

PAEDDR. KAREL ŽAMPA

DOC. RNDR. ING. DANIEL KLUVANEC, CSC.

MOJMÍR SIMERSKÝ

RNDR. IVO VOLF

XXVI. ročník fyzikální olympiády

ZPRÁVA O PRŮBĚHU A ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE
KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1984/85

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ PRAHA

Zpracovali: PaedDr. Karel Žampa, doc. RNDr. ing. Daniel Kluvanec,
CSc., Mojmír Simerský, RNDr. Ivo Volf

Lektorovali: RNDr. Václav Šůla, RNDr. Zdeněk Ungermann

© Karel Žampa za autorský kolektiv, 1989

ISBN 80-04-23141-1

I. ČÁST

ZPRÁVA O PRŮBĚHU SOUTĚŽE

1 CÍL SOUTĚŽE A JEJÍ ORGANIZACE

Fyzikální olympiáda plní od svého vzniku významný úkol: vyhledávat schopné žáky základních a středních škol a pečovat o jejich odborný růst. Cílem fyzikální olympiády (FO) tedy je v souladu s úkoly vědeckotechnického rozvoje naší společnosti vést žáky základních a středních škol k hlubšímu samostatnému studiu fyziky, rozvíjet jejich nadání a schopnosti a využívat získané poznatky k řešení fyzikálních úloh a problémů. Současně FO vytváří podmínky pro samostatné studium fyziky a získává žáky pro studium fyziky a technických oborů na středních a vysokých školách.

Fyzikální olympiáda vytváří předpoklady pro dobrou přípravu žáků středních škol ke studiu na vysokých školách matematicko-fyzikálního a technického zaměření. Žákům základních škol pomáhá při prohloubení přípravy ke studiu na středních školách včetně technických oborů na SOU.

Úkoly soutěže fyzikální olympiáda jsou dány organizačním řádem matematické a fyzikální olympiády, který nabyl účinnosti dnem 1. září 1976 výnosem MŠ ČSR ze dne 20. června 1976, č.j. 17 636/76 - 210 a výnosem MŠ ČSR ze dne 25. května 1976, č. j. 5 835/76 - II/1.

Podrobné uvedení cílů soutěže fyzikální olympiáda bylo uvedeno v ročence FO XXI. ročníku.

Ve školním roce 1984/85 vstoupila FO do druhého čtvrtstoletí svého trvání. Ve XXVI. ročníku probíhala fyzikální

olympiáda v pěti kategoriích. Clenění kategorií zůstává stejné jako v předcházejících ročnících, kategorie A–D pro žáky středních a škol kategorie E pro žáky základních škol.

V tomto ročníku probíhala rovněž fyzikální soutěž na principech FO v Severočeském kraji pro žáky SOU. Ověřována byla možnost dalšího rozšíření soutěže FO pro žáky 7. ročníků ZŠ jako samostatná soutěž Archimediáda.

První kolo všech kategorií se uskutečnilo přímo na škole a soutěžící v něm řešili 7 úloh. Řešitelé kategorií A–D měli za úkol prostudovat zadané studijní téma, na něž navazovaly některé úlohy prvního a druhého kola a u kategorie A i třetího kola soutěže.

V tomto ročníku byla připravena a publikována tato studijní témata:

pro kat. A - Kluvanec, D.: Frekvenční charakteristiky elektrických dvojpolů

(Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 63, č. 2 a 3).

pro kat. B - Volf, I.: Pohyb tělesa v odporujícím prostředí

(Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 63, č. 9 a 1).

pro kat. C - Chytilová, M.: Užití zákonů zachování při rázu dvou těles

(Účelový tisk ÚV FO).

pro kat. D - Volf, I.: Jak řešit úlohy fyzikální olympiády

(Text byl součástí letáku k XXIII. ročníku FO a má dlouhodobou platnost).

Organizace XXVI. ročníku FO byla obdobná jako organizace předcházejících ročníků s tím rozdílem, že ve 2. kole FO kategorie A a ve většině krajů i ve 2. kole FO kategorie B bylo použito bodového hodnocení. Zásady tohoto bodového hodnocení lze stručně shrnout takto: soutěžící mohl za každou úlohu 2. kola získat maximálně 10 bodů. Úspěšným řešitelem 2. kola se stal ten, kdo z hodnocení 4 soutěžních úloh získal alespoň 15 bodů a přitom nejméně 2 úlohy měl hodnoceny alespoň 5 body.

Úlohy pro jednotlivé kategorie FO byly zveřejněny v le-

tácích a dále v časopisech Matematika a fyzika ve škole, roč. 14, č. 10 a Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 62, č. 10 a roč. 63, č. 1.

2 SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY VE ŠKOLNÍM ROCE 1984/85

ÚV FO byl jmenován ministerstvy školství ČSR a SSR na funkční období 1983–1986.

Ústřední výbor fyzikální olympiády se podle organizačního řádu skládá ze zástupců pořádajících institucí a učitelů vysokých, středních a základních škol, kteří jsou do funkce jmenováni příslušnými ministerstvy školství na základě návrhů JČSMF a JSMF na tříleté funkční období. Kromě toho jsou členy pléna ÚV FO i všichni předsedové KV FO. Sídlem ÚV FO je Nitra, sekretariát ÚV FO je rozdělen na pracoviště v Nitře a pracoviště v Hradci Králové.

Složení ÚV FO bylo zveřejněno v Ročence XXV. ročníku FO. Zde je uvedeno pouze složení jeho předsednictva.

Předseda ÚV FO: doc. RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc.,
Nitra

Místopředsedové: RNDr. Ivo Volf, Hradec Králové
doc. RNDr. Ján Chrapan, CSc.,
Bratislava

Jednatelé: Prof. RNDr. Vladimír Majerník, DrSc.,
Nitra
RNDr. Zdeněk Ungermann,
Hradec Králové

Zástupce MŠ ČSR: RNDr. Václav Šůla, Praha

Zástupce MŠ SSR: Michal Zöldy, Bratislava

Zástupce JČSMF: RNDr. Karel Bartuška, Praha

Zástupce JSMF: RNDr. Viktor Bezák, DrSc., Bratislava

Zástupce ÚV SSM: doc. Ing. Bohumil Vybíral, CSc.,
Hradec Králové

Zástupce UDPM KG: Eva Bittnerová, Bratislava
Redaktor ŠMF: Mojmír Simerský, Pečky

ÚV FO se v průběhu XXVI. ročníku FO sešel na dvou
řádnych zasedáních, a to na podzimním v Brně a jarním
v České Lípě, u příležitosti konání 3. kola FO kategorie A.

3 KRAJSKÉ A OKRESNÍ VÝBORY FO VE ŠKOLNÍM ROCE 1984/85

Předsedy a členy KV FO jmenovaly na návrh poboček
JČSMF a JSMF odbory školství příslušných KNV. Funkční
období KV FO a OV FO je shodné jako funkční období
ÚV FO.

Ve funkci předsedů KF VO byli v XXVI. ročníku:

Praha: doc. RNDr. Miroslav Svoboda, CSc., MFF UK Praha

StřČ: Ing. Jiří Machalický, CSc., KF stroj. fak. ČVUT
Praha

JČ: RNDr. Pavel David, KF PF České Budějovice

ZČ: Olga Mašková, KF VŠSE Plzeň

VČ: RNDr. Josef Hubeňák, SPŠ stavební Hradec Králové

SČ: RNDr. Bohumil Daniel, G Česká Lípa

JM: doc. RNDr. Jan Schwarz, Brno

SM: doc. František Kamenčák, PF Ostrava

Brat.: doc. RNDr. Jozef Zámečník, CSc.,
KF SVŠT Bratislava

StřS: Ing. Ivo Čáp, CSc., KF VŠDS Žilina

ZS: doc. RNDr. Árpád Kecskés, CSc., KF a ZT PF Nitra

VS: doc. RNDr. Vladimír Ilkovič, CSc., PrF UJPŠ Košice

KV FO řídily FO v kraji, a to kategorií A—D přímo a ka-
tegorii E prostřednictvím OV FO. Současně zabezpečovaly ve
spolupráci s krajskými pedagogickými ústavy soustavnou
práci s referenty FO kategorií A—D na školách.

OV FO byly jmenovány na návrh okresních pedagogických
středisek odbory školství příslušných okresních národních

výborů. OV FO zabezpečovaly práci s referenty FO kategorie E, organizovaly akce na přípravu řešitelů FO a organizovaly 2. kolo FO kategorie E.

4 PRŮBĚH SOUTĚŽE VE ŠKOLNÍM ROCE 1984/85

A. PRVNÍ A DRUHÉ KOLO SOUTĚŽE FO KATEGORIÍ A, B, C a D

První kolo soutěže probíhalo od září do ledna na školách a řídili jej referenti FO.

Druhé kolo FO v kategoriích A až D se uskutečnilo ve dvou termínech, a to:

v kategorii A 2. února 1985,

v kategorii B, C, a D 20. dubna 1985.

Organizaci 2. kol zabezpečovaly KV FO za spolupráce dalších učitelů fyziky, pracovníků KPÚ, případně studentů vysokých škol, kterým je tato činnost uznávána jako součást jejich pedagogické praxe.

Ve Středoslovenském kraji proběhla experimentálně okresní část 1. kola v kategorii B–D. Organizátorem byl KV FO. Tato kola se uskutečnila 26. 3. 1985. Soutěžní úlohy připravil KV FO ve spolupráci s pobočkou JSMF v Žilině. Na základě výsledků těchto kol byl proveden výběr soutěžících do 2. kola kategorií B–D.

Údaje o účasti škol a žáků jsou uvedeny v následujících tabulkách 1 až 3.

PŘEHLED NEJÚSPĚŠNĚJŠÍCH ŘEŠITELŮ FO VE 2. KOLE V KATEGORIÍCH A, B, C, D

V přehledu je uváděno deset nejúspěšnějších řešitelů krajského kola v každé kategorii. Pouze při rovnosti pořadí řešitelů je uváděn vyšší počet úspěšných řešitelů. V případě,

Počet středních škol, které se zúčastnily XXVI. ročníku FO v kategoriích A – D

Kraj	Počet G v Kraji	Zapojeno												Celkový počet škol zapojených							
		gymnázia				SPŠ				ostatní školy											
		v kategoriích				v kategoriích				v kategoriích				v kategoriích							
		A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	Celkem			
Praha	22	17	17	19	19	1	2	–	8	8	–	–	–	–	18	19	19	27	27		
StřČ	23	16	21	19	20	–	2	3	4	4	–	1	1	–	3	16	24	23	30		
JČ	18	6	9	11	11	2	2	1	4	5	–	–	–	–	1	8	11	12	16		
ZČ	15	12	13	15	15	–	–	–	4	4	–	–	–	–	1	12	14	15	19		
SČ	21	11	13	14	18	1	1	3	7	8	–	–	–	2	2	12	14	17	20		
VČ	33	9	20	20	26	3	1	3	8	9	–	–	–	–	–	12	21	23	29		
JM	38	24	31	33	36	–	2	1	9	12	–	–	–	–	7	24	33	34	35		
SM	39	32	35	38	38	1	4	4	17	17	–	–	–	–	3	33	40	43	57		
Brat.	13	7	10	10	11	–	–	–	5	5	–	–	–	–	2	7	10	11	18		
ZS	38	29	38	38	38	2	4	7	19	19	–	–	–	–	14	31	43	49	71		
StřS	37	23	23	21	24	–	1	1	5	5	–	–	–	–	2	23	24	23	31		
VS	38	15	20	23	30	1	1	3	13	14	–	–	–	–	5	16	21	26	48		
Celkem	335	201	250	261	286	305	11	20	26	103	110	–	4	8	36	40	212	274	295	425	455

Počet soutěžících žáků a počet úspěšných řešitelů v 1. kole XXVI. ročníku FO v kategoriích A – D

Kraj	Kategorie A		Kategorie B		Kategorie C		Kategorie D		Celkem	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	65	40	115	81	118	62	189	98	487	281
StřČ	56	38	89	51	111	64	180	71	436	224
JČ	36	28	62	44	68	44	86	55	252	171
ZČ	38	31	52	44	48	40	108	84	246	199
SČ	45	29	65	36	101	60	206	130	417	255
VČ	45	38	73	66	115	102	162	148	395	354
IM	59	42	127	91	176	111	286	126	648	370
SM	148	57	226	122	296	144	714	219	1 384	542
Brat.	33	33	87	82	77	72	226	203	423	390
ZS	198	71	284	89	412	168	897	269	1 791	597
StřS	90	64	193	98	236	110	324	186	843	458
VS	49	49	85	67	105	87	235	189	474	392
Celkem	862	520	1 458	871	1 863	1 064	3 613	1 778	7 796	4 233
% úsp.		60,3		59,7		57,1		49,2		54,3

S – počet soutěžících

Ú – počet úspěšných řešitelů

Počet soutěžících žáků a počet úspěšných řešitelů ve 2. kole XXVI. ročníku FO kategorií A – D

Kraj	Kategorie A		Kategorie B		Kategorie C		Kategorie D		Celkem	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	40	11	80	30	60	33	90	60	270	134
StřČ	33	3	42	9	50	22	68	19	193	53
JČ	28	4	40	14	34	12	51	13	153	43
ZČ	31	8	44	16	39	27	80	47	194	98
SČ	27	6	34	5	50	27	114	77	225	115
VČ	35	16	56	14	90	56	124	36	305	122
JM	36	7	81	26	104	58	110	40	331	131
SM	56	16	119	35	134	67	204	44	513	162
Brat.	32	14	79	10	67	39	186	25	364	88
ZS	71	6	89	22	121	50	150	19	431	97
StřS	64	11	53	14	56	32	63	40	236	97
VS	49	4	67	14	87	21	189	22	392	61
Celkem % úsp.	502	106 21,1	784	209 28,5	892	444 49,8	1 429	442 30,9	3 607	1 201 33,3

S – počet soutěžících

Ú – počet úspěšných řešitelů

že naopak počet úspěšných řešitelů v některé kategorii v kraji byl nižší, jsou v přehledu uváděni pouze tito řešitelé.

U úspěšných řešitelů z řad gymnázií jsou uváděny následující zkratky:

M - zaměření studijního oboru 01 Matematika,

MF - zaměření studijního oboru 02 Matematika a fyzika,
program. - zaměření studijního oboru 38 Programování.

U soutěžících z nižších ročníků ve vyšší kategorii je uváděn ročník studia.

Úspěšní řešitelé 2. kol soutěže v kategoriích A – D z jednotlivých krajů

Praha

A	Španěl Patrik	G P. 2, W. Piecka	M
	Myslivec Ivo	G P. 4, Budějovická	
	Loucký Petr	G P. 2, W. Piecka	M
	Tůma Roman	G P. 2, W. Piecka	M
	Kvítek Zdeněk	G P. 6, Parlérova	
	Fexa Petr	G P. 3, Sladkovského	
	Mlynář Jan	G P. 3, Na Pražačce	
	Santolík Ondřej	G P. 2, W. Piecka	M
	Šlesinger Jaromír	G P. 7, Nad štolou	
	Votava Ondřej	G P. 3, Na Pražačce	
B	Blažek Jan	G P. 4, Na vítězné pláni	
	Novák Jan	G P. 10, Voděradská	M
	Zápotocký Martin	G P. 3, Sladkovského	
	Ledvinka Tomáš	SPŠE Na Příkopě	
	Hřebec Jan	G P. 5, Na Zatlanec	
	Hlinka Jiří	G P. 7, Nad štolou	
	Jírous Jan	G P. 9, Litoměřická	
	Havel Jan	G P. 6, Arabská	
	Šířoká Jana	G P. 9, Litoměřická	
	Štajner Petr	G P. 9, Litoměřická	

C	Gabriel Petr	G P. 2, W. Piecka	M
	Hůrka Tomáš	G P. 8, Libeň	
	Bartoň Martin	G P. 2, W. Piecka	M
	Král Filip	G P. 2, W. Piecka	M
	Hůlek Tomáš	G P. 2, W. Piecka	M
	Hnát Jiří	G P. 2, W. Piecka	M
	Karjagin Vladimír	G P. 2, W. Piecka	M
	Bočková Lenka	G P. 3, Sladkovského	
	Vašek Jiří	G P. 2, W. Piecka	M
	Klíma Martin	G P. 2, Botičská	
	Novotný Martin	G P. 9, Litoměřická	
	Barna Michal	G P. 2, W. Piecka	M
D	Pivec Alan	SPŠ spoj. Panská	
	Maxera David	G P. 1, Hellichova	
	Machek Petr	G P. 2, W. Piecka	M
	Mrkvička Jiří	SPŠE Příkopy	
	Matras Pavel	G P. 5, Na Zatlance	
	Rosa Jan	G P. 4, Na vítězné pláni	
	Procházka Filip	G P. 2, W. Piecka	M
	Plechšmíd Miroslav	G P. 2, W. Piecka	M
	Pšeidl Pavel	G P. 2, W. Piecka	M
	Grohmann Jakub	G P. 5, Na Zatlance	

Středočeský kraj

A	Votava Petr	G Kolín	
	Turinský Milan	G Brandýs n. L.	
	Lupínek Vítězslav	G Český Brod	
B	Al-Dabagh Semír	G Říčany	
	Herčík Michal	G Mladá Boleslav	
	Fišer Radek	G Rakovník	
	Damborský Václav	G Vlašim	
	Malík Michal	SPŠ Kutná Hora	
	Poncar Radek	G Beroun	
	Al-Dabagh Lumír	G Říčany	
	Jeřábek Pavel	G Poděbrady	
	Vejdělek Jiří	G Brandýs n. L.	

C	Rosický Tomáš	G Kutná Hora
	Langer Jaroslav	G Příbram
	Šimůnek Josef	SPŠ Kutná Hora
	Panák Jiří	G Příbram
	Pernet Pavel	G Mladá Boleslav
	Chmel Karel	G Benešov
	Masopust Roman	G Kutná Hora
	Adamec Hynek	G Poděbrady
	Fiala Tomáš	G Vlašim
D	Foller Antonín	SPŠ Kutná Hora
	Kolín Petr	G Mladá Boleslav
	Pácal Luboš	G Poděbrady
	Tezaur Radek	G Vlašim
	Zátopek Pavel	G Mladá Boleslav
	Křivohlavý Petr	SPŠ Kutná Hora
	Chmurný Ivan	G Vlašim
	Holý Jiří	G Příbram
	Kobsa Radek	G Rakovník
	Korejtko Martin	SPŠ Kutná Hora
	Malinský Jan	G Kralupy

Jihočeský kraj

A	Hucek Stanislav	SPŠS a E Č. Budějovice	MF
	Šindelářová Štěpánka	G Č. Budějovice, Jírovčova	
	Plesník Václav	G Pelhřimov	
	Malad Martin	SPŠE Písek	
B	Jaroš Petr	G Pelhřimov	MF
	Benda Stanislav	G K. Šatala, Č. Budějovice	
	Beránek Aleš	G Tábor	
	Novotný Miloš	SPŠE Písek	
	Urban Daniel	G Tábor	
	Šíma Martin	G Tábor	MF
	Štech Milan	G K. Šatala, Č. Budějovice	
	Beneda Pavel	SPŠS a E Č. Budějovice	
	Kočovský Jaroslav	G Tábor	
	Mareš Josef	G Tábor	

C	Otta Jiří	G Pelhřimov	
	Veselý Jiří	G Strakonice	
	Zapletal Jindřich	G Tábor	
	Kropš Stanislav	G Strakonice	
	Benda Luděk	G Písek	
	Koutník Marcel	G Písek	
	Zítek Martin	G Milevsko	
	Klíma Filip	G Č. Budějovice, Jírovčova	MF
	Kostohryz Jakub	G Č. Budějovice, Jírovčova	MF
	Ondřichová Zuzana	G K. Šatava, Č. Budějovice	MF
D	Sporek Aleš	G Pelhřimov	
	Urban Daniel	G K. Šatava, Č. Budějovice	MF
	Král Josef	G K. Šatava, Č. Budějovice	MF
	Žahourek Jaroslav	G Třeboň	
	Humpál Michal	G K. Šatava, Č. Budějovice	MF
	Matějka David	G Strakonice	
	Černý Richard	G Tábor	
	Brus Jaroslav	G Jindřichův Hradec	
	Krynický Pavel	G Strakonice	
	Šesták Jindřich	G Tábor	
	Maleček František	G Humpolec	
	Příbyl Vladimír	G Jindřichův Hradec	
	Švanda Jan	SPŠE Písek	

Západočeský kraj

A	Boček Jan	2. G Plzeň	
	Nová Šárka	G Karlovy Vary	MF
	Brendl Tomáš	G Karlovy Vary	MF
	Hanyk Ladislav	G Karlovy Vary	MF
	Čihák Radomír	G Rokycany	
	Urbanec Herbert	G Karlovy Vary	MF
	Vávra Pavel	G Klatovy	MF
	Zahradník Zbyněk	1. G Plzeň	
B	Pittner Jiří	1. G Plzeň	
	Konrádová Iveta	G Klatovy	MF

	Kovář Jindřich	G Cheb	
	Stradiot Tomáš	G Ostrov n. O.	
	Wittner Michal	G Karlovy Vary	MF
	Kohout Václav	2. G Plzeň	
	Kšír Richard	G Karlovy Vary	MF
	Trojan Petr	3. G Plzeň	
	Yaghob Jakub	1. G Plzeň	
	Osoba Radovan	2. G Plzeň	
	Chval Josef	2. G Plzeň	
	Maříková Martina	3. G Plzeň	
	Peleška Radek	G Karlovy Vary	MF
C	Petrák Milan	G Mariánské Lázně	
	Fleischhansová Věra	1. G Plzeň	
	Briknarová Klára	3. G Plzeň	
	Hosnedl Martin	1. G Plzeň	
	Nýč Pavel	G Tachov	
	Šmíd Jiří	G Ostrov n. O.	
	Kozel Petr	G Karlovy Vary	MF
	Páník Tomáš	2. G Plzeň	
	Herciková Pavla	1. G Plzeň	
	Jelínková Václava	G Sušice	
	Racek Luboš	G Karlovy Vary	MF
D	Georgiev Lukáš	1. G Plzeň	M
	Grasl František	G Klatovy	MF
	Jiroušek Petr	SPŠ dopr. Plzeň	
	Káňa Luboš	G Karlovy Vary	MF
	Bladský Petr	G Cheb	
	Horváth Martin	G Cheb	
	Lukš Ivo	G Ostrov n. O.	
	Baierl Tomáš	G Sušice	
	Müller Martin	1. G Plzeň	M
	Martincová Jana	G Cheb	

Severočeský kraj

A	Salov Herbert	G Rumburk	
	Krejčí Michal	G Ústí n. L.	MF

	Krtouš Pavel	G Liberec	MF
	Chroustovský Jiří	G Rumburk	
	Deksteinová Kateřina	G Děčín	
	Táborská Eva	G Děčín	
B	Novák Pavel	G Děčín	
	Zámečník Karel	G Teplice	
	Pánek Libor	SPŠE Liberec	
	Janus Michal	G Tanvald	
	Oltová Ivana	G Děčín	
C	Sedláček Petr	G Roudnice	
	Volejník Libor	G Ústí n. L.	MF
	Šedivý Martin	G Děčín	
	Láznická Mirka	G Teplice	MF
	Finbinger Jan	G Ústí n. L.	MF
	Šuta Miroslav	G Chomutov	
	Špillar Václav	G Podbořany	
	Pavézová Petra	G Roudnice	
	Trubnyj Radek	G Roudnice	
	Hubač Martin	G Teplice	MF
D	Svidoň David	G Liberec	MF
	Šmída Tomáš	G Liberec	MF
	Krejčí Jaromír	G Liberec	MF
	Orálek David	G Teplice	MF
	Král David	G Ústí n. L.	MF
	Richter Vladimír	G Liberec	MF
	Ranšová Zuzana	SPŠE Liberec	
	Rybka Martin	G Liberec	MF
	Trnka Jaroslav	G Liberec	MF
	Krejčík Dalibor	G Liberec	MF
	Budai Petr	SPŠE Liberec	
	Šimon Jindřich	G Rumburk	
	Baloun Martin	G Děčín	

Východočeský kraj

A	Pícek Ivan	G Hradec Král., Šimkova ul.	MF
	Hubeňák Jiří	G Hradec Král., J. K. Tyla	MF

	Kopf Tomáš	SPŠCh Pardubice	
	Sekyrová Petra	G Hradec Král., Šimkova ul.	MF
	Seidl Libor	SPŠE Pardubice	
	Strmiska Čestmír	SPŠE Pardubice	
	Novák Jiří	G Hradec Král., J. K. Tyla	MF
	Langr Jiří	G Ústí n. O.	
	Hloušek Karel	SPŠE Pardubice	
	Karhart Vojtěch	G Hradec Král., J. K. Tyla	MF
B	Bouček Jiří	G Dobruška	
	Dvořák Luboš	G Pardubice	MF
	Hlava Jaroslav	G Semily	
	Formanová Nataša	G Rychnov n. K.	
	Špelda Michal	G Dobruška	
	Vrba Martin	G Pardubice	MF
	Chamrová Jana	G Pardubice	MF
	Šimek Ivan	G Pardubice	MF
	Blažej Michal	G Trutnov	
	Vítek Petr	G Nový Bydžov	
C	Richterek Lukáš	G Rychnov n. K.	
	Werner Tomáš	G Trutnov	
	Jelínek Petr	G Pardubice	MF
	Ježková Jana	G Hradec Král., Šimkova	MF
	Vlasák Petr	G Hradec Král., J. K. Tyla	MF
	Metelka Pavel	G Hradec Král., J. K. Tyla	MF
	Emr Petr	G Pardubice	MF
	Jiroušek Luděk	G Hradec Král., J. K. Tyla	MF
	Mynařík Jiří	G Pardubice	MF
	Kalivodová Božena	G Litomyšl	
	Majerech Vladan	G Pardubice	MF
	Klopal Tomáš	G Pardubice	MF
	Horák Martin	G Hradec Král., J. K. Tyla	MF
	Melichar Josef	G Hradec Král., J. K. Tyla	MF
D	Nývlt Miroslav	G Trutnov	
	Kábrt Libor	G Chrudim	
	Levínský René	G Hradec Král., J. K. Tyla	M
	Kousal Petr	G Hradec Král., J. K. Tyla	M

Suchánek Martin	G Trutnov	
Vomáčka Vladimír	G Hradec Král., Šimkova	MF
Krbec Jan	G Jičín	
Doležal Tomáš	G Hradec Král., J. K. Tyla	M
Beneš Miroslav	G Hradec Král., J. K. Tyla	M
Martinčík Petr	G Rychnov n. K.	

Jihomoravský kraj

A	Siegl Roman	G Brno, Slovanské nám.	
	Mayer Petr	G Brno, Lerchova	MF
	Šustek Milan	G Uherský Brod	
	Coufal Svatoš	G Blansko	
	Gromus Pavel	G Prostějov	
	Pail Josef	G Žďár n. S.	
B	Peksa Jaroslav	G Jihlava	
	Adamec Radek	G Kroměříž	
	Šupka Tomáš	G Uherské Hradiště	
	Černej Radim	G Tišnov	
	Grünwald Jiří	G Telč	
	Kvapilík Martin	G Kroměříž	
	Běluša Dan	G Brno, Koněvova	MF
	Dokulilová Silvie	G Brno, kpt. Jaroše	MF
	Nejedlý Jiří	G Třebíč	
	Zemánek Pavel	G Kroměříž	
C	Seda Richard	G Blansko	
	Hora Jaroslav	G Brno, kpt. Jaroše	MF
	Chocholatý Karel	G Uh. Hradiště	
	Munzar Patrik	G Brno, kpt. Jaroše	MF
	Zapletal Karel	G Kroměříž	
	Toman David	G Brno, kpt. Jaroše	MF
	Klein František	G Brno, Koněvova	MF
	Zelinka Jiří	G Uh. Hradiště	
	Komprš Tomáš	G Tišnov	
	Peňázová Hana	G Brno, kpt. Jaroše	MF
	Tomčík Radek	G Brno, Koněvova	program.

D	Václavek Pavel	G Prostějov	
	Černocký Jan	G Brno, Koněvova	program.
	Kryštof Pavel	SPŠE Brno, Leninova	
	Smolík Jiří	G Žďár n. S.	
	Konvalina Eduard	G Brno, Elgartova	
	Kříž Petr	G Blansko	
	Zeida Jindřich	G Jihlava	
	Drmola Pavel	G Prostějov	
	Kukosa Tomáš	G Brno, kpt. Jaroše	MF
	Vondráček Martin	G Brno, kpt. Jaroše	M

Severomoravský kraj

A	Dědic Přemysl	G Bílovec	M
	Hrivňák Jiří	G Ostrava, Šmeralova	
	Skotnica Marek	G Rožnov p. Radhoštěm	
	Nesrsta Aleš	G Orlová	MF
	Halata Alan	G Ostrava-Zábřeh	
	Adámek Petr	G Bílovec	M
	Jašek Vladimír	SPŠE Olomouc	
	Sládeček Ladislav	G Bílovec	M
	Kantor Roman	G Bílovec	M
	Podgrabinský Radan	G Olomouc-Hejčín	
B	Pořízka Aleš	G Bílovec	M
	Skalický Tomáš	G Olomouc, Jiřího z Poděbrad	MF
	Červenka Jaromír	SPŠE Frenštát p. Radhoštěm	
	Kordula Vladimír	G Bílovec	M
	Pavlík Luděk	G Přerov	
	Ježík Waldemar	G Karviná	MF
	Novotný Marek	G Hranice	
	Seleši Pavel	G Bílovec	M
	Blatný Martin	G Bílovec	M
	Koksa Vít	G Přerov	
C	Žák Josef	G Bílovec	M
	Kuča Radan	G Bílovec	M
	Madea Daniel	G Bílovec	M

	Šejnoha Radek	G Valašské Meziříčí	
	Čermáková Kateřina	G Bílovec	M
	Hadwiger Jiří	G Přerov	
	Slézka Vojtěch	G Bílovec	M
	Ling Milan	G Bílovec	M
	Novotný Tomáš	G Frýdek-Místek	MF
	Velička Lukáš	G Frýdek-Místek	MF
D	Zatloukal Jiří	G Bílovec	M
	Blaha Ondřej	G Bílovec	M
	Dočkal Jan	G Přerov	
	Měch Radomír	G Bílovec	M
	Owczarzy Richard	G Frýdlant n. Ostravicí	
	Horčíčka Petr	G Přerov	
	Stiller Vladimír	G Bílovec	M
	Večerek Jaromír	G Bílovec	M
	Nowak Roman	SPŠS Karviná	
	Macek Karel	SPŠE Rožnov p. Radhoštěm	

Bratislava

A	Šefčík Ján	G B., A. Markuša	M
	Volek Peter	G B., Metodova	
	Foltín Martin	G B., A. Markuša	M
	Leščenko Martin	G B., J. Hronca	MF 3. r.
	Spurný Dušan	G B., J. Hronca	MF 3. r.
	Svoboda Roman	B G., I. Horvátha	
	Klein Juraj	G B., J. Hronca	MF
	Meduna Stanislav	G B., J. Hronca	MF 3. r.
	Nürnberg Róbert	G B., J. Hronca	MF
	Volný Drahošlav	G B., Bilíkova	
B	Spurný Dušan	G B., J. Hronca	MF
	Meduna Stanislav	G B., J. Hronca	MF
	Bedlek Miroslav	G B., A. Markuša	M
	Vargovič Ivan	G B., A. Markuša	M
	Potisk Vladimír	G B., J. Hronca	MF
	Leščenko Richard	G B., J. Hronca	MF

	Vojtková Anna	G B., J. Hronca	MF
	Šáner Stanislav	G B., J. Hronca	MF
	Synek Ivan	G B., J. Hronca	MF
	Dvončová Anna	G B., A. Markuša	M
C	Nyilas Mário	G B., J. Hronca	MF
	Koncová Jana	G B., J. Hronca	MF
	Šimo Ján	G B., J. Hronca	MF
	Ištók Richard	G B., A. Markuša	M
	Veselý Vladimír	G B., J. Hronca	MF
	Škvarka Matúš	G B., J. Hronca	MF
	Pilňan Branislav	G B., L. Novomeského	
	Pišútová Katarína	G B., J. Hronca	MF
	Magdolen Ivan	G B., J. Hronca	MF
	Zajacová Jana	G B., Vazovova	
	Budinský Ján	G B., A. Markuša	M
	Chalupka Milan	G B., A. Markuša	M
D	Beluš Martin	G B., J. Hronca	MF
	Gvozďjak Pavel	G B., A. Markuša	M
	Szelle Róbert	G B., Dunajská	
	Latika Csaba	G B., Dunajská	
	Flassik Marian	G B., J. Hronca	MF
	Derka Radoslav	G B., J. Hronca	MF
	Oravský Juraj	G B., J. Hronca	MF
	Đurkovič Marko	G B., Vazovova	
	Hambáľková Romana	G B., J. Hronca	MF
	Strasser Daniel	G B., J. Hronca	MF
	Fatka Helmut	G B., J. Hronca	MF
	Bujdák Martin	G B., A. Markuša	M
	Hrivnák Karol	G B., A. Markuša	M
	Bóna Marek	G B., A. Markuša	M
	Foltín Viktor	G B., A. Markuša	M
	Beták Juraj	G B., Metodova	
	Blažíček Milan	SPŠE B., Zochova	

Západoslovenský kraj

A	Gašparín Michal	G Nové Mesto n. V.	
	Áč Peter	G Piešťany	
	Spátay Lotár	G Komárno	
	Kolník Pavol	G Nové Mesto n. V.	2.r.
	Berta Mikuláš	SPŠE Nové Zámky	
B	Gondár Miloš	G Nové Mesto n. V.	
	Síkela Róbert	G Levice	
	Kolník Pavol	G Nové Mesto n. V.	2.r.
	Horváth Peter	G Levice	
	Derek Géza	G Želiezovce	
	Hevesi Erik	G Levice	
	Kozár Peter	G Nitra, Párovce	MF
	Müller Peter	G Komárno	
	Straka Milan	G Nové Mesto n. V.	
	Czékus András	G Komárno	
	Kažimír Miroslav	G Nitra, Párovce	MF
	Mužila Peter	G Nitra, Párovce	MF
C	Rovenský Pavol	G Piešťany	
	Vásznyiiová Ildikó	G Komárno	
	Kolník Pavol	G Nové Mesto n. V.	
	Répás Norbert	G Komárno	
	Gliviak Jozef	G Trnava	
	Škultéty Rastislav	SPŠStr. Trnava	
	Dürösi Cyril	G Šuňany	
	Göbölösová Eva	G Komárno	
	Hevesiová Anikó	G Komárno	
	Ipóth Szilárd	G Komárno	
	Író Gabriel	G Šamorín	
	Štepka Martin	G Piešťany	
	Pietriková Monika	G Piešťany	
D	Hladký Branislav	G Trenčín	
	Komorný Miroslav	G Malacky	
	Sedlár Martin	G Trnava	
	Horanský Pavol	G Piešťany	

Bakalár Štefan	G Topoľčany
Fabián Ján	G Trenčín
Feruzsová Zlatica	G Komárno
Hamerlík Štefan	G Senica
Kis Patik Katalin	G Komárno
Bútora Jozef	G Trenčín
Szücs Árpád	G Dunajská Streda
Petrovics Vendelin	SPŠS Komárno

Stredoslovenský kraj

A	Nemec Richard	G Banská Bystrica, Tajovského	MF
	Menšík Miroslav	G Banská Bystrica, Tajovského	MF
	Šmihla Marek	G Banská Bystrica, Tajovského	MF
	Vestenický Peter	G Vrútky	
	Melicherčík Igor	G Banská Bystrica, Tajovského	MF 3.r.
	Odrobina Igor	G Žilina, Veľká Okružná	M
	Hano Alexander	G Banská Bystrica, Tajovského	MF
	Sebechlebský Štefan	G Turzovka	
	Turac Marián	G Žilina, Veľká Okružná	M
	Rizman Radovan	G Vrútky	
B	Radler Vladimír	G Zvolen	
	Kubala Milan	G Žilina, Veľká Okružná	M
	Uher Peter	G Prievidza	MF
	Podolinský Peter	G Banská Bystrica, Tajovského	MF
	Melicherčík Igor	G Banská Bystrica, Tajovského	MF
	Berkeš Ivan	G Zvolen	
	Štanga Igor	G Prievidza	MF
	Vasilko Stanislav	G Banská Bystrica, Tajovského	MF
	Vančo Pavol	G Lučenec	
	Černianský Miroslav	G Turčianské Teplice	
	Leštáková Gabriela	G Banská Bystrica, ul. SNP	
C	Hanes Dušan	G Prievidza	MF
	Kulla Róbert	G Žilina, Wolkerova	MF
	Štrba Fridrich	G Žilina, Wolkerova	MF

	Škvarček Jozef	G Ružomberok	
	Harvanka Miroslav	G Banská Bystrica, Tajovského	MF
	Hlavatý Pavol	G vojenské, Banská Bystrica	
	Drenka Ľudovít	G Banská Bystrica, Tajovského	MF
	Krajčoviech Richard	G Považská Bystrica	
	Pavliák Miroslav	G Dubnica n. Váhom	
	Bašo Ľubomír	G Prievidza	MF
	Brťáňová Katarína	G Zvolen	
D	Banský Ján	G Banská Bystrica, Tajovského	MF
	Tomášek Peter	G Martin	
	Grega Milan	G Považská Bystrica	
	Šošovička Vladimír	G Žilina, Veľká Okružná	M
	Gemela Jozef	G Prievidza	MF
	Sojka Ľuboslav	G Rimavská Sobota	
	Plemeňová Martina	G Banská Bystrica, Tajovského	MF
	Leinwather Raimund	SPŠStr. Ružomberok	
	Porubčan Róbert	G Dubnica n. Váhom	

Východoslovenský kraj

A	Lúžný Ján	SPŠE Prešov	
	Matuševský Peter	G Bardejov	
	Matta Peter	G Michalovce	3. r.
	Berešík Peter	SPŠE Prešov	
B	Matta Peter	G Michalovce	
	Hašík Vladimír	SPŠE Košice	
	Slanina Alexander	G Košice, Šmeralova	M
	Matuševský Peter	G Bardejov	
	Katreniak Peter	G Košice, Šrobárova	MF
	Szabari Alexander	G Košice, Šmeralova	M
	Bilak Igor	G Prešov, Konštantínova	MF
	Hanus Miloš	G Košice, Šrobárova	MF
	Seruga Miroslav	G Prešov, Konštantínova	MF
	Kintzler Oskar	G Poprad, Zápotockého	
C	Soták Roman	G Košice, Šmeralova	M
	Kniš Dalibor	G Košice, Šmeralova	M

	Hámorský Jozef	G Košice, Šrobárova	MF
	Soroková Daniela	G Košice, Šmeralova	M
	Kačír Miroslav	G Košice, Šrobárova	MF
	Drosc Mario	G Michalovce	
	Sklenár Peter	G Košice, Šmeralova	M
	Nemčík Michal	G Poprad	
	Senderák Rastislav	G Prešov, Konštantínova	MF
	Urban Michal	G Prešov, Konštantínova	MF
D	Marko Peter	G Košice, Šrobárova	MF
	Chalupka Marek	G Košice, Šrobárova	MF
	Maraček Richard	G Košice, Šrobárova	MF
	Bodnár Jozef	SPŠS Košice	
	Schreiber Pavol	G Krompachy	
	Katreniakova Oľga	G Košice, Šrobárova	MF
	Korba Vladimír	SPŠE Prešov	
	Matějka Petr	G Košice, Šmeralova	M
	Hajman David	G Košice, Kováčska	
	Melicher Pavol	SPŠE Prešov	
	Rajczy Csaba	SPŠS Košice	

B. TŘETÍ KOLO FO KATEGORIE A

Třetí kolo FO kategorie A proběhlo ve dnech 28. – 31. března 1985 v České Lípě.

Celostátní kolo bylo organizačně dobře připraveno KV FO Severočeského kraje ve spolupráci s kabinetem fyziky KPŮ Ústí nad Labem. Účast státních orgánů a zástupců hospodářských organizací přispěla k další popularizaci FO v široké veřejnosti a současně byla i uznáním obětavé práce stovek dobrovolných pracovníků v FO.

Pracovní náplň celostátního kola byla vyvážena exkurzní činností, poznáváním severních Čech i jejich současného hospodářského rozvoje.

Při soutěži řešili účastníci 4 teoretické úlohy a jednu úlohu laboratorní.

Účastníci celostátního kola kladně oceňovali přínos FO

pro rozvoj jejich myšlení, vědomostí a dovedností i pro ovlivnění volby budoucího povolání. Za všechny účastníky soutěže to vyjádřil Michal Krejčí, žák 4. ročníku gymnázia v Ústí nad Labem, slovy:

»Jsme šťastni, že jsme se stali úspěšnými řešiteli krajských kol FO a na základě dosažených výsledků se nám podařilo postoupit do ústředního kola FO kategorie A. Na tomto místě bych chtěl poděkovat všem profesorům matematiky a fyziky, kteří nás během našeho studia trpělivě seznamovali se všemi základními otázkami moderní fyziky a matematiky.

Jménem všech zúčastněných slibuji, že stejně jako v předchozích kolech i zde budeme soutěžit čestně, se snahou o dosažení co nejlepších výsledků. Chceme dokázat, že naše doposud získané vědomosti z fyziky jsou v souladu s potřebami a významem této vědní disciplíny v naší společnosti.

Jsme si vědomi, že naše znalosti jsou pouhým základem k dalšímu specializovanému studiu fyziky a k jeho pozdějšímu uplatnění v praxi. Plně chápeme význam fyziky při řešení problémů vědeckotechnického rozvoje naší socialistické společnosti. Dnešní úroveň vědy a techniky ve světě jasně dokazuje, že k jejímu rozvoji již nestačí průměrné znalosti. Proto chceme usilovat o získání nejvyššího vzdělání spojeného s vlastní pracovitostí a pílí. Věříme, že poznatky získané v přípravě i v samotném průběhu ústředního kola FO přispějí k rozšíření našich vědomostí a že je při svém dalším studiu i na svých pracovištích budeme moci využít k řešení problémů našeho technického rozvoje.«

Tolik z vystoupení účastníka ústředního kola FO. Jsou dokladem toho, že FO přispívá nejen k rozvoji odborných znalostí, ale má výrazný vliv na formování volních a charakterových vlastností mladého člověka.

Do ústředního kola FO kategorie A bylo pozváno celkem 81 účastníků ze všech krajů, 65 z nich se stalo úspěšnými řešiteli soutěže. Přehled úspěšnosti řešitelů z jednotlivých krajů obsahuje tabulka 4.

T 4

Přehled úspěšnosti řešitelů 3. kola FO kategorie A podle krajů:

Kraj	Pozváno	Účastnilo se	Vítězové	Úspěšní řešitelé
Praha	11	11	4	5
StřČ	2	2	—	2
JČ	2	2	—	2
ZČ	5	5	—	5
SČ	6	6	1	4
VČ	12	12	2	4
JM	6	6	3	3
SM	12	12	1	8
Brat.	10	10	4	3
ZS	4	4	2	2
StřS	8	8	2	5
VS	3	3	1	2
Celkem	81	81	20	45

V přehledu vítězů a úspěšných řešitelů je uváděn celkový počet dosažených bodů při řešení 4 teoretických úloh a 1 úlohy laboratorní bez členění na dosažené výsledky v jednotlivých úlohách. Celkový počet dosažitelných bodů byl 60.

a) Vítězové celostátního kola FO kategorie A

1. Gašparín Michal	G Nové Mesto n. V.	49,75 b
2. Myslivec Ivo	G Praha, Budějovická	49,0 b
3.—4. Meduna Stanislav	G Brat., J. Hronca	49,0 b 3. r. MF
Kopf Tomáš	SPŠCH Pardubice	49,0 b
5. Lůžný Ján	SPŠE Prešov	48,5 b
6. Adámek Petr	G Bílovec	47,25 b M
7. Krtouš Pavel	G Liberec	46,5 b MF

8. Spurný Dušan	G Brat., J. Hronca	42,75 b 3. r. MF
9. Coufal Svatoš	G Blansko	42,75 b
10. Pícek Ivan	G Hradec Král., Šimkova	42,25 b MF
11. Loucký Petr	G Praha, W. Piecka	41,75 b M
12. Kolník Pavol	G Nové Mesto n. V.	41,25 b 2. r.
13. Menšík Miroslav	G Banská Bystrica	41,25 b MF
14. Siegl Roman	G Brno, Slovanské nám.	40,75 b
15. Španěl Patrik	G Praha, W. Piecka	40,75 b M
16. Vestenický Peter	G Vrútky	40,5 b
17. Kvítek Zdeněk	G Praha, Parlérova	40,25 b
18. Foltín Martin	G Brat., A. Markuša	39,5 b M
19. Šustek Milan	G Uherský Brod	39,5 b
20. Volek Peter	G Brat., Metodova	39,25 b

b) Úspěšní řešitelé celostátního kola FO kategorie A

21. Nemec Richard	G Banská Bystrica	39,0 b MF
22. Sládeček Ladislav	G Bílovec	39,0 b M
23. Dědic Přemysl	G Bílovec	38,25 b M
24. Gromus Pavel	G Prostějov	38,0 b
25. Hubeňák Jiří	G Hradec Král., J. K. Tyla	37,5 b MF
26. Skotnica Marek	G Rožnov p. Radh.	37,0 b
27. Svoboda Roman	G Brat., J. Horvátha	36,75 b
28. Šlesinger Jaromír	G Praha, Nad Štolou	36,5 b
29. — 30. Matta Peter	G Michalovce	36,5 b 3. r.
Odrobina Igor	G Žilina	36,5 b
31. Salov Herbert	G Rumburk	36,0 b
32. Hanyk Ladislav	G Karlovy Vary	36,0 b MF
33. Sebechlebský Štefan	G Turzovka	35,75 b
34. Šmihla Marek	G Banská Bystrica	35,0 b MF
35. Kantor Roman	G Bílovec	35,0 b M
36. Sosík Petr	G Bílovec	34,75 b
37. Krejčí Michal	G Ústí n. L.	34,5 b
38. Pail Josef	G Žďár n. Sáz.	34,25 b
39. Mlynář Jan	G Praha, Na Pražačce	34,25 b

40. Tůma Roman	G Praha, W. Piecka	34,0 b M
41. Čihák Radomír	G Rokycany	34,0 b
42. Šefčík Ján	G Brat., A. Markuša	33,5 b M
43. Boček Jan	G Plzeň, Pionýrů	33,5 b
44. Sekyrová Petra	G Hradec Král., Šimkova	33,0 b MF
45. Halata Alan	G Ostrava-Záhřeb	33,0 b
46. Chroustovský Jiří	G Rumburk	32,5 b
47. Hucek Stanislav	SPŠ Č. Budějovice, Dukelská	31,5 b
48. Matuševský Peter	G Bardejov	31,25 b 3. r.
49. Šindelářová Štěpánka	G Č. Budějovice, Jírovcova	31,25 b
50. Turinský Milan	G Brandýs n. L.	30,5 b
51. Spátay Lotár	G Komárno	30,0 b
52. Áč Peter	G Piešťany	29,5 b
53. Melicherčík Igor	G Banská Bystrica	29,25 b 3. r. MF
54. Votava Petr	G Kolín	28,5 b
55. Nová Šárka	G Karlovy Vary	28,0 b MF
56. Brendl Tomáš	G Karlovy Vary	27,0 b MF
57. Nesrsta Aleš	G Orlová	26,75 b MF
58. Mayer Petr	G Brno, Lerchova	26,5 b MF
59. Jarešová Miroslava	SPŠ Stroj. Chrudim	26,25 b
60. Votava Ondřej	G Praha, Na Pražačce	26,0 b
61. Jašek Vladimír	SPŠE Olomouc	25,0 b
62. Denksteinová Kateřina	G Děčín	24,75 b
63. Fexa Petr	G Praha, Sladkovského	24,25 b
65. Volný Drahoslav	G Brat., Bilíkova	24,25 b
Hloušek Karel	SPŠE Pardubice	24,25 b

Na závěr soutěže bylo vysloveno poděkování pracovníkům KV FO, KPÚ a jejich dalším spolupracovníkům za úspěšné zabezpečení průběhu soutěže i za seznámení se současným rozvojem Severočeského kraje.

C. KATEGORIE E

První kolo FO kategorie E probíhalo ve dvou částech od září 1984 do ledna 1985. Úlohy 1. kola řešili žáci doma. Druhé kolo se uskutečnilo v okresních městech nebo v dalších určených střediscích ve středu 13. 2. 1985. Organizačně jej zabezpečily OV FO spolu s referenty na školách, třetí kolo FO pro kategorii E se uskutečnilo 4. května 1985 v krajských městech nebo určených střediscích a jeho organizaci zabezpečovaly KV FO ve spolupráci s OV FO.

Přehled výsledků v jednotlivých kolech a účast škol v soutěži je uvedeno v následujících tabulkách 5 a 6.

