž stojí nad sebou prvky s „nulovou“ valencí, které netvoří sloučeniny s jinými prvky s výjimkou fluóru.*) Jsou to tzv. *vzácné* (netečné, inertní) *plyny*, jejichž molekuly jsou vesměs jednoatomové (He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn).

Jak lze tato fakta vysvětlit atomovou teorií a jaké důsledky z nich plynou pro naše představy o atomech, odvozené z výzkumů spektroskopických? Již v první polovině minulého století vyslovil Berzelius názor, že síly mezi atomy tvořícími molekulu jsou síly elektrické, kterými se přitahují ionty opačných nábojů. Avšak teprve Bohrova teorie atomů umožnila exaktní formulaci Berzeliovy myšlenky. Kossel (r. 1916) založil svou teorii valencí na zjištění, že vzácné plyny, které prakticky nemají schopnost tvořit molekuly, leží vesměs v nulté grupě, a uzavírají tak každou ze sedmi period soustavy prvků. Z toho je nutno usuzovat, že není snadné jejich atomy ionizovat, a že tedy v neutrálním stavu jsou to velmi stabilní, pevné soustavy. Každý z těchto atomů obsahuje Z elektronů, o nichž musíme proto předpokládat, že jsou velmi pevně vázány k jádru, je-li jejich počet roven pořadovému číslu těchto plynů:

$$7.2 \text{ (57)} \quad Z = 2 \text{ (He)}, 10 \text{ (Ne)}, 18 \text{ (Ar)}, 36 \text{ (Kr)}, 54 \text{ (Xe)}, 86 \text{ (Rn)}.$$

Z tabulky D II nebo prostě z rozdílů dvou sousedních čísel 7.2 (57) dostaneme tabulku (7.2) III, která udává počet prvků v prvních šesti periodách.

Tabulka (7.2) III

Počet prvků v prvních šesti periodách Mendělejevovy soustavy

Perioda	1	2	3	4	5	6
Počet prvků	2	8	8	18	18	32

Srovnajme tyto výsledky s teorií elektronových drah založenou na spektroskopii. V předešlém odstavci jsme došli k výsledku, že počet n -kvantových elektronů je roven podle

*) Ačkoli L. Pauling již r. 1933 předvídal možnost sloučenin KrF_6 a XeF_6 , podařilo se první sloučeninu se vzácným plynem prokazatelně vyrobit teprve r. 1962. Dnes jsou známy stále fluoridy XeF_2 , XeF_4 , XeF_6 a XeOF_4 , kdežto obdobné sloučeniny KrF_2 a KrF_4 , vyrobené za teploty kapalného vodíku, jsou za pokojové teploty nestálé. Existence těchto sloučenin není v rozporu s Kosselovou teorií iontové vazby, neboť se dá vyložit kovalentní vazbou podobně jako existence homopolárních molekul (viz konec čl. 7.3.3).

7.2 (55) $2n^2$. Hořejší tabulka (7.2) III ukazuje zřejmou obdobu s tabulkou (7.2) II obsazení elektronových slupek. Jejich srovnáním plyne, že He má v základním stavu plně obsazenou sféru K a neón má plně obsazené sféry K a L . K plnému obsazení sféry M bylo by třeba 18 elektronů, kdežto k argonu dojdeme připojením pouhých 8 elektronů. Z toho soudil Kossel, že k dosažení stabilní soustavy elektronů není u vyšších prvků třeba plného obsazení trojquantové sféry M ; elektrony netvoří stabilní útvar teprve, když jsou plně obsazené všechny dráhy pro $l = 0, 1, 2$, nýbrž jsou-li obsazené jen dráhy příslušející $l = 0$ a $l = 1$. Pro dráhu $l = 0$ má magnetické číslo m podle 7.2 (45) jedinou hodnotu a pro dráhy $l = 1$ tři hodnoty $m = -1, 0, +1$. Každá z těchto 4 drah může být obsazena 2 elektrony se spinem $+1/2$ a $-1/2$, což dává celkový počet 8 elektronů. Pro kvantové dráhy se užívá označení, které bylo převzato ze spektroskopie a které uvádíme v tab. (7.2) IV.

Tabulka (7.2) IV

Spektroskopická označení drah prvních 4 elektronových slupek

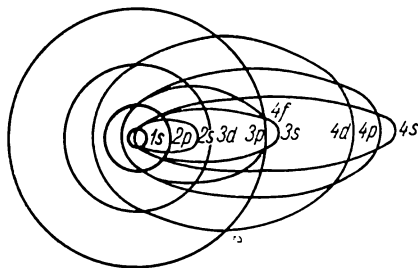
n	1		2		3			4			
l	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	
Označení dráhy	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f	

Písmena s, p, d, f jsou začáteční písmena spektrálních sérií vysílaných alkalickými prvky: s (sharp) značí tzv. ostrou sérii, p (principal) tzv. hlavní sérii, d difúzní, f fundamentální sérii. Jednotlivé čáry těchto sérií vzniknou totiž přeskokem elektronů z vyšších drah do dráhy označené odpovídajícím písmenem. Na obr. (7.2) 9 jsou tyto dráhy narysovány ve správné poměrné velikosti.

Podobně je tomu i v dalších periodách prvků a pro další elektronové slupky. Někdy se u následujícího prvku začne budovat další slupka, ačkoli předešlý prvek nemá ještě plně obsazenou nižší slupku. Těmito otázkami se nemůžeme blíže zabývat. Odkazujeme proto na tabulku D III, která udává počet elektronů v jednotlivých drahách atomů prvků v základním stavu. Názorně je patrné obsazení prvních 3 slupek K, L, M a začátek slupky N na obr. (7.2) 10, kde je ovšem jen schematicky naznačeno uspořádání elektronů prvních 26 prvků. Dráhy elektronů v atomu vápníku 20Ca odpovídají právě obr. (7.2) 9 a jsou obsazené vždy dvěma elektrony s opačnými spiny.

Obr. (7.2) 10 je spíše jen grafické znázornění části tabulky D III, na němž vyložíme některé chemické vlastnosti lehčích prvků.

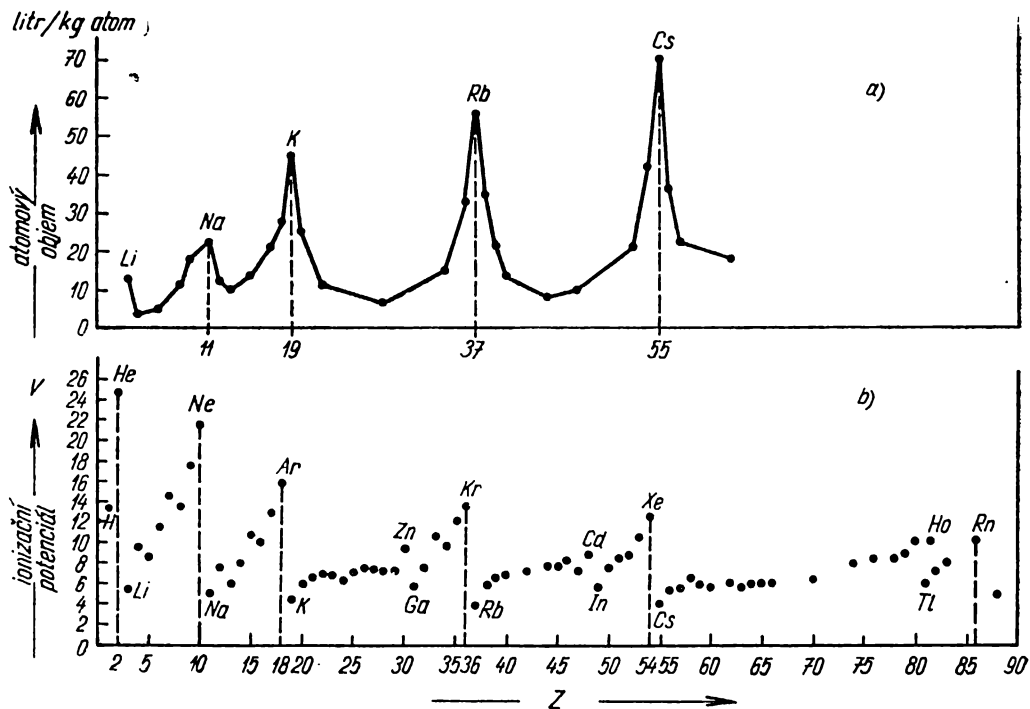
Z chemie je známo, že neutrální atom nereaguje, jen ionty se mohou slučovat v molekuly působením přitažlivých sil elektrických. Tvoření iontů si vysvětlujeme tím, že elektrony v neúplné slupce jsou tím slaběji poutány k jádru, čím méně jich je, a stabilita slupky vzrůstá, blíží-li se plnému obsazení. Z toho soudíme, že atom snadno ztrácí elektrony, pokud není jeho vnější slupka ani z poloviny obsazena; naopak může atom připoutat další elektrony, má-li v neutrálním stavu přes polovinu elektronů ve vnější slupce. Jinak řečeno: Ion vznikne z neutrálního atomu tím, že se změní počet jeho elektronů tak, aby elektronový obal dosáhl nejbližší stabilní konfigurace. Elektronům v úplných slupkách říkáme *vnitřní*, elektronům v neúplné slupce *obvodové*, též *optické* nebo *valenční*, ježto jejich uspořádání a počet určuje optická spektra a mocenství prvků. Z obr. (7.2) 10 je zřejmo, že prvky



Obr. (7.2) 9. Tvar a velikost deseti nejnižších elektronových drah

Slupka	K	$1H$							$2He$
	L	$3Li$	$4Be$	$5B$	$6C$	$7N$	$8O$	$9F$	$10Ne$
	M	$11Na$	$12Mg$	$13Al$	$14Si$	$15P$	$16S$	$17Cl$	$18Ar$
	N	$19K$	$20Ca$	$21Sc$	$22Ti$	$23V$	$24Cr$	$25Mn$	$26Fe$

Obr. (7.2) 10. Grafické schéma obsazení elektronových slupek prvních dvaceti šesti prvků



Obr. (7.2) 11. Periodický průběh: a — atomového objemu, b — ionizačního potenciálu

s jedním obvodovým elektronem H, Li, Na, K tvoří kladné jednomocné ionty H^+ , Li^+ , Na^+ , K^+ , které vzniknou odtržením tohoto elektronu. Prvky s dvěma obvodovými elektrony tvoří jednomocné i dvojmocné ionty Be^{++} , Mg^{++} , Ca^{++} atd. Naproti tomu prvky, kterým chybí jeden obvodový elektron do úplného obsazení vnější slupky, tj. prvky F a Cl, tvoří jednomocné záporné ionty F^- , Cl^- , jež vzniknou připojáním dalšího elektronu. Konečně mohou O nebo S doplnit slupku L nebo M dvěma elektrony, čímž vzniknou záporné ionty O^{--} nebo S^{--} . Tyto prvky jsou tedy záporně dvojmocné. Kombinací uvedených iontů vznikají pak různé neutrální molekuly: HCl (kyselina solná neboli chlorovodíková), NaCl (chlorid sodný), $CaCl_2$ (chlorid vápenatý) atd. Z obr. (7.2) 10 plynou také vztahy mezi spektry různých prvků, o nichž pojednával předešlý článek. Vidíme hned, že Li, Na, K a další prvky I. sloupce periodické soustavy mají spektra podobná vodíku, ježto jejich atomy mají jediný obvodový elektron. Také chápeme, že ionizované prvky He, Be, Mg, Ca a další prvky II. sloupce mají spektra podobná vodíku, neboť odtržením jednoho ze dvou obvodových elektronů zbude jediný obvodový elektron jako u neionizovaných prvků I. sloupce. Proto jiskrová spektra prvků II. grupy jsou podobná obloukovým spektrům I. grupy, jak jsme již řekli.

Ukazuje se, že periodičnost projevují v soustavě prvků i mnohé další vlastnosti, jako stlačitelnost, teplotní roztažnost, teplota tání, atomový objem, ionizační potenciál aj. Průběh posledních dvou veličin vidíme na obr. (7.2) 11a, b. Atomový objem, tj. objem kilogramatomu prvku, dosahuje největších hodnot pro prvky, v jejichž elektronovém obalu se začíná tvořit podle obr. (7.2) 10 slupka (Li, Na, K, Rb, ...). Naproti tomu ionizační potenciál má pro tyto prvky relativní minima a dosahuje maxima pro prvky s úplnými slupkami (He, Ne, A, Kr, Xe, ...). Z obr. (7.2) 11b je názorně vidět, jak s rostoucí úplností každé slupky vzrůstá její stabilita.

V závěru výkladu o soustavě prvků podotýkáme, že z prvků o pořadových číslech 1 až 92, uvedených v tab. D II, nepodařilo se až donedávna izolovat čtyři prvky, totiž 43 (technecium), 61 (promethium), 85 (astatin) a 87 (francium). Některé z nich byly zdánlivě objeveny a pojmenovány již dříve, ale bezpečně byly získány teprve ostřelováním různých jiných prvků v cyklotronech, a konečně v uranových reaktorech, které poskytují sice nepatrná, avšak již važitelná množství. Dnes je známo několik izotopů každého z uvedených prvků. Některé jsou stálé, jiné jsou radioaktivní a jejich poločasy mají velmi různé hodnoty od milióntiny vteřiny do miliónů let.

V posledních letech byla definitivně rozřešena otázka „transuranů“ (prvků o protonovém čísle $Z > 92$). Dnes je jich známo celkem jedenáct a jsou vesměs radioaktivní:

93. Np (neptunium),	98. Cf (kalifornium),
94. Pu (plutonium),	99. Es (einsteinium),
95. Am (americium),	100. Fm (fermium),
96. Cm (curium),	101. Md (mendělejevium),
97. Bk (berkelium),	102. No (nobelium),
	103. Lw (lawrencium).

První dva transurany byly objeveny při ostřelování uranu neutrony a zmíníme se o nich později. Prvek 97, Bk (berkelium), byl objeven r. 1950; jeho radioaktivní izotop o hmotě 243 byl získán ostřelováním americia heliony urychlenými v cyklotronu. Prvek 98, Cf (kalifornium), byl objeven v témže roce. Ostřelováním curia heliony urychlenými v cyklotronu byl získán radioaktivní izotop 244, který vysílá záření α . Nobelium bylo získáno r. 1957 v Nobelově ústavu ve Stockholmu ostřelováním curia 244 izotopem uhlíku C 13. Nobelium má relativní hmotnost asi 253 a vysílá záření α s energií 8,5 MeV a s poločasem asi 10 min. Lawrencium bylo vytvořeno r. 1961 v Lawrenceově laboratoři ostřelováním kalifornia jádrem B 10 a B 11. Vydává záření α s energií 8,6 MeV a mění se v mendělejevium.

Dosud známé transurany jsou uvedeny v tabulce aktinidů v dolní části tab. D II.

Prvky s atomovými čísly 90 až 103, které následují v periodické soustavě po aktiniu,

tj. thorium, protaktinium, uran a dříve uvedené transurany, mají podobné chemické vlastnosti jako aktinium, a proto se také nazývají *aktinidy*. Ze stejného důvodu se prvky vzácných zemin s atomovými čísly 57 až 71, které následují po lanthanu, nazývají *lanthanidy*.

Podle tab. D III mají totiž prvky 57 až 71 stejné obsazení vnějších slupek O a P a liší se jen obsazením vnitřní slupky N , které nemá vliv na jejich chemické vlastnosti. Podobně má aktinium a všechny aktinidy stejně obsazení vnější slupky P a Q a liší se jen počtem elektronů ve slupce O .

Názorný přehled známých prvků a jejich stabilních i radioaktivních izotopů podává obr. (8.2) 8.

7.3. Molekuly. Výměnné síly

7.3.1. Vodíkové ionty a molekuly

V předešlé kapitole jsme uvedli Pauliův vylučovací princip 7.2 (54) a ukázali jsme, že elektronový obal atomu tvoří tím stabilnější soustavu, čím úplnější je obsazení vnější elektronové slupky. Tím jsme vysvětlili sklon některých neutrálních atomů přecházet ve stabilnější elektricky nabitě částice, které nazýváme ionty.

V tomto článku ukážeme na nejjednodušším atomu, jak vznik iontů můžeme pochopit z hlediska kvantové teorie, která přináší do fyziky nový pojem tzv. výměnných sil, jejichž působením vysvětluje i vznik některých molekul.

Jednokvantová slupka ($n = 1$) je plně obsazena dvěma elektrony, které musí mít podle vylučovacího principu opačné spiny. Z toho plyne, že neutrální atom vodíku s jediným elektronem není útvar stabilní a může přejít do stabilního stavu dvojím způsobem.

1. Dostane-li elektron (působením nějaké nabitě částice nebo absorpcí fotonu) energii postačující k ionizaci atomu, oddělí se od atomu, který přejde v *kladný ion* H^+ totožný s protonem. Spojením iontu H^+ s nějakým záporným jednomocným iontem (např. Cl^-) vzniká neutrální molekula (např. HCl).

2. Naopak připojením dalšího elektronu (s opačným spinem) vznikne z neutrálního atomu *záporný jednomocný vodíkový ion* H^- , který je stabilním útvarem s plně obsazenou slupkou K — podobně jako neutrální atom He . Spojením s jednomocným kladným iontem (např. Li^+), vytvoří H^- neutrální molekulu (např. LiH).

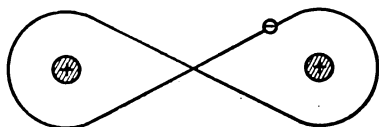
Záporný vodíkový ion H^- může se ovšem spojit také s kladným iontem H^+ , čímž vzniká *neutrální molekula* H_2 ; je základní částicí vodíku v plynném stavu, který je za obvyklých podmínek plynem dvouatomovým. Podle Pauliho principu musí mít elektrony záporného iontu H^- opačné spiny, a proto je vodík diamagnetický plyn (srov. 5.8.3).

Disociací neutrálních molekul na dva neutrální atomy H vzniká jednoatomový vodík „atomární“. Avšak molekula H_2 se může též ionizovat, je-li od ní (např. nárazem) odtržen záporný elektron. Zbytek molekuly má kladný náboj a je to tzv. *molekulový ion* H_2^+ , který se skládá z dvou protonů a z jednoho záporného elektronu.

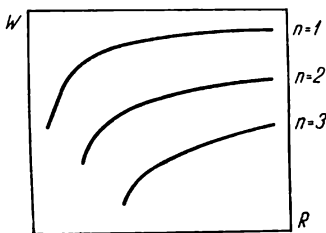
Popsané vodíkové částice skutečně existují, ale je jasné, že modelová teorie plně vysvětluje jen stabilitu neutrálního atomu H a kladného iontu H^+ . Stabilita záporného iontu H^- , neutrální molekuly H_2 a molekulového iontu H_2^+ vyplývá jen nepřímo z Pauliho principu, který jsme dosud fyzikálně nijak neobjasnili. Naznačme nejprve jen pojmově, jak tento problém řeší moderní kvantová fyzika.

Molekulový ion H_2^+ se skládá ze dvou protonů, které se elektrostaticky odpuzují, a ze záporného elektronu, který je ovšem oběma protony elektrostaticky přitahován. Tento jediný elektron patří tedy zároveň k oběma protonům; říkáme, že je to elektron *sdílený* oběma protony. Podle modelové teorie si můžeme představit, že sdílený elektron obíhá zároveň kolem obou protonů např. po dráze lemniskáty, jak je znázorněno na obr. (7.3) 1. Můžeme říci, že protony si společný elektron, který zřejmě udržuje obě tyto kladné částice

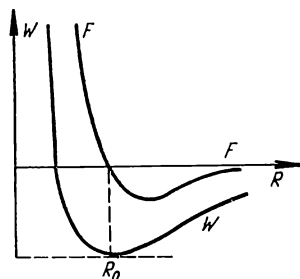
pohromadě, neustále navzájem vyměňují. Proto se síla, která přemáhá odpudivou elektrostatickou sílu mezi protony, nazývá *výměnná síla* a jejím působením vysvětluje vlnová mechanika existenci iontu H_2^+ a ovšem též existenci neutrální molekuly H_2 . Ačkoli pojem výměnné síly, který má v moderní fyzice zcela obecný význam, lze definovat jen exaktním matematickým postupem, pokusíme se jej zhruba objasnit jednoduchou úvahou. Podle klasické fyziky může mít sdílený elektron libovolnou potenciální a kinetickou energii bez zřetele k tomu, v jaké vzájemné vzdálenosti jsou oba protony. Naproti tomu předpisuje kvantová mechanika elektronu určité kvantové stavy, které mají pro každou vzdálenost R protonů jisté vlastní hodnoty celkové energie W elektronu. Tyto hodnoty závisí na kvantových číslech určujících stav elektronu (např. n), jak je naznačeno křivkami na obr. (7.3) 2. Tato energie se nazývá *výměnná energie* a její záporně vzatá derivace (gradient) podle vzdálenosti R protonů představuje právě přitažlivou výměnnou sílu, která působí mezi oběma protony. Jejich rovnovážná vzdálenost, v níž mohou obě tyto částice trvale setrvávat, je dána podmínkou, že výměnná síla je v rovnováze s od-



Obr. (7.3) 1. Oběh elektronu sdíleného dvěma protony po dráze tvaru lemniskáty



Obr. (7.3) 2. Kvantovaná výměnná energie elektronu v molekulovém iontu vodíku



Obr. (7.3) 3. Závislost výměnné síly a energie na vzdálenosti obou protonů v iontu H_2^+

pudivou silou Coulombovou. Průběh výsledné síly je znázorněn na obr. (7.3) 3 křivkou F , která protíná osu R v rovnovážné vzdálenosti R_0 . Spodní křivka ukazuje průběh výsledné energie W rovné součtu energie elektrostatické a výměnné. Rovnovážný stav je charakterizován minimální hodnotou této energie.

Z předešlého kvalitativního výkladu je zřejmé, že existence výměnných sil je podmíněna závislostí energie elektronu na vzdálenosti obou protonů. Proto nemůže výměnné síly vysvětlit klasická mechanika, která připouští pro energii elektronu libovolnou hodnotu nezávislou na poloze protonů.

V podstatě stejnou úvahou vysvětluje vlnová mechanika stabilitu neutrální vodíkové molekuly H_2 , v níž si oba protony vyměňují dva elektrony. Podle hořejšího výkladu o záporném iontu H^- musí mít patrně oba elektrony opačné spiny, jak žádá Pauliův princip. Z toho usuzujeme, že *neutrální molekulu H_2 mohou vytvořit jen dva vodíkové atomy, jejichž elektrony mají opačné spiny*.

Schrödingerova rovnice pro vodíkovou molekulu, kterou uvádíme v příštím článku, poskytuje i kvantitativní výsledky, jejichž shoda s empirickými hodnotami závisí na stupni přiblížení, s jakým se nám podaří zvládnout obtížný problém řešení Schrödingerovy rovnice. Vidíme to z tabulky (7.3) I, v jejímž prvním řádku je vzdálenost protonů R_0 a disociační energie W_d molekuly H_2 odvozené z měření, ve druhém starší hodnoty vypočtené Heitlerem a Londonem. V posledním řádku jsou výsledky přesnějšího řešení Schrödingerovy rovnice, které podali James a Coolidge.

Tabulka (7.3) I

Neutrální molekula vodíku

	R_0	W_d
Měření	$0,75 \cdot 10^{-10} \text{ m}$	4,478 eV
Teorie H + L	0,8	2,9
Teorie J + C	0,74	4,454

7.3.2. Kvantová teorie molekuly vodíku

Se zřetelem k zásadní důležitosti pojmu výměnné síly naznačíme aspoň v hlavních rysech postup, kterým vlnová mechanika řeší problém vodíkové molekuly.

Představme si dva neutrální atomy vodíku, jejichž protony označme a, b . Souřadnice elektronu 1, který náleží protonu a , označme x_1, y_1, z_1 a souřadnice elektronu 2 poutaného k protonu b buďte x_2, y_2, z_2 . Jsou-li atomy velmi daleko od sebe, není třeba přihlížet k jejich vzájemnému působení a pro oba atomy platí Schrödingerovy rovnice typu 7.2 (32)

$$7.3 (1) \quad \nabla_1^2 \psi_a(1) + \frac{8\pi m_e}{h^2} (W_a - U_1) \psi_a(1) = 0,$$

$$7.3 (2) \quad \nabla_2^2 \psi_b(2) + \frac{8\pi m_e}{h^2} (W_b - U_2) \psi_b(2) = 0,$$

kde

$$\psi_a(1) = \psi_a(x_1, y_1, z_1), \quad U_1 = -e^2/4\pi\epsilon_0 r_{1a}$$

a W_a jsou vlnová funkce, potenciální a celková energie elektronu 1 v poli protonu a . Obdobný význam mají písmena v druhé rovnici, jak vidíme z obr. (7.3) 4. Pro vzdálenost $R \gg a_1$, velkou proti poloměru elektronového „obláčku“, jsou polohy obou elektronů navzájem nezávislé a podle 7.1 (20) — vzhledem k tomu, že úhrnná pravděpodobnost nezávislých jevů je rovna součinu jejich pravděpodobností — je čtverec normované vlnové funkce soustavy obou elektronů

$$7.3 (3) \quad \psi^2(1, 2) = \psi_a^2(1) \psi_b^2(2).$$

Abychom dospěli k vlnové funkci, která vystihuje stav molekuly, uijíme základního předpokladu vlnové mechaniky, že *dvě částice stejného druhu jsou fyzikálně nerozeznatelné*. Není-li však možno rozlišit mezi sebou elektrony 1 a 2, musí patrně

$$\psi^2(1, 2) = \psi^2(2, 1);$$

tedy buď

$$7.3 (4) \quad \psi(1, 2) = \psi(2, 1),$$

nebo

$$7.3 (5) \quad \psi(1, 2) = -\psi(2, 1).$$

V prvním případě se funkce 7.3 (4) záměnou obou elektronů nezmění, říkáme, že vlnová funkce je *symetrická* (souděrná), ve druhém případě mění znaménko a říkáme, že vlnová funkce je

antisymetrická (polosouděrná). Jak ukázal Dirac, je vlnová funkce dvou elektronů symetrická, mají-li elektrony opačné (antiparalelní, protisměrné) spiny, je však antisymetrická, jsou-li spiny souhlasně rovnoběžné.

Fyzikální řešení Schrödingerovy rovnice musí splňovat jednu z rovnic 7.3 (4, 5) a k takovému řešení dospějeme, utvoříme-li součet nebo rozdíl funkcí $\psi(1, 2)$, $\psi(2, 1)$, které vyhovují rovnici 7.3 (3):

$$7.3 (6) \quad \psi_+ = \psi(1, 2) + \psi(2, 1) = \psi_a(1) \psi_b(2) + \psi_a(2) \psi_b(1),$$

$$7.3 (7) \quad \psi_- = \psi(1, 2) - \psi(2, 1) = \psi_a(1) \psi_b(2) - \psi_a(2) \psi_b(1).$$

A nyní naznačíme postup, jakým přejdeme od velmi vzdálených atomů k dosti blízkým atomům, jejichž elektronové „obláčky“ se již do značné míry překrývají. Pak už je třeba přihlížet k vzájemné elektrostatické energii každých dvou ze čtyř částic $a, b, 1, 2$, takže k energiím U_1, U_2 přibude ještě „perturbační potenciál“

$$7.3 (8) \quad U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{1b}} - \frac{1}{r_{2a}} \right),$$

který pozměňuje stav elektronů. Význam jednotlivých členů v závorce je po řadě: odpuzování obou protonů, odpuzování obou elektronů a přitahování elektronu 1 protonem b a přitahování zbývajících částic 2 a b . Statistickou střední hodnotu příslušné perturbační energie dostaneme patrně, když sečteme elementární energie všech dvojic prostorových prvků dV_1, dV_2 , které

dostaneme, násobíme-li U těmito prvky a hustotou pravděpodobnosti současného výskytu elektronu 1 v dV_1 a elektronu 2 v dV_2 . Úhrnnou perturbační energii tedy získáme integrací přes celý prostor

$$\Delta W = \iint D(1, 2) U dV_1 dV_2.$$

Nahradíme-li podle 7.1. (17) hustotu pravděpodobnosti $D(1, 2)$ čtvercem normované vlnové funkce $\bar{\psi}(1, 2)$, bude

$$\Delta W = \frac{1}{K} \iint \psi^2(1, 2) U dV_1 dV_2,$$

kde konstanta

$$K = \iint \psi^2(1, 2) dV_1 dV_2$$

je definována podobně jako konstanta $1/\beta^2$ v rovn. 7.1 (15), a zvolíme-li za $\psi(1, 2)$ ψ_+ nebo ψ_- , máme

$$7.3 (9) \quad \Delta W_+ = \frac{2}{K} (C + A), \quad \Delta W_- = \frac{2}{K} (C - A),$$

kde vzhledem k 7.3 (6,7)

$$7.3 (10) \quad C = \frac{1}{2} \iint U[\psi_a^2(1) \psi_b^2(2) + \psi_a^2(2) \psi_b^2(1)] dV_1 dV_2,$$

$$7.3 (11) \quad A = \iint U \psi_a(1) \psi_b(1) \psi_a(2) \psi_b(2) dV_1 dV_2.$$

Přecházející výrazy je možno s jistou přesností vyčíslit; jejich průběh v závislosti na vzdálenosti R obou protonů je zřejmý z obr. (7.3) 5.

Omezíme se na stručnou diskusi fyzikálního významu odvozených výsledků. Ve výrazu 7.3 (10) nabývají souřadnice obou elektronů při integraci přes celý prostor všech možných hodnot, a proto integrály obou členů v lomené závorce mají stejnou hodnotu. Dostaneme tedy se zřetelem k 7.3 (8)

$$C = \iint \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{1b}} - \frac{1}{r_{2a}} \right) e\psi_a^2(1) dV_1 \cdot e\psi_b^2(2) dV_2.$$

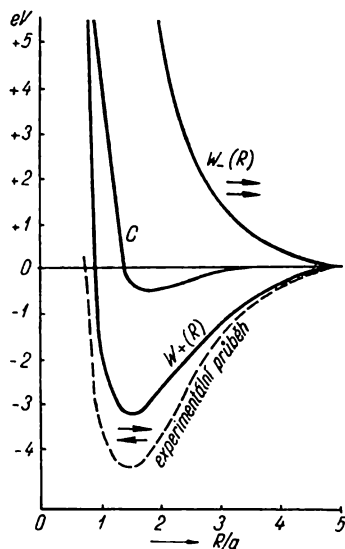
Protože pak $\psi_a^2(1)$ a $\psi_b^2(2)$ jsou hodnoty pravděpodobnosti výskytu elektronů 1 a 2, mají součiny $e\psi_a^2(1)$ a $e\psi_b^2(2)$ význam statistických hustot náboje v elektronových obalech atomů. Integrál C vyjadřuje tedy celkovou elektrostatickou energii příslušnou vzájemné Coulombově interakci všech čtyř částic v obou atomech.

Naproti tomu integrál 7.3 (11) nedovoluje v rámci klasické fyziky podobnou interpretaci. Výraz A je možno vysvětlit jako elektrostatickou energii jediné tehdy, když připustíme existenci tzv. *výměnné hustoty náboje* obou elektronů

$$7.3 (12) \quad \begin{aligned} \varrho(1) &= e\psi_a(1) \psi_b(1), \\ \varrho(2) &= e\psi_a(2) \psi_b(2) \end{aligned}$$

čili když se smíříme s představou, že každý z elektronů se současně vyskytuje v obou atomech a působí vlastně „sám na sebe“. Proto se A nazývá *výměnná energie* a záporně vzatý gradient této energie je právě *výměnná síla*, která za vhodných podmínek udržuje oba atomy pohromadě, jak se snadno přesvědčíme.

Jsou-li oba atomy daleko od sebe, takže $R \gg a_1$, platí totéž i o vzdálenostech r_{12} , r_{1b} , r_{2a} a obě výměnné hustoty 7.3 (12) jsou nepatrné v celém prostoru, protože v každém místě aspoň jedna z funkcí ψ_a , ψ_b je mizivě malá. Proto je i celková perturbační energie ΔW prakticky nulová. Jinak je tomu při vzdálenosti $R \approx a_1$ srovnatelné s atomovými rozměry. Pak mají v jisté části prostoru obě funkce ψ_a , ψ_b dosti velké hodnoty a statistická i výměnná hustota náboje nabývá konečných hodnot. Lze to vysvětlit názornou představou, že se náboje obou elektronů vzájemně pronikají. Z obrázku (7.3) 5 je patrné, že Coulombova interakce C se zna-



Obr. (7.3) 5. Interakce dvou vodíkových atomů

telně uplatňuje toprve při těsném přiblížení obou protonů, kdy se projevuje velmi silnou odpudivou silou, která brání dalšímu přiblížování atomů. Výsledná perturbační energie má však zcela různý průběh podle toho, je-li vlnová funkce symetrická nebo antisymetrická. V druhém případě má energie ΔW_- všude kladné a klesající hodnoty, a její záporný gradient je tedy kladný. Při antisymetrické vlnové funkci je tedy výsledná síla odpudivá. Je-li však vlnová funkce symetrická, je perturbační energie pro $R > a_1$ záporná a dosahuje minima pro jistou vzdálenost R_0 . V této vzdálenosti je výsledná síla mezi atomy nulová, a je to tedy rovnovážná vzdálenost obou protonů ve stabilní vodíkové molekule. Jak jsme již uvedli, přísluší v Diracově teorii dvěma elektronům se souhlasně rovnoběžnými spiny antisymetrická vlnová funkce, kdežto elektronům s antiparalelními spiny funkce symetrická. Z toho vidíme, že dva vodíkové atomy se souhlasně paralelními spiny elektronů působí na sebe silou $-dW_-/dR > 0$, která je odpudivá, a proto nemohou vytvořit stabilní molekulu. Jedině při antiparalelních spinech je síla $-dW_+/dR$ přitažlivá pro $R > R_0$ a pro $R < R_0$ odpudivá. Podle tabulky (7.3) I vede tedy vlnová mechanika ve shodě s pozorováním k tomuto výsledku:

Dva vodíkové atomy s opačnými elektronovými spiny, vzdálené od sebe asi 3/4 atomového průměru, tvoří stabilní molekulu H_2 . Dva vodíkové atomy se souhlasnými spiny se odpuzují a molekulu nevytvoří.

Pro úplnost dodáváme, že i protony mají svůj spin, ale stabilita molekuly H_2 je nezávislá na tom, jsou-li tyto spiny souhlasné, či protisměrné. Skutečně bylo zjištěno, že v některých molekulách H_2 mají oba protony souhlasně rovnoběžné spiny, v jiných mají spiny antiparalelní. Vodík složený z molekul prvního druhu se nazývá *ortovodík*, v druhém případě *paravodík*.

7.3.3. Heteropolární a homopolární molekuly

V článku 7.2.6 jsme poukázali na to, že se obvodové elektrony nazývají valenční, protože určují mocenství prvků. Přitom jsme vysvětlili vznik molekul složených ze dvou nebo více iontů opačných nábojů. Takové molekuly vznikají a jsou udržovány pohromadě Coulombovými silami mezi opačnými náboji. Říkáme, že mají *iontovou* neboli *heteropolární vazbu*.

Typickým příkladem molekuly tohoto druhu je molekula kyseliny chlorovodíkové HCl, která se skládá z kladného iontu H^+ protonu a záporného iontu Cl^- . Modelová teorie dovede sice principiálně vyloužit její existenci, avšak vlnová mechanika poskytuje pro HCl, podobně jako pro molekulu H_2 , i kvantitativně uspokojivé výsledky. Uvádíme je v tab. (7.3) II, která vedle empirických hodnot obsahuje teoretické hodnoty, odvozené poruchovou metodou (Náray r. 1952).

Známe však molekuly složené z neutrálních atomů buď různých, nebo dokonce zcela stejných. Vazby, které spojují neutrální atomy v molekuly, nazýváme *homopolárními* neboli *kovalentními*. Nejjednodušším příkladem takové molekuly je molekula H_2 , jejíž

vznik a základní vlastnosti jsme vložili v předešlém článku. Existence takových molekul je podmíněna výměnnými silami, které podle téhož článku vznikají interakcí dvojice elektronů s antiparalelními spiny. Takové dvojice („elektronové páry“) budeme nazývat sdruženými spiny nebo krátce dvojspiny. Kovalentní vazba mezi dvěma atomy vznikne, sdruží-li se elektron prvního atomu s některým elektronem druhého atomu, který má opačný spin,

Tabulka (7.3) II

Molekula kyseliny chlorovodíkové

Hodnoty pro HCl	empirické	teoretické
Vzdálenost jader v Å	1,27	1,35
Disociační energie v eV	14,1	12,2
Vlastní frekvence kmitů v 10^{13} Hz	8,97	10,1

a vytvoří tak meziatomový dvojspin. Vazební energie dvojspinu je značná, a proto vytvářejí dvojspiny pevné vazby mezi atomy. Jak se však upraví konfigurace elektronových spinů v též atomu? Pauliův princip vylučuje dva souhlasné spiny u elektronů obíhajících ve stejné dráze, a proto na jedné dráze nejvýše dva elektrony s opačnými spiny. Tak se v plně obsazených hladinách vytvoří dvojspiny, které svou výměnnou energií zaručují stabilitu uzavřených slupek atomu. Pauliův princip neřká

nic o spinech elektronů, které mají různé energetické hladiny, a proto dva elektrony v různých hladinách mohou mít i v témž atomu jak souhlasné, tak i opačné spiny. Základní, tj. nevzbuzený stav atomu, je stav s nejmenší možnou energií, a proto je základní stav vyznačen takovou konfigurací spinů, jaké přísluší nejmenší energii.

Vlnová mechanika je schopna řešit i otázku vzbuzených stavů atomů. Postupem podobným postupu v předešlém článku bychom se přesvědčili, že vzájemná energie dvou elektronů se souhlasnými spiny je menší než energie dvou elektronů se spiny opačnými. Z toho lze soudit, že energie atomu, v jehož elektronovém obalu je některý elektron ve vyšším kvantovém stavu, bude menší, když jeho spin bude souhlasný se spinem některého elektronu v nižším kvantovém stavu, než kdyby jejich spiny byly antiparalelní. Z toho však vyplývá, že sestava spinů v elektronovém obalu atomu v nevzbuzeném stavu, tedy sestava s nejmenší energií, se zřejmě vytvoří, jestliže se elektrony sdruží v dvojspiny jen v plně obsazených drahách, jak to žádá Pauliův princip, naproti tomu však elektrony v různých hladinách budou mít spiny souhlasné. Stručněji řečeno: *Základní stav atomu je vyznačen největším elektronovým spinem, dovoleným principem Pauliho.* Ve vzbuzeném stavu s vyšší energií může mít atom ovšem jiný celkový spin než ve stavu základním.

S celkovým elektronovým spinem atomu souvisí jeho *mocenství (valence)* v jednoduchým způsobem. Atom může totiž vázat tolik vodíkových atomů, kolik má volných spinů, které nejsou sdruženy s antiparalelními spiny v samém atomu a z nichž každý může vytvořit meziatomový dvojspin s osamoceným elektronem vodíkového atomu. Vytvořením každého takového dvojspinu s atomem H kompenzuje se ovšem jeden volný spin, a proto se atom může sloučit jen s tolika atomy H, kolik má volných spinů. Jakmile se to stane, valenční síly jsou nasyceny. Atom se již s dalšími atomy nemůže slučovat. Je tedy *mocenství atomu rovno počtu volných spinů.*

Avšak každý volný spin má velikost rovnou polovině spinové jednotky $\hbar$; výsledný spin atomu se tedy rovná polovičnímu počtu volných spinů. Proto *mocenství prvku je rovno dvojnásobnému spinu atomu:*

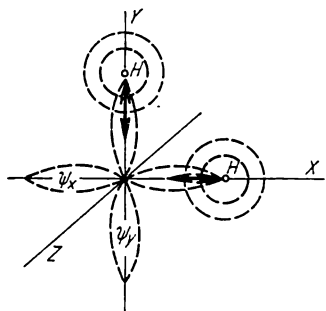
$$v = 2s.$$

Vlnová mechanika se plně osvědčila i v teorii složitějších molekul než H_2 nebo HCl a je pozoruhodné, že podává podrobné informace nejen o velikosti a ionizační energii, ale i o prostorovém uspořádání atomů v molekulách. Ukážeme to na třech nejjednodušších, ale významných případech, které se vysvětlují skutečností, že volné spiny atomů O, N a C přísluší elektronům ve stavu p , které podle článku 7.2.6 obíhají na drahách označených $2p$. Elektronům p přísluší vlnové funkce p , které jsme v čl. 7.2.4 označili ψ_x, ψ_y, ψ_z . Jsou dány výrazy 7.2 (37), z nichž plyne jejich prostorové uspořádání naznačené na obr. (7.2) 6. Vidíme, že statistická hustota náboje elektronu je pro každou z funkcí p největší podél jedné osy souřadnic.

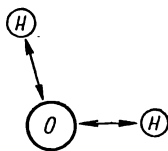
I když víme, že u symetrického vodíkového atomu můžeme volit směr souřadnicových os libovolně, předpokládá řešení 7.3 (11) ortogonální soustavu souřadnic. Z toho soudíme, že obláčky nábojů elektronů p jsou rozloženy ve třech k sobě kolmých směrech, vycházejících z jádra. Proto výměnná energie, která vzniká vlastně překrýváním či pronikáním elektronových obláček, bude největší, blíží-li se elektron v některém z těchto směrů, čímž jsou dány směrové vlastnosti dvojspinů, a tedy i valenčních sil atomových stavů.

Ukážeme to na molekule vody. Atom kyslíku má čtyři elektrony p . Dva z nich mají sdružené spiny v hladině s magnetickým číslem $m = +1$ a zbývající dva mají rovnoběžné spiny v hladinách $m = 0$ a $m = -1$. Těmto třem kvantovým číslům přísluší právě zmíněné funkce p , které jsme označili ψ_x, ψ_y, ψ_z . Na označení souřadnic ovšem nezáleží, a zvolíme-li osu Z ve směru, podél něhož jsou rozloženy hustoty obou sdružených elektronů hladiny $m = +1$, můžeme směry obou volných dvojspinů zvolit za osy X a Y . Rozložení nábojů pak můžeme v rovině XY znázornit schematicky podle obr. (7.3) 6. Představme si nyní,

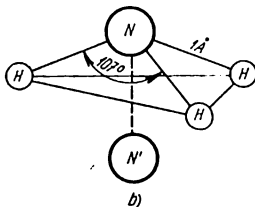
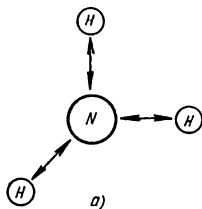
že se k atomu O blíží atom H ve směru osy Z . V tomto směru jsou rozloženy vlnové funkce ψ_z obou elektronů se sdruženými spiny, a vznikne tedy nejdříve výměnná síla mezi těmito dvěma protisměrnými spiny. V důsledku Pauliova principu může si atom O vyměňovat jen souhlasný spin, a proto je atom H ve směru Z odpuzován. Blíží-li se však atom H ve směru osy X nebo Y , kde jsou rozloženy náboje elektronů s volnými spiny, bude atom H



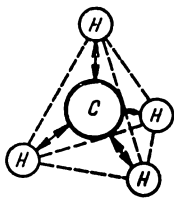
Obr. (7.3) 6. Struktura molekuly vody



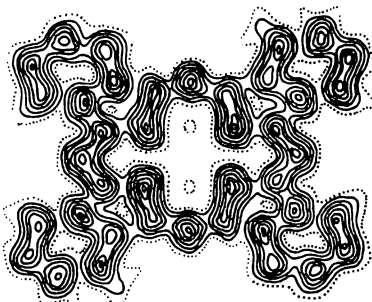
Obr. (7.3) 7. Tvar molekuly vody



Obr. (7.3) 8. Molekula čpavku



Obr. (7.3) 9. Molekula metanu CH_4



Obr. (7.3) 10. Rozložení hustoty elektronů v molekule fthalocyaninové soli

přitahován, má-li opačný spin než oba volné spiny. Je jasno, že tato přitažlivá síla bude největší ve směrech, v nichž se náboje nejvíce překrývají, a proto se usadí oba atomy H ve směrech os X a Y . Při tom mají ovšem oba atomy H stejný spin (totož protisměrný k oběma volným spinům atomu O), a proto se navzájem odpuzují. Toto odpuzování je však podstatně slabší vzhledem k nepatrnému překrývání jejich vlnových funkcí. Proto má jen malý vliv na tvar molekuly H_2O , která tvoří trojúhelník s jedním úhlem o něco větším než pravý ($104,5^\circ$), jak je znázorněno na obrázku (7.3) 7. Podobně můžeme vysvětlit prostorové rozložení atomů v molekule čpavku NH_3 , kterou vidíme na obr. (7.3) 8; má tvar čtyřlístku nebo pyramidy, jejíž hrany by byly ve vrcholu navzájem kolmé (a), kdyby nebylo vzájemného odpuzování atomů H mezi sebou. Následkem tohoto odpuzování svírají směry dvojspinů úhel $107,3^\circ$, jak je naznačeno na obrázku (b).

Podobné směrové vlastnosti mají dvojspiny valenčních sil uhlíku, které jsou rovněž pravidelně rozloženy v prostoru, a to tak, že mívají k vrcholům pravidelného čtyřlístku, v jehož středu leží jádro atomu. Proto má molekula metanu CH_4 tvar čtyřlístku, znázorněného na obr. (7.3) 9. Toto uspořádání dvojspinů se uplatňuje také při tvorbě krystalu diamantu, ale jeho podrobný teoretický výklad je mnohem složitější než u atomů O a N.

Tvar a velikost molekul dají se nepřímou zjišťovat metodami optickými, jak jsme ukázali v čl. 6.7.3. Kromě toho existuje přesná metoda na zjišťování rozložení elektronů v molekulách, založená na proměřování ohybu záření X v molekulových krystalech (Bragg r. 1915, Duane r. 1923, Epstein a Ehrenfest r. 1924). Tato metoda vyžaduje velmi pracné početní operace s Fourierovými řadami, v novější době (Robertson r. 1936) poskytla však velmi podrobné poznatky o uspořádání elektronů, a tedy i atomů ve složitějších molekulách. Na obr. (7.3) 10 je naznačeno rozložení hustoty elektronů v molekule fthalocyaninové

soli $\text{C}_{32}\text{H}_{16}\text{N}_8\text{Cu}$, které bylo zjištěno touto metodou a velmi dobře odpovídá chemické struktuře této molekuly, jak je zřejmé z obr. (6.7) 22b.

Závěrem poznamenáváme, že chemické vazby nevznikají jen překrýváním vlnových funkcí elektronů p a že se mohou na nich podílet i elektrony s a d . Takovými smíšenými (hybridními) vazbami se vysvětlují také nově objevené sloučeniny vzácných plynů, o nichž jsme se zmínili pod čarou v čl. 7.2.6.

7.3.4. Kvantové stavy a spektra molekul

Molekula je soustava několika atomů, které na sebe silově působí; jejich vzájemná potenciální energie závisí na vzájemných vzdálenostech jednotlivých atomů. Tato energie je minimální pro určité hodnoty těchto vzdáleností. Při nich jsou atomy v molekule v rovnovážných polohách, kolem nichž mohou konat kmitavé pohyby. U složitějších molekul existuje řada různých vibrací, při nichž se mění velikost rozměrů i tvar molekuly. Kromě těchto vibrací může molekula konat také rotační pohyby kolem svého těžiště. Energie všech těchto pohybů může nabýt různých hodnot. Molekuly konají však také pohyby posuvné, jak víme z klasické kinetické teorie. U molekul s větším počtem stupňů volnosti jsou všechny tyto děje složité; proto omezíme další úvahy na nejjednodušší případ dvouatomových molekul, na které lze snadno aplikovat kvantovou teorii. Experimentální poznatky o molekulách, které čerpáme zvláště z jevů založených na interakci molekul a elektromagnetického záření velmi různých vlnových délek, dají se dobře vyložit moderní kvantovou teorií. Tyto poznatky se týkají zejména emise a absorpce viditelného a infračerveného záření, tzv. *Ramanových spekter*, a v posledních letech elektromagnetických mikrovln, studovaných metodami radiotechnickými.

Všeobecně lze říci, že i pro molekuly platí princip kvantové fyziky, že energie molekuly podléhá kvantování a že při změně ΔW své energie vyzáří nebo pohltí molekula jeden foton:

$$7.3 \text{ (13)} \quad h\nu = \Delta W.$$

Dovolené kvantové stavy molekul jsou dány vlastními vlnovými funkcemi, příslušnými vlastním hodnotám energie. Vlnová mechanika poskytuje také možnost určit pravděpodobnosti přechodů mezi dovolenými stavy a výběrová pravidla pro jednotlivé kvantové přechody. Intenzity spektrálních čar, příslušných těmto dovoleným přechodům, jsou pak úměrné pravděpodobnostem těchto přechodů.

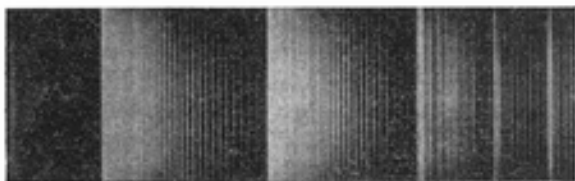
Dvouatomová molekula se může jednak otáčet jako tuhé těleso kolem svého těžiště, jednak mohou oba atomy kmitat kolem svých rovnovážných poloh. V prvním případě ji můžeme pokládat za tuhý rotátor s volnou osou, ve druhém případě za lineární oscilátor. Výsledky odvozené v článku 7.1.3 a 7.1.4 pro tyto dva abstraktní případy můžeme tak přenést na dvouatomovou molekulu. Předpokládá to ovšem, že sousední molekuly na její pohyby nemají vliv, že je tedy, jak říkáme, volná. To je splněno, je-li dosti vzdálena od ostatních molekul, jak je tomu u plynů a par. Plyny a páry vysílají skutečně kromě čárových spekter, která mají původ ve volných atomech nebo iontech, vzniklých disociací molekul, také složitější spektra, jež mají původ v nedisociovaných molekulách. Tato spektra se nazývají *pásová*, protože se ve spektroskopech s malou rozlišovací schopností jeví jako spojitě *světlé pásy*. Tyto pásy se však silnějšími přístroji rozloží na velký počet velmi jemných spektrálních čar, které se na straně dlouhých vln zhušťují, při čemž jejich intenzita s vlnovou délkou roste. Na obr. (7.3) 11 je snímek pásového spektra, vydávaného dvouatomovými molekulami N_2 . Zhuštěné okraje jednotlivých pásů se nazývají *hlavy* nebo *hrany* pásů.

Moderní kvantová fyzika podává úplnou teorii těchto spekter, kterou vyložíme na jednoduchém případě dvouatomových molekul, které si představujeme ve tvaru činky (dipólu).

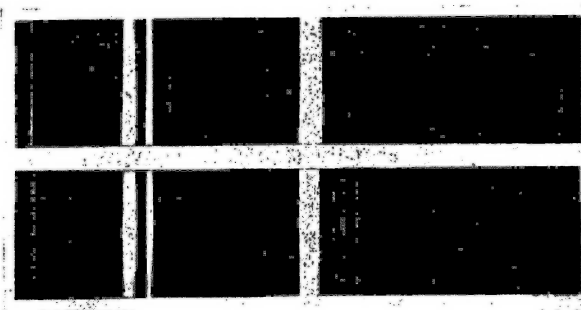
Předpokládejme, že molekula složená ze dvou atomů je volná, tj. dosti vzdálená od ostatních molekul, abychom nemuseli dbát jejich vlivu, jak je tomu u plynů a par. Taková molekula může konat tyto pohyby:

1. Rotaci kolem libovolné osy jdoucí těžištěm, při stále vzdálenosti atomů.
2. Kmity atomů ve směru jejich spojnice, která nemění směr v prostoru.
3. Rotaci a kmitání zároveň.

Energie žádného z těchto pohybů se podle kvantové teorie nemůže měnit spojitě a při přechodu z jednoho kvantového stavu do stavu s nižší energií vyzáří molekula foton



Obr. (7.3) 11. Pásové spektrum dusku ve viditelném oboru



Obr. (7.3) 12. Ramanův jev při průchodu světla chloridem uhličitým (tetrachlormetanem). Nahoře spektrum světla vstupujícího do kapaliny, dole spektrum světla rozptýleného

infračerveném oboru nebo jako elektromagnetické mikrovlny. Lze je však nepřímou zjišťovat pozorováním Ramanových spekter obr. (7.3) 12 vznikajících při Ramanově jevu (čl. 6.4.13C). Podle kvantové teorie si tento Ramanův jev vysvětlujeme takto: Při rozptýlení světla dopadajícího na molekulu, jejíž energie se nemění, zůstává energie fotonu nezměněna. Jestliže se však při rozptýlení molekula zároveň vzbudí nebo jestliže se vzbuzená molekula vrátí do stavu menší energie, změní se energie fotonu tak, že jeho frekvence je menší nebo větší právě o frekvenci, kterou molekula vysílá při stejném kvantovém přechodu. Proto pozorujeme v rozptýleném světle po obou stranách spektrální čáry původního světla řadu čar, jejichž posunutí proti této čáře odpovídají frekvencím pozorovaným v pásovéch spektrech. Pozorování Ramanových spekter umožňuje tak určovat molekulární konstanty obvyklými prostředky světelné spektroskopie místo obtížné spektroskopie infračervené nebo spektroskopie elektromagnetických mikrovln.

Mikrovlnná spektroskopie, která dnes zahrnuje i milimetrové vlny, je však nejen důležitým zdrojem poznatků o struktuře molekul, ale umožnila také konstrukci dosud nepřesnějšího zařízení k měření času, které bylo nazváno *atomovými hodinami*.

s energií rovnou úbytku energie molekuly. Podobně absorpcí fotonu může molekula být vzbuzena, tj. může přejít do vyššího kvantového stavu. Kromě toho může dojít i k přeskokům některého elektronu v atomech samých, což může způsobit vyslání fotonu podle zásad uvedených v předešlých článcích. Celkem tedy mohou molekuly vydávat tyto druhy spekter:

a) *Rotační spektra*, jejichž čáry vznikají přechodem z jednoho rotačního pohybu molekuly do jiného rotačního pohybu, jejichž energie jsou předepsány kvantovou teorií.

b) *Vibračně rotační spektra*, složená z čar příslušných současným přechodům mezi kvantovými oscilacemi a rotačními pohyby.

c) *Elektronicko-vibračně rotační spektra*, která vznikají, jestliže se změnou rotační a kmitové energie molekul nastává zároveň přeskok elektronů obíhajících kolem atomových jader molekuly.

Tak vzniklé čáry mají většinou nižší frekvence než viditelné světlo a lze je přímo pozorovat jen v in-

Chod obyčejných hodin je regulován nepokojem nebo kyvadlem. Dokonalejší regulace bylo dosaženo u *křemenných hodin*, jejichž chod je řízen piezoelektrickými kmity krystalu křemene. Ani frekvenci těchto kmitů nelze udržet naprosto konstantní, lze ji však regulovat na základě absorpce mikrovln v plynném čpavku. Jeho molekuly absorbují totiž význačně mikrovlny délky $\lambda = 1,259\,9\text{ cm}$, protože kvanta těchto vln odpovídají právě energii potřebné ke kvantovému přechodu atomu N do polohy N' souměrné podle roviny vodíkových atomů, jak je naznačeno na obr. (7.3) 8b. Vlny řízené křemenným oscilátorem s frekvencí 100 Hz se přemění na frekvenci

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{2,997\,9 \cdot 10^8}{1,259\,9 \cdot 10^{-2}} = 2,387\,0 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

a vedou se trubici naplněnou zředěným čpavkem. Jakmile se frekvence mikrovln odchýlí od rezonanční frekvence f , klesne jejich absorpce a složitě elektronické zařízení upraví samočinně frekvenci na hodnotu f . Tím se regulují synchronní hodiny, které jsou poháněny střídavým proudem 60 Hz. Atomové hodiny, sestavené poprvé r. 1948, mohou dosáhnout relativní přesnosti až 10^{-10} .

Závěrem naznačíme stručně jen kvantovou teorii rotačního spektra dvouatomové molekuly. V tomto případě můžeme zřejmě pokládat molekulu za tuhý rotátor s volnou osou, jehož teorii jsme podali v čl. 7.1.4. Ukázali jsme tam, že Schrödingerova rovnice má fyzikální řešení jen tehdy, když energie rotátoru nabývá některé z vlastních hodnot 7.1 (37). Energie rotující molekuly se tedy kvantuje podle rovnice

$$W_r = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1), \quad J = 0, 1, 2, \dots,$$

kde jsme rotační kvantové číslo l označili pro molekulu písmenem J , jak je všeobecně zvykem. I značí moment setrvačnosti molekuly vzhledem k ose vedené těžištěm kolmo ke spojnici obou atomů. Výběrové pravidlo však žádá (podobně jako při kvantování elektronových drah), aby se kvantové číslo měnilo jen o $+1$ nebo -1 . Změna $\Delta J = +1$, při níž energie W_r vzroste, je možná jen při absorpci, kdežto emisi záření přísluší jen změna $\Delta J = -1$, při níž energie klesne o hodnotu

$$\Delta W_r = \frac{\hbar^2}{2I} [J(J+1) - (J-1)(J-1+1)] = \frac{\hbar^2}{2I} 2J.$$

Při takovém přechodu vyzaří molekula foton s frekvencí

$$\nu = \frac{\Delta W_r}{h} = \frac{\hbar}{4\pi I} 2J,$$

tedy záření s vlnovým

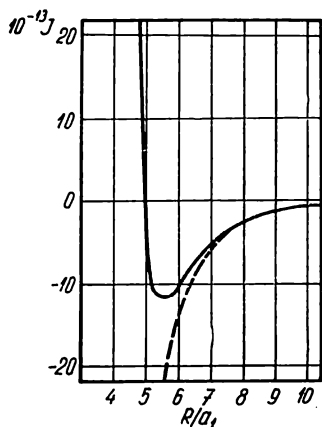
$$\varrho = \frac{\nu}{c} = B \cdot 2J, \quad B = \frac{\hbar}{4\pi c I} = \frac{h}{8\pi^2 c I}.$$

Protože B je pro danou molekulu stálá hodnota, je rotační spektrum složeno z ekvidistantních čar, které přísluší celistvým hodnotám J . To se skutečně potvrzuje pozorováním rotačních páسů, jejichž vlnové délky leží v oboru dlouhovlnného infračerveného záření ($\lambda = 30$ až $150\text{ }\mu\text{m}$).

7.3.5. Výměnné síly

Viděli jsme, že kvantování energie vede k podstatně novému druhu energie, který se nazývá výměnná energie; z ní plyne existence nového druhu sil, definovaných jako záporný gradient této energie. Oba uvedené pojmy jsou výtvoem kvantové fyziky a jsou klasické fyzice cizí. Pohlížíme-li na kvantovou fyziku jako na vyšší stupeň fyzikální teorie, který dokonaleji vystihuje podstatu jevů a obsahuje klasickou fyziku jako zvláštní případ teorie vyhovující za jistých podmínek, vzniká otázka, do jaké míry jsou pojmy výměnné energie a výměnné síly obecné. Je možno dokonce se ptát, nemají-li i známé klasické síly povahu sil výměnných.

V předešlých člancích jsme shledali, že síly mezi neutrálními atomy jsou síly výměnné a že podobnými silami lze dobře vysvětlit a kvantitativně popsat vlastnosti molekul. Je velmi významné, že vlnová mechanika nejen dokonale objasňuje vnitřní síly v molekulách, ale je schopna teoreticky zvládnout také síly mezimolekulární, které se projevují soudrž-



Obr. (7.3) 13. Celková vzájemná energie dvou heliových atomů (plně vytažená čára) a průběh van der Waalsovy energie (čárkovaný)

ností látek. Jsou to známé *kohezní* čili *van der Waalsovy síly*. Molekuly jsou útvary s nasycenými dvojspiny a chovají se podobně jako atomy s plně obsazenými elektronovými slupkami (inertní plyny). Nejjednodušší je výpočet kohezních sil mezi jednoatomovými molekulami. Ukazuje se např., že dva atomy hélia se v těsné blízkosti $R < 5a_1$ silně odpuzují, což je v souladu s tím, že plně obsazené slupky jsou pro elektrony neprostupné [obr. (7.3) 13]. Celkový potenciál se skládá z exponenciálně klesajícího potenciálu odpudivé síly a z potenciálu slabé přitažlivé síly van der Waalsovy. Ačkoli potenciální energie dosahuje minima pro $R \approx 5,5a_1$, netvoří atomy hélia dvouatomové molekuly, protože kohezní síly se nevyznačují sytostí jako síly valenční. Slabé kohezní síly se projevují teprve při nízkých teplotách a vysokém tlaku, kdy vedou k zkapalnění nebo i ztuhnutí hélia (i jiných vzácných plynů).

Síly působící mezi molekulami plynou ze Schrödingerovy rovnice podobně jako síly mezi atomy, které tvoří molekulu, a oba tyto druhy sil jsou z hlediska kvantové fyziky silami výměnnými v tom smyslu, že vznikají výměnou elektronů. Obecně platí pro potenciál φ výměnných sil partiální diferenciální rovnice

$$7.3 (14) \quad \nabla^2 \varphi - \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega = \frac{m_0 c}{\hbar},$$

kde m_0 je klidová hmotnost vyměňované částice. Řešení této rovnice má tvar

$$7.3 (15) \quad \varphi = \frac{g^2}{r} e^{-\omega r},$$

jak bychom se přesvědčili dosazením do 7.3 (14). g^2 je konstanta a r je vzdálenost obou částic, které si částici klidové hmotnosti m_0 vyměňují. Kdyby tato „směnná“ částice byla polní částice s nulovou klidovou hmotností, měl by výměnný potenciál φ tvar elektrostatického (nebo gravitačního) potenciálu v souladu s tím, že pro $\omega = 0$ přejde rovnice 7.3 (14) ve známou Laplaceovu rovnici 5.1 (57)

$$\nabla^2 \varphi \equiv \Delta \varphi = 0.$$

Ačkoli potenciál tvaru 7.3 (15) zavedl již Seeliger (r. 1895) a Neumann (r. 1896) pro gravitační pole, je dnes tato funkce známa jako *Yukawův potenciál*, protože japonský fyzik Yukawa na rovnici 7.3 (14) založil *mezonovou teorii* jaderných sil. Jaderné síly, které drží pohromadě atomová jádra, lze totiž také vysvětlit jako výměnné síly mezi nukleony, které si spolu vyměňují mezony π stručněji nazývané *piony* (viz čl. 8.1.3).

Výměnný potenciál klesá velmi rychle se vzdáleností a je zvykem nazývat vzdálenost $\delta = 1/\omega$ *dosahem* výměnné síly. Dosah tedy je tím menší, čím větší je klidová hmotnost „směnné“ částice. Dosah jaderných sil je řádu 10^{-15} m, což vedlo Yukawu ke správnému odhadu klidové hmotnosti pionu π . Protože však elektron je více než 200krát lehčí než pion, je dosah meziatomových sil ve stejném poměru větší.

Z toho plyne velmi závažný výsledek: Kdybychom učinili předpoklad, že elektrostatické síly mezi nabitými částicemi mají povahu výměnné síly, která vzniká tím, že si tyto částice vyměňují mezi sebou fotony, o nichž se běžně předpokládá, že mají nulovou klidovou hmotnost, dostali bychom elektrostatický potenciál v obvyklém tvaru

$$\varphi = \frac{\text{const}}{r}.$$

Podobně by bylo možno vyložit gravitační síly jako výměnné síly vznikající výměnou hypotetické polní částice *gravitonu* mezi přitahujícími se částicemi.

Předpoklad, že klidové hmotnosti fotonu a gravitonu jsou přesně nulové, není zcela nutný, ale vzhledem k velmi přesné platnosti Coulombova a Newtonova zákona je jisto, že jejich klidové hmotnosti jsou o mnoho řádů menší než klidová hmotnost elektronu. Na základě některých ukazů pozorovaných ve sluneční koróně lze odhadnout klidovou hmotnost fotonu hodnotou řádu 10^{-68} kg.

Vzhledem k tomu, že vzdálenosti, do kterých působí gravitační síly podle Newtonova zákona, jsou prakticky neomezené, lze mít za to, že klidová hmotnost gravitonu je ještě značně menší než u fotonu. Přijmeme-li gravitační potenciál ve tvaru 7.3 (15), shledáme výpočtem obdobným výpočtu provedenému na konci článku 2.9.8, že gravitační potenciál nekonečného vesmíru se stálou hustotou ρ má konečnou hodnotu

$$\chi_{\infty} = -4\pi\kappa\rho\delta^2 = -\frac{4\pi\kappa\rho}{\omega^2}.$$

Podle základního vztahu 2.9 (45) musí být tato hodnota rovna záporně vzatému čtverci rychlosti světla, takže vzhledem k 7.3 (14)

$$7.3 (16) \quad m_{gr} = \sqrt{4\pi\kappa\rho} \frac{\hbar}{c^2}.$$

Kdybychom sem dosadili za hustotu celého nekonečného vesmíru hodnotu blízkou hustotě 2.9 (58) expandujícího kosmu, dostali bychom přibližnou hodnotu

$$7.3 (17) \quad m_{gr} \approx 10^{-70} \text{ kg}.$$

Lze však očekávat, že průměrná hustota nekonečného vesmíru (složeného z neomezeného množství dílčích „vesmírů“ podobných našemu expandujícímu kosmu) by byla patrně podstatně menší než 2.9 (58), stejně jako je průměrná hustota kosmu podstatně menší než hustota galaxií. Bylo by tomu tak, i kdyby se prokázalo, že celý vesmír je vyplněn velmi rychlými neutriny, jejichž celková hmotnost je podle novějších odhadů větší než úhrnná hmotnost všech dosud známých vesmírných objektů.

Z toho lze usuzovat, že dosah gravitačních sil je určitě větší než délka

$$7.3 (18) \quad \delta = \frac{\hbar}{m_{gr}c} \approx 3 \cdot 10^{27} \text{ m} \approx 300 \text{ miliard svět. roků},$$

rovná zhruba průměru pulsujícího kosmu 2.9 (60).

Gravitační potenciál tvaru 7.3 (15) má z hlediska kosmologického proti Newtonovu potenciálu velkou přednost, že připouští existenci nekonečného vesmíru s konečnou průměrnou hustotou.

Kvantová interpretace elektrických a gravitačních sil jako sil výměnných dává pojmu pole nový fyzikální smysl. Řeší starý problém „působení na dálku“, neboť síly mezi částicemi zprostředkují fotony a gravitony, které se pohybují rychlostí světla, předpokládáme-li, že jejich klidová hmotnost je rovna nule. Připouštíme-li pak, že tyto směnné částice mají velmi malou nenulovou klidovou hmotnost, mají fotony a gravitony ve vakuu rychlost velmi blízkou mezní rychlosti, určené vztahem

$$c_{\infty} = \sqrt{-\chi_{\infty}}$$

obdobným 2.9 (45).

7.4. Statistická fyzika

7.4.1. Rozdělovací funkce

V kap. 4.4 jsme shledali, že kinetická teorie plynů pracuje se statistickými zákony, které se liší od „makrofyzikálních“ zákonů tím, že pojednávají o pravděpodobnostech stavů a jevů v termodynamických systémech velkého počtu částic a o středních hodnotách veličin charakterizujících pohybový stav těchto částic. Vysvětlili jsme pojem střední energie molekul, střední volné dráhy a uvedli jsme Maxwellův zákon rozdělení rychlostí molekul v plynu. Objasnili jsme též statistický význam entropie S , který je vyjádřen Boltzmannovou rovnicí 4.4 (51)

$$7.4 (1) \quad S - S_0 = k \ln \frac{P}{P_0},$$

kde P a P_0 značí pravděpodobnosti dvou stavů systému (plynu) a k je Boltzmannova konstanta.

Statistické metody se nikterak neomezují na kinetickou teorii plynů a kapalin; jsou nepostrádatelné a velmi užitečné ve všech případech, kdy vysvětlujeme makrofyzikální jevy na základě moderních mikrofyzikálních představ. Užili jsme jich při výkladu o vedení proudu v kovech, o emisi elektronů i jinde. Pro vlnovou mechaniku je pravděpodobnost a statistické rozložení částic a náboje základním pojmem, který umožňuje její fyzikální interpretaci.

V této kapitole vyložíme nejprve hlavní myšlenky statistické fyziky a pak ukážeme, jak kvantová fyzika zdokonalila klasickou statistickou fyziku. Uvidíme, že kvantová statistická fyzika se velmi dobře osvědčila zejména v teorii pevných látek, o které pojednáme v příští kapitole.

Základní úlohou statistické fyziky je určit pravděpodobnost, s jakou se vyskytne vybraný stav systému s velmi velkým množstvím částic. Ukážeme nejprve, jak lze tuto úlohu řešit pro jednoduchou látku, složenou z vesměs stejných částic.

Stav takové látky můžeme posuzovat z dvojího hlediska: mikrofyzikálního nebo makrofyzikálního. První hledisko vede k požadavku, abychom pokládali stav látky za plně určený, známe-li okamžitou rychlost a polohu každé molekuly. Takový stav, který označíme názvem *mikrostav*, si obvykle znázorňujeme bodem v tzv. *fázovém prostoru*. Má-li molekula pravoúhlé souřadnice x, y, z a složky hybnosti $p_x = mv_x, p_y = mv_y, p_z = mv_z$, můžeme každému stavu molekuly přiřadit bod, který má v šesti-rozměrném „fázovém“ prostoru souřadnice x, y, z, p_x, p_y, p_z . Ukazuje se pak výhodným rozdělit prostor na drobné buňky (komůrky), které mají šest rozměrů $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ rovných malým změnám souřadnic a složek rychlosti částice. Každé takové buňce můžeme přisoudit *fázový objem* velikosti

$$7.4 (2) \quad \Delta\Phi = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$$

podobně jako v třírozměrném prostoru je $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Při tom volíme rozměry $\Delta x \dots \Delta p_z$ buněk tak malé, aby se uvnitř buňky ani poloha, ani energie molekuly znatelně nelišily, ale přece tak velké, aby každá z nich obsahovala velký počet částic.

Pak definujeme *mikrostav* systému (látky) tím, že je zcela určen rozdělením částic na jednotlivé fázové buňky. Dva mikrostavy jsou totožné, pokud jsou tytéž částice obsaženy v téže buňce. Mikrostav se tedy změní přenesením kterékoli částice do jiné buňky, i když ji nahradíme druhou částicí z této jiné buňky, takže se číselně obsazení buněk nezmění.

Všechny částice jsou stejné, mají tedy stejné fyzikální vlastnosti, a proto jsou dva mikrostavy, které se liší jen výměnou dvou nebo více částic mezi různými buňkami, experimentálně nerozeznatelné. Proto říkáme, že všem mikrostavům, které se liší jen kvalitativně

(tj. výměnou některých částic mezi různými buňkami) obsazením buněk, přísluší též *makrostav*.

Zbývá ukázat, jakým způsobem jsou různé makrostavy charakterizovány. K úplnému stanovení každého makrostavu stačí patrně znát kvantitativní obsazení jednotlivých fázových buněk, tj. počet částic obsazených v i -té buňce pro všechny buňky celého fázového prostoru. Volili jsme rozměry buněk tak velké, aby byly obsazeny velkým počtem částic, a proto se při zvětšení objemu buňky zvětší ve stejném poměru též počet částic, které do ní patří. Je tedy počet N_i částic v i -té buňce úměrný jejímu objemu. Protože jsme volili objemy všech buněk stejné velikosti $\Delta\Phi$, můžeme položit

$$7.4 (3) \quad N_i = f_i \Delta\Phi,$$

kde konstanta úměrnosti f_i bude obecně různá v různých bodech fázového prostoru. Závisí tedy na souřadnicích a hybnostech částic a nazývá se *rozdělovací funkce*. Každý makrostav je tak charakterizován jistou rozdělovací funkcí f_i .

Z předešlého výkladu vidíme, že každý makrostav může vzniknout mnoha způsoby, jejichž počet je dán počtem různých mikrostavů, které mu přísluší. Je tedy zřejmé, že podle známé definice „apriorní“ pravděpodobnosti bude *pravděpodobnost makrostavu dána počtem různých jemu příslušných mikrostavů děleným počtem všech možných mikrostavů*. Protože pak počet všech možných mikrostavů je pro daný systém částic konstantní, definuje se obvykle jako *termodynamická pravděpodobnost makrostavu prostě počet různých mikrostavů, které mu přísluší*. Označíme-li ji $\tilde{P}$, dostaneme ze 7.4 (1) pro entropii systému výraz

$$7.4 (4) \quad S = k \lg \tilde{P} (+ \text{const}),$$

kde se aditivní konstanta obvykle vynechává.

Tato rovnice, kterou můžeme pokládat za statistickou definici entropie, je základním vztahem statistické fyziky, protože dává možnost určit *rovnovážný stav* systému (látky). Je to zřejmě *makrostav, který má největší pravděpodobnost*, a tedy i největší entropii. Vyjádříme-li termodynamickou pravděpodobnost $\tilde{P}$ jako funkci stavových veličin, můžeme stanovit rovnovážný stav systému z podmínky, že

$$7.4 (5) \quad \tilde{P} = \text{maximum} \quad \text{nebo} \quad S = \text{maximum}.$$

K jakým výsledkům dospěla naznačeným postupem klasická i kvantová fyzika, vyložíme v následujících článcích této kapitoly.

7.4.2. Klasická statistika Maxwellova—Boltzmannova

Zásady, z nichž vychází klasická fyzika při definici makrostavů a mikrostavů, jsme již v podstatě vyslovili v předešlém článku. Lze je shrnout jednou větou:

Dva makrostavy jsou různé, liší-li se obsazení aspoň jedné buňky kvantitativně, kdežto dva mikrostavy pokládáme za různé, i když se obsazení buněk liší jen kvalitativně.

Za těchto předpokladů plyne podle známých pravidel kombinatoriky pro termodynamickou pravděpodobnost makrostavu

$$7.4 (6) \quad \tilde{P} = \frac{N!}{N_1! N_2! N_3! \dots},$$

kde $N = \sum_i N_i$ je celkový počet částic rozložených po N_i částicích do jednotlivých buněk.

Kdyby byla v každé buňce jediná molekula, byl by počet možných mikrostavů roven počtu permutací molekul, tj. $N!$. Obsahuje-li však i -tá buňka N_i molekul, nevedou permutace těchto N_i molekul k novým mikrostavům, poněvadž se žádná molekula záměnou dvou molekul v téže

buňce nepřemístí do jiné buňky, a proto se nezmění obsazení žádné buňky ani kvalitativně. Počet všech možných permutací je tedy třeba dělit počtem $N_i!$ permutací uvnitř každé buňky, tedy celkem součinem $N_1! N_2! N_3! \dots$.

Dosti složitými výpočty dostaneme z rovnice 7.4 (6) klasickou rozdělovací funkci ve tvaru

$$7.4 (7) \quad f_i = e^{-\beta - \gamma u_i},$$

kde u_i je energie částice v i -té buňce.

Zavedeme-li místo β novou veličinu

$$7.4 (8) \quad \sigma = N e^{\beta},$$

bude

$$7.4 (9) \quad f_i = \frac{1}{\sigma} N e^{-\gamma u_i}.$$

Veličina σ se nazývá *souhrn stavů* a je dána výrazem

$$7.4 (10) \quad \sigma = \sum_i e^{-\gamma u_i} \Delta\Phi.$$

Součet se vztahuje na všechny buňky celého fázového prostoru. Veličina γ je určena celkovou energií systému a pro dokonalý plyn má jednoduchý fyzikální význam:

$$7.4 (11) \quad \gamma = \frac{1}{kT},$$

značí-li T absolutní teplotu. Pro dokonalý plyn dostáváme tak rozdělovací funkci Boltzmannovu

$$7.4 (12) \quad f_i = \frac{N}{\sigma} e^{-u_i/kT} = \frac{N/\sigma}{e^{u_i/kT}};$$

souhrn stavů má hodnotu

$$7.4 (13) \quad \sigma = V(2\pi mkT)^{3/2},$$

při čemž m je hmotnost molekuly a V objem plynu. Kdybychom přešli k meznímu případu nekonečně malých buněk objemu $d\Phi$, dostali bychom podle 7.4 (3) pro počet molekul v tomto objemovém prvku

$$7.4 (14) \quad dN = f d\Phi = f dx dy dz dp_x dp_y dp_z$$

a pro pravděpodobnost výskytu molekuly v $d\Phi$ výraz

$$7.4 (15) \quad \frac{dN}{N} = \frac{dV}{V} \frac{m^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-mv^2/2kT} dv_x dv_y dv_z,$$

který je v plném souhlase s Maxwellovým zákonem 4.3 (21).

Označíme-li totiž $c^2 = 2kT/m$, přejde 7.4 (15) ve výraz

$$\frac{dN}{N} = \frac{1}{\pi^{3/2} c^3 V} e^{-v^2/c^2} dV \cdot dv_x dv_y dv_z,$$

který udává pravděpodobnost, že molekula leží v objemovém prvku dV a zároveň má rychlost v „objemovém elementu“ vymezeném složkami dv_x, dv_y, dv_z v „rychlostním prostoru“, který dostaneme, nanášíme-li vektory rychlosti $\mathbf{v}$ z jednoho bodu O [obr. (7.4) 1]. Abychom z tohoto výrazu odvodili pravděpodobnost dP , že kterákoli molekula má velikost rychlosti v intervalu

$\langle v, v + dv \rangle$, musíme integrovat jednak přes celý objem V plynu, jednak přes všechny elementy rychlostního prostoru v kulové vrstvě K_v poloměru v a tloušťky dv . Bude tedy

$$dP = \frac{1}{\pi^{3/2} c^3 V} e^{-v^2/c^2} \left(\int dV \right) \int \int \int_{K_v} dv_x dv_y dv_z.$$

Poslední integrál se však rovná objemu vrstvy

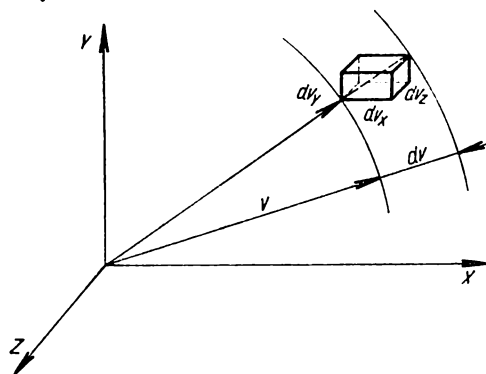
$$7.4 (16) \quad \int \int \int_{K_v} dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv,$$

takže dostaneme skutečně

$$7.4 (17) \quad dP = \frac{4}{\sqrt{\pi} c^3} e^{-v^2/c^2} v^2 dv.$$

Z rozdělovací funkce 7.4 (9) bychom také dospěli k odvození zákona o rovnoměrném rozdělení energie molekuly na její platné stupně volnosti.

Klasická statistika vede ke správným poznatkům známým z termodynamiky. Souhlas teorie s měřením je dobrý, pokud nejde o dosti nízké teploty, při nichž ovšem i hustota plynu je značnější. Pak se uplatňují i kohezní síly a plyn „degeneruje“. Boltzmannova statistika se však podstatně rozchází se skutečností, užijeme-li jí na „elektronový plyn“, jak uvidíme v čl. 7.5.2, a nelze jí užít ani na „fotonový plyn“, jak jsme zdůraznili při výkladu o Planckově zákonu teplotního záření v čl. 6.5.2.



Obr. (7.4) 1. Objemový prvek v rychlostním prostoru

7.4.3. Kvantová statistika Boseova–Einsteinova

V čl. 7.4.1 jsme rozdělili šesti-rozměrný fázový prostor na buňky konečného objemu $\Delta\Phi$ a na základě tohoto rozdělení jsme dospěli k obecné rozdělovací funkci 7.4 (12) klasické statistiky. Při odvozování Maxwellova zákona jsme však přešli k nekonečně malým prvkům fázového prostoru v plném souhlase s klasickým předpokladem o spojitosti energie. Ukážeme teď, že kvantová fyzika vede logicky ke kvantování fázového prostoru.

