

PROF. RNDr. ROSTISLAV KOŠŤÁL
MOJMÍR SIMERSKÝ

XVI. ročník fyzikální olympiády

ZPRÁVA O PRŮBĚHU A ŘEŠENÍ ÚLOH
ZE SOUTĚŽE KONANÉ VE ŠKOLNÍM
ROCE 1974/75

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Zpracovali: prof. RNDr. Rostislav Košťál a Mojmír Simerský
V 1. části na tabulkách 1, 2, 3, 8 a 9 spolupracoval Oldřich
Veverka
Recenzovali: František Živný a Vladimír Kohout
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1977

I. ČÁST

ZPRÁVA O PRŮBĚHU SOUTĚŽE

1. Cíl soutěže a její organizace

XIV. sjezd KSČ zdůraznil růst vědeckotechnického pokroku pro vzestup socialistického hospodářství. Vědeckotechnický pokrok vyžaduje soustavnou péči o růst politické a odborné kvalifikace kádrů. Je proto třeba se nejprve věnovat vyhledávání mladých nadaných jedinců a pak se věnovat jejich odbornému růstu. To je důležitý úkol pro naše školy, které by měly odhalovat schopnosti každého jednotlivce a plně je rozvíjet.

Technické vědy jsou vybudovány na fyzice, pro níž je matematika pomocnou vědou. Dnes bez matematiky není fyzika myslitelná. Proto, chceme-li mít dobré fyziky, musíme je vychovávat z nadaných matematiků.

K plnění těchto úkolů pomáhala škole i soutěž fyzikální olympiáda, která plnila oba úkoly: vyhledávala schopné žáky a věnovala se jejich růstu. Na školách 2. cyklu se konala tato soutěž v tomto školním roce celostátně již pošestnácté, na základních devítiletých školách již podvanácté. V některých krajích se před celostátní soutěží konaly tyto soutěže i několik let pokusně.

Organizační řád soutěže fyzikální olympiáda (FO) je určen výnosem ministerstva školství a kultury (MŠK) ze dne 14. března 1963, č. 2293/63 - I/1 a byl uveřejněn ve Věstníku MŠK, r. 1963, seš. 12. Uvedený organizační řád se týká i soutěže matematická olympiáda (MO). Zavedení obou soutěží je odůvodňováno takto: Mají vzbudit u žáků příslušných škol zájem o hlubší studium fyziky a matematiky, vést žáky k dobrovolné samostatné práci, naučit je pracovat s odbornou literaturou, pomáhat škole při vyhledávání nadaných žáků a rozvíjení jejich schopností, napomáhat svým způsobem k volbě povolání v obo-

rech, které jsou pro naši ekonomiku rozhodující. Fyzikální i matematická olympiáda vytvářejí předpoklady pro lepší přípravu žáků ke studiu na vysokých školách technického a matematicko-fyzikálního zaměření. Obě olympiády přispívají také k zvyšování úrovně vyučování matematice a fyzice jednak tím, že žáci zvyšují svou odbornou úroveň, jednak tím, že také profesori a učitelé zvyšují svou úroveň vedením žáků a hodnocením jejich prací ve FO. Zvyšováním odborné úrovně pomáhá fyzikální olympiáda žákům škol 2. cyklu ke studiu na příslušných vysokých školách a žákům ZDŠ ke studiu na školách 2. cyklu.

V XVI. ročníku probíhala fyzikální olympiáda opět v pěti kategoriích. Kategorie A byla určena pro žáky IV. ročníků výběrových středních škol, kategorie B pro žáky III. ročníků, kategorie C pro žáky II. ročníků a kategorie D pro žáky I. ročníků těchto škol. Kategorie E byla pořádána pro žáky IX. ročníků ZDŠ. Přitom každý žák mohl soutěžit i v kategorii určené pro vyšší ročník, než který navštěvoval.

Soutěž probíhala podobně jako v minulých ročnících v kategorii A a E ve třech kolech, v kat. B, C a D ve dvou kolech. První kolo všech kategorií probíhalo ve škole, druhé kolo kat. A–D jako krajské, 2. kolo kat. E jako okresní, třetí kolo kat. A jako celostátní a 3. kolo kat. E jako krajské.

V prvním kole dostali žáci za úkol vyřešit 7 úloh, z toho jednu úlohu laboratorní. Úlohy odevzdávali svým učitelům fyziky ve dvou termínech (3 + 4) stanovených v letácích FO. V kategoriích A, B, C a D byli úspěšnými řešiteli ti žáci, kteří vyřešili aspoň dobře 5 ze zadaných úloh, přičemž řešili (i když neúspěšně) i laboratorní úlohu. Účastník soutěže v těchto kategoriích měl mimoto prostudovat fyzikální téma příslušné kategorie, neboť na ně navazovala jedna úloha 1. kola soutěže a jedna úloha 2. nebo 3. kola. Také v kategorii E bylo zadáno 7 soutěžních úloh včetně laboratorní. Na rozdíl od vyšších kategorií nebyla však laboratorní úloha pro úspěšného řešitele povinná; stačilo, když úspěšně vyřešil 5 ze zadaných úloh. Pro tuto kategorii nebylo také určeno téma k prostudování.

Druhé kolo soutěže FO kategorií A, B, C a D probíhalo v krajích a bylo organizováno krajskými výbory fyzikální olympiády (KVFO). Druhé kolo FO kategorie E probíhalo v okresech a bylo organizováno okresními výbory fyzikální olympiády (OVFO). Ve 2. kole FO všech kategorií byly účastníkům zadány 4 teoretické úlohy. Úspěšnými řešiteli byli ti žáci, kteří vyřešili aspoň dobře 2 ze zadaných úloh. Úspěšní řešitelé druhého kola FO

dostali od KVFO, popřípadě OVFO, pochvalná uznání a několik nejlepších dostalo věcné odměny od příslušných OŠ KNV, popř. ONV.

Třetí kolo soutěže FO bylo organizováno jen pro kategorie A a E. Třetí kolo FO kategorie A řídil Ústřední výbor fyzikální olympiády (ÚVFO), organizoval je KVFO Jihočeského kraje. Jako obvykle také v tomto ročníku byly účastníkům zadány 4 úlohy teoretické a jedna laboratorní. Aby byl účastník soutěže úspěšným řešitelem, musel vyřešit úspěšně, tj. výborně nebo dobře, aspoň 3 ze zadáných úloh. Třetí kolo FO kategorie E bylo organizováno v krajích. Podobně jako ve druhém kole byly zadány 4 soutěžní úlohy, vesměs teoretické. Podmínky pro úspěšného řešitele byly také stejné jako ve druhém kole.

Klasifikační zásady byly stejné jako v dřívějších ročnících soutěže FO. Žákovská řešení se klasifikují takto:

1. Výborně, je-li úloha rozřešena buď správně, nebo řešení má nanejvýš jen formální chyby, nebo jen menší odbornou závadu.
2. Dobře, jestliže řešení vystihuje úkol, ale má větší odborné nedostatky; dobře je hodnoceno i správné řešení, vyskytují-li se v něm závažné formální nedostatky.
3. Nevyhovující, jestliže nedostatky odborného rázu jsou závažné nebo je-li řešení z větší části neúplné; řešení je také nevyhovující, chybí-li výklad nebo je neúplný, takže z něho nelze soudit na myšlenkový postup podaného řešení.

Pořadateli XVI. ročníku FO byla ministerstva školství ČSR a SSR spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků a se Socialistickým svazem mládeže ČSSR.

Vlastní soutěž řídil v rámci celé ČSSR Ústřední výbor fyzikální olympiády (ÚVFO), v rámci krajů krajské výbory FO (KVFO) a v rámci okresů řídily soutěž kategorie E okresní výbory FO (OVFO). Ve školách byl jeden z učitelů fyziky pověřen funkcí referenta pro FO.

2. Složení Ústředního výboru fyzikální olympiády ve školním roce 1974/75

Ústřední výbor fyzikální olympiády se podle organizačního řádu skládá ze zástupců pořádajících institucí (MŠ ČSR, MŠ SSR, JČSMF a SSM ČSSR) a z učitelů vysokých, středních

a základních škol, kteří jsou do funkce jmenováni příslušnými ministerstvy školství na základě návrhu JČSMF. Kromě toho jsou členy širšího ÚVFO i všichni předsedové krajských výborů FO.

Sídlem ÚVFO je od roku 1966 Brno.

Dne 30. září 1974 skončilo funkční období ÚVFO. MŠ SSR jmenovalo výnosem čis. 7126/1974 - II/1 z 28. 6. 1974 a MŠ ČSR výnosem čis. 29231/74-210, ze dne 22. 12. 1974, doručeným v lednu 1975, členy nového výboru. Poněvadž činnost starého ÚVFO nebyla prodloužena do jmenování nového ÚVFO, zanikl tím vlastně na dobu delší než 1/4 roku ÚVFO. Zasluhou starého ÚVFO bylo, že prozíravě před ukončením svého funkčního období zajistil chod 1. kola XVI. ročníku, které proto mohlo probíhat i bez existence ÚVFO. Opožděným jmenováním ÚVFO se však hlavním funkcionářům nahromadilo mnoho práce, která se pak těžko zvládala, poněvadž předseda nemá kromě jednatele žádné další stále pomocné síly.

Nový ÚVFO byl jmenován v tomto složení:

předseda: prof. RNDr. Rostislav Košťál, profesor Vysokého učení technického v Brně, v důch.

1. *místopředseda:* doc. RNDr. Ivan Náter, docent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě

2. *místopředseda:* doc. RNDr. Jiří Beránek, docent Vojenské akademie Antonína Zápotockého v Brně

jednatel: Oldřich Veverka, odborný asistent elektrotechnické fakulty Vysokého učení technického v Brně

Další členové (v abecedním pořadí):

a) z ČSR:

1. RNDr. Milan Bednařík, odb. asistent PřF UP, Olomouc
2. Jaroslav Honner, vedoucí kabinetu fyziky KPÚ, Ústí n. L.
3. RNDr. Marta Chytilová, CSc., pracovnice VÚP, důch.
4. RNDr. Alois Kleveta, profesor gymnázia, Vyškov
5. Milan Rádl, odb. asistent Vysoké školy strojní a elektrotechnické, Plzeň
6. Mojmír Simerský, profesor SPŠ VE, Rožnov p. Radh.
7. Karel Šebela, profesor SPŠ strojní, Praha
8. doc. RNDr. Jaroslav Vachek, CSc., MFF UK, Praha
9. RNDr. Ivo Volf, odb. asistent KF PedF, Hradec Králové
10. doc. ing. Bohumil Vybíral, CSc., VVŠPV, Vyškov

11. Karel Žampa, okresní školní inspektor, Brno
Zástupce MŠ ČSR nebyl jmenován.

b) z SSR:

1. Emilie Chrapanová, učitelka ZDŠ, Bratislava
2. doc. ing. Vincent Kavečanský, CSc., PFF, UPJŠ, Košice
3. RNDr. Arpád Kecskés, CSc., odb. asistent PedF, Nitra
4. ing. RNDr. Daniel Kluvanec, CSc., odb. asistent PedF, Nitra
5. Vojtěch Nyitrai, ústřední školní inspektor, Bratislava
6. Zuzana Šimkovicová, profesorka gymnázia, Bratislava
7. Pavol Škrinár, profesor gymnázia, Prievidza
8. doc. RNDr. Ladislav Thern, Vysoká škola lesnická a dřevařská, Zvolen
9. RNDr. Jozef Zámečník, odborný asistent EIF SVŠT, Bratislava

Pořadatele FO ve výboru zastupovali:

MŠ ČSR: Václav Šula, ústřední školní inspektor

MŠ SSR: Vojtěch Nyitrai, ústřední školní inspektor

JČSMF: prof. RNDr. Rostislav Košťál

SSM: ing. Bohumil Vybíral, CSc., odborný asistent Vysoké vojenské školy pozemního vojska ve Vyškově

Všichni členové ÚVFO vždy byli a jsou i nyní pověřeni určitými funkcemi (až na tři výjimky — z technických důvodů). V ÚVFO jsou zřízeny dvě komise:

a) **Komise pro základní výběr úloh**

Vede jednatel, t. č. Oldřich Veverka, a členy jsou:

pro úlohy z mechaniky Jaroslav Honner, vedoucí kabinetu fyziky KPU, Zuzana Šimkovicová, profesorka,

pro úlohy z termiky Milan Rádl, odb. asistent, Pavol Škrinár, profesor,

pro úlohy z elektřiny RNDr. Alois Kleveta, profesor, RNDr. Arpád Kecskés, CSc., odb. asistent,

pro úlohy z vlnění, optiky a atomistiky Karel Šebela, profesor, RNDr. Jozef Zámečník, odb. asistent.

b) **Komise pro konečnou redakci soutěžních úloh**

předseda: Mojmír Simerský, profesor SPŠ VE v Rožnově p. Radh.

člen komise: doc. ing. Vincent Kavečanský,

referent pro kat. A: doc. RNDr. Ladislav Thern,
referent pro kat. B: ing. RNDr. Daniel Kluvanec, CSc.,
referent pro kat. C: RNDr. Marta Chytilová, CSc.,
referent pro kat. D: RNDr. Ivo Volf, odb. asistent,
referent pro kat. E: RNDr. Milan Bednařík, odb. asistent,
jednatelům byl jednatel ÚVFO.

Každý z referentů měl na pomoc dva členy z ÚVFO. Poněvadž byli z různých míst, často hodně vzdálených, spolupráce se neosvědčila. Proto v dubnu 1975 byla provedena úprava tak, že každý referent komise pro konečnou redakci soutěžních úloh si našel dva pomocníky ze členů KVFO v místě. Takto byli přiděleni jednotlivým referentům tito pracovníci:

pro kat. A:

RNDr. Milan Marčok, odb. asistent katedry fyziky a elektrotechniky Vysoké školy lesnické a dřevařské, Zvolen,
RNDr. Emil Rajčan, CSc., odb. asistent katedry fyziky a elektrotechniky Vysoké školy lesnické a dřevařské, Zvolen,

pro kat. B:

RNDr. Arpád Kecskés, CSc., odb. asistent katedry fyziky pedagogické fakulty, Nitra,
RNDr. Ladislav Morvay, odb. asistent katedry fyziky pedagogické fakulty, Nitra,

pro kat. C:

RNDr. Josef Kuběna, CSc., odb. asistent přírodovědecké fakulty UJEP, Brno,
RNDr. Vladimír Mitvalský, odb. asistent katedry fyziky strojní fakulty VUT, Brno,

pro kat. D:

Miroslav Ouhrabka, odb. asistent katedry fyziky pedagogické fakulty, Hradec Králové,
Jiří Kouba, asistent katedry fyziky pedagogické fakulty, Hradec Králové,

pro kat. E:

nebyli dosud jmenováni.

Referentem pro Školu mladých fyziků je Mojmír Simerský, profesor SPŠ VE v Rožnově p. Radh.

Předsednictvo tvoří předseda, 1, místopředseda, 2, místo-

předseda, jednatel, předseda komise pro konečnou redakci soutěžních úloh, referent pro Školu mladých fyziků, zástupce MŠ ČSR, zástupce MŠ SSR, zástupce JČSMF a zástupce SSM, t. č. tedy osm pracovníků FO.

3. Krajské výbory FO ve školním roce 1974/75 a jejich předsedové

Předsedy a členy KVFO jmenují na návrh poboček JČSMF, popř. JSMF, odbory školství příslušných KNV. Pracují v nich profesori, docenti i odborní asistenti vysokých škol, pracovníci školské správy, středoškolští profesori i učitelé ZDŠ. Práce pracovníků z vysokých škol je vždy pro FO přínosem. V tomto školním roce bylo z 12 předsedů 10 pracovníků z vysokých škol a z celkového počtu členů 188 všech KVFO bylo 41 % pracovníků z vysokých škol.

Předsedové KVFO jednotlivých krajů:

Praha	doc. RNDr. Jaroslav Vachek , CSc., MFF UK, Praha
StřČK	ing. Jiří Machalický , CSc., odb. as. StrF ČVUT, Praha
JČK	Václav Vlček , odb. as. PedF, České Budějovice
ZČK	ing. Miloš Rabas , odb. as. Vysoké školy strojní a elektrotechnické, Plzeň
SČK	Jaroslav Honner , ved. kab. fyziky KPÚ, Ústí n. Labem
VČK	RNDr. Zdeněk Ungermann , ved. kab. fyziky KPÚ, Hradec Králové
JMK	prof. RNDr. Rostislav Košťál , Brno
SMK	prof. RNDr. Miroslav Bajer , DrSc., Vysoká škola báňská, Ostrava
Bratislava	doc. RNDr. Ivan Náter , ELF SVŠT, Bratislava
ZSK	ing. RNDr. Daniel Klivanec , CSc., odb. asistent PedF, Nitra
StřSK	RNDr. Pavol Ferko , odb. as. PedF, Banská Bystrica
VSK	doc. ing. Vincent Kavečanský , CSc., PŕF UPJŠ, Košice

KVFO řídí práci v kraji, a to pro kat. A—D přímo a pro kat. E prostřednictvím OVFO.

4. Okresní výbory FO ve školním roce 1974/75

OVFO se starají o FO kat. E na ZDŠ a o kursy pro žáky škol 2. cyklu v okrese. Jen výbor FO města Brna — jako OVFO — má výjimečné postavení, poněvadž řídí práci i pro kat. A—D v městě Brně.

Předsedy a členy OVFO jmenují na návrh poboček JČSMF odbory školství ONV. Práce v okresech se zúčastňují vysokoškolští pracovníci, středoškolští pracovníci, pracovníci školské správy i učitelé ZDŠ. Účast pracovníků ze škol 2. cyklu příznivě ovlivňuje práci v OVFO. Počet učitelů 2. cyklu, popř. 3. cyklu v předsednictvu OVFO byl nejvyšší v Jihomoravském kraji (27 ze 41, z toho 7 z vysokých škol), pak v Bratislavě (6 z 12, z toho 2 z vysokých škol). Nejvyšší počet předsedů OVFO ze škol 2. cyklu měl Jihomoravský kraj (12 ze 14, z toho 4 z vysokých škol), pak Bratislava (4 ze 4, z toho 2 z vysokých škol).

5. Průběh soutěže ve školním roce 1974/75

A. První kolo soutěže kategorií A, B, C a D

První kolo FO probíhalo ve školách od září 1974 do 10. února 1975. Texty soutěžních úloh a studijních témat byly otištěny v letáku vydaném SPN v Praze ve znění českém pro celou ČSSR z prostředků ministerstev školství v počtu 4000 výtisků. Do škol však mohly být distribuovány prostřednictvím KVFO pro opoždění tisku až v měsíci říjnu. Ukázalo se velmi prospěšné, že úlohy byly otištěny v Rozhledech matematicko-fyzikálních, a to pro kat. A—D v č. 9 a 10 52. ročníku a kromě toho prvé tři úlohy kategorie A—E v Matematice a fyzice ve škole v č. 10 4. ročníku.