T 5

Počet ZŠ, které se zúčastnily XXVI. ročníku FO v kategorii E

Kraj	Počet ZŠ v kraji	1. kola se zúčastnilo		2. kola se zúčastnilo		3. kola se zúčastnilo	
		počet	%	počet	%	počet	%
Praha	208	190	90	182	87	32	15
StřČ	274	187	69	174	64	42	15
JČ	184	145	75	145	75	47	26
ZČ	215	179	83	149	69	40	19
SČ	292	218	75	170	59	36	12
VČ	319	236	74	208	65	37	12
JM	459	349	76	305	67	41	9
SM	471	402	86	346	74	49	10
Brat.	69	69	100	68	98	30	43
ZS	482 _{a)}	351 _{b)}	73	340 _{c)}	70	41	8
StřS	409 _{a)}	302 _{c)}	74	267 _{f)}	65	35 _{g)}	9
VS	363	287	79	238	65	43	12
Celkem	3 745	2 915	78	2 292	61	473	13

ZS: a) z toho 5 maďarských

b) z toho 3 maďarské

c) z toho 2 maďarské

StřS: d) z toho 91 maďarských

e) z toho 72 maďarských

f) z toho 69 maďarských

g) z toho 8 maďarských

T 6
Počet soutěžících žáků a počet úspěšných řešitelů v 1., 2. a 3. kole XXVI. ročníku FO kategorie E

Kraj	1. kolo		2. kolo		3. kolo	
	C	Ú	C	Ú	C	Ú
Praha	1 358	889	583	429	46	41
StřČ	1 300	697	511	336	58	13
JČ	907	523	394	258	58	48
ZČ	1 249	590	389	243	45	29
SČ	1 685	736	520	362	46	41
VČ	1 518	818	592	366	44	38
JM	2 544	1 418	946	611	47	43
SM	3 726	1 812	935	572	61	53
Brat.	557	412	396	248	49	45
ZS	1 926	1 052	914	420	45	37
StřS	1 680	927	775	387	38	30
VS	2 357	1 353	641	382	50	40
Celkem % úsp.	20 807	11 227 54,0	7 596	4 614 60,7	587	458 78,0

C – celkový počet soutěžících

Ú – počet úspěšných řešitelů

Ve třetím kole FO kategorie E se v XXVI. ročníku stali vítězi jednotlivých krajských kol tito žáci:

(V případě, že počet vítězů je v krajském kole vzhledem k rovnosti dosažených bodů vyšší než deset, jsou uváděni všichni vítězové krajského kola.)

Praha

Franc Marcel	ZŠ Praha 4, Horáčkova
Horský Petr	ZŠ Praha 1, Uhelny trh
Daňková Jana	ZŠ Praha 4, Mikulova
Jerhot Jaroslav	ZŠ Praha 4, Na planině
Kopinec Jan	ZŠ Praha 6, Na dlouhém lánu
Brož Petr	ZŠ Praha 4, Na planině
Drlik Marcel	ZŠ Praha 8, Burešova
Kocman Miloš	ZŠ Praha 3, Jiřího nám.
Procházka Martin	ZŠ Praha 4, Na planině
Blažek Jiří	ZŠ Praha 4, Horáčkova
Duffek Karel	ZŠ Praha 3, Lupáčova
Verner Jan	ZŠ Praha 3, K lučinám

Středočeský kraj

Holub Ilja	ZŠ Davle
Novotný Radek	6. ZŠ Mladá Boleslav
Vaněk Dušan	4. ZŠ Kladno
Adámek Petr	2. ZŠ Kolín
Pos Jiří	ZŠ Černošice
Kindl Robert	ZŠ Roztoky
Šimek Libor	ZŠ Kutná Hora
Špinková Milena	ZŠ Cerhenice
Lederer Robert	ZŠ Kralupy
Dusík Michal	6. ZŠ Příbram
Pilner Jaroslav	7. ZŠ Kladno

Jihočeský kraj

Křenek Zdeněk	ZŠ Č. Budějovice, O. Nedbala
Limburský Petr	ZŠ Č. Budějovice, Grünwaldova
Sonnbergerová Jana	ZŠ Č. Budějovice, J. Š. Baara
Zeman Karel	ZŠ Č. Budějovice, Rožnov
Dušek David	ZŠ Dačice, Komenského
Komendová Jana	ZŠ Kaplice, Omlenická
Němcová Jaroslava	ZŠ Dačice, B. Němcové
Netočný Karel	ZŠ Besednice

Pulzová Lenka
Včela Daniel

ZŠ Kaplice, Omlenická
ZŠ Č. Budějovice, Kubatova

Západočeský kraj

Žalman Jan	25. ZŠ Plzeň
Sluka Zdeněk	29. ZŠ Plzeň
Štembera Radek	28. ZŠ Plzeň
Ševčík Petr	ZŠ Klatovy, A. Zápotockého
Kos Šimon	ZŠ Klatovy, Plánická
Novotný Marek	ZŠ Kaznějov
Herejt Pavel	22. ZŠ Plzeň
Štrych Pavel	ZŠ Klatovy, U městského parku
Kögler Martin	ZŠ M. Lázně, Ruská
Urban Ladislav	ZŠ Plasy
Pravda Martin	ZŠ Karlovy Vary - Tuhnice
Smejkal Ladislav	ZŠ Klenčí

Severočeský kraj

Vogl Tomáš	24. ZŠ Ústí n. L.
Eisner Leo	ZŠ Nový Bor, nám. Míru
Kaiser Tomáš	ZŠ Teplice, Buzulucká
Staněk David	ZŠ Teplice, Metelkovo nám.
Žaludová Dagmar	2. ZŠ Žatec
Černý David	ZŠ Libochovice
Gabriel Aleš	6. ZŠ Litoměřice
Papežová Helena	6. ZŠ Litoměřice
Brunclík Martin	9. ZŠ Jablonec
Kopecký Vít	ZŠ Liberec, Lesní
Ondráček Tomáš	ZŠ Liberec, J. Švermy

Východočeský kraj

Hájek Michal	ZŠ Heřmanův Městec
Mrštný Kamil	ZŠ Jablonné n. O.
Dryák Aleš	ZŠ Nový Bydžov, Karlova
Merta Petr	ZŠ Lanškroun
Doczynski Petr	ZŠ Nová Paka, Komenského

Vašata Zbyněk	ZŠ Hradec Král., S. Allende
Weisser Karel	ZŠ Hradec Král., S. Allende
Meduna Jaroslav	ZŠ Choceň
Bártík Hynek	ZŠ Havl. Brod, Wolkerova
Hruška Jan	ZŠ Vrchlabí
Hušek Vít	ZŠ Hradec Král., Zálabí

Jihomoravský kraj

Petrla David	ZŠ Břeclav, Kupkova
Krásenský David	ZŠ Vyškov, Kl. Gottwalda
Mach Jan	ZŠ Uherské Hradiště I
Svoboda Viktor	ZŠ Třebíč, Hanělova
Juřek Michael	ZŠ Boskovice, 9. května
Doffek Jiří	ZŠ Pohořelice
Grančai Pavel	ZŠ Uherské Hradiště I
Tálská Růžena	1. ZŠ Žďár n. Sázavou
Zdražil Petr	ZŠ Hrušovany
Oborná Pavlína	ZŠ Strážnice, M. Kudeříkové

Severomoravský kraj

Kučera Martin	ZŠ Ostrava, Ostrčilova
Šindler David	ZŠ Kopřivnice, Pionýrská
Gilík Jiří	ZŠ Opava, Leninova
Tikal Tomáš	ZŠ Ostrava, Paseky
Večeřa Ivo	ZŠ Karviná, U lesa
Vlach Richard	ZŠ Rožnov p. Radh., Videčská
Vohralík Petr	ZŠ Šumvald
Půček Petr	6. ZŠ Frýdek-Místek
Poláček Radim	ZŠ Ostrava, Fifejdy
Stankuš Tomáš	6. ZŠ Šumperk

Bratislava

Mosný Milan	ZŠ Brat., Tilgnerova
Hýbal Marek	ZŠ Brat., Sokolíkova
Kuminiak František	ZŠ Brat., Bajkalská
Zdražilová Jana	ZŠ Brat., Nevädzová

Chudík Lubomír	ZŠ Brat., Nevädzová
Cisárik Miroslav	ZŠ Brat., Nevädzová
Martišovič Ilja	ZŠ Brat., Košická
Baník Igor	ZŠ Brat., Košická
Macek Maximilián	ZŠ Brat., Nevädzová
Pázmán René	ZŠ Brat., Tilgnerova

Západoslovenský kraj

Zimmer Karol	ZŠ Nitra, Topolová
Berky Róbert	ZŠ Šaľa
Cina Miroslav	ZŠ Nitra-Zobor
Đurdiak Martin	ZŠ Nitra, Topolová
Fekete Ladislav	ZŠ Šamorín
Gyetven Mikuláš	ZŠ Štúrovo
Tóth Martin	ZŠ Piešťany, Holubyho
Novosad Marián	ZŠ Šaľa-Veča
Zverbík Peter	ZŠ Trenčín, Hodžova
Žoffaj Marek	ZŠ Hlohovec, Koperníkova

Středoslovenský kraj

Rayman Gregor	ZŠ Žilina, Hliny VII
Hrabovec Michal	ZŠ Žilina, Hliny VI
Italy Mário	ZŠ Nová Dubnica, Fučíkova
Strapec Mário	ZŠ Dolný Kubín, Kukučínova
Ciklamini Luboš	ZŠ Vrútky, Víťaznej armády
Glavo Milan	ZŠ Liptovský Hrádok, J. Matejovie
Jakubovie Maroš	ZŠ Veľký Krtíš, Leninovo nám.
Korbačka Peter	ZŠ Valaská
Černý Aleš	ZŠ Čierne pri Čadci
Kováčik Roman	ZŠ Čadca, Revolučná

5 FORMY PÉČE O NADANÉ ŽÁKY VE XXVI. ROČNÍKU FO

I když v tomto ročníku byla plánovaná soustředění úspěšných řešitelů okresních kol ovlivněna akcemi k ČSS 85, sna-

žily se KV i OV FO v duchu závěrů konference v Nitře prohloubit péči o rozvoj schopností a dovedností nadaných žáků na základních i středních školách. K tradičním formám péče, jako jsou semináře, konzultace, soustředění a korespondenční školy (korespondenční seminář ÚV FO je hodnocen u zprávy o MFO), byla v tomto ročníku věnována pozornost prohloubení individuální péče o jednotlivé žáky členy KV FO a referenty na školách. Proto došlo k prohloubení práce KV FO i OV FO s referenty na školách za úzké spolupráce s kabinety fyziky KPÚ a OPS.

Výsledkem této činnosti bylo zintenzívnění práce se žáky 7. a 8. ročníku ZŠ i 1. ročníku středních škol. Zvláště na základních školách došlo k obnovení různých fyzikálních soutěží jak ve třídách, tak mezitřídních, jejichž cílem byla příprava žáků na řešení FO v 8. ročníku.

Z významnějších akcí, které jednotlivé KV FO organizovaly pro prohloubení přípravy žáků, případně pro přípravu učitelů fyziky a referentů FO k práci s nadanými žáky, uvádí KV FO především tyto:

Praha

Soustředění 25 řešitelů kategorie C v Jevanech v době od 10. do 15. 6. 1985.

Pro řešitele kategorie E byly uspořádány semináře v jednotlivých obvodech s obsahem: metodika řešení úloh, řešení některých typů úloh.

Ke sjednocení a prohloubení práce s nadanými žáky bylo uskutečněno 1,5denní soustředění členů KV FO a referentů středních škol.

Středočeský kraj

Výběrový seminář pro řešitele nejvyšších kategorií FO organizovaný v Praze ing. Machalickým.

Konzultace a přednášky v 5 střediscích kraje (v každém minimálně 3 přednášky s průměrnou účastí 20 posluchačů).

Jihočeský kraj

Letní škola pro úspěšné řešitele FO a MO v době od 17. do 21. června s účastí:

řešitelé kat. E . . . 23 účastníků,

řešitelé kat. D . . . 21 účastníků,

řešitelé kat. C . . . 20 účastníků,

řešitelé kat. B . . . 24 účastníků.

Krajského korespondenčního semináře se účastnilo 65 soutěžících z 18 škol.

Západočeský kraj

24 přednášek ve střediscích Plzeň, Klatovy, Karlovy Vary pro řešitele kategorií A–D.

Prázdninové soustředění úspěšných řešitelů 2. kol.

Osm přednášek a seminářů pro řešitele kategorie E v Plzni.

Severočeský kraj

Týdenní letní škola v Teplicích pro 60 úspěšných řešitelů FO a MO.

Přednášky a semináře pro řešitele jednotlivých kategorií:

pro kat. A 6 přednášek, celkem 98 účastníků,

pro kat. B 10 přednášek, celkem 116 účastníků,

pro kat. C 11 přednášek, celkem 299 účastníků,

pro kat. D 4 přednášky, celkem 211 účastníků.

Východočeský kraj

Semináře pro řešitele kat. A v měsících prosinci, lednu a únoru, 18 účastníků.

Semináře pro řešitele kategorie B v lednu a únoru, 35 účastníků.

Krajské soustředění řešitelů kategorie D - 30 účastníků.

Jihomoravský kraj

Soustředění úspěšných řešitelů MO a FO z kategorie B a C od 9. do 14. června v Jedovnicích.

Cyklus 7 seminářů a přednášek pro řešitele kategorií A, B, C a D o sobotách od listopadu do února.

Semináře ve spolupráci s KPÚ pro referenty FO na středních školách (v říjnu) a základních školách (v listopadu).

Severomoravský kraj

Besedy a semináře s řešiteli kategorií A, B, a C ve střediscích Ostrava a Olomouc v říjnu a lednu - 228 účastníků.

Soustředění 50 úspěšných řešitelů z kategorie B, C a D spolu s MO v době od 30. 6. do 8. 7.

Soustředění 50 úspěšných řešitelů kategorie E od 10. 7. do 19. 7.

Bratislava

Soustředění 25 úspěšných řešitelů kategorií B, C a D v červnu.

Soustředění 12 úspěšných řešitelů kategorie E v červnu.

Západoslovenský kraj

Pracovní aktiv referentů ze středních škol a předsedů OV FO 23. 10. v Nitře, 110 účastníků.

Zasedání rozšířeného pléna KV FO spojené s odbornou přednáškou 11. 6. v Nitře, 150 účastníků.

Pracovní aktiv předsedů OV FO 15. 4. v Nitře, 15 účastníků.

Seminář referentů FO 20. 4., 60 účastníků.

Soustředění úspěšných řešitelů kategorií A—D v září.

Na středních školách kraje pracovalo 48 kroužků FO s 673 účastníky.

Středoslovenský kraj

Cyklus 3 seminářů pro řešitele kategorií A—D, 120 účastníků.

Krajské soustředění řešitelů B a C, 90 účastníků.

Jednodenní soustředění vybraných řešitelů kategorie A před celostátním kolem, 8 účastníků.

Letní pionýrský tábor mladých fyziků pro 60 vybraných řešitelů FO z kategorie B, C a D, týdenní.

Krajské soustředění řešitelů 3. kola FO kategorie E, týden, 40 účastníků.

Ustavení dvou kroužků individuální péče o řešitele FO (ing. Čáp, ing. Kajst).

Semináře pro učitele fyziky - 40 hodin a pro řešitele - 500 hodin v rámci OV a KV FO.

Krajský korespondenční seminář pro řešitele kategorie D 40 účastníků.

Činnost kroužků FO na středních školách.

Popularizace FO a výsledků v krajském deníku Smer a v rozhlase.

Východoslovenský kraj

Týdenní soustředění řešitelů kategorií A, B, C a D.

Korespondenční seminář pro řešitele z kategorií B a C.

Individuální příprava vybraných řešitelů 3. kola FO kategorie A.

Podklady byly získány ze zpráv jednotlivých KV FO.

6 ZHODNOCENÍ XXVI. ROČNÍKU FO

XXVI. ročník FO zahájil další etapu v prohlubování péče o nadané a talentované žáky ve fyzice v souladu s dlouhodobými potřebami výchovy odborníků v období uskutečňování vědeckotechnického rozvoje. Přes ztíženější podmínky v období nácviu a průběhu spartakiádních vystoupení byly ve všech krajích postupně realizovány závěry konference k péči o talentované žáky ve fyzice z roku 1984. Výsledky se projevily především v prohloubení individuální péče o žáky nejvyšších kategorií a o přípravu žáků základních škol a 1. ročníků středních škol.

Výsledkem zintenzívněné péče učitelů fyziky, referentů FO, OV FO i KV FO je narůstající zájem žáků o řešení úloh kategorie E a D. Podchycení tohoto zájmu, jeho prohlubování a současně získání žáků o další sebevzdělávání ve fyzice je konkrétním kladným výsledkem práce v tomto ročníku. Proto v závěrečném hodnocení výsledků XXVI. ročníku FO ocenil ÚV FO práci všech učitelů fyziky, referentů na školách,

organizátorů soustředění a seminářů, lektorů a lektorských sborů KV FO a OV FO i členů výborů FO všech stupňů při zabezpečování FO a především při jejich práci s talentovanými žáky. ÚV FO znovu zdůrazňuje, že práce s talentovanými žáky je prací společensky angažovanou a záslužnou při výchově budoucích odborníků a svědomitých pracovníků naší vlasti při uskutečňování složitých úkolů vědeckotechnického rozvoje.

ÚV FO znovu projednal všechny připomínky, které KV FO vznesly k organizaci soutěže, a to především k obsahu zadání úloh, k jejich náročnosti, případně k jejich vzorovému řešení. ÚV FO přijal opatření ke zkvalitnění práce komise pro výběr úloh pro jednotlivé kategorie soutěže, a tím i k zabezpečení přiměřené náročnosti úloh.

V tomto ročníku bylo ve všech kategoriích A—D zavedeno bodové hodnocení řešených úloh. Poznatky z krajů potvrzují, že takto prováděné hodnocení je objektivnější než doposud prováděná klasifikace.

XXVI. ročník FO současně potvrdil, že se u žáků zvyšuje zájem o FO. Na tomto úspěchu se podílí především soustavná práce s řešiteli ať již individuální, nebo kolektivní. K té patří především dlouhodobější soustředění, což jednoznačně potvrdily i výsledky celostátního soustředění 76 úspěšných řešitelů kategorie B FO a MO v Jevíčku v době od 13. do 27. června 1985. Soustředění úspěšných řešitelů chápou účastníci na jedné straně jako určitou odměnu za svou dobrou práci, na druhé straně pak jako příležitost pro rozvoj vlastních odborných znalostí, ověření svých schopností při řešení úloh na soustředění, a tím ke zkvalitnění přípravy a průpravy na další ročník FO.

XXVI. ročník FO současně ukázal na problémy v souvislosti s rozrůstáním FO do kvantity. Proto pro další období orientuje práci KV FO především na prohloubení kvality práce s řešiteli a její dlouhodobost a soustavnost.

II. ČÁST

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY

1 ÚLOHY KATEGÓRIE A

a) Prvé kolo súťaže

1. úloha (navrhol Doc. RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc.)

Rovnorodá tyč s dĺžkou l koná kmity v zvislej rovine okolo osi o , ktorá je kolmá na tyč. Tyč má zanedbateľný prierez.

a) Doba kmitu tyče je T' . Určte vzdialenosť a' osi od hmotného stredu tyče. Urobte diskusiu riešenia.

b) Určte vzdialenosť a'' osi od hmotného stredu tyče tak, aby doba kmitu tyče bola $T'' = 3 \sqrt{\frac{l}{g}}$.

c) Určte vzdialenosť $a_{\min}$ osi od hmotného stredu tyče tak, aby doba kmitu T tyče dosiahla najmenšiu možnú hodnotu $T_{\min}$. Určte $T_{\min}$.

Úlohy a), b), c) riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $l = 0,400$ m, $T' = 1,20$ s.

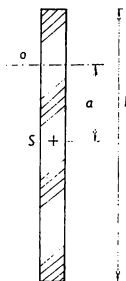
d) Funkciu $T = f(a)$ pre danú hodnotu l znázornite graficky. Z grafu funkcie $T = f(a)$ určte a' , $a_{\min}$, $T_{\min}$.

Poznámka

Pre dobu kmitu T tyče dĺžky l , ktorá koná kmity v zvislej rovine okolo osi o kolmej na tyč, platí

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12} l^2 + a^2}{g a}}, \quad (1)$$

kde a je vzdialenosť hmotného stredu S tyče od uvažovanej osi (obr. 1).



Obr. 1

Riešenie

a) Vzťah (1) upravíme a dostaneme

$$a^2 - \frac{T^2}{4\pi^2 g} a + \frac{l^2}{12} = 0. \quad (2)$$

Ak T má danú hodnotu T' , dostaneme z (2)

$$a'_{1,2} = \frac{T'^2}{8\pi^2 g} \pm \sqrt{\left(\frac{T'^2}{8\pi^2 g}\right)^2 - \frac{l^2}{12}},$$

musí však byť splnená podmienka

$$\left(\frac{T'^2}{8\pi^2 g}\right)^2 \geq \frac{l^2}{12}.$$

Pretože hodnoty všetkých veličín sú kladné, dostaneme odmocnením

$$\frac{T'^2}{8\pi^2 g} \geq \frac{l}{2\sqrt{3}},$$

odtiaľ ďalším odmocnením

$$T' \geq \frac{2\pi}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \doteq 4,77 \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3)$$

b) Z (3) vyplýva, že nejednotlivé os kyvadla, aby $T'' =$
 $= 3 \sqrt{\frac{l}{g}}$.

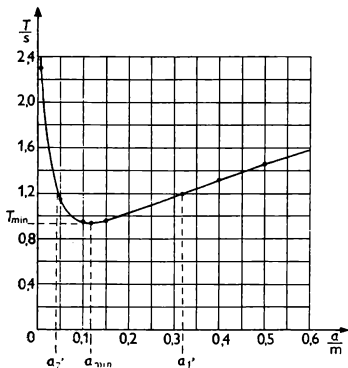
c) Z (3) je zrejmé, že minimálna doba kmitu je

$$T_{\min} = \frac{2\pi}{4\sqrt{3}} \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4)$$

Prislúchajúcu hodnotu $a_{\min}$ určíme pomocou (2) pre $T =$
 $= T_{\min}$ podľa (4):

$$a_{\min} = \frac{l}{2\sqrt{3}} = \frac{l\sqrt{3}}{6}.$$

Pre zadané hodnoty: $a'_1 \doteq 0,314$ m, $a'_2 \doteq 0,042$ m, $a_{\min} \doteq$
 $\doteq 0,115$ m, $T_{\min} \doteq 0,964$ s.



Obr. 2

d) Funkcia $T = f(a)$ pre zadanú hodnotu $l = 0,400$ m je

$$T = \pi \sqrt{\frac{l^2 + 12a^2}{3ga}} = \pi \sqrt{\frac{(0,160 \text{ m}^2) + 12a^2}{(29,4 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}) \cdot a}}.$$

Z toho určíme niekoľko sebeodpovedajúcich hodnôt a , T :

$\frac{a}{\text{m}}$	0,001	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
$\frac{T}{\text{s}}$	7,32	2,32	1,13	0,97	0,98	1,03	1,18	1,32	1,46	1,58

Graf je na obr. 2. Z grafu môžeme približne určiť a'_1 , a'_2 , $a_{\min}$, $T_{\min}$.

Úlohu možno výsledkami interpretovať na všeobecný prípad kyvadla, čo je veľmi poučné.

2. úloha (navrhli doc. RNDr. Ľing. Daniel Kluvanec, CSc.
a doc. RNDr. Árpád Kecskés, CSc.)

Planparalelné doštičky z rôzneho skla s indexami lomu n_i , $i = 1, 2, 3, \dots, k$, s rôznymi hrúbkami d_i , sú v ľubovoľnom poradí uložené tesne na seba tak, že medzi nimi nevznikajú medzery. V okolí doštičiek je vákuum. Uhol dopadu lúča na sústavu doštičiek je α_0 .

a) Dokážte, že uhol vystupujúceho lúča zo sústavy doštičiek je rovný uhlu dopadu α_0 .

b) Určte vzájomnú vzdialenosť a medzi kolmicami dopadu lúča dopadajúceho na sústavu doštičiek a lúča vystupujúceho zo sústavy doštičiek.

c) Určte vzájomnú vzdialenosť b medzi priamkami určenými dopadajúcim a vystupujúcim lúčom zo sústavy doštičiek.

d) Určte efektívny index lomu n sústavy definovaný ako index lomu homogénneho prostredia s hrúbkou $d = d_1 + d_2 + \dots + d_k$, ktoré by spôsobilo pri rovnakom uhle

dopadu lúča α_0 rovnakú vzájomnú vzdialenosť a medzi kolmicami dopadajúceho a vystupujúceho lúča, ako v prípade sústavy doštičiek.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $k = 3$, $d_1 = 5,00 \cdot 10^{-3}$ m, $n_1 = 1,51$, $d_2 = 6,00 \cdot 10^{-3}$ m, $n_2 = 1,61$, $d_3 = 7,00 \cdot 10^{-3}$ m, $n_3 = 1,75$, $\alpha_0 = 30^\circ$.

Riešenie

a) Dôkaz urobíme matematickou indukciou.

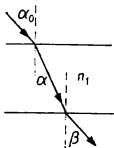
1. Dokážeme, že tvrdenie platí pre $i = 1$ (obr. 3). Podľa zákona lomu

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} = n_1 = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

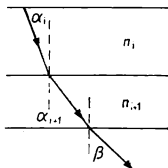
z toho $\beta = \alpha_0$.

2. Podľa predpokladu z i -tej doštičky vychádza lúč do vákua pod uhlom α_0 (obr. 4), preto

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_0} = \frac{1}{n_i}, \quad \sin \alpha_i = \frac{1}{n_i} \sin \alpha_0. \quad (1)$$



Obr. 3



Obr. 4

Pre prechod z i -tej doštičky do tesne priloženej $(i + 1)$ doštičky platí

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_{i+1}} = \frac{n_{i+1}}{n_i}, \quad \sin \alpha_{i+1} = \frac{n_i}{n_{i+1}} \sin \alpha_i. \quad (2)$$

Dosadením z (1) do (2)

$$\sin \alpha_{i+1} = \frac{\sin \alpha_0}{n_{i+1}}. \quad (3)$$

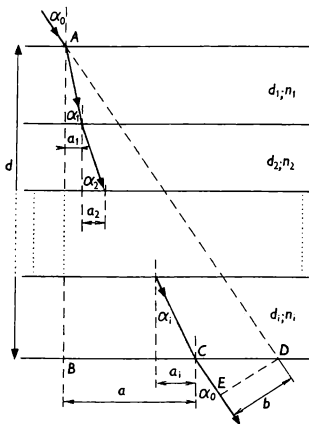
Pre prechod z $(i + 1)$ doštičky do vákua

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha_{i+1}} = n_{i+1}$$

a po dosadení z (3): $\sin \beta = \sin \alpha_0$, tj. $\beta = \alpha_0$.

Tým sme dokázali, že lúč vchádzajúci a lúč vychádzajúci zo sústavy doštičiek sú navzájom rovnobežné.

b) Obr. 5. Z pravouhlých trojuholníkov: $\alpha_i = d_i \operatorname{tg} \alpha_i$; pomocou (1) máme



Obr. 5

$$a_i = \frac{\sin \alpha_0}{\sqrt{n_i^2 - \sin^2 \alpha_0}} d_i.$$

Potom

$$a = \sum_{i=1}^k a_i = \sin \alpha_0 \sum_{i=1}^k \frac{d_i}{\sqrt{n_i^2 - \sin^2 \alpha_0}}. \quad (4)$$

c) Z pravouhlého trojuholníka ABD v obr. 5: $BD = d \operatorname{tg} \alpha_0$. Z pravouhlého trojuholníka CDE : $CD = \frac{b}{\cos \alpha_0}$.

Pretože $BD = BC + CD$:

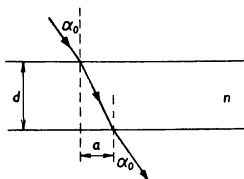
$$d \operatorname{tg} \alpha_0 = a + \frac{b}{\cos \alpha_0}.$$

Odtiaľ

$$b = d \sin \alpha_0 = a \cos \alpha_0$$

a po dosadení z (4)

$$b = \sin \alpha_0 \cdot \sum_{i=1}^k d_i \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha_0}{n_i^2 - \sin^2 \alpha_0}} \right).$$



Obr. 6

d) Obr. 6. Z pravouhlého trojuholníka: $a = d \operatorname{tg} \alpha$, pričom $\sin \alpha = \frac{1}{n_i} \sin \alpha_0$. Odtiaľ

$$n = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} = \sin \alpha_0 \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}}} = \sin \alpha_0 \sqrt{\frac{d^2}{a^2} + 1} ;$$

Po dosadení z (4) a úprave

$$n = \sqrt{\left[\frac{\sum_{i=1}^k d_i}{\sum_{i=1}^k \frac{d_i}{\sqrt{n_i^2 - \sin^2 \alpha_0}}} \right]^2 + \sin^2 \alpha_0}.$$

Pre zadané hodnoty: $a \doteq 5,80 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $b \doteq 3,98 \cdot 10^{-3} \text{ m}$,
 $n \doteq 1,63$.

3. úloha (navrhol doc. RNDr. Arpád Kecskés, CSc.)

V spektre héliového lasera sú najintenzívnejšie čiary zodpovedajúce žiareniu s vlnovými dĺžkami $\lambda_1 = 4,88 \cdot 10^{-7} \text{ m}$,
 $\lambda_2 = 5,15 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

Laserové lúče dopadajú kolmo na jednu stenu optického hranola. Závislosť indexu lomu n od vlnovej dĺžky λ žiarenia

je daná vzťahom $n = 1 + \frac{a}{\lambda^2}$, kde konštanta $a = 2,38 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$.

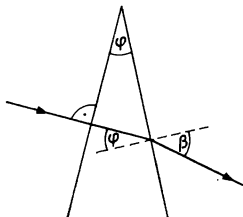
Určte možné hodnoty lámavého uhla φ hranola tak, aby zväzok lúčov vystupujúci z hranola obsahoval žiarenie s vlnovou dĺžkou λ_2 a neobsahoval žiarenie s vlnovou dĺžkou λ_1 .

Riešenie

Pre uhol lomu β lúčov vystupujúcich z hranola platí (obr. 7)

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{1}{n}.$$

Hraničná hodnota φ_1 lámavého uhla φ hranola, pri ktorej sa lúč s vlnovou dĺžkou λ_1 láme rovnobežne s rozhraním, je daná vzťahom



Obr. 7

$$\sin \varphi_1 = \left(1 + \frac{a}{\lambda_1^2}\right)^{-1},$$

pričom φ_1 je najmenšia hodnota lámavého uhla φ hranola splňujúca podmienku úlohy. Uhol φ však musí byť taký, aby z hranola vystupoval lúč s vlnovou dĺžkou λ_2 , čo platí vtedy, ak $\varphi < \varphi_2$, kde uhol φ_2 je určený vzťahom

$$\sin \varphi_2 = \left(1 + \frac{a}{\lambda_2^2}\right)^{-1}.$$

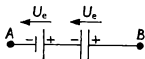
Podmienke úlohy vyhovujú uhly z množiny $\varphi \in (\varphi_1; \varphi_2)$, pre zadané hodnoty $\varphi \in (30^\circ; 31^\circ 50')$.

4. úloha (navrhol Doc. RNDr. Ing. Daniel Kľuvanec, CSc.)

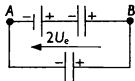
Máte k dispozícii dva rovnaké kondenzátory s kapacitami C a zdroj s elektromotorickým napätím U_e . Navrhните také spojenie kondenzátorov a zdroja napätia, aby sme získali medzi dvojicou určitých bodov tejto sústavy čo najväčšie elektrické napätie, a určte ho. Kondenzátory a zdroj môžete podľa potreby vopred niekoľkokrát ľubovoľným spôsobom pospájať. Správnosť navrhnutého postupu fyzikálne dokážte.

Riešenie

Postupne pripojíme oba kondenzátory ku zdroju s napätím U_e . Na kondenzátoroch budú potom rovnaké napätia U_e . Ku kladnej svorke zdroja pripojíme elektródu prvého kondenzátora so záporným nábojom (obr. 8). Medzi bodmi A , B je napätie $2 U_e$.



Obr. 8



Obr. 9

Ďalej pripojíme k bodom A , B druhý kondenzátor tak, že k bodu A pripojíme elektródu so záporným nábojom (obr. 9). Označíme U_{10} napätie na prvom kondenzátore, U_{20} napätie na druhom kondenzátore, q_{10} a q_{20} príslušné náboje. Pre obvod podľa obr. 9 platí v ustálenom stave

$$U_{10} + U_e = U_{20}, \quad (1)$$

$$q_{10} + q_{20} = C U_{10} + C U_{20} = 2 C U_e, \quad (2)$$

pretože pôvodný celkový náboj kondenzátorov $2 C U_e$ sa nezmenil, len došlo k zmene jeho rozloženia na kondenzátoroch. Zo vzťahov (1), (2) máme

$$U_{10} = 0,5 U_e; \quad U_{20} = 1,5 U_e.$$

Obvod teraz rozpojíme tak, aby sa napätie na kondenzátore s napätím $U_{20} = 1,5 U_e$ zachovalo. Kondenzátor s napätím $U_{10} = 0,5 U_e$ pripojíme ku zdroju; jeho napätie sa zvýši na hodnotu U_e .

Kondenzátor s napätím $U_{20} = 1,5 U_e$ znovu pripojíme ku zdroju, elektródu so záporným nábojom spojíme s kladnou svorkou zdroja. Potom kondenzátor s napätím U_e pripojíme k svorkám A , B podľa obr. 9. Platí teraz v ustálenom stave

$$U_{11} + U_e = U_{21}, \quad q_{11} + q_{21} = 2,5 C U_e,$$

z toho

$$U_{21} = 1,75 U_e.$$

Tento postup niekoľkokrát opakujeme, napätie na kondenzátore v dolnej vetvi pri i -tom opakovaní označíme U_{2i} , obdobne aj príslušné veličiny ďalšie.

Dokážeme, že napätie $U_{2(i+1)} > U_{2i}$. Budeme predpokladať, že

$$U_{2i} = \left(1,5 + \frac{a_i}{b_i}\right) U_e, \text{ pričom } \frac{a_i}{b_i} < \frac{1}{2},$$

pretože maximálne (teoreticky presne nedosiahnuteľné) napätie na kondenzátore v dolnej vetvi je $2 U_e$. Kondenzátor v hornej vetvi by v tomto prípade musel mať v ustálenom stave napätie U_e , ktoré by sa ďalším pripojením ku zdroju už nemohlo zväčšovať. Je teda $2a_i < b_i$.

Po i -tom opakovaní a pripojení kondenzátora s menším napätím ku zdroju sú v ustálenom stave na kondenzátoroch náboje

$$q_{1i} = C U_e; \quad q_{2i} = C \left(1,5 + \frac{a_i}{b_i}\right) U_e,$$

celkový náboj sa pri ďalšom pripojení podľa obr. 9 zachová. Platí teraz

$$U_{1(i+1)} + U_e - U_{2(i+1)}, \\ U_{2(i+1)} + U_{1(i+1)} = \left(2,5 + \frac{a_i}{b_i}\right) U_e$$

a odtiaľ

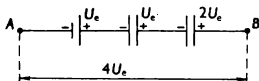
$$U_{2(i+1)} = \frac{3,5 + \frac{a_i}{b_i}}{2} U_e = \left(1,5 + \frac{2a_i + b_i}{4b_i}\right) U_e.$$

Ďalej platí

$$\frac{2a_i + b_i}{4b_i} > \frac{a_i}{b_i} = \frac{4a_i}{4b_i},$$

pretože

$$2a_i + b_i > 4a_i, \text{ lebo } b_i > 2a_i.$$



Obr. 10

Napätie na kondenzátore v dolnej vetvi sa teda môže bez obmedzenia približovať hodnote $2U_e$.

Po niekoľkonásobnom opakovaní uvedeného postupu získame kondenzátor s napätím takmer $2U_e$. Potom spojíme zdroj s napätím U_e , jeden kondenzátor s napätím U_e a druhý kondenzátor s napätím takmer $2U_e$ do série podľa obr. 10. Medzi bodmi A, B získame napätie takmer $4U_e$.

Hodnota $4U_e$ je najväčšie napätie, ktoré použitím zdroja a dvoch kondenzátorov môžeme získať.

5. úloha (navrhol doc. RNDr. ing. Daniel Kluvanec, CSc.)

Dve guľôčky sú zavesené na rovnakých vláknach tak, že v rovnovážnej polohe sú vlákna rovnobežné a guľôčky sa navzájom dotýkajú. Hmotnosť prvej guľôčky je m_1 . Prvú guľôčku vychýlime o uhol α v zvislej rovine, určenej oboma vláknami. Pri napnutom vlákne guľôčku uvoľníme. Po zrážke s druhou guľôčkou zostane prvá guľôčka v pokoji a druhá guľôčka sa vychýli o uhol β . Druhá guľôčka potom narazí na prvú guľôčku. Predpokladáme, že pri obidvoch zrážkach guľôčiek nastáva vždy rovnaké trvalé pomerné zníženie mechanickej energie sústavy v dôsledku práce vykonanej pri zmene vnútornej energie guľôčiek.

a) Určte hmotnosť m_2 druhej guľôčky.

b) Označme W_0 prácu potrebnú na trvalú deformáciu guľôčiek, W prácu potrebnú na maximálnu deformáciu guľôčiek pri ich zraze, $W > W_0$. Určte podiel $k = \frac{W_0}{W}$.

c) Určte uhol γ , o ktorý sa vychýli napäté vlákno prvej guľôčky po druhom zraze guľôčiek, ak je podiel k pri oboch zrazoch rovnaký.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 14^\circ$, $m_1 = 30$ g.

Rozmery guľôčiek a trenie neuvažujte. Obe vlákna považujte za neroztiahnuteľné.

Riešenie

Dĺžku vlákna označíme l . Jedná sa o nedokonale pružný zraz, pre ktorý platí zákon zachovania hybnosti.

a) Obr. 11. Zo zákona zachovania hybnosti

$$m_1 \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = m_2 \sqrt{2gl(1 - \cos \beta)}$$

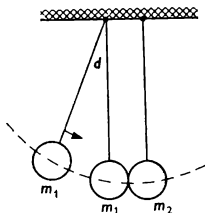
vyjadríme

$$m_2 = m_1 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \beta}} \doteq 32 \text{ g.} \quad (1)$$

b) Po prvom zraze guľôčiek platí pre stratu ich energie $k W = W_0 = m_1 gl(1 - \cos \alpha) - m_2 gl(1 - \cos \beta)$. (2)

Zo zákona zachovania hybnosti pre okamih maximálnej celkovej deformácie guľôčiek pri prvom zraze platí

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v,$$



Obr. 11

kde v_1 je rýchlosť prvej guľôčky pred zrazom, v je spoločná rýchlosť v okamihu najväčšej deformácie. Z toho

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha)}.$$

Zo zákona zachovania energie platí

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = W + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

a po dosadení za v_1, v :

$$m_1 g l (1 - \cos \alpha) = W + \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} g l (1 - \cos \alpha),$$

$$W = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g l (1 - \cos \alpha). \quad (3)$$

Dosadením z (3) za W do (2) a úpravou máme

$$m_1 (1 - \cos \alpha) = m_2 (1 - \cos \beta) + k \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - \cos \alpha). \quad (4)$$

Ak vyjadríme z (1) napr. $(1 - \cos \alpha)$ a dosadíme do (4), úpravou dostaneme

$$0 \leq k = \frac{m_2^2 - m_1^2}{m_2^2} \leq 1 \quad (5)$$

a preto $m_2 \geq m_1$.

Pre dané hodnoty: $k \doteq 0,13$.

c) Pri druhej zrážke sa vychýli vlákno prvej guľôčky o uhol γ a druhej o uhol δ . Zo zákona zachovania energie a zákona zachovania hybnosti možno analogicky zo vzťahu (4) písať

$$m_2 (1 - \cos \beta) = m_1 (1 - \cos \gamma) + m_2 (1 - \cos \delta) + k \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - \cos \beta) \quad (6)$$

a ďalej

$$m_2 \sqrt{1 - \cos \beta} = m_1 \sqrt{1 - \cos \gamma} + m_2 \sqrt{1 - \cos \delta}. \quad (7)$$

Dosadením za $(1 - \cos \delta)$ zo vzťahu (7) a za k zo vzťahu (5) do vzťahu (6) máme

$$m_2 (1 - \cos \beta) = m_1 (1 - \cos \gamma) + \\ + \frac{1}{m_2} (m_2 \sqrt{1 - \cos \beta} - m_1 \sqrt{1 - \cos \gamma})^2 + \\ + \frac{m_1}{m_2} (m_2 - m_1) (1 - \cos \beta).$$

Ak zavedeme označenia $a = 1 - \cos \beta$, $b = 1 - \cos \gamma$, dostaneme úpravou posledného vzťahu

$$2 \sqrt{ab} = a + b - (a - b) \frac{m_1}{m_2}.$$

Táto rovnosť je splnená pre prípad $a = b$, vtedy $\gamma = \beta = 14^\circ$.

6. úloha (navrhol Doc. RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc.)

Meranie frekvenčných charakteristík sériového elektrického dvojpoľu

Pomôcky: rezistor s odporom $R = 100 \, \Omega$, kondenzátor s kapacitou $C = 2,0 \, \mu\text{F}$, RC-generátor s efektívnym napätím $U = 0,1 \, \text{V}$, spojovacie vodiče, jeden alebo dva voltmetre, ampérmeter.

Postup

Navrhnete zapojenia, nakreslite potrebné schémy k určeniu:

a) amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky prúdu a relatívnej frekvenčnej charakteristiky prúdu,

b) amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky napätia na rezistore a relatívnej frekvenčnej charakteristiky napätia na rezistore,

c) amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky napätia na kondenzátore a relatívnej frekvenčnej charakteristiky napätia na kondenzátore,

d) medznej frekvencie ω_m obvodu.

Merané veličiny zapisujte do tabuliek. Všetky charakteristiky znázornite graficky.

Výpočtom určte ďalej závislosti začiatočnej fázy φ_i prúdu, začiatočnej fázy φ_R napätia na rezistore a začiatočnej fázy φ_C napätia na kondenzátore od frekvencie ω . Začiatočnú fázu napätia zdroja považujte za nulovú.

Nakreslite grafy združených charakteristík prúdu, napätia na rezistore a napätia na kondenzátore.

Informace potřebné k řešení

Jde o úlohu ke studijnímu textu Kluvanec, D.: Frekvenční charakteristiky elektrických dvojpólů. Protože nemůžeme předpokládat, že čtenář má studijní text k dispozici, uvedeme zde několik informací potřebných k řešení úlohy.

Elektrický dvojpól je soustava elektrotechnických prvků opatřená dvěma svorkami, jimiž může být zapojena do elektrického obvodu. V našem případě jde o sériový dvojpól typu R—C, sestavený z rezistoru o odporu R a kondenzátoru o kapacitě C .

Amplitudová frekvenční charakteristika proudu je definována jako funkce $I_m = f(\omega)$, kde I_m je amplituda harmonického proudu procházejícího dvojpólem, ω úhlová frekvence harmonického napětí, k němuž je dvojpól připojen. Můžeme však uvažovat i funkci $I = f(f)$, kde I je efektivní proud, f kmitočet.

Relativní frekvenční charakteristika proudu je graf frekvenční závislosti podílu $A_r(I) = I/I_{\max}$, kde $I_{\max}$ je největší možný proud; v našem případě $I_{\max} = U/R$, pro $\omega \rightarrow \infty$, kdy kondenzátor má nulovou reaktanci; pro zadané hodnoty $I_{\max} = 1 \text{ mA}$.

Obdobně jsou definovány amplitudové frekvenční charakteristiky napětí U_R a U_C napětí na rezistoru a na kondenzátoru, rovněž obdobně jsou definovány relativní frekvenční charakteristiky, přičemž $U_{R\max} = U$ (pro $\omega \rightarrow \infty$), $U_{C\max} = U$ (pro $\omega = 0 \text{ s}^{-1}$, kdy obvodem neprochází proud, takže na kondenzátoru je celé napětí zdroje).

Počáteční fáze φ_i proudu I , jestliže počáteční fáze napětí $\bar{U}$ je nulová, je dána fázovým úhlem komplexní impedance

$$\text{tedy} \quad Z = R - j \frac{1}{\omega C},$$

$$|\operatorname{tg} \varphi_i| = \frac{1}{\omega R C} = \operatorname{tg} \varphi_R, \quad \varphi_i, \quad \varphi_R \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

a dále

$$|\operatorname{tg} \varphi_C| = |\operatorname{cotg} \varphi_i| = \omega R C, \quad \varphi_C \in \left\langle 0, -\frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Mezní frekvence ω_m je ta, při níž rezistance dvojpólu je rovna jeho reaktanci, tedy $R = |X|$ a protože v našem

případě $|X| = \frac{1}{\omega C}$ dostaneme $\omega_m = \frac{1}{R C}$.

Při mezní frekvenci má dvojpól komplexní impedanci $Z_m = R(1 - j)$, tedy impedanci $Z_m = |Z_m| = R \sqrt{2}$. Proud má velikost $I_{\max}/\sqrt{2}$. Na relativní frekvenční charakteristice leží bod $(\omega_m, \sqrt{2}/2)$, popř. $(f_m, \sqrt{2}/2)$. Podle toho můžeme mezní frekvenci graficky stanovit ze změřených charakteristik. Pro mezní frekvenci platí $\varphi_{im} = \varphi_{Rm} = \pi$, $\varphi_{Cm} = -\frac{\pi}{4}$.

Velikost proudu I a jeho počáteční fáze φ_i závisí na frekvenci ω . Jestliže do roviny komplexních čísel zakreslíme fázory $I(\omega)$, pak jejich koncové body leží na určité čáře, kterou označíme jako sdruženou charakteristiku proudu. Ukážeme si, že je to půlkružnice ležící v prvním kvadrantu roviny komplexních čísel Oxy a procházející počátkem O .

Uvažovaný dvojpól má komplexní impedanci $Z = R - j \frac{1}{\omega C}$, pro proud tedy platí

$$I = \frac{U}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \bar{U} \frac{R + j \omega C}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} =$$

$$= \bar{U} \left(\frac{R}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} + j \frac{\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right).$$

Reálnou, popř. imaginární část označíme x , popř. y :

$$x = \frac{U R}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}, \quad y = \frac{U \frac{1}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

Jsou to parametrické rovnice sdružené charakteristiky proudu $\bar{I}(\omega)$. Parametr ω vyloučíme např. s použitím pomocné rovnice

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\omega C R}, \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{R y}{x}.$$

Dosadíme do vztahu pro x a dostaneme úpravou

$$\left(x - \frac{U}{2R}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{U}{2R}\right)^2.$$

Je to tedy skutečně rovnice kružnice, ale protože $y \geq 0$, vyhovuje jenom půlkružnici v prvním kvadrantu roviny komplexních čísel. Průměr půlkružnice odpovídá proudu $\frac{U}{R} = I_{\max}$ a její střed leží na reálné ose x .

Tuto půlkružnici musíme »ocejchovat«, aby bylo zřejmé, že ten či onen bod odpovídá té či oné úhlové frekvenci. Můžeme to učinit pomocí vypočítaných hodnot φ_t , tj. sestrojíme soustavu polopřímek, které s osou x svírají různé úhly φ_t , a jejich průsečíky s půlkružnicí $\bar{I}(\omega)$ označíme odpovídajícími hodnotami úhlové frekvence.

Jiný možný způsob (někdy jednodušší) je ten, že položíme

$$|\operatorname{tg} \varphi_t| = \frac{1}{\omega R C} = \frac{\omega_m}{\omega}.$$

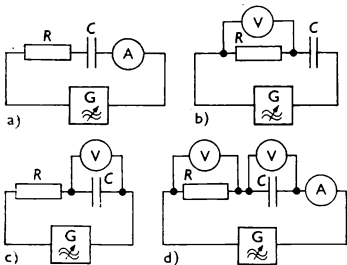
Jestliže např. $\omega = n \omega_m$, kde n je reálné kladné číslo, pak $\operatorname{tg} \varphi_t = \frac{1}{n}$ pro tuto frekvenci ω .

Obdobně je definována sdružená charakteristika napětí $\bar{U}_R(\omega)$ na rezistoru. Je to půlkružnice v prvním kvadrantu roviny komplexních čísel, jejíž průměr odpovídá napětí $U_{\max} = U$ pro $\omega \rightarrow \infty$.

Sdružená charakteristika napětí $\bar{U}_C(\omega)$ na kondenzátoru, jak se snadno přesvědčíme, je půlkružnice ve čtvrtém kvadrantu roviny komplexních čísel, protože $y \leq 0$. Půlkružnice prochází počátkem soustavy souřadnic, její střed leží na reálné ose x a její průměr odpovídá napětí $U_{\max} = U$ pro $\omega = 0 \text{ s}^{-1}$. Fázory $\bar{U}_R(\omega)$ a $\bar{U}_C(\omega)$ jsou při každé frekvenci ω k sobě kolmé.

Riešenie

Hodnoty veličín, ktoré sú potrebné k určeniu amplitúdových frekvenčných charakteristík prúdu, napätia na rezistore



Obr. 12

a napätia na kondenzátore, získame buď postupným použitím zapojení podľa obr. 12 a), b), c), alebo všetky potrebné veličiny meriame súčasne v zapojení podľa obr. 12 d).

Na R—C generátore meníme frekvenciu napätia zdroja a do tabuľky zapisujeme hodnoty prúdu I prechádzajúceho obvodom, napätia U_R na rezistore a napätia U_C na kondenzátore. Výsledky meraní sú v tabuľke 8.