Začneme lineárním harmonickým oscilátorem, který má jediný stupeň volnosti, a jehož fázový prostor je tedy dvojrozměrný: přechází ve fázovou rovinu. Pokud je jeho celková energie podle 7.1 (23)

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m v_x^2 = 2\pi^2 m \nu^2 x^2 + \frac{1}{2m} p_x^2$$

stálá, opisuje příslušný bod ve fázové rovině zřejmě elipsu s poloosami

$$a = \frac{1}{\pi \nu} \sqrt{\frac{W}{2m}}, \quad b = \sqrt{2mW}.$$

Plocha elipsy

$$\pi ab = \frac{W}{\nu}$$

se však může podle 7.1 (24) měnit jen po celých násobcích h , takže nejmenší možná změna plochy ve fázové rovině je

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta W}{\nu} = \frac{h\nu}{\nu} = h.$$

Podobně platí pro elektron na kruhové oběžné dráze kolem jádra atomu Bohrova podmínka

$$\oint p \, dl = nh,$$

kteřá vede k výsledku, že při přechodu z jednoho kvantového stavu do sousedního se změní plocha fázové roviny právě o h . V obou uvedených příkladech pohybu s jedním stupněm volnosti se „objem“ dvojrozměrného fázového „prostoru“ dělí na stejné nejmenší části rovné Planckovu účinkovému kvantu h . Je to v souladu s Heisenbergovým vztahem neurčitosti 7.1 (2), podle něhož není možno určit součin souřadnice q a hybnosti p přesněji než na hodnotu h . Heisenbergův vztah platí ovšem pro všechny tři složky polohového vektoru a hybnosti částice

$$7.4 (18) \quad \Delta x \Delta p_x \geq h, \quad \Delta y \Delta p_y \geq h, \quad \Delta z \Delta p_z \geq h.$$

Proto nelze určit pohybový stav částice jediným geometrickým bodem v šesti-rozměrném fázovém prostoru. Nejpřesnější informace o pohybovém stavu částice, kterou je možno získat, je zjištění, že bod příslušný částici leží v určité buňce fázového prostoru, která má podle 7.4 (2) a 7.4 (18) objem

$$7.4 (19) \quad \Delta \Phi = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3.$$

To je základní vztah kvantové statistické fyziky, který vyjadřuje důležitý poznatek, že fázový prostor se kvantuje, není neomezeně dělitelný. Skládá se z buněk konečné velikosti, jejichž objem má stálou hodnotu rovnou třetí mocnině Planckova účinkového kvantu h . Tato „mozaiková“ či „voštinová“ struktura fázového prostoru je charakteristická pro kvantové statistiky. K tomu přistupuje ovšem další základní myšlenka kvantové fyziky:

$$7.4 (20) \quad \text{Dvě částice stejného druhu jsou zásadně nerozlišitelné.}$$

Proto se v kvantové statistice nepokládají za různé dva mikrostavy, které v sebe přecházejí záměnou dvou stejných částic. Mikrostav bude tedy zcela určen, víme-li, kolika částicemi jsou obsazeny jednotlivé buňky fázového prostoru, bez zřetele k tomu, které částice jsou v každé z nich. Podobně se pokládají dva makrostavy za různé, liší-li se počtem buněk se stejnou energií obsazených daným počtem částic.

Podle těchto zásad vypočteme tedy termodynamickou pravděpodobnost takto: Obsahuje-li fázový prostor celkem Z_i buněk, v nichž mají všechny částice stejnou energii u_i , plyne pro počet mikrostavů s touto energií u_i výraz obdobný 7.4 (6)

$$7.4 (21) \quad n_i = \frac{Z_i!}{Z_{0i}! Z_{1i}! Z_{2i}! \dots},$$

kde Z_{0i} je počet prázdných buněk, Z_{1i} počet buněk s jednou, Z_{2i} počet buněk se dvěma částicemi atd. Termodynamická pravděpodobnost makrostavu charakterizovaného tím, že Z_1 buněk má energii u_1 , Z_2 buněk energii u_2 atd., bude tedy dána součinem

$$\tilde{P} = n_1 n_2 n_3 \dots$$

Rovnovážný stav bude pak určen podmínkou, že tento součin má největší hodnotu ve srovnání se všemi soumeznými stavy. Matematickým postupem, který neuvádíme, plyne pro rovnovážné rozložení částic na jednotlivé fázové buňky rozdělovací funkce

$$7.4 (22) \quad N_i = \frac{Z_i}{e^{\beta + \gamma u_i} - 1},$$

přičemž pro celkový počet N_i částic obsažených ve všech buňkách se stejnou energií u_i platí zřejmý vztah

$$7.4 (23) \quad N_i = \sum_s Z_{si}.$$

Fyzikální význam veličiny γ je stejný jako v klasické statistice

$$\gamma = \frac{1}{kT}.$$

Označíme-li tedy

$$7.4 (24) \quad B = e^\beta,$$

dostaneme *obecnou rozdělovací funkci kvantové statistiky* ve tvaru

$$7.4 (25) \quad N_i = \frac{Z_i}{B e^{u_i/kT} - 1}.$$

Tuto funkci odvodil poprvé indický fyzik Bose, který jejím použitím na „fotonový plyn“ dospěl k Planckovu vyzařovacímu zákonu. Einstein však upozornil na obecný význam Boseovy myšlenky, a proto se tato nová statistická metoda nazývá *Boseova—Einsteinova statistika*. Částice, které se řídí touto statistikou, se podle Diraca nazývají krátce *bosony* a patří k nim kromě fotonů a fononů, o nichž promluvíme v čl. 7.5.1, všechna atomová jádra složená ze sudého počtu nukleonů (např. deuterony a heliony).

Naznačíme aspoň stručně Boseovo odvození Planckova zákona. Pro fotony, které nejsou „permanентní“ částice (vznikají i zanikají), je $\beta = 0$, takže je třeba položit

$$B = 1, \quad u_i = h\nu_i, \quad p_i = \frac{h\nu_i}{c}.$$

Stejným postupem jako 7.4 (16) plyne výsledek

$$\int_p^{p+dp} dp_x dp_y dp_z = 4\pi p^2 dp,$$

a objem fázového prostoru příslušný frekvencím v malém intervalu $\langle \nu_i, \nu_i + d\nu_i \rangle$ je tedy

$$\Phi_i = \int dx dy dz dp_x dp_y dp_z = 4\pi V \frac{h^3}{c^3} \nu_i^3 d\nu_i,$$

značí-li V objem zářivé dutiny v ustáleném stavu. Fázový objem Φ_i obsahuje zřejmě Φ_i/h^3 buněk velikosti h^3 . Počet možných stavů obsažených ve Φ_i je však u nepolarizovaného záření dvojnásobný, protože kmit obecného směru se skládá ze dvou nezávislých složek k sobě kolmých a pro každou složku platí hořejší rozdělení. Máme tedy

$$7.4 (26) \quad Z_i = 2\Phi_i/h^3 = V \frac{8\pi\nu_i^3}{c^3} d\nu_i,$$

a celkový počet fotonů ve frekvenčním intervalu $d\nu$,

$$7.4 (27) \quad N_i = \frac{8\pi\nu_i^3}{c^3} d\nu_i \frac{V}{e^{h\nu_i/kT} - 1}.$$

Označíme-li $\varrho_{0\nu}$ hustotu zářivé energie uvnitř dutiny dělenou šířkou intervalu $d\nu$ (index i vynecháváme), bude hustota energie připadající na interval $d\nu$

$$7.4 (27') \quad \varrho_{0\nu} d\nu = N \cdot h\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Odtud získáme skutečně Planckův zákon ve tvaru 6.5 (22), užijeme-li vztahu

$$\varrho_{0\nu} = \frac{4}{\nu^2} H_{02}$$

známého v teorii záření.

Uzavřeme tento článek poznámkou, že aplikace Boseovy—Einsteinovy statistiky na ideální plyn nepřináší proti klasické fyzice nic nového, protože B má pro plyny v normálních podmínkách hodnoty řádu 10^5 , pro které se zřejmě vzorce 7.4 (25) a 7.4 (12) prakticky neliší.

7.4.4. Fermiova—Diracova statistika

V Boseově—Einsteinově statistice jsou dovolena všechna obsazení fázových buněk, která jsou možná při daném celkovém počtu částic. Jednotlivé buňky však zobrazují ve fázovém prostoru jisté kvantové stavy částic, které jsou stanoveny příslušnými kvantovými čísly. To znamená, že každý kvantový stav je přístupný libovolnému počtu částic, které tedy mohou mít všechna kvantová čísla stejná. Je však známo, že v atomové fyzice platí Pauliův vylučovací princip, který nedovoluje, aby dva elektrony v témž atomu měly všechna kvantová čísla stejná. Pauli ukázal, že složení čárových spekter prvků i pásových spekter molekul svědčí o platnosti tohoto principu i pro elektrony v celých molekulách. Fermi pak vyslovil odvážnou hypotézu, že Pauliův princip platí i pro elektrony obsažené ve větších celcích, jakým je např. monokrystal. Volné elektrony v kovu splňují podle Fermiho Pauliův princip a k tomu je třeba přihlížet při aplikaci kvantové statistiky na elektronový plyn. Vybudování statistiky částic, které se řídí vylučovacím principem Pauliho, zúčastnil se také Dirac, a proto se tato statistika nazývá *Fermiova—Diracova*. Je to v podstatě statistika Boseova, omezená Pauliovým principem, a proto je jasné, že se liší od Boseovy statistiky jen tím, že každá buňka může být obsazena nejvýše jednou částicí.

To znamená, že úvahy a výpočty, které vedou k statistice Boseově, zůstávají v platnosti s jediným omezením, že každá buňka je buď prázdná, nebo obsahuje jedinou částici. Počet mikrostavů s energií u_i je tedy podle 7.4 (21) dán výrazem

$$7.4 (28) \quad n_i = \frac{Z_i!}{Z_{0i}! Z_{1i}!},$$

neboť

$$Z_{si} = 0 \text{ pro } s \geq 2.$$

Zjednodušením výpočtů, které vedou od vzorce 7.4 (21) k Boseově rozdělovací funkci 7.4 (25), bychom ze vzorce 7.4 (28) došli k rozdělovací funkci

$$7.4 (29) \quad N_i = \frac{Z_i}{B e^{u_i/kT} + 1},$$

která je základem Fermiovy—Diracovy statistiky. Je pozoruhodné, že se tato funkce liší od Boseovy rozdělovací funkce jen znaménkem u jednotky ve jmenovateli. Je to v souvislosti s poznatkem, že vlnová funkce $\psi(1, 2)$ dvou částic, které se řídí Boseovou statistikou, tedy vlnová funkce dvou bosonů, je symetrická

$$\psi(1, 2) = \psi(2, 1)$$

a že vlnová funkce dvou částic, které se řídí statistikou Fermiho a které Dirac nazval *fermiony*, je antisymetrická

$$\psi(1, 2) = -\psi(2, 1).$$

Této abstraktní charakteristice bosonů a fermionů můžeme dát konkrétnější fyzikální smysl: Bosony jsou částice s celistvým spinem, kdežto fermiony jsou částice s lichým počtem polovičních spinů. Patří tedy k fermionům částice se spinem rovným lichému počtu $\hbar/2$, tedy podle tab. (8.1) I především základní látkové částice jako elektron, proton, neutron a mion a všechna atomová jádra obsahující lichý počet nukleonů. Částice se spinem nulovým nebo rovným celému počtu $\hbar$ jsou naopak bosony jako foton, deutron, helion a všechna atomová jádra nebo molekuly složené ze sudého počtu fermionů. Na počtu bosonů v jádře nebo v molekule nezáleží.

Plyn, který se řídí Fermiovou statistikou, se nazývá *Fermiův plyn*. Velmi důležitým příkladem takového plynu je „elektronový plyn“ složený z volných elektronů, které jsou nositeli proudu vedeného kovem. O vlastnostech elektronového plynu pojednáme v čl. 7.5.2, zde provedeme jen kvalitativní srovnání všech tří druhů fyzikálních statistik. Za tím účelem položíme v rozdělovacích funkcích 7.4 (7), 7.4 (22) a 7.4 (29)

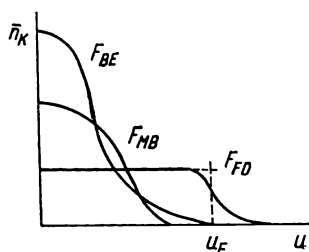
$$7.4 (30) \quad \beta = -\frac{u_F}{kT}, \quad B = e^{-u_F/kT}, \quad \gamma = \frac{1}{kT}$$

a nahradíme je spojitými funkcemi

$$7.4 (31) \quad F_{MB} = \frac{1}{e^{(u-u_F)/kT}},$$

$$7.4 (32) \quad F_{BE} = \frac{1}{e^{(u-u_F)/kT} - 1},$$

$$7.4 (33) \quad F_{FD} = \frac{1}{e^{(u-u_F)/kT} + 1}.$$



Obr. (7.4) 2. Průběhy rozdělovacích funkcí

Průběh těchto funkcí závisí podstatně na poměru u_F/kT , kde u_F má rozměr energie a nazývá se *Fermiova energie*. Její hodnota závisí na teplotě, ale pokud

$$7.4 (34) \quad \frac{kT}{u_F} \ll 1,$$

můžeme u_F nahradit její hodnotou pro $T = 0$. Pak mají funkce F_{MB} , F_{BE} , F_{FD} průběh naznačený na obr. (7.4) 2, z něhož je patrné, že křivky F_{MB} a F_{BE} se liší jen kvantitativně, zatímco křivka F_{FD} má průběh kvalitativně rozdílný. V limitním případě $T \rightarrow 0$ vidíme ze 7.4 (33), že pro všechny hodnoty $u < u_F$ je $F_{FD} = 1$, kdežto pro $u > u_F$ je $F_{FD} = 0$. V tomto případě má křivka F_{FD} pravoúhlý průběh naznačený na obr. (7.4) 2 čárkovaně. Tato charakteristická vlastnost Fermiovy—Diracovy rozdělovací funkce má důležitý fyzikální význam, jak poznáme v příští kapitole.

7.4.5. Kvantové zesilovače a generátory záření

V čl. 7.2.1 jsme vysvětlili základy Bohrovy teorie elektronového obalu atomů. Ačkoli tato první kvantová teorie atomů byla dalším vývojem překonána, přece její výklad emise a absorpce elektromagnetického záření elektronovým obalem zůstává v platnosti. Podle III. Bohrova postulátu vyše atom foton o energii

$$7.4 (35) \quad h\nu = W_2 - W_1,$$

přejde-li ze stavu s energií W_2 do stavu s energií W_1 ($W_1 < W_2$). Naopak při dopadu záření frekvence ν absorbuje atom v kvantovém stavu W_1 foton tohoto záření a přejde do stavu W_2 . V tomto vzbuzeném stavu však atom nezůstane trvale; existuje jistá pravděpodobnost, že atom přejde do stavu s nižší energií W_1 , při čemž vyše zase kvantum $h\nu$. Takové *spontánní* čili *samo-*

volné záření (emise kvant) je proces náhodný a platí pro něj statistické zákony vyložené v předchozích článcích. Einstein poukázal na to, že tato spontánní emise není jediným případem, kdy atom vydává záření, a že existuje také *stimulovaná* čili *podnícená* emise kvant, která může být vyvolána účinkem záření téže frekvence. Popsané tři děje jsou znázorněny na obr. (7.4) 3.

Přijmeme-li pro tyto děje platnost Maxwellovy—Boltzmannovy statistiky, bude v rovnovážném stavu podle 7.4 (3,12) poměr počtu atomů ve stavech s energií W_1 a W_2

$$7.4 (36) \quad N_2/N_1 = e^{-(W_2-W_1)/kT} = e^{-h\nu/kT}.$$

Čísla N_1 a N_2 se nazývají *obsazení* nebo *populace* energetických hladin W_1 a W_2 a jsou ovlivňována emisí a absorpcí záření. Samovolná emise při přechodu s hladiny W_2 na nižší hladinu W_1 je náhodný děj, při němž počet vyzářených kvant je úměrný počtu atomů na hladině W_2 .

Časová změna obsazení je tedy

$$7.4 (37) \quad \left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{\text{sam. em.}} = -AN_2,$$

značí-li A konstantu. Změna obsazení N_2 způsobená absorpcí záření frekvence ν atomy na hladině W_1 (které tím přejdou na hladinu W_2) je úměrná N_1 a ovšem také intenzitě záření. Příslušný časový přírůstek obsazení je tedy

$$7.4 (38) \quad \left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{\text{abs.}} = B\rho_\nu N_1, \\ B = \text{const},$$

kde ρ_ν značí hustotu zářivé energie (číselně rovnou energii připadající na jednotkový interval frekvence). Konečně se N_2 zmenšuje podnícenou emisí, pro kterou platí obdobně

$$7.4 (39) \quad \left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{\text{podn. em.}} = -C\rho_\nu N_2, \quad C = \text{const}.$$

Za rovnovážného stavu má však N_2 stálou hodnotu, a proto celková změna

$$\frac{dN_2}{dt} = -AN_2 + B\rho_\nu N_1 - C\rho_\nu N_2 = 0,$$

takže vzhledem k 7.4 (36)

$$7.4 (40) \quad \rho_\nu = \frac{A}{BN_1/N_2 - C} = \frac{A}{Be^{h\nu/kT} - C}.$$

Avšak ρ_ν je ve shodě s Planckovým vyzařovacím zákonem dáno vztahem 7.4 (27'):

$$7.4 (41) \quad \rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

a srovnáním výrazů 7.4 (40, 41) plynou rovnice

$$7.4 (42) \quad B = C, \quad \frac{A}{B} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}.$$

Protože časové změny obsazení N_1 a N_2 jsou úměrné pravděpodobnostem absorpce a emise kvanta, dostáváme ze 7.4 (38, 39) se zřetelem k první rovnici 7.4 (42) a 7.4 (36) pro poměr pravděpodobností podnícené emise k pravděpodobnosti absorpce

$$7.4 (43) \quad P_{pe} : P_a = N_2/N_1 = e^{-h\nu/kT}$$

a podle 7.4 (37, 39) je vzhledem k druhé rovnici 7.4 (42) poměr pravděpodobnosti samovolné a podněcené emise

$$7.4 (44) \quad P_{so} : P_{pe} = \frac{A}{B\rho_\nu} = e^{h\nu/kT} - 1.$$

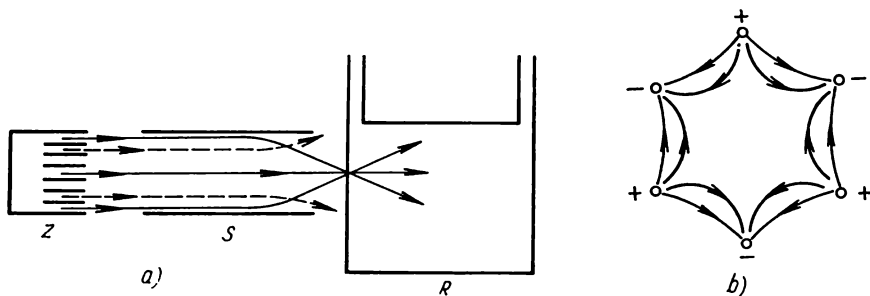
Na těchto výsledcích je založena teorie kvantových (molekulových) zesilovačů a generátorů (oscilátorů), jak ukážeme v dalším výkladu.

Při absolutní teplotě $T = 300^\circ \text{K}$ je $kT \approx \frac{1}{40} \text{ eV}$, takže pro optické záření ($h\nu \approx 1 \text{ eV}$) je $N_2 \approx N_1 e^{-40} \ll N_1$. To znamená, že při ozařování nějaké látky viditelným světlem převládá absorpce a po ní následující samovolná emise, kdežto podněcená emise je mizivě nepatrná. Jinak je tomu při ozařování elektromagnetickými mikrovlnami délky 10 cm, kdy $h\nu \approx 10^{-5} \text{ eV}$, tj. $h\nu/kT \approx 4 \cdot 10^{-4}$. Tu je $N_2 \approx N_1$, a položíme-li $e^x \approx 1 + x$, dostaneme podle 7.4 (43)

$$N_1 - N_2 \approx (N_1 + N_2) h\nu/2kT \ll N_1 + N_2.$$

Působením silného mikrovlnného signálu frekvence ν vzniká v materiálu absorpce, kterou se zmenšuje N_1 a zvětšuje N_2 . Je-li relaxační doba, za kterou by se ustavilo bez vnějšího zásahu rovnovážné energetické rozložení, dosti dlouhá, je možno dosáhnout „nasycení“, při němž podněcené záření má skoro stejnou intenzitu jako záření pohlcené, takže se mikrovlnný signál průchodem látkou prakticky nezeslabuje.

Je možno si představit, že by se podařilo nějakým způsobem dosáhnout toho, aby $N_2 > N_1$, aby tedy kvantové stavy s vyšší energií byly silněji obsazeny než stavy s nižší energií. Obsazení obou hladin by bylo obrácené (inverzní) a podněcená emise by měla převahu nad absorpcí.



Obr. (7.4) 4. Separační maser: a — celkové uspořádání, b — schéma separátoru

Průchodem záření látkou s tak obsazenými energetickými hladinami by se záření nejen nezeslabilo, ale dokonce zesílilo.

Takové inverzní obsazení energetických hladin bylo opravdu uskutečněno, a to umožnilo konstrukci prvního mikrovlnného kvantového (molekulového) zesilovače, který je všeobecně znám pod zkráceným označením *maser* (čti mejzr, což značí Microwave Amplification through Stimulated Emission of Radiation). Popíšeme stručně hlavní metody, kterými bylo dosaženo „inverzní populace“ u některých látek.

Separační maser

Molekuly čpavku NH_3 [viz obr. (7.3) 8] absorbují velmi silně mikrovlny s frekvencí $2,387 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$ ($\lambda = 1,2559 \text{ cm}$), s kterou kmitá atom N kolmo k rovině atomů H. Střední hodnota elektrického dipólového momentu molekul NH_3 je sice nulová, ale v elektrickém poli se atom N zdrží déle v jedné poloze než v opačné. Oba stavy molekuly se liší znaménkem elektrického momentu a mají různé energie W_1, W_2 . V nehomogenním elektrickém poli jsou molekuly s vyšší energií W_2 odchylovány ve směru klesajícího pole, kdežto molekuly s nižší energií W_1 ve směru rostoucího pole.

Toho využili r. 1955 Townes, Gordon a Zeiger ke konstrukci tzv. *separačního maseru*, jehož schéma podává obr. (7.4) 4a. Ze zdroje Z molekul NH_3 vstupuje svazek molekul do separátoru S, v jehož nehomogenním poli se rozdělí na svazek molekul s energií W_2 (vyznačený plnými čarami) a na svazek molekul s energií W_1 (kreslený čárkovaně). Separátor má tvar klece tvořené rovnoběžnými dráty nabitými střídavě kladně a záporně, takže pole je podél osy nulové. Proto se

molekuly s energií W_2 fokusují do osového svazku, zatímco molekuly s energií W_1 se rozptýlí. Svazek molekul s energií W_2 vstupuje do rezonanční dutiny*) R (viz čl. 5.10.4), kde pod vlivem mikrovlnného signálu vzniká podněcená emise. Tento maser je vhodný spíše jako mikrovlnný oscilátor neboli generátor mikrovln, které se vytvoří vlivem statistických fluktuací elektrického pole v rezonanční dutině i bez vstupního signálu a jejichž frekvence jsou velmi stabilní a dobře definované absorpčními čarami NH_3 .

R. 1960 byl sestaven podobný oscilátor s jednoatomovým vodíkem, který emituje velmi ostrou „galaktickou“ vodíkovou čáru vlnové délky 21,11 cm s velmi stabilní frekvencí $1,420 \cdot 10^9$ Hz (srov. čl. 2.9.8). Tohoto oscilátoru bude pravděpodobně využito ke konstrukci atomových hodin.

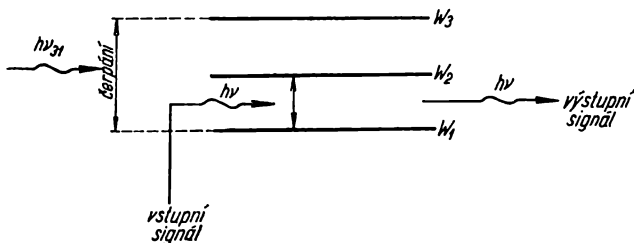
Širší vlnový pás lze získat užitím molekul se širšími absorpčními čarami. K tomu jsou vhodné paramagnetické ionty rozptýlené v diamagnetickém krystalu. V magnetickém poli B se základní stav W_0 iontu s magnetickým momentem m rozštěpí na dvě hladiny, které mají podle 5.8 (10) energie

$$W_1 = W_0 - m \cdot B, \quad W_2 = W_0 + m \cdot B,$$

jejichž rozdíl při vhodné volbě B odpovídá kvantu mikrovln. Inverzního obsazení $N_2 > N_1$ se pak dosáhne rychlým převrácením směru magnetického pole nebo náhlou změnou frekvence mikrovlnného signálu. Takové masery nemohou pracovat spojitě, a proto se více užívá spojitě pracujících zesilovačů, založených na metodě tří energetických hladin.

Tříhladinový maser

Paramagnetické ionty s více než jedním lichým (magnetickým) elektronem dávají v magnetickém poli několik energetických hladin. Jsou to zejména trojmocné kladné ionty Cr^{+++} , rozptýlené v krystalu rubínu (Al_2O_3), které mají čtyři takové hladiny, z nichž tři jsou vhodné ke konstrukci maseru, jak ukázal Bloembergen (1956). Na obr. (7.4) 5 jsou znázorněny tři



Obr. (7.4) 5. Schéma tříhladinového maseru

blízké hladiny W_1, W_2, W_3 , z nichž dvě horní hladiny W_2, W_3 jsou k sobě termicky silně vázány, a mají tedy krátkou relaxační dobu, v níž dosáhnou rovnovážného obsazení $N_3 < N_2$. Působíme-li na krystal silným mikrovlnným signálem s frekvencí

$$\nu_{31} = (W_3 - W_1)/h$$

(která se nazývá „čerpací“ frekvence), dosáhneme nasycení, při němž $N_3 \approx N_1$. Pak je tedy splněna podmínka $N_1 < N_2$ pro podněcenou emisi frekvence $\nu = (W_2 - W_1)/h$, jak

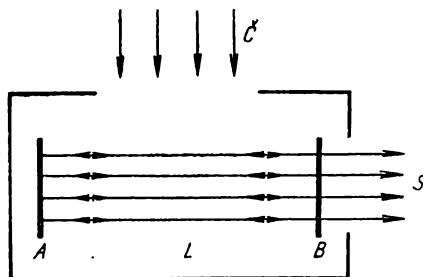
naznačeno na obr. (7.4) 5. Umístíme-li tedy rubínový krystal do dutinového rezonátoru v magnetickém poli, získáme tak zesilovač s dosti širokým pásmem a s mimořádně nízkou hladinou šumu. Pracuje se obvykle při teplotě kapalného hélia (4 °K) a užívá se též supravodivých magnetů (viz čl. 5.3.2). Tříhladinovými masery bylo dosaženo zesílení výkonu vstupního signálu až 400 (26 dB) při šířce pásu 2,5 MHz. Výhodnou modifikací tohoto zařízení je tzv. zesilovač „s putující vlnou“, u něhož je krystal uzavřený v dutinovém rezonátoru nahrazen dlouhým proužkem aktivního materiálu uloženým ve vlnovodu. Odstraněním rezonátoru se podstatně sníží šum, a to až na tisícinu šumu konvenčních zesilovačů. Takového maseru bylo prakticky užito pro příjem signálů od umělé družice Echo.

Kvantové generátory světla

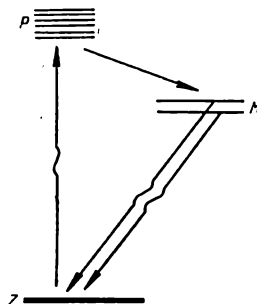
V úvodu jsme ukázali, že podle 7.4 (36) je pro optické záření $N_2 \ll N_1$. I kdyby se podařilo dosáhnout inverzního obsazení hladin, byla by vzhledem ke vztahu 7.4 (44) pravděpodobnost P_{ee} podněcené emise velmi malá proti pravděpodobnosti P_{ee} samovolné emise, protože pro optické

*) Rezananční dutiny neboli dutinové rezonátory užívané např. pro centimetrové elektromagnetické vlny jsou obdobou akustických rezonátorů (viz čl. 3.3.2). V dutině omezené vodičem vznikají stojaté elektromagnetické vlny, jejichž vlnová délka odpovídá rozměrům dutiny [srov. dutinový magnetron na obr. (5.10) 16].

záření frekvence ν je $h\nu \gg kT$. Přece však může podněcené záření dosáhnout mnohem větší intenzity než spontánní, což je dáno podstatným rozdílem mezi oběma druhy emise. Světlo vydávané při spontánní emisi (např. světlo vzniklé ve výbojce elektronickým buzením atomů) má jakožto výsledek náhodných procesů také náhodně rozložené fáze; říkáme, že je to světlo fázově nekoherentní. Výsledná intenzita světla vyslaného N atomy je pak rovna N -násobné intenzitě I záření jednoho atomu. Naproti tomu je podněcená emise stejně jako absorpce fázově koherentní, neboť vstupní signál může způsobit, že velký počet N atomů září v téže fázi. Pak je výsledná amplituda N -násobná a výsledná intenzita [úměrná podle 3.2 (32) čtverci amplitudy] je rovna $N^2 I$. Při velkém počtu atomů může zřejmě intenzita podněceného záření značně pře-



Obr. (7.4) 6. Princip laseru

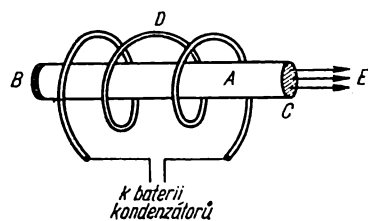


Obr. (7.4) 7. Energetické hladiny v rubínovém laseru

Kročit intenzitu nekoherentní samovolné emise. Dosáhneme-li tedy inverzního obsazení hladin a podněceného záření mnoha atomů ve shodné fázi, dostaneme intenzivní svazek koherentního světla. Příslušné zařízení, které je optickou obdobou maseru, se nazývá *kvantový* nebo *molekulový generátor světla* nebo prostě *laser* (kde *l* je zkratkou slova „light“). V laserech se nahrazuje dutinový rezonátor dvěma rovnoběžnými deskami (zrcadly), mezi nimiž se světlo odráží sem a tam a mnohokrát projde aktivní látkou, jak je naznačeno na schematickém obr. (7.4) 6. Čerpací záření C podněcuje emisi v aktivní látce L mezi zrcadly A a B , z nichž druhé je mírně transparentní. Rovnoběžný koherentní svazek S uniká deskou B . Toto uspořádání navrhli Schawlow a Townes (1958) s parami Na nebo K jako aktivní látkou. Podněcenou emisi však poprvé pozoroval Maiman (r. 1960) v rubínu a téhož roku se podařilo skutečně vytvořit koherentní svazek. Při tom se ovšem nepracovalo s velmi blízkými hladinami vzniklými u Cr^{+++} štěpením v magnetickém poli (jako u maseru), ale s přirozenými hladinami dosti širokého energetického pásu P , na který byly ionty Cr^{+++} vyzdviženy ze základního stavu Z vhodně voleným čerpacím zářením [obr. (7.4) 7]. Ionty pak sestupují do metastabilního stavu (dubletu) M a při přechodu do základního stavu Z vydávají koherentní podněcené záření totožné s charakteristickým červeným fluorescenčním zářením rubínu. Inverzní populace se nejlépe dosáhne velmi intenzivními záblesky, které vzbudí fluorescenci trvající asi jednu milisekundu. Z obr. (7.4) 8 je zřejmá úprava *rubínového laseru*, který byl uveden v činnost v Bell Telephone Laboratories. Koherentní svazek vystupující z rubínové tyčinky (délky 4 cm, průměru 0,5 cm) při každém záblesku (po dobu 0,5 ms) měl energii 0,2 J. Svazek byl fokusován na průměr 0,1 mm, čímž bylo dosaženo měrného výkonu $4 \cdot 10^6 \text{ Wcm}^{-2}$.

Skoro současně s americkými a kanadskými vědci vyvinuli laser sovětská badatelé Bassov a Prochorov. Dnes se vyrábějí rubínové monokrystaly rozměrů $25 \times 25 \times 250 \text{ mm}^3$, jimiž lze dosáhnout energie až 500 J v jednom pulsu a špičkového výkonu 50 MW. Takové lasery jsou vhodné pro bodové sváření. Místo rubínu lze užít i krystalu CaCl nebo neodymového skla. Byly sestrojeny též *polovodičové lasery*. Např. arzenid galia s přechodem $p-n$ pracuje spojitě za teploty kapalného hélia.

R. 1961 byly sestrojeny dva druhy laserů, které dávají takřka monochromatické záření v infračerveném oboru. První typ užívá iontů Sm^{++} v CaF_2 , druhý typ je spojitě pracující *plynový laser*, v němž bylo užito jako aktivní látky neónu pod tlakem 0,1 torru. Inverzní obsa-



Obr. (7.4) 8. Pulsní rubínový laser: A – rubínová tyčinka, B – silně postříbřená čelní ploška, C – slabě postříbřená ploška, D – budící záblesková trubice, E – vystupující koherentní svazek

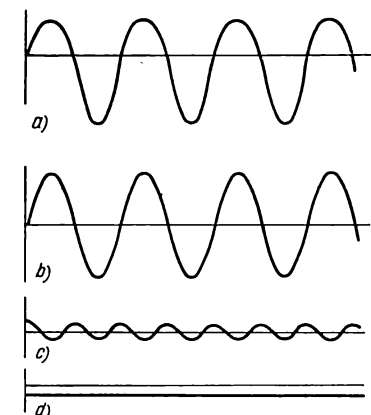
zení hladin bylo uskutečněno excitací heliových atomů do metastabilního stavu, s energií blízkou energii vzbuzených stavů neónu. Podobně pracují *organické lasery* v oboru vlnových délek 10–100 μm .

Konstrukce i aplikace laserů jsou na samém počátku svého vývoje, který v posledních letech přinesl řadu pozoruhodných výsledků. Lasery jsou zdrojem skoro dokonale rovnoběžných velmi úzkých světelných svazků, jejichž intenzita klesá velmi pomalu se vzdáleností. S rubínovým krystalem délky 10 cm se dokonce podařilo zachytit odraz svazku od Měsíce, na jehož povrchu měl svazek průměr pouze několik km. Takovými svazky je možno vrtat otvory o průměru řádu mikronu a provádět oční operace.

V poslední době byl vyvinut generátor světelných impulsů, v němž se Kerrovým článkem přerušuje vysoce intenzivní koherentní svazek z rubínového laseru. Generátor pracuje jako fotografická komora s nesmírně krátkou expoziční dobou řádu 10^{-9} s.

R. 1961 se podařilo Frankenovi a jeho spolupracovníkům ozařováním krystalu křemene rubínovým laserem přeměnit nepatrnou část červeného světla vlnové délky $\lambda = 0,6943 \mu\text{m}$ na ultrafialové světlo poloviční délky $0,34715 \mu\text{m}$ a stejnou přeměnu uskutečnil Giordmaine ozařováním piezoelektrického krystalu známého pod označením KPD.

Tento pozoruhodný jev je umožněn nelinearitou piezoelektrických krystalů, které reagují na elektrickou složku světelné vlny nesymetricky. Při průchodu světla vzniká v nich slabší „optická polarizace“ v jednom směru než ve směru opačném, jak je znázorněno na obr. (7.4) 9a. Harmonickou analýzou této nelineární polarizační vlny plyne, že se skládá ze tří složek, z nichž složka b) má původní frekvenci $\nu = c/\lambda$ červeného světla, složka c) má frekvenci dvojnásobnou 2ν a složka d) představuje stálou polarizaci s frekvencí nulovou. Lze to chápat jako zvláštní případ amplitudové modulace světelné vlny, při které je modulující frekvence rovna frekvenci vlny modulované. Výsledná vlna se podle čl. 5.12.4 skládá z původní vlny,



Obr. (7.4) 9. Harmonická analýza nelineární optické polarizační vlny

z vlny o frekvenci rovné součtu modulované a modulující frekvence ($\nu + \nu = 2\nu$) a z vlny o frekvenci rovné jejich rozdílu ($\nu - \nu = 0$). Ultrafialové světlo tedy vzniká jako 2. harmonická složka základní vlny červeného světla tím, že krystal moduluje světelnou vlnu její vlastní frekvencí.

Světlo vydávané lasery je vysoce monochromatické a má neobyčejně stabilní kmitočet, takže by jím bylo možno zjišťovat relativnostní efekty 4. řádu. Skutečně připravuje Townes opakování Michelsonova pokusu za účelem přesnějšího ověření principu stálé rychlosti světla.

V posledních letech se zkoumá též možnost realizace *kvantových detektorů* částic. Tyto detektory by pracovaly za hlubokých teplot, a proto by prakticky neměly pozadí, podobně jako kvantové zesilovače nemají pozorovatelný šum. R. 1963 byl navržen kvantový detektor neutronů a není vyloučena ani možnost detegovat neutrina.

7.5. Pevné látky

7.5.1. Debyova teorie molekulových tepel

Již při výkladu o molekulových a atomových teplech v čl. 4.3.8 jsme uvedli, že klasická termodynamika nedovedla vysvětlit odchylky od Dulongova—Petitova pravidla, které plyne z ekvipartičního teorému pro prvky v pevném skupenství. Upozornili jsme také na to, že plné shody s výsledky měření dosáhla teprve kvantová teorie. Objasníme krátce základní představy teorie, kterou založil Einstein a zdokonalil Debye.

Mějme monokrystal složený z $\tilde{N}$ částic (molekul, atomů, iontů), které při teplotě $T > 0$ konají tepelné kmity. Kmit každé částice si můžeme rozložit do tří navzájem kolmých směrů, čímž dostaneme $3\tilde{N}$ lineárních oscilátorů. Taková soustava mechanických oscilátorů se podobá soustavě elektromagnetických oscilátorů, jejichž existenci vysvětlujeme teplotní záření těles (viz čl. 6.5.1). Předpokládáme-li totiž, že elastické síly, které vznikají při vy-

chylování kmitajících částic z rovnovážné polohy, splňují Hookův zákon, jsou kmity částic harmonické a jejich energie se podle 7.1 (25) jako energie každého lineárního oscilátoru kvantuje: Je lichým násobkem polovičního kvanta $h\nu/2$, a mění se tedy jen po celistvých kvantech $h\nu$ jako energie elektromagnetických oscilátorů, které vyzařují fotony. Proto spojujeme tepelné kmitání v krystalové mřížce s představou částic obdobných fotonům a nazýváme je *fonony*. Jsou to „kvanta tepelné energie“ analogická Planckovým „světelným kvantům“, o nichž jsme v čl. 7.4.3 ukázali, že se řídí Boseovou — Einsteinovou statistikou, která vede jednoznačně k Planckovu vyzařovacímu zákonu plně vystihujícímu pozorované vlastnosti záření.

Je proto nasnadě myšlenka, kterou vyslovil Horák (1952), že fonony se řídí stejnou statistikou jako fotony, což potvrzuje dobrý souhlas teorie, založené na této myšlence, se skutečností.

Einstein původně předpokládal, že se kmity všech molekul (atomů) dějí v celém monokrystalu se stejnou frekvencí, což vedlo k výsledkům, které souhlasily jen přibližně s měření molekulových a atomových tepel. Proto Debye zobecnil teorii v tom smyslu, že kmity mají různé frekvence od nulové až po jistou nejvyšší frekvenci ν_m , jejichž počet je právě roven počtu všech kmitajících lineárních oscilátorů, tedy trojnásobnému počtu $3N$ atomů v krystalu.

Debyova teorie vede k těmto výsledkům: Je-li monokrystal složen z jednoatomových molekul, obsahuje jeden kilomol pevné látky Avogadrovo číslo N molekul (atomů). Je-li však každá molekula složena z n atomů, je $N = nN$ a Debyova teorie dává pro molekulové teplo krystalu (při stálém objemu) vzorec

$$7.5 (1) \quad C_v = 3nR \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 F(T/\Theta),$$

kde $R = Nk$ je známá plynová konstanta, a stálá hodnota

$$7.5 (2) \quad \Theta = \frac{h\nu_m}{k}$$

Tabulka (7.5) I

Charakteristické teploty pevných látek

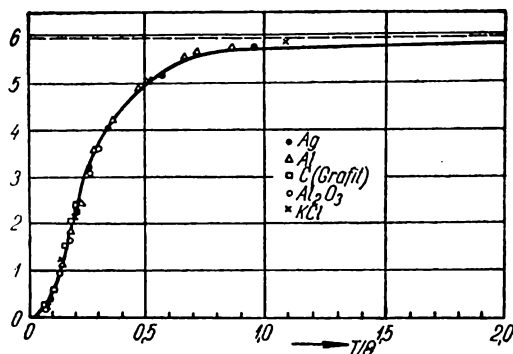
má rozměr teploty a nazývá se *Debyova charakteristická teplota* látky. Funkce $F(T/\Theta)$ je dána integrálem 7.5 (9). Maximální frekvence ν_m , a tedy i Θ závisí na druhu látky, jak vidíme z tabulky (7.5) I.

Znázorníme-li však kilomolové teplo jako funkci bezrozměrného parametru T/Θ , dostaneme křivku, která má přesně stejný průběh pro všechny pevné látky, jak poznáváme z obr. (7.5) 1. Proto atomová tepla C_v/n všech pevných prvků závisí stejným způsobem na poměru T/Θ a pro dosti vysoké teploty se asymptoticky blíží hodnotě o málo menší než $3R = 6 \text{ kcal deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$. Z Debyovy teorie tedy vyplývá, že *při dosti vysokých teplotách* ($T > 2\Theta$) *vyhovují všechny prvky Dulongovu—Petitovu pravidlu*. Toto pravidlo platí i při běžných teplotách dosti přesně jen u prvků s nízkou Debyovou teplotou, kdežto ostatní prvky mohou jevit i velmi značné odchylky. Při velmi nízkých teplotách jsou relativní změny funkce $F(T/\Theta)$ malé, a proto platí vztah

7.5 (3) $C_v \sim (T/\Theta)^3$,
který říká, že při nízkých teplotách jsou atomová tepla úměrná třetí mocnině absolutní teploty, což souhlasí s měřeními.

Kovy	Θ	Iontové krystaly	Θ
Pb	88 °K	AgBr	144 °K
Hg	96	KBr	177
Na	150	AgCl	183
Cu	315	KCl	227
Fe	420	NaCl	281
Cr	485	CaF ₂	474
Be	1 000	FeS ₂	645

Ve vyložené teorii se předpokládá, že veškerá tepelná energie je dána termickými kmity krystalové mřížky. Z klasické elektronové teorie kovů však vyplývá, že u kovů přispívají k tepelné energii také vodivostní elektrony. Podle ekvipartičního teorému má totiž i elektronový plyn molekulové teplo $3R/2$, takže celkové atomové teplo kovu by mělo být $9R/2$ v rozporu s experimentální hodnotou $3R$. V příštím článku ukážeme, že kvantová teorie tento rozpor odstranila a že „elektronové teplo“ je mnohem menší než $3R/2$. Proto je Debyova teorie v dobré shodě s měřeními atomových a molekulových tepel nejen u nevodivých krystalů, ale také u kovů.



Obr. (7.5) 1. Závislost molekulových tepel na teplotě

Naznačíme krátce, jak lze dospět k Debyově funkci na základě předpokladu, že pro fonony platí Boseova—Einsteinova statistika podobně jako pro fotony. Je ovšem třeba uvážit, že elektromagnetický kmit je zcela určen dvěma nezávislými složkami, protože musí být kolmý ke směru šíření světla, a proto jsme v rovnici 7.4 (26) položili počet Z_i buněk s energií $u_i = h\nu_i$ rovný dvojnásobku poměru Φ_i/h^3 . Naproti tomu tepelný kmit v krystalové mřížce má tři nezávislé složky, a proto musíme psát

$$Z_i = 3\Phi_i/h^3 = 12\pi V \frac{v_i^3}{c^3} d\nu_i.$$

Jinak je postup obdobný postupu, kterým jsme odvodili Planckův zákon, s výhradou, že c značí rychlost šíření elastických vln krystalem. Pro hybnost fononu platí totiž stejný vzorec jako pro hybnost fotonu

$$p_i = \frac{h\nu_i}{c},$$

kde ovšem c znamená rychlost šíření elastických, a nikoli elektromagnetických vln.*)

Celkový počet fononů ve frekvenčním intervalu $d\nu$ dostaneme tedy, nahradíme-li v 7.4 (27) činitele 8 číslem 12

$$7.5 (4) \quad N_i = \frac{12\pi\nu_i^3 V}{c^3} \frac{d\nu_i}{e^{h\nu_i/kT} - 1},$$

a energie oscilátorů v témže intervalu bude

$$7.5 (5) \quad dU_i = N_i u_i = N_i h\nu_i = \frac{12\pi h}{c^3} V \frac{\nu_i^3 d\nu_i}{e^{h\nu_i/kT} - 1}.$$

Abychom mohli vypočítat celkovou tepelnou energii, musíme energie dU_i sečíst pro všechny kmity, které Debyova teorie připouští. Má-li krystal tvar krychle o hraně L , musí všechny hrany obsahovat celistvé počty j, k, l stojatých půlvln:

$$2q_x L = j, \quad 2q_y L = k, \quad 2q_z L = l, \quad j, k, l = 1, 2, 3, \dots,$$

kde příslušné vlny q_x, q_y, q_z můžeme pokládat za složky vektoru velikosti

$$q = \frac{1}{2L} \sqrt{j^2 + k^2 + l^2} = \frac{r}{2L}.$$

Konečné body všech vektorů $\mathbf{q}$ leží v rozích jednotkových krychlí sestavených v oktantu s vesměs kladnými souřadnicemi j, k, l bodu ležícího ve vzdálenosti r od počátku. Je-li r_m velké

*) Vzhledem k tomu, že rychlost c , podélné vlny je jiná než rychlost c , vlny příčné, je třeba za c vzít střední rychlost, kterou Debye definoval vztahem

$$\frac{3}{c^2} = \frac{2}{c_l^2} + \frac{1}{c_t^2}.$$

číslo a ϱ_m jemu příslušný vlnčet, můžeme počet různých vlnčetů pro všechna $r \leq r_m$ položit rovným objemu osminy koule

$$N_m = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi r_m^3 = \frac{4}{3} \pi \varrho_m^3 L^3.$$

Každé hodnotě ϱ přísluší však tři kmity ve směrech souřadnicových os, takže celkový počet kmitů je trojnásobný a Debyova podmínka zní

$$3N_m = 3N = 4\pi \varrho_m^3 L^3.$$

Zavedeme-li konečně Debyův maximální kmitočet $\nu_m = c\varrho_m$ a označíme-li objem krystalu $V = L^3$, dostaneme

$$7.5 (6) \quad \frac{1}{c^3} = \frac{3N}{4\pi V \nu_m^3}.$$

Dosazením do 7.5 (5) a integrací vychází pro úhrnnou tepelnou energii krystalu

$$7.5 (7) \quad U = \frac{9Nh}{\nu_m^3} \int_0^{\nu_m} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

a odtud vypočteme molekulové teplo při stálém objemu parciální derivací podle teploty

$$7.5 (8) \quad C_v = \frac{\partial U}{\partial T}.$$

Vzhledem k 7.5 (2) dostaneme po snadné úpravě rovnici 7.5 (1), kde funkce

$$7.5 (9) \quad F(T/\Theta) = 3 \int_0^{\Theta/T} \frac{e^x x^4}{(e^x - 1)^2} dx.$$

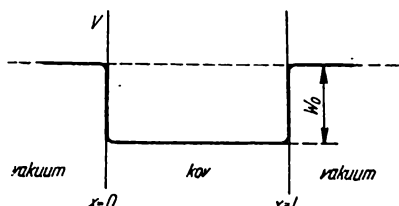
7.5.2. Elektronová teorie kovů

Sommerfeld přepracoval r. 1928 klasickou elektronovou teorii kovů, kterou založili Drude a Lorentz, a vytvořil tak novou kvantovou teorii. Hlavní předpoklady této teorie jsou:

1. Vodivostní elektrony jsou uvnitř kovu volné.
2. Energie vodivostních elektronů má nespojitě hodnoty, určené kvantovou teorií.
3. Hladiny energie elektronů v celém monokrystalu jsou obsazeny ve shodě s Pauliovým vylučovacím principem.

První předpoklad, převzatý z klasické elektronové teorie, znamená, že vodivostní elektrony nepodléhají uvnitř kovu žádné síle, že tedy jejich potenciální energie je v kovu stálá. Na povrchu kovu je však potenciální energie elektronů vyšší a tato *potenciálová hráz* nedovoluje elektronům opustit kov, pokud nemají dostatečnou kinetickou energii. Výška této hráže ve voltech se číselně rovná energii W_0 vyjádřené v elektronvoltech, kterou elektron ztratí, opustí-li kov, kterou však získá, když do kovu vnikne. Volíme-li potenciální energii elektronů vně kovu rovnou nule, bude jejich energie uvnitř kovu $-W_0$, jak je schematicky znázorněno na obr. (7.5) 2, kde L značí tloušťku kovové desky.

Předpoklad 2 vyplývá z toho, že vlnová funkce ψ musí splňovat okrajové podmínky, které vyjadřují, že na povrchu kovu je $\psi = 0$. Pokud nepřipouštíme výron elektronů z kovu, musí totiž pravděpodobnost výskytu elektronu na rozhraní kovu a izolantu (rovná



Obr. (7.5) 2. Potenciál energie vodivostních elektronů v kovu a na jeho povrchu

čtverci normované vlnové funkce) být nulová. Má-li tedy monokrystal kovu tvar krychle o hranách délky L a položíme-li kartézské osy do těchto hran, máme šest okrajových podmínek

$$\psi = 0 \text{ pro } x = y = z = 0 \text{ a pro } x = y = z = L.$$

Hledejme nejprve funkci jedné proměnné $\psi(x)$, která je řešením Schrödingery rovnice 7.1 (11)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m_e}{h^2} (W + W_0) \psi = 0$$

za okrajových podmínek $\psi(0) = \psi(L) = 0$. Tomu vyhovuje normovaná funkce

$$\psi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi j x}{L} \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

kteřá přísluší pohybu elektronu mezi dvěma rovinami kolnými k ose x . Průběh této funkce pro $j = 1, 2, 3$ je zřejmý z obr. (7.1) 2. Protože pohyby elektronů ve směru jednotlivých souřadnicových os jsou nezávislé, bude pravděpodobnost současných pohybů rovna součinu pravděpodobností pro jednotlivé osy. Je tedy jasné, že vlnová funkce pro pohyb elektronů uvnitř krychle bude dána součinem

$$\psi_{j,k,l} = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin \frac{\pi j x}{L} \sin \frac{\pi k y}{L} \sin \frac{\pi l z}{L}; \quad j, k, l = 1, 2, 3, \dots$$

Dvojím derivováním podle x dostáváme

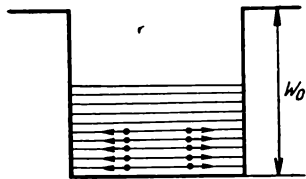
$$\frac{\partial^2 \psi_{j,k,l}}{\partial x^2} = -\left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \left(\frac{\pi j}{L}\right)^2 \sin \frac{\pi j x}{L} \sin \frac{\pi k y}{L} \sin \frac{\pi l z}{L} = -\frac{\pi^2 j^2}{L^2} \psi_{j,k,l}$$

a podobně pro y a z . Dosazením do příslušné amplitudové rovnice

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \psi_{j,k,l} + \frac{8\pi^2m_e}{h^2} (W_{j,k,l} + W_0) \psi_{j,k,l} = 0$$

dostaneme vlastní hodnoty celkové energie elektronů:

$$7.5 (10) \quad W_{j,k,l} = -W_0 + \frac{h^2}{8m_e L^2} (j^2 + k^2 + l^2); \quad j, k, l = 1, 2, 3, \dots$$



Obr. (7.5) 3. Obsazení energetických hladin kovů volnými elektrony při absolutním bodu mrazu ($N = 10$)

Tyto hodnoty představují *připustné energetické hladiny volných elektronů v kovu*.

O tom, jak jsou energie elektronů na tyto hladiny rozloženy, poučuje nás předpoklad 3, který žádá splnění Pauliho principu. Tento princip připouští stejnou energii jen pro dva elektrony, které mají opačné spiny, a proto při absolutním bodu mrazu $T = 0^\circ \text{K}$, kdy atomy ani elektrony nemají žádnou tepelnou energii, budou energetické hladiny obsazeny vždy dvěma elektrony, počínaje nejnižší hladinou, takže počet obsazených hladin bude $\frac{1}{2} N$, je-li N počet volných elektronů v objemu L^3 . To je znázorněno na obr. (7.5) 3 pro $N = 10$,

při čemž jsou hladiny vyznačeny vodorovnými přímkami a jejich obsazení elektrony je znázorněno šipkami mířícími vpravo nebo vlevo, podle znaménka spinu. Tyto hladiny jsou ovšem velmi husté, neboť

$$7.5 (11) \quad \frac{h^2}{8m_e} = \frac{(6,62 \cdot 10^{-34})^2 \text{ J}^2 \text{ s}^2}{8 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \approx 3,8 \cdot 10^{-19} \text{ eV} \cdot \text{m}^2,$$

takže dvě sousední hladiny jsou (pro $L = 1$ m) od sebe vzdáleny o hodnoty řádu 10^{-19} eV, a nelze je tedy experimentálně rozlišit. Proto nazýváme energetické spektrum elektronů v tomto případě *kvazikontinuálním*, tj. *skoro spojitým*, a budeme je v dalších úvahách pokládat v prvním přiblížení za spojité. Je-li tomu tak, bude patrně počet možných hodnot výrazu $j^2 + k^2 + l^2$, které nepřesahují čtverec daného celého čísla $r_{\max}^2$, přibližně roven počtu bodů s celistvými kladnými souřadnicemi, obsaženými v jedné osmině koule poloměru $r_{\max}$. Tento počet je však roven počtu energetických hladin elektronů, tedy $\frac{1}{8} N$, takže máme vztah

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi r_{\max}^3 = \frac{1}{2} N.$$

Vzhledem k 7.5 (10) bude tedy maximální energie elektronů při $T = 0$ °K dána vztahem

$$W_{\max} = -W_0 + \frac{\hbar^2}{8m_e L^2} r_{\max}^2 = -W_0 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{8m_e} \left(\frac{N}{L^3}\right)^{2/3}.$$

Označíme-li hustotu volných elektronů v krystalu $\sigma = N/L^3$, bude rozdíl energie mezi nejvyšší obsazenou hladinou a nejnižší hladinou podle 7.5 (11)

$$\begin{aligned} 7.5 (12) \quad u_F &= W_{\max} - (-W_0) = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{8m_e} \sigma^{2/3} \approx 0,94 \cdot 3,8 \cdot 10^{-19} \sigma^{2/3} \text{ eV} \cdot \text{m}^2 = \\ &= 3,6 \sigma^{2/3} \cdot 10^{-19} \text{ eV} \cdot \text{m}^2. \end{aligned}$$

Tento rozdíl je [viz obr. (7.4) 2] roven Fermiově energii u_F elektronového plynu při absolutní nule $T = 0$, kterou jsme zavedli rovnicí 7.4 (30). Hustota volných elektronů se vypočte z hustoty atomů (iontů) násobením valencí. Tak dostaneme tabulku (7.5) II.

Shrneme-li získané poznatky, shledáváme, že při nepříliš vysokých teplotách je nejvyšší energie volných elektronů zhruba rovna Fermiově energii 7.5 (12) a nezávisí prakticky na teplotě kovu. Zahříváme-li tedy kov, nespotřebuje elektronový plyn měřitelné množství tepla, takže teplo potřebné k ohřátí kovu je stejné, jako kdyby v něm nebyly volné elektrony. Z měření plyne skutečně, že část molekulového tepla kovů, která připadá na volné elektrony a kterou lze nazvat *elektronovým molekulovým teplem*, je řádu 10^{-4} až $10^{-3} RT$.

Tak je např. toto teplo pro měď $0,888 \cdot 10^{-4} RT$, pro hliník $1,742 \cdot 10^{-4} RT$, pro nikl $8,72 \cdot 10^{-4} RT$, pro paládium $1,6 \cdot 10^{-3} RT$ apod. Obecně činí elektronové teplo při teplotách do 100 °C jen několik procent celkového molekulového tepla kovů.

Z toho plyne, že při obvyklých teplotách nemá přítomnost volných elektronů v krystalu znatelný vliv na jeho tepelnou energii, a že tedy Debyova teorie molekulových tepel pevných látek, v níž se k existenci volných elektronů nepřihlíží, platí přibližně i pro kovy, jak jsme uvedli již na konci článku 7.5.1. Tak moderní kvantová teorie vyřešila rozpor klasické elektronové teorie kovů, z níž vyplývalo, že atomové teplo kovů má mít hodnotu 9 kcal deg⁻¹ kmol⁻¹, a nikoli 6 těchto jednotek, jak ukazuje zkušenost.

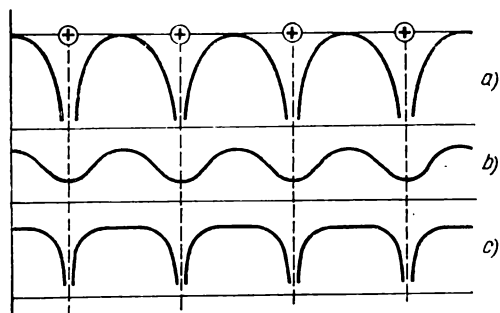
Tabulka (7.5) II

Výška potenciálové hráze W_0 na povrchu kovů a výška u_F obsazených hladin při absolutní nule

Kov	Mocnoství	W_0	u_F
Li	1	6,9 eV	4,74 eV
Na	1	5,0	3,16
K	1	3,9	2,06
Cu	1	11,1	7,10
Ag	1	10,2	5,52
Au	1	10,3	5,56
Be	2		14,3
Ce	2	7,5	4,26
Al	3	14,7	11,7

7.5.3. Základy pásmové teorie pevných látek

Sommerfeldova teorie v soulase s Fermiovou statistikou ukázala, že kvantová teorie kovů je schopna vysvětlit řadu vlastností pevné fáze. S představou volných elektronů však nevystačíme při řešení dalších otázek týkajících se zejména elektrické a tepelné vodivosti krystalů. Příčina je v příliš jednoduchém předpokladu konstantního potenciálu uvnitř



Obr. (7.5) 4. Průběh potenciálu elektronů v kovu podél přímek vedených: *a* — středy několikamocných iontů, *b* — rovnoběžně se spojnicemi středů iontů (ale mimo jejich středy), *c* — středy jednomocných iontů

kovu. Je totiž zřejmé, že tento předpoklad znamená jen velmi hrubé přiblížení skutečnosti, neboť potenciál v okolí každého iontu se značně mění od nejnižší hodnoty v těsné blízkosti iontu, který elektron přitahuje, až do nejvyšší své hodnoty uprostřed mezi dvěma sousedními ionty, kde se jejich přitažlivé síly ruší. Potenciál má tedy periodický průběh, souhlasící s periodičností krystalové mřížky. Průběh potenciálu bude patrně nejproměnlivější podél přímek vedených středy iontů, kdežto podél přímek vedených mezi řadami iontů tak, že jádra neprotínají, budou změny potenciálu mírnější. Schematicky jsou oba případy znázorněny na obr. (7.5) 4, a to v části *a*) pro přímku vedenou středy jader a v části *b*) pro přímku rovnoběžnou s řadou iontů. V části *c*) je pak naznačen průběh pro jednomocný

kov, pro který jsou změny potenciálu i v přímkách vedených středy iontů mírnější než pro kovy vícemocné, poněvadž ionty mají nejmenší možný náboj. Proto lze očekávat, že Sommerfeldova teorie bude nejbližše skutečnosti u monovalentních kovů, u nichž se elektrony chovají skutečně téměř jako volné.

Ptejme se nyní, jak bude rozdělena energie elektronů v periodickém poli, znázorněném na obr. (7.5) 4. Přesné řešení vlnové rovnice je pochopitelně velmi nesnadné, a proto se teoretikové snažili najít řešení přibližné. K tomu je vhodná *metoda perturbací* (poruchová), založená na předpokladu, že potenciál elektronů v pevných látkách je přibližně stálý a že jeho periodičnost je jen jakási porucha tohoto stálého potenciálu. Skutečně vedla tato metoda k velmi užitečným výsledkům, které souhlasí s pozorováním i kvantitativně. Jde ovšem zase jen o aproximaci, postupně propracovanou řadou badatelů, a to Blochem, Brillouinem, Wignerem, Seitzem aj. kolem r. 1930, a která se všeobecně nazývá *pásmová (pásová) teorie pevných látek*.

Uvedeme jen hlavní výsledky. Elektron pohybující se v konstantním potenciálu se chová jako dokonale volný a jeho celková energie se redukuje na energii pohybovou, která pro pomalé elektrony je dána výrazem

$$W = W_k = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2m_e} p^2,$$

kde p značí hybnost elektronu. Podle de Broglieovy rovnice 6.6 (18) můžeme však psát

$$p = \hbar \varrho,$$

kde ϱ značí vlnocet $1/\lambda$.

Energii elektronu lze tedy vyjádřit jako funkci vlnočtu

$$7.5 (13) \quad W(\varrho) = \frac{\hbar^2}{2m_e} \varrho^2.$$

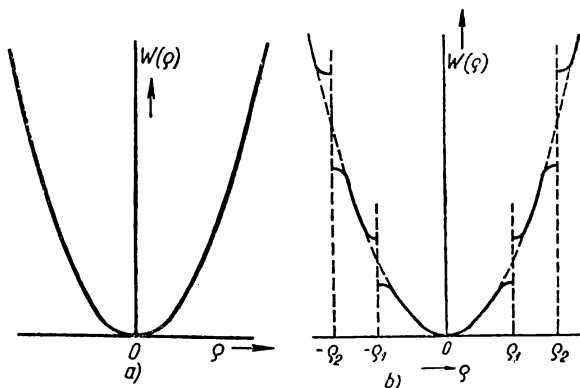
Vzhledem k tomu, že vlnová délka λ , a tedy i vlnocet ρ má podle předešlého článku nesmírné množství přípustných hodnot velmi hustě nakupených, můžeme skoro spojitě energetické spektrum znázornit geometricky spojitou křivkou, která je podle 7.5 (13) *parabolou* [obr. (7.5) 5a]. Na tento případ dokonale volného elektronu můžeme pohlížet jako na jeden mezní případ elektronu, podrobeného poli krystalové mříže, kdežto druhým mezním případem je elektron pevně vázaný k jedinému atomu. Víme, že elektron v uzavřené slupce atomu může nabývat jen zcela určitých energií, známých z teorie osamoceneného atomu, jak to je také v souhlase s čárovým spektrem volných atomů. Proti tomu víme, že molekuly vysílají spektra pásová, složená z velmi velkého počtu hustě nakupených čar. Víme dále, že soudržnost krystalických látek má svůj původ v podobných silách, jaké tvoří molekuly. Proto lze očekávat, že energie elektronu ve skutečných krystalech, v nichž není elektron ani úplně volný, ani dokonale poután k jedinému atomu, nebude ani skoro spojitá v celém rozsahu, ani nebude omezena na jednotlivé diskrétní hodnoty; bude omezena na určitá pásma (zóny), uvnitř nichž bude skoro spojitá a mimo něž nebude mít přípustné hodnoty. Je pochopitelné, že toto rozplývání diskrétních hladin energetických ve skoro spojitá pásma bude největší u vnějších elektronů — tedy především u elektronů valenčních —, kdežto hladiny elektronů vnitřních budou jen málo pozměněny v úzká pásma.

K takovému výsledku vede skutečně poruchová metoda. V obecném případě třírozměrné krystalové mřížky lze psát amplitudovou funkci ve tvaru

$$\psi_{\rho} = \chi_{\rho}(\mathbf{r}) e^{2\pi i(\rho \cdot \mathbf{r})},$$

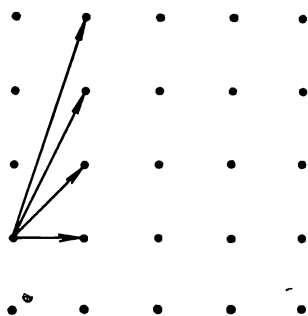
kde $\mathbf{r}$ značí průvodič elektronu se složkami x, y, z a $\chi_{\rho}(\mathbf{r})$ je funkce, která má stejnou periodičnost jako mřížka sama; konečně ρ je vektor, jehož velikost se rovná vlnoceti ρ a směr je shodný se směrem hybnosti elektronu. Je-li elektron úplně volný, je funkce χ_{ρ} konstantní v celém monokrystalu, je-li naopak elektron pevněji vázan k jednotlivým atomům, je to funkce lokalizovaná, tj. její nenulové hodnoty se omezují na přímé sousedství těchto atomů.

Ve středním případě skoro volného elektronu není konečně funkce χ_{ρ} ani stálá, ani lokalizovaná a není ani jako funkce vektoru vlnoceti skoro spojitá v celém rozsahu vlnoceti. Pracné výpočty vedou totiž k výsledku, který už byl předešlou úvahou anticipován, že energie jako funkce vlnoceti je skoro spojitá v určitých oborech, mimo něž nemá dovolené hodnoty, jak je naznačeno na obr. (7.5) 5b. Energie může tedy prakticky nabýt všech hodnot ležících v pásmech, kde je křivka plně vytažena. Mimo tato pásma, kde je parabola volného elektronu čárkována, jsou hodnoty zakázané, kterých nemůže elektron nabýt. Samozřejmě nejsou dovoleny ani naprosto všechny hodnoty v dovolených pásmech, neboť tato pásma obsahují sice velmi veliký, ale konečný počet hladin, který, jak ukazuje teorie, je pro každé pásmo právě roven počtu elementárních buněk v krystalu. Zakázané obory energie jsou tím širší, čím proměnlivější je potenciál v mřížce; pro elektrony pevně vázané k atomu redukují se vlastně dovolená pásma na jednotlivé hladiny, kdežto všechny ostatní hodnoty energie jsou zakázány. Podle obr. (7.5) 4 jsou zakázané obory užší pro jednomocné prvky, širší pro prvky vícemocné.



Obr. (7.5) 5. Závislost energie na vlnoceti: a — pro dokonale volný elektron, b — v periodickém poli iontů

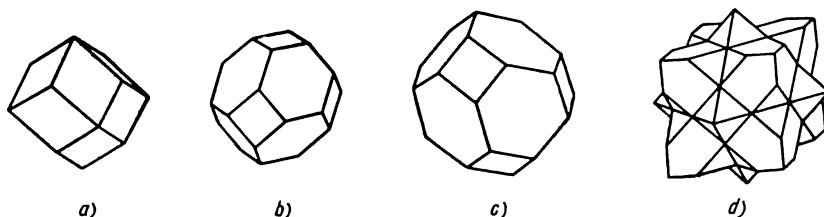
Také hodnoty vlnočtů, při nichž vznikají zakázané obory, dají se přesně určit. Vzájemné silové působení mezi ionty a elektrony nevykládá se totiž v pásmové teorii jako výsledek srážek částic, řídících se kinetickou teorií plynů, nýbrž jako *interakce stojatých elektronových vln s mřížkou*. Tuto představu, obdobnou Debyově představě elastických vln, užitě v teorii specifických tepel, zavedl Bloch; Brillouin první jasně rozpoznal, že vlnočty ohraničující



Obr. (7.5) 6. Závislost periodičnosti krystalové mřížky na směru

dovolená pásma energie jsou právě vlnočty, pro které nastává selektivní odraz elektronových vln v krystalové mřížce obdobně jako při Braggově metodě. Hodnoty těchto vlnočtů závisí ovšem na směru pohybu elektronu, a proto jsou také polohy zakázaných oborů různé podle směru, kterým se elektron krystalem pohybuje. Je to patrné z obr. (7.5) 6, kde šipky ukazují velikosti meziatomových vzdáleností pro různé krystalografické směry, kterým také náleží různé hodnoty vlnočtů příslušných diskontinuitám energie. Tedy pro každý směr pohybu elektronu budou zakázány jiné obory energie, které mohou, ale nemusí mít společné hodnoty. Nepřekrývají-li se zakázané obory, překrývají se pásma dovolená a při opaku jsou dovolená pásma oddělena zakázanými obory. V případě, kdy se překrývají dovolená pásma pro tři směry, mohou elektrony nabýt prakticky všech hodnot energie, ovšem při pohybu v různých směrech. Proti tomu v případě, kdy široký obor energií je zakázán současně ve všech třech smě-

rech (krystalograficky význačných), nemohou elektrony nabýt energie uvnitř společného zakázaného oboru. Toto překrývání jednotlivých pásem má velkou důležitost pro tepelnou a elektrickou vodivost látky, jak dále vyložíme.



Obr. (7.5) 7. První dvě Brillouinovy zóny: *a, b* — v prostorově středěné kubické mřížce; *c, d* — v plošně středěné kubické mřížce

Brillouin se zabýval problémem nalézt závislost dovolených a zakázaných pásem na směru pohybu elektronu v krystalu. Naneseme-li vektor $\mathbf{k}$ ve význačných krystalografických směrech a vedeme-li roviny koncovými body vektorů $\mathbf{k}$, pro které nastávají diskontinuity energie, vzniknou mnohostěny, které ohraničují dovolené obory skoro spojité energie. Tyto obory se nazývají *Brillouinovy zóny*. Na obr. (7.5) 7 jsou první dvě zóny *a, b* pro prostorově středěnou a *c, d* pro plošně středěnou krychlovou mřížku. Tvar druhé zóny u první mřížky se shoduje s tvarem první zóny druhé mřížky, liší se však rozměry.

Ukončíme výklad o pásmové teorii krystalů poukazem na skutečnost, že přechod od energetických hladin elektronu vázaného osamoceným atomem k energetickým pásmům elektronů v krystalech je spojitý, přibližují-li se k sobě dva atomy, aby se staly součástí pevné látky. Přibližují-li se např. dva atomy mědi, jednoduchá hladina $3d$ se začne podle obr. (7.5) 8 v okamžiku, kdy se oba atomy přiblíží na vzdálenost asi $5 \text{ \AA}$, rozšiřovat na stále širší pásmo. Podobně začne hladina $4s$ vytvářet pásmo již při přiblížení na vzdálenost asi $8 \text{ \AA}$. Hladina $4p$ je již i při této vzdálenosti změněna ve velmi široké pásmo. Svislá čárkovaná

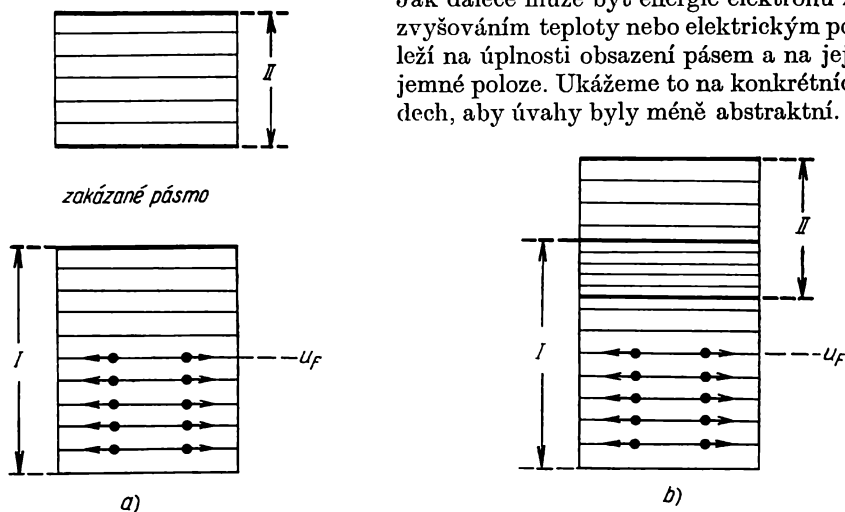
přímka vyznačuje skutečnou vzdálenost měděných iontů v krystalu, která podle rovnice 1.4 (6) a obr. (1.4) 2b je rovna $3,61 \text{ \AA} : \sqrt{2} \approx 2,6 \text{ \AA}$. Ukazuje se, že rozplývání každé diskrétní hladiny na energetické pásmo začíná při vzdálenosti, při které se začnou překrývat elektronové dráhy, náležející příslušné hladině v obou atomech.

Pásmová teorie podává názorný výklad mnohých vlastností pevných látek, jak se přesvědčíme v příštích článcích. Některé jevy, jako supravodivost kovů, se však dosud nepodařilo teoreticky zvládnout.

7.5.4. Pásmová teorie vedení tepla a elektřiny v dokonalých krystalech

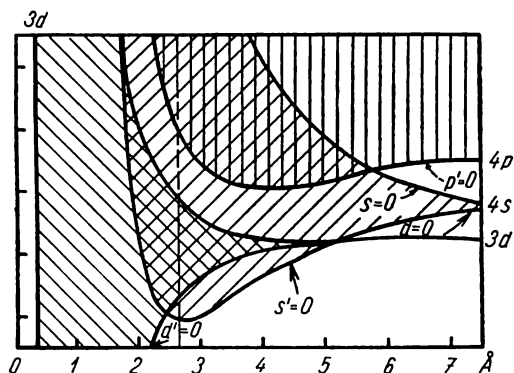
Elektrony v uzavřených slupkách elektronového obalu jsou poutány k atomům, takže nemohou přenášet ani tepelnou energii, ani náboj, kdežto energie vodivostních (volných) elektronů je omezena podmínkou, že její hodnota musí ležet v některém z dovolených pásem. Řekli jsme již, že každé pásmo obsahuje N hladin energie, je-li N počet elementárních buněk v celém monokrystalu. Má-li atom v valenčních elektronů, obsadí tyto elektrony v důsledku principu Pauliho celkem $\frac{1}{2} vN$ různých hladin, které i při absolutní nulové teplotě přísluší nejnižším dovoleným hodnotám energie.

Jak dalece může být energie elektronů změněna zvyšováním teploty nebo elektrickým polem, záleží na úplnosti obsazení pásem a na jejich vzájemné poloze. Ukážeme to na konkrétních případech, aby úvahy byly méně abstraktní.



Obr. (7.5) 9. Schéma obsazení energetických hladin jednomocného prvku: a — s oddělenými dovolenými pásmy I, II, b) s překrytými pásmy I, II

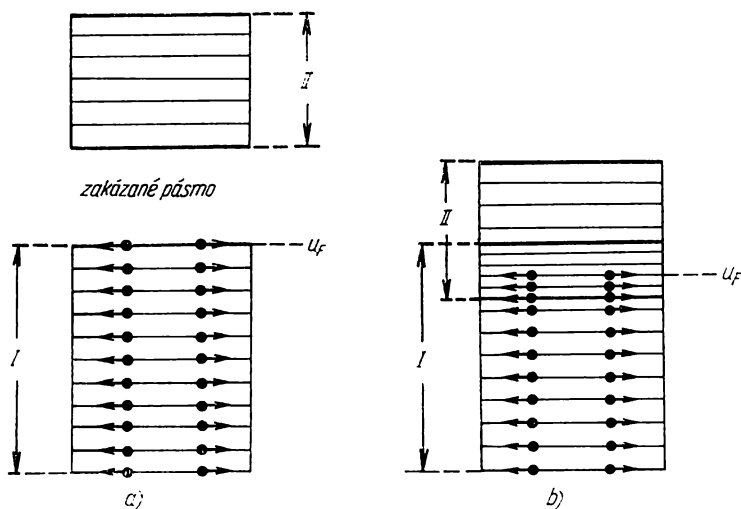
Mějme na mysli dokonalý monokrystal složený z vesměs stejných částic tvořících dokonale pravidelnou mřížku. Podle předešlého výkladu je třeba rozeznávat dva případy: a) dovolená pásma energie se nepřekrývají a jsou oddělena dosti širokým zakázaným pásmem, b) dovolená pásma se překrývají nebo dotýkají. Vyšetřeme, podle schematického obr. (7.5) 9, jak se oba případy projeví u krystalu složeného z jednomocných atomů. Pro



Obr. (7.5) 8. Rozšiřování energetických hladin atomu Cu při tvoření krystalu

takové atomy je $v = 1$, takže bude při absolutní nule $T = 0$ v případě *a*) i *b*) obsazeno $\frac{1}{2} N$ nejnižších hladin pásma *I*, jak je naznačeno na obrázku šipkami mířícími vpravo a vlevo a znázorňujícími opačné spiny dvou elektronů v téže hladině. Vložíme-li na takový krystal elektrické napětí, mohou být tyto elektrony polem urychlovány, neboť mohou vystupovat na nejbližší vyšší hladiny v horní polovině dovoleného pásma *I*. Tuto možnost mají elektrony (aniž poruší Pauliův princip) v obou případech *a*) i *b*), a proto musí být všechny krystaly obsahující jednomocné atomy vodivé. Jsou to známé kovy Li, Na, Ag, Au aj. Jsou také dobrými vodiči tepla, protože se vodivostní elektrony mohou podílet nejen na přenášení náboje, ale také na přenášení tepelné energie.

Vyšetříme nyní dvojmocné prvky, u nichž je $v = 2$, takže mají při $T = 0$ obsazeno všech $\frac{1}{2} vN = N$ hladin pásma *I*. Je to znázorněno pro případ oddělených pásem *I*, *II* na obr. (7.5) 10*a*. V tomto případě by se musely elektrony elektrickým polem urychlit tak, aby dosáhly některé dovolené hladiny v pásmu *II*. Avšak zakázané pásmo má šírku



Obr. (7.5) 10. Schéma obsazení energetických hladin dvojmocného prvku: *a* — s oddělenými dovolenými pásmy *I*, *II*, *b* — s překrytými pásmy *I*, *II*

několika eV a tak velkou energii nemůže elektron získat při obvyklých teplotách nebo obvyklým elektrickým napětím na své nepatrné volné dráze mezi dvěma ionty. Prvek je tedy zpravidla nevodivý, avšak při velmi vysokém spádu potenciálovém (řádu 10^8 V m⁻¹) může být zakázaný obor překlenut. Existují ovšem také krystaly, u nichž je mezera *I* a *II* tak malá, že k jejímu překlenutí stačí malé zvýšení teploty. O tom pojednáme při výkladu o polovodičích. V případě *b*) mohou ovšem elektrony již při nepatrném zvýšení energie dosáhnout některé z vyšších hladin, a proto mohou v elektrickém poli přenášet náboj. V případě *a*) je tedy krystal složený z dvojmocných atomů izolantem, kdežto v případě *b*) je elektricky vodivý.

Předešlé úvahy se dají rozšířit i na několikamocné prvky, přihlédneme-li k dalším dovoleným pásmům. Tak bychom ukázali, že prvky s lichou valencí jsou rovněž kovy (např. Al), kdežto prvky se sudou valencí mohou být vodivé i nevodivé podle toho, překrývají-li se jejich dovolená pásma, či nikoliv. Z toho soudíme, že se pásma dvojmocných kovů (alkalické zeminy, Pb a Sn) překrývají. Zajímavý je uhlík se čtyřmi valenčními elektrony, které tedy mohou plně obsadit dvě nejnižší pásma. Teoreticky byla určena šířka pásem pro krystal diamantu a bylo shledáno, že šířka zakázané mezery plně odůvodňuje skutečnost, že

diamant je nevodič. Naproti tomu je tuha vodivá, což vysvětlujeme tím, že se vzdálenost mezi jednotlivými rovinami pevně vázaných atomů [obr. (1.4) 9] shoduje právě s meziatomovou vzdáleností, pro kterou se pásma překrývají.

Další prvky 2. periody Mendělejevovy soustavy, N, O, F, tvoří *molekulové krystaly*, které jsou jen volně vázané soustavy velmi pevných dvouatomových molekul, jejichž energetické hladiny se při sblížování molekul rozšiřují v pásma. Lze ukázat, že v uvedených případech tzv. nasycených molekul jsou pásma buď plně obsazena, nebo docela prázdná a nepřekrývají se. Proto jsou tyto prvky *nevodivé*.

Podobné poměry jsou u *krystalů iontových*, jak to souhlasí s jejich špatnou elektrickou vodivostí a jak se potvrdilo podrobným teoretickým zkoumáním. Obecně lze říci, že *dokonalý krystal iontový, valenční nebo molekulový nevede při absolutním bodu mrazu elektrinu*, neboť má plně obsazena nejnížší pásma a vyšší dovolená pásma jsou od obsazených pásem oddělena dosti širokým oborem zakázaných energií. Dokonalé krystaly se mohou stát vodivými jen tehdy, jsou-li elektrony zrychleny buď vysokou teplotou, nebo absorpcí záření do té míry, že mohou „přeskočit“ zakázaný obor a dostat se na některou hladinu v prázdném pásmu dovolených energií.

První případ, kdy se krystal může při vyšší teplotě stát vodivým, dá se zajisté uskutečnit tím snáze, čím užší je mezera mezi dovolenými pásmy. U některých krystalů se tak stane již při obvyklých nebo málo zvýšených teplotách a takové látky se nazývají *vlastní (pravé) polovodiče*.

Druhý případ, kdy se elektrony vyzvednou na volné hladiny ve druhém pásmu absorpcí záření, nastává u některých krystalů, kterých lze proto užít v krystalových počítačích. Takovým krystalem je např. diamant, jehož strukturu jsme podrobně popsali v článku 1.4.4, kde bylo také řečeno, že ho lze užít jako *počítače částic* nebo fotonů velké energie. Výklad příslušného děje ukazuje, že vznikne stejný počet „přebytečných elektronů“ i kladných děr (dutin), které současně vedou proud. Jakmile však zdroj částic (fotonů) odstraníme, spojí se opět elektrony s dírami a touto rekombinací se diamant okamžitě stává opět izolantem. Kovalentní vazby mezi atomy uhlíku mohou být také rozrušeny dosti vysokou teplotou, která je tu však tak vysoká, že se diamant nechová jako polovodič. U polovodičů dochází ovšem k vedení elektriny i při absorpci viditelného světla; pak mluvíme o *fotovodivosti*.

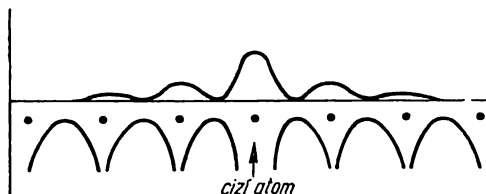
7.5.5. Pásmová teorie polovodičů

Polovodiče patří k látkám, jejichž fyzikální vlastnosti závisí ve značné míře na nedokonalosti krystalové struktury, čímž vznikají v zakázaných oborech nové hladiny energie. Tyto nepravidelnosti v krystalové mřížce mohou být dvojího druhu:

A. *Kaz (porucha)* krystalu je nepravidelnost v uspořádání krystalové mřížky, která porušuje dokonalou periodicitu potenciálu, a vytváří tak zvláštní místní podmínky pro vznik dodatkové energetické hladiny, přístupné elektronům.

