

PROF. RNDr. ROSTISLAV KOŠŤÁL  
MĚJMÍR SIMERSKÝ

# **XVII. ročník fyzikální olympiády**

ZPRÁVA O PRŮBĚHU A ŘEŠENÍ ÚLOH  
ZE SOUTĚŽE KONANÉ VE ŠKOLNÍM  
ROCE 1975/76

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ  
PRAHA

Zpracovali prof. RNDr. Rostislav Košťál a Mojmír Simerský  
Recenzovali František Živný a RNDr. ing. Daniel Kluvanec,  
CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1978

# I. ČÁST

## ZPRÁVA O PRŮBĚHU SOUTĚŽE

### 1. Cíl soutěže a její organizace

XV. sjezd KSČ, který se konal v dubnu 1976, vypracoval nový program dalšího rozvoje socialismu, který vychází z linie XIV. sjezdu KSČ a přihlíží k současným mezinárodním a vnitřním podmínkám naší ekonomiky a naší společnosti. Sjezd s uspokojením konstatoval, že úkoly stanovené XIV. sjezdem na pětileté období byly úspěšně splněny, a vytyčil konkrétní úkoly ve všech oblastech rozvoje naší socialistické společnosti. Zdůraznil, že pro všechna odvětví národního hospodářství, pro výrobní i nevýrobní oblast je základním požadavkem zvyšovat efektivnost, produktivitu a kvalitu práce. V šesté pětiletce dále vzroste význam vědeckotechnického pokroku jako hlavního faktoru zvyšování efektivnosti společenské práce, pokroku ve výrobní technologii, v rozvoji a využívání surovinových a energetických zdrojů, ve zlepšování podmínek života a práce lidí.

Úkolem školy je připravit novou technickou inteligenci, která bude schopna vědeckotechnickou revoluci dále rozvíjet a postavit ji do služeb komunistické výstavby naší společnosti. Při plnění tohoto úkolu musí škola vytvářet takové podmínky a používat takové prostředky, aby objevila technicky talentované žáky, aby jejich schopnosti správně usměrňovala a dále rozvíjela. Poněvadž to není možno plně zajistit v rámci povinné výuky, jsou organizovány různé soutěže přírodovědného a technického charakteru. Jedno z předních míst mezi nimi zaujímá soutěž fyzikální olympiáda.

Fyzikální olympiáda plní dva úkoly: vyhledává schopné žáky a věnuje se jejich odbornému růstu. Na školách 2. cyklu se tato soutěž konala ve školním roce 1975—76 celostátně již posedmnácté, na základních devítiletých školách již potři-

nácté. V některých krajích se před celostátní soutěží konaly tyto soutěže i několik let pokusně.

Technické vědy jsou vybudovány na fyzice, pro niž je matematika pomocnou vědou. Dnes bez matematiky není fyzika myslitelná. Proto chceme-li mít dobré fyziky, musíme je vychovat z nadaných matematiků.

Organizační řád soutěže fyzikální olympiáda (FO) je určen výnosem ministerstva školství a kultury (MŠK) ze dne 14. března 1963, č. 2293/63 — I/1, a byl uveřejněn ve Věstníku MŠK, r. 1963, seš. 12. Uvedený organizační řád se týká i soutěže matematická olympiáda (MO). Zavedení obou soutěží je odůvodňováno takto: Mají vzbudit u žáků příslušných škol zájem o hlubší studium fyziky a matematiky, vést žáky k dobrovolné samostatné práci, naučit je pracovat s odbornou literaturou, pomáhat škole při vyhledávání nadaných žáků a rozvíjení jejich schopností, napomáhat svým způsobem k volbě povolání v oborech, které jsou pro naši ekonomiku rozhodující.

Fyzikální i matematická olympiáda vytvářejí předpoklady pro dobrou přípravu žáků ke studiu na vysokých školách matematicko-fyzikálního a technického zaměření. Obě olympiády přispívají také k zvyšování úrovně vyučování matematice a fyzice jednak tím, že žáci rozšiřují a prohlubují své znalosti, jednak tím, že také profesori a učitelé rozvíjejí své odborné i pedagogické schopnosti vedením žáků a hodnocením jejich práci ve FO. Zvyšováním odborné úrovně pomáhá fyzikální olympiáda žákům škol 2. cyklu ke studiu na příslušných vysokých školách a žákům ZDŠ ke studiu na školách 2. cyklu.

V XVII. ročníku probíhala fyzikální olympiáda opět v pěti kategoriích. Kategorie A byla určena pro žáky čtvrtých ročníků výběrových středních škol, kategorie B pro žáky třetích ročníků, kategorie C pro žáky druhých ročníků a kategorie D pro žáky prvních ročníků těchto škol. Kategorie E se pořádala pro žáky devátých ročníků ZDŠ. Přitom každý žák mohl soutěžit i v kategorii určené pro vyšší ročník, než který navštěvoval.

Soutěž probíhala podobně jako v minulých ročnících v kategoriích A a E ve třech kolech, v kategoriích B, C a D ve dvou kolech. Prvé kolo všech kategorií probíhalo na škole, druhé kolo kategorií A—D jako krajské, druhé kolo kategorie E jako okresní, třetí kolo kategorie A jako celostátní a třetí kolo kategorie E jako krajské.

V prvním kole dostali žáci za úkol vyřešit 7 úloh, z toho jednu úlohu laboratorní. Úlohy odevzdávali svým učitelům

fyziky ve dvou termínech (3 + 4), stanovených v letácích FO. V kategoriích A, B, C a D byli úspěšnými řešiteli ti žáci, kteří vyřešili aspoň dobře (v třístupňové klasifikaci) 5 ze zadaných úloh, přičemž řešili (i když neúspěšně) i laboratorní úlohu. Účastník soutěže v těchto kategoriích měl mimoto prostudovat fyzikální téma příslušné kategorie, neboť na ně navazovala jedna úloha prvního kola soutěže a jedna úloha druhého nebo třetího kola. Také v kategorii E bylo zadáno 7 soutěžních úloh včetně laboratorní. Na rozdíl od vyšších kategorií nebyla však laboratorní úloha pro úspěšného řešitele povinná; stačilo, když úspěšně vyřešil 5 ze zadaných úloh. Pro tuto kategorii nebylo také určeno téma k prostudování.

Prvé kolo probíhalo letos stejným způsobem jen v 11 krajích. V Jihomoravském kraji byly pokusně provedeny určité odchylky, o nichž se zmiňujeme v následující kapitole.

Druhé kolo soutěže FO kategorií A, B, C a D probíhalo v krajích a bylo organizováno krajskými výbory fyzikální olympiády (KVFO). Druhé kolo FO kategorie E probíhalo v okresech a bylo organizováno okresními výbory fyzikální olympiády (OVFO). Ve druhém kole FO všech kategorií byly účastníkům zadány 4 teoretické úlohy. Úspěšnými řešiteli byli ti žáci, kteří vyřešili aspoň dobře (ve čtyřstupňové klasifikaci) 2 ze zadaných úloh. Úspěšní řešitelé druhého kola FO dostali od KVFO, popřípadě od OVFO, pochvalná uznání a několik nejlepších dostalo věcné odměny od příslušných OŠ KNV, popř. OŠ ONV.

Třetí kolo soutěže FO bylo organizováno jen pro kategorie A a E. Třetí kolo FO kategorie A řídil Ústřední výbor fyzikální olympiády (ÚVFO), organizoval je KVFO Středočeského kraje. Jako obvykle také v tomto ročníku byly účastníkům zadány 4 úlohy teoretické a jedna laboratorní. Aby byl účastník soutěže úspěšným řešitelem, musel vyřešit úspěšně aspoň 3 ze zadaných úloh. Třetí kolo FO kategorie E bylo organizováno v krajích. Podobně jako ve druhém kole byly zadány 4 soutěžní úlohy, vesměs teoretické. Podmínky pro úspěšného řešitele byly stejné jako ve druhém kole.

Klasifikační zásady byly v prvním kole stejné jako v dřívějších ročnících soutěže FO. Žákovská řešení se klasifikovala takto:

1. **Výborně**, byla-li úloha rozřešena správně, nebo řešení mělo nanejvýš jen formální chyby nebo jen menší odbornou závadu.
2. **Dobře**, jestliže řešení vystihovalo úkol, ale mělo větší odborné nedostatky; dobře bylo hodnoceno i správné řešení,

když se v něm vyskytovaly závažné formální nedostatky.

3. **Nevyhovující**, jestliže nedostatky odborného rázu byly závažné nebo řešení bylo z větší části neúplné; řešení se hodnotilo jako nevyhovující i v tom případě, chyběl-li výklad nebo byl neúplný, takže z něho nebylo možno soudit na myšlenkový postup podaného řešení.

Od druhého kola byla zavedena čtyřstupňová klasifikace:

1. **Výborně**, jestliže je úloha rozřešena zcela správně a bez formálních závad.

2. **Chvalitebně**, jestliže je úloha rozřešena správně, řešení má však formální, popř. nezávažné věcné nedostatky.

3. **Dobře**, jestliže řešení vystihuje úkol, ale má odborné nedostatky; dobře je hodnoceno i takové řešení, v němž se vyskytují závažné formální nedostatky.

4. **Nevyhovující**, jestliže nedostatky odborného rázu jsou závažné nebo řešení je z větší části neúplné; řešení se klasifikuje jako nevyhovující i tehdy, chybí-li výklad nebo je-li výklad neúplný, takže z něho nelze soudit na myšlenkový postup podaného řešení.

Kladná klasifikace opět předpokládá, že úloha má fyzikální výklad, z něhož je vidět myšlenkový postup podaného řešení.

Pořadatelé XVII. ročníku FO byla ministerstva školství ČSR a SSR spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků a se Sociálistickým svazem mládeže ČSSR.

Vlastní soutěž řídil v rámci celé ČSSR Ústřední výbor fyzikální olympiády (ÚVFO), v rámci krajů krajské výbory FO (KVFO) a v rámci okresů řídily soutěž kategorie E okresní výbory FO (OVFO). Ve školách byl jeden z učitelů fyziky pověřen funkcí referenta pro FO.

## 2. Pokusná úprava organizace soutěže 1. kola

Pokusná úprava organizace soutěže byla provedena v JMK. V kategoriích D a E bylo první kolo rozděleno na dvě části.

V první části soutěžící ve školách vypracovali tři teoretické a jednu laboratorní úlohu. Tyto úlohy odevzdali žáci referentům FO na škole, kteří je zhodnotili. Soutěžící, kteří měli alespoň dvě úlohy úspěšně vyřešeny, postoupili do druhé části 1. kola.

V druhé části řešili úspěšní řešitelé první části soutěžního kola tři klauzurní úlohy. Úlohy ohodnotili referenti na školách a klasifikaci sjednotili v kategorii D členové KVFO, v kategorii

E členové OVFO. Řešitelé, kteří měli aspoň dvě úlohy úspěšně vyřešené, postoupili do 2. kola.

### **3. Složení Ústředního výboru fyzikální olympiády ve školním roce 1975/76**

Ústřední výbor fyzikální olympiády se podle organizačního řádu skládá ze zástupců pořádajících institucí (MŠ ČSR, MŠ SSR, JČSMF a SSM) a z učitelů vysokých, středních a základních škol, kteří jsou do funkce jmenováni příslušnými ministerstvy školství na základě návrhu JČSMF. Kromě toho jsou členy širšího ÚVFO i všichni předsedové krajských výborů FO.

Sídlem ÚVFO je od r. 1966 Brno:

Ústřední výbor, který byl v r. 1974 jmenován na tři roky, pracoval v r. 1975/76 ve stejném složení jako v období 1974/75 a měl 15 členů z ČSR a 10 z SSR. Byli to:

předseda: prof. RNDr. Rostislav Košťál, profesor Vysokého učení technického v Brně, v důch.

1. místopředseda: doc. RNDr. Ivan Náter, docent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě

2. místopředseda: doc. RNDr. Jiří Beránek, docent strojí fakulty Vysokého učení technického v Brně

jednatel: Oldřich Veverka, odborný asistent elektrotechnické fakulty Vysokého učení technického v Brně

Další členové (v abecedním pořadí):

a) z ČSR:

1. RNDr. Milan Bednařík, odb. asistent FPř UP, Olomouc

2. Jaroslav Honner, vedoucí kabinetu fyziky KPÚ, Ústí n. Labem

3. RNDr. Marta Chytilová, CSc., pracovnice VÚP Brno, v důch.

4. RNDr. Alois Kleveta, profesor gymnázia, Vyškov

5. Milan Rádl, odb. asistent Vysoké školy strojí a elektrotechnické, Plzeň

6. Mojmír Simerský, profesor SPŠ VE, Rožnov p. Radh.

7. Karel Šebela, profesor SPŠ strojí, Praha

8. Václav Šůla, ústřední školní inspektor, Praha

9. doc. RNDr. Jaroslav Vachek, CSc., MFF UK, Praha

10. RNDr. Ivo Volf, odb. asistent KF FPed, Hradec Králové
11. doc. ing. Bohumil Vybíral, CSc., docent VVŠPV, Vyškov
12. Karel Žampa, školní inspektor, Brno

b) z SSR:

1. Emilie Chrapanová, učitelka ZDŠ, Bratislava
2. doc. ing. Vincent Kavečanský, CSc., FPf UPJŠ, Košice
3. RNDr. Arpád Kecskés, CSc., odb. asistent FPed, Nitra
4. ing. RNDr. Daniel Klivanec, CSc., odb. asistent FPed, Nitra
5. Vojtěch Nyitrai, ústřední školní inspektor, Bratislava
6. Zuzana Šimkovicová, profesorka gymnázia, Bratislava
7. Pavol Škrinár, profesor gymnázia, Prievidza
8. doc. RNDr. Ladislav Thern, Vysoká škola lesnická a dřevařská, Zvolen
9. RNDr. Jozef Zámečník, CSc., odborný asistent FEI SVŠT, Bratislava

Pořadatele FO ve výboru zastupovali:

MŠ ČSR: Václav Šula, ústřední školní inspektor

MŠ SSR: Vojtěch Nyitrai, ústřední školní inspektor

JČSMF: prof. RNDr. Rostislav Košťál

SSM: doc. ing. Bohumil Vybíral, CSc., docent Vysoké vojenské školy pozemního vojska ve Vyškově

Všichni členové ÚVFO byli vždy a jsou i nyní pověřeni určitými funkcemi (až na dvě výjimky — z technických důvodů). V ÚVFO jsou zřízeny dvě komise:

a) **Komise pro základní výběr úloh:**

**pro úlohy z mechaniky** Jaroslav Honner, vedoucí kabinetu fyziky KPÚ, Zuzana Šimkovicová, profesorka

**pro úlohy z termiky** Milan Rádl, odb. asistent, Pavol Škrinár, profesor

**pro úlohy z elektřiny** RNDr. Alois Kleveta, profesor, RNDr. Arpád Kecskés, CSc., odb. asistent

**pro úlohy z vlnění, optiky a atomistiky** Karel Šebela, profesor, RNDr. Jozef Zámečník, CSc., odb. asistent

b) **Komise pro konečnou redakci soutěžních úloh**

**předseda:** Mojmir Simerský, profesor SPŠ VE v Rožnově pod Radhoštěm

**člen komise:** doc. ing. Vincent Kavečanský, CSc.

**referent pro kat. A:** doc. RNDr. Ladislav Thern

**referent pro kat. B:** ing. RNDr. Daniel Klivanec, CSc.



referent pro kat. C: RNDr. Marta Chytilová, CSc.  
referent pro kat. D: RNDr. Ivo Volf, odb. asistent  
referent pro kat. E: RNDr. Milan Bednařík, odb. asistent  
referent pro přípravnou kat.: Karel Žampa, školní inspektor  
Jednatelům komise byl jednatel ÚVFO.

Každý z referentů si našel dva pomocníky ze členů KVFO podle svého bydliště. Taktó byli přiděleni jednotlivým referentům tito pracovníci:

pro kat. A: RNDr. Milan Marčok, odb. asistent katedry fyziky a elektrotechniky Vysoké školy lesnické a dřevařské, Zvolen

RNDr. Emil Rajčan, CSc., odb. asistent katedry fyziky a elektrotechniky Vysoké školy lesnické a dřevařské, Zvolen

pro kat. B: RNDr. Arpád Kecskés, CSc., odb. asistent katedry fyziky Pedagogické fakulty, Nitra

RNDr. Ladislav Morvay, odb. asistent katedry fyziky Pedagogické fakulty, Nitra

pro kat. C: RNDr. Josef Kuběna, CSc., odb. asistent, FPř UJEP, Brno

RNDr. Vladimír Mitvalský, odb. asistent, KF FStr VUT, Brno

pro kat. D: Miroslav Ouhrabka, odb. asistent katedry fyziky fakulty Pedagogické, Hradec Králové

Jiří Kouba, asistent katedry fyziky fakulty Pedagogické, Hradec Králové

pro kat. E: RNDr. Zdeněk Kupka, odb. asistent katedry fyziky FPř UP, Olomouc

RNDr. Miroslava Šíroká, odb. asistentka katedry fyziky FPř UP, Olomouc

Referentem pro Školu mladých fyziků byl Mojmír Simerský, profesor SPŠ VE v Rožnově pod Radhoštěm.

Předsednictvo tvoří předseda, 1. místopředseda, 2. místopředseda, jednatel, předseda komise pro konečnou redakci soutěžních úloh, referent pro Školu mladých fyziků, zástupce MŠ ČSR, zástupce MŠ SSR, zástupce JČSMF a zástupce SSM, t. ě. tedy osm pracovníků FO.

#### 4. Krajské výbory FO ve školním roce 1975/76 a jejich předsedové

Předsedy a členy KVFO jmenují na návrh poboček JČSMF nebo JSMF odbory školství příslušných KNV. Pracují v nich profesori, docenti i odborní asistenti vysokých škol, pracovníci školské správy, středoškolští profesori i učitelé ZDŠ. Práce pracovníků z vysokých škol je vždy pro FO přínosem. V tomto školním roce bylo z 12 předsedů 10 pracovníků z vysokých škol a z celkového počtu 192 členů všech KVFO bylo 42 % pracovníků z vysokých škol.

Předsedové KVFO jednotlivých krajů:

Praha	doc. RNDr. Jaroslav Vachek, CSc., MFF UK, Praha
StřČK	ing. Jiří Machalický, CSc., odb. as., FStr ČVUT, Praha
JČK	Václav Vlček, odb. as., FPed., České Budějovice
ZČK	ing. Miloš Rabas, odb. as., Vysoká škola strojní a elektrotechnická, Plzeň
SČK	Jaroslav Honner, ved. kab. fyziky KPÚ, Ústí nad Labem
VČK	RNDr. Zdeněk Ungermann, ved. kab. fyziky KPÚ, Hradec Králové
JMK	prof. RNDr. Rostislav Košťál, Brno
SMK	prof. RNDr. Miroslav Bajer, DrSc., Vysoká škola báňská, Ostrava
Bratislava	doc. RNDr. Ivan Náter, FEI SVŠT, Bratislava
ZSK	RNDr. ing. Daniel Klivanec, CSc., odb. asistent, FPed, Nitra
StřSK	Erich Wiszt, asistent, Vysoká škola dopravní, Žilina
VSK	doc. ing. Vincent Kavečanský, CSc., FPř UPJŠ, Košice

KVFO řídí práci v kraji, a to kategorie A—D přímo a kategorie E prostřednictvím OVFO.

## 5. Okresní výbory FO ve školním roce 1975/76

OVFO se starají o FO kategorie E na ZDŠ a o kursy pro žáky škol 2. cyklu v okrese. Jen Výbor FO města Brna — jako OVFO — má výjimečné postavení, poněvadž řídí práci i pro kategorie A—D v městě Brně.

Předsedy a členy OVFO jmenují na návrh poboček JČSMF nebo JSMF odbory školství ONV. Práce v okresech se zúčastňují vysokoškolští a středoškolští pracovníci, pracovníci školské správy i učitelé ZDŠ. Účast pracovníků ze škol 2. cyklu příznivě ovlivňuje práci v OVFO. Počet učitelů 2. cyklu, popř. 3. cyklu v předsednictvu OVFO byl nejvyšší v JMK (23 ze 41, z toho 7 z vysokých škol), pak v Bratislavě (6 z 12, z toho 2 z vysokých škol). Nejvyšší počet předsedů OVFO ze škol 2. cyklu v kraji měl JMK (10 ze 14, z toho 3 z vysokých škol), pak Bratislava (4 ze 4, z toho 2 z vysokých škol).

## 6. Průběh soutěže ve školním roce 1975/76

### A. První kolo soutěže kategorií A, B, C a D

První kolo FO probíhalo ve školách od září 1975 do 10. února 1976. Texty soutěžních úloh a studijních témat byly otištěny v letáku vydaném SPN v Praze ve znění českém pro celou ČSSR z prostředků ministerstev školství v počtu 4000 výtisků. Do škol však byly distribuovány prostřednictvím KVFO v měsíci říjnu. Ukázalo se opět velmi prospěšné, že úlohy byly otištěny v Rozhledech matematicko-fyzikálních, a to pro kategorie A—D v 9. čís. 53. ročníku a kromě toho prvé tři úlohy kategorie A—E v Matematice a fyzice ve škole v 10. čís. 5. ročníku.

Pro jednotlivé kategorie byla určena tato studijní témata:

- kat. A: Centrovaná soustava lámavých kulových ploch; zpracoval prof. dr. Rostislav Košťál,
- kat. B: Polovodiče; zpracoval Mojmir Simerský, profesor SPŠVE, Rožnov pod Radhoštěm,
- kat. C: Ráz těles; zpracoval dr. Oldřich Pivnička, profesor gymnázia, Znojmo,
- kat. D: Kinematika obecného pohybu; zpracoval Milan Rád, odborný asistent Vysoké školy strojní a elektrotechnické, Plzeň.

Témata byla otištěna jen v letáku XVII. ročník soutěže fyzikální olympiáda. Na tato témata navazovaly dvě úlohy v 1. kole kategorií A, B, jedna úloha v 1. kole kategorie C, čtyři úlohy v 1. kole kategorie D, jedna úloha v 2. kole kategorií A, B, D, dvě úlohy v 2. kole kategorie C a dvě úlohy v 3. kole kategorie A.

Počet středních škol, které se zúčastnily XVII. roč. FO, je uveden v tabulce 1, počet žáků soutěžících v 1. kole a výsledky 1. kola jsou uvedeny v tabulce 2, a to jak v jednotlivých krajích, tak i celkem.

Počet všech zapojených škol se proti loňskému roku celkem nezměnil. V některých krajích — Praze, Středočeském kraji, Bratislavě — se zapojila všechna gymnázia. Procentově nejmenší počet zapojených gymnázií byl ve Východoslovenském kraji — 65 %. V ostatních krajích se pohyboval v mezích 84 % až 95 %. Počet zapojených středních průmyslových škol se zvětšil ze 75 na 88 a počet ostatních zapojených škol se nezměnil.

Počet soutěžících v 1. kole je uveden v tabulce 2. U kategorie A se zmenšil o 37 soutěžících, u kategorie B vzrostl o 51 soutěžících, u kategorie C vzrostl o 28 soutěžících a u kategorie D vzrostl o 371 soutěžících proti loňskému roku. Celkový počet soutěžících vzrostl z loňského počtu 5798 soutěžících o 413 soutěžících. Počet úspěšných řešitelů vzrostl z 2807 o 415, tedy přibližně o zvýšení počtu soutěžících, což je potěšitelné. Dívky tvořily asi 24 % soutěžících.

Úspěšnost v jednotlivých kategoriích vypadá letos takto: v A 62 %, v B 63 %, v C 48 %, v D 47 % a celkem 52 %. Nejmenší procento úspěšnosti je opět v kat. D, i když se zvýšilo proti loňskému roku asi o 5 %. U dívek bylo procento úspěšnosti jen 43 %, tedy nižší než celkové.

## **B. Druhé kolo soutěže kategorií A, B, C a D**

Letos byla organizace druhého kola pozměněna tak, že druhé kolo kategorie A se konalo již 28. února 1976, kategorií B—D až 24. dubna 1976, a to převážně jen v sídlech KVFO. V některých krajích probíhalo na dvou nebo i třech místech: v SČK kategorie A v Ústí nad Labem a Liberci, kategorie B—D v Ústí nad Labem, Liberci a Chomutově, v SMK v Ostravě a Olomouci, v StřSK ve Zvolenu a Žilině.

Každý žák dostal text úloh a opravující dostali též orientační řešení. Ihned po ukončení soutěže dostali orientační řešení i soutěžící. Texty úloh, dodané ÚVFO v zalepených obálkách,



TABULKA 2

## Počet záků soutěžících v 1. kole FO

(S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, c celkový počet záků, d z toho dívek)

Kraj	Kategorie A				Kategorie B				Kategorie C				Kategorie D				Celkem			
	S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú	
	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d
Praha	72	7	55	6	69	16	56	12	107	18	50	9	239	39	123	26	487	80	284	53
StřC	36	5	27	4	61	11	44	8	64	11	55	11	133	30	83	19	294	57	209	42
JČ	26	4	20	4	37	3	19	1	46	14	36	10	57	15	37	6	166	36	112	31
ZČ	20	4	16	1	29	4	21	1	22	5	15	3	60	18	44	12	131	31	96	17
SC	57	10	28	5	105	23	72	20	108	27	54	12	241	112	122	44	511	172	276	81
VC	55	6	45	6	68	10	56	7	93	18	62	19	224	35	146	24	440	69	309	46
JM	85	13	48	5	136	24	93	12	185	37	76	12	344	78	163	34	750	152	380	63
SM	58	2	52	2	94	13	71	10	93	20	63	14	270	77	90	23	515	112	276	49
Bratislava	86	11	82	9	66	16	59	16	88	24	83	24	182	41	130	23	422	92	354	72
ZS	145	29	45	6	198	47	81	13	261	90	66	21	497	166	162	57	1101	332	354	97
StřS	122	32	50	2	140	38	46	8	229	66	42	9	384	115	92	24	875	251	230	43
VS	47	10	34	4	86	16	66	15	108	22	66	12	278	64	176	27	519	112	342	58
Celkem	809	133	502	54	1089	221	684	123	1404	352	668	146	2909	790	1368	319	6211	1496	3222	642
Loni	846	125	466	54	1038	224	499	104	1376	326	759	164	2538	653	1083	239	5798	1328	2807	561

TABULKA 3

## Počet žáků soutěžících v 2. kole FO

(S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, c celkový počet žáků, d z toho dívek)

Kraj	Kategorie A						Kategorie B						Kategorie C						Kategorie D						Celkem					
	S			Ú			S			Ú			S			Ú			S			Ú			S			Ú		
	c	d	o	c	d	o	c	d	o	c	d	o	c	d	o	c	d	o	c	d	o	c	d	o	c	d	o	c	d	o
Praha	55	6	19	1	1	56	12	25	3	9	24	2	123	26	93	18	93	284	53	161	24	284	53	161	18	93	284	53	161	24
StřC	24	3	14	2	2	26	4	5	1	34	6	7	50	8	36	5	36	134	21	62	8	134	21	62	5	36	134	21	62	8
JČ	19	4	4	1	1	24	3	10	1	31	10	2	40	8	16	—	16	114	25	32	2	114	25	32	—	16	114	25	32	2
ZČ	15	1	6	—	—	19	1	15	—	15	3	5	40	11	35	7	35	89	16	51	7	89	16	51	7	35	89	16	51	7
SO	28	5	6	1	1	50	9	16	3	40	4	5	93	28	59	15	59	209	46	86	20	209	46	86	15	59	209	46	86	20
VČ	44	6	18	1	1	44	4	17	—	57	6	14	128	19	76	8	76	273	35	125	10	273	35	125	8	76	273	35	125	10
JM	48	5	23	1	1	92	12	34	2	76	12	26	163	34	62	4	62	379	63	145	9	379	63	145	4	62	379	63	145	9
SM	50	2	32	1	1	68	9	20	—	61	12	14	86	21	60	10	60	265	44	126	12	265	44	126	10	60	265	44	126	12
Bratislava	82	9	21	—	—	56	15	9	—	76	22	7	123	23	86	15	86	337	69	123	16	337	69	123	15	86	337	69	123	16
ZS	45	6	12	—	—	75	13	6	—	64	20	7	152	51	67	15	67	336	90	92	16	336	90	92	15	67	336	90	92	16
StřS	40	—	9	—	—	27	4	6	—	39	6	10	60	12	28	6	28	166	22	53	6	166	22	53	6	28	166	22	53	6
VS	34	4	11	1	1	50	10	8	—	50	10	11	113	17	47	5	47	247	41	77	8	247	41	77	5	47	247	41	77	8
Celkem	482	51	175	9	9	587	96	161	10	593	120	132	1171	258	665	108	665	2833	525	1133	138	2833	525	1133	108	665	2833	525	1133	138
Loni	437	43	112	8	8	461	80	44	—	692	140	108	959	205	135	14	135	2549	468	399	31	2549	468	399	14	135	2549	468	399	31

se otvíraly až před žáky, těsně před zahájením soutěže. Pro slovenské kraje byly dodány texty úloh i v maďarském jazyku. Podle daných směrnic bylo vyhodnocení prováděno jednotně ve všech krajích. Klasifikace řešení byla počínajíc 2. kolem čtyřstupňová.

Výsledky 2. kola jsou uvedeny v tabulce 3.

Z nižších tříd pracovali ve vyšší kategorii úspěšně (P značí třídu přírodovědnou, MF třídu se zaměřením na matematiku a fyziku):

#### **v kategoriích A:**

Praha: Hegerová Irena, G Pha 2, W. Piecka, 3. r., MF  
Holéna Martin, G Pha 3, Sladkovského, 3. r., P

StřČK: Jenčík Karel, SPŠ Kutná Hora, 3. r.  
Mužík Zdeněk, G Kladno, 3. r., P

VČK: Turek Ilja, G Hradec Králové, 2. r., MF  
Vosecký Milan, G Hradec Králové, 3. r., P  
Pavel Josef, G Rychnov n. Kn., 3. r., P

JMK: Svoboda Jiří, G Brno, kpt. Jaroše, 3. r., exper.  
Váňa Martin, G Brno, kpt. Jaroše, 3. r., exper.  
Klimeš Luděk, G Blansko, 3. r., P

SMK: Pastrňák Vladimír, G Ostrava 1, 3. r., P  
Lanča Ladislav, SPŠVE Rožnov p. R., 3. r.

StřSK: Quittner Pavel, G Prievidza, 3. r., P

VSK: Dzurek Ján, SPŠE Košice, 3. r.  
Jusko Anton, SPŠE Košice, 3. r.

#### **v kategorii B:**

Praha: Novotný Antonín, SPŠJT Pha 4, 2. r.  
Petýrek Ivan, G Praha 3, Sladkovského, 2. r., P

Úspěšní řešitelé 2. kola kategorie A a kategorie B jsou uvedeni v seznamu úspěšných řešitelů jmenovitě všichni, z úspěšných řešitelů 2. kola kategorie C a kategorie D jsou uvedeni jen ti, kteří se umístili na prvním až desátém místě. Pokud mají někteří řešitelé stejnou klasifikaci jako poslední z deseti nejúspěšnějších, jsou uvedeni též, i když překračují číslo 10. U žáků gymnázií se nepřipisuje název školy, ale jen její sídlo. Ročník je uveden jen u žáků, kteří jsou z nižšího ročníku, než který patří do uvedené kategorie. Specializace se uvádí jen u žáků, kteří nejsou z třídy přírodovědné.

V kategorii A jsou proložena vytištěna jména řešitelů, kteří postoupili do 3. kola. Úspěšní řešitelé jsou uvedeni podle jednotlivých krajů:



## *Praha*

**A:** Červinka Stanislav,  
Praha 1, Štěpánská, MF  
Landa Tomáš,  
Praha 10, Voděradská,  
MF  
Hegerová Irena,  
Praha 2, W. Piecka, 3. r.  
Kotěšovec Václav,  
Praha 2, W. Piecka  
Čefelín Patrik,  
Praha 7, Nad štolou, MF  
Musil Jan, SPŠE,  
Praha 1, Na příkopě  
Trnka Vladimír,  
Praha 3, Sladkovského  
Polášek Jaroslav,  
Praha 2, W. Piecka, MF  
Špička Václav,  
Praha 2, Botičská  
Hájek Radvan,  
Praha 6, Arabská, MF  
Kotrba Tomáš,  
Praha 1, Štěpánská, MF  
Martinů Ludvík,  
Praha 1, Štěpánská, MF  
Sovka Pavel,  
Praha 8, Libeň, MF  
Komárek Pavel,  
Praha 2, W. Piecka, MF  
Holéna Martin,  
Praha 3, Sladkovského,  
3. roč.  
Sapík Richard,  
Praha 4, Vítězná pláň  
Kůpa Vladimír,  
Praha 5, Na Zatlance  
Nedvěd Radimil,  
Praha 6, Arabská, MF

Pfleger Jiří,  
Praha 8, Libeň, MF

**B:** Hegerová Irena,  
Praha 2, W. Piecka, MF  
Mrkvička Miloš,  
Praha 1, Štěpánská, MF  
Černý Ivo,  
Praha 2, W. Piecka, MF  
Novotný Antonín,  
SPŠJT,  
Praha 4, Svatoslavova,  
2. r.  
Šíbl Aleš, SPŠJT,  
Praha 4, Svatoslavova  
Dlouhý Jiří,  
Praha 2, W. Piecka, MF  
Špale Jiří,  
Praha 10, Voděradská  
Matyska Ctirad,  
Praha 6, Arabská  
Kejř Jiří,  
Praha 3, Sladkovského  
Adámek Pavel,  
Praha 9, Prosek  
Kub Jiří,  
Praha 7, Nad štolou, MF  
Křivánková Dagmar,  
Praha 6, Leninova, MF  
Kalina Martin,  
Praha 9, nám. Lid. milicí  
Skácel Zdeněk,  
Praha 10, Voděradská  
Peterka Jiří,  
Praha 5, Nad Turbovou  
Jerie Tomáš,  
Praha 2, W. Piecka, MF  
Kohout Petr,  
SPŠE, Praha 2, Ječná  
Krejzlík Václav,  
Praha 6, Leninova, MF

Āieřmann Josef,  
Praha 10, Voděradská,  
MF  
Kvitová Miroslava,  
Praha 7, Nad řtolou, MF  
ředivý Petr,  
Praha 4, Budějovická  
Náprstek Jiří,  
Praha 6, Leninova, MF  
Klícha Jan,  
Praha 7, Nad řtolou, MF  
Petýrek Ivan,  
Praha 3, Sladkovského,  
2. r.  
Vavřík Jiří,  
Praha 4, Budějovická, MF

**C:** Čeřovský Petr,  
Praha 10, Voděradská, MF  
Jiroušek Pavel,  
Praha 3, Sladkovského  
Lev Vlastimil,  
Praha 2, W. Piecka, MF  
Mareš Jiří,  
Praha 2, W. Piecka, MF  
Kučera Jan,  
Praha 6, Leninova, MF  
Kaplanová Michaela,  
Praha 7, Nad řtolou, MF  
Vilhelm Jan,  
Praha 2, W. Piecka, MF  
Koch Jiří,  
Praha 2, W. Piecka, MF  
Trhlík Miloš,  
Praha 6, Leninova, MF  
Stárek Jiří,  
Praha 3, Sladkovského  
atd.

**D:** Horský Petr,  
Praha 2, W. Piecka, MF

Āanečková Věra,  
Praha 7, Nad řtolou, MF  
Hajič Jan,  
Praha 2, W. Piecka, MF  
Valenta Luboš,  
Praha 9, nám. Lid. milicí  
Mach Ivan,  
Praha 7, Nad řtolou, MF  
Korbař František,  
Praha 6, Arabská  
Vančík Vladimír,  
Praha 2, W. Piecka  
Jirsová Zuzana,  
Praha 2, W. Piecka  
Novák Zbyněk,  
Praha 2, W. Piecka, MF  
Fučíková Jitka,  
Praha 2, W. Piecka  
Lančová Alena,  
Praha 2, W. Piecka  
Znamenáček Jindřich,  
Praha 1, řtěpánská  
atd.

*Středočeský kraj:*

**A:** Jenčík Karel, SPŠ,  
Kutná Hora, 3. r.  
Klíma Vlastimil,  
Benešov  
Jelínková Denisa,  
Český Brod  
Malátek Jiří, Sedlčany  
Mužík Zdeněk,  
Kladno, 3. r.  
Janoušková Hana,  
Sedlčany  
Moc Miroslav,  
SPŠ, Kolín  
Soukup Tomáš, Čáslav  
Cígler Luděk, Vlašim

Vondruška Pavel, Kladno  
Švec Jiří, Kladno  
Vozábal Oldřich, Čáslav  
Šíma Jan, Říčany  
Prajzler Milan, Kladno

- B:** Kotrla Miroslav,  
SPŠ, Kutná Hora  
Blažek Josef,  
Mnichovo Hradiště  
Bázler Jan,  
Mladá Boleslav  
Holda Josef,  
Mladá Boleslav  
Kotalová Eva,  
Nové Strašecí
- C:** Hrabě Vladimír,  
Český Brod  
Stodola Jan, Vlašim  
Hampl František, Beroun  
Kadlec Stanislav,  
Hořovice  
Kočí Zdeněk, Český Brod  
Kouba Zdeněk, Benešov  
Lukáš Petr, Příbram
- D:** Töpfer Pavel,  
Mladá Boleslav  
Košner Petr, Kladno  
Martínek Stanislav,  
Kladno  
Ureš Luboš, Rakovník  
Voříšková Eva,  
Český Brod  
Voves Jan,  
Kralupy n. Vltavou  
Zeman Daniel,  
Nové Strašecí  
Hlinomaz Petr, Kladno

Špaček Jaromír,  
Kutná Hora  
Kysilka Roman,  
Kutná Hora  
atd.

*Jihočeský kraj:*

- A:** Šímek Michal,  
Strakonice  
Smrčková Hana, Pacov  
Pechlát Miroslav,  
Strakonice  
Tišer Jaroslav,  
Strakonice
- B:** Hronová Jana,  
Jindřichův Hradec  
Procházka Otakar,  
Humpolec  
Popp František,  
České Budějovice,  
K. Šátala, MF  
Bílý Jiří, Tábor  
Havelka Jiří,  
Český Krumlov  
Křivan Vlastimil,  
Strakonice  
Otava Bořek, Tábor  
Vácha Jan, Tábor  
Valouch Jiří, Tábor  
Lacina Miloslav, Tábor
- C:** Holý Jaroslav,  
České Budějovice,  
K. Šátala, MF  
Tůma Zdeněk, Tábor
- D:** Vonhl Ivan,  
České Budějovice,  
K. Šátala, MF  
Čech Jaroslav, Dačice  
Čech Přemysl, Týn n. Vlt.

Straka František,  
Strakonice  
Mátl František, Dačice  
Ryneš Tomáš,  
České Budějovice,  
K. Šatala, MF  
Mládek Jan, Soběslav  
Kafka Václav, Tábor  
Boradžier Ilja, Tábor  
Brož Vladislav,  
České Budějovice,  
K. Šatala, MF  
Jarolímek Vlastimil,  
České Budějovice,  
K. Šatala, MF  
Říčar Ivan,  
České Budějovice,  
K. Šatala, MF  
Sládek Karel,  
České Budějovice,  
K. Šatala, MF  
atd.

*Západočeský kraj*

- A:** Staněk František,  
Plzeň, n. Odborářů, MF  
Škarda Zdeněk, Blovice  
Procházka Miloslav,  
Karlovy Vary, MF  
Kubát Karel,  
Plzeň, n. Odborářů, MF  
Matoušek Jiří,  
Karlovy Vary, MF  
Šmejkal Jiří,  
Plzeň, ul. Pionýrů
- B:** Vařeka Petr,  
Ostrov nad Ohří  
Koukol Jiří, Sušice  
Štrunc Aleš,  
Plzeň, n. Odborářů, MF

- Viktora Jiří,  
Plzeň, n. Odborářů, MF  
Bebor Karel,  
Karlovy Vary
- C:** Ziegler Miroslav,  
Karlovy Vary  
Šverák Vladimír,  
Karlovy Vary  
Kučera Zdeněk, Cheb  
Fiala Libor,  
Plzeň, n. Odborářů, MF  
Weiss Zdeněk,  
Plzeň, n. Odborářů, MF
- D:** Vítek Milan,  
Plzeň, n. Odborářů, MF  
Rybář Jan,  
Ostrov nad Ohří  
Masopust Jiří,  
Plzeň, n. Odborářů, MF  
Zlatník Ivan,  
Plzeň, n. Odborářů, MF  
Kůs Zdeněk, Sušice  
Šimůnková Ludmila,  
Plzeň, n. Odborářů, MF  
Draský Luděk,  
Plzeň, n. Odborářů, MF  
König Viktor,  
Plzeň, n. Odborářů, MF  
Novák Stanislav,  
Plzeň, n. Odborářů, MF  
Motyčka Jaroslav,  
Plzeň, n. Odborářů, MF  
Tesař Pavel,  
Mariánské Lázně  
Miklík Karel, Tachov  
Kubalík Tomáš,  
SPŠE, Plzeň  
atd.

*Severočeský kraj:*

**A:** Vondrák Pavel,  
Ústí n. L., MF  
Šálek Ivo, Jablonec n. N.  
Kánský Zdeněk,  
Tanvald  
Krupka Václav, Louny  
Ciprová Eva,  
Liberec, MF  
Vancl Miroslav,  
Ústí n. L., MF

**B:** Novotná Vlasta,  
Teplice, MF  
Chaloupek Jan,  
Liberec, MF  
Lukáš David,  
Liberec, MF  
Bartoň Vladimír,  
Rumburk  
Doležel Ivan,  
Jablonec n. N.  
Kužera Jan,  
SPŠStav, Liberec  
Pazdírek Otakar,  
Česká Lípa  
Pítr Jiří, Most  
Adler Pavel, Žatec  
Hánková Jitka,  
Chomutov  
Poršová Irena, Rumburk  
Říha Petr, Most  
Benedikt Jiří, Rumburk  
Drábek Stanislav,  
Ústí n. L., MF  
Dvořák Jaroslav, Žatec  
Markvart Jaroslav,  
Litvínov

**C:** Kalousek Zdenek,  
Jablonec n. N.  
Němec Pavel,  
Ústí n. L., MF  
Římalová Jitka,  
Litoměřice  
Badalec Josef,  
Česká Lípa  
Nykrýn Jiří,  
Jablonec n. N.

**D:** Kočí Tomáš, Rumburk  
Kulhánek Jaromír,  
Rumburk  
Šefc Luděk,  
Ústí n. L., MF  
Duchoslav Ivan,  
Litoměřice  
Heřt Vladimír,  
SPŠ, Chomutov  
Kutouš Zdeněk,  
Liberec, MF  
Zahálka Miroslav, Kadaň  
Tůma Petr, Liberec, MF  
David Jan, Děčín  
Náhlík Ivan, Děčín  
Švarc Jaroslav, Teplice  
Křemář Petr, Ústí n. L.  
atd.

*Východočeský kraj:*

**A:** Turek Ilja,  
Hradec Králové, 2. r., MF  
Krmela Václav,  
Lanškroun  
Štovíček Pavel,  
Pardubice, MF  
Vosecký Milan,  
Hradec Králové, 3. r., MF

**Pavel** Josef,  
Rychnov n. Kn., 3. r.

**Novák** Petr,  
Pardubice, MF

**Novotný** Josef,  
Česká Třebová

**Rudolf** Zdeněk,  
Trutnov

**Otavová** Miroslava,  
Hradec Králové, MF

**Rozkot** František,  
Rychnov n. Kn.

**Páv** Pavel, Jaroměř

**Dlouhý** Antonín,  
Náchod

**Macek** Milan, Ústí n. Orl.

**Kalous** Miloslav,  
Rychnov n. Kn.

**Šeba** Petr, Jevíčko  
**Holomek** Jaroslav,  
Jevíčko

**Pátek** Miroslav, Jevíčko

**Šmída** Zdeněk, Dobruška

**B:** **Faltejšek** Jiří,  
Hradec Králové

**Hobza** Vladimír,  
Česká Třebová

**Liska** Richard,  
Pardubice, MF

**Leitner** Rupert, Semily  
**Kábrt** Jan, Vysoké Mýto

**Hnyk** Libor,  
Hradec Králové, MF

**Malina** Jan,  
Hradec Králové, MF

**Riedl** Vladimír,  
Nový Bydžov

**Kolovratník** Vilém,  
SPŠE, Pardubice

**Scholle** Stanislav, Holice

**Polák** Zdeněk, Náchod

**Rousek** Josef,  
Pardubice, MF

**Pour** Zdeněk,  
Hradec Králové

**Palát** Karel,  
Hradec Králové

**Ekstein** Jan,  
Rychnov n. Kn.

**Matyska** Karel, Trutnov

**Caldá** Stanislav,  
Vysoké Mýto

**C:** **Kratochvíl** Jan,  
Pardubice, MF

**Lang** Jan,  
SPŠStr, Chrudim

**Kupka** Jiří, Vrchlabí

**Matěna** Jaromír,  
Hradec Králové, MF

**Bahník** Petr,  
Pardubice, MF

**Černý** Jiří, Turnov

**Mervart** Petr,  
Vysoké Mýto

**Zakouřilová** Helena,  
Turnov

**Celba** Pavel,  
SPŠT, Dvůr Králové

**Kopecký** Milan,  
Ústí n. Orl.

atd.

**D:** **Dítě** Miroslav, Trutnov

**Volhejn** Jan, Dobruška

**Potoček** Pavel,  
Rychnov n. Kn.

**Heřman** Pavel, Dobruška

**Matěna** Vladimír,  
Trutnov

Pištora Vladislav,  
Hradec Králové, MF  
Vlasák Tomáš,  
Pardubice, MF  
Heřman Petr, Dobruška  
Kuřina Jiří,  
Hradec Králové  
Dubec Miroslav,  
Pardubice, MF  
Raud Ivan,  
Hradec Králové, MF  
atd.

*Jihomoravský kraj:*

**A:** Marvan Michal,  
Brno, Koněvova, progr.  
Pavel Miroslav, Jihlava  
Peňáz Jiří,  
Brno, kpt. Jaroše  
Tomíček Leoš,  
Žďár n. Sáz.  
Svoboda Jiří, Brno,  
kpt. Jaroše, r. 3, exper.  
Jírků Jan, Žďár n. Sáz.  
Tesařová Zuzana,  
Jihlava  
Havlásek Tomáš,  
Bystrice n. Pern.  
Richter David,  
Brno, Koněvova  
Dřímál Jiří,  
Brno, Koněvova, progr.  
Strnadel Bohumír,  
Holešov  
Frkal Luděk,  
Uherské Hradiště  
Hřeben Stanislav,  
Jihlava  
Koranda Pavel,  
Prostějov

Rinchenbach Kamil,  
Bystrice n. Pern.  
Vala Jiří, Brno,  
kpt. Jaroše, exper.  
Kalčík Josef, Jihlava  
Ondrák Zdeněk, Třebíč  
Liss Vladimír,  
Gottwaldov  
Váňa Martin, Brno  
kpt. Jaroše, r. 3., exper.  
Hofbauer Otakar, Telč  
Klimeš Luděk,  
Blansko, 3. r.  
Knébl Pavel, Gottwaldov

**B:** Svoboda Jiří,  
Brno, kpt. Jaroše, exper.  
Halabala Jindřich,  
Brno, Křenová, MF  
Klimeš Luděk, Blansko  
Křepelka Ivo,  
Brno, kpt. Jaroše  
Sláma Vít,  
Brno, Slovanské nám.  
Stehlík Ludvík,  
Brno, Slovanské nám.  
Filip Stanislav,  
Brno, Slovanské nám.  
Macur Jiří,  
Brno, Slovanské nám.  
Starý Jiří, Znojmo  
Váňa Martin, Brno  
Brno, kpt. Jaroše, exper.  
Kreysa Karel,  
Brno, Lerchova, MF  
Šustr Jaroslav, Blansko  
Polcer Jaroslav,  
Brno, Křenová, MF  
Binko Pavel,  
Brno, Koněvova, progr.

Drábek Aleš,  
Brno, Křenová, MF  
Janouš Dalibor,  
Brno, Slovanské nám.  
Bureš Zdeněk, Třebíč  
Matuška Milan,  
SPŠE, Brno, Leninova  
Křupala Jiří, Otrokovice  
Valsa Ondřej,  
Brno, kpt. Jaroše  
Kožela Petr,  
SPŠE, Gottwaldov  
Havlíková Ludmila,  
Brno, kpt. Jaroše, exper.  
Beránek Jaroslav,  
Gottwaldov  
Kunc Ivo, Ždár n. Sáz.  
Kinzel Jiří, Hodonín  
Komenda Michal,  
Brno, kpt. Jaroše, exper.  
Chmelík Jaroslav,  
Holešov  
Švecová Eva,  
Ždár n. Sáz.  
Kameník Milan,  
Jihlava  
Gottwald Zdeněk,  
Brno, kpt. Jaroše  
Krejčík Zbyněk,  
Gottwaldov  
Froňková Olga,  
Brno, Lerchova, MF  
Filka Jaroslav,  
Brno, Lerchova, MF  
Štěpán David,  
Brno, Lerchova, MF

Kaďourek Jiří,  
Brno, Koněvova, MF  
Liedermann Karel,  
Brno, Křenová, MF  
Zřídka Veselá Věra,  
Brno, Křenová, MF  
Kuchař Jan, Jihlava  
Rudolf Bohuslav,  
Uherský Brod  
Konečný Pavel,  
Brno, Lerchova  
Šplíchal Libor,  
Brno, kpt. Jaroše, exper.  
Judas Libor,  
Bystřice n. Pern.  
Mareček Ladislav,  
Brno, Koněvova, MF  
atd.

**D:** Čadek Ondřej,  
Brno, kpt. Jaroše, exper.  
Varejka Pavel,  
Brno, kpt. Jaroše, exper.  
Vrána František,  
SPŠS eltechn., Gottwaldov  
Trtík Lubomír,  
Ždár n. Sáz.  
Gregor Vít,  
Brno, Koněvova, progr.  
Bureš Jiří,  
kpt. Jaroše, exper.  
Vávra Pavel,  
Uherský Brod  
Pospíšil Miroslav,  
Uherský Brod  
Talaš Milan,  
Uherský Brod  
Viktorin Libor,  
Brno, Koněvova, progr.

**C:** Kučírek Petr,  
Brno, Koněvova, MF



Černohlávek Ivo,  
Brno, kpt. Jaroše, exper.  
atd.

*Severomoravský kraj:*

**A: Strakoš Zdeněk,**  
SPŠ, Ostrava-Vítkovice  
**Kelar Václav,** Uničov  
**Walach Kristian,**  
Ostrava-Zábřeh  
**Linkesch Oskar,**  
SPŠ, Ostrava-Vítkovice  
**Mačejevský Jan,**  
Ostrava 1  
**Calábek Martin,**  
Ostrava 1  
**Babiš Zdeněk,**  
SPŠ, Karviná  
**Basler Jiří,** Opava, MF  
**Mazanec Michal,**  
Bilovec  
**Hecl Jan,** SPŠE,  
Olomouc  
**Uruba Václav,**  
Ostrava 1  
**Beránek Tomáš,**  
SPŠ, Přerov  
**Durčok Stanislav,**  
SPŠVE, Rožnov p. Radh.  
**Pastrňák Vladimír,**  
Ostrava 1, 3. r.  
**Krmela Josef,** Zábřeh  
**Krchák Zdeněk,**  
Vsetín, MF  
**Arazim Pavel,** Ostrava 1  
**Bartulec Ondřej,**  
Český Těšín, pol.  
**Jež Leszek,**  
Český Těšín, pol.

Labudová Jarmila,  
Krnov  
Maslowski Bohdan,  
Karviná, MF  
Moravec Radoslav,  
Krnov  
Smrček Alfons, Litovel  
Augusta Milan,  
SPŠVE, Rožnov p. Radh.  
Brudny Zbigniew,  
Český Těšín, pol.  
Dočkal Josef,  
Olomouc,  
Jiřího z Poděbrad, MF  
Gaďorek Petr,  
SPŠ, Ostrava-Vítkovice  
König Miroslav,  
Nový Jičín  
Vontor Vladislav,  
SPŠ, Ostrava-Vítkovice  
Walošzek Janusz,  
Český Těšín, pol.  
Dětský Miroslav,  
SPŠ, Přerov  
Lanča Ladislav,  
SPŠVE, Rožnov p. Radh.,  
3. r.

**B: Cvik Tomáš,**  
Haviřov, Tajovského, MF  
**Pastrňák Vladimír,**  
Ostrava 1  
**Gerlich Pavel,**  
SPŠ, Ostrava-Vítkovice  
**Voltr Petr,**  
SPŠ, Přerov  
**Kornuta Tadeáš,**  
SPŠ, Karviná  
**Kuchýn Vladimír,**  
Olomouc-Hejčín, MF

Petrák Martin,  
Ostrava-Hrabůvka  
Jančar Petr, Opava, MF  
Hlaváč Libor,  
Ostrava-Poruba,  
Thälmannova 669  
Petrák Boris,  
Ostrava-Hrabůvka  
Entler Michal, Jeseník  
Martínek Jan, Ostrava 1  
Šigut Tomáš,  
Havířov, Tajovského, MF  
Warchil Miroslav, Jeseník  
Dočkal Petr, Přerov  
Ettl Zdeněk,  
Ostrava-Poruba,  
Thälmannova 491  
Jilg Günther, Rýmařov  
Zapoměl Jaroslav,  
Ostrava-Zábřeh  
Hamerník Jiří,  
Rožnov p. Radh.  
Očadlík Jiří, Opava, MF

**C:** Kolařík Pavel, Bílovec  
Hradil Zdeněk,  
Olomouc-Hejčín, MF  
Tichý Přemysl,  
Ostrava 1  
Noskovič Jiří,  
Ostrava 1  
Opelík Pavel,  
Olomouc-Hejčín, MF  
Vychodil Rostislav,  
SPŠE, Olomouc  
Urban Rostislav,  
Ostrava 1  
Hiltavský Petr,  
Karviná, MF

Hlubina Petr,  
Ostrava-Poruba,  
Thälmannova 491  
Witoszek Lumír,  
Karviná, MF  
atd.

**D:** Hledík Stanislav,  
Ostrava 1  
Dvořáček Jiří, Zábřeh  
Sedláček Josef,  
Olomouc-Hejčín, MF  
Juřík Aleš, Karviná  
Tkadlec Josef, Bílovec, M  
Zejsa Radomír, Hranice  
Křenek Oskar, Bílovec, M  
Hofman Pavel, Zábřeh  
Motloch Pavel,  
Frýdek-Místek  
Rožnovský Luděk,  
Frýdek-Místek  
atd.