T 8

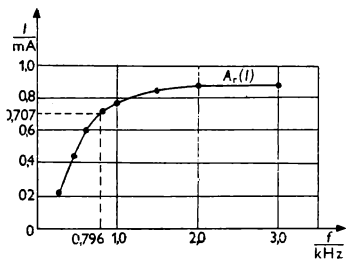
f kHz	I mA	$A_r(I)$	$\frac{U_R}{mV}$	$A_r(U_R)$	$\frac{U_C}{mV}$	$A_r(U_C)$	φ_i rad	φ_R rad	φ_R rad
0,2	0,225	0,225	23	0,23	94	0,94	75,9	75,9	-14,1
0,4	0,425	0,425	42	0,42	83	0,83	63,3	63,3	-26,7
0,6	0,600	0,600	56	0,56	74	0,74	53,0	53,0	-37,0
0,8	0,725	0,725	67	0,67	65	0,65	44,9	44,9	-45,1
1,0	0,775	0,775	74	0,74	58	0,58	38,5	38,5	-51,5
1,5	0,850	0,850	85	0,85	42	0,42	22,0	22,0	-62,0
2,0	0,875	0,875	89	0,89	34	0,34	21,1	21,1	-68,3
3,0	0,875	0,875	94	0,94	24	0,24	14,9	14,9	-75,1

Maximálny prúd $I_{\max}$ prechádzajúci obvodom je 1 mA. Číselné hodnoty prúdu I v mA sú totožné s číselnými hodnotami grafu $A_r(I)$, preto obe funkcie sú znázornené jedným grafom na obr. 13. Na obr. 14 sú znázornené amplitúdové frekvenčné charakteristiky napätia U_R na rezistore a napätia U_C na kondenzátore. Na obr. 15 sú relatívne frekvenčné charakteristiky napätí U_R , U_C na rezistore a na kondenzátore.

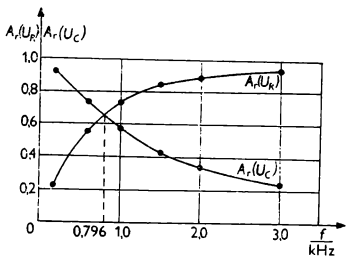
Medzná frekvencia

$$\omega_m = 5,0 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}, f_m \doteq 796 \text{ Hz.}$$

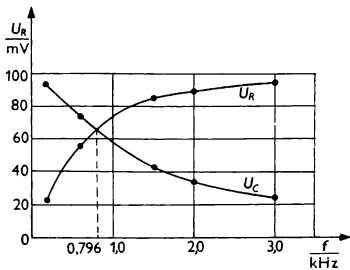
Túto hodnotu možno zistiť tiež z grafov na obr. 13, 14, 15. Na obr. 16 je znázornená združená charakteristika prúdu, na obr. 17 sú znázornené združené charakteristiky $\bar{U}_R(\omega)$ napätia na rezistore a $\bar{U}_C(\omega)$ napätia na kondenzátore.



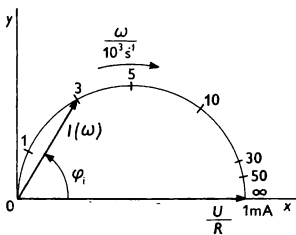
Obr. 13



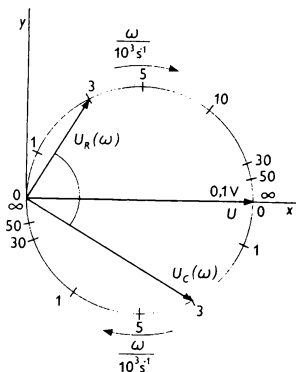
Obr. 14



Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17

7. úloha (navrhol doc. RNDr. ing. Daniel Kluvanec, CSc.)

Kondenzátor s kapacitou C a cievka s vlastnou indukčnosťou L a odporom R sú zapojené za sebou a pripojené ku svorkám generátora s efektívnou hodnotou U harmonického napätia.

- Určte rezonančnú frekvenciu ω_r obvodu.
- Určte činiteľ akosti Q_s obvodu.
- Napište funkciu vyjadrujúcu relatívnu frekvenčnú charakteristiku prúdu v obvode a pre určené hodnoty R , L , C ju znázorníte graficky.
- Napište funkciu vyjadrujúcu frekvenčnú charakteristiku fázy prúdu a pre dané hodnoty R , L , C ju znázorníte graficky.

e) Určte dolný medzný kmitočet ω_d a horný medzný kmitočet ω_h obvodu.

f) Určte efektívne napätie U_C medzi svorkami kondenzátora pri rezonančnej frekvencii ω_r obvodu.

V riešení úloh c), d) za nezávisle premennú veličinu si zvolte pomerné rozladenie obvodu.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $C = 360 \text{ nF}$, $L = 10,0 \text{ mH}$, $R = 3,00 \Omega$, $U = 3,00 \text{ V}$.

Odpory, kapacity a indukčnosti spojovacích vodičov neuvažujte.

Informace potřebné k řešení

Úloha se vztahuje ke studijnímu textu. Jde o sériový dvojpól typu $R-L-C$, protože skutečnou cívku můžeme nahradit sériovou kombinací rezistoru o odporu R a ideální cívky o indukčnosti L . Dvojpól má komplexní impedanci

$$\bar{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Rezananční frekvence ω_r je ta, při níž imaginární část komplexní impedance je nulová. Při této frekvenci má dvojpól charakter pouhé rezistance R a proud má fázi souhlasnou s fází napětí.

Vztah pro komplexní impedanci lze upravit takto:

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= R + j \omega_r L \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{1}{\omega \omega_r L C} \right) = \\ &= R + j \omega_r L \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right) = R (1 + j Q_s x), \text{ kde} \\ Q_s &= \frac{\omega_r L}{R} \text{ je činitel jakosti dvojpólu,} \end{aligned}$$

$x = \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}$ je pomerné rozladění odpovídající úhlové frekvenci ω .

Proud $\bar{I}$ při frekvenci odpovídající poměrnému rozladění x

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{R(1 + j Q_s x)}$$

má maximální velikost $I_{\max} = \frac{U}{R}$ pro $x = 0$.

Relativní frekvenční charakteristika proudu

$$\bar{A}_I(I) = \frac{1}{1 + j Q_s x}, \quad A_I(I) = \frac{1}{\sqrt{1 + (Q_s x)^2}}.$$

Mezní frekvence jsou dvě a platí pro ně $(Q_s x)^2 = 1$, pro dolní, popř. horní platí

$$x_d = -\frac{1}{Q_s}, \text{ popř. } x_h = \frac{1}{Q_s}, \text{ takže}$$

$$\frac{\omega_d}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega_d} = -\frac{1}{Q_s}, \quad \frac{\omega_h}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega_h} = \frac{1}{Q_s}.$$

Těmito vztahy jsou určeny mezní úhlové kmitočty, známe-li veličiny ω_r , Q_s . Vzhledem k veličinám ω_d , ω_h jsou to kvadratické rovnice. V technicky významných případech je $Q_s \gg 1$, a proto platí s velmi dobrou přibližností

$$\omega_d = \omega_r \left(1 - \frac{1}{2 Q_s}\right), \quad \omega_h = \omega_r \left(1 + \frac{1}{2 Q_s}\right).$$

Riešenie

a) Podľa Thomsonovho vzťahu

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \doteq 1,667 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}.$$

b) Podľa definície činiteľa akosti sériového obvodu R-L-C

$$Q_s = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \doteq 56. \quad (1)$$

c) Komplexná impedancia obvodu $Z = R(1 + j Q_s x)$, kde x je pomerné rozladenie obvodu

$$x = \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}.$$

Potom

$$I = \frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}} = \frac{\tilde{U}}{R(1 + j Q_s x)}.$$

Maximálnu hodnotu $I_{\max}$ nadobudne I pre $x = 0$, preto

$$I_{\max} = \frac{\tilde{U}}{R};$$

potom

$$A_r(I) = \frac{I}{I_{\max}} = \frac{1}{1 + j Q_s x},$$

pre Q_s podľa (1)

$$A_r(I) = \frac{1}{\sqrt{1 + (56 x)^2}}. \quad (2)$$

Pre znázornenie funkcie (2) zostavíme tabuľku

x	0,00	$\pm 0,01$	$\pm 0,02$	$\pm 0,03$	$\pm 0,04$	$\pm 0,06$
$A_r(I)$	1,00	0,87	0,67	0,51	0,40	0,29

x	$\pm 0,08$	$\pm 0,10$	$\pm 0,15$	$\pm 0,20$
$A_r(I)$	0,22	0,18	0,12	0,09

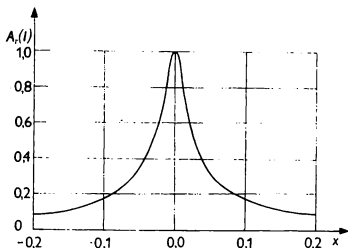
Graf je na obr. 18.

d) V tomto obvode platí

$$I = \frac{\tilde{U}}{R \sqrt{1 + (Q_s x)^2}} \cdot \exp j(\omega t + \varphi_x),$$

kde $\varphi_x = -\arctg Q_s x$, pre zadane hodnoty $\varphi_x = -\arctg 56 x$.

Vzťah $\varphi_x = F(x)$ považujeme za analytickú rovnicu frekvenčnej charakteristiky fázy φ_x prúdu.



Obr. 18

Niekoľko dvojíc hodnôt je v nasledujúcej tabuľke:

x	$\mp 0,20$	$\mp 0,15$	$\mp 0,05$	$\mp 0,03$	$\mp 0,02$	$\mp 0,01$	0,00
$\frac{\varphi_x}{^\circ}$	∓ 85	∓ 83	∓ 70	∓ 59	∓ 48	∓ 29	0

Graf je na obr. 19.

e) Medzné uhlové kmitočty

$$\omega_d = \omega_r - \frac{\omega_r}{2 Q_s} = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \frac{R}{2L} \doteq 1,652 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_h = \omega_r + \frac{\omega_r}{2 Q_s} = \frac{1}{\sqrt{LC}} + \frac{R}{2L} \doteq 1,682 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}.$$

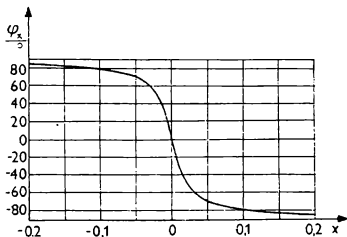
f) Pri rezonančnej frekvencii prechádza kondenzátorom prúd $I = U/R$ a na kondenzátore je napätie

$$U_C = \frac{I}{\omega_r C} = \frac{U}{R \omega_r C} = U \frac{\omega_r L}{R} = U Q_s \doteq 168 \text{ V}.$$

b) Druhé kolo súťaže

1. úloha (navrhol doc. RNDr. ing. Daniel Kluvanec, CSc.)

K jednému koncu priamej pružiny je pevne pripojené teleso s hmotnosťou m_1 , k druhému koncu pružiny teleso s hmotnosťou m_2 . Tuhosť pružiny pri rozťahovaní i stláčaní pružiny je k . Telesá spojené pružinou položíme na horizontálnu



Obr. 19

veľmi hladkú plochu. Telesá vzdialíme od seba, a tým sa pružina predĺži. Potom obidve telesá súčasne uvoľníme.

a) Aký pohyb koná každé z obidvoch telies? Navrhnutý model zdôvodnite.

b) Určte miesto na pružine, ktoré v modeli je trvale v pokoji.

c) Určte doby kmitu obidvoch telies.

d) Určte doby kmitu obidvoch telies v prípade $m_2 \gg m_1$. Pružina koná pohyb len v smere jej pozdĺžnej osi. Telesá považujte za hmotné body. Hmotnosť pružiny je veľmi malá. Jej trvalú deformáciu a trenie v riešení úlohy neuvažujte.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $m_1 = 0,25 \text{ kg}$, $m_2 = 1,0 \text{ kg}$, $k = 50 \text{ N.m}^{-1}$.

Riešenie

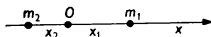
a) Súradnicovú sústavu Ox umiestnime v smere spojnice telies. Jej začiatok umiestnime do hmotného stredu telies (obr. 20). Potom platí

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \quad (1)$$

a ďalej pre (nulovú) súradnicu hmotného stredu

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Rovnica (1) platí pre každý okamih pohybu, ako dôsledok zákona zachovania hybnosti telies; v každom okamihu je



Obr. 20

hybnosť izolovanej sústavy nulová; hmotný stred oboch telies je trvale konštantný.

Ak si označíme $(x_1)_0, (x_2)_0$ súradnice telies pri nedeformovanej pružine, platí tiež z (1)

$$m_1 (x_1)_0 + m_2 (x_2)_0 = 0. \quad (2)$$

Zo vzťahov (1), (2) tiež máme

$$\begin{aligned} m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 &= 0, \quad \Delta x_1 = x_1 - (x_1)_0, \\ \Delta x_2 &= x_2 - (x_2)_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Pre výchylky telies však platí

$$\Delta x_1 = \frac{F}{k_1}, \quad |\Delta x_2| = \frac{F}{k_2}, \quad (4)$$

kde F je veľkosť sily napínajúcej pružinu, k_1 je tuhosť časti pružiny medzi prvým telesom a nepohyblivým bodom pružiny, k_2 je tuhosť časti pružiny medzi druhým telesom

a nepohyblivým bodom pružiny. Sily pôsobia v smeroch opačných vzhľadom na výchylky.

Pohyb telies možno modelovať ako jednoduchý kmitavý pohyb dvoch telies upevnených na koncoch pružiny, ktorej bod O je v pokoji.

b) Z navrhnutého modelu vyplýva, že trvale v pokoji je bod pružiny, ktorý jej dĺžku v nedeformovanom stave rozdeľuje v pomere určenom vzťahom (2)

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{(x_2)_0}{(x_1)_0}, \text{ pretože } (x_2)_0 < 0.$$

Je to miesto, ktoré je totožné s hmotným stredom obidvoch telies.

c) Zo (4) a vzťahu $F = k(|\Delta x_1| + |\Delta x_2|)$ máme

$$k_1 |\Delta x_1| + k_2 |\Delta x_2| = k (|\Delta x_1| + |\Delta x_2|). \quad (5)$$

Obidve telesá konajú jednoduchý kmitavý pohyb, trvale s opačnou fázou, pretože pre ich rýchlosti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ platí

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{v}_2.$$

Doby kmitov telies

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}}$$

určíme pomocou (3) a (5), lebo

$$k_1 = k \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right), \quad k_2 = k \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right),$$

$$T = T_1 = T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}}. \quad (6)$$

d) V prípade, že $m_2 \gg m_1$ platí zo (6)

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}}.$$

Druhé teleso je približne v pokoji, harmonické kmity koná len prvé teleso.

Číselne: $T \doteq 0,40 \text{ s}$, $T' \doteq 0,44 \text{ s}$.

2. úloha (navrhol RNDr. Rastislav Baník)

V rovnomernom prostredí s indexom lomu n_1 je rovnorodá guľa s polomerom R a indexom lomu n_2 , $n_2 > n_1$. Vo vzdialenosti $r = 2R$ od stredu guľe je bodový svetelný zdroj, ktorý vyžiaruje celkový svetelný tok Φ_0 , pričom žiarivosť zdroja je vo všetkých smeroch rovnaká.

a) Určte obsah S_1 časti povrchu guľe, ktorou do nej vnikajú svetelné lúče.

b) Určte obsah S_2 časti povrchu guľe, ktorou svetelné lúče vychádzajú z guľe.

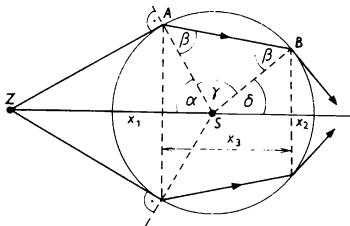
c) Určte obsah S_3 časti povrchu guľe, ktorou svetelné lúče neprechádzajú.

d) Určte svetelný tok Φ , ktorý prechádza guľou.

Úlohu riešte pre hodnoty $n_1 = 1,3$, $n_2 = 1,7$, $R = 5,0 \cdot 10^{-2}$ m, $\Phi_0 = 200$ lm.

Riešenie

a) Vzhľadom na to, že $n_2 > n_1$, lom lúčov od bodového zdroja na guľovom rozhraní je ku kolmici. Do guľe vnikajú



Obr. 21

po lome všetky svetelné lúče od bodového zdroja, ktoré prichádzajú na povrch gule (obr. 21). Bodový zdroj osvetľuje rozhranie v tvare guľového vrchlíka s polomerom R , výškou x_1 a obsahom

$$S_1 = 2 \pi R x_1 = 2 \pi R (R - R \cos \alpha) = 2 \pi R^2 (1 - \cos \alpha).$$

Z obr. 21 vyplýva $\alpha = 60^\circ$, pretože $SZ = 2R$, takže $\cos \alpha = \frac{1}{2}$;

$$S_1 = \pi R^2.$$

b) Uhol β určíme zo zákona lomu

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin 90^\circ = \frac{n_1}{n_2}, \beta \doteq 50^\circ.$$

Uhol γ určíme z rovnoramenného trojuholníka ABS : $\gamma \doteq 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

Uhol δ je

$$\delta \doteq 180^\circ - (\alpha + \gamma) \doteq 40^\circ.$$

Pre obsah S_2 guľového vrchlíka, ktorým lúče vychádzajú z gule, máme

$$S_2 = 2\pi R x_2 = 2\pi R (R - R \cos \delta) = 2\pi R^2 (1 - \cos \delta),$$

$$S_2 \doteq 0,47 \pi R^2.$$

c) Obsah S_3 môžeme vypočítať zo vzťahu

$$S_3 = 4\pi R^2 - (S_1 + S_2) \doteq 2,54 \pi R^2,$$

alebo zo vzťahu pre obsah guľového pásu

$$S_3 = 2\pi R x_3 = 2\pi R (R \cos \alpha + R \cos \delta) \doteq$$

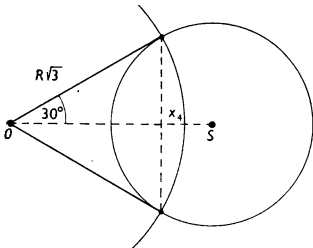
$$\doteq 2\pi R^2 (0,50 + 0,77) = 2,54 \pi R^2.$$

d) Svetelný tok prechádzajúci guľou je rovný svetelnému toku, ktorý prechádza vrchlíkom guľe s polomerom $R\sqrt{3}$ a so stredom O_1 v bode umiestnenia bodového svetelného zdroja. Výška x_4 vrchlíka (obr. 22)

$$x_4 = R\sqrt{3} - R\sqrt{3} \cos 30^\circ \doteq 0,22 R.$$

Obsah S_4 vrchlíka

$$S_4 = 2\pi R\sqrt{3} x_4 \doteq 0,76 \pi R^2.$$



Obr. 22

Svetelný tok

$$\Phi = \Phi_0 \frac{S_4}{4\pi(R\sqrt{3})^2} \doteq 0,063 \Phi_0 .$$

Pre zadané hodnoty: $S_1 \doteq 78 \text{ cm}^2$, $S_2 \doteq 36 \text{ cm}^2$,
 $S_3 \doteq 200 \text{ cm}^2$, $\Phi \doteq 13 \text{ lm}$.

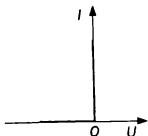
3. úloha (navrhl doc. RNDr. Oldřich Lepil, CSc.)

Elektrický obvod je sestaven ze dvou rezistorů R_1 a R_2 se stejnými odpory, dvou stejných diod s charakteristikami znázorněnými na obr. 23 a žárovky s jmenovitými hodnotami U_0 , I_0 (obr. 24). Zdroj stejnosměrného napětí s vnitřním odporem R_i připojíme ke svorkám A, B nejprve s jednou polaritou, potom s opačnou polaritou. V obou případech zjistíme, že mezi svorkami žárovky je jmenovité napětí.

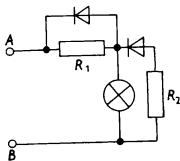
a) Určete proudy, které v obou případech procházejí rezistory.

b) Určete elektromotorické napětí zdroje.

c) Určete proudy, které procházejí rezistory v obou případech, jestliže se vlákno žárovky spálí. Odpory spojovacích vodičů neuvažujte. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $U_0 = 3,5 \text{ V}$, $I_0 = 0,20 \text{ A}$, $R_1 = 1,4 \Omega$.



Obr. 23



Obr. 24

Řešení

a) Schémata zapojení jsou na obr. 25 a 26. Odpor diody v propustném směru je nulový, v závěrném směru nekonečně velký. Pro znázorněné obvody platí, podle zadání

$$U_e - \left(R_1 + \frac{U_0}{I_2} \right) I_0 = U_0, \quad (1)$$

$$U_e - R_1(I_0 + I_2) = U_0. \quad (2)$$

Řešením těchto rovnic dostaneme

$$I_2 = \sqrt{\frac{U_0 I_0}{R_1}}.$$

Po připojení obvodu se zdrojem podle schématu na obr. 25 procházejí rezistory proudy

$$I_{R_1} = I_0, \quad I_{R_2} = 0 \text{ A}.$$

Při připojení obvodu se zdrojem podle schématu na obr. 26 procházejí rezistory proudy

$$I'_{R_1} = 0 \text{ A}, \quad I'_{R_2} = I_2 = \sqrt{\frac{U_0 I_0}{R_1}}.$$

b) Z rovnice (2) a ze vztahu pro I_2 určíme

$$U_e = U_0 + R_i \left(I_0 + \sqrt{\frac{U_0 I_0}{R_i}} \right) . \quad (3)$$

c) Jestliže se přepálí vlákno žárovky, prochází obvodem proud jen v zapojení podle obr. 26:

$$I''_{R_1} = 0 \text{ A}, \quad I''_{R_2} = \frac{U_e}{R_i + R} ,$$

kde R je odpor každého z rezistorů. Určíme jej pomocí zapojení podle obr. 25:

$$U_e = U_0 + (R + R_i) I_0 ,$$

odtud, s použitím (3)

$$R = \sqrt{\frac{U_0 R_i}{I_0}} .$$

V zapojení podle obr. 26 je tedy

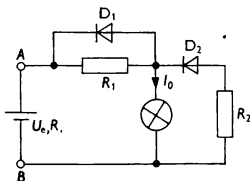
$$I''_{R_2} = \frac{U_0 + R_i \left(I_0 + \sqrt{\frac{U_0 I_0}{R_i}} \right)}{R_i + \sqrt{\frac{U_0 R_i}{I_0}}} .$$

Pro zadané hodnoty:

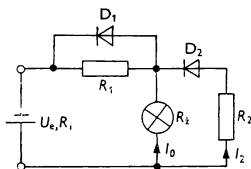
a) $I_{R_1} = 0,20 \text{ A}$, $I_{R_2} = 0 \text{ A}$; $I'_{R_1} = 0 \text{ A}$, $I'_{R_2} = 0,71 \text{ A}$.

b) $U_e = 4,8 \text{ V}$.

c) $I''_{R_1} = 0 \text{ A}$, $I''_{R_2} = 0,76 \text{ A}$.



Obr. 25



Obr. 26

4. úloha (navrhol doc. RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc.)

Rezistor s odporom $R = 3,6 \text{ k}\Omega$ je spojený sériovo s cievkou s indukčnosťou $L = 21 \text{ mH}$ a so zdrojom harmonického napätia s amplitúdou $U = 8,0 \text{ V}$.

a) Určte medznú kruhovú frekvenciu ω_m obvodu.

b) Určte združenú frekvenčnú charakteristiku prúdu $I = f_1(\omega)$ a v rovine komplexných čísiel ju znázorníte graficky. Pomocou grafu kvalitatívne popíšte závislosť amplitúdy prúdu I a začiatočnej fázy φ_1 prúdu od kruhovej frekvencie ω . Pomocou grafu približne určte amplitúdu prúdu a jeho začiatočnú fázu pre kruhovú frekvenciu $\omega_0 = 0,50 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$.

c) Pre medznú kruhovú frekvenciu ω_m určte amplitúdu napätia U_R medzi svorkami rezistora a začiatočnú fázu φ_R , amplitúdu napätia U_L medzi svorkami cievky a začiatočnú fázu φ_L .

Začiatočná fáza napätia je nulová. Graf znázorníte pre čas $t = 0 \text{ s}$.

Riešenie

a) Pre medznú frekvenciu platí

$$\left| \frac{X}{R} \right| = 1,$$

v našom prípade

$$\frac{\omega_m L}{R} = 1, \quad \omega_m = \frac{R}{L}.$$

b) Združená frekvenčná charakteristika prúdu

$$\vec{I} = \frac{\vec{U}}{R \left[1 + j \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right]} = \frac{U}{R \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} \right)^2}} \cdot \exp j(\omega t + \varphi_1), \quad (1)$$

kde

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = - \frac{\omega L}{R}, \quad \varphi_1 \in \left\langle 0, -\frac{\pi}{2} \right\rangle. \quad (2)$$

Použitím vzťahu (2) a dosadením hodnôt U, R, L možno pre čas $t = 0$ s funkcie (1) a (2) zapísať v tvare

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega}{\omega_m} = - \frac{\omega}{170 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}}, \quad (2a)$$

$$I = 2,2 \text{ mA} \cdot \cos \varphi_1 \cdot \exp j \varphi_1. \quad (1a)$$

Funkciu (1a) možno znázorniť graficky v rovine komplexných čísel, ak určíme niekoľko sebeodpovedajúcich hodnôt ω, φ_1 pomocou funkcie (2a) - tab. 9.

Amplitúda prúdu v obvode s rastúcou frekvenciou sa zmenšuje z hodnoty 2,2 mA pri $\omega = 0 \text{ s}^{-1}$ na hodnotu blízku 0 A

T 9

$\frac{\omega}{10^3 \cdot \text{s}^{-1}}$	10	50	130	500	900	1 500
$\frac{\varphi_1}{^\circ}$	-3,4	-16	-37	-71	-79	-84
$\frac{\varphi_1}{\text{rad}}$	-0,059	-0,28	-0,65	-1,24	-1,38	-1,47

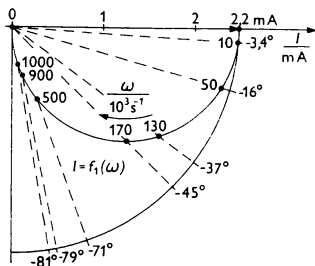
pri $\omega \rightarrow \infty \text{ s}^{-1}$. Začiatočná fáza φ_i prúdu sa znižuje z hodnoty 0 rad pri $\omega = 0 \text{ s}^{-1}$ na hodnotu $-\frac{\pi}{2}$ pri $\omega \rightarrow \infty \text{ s}^{-1}$. Z grafu (obr. 27) pre $\omega_0 = 0,50 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ máme $I \doteq 0,72 \text{ mA}$, $\varphi_i \doteq -1,24 \text{ rad} \dots -71^\circ$.

c) Pre medznú frekvenciu ω_m je

$$U_R = U \cos \varphi_R, \text{ tg } \varphi_R = -1, \text{ tj. } U_R \doteq 0,71 U,$$

$$U_L = U \cos \varphi_L, \text{ tg } \varphi_L = 1, \text{ tj. } U_L \doteq 0,71 U.$$

Číselne: a) $\omega_m \doteq 170 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$; b) Pre $\omega_0 = 0,50 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ je $I \doteq 0,72 \text{ mA}$, $\varphi_i \doteq -1,24 \text{ rad} \dots -71^\circ$; c) $U_R = U_L \doteq 5,7 \text{ V}$, $\varphi_R = -\frac{\pi}{4} = -\varphi_L$.



Obr. 27

c) Tretie kolo súťaže

1. úloha (navrhol doc. RNDr. Ing. Daniel Kľuvanec, CSc.)

Dva kotúče sú umiestnené tak, že sa môžu otáčať okolo osi, ktorá má smer horizontálnej priamky p (obr. 28). Stredy ko-

túčov sú pevne spojené priamym ocelovým drôtom. Ak jeden z kotúčov pevne uchytime, druhý môžeme otočiť momentom sily M_0 o uhol α_0 , pričom nenastáva trvalá deformácia drôtu. Moment zotrvačnosti kotúča A je I_1 , moment zotrvačnosti kotúča B je I_2 .

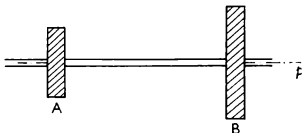
a) Kotúč B pevne uchytime, kotúč A otočíme okolo osi a uvoľníme. Aký pohyb bude konať kotúč A? Navrhnutý model zdôvodnite. Určte dobu kmitu T_1 torzných kmitov kotúča A.

b) Kotúč B pevne uchytime, kotúč A otočíme a obidva kotúče súčasne uvoľníme. Aký pohyb bude konať každý z obidvoch kotúčov? Navrhnutý model zdôvodnite. Určte miesto na drôte, ktoré je trvale v pokoji. Určte dobu kmitu T_2 torzných kmitov kotúčov A, B.

c) Určte dobu kmitu T_3 kmitajúcich kotúčov podľa b) časti úlohy, ak predpokladáte, že $I_2 \gg I_1$.

Vzájomná vzdialenosť kotúčov pri ich kmitavom pohybe je stála, drôt pri kmitoch kotúčov zachováva priamy smer. Trenie, hmotnosť, polomer drôtu a trvalú deformáciu drôtu v riešení úlohy neuvažujte.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $M_0 = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ N.m}$, $\alpha_0 = 0,17 \text{ rad}$, $I_1 = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$, $I_2 = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$.



Obr. 28

Poznámky:

1. Pri pružnej deformácii v torzii pôsobí torzný moment M_t síl pružnosti, pre ktorý platí $M_t = -D_0 a$, kde a je uhlová výchylka, D_0 konštanta.
2. Pre rotačné pohyby telies okolo osi platí $M = I \varepsilon$, M je pôsobiaci moment síl, I moment zotrvačnosti, ε uhlové zrýchlenie.

Informace potřebné k řešení

Jde o tzv. torzní kmity, které nejsou zahrnuty ve středoškolském učivu. Je to analogie harmonických kmitů po úsečce, jenže nejde o pohyb posuvný, nýbrž rotační.

Pro harmonický pohyb po úsečce platí

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -k\mathbf{x},$$

kde $\mathbf{F}$ je síla, která působí na hmotný bod o hmotnosti m a uděluje mu zrychlení $\mathbf{a}$, k je kladná konstanta, $\mathbf{x}$ je vektor okamžité výchylky. Uvedený vztah vyjadřuje, že síla $\mathbf{F}$ působí v takovém směru, že vrací hmotný bod do klidové polohy, a její velikost je přímo úměrná velikosti výchylky. Jednoduchou úpravou uvedeného vztahu dostaneme, ve skalárním tvaru

$$a = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x, \quad (1)$$

kde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ je úhlová frekvence kmitů.

V publikaci Chytilová, M.: Mechanika - studijní texty, Škola mladých fyziků, SPN 1988, str. 31 se dovíte, že pro otáčivý pohyb platí vztahy obdobné vztahům platným pro posuvný pohyb, ale místo hmotnosti m tělesa pohybujícího se posuvným pohybem je třeba uvažovat moment setrvačnosti I tělesa vzhledem k ose otáčení, místo zrychlení $\mathbf{a}$ úhlové zrychlení ε , místo síly $\mathbf{F}$ moment $\mathbf{M}$ vzhledem k ose, místo hybnosti $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ moment hybnosti $\mathbf{L} = I\omega$ a místo lineární výchylky x úhlovou výchylku a .

Vztah (1) prepíšeme tedy pro torzní kmity takto:

$$\varepsilon = -\frac{k}{I} \alpha = -\omega^2 \alpha.$$

Riešenie

Označíme $D_0 = \frac{M_0}{\alpha_0}$, číselne $D_0 \doteq 8,2 \cdot 10^{-2} \text{ N.m.}$

a) Pre pohyb kotúča A platí

$$I_1 \varepsilon + D_0 \alpha = 0, \text{ tj. } \varepsilon + \frac{D_0}{I_1} \alpha = 0.$$

Doba kmitu

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{D_0}} \doteq 1,6 \text{ s.}$$

b) Súčet momentov hybnosti $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ kotúčov je v každom okamihu nulový. Zo zákona zachovania momentu hybnosti $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{0}$ vyplýva

$$I_1 \omega_1 - I_2 \omega_2 = 0, \quad (1)$$

kde ω_1, ω_2 sú okamžité uhlové rýchlosti kotúčov A, B. Uhlové rýchlosti ω_1, ω_2 majú navzájom opačný smer. Pre určitý okamih plynú z (1)

$$I_1 \alpha_1 - I_2 \alpha_2 = 0, \quad (2)$$

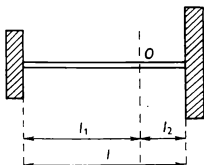
kde α_1, α_2 sú okamžité uhlové výchylky kotúčov. Z pružných vlastností drôtu vyplýva

$$\alpha_1 = k l_1, \quad \alpha_2 = k l_2, \quad (3)$$

kde l_1, l_2 sú dĺžky častí drôtu (obr. 29). V našom prípade l_1, l_2 sú tiež vzdialenosti kotúčov od určitého rezu na drôte, ktorý sa neotáča a je trvale v pokoji, pričom $l_1 + l_2 = l$. Dosadením (3) do (2) a úpravou máme

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{I_2}{I_1}, \quad l_1 + l_2 = l. \quad (4)$$

Vzťahy (4) určujú miesto na drôte, ktoré sa neotáča. Obidva



Obr. 29

kotúče konajú torzné kmity, ktorých uhlová výchylka je harmonickou funkciou času. Doba kmitu T_2 kotúčov je

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{D_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{D_2}}, \quad (5)$$

Kde D_1 , D_2 majú význam obdobný ako veličina D_0 vo vzťahu pre T_1 .

Tiež platí

$$M_1 = D_1 \alpha_1 = M_2 = D_2 \alpha_2$$

alebo použitím vzťahu (3)

$$D_1 l_1 = D_2 l_2 = D_0 l.$$

Z toho

$$D_1 = D_0 \frac{l}{l_1} \text{ alebo } D_2 = D_0 \frac{l}{l_2}. \quad (6)$$

Zo (4) a (6) máme

$$D_1 = D_0 \left(1 + \frac{I_1}{I_2}\right), \quad D_2 = D_0 \left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right).$$

Dosadením do (5) dostaneme

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{D_0 \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right)}} \doteq 0,95 \text{ s}. \quad (7)$$

c) V prípade, že $I_2 \gg I_1$ je $\frac{1}{I_1} \gg \frac{1}{I_2}$

a z (7) máme

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{D_0}} = T_1 \doteq 1,6 \text{ s}.$$

Kmity koná kotúč s menším momentom zotrvačnosti. Teleso s väčším momentom zotrvačnosti zostáva v pokoji.

2. úloha (navrhla RNDr. M. Kličková)

Kolmo na spojnicu dvoch bodových zdrojov Z_1, Z_2 svetla umiestnime na optickej lavici medzi zdroje rovinný biely papier (matnicu) s masťou škvrnou uprostred. Svetivosť prvého zdroja je I_1 .

Zdroje svetla necháme v rovnakej vzájomnej vzdialenosti a posúvame matnicu medzi zdrojmi. Pritom pozorujeme matnicu najskôr zo strany zdroja Z_1 a potom zo strany zdroja Z_2 . Ak pozorujeme matnicu zo strany zdroja Z_1 , škvrna na matnici zanikne pri vzdialenostiach a_1, a_2 zdrojov Z_1, Z_2 od matnice. Ak pozorujeme matnicu zo strany zdroja Z_2 , škvrna na matnici zanikne pri vzdialenostiach b_1, b_2 zdrojov Z_1, Z_2 od matnice. Určte svetivosť I_2 zdroja Z_2 ako funkciu podielov

$$p = \frac{a_1}{a_2}, q = \frac{b_1}{b_2} \text{ a svetivosti } I_1 \text{ zdroja } Z_1.$$

Predpokladajte, že svetelné lúče dopadajú na celú plochu matnice kolmo. Svetelný tok svetla odrazeného od povrchu matnice je priamoúmerný osvetleniu, svetelný tok svetla prechádzajúceho matnicou je priamoúmerný osvetleniu. Masťná škvrna viac prepúšťa a menej odráža svetlo ako nemasťný biely papier v jej okolí.

Na aký účel sa tento postup môže použiť v praxi?

Riešenie

Osvetlenie škvrny od zdrojov Z_1, Z_2 , ak pozorujeme matnicu zo strany zdroja Z_1 , je

$$E_1 = k_s \frac{I_1}{a_1^2} + k'_s \frac{I_2}{a_2^2}, \quad (1)$$

Osvetlenie okolia škvrny v tomto prípade je

$$E_2 = k_p \frac{I_1}{a_1^2} + k'_p \frac{I_2}{a_2^2}, \quad (2)$$

kde k_s , k_p sú súčinitele odrazu svetla na škvrne a papieri, k'_s a k'_p sú súčinitele priepustnosti svetla škvrnou a papierom. Pre a_1, a_2 však platí $E_1 = E_2$.

Dosadením z (1) a (2) a úpravou máme

$$I_2 p^2 (k'_s - k'_p) = I_1 (k_p - k_s). \quad (3)$$

Podobnou úvahou pre pozorovanie matnice zo strany zdroja Z_2 dostaneme

$$I_2 q^2 (k_s - k_p) = I_1 (k'_p - k'_s). \quad (4)$$

Z rovníc (3), (4) máme

$$I_2 = \frac{I_1}{pq}.$$

V praxi sa postup dá použiť na určenie svietivosti zdroja porovnávacou metódou.

3. úloha (navrhol doc. RNDr. Arpád Kecskés, CSc.)

Dva zdroje s elektromotorickými napätiami U_{e1} , U_{e2} , $U_{e2} > U_{e1}$ a vnútornými odpormi r_1 , r_2 sú zapojené s diódou a s kondenzátorom s kapacitou C v obvode podľa obr. 30. Charakteristika diódy je znázornená na obr. 31. V čase $t = 0$ s zapneme spínač K .

a) Určte zmenu ΔQ náboja kondenzátora po ustálení prúdov vo vetvách obvodu vzhľadom na začiatkový stav obvodu.

b) Určte náboj Q kondenzátora ako funkciu času t po zapnutí spínača v obvode.

Odpory spojovacích vodičov a odpor kondenzátora neuvažujte. Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $U_{e1} = 1,0$ V, $U_{e2} = 3,0$ V, $r_1 = 0,20$ Ω , $r_2 = 0,40$ Ω , $C = 10$ μ F.

Riešenie

a) Začiatkový náboj kondenzátora

$$Q_0 = U_{e2}C.$$

Ustálený prúd v obvode po zapnutí spínača

$$I = \frac{U_{e2} - U_{e1} - U_D}{r_1 + r_2},$$

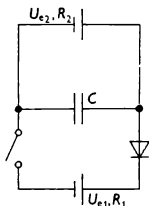
kde hodnotu $U_D = 1,0$ V prečteme z grafu na obr. 31.

Napätie medzi svorkami kondenzátora

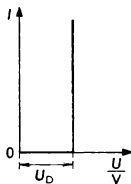
$$\frac{Q}{C} = U_{e2} - r_2 I = U_{e2} - r_2 \frac{U_{e2} - U_{e1} - U_D}{r_1 + r_2},$$

$$Q = C \left(U_{e2} - r_2 \frac{U_{e2} - U_{e1} - U_D}{r_1 + r_2} \right),$$

$$\Delta Q = Q - Q_0 = -r_2 C \frac{U_{e2} - U_{e1} - U_D}{r_1 + r_2} \doteq -6,7 \mu\text{C}.$$



Obr. 30



Obr. 31

b) Obr. 32

Označíme $Q(t)$ okamžitý náboj kondenzátora. Prúd, ktorý vychádza z kondenzátora, je

$$I_3 = - \frac{dQ(t)}{dt}.$$

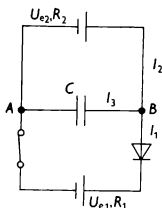
Pre prúd I_3 možno napísať

$$I_3 = I_1 - I_2, \quad (1)$$

kde

$$I_1 = \frac{\frac{Q(t)}{C} - (U_{e1} + U_D)}{r_1},$$

$$I_2 = \frac{U_{e2} - \frac{Q(t)}{C}}{r_2}.$$



Obr. 32

Z rovnosti (1) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{dQ(t)}{dt} &= -\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} Q(t) + \frac{(U_D + U_{e1}) r_2 + U_{e2} r_1}{r_1 r_2} = \\ &= A Q(t) + B, \end{aligned}$$

ak zavedeme označenia

$$A = -\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C}, \quad B = \frac{(U_D + U_{e1}) r_2 + U_{e2} r_1}{r_1 r_2}.$$

Táto diferenciálna rovnica určuje hľadanú funkciu $Q(t)$:

Jednoduchou úpravou dostaneme tvar

$$\frac{dQ(t)}{AQ(t) + B} = dt.$$

Vľavo integrujeme podľa $Q(t)$, vpravo podľa t :

$$\frac{1}{A} \ln [AQ(t) + B] = t + K_1,$$

kde K_1 je integračná konštanta. Inverzná funkcia

$$AQ(t) + B = \exp(At + AK_1) = K \exp(At),$$

kde $K = \exp(AK_1)$ je konštanta.

Vyjadríme teraz všeobecný integrál našej diferenciálnej rovnice

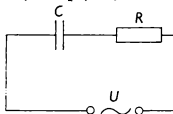
$$Q(t) = \frac{1}{A} [K \exp(At) - B]. \quad (2)$$

Našej úlohe vyhovuje partikulárny integrál pre určitú hodnotu integračnej konštanty K . Túto hodnotu určíme z počiatočnej podmienky: pre $t = 0$ s je $Q(t) = Q_0 = U_{e2}C$. Dosadíme do (2) a dostaneme $K = AU_{e2}C + B$. Dosadením za K do (2) nájdeme vyhovujúci partikulárny integrál

$$Q(t) = -\frac{B}{A} + \left(CU_{e2} + \frac{B}{A}\right) \exp(At).$$

Pre zadané hodnoty

$$Q(t) = [2,3 + 0,70 \exp(-7,5 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1} \cdot t)] \cdot 10^{-5} \text{ C}.$$



Obr. 33

4. úloha (navrhol doc. RNDr. ing. Daniel Kluvanec, CSc.)

Rezistor s odporom $R = 5,6 \text{ k}\Omega$ a kondenzátor s kapacitou $C = 12 \text{ nF}$ sú spojené sériovo v jednoduchom obvode so zdrojom harmonického napätia s amplitúdou $U = 14 \text{ V}$.

a) Určte združenú frekvenčnú charakteristiku prúdu $I = f_1(\omega)$ a v rovine komplexných čísiel ju znázorníte graficky. Pomocou nej napíšte vzťahy pre amplitúdovú frekvenčnú charakteristiku prúdu $I = f_1(\omega)$ a pre frekvenčnú charakteristiku začiatočnej fázy φ_i prúdu, $\varphi_i = f_2(\omega)$. Z grafu určte približné hodnoty amplitúdy I prúdu a začiatočnej fázy φ_i prúdu pre kruhovú frekvenciu $\omega = 10 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$.

b) Určte združené frekvenčné charakteristiky pre napätie $\bar{U}_R = f_3(\omega)$ medzi svorkami rezistora a pre napätie $\bar{U}_C = f_4(\omega)$ medzi svorkami kondenzátora a znázorníte ich graficky v rovine komplexných čísiel. Napíšte vzťahy pre amplitúdové charakteristiky jednotlivých napätí $U_R = f_3(\omega)$, $U_C = f_4(\omega)$ a vzťahy pre začiatočné fázy jednotlivých napätí $\varphi_R = f_5(\omega)$, $\varphi_C = f_6(\omega)$.

c) Určte medznú kruhovú frekvenciu ω_m obvodu. Začiatočná fáza napätia je nulová. Grafy znázorníte pre čas $t = 0 \text{ s}$.

Riešenie

a) Združená frekvenčná charakteristika prúdu pre daný obvod (obr. 33) je

$$I = \frac{\bar{U}}{R \left(1 - j \frac{1}{\omega CR}\right)} = \frac{U}{R \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}} \exp(j\omega t + \varphi_i). \quad (1)$$

Amplitúdová frekvenčná charakteristika prúdu

$$I = \frac{U}{R \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}}. \quad (2)$$

Frekvenčná charakteristika začiatočnej fázy prúdu

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{1}{\omega CR}, \quad \varphi_i \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ rad}. \quad (3)$$

Použitím vzťahu (3) a dosadením hodnôt $R = 5,6 \text{ k}\Omega$, $C = 12 \text{ nF}$ vzťahu (3), (2), (1) možno napísať

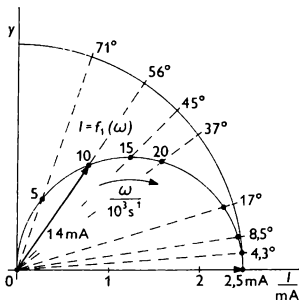
$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{15 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}}{\omega}, \quad (3a)$$

$$I = 2,5 \text{ mA} \cdot \cos \varphi_i, \quad (2a)$$

$$I = 2,5 \text{ mA} \cdot \exp j\varphi_i \cdot \cos \varphi_i \quad (1a)$$

pre $t = 0 \text{ s}$.

Graf funkcie (1a) je na obr. 34. K znázorneniu grafu potrebujeme určiť niekoľko sebeodpovedajúcich hodnôt ω , φ_i (tab. 10). Pre $\omega = 10 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ máme $I \doteq 1,4 \text{ mA}$, $\varphi_i \doteq 56^\circ$.



Obr. 34

b) Združená charakteristika pre napätie na rezistore

$$\tilde{U}_R = RI = \frac{U}{1 - j \frac{1}{\omega CR}} =$$

$\frac{\omega}{10^3 \text{ s}^{-1}}$	200	100	50	20	10	5
$\frac{\varphi_t}{\text{rad}}$	0,075	0,15	0,30	0,65	0,98	1,24
$\frac{\varphi_t}{^\circ}$	4,3	8,5	17	37	56	71

$$= \frac{U}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}} \cdot \exp j(\omega t + \varphi_R). \quad (4)$$

Amplitúdová frekvenčná charakteristika napätia na rezistore

$$U_R = \frac{U}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}}. \quad (5)$$

Frekvenčná charakteristika začiatočnej fázy napätia na rezistore

$$\operatorname{tg} \varphi_R = \frac{1}{\omega CR}, \quad \varphi_R \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ rad}. \quad (6)$$

Vzťahy (6), (5), (4) možno dosadením hodnôt R , C a U upraviť

$$\operatorname{tg} \varphi_R = \frac{15 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}}{\omega}, \quad (6a)$$

$$U_R = 14 \text{ V} \cdot \cos \varphi_R \quad (5a)$$

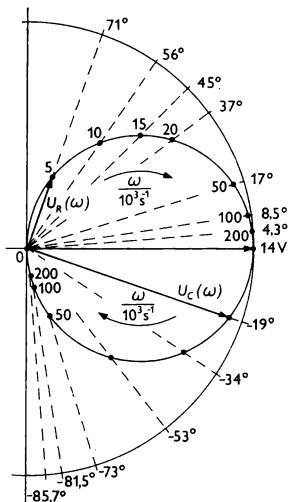
$$\tilde{U}_R = 14 \text{ V} \cdot \exp j \varphi_R \cdot \cos \varphi_R \quad (4a)$$

pre $t = 0 \text{ s}$.

Podobne možno napísať vzťahy pre príslušné charakteristiky napätia na kondenzátore

$$\begin{aligned}\tilde{U}_C &= -\frac{j}{\omega C} I = \frac{\tilde{U}}{1 + j\omega RC} = \\ &= \frac{U}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \exp j(\omega t + \varphi_C),\end{aligned}\quad (7)$$

$$U_C = \frac{U}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}},\quad (8)$$



Obr. 35

$$\operatorname{tg} \varphi_C = -\omega RC, \quad \varphi_C \in \left\langle 0, -\frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ rad.} \quad (9)$$

Dosadením hodnôt R, C, U máme

$$\operatorname{tg} \varphi_C = -\omega \cdot 67 \cdot 10^{-6} \text{ s}, \quad (9a)$$

$$U_C = 14 \text{ V} \cdot \cos \varphi_C, \quad (8a)$$

$$U_C = 14 \text{ V} \cdot \exp j \varphi_C \cdot \cos \varphi_C \quad (7a)$$

pre $t = 0 \text{ s}$.

Graf združených charakteristík pre napätia na rezistore a na kondenzátore možno zostrojit, ak určíme niekoľko sebeodpovedajúcich hodnôt veličín $\omega, \varphi_R, \varphi_C$ (tab. 11).

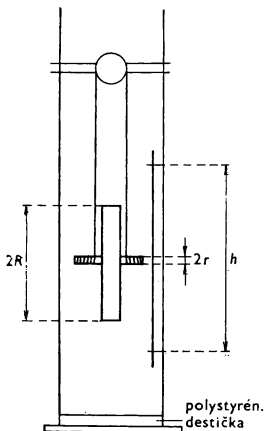
Graf funkcií (4a) a (7a) je na obr. 35.

T 11

$\frac{\omega}{10^3 \text{ s}^{-1}}$	200	100	50	20	10	5
$\frac{\varphi_R}{\text{rad}}$	0,075	0,15	0,30	0,65	0,98	1,24
$\frac{\varphi_R}{^\circ}$	4,3	8,5	17	37	56	71
$\frac{\varphi_C}{\text{rad}}$	-1,50	-1,42	-1,27	-0,92	-0,59	-0,33
$\frac{\varphi_C}{^\circ}$	-85,6	-81,5	-73	-53	-34	-19

5. úloha (navrhl Jaroslav Honner)

Určení momentu setrvačnosti válce vzhledem k jeho rotační ose.



Obr. 36

Úvod

Plný stejnorodý válec o hmotnosti m je zavěšen na dvou velmi přibližně rovnoběžných vláknech navinutých na sousedě tyčce s poloměrem r (obr. 36). V tíhovém poli se vlákna odvíjejí a válec klesá svisle dolů. Z teoretické úvahy plyne, že pro posuvné zrychlení tohoto pohybu platí

$$a = \frac{g}{\frac{I}{mr^2} + 1}, \quad (1)$$

kde $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je tíhové zrychlení, I moment setrvačnosti válce.