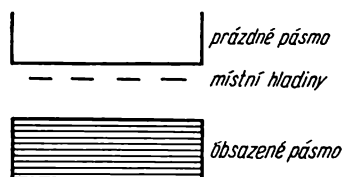
B. *Neryzost (nečistota)* je nepravidelnost způsobená přítomností cizího atomu v krystalové mřížce, která podle povahy cizího atomu může dát vznik buď obsazené, nebo prázdné místní hladině energie.

Případ kazu i neryzosti krystalu je vlastně z hlediska teoretického stejné povahy, protože se oběma těmito nepravidelnostmi mění rozložení funkce pravděpodobnosti v okolí místa, kde se vyskytují. Je to patrné z obr. (7.5) 11, kde spodní křivka ukazuje potenciál modifikovaný cizím atomem a hořejší křivka rozložení náboje (hustoty pravděpodobnosti)



Obr. (7.5) 11. Deformace rozložení náboje (hořejší křivka) a potenciálu (spodní křivka) v okolí neryzosti krystalu

v jeho okolí. Maximum této křivky přísluší lokalizovanému (místnímu) náboji, který souvisí s existencí *místní hladiny*. Tak nazýváme hladiny, které jsou dovoleny jen v místě poruchy či neryzosti, ale nejsou přístupny elektronům v ostatních bodech mřížky, pokud ovšem lokalizovaný náboj sám nemění místo, o čemž bude zmínka později. To je naznačeno na obr. (7.5) 12 tak, že pásma, která jsou přístupna elektronům ve všech místech mřížky, jsou omezena spojitými vodorovnými čarami, kdežto místní hladiny přerušovanou čarou. Z existence těchto místních hladin je zřejmé, že krystal, který je v dokonalém stavu ne-

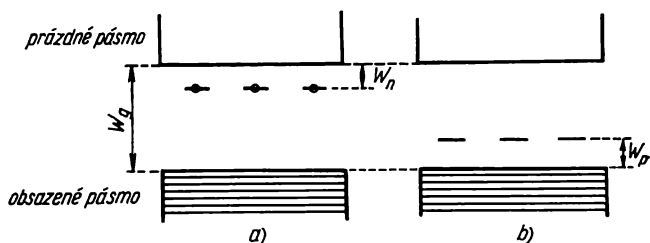


Obr. (7.5) 12. Místní hladiny v zakázaném oboru

teploty být tak vzbuzeny, že přejdou na neobsazené hladiny prázdného pásma, v němž se chovají prakticky jako volné a mohou se účastnit vedení proudu. Proto nazýváme prázdná dovolená pásma také *vodivostními pásmy*. V případě *b*) má krystal místní hladiny, které nejsou obsazeny, mohou je však obsadit elektrony, jejichž energie stoupne zvýšením teploty na příslušnou hodnotu. Tyto elektrony jsou lokalizovány na místech neryzostí, a nemohou tedy vést proud. Vystoupily ovšem na tyto místní hladiny z nejvyšších hladin dovoleného pásma, které jsou přístupné elektronům v celém krystalu. Tím se tedy uprázdnila jejich místa v hladinách, podél nichž se elektrony mohou prakticky volně pohybovat krystalem. Působí-li tedy vnější pole elektrické, které zrychlí některé elektrony tak, že mohou obsadit tyto hladiny, stává se krystal vodivým. Avšak elektrony, které obsadily uvolněné hladiny, zanechají po sobě rovněž prázdná místa, kterým se říká prostě *díry* nebo také *dutiny*. Poněvadž z hlediska vlnové mechaniky nelze pozorovat záměnu dvou elektronů, je spíše vhodné pohlížet na celý děj tak, jako by se díry, vzniklé odchodem elektronů, pohybovaly v elektrickém poli opačným směrem než elektrony. To je v soulase s tím, že odchodem každého valenčního elektronu nabude v onom místě převahy kladný náboj iontu, a proto můžeme skutečně na věc pohlížet jako na pohyb kladného náboje nebo kladných děr. Mluvíme tedy o tak zvaných polovodičích typu *n*, které vedou proud pohybem negativních nábojů, a mají tedy elektronovou vodivost, a o polovodičích typu *p*, které vedou proud pozitivními děrami, které se chovají jako pozitivní náboj, a mají tedy děrovou vodivost.

Tyto pojmy jsme vysvětlili už při popisu vlastností polovodičů v čl. 5.3.4, kde jsme také podali názorný výklad o významu přítomnosti cizích atomů (donorů a akceptorů) v křemíku a germaniu, což odpovídá poruchám typu B. Příkladem polovodiče, který vzniká poruchami typu A, je kyslíčnk mědný Cu_2O . Zahřejeme-li tento iontový krystal za přístupu kyslíku, pohltí jistý počet atomů O nad normální množství atomů O ve sloučenině Cu_2O . Přítomností těchto nepravidelně rozložených nadpočetných atomů vzniknou volné místní

vodivý, se ve stavu nedokonalém vlivem kazů nebo neryzostí stane vodivým. Dnes se zdá pravděpodobné, že také iontová vodivost pevných látek souvisí s jejich kazy, kterých názor vyslovil Frenkel (r. 1926). Jisté však je, že se elektronová vodivost polovodičů dá velmi dobře vysvětlit pásmovou teorií. V tom směru rozeznáváme dva druhy neryzostí, které způsobují polovodivost krystalu. Jsou schematicky naznačeny na obr. (7.5) 13. V případě *a*) má krystal *těsně pod prázdným dovoleným pásmem místní hladiny*, které jsou obsazeny elektrony vázanými na místo neryzosti; tyto elektrony však mohou zvýšením



Obr. (7.5) 13. Dva druhy neryzostí: *a* — obsazené místní hladiny těsně pod prázdným pásmem, *b* — prázdné místní hladiny těsně nad obsazeným pásmem

hladiny vyznačené čárkami na obr. (7.5) 13b a krystal se stane polovodičem typu p . Proto zde uvedeme jen několik číselných hodnot energií W_g , W_n a W_p , jejichž fyzikální význam je patrný z obr. (7.5) 13. První z nich je zřejmě šířka zakázaného energetického pásma, W_n je rozdíl nejnižší hladiny prázdného pásma a energie místních hladin polovodiče typu n ; W_p udává, oč je vyšší energie místních hladin polovodiče typu p než nejvyšší hladina plně obsazeného pásma. Hodnoty W_n a W_p nezávisí takřka na tom, kterého z pěti-mocných prvků se užije jako donoru a kterého trojmocného prvku jako akceptoru. Pro germanium typu n (znečištěného donorem) je

$$W_g = 0,76 \text{ eV},$$

$$W_n = 0,02 \text{ eV},$$

kdežto pro křemík typu p (znečištěný akceptorem) bylo zjištěno

$$W_g = 1,1 \text{ eV},$$

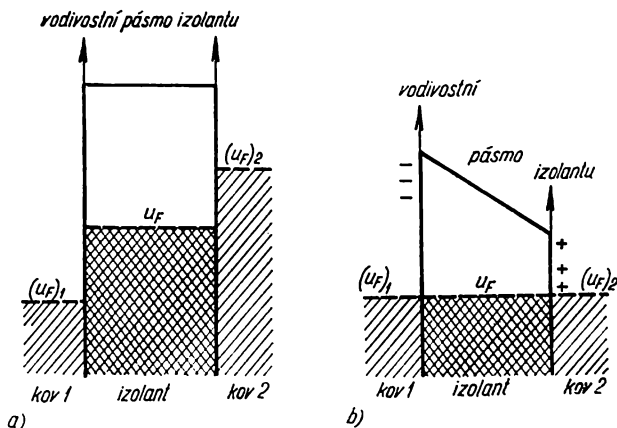
$$W_p = 0,08 \text{ eV}.$$

Vidíme, že hodnoty W_n a W_p jsou dosti malé ve srovnání se šířkou zakázaných pásem a odpovídají zhruba střední energii molekul při teplotě místnosti ($\approx kT$).

V čl. 5.3.5 jsme uvedli charakteristickou vlastnost polovodičů, že ve styku s kovem nebo s polovodičem opačného vodivostního typu jsou schopny usměrňovat proud. Naznačíme stručně, jak tento prakticky významný poznatek vysvětluje pásmová teorie.

Představme si nejprve dva kovy 1 a 2 s různě vysokými Fermiovými hladinami oddělené vrstvou izolantu. Na obr. (7.5) 14a je schéma takové vrstvy, v němž jsou čárkovaně vyznačeny Fermiovy hladiny $(u_F)_1$ a $(u_F)_2$ obou kovů a izolantu u_F . Dosti vysoko nad touto poslední hladinou je spodní okraj prázdného vodivostního pásma izolantu. V různých výškách se však udrží Fermiovy hladiny jen v prvním okamžiku po dotyku, neboť elektrony začnou proudit přes izolační hradbu nevodivé vrstvy (jejím prázdným vodivostním pásmem) z kovu 2 s vyšší hladinou $(u_F)_2$ do kovu 1 s nižší hladinou $(u_F)_1$ i směrem obráceným. Při tom však převládá tok elektronů z kovu 2 do kovu 1, protože elektrony ve vodivostním pásmu kovu 2 jsou blíže hornímu okraji hradby. Tím se začnou vytvářet na rozhraní mezi izolantem a kovem 2 kladné náboje (nedostatek elektronů) a na rozhraní izolantu s kovem 1 záporné náboje (přebytek elektronů). To pokračuje tak dlouho, pokud tak vznikající elektrická dvojvrstva nezpůsobí *vyrovnání Fermiových hladin* mezi všemi třemi látkami. Tento výsledek plyne ze skutečnosti, že Fermiova energie se rovná chemickému potenciálu, jak lze teoreticky dokázat. V ustáleném stavu existuje tedy mezi oběma kovy *usměrňující hradba*, která je znázorněna na obr. (7.5) 14b. Její nesymetrie se uplatní různým způsobem podle směru vloženého napětí U . Má-li U záporné znaménko, takže kov 2 má vyšší potenciál než kov 1, elektrony v kovu 2 vystoupí na hladinu, která leží podle obr. (7.5) 15a o hodnotu $-eU$ výše než v kovu 1. Proto klade usměrňující hradba menší odpor elektronům přecházejícím z kovu 2 do kovu 1 než elektronům jdoucím obráceným směrem. Je-li však napětí U kladné, leží hladina elektronů v kovu 2 níže a poměry jsou obrácené. Proto elektrony procházejí izolační vrstvou mezi dvěma kovy snáze z kovu s vyšší Fermiovou hladinou než obráceně.

Přejdeme nyní k dotyku kovu s polovodičem typu n . Také v tomto případě splynou

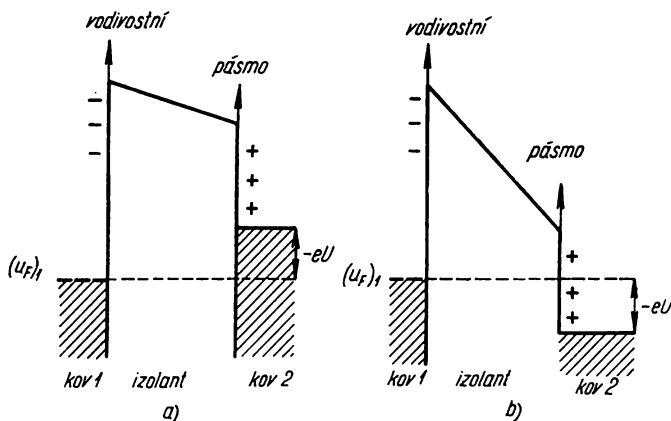


Obr. (7.5) 14. Izolační vrstva mezi dvěma kovy:
a — v okamžiku prvního dotyku, b — v rovnovážném stavu

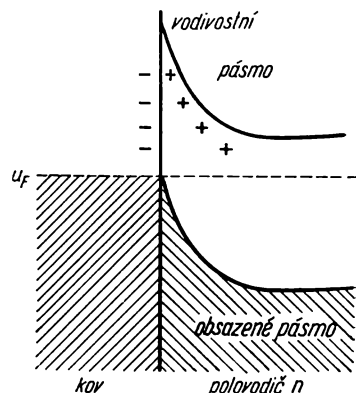
Fermiovy hladiny v obou vodičích a kladně ionizované atomy donoru přitahují volné elektrony k rozhraní. Tak se vytvoří velmi tenká vrstva (tloušťky $\approx 10^{-8}$ m) zbavená volných elektronů, která má stejný účinek jako izolující vrstva mezi dvěma kovy. Rovnovážný průběh energetických hladin v okolí rozhraní je znázorněn na obr. (7.5) 16. Podobně vysvětlíme usměrňovací působení dotyku kovu s polovodičem typu p .

V čl. 5.3.5 jsme uvedli, že funkce kuproxových a selenových usměrňovačů se vysvětluje existencí rozhraní $p - n$. Úplná teorie usměrňovacího účinku rozhraní mezi polovodiči opačných typů je dosti složitá, a proto se omezíme na povšechný výklad.

U polovodiče typu n je mnohem větší koncentrace elektronů než děr a v polovodiči typu p je tomu naopak. Proto difundují rozhraním elektrony do polovodiče p a zanechávají za sebou kladné ionty donoru, a obráceně díry difundují do polovodiče n , zanechávající za sebou záporné ionty akceptoru. Tak se vytváří na rozhraní elektrická dvojrstva, která nakonec zastaví další difúzi nositelů proudu rozhraním. Protože se však díry rekombinují s elektrony za současně emise fotonů nebo fononů, udržuje se jistý slabý tok děr z oblasti p do oblasti n . Tento úbytek



Obr. (7.5) 15. Usměrňovací účinek izolující vrstvy mezi dvěma kovy



Obr. (7.5) 16. Rovnovážný stav na rozhraní kovu s polovodičem n

děr v p se nahrazuje vytvářením nových děr termickými fluktuacemi v oblasti p , které difundují do oblasti n . Oba tyto proudy, I_r vzniklý rekombinací a I_g vzniklý vytvářením (generací) děr, jsou za rovnováhy stejně velké a opačného směru. Výsledný proud

$$7.5 \quad (14) \quad I_r + I_g = 0$$

je tedy nulový, jak je naznačeno na obr. (7.5) 17a.

Vložíme-li na krystal napětí takového směru, že část n má kladný a část p záporný potenciál, nemůže skoro žádná díra proniknout rozhraním proti elektrickému poli a rekombinační proud se velmi zeslabí. Generační proud z n do p se však prakticky nezmění, je-li dráha uražená při difúzi během jejího života velká proti tloušťce elektrické dvojrstvy na rozhraní [obr. (7.5) 17b].

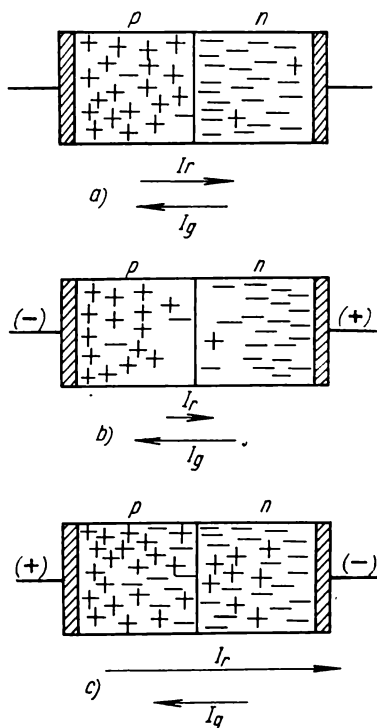
Vložíme-li konečně na krystal takové napětí, že část p má kladný a část n záporný potenciál, generační proud I_g se zase nezmění, ale rekombinační proud vzroste, protože vzroste pravděpodobnost setkání děr s elektrony. Podle klasického rozdělovacího zákona 7.4 (12), který je při malé koncentraci děr přípustný, stoupne rekombinační proud vzhledem k 7.5 (14) na hodnotu

$$I_r = -I_g e^{-u/kT} = -I_g e^{U/kT}.$$

Proud v tomto (propustném) směru může tedy být mnohonásobně silnější než v opačném směru (závěrném), je-li vložené napětí dosti vysoké, takže $eU/kT \gg 1$. Při teplotě místnosti je však $kT \approx 0,026$ eV, a proto již při napětí 1 V je $|I_r : I_g| = e^{38,6} \approx 10^{17}$.

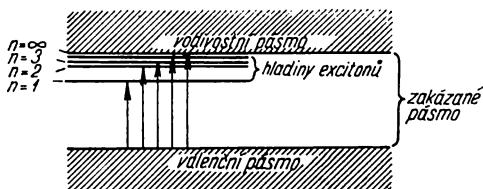
Proud v propustném směru, při němž podle obr. (7.5) 17c postupují nositelé proudu v obou částech krystalu směrem k rozhraní $p-n$, je tedy mnohonásobně silnější než proud ve směru závěrném, způsobený pohybem nositelů od rozhraní. Tím jsme si ověřili poznatek uvedený v čl. 5.3.5.

Závěrem doplníme podaný nástin teorie polovodičů zmínkou o tzv. *excitonech*. Víme již, že se



Obr. (7.5) 17. Vysvětlení usměrňovacího účinku rozhraní: a — bez napětí, b — napětí v závěrném směru, c — napětí v propustném směru

některé polovodiče mohou stát vodivými absorpcí světla. Vysvětlujeme to tím, že elektron při pohlcení fotonu vhodné frekvence „přeskočí“ z normálního (valenčního) energetického pásma do pásma vodivostního (přes pásmo zakázané) a zůstane po něm volná díra. Nemá-li však foton dostatečnou energii k úplnému oddělení elektronu od díry, zůstanou obě tyto „částice“ navzájem spojeny a jejich vzájemná energie se ovšem kvantuje. Na soustavu elektron-díra lze pak pohlížet jako na systém, který může nabývat různých vzbuzených čili excitovaných stavů a který Frenkel (r. 1931) nazval excitonem. Tato částice může měnit své místo v krystalu a může přecházet do nižších kvantových stavů za emise fotonů (nebo fononů), jak jsme se o tom již zmínili při popisu rekombinace elektronů a děr. Dvojice díra-elektron není z hlediska kvantové fyziky nepodobná vodíkovému atomu a pro její excitované stavy platí obdobné vzorce (Rydber-



Obr. (7.5) 18. Energetické hladiny excitonu

gův atd.). Exciton může mít těsnější vazbu (jako v atomu) nebo vazbu volnější, je-li vzdálenost elektron-díra velká proti atomovým rozměrům. Tomu odpovídají také různá kvantová čísla n od 1 do ∞ , jak je to znázorněno na obr. (7.5) 18. Excitony mají význam v teorii fotovodivosti a luminescence.

8.1. Základní částice

8.1.1. Klasifikace základních částic

V čl. 1.1.3 jsme uvedli, že předmětem fyziky je studium částic a polí, jejichž vzájemným působením vysvětlujeme vlastnosti fyzikálních objektů. Kvantová fyzika přiřazuje i polím jisté částice (kvanta těchto polí), která spolu s „látkovými“ částicemi tvoří souhrn částic, jejichž „velikosti“ jsou řádově shodné s velikostmi atomových jader. Pro takové částice neplatí již dosti přesně zákony klasické fyziky, odvozené z pozorování makrofyzikálních těles. Proto je třeba vlastnosti těchto částic zkoumat z hlediska mikrofyziky založené na kvantové teorii a nazývají se *mikročástice*.

Nejdůležitější mikročástice (elektron, proton, neutron) jsme uvedli již v čl. 1.3.1 a základní vlastnosti fotonů jsme vyložili v čl. 6.6.2. V tomto článku probereme hlavní charakteristiky mikročástic a podáme přehled základních neboli elementárních částic.

Klidová hmotnost částice je hmotnost měřená v soustavě, v níž je částice v klidu. Je to nejmenší hodnota hmotnosti částice, protože částice pohybující se rychlostí u má hmotnost větší v poměru $(1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, jak plyne ze vzorce 2.9 (23). Klidová hmotnost mikročástic nepodléhá žádnému kvantovému předpisu a zdá se, že může mít pro některé částice libovolně malou hodnotu. Příkladem je foton, který se ve vakuu pohybuje mezní rychlostí c rovnou rychlosti světla, a kterému proto obvykle přisuzujeme nulovou klidovou hmotnost.

Elektrický náboj je pro všechny mikročástice rovný malému celistvému počtu kladných nebo záporných elementárních nábojů 1.3 (2). Celkový náboj částice může být také přesně nulový, jak je tomu např. u fotonu, neutronu a u neutrina.

Spin čili **spinová točivost**, nazývaná též spinový moment hybnosti nebo mechanický či kinetický moment částice, se rovněž kvantuje a má vždycky velikost rovnou malému počtu polovičních kvantových jednotek točivosti $\hbar$ podle vzorce 7.2 (48). Může být též nulový.

Magnetický moment spinový μ_s , který v klasickém pojetí má původ ve vlastní rotaci (spinu) částice, souvisí se spinovou točivostí b_s vztahem obdobným vzorci 7.2 (53)

$$8.1 (1) \quad \mu_s = \frac{q}{m_0} b_s,$$

kde q je elektrický náboj částice a m_0 její klidová hmotnost. Vyjadřuje se obvykle v jednotkách

$$8.1 (2) \quad \mu_N = \frac{e}{m_p} \frac{\hbar}{2} = \frac{m_e}{m_p} \mu_B = 5,0504 \cdot 10^{-27} \text{ Am}^2$$

definovaných obdobně jako Bohrov magneton 7.2 (51). Jednotka μ_N se od něho liší jen činitelem $m_e/m_p = 1/1836$ a nazývá se *jaderný magneton*.

Jako mikročástice se chovají především atomová jádra všech prvků, ale mluvíme-li o mikročásticích nebo prostě o částicích, máme nejčastěji na mysli tzv. „*elementární*“ částice. Tento název znamená jednoduchou, nesloženou čili *prvotní* částici, kterou nelze rozložit na jednodušší složky. Elementární částice by měly být teoreticky „bezrozměrné“ (bodové). Ukazuje se však, že dnešní „elementární“ částice mají jistou prostorovou strukturu a že mnohé z nich jsou nestálé a mohou navzájem v sebe přecházet. Proto by bylo třeba „elementárnost“ částic přesněji definovat, což je velmi nesnadný úkol, jehož řešení závisí na okamžitém stavu našich poznatků o částicích. Je funkcí rychlého vývoje teorie elementárních částic na jedné straně a vývoje obřích urychlovačů na straně druhé. Oba tyto obory moderní fyziky se dnes zahrnují pod názvem *fyziky vysokých energií*. Budeme proto „elementární“ částice raději nazývat *základními* nebo *fundamentálními* částicemi a budeme tímto názvem rozumět mikročástice, které při všech známých procesech zůstávají nedělitelné, ale přitom mohou přecházet v jiné základní (fundamentální) částice. Z přehledné tabulky (8.1) I základních částic vidíme, že z dvaatřiceti „elementárních“ částic jsou pouze čtyři stálé (mají neomezenou „dobu života“), kdežto zbývající částice jsou nestálé a rozpadají se s větší nebo menší pravděpodobností na jiné částice podle experimentálně zjištěných a teoreticky zdůvodněných rozpadových schémat. Rozpad částic je děj statistický, pro který platí stejný exponenciální zákon 1.3 (15) jako pro radioaktivní přeměny. Místo poločasu T uvádí se u částic obvykle jejich střední doba života $\tau = 1/\lambda$, za kterou klesne počet částic stejného druhu na zlomek $1/e = 0,368$ původního počtu. Z rov. 1.3 (16) plynou vztahy

$$T = \ln 2 \cdot \tau = 0,693\tau, \quad \tau = 1,443T.$$

V prvním sloupci tab. (8.1) I je uvedena hlavní kategorie, do které patří částice, jejichž jména a značky jsou v dalších dvou sloupcích. Ve čtvrtém sloupci uvádíme značku příslušné antičástice, která se liší od původní částice důslednou záměnou kladných a záporných nábojů. Obě částice mají stejnou klidovou hmotnost, stejný spin a stejný poločas. Proto se též jejich magnetické momenty liší jen znaménkem.

V posledním sloupci tabulky je uvedeno *číslo „divnosti“* (podivnosti) nebo stručně *divnost* částice, což je měřitelná veličina. Charakterizuje „divné“ částice, k nimž patří kaony a hyperony, a o jejím významu se zmíníme v čl. 8.1.3 a 8.1.5.

Základní částice jsou v naší tabulce seřazeny podle rostoucí klidové hmotnosti. Nulovou nebo mizivě nepatrnou hmotnost $\ll m_e$ mají polní částice foton a graviton. Rovněž nepatrnou hmotnost (ve srovnání s hmotností elektronu) mají neutrino, která však řadíme do skupiny *leptonů* (lehkých částic) spolu s elektrony a miony. Následuje kategorie středně těžkých částic *mezonů*, které se dělí na piony (mezony π) a na kaony (mezony K). Konečně třetí kategorii tvoří nejtěžší částice *baryony*, k nimž patří nukleony (proton a neutron) a hyperony lambda, sigma a xi.

8.1.2. Lehké částice

Nejprve promluvíme o prvních dvou základních částicích, které se často nazývají polní částice, protože podle kvantové teorie jsou fotony kvanta elektromagnetického záření a analogický význam mají gravitony v kvantových polích gravitačních. Pak přejdeme k výkladu o leptonech.

O fotonech jsme podrobně pojednali v 6.6.2, kde jsme je popsali jako světelná kvanta. V čl. 7.3.5 jsme pak ukázali, že síly mezi elektrickými náboji je též možno vykládat jako síly výměnné, zprostředkované mezi dvěma nabitými částicemi výměnou fotonů. Shledali jsme, že v případě, kdy fotony mají přesně nulovou klidovou hmotnost, mají výměnné

Základní částice

	Částice	Značka	Anti- částice	Hmotnost v m_e	Střední doba životu (s)	Samovolný rozpad	Spin ($\hbar$)	Div- nost S
Polní částice	foton	γ		0	∞		1	
	(graviton)			0	∞		2	
Leptony	neutrino	ν_μ, ν_e	$\bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_e$	$< 5, < 5 \cdot 10^{-4}$	∞		1/2	0
	elektron	e^-	e^+	1	∞		1/2	
	mion	μ^-	μ^+	207	$2,21 \cdot 10^{-6}$	$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$	1/2	
Mezony	piony	π^0, π^-	π^0, π^+	264 273	$< 10^{-15}, 2,56 \cdot 10^{-8}$	$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$	0 0	0
	kaony	K^-	K^+	967	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$	0	1
		K_1^0	$\bar{K}_1^0$	974	10^{-10}	$K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$	0	
		K_2^0	$\bar{K}_2^0$	974	$\approx 8 \cdot 10^{-8}$	$K_2^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 + \pi^- + \pi^0 + \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$	0	
Baryony	Nukleony	proton	$\bar{p}^-$	1 836	∞		1/2	0
		neutron	$\bar{n}^-$	1 839	1 010	$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	1/2	0
	Hyperony	lambda	$\bar{\Lambda}^0$	2 182	$2,6 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0$ $\rightarrow p + \pi^-$	1/2	-1
		sigma	Σ^+	2 327	$\approx 8 \cdot 10^{-11}$	$\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$ $\rightarrow \pi^+ + n$	1/2	-1
			Σ^0	2 329	10^{-20}	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$	1/2	-1
			Σ^-	2 342	$1,7 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^- \rightarrow \pi^- + n$	1/2	-1
		xí	Ξ^0			$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$	1/2	-2
			Ξ^-	2 585	$\approx 10^{-10}$	$\Xi^- \rightarrow \pi^- + \Lambda^0$	1/2	-2

síly potenciál shodný s Coulombovým elektrostatickým potenciálem. Upozornili jsme také na to, že je možné, že fotony mají jistou nesmírně nepatrnou klidovou hmotnost. Jak je uvedeno v tab. (8.1) I, je spin fotonu rovný $1\hbar$, ale jeho magnetický moment je nulový. To vedlo de Broglieho k interpretaci fotonu jako „Diracovy částice“ složené ze dvou částic, které dokonale „splývají“. Podle této představy vznikne foton „fúzí“ jisté částice s antičásticí, které mají stejné spiny rovné $\hbar/2$ (např. neutrino s antineutrinem), při čemž jejich „souřadnice“ jsou přesně stejné. Pohyb fotonu je ovládán spinovou vlnou s 16 komponentami, jejichž kombinací je možno popsat elektrické a magnetické pole. Tak je možno z Diracovy teorie dospět k Maxwellovým—Lorentzovým rovnicím elektromagnetického pole jakožto pole výměnných sil zprostředkovaných fotony.

Graviton nebyl dosud experimentálně objeven, ale byla vypracována jeho teorie podobná teorii fotonu. Má stejně jako foton nulovou nebo „skoro“ nulovou klidovou hmotnost (menší než foton) a nulový magnetický moment. Předpokládá se však, že jeho spin je dvojnásobný $2\hbar$, což vede k představě, že graviton vznikne fúzí čtyř „elementárních“ částic se spinem rovným $\hbar/2$. Předpokládáme-li, že klidová hmotnost gravitonu je mizivě malá proti hmotnosti elektronu [menší než hodnota 7.3 (17) uvedená v čl. 7.3.5], vyhovují výměnné síly Newtonovu gravitačnímu zákonu až do vzdáleností řádově rovných rozsahu Mléčné dráhy. Kromě toho plynou z kvantové teorie gravitace i některé korekce Newtonovy teorie známé z Einsteinovy teorie gravitace.

Ve skupině leptonů je daleko nejvýznamnější záporný elektron. Jeho teorii podal Dirac a ze své teorie předpověděl r. 1929 existenci antielektronu čili pozitronu e^+ . Tato předpověď se potvrdila r. 1933, kdy Anderson zachytil stopu pozitronu ve Wilsonově komoře [viz obr. (8.4) 26]. Přes tento skvělý úspěch se dnes má za to, že Diracova teorie, která pokládá elektron za „bodovou“ částici, nevystihuje dosti přesně všechny vlastnosti elektronu, který se zdá mít jisté prostorové rozložení podobné jako nukleony (viz čl. 8.1.4).

Značná vzácnost pozitronu se vysvětluje skutečností, že při jeho setkání s negatronem se obě částice změní ve dva nebo ve tři fotony zánikového záření. Jinak jsou elektrony stále částice se spinem rovným $\hbar/2$.

Anihilace, kterou končí každé setkání elektronu s pozitronem, nenastane okamžitě a obě částice mohou existovat po velmi krátkou dobu v těsném spojení, které připomíná spojení protonu s elektronem v neutrálním atomu vodíku. Podle klasické představy krouží obě částice kolem společného těžiště, při čemž mohou nabývat různých kvantových stavů podobně jako atom vodíku. Protože však jejich těžiště leží uprostřed mezi nimi, jsou příslušné energetické hladiny skoro přesně poloviční než u vodíkového atomu, jehož těžiště je velmi blízko protonu. Vzhledem k této podobnosti lze pohlížet na dvojici elektron-pozitron jako na neutrální atom prvku s nulovým nukleonovým číslem ($A = 0$), který se nazývá *pozitronium*.

Ačkoli je pozitronium stále v tom smyslu, že má kladnou ionizační energii (6,8 eV, přibližně poloviční než vodík), žije jeho atomy jen po velmi krátkou dobu, která podstatně závisí na vzájemné poloze spinů obou částic. Jsou-li jejich spiny antiparalelní (tzv. singlet), je doba života pozitronia pouze $1,3 \cdot 10^{-10}$ s a při jeho anihilaci vzniknou dva fotony se stejnou energií 0,511 MeV (ekvivalentní hmotnosti elektronu). Setkají-li se však elektron a pozitron se souhlasně rovnoběžnými spiny (tzv. triplet), vytvoří atom, jehož anihilace je asi tisíckrát méně pravděpodobná a který žije po dobu $1,4 \cdot 10^{-7}$ s. Při anihilaci vzniknou tři fotony o celkové energii 1,022 MeV, která je pro každý foton statisticky rozložena (zánikové záření se spojitým spektrem).

Doba života „tripletového“ pozitronia je (v atomovém měřítku) již dosti dlouhá, aby bylo možno jeho existenci zjistit experimentálně a studovat jeho fyzikální i chemické vlastnosti (např. halové sloučeniny pozitronia).

Mion, další částice ze skupiny leptonů, byla objevena v kosmickém záření r. 1937 Andersonem a Neddermeyerem. Byla zpočátku ztotožňována s Yukawovým „těžkým kvantem“ a postupně označována názvy yukon, mezotron a mezon.

Záporný mion μ^- i jeho antičástice μ^+ mají klidovou hmotnost $207m_e$ a spin $\hbar/2$. Rozpadají se s poločasem $2,21 \cdot 10^{-6}$ s na elektron, neutrino a antineutrino. Miony vznikají spontánním rozpadem pionu anebo kaonu. Existence neutrálního mionu se nepotvrdila. Magnetický moment mionu neznáme. Je pravděpodobné, že miony jsou vzbuzené (excitované) elektrony, čemuž nasvědčuje existence „mezonových“ atomů, iontů a molekul, které

se liší od obvyklých „elektronových“ atomů, iontů a molekul tím, že jsou v nich elektrony nahrazeny miony.

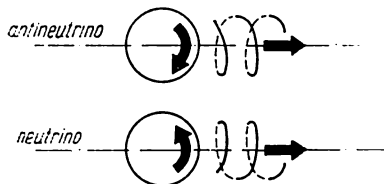
Neutrino je další částice, která byla „stvořena“ teoretickou úvahou. Zavedl ji r. 1931 Pauli, aby uvedl pozorované vlastnosti záření β v soulad s obecnými zásadami kvantové fyziky (viz čl. 8.3.2). Fermi pojmenoval tuto částici *neutrinem* a vypracoval teorii, podle které se neutron přemění v proton a elektron, při čemž současně vznikne neutrino (přesněji řečeno antineutrino). Fermi předpověděl také možnost obrácené přeměny, při které anti-neutrino $\bar{\nu}_e$ reaguje s protonem tak, že vznikne neutron a pozitron



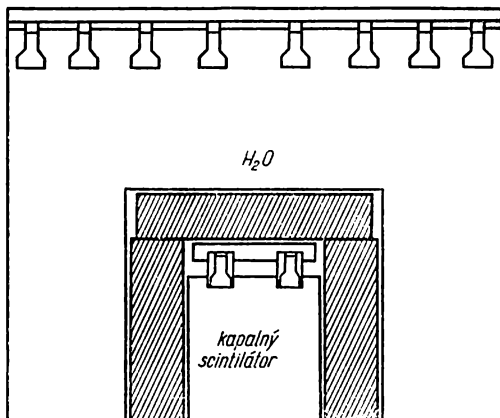
Experimentální ověření této hypotézy je nesmírně obtížné a trvalo čtvrt století, než se podařilo existenci neutrina prokázat aspoň nepřímo. Dnes víme, že existují celkem čtyři částice předpokládané Paulim, totiž *mionové neutrino* ν_μ a *elektronové neutrino* ν_e se svými antičásticemi (antineutriny) $\bar{\nu}_\mu$ a $\bar{\nu}_e$.

První pokusy o důkaz neutrina vycházely ze zákona zachování hybnosti při emisi záření β a při zachytu elektronu K. V obou případech vymrští jádro současně neutrino, které má jistou hybnost. To se projeví v prvním případě tím, že částice a zpět odražené jádro nemají přesně opačné (antiparalelní) směry. Ve druhém případě musí jádro dostat zpětnou rychlost a ovšem i energii, což experimentálně potvrdil Sherwin (r. 1949). Výpočtem plyne pro jádro ${}^7_3\text{Li}$ energie 45 eV v soulase s pokusy Allenovými (r. 1948).

Příčina velkých obtíží při experimentálním důkazu existence neutrina není v jeho vzácnosti ani v krátkosti jeho života, neboť je to částice stálá, která se vyskytuje v celém vesmíru v dosti značné hustotě mezi 10^6 až 10^8 částic m^{-3} . Příčina leží v téměř úplné neteč-



Obr. (8.1) 1. Neutrino a antineutrino se liší smyslem šroubovitosti



Obr. (8.1) 2. Průřez detektoru neutrin

nosti této „nicotné“ částice, která má podle všeho „skoro“ nulovou klidovou hmotnost, nulový náboj a nulový magnetický moment. Má od nuly různý jedině spin ($\hbar/2$) a prakticky nereaguje s ostatními částicemi. Antineutrino se liší od neutrina pouze znaménkem (smyslem) tzv. „šroubovitosti“ (helicity). Osa vlastní rotace obou částic leží ve směru jejich dráhy, ale má u antineutrina opačný smysl než u neutrina. Pravotočivost a levotočivost obou částic je však neměnná a jejich rychlost je prakticky rovna rychlosti světla ve vakuu. Obr. (8.1) 1.

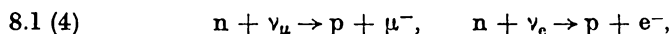
Pronikavost „neutrinového záření“ je nepředstavitelně ohromná: Vrstva olova, která by zeslabila neutrinový tok na polovinu, by musela mít tloušťku několik světelných roků. Odhaduje se, že tělem člověka projde během lidského věku asi 10^{23} neutrin, z nichž jedině je tělem absorbováno.

Neutrina vznikají podle tab. (8.1) I samovolným rozpadem mionů, kaonů a neutronů. Má se za to, že v nově vznikajících hvězdách (zvaných supernovy) může vzniknout spojením pozitronu a negatronu dvojice neutrino-antineutrino. Jinak vznikají neutrino v nejžhavě-

ším nitru sluncí a také štěpné reaktory jsou jejich vydatnými zdroji. To pozorovali r. 1956 Reines a Cowan u reaktoru v Savaňah River na základě občasných reakcí neutrina s některým protonem v objemných vodních nádržích jejich detektoru. Reakce 8.1 (3) se zjistí detekcí neutronu a pozitronu při koincidenčním zapojení počítačů.

Podobně je možno odhalit neutrinové záření, které prostupuje celým objemem Země, detektorem uspořádaným ve velké hloubce podle obr. (8.1) 2. V kapalném scintilátoru obklopeném železnými deskami vznikají při reakcích neutrin s jádry atomů záblesky, které jsou registrovány dvěma fotonásobiči v horní části vnitřní komory. Scintilace, které jsou provázány Čerenkovovým zářením (čl. 8.4.3) v okolním prostoru vyplněném vodou, se nepočítají, protože jsou způsobeny nabitými částicemi. Tak je možno zaznamenat reakce způsobené neutrinovým zářením odděleně od jiných jaderných reakcí.

Fermiova teorie záření β byla jen počátkem obecnější teorie tzv. *slabých interakcí*, která byla dovršena zejména M. Gell—Mannem r. 1958. Ukázalo se, že jsou možné slabé interakce neutrina s neutronem:



kteřé za předpokladu existence jediného druhu $\nu_\mu = \nu_e$ neutrina a jeho antičástice $\bar{\nu}_\mu = \bar{\nu}_e$ jsou stejně pravděpodobné. Avšak pokusy provedené v letech 1961 a 1962 na brookhavenském synchrotronu AGS Schwartzem, Steinbergerem, Ledermanem aj. ukázaly, že při ostřelování berylia protony urychlenými na 15 GeV vznikají v jiskrové komoře kromě protonů jenom miony [srov. obr. (8.4) 33]. Tak se došlo k závěru, že druhá interakce 8.1 (4) je způsobena jinou neutrální částicí ν_e nazvanou *elektronové neutrino* než reakce první způsobená *mionovým neutrinem* ν_μ .

8.1.3. Mezony a hyperony

V tomto článku probereme přehledně mezony a ze skupiny nejtěžších částic, tj. baryonů se o nezíme na hyperony, protože novějším poznatkům o struktuře nukleonů je věnován příští článek.

Pion čili *mezon* π je známý ve třech druzích. Neutrální pion π^0 má klidovou hmotnost $264m_e$ a je svou vlastní antičásticí. Rozpadá se na dva fotony s mimořádně krátkým poločasem.

Kladný i záporný pion má klidovou hmotnost $273m_e$ a nulový spin. Rovněž jejich magnetické momenty se pokládají za nulové. Rozpadají se s poločasem $2,56 \cdot 10^{-8}$ s na kladný nebo záporný mion a mionové neutrino (výjimečně na elektron a neutrino).

Piony nabitě i neutrální vznikají při setkání nukleonu s antinukleonem nebo při rozpadu hyperonů nebo po dvojicích π^+ , π^- ve velkých urychlovačích.

Existence pionů byla předpokládána teoreticky Yukawou již r. 1935, který odvodil přibližnou velikost jejich klidové hmotnosti z dosahu jaderných sil, jak jsme uvedli v čl. 7.3.5. Experimentálně byly objeveny teprve r. 1947, kdy Powell se svými spolupracovníky pozoroval jejich rozpad na miony ve fotografické emulzi.

Kaony jsou mezony s klidovou hmotností $967m_e$, jejichž náboj může být kladný i záporný. Mají pravděpodobně nulový spin a nulový magnetický moment. Kaon K^- a jeho antičástice K^+ mají poločas $1,2 \cdot 10^{-8}$ s, při čemž se mohou samovolně rozpadat několika způsoby. V tabulce jsme uvedli jen nejpravděpodobnější.

Neutrální kaony K_L^0 , K_S^0 mají klidovou hmotnost $974m_e$ a vyznačují se zvláštností, že nejsou totožné se svými antičásticemi. Kromě toho mají kaony i jejich antičástice dva velmi rozdílné poločasy, podle způsobu, jak se rozpadají. Všeobecně se má za to, že kaon je excitovaný pion, nebylo to však dosud experimentálně dokázáno.

Hyperony jsou základní částice těžší než nukleony. Z dvanácti hyperonů uvedených v tab. (8.1) I bylo nejobtížnější experimentální zjištění částice Ξ^0 , která byla objevena

teprve r. 1964 při průchodu antiprotonů s energií 3,69 GeV bublinkovou komorou s kapalným vodíkem. Vznikají při třech typech dějů:

- a) Dodáním energie se přivede nukleon do vzbuzeného stavu.
- b) Spojením hyperonu s antihyperonem.
- c) Samovolným rozpadem těžších hyperonů.

Pro děje a), b) platí zákon zachování čísla divnosti S , uvedeného v posledním sloupci tabulky (8.1) I. Částice s číslem divnosti různým od nuly se nazývají *divné částice*. Patří k nim kaony a všechny hyperony. Naproti tomu leptony, piony a nukleony mají $S = 0$, a jsou to tedy částice „normální“. Při přechodu částice k antičástici mění S jen znaménko.

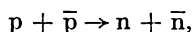
Všeobecně se připouští, že hyperony jsou vzbuzevané nukleony, podobně jako kaony jsou excitované piony a miony excitované elektrony. Tyto představy vedly teoretické fyziky k myšlence, že je možno základní částice systematicky uspořádat zavedením kvantových čísel obdobných kvantovým číslům určujícím kvantové stavy elektronového obalu atomů.

Uvážíme-li, že platí zákon zachování a invariantnosti náboje 5.1 (1, 2), můžeme počet elementárních nábojů pokládat za takové kvantové číslo, které má důležitou vlastnost, že se zachovává (je konzervativní). Přiřadíme-li pak každému leptonu *leptonové číslo* rovné $+1$ pro lepton a -1 pro antilepton, vidíme, že leptonové číslo je další konzervativní kvantovou veličinou, protože každý lepton se může změnit ve foton jen spojením s antileptonem. Podobně lze zavést *baryonové* (barické) číslo ($+1$ pro baryon a -1 pro antibaryon), které je rovněž konzervativní. Připojíme-li k těmto kvantovým číslům ještě spin a číslo divnosti, máme celkem pět konzervativních kvantových veličin, které nám mohou definovat všechny základní částice jako vzbuzevané kvantové stavy tří částic: elektronu, pionu a nukleonu.

Podotýkáme, že fyzika částic stojí před řadou nerozřešených problémů, jako je např. otázka platnosti *zákona parity*, který uvádí v souvislost znaménko náboje částice s jistým smyslem rotace v prostoru. Těmito obtížnými teoriemi se zde nemůžeme zabývat, ale pokládáme za vhodné vyložit nové experimentální poznatky o vnitřní struktuře nukleonů, které budou mít patrně rozhodující význam pro další vývoj našich představ o základních částicích. Tomu je věnován příští článek, kdežto v posledním článku této kapitoly promluvíme o nových směrech ve fyzice vysokých energií.

8.1.4. Struktura nukleonů

Základní informace o nukleonech jsme podali již v čl. 1.3.1. Antinukleony, jejichž existence byla předpověděna Diracovou teorií, byly skutečně objeveny. R. 1955 byly vytvořeny antiprotony ostřelováním mědi protony urychlenými na energii 5,5 GeV na berkleyském bevatronu. Antiproton $\bar{p}$ se při setkání s protonem p navzájem zruší (anihilace), při čemž vznikne větší počet mezonů, které se postupně mění ve fotony. Roku 1956 bylo antiprotonů užito k vytvoření antineutronů na základě přeměny



která může nastat při srážce protonu s antiprotonem vedle již zmíněné anihilace. Antiproton se liší od protonu jen znaménkem náboje a magnetického momentu. Antineutron má při stejném spinu rovněž opačný magnetický moment než neutron.

Magnetické momenty nukleonů zjištěné experimentálně nesouhlasí však s magnetickými momenty vypočtenými z Diracovy teorie. Je to způsobeno tím, že tato teorie pokládá „elementární“ částice za bodové (bezrozměrné), což neodpovídá skutečnosti, jak bylo zjištěno v posledních letech řadou pokusů s rozptylem nadrelativnostních elektronů na protonech a deuterech.

Rozptylu částic α při průchodu kovovým listem užil již Rutherford k vyšetření, jak je rozložen náboj v atomu. Podařilo se mu dokonce správně odhadnout na základě takových pokusů i velikost atomových jader, jak jsme se zmínili v čl. 7.2.1. Bližší poznatky o prostoro-
rovém uspořádání náboje v jádře není možno odvodit z rozptylu částic α , které mají energii

několik megaelektronvoltů. Není možno je získat ani měřením rozptylu záření γ , jejichž kvanta mají energii stejného řádu (tzv. Thompsonův rozptyl). Je tomu tak proto, že energie rozptylovaných částic je příliš malá, jak vyplývá ze základních představ vlnové mechaniky. Částici s hmotností m přísluší de Broglieova vlna délky

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv},$$

která pro částici s malou energií je dosti velká ve srovnání s průměrem jádra, které má velikost řádově rovnou*)

$$10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm} = \text{fermi.}$$

Pro nadrelativistní částici můžeme však podle čl. 2.9.4 položit

$$v \approx c, \quad p \approx mc, \quad W \approx mc^2 \approx cp,$$

takže jí přísluší vlnová délka

$$\lambda \approx \frac{hc}{W},$$

kde W je celková relativistní energie částice. Je-li $W = 1 \text{ MeV}$, dostaneme

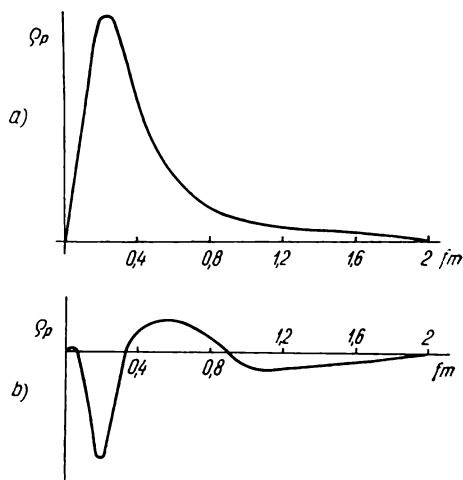
$$\lambda_{1\text{MeV}} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-13}} \text{ m} = 1,3 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 1 \text{ 300 fm.}$$

Částicím s energií řádu 1 MeV přísluší tedy de Broglieova vlna, která je asi pětsetkrát delší než průměr jádra (nebo nukleonu). Při rozptylu tak dlouhých vln se jádro chová jako bodový objekt, protože fáze vlny je v rozsahu jádra konstantní. Vlna příslušná částici s energií např. 400 MeV je však čtyřistakrát kratší

$$\lambda_{400 \text{ MeV}} = 3,3 \text{ fm}$$

a její fáze se v objemu jádra již znatelně mění, takže částice podléhá v různých vzdálenostech od středu jádra různě silným účinkům. Z teorie rozptylu pak vyplývá jistý vztah mezi rozdělením částic do různých směrů rozptylu a rozložením náboje v jádře. Ze známého úhlového rozdělení rozptýlených částic lze pak usuzovat na prostorovou strukturu jádra nebo jiné rozptylující částice, např. nukleonu. To je princip metody, které užívá Hofstadter (od r. 1956) se svými spolupracovníky k experimentálnímu vyšetřování vnitřní struktury jader a nukleonů. Popíšeme jen stručně pokusy, kterými se podařilo prozkoumat rozložení náboje v protonu a v neutronu.

Elektromagnetická struktura protonu byla vyšetřována na základě rozptylu elektronů o vysoké energii (400 MeV) v plynném vodíku pod tlakem 140 atm. V teorii tohoto rozptylu se pokládá elektron za bodový náboj, na který působí elektrodynamicky náboje rozložené v protonu. Ve vnitřní části nukleonů dochází neustále k emisi a absorpci pionů, které tvoří jakýsi mezonový oblak. Tato střední část se nazývá *nukleora* o jeho struktuře je možno získat informace na základě rozptylu pionů. Na obr. (8.1) 3 je znázorněno rozložení



Obr. (8.1) 3. Rozložení elektrického náboje v nukleonech: a — v protonu, b — v neutronu

prozkoumat rozložení náboje v protonu a v neutronu.

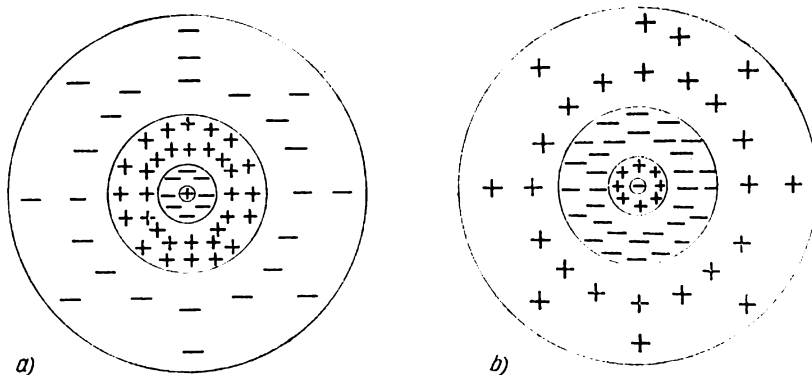
Elektromagnetická struktura protonu byla vyšetřována na základě rozptylu elektronů o vysoké energii (400 MeV) v plynném vodíku pod tlakem 140 atm. V teorii tohoto rozptylu se pokládá elektron za bodový náboj, na který působí elektrodynamicky náboje rozložené v protonu. Ve vnitřní části nukleonů dochází neustále k emisi a absorpci pionů, které tvoří jakýsi mezonový oblak. Tato střední část se nazývá *nukleora* o jeho struktuře je možno získat informace na základě rozptylu pionů. Na obr. (8.1) 3 je znázorněno rozložení

*) Tato jednotka délky zvaná *fermi* se obvykle značí *f*. Označili jsme ji *fm* (femtometr), jak to odpovídá čs. normě (ČSN 01 1300) z r. 1963 [viz tab. (1.2) II].

hustoty náboje ϱ_p v protonu a ϱ_n v neutronu. Srovnáním obou křivek se přesvědčíme, že teoretický výsledek

$$\varrho_n = -\varrho_p$$

je splněn jenom ve vnější části obou nukleonů ($r > 1,2$ fm), kdežto náboje v nukleonu jsou rozloženy podstatně jiným způsobem u neutronu než u protonu. Náznorněji si můžeme představit strukturu neutronu a antineutronu podle schematických obrázků (8.1) 4a, b. Neutron je složen ze tří koncentrických vrstev nábojů, z nichž vnitřní a vnější jsou záporné,



Obr. (8.1) 4. Schematické rozložení náboje: a — v neutronu, b — v antineutronu. Algebraický součet nábojů je v obou částicích nulový

střední kladná. Celkový náboj je ovšem nulový, ale magnetický moment má negativní hodnotu $-1,91\mu_j$. Antineutron se liší jen znaménkem nábojů, a proto má magnetický moment stejně velký, ale kladný, v soulase se známým experimentálním poznatkem. Podobně je možno vysvětlit prostorovým uspořádáním náboje v protonu jeho anomální magnetický moment, pro který vychází z měření hodnota $2,79\mu_j$, téměř třikrát větší než hodnota μ_j plynoucí z Diracovy teorie.

8.1.5. Nové směry ve fyzice vysokých energií

V tab. (8.1) I jsme uvedli 34 základních (fundamentálních) částic, jejichž existence byla experimentálně prokázána, a hypotetické kvantum gravitačního pole (graviton). Jak jsme upozornili v čl. 8.1.3, nelze předpokládat, ani že všechny tyto částice jsou „samostatné“ navzájem nezávislé, ani že jsou to částice „elementární“ (jednoduché), čemuž také nasvědčuje prostorová struktura nukleonů vyložena v čl. 8.1.4. V několika posledních letech byly však objevovány další částice, takže r. 1963 bylo známo již na sto různých částic. To potvrdilo názor, že všechny objevené částice nemohou být „elementární“ a že tento příliv nových experimentálních informací vyžaduje nový pohled na povahu základních částic, na jejich vzájemné souvislosti a na síly, kterými jsou ovládány jejich interakce. Tak vznikla ve fyzice vysokých energií nová situace obdobná stavu, kterého dosáhla fyzika elektronového obalu atomu rychlým vývojem spektroskopických poznatků před 40 léty a který vedl k formulaci základů kvantové mechaniky. Podobně se při studiu atomových jader dospělo k poznání, že jádra se mohou vyskytovat v různých kvantových stavech, které odpovídají různým vazebním energiím, jimiž jsou k sobě poutány protony a neutrony. I když v teorii základních částic nebyl dosud objeven jednotný princip, který by mohl vnést úplný systém do experimentálně zjištěných skutečností, rysuje se již možnost, vybudovat rozumnou hierarchii mezi množstvím pozorovaných částic, uspořádat je podle „příbuzenských“ vztahů mezi nimi a objasnit zákonitosti sil, kterými spolu interagují. Ačkoli tato teorie nemá dosud definitivní formu, podařilo se vytvořit novou soustavu názvů a značek pro známé částice a předpovědět vlastnosti částic, které byly dodatečně objeveny.

Než přistoupíme k výkladu o těchto nových hlediscích fyziky vysokých energií, pokládáme za účelné vysvětlit stručně, jak dnešní fyzika třídí interakce mezi částicemi. Při tom je třeba zdůraznit, že slovo interakce je jen moderním termínem pro sílu nebo silové pole. Proto shrnují čtyři níže uvedené kategorie interakcí zároveň čtyři kategorie sil či polí, kterými je možno vyložit všechny silové účinky v celém fyzikálním vesmíru.

1. Gravitační pole je nejslabší mezi všemi interakcemi a působí mezi dvěma částicemi silou úměrnou hmotnostem obou částic. Gravitační síly mají prakticky neomezený dosah, což lze z hlediska kvantové fyziky vysvětlit tím, že jsou zprostředkovány polním kvantem, zvaným graviton, s mizivě nepatrnou hmotností (srov. čl. 7.3.5). Gravitační síly se uplatňují v kosmickém prostoru, ale v atomových rozměrech jsou zanedbatelné proti elektromagnetickým silám a v rozsahu atomových jader je zcela překrývají síly jaderné (silná interakce).

2. Slabé pole čili slabá interakce je název pro sílu, která působí hlavně mezi leptony. Ačkoli je v poměru 10^{26} silnější než interakce gravitační, má nesmírně malý dosah a zdá se, že nemůže poutat žádné dvě částice. Uplatňuje se při některých jaderných procesech jako síla, která řídí rozpad částic a některých radioaktivních jader (např. přeměnu β). Z hlediska kvantové mechaniky by bylo možno vyložit slabou interakci jako výměnnou sílu zprostředkovanou vzhledem k jejímu nepatrnému dosahu velmi těžkou částicí. Příslušná směnná částice, která se nazývá „zprostředkující“ boson, nebyla dosud pozorována, ale pátrá se po ní. Očekává se, že má jeden elementární náboj, spin $1\hbar$ a dosti velkou hmotnost.

3. Elektromagnetické pole je zhruba 10^{37} krát silnější než pole gravitační a 10^{12} krát silnější než slabé pole. Jeho dosah je prakticky neomezený, a proto se kvantu elektromagnetického pole (fotonu) přisuzuje klidová hmotnost nulová (nebo nejvýše rovná 10^{-63} kg). Působí na všechny částice s elektrickým nábojem. Elektromagnetická interakce se uplatňuje v makroskopických rozměrech, určuje strukturu atomového obalu, poutá atomy v molekuly a je rozhodující silou v chemii a biologii.

4. Silné pole čili silná interakce se nazývá často *jaderná síla* a je nejsilnější ze všech známých polí, neboť je 10^{38} krát silnější než gravitační pole a stokrát silnější než pole elektromagnetické. Jaderné pole působí mezi mezonu a mezi baryony (nukleony a hyperony), ale nepodléháji mu leptony (včetně neutrin). Podle Yukawovy teorie je silná interakce zprostředkována polním kvantem, známým pod jménem mezon π neboli pion, s klidovou hmotností $270m_e$, v soulase s tím, že dosah jaderných sil je řádu 10^{-15} m ($= 1$ fm), což odpovídá průměru základních částic.

Je třeba zdůraznit, že síly čtyř uvedených kategorií se neuplatňují jen vzájemnou vazbou částic při tvoření složených částic (např. atomových jader), ale i různými jinými interakcemi, které se projevují rozptylem částic a anihilací nebo přeměnou částic v jiné.

Pro fyziku vysokých energií mají zvláštní význam interakce částic při rychlostech blízkých rychlosti světla $c \approx 3 \cdot 10^8$ ms $^{-1}$. Protože typická velikost částic je 10^{-15} m, je nejkratší doba, po kterou mohou částice spolu reagovat, řádu 10^{-23} s. Proto se nazývá interakce, schopná vyvolat reakci mezi částicemi v tak krátké době, silná interakce. Elektromagnetické síly, které jsou stokrát slabší, potřebují k uskutečnění reakcí stokrát delší dobu řádu 10^{-21} s. Děje vyvolané slabými interakcemi, které jsou 10^{14} krát méně intenzivní než silné interakce, mají pak obvykle trvání kolem 10^{-9} s.

V dalším výkladu probereme nejdůležitější zákonitosti, kterými se řídí silné interakce, a povšimneme si, které z nich neplatí pro interakce slabé.

V klasické fyzice jsou známy zákony zachování energie, hybnosti, točivosti (momentu hybnosti) a zákon zachování náboje. Tyto zákony platí pro všechny čtyři uvedené kategorie interakcí. V kvantové mechanice se veličinám, které se zachovávají, přiřazují kvantová čísla, jejichž hodnoty jsou sudé nebo liché násobky jedné poloviny. V tab. (8.1) II uvádíme pět takových veličin, jež se zachovávají při silných interakcích, avšak nemusí se zachovávat při elektromagnetických nebo při slabých interakcích.

Až do r. 1956 byli fyzikové přesvědčeni, že při všech dějích platí zákon zachování parity, což znamená, že příroda nedává přednost otáčení vpravo před otáčením vlevo (nebo naopak). Měření provedená koncem jmenovaného roku však prokázala, že při přeměně β kobaltu Co 60 vysílají atomy tohoto nuklidu elektrony přednostně ve směru opačném, než má jejich spinový magnetický moment. Podobně při rozpadu mionu unikají elektrony za vhodných podmínek hojněji v jednom směru než ve směru opačném. Z toho lze soudit, že při slabých interakcích, které se uplatňují při přeměně β a při rozpadu mionu, se nezachovává parita. Pro tyto fyzikální děje není otáčení vpravo rovnocenné s otáčením vlevo a z reálné existence nějakého děje neplyne ještě reálná existence děje, který z něho vznikne zrcadlením, při němž se mění smysl rotace v opačný.

K stručné charakteristice kvantových čísel, uvedené v posledním sloupci tabulky, dodáváme, že *multipletem* (nábojovým) rozumíme souhrn částic, které se liší jen elektrickým nábojem, a počet různých nábojových stavů v multipletu nazýváme jeho *multiplicitou* M . Tak např.

Kvantová čísla, která se zachovávají při silných interakcích

	Značka	Pozorované hodnoty	Fyzikální význam
Baryonové číslo	B	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$	Pro atomová jádra totožné s nukleonovým číslem A . Pro baryony $B = +1$, pro antibaryony $B = -1$, pro mezony $B = 0$
Hypernáboj	Y	$-2, -1, 0, +1$	Dvojnásobek průměrného náboje multipletu, jehož je částice členem. Divnost částice $S = Y - B$
Izotopický spin	I	$0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$	Definován vztahem $M = 2I + 1$ k multiplicitě M nábojového multi- pletu
Spinová točivost (spin)	J	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ $0, 1, 2, 3$	Udává počet kvantových jednotek $\hbar$ spinové točivosti částice
Parita	P	$-1, +1$	Přiřazuje částici levotočivou nebo pravotočivou šroubovitost. Pro obě neutrina $P = -1$, pro obě antineutrina $P = +1$

proton ($B = A = +1$) je členem dubletu (složeného z protonu a neutronu) a jeho multiplicita $M = 2$, izotopický spin

$$I = \frac{1}{2} (M - 1) = \frac{1}{2},$$

hypernáboj

$$Y = +1 + 0 = +1$$

a divnost protonu

$$S = 0.$$

Podobně přísluší zápornému pionu, který je členem tripletu π^+ , π^0 , π^- , kvantová čísla

$$M = 3, \quad Y = \frac{2}{3} (1 + 0 - 1) = 0,$$

$$I = \frac{1}{2} (M - 1) = 1, \quad S = 0 - 0 = 0.$$

Jsou-li kvantové stavy silně interagujících částic určeny uvedenými pěti*) kvantovými čísly, je nasnadě myšlenka užít jich k třídění mezonů a baryonů a vytvořit důslednější symboliku, než byla symbolika dřívejší. Způsob, jakým byla tato myšlenka uskutečněna, je zřejmý z tabulky (8.1) III. Mezony ($B = 0$) zásadně se označují malými řeckými písmeny η , π , ω , $\bar{\omega}$ (antikappa), která charakterizují čtyři známé kombinace čísel Y a I uvedené v tabulce, kde jsou pro úplnost připsány také multiplicity M mezonových multipletů. Pro baryony ($B = 1$) se zásadně užívá velkých řeckých písmen: Λ , Σ , N , Ξ , Ω , Δ pro šest známých kombinací Y a I . Těchto

*) Neuvádíme další dvě kvantová čísla: počet Q elementárních nábojů částice a číslo G , které stejně jako parita P má jen dvě hodnoty ± 1 a je definováno jen pro mezony s nulovým hypernábojem.

deset symbolů stačí k zařazení známých mezonů do čtyř a baryonů do šesti hlavních tříd. Bližšího určení částice se dosáhne tím, že se k hlavnímu symbolu připojí do závorky klidová energie částice v MeV*) a hodnota spinové točivosti J . Znaménko parity P se obvykle přispisuje vpravo nahoru k hodnotě J . Závorka má tedy obecný tvar

$$(W_0, J^P),$$

takže např. úplný symbol neutronu je

$$N(939, \frac{1}{2}^+)$$

a pro záporný pion

$$\pi(137, 0^-).$$

V posledním případě splývá nový symbol π s dřívějším označením π , které však zahrnovalo pouze jeden triplet částic π^-, π^0, π^+ s klidovou energií 137 MeV, kdežto nový symbol π zahrnuje kromě tohoto tripletu také další známý triplet mezonů $\pi(750, 1^-)$ se stejnými hodnotami $Y = 0, I = 1$, ale s klidovou energií 750 MeV. Podobně značí N v nové symbolice nejen nukleonový dublet (p, n), ale též dva vyšší energetické stavy nukleonů, které tvoří rovněž dublet s klidovými energiemi 1 512 MeV a 1 688 MeV a jsou uvedeny v grafické tabulce (8.1) IV.

Stabilní a metastabilní částice jsou vyznačeny plnými, nestabilní (rezonance) prázdnými kroužky.

Tabulka názorně ukazuje čtyři mezonové singlety η s energiemi 548, 782, 1 020 a 1 250 MeV a čtyři multiplety (dva triplety π s energiemi 137 a 750 MeV a dva kvartety κ s energiemi 496 a 888 MeV). Také baryony a antibaryony se vyskytují v multipletech. Jsou to tři singlety Λ a jeden singlet Ω , dva dublety N , dva dublety Ξ , tři triplety Σ a dva kvartety Δ . Tyto poznatky jsou v plně shodě s tab. (8.1) III.

Třídění základních částic podle uvedených pěti kvantových čísel vnáší do teorie základních částic systém a přehlednost, ale ponechává stranou důležitou vlastnost částic, totiž jejich stabilitu, kterou posuzujeme podle střední doby života částice, nebo podle poločasu jejího rozpadu, který se od částice k částici mění ve velmi širokém rozmezí od 10^{-23} s do nekonečna. „Nekonečnou“ dobu života mají *absolutně stabilní* částice, tj. proton, elektron a obě neutrina, které patří mezi permanentní částice (srov. čl. 1.3.1) a žijí po neomezenou dobu, pokud se nesetkají se svou antičásticí a neanihilují se. Ostatní známé částice jsou nestálé a délka jejich života závisí podstatně na tom, která ze čtyř hlavních kategorií interakcí ovládá jejich rozpad. Částice, které se rozpadají vlivem elektromagnetických a slabých interakcí, se nazývají *metastabilní*, protože mají poločas mnohem delší než částice, které se rozpadají působením silných interakcí a které se nazývají *nestabilní*. Tak např. leptony μ^- a μ^+ s dobou života $2,21 \cdot 10^{-6}$ s patří k metastabilním částicím, kdežto mezony κ s dobou života 10^{-10} až 10^{-8} s a hyperony Σ s dobou života 10^{-20} až 10^{-10} s jsou nestabilní částice.

Nestabilní částice, které se chovají jako rezonanční energetické stavy, se nazývají také *rezonance*. První takovou částici objevil Fermi r. 1952. Studoval rozptyl kladných pionů z chicagského cyklotronu na protonech v kapalném vodíku a zjistil, že účinný průřez této interakce nabývá maxima při jisté energii pionů. Je to zřejmé z obr. (8.1) 5, který znázorňuje závislost účinného průřezu v milibarech (čl. 8.3.2) na tzv. „efektivní hmotnosti“ systému pion-proton, která se rovná součtu klidových a kinetických energií obou částic v souřadnicové soustavě spojené s jejich těžištěm. Je to tedy „klidová energie“ systému pion-proton měřená v klidové soustavě společného těžiště obou částic.

U svazku kladných pionů zjistil Fermi výrazné maximum při energii 1 238 MeV a později bylo nalezeno další slabší maximum při 1 920 MeV (jak je zřejmé z plně vytažené křivky). Pro svazek

*) Se zřetelem k Einsteinovu vztahu mezi hmotností a energií se v dnešní fyzice vysokých energií běžně vyjadřuje klidová hmotnost částice v megaelektronvoltech, takže je pak rovna její klidové energii. Je to ve shodě s konvencí, že se v některých oborech fyziky volí jednotky tak, aby

$$c = 1, \quad \hbar = 1.$$

Tabulka (8.1) III

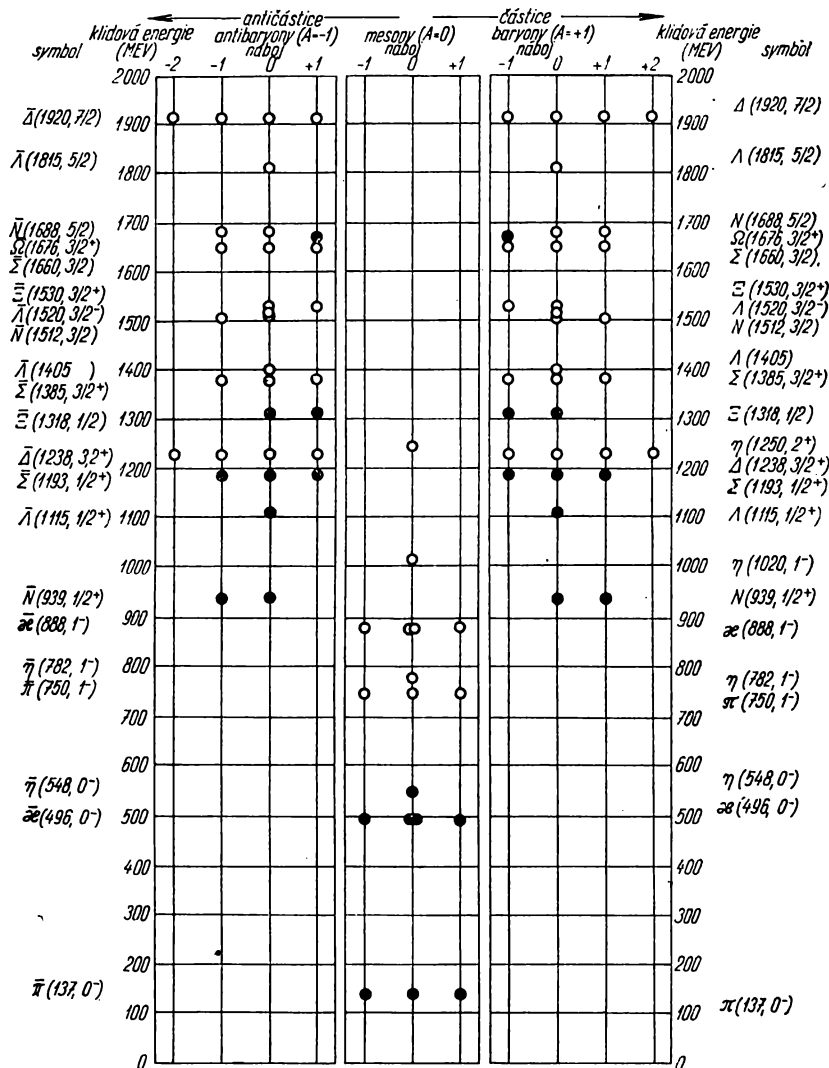
Nové označení silně interagujících částic

Mezony $B = 0$				Baryony $B = 1$			
Symbol	Y	I	M	Symbol	Y	I	M
η	0	0	1	Λ	0	0	1
π	0	1	3	Σ	0	1	3
κ	+1	$\frac{1}{2}$	2	N	+1	$\frac{1}{2}$	2
$\bar{\kappa}$	-1	$\frac{1}{2}$	2	Ξ	-1	$\frac{1}{2}$	2
				Ω	-2	0	1
				Δ	+1	$\frac{3}{2}$	4

záporných pionů (čárkovaná křivka) bylo pozorováno méně výrazné maximum rovněž při energii 1 238 MeV a dvě slabší maxima při 1 512 a 1 688 MeV. Tato maxima, připomínající rezonanční křivky, odpovídají nestabilním částicím, jejichž dnešní symboly jsou připsány k oběma křivkám.

Tabulka (8.1) IV

Stabilní, metastabilní a nestabilní částice



Stručný nástin posledního vývoje fyziky vysokých energií podaný v tomto článku doplníme zmínkou o dvou metodách, kterými se fyzikové snažili odhalit souvislosti mezi četnými nově objevenými částicemi a najít vhodné klasifikační schéma, které by umožnilo předvídat existenci a vlastnosti dalších částic na základě částic již známých.

První metodu vypracoval r. 1959 italský fyzik Regge, který si povšiml skutečnosti, že částice s větší hmotností mívají také větší hodnoty spinové točivosti J . Ačkoli hodnoty J jsou násobky celých nebo polovičních kvant, ukázal Regge, že závislost hmotnosti na J je možno vyjádřit pro některé částice hladkou křivkou, která se nazývá *Reggeova trajektorie*. Na obr. (8.1) 6 vidíme tři takové trajektorie (přímkové), které vycházejí ze tří základních stavů (baryonů s nejmenší

hmotností), které se obecně nazývají *okurence*. Na každé z nich leží pak další baryony se spiny o 2 většími než spiny příslušných okurencí. To jsou částice zvané Reggeovy *rekurence*. Spiny částic Λ (1 815) a Δ (1 920) nejsou experimentálně zaručeny a hodnoty $\frac{1}{2}$ a $\frac{7}{2}$ uvedené v tab. (8.1) IV plynou právě ze známého sklonu trajektorie spojující neutron N (939) s jeho rekurencí N (1 688).

Reggeovy trajektorie jsou dobrým vodítkem při experimentálním zjišťování nových baryonů a mezonů s vyššími hodnotami spinu.

Druhou metodu navrhli r. 1961 nezávisle M. Gell-Mann v Kalifornii a Y. Ne'eman v Izraeli. Vyšli z hypotézy, že existují jisté symetrie mezi částicemi, které mají stejné hodnoty J a P , ale různé hodnoty hmotnosti, hypernáboje Y a izotopického spinu J . Tyto symetrie tvoří soustavu, která se označuje názvem „osminásobná cesta“, protože se v ní uplatňuje osm kvantových čísel, totiž tři složky izotopického spinu, hypernáboj a čtyři další dosud nepojmenované veličiny. Operace s těmito čísly splňují matematické vztahy známé z tzv. Lieovy algebry pro grupu značenou $SU(3)$ a vedou k myšlence vzájemných souvislostí mezi některými multiplety, které se tak sdružují v *supermultiplety*. Na obr. (8.1) 7a vidíme osmičtený supermultiplet (oktet) složený ze singletu Λ^0 , dvou dubletů N a Ξ a tripletu Σ . V části b) téhož obrázku je desetičlenný supermultiplet (dekuplet) složený z kvartetu Δ , tripletu Σ , dubletu Ξ a singletu Ω^- .

Pro dekuplety předpovídá teorie na základě „symetrie $SU(3)$ “ stejný rozdíl energie mezi jednotlivými multiplety. Když byl r. 1952 objeven kvartet Δ (1 238), mohl být tento rozdíl vypočten z dříve známého tripletu Σ (1 385). Tak byla určena hodnota

$$(1\ 385 - 1\ 238)\ \text{MeV} = 147\ \text{MeV},$$

která vedla k předpovědi existence dubletu s energií

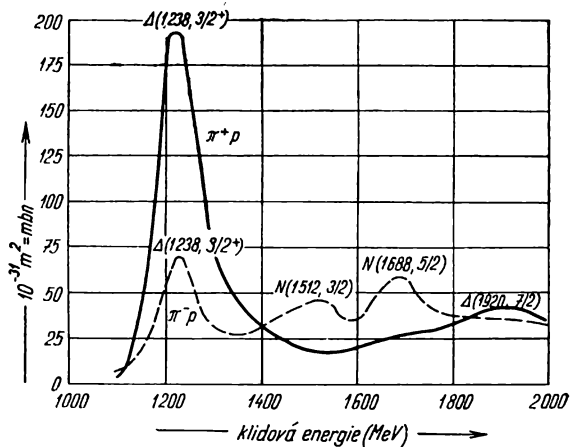
$$(1\ 385 + 147)\ \text{MeV} = 1\ 532\ \text{MeV}.$$

Jeho existence byla potvrzena, když byl objeven dublet Σ (1 530), a tak mohla být předpověděna i desátá částice s energií

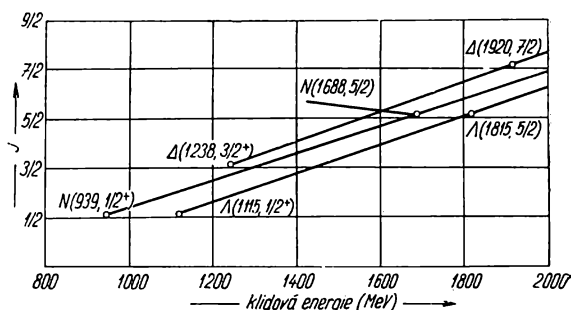
$$(1\ 530 + 147)\ \text{MeV} = 1\ 677\ \text{MeV}.$$

Tuto poslední předpověď je možno označit jako největší úspěch fyziky vysokých energií v posledních dvaceti letech, protože r. 1964 byl skutečně objeven baryon Ω^- (1 676, $\frac{3}{2}$) předvídaných vlastností a s experimentálně zjištěnou průměrnou hodnotou energie $(1\ 675 \pm 12)\ \text{MeV}$. Na obr. (8.1) 8 vidíme vlevo snímek vzniku a rozpadu této částice v bublinkové komoře (průměru 2 m). V pravé části obrázku jsou graficky znázorněny jevy, které vyvolal v kapalném vodiči negativní mezon K^- vyrobený brookhavenským protonovým synchrotronem (33 GeV). Mezon K^- , vniknuvši zdola do komory, reagoval s protonem a vytvořil částice Ω^- , K^+ a částici K^0 (její neviditelná stopa vyznačena čárkovaně). Baryon Ω^- se rozpadá účinkem slabých interakcí během asi 10^{-11} s na mezon π^- a baryon Ξ^0 se dále rozpadá na Λ^0 a π^0 . První částice se přemění v p a π^- , kdežto z π^0 ihned vzniknou dva fotony γ_1 a γ_2 , které rovněž nezanechávají stopy a na konci svých drah vytvářejí elektronová dvojčata e^- a e^+ .

Při pokusu, kterým byl objeven hyperon omega minus, svazek protonů urychlený synchrotronem dopadal na wolframový terč, z něhož vycházel svazek obsahující v poměrných množ-

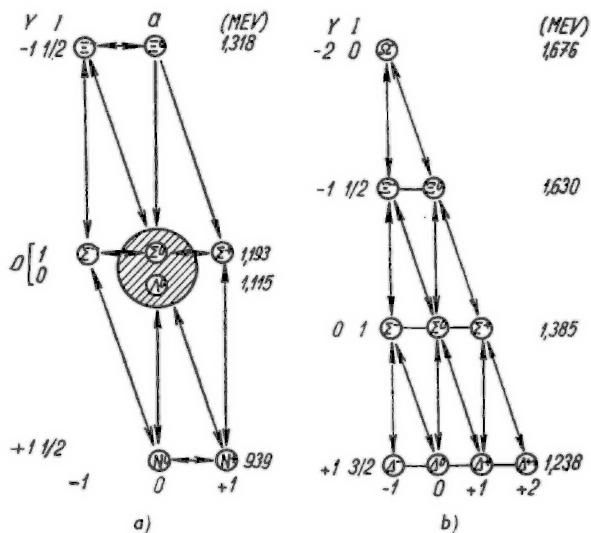


Obr. (8.1) 5. Účinný průřez pro rozptyl kladných a záporných pionů na protonech



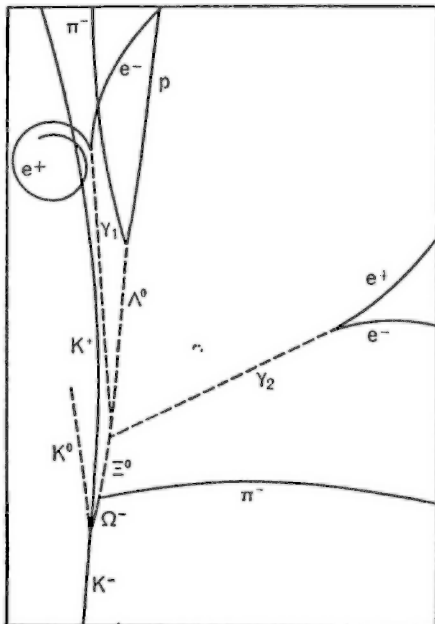
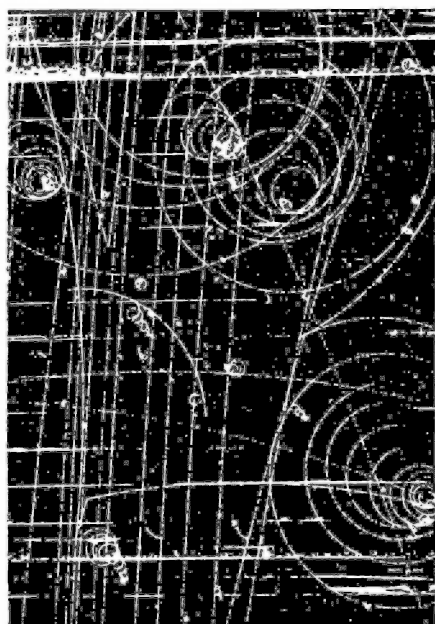
Obr. (8.1) 6. Reggeovy trajektorie pro některé baryony

stích 80 : 1 : 1 záporné piony, antiprotony a záporné kaony, které bylo třeba ze svazku separovat. Působením odklápěcích magnetů se částice třídily podle hybností a v elektrostatických separátorech podle hmotností. Po průchodu dvěma štěrbinami vstupoval do dvoumetrové bublinkové komory (s 900 litry kapalného vodíku) svazek složený z π^- , $\bar{p}$ a K^- v poměru 1 : 0 : 10, který vyvolal ve vodíku popsané interakce.



Ani tyto skvělé výsledky nezaručují ještě, že teorie silných interakcí je úplná. Je možné, že existuje další kvantové číslo, které je rovno nule pro všechny dnes známé částice. Poznamenáváme jen, že v poslední době vyslovili Chow a Frautschi pozoruhodnou myšlenku, že silně interagující částice jsou samy výtvořem silné interakce. V každém případě lze očekávat, že další vývoj fyziky vysokých energií bude ještě urychlen příští generací obřích urychlovačů, které snad umožní i studium struktury elektronu a fotonu pomocí intenzivních svazků neutrin a mionů.