*Bratislava:*

**A:** Vodrážka Martin,  
Novohradská, MF  
Slodička Marián,  
Novohradská, MF  
Brilla Igor,  
Novohradská, MF  
Drkoš Miroslav,  
Novohradská, MF  
Náther Ondrej,  
Novohradská, MF  
Zeman Miroslav,  
Novohradská, MF  
Kossey Pavol,  
Novohradská, MF  
Krečnák Pavel,  
Novohradská, MF

**Āriřánek** Milan,  
Vazovova

**Zajac** Ant3n, Huben3ho  
Birnstein Viktor,  
Novohradsk3 MF

Kiss Jozef,  
Novohradsk3 MF

Min3rik Pavol,  
Novohradsk3, MF

Buřek Vladim3r,  
Vazovova

Remř3k Ivan, Horv3thova

Gah3r Frantiřek,  
Novohradsk3, MF

Jani3kovi3 Duřan,  
Novohradsk3, MF

řimon3i3 R3bert,  
Novohradsk3, MF

Horkovics-Kov3ts řtefan,  
Horv3thova

Jan3ina Michal,  
Metodova

Krn33 Tom3ř,  
3eskoslov. arm3dy, MF

**B:** Buřa J3n,  
Novohradsk3, MF

Kr3tk3 Ivan,  
Novohradsk3, MF

Kuku3a Roman,  
Novohradsk3, MF

řr3mek Miloř,  
Novohradsk3, MF

Ft33nik Jan,  
Tom3ř3kova

Koza Juraj,  
Novohradsk3, MF

3erveř Juraj,  
Novohradsk3, MF

3v33ek Vladim3r,  
Horv3thova

Krch3nav3 Bystr3k,  
Horv3thova

**C:** Varga řtefan,  
Novohradsk3, MF

Mizera Ivan,  
Novohradsk3, MF

Hejdov3 Jana, Metodova

Bendžala řtefan,  
Novohradsk3, MF

Lakota J3n,  
Novohradsk3, MF

Hl3snik Martin,  
Novohradsk3, MF

Kochman J3n,  
3eskoslov. arm3dy, MF

**D:** Schreiber Peter,  
Novohradsk3, MF

Mravec Mari3n,  
Metodova

Koncov3 M3ria,  
Novohradsk3, MF

M3ller Peter,  
Novohradsk3, MF

Rychetsk3 Ivan,  
Novohradsk3, MF

Chud3 Lucius,  
Novohradsk3, MF

Kalina Martin,  
Novohradsk3, MF

Hur33k Ondrej,  
Novohradsk3, MF

Trnovec Martin,  
Novohradsk3, MF

Rudolf Boris,  
Novohradsk3, MF

atd.

*Žapadoslovenský kraj:*

**A:** **Tarina** Pavol,  
Topoľčany  
**Kolník** Ján, Nitra, E. G.  
**Zimmerman** Ján, Šaľa  
**Matus** Juraj, Šamorín  
Malinarič Svetozár,  
Nitra-Párovce  
Kelemen Štefan,  
Komárno, maď.  
Kvittung Ferdinand,  
Komárno, maď.  
Mikláš Peter,  
Nitra-Párovce  
Páleník Viliam, Hlohovec  
Vágó Csaba,  
Komárno, maď.  
Farnbauer Gabriel,  
Komárno, maď.  
Varga Július, Galanta,  
maď.

**B:** **Paulík** Leonard,  
Topoľčany  
Zaťko Ján, Topoľčany  
Kouřil Juraj,  
Nové Mesto n. Váh.  
Benkovič Tibor,  
Topoľčany  
Okša Gabriel,  
Nitra-Párovce  
Bénes Alexander,  
Dun. Streda, maď.

**C:** **Krondiak** Emil, Komárno  
Dolejš Václav, Trenčín  
Sedlák Anton, Nitra, E. G.  
Sekereš Juraj,  
Zlaté Moravce

Bezák Máriaň,  
Nitra, E. G.  
Farnbauer Peter,  
Komárno, maď.  
Kétyiová Eva,  
Komárno, maď.

**D:** **Sýkora** Ján,  
Nové Mesto n. Váh.  
Mošťan Štefan, Šaľa  
Palacka Gabriel,  
Komárno  
Orolin Dušan, Trenčín  
Budzák Dušan, Šaľa  
Mocko Milan,  
Nové Mesto n. Váh.  
Kalinaová Helena,  
Dun. Streda, maď.  
Kudracík František,  
Nitra-Párovce  
Mikušová Alena,  
Nitra-Párovce  
Farkašová Alena,  
Komárno, maď.  
Molnár Štefan,  
Komárno, maď.  
atd.

*Středoslovenský kraj:*

**A:** **Pekár** Karol,  
Ružomberok  
**Technovský** Vladimír,  
Banská Štiavnica  
**Suchovský** Máriaň,  
Brezno  
**Quittner** Pavel,  
Prievidza, 3. r.  
**Kysel** Miroslav,  
Banská Bystrica

Šimeni Gabriel, Kremnica  
Mikuláš Jaroslav,  
Prievidza  
Ivan Ján, Žiar n. Hronom  
Makovický Pavel, Žilina

**B:** Novák Ivo, Handlová  
Quittner Pavol,  
Prievidza  
Karkoš Peter, Kremnica  
Priehoda František,  
Prievidza  
Beše Igor, Prievidza  
Ziman Ján, Lučenec

**C:** Detko Ján, Prievidza  
Hudec Vladimír, Vrútky  
Kubinec Peter, Turzovka  
Beleš Milan, Veľký Krtíš  
Kubina Ján, Dolný Kubín  
Súkeník Ján, Vrútky  
Zamba Juraj, Lučenec  
Husárček Ján,  
Banská Bystrica  
Fraňo Ivan,  
Banská Bystrica  
Kovačík Miroslav,  
Banská Bystrica

**D:** Hudecová Anna, Vrútky  
Lipták Peter, Zvolen  
Guričan Jaroslav,  
Dubnica n. Váhom  
Rabčan Luboslav,  
Dubnica n. Váhom  
Mečíř Ladislav,  
Prievidza  
Michniak Stanislav,  
Žilina

Rusko Miroslav,  
Banská Bystrica  
Kobich Lubomír,  
Turčianske Teplice  
Lamoš Ivan, Vrútky  
Ďuriník Pavol, Žilina  
atd.

*Východoslovenský kraj:*

**A:** Bardiovský Vojtech,  
SPŠE, Košice  
Kavečanský Juraj,  
Košice, Šrobárova  
Milly Dionýz,  
Prešov, T. Ševčenka  
Lacko Lubomír,  
Košice, Šmeralova  
Alexa Lubomír,  
SPŠCH, Svit  
Dzurek Ján,  
SPŠE, Košice, 3. r.  
Mlynarčíková Marta,  
Poprad  
Šinal Miroslav, Bardejov  
Fecko Marián,  
Košice, Kováčska 28  
Jusko Anton,  
SPŠE, Košice, 3. r.  
Dubík Tomáš,  
Košice, Šrobárova

**B:** Langor Ronald,  
SPŠCH, Svit  
Kiovský Ladislav,  
SPŠE, Košice  
Škorvánek Ivan,  
Spišská Nová Ves  
Kašper Ján,  
Spišská Nová Ves

Čverčko Michal,  
Košice, Šrobárova  
Lučka Milan,  
Košice, Šmeralova  
Varró Tomáš, Rožňava  
Mucha Lubomír,  
Prešov, Konštantínova

**C:** Šiňajová Edita, Trebišov

Kochman Ján,  
Vranov nad Topľou  
Nižnanský Ján,  
Košice, Šmeralova  
Lorman Marián,  
Košice, Šmeralova  
Kotras Radomír,  
Spišská Nová Ves  
Medveď Štefan,  
Košice, Šmeralova  
Nagy Miroslav,  
Košice, Šrobárova  
Rejda Vladimír,  
Prešov, Konštantínova  
Smreková Ludmila,  
SPŠE, Prešov

Bernát Milan,  
Košice, Kováčska 30  
Repický Miroslav,  
Humenné

**D:** Matúš František,  
Prešov, Konštantínova  
Pokorný Vladimír,  
Košice, Kováčska 30  
Borošová Jana,  
Prešov, Konštantínova  
Blichár Lubomír,  
SPŠE, Prešov  
Greššák Lubomír,  
Prešov, Konštantínova  
Jurčo Branislav,  
Prešov, T. Ševčenka  
Dudičová Katarína,  
Prešov, T. Ševčenka  
Kanala Roman, Rožňava  
Jirásek Jozef,  
Košice, Šmeralova  
Žezula Ivan,  
Košice, Šmeralova  
atd.

### C. Třetí kolo kategorie A

Třetí kolo kategorie A — celostátní — se konalo ve dnech 8. až 10. dubna 1976 v Čáslavi ve Středočeském kraji.

Účastníci byli vybráni z nejlepších řešitelů 2. kola v jednotlivých krajích, a to všichni až po klasifikaci 2, 3, 3, 4 (s permutací) a 12 z 21 z klasifikace 1, 2, 4, 4. Celkem bylo pozváno 80 úspěšných řešitelů 2. kola, z toho 75 chlapců a 5 dívek. Z pozvaných bylo 71 z gymnázií a 9 ze SPŠ; z nich byli 73 ze IV. ročníku, 6 z III. ročníku a 1 z II. ročníku.

Třetí kolo bylo narušeno tím, že ve stejnou dobu probíhalo soustředění pro mezinárodní matematickou olympiádu, které způsobilo, že někteří pozvaní se na 3. kolo FO nedostavili; byli to 2 z Prahy, 1 z VČK, 1 ze SMK a 1 ze StřSK. Všichni žáci, kteří se na soustředění nedostavili, byli z gymnázia, 3 ze 4. roč. a 2 z 3. roč. Předem bylo určeno několik náhradníků, z nichž byl pozván 1 z Prahy a 1 ze StřČK, oba z gymnázia ze 4. ročníku.

Třetí kolo bylo slavnostně zahájeno 8. dubna v zasedací síni Národního výboru města Čáslavi. Zúčastnil se ho i předseda NV města Čáslavi.

Teoretické úlohy řešili soutěžící 9. dubna na gymnáziu v Čáslavi. Odpoledne byla uspořádána exkurze do Kutné Hory a večer navštívili účastníci 3. kola představení v Dusíkově divadle. Laboratorní úlohu řešili soutěžící 10. dubna na gymnáziu v Čáslavi a po ukončení práce odjízďeli domů.

Řešení úloh 3. kola opravovali tito členové ÚVFO:

úlohu č. 1: ing. Rabas (ZČK) a Rádl (ZČK),  
úlohu č. 2: dr. Volf (VČK) a Simerský (SMK),  
úlohu č. 3: dr. Chytilová (JMK) a dr. Kleveta (JMK),  
úlohu č. 4: dr. Kecskés (ZSK) a dr. ing. Kluvanec (ZSK),  
úlohu č. 5: ing. Machalický (StřČK) a Hřebačka (StřČK).

Čtvrtá tabulka uvádí pro každý kraj počet pozvaných řešitelů (včetně náhradníků), počet úspěšných řešitelů, z toho počet vítězů, počet nedostavivších se řešitelů a počet neúspěšných řešitelů. Ze 77 soutěžících bylo 56 úspěšných řešitelů a z toho 19 vítězů. Jména vítězů jsou uvedena v tabulce 5 a jmenovitý seznam dalších úspěšných řešitelů uvádí tabulka 6. Označení P u třídy značí třídu přírodovědnou a označení MF třídu se zaměřením na matematiku a fyziku. V tabulce 7 je přehled klasifikace jednotlivých soutěžních úloh. Z něho je vidět, že nejúspěšnější byla úloha č. 4 z geometrické optiky a nejméně úspěšná úloha č. 1 z elektřiny.

TABULKA 4

Kraj	Počet všech pozvaných řešitelů	Počet úspěšných řešitelů	Z toho počet vítězů	Počet nedostavivších se	Počet neúspěšných
Praha	10	6	—	2	2
StřČ	6	3	1	—	3
JČ	2	1	1	—	1
ZČ	5	3	1	—	2
SČ	3	2	2	—	1
VČ	9	7	3	1	1
JM	10	10	3	—	—
SM	14	9	4	1	4
Bratislava	10	5	1	—	5
ZS	4	4	2	—	—
StřS	5	4	—	1	—
VS	4	2	1	—	2
Celkem	82	56	19	5	21
Loni	79	40	20	5	34



TABULKA 5  
Vítězné 3. kola kategorie A XVII. ročníku FO

Pořadí	Jméno	Kraj	Škola	Místo	Třída	Zaměření
1.— 2.	Kubát Karel Tarina Pavol	ZČ ZS	G G	Plzeň, n. Odborářů Topořčany	4 4	MF P
3.— 4.	Turek Ilja Svoboda Jiří	VČ JM	G G	Hradec Králové Brno, kpt. Jaroše	3 4	MF Exp
5.— 6.	Strakoš Zdeněk Bardiiovský Vojtech	SM VS	SPŠ SPŠE	Ostrava-Vítkovice Košice	4 4	— —
7.— 8.	Šálek Ivo Basler Jiří	SC SM	G G	Jablonec n. Nisou Opava	4 4	P MF
9.	Jenčík Karel	StřČ	SPŠ	Kutná Hora	4	—
10.	Vondrák Pavel	SC	G	Ústí nad Labem	4	MF
11.— 12.	Linkesch Oskar Kossey Pavol	SM Brat.	SPŠ G	Ostrava-Vítkovice Bratislava, Novohr.	4 4	— MF
13.— 14.	Šimek Michal Zimmerman Ján	JČ ZS	G G	Strakonice Šala	4 4	P P
15.— 19.	Krmela Václav Novák Petr Pavel Miroslav Tomíček Leoš Walach Kristian	VČ VČ JM JM SM	G G G G G	Lanškroun Pardubice Jihlava Žďár n. Sázavou Ostrava-Zábřeh	4 4 4 4 4	MF P P P P

## TABULKA 6

## Další úspěšní řešitelé 3. kola kat. A XVII. ročníku FO

Pořadí	Jméno	Kraj	Škola	Místo	Třída	Zaměření
20.—23.	Landa Tomáš Pavel Josef Marvan Michal	Pha VČ JM	G G G	Praha 10, Voděradská Rychnov n. Kněžnou Brno, Koněvova	4 3 4	MF P Progr
24.—25.	Hájek Radvan Peňáz Jiří	Pha JM	G G	Praha 6, Arabská Brno, kpt. Jaroše	4 4	MF P
26.	Richter David	JM	G	Brno, Koněvova	4	P
27.—29.	Tesařová Zuzana Novotný Josef Rudolf Zdeněk	JM VČ VČ	G G G	Jihlava Česká Třebová Trutnov	4 4 4	P P P
30.—31.	Drkoš Miroslav Otavová Miroslava	Brat. VČ	G G	Bratislava, Novohr. Hradec Králové	4 4	MF MF
32.—33.	Matus Juraj Jirků Jan Uruba Václav	ZS JM SM	G G G	Šamorín Žďár nad Sázavou Ostrava I	4 4 4	P P P
34.	Kelar Václav	SM	G	Uničov	4	P
35.—39.	Mužik Zdeněk Matejovský Jan Krcelnák Pavel Kolník Ján Pekár Karol	StřČ SM Erat. ZS StřS	G G G G G	Kladno Ostrava I Bratislava, Novohr. Nitra Ružomberok	4 4 4 4 4	P P MF P P

Další úspěšní řešitelé 8. kola kat. A XVII. ročníku FO — pokračování

Pořadí	Jméno	Kraj	Škola	Místo	Třída	Zaměření
40.—41.	Brilla Igor Suchovský Marián Durčok Stanislav	Brat. StřS SM	G G SPŠ VE	Bratislava, Novohr. Brezno Rožnov p. Radh.	4 4 4	MF P —
43.—48.	Čefelín Patrik Musil Jan Havlásek Tomáš Dřimal Jiří Náther Ondřej Technovský Vlad. Poláček Jaroslav Malátek Jiří	Pha Pha JM JM Brat. StřS Pha StřČ	G G SPŠ G G G G G	Praha 7, Nad školou Praha 1, Na příkopě Bystřice nad Pern. Brno, Koněvova Bratislava, Novohr. Banská Štiavnica Praha 2, W. Piecka Sedlčany	4 4 4 4 4 4 4 4	MF — P Progr MF P MF P
49.—53.	Malátek Jiří Staněk František Hecl Jan Kavečanský Juraj Škarda Zdeněk	StřČ ZČ SM VS ZČ	G G SPŠE G G G	Pizeň, n. Odborářů Olomouc Košice, Šrobárova Blovice	4 4 4 4 4	MF — P P P
54.—55.	Kysel Miroslav Hegerová Irena	StřS Pha	G G	Banská Bystrica Praha 2, W. Piecka	4 3	P P

**TABULKA 7**  
**Klasifikace úloh**

Úloha	Klasifikace					Průměrná známka	Tematický obor úlohy
	1	2	3	4	neprac.		
1	10	5	13	26	23	3,31	indukovaný proud dělič střídavého napětí pohyb protonu v deskovém kondenzátoru geometrická optika geometrická optika
2	11	18	13	31	4	2,93	
3	9	7	25	34	2	3,14	
4	54	9	3	10	1	1,62	
5	7	30	35	4	1	2,49	

Výsledek 3. kola je letos příznivý. Soutěžící prostudovali dobře studijní téma z geometrické optiky (vysokoškolská látka) a 54 ze soutěžících bylo hodnoceno za úlohu z optiky výborně. V dřívějších letech byly výsledky úloh z geometrické optiky slabé.

Abychom získali celkový obraz o úspěších jednotlivých krajů ve FO, všimneme si ještě výsledků třetích kol ze všech 17 ročníků.

a) Účastníci pro 3. kolo se vybírají každý rok podle klasifikace ve 2. kole v kraji, a to do celkového počtu 80. Pořadí krajů podle počtu účastníků v 3. kole je toto:

1. Praha 22,6 %, 2. JMK 14,3 %, 3. SMK 11,4 %, 4. Bratislava + ZSK 11,1 %.

b) Pořadí podle počtu úspěšných řešitelů v 3. kole je toto:  
1. Praha 26,5 %, 2. JMK 18,7 %, 3. VČK 11,1 %, 4. Bratislava + ZSK 10,6 %.

Vyšší procento úspěšných než účastníků znamená, že se účastníci kraje lépe uplatnili.

c) Pořadí podle počtu vítězů v 3. kole je toto:

1. Praha 28,6 %, 2. JMK 24,8 %, 3. VČK 10,7 %, 4.—5. SMK a Bratislava + ZSK 8,6 %.

Vyšší procento vítězů než úspěšných v kraji znamená, že se účastníci kraje lépe umístili.

d) Nejdůležitější však je, jaká část účastníků z kraje se úspěšně uplatnila v 3. kole. Pořadí je toto:

1. JMK 71,4 %, 2. Praha 64,1 %, 3. VČK 57,3 %, 4. Bratislava + ZSK 51,7 % a ostatní kraje jsou již pod 50 % až do 40,0 %.

Srovnáme-li výsledky letošního 3. kola s výsledky loňského ročníku, je letos o 40 % více úspěšných řešitelů; přitom v XVI. ročníku bylo o 60 % úspěšných řešitelů více než v XV. ročníku.

V 3. kole XVII. ročníku byli tito soutěžící, kteří se zúčastnili 3. kola XVI. ročníku (ale neúspěšně):

Josef Pavel z G v Rychnově n. Kněž., VČK (letos v 3. roč.),  
Vojtech Bardiovský z SPŠE v Košicích, VSK.

Vítězové 3. kola FO kat. A obdrželi diplomy, úspěšní řešitelé čestná uznání. Prvých 10 vítězů dostalo od MŠ ČSR odměnu po 300,— Kčs, další 4 vítězové po 250,— Kčs a dalších 5 vítězů po 200,— Kčs. Kromě toho SSM věnoval každému účastníku publikaci Černý — Einhorn — Feyfar, Střední Čechy, a publikaci Emanuela Vlčka Čáslavská Kalva.

ÚV SSM uspořádal pro vítěze fyzikální olympiády a matematické olympiády tematické soustředění ve dnech 15. až 21. srpna 1976 v Davli u Prahy v hotelu „V pivovaře“. Soustředění vedl doc. ing. Bohumil Vybíral, CSc. Zúčastnilo se ho 17 vítězů MO a FO. Soustředění mělo odborný, kulturní a společenský program. Na soustředění přednášel doc. ing. Bohumil Vybíral, CSc., tato odborná témata:

1. Hmota jako filozofická kategorie a fyzikální jevy, 5 hodin.
2. O setrvačné a gravitační hmotnosti, 3 hodiny.
3. Struktura vesmíru a jeho gravitační pole, 4 hodiny.
4. Základní myšlenky megafyzikálního pojetí teorie relativity, 8 hodin.
5. Dynamická fyzikální pole, 4 hodiny.
6. O výzkumu vesmíru, 2 hodiny.
7. Gravitační kolaps, 4 hodiny.

V programu soustředění byla i beseda o práci SSM na školách a o mezinárodních olympiádách (matematické, fyzikální i chemické). Kromě toho byly uspořádány exkurze do hydroelektrárny na Slapské přehradě, celodenní výlety do Prahy, do okolí Šázavy, na Konopiště a jiné akce.

## D. Kategorie E

Prvé kolo FO kategorie E probíhalo od září 1975 do 10. února 1976. Texty soutěžních úloh pro první kolo byly uveřejněny v letáku, který vydalo SPN v Praze v českém znění pro české kraje a SPN v Bratislavě ve slovenském znění pro slovenské kraje. Kromě toho byly první tři úlohy otištěny v *Matematice a fyzice* ve škole r. 5, čís. 9. Orientační řešení úloh prvního kola zajišťoval dr. Ivo Volf, člen ÚVFO.

Druhé kolo kategorie E se konalo 3. 3. 1976 v okresních městech. Texty úloh i orientační řešení zajistil opět dr. Ivo Volf. Slovenské texty zajišťoval místopředseda ÚVFO doc. dr. Ivan Náter, maďarské texty členové KVFO v Nitře.

Třetí kolo kategorie E se konalo 7. května 1976 v krajských městech. Texty úloh pro 3. kolo zajistil v českých krajích jednatel Veverka, na Slovensku místopředseda doc. Náter a orientační řešení rozeslal jednatel Veverka.

Tabulka 8 dává přehled o počtu ZDŠ, které se zúčastnily v jednotlivých krajích 1., 2. a 3. kola soutěže. Nejvyšší procento škol zapojených do 1. kola měla Bratislava (85 %) a po ní Praha (77 %), nejmenší procento Středočeský kraj (56 %) a po něm Východoslovenský kraj (57 %). Ostatní kraje měly zapojeno 62—73 % škol. Počet zapojených škol se proti loňskému roku zvýšil.

Tabulka 9 udává počet žáků soutěžících v prvním, druhém a třetím kole kat. E FO.

Počet soutěžících žáků v 1. kole mírně poklesl (o 1 %). Počet úspěšných žáků v 1. kole také poklesl — celkem asi o 8 % a u dívek o 14 %. V Jihomoravském kraji se již v 1. části prvního kola vyřadilo mnoho žáků na škole. Ukázalo se, že tato nová úprava 1. kola je velmi vhodná, poněvadž se již prvou částí vyloučili méně schopní žáci hned na škole a nezatěžovali pracovníky v kraji. Kraj měl však nejmenší procento úspěšných řešitelů (37 %).

V druhém kole, po loňském velkém poklesu úspěšných řešitelů, nastalo letos opět zlepšení. Počet úspěšných řešitelů se zvýšil z 48 % na 64 % a u dívek ze 40 % na 61 %.

V třetím kole se počet úspěšných řešitelů zvýšil. Podle zpráv z krajů to souviselo s tím, že úlohy 3. kola byly letos snazší.

Dále uvádíme jména vítězů 3. kola FO kategorie E, a to z každého kraje nejvýše 10. Mají-li další řešitelé stejnou klasifikaci, jsou uvedeni též. Za vítěze považujeme ty úspěšné řešitele, kteří vyřešili úspěšně 3 úlohy ze 4 zadaných. U každého žáka je uvedeno číslo ZDŠ — pokud je číslem označena — a její sídlo.

**TABULKA 8**  
**Počet ZDŠ, které se zúčastnily XVII. ročníku FO**

Kraj	Počet ZDŠ v kraji	1. kola se zúčastnilo		2. kola se zúčastnilo		3. kola se zúčastnilo	
		počet	%	počet	%	počet	%
Praha	179	138	77	123	69	42	23
StřČ	277	155	56	115	42	39	14
JČ	168	135	80	99	59	22	13
ZČ	222	145	65	80	36	30	14
SČ	285	186	65	141	49	48	17
VČ	315	195	62	141	45	37	12
JM*)	467	332	71	250	54	64	14
SM	464	295	64	243	52	43	9
Bratislava	68	58	85	58	85	15	22
ZS	477 <sup>1)</sup>	320 <sup>2)</sup>	67	280 <sup>3)</sup>	59	56 <sup>4)</sup>	12
StřS	393	287	73	219	56	33	8
VS	384	219	57	172	45	53	14
<b>Celkem</b>	<b>3699</b>	<b>2465</b>	<b>67</b>	<b>1921</b>	<b>52</b>	<b>482</b>	<b>13</b>
<b>Loni</b>	<b>3723</b>	<b>2327</b>	<b>63</b>	<b>1863</b>	<b>50</b>	<b>457</b>	<b>12</b>

\*) JM 2. část                      298      64

<sup>1)</sup> z toho 91 maďarských, 19 % z celkového počtu škol

<sup>2)</sup> z toho 73 maďarských, 80 % z maďarských škol

<sup>3)</sup> z toho 67 maďarských, 74 % z maďarských škol

<sup>4)</sup> z toho 11 maďarských, 12 % z maďarských škol

TABULKA 9

Počet záků soutěžících v 1., 2. a 3. kole FO kategorie E  
(S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, Ů % počet úspěšných v %)

Kraj	1. kolo						2. kolo						3. kolo					
	celkem			z toho dívek			celkem			z toho dívek			celkem			z toho dívek		
	S	Ů	Ů %	S	Ů	Ů %	S	Ů	Ů %	S	Ů	Ů %	S	Ů	Ů %	S	Ů	Ů %
Praha	986	554	56	336	164	49	377	299	79	95	70	74	73	68	93	14	13	93
StřO	718	412	57	242	119	49	304	207	68	83	50	60	58	49	84	11	6	55
JČ	674	270	40	230	84	37	230	179	78	68	53	78	28	26	93	4	2	50
ZČ	677	356	53	176	80	45	272	181	67	74	40	54	33	23	70	9	4	44
SC	901	417	46	335	123	37	344	247	72	95	68	72	53	51	96	14	13	93
VČ	1092	455	42	462	156	34	384	264	69	112	67	60	43	40	93	12	11	92
JM*)	1941	715	37	697	192	28	657	418	64	166	95	57	79	75	85	9	7	78
SM	1659	802	48	657	274	42	593	382	64	177	96	54	45	45	100	6	6	100
Bratislava	555	472	85	190	132	69	467	284	61	132	79	60	33	32	97	7	8	86
ZS	1843	1190	65	624	452	72	1152	668	58	418	236	56	69	38	55	17	8	47
StřS	1732	846	49	670	273	41	767	498	65	275	177	64	38	31	82	7	5	71
VS	1057	613	58	356	222	62	623	373	60	202	133	66	77	62	81	26	23	88
Celkem	13835	7102	51	4975	2272	46	6170	3999	65	1897	1164	61	629	540	86	136	104	77
Loni	13963	7727	55	5265	2645	50	6662	3175	48	2283	903	40	646	473	73	127	79	62

\*) JM 1. část 1941 1389 72 697 461 66  
JM 2. část 1294 715 55 418 192 46



## *Praha*

Pospíšil Roman,  
Praha 8, Lyčkovo nám.  
Fabián Tomáš,  
Praha 5, Pod Žvahovem  
Holý Pavel,  
Praha 5, Vltavská  
Bydžovský Petr,  
Praha 8, Chabařovická  
Nesměráková Jitka,  
Praha 1, Ostrovní  
Fabián Petr,  
Praha 10, V rybníčkách  
Sattran Vladimír,  
Praha 1, Ostrovní  
Škvor Zbyněk,  
Praha 3, Lupáčova  
Břešťáková Marie,  
Praha 4, Nedvědovo nám.  
Příbáň Miroslav,  
Praha 4, Horáčkova  
Živný Pavel,  
Praha 5, Pod Žvahovem  
Anger Zdeněk,  
Praha 7, Fr. Křížka  
Dryák Ivo,  
Praha 8, Lyčkovo nám.  
atd.

## *Středočeský kraj*

Kaňka Petr, Čelákovice  
Kos Richard, 2., Rakovník  
Sluka Břetislav, 5.,  
Mladá Boleslav  
Gášek Zdeněk, 6., Příbram  
Heřmánek Pavel, Sedlčany  
Hrabák Miloš, Komárov  
Hrbatý Miroslav, 3., Slaný  
Hladík Zdeněk, Čelákovice

Svoboda Vladimír, Zaječov  
Vohradský Jiří, 3., Slaný  
atd.

## *Jihočeský kraj*

Horažďovský Tomáš,  
Strakonice, Dukelská  
Klán Vítězslav, 3., Tábor  
Kouřimová Lad., Volenice  
Schwarz Jaroslav,  
Český Krumlov, Zápotockého  
Kalista Karel, 3., Tábor  
Axman Jan,  
Dačice, B. Němcové  
Cmunt Jiří, 1., Milevsko  
Drdák Jiří, Besednice  
Masojídek Miroslav,  
Písek, Husova  
Maška Bohuslav, 1.,  
Pelhřimov  
atd.

## *Západočeský kraj*

Bernášek Libor, 2.,  
Karlovy Vary-Drahovice  
Ulč Miloslav, 15., Plzeň  
Bartovský Pavel,  
18., Plzeň-Bolevec  
Hudec Julius, 4., Aš  
Bláha Jiří,  
4., Plzeň, sady 5. května  
Steiner Karel, Stříbro  
Lorenc Milan,  
1., Ostrov nad Ohří  
Burda Ladislav, Plazy  
Hora Luděk,  
15., Plzeň, Sibiřská  
Plašil Jaroslav, Nepomuk

Mojzeszek Jan, Mirošov  
atd.

*Severočeský kraj*

Hladík Josef,  
Liberec, Králův Háj  
Mencl Jiří, Jeníšovice  
Schwarz Milan,  
Děčín, Vojanova  
Jirkovcová Jana, Malá Skála  
Mrklas Radomil,  
Liberec, Husova  
Ducháčová Naďa,  
Jablonec, Sokolí  
Fibigr Vlastimil, 1., Lovosice  
Konůpková Hana, 1.,  
Chomutov  
Krátká Markéta, 7., Most  
Marousek Vladimír, Tanvald  
Milichovský Alexandr,  
Mimoň-Letná  
Provazník Vladimír,  
Ústí n. L., Velká hradební  
Šťastný Zdeněk,  
Liberec, Lesní  
atd.

*Východočeský kraj*

Reichelt Tomáš, Krouna  
Resler Jaroslav, Lanškroun  
Černý Jaroslav, Černilov  
Machač Pavel,  
Přelouč, Obránců míru  
Límová Markéta,  
Rovensko p. Troskami  
Sajdl Petr, 1., Turnov  
Škodová Jiřina,  
Dobruška, Pulická

Láznička Karel,  
Chrudim, Olbrachtova  
Pavlíková Zorka,  
Pec-Studánka  
Vácha Rudolf, Herálec  
Coufal Milan,  
Lanškroun-Gottwaldov  
atd.

*Jihomoravský kraj*

Starčuk Zenon,  
Brno, Kotlářská  
Dolák Jaroslav,  
Brno, Kuldova  
Kyzlík Petr,  
Brno, nám. 28. října  
Teplý Libor, Újezd u Brna  
Trávníček Zdeněk,  
Přemyslovice  
Utíkalová Lenka,  
7., Gottwaldov  
Škavrada Libor,  
Brno, Staňkova  
Mikšík Petr,  
Kroměříž, Tovačovského  
Hrdina Josef, Otrokovice,  
nám. Rudé armády  
Pálka Miroslav,  
Brno, Křídlovická  
Sedlmajer Kamil, Rousínov  
Šesták Rudolf,  
Brno, Krásného  
atd.

*Severomoravský kraj*

Hájek Otto, Úsov  
Morcinek Tomáš,  
Petrovice u Karviné

Pekař Josef,  
Vsetín, Rybníky  
Raab Ivo,  
Hranice, 1. máje 15  
Rýznar Jan,  
Vsetín, Rybníky  
Šnajdar Jiří,  
Odry, Sokolovská  
David Josef, Bludov  
Kaluža Marek,  
Karviná 1, polská  
Kapsa Jiří, Palkovice  
Němec Miroslav,  
Staré Město u Frýdku  
Ryška Jiří,  
Havířov, K. Světlé  
Sedláček Josef,  
Přerov, Jeremenkova  
Šlachta Zdeněk,  
Ostrava-Zábřeh, Chruštinova  
Zgraja Petr,  
Karviná 7, U studny  
Žváček Antonín,  
Rýmařov, J. Sedláka 18  
atd.

### *Bratislava*

Broček Vladimír, Košická  
Polakovič Stanislav,  
Nedbalova  
Kolibiarová Dana, Košická  
Prelec Rastislav, Košická  
Jonek Juraj, Košická  
Tučňák Mikoláš, Košická  
Freund Mojmir,  
Ružová dolina  
Farkaš Stanislav,  
Medzilaborecká

Šedová Lubica, Beňovského  
Csiba Tichomír, Sokolíkova  
atd.

### *Západoslovenský kraj*

Janoška Lubomír, Pezinok  
Gocman Miroslav,  
Nitra, R. Jašíka  
Beniak Juraj, Chynorany  
Kecskés Juraj, Hurbanovo  
Kuchárek Pavol, 1., Myjava  
Novák Peter, Nitra-Zobor  
Straka Ivan, Trenč. Teplá  
Kis Marián, Trnava  
Kluka Hubert,  
Piešťany, Mojmirova ul.  
Ivan Jozef, Šahy  
Košíarčíková Gabriela,  
Trnava, Gorkého ul.  
Šranková Eva, Nitra-Zobor  
atd.

### *Středoslovenský kraj*

Brziak Tibor, Bobrovec  
Kovačik Radomír,  
Martin, Jahodnická  
Sochor Vladimír,  
5., Žilina, Hliny  
Prístavok Stanislav,  
Modrý Kameň  
Chabada Tomáš,  
Banská Bystrica, Okružná ul.  
Fabčín Jaroslav,  
1., Nová Dubnica  
Baláž Jaroslav,  
Nováky, Ottu  
Hlavčo Ladislav,  
1., Žiar n. Hronom

Ondrejka Stanislav,  
Banská Bystrica, tř. SNP  
Jánošík František,  
Zborov n. Bystricou  
Goliášová Tatiana,  
Martin, Budovateľov  
atd.

*Východoslovenský kraj*

Kviatek J., Svit  
Mojžeš P., Košice, Popradská  
Jančár Š., Strážske

Ákoš Antal, Kuzmice  
Vagaský V., V. Žipov  
Valček J.,  
Košice, Tomášikova  
Gecelovský O.,  
Košice, Februárového víťaz.  
Král V.,  
Košice, Bernolákova  
Bavliga M., Hranovnica  
Koreň D., Košice,  
Februárového víťazstva  
atd.

### E. Přípravné kolo pro 8. ročník ZDŠ

Přípravné kolo pro 8. ročník ZDŠ má vzbudit zájem o fyziku u žáků, kteří buď odcházejí z osmé třídy na střední školu, nebo postupují do 9. ročníku. Toto přípravné kolo se v tomto školním roce konalo už po třetí pokusně v JMK. Probíhalo vždy v letním semestru; ve školním roce 1975/76 od 1. února 1976 do 30. dubna 1976.

Účastníci přípravného kola řešili doma tři úlohy zadané KVFO JMK. Úlohy jsou uvedeny v 2. části této publikace. Hodnocení provedli učitelé na škole.

Následující tabulka uvádí zapojení škol a žáků ve třech ročnících, kdy tato soutěž probíhala.

Školní rok	Počet ZDŠ v kraji	Počet tříd v kraji	Přibliž. počet žáků 8. tříd v kraji	Počet zapojených škol		Počet zapojených žáků	
				čís.	%	čís.	%
1973/74	484	871	25 000	157	32	1271	5
1974/75	487	877	25 000	181	37	1344	5
1975/76	467	926	25 550	176	38	1199	5

Procento účastníků bylo tedy poměrně malé.

## F. Akce na podporu FO

Na podporu FO probíhaly tyto akce:

### 1. Kursy pro žáky během školního roku

V tomto školním roce byly organizovány kursy pro kategorie A—D ve StřČK, ZČK, SČK, VČK, JMK, SMK, ZSK, StřSK a VSK. V Bratislavě měla každá škola pro každou kategorii instruktora z řad vysokoškolských učitelů.

### 2. Semináře pro učitele škol 1. cyklu

Tyto semináře mají informovat žáky ZDŠ o úlohách kategorie E prostřednictvím učitelů, poněvadž všude nelze podávat tyto informace přímo žákům. V ZSK se konalo 5 lekcí těchto seminářů. V Bratislavě byly 3 semináře pro učitele, ale týkaly se oprav úloh. V Brně byly uspořádány semináře pro žáky ZDŠ přímo.

### 3. Krajská soustředění úspěšných řešitelů FO a MO

KVFO uspořádaly tato soustředění — někde společně s MO — koncem škol. roku v těchto krajích: StřČK, ZČK, SČK, VČK, JMK, SMK, ZSK, StřSK a VSK. Soustředění byla týdenní až desetidenní. Počet účastníků záležel na finančních možnostech kraje; maximální počet žáků v kraji na soustředění byl 60 (JMK).

### 4. Celostátní soustředění úspěšných řešitelů MO a FO z 3. ročníku škol 2. cyklu

Péče o celostátní soustředění (třítýdenní) byla letos svěřena KV SČK. Poněvadž z objektivních příčin je nebylo možno v SČK zajistit, bylo zorganizováno náhradní soustředění v Plzni v internátě DM v době od 15. do 25. června 1976. O soustředění se staral KVFO ZČK a záštitu nad soustředěním převzala pobočka JČSMF v Plzni. Situace byla zkomplikována onemocněním předsedy ÚVFO.

Do soustředění byli vybráni nejúspěšnější řešitelé MO a FO kategorie A, pokud byli v nematuritní třídě, a kat. B z FO. Navrženi byli i mladší řešitelé.

Účastníci byli rozděleni do tří tříd podle předcházející úspěšnosti v MO nebo FO, a to do třídy matematické, matematicko-fyzikální a fyzikální. Účastníci, kteří byli v 2. kole úspěšnými řešiteli jen jedné olympiády, byli zařazeni do příslušné třídy matematické nebo fyzikální, účastníci, kteří

byli v 2. kole úspěšnými řešiteli obou olympiád, byli zařazeni do třídy matematicko-fyzikální. Při definitivním rozřídění bylo přihlédnuto k přání jednotlivců. Podle ročníků byl ve třídách tento počet účastníků:

TABULKA 10

Třída	Ročník			Celkem	Chlapců	Dívek
	3	2	1			
M	21	3	—	24	19	5
MF	24	8	—	32	28	4
F	29	2	—	31	30	1
Celkem	74	13	—	87	77	10

Ve třídách byl z jednotlivých krajů tento počet účastníků (po povolání náhradníků):

TABULKA 11

Třída / Kraj	Pha	StřČ	JČ	ZČ	SČ	VČ	JM	SM	Brat.	ZS	StřS	VS	Celkem
M	2	3	2	1	3	3	2	2	—	4	1	1	24
MF	4	2	1	5	1	2	5	—	6	—	4	2	32
F	2	1	3	1	3	3	2	4	2	4	2	4	31
Celkem	8	6	6	7	7	8	9	6	8	8	7	7	87

Ve třídě matematické bylo 38 hodin přednášek, ve třídě MF 22 hodin přednášek z matematiky a 18 hodin přednášek z fyziky, ve třídě fyzikální 42 hodin přednášek z fyziky.

## 5. Třídy se zaměřením na matematiku a fyziku

Zaměření na matematiku a fyziku má nyní mnoho tříd. V následující tabulce 12 jsou uvedeny jen ty školy s těmito třídami, které měly letos úspěšné řešitele v 2. nebo i 3. kole; je u nich uveden počet úspěšných řešitelů v jednotlivých kategoriích. Úspěšní řešitelé v 1. kole jsou uvedeni jen u škol, u kterých to KVFO zaznamenaly.

Jsou to třídy na těchto gymnáziích:

TABULKA 12

Kraj	Škola	1. kolo kat.				2. kolo kat.				3. kolo celkem	3. kolo A	
		A	B	C	D	A	B	C	D		sout. úsp.	
Praha	1. Štěpánská					3	1	—	—	4	1	—
	2. W. Piecka	9	6	6	28	2	4	5	8	19	1	1
	4. Budějovická					—	1	—	1	2		
	4. Ohradní					—	—	1	—	1		
	5. Radotín					—	—	—	1	1		
	6. Arabská					2	—	—	2	4	1	1
	6. Leninova					—	3	5	4	12		
	7. Nad štolou					1	3	4	11	19	1	1
	8. Libeň					2	—	—	—	2		
	9. Prosek					—	—	—	2	2		
10. Voděradská					1	1	1	5	8	1	1	
StřČ	Brandýs n. L. - - Stará Boleslav	—	2	2	2	—	—	—	1	1		
JČ	České Budějov.					—	1	1	7	9		
ZČ	Plzeň, nám. Odborářů					2	2	2	8	14	2	2
SČ	Karlovy Vary					2	—	—	—	2	2	—
	Ústí n. L.					2	1	1	4	8	1	1
	Liberec	7	8	8	11	1	2	—	5	8		
	Teplice					—	1	—	—	1		
VČ	Hradec Králové	4	2	2	6	3	2	1	4	10	3	2
	Pardubice	4	4	10	11	2	2	3	8	15	2	1

TABULKA 12 — pokračování

Kraj	Škola	1. kolo kat.				2. kolo kat.				2. kolo celkem	3. kolo A	
		A	B	C	D	A	B	C	D		sout. úsp.	
JM	Brno, Koněvova, MF					—	—	3	—	3		
	Brno, Koněvo- va, progr.					2	1	1	8	12	2	2
	Brno, Lerchova					—	4	—	—	4		
	Brno, kpt. Jaroše, exp.					3	4	2	5	14	1	1
	Brno, Elgartova					—	—	2	1	3		
	Brno, Křenová					—	3	2	2	7		
SM	Bílovec	—	—	—	7*	—	—	—	5*	5		
	Karviná	1	3	3	2	1	—	2	—	3		
	Havířov, Tajovského	5	4	2	2	—	2	—	2	4		
	Olomouc, Jiřího z Pod.	1	3	—	3	1	—	—	2	3		
	Olomouc - - Hejčín	—	5	3	2	—	1	2	2	5		
	Opava	2	3	1	1	1	2	—	—	3	1	1
	Vsetín	1	—	2	—	1	—	—	—	1		
Bra- tislav- va	Novohradská					14	6	5	37	62	8	5
	Čs. armády					1	—	1	15	17		

\*) jde jen o třídy matematické



Z tabulky je vidět, že nejúspěšnější byly třídy na gymnáziích:

1. Bratislava, Novohradská
2. Praha 2, W. Piecka
3. Praha 7, Nad školou
4. Bratislava, Čs. armády
5. Brno, Koněvova
6. Pardubice
7. Plzeň, nám. Odborářů
8. Brno, tř. kpt. Jaroše
9. Praha 6, Leninova
10. Hradec Králové

U dalších 25 škol byl počet úspěšných řešitelů 2. kola menší než 10. Kromě toho jsou další školy, které neměly úspěšného řešitele v 2. kole, popř. ani v 1. kole. V kraji ZS, StřS a VS třídy se zaměřením na matematiku a fyziku nebyly.

### **Závěr**

Závěrem je třeba srdečně poděkovat všem pracovníkům ve FO, kteří této náročné a důležité politickovýchovné práci obětují svůj volný čas.

## II. ČÁST SOUTĚŽNÍ ÚLOHY

### 1. Úlohy kategorie A

Úlohy a jejich řešení recenzovali doc. dr. Ladislav Thern a Mojmír Šimerský.

#### a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhol ing. dr. Daniel Klivanec, CSc.)

Střela má zasáhnout cíle, který je ve vzdálenosti  $d$ . Spojnice ústí hlavně a cíle zvierajú s vodorovným smerom uhol  $\varphi$ .

a) Určte rychlost  $v$  střely po opuštění hlavně, ak os dela zvierajú s vodorovným smerom uhol  $\alpha$ .

b) Určte najmenšiu rychlost  $v_0$  střely po opuštění hlavně tak, aby střela ešte zasáhla cíle. Aký uhol  $\alpha_0$  zvierajú vtedy os hlavně s vodorovným smerom?

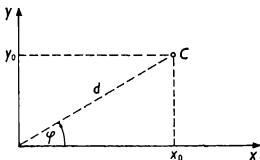
c) Odôvodnite zjednodušujúce predpoklady, ktoré ste pri riešení úlohy použili.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty  $d = 2200$  m,  $\varphi = 30,0^\circ$ ,  $\alpha = 45,0^\circ$ .

*Riešenie*

V súradnicovej sústave podľa obr. 1 má cieľ  $C$  súradnice

$$x_0 = d \cos \varphi, \quad y_0 = d \sin \varphi. \quad (1)$$



Obr. 1

Dráha strely je daná parametrickými rovnicami

$$x = vt \cos \alpha, \quad y = vt \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

z ktorých dostaneme kartézsku rovnicu

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (2)$$

Z tejto rovnice vyjadríme po úprave

$$v = x \sqrt{\frac{g}{x \sin 2\alpha - y(\cos 2\alpha + 1)}}. \quad (3)$$

a) Pretože cieľ  $C$  leží na trajektórii strely, vyhovujú jeho súradnice rovnici (2), takže rýchlosť  $v$  vyjadríme dosadením  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  podľa (1) do (3). Po úprave vychádza

$$v = \cos \varphi \sqrt{\frac{g d}{\cos \varphi \sin 2\alpha - \sin \varphi (\cos 2\alpha + 1)}} \quad (4)$$

a pre zadané hodnoty  $v \doteq 210 \text{ m s}^{-1}$ .

b) Funkcia  $v = f(\alpha)$  daná vzťahom (4) má minimum pre tú hodnotu  $\alpha_0$ , pre ktorú funkcia

$$F(\alpha) = \cos \varphi \sin 2\alpha - \sin \varphi (\cos 2\alpha + 1)$$

má maximum. Z podmienky  $F'(\alpha_0) = 0$  najdeme

$$\alpha_0 = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}. \quad (5)$$

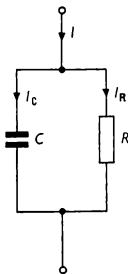
Dosadením  $\alpha = \alpha_0$  podľa (5) do (4) dostaneme

$$v_0 = \cos \varphi \sqrt{\frac{g d}{1 - \sin \varphi}}$$

a pre zadané hodnoty  $v_0 \doteq 180 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\alpha_0 = 60^\circ$ .

o) Pri riešení sme použili zjednodušujúci predpoklad, že strelu považujeme za hmotný bod, čo prakticky znamená, že neuvažujeme zložitý pohyb telesa strely v odporovom prostredí. Ďalej sme predpokladali, že na celej dráhe strely je tiažové zrýchlenie  $g$  stále.

## 2. úloha (navrhl Mojmír Simerský)



Obr. 2

a) Obvod sestavený z rezistoru o odporu  $R$  a kondenzátoru o kapacite  $C$  (obr. 2) je pripojen ke zdroji harmonického striedavého napätí o efektívnej hodnote  $U$  a úhlovom kmitočte  $\omega$ .

1. Stanovte proudy  $I_C$ ,  $I_R$ ,  $I$ .
2. Z hodnot  $U$ ,  $I$  stanovte impedanci  $Z_1$  obvodu.
3. Horní mezní kmitočet  $f_h$ , respektive horní mezní úhlový kmitočet  $\omega_h$  je definován tak, že při něm

poměr  $\frac{Z_1}{R}$  nabývá hodnoty  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Stanovte tento kmitočet.

4. Graficky znázorněte funkci  $\frac{Z_1}{R} = F_1\left(\frac{f}{f_h}\right)$ . Počítejte pro hodnoty  $\frac{f}{f_h} = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$ . Vodorovnou stupnici pro  $\frac{f}{f_h}$  volte logaritmickou. Graf označte v obrázku jako „křivku a“.

b) Obvod sestavený podle obr. 3 je připojen k témuž zdroji jako obvod v části a).

1. Stanovte proudy  $I_C, I_{RL}, I$ .

2. Z hodnot  $U, I$  stanovte impedanci  $Z$  obvodu.

c) V obecném výsledku části b) položte  $L = R^2C$  a vyjádřete impedanci  $Z_2$  obvodu. Graficky znázorněte

funkci  $\frac{Z_2}{R} = F_2\left(\frac{f}{f_h}\right)$ , kde  $f_h$

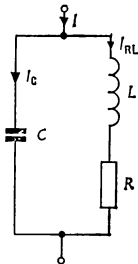
značí kmitočet týž jako v části a) — křivku označte jako „křivku b“.

Pro zpřesnění grafu vypočítejte i lokální maximum funkce  $F_2$  a hodnotu poměru  $\frac{f}{f_h}$ , při

níž poměr  $\frac{Z_2}{R}$  nabývá hodnoty

$\frac{1}{\sqrt{2}}$  (odpovídá tzv. hornímu mez-

nímu kmitočtu upraveného obvodu).



Obr. 3

d) V obecném výsledku části b) položte  $L = \frac{1}{2} R^2 C$  a vyjádřete impedanci  $Z_3$  obvodu. Dále postupujte jako v části c), tj. graficky znázorněte funkci  $\frac{Z_3}{R} = F_3\left(\frac{f}{f_h}\right)$  a křivku označte jako „křivku c“.

*Poznámky:*

1. Všechny tři křivky zakreslete do téže soustavy souřadnic; obrázek umožní porovnání všech tří průběhů.

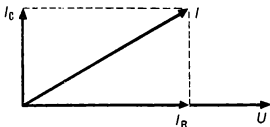
2. Při řešení částí a) a b) můžete vycházet z vektorových diagramů.

3. Úloha se týká tzv. paralelní kompenzace u obrazových zesilovačů používaných v televizní technice,  $C$  značí různé škodlivé kapacity, které působí paralelně k pracovnímu odporu  $R$  zesilovače. Ve svém řešení můžete popř. také uvést, co je vám o tom známo z vaší zájmové činnosti.

*Řešení:*

a) 1. — obr. 4. Pro proudy  $I$ ,  $I_C$ ,  $I_R$  platí

$$I = \sqrt{I_C^2 + I_R^2}, \quad \text{kde } I_C = \omega UC, \quad I_R = \frac{U}{R}.$$



Obr. 4

2. Pro impedanci  $Z_1$  vyjde po úpravě

$$Z_1 = \frac{U}{I} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (1)$$

3. Dosazením  $Z_1 = \frac{R}{\sqrt{2}}$  do (1) dostaneme

$$\omega_h = \frac{1}{RC}, \quad f_h = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{RC}.$$

4. Označíme

$$x = \frac{f}{f_h} = \frac{\omega}{\omega_h} = \omega RC; \quad y_1 = \frac{Z_1}{R}.$$

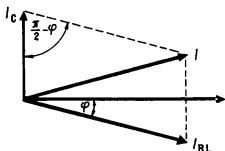
Pak jde o funkci  $y_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ , jejímž grafem je křivka *a* na obr. 7.

b) 1. Pro proudy  $I_C, I_{RL}$  platí

$$I_C = \omega UC; \quad I_{RL} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (2)$$

Proud  $I$  určíme pomocí obr. 5 s použitím kosinové věty:

$$I^2 = I_C^2 + I_{RL}^2 - 2I_C I_{RL} \sin \varphi. \quad (3)$$



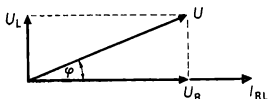
Obr. 5

Ve větvi  $RL$  je na odporu napětí  $U_R$ , na indukčnosti napětí  $U_L$ , přičemž

$$U_R = I_{RL}R; \quad U_L = I_{RL}\omega L; \quad U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}.$$

Pomocí obr. 6 si vyjádříme

$$\sin \varphi = \frac{U_L}{U} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (4)$$



Obr. 6

Proud  $I$  je určen vztahem (3), do něhož dosadíme z (2) a (4). Po úpravě dostaneme

$$I = U \sqrt{\frac{(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{R^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (5)$$

2. Pro impedanci dostaneme z (5):

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (6)$$

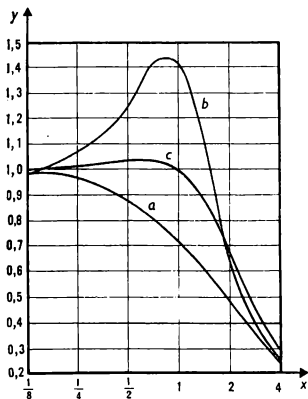
c) Po dosazení  $L = R^2 C$  do (6) dostaneme, označíme-li  $x = \omega RC$ ,  $y_2 = \frac{Z_2}{R}$ :

$$y_2 = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2 + x^4}}.$$

Tato funkce má lokální maximum s hodnotou  $y_{2 \max} \doteq$



$\doteq 1,47$  pro  $x \doteq 0,86$ . Hodnoty  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  nabývá pro  $x \doteq 1,82$ . Jejím grafem je křivka  $b$  na obr. 7.



Obr. 7

d) Pro  $L = \frac{1}{2} R^2 C$  nalezneme obdobně

$$y_3 = \frac{Z_3}{R} = \sqrt{\frac{4 + x^2}{4 + x^4}}$$

Tato funkce má lokální maximum s hodnotou  $y_{3 \max} \doteq 1,03$  pro  $x \doteq 0,687$ ; hodnoty  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  nabývá pro  $x \doteq 1,80$ . Jejím grafem je křivka  $c$  na obr. 7.

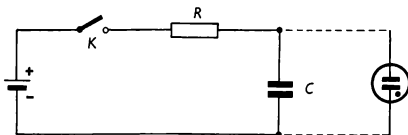
*Poznámka:*

Vztah (6) se dá velmi snadno vyvodit při použití symbolické metody. Pro admitanci  $\bar{Y}$  dostaneme

$$\bar{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC}{R + j\omega L}.$$

Vyjádříme absolutní hodnotu tohoto komplexního čísla, přičemž použijeme toho, že absolutní hodnota podílu dvou komplexních čísel je rovna podílu jejich absolutních hodnot, načež vyjádříme impedanci jako převrácenou hodnotu admitance.