Pomůcky: plný válec opatřený tenkou souosou tyčkou, laboratorní váhy se sadou závaží (nejmenší závaží 1 g), posuvné měřidlo, mikrometr, stopky, délkové měřidlo se dvěma ukazovateli ve vzdálenosti 0,50 m, stojan, tenké vlákno.

Základní úloha

Použitím vztahu (1) určete moment setrvačnosti I homogenního válce vzhledem k jeho rotační ose. Vztah upravte zavedením vhodných kinematických veličin, které budete měřit a pomocí nich určovat moment setrvačnosti I .

Pokyny

1. Dráhu h volte 0,50 m, upravte vlákna a závěs tak, aby při odvinutí vláken narazil válec na polystyrénovou destičku. Závity vlákna viňte z vnější strany vedle sebe, aby odchylka vláken od svislého směru byla co nejmenší.
2. K poloměru r osy (tyčky) přičtete poloměr r' vlákna, předpokládejte, že se odvíjí geometrická osa vlákna, takže v (1) místo r je třeba položit $(r + r')$.
3. Měření každé veličiny proveďte několikrát a potom počítejte s průměrnými hodnotami. Hmotnost m změřte dvakrát (nejmenší závaží 1 g), poloměr R válce, r osy (tyčky) a r' vlákna pětkrát v různých místech, dobu t desetkrát.
4. Odchylky při měření hmotnosti m válce, poloměrů r , r' , dráhy h odhadněte podle přesnosti použitých měřidel. U doby t a poloměru R válce vypočtete absolutní odchylku aritmetického průměru.
Z vypočítaných a odhadnutých odchylek určete odchylku naměřené hodnoty momentu setrvačnosti I .
5. Výšku (dráhu) $h = 0,50 \text{ m}$ kontrolujte před každým měřením.

Doplňkové úlohy

1. Moment setrvačnosti I vzhledem k dané ose vypočtete podle vztahu $I = \frac{1}{2} mR^2$ pomocí hodnot m , R určených experimentálně.
2. Porovnejte hodnotu momentu setrvačnosti určenou experimentálně s vypočtenou podle teoretického vztahu (vyjádřete v procentech). Vysvětlete rozdíl těchto hodnot.
3. Za předpokladu, že posuvný pohyb těžiště válce je rovnoměrně zrychlený, odvoďte vztah (1).

Řešení

1. Pro zrychlení posuvného pohybu těžiště podle předpokladu platí $a = \frac{2h}{t^2}$. Dosazením do (1) a po úpravě s přihlédnutím k poznámce 2 v pokynech dostáváme pro moment setrvačnosti I vztah

$$I = m(r + r')^2 \cdot \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (2)$$

2. Měření jednotlivých veličin s přihlédnutím k pokynům: (relativní odchylku značíme δ , absolutní Δ)
 - a) Hmotnost válce byla stanovena pomocí laboratorních vah, odchylka odhadnuta na 0,5 g.
 $m = (616,5 \pm 0,5) \text{ g}$, $\delta_m \doteq 0,1 \text{ ‰}$.
 - b) Poloměr hřídele (osy) byl změřen mikrometrem pětikrát, odchylka odhadnuta na 0,005 mm
 $r = (1,954 \pm 0,005) \text{ mm}$, $\delta_r \doteq 0,3 \text{ ‰}$.
 - c) Poloměr vlákna změřen mikrometrem pětikrát, odchylka je zanedbatelná, protože r' je více než o řád menší než r .
 $r' = 0,085 \text{ mm}$.
 - d) Délka h dráhy byla určena vzdáleností ukazovatelů na 0,50 m. Odchylky vznikají při odhadu polohy ukazovatele a tyčky (osy) a navinutí. Odhadneme-li ji na jedno navinutí na obvod tyčky, je 1,2 cm.
 $h = (50 \pm 1,2) \text{ cm}$, $\delta_h \doteq 2 \text{ ‰}$.

- e) Poloměr setrvačníku měřen pětkrát posuvným měřidlem v různých místech a výpočet absolutní odchylky aritmetického průměru je

$$R = (48,75 \pm 0,45) \text{ mm}, \quad \delta_R \doteq 0,9 \text{ ‰}.$$

- f) Měření doby t s přesností na 0,1 s Time-calculatorem TESLA provedeno desetkrát a vypočtena absolutní odchylka

$$t = (5,35 \pm 0,2) \text{ s}, \quad \delta_t \doteq 0,4 \text{ ‰}.$$

Z průměrných hodnot vychází podle (2) pro moment setrvačnosti

$$I = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Relativní odchylka $\delta_I = \delta_m + 2\delta_r + 2\delta_t + \delta_h$,

$$\delta_I = 0,1 \text{ ‰} + 2 \cdot 0,3 \text{ ‰} + 2 \cdot 0,4 \text{ ‰} + 2 \text{ ‰} \doteq 3 \text{ ‰}.$$

Pro absolutní odchylku pak dostáváme ze vztahu $\Delta_I = \delta_I I$:

$$\Delta_I = 0,27 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Po zaokrouhlení na dvě platné cifry je moment setrvačnosti

$$I = (7,2 \pm 0,3) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Doplňkové úlohy

1. Z naměřených hodnot m a R vychází podle teoretického vztahu

$$I_{\text{teor}} = 7,32 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad \delta_{\text{teor}} = 0,6 \text{ ‰}$$

$$\Delta_{\text{teor}} = 0,04 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{\text{teor}} = (7,32 \pm 0,04) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

2. Porovnáním středních hodnot dostáváme

$$\frac{I}{I_{\text{teor}}} = 98,4 \text{ ‰},$$

což ukazuje, že shoda je velmi dobrá. Teoretická hodnota je vyšší než naměřená z těchto důvodů:

- a) Hmotnost m zjištěná vážením je větší než skutečná hmotnost plného válce o poloměru R , neboť je větší o hmotnost přečnívajících částí sousedě tyčky. Ve vztahu pro teoretickou hodnotu I_{teor} je m větší než ve skutečnosti.

b) Neuvažovali jsme vliv třecí síly při odvíjení vlákna po osově tyčce. Tato síla však existuje a ovlivňuje velikost zrychlení.

Zanedbání obou vlivů zmenšuje hodnotu momentu setrvačnosti vypočtenou ze vztahu (2).

3. Ze zákona zachování energie plyne

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2. \quad (3)$$

Pro dráhu h , úhlovou rychlost ω , posuvnou rychlost v těžiště, zrychlení a těžiště máme vztahy

$$h = \frac{1}{2} at^2, \quad v = \omega r, \quad v = at.$$

Jejich dosazením do (3) a po úpravě dostáváme vztah (1).

2 ÚLOHY KATEGORIE B

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl RNDr. Ivo Volf)

Umělá družice Země prolétá nad Novosibirem, když je tam přesně 19,00 h. Když prolétá nad Moskvou, je tam přesně 18,00 h.

a) Určete polohu místa na povrchu Země, nad nímž družice proletí, když v Praze bude 19,00 h, popř. 20 h 30 min.

b) Zjistěte, zda elektromagnetické signály z družice, proletující nad Novosibirem, lze zachytit v Moskvě. Jde o signály s velmi krátkou délkou vlny, které může zachytit jen přijímač, když mezi ním a vysílačem nejsou terénní překážky.

V uvedených místech platí pásmový čas. K řešení úlohy si zaveďte tzv. světový čas podle hvězdárny v Greenwichi. Úlohu řešte pomocí mapy nebo globusu a určete předem přesný místní čas.

Řešení

Všechny časové údaje převedeme na údaje ve světovém času. Rozdíl pásmových časů Greenwich - Praha je 1 h, Praha - Moskva 2 h, Praha - Novosibirsk 6 h. Družice tedy prolétá nad Novosibirem ve 12,00 h světového času, nad Moskvou v 15,00 h světového času.

a) Máme zjistit, nad kterým místem bude družice v 18,00 h a v 19 h 30 min světového času. Moskva a Novosibirsk leží přibližně na téže rovnoběžce (55° s. š.), Moskva na 38° v. d., Novosibirsk na 83° v. d., zeměpisné délky se liší o 45° .

Za 3 hodiny vykoná Země $\frac{1}{8}$ otočky kolem své osy; ve vztažné soustavě spojené se Sluncem a hvězdami bude tedy Moskva v 15,00 h světového času tam, kde byl Novosibirsk ve 12,00 h světového času. To znamená, že za 3 h vykoná družice celistvý počet n otáček.

Pro $n = 1$ má družice dobu oběhu $T_1 = 180$ min, pro $n = 2$ dobu oběhu $T_2 = 90$ min. Nemůže být $n > 2$, protože minimální doba oběhu (kdyby se družice pohybovala těsně u povrchu Země) je

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\kappa M}} \doteq 83,5 \text{ min},$$

kde $R = 6,378 \cdot 10^6$ m, $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $M = 5,975 \cdot 10^{24}$ kg.

V obou případech bude družice v 18,00 h světového času nad místem, jež je dáno souřadnicemi 55° s. š., ($38^\circ - 45^\circ$) v. d. = -7° v. d. = 7° z. d.

V 19 h 30 min světového času se první družice nachází nad místem o souřadnicích 55° j. š., ($7^\circ + 22,5^\circ - 180^\circ$) z. d. = $15,5^\circ$ v. d., druhá družice nad místem o souřadnicích 55° s. š., ($7^\circ + 22,5^\circ$) z. d. = $29,5^\circ$ z. d.

b) Poloměry r_1 , r_2 kruhových trajektorií obou družic vypočítáme ze vztahu

$$r = \sqrt[3]{\frac{\kappa M T^2}{4 \pi^2}},$$

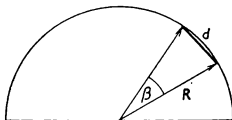
$$r_1 \doteq 1,056 \cdot 10^7 \text{ m}, r_2 \doteq 6,653 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Signály z družice nacházející se nad Novosibirskem lze zachytit v místech, jejichž úhlová vzdálenost od Novosibirska $\leq \alpha$, kde $\cos \alpha = \frac{R}{r}$, v našich případech $\alpha_1 \doteq 52^\circ 50'$, $\alpha_2 \doteq 16^\circ 30'$.

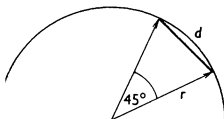
Musíme nyní stanovit úhlovou vzdálenost β Moskvy od Novosibirska. Rovnoběžka 55° s. š. má poloměr $r = R \cos 55^\circ$ (obr. 37a). Označíme d přímou vzdálenost mezi dvěma místy na této rovnoběžce, jejichž zeměpisné délky se liší o 45° . Jednoduchým výpočtem dostaneme (obr. 37b)

$$d = 2 r \sin 22,5^\circ = 2 R \cos 55^\circ \sin 22,5^\circ.$$

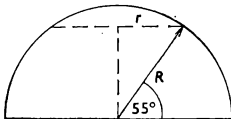
Úhel β leží proti základně d při vrcholu rovnoramenného



c)



b)



a)

Obr. 37

trojúhelníku, jehož ramena mají délku R (obr. 37c). Potom

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{d}{2R} = \cos 55^\circ \sin 22,5^\circ, \quad \beta \doteq 25,4^\circ.$$

Protože $\alpha_1 > \beta > \alpha_2$, lze v prvním případě signály v Moskvě zachytit, v druhém případě ne.

2. úloha (navrhl Doc. Ing. Bohumil Vybíral, CSc.)

Míč se pohybuje ve svislém směru v místnosti, jejíž výška je h . Označme $k = \frac{E_k - E'_k}{E_k}$ relativní změnu kinetické energie při odrazu, E_k je kinetická energie míče těsně před odrazem, E'_k je kinetická energie míče těsně po odrazu. Relativní změna kinetické energie při odrazu míče od stropu je k_s , při odrazu od podlahy je k_p .

a) Míč byl vržen rychlostí v_0 svisle vzhůru, po odrazu od stropu a od podlahy vystoupil právě do místa, z něhož byl vržen. Určte výšku h_0 nad podlahou, z níž byl míč vržen.

b) Proveďte diskusi řešení.

Řešte obecně, potom pro hodnoty $h = 3,5$ m, $k_s = 0,40$, $k_p = 0,30$, $v_0 = 4,7$ m.s⁻¹, popř. $v'_0 = 8,0$ m.s⁻¹.

Odpor prostředí neuvažujte, míč považujte za hmotný bod.

Řešení

a) Označíme

$$E_{k0} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (1)$$

počáteční kinetickou energii míče vrženého svisle vzhůru. Další označení jsou shrnuta v následující tabulce; potenciální energii tíhovou budeme vztahovat k podlaze:

kinetická energie	potenciální energie tíhová
----------------------	----------------------------------

počáteční stav	E_{k0}	$m g h_0$
těsně před nárazem na strop	E_{k1}	$m g h$
těsně po odrazu od stropu	E'_{k1}	$m g h$
těsně před dopadem na podlahu	E_{k2}	0
těsně po odrazu od podlahy	E'_{k2}	0
konečný stav	0	$m g h_0$

Ze zákona zachování energie a ze zadání

$$E_{k1} = E_{k0} - m g (h - h_0) \quad , \quad (2)$$

$$E'_{k1} = (1 - k_s) E_{k1} \quad , \quad (3)$$

$$E_{k2} = E'_{k1} + m g h \quad , \quad (4)$$

$$E'_{k2} = (1 - k_p) E_{k2} \quad , \quad (5)$$

$$E'_{k2} = m g h_0 \quad : \quad (6)$$

Ze soustavy rovnice (1) až (6) vyjádříme (postupným dosazováním)

$$h_0 = \frac{(1 - k_p) [(1 - k_s) v_0^2 + 2 k_s g h]}{2 g [1 - (1 - k_p)(1 - k_s)]} \quad (7)$$

b) Protože $1 > k_p$, $1 > k_s$, jsou v čitateli i ve jmenovateli vztahu (7) všechny činitele kladné, takže $h_0 > 0$.

Ve smyslu zadání musí však být $h_0 < h$. Když pro h_0 použijeme vyjádření (7), dostaneme pro v_0 podmínku

$$v_0 < \sqrt{\frac{2 g h k_p}{(1 - k_p)(1 - k_s)}} = v_{0 \max} \quad (8)$$

Z požadavku $E_{k1} > 0$ vyplývá, s přihlédnutím k (2) a (1), podmínka

$$v_0^2 > 2 g (h - h_0).$$

Za h_0 dosadíme z (7) a úpravou dostaneme

$$v_0 > \sqrt{2 g h k_p} = v_{0 \min} \quad (9)$$

Vyhovující hodnota v_0 musí být z intervalu $(v_{0 \min}, v_{0 \max})$.

Pro zadané hodnoty: $v_{0 \min} \doteq 4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_{0 \max} \doteq 7,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Podmínkám (8) a (9) tedy vyhovuje jen hodnota $v_0 =$

$= 4,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, pro kterou vyjde $h_0 \doteq 2,5 \text{ m}$. Pro $v'_0 = 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ by vyšla nevyhovující hodnota $h'_0 \doteq 4,0 \text{ m} > h$.

3. úloha (navrhl RNDr. Ivo Volf)

Stejnorodá ocelová tyč všude stejného průřezu koná harmonické kmity s malou amplitudou kolem vodorovné osy, procházející koncem tyče kolmo na tyč. Doba kyvu tyče při teplotě $0,00^\circ\text{C}$ a normálním tíhovém zrychlení je $1,00 \text{ s}$.

Moment setrvačnosti tyče $I = \frac{1}{3} m l^2$.

a) Stanovte délku l tyče při teplotě $0,00^\circ\text{C}$.

b) Stanovte funkci $\tau = f(t)$, kde τ je doba kyvu kyvadla, t jeho teplota. Sestrojte graf funkce $\tau = f(t)$ v oboru teplot: $(-20^\circ\text{C}; 30^\circ\text{C})$.

c) O kolik sekund se předběhnou nebo opozdí za 1 den hodiny s tímto kyvadlem pro případ stálé teploty 30°C , -20°C ?

Poznámka

Doba kyvu $\tau = \pi \sqrt{\frac{I}{m g d}}$, d je vzdálenost těžiště od osy.

Řešení

a) Při teplotě $0,00^\circ\text{C}$ má tyč délku l a její doba kyvu

$$\tau_0 = \pi \sqrt{\frac{I}{m g d}},$$

kde moment setrvačnosti $I = \frac{1}{3} m l^2$, $d = \frac{l}{2}$, tedy

$$\tau_0 = \pi \sqrt{\frac{2 l}{3 g}}.$$

Odtud vyjádříme

$$l = \frac{3 g T_0^2}{2 \pi^2} \doteq 1,491 \text{ m.}$$

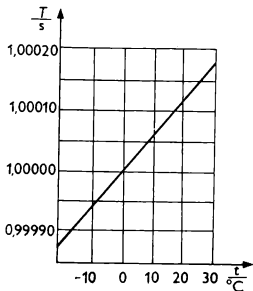
b) Při teplotě t má tyč délku $l_t = l(1 + \alpha t)$, kde α je teplotní součinitel délkové roztažnosti. Doba kyvu tyče

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 + \alpha t}.$$

Pokud $|\alpha t| \ll 1$, platí s dobrou přibližností

$$\tau = \tau_0 \left(1 + \frac{\alpha t}{2} \right).$$

Tato funkce je lineární, její graf je na obr. 38 pro $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.



Obr. 38

c) Pro $t = -20^\circ \text{C}$, popř. 30°C vypočítáme dobu kyvu $\tau_{-20} \doteq 0,99988 \text{ s}$, popř. $\tau_{30} = 1,00018 \text{ s}$. Za dobu 86 400 s vykoná tyč

$$\frac{86\,400}{0,99988} = 86\,410 \text{ kyvů, popř. } \frac{86\,400}{1,00018} = 86\,384 \text{ kyvů.}$$

Při teplotě $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ se tedy hodiny za 1 den předběhnou asi o 10 s, při teplotě $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ se opozdí asi o 16 s.

4. úloha (navrhl S. Minárik)

V ideálním plynu s dvouatomovými molekulami o látkovém množství n molů probíhá kruhový děj složený ze dvou izobarických a ze dvou izochorických dějů (obr. 39). Počáteční tlak plynu je p_1 , počáteční objem plynu je V_1 . Nejnižší teplota plynu při ději je $T_{\min}$, nejvyšší teplota $T_{\max}$.

a) Určete objem, tlak a teplotu plynu pro stavy plynu určené body A , B , C , D v obrázku.

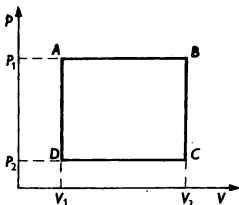
b) Znázorněte cyklus A, B, C, D, A v soustavě souřadnic (p, T) a v soustavě souřadnic (V, T) . Stanovte $T_{\min}$, $T_{\max}$.

c) Vypočítejte práci plynu při kruhovém ději.

d) Stanovte termodynamickou účinnost η stroje, v němž děj probíhá.

e) Ukažte, že termodynamická účinnost stroje v části d) úlohy je menší než termodynamická účinnost Carnotova cyklu s teplotou ohříváče $T_{\max}$ a teplotou chladiče $T_{\min}$.

Úlohu řešte obecně, grafy načrtněte na základě obecných úvah. Části c), d), e) řešte pro hodnoty $T_{\min} = 300\text{ K}$, $T_{\max} = 600\text{ K}$, $n = 1\text{ kmol}$, $p_1 V_1 = 3,00 \cdot 10^6\text{ J}$. Pro mo-



Obr. 39

$$\text{lární teplo plynu s dvouatomovými molekulami platí } C_{mp} = \frac{7}{2} R_m, C_{mv} = \frac{5}{2} R_m.$$

Řešení

a) Ze stavové rovnice je zřejmé, že teplota plynového tělesa je přímo úměrná součinu $p V$. Je tedy největší ve stavu B a nejmenší ve stavu D: $T_{\max} = T_B$, $T_{\min} = T_D$. Dále platí $p_C = p_D$, podle stavové rovnice

$$\text{stav A: } p_A = p_1, V_A = V_1, T_A = \frac{p_1 V_1}{n R_m} \doteq 361 \text{ K},$$

$$\text{stav B: } p_B = p_1, V_B = \frac{n R_m T_{\max}}{p_1} = V_2, T_B = T_{\max},$$

$$\text{stav C: } p_C = \frac{n R_m T_{\min}}{V_1} = p_2, V_C = \frac{n R_m T_{\max}}{p_1} = V_2,$$

$$T_C = \frac{n R_m T_{\max} T_{\min}}{p_1 V_1},$$

$$\text{stav D: } p_D = \frac{n R_m T_{\min}}{V_1} = p_2, V_D = V_1, T_D = T_{\min}.$$

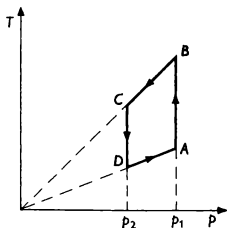
b) Typické průběhy grafů jsou na obr. 40 a 41. Pro krajní teploty platí

$$T_{\max} = T_B = \frac{p_1 V_2}{n R_m}, T_{\min} = \frac{p_2 V_1}{n R_m}.$$

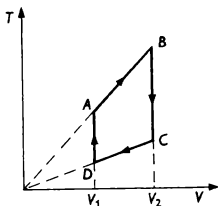
c) V průběhu cyklu vykoná plyn práci

$$\begin{aligned} W &= p_1 (V_2 - V_1) - p_2 (V_2 - V_1) = \\ &= p_1 \left(\frac{n R_m T_{\max}}{p_1} - V_1 \right) - \frac{n R_m T_{\min}}{V_1} \left(\frac{n R_m T_{\max}}{p_1} - V_1 \right) = \\ &= n R_m T_{\max} - p_1 V_1 - n R_m T_{\min} \left(\frac{n R_m T_{\max}}{p_1 V_1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Pro zadané hodnoty: $W \doteq 336 \text{ J}$.



Obr. 40



Obr. 41

d) K stanovení termodynamické účinnosti musíme určit teplo Q , které plyn přijme v průběhu cyklu, a to v částech A–B, D–A:

$Q = n [C_{mp} (T_{\max} - T_A) + C_{mV} (T_A - T_{\min})] \doteq 7,80 \text{ MJ}$.
Z toho a z výsledku úlohy c) určíme účinnost

$$\eta = \frac{W}{Q} \doteq 4,4 \, \%.$$

e) Účinnost Carnotova stroje je v našem případě $\eta_c = 50 \, \%$. Z výsledků úlohy d) je zřejmé, že $\eta < \eta_c$.

5. úloha (navrhl RNDr. Ivo Volf)

Rezistory s odpory r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 jsou zapojeny podle schématu na obr. 42.

a) Určete výsledný odpor R_1 mezi body B, D.

b) Určete výsledný odpor R_2 mezi body A, C.

Odpory spojovacích vodičů a vnitřní odpor zdroje jsou vzhledem k odporům rezistorů zanedbatelné.

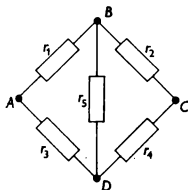
Poznámka

K řešení úlohy je vhodné prostudovat příslušné části z brožur Škola mladých fyziků: Z. Vitamvás, Teoremy při řešení elektrických obvodů; K. Hofman, Kirchhoffovy zákony, popř. studijní text pro kategorii B: M. Simerský, Teoremy při řešení elektrických obvodů.

Řešení

a) Jde o paralelní spojení tří větví, proto

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_1 + r_3} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_2 + r_4},$$
$$R_1 = \frac{(r_1 + r_3)(r_2 + r_4)r_5}{r_5(r_1 + r_3) + (r_1 + r_3)(r_2 + r_4) + r_5(r_2 + r_4)}$$



Obr. 42

b) Představíme si, že k bodům A , C je připojen elektrický zdroj se svorkovým napětím U . Označíme I celkový proud procházející obvodem, I_1 proud procházející rezistorem o odporu r_1 , I_2 proud procházející rezistorem o odporu r_2 . Poněvadž $U = r_1 I_1 + r_2 I_2$, je mezi body A , C odpor

$$R_2 = \frac{U}{I} = \frac{r_1 I_1 + r_2 I_2}{I}. \quad (1)$$

Pomocí Kirchhoffových zákonů sestavíme rovnice

$$r_1 I_1 + r_5 (I_1 - I_2) + r_5 (I_1 - I) = 0,$$

$$r_2 I_2 + r_4 (I_2 - I) + r_5 (I_2 - I_1) = 0,$$

v nichž I považujeme za parametr. Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$I_1 = I \frac{r_3 (r_2 + r_4 + r_5) + r_4 r_5}{(r_1 + r_3 + r_5)(r_2 + r_4 + r_5) - r_5^2},$$

$$I_2 = I \frac{r_4 (r_1 + r_3 + r_5) + r_3 r_5}{(r_1 + r_3 + r_5)(r_2 + r_4 + r_5) - r_5^2}.$$

Dosadíme do (1) a úpravou dostaneme

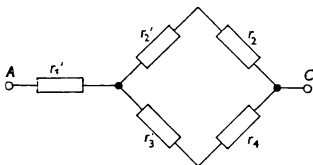
$$R_2 = \frac{r_1 r_3 (r_2 + r_4) + r_2 r_4 (r_1 + r_3) + r_5 (r_1 + r_2)(r_3 + r_4)}{(r_1 + r_3)(r_2 + r_4) + r_5 (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)}$$

Stejný výsledek dostaneme řešením pomocí transfigurace. Např. trojúhelník ABD nahradíme hvězdou podle obr. 43, kde

$$r'_1 = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3 + r_5}, \quad r'_2 = \frac{r_1 r_5}{r_1 + r_3 + r_5}, \quad r'_3 = \frac{r_3 r_5}{r_1 + r_3 + r_5}.$$

Potom

$$R_2 = r'_1 + \frac{(r'_2 + r_2)(r'_3 + r_4)}{r'_2 + r_2 + r'_3 + r_4}.$$



Obr. 43

6. úloha (navrhli RNDr. V. Koubek, CSc. a RNDr. J. Podobský)

Studium kmitavého pohybu magnetky v magnetickém poli

Úvod

V magnetickém poli zaujme magnetka určitou rovnovážnou polohu. Vychýlíme-li ji z této polohy a uvolníme, počne kolem ní kmitat. Doba kmitu T závisí na velikosti indukce magnetického pole, v němž magnetka kmitá. Umístíme-li magnetku do magnetického pole cívky a neměníme její polohu vzhledem k cívce, pak doba kmitu T je funkcí stejnosměrného proudu I , který cívkou prochází.

Úkol

Experimentálně stanovte funkci $T = f(I)$.

Pomůcky: akumulátorová baterie, cívka 1 200 závitů bez jádra, reostat s odporem kolem 100 Ω , spínač, ampérmetr, malá magnetka, stopky.

Provedení

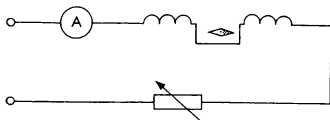
1. Sestavte sériový obvod ze zdroje (baterie), spínače, reostatu, ampérmetru a cívky. Osa cívky je vodorovná a směřuje k severu.
2. Do bezprostřední blízkosti cívky umístěte malou magnetku, volně otáčivou okolo svislé osy. Vysvětlete, proč magnetka kmitá, vychýlíme-li ji z rovnovážné polohy a uvolníme. Při měření má rušivý vliv na pohyb magnetky magnetické pole Země. Tento vliv kompenzujte vhodně umístěným permanentním magnetem. Jak poznáte, že jste kompenzaci provedli co nejlépe? Vysvětlete.
3. Pomocí reostatu a ampérmetru nastavujte různé hodnoty proudu I a pro každou hodnotu změřte dobu kmitu T

magnetky. Tímto způsobem stanovte aspoň 10 až 15 dvojic hodnot I , T .

4. Funkce $T = f(I)$ je nelineární a podle teoretických předpokladů by mělo přibližně platit $T = a I^b$, kde a , b jsou konstanty. Sestrojte proto graf funkce $\log \{T\} = f(\log \{I\})$, tedy souřadnicové osy označte $\log \{I\}$, $\log \{T\}$.
5. Na základě grafu zjistěte hodnoty konstant a , b ve vztahu $\log \{T\} = \log \{a\} + b \log \{I\}$. Zapište funkci $T = a I^b$.
6. Funkce $T = a I^b$ je empiricky zjištěná funkce. Zaokrouhlete exponent a napište zjednodušený vztah $T = f(I)$.
7. Uvažte, zda by šlo dané měření použít ke stanovení magnetické indukce v místě, v němž se magnetka nachází.

Řešení

Byl sestaven obvod podle schématu na obr. 44, osa magnetky je v ose cívky. Vliv magnetického pole Země byl kompenzován tyčovým permanentním magnetem, jehož osa



Obr. 44

byla položena do osy cívky. Vzdálenost magnetu od magnetky byla nastavena tak, aby magnetka po vychýlení a uvolnění (při rozpojení spínače) zůstala ve vychýlené poloze, popř. se pohybovala co nejpomaleji.

Reostatem byl nastavován proud I procházející cívkou a pro každou hodnotu I byla změřena doba kmitu T magnetky (vždy průměr z 5 měření). Výsledky jsou sestaveny

T 12

$\frac{I}{A}$	$\log \{I\}$	$\frac{T}{S}$	$\log \{T\}$
0,01	-2,00	2,82	0,45
0,02	-1,70	1,78	0,25
0,03	-1,52	1,51	0,18
0,04	-1,40	1,22	0,09
0,05	-1,30	1,10	0,04
0,07	-1,15	0,89	-0,05
0,10	-1,00	0,77	-0,11
0,15	-0,82	0,58	-0,24
0,20	-0,70	0,51	-0,29
0,25	-0,60	0,45	-0,35
0,30	-0,52	0,41	-0,43
0,40	-0,40	0,34	-0,47

v tabulce 12, v níž jsou uvedeny i logaritmy veličin $\{I\}$ a $\{T\}$, které budeme potřebovat k sestrojení grafu. Graf funkce $\log \{T\} = f(\log \{I\})$ je na obr. 45. Obrazem této funkce je s dobrou přibližností přímka. Označíme-li $x = \log \{I\}$, $y = \log \{T\}$, potom tato přímka má rovnici $y = A + b x$, kde $A = \log \{a\}$ je délka úseku, který přímka vytíná na ose $\log \{T\}$, b její směrnice. Z grafu přečteme, že $A = \log \{a\} \doteq -0,69 = (0,31 - 1)$, $a \doteq 0,204$ s. A^{-b} . Z koncových bodů úsečky (extrapolované až ke svislé ose) zjistíme

$$b \doteq \frac{0,69 + 0,43}{-2} \doteq -0,5.$$

Funkci zapišeme ve tvaru

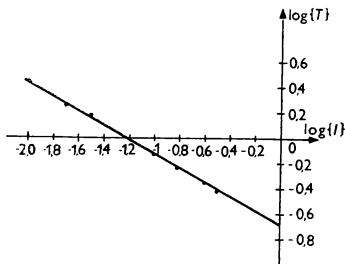
$$T = \frac{0,20 \text{ s} \cdot A^{1/2}}{\sqrt{I}}.$$

Zjištěná hodnota exponentu $b = -0,5$ dobře souhlasí s teoretickým předpokladem. Při vychýlení totiž působí na magnetku síla, která ji vrací zpět. To znamená, že na magnetku působí moment, jehož velikost $D \sim B$, kde B je velikost magnetické indukce v místě, v němž je magnetka postavena. Poněvadž $B \sim I$, je také $D \sim I$.

Doba kmitu, obdobně jako u fyzického kyvadla, $T \sim \frac{1}{\sqrt{D}}$,

tedy také $T \sim \frac{1}{\sqrt{I}}$.

Velikost magnetické indukce můžeme nepřímo měřit (v libovolném místě, tedy nejen v blízkosti cívky) takto: Zjistíme dobu kmitu T_0 magnetky v magnetickém poli, jehož indukce



Obr. 45

má známou velikost B_0 . V magnetickém poli, jehož indukce má neznámou velikost B_x , koná táž magnetka kmity s dohou kmity T_x , kterou změříme. Platí nyní

$$T_0^2 \sim \frac{1}{B_0}, \quad T_x^2 \sim \frac{1}{B_x},$$

odtud

$$B_x = B_0 \left(\frac{T_0}{T_x} \right)^2.$$

7. úloha (navrhl RNDr. Ivo Volf)

Úvodní poznámka

Úloha se vztahuje ke studijnímu textu Volf, I.: Pohyb tělesa v odporujícím prostředí. K řešení úlohy budeme potřebovat vztah pro velikost tzv. Stokesovy odporové síly, která v ustáleném stavu působí na kuličku o poloměru r , která se rychlostí v pohybuje v plynu, jehož dynamická viskozita je η . Tato odporová síla má velikost $F_0 = 6\pi\eta rv$.

Millikanův pokus (americký fyzik R. A. Millikan žil v letech 1868–1953, Nobelovu cenu za fyziku dostal v roce 1923) slouží k určení elementárního náboje. Je založen na sledování pohybu olejových kapiček v elektrickém poli, v odporujícím prostředí (plynu). Kapičky mají stejnou hmotnost a různé velké elektrické náboje, které získávají právě rozprášením oleje na kapičky. Při opakování Millikanova pokusu bylo měření prováděno s kapičkami oleje o hustotě $900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, napětí mezi deskami kondenzátoru, mezi nimiž se kuličky pohybovaly ve svislém směru, kolmém k deskám, bylo 147 V, vzájemná vzdálenost desek kondenzátoru byla 1,6 cm. Vzájemná vzdálenost značek, mezi nimiž byl pohyb kapiček pozorován, byla 0,522 cm.

a) Pro stanovení hmotnosti kapičky byla komora naplněna vzduchem při atmosférickém tlaku. Bylo zjištěno, že udanou vzdálenost prošla kapička za 147 s. Určete poloměr kapičky

a její hmotnost, je-li dynamická viskozita vzduchu $17,1 \cdot 10^{-6}$ Pa.s a hustota vzduchu $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

b) Poté byla souprava naplněna vodíkem za sníženého tlaku. Popište, jak postupoval Millikan, aby zjistil diskrétnost elektrického náboje.

c) Při měření byly zjišťovány doby t_g , kdy se kapka pohybovala mezi značkami v tíhovém poli rovnoměrně při nulovém napětí na kondenzátoru, a doby t_E , po které stejnou vzdálenost urazila kapka rovnoměrným pohybem při kondenzátoru připojeném ke zdroji napětí; naměřené hodnoty jsou uvedeny v tab. 13. Doplňte tabulku, tj. určete rychlosti

T 13

$\frac{t_g}{s}$	13,6	13,8	13,4	13,4	13,6	13,6	13,7	13,5	13,6	13,8
$\frac{t_E}{s}$	12,5	12,4	21,8	34,8	84,5	85,5	34,6	34,8	16,0	34,8
$\frac{v}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$										
$\frac{v_i - v_{i-1}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$										

pohybu a rozdíly rychlostí při různém náboji kapiček. Potvrďte diskrétnost náboje. Určete nejmenší změnu rychlosti, která byla pozorována. Vylučte nejmenší změny rychlosti, vzniklé z nepřesnosti opakovaných měření.

d) Stanovte náboj elektronu. Užitím Faradayova zákona pro elektrolýzu ověřte výsledek svého výpočtu.

Řešení

Označení veličin:

d ... vzájemná vzdálenost značek, E ... velikost intenzity elektrického pole v kondenzátoru, g ... tíhové zrychlení,

l ... vzájemná vzdálenost desek kondenzátoru, m ... hmotnost olejové kapky, r ... poloměr olejové kapky, t_0 ... doba pohybu kapky ve vzduchu, U ... napětí mezi deskami kondenzátoru, v ... rychlost kapky v elektrickém poli ve zředěném vodíku, v_0 ... rychlost kapky ve vodíku bez působení elektrického pole, v_v ... rychlost kapky padající ve vzduchu, η ... dynamická viskozita vodíku, η_v ... dynamická viskozita vzduchu, ρ ... hustota oleje, ρ_v ... hustota vzduchu.

a) Na kapku padající ve vzduchu působí Stokesova odporová síla $F_0 = 6\pi\eta_v r v_v$ svisle vzhůru, tíhová síla $F_G = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ svisle dolů a aerostatická vztlaková síla $F_v = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v g$ svisle vzhůru. Tyto síly jsou v rovnováze, takže $F_0 = F_G - F_v$. Jestliže $\rho_v \ll \rho$, pak také $F_v \ll F_G$ a platí s dobrou přibližností $F_0 = F_G$. Z této rovnosti vyjádříme, s přihlédnutím ke vztahu $v_v = \frac{d}{t_0}$

$$r = \sqrt{\frac{9\eta_v d}{2g\rho t_0}} \doteq 5,56 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Hmotnost kapky

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \doteq 6,49 \cdot 10^{-16} \text{ kg}.$$

b) V plynu, jehož dynamická viskozita je η , padá kapka rychlostí v_0 . Působí-li elektrické pole, jehož intenzita E je svislá, a má-li kapka elektrický náboj Q , působí na kapku ještě síla o velikosti QE ve směru svislém dolů, nebo vzhůru. Budeme předpokládat směr souhlasně rovnoběžný se směrem odporové síly. V tomto případě padá kapka rychlostí v , přičemž $6\pi\eta r v + QE = mg$, neboli

$$v = \frac{mg}{6\pi\eta r} - \frac{E}{6\pi\eta r} Q.$$

Rychlosti kapek jsou obecně různé. Jestliže se však navzájem liší o celistvé násobky nějaké hodnoty Δv , usoudíme, že jejich náboje jsou celistvými násobky nějaké hodnoty q , kterou označíme jako elementární náboj.

c) Doplníme tabulku hodnotami rychlostí v cm.s^{-1} : 0,041 7; 0,042 0; 0,023 9; 0,014 9; 0,006 2; 0,006 1; 0,015 1; 0,015 0; 0,032 6; 0,015 0.

Rozdíly rychlostí v cm.s^{-1} (4. řádek tabulky): 0,000 3; -0,018 1; -0,009 0; -0,008 7; -0,000 1; 0,009 0; 0,001 0; 0,017 6; -0,017 6.

Při zaokrouhlení na 3 desetinná místa sledujeme, že rozdíly jsou buď téměř nulové, nebo jsou to celistvé násobky hodnoty přibližně $0,009 \text{ cm.s}^{-1}$. Tím je diskretnost elektrického náboje prokázána.

d) Z průměrné hodnoty $t_{gp} = 13,6 \text{ s}$ a vzdálenosti d určíme rychlost kapky ve vodíku bez působení elektrického pole $v_0 \doteq 0,038 4 \text{ cm.s}^{-1}$. Uvažujme nyní dvě kapky, jejichž rychlosti v elektrickém poli se navzájem liší o $\Delta v \doteq 0,009 \text{ cm.s}^{-1}$. Přesnější hodnotu zjistíme jako průměr z použitelných hodnot ve 4. řádku tabulky: $\Delta v \doteq 0,008 89 \text{ cm.s}^{-1}$. Předpokládáme nyní, že se jejich náboje liší o elementární náboj q .

Potom

$$6 \pi \eta r \Delta v = qE,$$

odtud

$$q = \frac{6 \pi \eta r \Delta v}{E}.$$

Dosadíme

$$6 \pi \eta r = \frac{mg}{v_0}, \quad E = \frac{U}{l}$$

a vyjádříme

$$q = \frac{mgl \Delta v}{Uv_0} \doteq 1,605 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Z Faradayova zákona

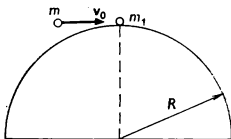
$$q = \frac{F}{N_A} = \frac{9,649 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}}{6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \doteq 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C},$$

což je shoda velmi dobrá.

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl RNDr. Ivo Volf)

V nejvyšším bodě polokoule o poloměru R (obr. 46) s vodorovnou podstavou je malé dřevěné tělísko o hmotnosti m_1 . Na něj narazí brok o hmotnosti m rychlostí v_0 ve vodorovném směru a dojde k nepružnému rázu.



Obr. 46

a) Stanovte poměr hmotností $k = \frac{m}{m_1}$ tak, aby se soustava těles po rázu ihned od koule odpoutala.

b) Poměr hmotností $k' = \frac{m}{m_1}$ je takový, že soustava těles po rázu je pouze vychýlena z rovnovážné polohy vratké. V jaké výšce h nad vodorovnou podstavou se soustava těles odpoutá od kulové plochy?

c) Určete vzdálenosti, měřené od středu podstavky polo-

koule, v nichž soustava těles v případech a), b) dopadne na vodorovnou rovinu podstaty.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_0 = 100 \text{ m.s}^{-1}$, $R = 1,00 \text{ m}$.

Řešení

a) Označíme v rychlost (ve vodorovném směru) soustavy tělíska s brokem, hmotnost této soustavy je $m_1 + m$. Podle zákona zachování hybnosti

$$mv_0 = (m_1 + m)v. \quad (1)$$

Setrvačná odstředivá síla, která má velikost $F_o = (m_1 + m)\frac{v^2}{R}$, musí být větší než kolmá tlaková síla $F_t = (m_1 + m)g$. Z podmínky $F_o > F_t$, dostaneme s přihlédnutím k (1)

$$k > k_{\min}, \quad k_{\min} = \frac{\sqrt{Rg}}{v_0 - \sqrt{Rg}},$$

pro zadané hodnoty: $k_{\min} \doteq 0,0323$.

b) — obr. 47

Poměr k' je téměř nulový, protože jde pouze o libovolně malé vychýlení z rovnovážné polohy vratké. Nebudeme jej proto uvažovat a budeme předpokládat, že tělísko se pohybuje vlivem tíhové síly a setrvačné odstředivé síly. Podle obr. 47 zřejmě

$$h = OQ = R \cos \alpha, \quad (2)$$

rychlost tělíska v bodě P , v němž tělísko opouští kulovou plochu, označíme v . Setrvačná odstředivá síla F_o je stejně velká jako kolmá tlaková síla F_t . Odtud

$$\frac{v^2}{R} = g \cos \alpha \quad (3)$$

a ze zákona zachování energie (tíhovou potenciální energii tělíska vztahujeme k rovině podstaty) platí, s přihlédnutím k (3),

$$Rg(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}Rg \cos \alpha.$$

Odtud vyjádříme $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, dosadíme do (2) a dostaneme

$$h = \frac{2R}{3}, \text{ pro zadané hodnoty: } h \doteq 0,667 \text{ m.}$$

c) V prvním případě jde o vodorovný vrh z výšky R , počáteční rychlost v_p je větší než hodnota určená z (1) pro $k = k_{\min}$, tedy $v_p > \sqrt{Rg}$, délka vrhu $d_1 > d_{\min}$, $d_{\min} = \sqrt{Rg} \sqrt{\frac{2R}{g}} = R\sqrt{2} \doteq 1,41 \text{ m}$.

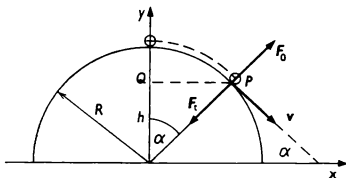
V druhém případě jde o šikmý vrh dolů, přičemž počáteční rychlost v svírá s vodorovnou rovinou úhel α (obr. 47). Zapišme parametrické rovnice trajektorie v soustavě souřadnic, jejíž počátek O je ve středu kruhové podstavky polokoule, směry os x, y jsou zřejmé z obr. 47. Parametrická rovnice pro souřadnici x je tedy

$$x = vt \cos \alpha + QP = vt \cos \alpha + R \sin \alpha.$$

Velikost rychlosti v určíme z (3) pro $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $v = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}$,

takže

$$x = \frac{2}{3} t \sqrt{\frac{2Rg}{3}} + R \frac{\sqrt{5}}{3}. \quad (4)$$



Obr. 47

Bod P , v němž pohyb po parabolické trajektorii začíná, je ve výšce $h = \frac{2R}{3}$ nad rovinou podstavy, takže pro souřadnici y platí parametrická rovnice

$$y = \frac{2R}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{10Rg}{3}} t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (5)$$

Dobu pohybu t_0 určíme z (5) pro $y = 0$ m; dostaneme kvadratickou rovnici

$$\frac{1}{2} g t_0^2 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{10Rg}{3}} t_0 - \frac{2R}{3} = 0. \quad (6)$$

Fyzikální význam má jen kladné řešení

$$t_0 = \frac{1}{3g} \sqrt{\frac{10Rg}{3}} (\sqrt{4,6} - 1) \doteq 0,223 \text{ s}. \quad (7)$$

Do (4) dosadíme z (7) a vyjádříme délku vrhu

$$d_2 = \frac{R\sqrt{5}}{3} \left[\frac{4}{9} (\sqrt{4,6} - 1) + 1 \right] \doteq 1,12 \text{ m}.$$

2. úloha (navrhl RNDr. Ivo Volf)

Kyvadlo se skládá z malé kuličky o hmotnosti m s elektrickým nábojem q , která je zavěšena na vlákně délky l . Určete dobu kmitu (s malou amplitudou) kyvadla v těchto případech:

a) Kulička kmitá ve vakuu v homogenním tíhovém poli ($g = \text{konst.}$).

b) Kulička kmitá v homogenním elektrickém poli s intenzitou E , $E \parallel g$. Proveďte diskusi.

c) Kulička kmitá v homogenním elektrickém poli s intenzitou E , $E \perp g$.

d) Kulička kmitá v homogenním tíhovém poli a v místě upevnění vlákna je bodový náboj Q .

Kuličku považujte za hmotný bod, hmotnost vlákna, tření a odpor vzduchu neuvažujte.

Řešte úlohu obecně, potom pro hodnoty $m = 10,0 \text{ g}$, $l = 1,00 \text{ m}$, $q = 1,00 \text{ } \mu\text{C}$, $E = 5,00 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, $Q = 10 \text{ } \mu\text{C}$.

Řešení

a) Doba kmitu kyvadla $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \doteq 2,01 \text{ s}$.

b) Vektory $\mathbf{g}$ a $\mathbf{E}$ mohou být rovnoběžné buď souhlasně, nebo nesouhlasně. V prvním případě působí na kuličku celková síla o velikosti $mg + qE$, doba kmitu, když g nahradíme zrychlením $a = \frac{mg + qE}{m}$:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} \doteq 1,63 \text{ s}.$$

Ve druhém případě je ve jmenovateli u druhého členu záporné znaménko, vyjde $T_2 \doteq 2,87 \text{ s}$. Vztah pro T_2 platí, jestliže $mg > qE$. Pro $mg < qE$ je rovnovážná poloha nad závěsem, doba kmitu

$$T'_2 = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{qE - mg}}.$$

V případě rovnosti $mg = qE$ je celková působící síla nulová, kmitavý pohyb nenastává, kulička může mít jakoukoli libovolnou polohu (obdobu beztlížného stavu).

c) Celková síla působící na kuličku má velikost

$$\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2},$$

doba kmitu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}}} \doteq 1,89 \text{ s}.$$

d) Elektrická síla $\mathbf{F}_e$ působící mezi náboji q , Q má směr vlákn a nemá proto vliv na velikost celkové síly, která způsobuje kmitavý pohyb, takže jde o situaci jako v části a). Jestliže náboje q , Q jsou nesouhlasné, musí ovšem být $F_e <$

$< mg$, protože jinak by kulička byla přitažena k bodu, v němž je kyvadlo zavěšeno.

3. úloha (navrhl RNDr. Ivo Volf)

Dvě malé kuličky téhož poloměru r , z nichž jedna má hustotu ϱ_1 , druhá hustotu ϱ_2 , $\varrho_1 > \varrho_2$, pustíme do kapaliny hustoty ϱ_k , dynamické viskozity η .

a) Popište pohyb jedné z kuliček. Čím se liší navzájem pohyb obou kuliček?

b) Která z kuliček se dostane dřív ke dnu?

c) Určete mezní rychlosti obou kuliček při jejich pohybu v kapalině.

Řešte obecně, potom pro případ olověné a skleněné kuličky padající v glycerolu, $r = 2,00 \text{ mm}$, $\varrho_k = 1\,260 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\eta = 1,48 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $\varrho_1 = 11\,340 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\varrho_2 = 2\,600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Řešení

a) Na kuličku hustoty ϱ působí tíhová síla $\mathbf{F}_G$, v opačném směru pak hydrostatická vztlaková síla $\mathbf{F}_{vz}$ a odporová síla $\mathbf{F}_o$. Označíme a zrychlení, které výsledná síla uděluje kuličce, jejíž rychlost je v . Potom

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \varrho a = \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho g - \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho_k g - 6 \pi \eta r v,$$

odtud vyjádříme zrychlení

$$a = g \left(1 - \frac{\varrho_k}{\varrho} \right) - \frac{9 \eta v}{2 r^2 \varrho} \quad (1)$$

Zrychlení pohybu závisí na rychlosti, není tedy konstantní, kulička koná pohyb nerovnoměrně zrychlený.

Obě kuličky konají pohyby obdobné, které se navzájem liší jen zrychlením; při téže rychlosti je zrychlení první kuličky větší.

b) Ke dnu se dostane první kulička za dobu kratší než druhá, za předpokladu, že na počátku děje byly obě kuličky v téže výšce nad dnem nádoby.

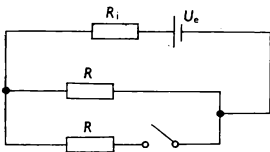
c) Po dostatečně dlouhé době se ustaví rovnováha sil působících na kuličku, potom bude $a = 0 \text{ m.s}^{-2}$ a kulička se bude pohybovat rovnoměrně. Anulováním (1) určíme meznou rychlost

$$v_m = \frac{2}{9} \frac{r^2}{\eta} g (\varrho - \varrho_k) .$$

Pro zadané hodnoty: $v_{m1} \doteq 59,4 \text{ m.s}^{-1}$, $v_{m2} \doteq 7,90 \text{ m.s}^{-1}$.

4. úloha (navrhl Doc. RNDr. V. Houdek, CSc.)