Obr. (8.1) 7. Příklady supermultipletů: a --- oktet, b --- deкупlet



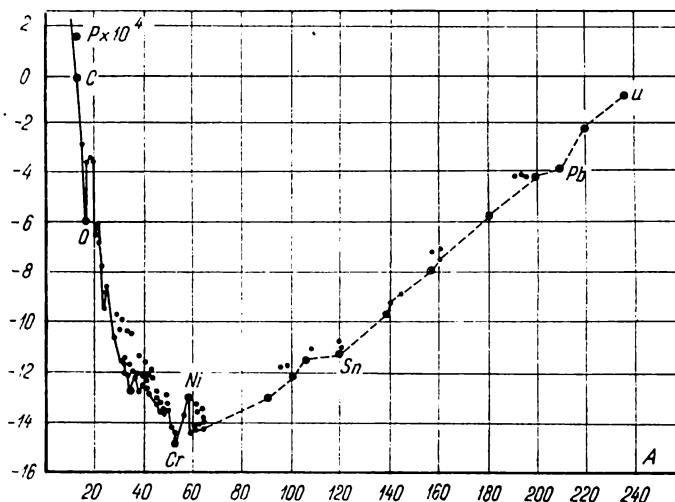
Obr. (8.1) 8. Objev záporného baryonu Ω^- . Vlevo fotografie pořízená v bublinkové komoře, vpravo grafické schéma jová

8.2. Stavba atomového jádra

8.2.1. Základní jaderné veličiny

Tento úvodní článek navazuje na poznatky o atomových jádrech, které jsme stručně shrnuli v článcích 1.3.2 a 7.2.1. Probereme v něm nejjednodušší veličiny, které charakterizují atomová jádra.

Připomeňme nejprve, že podle dnes již bezesporné představy, navržené Ivaněnkem a zpracované Heisenbergem (r. 1932), jsou jádra všech atomů složena z protonů a neutronů. Počet protonů obsažených v jádře určuje protonové neboli atomové číslo Z rovné počtu elementárních nábojů jádra; počet všech nukleonů v jádře A se nazývá nukleonové číslo.*) K těmto dvěma charakteristikám jádra připojíme nyní další důležité veličiny.



Obr. (8.2) 1. Závislost poměru stěsnání na nukleonovém čísle jádra

Poměr stěsnání (koeficient stěsnání) čili krátce *stěsnanost* jádra je bezrozměrné číslo definované zlomkem

$$8.2 (1) \quad P = \frac{\alpha - A}{A},$$

kde A je nukleonové číslo a α značí relativní atomovou hmotnost příslušného nuklidu. Stěsnanost není obecně rovna nule, protože relativní atomové hmotnosti neutrálních atomů ani jejich jader nejsou čísla celá. Z definiční rovnice 1.3 (8) relativní atomové hmotnosti vyplývá, že P je přesně rovno nule jen pro izotop uhlíku $^{12}_6\text{C}$. Pro ostatní nuklidy má buď kladné, nebo záporné hodnoty, jak je zřejmé z obr. (8.2) 1. Má charakteristický průběh, který jeví výrazné minimum pro středně těžké prvky ($A \approx 50$). K tomuto významnému poznatku se vrátíme v příštím článku.

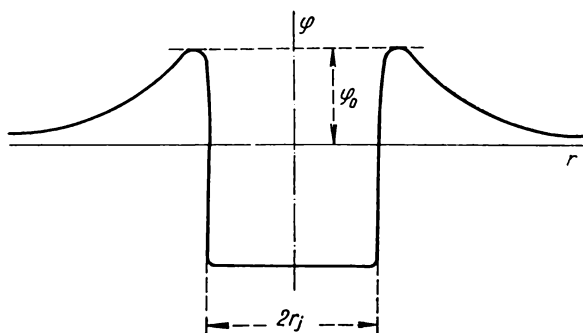
Poloměr jádra r_j vyžaduje především vhodnou definici, která musí být formulována tak, abychom mohli jeho velikost odvodit z měřitelných veličin. Rozptylové pokusy

*) Číslo A souhlasí s relativní atomovou hmotností nuklidu zaokrouhlenou na celé číslo, a proto se nazývá též *hmotnostní číslo*.

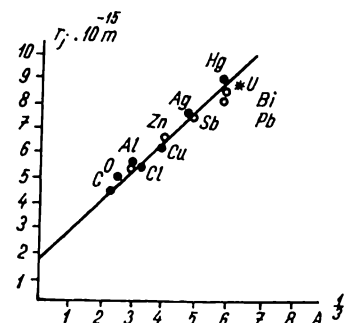
s částicemi α ukázaly, že při malých energiích těchto částic (asi do 7 MeV) lze jejich odchylky od původního směru vysvětlit elektrostatickým odpuzováním podle Coulombova zákona. Ale částice s větší energií, které mohou proniknout blíže k jádru, jeví tzv. *anomální rozptyl*, který lze dobře vyložit předpokladem, že v těsné blízkosti jádra se přes Coulombovu sílu překládá přitažlivá síla, která klesá se vzdáleností od jádra mnohem rychleji než elektrostatická síla. Tato síla „krátkého dosahu“ se projevuje zvláště výrazně při rozptylu protonů na protonech a je to typická jaderná síla (silná interakce). Výsledný potenciál v okolí jádra s nábojem Ze má zhruba průběh naznačený na obr. (8.2) 2, kde je znázorněna tzv. *potenciálová jáma*. Poloviční šířku této jámy, která určuje „kritickou vzdálenost“ neboli dosah jaderné síly, definujeme jako poloměr jádra r_j . V této vzdálenosti totiž prakticky vymizí záporný potenciál přitažlivé jaderné síly a zbývá jen Coulombův potenciál, který asymptoticky klesá k nule. Výška potenciálové hráze je tedy zřejmě rovna elektrostatickému potenciálu ve vzdálenosti r_j

$$8.2 (2) \quad \varphi_0 = \frac{Ze}{r_j}.$$

Kromě poloměru jádra zavádíme veličinu zvanou účinný průřez (viz čl. 8.3.2), který má pro rychlé neutrony velikost rovnou πr^2 . Velikost této plošky se zjistí z úbytku intenzity



Obr. (8.2) 2. Potenciálová jáma atomového jádra



Obr. (8.2) 3. Závislost poloměru jádra na nukleonovém čísle

neutronového záření při průchodu látkou obsahující vyšetřovaná jádra. Tak bylo zjištěno, že poloměr jádra s nukleonovým číslem A se dá vyjádřit empirickým vzorcem

$$8.2 (3) \quad r_j = R \sqrt[3]{A},$$

kde konstanta

$$8.2 (4) \quad R \approx 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1,3 \text{ fm}$$

má význam dosahu jaderných sil. Přesnější vyjádření závislosti poloměru jádra na nukleonovém čísle dává lineární funkce 3. odmocniny A

$$r_j = (1,7 + 1,22 A^{1/3}) \text{ fm},$$

jejíž průběh vidíme na obr. (8.2) 3, kde hodnoty r_j pro jednotlivé prvky jsou vyznačeny kroužky. Poloměr jádra uranu vyznačený hvězdičkou byl vypočten z teoretického vztahu, kterým souvisí poloměr radioaktivních jader s přeměnovou konstantou λ .

Jaderný spin byl zaveden Paulim (r. 1924) z podobných důvodů jako spin oběžných elektronů v teorii elektronového obalu. Tak jako elektronovým spinem byla vysvětlena

jemná struktura spektrálních čar, podařilo se jaderným spinem vyložit tzv. *velmi jemnou* (hyperjemnou) strukturu, která se projevuje dvojitostí čar, kterou je možno zjistit speciálními spektrografi s mimořádně velkou rozlišovací schopností. Tak např. každá ze dvou čar D_1 , D_2 známého sodíkového dubletu s rozdílem vlnových délek asi 6 Å se v takových přístrojích jeví jako dvojitá čára, při čemž složky čáry D_1 jsou od sebe vzdáleny o 0,023 Å a složky čáry D_2 o 0,021 Å.

Jak jsme uvedli v čl. 7.4.4, řídí se částice s nulovým nebo celočíselným spinem statistikou Boseovou, kdežto částice s lichéým počtem polovičních spinů $\hbar/2$ podléhají zákonům statistiky Fermiho. Protože pak z rozložení intenzity v pásovéch spektrech molekul je možno zjistit, jakou statistikou se řídí jádra atomů tvořících molekulu, dává nám rozbor pásového spektru cenné informace o spinu atomových jader. Výsledky pozorování plně potvrzují pravidla, která plynou pro spiny podle tab. (8.1) I z představy, že všechna jádra jsou složena jen z protonů a neutronů. Protože oba nukleony mají spin $\hbar/2$, je jasno, že jádra složená ze sudého počtu nukleonů (A sudé) mají spin celistvý, kdežto ostatní jádra (A liché) spin necelý. Platí další pravidlo, že tzv. sudosudá jádra (A sudé, Z sudé) mají spin nulový.

Připomeňme, že experimentálně zjištěné hodnoty jaderných spinů plně potvrzují, že jádra jsou složena z protonů a neutronů, a nikoli z protonů a elektronů, jak se původně soudilo. Tento nesprávný názor byl zavržen právě na základě poznatku, že jádro dusíku ^{14}N je boson, což bylo v rozporu s tím, že je složeno ze 14 protonů a 7 elektronů, tedy z lichého počtu fermionů. Tato skutečnost byla právě Ivaněnkovi podnětem k myšlence o složení jader z nukleonů.

Magnetický moment jádra souvisí s jeho spinem (spinovou točivostí čili „vlastním mechanickým momentem“) obecně platným vztahem 8.1 (1) a vyjadřuje se v jednotkách μ_N definovaných výrazem 8.1 (2), známým jako *jaderný magneton*.

Měření jaderných magnetických momentů má značný význam teoretický a praktický. V posledních třiceti letech byly vypracovány důmyslné metody, z nichž popíšeme *Rabiovu metodu magnetické jaderné rezonance*.

Jak jsme vyložili v čl. 5.8.3, koná částice s magnetickým momentem m v magnetickém poli s indukcí B kolmou k m Larmorovu precesi s frekvencí

$$8.2 (5) \quad \nu = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{M}{2\pi\hbar} = \frac{m}{2\pi\hbar} B.$$

Poměr spinového magnetického momentu μ_s k spinové točivosti má pro elektron hodnotu 7.2 (49), a proto položíme pro jádro s hmotností M_I

$$8.2 (6) \quad \frac{\mu_I}{b_I} = g \frac{e}{2M_I},$$

kde číslo g nazýváme *gyromagnetickým poměrem* dotyčného jádra. Dosazením do 8.2 (5) dostaneme vzorec

$$8.2 (7) \quad \nu = g \frac{e}{4\pi M_I} B,$$

z něhož můžeme vypočítat g , změříme-li frekvenci ν Larmorovy precese v poli známé indukce B . Pak již snadno určíme ze vztahu 8.2 (6) magnetický moment jádra, známe-li jeho spin b_I .

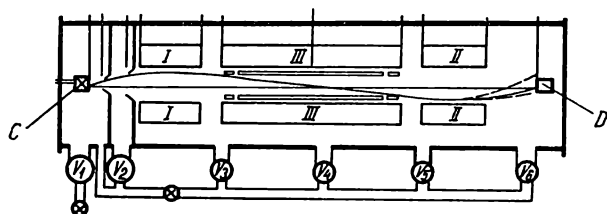
Rabi a Ramsey (r. 1939) vypracovali experimentální metodu měření frekvence ν , k níž použili zařízení, jehož schéma podává obr. (8.2) 4. Divergentní svazek neutrálních molekul v nevzbuzeném stavu, tedy s nulovým magnetickým momentem elektronového obalu, vycházející ze zdroje C , vstupuje do magnetického pole kolmého ke směru molekulového svazku. Pole je silně nehomogenní (následkem vhodně upravených pólových nástavců magnetu I). Podle vzorce 5.6 (46') podléhá v takovém poli částice s magnetickým momentem m síle

$$F_I = m_z \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right)_I,$$

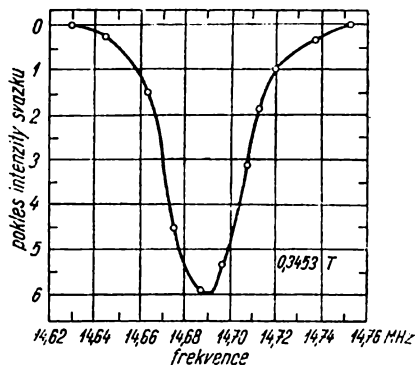
působící ve směru rostoucího pole, který má rovněž směr vektoru **B**. Při tom značí m_z složku magnetického momentu částice ve směru gradientu pole rovnoběžného s osou *Z*. Proto opisují molekuly svazku mírně zakřivené dráhy a při vhodném uspořádání projdou štěrbinou, která je propustí do podobného magnetického pole vzbuzeného magnetem *II*. Toto druhé pole se liší od prvního jen tím, že jeho gradient má opačný směr než gradient pole magnetu *I*. Proto síla

$$F_{II} = -m_z f \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right)_{II}$$

kompenzuje odchylky svazku, takže molekuly vstupují do detektoru *D* ve stejném počtu, jako kdyby poli *I* a *II* nebylo. Vložíme-li nyní mezi oba magnety *I* a *II* další magnet *III*, který vzbudí velmi silné homogenní a stejnosměrné pole rovnoběžné s poli *I* a *II*, konají v něm molekuly Larmorovu precesi s frekvencí ν . Při tomto precesním pohybu se nemění sklon vektoru magnetického momentu (osy rotace setrvačníku) vzhledem k poli *III*, a proto pole *III* nemá vliv na složku m_z . Působí-li však současně s polem *III* ještě střídavé magnetické pole kolmé k poli *III*, vzniká dvojice, která se snaží změnit úhel magnetického momentu s polem *I*. Je bez bližšího odůvodňování pochopitelné, že účinek této dvojice bude největší, když frekvence f pole bude stejná jako frekvence ν Larmorovy precese. Pak bude také největší rozdíl mezi úchylkami způsobenými



Obr. (8.2) 4. Schéma zařízení pro Rabiovu metodu jaderné rezonance, které pracuje ve vakuu udržovaném vývěvami V_1 až V_6



Obr. (8.2) 5. Magnetickou rezonanční křivku svazku molekul KOH

v poli *I* a v poli *II*, v němž budou složky m_z pozmeněny. Tím se poruší souměrnost molekulového svazku a počet molekul vstupujících do detektoru se zmenší. Toto zmenšení bude nejzřetelnější, bude-li střídavé pole v rezonanci s Larmorovou precesí ($f = \nu$).

Měření se provádí tak, že se mění buď frekvence f , nebo indukce homogenního pole *III* a zjišťuje se minimum intenzity svazku. Dosadíme-li pak do 8.2 (7) za ν příslušnou frekvenci f , můžeme vypočítat g a z 8.2 (6) i magnetický moment. Pro běžně užívaná pole řádu 1 T jsou Larmorovy frekvence řádu 10^7 Hz, a proto se Rabiova metoda nazývá také *radiofrekvenční spektroskopie*.

Na obr. (8.2) 5 vidíme rezonanční křivku svazku molekul KOH v poli 0,345 3 T, z níž je možno stanovit gyromagnetický poměr a magnetický moment protonu. Dnešní jeho hodnota činí

$$8.2 (8) \quad \mu_p = 2,79 \mu_i,$$

jak jsme uvedli již na konci článku 8.1.4.

8.2.2. Vazební energie

Přesná měření na hmotnostních spektrografech ukázala, že celková klidová hmotnost atomových jader není rovna součtu hmotností všech protonů a nukleonů v nich obsažených. Je vždycky menší než tento součet o hodnotu, která se nazývá *schodek hmotnosti* čili *hmotnostní schodek* (hmotnostní defekt) jádra. Označíme-li m_p a m_n klidové hmotnosti protonu a neutronu, bude schodek hmotnosti jádra s protonovým a nukleonovým číslem *Z* a *A*

$$B_j = Zm_p + (A - Z) m_n - m_j,$$

kde m_j je jeho hmotnost. Přičteme-li k prvnímu členu vpravo hmotnost Zm_e a odečteme-li ji od posledního členu, dostaneme

$$B_j = Z(m_p + m_e) + (A - Z) m_n - (m_j + Zm_e).$$

Označíme-li pak

$$m_H = m_p + m_e, \quad m_{at} = m_j + Zm_e,$$

můžeme psát

$$B_j = Zm_H + (A - Z) m_n - m_{at},$$

kde m_H je hmotnost neutrálního atomu vodíku a m_{at} hmotnost neutrálního atomu příslušného nuklidu. Podle 1.3 (10) bude tedy

$$8.2 (9) \quad B_j = [Z\alpha_H + (A - Z) \alpha_n - \alpha] u,$$

značí-li α_H , α_n , α relativní atomové hmotnosti vodíku, neutronu a neutrálního atomu s čísly Z a A . Dosadíme-li sem podle 1.3 (11, 13), dostaneme konečně vzorec

$$8.2 (10) \quad B_j = 1,007\,825Z + (A - Z) 1,008\,665 - \alpha] u,$$

z něhož snadno vypočteme schodek hmotnosti pro libovolný nuklid, užijeme-li tab. (8.2) I relativních atomových hmotností α . Tak se přesvědčíme, že hodnoty B_j jsou pro všechny známé nuklidy kladné, že tedy v bilanci hmotností se u všech jader projevuje jistý schodek několika tisícín až setin atomové jednotky hmotnosti.

Tabulka (8.2) I

Relativní atomové hmotnosti α a vazební energie W_j izotopů osmi nejnižších prvků

Prvek	Z	A	α	W_1 (MeV)	Prvek	Z	A	α	W_1 (MeV)
n	0	1	1,008 665 4	0,000	C	6	10	10,016 8	60,3
H	1	1	1,007 825 2	0,000			11	11,011 433	73,440
D		2	2,014 102 2	2,224			12	12,000 000 0	92,160
T		3	3,016 049 4	8,482			13	13,003 354	97,107
							14	14,003 241 9	105,283
He	2	3	3,016 029 9	7,718	N	7	15	15,010 600	106,501
		4	4,002 603 6	28,296			12	12,018 9	73,8
		5	5,012 30	27,34			13	13,005 39	94,104
		6	6,018 90	29,26			14	14,003 074	104,657
Li	3	5	5,012 54	26,33			15	15,000 108	115,491
		6	6,015 126	31,991	16	16,006 09	117,99		
		7	7,016 005	39,244	O	8	14	14,008 60	98,73
		8	8,022 488	41,276			15	15,003 072	111,948
Be	4	7	7,016 929	37,600			16	15,994 915	127,617
		8	8,005 308	56,496			17	16,999 133	131,759
		9	9,012 186	58,161			18	17,999 159 8	139,806
B	5	8	8,024 612	37,733	19	19,003 577	143,76		
		9	9,013 335	56,309					
		10	10,012 939	64,749					
		11	11,009 305 1	76,205					

Pro deuteron ($Z = 1, A = 2$) vychází

$$8.2 (11) \quad B_D = [1,007\,825 + 1,008\,665 - 2,014\,102] \text{ u} = 0,002\,388 \text{ u}.$$

Podobně bychom dostali pro helion ($Z = 2, A = 4$)

$$8.2 (12) \quad B_{He} = B_\alpha = [2(1,007\,825 + 1,008\,665) - 4,002\,604] \text{ u} = 0,030\,376 \text{ u}.$$

Existence schodku hmotnosti je ve zřejmém rozporu s klasickou fyzikou, ale zároveň nutným důsledkem principu energie a Einsteinova vztahu mezi hmotností a energií. Při vzniku jádra z volných nukleonů působí mezi nimi přitažlivé jaderné síly a při jejich vzájemném přibližování konají kladnou práci, která se projeví úbytkem celkové energie soustavy nukleonů. Chceme-li tedy už vytvořené jádro opět rozložit na volné nukleony, musíme patrně stejně velkou energii jádru dodat. Velikost W_j této energie, potřebné k rozložení jádra, tj. k uvolnění nukleonů vázaných v jádře, se nazývá *vazební energie jádra* a je důležitou charakteristikou jádra. Vidíme, že celková energie hotového jádra je právě o vazební energii menší než celková energie všech jeho nukleonů po uvolnění z jádra (rozptýlených do vzdáleností velkých proti jeho poloměru). Proto je také celková klidová hmotnost jádra menší o hodnotu

$$B_j = \frac{W_j}{c^2}$$

plynoucí z Einsteinovy rovnice. To je právě experimentálně zjistitelný schodek hmotnosti jádra, z něhož můžeme přímo vypočítat vazební energii v joulech

8.2 (13)

$$W_j = c^2 B_j,$$

vyjádříme-li B_j v kilogramech. Je však zvykem vyjadřovat hmotnostní schodky v atomových jednotkách hmotnosti a vazební energii v megaelektronvoltech. Ze známých hodnot uvedených v tab. D I dostaneme důležitý vztah

$$8.2 (14) \quad W_j = 8,987\,6 \cdot 10^{16} \cdot 1,660\,4 \cdot 10^{-27} B_j \text{ Ju}^{-1} = 931 \text{ MeV u}^{-1},$$

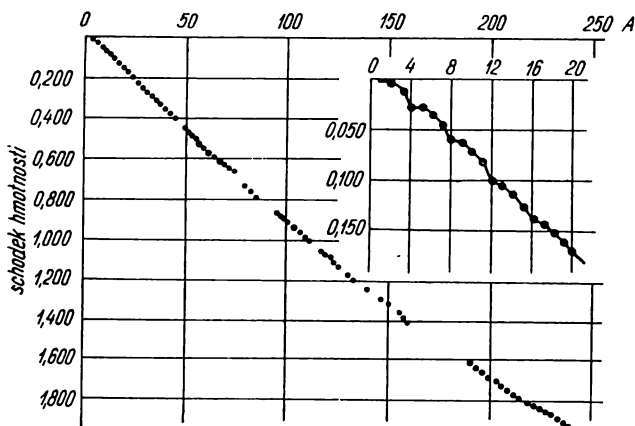
který dává vazební energie jader na základě jejich schodků hmotností, které poskytuje s dostatečnou přesností hmotnostní spektrografie. Tak dostáváme pro deuteron a helion vazební energie

$$8.2 (15) \quad W_D = 2,22 \text{ MeV}, \\ W_\alpha = 28,3 \text{ MeV}.$$

Jak roste vazební energie jádra s počtem nukleonů, vidíme z obr. (8.2) 6, který graficky vyjadřuje průběh schodku hmotnosti. Průběh je jen přibližně přímkový a jeho nelineárnost se projeví výrazněji na průběhu podílu

$$8.2 (16) \quad \overline{W_j} = \frac{W_j}{A},$$

který má význam vazební energie přepočtené na jeden nukleon a který se nazývá *průměrná va-*

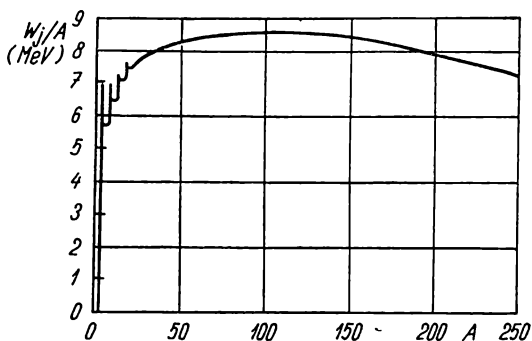


Obr. (8.2) 6. Závislost schodku hmotnosti na počtu nukleonů

zební energie připadající na každý nukleon v jádře. Je to zřejmé z obr. (8.2) 7, na němž pozorujeme ploché maximum průměrné vazebné energie (8,6 MeV) pro středně těžká jádra ($A \approx 100$). Oscilační průběh v oboru malých nukleonových čísel odpovídá analogickému průběhu hmotnostního schodku v detailní části obr. (8.2) 6.

Se zřetelem k tomu, že vazebná energie je mírou stability (stálosti) jádra, můžeme v tomto průběhu spatřovat jistou obdobu s průběhem stability elektronového obalu atomu, která jeví maxima pro některé počty elektronů, odpovídající plně obsazeným slupkám.

Pro $A > 30$ se průměrná energie $\overline{W}_j$ mnoho nemění a tato přibližná stálost vazebné energie připadající na každý nukleon je v soulase s obr. (8.2) 6, který ukazuje, že celková vazebná energie W_j roste přibližně lineárně s počtem nukleonů v jádře. Tato skutečnost vede k důležitému poznatku, že jaderné síly, které k sobě poutají nukleony, jsou *síly krátkého dosahu*, které se prakticky uplatňují jen mezi dvěma sousedními nukleony, kdežto mezi dvěma vzdálenějšími částicemi jsou neznatelné. Tím se vysvětluje, proč energie roste s přibývajícím nukleony úměrně počtu dvojic blízkých částic a proč průměrná energie $\overline{W}_j$ roste s rostoucím A jen u nejjednoduchých jader, zatímco pro těžká jádra je už takřka na A nezávislá.



Obr. (8.2) 7. Závislost průměrné vazebné energie na počtu nukleonů

Popsaná závislost vazebné energie na celkovém počtu nukleonů poskytuje cenné informace o struktuře jádra a stejně poučné je studium její závislosti na počtu protonů Z a na počtu neutronů $N = A - Z$. Pro větší názornost budeme nadále číslo N nazývat *neutronovým číslem*. Nuklidy, jejichž jádra mají stejné Z a různá N , jsou izotopy téhož prvku, kdežto nuklidy se stejným nukleonovým číslem A a různými čísly Z se nazývají *izobary* (stejně těžké). Jádra mají velmi různé vazebné energie, a tedy i různé velkou stabilitu. Dnes známé 103 chemicky různé prvky se vyskytují asi ve 300 různých stabilních (neradioaktivních) izotopech a kromě toho bylo v přírodě nalezeno nebo uměle vytvořeno více než 700 izotopů radioaktivních. Existuje tedy přes tisíc různých nuklidů, jejichž složení se však řídí obecně platným pravidlem, které lze vyjádřit nerovností

$$8.2 \quad (17) \quad Z \leq N < \frac{5}{3} Z.$$

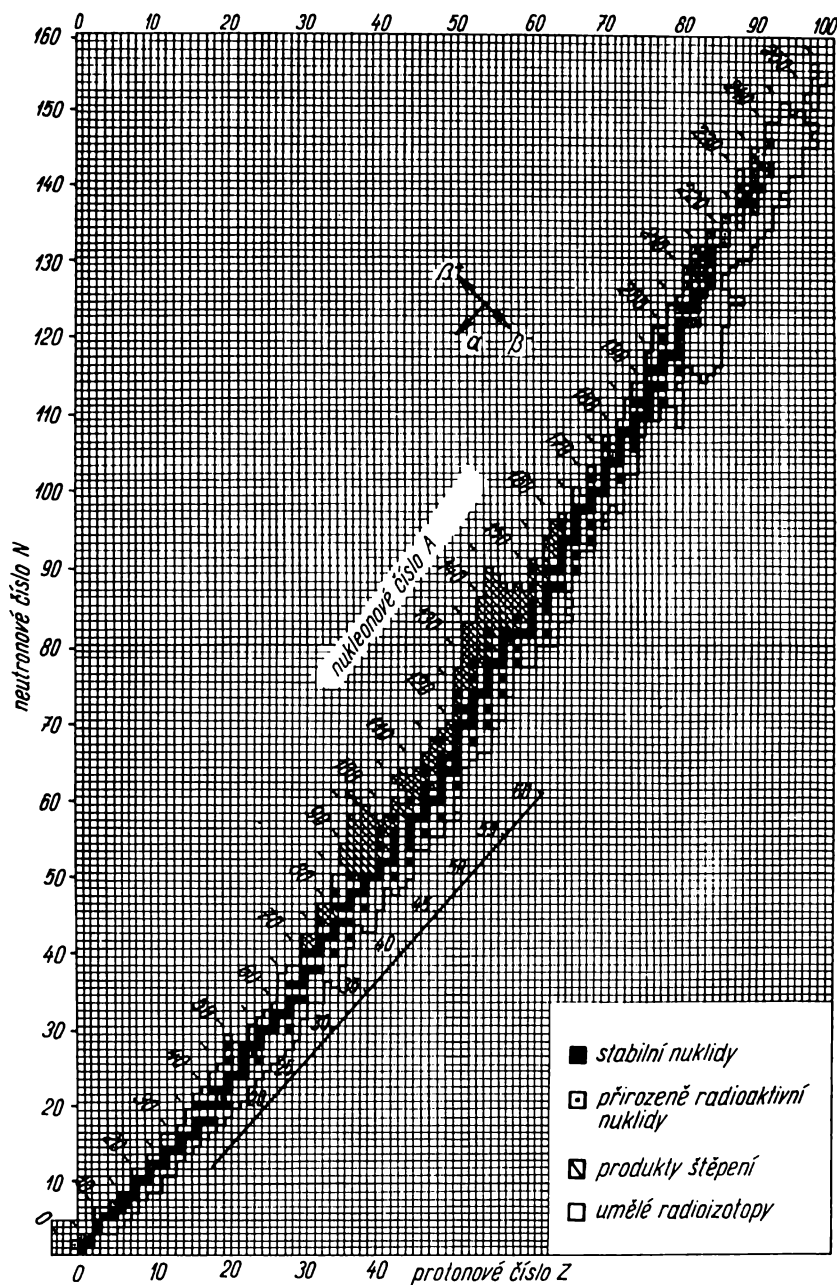
Blíže informace o složení známých nuklidů z protonů a neutronů podává grafické schéma na obr. (8.2) 8, kde jsou plnými čtverečky vyznačeny stabilní a ostatními čtverečky radioaktivní nuklidy. Izotopy téhož prvku leží na téže svislé přímce, kdežto izobary s nukleonovým číslem A na přímkách

$$Z + N = A = \text{const}$$

kolmých k ose souměrnosti $N = Z$. Podél této osy jsou rozloženy stabilní izotopy lehkých prvků (až po Ca) provázené radioizotopy z obou stran. Střední a těžké nuklidy tvoří mírně prohnutý pás, který se postupně vzdaluje od osy $N = Z$. To se názorně vysvětluje tím, že těžší jádra musí mít více neutronů než protonů, neboť neutrony musí svými přitažlivými silami kompenzovat Coulombovy odpudivé síly mezi protony, jejichž potenciál klesá

nepřímo úměrně s první mocninou vzdálenosti. Proto výsledný potenciál ve středu koule stejnoměrně vyplněné nábojem vzrůstá s rostoucím poloměrem koule a jeho kompenzace silami krátkého dosahu vyžaduje větší převahu neutronů v jádře.

Při každém nukleonovém čísle A mají jádra různých izobarů různou vazební energii, která dosahuje maxima pro jistou hodnotu rozdílu $N - Z > 0$. Ukazuje to názorně



Obr. (8.2) 8. Protono-neutronová struktura stabilních a radioaktivních jader

obr. (8.2) 9, kde je vynesena závislost vazební energie izobarů příslušných $A = 91$ na rozdílu $N - Z$. Největší energie, a tedy i největší stabilita přísluší jádru stálého izotopu zirkonia $^{91}_{40}\text{Zr}$.

Konečně z teoretického hlediska je velmi závažná závislost vazební energie na samotném protonovém a na samotném neutronovém čísle. Ukázalo se totiž, že jádra mají pro zcela určité hodnoty těchto čísel obzvláště velkou stabilitu. Tato čísla, která se v literatuře nazývají *magická čísla*, jsou

$$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82,$$

$$8.2 (18) \quad N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.$$

8.2.3. Modely atomových jader

Teorie atomového jádra je druhou etapou atomové teorie, podstatně obtížnější než etapa první, v níž byly úspěšně zvládnuty vlastnosti elektronového obalu na základě principů kvantové mechaniky. V předešlém výkladu jsme měli příležitost poukázat na obdobu některých vlastností jádra a elektronového obalu, a proto je pochopitelný optimismus, s nímž fyzikové přistupují k řešení problémů teorie jádra metodami klasické i kvantové fyziky.

Ústředním a zároveň nejobtížnějším úkolem je podrobné studium konkrétních vlastností jaderných sil. Tento úkol byl zatím řešen mezonovou teorií pouze kvalitativně, jak to dovoluje dnešní stav kvantové teorie polí. Formulace zákona interakce mezi nukleony bude patrně vyžadovat prohloubení teorie „elementárních“ částic, která se jistě rozvine na základě nových experimentálních poznatků o jejich struktuře, o nichž jsme se zmínili v čl. 8.1.4 a 8.1.5.

V přítomné době je teorie jádra vedena snahou vytvářet zjednodušené představy o struktuře jádra a různé jeho modely, které zpravidla jsou schopny vystihnout jen některé vlastnosti. Popíšeme krátce jen nejjednodušší modely a posoudíme jejich úspěšnost.

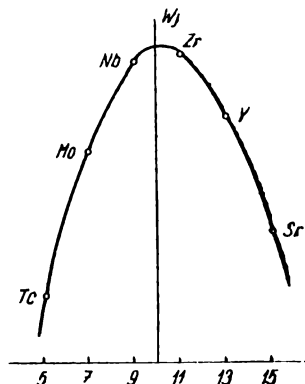
Kapkový model se zakládá na představě, že jádro se podobá kapalině složené z molekul, které na sebe působí kohezními silami. Nukleonová kapalina je vlastně jakýsi roztok nebo směs protonové a neutronové kapaliny, které na sebe působí silami krátkého dosahu, takže potenciální energie kapaliny je úměrná počtu molekul. Tyto kohezní síly jsou příčinou povrchového napětí, které dává jádru kulový tvar (s nejmenším povrchem). Všechna jádra jsou takové kapky různé velikosti, ale „nukleární kapalina“ má ve všech jádrech zhruba stejnou hustotu, protože podle 8.2 (3) je počet A nukleonů v různých jádrech úměrný třetí mocnině poloměru r_1 , a tedy úměrný objemu jádra. Kohezní energie je tedy úměrná číslu A , a protože jde o energii přitažlivých sil, můžeme ji vyjádřit součinem

$$8.2 (19) \quad W_K = -aA,$$

kde a je kladná konstanta. Kromě této objemové energie má jádro také povrchovou energii rozloženou na povrchu kapky s hustotou rovnou povrchovému napětí. Tato energie je úměrná povrchu jádra, a roste tedy s druhou mocninou poloměru jádra. Vyjádříme ji tedy ve tvaru

$$8.2 (20) \quad W_P = bA^{2/3}, \quad b > 0.$$

Nukleární kapalina obsahující Z kladně nabitých protonů má však ještě energii elektrostatickou, která má původ v odpuzivých silách mezi protony. Protože Coulombův potenciál klesá dosti pomalu se vzdáleností (nepřímo úměrně), uplatňuje se elektrostatická energie



Obr. (8.2) 9. Závislost vazební energie izobarů na převaze neutronů

mezi všemi protony Z a je úměrná počtu protonových dvojic v jádře. Proto můžeme položit tuto energii

$$8.2 (21) \quad W_C = \frac{\text{const}}{r} \left(\frac{Z}{2} \right) = c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \approx c \frac{Z^2}{A^{1/3}}, \quad c > 0,$$

je-li $Z \gg 1$.

Sečtením všech tří uvedených energií bychom již dostali hledanou vazební energii jádra. Je však třeba, aby se teorie vyrovnala s experimentálním poznatkem, že v soulase s 8.2 (17) jsou nejstabilnější jádra, pro která je $Z = A/2$. Aby vazební energie měla pro taková jádra maximum, připojíme k hořejším výrazům ještě korekční člen

$$\frac{d}{A} (A - 2Z)^2,$$

kde d je kladná konstanta. Podle 8.2 (19, 20, 21) dostaneme tak pro vazební energii vzorec

$$8.2 (22) \quad W_J = -aA + bA^{2/3} + c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \frac{d}{A} (A - 2Z)^2,$$

který odvodili Bethe a Weizsäcker. Tento poloempirický vzorec obsahuje čtyři konstanty, jejichž hodnoty byly stanoveny na základě experimentálních dat takto:

$$8.2 (23) \quad a = 14,7 \text{ MeV}, \quad b = 15,4 \text{ MeV}, \quad c = 0,6 \text{ MeV}, \quad d = 20,5 \text{ MeV}.$$

Ačkoli předpoklady, z nichž se při odvození vzorce 8.2 (22) vychází, nejsou zřejmě nepochybné, vystihuje skutečnost vcelku dosti dobře. Na základě kapkového modelu není zásadně možno vysvětlit existenci magických čísel, protože nebere zřetel ke kvantovým vlastnostem nukleonů. Proto nemůže vyložit ani další důležité jaderné veličiny, jako je spin a magnetický moment.

Slupkový model se liší od kapkového modelu v tom, že předpokládá existenci různých kvantových stavů jednotlivých nukleonů, jak to odpovídá existenci magických čísel. V klasické nukleární kapalině není možno mluvit o individuálních stavech nukleonů, protože neustálými stážkami si nukleony předávají energii. Proto je fyzikálně definován jen celkový stav jádra. Avšak nukleony s poločíselným spinem se řídí Fermiovou statistikou a pro takové částice platí vylučovací princip Pauliho podobně jako pro elektrony v kovu nebo v elektronovém obalu atomu. Protože pak v nevzbuzeném stavu jádra jsou obsazeny právě nejnižší energetické hladiny (jedním nukleonem), nemůže nukleon při srážce ztratit energii. Lze tedy připustit pouze pružné srážky, což znamená jen výměnu nukleonů, která nemá vliv na celkové obsazení jednotlivých energetických hladin. Slupkový model schematizuje jádro jako soustavu nukleonů, z nichž každý se pohybuje ve výsledném průměrném poli ostatních nukleonů nezávisle na individuálních pohybech ostatních nukleonů. V tomto smyslu jsou jednotlivé nukleony na sobě nezávislé. Kdybychom znali střední potenciální energii W_J nukleonů v poli jaderných sil, mohli bychom napsat Schrödingerovu rovnici, která by např. pro neutrony měla tvar

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m_n}{\hbar^2} (W - W_J) \psi = 0.$$

Pro protony by platila podobná rovnice, kterou bychom dostali, kdybychom k potenciální energii jaderných sil připojili ještě elektrostatickou energii v poli ostatních protonů. Ukázalo se však, že integrací takto sestavených Schrödingerových rovnic nevycházejí správné energetické hladiny kvantových stavů nukleonů a že je třeba vzít v úvahu též vzájemnou energii spinového a dráhového magnetického momentu nukleonů. Energie této

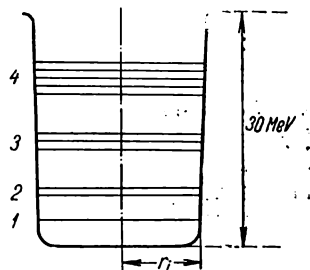
„spin-orbitální vazby“ závisí ovšem na tom, jsou-li oba jmenované vektory souhlasně nebo nesouhlasně rovnoběžné. Takto získané rovnice řešil numericky Szamosi za předpokladu, že jaderná energie W_J je dána Yukawovým potenciálem 7.3 (15). Podařilo se mu skutečně odvodit obsazení jednotlivých energetických hladin a slupek v plném souhlase s experimentálně zjištěnými magickými čísly 8.2 (18).

Na obr. (8.2) 10 je schematicky vyznačen tvar potenciálové jámy jádra o poloměru r_J a energetické hladiny nukleonů, které jsou seskupeny do čtyř nejnižších slupek, které jsou podle Szamosiho obsazeny postupně 1, 2, 3 a 5 částicemi.

To je velmi závažný úspěch slupkového modelu, který tak teoreticky vysvětluje např.: značné rozdíly v poločasech izotopů, které se svým složením jen nepatrně liší. Tak např.: polonium $^{210}_{84}\text{Po}$ se 126 neutrony má poločas přeměny α rovný 138 dnům, kdežto $^{212}_{84}\text{Po}$ se 128 neutrony má poločas $3 \cdot 10^{-7}$ s. Podobně je izotop $^{209}_{83}\text{Bi}$ ($N = 126$) stálý, zatímco $^{211}_{83}\text{Bi}$ ($N = 128$) má poločas asi 2 min. Z hlediska slupkového modelu jsou tyto rozdíly ve stabilitě uvedených jader samozřejmé, protože 126 neutronů stačí k plnému obsazení prvních sedmi slupek. Proto jádro se 126 neutrony musí být podstatně stabilnější než jádro obsahující o dva neutrony více.

Závěrem poznamenáváme, že úspěchy teorie založené na představě navzájem nezávislých nukleonů podle slupkového modelu jsou do jisté míry překvapující, poněvadž jaderný potenciál závisí i na pohybu jednotlivých nukleonů. Je zřejmé, že kapkový i slupkový model jsou vlastně dva krajní idealizované modely, mezi nimiž leží skutečnost. Proto byly koncipovány další dokonalejší modely, které lépe vystihují situaci v jádře. Tak např. Bohr a Mottelson navrhli tzv. *zobecněný model*, založený na představě, že jádro se skládá z vnitřní části, tvořené nukleony v plně obsazených slupkách, a z vnějších nukleonů, které se pohybují v poli vnitřní části, nazvané *nukleor*. Následkem interakce vnějších nukleonů s nukleorem se nukleor deformuje, takže jádro nemá již přesně kulový tvar. Tento zobecněný model odstraňuje některé nedostatky modelu slupkového.

Další modely jádra (např. Fermiův, Bruecknerův a optický model) zde nemůžeme probírat.



Obr. (8.2) 10. Energetické hladiny prvních čtyř slupek atomového jádra

8.3. Jaderné záření

8.3.1. Přirozená radioaktivita

R. 1896 objevil Becquerel, že některé prvky vydávají záření, které vzniká v jádrech jejich atomů a které se nazývá *radioaktivní záření*. Jak jsme uvedli již v čl. 1.3.2, vydávají přirozené radioaktivní prvky tři druhy záření: α , β , γ a při všech těchto přeměnách ubývá zářícího prvku s časem podle exponenciálního zákona 1.3 (15). Tento zákon vyplývá z jednoduchého předpokladu, že radioaktivní přeměna prvku je statistický děj, při němž nestálost jader je pro každý zářič konstantní, a tedy pravděpodobnost, že se jádro přemění během zvoleného časového intervalu, je stejná pro všechny stejně velké časové intervaly, bez zřetele k jejich poloze na časové stupnici. Pravděpodobnost přeměny jádra je tedy úměrná velikosti intervalu, a označíme-li λ pravděpodobnost přeměny v jednotkovém intervalu, bude pravděpodobnost $d p$, že se jádro přemění v krátkém časovém intervalu $d t$,

$$8.3 (1) \quad d p = \lambda d t.$$

(8.3)

Je-li tedy n počet atomů radioaktivního prvku v okamžiku t , přemění se v krátké době dt počet dn atomů, který je podle statistického významu pravděpodobnosti dán součinem

$$dn = n dp.$$

O tento počet (malý proti celkovému počtu n atomů v okamžiku t) bude tedy počet atomů v okamžiku $t + dt$ menší než v okamžiku t , takže změna (přírůstek) čísla n za dobu dt bude

$$8.3 (2) \quad dn = -dn = -n dp.$$

Integrací této diferenciální rovnice plyne již zmíněný *exponenciální zákon*

$$8.3 (3)$$

$$n = n_0 e^{-\lambda t},$$

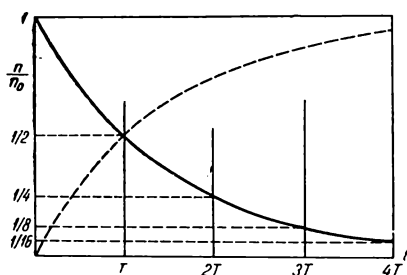
značí-li n_0 počet atomů v okamžiku $t = 0$. Nestálost jader každého radioaktivního prvku (rychlost, jakou se přeměňuje, rozpadá) je charakterizována konstantou λ , která má rozměr s^{-1} a nazývá se *přeměnová* nebo *rozpadová konstanta* prvku. Náznornějším kritériem je však tzv. *poločas* T , tj. doba, během níž se pravděpodobně přemění právě polovina všech atomů. Hodnota T plyne z podmínky

$$\frac{n_0}{2} = n_0 e^{-\lambda T},$$

takže

$$8.3 (4) \quad \lambda T = \ln 2 \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

Exponenciální zákon se potvrzuje bez výjimky pro všechny druhy záření, tedy nejen pro záření α , β , γ vydávané přirozenými radioaktivními prvky, ale i pro záření, které vy-



Obr. (8.3) 1. Časový průběh radioaktivní přeměny

dávají umělé radioizotopy, tedy také pro záření pozitronové, neutronové a protonové. Na obr. (8.3) 1 je znázorněn průběh poměrného množství prvku a je patrné, že během k poločasů se původní množství n_0 atomů postupně zmenšuje podle geometrické řady až na počet $2^{-k}n_0$. Přeměněné atomy ovšem nezanikají; přestanou sice existovat jako atomy „mateřského“ prvku, ale stávají se atomy nového „dceřiného“ prvku, jejichž počet narůstá podle čárkované křivky, pokud tento dceřiný prvek sám není radioaktivní. Pak se během dosti dlouhé doby $t \gg T$ přemění mateřský prvek prakticky úplně v prvek dceřiný.

Je-li ovšem dceřiný prvek rovněž radioaktivní a má-li přeměnovou konstantu λ' , pak je časová změna okamžitého počtu n' jeho atomů vzhledem k 8.3 (1, 2)

$$\frac{dn'}{dt} = \lambda n - \lambda' n',$$

neboť za dobu dt jich vznikne $\lambda n dt$ a současně se jich $\lambda' n' dt$ přemění. Jestliže pak v nějakém okamžiku množství obou prvků splňují podmínku

$$8.3 (5) \quad \lambda n = \lambda' n' \Rightarrow n' : n = \lambda : \lambda' = T' : T,$$

je v tom okamžiku n' stacionární. Nastane-li to v případě, kdy $\lambda \ll \lambda'$, tedy $T \gg T'$, bude během doby Δt , krátké proti T , změna $\Delta n \ll n$ a n velmi přibližně konstantní. Pak zůstane hořejší podmínka 8.3 (5) v platnosti po dlouhou dobu. Říkáme, že bylo dosaženo *dlouhodobé (sekulární) radioaktivní rovnováhy*, při níž množství obou prvků jsou trvale v poměru jejich poločasů.

Přírodní radioaktivní prvky (kromě méně známých izotopů $^{40}_{19}\text{K}$, $^{87}_{37}\text{Rb}$ a $^{152}_{62}\text{Sm}$ s malou aktivitou) tvoří tři radioaktivní řady: *urano-rádiovou, aktiniovou a thoriovou*. Jejich rodokmeny začínající dlouhodobými mateřskými prvky se značným poločasem a končící stálými izotopy olova ($Z = 82$) jsou uvedeny v tab. (8.3) I, II, III. Nad značkou každého prvku je uvedeno jeho nukleonové (hmotnostní) číslo A a pod značkou číslo protonové (atomové) Z . U šipky vyznačující přeměnu prvku je vyznačen druh a poločas přeměny. Na tyto tabulky se budeme příležitostně odvolávat.

Poznámka: V oboru přírodní radioaktivity užíváme dosud obvyklého názvu *prvek*, ačkoli bychom měli podle čl. 1.3.2 používat přesnějšího označení *nuklid*.

8.3.2. Záření alfa a beta

Záření alfa, které vydává podle tab. (8.3) I, II, III většina přírodních radioaktivních prvků, jsou prudce letící heliony (jádra hélia), které se častěji nazývají „částice α “. Mají klidovou hmotnost

$$8.3 (6) \quad m_{\alpha} = 6,656 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

a nesou dva kladné elementární náboje. Jejich spin a magnetický moment je nulový, a proto pro ně platí Boseova statistika. Dosahují rychlostí kolem 2% rychlosti světla a jejich energie leží pro všechny přírodní zářiče α mezi 4 MeV (pro U 238) a 9 MeV (pro ThC'). Bylo experimentálně zjištěno, že tato energie ε_{α} je tím větší, čím rychleji se prvek přeměňuje. Přesněji to vyjadřuje *Geigerovo—Nuttalovo pravidlo* vztahem

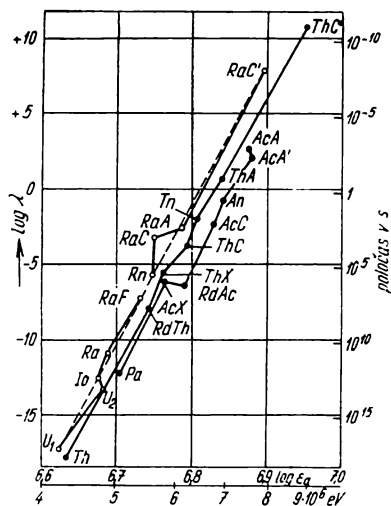
$$8.3 (7) \quad \log \lambda = A + B \log W_{\alpha},$$

kde A a B jsou empirické konstanty. Do jaké míry je toto pravidlo splněno, vidíme z obr. (8.3) 2, který ukazuje, že B má velmi přibližně tutéž hodnotu pro všechny přírodní zářiče α , kdežto A se pro jednotlivé radioaktivní řady poněkud liší.

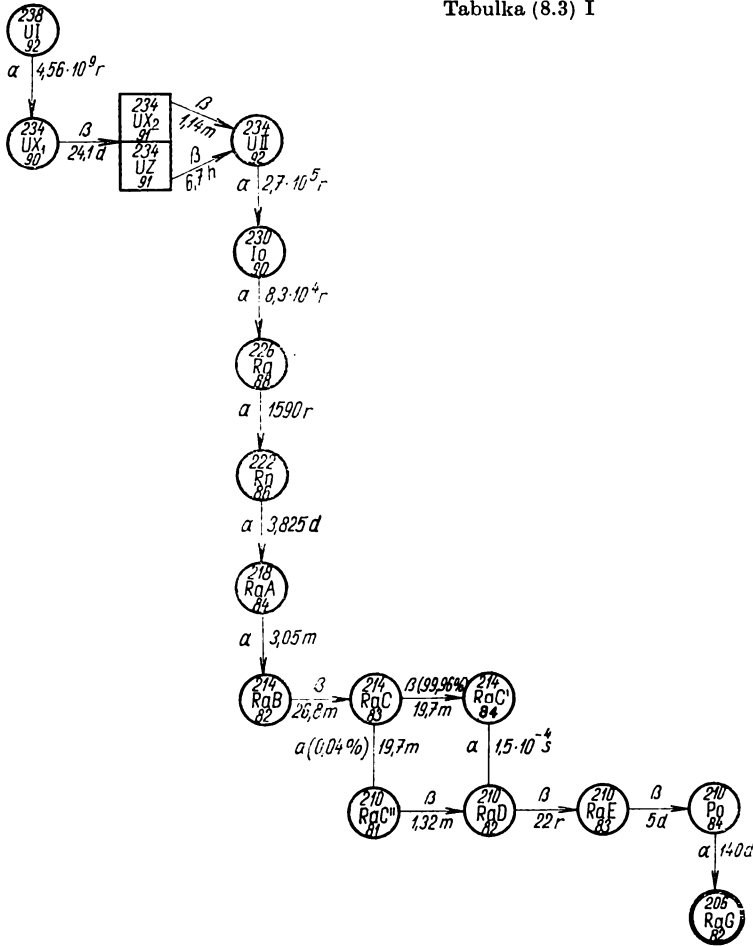
Při průchodu nějakým prostředím zmenšuje se energie částic α hlavně ionizací prostředí (a rozptylem).

Ionizace prostředí, kterou jsme v čl. 5.3.8 popsali pro plynné prostředí, má největší podíl na ztrátách energie záření α . Z teorie i pokusů vyplývá, že při stálé rychlosti nabitě částice je v homogenním prostředí ztráta energie, způsobená ionizací, úměrná dráze částice. Dělíme-li tedy energii $-dW$, kterou částice ztratila na dráze dx , velikostí dráhy, dostaneme *měrnou ztrátu energie*

$$8.3 (8) \quad -\frac{dW}{dx} = f(W) = g(v),$$



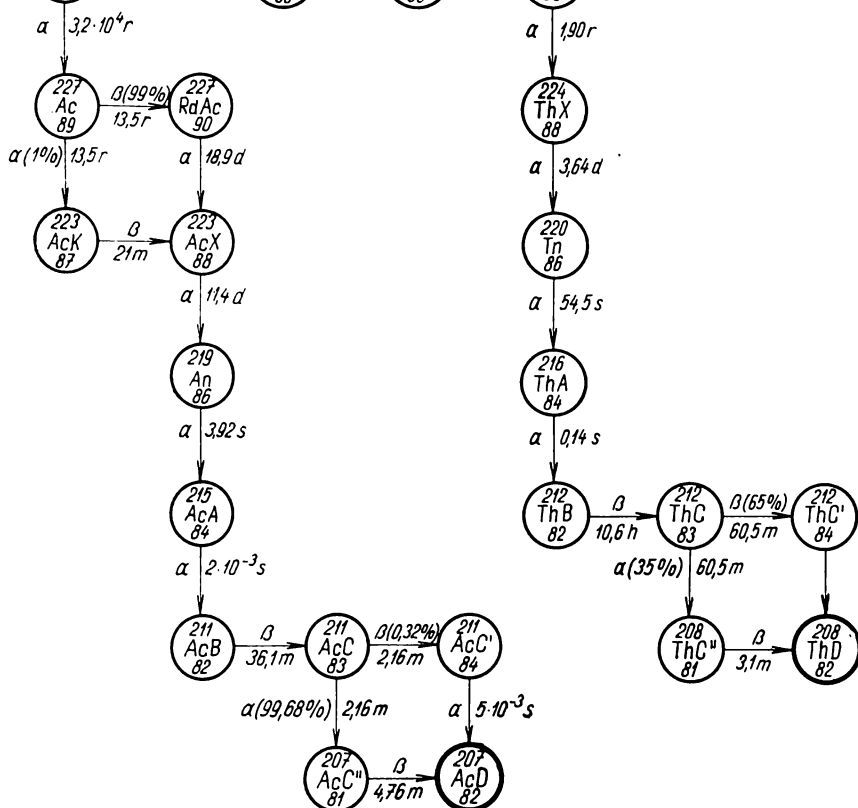
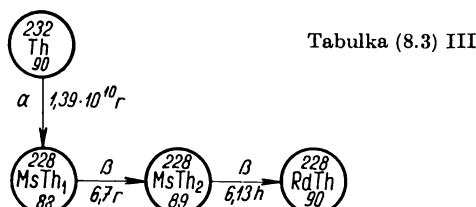
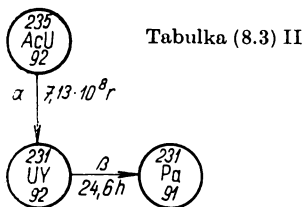
Obr. (8.3) 2. Závislost přeměnové konstanty na energii částic α



která je v daném prostředí jen funkcí okamžité kinetické energie nebo rychlosti částice. Funkci $f(W)$ nebo $g(v)$ je možno odvodit teoreticky, jak učinili nejprve Bohr, Bethe, Möller a nejobecněji Bloch. Protože okamžitá energie i rychlost klesá s rostoucí uraženou dráhou k nule, lze uvedené funkce zjistit nepřímou ze závislosti měrné ztráty energie na uražené dráze. Křivka vyjadřující tuto závislost graficky se nazývá *Braggova křivka*. Její typický průběh vidíme na obr. (8.3) 3. Ionizace roste zrychleně do maxima a pak prudce klesá k nule ve vzdálenosti D , která se nazývá *zbytkový dolet*. Je to délka dráhy, na které ztratí částice veškerou počáteční kinetickou energii W_α :

$$8.3 (9) \quad D = \int dx = \int_{W_\alpha}^0 \frac{dW}{f(W)} = F(W_\alpha).$$

Obrácená závislost W_α na D pro částice α ve vzduchu (za normálního tlaku a teploty 15°C) je znázorněna na obr. (8.3) 4. Z rovnice 8.3 (9) je možno experimentálně určit počáteční energii W_α částice α , změříme-li její dolet v prostředí, pro které známe funkci $F(W_\alpha)$.

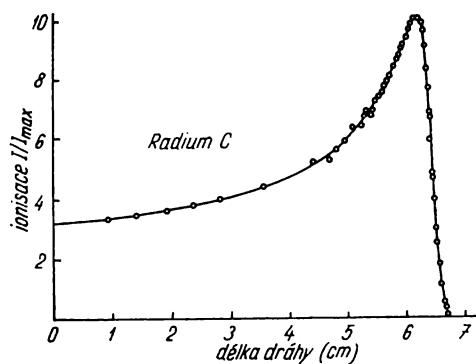


Zbytkový dolet D zjistíme nejsnáze, měříme-li počet částic, které dolétnou do zvolené vzdálenosti od zdroje, zvětšujeme-li ji postupně tak dlouho, až počet částic klesne na nulu. Protože se při měření projevují statistické fluktuace, neklesne počet zjištěných částic na nulu náhle pro některou vzdálenost, ale podle křivky plně vytažené na obr. (8.3) 5, která představuje závislost $\Phi(l)$ počtu zachycených částic na vzdálenosti. Je však jasné, že zbytkovým doletem musíme rozumět vzdálenost, v níž ztratí energii největší počet částic, tedy vzdálenost, které přísluší největší četnost zaznamenaných částic, definovaná obdobně jako četnost chyb nebo molekul (v čl. 4.3.5). Počet částic zachycených (např. fluorescenčním stínítkem nebo počítačem) v některé vzdálenosti znamená totiž počet všech částic, které mají dolet větší, než je vzdálenost, v níž je počítáme, a tedy obdobná kumulativnímu vyřování [srov. jeho průběh na obr. (6.5) 1 s obr. (8.3) 5]. Záporné vzaté derivace funkce $\Phi(l)$ je rovna (kladnému) úbytku částic při zvětšení vzdálenosti detektoru o jednotku délky a tento úbytek dává počet částic, jejichž dolet leží v jednotkovém intervalu zvoleném v místě detektoru. Za nejpravděpodobnější velikost doletu je tedy třeba pokládat vzdá-

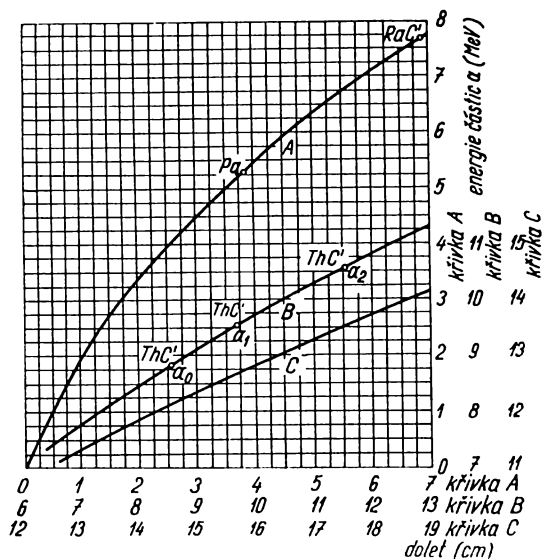
Na závěr připomínáme, že všechny částice α vysílané nějakým radioaktivním prvkem mají stejnou energii W_α , charakteristickou pro onen prvek. Proto má každý zářič α též charakteristický dolet, a Geigerovo—Nuttalovo pravidlo je tedy možno vyjádřit také rovnicí

kde konstanta C souvisí jistým vztahem s konstantou B v rovnici 8.3 (7).

Záření beta přirozených radioaktivních prvků je složeno ze záporných elektronů, a proto je přesněji označujeme β^- , abychom je odlišili od záření beta některých umělých



Obr. (8.3) 3. Braggova křivka pro záření α radia C ve vzduchu



Obr. (8.3) 4. Závislost počáteční energie částic α na zbytkovém doletu ve vzduchu

Protože energie nukleonů v jádře se nepochybně kvantuje, je toto *spojité spektrum* záření β v zásadním rozporu s kvantovou fyzikou. To vedlo Pauliho k známé hypotéze o neutrinu, jehož existence je dnes plně prokázána. Aktivitu β^- vysvětlujeme tak, že některý z neutronů v jádře zářiče β^- se přemění na proton, záporný elektron a antineutrino podle schématu

8.3 (11) $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e,$

které jsme uvedli v tab. (8.1) I. Pripustíme-li, že uvolněná energie se může rozdělit v libovolném poměru na e^- a $\bar{\nu}_e$, je rozpor s kvantovou teorií odstraněn. Podobně lze vysvětlit aktivitu β^+ přeměnou

8.3 (12) $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e.$

Kromě zachování platnosti principů kvantové mechaniky umožňuje neutrino udržení platnosti zákona zachování spinu. Protože se při přeměně β nemění nukleonové číslo jádra, musí jeho spin zůstat nezměněn. Odnášeli-li však elektron spin $\hbar/2$, lze to pochopit jen tehdy, když zároveň s ním opustí jádro další částice se spinem $-\hbar/2$.

Záření β^- , které má původ v jádře atomu, se nazývá přesněji *primární* záření β^- na rozdíl od tzv. *sekundárního* záření β^- , které vzniká jako druhotný jev podmíněný zářením γ , jak uvidíme v příštím článku.

Při průchodu prostředím zmenšuje se energie částic β různými interakcemi s atomy prostředí, z nichž nejúčinnější je ionizace prostředí, vznik brzdného záření a rozptyl. Pozitrony kromě toho při setkání s negatrony dávají vznik zánikovému (anihilačnímu) záření.

Pro ztráty energie částic β *ionizací* platí obdobné vztahy jako pro částice α a pro jiné těžké částice. Pro „klasické“ elektrony s rychlostí malou proti rychlosti světla je dokonce měrná ztráta energie přibližně stejně velká jako u těžkých částic (např. u protonů).

Brzdné záření se naopak u částic β uplatňuje mnohem důrazněji než u částic těžkých. Když se elektron přiblíží k elektronovému obalu některého atomu, je silně přibrzděn podobně jako elektron dopadající na antikatodu v rentgenové trubici. V obou případech vzniká elektromagnetické záření (v druhém případě brzdné záření X). Podobně je tomu v poli atomového jádra, což můžeme vyložit z hlediska relativistní elektrodynamiky takto: V klidové soustavě elektronu se pohybuje jádro rychlostí blízkou rychlosti světla, a proto se jeho pole podle čl. 5.5.2 vlivem pseudoelektrostatické síly zploští podobně jako pole urychlovaného elektronu. Ve vztažné soustavě elektronu se toto pole chová jako (zhruba rovinná) elektromagnetická vlna, která se na elektronu rozptyluje (jako záření X při Comptonově jevu). Rozptýlené fotony pozorujeme pak jako zmíněné brzdné záření vydávané nerovnoměrně se pohybujícím elektronem.

Kromě brzdného záření mohou při pohybu elektronů v poli atomového obalu vzniknout dvojice (e^- , e^+) a u záření β^+ (pozitronového) vznikají také fotony zánikového záření.

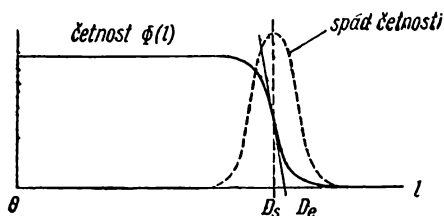
Oba druhy radioaktivního záření α i β , jejichž vzájemné působení s prostředím jsme stručně probrali, se průchodem prostředím zeslabují. Je důležitou úlohou zjistit, v jakém poměru se záření zeslabí průchodem látkou, v níž jsou částice, s kterými záření interaguje, rozloženy s *prostorovou hustotou* n_0 . Je to počet částic v objemu dV dělený tímto objemem a má rozměr m^{-3} . Abychom zjednodušili vyjadřování, předpokládáme, že jde o průchod elektronů, které mohou být pohlceny atomy nějaké látky, ačkoli výsledky, které odvodíme, platí pro interakci libovolných dvou částic (helionů či fotonů s jádry a podobně).

Nejprve zavedeme tzv. *účinný průřez atomu*, k němuž dojdeme jednoduchou úvahou. Jsou-li atomy rozloženy v nějaké rovině se stálou *plošnou hustotou* $\hat{\rho}$ (= počet atomů na plošce dS dělený dS), je pravděpodobnost P , že se s některým z nich srazí elektron dopadající kolmo na rovinu, úměrná $\hat{\rho}$. Označíme-li konstantu úměrnosti σ , bude

$$8.3 \quad (13) \quad P = \sigma \hat{\rho}.$$

Pokládáme-li elektron za bodový a má-li atom poloměr a , bude pravděpodobnost pohlcení (nebo srážky) podle obr. (8.3) 6 rovna poměru celkového průřezu všech atomů a plochy S , na níž jsou rozloženy,

$$P = \frac{\text{počet atomů na ploše}}{\text{plocha}} \pi a^2 = \pi a^2 \cdot \hat{\rho}.$$



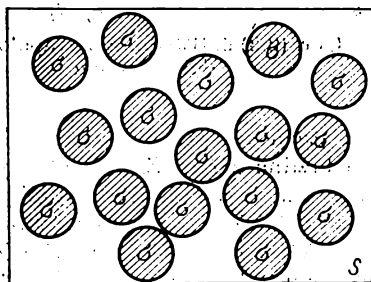
Obr. (8.3) 5. Střední a extrapolovaný dolet částic α

Tak vychází $\sigma = \pi a^2$, což platí přesně jen tehdy, když se atomy a elektrony ani nepřitahují, ani neodpužují, a velmi přibližně i tehdy, když letící částice má tak značnou energii, že částice, kolem nichž prochází, nemohou znatelně změnit směr její rychlosti. Obecně je konstanta σ větší (přitahují-li se částice) nebo menší (odpužují-li se) a nazývá se *účinný průřez* ostřelované částice, jehož velikost závisí ovšem i na druhu a energii částice, která na ni dopadá. Účinný průřez má rozměr m^2 , ale u mikročástic se měří obvykle v jednotkách zvaných

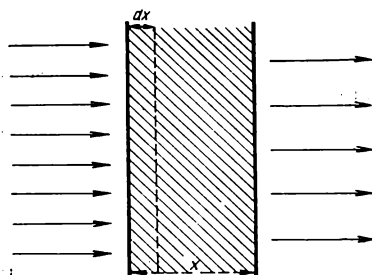
$$8.3 (14) \quad 1 \text{ barn} = 1 \text{ bn} = 10^{-28} \text{ m}^2.$$

Když jsme si takto definovali účinný průřez, přejdeme k odvození vzorce pro absorpci záření v homogenním prostředí. Představme si, že záření β dopadá kolmo na vrstvu absorbujícího prostředí tloušťky x . Velmi tenkou vrstvičku tloušťky dx můžeme pokládat za rovinné rozložení atomů s nepatrnou plošnou hustotou

$$d\bar{\sigma} = \frac{n_0 dV}{S} = \frac{n_0 S dx}{S} = n_0 dx,$$



Obr. (8.3) 6. Částice rozložené na ploše S



Obr. (8.3) 7. Absorpce záření

[obr. (8.3) 7], značí-li dV objem vrstvičky tloušťky dx a plochy S . Pravděpodobnost po-
hlcení elektronů v této vrstvičce je podle 8.3 (13)

$$dP = \sigma d\bar{\sigma} = \sigma n_0 dx$$

a poměrné zeslabení intenzity záření

$$8.3 (15) \quad -\frac{dN}{N} = dP = \sigma n_0 dx.$$

Nazveme-li

$$\mu = \sigma n_0$$

koefficientem absorpce záření v prostředí, dostaneme integrací

$$8.3 (16)$$

$$N = N_0 e^{-\mu x},$$

což je známý **exponenciální zákon** platný pro všechny druhy záření.

Míru, v jaké je nějaká látka prostupná pro záření, lze názorně vyjádřit tzv. *polotloušťkou* dotyčné látky. Je definována jako tloušťka vrstvy, která absorbuje právě polovinu dopadajícího záření a polovinu propouští. Označíme-li ji $a_{1/2}$, platí pro ni

$$N(a_{1/2}) = \frac{1}{2} N(0)$$

a z hořejšího zákona plyne vzorec

$$8.3 \quad (17) \quad a_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} \approx \frac{0,693}{\mu}$$

obdobný vzorec 8.3 (4) pro poločas.

Celková absorpční schopnost vrstvy nějaké látky (např. absorpčního filtru nebo okénka počítače) se často charakterizuje jeho *plošnou hustotou* d , která souvisí s objemovou hustotou ρ a tloušťkou a vztahem

$$d = \rho a;$$

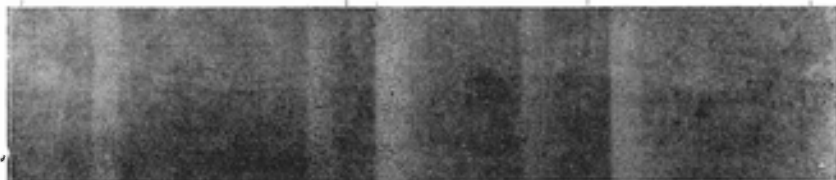
zeslabí záření v poměru

$$8.3 \quad (18) \quad \frac{I}{I_0} = e^{-\frac{\mu}{\rho} d},$$

kde poměr μ/ρ , který má rozměr převrácené plošné hustoty, se nazývá *hmotnostní absorpční koeficient*.

8.3.3. Záření gama

Záření γ je elektromagnetické záření s velmi krátkou vlnovou délkou řádu 10^{-11} až 10^{-13} m, které vzniká v jádře některých radioaktivních prvků. Zpravidla doprovází záření α i záření β . Některé prvky vydávají monochromatické záření jediné vlnové délky. Rádium

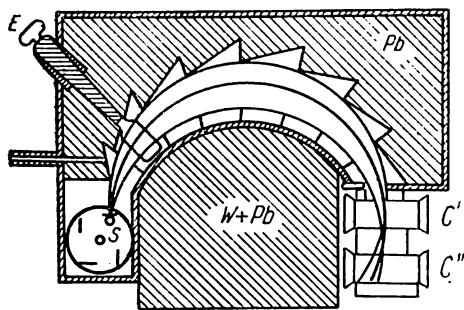


Obr. (8.3) 8. Část sekundárního spektra záření β^- RaB [Meitnerová]

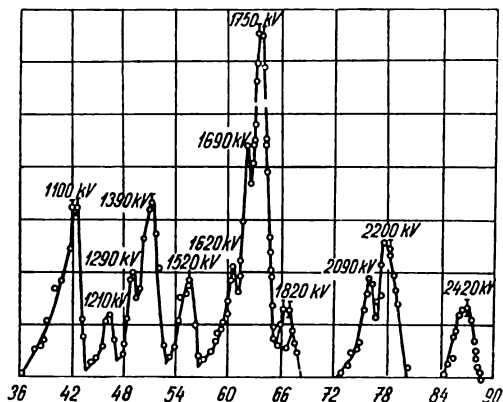
např. zároveň s paprsky α vyzářuje vlny délky $6,6 \cdot 10^{-12}$ m a rádium D vyzářuje kromě záření β vlnu $2,7 \cdot 10^{-11}$ m. Jiné prvky, jako rádium C, thorium a aktinium, vysílají celé spektrum záření γ , které je složeno z jednotlivých čar zcela určitých vlnových délek. Tato skutečnost, že záření γ má *nespojité čárové spektrum*, je v souladu s kvantovou teorií, která vykládá jeho vznik přeskupením nukleonů v jádře, při čemž se uvolněná energie vyzáří jako jeden foton. Poněvadž se energie jádra ve smyslu kvantové teorie nemění spojitě, nýbrž nespojitě — „kvantuje se“ —, nemůže mít ani energie fotonů libovolné hodnoty.

Podobné důsledky plynou ovšem i pro tzv. *sekundární záření* β^- , vzbuzené absorpcí záření γ . Fotony tohoto záření mají značnou energii, a mohou tedy při průchodu elektronovým obalem odtrhnout některý z elektronů a udělit mu ještě značnou rychlost. Touto ionizací mohou být postiženy především atomy radioaktivního prvku samého, a proto je záření γ pravidelně provázeno sekundárním zářením β^- , které se zásadně liší od primárního záření tím, že nemá původ v jádře, nýbrž v atomovém obalu (je to období fotoelektrického jevu, popsaného v článku 6.6.1, a nazývá se obvykle *vnitřní konverze*). Experimentálně se rozezná od primárního záření β^- podle svého nespojitého čárového spektra. Na obr. (8.3) 8 je část spektra sekundárního záření β^- , vysílaného rádiem B.

Jak jsme již řekli na konci článku 5.10.5, lze betatronem nebo elektronovým synchrotronem vyrobit záření vlnové délky řádu 10^{-14} až 10^{-15} m, které můžeme pokládat za velmi tvrdé umělé záření γ . Vlnové délky, a tedy i frekvence záření γ , lze zjistit také z energie elektronů, kterým jeho fotony předávají svá energetická kvanta, a to jak fotoelektronů, tak i Comptonových elektronů. Tento způsob nepřímé spektroskopie záření γ vypracoval zejména Skobelečyn. Jeho metodu zdokonalili Alichanov, Kozodajev a Latyšev. K rozboru spektra elektronů bylo přitom užito Alichanovova magnetického spektrografu, jehož konstrukce je znázorněna na obr. (8.3) 9. Elektrony, které vyletují z místa S , opisují po průchodu clonkou (nebo filtrem), nesenou zábrusem E , kruhové dráhy v příčném magnetickém poli a jsou detegovány dvěma počítači C' , C'' . Na obr. (8.3) 10 je spektrum záření γ rádia C, získané touto metodou. Z průběhu křivky, vyjadřující závislost četnosti elektronů na jejich energii, lze soudit na intenzitu jednotlivých čar, jejichž frekvence jsou stanoveny příslušnými energetickými kvanty, vyjádřenými připsanými čísly v keV.



Obr. (8.3) 9. Alichanovův magnetický spektrograf



Obr. (8.3) 10. Spektrum záření γ RaC

Při průchodu záření γ prostředím jde zřejmě o absorpci krátkovlnného elektromagnetického záření, pro kterou platí exponenciální zákon 8.3 (16). Nehledíme-li k interakci s atomovými jádry, o které promluvíme dále, můžeme rozdělit absorpční děje na tři kategorie:

a) *Fotoelektrický jev* způsobený zářením γ je zcela obdobný stejně nazvanému jevu, který jsme popsali v čl. 6.6.1. Je-li energie kvanta γ větší než ionizační energie atomu, uvolní se při absorpci kvanta některý z oběžných elektronů s energií rovnou přebytku energie fotonu. Pro příslušné účinné průřezy byly odvozeny teoretické vzorce.

b) *Comptonův rozptyl*, který jsme v čl. 6.6.3 popsali pro rozptyl záření X, je ovšem tím spíše pozorovatelný při rozptylu kvant γ . Při tom vzniká foton s menší energií a odražený elektron, který je možno pozorovat (např. v mlžné komoře).

c) *Tvoření elektronových párů* (dvojic negatron—pozitron) je děj, který předpověděl ve své známé teorii Dirac (r. 1929) a který jsme vyložili v čl. 6.6.2.

Všechny tři uvedené procesy probíhají nezávisle na sobě a zeslabují záření γ exponenciálně, ale v různém stupni. Výsledné zeslabení je rovno součinu jednotlivých částečných zeslabení, takže

$$I = I_0 e^{-\mu_f x} \cdot e^{-\mu_r x} \cdot e^{-\mu_p x},$$

značí-li μ_f , μ_r , μ_p absorpční koeficienty příslušné fotoefektu, rozptylu a tvoření párů. Platí tedy zákon

$$8.3 \quad (19) \quad I = I_0 e^{-\mu x},$$

kde

$$8.3 \quad (20) \quad \mu = \mu_f + \mu_r + \mu_p$$

je výsledný absorpční koeficient. Závislost celkového i dílčích koeficientů na energii kvant γ pro olovo je znázorněna plně vytaženou a třemi čárkovanými křivkami na obr. (8.3) 11. Z obrázku je zřejmé, že s rostoucí energií fotonů klesá vliv fotoelektrického a Comptonova jevu k nule, ale zároveň rychle stoupá absorpce způsobená tvořením párů, takže nejsilněji pronikají olovem kvanta s energií asi 3 MeV. Další tři plně vytažené křivky znázorňují závislost celkového koeficientu pro cín, měď a hliník.

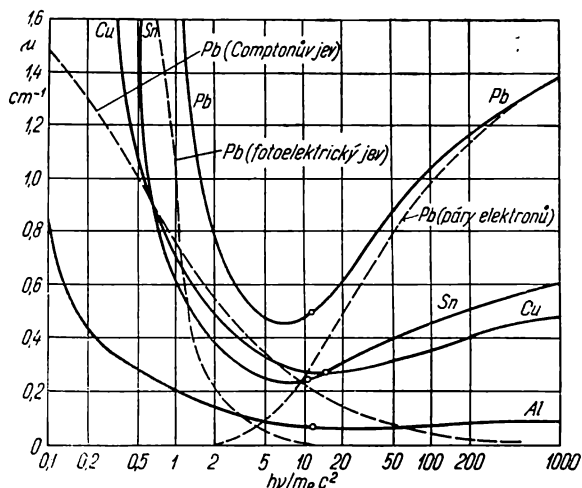
Pokud se týká absorpce záření γ způsobené interakcí s atomovými jádry, mohou nastat teoreticky dva případy. Má-li foton tak velkou energii, že může uvolnit některý z nukleonů obsažených v jádře, dojde k jeho emisi a jádro se přemění. O této fotodezintegraci promluvíme v čl. 8.6.1 a 8.6.2.

Nemá-li foton γ energii potřebnou k takové přeměně jádra, může být jádrem pohlcen, při čemž jádro přejde ze svého základního stavu do některého stavu vzbuzeného, v němž má větší energii. Jak vyplývá ze slupkového modelu, jsou vzbuzevané stavy vyznačeny zcela určitými hodnotami energie a toto kvantování se projevuje tím, že jádro neabsorbuje všechny fotony se stejnou pravděpodobností. Význačným způsobem pohlcuje totiž právě takové fotony, jejichž energie se rovná rozdílu energií dvou dovolených kvantových stavů jádra. Tuto význačnou absorpci nazýváme *rezonanční absorpci*, protože znamená absorpci fotonů s týmiž frekvencemi, které jádro při přechodu ze vzbuzeného stavu do základního samo emituje. Tato rezonanční absorpce, která by měla nastat při pohlcování záření γ jádru téhož nuklidu, který záření vydává, nebyla však až do nedávna pozorována. Podařilo se to teprve r. 1958 Mössbauerovi, který zjištěním tohoto jevu, nazvaného *Mössbauerův jev*, poskytl fyzikům velmi užitečnou experimentální metodu, kterou je možno měřit neobvykle malé, před tím nezjistitelné, relativní změny frekvencí záření γ .

Tak bylo možno bezpečně potvrdit jeden z hlavních důsledků obecné teorie relativity, totiž dilataci času v otáčivé soustavě souřadnic, a poprvé v historii zjistit pozemským měřením rudý posuv spektrálních čar, způsobený rozdílem potenciálů mezi dvěma místy s výškovým rozdílem pouhých 21 metrů (srov. čl. 2.9.7). Další významné aplikace Mössbauerova jevu se v přítomné době sledují ve fyzice pevných látek, zvláště v oboru magnetismu.

Omezíme se na velmi stručné elementární vysvětlení popsaného jevu. Příčina narušení rezonance mezi stejnými jádry je v působení fotonu na jádro při emisi i při absorpci. Při emisi musí totiž zůstat vektorový součet hybností jádra a fotonu nezměněn. Je-li jádrem uvolněna excitační energie W_0 , je frekvence ν_0 a hybnost p_0 fotonu

$$\nu_0 = \frac{W_0}{h}, \quad p_0 = \frac{h\nu_0}{c} = \frac{W_0}{c}.$$



Obr. (8.3) 11. Absorpční koeficienty kovů v závislosti na energii kvant γ

Při emisi získá tedy jádro hmotnosti M podle principu akce a reakce hybnost

$$8.3 (21) \quad Mv = -\frac{W_0}{c}$$

a tím i kinetickou energii

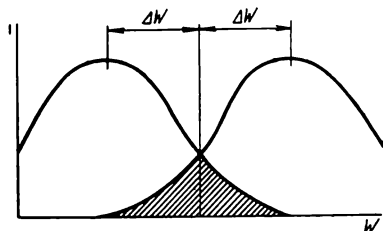
$$8.3 (22) \quad W_k = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{W_0^2}{2Mc^2}.$$

O tuto energii se podle principu energie zmenší energie fotonu, takže má ve skutečnosti nižší frekvenci

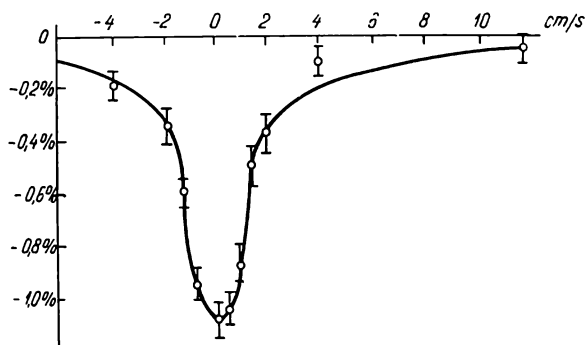
$$8.3 (23) \quad \nu = \frac{W_0 - W_k}{h} = \nu_0 - \frac{W_k}{h} = \nu_0 \left(1 - \frac{W_k}{h\nu_0}\right) = \nu_0 \left(1 - \frac{W_0}{2Mc^2}\right).$$

Stejně velký pokles frekvence fotonu nastane však i při absorpci, protože foton při tom předá jádru zase hybnost rovnou velmi přibližně 8.3 (21), a tedy energii 8.3 (22). Celkový poměrný rozdíl mezi skutečnou frekvencí ν a frekvencí ν_0 , kterou je jádro schopno absorbovat, je tedy podle 8.3 (23)

$$2 \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{2W_k}{W_0} = \frac{W_0}{Mc^2}.$$



Obr. (8.3) 12. Překrývání emisní a absorpční čáry při teplotě $T = 300^\circ \text{K}$



Obr. (8.3) 13. Závislost poměrné změny intenzity záření na vzájemné rychlosti zářiče a pohlcovače

Předešlá úvaha platí i v oboru optického záření, jehož fotony mají energii nepatrnou proti celkové relativistické energii jádra Mc^2 . Avšak fotony γ mají dosti velkou energii a přirozená šířka spektrálních čar záření γ je velmi malá. I když se tyto velmi ostré čáry dosti rozšíří vlivem Dopplerova jevu (způsobeného termickými vibracemi atomů v krystalu), je posunutí emisní a absorpční čáry tak velké, že se obě čáry jen nepatrně překrývají, jak naznačuje obr. (8.3) 12. Proto je účinný průřez pro rezonanční absorpci neměřitelně malý.