Pro jednotlivé kategorie byla určena tato studijní témata:

kat. A: Pohyb soustav těles spojených vláknem; zpracoval Stanislav Zhejbal z VVŠPV ve Vyškově,

TABULKA 1
Počet středních škol, které se zúčastnily XVI. ročníku FO

Kraj	Gymnázia						SPŠ						Ostatní školy						Celkový počet škol zapojených					
	Celkové			zapojeno			zapojeno			zapojeno			zapojeno			zapojeno			v kategoriích			v kategoriích		
	A	B	C	D	E	Celkové	A	B	C	D	E	Celkové	A	B	C	D	E	Celkové	A	B	C	D	E	Celkové
Praha	20	14	18	20	19	20	1	2	4	8	8	—	—	—	—	2	21)	15	20	24	29	30	—	—
StřC	23	13	12	15	19	23	—	—	1	2	3	—	—	—	—	1	1 ²⁾	13	12	16	22	27	—	—
JČ	20	10	9	11	11	12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	9	11	11	12	—	—
ZČ	15	9	11	8	11	12	—	1	1	4	7	—	—	—	—	—	—	9	12	9	15	16	—	—
SC	21	15	14	17	20	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15	14	19	27	27	—	—
VC	35	19	19	27	28	34	1	1	5	8	9	—	1	1	1	1 ³⁾	1 ³⁾	20	21	33	37	44	—	—
IM	37	19	28	29	32	35	3	2	6	11	13	—	—	—	—	—	1 ⁴⁾	22	30	35	44	49	—	—
SM	39	22	23	29	27	35	3	3	6	11	13	—	—	—	—	—	1 ⁵⁾	25	26	36	39	49	—	—
Bratislava	10	7	8	9	10	10	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	7	8	9	11	11	—	—
ZS	35	31	35	33	32	35	—	1	2	1	2	—	1	1	1	1 ⁶⁾	1 ⁶⁾	32	37	36	34	38	—	—
StřS	36	23	29	28	29	33	—	2	2	6	6	—	1	1	2	1	2 ¹⁾	23	32	32	36	41	—	—
VS	37	11	14	17	18	32	1	—	2	8	9	—	—	—	—	1	1 ⁶⁾	12	14	19	27	42	—	—
Celkem	328	193	220	243	256	301	9	12	31	67	75	1	3	5	9	10	203	235	279	332	386	—	—	—
Vloni	331	188	204	226	260	296	11	17	23	67	73	1	2	3	9	9	200	223	252	336	378	—	—	—

¹⁾ OU ČKD Poděbradova, ZDŠ Spořilov-Jižní, ²⁾ SZTŠ Březnice, ³⁾ voj. g. J. Žižky Mor. Třebová, ⁴⁾ SEŠ Znojmo
⁵⁾ voj. g. J. Žižky Opava, ⁶⁾ VSOŠ Nové Město n. Váh., ⁷⁾ OU CHZWP Nováky, voj. g. SNP Banská Bystrica, ⁸⁾ VLU
 Prešov

TABULKA 2

Počet žáků soutěžících v 1. kole FO

(S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, c celkový počet žáků, d z toho dívek)

Kraj	Kategorie A				Kategorie B				Kategorie C				Kategorie D				Celkem			
	S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú	
	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d
Praha	74	11	54	7	123	26	50	7	89	18	71	13	230	65	72	12	516	120	247	39
StřC	40	5	21	4	47	3	18	3	71	15	40	9	121	49	55	16	279	72	134	32
JČ	29	4	3	0	32	5	1	0	38	7	27	2	46	9	22	1	145	25	53	3
ZČ	30	4	15	1	35	7	17	2	38	9	24	4	56	12	35	5	159	32	91	12
SC	50	9	43	8	52	18	46	17	99	29	72	18	176	43	95	22	377	99	256	65
VC	57	11	50	9	50	10	31	8	118	20	92	14	205	43	153	30	430	84	326	61
JM	71	7	56	6	107	18	41	9	167	41	97	23	321	69	128	30	666	135	322	68
SM	72	5	56	3	78	8	60	6	149	31	96	18	235	44	115	20	534	88	327	47
Bratislava	58	7	50	4	102	25	91	23	80	20	70	18	182	51	135	45	422	103	346	90
ZS	161	37	57	11	221	66	76	19	262	63	90	21	382	120	130	31	1026	286	353	82
StřS	153	23	28	1	145	26	33	3	152	36	32	10	361	90	62	14	811	175	155	28
VS	51	2	33	0	46	12	35	7	113	37	48	14	223	58	81	13	433	109	197	34
Celkem	846	125	466	54	1038	224	499	104	1376	326	759	164	2538	653	1083	239	5798	1328	2807	561
Vloni	724	84	554	58	981	193	587	110	1212	237	636	116	2628	663	1204	257	5545	1177	2981	541

- kat. B: Vektorová algebra; zpracoval ing. RNDr. Daniel Kluvanec, CSc., z PedF v Nitře,
- kat. C: Kinetická teorie plynů; zpracoval doc. Lubomír Vašek, CSc., z fakulty technologické VUT v Gottwaldově,
- kat. D: Umíte řešit úlohy z kinematiky přímočarého pohybu? Zpracovala RNDr. Marta Chytilová, CSc., Brno.

Témata byla otištěna jen v letáku XVI. ročník soutěže fyzikální olympiáda. Na tato témata navazovala jedna úloha v 1. kole v kat. A, C a D, jedna úloha v kat. A, B, C a D v 2. kole a jedna úloha v 3. kole kat. A.

Počet středních škol, které se zúčastnily XVI. roč. FO, je uveden v tabulce 1, počet žáků soutěžících v 1. kole a výsledky 1. kola jsou uvedeny v tabulce 2, a to jak v jednotlivých krajích, tak i celkem.

Počet všech škol zapojených do soutěže vzrostl vzhledem k loňskému roku o 8 (o 2,1 %), počet zapojených gymnázií o 5 (o 1,7 %). V Praze, StřČK, Bratislavě a ŽSK bylo zapojeno 100 % gymnázií; procentově nejmenší počet zapojených gymnázií byl v JČK — 60 %. V ostatních krajích se pohyboval počet zapojených gymnázií v mezích 80 % — 97 %. Počet zapojených SPŠ zůstává přibližně stejný jako loňského roku, podobně i počet škol ostatních typů. Souvisí to již s tradicí vytvořenou ve škole.

Počet soutěžících v 1. kole je uveden v tabulce 2. Byl jen o 4,6 % větší než loňského roku. U kategorie A se zvětšil o 122 soutěžících, u kat. B o 57 soutěžících, u kat. C o 164 soutěžících, kdežto u kat. D klesl o 90 soutěžících na celkovém loňském počtu 5545 soutěžících. Dívky tvořily asi 22,9 % soutěžících. Úspěšnost v jednotlivých kategoriích vypadá letos takto: v A 55 %, v B 48 %, v C 55 %, v D 43 % a celkem 49,0 %. Nejmenší procento úspěšnosti je v kategorii D. Proti loňskému roku, kdy bylo procento úspěšnosti 53,8 %, se snížilo o 4,8 %. U dívek je procento úspěšnosti 42,2 %, tedy o hodně nižší než celkové.

B. Druhé kolo soutěže kategorií A, B, C a D

Druhé kolo FO kat. A, B, C a D se konalo v sobotu 8. března 1975, a to převážně jen v sídlech KVFO. Jen v SČK se konalo 2. kolo na třech místech: v Ústí n. L., Liberci a Chomutově a v SMK na dvou místech: v Ostravě a v Olomouci. Každý žák dostal text úloh a opravující dostali též orientační řešení. Ihned

TABULKA 3

Počet zásků soutěžících ve 2. kole FO

(S značí počet soutěžících, Ů počet úspěšných řešitelů, c celk. počet, d z toho dívek)

Kraj	Kategorie A				Kategorie B				Kategorie C				Kategorie D				Celkem			
	S		Ů		S		Ů		S		Ů		S		Ů		S		Ů	
	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d
Praha	54	7	26	4	50	7	9	0	71	13	25	4	72	12	32	4	247	39	92	12
StřC	18	3	3	0	13	1	1	0	37	5	4	0	41	9	8	1	109	18	16	1
JČ	10	0	3	0	25	0	1	0	27	2	7	1	22	1	2	0	84	3	13	1
ZČ	14	1	7	0	15	2	5	0	20	3	6	0	30	5	10	0	79	11	28	0
SC	30	5	3	0	35	12	3	0	59	12	4	4	67	11	4	0	191	40	14	0
VČ	44	6	13	2	26	6	3	0	78	10	15	2	146	31	9	0	294	53	40	4
JM	54	6	14	0	40	9	2	0	95	23	14	0	112	26	19	2	301	64	49	2
SM	50	1	11	0	57	6	14	0	92	18	10	1	103	18	8	0	302	43	43	1
Bratislava	50	4	18	1	75	13	1	0	61	14	8	0	107	35	16	3	293	66	43	4
ZS	55	9	3	1	65	15	1	0	81	19	2	0	120	31	5	0	321	74	11	1
StřS	28	1	6	0	31	3	2	0	30	10	3	0	62	14	5	1	151	28	16	1
VS	30	0	5	0	29	6	2	0	41	11	10	1	77	12	17	3	177	29	34	4
Celkem	437	43	112	8	461	80	44	0	692	140	108	9	959	205	135	14	2549	468	399	31
Vloni	514	47	144	3	540	81	101	6	593	102	204	21	1069	219	262	36	2716	449	711	66

po ukončení soutěže dostali orientační řešení i soutěžící. Texty úloh, dodané ÚVFO v zalepených obálkách, se otevíraly až před žáky těsně před zahájením soutěže. Pro slovenské kraje byly dodány texty úloh i v maďarském jazyce. Na vyhodnocení byly dány směrnice, aby se postupovalo jednotně ve všech krajích.

Výsledky 2. kola jsou uvedeny v tabulce 3. Počet účastníků v kat. A klesl o 15 % a počet úspěšných klesl z 28,0 % na 25,6 %. V kat. B počet účastníků klesl o 15 % a počet úspěšných klesl z 18,7 % na 9,5 %. U kat. C vzrostl počet soutěžících o 16,7 % a počet úspěšných řešitelů klesl ze 34,4 % na 15,6 % a u kat. D klesl počet soutěžících o 10,3 % a počet úspěšných řešitelů klesl z 24,5 % na 14,1 %. Celkem klesl počet soutěžících o 6,2 % a počet úspěšných klesl z 26,2 % na 15,7 %. Procento úspěšnosti dívek kleslo ze 14,7 % na 6,6 %. Špatné výsledky souvisí asi s tím, že komise volila příklady, které byly pro žáky hodně obtížné.

Z nižších tříd pracovali ve vyšší kategorii úspěšně:

v kat. A: Josef Pavel z 2. roč. přírod. v Rychnově n. Kněžn.,
VČK;

Milan Augusta z 3. roč. SPŠ VE v Rožnově p. Radh.,
SMK;

Stanislav Durčok z 3. roč. SPŠ VE v Rožnově p. Radh.,
SMK;

v kat. C: Petr Čerovský z 1. roč. G Praha 10, Voděradská;

v kat. D: Petr Horský ze ZDŠ Praha 4 - Spořilov, Jižní.

Úspěšní řešitelé 2. kola kat. A a kat. B jsou uvedeni v seznamu úspěšných řešitelů jmenovitě všichni, z úspěšných řešitelů 2. kola kat. C a kat. D jsou uvedeni jen ti, kteří se umístili na prvním až desátém místě. Pokud mají někteří řešitelé stejnou klasifikaci jako poslední z desíti, jsou uvedeni též, i když překračují číslo 10. U žáků gymnázií není připisován název školy, ale jen její sídlo. V kategorii A jsou tučným tiskem vyznačena jména řešitelů, kteří postoupili do 3. kola. Úspěšní řešitelé jsou uvedeni podle jednotlivých krajů:

Praha

A: Vyskočil Jiří,
Pha 7, Nad štolou
Vlach Jiří,
Pha 7, Nad štolou

Fialová Blanka ,
Pha 2, W. Piecka
Hášová Dagmar,
Pha 2, W. Piecka
Hugo Jan,
Pha 3, Sladkovského nám.

Gürtler Richard,
Pha 2, W. Piecka
Koukolík Jiří,
Pha 2, W. Piecka
Kozák Ivan,
SPŠJT, Pha 4,
Svatoslavova
Barták Jan,
SPŠJT, Pha 4,
Svatoslavova
Řehoř Ivan,
Pha 5, Radotín
Havlíček Karel,
Pha 8, Libeň
Límová Dana,
Pha 2, W. Piecka
Jura Stanislav,
Pha 2, W. Piecka
Valášek Michal,
Pha 2, W. Piecka
Horák Vlastimil,
Pha 3, Na Pražačce
Štursa Jan,
SPŠJT, Praha 4,
Svatoslavova
Heroudek Jan,
Pha 6, Parlérova
Klátil František,
Pha 6, Parlérova
Hrnčíř Evžen,
Pha 7, Nad štolou
Beneš Ladislav,
Pha 7, Nad štolou
Tekáč Viktor,
Pha 7, Nad štolou
Rejchrt Ludvík,
Pha 7, Nad štolou
Poláková Ludmila,
Pha 7, Nad štolou
Roubíček Tomáš,
Pha 8, Libeň

Novák Dalibor,
Pha 2, W. Piecka
Valenta Ladislav,
Pha 6, Leninova

B: Kotěšovec Václav,
Pha 2, W. Piecka
Musil Jan,
SPŠE, Pha 1, Na Příkopě
Sapík Richard,
Pha 4, Na vítězné pláni
Martinů Ludvík,
Pha 1, Štěpánská
Weber Petr,
Pha 2, W. Piecka
Kubišta Karel,
Pha 2, W. Piecka
Trnka Vladimír,
Pha 3, Sladkovského nám.
Duben Lubomír,
Pha 6, Arabská
Müller Antonín,
Pha 7, Nad štolou
C: Kolafa Jiří,
Pha 2, W. Piecka
Adámek Pavel,
Pha 9, Litoměřická
Kub Jiří, Pha 7, Nad štolou
Černý Ivo,
Pha 2, W. Piecka
Holeňa Martin,
Pha 3, Sladkovského nám.
Drda Jaroslav,
Pha 6, Arabská
Mrkvička Miloš,
Pha 1, Štěpánská
Janoušek Karel,
SPŠJT, Pha 4,
Svatoslavova
Hegerová Irena,
Pha 2, W. Piecka
Kittrich Daniel,
Pha 6, Arabská

Voráček Pavel,
Pha 2, W. Piecka

D: Vavřín Zdeněk,
Pha 1, Štěpánská
Voteruba Jiří,
SPŠE, Pha 2, Ječná,
Březíková Michaela,
Pha 2, W. Piecka
Navara Mirko,
Pha 2, W. Piecka
Horský Petr,
ZDŠ, Pha 4-Spořilov, Jižní
Koch Jiří, Pha 2, W. Piecka
Konečný Jiří,
Pha 3, Sladkovského nám.
Souček Martin,
Pha 7, Nad školou
Zelená Zdeňka,
Pha 7, Nad školou
Závětová Hana,
Pha 7, Nad školou
Trhlík Miloš,
Pha 6, Leninova
Neznal Martin,
Pha 3, Sladkovského nám.
Lev Vlastimil,
Pha 2, W. Piecka

Středočeský kraj:

A: Tvrdík Pavel, Kolín
Procházka Jan,
Mladá Boleslav
Trenda Pavel, Sedlčany

B: Procházka Milan,
Mladá Boleslav

C: Blažek Josef,
Mnichovo Hradiště
Jenčík Karel,
SPŠ, Kutná Hora
Mužík Zdeněk, Kladno
Bázler Jan,
Mladá Boleslav

D: Kadlec Stanislav, Hořovice
Černý Robert, Rakovník
Chadima Jan,
Brandýs n. Labem
Hrabě Vladimír,
Český Brod
Voršílka Jiří, Poděbrady
Vrbická Jaroslava, Vlašim
Nulíček Vladimír, Vlašim
Kočí Zdeněk, Český Brod

Jihočeský kraj:

A: Jovanovič Pavel,
Č. Budějovice
Kmínek Vladimír, Pacov
Zelenda Stanislav,
Č. Budějovice

B: Šimek Michal, Strakonice

C: Procházka Otakar,
Humpolec
Honner Jan, Č. Budějovice
Popp František,
Č. Budějovice
Holý Václav, Č. Budějovice
Hronová Jana,
Jindřichův Hradec
Kukrecht Jiří,
Č. Budějovice
Vosátko Jiří, Tábor

D: Tůma Zdeněk, Tábor
Holý Jaroslav,
Č. Budějovice

Západočeský kraj:

A: Pillmann František,
Plzeň, nám. Odborářů
Janský Stanislav,
Plzeň, nám. Odborářů

Krásný Vladislav,
Plzeň, nám. Odborářů
Svrček Michal,
Karlovy Vary

Charvát Vladimír,
Plzeň, nám. Odborářů
Odvárka Pavel,
Plzeň, nám. Odborářů
Suda Čestmír, Sušice

B: Kubát Karel,
Plzeň, nám. Odborářů
Kasl Josef,
Plzeň, nám. Odborářů
Staněk František,
Plzeň, nám. Odborářů
Matoušek Jiří,
Karlovy Vary
Sedlák Pavel,
Plzeň, nám. Odborářů

C: Koukol Jiří, Sušice
Štrunc Aleš,
Plzeň, nám. Odborářů
Popule Milan,
Karlovy Vary
Tumpach Vlastimil,
Plzeň, nám. Odborářů
Viktora Jiří,
Plzeň, nám. Odborářů
Bešta Jan,
Plzeň, ul. Pionýrů

D: Weiss Zdeněk,
Plzeň, nám. Odborářů
Fiala Libor,
Plzeň, nám. Odborářů
Šrámek Vladimír,
Plzeň, ul. Pionýrů
Plomer Jan, Karlovy Vary
Goblirsch Pavel, Plasy
Dráb Jurij,
Plzeň, nám. Odborářů
Šverák Vladimír,
Karlovy Vary

Ziegler Miroslav,
Karlovy Vary
Petrák Lubomír, Stříbro
Basl Jiří, SPŠE, Plzeň

Severočeský kraj:

A: Novák Ondřej, Liberec
Kobrlé Pavel, Lovosice
Maryška Jiří,
Jablonec n. N.