### 3. úloha (navrhl Konrád Hofman)



Obr. 8

Na obr. 8 (vytaženo plně) je schéma obvodu při nabíjení kondenzátoru přes rezistor. Připojíme-li v čase  $t = 0$  s klíčem  $K$  zdroj stálého napětí  $U$ , kondenzátor se nabíjí a napětí  $u_c$  na něm roste s časem  $t$  podle vztahu

$$u_c = U \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right],$$

kde  $\tau = RC$  značí tzv. časovou konstantu nabíjení. Připojíme-li paralelně ke kondenzátoru doutnavku, jejíž

zápalné napětí je  $U_1$  a zhášecí  $U_2$  ( $U_2 < U_1 < U$ ), vznikne doutnavkový generátor pilovitých kmitů.

a) Vyložte princip činnosti tohoto generátoru.

b) Stanovte kmitočet  $f$  pilovitých kmitů, tj. vyjádřete ho pomocí veličin  $U$ ,  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $R$ ,  $C$ .

c) Stanovte elektrický náboj  $Q$ , který při každém kmitu projde doutnavkou.

d) Pomocí vztahu pro napětí  $u_C$  stanovte funkce  $u_R = f_1(t)$ ,  $i = f_2(t)$  pro případ, že se kondenzátor (bez připojené doutnavky) nabíjí;  $u_R$  značí napětí na rezistoru,  $i$  nabíjecí proud.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $U = 200$  V,  $U_1 = 80,0$  V,  $U_2 = 70,0$  V,  $R = 100$  k $\Omega$ ,  $C = 100$  nF. Odpor zapálené doutnavky považujeme za nulový, takže vybití kondenzátoru přes doutnavku proběhne okamžitě; odpor nezapálené doutnavky považujeme za nekonečně velký.

e) Pro zadané hodnoty znázorněte graficky funkci  $u'_C = f(t)$ , kde  $u'_C$  značí napětí na kondenzátoru v případě, že paralelně k němu je připojena doutnavka. V grafu vyznačte průběh několika pilovitých kmitů, graficky stanovte jejich kmitočet a výsledek porovnejte s vypočítanou hodnotou.

*Řešení:*

a) Když soustavu připojíme ke zdroji, roste napětí na kondenzátoru podle vztahu uvedeného v zadání. V okamžiku, kdy napětí na kondenzátoru a paralelně připojené doutnavce dosáhne hodnoty  $U_1$ , vznikne v doutnavce výboj a kondenzátor se okamžitě částečně vybijí na napětí  $U_2$ , při němž výboj v doutnavce zanikne. Pak se kondenzátor opět počne nabíjet, jeho napětí roste z  $U_2$  na  $U_1$ , načež se děj opakuje. Napětí na kondenzátoru se tedy periodicky mění mezi hodnotami  $U_2$  a  $U_1$ .

b) Stanovíme nejprve periodu  $T$  pilovitých kmitů. Jde o dobu, za kterou napětí  $u_c$  na kondenzátoru vzroste z  $U_2$  na  $U_1$ . Ve vztahu

$$u_c = U \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t}{RC} \right) \right]$$

položíme nejprve  $u_c = U_1$ ,  $t = t_1$ , potom  $u_c = U_2$ ,  $t = t_2$ :

$$U_1 = U \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t_1}{RC} \right) \right];$$

$$U_2 = U \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t_2}{RC} \right) \right].$$

Z těchto exponenciálních rovnic vypočítáme (ln značí přirozený logaritmus)

$$t_1 = RC \ln \frac{U}{U - U_1}, \quad t_2 = RC \ln \frac{U}{U - U_2}.$$

Perioda pilovitých kmitů

$$T = t_1 - t_2 = RC \ln \frac{U - U_2}{U - U_1}.$$

Kmitočet vyjádříme jako reciprokou hodnotu periody a přirozené logaritmy nahradíme dekadickými (e značí jejich základ):

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\log e}{RC} \left( \log \frac{U - U_2}{U - U_1} \right)^{-1}.$$

Pro zadané hodnoty  $f \doteq 1,25$  kHz.

c) Kondenzátor nabitý na napětí  $U_1$ , respektive  $U_2$  má náboj  $CU_1$ , respektive  $CU_2$ . Při každém kmitu projde doutnavkou rozdíl obou uvedených nábojů, tedy

$$Q = C(U_1 - U_2)$$

a pro zadané hodnoty  $Q \doteq 1,0$   $\mu$ C.

d) Podle Kirchhoffova zákona platí  $U = u_R + u_C$ , neboli

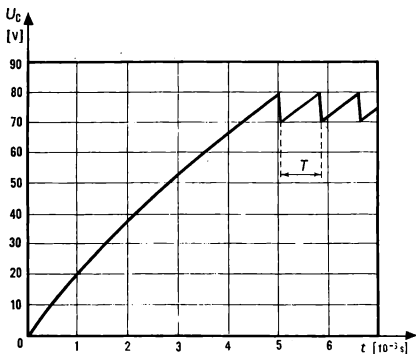
$$u_R = U - u_C = U \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Pro proud  $i$  platí podle zákona Ohmova

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{U}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right),$$

kde  $I_0 = \frac{U}{R}$  značí počáteční hodnotu nabíjecího proudu.

e) Graf je na obr. 9. Hodnota graficky nalezená pro periodu  $T$  dobře souhlasí s hodnotou vypočítanou.



Obr. 9

#### 4. úloha (navrhl ing. Miloš Rabas)

Promítací žárovka s wolframovým vláknem má při napětí  $U$  příkon  $P$ , její vlákno má přitom teplotu  $t_0$ ; teplotní součinitel odporu wolframu je  $\alpha$ . Ke zmírnění proudového nárazu při zapnutí je v sérii k žárovce připojen termistor, jehož elektrický odpor při teplotě  $t_1$  místnosti je  $R_1$ . Odpor  $R$  termistoru se mění s teplotou podle vztahu

$$R = A \exp \frac{B}{T},$$

kde  $A$ ,  $B$  jsou konstanty,  $T$  absolutní teplota termistoru.

a) Jaký proud  $I_1$  prochází žárovkou s ochranným termistorem při připojení ke zdroji harmonického střídavého napětí o efektivní hodnotě  $U$  v okamžiku, kdy jeho napětí má svou maximální hodnotu?

b) Jaký proud  $I_2$  by za týchž podmínek procházel žárovkou připojenou ke zdroji bez ochranného termistoru?

c) Jaký příkon  $P_0$  dostává žárovka v ustáleném stavu, když teplota sériově připojeného termistoru se ustálí na hodnotě  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ) a když soustava žárovky s termistorem je připojena ke zdroji harmonického střídavého napětí o efektivní hodnotě  $U$ ?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 150^\circ\text{C}$ ,  $t_0 = 2600^\circ\text{C}$ ,  $R_1 = 150\ \Omega$ ,  $U = 220\ \text{V}$ ,  $P = 200\ \text{W}$ ,  $B = 2,0 \cdot 10^3\ \text{K}$ ,  $\alpha = 3,6 \cdot 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$ .

*Poznámka:*

Při řešení části c) předpokládáme, že odpor vlákna žárovky v ustáleném stavu je roven odporu danému jejími jmenovitými hodnotami  $U$ ,  $P$ .

*Řešení:*

a) Označíme  $U_m = U\sqrt{2}$  maximální hodnotu napájecího napětí,  $R_{z1}$  odpor žárovky při teplotě  $t_1$ . Pak

$$I_1 = \frac{U\sqrt{2}}{R_1 + R_{z1}}. \quad (1)$$

Při pracovní teplotě  $t_0$  má žárovka odpor

$$R_{z2} = \frac{U^2}{P} \quad (2)$$

a dále platí

$$R_{z2} = R_{z1}[1 + \alpha(t_0 - t_1)]. \quad (3)$$

Ze soustavy rovnic (1), (2), (3) vyjde

$$I_1 = \frac{UP[1 + \alpha(t_0 - t_1)]}{U^2 + R_1P[1 + \alpha(t_0 - t_1)]} \sqrt{2} \quad (4)$$

a pro zadané hodnoty  $I_1 \doteq 1,8$  A.

b) Ve vztahu (4) položíme  $R_1 = 0 \Omega$ ; pak

$$I_2 = \frac{P[1 + \alpha(t_0 - t_1)]}{U} \sqrt{2}$$

a pro zadané hodnoty  $I_2 \doteq 13$  A.

c) Pro odpor termistoru při teplotách  $t_1$  a  $t_2$ , respektive při odpovídajících absolutních teplotách  $T_1$  a  $T_2$ , platí podle zadání

$$R_1 = A \exp \frac{B}{T_1}, \quad R_2 = A \exp \frac{B}{T_2}.$$

Odtud vyjádříme

$$R_2 = R_1 \exp \frac{B(T_1 - T_2)}{T_1 T_2}. \quad (5)$$

Poněvadž neznáme teplotu vlákna žárovky, budeme předpokládat, že jeho odpor je  $R_{22}$  podle (2). Napětí na žárovce je sice menší než  $U$  o úbytek napětí na termistoru, ale zároveň i příkon je menší, takže učiněný předpoklad bývá v praxi dobře splněn, a to tím spíše, že druh použitého termistoru se volí podle vlastností žárovky. Pak pro proud tekoucí obvodem dostáváme

$$I_3 = \frac{U}{R_2 + R_{22}}.$$

Pro příkon žárovky dostaneme s použitím (2) po úpravě

$$P_0 = R_{22} I_3^2 = P \frac{U^4}{(PR_2 + U^2)^2},$$

kde odpor  $R_2$  je dán vztahem (5).

Pro zadané hodnoty  $R_2 \doteq 18 \Omega$ ,  $P_0 \doteq 170 \text{ W}$ .

## 5. úloha (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

V homogenním magnetickém poli, jehož indukce  $\mathbf{B}$  má svislý směr, jsou dvě rovnoběžné líhy, jejichž vzájemná vzdálenost je  $d$ . Rovina, v níž líhy leží, je od vodorovné roviny odchýlena o úhel  $\alpha$  a je kolmá ke svislým rovinám, které procházejí líhami. Líhy, jejichž elektrický odpor je zanedbatelný, jsou na horním konci připojeny k rezistoru o odporu  $R$ . Na líhách je vodorovně položena kovová tyč obdélníkového průřezu o hmotnosti  $m$ , jejíž elektrický odpor je zanedbatelný. V určitém čase je tyč uvolněna z klidové polohy a počne klouzat po líhách, přičemž součinitel smykového tření je  $f$ .

a) Stanovte obecně funkci  $a = F(v)$ , kde  $a$  značí zrychlení tyče ve směru líh,  $v$  její rychlost s téměř směru.

b) Podle výsledku části a) stanovte, jaké největší rychlosti  $v_{\max}$  může tyč dosáhnout. Nalezený výsledek ověřte pomocí principu setrvačnosti.



Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $B = 1,2 \text{ T}$ ,  $m = 0,85 \text{ kg}$ ,  $d = 1,1 \text{ m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $R = 0,70 \Omega$ ,  $f = 0,15$ .

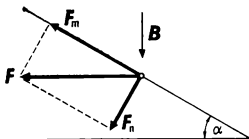
c) Pro zadané hodnoty zakreslete graf funkce  $a = F(v)$ .

**Řešení:**

a) Pohyb tyče je způsoben pohybovou složkou tíhové síly, která má velikost

$$F_p = mg \sin \alpha . \quad (1)$$

Když tyčí protéká indukovaný proud  $I$ , působí na ni síla  $F$  o velikosti  $F = Bid$ , jejíž směr je kolmý k vektoru  $B$  i k tyči a jejíž orientace je taková, že síla působí proti pohybu tyče (obr. 10). Sílu  $F$  rozložíme na složky  $F_m$



Obr. 10

a  $F_n$ . Složka  $F_n$  má velikost  $F_n = Bid \sin \alpha$  a spolupůsobí s tlakovou složkou tíhové síly, takže celková třecí síla orientovaná proti pohybové složce tíhové síly má velikost

$$F_t = f(mg \cos \alpha + Bid \sin \alpha) \quad (2)$$

a složka  $F_m$  o velikosti

$$F_m = Bid \cos \alpha \quad (3)$$

rovněž působí proti pohybové složce tíhové síly.

Na tyč tedy působí síla, která má směr lůh, je orientována dolů a má velikost

$$F_c = F_p - F_t - F_m . \quad (4)$$

Má-li tyč rychlost  $v$ , indukuje se v ní napětí

$$u = B_n v d = B v d \cos \alpha ;$$

$B_n = B \cos \alpha$  je zde velikost složky magnetické indukce  $\mathbf{B}$  ve směru kolmém k rovině, v níž lůhy leží.

Poněvadž v uzavřeném obvodu je zapojen odpor  $R$ , protéká tyčí proud

$$I = \frac{u}{R} = \frac{B v d \cos \alpha}{R} . \quad (5)$$

Do (4) dosadíme z (1), (2), (3) s přihlédnutím k (5), tím vyjádříme  $F_c$ . Poněvadž  $a = \frac{F_c}{m}$ , dostaneme po úpravě

$$a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{v \cos \alpha}{m R} d^2 B^2 (f \sin \alpha + \cos \alpha) , \quad (6)$$

což je hledaná funkce. Pro zadané hodnoty

$$a \doteq (3,7 - 2,4\{v\}) \text{ m s}^{-2} ,$$

kde  $\{v\}$  značí číselnou hodnotu rychlosti  $v$  v  $\text{m s}^{-1}$ .

b) Největší rychlosti dosáhne tyč při  $a = 0 \text{ m s}^{-2}$ . Když v (6) položíme  $a = 0$ ,  $v = v_{\max}$ , dostaneme

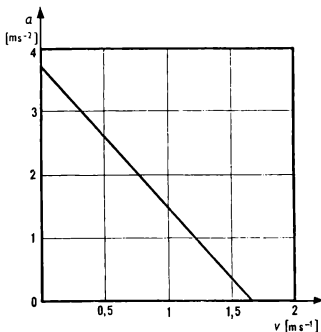
$$v_{\max} = \frac{R m g (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{B^2 d^2 \cos \alpha (f \sin \alpha + \cos \alpha)} . \quad (7)$$

Pro zadané hodnoty  $v_{\max} \doteq 1,6 \text{ m s}^{-1}$ .

Tyč se potom pohybuje jen setrvačností, poněvadž síly,

které na ni působí, jsou v rovnováze. Výsledek (7) dostaneme také z (4), když zde položíme  $F_c = 0$  N.

c) Graf je na obr. 11.



Obr. 11

## 6. úloha (navrhl prof. dr. Rostislav Košťál)

Měření ohniskové vzdálenosti spojné čočky

Určete ohniskovou vzdálenost tlusté spojné čočky

- ze dvou poloh čočky, v nichž se vytvoří ostrý obraz pevného předmětu na pevném stínítku,
- určením polohy obrazového ohniska a polohy záporné hlavní roviny obrazové.

Ad a) Nastavení proveďte pětkrát a z vypočtených hodnot  $f$  určete pravděpodobnou hodnotu a příslušnou chybu výsledku.

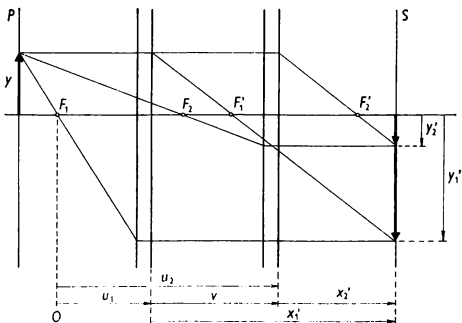
Ad b) Nastavení proveďte pětkrát a z vypočtených hodnot s příslušnou střední chybou vypočtete pravděpodobnou hodnotu a příslušnou chybu výsledku.

V úvodu stručně vyložte princip použitých měřicích metod.

*Řešení:*

### 1. Úvod

Ohnisková vzdálenost  $f'$  (popř.  $f$ ) tlusté čočky je vzdálenost obrazového ohniska od kladné hlavní roviny obrazové (popř. předmětového ohniska od kladné hlavní roviny předmětové). Další úvahy omezíme na případ, že prostor před čočkou i za čočkou má týž index lomu, a tedy  $f' = f$ .



Obr. 12

a) Zvolíme pevně polohu předmětu  $P$  i stínítka  $S$  tak, abychom mohli na stínítku čočkou vytvořit obraz předmětu (obr. 12). Obraz na stínítku vznikne ve dvou různých polohách čočky. Označme vzdálenost obrazu od kladné hlavní roviny obrazové, jejíž polohu neznáme, v prvním případě  $x'_1$  a v druhém případě  $x'_2$  a velikosti obrazu v prvním případě  $y'_1$ , v druhém případě  $y'_2$  ( $y'_1 < 0$ ,  $y'_2 < 0$ ). Pak na základě podobnosti trojúhelníků platí pro poměr velikosti obrazu a předmětu

$$\frac{y'_1}{y} = -\frac{x'_1 - f}{f}; \quad \frac{y'_2}{y} = -\frac{x'_2 - f}{f}.$$

Odečtením druhé rovnice od první dostáváme

$$\frac{y'_1 - y'_2}{y} = -\frac{x'_1 - x'_2}{f}$$

čili

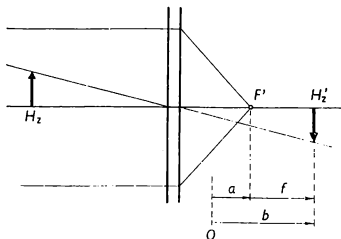
$$f = -\frac{x'_1 - x'_2}{y'_1 - y'_2} y.$$

Rozdíl  $x'_1 - x'_2 = v$  nahradíme rozdílem poloh  $u_2$  a  $u_1$  bodu pevně spojeného s čočkou vzhledem k libovolně zvolenému počátku  $O$ , tj.  $v = u_2 - u_1$ . Změříme-li dále velikost  $y$  předmětu a velikosti  $y'_1$ ,  $y'_2$  obrazů v obou polohách, můžeme ohniskovou vzdálenost  $f$  vypočítat podle vztahu

$$f = -\frac{u_2 - u_1}{y'_1 - y'_2} y.$$

Tento vztah byl odvozen bez předpokladu o tloušťce čočky, a proto ho lze použít pro čočku jakékoli tloušťky.

b) Vzhledem k libovolně zvolenému počátku  $O$  (obr. 13) najdeme polohu  $a$  obrazu nekonečně vzdáleného předmětu; pak pro jiný předmět najdeme polohu  $b$  obrazu, který je převrácený a stejně velký jako před-



Obr. 13

mět. V prvním případě tedy najdeme polohu obrazového ohniska a v druhém případě polohu záporné hlavní roviny obrazové. Vzdálenost ohniska od této roviny udává ohniskovou vzdálenost, takže  $f = b - a$ . Tato metoda je opět správná i pro tlustou čočku.

## 2. Popis experimentální aparatury a postup měření

Měření bylo provedeno s použitím součástí demonstrační soupravy pro optiku — výrobce n. p. Meopta Bratislava. Na stupnici optické lavice bylo připevněno papírové měřítko se stupnicí dělenou po milimetrech. Určovala se ohnisková vzdálenost čočky s jmenovitou hodnotou  $f = +10$  cm.

a) Jako předmět sloužila clonka s jednou štěrbinou, osvětlená osvětlovací lampou; ke clonce byla ze strany lampy přiložena skleněná matnice za účelem rozptylu světelných paprsků. Stínítko bylo při prvním pokusu

umístěno do takové vzdálenosti od předmětu, aby vzdálenost obou poloh čočky, při nichž na stínítku vznikne ostrý obraz, nepřekročila 300 mm (délka stupnice použitého papírového měřítka). Při každém dalším pokusu byla vzdálenost stínítka od předmětu zmenšena přibližně o 20 mm.

b) Poloha obrazového ohniska byla vyhledávána pomocí slunečních paprsků; pro zmenšení osvětlení stínítka byly na čočku v tomto případě nasazeny dva polarizační filtry v poloze téměř zkřížené. Poloha záporné hlavní roviny byla po sejmutí filtrů určována zobrazováním 10 mm dlouhé části průhledného měřítka, přičemž obraz byl porovnáván se stejným měřítkem přiloženým na stínítko.

### 3. Naměřené a vypočítané hodnoty

a) Naměřené hodnoty jsou sestaveny v tabulce 13. Střední chyba určená metodou nejmenších čtverců:

$$\delta f = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n(n-1)}} = \pm 0,27 \text{ mm}.$$

Výsledek získaný prvou metodou je tedy

$$f = (97,3 \pm 0,3) \text{ mm},$$

takže relativní chyba činí 0,3 %.

b) Naměřené hodnoty jsou sestaveny v tabulce 14. Střední chyby poloh  $a$  a  $b$  určíme opět metodou nejmenších čtverců:  $\delta a = 0,2$  mm,  $\delta b = 0,5$  mm. Z hodnot  $a = (121,5 \pm 0,2)$  mm a  $b = (221,7 \pm 0,5)$  mm pak pro ohniskovou vzdálenost jako veličinu vypočítanou dostaneme

$$f = (100,2 \pm 0,5) \text{ mm};$$

relativní chyba v tomto případě je tedy 0,5 %.

TABULKA 13

Měřeni $\infty$	$u_1$ mm	$u_2$ mm	$v$ mm	$y$ mm	$-y'_1$ mm	$-y'_2$ mm	$y'_2 - y'_1$ mm	$f$ mm	$\Delta f$ mm	$\Delta^2 f$ mm <sup>2</sup>
1	2,9	290,5	287,6	27,2	89,8	8,9	80,9	96,7	+0,58	0,3364
2	5,9	271,2	265,3	27,2	83,2	9,1	74,1	97,4	-0,12	0,0144
3	8,6	249,2	240,6	27,2	76,9	10,1	66,8	98,0	-0,72	0,5184
4	10,1	226,7	216,6	27,2	71,3	11,0	60,3	97,7	-0,42	0,1764
5	15,0	200,1	185,1	27,2	64,1	12,0	52,1	96,6	+0,68	0,4624
								97,28	+1,26 -1,26	1,5080



TABULKA 14

Měření č.	$a$ mm	$\Delta a$ mm	$\Delta^2 a$ mm <sup>2</sup>	$b$ mm	$\Delta b$ mm	$\Delta^2 b$ mm <sup>2</sup>
1	121,1	-0,36	0,1296	220,6	+1,14	1,2996
2	121,3	-0,16	0,0256	223,0	-1,26	1,5876
3	122,0	+0,54	0,2916	222,9	-1,16	1,3456
4	121,1	-0,36	0,1296	221,3	+0,44	0,1936
5	121,8	+0,34	0,1156	220,9	+0,84	0,7056
	121,46	+0,88 -0,88	0,6920	221,74	+2,42 -2,42	5,1320

#### 4. Závěr

Výsledek dosažený prvou metodou má menší střední chybu absolutní i relativní a toto měření lze proto považovat za přesnější. Poněvadž však obě metody vycházely z nevysloveného předpokladu, že se používají nulové paprsky, a ten byl lépe splněn při užití druhé metody, musíme její výsledek považovat za správnější. Závěrem lze konstatovat, že správnější z obou výsledků je v dobré shodě s jmenovitou hodnotou udanou výrobcem.

#### 7. úloha (navrhl prof. dr. Rostislav Košťál)

a) Sestrojte obraz předmětu výšky  $y = 10,0$  mm, který vznikne při zobrazení teleskopickým systémem dvou centrovaných soustav. Prvá soustava má ohniska navzájem vzdálená  $d_1 = 61,0$  mm a ohniskové vzdálenosti  $f_1 = 25,0$  mm,  $f'_1 = 30,0$  mm; druhá soustava má ohniska navzájem vzdálená  $d_2 = 76,0$  mm a ohniskové vzdálenosti  $f_2 = 30,0$  mm,  $f'_2 = 36,0$  mm. Poloha předmětu je  $x_1 = 10,0$  mm.

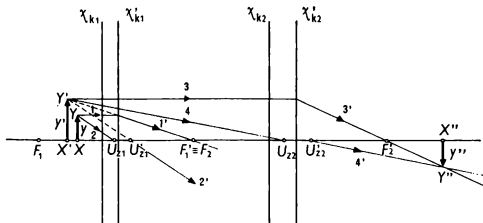
1. Provedte konstrukci užitím paprsku rovnoběžného s optickou osou a paprsku jdoucího zápornými uzlovými body.

2. Vysvětlete způsob konstrukce.

b) Vypočtete polohu a velikost obrazu vzhledem k druhé soustavě.

*Řešení:*

a) Na optické ose (obr. 14) si vyznačíme ohnisko  $F'_1 \equiv F_2$  a od něho vlevo ve vzdálenosti 61,0 mm ohnisko  $F_1$  a vpravo ve vzdálenosti 76,0 mm ohnisko  $F'_2$ . Poněvadž  $f_1 > 0$ ,  $f'_1 > 0$ ,  $f_2 > 0$ ,  $f'_2 > 0$ , je kladná hlavní rovina předmětová  $\chi_{k1}$  vpravo od ohniska  $F_1$  ve vzdálenosti 25,0 mm, kladná hlavní rovina obrazová  $\chi'_{k1}$  vlevo od  $F_1$  ve vzdálenosti 30,0 mm, kladná hlavní rovina předmětová  $\chi_{k2}$  vpravo od ohniska  $F_2$  ve vzdálenosti 30,0 mm a kladná hlavní rovina obrazová  $\chi'_{k2}$  vlevo od ohniska  $F'_2$  ve vzdálenosti 36,0 mm.



Obr. 14

Polohu záporného uzlového bodu určíme ze vztahu pro úhlové zvětšení

$$\gamma = \frac{q}{f'} = \frac{f}{q'} = -1,$$

a z toho  $q = -f'$ ,  $q' = -f$ .

Leží tedy bod  $U_{z1}$  vpravo od  $F_1$  ve vzdálenosti 30,0 mm, bod  $U'_{z1}$  vlevo od  $F'_1$  ve vzdálenosti 25,0 mm, bod  $U_{z2}$  vpravo od  $F_2$  ve vzdálenosti 36,0 mm, bod  $U'_{z2}$  vlevo od  $F'_2$  ve vzdálenosti 30,0 mm.

Koncové body předmětu na optické ose označíme  $X$  a  $Y$ . Paprsek 1, jdoucí bodem  $Y$  rovnoběžně s optickou osou, protíná rovinu  $\chi_{k1}$  v bodě, jehož obraz je na  $\chi'_{k1}$ . Spojnice tohoto bodu s ohniskem  $F'_1$  je paprsek 1' v druhém prostředí. Paprsek 2, který jde bodem  $Y$  do  $U_{z1}$ , vychází rovnoběžně posunut jako 2' z bodu  $U'_{z1}$ . Tyto paprsky se po zpětném prodloužení protínají v bodě  $Y'$ . Dává tedy prvá soustava zdánlivý obraz  $X'Y'$ .

Paprsek 3, jdoucí bodem  $Y'$  rovnoběžně s optickou osou, protíná rovinu  $\chi_{k2}$  v bodě, jehož obraz je na  $\chi'_{k2}$ . Spojnice tohoto bodu s bodem  $F'_2$  je paprsek 3' v třetím prostředí. Paprsek 4, který jde bodem  $Y'$  do  $U_{z2}$ , vychází jako 4' rovnoběžně posunut z bodu  $U'_{z2}$ . Paprsky 3' a 4' se protínají v bodě  $Y''$ . Je tedy výsledný obraz  $X''Y''$  skutečný.

b) Souřadnice  $q'$  obrazu daného předmětu určíme z Newtonovy rovnice

$$q'_1 = \frac{f_1 f'_1}{q_1}; \quad q'_2 = \frac{f_2 f'_2}{q_2}.$$

V našem případě  $q_1 = x_1 - f_1 = 10,0 \text{ mm} - 25,0 \text{ mm} = -15,0 \text{ mm}$ . Pak

$$q_1 = \frac{25,0 \cdot 30,0}{-15,0} \text{ mm} = -50,0 \text{ mm}.$$

Poněvadž  $q'_1 + q_2 = \Delta$ , je  $q_2 = \Delta - q'_1$ , a tedy v našem případě

$$q_2 = +50,0 \text{ mm}$$

a

$$q'_2 = \frac{30,0 \cdot 36,0}{50,0} \text{ mm} = 21,6 \text{ mm}.$$

Obraz je tedy skutečný.

Velikost obrazu plyne ze vztahu pro příčné zvětšení:

$$y' = -y \frac{f_1}{q_1}; \quad y'' = -y' \frac{f_2}{q_2}.$$

Po dosazení zadaných hodnot dostáváme

$$y' = -10,0 \frac{25,0}{-15,0} \text{ mm} = 16,6 \text{ mm},$$

$$y'' = -16,6 \frac{30,0}{50,0} \text{ mm} = -10,0 \text{ mm}.$$

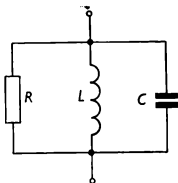
Obraz je tedy převrácený a stejně velký jako předmět.

## b) Druhé kolo soutěže

### 1. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

Elektrický obvod podle obr. 15 má při dvou různých kmitočtech  $f_1, f_2, f_1 > f_2$ , stejnou admitanci  $Y = n \frac{1}{R}$ ,  $n > 1$ .

a) Stanovte rezonanční kmitočet obvodu (kmitočet, při němž admitance má hodnotu  $\frac{1}{R}$ ).



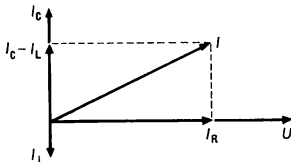
Obr. 15

b) Stanovte indukčnost  $L$  a kapacitu  $C$  v obvodu. Řešte nejprve obecně, potom pro  $f_1 = 1,00 \cdot 10^6$  Hz,  $f_2 = 9,00 \cdot 10^5$  Hz,  $R = 30$  k $\Omega$ ,  $n = 3,00$ .

*Řešení:*

Označíme  $U$  napětí na obvodu,  $I$  celkový proud, který obvodem protéká,  $I_R$  proud tekoucí větví odporovou,  $I_L$  proud větví indukční,  $I_C$  proud větví kapacitní. Fázové poměry jsou znázorněny na obr. 16, z něhož vyjádříme

$$I^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2 = U^2 \left[ \frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right],$$



Obr. 16

kde  $\omega$  značí úhlový kmitočet harmonického střídavého napětí, k němuž je obvod připojen,  $U$  jeho efektivní hodnotu. Pro admitanci  $Y$  platí

$$Y^2 = \left(\frac{I}{U}\right)^2 = \frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2. \quad (1)$$

Admitance má hodnotu  $\frac{1}{R}$  pro úhlový kmitočet  $\omega_r$ , pro který podle (1) platí

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2)$$

a) Pro úhlové kmitočty  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  platí, podle zadání

$$\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L} = \frac{1}{\omega_2 L} - \omega_2 C.$$

Z tohoto vztahu vyjádříme

$$LC = \frac{1}{\omega_1 \omega_2},$$

takže podle (2)

$$\omega_r = \sqrt{\omega_1 \omega_2}; \quad f_r = \sqrt{f_1 f_2}$$

a pro zadané hodnoty  $f_r \doteq 9,50 \cdot 10^5$  Hz.

b) Pro úhlový kmitočet  $\omega_1$  platí, podle zadání

$$\frac{1}{R^2} + \left(\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L}\right)^2 = n^2 \frac{1}{R^2}. \quad (3)$$

Ze soustavy rovnic (2), (3) vyjádříme

$$L = \frac{R}{\sqrt{n^2 - 1}} \cdot \frac{f_1 - f_2}{2\pi f_1 f_2}; \quad C = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2\pi R(f_1 - f_2)}$$

a pro zadané hodnoty  $L \doteq 188 \mu\text{H}$ ,  $C \doteq 150 \text{ pF}$ .

## 2. úloha (navrhol doc. dr. Ladislav Thern)

Dva akumulátory o elektromotorických napätiach  $U_{e1}$  a  $U_{e2}$ ,  $U_{e2} < U_{e1}$ , majú vnútorné odpory  $R_1$  a  $R_2$ ,  $R_2 \geq R_1$ . Zdroje sú vzájomne spojené so súhlasnými pólmi. Takto vzniknutá batéria je zatažená spotrebičom (rezistorom) o premennom odpore  $R$ .

a) Po nakreslení schémy zapojenia vyjadrite prúdy vo všetkých troch vetvách ako funkcie odporu  $R$  spotrebiča.

Určte hodnotu odporu  $R_0$  spotrebiča, pri ktorej nastáva zmena smeru prúdu cez jeden zdroj. Zistite, o ktorý zdroj ide a aký je smer prúdu jednak pre hodnoty odporu  $R < R_0$ , jednak pre hodnoty  $R > R_0$ .

Posúďte, ktorým zdrojom ide väčší prúd bez ohľadu na jeho smer.

b) Akú najmenšiu hodnotu  $R_{\min}$  smie mať odpor spotrebiča, aby prúd v žiadnom zdroji neprekročil povolenú maximálnu hodnotu  $I_{\max}$ ?

Riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty  $U_{e1} = 2,05$  V,  $U_{e2} = 2,00$  V,  $R_1 = 0,010$   $\Omega$ ,  $R_2 = 0,020$   $\Omega$ ,  $I_{\max} = 8,00$  A.

*Riešenie:*

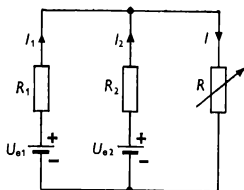
a) Schéma zapojenia — obr. 17.

Z Kirchhoffových zákonov vychádza

$$I_1 = \frac{R_2 U_{e1} + R(U_{e1} - U_{e2})}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}, \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{R_1 U_{e2} - R(U_{e1} - U_{e2})}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}, \quad (2)$$

$$I = \frac{R_2 U_{e1} + R_1 U_{e2}}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}, \quad (3)$$



Obr. 17

kde  $I_1$ ,  $I_2$  sú prúdy prechádzajúce prvým a druhým zdrojom,  $I$  je celkový prúd prechádzajúci spotrebičom.

Zmena smeru prúdu prichádza v úvahu len u druhého zdroja; len vo vzťahu (2) je v čitateli záporný člen. Pre  $I_2 = 0$  dostávame

$$R_0 = \frac{R_1 U_{e2}}{U_{e1} - U_{e2}}$$

a pre zadané hodnoty  $R_0 = 0,40 \Omega$ .

Pre  $R < R_0$  je čitateľ vo vzťahu (2) kladný, teda aj  $I_2 > 0$  A, t. j. zdroj poskytuje energiu — vybíja sa. Pre  $R > R_0$  je  $I_2 < 0$  A, zdroj sa nabíja. Prvý zdroj hradí všetku spotrebovanú energiu, nielen vo všetkých troch odporoch, ale aj energiu získanú druhým zdrojom pri nabíjaní.

Väčší prúd je vždy prúd  $I_1$ . Podľa podmienok úlohy je  $R_2 U_{e1} > R_1 U_{e2} > 0$ . K týmto výrazom sa v (1) resp. (2) pričíta, resp. odčíta ten istý (kladný) výraz, takže čitateľ v (1) je vždy väčší ako v (2), a to platí aj o absolútnych hodnotách. Keď  $I_2 < 0$ , je

$$|I_2| = \frac{R(U_{e1} - U_{e2}) - R_1 U_{e2}}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} < I_1.$$



b) Keď vždy  $I_1$  je ten väčší prúd, počítame  $R_{\min}$  zo vzťahu (1):

$$R_{\min} = \frac{R_2 U_{e1} - R_1 R_2 I_{\max}}{I_{\max}(R_1 + R_2) - (U_{e1} - U_{e2})}$$

a pre zadané hodnoty  $R_{\min} \doteq 0,21 \Omega$ .

### 3. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Jiří Kouba)

a) Kámen padá z povrchu Země s nulovou počáteční rychlostí do šachty. Stanovte dobu pádu kamene jako funkci hloubky šachty.

b) Řešte úlohu a) pro případ, že pozorovatel se nachází na povrchu Země a stanoví okamžik dopadu kamene podle svého sluchového vjemu. Předpokládejte, že tíhové zrychlení je ve všech místech šachty stálé a má velikost  $g$ .

c) Předpokládejte nyní, že šachta byla vyhloubena ze severního pólu do středu Země. Určete, jak závisí doba pádu na hloubce pod povrchem Země, z níž kámen padá.

Uvnitř homogenní koule je intenzita gravitačního pole lineární funkcí vzdálenosti od středu koule. Zeměkouli považujte za homogenní kouli.

*Řešení:*

a) Ze vztahů platných pro volný pád vyjádříme

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

kde  $t$  značí dobu pádu,  $h$  hloubku šachty,  $g$  tíhové zrychlení.

b) Rychlost šíření zvuku označíme  $c$ , dobu od vypuštění kamene do zaslechnutí úderu  $T$ ; potom

$$t = T - \frac{h}{c}.$$

c) Označíme  $M$  hmotnost Země,  $m$  hmotnost kamene,  $R$  poloměr Země,  $\kappa$  gravitační konstantu. Na kámen, který je ve vzdálenosti  $x$  od středu Země, tedy v hloubce  $R - x$  pod jejím povrchem, působí síla o velikosti  $F = \kappa m M / x^2$ , směřující do středu Země. Konstantu  $\kappa$  určíme z podmínky, že pro  $x = R$  má podle gravitačního zákona tato síla velikost

$$F_0 = kR = \kappa \frac{mM}{R^2}, \quad \text{tedy} \quad k = \kappa \frac{mM}{R^3}.$$

Poněvadž síla  $F$  je orientována proti orientaci výchylky kamene od středu Země a její velikost je této vzdálenosti přímo úměrná, konal by kámen, kdyby šachta byla prohloubena až na jižní pól Země, harmonické kmity s periodou

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\kappa M}}.$$

Poněvadž perioda  $T$  nezávisí na počáteční poloze kamene, dosáhne kámen padající z libovolné hloubky  $x < R$  pod povrchem Země středu Země za dobu

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R^3}{\kappa M}},$$

tj. doba jeho pádu nezávisí na hloubce pod povrchem Země, z níž byl vypuštěn.

#### 4. úloha (navrhl prof. dr. Rostislav Košťál)

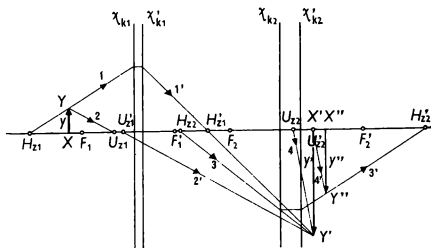
a) Sestrojte obraz předmětu výšky  $y = 10,0$  mm, který vznikne při zobrazení systémem dvou centrovaných soustav s optickým intervalem  $\Delta = 22,0$  mm. Prvá

soustava má ohniska vzájemně vzdálená  $d_1 = 37,0$  mm a ohniskové vzdálenosti  $f_1 = 21,0$  mm,  $f'_1 = 13,0$  mm; druhá soustava má ohniska vzájemně vzdálená  $d_2 = 53,0$  mm a ohniskové vzdálenosti  $f_2 = 20,0$  mm,  $f'_2 = 25,0$  mm. Poloha předmětu je  $x_1 = 26,0$  mm. Proveďte konstrukci užitím paprsku jdoucího zápornými hlavními body a zápornými uzlovými body a vysvětlete způsob konstrukce.

b) Vypočtete polohu a velikost obrazu vzhledem k druhé soustavě a určete vlastnosti obrazu.

*Řešení:*

a) Na optické ose (obr. 18) si vyznačíme polohu bodů  $F'_1$  a  $F_2$  ve vzájemné vzdálenosti  $\Delta = 22,0$  mm; poněvadž  $\Delta > 0$ , je při postupu zleva jako prvé ohnisko  $F'_1$  a za ním ohnisko  $F_2$ . Poněvadž prvá soustava má  $f_1 > 0$  a ohniska vzdálená  $d_1 = 37,0$  mm, bude ohnisko  $F_1$  vlevo od ohniska  $F'_1$  ve vzdálenosti  $d_1 = 37,0$  mm.



Obr. 18

Poněvadž druhá soustava má  $f_2 > 0$  a ohniska vzdálená  $d_2 = 53,0$  mm, bude ohnisko  $F'_2$  vpravo od ohniska  $F_2$  ve vzdálenosti  $d_2 = 53,0$  mm. Protože  $f_1 > 0$ ,  $f'_1 > 0$ ,  $f_2 > 0$ ,  $f'_2 > 0$ , bude kladná hlavní rovina předmětová  $\chi_{k1}$  vpravo od  $F_1$  ve vzdálenosti 21,0 mm, kladná hlavní rovina obrazová  $\chi'_{k1}$  vlevo od  $F'_1$  ve vzdálenosti 13,0 mm, kladná hlavní rovina předmětová  $\chi_{k2}$  vpravo od  $F_2$  ve vzdálenosti 20,0 mm a kladná hlavní rovina obrazová  $\chi'_{k2}$  vlevo od  $F'_2$  ve vzdálenosti 25,0 mm.

Pro určení polohy záporného hlavního bodu použijeme vztah pro příčné zvětšení

$$\beta = -\frac{f}{q} = -\frac{q'}{f'} = -1$$

a z toho

$$q = f, \quad q' = f'.$$

Leží tedy bod  $H_{z1}$  vlevo od  $F_1$  ve vzdálenosti 21,0 mm, bod  $H'_{z1}$  vpravo od  $F'_1$  ve vzdálenosti 13,0 mm, bod  $H_{z2}$  vlevo od  $F_2$  ve vzdálenosti 20,0 mm a bod  $H'_{z2}$  vpravo od  $F'_2$  ve vzdálenosti 25,0 mm.

Polohu záporného uzlového bodu určíme ze vztahu pro úhlové zvětšení

$$\gamma = \frac{q}{f'} = \frac{f}{q'} = -1$$

a z toho

$$q = -f', \quad q' = -f.$$

Leží tedy bod  $U_{z1}$  vpravo od  $F_1$  ve vzdálenosti 13,0 mm, bod  $U'_{z1}$  vlevo od  $F'_1$  ve vzdálenosti 21,0 mm, bod  $U_{z2}$  vpravo od  $F_2$  ve vzdálenosti 25,0 mm a bod  $U'_{z2}$  vlevo od  $F'_2$  ve vzdálenosti 20,0 mm.

Označme koncové body předmětu  $X$  (na optické ose) a  $Y$ . Paprsek 1, spojující  $H_{z1}$  s bodem  $Y$ , protíná  $\chi_{k1}$  v bodě, jehož obraz je na  $\chi'_{k1}$ . Spojnice tohoto bodu s  $H'_{z1}$  je paprsek 1' v druhém prostředí.

Paprsek 2, spojující body  $Y$  a  $U_{z1}$ , vychází v druhém prostředí rovnoběžně posunutý z bodu  $U'_{z1}$  jako paprsek 2'. Průsečíkem paprsků 1' a 2' je bod  $Y'$ .

Paprsek 3, spojující body  $Y'$  a  $H_{z2}$ , protíná  $\chi_{k2}$  v bodě, jehož obraz je na  $\chi'_{k2}$ , a spojnice tohoto bodu s  $H'_{z2}$  je paprskem 3' v třetím prostředí.

Paprsek 4, spojující body  $Y'$  a  $U_{z2}$ , vychází v třetím prostředí rovnoběžně posunutý z bodu  $U'_{z2}$  jako paprsek 4'. Průsečíkem paprsků 3' a 4' je bod  $Y''$  a  $X''Y''$  je obraz předmětu  $XY$ .

b) Souřadnici  $q'$  obrazu daného předmětu určíme z Newtonovy rovnice

$$q'_1 = \frac{f_1 f'_1}{q_1}, \quad q'_2 = \frac{f_2 f'_2}{q_2}.$$

V našem případě  $q_1 = x_1 - f_1 = 26,0 \text{ mm} - 21,0 \text{ mm} = 5,0 \text{ mm}$ ; pak

$$q'_1 = \frac{21,0 \cdot 13,0}{5,0} \text{ mm} = 54,6 \text{ mm}.$$

Poněvadž

$$q'_1 + q_2 = \Delta,$$

je

$$q_2 = \Delta - q'_1,$$

a tedy v našem případě

$$q_2 = 22,0 \text{ mm} - 54,6 \text{ mm} = -32,6 \text{ mm}.$$

Pak

$$q'_2 = \frac{20,0 \cdot 25,0}{-32,6} \text{ mm} = -15,3 \text{ mm}$$

a tedy

$$x'_2 = f'_2 + q'_2 = 25,0 \text{ mm} - 15,3 \text{ mm} = 9,7 \text{ mm}.$$

Obraz je tedy skutečný.

Velikost obrazu plyne ze vztahu pro příčné zvětšení

$$y' = -y \frac{f_1}{q_1}, \quad y'' = -y' \frac{f_2}{q_2}.$$

Po dosazení hodnot dostáváme

$$y' = -10,0 \frac{21,0}{5,0} \text{ mm} = -42,0 \text{ mm},$$

$$y'' = +42,0 \frac{20,0}{-32,6} \text{ mm} = -25,7 \text{ mm}.$$

Obraz je tedy vzhledem k předmětu převrácený a zvětšený.

### c) Třetí kolo soutěže

#### 1. úloha (navrhol doc. dr. Ladislav Thern)

Je dané priestorove ohraničené homogénne magnetické pole s indukciou  $\mathbf{B}$ . V tomto poli sa pohybuje obdĺžnikový rámček z medeneho drôtu priemeru  $d$  o stranách dĺžky  $l$  a  $l_1$ ,  $l_1 > l$ .

S rámčekom vykonáme tri pokusy:

a) Rámčekom pohybujeme harmonicky v smere strany  $l_1$  tak, že jedna jeho strana  $l$  zostáva pri pohybe natrvalo v magnetickom poli, kým protilahlá sa iba dotkne jeho hranice v okamihu, keď práve má nulovú rýchlosť, ináč sa pohybuje mimo magnetického poľa. Vektor indukcie  $\mathbf{B}$  je kolmý na rovinu rámčeka. Amplitúda harmonického pohybu je  $x_0 = \frac{1}{2} l_1$  a kmitočet  $f$ .

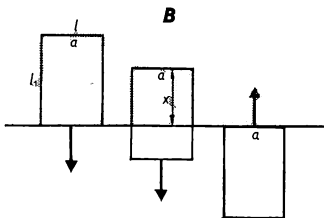
b) Rámček sa pohybuje ako v prvom prípade, ale s tým rozdielom, že zostáva vždy v magnetickom poli.

o) Rámček sa otáča rovnomerne okolo svojej osi súmernosti rovnobežnej so stranou  $l$ . Perióda otáčania je rovnaká, aká bola perióda harmonického pohybu v predchádzajúcich dvoch prípadoch. Pri pohybe zostáva celý rámček v magnetickom poli a os otáčania je kolmá na vektor indukcie.

Určte vo všetkých troch prípadoch časový priebeh indukovaného elektrického prúdu a jeho najväčšiu i najmenšiu hodnotu (bez ohľadu na smer prúdu). Výsledky vzájomne porovnajte a odchýlky vysvetlite. Ku každému prípadu načrtnite jednoduchý, ale výstižný obrázok. Riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty  $B = 0,10 \text{ T}$ ,  $d = 2,0 \text{ mm}$ ,  $l = 20,0 \text{ cm}$ ,  $l_1 = 30,0 \text{ cm}$ ,  $f = 3,0 \text{ Hz}$ ,  $\rho_{\text{Cu}} = 17,2 \cdot 10^{-9} \Omega\text{m}$ .

*Riešenie:*

a) Označme  $x$  vzdialenosť strany  $a$  rámčeka od okraja magnetického poľa v čase  $t$  (obr. 19). Podľa zadania platí, keď označíme  $\omega$  uhlovú frekvenciu harmonického pohybu:



Obr. 19

$$x = x_0 \sin \omega t = \frac{1}{2} l_1 \sin \omega t .$$

Časť rámčeka, ktorá je v tomto čase v magnetickom poli, má plošný obsah

$$S = lx = \frac{1}{2} l l_1 \sin \omega t$$

a prechádzajúci magnetický indukčný tok má veľkosť

$$\Phi = \mu_0 BS = \frac{1}{2} \mu_0 B U_1 \sin \omega t .$$

V rámčeku sa indukuje napätie

$$u = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} \mu_0 B U_1 \omega \cos \omega t .$$

Toto napätie pôsobí v obvode, ktorého elektrický odpor je

$$R = \rho \frac{2(l + l_1)}{\pi \frac{d^2}{4}} = \rho \frac{8(l + l_1)}{\pi d^2} ,$$

takže pre indukovaný prúd platí

$$i = \frac{u}{R} = \frac{1}{2} \mu_0 B U_1 \omega \frac{\pi d^2}{8\rho(l + l_1)} \cos \omega t .$$

Ide zrejme o harmonický striedavý prúd s maximálnou hodnotou

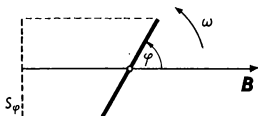
$$I_{\max} = \frac{B U_1 \omega \pi d^2}{16\rho(l + l_1)} = \frac{B U_1 \pi^2 d^2 f}{8\rho(l + l_1)} \quad (1)$$

a minimálnou hodnotou  $I_{\min} = 0$  A.

Pre zadané hodnoty vychádza  $I_{\max} \doteq 10,3$  A.



b) Pretože rámček je vždy v magnetickom poli, prechádza ním konštantný magnetický indukčný tok  $\Phi = BU_1$ , indukované napätie je nulové a indukovaný prúd je taktiež nulový.



Obr. 20

o) — obr. 20. V čase  $t$  je rámček otočený od smeru indukčných čiar o uhol  $\varphi = \omega t$ , jeho priemet do roviny kolmej na magnetickú indukciu  $\mathbf{B}$  má plošný obsah  $S_\varphi = U_1 \sin \omega t$ . Pre prechádzajúci magnetický indukčný tok platí

$$\Phi' = BU_1 \sin \omega t$$

pre indukované napätie

$$u' = \frac{d\Phi'}{dt} = BU_1 \omega \cos \omega t$$

a pre indukovaný prúd

$$i' = BU_1 \omega \frac{\pi d^2}{8\rho(l + l_1)} \cos \omega t.$$

Ide o harmonický striedavý prúd, ktorého maximálna hodnota je

$$I'_{\max} = 2I_{\max},$$

kde  $I_{\max}$  je hodnota daná vzťahom (1); minimálna hodnota tohoto prúdu je  $I'_{\min} = 0$  A.

Pre zadané hodnoty  $I'_{\max} \doteq 20,6 \text{ A}$ .

$I'_{\max} = 2I_{\max}$  preto, lebo v prípade c) je celkový tok  $\Phi'$  viazaný závitom dvojnásobný v porovnaní s tokom  $\Phi$  viazaným závitom v prípade a).

## 2. úloha (navrhl Mojmir Simerský)

a) V děliči napětí podle obr. 21 jsou dány odpory rezistorů  $R_1$ ,  $R_2$ . Určete indukčnost  $L$  a kapacitu  $C$  tak, aby při úhlových kmitočtech  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_1 > \omega_2$ , platilo

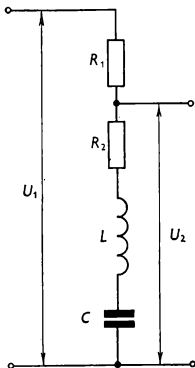
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \sqrt{2}.$$

b) Při kterém úhlovém kmitočtu  $\omega_0$  platí

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} ?$$

c) Znárodněný dělič může sloužit k pozvednutí hlasitosti nízkých i vysokých tónů např. při reprodukci z gramofonových desek. Vysvětlete.

Části a) a b) řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $R_1 = 8,0 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 2,0 \text{ k}\Omega$ ,  $\omega_1 = 5,0 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 2,5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ .



Obr. 21

*Řešení:*

a) Pro obecný úhlový kmitočet  $\omega$  platí

$$\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 = \frac{R_2^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Označíme

$$X = \left| \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right| = \left| \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \right|.$$

Pak má být podle zadání

$$\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 = \frac{R_2^2 + X^2}{(R_1 + R_2)^2 + X^2} = 2 \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Odtud vyjádříme

$$X = \pm \frac{R_2(R_1 + R_2)}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 - 2R_2^2}} = \pm R. \quad (1)$$

Dosazením za  $X$  dostáváme k určení  $L$  a  $C$  rovnice

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = R; \quad -\omega_2 L + \frac{1}{\omega_2 C} = R,$$

z nichž vyjádříme

$$L = \frac{R}{\omega_1 - \omega_2}; \quad C = \frac{\omega_1 - \omega_2}{R\omega_1\omega_2}, \quad (2)$$

kde pro  $R$  platí vztah (1).

Pro zadané hodnoty  $L \doteq 44$  mH,  $C \doteq 0,18$   $\mu$ F.

b) V tomto případě se v děliči neuplatňují reaktance, takže jde o rezonanční úhlový kmitočet, pro který s použitím (2) dostáváme

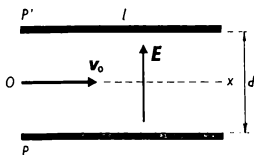
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

a pro zadané hodnoty  $\omega_0 \doteq 1,1 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ .

c)  $U_1$  může být napětí na svorkách přenosky,  $U_2$  napětí přiváděné na vstup zesilovače. Dělič potlačí pásmo ležící mezi kmitočty  $f_2 \doteq 400 \text{ Hz}$  a  $f_1 \doteq 8,0 \text{ kHz}$  (při kmitočtu  $f_0 \doteq 1,8 \text{ kHz}$  je  $U_2 = \frac{1}{5} U_1$ ), vně tohoto pásma poměr  $U_2 : U_1$  roste směrem k nižším i k vyšším kmitočtům, takže tóny odpovídající těmto kmitočtům jsou proti tónům středních kmitočtů v úrovni své hlasitosti relativně pozvednuty.

### 3. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová, CSc.)

Deskový kondenzátor se skládá ze dvou čtvercových desek o straně  $l$ , které jsou spolu rovnoběžné a jsou ve vzájemné vzdálenosti  $d$ . Mezi deskami je stejnorodé elektrické pole, jehož intenzita  $E$  je kolmá k rovinám desek. Protonový paprsek vstupuje v bodě  $O$  ve stejné vzdálenosti od obou desek do elektrického pole, rychlost protonů je  $v_0$ , rovnoběžná s rovinami desek (obr. 22). Vliv tíhové síly je zanedbatelný vzhledem k elektrické síle, kterou působí elektrické pole na protony.