Energie získaná jádrem při emisi a při absorpci kvant γ se obvykle přemění na energii termických kmitů. Tepelná energie krystalu se však podle Debyovy teorie kvantuje (viz čl. 7.5.1) a může se stát, zvláště při nízkých teplotách, že kvantové podmínky nedovolují právě změnu tepelné energie velikosti 8.3 (22). Pak se změna hybnosti jádra přenesla na celý krystal, který ve srovnání s jádrem má prakticky nekonečně velkou hmotnost. Proto je foton vymrštěn z jádra beze ztráty energie, a tedy beze změny frekvence. Stejně se chová jádro absorbujícího krystalu.

Takovou „bezodraznou“ emisi a absorpci objevil právě Mössbauer nejprve u fotonů s energií $W_0 = 129 \text{ keV}$ vysílaných nuklidem Ir 191 a u fotonů s $W_0 = 14,4 \text{ keV}$ emitovaných nuklidem Fe 57. Udržíme-li zářič na dosti nízké teplotě, jsou tyto čáry tak ostré, že už vzájemná rychlost několik cm s^{-1} stačí k rozladění zdroje a pohlcovače záření, které se projeví znatelným poklesem absorpčního koeficientu. Potvrzuje to obr. (8.3) 13, z něhož vidíme, že intenzita záření 129 keV propuštěného destičkou z iridia 191 je minimální, když má zářič (udržovaný na teplotě 88°K) nulovou rychlost. Měřením absorpce čáry vydávané Fe 57 bylo tak možno zjistit poměrnou změnu frekvence řádu 10^{-16} , která vznikla dilatací času způsobenou nehomogeností tíhového pole v rozsahu 21 m.

8.3.4. Kosmické záření

Kosmickým zářením nazýváme velmi pronikavé záření, o němž je dnes bezpečně zjištěno, že k nám přichází z vesmíru. O jeho původu bylo vysloveno několik dohadů; hlavní z dnešních teorií uvedeme na konci článku. Mimosluneční původ má ovšem jen tzv. *primární složka* kosmického záření, která při průchodu atmosférou dává vznik jeho *sekundární složce*.

Průzkum kosmického záření poskytuje velmi cenné poznatky o základních částicích a většina jich byla právě v tomto záření objevena. Proto se dnes zkoumání kosmických paprsků provádí nejen v ovzduší, ale i pod zemí a v hloubkách oceánů a nejnověji též přístroji nesenými balóny, letadly a umělými družicemi a planetami.

Tak sovětská raketa vysílala v lednu 1959 údaje o intenzitě kosmického záření vně magnetického pole Země a registrovala kosmické fotony. Při amerických pokusech s měsíčními raketami bylo zjištěno, že Země je obklopena dvěma soustřednými pásy korpuskulárního záření o intenzitě 5 až 10 rentgenů za hodinu. Jeden pás je ve výši 2 250 až 5 500 km, druhý ve výši 12 800 až 19 300 km.

Primární složka kosmického záření se skládá velkou většinou z velmi rychlých kladně nabitých částic: protonů (45 % podle hmotnosti), helionů (40 %) a některých těžkých jader např. železa, hliníku a síry (10–15 %). Tyto částice mají energii kolem 10^{10} eV (výjimečně až 10^{17} eV), což vysvětluje jejich nesmírnou pronikavost.

Radioastronomická pozorování ukázala, že primární záření obsahuje také značný počet elektronů. Z měření provedených r. 1963 přístroji v balónech vyplývá, že ve výši kolem 40 km je počet záporných elektronů třikrát až pětikrát větší než počet pozitronů. Z toho se usuzuje, že asi polovina primárních elektronů v kosmickém záření vzniká srážkami protonů s protony v mezihvězdném prostoru a polovina při explozích nově vznikajících hvězd zvaných *supernovy*.

Primární záření se téměř úplně pohltí v hořejších vrstvách atmosféry, při čemž vzniká brzdné záření, ale hlavně různé interakce s atomy ovzduší, které vedou k transmutacím jejich jader. Tak vznikají různé částice sekundárního záření, zejména protony, neutrony, deuterony, tritony, heliony, piony a méně často kaony a hyperony.

Piony mají však velmi krátký život 10^{-8} s, a proto se již na dráze několika metrů přeměňují na miony (a neutrina), které jsou hlavní součástí tzv. *tvrdé složky* sekundárního záření, která může proniknout i metrovou vrstvou olova, a lze ji pozorovat i pod zemí a pod mořem. V atmosféře mohou miony během svého života ($2,2 \cdot 10^{-6}$ s) urazit dráhu až několik desítek kilometrů, což jsme v čl. 2.9.3 vysvětlili dilatací času.

Rozpadem mionů vznikají záporné i kladné elektrony, které spolu s fotony γ , vzniklými rozpadem neutrálních mezonů, tvoří tzv. *měkkou složku* sekundárního záření, kterou lze odstínit již decimetrovou vrstvou olova.

Asi 20 % primárních částic vytváří při průchodu látkou s těžkými atomy (např. olovem) úkazy, které nazýváme *sprškami*, protože se skládají z celých trsů částic (paprsků). Nejznámější jsou *elektrono-fotonové spršky*, složené z elektronů a fotonů. Vznikají tak, že rychlý elektron excituje atom olova, který vyše foton velmi tvrdého záření X. Tento foton se v poli dalšího jádra promění v negatron a pozitron, které excitují další atomy, a děj se opakuje. Složitější procesy pozorujeme u dalších druhů spršek, jako jsou *kaskádní*, *rozsáhlé* (Augerovy) a *elektrono-jaderné spršky*.

Tento velmi neúplný výklad o základních vlastnostech kosmického záření doplníme několika obrázky v příštím článku. Zde uvedeme ještě stručný přehled teorií vzniku kosmického záření.

Hypotézu, že kosmické záření vzniká ve sluneční soustavě, vyslovili Dauvillier a Swarm a myšlenka byla dále propracována (kolem roku 1950) Alfvénem, Tellerem a Richtmaerem. Podle této teorie se nabitě částice, jejichž zdrojem jsou sluneční skvrny, dělí v magnetickém poli Slunce na kladné a záporné částice. Tímto usměrněným pohybem nábojů se budí přídatné magnetické pole, kterým teorie vysvětluje vznik kosmického záření.

Naproti tomu Fermi (r. 1949) vyslovil názor, že primární kosmické záření existuje v celém prostoru naší Galaxie, při čemž na 1 cm^3 připadá průměrně 1 proton. Kosmické částice obíhají v Galaxii s periodou asi $7 \cdot 10^7$ roků a jsou urychlovány tím, že částice procházejí nehomogenními magnetickými poli, která vznikají pohybem mezihvězdných oblaků nabitých částic. Slabinou této teorie je neschopnost vyložit existenci těžkých jader v kosmickém záření.

Konečně Těrleckij (r. 1948) ve své teorii vysvětluje vznik kosmického záření působením indukovaných elektrických polí vzniklých proměnnými magnetickými poli. Taková proměnná pole vytvářejí některé hvězdy, sluneční skvrny i mezihvězdné oblaky. Zdá se, že tato teorie „kosmických indukčních urychlovačů“ vykládá uspokojivě vznik kosmického záření.

Na základě novějších radioastronomických pozorování dospěl Sandage (1964) k domněnce, že kosmické záření má z velké části původ v explodujících galaxiích.

8.4. Detekce a dozimetrie jaderného záření

8.4.1. Základní jednotky

Jaderné záření je možno experimentálně zjišťovat z různých hledisek. Můžeme buď jen zjišťovat existenci záření, tj. *detegovat* je, nebo můžeme měřit jeho intenzitu v nějakém místě prostoru, po případě „vydatnost“ radioaktivního zdroje. Je důležité znát také množství zářivé energie, kterou pohltí v jisté době nějaký předmět či orgán nebo celé tělo (např. u pracovníků s radionuklidy). Konečně se zajímáme i o různé vlastnosti záření, jako je poločas, energie jeho částic, absorpční koeficienty v různých látkách apod. Abychom mohli zkoumat kvantitativní zákonitosti záření, musíme najít vhodné fyzikální veličiny, které charakterizují důležité vlastnosti záření nebo jejich zdrojů, a zvolit pro ně jednoznačně definované jednotky.

Aktivita radioaktivního zdroje (preparátu) neboli *zářiče* je základní veličinou, která je mírou jeho radioaktivity. Je zřejmě charakterizována četností (frekvencí), s níž se ze zářiče uvolňují částice (nebo kvanta γ). Proto definujeme aktivitu zářiče (preparátu) výrazem

$$8.4 (1) \quad \mathcal{A} = - \frac{dn}{dt},$$

který u dlouhodobých nuklidů můžeme s nevelkou chybou nahradit počtem přeměn za jednotku doby. Z exponenciálního zákona 8.3 (3) plyne důležitý vztah

$$8.4 (2) \quad \mathcal{A} = \lambda n,$$

který říká, že aktivita zářiče se rovná součinu přeměnové konstanty a okamžitého počtu radioaktivních jader atomů. Tato *úměrnost aktivity s množstvím radioaktivního nuklidu* dává možnost zjišťovat množství zářičího nuklidu z jeho aktivity. Porovnáním aktivit dvou zářičů, obsahujících též radioaktivní nuklid, získáme přímo poměr množství nuklidu v obou preparátech. Kdybychom znali toto množství v jednom ze zářičů, vypočetli bychom jeho množství v druhém zářiči násobením poměrem obou aktivit.

Proto zhotovila již r. 1911 M. Curieová *základní standard* pro rádiu, který obsahoval 21,99 mg nejčistší bezvodé soli RaCl_2 . Rádiové preparáty jsou vždy neprodyšně uzavřeny v ochranném obalu (skleněném nebo platinovém), který pohlcuje jistou poměrnou část záření. Kromě toho pohlcuje zářičí nuklid sám část záření, které z vnitřku preparátu vystupuje na povrch. Proto lze srovnáváním aktivit zářičů zjistit jen poměr tzv. *efektivních miligramů* (mg_{ef}) rádia a k zjištění skutečného množství v mg je třeba provést příslušné korekce.

Jednotka aktivity měla — podobně jako jiné fyzikální jednotky — svou historii. Byla původně definována jako aktivita $6,5 \cdot 10^{-6}$ g radonu (Rn), tj. množství, které je v radioaktivní rovnováze s 1 g rádia; byla nazvána *curie* a značí se Ci.*) Dnes se ve smyslu mezinárodní dohody z r. 1950 pod tímto názvem rozumí jednotka definovaná ve smyslu základního vztahu 8.4 (1) takto:

Curie je aktivita určená četností $3,7 \cdot 10^{10}$ přeměn za sekundu (přesně). Vyjádřeno rovnicí

$$8.4 (3) \quad \text{Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} = 37 \text{ GHz}.$$

Aktivitu jednoho curie má tedy takové množství dlouhodobého radioaktivního nuklidu ($T \gg 1$ s), v němž se přemění 37 miliard jader za sekundu (velmi přibližně).

Podle hořejší definice platí vzhledem k 8.4 (2) a 8.3 (4) pro počet n_1 atomů kteréhokoli nuklidu o celkové aktivitě 1 curie vztah

$$n_1 \lambda = \ln 2 \cdot \frac{n_1}{T} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}.$$

Je-li A nukleonové číslo nuklidu, bude hmotnost zářiče s aktivitou 1 curie rovna

$$m_1 = n_1 A u = \frac{AT}{\ln 2} \cdot 3,7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

a hmotnost zářiče s k jednotkami curie

$$m = km_1,$$

kde

$$8.4 (4) \quad m_1 = \frac{3,7 \cdot 10^{10} \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}{0,693} \text{ kg s}^{-1} AT = 0,886 \cdot 10^{-16} \text{ kg s}^{-1} AT.$$

V literatuře se uvádí také jednotka zvaná *rutherford* (rd), která se definuje vztahem

$$8.4 (5) \quad 1 \text{ rd} = 10^6 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ MHz}.$$

Odpovídá jí takové množství libovolného (dlouhodobého) nuklidu, v němž se přemění milión jader za vteřinu. Platí tedy rovnice

$$\text{Ci} = 37\,000 \text{ rd}, \quad \text{mCi} = 37 \text{ rd}, \quad \mu\text{Ci} = 0,037 \text{ rd},$$

z nichž vidíme, že jednotka rd je pro běžné preparáty, které mají velikosti řádu několika mCi, vhodnější než curie.

Jednotka curie je jednotkou radioaktivního záření vydávaného aktivním zdrojem za jednotku času. Intenzita záření je číselně rovna energii záření, která projde plošnou jednotkou kolmou ke směru postupu záření za jednotku času. Vyjadřuje se obecně v jednotkách s rozměrem výkon/plocha, tedy v soustavě SI v jednotkách Wm^{-2} .

Definice intenzity záření zůstává v platnosti i pro záření radioaktivní, ale praktický význam má jen ta část zářivé energie, která se v ozařované látce pohlcuje a která v ní jediné způsobuje nějaké změny. Vzhledem k tomu, že změny způsobené zářením pohlceným v látkách jsou povahy trvalé, a sčítají se tedy během doby ozařování (podobně jako změny způsobené světlem při expozici fotografické emulze), má velký praktický význam veličina, kterou lze posuzovat buď podle výsledné ionizace vyvolané zářením ve zvoleném množství nějaké látky, nebo podle úhrnné energie pohlcené látkou za dobu ozařování. V prvním případě, kdy hodnotíme záření ionizačními účinky, nazývá se příslušná veličina *ozáření* nebo *expozice*. Hodnotíme-li záření pohlcenou energií, užíváme přesnějšího názvu

*) Tato nová značka nahrazuje dřívější označení c.

měrná pohlcená dávka nebo stručněji *pohlcená (absorbovaná) dávka*, přičemž jak pohlcenou energii, tak ionizaci vztahujeme na jednotku hmotnosti ozařované látky.

Ozáření měříme podílem celkového náboje kladných iontů, vytvořených zářením ve vzduchu, a hmotnosti absorbujícího vzduchu. Jednotkou této veličiny, kterou označíme X , je v soustavě SI

$$[X] = \text{C kg}^{-1}.$$

V praxi se užívá jednotky, zvané *rentgen*, která se značí R (dříve r) a souvisí s hořejší jednotkou vztahem

$$8.4 (6) \quad R = 2,579\,76 \cdot 10^{-4} \text{ C kg}^{-1}.$$

O tom se snadno přesvědčíme, vyjdeme-li z původní definice rentgenu (schválené na mezinárodní konferenci v Chicagu r. 1937):

Rentgen je dávka rentgenového záření nebo záření gama, které vytvoří v 0,001 293 g vzduchu (tj. v 1 cm³ vzduchu za normálních podmínek) ionty obojího znaménka s celkovým kladným nábojem rovným elektrostatické jednotce náboje $\left(\frac{1}{3} \cdot 10^{-9} \text{ coulombu}\right)$.

Tomuto náboji odpovídá zřejmě počet

$$\frac{1}{3} \cdot 10^{-9} \text{ C} : (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \text{ kladných jednomocných iontů} = 2,08 \cdot 10^9$$

iontových párů,

a v 1 kg vzduchu bude celkový náboj kladných iontů

$$\frac{1}{3} \cdot 10^{-9} \text{ C} : (1,293 \cdot 10^{-6}) = \frac{10^{-9} \text{ C}}{3,879} = 2,580 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

v dobrém souhlasu s 8.4 (6).

Jednotkou (měrné) pohlcené dávky

$$D = \frac{dW}{dm}$$

je pro všechny druhy záření v soustavě SI

$$[D] = \text{J kg}^{-1} = \text{m}^2 \text{ s}^{-2}.$$

Místo této jednotky se zavádí jednotka stokrát menší

$$8.4 (7) \quad \text{rad} = 0,01 \text{ J kg}^{-1}$$

a v praxi se užívá jednotky zvané *fyzikální ekvivalent rentgenu*, která je definována vztahem

$$8.4 (7') \quad \text{rep} = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ J kg}^{-1} = 0,84 \text{ rad}.$$

Značka této jednotky je složena ze začátečních písmen jejího anglického názvu „roentgen equivalent physical“.

Poslední rovnice vyplývá z experimentálního poznatku, že k vytvoření jedné dvojice jednomocných iontů krátkovlnným zářením ($\lambda = 6 \cdot 10^{-13} \text{ m}$ až $2 \cdot 10^{-11} \text{ m}$) je třeba energie 32,5 eV. Dávce 1 R odpovídá tedy energii

$$2,08 \cdot 10^9 \cdot 32,5 \text{ eV} = 6,77 \cdot 10^4 \text{ MeV}$$

absorbovaná v 1 cm³ vzduchu. Na 1 kg vzduchu připadá tedy energie

$$\frac{6,77 \cdot 10^4}{1,293 \cdot 10^{-6}} \text{ MeV} = 5,23 \cdot 10^{10} \text{ MeV} = 8,38 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

Jednotka rep představuje dávku korpuskulárního záření fyzikálně ekvivalentní ozáření 1 R krátkovlnného záření. Biologické účinky různých druhů záření se však velmi různí, a proto se užívá ještě jednotky rem (roentgen ekvivalent man), definované jako dávka libovolného záření, která způsobí u člověka týž účinek jako 1 rentgen záření X nebo γ . Při malých intenzitách a dlouhodobých dávkách platí tyto přibližné vztahy:

8.4 (8)	pro záření X, γ , β	1 rep = 1 rem.
	pro protony a rychlé neutrony	1 rep = 10 až 20 rem.
	pro pomalé neutrony	1 rep = 5 rem.
	pro záření α	1 rep = 10 až 20 rem.

Vidíme, že těžké částice působí při stejné pohlcené energii mnohem silněji než elektrony a fotony.

Pro biologické účinky na člověka má význam také tzv. *integrální dávka*, rovná celkové zářivé energii pohlcené celým lidským tělem. Dostaneme ji (pokud má záření v celém objemu těla stejnou intenzitu), násobíme-li celkovou hmotností těla dávkou D_1 , připadající na jednotku hmotnosti tkáně. Při záření nestejné intenzity (jako např. při dávce vyzářené radioforem přiloženým k některému orgánu nebo vpraveným do těla) je třeba počítat integrální dávku integrací.

Dávka a ozáření jsou kumulativní veličiny, které shrnují výsledné účinky vyvolané zářením za celou dobu jeho působení a jsou této době úměrné.

Okamžitá síla či intenzita ionizačního záření je charakterizována dávkou pohlcenou za jednotku doby, tj. časovou derivací dD/dt , která se nazývá *dávková rychlost* nebo *dávková intenzita* a měří se v jednotkách

$$8.4 (9) \quad \text{rad s}^{-1} = 10^{-2} \text{ W kg}^{-1}.$$

Podobně se *ozařovací rychlost* čili *ozařovací intenzita*, rovná časové derivaci ozáření dX/dt , měří v jednotkách

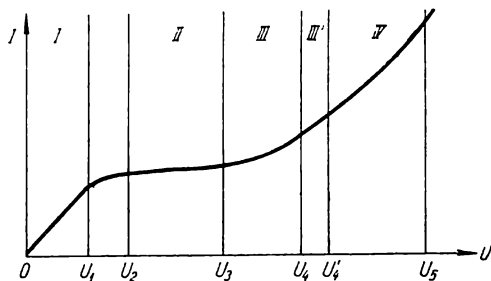
$$8.4 (9') \quad \text{R s}^{-1} = 2,58 \text{ A kg}^{-1}$$

nebo častěji v jednotkách R/hodina či R/týden.

8.4.2. Ionizační komůrky

Nejstarší a dosud nejběžnější metody, kterými měříme intenzitu záření a srovnáváme aktivity zářičů, jsou založeny na ionizačních účincích záření v plynech. Již v čl. 5.3.8 jsme ukázali, že plyny se stávají vodivými, prochází-li jimi ionizační záření, a že ozařovaný vzduchový kondenzátor se vybíjí. „Samovolné“ vybíjení kondenzátorů vedlo ostatně k objevení kosmického záření. Vložíme-li na desky kondenzátoru napětí, jsou ionizační vzniklé ionty uváděny elektrickým polem do pohybu a mezi deskami kondenzátoru prochází *ionizační proud*, jehož hustota závisí jak na intenzitě záření, tak na napětí mezi deskami. Tato druhá závislost je důležitá pro volbu způsobu a podmínek měření a byla podrobně zkoumána. Má v běžných případech typický průběh, který nám kvalitativně znázorňuje křivka na obr. (8.4) 1, zjištěná při stálé intenzitě záření. Její stoupání se značně mění s velikostí napětí, a proto rozeznáváme tyto obory:

I. *Obor Ohmova zákona* se vyznačuje úměrností ionizačního proudu s napětím, která



Obr. (8.4) 1. Závislost ionizačního proudu na napětí

platí pro dosti malá napětí $U < U_1$, při nichž je rychlost udělená iontům elektrickým polem malá proti rychlostem termických pohybů. Vzniká-li ionizací způsobenou zářením za jednotku doby v objemové jednotce plynu při tlaku 1 at n_1 iontů s nábojem e_0 , roste z počátku počet iontů, ale zároveň roste i pravděpodobnost setkání kladných iontů se zápornými a ionty se v rostoucím počtu znovu spojují v neutrální molekuly. Ustálený stav vznikne, když počet touto *rekombinací* zaniklých iontů dosáhne počtu iontů vznikajících ionizací. Při tlaku p (at) je tedy hustota nábojů, které umožňují průchod proudu,

$$8.4 (10) \quad n_p = pn_1$$

konstantní podobně jako při vedení proudu se stálou hustotou nositelů náboje, kdy platí Ohmův zákon v diferenciálním tvaru 5.3 (10) a ovšem i ve tvaru integrálním 5.3 (18)

$$8.4 (11) \quad I = GU.$$

Tato úměrnost proudu s napětím však přestává platit, jestliže napětí zvýšíme tak, že se projeví úbytek iontů odváděných proudem. Stoupání proudu se zvolňuje, až při napětí U_2 se proud ustálí.

II. *Obor nasyceného proudu* je charakterizován jistou stálou hodnotou proudu, která je dána množstvím iontů vzniklých za vteřinu v celém objemu plynu, protože ionty dosahují v poli rychlostí velkých proti termickým rychlostem a rekombinace se již znatelně neprojevuje. Intenzita ionizačního proudu je tedy

$$8.4 (12) \quad I = p \frac{dn_1}{dt} e_0 V,$$

značí-li V objem plynu v kondenzátoru.

III. *Obor proporcionálnosti* začíná napětím U_3 , při kterém (za daného tlaku) jsou ionty vzniklé průchodem záření urychleny polem do té míry, že vytvářejí další ionty nárazem na neutrální molekuly. Každý polem urychlený iont vytvoří stejný počet nových iontů, který až do jistého napětí U_4 nezávisí na napětí kondenzátoru. V tomto oboru III je tedy ionizační proud proporcionální (úměrný) počtu iontů vzniklých přímým působením záření, a tedy úměrný intenzitě záření. Při dalším zvyšování napětí však roste sice ionizační proud urychleně s napětím, ale zpomaleně s počtem původních iontů vzniklých ionizačním zářením, až při dosti vysokém napětí U'_4 již na intenzitě záření nezávisí.

IV. *Geigerův obor* začíná napětím U'_4 a končí napětím U_5 , při němž již nastává samostatný vývoj, o kterém jsme pojednali v čl. 5.3.8. Uvnitř tohoto oboru se vlastně již původní ionizace, vyvolaná přímým účinkem záření, uplatňuje jen jako podnět k lavinové ionizaci, která může způsobit dosti silný ionizační proud i při nepatrné intenzitě záření.

Na ionizaci je založena řada přístrojů určených k měření jaderného záření. V tomto článku vysvětlíme funkci *ionizačních komůrek* (*komor*), které pracují v oboru nasyceného proudu, uvnitř kterého je ionizační proud nezávislý na velikosti napětí. Omezíme se na výklad o tzv. *statických* komůrkách (s konstantní ionizací) nízkotlakých, které jsou nejuznávanější. Jsou to v podstatě plynové (vzduchové) kondenzátory, které jsou vystaveny ionizačním účinkům záření. Působením ionizačního záření se udržuje ionizační proud, kterým se komůrka vybíjí, a velikost ionizačního proudu se vhodným způsobem měří. Jen u silných zářičů je možno měřit tento proud velmi citlivým galvanometrem (s konstantou 10^{-11} A/dílek). Jinak se užívá elektrometru (např. jedno- nebo dvouvláknového), na kterém se zjišťuje časová změna napětí. Nejčastěji se přivede napětí na elektrodách ionizační komůrky na elektrometr a zjišťuje se časový pokles napětí tak, že se čte údaj elektrometru ve stejných časových intervalech. Derivace dU/dt je pak úměrná intenzitě záření. Zářič se klade buď na stěnu komůrky zvenčí, nebo se vkládá na nosič preparátu uvnitř komůrky.

Komůrky mají různé rozměry a různý tvar podle účelu, k němuž jsou určeny. Katodou K bývá kovová skříňka, uvnitř které je umístěna anoda A (desková, drátová, tyčinková) izolovaná od katody jantarovou zátkou J , jež bývá rozdělena sousým uzemněným prsten-

cem P , který chrání anodu před vybitím povrchovými „plživými“ proudy [srov. obr. (8.4) 2]. Přesto nelze zcela odstranit samovolné vybití komůrky způsobené jednak kosmickým zářením, jednak stopami radioaktivních prvků, přítomných ve všech látkách. K tomu je třeba mít zřetel při měření slabších preparátů. Obr. (8.4) 2b ukazuje komůrku s polokulovou katodou K . Zářič se klade na anodu A , takže záření vystupuje přibližně ze středu polokoule. V takové komůrce se při ionizaci uplatní záření vystupující z preparátu uvnitř prostorového úhlu 2π , a proto se komůrka s takovou „geometrií“ nazývá „komůrka 2π “. Při měření aktivity zářičů α je vhodné vložit zářič do vnitřku komůrky, a to tak, aby všechny částice α byly plynem v komůrce pohlceny dříve, než dopadnou na její stěny. Pro přirozené zářiče α je vhodná válcová nebo polokulová komůrka o poloměru aspoň 9 cm (maximální dolet pro ThC' ve vzduchu). To je možno snadno splnit. Záření α se silně absorbuje i ve vlastním preparátu, a proto je bez korekcí na vnitřní absorpci možno zjišťovat aktivitu jen velmi tenkých vzorků (nálety, odparky apod.).

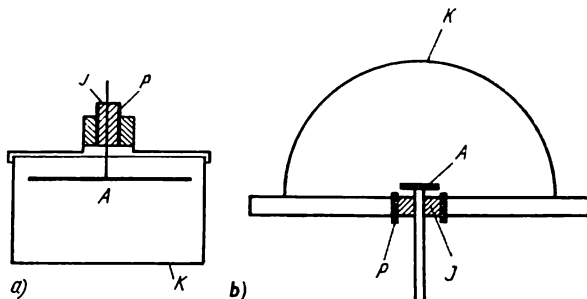
U zářičů β se v prostoru komůrky absorbuje jen část elektronů, které mají mnohem větší dolet (až 2 m), a proto se část záření absorbuje v plášti komůrky a k ionizaci nepřispívá. Z toho důvodu se u zářičů β omezujeme na měření srovnávací.

Záření γ způsobuje ionizaci v komůrce elektrony uvolněnými z jejích stěn fotoelektrickým a Comptonovým jevem a tvořením elektronových párů. Proto se volí stěny komůrky z těžkých prvků, např. z olova tloušťky 5 mm.

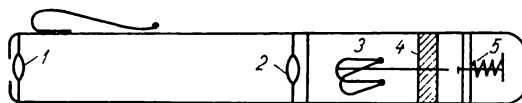
Měřicí zařízení složené z ionizační komůrky a elektrometru můžeme zjednodušit, spojíme-li elektrometr s komůrkou v jeden celek. Upevníme prostě elektrometrický systém (tj. měřicí orgán elektrometru) na vnitřní elektrodu ionizační komůrky a pozorujeme výchylku ukazatele zvenčí. Tak je konstruován dnes velmi oblíbený *tužkový dozimetr* [obr. (8.4) 3]. Válcová ionizační komůrka má osovou vnitřní elektrodu ve tvaru tyčinky procházející jantarovým izolátorem 4, která nese drobný elektrometrický systém 3 typu *Lauritsenova*. Skládá se z pevné elektrody ve tvaru drátěného oblouku, k němuž je připevněno tenounké pokovené vlákno. Tento jemný systém se nabije dotykem pohyblivého kontaktu 5, takže se vlákno elektrostaticky odpuzuje. Jeho výchylka se pozoruje mikroskopem, jehož objektiv 2 vytvoří v ohniskové rovině okuláru 1 obraz vlákna a jeho polohu čteme na okulárové stupnici umístěné v téže rovině.

Přístroj má velikost a tvar plnicího pera, které nosí např. pracovníci s radioizotopy v náprsní kapse oděvu. Plně nabitý dozimetr má vlákno v poloze označené nulou na stupnici, která je cejchována v rentgenech, v rozsahu 0,2 R až (výjimečně) 200 R. Účinkem ionizačního záření γ a zčásti i β se komůrka pomalu vybíjí a po jisté době klesne napětí úměrně s dávkou absorbovanou přístrojem, která se čte přímo na stupnici (pokud nepřekročí rozsah stupnice).

Vhodné upravených ionizačních komůrek se užívá i k detekci neutronového záření, které ovšem neionizuje. Neutrony mohou však vyvolat různé jaderné reakce (viz čl. 8.6.4), při nichž vznikají nabitě, a tudíž ionizační částice. Pokryjeme-li např. vnitřní povrch katody sloučeninou bóru nebo lithia, vzniká podle 8.6 (19) záření α , které získáme také tak, že



Obr. (8.4) 2. Ionizační komůrky vhodné k měření záření α

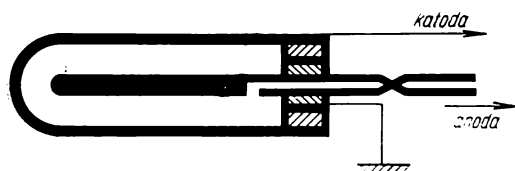


Obr. (8.4) 3. Schéma tužkového dozimetru

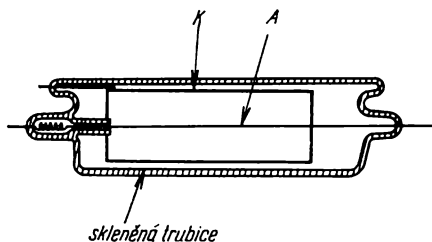
komůrku naplníme plynem BF_3 [viz obr. (8.4) 4]. Pomalé neutrony je možno detegovat tím způsobem, že pokryjeme katodu komůrky uranem. Neutrony způsobují štěpení $\text{U} 235$ a vzniklé štěpné produkty (viz čl. 8.6.4) vyvolávají silnou ionizaci. Rychlé neutrony je možno registrovat na základě toho, že vyraží z neutrálních molekul ionty (zvláště protony), které mají dosti energie k ionizaci plynu v komůrce.

8.4.3. Počítače

V předešlém článku jsme popsali metody měření intenzity jaderného záření ionizačními komůrkami, kterými zjišťujeme celkový ionizační proud. Tyto metody nedávají možnost určit počet primárních částic, které v jednotce doby měřenou ionizaci vyvolaly. Kdybychom mohli tento počet změřit, mohli bychom stanovit absolutní hodnotu aktivity zdroje přímo v jednotkách curie na základě definice 8.4 (3). Přístroje, kterými je možno počítat ionizační částice, nehlédě na jejich druh a energii, se nazývají *počítače*. Probereme hlavní typy těchto důležitých moderních přístrojů.



Obr. (8.4) 4. Ionizační komůrka plněná BF_3 pro detekci pomalých neutronů



Obr. (8.4) 5. Zatavená válcová počítací trubice

Proporcionální počítače

Jsou to v podstatě ionizační komůrky, které pracují v oboru proporcionálnosti na obr. (8.4) 1 označeném III, nebo v oboru III'. V oboru III je ionizační proud úměrný intenzitě záření, tedy též úměrný počtu částic, které projdou objemem komůrky, které říkáme *počítací trubice*. Při tom lze dosáhnout značného zesílení ionizace ve srovnání s ionizační komůrkou, takže lze zjistit i průchod jedné částice.

Obvykle se užívá zatavených trubic ve tvaru válečku [obr. (8.4) 5], v jehož ose je napjata anoda ve tvaru tenkého drátu (poloměru r_a), katoda je válcová (poloměr r_k). V osové části trubice je hustota siločar, a tedy také intenzita pole značná a klesá nepřímo úměrně se vzdáleností od osy podle vzorců 5.1 (64) a 5.2 (60')

$$8.4 \quad (13) \quad E_s = \frac{U}{\ln \frac{r_k}{r_a}} \cdot \frac{1}{r},$$

je-li U napětí na trubici. Napětí mezi elektrodami lze volit tak, že lavinu iontů mohou vytvořit jen elektrony, které vzniknou ionizací poblíž osy trubice, kdežto vzdálenější elektrony nedosáhnou v slabším poli potřebné ionizační energie. Pak vznikají stejně silné iontové laviny, které se projeví stejným poklesem napětí. Projde-li při lavinovém výboji mezi elektrodami celkový náboj Q , vznikne na trubici nárazový úbytek napětí čili napěťový impuls velikosti

$$U = \frac{Q}{C_v},$$

kde C_v je kapacita trubice daná známým vzorcem 5.2 (61) pro válcový kondenzátor. Při obvyklých podmínkách měření ($r_a = 0,1$ mm, $r_k = 1$ cm, $U = 10^3$ V) má lavina v trubici plněné argonem pod tlakem 100 torrů trvání asi 10^{-4} – 10^{-3} s. Pracuje-li se s malými odpory, lze však dosáhnout impulsů s poločasem až 10^{-7} s. To je výhoda proporcionálních počítaců, kterými můžeme měřit i velmi silné zářiče, které dávají velký počet impulsů za jednotku času. Tuto „frekvenci“ impulsů čili „časovou hustotu“, kterou měříme v jednotkách s^{-1} nebo častěji min^{-1} , budeme krátce nazývat *četností* impulsů a budeme ji značit N . Úhrnný počet impulsů zaznamenaný počítačem v časovém intervalu t je obecně

$$8.4 \quad (14) \quad \tilde{N} = \int_0^t N \, dt$$

a při stálé intenzitě záření

$$8.4 \quad (15) \quad \tilde{N} = Nt.$$

Při plnění argonem, metanem a CH_4 lze proporcionálními počítači dosáhnout „plynového“ zesílení řádu 10^4 a lze jimi počítat i částice β a kvanta měkkého záření X. Vyžadují ovšem dokonale stabilizované zdroje napětí a stabilní a vysoce výkonné elektronkové zesilovače. Pro detekci neutronů se upravují podobně jako ionizační komůrky.

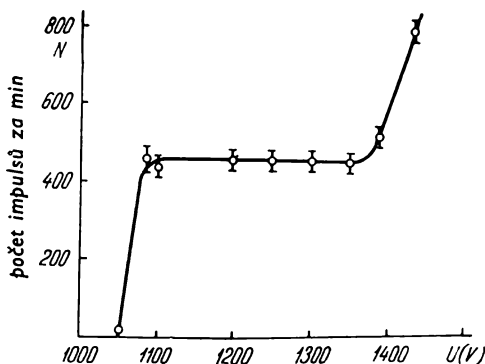
Geigerovy-Müllerovy počítače

Geigerův-Müllerův počítač, který se stručně označuje *počítač GM*, pracuje v Geigerově oboru [IV na obr. (8.4) 1], který se liší od proporcionálního oboru hlavně tím, že ryze elektronová lavina je provázána větším počtem fotonů, který vzrůstá s rostoucím napětím. Absorpcí těchto fotonů v plynové náplni a v katodě vznikají fotoelektrony, které dále ionizují plyn v trubici, a tak se vytvářejí nová výbojová centra, až se výboj rozšíří na celou délku anody. Při dosti vysokém napětí na trubici, která se v podstatě neliší od válcové trubice s drátovou anodou na obr. (8.4) 5, závisí množství náboje uvolněného při lavinovém výboji již jen na napětí a na délce trubice. Vznikají tak napěťové impulsy stálé velikosti a dosahuje se zesílení 10^6 až 10^8 , což je charakteristické pro počítače GM a činí je nejužívanějšími detektory jaderného záření.

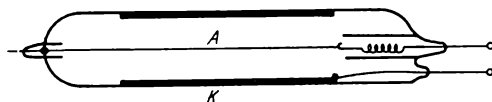
Napěťový impuls, který vznikne lavinovým výbojem v trubici, má jistou dobu trvání, která je určena časovým průběhem složitých dějů, které doznívají po průletu ionizační částice trubici. Pokud se pole mezi elektrodami nevrátí do původního stavu, nemůže trubice normálně pracovat. Proto je třeba trvání impulsu, tj. *uzavírací dobu* neboli *mrtvý čas*, počítače co nejvíce zkrátit. Počítač dosáhne původního stavu teprve po tzv. *zotavovací době*, která je delší než mrtvý čas, a proto je třeba především přerušit výboj co nejrychleji. To lze provést buď mimo trubici samu vhodnou úpravou elektronického zařízení, které počítač doplňuje a umožňuje jeho funkci, nebo vhodnou volbou plynové náplně trubice. Takovou „samozhášecí“ trubici dostaneme, přidáme-li k základní náplni, kterou tvoří argon, páry nějaké látky složené z mnohoatomových molekul. K tomu se hodí organické látky jako alkohol nebo etylén (obvykle bývá parciální tlak argonu 90 torrů a tlak alkoholových par 10 torrů). Zpočátku proběhne lavinový výboj jako v samém argonu, ale jeho další průběh se změní, protože alkoholové molekuly silně absorbují fotony vzniklé v primární lavině, které již nemohou dorazit až na katodu, neboť jejich střední volná dráha se absorpcí zkrátí na 1 až 2 mm. Při absorpci fotonů se molekuly alkoholu ionizují, čímž vznikají nové elektrony a kladné ionty. Elektrony přejdou ihned na anodu, zatímco těžké kladné ionty s mnohem menší pohyblivostí vytvoří v krátké době asi 1 μs kolem anody prostorový náboj (tzv. virtuální anodu). Tyto kladné ionty postupují ke katodě, z níž však nemohou po neutralizaci uvolnit další elektrony, a výboj skončí. V tom záleží zhášecí účinek organických

molekul, který se projevuje zkrácením mrtvé doby počítačů běžných rozměrů asi na 100 až 200 μs . Odpovídá to době, kterou potřebují kladné ionty vytvořené poblíž anody, aby dorazily ke katodě.

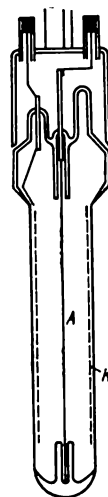
Pro správnou funkci počítače GM je samozřejmě nutné volit napětí na trubici uvnitř Geigerova oboru IV. Hranice tohoto oboru zjistíme pro každou trubici, vyšetříme-li, jak závisí četnost impulsů registrovaných počítačem (při stálém záření) na napětí mezi elektrodami. Křivku, která tuto závislost znázorňuje graficky, nazýváme *charakteristikou počítače*. Její průběh ukazuje obr. (8.4) 6, z něhož vidíme, že počítač začne dávat impulsy teprve, když napětí dosáhne jisté minimální hodnoty (kolem 10^3 V), a že jejich četnost rychle



Obr. (8.4) 6. Charakteristika počítače GM



Obr. (8.4) 7. Počítací trubice pro záření γ



Obr. (8.4) 8. Ponorná trubice GM pro měření kapalin

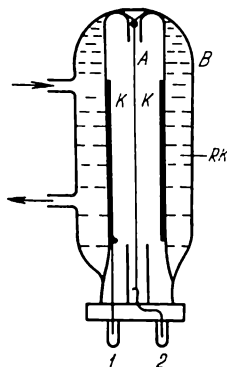
vzrůstá až do napětí U_P , které se nazývá *počáteční*. Při dalším zvyšování napětí stoupá u kvalitních trubic četnost impulsů velmi zvolna (asi o 5 % na 100 V), avšak při napětích vyšších než tzv. *koncové napětí* U_K je stoupání četnosti zase dosti značné. Přibližně vodorovná část charakteristiky se nazývá *plošina* (sedlo, plató) a mívá rozsah až několik set voltů. Pracuje-li trubice ve středu části plošiny, je četnost impulsů prakticky nezávislá na napětí.

Samozhášecí trubice s parami organických látek ztrácejí časem (po několika miliónech výbojů) plošinu, protože molekuly těchto látek se při výboji nevratně disociují, čímž jejich zhášecí působení slábne. Proto se k některým účelům užívá trubice s přísadkem malého množství některého halogenu (Br, J), který má podobný zhášecí účinek jako organické látky, ale po disociaci se jeho disociované molekuly zase spojují v původní neutrální molekuly. Životnost takových *halogenových* počítačů není omezena.

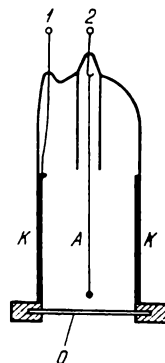
Každý počítač registruje jistou malou četnost impulsů bez radioaktivního zdroje. Tento údaj počítače se nazývá *nulový chod* (efekt) nebo *pozadí počítače* a je třeba jej odečíst od pozorované četnosti impulsů. Pozadí má příčinu v slabé radioaktivitě γ materiálů zemské kůry, která způsobuje četnost asi 1 impuls/min na každý čtvereční centimetr plochy trubice. Stejnou měrou se na nulovém efektu podílí kosmické záření ve středních zeměpisných šířkách na hladině mořské. Oloveným stíněním tloušťky 3 cm lze snížit tuto část pozadí asi na polovinu.

Během doby bylo vyvinuto mnoho různých typů počítacích trubice GM. Válcové trubice se nejčastěji užívá v provedení podle schematického obr. (8.4) 5. Pro záření γ je vhodná trubice znázorněná na obr. (8.4) 7 s mosaznou nebo měděnou katodou K a s anodou A z wolframového drátku tloušťky $50\text{ }\mu\text{m}$. Pro záření β lze užít podobné trubice, jejíž válcová katoda z hliníkového plechu tloušťky $0,1\text{ mm}$ tvoří zároveň plášť trubice. K měření aktivity kapalin je určena *ponorná* tenkostěnná trubice konstruovaná podle obr. (8.4) 8 a různé typy počítaců *průtokových* [obr. (8.4) 9].

K počítání částic α nebo β se užívá *zvonkových* trubice s tenkým slídovým okénkem [obr. (8.4) 10].



Obr. (8.4) 9. Průtoková trubice GM, jejíž baňkou B cirkuluje měřená radioaktivní kapalina RK



Obr. (8.4) 10. Zvonková trubice GM se slídovým okénkem O

Poznámka

Mrtvá doba počítače GM není přesně definovanou konstantou (závisí např. na napětí na trubici), a proto ukážeme, jak lze mrtvou dobu experimentálně zjistit. Stačí určit četnosti N_1 a N_2 dvou zářičů a výslednou četnost N_{12} zaznamenanou za současného působení obou zářičů při nezměněných polohách. Mrtvou dobu pak vypočteme buď ze vzorce

$$8.4 (16) \quad \tau = \frac{N_1 + N_2 - N_{12}}{2N_1N_2}, \quad \text{je-li} \quad N_1\tau \ll 1, \quad N_2\tau \ll 1,$$

nebo ze vzorce

$$8.4 (17) \quad \tau = 2 \frac{N_1 + N_2 - N_{12}}{(N_1 + N_2) N_{12}}, \quad \text{je-li kromě toho} \quad N_1 \approx N_2.$$

Jsou-li splněny oboje podmínky, dávají oba vzorce zhruba stejný výsledek.

Hořejší přibližné vzorce plynou ze statistické teorie radioaktivity, která vede k tomuto poznatku:

Pravděpodobnost, že z impulsů, které mají průměrnou četnost $\bar{N}$, nepadne do časového intervalu t žádný impuls, je rovna $e^{-\bar{N}t}$. Počet zaznamenaných impulsů bude tedy menší v poměru

$$\frac{N}{\bar{N}} = e^{-\bar{N}\tau}.$$

Jsou-li $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ a $\bar{N}_{12} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2$ skutečné četnosti impulsů, budou registrované četnosti

$$8.4 (18) \quad N_1 = \bar{N}_1 e^{-\bar{N}_1\tau}, \quad N_2 = \bar{N}_2 e^{-\bar{N}_2\tau}, \quad N_{12} = (\bar{N}_1 + \bar{N}_2) e^{-(\bar{N}_1 + \bar{N}_2)\tau}.$$

Jsou-li však bezrozměrné součiny $\bar{N}_1\tau$ a $\bar{N}_2\tau$ malé proti 1, bude též $(\bar{N}_1 + \bar{N}_2)\tau \ll 1$ a 8.4 (18) se zjednoduší na vztahy

$$N_1 = \bar{N}_1(1 - \bar{N}_1\tau), \quad N_2 = \bar{N}_2(1 - \bar{N}_2\tau), \\ N_{12} = (\bar{N}_1 + \bar{N}_2) [1 - (\bar{N}_1 + \bar{N}_2)\tau].$$

Odtud plyne

$$N_1 + N_2 - N_{12} = \{(\bar{N}_1 + \bar{N}_2)^2 - \bar{N}_1^2 - \bar{N}_2^2\} \tau \approx 2\bar{N}_1\bar{N}_2\tau$$

v soulase s 8.4 (16). Mají-li měřené zářiče četnosti kolem 100 s^{-1} ($6\,000\text{ min}^{-1}$), dává tento vzorec hodnoty τ ($\approx 10^{-4}\text{ s}$) s relativní chybou řádu 10^{-2} .

Jsou-li četnosti N_1 a N_2 aspoň přibližně stejně velké, můžeme mrtvou dobu počítat také ze vzorce 8.4 (17), který je sice složitější, ale uvádí se v literatuře. Proto jej rovněž odvodíme. Položíme-li

$$\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \bar{N},$$

dostaneme vzhledem k 8.4 (18)

$$N_1 + N_2 = 2\bar{N} e^{-\bar{N}\tau} = N_{12} e^{2\bar{N}\tau} \cdot e^{-\bar{N}\tau} = N_{12} e^{\bar{N}\tau}.$$

Logaritmováním plyne po úpravě

$$\bar{N}\tau = \ln \frac{N_1 + N_2}{N_{12}} = \ln \left(1 + \frac{N_1 + N_2 - N_{12}}{N_{12}} \right) \approx \frac{N_1 + N_2 - N_{12}}{N_{12}},$$

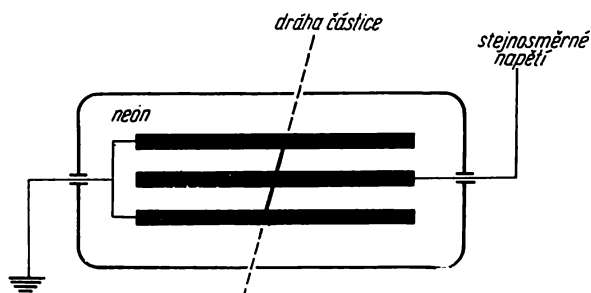
a protože

$$\bar{N} \approx \frac{1}{2} (N_1 + N_2),$$

platí přibližný vzorec 8.4 (17).

Jiskrové počítače

U jiskrových počítačů se využívá k počítání ionizačních částic jiskrového výboje mezi anodou (nebo několika takovými anodami) z velmi tenkého drátu, a dostatečně blízkou



Obr. (8.4) 11. Jiskrový počítač deskový

deskovou katodou z vyleštěného kovu. Vložíme-li na tyto elektrody, uložené ve vzduchu za normálního tlaku, dosti vysoké napětí, při němž nastává korónový výboj (3 000 až 4 000 V), projeví se průlet silně ionizující částice jiskrovým výbojem. Tyto počítače byly v poslední době zdokonaleny zejména tím, že elektrody byly uloženy do argonu za normálního tlaku s přidávkou alkoholu. Mají velmi dlouhou plošinu (řádu 1 000 V) a velmi krátký impuls (10^{-9} s) a kromě toho registrují jen částice α , kte-

ré tak mohou odlišit i od dosti intenzivního pozadí β a γ . Registrace se provádí buď elektronicky, nebo fotografickým záznamem jiskry.

Byly také sestaveny jiskrové počítače s deskovými elektrodami v neónové atmosféře. Na obr. (8.4) 11 vidíme takový počítač s anodou mezi dvěma uzemněnými katodami.

Krystalové počítače

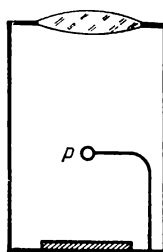
U některých velmi čistých a dokonalých krystalů, např. u diamantu a u sirníku kademnatého CdS, vzniká ozářením (α nebo β) značné zvýšení elektrické vodivosti, způsobené uvolněním elektronů z atomů krystalu. Příslušné proudové impulsy mohou být elektronicky registrovány podobně jako impulsy v počítačích GM. U některých krystalů vznikají takové impulsy jen za velmi nízkých teplot, jak pozoroval van Heerden na krystalech chloridu stříbrného AgCl již r. 1945.

Krystalové počítače se konstruují buď tak, že se k povrchu diamantu přiloží těsně vedle sebe dvě elektrody (vzdálené asi 0,03 mm), nebo tak, že se vyrobí z krystalu planparalelní destička, která se pokoví a vloží mezi elektrody. V prvním případě stačí k zaznamenání impulsů napětí 5 V, v druhém 100 V. Krystalové počítače dávají velmi krátkodobé impulsy (10^{-7} s), a proto mají velkou rozlišovací schopnost.

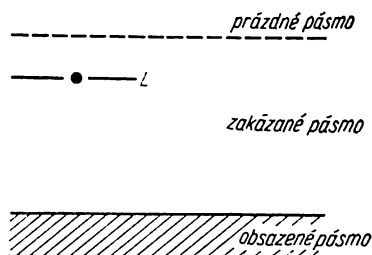
Nejstarším a nejjednodušším přístrojem toho druhu je známý *Crookesův spintariskop* [obr. (8.4) 12]. Je to drobné fluorescenční stínítko, na které dopadají z velmi slabého preparátu P částice α budící slabé záblesky (scintilace), které lze pozorovat odpočatým okem pomocí lupy. Rovněž známé je použití fluorescenčního stínítka v rentgenové diagnostice, ale teprve v poslední době byla tato metoda technicky tak zdokonalena, že se stala jednou z nejvýhodnějších měřicích metod jaderné fyziky.

Než přistoupíme k popisu moderních scintilačních počítačů, vyložíme krátce fyzikální princip jejich funkce. Podle pásmové teorie krystalů (viz čl. 7.5.4, 7.5.5) je izolant charakterizován tím, že vodivostní energetické pásmo, které je

prázdné, je od plně obsazeného pásma odděleno zakázaným pásmem šířky několika eV. Podobně jako znečištěním nevodivého krystalu vznikají v zakázaném pásmu místní energetické hladiny [obr. (7.5) 12], mohou v luminiscenčních látkách vzniknout podobné místní hladiny, kterým říkáme *luminiscenční centra*, jak je naznačeno schematicky na obr. (8.4) 13 hladinou L . Tato



Obr. (8.4) 12. Spintariskop



Obr. (8.4) 13. Luminiscenční centrum v aktivovaném scintilátoru

centra vznikají vniknutím iontů cizího prvku do krystalové mřížky iontového krystalu, který se tak stává *aktivovaným scintilátorem*. Cizí prvek se nazývá *aktivátor*. Tak např. krystal sirníku zinečnatého se aktivuje stříbrem nebo mědí, čímž vzniká scintilátor $\text{ZnS}(\text{Ag})$ nebo $\text{ZnS}(\text{Cu})$. Podobně značí $\text{NaI}(\text{Tl})$ krystal iodidu sodného aktivovaný taliem.

Vnikne-li do krystalu dostatečně energická nabitá částice nebo foton, může některý elektron z obsazeného pásma nebo elektron z atomu aktivátoru přeskočit do prázdného vodivostního pásma. Při zpětném přechodu z tohoto vzbuzeného stavu může být takový elektron zachycen luminiscenčním centrem L , při čemž vyzaří foton fluorescenčního záření (optického).

Podobné luminiscenční jevy mohou vznikat i v organických látkách, ale jejich vysvětlení je obtížnější. Při tom je vhodné užít pojmu excitonu, o kterém jsme se zmínili na konci čl. 7.5.5. Jako organické scintilátory jsou známy např. naftalen, stilben a antracén.

Při ozáření některých krystalů jaderným zářením mohou se vytvořit tzv. *barevná centra*. Prochází-li např. krystalem NaCl záření s energií větší, než je šířka zakázaného pásma, ionizuje záporné ionty Cl^- a uvolněné elektrony se spojí s některými ionty Na^+ . Tím vzniknou v některých uzlových bodech mřížky neutrální atomy sodíku. Tak se vytvoří v obsazeném pásmu kladné díry a elektrony přejdou do pásma vodivostního. Při tom se mohou zachytit na tzv. *Schottkyho poruchách* či *vakancích*, jak nazýváme místa v mřížce, kde chybějí příslušné ionty. Tak vznikají elektronová a děrová barevná centra, která význačně absorbují některé vlnové délky v oboru viditelného světla, takže se krystal po ozáření jeví zbarveným. Tento kolorizační účinek se skutečně pozoruje na různých látkách, které se zbarvují do žluta nebo do hněda.

Scintilační počítače se vhodným způsobem sestavují ze scintilátoru, fotonásobiče a registračního zařízení se zdrojem napětí. Mezi scintilátor, který bývá obklopen reflektorem (např. aluminiovou fólií) odrážejícím záření zpět do krystalu, a fotonásobič se vřazuje *světlovod*, což je průhledná látka, která zprostředkuje optický styk jmenovaných součástí. Část fotonů vzniklých luminiscencí dopadá na fotokatodu násobiče, na jehož sběrné elektrodě se vytvoří napěťový impuls, který se zesílí a dále elektronicky zpracuje. Napěťový impuls má důležitou vlastnost, že je úměrný energii registrované částice. Proto je možno

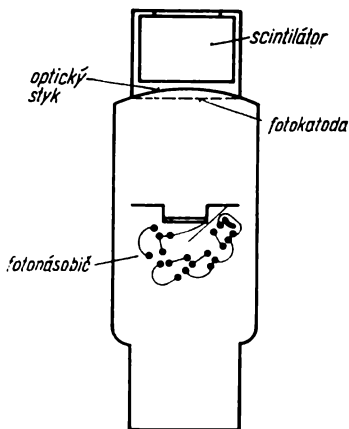
scintilačních počítačů užívat jako *spektrometrů* záření. Další výhodou těchto počítačů je krátkodobost fluorescenčních záblesků, jak je zřejmé z tab. (8.4) I. Konečně se scintilační počítače vyznačují velkou účinností, která zvláště pro záření γ je mimořádně vysoká. Některé scintilátory (např. antracén) jsou vhodné k registraci všech nabitých částic (elektronů, protonů, deutronů, helionů), a dokonce i rychlých neutronů, jež vyražejí z jejich molekul protony, které budí záblesky schopné registrace.

Obr. (8.4) 14 ukazuje schéma běžného scintilačního počítače s pevným scintilátorem.

Tabulka (8.4) I

Trvání záblesků scintilátorů

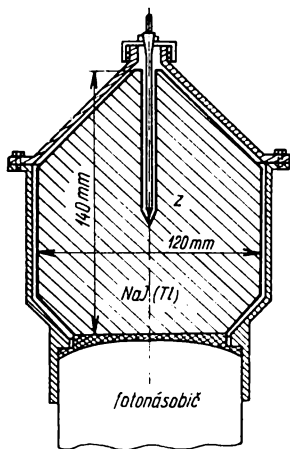
ZnS	5	μs
NaI(Tl)	0,25	
Naftalen	0,07	
Antracén	0,03	
Terfenyl	0,008	
Stilben	0,008	
CsI(Tl)	0,005	



Obr. (8.4) 14. Jednoduchý scintilační počítač

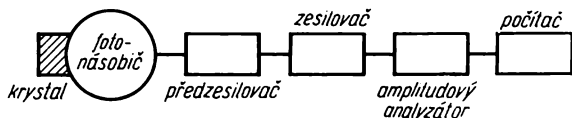
Obr. (8.4) 15 podává schéma scintilačního „počítače 4π “, u něhož se měřený zářič Z vkládá přímo do scintilátoru, který proto zachycuje záření v celém prostorovém úhlu 4π . Tak se dosahuje pro zářiče γ až 90 % účinnosti.

Kapalinové scintilátory jsou výhodné zvláště proto, že jejich velikost ani tvar nejsou nijak omezeny. Používá se jich např. při studiu kosmického záření a při detekci záření neutrinového, které k nám přichází z vesmíru [viz obr. (8.1) 2].



Obr. (8.4) 15. Schéma scintilačního počítače 4π

Závěrem vysvětlíme aspoň princip *scintilačního spektrometru gama* podle schematického obr. (8.4) 16. Záblesky vzbuzené zářením ve scintilátoru se přemění ve fotonásobiči v impulsy, které po dvojnásobném zesílení a po úpravě na vhodný tvar vstupují do analyzátoru amplitud. V tomto analyzátoru se impulsy třídí podle své velikosti do jednotlivých kanálů, v nichž se odděleně počítají. Jako scintilátor je tu výhodný NaI(Tl) pro svou vysokou účinnost. Běžně se vyrábějí mnohokanálové spektrometry s několika sty či tisíci kanálů (výjimečně až 24 000).



Obr. (8.4) 16. Schéma scintilačního spektrometru γ

Čerenkovovy počítače

Tyto počítače se liší od scintilačních počítačů jen tím, že k registraci jaderného záření užívají místo luminiscence tzv. *Čerenkovova záření*, který toto záření objevil r. 1934 a prostudoval jeho vlastnosti. Teorie Čerenkovova jevu podali Frank, Tamm a později Ginzburg.

Ukázali, že toto optické záření vzniká průchodem nabité částice izolantem, jestliže má částice rychlost větší, než je rychlost světla v izolantu. Při tom nejde o nějaký druh brzdného záření, protože Čerenkovovo záření se pozoruje i při rovnoměrném pohybu částice. Je-li n (absolutní) index lomu izolantu pro optické záření (viditelné světlo) a označíme-li $\beta = v/c$ poměr rychlosti částice k rychlosti světla ve vakuu (jako v teorii relativity), zní podmínka vzniku Čerenkovova záření $v > c/n$ čili

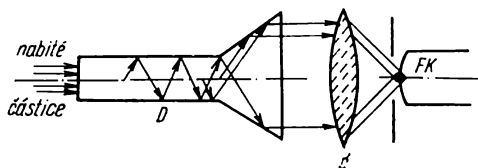
$$8.4 (19) \quad \beta n > 1.$$

Lze ji splnit snadno zvláště u elektronů, užijeme-li látky s dosti velkým indexem lomu, jako je plexisklo nebo jiné průhledné organické látky. Z teorie plyne, že Čerenkovovo záření se šíří ve směru, který svírá se směrem pohybu částice ostrý úhel

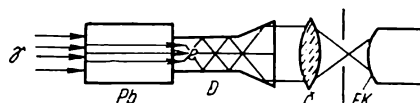
$$8.4 (20) \quad \Theta = \arccos \frac{1}{\beta n},$$

což bylo měřením potvrzeno.

Ačkoliv Čerenkovovo záření je velmi slabé, lze ho použít k registraci velmi rychlých nabitých částic, přeměníme-li je na elektrické impulsy fotonásobičem. Je to znázorněno



Obr. (8.4) 17. Čerenkovův počítač nabitých částic



Obr. (8.4) 18. Čerenkovův počítač pro záření γ

na obr. (8.4) 17, který ukazuje úpravu Čerenkovova počítače pro nabité částice, pro které je splněna podmínka 8.4 (19).

Částice vnikají ve směru osy přístroje do izolantu (dielektrika) D , který je tvarován tak, aby se fotony Čerenkovova záření totálními odrazy na povrchu izolantu přivedly v co největším počtu na čočku C , která je soustředí na fotokatodu FK násobiče. Takto konstruovaný počítač je vhodný pro registraci záření β a vůbec všech částic vysokých energií, a to jak kosmických, tak i částic urychlených moderními obřími urychlovači. Bylo jich použito i při objevu antinukleonů a užívá se jich při studiu hyperonů a antihyperonů.

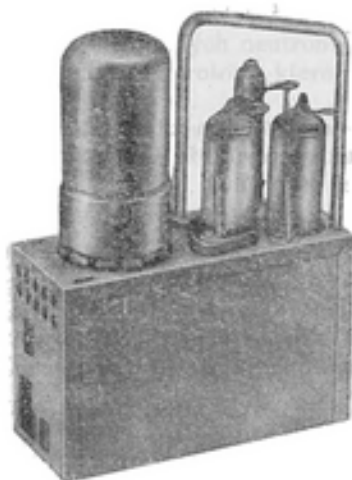
Čerenkovovy počítače lze přizpůsobit i k registraci fotonů, přeměníme-li je průchodem látkou s vysokým atomovým číslem na rychlé elektrony. Tak dostaneme počítač znázorněný na obr. (8.4) 18. Záření γ vniká do oloveného bloku Pb , z něhož vystupují rychlé elektrony vytvářející v plexiskle Čerenkovovo záření, které se soustředí na fotokatodu násobiče.

Elektronická zařízení počítačů

Přehled různých druhů počítačů, který jsme podali v tomto článku, doplníme velmi stručným výčtem elektronických zařízení, kterých se běžně užívá při provozu počítačů.

Reduktory impulsů. Impulsy mají u ionizačních komor velikost kolem $10 \mu V$, u proporciálních počítačů asi $10 mV$ a u počítačů GM jsou řádu $10 V$. Proto se zesilují elektronkovými zesilovači a přivádějí se — po úpravě velikosti a tvaru — do počítačů, které zaznamená každý prošlý impuls, pokud není jejich četnost příliš velká. Obvyklá mechanická počítačidla stačí beze ztrát zaznamenat impulsy s největší četností asi $10 s^{-1}$, tj. 600/min. Proto se užívá reduktorů, které redukují počet impulsů ve zvoleném poměru. Jednoduchý je princip dvojkového (binárního) reduktoru, jehož podstatou je elektronický

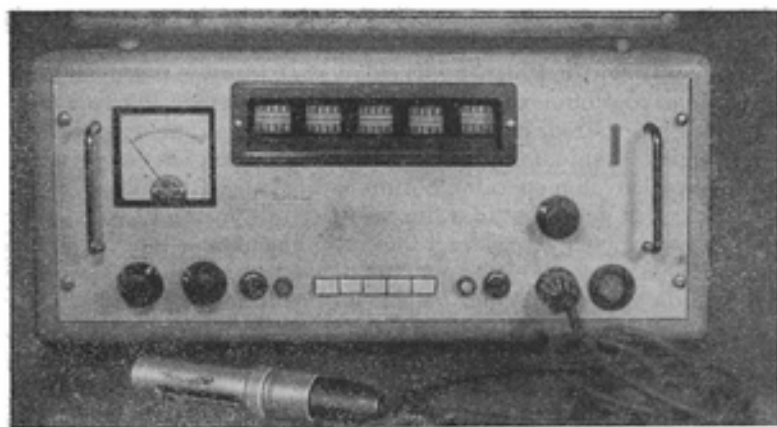
obvod s dvěma elektronkami v „klopném zapojení“; má dva stabilní stavy, při nichž jedna elektronka má na mřížce kladné předpětí, takže jí prochází anodový proud, kdežto druhou proud neprochází, protože má předpětí záporné. Každým impulsem se vyvolá změna stavu v opačný, a tak se dosáhne toho, že se zaznamená jen každý druhý impuls. Zařazením n takových binárních reduktorů se sníží počet impulsů v poměru 2^n a vhodnou úpravou obvodů lze vytvořit *dekadické reduktory*. Ty se pak mohou řadit za sebou, takže je možno registrovat impulsy velmi vysoké četnosti. V elektronkových počítacích zařízeních se obvykle řadí za sebou tři dekády, které udávají stav zaznamenaných impulsů od 0 do 999 třemi řadami neónek, které se postupně rozsvěcí, jak roste počet impulsů. Tisícovky se čtou na mechanickém počítadle.



Obr. (8.4) 19. Snímek dekadické počítací elektronky (svazkové)

V novější době se nahrazují složité dekadické reduktory jednodušším zařízením, které má menší počet elektronek, a tím také menší poruchovost. Jsou to tzv. *dekadické počítací elektronky*, z nichž každá zastupuje jednu dekádu dosavadních reduktorů. Počítací elektronka je uzpůsobena tak, že úzký elektronový svazek vystupující ze žhavené katody může zajmout jednu z deseti stabilních poloh. V každé stabilní poloze svítí příslušná fluorescenční značka, vyznačená na baňce elektronky pořadovým číslem 0, 1, ... až 9. Při každém impulsu se svazek elektronů zamíří na sousední značku s vyšším číslem, takže okamžitý stav počítáče je zřejmý ze svítících značek ně-

kolika počítacích elektronek, které ukazují jednotky, desítky, stovky, ... právě registrovaných impulsů. Podobně pracují *dekadické výbojky*, zvané též *dekatrony*.

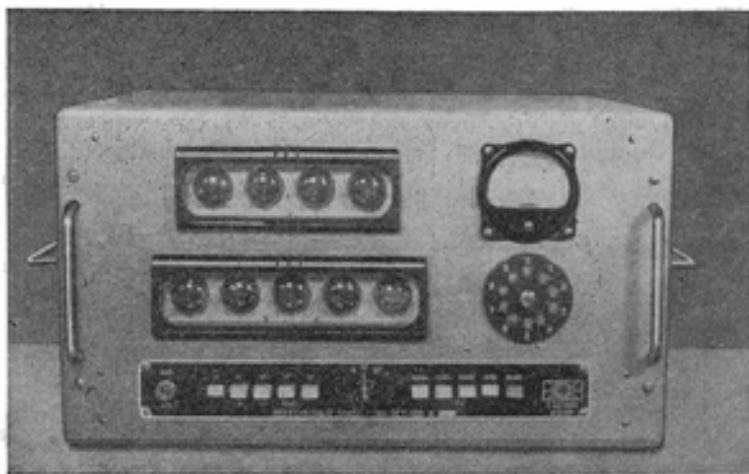


Obr. (8.4) 20. Snímek počítáče s dekadickými elektronkami (svazkovými)

Na obr. (8.4) 19 vidíme snímek dekadické počítací elektronky s číselnými značkami a na obr. (8.4) 20 je celkový pohled na registrační zařízení vybavené takovými elektronkami. Obr. (8.4) 21 ukazuje sovětský počítáč s dekatrony.

Integrátory impulsů čili *měřiče četnosti* impulsů jsou elektronická zařízení, která umožňují přímé čtení průměrné četnosti impulsů na měřicím přístroji (např. na elektronkovém voltmetru). Statistické kolísání se značně zmírní, připojíme-li paralelně k měřicímu přístroji člen s dosti velkou časovou konstantou danou součinem RC . Integrátorů užíváme zvláště

k průběžnému měření okamžité četnosti impulsů a bývají kalibrovány přímo v četnosti impulsů. Přístroje kalibrované v jednotkách intenzity, např. v R/min nebo R/h, se nazývají *intenzimetry*.



Obr. (8.4)'21. Sovětský počítač Volna s deka-trony (dekadickými výbojkami)

8.4.4. Pozorování drah nabitých částic

Pozorování drah nabitých částic — ať už kosmických, či uměle získaných v urychlovačích — je velmi důležité pro identifikaci částic a pro studium jejich vlastností. Různé metody stopování pohybu částic a zviditelňování jejich drah podávají informace různého stupně. Probereme je stručně od nejméně dokonalých až k nejdokonalějším.

Metoda koincidenční a antikoincidenční

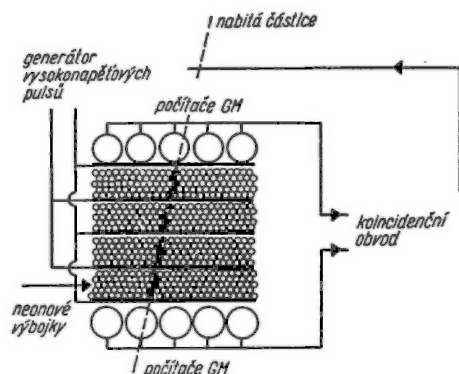
Nejprimitivnější informace o pohybu nabité částice v prostoru dává zjištění, že částice buď prošla, nebo neprošla dvěma nebo několika počítači. Při velké rychlosti a malé vzdálenosti počítačů musí impulsy v obou počítačích vzniknout prakticky „současně“ čili musí koincidovat. Upravíme-li obvod tak, že oba impulsy vedeme na mřížku téže elektronky, dosáhneme snadno diskriminátorem toho, že se zaznamenají jen současné impulsy. Při tomto *koincidenčním* zapojení je třeba rozlišovat pravé koincidence od nepravých koincidenčí, vzniklých nahodilými současnými impulsy, které fyzikálně spolu nesouvisí. Podobně můžeme vyloučit ze záznamu koincidující impulsy, čímž dostáváme tzv. *antikoincidenční* zapojení.

Tato zapojení mají rozmanité aplikace. Koincidenční zapojení několika rovnoběžných a v přímé řadě položených počítačích trubic je podstatou tzv. *počítačových teleskopů*, které zaznamenávají jen průchod částic letících zvoleným směrem. Rovněž se jich užívá při spouštění (uvádění do chodu) různých druhů komor zviditelňujících trajektorie částic, o nichž promluvíme v dalším výkladu. Antikoincidenčním zapojením lze snížit nulový chod počítače při měření slabých zářičů apod. Vhodně sestavené počítače mohou tvořit *hodoskop*, z něhož lze usuzovat na způsob pohybu částice. Připojíme-li ke každému z počítačů, vhodně uspořádaných v prostoru, neónovou doutnavku, která zazáří, projde-li počítačem částice, můžeme vhodným rozmístěním počítačů zobrazit dráhu částice na panelu pokrytém doutnavkami. Dráhu částice je možno zobrazit pomocí neónových výbojek také jiným způsobem, kterého užili r. 1955 Conversi a Gozzini při konstrukci *hodoskopické komory*

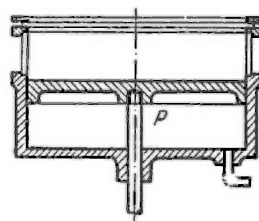
[obr. (8.4) 22]. Proletí-li částice napříč komorou, přivede koincidenční obvod na kovové desky nárazové vysoké napětí a neónové výbojky, v nichž byl neón částicí ionizován, se rozsvítí.

Mlžné komory

První skutečný „dráhový detektor“ sestrojil Wilson r. 1911. Je to dnes ještě hojně používaná *expanzní mlžná komora Wilsonova*, jejíž činnost je založena na poznatku, že ve vzduchu mírně přesyceném parami (vodními, alkoholovými aj.) se srazí na iontech (zejména záporných) drobné kapičky, ochladíme-li směs náhlou adiabatickou expanzí. Projde-li tedy přesyceným vzduchem během expanze ionizační částice, můžeme pozorovat stopu její dráhy, osvětlíme-li ze strany sled kapiček, které na své dráze vytvoří. Výrok, že v mlžných



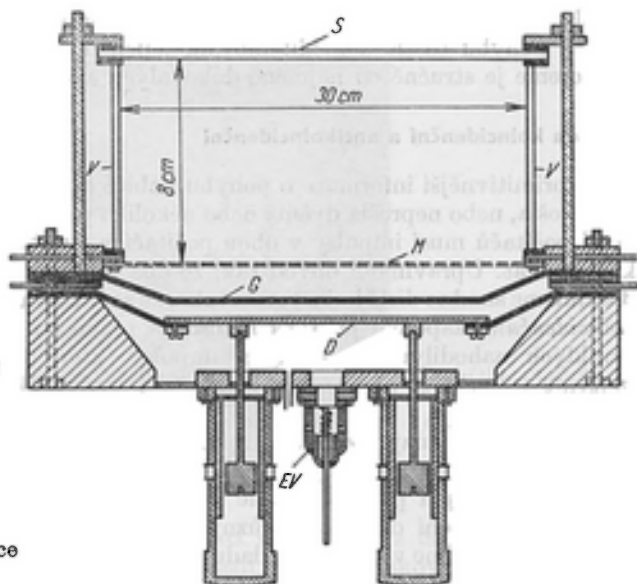
Obr. (8.4) 22. Hodoskopická komora



Obr. (8.4) 23. Wilsonova komora s axiální expanzí



Obr. (8.4) 25. Stopy záření α z ThC a ThC' v expanzní komoře



Obr. (8.4) 24. Blackettova konstrukce expanzní komory

(i ostatních) komorách zanechávají stopy ionizační částice, není zcela přesný, pokládáme-li za částici i foton. Foton sice také ionizuje, ale může ionizovat (nebo vzbudit) pouze jeden atom, kterým je absorbován. Tímto atomem začíná i končí jeho ionizační dráha. Proto je správné říci, že ve všech druzích komor se zviditelňují jen dráhy nabitých částic, protože

neutrální částice (ani látkové) nezanechávají stop. Podmínkou správné funkce komory je vhodné zvětšení objemu vyjádřené expanzním poměrem. Pro různé směsi par leží tento poměr mezi 1,1 až 1,37 a trvání expanze bývá 10–20 ms. Kapičky rostou však po dobu 50 až 250 ms a zotavovací doba, po kterou komora nemůže zaznamenat další částice, je několik desítek vteřin.

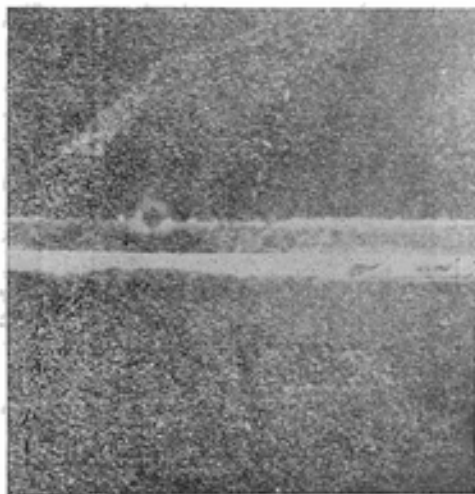
Schematický obr. (8.4) 23 ukazuje klasický typ Wilsonovy komory s axiální expanzí, které se dosáhne náhlým snížením pístu P ve válcové komoře, jejíž horní část je skleněná.

Z této původní konstrukce byly časem vyvinuty různé typy expanzních komor upravené pro rozmanité účely. Zejména pohyb pístu, jehož dokonalé utěsnění činí nesnáze, se nahrazuje prohnutím pryžové membrány G na doraz k desce D a víření plynové náplně v komoře se zmírňuje vhodně umístěnou drátěnou sítkou M , jak vidíme na obr. (8.4) 24 Blackettovy válcové komory z r. 1934. EV značí elektromagnetický ventil, kterým se ovládá expanze.

K identifikaci částic v mlžné komoře je výhodné užít magnetického pole, jak poprvé učinil Skobel'cyn (r. 1927). Ze zakřivení dráhy částice v poli je totiž možno poznat nejen znaménko jejího náboje, ale lze získat též informace o její hmotnosti, energii apod. Různé druhy částic se rozeznávají podle hustoty kapiček, které zanechává na své stopě.

Dnes se hojně pracuje s komorami řízenými vhodně rozloženými počítací (v koincidenčním nebo antikoincidenčním zapojení), které komoru uvádějí v činnost a řídí její

Obr. (8.4) 26. Proslulý Andersonův snímek průchodu pozitronu olovenou deskou (6 mm tlustou) ve Wilsonově komoře. Ze zakřivení dráhy v magnetickém poli (vstupujícím zpredu kolmo do papíru) plyne, že částice má nad deskou energii 63 MeV a pod ní jen 23 MeV. Pohyb se tedy děl shora dolů a částice má nutně kladný náboj. Neml to proton, který by měl při stejné energii desetkrát menší dolet!!



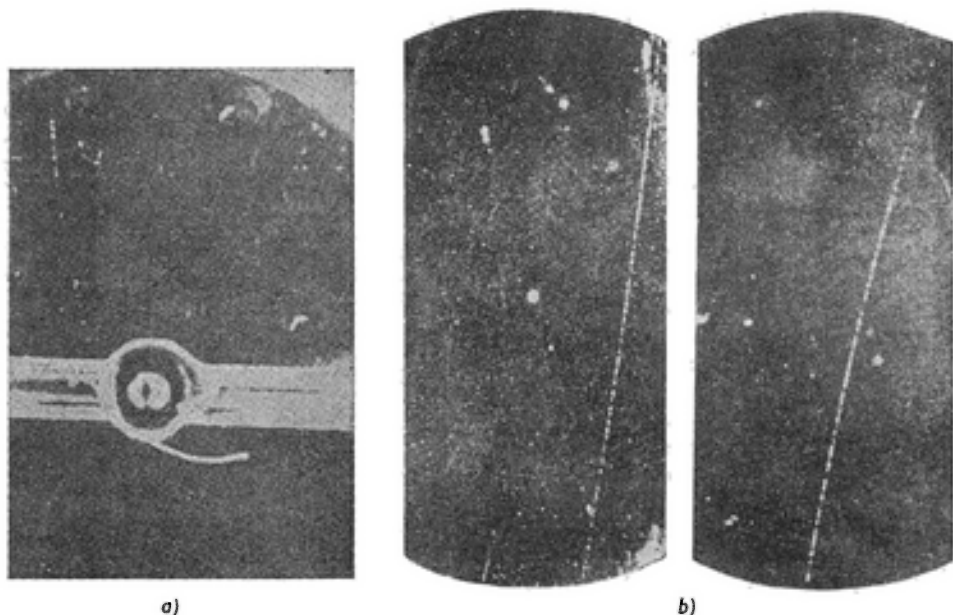
funkci. Užívá se komor *vysokotlakých*, vhodných pro stopování částic vysoké energie, které mají v plynech za normálního tlaku příliš velký dolet. Stopy drah se často fotografují dvěma přístroji ze dvou různých úhlů, čímž vznikne *stereoskopický* snímek, z něhož je možno rekonstruovat průběh dráhy v prostoru.

Uvádíme několik typických snímků pořízených expanzními komorami. Na obr. (8.4) 25 vidíme stopy částic α vyslaných ThC (s menším doletem asi 3 cm) a částic α z ThC' (s větším doletem přes 9 cm). Historicky významný snímek, na kterém Anderson (r. 1933) objevil v kosmickém záření pozitron, reprodukuje na obr. (8.4) 26. Od té doby se staly běžnými snímky elektronových dvojčat, která vznikají při průchodu velmi energetického fotonu olovem [viz např. obr. (6.6) 1]. V kosmickém záření byl objeven r. 1937 Andersonem a Neddermayerem také *mion* μ , který dnes počítáme mezi leptony [srov. tabulku (8.1) I], a proto nepoužíváme pro mion staršího názvu mezon μ , který vznikl v době, kdy byl objeven. Obr. (8.4) 27a ukazuje Andersonův snímek v expanzní komoře s magnetickým polem, potvrzující existenci mionu, který s velkou energií vniká shora do olovené destičky, v níž se značně zpomalí, takže se po průchodu destičkou v magnetickém poli silněji odchyluje a mnohem více ionizuje. Na obr. (8.4) 27b vidíme vlevo stopu kladného mionu s energií $5,5 \cdot 10^8$ eV, vpravo stopu záporného mionu s energií $2,5 \cdot 10^8$ eV.

Citlivá doba, po kterou je běžná expanzní komora schopna zaznamenat částici, je v mezích 0,05 až 2 s. Aby se zvýšila pravděpodobnost zachycení vzácných náhodných jevů,

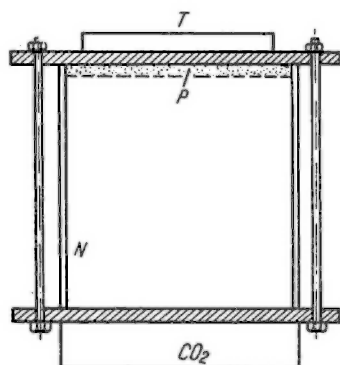
konstruují se komory s automatickou pomalou expanzí. Tím se ovšem jen zmírní nepříznivá vlastnost všech expanzních komor, že pracují pouze po dobu expanze, tedy nespojitě.

Tento zásadní nedostatek byl odstraněn teprve u tzv. *difúzních mlžných komor*, v nichž se dosahuje trvalého přesycení plynu parami vhodně voleným teplotním spádem. Páry difundují z teplejších míst do chladnějších, a tím se vytvoří několikacentimetrová citlivá



Obr. (8.4) 27. a) Konec dráhy mionu, zpomaleného průchodem olověnou destičkou v expanzní komoře b). Stopy dvou mionů kosmického záření v expanzní komoře s magnetickým polem

vrstva, v níž zanechávají ionizační částice viditelné stopy. Schéma takové komory, v níž klesá teplota shora dolů a kterou poprvé sestrojil Langsdorf (r. 1939), podává obr. (8.4) 28. Plyn s parami některého z alkoholů (etyl, metyl, propyl, kterým je nasáknut plstěný kotouč P) obsažený ve skleněné nádobě N se shora vyhřívá topnou deskou T a zdola udržuje na nízké teplotě (pevným CO_2 nebo kapalným héliem), takže po jisté době se vytvoří trvalý teplotní gradient. Taková komora pracuje pak nepřetržitě, což je výhodné při studiu kosmického záření a při pozorování jevů, které vznikají v komoře průchodem částic urychlených velkými urychlovači.