Dva stejné rezistory, z nichž každý má odpor $R = 10 \, \Omega$, tvoří topnou soustavu (obr. 48). Soustava byla připojena ke zdroji se stálým elektromotorickým napětím $U_e = 24 \text{ V}$ a vnitřním odporem R_i .



Obr. 48

a) Je možné, aby příkon topné soustavy byl stejný při zapnutí i vypnutí spínači S? Zdůvodněte.

b) Platí-li podmínky pro případ a), určete vnitřní odpor zdroje.

c) Určete proud procházející topnou soustavou při zapnutí i vypnutí spínači, je-li splněna podmínka a).

d) Určete příkon topné soustavy při zapnutí i vypnutí spínači, je-li splněna podmínka a).

e) Je takový zdroj vhodný pro topnou soustavu z hlediska účinnosti? Zdůvodněte.

Řešení

a) Topnou soustavou prochází při zapnutém spínači proud I_1 , při vypnutém spínači proud I_2 , přičemž

$$I_1 = \frac{U_e}{R_i + \frac{R}{2}}, \quad I_2 = \frac{U_e}{R_i + R}. \quad (1)$$

Příkon soustavy v těchto případech

$$P_1 = \frac{R}{2} I_1^2 = \frac{R U_e^2}{\left(R_i + \frac{R}{2}\right)^2}, \quad P_2 = R I_2^2 = \frac{R U_e^2}{(R_i + R)^2}. \quad (2)$$

Rovnost $P_1 = P_2$ platí, když

$$2 \left(R_i + \frac{R}{2}\right)^2 = (R_i + R)^2,$$

odtud

$$R_i = R \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3)$$

b) Z (3) pro zadané hodnoty: $R_i \doteq 7,07 \, \Omega$.

c) Dosadíme vztah (3) pro R_i do (1):

$$I_1 = \frac{2 U_e}{R(1 + \sqrt{2})} \doteq 2,0 \, \text{A}, \quad I_2 = \frac{U_e \sqrt{2}}{R(1 + \sqrt{2})} \doteq 1,4 \, \text{A}.$$

d) Z (2) pro R_i podle (3)

$$P_1 = P_2 = 2 \frac{U_e^2}{R(1 + \sqrt{2})^2} \doteq 20 \, \text{W}.$$

e) Takový zdroj není vhodný z hlediska účinnosti, protože jeho vnitřní odpor je příliš velký a dochází na něm k velkým ztrátám celkového příkonu, který zdroj dává. V praxi se požaduje, aby vnitřní odpor zdroje byl výrazně menší než odpor

spotřebiče. V případě ideálně tvrdého zdroje ($R_1 \doteq 0 \, \Omega$) je příkon soustavy topných těles

$$P_1 = \frac{2 U_e^2}{R} \doteq 115 \, \text{W}, \quad P_2 = \frac{U_e^2}{R} \doteq 58 \, \text{W}.$$

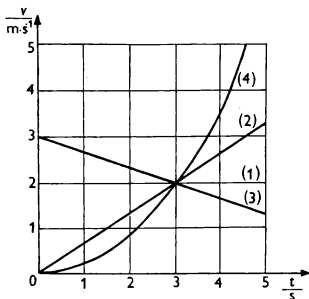
3 ÚLOHY KATEGORIE C

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhla RNDr. Marta Chytilová, CSc.)

Na obr. 49 jsou grafy znázorňující čtyři funkce $v = f(t)$, kde v je velikost rychlosti pohybu hmotného bodu a t je čas.

a) Jaké pohyby hmotného bodu znázorňují grafy (1), (2), (3)? Odpovědi zdůvodněte.



Obr. 49

b) Zapište obecně rovnici dráhy $s = f(t)$ v případech (1), (2), (3), víte-li, že v okamžiku $t = 0$ s, je dráha nulová. Sestavte tabulky hodnot této funkce pro t v intervalu $t \in \langle 0 \text{ s}, 4 \text{ s} \rangle$. Na milimetrový papír narýsujte příslušné grafy.

c) Zapište obecně rovnici dráhy $s = f(v)$ v případech (1), (2), (3), víte-li, že v okamžiku $t = 0$ s, je dráha nulová. Sestavte tabulky hodnot této funkce pro v v intervalu $v \in \langle 0 \text{ m.s}^{-1}, 3 \text{ m.s}^{-1} \rangle$. Na milimetrový papír narýsujte příslušné grafy.

d) Graf (4) je parabola. Zapište obecně rovnici rychlosti pohybu $v = f(t)$ odpovídající grafu. Zapište obecně rovnici zrychlení pohybu $a = f(t)$ odpovídající grafu. Sestavte tabulku hodnot této funkce pro čas t v intervalu $t \in \langle 0 \text{ s}, 4 \text{ s} \rangle$. Na milimetrový papír narýsujte příslušný graf. Jakou informaci tím získáte o funkci $s = f(t)$?

Řešení

a) (1) pohyb rovnoměrný s konstantní rychlostí $v_0 = 2 \text{ m.s}^{-1}$;

(2) pohyb rovnoměrně zrychlený s rychlostí $v = a t$, zrychlení $a = \text{konst.} = \frac{2}{3} \text{ m.s}^{-2}$;

(3) pohyb rovnoměrně zpomalený s počáteční rychlostí $v_1 = 3 \text{ m.s}^{-1}$, v čase t s rychlostí $v = v_1 - a t$, $a = \text{konst.} = \frac{1}{3} \text{ m.s}^{-2}$.

b) (1) $s = v_0 t$, $v_0 = 2 \text{ m.s}^{-1}$;

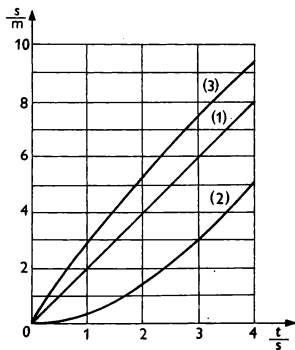
(2) $s = \frac{1}{2} a t^2$, $a = \frac{2}{3} \text{ m.s}^{-2}$;

(3) $s = v_1 t - \frac{1}{2} a t^2$, $v_1 = 3 \text{ m.s}^{-1}$, $a = \frac{1}{3} \text{ m.s}^{-2}$.

Hodnoty jsou sestaveny v tabulce 14. Grafy - obr. 50.

c) (1) Pro daný čas t je dráha přímo úměrná rychlosti, $s = k v$. Grafem této funkce je množina polopřímek s počá-

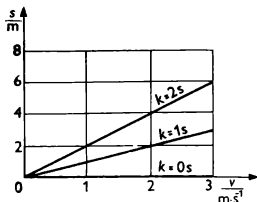
	$\frac{t}{s}$	0	1	2	3	4
(1)	$\frac{s}{m}$	0	2	4	6	8
(2)	$\frac{s}{m}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3	$\frac{16}{3}$
(3)	$\frac{s}{m}$	0	$\frac{17}{6}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{28}{3}$



Obr. 50

tečním bodem v počátku soustavy souřadnic (v , s). V grafu na obr. 51 jsou vyznačeny tři z takových polopřímek, a to pro $k = 2$ s, $k = 1$ s, $k = 0$ s (polopřímka totožná s osou v).

$$(2) s = \frac{v^2}{2a}, a = \frac{2}{5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$



Obr. 51

(3) Podle předchozího je $s = v_1 t - \frac{1}{2} a t^2, v = v_1 - a t$.

Vyjádříme $t = \frac{v_1 - v}{a}$ a dosadíme do vztahu pro s . Úpravou

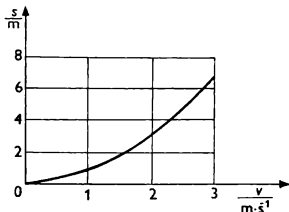
T 15

	$\frac{v}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$	0	1	2	3
(2)	$\frac{s}{\text{m}}$	0	$\frac{3}{4}$	3	$\frac{27}{4}$
(3)	$\frac{s}{\text{m}}$	$\frac{27}{2}$	12	$\frac{15}{2}$	0

dostaneme

$$s = \frac{v_1^2 - v^2}{2a}, \text{ kde } v_1 = 3 \text{ m.s}^{-1}, a = \frac{1}{3} \text{ m.s}^{-2}.$$

Hodnoty jsou sestaveny v tabulce 15, grafy jsou na obr. 52 a 53.

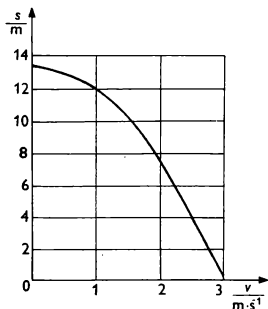


Obr. 52

d) Křivka (4) v obr. 49 je parabola, tj. graf kvadratické funkce, pro kterou předpokládáme obecný tvar $v = k t^2$, kde k je konstanta. Poněvadž na parabole leží bod $t = 3 \text{ s}$, $v = 2 \text{ m.s}^{-1}$, dostaneme dosazením do funkční rovnice hodnotu $k = \frac{2}{9} \text{ m.s}^{-3}$.

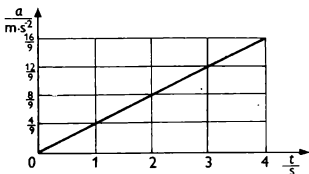
Použijeme nyní analogii s rovnoměrně zrychleným pohybem.

Pro dráhu zde platí kvadratický vztah $s = \frac{1}{2} a t^2$, pro rychlost lineární vztah $v = a t$. Při pohybu, který nyní sledujeme, platí pro rychlost kvadratický vztah $v = k t^2$, neboli $v = \frac{1}{2} \cdot 2 k t^2$. Z toho můžeme usoudit, že pro zrychlení zde



Obr. 53

platí $a = 2 k t$, v našem případě $a = \left(\frac{4}{9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-3}\right) t$. Číselné hodnoty jsou sestaveny v tabulce 16, graf je na obr. 54. Zrychlení pohybu je přímo úměrné času, jeho rychlost je přímo úměrná druhé mocnině času. Z toho můžeme usoudit, že dráha je přímo úměrná třetí mocnině času, je-li počáteční dráha nulová.

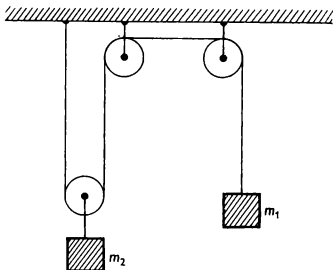


Obr. 54

$\frac{t}{s}$	0	1	2	3	4
$\frac{a}{m \cdot s^{-2}}$	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{12}{9}$	$\frac{16}{9}$

2. úloha (navrhla RNDr. Marta Chytilová, CSc.)

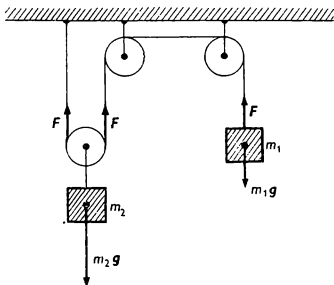
V soustavě těles znázorněné na obr. 55 je hmotnost vlákna a kladek zanedbatelná vzhledem k hmotnostem těles m_1 a m_2 . Třecí síly při pohybu těles neuvažujte.



Obr. 55

a) Jaký vztah musí splňovat hmotnosti m_1 a m_2 těles, aby soustava byla v rovnovážné poloze v klidu?

b) Jaký vztah musí splňovat hmotnosti m_1 a m_2 těles, aby těleso ohmotnosti m_2 klesalo rovnoměrně zrychleným pohybem?



Obr. 56

bem? Určete v tomto případě velikost zrychlení a_2 a velikost síly F , kterou je napínáno vlákno. Nakreslete náčrtek.

c) Řešte úlohu b) v případě, že těleso o hmotnosti m_2 stoupá rovnoměrně zrychleným pohybem. Nakreslete náčrtek.

d) Určete směr a velikost zrychlení a_2 a síly F pro hodnoty $m_1 = 6,0 \text{ kg}$, $m_2 = 8,0 \text{ kg}$.

Řešení

a) Je-li soustava v klidu, je vlákno napínáno silou $F = \frac{m_2}{2} g$. Síly působící na těleso o hmotnosti m_1 jsou v rovnováze:

$$\frac{m_2 g}{2} = m_1 g, \text{ tj. } m_2 = 2 m_1 \text{ (obr. 56).}$$

b) Těleso o hmotnosti m_2 koná rovnoměrně zrychlený pohyb, jestliže $F \geq \frac{m_2}{2} g$, tj. $m_2 \geq 2 m_1$.

Jestliže těleso o hmotnosti m_2 klesá se zrychlením a_2 , je toto zrychlení souhlasně rovnoběžné s tíhovým zrychlením g : $m_2 > 2 m_1$. Těleso o hmotnosti m_2 klesne v určitém časovém úseku po dráze h_2 , současně těleso o hmotnosti m_1 vystoupí po dráze $h_1 = 2 h_2$. Protože v daném časovém úseku je dráha přímo úměrná zrychlení, platí $a_1 = 2 a_2$. Při volbě osy souřadnic $+x$ podle obr. 57 platí

$$-F + m_1 g = -m_1 a_1, \quad -2 F + m_2 g = m_2 a_2;$$

odtud užitím vztahu $a_1 = 2 a_2$ dostáváme

$$a_2 = \frac{m_2 - 2 m_1}{4 m_1 + m_2} g, \quad F = \frac{3 m_1 m_2}{4 m_1 + m_2} g.$$

c) Jestliže těleso o hmotnosti m_2 stoupá se zrychlením a_2 , je toto zrychlení nesouhlasně rovnoběžné s tíhovým zrychlením g : $m_2 < 2 m_1$. Při volbě osy souřadnic $+x$ podle obr. 58 platí

$$F - m_1 g = -m_1 a_1, \quad 2 F - m_2 g = m_2 a_2,$$

odtud

$$a_2 = \frac{2 m_1 - m_2}{4 m_1 + m_2} g, \quad F = \frac{3 m_1 m_2}{4 m_1 + m_2} g.$$

d) Pro dané hodnoty platí případ c); s hodnotou $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ dostaneme $a_2 \doteq 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $F \doteq 44 \text{ N}$.

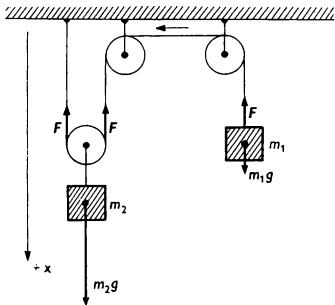
3. úloha (navrhol Doc. RNDr. Ivan Náter)

Nádrž s velkým objemom je naplnená kvapalinou s hustotou ϱ . V kvapaline plávajú dve rovnorodé telesá: rotačný valec a guľa. Obidve telesá majú rovnakú hmotnosť a pri danej teplote aj rovnaký objem. Os plávajúceho rotačného valca je zvislá a valec je ponorený do kvapaliny polovicou svojho objemu. Polomer valca je r_1 a jeho výška je h .

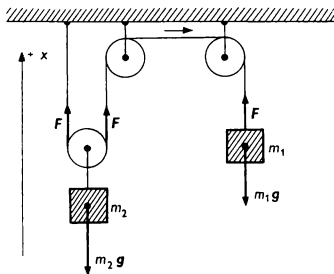
a) Určte hustotu ϱ_1 valca. Určte hustotu ϱ_2 a polomer r_2 guľe.

b) Určte práce W_1 , W_2 vykonané pri zdvihnutí každého z obidvoch telies nad voľný povrch kvapaliny.

c) Vyjadrite podmienku, pre ktorú platí $W_1 = W_2$.



Obr. 57



Obr. 58

Polohu voľného povrchu kvapaliny v nádrži považujte za stálu, ak je kvapalina bez telies, alebo v nej sú obidve plávajúce telesá. Použite vzťah medzi vykonanou prácou a zmenou potenciálnej energie tiažovej sústavy teleso - kvapalina pri zdvihnutí telesa tesne nad voľný povrch kvapaliny. Hmotný stred pologuľe je v rovine súmernosti vo vzdialenosti $\frac{3}{8}r$ od podstavy.

Riešenie

a) Na plávajúci valec pôsobí tiažová sila a hydrostatická vztlaková sila; obidve sily sú v rovnováhe a pre ich veľkosti teda platí

$$\pi r_1^2 h \varrho_1 g = \frac{1}{2} \pi r_1^2 h \varrho g, \text{ odtiaľ } \varrho_1 = \frac{\varrho}{2}.$$

Pretože guľa má rovnakú hmotnosť a rovnaký objem ako valec, platí

$$\varrho_2 = \varrho_1 = \frac{\varrho}{2}. \quad (1)$$

Z rovnosti objemov

$$\pi r_1^2 h = \frac{4}{3} \pi r_2^3$$

dostaneme

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{3 r_1^2 h}{4}}. \quad (2)$$

b) Označme ΔE_{p1} prírastok tiažovej potenciálnej energie valca a ΔE_{p2} prírastok tiažovej potenciálnej energie guľe pri zvednutí plávajúceho telesa tesne nad voľný povrch kvapaliny. Valec má hmotnosť $m_v = \pi r_1^2 h \varrho_1$, s prihliadnutím k (1) teda $m_v = \frac{1}{2} \pi r_1^2 h \varrho$. Pri pozvednutí jeho hmotného

stredú o dĺžku $\frac{h}{2}$ sa jeho tiažová potenciálna energia zväčší o

$$\Delta E_{p1} = \frac{1}{4} \pi \varrho g r_1^2 h^2.$$

Gula má hmotnosť

$$m_k = \frac{4}{3} \pi r_2^3 \varrho_2$$

a s prihliadnutím k (1) a (2)

$$m_k = \frac{1}{2} \pi r_1^2 h \varrho.$$

Pri pozvednutí jej hmotného stredú o dĺžku r_2 sa jej tiažová potenciálna energia zväčší o

$$\Delta E_{p2} = \frac{1}{2} \pi \varrho r_1^2 h^3 \sqrt{\frac{3 r_1^2 h}{4}}.$$

Ak pozvedneme teleso z kvapaliny do vzduchu, vtečie kvapalina do uvoľneného priestora. Kvapalinové teleso, ktoré nahradí ponorenú časť telesa, má s tou časťou totožný objem, tvar aj hmotný stred. Tým nastane úbytok tiažovej potenciálnej energie ΔE_{pk} kvapaliny.

Pre valec

$$\Delta E_{pk} = -\frac{1}{2} \pi r_1^2 \varrho g h \cdot \frac{h}{4} = -\frac{1}{8} \pi r_1^2 \varrho g h^2,$$

pre guľu

$$\Delta E'_{pk} = -\frac{2}{3} \pi r_2^2 \varrho g h \cdot \frac{3}{8} r_2$$

a s prihliadnutím k (2)

$$\Delta E'_{pk} = -\frac{3}{16} \pi \varrho g r_1^2 h^3 \sqrt{\frac{3 r_1^2 h}{4}}.$$

Platí teraz

$$W_1 = \Delta E_{p1} + \Delta E_{pk} = \frac{1}{8} \pi \varrho g r_1^2 h^2,$$

$$W_2 = \Delta E_{p2} + \Delta E'_{pk} = \frac{5}{16} \pi \varrho g r_1^2 h^3 \sqrt{\frac{3 r_1^2 h}{4}}.$$

c) Pri rovnosti $W_1 = W_2$ je splnená podmienka

$$\frac{h}{r_1} = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{15}{2}}.$$

4. úloha (navrhla RNDr. Marta Chytilová, CSc.)

V automobilu o hmotnosti 1 500 kg, ktorý jede rýchlosťou 72 km.h⁻¹, sedí vodič pripnutý bezpečnostným pásem. Hmotnosť vodiča je 80 kg. Obě časti pásu priléhajícího k hrudníku vodiče svírají spolu úhel 120°. Šířka pásu je 7,0 cm, tloušťka je 2,0 mm; mez pevnosti materiálu je 5,0 · 10⁸ N.m⁻².

a) Automobil najede na strom a zastaví za dobu 3 · 10⁻² s po nárazu. Určete průměrnou velikost síly **F**, která při nárazu působí na automobil. Porovnejte velikost této síly s tíhou automobilu a vodiče.

b) Jakou destrukční práci vykonají síly nárazu?

c) Přetrhne se bezpečnostní pás při nárazu? Přetrhne se bezpečnostní pás za stejných podmínek při dvojnásobné velikosti rychlosti automobilu před nárazem?

Úlohu řešíme modelově za zjednodušujících podmínek. Řešení v modelové situaci srovnajte se skutečností.

Řešení

Děj modelujeme nepružným rázem dvou koulí.

a) Hmotnost automobilu $m_1 = 1\,500$ kg, hmotnost vodiče $m_2 = 80$ kg, velikost rychlosti automobilu vzhledem k vozovce je $v = 20$ m.s⁻¹, doba, za kterou se změní rychlost automobilu z hodnoty v na nulovou, je $\Delta t = 3 \cdot 10^{-2}$ s.

Proměnnou sílu, která při nárazu trvajícím dobu Δt působí na automobil, nahradíme konstantní silou **F**, která by měla na soustavu stejný účinek. Pak impuls této síly se rovná změně hybnosti automobilu s vodičem:

$$\mathbf{F} \Delta t = \Delta \mathbf{p}. \quad (1)$$

Označme Δp velikost změny hybnosti, Δv velikost změny rychlosti:

$$\Delta p = (m_1 + m_2) \Delta v;$$

potom

$$F = \frac{(m_1 + m_2) \Delta v}{\Delta t}; F \doteq 105 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

Tíha automobilu s řidiče $F_1 = (m_1 + m_2)g \doteq 1,55 \cdot 10^4 \text{ N}$,
odtud

$$\frac{F}{F_1} \doteq 70.$$

b) Práce W vykonaná silou F se rovná změně kinetické energie soustavy:

$$W = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2, W \doteq 3 \cdot 10^2 \text{ kJ}.$$

c) Proměnnou silou, která působí při nárazu na řidiče, nahradíme konstantní silou F' , která by v době Δt měla na řidiče stejný účinek. Podle vztahu (1) má síla F' velikost

$$F' = \frac{m_2 \Delta v}{\Delta t}.$$

Obsah kolmého řezu pásu $S = a b$. Mez pevnosti jeho materiálu je σ_p . Na části pásu působí při nárazu síly F_1, F_2 . Protože obě síly spolu svírají úhel 120° (obr. 59), platí pro jejich velikosti $F_1 = F_2 = F'$. Při nárazu je normálové napětí pásu

$$\sigma_N = \frac{F'}{S} = \frac{m_2 \Delta v}{a b \Delta t}; \sigma_N \doteq 4 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} < \sigma_p,$$

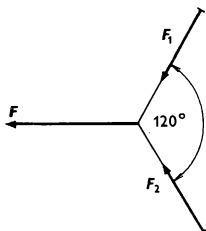
pás se nepřetrhne.

Je-li velikost rychlosti na počátku dvojnásobná, je také za stejných podmínek normálové napětí pásu dvojnásobné:

$$\sigma'_N \doteq 8 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} > \sigma_p,$$

pás se přetrhne.

Vzhledem k reálné situaci úlohy mohou být reálné číselné hodnoty výsledků vyjádřeny jen na jednu platnou číslici.



Obr. 59

S touto přesností je možno pomocí modelové situace reálnou úlohu vyřešit.

5. úloha (navrhla RNDr. Marta Chytilová, CSc.)

Oxid uhličitý o hmotnosti m je uzavřen ve válci pístem, který se posunuje bez tření. Na vnější straně pístu je vzduch při stálém atmosférickém tlaku. Oxid uhličitý považujte za ideální plyn. Teplota oxidu uhličitého se zvýší z hodnoty t_1 na t_2 .

- Jakou práci W plyn přitom vykoná?
- Jaké teplo Q plyn přijme?
- Jaká je změna ΔU vnitřní energie plynu pod pístem?
- Řešte úlohy a), b), c) pro hodnoty: $m = 20 \text{ g}$, $t_1 = 20^\circ\text{C}$, $t_2 = 108^\circ\text{C}$, molární teplo oxidu uhličitého při stálém objemu $C_{mV} = 28,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, molární hmotnost oxidu uhličitého $M_m = 44,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Řešení

Označíme p tlak plynu pod pístem, dále $T_1 = 293 \text{ K}$, $T_2 = 381 \text{ K}$. Tlak plynu je konstantní, protože je roven stálému vnějšímu atmosférickému tlaku. Děj je tedy izobarický.

a) Plyn ve válci má počáteční parametry m , p , V_1 , T_1 , konečné parametry m , p , V_2 , T_2 .

Podle stavové rovnice

$$p V_1 = \frac{m}{M_m} R_m T_1, \quad p V_2 = \frac{m}{M_m} R_m T_2.$$

Práce vykonaná při izobarickém ději

$$W = p (V_2 - V_1) = \frac{m}{M_m} R_m (T_2 - T_1).$$

b) Teplo přijaté plynem při izobarickém ději

$$\Delta Q = C_{mp} \frac{m}{M_m} (T_2 - T_1),$$

kde C_{mp} je molární teplo při stálém tlaku.

Pro ideální plyn platí Mayerova rovnice $C_{mp} = R_m + C_{mv}$, tedy

$$\Delta Q = (R_m + C_{mv}) \frac{m}{M_m} (T_2 - T_1).$$

c) Podle prvního termodynamického zákona $\Delta U = \Delta Q - W$. Změna vnitřní energie plynového tělesa při uvažovaném ději je

$$\begin{aligned} \Delta U &= (R_m + C_{mv}) \frac{m}{M_m} (T_2 - T_1) - \frac{m}{M_m} R_m (T_2 - T_1) = \\ &= \frac{m}{M_m} C_{mv} (T_2 - T_1). \end{aligned}$$

d) Pro zadané hodnoty a $R_m = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ vyjde $W \doteq 332 \text{ J}$, $\Delta Q \doteq 1,48 \text{ kJ}$, $\Delta U \doteq 1,15 \text{ kJ}$.

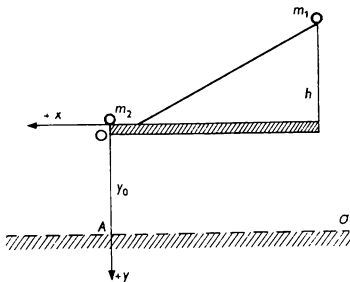
6. úloha (navrhla RNDr. Marta Chytilová, CSc.)

Ověření platnosti zákona zachování hybnosti

Určete hybnost dvou koulí o stejných poloměrech a různých hmotnostech před dokonale pružným rázem a po něm a ověřte platnost zákona zachování hybnosti.

Příprava úlohy

1. Podle obr. 60 uvažujeme pokusnou soustavu skládající se ze dvou homogenních dokonale pružných koulí o hmotnostech m_1 a m_2 , $m_1 > m_2$, z nakloněné roviny o výšce h ,



Obr. 60

kteřá v nejnižším místě přechází v krátkou vodorovnou část. V hloubce y_0 pod touto částí je vodorovná rovina σ . Koule o hmotnosti m_1 je v nejvyšším místě nakloněné roviny a koule o hmotnosti m_2 je na okraji vodorovné podložky připojené v nejnižším místě nakloněné roviny.

2. Koule o hmotnosti m_1 a poloměru r koná po uvolnění bez nárazu rovnoměrně zrychlený valivý pohyb bez smyku. Moment setrvačnosti koule vzhledem k ose jdoucí středem je $I = \frac{2}{5} m_1 r^2$. Označme ω úhlovou rychlost valivého pohybu koule na konci jejího pohybu po nakloněné rovině, v_1 posuvnou rychlost jejího hmotného středu.

Protože vylučujeme smyk, platí $\omega = \frac{v_1}{r}$.

Dokažte, že platí $v_1 = \sqrt{\frac{10}{7} g h}$. Určete hybnost koulí před rázem $p = p_1 + p_2$.

3. Koule o hmotnosti m_1 narazí na kouli o hmotnosti m_2 , která je v klidu. Předpokládáme, že ráz je středový, dokonale pružný. Po vodorovném vrhu v téže svislé rovině dopadnou koule na rovinu σ ve vzdálenostech x_1 a x_2 od bodu A . Dokažte, že pro vodorovné složky rychlostí koulí v rovině σ platí

$$v_{1x} = x_1 \sqrt{\frac{g}{2 y_0}}, \quad v_{2x} = x_2 \sqrt{\frac{g}{2 y_0}}.$$

Určete vodorovné složky hybností p_{1x} a p_{2x} obou koulí v rovině σ .

4. Podle bodů 2. a 3. запиšte zákon zachování hybnosti pro soustavu koulí.

Řešení úlohy

Podle přípravy úlohy запиšte pomůcky, které k řešení úlohy potřebujete. Sestavte pokus a změřte veličiny m_1 , m_2 , h , y_0 . Při těchto konstantních veličinách proveďte pokus pětkrát; pokaždé změřte délky x_1 a x_2 a запиšte do tabulky. Určete aritmetické průměry naměřených délek x_{1p} , x_{2p} .

Určete hodnoty p , p_{1x} , p_{2x} . Ověřte, zda je splněn zákon zachování hybnosti pro soustavu koulí před rázem a při dopadu na rovinu σ .

Zhodnocení úlohy

Proč volíme stejný poloměr obou koulí?

Které zjednodušující nebo idealizující předpoklady pro řešení úlohy jste použili? Uveďte takové, které nevyplývají přímo z textu.

Uveďte, které z nich vedou k systematickým chybám měření.

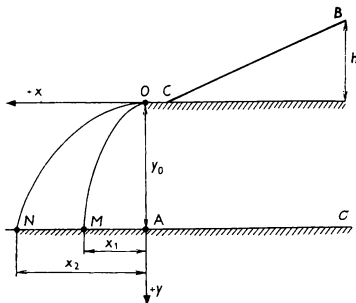
Řešení

Příprava pokusu

1. Pokusná soustava se skládá ze dvou homogenních koulí o hmotnostech m_1 a m_2 , $m_1 > m_2$, $r_1 = r_2 = r$, z nakloněné roviny o výšce h , umístěné na vodorovné desce stolu, která je ve výšce y_0 nad podlahou.

Pokus má tři fáze:

První fáze: Koule o hmotnosti m_1 je uvolněna bez nárazu v bodě B (obr. 61), koná valivý pohyb po nakloněné



Obr. 61

rovině bez smyku; v bodě C má rychlost posuvného pohybu (rychlost hmotného středu kuličky) $\mathbf{v}_1$ a úhlovou rychlost otáčivého pohybu o velikosti $\omega_1 = \frac{v_1}{r}$.

Druhá fáze: Koule o hmotnosti m_1 při rychlosti $\mathbf{v}_1$ narazí na kouli o hmotnosti m_2 , jejíž rychlost $\mathbf{v}_2 = 0$, a dojde k dokonale pružnému rázu. Rychlost koule o hmotnosti m_1 se změní na $\mathbf{u}_1$ a rychlost koule o hmotnosti m_2 je po rázu $\mathbf{u}_2$. V této fázi pokusu tvoří koule uzavřenou soustavu. Třetí fáze: Koule o hmotnosti m_2 při počáteční rychlosti $\mathbf{u}_2$ koná vodorovný vrh a dopadne na vodorovnou podlahu do vzdálenosti x_2 od bodu A, koule o hmotnosti m_1 při počáteční rychlosti $\mathbf{u}_1$ koná vodorovný vrh a dopadne na podlahu ve vzdálenosti x_1 od bodu A.

2. V první fázi pokusu tvoří koule o hmotnosti m_1 a nakloněná rovina spojená s povrchem Země uzavřenou soustavu, v níž dochází působením tíhové síly (vnitřní síly soustavy) ke změnám kinetické a tíhové potenciální energie koule, ostatní změny jsou zanedbatelné. Nulová hladina tíhové potenciální energie je na vodorovné rovině desky stolu.

Pro kouli v poloze B je

$$E_{kB} = 0 \text{ J}; E_{pB} = m_1 g h.$$

Pro kouli v poloze C je

$$E_{kC} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{I_1 \omega_1^2}{2}; E_{pC} = 0 \text{ J}.$$

Přitom je $I_1 = \frac{2}{5} m_1 r^2$, $\omega_1 = \frac{v_1}{r}$, tedy

$$E_{kC} = \frac{7 m_1 v_1^2}{10}.$$

Mechanická energie soustavy se zachovává:

$$E_{kC} + E_{pC} = E_{kB} + E_{pB}, \text{ tedy}$$

$$\frac{7 m_1 v_1^2}{10} = m_1 g h;$$

odtud vyjádříme

$$v_1 = \sqrt{\frac{10 g h}{7}}.$$

3. Ve druhé fázi pokusu tvoří koule vzhledem k dokonale pružnému středovému rázu ve vodorovném směru uzavřenou soustavu. Stav soustavy před rázem je charakterizován veličinami:

$$m_1; v_1 = \sqrt{\frac{10 g h}{7}}; m_2; v_2 = 0 \text{ m.s}^{-1}.$$

Pro x -ové souřadnice vektorů hybností pak platí

$$p_{1x} = m_1 v_1 = m_1 \sqrt{\frac{10 g h}{7}}, p_{2x} = 0 \text{ kg.m.s}^{-1},$$

takže
$$p_{1x} + p_{2x} = m_1 \sqrt{\frac{10 g h}{7}}. \quad (1)$$

Po rázu konají koule ve svislé rovině vrh vodorovný a dopadnou současně, protože vrh začal v témž čase, za dobu t_1 na vodorovnou podlahu do bodů $M(x_1, y_0)$ a $N(x_2, y_0)$, přičemž platí

$$x_1 = v_{1x} t_1, y_0 = \frac{g t_1^2}{2}; x_2 = v_{2x} t_1, y_0 = \frac{g t_1^2}{2}.$$

Po vyloučení parametru t_1 z prvních dvou rovnic a potom z druhé dvojice rovnic dostaneme pro rychlosti

$$v_{1x} = x_1 \sqrt{\frac{g}{2 y_0}}, v_{2x} = x_2 \sqrt{\frac{g}{2 y_0}}$$

a pro x -ové souřadnice příslušných vektorů hybností

$$p'_{1x} = m_1 v_{1x} = m_1 x_1 \sqrt{\frac{g}{2 y_0}},$$

$$p'_{2x} = m_2 v_{2x} = m_2 x_2 \sqrt{\frac{g}{2 y_0}}.$$

Odtud určíme

$$p'_{1x} + p'_{2x} = (m_1 x_1 + m_2 x_2) \sqrt{\frac{g}{2 y_0}}. \quad (2)$$

4. Ve druhé a třetí fázi pokusu jsou pro soustavu koulí splněny podmínky platnosti zákona zachování hybnosti. Proto podle (1) a (2) platí

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x}. \quad (3)$$

Po dosazení veličin z (1) a (2) a po úpravě vztahu (3) dostaneme

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 2 m_1 \sqrt{\frac{5 h y_0}{7}}. \quad (4)$$

Řešení úlohy

Naším úkolem je ověřit platnost vztahu (4) měřením. Změříme hmotnost m_1 kovové koule a hmotnost m_2 skleněné koule. Dále změříme délky y_0 , h , x_1 , x_2 podle obr. 61. K tomu potřebujeme tyto pomůcky: nakloněnou rovinu se žlábkem, dvě koule požadovaných vlastností, technické váhy a sadu závaží (nebo automatické stupnicové váhy), kovové délkové měřidlo se stupnicí v milimetrech, posuvné měřidlo s noniem, olovnici, list papíru na zachycení stop koulí v bodech M a N, vhodnou barvu k potření povrchu koulí.

Naměřené hodnoty veličin dosadíme na levou a na pravou stranu vztahu (4) a oba výsledky porovnáme.

a) Ověření shodnosti průměru koulí:

Pomocí posuvného měřidla s noniem změříme pětkrát průměr d_1 kovové koule a d_2 skleněné koule; určíme aritmetické průměry veličin každého z obou měření:

$$d_1 = 3,48 \text{ cm}, d_2 = 3,44 \text{ cm}; |\Delta d| = 0,04 \text{ cm}; \frac{|\Delta d|}{d} = 0,01.$$

Rozdíl je asi 1 % průměru jedné koule.

b) Měření hmotnosti koulí:

Použili jsme technické váhy se sadou závaží; nejmenší hmotnost použitého závaží je 0,1 g.

$m_1 = 21,6 \text{ g}$; odhad relativní odchylky měření je asi 0,2 %;
 $m_2 = 6,8 \text{ g}$; odhad relativní odchylky měření je asi 0,8 %.

c) Měření délek nezávislých na průběhu pokusu: h , y_0 :
 Použijeme kovové délkové měřidlo se stupnicí v milimetrech

a olovnici; každou délku měříme pětkrát a určíme aritmetický průměr:

$h = 19,6$ cm s odhadem relativní odchylky asi 0,5 %,

$y_0 = 54,5$ cm s odhadem relativní odchylky asi 0,2 %.

d) Měření délek x_1 a x_2 , které jsou výsledkem pokusu:

Na podlahu položíme bílý papír; pomocí olovnice upevněné v bodě O vyznačíme na papíře bod A ; koule před pokusem natřeme tmavou barvou, která při dopadu koule na papír zanechá stopu v bodech M , N . Po provedení pokusu změříme délkovým měřidlem délky $x_1 = AM$, $x_2 = AN$. Dá se předpokládat, že neurčitost výsledku bude větší než v případech a), b), c), protože výsledek závisí na průběhu pokusu. Provedeme proto pokus desetkrát a výsledky zpracujeme podle učebnice Fyzika pro 1. ročník gymnázií (1984). Výsledky měření jsou sestaveny v tabulce 17.

Aritmetické průměry jsou tyto: $x_1 = 29,6$ cm; $x_2 = 77,4$ cm; $|\Delta x_1| = 0,7$ cm; $|\Delta x_2| = 1,6$ cm $\doteq 2$ cm. Relativní odchylky $\delta x_1 \doteq 0,02$; $\delta x_2 \doteq 0,02$, takže

$$x_1 = (29,6 \pm 0,7) \text{ cm}; x_2 = (77 \pm 2) \text{ cm}.$$

Naměřené veličiny dosadíme do vztahu (4):

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 \doteq 1\,165 \text{ g.cm}; 2 m_1 \sqrt{\frac{5 h y_0}{7}} \doteq 1\,192 \text{ g.cm}.$$

Rozdíl pravé a levé strany ve vztahu (4) je asi 27 g.cm, což odpovídá asi 2 % levé nebo pravé strany vztahu (4). Rovnost ve vztahu (4) jsme měřením ověřili s relativní odchylkou asi 2 %.

Zhodnocení úlohy

Stejný poloměr obou koulí volíme proto, abychom mohli předpokládat středový ráz koulí. Ověřili jsme rovnost průměrů použitých koulí s relativní odchylkou asi 1 %.

Ověřili jsme platnost vztahu (4), který vznikl úpravou vztahu (3) vyjadřujícího zákon zachování hybnosti při dokonale pružném vodorovném středovém rázu dvou koulí stejných poloměrů a různých hmotností, za určitých zjednodušujících

Měření	$\frac{x_1}{\text{cm}}$	$\frac{x_2}{\text{cm}}$	$\frac{\Delta x_1}{\text{cm}}$	$\frac{\Delta x_2}{\text{cm}}$
1	31,8	78,8	+2,2	+1,4
2	30,3	74,2	+0,7	-3,2
3	29,3	78,2	-0,3	+0,8
4	29,8	75,7	+0,2	-1,7
5	29,8	79,3	+0,2	+1,9
6	28,8	79,5	-0,8	+2,1
7	28,3	75,3	-1,3	-2,1
8	29,4	76,6	-0,2	-0,8
9	29,7	78,0	+0,1	+0,6
10	28,8	78,5	-0,8	+1,1

předpokladů. Rovnost levé a pravé strany vztahu (4) byla ověřena s relativní odchylkou asi 2 %.

Dílčí měření hmotností a délek byla provedena s odhadem relativních odchylek v mezích od 0,2 % do 0,8 %.

Výsledek odpovídá jednoduché sestavě pokusu, jednoduchým prostředkům měření a zjednodušeným postupům matematického zpracování.

7. úloha (navrhla RNDr. Marta Chytilová, CSc.)

Nákladní automobil o hmotnosti m_1 a osobní automobil o hmotnosti m_2 jedou po přímé silnici proti sobě rychlostmi $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ vzhledem k vozovce; $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$.

a) Dojde ke srážce, při níž zůstanou obě vozidla spojena. Určete rychlost $\mathbf{u}$ celku vzhledem k vozovce v okamžiku, kdy vzájemná vzdálenost vozidel je nulová. Určete změnu rychlosti nákladního automobilu $\mathbf{u} - \mathbf{v}_1$ a osobního automobilu $\mathbf{u} - \mathbf{v}_2$. Určete úbytek kinetické energie soustavy při

srážce. Modelujte děj nepružným středovým rázem dvou koulí.

b) Dojde ke srážce, po níž nezůstanou vozidla spojena, ale pohybují se rychlostmi u_1 a u_2 vzhledem k vozovce. Byla změřena rychlost u_1 . Určete směr a velikost rychlosti u_2 . Určete úbytek kinetické energie soustavy při srážce. Modelujte děj přímým středovým rázem nedokonale pružných koulí.

c) $m_1 = 15 \text{ t}$, $m_2 = 1,5 \text{ t}$, $v_1 = v_2 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Pro tyto hodnoty řešte úlohu a). Řešte úlohu b) pro tytéž hodnoty, jestliže rychlost nákladního automobilu po srážce vzhledem k vozovce měla velikost $u_1 = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Porovnejte úbytek kinetické energie soustavy v případě a) a v případě b). Po modelovém vyřešení úloh a), b) popište reálné situace v obou případech.

Řešení

a) V modelovém řešení je soustava obou automobilů uzavřená, dochází k nepružnému rázu. Platí tedy zákon zachování hybnosti

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u. \quad (1)$$

Zvolme osu souřadnic $+x$ souhlasně rovnoběžnou s rychlostí v_1 a vztah (1) zapíšeme v průmětech vektorů do této osy (obr. 62)

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u,$$

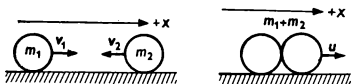
odtud

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (2)$$

Podle zadání je $m_1 > m_2$ a pro velikosti rychlostí platí $v_1 = v_2 = v$, pak

$$u = v \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

Rychlost u je souhlasně rovnoběžná s rychlostí v_1 .



Obr. 62

$$u - v_1 = - \frac{m_2 (v_1 + v_2)}{m_1 + m_2},$$

$$u - v_2 = - \frac{2 m_2 v_2 - m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2},$$

V podmínkách úlohy se velikosti rychlostí obou automobilů zmenší. Označme E_{k1} kinetickou energii soustavy před rázem, E_{k2} kinetickou energii soustavy po rázu:

$$\begin{aligned} \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 - \\ &- \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \\ &= - \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2 (m_1 + m_2)} = - \frac{2 m_1 m_2 v}{m_1 + m_2} < 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Při rázu nastane úbytek kinetické energie soustavy.

b) V modelovém řešení je soustava obou automobilů uzavřená, dochází k nedokonalé pružnému rázu; platí zákon zachování hybnosti

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (4)$$

Při stejné volbě osy souřadnic $+x$ zapíšeme vztah (4) v průmětech vektorů do této osy (obr. 63)

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Odtud

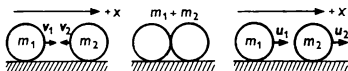
$$u_2 = \frac{m_1 (v_1 - u_1) - m_2 v_2}{m_2}. \quad (5)$$

Rychlosti u_1 , u_2 jsou souhlasně rovnoběžné s rychlostí v_1 .
Změna kinetické energie soustavy při rázu

$$\Delta E'_k = E'_{k2} - E'_{k1} = \frac{1}{2} [(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2) - (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)].$$

Pod dosazení ze vztahu (5) a úpravě dostaneme

$$\Delta E'_k = - \frac{m_1 (v_1 - u_1)}{2 m_2} [m_2 (v_1 + u_1 + 2 v_2) - m (v_1 - u_1)]. \quad (6)$$



Obr. 63

c) K a): podle (2) $u \doteq 16 \text{ m.s}^{-1}$.

Nákladní automobil zachovává směr pohybu při rychlosti menší asi o 4 m.s^{-1} ; osobní automobil změnil směr pohybu v opačný, změna velikosti rychlosti je tedy ekvivalentní hodnotě 36 m.s^{-1} . Podle (3) $\Delta E_k \doteq -1,1 \text{ MJ}$; nastane úbytek kinetické energie soustavy, který je ekvivalentní práci destruktivních sil $W = -\Delta E_k$.

K b): $u_1 = 15 \text{ m.s}^{-1}$; podle (5) $u_2 \doteq 30 \text{ m.s}^{-1}$.

Nákladní automobil zachovává směr pohybu při rychlosti menší asi o 5 m.s^{-1} ; osobní automobil změnil směr pohybu v opačný, změna velikosti rychlosti je tedy ekvivalentní hodnotě asi 50 m.s^{-1} . (Podle 6.) $\Delta E'_k \doteq -0,98 \text{ MJ}$; nastane opět úbytek kinetické energie soustavy, který je ekvivalentní práci destruktivních sil $W' = -\Delta E'_k$, $W' > W$.

b) Druhé kolo soutěže

Všechny úlohy navrhla RNDr. Marta Chytilová, CSc.

1. úloha

Graf OABCD na obr. 64 znázorňuje rychlost přímočarého pohybu hmotného bodu jako funkci času, $v = f(t)$.

a) Popište pohyb hmotného bodu znázorněný jednotlivými úseky grafu.

b) Zapište zrychlení a , rychlost v a dráhu s jako funkce času t pro jednotlivé úseky grafu.

c) Pro hodnoty $t_1 = 2$ s, $t_2 = 4$ s, $t_3 = 10$ s, $t_4 = 14$ s, $v_B = v_C = 50$ m.s⁻¹ stanovte celkovou dráhu s hmotného bodu a průměrnou rychlost v_p pohybu v časovém úseku od 0 s do 14 s.

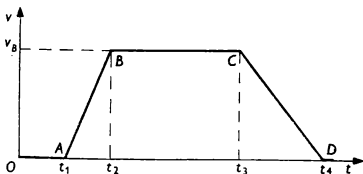
Řešení

a) úsek OA: hmotný bod je v klidu;

úsek AB: hmotný bod koná pohyb rovnoměrně zrychlený, od počáteční rychlosti nulové k rychlosti v_B ;

úsek BC: hmotný bod koná rovnoměrný pohyb rychlostí v_B ;

úsek CD: hmotný bod koná pohyb rovnoměrně zpomalený s počáteční rychlostí $v_C = v_B$ a s konečnou rychlostí nulovou.



Obr. 64

b) úsek OA , $t \in (0, t_1)$: zrychlení $a_{OA} = 0 \text{ m.s}^{-2}$,
rychlost $v_{OA} = 0 \text{ m.s}^{-1}$, dráha $s = 0 \text{ m}$;

úsek AB , $t \in (t_1, t_2)$:

$$a_{AB} = \frac{v_B}{t_2 - t_1},$$

$$v_{AB} = a_{AB}(t - t_1) = \frac{v_B}{t_2 - t_1}(t - t_1),$$

$$s_{AB} = \frac{v_B}{2(t_2 - t_1)}(t - t_1)^2;$$

úsek BC , $t \in (t_2, t_3)$: $a_{BC} = 0 \text{ m.s}^{-2}$, $v_{BC} = v_B$, $s_{BC} =$
 $= \frac{1}{2} v_B(t_2 - t_1) + v_B(t - t_2);$

úsek CD , $t \in (t_3, t_4)$: $a_{CD} = -\frac{v_B}{t_4 - t_3},$

$$v_{CD} = v_B + a_{CD}(t - t_3) = v_B \left(1 - \frac{t - t_3}{t_4 - t_3} \right),$$

$$s_{CD} = \frac{1}{2} v_B(t_2 - t_1) + v_B(t_3 - t_2) +$$

$$+ v_B(t - t_3) + \frac{1}{2} a_{CD}(t - t_3)^2 =$$

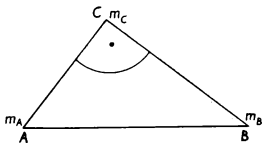
$$= v_B \left[-\frac{t_1 + t_2}{2} + t - \frac{(t - t_3)^2}{2(t_4 - t_3)} \right].$$

c) Z posledního vztahu pro $t = t_4$ určíme $s = 450 \text{ m}$,

$$v_p = \frac{s}{t_4} \doteq 32 \text{ m.s}^{-1}.$$

2. úloha

Ve vrcholech pravoúhlého trojúhelníku ABC o stranách $AB = 0,50 \text{ m}$, $BC = 0,40 \text{ m}$, $CA = 0,30 \text{ m}$ jsou umístěny hmotné body o hmotnostech $m_A = 3,0 \text{ kg}$, $m_B = 1,0 \text{ kg}$, $m_C = 2,0 \text{ kg}$. Soustava těchto hmotných bodů tvoří tuhé těleso (obr. 65).



Obr. 65

a) Určete výslednou tíhovou sílu $\mathbf{F}$ působící na toto těleso.

b) Určete průsečík S vektorové přímky výsledné tíhové síly $\mathbf{F}$ s rovinou trojúhelníku ABC , jestliže tato rovina je vodorovná. Změní se poloha bodu S vzhledem k trojúhelníku ABC , jestliže tato rovina není vodorovná? Odpověď zdůvodněte.

c) Zdůvodněte, zda bod S je, nebo není totožný s geometrickým těžištěm trojúhelníku ABC .