B: Vondrák Pavel,
Ústí n. Labem
Vodák Milan, Kadaň
Holomek Jaroslav, Liberec

C: Kučera Jan,
SPŠStav, Liberec
Chaloupek Jan, Liberec
Drábek Stanislav,
Ústí n. Labem
Havlena Vladimír,
Rumburk

D: Kalousek Zdeněk,
Jablonec n. N.
Janeček Pavel, Liberec
Němec Pavel,
Ústí n. Labem
Nykrýn Jiří,
Jablonec n. N.

Východočeský kraj:

A: Hůlka Jiří,
Hradec Králové
Hýsek Oldřich,
Hradec Králové
Fedr Vladimír, Polička
Pavel Josef,
Rychnov n. Kn.
Blažek Jan, Chrudim
Hrníčko František,
Vysoké Mýto

Audrlická Dana,
Hradec Králové
Fiala Jiří, Česká Třebová
Nosek Pavel,
Hradec Králové
Hrubá Radoslava, Trutnov
Jakubiček Rostislav,
Polička
Somer Jiří, Jevíčko
Starý František,
SPŠE, Pardubice

B: Macek Milan,
Ústí n. Orlicí
Rudolf Zdeněk, Trutnov
Krmela Václav,
Lanškroun

C: Polák Zdeněk, Náchod
Rozlívka Zdeněk,
Hradec Králové
Palát Karel,
Hradec Králové
Faltejsek Jiří,
Hradec Králové
Scholle Stanislav, Holice
Gabalec Libor,
Kostelec n. Orl.
Kábrt Jan, Vysoké Mýto
Odvalil Pavel,
SPŠE, Pardubice
Pochopová Věra,
Dobruška
Malina Jan,
Hradec Králové
Fojtíková Alena, Jaroměř
Beňo Antonín, Náchod
Vosecký Milan,
Hradec Králové

D: Kratochvíl Jan,
Pardubice
Turek Ilja, Hradec Králové
Bahnik Petr, Pardubice

Červenka Zbyněk,
Hradec Králové
Beran Aleš, Pardubice
Luňák Stanislav, Pardubice
Pátek Miroslav,
SPŠE, Pardubice
Pírko Jiří,
SPŠE, Pardubice
Matěna Jaromír,
Hradec Králové

Jihomoravský kraj:

A: Syrový Jiří,
Brno, Slovanské nám.
Musil Dalibor,
SPŠStr, Brno, Sokolská
Jirovský Jiří,
SPŠE, Brno, Leninova
Vláčil Lubomír,
Prostějov
Ševčík Petr,
Brno, Elgartova
Hula Jan, Žďár nad Sáz.
Klusáček Martin, Třebíč
Chvosta Pavel,
SPŠStav, Gottwaldov
Obdržálek Libor, Třebíč
Lorenc Petr,
Brno, Koněvova
Foltýn Stanislav,
Prostějov
Roupec Milan,
Mor. Budějovice
Sehnoutka Tomáš,
Žďár nad Sázavou
Škorpil Vladislav,
Brno, Koněvova

B: Peňáz Jiří,
Brno, kpt. Jaroše
Jirků Zdeněk,
Žďár n. Sázavou

C: Filip Stanislav,
Brno, Slovanské nám.
Svoboda Jiří,
Brno, kpt. Jaroše
Klimeš Luděk, Blansko
Litzman Jiří,
Brno, kpt. Jaroše
Janouš Dalibor,
Brno, Slovanské nám.
Šustr Jaroslav, Blansko
Chmelík Jaroslav, Holešov
Kreysa Karel,
Brno, Lerchova
Kožela Petr,
SPŠStr, Gottwaldov
Gotvald Zdeněk,
Brno, kpt. Jaroše

D: Kučírek Petr,
Brno, Koněvova
Sládek Petr,
Brno, Elgartova
Kaďourek Jiří,
Brno, Koněvova
Vejmělek Libor,
Brno, Koněvova
Matyska Luděk,
Brno, kpt. Jaroše
Mička Jiří,
SPŠE, Brno
Pospíchal Tomáš,
Brno, Koněvova
Judas Libor,
Bystřice n. Pernšt.
Mareček Ladislav,
Brno, Koněvova
Riedlová Hana, Hodonín
Šmarda Jaroslav, Třebíč
Votava Pavel, Jihlava
Michková Dagmar,
Brno, Koněvova
Svrčina Květoslav,
Val. Klobouky

Severomoravský kraj:

A: **Lýčka** Miroslav, Vsetín
Balanda Lubomír,
Český Těšín
Hruška Vladimír,
Val. Meziříčí
Prchal Miloslav,
Ostrava, Šmeralova
Augusta Milan,
SPŠVE, Rožnov p. Radh.
Lokoč Vít,
Ostrava-Poruba,
A. Hrdličky
Pawlas Jaroslav,
SPŠ, Ostrava-Vítkovice
Durčok Stanislav,
SPŠVE, Rožnov p. Radh.
Kodousek Jiří,
Olomouc, Jiřího
z Poděbrad
Ramík Čestmír,
Ostrava, Šmeralova
Zelinger Zdeněk,
Ostrava-Hrabůvka,
Fr. Hajdy

B: Linkesch Oskar,
SPŠ, Ostrava-Vítkovice
Gaďorek Petr,
SPŠ, Ostrava-Vítkovice
Strakoš Zdeněk,
SPŠ, Ostrava-Vítkovice
Šedivý Miroslav, Přerov
Babič Zdeněk,
SPŠ, Karviná
Basler Jiří, Opava
Bolek Květoslav,
Ostrava, Šmeralova
Beránek Tomáš,
SPŠ, Přerov
Děcký Miroslav,
SPŠ, Přerov

König Miroslav,
Nový Jičín
Krchák Zdeněk, Vsetín
Mazanec Michal, Bílovec
Sušeň Václav, Přerov
Walach Kristián,
Ostrava-Zábřeh

C: Pastrňák Vladimír,
Ostrava, Šmeralova
Kornuta Tadeusz,
SPŠ, Karviná
Zapoměl Jaroslav,
Ostrava-Zábřeh
Dočkal Petr, Přerov
Hamerník Jiří,
Rožnov p. Radh.
Jančar Petr, Opava
Svozilová Helena,
Olomouc-Hejčín
Šigut Tomáš,
Haviřov, Tajovského
Bobek Jiří,
Haviřov, Rudé armády
Zdražil Jan, Karviná

D: Paclovský Radomír,
SPŠE, Olomouc
Folwarczny Václav,
Bílovec
Urban Rostislav,
Ostrava, Šmeralova
Kolařík Pavel, Bílovec
Kuzník Jan, Třinec
Opelík Pavel,
Olomouc-Hejčín
Novák František,
Olomouc-Hejčín
Purgert František, Bílovec

Bratislava:

A: **Miklášek** Dušan,
Novohradská

Krejčík Ján,
Novohradská
Bednárik Tibor,
Čs. armády
Janetka Ivan,
Novohradská
Uhnák Ľubomír,
Novohradská
Valterová Mária,
I. Horvátha
Gergely Štefan,
Čs. armády
Šmatlík Juraj,
Čs. armády
Javor Tibor,
Novohradská
Bartoš Jiří,
Novohradská
Kučera Ján,
Novohradská
Slodička Ján,
Novohradská
Krno Svetozár,
Novohradská
Roško Peter,
Novohradská
Paniak Peter,
Tomášikova
Polačko Otto,
Novohradská
Siváček Vladimír,
Metodova
Ritomský Adrián,
I. Horvátha

B: Krchnák Pavol,
Novohradská

C: Handlovič Róbert,
Novohradská
Ftáčnik Ján, Tomášikova
Mrázik Augustín,
Novohradská

Kollárik Pavol,
I. Horvátha
Banko Ján, Vazovova
Buša Ján, Novohradská
Uváček Vladimír,
I. Horvátha
Čičel Dušan, I. Horvátha

- D:** Mizera Ivan,
Novohradská
Veščičík Milan,
Čs. armády
Varga Štefan,
Novohradská
Hejdová Jana, Metodova
Lakota Ján, Novohradská
Koudela Miloš,
Novohradská
Kotúčová Jana,
Novohradská
Kokoška Stanislav,
Čs. armády
Vnučko Pavel, Čs. armády
Mamrilla Ivan, Metodova
Bartal Kamil, Tomášikova
Rak Vladimír, Tomášikova

Západoslovenský kraj:

- A:** Dobročka Edmund, Šala
Morva Imrich,
Dunajská Streda, maď.
Kochová Jarmila,
Nitra-Párovce

- B:** Malinarič Svetozár,
Nitra-Párovce

- C:** Šek Ľudovít, Malacky

- D:** Fehér Mikuláš, Komárno
Bezák Marián,
Nitra, E. Gudernu
Šimko Eugen, Komárno
Dolejš Václav, Trenčín

Mikóczy Imrich,
Šamorín, maď.

Středoslovenský kraj:

- A:** Martina Dušan,
Prievidza
Maličský Peter,
Banská Štiavnica
Valovič Martin, Vrútky
Dudáš Jozef,
Banská Bystrica
Grega Jozef,
Banská Bystrica
Tekáč Peter,
Rimavská Sobota

- B:** Pekár Karol,
Ružomberok
Kysel Miroslav,
Banská Bystrica

- C:** Novák Ivo, Handlová
Markoš Peter, Kremnica
Šaradín Jozef,
Považská Bystrica

- D:** Beleš Milan, Veľký Krtíš
Hudec Vladimír, Vrútky
Dudková Ľudmila,
Banská Bystrica
Detko Ján, Prievidza
Buraj Štefan,
Dubnica n. Váhom

Východoslovenský kraj:

- A:** Dzurek Ivan,
SPŠE, Košice
Bardiovský Vojtech,
SPŠE, Košice
Valiga Igor, Kežmarok
Ivanega Ivan,
Kráľovský Chlmec
Kopčanský Peter,
Humenné

B: Malenčík Dušan,
 Košice, Šrobárova
 Milly Dionýz, Prešov

C: Rada Michal, Humenné
 Meričková Jana,
 SPŠCh, Humenné
 Dzurek Ján,
 SPŠE, Košice
 Stošek Alexander, Prešov
 Varró Tomáš, Rožňava
 Vitikáč Marián,
 Spišská Nová Ves
 Jusko Anton,
 SPŠE, Košice
 Lučka Milan,
 Košice Šmeralova
 Čverčko Michal,
 Košice, Šrobárova
 Petrik Stanislav,
 Košice, Šrobárova

D: Šiňajová Edit, Trebišov
 Jacko Branislav,
 Košice, Šmeralova
 Repický Miroslav,
 Humenné

Koblen Ivan,
 VLU, Prešov
 Medveď Štefan,
 Košice, Šmeralova
 Cehuľa Milan,
 Košice, Šmeralova
 Nižňanský Ján,
 Košice, Šmeralova
 Ďurovský František,
 Košice, Šrobárova
 Balčák Juraj, Levoča
 Pudlák Michal,
 Košice, Šmeralova
 Bernát Milan,
 Košice, Kováčska
 Jacková Mária,
 Košice, Šmeralova
 Zavadský Vladimír,
 Košice, Šmeralova
 Kukura Pavol,
 Spišská Nová Ves
 Gurská Eva,
 Košice, Šmeralova
 Dzurjanin Stanislav,
 Michalovce
 Frolo Drahotín,
 Košice, Šrobárova

C. Třetí kolo kategorie A

Třetí kolo kategorie A — celostátní — se konalo ve dnech 12.—14. května 1975. Přípravou a organizací byl pověřen KVFO JČK. Účastníci byli vybráni z nejlepších řešitelů 2. kola v jednotlivých krajích, a to všichni až po klasifikaci 1133 (s permutací) a 24 z 34 úspěšných řešitelů s klasifikací 1233 a tak, aby každý kraj byl zastoupen aspoň dvěma řešiteli. Do třetího kola bylo pozváno celkem 79 úspěšných řešitelů, z toho 74 hochů a 5 dívek a zúčastnilo se ho 69 hochů a 5 dívek. Z pozvaných bylo 76 ze 4. roč., 2 z 3. roč. a 1 z 2. roč. škol 2. cyklu. Ze 79 pozvaných bylo 69 z gymnázií a 10 ze SPŠ.

Třetí kolo bylo slavnostně zahájeno v sále střední průmyslové školy stavební v Táboře. Slavnostního zahájení se zúčastnili: prof. PhDr. Bohumír Janoušek, CSc., děkan pedagogické fakulty v Českých Budějovicích, pracovníci KV KSČ v Českých Budějovicích, ústřední školní inspektoři, člen ÚV SSM, členka KV SSM a vedoucí katedry MFŽpv fakulty pedagogické Emanuel Luhan. Po ukončení byl kulturní program.

Čtyři teoretické úlohy řešili soutěžící 13. května na střední průmyslové škole stavební v Táboře; na řešení byl vymezen čas 4 hodin. Odpoledne byla uspořádána prohlídka města Tábora.

Dne 14. května ráno byli účastníci soutěže přepraveni dvěma autobusy do Českých Budějovic, kde se v laboratořích katedry fyziky pedagogické fakulty provádělo v době čtyř hodin měření laboratorní úlohy a po ukončení výpočtu odjížděli soutěžící domů.

Řešení úloh 3. kola opravovali tito členové ÚVFO:

- úlohu č. 1: doc. Náter a dr. Zámečník (Bratislava)
- úlohu č. 2: ing. dr. Kluvanec a dr. Kecskés (ZSK)
- úlohu č. 3: dr. Kleveta a ing. Vybíral (JMK)
- úlohu č. 4: dr. Ungerman a dr. Volf (VČK)
- úlohu č. 5: Vlček a Procházková (JČK)

Ze 74 účastníků bylo 40 úspěšných řešitelů, z toho 20 vítězů. Přehled výsledků podle jednotlivých krajů udává tabulka 4. Jmenovitý seznam vítězů je uveden v tabulce 5 a jmenovitý seznam dalších úspěšných řešitelů je uveden v tabulce 6. Označení P u třídy značí třídu přírodovědnou a označení MF třídu se zaměřením pro matematiku a fyziku. V tabulce 7 je přehled klasifikace jednotlivých soutěžních úloh. Z něho je vidět, že nejúspěšnější byla úloha č. 5 (laboratorní) a nejméně úspěšná úloha č. 4 z optiky.

Srovnáme-li výsledky 3. kola s výsledky loňského ročníku, je letos o 60 % víc úspěšných řešitelů a o 82 % víc vítězů než loňského roku. Souvisí to asi s mimořádnou obtížností úloh v minulém ročníku.

V 3. kole letošního XVI. ročníku FO nebyl žádný soutěžící, který by se 3. kola zúčastnil úspěšně podruhé.

Mezi úspěšné řešitele 3. kola se zařadil i jeden žák — Milan Augusta — z 3. roč. SPŠVE v Rožnově p. Radh.

Vítězové 3. kola FO kat. A obdrželi diplomy, úspěšní řešitelé čestná uznání.

Prvních 9 vítězů dostalo od MŠ ČSR odměnu po 300,— Kčs, další 4 vítězové po 250,— Kčs a dalších 7 vítězů po 175,— Kčs,

TABULKA 4
Výsledky 3. kola podle jednotlivých krajů

Kraj	Počet všech pozvaných řešitelů	Počet úspěšných řešitelů	Z toho počet vítězů	Počet nedo- stavivších se	Počet neúspěšných
Praha	18	8	4	2	8
Středočeský	3	1	1	—	2
Jihočeský	2	1	—	—	1
Západočeský	5	4	3	—	1
Severočeský	3	1	1	—	2
Východočeský	7	2	2	1	4
Jihomoravský	10	6	4	1	3
Severomoravský	7	4	1	1	2
Bratislava	15	8	2	—	7
Západoslovenský	2	1	1	—	1
Středoslovenský	3	3	1	—	—
Východoslovenský	4	1	—	—	3
Celkem	79	40	20	5	34
Loni	80	25	11	—	55

TABULKA 5
Vítězové 3. kola kat. A XVI. roč. FO

Pořadí	Jméno žáka	Kraj	Škola a místo	Třída
1	Vyskočil Jiří	Praha	G Praha 7, Nad štolou	4 MF
2	Lýčka Miroslav	SM	G Vsetín	4 P
3	Valášek Michal	Praha	G Praha 2, W. Piecka	4 MF
4-5	Krásný Vladislav	ZČ	G Plzeň, nám. Odborářů	4 MF
	Hůlka Jiří	VČ	G Hradec Králové	4 MF
6	Hula Jan	JM	G Žďár n. Sáz.	4 P
7-8	Vlach Jiří	Praha	G Praha 7, Nad štolou	4 MF
	Klusáček Martin	JM	G Třebíč	4 P
9	Miklánek Dušan	Bratislava	G Bratislava, Novohradská	4 MF
10-13	Tvrdlík Pavel	StřČ	G Kolín	4 P
	Svrček Michal	ZČ	G Karlovy Vary	4 P
	Maryška Jiří	SČ	G Jablonec n. N.	4 P
	Dobročka Edmund	ZS	G Šaľa	4 P
14-20	Hugo Jan	Praha	G Praha 3, Sladkovského nám.	4 P
	Janský Stanislav	ZČ	G Plzeň, nám. Odborářů	4 MF
	Blažek Jan	VČ	G Chrudim	4 P
	Jirovský Jiří	JM	SPŠE Brno, Leninova	4
	Vláčil Lubomír	JM	G Prostějov	4 P
	Slodička Ján	Bratislava	G Bratislava, Novohradská	4 MF
	Martina Dušan	StřS	G Prievidza	4 P

TABULKA 6
Další úspěšní řešitelé 3. kola kat. A XVI. ročníku FO

Pořadí	Jméno žáka	Kraj	Škola a místo	Třída
21 – 22	Bednárik Tibor	Bratislava	G Bratislava, Čs. armády	4 P
23	Janetka Ivan	Bratislava	G Bratislava, Novohradská	4 MF
24	Valovič Martin	StřS	G Vrútky	4 P
25 – 26	Gürtler Richard	Praha	G Praha 2, W. Piecka	4 MF
	Pawlas Jaroslav	SM	SPŠ Ostrava-Vitkovice	4
	Maličský Peter	StřS	G Banská Štiavnica	4 P
27 – 30	Kozák Ivan	Praha	SPŠ jaderné techniky, Praha 4, Svatoslavova	4
	Lokoč Vít	SM	G Ostrava, A. Hrdličky	4 P
	Krajčík Ján	Bratislava	G Bratislava, Novohradská	4 MF
	Kučera Ján	Bratislava	G Bratislava, Novohradská	4 MF
31 – 32	Řehoř Ivan	Praha	G Praha 5, Radotin	4 P
	Dzurek Ivan	VS	SPŠE Košice	4
33 – 40	Hášová Dagmar	Praha	G Praha 2, W. Piecka	4 MF
	Kmínek Vladimír	JČ	G Pacov	4 P
	Pillmann František	ZČ	G Plzeň, nám. Odborářů	4 MF
	Ševčík Petr	JM	G Brno, Elgartova	4 P
	Lorenc Petr	JM	G Brno, Koněvova	4 P
	Augusta Milan	SM	SPŠ VE Rožnov p. Radh.	4 Progr.
	Javor Tibor	Bratislava	G Bratislava, Novohradská	3
	Bartoš Jiří	Bratislava	G Bratislava, Novohradská	4 MF
				4 P

TABULKA 7
Klasifikace úloh

Úloha	Klasifikace				Průměrná známka	Tématický obor úlohy
	1	2	3	neprac.		
1	23	19	29	3	2,12	mechanika — pohyb těles spojených vláknem
2	2	41	27	4	2,39	elektřina — elektrický obvod se stejnosměr. zdroji
3	11	28	26	9	2,32	elektřina — pohyb smyčky v magnetickém poli
4	7	12	19	36	2,65	optika — zobrazování hvězdářským dalekohledem
5	26	26	21	1	1,95	elektřina — charakteristika termistoru
Celkem	69	126	122	53	2,28	

Kromě toho SSM věnoval každému účastníku publikaci Jižní Čechy od Jiřího Kuthana, Mojmíra Horyny, Ivana Muchky a Marie a Josefa Šechtlových. Vedle toho SSM věnoval desíti nejlepším vítězům osmidenní pobyt v Chlébském u Nedvědice (JMK) a absolutnímu vítězi týdenní pobyt v SSSR.