Obr. (8.4) 28. Schéma difúzní mlžné komory

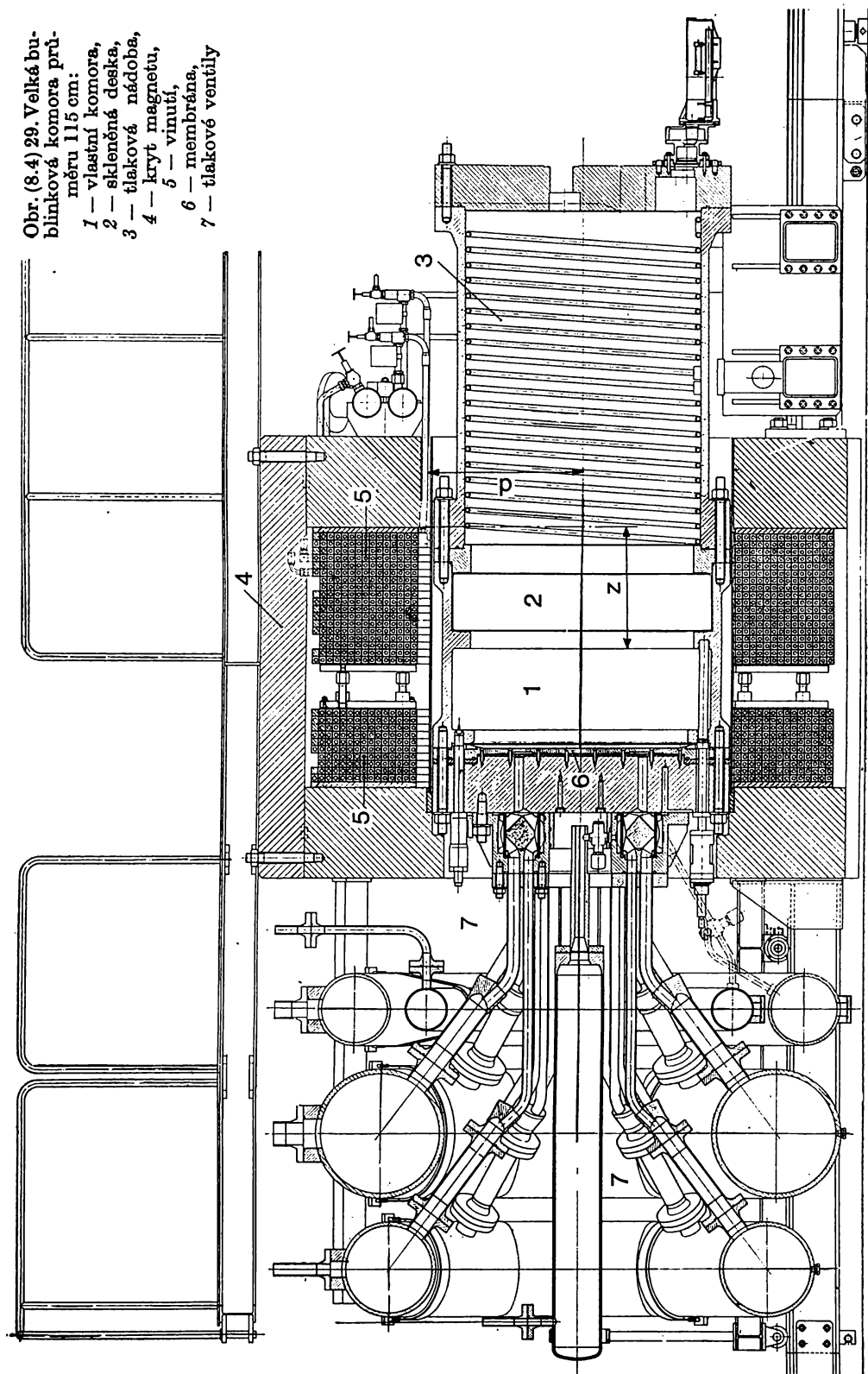
Bublinková komora

Přehřátá kapalina držená pod tlakem se při nepatrném snížení tlaku začne bouřlivě vypařovat v místech, kudy prošla ionizační částice. Energie ztracená ionizací způsobí vznik drobných bublin páry podél dráhy částice, které během 1 ms narostou tak, že je lze fotografovat. Za tak krátkou dobu se stopa dráhy ani podstatně nedeformuje, ani se nenaruší stopami cizího záření. Za 1 až 3 s je komora znovu připravena k záznamu další stopy.

První bublinkovou komoru plněnou kapalným éterem sestrojil r. 1953 Glaser. Dnes se užívá bublinkových komor velikých rozměrů k sledování dějů vyvolaných částicemi vytvo-

Obr. (8.4) 29. Velká bu-
binková komora prů-
měru 115 cm:

- 1 – vlastní komora,
- 2 – skleněná deska,
- 3 – tlaková nádoba,
- 4 – kryt magnetu,
- 5 – vinutí,
- 6 – membrána,
- 7 – tlakové ventily

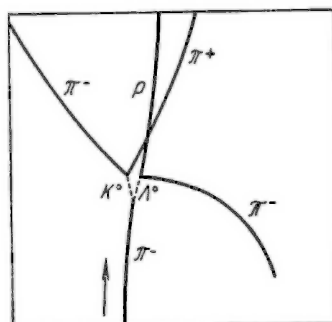


řenými obřími urychlovači. Důvod je v tom, že v kapalném prostředí, které má podstatně větší hustotu než plynová náplň mlžné komory, je dolet i vysoce energických částic v přijatelných mezích. Na obr. (8.4) 29 je schéma bublinkové komory sestrojené pro protonový synchrotron 25 GeV (Cern v Ženevě). Je to válcová komora vnitřního průměru 1 150 mm, která obsahuje 500 l kapalného freonu (CF_3Br) pod tlakem 18 at a pracuje při teplotě kolem 30 °C. Expanze (o 3 %) se provádí pryžovou membránou 6, která se vychýlí působením ventilů 7.

Obr. (8.4) 30a ukazuje snímek pořízený v magnetickém poli bublinkovou komorou



a)

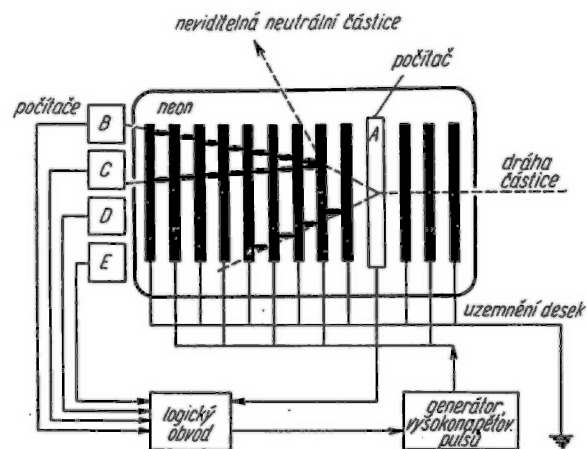


b)

Obr. (8.4) 30. Rozpad záporného pionu v bublinkové komoře: a — snímek stop částic v magnetickém poli, b — klíčové schéma

(průměru 180 cm) plněnou kapalným vodíkem v Lawrenceově radiační laboratoři. Zachycený úkaz vysvětluje schéma na obr. (8.4) 30b, kde jsou stopy částic označeny podle tab. (8.1) I. Záporný mion π^- vnikl na spodním okraji obrázku do komory, interakcí s protonem vodíkové náplně vytvořil dvě neutrální částice kaon K_1^0 a hyperon Λ^0 . Během svého krátkého života ($\approx 10^{-10}$ s) urazily obě částice krátké dráhy, na nichž nevytvořily viditelné stopy. Rozpadem K_1^0 však vznikla podle tab. (8.1) I dvojice pionů π^- a π^+ , jejichž polarita

je zřejmá ze zakřivení jejich stop. Podobně se přeměnil hyperon Λ^0 na proton a záporný pion v soulase s tím, že dráha protonu je méně zakřivena než dráha π^- , který je skoro sedmkrát lehčí než proton a odchyluje se na opačnou stranu.



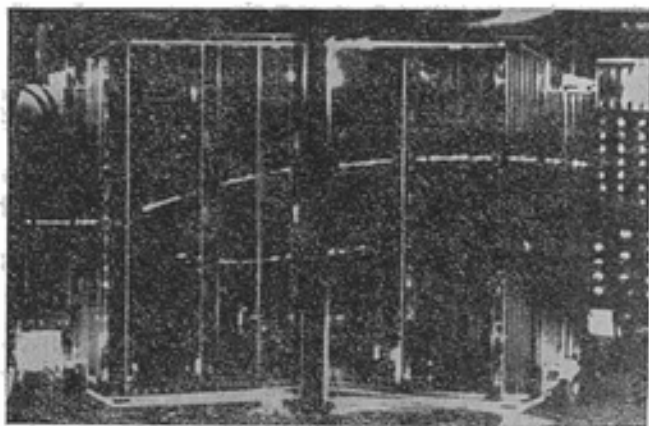
Obr. (8.4) 31. Schéma jiskrové komory

Jiskrová komora

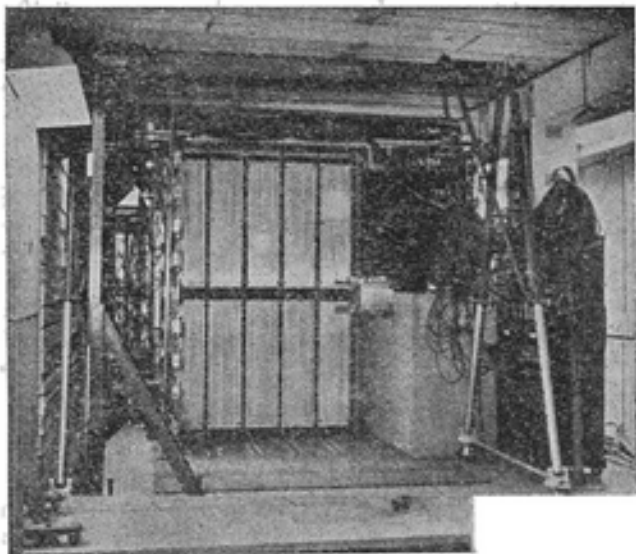
Tento nejnovější typ „dráhového detektoru“ vznikl spojením principů jiskrového počítače a hodoskopické komory. Ačkoli obě tato zařízení pracují s neónem, užili Cranshaw a Beer při konstrukci první jiskrové komory (r. 1957) výbojů v šesti vzduchových mezerách (tloušťky 1 mm). Teprve

Fukui a Miyamoto (r. 1959) se vrátili k neónu, v němž nastává jiskrový výboj již při třikrát nižším napětí než ve vzduchu. Kromě toho se ukázalo, že ve vzduchu nemůže vzniknout více než jedna jiskra v téže mezeře současně. Schéma jiskrové komory podává obr. (8.4) 31, který funkci komory dostatečně objasňuje. Snímek na obr. (8.4) 32 ukazuje děj podobný tomu, který je zachycen na obr. (8.4) 30. Pion vniknuvší zleva do komory vytvořil dvě neutrální nestabilní částice, které nezanechaly stopy a které se rozpadly ve dvojice opačně nabitých částic.

Velkou předností jiskrové komory je její schopnost vybrat a zaznamenat dosti vzácné jevy, i když komorou prochází velké množství částic. Je tomu tak proto, že její citlivá doba je řádu 10^{-7} s, tedy asi tisíckrát kratší než u komory bublinkové, která má zase lepší prostorovou rozlišovací schopnost. Proto se jí užívá u urychlovačů se slabším tokem částic, kdežto jiskrová komora může pracovat i při velmi intenzivních tocích částic (10^6 s^{-1}). Na obr. (8.4) 33 vidíme jiskrovou komoru, na které byly r. 1962 v Brookhavenu zachyceny interakce, které prokázaly existenci dvou různých druhů neutrina.



Obr. (8.4) 32. Děj vzbuzený pionem v jiskrové komoře



13. Brookhavenská jiskrová komora

Jaderné emulze

Že radioaktivní záření působí na fotografickou emulzi, je známo od dob Becquerelových, který právě na základě tohoto působení radioaktivitu objevil. Ještě dnes se užívá této metody jednak v tzv. gama-defektoskopii (viz čl. 8.8.5), jednak v dozimetrii, zejména v rámci biologické ochrany pracovníků s radionuklidy. I u nás je zavedena průběžná kontrola dávek *filmovými dozimetrii*, které nosí pracovníci (vecdozimetrii) nři. nráci a jejichž zřerua, ní se po vhodné době vyhodnotí v rentgenech.

Nabité částice s dosti velkou energií (jako částice α a β) jsou však schopny proběhnout ve fotografické emulzi mikroskopické vzdálenosti, při čemž ionizují halogeny stříbra rozptýlené v emulzi a uvolňují stříbro z těchto sloučnin. Tak vytvářejí podél své dráhy

latentní obraz, který se po vyvolání projeví sledem zrnek redukovaného kovového stříbra. Normální fotografické emulze jsou citlivé jen na některé částice s dostatečnou energií, ozději však byly fotografické emulze zvláštním způsobem upravovány, až r. 1948 se



Obr. (8.4) 34. Tři příklady rozpadu pionů v jaderné emulzi

Berrimanovi podařilo připravit dokonale *jadernou emulzi* citlivou na všechny nabitě částice s libovolnou energií. Nemůžeme se zde zabývat velmi přísnými technickými podmínkami, které musí být splněny, má-li vyhodnocování vyvolaných emulzí poskytnout správné a úplné informace o částicích a jejich interakcích, které byly pozorovány v nukleárních emulzích. Existuje velký počet různých druhů nukleárních emulzí vyráběných jak v SSSR, tak v Anglii a v USA, jejichž konstanty jsou přesně známy a v nichž zanechávají jednotlivé nabitě částice charakteristické stopy, podle nichž je možno částice identifikovat a zjistit i jejich energii. Vyrábějí se emulze různé tloušťky od 0,05 do 1 mm, a dokonce byly sestrojeny i „emulzní komory“ objemu několika litrů. Uvedeme jen některé z mnohých důležitých poznatků, získaných touto metodou, která se v posledních letech velmi rozšířila a zdokonalila. Jedním z nejpozoruhodnějších úspěchů je objev mezonu π (pionu). R. 1947 pozoroval Powell se svými spolupracovníky v nukleárních emulzích rozpad nabitě částice (těžší než mion), při kterém na konec stopy této částice navazovala stopa lehké částice (mionu), která měla stálou délku kolem 600 μm , ale různé směry. Dnes víme, že tato nová těžší částice je Yukawou předpo-

vědělý pion, který se spontánně přeměňuje [podle tab. (8.1) I] v mion a neutrino.

Z obr. (8.4) 34, který reprodukuje tři případy této přeměny

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

zachycené v jaderné emulzi, je názorně patrné, že pion před svým rozpadem ztratil na své dráze v dolní části snímku rychlost a nepředal nově vzniklé dvojici částic žádnou výslednou hybnost, a proto podle zákona zachování hybnosti musí zároveň s mionem (který se na obrázku pohybuje svisle vzhůru) vzniknout další částice, která má opačnou hybnost než mion a nezanechává stopu v emulzi. To plně souhlasí s hořejším rozpadovým schématem. Podobná situace se jeví na horním konci stop mionů. Pozorujeme u každé z nich stopu slabě ionizující částice, která se zřejmě pohybuje v různých úhlech sklonu k stopě mionu a která byla identifikována jako elektron. Zachování hybnosti vyžaduje vyslání ještě nejméně jedné neutrální částice v souhlase s rozpadovým schématem

$$\mu^- = e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

uvedeným rovněž v tab. (8.1) I.

8.5. Urychlovače iontů

8.5.1. Základy teorie urychlovačů

Jaderná fyzika potřebuje ke studiu základních částic, jaderných sil a nukleárních reakcí částice o mimořádně vysoké energii. Zdrojem takových částic o energiích řádu nejméně 10^6 eV jsou přirozené i umělé radioaktivní nuklidy, kdežto kosmické částice dosahující energií 10^{10} až 10^{17} eV máme k dispozici jen ve velmi malém množství. Proto se od r. 1930 konstruuji urychlovače částic, které prošly rychlým vývojem a poskytují dnes částice s vysokými energiemi, které dosahují již řádu 10^{10} eV (několika desítek GeV).

Moderní urychlovače lze dělit podle několika hledisek: buď na elektrostatické a elektromagnetické, či na lineární a kruhové, nebo konečně na klasické a relativnostní. V této kapitole probereme jen urychlovače iontů (především protonů, deuteronů a helionů), protože urychlovače elektronů jsou pro jadernou fyziku méně významné a protože o nich jsme pojednali již v čl. 5.10.5. Než přistoupíme k popisu hlavních typů iontových urychlovačů, podáme stručnou teorii těchto zařízení, která vzhledem k velikým rychlostem částic musí obecně vycházet z relativistní mechaniky.

Již v čl. 2.9.4 jsme se zmínili, že rozeznáváme formálně tři druhy částic: klasické, relativistní a nadrelativistní (ultrarelativistní); toto třídění částic podle velikosti jejich rychlosti nám bude nyní užitečné.

Celková energie W částice je obecně součtem její klidové energie W_0 a energie kinetické W_k

$$8.5 (1) \quad W = W_0 + W_k = mc^2,$$

kde

$$8.5 (2) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\beta = v/c)$$

je hmotnost částice za pohybu. Částice se Z elementárními náboji e urychlená z klidu napětím U získá podle 5.10 (14) kinetickou energii

$$W_k = ZeU,$$

a bude tedy mít celkovou energii

$$8.5 (3) \quad W = W_0 + ZeU, \quad W_0 = m_0c^2.$$

Označíme-li poměr

$$8.5 (4) \quad \varepsilon = \frac{W_k}{W_0} = \frac{ZeU}{m_0c^2},$$

bude

$$8.5 (5) \quad W = W_0(1 + \varepsilon) = m_0c^2 \left(1 + \frac{U}{U_r} \right),$$

kde

$$8.5 (6) \quad U_r = \frac{W_0}{Ze} = \frac{m_0c^2}{Ze}, \quad \varepsilon = \frac{U}{U_r}.$$

U_r je tzv. *kritické napětí*, které udělí částici energii rovnou její energii klidové. Z hořejších rovnic plynou vztahy

$$8.5 (7) \quad \frac{m}{m_0} = 1 + \varepsilon, \quad \frac{u}{c} = \beta = \frac{\sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1}}{1 + \varepsilon},$$

kteřé v obou krajních případech klasické a nadrelativnostní částice můžeme nahradit jednoduššími vztahy přibližnými:

$$8.5 (8) \quad \text{klasická částice } \varepsilon \ll 1, m \approx m_0, u = c \sqrt{2\varepsilon} = c \sqrt{\frac{2U}{U_r}} = \sqrt{\frac{2W_k}{m_0}},$$

$$8.5 (9) \quad \text{nadrelativnostní částice } \varepsilon \gg 1, m \approx \varepsilon m_0, u \approx c \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon^2}\right).$$

Je zřejmé, že klasická částice (urychlená napětím $U \ll U_r$ na rychlost $v \ll c$) má zhruba stálou hmotnost m_0 a její rychlost roste úměrně s odmocninou z napětí U . Pro relativnostní částici, urychlenou napětím $U \approx U_r$, platí složitější vztahy 8.5 (7). Částice nadrelativnostní, která byla urychlena napětím $U \gg U_r$ na rychlost $v \approx c$ blízkou rychlosti světla, se chová při dalším působení elektrického pole právě opačně než klasická. Její rychlost je již prakticky stálá, ale její hmotnost roste úměrně s urychlujícím napětím.

Klidová energie a kritické napětí jsou pro nejdůležitější částice uvedeny v tab. (8.5) I, z níž plynou pro elektrony a protony hodnoty uvedené ve srovnávací tabulce (8.5) II.

Tabulka (8.5) I

Klidová energie a kritické napětí částic

	Elektron	Proton	Deuteron	Helion
W_0	0,512	938	1 877	3 753 MeV
U_r	0,512	938	1 877	1 877 MV

Tabulka (8.5) II

Závislost rychlosti a hmotnosti elektronu a protonu na urychlovacím napětí

Urychlovací napětí U	Elektron		Proton	
	v/c	m/m_0	v/c	m/m_p
0,5 MV	0,863	1,98	0,032	1,000 5
1	0,940	2,96	0,046	1,001
10	0,999	20	0,147	1,01
100	≈ 1	196	0,426	1,11
1 GV	≈ 1	$1,96 \cdot 10^3$	0,806	2,07
10	≈ 1	$1,96 \cdot 10^4$	0,997	11,66
100	≈ 1	$1,96 \cdot 10^5$	≈ 1	107,6

Pozorujeme zásadní rozdíl dynamiky elektronů a protonů při stejných urychlovacích napětích. Je to způsobeno tím, že elektron se stává relativnostní částicí již při napětích řádu 1 MV a po urychlení napětím 100 MV se chová již jako nadrelativnostní částice. Naproti tomu proton si podržuje klasické vlastnosti až asi do 10 MeV a zůstává relativnostní částicí až do napětí 100 GV. To má velký význam pro urychlovače, jak ukážeme rozбором kruhového pohybu relativnostní částice s úhlovou rychlostí $\omega = 2\pi f$ v magnetickém poli, jehož indukce B je kolmá k rovině dráhy. Je-li r poloměr dráhy, platí vztah

$$8.5 (10) \quad B = \frac{mu}{Zer}$$

obdobný vzorec 5.10 (28) a vzhledem k 8.5 (7)

$$8.5 (11) \quad \omega = \frac{u}{r} = \frac{ZeB}{m} = \frac{Ze}{m_0} \cdot \frac{B}{1 + \varepsilon}.$$

Užijeme-li ještě prvního vztahu 8.5 (6), dostaneme

$$8.5 (12) \quad rB = \frac{U_r}{c} \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1},$$

takže pro klasickou částici

$$8.5 (13) \quad \omega = \frac{Ze}{m_0} B = \omega_0$$

a pro nadrelativistní

$$8.5 (14) \quad crB = U, \quad \omega = \frac{ZeB}{m_0 \varepsilon} = \frac{c}{r} = \omega_\infty.$$

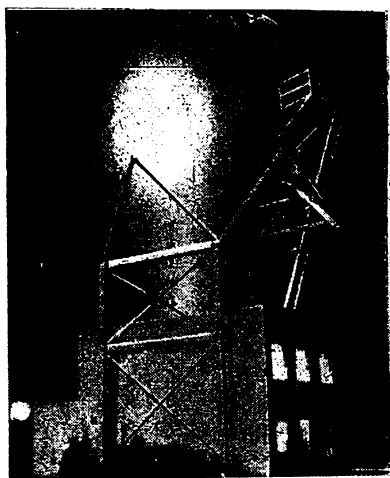
K tomu připojíme poznámku, že nabitá částice vyzáří při každém oběhu energii úměrnou čtvrté mocnině své energie podle teoretického vzorce

$$8.5 (15) \quad \Delta W = \frac{Z^2 e^2}{3r\omega_0} \varepsilon^4.$$

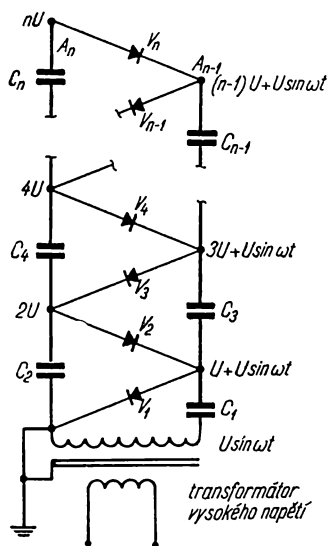
8.5.2. Lineární urychlovače

Lineárními urychlovači rozumíme urychlovače, v nichž se urychlovaná částice pohybuje přímočaře v evakuované urychlovací trubici. Lze je rozdělit na elektrostatické a vysokofrekvenční urychlovače.

K nejstarším urychlovačům patří *elektrostatický generátor vysokého napětí*, známý pod



Obr. (8.5) 1. Van de Graaffův tlakový generátor napětí 4 MV



Obr. (8.5) 2. Schéma kaskádního generátoru

názvem van de Graaffův generátor, jehož princip je zřejmý z obr. (5.2) 25. Moderními tlakovými generátory tohoto typu, u nichž je zdokonalena izolace vysokonapěťové kulové elektrody tím, že je umístěna v tlakové komoře, naplněné dusíkem pod tlakem 16 až 22 atm, jejíž hruškovitý tvar vidíme na obr. (8.5) 1, lze dosáhnout napětí až 12 MV. Současně s jmenovaným generátorem sestrojili Cockcroft a Walton *kaskádní generátor*, jehož schéma

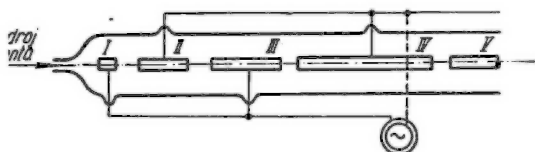
podává obr. (8.5) 2. Jeden konec vysokonapětového transformátoru je uzemněn a druhý je připojen přes usměrňovač (ventil) V_1 na kondenzátor C_1 . Tak se vytvoří na C_1 kromě střídavého napětí kruhové frekvence ω i stálé napětí U (rovné amplitudě střídavého napětí). Kondenzátoru C_1 je pak užito jako zdroje napětí pro kondenzátor C_2 , který dostane stejnosměrné napětí $2U$ a na posledním $2n$ -tém kondenzátoru vznikne napětí $2nU$. Skutečné provedení ukazuje snímek na obr. (8.5) 3.



Obr. (8.5) 3. Kaskádní generátor na 2 MV

Lineární vysokofrekvenční urychlovač s elektrodami pracuje podle schématu naznačeného jednoduchým obrázkem (8.5) 4. Skládá se z přímé řady souosých válcových elektrod I, II, III, ..., podél jejichž osy postupuje svazek iontů. Elektrody jsou připojeny střídavě k pólům zdroje vysokofrek-

venčního napětí voleného tak, aby shluk iontů byl postupně urychlován při průcho-



Obr. (8.5) 4. Schéma lineárního vysokofrekvenčního urychlovače s elektrodami



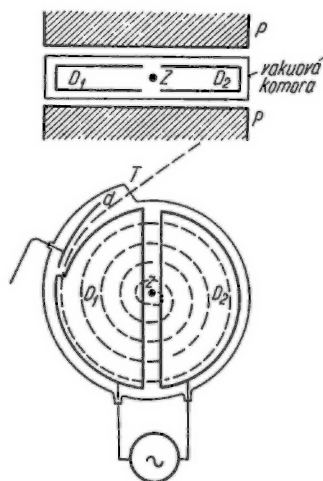
Obr. (8.5) 5. Lineární vysokofrekvenční urychlovač na 50 MeV

du všemi mezerami mezi sousedními elektrodami. Tyto průchody musí být dokonale synchronizovány se střídáním napětí na elektrodách, které proto mají postupně rostoucí délku v tom poměru, jak se rychlost svazku zvětšuje.

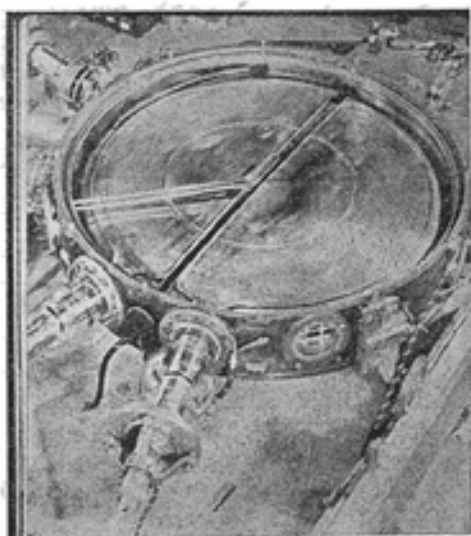
Konstruují se také lineární vysokofrekvenční urychlovače s *nosnou vlnou*, u nichž se pomocí dutinových rezonátorů (viz čl. 7.4.5) vytvoří „nosná vlna“ elektromagnetická, jejíž fáze postupuje podél osy urychlovače stejnou rychlostí jako urychlované ionty. Na obr. (8.5) 5 je fotografie lineárního urychlovače s dutinovými rezonátory, který uděluje protonům, urychleným kaskádním generátorem na 500 keV, energii 50 MeV. Pracuje jako injektor mohutného ženevského synchrotronu na 25 GeV.

8.5.3. Klasický cyklotron

První kruhový urychlovač sestavil r. 1931 Lawrence a nazval jej cyklotronem. Podáme jen velmi stručnou teorii tzv. *klasického cyklotronu*, která je dosti jednoduchá, protože v ní pokládáme urychlovaný ion za klasickou částicí, nepřihlížejíce k závislosti její hmotnosti na rychlosti. Z rovnic 8.5 (6, 11) seznáváme, že je to možné učinit s jistou chybou, která je úměrná energii iontu. Tak např. proton urychlený na energii 10 MeV obíhá v téměř magnetickém poli úhlovou rychlostí asi o 1 % menší než proton s energií 1 MeV. K tomu nebudeme nyní přihlížet. Klasický cyklotron je schematicky znázorněn na obr. (8.5) 6. Mezi válcovými pólovými nástavci P, P (o průměru až několik metrů) silného elektromagnetu jsou v ploché vakuové komoře uloženy dvě duté urychlovací elektrody D_1, D_2 zvané *duanty*, z neferomag-



Obr. (8.5) 6. Schéma klasického cyklotronu



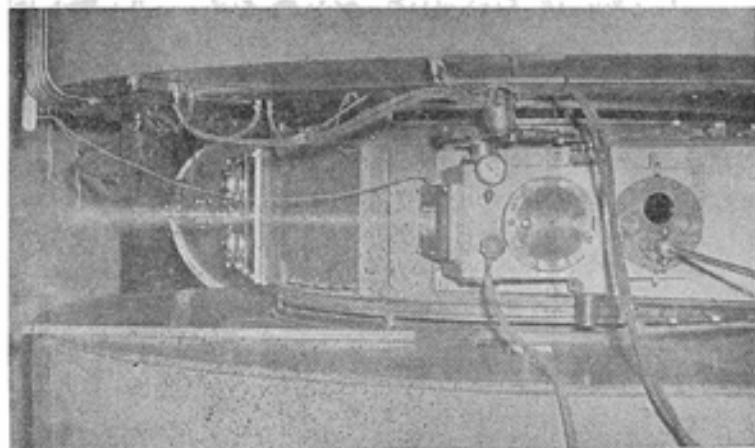
Obr. (8.5) 7. Vnitřek vakuové komory cyklotronu s půlkruhovými duantý. Na obvodu vlevo nahoře je obloukový deflektor, který odchyluje svazek zrychlených iontů tak, aby dopadl na terč umístěný v komůrce vpravo nahoře. Destička držaná nad středem komory dvěma chladičmi trubicemi zabráňuje dopadu iontů (vytvořených žhavicím vláknem umístěným ve středu komory) na horní pól magnetu

netického kovu (např. z nemagnetické oceli potažené mědí). Ve středu komory je zdroj Z iontů, které mají být urychlovány. Duanty D_1, D_2 , jsou spojeny s póly vysokofrekvenčního zdroje napětí (oscilátoru). Při vhodné volbě frekvence f , s kterou se střídá polarita na duantech, jsou ionty opětovně urychlovány při průchodu mezerou mezi duantý. Ion z iontového zdroje Z je přitážen např. duantem D_1 a v jeho vnitřku, kde je elektrické pole kovem odstíněno, opíše v homogenním magnetickém poli s indukcí B malý půlkruhový oblouček (protože má malou konstantní rychlost). Jestliže během tohoto pohybu se změní napětí na duantech v opačné, je ion znovu urychlen při návratu do mezery a opíše o něco větší půlkruhový oblouk uvnitř duantu D_2 . To se opakuje mnohokrát, při čemž ion, urychlovaný při každém průchodu mezerou, opisuje dráhu podobnou spirále. Když se tak ion konečně přiblíží k okraji vakuové komory, je vychýlen ze své dráhy záporně nabitou elektrodou (*deflektorem d*) a dopadne na terč T nesoucí látku, která má být urychlenými ionty ostřelována [srov. obr. (8.5) 7]. Nahradíme-li terč tenkým okénkem, může svazek

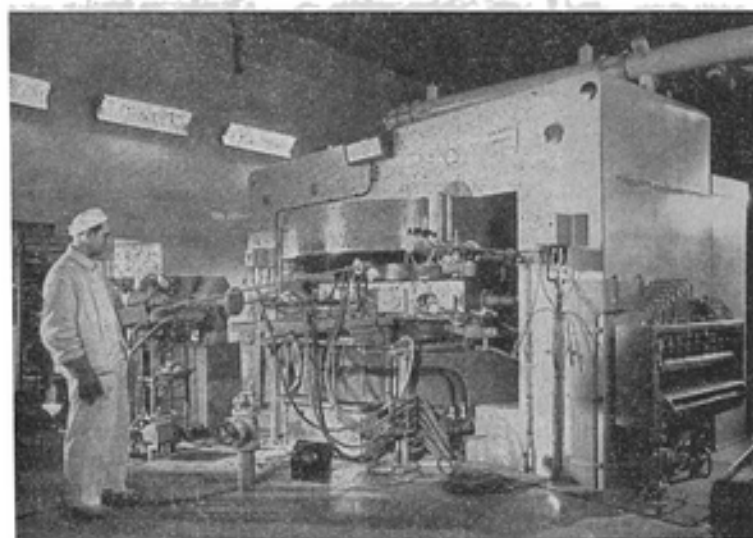
iontů proniknout do vnějšího vzduchu, v němž vzbuzuje modravou luminiscenci. Projeví se to světelným trsem vystupujícím z okénka do vzdálenosti asi 1 m (při energii 15 MeV) [viz obr. (8.5) 8]. Pokládáme-li ion za klasickou částici s konstantní hmotností m_0 , obíhá v magnetickém poli B podle 8.5 (13) úhlovou rychlostí

$$8.5 (16) \quad \omega_0 = \frac{Ze}{m_0} B,$$

která nezávisí na poloměru dráhy. Elektrické pole je v dutině duantu nulové, a proto nemá na pohyb iontu v duantu vliv. Ionty krouží tedy v cyklotronu se stálou frekvencí f , s níž



Obr. (8.5) 8. Svazek deuterionů unikajících aluminiovým okénkem z cyklotronu. Deuteriony o energii 15 MeV pronikají vzduchem do vzdálenosti asi 1 m a prudkými nárazy budí atomy vzduchu, čímž vzniká modravá luminiscence, kterou lze fotograficky zachytit



Obr. (8.5) 9. Československý cyklotron

musí souhlasit frekvence střídavého napětí v mezeře mezi duanty. Je-li tedy λ vlnová délka, na které pracuje oscilátor, musí být splněna tzv. *podmínka rezonance*, která podle 8.5 (16) má

$$8.5 (17) \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi m_0 c}{Ze} \cdot \frac{1}{B} = \frac{K}{B},$$

kde

$$8.5 (18) \quad K = 2\pi c \frac{m_0}{Ze}.$$

Délka vlny oscilátoru je tedy nepřímo úměrná indukci magnetického pole v komoře a konstanta úměrnosti je nepřímo úměrná specifickému náboji iontu. Dosazením známých hodnot za klidové hmotnosti m_p , m_D a m_α [např. podle čl. 1.3.1 a 8.3 (6)] vychází pro protony, deuterony a heliony

$$K_p = 19,6 \text{ Vsm}^{-1}, \quad K_D = K_\alpha = 2K_p = 39,2 \text{ Vsm}^{-1}.$$

Tak např. při $B = 1,4 \text{ T}$ ($= 14\,000$ gaussů) vychází pro protony $\lambda = 14 \text{ m}$ a pro deuterony a heliony $\lambda = 28 \text{ m}$. Přibližná hodnota energie, které dosáhnou ionty na poloměru R , se vypočte z klasického vzorce podle 8.5 (13)

$$8.5 (19) \quad W \approx \frac{1}{2} m_0 u^2 = \frac{1}{2} m_0 R^2 \omega_0^2 = \frac{Z^2 e^2}{2 m_0} R^2 B^2.$$

Cyklotron s průměrem největší dráhy $2R = 1 \text{ m}$ by tedy při $B = 1,4 \text{ T}$ poskytoval protony s energií

$$8.5 (20) \quad W_p \approx \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,5 \cdot 1,4)^2}{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} \text{ joulů} = 24 \text{ MeV}.$$

Stejnou energii by dával helionům, kdežto deuterony by z něho vycházely jen s poloviční energií 12 MeV.

Zvolený příklad odpovídá zhruba cyklotronu Ústavu jaderného výzkumu ČSAV (v Řeži), který byl Československu dodán z SSSR. Vidíme jej na obr. (8.5) 9 a jeho hlavní charakteristiky jsou uvedeny v tab. (8.5) III. Snímek zachycuje měření záření γ sovětským bateriovým rentgenometrem (zn. Kargač).

Tabulka (8.5) III

Československý cyklotron

Energie helionů na výstupu	25 MeV
Energie deuteronů na výstupu	12,5 MeV
Průměr pólů elektromagnetu	1 200 mm
Výška pracovního prostoru komory	170 mm
Poloměr poslední dráhy částice	520 mm
Indukce magnetického pole v ose	1,41 T
Amplituda vysokofrekvenčního napětí mezi duanty	140 až 150 kV
Celková čerpací rychlost difúzních vakuových čerpadel na přírubě komory	3 000 l/s
Celková hmotnost elektromagnetu	120 t
Vysokofrekvenční výkon generátoru	120 kW

8.5.4. Synchrociklotron

Z hodnot uvedených v tab. (8.5) II pro proton vidíme, že protony obíhají v cyklotronu přibližně se stálou frekvencí, pokud nedosáhnou energie několika desítek MeV. Menší odchylky je možno vyrovnat různými úpravami magnetického pole,

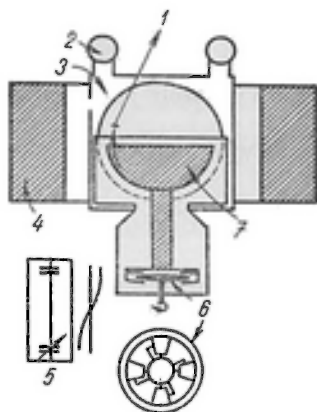
avšak k dosažení vyšších energií urychlovaných iontů je třeba vhodným způsobem zaručit trvalé a dosti přesné splnění podmínky rezonance 8.5 (17).

Relativnostní efekt se podle 8.5 (11) projevuje tím, že způsobuje opožďování iontů za periodicky proměnným elektrickým polem, jehož frekvenci je třeba snižovat tak, aby podmínka 8.5 (17) byla dosti přesně splněna až do konce urychlovacího cyklu. Toho je dosaženo u *cyklotronu s modulovanou frekvencí*, který se stručně nazývá *synchrociklotron* nebo též *fázotron*.

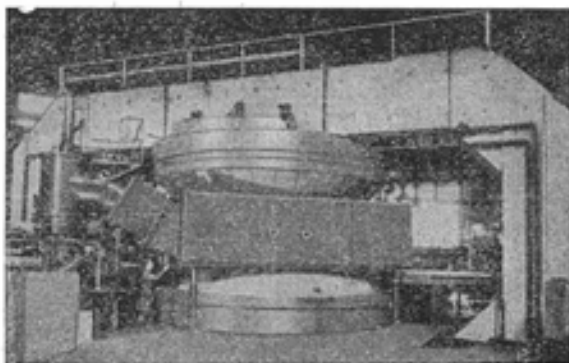
Je zřejmé, že takový stroj nemůže pracovat spojitě jako cyklotron, neboť snižováním frekvence střídavého napětí lze vyhovět podmínce 8.5 (17) jen pro ionty, které vstoupily do urychlovací komory současně a současně dosahují stejné energie; ionty, které vzniknou

později, budou mít pro svou menší hmotnost větší úhlovou rychlost, a budou tedy kroužit ve stejném okamžiku s jinou frekvencí. Jak ukázali Veksler a McMillan, dává cyklotron s periodicky proměnnou frekvencí elektrického pole shluky (spršky) iontů s maximální energií, které stroj periodicky vymrštuje. Při tom nezáleží mnoho na tom, jak rychle se frekvence pole mění, a kromě toho se tu uplatňuje tzv. *princip fázové stability*, který způsobuje, že opožděné ionty dohánějí ostatní, a naopak ionty s předstihem se méně urychlují. Proto je možno synchrocyklotronem získat při každé vlně napětí dosti značný počet iontů s vysokou energií.

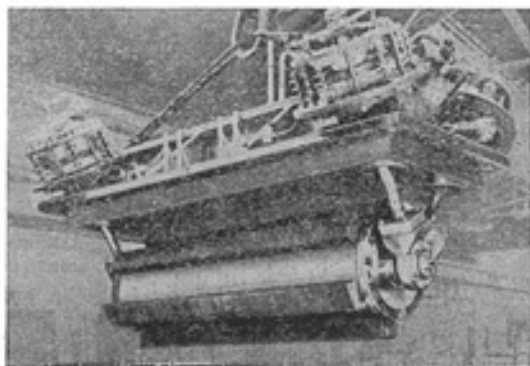
Obr. (8.5) 10 podává schéma uspořádání synchrocyklotronu. Liší se od klasického cyklotronu jednak tím, že pro zjednodušení radiofrekvenčního systému bylo použito jen jedné urychlovací elektrody místo dvou duantů *D*, jednak tím, že má zařízení



Obr. (8.5) 10. Schéma synchrocyklotronu: 1 — svazek částic, 2 — vývěvy, 3 — vakuová komora, 4 — jeho magnetu, 5 — modulační urychlovacího napětí, 6 — kondenzátor, 7 — urychlovací elektroda



Obr. (8.5) 11. 184palcový synchrocyklotron s vakuovou komorou a difúzní vývěvou vlevo



Obr. (8.5) 12. Otočná soustava modulačního kondenzátoru liverpoolského 156palcového synchrocyklotronu

pro frekvenční modulaci. Nejčastěji se tato modulace provádí kondenzátorem podobným velké ladičce nebo kondenzátorem s rotujícími deskami. Tím se periodicky mění frekvence střídavého urychlovacího napětí a urychlené ionty vyletují ze stroje ve shlucích v pulsujícím svazku několikrát za vteřinu.

Jedním z nejstarších je berkeleyský 184palcový synchrocyklotron, který vidíme na obr. (8.5) 11. Urychluje heliony na energii 400 MeV a jeho elektromagnet váží 4 000 Mp. Modulační kondenzátor liverpoolského 156palcového synchrocyklotronu vidíme na obr. (8.5) 12. Nejsilnější urychlovač tohoto druhu je synchrocyklotron (fázotron) Spojeného ústavu pro jaderný výzkum v Dubně v SSSR [obr. (8.5) 13]. Je v provozu od r. 1949 a jeho elektromagnet průměru 6 m váží 7 000 Mp. Protóny v něm mohou dosáhnout energie až 680 MeV.

Synchrocyclotronem lze dát iontům energii, jejíž velikost není teoreticky omezena. Avšak zvyšování maximální energie iontů je velmi nákladné. Zdvojnásobení maximální energie vyžaduje totiž zvětšení poloměru pólových nástavců o polovinu a hmotnost magnetu na trojnásobek. Proto cena stroje roste zhruba se čtvercem maximální energie

Obr. (8.5) 13.
Synchrocyclotron so-
větské Akademie věd,
který dodává protony
s energií 680 MeV



Za tohoto stavu bylo třeba hledat nové teoretické principy konstrukce urychlovačů, které skutečně vedly k dalšímu vývoji urychlovacích zařízení, jak ukážeme v příštím článku.

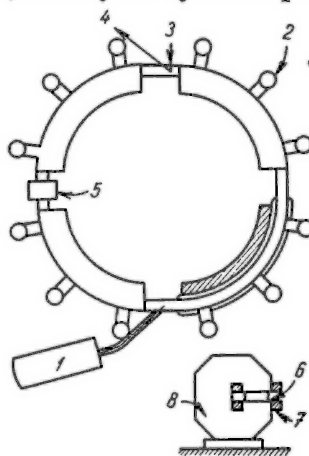
8.5.5. Protonové synchrotrony

Konstrukce *protonových synchrotronů*, zvaných též *synchrofázotrony*, využívá teoretických poznatků Vekslerových a McMillanových o fázové stabilitě, které jsme vysvětlili při výkladu o elektronových synchrotronech v čl. 5. 10.5. Principiální schéma konstrukce protonového synchrotronu je naznačeno na obr. (8.5) 14.

Protony se injektorem 1 vstříkují s energií několika MeV do prstencové vakuové komory 6, odčerpávané řadou vývěv 2 a složené ze čtyř kvadrantů, v nichž protony opisují čtvrtkruhové dráhy v poli vzbuzeném čtyřmi magnety 8 buzenými vinutím 7. Protony se urychlují znovu a znovu při každém průchodu elektrickým polem mezi urychlovacími elektrodami 5. Na konci urychlovacího procesu dopadá periodicky přerušovaný svazek protonů na terč 3, kde způsobuje žádanou jadernou reakci, která se projeví korpuskulárním zářením 4, vycházejícím z terče.

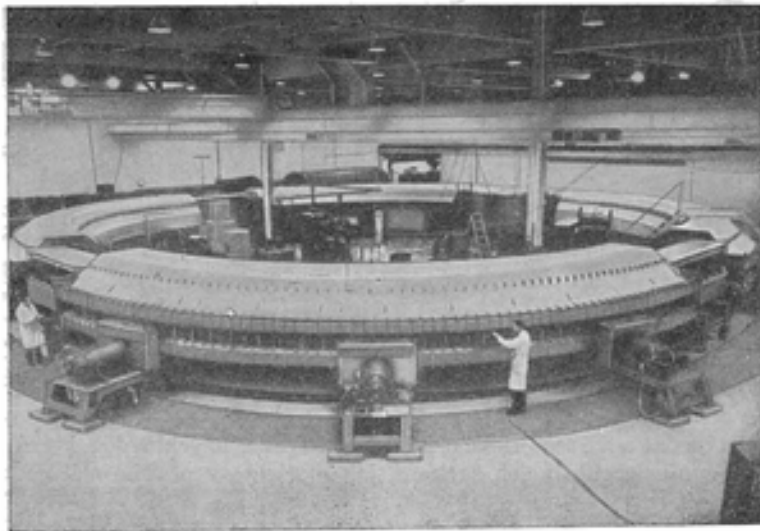
První protonový synchrotron byl uveden v činnost r. 1952 v Brookhavenu pod jménem *kosmotron*, protože dává protonům energii asi 3 GeV, srovnatelnou s energií kosmického záření. Injektorem je tu van de Graaffův generátor s napětím 4 MV. Magnetický prstenec kosmotronu vidíme na obr. (8.5) 15.

Roku 1954 byl spuštěn berkeleyský *bevatron*, který protonům vstřelovaným do vakuové komory lineárním urychlovačem s energií 10 MeV uděluje energii 6 GeV. Obr. (8.5) 16



Obr. (8.5) 14. Schéma protonového synchrotronu: 1 – injektor, 2 – vývěvy, 3 – terč, 4 – svazek protonů, 5 – urychlovací komora, 6 – vakuová komora, 7 – budíci-
cívký, 8 – jho magnetu

ukazuje sestavování jednoho z kvadrantů bevatronu. Nejsilnější synchrofázotron byl uveden v činnost r. 1957 ve Spojeném ústavu pro jaderný výzkum v Dubně. Protony s energií 7 MeV se vstříkují lineárním urychlovačem do prstencové komory průměru 60 m, kde jsou po velkém počtu oběhů urychleny na energii 10 GeV. Na obr. (8.5) 17 vidíme celkový pohled na toto mohutné zařízení, jehož činnost se sleduje a řídí ze zvláštní budovy, vzdálené 150 m.



Obr. (8.5) 15.
Magnetický prstenec
brookhavenského
kosmotronu

Podobně jako u synchrocyklotronu není ani u synchrotronu dosažitelná energie iontů teoreticky omezena. Je však třeba uvážit, že magnetickou indukci nelze zvyšovat nad prakticky přípustné meze, a že tedy poloměr prstencového magnetu roste se vzrůstající energií částic. Bylo by sice možno zmenšit objem evakuované urychlovací trubice zmenšením jejího průřezu, ale tomu brání skutečnost, že ionty neobíhají přesně v ose trubice. Konají složité příčné (i podélné) oscilace, a tak se odchylují od ideální stabilní dráhy. Amplituda příčných oscilací, které mají axiální i radiální složky, rozhoduje pochopitelně o nejmenší přípustné světlosti urychlovací trubice. Možnost podstatného zvýšení výstupní energie iontů bez neúnosného zvýšení nákladů na stavbu i provoz urychlovače je tedy podmíněna zmenšením amplitudy kmitů, které konají ionty v okolí stabilní dráhy. Toho bylo dosaženo teprve u *synchrotronu se silnou fokusací*, který je založen na myšlence *střídavého gradientu* magnetického pole, koncipované r. 1952 Courantem, Livingstonem a Snyderem.

Vysvětlíme stručně princip této myšlenky. V čl. 5.10.5 jsme odvodili tzv. betatronovou podmínku 5.10 (31), z níž vyplývá, že magnetická indukce se musí zmenšovat se vzdáleností od osy betatronu. Toho se dosáhne vhodným tvarem pólových nástavečů, které se rozestupují směrem k vnějšímu okraji trubice, takže indukční čáry mají v soulase s obr. (5.10) 17 tvar znázorněný na obr. (8.5) 18.

Je zřejmé, že i v synchrotronu musí mít indukční čáry tento tvar, aby radiální složky B_r měly naznačené směry, neboť jen tak vznikají při vychýlení iontu ze střední roviny Or Lorentzovy síly P_r , které vracejí ion zpět do této roviny. Jak ukážeme dále, koná pak vychýlený ion ve směru kolmém k rovině Or harmonické axiální kmity podle rovnice

$$8.5 (21) \quad \frac{d^2z}{d\vartheta^2} + nz = 0,$$

kde proměnný parametr

$$\vartheta = \frac{u}{R} t.$$

R je poloměr stabilní dráhy, u oběžná rychlost iontů a n je konstanta zvaná *index pole*. Podobně platí pro radiální výchylky iontů (ve směru poloměru) rovnice

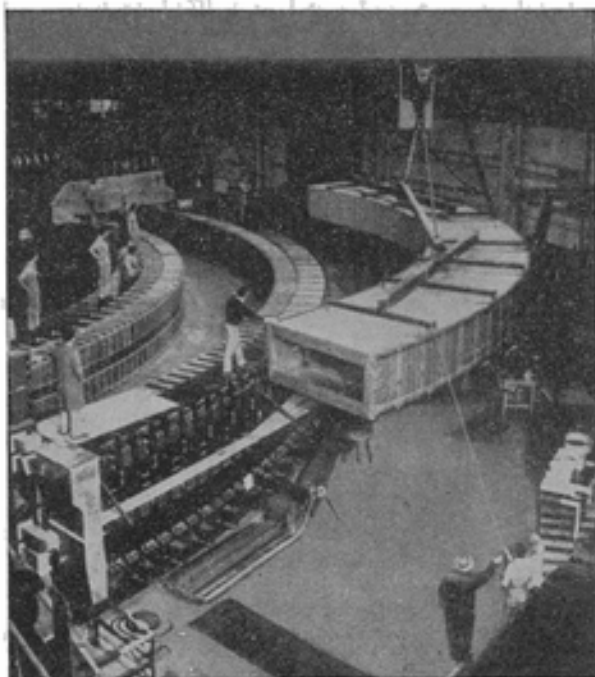
$$8.5 (22) \quad \frac{d^2 r}{d\vartheta^2} + (1 - n) r = 0,$$

kteřá ukazuje, že ionty konají harmonické kmity axiální i radiální jen tehdy, když je splněna podmínka stability

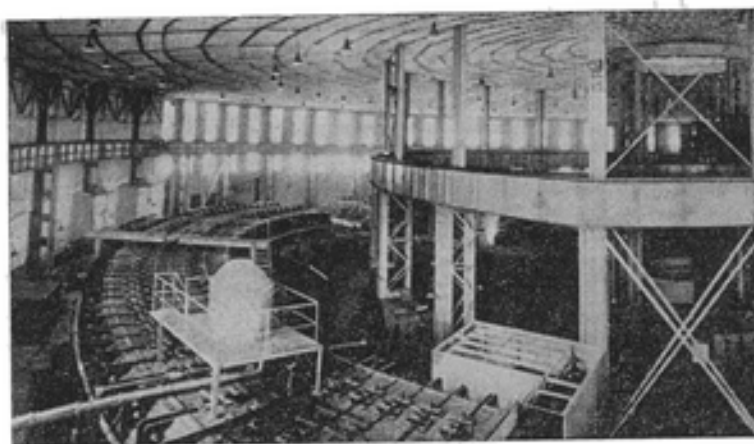
$$8.5 (23) \quad 0 < n < 1.$$

Stabilizační síly, které vracejí ionty na stabilní dráhu, jsou podle 8.5 (21) úměrné indexu n , který vzhledem k 8.5 (23) musí ležet mezi nulou a jednou. Nemožnost zvýšit jeho hodnotu omezuje značně stabilitu částic a vynucuje dosti velkou světlost urychlovací trubice. Přece však lze dospět k podstatnému zmenšení jejího průřezu, uvědomíme-li si, že podmínka 8.5 (23), která předpisuje indexu pole malé kladné hodnoty, vyplývá z požadavku současné

Obr. (8.5) 16. Berkeleyský bevatron při konstrukci

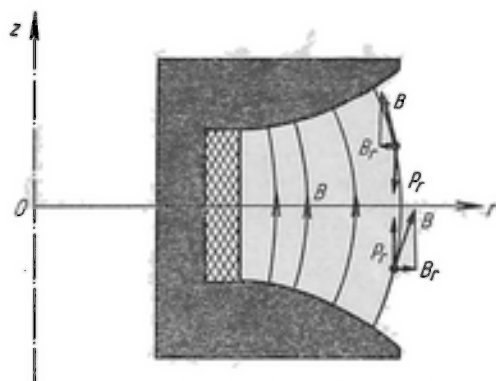


Obr. (8.5) 17. Synchro-fázotron Spojeného ústavu pro jaderný výzkum v Dubně. Dává protonům energii 10 GeV

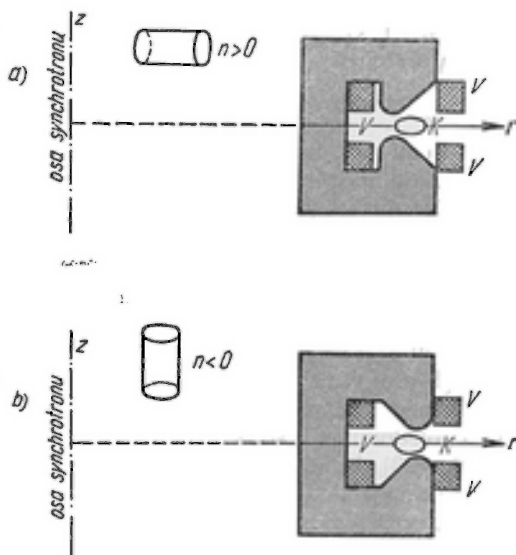


fokuse svazku v axiálním i v radiálním směru. Kdybychom zvolili $n = 0,5$, byl by svazek iontů fokusován stejně dobře v obou těchto směrech podobně jako svazek paprsků sférickou čočkou. Pro $n = 1$ by však pole působilo jako spojná válcová čočka soustřeďující svazek ve směru axiálním (do střední roviny) a pro $n = 0$ jako válcová čočka soustřeďující svazek do roviny kolmé. Kdybychom pak vytvořili pole s velkým kladným indexem ($n \gg 1$), působilo by v axiálním směru jako silná spojka, v radiálním jako silná rozptylka. Pole s velkým záporným indexem ($n \ll -1$) by mělo účinek právě opačný. A tato analogie iontové a světelné optiky vedla k úspěšnému řešení problému: Podobně jako kombinace spojky a vhodné položené rozptylky dává spojnou soustavu, je možno rozdělit celý prstencový magnet v řadu sektorů se střídavě kladnými a zápornými, ale stejně velkými hodnotami $|n| \gg 1$. Z podrobnější matematické teorie vyplývá, že tak lze dosáhnout velmi silné fokuse iontového svazku a že dráhy iontů jsou nejstabilnější, je-li

$$|n| = \frac{N^2}{16},$$



Obr. (8.5) 18. Stabilizační účinek radiální složky B_r magnetické indukce



Obr. (8.5) 19. Tvar pólových nástavců: a — v segmentech s axiální fokusací, b — v segmentech s radiální fokusací, K je vakuová komora, V — vinutí elektromagnetu

kde N je počet sektorů. V lichých sektorech se pole mezi hyperbolicými nástavci rozšiřuje směrem k obvodu prstence, v sudých naopak se podobným způsobem mezer mezi póly směrem k obvodu zužuje, jak je znázorněno na obr. (8.5) 19. Nad oběma řezy je vyjádřen fokusační účinek analogickými válcovými čočkami.

Pro lepší pochopení tohoto principu střídavého gradientu naznačme aspoň odvození diferenciální rovnice 8.5 (21). Předpokládejme závislost axiální složky B_z indukce na vzdálenosti r od osy prstence ve tvaru

$$B_z = B_n \left(\frac{R}{r} \right)^n,$$

kde B_n je indukce podél stabilní dráhy o poloměru R a n je konstanta. B_z je funkcí obou cylindrických souřadnic z, r a parciální derivací dostaneme

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = -n B_n R^n \frac{1}{r^{n+1}},$$

takže v těsné blízkosti stabilní dráhy ($r \approx R$) platí vztah

$$n = - \frac{R}{B_n} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r}.$$

V místech s nulovou hustotou proudu je však ve stacionárním poli podle 5.5 (38) a 5.6 (28) vektor **rot B** nulový. Vyjádříme-li to pro jeho složku kolmou k rovině Ozr , dostaneme

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial B_r}{\partial z} = -n \frac{B_r}{R}$$

a integraci

$$B_r = -n \frac{B_z}{R} z,$$

protože ve střední rovině ($z = 0$) je podle obr. (8.5) 18 $B_r = 0$. Radiální složka B_r působí na ion Lorentzovou silou $P_z = ZeuB_r$, svisle dolů (při $n > 0$), takže pro pohyb iontu ve směru osy platí rovnice

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -Zeu \frac{B_z}{R} nz$$

čili podle 8.5 (10), vzhledem k tomu, že $B = B_z = B_r$,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{u^2}{R^2} nz.$$

Nahradíme-li tedy čas t novou proměnnou $\vartheta = ut/R$, dostaneme 8.5 (21).

V přítomné době jsou v provozu dva obří protonové synchrotrony se silnou konvergencí. Ženevský synchrotron, vybudovaný mezinárodní organizací CERN r. 1959, dává protony s energií 25 GeV a v Brookhavenu je od r. 1960 v provozu podobný protonový synchrotron na 33 GeV. V SSSR se staví u Serpuchova (70 km na jih od Moskvy) ještě mohutnější synchrotron, který bude dávat protonům energii 70 GeV. Průměr magnetického prstence bude 468 m a hmotnost magnetu 24 000 tun.

Uspořádání ženevského synchrotronu vidíme na obr. (8.5) 20 a jeho charakteristická data jsou zřejmá z tab. (8.5) IV.

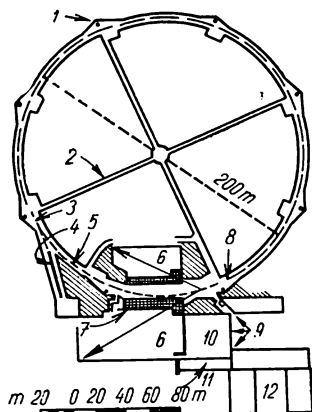
Tabulka (8.5) IV

Ženevský protonový synchrotron

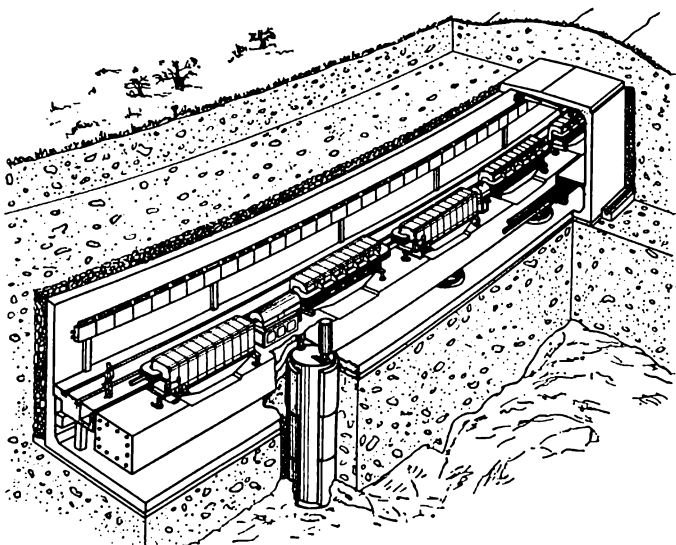
Nejvyšší energie protonů	≈ 25 GeV
Počáteční energie protonů při injekci	50 MeV
Poloměr magnetického prstence	72 m
Hmotnost oceli v magnetech	≈ 3 200 tun
Hmotnost měděného vinutí magnetu	≈ 110 tun
Střední příkon ve vinutí	1,5 MW
Maximální magnetická indukce	1,2 Wbm ⁻² (12 000 gaussů)
Celkový objem vyčerpaného prostoru	8 m ³
Tlak ve vakuové komoře	1 · 10 ⁻⁵ torrů
Vzrůst energie při jednom oběhu	50 keV
Příkon v radiofrekvenčním okruhu	60 až 90 kW
Frekvence opakování pulsů	0,20 až 0,25 s ⁻¹
Počet sektorů	48 × 2
Index pole	± 278
Délka dvojitého sektoru	4,7 m
Boční rozměry vakuové komory	4 × 7 cm ² až 8 × 12 cm ² (podle koeficientu bezpečnosti)
Úhrnná cena	92 miliónů švýc. franků

Aniž zabíháme do podrobností, zdůrazňujeme, že konstrukce urychlovače o průměru 200 m, na kterém je třeba usadit 50 sekcí s vertikální tolerancí 0,6 mm a horizontální tolerancí 0,3 mm, je nesmírně obtížný úkol, pro jehož řešení bylo třeba sestavit speciální teodolit vysoké přesnosti. Velmi náročné jsou i četné další požadavky, jako stálost teploty, homogenita magnetického pole atd. Prstenec synchrotronu je uložen v betonovém kanálu zapuštěném do země, jehož několik magnetických segmentů ukazuje obr. (8.5) 21.

Vývoj urychlovacích zařízení bude jistě pokračovat, zejména k stále vyšším energiím, a lze odhadnout, že energií řádu $100 \text{ GeV} = 10^{11} \text{ eV}$ bude možno dosáhnout na dosavadních principech ovšem při dalším snížení intenzity urychlovacích svazků. Tak Kalifornský technologický institut v Pasadeně a Lawrenceova radiační laboratoř v Berkeley pracují na společném projektu synchrotronu, který má protonům udělit energii 300 GeV.



Obr. (8.5) 20. Uspořádání ženevského protonového synchrotronu na 25 GeV: 1 – kontrolní zařízení, 2 – inspekční tunel, 3 – dráha protonů, 4 – injektor (50 MeV), 5 – magnet, 6 – experimentální prostory, 7 – odsuvná ochranná stěna, 8 – terč, 9 – vstup, 10 – dílna, 11 – dozorná, 12 – sklady a laboratoře



Obr. (8.5) 21. Část magnetického prstence protonového synchrotronu 25 GeV v Ženevě

K dosažení podstatně vyšších energií bude ovšem nutno přejít k novým principům, na kterých se již usilovně pracuje teoreticky i pokusně. Velmi slibná je myšlenka urychlovačů se vstřícnými svazky částic, při jejichž setkání se jejich rychlosti skládají podle Einsteinova vzorce 2.9 (20). Tak by bylo možno dosáhnout stejných účinků, jako kdyby energie částice narážející na klidnou částici byla o několik řádů vyšší.

8.6. Transmutace prvků

8.6.1. Obecné zákony přeměny prvků

Samovolné přeměny přirozených radioaktivních prvků představují jen zvláštní případy velkého počtu dnes známých transmutací, které můžeme přivodit uměle, splníme-li jisté podmínky. Pro tyto přeměny, které se nazývají také *jaderné* nebo *nukleární reakce*, byla zjištěna platnost čtyř obecných zákonů, jež se plně shodují s teorií.

1. Spojený zákon zachování hmotnosti a energie. Tento zákon se při všech známých přeměnách dosud skvěle osvědčil a lze jej vyslovit nejpřehledněji ve tvaru zobecněného principu energie:

Úhrnná energie všech částic účastnících se jaderné reakce se zachovává. Přitom částicemi

rozumíme jak látkové částice, tak fotony a úhrnnou energií látkových částic rozumíme součet jejich energie klidové i pohybové.

Označíme-li tedy M_0 klidovou hmotnost částice vstupující do reakce, M její hmotnost za pohyb, $\varepsilon = h\nu$ energii fotonu, který byl jádrem absorbován, a dále M'_0 , M' , $\varepsilon' = h\nu'$ tytéž veličiny pro částice a foton vzniklé z reakce, bude princip energie vzhledem k 2.9 (27, 27') vyjádřen rovnicí

$$8.6 (1) \quad \Sigma M_0 c^2 + \Sigma W_k + \varepsilon = \Sigma M'_0 c^2 + \Sigma W'_k + \varepsilon'$$

nebo také

$$8.6 (2) \quad \Sigma M c^2 + h\nu = \Sigma M' c^2 + h\nu'.$$

Dělíme-li veličinou c^2 , dostaneme

$$\Sigma M + \frac{h\nu}{c^2} = \Sigma M' + \frac{h\nu'}{c^2}$$

a podle 6.6 (6)

$$8.6 (3) \quad \Sigma M + m_\nu = \Sigma M' + m'_\nu.$$

Tak jsme došli k druhému způsobu, jímž lze vyjádřit princip zachování hmotnosti a energie ve tvaru *zobecněného zákona zachování hmotnosti: Součet hmotností částic účastnících se reakce se zachovává*. Tento zákon platí za předpokladu, že sčítáme relativnostní hmotnosti (závislé na rychlosti) hmotných částic i fotonů.

II. Zákon zachování elektrického náboje vyjadřuje známou zkušenost, že *algebraický součet nábojů všech částic účastnících se reakce se zachovává*.

Přitom se, jak víme, mohou náboje jednotlivých částic měnit jen o celistvé násobky elementárního náboje e .

III. Zákon zachování hybnosti vyjadřuje vlastně platnost klasického zákona zachování hybnosti, který, jak víme, platí pro ráz těles v mechanice: *Výsledný vektor hybnosti částic vstupujících do reakce rovná se výslednému vektoru hybnosti částic po reakci*. Při tom důsledně počítáme k částicím, jejichž hybnost přispívá k výslednému vektoru hybnosti, i fotony, jak jsme učinili již při výkladu Comptonova jevu v čl. 6.6.3 a při výkladu Mössbauerova jevu v čl. 8.3.3.

IV. Zákon zachování spinu vyslovujeme v nukleární fyzice obvykle větou: *Vektorový součet spinů před reakcí se rovná vektorovému součtu spinů po reakci*.

Z hlediska „klasické“ kvantové fyziky, v níž vykládáme spinovou točivost jako „moment hybnosti“ částice vzniklý její rotací kolem vlastní osy, jsou zákony III a IV zvláštními případy obecných *vět impulsových*, které se v mechanice soustav odvozují z třetího Newtonova zákona o rovnosti akce a reakce. To ukazuje, že *třetí zákon Newtonovy mechaniky platí i pro děje nukleární*. Zákon zachování hybnosti lze experimentálně potvrdit na snímcích transmutací v mlžné nebo jiné komoře, fotografujeme-li stopy drah částic ze dvou různých směrů (např. k sobě kolmých). Tak zjistíme přesný směr pohybu jednotlivých částic a z délky stop a hustoty kapiček podél nich sražených soudíme na jejich rychlost nebo energii.

Při jaderných reakcích jde skoro vždy o přeměnu jednoho jádra, které má malou rychlost, jaká bývá při termickém pohybu molekul. Přeměnu působí buď látková částice, která nejčastěji velkou rychlostí vnikne do jádra, nebo foton, jež jádro absorbuje. Výsledkem reakce pak je nové — transmutované — jádro a jedna nebo více částic s určitou pohybovou energií nebo též emise fotonu.

V prvním případě, kdy jde o reakci dvou látkových částic, označme M_0 klidovou hmotnost původního jádra, m_0 klidovou hmotnost „atomové střely“ a W_s její pohybovou energii.

Vznikne-li jádro klidové hmotnosti M'_0 s pohybovou energií W'_j a částice hmotnosti m'_0 s pohybovou energií W'_s , pak podle 8.6 (1)

$$M_0 c^2 + m_0 c^2 + W_s = M'_0 c^2 + m'_0 c^2 + W'_j + W'_s,$$

odkud

$$(M_0 + m_0 - M'_0 - m'_0) c^2 = W'_j + W'_s - W_s = Q.$$

Výraz v závorkách je však celkový úbytek klidové hmotnosti $\Delta(M_0 + m_0)$ a Q je přebytek energie, který se při reakci uvolní. Tedy uvolněnou energii

$$8.6 (4) \quad Q = c^2 \Delta(M_0 + m_0)$$

Ize vypočítat z úbytku klidové hmotnosti při reakci. Je-li Q kladné, mluvíme o reakci *exoenergetické* (exotermické), je-li Q záporné, označujeme reakci jako *endoenergetickou* (endotermickou). Je patrné, že samovolně mohou probíhat jen reakce exoenergetické, kdežto endoenergetické reakce vyžadují dodání jisté minimální energie.

Reakci, která vzniká působením fotonů na jádro, nazýváme *foto dezintegrací* a platí pro ni podle 8.6 (2)

$$8.6 (5) \quad M_0 c^2 + h\nu = M'_0 c^2 + m'_0 c^2 + W'_j + W'_s (+h\nu').$$

I zde platí tedy rovnice 8.6 (4), značí-li Q přebytek energie po reakci, tj. energii nově vzniklých částic (popř. fotonu), zmenšenou o energii původního jádra a fotonu, který přeměnu přivodil.

Uvedené rovnice jsou rovnice *matematické* a vyjadřují rovnost dvou fyzikálních veličin. Je však zvykem vyjadřovat nukleární reakce *symbolickými* „rovnicemi“, které jsou zcela podobné známým rovnicím pro obyčejné chemické reakce, při nichž jde ovšem jen o slučování atomů v molekulu. Nuklid s nukleonovým číslem A a protonovým číslem Z značíme symbolem ${}_Z^A J$, při čemž A je celé číslo (nikoli přesná relativní atomová hmotnost), které se u všech nuklidů liší od celistvých násobků atomové jednotky hmotnosti jen o tzv. *schodek hmotnosti*, který je řádu 10^{-2} u. Píšeme-li reakci ve tvaru

$$8.6 (6) \quad {}_Z^A J + {}_{Z_1}^{A_1} J \rightarrow {}_{Z'}^{A'} J + {}_{Z'_1}^{A'_1} J + Q,$$

platí vztahy

$$8.6 (7) \quad A + A_1 = A' + A'_1, \quad Z + Z_1 = Z' + Z'_1,$$

z nichž první vyjadřuje, že celkový počet nukleonů se při reakci nemění. Druhý vztah vyjadřuje zákon zachování náboje. Symbolická rovnice 8.6 (6) se obyčejně zjednodušuje tak, že se napravo vynechává energie Q nebo se píše ve formě energie fotonu $h\nu$. Foto dezintegraci vyjadřujeme obvykle vztahem

$$8.6 (8) \quad {}_Z^A J + h\nu \rightarrow {}_{Z'}^{A'} J + {}_{Z'_1}^{A'_1} J,$$

při čemž ovšem

$$8.6 (9) \quad A = A' + A'_1, \quad Z = Z' + Z'_1.$$

Jaderné reakce se dají roztrdit do několika kategorií, a to podle různých hledisek. Uvedli jsme již dva způsoby třídění podle toho, uvolní-li se, nebo spotřebuje-li se energie, a podle toho, jde-li o reakci mezi látkovými částicemi, nebo vznikne-li reakce působením fotonu.

Nukleární reakce můžeme třídit také podle toho, vyvoláme-li je přirozeným radioaktivním nebo kosmickým zářením (opět buď korpuskulárním, nebo vlnovým) nebo částicemi uměle získanými. Dnes má nukleární fyzika k dispozici řadu různých „střel“, kterými dosahuje četných typů reakcí, podle toho, jakého druhu „atomové artilerie“ se užije. Jsou to zejména elektrické částice, jako protony, deuterony, heliony, urychlené v urychlovačích tak, aby měly potřebnou energii několika (až několika tisíc) MeV. Kromě toho se

velmi osvědčily neutrony, které v několika pozoruhodných případech vedou k štěpení jádra a k uvolnění velikého množství atomové energie. Konečně se ukázalo, že i *mezony* mohou způsobit transmutaci prvků.

Je nutno zvláště zdůraznit, že některé jaderné reakce vedly k vytvoření radioaktivních nuklidů — dříve neznámých —, které se dále již bez vnějšího působení samovolně přeměňují v jiné nuklidy. Pro tyto přeměny, při nichž se uvolňují také pozitrony, neutrony nebo protony, platí podobné zákony jako pro přirozenou radioaktivitu, a proto mluvíme o *umělé* nebo *indukované radioaktivitě*. Radioaktivní izotopy různých prvků normálně stabilních se nazývají *radioizotopy* (radiofosfor, radiosodík apod.). Pojednáme o nich později.

Pro úplnost se zmíníme ještě o dvou nukleárních procesech, které se vyskytují vzácněji než dříve uvedené.

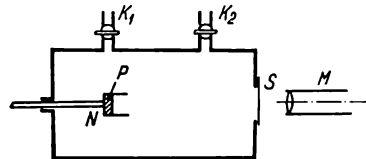
První proces může nastat, když jádro obsahuje o jeden proton více, než připouští stabilita jádra, a nedostává se mu energie potřebné k jeho emisi. Tu může jádro dosáhnout stability tím, že zachytí elektron obíhající kolem něho v jednoválcové slupce *K* elektronového obalu. Na jeho místo přejde ovšem jiný elektron z vyšší dráhy a atom vyše foton záření γ , jehož frekvence se shoduje s frekvencí příslušné charakteristické rentgenové čáry. Tento děj zvaný *zachyt* (zachycení) *elektronu K* byl pozorován např. u nuklidu $^{54}_{25}\text{Mn}$, který vzniká z chromu bombardováním deuterony.

K druhému jevu dojde, když atom, jehož jádro vyše foton záření γ , sám tento foton absorbuje, čímž vypudí jeden ze svých obalových elektronů. Tato „*vnitřní konverze*“ (čili vnitřní absorpce) záření γ vede k záření β^- , které má ovšem jedinou čáru (elektronů) nebo několik spektrálních čar, kdežto záření β^- vznikající přímo v jádře má, jak již víme, spojitě spektrum. *Sekundární záření* β^- vzniká vnitřní konverzí, která byla pozorována též u některých umělých radionuklidů; někdy se objevuje zároveň se zachytem elektronu *K*.

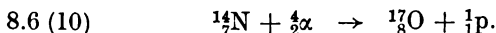
8.6.2. Jaderné reakce vyvolané přirozeným radioaktivním zářením

Z těchto reakcí jsou nejdůležitější přeměny způsobené zářením α , jehož zdrojem bývá nejčastěji polonium (RaF) nebo RaC. Popíšeme podrobněji okolnosti, za nichž se podařilo Rutherfordovi uskutečnit první reakci tohoto druhu, a tím i první transmutaci.

Rutherford r. 1919 zkoumal dolet částic α vysílaných RaC v různých plynech. Užil k tomu jednoduchého přístroje [obr. (8.6) 1], který je dnes uložen v historickém muzeu v Cavendish Laboratory v Cambridgi. Zdroj *P* záření α byl upevněn na posuvném nosiči *N* v mosazném válci, který bylo možno kohouty K_1 , K_2 vyčerpát a naplnit libovolným plynem. Dolet v různých plynech měřil Rutherford tak, že vzdaloval preparát *P* od fluorescenčního stínítka *S*, až přestaly záblesky vzbuzené na stínítku dopadem částic α a pozorované mikroskopem *M*. Tak zjistil ve vzduchu za obvyklé teploty a tlaku největší dolet asi 7 cm. Měření opakoval pro různé plyny a tu objevil překvapující skutečnost: Záblesky na stínítku se objevily i při mnohem větší vzdálenosti preparátu od stínítka, naplnil-li válec dusíkem. Nedovedl si vysvětlit, proč v dusíku je dolet částic α zhruba 4krát větší než v jiných plynech, a proto vložil mezi preparát a stínítko slidové lístky, o nichž věděl, že stačí zabrzdit částice α vysílané prvkem RaC. Avšak záblesky tím nezamezil, a proto soudil, že nejsou vzbuzeny částicemi α , ale jinými částicemi. Z jejich odchylky v magnetickém poli seznal Rutherford, že mají stejný specifický náboj jako protony. Usoudil z toho, že při průchodu záření α dusíkem dochází k *transmutaci dusíku na kyslík*, když helion vnikne do jádra dusíku a uvolní se proton podle rovnice

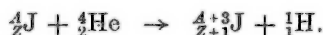


Obr. (8.6) 1. Rutherfordův přístroj k měření doletu částic α

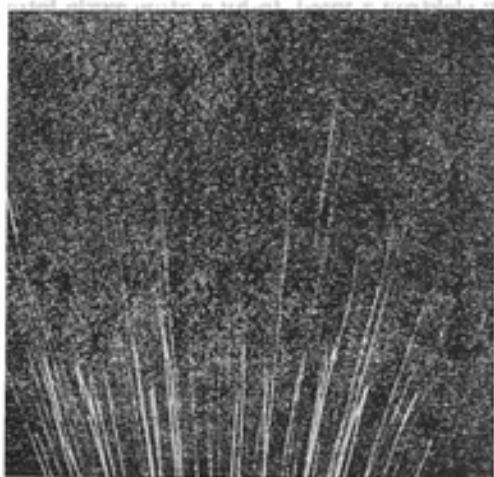


ento výklad neznamenal nic méně významného než první umělou transmutaci prvku a vyvolal ovšem živou diskusi i pochybnosti, které však byly úplně rozptýleny, když e po 6 letech (r. 1925) podařilo Rutherfordovu žáku Blackettovi získat několik snímků éto přeměny ve Wilsonově komoře, když zhotovil asi 20 000 fotografií průchodu záření α lusíkem [viz obr. (8.6) 2].

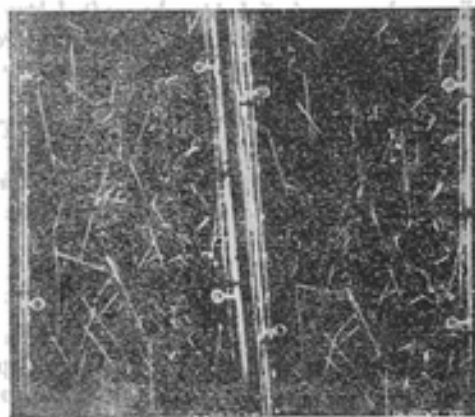
Rutherford sám zjistil, že podobné transmutace vznikají i při průchodu záření α jinými ehkými prvky (B, F, Na, P, Mg). Uvolněné protony mají přitom dolet (ve vzduchu) až 0 cm. Všechny tyto jaderné reakce se dají vyjádřit jednoduchou rovnicí



Heliony vysílané přirozenými radioaktivními prvky umožnily i další velmi důležité eakce, z nichž jedna vedla k objevu neutronu, druhá k objevu umělé radioaktivity.

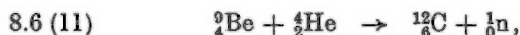


Obr. (8.6) 2. Jedna z Blackettových fotografií transmutace dusíku v kyslík podle rovnice 8.6 (10) jedním z helionů vystupujících svisle vzhůru. Krátká stopa jádra ${}^{16}_8\text{O}$ mří vpravo nahoru, dlouhá stopa protonu vlevo dolů i



Obr. (8.6) 3. Stereoskopický snímek stop protonů ve Wilsonově komoře, u vedených do pohybu neutrony přicházejícími zdola

K prvnímu objevu vedly pokusy, kterými r. 1930 manželé Joliotovi potvrdili pozorování Bethovo a Beckerovo, že berylium pod vlivem záření α z polonia vysílá velmi pronikavé záření, které uvádí v pohyb jádra plynů, např. protony [obr. (8.6) 3]. Chadwick (r. 1932) to vyložil hypotézou, že toto nové záření jsou prudce letící neutrální částice, které nazval *neutrony*. Vznikají z berylia podle rovnice



kde ${}_0^1\text{n}$ značí tuto novou částici, o níž víme, že je jedním z nukleonů. Proto ji lze označit jako „jádro“ s čísly $Z=0$, $A=1$, jak jsme učinili. Chadwick předpokládal, že neutrony uvádějí v pohyb jádra plynu podle zákonů rázu pružných koulí, takže při přímém nárazu dostane odražené jádro největší rychlost. Podle zákona zachování hybnosti bude tedy při přímém nárazu (pokud jsou obě částice klasické)

$$8.6 (12) \quad m_n v_n + m_j v_j = m_n v'_n + m_j v'_j,$$

jsou-li m_n a m_j , v_n a v_j , v'_n a v'_j hmotnosti a rychlosti obou částic před rázem a po rázu. Relativní rychlost však mění dokonale pružným rázem jen znaménko, tedy

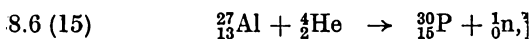
$$8.6 (13) \quad v'_n - v'_j = -(v_n - v_j).$$

Z ionizačního účinku odražených jader je zřejmé, že jejich rychlost, a tedy i rychlost neutronů je mnohem větší než termická rychlost molekul plynu; proto můžeme v_j zanedbat proti ostatním rychlostem, takže z 8.6 (12 a 13) dostaneme

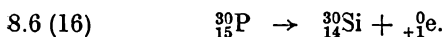
$$8.6 (14) \quad m_n v_n = m_n(v'_j - v_n) + m_j v'_j.$$

Chadwick určil z doletu odražených jader vodíku a dusíku rychlosti v'_H a v'_N a tak získal dosazením do 8.6 (14) dvě rovnice, z nichž mohl vypočítat jak m_n , tak i v_n . Došel k výsledku $m_n \approx m_H$ a $v_n \approx v'_H = 3 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Poslední vztah plyne dosazením $m_n \approx m_H$ do 8.6 (14), což dává podle 8.6 (13) $v'_n \approx v_H$ v soulase se známou skutečností, že stejně těžké pružné koule si vymění při přímém rázu své rychlosti. To znamená, že rychlé neutrony se průchodem vodíkem (a přibližně i jinými látkami složenými z lehkých atomů) zpomalí tak, že jejich rychlost klesne na velikost termické rychlosti molekul. Získáme tím tzv. *pomalé* čili *termické neutrony*, potřebné k štěpení uranu 235 (čl. 8.6.4).