Řešení

a) Předpokládáme, že v prostoru vymezeném úlohou je tíhové zrychlení $\mathbf{g}$ konstantní. Pak na hmotné body umístěné ve vrcholech trojúhelníku ABC působí tíhové síly $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$, $\mathbf{F}_C$ o velikostech $F_A = m_A g$, $F_B = m_B g$, $F_C = m_C g$. Tyto síly tvoří soustavu souhlasně rovnoběžných sil, jejichž výslednice $\mathbf{F}$ má velikost $F = (m_A + m_B + m_C) g$, $F \doteq 59 \text{ N}$. Síla $\mathbf{F}$ směřuje svisle dolů, její působíště vzhledem k vymezenému tuhému tělesu můžeme zvolit v kterémkoli bodě její vektorové přímky, tedy také v průsečíku této přímky s rovinou trojúhelníku ABC .

b) Abychom určili průsečík S vektorové přímky síly $\mathbf{F}$ s rovinou trojúhelníku ABC , určíme nejprve např. výslednici tíhových sil $\mathbf{F}_B$ a $\mathbf{F}_C$ působících na hmotné body ve vrcholech B a C trojúhelníku. Tato výslednice je souhlasně rovno-

běžná se silami $\mathbf{F}_B$ a $\mathbf{F}_C$; její velikost $F_{BC} = (m_B + m_C)g$. Označme X průsečík její vektorové přímky s úsečkou BC . Protože rovina trojúhelníku ABC je kolmá k tíhovým silám $\mathbf{F}_B$ a $\mathbf{F}_C$, platí pro tyto síly podle momentové věty vzhledem k bodu X :

$$\begin{aligned} F_B \cdot BX &= F_C \cdot XC, \\ BX : XC &= F_C : F_B = m_C : m_B. \end{aligned} \quad (1)$$

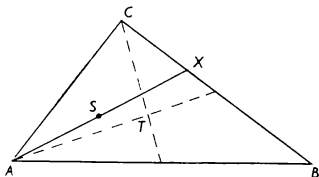
Podle toho

$$BX : XC = 2,0 : 1,0; \quad BX = \frac{4}{15} \text{ m}, \quad XC = \frac{2}{15} \text{ m}.$$

Výslednice tíhových sil $\mathbf{F}_{BC}$ a $\mathbf{F}_A$ je podle úlohy a) síla $\mathbf{F}$. Průsečík S vektorové přímky síly $\mathbf{F}$ s rovinou trojúhelníku ABC leží na úsečce AX . Podle zadání úlohy je $m_B + m_C = m_A$. Platí tedy $F_A = F_{BC}$ a podle momentové věty vzhledem k bodu S je tento bod středem úsečky AX :

$$AS = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + XC^2}, \quad AS \doteq 0,16 \text{ m}.$$

Změní-li se poloha roviny trojúhelníku ABC tak, že tato rovina již není vodorovná, zůstává poloha bodu S vzhledem



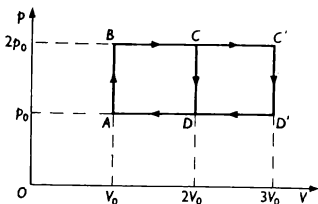
Obr. 66

k trojúhelníku ABC nezměněna. Tíhové síly $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$, $\mathbf{F}_C$ zachovávají svislý směr, jejich vektorové přímky svírají s rovinou trojúhelníku opět stejné úhly. Ve vztahu (1) se násobí obě strany stejným činitelem.

c) Geometrické těžiště T trojúhelníku ABC je průsečík spojnic každého vrcholu trojúhelníku se středem protilehlé strany. Bod S (obr. 66) tuto vlastnost nemá. Body S a T by byly totožné jen tehdy, kdyby platil vztah $m_A = m_B = m_C$.

3. úloha

Dva tepelné stroje pracují v cyklech $ABCD A$ a $ABC'D'A$ podle obr. 67. V obou strojích je pracovním prostředím ideální plyn o stejném látkovém množství n s jednoatomovými molekulami.



Obr. 67

- Určete práci W_1 vykonanou v jednom cyklu v prvním stroji a práci W_2 vykonanou v jednom cyklu ve druhém stroji.
- Určete teplo Q_1 přijaté v jednom cyklu prvního stroje a teplo Q_2 přijaté v jednom cyklu druhého stroje.
- Který z obou strojů má větší účinnost?

Poznámka

V podmínkách úlohy platí pro molární teplotu plynu $C_{mV} = \frac{3}{2} R_m$,

$C_{mP} = \frac{5}{2} R_m$, kde R_m je molární plynová konstanta.

Řešení

a) Plyn v prvním stroji koná práci v úseku BC , $W_{BC} = 2 p_0 V_0$; v úseku DA konají práci vnější síly, $W_{DA} = p_0 V_0$, celková práce vykonaná plynem $W_1 = W_{BC} - W_{DA} = p_0 V_0$. Obdobně pro plyn v druhém stroji: $W_{BC'} = 4 p_0 V_0$, $W_{D'A} = 2 p_0 V_0$, $W_2 = 2 p_0 V_0$, $W_2 > W_1$.

b) Pro body A, B, C, C' označme teploty $T_A, T_B, T_C, T_{C'}$. Podle stavové rovnice: $p_0 V_0 = n R_m T_A$, $2 p_0 V_0 = n R_m T_B$, $4 p_0 V_0 = n R_m T_C$, $6 p_0 V_0 = n R_m T_{C'}$, takže $T_A = \frac{p_0 V_0}{n R_m}$,

$$T_B = \frac{2 p_0 V_0}{n R_m}, \quad T_C = \frac{4 p_0 V_0}{n R_m}, \quad T_{C'} = \frac{6 p_0 V_0}{n R_m}.$$

Plyn v prvním stroji přijme v jednom cyklu teplo na úseku AB , $Q_{AB} = C_V n (T_B - T_A)$, a na úseku BC , $Q_{BC} = C_p n (T_C - T_B)$. Po dosazení za T_A, T_B, T_C, C_V, C_p určíme

$$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BC} = \frac{13}{2} p_0 V_0.$$

Obdobně pro druhý stroj $Q_{BC'} = C_p n (T_{C'} - T_B)$,

$$Q_2 = Q_{AB} + Q_{BC'} = \frac{23}{2} p_0 V_0.$$

c) Účinnost prvního stroje označíme η_1 , účinnost druhého stroje η_2 :

$$\eta_1 = \frac{W_1}{Q_1} = \frac{2}{13}, \quad \eta_2 = \frac{W_2}{Q_2} = \frac{4}{23}, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{23}{26} < 1,$$

$\eta_2 > \eta_1$, druhý stroj má účinnost větší než první stroj.

4. úloha

Na vodorovné rovinné ploše kluziště stojí proti sobě v klidu otec o hmotnosti m_1 a dcera o hmotnosti m_2 .

a) Otec hodí dceři míč o hmotnosti m ve vodorovném směru rychlostí v_1 . Dcera míč chytí. Určete rychlost u_1 otce po odhození míče a rychlost u_2 dcery po zachycení míče.

b) Dcera ihned vrátí míč otci rychlostí $\mathbf{v}_2$ ve vodorovném směru a otec míč chytí. Určete rychlost $\mathbf{u}_3$ dcery po odhození míče a rychlost $\mathbf{u}_4$ otce po zachycení míče.

c) Po obecném vyřešení řešte pro hodnoty: $m_1 = 80 \text{ kg}$, $m_2 = 25 \text{ kg}$, $m = 1,0 \text{ kg}$, $v_1 = 5,0 \text{ m.s}^{-1}$, $v_2 = 4,0 \text{ m.s}^{-1}$. Určete relativní rychlosti otce a dcery na počátku a na konci dějů a) a b). Vysvětlete, proč v soustavě všech tří těles není splněn zákon zachování mechanické energie.

Třecí síly a síly odporu vzduchu neuvažujte. Změnu rychlosti $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ míče v důsledku působení tíhové síly neuvažujte. Děje v úloze modelujte jako nepružné rázy dvou koulí.

Řešení

Zvolíme vodorovnou osu souřadnic $+x$ ve směru od otce k dceři (obr. 68). Soustava otec a míč a soustava dcera a míč jsou v podmínkách úlohy izolované soustavy. Proto v každé fázi děje a) i děje b) pro ně platí zákon zachování hybnosti.

a) Otec a míč

Před odhozením míče má soustava otec-míč hmotnost $m_1 + m$ a rychlost nulovou, po odhození míče má otec hmotnost m_1 a rychlost $\mathbf{u}_1$, míč o hmotnosti m má rychlost $\mathbf{v}_1$. Podle zákona zachování hybnosti $m_1\mathbf{u}_1 + m\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, takže

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{m}{m_1} \mathbf{v}_1. \quad (1)$$

Po odhození míče se otec pohybuje rychlostí $\mathbf{u}_1$ proti směru osy $+x$, protože vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$ mají směry navzájem opačné a vektor $\mathbf{v}_1$ má směr osy $+x$.



Obr. 68

Dcera a míč

Před zachycením míče má dcera hybnost nulovou, míč hybnost $m \mathbf{v}_1$. Po zachycení míče má soustava dcera-míč hybnost $(m_2 + m) \mathbf{u}_2$. Ze zákona zachování hybnosti plyne

$$\mathbf{u}_2 = \frac{m}{m_2 + m} \mathbf{v}_1. \quad (2)$$

Po zachycení míče se dcera pohybuje rychlostí $\mathbf{u}_2$ ve směru $+x$.

b) Dcera a míč

Před odhozením míče má soustava dcera-míč hybnost $(m_2 + m) \mathbf{u}_2$. Po odhození míče má dcera hybnost $m_2 \mathbf{u}_3$, míč hybnost $m(\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2)$. Podle zákona zachování hybnosti

$$(m_2 + m) \mathbf{u}_2 = m_2 \mathbf{u}_3 + m(\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2),$$

neboť míč má vzhledem k ose souřadnic rychlost $\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2$. Ve skalárním zápisu, protože vektor $\mathbf{v}_2$ má směr proti ose $+x$:

$$m_2 u_3 = (m_2 + m) u_2 + m(v_2 - u_2).$$

Odtud, s přihlédnutím k (2),

$$u_3 = \frac{m}{m_2(m_2 + m)} [m_2 v_1 + (m_2 + m) v_2]. \quad (3)$$

Po odhození míče se dcera pohybuje rychlostí $\mathbf{u}_3$ ve směru osy $+x$.

Otec a míč

Před zachycením míče má otec hybnost $m_1 \mathbf{u}_1$, míč má hybnost $m(\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2)$. Po zachycení míče má soustava otec-míč hybnost $(m_1 + m) \mathbf{u}_4$. Podle zákona zachování hybnosti je

$$m_1 \mathbf{u}_1 + m(\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2) = (m_1 + m) \mathbf{u}_4.$$

Skalárně píšeme (vektor $\mathbf{v}_2$ má směr $-x$)

$$m_1 u_1 + m(-v_2 + u_2) = (m_1 + m) u_4.$$

Odtud s použitím (1), (2) dostáváme

$$u_4 = -m \frac{m_2(v_1 + v_2) + m v_2}{(m_1 + m)(m_2 + m)}. \quad (4)$$

Po zachycení míče se otec pohybuje rychlostí $\mathbf{u}_4$ proti směru $+x$.

c) Pro zadané hodnoty vypočítame z (1), (2), (3), (4)
 $|u_1| \doteq 0,063 \text{ m.s}^{-1}$, $|u_2| \doteq 0,19 \text{ m.s}^{-1}$, $|u_3| \doteq 0,37 \text{ m.s}^{-1}$,
 $|u_4| \doteq 0,10 \text{ m.s}^{-1}$.

Protože rychlost otce má vždy směr opačný než rychlost dcery, je velikost relativní rychlosti na počátku a na konci dějů rovna součtu absolutních hodnot odpovídajících rychlostí. Na počátku děje a) je relativní rychlost nulová, na konci děje a) má relativní rychlost velikost $|u_1| + |u_2| \doteq 0,25 \text{ m.s}^{-1}$. Stejnou velikost má relativní rychlost na počátku děje b). Na konci děje b) je velikost relativní rychlosti $|u_3| + |u_4| \doteq \doteq 0,47 \text{ m.s}^{-1}$.

Pro soustavu všech tří těles není splněn zákon zachování mechanické energie, protože při nepružných srážkách se přeměňuje část kinetické energie soustavy na vnitřní energii a kromě toho se při hodů míčem přemění vždy část vnitřní energie soustavy na kinetickou energii.

4 ÚLOHY KATEGORIE D

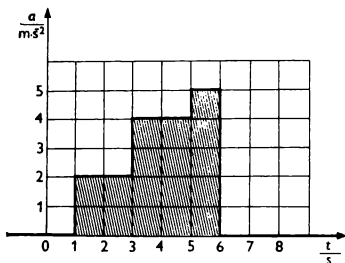
a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhol RNDr. Rastislav Baník)

Na obr. 69 je graf funkcie $a = f(t)$, kde a je veľkosť zrýchlenia hmotného bodu v čase t . Bod sa pohybuje po priamej dráhe, v čase $t = 0 \text{ s}$ je veľkosť rýchlosti hmotného bodu $v_0 = 0 \text{ m.s}^{-1}$ a dráha $s_0 = 0 \text{ m}$.

a) Zapište funkcie $v = f_1(t)$, kde v je veľkosť rýchlosti hmotného bodu, v časovom intervale $\langle 0 \text{ s}; 8 \text{ s} \rangle$. Hodnoty rýchlosti zostavte do tabuľky a na milimetrovom papieri zostrojte graf funkcie $v = f_1(t)$.

b) Zapište funkcie $s = f_2(t)$, kde s je dráha, v tomže časovom intervale $\langle 0 \text{ s}; 8 \text{ s} \rangle$. Hodnoty dráhy zostavte do tabuľky a na milimetrovom papieri zostrojte graf funkcie $s = f_2(t)$.



Obr. 69

c) Určte priemernú rýchlosť v_p hmotného bodu v časovom intervale $\langle 0 \text{ s}; 8 \text{ s} \rangle$.

d) Akú veličinu modeluje obsah plochy obmedzenej osou času a grafom funkcie $a = f(t)$? Odpoveď zdôvodnite.

Riešenie

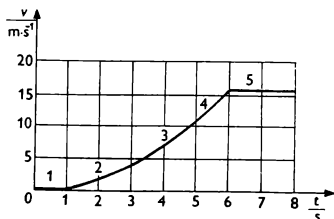
Časové intervaly označíme 1 (0 s; 1 s), 2 (1 s; 3 s), 3 (3 s; 5 s), 4 (5 s; 6 s), 5 (6 s; 8 s).

a) $v_1 = 0 \text{ m.s}^{-1}$, $v_2 = 2 \text{ m.s}^{-2}(t - 1 \text{ s})$, $v_3 = 4 \text{ m.s}^{-1} + 4 \text{ m.s}^{-2}(t - 3 \text{ s})$, $v_4 = 12 \text{ m.s}^{-1} + 5 \text{ m.s}^{-2}(t - 5 \text{ s})$, $v_5 = 17 \text{ m.s}^{-1}$.

$\frac{t}{s}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{v}{\text{m.s}^{-1}}$	0	0	2	4	8	12	17	17	17

Graf je na obr. 70 - vo všetkých intervaloch sú to úsečky.

$$\text{b) } s_1 = 0 \text{ m, } s_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} (t - 1 \text{ s})^2, s_3 = 4 \text{ m} + \\ + 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} (t - 3 \text{ s}) + \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} (t - 3 \text{ s})^2, s_4 = 20 \text{ m} +$$



Obr. 70

$$+ 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} (t - 5 \text{ s}) + \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} (t - 5 \text{ s})^2, s_5 = 34,5 \text{ m} + \\ + 17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} (t - 6 \text{ s}).$$

$\frac{t}{s}$	0	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$\frac{s}{m}$	0	0	0,3	1,0	2,3	4,0	6,5	10,0	14,5	20,0

$\frac{t}{s}$	5,5	6,0	7,0	8,0
$\frac{s}{m}$	27,0	34,5	51,5	68,5

Graf je na obr. 71. V intervaloch 2, 3, 4 sú to parabolické oblúky, v intervaloch 1, 5 sú to úsečky.

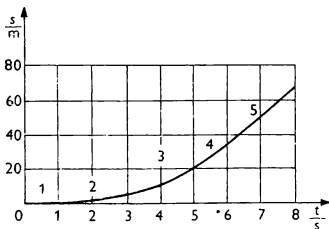
c) Za čas $t = 8$ s je celkove urobená dráha $s = 68,5$ m, priemerná rýchlosť pohybu je teda

$$v_p = \frac{s}{t} \doteq 8,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

d) Obsah uvažovanej plochy modeluje celkove dosiahnutú rýchlosť v_5 . Malej zmene Δt času zodpovedá zmena Δv rýchlosti, pričom platí $\Delta v = a \Delta t$, na grafe to predstavuje úzky obdĺžnik obsahu $a \Delta t$, celá plocha je zložená z veľkého počtu takových úzkych obdĺžnikov. Celkove dosiahnutá rýchlosť

$$v_5 = \sum_{t=0s}^{t=8s} a \Delta t ;$$

táto veličina je priamoúmerná obsahu uvažovanej plochy. Pre zadané hodnoty si to môžeme overiť - plocha obsahuje 17 štvorčekov.



Obr. 71

2. úloha (navrhl RNDr. Evžen Růžička, CSc.)

Z určitého místa A bylo vrženo svisle vzhůru těleso počáteční rychlostí v_0 . Když těleso dosáhlo maximální výšky, bylo z téhož místa A vrženo svisle vzhůru druhé těleso stejnou počáteční rychlostí v_0 .

a) V kterém čase t_1 od počátku pohybu prvního tělesa se obě tělesa setkala?

b) V jaké výšce h_x nad místem A se tělesa setkala?

c) Jak velkou vzájemnou rychlostí se obě tělesa setkala?

d) V kterém čase bude velikost vzájemné rychlosti obou těles rovna velikosti rychlosti v_0 ? Odpověď zdůvodněte.

Řešte obecně, potom pro $v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Odpor vzduchu neuvážíte.

Řešení

První těleso dosáhne své největší výšky

$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g} \quad (1)$$

nad místem A v čase

$$t_0 = \frac{v_0}{g}. \quad (2)$$

a) Po dosažení největší výšky (1) klesá první těleso volným pádem a v čase t z intervalu $t \in \langle t_0, 2t_0 \rangle$ je ve výšce

$$h_1 = h_0 - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \quad (3)$$

nad místem A . Druhé těleso je v témž čase ve výšce

$$h_2 = v_0(t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2. \quad (4)$$

Z rovnosti $h_1 = h_2$ v čase t_1 dostaneme s přihlédnutím k (1) a (2)

$$t_1 = \frac{3v_0}{2g} = 4,5 \text{ s}. \quad (5)$$

b) Dosazením $t = t_1$ podle (5) do (3) nebo (4), s použitím (1), (2)

$$h_x = \frac{3 v_0^2}{8 g} \doteq 34 \text{ m} :$$

c) V čase t_1 má první těleso ve směru svislém dolů rychlost $v_1 = g(t_1 - t_0)$, druhé těleso má ve směru svislém vzhůru rychlost $v_2 = v_0 - g(t_1 - t_0)$. Vzájemná rychlost obou těles $v = v_1 + v_2 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

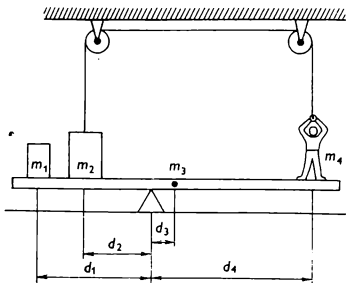
d) V obecném čase t z uvažovaného intervalu má první těleso ve směru svislém dolů rychlost $v'_1 = g(t - t_0)$, druhé těleso má ve směru svislém vzhůru rychlost $v'_2 = v_0 - g(t - t_0)$, vzájemná rychlost $v' = v'_1 + v'_2 = v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, a to v každém čase.

Úloha se dá řešit též porovnáním drah vyjádřených vzhledem k počátku vrhu v bodě A .

3. úloha (navrhol RNDr. Rastislav Baník)

Rovnorodá klada má všade rovnaký obsah kolmého rezu, jej hmotnosť je m_3 . Klada je podopretá vo vzdialenosti d_3 vľavo od svojho stredu (obr. 72). Na klade vľavo od podpory sú položené dve valcové telesá s hmotnosťami m_1, m_2 ; ich pozdĺžne osi sú vo vzdialenostiach d_1, d_2 od podpory. Vo vzdialenosti d_4 vpravo od podpory stojí na klade chlapec s hmotnosťou m_4 , ktorý ťahá za lano vedené cez dve kladky. Druhý koniec lana je upevnený na stred hornej podstavky telesa s hmotnosťou m_2 . Hmotnosť lana považujte vzhľadom na hmotnosť ostatných telies sústavy za zanedbateľnú. Laná nad chlapcom a telesom s hmotnosťou m_2 sú zvislé.

a) Určte silu F , ktorou chlapec pôsobí na lano tak, aby sústava bola v pokoji a pozdĺžna os kladky bola vodorovná. Riešte všeobecne, potom pre hodnoty $m_1 = 20 \text{ kg}$, $m_2 = 40 \text{ kg}$, $m_3 = 20 \text{ kg}$, $m_4 = 50 \text{ kg}$, $d_1 = 5 d_3$, $d_2 = 3 d_3$, $d_4 = 7 d_3$.



Obr. 72

b) Nájdite množinu hodnôt m_4 (pre zadané hodnoty ostatných veličín), aby chlapec mohol udržať sústavu v rovnováhe. Akými silami je lano napínané pre hodnoty m_4 v obore tejto množiny?

Riešenie

a) Na kladu, na valcové telesá a na chlapca pôsobia tiažové sily $m_3 g$, $m_1 g$, $m_2 g$, $m_4 g$ v smere zvislom nadol. Sila F , ktorou je napínané lano, pôsobí na chlapca a na teleso hmotnosti m_2 v smere zvislom nahor. Pri rovnováhe platí vzťah vyjadrujúci rovnosť momentov síl

$(m_1 d_1 + m_2 d_2) g - F d_2 = (m_3 d_3 + m_4 d_4) g - F d_4$,
z ktorého vyjadríme

$$F = \frac{m_3 d_3 + m_4 d_4 - m_1 d_1 - m_2 d_2}{d_4 - d_2} g. \quad (1)$$

Pri riešení pre zadané hodnoty sa veličina d_3 vykrátí a máme $F \doteq 370 \text{ N}$.

b) Minimálnu hmotnosť má chlapec, ktorý vôbec nemusí lano ťahať, jeho hmotnosť určíme z (1) pre $F = 0 \text{ N}$:

$$m_{4 \text{ min}} = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2 - m_3 d_3}{d_4} = 29 \text{ kg}.$$

Maximálna sila, akou môže chlapec pôsobiť, je $F_{\text{max}} = m_2 g$; teleso hmotnosti m_2 je totiž na klade položené, a nie je o kladu pripevnené. Po dosadení $F = m_2 g$ do (1) dostaneme pre maximálnu hmotnosť chlapca

$$m_{4 \text{ max}} = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_4 - m_3 d_3}{d_4} = 51 \text{ kg}.$$

Hmotnosť m_4 chlapca musí byť z množiny $m_4 \in \langle 29 \text{ kg}; 51 \text{ kg} \rangle$, sila napínajúca lano $F \in \langle 0 \text{ N}; 400 \text{ N} \rangle$.

4. úloha (navrhol RNDr. Rastislav Baník)

Na automobil s hmotnosťou m pôsobí pri jazde úhrnná trecia sila $\mathbf{F}_t$ a úhrnná odporová sila $\mathbf{F}_0$. Veľkosť sily $\mathbf{F}_t$ je $F_t = f F_n$, kde F_n je veľkosť zložky tieže automobilu vo smere kolmom na povrch cesty, f je súčiniteľ šmykového trenia. Veľkosť odporovej sily vzduchu je priamoúmerná veľkosti rýchlosti.

a) Automobil ide po priamej vodorovnej ceste takou rýchlosťou v_0 , pri ktorej je úhrnná odporová sila vzduchu $\mathbf{F}_0$ rovnako veľká ako úhrnná trecia sila $\mathbf{F}_t$. Stanovte výkon motora P_0 .

b) Automobil ide po priamej ceste so stálym stúpaním $\frac{h}{d}$, kde h je výška kopca od úpätia a d dĺžka meraná pozdĺž kopca. Určte výkon motora P pri rýchlosti v rovnomerného pohybu. Riešte najskôr všeobecne, potom pre hodnoty: $m = 1\,000 \text{ kg}$, $f = 0,10$, $v_0 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $h = 250 \text{ m}$, $d = 1\,000 \text{ m}$, $v = 8,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $9,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $11 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

c) Pre zadané hodnoty zostrojte graf funkcie $P = f(v)$ podľa vzťahu zisteného v úlohe b). Na základe tohto grafu určte rýchlosť v_1 , pri ktorej $P = P_0$.

Riešenie

a) Ťažová sila F_{no} pôsobiaci na automobil je kolmá na povrch cesty, teda $F_{no} = m g$. Úhrnná odporová sila vzduchu, podľa zadania, je $F_{v0} = F_{t0}$. Pre výkon motora máme

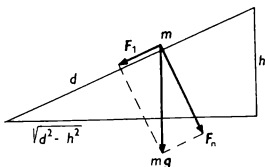
$$P_0 = 2 f m g v_0 \doteq 39 \text{ kW}.$$

b) Pri jazde do kopca pôsobia proti pohybu tri sily:

- odporová sila vzduchu $F_v = F_{v0} \frac{v}{v_0}$, pretože odporová sila vzduchu je priamoúmerná rýchlosti; $F_v : F_{v0} = v : v_0$, teda $F_v = f m g \frac{v}{v_0}$;
- trecia sila $F_t = f F_n$, kde pre veľkosť zložky ťažovej sily kolmej na povrch cesty podľa obr. 73 s použitím podobnosti trojuholníkov platí

$$F_n = \frac{m g}{d} \sqrt{d^2 - h^2};$$

- zložka ťažovej sily, ktorá pôsobí v smere cesty nadol. Z podobnosti trojuholníkov v obr. 73: $F_1 = m g \frac{h}{d}$.



Obr. 73

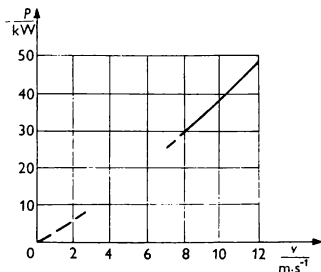
Pre výkon motora potom platí

$$P = (F_v + F_n + F_1) v = m g \left(f \frac{v}{v_0} + f \frac{\sqrt{d^2 - h^2}}{d} + \frac{h}{d} \right) v.$$

Tabuľka pre zadané hodnoty:

$\frac{v}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
$\frac{P}{\text{kW}}$	30	35	39	43	48

c) Podľa tabuľky zostrojíme graf na obr. 74, z ktorého určíme $v_1 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.



Obr. 74

5. úloha (navrhl RNDr. Josef Jirů)

Těleso o hmotnosti m je zavěšeno na vlákně délky d .

a) Těleso je v rovnovážné poloze stálé. Jak velkou rychlost v_0 ve vodorovném směru mu musíme udělit, aby v nejvyšším bodě kruhové trajektorie tělesa byla výslednice sil působících na těleso nulová?

b) Jakou silou F_t je v tomto případě napínáno vlákno, když těleso prochází rovnovážnou polohou?

Třecí sílu, hmotnost a prodloužení vlákna neuvažujeme. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 0,20 \text{ m}$, $m = 0,50 \text{ kg}$.

Řešení

a) V nejvyšším bodě trajektorie je tíhová síla

$$F_G = m g \quad (1)$$

v rovnováze se setrvačnou odstředivou silou

$$F_o = \frac{m}{d} v^2, \quad (2)$$

kde v je obvodová rychlost tělesa v tomto bodě. Z rovnosti $F_G = F_o$ po dosazení z (1) a (2) dostaneme úpravou $v = \sqrt{g d}$, tj. těleso v nejvyšším bodě své trajektorie má kinetickou energii

$$E'_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m g d. \quad (3)$$

Při vystoupení do nejvyššího bodu se tíhová potenciální energie tělesa zvětší o

$$\Delta E_p = 2 m g d. \quad (4)$$

Udělením rychlosti v_o ve vodorovném směru získá těleso kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2} m v_o^2. \quad (5)$$

Podle zákona zachování energie: $E_k = E'_k + \Delta E_p$ a po dosazení z (5), (3), (4) vyjádříme

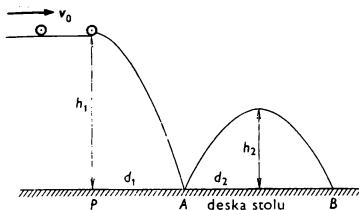
$$v_o = \sqrt{5 d g} \doteq 3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (6)$$

b) Při průchodu rovnovážnou polohou působí na těleso tíhová síla F_G a ve stejném směru odstředivá setrvačná síla F'_o ,

$$F'_o = \frac{m}{d} v_o^2, \quad (7)$$

tedy celková síla o velikosti $F_t = F_G + F'_o$ a po dosazení z (1) a (7) s přihlédnutím k (6)

$$F_t = 6 m g \doteq 30 \text{ N}.$$



Obr. 75

6. úloha (navrhl RNDr. Ivo Volf)

Měření součinitele vzpruživosti míčku na stolní tenis

Úvod

Když míček volně spustíme z výšky h_1 na desku stolu, odrazí se a vystoupí do výšky h_2 , $h_2 < h_1$. Nepřihlížíme-li k odporu vzduchu, dopadne míček na desku stolu rychlostí $v_1 = \sqrt{2 g h_1}$, po odrazu se zastaví ve výšce h_2 , a potom dopadne podruhé na desku stolu rychlostí $v_2 = \sqrt{2 g h_2}$. Součinitel vzpruživosti je definován jako podíl

$$k = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \quad (1)$$

Výšky h_1 , h_2 lze změřit a z naměřených hodnot stanovit součinitel vzpruživosti k .

Výšku h_2 můžeme jen odhadnout pomocí svisle postaveného délkového měřidla. Proto je někdy spolehlivější jiný postup při určování součinitele vzpruživosti (obráz. 75): Míček necháme pohybovat po vodorovné podložce položené ve výšce

h_1 nad deskou stolu. Míček opustí podložku rychlostí v_0 ve vodorovném směru a dále se pohybuje tak, že se skládají dva nezávislé pohyby: pohyb ve směru vodorovném stálou rychlostí v_0 a volný pád míčku. Míček získá ve svislém směru rychlost v_1 a dopadne výslednou rychlostí $v = v_0 + v_1$ v bodě A a odrazí se rychlostí $v' = v_0 + v_2$, kde v_2 je rychlost míčku ve směru svislém po odrazu v bodě A , $v_2 < v_1$, a dopadne podruhé na desku stolu v bodě B . Změříme vzdálenosti $d_1 = PA$, $d_2 = AB$ podle obr. 75.

Vzdálenosti PA ve směru vodorovném urazí míček rychlostí v_0 za dobu $t_1 = \frac{d_1}{v_0}$, dopadne tedy ve směru svislém rychlostí

$$v_1 = g t_1 = \frac{d_1 g}{v_0}.$$

Do bodu B se dostane míček za další dobu t_2 po odrazu z bodu A , pak platí $t_2 = \frac{d_2}{v_0}$. Do výšky h_2 se míček dostane za dobu $\frac{t_2}{2}$, takže rychlost, s níž se míček odrazil ve směru svislém, má velikost

$$v_2 = g \frac{t_2}{2} = \frac{g d_2}{2 v_0}.$$

Součinitel vzpruživosti

$$k = \frac{v_2}{v_1} = \frac{d_2}{2 d_1} \quad (2)$$

nezávisí tedy na počáteční rychlosti v_0 .

Úkoly

a) Určete součinitel vzpruživosti míčku na stolní tenis pomocí vztahu (1). Měření proveďte pro několik hodnot h_1 v rozmezí mezi 50 cm a 100 cm. Výšky h_2 odhadněte pomocí svisle postaveného délkového měřidla.

b) Určete součinitel vzpruživosti míčku podle (2) v sestavě podle obr. 75. Měřte vzdálenosti d_1 , d_2 pro různé velikosti rychlosti v_0 . K lepšímu vyznačení míst dopadu můžete míček mírně poprášit strouhanou křídou, maskem nebo dětským zásypem, avšak jen tak, aby se příliš nezměnily pružné vlastnosti míčku.

c) Porovnejte výsledky měření získané podle a) a podle b). Pomůcky: stůl na stolní tenis (nebo jiná vhodná deska, školní lavice, popř. podlaha), míček, tyčový metr, deska (prkno)

Řešení

a) Při spouštění míčku na desku stolu na stolní tenis byly změřeny hodnoty sestavené v tabulce 18. Aritmetický průměr je $k_{pa} \doteq 0,874$, střední odchylka $\Delta k_{pa} \doteq 0,004$.

b) Při postupu podle obr. 75 byly naměřeny hodnoty sestavené v tabulce 19. Aritmetický průměr je $k_{pb} \doteq 0,866$, střední odchylka $\Delta k_{pb} \doteq 0,014$.

c) Hodnota zjištěná podle b) je o něco menší než hodnota zjištěná podle a), protože při postupu podle b) je trajektorie

T 18

Měření	$\frac{h_1}{m}$	$\frac{h_2}{m}$	k
1	1,00	0,75	0,866
2	0,80	0,61	0,872
3	0,70	0,53	0,872
4	0,60	0,46	0,875
5	0,50	0,39	0,883

Měření	$\frac{d_1}{m}$	$\frac{2 d_1}{m}$	$\frac{d_2}{m}$	k
1	0,24	0,48	0,40	0,833
2	0,32	0,64	0,57	0,890
3	0,27	0,54	0,47	0,870
4	0,20	0,40	0,35	0,875
5	0,22	0,44	0,38	0,864

mičku delší, takže se více uplatní odpor vzduchu, k němuž při odvozování vztahů (1), (2) nebylo přihlíženo.

Při zaokrouhlení na dvě platné číslice jsou oba výsledky souhlasné: $k \doteq 0,87$.

7. úloha (navrhol RNDr. Rastislav Baník)

Gulôčka s hmotnosťou m je zavesená na niti dĺžky d . Kým je gulôčka v pokoji, je vo výške h nad vodorovnou podlahou. Veľmi malými opakujúcimi sa silovými impulzami gulôčku rozkývame a amplitúdu jej kmitov zväčšujeme až dovtedy, kým sa niť nepretrhne. O použitej niti vieme, že sa pretrhne vtedy, keď je napínaná silou F_p . Hmotnosť nite je zanedbateľne malá, odpor vzduchu zanedbávame, dĺžka nite sa pôsobením sily (menšej ako F_p) nemení.

a) Akou veľkou rýchlosťou v_p dopadne gulôčka na podlahu?

b) V akej vzdialenosti x od bodu A na podlahe, ktorý sa nachádza pod bodom závesu, dopadne gulôčka na podlahu? Úlohu riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty: $m = 0,50 \text{ kg}$, $d = 1,0 \text{ m}$, $F_p = 10 \text{ N}$, $h = 2,0 \text{ m}$.

Riešenie

a) Niť sa pretrhne v najnižšom bode, v mieste svojej rovnovážnej polohy, lebo tam je tiažová sila i odstredivá sila rovnakého smeru a tam teda dávajú najväčšiu výslednú silu. V najnižšom bode kruhovej trajektórie je rýchlosť guľôčky, a teda tiež odstredivá sila, vždy najväčšia. Rýchlosť guľôčky v najnižšom bode na niti označíme v , potom odstredivá sila

$F_o = \frac{m}{d} v^2$, tiažová sila $F_G = m g$. V hraničnom prípade, keď sa niť práve pretrhne, platí $F_p = F_G + F_o$. Dosadením za F_G a F_o dostaneme vzťah, z ktorého vyjadríme

$$v = \sqrt{\frac{F_p - m g}{m} d}. \quad (1)$$

Pri pretrhnutí nite má vektor $\mathbf{v}$ vodorovný smer, takže ide o vodorovný vrh. V okamihu pretrhnutia nite má guľôčka kinetickú energiu $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ a tiažovú potenciálnu energiu (vzhľadom na podlahu) $E_p = m g h$. Jej kinetická energia tesne pred dopadom na podlahu, podľa zákona zachovania mechanickej energie, $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v_p^2$. Po dosadení za E_k , E_p vyjadríme

$$v_p = \sqrt{\frac{(F_p - m g) d}{m} + 2 g h} \doteq 7 \text{ m.s}^{-1}$$

b) Vodorovný vrh trvá po čas

$$t = \sqrt{\frac{2 h}{g}} \quad (2)$$

(rovnako ako voľný pád z výšky h) a vo vodorovnom smere má guľôčka rýchlosť v podľa (1), dopadne teda vo vzdialenosti $x = v t$ od bodu A . Dosadením (1) a (2) máme

$$x = \sqrt{\frac{2 h d (F_p - m g)}{m g}} \doteq 2,0 \text{ m.}$$

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl RNDr. Milan Bednařík, CSc.)

Kabina výtahu o hmotnosti m je zavěšena na ocelovém laně, které je vedeno přes kladku. Na druhém konci lana je upevněno těleso o stejné hmotnosti jako hmotnost prázdné kabiny. Kladka je poháněna elektromotorem.

a) Jak velkou silou je napínáno lano, je-li kabina výtahu v klidu?

b) Jak velká síla působí na hřídel kladky v úloze a)?

c) Jakou práci vykoná elektromotor, když kabina s nákladem o hmotnosti m_1 vystoupí rovnoměrným pohybem do výšky h ?

Na kabinu při výstupu působí třecí síla F_t .

d) Jak velkou rychlostí se pohybuje kabina v úloze c), je-li výkon elektromotoru P ?

Jiné síly brzdící pohyb kromě síly F_t neuvažujeme. Hmotnost lana a kladky ve všech případech neuvažujeme.

Řešte obecně, potom pro hodnoty $m = 300$ kg, $m_1 = 100$ kg, $h = 8,0$ m, $F_t = 250$ N, $P = 1,00$ kW.

Řešení

a) Lano je napínáno silou $F = m g \doteq 2,94 \cdot 10^3$ N.

b) Na hřídel kladky působí síla $2 F \doteq 5,89 \cdot 10^3$ N.

c) Na náklad působí tíhová síla $F_G = m_1 g$, motor tedy musí vyvinout tahovou sílu $F_G + F_t$, která na dráze h vykoná práci

$$W = (F_G + F_t) h \doteq 9,85 \cdot 10^3 \text{ J.}$$

d) Kabina se pohybuje rychlostí v po dobu $t = \frac{h}{v}$. Z rovnosti $W = P t$ určíme

$$v = \frac{P}{F_G + F_t} = \frac{P}{m_1 g + F_t} \doteq 8,12 \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. úloha (navrhol RNDr. Rastislav Baník)

Vo vode jazera pláva rovnorodá guľa s polomerom R a hustotou $\varrho = 0,5 \cdot \varrho_0$, kde ϱ_0 je hustota vody v jazere.

a) Akú prácu urobíme, keď guľu vytiahneme z vody tesne nad voľný povrch jazera?

b) Akú prácu urobíme, keď guľu vtlačíme do vody tesne pod voľný povrch vody jazera?

Poznámka

Ťažisko poglobule sa nachádza vo vzdialenosti $h = \frac{3}{8} R$ od podstavy poglobule.

Riešte najskôr všeobecne, potom pre hodnoty $R = 20$ cm, $\varrho_0 = 1\,000$ kg·m⁻³.

Riešenie

a) Ťažiško guľe prešlo vyššie o dĺžku R , potenciálna energia tiažová guľe sa zväčšila o $\Delta E_{pg} = m g R$. Voda vtekla do priestoru, ktorý sa uvoľnil, hmotnosť tejto vody je rovnaká ako hmotnosť guľe, čo vyplýva z Archimédovho zákona. Potenciálna energia vodného telesa sa znížila o $\Delta E_{pv} = m g h$. Bola teda vykonaná práca

$$W_1 = \Delta E_{pg} - \Delta E_{pv} = m g (R - h).$$

Pretože $m = \frac{2}{3} \pi R^3 \varrho_0$, $h = \frac{3}{8} R$, máme po úprave

$$W_1 = \frac{5}{12} \pi R^4 \varrho_0 g \doteq 20,6 \text{ J}.$$

b) Ťažisko guľe sa znížilo o dĺžku R , potenciálna energia guľe sa teda znížila o $\Delta E'_{pg} = m g R$, potenciálna energia vodného telesa sa zväčšila o $\Delta E'_{pv} = m g h$. Urobená práca

$$W_2 = |\Delta E'_{pv} - \Delta E'_{pg}| = W_1 \doteq 2,06 \text{ J}.$$

3. úloha (navrhol RNDr. Rastislav Baník)

Oceľová guľa s hmotnosťou M je zavesená na lanku s dĺžkou d , ktoré má tu vlastnosť, že sa pretrhne pri pôsobení ťahovej sily F_p . Lanko nie je pružné. Do tejto gule narazí oceľová guľka s hmotnosťou m , $m < M$, pohybujúci sa vodorovne s rýchlosťou v_0 . Zraz považujte za stredový a dokonale pružný.

- Vypočítajte uhol α , o ktorý sa lanko môže vychýliť.
 - Pri akej rýchlosti v_{01} guľky sa vychýli lanko o uhol α ?
 - Pri akej rýchlosti v_{02} guľky nastane pretrhnutie lanka?
- Riešte všeobecne, potom pre hodnoty $M = 10,0$ kg, $m = 20,0$ g, $d = 2,00$ m, $F_p = 150$ N.

Riešenie

Označíme $\mathbf{v}_1$ rýchlosť guľky po zraze, $\mathbf{v}_2$ rýchlosť gule po zraze. Vektory $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_2$ sú súhlasne rovnobežné, vektory $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$ sú nesúhlasne rovnobežné. Za kladný smer zvolíme smer vektoru $\mathbf{v}_0$.

Platí zákon zachovania hybnosti

$$m v_0 = -m v_1 + M v_2$$

a zákon zachovania energie

$$m v_0^2 = m v_1^2 + M v_2^2.$$

Z tejto sústavy rovníc vyjadríme

$$v_2 = \frac{2m}{m+M} v_0.$$

- Po zraze má guľa kinetickú energiu $E_k = \frac{1}{2} M v_2^2$, po dosadení za v_2

$$E_k = \frac{2m^2 M}{(m+M)^2} v_0^2.$$

Ťažisko gule pri vychýlení lanka vystúpi do výšky

$$h = d(1 - \cos \alpha),$$

tiažová potenciálna energia gule sa zväčší o

$$\Delta E_p = M g d (1 - \cos \alpha).$$

Z rovnosti $E_k = \Delta E_p$ vyjadríme

$$\cos \alpha = 1 - \frac{2 m^2 v_0^2}{(m + M)^2 g d}. \quad (1)$$

Najväčší je uhol α pri rýchlosti v_{01} , ktorú určíme v úlohe b).

b) Najväčšia sila F_m pôsobí na lanko, keď guľa prechádza rovnovážnou polohou. Je to súčet tiažovej sily $F_G = M g$ a zotrvačnej odstredivej sily $F_0 = \frac{M v_2^2}{d}$. Po dosadení za v_2

$$F_m = M \left[g + \frac{4 m^2 v_0^2}{(M + m)^2 d} \right],$$

odtiaľ

$$v_0 = \frac{M + m}{2 m} \sqrt{\frac{(F_m - M g) d}{M}}.$$

Z podmienky $F_m < F_p$:

$$v_{01} < v_{0p} = \frac{M + m}{2 m} \sqrt{\frac{(F_p - M g) d}{M}} \doteq 807 \text{ m.s}^{-1};$$

v_{0p} je rýchlosť, pri ktorej sa lanko pretrhne.

Dosadením do (1)

$$\cos \alpha > 1 - \frac{2 m^2 v_{0p}^2}{(m + M)^2 g d} = \frac{3}{2} - \frac{F_p}{2 M g} \doteq 0,736,$$

$$\alpha < 42^\circ 23'.$$

Najväčší uhol α má teda veľkosť takmer $42^\circ 23'$.

c) Pretrhnutie lanka nastane pri rýchlosti $v_{02} > v_{0p}$, pričom rozdiel $v_{02} - v_{0p}$ môže byť ľubovoľne malý.

4. úloha (navrhol RNDr. Rastislav Baník)

Drevenú kladu s dĺžkou d a s hmotnosťou m chce stavebník vytiahnuť pomocou lana upevneného na jednom konci kladu na strechu do výšky h , $h > d$. Ťahaním za lano kladu postavil do zvislej polohy, zdvihnúť ju však nevládze. Lanom udržuje

kladu vo zvislej polohe, kým mu nepríde pomocník. Len čo lano trochu uvoľní, klada sa začína vychylovať.

a) Akou najmenšou silou musí pôsobiť stavebník na lano, aby sa klada nevychylovala zo zvislej polohy?

b) Určte silu, ktorou spolu s pomocníkom musia pôsobiť na kladu, aby ju zdvihli zo zvislej polohy na strechu vo výške h .

c) Akú prácu vykonajú pri zdvihnutí klady zo zvislej polohy na strechu vo výške h ?

Riešte najskôr všeobecne, potom pre hodnoty $d = 7,0$ m, $m = 60$ kg, $h = 16$ m.

Riešenie - obr. 76

a) Označíme x dĺžku napnutej časti lana. V obecnej polohe zvierá klada so zvislým smerom uhol α , napnutá časť lana uhol β . Vzhľadom na bod O pôsobí klada momentom $M_1 = \frac{1}{2} d m g \sin \alpha$, sila F pôsobí vzhľadom na ten istý bod momentom $M_2 = F h \sin \beta$. Z rovnosti $M_1 = M_2$ vyjadríme

$$F = \frac{d m g \sin \alpha}{2 h \sin \beta}. \quad (1)$$

Z pravouhlých trojuholníkov OCA , BCA vyjadríme $CA = d \sin \alpha = x \sin \beta$, odtiaľ

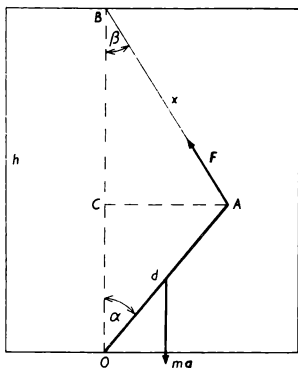
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{x}{d}.$$

Dosadíme do (1):

$$F = \frac{m g}{2 h} x.$$

Čím už je klada bližšie k zvislej polohe, tým je x menšie, bliži sa pritom hodnote $x_0 = h - d$. Sila sa pritom blíži k hodnote

$$F_0 = \frac{m g}{2 h} (h - d) \doteq 1,7 \cdot 10^2 \text{ N}. \quad (2)$$



Obr. 76

Pri akomkoľvek malom vychýlení klady zo zvislej polohy nastáva situácia podľa obrázku, pričom takmer $x = h - d$, a je treba pôsobiť silou F_0 podľa (2).

b) Sila F_1 je v rovnováhe s tiažovou silou $F_G = mg$, ktorá pôsobí na kladu, teda $F_1 = mg \doteq 5,9 \cdot 10^2 \text{ N}$.

c) Ťažisko klady musí byť vytiahnuté z výšky $\frac{d}{2}$ do výšky h , sila F_1 vykoná prácu

$$W = mg \left(h - \frac{d}{2} \right) \doteq 7,35 \cdot 10^3 \text{ J} .$$

5 ÚLOHY KATEGORIE E

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl RNDr. Milan Bednařík, CSc.)

Dvě přímé silnice se protínají v úhlu 90° . Po jedné z nich se pohybuje osobní automobil stálou rychlostí $v_1 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Po druhé silnici jede stálou rychlostí motocykl.

a) V okamžiku, kdy automobil projíždí křižovatkou, je motocykl ve vzdálenosti $s = 360 \text{ m}$ od křižovatky, kterou pak projede za dobu $t = 18 \text{ s}$ po projetí automobilu křižovatkou. Určete rychlost v_2 motocyklu.

b) Určete vzájemnou vzdálenost obou vozidel v čase $t_1 = 8 \text{ s}$ po projetí motocyklu křižovatkou.

c) Určete čas t_2 , kdy budou obě vozidla ve stejné vzdálenosti od křižovatky.

Řešení

a) Za dobu t ujede motocykl dráhu $s = v_2 t$, takže $v_2 = \frac{s}{t} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

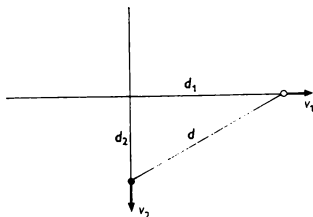
b) Automobil má od křižovatky vzdálenost $d_1 = v_1 (t + t_1)$, motocykl vzdálenost $d_2 = v_2 t_1$ (obr. 77). Podle věty Pythagorovy platí pro vzájemnou vzdálenost obou vozidel

$$d = \sqrt{v_1^2 (t + t_1)^2 + v_2^2 t_1^2} \doteq 670 \text{ m}.$$

c) V čase t_2 má automobil od křižovatky vzdálenost $s_1 = v_1 (t + t_2)$, motocykl má vzdálenost $s_2 = v_2 t_2$. Z rovnosti $s_1 = s_2$ dostaneme

$$t_2 = \frac{v_1 t}{v_2 - v_1} = -90 \text{ s}.$$

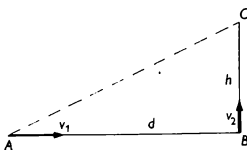
Záporný výsledek znamená, že obě vozidla mají od křižovatky stejnou vzdálenost v čase $|t_2| = 90 \text{ s}$ před projetím motocyklu křižovatkou.



Obr. 77

2. úloha (navrhl RNDr. Milan Bednařík, CSc.)

Při stavbě výškového domu jeřáb přemísťuje panely ze skládky A do místa C v pátém poschodí domu (obr. 78). Vzdálenost skládky od domu je $d = AB = 180$ m, výška pátého poschodí je $h = 16$ m. Ze skládky A do místa B se pohybuje jeřáb s panelem po přímých vodorovných kolejích. Panel je zvedán ve svislém směru stálou rychlostí $v_2 = 0,10$ m.s⁻¹.