Z vítězů byli vybráni účastníci pro MFO.

D. Kategorie E

První kolo FO kategorie E probíhalo od září 1974 do 10. února 1975. Texty soutěžních úloh pro 1. kolo byly uveřejněny v letáku který byl vydán SPN v Praze v českém znění pro české kraje a SPN v Bratislavě ve slovenském znění pro slovenské kraje. Kromě toho byly první tři úlohy otištěny v *Matematice a fyzice* ve škole r. 4, čís. 10. Orientační řešení úloh prvního kola zajišťoval dr. Ivo Volf, člen ÚVFO.

Druhé kolo kat. E se konalo v okresních městech 25. 3. 1975. Texty úloh i orientační řešení zajistil opět dr. Ivo Volf. Slovenské, popř. maďarské texty, zajišťoval místopředseda ÚVFC doc. dr. Ivan Náter.

Třetí kolo kat. E se konalo 26. dubna 1975 v krajských městech. Chybné označení dne v oznámení zaslaném jednatelem způsobilo, že se 3. kolo v některých krajích konalo 25. dubna 1975. Texty úloh pro 3. kolo zajistil v českých krajích jednatel Veverka, na Slovensku místopředseda doc. Náter a orientační řešení rozeslal jednatel Veverka.

Tabulka 8 dává přehled o počtu ZDŠ, které se zúčastnily v jednotlivých krajích 1., 2. a 3. kola soutěže. Nejvyšší procento zapojených škol do 1. kola měla Praha (88 %) a po ní Bratislava (81 %), nejmenší procento ZČK (41 %) a po něm StřČK (51 %) a VSK (57 %). Ostatní kraje měly zapojeno 62–68 % škol. Počet zapojených škol se proti loňskému roku zvýšil.

Tabulka 9 udává počet žáků soutěžících v prvním, druhém a třetím kole kat. E FO.

Počet soutěžících žáků v 1. kole klesl. Počet úspěšných řešitelů sice poklesl, ale procentově se celkem nezměnil, u dívek naopak podstatně vzrostl ze 34 % na 50 %.

V druhém kole byl velký pokles úspěšných řešitelů z 75 % loňského roku na 48 % letos, u dívek obzvláště — ze 72 % na 40 %.

Do třetího kola byl letos zařazen menší počet řešitelů; počet úspěšných žáků zůstal procentově nezměněn.

Dále uvádíme jména vítězů 3. kola FO kategorie E, a to z každého kraje nejvýše 10. Mají-li další řešitelé stejnou klasifikaci, jsou uvedeni též. Za vítěze považujeme ty úspěšné řešitele, kteří vyřešili úspěšně 3 úlohy ze 4 zadaných. U každého žáka je uvedeno číslo ZDŠ — pokud je číslem označena — a její sídlo.

TABULKA 8

Počet ZDŠ, které se zúčastnily XVI. ročníku FO

Kraj	Počet ZDŠ v kraji	1. kola se zúčastnilo		2. kola se zúčastnilo		3. kola se zúčastnilo	
		Počet	%	Počet	%	Počet	%
Praha	178	156	88	132	74	45	25
StřČ	278	142	51	126	45	40	14
JČ	188	128	68	89	47	16	9
ZČ	222	90	41	80	36	22	10
SČ	291	186	64	141	48	61	21
VČ	314	193	62	153	49	25	8
JM	462	290	63	162	35	57	12
SM	457	297	65	235	51	33	7
Bratislava	68	55	81	55	81	19	28
ZS	479	307	64	293	61	51	11
StřS	399	259	65	208	52	36	9
VS	387	224	57	189	50	52	13
Celkem	3723	2327	63	1863	50	457	12
Vloni	3716	2485	67	1999	54	513	14

TABULKA 9

Počet žáků soutěžících v 1., 2. a 3. kole FO kategorie E

(S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, % Ú počet úspěšných v %)

Kraj	1. kolo						2. kolo						3. kolo					
	celkem			z toho dívek			celkem			z toho dívek			celkem			z toho dívek		
	S	Ú	%Ú	S	Ú	%Ú	S	Ú	%Ú	S	Ú	%Ú	S	Ú	%Ú	S	Ú	%Ú
Praha	1340	656	49	441	199	45	340	287	84	132	81	61	72	68	94	12	11	92
StřČ	706	447	63	218	133	61	324	178	55	88	35	40	58	38	65	9	4	44
JČ	758	325	43	259	117	45	270	150	55	86	43	50	22	19	87	2	2	100
ZČ	412	306	74	140	91	65	279	136	49	81	35	43	25	21	84	5	2	40
SČ	991	458	46	361	141	39	409	203	49	122	45	37	80	49	61	20	12	60
VČ	1043	518	50	368	153	42	438	222	48	118	51	43	30	26	87	2	2	100
JM	1543	805	52	549	280	51	746	322	43	249	81	32	78	65	83	13	9	69
SM	1399	736	53	509	240	41	532	278	52	153	65	43	38	30	79	8	6	75
Bratislava	581	500	86	238	190	80	500	256	50	190	76	40	43	36	84	6	6	100
ZS	2203	1390	63	940	564	60	1349	486	36	552	184	33	74	42	57	17	7	41
StřS	1963	864	44	880	305	35	819	346	42	291	115	40	39	24	62	13	8	62
VS	1024	722	69	362	232	64	656	311	52	221	92	42	87	55	63	20	10	50
Celkem	13963	7727	55	5265	2645	50	6662	3175	48	2283	903	40	646	473	73	127	79	62
Vloni	15157	8438	56	5390	1853	34	7410	5595	75	2434	1761	72	736	537	73	189	114	60

Praha

Horský Petr, Praha 4, Jižní
Šourek Michal,
Praha 4, Křesomyslova
Halenka Tomáš,
Praha 4, Choceradská
Kott František,
Praha 10, Komarovova
Bílek Václav,
Praha 4, Choceradská
Michálek Josef,
Praha 6, Petřiny-jih
Palas Petr, Praha 6, Alžírská
Brázdová Hana,
Praha 4, Křesomyslova
Krajina Tomáš,
Praha 1, Uhelný trh
Smotlacha Vlad.,
Praha 10, V úžlabině
Synáček Zdeněk,
Praha 5, Plzeňská

Středočeský kraj

Hřebíček Jiří,
Kralupy-Lobeček
Antošik Lubomír,
Benátky n. Jiz.
Čapek Luboš, Veltrusy
Hlinomaz Petr, 10.,
Kladno-Sítná
Voves Jan, Mělník, Švermova
Töpfer Pavel, 5.,
Mladá Boleslav
Kasal Pavel, 1.,
Brandýs-St. Boleslav
Klár Zdeněk, 6., Příbram
Kožner Petr, 10., Kladno-Sítná
Pichrt Libor, 3., Rakovník

Jihočeský kraj

Čech Přemysl,
Týn n. Vlt.-Malá Strana

Mátl František,
Dačice, B. Němcové
Souhradová Eva,
Písek, Gorkého
Hronek Jiří,
Č. Budějovice, Rožnov
Chmelík Petr,
Strakonice, Dukelská
Januš Rostislav, 3., Pelhřimov
Žahour Ladislav,
Č. Krumlov, Zápotočského
Baštář Aleš,
Dačice, B. Němcové
Jiráček Zdeněk, 3., Tábor
Růžička Tomáš, Písek, Gorkého

Západočeský kraj

Mráz Tomáš, 1., Ostrov n. Ohří
Kubalík Tomáš, 3., Klatovy
Banzetová Věra, 5.,
Ostrov n. Ohří
Rybář Jan, 3., Ostrov n. Ohří
Novák Stanislav, 4., Plzeň
Hrubec Karel, Tachov
Kutka Pavel, 2., Přeštice
Haramule Richard, Horní Bříza
Poláček Jiří, Chlumčany
Vítek Milan,
Rokycany, Pionýrů

Severočeský kraj

Šefc Luděk,
Ústí n. L., Velká hradební
Průša Václav,
Děčín 8, Vojanova
Zahrádka Miroslav,
Kláštrec n. Ohří, Chomutovská
Beneš Miroslav,
Teplíce, Smetanovo n.
Langová Eva, 2., Podbořany
Sládek Jiří, 3., Žatec

Šťastný Zdeněk,
Ústí n. L., Moskevská
Sapronovová Taťána,
Jablonec n. N.
Malý Jan,
Chomutov, Na příkopech
Kolář František,
Chomutov, Engelsova
Vítková Irča,
Děčín 4, Máchovo nám.
Kočí Tomáš,
Varnsdorf, nám. 25. února
David Jan,
Č. Kamenice, Komenského
Bartoň Václav,
Ústí n. L., Velká hradební

Východočeský kraj

Pišťora Vlad.,
Hradec Králové 3, Jižní
Matěna Vladimír, 1., Trutnov
Šilar Jan, 1., Trutnov
Volhejn Jan,
Nové Město n. Met.
Kosek Jiří, Jablonné n. Orlicí
Repík Milan, 1., Trutnov
Hrnčíř Roman,
Hradec Králové 3, SNP
Vlasák Tomáš,
Pardubice, Višňovka
Kolovratník M.,
Chrudim, Olbrachtova
Rašínová Jana, Cerekvice

Jihomoravský kraj

Zídek Petr, 1., Nové Město
Slovák Jan, Brno, Antonínská
Blahuš Bohumír,
Ostrožská Lhota
Hladíková Irena,
Mikulov, Komenského

Matyášek Roman,
Prostějov, Palackého
Brzobohatý Jan, Mokrá
Formánek Mir.,
Hrušovany n. Jev.
Kvapil Stanislav, Rajhrad
Mikulčík Petr, Uherský Ostroh
Štách Vítězslav, Vizovice

Severomoravský kraj

Czurzydlo Julian,
Havířov-Bludovice
Juřík Aleš, Karviná
Bardonková Jana, Dvorce
Gintar Jindřich, Březová
Křesina Josef, Kopřivnice
Hamalová Jarmila, Krnov
Klasa Petr, Vratimov
Stránský Pavel, Olomouc
Gilar Václav, Příbor
Chleboun Jan,
Ostrava-Vyškovice
Rejman Stanislav, Vsetín
Sikorová Jiřina, Jablunkov
Tkadlec Josef, Vsetín
Zakrewska Marcela,
Český Těšín

Bratislava

Müller Peter, Košická
Koncová Mária, Bajkálská
Oktavec Branislav, Košická
Djubek Boris, Medzilaborecká
Jurza Vladimír, Nedbalova
Zitkovský Ivan, Košická
Dado Boris, Košická
Svitek Ľubomír, Červený kríž
Krchnávý Daniel,
Thälmannova
Mojžiš Martin, Nedbalova

Západoslovenský kraj

Bednár Peter, Palárikovo
Svitana Peter,
Trenčanská Teplá
Paulička Ivan,
Trnava, Halenkárska
Gocman Miroslav,
Nitra, Jašíka
Mikušová Alena, Nitra-Zobor
Lichtner Ondrej,
Nitra, J. Kráľa
Sládková Ľudmila, 1.,
Nové Mesto n. Váh.
Gálik Peter, Špačince
Otrubčiak Štefan, 1., Myjava
Moravčík Bohumil, Lovčice
Samák Ivan, Z. Olča

Středoslovenský kraj

Surový Marian,
Ružomberok, Revol. nám.
Baláž Jozef, 1.,
Žiar n. Hronom
Ďuriník Ľubomír,
Považ. Bystrica, Moyzesova
Hudecová A.,
Martin, ul. Mládeže
Kutfirtová Dagmar,
Považ. Bystrica, Školní ul.

Pažúrová Tatiana,
Banská Bystrica, tr. SNP
Ílanovská Renáta, Žilina-Hliny
Griach Ľubomír,
Martin, ul. Budovateľov
Krivaň Juraj, Sliač
Jamrich Emil, 1., Ružomberok

Východoslovenský kraj

Dudičová Katka,
Prešov, Gottwaldova
Baran Milan,
Prešov, Gottwaldova
Žezula Ivan, Košice, Febr. víť.
Jirásek Jozef,
Spišská Belá, Leninova
Monteč Vladislav,
Trebišov, Komenského
Jurčo Branislav,
Prešov, Gottwaldova
Foltín Rudolf,
Košice, Febr. víť.
Ščerbák Stano,
Košice, Febr. víť.
Vasíl Peter, 1., Michalovce
Tomko Albert,
Jablonov n. Tisou
Tluchoň Petr, Tur. Podhradie
Medvec Michal, Budkovce

E Akce na podporu FO

Na podporu FO, zvýšení úrovně žáků ve fyzice, se provádějí různé akce.

1. Kursy pro žáky během školního roku

Kdysi bývaly ve všech krajích velmi časté a velmi navštěvované. Nyní při pětidenním pracovním týdnu značně poklesl jejich počet, poněvadž se obtížně organizují pro více škol najednou. Ve šk. roce 1974/75 se konaly ve StřČK, ZČK, SČK,

VČK, JMK, SMK, Bratislavě, StřSK a VSK, a to někde průběžně během celého roku, jinde jen několikrát nárazově. Někde se pořádaly úspěšně i v sobotu dopoledne a dojížděli na ně i žáci velmi vzdálení (JMK).

2. Semináře pro učitele škol 1. cyklu

Tyto semináře jsou určeny pro informaci žáků ZDŠ o úlohách kat. E prostřednictvím učitelů, poněvadž informovat žáky ZDŠ přímo všude nelze. V tomto škol. roce se konaly jen zcela výjimečně v některých místech.

3. Krajská soustředění úspěšných řešitelů FO a MO

KVFO pořádají soustředění úspěšných řešitelů FO, popř. společně i s MO. Tato soustředění jsou úspěšná a osvědčují se víc než kursy během roku. Ve škol. roce 1974/75 se konaly v Praze, StřČK, SČK, VČK, JMK, ZSK, StřSK a VSK. Soustředění byla týdenní až čtrnáctidenní.

Počet účastníků záležel na finančních možnostech kraje. Bylo jich 20, někde až 50 (StřČK) a 60 (JMK). Tato krajská soustředění se ukázala velmi vhodná.

4. Celostátní soustředění úspěšných řešitelů MO a FO z III. ročníků škol 2. cyklu

Jako každoročně, tak i letos se konalo — letos ve Zvolenu v době od 15. 6. do 5. 7. 1975 — celostátní soustředění úspěšných řešitelů MO a FO. Letos organizačně zajišťoval toto soustředění ÚVMO. Zúčastnili se ho podle návrhů KV i mladší řešitelé. Tak z 92 účastníků bylo 65 z 3. ročníku, 24 z 2. ročníku a 3 z 1. ročníku škol 2. cyklu. Hochů bylo 85 a dívek 7. Účastníci byli rozděleni do tří tříd podle předcházející úspěšnosti v MO nebo FO, a to do třídy matematické, matematicko-fyzikální a fyzikální. Účastníci, kteří byli v 2. kole úspěšnými řešiteli jen jedné olympiády, byli zařazeni do příslušné třídy matematické nebo fyzikální, účastníci, kteří byli v 2. kole úspěšnými řešiteli obou olympiád, byli zařazeni do třídy matematicko-fyzikální. Při definitivním roztržení bylo přihlédnuto k přání jednotlivců. Podle ročníků byl v těchto třídách tento počet účastníků:

Třída	Ročník			Celkem
	3	2	1	
M	20	10	3	33
MF	24	8	—	32
F	21	6	—	27

Každý kraj měl mít za MO a FO 8 nebo 7 účastníků. Nebylo to však zcela dodrženo.

V každé třídě bylo 60 hodin přednášek. Ve třídě fyzikální a matematicko-fyzikální přednášel 30 hodin prof. dr. Rostislav Košťál na téma Silové pole a jeho energie. Ve třídě fyzikální přednášeli ještě: dr. Zdeněk Ungermann z KPÚ VČK 10 hodin Použití diferenciálního a integrálního počtu ve fyzice, dr. Ivan Baník z ELF SVŠT v Bratislavě 10 hodin Termodynamika a dr. Rastislav Baník z PedF v Banské Bystrici 10 hodin Úvod do fyziky pevných látek.

Kromě toho bylo 5 besed z fyziky, které měli dr. Zdeněk Ungermann a prof. dr. Rostislav Košťál.

Celostátní soustředění je velmi vhodné pro žáky a žáci na něm hodně získávají. Tak z 61 fyzikálních účastníků celostátního soustředění v r. 1974 bylo letos 24 úspěšných řešitelů 3. kola a ze zbývajících účastníků soustředění 12 úspěšných řešitelů 2. kola.