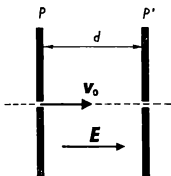


Obr. 22

a) Určete vzdálenost  $d'$  od osy  $Ox$  místa, ve kterém protony opouštějí elektrické pole.

b) Určete kinetickou energii vystupujícího protonu. Vyjádřete ji jako funkci počáteční kinetické energie protonu a vzdálenosti  $d'$ .

c) Do elektrického pole téhož kondenzátoru vstupuje nyní protonový paprsek rychlostí  $v_0$  malým otvorem v desce  $P$  kolmo k rovině desky a vystupuje malým otvorem ve druhé desce  $P'$ . Určete kinetickou energii vystupujícího protonu jako funkci počáteční kinetické energie protonu a vzájemné vzdálenosti  $d$  desek (obr. 23).



Obr. 23

d) Porovnejte kinetické energie protonu vystupujícího z elektrického pole v případech b) a c).

Po obecném vyřešení řešte úlohu pro hodnoty  $l = 0,10$  m,  $d = 0,050$  m,  $E = 40$  kV m<sup>-1</sup>,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C,  $m_p = 1,6 \cdot 10^{-27}$  kg,  $v_0 = 2,4 \cdot 10^6$  m s<sup>-1</sup>.

V obou případech určete změnu kinetické energie protonu v procentech.

*Řešení:*

a) Na proton působí síla  $F = eE$  a uděluje mu zrychle-

ní  $\sigma = \frac{e}{m_p} \mathbf{E}$ . Proton setrvá v elektrickém poli po dobu

$t = \frac{l}{v_0}$ . Za tuto dobu se vzdálí od osy  $Ox$  o délku

$$d' = \frac{1}{2} at^2 = \frac{eEl^2}{2m_p v_0^2}. \quad (1)$$

b) Ve směru osy  $Ox$  má proton při výstupu z elektrického pole složku rychlosti  $v_x = v_0$ , ve směru kolmém

k ose získá rychlost o velikosti  $v_y = at = \frac{eEl}{m_p v_0}$ .

Výsledná rychlost má velikost  $v$  a platí  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ . Proton má tedy kinetickou energii

$$W_k = \frac{1}{2} m_p v^2 = \frac{1}{2} m_p \left( v_0^2 + \frac{e^2 E^2 l^2}{m_p^2 v_0^2} \right) = W_{0k} + eEd', \quad (2)$$

kde  $W_{0k} = \frac{1}{2} m_p v_0^2$  je jeho počáteční kinetická energie a vzdálenost  $d'$  je dána vztahem (1).

c) Kinetická energie  $W_{0k}$  protonu se při průletu elektrickým polem zvětší o hodnotu rovnou práci, kterou síly elektrického pole vykonaly, tedy o hodnotu  $eU$ , kde  $U = Ed$  značí napětí mezi deskami kondenzátoru. Proton má při výstupu z pole kinetickou energii

$$W'_k = W_{0k} + eEd. \quad (3)$$

d) Poněvadž  $d' < \frac{d}{2} < d$ , shledáváme porovnáním

(2) a (3), že  $W_k < W'_k$ .

Pro zadané hodnoty  $d' \doteq 3,5 \text{ mm}$ ,  $W_{0k} \doteq 4,6 \cdot 10^{-15} \text{ J}$ ,  $eEd' \doteq 2,2 \cdot 10^{-17} \text{ J}$ ,  $eEd \doteq 3,2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$ ,  $W_k \doteq 4,6 \cdot 10^{-15} \text{ J}$ ,  $W'_k \doteq 4,9 \cdot 10^{-15} \text{ J}$ ,  $\delta W_k \doteq 0,5 \%$ ,  $\delta W'_k \doteq 7 \%$ .

#### 4. úloha (navrhl prof. dr. Rostislav Košťál)

Spojná soustava odděluje prostor předmětový o indexu lomu  $N_1 = 1,00$  a prostor obrazový o indexu lomu  $N_2 = 1,33$ .

Vzájemná vzdálenost obou ohnisek je  $d = 70,0$  mm a ohnisková vzdálenost předmětová  $f = 23,3$  mm.

a) Sestrojte obraz zdánlivého předmětu výšky  $y = 20,0$  mm, který je v kladné hlavní rovině obrazové, užitím paprsku

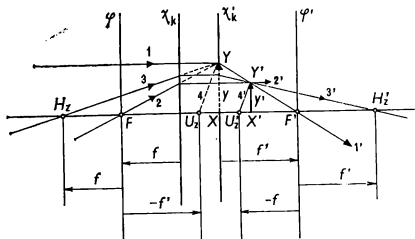
1. rovnoběžného s optickou osou,
2. jdoucího ohniskem  $F$ ,
3. jdoucího záporným hlavním bodem  $H_z$ ,
4. jdoucího záporným uzlovým bodem  $U_z$ .

Vysvětlete způsob konstrukce a určete vlastnosti obrazu.

b) Vypočtete polohu a velikost obrazu.

*Řešení:*

a) — obr. 24



Obr. 24

Na optické ose si vyznačíme ohniska  $F$  a  $F'$  ve vzájemné vzdálenosti  $d = 70,0$  mm. Poněvadž jde o soustavu spojnou, je  $f > 0$ ,  $f' > 0$ , a proto při postupu zleva je prvé ohnisko  $F$  a druhé  $F'$ . Poněvadž  $f = 23,3$  mm, je kladná hlavní rovina předmětová  $\chi_k$  vpravo od ohniska  $F$  ve vzdálenosti 23,3 mm. Velikost  $f'$  stanovíme ze vztahu

$$\frac{f'}{f} = \frac{N_2}{N_1}, \quad \text{a tedy} \quad f' = f \frac{N_2}{N_1}$$

a po dosazení daných hodnot dostáváme

$$f' = 23,3 \frac{1,33}{1,00} \text{ mm} = 31,0 \text{ mm}.$$

Proto je kladná hlavní rovina prostoru obrazového  $\chi'_k$  vlevo od ohniska  $F'$  ve vzdálenosti 31,0 mm.

Obě hlavní roviny jsou navzájem vzdálené

$$d_1 = d - f - f',$$

a tedy

$$d_1 = 70,0 \text{ mm} - 23,3 \text{ mm} - 31,0 \text{ mm} = 15,7 \text{ mm}.$$

Pro určení polohy záporného hlavního bodu použijeme vztah pro příčné zvětšení

$$\beta = -\frac{f}{q} = -\frac{q'}{f'} = -1$$

a z toho

$$q = f, \quad q' = f'.$$

Leží tedy bod  $H_z$  vlevo od  $F$  ve vzdálenosti 23,3 mm a bod  $H'_z$  vpravo od  $F'$  ve vzdálenosti 31,0 mm.

Polohu záporného uzlového bodu určíme ze vztahu pro úhlové zvětšení



$$\gamma = \frac{q}{f'} = \frac{f}{q'} = -1$$

a z toho

$$q = -f', \quad q' = -f.$$

Leží tedy bod  $U_z$  vpravo od  $F$  ve vzdálenosti 31,0 mm a bod  $U'_z$  vlevo od  $F'$  ve vzdálenosti 23,3 mm.

Označíme koncové body předmětu  $X$  (bod na optické ose) a  $Y$ . Paprsek 1, jdoucí rovnoběžně s optickou osou bodem  $Y$ , protíná  $\chi_k$  v bodě, jehož obraz je v bodě  $Y$ . Spojnice ohniska  $F'$  a bodu  $Y$  je paprsek 1' v druhém prostředí. Paprsek 2, jdoucí bodem  $Y$  a ohniskem  $F$ , protíná rovinu  $\chi_k$  v bodě, jehož obraz je na  $\chi'_k$ , a přímka 2', jdoucí tímto bodem rovnoběžně s optickou osou, je paprskem v druhém prostředí.

Paprsek 3, jdoucí bodem  $Y$  do  $H_z$ , protíná  $\chi_k$  v bodě, jehož obraz je na  $\chi'_k$ . Spojnice tohoto bodu s  $H'_z$  je paprskem 3' v druhém prostředí.

Paprsek 4, jdoucí bodem  $U_z$  a bodem  $Y$ , jde do druhého prostředí rovnoběžně posunut — paprsek 4', jdoucí bodem  $U'_z$ . Všechny paprsky se protínají v druhém prostředí v bodě  $Y'$ . Zdánlivý předmět  $XY$  má tedy skutečný obraz  $X'Y'$ .

Obraz je ve skutečném prostoru obrazovém a vychází skutečný, přímý a zmenšený.

b) Souřadnici  $q'$  obrazu daného předmětu určíme z Newtonovy rovnice

$$q' = \frac{ff'}{q}.$$

Pro naše hodnoty  $f = 23,3$  mm,  $f' = 31,0$  mm,  $d_1 = 15,7$  mm je

$$q = -f - d_1 = -23,3 \text{ mm} - 15,7 \text{ mm} = -39,0 \text{ mm},$$

a tedy

$$q' = \frac{23,3 \cdot 31,0}{-39,0} \text{ mm} = -18,5 \text{ mm}.$$

Velikost obrazu plyne ze vztahu pro příčné zvětšení

$$y' = -y \frac{f}{q}.$$

Po dosazení hodnot dostáváme

$$y' = -20,0 \frac{23,3}{-39,0} \text{ mm} = 12,0 \text{ mm}.$$

**5. úloha** (navrhl ing. Jiří Machalický, CSc.)

Měření indexu lomu spojně čočky

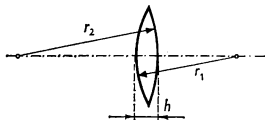
Úvod

Pro optickou mohutnost  $D$  spojně čočky platí vztah

$$D = \frac{1}{f} = (n - 1)\sigma - \frac{(n - 1)^2}{n} \varphi, \quad (1)$$

kde  $\sigma = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  (tzv. vypuklost čočky),  $\varphi = \frac{h}{r_1 r_2}$ .

Význam délek  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $h$  je zřejmý z obr. 25.



Obr. 25

Stanovíme-li tedy měřením  $f$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  a dosadíme do (1), můžeme index lomu  $n$  skla, z něhož je čočka vyrobena, vypočítat jako kladné řešení kvadratické rovnice

$$(\sigma - \varphi)n^2 - \left(\sigma + \frac{1}{f} - 2\varphi\right)n - \varphi = 0. \quad (2)$$

Pro velmi tenkou čočku ( $h \approx 0$ ,  $\varphi \approx 0$ ) lze v (1) zanedbat poslední člen, takže potom

$$n \approx 1 + \frac{1}{f\sigma}. \quad (3)$$

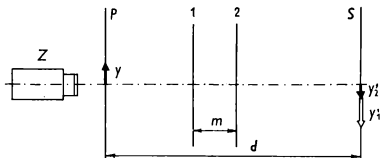
### Pomůcky

Optická lavice se třemi stojánky, spojná čočka, zdroj světla, zobrazovaný předmět, stínítko, list milimetrového papíru, dva trojúhelníky, list pauzovacího papíru, mikrometr, délkové měřítko, ostrá tužka, kružítko.

### Postup práce

#### A. Měření ohniskové vzdálenosti $f$ čočky

Můžeme měřit libovolnou metodou, ale nejvhodnější je metoda Besselova, jejíž princip je znázorněn v obr. 26.

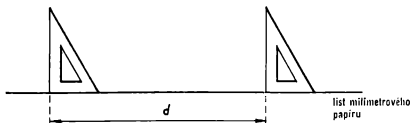


Obr. 26

Zobrazovaný předmět umístíme v rovině  $P$  a osvětlíme ho zdrojem světla  $Z$ . Do vzdálenosti  $d$ , kterou najdeme zkusmo, postavíme stínítko  $S$ . Ostrý obraz na stínítku dostaneme při dvou polohách čočky (1 a 2, zvětšený a zmenšený), jejichž vzájemná vzdálenost je  $m$ . Ohniskovou vzdálenost čočky vypočítáme ze vztahu

$$f = \frac{d^2 - m^2}{4d}. \quad (4)$$

Vzdálenost  $d$  změřte co nejpřesněji, nejlépe pomocí dvou trojúhelníkových pravítek a listu milimetrového papíru (obr. 27). Rovněž co nejpřesněji změřte vzdále-



Obr. 27

nost  $m$ . Usnadní vám to dvojitá ryska na plexisklovém štítku ve stojánku čočky (rysky jsou na obou stranách štítku, aby se pokud možno vyloučila paralakční chyba při čtení).

Měřte desetkrát, vždy dosadte do (4) a vypočítejte příslušnou hodnotu  $f_i$ , pak vezměte aritmetický střed  $\bar{f}$  všech měření. Vypočítejte rovněž střední chybu aritmetického středu podle vzorce

$$\delta(\bar{f}) = \frac{5}{2} \frac{\Sigma(\Delta_+)_i}{n \sqrt{n-1}},$$

kde  $(\Delta_+)_i = \bar{f} - f_i > 0$  značí kladné odchylky op aritmetického středu,  $n$  počet měření. Výsledek zapište ve tvaru

$$f = \bar{f} \pm \bar{\delta}(f).$$

B. Měření tloušťky čočky a poloměrů lámavých kulových ploch

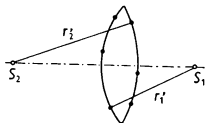
Tloušťku  $h$  čočky změřte mikrometrem. Za tímto účelem vyjměte čočku z držáku.

Poloměry vrchlíků se běžně měří sférometrem, ale v našem případě to není možné, protože čočka je příliš malá. Proto postupujeme takto: Odstraníme stojánek s předmětem, do druhého stojánu dáme destičku z matovaného skla a na její zadní stranu přiložíme list pauzovacího papíru. Čočku sklopíme o  $90^\circ$  (obr. 28) a postavíme



Obr. 28

tak, aby na papíře vznikl ostrý obraz jejího příčného řezu. Ten má ovšem tloušťku  $h' > h$ , poněvadž svazek paprsků vycházejících ze zdroje je mírně rozbíhavý. Na obrysu každého z obou kruhových oblouků (obr. 29)



Obr. 29

vyznačíme hrotem ostré tužky tři body, sestrojíme středy  $S_1, S_2$  oblouků a změříme délky  $r'_1, r'_2, h'$ . Pak platí

$$r_1 = r'_1 \frac{h}{h'}, \quad r_2 = r'_2 \frac{h}{h'}.$$

### C. Výpočet indexu lomu

1. Ze změřených hodnot vypočítejte  $\sigma$  a  $\varphi$ , dosadte do (2) a vypočítejte  $n$ .
2. Pomocí hodnot  $f, \sigma$  vypočítejte  $n$  ze vztahu (2).
3. Stanovte chybu při výpočtu podle jednoduššího vztahu (3).

### Poznámky

1. Všechny hodnoty naměřené v části A sestavte do přehledné tabulky, pak uveďte zjištěné hodnoty  $\bar{f}, \bar{\delta}(f), f$  spolu se všemi potřebnými číselnými výpočty.
2. V nákresu na pauzovacím papíře vyznačte a okótuje všechny tři délky  $r'_1, r'_2, h'$ .
3. Vypočítané hodnoty  $r_1, r_2$  správně zaokrouhlete s přihlédnutím k přesnosti měření.
4. Podobně zaokrouhlete i obě vypočítané hodnoty indexu lomu.

### Řešení:

#### A. Měření ohniskové vzdálenosti

Výsledky měření ohniskové vzdálenosti  $f$  Besselovou metodou jsou sestaveny v tabulce 15. Zpracováním změřených hodnot dostáváme

$$\bar{f} = \frac{\Sigma f_i}{n} = \frac{592,7}{10} \text{ mm} = 59,3 \text{ mm}.$$

TABULKA 15

$i$	$d$ mm	$m$ mm	$f_i$ mm	$\Delta_+$ mm
1	241,0	38,5	58,7	0,6
2	244,0	53,0	58,1	1,2
3	260,0	81,0	58,7	0,4
4	272,0	92,5	60,1	
5	283,0	105,0	61,0	
6	298,0	138,0	58,5	0,8
7	305,0	146,5	58,7	0,5
8	314,0	154,5	59,5	
9	333,0	176,5	59,9	
10	345,0	192,0	59,5	
			$\Sigma = 592,7$	$\Sigma = 3,8$

$$\bar{f} = \frac{\Sigma f_i}{n} = \frac{592,7}{10} \text{ mm} = 59,3 \text{ mm}$$

Pro střední chybu  $\bar{\delta}(f)$  aritmetického středu  $\bar{f}$  vychází

$$\bar{\delta}(f) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3,8}{10 \sqrt{(10-1)}} \text{ mm} = 0,317 \text{ mm} \doteq 0,3 \text{ mm} ,$$

$$f = (59,3 \pm 0,3) \text{ mm} .$$

B. Měření tloušťky čočky a poloměrů lámavých kulových ploch

Postupem uvedeným v zadání bylo změřeno

$$r'_1 = 74,5 \text{ mm} , \quad r'_2 = 63,3 \text{ mm} , \quad h' = 14,0 \text{ mm} .$$

Absolutní chyby těchto veličin byly odhadnuty takto:

$$\delta r'_1 = \delta r'_2 = \pm 1 \text{ mm} ,$$

$$\delta h' = 0,2 \text{ mm} .$$

Skutečná tloušťka  $h$  čočky byla změřena mikrometrem

$$h = (12,830 \pm 0,005) \text{ mm} .$$

Vliv nepřesnosti v určení tloušťky  $h$  je tak malý, že se dá při dalších výpočtech zanedbat.

Skutečné rozměry čočky určíme, podle zadání, takto:

$$r_1 = 74,5 \frac{12,8}{14,0} \text{ mm} \doteq 68,4 \text{ mm} ,$$

$$r_2 = 63,3 \frac{12,8}{14,0} \text{ mm} \doteq 58,0 \text{ mm} .$$

Relativní chyby odpovídající odhadnutým chybám absolutním označíme  $\varrho(r'_1)$ ,  $\varrho(r'_2)$ ,  $\varrho(h')$ :

$$\varrho(r'_1) = \frac{1}{74,5} \doteq 0,014$$

$$\varrho(r'_2) = \frac{1}{63,3} \doteq 0,016$$

$$\varrho(h') = \frac{0,2}{14} \doteq 0,015$$

Pro relativní chyby skutečných rozměrů čočky (veličin vypočtených) dostáváme

$$\varrho(r_1) = 0,014 + 0 + 0,015 = 0,029$$

$$\varrho(r_2) = 0,016 + 0 + 0,015 = 0,031$$



Z toho vycházejí absolutní chyby

$$\delta(r_1) = 0,03 \cdot 68,4 \text{ mm} \doteq 2 \text{ mm}$$

$$\delta(r_2) = 0,03 \cdot 58,0 \text{ mm} \doteq 2 \text{ mm}$$

Vypuklost čočky určíme ze změřených hodnot:

$$\sigma = \frac{1}{68,4} \text{ mm}^{-1} + \frac{1}{58,0} \text{ mm}^{-1} \doteq 0,0318 \text{ mm}^{-1}$$

a střední chyba této vypočtené veličiny je

$$\begin{aligned} \delta(\sigma) &= \delta\left(\frac{1}{r_1}\right) + \delta\left(\frac{1}{r_2}\right) = \varrho(r_1) \frac{1}{r_1} + \varrho(r_2) \frac{1}{r_2} = \\ &= 0,03 \frac{1}{68,4} \text{ mm}^{-1} + 0,03 \frac{1}{58,0} \text{ mm}^{-1} \doteq 0,0009 \text{ mm}^{-1}. \end{aligned}$$

Vypuklost čočky je tedy

$$\sigma = (0,0318 \pm 0,0009) \text{ mm}^{-1}.$$

Pro výpočet dále potřebujeme veličinu  $\varphi = \frac{h}{r_1 r_2}$ :

$$\varphi = \frac{12,8}{68,4 \cdot 58,0} \text{ mm}^{-1} \doteq 0,00324 \text{ mm}^{-1}.$$

### C. Výpočet indexu lomu

1. Výpočet podle vzorce (2) uvedeného v zadání

Řešením kvadratické rovnice (2) dostáváme kladné řešení

$$n = \frac{\sigma + \frac{1}{f} - 2\varphi + \sqrt{\left(\sigma + \frac{1}{f} - 2\varphi\right)^2 + 4(\sigma - \varphi)\varphi}}{2(\sigma - \varphi)}$$

a pro uvažované hodnoty

$$n = \frac{0,0422 + \sqrt{0,0422^2 + 0,00037}}{0,057}$$

$$n \doteq 1,54 .$$

2. Výpočet podle vzorce (3) uvedeného v zadání dává

$$n = 1 + \frac{1}{59,2 \cdot 0,0318} \doteq 1,532 . \quad (5)$$

3. Ke stanovení chyby vypočtené hodnoty (5) potřebujeme znát chybu veličiny  $\frac{1}{f\sigma}$ , jejíž střední hodnota je 0,532.

Relativní chyba:  $\varrho(f) + \varrho(\sigma) = 0,051 + 0,032 = 0,083$ ;

absolutní chyba:  $0,083 \cdot 0,532 \doteq 0,044$ .

Stejnou absolutní chybu má i hodnota (5), takže zaokrouhlením dostáváme

$$n = 1,53 \pm 0,04 .$$

## 2. Úlohy kategorie B

Úlohy a jejich řešení recenzovali dr. ing. Daniel Klivanec, CSc. a Mojmír Simerský.

### a) První kolo soutěže

#### 1. úloha (navrhol dr. Emil Rajčan, CSc.)

Na pevnej kladke o polomere  $r$ , ktorá sa môže otáčať okolo vodorovnej osi, je navinutá niť. Na voľnom konci nite je zavesené závažie hmotnosti  $m$ , ktoré po uvoľnení z kludovej polohy vykoná dráhu  $h$  za dobu  $t$ .

a) Vypočítajte moment zotrvačnosti  $J$  kladky. Pri

výpočte neuvažujte hmotnosť nite a trenie v ložisku kladky.

b) Pre kruhový priamy valec z homogénneho materiálu možno moment zotrvačnosti vzhľadom na jeho geometrickú os určiť podľa vzorca

$$J = \frac{1}{2} Mr^2,$$

kde  $M$  je hmotnosť valca a  $r$  jeho polomer.

Ak kladka by mala tvar takéhoto valca, vykonajme skutočné meranie príslušných veličín a určme moment zotrvačnosti  $J_1$  jednak podľa bodu a), jednak  $J_2$  podľa vzorca. Odôvodnite, prečo dostávame odlišné hodnoty, a posúďte, ktorá hodnota bude väčšia.

c) Vyjadrite zrýchlenie  $a$  závažia ako funkciu veličín nezávislých od času.

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty  $r = 0,20$  m,  $m = 0,21$  kg,  $h = 1,85$  m,  $t = 2,2$  s.

d) Vypracujte návrh na technickú realizáciu zariadenia, ktorým by bolo možné vykonať opísané meranie.

*Riešenie:*

a) Podľa zákona energie platí

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2, \quad (1)$$

kde  $v$  značí posuvnú rýchlosť závažia,  $\omega$  uhlovú rýchlosť kladky v čase  $t$ ,  $J$  moment zotrvačnosti kladky. Pretože

$$v = \frac{2h}{t}, \quad \omega = \frac{v}{r} = \frac{2h}{rt},$$

dostaneme z (1) po úprave

$$J = mr^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (2)$$

Pomocou pohybových rovníc možno úlohu riešiť takto: Označme  $F$  veľkosť sily, ktorá napína niť a pôsobí v tangenciálnom smere na kladku. Potom platí

$$mg = ma + F, \quad (3)$$

kde

$$a = \frac{v}{t} = \frac{2h}{t^2} \quad (4)$$

značí veľkosť posuvného zrýchlenia závažia. Ďalej platí

$$Fr = J\varepsilon, \quad (5)$$

kde

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2h}{rt^2} \quad (6)$$

značí uhlové zrýchlenie kladky. Keď zo sústavy rovníc (3) až (6) vylúčime  $a$ ,  $F$ ,  $\varepsilon$ , dostaneme výsledok (2). Pre zadané hodnoty  $J \doteq 0,102 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$ .

b) Pri meraní sa vždy prejaví trenie v ložiskách kladky a príp. aj ďalšie prekážky pohybu. Preto nameriame pre dobu  $t$  hodnotu väčšiu ako pri pohybe bez prekážok. Pretože doba  $t$  sa vyskytuje v čitatelovi vzťahu (2), je  $J_1 > J_2$ .

c) Zo (4) vypočítame  $t^2$  a dosadíme do (2). Získame vzťah, z ktorého vyjadríme

$$a = g \frac{mr^2}{mr^2 + J}.$$

Pre zadané hodnoty a hodnotu vypočítanú pre  $J$  vychádza  $a \doteq 0,76 \text{ m s}^{-2}$ .

d) Meranie by mohlo byť realizované spôsobom uvedeným v ročenke XIII. ročníka FO, str. 75 až 77.

## 2. úloha (navrhol dr. ing. Daniel Kluvanec, CSc.)

Valcová nádoba má vonkajší polomer  $r$ , výšku  $h$  a hrúbku steny  $d$ .

a) Nádoba pláva so zvislou osou v stálej rovnovážnej polohe v kvapaline o hustote  $\rho_1$ . Určte podmienku, ktorú musí spĺňať hustota  $\rho$  steny nádoby.

b) Do nádoby sypeme piesok, ktorého povrch v nádobe upravíme vodorovne. Určte hmotnosť  $M$  piesku tak, aby bola zachovaná podmienka a).

c) Uvážte, či tvar povrchu piesku ovplyvní riešenie úlohy b).

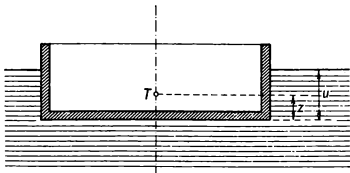
Riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty  $r = 0,15$  m,  $h = 0,10$  m,  $d = 0,010$  m,  $\rho_1 = 1,0 \cdot 10^3$  kg m<sup>-3</sup>.

*Riešenie:*

Predpokladáme, že steny nádoby sú homogénne.

a) Vo všeobecnom prípade pôsobí na plávajúce teleso dvojica síl — tiaž telesa a vztlaková sila — natáčajúca teleso do takej polohy, pri ktorej obe sily pôsobia v jednej zvislej priamke, tzv. osi plávania. Pre posúdenie stability telesa pri plávaní je dôležité poznať vzájomnú polohu ťažiska a tzv. metacentra telesa. Metacentrum je priesečník vztlakovej sily a osi plávania pri vychýlení telesa zo stálej polohy. Teleso pláva v stálej polohe, ak metacentrum telesa je nad jeho ťažiskom. Táto podmienka je splnená vždy, ak ťažisko telesa je nižšie ako pôsobisko vztlakovej sily.

Nádoba podľa rozmerov zo zadania úlohy má dosť veľký pomer  $\frac{r}{h}$ , čo je predpokladom k tomu, že bude plávať



Obr. 30

v stálej polohe so zvislou osou, i keď jej ťažisko bude nad pôsobiskom vztlakovej sily.

Vzdialenosť z ťažiska  $T$  nádoby od jej dna určíme pomocou hmotností a ťažísk dna a bočnej steny nádoby (obr. 30). Platí

$$z = \frac{(2r - d)(h^2 - d^2) + r^2d}{2[(2r - d)(h - d) + r^2]} \quad (1)$$

Po dosadení hodnôt veličín máme  $z = 3,2 \cdot 10^{-2}$  m. Ak sa nádoba nemá potopiť, musí platiť

$$u \leq h,$$

čo môžeme písať tiež v tvare

$$m \leq V \rho_1,$$

kde  $u$  je hĺbka ponoru nádoby,  $m$  hmotnosť nádoby a  $V$  jej objem. Maximálna hmotnosť nádoby môže byť

$$V' \rho_{\max} = m_{\max} = V \rho_1, \quad (2)$$

kde  $V'$  je objem dna a stien nádoby a  $\rho_{\max}$  maximálna hustota nádoby. Potom z (2) máme

$$\rho_{\max} = \frac{V}{V'} \rho_1 = \frac{r^2 h}{d[(2r-d)(h-d) + r^2]} \rho_1$$

a tiež

$$\rho \leq \rho_{\max}.$$

Po dosadení

$$\rho \leq 4,6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}.$$

Vieme celkom určiť, že nádoba bude plávať v stálej polohe, ak ťažisko nádoby bude nižšie ako pôsobisko vztlakovej sily, t. j.

$$z < \frac{u}{2}. \quad (3)$$

Z Archimedovho zákona platí

$$\pi r^2 u \rho_1 = \pi d [r^2 + (2r-d)(h-d)] \rho$$

a z toho

$$u = \frac{\rho d}{r^2 \rho_1} [r^2 + (2r-d)(h-d)]. \quad (4)$$

Z (1), (3), (4) máme

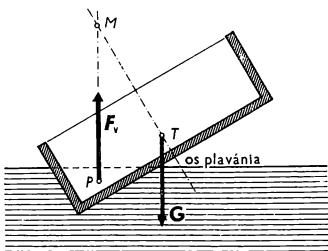
$$\rho > \rho_1 \frac{r^2}{d} \frac{(2r-d)(h^2-d^2) + r^2 d}{[(2r-d)(h-d) + r^2]^2} = \rho'_{\min}.$$

Číselne  $\rho'_{\min} \doteq 2,9 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ .

Nutnou podmienkou k tomu, aby ťažisko plávajúcej nádoby bolo nižšie ako pôsobisko vztlakovej sily, je podmienka pre hustotu  $\rho$  steny nádoby

$$\rho'_{\min} < \rho \leq \rho_{\max}.$$

Na základe ďalších úvah zistíme, že táto nádoba môže mať hustotu  $\rho < \rho'_{\min}$ , a pritom bude plávať v stálej polohe. Keď napr. nádoba má malú hustotu v porovnaní s hustotou  $\rho_1$  kvapaliny, potom metacentrum  $M$  nádoby



Obr. 31

je vľavo od ťažiska  $T$  nádoby (obr. 31), ak ťažisko je v malej vzdialenosti od dna nádoby. V našom prípade  $z \doteq 3,2 \cdot 10^{-2}$  m.

Podobne môžeme úsudkom zistiť, na základe približného určenia pôsobiska  $P$  vztlakovej sily  $F_v$ , že nádoba pláva v stabilnej polohe i pri ďalších rôznych hustotách jej stien, t. j. aj rozdielnych hĺbkach ponoru nádoby. Potom pre hustotu  $\rho$  steny platí

$$\rho_{\min} = 0 < \rho < \rho_{\max}. \quad (5)$$

Presné stanovenie polohy metacentra pre určité vychýlenie nádoby je úloha mimoriadne náročná a vyžadovala by si zložité matematické výpočty.

b) Označme  $M$  hmotnosť piesku v tom prípade, keď nádoba sa ešte nepotopí. Z Archimedovho zákona potom platí



$$M = \pi\{r^2 h \rho_1 - d[r^2 + (2r - d)(h - d)]\rho\},$$

kde  $\rho$  vyhovuje podmienke (5).

Najväčšiu hmotnosť  $M_{\max}$  môže mať piesok v prípade, keď  $\rho \doteq \rho_{\min} = 0$  (hustota steny nádoby je čo najmenšia), potom

$$M_{\max} = \pi r^2 h \rho_1.$$

Z toho

$$0 \leq M < M_{\max}.$$

Po dosadení

$$0 \text{ kg} \leq M < 7,0 \text{ kg}.$$

c) Tvar povrchu piesku môže ovplyvniť smer osi plávania vzhľadom k nádobe, i samotnú stálu polohu plávajúcej nádoby. Aby os plávania zostala totožná s geometrickou osou nádoby, musí byť piesok sypaný rotačne symetricky vzhľadom na os nádoby.

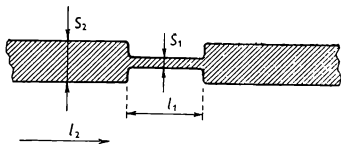
### 3. úloha (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

Na litinové kolo byla těsně naražena ocelová obruč obdélníkového průřezu o šířce  $d$ . Při naražení měla obruč teplotu  $t_1$ , litinové kolo a okolní vzduch měly teplotu  $t_2$ ,  $t_2 < t_1$ . Obruč při chladnutí praskla, poněvadž měla příčnou trhlinu délky  $h$ , rovnoběžnou s osou kola.

Vypočítejte minimální délku trhliny.

Mez pevnosti oceli je  $\sigma_p$ , modul pružnosti v tahu oceli je  $E$  a součinitel teplotní délkové roztažnosti oceli je  $\alpha$ . Předpokládáme, že Hookův zákon platí až po mez pevnosti. K zmenšování šířky a tloušťky obruče při jejím chladnutí nepřihlížíme.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $\sigma_p = 1,8 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ ,  $E = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ,  $t_1 = 270 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .



Obr. 32

*Řešení:*

Abychom hlouběji pochopili fyzikální procesy, které při tomto ději probíhají, předpokládáme obecně, že obruč má užší část o průřezu  $S_1$  a délce  $l_1$  a širší část o průřezu  $S_2$  a délce  $l_2$  (obr. 32).

Chladnutí obruče na litinovém kole lze fyzikálně rozložit na dva děje: tepelnou kontrakci, přičemž zkrácení  $\Delta l$  obruče je  $\Delta l = \alpha \Delta t (l_1 + l_2)$ , a tahovou deformaci o celkovém prodloužení  $\Delta l$ .

Celkové prodloužení je příčinou vzniku tahové síly  $F$ . Pro  $\Delta l$  platí

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{Fl'_1}{S_1 E} + \frac{Fl'_2}{S_2 E},$$

kde

$$l'_1 = l_1(1 + \alpha \Delta t) \approx l_1,$$

$$l'_2 = l_2(1 + \alpha \Delta t) \approx l_2.$$

Z tohoto vztahu dostáváme

$$F = \frac{E \Delta l}{\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2}}.$$

Aby došlo k porušení materiálu, musí platit

$$\sigma = \frac{F}{S_1} = \frac{E\Delta l}{l_1 + \frac{S_1}{S_2} l_2} = \frac{E\alpha\Delta t(l_1 + l_2)}{l_1 + \frac{S_1}{S_2} l_2} \geq \sigma_p$$

a z toho

$$\frac{S_2}{S_1} \geq \frac{\sigma_p}{E\alpha\Delta t - \frac{l_1}{l_2}(\sigma_p - E\alpha\Delta t)}.$$

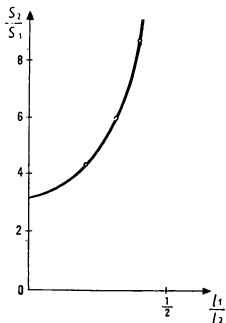
Dosazením zadaných hodnot dostáváme

$$\frac{S_2}{S_1} \geq \frac{3}{1 - 2\frac{l_1}{l_2}}. \quad (1)$$

Tato podmínka je reálná, platí-li

$$\frac{l_1}{l_2} < \frac{1}{2}.$$

Závislost mezního poměru  $\frac{S_2}{S_1}$  na  $\frac{l_1}{l_2}$  je graficky znázorněna na obr. 33.



Obr. 33

Nerovnice (1) vyjadruje pomer  $\frac{S_2}{S_1}$  pro určité hodnoty veličin  $l_1, l_2$ ,  $\left(\frac{l_1}{l_2} < \frac{1}{2}\right)$ , potřebný k tomu, aby se ocelová obruč s parametry podle zadání úlohy ( $\sigma_p, E, \alpha, \Delta t = t_1 - t_2$ ) přetrhla.

V našem případě má obruč jen příčnou trhlinu, takže  $\frac{l_1}{l_2} \ll 1$  a podle (1) platí

$$\frac{S_2}{S_1} \geq 3,$$

$$\text{tj. } h = \frac{2}{3} d.$$

Při řešení jsme neuvažovali smykovou deformaci.

#### 4. úloha (navrhla dr. Mária Rakovská)

a) Dve kvapky ortuti rovnakej teploty  $t_1$  a rovnakého polomeru  $r$  sa spojili do jednej kvapky, ktorej teplota je  $t_2$ . Určte rozdiel  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

b) Stred kvapky ortuti, ktorá odkvapne z kapiláry, je vo výške  $h$  nad stredom kvapky ležiacej na podložke. Polomer oboch kvapiek je  $r$  a teplota  $t'_1$ . Kvapka ortuti dopadne na kvapku ležiacu na podložke a obe kvapky sa spoja. Teplota vzniknutej kvapky je  $t'_2$ . Určte rozdiel  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ . Predpokladajte, že nedochádza k výmene tepla medzi kvapkami a okolím. Ďalej predpokladajte, že kvapky majú guľový tvar. Zmenu výšky stredov kvapiek pred spojením a po spojení do jednej kvapky neuvažujte. Predpokladajte, že merné teplo  $c$ , povrchové napätie  $\sigma$  a hustota  $\rho$  ortuti sa počas uvedených dejov nemenia.

Riešte najprv všeobecne, potom pre  $r = 1,5 \cdot 10^{-3}$  m,  $h = 1,0 \cdot 10^{-2}$  m. K výpočtu použite hodnoty veličín  $c, \sigma, \rho$  pri teplote  $20^\circ\text{C}$ .

Riešenie:

a) Každá z oboch kvapiek má povrchovú energiu

$$W_{p1} = 4\pi r^2 \sigma, \quad (1)$$

kde  $\sigma$  značí povrchové napätie ortuti. Spojením vznikne kvapka s polomerom  $r_1$ , pre ktorý platí

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi r_1^3 &= 2 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \\ r_1 &= r \sqrt[3]{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Väčšia kvapka má povrchovú energiu

$$W_{p2} = 4\pi r_1^2 \sigma = 4\pi r^2 \sigma \sqrt[3]{4}. \quad (3)$$

Pretože  $2W_{p1} > W_{p2}$ , zväčší sa vnútorná energia kvapky

$$\Delta W_p = 2W_{p1} - W_{p2}, \quad (4)$$

čo sa prejaví zväčšením teploty. Diferenciu  $\Delta W_p$  vyjadríme pomocou  $c$  a  $\Delta t$ :

$$\Delta W_p = \frac{4}{3} \pi r_1^3 \rho c \Delta t. \quad (5)$$

Za  $\Delta W_p$  dosadíme z (4), za  $r_1$  z (2), za  $W_{p1}$  a  $W_{p2}$  z (1) a (3). Po úprave vyjadríme

$$\Delta t = 3\sigma \frac{2 - \sqrt[3]{4}}{2\rho c}.$$

Pre zadané hodnoty a pre  $\sigma = 0,491 \text{ N m}^{-1}$ ,  $\rho = 1,355 \cdot 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $c = 140 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$  vychádza  $\Delta t \doteq 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ K}$ .

b) K ľavej strane vzťahu (5) je treba pripočítať tiažovú potenciálnu energiu, o ktorú sa pri dopade kvapky taktiež zväčší vnútorná energia, čo má za následok ďalšie zvýšenie teploty:

$$\Delta W_p + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g h = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho c \Delta t'.$$

Odtiaľ, opäť s použitím (1) až (4),

$$\Delta t' = \frac{3\sigma \left(2 - \sqrt[3]{4}\right) + r \rho g h}{2r \rho c}$$

a pre zadané hodnoty  $\Delta t' \doteq 4,6 \cdot 10^{-4}$  K.

## 5. úloha (navrhl Milan Rádl)

Do roztaveného čistého germania o hmotnosti  $m = 100$  g byl přidán antimon o hmotnosti  $m_1 = 3,22$  mg a galium o hmotnosti  $m_2 = 0,780$  mg. Atomy obou přísad se v tavenině rovnoměrně rozptýlily.

- Určete typ vodivosti vzniklé slitiny.
- Určete měrnou vodivost  $\gamma$  a měrný odpor  $\rho$  slitiny.
- Určete Hallovu konstantu  $R_H$  slitiny.

Diry mají v germaniu pohyblivost  $\mu_p = 0,170 \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ , elektrony  $\mu_n = 0,360 \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Ostatní číselné údaje potřebné k řešení vyhledejte v tabulkách.

Vlastní vodivost je zanedbatelná. Všechny akceptory a všechny donory jsou ionizovány. Změna objemu následkem přidání uvedených přísad je zanedbatelná. Rozdíl mezi pohyblivostí Hallovou a driftovou neuvažujeme. Řešte nejprve obecně, potom pro zadané hodnoty.

*Řešení:*

a) Označíme  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C elementární náboj,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  konstantu Avogadrovu,  $M_{m_1} = 122 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$  molovou hmotnost antimonu,  $M_{m_2} = 69,7 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$  molovou hmotnost galia,  $s = 5,30 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  hustotu germania.

Germanium má objem  $V = \frac{m}{s}$ . Pro počet  $n_1$  donorů a  $n_2$  akceptorů platí

$$n_1 = \frac{m_1 N_A}{M_{m_1}}; \quad n_2 = \frac{m_2 N_A}{M_{m_2}}$$

a pro jejich objemové koncentrace

$$C_D = \frac{n_1}{V} = \frac{m_1 N_A s}{M_{m_1} m}; \quad C_A = \frac{n_2}{V} = \frac{m_2 N_A s}{M_{m_2} m}.$$

Pro zadané hodnoty  $C_D \doteq 8,44 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$ ,  $C_A \doteq 3,57 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$ . Poněvadž  $C_D > C_A$ , má slitina vodivost typu N.

b) Poněvadž příměsi obojího typu se kompenzují, má slitina měrnou vodivost takovou, jako kdyby obsahovala jen elektrony (vlastní vodivost zanedbáváme) o koncentraci  $N = C_D - C_A$ , pro zadané hodnoty  $N \doteq 4,87 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$ .

Pro měrnou vodivost platí v tomto případě  $\gamma = eN\mu_N$  a pro měrný odpor  $\rho = \frac{1}{\gamma}$ . Pro zadané hodnoty  $\gamma \doteq 2,80 \cdot 10^4 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ,  $\rho \doteq 3,57 \cdot 10^{-5} \text{ } \Omega \text{ m}$ .

c) Pro Hallovu konstantu nevlastního polovodiče platí  $R_{\text{HN}} = \frac{1}{eN}$  a pro vypočítanou hodnotu  $N$  vyjde  $R_{\text{HN}} \doteq 1,28 \cdot 10^{-5} \text{ C}^{-1} \text{ m}^3$ .

## 6. úloha (navrhol dr. ing. Daniel Kluvanec, CSc.)

### Vyšetrovanie charakteristiky polovodičovej diódy

#### Pomôcky:

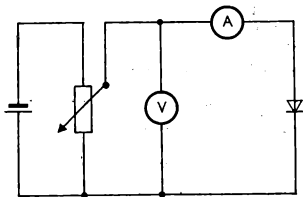
dióda KY 701, zdroj jednosmerného napätia do 100 V, reostat 1000  $\Omega$  až 3000  $\Omega$  (približne), voltmeter, ampér-meter.

#### Cieľ merania:

Meranie charakteristiky polovodičovej diódy KY 701.

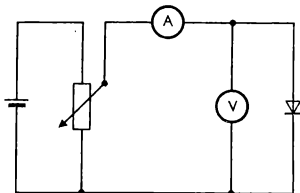
#### Postup merania:

Najskôr určíme charakteristiku v závernom smere. Zapojíme obvod podľa obr. 34. Napätie postupne znižujeme z hodnoty  $U = 70$  V na nulu, aby sme získali niekoľko bodov na zobrazenie charakteristiky. Prúd, ktorý prechádza diódou, je veľmi malý. Charakteristiku v priepustnom smere meriame v zapojení podľa obr. 35. Napätie zvyšujeme od nuly až do hodnoty, pri ktorej tečie diódou maximálny prípustný prúd.



Obr. 34





Obr. 35

Uvážte, či je potrebné opraviť údaje o úbytok napätia na použítom ampérmetri, resp. o prúd predchádzajúci použitým voltmetrom. Ak áno, opravte namerané hodnoty.

Výsledky merania a korigované hodnoty vpíšte do vhodnej tabuľky.

Zostrojte graf závislosti prúdu  $I$  od napätia  $U$  diódy. Medzné hodnoty diódy vyhľadajte v katalógu polovodičových súčiastok TESLA.

V prípade, že nemáte k dispozícii diódu KY 701, môžete k meraniu použiť aj inú polovodičovú diódu. Dbajte na to, aby ste neprekročili jej medzné hodnoty.

*Riešenie:*

1. V katalógu elektróniek, obrazoviek a polovodičových súčiastok TESLA vyhľadáme medzné hodnoty veličín polovodičovej diódy KY 701 (resp. KY 701 F). Pre diódu KY 701 je v katalógu uvedené (Příruční katalog elektronek, obrazovek a polovodičových prvků TESLA, r. 1974—75, vydavateľ TESLA Rožnov, str. P 60)  $U_{\text{KAM}} = 80 \text{ V}$ ,  $I_{\text{AK}} = 700 \text{ mA}$ , kde  $U_{\text{KAM}}$  je špičkové záverné napätie,  $I_{\text{AK}}$  je medzný prúd diódou v prie-

pustnom smere. Medzné napätie  $U_{KA}$  na dióde v závernom smere je od špičkového záverného napätia nižšie približne o 10 % hodnoty špičkového záverného napätia. To znamená, že záverné napätie diódy KY 701 môže nadobúdať hodnoty až do 70 V a pritom sa dióda neporuší.

2. Zapojíme elektrický obvod podľa obr. 34. Prúd  $I_{KA}$ , ktorý tečie diódou v závernom smere, meriame mikroampérmetrom. Napätie  $U_{KA}$  v závernom smere postupne znižujeme z hodnoty 70 V na 0 V. Výsledky merania sú v tab. 16.

TABUĽKA 16

$\frac{U_{KA}}{V}$	70	65	60	55	50	40
$\frac{I_{KA}}{\mu A}$	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1	0

Prúdy  $I_{KA}$  v závernom smere diódy sú veľmi malé. Úbytok  $\Delta U$  napätia na mikroampérmetri dosahuje rádove hodnoty  $10^{-4}$  V (vnútorný odpor  $R_A$  mikroampérmetra je  $R_A = 4,0$  k $\Omega$ ), ktoré sú v porovnaní s napätiami  $U_{AK}$  malé. Preto údaje voltmetra nemusíme korigovať.

3. Zapojíme obvod podľa obr. 35. Napätie na dióde môžeme merať napr. pomocou prístroja DÜ 10 (avomet II). Namerané hodnoty  $U_{AK}$  a  $I_{AK}$  zapisujeme do tabuľky č. 17. Pri meraní nesmieme prekročiť medznú hodnotu  $I_{AK} = 700$  mA prúdu v priepustnom smere.

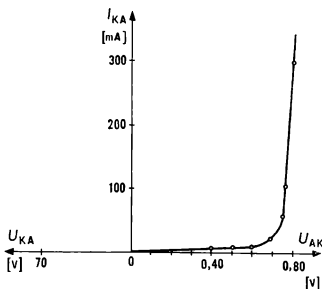
Prúd, ktorý tečie voltmetrom, nadobúda hodnoty rádove  $10^{-6}$  A (prístroj DÜ 10 má pre rozsah 3 V vnútorný odpor  $R_V = 150$  k $\Omega$ ), čo v porovnaní s prúdmi  $I_{AK}$  sú hodnoty zanedbateľne malé. Preto údaj ampérmetra nemusíme korigovať. V prípade, že použijeme menej kvalitný voltmeter, potom prúd  $I_{AK}$  vypočítame podľa

TABULKA 17

$U_{KA}$ V	0,45	0,50	0,55	0,60	0,70	0,75	0,80
$I_{AK}$ mA	0,2	0,6	2,3	3,8	11,0	88,0	300

vztahu  $I_{AK} = I'_{AK} - \frac{U_{AK}}{R_V}$ ,  $I'_{AK}$  je prúd prechádzajúci ampérmetrom v zapojení podľa schémy na obr. 35.

4. Pomocou hodnôt napätí a prúdov, ktoré sme namerali pre diódu, zostrojíme jej usmerňovaciu volt-ampérovú charakteristiku (obr. 36). Z grafu vidíme, že dióda KY 701 má dobré usmerňovacie vlastnosti, difúzne napätie  $U_D$  diódy má približne hodnotu  $U_D = 0,5$  V. V dovolenom intervale záverných napätí dióda prakticky neprepúšťa prúd.



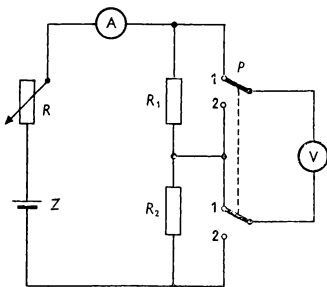
Obr. 36

*Poznámka:*

V novej výrobnej rade je dióda KY 701 nahradená diódou KY 701 F.

### 7. úloha (navrhol dr. ing. Daniel Kluvanec, CSc.)

K rezistorom s odpormi  $R_1$ ,  $R_2$ , ktoré sú pripojené na zdroj  $Z$  napätia, môžeme pomocou prepínača  $P$  pripojiť voltmeter  $V$  (obr. 37). Vnútny odpor voltmetra je  $R_V$ . Prepínač dáme do polohy 1, voltmeter ukazuje napätie  $U_1$ , ampérmetrom  $A$  tečie prúd  $I$ .



Obr. 37

Potom dáme prepínač do polohy 2 a pomocou reostatu  $R$  nastavíme v obvode znova prúd  $I$ , voltmeter ukazuje napätie  $U_2$ .

- a) Určte hodnotu odporu  $R_1$  z veličín  $R_2$ ,  $R_V$ ,  $U_1$ ,  $U_2$ .

b) Určte odpor  $R'_1$  použitím vzťahu  $R'_1 = \frac{U_1}{U_2} R_2$ .

c) Ktorá z hodnôt  $R_1$ ,  $R'_1$  je presnejšia? Svoje tvrdenie odôvodnite. Vypočítajte rozdiel  $\Delta R = |R_1 - R'_1|$ .

Riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_V = 60 \text{ k}\Omega$ ,  $U_1 = 40 \text{ V}$ ,  $U_2 = 20 \text{ V}$ .

*Riešenie:*

a) Keď prepínač je v polohe 1, je paralelne k rezistoru  $R_1$  pripojený voltmeter, ktorého vnútorný odpor je  $R_V$ . Pre napätie  $U_1$  platí

$$U_1 = I \frac{R_1 R_V}{R_1 + R_V}. \quad (1)$$

Pri prepnutí do polohy 2 je voltmeter pripojený paralelne k rezistoru  $R_2$ , takže

$$U_2 = I \frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V}. \quad (2)$$

Zo sústavy rovníc (1) a (2) vyjadríme

$$R_1 = \frac{U_1 R_2 R_V}{U_2 (R_2 + R_V) - U_1 R_2} \quad (3)$$

a pre zadané hodnoty  $R_1 = 60 \text{ k}\Omega$ .

b) Pre zadané hodnoty  $R'_1 = 40 \text{ k}\Omega$ .

c) Presnejšia je hodnota  $R_1$ , pretože pri jej určení bolo prihliadnuté k vnútornému odporu voltmetra. Pri výpočtu podľa zjednodušeného vzťahu sa tento odpor považuje za nekonečne veľký. Z (3) vyplýva, že

$$\lim_{R_V \rightarrow \infty} R_1 = \frac{U_1}{U_2} R_2 = R'_1.$$

Pre rozdiel  $\Delta R$  dostaneme po úprave

$$\Delta R = |R_1 - R_2| = \frac{U_1}{U_2} R_2^2 \left| \frac{U_1 - U_2}{U_2(R_2 + R_V) - U_1 R_2} \right| \quad (4)$$

a pre zadané hodnoty  $\Delta R = 20 \text{ k}\Omega$ . Z (4) je tiež zrejmé, že

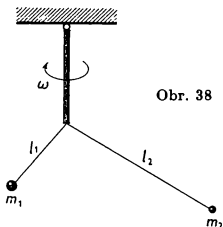
$$\lim_{R_V \rightarrow \infty} \Delta R = 0.$$

## b) Druhé kolo súťaže

### 1. úloha (navrhol dr. ing. Daniel Klivanec, CSc.)

Zvislá ohybná tyč s dvoma vláknami (obr. 38), na konci ktorých sú guľôčky o hmotnostiach  $m_1$ ,  $m_2$ , sa otáča uhlovou rýchlosťou  $\omega$  okolo zvislej osi, ktorá prechádza miestom jej upevnenia. Dĺžky vlákien sú  $l_1$ ,  $l_2$ .

a) Určte uhlovú rýchlosť  $\omega_0$  otáčania tohto systému tak, aby ohybná tyč bola zvislá, t. j. aby pôsobením otáčajúcich sa guľôčiek nebola namáhaná na ohyb.



b) Pre tento prípad stanovte podmienku, ktorú musia spĺňať hmotnosti  $m_1, m_2$  gulôčiek a dĺžky  $l_1, l_2$  vlákien. Predĺženie vlákien vplyvom zotrvačnej a tiažovej sily a hmotnosť vlákien neuvažujte. Gulôčky považujte za hmotné body.

Riešenie — (obr. 39)

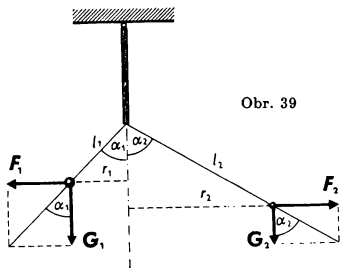
a) Ak sa gulôčky otáčajú uhlovou rýchlosťou  $\omega$ , pre uhly  $\alpha_1, \alpha_2$  platí

$$\sin \alpha_1 = \frac{\omega^2 r_1}{\sqrt{\omega^4 r_1^2 + g^2}}, \quad (1)$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{r_1}{l_1}, \quad (2)$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{\omega^2 r_2}{\sqrt{\omega^4 r_2^2 + g^2}}, \quad (3)$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{r_2}{l_2}. \quad (4)$$



Obr. 39

Z (1), (2), (3), (4) máme

$$\sin \alpha_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 l_1}\right)^2}, \quad (5)$$

$$\sin \alpha_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 l_2}\right)^2}. \quad (6)$$

Vzťahy (5) a (6) sú reálne len vtedy, ak

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{l_1}}, \quad \omega \geq \sqrt{\frac{g}{l_2}}.$$

Ak tyč nemá byť namáhaná na ohyb, potom musí platiť  $F_1 = F_2$ , t. j.  $m_1 r_1 = m_2 r_2$  a

$$m_1 l_1 \sin \alpha_1 = m_2 l_2 \sin \alpha_2.$$

Do posledného vzťahu dosadíme za  $\sin \alpha_1$ ,  $\sin \alpha_2$  z (5) a (6), z rovnice vypočítame  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = \sqrt[4]{g} \sqrt{\frac{m_2^2 - m_1^2}{(m_2 l_2)^2 - (m_1 l_1)^2}}.$$

b) Tieto podmienky sú

$$m_2 > m_1 \quad \text{a} \quad m_2 l_2 > m_1 l_1$$

alebo

$$m_2 < m_1 \quad \text{a} \quad m_2 l_2 < m_1 l_1.$$

Ak  $m_1 = m_2$  a  $l_1 = l_2 = l$ , potom pre  $\omega_0$  platí

$$\omega_0 \geq \sqrt{\frac{g}{l}}.$$



## 2. úloha (navrhla dr. Mária Rakovská)

Kapiláru o vnútornom polomere  $r$  zvisle zasunieme do vody tak, že koniec kapiláry je v hĺbke  $h$  pod voľným povrchom vody v nádobe. Druhý otvor kapiláry je nad voľným povrchom vody. Teplota vody je  $T$ , atmosférický tlak nad voľným povrchom vody je  $p_b$ .

a) Určte teplo  $Q$ , ktoré vznikne počas deja kapilárnej elevácie v kapiláre.

b) Určte tlak  $p$  vzduchového stĺpca v kapiláre potrebný nato, aby vzduchová bublina veľmi malých rozmerov bola vytlačená z kapiláry cez otvor ponorený vo vode.

Riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty  $r = 5,00 \cdot 10^{-4}$  m,  $h = 2,00 \cdot 10^{-2}$  m,  $T = 293$  K,  $p_b = 1,01 \cdot 10^5$  Pa, povrchové napätie vody  $\sigma = 72,9 \cdot 10^{-3}$  N m<sup>-1</sup>.

*Riešenie:*

a) Práca, ktorú vykonajú kapilárne sily, je rovná zmene  $\Delta W_p$  potenciálnej energie vody v kapiláre a teplu  $Q$ , t. j.

$$A = \Delta W_p + Q. \quad (1)$$

Kapilárne sily vykonajú prácu

$$A = Fh, \quad (2)$$

kde  $h$  je výška vodného stĺpca v kapiláre nad voľným povrchom vody v nádobe a  $F$  je kapilárna sila, ktorá pôsobí na vodný stĺpec. Pre  $h$  a  $F$  platí

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}, \quad F = 2\pi r \sigma, \quad (3)$$

kde  $\rho$  je hustota vody,  $\sigma$  povrchové napätie vody,  $g$  tiažové zrýchlenie. Dosadením do (2) máme

$$A = \frac{4\pi\sigma^2}{g\rho}. \quad (4)$$

Zmena  $\Delta W_p$  potenciálnej energie vody je

$$\Delta W_p = \frac{mgh}{2},$$

kde  $m$  je hmotnosť vody v kapiláre nad povrchom vody.

Ak dosadíme za  $h$  z (3) a  $m = \pi r^2 h \rho$  do posledného vzťahu, potom máme

$$\Delta W_p = \frac{2\pi\sigma^2}{g\rho}. \quad (5)$$

Z (1), (4) a (5) vyplýva

$$Q = \frac{2\pi\sigma^2}{g\rho}$$

a pre zadané hodnoty  $Q \doteq 3,34 \cdot 10^{-2}$  J.

b) Pre tlak  $p$  v trubici musí platiť

$$p > p_1 + p_2,$$

kde  $p_1$  je tlak v hĺbke  $h$  pod voľným povrchom vody, t. j.

$$p_1 = \rho gh + p_b,$$

a  $p_2$  je tlak od kapilárnych síl

$$p_2 = \frac{2\sigma}{r}.$$

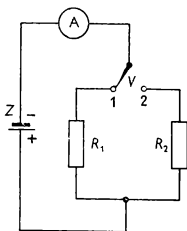
Potom platí

$$p > \rho gh + p_b + \frac{2\sigma}{r}$$

a pre zadané hodnoty  $p > 1,02 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

### 3. úloha (navrhol dr. ing. Daniel Kluvanec, CSc.)

Do obvodu zdroja  $Z$  konštantného elektromotorického napätia  $U_e$  a ampérmetra  $A$  možno pripojiť prepínačom  $v$  rezistor s neznámym odporom  $R_1$  alebo rezistor s odporom  $R_2$  (obr. 40). Súčet vnútorného odporu zdroja,



Obr. 40

vnútorného odporu ampérmetra a odporu spojovacích vodičov je  $R$ . Ak prepínač dáme do polohy 1, ampérmetrom prechádza prúd  $I_1$ . Ak prepínač dáme do polohy 2, ampérmetrom prechádza prúd  $I_2$ .

a) Určte  $R_1$  pomocou  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $R_2$  a  $R$ .

b) Označme  $R'_1 = \frac{I_2}{I_1} R_2$ . Odôvodnite, prečo je odpor rezistora presnejšie určený hodnotou  $R_1$  ako hodnotou  $R'_1$ . Vypočítajte rozdiel  $\Delta R = |R_1 - R'_1|$ . Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty  $I_1 = 5,00 \text{ mA}$ ,  $I_2 = 20,0 \text{ mA}$ ,  $R_2 = 100 \text{ } \Omega$ ,  $R = 8,00 \text{ } \Omega$ .

*Riešenie:*

a) V polohe 1 prepínača tečie ampérmetrom prúd

$$I_1 = \frac{U_e}{R_1 + R}, \quad (1)$$

kde  $U_e$  je elektromotorické napätie zdroja. V polohe 2 prepínača tečie ampérmetrom prúd

$$I_2 = \frac{U_e}{R_2 + R}. \quad (2)$$

Podelením (1) a (2) máme

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + R}{R_1 + R}.$$

Úpravou poslednej rovnice dostaneme

$$R_1 = \frac{I_2}{I_1} (R_2 + R) - R$$

a pre zadané hodnoty  $R_1 = 424 \text{ } \Omega$ .

b) Pre zadané hodnoty vychádza  $R'_1 = 400 \text{ } \Omega$ .

Presnejšia je hodnota  $R_1$ , lebo pri jej výpočte sme uvažovali aj odpor ostatných častí elektrického obvodu (vnútorné odpory zdroja a ampérmetra a odpor spojovacích vodičov).

$$\Delta R = |R_1 - R'_1| = \left| \frac{I_2}{I_1} - 1 \right| R. \quad (3)$$

Ak  $R \rightarrow 0$ , potom  $\Delta R \doteq 0$ . Platí tiež  $\Delta R = 0$ , ak  $I_2 = I_1$ .

Dosadením hodnôt do vzťahu (3) vypočítame  $\Delta R = 24 \Omega$ .

#### 4. úloha (navrhl Mojmir Simerský)

V určitom mieste polovodičového vzorku typu  $N$  byl zjišťován měrný odpor. Ve vzorku byl vytvořen přechod  $PN$ , jímž bylo možné vstříkovat do oblasti  $N$  díry. Bez injekce děr byl v uvažovaném místě naměřen měrný odpor  $\varrho_0$ , při injekci děr měrný odpor  $\varrho_m$ ,  $\varrho_m < \varrho_0$ . V čase  $t$  po ukončení injekce zde měrný odpor vzrostl na hodnotu  $\varrho$ ,  $\varrho_m < \varrho < \varrho_0$ . Stanovte dobu života  $\tau_p$  děr vstříkovaných do oblasti  $N$ .

*Řešení:*

Bez injekce děr má vzorek v uvažovaném místě měrnou vodivost

$$\gamma_0 = eN\mu_N + eP\mu_P, \quad (1)$$

kde  $e$  značí elementární náboj,  $N$  koncentraci elektronů,  $\mu_N$  jejich pohyblivost,  $P$  koncentraci děr způsobujících vlastní vodivost,  $\mu_P$  jejich pohyblivost. Při injekci děr se v uvažovaném místě objeví díry o koncentraci  $P_{z0}$  a pohyblivosti  $\mu_P$ , takže měrná vodivost vzroste na hodnotu

$$\gamma_m = eN\mu_N + eP\mu_P + eP_{z0}\mu_P. \quad (2)$$

Za dobu  $t$  od ukončení injekce se koncentrace vstříknutých děr zmenší na hodnotu

$$P_z = P_{z_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_P}\right),$$

kde  $\tau_P$  značí hledanou dobu života vstříkovaných děr. Měrná vodivost má v tomto čase hodnotu

$$\gamma = eN\mu_N + eP\mu_P + eP_{z_0}\mu_P \exp\left(-\frac{t}{\tau_P}\right). \quad (3)$$

Od (2) odečteme (1) a dostaneme

$$\gamma_m - \gamma_0 = eP_{z_0}\mu_P. \quad (4)$$

Od (3) odečteme (1) a dostaneme

$$\gamma - \gamma_0 = eP_{z_0}\mu_P \exp\left(-\frac{t}{\tau_P}\right). \quad (5)$$

Ze vztahů (4) a (5) nalezneme

$$\exp\frac{t}{\tau_P} = \frac{\gamma_m - \gamma_0}{\gamma - \gamma_0}$$

a odtud řešením exponenciální rovnice

$$\tau_P = \frac{t}{\ln\left(\frac{\gamma_m - \gamma_0}{\gamma - \gamma_0}\right)}$$

a po zavedení měrných odporů místo měrných vodivostí dostaneme snadnou úpravou

$$\tau_P = \frac{t}{\ln\left(\frac{\varrho}{\varrho_m} \cdot \frac{\varrho_0 - \varrho_m}{\varrho_0 - \varrho}\right)}.$$

### 3. Úlohy kategorie C

Úlohy a jejich řešení recenzovali dr. Marta Chytilová, CSc., a Mojmír Simerský

#### a) První kolo soutěže

##### 1. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová, CSc.)

Na koncích niti vedené přes pevnou kladku jsou upevněna dvě tělesa o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ ,  $m_1 < m_2$ . V počáteční klidové poloze je těleso o hmotnosti  $m_2$  nad tělesem o hmotnosti  $m_1$ ; vzdálenost vodorovných rovin vedených jejich těžišti je  $y_0$ . Hmotnost niti a kladky zanedbáváme vzhledem k hmotnosti těles. Soustava se uvede do pohybu jen působením tíhového pole.

a) Vyjádřete vzdálenost  $y$  vodorovných rovin procházejících těžišti obou těles v pohybu jako funkci času, měřeného od počátku pohybu.

b) Za kterou dobu  $t_0$  od počátku pohybu je spojnice těžišť těles vodorovná?

c) Vyjádřete dráhu  $s$  těžiště soustavy těles jako funkci času. Popište pohyb těžiště soustavy těles.

d) Pro hodnoty  $m_1 = 2,0$  kg,  $m_2 = 3,0$  kg,  $y_0 = 1,0$  m nakreslete ve vhodném měřítku dráhy těles (hmotných bodů) a dráhu těžiště soustavy těles. V obrázku vyznačte polohy těles (hmotných bodů) a polohy těžiště soustavy v počátečním okamžiku pohybu ( $t = 0$  s), v čase  $t_0$  od počátku pohybu a v časech  $t_1 = 1$  s,  $t_2 = 2$  s,  $t_3 = 3$  s od počátku pohybu.

*Řešení:*

a) Zvolíme soustavu souřadnic tak, že osa  $y$  je orientována dolů. Na soustavu těles o hmotnosti  $m_2 + m_1$  působí síla  $F = g(m_2 - m_1)$  a uděluje jí zrychlení

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}. \quad (1)$$

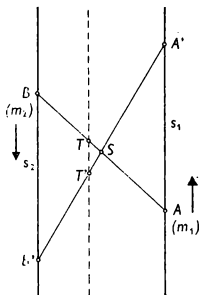
V čase  $t = 0$  s je vzdálenost vodorovných rovin vedených těžišti obou těles  $-y_0$ . Za dobu  $t$  klesne těžiště tělesa o hmotnosti  $m_2$  o délku  $\frac{at^2}{2}$  a těžiště tělesa o hmotnosti  $m_1$  vystoupí o stejnou délku. Vzdálenost obou vodorovných rovin je podle (1)

$$y = g \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} t^2 - y_0. \quad (2)$$

b) Když v (2) položíme  $y = 0$ ,  $t = t_0$ , můžeme vyjádřit

$$t_0 = \sqrt{\frac{y_0(m_2 + m_1)}{g(m_2 - m_1)}},$$

c) — obr. 41



Obr. 41



V čase  $t = 0$  s jsou těžiště těles v bodech  $A, B$ ; v čase  $t$  pak v bodech  $A', B'$ , přičemž

$$AA' = BB' = s_1 = s_2 = \frac{1}{2} at^2, \quad (3)$$

kde  $a$  značí zrychlení podle (1). Těžiště soustavy v čase  $t = 0$  s je v bodě  $T$ , v čase  $t$  v bodě  $T'$ . Společný střed úseček  $AB, A'B'$  označíme  $S$ . Pomocí podobnosti trojúhelníků nalezneme

$$s = s_2 \frac{ST}{SB}, \quad (4)$$

kde  $s$  značí dráhu, kterou těžiště soustavy vykoná za dobu  $t$ . Z obr. 41 dále nalezneme vztahy

$$TB + TA = 2SB; \quad ST = SB - TB,$$

$$\text{přičemž} \quad \frac{TB}{TA} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Když z těchto tří vztahů vyloučíme  $TB$  a  $TA$ , dostaneme vztah, z něhož lze vyjádřit

$$\frac{ST}{SB} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}.$$

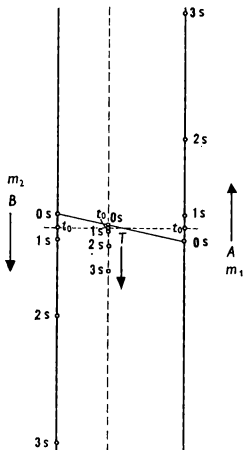
Dosadíme do (4), za  $s_2$  z (3) s přihlédnutím k (1):

$$s = \frac{1}{2} g \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 t^2.$$

Těžiště soustavy koná tedy rovnoměrně zrychlený pohyb svisle dolů se zrychlením

$$a_T = g \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2.$$

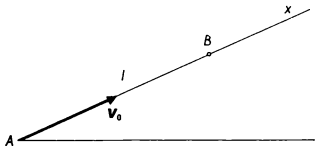
d) — obr. 42 pro zadané hodnoty a pro  $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$ .



Obr. 42

## 2. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová, CSc.)

Koule byla vržena po nakloněné rovině  $Ax$  vzhůru z polohy  $A$ . Bodem  $B$  ve vzdálenosti  $l$  od bodu  $A$  proběhla dvakrát, a to v čase  $t_1$  a v čase  $t_2$  od počátku pohybu (obr. 43).



Obr. 43

a) Určete počáteční rychlost  $v_0$  a zrychlení pohybu  $a$  za předpokladu, že je stálé. Proveďte diskusi řešení.

b) Z výsledku diskuse ověřte, zda úloha má řešení pro hodnoty:  $l = 1,0$  m,  $t_1 = 2,0$  s,  $t_2 = 3,0$  s. V kladném případě určete hodnoty obou veličin.

*Řešení:*

a) Označíme  $C$  nejvyšší bod nakloněné roviny, do něhož koule vystoupí. Vzdálenost  $BC$  označíme  $m$ . Pak platí, předpokládáme-li, že  $t_1 < t_2$ :

$$l = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2. \quad (1)$$

Označíme dále  $t_3$  čas, v němž se koule na nakloněné rovině zastaví v bodě  $C$ . Podle vztahů platných pro rovnoměrně zpomalený pohyb se zrychlením  $-a$  platí

$$t_3 = \frac{v_0}{a}. \quad (2)$$

Pro celkovou dráhu  $AC$ , která má délku  $l + m$ , platí

$$l + m = \frac{v_0^2}{2a}. \quad (3)$$

Koule se zastaví v bodě  $C$  v čase  $t_3$ , pak se valí dolů pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením  $a$ . Za dobu  $t_2 - t_3$  vykoná dráhu  $CB = m$ , takže

$$m = \frac{1}{2} a(t_2 - t_3)^2. \quad (4)$$

Ze soustavy rovnic (1) až (4) za předpokladů  $a \neq 0$ ,  $t_1 \neq t_2$  určíme

$$v_0 = l \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2}; \quad a = \frac{2l}{t_1 t_2}. \quad (5)$$

*Diskuse:* Za předpokladů  $a \neq 0$ ,  $t_1 \neq t_2$  má úloha jediné řešení dané vztahem (5).

Pro  $a = 0 \text{ m s}^{-2}$  je rovina vodorovná a pohyb koule je přímočarý rovnoměrný s rychlostí  $v_0$ .

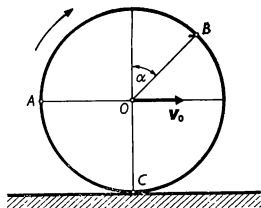
Pro  $a \neq 0$  a  $t_1 = t_2$  je bod  $B$  nejvyšším bodem nakloněné roviny, do něhož koule vystoupí.

b) Zadané hodnoty splňují podmínky pro jediné řešení:

$$v_0 \doteq 0,83 \text{ m s}^{-1}; \quad a \doteq 0,33 \text{ m s}^{-2}.$$

### 3. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová, CSc.)

Kolo o poloměru  $r$  se valí bez klouzání po vodorovné podložce. Rychlost  $v_0$  středu  $O$  je stálá vzhledem k podložce. Určete poloměry kružnic křivosti  $R_A$  a  $R_B$  pro body  $A$ ,  $B$  v okamžiku, kdy spojnice bodu  $A$  se středem  $O$  je vodorovná a spojnice bodu  $B$  se středem  $O$  svírá



Obr. 44

ostrý úhel  $\alpha$  se svislým směrem (obr. 44). Kružnice křivosti nahrazují v okolí bodů  $A$  a  $B$  malé úseky skutečných trajektorií.

a) Řešte úlohu v inerciální vztažné soustavě spojené se středem  $O$  kola.

b) Řešte úlohu v inerciální vztažné soustavě spojené s bodem  $C$ , který je v daném okamžiku vzhledem k podložce v klidu ( $C$  je okamžitý střed otáčení kola).

*Řešení:*

a) Inerciální vztažná soustava spojená se středem  $O$  kola se pohybuje vzhledem k podložce stálou rychlostí  $\mathbf{v}_0$ , tak jako body  $A$ ,  $B$  kola. Proto body  $A$  a  $B$  konají ve zvolené vztažné soustavě jen rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru  $r$ , který je zároveň poloměrem křivosti:  $R_A = R_B = r$ .

b) V inerciální vztažné soustavě spojené s bodem  $C$  je bod  $C$  okamžitým středem otáčení kola. V daném okamžiku je bod  $C$  vzhledem k podložce v klidu; body  $A$  a  $B$  se pohybují vzhledem k podložce rychlostí  $\mathbf{v}_0$  ve vodorovném směru. Z podmínky otáčení kola bez klou-

zání plyne, že body  $A$  a  $B$  mají v daném okamžiku rychlost  $\mathbf{v}_0$  ve směru vodorovném a rychlost  $\mathbf{v}_A$  ve směru tečny kruhové dráhy.

V bodě  $A$  se obě rychlosti skládají a výsledná rychlost  $\mathbf{v}_A$  svírá s poloměrem  $AO$  úhel  $45^\circ$  (obr. 45):

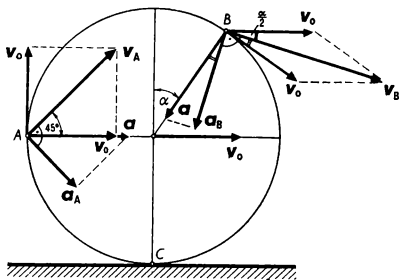
$$v_A^2 = 2v_0^2.$$

Normálové zrychlení  $\mathbf{a}_A$  je kolmé k  $\mathbf{v}_A$  a směřuje do bodu  $C$ . Podle obr. 45 platí

$$a_A = a \cos 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{v_0^2}{r\sqrt{2}},$$

$$R_A = \frac{v_A^2}{a_A} = 2r\sqrt{2}.$$

V bodě  $B$  se obě rychlosti skládají v rychlost  $\mathbf{v}_B$ . Podle obr. 45 platí



Obr. 45

$$v_B^2 = 2v_0^2 (1 + \cos \alpha).$$

Normálové zrychlení  $a_B$  je kolmé k  $v_B$  a směřuje do bodu  $C$ . Podle obr. 45 platí

$$a_B = a \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{v_0^2 \cos \frac{\alpha}{2}}{r},$$

$$R_B = \frac{v_B^2}{a_B} = \frac{2r(1 + \cos \alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2r \left( 1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$R_B = 4r \cos \frac{\alpha}{2}.$$

*Poznámka:*

Text úlohy nevylučuje, aby i v případě b) se vztažná soustava pohybovala rychlostí  $v_0$  ve vodorovném směru. V tomto případě jsou poloměry křivosti

$$R_A = AC = r \sqrt{2},$$

$$R_B = BC = 2r \cos \frac{\alpha}{2}.$$

#### 4. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová, CSc.)

Pro pneumatické práce se používá zásobník vzduchu o objemu  $V$ . Vzduch v zásobníku má počáteční tlak rovný atmosférickému tlaku  $p_1$  a teplotu  $t_1$ . Vzduch se

nasává do zásobníku rotačním kompresorem. Na konci děje je tlak vzduchu v zásobníku  $p_2$  a teplota vzduchu  $t_2$ . Za hodinu se nasaje vzduch, který při objemu  $V^*$  má tlak  $p_3$  a teplotu  $t_3$ .

a) Určete hmotnost vzduchu nasátého kompresorem do zásobníku, víte-li, že při normálním tlaku  $p_0$  a při teplotě  $t_0$  je hustota vzduchu  $\rho_0$ .

b) Určete průměrný hmotnostní průtok nasávacího zařízení.

c) Jakou dobu kompresor pracoval?

Předpokládáme, že vzduch je dokonalý plyn.

Po obecném vyřešení řešte pro hodnoty  $p_1 = p_0 = 1,0 \cdot 10^5$  Pa,  $t_1 = 12$  °C,  $p_2 = 6,0 \cdot 10^5$  Pa,  $t_2 = 43$  °C,  $V = 15$  m<sup>3</sup>,  $p_3 = 0,98 \cdot 10^5$  Pa,  $t_3 = t_1$ ,  $t_0 = 0,0$  °C,  $\rho_0 = 1,29$  kg m<sup>-3</sup>,  $V^* = 480$  m<sup>3</sup> h<sup>-1</sup>.

*Řešení:*

a) Označme normální tlak  $p_0 = 1,00 \cdot 10^5$  Pa a normální teplotu  $T_0 = 273$  K. Počáteční stav vzduchu v zásobníku je dán těmito parametry:  $V$ ,  $p_1$ ,  $T_1$ ,  $m_0$ . Za normálního tlaku  $p_0$  a za teploty  $T_0$  je jeho objem  $V_0$ ,  $m_0 = V_0 \rho_0$ .

Podle stavové rovnice platí

$$\frac{p_1 V}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0},$$

$$m_0 = \frac{V p_1 T_0}{p_0 T_1} \rho_0. \quad (1)$$

Konečný stav vzduchu v zásobníku je dán těmito parametry:  $V$ ,  $p_2$ ,  $T_2$ ,  $m$ . Za normálního tlaku  $p_0$  a za teploty  $T_0$  je jeho objem  $V'$ . Podle stavové rovnice platí



$$\frac{p_2 V}{T_2} = \frac{p_0 V'}{T_0},$$

$$m = V' \rho_0 = \frac{V p_2 T_0}{p_0 T_2} \rho_0. \quad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) určíme

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{V T_0}{p_0 T_1 T_2} (p_2 T_1 - p_1 T_2) \rho_0 \quad (3)$$

a pro zadané hodnoty  $\Delta m \doteq 82 \text{ kg}$ .

b) Za hodinu dodává kompresor do zásobníku vzduch o hmotnosti  $m^*$ , který má za tlaku  $p_3$  a za teploty  $T_3$  objem  $V^*$ . Za normálního tlaku  $p_0$  a při teplotě  $T_0$  je jeho objem  $V_0^*$ , takže  $m^* = V_0^* \rho_0$ .  
Podle stavové rovnice platí

$$\frac{p_3 V^*}{T_3} = \frac{p_0 V_0^*}{T_0},$$

$$m^* = V_0^* \rho_0 = \frac{V^* p_3 T_0}{p_0 T_3} \rho_0 \quad (4)$$

a pro zadané hodnoty  $m^* \doteq 580 \text{ kg h}^{-1}$ .

c) Kompresor pracoval po dobu

$$\Delta t = \frac{\Delta m}{m^*}.$$

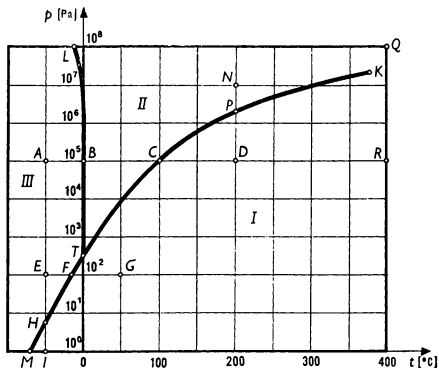
Využitím vztahů (3) a (4) dostaneme

$$\Delta t = \frac{V T_3}{p_3 V^* T_1 T_2} (p_2 T_1 - p_1 T_2)$$

a pro zadané hodnoty  $\Delta t \doteq 0,14 \text{ h} = 8,5 \text{ min}$ .

5. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová, CSc.)

Na obr. 46 je fázový diagram pro fáze: led—voda—vodní pára.



Obr. 46

a) Vysvětlete význam bodů:

$T(0,01\text{ }^{\circ}\text{C}, 6,106 \cdot 10^2\text{ Pa})$ ,

$K(374,16\text{ }^{\circ}\text{C}, 2,213 \cdot 10^7\text{ Pa})$ .

b) Vysvětlete význam křivek  $TK$ ,  $TL$ ,  $TM$ .

c) Vysvětlete význam oblastí I, II, III.

d) Popište děje znázorněné orientovanými úsečkami  $ABCD$ ,  $EFG$  a také úsečkami orientovanými opačně. Vysvětlete význam bodů  $B$ ,  $C$ ,  $F$ .

e) Popište děje znázorněné orientovanými úsečkami  $NPD$ ,  $QR$ ,  $EHI$  a také úsečkami orientovanými opačně. Vysvětlete význam bodů  $P$  a  $H$ .

f) Popište změny vnitřní energie a hustoty tělesa při dějích:  $ABCD$ ,  $NPD$ .

**Řešení:**

a) Bod  $T$  je trojný bod vody; udává teplotu a tlak, při nichž mohou existovat fáze pevná, kapalná a plynná v rovnovážném stavu. Bod  $K$  je krajní bod křivky sytých par. Je určen kritickou teplotou  $t_k$  a kritickým tlakem  $p_k$ . Kritická teplota  $t_k$  je nejvyšší teplota, při níž může voda existovat jako kapalina, při vyšší teplotě voda existuje jen ve stavu plynném. Kritický tlak  $p_k$  je nejvyšší možný tlak syté vodní páry. V kritickém stavu mizí rozdíl mezi kapalnou fází vody a její sytou párou.

b) Křivka  $TK$  je křivka sytých par vody. Udává závislost tlaku na teplotě v rovnovážné soustavě: kapalná fáze vody a její sytá pára. Křivka  $TL$  je křivka tání ledu. Udává závislost tlaku na teplotě v rovnovážné soustavě: led a voda v kapalně fázi.

Křivka  $TM$  je křivka sublimační. Udává závislost tlaku na teplotě v rovnovážné soustavě: led a vodní pára. Všechny tři křivky se stýkají v trojném bodě; křivka sytých par je omezena kritickým bodem.

c) Oblast I je množina bodů  $(t, p)$ , v nichž je voda v plynné fázi (vodní pára přehřátá). Oblast II je množina bodů  $(t, p)$ , v nichž je voda v kapalně fázi. Oblast III je množina bodů  $(t, p)$ , v nichž je voda v pevně fázi (led).

d) Úsečka  $ABCD$  znázorňuje izobarický děj při normálním tlaku. Úsek  $AB$  odpovídá ději, při němž se

teplota ledu zvyšuje až k normální teplotě tání  $B$ . Úsek  $BC$  odpovídá ději, při němž se teplota vody zvětšuje až k normální teplotě varu  $C$ . Úsek  $CD$  odpovídá ději, při němž se za stálého tlaku zvyšuje teplota, sytá vodní pára se přemění v přehřátou vodní páru. Úsečka  $DCBA$  znázorňuje izobarický děj obrácený: přehřátá vodní pára se mění v sytou, která kapalní ve vodu, voda ztuhne v led. Úsečka  $EFG$  znázorňuje izobarický děj při tlaku  $10^2$  Pa. Úsek  $EF$  odpovídá ději, při němž teplota ledu roste až k bodu  $F$ , kde led a vodní pára jsou v rovnovážném stavu. Úsek  $FG$  odpovídá ději, při němž led sublimuje v přehřátou vodní páru, jejíž teplota dosáhne  $50^\circ\text{C}$  (bod  $G$ ). Úsečka  $GFE$  znázorňuje izobarický děj obrácený: přehřátá vodní pára desublimuje v led, jehož teplota klesne na  $-50^\circ\text{C}$ .

e) Úsečka  $NPD$  znázorňuje izotermický děj při teplotě  $200^\circ\text{C}$ . Tlak nad kapalinou se zmenšuje, až dosáhne tlaku sytých vodních par (bod  $P$ ), při dalším snižování tlaku se voda vypařuje, sytá vodní pára se mění v přehřátou za normálního tlaku (bod  $D$ ). Úsečka  $DPN$  znázorňuje izotermický děj obrácený: v přehřáté vodní páře se snižuje tlak až k tlaku sytých par, pára kapalní za rostoucího tlaku.

Úsečka  $QR$  znázorňuje izotermický děj při teplotě  $400^\circ\text{C}$ , při němž klesá tlak přehřáté vodní páry při teplotě vyšší, než je kritická teplota; proto se fáze látky nemění. Úsečka  $RQ$  znázorňuje obrácený izotermický děj, při němž se zvyšuje tlak přehřáté vodní páry při teplotě vyšší, než je teplota kritická. Úsečka  $EHI$  znázorňuje izotermický děj při teplotě  $-50^\circ\text{C}$ . Úsek  $EH$  odpovídá ději, při němž se tlak na led snižuje z hodnoty  $100$  Pa až k bodu  $H$ , kde led a vodní pára jsou v rovnovážném stavu; v úseku  $HI$  se tlak dále snižuje, led sublimuje v přehřátou vodní páru, která dosáhne tlaku  $1$  Pa. Úsečka  $IHE$  znázorňuje obrácený izotermický

děj: přehřátá vodní pára desublimuje v led, tlak roste od 1 Pa do 100 Pa.

f) Během děje znázorněného úsečkou  $ABCD$  se vnitřní energie zvětšuje, těleso přijímá teplo. V úseku  $AB$  hustota klesá, objem tělesa v pevné fázi se zvětšuje s rostoucí teplotou; v bodě  $B$  při fázové přeměně se hustota zvětší a roste k maximu při teplotě  $3,98\text{ }^{\circ}\text{C}$ , při dalším zvětšování teploty hustota klesá, objem tělesa v kapalně fázi se zvětšuje. Při ději znázorněném úsečkou  $NPĐ$  se vnitřní energie zvětší jen při fázové přeměně v bodě  $P$ . Hustota se zmenšuje během celého děje, objem tělesa v obou fázích roste.

**6. úloha** (navrhli dr. Alois Kleveta a dr. Marta Chytilová, CSc.)

Určení momentu setrvačnosti stejnorodé kruhové desky

Určete pokusně moment setrvačnosti stejnorodé kruhové desky vzhledem k ose, která prochází těžištěm tělesa kolmo ke kruhovým plochám.

Příprava úlohy

Ocelová kruhová deska o hmotnosti asi 500 g má uprostřed kruhový otvor opatřený z obou stran závitem. Do závitů upevníme z každé strany tenkou ocelovou tyč, opatřenou na konci odpovídajícím závitem. Obě tyče mají stejnou délku a stejný průřez, tvoří čepy kotouče podobně jako u kotouče Maxwellova kyvadla. V rovnovážné poloze je osa čepů vodorovná. Otáčením tělesa kolem vodorovné osy navineme obě vlákna na čepy a těžiště tělesa zvedneme do výšky  $h$  nad rovnovážnou polohou. Po uvolnění těleso klesá, jeho potenciální energie tíhová se přeměňuje v kinetickou energii posuv-

ného a otáčivého pohybu. Předpokládejme, že těžiště tělesa přitom koná rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb a v nejnižší poloze dosáhne rychlosti  $v$ . Současně kotouč koná rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb kolem vodorovné osy a dosáhne v nejnižší poloze úhlové rychlosti  $\omega$ . Vyloučíme-li tření, platí

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2, \quad (1)$$

kde  $J$  značí moment setrvačnosti tělesa.

Postup řešení:

a) Ověřte měřením, zda pohyb těžiště tělesa je rovnoměrně zrychlený. Změřte doby  $t_i$  pádu tělesa pro různé počáteční výšky  $h_i$  těžiště nad rovnovážnou polohou; proveďte asi deset měření; maximální výška  $h = 1500$  mm. Sestrojte náčrtek pokusu. Které pomůcky k měření potřebujete? Jak z naměřených veličin ověříte, je-li pohyb těžiště rovnoměrně zrychlený?

b) Dokažte, že potom platí  $v = \frac{2h}{t}$ ,  $\omega = \frac{v}{r}$ , kde  $v$  je rychlost těžiště na konci dráhy  $h$ ,  $t$  je doba pádu tělesa po dráze  $h$ ,  $r$  je poloměr čepu.

c) Z rovnice (1) určete vztah pro  $J$ . Které veličiny změříte, abyste mohli podle tohoto vztahu vypočítat  $J$ ? Které pomůcky k tomu potřebujete?

d) Proveďte měření potřebných veličin podle bodu o) a stanovte absolutní a relativní chybu měření každé z nich. Která z naměřených veličin má největší relativní chybu?

e) Z naměřených veličin vypočítejte  $J$  a správně zaokrouhlete.

f) Moment setrvačnosti tenké stejnorodé kruhové

desky vzhledem k ose, která je totožná s geometrickou osou desky, určíme podle vztahu

$$J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}, \quad (2)$$

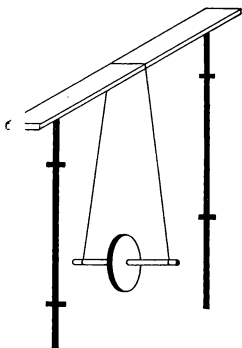
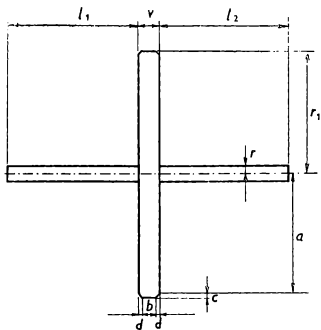
kde  $m_1$  je hmotnost desky,  $r_1$  poloměr její podstavy. Které veličiny změříte, abyste mohli podle tohoto vztahu vypočítat  $J_1$ ? Které pomůcky k tomu potřebujete? Změřte veličiny a stanovte absolutní a relativní chybu měření každé veličiny. Z naměřených veličin určete hodnotu  $J_1$  a správně ji zaokrouhlete.

g) Porovnejte výsledky výpočtů momentu setrvačnosti kruhové desky podle bodů e) a f). V obou případech je určení momentu setrvačnosti homogenní kruhové desky přibližné. Rozborem vztahů (1) a (2) porovnejte fyzikální podmínky obou postupů. Vymezte zjednodušující podmínky při určení momentu setrvačnosti homogenní kruhové desky v jednom nebo ve druhém případě a posuďte, jak jsou ve vaší práci splněny.

*Řešení:*

a) K měření bylo použito těleso zhotovené pro tento účel soustružníkem, který však tvar tělesa ve srovnání s původními požadavky poněkud pozměnil (v místě styků válcové plochy s rovinnými plochami opracoval těleso tak, že vznikly nežádoucí kuželové plochy; čepy nelze od kotouče oddělit). Tvar a označení rozměrů tělesa jsou patrné z obr. 47. K čepům byly upevněny konce silonového vlákna délky větší než 3 m a střed vlákna byl položen na vodorovné rameno umístěné ve výši asi 2 m nad zemí (obr. 48). Poloha tělesa (počáteční nebo koncová) se pro vyloučení paralaxy určovala stanovením koincidence čepu s vodorovnou přímkou určenou značkami na dvou ocelových pásmech umístěných před a za tělesem; popsané uspořádání dovoľovalo určit

Obr. 47



Obr. 48



výšku pádu tělesa s přesností asi na centimetr. Doba pádu byla zjišťována mechanickými stopkami, jejichž stupnice umožňuje čtení času na 0,1 s. Pokusně byly stanoveny dvojice  $h_i$  a  $t_i$  a hodnota podílu  $\frac{h_i}{t_i^2}$ . Výsledky jsou sestaveny v tabulce 18.

TABULKA 18

$i$	$h_i$ m	$t_i$ s	$t_i^2$ s <sup>2</sup>	$h_i t_i^{-2}$ m s <sup>-2</sup>	$\Delta (h_i t_i^{-2})$ m s <sup>-2</sup>
1	0,15	1,8	3,2	0,047	-0,0007
2	0,30	2,7	7,3	0,041	+ 53
3	0,45	3,0	9,0	0,050	- 37,
4	0,60	3,7	13,7	0,044	+ 23
5	0,75	4,0	16,0	0,047	- 7
6	0,90	4,4	19,4	0,046	+ 3
7	1,05	4,8	23,0	0,046	+ 3
8	1,20	5,0	25,0	0,048	- 17
9	1,35	5,4	29,2	0,046	+ 3
10	1,50	5,6	31,4	0,048	- 17
				0,463	+0,0085 -0,0085

$$\overline{h_i t_i^{-2}} = 0,0463$$

Střední chybu podílu  $\frac{h_i}{t_i^2}$  určíme z kladných odchylek:

$$\begin{aligned}\overline{\delta(h_i t_i^{-2})} &= \frac{5 \Sigma \Delta_+}{2n\sqrt{n-1}} \text{ m s}^{-2} = \\ &= \frac{5 \cdot 0,0085}{60} \text{ m s}^{-2} = 0,001 \text{ m s}^{-2}.\end{aligned}$$

Je tedy

$$h_i t_i^{-2} = (0,046 \pm 0,001) \text{ m s}^{-2}$$

a střední relativní chyba této veličiny je 1,5 %, takže hodnotu podílu lze považovat za konstantní a pohyb těžiště za rovnoměrně zrychlený — dráha je přímo úměrná druhé mocnině doby pohybu.

b) Je-li pohyb těžiště tělesa rovnoměrně zrychlený, můžeme okamžitou rychlost  $v$  posuvného pohybu při poklesu těžiště o výšce  $h$  určit jako dvojnásobek průměrné rychlosti (za předpokladu  $v_0 = 0$ ), tj.  $v = \frac{2h}{t}$ . Souvislost mezi  $v$  a  $\omega$  je určena odvíjením vláken z čepů o poloměru  $r$ , takže  $\omega = \frac{v}{r}$ .

c) Dosadíme-li výrazy z části b) do (1), odvodíme pro  $J$  vztah

$$J = mr^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right).$$

Z toho je vidět, že se musí zvážit použité těleso a změřit průměr čepu za účelem určení poloměru; dále se pak stanoví doba potřebná k poklesu tělesa o předem zvolenou výšku. Vzhledem k vlastnostem tělesa byly k vážení užity technické váhy do 500 g a průměr čepu byl měřen mikrometrickým měřítkem. Výška a doba pádu byly určovány stejně jako v bodě a).

d) Hmotnost tělesa:

$$m = (484,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

s relativní chybou 0,02 %.

Průměr čepu byl určen z nulové polohy  $n_0$  mikrometrického měřítka a z polohy  $n$  při sevření čepu. Zjištěné hodnoty jsou sestaveny v tab. 19.

TABULKA 19

$n_0$ mm	$\Delta n_0$ mm	$n$ mm	$\Delta n$ mm
-0,002	+0,0001	6,300	-0,0077
— 3	+ 11	285	+ 73
— 1	— 9	293	— 7
— 2	+ 1	291	+ 13
— 1	— 9	280	+ 123
— 1	— 9	285	+ 73
— 3	+ 11	254	+ 383
— 1	— 9	308	— 157
— 2	+ 1	339	— 467
— 3	+ 11	288	+ 43
-0,0019	+0,0036 -0,0036	6,2923	+0,0708 -0,0708

Střední chyby určené z kladných odchylek:

$$\bar{\delta}n_0 = \frac{0,0180}{60} \text{ mm} = 0,0003 \text{ mm},$$

$$\bar{\delta n} = \frac{0,3540}{60} \text{ mm} = 0,0059 \text{ mm} .$$

Pravděpodobná hodnota průměru čepu je tedy

$$2\bar{r} = \bar{n} - \bar{n}_0 = (6,2923 + 0,0019) \text{ mm} = 6,2942 \text{ mm}$$

a její střední chyba

$$\begin{aligned} \overline{\delta(2r)} &= \sqrt{(\overline{\delta n_0})^2 + (\overline{\delta n})^2} = \sqrt{0,0003^2 + 0,0059^2} \text{ mm} = \\ &= 0,0059 \text{ mm} . \end{aligned}$$

Z toho pro poloměr čepu vychází

$$r = (3,147 \pm 0,003) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

s relativní chybou 0,1 %.

Výška pádu:

$$h = (1,50 \pm 0,01) \text{ m}$$

s relativní chybou 0,6 %.

Doba pádu (tab. 20):

Střední chyba určená z kladných odchylek:

$$\bar{\delta t} = \frac{2,30}{60} \text{ s} = 0,038 \text{ s} .$$

Doba pádu je tedy

$$t = (5,59 \pm 0,04) \text{ s}$$

s relativní chybou 0,72 %.

Relativní chyba doby pádu je největší relativní chybou všech provedených měření. Její velikost je v souladu

s relativní chybou podílu  $\frac{h_i}{t^2}$ , v němž čas vystupuje ve druhé mocnině a relativní chyba při stejně přesném

TABULKA 20

$t$ s	$\Delta t$ s
5,7	-0,11
5,5	+ 9
5,5	+ 9
5,6	- 1
5,8	- 21
5,7	- 11
5,4	+ 19
5,5	+ 9
5,6	- 1
5,6	- 1
5,59	+0,46 -0,46

měření by tedy měla být dvojnásobná (ve skutečnosti bylo měření v části a) méně přesné v důsledku kratších časových intervalů); na základě tohoto zjištění lze říci, že podíl  $\frac{h_i}{t^2}$  je konstantní v mezích pozorovacích chyb.

e) Z pravděpodobných hodnot naměřených veličin vypočítáme  $\bar{J}$ :

$$\bar{J} = 484,0 \cdot 10^{-3} \cdot (3,147 \cdot 10^{-3})^2.$$

$$\cdot \left( \frac{9,81 \cdot 5,59^2}{2 \cdot 1,50} - 1 \right) \text{ kg m}^2 = 485,0 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2.$$

Pro určení střední chyby vyjádříme  $J$  ve tvaru rozdílu:

$$J = \frac{mgt^2r^2}{2h} - mr^2 = A - B.$$

Pravděpodobné hodnoty:  $\bar{A} = 489,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$ ,  
 $\bar{B} = 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$ .

Střední chyby:

$$\begin{aligned} \delta A &= \bar{A} \sqrt{\left(2 \frac{\delta t}{t}\right)^2 + \left(2 \frac{\delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta h}{h}\right)^2} = \\ &= 489,8 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \sqrt{(2,0,007)^2 + (2,0,001)^2 + 0,0002^2 + 0,006^2} \text{ kg m}^2 = \\ = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2. \end{aligned}$$

$$\delta B = \bar{B} \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{\delta r}{r}\right)^2} = 4,8 \cdot 10^{-6}.$$

$$\cdot \sqrt{0,0002^2 + (2,0,001)^2} \text{ kg m}^2 = 9,6 \cdot 10^{-9} \text{ kg m}^2.$$

Střední chybu menšitele můžeme tedy zanedbat a dostáváme výsledek

$$J = (485 \pm 8) \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

s relativní chybou 1,6 %.

f) Ze vztahu (2) je vidět, že je nutno určit poloměr  $r_1$  podstavy desky a její hmotnost  $m_1$ .

Poloměr podstavy určíme z průměru kotouče, jehož opakované měření posuvným měřítkem vedlo vždy k hodnotě 96,60 mm. Přihlédneme-li k tomu, že výrobce posuvného měřítka zaručuje přesnost měřidla na 0,1 %, vychází pro poloměr podstavy

$$r_1 = (48,30 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Vzhledem k tomu, že u použitého tělesa nelze čepy oddělit od kotouče, určíme  $m_1$  tak, že od hmotnosti  $m$  tělesa

odečteme hmotnost  $m_0$  čepů, přičemž  $m_0$  určíme z objemu  $V_0$  čepů a hustoty  $\rho$  tělesa. Pro určení hustoty výpočtem je nutno určit objem  $V$  tělesa (s přihlédnutím k jeho tvaru podle obr. 47), a proto byly měřením určeny rozměry:

$l_1 = 51,58 \cdot 10^{-3}$  m,  $l_2 = 51,59 \cdot 10^{-3}$  m,  $v = 8,20 \cdot 10^{-3}$  m,  
 $a = 46,80 \cdot 10^{-3}$  m,  $b = 5,20 \cdot 10^{-3}$  m. Pro zbývající rozměry z toho vychází  $c = d = 1,50 \cdot 10^{-3}$  m. Pak

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi[r^2(l_1 + l_2) + a^2v + (2ac + c^2)(v - c)]} = \\ &= \frac{0,4840 \cdot 10^9}{\pi[3,147^2 \cdot 103,17 + 46,8^2 \cdot 8,20 + \\ &\quad + (2 \cdot 46,8 \cdot 1,5 + 1,5^2) \cdot 6,70]} \text{ kg m}^{-3} = \\ &= 7,73 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_0 &= \pi r^2(l_1 + l_2)\rho = \pi \cdot 3,147^2 \cdot 103,17 \cdot 7,73 \cdot 10^{-6} \text{ kg} = \\ &= 24,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg}, \quad \text{a tedy} \end{aligned}$$

$$m_1 = (459,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 &= \frac{459,2 \cdot 10^{-3} \cdot (48,30 \cdot 10^{-3})^2}{2} \text{ kg m}^2 = \\ &= 535,6 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2. \end{aligned}$$

Střední chyba:

$$\begin{aligned} \delta J_1 &= \bar{J}_1 \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{\delta r_1}{r_1}\right)^2} = \\ &= 535,6 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{0,0002^2 + (2 \cdot 0,001)^2} \text{ kg m}^2 = \\ &= 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2. \end{aligned}$$

Výsledek tedy je

$$J_1 = (536 \pm 1) \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

a relativní chyba činí 0,2 %.

g) Prvé měření je méně přesné než druhé, což je způsobeno značnou relativní chybou při měření času. Výsledky se od sebe liší o  $51 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$ , což je 9,5 % z větší hodnoty. Přitom lze obě hodnoty považovat jen přibližně za moment setrvačnosti homogenní kruhové desky, a to především v důsledku tvaru použitého tělesa. Při užití vztahu (1) se totiž předpokládá, že čepy mají zanedbatelný moment setrvačnosti a výpočet podle vztahu (2) je správný za předpokladu, že látka o hmotnosti  $m_1$  vyplňuje zcela objem kruhové desky o velikosti  $\pi r_1^2 v$ . Provedená měření a použité vztahy umožňují upravit získané výsledky tak, aby vyjadřovaly moment setrvačnosti kotouče bez čepů a s přihlédnutím k jeho skutečnému tvaru. Za tímto účelem zjistíme nejprve moment setrvačnosti  $J_0$  čepů užitím vztahu (2):

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{m_0 r^2}{2} = \frac{24,8 \cdot 10^{-3} \cdot (3,147 \cdot 10^{-3})^2}{2} \text{ kg m}^2 = \\ &= 0,122 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 . \end{aligned}$$

Vidíme, že  $J_0$  je značně menší než  $\bar{\delta}J$ , takže předpoklad o zanedbatelnosti tohoto momentu setrvačnosti je správný a hodnotu získanou prvním měřením není třeba z tohoto důvodu opravovat.

Skutečný tvar kotouče při výpočtu jeho momentu setrvačnosti  $J^*$  užitím vztahu (2) vyjádříme vhodněji než v odstavci f), budeme-li kotouč považovat za těleso sestávající z kruhové desky o poloměru  $r_1$  a výšce  $(b + d)$ , k níž přiléhají další dvě kruhové desky o poloměru  $a$  a výšce  $\frac{d}{2}$ . Hmotnosti jednotlivých částí určíme z jejich objemů a hustoty:



$$\begin{aligned}
 J^* &= \frac{\rho \pi r_1^2 (b + d) r_1^2}{2} + \frac{\rho \pi a^2 da^2}{2} = \\
 &= \frac{\rho \pi}{2} [r_1^4 (b + d) + a^4 d] = \\
 &= \frac{7,73 \cdot 10^3}{2} \cdot (48,3^4 \cdot 6,7 + 46,8^4 \cdot 1,5) \cdot 10^{-15} \text{ kg m}^2 = \\
 &= 530 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 .
 \end{aligned}$$

Získanou hodnotu  $J^*$  budeme nadále považovat za velmi blízkou správné hodnotě momentu setrvačnosti kotouče použitého při měření; hodnota  $J$  se od  $J^*$  liší o  $45 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$ , což je 8,5 % z  $J^*$ .

Budeme-li dále hledat vysvětlení rozdílu mezi oběma hodnotami, zaměříme pozornost na takové zjednodušující podmínky, které vedou k hodnotě  $J$  nižší, než je  $J^*$ . Rozborem výrazu odvozeného ze vztahu (1) vyplyne, že je třeba věnovat pozornost vláknu, o němž jsme při odvozování souvislosti mezi  $\omega$  a  $v$  předpokládali, že je nekonečně tenké. Ve skutečnosti má poloměr 0,216 mm, a jestliže o tuto hodnotu zvětšíme  $r$ , dostaneme  $J = 554 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$ , takže  $J$  nyní převyšuje  $J^*$  o  $24 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$ , tj. o 4,5 %.

Získanou vyšší hodnotu lze vysvětlit zanedbáním nedokonalé poddajnosti vlákna, třením vlákna o kotouč, k němuž při klesání kotouče dochází vlivem rozkývání kolem svislé osy a odporem prostředí. Uvedené okolnosti prodlužují dobu pádu a vedou tedy ke zvýšení naměřené hodnoty  $J$ . Jejich vliv však nelze početně vystihnout pro další zmenšení rozdílu  $J$  a  $J^*$ , pouze by bylo možné ho snížit opakováním měření ve vakuu a užitím poddajnějšího vlákna, navinutého na čepy pečlivěji, a to tak, aby nedocházelo k rozkývání kotouče kolem svislé osy.

## 7. úloha (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

Dvě koule o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  se pohybují rychlostmi  $v_1$  a  $v_2$  vzhledem k povrchu Země ve vodorovném směru tak, že dojde k jejich přímému středovému rázu. Koule o hmotnosti  $m_2$  po rázu zůstane vzhledem k povrchu Země v klidu.

Určete poměr  $x = \frac{v_1}{v_2}$ ,

- jsou-li koule dokonale pružné,
- jsou-li koule dokonale nepružné,
- je-li součinitel restituce  $k$ .

Ve všech případech proveďte diskusi řešení.

d) Určete úbytek kinetické energie soustavy po rázu v případě c) pro hodnoty  $m_1 = 2,0$  kg,  $m_2 = 1,0$  kg,  $v_2 = 14$  m s<sup>-1</sup>,  $k = 0,40$ .

*Řešení:*

Označme  $w_1$ ,  $w_2$  rychlosti koulí po rázu;  $w_2$  je nulová. Dvojice veličin  $v_1$  a  $v_2$ ,  $v_2$  a  $w_1$ ,  $v_1$  a  $w_1$  mají nesouhlasná znaménka, jsou-li příslušné vektory nesouhlasně orientovány, a mají souhlasná znaménka, jsou-li příslušné vektory souhlasně orientovány.

a) Platí zákon zachování hybnosti a zákon zachování kinetické energie koulí vzhledem k povrchu Země pro stav před rázem a po rázu:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1, \quad (1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 w_1^2}{2}. \quad (2)$$

Ze soustavy rovnic (1), (2) vyjádříme poměry

$$x = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_1 - m_2}{2m_1}, \quad (3)$$

$$y = \frac{w_1}{v_2} = \frac{m_1 + m_2}{2m_1} > 0, \quad (4)$$

$$z = \frac{w_1}{v_1} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}. \quad (5)$$

Ze vztahů (3), (4), (5) plyne, že vektory  $\mathbf{w}_1$  a  $\mathbf{v}_2$  jsou souhlasně orientovány. Pro ostatní dvojice provedeme diskusi.

1. Pro  $m_1 > m_2$  platí  $0 < x < \frac{1}{2}$ ,  $z > 0$ ,  $\frac{1}{2} < y < 1$ ; rychlosti  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$  jsou souhlasně orientovány,  $v_2 > 2v_1$ . Koule o menší hmotnosti narazí na kouli o větší hmotnosti a zastaví se; koule o větší hmotnosti pokračuje v pohybu rychlostí  $\mathbf{w}_1$ , souhlasně orientovanou s  $\mathbf{v}_1$ ,  $\frac{1}{2} v_2 < w_1 < v_2$ .
2. Pro  $m_1 = m_2$  je  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $z$  je neurčitý výraz;  $v_1 = 0$ . První koule je na počátku v klidu, druhá na ni narazí, zastaví se a první koule se uvede do pohybu rychlostí  $\mathbf{w}_1$  souhlasně orientovanou s  $\mathbf{v}_2$ ,  $w_1 = v_2$ .
3. Pro  $m_1 < m_2$  platí  $x < 0$ ,  $z < 0$ ,  $y > 1$ ; rychlosti  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$  jsou nesouhlasně orientovány. Koule se zpočátku pohybují proti sobě, po rázu se koule o větší hmotnosti zastaví, koule o menší hmotnosti se pohybuje rychlostí  $\mathbf{w}_1$  nesouhlasně orientovanou s  $\mathbf{v}_1$ ;  $w_1 > v_2$ .

b) Platí zákon zachování hybnosti. Obě koule se po rázu zastaví, proto

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0,$$

$$x = -\frac{m_2}{m_1}, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Koule se pohybují proti sobě a po rázu se zastaví.

c) Pro přímý středový ráz se součinitelem restituce  $k$  ( $0 < k < 1$ ) při  $w_2 = 0$  platí vztah

$$-w_1 = k(v_1 - v_2)$$

a zákon zachování hybnosti

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 k (v_2 - v_1).$$

Odtud určíme

$$x = \frac{m_1 k - m_2}{m_1(1+k)}, \quad y = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1(1+k)} > 0,$$

$$z = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 k - m_2}.$$

1. Pro  $m_1 k > m_2$  platí  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < k$ ,  $z > 1$ , takže  $w_1 < k v_2$ . Rychlosti  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$  mají souhlasné orientace a pro jejich velikosti platí  $v_1 < v_2$ . Výsledek souhlasí s a) 1 až na vztah mezi rychlostmi  $w_1$  a  $v_2$ , pro který zde platí  $\frac{w_1}{v_2} > 0$ .
2. Pro  $m_1 k = m_2$  platí  $x = 0$ ,  $y = k < 1$ : První koule je zpočátku v klidu, druhá na ni narazí, zastaví se a první koule se uvede do pohybu rychlostí  $\mathbf{w}_1$ , souhlasně orientovanou s  $\mathbf{v}_2$ ,  $w_1 < v_2$ .