Při transmutaci hliníku zářením α z polonia (RaF) objevili r. 1934 manželé Joliotovi také tzv. *indukovanou* neboli *umělou radioaktivitu*. Vložili ^{210}Po do hliníkové nádoby a pozorovali pronikavé záření, které mělo pozoruhodnou vlastnost, že neustalo současně s odstraněním polonia, ale jeho intenzita klesala podobně jako u záření radioaktivních nuklidů s krátkým poločasem. Jev se vysvětluje tím, že z hliníku vzniká radioaktivní izotop fosforu ^{30}P (radiofosfor) podle rovnice

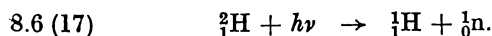


který se s poločasem 3 min 15 s mění v křemík, při čemž vysílá pozitrony:



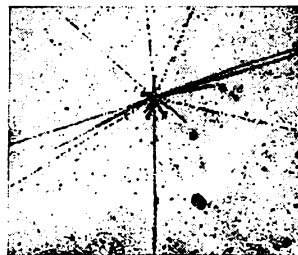
Pozitron jsme označili jako jádro s nukleonovým číslem $A = 0$ a atomovým číslem $Z = +1$, abychom jej odlišili od negatronu, který se značí ${}^0_{-1}\text{e}$.

Pokud jde o *fotodezintegraci*, které se říká též *nukleární fotoelektrický efekt*, zmíníme se jen o důležité transmutaci, kterou uskutečnili Chadwick a Goldhaber (r. 1934) působením záření γ z ThC'' na těžký vodík. Fotony nejtvrdší složky záření mají energii 2,62 MeV a stačí k rozložení deuteronu na proton a neutron podle rovnice



Je to v soulase s výsledkem 8.2 (15), podle něhož činí vazebná energie deuteronu 2,22 MeV.

Konečně je pochopitelné, že i kosmické záření může vyvolat jaderné reakce. Vzhledem k své mimořádně velké energii mohou kosmické částice silně rozrušit vazbu jádra a způsobit tak jeho rozpad. Z místa srážky vyletí řada různých částic na všechny strany, při čemž platí zákon zachování hybnosti. Popsanou dezintegraci vyvolávají vysoce energetické nukleony, především neutrony, které nezanechávají stopu ani v mlžné komoře, ani v jaderné emulzi. V těchto emulzích se proto pozorují tzv. *hvězdičky* jako na obr. (8.6) 4. Pozorujeme stopy různé hustoty: nejřidší náleží protonům, hustší a sil-



Obr. (8.6) 4. Mikrofotografie explozivní fotodezintegrace ve fotografické emulzi, způsobené kosmickým zářením. Proměřením stop lze dokázat platnost zákona zachování hybnosti

nější stopy helionů a nejkratší silné stopy byly patrně zanechány těžšími úlomky jádra atomu stříbra nebo brómu obsaženého v emulzi. Různé transmutace jader mohou v jaderné emulzi způsobit i mezony, zejména záporné piony.

8.6.3. Transmutace urychlenými částicemi

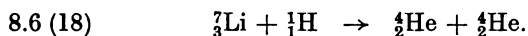
V tomto článku podáme přehled nukleárních reakcí vyvolaných uměle urychlenými částicemi, tj. protony p , deuterony d a heliony α . Přitom uijeme zkráceného označení reakcí závorkami, v nichž vlevo je značka projektilu p, d, α , vpravo značka částice uvolněné z jádra, což může být kromě p, d, α také neutron n nebo foton záření γ .

1. Transmutace urychlenými protony

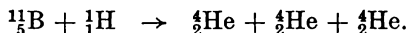
Ostřelováním prvků urychlenými protony mohou vzniknout reakce trojího druhu:

- I. ${}_Z^AJ(p, \alpha) {}_{Z-1}^{A-3}J$,
- II. ${}_Z^AJ(p, \gamma) {}_Z^{A+1}J$,
- III. ${}_Z^AJ(p, n) {}_{Z+1}^AJ$.

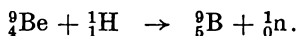
Důležité jsou reakce prvního druhu, při nichž se bombardováním uvolní heliony. První takovou reakci přivedli Cockroft a Walton (r. 1941), kteří protony o energii 0,7 MeV ostřelovali izotop lithia $A = 7$, čímž jej rozložili na dva heliony:



Podobně se dá rozložit bór na tři heliony:



Tyto reakce si vysvětlujeme tak, že jádro pohlcením protonu ztratí stabilitu a rozrušená vazba protonů a neutronů v jádře umožní vytvořit dvě nebo tři nejstabilnější kombinace, tj. heliony. Reakce typu II nastává u uhlíku a poskytuje radiodusík ${}_{12}^{13}\text{N}$, který vysílá pozitrony. Konečně třetí typ vzniká u berylia:



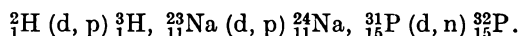
Podobně je tomu při bombardování vzácného izotopu ${}_{8}^{18}\text{O}$ protony.

2. Transmutace urychlenými deuterony

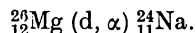
Při ostřelování jader deuterony (${}^2_2\text{H}$, ${}^2_1\text{D}$, d) mohou nastat, podobně jako při ostřelování protony, tři typy jaderných reakcí:

- I. ${}_Z^AJ(d, p) {}_Z^{A+1}J$,
- II. ${}_Z^AJ(d, \alpha) {}_{Z-1}^{A-2}J$,
- III. ${}_Z^AJ(d, n) {}_{Z+1}^AJ$.

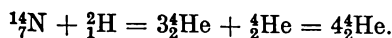
Reakce typu I vedou obvykle k radioaktivním nuklidům, jak je patrné z těchto příkladů:



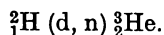
Radiosodík ${}_{11}^{24}\text{Na}$ má poločas 14,8 hodiny, radiofosfor ${}_{15}^{32}\text{P}$ 14,3 dne a oba vydávají záření β^- . Radiosodík vzniká také z magnézia reakcí typu II:



Reakcím tohoto typu lze přiřadit i transmutaci, kterou uskutečnil Fowler,



Z reakcí typu III uvádíme jen případ ostřelování deuteronů deuterony:

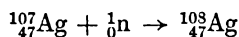
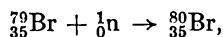


3. Transmutace urychlenými heliony

jsou analogické reakcím, které jsme popsali mezi reakcemi vyvolanými přirozeným zářením α ; uvolňují se při nich buď protony jako při klasické transmutaci Rutherfordově 8.6 (10), nebo neutrony jako při transmutaci 8.6 (15). Proti přirozeným částicím mají „umělé“ střely výhodu, že moderními stroji jim můžeme udělit značné energie.

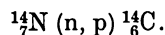
8.6.4. Transmutace prvků neutrony. Štěpení jader

Neutrony se osvědčily jako velmi účinné střely k účelům transmutačním. Je známa řada transmutací, které mohou způsobit neutrony uvolněné při některých jaderných reakcích, jako 8.6 (11, 15, nebo 17). Tyto neutrony mají obvykle dosti značnou energii (několika MeV), a proto je nazýváme *rychlými*. V některých případech jsou jádrem prostě pohlceny bez uvolnění nějaké částice, takže vznikne izotop ostřelovaného prvku — nejčastěji radioaktivní. Např. reakcemi



vznikne radioaktivní bróm (2 izoméry o poločasech 4,4 hod a 18 min) a stříbro (2,3 min). Jak zjistil Fermi (r. 1933), lze ostřelováním neutrony přeměnit skoro všechny známé prvky na jejich radioizotopy.

Kromě pohlcení neutronu bez emise částic, které je pravidlem, je někdy vniknutí neutronu do jádra provázeno uvolněním částice α nebo protonu:



Poslední reakce je důležitá tím, že dává vznik radiouhlíku ${}^{14}_6\text{C}$, který vysílá záření β^- se značným poločasem (řádu 10^4 let), a proto je výborným indikátorem v biologii i v botanice. Je důležité poznamenat, že tato reakce může proběhnout také podle schématu

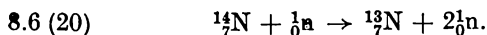
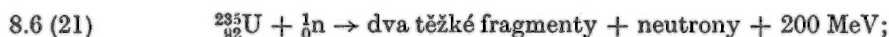


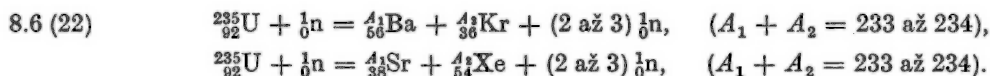
Schéma ukazuje, že se místo jednoho pohlceného neutronu uvolní dva neutrony, které by mohly vyvolat stejné reakce a dát vznik čtyřem neutronům atd. Tak přicházíme k teoretické možnosti tzv. *řetězové* nebo *lavinové reakce*, která může skutečně nastat při dalším typu neutronových transmutací, totiž při *štěpení* některých prvků vyvolaném zejména pomalými neboli termickými neutrony.

Některé těžké radioaktivní nuklidy jeví pozoruhodnou vlastnost, že jejich jádra pohlcují pomalé neutrony a přitom se rozpadají na dvě skoro stejně těžké části (úlomky, fragmenty) a na 2 až 3 rychlé neutrony. Takovou reakci, která byla poprvé pozorována u uranu, nazýváme štěpením jádra. Na obr. (8.6) 5 je zachyceno štěpení uranu ve Wilsonově komoře. Objev tohoto dříve neznámého způsobu transmutace byl výsledkem velkého počtu prací, na kterých se v letech 1934 až 1939 podílela řada badatelů: Fermi, Meitnerová, Strassmann, Hahn, Joliot, Dunning, Savitch, Frisch a jiní. Dnes víme, že lze pomocí neutronů rozštěpit

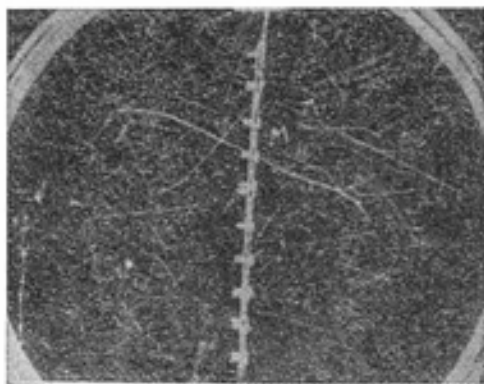
tři nuklidy: izotopy uranu $^{235}_{92}\text{U}$, $^{233}_{92}\text{U}$ a transuran plutonium. Štěpení izotopu $^{235}_{92}\text{U}$ může probíhat různým způsobem, který se dá obecně vyjádřit reakcí



při tom těžké produkty rozpadu jsou jádra prvků mezi selenem a lanthanem. Větší část uvolněné energie připadá na kinetickou energii obou těžkých jader. Uvádějí se dvě hlavní reakce:

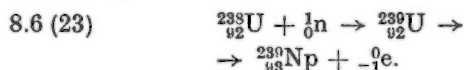


Při první reakci vznikají izotopy barya a kryptonu, při druhé izotopy stroncia a xenonu, jejichž zaokrouhlené relativní atomové hmotnosti mají součet 233 až 234.

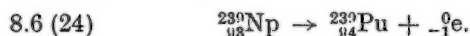


Obr. (8.6) 5. Štěpení uranu, k němuž došlo v místě *M* v mlžné komoře (bez magnetického pole), naplněné zředěným argonem. Pozorujeme mírně zakřivené stopy obou těžkých fragmentů, které vycházejí z *M* v opačných směrech

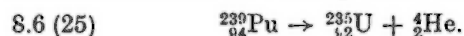
K tomu je nutno dodat, že *přirodní uran* je směs tří izotopů s nukleonovými čísly 234, 235, 238, z nichž nejčastější jsou hlavní izotop 238 (99,274 %) a izotop 235 (0,720 %); zbytek (0,006 %) připadá na nejlehčí izotop 234. Hlavní izotop reaguje s neutrony vhodné rychlosti podle schématu



Vzniká totiž radioaktivní izotop uranu 239, který se mění v neptunium Np, které s poločasem 23 minut přechází v plutonium:

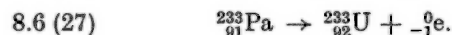
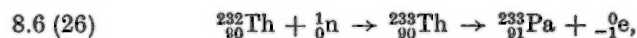


Plutonium 239 vysílá záření α a mění se s poločasem asi 24 000 let v izotop uranu 235:



Je třeba zdůraznit, že plutonium 239 má touž důležitou vlastnost jako uran 235, že se štěpí působením neutronů za uvolňování značné energie; kromě toho lze z něho a z některých izotopů uranu získat další dva transurany americium a curium.

Třetí dnes známý štěpitelný nuklid, izotop uranu 233, vzniká dvojí přeměnou β^- z umělého izotopu thoriumu Th 233, který lze získat z přírodního thoriumu 232 ošřelováním pomalými neutrony. Lze to vyjádřit transmutací:



8.7. Řízené uvolňování jaderné energie

8.7.1. Jaderná energie

Než přistoupíme k vlastnímu výkladu o tzv. atomové energii, je vhodné zdůraznit, že to není snad nový druh nebo forma energie. Uvolňuje se především jako tepelná energie a liší se od známých druhů energie jen svým původem, tedy způsobem, jakým ji získáváme.

Tento způsob je ovšem podstatně nový a její uvolnění nebylo až do naší doby skutečně lidským zásahem, ač — jak uvidíme — jaderná energie se uplatňuje v našem životě od jeho vzniku. Abychom tyto skutečnosti náležitě objasnili, probereme hlavní zdroje energie z fyzikálního hlediska.

Mechanická energie se nám v přírodě nabízí buď jako energie pohybová (kinetická), nebo jako energie polohy (potenciální). V prvním případě jsou jejím zdrojem velká množství vody nebo vzduchu v pohybu (proudy řek, vodopády, mořský příboj, vítr), v druhém případě je to voda shromážděná ve vyšších polohách (údolní přehrady, jezera, vzedmutá hladina moře za přílivu). V obou případech využíváme mechanické energie jako pohybové energie tekutiny, jejíž souvislé části se pohybují zhruba shodným způsobem. Tekutina je ovšem složena z molekul a můžeme si představit, že molekuly opisují v tomto případě přibližně stejné dráhy v prostoru. Kdyby tomu tak nebylo, nebyl by pohyb tekutiny makroskopicky pozorovatelný.

Tepelná energie je z hlediska lidského zcela odlišná od energie mechanické, ale z hlediska fyzikálního je to v podstatě kinetická, tj. mechanická energie neuspořádaných termických pohybů, a proto se nazývá energie *mikromechanická*.

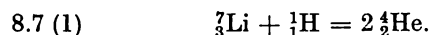
Z předešlého výkladu plyne, že při změně mechanické i tepelné energie tělesa se v každém případě mění jen energie molekul, avšak *molekuly samy zůstávají neproměnné*. V tom je zásadní rozdíl proti dalšímu druhu energie, o kterém nyní promluvíme.

Chemická energie se uvolňuje nebo absorbuje při chemických reakcích, o nichž víme, že vznikají přeskupováním atomů, z nichž jsou složeny molekuly různých sloučenin. Energie uvolněná při takové přeměně molekul jednoho druhu v molekuly jiného druhu se projevuje zvýšenou energií nově vzniklých molekul — tedy jako teplo. Takové reakce nazýváme *exotermickými*, kdežto chemické pochody, při nichž se energie spotřebuje, nazýváme *endotermickými*. Nejčastější exotermická reakce je slučování s kyslíkem (hoření, spalování), při němž se uvolňuje energie jako *spalné teplo*.

Při chemických reakcích se mění sloučeniny v jiné, ale chemické prvky, které tvoří sloučeniny, zůstávají neproměnné. Mění se tedy molekuly, avšak atomy zůstávají aspoň v jistém smyslu nezměněny. Proto můžeme z fyzikálního hlediska chemickou energii nazvat *energií molekulární*. K tomu je třeba podotknout, že při tvoření molekul nereagují mezi sebou neutrální atomy, nýbrž ionty, tj. atomy s kladným nebo záporným elektrickým nábojem. Chemické síly jsou tedy povahy elektrické a uvolněná chemická energie se rovná práci vykonané těmito silami. K hrubému výkladu těchto dějů postačí jednoduché představy názorné *modelové teorie atomů*.

Protony a neutrony se navzájem přitahují a přitažlivé síly vykonají při složení jádra kladnou práci, čímž se při vytvoření jádra uvolní energie rovná této práci. Naopak je k rozložení jádra na volné nukleony nutno dodat jistou energii, aby se uvolnila vazba mezi částicemi tvořícími jádro. Tuto energii nazýváme *vazební energií jádra*. Je zřejmo, že u stálých prvků musí být tato vazební energie kladná a že má tím větší hodnotu, čím je jádro stabilnější, jak jsme ukázali v čl. 8.2.1. Malá část této vazební energie se uvolňuje spontánně u radioaktivních jader a podobně je tomu i při některých uměle vyvolaných jaderných reakcích. Energie Q uvolněná (převážně ve formě tepelné) při takové exoenergetické či exotermické reakci se vypočte z úbytku celkové klidové hmotnosti podle vzorce 8.6 (4).

Příkladem takové exotermické přeměny je přeměna lithia na hélium ostřelováním protony, která probíhá podle rovnice



Uvolněnou energii zjistíme podle 8.6 (4) ze vztahu

$$Q = (m_{{}_3\text{Li}} + m_{{}_1\text{H}} - 2m_{{}_2\text{He}}) c^2,$$

dosadíme-li sem podle tab. (8.2) I

$$m_{{}_3\text{Li}} = 7,016\,005\,u, \quad m_{{}_1\text{H}} = 1,007\,825\,u, \quad m_{{}_2\text{He}} = 4,002\,604\,u,$$

čímž dostaneme

$$Q = 0,018\,622 \text{ u} \cdot c^2.$$

Z rovnice 8.2 (14) však plyne, že atomová jednotka hmotnosti je ekvivalentní energii

$$8.7 (2) \quad 1 \text{ u} \cdot c^2 = 1,492 \cdot 10^{-10} \text{ joule} = 931 \text{ MeV},$$

takže při přeměně jednoho atomu lithia na dva atomy hélia uvolní se energie

$$8.7 (3) \quad Q = 0,018\,62 \cdot 931 \text{ MeV} = 17,3 \text{ MeV}.$$



Obr. (8.7) 1. Stopy dvou helionů unikajících v opačných směrech z lithia ostřelovaného protony

Oba heliony odletí z místa srážky v opačných směrech přibližně stejnou rychlostí v soulase se zákonem zachování hybnosti, jak je patrné ze snímku ve Wilsonově komoře na obr. (8.7) 1.

Z měření skutečně plyne, že každý z uvolněných helionů má kinetickou energii zhruba 8,5 MeV.

Obecně se při rozkladu jádra J na dvě jádra J_1, J_2 uvolní energie

$$8.7 (4) \quad Q = W_1 + W_2 - W,$$

značí-li W vazební energii původního jádra J a W_1, W_2 vazební energie vzniklých jader J_1, J_2 . Tuto reakci si totiž můžeme představit jako složenou ze dvou jaderných procesů: z úplného rozložení jádra J na volné protony a neutrony, k čemuž je nutno dodat vazební energii W , a z jejich složení v jádra J_1, J_2 , při čemž se uvolní energie rovná součtu vazebních energií obou těchto jader. Q je tedy kladné, tj. reakce je exotermická, je-li

$$W_1 + W_2 > W.$$

Z této představy plyne skutečně pro energii uvolněnou při reakci 8.7 (1) podle tab. (8.2) I hodnota

$$Q = 2W_{\text{He}} - W_{\text{Li}} = (2 \cdot 28,296 - 39,244) \text{ MeV} = 17,348 \text{ MeV}$$

v úplné shodě s 8.7 (3).

Nahradíme-li celkové vazební energie průměrnými energiemi 8.2 (16) připadajícími na jeden nukleon (tedy na atomovou jednotku hmotnosti):

$$\overline{W} = \frac{W}{A}, \quad \overline{W}_1 = \frac{W_1}{A_1}, \quad \overline{W}_2 = \frac{W_2}{A_2},$$

bude vzhledem k 8.7 (4) uvolněná energie

$$8.7 (5) \quad Q = A_1 \overline{W}_1 + A_2 \overline{W}_2 - A \overline{W}.$$

Při tom je však $A_1 + A_2 = A$, takže reakce je určitě exotermická, jestliže

$$8.7 (6) \quad \overline{W}_1 > \overline{W}, \quad \overline{W}_2 > \overline{W}.$$

Tyto podmínky by ovšem nemohly být splněny, kdyby průměrná vazební energie byla přesně stejná pro všechna jádra, tj. kdyby vazební energie rostla v závislosti na nukleonovém čísle přesně lineárně.

Z průběhu křivky na obr. (8.2) 7 je zřejmo, že největší průměrnou vazební energii $\overline{W}$ mají jádra s relativní atomovou hmotností kolem 100. Pro tato jádra nabývá průměrná vazební

energie maximální hodnoty zhruba 8,6 MeV a s rostoucím A mírně klesá na hodnotu asi 7,5 MeV pro nejtěžší prvky. Pro uvolňování nukleární energie plyne odtud toto obecné pravidlo:

Jaderná energie se uvolňuje při transmutacích, při nichž vznikají středně těžká jádra z jader velmi těžkých nebo z jader velmi lehkých.

Tak např. při přeměně do nedávna nejtěžšího známého prvku *uranu* na dva prvky o relativní atomové hmotnosti kolem 100 uvolnila by se podle rovnice 8.7 (5) energie přibližně rovná

$$8.7 (7) \quad 200 (8,6 - 7,5) \text{ MeV} = 220 \text{ MeV}.$$

Tímto velmi důležitým případem uvolňování nukleární energie se budeme ještě zabývat; nyní promluvíme o některých exotermických reakcích druhého typu, při nichž jde o skládání (syntézu) těžších jader z jader lehčích. Jednu takovou reakci, která je vyjádřena rovnicí 8.7 (1), jsme již uvedli. Nukleární energii lze také uvolnit bombardováním nuklidu ${}^6\text{Li}$ neutrony nebo deuterony a podobné reakce byly pozorovány u berylia. Také při přeměně vodíku na helium se uvolní značné množství energie. Zvláště vhodný je nejtěžší izotop vodíku ${}^3\text{H}$ (triterium), jehož jádro zvané triton reaguje s protonem podle rovnice

$$8.7 (8) \quad {}^3\text{H} + {}^1\text{H} = {}^4\text{He} + 19,8 \text{ MeV}$$

a s deuteronem dává reakci

$$8.7 (9) \quad {}^3\text{H} + {}^2\text{H} = {}^4\text{He} + {}^1_0\text{n} + 17,6 \text{ MeV},$$

při čemž uvedené hodnoty energie plynou z tab. (8.2) I. Podmínkou je ovšem dostatečně velká energie protonů nebo deuteronů, kterou by měly při termickém pohybu za nesmírně vysokých teplot řádu 10^7 až 10^8 °C, a proto se transmutace 8.7 (8 a 9), při nichž jde o syntézu těžších jader z lehčích, i jiné podobné transmutace, jako např. 8.7 (1), nazývají *termonukleární* čili *teplojaderné reakce*. Domníváme se, že přeměna vodíku na helium probíhá v nitru slálc a je zdrojem jejich ohromné energie, kterou nelze jinak vysvětlit. To se týká také našeho Slunce, o němž Bethe předpokládá, že čerpá svou energii z tzv. *uhlíkovodíkového cyklu*, kterým se nakonec přemění proton v helion. S dnešním stavem pokusů o řízeném uvolňování teplojaderné energie seznámíme čtenáře v čl. 8.7.3.

Z předešlého výkladu vychází najevo, že jadernou (nukleární neboli „atomovou“) energii můžeme definovat takto:

Jaderná energie je částí vazební energie atomových jader, která se uvolňuje v míře rovné celkovému úbytku klidové energie jader vstupujících do jaderné reakce.

8.7.2. Štěpná řetězová reakce

Předešlé úvahy vycházely z předpokladu, že se potřebná exotermická reakce opravdu uskuteční. Atomová jádra mají však mizivě malý průměr a vlastní objem jader je nesmírně nepatrný proti celkovému prostoru, který látka zaujímá. Máme-li tedy posoudit možnost skutečného získávání jaderné energie, musíme kromě množství energie uvolněné při přeměně jednoho jádra mít na zřeteli, kolika skutečných přeměn opravdu dosáhneme daným množstvím střel. O tom nás poučuje *účinnost* neboli *výtěžek* příslušné reakce, což je poměr počtu uskutečněných přeměn k počtu použitých střel. Posuzujeme ji podle účinného průřezu ostřelovaných jader, který jsme definovali v čl. 8.3.2 při studiu absorpce jaderného záření. Z jeho definice vyplývá, že účinný průřez jádra je větší než jeho „geometrický“ průřez πr_0^2 , je-li střela jádrem přitahována. Odpuzuje-li jádro střelu, která s ním má reagovat, je jeho účinný průřez pro příslušnou reakci menší než průřez geometrický. Proto byla za jednotku (barn) účinného průřezu zvolena ploška 8.3 (14), jejíž velikost se zhruba rovná geometric-

kému průřezu středně těžkého jádra. Vezmeme-li podle obr. (8.2) $3 r_j = 6 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, dostaneme totiž

$$\pi r_j^2 = 113 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2 \approx 1 \text{ bn.}$$

Interakce neutronů s jádrem přírodního uranu (i jiných těžkých prvků) může mít různou povahu podle děje, který při přiblížení neutronu k jádru proběhne, a pro každý z těchto dějů má jádro jiný účinný průřez σ . Pro další výklad stačí zjednodušené schéma hlavních druhů interakce:

1. štěpení (účinný průřez σ_f),
2. zachycení s vysláním nabitě částice nebo fotonu (σ_r),
3. pružný rozptyl (σ_e),
4. nepružný rozptyl (σ_i).

Rozptylem částice na jiné částici rozumíme takové vzájemné působení, při němž si obě částice zachovávají svou povahu, nemění se v jinou částici. Zůstává-li přitom celková kinetická energie obou částic nezměněna (změní se jen směr pohybu částic jako při rázu pružných koulí), nazýváme rozptyl *pružným*. Změní-li se však část energie v excitační energii jádra, nazýváme rozptyl *nepružným*, protože se celková kinetická energie zmenší (jako při rázu nedokonale pružných koulí). Pro rychlé neutrony s energií větší než 1,1 MeV má přírodní uran účinné průřezy uvedené v tab. (8.7) I.

Tabulka (8.7) I

Účinné průřezy přírodního uranu pro rychlé neutrony

Účinný průřez	σ_f	σ_r	σ_e	σ_i	$\Sigma\sigma$
Barn	0,29	0,04	1,5	2,74	4,57

Shledáváme, že výsledný průřez rovný součtu všech čtyř průřezů má hodnotu menší než dvojnásobek geometrického průřezu 2,5 bn uranového jádra. Uvažíme-li však, že pružný rozptyl nevyžaduje těsnější styk neutronu s jádrem (směr pohybu neutronu se změní působením silového pole v okolí jádra), vidíme, že pro přímou interakci má účinný průřez hodnotu

$$\sigma = \sigma_f + \sigma_r + \sigma_i = 3,07 \text{ bn,}$$

prakticky rovnou geometrickému průřezu jádra.

Účinné průřezy uranových jader pro termické neutrony s energií kolem $0,025 \text{ eV} = 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ (rovnou zhruba energii molekuly jednoatomového plynu při teplotě 300 °K) jsou sestaveny v tab. (8.7) II; mají pro přírodní uran několikanásobně větší hodnoty než

Tabulka (8.7) II

Účinné průřezy uranových jader pro termické neutrony

Účinný průřez (barn)	σ_f	σ_r	σ_e
U přírodní	3,92	3,5	8,2
U 235	590	108	8,2
U 238	0	2,8	8,2

pro neutrony rychlé. Nuklid U 235 má zvláště veliký účinný průřez 590 bn pro štěpení termickými neutrony, kdežto U 238 má $\sigma_f = 0$ v soulase s tím, že se pomalými neutrony s energií $< 1,1 \text{ MeV}$ vůbec neshťepí. Tyto vlastnosti obou hlavních izotopů uranu určily

dosavadní vývoj jaderné techniky. Brzy po objevu štěpení uranu zjistil totiž Fermi, že ostřelování neutrony bylo až desetkrát účinnější, byl-li zdroj neutronů obklopen vodou, parafínem nebo jinou látkou bohatou na vodík. Podal také správné vysvětlení: Neutrony se opakovanými srážkami s protony, které jsou stejně lehké jako neutrony, zpomalí až na rychlost asi $2\,000\text{ ms}^{-1}$ a stanou se z nich termické neutrony, které jsou snáze vychylovány ze svých drah přitažlivými silami jader než neutrony rychlé, které proletí kolem jádra, aniž s ním reagují.

Toto poznatku použil Fermi ke konstrukci prvního zařízení k uvolňování jaderné energie, v němž se mu podařilo uskutečnit tzv. *řetězovou reakci*. Bez ní není využití jaderné energie myslitelné. Kdybychom totiž každou střelu, kterou bychom se pokoušeli vyvolat exotermickou jadernou reakci, museli připravit v nějakém zařízení, spotřebovali bychom vzhledem k malé účinnosti takových jaderných zařízení nepoměrně více energie, než bychom štěpením získali. Proto byly před objevem štěpení uranu názory fyziků na možnost prakticky užitečného uvolňování jaderné energie velmi skeptické. Avšak při rozštěpení každého jádra vzniknou náhradou za každý neutron pohlcený jádrem další dva až tři neutrony, které mohou rovněž způsobit štěpení a uvolnit další neutrony. Kdyby opravdu každý z nově vzniklých neutronů vyvolal štěpení, rostl by počet neutronů exponenciálně (geometrickou řadou). Energie by se uvolňovala se stále rostoucí intenzitou. Ve štěpitelné látce by proběhla *divergentní* čili *lavinová reakce*, která má charakter explozivní. Taková reakce byla, jak známo, uskutečněna v atomové pumě, ale není vhodná pro nedestruktivní využití jaderné energie, při řešení technických úkolů.

V tomto článku pojednáme stručně o podmínkách, které musí splňovat řetězová reakce v přírodním uranu nebo v jiné směsi izotopů U 238 a U 235, a popíšeme způsob, jakým byla poprvé realizována. Neutrony vzniklé štěpením se mohou v takové směsi uplatnit čtyřmi způsoby:

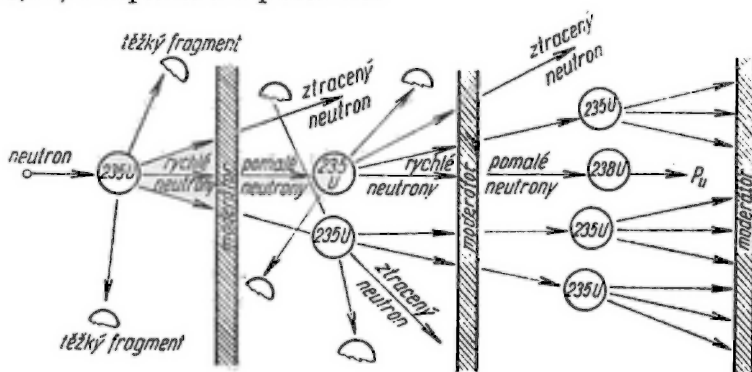
- 1 — uniknou z látky schopné reakce,
- 2 — jsou pohlceny přimíšenými látkami,
- 3 — jsou pohlceny jádru U 238 nebo U 235 bez štěpení,
- 4 — vyvolají štěpení U 235.

Počet případů 2 se dá zmenšit jen použitím co nejčistšího uranu, naproti tomu poměrný počet ztracených neutronů závisí na tvaru, a hlavně na rozměrech látky, v níž probíhá reakce. Počet uniklých neutronů roste totiž úměrně s povrchem látky, kdežto počet pohlcených neutronů (jejichž další osud je dán případy 2, 3, 4) roste úměrně s objemem, tedy s hmotností uranu. Z toho je patrné, že je především vhodné uspořádat látku do tvaru koule nebo aspoň do tvaru krychle, a mimo to, že s rostoucí velikostí této koule nebo krychle se poměr počtu uniklých k počtu pohlcených neutronů bude zmenšovat, neboť objem roste s třetí mocninou lineárních rozměrů, kdežto povrch jen se čtvercem. Lze tedy očekávat, že existuje jisté *kritické množství* uranu, které má tu vlastnost, že se v menším množství reakce sama trvale neudrží a ve větším množství probíhá lavinovitě — explozivně.

Při řešení problému řetězové reakce má velký význam skutečnost zřejmá z tab. (8.7) I a (8.7) II, že účinný průřez přírodního uranu je pro termické neutrony třináctkrát větší než pro rychlé, při čemž však neutrony uvolněné štěpením mají energii řádu kolem 2 MeV, a jsou tedy rychlé. Kdybychom tyto neutrony zpomalili, zvýšili bychom pravděpodobnost případů 4 a snížili počet unikajících neutronů. Látky, které mají tu vlastnost, že účinně zpomalují rychlé neutrony a že je zároveň znatelně nepohlcují, nazývají se *moderátory*. Podle předešlého výkladu jsou k tomu vhodné lehké prvky, jestliže ovšem značněji neabsorbují neutrony. Nejvhodnější moderátory jsou těžká voda, lehká voda a uhlík; musí být ovšem velmi čisté a nesmějí obsahovat ani stopy prvků značně absorbujících neutrony, jako jsou např. bór a kadmium.

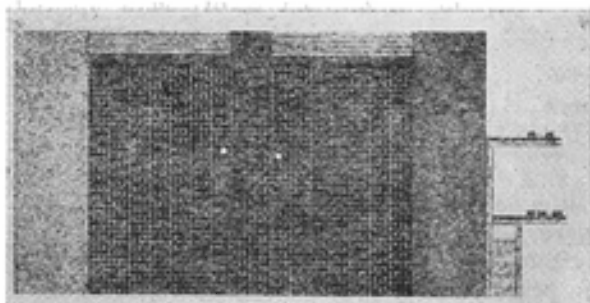
Zpomalením neutronů v moderátoru se mnohonásobně zvýší σ_f uranu 235, zatímco σ_f uranu 238 klesne na nulu. Tento pokles však nemá praktický význam, protože i bez užití

moderátoru se v přírodním uranu (vzhledem k jeho poměrně velkému průřezu σ_i pro nepružný rozptyl) nově vznikající rychlé neutrony zpomalí na energii menší než 1,1 MeV, při které již nemohou štěpit U 238. Tato jádra se působením pomalých neutronů mění podle 8.6 (23, 24) v neptunium a plutonium.



Obr. (8.7) 2. Schéma řetězové reakce ve směsi U 235 a U 238 s moderátorem

Schéma řetězové reakce, probíhající ve směsi U 235 a U 238 za působení moderátoru, ukazuje obr. (8.7) 2. Příklad, kdy neutron reaguje s izotopem U 238, je označen šipkou a značkou Pu. Zařízení, v nichž se udržuje řetězová reakce a v nichž se uvolňuje jaderná energie, nazývají se *jaderné* (dříve též *atomové*) *reaktory*.



Obr. (8.7) 3. První uranový reaktor (s tuhovým moderátorem)

patrná z obr. (8.7) 3. Je to v podstatě velký kvádř tuhových bloků, z nichž některé obsahují válečky přírodního uranu nebo kysličníku uraničitého UO_2 . Vnější vrstvy tuhy neobsahují uran a mají funkci neutronových zrcadel čili *reflektoru*, který odráží neutrony částečně zpět do mlíře. Dva střední tuhové bloky vyčníhají nad ostatní a tvoří tzv. *tepelný sloup* (neboli tepelnou kolonu), kterým mohou termické neutrony unikat z reaktoru a být experimentálně zkoumány. Dřevěná konstrukce vpravo nese *regulační tyče*, které se vkládají do reaktoru. Do otvorů v tuhovém kvádru (vyznačených bílými čtverečky) lze zasunout

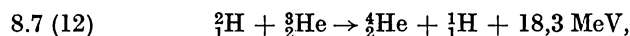
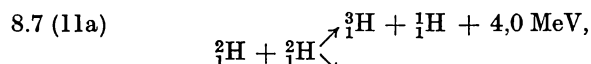
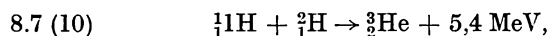
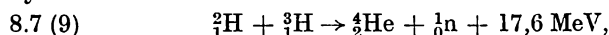
*) Kromě názvu reaktor se v americké, anglické, a zvláště francouzské literatuře hojně užívá názvu *píle*, kterému v češtině odpovídá zhruba slovo *mlíř*, jehož původní smysl jakožto hranice, v níž se pomalým spalováním vyrábí dřevěné uhlí, již ztratil praktický význam. Proto nám nic nebrání, abychom tohoto českého názvu používali pro jaderný reaktor jednak pro jeho stručnost, jednak pro jeho přiléhavost a názornost. Nejobvyklejší druh reaktoru je skutečně v podstatě „hranice“ uranových tyčí a tuhových bloků, v níž probíhá pomalé spalování jaderného paliva. Protože však název *mlíř*, který se z počátku i u nás dosti často vyskytoval, dnes prakticky z naší literatury vymizel, nebudeme ho nadále používat.

kadmiové tyče, které pohlcují část neutronů a zastaví činnost reaktoru při nebezpečí výbuchu. Uranové válce nejsou ve schématu zakresleny. Činnost regulačních (kontrolních) i bezpečnostních (havarijních) kadmiových tyčí záleží v tom, že absorpcí neutronového záření udržují chod reaktoru v ustáleném stavu, při němž se uvolňuje předepsané množství tepelné energie. Řetězová reakce nesmí ustát pro nedostatek uvolňovaných neutronů ani nesmí přejít v divergentní reakci lavinovou. Nukleární děje probíhají ovšem takovou rychlostí, že by regulace nebyla možná, kdyby se všechny neutrony uvolnily okamžitě. Zjistilo se však, že se kromě neutronů uvedených v rovnicích 8.6 (21, 22) uvolňují s poměrně značným zpožděním další tzv. *opožděné neutrony*, které jsou vysílány s poločasem několika desítek vteřin radioaktivními fragmenty rozštěpených jader. Právě tyto *opožděné neutrony* umožňují regulovat chod reaktoru.

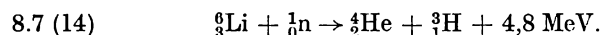
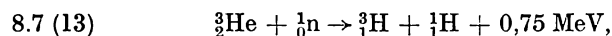
Nebudeme popisovat překotný vývoj, který následoval po spuštění prvního reaktoru. Dnes je v činnosti již velký počet reaktorů a další jsou ve stavbě nebo se plánují. O jejich rozmanitých druzích, jejich vědeckém i praktickém významu a o jaderných elektrárnách pojednáme v příští kapitole.

8.7.3. Termonukleární energie

Ve vodíkových bombách byly r. 1953 uskutečněny lavinové termonukleární reakce: 8.7 (1) a 8.7 (8), kdežto pro řízené uvolňování energie mají podle dosavadních zkušeností význam reakce:



které mohou být při vhodném uspořádání provázeny dalšími exotermickými transmutacemi:



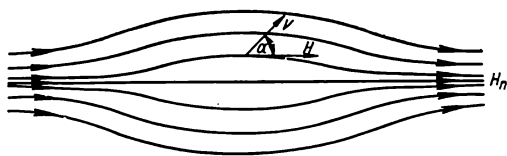
Z hlediska ekonomického je třeba pokládat za základní reakce typu D—D 8.7 (11) mezi deuterony, protože těžký vodík máme k dispozici v prakticky nevyčerpatelných množstvích. Na každých 4 700 molekul H_2O připadá totiž v obyčejné vodě jedna molekula D_2O těžké vody a výrobní metody jsou dnes již tak dalece vyvinuty, že je možno opatřit prakticky neomezené množství deuteria. Jen samými reakcemi typu 8.7 (11) lze získat z jednoho jádra těžkého vodíku energii 1,8 MeV, a počítáme-li s reakcemi sekundárními mezi protony, tritony, jádru He 3 a deuterony, lze odhadnout tuto energii na hodnotu až 7 MeV/D.

Prímým výpočtem dostaneme pak, že z 1 kg těžkého vodíku by bylo možno (nehledíme-li ke ztrátám) získat energii 30 až 90 miliónů kWh, což by znamenalo, že z 1 litru obyčejné vody by bylo možno teoreticky uvolnit jadernou energii 1 000 až 4 000 kWh, což zhruba odpovídá 100 až 330 litrům benzínu.

V tomto stručném přehledu lze jen nastínit fyzikální podmínky, za kterých je nutno pracovat, a dotknout se hlavních praktických problémů, které čekají na řešení při konstrukci termonukleárních reaktorů.

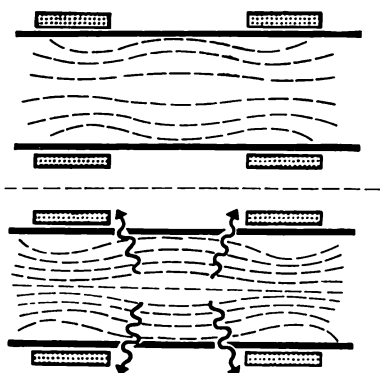
Aby se dva deuterony, které se elektrostaticky odpuzují, mohly přiblížit těsně k sobě a reagovat spolu, musí mít tyto částice neobyčejně velikou energii, která odpovídá teplotám řádu desítek miliónů stupňů. Aby pak uvolněná energie převýšila ztráty, bylo by třeba teplot ještě asi desetkrát vyšších.

Lhký i těžký vodík se za obvyklých teplot skládá z neutrálních dvouatomových molekul. Se vzrůstající teplotou vzrůstá kinetická energie molekul, které se vzájemnými srážkami jednak rozpadají na samostatné atomy (vzniká jednoatomový čili „atomární“ vodík), jednak se také ionizují. Ionizace dosahuje při teplotách kolem 5 000 °C v elektrickém oblouku několika procent, kdežto při teplotách miliónů stupňů je již ionizace prakticky úplná: těžký vodík se skládá jen z volných deuteronů a elektronů. Značně nebo úplně ionizovaný plyn má zvláštní vlastnosti a nazývá se, jak známo, plazma. Je kvazineutrální

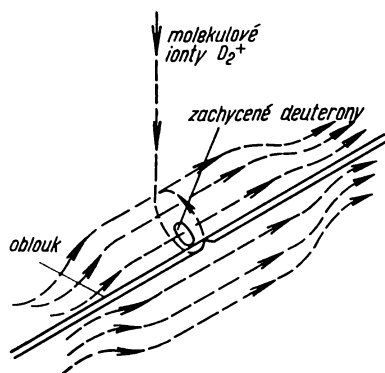


Obr. (8.7) 4. Princip magnetické pasti

v tom smyslu, že jeho celkový náboj je nulový, ale je silně elektricky vodivý, neboť v elektrickém poli se kladné ionty a záporné elektrony urychlují v opačných směrech, vytvářejíce ovšem proudy stejného směru. Při tom je třeba si uvědomit, že vzhledem k nepatrným rozměrům deuteronů a elektronů proti rozměrům atomů a molekul je střední volná dráha částic v plazmatu mnohokrát delší než v obyčejném plynu. Tak např. při tlaku 10^{-4} až 10^{-5} torrů obvyklém v termonukleárních zařízeních činí několik



Obr. (8.7) 5. Komprese plazmatu v magnetické pasti



Obr. (8.7) 6. Zachycení deuteronů v magnetické pasti

desítek až set kilometrů. Proto klade plazma průchodu proudu velmi malý odpor a v elektrickém poli vzniká v něm silný výboj, při kterém se plazma zahřívá Joulovým teplem (tzv. *ohmický ohřev*). Na volné náboje v plazmatu lze ovšem působit magnetickým polem, a tak se dostáváme do oboru tzv. *magnetohydrodynamiky*, která studuje zákony pohybu vodivého prostředí v magnetickém poli. Pro plazma prostorové hustoty ρ , jehož prostorový element se pohybuje rychlostí $\mathbf{v}$ v magnetickém poli indukce $\mathbf{B}$ za působení tlakového spádu — **grad** p , platí základní rovnice:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i} \times \mathbf{B} - \text{grad } p,$$

kde $\mathbf{i}$ je hustota elektrického proudu v místě elementu. Tato rovnice se zjednoduší ve dvou krajních případech:

1. Je-li tlakový spád v plazmatu malý, jsou elektrodynamické síly v rovnováze se silami setrvačnými:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i} \times \mathbf{B}$$

a částice plazmatu mohou být urychleny tak, že dosáhnou energie značné proti energii

neuspořádaných termických pohybů. Tento děj je podstatou tzv. *magnetické komprese*; působíme-li na plazma střídavým magnetickým polem, vyvoláme v něm vibrace, jejichž energie se mění v teplo. To je další metoda ohřevu plazmatu kromě ohmického.

2. V druhém krajním případě, kdy stav plazmatu je do té míry ustálený, že setrvačné síly lze zanedbat proti tlakovému spádu, je kinetický tlak trvale v rovnováze s tlakem magnetickým:

$$\text{grad } p = i \times B.$$

Takový kvazistacionární stav plazmatu v magnetickém poli je možno uskutečnit různými způsoby. Prakticky byly vyzkoušeny dva hlavní směry:

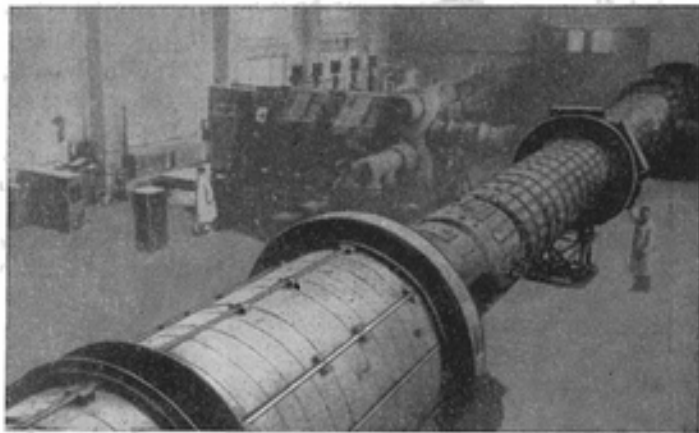
A. Jednak se studují metody ohřátí plazmatu na vysoké teploty a jeho izolace ve velkých prstencových komorách bez elektrod, v nichž se výboj udržuje vnějším napětím elektrickým a stabilizuje se vnějším magnetickým polem.

B. Horké plazma se vytváří tak, že se urychlené ionty (deuterony) vstřikují do přímé válcové komory s *magnetickými zrcadly (zátkami)* na obou koncích, které nabitě částice plazmatu vracejí zpět a tvoří tzv. *magnetickou past (láhev)*.

Tento druhý způsob je založen na skutečnosti, že nabitá částice, jejíž rychlost svírá dosti velký úhel s magnetickými siločarami, se vrací od oblasti silnějšího pole H_M do míst slabšího pole H . Částice může uniknout jen pokud:

$$\sin \alpha < \sqrt{\frac{H}{H_M}}$$

[obr. (8.7) 4], tedy leží-li směr její rychlosti uvnitř jistého kužele s osou ve směru magnetického pole.



Obr. (8.7) 7. Termonukleární aparatura OGRA Institutu atomové energie AN SSSR

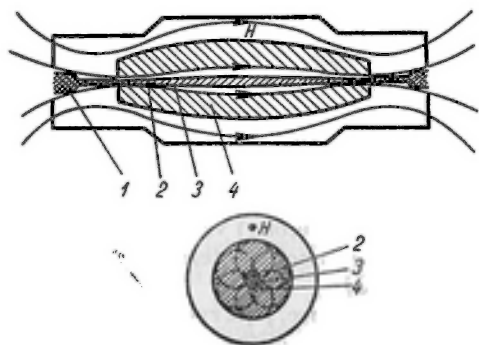
Nabitě částice opisují totiž kolem magnetických indukčních čar šroubovice a na okraji silného pole se vracejí zpět, takže mnohokrát proběhnou celou trubicí. Tak vznikne jakási „magnetická láhev“ nebo „past“, obr. (8.7) 5, v níž můžeme plazma dokonce komprimovat a tím zahřát, což se projeví silným brzdícím zařízením X, které je určeno teplotou elektronového plynu.

Vstříkneme-li do takové pasti značně urychlené ionty, můžeme v ní udržet po jistou dobu velmi horké plazma. Lze to zařídit např. tak [obr. (8.7) 6], že molekulové ionty deuteria ($2D + 1 \text{ el.}$) se vstříknou do láhve, ale v osovém stejnosměrném uhlíkovém oblouku se roztrhnou na neutrální atom těžkého vodíku a na deutron, který se tak chytí v pasti.

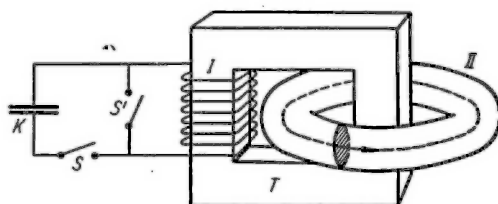
Zvláště dobře se zachycují deuterony, které opisují málo strmé šroubovice.

Jako konkrétní příklad takového zařízení uvádíme aparaturu [obr. (8.7) 7], která byla vybudována v Kurčatovově Institutu atomové energie Sovětské akademie věd.

V ose magnetického pole se vytvoří obloukovým výbojem svazek rychlých iontů [deuteronů, obr. (8.7) 8], které se vstřikují do válcové komory. Během vstřikování deuteronů se udržuje vakuum 10^{-7} torrů. Deuterony jsou pak urychlovány napětím 40 kV mezi svazkem iontů a bočními stěnami vakuové komory a jsou v ní udržovány podélným magnetickým polem, které má ve střední části komory indukci 0,85 T a na koncích indukci 1,2 T. Tak se dá plazma udržet v komoře po dobu několika milisekund (iontový magnetron).

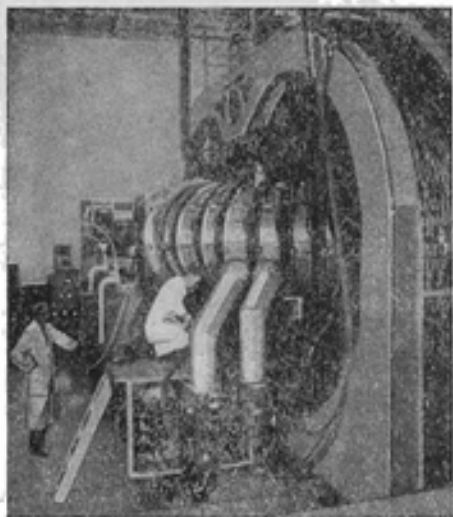


Obr. (8.7) 8. Iontový magnetron: 1 — zdroj plazmatu, 2 — plazmatický svazek, 3 — oblast silného elektrického pole, 4 — oblast pohybu rychlých iontů



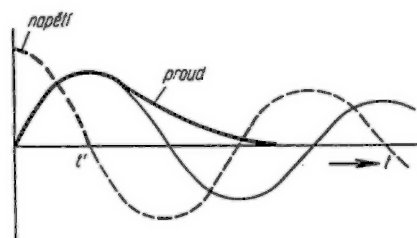
Obr. (8.7) 9. Schéma termojaderného zařízení ZETA

V roce 1958 byla v témže ústavu dokončena konstrukce podobného zařízení s komorou $\varnothing$ 1,4 m a délky 12 m, s magnetickým polem 0,5 T uprostřed a 0,8 T na koncích. Obloukový zdroj dává intenzivní svazek deuteronů, které jsou urychlovány napětím 200 kV a vstřikovány do magnetické pasti soustavou elektrických a magnetických polí.



Obr. (8.7) 10. Snímek zařízení ZETA

Teoretické práce sovětských odborníků ukázaly, že bude možno užít vysokofrekvenčních magnetických polí k ohraničení a izolaci horkého plazmatu. Tato vysokofrekvenční magnetická pole se mohou uplatnit právě jako magnetické zátky (zrcadla) uzavírající konce



Obr. (8.7) 11. Průběh napětí a proudu ve výbojové trubici

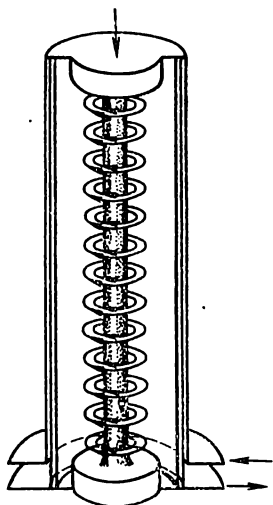
komory s časově stálým podélným magnetickým polem. Lze jimi zadržet částice unikající podél magnetických siločar z oblasti časově stálého pole.

Vysokofrekvenčních polí může být užito také k ohřevu plazmatu, jak dokázaly práce, provedené v Ukrajinském fyzikálně technickém ústavu.

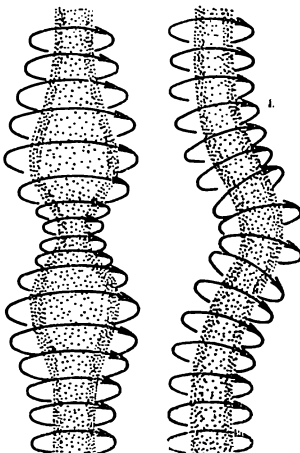
Z nejznámějších zařízení prvního typu s prstencovou komorou je zařízení ZETA v britském atomovém středisku v Harwellu. Jeho hlavní částí je podle obr. (8.7) 9 a (8.7) 10 prstencová výbojová trubice *II*, v níž ionizovaný těžký vodík tvoří sekundární vinutí mohutného transformátoru *T*, jehož primárním vinutím *I* se při spojení spínače *S* vybíjí baterie kondenzátorů *K*. Když napětí kondenzátorů klesne na nulu, zapne se samočinně spínač *S'*, takže v primárním obvodu vznikne proudový náraz vyznačený na obr. (8.7) 11 tlustou spojitou čarou. Tím se indukuje ve výbojové trubici *II* mohutný proudový impuls, který dosáhne maxima kolem 200 000 A, je-li počáteční energie kondenzátorů 0,5 MWs.

Při výboji v plazmatu se projevuje tzv. „pinch efekt“ čili *jev seškrčení*, který vzniká elektrodynamickým přitahováním urychlených iontů i elektronů podle rovnice 5.5 (21')

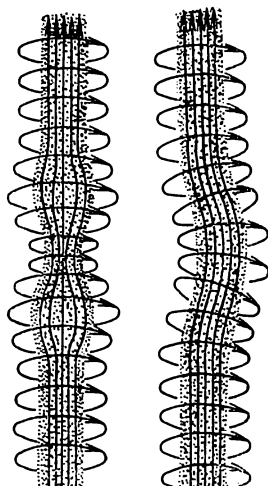
$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0),$$



Obr. (8.7) 12. Seškrčení výboje



Obr. (8.7) 13. Dva případy nestability výboje



Obr. (8.7) 14. Podélné magnetické pole snižuje nestabilitu výboje

kde $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou rychlosti a $\mathbf{r}$ vzájemná vzdálenost iontů s náboji Q a q . Výboj se stáhne do střední části trubice [obr. (8.7) 12] a tím se jednak oddělí od stěn komory, jednak značně vzroste hustota plazmatu. Při tom nabudou nabitě částice značné kinetické energie a zhušťují se. Avšak setrvačností se částice pohybují dále i po zhuštění, takže tlak uvnitř výbojového provazce převyší „magnetický tlak“ a plazma se znovu rozpíná. Tak vznikají příčné oscilace, které se částečně utlumí přeměnou v energii termických pohybů. Tím se ovšem plazma ještě více zahřeje, ale kromě toho vedou tyto oscilace k nestabilitě výboje, jak ukazuje obr. (8.7) 13. V místě značnějšího seškrčení mají magnetické siločáry (indukční čáry) větší hustotu, pole je tam silnější. Proto je tam i „pinch efekt“ silnější a zužování pokračuje, až se výboj přeruší. Podobně při vychýlení výboje na stranu směrem ke stěně komory se zhustí siločáry na konkávní straně a výchylka se zvětšuje, až se plazma dotkne stěny. Tomu lze zabránit tím, že komoru zhotovíme z vodivého materiálu (např. hliníku), v němž při přiblížení plazmatu vznikají vířivé proudy, kterými se pohyb zabrzdí. Aby stěny trubice nezpůsobily zkrat sekundárního obvodu, musí ovšem být přerušovány izolačním materiálem.

Oba druhy nestability lze však zásadně odstranit podélným magnetickým polem, jak

názorně ukazuje obr. (8.7) 14. Siločáry podélného pole se totiž podle Faradaye brání jak prodloužení, tak i příčnému stlačení.

Na obr. (8.7) 15 vidíme takto ustálený výboj v xenonu (nahore *Perhapsatron* a dole *Columbus*, oba v Los Alamos).

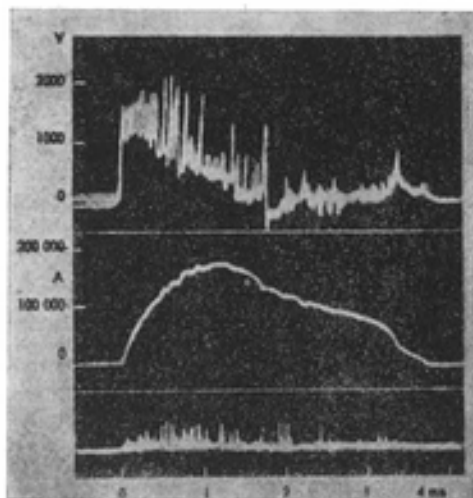
Obr. (8.7) 16 ukazuje oscilografický záznam napětí, proudu a neutronového záření pořízený během 4 ms při výboji na harwellském zařízení ZETA.

Otázku skutečných termionukleárních neutronů pokusili se v Harwellu řešit na základě relativně dosti přesného měření teploty. Užili k tomu spektroskopické metody založené na tzv. dopplerovské šířce spektrálních čar, vysílaných ionty kyslíku a dusíku přimíšených k deuteriu. To bylo nutné vzhledem k tomu, že plně ionizované deuterium (nahé deuterony) nemohou zářit. Ionty O^{++++} a N^{+++} , oba se 4 elektrony, vysílají však ultrafialové spektrum a z šířky jejich čar bylo možno vypočítat rychlosti iontů a tím i kinetickou teplotu s přesností 15–20 %. Na obr. (8.7) 17 vidíme, jak dosažená teplota roste s maximem proudu. Teplotu však můžeme určit také z množství uvolněných neutronů za předpokladu, že mají původ v reakci 8.7 (11b), neboť byla experimentálně zjištěna závislost účinného průřezu deuteronů na jejich energii. Z průběhu tohoto grafu usoudili britští pracovníci, že uskutečnili s velkou pravděpodobností reakci 8.7 (11b).

Tento optimistický názor se však dalším zkoumáním bezpečně nepotvrdil. Vzniklé neutronové



Obr. (8.7) 15. Ustálený výboj v xenonu:
a — v prstencové trubici (*Perhapsatron*),
b — v přímé trubici (*Columbus*)



Obr. (8.7) 16. Průběh výboje v zařízení
ZETA

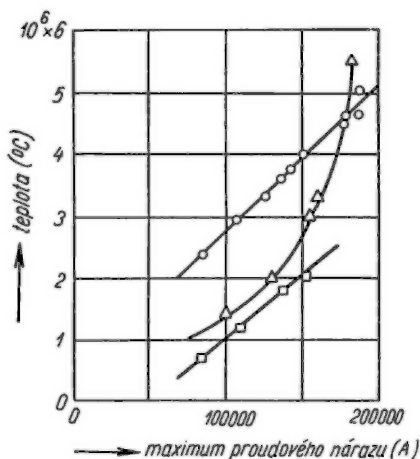
záření nemělo totiž do té míry izotropní prostorové rozložení, jak by tomu mělo být, kdyby pozorované neutrony vznikaly při neuspořádaném termickém pohybu deuteronů. Je proto třeba připustit, že neutrony vznikly převážně jinými procesy, které podle názoru některých specialistů za těchto podmínek mohou probíhat.

Další výzkum se týkal v posledních letech stabilizace výboje. Přitom se zjistilo, že v jednoduchém prstencovém poli s uzavřenými siločarami se částice neudrží dosti dlouho uprostřed komory, protože pole je nehomogenní a vytlačuje je ke stěnám komory. Ukázalo se, že se tomu dá zabránit tím, že pole deformujeme tak, aby siločáry byly prostorové křivky, které nejsou v sebe uzavřeny, ale po každém oběhu celou prstencovou trubici se vrací na místa blízká výchozí poloze. Vytvářejí jakési plochy tvaru toroidu. Správného tvaru těchto ploch lze dosáhnout na výbojové trubici tvaru „závodní dráhy“ pomocí přidavných vinutí „vývrtkových“ s protisměrným proudem [obr. (8.7) 18] nebo tak, že volíme trubici ve tvaru osmičky [obr. (8.7) 19 *Stellarator*].

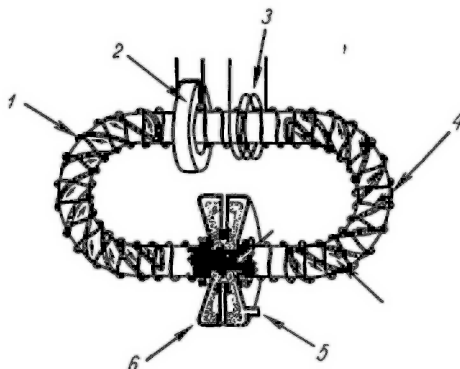
Použijeme toho, abychom vysvětlili, jakou závadou jsou přimíšeniny, které znečišťují deuterium. Cizí atomy ionizované i neutrální (zvláště těžké) snižují teplotu plazmatu, protože zvyšují ztráty způsobené zářením. Vliv nečistot je značnější právě při nižších teplotách, kdy je plazma ještě dosti vzdáleno od teploty vzplanutí, a proto je třeba ohřev urychlit. Nečistoty se dostávají do plazmatu hlavně ze stěn komory, z nichž unikají cizí atomy do vakua. K jejich podstatnému zmenšení byla trubice opatřena zařízením zvaným *divertor* [obr. (8.7) 18]. Je to

vhodně upravená dutina, do které se zvláštním magnetickým polem odehlují vnější vrstvy plazmatu, které obsahují nejvíce nečistot. Tam se ionty neutralizují a odsávají se z výbojové komory. Užitím divertoru se podařilo snížit znečištění plazmatu na pětinu.

Problémy ohřevu, injekce plazmatu, komprese, izolace a stability souvisí navzájem a byly dosud řešeny jen částečně. Všechny tyto otázky musí být řešeny komplexně zároveň s otázkou



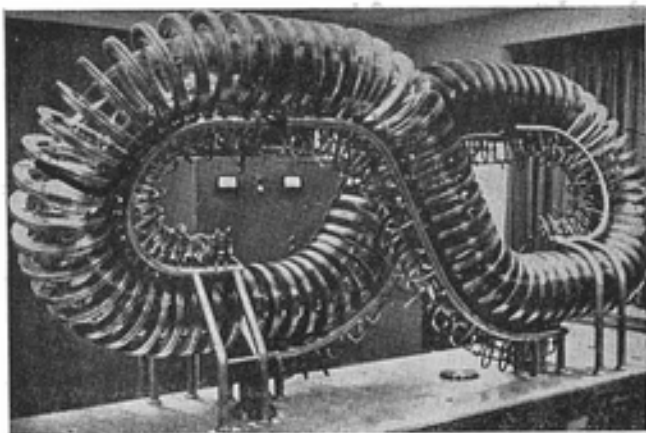
Obr. (8.7) 17. Vzrůst dosažené teploty s proudovým nárazem



Obr. (8.7) 18. Výbojová trubice tvaru závodní dráhy s divertorem: 1 — hlavní vinutí, 2 — ohmický ohřev, 3 — magnetická komprese, 4 — přidavné vývrtkové vinutí, 5 — k vývěvám, 6 — divertor

správné teploty a hustoty plazmatu. Experimentální zařízení poskytla v posledních letech cenné poznatky, které prohloubily naše vědomosti z oboru fyziky plazmatu a magnetohydrodynamiky. Zejména byly potvrzeny některé výsledky teoretické. Byly studovány podmínky a zákonitosti časový průběh různých fází výboje a ohřevu. Tak se ukázalo, že velká hustota plazmatu při seškrbení výboje trvá asi 0,1 μ s. Izolované plazma bylo udrženo po dobu až několika milisekund.

Ústředním problémem zůstává i nadále vznik neutronů. Zjištění jejich původu je nesnadné, protože pravé termionukleární neutrony jsou maskovány neutrony vzniklými jiným způsobem. Nebylo dosud bezpečně prokázáno, že bylo skutečně dosaženo teploty vzplanutí. Jak je možno ji zjistit? Teoreticky je definována jako teplota, při níž za 1 s uvolněná jaderná energie se rovná vteřinové ztrátě energie. Ztráty, které vznikají přítomností cizích atomů, můžeme prakticky vyloučit. Ztráty brzdným zářením se dají vypočítat a stejně lze vypočítat jadernou energii, která vzniká při slučování deuterionů i za teplot, kterých dosud nebylo dosaženo. Je to umožněno tím, že můžeme měřit účinné průřezy deuterionů se značnými energiemi, které odpovídají teplotám řádu nejméně 10^8 °C. Tak bylo možno narysovat křivky, které vidíme na obr. (8.7) 20



Obr. (8.7) 19. Výbojová trubice Stellaratoru

a z kterých soudíme, že teplota vzplanutí čistého deuteria je asi $350 \cdot 10^6$ °C, kdežto ve směsi deuteria D a tritia T je tato teplota podstatně nižší, tj. asi $50 \cdot 10^6$ °C.

Energie deutronů při teplotě T se vypočte podle známého vzorce pro střední energii molekuly v jednoatomovém plynu

$$u = \frac{3}{2} kT.$$

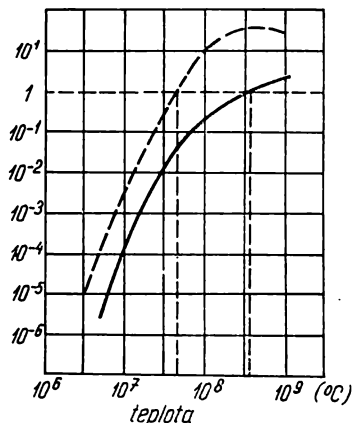
Vyjádříme-li energii v elektronvoltech, dostaneme

$$T = 7\,728 \frac{u}{\text{eV}} \text{ °K},$$

$$1 \text{ eV} \sim 7\,728 \text{ °K},$$

$$1 \text{ keV} \sim 7,7 \cdot 10^6 \text{ °K},$$

$$1 \text{ MeV} \sim 7,7 \cdot 10^8 \text{ °K}.$$



Obr. (8.7) 20. Poměr uvolněné termionukleární energie k vyzářené energii jako funkce teploty v čistém deuteriu - - - a ve směsi deuteria s triteriem —

mohli dosáhnout reprodukčního faktoru 1,5 až 2 a těchto neutronů by se mohlo užít k výrobě triteria z Li 6 podle rovnice 8.7 (14). Tak by bylo možno spotřebované triterium nahrazovat za předkladu, že na naší planetě máme dosti Li 6.

Odtud vidíme, že při dosavadních pokusech nebylo ještě zdaleka dosaženo teploty vzplanutí.

Z toho je zřejmé, že mnohem výhodnější než reakce $D - D$ by byla reakce $D - T$ ve směsi deuteria a triteria 1 : 1. Praktický význam by měla ovšem jen tehdy, kdyby bylo možno počítat s dostatečnými zdroji triteria, jehož výroba je velmi nákladná. Arcimovič však ukázal, že by bylo možno postup zařídit tak, aby se tritony spotřebované při reakci $D - T$ reprodukovaly. Při každém sloučení D a T vznikne totiž jeden rychlý neutron s energií 14,1 MeV. Obklopíme-li tedy směs $D + T$ reflektorem, v němž se rozmnožuje tok neutronů (např. Be, Pb, Bi), dalo by se podle Arci-

8.8. Fyzikální základy jaderné techniky

8.8.1. Úkoly jaderné techniky

Jaderná technika je vědní obor, který se zabývá technickými aplikacemi jaderné fyziky. Úkoly této moderní technické vědy je možno roztrdit do několika užších oborů:

A. *Reaktorová technika* se zabývá technickou problematikou stavby, provozu a regulace reaktorů.

B. *Jaderná energetika* má za úkol konstrukci reaktorů pro jaderné elektrárny a problémy přeměny uvolněné jaderné energie na elektrickou.

C. *Technika urychlovačů* řeší otázky konstrukce a funkce urychlovacích zařízení.

D. *Technická radiologie* (ili *radionuklidová technika**) se zabývá technickou problematikou jaderného záření a jeho zdrojů — radionuklidů. Jejimi úkoly jsou zejména:

a) *Výroba radionuklidů* v reaktorech, v urychlovačích a v zařízeních na separaci (rozdělování) izotopů.

b) *Konstrukce technických radiologických přístrojů* pro práce s radionuklidy (měření, kontrola dávek a zamoření, otázky aktivních odpadů, biologická ochrana atd.).

c) *Využití radionuklidů* ve vědeckém a technickém výzkumu, v technické praxi, v zemědělství aj.

*) V této kapitole používáme nového názvu radionuklid (místo dosud běžného radioizotop) ve významu obecném, tj. pokud nemíníme vyjádřit, že jde o radioaktivní izotop nějakého prvku: Řekneme ovšem, že např. radionuklid Na 24 je radioizotopem sodíku, nebo že kobalt má tři radioizotopy: Co 57, Co 58 a Co 60. Pojem nuklidu jsme definovali v čl. 1.3.2.

Ačkoli se všechny jmenované obory jaderné techniky v posledních dvou desetiletích bouřlivě rozvíjely a budou dále rozvíjet, zdá se, že technická radiologie pokročila nejdále v oboru praktických aplikací, které začínají mít už ekonomický význam.

Avšak i rozvoj jaderné energetiky, která již na samém počátku svého vývoje úspěšně soutěží s klasickými způsoby výroby elektrické energie, pokračuje s intenzitou, která nemá obdoby v dějinách techniky.

Jaderné přeměny jsou novým mohutným energetickým zdrojem, který ještě v tomto století dosáhne rozhodujícího významu ve světovém hospodářství.

Vývoj metod uvolňování jaderné energie nelze předvídat na delší dobu, ale je třeba počítat s tím, že v bližší nebo vzdálenější budoucnosti budou nalezeny nové principy těchto metod. Zejména lze očekávat, že bude jednou zvládnuto řízené uvolňování termonukleární energie, i když dnešní stav výzkumu v tomto oboru není podle čl. 8.7.3 ještě uspokojivý.

Velké úsilí se věnuje snahám o přímou přeměnu jaderné energie v energii elektrickou, která je ekonomicky nejvýhodnější formou energie. Praktická řešení tohoto důležitého úkolu se zatím vyznačují nepatrnou účinností.

Jsou to především tzv. nukleární baterie konstruované na několika různých principech. V praxi se již uplatňují hlavně tři typy nukleárních (atomových) baterií:

1. *Baterie s plynovou náplní* využívají kontaktního napětí, které vzniká při vzájemném dotyku dvou vhodně volených kovů. Toto napětí udržuje v mezeře mezi dvěma elektrodami elektrické pole. Vstupuje-li do mezery vyplněné argonem radioaktivní záření β , ionizuje tento plyn a vzniklé kladné a záporné ionty putují k opačně nabitým elektrodám. Při obvyklých rozměrech baterie vytvoří každá částice β na své dráze argonem až 200 iontových párů. Proto dává taková baterie při napětí 1 až 2 V poměrně značný ionizační proud.

2. *Polovodičové baterie* jsou založeny na emisi sekundárních elektronů, které ve značném množství vydávají některé polovodiče při dopadu záření β (např. z radiostroncía Sr 90).

3. *Termoelektrické baterie* mění v elektrickou energii teplo uvolňované radioaktivním zářičem α (např. Po 210) pomocí polovodičových termoelektrických článků. Při účinném chlazení studených spojů poskytují baterie tohoto typu značný výkon, a proto jsou vhodné pro umělé družice, u nichž je dobré chlazení nasnadě.

Nukleární baterie slouží jako dlouhodobé zdroje elektrické energie v mnoha odvětvích lidské činnosti. Udržují v chodu automatické meteorologické stanice v polárních krajinách, automatické majáky, bóje a jiná zařízení na odlehlých místech. Byly sestaveny také železniční signální lampy ve tvaru skleněných koulí s luminiscenční vrstvou, která svítí pod vlivem radioaktivního kryptonu uzavřeného v lampě.

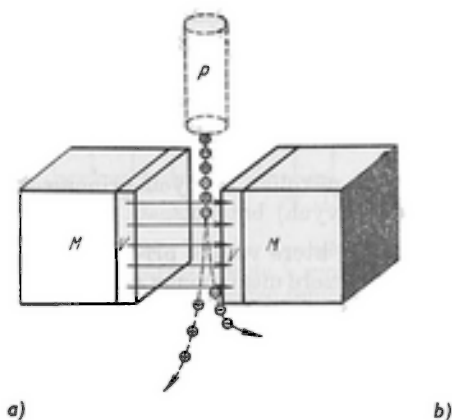
Kromě nukleárních baterií jsou k přímé přeměně jaderné energie v elektrickou vhodné též *magnetohydrodynamické generátory*. Jsou založeny na ionizaci plynů vyvolané radioaktivním zářením a uvolněnou tepelnou energií za současného působení silného magnetického pole. Účinkem Lorentzovy síly, která má pro opačně nabitě ionty opačný směr, se proud iontů dělí na dva svazky nesoucí kladný a záporný náboj, které dopadají na protilehlé elektrody, na nichž udržují napětí. Schéma a snímek takového magnetohydrodynamického generátoru o výkonu 205 kW vidíme na obr. (8.8) 1.

Je třeba podtrhnout, že při přeměně jaderné energie na elektrickou jde u dnešních reaktorů v podstatě o přeměnu tepelné energie, protože se při štěpení uvolňuje převážně energie tepelná. Je to zřejmé ze schematického obr. (8.8) 2. Pohybová energie 162 MeV těžkých fragmentů spolu s pohybovou energií 6 MeV rychlých neutronů se přenáší srážkami na ostatní atomy jaderného paliva a všech dalších látek a součástí reaktoru, u nichž se projeví zvýšením energie neuspořádaných termických pohybů. Energie záření β a γ v celkové hodnotě 16 MeV činí tedy jen 9% uvolněné jaderné energie.

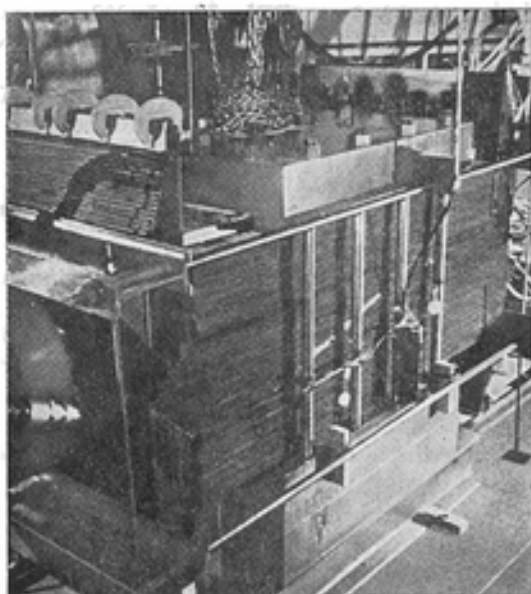
Světový význam jaderné energie vyplývá z odhadů dnešních zásob energie a příštího vývoje její spotřeby. Při tom se obvykle užívá přiměřené jednotky

$$Q = 10^{18} \text{ britských tepelných jednotek} = 2,5 \cdot 10^{17} \text{ kcal} = \\ = 4,8 \cdot 10^{18} \text{ Wh} \approx 5 \cdot 10^{15} \text{ kWh},$$

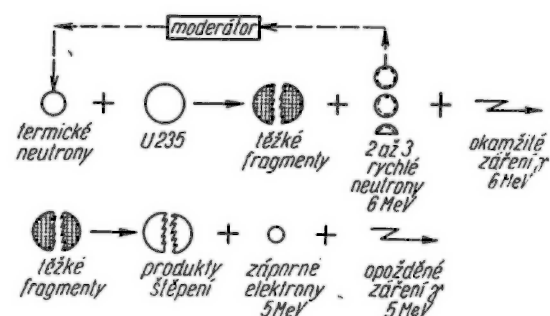
kterou je možno získat asi z 33 miliard tun uhlí. Odhaduje se, že v uhlí, naftě, zemním plynu a v jiných přírodních zdrojích je uložena prakticky využitelná zásoba energie asi 40 až 100 Q . Tato zásoba by se při stoupající spotřebě pravděpodobně vyčerpala za jediné století, a proto se získání nových zdrojů energie stává stále naléhavější. Stavějí se údolní přehrady,



Obr. (8.8) 1. a) Schéma magnetohydrodynamického generátoru: P – zdroj silně ionizovaného plynu (plazmatu), M , M – póly magnetu, chráněné před horkým plynem keramickými vrstvami V , V ; b) snímek magnetohydrodynamického generátoru o výkonu 205 kW



konají se pokusy s využitím energie větru, energie vody při přílivu a odlivu a energie sluneční. Zatím není dosti přesných odhadů energie, kterou by bylo možno získat z těchto zdrojů. Byla však odhadnuta energie, kterou by bylo možno uvolnit známými metodami ze štěpitelného materiálu. Má se za to, že v uranu a thoriu, obsaženém v zemské kůře, je uložena jaderná energie v hodnotě 1 700 Q , tedy energie asi dvacetkrát větší než energie uložená



Obr. (8.8) 2. Rozdělení energie uvolněné při štěpení jádra U^{235}

ve všech ostatních přírodních zdrojích. Pro uvolňování jaderné energie ve vodíkových (termionukleárních) reaktorech bylo by však možno vyrábět deuterium z mořské vody, v níž tvoří jednu pětadvacetitisícinu její hmotnosti, a tak by se získala ohromná zásoba energie řádu několika miliard jednotek Q .

8.8.2. Typy reaktorů

Jaderné reaktory můžeme třídit podle dvou hlavních hledisek, a to jednak

podle fyzikální povahy a z ní vyplývající konstrukce, jednak podle účelu, k němuž jsou určeny.

Z prvního hlediska je možno rozeznávat různé typy reaktorů podle rychlosti neutronů, podle uspořádání jaderného paliva a moderátoru, a konečně podle způsobu chlazení. Vycházejíce z těchto charakteristik, dojdeme k této obecné klasifikaci reaktorů:

A. Rychlost neutronů:

1. pomalé (s termickými neutrony), 2. středně rychlé, 3. rychlé.

B. Uspořádání:

1. heterogenní, 2. homogenní.

C. Chlazení:

1. vodou obyčejnou nebo těžkou, 2. tekutým kovem, 3. plyným chladivem.

Z druhého hlediska je třídění zhruba vystiženo tabulkou (8.8) I.

Experimentální reaktory jsou určeny k pokusům, které mohou být dvojího zaměření: buď sledují problémy výzkumné (z oboru jaderné fyziky nebo z oboru fyziky pevné fáze), nebo se zabývají činností zkušební (zkouškami vlastností technických materiálů apod.).

Tabulka (8.8) I

Třídění reaktorů podle účelu

Reaktory	Experimentální (pokusné)	Výzkumné
		Zkušební
	Užitkové	Aktivační (radiační, zářivé)
		Energetické (výkonové)

Naproti tomu *užitkové reaktory* jsou určeny k využití jaderné energie, a to jednak ve formě záření (lékařství, biologie, průmysl) a k výrobě radionuklidů, jednak k výrobě energie.

O *experimentálních a aktivačních reaktorech* pojednáme v příštím článku a o *reaktorech energetických* v čl. 8.8.4. Zde popíšeme hlavní typy reaktorů z hlediska fyzikálního a probereme technické otázky, které souvisí s jejich stavbou a provozem.