Obr. 78

a) Určete dobu t , za kterou jeřáb dopraví panel ze skládky do pátého poschodí domu, jestliže nejprve převez panel ve vodorovném směru stálou rychlostí $v_1 = 1,5 \text{ m.s}^{-1}$ ze skládky A do místa B a potom ho vyzvedne ve svislém směru z místa B do místa C .

b) Doba na přepravu panelu je nutno zkrátit. Navrhněte postup, aby doba přepravy panelu byla co nejmenší při stále rychlosti v_2 zvedání panelu. Jakou nejmenší rychlostí ve vodorovném směru se bude jeřáb pohybovat?

Řešení

a) Jeřáb převez panel ze skládky A do místa B za dobu

$$t_1 = \frac{d}{v_1} = 120 \text{ s} \text{ a vyzvedne ho z místa } B \text{ do místa } C \text{ za dobu}$$

$$t_2 = \frac{h}{v_2} = 160 \text{ s. Celková doba přepravy } t = t_1 + t_2 = 280 \text{ s.}$$

b) Při zachování dosavadního způsobu přepravy, tj. nejprve ve vodorovném směru z A do B , pak ve svislém směru z B do C neproměnnou rychlostí v_2 , se dá celková doba přepravy zkrátit jedině zvětšením rychlosti v_1 . To by však bylo nevhodné, protože zvětšování rychlosti je technicky nákladné. Nejvhodnější způsob je tento: Jeřáb pojíždí ve vodorovném směru rychlostí v'_1 , což je právě nejmenší rychlost uvažovaného pohybu, a zároveň zvedá panel rychlostí v_2 , a to tak, že se panel pohybuje po úsečce AC (obr. 78). Označme t'_1 dobu potřebnou k pohybu jeřábu ve vodorovném směru, která je totožná s dobou potřebnou k vyzvednutí panelu do výšky h . Potom $t'_1 = \frac{d}{v'_1} = \frac{h}{v_2}$, odtud $v'_1 = \frac{d}{h} v_2 = 1,125 \text{ m.s}^{-1}$.

3. úloha (navrhla Doc. RNDr. Mária Rakovská, CSc.)

Stojíte před rovinným zrcadlem svisle zavěšeným na stěně.

a) Jakou nejmenší délku ve svislém směru musí mít zrcadlo, abyste v něm viděl celou svou postavu?

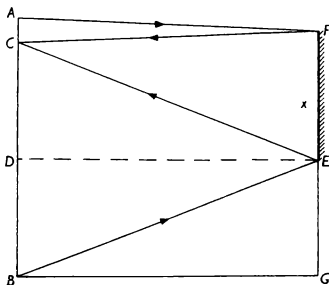
b) V jaké výšce od podlahy musí být horní okraj zrcadla, jestliže zrcadlo splňuje podmínku v úloze a)?

c) Závisejí výsledky úloh a), b) na vaší vzdálenosti od zrcadla?
Řešení úlohy fyzikálně zdůvodněte pomocí náčrtků.

Řešení

Označme h výšku postavy, a výšku temena hlavy nad úrovní očí, x délku zrcadla ve svislém směru, y výšku horního okraje zrcadla nad vodorovnou podlahou.

a) Chod krajních paprsků je nakreslen na obr. 79. Paprsek vycházející z temene A se odráží od zrcadla v bodě F a do-



Obr. 79

padá do oka pozorovatele v bodě C . Druhý krajní paprsek vychází z bodu B a po odrazu v bodě E přichází do bodu C . Trojúhelníky ACF , CBE jsou rovnoramenné. Je nyní

$$BC = h - a, \quad BD = DC = \frac{h - a}{2}, \quad GF = h - \frac{a}{2},$$

$$x = EF = GF - GE = GF - BD = h - \frac{a}{2} - \frac{h - a}{2} = \frac{h}{2}.$$

$$\text{b) } y = GF = h - \frac{a}{2}.$$

c) V úvahách v částech a), b) se nevyskytuje vzdálenost zrcadla od pozorovatele, takže na ní nezáleží.

4. úloha (navrhla RNDr. Marta Chytilová, CSc.)

Máme k dispozici tři dvojice těles zavěšených na vodorovném rameni stojanu na stejných pružinách. Zvedáním nádob ponoříme obě tělesa zcela do kapalin. Hustota těles je větší než hustota příslušné kapaliny. Změní se délka pružin stejně, nebo různě, ponoříme-li

a) dvě koule o stejné hmotnosti a různém objemu (obr. 80),

b) dva stejné kužele z téže látky (obr. 81),

c) dva stejné válce z téže látky (obr. 82)?

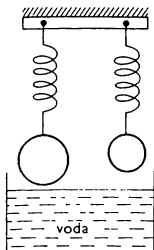
Odpovědi zdůvodněte a nakreslete obrázky.

Řešení

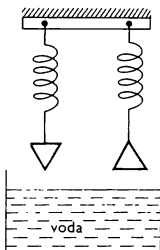
a) Různě - méně se zkrátí pružina s koulí o menším objemu, protože hydrostatická vztlaková síla je menší než u koule s větším objemem.

b) Stejně, protože hydrostatické vztlakové síly jsou v obou případech stejně velké.

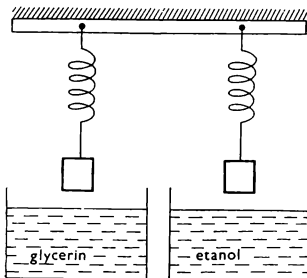
c) Různě - více se zkrátí pružina s válcem ponořeným do glycerínu, jehož hustota $\rho_1 = 1\,260 \text{ kg.m}^{-3}$, protože hydrostatická vztlaková síla je zde větší než u stejného válce ponořeného do etanolu, jehož hustota $\rho_2 = 789 \text{ kg.m}^{-3}$.



Obr. 80



Obr. 81



Obr. 82

5. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

Do kalorimetru nalejeme vodu o hmotnosti $m_1 = 1,00$ kg a teplotě $t_1 = 20,0$ °C. Do vody přivádíme vodní páru o teplotě $t = 100$ °C. Po určité době je hmotnost vody v kalorimetru $m_2 = 1,05$ kg a její teplota $t_2 = 50,0$ °C.

a) Vysvětlete, proč se změnila hmotnost i teplota vody v kalorimetru.

b) Určete měrné skupenské teplo varu l_v vody.

Řešení

a) Hmotnost vody v kalorimetru se zvětšila o hmotnost páry, která zde zkondenzovala. Teplota vody se zvětšila, protože voda přijala teplo, které odevzdala pára při kondenzaci, a teplo, které odevzdala zkondenzovaná voda při ochlazení z teploty t na teplotu výslednou.

b) Zkondenzovaná pára má hmotnost $m_2 - m_1$, při kondenzaci odevzdala teplo $Q_1 = l_v (m_2 - m_1)$. Při ochlazení na teplotu t_2 odevzdala zkondenzovaná voda teplo

$$Q_2 = c (m_2 - m_1) (t - t_2),$$

kde $c = 4,18$ kJ.kg⁻¹.K⁻¹ je měrná tepelná kapacita vody.

Voda v kalorimetru přijala teplo $Q_3 = c m_1 (t_2 - t_1)$.

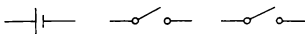
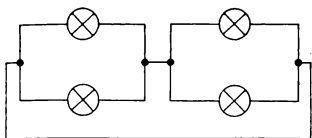
Z rovnosti $Q_1 + Q_2 = Q_3$ vyjádříme

$$l_v = c \frac{m_1 (t_2 - t_1) - (m_2 - m_1) (t - t_2)}{m_2 - m_1} \doteq 2\,300 \text{ kJ.kg}^{-1}.$$

6. úloha (navrhla RNDr. Marta Chytilová, CSc.)

Čtyři stejné žárovky jsou zapojeny podle obr. 83. Zařadte baterii článků a dva spínače tak, abyste pouze zapínáním nebo vypínáním spínačů dosáhli toho, že svítí

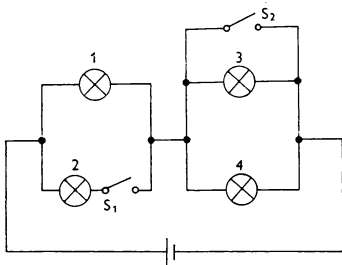
- jen jedna žárovka,
- dvě žárovky,
- tři žárovky,
- všechny čtyři žárovky.



Obr. 83

Řešení - obr. 84

- a) S_1 vypnut, S_2 zapnut - svítí žárovka 1;
- b) S_1 , S_2 zapnuty - svítí žárovky 1, 2;
- c) S_1 , S_2 vypnuty - svítí žárovky 1, 3, 4;
- d) S_1 zapnut, S_2 vypnut - svítí všechny žárovky.



Obr. 84

7. úloha (navrhl RNDr. Rastislav Baník)

Pavel, který hrál výborně kuličky, se jednou pochlubil Jirkovi, že má již nejméně 10 000 kuliček. Když mu ukázal šestilitrový hrnec naplněný až po okraj kuličkami, Jirka správně odhadl průměr kuličky na 1 cm a prohlásil, že jich je v hrnci méně. Před časem se totiž dočetl, že kuličky mohou zaujímat při nejtěsnějším uspořádání jen 74 % objemu nádoby, přičemž se předpokládá, že objem kuličky je vzhledem k objemu nádoby velmi malý.

a) Měl pravdu Pavel, nebo Jirka?

b) Kolik kuliček by se vešlo do nádoby o objemu 6 litrů, jestliže by jejich průměr byl poloviční? Zdvojnásobil by se vzhledem k výsledku úlohy a) počet kuliček v nádobě, nebo by byl jejich počet jiný?

c) Určete objem vody, kterou je možno do nádoby s kuličkami v případech a), b) ještě vlít.

d) Určete hmotnost náplně nádoby s kuličkami a s vodou. Hustota materiálu kuliček je $2\,500\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, hustota vody je $1\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Řešení

Označíme V objem nádoby, V_1 objem kuliček, V_2 objem vody v nádobě s kuličkami, r poloměr kuličky, n počet kuliček o poloměru r v nádobě, n' počet kuliček o poloměru $\frac{r}{2}$ v nádobě, ϱ_1 hustotu materiálu kuliček, ϱ_0 hustotu vody.

$$\text{a) Objem } V_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 n = 0,74 V, \text{ odtud}$$

$$n = \frac{3 \cdot 0,74 V}{4 \pi r^3} \doteq 8\,480.$$

Ve skutečnosti je kuliček o něco méně, neboť u stěn nádoby je jejich uspořádání méně husté. Pravdu měl tedy Jiří.

$$b) n' = \frac{3 \cdot 0,74 V}{4 \pi \left(\frac{r}{2}\right)^3} = 8 n; \text{ počet kuliček je tedy v porovnání}$$

s výsledkem úlohy a) osminásobný.

c) Objem $V_2 = V - V_1 = 0,26 V = 1,56$ litru a to v obou případech.

d) Hmotnost kuliček $m_1 = \rho_1 V_1 = 0,74 \rho_1 V$, hmotnost vody $m_2 = \rho_0 V_2 = 0,26 \rho_0 V$, hmotnost náplně nádoby
 $m = m_1 + m_2 = (0,74 \rho_1 + 0,26 \rho_0) V \doteq 12,7 \text{ kg}.$

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl RNDr. Milan Bednařík, CSc.)

Při lovu na zajíce se zastavil střelec na pasece v místě A (obr. 85). Vzdálenost místa A od lesní stěny 1 je d , lesní stěna 2 je kolmá k lesní stěně 1. Střelec vystřelil.

a) Za dobu t_1 po výstřelu uslyší střelec ozvěnu od lesní stěny 1. Jaká je rychlost v zvuku ve vzduchu?

b) Jaká je vzdálenost x střelce od lesní stěny 2, uslyší-li ozvěnu za dobu t_2 po výstřelu?

c) V místě B u lesní stěny 2 stojí pozorovatel. Za jakou dobu t_3 po výstřelu uslyší ozvěnu od lesní stěny 1?

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $d = 510 \text{ m}$, $t_1 = 3,0 \text{ s}$, $t_2 = 4,0 \text{ s}$.

Řešení

a) Po výstřelu urazí zvuk za dobu t_1 vzdálenost $2d$.
 Rychlost zvuku ve vzduchu

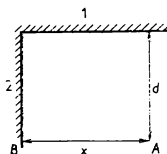
$$v = \frac{2d}{t_1} = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) Za dobu t_2 urazí zvuk při rychlosti v vzdálenost $2x = v t_2$. Odtud

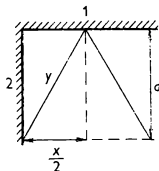
$$x = \frac{t_2}{t_1} d = 680 \text{ m.}$$

c) Vzdálenost $2y$ (obr. 86) urazí zvuk při rychlosti v za dobu

$$t_3 = \frac{2y}{v} = \frac{y}{d} t_1,$$



Obr. 85



Obr. 86

kde

$$y = \sqrt{d^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

a po dosazení za x

$$y = \frac{d}{2 t_1} \sqrt{4 t_1^2 + t_2^2} \doteq 613 \text{ m.}$$

$$\text{Doba } t_3 = \frac{y}{d} t_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4 t_1^2 + t_2^2} \doteq 3,6 \text{ s.}$$

2. úloha (navrhl PaedDr. Augustín Zvalo)

Do uzavřeného prostoru chladničky, v němž má vzduch teplotu $t_0 = 0^\circ\text{C}$, vložíme dvě stejné nádoby. V jedné nádobě je ledová tříšť o hmotnosti $m = 750 \text{ g}$ a teplotě $t_0 =$

$= 0^{\circ}\text{C}$, ve druhé nádobě je voda téže hmotnosti a téže teploty.

a) Co se stane s uvedenými látkami v prostoru chladničky? Odpověď zdůvodněte.

b) Obě nádoby vyjmem z chladničky. Jaké teplo přijme ledová tříšť, změní-li se ve vodu téže teploty?

c) Jaké teploty by dosáhla voda ve druhé nádobě, kdyby přijala stejné teplo jako ledová tříšť v úloze b)?

Měrná tepelná kapacita vody $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, měrné skupenské teplo tání ledu $l_t = 335 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Řešení

a) Skupenství ledu ani skupenství vody se nezmění. V prostoru chladničky o teplotě $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$ nenastává výměna tepla.

b) Led přijme při tání teplo $Q = l_t m \doteq 250 \text{ kJ}$.

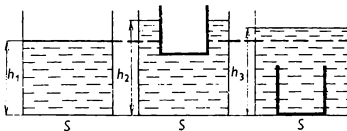
c) Pro teplo Q , kterým se zahřeje voda o hmotnosti m a teplotě t_0 na teplotu t , platí $Q = c m (t - t_0)$.

Odtud teplota

$$t = \frac{Q}{c m} = \frac{l_t}{c} \doteq 80^{\circ}\text{C}.$$

3. úloha (navrhl PaedDr. Augustín Zvalo)

V nádobě o obsahu dna $S = 100 \text{ cm}^2$ je volný povrch vody ve výšce $h_1 = 10 \text{ cm}$ nad dnem nádoby (obr. 87). Vložíme-li



Obr. 87

Obr. 88

Obr. 89

do vody skleněnou misku tak, aby ve vodě plovla, vystoupí volný povrch vody do výšky $h_2 = 12$ cm (obr. 88). Ponoříme-li pak misku zcela do vody, klesne ke dnu nádoby, přičemž volný povrch vody v nádobě se ustálí ve výšce $h_3 = 11$ cm nad dnem nádoby (obr. 89).

a) Vysvětlete, proč se změnila výška vody v nádobě z h_1 na h_2 . Určete objem V ponořené části misky.

b) Určete hmotnost m skleněné misky.

c) Určete hustotu ρ skla, z něhož je miska.

Hustota vody $\rho_0 = 1\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Řešení

a) Výška vody se zvětšila, protože část vody byla vytlačena plovoucí miskou. Pro objem V ponořené části platí $V = S(h_2 - h_1) = 200\text{ cm}^3$.

b) Na plovoucí misku působí vztlaková hydrostatická síla F_{vz} , která je v rovnováze s tíhou F_g misky. Platí

$$F_{vz} = F_g. \quad (1)$$

Přitom $F_g = mg$ a podle zákona Archimédova

$$F_{vz} = \rho_0 V g = \rho_0 S(h_2 - h_1) g. \quad (2)$$

Dosazením za F_g a F_{vz} podle (2) do (1) dostaneme hmotnost

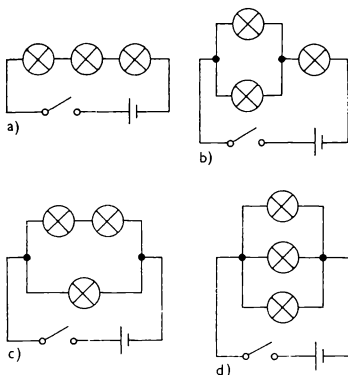
$$m = \rho_0 S(h_2 - h_1) = 0,2\text{ kg}$$

c) Objem misky podle obr. 87 a 89 je $V' = S(h_3 - h_1)$. Hustota skla

$$\rho = \frac{m}{V'} = \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_1} \rho_0 = 2\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

4. úloha (navrhla RNDr. Marta Chytilová, CSc.)

Máte k použití tři žárovky, jednu baterii elektrických článků, dva spínače a několik spojovacích vodičů. Pomocí elektrotechnických značek nakreslete schéma elektrického obvodu, v němž použijete jeden nebo oba spínače. Zapínáním jednoho nebo obou spínačů dosáhnete těchto výsledků:



Obr. 90

a) Rozsvítíte všechny tři žárovky současně jedním spínačem.

b) Rozsvítíte jednu žárovku, nebo zbývající dvě žárovky.

c) Rozsvítíte současně vždy jednu dvojici žárovek.

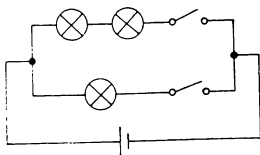
d) Rozsvítíte vždy jen jednu ze dvou žárovek, přičemž třetí žárovka stále svítí.

Ve všech případech použijte všechny tři žárovky.

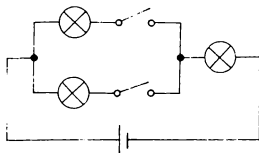
Zjistěte, zda má některá úloha více než jedno řešení. Nakreslete schéma.

Řešení

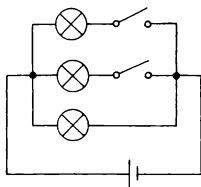
a) Jedním spínačem rozsvěcujeme tři žárovky, které lze zapojit podle obr. 90a), b), c), d).



Obr. 91



Obr. 92



Obr. 93

b) - obr. 91.

c) - obr. 92.

d) - obr. 93.

c) Třetí kolo soutěže

1. úloha (navrhl RNDr. Milan Bednařík, CSc.)

Těleso o hmotnosti $m = 120 \text{ kg}$ je zvedáno rovnoměrným pohybem pomocí soustavy kladek na obr. 94. Tření a hmotnost lan neuvažujeme.

a) Jak velkými silami jsou napínána lana (1), (2), (3), (4), (5), jestliže hmotnosti kladek neuvažujeme? Jak velká síla přitom působí na volný konec lana, je-li soustava v rovnováze?

b) Jak velké budou síly z úlohy a), jestliže hmotnost každé volné kladky je $m_0 = 4,0 \text{ kg}$?

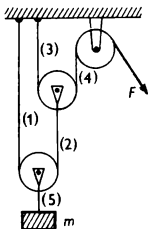
c) Jak velkou práci vykoná síla působící na volný konec lana v úloze a), zvedáme-li těleso do výšky $h = 1,50 \text{ m}$? O jakou délku se odvine přitom volný konec lana přes pevnou kladku?

Řešení

Používáme přibližně vztah, podle něhož na těleso o hmotnosti $m \text{ kg}$ působí gravitační síla o velikosti $\{10 m\} \text{ N}$.

a) Lano (5) napíná síla $F_5 = 1\,200 \text{ N}$. Lana (1) a (2) jsou napínána silami polovičními: $F_1 = F_2 = 600 \text{ N}$. Lana (3) a (4) jsou napínána silami opět polovičními, $F_3 = F_4 = F = 300 \text{ N}$.

b) Na osu první volné kladky působí nyní síla $F'_5 = 1\,240 \text{ N}$, touto silou je také napínáno lano (5). Síly F'_1



Obr. 94

a F'_2 jsou poloviční, tedy $F'_1 = F'_2 = 620 \text{ N}$. Lana (3) a (4) jsou napínána silami $F'_3 = F'_4 = F' = 330 \text{ N}$.

c) Vykonaná práce $W = 1\,200 \text{ N} \cdot 1,5 \text{ m} = 1,8 \text{ kJ}$. Lano se odvine o délku d , přičemž $W = Fd$, $d = \frac{W}{F} = 6,0 \text{ m}$.

2. úloha (navrhla PaedDr. Alexandra Svátová)

Ve slévárně roztavili ocelovou a měděnou tyč stejné hmotnosti $m = 10,0 \text{ kg}$ a stejné počáteční teploty $t_0 = 20,0^\circ\text{C}$. Teplota roztaveného kovu zůstala na hodnotě jeho teploty tání.

a) Které těleso přijalo při zahřátí na teplotu tání větší teplo? Odpověď zdůvodněte.

b) Které těleso přijalo větší skupenské teplo při roztavení? Odpověď zdůvodněte.

c) Určete podíl tepel přijatých tělesy při zahřátí těles na teplotu tání.

d) Určete podíl skupenských tepel přijatých tělesy při roztavení.

Každý z podílů v úlohách c), d) vyjádřete obecným vztahem a číslem. Číselné hodnoty k řešení úlohy jsou

ocel ... $c_1 = 0,450 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $t_1 = 1\,540^\circ\text{C}$,
 $l_{t1} = 289 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$,
měď ... $c_2 = 0,383 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $t_2 = 1\,085^\circ\text{C}$,
 $l_{t2} = 204 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Řešení

a) Při zahřátí na teplotu tání přijme ocelová tyč teplo
 $Q_1 = c_1 m (t_1 - t_0) \doteq 6\,840 \text{ kJ}$,
měděná tyč přijme teplo
 $Q_2 = c_2 m (t_2 - t_0) \doteq 4\,080 \text{ kJ} < Q_1$.

b) Při roztavení přijme ocelová tyč teplo
 $Q'_1 = m l_{t1} \doteq 2\,890 \text{ kJ}$,

měděná tyč přijme teplo

$$Q_2 = m l_{t2} \doteq 2\,040 \text{ kJ} < Q_1, \text{ protože } l_{t2} < l_{t1}.$$

$$\text{c) } p_1 = \frac{c_1 (t_1 - t_0)}{c_2 (t_2 - t_0)} \doteq 1,59.$$

$$\text{d) } p_2 = \frac{l_{t1}}{l_{t2}} \doteq 1,42.$$

3. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

Na okraji přímé vodorovné silnice je siréna. Motocyklista, který jel směrem k siréně rychlostí $v_1 = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, slyšel houkání sirény po dobu $t_1 = 9,5 \text{ s}$. Druhý motocyklista, který jel směrem od sirény rychlostí $v_2 = 83 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, slyšel houkání sirény po dobu $t_2 = 10,7 \text{ s}$.

a) Jakou rychlostí v se šířil zvuk sirény ve vzduchu v tomto případě?

b) Jakou dobu t slyšel houkání sirény pozorovatel stojící u silnice?

c) Je možné, aby nějaký jedoucí motocyklista slyšel houkání sirény po dobu t jako stojící pozorovatel? Zdůvodněte.

Řešení

Označíme t dobu, po kterou siréna houkala (z hlediska pozorovatele stojícího u silnice).

a) Označme d vzdálenost od sirény, ve které první motocyklista zaslechl houkání. Označme dále $t_0 = 0 \text{ s}$ čas, v němž se siréna rozezněla. Motocyklista zaslechl její hlas v čase

$\tau_1 = \frac{d}{v}$. Za dobu t , po kterou siréna houkala, se k ní motocyklista přiblížil do vzdálenosti $d - v_1 t$ a konec signálu uslyšel v čase

$$\tau_2 = t + \frac{d - v_1 t}{v}.$$

Platí nyní

$$t_1 = \tau_2 - \tau_1 = t \left(1 - \frac{v_1}{v} \right). \quad (1)$$

Obdobně

$$t_2 = t \left(1 + \frac{v_2}{v} \right). \quad (2)$$

Vyloučením veličiny t z (1) a (2) dostaneme vztah, z něhož vyjde

$$v = \frac{t_1 v_2 + t_2 v_1}{t_2 - t_1} \doteq 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (3)$$

b) Dosazením z (3) do (1) nebo (2) dostaneme

$$t = \frac{t_1 v_2 + t_2 v_1}{v_1 + v_2} \doteq 10 \text{ s}.$$

c) Je to možné, když místo, v němž je siréna, je uprostřed vzdálenosti, kterou motocyklista ujede za dobu t , neboť na začátku i na konci signálu má od sirény stejnou vzdálenost.

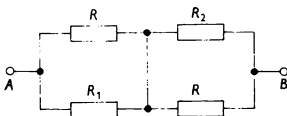
4. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

Čtyři rezistory jsou spojeny podle obr. 95. Odpor $R_1 = 2,0 \, \Omega$, odpor $R_2 = 72 \, \Omega$, dva zbývající rezistory mají stejný odpor R .

a) Stanovte odpor R tak, aby odpor soustavy mezi body A, B byl roven R .

b) Kolik řešení má úloha?

c) Přesvědčte se, že určené hodnoty R splňují podmínku v řešení úlohy a).



Obr. 95

Řešení

a) Soustava má celkový odpor

$$R_{AB} = \frac{R R_1}{R + R_1} + \frac{R R_2}{R + R_2}.$$

Pro $R_{AB} = R$ platí

$$\frac{R R_1}{R + R_1} + \frac{R R_2}{R + R_2} = R. \quad (1)$$

Tento vztah je zřejmě splněn pro $R = 0 \, \Omega$, dále pak pro hodnotu, která vyjde z (1) po zkrácení veličinou R . Dostaneme

$$R = \sqrt{R_1 R_2} = 12 \, \Omega.$$

b) Úloha má dvě řešení, a to $R = 0 \, \Omega$ a $R = \sqrt{R_1 R_2} = 12 \, \Omega$.

c) Pro $R = 0 \, \Omega$ má soustava podle obr. 95 odpor $0 \, \Omega$, pro $R = 12 \, \Omega$ má odpor $\frac{12}{7} \, \Omega + \frac{72}{7} \, \Omega = 12 \, \Omega$.

III. ČÁST

16. MEZINÁRODNÍ FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA

1 ZPRÁVA O PRŮBĚHU SOUTĚŽE

Pořadatelé 16. mezinárodní fyzikální olympiády, která proběhla ve dnech 23.—30. června 1985 v Jugoslávii, bylo ministerstvo vědy a technologie Slovinské republiky, Svaz matematiků, fyziků a astronomů Slovinska a Svaz matematických a fyzikálních společností Jugoslávie. Místo soutěže zvolili jugoslávští pořadatelé velmi vhodně - město Portorož, turistické středisko na břehu Jaderského moře. Lázeňské prostředí a vhodná kombinace pracovní stránky a možnosti rekreace účastníků dodaly soutěži nový půvab. Soutěžící i vedoucí byli ubytováni v interhotelích v přepychových pokojích pro zahraniční turisty, stravovali se v restauracích interhotelů. Na ubytování a na stravování vynaložili hostitelé pravděpodobně značné částky.

16. MFO se zúčastnila družstva ze 20 zemí; některé další pozvané státy na pozvánku nereagovaly nebo se omluvily, některé poslaly své pozorovatele (Čína, USA, Itálie). O soutěž projevila zájem Evropská fyzikální společnost. Na 16. MFO byl již tradičně zastoupen časopis *Közepiskolai Matematikai Lapok* svou redaktorkou.

16. mezinárodní fyzikální olympiáda byla slavnostně zahájena v pondělí 24. června 1985 v 11 hodin dopoledne. Na zahájení promluvil předseda mezinárodní komise prof. Anton Moljk z univerzity v Lublani. V kulturní části pak zazněly tóny klasiků v podání studentů konzervatoře. Ještě týž večer se

sešla mezinárodní komise, jejímiž členy jsou vedoucí všech delegací a další členové, jmenovaní pořadateli, aby na svém prvním zasedání projednala návrhy tří teoretických úloh. Po pětihodinové diskusi byly návrhy úloh upraveny a přijaty, vedoucí delegací texty přeložili do národních jazyků svých soutěžících. V úterý 25. června bylo celé dopoledne věnováno řešení teoretických úloh (5 h na tři úlohy). Odpoledne byly pořízeny xerokopie řešení soutěžících; úlohy opravovaly komise složené z vysokoškolských pracovníků, vedoucí každého družstva obdrželi xerokopie, aby mohli souběžně řešení opravit a připravit se na jednání s korektory. Ve večerních hodinách se uskutečnil klavírní koncert s díly Mozartovými a Chopinovými. Druhé zasedání mezinárodní komise bylo věnováno diskusi o seznamu témat pro přípravu na mezinárodní fyzikální olympiády. Středa 26. června byla oddechovým dnem. Všichni účastníci navštívili krasovou jeskyni Postojanska jama, která patří se svými 25 km dlouhými chodbami mezi nejznámější krasové útvary v Evropě. Ve večerních hodinách se uskutečnilo třetí zasedání mezinárodní komise, na němž organizátoři předložili vedoucím delegací návrhy dvou experimentálních úloh. Po čtyřhodinové diskusi byly úlohy přeloženy do národních jazyků soutěžících.

Podle dohody mezinárodní komise v minulém roce ve Švédsku probíhalo jednání mezinárodní komise v ruštině a angličtině, texty úlohy byly připraveny v těchto jazycích a ještě v němčině a francouzštině.

Čtvrtek 27. června byl dnem řešení experimentálních úloh, jež proběhlo ve speciální střední škole pro výuku přírodním vědám v Koperu, asi 10 km od Portorože. Úlohy řešilo všech 99 soutěžících najednou (buď nejprve úlohu 4, nebo 5). Pro řešení každé experimentální úlohy bylo určeno 2,5 h. V odpoledních hodinách proběhlo jednání vedoucích delegací s komisemi korektorů teoretických úloh, jež bylo zakončeno podpisem protokolu o výsledcích každého družstva. V pátek 28. června opravovali korektori řešení experimentálních úloh a všichni účastníci 16. MFO navštívili hřebčinec Lipica, kde

pěstují známé lipicány. Exkurze byla zakončena piknikem v přírodě. Ve večerních hodinách bylo další zasedání mezinárodní komise, na němž se řešily některé organizační otázky. Byla schválena témata pro přípravu soutěžících a pro výběr úloh pro mezinárodní fyzikální olympiády. Důležitými problémy bylo jednak uspořádání 17. MFO - nezávazný příslib přednesl zástupce Velké Británie; uskutečnění soutěže je podmíněno dostatečnou finanční částkou, kterou organizátoři musejí sehnat. Dále bylo stanoveno pořadí států pro uspořádání dalších mezinárodních fyzikálních olympiád v příštích letech. Pozvání pro rok 1987 přednesl zástupce NDR.

Náplň předposledního dne 16. MFO, tj. v sobotu 29. června 1985 byla bohatá - v dopoledních hodinách proběhlo jednání vedoucích delegací s komisemi korektorů experimentálních úloh, potom byla uspořádána závěrečná porada mezinárodní komise, na níž byly schváleny výsledky 16. MFO a stanoveny ceny, od 17. h se pak uskutečnil závěrečný ceremoniál soutěže s předáním diplomů a cen vítězům, pochvalných uznání pro úspěšné řešitele a potvrzení o účasti pro další řešitele. O ceny se zasloužil podnik pro výrobu elektronického zařízení ISKRA, který věnoval pro nejlepší soutěžící elektronické přístroje. Ministr vědy a technologie Slovinské republiky Erik Vrenko pak soutěž uzavřel. Poté proběhl společenský večer.

Ve volném čase byly pro soutěžící uspořádány různé kulturní pořady. Starosta města umožnil všem účastníkům 16. MFO volný vstup na pláž. Pro soutěž i mimo soutěžní dobu se podařilo pořadatelům vytvořit opravdu příjemné prostředí. Jugoslávské závody na výrobu učebních pomůcek a další závody zorganizovaly výstavku elektronických přístrojů, další závody instalovaly stolní počítače, u nichž českoslovenští účastníci 16. MFO strávili více času než na mořské pláži.

16. MFO se zúčastnila pětičlenná družstva ze 20 států (jen Island vyslal družstvo čtyřčlenné), v čele každého družstva byli vedoucí a pedagogický vedoucí družstva:

Bulharsko - Gleb Grigorjevič Zadorožnyj, univerzita Sofia
 Nikola Milanov Velčev, ministerstvo osvěty Sofia
 Československo - Daniel Kluvanec, PdF Nitra
 Ivo Volf, PdF Hradec Králové
 Finsko - Maija Ahtee, univerzita Helsinky
 Jukka Mattila, gymnázium Eurajoki
 Island - Hans Kristian Gudmundsson, univerzita Reykjavík
 Vidar Agustsson, střední škola Reykjavík
 Jugoslávie - Draško Grujič, fyzikální institut Beograd
 Ilija Savič, univerzita Beograd
 Kanada - Harry W. Giles, střední škola Toronto
 John Wilie, univerzita Toronto
 Kuba - Manuel Lastra Alonso, pedagogický institut Habana
 Pablo Veldes Castro, univerzita Habana
 Maďarsko - Jenő Szép, univerzita Budapešť
 Peter Gnädig, univerzita Budapešť
 NDR - Rudolf Gau, Vysoká škola pedagogická Güstrow
 Heinz Lorenz, ministerstvo vzdělávání Berlín
 NSR - Gunter Lind, Ústav přírodních věd Kiel
 Harri Heise, gymnázium Kiel
 Nizozemí - Hans Jordens, střední škola Haren
 Anne Holvast, univerzita Utrecht
 Norsko - Vidar Horsfjord, pedagogický institut Flatåsen
 Ingerid Helstrup, střední škola Bergen
 Polsko - Waldemar Gorzkowski, fyz. ústav PAN Warszawa
 Jan Mostowski, fyzikální ústav PAN Warszawa
 Rakousko - Helmuth Mayr, gymnázium Wien
 Günter Lechner, gymnázium Wörgl
 Rumunsko - Anatolie Hristev, univerzita Bukurešť
 Alexandru Burcin, ministerstvo vzdělávání Bukurešť
 SSSR - Oleg Fjodorovič Kabardin, APV SSSR Moskva
 Vladimir Aleksejevič Orlov, APV SSSR Moskva
 Švédsko - Lars Silverberg, univerzita Lund
 Lars Gislén, univerzita Lund
 Turecko - Ordal Demokan, univerzita Ankara
 Cemal Yalabik, univerzita Ankara

Velká Británie - Cyril Isenberg, univerzita Canterbury
Guy Bagnall, střední škola Harrow (Londýn)
Vietnam - Duong Trong Bai, ministerstvo školství Hanoi
Nguyen Van Luan, ministerstvo školství Hanoi

Pozorovatelé:

Erszebét Lugosi, matematicko-fyzikální časopis Budapešť
Guiliana Cavaggioni Righi, střední škola Venezia (Itálie)
Arthur Eisenkraft, Ossining (USA)
Ronald Edge, Colombia (USA)
Xiankai Meng, Shanghai (Čína)

Za pořadatele je třeba jmenovat:

Prof. Anton Moljk, předseda mezinárodní komise
Bojan Golli - sekretář 16. mezinárodní fyzikální olympiády
Aljoša Žerjal - hlavní organizátor 16. MFO.

Výsledky soutěže

V soutěži byly zadány tři teoretické a dvě experimentální úlohy, které byly hodnoceny celkovým počtem 50 bodů. O náročnosti soutěže svědčí tabulka 20, v níž uvádíme průměrné počty získaných bodů připadající na jednoho účastníka 16. MFO.

Absolutní vítěz, kterým se stal československý účastník 16. MFO Patrik Španěl, získal 42,5 bodu, tj. 85 % z dosažitelného počtu. Druhý v pořadí, účastník z Velké Británie získal 40,5 bodu. Z maximálního dosaženého počtu bodů byly vyhodnoceny výsledky 16. MFO, a to v následujících mezích

Úloha	1	2	3	Teor. úlohy	4	5	Exp. úlohy	Cel- kem
Maximální dosažitelný počet bodů	10	10	10	30	10	10	20	50
Průměrný dosažený počet bodů	4,26	5,74	3,28	13,28	4,63	3,89	8,52	21,80
Max. dosažený počet bodů	10	9,5	10	29	9,5	8,5	15,5	42,5
Počet účastníků, jež dosáhli max. počtu bodů	11	1	3	1	1	1	2	1
Počet účastníků, jež dosáhli hodnocení nula	12	8	9	—	—	—	—	—

I. cena 100 % — 90 %, tj. 42,5 b — 38,0 b — 5 účastníků
 II. cena 89 % — 78 %, tj. 32,5 b — 38,0 b — 6 účastníků
 III. cena 77 % — 65 %, tj. 27,5 b — 32,5 b — 17 účastníků
 Úspěšní 64 % — 50 %, tj. 27,5 b — 21,0 b — 25 účastníků.
 Z celkového počtu 99 účastníků bylo 53 úspěšných a 46 neúspěšných (tj. 46,5 %). Vítězové obdrželi od pořadatelů diplomy a věcné ceny, úspěšní soutěžící pochvalná uznání a neúspěšní dostali potvrzení o účasti na 16. MFO. Ceny představovaly digitální voltmetry a další elektronické přístroje. Absolutní vítěz Patrik Španěl dostal za svůj úspěch laser. Další speciální cenu - elektrickou vrtačku - obdržel David Mackay z Velké Británie za nejlepší výkon v experimentální díloze. Speciální cenu obdrželi nejmladší soutěžící a nejvzdálenější účastníci soutěže. Švédský soutěžící Kai Kylmanen,

který neřešil 3. úlohu a jako důvod uvedl, že se drží Thaletovy představy o stavbě vesmíru, dostal jako speciální cenu 20 m světlovodu.

Podívejme se ještě, jak lze hodnotit úspěchy jednotlivých družstev na 16. mezinárodní fyzikální olympiádě. Z celkového počtu 250 dosažitelných bodů získalo nejlepší umístění družstvo Sovětského svazu se 176,5 b., tj. 70,6 %, nejhorší družstvo pouze 44 b, tj. 17,6 %.

Tři nejlepší družstva v řešení

1. úlohy - SU, NSR, GB (CS na 9. místě)

2. úlohy - SU, GB, RO (CS na 6. místě)

3. úlohy - SU, CS, YU + H + VN

teoretických úloh - SSSR, NSR, GB (CS na 5. místě)

4. úlohy - GB, RO, NL (CS na 14. místě)

5. úlohy - NSR, SU, CS

experimentálních úloh - GB, NSR, SSSR + S (CS na 8. místě)

Jak lze pozorovat z tabulek výsledků 16. MFO, československé družstvo se tedy opět umístilo v první čtvrtině z celkového počtu zúčastněných družstev. Příprava našeho družstva probíhala několikastupňovitě a byla organizována sekretariáty ÚVFO v Hradci Králové a v Nitře. V říjnu a v listopadu proběhla korespondenční část přípravy - z jednotlivých krajů byli vybráni nejlepší účastníci fyzikální olympiády z kategorie B v minulém ročníku, popř. nematurující z kategorie A. Těm bylo zasláno 10 náročnějších úloh. V prosinci proběhlo zimní soustředění v Hradci Králové pro 15 účastníků, na druhé soustředění v březnu byli do Hradce Králové pozváni všichni vítězové z krajských kol v kategorii A a několik dalších účastníků podle výsledků bodování. Na obou týdenních soustředěních, jež organizoval RNDr. I. Volf se skupinou spolupracovníků z Pedagogické fakulty a obou gymnázií v Hradci Králové, byly řešeny náročnější úlohy z mechaniky, elektřiny a magnetismu, nauky o vlnění, paprskové a vlnové optiky. Do programu byly zařazeny tvůrčí experimentální úlohy a malé praktikum z elektroniky. Po ukončení celostátního kola byli pozváni na závěrečné soustředění do Nitry nejlepší účastníci

Výsledky jednotlivců na 16. MFO:

Soutěžící	Stát	Hodnocení úlohy (body)							
		1	2	3	Teor. úlohy	4	5	Exp. úlohy	Celkem
První cena									
1. Patrik Španěl	CS	10	9	10	29	6,5	7	13,5	42,5
2. Roy Badami	GB	9	8	10	27	8	5,5	13,5	40,5
3. Georgij Grigorjev	SU	9	8,5	10	27,5	4,5	6,5	11	38,5
4. - 5. Viktor Barzikin	SU	10	8,5	7	25,5	6,5	6	12,5	38,0
Taras Ivančenko	SU	10	8	9	27	4,5	6,5	11	38,0
Druhá cena									
6. Peter Schupp	D	9	9	6	24	6	6,5	12,5	36,5
7. Norbert Bollow	D	10	7,5	5	22,5	6	6	12	34,5
8. - 9. David Mackay	GB	8	9	1	18	9,5	6	15,5	33,5
Dan Przzol	RO	9	7,5	5	21,5	7,5	4,5	12	33,5
10. - 11. Zoltan Egyed	H	10	8	7,5	25,5	2	5,5	7,5	33,0
Jurij Žestkov	SU	10	9,5	4	23,5	6	3,5	9,5	33,0
Třetí cena									
12. Anthony Duell	GB	9	8,5	3	20,5	5,5	6,5	12	32,5
13. Thomas Palm	S	9	8	3	20	5,5	6,5	12	32,0
14. Katalin Malureauu	RO	5,5	9	5	19,5	9	3	12	31,5
15. - 16. Rainer Hippmann	D	10	6	2	18	7	6	13	31,0
Phons Bloemen	NL	8	7	3	18	6	7	13	31,0

Soutěžící	Stát	Hodnocení úlohy (body)						Celkem	
		1	2	3	Teor. úlohy	4	5		Exp. úlohy
17. – 19. Mathias Kertzel	DDR	8	6,5	3	17,5	6,5	6,5	13	30,5
Richard Green	GB	5	7,5	5	17,5	7,5	5,5	13	30,5
Ovidiu Klocea	RO	10	6,5	5	21,5	6	3	9	30,5
20. – 21. Jan Lúžný	CS	7	8	7	22	3	5	8	30,0
Olaf Wendt	D	8	6	6,5	20,5	3	6,5	9,5	30,0
Marcin Wolter	PL	4	4	7	15	8	6,5	14,5	29,5
23. – 26. Antal Jakovac	H	7	7	6	20	4,5	4,5	9	29,0
Oleg Čerp	SU	4	8,5	5	17,5	5,5	6	11,5	29,0
Jane Kondev	YU	10	7	6	23	4,5	1,5	6	29,0
Igor Djoković	YU	5	6,5	6	17,5	4	7,5	11,5	29,0
27. Peter Zegellar	NL	8	7	2	17	6	5,5	11,5	28,5
28. Mirosław Lis	PL	10	8,5	0	18,5	5,5	4	9,5	28,0
Úspěšní řešitelé									
29. Xuan Hai Phan	VN	6	8	4,5	18,5	3,5	4,5	8	26,5
30. – 32. Stefan Komilev	BG	0	7,5	7,5	15	7	4	11	26,0
Jeroen Nijhof	NL	9	7,5	3	19,5	5,5	1	6,5	26,0
Hakan Svansson	S	3	6	1,5	10,5	7	8,5	15,5	26,0
33. – 37. Mathias Drochner	DDR	3	7	2	12	6,5	7	13,5	25,5
Ralf Vandenhoueten	D	4	8,5	2	14,5	4,5	6,5	11	25,5
Veiko Punkka	SF	9,5	4,5	3	17	3	5,5	8,5	25,5
Kristian Mihai Neasu	RO	3	8,5	5	16,5	5	4	9	25,5
Ninh Khang Nguyen	VN	6	7,5	5	18,5	3	4	7	25,5

Soutěžící	Stát	Hodnocení úlohy (body)						Celkem
		1	2	3	Teor. úlohy	4	5	Exp. úlohy
38. Ivo Myslivec	CS	1	7,5	5	13,5	4,5	7	11,5
39. Henrik Jurkschat	DDR	10	6,5	1	17,5	3	4	7
40. – 42. Dobrin Bosev	BG	8	4,5	2	14,5	4	5,5	9,5
Thomas Klotz	DDR	4	7,5	6	17,5	4,5	2	6,5
Jacek Wajcik	PL	4	8,5	4	16,5	3,5	4	7,5
43. – 46. Nikolaj Mečkov	BG	5	8,5	2,5	16	4	3,5	7,5
Jens-Uwe Sachse	DDR	6,5	8	0,5	15	6	2,5	8,5
Lars Aronsson	S	5	8	0	13	6	4,5	10,5
Torbjorn Soderberg	S	2	8	2	12	5,5	6	11,5
47. – 49. Jörg Schwelberger	A	2	9	2	13	7,5	2	9,5
Villa-Pekka Viitanen	SF	6	5,5	3,5	15	4,5	3	7,5
Harun Hadi Solak	TK	7	7,5	2,5	17	2,5	3	5,5
50. Akos Nemeth-Buhin	H	2	8	6	16	4	2	6
51. – 53. Nicholas Bateman	CND	3	5,5	1	9,5	7	4,5	11,5
Jari-Pekka Ikonen	SF	3	5	3,5	11,5	6,5	3	9,5
Przemyslan Siemion	PL	3	6,5	4	13,5	5	2,5	7,5
Neúspěšní řešitelé								
54. Daniel Lepadatu	RO	1	7,5	3	11,5	6	3	9
55. – 57. Daniel Kavaladžiev	BG	2	6	4,5	12,5	5	2,5	7,5
Taner Yildirim	TR	2	8,5	2	12,5	3,5	4	7,5
Dinh Duy Nguyen	VN	2	7,5	4,5	14	3,5	2,5	6

Soutěžící	Stát	Hodnocení úlohy (body)							
		1	2	3	Teor. úlohy	4	5	Exp. úlohy	Celkem
58. Klaas van Aarsen	NL	2	3	3	8	7	4,5	11,5	19,5
59. Øystein Olsen	N	10	2,5	0	12,5	4,5	2	6,5	19,0
60. -61. Andrew Hills	GB	2	6,5	3	11,5	4,5	2,5	7	18,5
Bulent Buyukbozkirli	TK	2	6,5	2,5	11	3,5	3,5	7	18,5
62 -64. Ivo Brorens	NL	0	5	1	6	6	6	12	18,0
Tamas Leistzinger	H	2	5	1	8	7,5	2,5	10	18,0
Kai Kylmanen	S	8	4	0	12	5	1	6	18,0
65. -66. Nenad Lalić	YU	0	8	4	12	3,5	2	5,5	17,5
Gia Anh Vu Phan	VN	1	6	4,5	11,5	1,5	4,5	6	17,5
67. -68. Pavel Peev	BG	1	7	1	9	4,5	3,5	8	17,0
Donko Donjerković	YU	0	6	3	9	5,5	2,5	8	17,0
69. -71. Pavel Krtouš	CS	2	3	3,5	8,5	4	4	8	16,5
Michal Gašparín	CS	2	7,5	1	10,5	1,5	4,5	6	16,5
Piotr Hajlasz	PL	3	5	4	12	2,5	2	4,5	16,5
72. Mičo Mrkač	YU	4	0	4,5	8,5	5,5	2	7,5	16,0
73. -74. Peter Hoffmann	A	2	5,5	2,5	10	4,5	1	5,5	15,5
Koray Oner	TK	0	6	1	7	5	3,5	8,5	15,5
75. Bernhard Holaubek	A	2	4,5	1	7,5	5,5	1,5	7	14,5
76. -79. Reinhard Bischof	A	0	7	0	7	3	4	7	14,0
Julio Navarro Serrano	CU	2	6	4	12	0,5	1,5	2	14,0
Antonio Diaz Zamora	CU	1	1,5	4	6,5	3,5	4	7,5	14,0
Bui Hai Nguyen	VN	4	3	5	12	1	1	2	14,0
80. -81. Vincent Cheung	CND	0	3	4,5	7,5	3,5	2,5	6	13,5
Vilmundur Palmason	IS	2	6	0	8	3,5	2	5,5	13,5

Soutěžící	Stát	Hodnocení úlohy (body)							
		1	2	3	Teor. úlohy	4	5	Exp. úlohy	Celkem
82. – 84. Wolfgang Sakuler Daniel Phalp Yrjo Kotivouri	A CND SF	0 1 1	4,5 3 2	1 2 3	5,5 6 6	5,5 2 5	2 5 2	7,5 7 7	13,0 13,0 13,0
85. Dag Ove Schnell 86. Sigurbjorn Porkelsson	N IS	0 2	4,5 3	1,5 1	6 6	2 3	4,5 3	6,5 6	12,5 12,0
87. – 88. Gyula Kotek Marius Dalin	H N	1 2	3,5 0	3 1,5	7,5 3,5	1,5 4	2,5 4	4 8	11,5 11,5
89. Finn Dag Buo 90. – 91. Sonu Gaind Sigurour Ass Gretarsson	N CND IS	0,5 0 0	0 0 4,5	3 2 0,5	3,5 2 5	4 6 3,5	3 2 1,5	7 8 5	10,5 10,0 10,0
92. – 93. Mark Noworolski Asgeir B. Aegisson	CND IS	1 1	0 1	0 0,5	1 2,5	4 4	3,5 2	7,5 6	8,5 8,5
94. Ramazan Kursat Inandik	TK	2	0	2	4	0,5	3,5	4	8,0
95. – 96. Gunnar Rustad Jaakko Kaukonen	N SF	1 0	0,5 1	0 1,5	1,5 2,5	4 3,5	2 1,5	6 5	7,5 7,5
97. Jorge Valdes Fernandez	CU	2	1	1	4	2	0,5	2,5	6,5
98. Carlos Soto Castro 99. Manuel Fernandez	CU CU	0 2	0 0	1 0	1 2	1,5 1	3 1	4,5 2	5,5 4,0

Bodové hodnocení jednotlivých družstev:

Stát	Hodnocení úlohy (body).						
	1	2	3	Teor.	4	5	Exp. Celkem
BG	16,0	33,5	17,5	67,0	24,5	19,0	43,5 110,5
CS	22,0	35,0	26,5	83,5	19,5	27,5	47,0 130,5
SF	19,5	18,0	14,5	52,0	22,5	15,0	37,5 89,5
IS	5,0	14,5	2,0	21,5	14,0	8,5	22,5 44,0
YU	19,0	27,5	23,5	70,0	23,0	15,5	38,5 108,5
CND	5,0	11,5	9,5	26,0	22,5	17,5	40,0 66,0
CU	7,0	8,5	10,0	25,5	8,5	10,0	18,5 44,0
H	22,0	31,5	23,5	77,0	19,5	17,0	36,5 113,5
DDR	31,5	35,5	12,5	79,5	26,5	22,0	48,5 128,0
D	41,0	37,0	21,5	99,5	26,5	31,5	58,0 157,5
NL	27,0	29,5	12,0	68,5	30,5	24,0	54,5 123,0
N	13,5	7,5	6,0	27,0	18,5	15,5	34,0 61,0
PL	24,0	32,5	19,0	75,5	24,5	19,0	43,5 119,0
A	6,0	30,5	6,5	43,0	26,0	10,5	36,5 79,5
RO	28,5	39,0	23,0	90,5	33,5	17,5	51,0 141,5
SU	43,0	43,0	35,0	121,0	27,0	28,5	55,5 176,5
S	27,0	34,0	6,5	67,5	29,0	26,5	55,5 123,0
TK	13,0	28,5	10,0	51,5	15,0	17,5	32,5 84,0

Stát	Hodnocení úlohy (body).							
	1	2	3	Teor.	4	5	Exp.	Celkem
GB	33,0	39,5	22,0	94,5	35,0	26,0	61,0	155,5
VN	19,0	32,0	23,5	74,5	12,5	16,5	29,0	103,5
Celkem bodů	422,0	568,5	324,5	1 315,0	458,5	385,0	843,5	2 158,5
Průměr družstva	21,1	28,4	16,2	65,7	22,9	19,25	42,2	107,9
Průměr jednotl.	4,26	5,74	3,28	13,28	4,63	3,89	8,32	21,80

Stát	Počet bodů	%	I	Počet cen II	III	Úspěšní řešitelé	Neúspěšní řešitelé
1. SU	176,5	70,6	3	1	1	-	-
2. D	157,5	63,0	-	2	2	1	-
3. GB	155,5	62,2	1	1	2	-	1
4. RO	141,5	56,6	-	1	2	1	1
5. CS	130,5	52,2	1	-	1	1	2
6. DDR	128,0	51,2	-	-	1	4	-
7. NL	123,0	49,2	-	-	2	1	2
8. S	123,0	49,2	-	-	1	3	1
9. PL	119,0	47,6	-	-	2	2	1
10. H	118,5	47,4	-	1	1	1	2
11. BG	110,5	44,2	-	-	-	3	2
12. YU	108,5	43,4	-	-	2	1	2
13. VN	103,5	41,4	-	-	-	3	2
14. SF	83,5	33,4	-	-	-	2	3
15. TK	84,0	33,6	-	-	-	3	2
16. A	79,5	31,8	-	-	-	1	4
17. CND	66,0	26,4	-	-	-	1	4
18. N	61,0	24,4	-	-	-	1	4
19. IS 4/5*)	44/55	17,6/22	-	-	-	-	5
20. CU	44,0	17,6	-	-	-	-	4
							5

*) Družstvo Islandu mělo pouze 4 členy; uvádíme výsledky i přepočty pro 5 členů zvýšením o průměrnou hodnotu dosaženého výsledku.