5. Třídy se zaměřením pro matematiku a fyziku

Před několika lety vznikly tyto třídy se zaměřením pro matematiku a fyziku, z nichž některé se velmi dobře uplatnily. Byly to třídy na gymnáziích v Praze 2 - W. Piecka, v Bratislavě - Novohradská a v Brně v Křenové ulici. Během doby těchto tříd vzniklo velmi mnoho. V následující tabulce 10 jsou uvedeny jen ty školy s těmito třídami, které měly letos úspěšné řešitele v 2. nebo i 3. kole; počet úspěšných řešitelů v jednotlivých kategoriích je uveden. Jsou to třídy na těchto gymnáziích:

TABULKA 10

Kraj	Škola	2. kolo — kat.				3. kolo kat. A
		A	B	C	D	
Praha	1. Štěpánská	—	1	—	2	—
	2. W. Piecka	8	2	4	1	3
	6. Arabská	—	—	1	1	—
	6. Leninova	—	—	—	3	—
	7. Nad štolou	6	1	2	10	2
	8. Libeň	2	—	2	—	—
	10. Voděradská	—	—	2	—	—
StřČ	Brandýs n. L.	—	—	—	1	—
ZČ	Plzeň, nám. Odborářů	5	3	3	3	3
SČ	Ústí nad Labem	—	1	1	1	—
	Liberec	1	1	1	1	—
VČ	Hradec Králové	3	—	1	3	1
	Pardubice	—	—	—	4	—
JM	Brno 1, Koněvova	1	—	—	4	—
	Brno 2, Lerchova	—	—	3	—	—
	Brno 3, Elgartova	—	—	—	1	—
	Brno 3, kpt. Jaroše*)	—	—	1	1	—
SM	Bílovec*)	—	—	—	3	—
	Haviřov, nám. Rudé arm.	—	—	1	—	—
	Haviřov, Tajovského	—	—	1	—	—
	Olomouc, Hejčín	—	—	1	2	—
	Olomouc, Jiřího z Poděbrad	1	—	—	—	—
	Opava	—	1	1	—	—
	Vsetín	—	1	—	—	—
Brati- slava	Červ. armády	—	—	—	4	—
	Novohradská	10	1	3	5	6
VS	Košice 1, Šmeralova*)	—	—	—	8	—

*) jde jen o třídy matematické

Z tabulky je vidět, že se z 27 škol nejlépe uplatnily ve škol. roce 1974/75 MF třídy v těchto školách:

1. Bratislava, Novohradská
2. Praha 7, Nad štolou
3. Praha 2, W. Piecka

4. Plzeň, nám. Odborářů

Mnohem menší počet úspěšných řešitelů byl v školách

5. Hradec Králové

6. Košice, Šmeralova

7. Brno 1, Koněvova

U dalších škol nepřestoupil počet úspěšných řešitelů číslo 4.

Ze 40 úspěšných řešitelů v 3. kole XVI. ročníku bylo 15 z tříd se zaměřením pro MF, 1 ze třídy programátorské, 19 z tříd přírodovědných a 5 ze SPŠ. Z 20 vítězů 3. kola je 8 z tříd se zaměřením pro MF, 11 z tříd přírodovědných a 1 ze SPŠ.

Závěr

Je třeba aspoň srdečně poděkovat všem pracovníkům ve FO, kteří této náročné a důležité politickovýchovné práci obětují svůj volný čas.

.

II. ČÁST SOUTĚŽNÍ ÚLOHY

1. Úlohy kategorie A

Úlohy a řešení recenzovali dr. Ladislav Thern a Mojmír Simerský

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl ing. Miloš Rabas)

Měření elektrického proudu bez ampérmetru

Změřte bez použití ampérmetru elektrický proud procházející žárovkou.

Pro měření máte k dispozici aspoň tyto přístroje a materiál: teploměr, váhy, stopky, voltmetr, kovový drát z látky, jejíž měrný odpor je uveden ve fyzikálních tabulkách, délkové měřítko, mikrometr, termosku, žárovku na napětí 6 V (nebo 12 V) s jmenovitým příkonem nejméně 20 W, zdroj proudu (např. akumulátor do 12 V).

Postup při měření:

- Navrhnete vhodnou měřicí metodu (popište svůj návrh, připojte i obrázek a podle potřeby doplňte seznam pomůcek).
- Provedte měření a výpočet; uveďte chybu měření.
- Na závěr připojte svůj posudek (názor) na vhodnost metody.

Poznámky:

1. Kdyby opatření některého z předmětů uvedených v seznamu činilo obtíže, můžete si pomoci jiným vhodným zařízením, i když méně dokonalým.

2. Doporučená literatura: R. Košťál: Hodnoty a chyby veličin měřených a vypočtených. Škola mladých fyziků, svazek 6, SPN, Praha 1972.

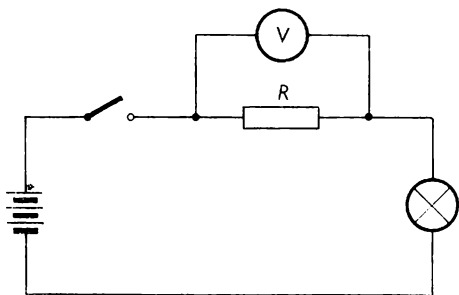
Řešení:

a) Uvedeme si tři metody měření, které je možno použít s přístroji a materiálem podle zadání. Přitom vyloučíme možnost určení proudu z jmenovitých údajů žárovky (napětí, příkon), poněvadž v zadání není uvedeno, že má jít o stanovení proudu protékajícího žárovkou při jejím jmenovitém pracovním napětí.

1. Z drátu, který má známý měrný odpor ϱ , zhotovíme pomocný rezistor, změříme délku l a průměr d drátu. Rezistor má známý odpor

$$R = \varrho \frac{4l}{\pi d^2}. \quad (1)$$

Rezistor zapojíme do obvodu žárovky sériově (obr. 1)



Obr. 1

a měříme voltmetrem napětí U na něm. Proud I vypočítáme z Ohmova zákona

$$I = \frac{U}{R}. \quad (2)$$

Pokud má použitý voltmetr vnitřní odpor R_v , který nesplňuje podmínku $R_v \gg R$, je třeba naměřené hodnoty napětí U opravit s ohledem na vlastní spotřebu voltmetru, takže proud se vypočítá ze vztahu

$$I = \frac{U}{R + R_v}.$$

2. Vyrobíme pomocný rezistor jako u první navržené metody a použijeme ho jako topné těleso v kalorimetru (termosce), v němž je voda o známé hmotnosti m . Hmotnost vody zjistíme zvážení prázdného kalorimetru a kalorimetru s vodou. Rezistor zapojíme opět do série se žárovkou (obr. 2). Proud necháme procházet po dobu t a zjistíme oteplení $\Delta\vartheta$ vody. Ze vztahu

$$RI^2t = mc\Delta\vartheta$$

vypočítáme

$$I = \sqrt{\frac{mc\Delta\vartheta}{Rt}}. \quad (3)$$

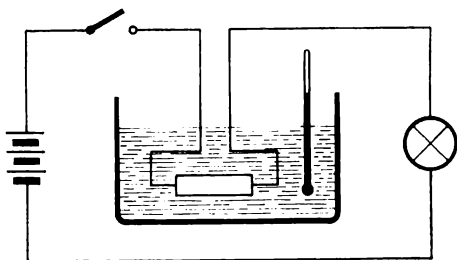
Množství vody v kalorimetru volíme tak, aby bylo možno zanedbat tepelnou kapacitu kalorimetru a teploměru. Dobu t je třeba volit tak, aby na použitém teploměru bylo dobře možné změřit zvýšení $\Delta\vartheta$ teploty.

3. Použijeme stejné uspořádání jako v předcházející metodě (obr. 2), ale v kalorimetru umístíme libovolné topné těleso, jehož odpor nemusíme znát. Voltmetrem měříme napětí na topném tělese. Z rovnic

$$U = RI, \quad RI^2t = mc \Delta\vartheta$$

vyloučíme neznámou veličinu R , takže

$$I = \frac{mc \Delta\vartheta}{Ut}. \quad (4)$$



Obr. 2

b) Hlavním problémem v této části řešení je stanovení chyby měření. Je třeba u každé navržené metody provést rozbor a podle toho určit, která měření bude třeba opakovat. Přitom použijeme doporučenou literaturu.

1. Pro chybu měření proudu pomocí první metody najdeme podle rovnice (9) na str. 30 uvedené literatury

$$\delta_I = I \sqrt{\left(\frac{\delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\delta R}{R}\right)^2} \quad (5)$$

a pro $\frac{\delta R}{R}$ najdeme

$$\frac{\delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\delta \varrho}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\delta \pi}{\pi}\right)^2 + \left(2 \frac{\delta d}{d}\right)^2}. \quad (6)$$

Při měření napětí U byl použit přístroj Metra Avomet II

na rozsahu 3 V. Protože jeho vnitřní odpor $R_v = 150 \text{ k}\Omega$, je splněna podmínka $R_v \gg R$. Přesnost měření napětí je dána třídou přesnosti voltmetru (1,5), takže chyba měření napětí

$$\delta_U = 0,015 \cdot 3,00 \text{ V} = 0,045 \text{ V}.$$

Rezistor R byl vyroben z měděného drátu délky $l = 2,0 \text{ m}$ a průměru $0,40 \text{ mm}$. Délka byla měřena ocelovým pravítkem o délce $1,0 \text{ m}$. Chyba měření (podle odhadu) je nejvýše $\pm 2 \text{ mm}$.

Průměr drátu byl měřen mikrometrickým měřidlem. Měření bylo opakováno desetkrát, protože výsledky jednotlivých měření se dosti podstatně lišily. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 11. Střední chyba měření průměru drátu je

$$\overline{\delta_d} = \sqrt{\frac{0,000410}{90}} \text{ mm} = 0,0021 \text{ mm}$$

a změřený průměr drátu

$$d = 0,402 \text{ mm} \pm 0,002 \text{ mm}.$$

Pro měrný odpor mědi bylo nalezeno $\varrho = 0,017 \mu \Omega \text{ m}$. Předpokládáme, že chyba uvedené hodnoty je $\pm 0,0005 \mu \Omega \text{ m}$. Velikost konstanty π můžeme dosadit na tolik platných míst, aby její chyba byla zanedbatelná. Vypočteme nyní velikost jednotlivých členů pod odmocninou ve vztahu (6):

$$\left(\frac{\delta \varrho}{\varrho}\right)^2 \doteq 9 \cdot 10^{-4}, \quad \left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 \doteq 1 \cdot 10^{-6},$$

$$\left(2 \frac{\delta d}{d}\right)^2 \doteq 1 \cdot 10^{-2}.$$

TABULKA 11

d mm	Δd mm	$\Delta^2 d$ mm ²
0,405	-0,003	0,000 009
0,400	+ 2	4
0,410	- 8	64
0,395	+ 7	49
0,405	- 3	9
0,395	+ 7	49
0,395	+ 7	49
0,410	- 8	64
0,410	- 8	64
0,395	+ 7	49
$\bar{d} = 0,402$		$\Sigma \Delta^2 d = 0,000410$

Stačí tedy uvažovat jen $\left(2 \frac{\delta d}{d}\right)^2$, ostatní členy jsou zanedbatelné. Konstantu π stačí dosadit na tři platná místa. Pro odpor R dostaneme ze vztahů (1) a (6):

$$R = 0,27 \, \Omega \pm 0,03 \, \Omega.$$

Při měření podle obr. 1 bylo na odporu R naměřeno napětí $U = 1,05 \, \text{V}$. Ze vztahů (2) a (5) dostaneme pro měřený proud

$$I = 3,8 \, \text{A} \pm 0,4 \, \text{A}.$$

Jako zdroj byl použit akumulátor 6 V a žárovka měla jmenovité hodnoty 6 V, 25 W.

2. Při měření podle druhé metody můžeme využít rezistor vyrobený pro měření podle první metody. Chyba měření proudu bude

$\delta_I =$

(7)

$$= I \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\delta \Delta \vartheta}{\Delta \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\delta t}{t}\right)^2}.$$

Chybu měření odporu R již známe. Proti ní bude zřejmě chyba hmotnosti m zanedbatelná, jestliže hmotnost zjišťujeme vážením. Měrné teplo vody nalezneme v tabulkách $c = 4,1829 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Proto i chybu měrného tepla zanedbáme. Čas měříme stopkami a budeme předpokládat, že chyba měření odpovídá ± 1 dílku na stupnici stopek. Použité stopky mají dělení po 0,5 s. Protože doba potřebná k měřitelnému oteplení vody bude zřejmě řádově aspoň minuta, je možno zanedbat i chybu měření času. Pro měření teploty ϑ použijeme teploměr se stupnicí dělenou po polovinách stupně. Přesto bude třeba měření opakovat, aby se chyba měření zmenšila.

Z rozdílu hmotnosti kalorimetru s vodou a prázdného kalorimetru bylo zjištěno $m = 24,85 \text{ g}$. Měření podle obr. 2 bylo opakováno desetkrát tak, že konec jednoho

TABULKA 12

ϑ_i °C	ϑ_{i+5} °C	$\vartheta_{i+5} - \vartheta_i$ °C	$\Delta \vartheta_s$ °C	$\Delta^2 \vartheta_s$
14,50	25,75	11,25	+0,05	0,0025
17,00	28,00	11,00	+0,30	0,0900
19,00	30,25	11,25	+0,05	25
21,00	32,50	11,50	-0,20	400
23,50	35,00	11,50	-0,20	400
$\vartheta_s = 11,30$				$\Sigma \Delta^2 \vartheta_s = 0,1750$

měření byl současně začátkem dalšího měření (tj. teplota vody byla měřena v pravidelných intervalech $\Delta t = 60$ s). Výsledky měření jsou sestaveny v tabulce č. 12 a zpracovány podle metody postupných měření.

Pro oteplení vody v kalorimetru za dobu 60 s vychází

$$\Delta \vartheta = 2,26^{\circ}\text{C} \pm 0,02^{\circ}\text{C}.$$

Po dosazení do vztahu (3) a (7) vychází měřený proud

$$I = 3,8 \text{ A} \pm 0,4 \text{ A}.$$

Přitom chyba měření teplotního rozdílu je zanedbatelná proti chybě odporu R .

3. Při měření podle třetí metody můžeme použít opět vyrobený rezistor o odporu R , ale tentokrát není třeba tento odpor znát, a jeho chyba nemá tedy vliv na přesnost měření proudu. Podle vztahu (4) bude chyba měření proudu

$$\delta I = \quad (8)$$

$$= I \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\delta \Delta \vartheta}{\Delta \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\delta t}{t}\right)^2}.$$

Pro výpočet použijeme hodnoty naměřené při metodě první (napětí U) a hodnoty naměřené při metodě druhé (hmotnost m vody, oteplení $\Delta \vartheta$ vody a dobu t). Vypočteme jednotlivé členy pod odmocninou ve vztahu (8):

$$\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 \doteq 1,6 \cdot 10^{-7}; \quad \left(\frac{\delta c}{c}\right)^2 \doteq 1,0 \cdot 10^{-6};$$

$$\left(\frac{\delta \Delta \vartheta}{\Delta \vartheta}\right)^2 \doteq 7,8 \cdot 10^{-5}; \quad \left(\frac{\delta U}{U}\right)^2 \doteq 1,7 \cdot 10^{-3};$$

$$\left(\frac{\delta t}{t}\right)^2 \doteq 7,0 \cdot 10^{-5}.$$

Stačí zřejmě uvažovat jen chybu měření napětí. Měřený proud I je tedy

$$I = 3,7 \text{ A} \pm 0,1 \text{ A}.$$

c) Nejrychlejší je měření podle první metody. Porovnáním zjistíme, že nejmenší chyba měření je při měření podle třetí metody. Je to způsobeno tím, že odpor R rezistoru byl nalezen velmi nepřesně. Rozdíly při měření průměru d vznikly proto, že použitý měděný drát byl izolován smaltem. Měření bylo provedeno na odizolovaném konci drátu. Při odstraňování izolace byl zřejmě povrch vodiče porušen.

Nebyly vzaty v úvahu některé další vlivy, které rovněž ovlivní přesnost měření. U měrného odporu ρ byla zanedbána jeho závislost na teplotě; uvedená hodnota platí při 18°C . U měrného tepla vody nebyl uvážen vliv čistoty vody a závislost na teplotě; uvedená hodnota platí pro destilovanou vodu při teplotě 18°C .

2. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

Dva elektrické zdroje o elektromotorických napětích E_1, E_2 a vnitřních odporech R_1, R_2 jsou spojeny paralelně (soulasnými póly) a připojeny ke spotřebiči.

a) Určete, jaký odpor R musí mít spotřebič, aby dostal předepsaný příkon P ; proveďte diskusi.

b) Podle výsledku části a) určete, jakou největší hodnotu $P_{\max}$ může mít příkon dodávaný spotřebiči.

c) Určete, jaký odpor R_{opt} má v tomto případě spotřebič.

d) Pro případ $R = R_{\text{opt}}$ určete velikosti proudů I_{1m}, I_{2m} oběma zdroji a proud I_m spotřebičem.

e) Najděte podmínku, aby v případě d) byly proudy procházející oběma zdroji stejně velké $I_{1m} = I_{2m}$.

Řešení:

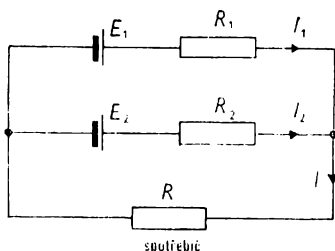
a) Proudů v obvodu označíme podle obr. 3. Vyjádříme je z Kirchhoffových vztahů

$$I = I_1 + I_2, \quad E_1 = R_1 I_1 + RI, \quad E_2 = R_2 I_2 + RI,$$

jejichž řešením dostaneme

$$I_1 = \frac{E_1 R_2 + R(E_1 - E_2)}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}, \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{E_2 R_1 - R(E_1 - E_2)}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}, \quad (2)$$



Obr. 3

$$I = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}. \quad (3)$$

Spotřebič dostává příkon $P = RI^2$; po dosazení z (3) dostaneme vztah

$$P = R \left[\frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)} \right]^2, \quad (4)$$

z něhož vyjádříme

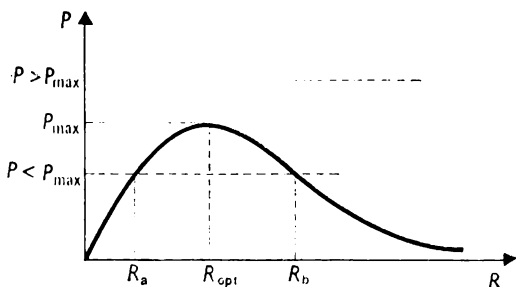
$$R_{a,b} = \frac{(E_1 R_2 + E_2 R_1)^2 - 2PR_1 R_2 (R_1 + R_2) \pm \sqrt{D}}{2P(R_1 + R_2)^2}, \quad (5)$$

kde D značí diskriminant

$$D = (E_1 R_2 + E_2 R_1)^2 [(E_1 R_2 + E_2 R_1)^2 - 4PR_1 R_2 (R_1 + R_2)]. \quad (6)$$

Diskuse:

Funkce (4) má nulovou hodnotu pro $R = 0$ a je dále $\lim_{P \rightarrow 0} P = 0$ pro $R \rightarrow \infty$. Poněvadž v intervalu $0 < R < \infty$ je všude $P > 0$, znamená to, že funkce (4) má lokální maximum $P_{\max}$ pro nějakou hodnotu $R = R_{\text{opt}}$ (obr. 4). Pro $P < P_{\max}$ lze podmínkám úlohy vyhovět dvěma hodnotami R_a, R_b odporu spotřebiče, diskriminant (6) je kladný. Pro $P > P_{\max}$ nelze vyhovět, diskriminant je záporný. Pro $P = P_{\max}$ má rovnice (4) jediné řešení $R = R_{\text{opt}}$, diskriminant (6) je nulový. Je to zřejmé i z (6): zvětšuje-li se P , roste druhý člen v lomené závorce, při nějaké hodnotě $P_{\max}$ nabývá diskriminant D hodnoty nulové, při $P > P_{\max}$ je $D < 0$.