3. Pro  $m_1 k < m_2$  platí  $x < 0$ ,  $y > k > 0$ ,  $z < 0$ , takže  $w_1 > kv_2$ . Rychlosti  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  a  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{w}_1$  mají orientace navzájem opačné.

d) Pro dané veličiny platí podmínky případu c) 3):

$$x = -\frac{1}{14}, \quad v_1 = -1,0 \text{ m s}^{-1}, \quad w_1 = 6,0 \text{ m s}^{-1};$$

$$W_{k1} = 99 \text{ J}, \quad W_{k2} = 36 \text{ J}, \quad \Delta W_k = 63 \text{ J}.$$

## b) Druhé kolo soutěže

### 1. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová, CSc.)

Po nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel  $\alpha$ , je vrženo vzhůru těleso. Po dobu  $t_1$  těleso stoupá posuvným pohybem a urazí dráhu  $s$ . Potom klesá po nakloněné rovině zpět. Součinitel smykového tření má stálou hodnotu.

a) Za kterou dobu  $t$  od počátku vrhu projde těleso místem na nakloněné rovině, z něhož bylo vrženo?

b) Proveďte diskusi řešení ve vztahu k hmotnosti tělesa, součiniteli smykového tření a úhlu sklonu  $\alpha$ . Po obecném vyřešení úlohy řešte pro hodnoty  $\alpha = 10^\circ$ ,  $t_1 = 3,0 \text{ s}$ ,  $s = 12,0 \text{ m}$ ,  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

*Řešení:*

Na těleso při pohybu po nakloněné rovině působí tíhová síla orientovaná svisle dolů a tlaková síla podložky, kolmá k podložce, orientovaná vzhůru. Jejich výslednice  $\mathbf{F}_1$  je rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Kromě toho působí na těleso třecí síla  $\mathbf{F}_t$ , rovnoběžná s nakloněnou rovinou, orientovaná proti okamžité rychlosti.

a) Pohyb má dvě fáze. Při pohybu tělesa vzhůru zvolíme osu souřadnic  $x$  rovnoběžnou s nakloněnou rovinou

orientovanou z bodu vrhu vzhůru. Pak síly  $F_1$  a  $F_t$  jsou orientovány proti ose  $x$ . Jejich výslednice dává tělesu zrychlení  $a = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)$ ,  $f$  je součinitel smyčkového tření. Těleso koná rovnoměrně zpomalený pohyb. Označme počáteční rychlost  $v_0$ . Rychlost v nejvyšším bodě dráhy  $s$  je nulová,  $v_0 + at_1 = 0$ ,  $v_0 = gt_1(\sin \alpha + f \cos \alpha)$ .

$$s = \frac{gt_1^2}{2} (\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (1)$$

Při pohybu tělesa dolů zvolíme osu souřadnic  $x'$ , rovnoběžnou s nakloněnou rovinou a orientovanou dolů. Pak síla  $F_1$  je orientovaná souhlasně s osou  $x'$  a síla  $F_t$  proti ose  $x'$ . Jejich výslednice dává tělesu zrychlení

$$a' = g(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Těleso koná rovnoměrně zrychlený pohyb po téže dráze  $s$ :

$$s = \frac{a't_2^2}{2} = \frac{gt_2^2}{2} (\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Porovnáním se vztahem (1) dostaneme

$$t_2 = t_1 \sqrt{\frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\sin \alpha - f \cos \alpha}}. \quad (2)$$

Ze vztahu (1) určíme

$$f \cos \alpha = \frac{2s}{gt_1^2} - \sin \alpha$$

a dosadíme do (2):

$$t_2 = t_1 \sqrt{\frac{s}{gt_1^2 \sin \alpha - s}},$$

$$t = t_1 + t_2 = t_1 \left( 1 + \sqrt{\frac{s}{gt_1^2 \sin \alpha - s}} \right).$$

b) Doba  $t$  nezávisí na hmotnosti tělesa, nezávisí na součiniteli smykového tření. Řešení je reálné pro

$$\sin \alpha > \frac{s}{gt_1^2}.$$

Pro zadané hodnoty je nerovnost splněna. Úloha má reálné řešení  $t \doteq 9,0$  s.

## 2. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová, CSc.)

Železný meteor vletne do atmosféry Země při teplotě blízké 0 K. Určete jeho minimální počáteční rychlost  $v_0$ , jestliže se v atmosféře Země zcela vypaří.

Teplota tání železa  $t_1 = 1500$  °C, teplota varu železa  $t_2 = 3000$  °C, měrné teplo pevného železa  $c_1 = 4,6 \cdot 10^2$  J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>, měrné teplo kapalného železa  $c_2 = 8,3 \cdot 10^2$  J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>, měrné skupenské teplo tání železa  $l_t = 2,7 \cdot 10^5$  J kg<sup>-1</sup>, měrné skupenské teplo varu železa  $l_v = 5,8 \cdot 10^4$  J kg<sup>-1</sup>.

Hodnoty fyzikálních konstant jsou průměrné pro fyzikální podmínky, ve kterých jsou použity. Neuvažujeme změny potenciální energie tíhové meteoru během dějů.

*Řešení:*

Počáteční kinetická energie meteoru při vletu do atmosféry Země je  $W_k = \frac{mv_0^2}{2}$ .

Tato energie se postupně přemění ve vnitřní energii tělesa; změny potenciální energie tělesa přitom neuvažujeme. Předpokládáme, že tato přeměna energie nastává v posloupnosti dějů, při nichž se zvyšuje teplota

a probíhá přeměna skupenství látky tělesa. Počáteční teplota  $t_0 = -273\text{ }^\circ\text{C}$ , hmotnost meteoru označme  $m$ . K dosažení teploty tání přijme meteor za daných podmínek teplo  $Q_1 = c_1 m(t_1 - t_0)$ .

Ke svému roztavení při teplotě  $t_1$  přijme těleso za daných podmínek teplo  $Q_2 = l_t m$ .

K dosažení teploty varu  $t_2$  přijme těleso za daných podmínek teplo  $Q_3 = c_2 m(t_2 - t_1)$ .

K vypaření při teplotě  $t_2$  přijme těleso za daných podmínek teplo  $Q_4 = l_v m$ .

Zanedbáváme vypařování, které probíhá při teplotě nižší, než je teplota varu v daných podmínkách.

$$W_k \geq Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

$$v_0^2 \geq 2[c_1(t_1 - t_0) + l_t + c_2(t_2 - t_1) + l_v]$$

a pro zadané hodnoty

$$\begin{aligned} v_0^2 &\geq 2(8,2 + 2,7 + 12,5 + 0,6) \cdot 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \doteq \\ &\doteq 4,8 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \end{aligned}$$

$$v_0 \geq 2,2 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1} = 2,2 \text{ km s}^{-1}.$$

Vzhledem k zjednodušujícím podmínkám určuje hodnota  $2,2 \text{ km s}^{-1}$  přibližně dolní mez počáteční rychlosti meteoru, je nezávislá na hmotnosti meteoru.

### 3. úloha (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

Míč je vržen od vodorovné podlahy šikmo vzhůru v elevačním úhlu  $\alpha_0$ , počáteční rychlostí  $v_0$ . Vzdálenost mezi body prvního a druhého dopadu na podlahu je  $d_1$ .

a) Určete součinitele restituace  $k$ .

b) Pro  $i$ -tý odraz od podlahy určete elevační úhel  $\alpha_i$  a vzdálenost  $d_i$ .



c) Po obecném vyřešení úlohy řešte pro hodnoty  $\alpha_0 = 45^\circ$ ,  $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ ,  $d_1 = 5,0 \text{ m}$ ,  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

Sestrojte grafy:  $y_1 = \text{tg } \alpha_i = f_1(i)$ ,  $y_2 = d_i = f_2(i)$ .  
 Odpor vzduchu zanedbáváme. Předpokládáme, že v celém rozsahu trajektorie je tíhové zrychlení konstantní. Délka šikmého vrhu s počáteční rychlostí  $v$  v elevačním úhlu  $\alpha$ , bez odporu vzduchu, je  $d = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$ .

*Řešení:*

Zvolme soustavu pravoúhlých souřadnic  $x, y$ , s počátkem v místě vrhu, v rovině vrhu.

Průměty rychlosti  $v_0$  do os souřadnic jsou  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$ ,  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$ .

Průměty rychlosti  $v_1$  do os souřadnic jsou  $v_{1x} = v_1 \cos \alpha_1$ ,  $v_{1y} = v_1 \sin \alpha_1$ .

Ve vodorovném směru platí

$$\left. \begin{array}{l} v_1 \cos \alpha_1 = v_0 \cos \alpha_0 . \\ \text{Ve svislém směru platí} \\ v_1 \sin \alpha_1 = kv_0 \sin \alpha_0 . \end{array} \right\} \quad (1)$$

Vzdálenost prvního dopadu od místa vrhu je

$$d_0 = \frac{2v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{g} . \quad (2)$$

Vzdálenost mezi bodem prvního a bodem druhého dopadu na vodorovnou rovinu je

$$d_1 = \frac{2v_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{g} .$$

a) Z předchozího vztahu platí  $kd_0 = d_1$ ,  $k = \frac{d_1}{d_0}$ ;  
 dosadíme podle (2):

$$k = \frac{d_1 g}{2v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0} \quad (3)$$

b) Ze vztahů (1) platí

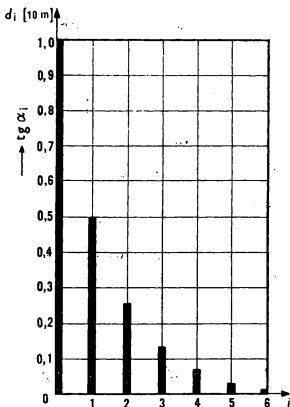
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = k \operatorname{tg} \alpha_0, \quad \text{podobně}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = k \operatorname{tg} \alpha_1 = k^2 \operatorname{tg} \alpha_0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = k \operatorname{tg} \alpha_2 = k^3 \operatorname{tg} \alpha_0, \dots, \quad \text{obecně}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_i = k^i \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (4)$$

$$d_i = k^i d_0 = \frac{2k^i v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{g}. \quad (5)$$



c) Podle (3)  $k = 0,5$ .

Podle (4)  $\operatorname{tg} \alpha_i = 0,5^i$ .

$.1 = 0,5^i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$

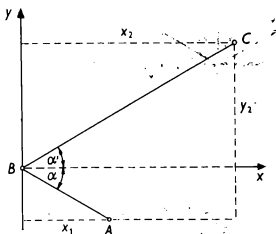
Podle (5)  $d_i = 10 \cdot 0,5^i \text{ m},$   
 $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Grafy — obr. 49.

Obr. 49

#### 4. úloha (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

Na hokejovém hřišti je v místě  $A$  ve vzdálenosti  $x_1$  od mantinelu puk v klidu (obr. 50).



Obr. 50

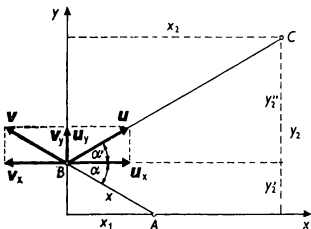
a) Hráč vystřelí puk tak, že po odrazu od mantinelu se puk dostane k druhému hráči v místě  $C$  určeném na obr. 50 vzdálenostmi  $x_2$  a  $y_2$ . Určete úhel  $\alpha$  dopadu puku na mantinel, je-li  $k$  součinitel restituce pro ráz puku na stěnu mantinelu.

b) Puk byl vystřelen v bodě  $A$  rychlostí  $v$ . Za kterou dobu  $t$  urazí dráhu  $A-B-C$ ?

Puk i mantinel považujeme za tělesa dokonale hladká, tření při pohybu puku po ledové ploše neuvažujeme. Po obecném vyřešení úlohy řešte pro hodnoty  $x_1 = 4,0$  m,  $x_2 = 8,0$  m,  $y_2 = 20$  m,  $v = 20$  m s<sup>-1</sup>,  $k = 0,5$ .

*Řešení:*

V rovině ledové plochy zvolíme soustavu souřadnic podle obr. 51.



Obr. 51

a) Označme  $u$  rychlost puku po jeho nárazu na stěnu mantinelu v bodě  $B$ .

$$v_y = v \sin \alpha, \quad u_y = u \sin \alpha'.$$

Poněvadž stěna mantinelu je nehybná, platí  $v_y = u_y$ . Proto platí

$$v \sin \alpha = u \sin \alpha'. \quad (1)$$

Dále platí podle obr. 51

$$v_x = v \cos \alpha, \quad u_x = u \cos \alpha', \quad (2)$$

$$u_x = kv_x. \quad (3)$$

Do vztahu (3) dosadíme podle (2)

$$u \cos \alpha' = kv \cos \alpha \quad (4)$$

a použitím vztahu (1)

$$\frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha'. \quad (5)$$

Podle obr. 51 platí

$$y_2 = y_2' + y_2'' = x_1 \operatorname{tg} \alpha + x_2 \operatorname{tg} \alpha'.$$

Po dosazení podle (5) dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ky_2}{kx_1 + x_2}. \quad (6)$$

b) Poněvadž platí  $u_v = v_v = v \sin \alpha$ , je doba  $t$ , potřebná k tomu, aby puk urazil dráhu  $AB + BC$ , stejná jako doba, za kterou by urazil dráhu  $y_2$  rychlostí  $v_v$

$$t = \frac{y_2}{v \sin \alpha}. \quad (7)$$

Dosadíme hodnoty do vztahů (6) a (7):

$$\operatorname{tg} \alpha = 1; \quad \alpha = 45^\circ,$$

$$t = \sqrt{2} \text{ s} \doteq 1,4 \text{ s}.$$

#### 4. Úlohy kategorie D

Úlohy a jejich řešení recenzovali dr. Ivo Volf a Mojmír Simer-ský.

##### a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhli dr. Ivo Volf, Miroslav Ouhrabka a dr. Jiří Kouba)

Po silnici E 11 jede vůz Trabant 601 stálou rychlostí  $72 \text{ km h}^{-1}$  a v určitém čase míjí křižovatku. Na vedlejší silnici na téže křižovatce stojí automobil Škoda 110 L, který se v témž čase rozjede rovnoměrně zrychleným pohybem po silnici E 11 v témž směru jako Trabant. Za dobu 25 s dosáhne rychlosti  $90 \text{ km h}^{-1}$  a touto rychlostí pak jede dále.

a) Stanovte vzájemnou vzdálenost obou automobilů v čase, v němž automobil Škoda 110 L dosáhne uvedené rychlosti  $90 \text{ km h}^{-1}$ .

b) V jaké vzdálenosti od křižovatky dohoní automobil Škoda vůz Trabant?

Řešte nejprve obecně, potom pro zadané hodnoty. Rozměry obou automobilů zanedbáváme.

c) Pro zadané hodnoty znázorněte pohyb obou automobilů graficky v souřadnicových soustavách ( $t$ ;  $v$ ) a ( $t$ ;  $s$ ). Z grafu ověřte výsledky částí a), b).

*Řešení:*

a) Označíme  $v_1$  rychlost vozu Trabant,  $v_2$  konečnou rychlost vozu Škoda,  $t_1$  dobu rozjezdu vozu Škoda. Vůz Škoda vyjíždí se zrychlením

$$a = \frac{v_2}{t_1}. \quad (1)$$

Za dobu  $t_1$  ujede Trabant dráhu

$$s_1 = v_1 t_1 \quad (2)$$

a vůz Škoda dráhu

$$s_2 = \frac{1}{2} a t_1^2. \quad (3)$$

Vzájemná vzdálenost obou vozů za dobu  $t_1$  je

$$d_1 = s_1 - s_2.$$

Dosadíme z (2), (3), za  $a$  z (1) a po úpravě dostaneme

$$d_1 = \left( v_1 - \frac{1}{2} v_2 \right) t_1$$

a pro zadané hodnoty  $d_1 \doteq 188 \text{ m}$ .

b) Oba vozy se setkají za dobu  $t_2$  od výjezdu z křižovatky, ve vzdálenosti  $d_2$  od křižovatky, přičemž platí

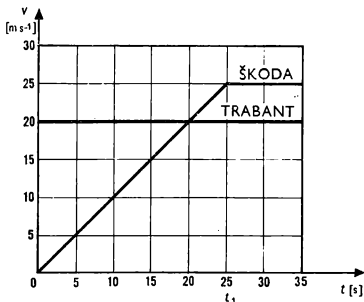
$$d_2 = v_1 t_2 ; \quad d_2 = \frac{1}{2} a t_1^2 + v_2 (t_2 - t_1).$$

Z této soustavy rovnic vyjádříme

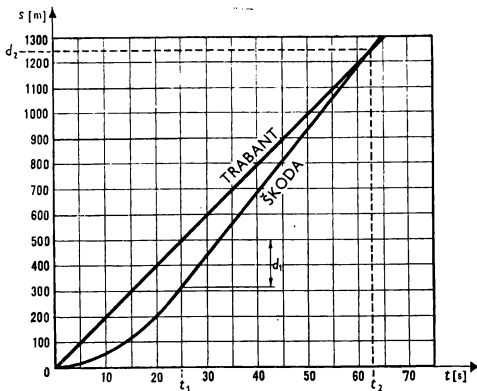
$$d_2 = \frac{1}{2} \frac{v_1 v_2 t_1}{v_2 - v_1}$$

a pro zadané hodnoty  $d_2 \doteq 1,25$  km.

c) Obr. 52, obr. 53.



Obr. 52



Obr. 53

**2. úloha** (navrhli dr. Ivo Volf, Miroslav Ouhrabka a dr. Jiří Kouba)

Vůz Trabant jede po přímé silnici stálou rychlostí  $72 \text{ km h}^{-1}$ . Za ním jede automobil Škoda 100, jehož řidič se rozhodne k předjíždění, když Trabant je ve vzdálenosti 30 m před ním. Předjíždění považujeme za bezpečné, když se vůz Škoda zařadí ve vzdálenosti 30 m před Trabantem.

a) Automobil Škoda jede stálou rychlostí  $90 \text{ km h}^{-1}$ . Určete dobu bezpečného předjíždění a dráhy, které přitom ujedou oba automobily.



b) Oba automobily jedou nejprve touž rychlostí. Když se řidič automobilu Škoda rozhodne k předjíždění, počne rovnoměrně zvyšovat rychlost svého vozu až na  $90 \text{ km h}^{-1}$  se zrychlením  $1,0 \text{ m s}^{-2}$ , načež jede touto rychlostí dále. Určete dobu bezpečného předjíždění a dráhy, které přitom ujedou oba automobily.

Řešte nejprve obecně, potom pro zadané hodnoty. Rozměry automobilů zanedbáváme, jejich pohyb považujeme za přímočarý.

*Řešení:*

Označíme  $v_1$  rychlost Trabantu,  $v_2$  rychlost, popř. konečnou rychlost vozu Škoda,  $a$  zrychlení vozu Škoda při předjíždění,  $d$  vzájemnou vzdálenost obou automobilů na začátku a na konci předjíždění.

a) Za dobu předjíždění  $t_1$  ujede Trabant dráhu  $s_1 = v_1 t_1$ , vůz Škoda dráhu  $s_2 = s_1 + 2d = v_2 t_1$ . Z této soustavy rovnic vyjádříme

$$t_1 = \frac{2d}{v_2 - v_1}; \quad s_1 = \frac{2dv_1}{v_2 - v_1}; \quad s_2 = \frac{2dv_2}{v_2 - v_1}$$

a pro zadané hodnoty  $t_1 = 12 \text{ s}$ ,  $s_1 = 240 \text{ m}$ ,  $s_2 = 300 \text{ m}$ .

b) Za dobu předjíždění  $t_2$  ujede Trabant dráhu

$$s_1^* = v_1 t_2 \quad (1)$$

a Škoda dráhu

$$s_2^* = s_1^* + 2d, \quad (2)$$

pro kterou zároveň platí

$$s_2^* = v_1 t_a + \frac{1}{2} a t_a^2 + v_2 (t_2 - t_a), \quad (3)$$

kde  $t_a$  značí dobu, po kterou vůz Škoda jel pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením  $a$  a s počáteční

rychlostí  $v_1$ ; po dobu  $t_2 - t_a$  pak jel stálou rychlostí  $v_2$ .  
Pro dobu  $t_a$  platí

$$t_a = \frac{v_2 - v_1}{a}. \quad (4)$$

Ze soustavy (1) až (4) vypočítáme

$$t_2 = \frac{v_2 - v_1}{2a} + \frac{2d}{v_2 - v_1}, \quad (5)$$

$$s_1^* = v_1 t_2; \quad s_2^* = v_1 t_2 + 2d,$$

kde  $t_2$  značí dobu určenou vztahem (5).

Pro zadané hodnoty  $t_2 = 14,5$  s;  $s_1^* = 290$  m;  $s_2^* = 350$  m.

### 3. úloha (navrhli dr. Ivo Volf, Miroslav Ouhrabka a dr. Jiří Kouba)

Automobil Škoda 100 jede po úzké silnici stálou rychlostí  $90 \text{ km h}^{-1}$ . Jeho řidič spatří ve vzdálenosti  $50$  m před sebou kombajn jedoucí týmž směrem rychlostí  $36 \text{ km h}^{-1}$ . Počne brzdit se zrychlením  $-4,0 \text{ m s}^{-2}$ .

a) Zjistěte, zda se vozidla střetnou, je-li doba reakce řidiče  $0,80$  s, popř.  $1,5$  s (prodloužení reakční doby následkem únavy).

b) V jaké vzdálenosti od kombajnu by na počátku uvažované situace musel být automobil, aby po zmenšení své rychlosti na  $36 \text{ km h}^{-1}$  mohl jet ve vzdálenosti  $20$  m za kombajnem?

c) Jaká musí být nejmenší vzájemná vzdálenost obou vozidel na počátku uvažované situace, jedou-li vozidla proti sobě, aby automobil Škoda mohl zastavit u okraje vozovky a aby mohl projet kombajn při stálé rychlosti  $36 \text{ km h}^{-1}$ ?

Řešte nejprve obecně, potom pro zadané hodnoty.

d) Znázorněte grafické řešení úlohy v souřadnicové soustavě ( $t$ ;  $s$ ).

*Řešení:*

a) Označíme  $v_1$  rychlost automobilu,  $v_2$  rychlost kombajnu,  $t_r$  dobu reakce řidiče,  $d$  počáteční vzdálenost mezi vozidly,  $a$  zrychlení při brzdění.

Po dobu  $t_r$  jede automobil rychlostí  $v_1$ , pak brzdí se zrychlením  $a$ . Označíme  $t$  dobu potřebnou k zmenšení rychlosti automobilu z  $v_1$  na  $v_2$ ; pro  $v_2$  platí

$$t = \frac{v_1 - v_2}{|a|}. \quad (1)$$

Za dobu  $t_r + t$  ujede automobil dráhu

$$s_1 = v_1(t_r + t) + \frac{1}{2} at^2 \quad (2)$$

a kombajn dráhu

$$s_2 = v_2(t_r + t). \quad (3)$$

K havárii nedojde, popř. dojde podle toho, zda  $s_1 - s_2 \leq d$  nebo  $s_1 - s_2 > d$ . Rozdíl  $\Delta s = s_1 - s_2$  vyjádříme ze vztahů (1), (2), (3) a dostaneme

$$\Delta s = (v_1 - v_2) \left( t_r + \frac{v_1 - v_2}{2|a|} \right). \quad (4)$$

Pro zadané hodnoty  $\Delta s \doteq 40$  m, popř.  $\Delta s \doteq 51$  m. V prvním případě tedy ke střetnutí vozidel nedojde, ve druhém ano.

b) Označíme  $d_1 = 20$  m zadanou vzdálenost,  $d_2$  hledanou vzdálenost mezi vozidly na počátku situace. Tato vzdálenost je rovna vzdálenosti  $d_1$  zvětšené o rozdíl drah

daný vztahem (4). Pro zadané hodnoty vyjde  $d_2 \doteq 60$  m, popř.  $d_2 \doteq 71$  m.

c) Označíme

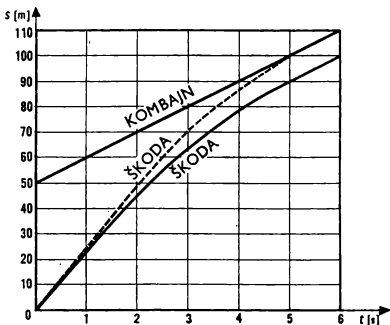
$$t_1 = \frac{v_1}{|a|} \quad (5)$$

dobu, kterou automobil potřebuje k zastavení. Za dobu  $t_r + t_1$  ujede automobil dráhu

$$s'_1 = v_1(t_r + t_1) + \frac{1}{2} at_1^2, \quad (6)$$

kombajn dráhu

$$s'_2 = v_2(t_r + t_1). \quad (7)$$



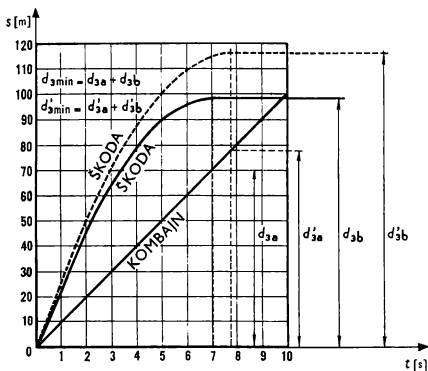
Obr. 54

Pro hledanou počáteční vzdálenost  $d_3$  platí  $d_3 \geq s'_1 + s'_2$   
 a po dosažení z (6) a (7) s přihlédnutím k (5)

$$d_3 \geq d_{3 \min} = (v_1 + v_2) \left( t_r + \frac{v_1}{|a|} \right) - \frac{v_1^2}{2|a|}$$

a pro zadané hodnoty  $d_{3 \min} \doteq 169$  m, popř.  $d'_{3 \min} \doteq 193$  m.

d) Obr. 54, obr. 55.



Obr. 55

**4. úloha** (navrhli dr. Ivo Volf, Miroslav Ouhrabka  
a dr. Jiří Kouba)

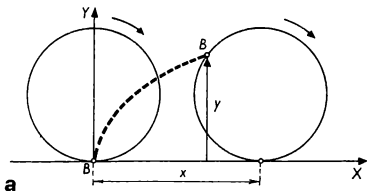
Automobil Škoda 100 jede rychlostí  $54 \text{ km h}^{-1}$  po přímé trati. Pneumatiky automobilu mají vnější průměr  $58 \text{ cm}$ . Automobil brzdí se stálým zrychlením a zastaví se za dobu  $5,0 \text{ s}$  od okamžiku, v němž začal brzdit.

a) Stanovte zrychlení při brzdění a brzdnou dráhu.

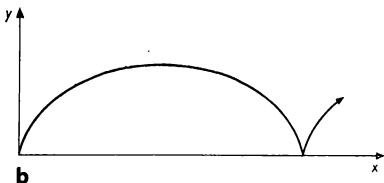
b) Stanovte úhlovou rychlost kol automobilu při brzdění jako funkci času a úhlové zrychlení každého kola.

c) Kolik otáček vykoná každé kolo automobilu od počátku brzdění až do zastavení? Počítejte nejprve s použitím výsledků části a), pak s použitím výsledků části b).

d) V souřadnicové soustavě  $(x; y)$  znázorněte trajektorii některého bodu na obvodu pneumatiky;  $x$  značí vodorovnou vzdálenost od nějakého vhodně zvoleného počátku,  $y$  výšku uvažovaného bodu nad zemí (obr. 56a).



Obr. 56a



Obr. 56b

Ke konstrukci trajektorie si vystřihněte kroužek o průměru 58 cm, na obvodu učiňte značku. Kroužek rozdělte osmi průměry na 16 stejných částí a v grafu vždy vyznačte polohu značky při odvalení kroužku (bez klouzáni) o šestnáctinu celé otáčky. Křivka, kterou takto nakreslíte, se nazývá cykloida.

Předpokládáme, že kola při brzdění neprokluzují a pneumatiky se při jízdě nedeformují.

Části a) až c) řešte nejprve obecně, potom pro zadané hodnoty.

*Řešení:*

a) Počáteční rychlost automobilu označíme  $v_0$ , dobu brzdění  $t_0$ , brzdnou dráhu  $s$ . Pro dobu  $t_0$  platí

$$t_0 = \frac{v_0}{|a|}, \quad \text{odtud} \quad a = -\frac{v_0}{t_0}, \quad (1)$$

poněvadž zrychlení je záporné. Pro brzdnou dráhu plat

$$s = v_0 t_0 + \frac{1}{2} a t_0^2$$

a po dosazení z (1)

$$s = \frac{1}{2} v_0 t_0. \quad (2)$$

Pro zadané hodnoty  $a \doteq -3,0 \text{ m s}^{-2}$ ,  $s \doteq 37,5 \text{ m}$ .

b) Pro rychlost  $v$  při brzdění platí

$$v = v_0 + at$$

a po dosazení z (1)

$$v = v_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right), \quad t \leq t_0$$

a pro úhlovou rychlost

$$\omega = \frac{2v}{d} = \frac{2v_0}{d} \left(1 - \frac{t}{t_0}\right),$$

kde  $d$  značí vnější průměr pneumatiky.

Pro zadané hodnoty

$$\omega \doteq 52 \left(1 - \frac{t}{5,0 \text{ s}}\right) \text{ rad s}^{-1}, \quad t \leq 5,0 \text{ s}.$$

Počáteční úhlová rychlost (pro  $t = 0 \text{ s}$ ) při brzdění je

$$\omega_0 = \frac{2v_0}{d} \quad (3)$$

a konečná úhlová rychlost při zabrzdění je  $\omega_k = 0 \text{ rad s}^{-1}$ .  
Poněvadž úhlové zrychlení  $\varepsilon$  je stálé, vyjádříme

$$\varepsilon = \frac{\omega_k - \omega_0}{t_0} = -\frac{2v_0}{dt_0} \quad (4)$$

a pro zadané hodnoty  $\varepsilon \doteq -10 \text{ rad s}^{-2}$ .

c) Počet otáček označíme  $n$ ; je roven délce  $s$  brzdné dráhy dělené vnějším obvodem  $\pi d$  pneumatiky:

$$n = \frac{s}{\pi d}$$



a po dosazení z (2)

$$n = \frac{v_0 t_0}{2\pi d}. \quad (5)$$

Pro zadané hodnoty  $n \doteq 21$ .

Pro úhel  $\varphi$ , o který se každé kolo automobilu při brzdění otočí, platí

$$\varphi = \omega_0 t_0 + \frac{1}{2} \varepsilon t_0^2$$

a po dosazení z (3) a (4)

$$\varphi = \frac{2v_0}{d} t_0 - \frac{v_0}{d} t_0 = \frac{v_0 t_0}{d}.$$

Při jedné otáčce se kolo otočí o úhel  $2\pi$ , takže pro počet  $n$  otáček platí

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{v_0 t_0}{2\pi d},$$

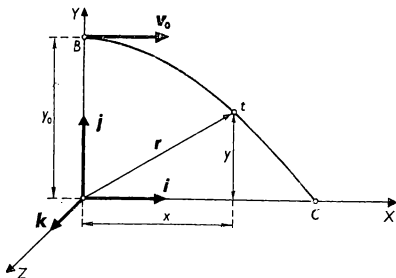
což souhlasí s výsledkem (5).

d) Úplný oblouk cykloidy je na obr. 56b, další jsou s ním kongruentní.

## 5. úloha (navrhl Milan Rádl)

Těleso bylo vrženo vodorovně v čase  $t = 0$  s počáteční rychlostí  $\mathbf{v}_0$  z bodu  $B$  ve výši  $y_0$  nad vodorovnou rovinou  $XZ$  (obr. 57). Souřadnice bodu  $B$  a vektoru  $\mathbf{v}_0$  jsou  $B(0; y_0; 0)$ ,  $\mathbf{v}_0(v_0; 0; 0)$ .

a) Polohový vektor  $\mathbf{r}$  hmotného bodu je vektorovou funkcí času:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . Stanovte tvar této funkce pro čas  $0 \leq t \leq t_1$ , kde  $t_1$  je okamžik průchodu tělesa rovinou  $XZ$  v bodě  $C$ . Pro týž časový interval stanovte závislost



Obr. 57

velikosti okamžité rychlosti tělesa na čase, tedy funkci  $|\mathbf{v}| = v(t)$ .

b) Stanovte velikost  $v$  okamžité rychlosti i úhel, který svírá její vektorová přímka s osou  $X$  při průchodu tělesa bodem  $C$ , a dále tečné  $a_t$  i normálové  $a_n$  zrychlení pohybu a poloměr křivosti  $R$  dráhy v tomto bodě. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $y_0 = 45 \text{ m}$ ,  $v_0 = 40 \text{ m s}^{-1}$ .

Těleso považujte za hmotný bod, odpory prostředí zanedbejte a tíhové zrychlení zaokrouhlete na hodnotu  $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$ .

*Řešení:*

a) Pohyb se děje v rovině  $XY$ , takže vektor  $\mathbf{r}$  má ve směru osy  $Z$  nulovou složku. Pro jeho složky  $x$ ,  $y$  platí

$$x = v_0 t; \quad y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2,$$

a tedy

$$\mathbf{r} = v_0 t \mathbf{i} + \left( y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \right) \mathbf{j}. \quad (1)$$

Rychlost  $\mathbf{v}$  má ve směru osy  $X$  složku  $v_x = v_0$ , ve směru osy  $Y$  složku  $v_y = -gt$ , takže pro její velikost platí

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}. \quad (2)$$

Pro zadané hodnoty

$$\mathbf{r} = 40 \text{ m s}^{-1} t \mathbf{i} + (45 \text{ m} - 5,0 \text{ m s}^{-2} t^2) \mathbf{j},$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(40 \text{ m s}^{-1})^2 + (10 \text{ m s}^{-2} t)^2}.$$

b) Stanovíme čas  $t_1$  z podmínky, že polohový vektor  $\mathbf{r}$  podle (1) má pro  $t = t_1$  nulovou složku ve směru osy  $Y$ . Dostaneme

$$t_1 = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}. \quad (3)$$

Dosazením  $t = t_1$  podle (3) do (2):

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gy_0} \quad (4)$$

a pro zadané hodnoty  $v \doteq 50 \text{ m s}^{-1}$ .

Pro ostrý úhel  $\alpha$ , který vektor  $\mathbf{v}$  v čase  $t_1$  svírá s osou  $X$ , platí

$$\cos \alpha = \frac{v_0}{v}; \quad \sin \alpha = \frac{gt_1}{v}$$

a po dosazení z (3) a (4)

$$\cos \alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}; \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{2gy_0}{v_0^2 + 2gy_0}} \quad (5)$$

a pro zadané hodnoty  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha \doteq 37^\circ$ .

Poněvadž na těleso působí jen tíhové pole, má jeho zrychlení  $\mathbf{a}$  vždy velikost  $a = g$ . Pro jeho složky v bodě  $C$  platí

$$a_t = g \sin \alpha ; \quad a_n = g \cos \alpha ,$$

kde  $\mathbf{a}_t$  značí složku rovnoběžnou s rychlostí  $\mathbf{v}$  v bodě  $C$ ,  $\mathbf{a}_n$  složku k ní kolmou; hodnoty  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  jsou určeny vztahem (5).

Pro zadané hodnoty  $a_t \doteq 6,0 \text{ m s}^{-2}$ ,  $a_n \doteq 8,0 \text{ m s}^{-2}$ . Poloměr křivosti trajektorie v bodě  $C$ :

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{g \cos \alpha}$$

a po dosazení z (4) a (5):

$$R = \frac{(v_0^2 + 2gy_0)^{\frac{3}{2}}}{gv_0} .$$

Pro zadané hodnoty  $R \doteq 310 \text{ m}$ .

## 6. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Miroslav Ouhrabka)

Studium zákona zachování mechanické energie

Pohyb tělesa v homogenním tíhovém poli v blízkosti povrchu Země může být charakterizován kinetickou

energií  $W_k = \frac{1}{2} mv^2$  a potenciální tíhovou energií  $W_p =$

$= mgh$ , kde  $m$  je hmotnost tělesa,  $v$  velikost jeho okamžité rychlosti vzhledem ke zvolené vztahné soustavě,  $h$  je výška tělesa nad povrchem Země,  $g$  tíhové zrychlení.

Počáteční podmínky volíme tak, že platí: pro  $v = 0 \text{ m s}^{-1}$  je  $W_k = 0 \text{ J}$ , pro  $h = 0 \text{ m}$  je  $W_p = 0 \text{ J}$ . Změny potenciální tíhové nebo kinetické energie souvisejí s vykonanou prací

$$A = \Delta W_p = mg(h_2 - h_1) \quad \text{nebo}$$

$$A = \Delta W_k = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2).$$

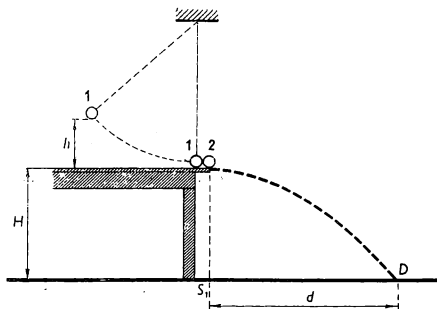
Naším úkolem je stanovit vztah mezi změnou potenciální tíhové energie a kinetické energie tělesa pohybujícího se v homogenním tíhovém poli. K výzkumu sestavíme aparaturu, popsanou v následujícím odstavci, přičemž můžeme použít díly ze žákovské soupravy pro mechaniku nebo jiné pomůcky zhotovené doma nebo ve školním kabinetě fyziky.

**Pomůcky:**

stůl, stojan, 2 kuličky o téže hmotnosti z pružného materiálu, měřítko, vlákno, papíry A4, kopírovací (uhlový) papír.

**Postup práce:**

1. Kuličku 2 umístíme na okraji stolu tak, aby se dotýkala kuličky 1 na závěsu v rovnovážné poloze. Kuličku 1 vychýlíme do výšky  $h_1$ , pustíme a zjistíme místo dopadu druhé kuličky ve vzdálenosti  $d_1$  od svislice (obr. 58).
2. Na základě pozorování vysvětlíte změny mechanické energie při těchto dějích:
  - a) při vychýlení kuličky 1 z rovnovážné polohy,
  - b) při návratu kuličky 1 zpět do rovnovážné polohy,
  - c) při dopadu kuličky 2 na podlahu.
3. Zjistili jste orientačně místo dopadu kuličky 2 na podlahu; na dané místo položte list papíru rozměrů A4 pokrytý kopírovacím (uhlovým) papírem. Po dopadu zanechá kulička 2 zřetelný otisk na papíře a nemusíte namáhavě sledovat pohyb kuličky a určo-



Obr. 58

vat místo dopadu: Pokus opakujte celkem osmkrát pro výšku  $h_1$  bez pohnutí papíru.

4. Označte si na podlaze polohu místa  $S_1$  podle obr. 58 a umístění papíru (nejlépe polohou vrcholů obdélníku). Sejměte kopírovací papír a zjistíte, že místa dopadu nejsou totožná, vzniká rozptyl ve vašem měření. Vysvětlete jeho vznik.

5. Stanovte střední polohu  $\bar{D}$  místa dopadu kuličky. Použijte k tomu např. tuto metodu: Vytvořte z daných bodů disjunktní dvojice, body každé dvojice spojte úsečkou a sestrojte její střed. Postup opakujte pro nalezené středy tolikrát, až získáte jediný bod, který považujeme za střední polohu  $\bar{D}$ .

a) Vysvětlete, jak zpracujete výsledky v případě, že

některé z bodů budou příliš vzdáleny od většiny ostatních.

- b) Výšku kuličky nad deskou měříme jako vzdálenost nejnižšího bodu jejího povrchu (namísto těžiště) od desky stolu. Posuďte, zda je tento postup správný.

6. Položte papír zpět na podlahu a určete vzdálenost  $S_1\bar{D} = \bar{d}$ .
7. Odvoďte následující vztah a zdůvodněte své úvahy:

$$\bar{d} = \bar{v} \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad \text{nebo} \quad \bar{v} = \bar{d} \sqrt{\frac{g}{2H}}.$$

8. Měření proveďte pro různé výšky  $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5$ . Změřené hodnoty запиšte do tabulky a tabulku doplňte vypočítanými hodnotami:  $W_p = mgh$ ,  $W_k = \frac{1}{2}mv^2$ ,  $W_p - W_k$ ,  $\frac{W_p - W_k}{W_p}$ ; v tabulce uveďte také hodnoty  $H$  a  $m$  (hmotnost kuličky).
9. Porovnejte navzájem hodnoty v posledním sloupci tabulky. Vysvětlete, proč  $W_k : W_p \neq 1$ .

*Řešení:*

Pracujeme podle návodu uvedeného v zadání úlohy. Z pozorování vyvodíme:

a) Při vychýlení kuličky 1 z rovnovážné polohy získává kulička potenciální tíhovou energii v homogenním tíhovém poli Země; držíme-li kuličku ve výšce  $h$  nad povrchem stolu, je tato energie  $W_{p1} = mgh$  nebo  $W'_{p1} = mg(h + H) = mgh + mgH = W_{p1} + mgH$ . Číselná hodnota potenciální energie tíhové závisí na tom, kde si zvolíme místo s energií, kterou pokládáme za nulovou. Pro  $W_{p1}$  je množinou všech takových bodů rovina desky stolu, pro  $W'_{p1}$  je to rovina podlahy.

b) Pustíme-li kuličku z výšky  $h$  nad stolem, mění se potenciální energie  $W_{p1}$  v kinetickou energii  $W_{k1}$ . Po nárazu na kuličku 2 se kinetická energie spotřebuje na deformaci obou kuliček; současně se obě kuličky ohřejí. Část energie  $W_{k1}$  se spotřebuje na deformaci závěsu a na překonání odporu prostředí, na tření mezi stolem a kuličkou 2. Nepodaří-li se centrální ráz, dojde k rotaci obou kuliček.

c) Pružnost obou kuliček umožní předání části energie  $W_{k1}$  kuličce 2. Ta získá kinetickou energii  $W_{k2} < W_{k1}$  a kromě toho má svou potenciální energii tíhovou  $W_{p2}$ . Ve vztahné soustavě, v níž klademe  $W_0 = 0$  J pro všechny body roviny podlahy, můžeme zapsat

$$W_1 = W_{p1} = mg(h + H) = mgh + mgH ,$$

$$W_1 = W_{k1} + mgH ,$$

kde  $W_{k1}$  je kinetická energie první kuličky v okamžiku před nárazem na druhou kuličku.

Po rázu obou kuliček

$$W'_1 = W_{k1} + mgH - A ,$$

kde  $A$  je energie spotřebovaná při rázu na překonání všech odporů pohybu. Energie  $W_2$  druhé kuličky po nárazu první kuličky je

$$W_2 = W_{k2} + mgh .$$

Při dopadu na zem má kulička kinetickou energii

$$W_k = W_p - A' ,$$

kde  $W_p$  je počáteční energie první kuličky a  $A'$  celkové ztráty energie, k nimž během pohybu kuliček došlo.

Podle návodu v zadání úlohy byly zpracovány výsledky měření. Jestliže se některý z bodů příliš vzdálil od



ostatních, nevzali jsme jej v úvahu. Znamená to, že během pokusu došlo k nějaké velmi nepravděpodobné ztrátě energie nebo k ještě méně pravděpodobné její přeměně. Jako výšku kuličky nad stolem můžeme definovat vzdálenost kteréhokoli jejího bodu nad deskou stolu, není-li ovšem poloměr kuličky příliš velký, tj. musí být  $d \gg R$ , kde  $R$  značí poloměr kuličky. Jinak bychom naměřili pro vzdálenost  $d$  hodnotu poněkud menší. Vzhledem ke značnému rozptylu bodů dopadu nemají tyto okolnosti podstatný vliv.

Výsledky měření jsou sestaveny v tabulce 21.

Hodnota  $\frac{W_p - W_k}{W_p}$  se může s rostoucím  $h$  zvětšovat; je to důsledkem toho, že ráz přestává být centrální, více energie se spotřebuje na rotaci a na překonávání odporu vzduchu. Při méně přesných měřeních jsou hodnoty tohoto podílu náhodně rozloženy kolem průměrné hodnoty.

Na závěr odvodíme vztahy

$$\bar{d} = \bar{v} \sqrt{\frac{2H}{g}}, \quad \bar{v} = \bar{d} \sqrt{\frac{g}{2H}}.$$

Podle úvah v části c) můžeme zapsat

$$mg(h + H) = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgH,$$

jestliže zanedbáme ztráty energie. Odtud

$$v_1 = \sqrt{2gh}.$$

Touto rychlostí se bude rovnoměrně přímočaře pohybovat kulička 2 ve směru rovnoběžném s podlahou. Současně však platí

$$mgH = \frac{1}{2}mv_2^2, \quad v_2 = \sqrt{2gH},$$

TABULKA 21

Metri	$h$ m	$d$ m	$v$ m s <sup>-1</sup>	$W_p = mgh$ J	$W_k = \frac{1}{2}mv^2$ J	$\frac{W_p}{J} - \frac{W_k}{J}$	$\frac{W_p - W_k}{W_p}$
1	0,058	0,380	0,937	0,0152	0,0117	0,0035	0,230
2	0,116	0,530	1,307	0,0303	0,0228	0,0075	0,248
3	0,145	0,590	1,455	0,0379	0,0282	0,0097	0,256
4	0,174	0,645	1,591	0,0456	0,0337	0,0118	0,259
5	0,269	0,790	1,948	0,0703	0,0506	0,0197	0,280

$$H = 0,806 \text{ m} \quad m = 0,02665 \text{ kg}$$

kde  $v_2$  je konečná rychlost ve svislém směru. Poněvadž volný pád a pohyb ve vodorovném směru probíhají nezávisle na sobě, o čemž svědčí vykonané pokusy, je doba pádu

$$t_2 = \frac{v_2}{g}$$

a za tuto dobu urazí ve vodorovném směru kulička dráhu

$$d = v_1 t_2 = \sqrt{2gh} \frac{\sqrt{2gH}}{g} = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Z experimentu jsme naměřili  $\bar{d}$  a  $\bar{v}$ ; odvozený vztah i úvahy k jeho odvození potřebné můžeme tedy zkontrolovat. Je ovšem nutné vzít v úvahu ztráty energie při pokusech.

## 7. úloha (navrhli dr. Ivo Volf, Miroslav Ouhrabka a dr. Jiří Kouba)

Automobil Škoda 110 L jede stálou rychlostí  $v_1$ , popř.  $v_2$ ,  $v_2 > v_1$ . Síla odporu proti pohybu má velikost  $F_t = kG$ , kde  $k$  značí vhodný součinitel,  $G$  tíhu automobilu.

a) Stanovte průměrný výkon motoru jako funkci rychlosti automobilu a znázorněte ji graficky pro zadané hodnoty.

b) Vypočítejte průměrný výkon motoru při daných rychlostech  $v_1$ ,  $v_2$  a vypočítané hodnoty vyznačte v grafu.

c) Jakou rychlostí jede automobil při dosažení maximálního výkonu  $P_{\max}$  motoru?

d) Palivo o hustotě  $\rho$  má výhřevnost  $H$ . Jaký objem  $V$  má palivo, které automobil spotřebuje na dráze  $d$ , je-li  $\eta$  jeho celková účinnost?

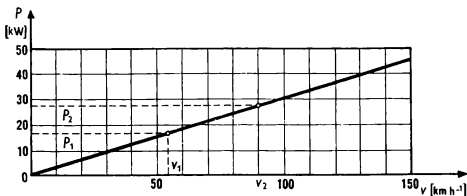
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $v_1 = 54 \text{ km h}^{-1}$ ,  $v_2 = 90 \text{ km h}^{-1}$ ,  $k = 0,10$ ,  $G = 1,1 \cdot 10^4 \text{ N}$ ,  $P_{\max} = 40 \text{ kW}$ ,  $\rho = 0,72 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $H = 4,6 \cdot 10^7 \text{ J kg}^{-1}$ ,  $d = 100 \text{ km}$ ,  $\eta = 30 \%$ .

*Řešení:*

a) Za dobu  $t$  vykoná motor práci  $A = Pt$ , kde  $P$  značí jeho průměrný výkon. Za tuto dobu ujede automobil jedoucí stálou rychlostí  $v$  dráhu  $s = vt$  a na přemáhání síly odporu se spotřebuje práce  $A^* = F_t s = kGvt$ . Z rovnosti  $A^* = A$  dostaneme

$$P = kGv. \quad (1)$$

Graf funkce (1) pro zadané hodnoty  $kG = 1,1 \cdot 10^3 \text{ N}$  je na obr. 59.



Obr. 59

b) Výkony odpovídající rychlostem  $v_1$ ,  $v_2$  označíme  $P_1$ ,  $P_2$ . Pro zadané hodnoty vyjde z (1):  $P_1 \doteq 16,5 \text{ kW}$ ,  $P_2 \doteq 27,5 \text{ kW}$ , což souhlasí s grafem.

c) Z (1) vyjádříme pro  $P = P_{\max}$

$$v_{\max} = \frac{P_{\max}}{kG}$$

a pro zadané hodnoty  $v_{\max} \doteq 130 \text{ km h}^{-1}$ .

d) Projede-li automobil dráhu  $d$  rychlostí  $v$ , vykoná motor práci  $A_1 = P \frac{d}{v}$  a spotřebované palivo dodá energii

$$W_1 = \frac{A_1}{\eta} = \frac{P}{v} \cdot \frac{d}{\eta} = kG \frac{d}{\eta}; \quad (2)$$

za  $\frac{P}{v}$  jsme dosadili z (1). Palivo má hmotnost  $\rho V$ , takže  $W_1 = \rho V H$ . Porovnáním s (2) vyjádříme

$$V = \frac{kGd}{\rho\eta H}$$

a pro zadané hodnoty  $V \doteq 11$  litrů.

## b) Druhé kolo soutěže

Všechny úlohy pro 2. kolo soutěže navrhli dr. Ivo Volf a dr. Jiří Kouba

### 1. úloha

Na vodorovném dálničním úseku jedou za sebou dva osobní automobily (Trabant a Škoda 110), první rychlostí  $72 \text{ km h}^{-1}$ , druhý  $90 \text{ km h}^{-1}$ . Když je škodovka ve vzdálenosti 50 m za trabantem, rozhodne se řidič k předjíždění, přejede do levého pruhu a vrací se zpět do pravého pruhu, když vzájemná vzdálenost obou vozidel je 30 m. Délky obou vozů pokládejte za stejné a rovné 5,0 m.

a) Označte všechny veličiny, nakreslete náčrt situace.

b) Určete délku dráhy automobilu Škoda 110 při předjíždění a příslušnou dobu.

c) Úlohu b) řešte graficky.

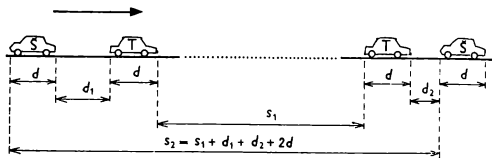
d) Hmotnost trabanta je  $m_1$ , hmotnost škodovky  $m_2$ , celková odporová síla proti pohybu vozidla  $F_0 = fG$ , kde  $f$  značí součinitel odporu,  $G$  tíhu vozidla. Určete průměrné výkony obou automobilů v době předjíždění.

Úlohy b) a d) řešte nejprve obecně. Dané hodnoty:  $m_1 = 700$  kg,  $m_2 = 1\,000$  kg,  $f = 0,10$ . Změnu vzdálenosti vzniklou vybočením vozidla z dráhy zanedbejte.

*Řešení:*

a) Označení veličin:  $v_1 = 72$  km h<sup>-1</sup>,  $v_2 = 90$  km h<sup>-1</sup>,  $d_1 = 50$  m,  $d_2 = 30$  m,  $d = 5,0$  m,  $m_1 = 700$  kg,  $m_2 = 1\,000$  kg,  $f = 0,10$ .

Náčrt — obr. 60.



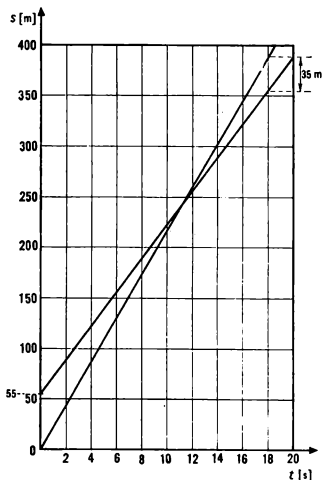
Obr. 60

b) Zvolíme vztažnou soustavu spojenou s trabantem. V tomto případě jede škodovka rychlostí  $v = v_2 - v_1$  po dráze  $s = s_2 - s_1 = d_1 + d_2 + 2d$ . Odtud stanovíme

dobu předjíždění  $t = \frac{s}{v}$ , pro zadané hodnoty  $t = 18$  s.

Za tuto dobu ujede trabant dráhu  $s_1 = v_1 t$ , pro dané hodnoty  $s_1 = 360$  m. Škodovka ujede dráhu  $s_2 = v_2 t$ , pro dané hodnoty  $s_2 = 450$  m, tedy o 90 m více.

c) Obr. 61.



Obr. 61

d) Pro rovnoměrný pohyb automobilu, při němž je nutné překonávat odporovou sílu  $F$  působící proti pohybu vozidla, platí  $P = Fv = fmgv$ . Odtud pro dané hodnoty vychází pro trabanta  $P_1 = 14 \text{ kW}$ , pro škodovku  $P_2 = 25 \text{ kW}$ .