Jak jsme řekli v čl. 8.6.4, obsahuje přírodní uran jen asi 0,7 % štěpného izotopu U 235, jehož jádro vydá při štěpení 2 až 3 rychlé neutrony. Aby se trvale udržela řetězová reakce, musí tedy asi 40 % vzniklých neutronů způsobit další štěpení jader U 235. Vzhledem k relativně malému počtu jader U 235 je třeba zvýšit pravděpodobnost srážky. To lze učinit buď zvětšením účinného průřezu jader (dosáhne se toho zpomalením neutronů), nebo obohacením přírodního uranu izotopem 235.

V prvním případě máme *pomalý reaktor* s termickými neutrony, zpomalenými vhodně voleným moderátorem — těžkou vodou (D_2O) nebo mnohem levnější tuhou. Poslední látka absorbuje však neutrony více než těžká voda, takže ke konstrukci tuhového reaktoru je třeba několikanásobně většího množství uranu než ke konstrukci reaktoru s těžkou vodou. Proto je náklad na oba reaktory zhruba stejný, ale malá pohltivost D_2O poskytuje více volnosti při stavbě reaktoru. To je důležité, protože všechny látky pohlcují neutrony a je třeba volit ty, které je pohlcují nejméně: hliník, berylium a zirkonium. Naproti tomu má reaktor s těžkou vodou nevýhodu, že nelze zvýšit jeho účinnost zvýšením teploty, která ani při tlaku 26 až 40 atmosfér nesmí překročit asi 200 °C.

Naznačené důvody nutí ke snaze zmenšit nebo zcela odstranit moderátor. To je možné u reaktorů pracujících se středně rychlými nebo i vůbec nezpomalenými neutrony. Aby se i pak pravděpodobnost štěpení udržela na žádoucí výši, je ovšem třeba obohatit

přírodní uran izotopem 235 nákladným procesem, podobným postupem, kterým se získává těžká voda (srov. 8.8.5).

Užijeme-li v reaktoru poměrně levného neobohaceného přírodního uranu, je konstrukce i provoz reaktoru vázán velmi přísnými podmínkami. Mnohem více volnosti dosáhneme, zvláště po stránce technologické, použijeme-li uranu obohaceného izotopem U 235. Takový reaktor může pracovat s termickými, středně rychlými i rychlými neutrony, ale palivo je velmi drahé.

Podle B může být uspořádání reaktorů dvojí. Větší pravděpodobnosti štěpení U 235 dosáhneme v *heterogenním reaktoru*, kde je uran soustředěn v jednotlivých topných článcích nejčastěji tvaru tyčí, které jsou obklopeny moderátorem. Většinou tvoří uranové tyče mříž, která prostupuje kvádrem velmi čisté tuhy. Mezi uranem a moderátorem obíhá v trubkách vhodné chladivo. Tuha bývá někdy (např. v Joliotově reaktoru Zoé) nahrazena těžkou vodou, která zastupuje moderátor i chladivo.

Naproti tomu v *homogenním reaktoru* je uran stejnoměrně promíchán s moderátorem buď jako roztok uranové soli v těžké vodě, nebo jako eutektikum. Tu je pravděpodobnost štěpení menší, a proto je pro homogenní reaktory prakticky jedině vhodný obohacený uran. Má však po stránce technické důležité přednosti zejména při chlazení a odstraňování zplodin štěpení.

Při provozu reaktorů nastává totiž pozvolná „otrava“ neboli „zamoření“ produkty štěpení. Při heterogenním uspořádání musí být proto občas uranové tyče vyňaty, rozpuštěny v kyselině, škodlivé zplodiny odstraněny chemickotechnologickým procesem, a konečně z uranu v kovové podobě znovu zhotoveny tyče. Celý postup se podstatně zjednoduší, je-li palivo v kapalném skupenství, jak je tomu v homogenním reaktoru. Tu je dokonce možno z vhodně upraveného obtoku trvale odebírat malou část směsi, chemicky ji zbavovat zplodin a znovu vpouštět do reaktoru. Každé zjednodušení je tu velmi vítáno, protože celý pochod se musí dálkově řídit za dokonalé ochrany proti záření.

Také chlazení lze snáze a lépe provést u homogenního reaktoru než u heterogenního, ježto je možno nechat obíhat přímo tekutý obsah reaktoru (směs uranu s moderátorem) výměníkem tepla, kde teplo přejímá pracovní látka (pára apod.). Také je možno pracovní látku vést vnitřkem reaktoru hadovitě stočenou trubicí. V obou případech se teplo odvádí z proudící kapaliny, tedy především konvekci, takže lze snadno dosáhnout potřebné hustoty tepelného toku.

Chlazení heterogenního reaktoru je obtížnější proto, že se teplo uvolňuje asi z 97 % uvnitř uranových tyčí a musí se dostat nejprve vedením na jejich povrch; povrch je tu ovšem od proudícího chladiva oddělen ochranným kovovým obalem, který má chránit moderátor před zamořením produkty štěpení. To je sice výhodou heterogenního reaktoru, ale znesnadňuje to přechod tepla mezi palivem a chladivem; s tím pak souvisí mnoho technických otázek. Tak už zdánlivě jednoduchá úloha — nalézt vhodný obal uranových tyčí — působila značné technologické obtíže, o jejichž řešení není dosti podrobných informací. Uvnitř samých uranových tyčí vznikají vzhledem k vysokému teplotnímu spádu silná mechanická napětí, která také spolupůsobí při omezení specifického výkonu.

Tohoto omezení se zbavíme, volíme-li kapalný moderátor a použijeme ho zároveň k chlazení. Tak je možno např. těžkou vodu prohánět čerpadlem kolem uranových tyčí nebo nechat ji vypařovat v dutých obalech těchto tyčí, a pak srážet v kondenzátoru. Při tom nastává velmi intenzivní sdílení tepla, ale nesmí se překročit jistá maximální teplota (asi 300 °C), protože s teplotou velmi rychle stoupá tlak. Takto upravený reaktor může dodávat jen nízkotlakou páru.

Větší tepelné účinnosti lze u heterogenních reaktorů, pracujících s termickými neutrony, dosáhnout tehdy, nahradíme-li těžkou vodu grafitem. U homogenních reaktorů pak je třeba místo vodního roztoku uranové soli použít taveniny obsahující uran.

U reaktorů pracujících za vysokých teplot vznikají ovšem nesnáze při volbě vhodného chladiva, které může být plynné nebo kapalné. Plyny odebírají jen malé množství tepla,

kteřé se dá zvětšit zvýšením tlaku a rychlosti proudění. Zvyšování tlaku je však spojeno se značnými obtížemi a nadměrné rychlosti vyžadují velké výkony. Z podrobnějšího rozboru vychází najevo, že nejvhodnějším plynem by bylo hélium (kteřé je inertní a nestává se radioaktivním) nebo CO_2 .

Pokud jde o běžné kapaliny, udrží se při vysokých teplotách v kapalném skupenství jen při velmi vysokém tlaku, a proto se počítá především s tavenými kovy a slitinami. Lze jimi dosáhnout mnohem vyšší hustoty tepelného toku než u plynů, a proto nijak neomezují výkon reaktoru. Z tavených kovů se nejvíce užívá sodíku. Dnes se zdá, že u reaktorů s vysokým výkonem se dává přednost dvěma chladivům: při nižších teplotách vodě (H_2O nebo D_2O) a při vyšších teplotách sodíku, někdy ve spojení s draslíkem.

8.8.3. Výzkumné, zkušební a aktivační reaktory

V tomto článku promluvíme o experimentálních pracích, které se konají na výzkumných a zkušebních reaktorech, jakož i o praktickém užití reaktorů aktivačních. Kromě toho popíšeme několik typických konstrukcí reaktorů vhodných pro tyto účely.

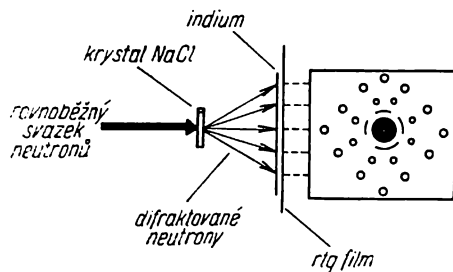
Výzkumné reaktory

Reaktory jsou vydatným zdrojem záření neutronového a záření γ . Obě tato záření jsou vhodným nástrojem ke studiu vlastností látek. Difrakce (ohyb) pomalých neutronů má podobný význam jako difrakce elektronů a záření X. Při experimentálním užití neutronů vzniká ovšem jistá komplikace, protože neutrony, které jsou bez náboje, nemohou působit na fotografickou desku. Lze je však detegovat, přiložíme-li na fotografickou emulzi fólii z india, která se neutrony aktivuje a vydává záření γ . Necháme-li tedy projít rovnoběžný svazek neutronů destičkou krystalu, vytvoří neutrony difrakční obrazec, obdobný známým Laueovým diagramům, vznikajícím difrakcí záření X [viz obr. (8.8) 3].

Podobnost mezi ohybem neutronů a fotonů záření X je ovšem jen kvalitativní, protože se neutrony odchyľují i lehkými atomy dosti značně, kdežto odchylky záření X rostou úměrně s atomovou hmotností. To je výhoda neutronů; umožňují zjišťovat i polohy atomů v krystalech nebo v organických molekulách bílkovin a plastických hmot. Kromě toho se neutrony, které mají magnetický moment, odchyľují magnetickými atomy selektivně, což neplatí o fotonech. Proto je možno neutronovým zářením studovat i magnetické vlastnosti krystalů.

Dalším úkolem výzkumných reaktorů je měření účinného průřezu atomových jader pro pomalé neutrony. Provádí se třemi různými metodami. *Metoda svazku* záleží v tom, že se rovnoběžný svazek neutronů, vyvedený z reaktoru pokusným kanálem, rozptýluje na zkoumaném vzorku a měří se intenzita a úhlové rozložení rozptýleného nebo prošlého záření. *Metoda vnitřoreaktorová* studuje vliv vzorku vloženého do reaktoru na jeho reaktivitu a na neutronový tok. Konečně *aktivační metoda* je založena na zjištění radioaktivity vzorku, který se vloží do reaktoru a vyjme po vhodně volené době.

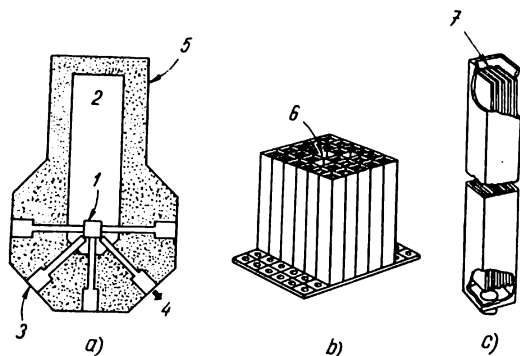
Výzkumnými reaktory lze přispět k řešení některých základních otázek jaderné fyziky, zvláště v oboru neutronové spektroskopie, která se zabývá studiem vlastností neutronů. Tak Robson užil svazku termických neutronů hustoty $1,5 \cdot 10^{10} \text{ n cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$; vyvedl je hliníkovým okénkem z reaktoru a zkoumal rozpad neutronů v proton, elektron a neutrino.



Obr. (8.8) 3. Difrakce pomalých neutronů krystalem chloridu sodného

Výzkumné reaktory se konstruují nejčastěji buď jako bazénové, nebo jako tankové reaktory.

Bazénový reaktor [Swimming Pool Reactor, Oak Ridge 1951, obr. (8.8) 4] má srdce 1 (tj. aktivní část, kde probíhá vlastní štěpná reakce) shora i zdola otevřeno a ponořeno asi 6 m hluboko pod volnou hladinu lehké vody v cementové nádrži 2. Voda je zároveň moderátorem i chladivem. Spodní část nádrže jsou vyvedeny pokusné kanály 3, 4. Do nich je možno vkládat zkušební vzorky nebo z nich vyvést svazek neutronů. Srdce ($30 \times 45 \times 60 \text{ cm}^3$) obsahuje 24 až 30 topných článků, které se skládají ze svislých destiček tloušťky 1,5 mm, vzdálených od sebe 2,5 mm. Jsou vyrobeny ze slitiny U 235 a hliníku a potaženy vrstvou ryziho hliníku, který chrání desky před korozí a vodu před produkty štěpení. Mezerami stoupá voda k hladině nádrže; voda se v srdci ohřívá, a tak zajišťuje samočinné chlazení, které postačí až do výkonu asi 300 kW. Výhodou tohoto uspořádání je možnost snadného vyjmutí srdce z reaktoru, které tak lze vyměnit nebo upravit a znovu ponořit ke dnu nádrže. Kromě toho je nad vysokou vodní vrstvou dosti silné záření γ a slabý tok neutronů. Reaktor je také dosti levný; neboť při výkonu 100 kW dává průměrný neutronový tok $10^{12} \text{ n} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ a stojí jen asi 300 tisíc dolarů.



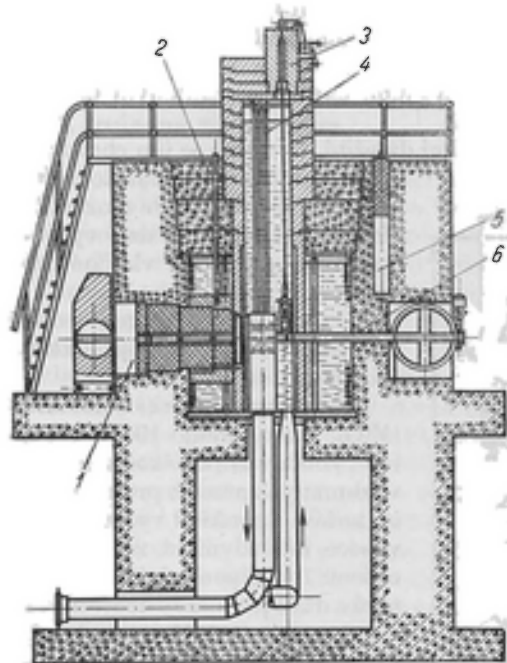
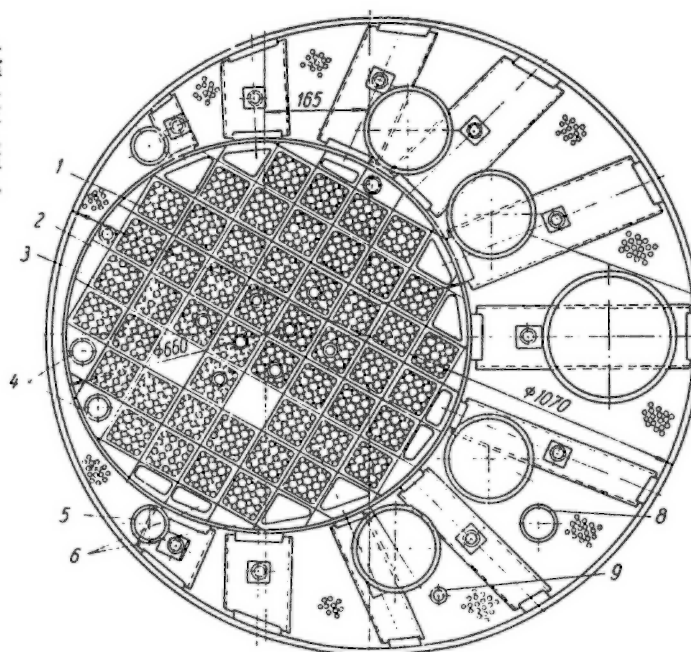
Obr. (8.8) 4. Bazénový reaktor: a --- celkové uspořádání: 1 — jádro, 2 — vodní nádrž, 3 — pokusný kanál, 4 — neutronové záření, 5 — beton; b — jádro reaktoru: 6 — kanály pro regulační tyče; c — topný element: 7 — desky ze slitiny U 235 a hliníku

Sovětský svaz podle dohody z r. 1955. Při maximálním výkonu 2 MW obsahuje aktivní pásmo 50 palivových článků, jejichž uspořádání je zřejmé z obr. (8.8) 5. Každý článek se skládá z 16 válcových tyčí uranu obohaceného na 10% izotopem U 235. Tyče průměru 10 mm a délky 500 mm jsou chráněny hliníkovým povlakem a uloženy po 16 v plechových krabicích, sestavených ve čtvercové mříži. Mříž z počátku obsahuje 4,5 kg U 235, ačkoli kritická hmotnost je pouze 3 kg. Některé z vnitřních článků mají jen po 15 tyčích a do jejich prázdných mezer zasahují tyče řídící, bezpečnostní a kompenzační. Kompenzační tyče vyrovnávají úbytek reaktivity způsobený vyhoříváním tyčí a otravou radioaktivním izotopem Xe 135. Moderátorem, reflektorem a chladivem je destilovaná voda (lehká), která stoupá v pravé části hliníkového bazénu [obr. (8.8) 6] k hladině, odkud se vrací k srdci reaktoru, kterým je protlačována dolů do potrubí. Tento primární chladicí okruh je uzavřený a udržuje se v chodu čtyřmi až pěti čerpadly. Paralelně je k němu připojen *odplyňovací okruh* (na směs kyslíku a vodíku). Kromě hlavního odpadu má primární okruh vedlejší odpady vedoucí do *vymtracích nádrží*, v nichž radionuklidy obsažené ve vodě podléhají přirozenému rozpadu, až aktivita klesne na přípustnou míru. Voda má v srdci teplotu asi 35°C a odevzdává teplo v tepelných výměnících vodě sekundárního okruhu.

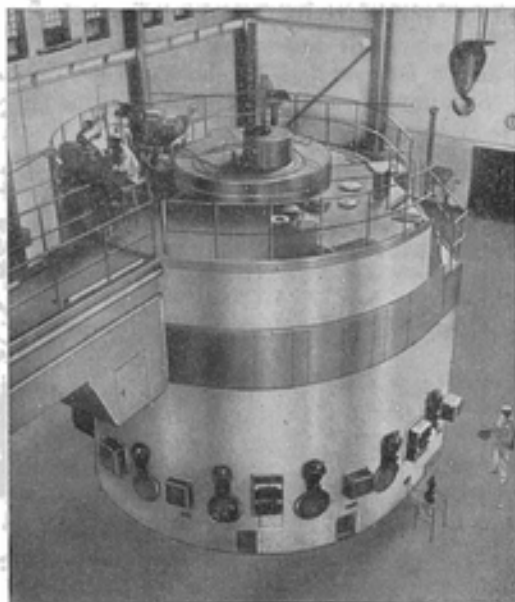
Samočinnou regulaci a kontrolu chodu reaktoru obstarává několik svislých tyčí. Ocelová tyč, ovládaná servomechanismem řízeným signály z ionizační komory, udržuje reaktor v kritickém stavu. Jednu z pěti kompenzačních tyčí s karbidem bóru je možno ovládat zvláště jemně, čímž se dosahuje velmi přesné regulace. Tři bezpečnostní tyče (rovněž s karbidem bóru) zastaví ve zlomku vteřiny chod reaktoru, jakmile je dán havarijní signál.

Náš první výzkumný reaktor [obr. (8.8) 7] je vybaven soustavou vodorovných a svislých experimentálních kanálů a tepelným sloupem [obr. (8.8) 6]. Kromě toho má řadu kanálů ústících v reflektoru a ve stínění, v nichž je neutronové záření slabší a které jsou vhodné např. k biologickým pokusům. Vodorovné pokusné kanály vybijí radiálně ze srdce

Obr. (8.8) 5. Srdce reaktoru ÚJV: 1 – mříž, 2 – opěrná deska, 3 – bezpečnostní a regulační tyče, 4 – experimentální kanály, 5 – kanál pro spouštěcí ionizační komoru, 6 – výplně, 7 – kanál pracovní ionizační komory, 8 – přepadová trubka, 9 – kanál pro vodoznak



Obr. (8.8) 6. Svislý řez reaktorem ÚJV: 1 – tepelná kolona, 2 – svislý kanál, 3 – olověná schránka, 4 – trubky pro regulační tyče, 5 – kanál pro biologické pokusy, 6 – vodorovný kanál



Obr. (8.8) 7. Celkový pohled na experimentální reaktor Ústavu jaderného výzkumu ČSAV

reaktoru a jsou zakryty otáčivými uzávěry, ovládanými dálkově. Jsou určeny k různým fyzikálním měřením, která se týkají zejména účinných průřezů jader, studia polarizace neutronů a neutronové spektrometrie. Hustota neutronového toku na výstupu z vodorovných kanálů leží mezi 2 a $5 \cdot 10^8 \text{ n} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ve svislých kanálech je možno ozařovat vzorky materiálu a vyrábět radionuklidy, takže reaktor může plnit také úkoly reaktorů zkušebních a aktivačních.

Vedle těchto výzkumů bude možno užít reaktoru také k různým pracím z oboru jaderné energetiky, zvláště k pracím spojeným s vývojem energetických reaktorů, např. k studiu účinků silného neutronového záření na strukturu a vlastnosti různých typů palivových článků na experimentálních smyčkách, tj. na základních elementech libovolného druhu reaktoru, apod.

Tankový reaktor CP-5 (Argonne 1954) s těžkou vodou je jedním z nejmodernějších experimentálních reaktorů. Liší se od ponorného reaktoru tím, že jeho srdce je pevně uloženo v uzavřeném „tanku“ s menším obsahem D_2O , má tlustší reflektor a mohutnější betonové stěny. Lze jím při velmi malé kritické hmotnosti ($1,7 \text{ kg U } 235$) dosáhnout již při výkonu 1 MW poměrně silného neutronového toku $1,5 \cdot 10^{13} \text{ n} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

Zkušební reaktory

Tyto reaktory jsou především určeny pro studium vlastností různých látek pod vlivem silného radioaktivního záření, zejména záření neutronového a záření γ . Zkoumají se v nich hlavně konstrukční materiály pro jaderné reaktory (např. palivové články), a to pokud možno za stejných teplot a tlaků jako v reaktorech, pro něž jsou určeny. Tak lze zjišťovat stupeň jejich vyhoření nebo postup koroze různých součástí reaktoru za silného neutronového záření, trvanlivost topných článků atd. Vzhledem k tomu, že je třeba zjistit vlivy záření v době kratší, než je doba života zkoušených vzorků v reaktorech, pro něž jsou určeny, vyžadují tyto zkušební reaktory zvláště intenzivní neutronové toky (řádu $10^{14} \text{ n} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$).

Zkušebních reaktorů lze ovšem použít i k jiným účelům, např. k výzkumným pracím v oboru jaderné fyziky nebo k výrobě radionuklidů.

Studium vlivu silného záření na různé látky je velmi důležité. Uvolňují se jím chemické

vazby a může vést i k dislokacím atomů v krystalech. Je možné, že tímto způsobem by se daly vytvořit např. polovodiče vhodné pro tranzistory apod.

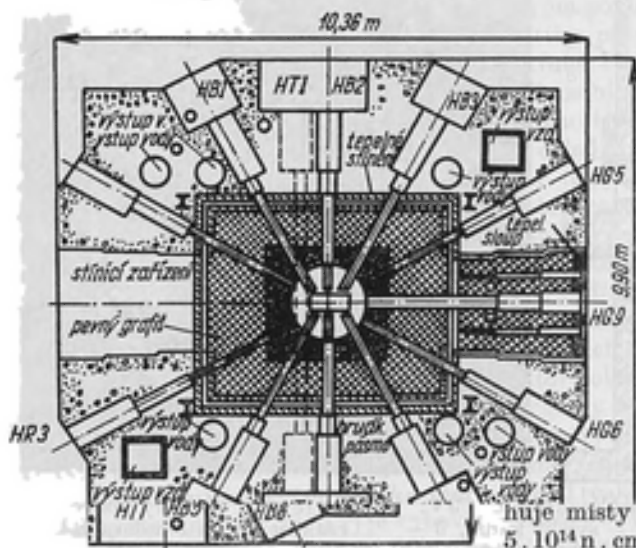
Jako příklad uvedeme jeden z nejstarších a nejznámějších zkušebních reaktorů:

Reaktor pro zkoušení materiálu (MTR, Arco, Idaho 1945–1952) byl vybudován po několikaletých výzkumných pracích pro zkoušení materiálů a součástí vystavených vysoce intenzivnímu záření. Má celkem 100 experimentálních kanálů a dává průměrný neutronový tok hustoty $2 \cdot 10^{14} \text{ n} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. Tok tepelných neutronů dosa-

huje místy nejvyšší hustoty asi

$5 \cdot 10^{14} \text{ n} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. Palivové člán-

ky tohoto reaktoru se staly vzorem pro pozdější experimentální



Obr. 1 reaktor pro zkoušení materiálu (MTR)

reaktory. Jsou chlazeny lehkou vodou, která je zároveň moderátorem. Reaktor má dvojité reflektory: vnitřní beryliový a vnější grafitový. Jen vnější pásma grafitového reflektoru je pevné, vnitřní vrstva, tlustá 50 cm, je z tuhových hrudek, aby se mohla přizpůsobit objemovým změnám, způsobeným zářením, oxidací a teplotní roztažností materiálu. Na obr. (8.8) 8 je vodorovný řez částí reaktoru.

V reaktorovém středisku u Uljanovska v SSSR je v činnosti zkušební reaktor s tepelným výkonem 40 MW a s maximální hustotou neutronového toku $2,2 \cdot 10^{15} \text{ n} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

Aktivační reaktory

Experimentálních reaktorů se užívá hlavně k výzkumným a zkušebním účelům jaderné energetiky i k různým praktickým účelům. Především se v nich vyrábějí radioaktivní izotopy velkého počtu prvků. To je vlastní úkol aktivačních reaktorů, které se výstižněji nazývají *radiační* (zářivé), protože kromě aktivace různých materiálů lze jejich záření použít i k jiným účelům. Velmi důležitým oborem je dnes sterilace a pasterizace potravin intenzivním radioaktivním zářením γ , jehož zdrojem může být reaktor v činnosti nebo jeho vyhořelé topné články. Tak lze zvýšit trvanlivost potravin nebo léčiv bez újmy na chuti. K úplné sterilaci by však bylo třeba tak velkých dávek, že by porušily chuť a vůni ozářených potravin.

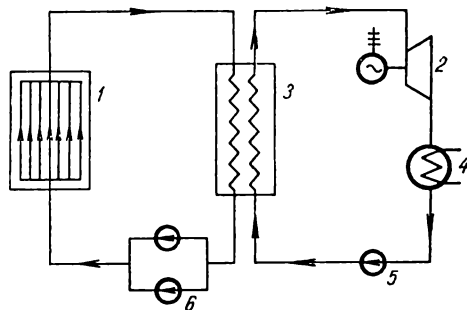
V lékařství se užívá záření k léčení rakoviny již půl století. Dnes se kromě rádia a různých izotopů užívá jako zdroj záření γ k léčebným zákrokům také radiačních reaktorů. R. 1954 byla zavedena nová účinná terapie zhoubných nádorů, při níž se aplikuje radioizotop bóru B 10 ve spojení s neutronovým zářením z reaktoru. Pacientu se nejprve vstříkne do krve roztok bóru 10, který se usadí selektivně v rakovinné tkáni, kde setrvá asi půl hodiny. Během této doby se nádor vystaví působení termických neutronů, které B 10 značně absorbuje, při čemž nádor vydává záření α . Toto záření působí velmi ničivě na rakovinnou tkáň, v níž vzniká, ale pro svůj malý dosah neproniká do okolní zdravé tkáně. To je velká přednost této nové, opravdu selektivní terapie, která ovšem vzhledem k omezené době aplikace vyžaduje silné neutronové toky, dosažitelné jen v reaktorech.

8.8.4. Jaderné elektrárny

Ačkoli při provozu experimentálních reaktorů, z nichž některé mají dosti velké tepelné výkony, bylo uvolněného tepla užito k rozmanitým účelům (např. k vytápění budov), byla *první jaderná elektrárna*, která skutečně dodává proud do elektrické sítě, uvedena v činnost teprve 27. června 1954 v SSSR, pod vedením D. I. Blochinceva a N. A. Nikolajeva.

Zdrojem energie první sovětské atomové elektrárny je pomalý heterogenní reaktor moderovaný grafitem, v němž je palivem přírodní uran obohacený na 5 % izotopem U 235. Celkové množství tohoto vzácného štěpného nuklidu v reaktoru je 550 kg a jeho maximální tepelný výkon je 30 MW. Jaderná energie se uvolňuje při štěpení U 235 z 91 % jako energie tepelná, kterou odvádí lehká (obvyčejná) voda proháněná reaktorem v trubkách z nerezavějící oceli pod tlakem 100 at. Tento primární chladicí oběh je v sebe uzavřen a voda ohřátá na 260 až 270 °C odevzdává teplo sekundárnímu okruhu napájenému vodou, jež se v parních generátorech mění v páru teploty 255 až 260 °C a tlaku 12,5 at, která pohání turboalternátor o elektrickém výkonu 5 MW [obr. (8.8) 9].

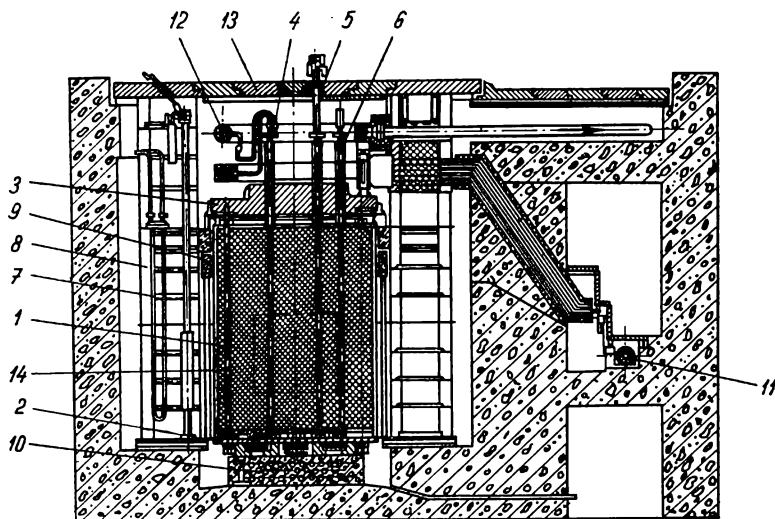
Voda primárního okruhu, která při průchodu jádrem reaktoru spolu s grafitem zpoma-



Obr. (8.8) 9. Schéma atomové elektrárny se dvěma chladicími okruhy: 1 – reaktor, 2 – turboalternátor, 3 – výměník tepla (parní generátor), 4 – kondenzátor, 5 – napájecí čerpadlo, 6 – oběhové čerpadlo

luje neutrony, se stává ovšem také radioaktivní. Naproti tomu voda v sekundárním okruhu, která se mění v páru v parních generátorech, zůstává (při dokonalé těsnosti generátorů) neaktivní. To je velká výhoda tohoto dvojstupňového chlazení, které nevyžaduje žádná ochranná opatření v sekundárním okruhu, přicházejícím do přímého styku s turbínou pohánějící generátor napětí. Je tedy možno užít v této části elektrárny obvyklých zařízení, která jsou běžná v uhelných elektrárnách.

Konstrukce reaktoru je schematicky naznačena na obr. (8.8) 10. Je hermeticky uzavřen v ocelovém pouzdře, uloženém na betonovém základu a vyplněném tuhovými kvádry složenými tak, že mezi nimi zůstávají spáry připouštějící dilataci při zahřátí. Aby tuha při vyšších teplotách neoxydovala, naplní se volný prostor v ocelovém pouzdře héliem nebo dusíkem. Vnitřní částí tuhového bloku prostupuje celkem 128 svislých válcových kanálů, tvořených dutými grafitovými válci; obsahují tenkostěnné ocelové trubky, jimiž protéká voda primárního chladicího



Obr. (8.8) 10. Konstrukce reaktoru: 1 — tuhé zdivo, 2 — základní deska, 3 — svrchní deska, 4 — kanál pro topnou tyč, 5 — kanál pro pojistnou tyč, 6 — kanál pro regulační tyč, 7 — kanál pro ionizační komoru, 8 — ochranná vrstva vody, 9 a 10 — chladiče, 11 — vstupní (dělicí) komora, 12 — výstupní (sběrná) komora, 13 — litinový kryt, 14 — chlazení reflektoru

okruhu. Do těchto kanálů se zasouvají palivové elementy ve tvaru tyčí, složené z vnitřní ocelové trubky (kterou rovněž protéká chladicí voda primárního okruhu), z duté válcové vrstvy obohaceného uranu a z vnější tenkostěnné trubky, která chrání uran a zároveň zabraňuje produktům štěpení, aby vnikaly do plynu vyplňujícího reaktor. Voda primárního okruhu vstupuje do reaktoru vstupní dělicí komorou, proudí trubkami dolů, vrací se opět nahoru a opouští reaktor.

Z tohoto popisu je zřejmo, že rychlé neutrony, uvolněné při štěpení U 235 v jednom topném elementu, procházejí na své cestě k sousednímu elementu jednak grafitem, jednak také proudící vodou primárního okruhu. Je tedy reaktor moderován nejen grafitem, ale částečně také vodou. Reaktivita reaktoru závisí ovšem na stupni zpomalení rychlých neutronů, a proto na ni bude mít vliv nejen množství grafitu, ale i množství vody obsažené v reaktoru.

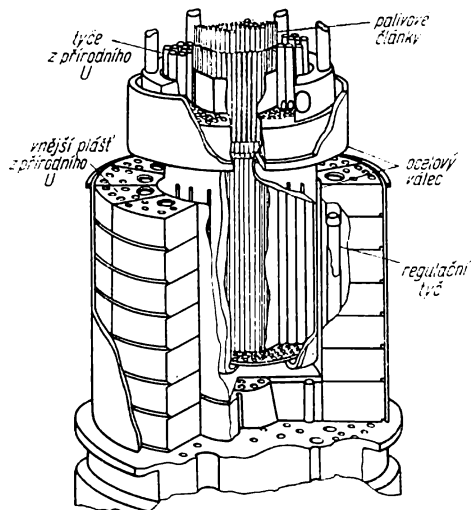
Palivové tyče jsou soustředěny uprostřed ocelové nádrže a tvoří aktivní pásmo (srdce) reaktoru, které má tvar válce průměru 150 cm a výšky 170 cm; na obr. (8.8) 10 je ohraničeno čárkovaným obdélníkem. Zbývající část grafitového bloku, v níž nejsou uranové tyče, tvoří pak reflektor („neutronové zrcadlo“), které odráží zpět část neutronů uniklých ze srdce reaktoru. Je třeba dodat, že k dosažení kritického množství uranu by stačilo asi 60 palivových tyčí, tedy méně než polovina skutečného počtu 128. Přebytek neutronů je absorbován 18 kompenzačními tyčemi z karbidu bóru. Reaktivita reaktoru se však zvýšením teploty zmenší vzhledem k tomu, že se zmenší celková hmotnost vody, jejíž hustota za tlaku 100 at při ohřátí na 300 °C klesne

asi na 70 % hustoty při 20 °C. Bod varu vody za tlaku 100 at je 399 °C a jeho překročením by se přehřály anebo i poškodily palivové tyče. Proto se trvale kontroluje teplota vody vystupující z jednotlivých kanálů a indikační přístroje na centrálním panelu dozorny ovládají pojistné tyče, které zastaví chod reaktoru, jakmile teplota vody překročí dovolenou výši. Zároveň se automaticky sleduje i průtočné množství vody a při nebezpečné odchylce od předepsané hodnoty objeví se výstražné světelné signály a pojistné tyče zastaví reakci.

Škodlivé radioaktivní záření se odstiňuje ve vodorovném směru vrstvou vody 1 m a betonovou zdí tlustou 3 m. Shora je reaktor odstíněn jednak zesílením reflektoru, jednak ocelovým krytem a litinovou deskou. Tím se zeslabí proud rychlých neutronů unikajících z reaktoru i záření γ vydávané těžkými úlomky uranových jader, a zvláště železem obsaženým v konstrukci, které pohlcuje termické neutrony.

Od r. 1954, kdy byla dána do provozu první jaderná elektrárna, byla postavena řada jaderných elektráren i v jiných zemích, zejména ve Velké Británii, ve Spojených státech a ve Francii. Řada dalších takových elektráren se projektuje a také u nás je ve výstavbě elektrárna na 150 MW.

Vývoj směřuje ke konstrukci tzv. *reprodukčních* („množivých či plodných“) zařízení, která by kromě výroby elektrické energie vyráběla zároveň i další štěpné palivo, a to v množství větším, než sama při provozu spotřebují. Tato reprodukce štěpného materiálu se může uskutečnit dvojím způsobem, podle toho, užije-li se reakcí 8.6 (23, 24), nebo reakcí 8.6 (26, 27). V prvním případě se obklopí srdce reaktoru pláštěm z přírodního uranu, který se působením neutronů přeměňuje na neptunium a na štěpitelný materiál plutonium. Ve druhém případě se užije pláště z thoria 232, které se přeměňuje na protaktinium a na štěpitelný izotop uranu 233. Uran 238 reaguje zvláště dobře s rychlými neutrony, a proto se dnes věnuje zvláštní pozornost konstrukci *rychlých reaktorů*. Tak se podařilo u rychlého reaktoru EBR, jehož uspořádání ukazuje obr. (8.8) 11, dosáhnout reprodukčního faktoru (což je poměr množství vyrobeného k množství spotřebovaného jaderného paliva) většího než 1.



Obr. (8.8) 11. Uspořádání rychlého reaktoru EBR

8.8.5. Výroba a užití radionuklidů

V předešlých článcích jsme se dotkli základních otázek, které spadají do oborů A a B jaderné techniky uvedených v čl. 8.8.1. Některé základní poznatky z oboru C jsme probrali v kapitole 8.5 věnované urychlovačům iontů. Zbývá tedy pojednat ve vší stručnosti o oboru D, který jsme nazvali technickou radiologií nebo radionuklidovou technikou. Úkoly tohoto oboru zasahují dnes do tolika různých oblastí vědy a techniky a mají tak široké spektrum aplikací, že by nebylo účelné, pokoušet se o jejich úplný výčet. Omezíme se proto na povšechné informace o získávání a výrobě izotopů a o jejich technických aplikacích — zejména ve strojírenství.

Získávání přirozených nuklidů

Každý z prvků známých z přírody se vyskytuje v několika (až 24) „odrůdách“, které mají stejné protonové číslo, ale různá čísla nukleonová. Jsou to přirozené izotopy prvků, které mohou být stálé nebo radioaktivní, a každý přichází vždy ve stejném poměrném

množství. Nejčastější izotop, který je v prvku zastoupen největším počtem atomů, se nazývá *hlavní izotop*. Některé prvky obsahují i velmi vzácné izotopy, které se vyskytují jen v nepatrném množství.

Chemické vlastnosti všech izotopů téhož prvku jsou stejné, a proto je nelze chemicky od sebe oddělit. Přece však je možno měnit poměrná množství izotopů různými rozdělovacími metodami. Nejde vlastně o rozdělování izotopů v pravém slova smyslu, ale jen o zvyšování poměrného množství některých izotopů čili o obohacování směsi zvoleným izotopem. Tak je možno obohacovat např. přírodní uran izotopem U 235 nebo získávat těžkou vodu z vody apod. Všechny rozdělovací metody se zakládají na rozdílnosti relativních atomových hmotností izotopů, která je příčinou různého chování izotopů za vhodně upravených podmínek. Tak je možno využít skutečnosti, že kapalné izotopy nemají stejný bod varu, a rozdělovat izotopy destilací, podobně jako se destilací odděluje např. alkohol od vody. Při malém rozdílu 1,4 °C bodu varu lehké a těžké vody by bylo rozdělování nesnadné, a proto se užívá protiproudové destilační metody. Ve frakcionální věži se vytvoří klesající proud kapaliny, podél něhož stoupá proud páry. Molekuly kapaliny s nižším bodem varu přecházejí ve větším množství do páry, a tak se izotopy rozdělují.

Na difúzi plynů jsou založeny dvě důležité metody, transfúzní a termodifúzní. Transfúze plynu průlinčitou stěnou probíhá rychlostí úměrnou rychlosti molekul, a podle čl. 4.3.4 je tedy poměr množství prošlých plynných izotopů roven odmocnině převráceného poměru jejich relativních molekulových hmotností. Tak např. fluorid uranový UF_6 má relativní molekulovou hmotnost $\mu_1 = 349$, obsahuje-li U 235; obsahuje-li však U 238, má hmotnost $\mu_2 = 352$. Poměr rychlostí $v_1/v_2 = \sqrt{\mu_2/\mu_1} = \sqrt{352/349} = 1,0043$ je tedy velmi blízký 1, přece však je možno tímto způsobem obohacovat přírodní uran uranem 235, užije-li se mnohostupňového zařízení zvaného kaskáda.

Termodifúze (teplotní difúze) probíhá proto, že vlivem větších rychlostí difundují molekuly rychleji z teplejší vrstvy plynu do studenější než obráceně. Tím vzniká rozdíl koncentrací, který závisí jednak na spádu teploty, jednak na hmotnostech molekul. Proudí-li chladnější plyn např. podél stěn trubice dolů a zahřátý plyn její střední částí vzhůru, nastává mezi oběma protiproudů teplotní difúze, které lze rovněž použít k obohacování uranu.

Z elektrických metod uvedeme nejprve rozdělování elektrolýzou, které je např. vhodné k výrobě těžké vody; její koncentrace je větší ve vodě, z níž byl elektrolyticky vyroben vodík a kyslík.

Velký význam má elektromagnetická metoda. Působením elektrického a magnetického pole na ionty je totiž možno izotopy nejen zjišťovat, což je účelem hmotnostní spektrografie (čl. 6.7.4), ale i rozdělovat. Zařízení, kterými se to provádí, podobají se velmi hmotnostním spektrografům. Popíšeme jen jeden z různých elektromagnetických rozdělovačů, zvaný *kalutron*, protože se pro něj nejprve užilo elektromagnetu z cyklotronu kalifornské university. Princip původního přístroje, který byl postupně zdokonalován, je podobný jako u spektrografu Dempsterova [obr. (6.7) 28]. Fotografická deska je ovšem nahrazena sběračem iontů U 235, které v magnetickém poli opisují menší půlkružnici než těžší ionty U 238. Počáteční obtíže elektromagnetické metody byly značné, ale podařilo se je během několika let překonat, takže první velké množství U 235 bylo vyrobeno právě kalutronem.

Výroba umělých radionuklidů

Rozdělovacími metodami nelze ovšem vyrábět nuklidy umělé, které se v přírodě nevyskytují. K získání umělých izotopů je třeba ostřelovat jádra rychlými částicemi, jež v dostatečném množství poskytují iontové urychlovače, a zvláště jaderné reaktory, které dávají velmi intenzivní neutronové záření, protože ostřelováním neutrony lze přeměnit značný počet různých stálých prvků na radionuklidy.

Radionuklidy se dnes vyrábějí hlavně třemi způsoby:

1. Ostřelování prvků v cyklotronu

Preparát se připevňuje na terč cyklotronu a ostřeluje se nejčastěji deuterony. Tak se získává např. Co 57, As 74, Zn 65. Výroba je vzhledem k nepatrné účinnosti cyklotronů dosti nákladná, a proto se jí užívá hlavně pro nuklidy, které nelze vyrobit v reaktoru. Některé nuklidy se dají získat cyklotronem v dosti velkém množství. Tak cyklotron 16 MeV při iontovém proudu 100 μ A (neseném deuterony) vyrobí za hodinu množství uvedená v tab. 8.8.II.

Tabulka (8.8) II

Výroba radionuklidů cyklotronem

radionuklid	Na 24	Cu 64	P 32	K 42	As 76	H 3
mCi/h	1 000	300	20	5	1	0,01

2. Ozařování prvků v reaktoru

Preparáty se umísťují v kanálech reaktoru a vystavují se účinku silného neutronového záření. Tak se vyrábí řada radionuklidů pro průmyslové účely: P 32, C 14, H 3 aj.

3. Ze štěpných produktů reaktoru

Chemická extrakce při regeneraci palivových článků dává velká množství levných radionuklidů nejrůznějších druhů: Kr 55, Sr 90, Ru 106, Sb 125, Cs 136, 137, Pm 147, Sm 151 atd. Kromě toho vzniká ovšem ozařováním uranu 238 plutonium, které se vyrábí ve všech uranových reaktorech, zejména však v reprodukčních reaktorech s přírodním uranem jako plodnou látkou.

Technické využití radionuklidů

Nemůžeme se zabývat dnes již běžným a velmi rozmanitým použitím radionuklidů ve všech oborech lidské činnosti. Omezíme se na stručný přehled technických aplikací, zejména ve strojírenství. Z hlediska fyzikálního lze rozdělit způsoby využití radionuklidů do tří hlavních skupin.

První dvě skupiny I a II zahrnují metody založené na vzájemné interakci záření nuklidů s látkami, kdežto třetí skupina aplikací je založena na metodě značkových atomů, jejichž rozložení nebo pohyb v látkách se zjišťuje radiologickými metodami. Pro průmyslové využití radionuklidů je nejdůležitější první skupina, při níž se zjišťují:

I. Kvantitativní změny záření způsobené vyšetřovaným objektem. Tyto metody jsou založeny nejčastěji na absorpci, někdy též na odrazu vhodně voleného záření.

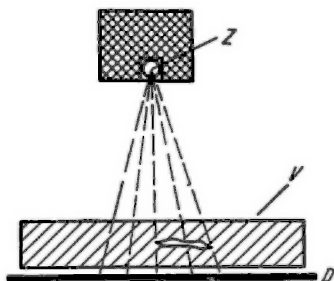
Nejrozšířenější z metod této skupiny je *gama-defektoskopie*, které se hojně používá ve strojírenství, v hutnictví i ve stavebnictví. Defektoskopie zářením gama je zvláště v provozu výhodnější a levnější než rentgenová defektoskopie. Jednoduché zařízení znázorněné na obr. (8.8) 12 ukazuje tzv. *radiografické* vyšetřování odlitku *V*, který se prozařuje zářičem *Z*. Záření proniká odlitkem na fotografickou desku *D*. Nehomogenost a vady materiálu se projeví nestejným zčernáním jaderné emulze. K prosvěcování velkých předmětů se užívá silných zářičů γ , nejčastěji preparátů Co 60 o aktivitě několika kCi. Kontrola svarů a plechů přináší značné úspory materiálu. Absorpce záření se využívá k měření tloušťky plechů, kontrole úrovně kapalin v neprůhledných nádržích apod.

Radionuklidové *tloušťkoměry* k průběžné kontrole plechů, papírů atd. jsou velmi častým zařízením. Na obr. (8.8) 13 je snímek bezdotykového měřiče tloušťky plechů značky Isomet, který se u nás vyrábí sériově. Tento tloušťkoměr kontroluje odchylky od předepsané tloušťky přímo při výrobě tím, že zjišťuje ionizační komůrkou intenzitu rozptýleného záření β , které se odráží od plechového pásu. Intenzita rozptýleného záření β roste totiž s tloušťkou plechu, takže v jistém oboru je možno měřit tloušťku s přesností $\pm 1\%$.

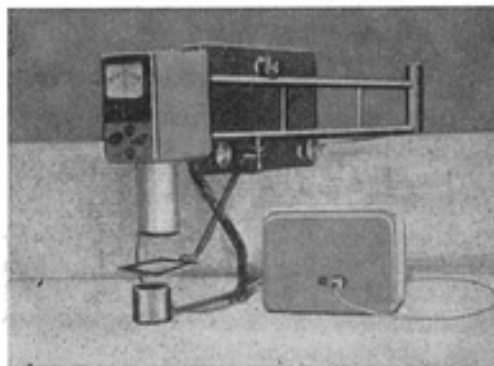
Na absorpci záření je založena i jedna z metod měření opotřebení pneumatik. Do vhodné hloubky pod povrch pneumatiky se uloží radioaktivní preparát a po ujetí jistého počtu kilometrů se změní zesílení záření, které vznikne opotřebením vrstvy pryže nad preparátem. Tuto metodu je možno přizpůsobit i pro některé strojní součásti.

Konečně jsou metody této skupiny výhodné i pro *regulaci* mnohých výrobních zařízení, jako jsou jaderné elektrárny, vysoké pece, těžba sacími bagry, přívod práškového paliva ke kotlům aj.

II. Změny způsobené v látkách jaderným zářením. Z typických účinků jaderného záření uvádíme: Ozářením se mění mechanické i jiné vlastnosti technických materiálů. Tak lze např. působením záření γ zvýšit pevnost dřeva a zlepšit vlastnosti plastických hmot.



Obr. (8.8) 12. Radiografie odlitku pomocí jaderné emulze



Obr. (8.8) 13. Bezdotykový měřič tloušťky Isomet

Působí-li se na ně zářením γ již při výrobě, lze získat látky, které jsou vhodnou náhradou hliníku, mosazi nebo zinku.

Účinkem záření je možno aktivovat některé chemické reakce. *Radiační polymerizaci* se vyrábějí některé plastické hmoty, fenol a hydrazin. Zkouší se výroba metanu z uhlí ozařováním zdrojem $\text{Co } 60$ o vysoké aktivitě 14 kCi a uvažuje se o použití škodlivého záření jaderných elektráren k *vulkanizaci kaučuku*. Přimísením malého množství radionuklidu se zesílí luminiscence látek. Ionizací vzduchu zářením a elektrickým polem se odstraní náboje, které jsou velkou závadou při některých výrobních procesech.

III. Sledování radionuklidů v látkách. Na tom se zakládá tzv. *stopovací technika*, která využívá možnosti indikovat malá množství radionuklidů. Tato metoda *značkových atomů* je velmi úspěšná při studiu *difúze*, *opotřebení* a *otěru* částí strojů, *korozí* apod. Postupuje se tak, že se zaktivuje (vložením do experimentálního kanálu reaktoru) povrch součástí, která podléhá opotřebení nebo korozi, nebo se opatří vhodně upravenou aktivní vložkou. Z úbytku aktivity po jisté době provozu lze pak odvodit míru opotřebení. To se provádí při zjišťování trvanlivosti pístních kroužků, řezných nástrojů, ložisek atd. Je výhodná i ke zjišťování *netěsnosti v potrubí*, sledování skrytých pohyblivých objektů, ke studiu působení maziv, ke kontrole stavu vyzdívek v technických provozech, k sledování pohybu uhlí v zásobnících apod.

Při výběru zářičů je třeba přihlížet k druhu záření a k energii záření, k délce poločasu, možnosti detekce a k ceně radionuklidů.

Předpokladem jejich použití je ovšem náležitá biologická ochrana a musí se vyloučit možnost zamoření laboratoře a okolí. Příslušné předpisy o zacházení s radioaktivními preparáty, přípustné dávky, intenzity záření, jakož i aktivity a koncentrace radionuklidů jsou podrobně uvedeny v ČSN 34 1730 z r. 1959.

V technicky vyspělých státech, zejména v SSSR, USA, Velké Británii a ve Francii, je radionuklidová technika již na vysokém stupni a úspory dosažené ve výrobě se odhadují miliardovými hodnotami. Ukazuje se, že radiační zařízení přináší snížení výrobních nákladů, které několikanásobně převyšuje náklady spojené s jejich zavedením a provozem.

V Československu je technická radiologie teprve v počátcích, ale rychle se rozvíjí asi na 200 radiačních pracovišť. Roku 1960 byla u nás zavedena výroba 50 druhů značených sloučenin a pracuje se na radiační polymerizaci, vulkanizaci kaučuku a konzervování potravin. Vyrábíme některé vlastní měřicí přístroje a indikátory. Také kontrola provozu ropovodu se provádí radiační metodou.

Dodatky

D.1. Základní vektorové vzorce

Shrnujeme zde jen definice základních vektorových veličin a nejdůležitější vzorce, které pro ně platí.*) Tento přehled doplňujeme stručným výkladem o fyzikálním významu základních pojmů.

Vektorová algebra

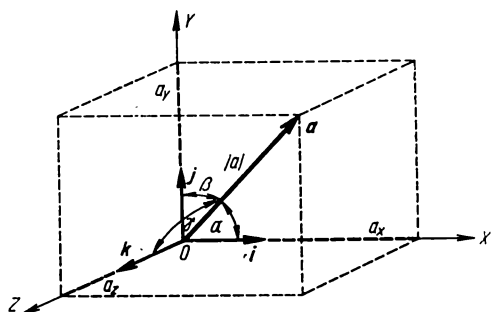
Vektor $\mathbf{a}$, jehož kladný směr svírá s osami Ox , Oy , Oz pravouhlé soustavy souřadnic úhly α , β , γ , má podle obr. D. 1 *kartézské složky*

$$D(1) \quad a_x = a \cos \alpha, \quad a_y = a \cos \beta, \quad a_z = a \cos \gamma,$$

kde

$$D(2) \quad a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \geq 0$$

je velikost vektoru $\mathbf{a}$; $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ se nazývají *směrové kosiny* vektoru $\mathbf{a}$. Rovnicemi D (1) definované složky vektoru jsou skaláry, které se též nazývají *souřadnice vektoru*.



Obr. D 1

Z D (1) a D (2) plyne ihned

$$D(3) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

$$D(4) \quad \mathbf{a} = a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma.$$

Součin vektoru $\mathbf{a}$ se skalárem λ je vektor $\lambda \mathbf{a}$ o složkách

$$D(5) \quad \lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z,$$

který je souhlasně (nesouhlasně) rovnoběžný, je-li λ kladné (záporné):

$$\begin{aligned} \lambda > 0, & \quad \lambda \mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{a}, \\ \lambda < 0, & \quad \lambda \mathbf{a} \uparrow \downarrow \mathbf{a} \end{aligned}$$

a jeho velikost

$$|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|.$$

*) Odvození a bližší výklad viz např. v literatuře uvedené v seznamu pod čísly [20], [39], [52].

Zvolíme-li $\lambda = 1/a$, dostaneme vektor

$$D (6) \quad \mathbf{a}^0 = \frac{1}{a} \mathbf{a}, \quad a^0 = |\mathbf{a}^0| = 1, \quad \mathbf{a} = a \mathbf{a}^0,$$

který nazýváme jednotkovým vektorem vektoru $\mathbf{a}$, s nímž je souhlasně rovnoběžný. Má velikost rovnou jedné a jeho složky

$$D (7) \quad a_x^0 = \cos \alpha, \quad a_y^0 = \cos \beta, \quad a_z^0 = \cos \gamma.$$

Jednotkové vektory v osách souřadnic, které značíme $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, mají složky

$$D (8) \quad \begin{array}{lll} i_x = 1, & i_y = 0, & i_z = 0, \\ j_x = 0, & j_y = 1, & j_z = 0, \\ k_x = 0, & k_y = 0, & k_z = 1. \end{array}$$

Součet (rozdíl) dvou vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ je vektor

$$D (9) \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b}$$

o složkách

$$D (10) \quad c_x = a_x \pm b_x, \quad c_y = a_y \pm b_y, \quad c_z = a_z \pm b_z$$

a podobně definujeme součet libovolného počtu vektorů. Proto můžeme každý vektor vyjádřit jako součet tří vektorů ve tvaru

$$D (11) \quad \mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

který nazýváme *semikartézským* (polokartézským) vyjádřením. Vektor je tu určen jako vektorový součet vektorových složek v osách souřadnic.

Skalární součin vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ značíme tečkou mezi značkami obou vektorů; je definován jako skalár rovný

$$D (12) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \vartheta,$$

je-li ϑ úhel sevřený směry obou vektorů. Platí vztahy

$$D (13) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \pm \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \pm \mathbf{a} \cdot \mathbf{c},$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \quad \text{pro} \quad \mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{b},$$

$$D (14) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -ab \quad \text{pro} \quad \mathbf{a} \uparrow \downarrow \mathbf{b},$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \text{pro} \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}.$$

Skalární součin vektoru $\mathbf{a}$ s jednotkovým vektorem $\mathbf{b}^0$ je kolmý průmět do směru vektoru $\mathbf{b}$:

$$D (15) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^0 = a \cos \vartheta,$$

takže

$$D (16) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a_x, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = a_y, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = a_z$$

a vzhledem k D (11)

$$D (17) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Vektorový součin dvou vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ značíme znaménkem „krát“ a je to podle obr. D. 2 vektor, který má velikost

$$D (18) \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab |\sin \vartheta|$$

rovnou ploše rovnoběžníka vytvořeného oběma vektory. Je kolmý k jejich společné ose a míří na tu stranu, na kterou by postupoval pravotočivý šroub při otáčení od vektoru $\mathbf{a}$ k vektoru $\mathbf{b}$ (kratší cestou). Vektorový součin má složky

$$D(19) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y = a_z b_x - a_x b_z, \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z = a_x b_y - a_y b_x$$

a v semikartézském vyjádření

$$D(20) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Platí vzorce

$$D(21) \quad \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \pm \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \pm \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

$$D(22) \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \\ = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}),$$

$$D(23) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}.$$

Vektorová analýza

Derivace vektoru $\mathbf{a}$ podle skalární proměnné t je vektor

$$D(24) \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{da_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{da_z}{dt} \mathbf{k},$$

jehož složky jsou rovny derivacím složek původního vektoru $\mathbf{a}$.

Integrál vektoru $\mathbf{a}$ je opět vektor

$$D(25) \quad \int \mathbf{a} dt = \left(\int a_x dt \right) \mathbf{i} + \left(\int a_y dt \right) \mathbf{j} + \left(\int a_z dt \right) \mathbf{k}$$

o složkách rovných integrálům složek původního vektoru $\mathbf{a}$.

Skalární pole je část prostoru, ve které je definována skalární funkce $f(x, y, z, t)$ souřadnic a času. Každému bodu je tím přiřazena v každém okamžiku jistá hodnota funkce f . Nezávisí-li funkce f na čase t , jsou její hodnoty v každém místě stálé a pole se nazývá *statické* nebo *stacionární*. V takovém poli jsou definovány tzv. *ekviskalární plochy* neboli *hladiny* pole; na každé z nich má funkce f stálou hodnotu. Hladina, na které je $f = f_0 = \text{const}$, má rovnici

$$D(26) \quad f(x, y, z) = f_0.$$

V každém místě časově neproměnného pole můžeme sestavit vektor, jehož složky jsou rovny parciálním derivacím funkce podle souřadnic. Značíme jej

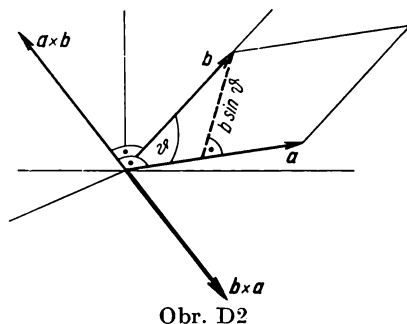
$$D(27) \quad \mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

a čteme „gradient funkce f “. Záporný gradient se nazývá spád funkce f . Gradient je kolmý k hladině a ukazuje směr, ve kterém funkce nejrychleji roste.

Její přírůstek při posuvu $d\mathbf{l}$ (o složkách dx, dy, dz) je totiž dán skalárním součinem.

$$D(27') \quad df = (\mathbf{grad} f) d\mathbf{l}.$$

Vektorové pole je část prostoru, v jehož každém bodě je dán jistý vektor $\mathbf{u}(x, y, z, t)$,



Obr. D2

jehož složky jsou funkcemi souřadnic a času. Nezávisí-li tyto složky na čase, je vektorové pole časově stálé, neproměnné (stacionární), nezávisí-li ani na souřadnicích, je vektorové pole homogenní; jeho vektory jsou všude stejně velké a souhlasně rovnoběžné (vektor $\mathbf{u}$ je konstantní). Příkladem vektorového pole je gradient; můžeme jej jednoduše vyjádřit, užijeme-li „symbolického vektoru“, který se nazývá *Hamiltonův vektorový operátor*.

Operace $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ užitá na (derivovatelnou) funkci souřadnic f vedou k jejím parciálním derivacím, které jsou složkami gradientu D (27)

$$D(28) \quad \text{grad}_x f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{grad}_y f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{grad}_z f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Označíme-li tedy tyto operace samé jako složky vektoru

$$D(29) \quad \nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z},$$

máme tím definován vektor

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

který sám o sobě je pouhým operátorem, který se čte „nabla“ nebo „del“. Násobíme-li jím nějaký skalár nebo vektor, dostaneme důležité pojmy vektorové analýzy.

Tak můžeme gradient D (27) vyjádřit jako „součin“ operátoru ∇ a skalární funkce f

$$D(30) \quad \nabla f = \text{grad } f.$$

Divergence vektorového pole $\mathbf{v}$ je skalární součin

$$D(31) \quad \text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla_x v_x + \nabla_y v_y + \nabla_z v_z = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Fyzikální význam tohoto skaláru, který je obecně funkcí souřadnic a času, je dán výrazem

$$D(32) \quad \text{div } \mathbf{v} = \frac{\text{výtok vektoru } \mathbf{v} \text{ z objemového prvku}}{\text{objemový prvek}}.$$

Výtok vektoru z objemu V odděleného z prostoru uzavřenou plochou $S(V)$ je dán plošným integrálem

$$D(33) \quad \text{výtok vektoru } \mathbf{v} = \oint_{S(V)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$

kde $d\mathbf{S}$ je orientovaný plošný prvek plochy $S(V)$. Platí tedy *Gaussova věta*

$$D(34) \quad \int_V \int \text{div } \mathbf{v} dV = \oint_{S(V)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

Rotace neboli *rotor* vektorového pole je vektorový součin

$$D(35) \quad \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

o složkách

$$D (36) \quad \text{rot}_x \mathbf{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \text{rot}_y \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \text{rot}_z \mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Dráhový integrál vektoru $\mathbf{v}$ podél uzavřené křivky $C(S)$ ohraničující plochu S

$$D (37) \quad \Gamma = \oint_{C(S)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

se nazývá *cirkulace* vektoru $\mathbf{v}$. Fyzikální význam rotace je pak dán vztahem

$$D (38) \quad \text{rot } \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{S} = \Delta \Gamma,$$

kde $\Delta \Gamma$ značí elementární cirkulaci vektoru při oběhu plošného prvku $\Delta \mathbf{S}$.

Z toho plyne *Stokesova věta*

$$D (39) \quad \iint_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C(S)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}.$$

Laplaceův operátor neboli Laplaceův symbol je skalární součin Hamiltonova operátoru se sebou samým

$$D (40) \quad \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta.$$

Z uvedených definic plynou tyto vzorce:

$$D (41) \quad \nabla \times \nabla f = (\nabla \times \nabla) f = 0 \quad \text{čili} \quad \text{rot grad } f = 0,$$

$$D (42) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad \text{čili} \quad \text{div rot } \mathbf{v} = 0,$$

$$D (43) \quad \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f \quad \text{čili} \quad \text{div grad } f = \Delta f,$$

$$D (44) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ \text{čili} \quad \text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \nabla^2 \mathbf{v}.$$

Některé fyzikální konstanty

Pravděpodobné chyby konstant mají velikost řádu poslední číslice

Konstanta	Značka	Hodnota
Rychlost světla ve vakuu	c	$2,997\,930 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Energie ekvivalentní hmotnosti 1 kg		$8,987\,58 \cdot 10^{16} \text{ J}$
Gravitační konstanta	κ	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Planckova konstanta	h	$6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Permeabilita vakua	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1} =$ $= 1,256\,637 \dots 10^{-6} \cdot \text{H m}^{-1}$
Permitivita vakua	ε_0	$8,854\,16 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
Univerzální plynová konstanta	R	$8\,314\,4 \cdot 10^3 \text{ J deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$
Boltzmannova konstanta	k	$1,380\,3 \cdot 10^{-23} \text{ J deg}^{-1}$
Avogadrova konstanta	N	$6,022\,9 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$
Loschmidtova konstanta	n_0	$2,687\,3 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$
Normální molový objem	V	$22,414 \text{ m kmol}^{-1}$
Faradayův náboj	F	$9,649\,6 \cdot 10^7 \text{ C}$
Elementární náboj	e	$1,602\,1 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Elektronvolt	eV	$1,602\,1 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Atomová jednotka hmotnosti	u	$1,660\,44 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Klidová hmotnost protonu	m_p	$1,672\,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Relativní atomová hmotnost protonu		1,007 276
Klidová hmotnost neutronu	m_n	$1,674\,8 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Relativní atomová hmotnost neutronu		1,008 665
Klidová hmotnost elektronu	m_e	$0,910\,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$
Relativní atomová hmotnost elektronu		$5,495\,9 \cdot 10^{-4}$
Energie ekvivalentní atomové jednotce hmotnosti		$1,492\,2 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 931,1 \text{ MeV}$
Energie ekvivalentní klidové hmotnosti elektronu		$8,186\,4 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 0,510\,98 \text{ MeV}$
Poměr klidových hmotností protonu a elektronu	m_p/m_e	1 836,12
Bohrův poloměr	a_1	$5,291\,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

Periodická soustava prvků (r. 1961)

	Grupa I	Grupa II	Grupa III	Grupa IV	Grupa V	Grupa VI	Grupa VII	Grupa VIII	Grupa 0
0									0 n 1,008 7
1	1 H 1,007 97								2 He 4,002 6
2	3 Li 6,939	4 Be 9,012 2	5 B 10,811	6 C 12,011 15	7 N 14,006 7	8 O 15,999 4	9 F 18,998 4		10 Ne 20,183
3	11 Na 22,989 8	12 Mg 24,312	13 Al 26,981 5	14 Si 28,086	15 P 30,973 8	16 S 32,064	17 Cl 35,453		18 Ar 39,948
4	19 K 39,102 20 Cu 63,54	20 Ca 40,08 30 Zn 65,37	21 Sc 44,956 31 Ga 69,72	22 Ti 47,90 32 Ge 72,59	23 V 50,942 33 As 74,921 6	24 Cr 51,996 34 Se 78,96	25 Mn 54,938 1 35 Br 79,909	26 Fe 55,847 27 Co 58,933 2 28 Ni 58,71	36 Kr 83,80
5	37 Rb 85,47 47 Ag 107,870	38 Sr 87,62 48 Cd 112,40	39 Y 88,905 49 In 114,82	40 Zr 91,22 50 Sn 118,69	41 Nb 92,906 51 Sb 121,75	42 Mo 95,94 52 Te 127,60	43 Tc 99 53 I 126,904 4	44 Ru 101,07 45 Rh 102,905 46 Pd 106,4	54 Xe 131,30
6	55 Cs 132,905 79 Au 196,967	56 Ba 137,34 80 Hg 200,59	57 La 138,91 81 Tl 204,37	72 Hf 178,49 82 Pb 207,19	73 Ta 180,948 83 Bi 208,980	74 W 183,85 84 Po (210)	75 Re 186,2 85 At (210)	76 Os 190,2 77 Ir 192,2 78 Pt 195,09	86 Rn (222)
7	87 Fr (223)	88 Ra (226)	89 Ac (227)	90 až 103 aktinidy					

Vzácné zeminy:

58 Ce 140,12	59 Pr 140,907	60 Nd 144,24	61 Pm (145)	62 Sm 150,35	63 Eu 151,96	64 Gd 157,25	65 Tb 158,924	66 Dy 162,50	67 Ho 164,930	68 Er 167,27	69 Tm 168,934	70 Yb 173,04	71 Lu 174,97
-----------------	------------------	-----------------	----------------	-----------------	-----------------	-----------------	------------------	-----------------	------------------	-----------------	------------------	-----------------	-----------------

Aktinidy:

90 Th 232,038	91 Pa (231)	92 U 238,03	93 Np (237)	94 Pu (242)	95 Am (243)	96 Cm (243)	97 Bk (245)	98 Cf (246)	99 Es (253)	100 Fm (255)	101 Md (256)	102 No (253)	103 Lw (257)
------------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Obsazení elektronových drah v atomech

	<i>K</i>			<i>L</i>			<i>M</i>			<i>N</i>				<i>O</i>			
	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f	5s	5p	5d	5f			
0 n																	
1 H	1																
2 He	2																
3 Li	2	1															
4 Be	2	2															
5 B	2	2	1														
6 C	2	2	2														
7 N	2	2	3														
8 O	2	2	4														
9 F	2	2	5														
10 Ne	2	2	6														
11 Na	2	2	6	1													
12 Mg	2	2	6	2													
13 Al	2	2	6	2	1												
14 Si	2	2	6	2	2												
15 P	2	2	6	2	3												
16 S	2	2	6	2	4												
17 Cl	2	2	6	2	5												
18 Ar	2	2	6	2	6												
19 K	2	2	6	2	6		1										
20 Ca	2	2	6	2	6		2										
21 Sc	2	2	6	2	6	1	2										
22 Ti	2	2	6	2	6	2	2										
23 V	2	2	6	2	6	3	2										
24 Cr	2	2	6	2	6	5	1										
25 Mn	2	2	6	2	6	5	2										
26 Fe	2	2	6	2	6	6	2										
27 Co	2	2	6	2	6	7	2										
28 Ni	2	2	6	2	6	8	2										
29 Cu	2	2	6	2	6	10	1										
30 Zn	2	2	6	2	6	10	2										
31 Ga	2	2	6	2	6	10	2	1									
32 Ge	2	2	6	2	6	10	2	2									
33 As	2	2	6	2	6	10	2	3									
34 Se	2	2	6	2	6	10	2	4									
35 Br	2	2	6	2	6	10	2	5									
36 Kr	2	2	6	2	6	10	2	6									
37 Rb	2	2	6	2	6	10	2	6			1						
38 Sr	2	2	6	2	6	10	2	6			2						
39 Y	2	2	6	2	6	10	2	6	1		2						
40 Zr	2	2	6	2	6	10	2	6	2		2						
41 Nb	2	2	6	2	6	10	2	6	4		1						
42 Mo	2	2	6	2	6	10	2	6	5		1						
43 Tc	2	2	6	2	6	10	2	6	6		1						
44 Ru	2	2	6	2	6	10	2	6	7		1						
45 Rh	2	2	6	2	6	10	2	6	8		1						
46 Pd	2	2	6	2	6	10	2	6	10								
47 Ag	2	2	6	2	6	10	2	6	10		1						
48 Cd	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2						
49 In	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	1					
50 Sn	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	2					
51 Sb	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	3					
52 Te	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	4					
53 I	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	5					
54 Xe	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	6					

	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>				<i>O</i>				<i>P</i>			<i>Q</i>
				<i>4s</i>	<i>4p</i>	<i>4d</i>	<i>4f</i>	<i>5s</i>	<i>5p</i>	<i>5d</i>	<i>5f</i>	<i>6s</i>	<i>6p</i>	<i>6d</i>	<i>7s</i>
55 Cs cesium	2	8	18	2	6	10						1			
56 Ba baryum	2	8	18	2	6	10		2	6			2			
57 La lanthan	2	8	18	2	6	10		2	6	1		2			
58 Ce cer	2	8	18	2	6	10	1	2	6	1		2			
59 Pr praseodym	2	8	18	2	6	10	2	2	6	1		2			
60 Nd neodym	2	8	18	2	6	10	3	2	6	1		2			
61 Pm promethium	2	8	18	2	6	10	4	2	6	1		2			
62 Sm samarium	2	8	18	2	6	10	5	2	6	1		2			
63 Eu europium	2	8	18	2	6	10	6	2	6	1		2			
64 Gd gadolinium	2	8	18	2	6	10	7	2	6	1		2			
65 Tb terbium	2	8	18	2	6	10	8	2	6	1		2			
66 Dy dysprosium	2	8	18	2	6	10	9	2	6	1		2			
67 Ho holmium	2	8	18	2	6	10	10	2	6	1		2			
68 Er erbium	2	8	18	2	6	10	11	2	6	1		2			
69 Tm thulium	2	8	18	2	6	10	12	2	6	1		2			
70 Yb ytterbium	2	8	18	2	6	10	13	2	6	1		2			
71 Lu lutecium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	1		2			
72 Hf hafnium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	2		2			
73 Ta tantal	2	8	18	2	6	10	14	2	6	3		2			
74 W wolfram	2	8	18	2	6	10	14	2	6	4		2			
75 Re rhenium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	5		2			
76 Os osmium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	6		2			
77 Ir iridium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	7		2			
78 Pt platina	2	8	18	2	6	10	14	2	6	8		2			
79 Au zlato	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10		1			
80 Hg rtuť	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10		2			
81 Tl talium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10		2	1		
82 Pb olovo	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10		2	2		
83 Bi vizmut	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10		2	3		
84 Po polonium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10		2	4		
85 At astat	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10		2	5		
86 Rn radon	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10		2	6		
87 Fr francium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10		2	6		1
88 Ra rádium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10		2	6		2
89 Ac aktinium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10		2	6	1	2
90 Th thorium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10	1	2	6	1	2
91 Pa protaktinium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10	2	2	6	1	2
92 U uran	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10	3	2	6	1	2
93 Np neptunium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10	4	2	6	1	2
94 Pu plutonium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10	5	2	6	1	2
95 Am amerícium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10	6	2	6	1	2
96 Cm curium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10	7	2	6	1	2
97 Bk berkelium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10	8	2	6	1	2
98 Cf kalifornium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10	9	2	6	1	2
99 Es einsteinium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10	10	2	6	1	2
100 Fm fermium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10	11	2	6	1	2
101 Md mendělejevium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10	12	2	6	1	2
102 No nobelium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10	13	2	6	1	2
103 Lw lawrencium	2	8	18	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	1	2

Literatura

- [1] BAUER, H. A.: Grundlagen der Atomphysik. Wien, 1938.
- [2] BĚHOUNEK, F.—BOHUN, A.—KLUMPAR, J.: Radiologická fyzika. 2. vyd. Praha, 1958.
- [3] BERGMANN, L.: Der Ultraschall. Berlin, 1937.
- [4] BETHE, H.—MORRISON, P.: Elementary Nuclear Theory. New York, 1956.
- [5] BINKO, J.: Fyzikální a technické veličiny. Praha, 1964.
- [6] BRDIČKA, M.: Mechanika kontinua. Praha, 1959.
- [7] CAHEN, G.—TREILLE, P.: Précis d'Énergie Nucléaire. 2. vyd. Paris, 1958.
- [8] CULLWICK, E. G.: Fundamentals of Electromagnetism. Cambridge, 1949.
- [9] CULLWICK, E. G.: Electromagnetism and Relativity. London, 1957.
- [10] DAVIDSON, M.: The Gyroscope and its Applications. New York, 1947.
- [11] DRŠKA, L.—KLIMEŠ, B.: Základy atomové fyziky. Praha, 1958.
- [12] DUDA, T.: Letecké přístroje I/II. Praha, 1947.
- [13] EINSTEIN, A.: The Meaning of Relativity. London, 1950.
- [14] FETTER, Fr.: Přehled silnoproudé elektrotechniky I. Praha, 1957.
- [15] FLEURY, P.—MATHIEU, J. P.: Atomes, Molécules, Noyaux. Paris, 1963.
- [16] FRIŠ, S. E.—TIMOREVA, A. V.: Kurs fyziky I/II/III. Praha, 1954.
- [17] FUKA, J.—HAVELKA, B.: Optika I. Praha, 1961.
- [18] FUKA, J.—HAVELKA, B.: Elektromagnetické pole. Praha, 1958.
- [19] FRANK, H.: Polovodiče v teorii a praxi. Praha, 1955.
- [20] GARAJ, J.: Základy vektorového počtu. Bratislava, 1957.
- [21] GERTHSEN, Ch.: Physik. Berlin, 1951.
- [22] GRIMSEHL, O.: Lehrbuch der Physik I/II/III. 13.—15. vyd., 1951—1955.
- [23] HAVELKA, B.: Geometrická optika I/II. Praha, 1955.
- [24] HAVELKA, J.: Televis. Praha, 1956.
- [25] HEITLER, W.: Elementary Wave Mechanics. Oxford, 1948.
- [26] HENNING, F.: Temperaturmessung. Leipzig, 1955.
- [27] HERTZ, G.: Grundlagen und Arbeitsmethoden der Kernphysik. Berlin, 1957.
- [28] HLÁVKA, J.: Theoretická elektronika. Praha, 1954.
- [29] HORÁK, Z.: Praktická fyzika. 3. vyd. Praha, 1957.
- [30] HORÁK, Z.: Úvod do molekulové a atomové fyziky. 2. vyd. Praha, 1957.
- [31] HORÁK, Z.—KRUPKA, F.—ŠINDELÁŘ, V.: Technická fyzika. 3. vyd. Praha, 1961.
- [32] CHEW, F.—GELL-MANN, M.—ROSENFELD, A. H.: Strongly Interacting Particles. = „Scient. Amer.“, 210, 1964.
- [33] ILKOVIČ, D.: Fyzika. 2. vyd. Bratislava, 1959.
- [34] JOFFE: Fyzika polovodičů.
- [35] KITTEL, C.: Introduction to Solid State Physics. 2. vyd. New York, 1956.

- [36] KRACÍK, J.—ŠŮLA, V.—TARABA, O.—TLUČHOŘ, Z.—TOBIÁŠ, J.: Vyšší škola technické fyziky. Praha, 1964.
- [37] KUČERA, B.: Geometrická optika. Praha, 1915.
- [38] KUČERA, B.: Základy mechaniky tuhých těles. Praha, 1921.
- [39] KUČERA, J.—HORÁK, Z.: Tenzory v elektrotechnice a ve fyzice. Praha, 1963.
- [40] LEMON, H. B.—FERENCE, M.: Analytical Experimental Physics. Chicago, 1946.
- [41] LEVIČ, V. G.: Statistická fyzika. Praha, 1954.
- [42] MACHALICKÝ, J.—PACÁKOVÁ, I.—SCHÜREROVÁ, E.: Příklady z fyziky. I/II. Praha, 1961.
- [43] MILBAUER, M.: Fotoelasticimetrie a její užití v praxi. Praha, 1953.
- [44] MØLLER, C.: The Theory of Relativity. Oxford, 1955.
- [45] NAOHTIKAL, F.: Technická fyzika. Praha, 1945.
- [46] PAPALEKSI, N. D.: Kurs fiziki. I/II. Moskva, 1948.
- [47] PERNEGR, J.—PETRŽÍLKA, V.—TOMÁŠKOVÁ, L.: Kosmické záření. Praha, 1953.
- [48] PETRŽÍLKA, V.: Fyzikální optika. Praha, 1952.
- [49] PETRŽÍLKA, V.: Metody pro detekci a registraci jaderného záření. Praha, 1959.
- [50] PETRŽÍLKA, V.—ŠAFRATA, S.: Elektřina a magnetismus. Praha, 1953.
- [51] POHL, R. W.: Einführung in die Physik. I/II/III. Berlin.
- [52] PÍRKO, Z.: Vektory. Praha, 1951.
- [53] RECKNAGEL, A.: Experimentalphysik. Weimar, 1953.
- [54] ROCARD, V.: Électricité. Paris, 1951.
- [55] SACHAROV, D. I.—KOSMINKOV, I. S.: Sbírka úloh z fyziky. Praha, 1953.
- [56] SEITZ, F.: The Modern Theory of Solids. New York, 1940.
- [57] SEITZ, F.: The Physics of Metals. New York, 1943.
- [58] SENA, L. A.: Jedinicy izmerenija fizičeskich veličin. Moskva, 1951.
- [59] SCHRÖDINGER, E.: Four Lectures on Wave Mechanics. London, 1943.
- [60] STRÁNSKÝ, J.: Vysokofrekvenční elektrotechnika I. Praha, 1956.
- [61] STRNAD, J.: Elektroakustika I. Záznam a reprodukce zvuku. Praha, 1951.
- [62] ŠIMÁNĚ, Č.: Urychlovače iontů a elektronů. 2. vyd. Praha, 1959.
- [63] ŠIMONOVÁ-ČEŘOVSKÁ: Ultrazvuk. Praha, 1941.
- [64] ŠINDELÁŘ, V.—MACHALICKÝ, J.: Měření délek ve výrobě. Praha, 1952.
- [65] ŠINDELÁŘ, V.—KRUPKA, F.: Měření teploty. 2. vyd. Praha, 1955.
- [66] ŠPOLSKIJ, E. V.: Atomová fyzika I/II. 2. vyd. Praha.
- [67] TAUC, J.: Kryсталové diody a triody. Praha, 1952.
- [68] TRKAL, V.: Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa. Praha, 1956.
- [69] VOTRUBA, V.—MUZIKÁŘ, Č.: Theorie elektromagnetického pole. Praha, 1955.
- [70] WYCKOFF, R. W. G.: Electron Microscopy Technique and Applications. New York, 1949.
- [71] ZÁVIŠKA, F.: Mechanika, Praha, 1932.
- [72] ZÁVIŠKA, F.: Thermodynamika. Praha, 1950.
- [73] ZÁVIŠKA, F.: Kinetická theorie plynů. Praha, 1951.
- [74] ZWORYKIN, V. K.—MORTON, C. A.—RAMBERG, E. C.—HILLIER, J.—VANCE, A. W.: Electron Optics and the Electron Microscope. New York, 1949.

Prof. RNDr. Zdeněk Horák DrSc.

Doc. Ing. Dr. František Krupka

Fyzika

Příručka pro fakulty strojního inženýrství

DT 530.1

Vydalo SNTL—Nakladatelství technické literatury, n. p., Spálená 51, Praha 1, společně se Slovenským vydavateľstvom technickej literatúry, Hurbanovo nám. 6, Bratislava, v roce 1966 jako svou 5707. publikaci v řadě teoretické literatury — Redakce teoretické literatury — Odpovědný redaktor Ing. Miloslav Vlk — Vazbu navrhl Josef Kalousek — Technická redakce Marie Králová — Vytiskl TISK, knižní výroba, n. p., Brno, provoz 1 — 904 stran, 782 obrázků, 68 tabulek — Typové číslo L11-C3-IV-41/1 416 — Vydání první — Náklad 15 200 výtisků — 93,05 AA, 94,59 VA — D-06*60256

03/5

Cena vázaného výtisku Kčs 60,00 — I

Publikace je určena především pro posluchače fakult strojního inženýrství, ale mohou jí využít i technici a inženýři ve strojírenském průmyslu a v příbuzných průmyslových oborech

04-017-66 Kčs 60,00 — I