Obr. 4

b) Pro $D = 0$ nalezneme z (6):

$$P_{\max} = \frac{(E_1 R_2 + E_2 R_1)^2}{4 R_1 R_2 (R_1 + R_2)}. \quad (7)$$

c) Dosazením z (7) do (5) nalezneme

$$R_{\text{opt}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 || R_2. \quad (8)$$

Části b) a c) můžeme řešit i pomocí diferenciálního počtu. Pro zjednodušení zápisů zavedeme označení

$$A = E_1 R_2 + E_2 R_1, \quad B = R_1 R_2, \quad C = R_1 + R_2, \quad (9)$$

přičemž veličiny A , B , C jsou vesměs kladné. Funkci (4) pak zapíšeme takto:

$$P = A^2 \frac{R}{(B + CR)^2}. \quad (10)$$

Anulováním první derivace stanovíme $R_{\text{opt}} = \frac{B}{C}$, po dosazení z (9) je to výsledek shodný s (8). Dosazením $R = R_{\text{opt}}$ do (10) dostaneme, s přihlédnutím k (9), výsledek shodný s (7). Druhá derivace funkce (10) má pro $R = R_{\text{opt}}$ zápornou hodnotu $-\frac{A^2 C}{8 B^3}$, takže pro $R = R_{\text{opt}}$ má funkce (10) lokální maximum.

d) Proudý procházející jednotlivými větvemi dostaneme dosazením z (8) do (1), (2) a (3):

$$I_{1m} = \frac{E_1 R_2 (R_1 + R_2) + R_1 R_2 (E_1 - E_2)}{2 R_1 R_2 (R_1 + R_2)}, \quad (11)$$

$$I_{2m} = \frac{E_2 R_1 (R_1 + R_2) - R_1 R_2 (E_1 - E_2)}{2 R_1 R_2 (R_1 + R_2)}, \quad (12)$$

$$I_m = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{2 R_1 R_2}.$$

e) Porovnaním (11) a (12) dostaneme po úprave podmínku

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1 (3R_2 + R_1)}{R_2 (3R_1 + R_2)}.$$

3. úloha (navrhl dr. Ladislav Thern)

Žiarovka, na ktorej je údaj 12 V/5 W, má sa pripojiť na sieť ($U = 220$ V, $f = 50$ Hz) tak, aby svietila plným príkonom, ale nesmie sa použiť transformátor.

A. Ako byste riešili úlohu použitím prvkov:

a) len rezistora,

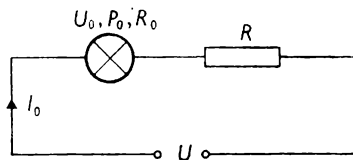
b) len tlmivky, ktorej odpor je $\frac{1}{4}$ odporu žiarovky,

c) len kondenzátora?

B. Keby všetky tlmivky, ktoré máte k dispozícii, mali väčšiu indukčnosť, než ste v bode A-b) vypočítali, a tiež kapacity kondenzátorov by boli menšie, ako vyžaduje výpočet z bodu A-c), dala by sa úloha rozriešiť kombináciou jednej tlmivky a jedného kondenzátora? Odpoveď na túto otázku odôvodnite a uveďte konkrétny príklad.

Poznámka:

Všetky výpočty urobte najskôr všeobecne.



Obr. 5

Riešenie:

A-a) — obr. 5

Označme U_0 menovité napätie žiarovky, P_0 jej menovitý príkon, R odpor sériového rezistora. Žiarovka má pri menovitom napätí odpor

$$R_0 = \frac{U_0^2}{P_0} \quad (1)$$

a preteká ňou prúd

$$I_0 = \frac{P_0}{U_0}. \quad (2)$$

V obvode podľa obr. 5 má byť na žiarovke napätie U_0 . Ak považujeme žiarovku s pripojeným rezistorom za delič napätia, platí

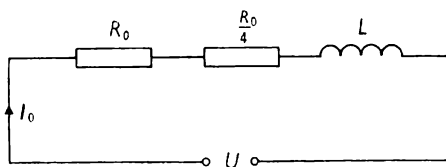
$$\frac{U_0}{U} = \frac{R_0}{R_0 + R}.$$

Z tohoto vzťahu vyjadríme R a za R_0 dosadíme z (1). Tým dostaneme všeobecný výsledok

$$R = \frac{U_0}{P_0} (U - U_0).$$

Pre dané hodnoty: $R = 500 \Omega$.

A-b) — obr. 6



Obr. 6

Žiarovka je na obr. 6 nahradená odporom R_0 , tlmivka sériovou kombináciou odporu $\frac{1}{4}R_0$ a indukčnosti L . Obvodom má pri pripojení na napätie U pretekať prúd I_0 podľa (2). Pre impedanciu obvodu platí vzťah

$$Z = \frac{U}{I_0} = \frac{UU_0}{P_0} \quad (3)$$

a tiež

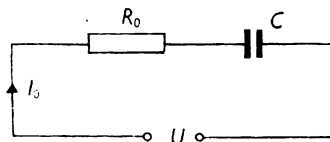
$$Z = \sqrt{\left(\frac{5}{4}R_0\right)^2 + (\omega L)^2}, \quad (4)$$

kde ωL znamená reaktanciu tlmivky, ak má pripojené napätie uhlovú frekvenciu $\omega = 2\pi f$.

Porovnaním (3) a (4) dostaneme vzťah, z ktorého po dosadení z (1) dostaneme

$$L = \frac{U_0}{8\pi f P_0} \sqrt{16U^2 - 25U_0^2}.$$

Pre dané hodnoty vyjde, že tlmivka má indukčnosť $L = 1,7 \text{ H}$ a odpor $R_t = 7,2 \Omega$.



Obr. 7

A-c) — obr. 7

Kondenzátor môžeme považovať za súčiastku, ktorá má len kapacitu C , t.j. predpokladáme, že dielektrikum je dokonalým izolantom. Pre impedanciu Z potom platí (3), a tiež

$$Z = \sqrt{R_0^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (5)$$

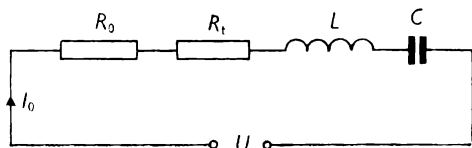
Porovnaním (3) a (5) dostaneme vzťah, z ktorého po dosadení z (1) vyjadríme

$$C = \frac{P_0}{2 \pi f U_0 \sqrt{U^2 - U_0^2}}.$$

Pre dané hodnoty: $C \doteq 6,0 \mu\text{F}$.

Hospodárnosť je tým lepšia, čím menej tepla vzniká v obvode mimo žiarovky. Najmenej hospodárne je zapojenie s rezistorom, ktorý má odpor asi sedemnásťkrát väčší ako žiarovka, takže jeho tepelný výkon je asi 85 W (pri rovnakom prúde je odoberaný príkon priamo úmerný odporu). Daleko hospodárnejšie je zapojenie s tlmivkou, lebo neužitočný tepelný výkon je len štvrtinou príkonu žiarovky. Najhospodárnejšie je zapojenie s kondenzátorom, v ktorom teplo vôbec nevzniká; je tu ale nebezpečenstvo, že pri prebití kondenzátora sa žiarovka zničí.

B. V tomto prípade má každá tlmivka reaktanciu príliš veľkú a tak isto aj každý kondenzátor. Ak ale použijeme



Obr. 8

sériové zapojenie podľa obr. 8, potom je výsledná reaktancia daná absolútnou hodnotou rozdielu indukčnej a kapacitnej reaktancie, takže je možné nájsť také hodnoty L a C , aby výsledná reaktancia mala potrebnú veľkosť.

V obr. 7 znamená R_t odpor tlmivky. Pre impedanciu obvodu platí (3) a tiež

$$Z = \sqrt{(R_o + R_t)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (6)$$

Porovnaním (6) a (3) dostaneme

$$\left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| = \sqrt{\left(\frac{UU_o}{P_o}\right)^2 - \left(\frac{U_o^2}{P_o} + R_t\right)^2}. \quad (7)$$

Za predpokladu, že

$$\frac{UU_o}{P_o} > \frac{U_o^2}{P_o} + R_t,$$

dostaneme zo vzťahu (7) napr. dve hodnoty pre kapacitu, ak zvolíme indukčnosť L väčšiu, než ako vychádza z výpočtu v časti A-b). Napr. pre $L = 4,0$ H, $R_t = 20 \Omega$ vyjdú pre kapacitu hodnoty $C_1 \doteq 4,4 \mu\text{F}$, $C_2 \doteq 1,8 \mu\text{F}$.

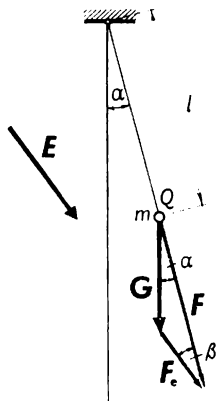
4. úloha (navrhl Václav Havel)

Malá lehká kulička o hmotnosti m má kladný elektrický náboj Q a je zavěšena na tenkém izolujícím vlákně délky l v homogenním elektrickém poli, jehož intenzita E svírá s tíhovou silou ostrý úhel. V důsledku toho je vlákno závěsu odchýleno od svislého směru o úhel α , jestliže je kulička v klidu. Vychýlíme-li kuličku z rovnovážné polohy ve svislé rovině procházející vláknem a uvolníme-li ji, začne elektrické kyvadélko kmitat.

Jaká je doba kmitu T kyvadla?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 1,5 \text{ g}$, $Q = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, $l = 10,0 \text{ cm}$, $E = 1,0 \cdot 10^6 \text{ V m}^{-1}$, $\alpha = 15^\circ$.

Které veličiny se mohou určit použitím tohoto kyvadla, je-li doba kmitu známa z přímého měření (např. $T = 0,20 \text{ s}$)?



Obr. 9

Řešení:

V obr. 9 značí G tíhovou sílu, F_e elektrickou sílu, F výsled-

nici obou sil, která má směr závěsu. Pro její velikost platí

$$F = G \cos \alpha + F_e \cos \beta, \quad (1)$$

kde

$$G = mg, \quad F_e = QE. \quad (2)$$

Použitím sinové věty dostaneme další vztah

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{G}{F_e},$$

z něhož vyjádříme

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{G \sin \alpha}{F_e} \right)^2}. \quad (3)$$

Dosazením z (3) do (1) dostaneme, s přihlédnutím k (2):

$$F = mg \cos \alpha + \sqrt{(QE)^2 - (mg \sin \alpha)^2}. \quad (4)$$

Ve vztahu pro dobu kmitu T matematického kyvadla je třeba tíhové zrychlení nahradit zrychlením $a = \frac{F}{m}$, které výsledná síla udílí kuličce, tedy

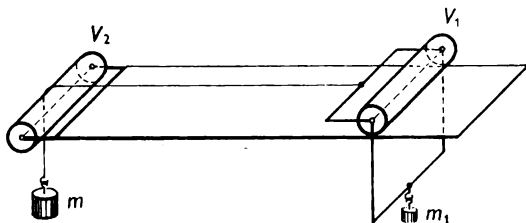
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{F}}. \quad (5)$$

Pro dané hodnoty: $T \doteq 0,50$ s.

Je-li doba kmitu stanovena přímým měřením, můžeme ze vztahu (5) určit velikost F výsledné síly a popř. ještě ze vztahu (4) velikost elektrické síly; veličiny m a l se dají snadno a s dobrou přesností stanovit vážením a měřením délky.

5. úloha (navrhl dr. Vojtěch Stach)

Kruhový válec V_1 o hmotnosti m_2 je spojen se závažím o hmotnosti m_1 podle obr. 10. Válec se závažím se valí po vodorovné dráze působením tíhy závaží o hmotnosti m ,



Obr. 10

které je s válcem spojeno vláknem. Vláknem je vedeno přes válec V_2 stejné hmotnosti a stejného poloměru jako válec V_1 . Válec V_2 je upevněn tak, že se může pouze otáčet kolem své osy.

a) Určete rychlost v_1 a zrychlení a_1 soustavy v čase, v němž závaží o hmotnosti m klesne o délku h .

K závaží o hmotnosti m_1 se přidá závaží o hmotnosti $m_3 = m_1 + m_2$. Zároveň se k závaží o hmotnosti m přidá další závaží stejné hmotnosti m .

b) Určete rychlost v_2 a zrychlení a_2 této soustavy v čase, v němž závaží o úhrnné hmotnosti $2m$ klesne o délku h .

c) Vysvětlete, proč je jedno zrychlení posuvného pohybu větší než druhé, i když poměr síly a hmotnosti je v obou případech stejný.

Hmotnost vlákna a ztráty energie zanedbáváme. Předpokládáme, že vlákno po válci V_2 a válec V_1 po vodorovné

dráze neklouzají a že oba závěsy zůstávají ve svislé poloze.

Řešení:

a) Označme ω úhlovou rychlost, kterou se válce V_1 , V_2 v určitém čase otáčejí. Každý z nich má rotační energii

$$W_r = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2,$$

kde $\mathcal{J} = \frac{1}{2} m_2 r^2$ značí moment setrvačnosti, r poloměr každého z obou válců. Poněvadž $\omega = \frac{v}{r}$, kde v značí obvodovou rychlost (a zároveň posuvnou rychlost soustavy, poněvadž válec V_1 neklouže), lze vztah pro W_r zapsat ve tvaru

$$W_r = \frac{1}{4} m_2 v^2.$$

Velikost posuvné rychlosti soustavy v čase, v němž závaží o hmotnosti m klesne o délku h , označíme v_1 ; stanovíme ji pomocí zákona zachování energie:

$$mgh = W_{k1} + W_{k2} + 2W_{r1} \quad (1)$$

$W_{k1} = \frac{1}{2} m v_1^2 \dots$ kinetická energie závaží o hmotnosti m ,

$W_{k2} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_1^2 \dots$ kinetická energie válce V_1 se závažím o hmotnosti m_1 ,

$W_{r1} = \frac{1}{4} m_2 v_1^2 \dots$ rotační energie každého z válců V_1 , V_2 .

Dosazením do (1) dostaneme vztah, z něhož vyjádříme

$$v_1 = \sqrt{\frac{2mgh}{m + m_1 + 2m_2}}. \quad (2)$$

Zrychlení a_1 vypočítáme pomocí vztahu $v_1 = \sqrt{2ha_1}$ pro v_1 podle (2). Dostaneme

$$a_1 = \frac{mg}{m + m_1 + 2m_2}. \quad (3)$$

b) V tomto případě platí podle zákona zachování energie $2mgh = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2(m_1 + m_2)v_2^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} m_2 v_2^2$,

kde v_2 značí velikost posuvné rychlosti soustavy v čase, v němž soustava obou závaží o úhrnné hmotnosti $2m$ klesne o délku h . Z tohoto vztahu vyjádříme

$$v_2 = \sqrt{\frac{2mgh}{m + m_1 + \frac{3}{2}m_2}}$$

a obdobně jako v předchozím případě

$$a_2 = \frac{mg}{m + m_1 + \frac{3}{2}m_2}. \quad (4)$$

c) Porovnáním (3) a (4) zjišťujeme, že $a_2 > a_1$, i když se nezměnil poměr velikosti tažné síly k hmotnosti té části soustavy, která koná posuvný pohyb. Příčina je v tom, že závaží přidané k válci V_1 koná jen pohyb posuvný, kdežto momenty setrvačnosti válců, které konají pohyb rotační, se nezměnily. Druhý pohybový zákon ve tvaru $F = Ma$, kde M značí hmotnost tělesa, platí jen pro

pohyb posuvný, kdežto v našej úlohe jej pro oba uvažované prípady musíme zapsat takto:

$$mg = 2 \cdot \frac{1}{r} \mathcal{J} \varepsilon_1 + (m + m_1 + m_2) a_1, \quad (5)$$

$$2mg = 2 \cdot \frac{1}{r} \mathcal{J} \varepsilon_2 + 2(m + m_1 + m_2) a_2, \quad (6)$$

kde ε_1 a ε_2 značí velikosti úhlových zrychlení obou válců. Použijeme-li vztahů

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} m_2 r^2, \quad \varepsilon_1 = \frac{a_1}{r}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_2}{r},$$

dostaneme z (5) a (6) vztahy (3) a (4).

6. úloha (navrhl dr. Árpád Keszkes, CSc.)

Centrovaná optická sústava se skláda zo 4 tenkých šošoviek. Prvá a tretia sú rozptylky, druhá a štvrtá sú spojky. Vzdialenosti medzi šošovkami sú postupne d_1, d_2, d_3 . Ohniskové vzdialenosti všetkých šošoviek majú rovnakú absolútnu hodnotu f . Pred prvou šošovkou je na optickej osi vo vzdialenosti a_1 svietiaci bod. Určte polohu jeho obrazu.

Úlohu riešte výpočtom pre hodnoty $a_1 = 12,0$ cm, $d_1 = 8,0$ cm, $d_2 = 6,0$ cm, $d_3 = 12,0$ cm, $f = 6,0$ cm. Výpočet overte konštrukciou.