## 2. úloha

Na vodorovné lední ploše kluziště si hráli dva chlapci — bruslaři. Po rozjezdu dojeli na bruslích k čáře, kde dosáhli rychlosti  $v$ , a dále se pohybovali bez odražení. Součinitel smykového tření brusle na ledě je  $f$ , hmotnosti chlapců jsou  $m_1, m_2$ .

a) Nejprve jede každý chlapec samostatně. Do jaké vzdálenosti od čáry dojede každý z nich ?

b) Chlapci potom utvoří „vlak“: první chlapec stojí na čáře, druhý se rozběhne tak, že dosáhne rychlosti  $v$ , chytí se prvního a dále jedou bez odražení spolu. Do jaké vzdálenosti dvojice dojde ?

c) Záviseí výsledek úlohy b) na pořadí chlapců ? Zdůvodněte shodu nebo odlišnost délek úseků dráhy v úlohách a) a b).

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $m_1 = 40 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 60 \text{ kg}$ ,  $v = 5,0 \text{ m s}^{-1}$ ,  $f = 0,020$ ,  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

*Řešení:*

V obou případech se vychází ze skutečnosti, že kinetická energie, kterou má těleso (soustava těles) na začátku pohybu za čárou, se změní v práci potřebnou k přemáhání třecí síly na ledě. Označení veličin je dáno v textu.

a) Každý chlapec má energii  $W_k = \frac{1}{2} mv^2$ ; práce třecí síly po dráze  $s$  je rovna  $A = F_t s = mgfs$ . Odtud  $W_k =$



$= A$ ,  $s = \frac{v^2}{2gf}$ ; dráha  $s$  tedy nezávisí na hmotnosti chlapce. Pro zadané hodnoty  $s = 62,5$  m.

b) Když první chlapec stojí, je jeho hybnost vzhledem ke vztažné soustavě spojené s čarou nulová; hybnost druhého chlapce je  $m_2v$ . Po utvoření „vlaků“ se pohybují oba chlapeci společnou rychlostí  $v_1$ . Platí zákon zachování hybnosti

$$m_2v = (m_1 + m_2)v_1.$$

Kinetická energie soustavy chlapců, pohybující se rychlostí  $v_1$ , se změní v práci potřebnou na překonávání třecí síly:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2)v_1^2 = (m_1 + m_2)gfs_1.$$

Po dosazení je

$$s_1 = \frac{m_2^2 v^2}{2(m_1 + m_2)^2 gf}$$

a pro zadané hodnoty  $s_1 = 22,5$  m.

c) V případě, že se rozjíždí první chlapec, je obdobně

$$s_2 = \frac{m_1 v^2}{2(m_1 + m_2)^2 gf}$$

a pro dané hodnoty  $s_2 = 10$  m.

Výsledky úlohy b) závisí tedy na hmotnosti rozjíždějícího se chlapce, a proto jsou dráhy navzájem odlišné. Rozdíl mezi výsledky a) a b) vysvětlujeme rozdílnou hybností celé soustavy v obou případech.

### 3. úloha

Při závodech ve skoku na lyžích se závodník rozjíždí po dráze délky  $l$ , kterou tvoří nakloněná rovina o výškovém

rozdílu koncových poloh můstku  $h_1$ . Můstek přechází v krátký vodorovný úsek odrazové plochy, která je ve výšce  $h_2$  nad vodorovnou rovinou dopadu. Dále se skokan pohybuje vzduchem tak, že jeho pohyb pokládáme za vrh vodorovný. Nakreslete obrázek a zvolte vhodnou soustavu souřadnic.

a) Stanovte vodorovnou vzdálenost místa dopadu od místa výskoku. Odporu proti pohybu zanedbejte.

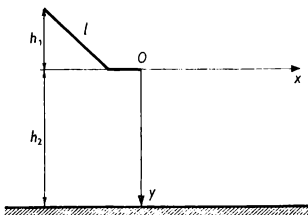
b) Jak se změní řešení úlohy a) pro případ, že po dráze  $l$  rozjezdu po můstku působí na skokana odporová síla o velikosti  $F_0 = fG$ , kde  $f$  je součinitel odporu a  $G$  tíha lyžaře s výstrojí? Další odpor zanedbejte.

Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $h_1 = 20$  m,  $h_2 = 45$  m,  $l = 30$  m,  $g = 10$  m s<sup>-2</sup>,  $f = 0,10$ .

*Řešení:*

Označení veličin je dáno v zadání. Situace je na obr. 62.

a) Určíme nejprve rychlost skokana na konci můstku:  $v = \sqrt{2h_1g}$  a pro zadané hodnoty  $v = 20$  m s<sup>-1</sup>. Doba



Obr. 62

pohybu vzduchem se určí ze vztahu  $t = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$ ; pro zadané hodnoty  $t = 3,0$  s. Hledaná vzdálenost na ose  $x$  je  $d = vt = \sqrt{4h_1h_2}$ , pro zadané hodnoty  $d = 60$  m.

b) V tomto případě se změní rychlost skokana na konci můstku, neboť na dráze  $l$  musí skokan překonávat odporovou sílu. Potom

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1 - F_0l = mg(h_1 - fl).$$

Odtud

$$v_1 = \sqrt{2g(h_1 - fl)},$$

pro dané hodnoty  $v_1 \doteq 18,5$  m s<sup>-1</sup>.

Délka skoku:

$$d_1 = \sqrt{4h_2(h_1 - fl)},$$

pro dané hodnoty  $d_1 \doteq 55$  m.

#### 4. úloha

Československé aerolinie používají osvědčené dopravní sovětské letadlo IL 14. Při celkové hmotnosti  $m = 17$  t potřebuje letadlo ke startu i k přistání dráhu délky  $s = 500$  m.

a) Stanovte vzletovou rychlost letadla, jestliže jeho zrychlení při rozjezdu je  $a = 1,7$  m s<sup>-2</sup>. Za jakou dobu od startu se letadlo zvedne nad povrch Země?

b) Letadlo přistává při rychlosti  $v' = 135$  km h<sup>-1</sup>. Určete zrychlení pohybu, zastaví-li se letadlo na dráze 500 m.

c) Maximální výkon motorů letadla v okamžiku vzletu je  $P = 1\,400$  kW. Určete užitím řešení úlohy a) průměrnou odporovou sílu  $F_0$  proti pohybu v okamžiku vzletu.

**Řešení:**

a) Ze vztahů pro rovnoměrně zrychlený pohyb

$$s = \frac{1}{2} at^2; \quad v = at$$

plyne pro vzletovou rychlost  $v = \sqrt{2as}$  a pro dané hodnoty  $v \doteq 41 \text{ m s}^{-1} \doteq 148 \text{ km h}^{-1}$ .

Pro hledanou dobu  $t_1$  dostáváme

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

a pro dané hodnoty  $t_1 \doteq 24 \text{ s}$ .

b) V tomto případě jde o pohyb rovnoměrně zpomalovaný, pro který platí

$$s' = v't + \frac{1}{2} a't^2$$

a podle zadání

$$v' + a't_2 = 0 \text{ m s}^{-1}.$$

Odtud pro zrychlení pohybu

$$a' = -\frac{v'^2}{2s'}$$

a pro dané hodnoty  $a' \doteq -1,4 \text{ m s}^{-2}$ .

c) V okamžiku vzletu platí  $P = Fv$ , kde  $v$  je velikost vzletové rychlosti,  $F$  celková působící síla; tedy

$$F = \frac{P}{v}.$$

Pro sílu  $F$  platí  $F = ma + F_0$ , tedy

$$F_0 = \frac{P}{v} - ma.$$

Pro dané hodnoty  $F \doteq 34 \text{ kN}$ ,  $ma' \doteq 29 \text{ kN}$ , tedy  $F_0 \doteq 5 \text{ kN}$ .

## 5. Úlohy kategorie E

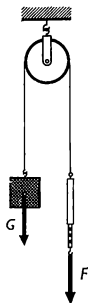
Úlohy a jejich řešení recenzovali dr. Milan Bednařík a Mojmír Simerský

### a) První kolo soutěže

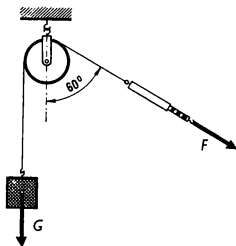
Všechny úlohy pro 1. kolo soutěže navrhl doc. dr. Bohumil Vlach.

#### 1. úloha

Na obr. 63 a na obr. 64 je znázorněna táž kladka. Na



Obr. 63



Obr. 64

vlákně vlevo je zavěšeno závaží o tíze  $G = 300 \text{ N}$ , vpravo siloměr.

a) Narýsujte náčrtek sil pro rovnovážnou polohu na kladce podle obr. 63. Ukažte, že v tomto případě platí  $F = G$ , a vypočtete tlakovou sílu  $F_1$ , která působí na čep kladky.

b) V případě podle obr. 64 směr síly  $F$  svírá se svislým směrem úhel  $60^\circ$ .

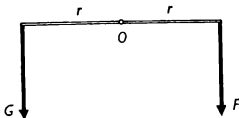
1. Ukazuje v tomto případě siloměr touž sílu jako v případě a)?
2. Narýsujte v tomto případě rovnoběžník sil pro rovnovážnou polohu kladky a vypočtete sílu  $F_2$  působící na čep kladky. Určete směr, do něhož se při rovnovážné poloze kladky otočí závěs její osy.

Tíhu siloměru a kladky ve všech případech zanedbáváme.

*Řešení:*

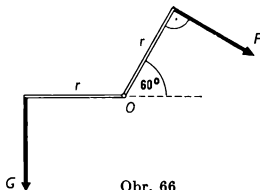
a) obr. 65

Kladku můžeme nahradit rovnoramennou pákou, takže



Obr. 65

v rovnovážné poloze  $F = G$ . Tlaková síla  $F_1$  je výslednicí dvou stejně velkých rovnoběžných sil a má velikost  $F_1 = 2F = 2G$ ; pro zadané hodnoty  $F_1 = 600 \text{ N}$ .

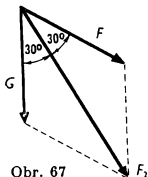


Obr. 66

b) obr. 66

**Kladka je nahrazena rovnoramennou pákou, jejíž ramena spolu svírají úhel  $120^\circ$ .**

1. Poněvadž síly  $G$  a  $F$  působí kolmo k příslušným ramenům, je opět  $F = G$ , tj. siloměr ukazuje sílu stejnou jako v případě a).
2. — obr. 67. Výslednice  $F_2$  má velikost přímo úměrnou dvojnásobku výšky rovnostranného trojúhelníku o straně délky  $G = F$ . Pomocí věty Pythagorovy určíme  $F_2 = G\sqrt{3}$  a pro zadané hodnoty  $F_2 \doteq 520$  N. Závěs má směr výslednice  $F_2$ , tj. svírá se svislým směrem úhel  $30^\circ$ .



Obr. 67

## 2. úloha

Pozorovatel sleduje z okna pokoje přízemního domu dopravní ruch na silnici. Silnice je rovnoběžná s průčelím domu a její jízdní dráha je od něho vzdálena o  $d = 150$  m. Pozorovatel je ve vzdálenosti  $d_1 = 2,50$  m od okna tak, že jeho oko je ve svislé rovině souměrnosti okna. Šířka okna je  $d_2 = 1,20$  m. Načrtněte si obrázek situace.

a) Jakou stálou rychlostí  $v_1$  jel po silnici cyklista, kterého pozorovatel viděl oknem po dobu  $t_1 = 10,5$  s?

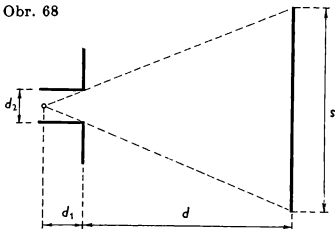
b) Po jakou dobu  $t_2$  viděl pozorovatel za stejných podmínek jako v případě a) automobil, který jel stálou rychlostí  $v_2 = 100$  km h<sup>-1</sup>?

c) Ověřte, že platí  $v_1 t_1 = v_2 t_2 = s$ . Jaký fyzikální význam má veličina  $s$ ?

Pro hodnotu  $s$ , kterou jste vypočetali, doplňte tabulku:

$t$ [s]	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$v$ [m s <sup>-1</sup> ]										

Obr. 68





Podle hodnot veličin v tabulce sestrojte graf. K čemu může pozorovatel využít graf?

*Řešení:*

Náčrt je na obr. 68. Označíme  $s$  úsek jízdní dráhy, který pozorovatel přehlédne. Z obr. 68 plyne s použitím podobnosti trojúhelníků:

$$\frac{s}{d + d_1} = \frac{d_2}{d_1}; \quad s = \frac{d_2}{d_1} (d + d_1). \quad (1)$$

Pro zadané hodnoty  $s \doteq 73,2$  m.

a) Pro rychlost  $v_1$  platí  $v_1 = \frac{s}{t_1}$ , po dosazení z (1)

$$v_1 = \frac{d_2}{d_1 t_1} (d + d_1)$$

a pro zadané hodnoty  $v_1 \doteq 6,97$  m s<sup>-1</sup>.

b) Pro dobu  $t_2$  platí

$$t_2 = \frac{d_2}{d_1 v_2} (d + d_1),$$

pro zadané hodnoty vyjde  $t_2 \doteq 2,64$  s.

c) Platnost uvedeného vztahu vyplývá ze základního vztahu pro rovnoměrný přímočarý pohyb; veličina  $s$  představuje délku pozorovaného úseku jízdní dráhy.

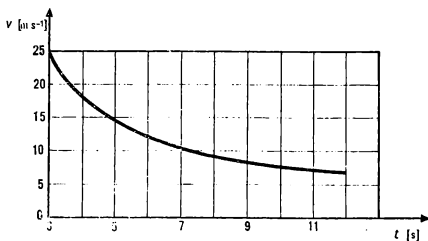
### TABULKA

$t$ [s]	3	4	5	6	7
$v$ [m s <sup>-1</sup> ]	24,4	18,3	14,6	12,2	10,5

$t$ [s]	8	9	10	11	12
$v$ [m s <sup>-1</sup> ]	9,15	8,15	7,32	6,65	6,10

Graf je na obr. 69.

**Použití:** Pomocí grafu, popř. tabulky může pozorovatel zjistit rychlost jakéhokoli vozidla, změří-li dobu jeho průjezdu svým zorným polem.



Obr. 69

### 3. úloha

Plechová válcová nádoba tíhy  $G = 150 \text{ N}$  má výšku  $h = 0,50 \text{ m}$  a vnější poloměr dna  $r = 0,20 \text{ m}$ . Uprostřed na vnější stěně dna je háček, jehož hmotnost je vzhledem k hmotnosti nádoby zanedbatelná. Nádoba plave na vodě, jejíž hustota je  $\rho = 1\,000 \text{ kg m}^{-3}$ .

a) Do jaké výšky vyčnívá okraj nádoby nad volným povrchem vody, vložíme-li do nádoby ocelové těleso o tíze  $G_1 = 350 \text{ N}$ ?

b) Do jaké výšky vyčnívá okraj nádoby nad volným povrchem vody, zavěsíme-li totéž ocelové těleso na háček na dně nádoby? (Hmotnost závěsného drátu nebo motouzu zanedbáváme.) Hustota oceli je  $\rho_1 = 7\,600 \text{ kg m}^{-3}$ .

c) Do jaké výšky vyčnívá okraj nádoby nad volným povrchem vody, zavěsíme-li na háček pod nádobou hliníkové těleso o stejné tíze  $G_1$ ? Hustota hliníku je  $\rho_2 = 2\,700 \text{ kg m}^{-3}$ .

Ve všech případech předpokládáme, že nádoba plave na vodě tak, že její osa je svislá.

Řešte nejprve obecně a do výsledných vztahů dosadte zadané hodnoty. Omezíte vznik početních chyb.

*Řešení:*

Budeme počítat s měrnými tíhami  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ , které jsou určeny hustotami  $\rho, \rho_1, \rho_2$ . Všechny následující výpočty jsou založeny na použití zákona Archimédova.

a) Výšku, o kterou okraj vyčnívá, označíme  $x_1$ . Pak platí

$$\pi r^2(h - x_1)\gamma = G + G_1; \quad x_1 = h - \frac{G + G_1}{\pi r^2 \gamma}.$$

b) Poněvadž na ocelové těleso působí vztlaková síla, dostáváme, označíme-li  $x_2$  délku vyčnívající části:

$$\pi r^2(h - x_2)\gamma + G_1 \frac{\gamma}{\gamma_1} = G + G_1$$

$$x_2 = h - \frac{1}{\pi r^2 \gamma} \left( G + G_1 \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1} \right).$$

c) Podobně nalezneme, značí-li  $x_3$  výšku vyčnívající části:

$$x_3 = h - \frac{1}{\pi r^2 \gamma} \left( G + G_1 \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2} \right).$$

Pro zadané hodnoty a pro  $\gamma = 9\,810 \text{ N m}^{-3}$  vyjde  $x_1 \doteq 0,10 \text{ m}$ ,  $x_2 \doteq 0,13 \text{ m}$ ,  $x_3 \doteq 0,20 \text{ m}$ .

#### 4. úloha

V každém ze dvou stejných kalorimetrů je voda o hmotnosti  $m = 2,00 \text{ kg}$  a teplotě  $t = 20,0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Do prvního z nich vložíme ocelové těleso o hmotnosti  $m_1 = 1,00 \text{ kg}$  a teplotě  $t_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ .

a) Na jaké výsledné teplotě  $t_0$  se ustálí voda v prvním kalorimetru?

b) Jaká musí být hmotnost  $m_2$  stříbrného tělesa o teplotě  $t_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ , které vložíme do druhého kalorimetru, aby se v něm ustálila teplota na stejné hodnotě  $t_0$  jako v prvním kalorimetru?

c) Ověřte, že za daných podmínek platí  $m_1 c_1 = m_2 c_2$ , kde  $c_1$  značí měrné teplo oceli,  $c_2$  měrné teplo stříbra. Tento výsledek vyjádřete slovně.

Měrné teplo vody  $c = 4,18 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , měrné teplo oceli  $c_1 = 0,482 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , měrné teplo stříbra  $c_2 = 0,235 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Teplo potřebné na ohřátí kalorimetrů zanedbáváme.

Úlohu řešte nejprve obecně a do výsledných obecných vztahů dosadte zadané hodnoty. Omezíte vznik početních chyb.

*Řešení:*

Počítáme pomocí kalorimetrické rovnice.

$$\text{a) } mc(t_0 - t) = m_1c_1(t_1 - t_0) \quad (1)$$

$$t_0 = \frac{mct + m_1c_1t_1}{mc + m_1c_1}$$

a pro dané hodnoty  $t_0 \doteq 24,4 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

$$\text{b) } mc(t_0 - t) = m_2c_2(t_1 - t_0) \quad (2)$$

$$m_2 = \frac{mc(t_0 - t)}{c_2(t_1 - t_0)}$$

a pro zadané hodnoty  $m_2 \doteq 2,1 \text{ kg}$ .

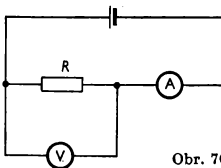
c) Levé strany vztahů (1) a (2) jsou stejné; z rovnosti pravých stran plyne po zkrácení:  $m_1c_1 = m_2c_2$ .

Poměr hmotností dvou těles, která za podmínek jinak stejných odevzdají stejné množství tepla, je roven obrácenému poměru jejich měrných tepel.

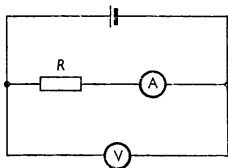
## 5. úloha

Měření odporu spotřebiče

Chceme-li určit odpor  $R$  spotřebiče, měříme současně napětí na jeho svorkách a proud, který jím prochází. Použije se zapojení podle obr. 70 nebo obr. 71.



Obr. 70



Obr. 71

a) Změřte proud  $I_1$  a napětí  $U_1$  v zapojení podle obr. 70. Z naměřených hodnot vypočtete odpor  $R$  spotřebiče. Vypočtená hodnota odporu  $R$  není přesná, protože v tomto případě ampérmetr neudává skutečnou hodnotu proudu procházejícího spotřebičem. Vysvětlete.

b) Změřte proud  $I_2$  a napětí  $U_2$  v zapojení podle obr. 71. Z naměřených hodnot vypočtete opět odpor  $R$  spotřebiče. Vypočtená hodnota odporu  $R$  opět není přesná, protože voltmetr v tomto případě neudává skutečné napětí na spotřebiči. Vysvětlete.

c) Vypočtete přesnější hodnotu odporu  $R$  spotřebiče v zapojení podle obr. 70 i podle obr. 71 s využitím znalosti vnitřních odporů měřicích přístrojů (voltmetru a ampérmetru).

### Pomůcky:

elektrický spotřebič o stálém odporu do  $20 \Omega$  (např. reostat), suchá baterie o napětí  $4,5 \text{ V}$ , ampérmetr o známém vnitřním odporu s rozsahem do  $0,5 \text{ A}$ , voltmetr o známém vnitřním odporu s rozsahem do  $5 \text{ V}$ . Třída přesnosti měřicích přístrojů musí být do  $1,5$ .

*Řešení:*

a) Ampérmetr měří proud tekoucí spotřebičem, zvětšený o proud tekoucí voltmetrem.

b) Voltmetr měří součet napětí na spotřebiči a na ampérmetru.

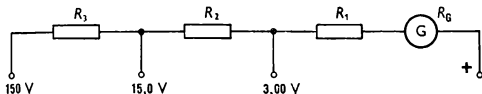
c) Označíme  $R_V$  vnitřní odpor voltmetru,  $R_A$  vnitřní odpor ampérmetru. Pak

$$U_1 = I_1 \frac{RR_V}{R + R_V}; \quad R = \frac{U_1 R_V}{I_1 R_V - U_1},$$

$$U_2 = I_2(R + R_A); \quad R = \frac{U_2}{I_2} - R_A.$$

## 6. úloha

Na obr. 72 je schéma voltmetru se třemi měřicími rozsahy: do 3,00 V, do 15,0 V a do 150 V. Jeho základem je měřicí přístroj s otáčivou cívkou, která má odpor  $R_G = 15,0 \Omega$ . Prochází-li přístrojem proud  $I_G = 0,001 \text{ A}$ , ukáže jeho ručka plnou výchylku.



Obr. 72

a) Určete hodnoty odporů  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ .

b) Určete celkové odpory  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_2$ ,  $\bar{R}_3$  voltmetru pro každý jeho měřicí rozsah. Určete také proudy  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , které procházejí přístrojem při plné výchylce ručky, pro každý z měřicích rozsahů.

*Řešení:*

a) Odpor  $R_1$  vypočítáme ze vztahu

$$U_1 = (R_1 + R_G)I_G$$

a obdobně

$$U_2 = (R_2 + R_1 + R_G)I_G ;$$

$$U_3 = (R_3 + R_2 + R_1 + R_G)I_G .$$

Z těchto vztahů vypočítáme pro zadané hodnoty postupně  $R_1 = 2\,985\ \Omega$ ,  $R_2 = 12\ \text{k}\Omega$ ,  $R_3 = 135\ \text{k}\Omega$ .

b) Pro celkové odpory voltmetru zřejmě platí

$$\bar{R}_1 = R_1 + R_G , \quad \bar{R}_2 = R_2 + R_1 + R_G ,$$

$$\bar{R}_3 = R_3 + R_2 + R_1 + R_G$$

a pro zadané hodnoty  $\bar{R}_1 = 3\,000\ \Omega$ ,  $\bar{R}_2 = 15\,000\ \Omega$ ,  $\bar{R}_3 = 150\,000\ \Omega$ .

Odpory  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  byly stanoveny tak, aby při plné výchylce ručky platilo

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_G ,$$

kde  $I_G$  má danou hodnotu  $0,001\ \text{A}$ .

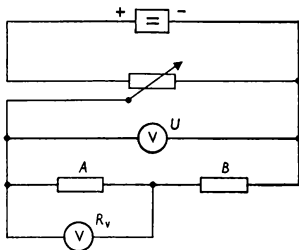
## 7. úloha

Stejně reostaty  $A$ ,  $B$  mají stejné odpory  $R = 60\ \text{k}\Omega$ . Neznáme však maximální přípustný proud  $I$ , který jimi může procházet. Abychom to zjistili, předpokládáme, že jsme provedli pokus, při němž jsme reostaty zapojili za sebou. Paralelně k reostatu  $A$  jsme připojili voltmetr o vnitřním odporu  $R_V = 30\ \text{k}\Omega$  a obvod jsme připojili ke zdroji stejnosměrného elektrického napětí (obr. 73). Napětí v obvodu jsme pozvolna zvětšovali až do nej-



vyššího napětí  $U$ , při němž se žádný z obou reostatů zřetelně nezahřival. Pokus ukázal, že napětí  $U = 800 \text{ V}$ .

a) Jaké napětí  $U_1$  ukazoval voltmetr  $V$  a jaký proud  $I$  procházel obvodem při napětí  $U$ ? Jaký je maximální přípustný proud každého z obou reostatů?



Obr. 73

b) Usudte, který z reostatů (v obvodu podle obr. 73) se začne při překročení maximálního přípustného proudu zahřívát dříve.

*Řešení:*

Označíme  $R_A = R_B = R$  odpor každého z obou reostatů.

a) Celkový odpor obvodu je

$$R_C = R_B + \frac{R_A R_V}{R_A + R_V}$$

a pro zadané hodnoty  $R_C = 80 \text{ k}\Omega$ .

Na paralelní kombinaci  $R_A \parallel R_V$  je napětí

$$U_1 = I \frac{R_A R_V}{R_A + R_V},$$

kde  $I = \frac{U}{R_C}$  značí proud protékající obvodem. Pro zadané hodnoty  $I = 10 \text{ mA}$ ,  $U_1 = 200 \text{ V}$ . Maximální přípustný proud pro oba reostaty je  $I = 10 \text{ mA}$ .

b) Označíme  $P_A$  příkon, který dostává reostat  $A$ ,  $P_B$  příkon, který dostává reostat  $B$ . Na reostatu  $A$  je napětí

$U_A = \frac{1}{4} U_Z$ , kde  $U_Z$  značí jakoukoli hodnotu napětí

zdroje; na reostatu  $B$  je pak napětí  $\frac{3}{4} U_Z$ . Platí

$$P_A : P_B = \frac{U_A^2}{R} : \frac{U_B^2}{R} = \left(\frac{1}{4} U_Z\right)^2 : \left(\frac{3}{4} U_Z\right)^2 = 1 : 9.$$

Reostat  $B$  tedy dostává příkon devětkrát větší než reostat  $A$ , takže při zvyšování napětí zdroje se reostat  $B$  začne znatelně zahřívat dříve.

## b) Druhé kolo soutěže

### 1. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová, CSc.)

Slitina byla zhotovena z cínu o hmotnosti  $m_1 = 2,92 \text{ kg}$  a z olova o hmotnosti  $m_2 = 1,46 \text{ kg}$ .

a) Určete objem tělesa zhotoveného z této slitiny, rovná-li se součtu objemů obou složek.

b) Určete hustotu slitiny.

Hustota cínu  $\rho_1 = 7\,300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , olova  $\rho_2 = 11\,400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

c) Z této slitiny bylo zhotoveno těleso, které má objem

$V = 0,100 \text{ m}^3$  a hmotnost  $m = 820 \text{ kg}$ . Je plné nebo duté?

*Řešení:*

a) Objem tělesa  $V^* = V_1 + V_2$ , kde  $V_1$  značí objem cínu,  $V_2$  objem olova:

$$V^* = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2};$$

pro dané hodnoty je  $V \doteq 0,000\ 528 \text{ m}^3$ .

b) Hustota slitiny

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V^*};$$

pro dané hodnoty  $\rho \doteq 8\ 290 \text{ kg m}^{-3}$ .

c) Plné těleso vyrobené ze slitiny by mělo hmotnost  $M = V\rho$ , pro dané hodnoty  $M \doteq 829 \text{ kg}$ . Poněvadž  $M > m$ , je těleso duté.

## 2. úloha (navrhl Evžen Růžička)

Lyžař si vypočetl, že poběží-li rychlostí  $v_1 = 10 \text{ km h}^{-1}$ , dorazí do chaty ve 13.00 hodin. Při rychlosti  $v_2 = 15 \text{ km h}^{-1}$  dorazí do chaty v 11.00 hodin. Jakou rychlostí  $v$  musí běžet, aby doběhl k obědu právě ve 12.00 hodin?

*Řešení:*

Dobu, za kterou lyžař dorazí do chaty ve 12.00 hod., označíme  $t$ . Při rychlosti  $v_1$  dorazí za dobu  $t_1 + \tau$ , při rychlosti  $v_2$  za dobu  $t - \tau$ , kde  $\tau = 1,0 \text{ h}$ . Pro dráhu  $s$ , kterou lyžař ve všech třech případech urazí, platí

$$s = v_1(t + \tau); \quad s = v_2(t - \tau); \quad s = vt.$$

Porovnáním prvních dvou vztahů vyjádříme

$$t = \frac{v_1 + v_2}{v_2 - v_1} \tau,$$

pro zadané hodnoty  $t = 5,0$  h. Dosazením za  $t$  a  $\tau$  do prvního nebo druhého z uvedených vztahů dostaneme pro zadané hodnoty  $s = 60$  km a dosazením do třetího vztahu určíme  $v = 12$  km h<sup>-1</sup>.

### 3. úloha (navrhl Evžen Růžička)

V laboratoři jsou dva stejné ponorné vařiče s těmito údaji: 220 V, 35 Ω. Účinnost ponorného vařiče je  $\eta = 85\%$ . Úkolem laboranta je ohřát vodu o hmotnosti  $m = 2,0$  kg z teploty  $t_1 = 20$  °C na teplotu  $t_2 = 80$  °C; měrné teplo vody je  $c = 4,18$  kJ kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>.

a) Za kterou dobu  $\tau$  ohřeje vodu, použije-li jeden vařič?

b) Za kterou dobu  $\tau_1$  ohřeje vodu, použije-li dva vařiče spojené za sebou?

c) Za kterou dobu  $\tau_2$  ohřeje vodu, použije-li dva vařiče spojené vedle sebe?

Ve všech případech použije zdroj napětí 220 V. Předpokládáme, že odpory vařičů jsou stálé.

*Řešení:*

Příkon vařiče  $P = \frac{U^2}{R}$ , pro dané hodnoty  $P = 1\,467$  W.

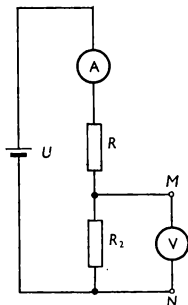
a) Voda přijme teplo  $Q = mc(t_2 - t_1)$ ;  $Q = 501,6$  kJ. Elektrická práce za dobu  $\tau$ :  $A = P\tau$ , účinnost vařiče je  $\eta = \frac{Q}{A}$ , odtud vyjádříme  $\tau = \frac{Q}{P\eta}$ ;  $\tau \doteq 402$  s = 6 min 42 s.

b) Příkon je poloviční, poněvadž odpor je dvojnásobný; proto  $\tau_1 = 2\tau$ ,  $\tau_1 \doteq 13 \text{ min } 24 \text{ s}$ .

c) Příkon je dvojnásobný, protože odpor je poloviční; proto  $\tau_2 = \frac{1}{2} \tau$ ;  $\tau_2 \doteq 3 \text{ min } 21 \text{ s}$ .

#### 4. úloha (navrhl Mojmir Simerský)

V elektrickém obvodu podle obr. 74 jsou dva stejné rezistory o odporech  $R_1 = R_2 = 100 \Omega$ ; napětí zdroje  $U = 12 \text{ V}$ .



Obr. 74

a) Jaký proud  $I_1$  naměří ampérmetr a jaké napětí  $U_1$  voltmetr?

b) Mezi body  $M, N$  zařadíme třetí stejný rezistor o odporu  $R_3 = 100 \Omega$ . Jaký proud  $I_2$  naměří nyní ampérmetr a jaké napětí  $U_2$  voltmetr?

Odporů spojovacích vodičů a odpor ampérmetru  $A$  jsou zanedbatelné vzhledem k odporům rezistorů; odpor voltmetru  $V$  je mnohonásobně větší než odpor každého z rezistorů.

*Řešení:*

a) Odpor rezistorů spojených za sebou  $R = 2R_1$ ;  $R = 200 \Omega$ . Proto  $I_1 = \frac{U}{R}$ ;  $I_1 = 0,060 \text{ A}$ . Poněvadž  $R_1 = R_2$ , je na rezistoru  $R_2$  napětí  $U_1 = \frac{1}{2} U$ ,  $U_1 = 6,0 \text{ V}$ .

b) Výsledný odpor rezistorů  $R_2$  a  $R_3$  spojených vedle sebe je

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}; \quad R_4 = 50 \Omega.$$

Celkový odpor obvodu je  $R' = R_1 + R_4$ ;  $R' = 150 \Omega$ , obvodem protéká proud  $I_2 = \frac{U}{R'}$ ;  $I_2 = 0,080 \text{ A}$ .

Označíme  $U_3$  napětí na rezistoru  $R_1$ ,  $U_2$  napětí na rezistorech  $R_2$  a  $R_3$  spojených vedle sebe, jejichž výsledný odpor je  $R_4$ . Pak platí  $U_3 : U_2 = R_1 : R_4$ ;  $U_3 + U_2 = U$ . Z těchto vztahů určíme pro  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_4 = 50 \Omega$ ,  $U = 12 \text{ V}$ ;  $U_2 = 4,0 \text{ V}$ .

### c) Třetí kolo soutěže

#### 1. úloha (navrhl dr. Ivo Volf)

Automobil VAZ-Žiguli jel po dráze délky  $s_1 = 50 \text{ km}$  průměrnou rychlostí  $v_1 = 50 \text{ km h}^{-1}$ . Potom přijel na dálnici, kde na dráze  $s_2 = 50 \text{ km}$  byla jeho průměrná rychlost  $v_2 = 100 \text{ km h}^{-1}$ .

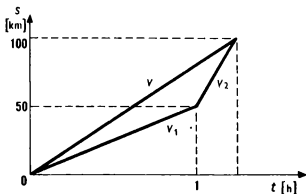
a) Nakreslete graf závislosti dráhy na čase pro celou trať  $s = s_1 + s_2$ .

b) Určete průměrnou rychlost  $v$  automobilu na celé trati.

c) Do grafu z úlohy a) doplňte graf závislosti dráhy na čase v případě, že by se automobil pohyboval po celé trati průměrnou rychlostí  $v$ .

*Řešení:*

a) Graf závislosti dráhy na čase pro trať  $s = s_1 + s_2$  při rychlostech  $v_1, v_2$  je na obr. 75.



Obr. 75

b) Dráhu  $s_1$  ujede automobil za dobu

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = 1 \text{ h},$$

dráhu  $s_2$  za dobu

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = 0,5 \text{ h}.$$

Průměrná rychlost automobilu na trati  $s_1 + s_2$  je pak

$$v = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 67 \text{ km h}^{-1}.$$

c) V grafu úlohy a) doplníme úsečku označenou písmenem  $v$ .

## 2. úloha (navrhla dr. Miroslava Široká)

Osobní vůz o délce  $d_1 = 5,0$  m dojíždí rychlostí  $v_1 = 72 \text{ km h}^{-1}$  nákladní automobil, jehož délka je  $d_2 = 10$  m a který jede rychlostí  $v_2 = 36 \text{ km h}^{-1}$ . Osobní vůz začne předjíždět tak, že vybočí ze svého jízdního pruhu ve vzdálenosti  $l_1 = 50$  m od nákladního automobilu a po předjetí se zařadí před něj v odstupě  $l_2 = 25$  m. Předpokládáme, že rychlosti  $v_1, v_2$  se nemění.

a) Určete dobu  $t$  potřebnou k předjetí.

b) Určete dráhu  $s_1$ , kterou při předjíždění urazí osobní automobil.

c) Určete dráhu  $s_2$ , kterou při předjíždění urazí nákladní automobil.

*Řešení:*

a) Předpokládejme, že předjíždění trvá dobu  $t$ . Za tuto dobu urazí nákladní automobil dráhu  $s_2 = v_2 t$ , osobní vůz dráhu  $s_1 = v_1 t$ , kterou můžeme také vyjádřit vztahem

$$s_1 = l_1 + l_2 + d_1 + d_2 + v_2 t.$$

Porovnáním obou výrazů pro dráhu  $s_1$  dostaneme dobu potřebnou k předjetí

$$t = \frac{l_1 + l_2 + d_1 + d_2}{v_1 - v_2}$$

a pro dané hodnoty  $t = 9,0$  s.



b) Za dobu  $t = 9,0$  s urazí osobní vůz dráhu  $s_1 = v_1 t$ , pro zadané hodnoty  $s_1 = 180$  m.

c) Za dobu  $t = 9,0$  s urazí nákladní vůz dráhu  $s_2 = v_2 t$ , pro zadané hodnoty  $s_2 = 90$  m.

### 3. úloha (navrhla dr. Miroslava Široká)

Dva spotřebiče o odporech  $R_1 = 400 \Omega$  a  $R_2 = 1\,600 \Omega$  jsou připojeny k síti o napětí  $U = 220$  V.

a) Určete výkony  $P_1$  a  $P_2$  spotřebičů, jsou-li spojeny vedle sebe.

b) Určete výkony spotřebičů, jsou-li spojeny za sebou.

*Řešení:*

a) Při spojení vedle sebe je na každém spotřebiči napětí  $U = 220$  V a jejich výkony jsou

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1}, \quad P_2 = \frac{U^2}{R_2}$$

a pro dané hodnoty  $P_1 = 121$  W,  $P_2 = 30,25$  W.

b) Při spojení za sebou se na spotřebiče rozdělí napětí v přímém poměru k jejich odporům  $U_1 : U_2 = R_1 : R_2$ , přičemž platí  $U = U_1 + U_2$ . Odtud určíme napětí na spotřebičích:

$$U_1 = \frac{UR_1}{R_1 + R_2}, \quad U_2 = \frac{UR_2}{R_1 + R_2}$$

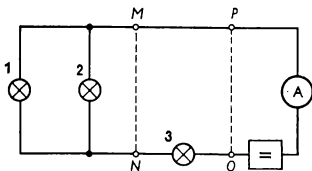
a pro dané hodnoty  $U_1 = 44$  V,  $U_2 = 176$  V. Výkony spotřebičů

$$P'_1 = \frac{U_1^2}{R_1}, \quad P'_2 = \frac{U_2^2}{R_2}$$

a pro dané hodnoty  $P'_1 = 4,84$  W,  $P'_2 = 19,36$  W.

#### 4. úloha (navrhl dr. Milan Bednařík)

V elektrickém obvodu podle obr. 76 jsou tři žárovky o stejných odporech. Svítí-li žárovky, ampérmetr ukáže určitou výchylku.



Obr. 76

a) Jak se změní výchylka ampérmetru, jestliže vyřadíme z obvodu jen žárovku 1?

b) Jak se změní výchylka ampérmetru, jestliže vyřadíme z obvodu jen žárovku 2?

c) Jak se změní výchylka ampérmetru, jestliže vyřadíme z obvodu jen žárovku 3?

d) Jak se změní výchylka ampérmetru, jestliže v daném obvodu spojíme vodičem o zanedbatelném odporu body  $M$ ,  $N$ ?

e) Jak se změní výchylka ampérmetru, jestliže v daném obvodu spojíme vodičem o zanedbatelném odporu body  $P$ ,  $Q$ ?

Každou odpověď zdůvodněte. Vysvětlete, jaké následky pro ampérmetr může mít spojení bodů  $P$ ,  $Q$ .

### Řešení:

a) Vyřadíme-li žárovku 1, zvětší se elektrický odpor obvodu (jedna žárovka má odpor větší než dvě žárovky spojené paralelně) a výchylka ampérmetru se zmenší.

b) Stejný závěr jako v případě a).

c) Elektrický obvod se přeruší a výchylka ampérmetru klesne na nulu.

d) Odpor klesne na hodnotu odporu žárovky 3 a výchylka ampérmetru se zvětší.

e) Odpor obvodu bude zanedbatelně malý, výchylka ampérmetru se zvětší. Má-li ampérmetr malý měřicí rozsah, může se poškodit.

## 6. Úlohy pokusného 1. kola kategorie D v JMK

### 1. část 1. kola

1. úloha totožná s úlohou 1 kat. D

2. úloha totožná s úlohou 2 kat. D

### 3. úloha

Rybář v loďce na rybníku přitahuje k sobě lanem jinou loďku s nákladem stálou silou  $F$ . Loďka s rybářem má hmotnost  $m_1$ , loďka s nákladem má hmotnost  $m_2$ . V okamžiku, kdy rybář začne táhnout lano, jsou obě loďky v klidu a jejich vzdálenost je  $d$ . Rozměry loďek zanedbáváme.

a) Jaká je relativní rychlost loďek v okamžiku nárazu?

b) Jakou práci rybář vykoná? Jakým průměrným výkonem pracuje?

c) Řešte úlohu a), b) v případě, že loďka s rybářem je pevně připoutána k břehu rybníka. Určete poměr prací

a poměr průměrných výkonů rybáře v obou případech. Po obecném vyřešení úlohy použijte hodnoty:  $F = 50 \text{ N}$ ,  $m_1 = 250 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 500 \text{ kg}$ ,  $d = 25 \text{ m}$ .

*Řešení:*

a) Zrychlení první loďky je  $\frac{F}{m_1}$ ,

zrychlení druhé loďky je  $\frac{F}{m_2}$ .

Je-li  $t$  doba, po kterou rybář táhne loďku až do nárazu obou loďek, pak rychlost první loďky při nárazu je

$v_1 = \frac{F}{m_1} t$ , rychlost druhé loďky při nárazu  $v_2 = \frac{F}{m_2} t$ .

Přitom  $t$  musí vyhovovat rovnici

$$d = \frac{1}{2} \left( \frac{F}{m_1} + \frac{F}{m_2} \right) t^2$$

čili

$$t = \sqrt{\frac{2d}{F} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}.$$

Loďky na sebe narazí relativní rychlostí

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= F \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \sqrt{\frac{2d}{F} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} = \\ &= \sqrt{2dF \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}. \end{aligned}$$

Číselně:  $v_1 + v_2 = 3,9 \text{ m s}^{-1}$ ,  $t = 13 \text{ s}$ .

b) Rybář přitahuje navzájem obě loďky silou  $F$ . Proto vykoná práci

$$A = Fd$$

a pracuje průměrným výkonem

$$P_1 = \frac{A}{t} = Fd \sqrt{\frac{F(m_1 + m_2)}{2dm_1m_2}}.$$

Číselně:  $A = 1\,250 \text{ J}$ ,  $P_1 = 96 \text{ W}$ .

c) Když je loďka s rybářem připoutána ke břehu, pak zrychlení druhé loďky je  $a = \frac{F}{m_2}$ . Práce, kterou rybář vykoná, je  $A = Fd$ , poněvadž loďka je ve vzdálenosti  $d$  a síla  $F$  je stálá. Doba, po kterou rybář působí touto silou, vyplývá z rovnice pro pohyb rovnoměrně zrychlený

$$d = \frac{1}{2} \frac{F}{m_2} t_1^2$$

čili

$$t_1 = \sqrt{\frac{2dm_2}{F}}.$$

Pak výkon

$$P_2 = \frac{A}{t_1} = \frac{Fd \sqrt{F}}{\sqrt{2dm_2}} = \sqrt{\frac{F^3d}{2m_2}}.$$

Poměr prací  $A_1 : A_2 = 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{poměr výkonů } P_1 : P_2 &= \sqrt{\frac{F^3(m_1 + m_2)d}{2m_1m_2}} : \sqrt{\frac{F^3d}{2m_2}} = \\ &= \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} : 1. \end{aligned}$$

Číselně:  $t_1 = 22,4 \text{ s}$ ,  $P_2 = 56 \text{ W}$ ,  $P_1 : P_2 = \sqrt{3}$ .

**4. úloha** totožná s úlohou 6 kat. D.

## 2. část 1. kola — klauzurní práce

### 1. úloha

Dlouhou ulicí projíždějí oběma směry tramvaje stálou rychlostí  $v$  bez zastávky. Pozorovatel stojící u vozovky zjistí, že tramvaje kolem něho projíždějí v jednom směru vždy za dobu  $\Delta t$  za sebou. Také v opačném směru projíždějí za dobu  $\Delta t$  za sebou.

Potom pozorovatel jede na kole ulicí stálou rychlostí  $v_1$ .

a) V jakých časových intervalech  $\Delta t_1$  potkává tramvaje jedoucí proti němu?

b) V jakých časových intervalech  $\Delta t_2$  ho tramvaje míjejí?

c) Po obecném vyřešení úlohy řešte pro hodnoty:  $v = 24 \text{ km h}^{-1}$ ,  $\Delta t = 3,0 \text{ min}$ ,  $v_1 = 12 \text{ km h}^{-1}$ .

d) Předpokládejte, že rychlost tramvajů je stálá  $v = 24 \text{ km h}^{-1}$  a že rychlost jezdce na kole  $v_1$  má různou velikost, vždy však po celé délce ulice stejnou. Sestavte tabulky hodnot funkcí  $\Delta t_1 = f_1(v_1)$ ,  $\Delta t_2 = f_2(v_1)$  pro  $v_1$  v intervalu  $0 \text{ km h}^{-1}$  až  $24 \text{ km h}^{-1}$ . Na milimetrový papír sestrojte grafy obou funkcí a popište jejich průběh. Popište situaci, když  $v_1$  je větší než  $v$ .

*Řešení:*

a) Vzdálenost mezi tramvajemi jedoucími za sebou je  $\Delta s = v\Delta t$ . Rychlost protijedoucích tramvajů vzhledem k pozorovateli je  $v + v_1$ . Pozorovatel potká tramvaj vždy za dobu

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta s}{v + v_1} = \frac{v\Delta t}{v + v_1}. \quad (1)$$

b) Rychlost tramvajů, které pozorovatele míjejí, je

vzhledem k pozorovateli  $v - v_1$ . Tramvaj předjede pozorovatele vždy za dobu

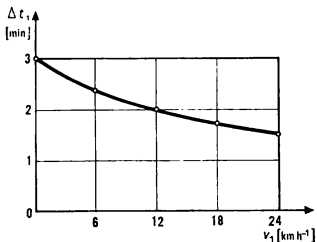
$$\Delta t_2 = \frac{\Delta s}{v - v_1} = \frac{v \Delta t}{v - v_1}. \quad (2)$$

c) Podle (1) je  $\Delta t_1 = 2$  min, podle (2) je  $\Delta t_2 = 6$  min.

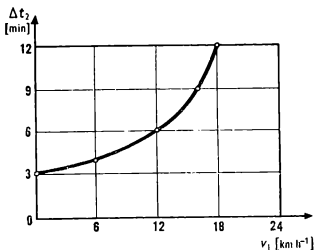
d) $v_1$ (km h <sup>-1</sup> )	0	6	12	18	24
$\Delta t_1$ (min)	3,0	2,4	2,0	1,7	1,5
$\Delta t_2$ (min)	3,0	4,0	6,0	12,0	roste bez omezení

Závislost je znázorněna na obr. 77 a obr. 78.

Je-li  $v_1 = v$ , jsou tramvaje vzhledem k pozorovateli v klidu.



Obr. 77



Obr. 78

## 2. úloha

Těleso padá ve vakuu s nulovou počáteční rychlostí z výšky  $h$ . Výšku  $h$  rozdělíme na  $n$  úseků tak, aby doba pádu v každém z těchto úseků byla stejná.

a) Určete úseky dráhy  $s_1, s_2, s_3, \dots$  v jednotlivých po sobě následujících stejných časových intervalech. Určete obecně úsek dráhy  $s_k$  v  $k$ -tém časovém intervalu od počátku pohybu.

b) Po obecném vyřešení úlohy řešte pro hodnoty  $h = 250$  m,  $n = 5$ .

*Řešení:*

Označme  $t$  dobu volného pádu tělesa z výšky  $h$ ; označme  $t_0$  dobu, za kterou urazí těleso dráhu každého z  $n$  úseků:

$$t_0 = \frac{t}{n}.$$

$$\text{Platí: } h = \frac{gt^2}{2} = \frac{gn^2t_0^2}{2}, \quad \text{z toho } t_0^2 = \frac{2h}{gn^2}.$$



$$\text{a) } s_1 = \frac{gt_0^2}{2} = \frac{h}{n^2} = 1 \cdot \frac{h}{n^2}; \quad s_2 = \frac{g(2t_0)^2}{2} - s_1 = \\ = 3 \cdot \frac{h}{n^2}; \quad s_3 = 5 \cdot \frac{h}{n^2} \dots$$

V  $k$ -tém časovém intervalu od počátku pohybu urazí těleso dráhu

$$s_k = (2k - 1) \cdot \frac{h}{n^2}.$$

$$\text{b) } s_1 = 10 \text{ m}; \quad s_2 = 30 \text{ m}; \quad s_3 = 50 \text{ m}; \quad s_4 = 70 \text{ m}; \\ s_5 = 90 \text{ m}; \\ s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 250 \text{ m}.$$

*Jiné řešení:*

Označení ponecháme stejné.

a) Je-li dráha v prvním časovém úseku  $s_1$ , pak ze vztahu  $s = \frac{g}{2} t^2$  plyne, že dráhy od začátku pohybu jsou

$$s_1, 4s_1, 9s_1, 16s_1, 25s_1, \dots$$

Dráhy v jednotlivých stejných časových intervalech tedy jsou

$$s_1, 3s_1, 5s_1, 7s_1, 9s_1, \dots$$

V  $k$ -tém časovém intervalu od počátku pohybu urazí tedy těleso dráhu

$$s_k = (2k - 1) \cdot s_1 = (2k - 1) \cdot \frac{h}{n^2} \quad (\text{viz úvodní část 1. řešení}).$$

b) Shodné s 1. řešením.

### 3. úloha

Střela o hmotnosti  $m = 10 \text{ kg}$  letí ve vodorovném směru a má v daném okamžiku rychlost  $v = 200 \text{ m s}^{-1}$ . V letu se rozpadne na dvě části. Část o menší hmotnosti  $m_1 = 3,0 \text{ kg}$  se odchýlí od vodorovného směru vzhůru o úhel  $\alpha = 60^\circ$  a má v okamžiku rozpadu rychlost  $v_1 = 400 \text{ m s}^{-1}$ .

a) Narýsujte ve vhodném měřítku vektorový rovnoběžník hybností střely a jejích částí po rozpadu.

b) Určete z tohoto obrázku změřením velikost hybnosti části střely o větší hmotnosti  $m_2$  a úhel  $\beta$ , který svírá vektor hybnosti této části střely s vodorovným směrem. (Použijte úhломěr.)

c) Určete velikost rychlosti  $v_2$  části střely o hmotnosti  $m_2$ .

*Řešení:*

Označme  $\mathbf{p}$  hybnost střely těsně před rozpadem,  $\mathbf{p}_1$  hybnost části o hmotnosti  $m_1$  a  $\mathbf{p}_2$  hybnost části o hmotnosti  $m_2$  těsně po rozpadu.

$$p = mv = 2\,000 \text{ kg m s}^{-1},$$

$$p_1 = m_1 v_1 = 1\,200 \text{ kg m s}^{-1}.$$

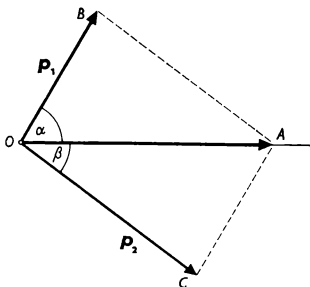
a) Pro sestavení přiřadíme  $1 \text{ cm} \hat{=} 200 \text{ kg m s}^{-1}$  (obr. 79).

b)  $OC \hat{=} 8,7 \text{ cm}$ ,

$$p_2 \hat{=} 8,7 \cdot 200 \text{ kg m s}^{-1} = 1\,740 \text{ kg m s}^{-1},$$

$$\beta \hat{=} 37^\circ,$$

$$\text{c) } v_2 = \frac{p_2}{m_2} \hat{=} \frac{1\,740}{7} \text{ m s}^{-1} = 248 \text{ m s}^{-1}.$$



Obr. 79

## 7. Úlohy pokusného 1. kola kat. E v JMK

### 1. část 1. kola

1. úloha totožná s úlohou 1 kat. E

2. úloha totožná s úlohou 3 kat. E

### 3. úloha

V kalorimetru je voda o hmotnosti  $m = 2,00$  kg a teplotě  $t = 20,0$  °C.

a) Na jaké výsledné teplotě  $t_0$  se ustálí voda, vložíme-li do kalorimetru kus oceli o hmotnosti  $m_1 = 1,00$  kg a teplotě  $t_1 = 100$  °C a kus stříbra o stejné teplotě i hmotnosti

1. po sobě vždy po ustálení teploty,
2. současně.

b) Jaká musí být hmotnost  $m_2$  kusu stříbra o teplotě  $100\text{ }^\circ\text{C}$ , aby způsobil stejnou změnu teploty jako v případě a)?

Měrné teplo vody je  $c = 4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$ ,

oceli  $c_1 = 0,482 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$ ,

stříbra  $c_2 = 0,235 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$ .

Teplo potřebné na zahřátí kalorimetru zanedbáme. Úlohu řešte nejprve obecně a do výsledných obecných vztahů dosadte zadané hodnoty. Omezíte vznik početních chyb.