III. kola, jimž se věnovala skupina pracovníků z Pedagogické fakulty v Nitře pod vedením Doc. RNDr. Ing. D. Kluvance, CSc. Do programu byly zařazeny problémy z elektřiny a magnetismu, základů kinetické teorie plynů, problémy z mechaniky, základy fyzikální optiky. Značná část soustředění v Nitře byla věnována řešení experimentálních úloh. Součástí přípravy byla psychologická příprava na zátěžové situace, zadání a vyhodnocení psychologického testu, jehož výsledky byly vzaty v úvahu při výběru účastníků československého reprezentačního družstva.

Na zasedání předsednictva ÚVFO dne 13. června 1985 v Nitře bylo navrženo složení československého družstva na 16. mezinárodní fyzikální olympiádu v Portoroži:

1. Patrik Španěl, IV. ročník gymnázia v Praze, W. Piecka
2. Ján Lúžny, IV. ročník SPŠ elektrotechnické v Prešově
3. Ivo Myslivec, IV. ročník gymnázia v Praze, Budějovická ul.
4. Michal Gašparín, IV. roč. gymnázia v Novém Městě n. V.
5. Pavel Krtouš, IV. ročník gymnázia v Liberci.

Jako náhradníci byli určeni: Stanislav Meduna z gymnázia v Bratislavě a Tomáš Kopf ze SPŠ chemické v Pardubicích. Vedoucími delegace se stali předseda ÚVFO doc. RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc. a 1. místopředseda ÚVFO RNDr. Ivo Volf.

Výsledky, kterých dosáhlo československé družstvo na 16. MFO, a jejich porovnání s celkovým průměrem všech účastníků uvádíme na str. 220 a 221.

Přestože byla přípravě československého družstva věnována mimořádná pozornost, nebyly výsledky všech soutěživých odpovídající a nemůžeme s nimi být zcela spokojeni. Kladem je, že si družstvo jako celek udržuje svůj poměrně vysoký standard - naše družstvo získalo 5. místo v celkovém pořadí družstev, náš účastník Patrik Španěl se stal absolutním vítězem

Na 16. MFO dosáhlo československé družstvo těchto výsledků:

Účastník	Hodnocení úlohy (body)						Cel- kem	Umístění	
	1	2	3	Teor. úlohy	4	5			
P. Španěl	10,0	9,0	10,0	29,0	6,5	7,0	13,5	42,5	1. místo I. cena
J. Lúžny	7,0	8,0	7,0	22,0	3,0	5,0	8,0	30,0	20. místo III. cena
I. Myslivec	1,0	7,5	5,0	13,5	4,5	7,0	11,5	25,0	38. místo úspěšný
M. Gašparín	2,0	7,5	1,0	10,5	1,5	4,5	6,0	16,5	69. – 71. místo neúspěšný
P. Krtouš	2,0	3,0	3,5	8,5	4,0	4,0	8,0	16,5	69. – 71. místo neúspěšný

Srovnáme ještě výsledky našeho družstva s celkovým průměrem, jehož na 16. MFO bylo dosaženo:

Položka	Hodnocení úlohy (body)					Exp. úlohy	Celkem
	1	2	3	4	5		
Dosažitelný počet bodů na 1 účastníka	10	10	10	10	10	20	50
Průměrný počet bodů na 1 účastníka	4,26	5,74	3,28	13,28	4,63	8,52	21,80
Průměrný počet bodů pro čs. účastníka	4,40	7,00	5,30	16,70	3,90	9,40	26,10
Rozdíl	+0,14	+1,26	+2,02	+3,42	-0,73	+1,61	+4,30
Čs. družstvo bylo v pořadí	9	6	2	5	14	3	5

16. MFO, a to s předstihem 2b nad dalším účastníkem. Také J. Lúžny podal dobrý výkon. Oba tito soutěžící se mezinárodní fyzikální olympiády zúčastnili podruhé, v loňském roce ve Švédsku získal P. Španěl I. cenu, J. Lúžny III. cenu.

Při řešení teoretických úloh podali naši soutěžící dost dobrý výkon, jejich výsledky byly nadprůměrné, ve 3. úloze dokonce o 20 % lepší než byl průměr. Slabší výsledky byly při řešení experimentálních úloh, a to jednak vzhledem k zadané problémové situaci, při níž bylo nutno tvůrčím způsobem přistoupit k řešení obou úloh, jednak vzhledem k použití moderní laboratorní techniky (např. užití stolního počítače jako měřiče času ve 4. úloze), na kterou nejsou naši soutěžící zvyklí. Na druhé straně nemůžeme být spokojeni se dvěma účastníky, kteří se nestali úspěšnými řešiteli. Byla tak porušena dlouhodobá řada startů, kdy naše družstvo dosahovalo poměrně dobrých výsledků - na 10.—15. MFO byl pouze jeden náš účastník neúspěšný. Předpokládáme, že tento neúspěch byl způsoben jednak subjektivními důvody (nervová situace soutěžících), ale byl také odrazem podmínek, jež byly pro naše účastníky připraveny (dvoudenní cesta vlakem na místo soutěže).

Úspěch československého družstva je do značné míry vždy odrazem péče, která byla věnována zájemcům o fyzikální olympiádu ve škole i v různých formách činnosti, kterou organizuje ÚVFO. Z výsledků je třeba si brát ponaučení pro přípravu na další mezinárodní soutěže. Pro zlepšení přípravy účastníků budoucích MFO je nutné více propojit jednotlivé formy přípravy, zvýšit problémovost zadávaných úloh jak v průběhu naší fyzikální olympiády, tak v procesu přípravy na MFO. Jak se ukázalo v loňském roce, existuje velmi efektivní způsob, který jsme použili v závěrečné části přípravy již vybraných účastníků soutěže, který podstatně přispěl k připravenosti našich soutěžících na 15. mezinárodní fyzikální olympiádě ve Švédsku (kde byli všichni naši účastníci úspěšní) - šlo o samostatné řešení náročných fyzikálních úloh kombinované s následující diskusí o různých způsobech řešení,

použitých jednotlivými řešiteli. Pochopitelně, bude také vhodné vytvořit metodickou řadu návodných materiálů, jež by na sebe obsahově, ale také stupněm náročnosti na sebe navazovaly a umožňovaly tak souvislou přípravu zájemců o řešení fyzikálních úloh v rámci fyzikální olympiády.

2 SÚŤAŽNÉ ÚLOHY

1. úloha

Chlapec nadväzuje rádiové spojenie pomocou vysielача so špeciálnou anténou s dvoma dievčatami, ktoré bývajú v rôznych mestách A , B .

Anténa mu umožňuje veľmi dobré spojenie s jedným z miest a súčasne zlé spojenie s druhým mestom (dobré spojenie s B mestom a súčasne zlé spojenie s A mestom, alebo dobré spojenie s A mestom a súčasne zlé spojenie s B mestom). Chlapec tým dosiahne, že jeho rádiový rozhovor s jedným dievčaťom nemôže počúvať druhé dievča. Anténa sa skladá z dvoch vertikálne umiestnených tyčiek, z ktorých každá vyžaruje elektromagnetické vlnenie s frekvenciou f vo všetkých smeroch s rovnakou intenzitou. Medzi vyžarovanými elektromagnetickými vlnami z tyčiek antény je fázový rozdiel φ .

a) Určte najmenšiu možnú vzdialenosť $r_{\min}$ medzi tyčkami antény. V tomto prípade určte uhol α , ktorý zvierajú rovina prechádzajúca tyčkami antény so smerom k mestu A . Vypočítajte rozdiel fáz φ medzi elektromagnetickými vlnami vyžarovanými z tyčiek antény.

b) Úlohu riešte najskôr všeobecne a potom pre prípad: $= 27$ MHz, chlapec býva v Portoroži, dievčatá v mestách Koper (B -mesto) a Buja (A -mesto). Spojnica miest Portorož-Koper zvierajú so smerom juh-sever uhol $\Psi_1 = 72^\circ$, spojnica miest Portorož-Buja zvierajú so smerom juh-sever uhol $\Psi_2 = 157^\circ$.

Riešenie

Fázové rozdiely interferujúcich vln vyžarovaných z tyčiek antény smerom k mestám A a B sú

$$\begin{aligned} d_A &= 2\pi \frac{r \cos \alpha}{\lambda} + \varphi, \\ d_B &= 2\pi \frac{r \cos (\Psi - \alpha)}{\lambda} + \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

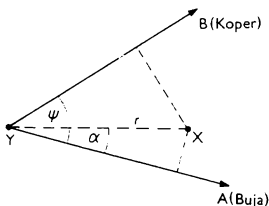
kde r je vzdialenosť medzi tyčkami antény, α je uhol medzi rovinami antény a smerom k mestu A , Ψ je uhol medzi smermi k mestám A , B od antény (obr. 96); φ je fázový rozdiel medzi vlnením vyžarovaným tyčkou Y a vlnením vyžarovaním tyčkou X antény.

Podmienky pre interferenciu vlnení s maximom v smere B a minimom v smere A sú

$$\begin{aligned} d_A &= (2n + 1)\pi \\ d_B &= 2k\pi; \end{aligned} \quad (2)$$

kde n a k sú prirodzené čísla.

Z uvedených vzťahov možno určiť neznáme veličiny $r_{\min}$, α a φ .



Obr. 96

Pomocou rozdielov $d_B - d_A$ zo vzťahov (1) a (2) možno určiť r , $r_{\min}$ a α

$$d_B - d_A = [2(k - n) - 1] \pi = 2\pi \frac{r}{\lambda} [\cos(\Psi - \alpha) - \cos \alpha]$$

a úpravou

$$r = \frac{\lambda}{4 \sin \frac{\Psi}{2}} \cdot \frac{2(k - n) - 1}{\sin \left(\alpha - \frac{\Psi}{2} \right)} ;$$

uvedený vzťah dosiahne najmenšiu kladnú hodnotu,

$$\text{ak } k = n \quad \text{a} \quad \alpha - \frac{\Psi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$r_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sin \frac{\Psi}{2}} , \quad (3)$$

vtedy

$$\alpha = \frac{\Psi}{2} - \frac{\pi}{2} . \quad (4)$$

Z tejto podmienky vyplýva, že rovina antény je kolmá na os uhla Ψ .

Dosadením (3), (4) do (1) a úpravou máme

$$d_A = \frac{\pi}{2} + \varphi ,$$

$$d_B = -\frac{\pi}{2} + \varphi . \quad (5)$$

Ak $\varphi = \frac{\pi}{2}$, dosadením za φ do vzťahov (5) sa môžeme presvedčiť, že sú splnené interferenčné podmienky (2). Ak však $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, dosadením do (5) máme

$$d_A = 0$$

$$d_B = -\pi ,$$

čo znamená, že v smere A dosahujeme interferenčné maximum a v smere B interferenčné minimum elektromagnetických vln vyžarovaných anténou.

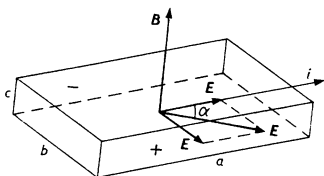
K dosiahnutiu uvedeného efektu je potrebná anténa s minimálnou vzdialenosťou $r_{\min}$ medzi tyčkami danou vzťahom (4), rovina antény má zvierat so smerom k mestu A uhol α podľa vzťahu (4). Ak fázový rozdiel φ vyžarovaných elektromagnetických vln je $\frac{\pi}{2}$, je možné dosiahnuť dobré spojenie

s mestom B , ak je fázový rozdiel $-\frac{\pi}{2}$ je dobré rádiové spojenie s mestom A ; v prvom prípade nemožno zachytiť vysielanie v meste A a v druhom prípade v meste B .

b) Pre zadané údaje platí obr. 97

$$\Psi = \Psi_2 - \Psi_1, \quad \Psi = 85^\circ$$

$$\Psi_0 = \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2}, \quad \Psi_0 = 114,5^\circ, \quad \alpha = -47,5^\circ, \quad r_{\min} \doteq 4,1 \text{ m.}$$



Obr. 97

2. úloha

Dlhým kvádom s dĺžkami hrán $a, b, c, a > b > c$, ktorý je vyrobený z polovodivej látky antimonidu india - InSb , prechádza v smere najdlhšej hrany elektrický prúd I . Nosiče prúdu v polovodiči InSb sú voľné elektróny. V elektrickom poli s intenzitou E sa pohybujú strednou rýchlosťou $v = \mu E$.

kde u je pohyblivosť elektrónov. Koncentrácia voľných elektrónov v polovodiči InSb v tomto prípade je n .

Kváder je v rovnorodom magnetickom poli, ktorého magnetická indukcia $\mathbf{B}$ je rovnobežná s hranou s dĺžkou c kvádra. Na pohybujúce sa voľné elektróny pôsobí elektrické pole i magnetické pole. Smer výsledného elektrického poľa nie je zhodný so smerom elektrického prúdu, ako v prípade kvádra, ktorý nie je v magnetickom poli. Ide o tzv. Hallov jav.

a) Určte veľkosť a smer intenzity $\mathbf{E}$ výsledného elektrického poľa v kvádri.

b) Určte Hallové elektrické napätie U_H , ktorým sa nazýva napätie medzi dvoma protilahlými stenami kvádra rovnobežnými s rovinou danou smerom prúdu a magnetickou indukciou $\mathbf{B}$.

c) Predpokladajte, že elektrický prúd I a veľkosť B magnetickej indukcie magnetického poľa nie sú stále, ale sa menia podľa funkcií $I = I_0 \sin \omega t$, $B = B_0 \sin (\omega t + \varphi)$, kde I_0 , B_0 sú amplitúdy prúdu a veľkosti magnetickej indukcie, ω je uhlová frekvencia, φ začiatočná fáza veľkosti magnetickej indukcie, t čas. Určte v tomto prípade celkové Hallové napätie U_H a jeho ustálenú zložku U_{H0} .

d) Nakreslite schému elektrického obvodu, v ktorom by bolo možné výsledok časti c) úlohy využiť na meranie elektrického príkonu spotrebiča pripojeného na zdroj striedavého napätia. Návrh stručne zdôvodnite.

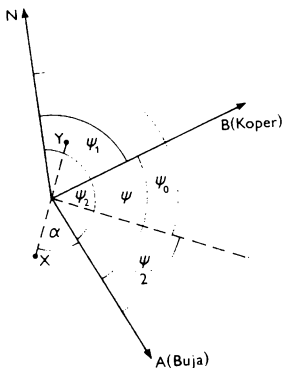
Úlohu riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $b = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, $c = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $I = 1,0 \text{ A}$, $u = 7,8 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $n = 2,5 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$, $B = 0,10 \text{ T}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (elementárny náboj).

Riešenie

a) Pre prúd v kvádri platí

$$I = S i = b c n e v,$$

kde i je prúdová hustota a S obsah steny kvádra kolmej na smer prúdu (obr. 98).



Obr. 98

Z toho

$$v = \frac{I}{b c n e}$$

a veľkosť E_1 zložky intenzity elektrického poľa

$$E_1 = \frac{v}{u} = \frac{I}{b c n e u}.$$

Druhá zložka E_2 elektrického poľa, zapríčinená Lorentzovou silou pôsobiacou na pohybujúce sa elektróny v magnetickom poli je daná vzťahom

$$E_2 = \frac{-e v B}{-e} = v B = \frac{I B}{b c n e}.$$

Výsledné elektrické pole v kvádri má elektrickú intenzitu s veľkosťou $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$,

$$E = \frac{I}{b c n e} \sqrt{B^2 + \frac{1}{u^2}}.$$

Vektor intenzity $\mathbf{E}$ elektrického poľa leží v rovine kolmej na magnetickú indukciu $\mathbf{B}$, má smer podľa obr. 98 a zvierá so smerom prúdu uhol

$$\alpha = \operatorname{arctg} Bu, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

b) Hallové napätie U_H medzi dvoma protilaňými stenami kolmými na vektor $\mathbf{E}_2$ je

$$U_H = E_2 b = \frac{I B}{c n e} \quad (1)$$

c) Ako vyplýva z (1) Hallové napätie v prípade, že I a B sú harmonické funkcie, je

$$\begin{aligned} U_H &= \frac{I_0 B_0}{c n e} \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t = \\ &= \frac{B_0 I_0}{2 c n e} \left[\cos \varphi - \cos \left(\omega t + \frac{\varphi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Celkové Hallové napätie je dané posledným vzťahom a jeho ustálená zložka je $U_{H0} = \frac{B_0 I_0}{2 c n e} \cos \varphi$.

d) Pozri obr. 99. Pre amplitúdy I_0 a B_0 približne platí $I_0 = k_1 I$, $B_0 = k_2 U$, kde I je amplitúda prúdu a U amplitúda napätia v spotrebiči. Veličiny B a I sú harmonické funkcie, medzi ktorými je fázový posun φ , rovnaký ako medzi napätím a prúdom v spotrebiči. Ustálená zložka Hallovho napätia

$$U_{H0} = k_1 k_2 \frac{U I}{2 c n e} \cos \varphi = k U I \cos \varphi = k P_w$$

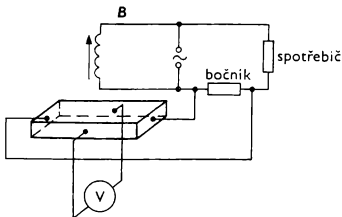
určuje elektrický príkon spotrebiča, kde k je konštanta prístroja. Pre dané hodnoty a) $E \doteq 4,0$ V, $\alpha \doteq 38^\circ$; b) $U_H \doteq 25$ mV.

3. úloha

Vypustiť sondu za hranice slnečnej sústavy je možné dvoma spôsobmi:

1. Udeliť sonde dostatočnú rýchlosť potrebnú k tomu, aby opustila slnečnú sústavu.

2. Využiť k vypusteniu sondy pomoc gravitačného poľa niektorej z vonkajších planét slnečnej sústavy, napr. gravitačného poľa Marsu. Pomocou tejto planéty sa sonda začne pohybovať po hyperbolickej dráhe, jej dráha sa zakriví, čím získa dostatočnú rýchlosť k opusteniu slnečnej sústavy.



Obr. 99

a) Určte veľkosť v_a najmenejšej rýchlosti sondy a jej smer vzhľadom k dráhe Zeme, potrebnú k realizácii 1. projektu.

b) Predpokladajte, že sonda je vypustená v smere určenom v a) časti úlohy rýchlosťou v_b vzhľadom na Zem. Určte rýchlosť sondy v okamihu, keď pretne dráhu Marsu, t.j. jej normálovú a tangenciálnu zložku vzhľadom na dráhu Marsu. V tomto prípade predpokladajte, že Mars je ďaleko od sondy.

c) Sonda sa dostala do gravitačného pôsobenia Marsu. Určte najmenšiu štartovnú rýchlosť sondy z miesta na dráhe

Zeme vzhľadom na Zem, aby opustila slnečnú sústavu. To znamená, že podobne ako v a) časti úlohy určte rýchlosť sondy v gravitačnom poli Marsu potrebnú pre uniknutie sondy zo slnečnej sústavy a pomocou nej aj štartovnú rýchlosť sondy zo Zeme. Nájdite vzťah medzi rýchlosťou sondy po opustení gravitačného poľa Marsu a zložkami rýchlosti sondy v okamihu jej vstupu do gravitačného poľa Marsu, t.j. zložkami, ktoré ste určili v b) časti úlohy. Zachová sa pritom celková energia sondy?

d) Určte najväčšiu možnú časť ušetrenej energie pri vypustení kozmickej sondy v projekte 2) (bod c) úlohy) v porovnaní s projektom 1) (bod a) úlohy).

Poznámka

V riešení úlohy predpokladajte, že všetky planéty sa pohybujú okolo Slnka po kružnicových drahách v rovnakom zmysle v jednej spoločnej rovine.

Riešenie

a) Označme E_{po} , E_{ko} polohovú a pohybovú energiu sondy v okamihu jej vypustenia z povrchu Zeme a E_{p1} , E_{k1} polohovú a pohybovú energiu sondy po opustení slnečnej sústavy. Všetky energie uvažujme vzhľadom k Slnku.

Zo zákona zachovania energie platí

$$E_{po} + E_{ko} = E_{p1} + E_{k1}. \quad (1)$$

Sonde udelíme rýchlosť $\mathbf{v}_a$ v smere rýchlosti $\mathbf{v}_z$ Zeme. Platí

$$\begin{aligned} E_{p1} + E_{k1} &= 0, \\ E_{po} &= -\gamma \frac{M}{R_z} m, \\ E_{ko} &= \frac{m(v_a + v_z)^2}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

M je hmotnosť Slnka, m je hmotnosť sondy a R_z polomer kružnicovej dráhy Zeme okolo Slnka.

Dosadením vzťahov (2) do (1) a úpravou máme

$$\kappa \frac{M}{R_z} = \frac{(v_a + v_z)^2}{2} \quad (3)$$

a ak uvažíme, že

$$\frac{v_z^2}{R_z} m_z = \kappa \frac{M m_z}{R_z^2},$$

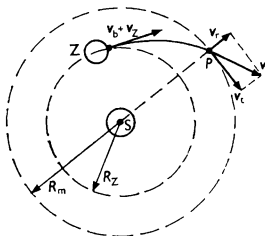
$$v_z^2 = \kappa \frac{M}{R_z},$$

vzťah (3) možno upraviť

$$v_a = v_z (\sqrt{2} - 1). \quad (4)$$

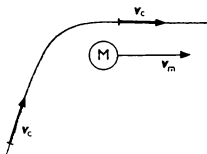
Číselne, ak $v_z \doteq 29,8 \text{ km.s}^{-1}$, $v_a \doteq 12,3 \text{ km.s}^{-1}$. Sonda je potrebné udeliť rýchlosť asi $12,3 \text{ km.s}^{-1}$ vzhľadom na Zem v smere pohybu Zeme, aby opustila slnečnú sústavu.

b) Nech sonda je vypustená z povrchu Zeme v smere pohybu Zeme rýchlosťou v_b . K určeniu rýchlosti $\mathbf{v}$ sondy



Obr. 100

v bode P (obr. 100) pretnutia jej dráhy s dráhou Marsu použijeme zákon zachovania momentu hybnosti a zákon zachovania energie v uzavrenej sústave sonda - Slnko



Obr. 101

$$(v_b + v_z) R_z = v_t R_m \quad (5)$$

$$-\kappa \frac{M}{R_z} m + \frac{1}{2} m (v_b + v_z)^2 = -\kappa \frac{M}{R_m} m + \frac{1}{2} m (v_t^2 + v_r^2) \quad (6)$$

Z (5), (6) a zo vzťahu $v_z^2 R_z = \kappa M$ vypočítame v_t , v_r a v

$$v_t = (v_b + v_z) \frac{R_z}{R_m}, \quad (7)$$

$$v_r = \sqrt{(v_b + v_z)^2 \left(1 - \frac{R_z^2}{R_m^2}\right) - 2 v_z^2 \left(1 - \frac{R_z}{R_m}\right)}, \quad (8)$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = \sqrt{(v_b + v_z)^2 - 2 v_z^2 \left(1 - \frac{R_z}{R_m}\right)}, \quad (9)$$

R_m je polomer kružnicovej dráhy Marsu.

c) Vzťahy (7)–(9) určujú rýchlosť sondy vo vzdialenosti R_m sondy od Slnka.

Sonda v gravitačnom poli Marsu sa pohybuje po hyperbolickej dráhe tak, že relatívna rýchlosť sondy a Marsu pred a po prechode gravitačným polom Marsu sa zachováva. Pri vhodne zvolenej dráhe sondy opustí sonda gravitačné pole Marsu v smere dotyčnice k jeho dráhe rýchlosťou v_c (obr. 101) vzhľadom k Marsu.

Relatívna rýchlosť sondy vzhľadom k Marsu je

$$v_c = \sqrt{v_r^2 + (v_m - v_t)^2}, \quad (10)$$

kde v_m je rýchlosť Marsu

$$v_m = \sqrt{\frac{\kappa M}{R_m}} = v_z \sqrt{\frac{R_z}{R_m}}. \quad (11)$$

Po dosadení (8), (11) a (7) do vzťahu (10) máme

$$v_c = \sqrt{(v_b + v_z)^2 \left(1 - \frac{R_z^2}{R_m^2}\right) - 2 v_z^2 \left(1 - \frac{R_z}{R_m}\right) + \left[v_z \sqrt{\frac{R_z}{R_m}} - (v_b + v_z) \frac{R_z}{R_m}\right]^2}. \quad (12)$$

Aby sonda unikla za hranice Slnecnej sústavy musí rýchlosť v_c spĺňať podmienku (podobne ako vzťah (4))

$$v_c \geq v_m (\sqrt{2} - 1). \quad (13)$$

Z (11), (12) a (13), ak uvažíme $\frac{R_z}{R_m} \doteq \frac{2}{3}$, máme pre hraničnú rýchlosť v_b rovnicu

$$v_b^2 + v_b 0,911 v_z - 0,203 v_z^2 = 0,$$

riešením

$$v_b \doteq 0,185 v_z \doteq 5,46 \text{ km.s}^{-1}.$$

Sonda v 2. projekte musí byť vystrelená rýchlosťou asi $5,46 \text{ km.s}^{-1}$ vzhľadom na Zem, v smere pohybu Zeme, aby opustila Slnecnú sústavu.

Z (13) tiež vyplýva, že v tomto prípade relatívna rýchlosť sondy vzhľadom k Marsu je $10,1 \text{ km.s}^{-1}$.

Sonda interakciou s gravitačným poľom Marsu získala energiu

$$\Delta E_{k1} = \frac{m}{2} [(v_c + v_m)^2 - v_c^2] = \frac{m v_m^2}{2} \left(\frac{2 v_c}{v_m} + 1 \right),$$

tj. celková energia sondy sa nezachovala.

d) Rozdiel medzi pohybovými energiami sondy v 1. a 2. projekte je

$$\Delta E_{k2} = \frac{m}{2} (v_a^2 - v_b^2).$$

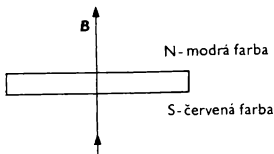
Časť energie, ktorá sa ušetrila v 2. projekte, je

$$\frac{\Delta E_{k2}}{\frac{m}{2} v_a^2} = 1 - \left(\frac{v_b}{v_a} \right)^2.$$

Číselne $1 - \left(\frac{v_b}{v_a} \right)^2 \doteq 0,80$, tj. 80 % energie sa ušetrilo v 2. projekte vzhľadom na 1. projekt.

4. úloha

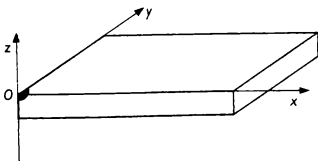
a) Určte polohu stredov a orientáciu niekoľkých trvalých magnetov (obr. 102) pevne umiestnených v čiernej skrinke. Súradnicovú sústavu si zvolte podľa obr. 103: začiatok O v rohu skrinky označenom červenou farbou a osi x , y , z podľa obr. 103.



Obr. 102

b) Pomocou meracieho zariadenia s voltmetrom (obr. 104), ktoré máte k dispozícii, určte súradnice B_z magnetickej indukcie $\mathbf{B}$ magnetického poľa v rovine $z = 0$. Meracie zariadenie budete musieť vopred očiachovať. Najväčšia výchylka voltmetra V je priamo úmerná zmene magnetického toku prechádzajúceho dutinou meracej cievočky c.

c) Určte najväčšiu možnú hodnotu $B_{\max}$ magnetickej indukcie $\mathbf{B}$ magnetického poľa v okolí trvalého magnetu,



Obr. 103

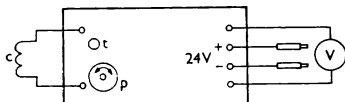
ktorý máte k dispozícii. (Rovnaké magnety sú zabudované v čiernej skrinke.)

Pomôcky

1. Čierna skrinka.
2. Trvalý magnet.
3. Zdroj jednosmerného napätia s regulovateľnou hodnotou napätia v intervale $0 \div 25$ V. Prezrite si čelný panel zdroja. Vľavo dolu je sieťový spínač, vľavo hore prepínač meracieho prístroja na meranie napätia (poloha označená U) alebo prúdu (poloha označená I). Vľavo hore je potenciometer na reguláciu napätia, vpravo hore regulačný prvok nastavenia hranice odoberaného prúdu. V našom prípade ho môžete ponechať v pravej krajnej polohe. Vľavo dolu je prepínač rozsahov, nechajte ho v polohe označenej $12 \div 25$ V. Vpravo hore je spínač zdierok zdroja.
4. Malá cievočka s vodičmi.
5. Dve cievky s počtom závitov 8 250 a 8 800.
6. Voltmetr s rozsahmi 1 V, 3 V a 10 V.
7. Meracie zariadenie popísané v bode b) zadania, znázornené na obr. 104. Potenciometrom p sa nastavuje nulová výchylka voltmetra, tlačidlo t slúži na resetovanie volt-

metra (rýchle vrátenie ručičky voltmetra do nulovej polohy).

8. Ampérmeter.
9. Reostat s odporom $3,3 \text{ k}\Omega$.
10. Štyri spojovacie vodiče.
11. Doska z umelej hmoty so sústavou pravidelne rozmiestnených dierok, ktoré možno použiť na upevnenie cievok.
12. Gumičky.
13. Drevené paličky.
14. Pravítko.
15. Niť.

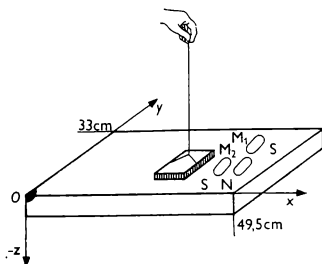


Obr. 104

Riešenie

a) Približnú polohu magnetov možno určiť pomocou voľného magnetu zaveseného na niti, s ktorým zisťujeme silové pôsobenie magnetického poľa nad povrchom čiernej skrinky (obr. 105). Po krátkom skúmaní magnetického poľa z oboch strán skrinky možno zistiť, že v pravej strane skrinky sú dva magnety M_1 , M_2 . Magnet M_1 má horizontálnu polohu a jeho severný pól je v smere osi $-z$, magnet M_2 má vertikálnu polohu a jeho severný pól je v smere osi $+x$ (obr. 106).

Presné hodnoty súradníc (x, y) stredov magnetov je možné určiť napr. týmto spôsobom: 1. magnet M_1 - súradnica B_z magnetickej indukcie $\mathbf{B}$ magnetického poľa magnetu M_1 má najväčšiu hodnotu nad stredom magnetu (obr. 107a).



Obr. 105

v bode so súradnicami x_1, y_1 . Ak sa vzdalujeme od tohto bodu na ľubovoľnú stranu v rovine $z = 0$, hodnota súradnice B_z klesá. Súradnice x_1, y_1 možno určiť dostatočne presne pomocou meracieho zariadenia (obr. 104), kde cievočku c kladieme jej pozdĺžnou osou rovnobežne s osou z a potom ju presunieme mimo dosky. Výchylka voltmetra pri presunutí cievočky z bodu o súradniciach x_1, y_1 do okolia je zo všetkých možných prípadov merania najväčšia.

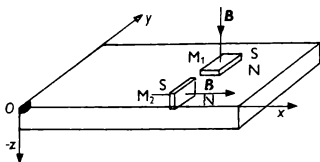
Meraním sme určili $x_1 \doteq 350$ mm, $y_1 \doteq 210$ mm. 2. magnet M_2 - vzhľadom na jeho polohu jestvujú nad magnetom M_2 dva body P, R s najväčšou hodnotou súradnice B_z magnetickej indukcie (obr. 107b). Súradnice x_2, y_2 stredu magnetu M_2 sú dané aritmetickými priemerami:

$$x_2 = \frac{x_P + x_R}{2}, \quad y_2 = \frac{y_P + y_R}{2}.$$

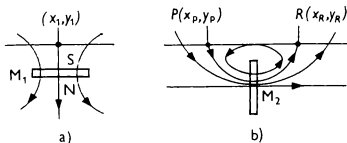
Meraním sme určili $x_P = 335$ mm, $x_R = 365$ mm, $y_P \doteq y_R \doteq 130$ mm, $x_2 \doteq 350$ mm, $y_2 \doteq 130$ mm.

Súradnicu z_1 , z_2 stredov magnetov sme určili týmto postupom: pomocný magnet položíme postupne do polôh totožných s polohami magnetov M_1 , M_2 vedľa skrinky do bodov so súradnicou z , pri ktorých dostávame rovnaké výchylky voltmetra, ako v bodoch nad magnetmi v rovine $z = 0$. Pre magnet M_1 sme namerali výchylku 0,7 V, pre rovnakú výchylku je pomocný magnet v hĺbke 2,5 cm, t.j. $z_1 = -25$ mm. Pre magnet M_2 rovnakým postupom sme dostali výchylku 0,4 V, ktorej zodpovedá súradnica $z_2 = -25$ mm.

Súradnice stredov magnetov M_1 , M_2 boli M_1 (350 mm, 210 mm, -25 mm), M_2 (350 mm, 130 mm, -25 mm), orientácia magnetov je daná podľa obr. 106.



Obr. 106

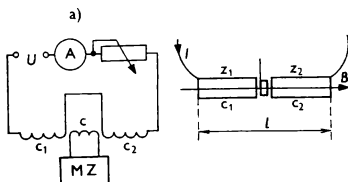


Obr. 107

b) K meraniu magnetickej indukcie B magnetického poľa je potrebné meracie zariadenie kalibrovať. Zostavíme elektrický obvod podľa obr. 108, pričom cievky c_1, c_2 priložíme blízko vedľa seba tak, aby mali totožné pozdĺžne osi a magnetické polia s rovnakou orientáciou. Cievky možno považovať za jednu dlhú cievku s počtom závitov $z = z_1 + z_2$, kde z_1, z_2 sú počty závitov cievok c_1, c_2 , l je dĺžka cievky (obr. 108 b). Indukcia v strede cievky je

$$B = \mu_0 \frac{z_1 + z_2}{l} I,$$

číselne $z_1 = 8\,250$, $z_2 = 8\,800$, $I = 10\text{ mA}$, $l \doteq 0,080\text{ m}$;
 $B \doteq 2,7 \cdot 10^{-3}\text{ T}$.

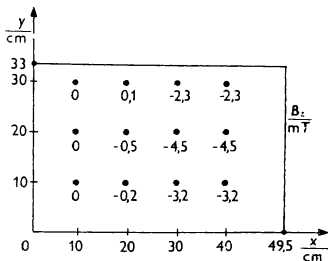


Obr. 108

Konštantu k zariadenia pre meranie magnetickej indukcie magnetického poľa sme určili z niekoľkých meraní.

$$k \doteq 1,7 \cdot 10^{-2}\text{ T} \cdot \text{V}^{-1}$$

$\frac{U}{V}$	0,19	0,20	0,18	0,19	0,20	$B \doteq 2,7 \cdot 10^{-3}\text{ T}$
$\frac{10^2 k_l}{\text{T} \cdot \text{V}^{-1}}$	1,4	1,3	1,5	1,4	1,3	



Obr. 109

Vykonalí sme meranie súradnice B_z magnetickej indukcie $\mathbf{B}$ magnetického poľa v niekoľkých bodoch roviny $z = 0$ čiernej skrinky. Výsledky sú znázornené v obr. 109.

c) Najväčšiu magnetickú indukciu magnetického poľa sme namerali v strede veľkej plochy magnetu z jednej alebo druhej strany magnetu: $U \doteq 6 \text{ V}$, $B = k \cdot U$, $B \doteq 84 \text{ mT}$.

5. úloha

Na hriadelke elektrického motorčeka M je pevne uchytený disk D z medi, ktorý má na obode v dvoch protilahlých bodoch uchytené ocelové terčiky t_1 , t_2 . Terčiky pri otáčaní disku sa pohybujú pod induktívnym snímačom S , ktorého impulzy zaznamenáva počítač IBM (obr. 110).

Motorček pripojíme na zdroj napätia, disk sa začne otáčať z nulovej uhlovej rýchlosti až po nejakú ustálenú rýchlosť. Podobne pri odpojení motorčeka od zdroja napätia koná

disk spomalený pohyb, jeho uhlová rýchlosť sa mení z ustálenej hodnoty na nulovú hodnotu.

Čas prechodu terčika pod snímačom a doby polovice otáčky pre oba deje zaznamenáva počítač P na obrazovke monitora. Je schopný tiež na obrazovke znázorniť závislosť doby polovice otáčky ako funkciu času.

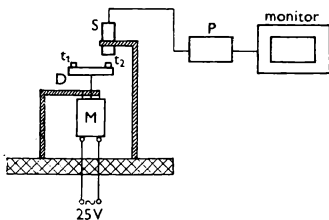
Pre meranie si vyberte len jeden dej, buď roztáčanie disku, alebo jeho zastavovanie.

Graficky určte uhlovú dráhu φ , uhlovú rýchlosť ω a uhlové zrýchlenie ε ako funkcie času, veľkosť M momentu sily $\mathbf{M}$ a výkon P motorčeka ako funkcie uhlovej rýchlosti. Uvážte zdroje chýb merania.

Moment zotrvačnosti otáčajúcej sa časti zariadenia vzhľadom na os otáčania $I = (14,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, absolútna permeabilita vlákna $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

Pomôcky

1. Elektrický motorček na striedavé napätie 25 V. Na hriadeľke motorčeka je medený kruhový disk.
2. Zdroj so striedavým napätím 25 V.



Obr. 110

3. Induktívny snímač.

4. Počítač IBM s monitorom a nahraným programom. Počítač zostavuje tabuľky a kreslí grafy.

Poznámky

a) Pre uvedenie počítača do prevádzky je potrebné poznať funkciu tlačidiel počítača:

5 - počítač je pripravený,

6 - štart registrácie 60 meraní,

3 - štart registrácie 30 meraní.

Po vykonaní určeného počtu meraní (60 alebo 30) počítač automaticky nakreslí graf závislosti doby polovice otáčky ako funkciu času.

7 - tabuľka výsledkov merania; prvý stĺpec obsahuje poradové číslo merania, druhý stĺpec čas, tretí stĺpec doby polovice otáčok,

8 - 1. strana merania (1. až 30. meranie),

2 - 2. strana merania (31. až 60. meranie),

4 - graf,

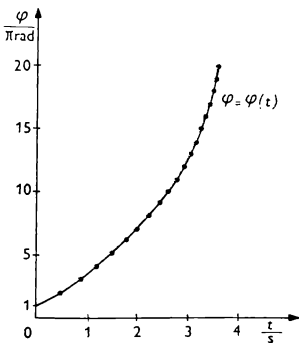
0 - zrušenie zaznamenaných výsledkov (reset).

b) Vhodné striedavé napätie pre motorček je 25 V. Pri zapnutí motorčeka je potrebné uviesť ho do chodu impulzom na startív zariadenia.

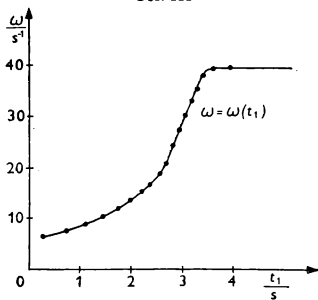
Riešenie

Rozhodli sme sa pre skúmanie deja zrýchleného pohybu disku, k čomu sme využili rozbeh motorčeka z nulovej uhlovej rýchlosti až po ustálenú uhlovú rýchlosť. Volili sme záznam 60 meraní.

Po vykonaní merania sa ukázalo, že stačí zaznamenať prvých 20 meraní, t.j. asi 10 otáčok, lebo po vykonaní týchto otáčok bol otáčavý pohyb disku rovnomerný. V tabuľke sme zaznamenali merané a vypočítané veličiny: stĺpec 1 - poradové číslo merania N , 2 - priebežný čas t jednotlivých meraní, 3 - doby Δt polovice otáčky (veličiny zaznamenané na



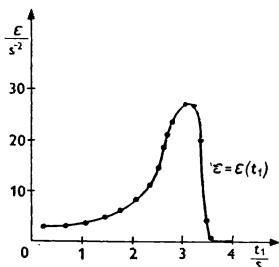
Obr. 111



Obr. 112

obrazovke monitora), 4 - priebežný čas t_1 stredov meraných intervalov, 5 - stredná uhlová rýchlosť ω v meraných intervaloch, 6 - zmena strednej uhlovej rýchlosti $\Delta\omega$ medzi dvoma susednými časmi t_1 , 7 - stredné uhlové zrýchlenie ε v meraných intervaloch, 8 - veľkosť M momentu sily $\mathbf{M}$, 9 - výkon P (vypočítané veličiny).

Žiadané funkcie sme potom určili graficky. Ide o zložité funkcie, ktorých analytické rovnice nemožno jednoducho stanoviť.

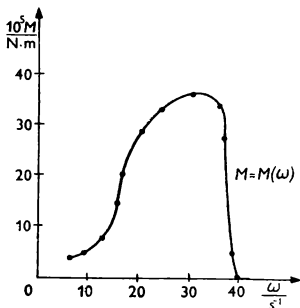


Obr. 113

a) Graf funkcie $\varphi = \varphi(t)$: Uhlová dráha φ je určená údajmi v 1. stĺpci tabuľky, ak číslo N vynásobíme uhlom π rad; čas t je uvedený v 2. stĺpci tabuľky.

Graf funkcie $\varphi = \varphi(t)$ je na obr. 111.

b) Graf funkcie $\omega = \omega(t)$: stredná hodnota ω uhlovej rýchlosti v čase polovic otáčok je určená hodnotami uvedenými v stĺpci 5. tabuľky. Táto rýchlosť približne zodpovedá okamžitej rýchlosti v strede časových intervalov Δt , t.j. v ča-



Obr. 114

se t_1 . Graf funkcie $\omega = \omega(t)$ znázorníme pomocou hodnôt veličín uvedených v stĺpcoch 5. a 4.

Graf funkcie $\omega = \omega(t)$ je na obr. 112.

c) Graf funkcie $\varepsilon = \varepsilon(t)$: stredná hodnota ε uhlového zrýchlenia v čase polovic otáčok je určená hodnotami uvedenými v stĺpci 7. tabuľky. Určili sme ich pomocou zmien

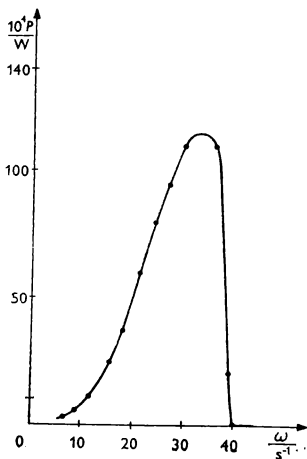
$\Delta\omega$ uhlovej rýchlosti ω a intervalov Δt , $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. Toto

zrýchlenie približne zodpovedá okamžitému zrýchleniu v čase t_1 . Graf funkcie $\varepsilon = \varepsilon(t)$ znázorníme pomocou hodnôt veličín uvedených v stĺpcoch 7. a 4. tabuľky (obr. 113).

d) Graf funkcie $M = M(\omega)$: Hodnoty momentu sily M určíme podľa vzťahu $M = I\varepsilon$ a zaznamenáme ich do 8. stĺpca tabuľky. Graf funkcie $M = M(\omega)$ určíme pomocou hodnôt veličín uvedených v stĺpcoch 8. a 5. tabuľky (obr. 114).

e) Graf funkcie $P = P(\omega)$: Hodnoty výkonu P určíme podľa vzťahu $P = M \omega = I \varepsilon \omega$ a zaznamenáme ich do 9. stĺpca tabuľky. Graf funkcie $P = P(\omega)$ určíme pomocou hodnôt veličín uvedených v stĺpcoch 9. a 5. tabuľky (obr. 115).

Zdroj chýb meraní je v nepresnosti snímača (oceľové terčíky majú konečné rozmery) a vo výpočte stredných hodnôt veličín v meraných intervaloch, hoci by bolo potrebné určovať okamžité hodnoty veličín.



Obr. 115

OBSAH

I. část

Zpráva o průběhu soutěže	5
1 Cíl soutěže a její organizace	5
2 Složení ústředního výboru fyzikální olympiády ve školním roce 1984/85	7
3 Krajské a okresní výbory FO ve školním roce 1984/85	8
4 Průběh soutěže ve školním roce 1984/85	9
5 Formy péče o nadané žáky ve XXVI. ročníku FO	37
6 Zhodnocení XXVI. ročníku FO	41

II. část

Soutěžní úlohy	43
1 Úlohy kategorie A	43
2 Úlohy kategorie B	99
3 Úlohy kategorie C	127
4 Úlohy kategorie D	162
5 Úlohy kategorie E	184

III. část

16. mezinárodní fyzikální olympiáda	204
1 Zpráva o průběhu soutěže	204
2 Soutěžní úlohy	223

PaedDr. Karel Žampa, doc. RNDr. ing. Daniel Kluvanec, CSc.,
Mojmír Simerský, RNDr. Ivo Volf

XXVI. ročník fyzikální olympiády

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství
v Praze roku 1990
jako svou publikaci č. 9-42-18/26
Edice Pomocné knihy pro žáky
Odpovědné redaktorky Jaroslava Šarbochová a PaedDr. Jolana
Prostředníková
Výtvarná redaktorka Zdeňka Drahokoupilová
Technická redaktorka Lenka Peřínková
Vytiskl Polygrafický průmysl, s. p. Praha,
Moravské tiskárny, Olomouc, Studentská 5
Formát papíru 70 cm × 100 cm
Počet stran 252
AA 9,89 (8,38 AA textu; 1,51 AA grafiky) - VA 10,46
Náklad 2 700 výtisků
Tematická skupina a podskupina 03/5
1. vydání
Cena brožovaného výtisku Kčs 17,00
505/21,825

14-542-90	Kčs 17,00
-----------	-----------

ISBN 80-04-23141-1