Riešenie:

Označme zaradom a_1, a_2, a_3, a_4 predmetové, b_1, b_2, b_3, b_4 obrazové vzdialenosti jednotlivých šošoviek, pričom vzdialenosť a_1 je daná, vzdialenosť b_4 má byť nájdená. Súčet

predmetovej vzdialenosti niektorej šošovky a obrazovej vzdialenosti nasledujúcej šošovky je rovný vzájomnej vzdialenosti týchto dvoch šošoviek. Pre každú tenkú šošovku platí ďalej šošovková rovnica. Platia teda tieto vzťahy:

$$b_1 + a_2 = d_1 \quad (1) \qquad \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f} \quad (5)$$

$$b_2 + a_3 = d_2 \quad (2) \qquad \frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_3} = \frac{1}{f} \quad (6)$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f} \quad (4) \qquad \frac{1}{a_4} + \frac{1}{b_4} = \frac{1}{f} \quad (7)$$

Znamienka na pravých stranách rovníc (4) až (7) sú kladné alebo záporné podľa toho, či ide o spojku alebo rozptylku. Počítame len pre zadané hodnoty. Postupne vypočítame b_1 zo (4), a_2 z (1), b_2 z (5), a_3 z (2), b_3 zo (6), a_4 z (3), b_4 zo (7). Pre zadané hodnoty vyjde $b_1 = -4,0$ cm, $a_2 = 12,0$ cm, $b_2 = 12,0$ cm, $a_3 = -6,0$ cm, $b_3 = \infty$, $a_4 = \infty$, $b_4 = 6,0$ cm.

Obraz teda leží vo vzdialenosti 6,0 cm za poslednou šošovkou.

Výpočet treba overiť konštrukciou. S výhodou možno použiť asi 50 kociek dlhý pás obyčajného štvorčekovaného papiera. Strana jedného štvorčeka nech je jednotkou dĺžky (zodpovedá 1 centimetru vo výpočte). Nakreslíme si optickú os a na nej vyznačíme polohy svietiaceho bodu B a šošoviek vo vzájomných vzdialenostiach podľa údajov. V bode B vztýčíme (kolmo na optickú os) pomocnú úsečku (v dĺžke najvýhodnejšie troch jednotiek dĺžky). Konštrukcia obrazu prvou rozptylkou je ľahká. Tento obraz je predmetom pre druhú šošovku — spojku. Aj konštrukcia obrazu nasledujúcou spojkou bude ľahká.

Takto získaný obraz je opět predmetom pre tretiu šošovku — rozptylku a leží v jej ohnisku. Obraz je teda v nekonečnu: lúče prechádzajúce touto rozptylkou a patriace zväzku lúčov s pôvodným stredom v bode B postupujú ďalej rovnobežne s optickou osou. Dopadajúc na štvrtú šošovku — spojku — pokračujú na jňou do ohniska, kde vytvoria posledný obraz B' . Zreme je teda $b_4 = f = 6,0 \text{ cm}$.

7. úloha (navrhl František Černický)

Přímohledný hranol je sestaven ze tří trojbokých hranolů. Prostřední je z flintového skla o indexu lomu n_2 , postranní shodné hranoly jsou z korunového skla o indexu lomu n_1 , $n_2 > n_1$. Lámací hrany všech tří hranolů jsou vzájemně rovnoběžné a rovinný řez vedený kolmo k lámavým hranám představuje rovnoramenný lichoběžník $ABED$, skládající se ze tří trojúhelníků. Prostřední je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C , přičemž bod C je středem úsečky ED .

a) Načrtněte řez přímohledného hranolu a vyznačte v něm chod paprsku, který prochází středním hranolem rovnoběžně s úsečkou AB .

b) Vypočítejte lámavý úhel γ postranních hranolů pro případ, že paprsek zeleného světla, pro který mají indexy lomu hodnoty $n_1 = 1,5186$ a $n_2 = 1,7623$, vstupuje do soustavy i vystupuje z ní rovnoběžně se základnou AB .

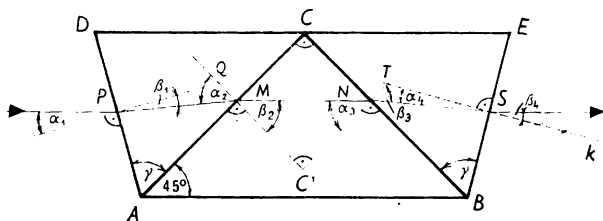
c) Vypočítejte odchylku červeného paprsku, který dopadá sice rovnoběžně se základnou AB , ale vystupuje v odchýleném směru. Indexy lomu pro červený paprsek jsou $n_1 = 1,5099$, $n_2 = 1,7351$.

d) Vypočítejte odchylku také pro fialový paprsek, pro který indexy lomu mají hodnoty $n_1 = 1,5267$, $n_2 = 1,7922$.

Počítejte pětimístnými logaritmickými tabulkami co nej-
přesněji.

Řešení:

a) — obr. 11.



Obr. 11

b) Poněvadž vstupující paprsek je rovnoběžný s úsečkou AB , plyne z rovnosti střídavých úhlů mezi rovnoběžkami

$$\gamma + 45^\circ = \alpha_1 + 90^\circ. \quad (1)$$

Vnější úhel při vrcholu Q v trojúhelníku PMQ má velikost γ , neboť strany PQ , MQ jsou kolmé k ramenům úhlu γ při vrcholu A . Odtud

$$\gamma = \beta_1 + \alpha_2. \quad (2)$$

Poněvadž trojúhelník NMC' je rovnoramenný pravoúhlý, platí pro úhly při jeho základně

$$\beta_2 = \alpha_3 = 45^\circ. \quad (3)$$

Podle zákona lomu platí ($n_0 = 1,0000$)

$$n_0 \sin \alpha_1 = n_1 \sin \beta_1, \quad (4)$$

$$n_1 \sin \alpha_2 = n_2 \sin \beta_2. \quad (5)$$

Vztahem (5) je určen úhel α_2 , poněvadž úhel β_2 je dán vztahem (3):

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (6)$$

Pro dané hodnoty: $\alpha_2 = 55^\circ 08' 33''$.
Do (4) dosadíme za α_1 z (1), za β_1 z (2):

$$n_0 \sin (\gamma - 45^\circ) = n_1 \sin (\gamma - \alpha_2).$$

Z této goniometrické rovnice vyjádříme úpravou, s přihlédnutím k (6):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{n_2 - 1}{n_1 \sqrt{2} \cos \alpha_2 - 1}.$$

Pro zadané hodnoty a vypočítanou hodnotu α_2 vyjde $\gamma = 73^\circ 23' 24''$.

c) Budeme postupně počítat velikosti úhlů α_1 až β_4 a označíme je ještě dalším indexem 1 (pro červenou barvu). Podobně i indexy lomu označíme n_{11} , n_{21} . Použijeme při tom vypočítané hodnoty γ .

Z (1) dostaneme

$$\alpha_{11} = \gamma - 45^\circ; \quad \alpha_{11} = 28^\circ 23' 24''.$$

Z (4) vyjádříme

$$\sin \beta_{11} = \frac{n_0}{n_{11}} \cdot \sin \alpha_{11},$$

$$\beta_{11} = 18^\circ 21' 17''.$$

Z (2) vypočítáme $\alpha_{21} = \gamma - \beta_{11}$; $\alpha_{21} = 55^\circ 02' 07''$.

Z (5) vyjádříme

$$\sin \beta_{21} = \frac{n_{11}}{n_{21}} \cdot \sin \alpha_{21},$$

$$\beta_{21} = 45^\circ 29' 25''.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku s vrcholem C' , který ovšem nyní není rovnoramenný, vyjádříme

$$\alpha_{31} = 90^\circ - \beta_{21}; \quad \alpha_{31} = 44^\circ 30' 35''.$$

Pro lom na rozhraní BC platí

$$n_{21} \sin \alpha_{31} = n_{11} \sin \beta_{31},$$

$$\beta_{31} = 53^\circ 40' 07''.$$

V trojúhelníku NST je při vrcholu T vnější úhel γ , takže

$$\alpha_{41} = \gamma - \beta_{31}; \quad \alpha_{41} = 19^\circ 43' 17''.$$

Pro lom na rozhraní BE platí

$$n_{11} \sin \alpha_{41} = n_0 \sin \beta_{41},$$

$$\beta_{41} = 30^\circ 37' 54''.$$

Úhel β_{41} představuje odchylku vystupujícího paprsku od kolmice k vyznačené v obrázku. Odchylka δ_1 vystupujícího paprsku od směru úsečky AB je dána rozdílem $\delta_1 = \beta_{41} - \beta_4$. Protože však $\beta_4 = \alpha_1 = \alpha_{11}$, dostáváme

$$\delta_1 = \beta_{41} - \alpha_{11}; \quad \delta_1 = 2^\circ 14' 30''.$$

d) Postupujeme stejně jako v části c), pouze s jinými hodnotami n_{12} , n_{22} indexů lomu pro fialovou barvu; všechny úhly obdobně označíme druhým indexem 2. Pro

zadané hodnoty vyjde $\beta_{12} = 18^\circ 08' 45''$, $\alpha_{22} = 55^\circ 14' 39''$, $\beta_{22} = 44^\circ 25' 00''$, $\alpha_{32} = 45^\circ 35' 00''$, $\beta_{32} = 56^\circ 58' 52''$, $\alpha_{42} = 16^\circ 24' 32''$, $\beta_{42} = 25^\circ 32' 53''$.

Pro odchylku δ_2 fialového paprsku od směru úsečky AB platí $\delta_2 = \beta_{42} - \alpha_{11}$; $\delta_2 = -2^\circ 50' 31''$, přičemž tato odchylka, jak je zřejmé ze záporného znaménka, má smysl opačný než odchylka δ_1 červeného paprsku.

Úhel mezi vystupujícím paprskem červeným a fialovým (disperzní úhel hranolu) je $\delta = \delta_1 - \delta_2$, pro vypočítané hodnoty $\delta = 5^\circ 05' 01'' \doteq 5^\circ 05'$.

b) Druhé kolo soutěže

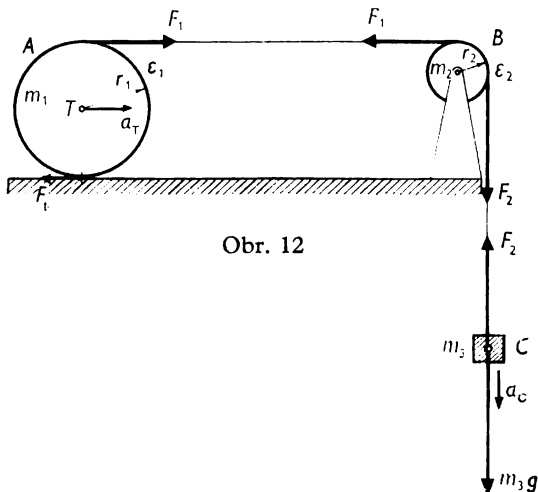
1. úloha (navrhl dr. Ladislav Thern)

Na plný homogénny valec s polomerom r_1 a hmotnosťou m_1 je navinuté vlákno, ktoré ide cez pevnú kladku s hmotnosťou m_2 . Kladka, ktorú považujeme tiež za homogénny plný valec s polomerom r_2 , je tak upevnená, že úsek vlákna medzi valcom a kladkou je vodorovný a geometrické osi valca a kladky sú rovnobežné. Na druhom konci vlákna je zavesené závažie s hmotnosťou m_3 . Valec sa valí pôsobením závažia po vodorovnej rovine bez klzania, rovnako vlákno po kladke neklže. Hmotnosť vlákna, trenie v ložiskách kladky a valivé trenie valca zanedbajte. Určte:

- zrýchlenie závažia,
- zrýchlenie ťažiska valca,
- uhlové zrýchlenie kladky,
- sily, ktoré napínajú vlákno jednak medzi valcom a kladkou, jednak medzi kladkou a závažím.

Riešenie:

Označme (obr. 12) valec písmenom A , kladku B , závažie C . Označme a_C zrýchlenie závažia a súčasne aj bodov vlákna,



Obr. 12

tak aj obvodových bodov telesa B , ako aj toho bodu telesa A , ktorý je začiatočným bodom úseku AB vlákna. Ďalej:

F_1 — silu vo vlákne na úseku AB , zároveň silu pôsobiacu na teleso A a v opačnom smere na teleso B (vodorovne);

F_2 — silu vo vlákne na úseku BC , zároveň silu pôsobiacu na teleso B zvislo dolu a na teleso C zvislo nahor;

ϵ_1 resp. ϵ_2 uhlové zrýchlenie telies A a B vzhľadom na ich geometrické osi;

F_t — silu pôsobiacu na teleso A v priamke dotyku s rovinou, po ktorej sa valí.

I. riešenie (z pohybových rovníc):

Teleso A :

$$m_1 a_T = F_1 - F_t, \quad (1)$$

kde a_T je zrýchlenie ťažiska T ;

$$\frac{1}{2} m_1 r_2^2 \varepsilon_1 = F_1 r_1 + F_t r_1, \quad (2)$$

$$2r_1 \varepsilon_1 = a_C, \quad (3)$$

$$r_1 \varepsilon_1 = a_T. \quad (4)$$

Teleso B :

$$\frac{1}{2} m_2 r_2^2 \varepsilon_2 = F_2 r_2 - F_1 r_2, \quad (5)$$

$$r_2 \varepsilon_2 = a_C. \quad (6)$$

Teleso C :

$$m_3 a_C = m_3 g - F_2. \quad (7)$$

Z rovníc (5) a (6):

$$m_2 a_C = 2(F_2 - F_1). \quad (8)$$

Z rovníc (3) a (4) po dosadení do (1):

$$m_1 a_C = 2(F_1 - F_t). \quad (9)$$

Z rovníc (2) a (3): $m_1 a_C = 4(F_1 + F_t).$ (10)

Riešením sústavy štyroch rovníc (7) až (10) dostaneme

$$\text{a) } a_C = \frac{8m_3 g}{3m_1 + 4m_2 + 8m_3},$$

$$\text{b) } a_T = \frac{1}{2} a_C,$$

$$\text{c) } \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2},$$

$$d) F_1 = \frac{3m_1 m_3 g}{3m_1 + 4m_2 + 8m_3},$$

$$F_2 = \frac{3m_1 + 4m_2}{3m_1 + 4m_2 + 8m_3} m_3 g.$$

II. riešenie (zo zákona zachovania energie):

Sústava sa pohybuje po uvoľnení z kludovej polohy vplyvom tiaže telesa C , teda pohyb je rovnomerne zrýchlený. Pri pohybe sa mení potenciálna tiažová energia len u telesa C , a to po vykonaní dráhy x o hodnotu mgx . Nech dosiahnutá rýchlosť telesa C je v . Taká istá je aj rýchlosť vlákna, teda aj obvodových bodov kladky B . Ťažisko telesa A však bude mať len polovičnú rýchlosť, takže pre uhlové rýchlosti telies A , resp. B platí:

$$2r_1\omega_1 = v, \quad r_2\omega_2 = v.$$

Ďalej platí (pre teleso C):

$$v^2 = 2a_C x.$$

Kinetická energia všetkých telies je na začiatku nulová, takže zmena ich kinetických energií bude daná súčtom kinetických energií po dosiahnutí rýchlosti v vlákna.

Kinetická energia bude

$$\text{u telesa } A: \frac{1}{2} m_1 \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega_1^2;$$

$$\text{u telesa } B: \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega_2^2;$$

$$\text{u telesa } C: \frac{1}{2} m_3 v^2.$$

Súčet týchto výrazov teda dáva hodnotu $m_3 g x$. Po úprave

dostaneme

$$16m_3gx = v^2(3m_1 + 4m_2 + 8m_3).$$

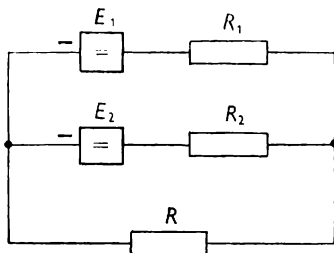
Po derivování podľa času, po uvážení, že $\frac{dx}{dt} = v$ a $\frac{dv}{dt} = a_C$ a po príslušnej úprave dostaneme:

$$a_C = \frac{8m_3g}{3m_1 + 4m_2 + 8m_3}.$$

Ostatné hodnoty počítame ako v I. riešení.

2. úloha (navrhl Mojmir Simerský)

Dva elektrické zdroje (obr. 13) o elektromotorických napätích E_1 , E_2 a vnútorných odporech R_1 , R_2 jsou spojeny paralelně a připojeny ke spotřebiči.



Obr. 13

a) Jaký odpor R má spotřebič, dostává-li od obou zdrojů stejné výkony?

Proveďte diskusi výsledku.

b) Jaký proud I_0 prochází v tomto případě spotřebičem?

c) Jaký výkon P_0 dostává spotřebič v tomto případě od každého z obou zdrojů?

Řešení:

a) Proudů ve větvích označíme I_1 , I_2 , I , odpor spotřebiče R . Z Kirchhoffových zákonů vyplývají vztahy

$$I = I_1 + I_2, \quad E_1 = R_1 I_1 + RI, \quad E_2 = R_2 I_2 + RI,$$

z nichž vyjádříme

$$I_1 = \frac{E_1 R_2 + R(E_1 - E_2)}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}, \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{E_2 R_1 - R(E_1 - E_2)}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}, \quad (2)$$

$$I = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}. \quad (3)$$

Spotřebič dostává od obou zdrojů stejné výkony, když $I_1 = I_2$. Pomocí (1) a (2) vyjádříme z této podmínky

$$R = \frac{E_1 R_2 - E_2 R_1}{2(E_2 - E_1)}. \quad (4)$$

Diskuse výsledku (4): Jsou možné tyto případy:

1. $E_1 R_2 > E_2 R_1$; $E_2 > E_1$;
2. $E_1 R_2 < E_2 R_1$; $E_2 < E_1$;
3. $E_1 R_2 = E_2 R_1$; $E_2 = E_1$, tedy také $R_2 = R_1$;
4. $E_1 R_2 = E_2 R_1$; $E_2 \neq E_1$;
5. $E_1 R_2 \neq E_2 R_1$; $E_2 = E_1$;
6. $E_1 R_2 > E_2 R_1$; $E_2 < E_1$;
7. $E_1 R_2 < E_2 R_1$; $E_2 > E_1$.

V případech 1 a 2 má úloha jediné řešení. V případě 3 vyhoví každá hodnota odporu R — jde o baterii sestavenou ze dvou stejných zdrojů spojených paralelně. V případě 4

vyhovuje jen hodnota $R = 0 \Omega$, baterie je zkratována, výkon dodávaný spotřebiči je nulový. V případě 5 jde o chod naprázdno a výkon dodávaný (neexistujícímu) spotřebiči je rovněž nulový. V případech 6 a 7 vychází pro odpor spotřebiče záporná hodnota, tj. úloha je neřešitelná.