*Řešení:*

Nezáleží na tom, jestli se tělesa vloží do kapaliny po sobě po ustálení teploty nebo současně.

$$\text{a) } mc(t_0 - t) = m_1c_1(t_1 - t_0) + m_2c_2(t_1 - t_0),$$

z toho

$$t_0 = \frac{mct + m_1(c_1 + c_2)t_1}{mc + m_1(c_1 + c_2)}, \quad t_0 = 26,3\text{ }^\circ\text{C};$$

$$\text{b) } mc(t_0 - t) = m_2c_2(t_1 - t_0),$$

z toho

$$m_2 = \frac{mc(t_0 - t)}{c_2(t_1 - t_0)}, \quad m_2 = 3,04\text{ kg}.$$

4. úloha totožná s úlohou 5 kat. E

## 2. část 1. kola — klauzurní práce

### 1. úloha

Skleněná lahvička se zabroušenou zátkou má hmotnost  $m_s$  a objem dutiny  $V_d$ . Kolik vody je nutno do ní dát, aby se právě ve vodě vznášela? Řešte obecně, pak pro hodnoty  $m_s = 55,0$  g,  $V_d = 100,0$  cm<sup>3</sup>, hustota skla  $\rho_s = 2\,500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

*Řešení:*

Označení veličin:  $m_s$  = hmotnost skleněné lahvičky,  $V_d$  = objem dutiny lahvičky,  $\rho_s$  = hustota skla,  $V = V_s + V_d$  = objem lahvičky i s dutinou,  $m_1$  = hmotnost vytlačené vody při ponoření lahvičky do vody,  $m_v$  = hmotnost vody v lahvičce,  $\rho_v$  = hustota vody. Podle Archimédova zákona:  $m_1 g = m_s g + m_v g$ ,  
po úpravě

$$\frac{m_v}{\rho_v} = \frac{m_1}{\rho_v} - \frac{m_s}{\rho_s}. \quad (1)$$

Hmotnost vytlačené vody:

$$m_1 = (V_s + V_d) \rho_v.$$

Objem vody v lahvičce:  $V_v = \frac{m_v}{\rho_v}$ . Dosazením do (1) bude

$$\begin{aligned} V_v &= (V_s + V_d) - \frac{m_s}{\rho_v} = \frac{m_s}{\rho_s} + V_d - \frac{m_s}{\rho_v} = \\ &= m_s \frac{\rho_v - \rho_s}{\rho_s \rho_v} + V_d. \end{aligned}$$

Dosazením číselných hodnot

$$V_v = 55,0 \frac{1,00 - 2,5}{1,00 \cdot 2,5} \text{ cm}^3 + 100 \text{ cm}^3 = 67 \text{ cm}^3.$$

## 2. úloha

V každém ze dvou stejných kalorimetrů je voda o hmotnosti  $m = 2,00 \text{ kg}$  a teplotě  $t = 20,0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Jaká musí být hmotnost  $m_1$  kusu stříbra o teplotě  $t_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ , aby teplota v kalorimetru, do kterého se kus stříbra ponoří, se ustálila na teplotě  $t_0 = 23,0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Jaká musí být teplota  $t_2$  kusu oceli o hmotnosti  $m_2 = 1,00 \text{ kg}$ , který vložíme do druhého kalorimetru, aby se v něm ustálila teplota na stejné hodnotě  $t_0$  jako v prvním kalorimetru. Měrné teplo vody  $c = 4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg } ^\circ\text{C}}$ , stříbra  $c_1 = 0,235 \frac{\text{kJ}}{\text{kg } ^\circ\text{C}}$ , oceli  $c_2 = 0,482 \frac{\text{kJ}}{\text{kg } ^\circ\text{C}}$ . Teplo potřebné na ohřátí kalorimetrů zanedbáváme. Úlohu řešte obecně a pak pro zadané hodnoty.

*Řešení:*

$$(t_0 - t)cm = (t_1 - t_0)c_1m_1,$$

$$m_1 = \frac{(t_0 - t)cm}{(t_1 - t_0)c_1},$$

$$m_1 = 1,39 \text{ kg};$$

$$(t_0 - t)cm = (t_2 - t_0)c_2m_2,$$

$$t_2 = \frac{(t_0 - t)cm + t_0c_2m_2}{c_2m_2},$$

$$t_2 = 75,0 \text{ }^\circ\text{C}.$$

3. úloha totožná s úlohou 6 kat. E

## 8. Úlohy přípravného kola v 8. ročníku ZDŠ v JMK

### 1. úloha

V prázdninovém táboře pionýři odstraňovali kameny ze dna tůňky, kterou upravovali na koupaliště. Vedoucí jim (vzhledem k jejich věku) dovolil zvedat kameny silou nejvýše 100 N. Měrná tíha kamenů je

$$\gamma_1 = 25\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}, \text{ měrná tíha vody je } \gamma_2 = 10\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}.$$

a) Určete objem  $V$  kamene, jehož tíha  $G = 100$  N. Objem  $V$  vyjádřete v  $\text{m}^3$  a  $\text{dm}^3$ .

b) Jak velkou silou  $F$  zvedne pionýr kámen celý ponořený ve vodě, je-li tíha kamene  $G_1 = 100$  N?

c) Pionýr zvedá kámen, který je celý ponořený ve vodě. Vypočtete tíhu  $G_2$  kamene, když pionýr při tom vynaloží sílu  $F = 100$  N.

d) Jakou práci  $A_1$  vykoná pionýr, zvedne-li kámen tíhy  $G_1 = 100$  N po svislé dráze délky  $h = 0,50$  m rovnoměrným pohybem?

e) Jakou práci  $A_2$  vykoná pionýr, zvedne-li týž kámen po svislé dráze stejné délky rovnoměrným pohybem, je-li kámen stále ponořený celý ve vodě?

*Řešení:*

a) Podle definice je  $\gamma_1 = \frac{G_1}{V}$ , proto je  $V = \frac{G_1}{\gamma_1}$ . Po dosazení je  $V = \frac{100}{25\,000} \text{ m}^3 = 0,0040 \text{ m}^3 = 4,0 \text{ dm}^3$ .  
Objem kamene je  $V = 0,0040 \text{ m}^3 = 4,0 \text{ dm}^3$ .

b) Kámen úplně ponořený ve vodě je podle Archimédova zákona nadlehčován silou  $F_1$ , která se rovná tíze vody, jejíž objem je stejný jako objem  $V$  kamene. Proto  $F_1 = V\gamma_2$ .

Obecné řešení: Síla  $F$ , kterou zvedá pionýr zcela ponořený kámen, se rovná rozdílu tíhy  $G_1$  kamene a vztlakové síly  $F_1$ , tedy  $F = G_1 - F_1$ . Dosazením za  $F_1$  dostaneme

obecný vztah pro sílu  $F$ ;  $F = G_1 \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1}$ .

$$\begin{aligned} \text{Po dosazení: } F &= 100 \frac{25\,000 - 10\,000}{25\,000} \text{ N} = \\ &= 100 \frac{15\,000}{25\,000} \text{ N} = 60 \text{ N.} \end{aligned}$$

Pionýr zvedne kámen tíhy  $G_1 = 100 \text{ N}$  zcela ponořený ve vodě silou  $F = 60 \text{ N}$ .

c) Tíha  $G_2$  kamene zcela ponořeného ve vodě se rovná součtu vztlakové síly  $F_2$  a síly  $F = 100 \text{ N}$ , kterou pionýr kámen zvedá:  $G_2 = F_2 + F$ .

Obecné řešení: Síla  $F_2$ , kterou je kámen zcela ponořený ve vodě nadlehčován, je podle výsledků otázky b)

$$F_2 = \frac{G_2}{\gamma_1} \gamma_2.$$

$$\text{Proto } G_2 = \frac{G_2}{\gamma_1} \gamma_2 + F, \quad G_2 = F \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

$$\text{Po dosazení: } G_2 = 100 \frac{25\,000}{15\,000} \text{ N} \doteq 167 \text{ N}.$$

Tíha kamene je  $G_2 \doteq 167 \text{ N}$ .

d)  $A_1 = G_1 h$ . Po dosazení:  $A_1 = 100 \cdot 0,50 \text{ J} = 50 \text{ J}$ . Pionýr vykoná práci  $A_1 = 50 \text{ J}$ .

e)  $A_2 = F h$ . Po dosazení:  $A_2 = 60 \cdot 0,50 \text{ J} = 30 \text{ J}$ . Zvedne-li pionýr kámen tíhy  $100 \text{ N}$  zcela ponořený ve vodě po svislé dráze do výšky  $0,50 \text{ m}$ , vykoná práci  $A_2 = 30 \text{ J}$ .



## 2. úloha

Na objížďce osadou byla stanovena maximální dovolená rychlost motorového vozidla  $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Spolužáci Marta a Michal udělali na přímém úseku objížďky o délce  $d = 200 \text{ m}$  pokus. Pomocí stopek zjistili, že motocykl projel sledovaný úsek objížďky za dobu  $t_1 = 23 \text{ s}$ , osobní automobil za dobu  $t_2 = 20 \text{ s}$ , nákladní automobil za dobu  $t_3 = 28 \text{ s}$  a autobus za dobu  $t_4 = 30 \text{ s}$ .

a) Jaké průměrné rychlosti měla jednotlivá motorová vozidla?

b) Které vozidlo překročilo maximální dovolenou rychlost?

c) Narýsujte na milimetrový papír formátu A4 graf závislosti dráhy  $s$  na čase  $t$  rovnoměrného pohybu přímočarého, jehož rychlost je rovna maximální dovolené rychlosti motorového vozidla osadou  $v = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . (Na časové ose zvolte stupnici  $7 \text{ mm} \hat{=} 1 \text{ s}$ , na ose dráhy  $5 \text{ mm} \hat{=} 10 \text{ m}$ .)

Jak mohli spolužáci využít tento graf k řešení úlohy, aniž by rychlosti vozidel počítali?

d) Spolužáci přišli na to, že k řešení úkolu jim stačí, když vypočtou, za jakou dobu  $t$  projede dráhu  $d$  vozidlo jedoucí maximální dovolenou rychlostí.

Jak ze znalosti doby  $t$  zjišťovali, které vozidlo překročilo maximální dovolenou rychlost?

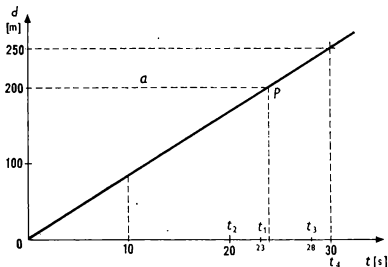
e) Marta a Michal měli k dispozici jen jednu stopku. Popište, jak provedli měření dob  $t_1$  až  $t_4$ .

**Řešení:**

a) Obecné řešení:  $v_i = \frac{d}{t_i}$ , kde  $i = 1, 2, 3, 4$ . Po dosazení byly průměrné rychlosti jednotlivých vozidel:  $v_1 = 8,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $v_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $v_3 = 7,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $v_4 = 6,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

b) Maximální dovolená rychlost je  $v = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{30\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} \doteq 8,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Ze srovnání hodnoty  $v$  s hodnotami  $v_1$  až  $v_4$  z řešení otázky a) je vidět, že maximální dovolenou rychlost překročily motocykl a osobní automobil.

c) K řešení otázky c) je možno použít graf (obr. 80) např. takto: Na obrázku grafu se sestrojí bodem o souřadnicích  $(0,0 \text{ m}; 200 \text{ m})$  rovnoběžka  $a$  s časovou osou. Rovnoběžka protne graf v bodě  $P$ , kterému odpovídá



Obr. 80

časová souřadnice  $t$  ( $t = 24$  s). Naměřené hodnoty  $t_i$  menší než  $t$  se vztahují k vozidlům, která překročila maximální dovolenou rychlost. Jsou to motocykl a osobní automobil.

d) Pohyb vozidel ve sledovaném úseku je rovnoměrný, proto platí:  $t = \frac{d}{v}$ ; po dosazení hodnoty pro délku sledovaného úseku a hodnoty maximální dovolené rychlosti vypočteme  $t = 24$  s. Osobní automobil projel sledovaný úsek za 20 s, motocykl za 23 s. Obě vozidla potřebovala k projetí sledované dráhy menší čas než 24 s. Proto překročila maximální dovolenou rychlost.

e) Marta stála na jednom konci a Michal na druhém konci sledovaného úseku dráhy. Jeden z nich měl stopky. K měření potřebovali dorozumívací znamení; mohli použít hlas nebo zvednutí ruky. Vzhledem k rychlosti zvuku a délce sledovaného úseku dráhy je optický signál výhodnější.

### 3. úloha

Ve fyzikálním praktiku chlapci provedli pokus. Nejprve na hřející radiátor ústředního topení položili kovovou obdélníkovou desku. Za chvíli postavili na desku současně dvě kádinky: v první kádince byla voda hmotnosti  $m_1 = 200$  g a teploty  $t_1 = 15$  °C. Ve druhé kádince byla voda o hmotnosti  $m_2 = 150$  g a ledová tříšť o hmotnosti  $m_3 = 50$  g. Teplota této vody s ledem byla  $t_0 = 0$  °C. Po určité době naměřili teplotu vody v první kádince  $t_2 = 40$  °C.

a) Jaké teplo  $Q$  přijala voda v první kádince, když se ohřála z teploty  $t_1$  na teplotu  $t_2$ ?

b) V okamžiku, kdy voda v první kádince dosáhla teploty  $t_2$ , led v druhé kádince již roztál a teplota vody

byla  $t_3$ . Předpokládáme-li, že za stejnou dobu přijala i druhá kádinka stejné teplo  $Q$ , určete teplotu  $t_3$  ve druhé kádince.

c) Vysvětlete, proč teplota  $t_3$  se nerovná teplotě  $t_2$ . Měrné teplo vody je  $c = 4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$ , měrné skupenské teplo tání ledu je  $l = 335 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ . Nepřihlížíme k teplu, které přijaly kádinky.

*Řešení:*

a) Obecné řešení:  $Q = cm_1(t_2 - t_1)$ . Po dosazení vypočteme  $Q = 20,9 \text{ kJ}$ .

Voda v první kádince přijala teplo  $Q = 20,9 \text{ kJ}$ .

b) Obecné řešení:  $Q_1 + Q_2 = Q$ , kde  $Q_1 = lm_3$ ,

$$Q_2 = c(m_2 + m_3)(t_3 - t_0);$$

$$t_3 = \frac{Q - lm_3}{c(m_2 + m_3)}.$$

Po dosazení vypočteme  $t_3 \doteq 5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Někteří žáci obecný vztah nesestaví. Patrně nejprve vypočtou  $Q_1 = lm_3$ ;  $Q_1 = 0,05 \cdot 335 \text{ kJ} \doteq 16,7 \text{ kJ}$ . Potom určí  $Q_2 = Q - Q_1 = 20,9 \text{ kJ} - 16,7 \text{ kJ} = 4,2 \text{ kJ}$ . Pro výpočet hodnoty  $t_3$  užití vztah  $Q_2 = c(m_2 + m_3)(t_3 - t_0)$ . Poněvadž  $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ , dostanou vztah  $Q_2 = c(m_2 + m_3)t_3$

a odtud  $t_3 = \frac{Q_2}{c(m_2 + m_3)}$ . Po dosazení  $t_3 \doteq 5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Teplota vody v druhé kádince byla  $t_3 \doteq 5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

c) Teplo  $Q$ , které přijala kádinka s vodou a s ledem, se spotřebovalo částečně jako skupenské teplo tání ledu a zbytek jako teplo potřebné k ohřátí vody z teploty  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  na teplotu  $5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

# III. ČÁST

## DEVÁTÁ MEZINÁRODNÍ FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA

### 1. Průběh a výsledky soutěže

Organizátorem IX. mezinárodní fyzikální olympiády (IX. MFO) byla ve studijním roce 1975/76 Maďarská lidová republika. Olympiádu řídila Maďarská fyzikální společnost L. Eötvöse ve spolupráci s ministerstvem školství a přírodovědeckou fakultou Univerzity L. Eötvöse. Probíhala v době od 1. VII. do 8. VII. 1976 v Budapešti. Zúčastnila se jí družstva desíti států, a to sedmi států, které se zúčastňují od I., respektive II. MFO: Bulharska (BLR), Československa (ČSSR), Maďarska (MLR), Německé demokratické republiky (NDR), Polska (PLR), Rumunska (RSR) a ŠSSR a z pozdějších účastníků: Německé spolkové republiky (NSR), Francie (F) a nově letos Švédska (Š). Kromě toho byly pozvány a nedostavily se Anglie, Finsko, Holandsko, Jugoslávie, Korejská lidově demokratická republika, Kuba, Mongolsko, Rakousko a Vietnam.

Z každého státu bylo pozváno 5 soutěžících, jeden vedoucí družstva a jeden pedagogický instruktor. Celkem se tedy soutěže zúčastnilo 50 studentů. Vedoucím našeho družstva byl doc. dr. Ivan Náter, 1. místopředseda ÚVFO, a pedagogickým instruktorem doc. ing. Bohumil Vybíral, člen užšího ÚVFO.

Pro účastníky IX. MFO a jejich náhradníky bylo uspořádáno soustředění ve Vyškově, stejně jako v mi-

nulých letech. Na schůzi předsednictva ÚVFO byli do něho vybráni podle výsledků 3. kola kategorie A tito úspěšní řešitelé kategorie A:

1. Kubát Karel	ZČK	G Plzeň, 4. r. MF
2. Tarina Pavol	ZSK	G Topolčany, 4. r. P
3. Turek Ilja	VČK	G Hradec Králové, 2 r. MF
4. Svoboda Jiří	JMK	G Brno, kpt. Jaroše, 3. r. Exp
5. Strakoš Zdeněk	SMK	SPŠ Ostrava-Vítko- vice, 4. r.
6. Bardiovský Vojtěch	VSK	SPŠE Košice, 4. r.
7. Šálek Ivo	SČK	G Jablonec n. Nisou, 4. r. P
8. Basler Jiří	SMK	G Opava, 4. r. MF
9. Jenčík Karel	StřČK	SPŠE Kutná Hora, 3. r.
10. Vondrák Pavel	SČK	G Ústí nad Labem, 4. r. MF

Všichni pozvaní splňovali podmínky stanovené statutem a směrnicemi pro MFO. Soustředění se konalo v době od 11. do 25. června 1976 na střední zemědělské technické škole ve Vyškově. Pedagogickým vedením byl pověřen RNDr. Alois Kleveta, profesor gymnázia ve Vyškově. Na soustředění přednášel RNDr. Alois Kleveta 40 hodin mechaniku, vlnění a část termiky a doc. ing. Bohumil Vybíral, CSc., docent Vysoké vojenské školy pozemního vojska ve Vyškově, 40 hodin termodynamiku, elektřinu a optiku. Přednášky se konaly každý den, a to 6—7 hodin — zčásti dopoledne, zčásti odpoledne. Jen v jednu neděli byl uspořádán celodenní výlet do Moravského krasu. Účastníci byli ubytováni a stravovali se v internátě SZTŠ ve Vyškově.

Před ukončením bylo vybráno družstvo pěti účastníků  
pro IX. MFO: Karel Kubát,  
Pavol Tarina,  
Ilja Turek,  
Jiří Svoboda,  
Vojtěch Bardiovský,

kteří také odjeli do Maďarska.

Vedoucími jednotlivých družstev na IX. MFO byli:

Bulharsko (BLR): Gleb Grigorievič Zadorožnij  
Československo (ČSSR): doc. RNDr. Ivan Náter  
Francie (F): Pierre Legrand  
Maďarsko (MLR): dr. Géza Tichy, univ. asistent  
Německá demokratická republika (NDR): prof. dr. Joachim Wendt  
Německá spolková republika (NSR): dr. Gunter Lind  
Polsko (PLR): Andrzej Kotlicky, Ph. D.  
Rumunsko (RSR): dr. ing. Anatolie Hristev  
Sovětský svaz (SSSR): Oleg Fedorovič Kabardin  
Švédsko (Š): dr. Ingemar Bartholdson

Pedagogickými instruktory byli:

BLR: Nikola Milanov Velčev, inspektor  
ČSSR: doc. ing. Bohumil Vybíral, CSc.  
F: René Ravier  
MLR: László Sasvári  
NDR: Udo Walta, dipl. odb. učitel  
NSR: Wolfgang Ruth  
PLR: Waldemar Gorzkowski, MSc.  
RSR: prof. Deniza Godiniová  
SSSR: Galina Sergejevna Tarasjuková, univ. asistentka  
Š: dr. Avellén Stig

Každé delegaci byl přidělen maďarský tlumočník, většinou z řad studentů, který dokonale ovládal mateřský jazyk delegace. Naši tlumočnicí byla čs. státní pří-

slušnice Marta Tóthová, studentka M-F na budapeštské univerzitě, vítězka krajského kola kategorie A Západo-slovenského kraje ve 13. roč. FO.

Předsedou organizačního výboru a předsedou mezinárodní komise MFO byl akademik György Marx; jeho zástupcem (a „duchovním otcem“ IX. MFO) byl prof. Rczsö Kunfalvi. Předsedou komise pro teoretické úlohy byl prof. Miklós Vermes a předsedou komise pro experimentální úlohu prof. István Kovác. Tyto komise měly při opravách k dispozici písemný překlad textové části řešení úloh do maďarštiny.

Vlastní olympiáda probíhala na Vysoké stranické škole. Ubytování bylo zajištěno ve školním internátě hotelového typu ve dvoulůžkových pokojích. Řešení teoretických úloh, zasedání mezinárodní komise a slavnostní zahájení a zakončení MFO se konalo v prostorách školy. Experimentální úloha se řešila v nedalekém gymnáziu. Stravování bylo zabezpečeno v jídelně školy a mělo vysokou úroveň.

MFO věnovaly pozornost veřejné sdělovací prostředky. Celý průběh MFO (včetně rekreační náplně) natáčela maďarská televize. Rovněž tisk věnoval MFO pozornost; např. v neděli 4. 7. 1976 vyšel v ústředním stranickém deníku Népszabadság o MFO obsáhlý článek.

Dne 2. července bylo odpoledne zahajovací zasedání mezinárodní komise a pak slavnostní zahájení spojené s koncertními čísly. Po skončení byla pro vedoucí a hosty uspořádána recepce.

Teoretické úlohy řešili účastníci dne 3. července a laboratorní úlohu 5. července.

Dne 6. července se konalo závěrečné zasedání mezinárodní komise, na kterém bylo schváleno bodové hodnocení a rozdělení cen.

Večer byla pro vedoucí uspořádána recepce Fyzikální společnosti L. Eötvöse.

Dne 7. července bylo odpoledne slavnostní zakončení



s projevem ministra školství a koncertními čísly; přitom byly vyhlášeny výsledky, předány diplomy a ceny. Po ukončení byla slavnostní večeře za účasti ministra školství.

Během soutěže připravili její organizátoři na 4. července celodenní výlet do oblasti Balatonu, spojený s prohlídkou města Székesfehérváru, Balatonfüredu, Siófoku a s prohlídkou kláštera v Tihány. Dne 6. července byl uspořádán pro soutěžící celodenní autobusový výlet do Visegrádu a Esztergomu. Dne 5. července navštívili soutěžící lunapark „Vidámpark“. Dne 6. července byl uspořádán výlet na lodi po Dunaji v oblasti Budapešti.

Dne 8. července jednotlivá družstva odjížděla.

Byly zadány tři teoretické úlohy, na jejichž vypracování měli soutěžící 5 hodin. Na vypracování laboratorní úlohy byla dána rovněž doba 5 hodin. Každá teoretická úloha — z nichž jedna byla problémová — se hodnotila nejvýš 10 body, laboratorní úloha nejvýš 20 body. Každý soutěžící mohl tedy dosáhnout maximálně 50 bodů.

Výsledky soutěže jsou uvedeny v tabulce na str. 252.

Nejvyšší dosažitelný počet bodů byl 50. Nejvyšší počet dosažených bodů byl 47,5 a z tohoto počtu bodů se vycházelo jako ze 100 %. Ceny a pochvalná uznání byly pak dány podle těchto směrnic (zaokrouhleno na nejbližší nižší celé číslo):

1. cena 100 % až 90 % bodů, tedy od 47,5 do 42 bodů,
  2. cena 89 % až 78 % bodů, tedy pod 42 do 37 bodů,
  3. cena 77 % až 65 % bodů, tedy pod 37 do 30 bodů,
- pochvalná uznání 64 % až 50 % bodů, tedy pod 30 do 23 bodů. Pod 50 % bylo vydáno potvrzení o účasti.

Pořadí	Jméno	Stát	Úloha				Celkem
			1	2	3	4	
1.	R. Lubis	PLR	8,5	9	10	20	47,5
2.	N. D. G. Popescu	RSR	8,5	9	8	20	45,5
3.	K. Kulpa	PLR	9	9	8	17	43
4.	V. Krivcun	SSSR	8,5	9	10	15	42,5
5.	I. Hamitov	SSSR	9,25	8	10	15	42,25
6.—7.	A. Poirson	F	7	9	7	19	42
	V. Bulatov	SSSR	9	8	6	19	42
8.	J. Svoboda	ČSSR	8,5	9	8	15	40,5
9.	R. Meinel	NDR	7	8	8	17	40
10.	P. Tarina	ČSSR	8,5	10	5	16	39,5
11.	A. F. A. Chiosea	RSR	10	9	8	12	39
12.	A. Golubencev	SSSR	2	10	10	16	38
13.	M. Hegner	NDR	8,5	10	9	10	37,5
14.	R. Glaser	NDR	6	10	4	17	37
15.	J. A. Dumitru	RSR	9,25	7	0	16	32,25
16.—19.	S. Nedev	BLR	6	7	4	15	32
	P. Vanko	MLR	9	10	1	12	32
	L. Köhler	NSR	8	2	10	12	32
	M. S. Saceanu (divka)	RSR	8,5	8,5	8	7	32
20.—21.	J. M. Luck-Laverne	F	7	9	8	7	31
	H. G. Martin	NDR	9	3	7	12	31
22.	M. Carlsson	Š	7	—	8	16	31
23.	G. C. G. Panaiotu	RSR	6,75	8	4	12	30,75
24.	I. Turek	ČSSR	6	6,5	3	15	30,5

25.—26.	W. Becker	NSR	10	0	6	14	30
27.—28.	K. U. Póznecker J. M. Victor	NSR F	8 7	0 10	10 6	12 6	30 29
29.—30.	M. Gulyás T. Müller	MLR NDR	9 8,5	10 7	6 3	4 10	29 28,5
31.—34.	K. Gajewski M. S. N'Guyen A. Viroztek	PLR F MLR	9,5 9 9	1 8 10	— 3 —	18 8 9	28,5 28 28
35.	W. Rachowicz	PLR	7	1	8	12	28
36.	V. Sztarsenko	SSSR	8	7	6	7	28
37.	K. Kubát	ČSSR	7	5,5	—	14	26,5
38.	B. Farago	MLR	6	9	10	1	26
39.	S. Ruszev	BLR	6	7	2	10	25
40.—41.	W. Javien S. Kalicin	PLR BLR	7,5 7	2 8	— 6	14 2	23,5 23
42.		BLR	3	9	7	2	21
43.		ČSSR	3	8	—	10	21
44.		Š	6	—	1	13	20
45.		MLR	9,25	6	2	2	19,25
46.	(dívka)	BLR	6	1	2	10	19
47.		Š	—	—	—	18	18
48.		NSR	7	—	—	7	14
49.		NSR	—	—	2	6	8
50.	(dívka)	Š Š F	— — —	1 — —	— 1 1	6 4 3	7 5 4

Ceny tedy dostali tito soutěžící:

1. cenu:	1. R. Lubis, Polsko	47,5 b.
	2. N. D. G. Popescu, Rumun.	45,5 b.
	3. K. Kulpa, Polsko	43 b.
	4. V. Krivcun, SSSR	42,5 b.
	5. J. Hamitov, SSSR	42,25 b.
	6.—7. A. Poirson, Francie	42 b.
	V. Bulatov, SSSR	42 b.
2. cenu:	8. J. Svoboda, ČSSR	40,5 b.
	9. R. Meinel, NDR	40 b.
	10. P. Tarina, ČSSR	39,5 b.
	11. A. F. A. Chioseá, Rumun.	39 b.
	12. A. Golubencev, SSSR	38 b.
	13. M. Hegner, NDR	37,5 b.
	14. R. Glaser, NDR	37 b.
3. cenu:	15. J. A. Dumitru, Rumunsko	32,25 b.
	16.—19. S. Nedev, Bulharsko	32 b.
	P. Vanko, Maďarsko	32 b.
	L. Köhler, NSR	32 b.
	M. S. Saceanu, Rumunsko (dívka)	32 b.
	20.—21. J. M. Luck-Laverne, Fran.	31 b.
	H. G. Martin, NDR	31 b.
	22. M. Carlsson, Švédsko	31 b.
	23. G. C. G. Panaiotu, Rum.	30,75 b.
	24. I. Turek, ČSSR	30,5 b.
	25.—26. W. Becker, NSR	30 b.
K. U. Pösnecker, NSR	30 b.	
pochvalné uznání:	27.—28. J. M. Victor, Francie	29 b.
	M. Gulyás, Maďarsko	29 b.
	29.—30. T. Müller, NDR	28,5 b.
	K. Gajewski, Polsko	28,5 b.
	31.—34. M. S. N'Guyen, Francie	28 b.

A. Virosztek, Maďarsko	28 b.
W. Rachowicz, Polsko	28 b.
V. Sztarsenko, SSSR	28 b.
35. K. Kubát, ČSSR	26,5 b.
36. B. Farago, Maďarsko	26 b.
37. S. Ruszew, Bulharsko	25 b.
38. W. Javien, Polsko	23,5 b.
39. S. Kalicin, Bulharsko	23 b.

Jedenáct řešitelů bylo neúspěšných.

Podle získaných bodů mají tedy státy toto pořadí (u každého státu je uveden též počet získaných cen a pochvalných uznání):

Pořadí	Stát	Počet bodů	Počet cen			Počet pochval. uznání	Počet neúspěšných
			1.	2.	3.		
1	SSSR	192,75	3	1	—	1	—
2	RSR	179,5	1	1	3	—	—
3	NDR	174	—	3	1	1	—
4	PLR	170,5	2	—	—	3	—
5	ČSSR	158	—	2	1	1	1
6	MLR	134,25	—	—	1	3	1
7	F	134	1	—	1	2	1
8	BLR	120	—	—	1	2	2
9	NSR	114	—	—	3	—	2
10	Š	81	—	—	1	—	4

Za jednotlivé úlohy získala družstva tento počet bodů

Pořadí	Stát	Počet bodů za úlohu				Celkem bodů
		1	2	3	4	
1	SSSR	36,75	42	42	72	192,75
2	RSR	43	41,5	28	67	179,5
3	NDR	39	38	31	66	174
4	PLR	41,5	22	26	81	170,5
5	ČSSR	33	39	16	70	158
6	MLR	42,25	45	19	28	134,25
7	F	30	36	25	43	134
8	BLR	28	32	21	39	120
9	NSR	33	2	28	51	114
10	Š	13	1	10	57	81
Celkem bodů v % (z 500 bodů)		339,5	298,5	246	574	1 458
		67,9	59,7	49,2	57,4	58,3

Tři nejlepší družstva u úlohy z mechaniky byla:  
RSR, MLR a PLR (naše bylo na 6.—7. místě).

Tři nejlepší družstva u úlohy z termodynamiky byla:  
MLR, SSSR a RSR (naše bylo na 4. místě).

Tři nejlepší družstva z problémové úlohy z optiky byla:  
SSSR, NDR a RSR s NSR (naše družstvo bylo na 9. místě).

Tři nejlepší družstva z laboratorní úlohy z termiky byla:  
PLR, SSSR a ČSSR.

Z letošních účastníků se loňského roku zúčastnil MFO Svetlozar Nedev (BLR), Attila Virosztek (MLR), Béla Farago (MLR). Mezi letošními soutěžícími byly tři dívky, a to Rumunka M. S. Saceanu, jedna Bulharka (neúspěšná) a jedna Francouzka (neúspěšná).

## 2. Soutěžní úlohy

### 1. úloha

Dutá koule poloměru  $R = 0,5$  m se otáčí stálou úhlovou rychlostí  $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$  kolem svého svislého průměru. Malé tělísko nacházející se uvnitř koule ve výšce jejího polovičního poloměru sdílí otáčivý pohyb koule (tj. otáčí se současně s koulí). Uvažujte  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

a) Jaký musí být součinitel tření, aby tento stav byl možný?

b) Jaký musí být součinitel tření v případě, že úhlová rychlost otáčení koule je  $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$ ?

c) Proveďte rozbor stability uvedené soustavy s vypočtenými součiniteli tření,

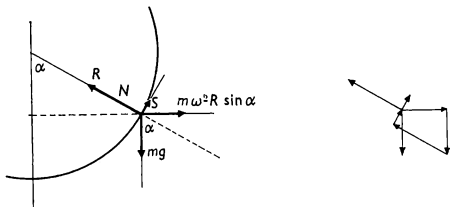
- a) jestli se poněkud (málo) změní poloha tělíška,
- β) jestli se poněkud (málo) změní úhlová rychlost otáčení koule.

*Řešení:*

Úlohu budeme řešit s těmito danými hodnotami:  $R = 0,50$  m, a)  $\omega = 5,0 \text{ s}^{-1}$ , b)  $\omega = 8,0 \text{ s}^{-1}$ .

Tělíško ležící na vnitřním povrchu koule se pohybuje po kružnici o poloměru  $R \sin \alpha$ , kde  $\alpha = 60^\circ$ . Aby mělo stálou polohu vzhledem k rotující soustavě, nesmí na ně působit ve dvou směrech navzájem kolmých žádná síla. Ve svislém směru na ně působí tíha  $mg$ , ve vodorovném směru odstředivá síla  $m\omega^2 R \sin \alpha$ . Dále na tělísko působí tlak stěny silou  $N$  ve směru normály a tření  $S$  ve směru tečny kružnice, po níž se tělísko pohybuje. Je-li tělísko v rovnováze, pak výslednice těchto čtyř sil je nulová (viz obr. 81). Musí tedy platit ve směru vodorovném

$$N \sin \alpha = S \cos \alpha + m\omega^2 R \sin \alpha$$



Obr. 81

a ve směru svislém

$$mg = S \sin \alpha + N \cos \alpha .$$

Odtud vypočteme

$$S = mg \sin \alpha - m\omega^2 R \sin \alpha \cos \alpha ,$$

$$N = mg \cos \alpha + m\omega^2 R \sin^2 \alpha .$$

Poměr

$$\frac{S}{N} = \frac{g - \omega^2 R \cos \alpha}{g \cos \alpha + \omega^2 R \sin^2 \alpha} \sin \alpha = \mu \quad (1)$$

určuje součinitel tření  $\mu$ .

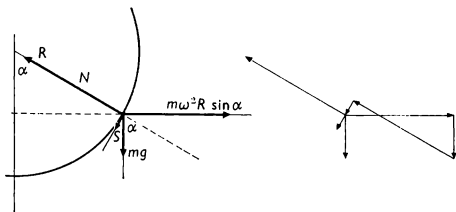
a) Pro  $\alpha = 60^\circ$  a při daných hodnotách  $R = 0,50 \text{ m}$  a  $\omega = 5,0 \text{ s}^{-1}$  vychází z (1)

$$\mu = 0,226 .$$

Označíme-li tuto hodnotu  $\mu_{a \min}$  a budeme-li značit součinitel tření v případě a)  $\mu_a$ , pak podmínkou rovnovážného stavu v případě a) bude

$$\mu_a \geq \mu_{a \min} = 0,226 . \quad (2)$$





Obr. 82

b) Pro  $\omega = 8,0 \text{ s}^{-1}$  a ostatních nezměněných hodnot dostaneme z (1)

$$\mu = -0,179 ,$$

což značí, že  $S$  má opačnou orientaci, než v případě a). Orientujeme-li tedy  $S$  podle obr. 82, bude

$$\frac{S}{N} = \frac{\omega^2 R \cos \alpha - g}{g \cos \alpha + \omega^2 R \sin^2 \alpha} \sin \alpha$$

a odtud po dosazení

$$\mu_{b \text{ min}} = 0,179 .$$

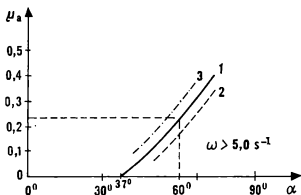
Podmínka rovnovážného stavu tedy v tomto případě bude

$$\mu \geq \mu_{b \text{ min}} = 0,179 . \quad (3)$$

Ad a): Je-li  $\omega = 5,0 \text{ s}^{-1}$ , pak z (1) vychází, že  $S = 0$

jednak pro  $\alpha = 0$ , jednak pro  $\cos \alpha = \frac{g}{R\omega^2}$ , tj.

pro  $\alpha = 37^\circ$ . Při  $\alpha < 37^\circ$  je tedy  $\mu_a < 0$ , pro  $\alpha > 37^\circ$  je  $\mu_a > 0$ . S úhlem  $\alpha$  tedy  $\mu_a$  roste, jak



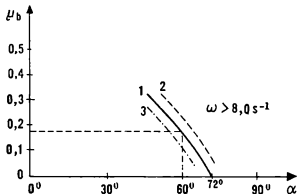
Obr. 83

je přibližně znázorněno v obr. 83 křivkou (1) plně vytaženou. Jestliže se  $\omega$  mírně změní, pak při jeho zvětšení hodnota  $\mu_a$  poněkud klesne a křivka (1) se posune do polohy (2), kdežto při zmenšení  $\omega$  přejde (1) do polohy (3).

**Ad b):** Je-li  $\omega = 8,0 \text{ s}^{-1}$ , je opět  $S = 0$  pro  $\alpha = 0$  nebo pro  $\cos \alpha = \frac{g}{R\omega^2}$ , tj. zde pro  $\alpha = 72^\circ$ . Zde je však  $\mu_b < 0$ , je-li  $\alpha > 72^\circ$ , kdežto pro  $\alpha < 72^\circ$  je  $\mu_b > 0$ . Hodnota  $\mu_b$  tedy s úhlem  $\alpha$  klesá — viz čára (1) v obr. 84. Při malé změně  $\omega$  se křivka (1) posune do polohy (2), jestliže  $\omega$  vzroste, a do polohy (3), jestli bude  $\omega < 8,0 \text{ s}^{-1}$ .

c) Z grafů na obr. 83 a 84 vyplývá (označíme  $\alpha_0 = 60^\circ$ ):

a,  $\alpha$ ) Umístíme-li tělísko poněkud níže, takže bude  $\alpha < \alpha_0$ , pak požadovaný minimální součinitel tření pro stabilitu  $\mu'_{\min}$  bude menší než  $\mu_{a \min}$ , takže podmínka (2) bude splněna — tělísko tedy zůstane



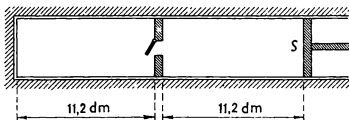
Obr. 84

v rovnováze. Je-li však tělísko umístěno výše, tj.  $\alpha > \alpha_0$ , pak  $\mu'_{\min} > \mu_{a \min}$ , podmínka (2) nebude splněna a tělísko klesne do původní polohy.

- a,  $\beta$ ) Při malém zvětšení  $\omega$  odpovídá úhlu  $\alpha_0$  menší minimální hodnota  $\mu$ , tj. tělísko zůstane v rovnováze. Při malém zmenšení se minimální hodnota  $\mu$  zvětší, tzn. tělísko zaujme novou polohu, klesne níže.
- b,  $\alpha$ ) V případě, že  $\omega = 8,0 \text{ s}^{-1}$  bude pro tělísko poněkud výše umístěné  $\mu'_{b \min} < \mu_{b \min}$ , tj. tělísko zůstane v nové poloze v rovnováze. Bude-li však  $\alpha < \alpha_0$  (tělísko trochu níže), pak  $\mu'_{b \min} > \mu_{b \min}$ , tělísko se posune výše.
- b,  $\beta$ ) Jestliže se úhlová rychlost poněkud zvýší nad  $8,0 \text{ s}^{-1}$ , pak pro  $\alpha_0$  potřebný minimální součinitel tření bude vyšší než  $\mu_{b \min}$ , tělísko tedy vystoupí výše. Klesne-li  $\omega$  poněkud pod  $8,0 \text{ s}^{-1}$ , zůstane tělísko v rovnováze, neboť bude  $\mu'_{b \min} < \mu_{b \min}$ .

## 2. úloha

Máme válec o příčném plošném obsahu  $S = 1 \text{ dm}^2$ . Vnější stěny válce, vnitřní přepážka a píst nepropouštějí teplo (obr. 85). Ventil v přepážce se otevře, když tlak v pravé části válce je vyšší než v levé části. Ve výchozím stavu se nachází v levé části válce délky 11,2 dm 12 g helia, v pravé části téže délky 11,2 dm 2 g helia. Počáteční teplota v obou částech válce je  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Vnější tlak je  $10 \text{ N cm}^{-2} = 10^5 \text{ Pa}$ . Měrné teplo hélia při konstantním objemu je  $c_V = 0,75 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1} = 3,15 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Měrné teplo při stálém tlaku je  $c_p = 1,25 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1} = 5,25 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .



Obr. 85

Píst pomalu posouváme směrem k přepážce. Když se ventil otevře, píst na chvíli zastavíme, pak pomalu posouváme píst dál až k přepážce. Určete, jak velkou práci jsme vykonali.

*Řešení:*

Řešení je provedeno v jednotkách, které byly uvedeny v zadání.

Poněvadž 1 mol (4 g) hélia má při teplotě  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  a tlaku  $10^5 \text{ Pa}$  objem 22,4 l, plyne z toho, že 12 g hélia, tj. 3 moly

hélia, budou mít při teplotě  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  a objemu  $\frac{22,4}{2}\text{ l}$  tlak  $6 \cdot 10^5\text{ Pa}$ . V pravé části, kde jsou  $2\text{ g}$  hélia, tj.  $\frac{1}{2}$  molu, v objemu  $\frac{22,4}{2}\text{ l}$  bude tlak  $1 \cdot 10^5\text{ Pa}$ .

Pro adiabatický děj ( $\kappa = \frac{5}{3}$ ) na pravé straně při otevření ventilu, tj. při dosažení tlaku  $6 \cdot 10^5\text{ Pa}$  a objemu  $V$ , platí rovnice

$$1 \cdot 10^5 \cdot 11,2^{\frac{5}{3}} = 6 \cdot 10^5 \cdot V^{\frac{5}{3}} \quad (\text{objemy v litrech}).$$

Z toho

$$V^{\frac{5}{3}} = \frac{11,2^{\frac{5}{3}}}{6}, \quad V = \frac{11,2}{6^{\frac{3}{5}}},$$

a tedy

$$V = 3,82\text{ l}.$$

Ventil se tedy otevře při objemu  $3,82\text{ l}$  v pravém válci. Ze stavové rovnice plyne pro teplotu  $T_1$  hélia v pravé komoře po stlačení

$$\frac{p_1 V_1}{T_0} = \frac{p_2 V_2}{T_1}$$

a po dosazení

$$\frac{1 \cdot 10^5 \cdot 11,2}{273} = \frac{6 \cdot 10^5 \cdot 3,82}{T_1} \quad (T_1 \text{ v K}),$$

$$T_1 = \frac{6 \cdot 3,82 \cdot 273}{11,2}\text{ K} = 559\text{ K}.$$

Nyní se otevře ventil a přidržíme píst. Plyn — hélium o různých teplotách — se smísí a výsledná teplota bude (12 g o teplotě 273 K a 2 g o teplotě 559 K)

$$T_2 = \frac{12 \cdot 273 + 2 \cdot 559}{14} \text{ K} = 314 \text{ K}.$$

Pak následuje adiabatické stlačení plynu z objemu  $V_2 = 11,2 \text{ l} + 3,82 \text{ l} = 15,0 \text{ l}$  na objem  $V_3 = 11,2 \text{ l}$ .  
Z rovnic

$$pV^\kappa = K_1, \quad \frac{pV}{T} = K_2$$

plyne vydělením

$$V^{\kappa-1} \cdot T = \text{konst},$$

a tedy v našem případě plyn nabude teploty  $T_3$ , pro niž platí

$$V_2^{\kappa-1} T_2 = V_3^{\kappa-1} T_3;$$

po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{15,0^{\kappa-1} \cdot 314}{11,2^{\kappa-1}} \text{ K} \\ &= \frac{15,0^{\frac{2}{3}} \cdot 314}{11,2^{\frac{2}{3}}} \text{ K}, \end{aligned}$$

$$T_3 = 382 \text{ K}.$$

Práce při ději adiabatickém

$$A = \int_{v_1}^{v_2} p \, dv = K \int_{v_1}^{v_2} v^{-\kappa} \, dv = \frac{K}{-\kappa + 1} (v_2^{-\kappa+1} - v_1^{-\kappa+1}).$$

Poněvadž  $K = p_1 v_1^* = p_2 v_2^*$ , je pro jednotku hmotnou

$$A = \frac{1}{\kappa - 1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) = \frac{R}{M_m} \frac{1}{\frac{c_p}{c_v} - 1} (T_1 - T_2) =$$

$$= \frac{c_p - c_v}{\frac{c_p}{c_v} - 1} (T_1 - T_2) = c_v (T_1 - T_2).$$

Celková práce dodaná sestává

a) z práce  $A_1$ , kterou spotřebuje hélium hmotnosti 2 g při stlačení na objem 3,82 l, tedy z teploty  $T_0 = 273$  K na teplotu  $T_1 = 559$  K, tedy

$$A_1 = 3,15 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 2 \text{ g} \cdot (559 - 273) \text{ K} =$$

$$= 3,15 \cdot 2 \cdot 286 \text{ J} = 18,0 \cdot 10^2 \text{ J},$$

b) z práce  $A_2$ , kterou spotřebuje hélium hmotnosti 14 g při stlačení z objemu (11,2 + 3,8) l na objem 11,2 l, tedy z teploty 314 K na teplotu 382 K, což je

$$A_2 = 3,15 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 14 \text{ g} \cdot (382 - 314) \text{ K} =$$

$$= 3,15 \cdot 14 \cdot 68 \text{ J} = 30,0 \cdot 10^2 \text{ J}.$$

Vnější vzduch však pomohl vykonat práci

$$A_3 = p S s,$$

kde  $p = 10^5$  Pa,  $S = 0,0100$  m<sup>2</sup>,  $s = 1,12$  m,

$$A_3 = 10^5 \cdot 0,0100 \cdot 1,12 \text{ J} = 11,2 \cdot 10^2 \text{ J}.$$

Tuto práci je třeba odečíst od práce, kterou musíme dodat. Je tedy práce, kterou musíme dodat,

$$A = 18,0 \cdot 10^2 \text{ J} + 30,0 \cdot 10^2 \text{ J} - 11,2 \cdot 10^2 \text{ J} =$$

$$= 36,8 \cdot 10^2 \text{ J}.$$

### 3. úloha

Někde uvnitř skleněné koule je vzduchová bublina kulového tvaru. Najděte metody určení průměru bubliny. Skleněná koule nesmí být poškozena. Metody musí být popsány co nejpřesněji.

*Řešení:*

Navrhovatel úlohy udává toto řešení:

Koule se položí do kapaliny o stejném indexu lomu. Kapalina bude mít stejný index lomu, když rozhraní mezi koulí a kapalinou zmizí.

Zobrazíme-li bublinu svazkem rovnoběžných světelných paprsků jdoucích směrem spojnice středu koule se středem bubliny, dostaneme kruhový obraz bubliny. Pak lze k výpočtu užít vztahu pro tlustou čočku.

### 4. úloha (laboratorní):

Na pracovním stole je kromě jiných pomůcek a přístrojů zkumavka, kterou je možno vytápět napájecím napětím 12 V, dále kapalina známého měrného tepla ( $c_0 = 0,5 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) a látka  $X$  neznámých tepelných vlastností. Látka  $X$  se v dané kapalině nerozpouští.

Vyšetřete tepelné vlastnosti krystalické látky  $X$  v teplotním intervalu mezi pokojovou teplotou a teplotou  $70^\circ\text{C}$  a určete její charakteristické tepelné konstanty (parametry).

Výsledky měření zpracujte do tabulek i graficky.

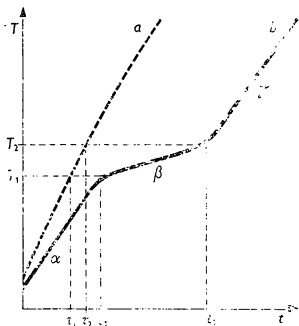
Můžete používat jen ty pomůcky a látky, které jsou na pracovním stole, poškozené pomůcky a použitím znehodnocené látky nemohou být nahrazeny.

*Řešení:*

Stanovíme nejdříve (obr. 86)

a) závislost teploty kapaliny na čase při zahřívání ve zkumavce, pak





Obr. 86

b) závislost teploty krystalické látky s kapalinou při zahřívání ve zkumavce (kapalina zaručuje homogenitu teploty). Znázorníme si tyto závislosti graficky. Závislost b) ukazuje, že látka při zahřívání taje.

V grafickém znázornění b) jsou tři úseky přímé:

- $\alpha$ ) závislost teploty kapaliny s tuhou krystalickou látkou na čase,
- $\beta$ ) závislost teploty kapaliny s tající krystalickou látkou na čase a
- $\gamma$ ) závislost teploty kapaliny s kapalnou fází krystalické látky na čase.

Přímky  $\alpha$  a  $\beta$  se po prodloužení protínají v bodě o souřadnicích  $(t_1, T_1)$ , přímky  $\beta$  a  $\gamma$  v bodě o souřadnicích

$(t_2, T_2)$ . U křivky a) odpovídá teplotě  $T_1$  čas  $\tau_1$  a teplotě  $T_2$  čas  $\tau_2$ .

Z těchto závislostí určíme bod tání, měrné teplo krystalické látky a měrné skupenské teplo tání.

*Pozn.:* Použitou kapalinou byl petrolej a krystalickou látkou sirnatan sodný.

## 1. Měření bodu tání

Bod tání je dán  $y$ -ovou souřadnicí inflexního bodu křivky b. Vzhledem k tomu, že v časovém intervalu  $t_1$  a  $t_2$  je převážná část křivky přímkou, vezmeme za bod tání průměrnou hodnotu

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

## 2. Měření měrného tepla

K určení měrného tepla látky potřebujeme znát množství tepla jí dodaného, množství látky a zvýšení její teploty.

Ze závislosti a) můžeme určit kolik tepla přijme látka ve vyhřívané zkumavce za jednotku času. Za dobu  $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$  zahřeje se množství kapaliny  $m_0 = 7$  g o měrném teple  $c_0 = 0,5 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1}$  o  $\Delta T = T_2 - T_1$ . To znamená, že za jednotku doby dodá zkumavka teplo

$$q = \frac{m_0 c_0 \Delta T}{\Delta\tau}.$$

Předpokládáme, že za jednotku doby dodá zkumavka kapalině a měřené látce totéž množství tepla jako v případě prvním. Označíme-li množství neznámé látky  $m_x = 2$  g, její měrné teplo  $c_x$ , dobu po kterou se zvyšovala teplota neznámé látky s kapalinou  $\Delta t = t_2 - t_1$ , pak

$$(m_0 c_0 + m_x c_x) \Delta T = q \Delta t.$$

Označíme-li směrnici přímky a v časovém intervalu  $\Delta\tau$   $k_1 = \frac{\Delta T}{\Delta\tau}$  a směrnici přímky b v časovém intervalu  $\Delta t$   $k_2 = \frac{\Delta T}{\Delta t}$ , které můžeme z grafického znázornění určit, platí

$$q = m_0 c_0 k_1 = (m_0 c_0 + m_x c_x) k_2.$$

V této rovnici je jediná neznámá  $c_x$ , kterou můžeme z rovnice určit.

### 3. Určení měrného skupenského tepla tání

Jak jsme určili při měření měrného tepla, vyrobí zkumavka — kalorimetr — za jednotku doby množství tepla

$$q = \frac{m_0 c_0 \Delta T}{\Delta\tau}.$$

Proto během tání, které trvá dobu  $\Delta t$ , vyrobí množství tepla

$$q\Delta t = \frac{m_0 c_0 \Delta T}{\Delta\tau} \Delta t.$$

Toto teplo se spotřebuje na tání látky a na zahřátí kapaliny a měřené látky o  $\Delta T$ . Označíme-li měrné skupenské teplo tání látky  $l_x$ , pak

$$\frac{m_0 c_0 \Delta T}{\Delta\tau} \Delta t = m_x l_x + m_x c_x \Delta T + m_0 c_0 \Delta T.$$

V tomto vztahu je jediná neznámá  $l_x$ , kterou můžeme vypočítat.

# OBSAH

<b>I. část: Zpráva o průběhu soutěže . . . . .</b>	<b>5</b>
1. Cíl soutěže a její organizace . . . . .	5
2. Pokusná úprava organizace soutěže 1. kola . . . . .	8
3. Složení Ústředního výboru fyzikální olympiády ve školním roce 1975/76 . . . . .	9
4. Krajské výbory FO ve školním roce 1975/76 a jejich předsedové . . . . .	12
5. Okresní výbory FO ve školním roce 1975/76 . . . . .	13
6. Průběh soutěže ve školním roce 1975/76 . . . . .	13
A. První kolo soutěže kategorií A, B, C a D . . . . .	13
B. Druhé kolo soutěže kategorií A, B, C a D . . . . .	14
C. Třetí kolo kategorie A . . . . .	33
D. Kategorie E . . . . .	40
E. Přípravné kolo pro 8. ročník ZDŠ . . . . .	46
F. Akce na podporu FO . . . . .	47
1. Kursy pro žáky během školního roku . . . . .	47
2. Semináře pro učitele škol 1. cyklu . . . . .	47
3. Krajská soustředění úspěšných řešitelů FO a MO . . . . .	47
4. Celostátní soustředění úspěšných řešitelů MO a FO z III. ročníků škol 2. cyklu . . . . .	47
5. Třídy se zaměřením na matematiku a fyziku . . . . .	49
<b>II. část: Soutěžní úlohy . . . . .</b>	<b>52</b>
1. Úlohy kategorie A . . . . .	52
a) První kolo soutěže . . . . .	52
b) Druhé kolo soutěže . . . . .	78
c) Třetí kolo soutěže . . . . .	88
2. Úlohy kategorie B . . . . .	108
a) První kolo soutěže . . . . .	108
b) Druhé kolo soutěže . . . . .	128

3. Úlohy kategorie C . . . . .	137
a) První kolo soutěže . . . . .	137
b) Druhé kolo soutěže. . . . .	167
4. Úlohy kategorie D . . . . .	175
a) První kolo soutěže . . . . .	175
b) Druhé kolo soutěže. . . . .	199
5. Úlohy kategorie E . . . . .	207
a) První kolo soutěže . . . . .	207
b) Druhé kolo soutěže. . . . .	220
c) Třetí kolo soutěže . . . . .	224
6. Úlohy pokusného 1. kola kat. D v JMK . . . . .	229
7. Úlohy pokusného 1. kola kat. E v JMK . . . . .	237
8. Úlohy přípravného kola v 8. ročníku ZDŠ v JMK	241
<b>III. část: Devátá mezinárodní fyzikální olympiáda . . . . .</b>	<b>247</b>
1. Průběh a výsledky soutěže . . . . .	247
2. Soutěžní úlohy . . . . .	257

*Edice: Pomocné knihy pro žáky*

Prof. RNDr. Rostislav Košťál a Mojmír Simerský

## **Sedmnáctý ročník fyzikální olympiády**

Obálku navrhl Josef Prchal

Obrázky rýsoval Josef Kubík

Vydání 1. — Praha 1979 — Počet stran 271

Odpovědná redaktorka: Jiřina Cívínová

Výtvarný redaktor: Václav Hanuš

Technická redaktorka: Hana Kubšová

Z písma Plantin vytiskl Mír, n. p., závod 1,  
Praha 1, Václavské nám. 15

AA 10,14 (8,97 AA textu, 1,17 AA grafiky)  
— VA 10,74

Náklad 3500 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/5

Cena brožovaného výtisku Kčs 12,50

505/21,825

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,  
v Praze jako svou publikaci č. 9-42-09/1

14-276-79    Kčs 12,50
------------------------