Skutečný význam mají pouze první tři případy; technicky významný je zejména případ 3 — tj. baterie sestavená ze dvou stejných zdrojů spojených paralelně; oba zdroje jsou v tomto případě rovnoměrně zatíženy při jakémkoli odporu spotřebiče.

b) Za R dosadíme z (4) do (3) a po úpravě dostaneme

$$I_0 = 2 \frac{E_2 - E_1}{R_2 - R_1} . \quad (5)$$

c) Každý z obou zdrojů dodává do spotřebiče výkon $P_0 = \frac{1}{2} R I_0^2$. Dosazením z (4) a (5) a úpravou dostaneme

$$P_0 = \frac{(E_2 - E_1)(E_1 R_2 - E_2 R_1)}{(R_2 - R_1)^2} .$$

3. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

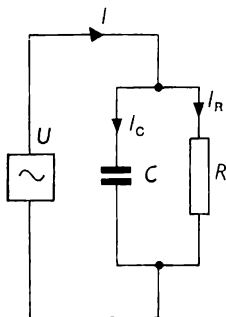
Dielektrikum rovinného kondenzátoru má poměrnou permitivitu ε_r . Je-li kondenzátor připojen ke zdroji harmonického střídavého napětí o kmitočtu f , odebírá určitý činný výkon, přičemž účinník je $\cos \varphi$.

Stanovte měrný odpor dielektrika.

Pokyn:

Kondenzátor nahraďte ekvivalentním obvodem podle

obr. 14, v němž C značí jeho kapacitu, R elektrický odpor dielektrika. K řešení je možné použít vektorový diagram. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\varepsilon_r = 2,8$, $f = 50 \text{ Hz}$, $\cos \varphi = 0,10$, $\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} = 9,0 \cdot 10^9 \text{ m F}^{-1}$.



Obr. 14

Řešení:

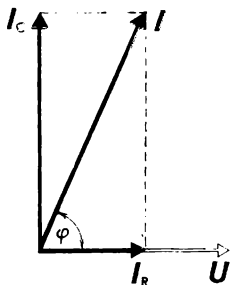
Označíme C kapacitu kondenzátoru, R elektrický odpor dielektrika, S obsah každé desky kondenzátoru, d jejich vzájemnou vzdálenost. Pak platí

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}, \quad R = \varrho \frac{d}{S}. \quad (1)$$

Pro proudy I_C , I_R platí

$$I_C = 2 \pi f U C, \quad I_R = \frac{U}{R}. \quad (2)$$

Pomocí vektorového diagramu na obr. 15 vyjádříme



Obr. 15

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I}, \quad I^2 = I_R^2 + I_C^2.$$

Po dosazení z (2) a úpravě dostaneme

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + (2 \pi f R C)^2}.$$

Za C , R dosadíme z (1) a dostaneme vztah, z něhož vyjádříme

$$\varrho = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{2}{f \varepsilon_r} \operatorname{tg} \varphi.$$

Pro zadané hodnoty: $\varrho \doteq 1,3 \cdot 10^9 \Omega \text{ m}$.

4. úloha (navrhl dr. Milan Marčok)

Na sklenený hranol s absolutním indexem lomu n a ostrým lámavým uhlom φ dopadá světelný lúč z vákua na prednú stenu pod uhlom dopadu α (obr. 16).

Určte lámavý uhol φ hranola, ak uhol dopadu

a) $\alpha = 0^\circ$, pričom lúč neprechádza cez zadnú stenu hranola,

b) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, pričom lúč prechádza cez zadnú stenu hranola do vakuu bez zmeny smeru,

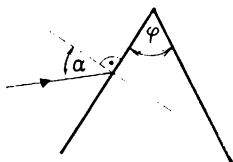
c) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, pričom lúč neprechádza cez zadnú stenu. Nakreslete chod lúča za prednou stenou vo všetkých troch prípadoch.

Riešte aj číselne pre hodnoty: $n = \sqrt{2}$ vo všetkých prípadoch, $\alpha = 60^\circ$ v prípadoch b) a c).

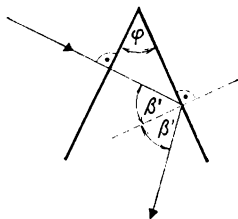
Riešenie:

a) Podľa obr. 17 $\varphi = \beta'$. Na zadnej stene je úplný odraz, čiže $\beta' \geq \alpha_m$, takže $\alpha_m \leq \varphi < 90^\circ$, pričom pre hraničný uhol platí: $\sin \alpha_m = \frac{1}{n}$.

Pre zadanú hodnotu: $45^\circ \leq \varphi < 90^\circ$.



Obr. 16



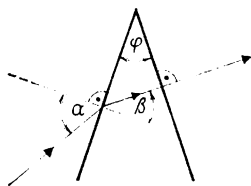
Obr. 17

b) Podľa obr. 18 $\varphi = \beta$. Zo zákona lomu vychádza

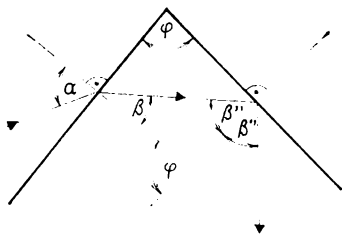
$$\sin \varphi = \frac{1}{n} \sin \alpha,$$

pre zadané hodnoty: $\varphi = 37^\circ 45'$.

c) Podľa obr. 19 $\varphi = \beta + \beta''$. Podmienka pre úplný odraz žiada $\beta'' \geq \alpha_m$, takže $\varphi \geq \beta + \alpha_m$, pričom $\sin \alpha_m = \frac{1}{n}$. Pre zadané hodnoty: $82^\circ 45' \leq \varphi < 90^\circ$.



Obr. 18



Obr. 19

c) Tretí kolo súťaže

1. úloha (navrhl dr. Ladislav Thern)

Dve naklonené roviny s uhlom sklonu α tvoria útvar podobný streche domu. Nad ich vodorovnou priesečnicou je upevnená kladka K s hmotnosťou m a polomerom r , ktorá má os otáčania rovnobežnú s priesečnicou rovín. Cez kladku je prehodené vlákno, ktoré spája dve hranolovité telesá A a B s hmotnosťami m_1 a m_2 , $m_2 > m_1$, ležiace každé na jednej z rovín. Úseky vlákna AK a KB sú rovnobežné s príslušnými rovinami. Súčiniteľ šmykového trenia f je rovnaký pre obidve roviny. Hmotnosť vlákna a trenie v ložiskách kladky zanedbajme.

a) Určte zrýchlenie a sústavy a sily F_1 , F_2 , ktoré napínajú vlákno, keď sústava je v pohybe.

b) Aké veľké sú sily F_1 a F_2 , keď sústava stojí? Určte v tomto prípade pomer p hmotností obidvoch telies.

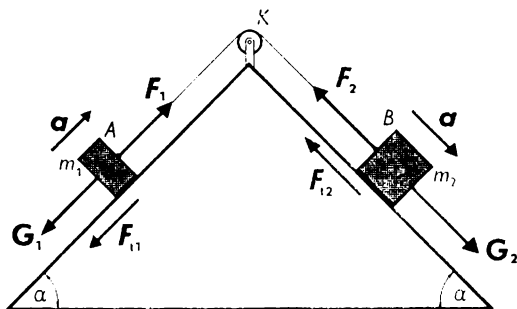
c) Urobte diskusiu pre a , ak na sústavu pôsobí len tiažové pole a na začiatku pozorovania je sústava v pohybe tak, že

1. teleso A stúpa (B klesá),
2. teleso B stúpa (A klesá).

d) Ktorý prípad nastane pre hodnoty $f = 0,25$, $\alpha = 45^\circ$, $m = 6,0$ kg, $m_1 = 4,0$ kg, $m_2 = 8,0$ kg, $g = 10$ m s⁻²? Opíšte pohyb, určte zrýchlenie a a veľkosti síl F_1 , F_2 .

Riešenie:

a) — obr. 20



Obr. 20

Predpokladáme, že sústava sa pohybuje tak, že teleso B s väčšou hmotnosťou klesá. Za kladnú považujeme orientáciu zrýchlenia a naznačenú na obrázku. Na teleso A pôsobí sila F_1 , trecia sila $-F_{11}$ a tangenciálna zložka $-G_1$ tiažovej sily. Na teleso B pôsobí tangenciálna zložka G_2 tiažovej sily, trecia sila $-F_{12}$ a sila $-F_2$. Na obvode kladky pôsobia sily $-F_1$ a F_2 .

Druhý Newtonov pohybový zákon dáva tieto vzťahy:

pre teleso A : $\dots m_1 a = F_1 - m_1 g(f \cos \alpha + \sin \alpha)$; (1)

pre teleso B : $\dots m_2 a = -F_2 - m_2 g(f \cos \alpha - \sin \alpha)$; (2)

pre kladku K : $\dots \mathcal{J} \varepsilon = r(F_2 - F_1)$, pričom

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} m r^2, \quad \varepsilon = \frac{a}{r},$$

takže pre kladku K dostávame vzťah

$$m a = 2 (F_2 - F_1). \quad (3)$$

Zo sústavy rovníc (1), (2), (3) vypočítame

$$a = g \frac{(m_2 - m_1) \sin \alpha - f(m_2 + m_1) \cos \alpha}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}, \quad (4)$$

$$F_1 = m_1 [a + g(f \cos \alpha + \sin \alpha)], \quad (5)$$

$$F_2 = a \left(m_1 + \frac{m}{2} \right) + m_1 g(f \cos \alpha + \sin \alpha). \quad (6)$$

b) Riešime za predpokladu, že $\operatorname{tg} \alpha > f$. V uvažovanom prípade je $a = 0$. Zo vzťahov (5) a (6) je zrejmé, že obe sily majú rovnaké veľkosti

$$F_{10} = F_{20} = m_1 g(f \cos \alpha + \sin \alpha).$$

Pomer hmotností určíme z (4) pre $a = 0$. Úpravou vyjde

$$p = \frac{m_2}{m_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{\operatorname{tg} \alpha - f}. \quad (7)$$

c) 1. Záleží na pomere hmotností $m_2 : m_1$; sú možné tri prípady, vzhľadom k hodnote p podľa (7):

11. $\frac{m_2}{m_1} < p, a < 0$: sústava sa zastaví;

12. $\frac{m_2}{m_1} = p, a = 0$: sústava se pohybuje rovnomerne s rýchlosťou, akú mala na začiatku pozorovania;
13. $\frac{m_2}{m_1} > p, a > 0$: sústava se pohybuje rovnomerne zrýchlene so zrýchlením (4).

2. Uvažujeme zrýchlenie s orientáciou opačnou, než je nariadené v obr. 20, t. j. v smere počiatočného pohybu oboch telies. Trecie sily majú pri pohybe telies opačné orientácie, takže pre zrýchlenie neplatí (4), ale podobný vzťah, ku ktorému dospejeme podobným spôsobom ako v časti a). Tento vzťah sa podobá na vzťah (4), ale indexy 1 a 2 sú navzájom zamenené, takže vždy $a < 0$, pretože $m_1 < m_2$. Teraz sú možné prípady:

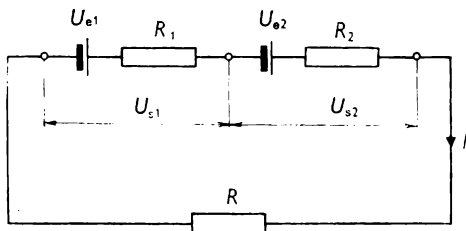
- 21., 22. $\frac{m_2}{m_1} \leq p$: sústava sa zastaví a zostane v pokoji;
23. $\frac{m_2}{m_1} > p$: sústava sa spomaľuje, na okamih sa zastaví, hneď na to sa začne pohybovať rovnomerne zrýchlene v opačnom smere.

d) Pre zadané hodnoty je $p = \frac{5}{3}$, takže $\frac{m_2}{m_1} > p$ a nastane prípad c13, alebo c23, príp. sa sústava, ak bola najprv v pokoji, začne pohybovať rovnomerne zrýchlene tak, že teleso B klesá.

Vychádza $a = 0,47 \text{ ms}^{-2}$, $F_1 = 37 \text{ N}$, $F_2 = 39 \text{ N}$.

2. úloha (navrhl dr. Ladislav Thern)

Dva elektrické zdroje s konštantnými elektromotorickými napätiami U_{e1} , U_{e2} a s vnútornými odpormi R_1 , R_2 sú spojené do série nesúhlasnými pólmi. Takto vzniknutá batéria napája spotrebič (obr. 21).



Obr. 21

a) Určte hodnotu odporu R_m takého spotrebiča, ktorý zaradený do obvodu bude mať najväčší príkon.

b) Určte prúd I_m , ktorý tečie obvodom v prípade a), a príslušný príkon P_m .

c) Určte svorkové napätie U_{s1} , U_{s2} jednotlivých zdrojov v závislosti od odporu R spotrebiča.

d) Existujú také hodnoty odporu R spotrebiča, pre ktoré niektoré svorkové napätie bude $U_s \leq 0$? Urobte diskusiu pre tieto prípady:

1. $U_{e1} > U_{e2}$, $R_1 \gtrless R_2$,
2. $U_{e1} = U_{e2}$, $R_1 \gtrless R_2$,
3. $U_{e1} < U_{e2}$, $R_1 \gtrless R_2$.

Riešenie:

a) Obvodom tečie prúd

$$I = \frac{U_{e1} + U_{e2}}{R + R_1 + R_2} \quad (1)$$

a spotrebič dostáva príkon

$$P = RI^2 = (U_{e1} + U_{e2})^2 \frac{R}{(R + R_1 + R_2)^2} \cdot \quad (2)$$

Označme $P = y$, $R = x$, $R_1 + R_2 = k$, $U_{e1} + U_{e2} = K$, kde $k > 0$, $K > 0$ sú konštanty. Ide o určenie lokálneho extrému funkcie

$$y = K^2 \frac{x}{(x + k)^2} \cdot \quad (3)$$

Prvá derivácia

$$y' = K^2 \frac{k - x}{(k + x)^3}$$

je nulová pre $x_m = k$. Druhá derivácia má pre $x = x_m = k$ hodnotu

$$y''_m = -\frac{K^2}{8k^3} < 0 ,$$

takže funkcia (3) má tu lokálne maximum. Dostávame tu

$$R_m = R_1 + R_2 \cdot \quad (4)$$

b) Dosadením z (4) za $R = R_m$ do (1) a (2) dostávame

$$I_m = \frac{U_{e1} + U_{e2}}{2(R_1 + R_2)} ,$$

$$P_m = \frac{(U_{e1} + U_{e2})^2}{4(R_1 + R_2)}.$$

c) Pre svorkové napätia platí

$$U_{s1} = U_{e1} - R_1 I, \quad U_{s2} = U_{e2} - R_2 I$$

a po dosadení z (1)

$$U_{s1} = \frac{RU_{e1} + R_2 U_{e1} - R_1 U_{e2}}{R + R_1 + R_2}, \quad (5)$$

$$U_{s2} = \frac{RU_{e2} + R_1 U_{e2} - R_2 U_{e1}}{R + R_1 + R_2}. \quad (6)$$

d) Pre $U_{s1} \leq 0$, príp. pre $U_{s2} \leq 0$ vychádza z (5) a (6) po úprave

$$R \leq R_1 \left(\frac{U_{e2}}{U_{e1}} - \frac{R_2}{R_1} \right),$$

príp.

$$R \leq R_2 \left(\frac{U_{e1}}{U_{e2}} - \frac{R_1}{R_2} \right).$$

Pretože $R \geq 0$, môžeme tieto podmienky nahradiť jednoduchšími:

$$\frac{U_{e2}}{U_{e1}} \geq \frac{R_2}{R_1} \text{ príp. } \frac{U_{e1}}{U_{e2}} \geq \frac{R_1}{R_2}.$$

Pre nasledujúcu diskusiu zavedieme označenia:

$$p_1 = \frac{U_{e1}}{U_{e2}}, \quad q_1 = \frac{R_1}{R_2}, \quad p_2 = \frac{U_{e2}}{U_{e1}}, \quad q_2 = \frac{R_2}{R_1},$$

takže pri vhodných odporoch R spotrebiča môže byť

$$U_{s1} \leq 0 \text{ pre } p_2 \geq q_2,$$

$$U_{s2} \leq 0 \text{ pre } p_1 \geq q_1.$$

Pri diskusii treba uvážiť, že pre $p_1 \leq q_1$ súčasne platí $p_2 \leq q_2$.

Diskusia — tabuľka č. 13:

TABUĽKA 13

Prípád	Môže byť
$p_1 > 1,$ $q_1 > 1$	$U_{s2} \leq 0$, pričom $U_{s1} > 0 \dots$ pre $p_1 > q_1$ $U_{s1} = U_{s2} = 0$ len pre $R = 0$ pre $p_1 = q_1$ $U_{s1} \leq 0$, pričom $U_{s2} > 0 \dots$ pre $p_1 < q_1$
$p_1 > 1,$ $q_1 = 1$	$U_{s2} \leq 0$, pričom $U_{s1} > 0$
$p_1 > 1,$ $q_1 < 1$	$U_{s2} \leq 0$, pričom $U_{s1} > 0$
$p_1 = 1,$ $q_1 > 1$	$U_{s1} \leq 0$, pričom $U_{s2} > 0$
$p_1 = 1,$ $q_1 = 1$	$U_{s1} = U_{s2} = 0$ len pre $R = 0$
$p_1 = 1,$ $q_1 < 1$	$U_{s2} \leq 0$, pričom $U_{s1} > 0$
$p_1 < 1,$ $q_1 > 1$	$U_{s1} \leq 0$, pričom $U_{s2} > 0$
$p_1 < 1,$ $q_1 = 1,$	$U_{s1} \leq 0$, pričom $U_{s2} > 0$
$p_1 < 1,$ $q_1 < 1$	$U_{s2} \leq 0$, pričom $U_{s1} > 0 \dots$ pre $p_1 > q_1$ $U_{s1} = U_{s2} = 0$ len pre $R = 0$ pre $p_1 = q_1$ $U_{s1} \leq 0$, pričom $U_{s2} > 0 \dots$ pre $p_1 < q_1$

Z výsledkov diskusie je zrejmé, že záporné alebo nulové svorkové napätie môže mať len jeden z oboch zdrojov, pričom svorkové napätie druhého zdroja je kladné, väčšie ako absolútna hodnota záporného svorkového napätia zdroja prvého, pretože súčet oboch svorkových napätí predstavuje (kladné) napätie na spotrebiči.

Nulové môže byť buď len jedno z oboch svorkových napätí, pričom druhé je kladné, alebo obe svorkové napätia súčasne, ak je batéria skratovaná ($R = 0$) a ak je splnená podmienka $U_{c1} : U_{c2} = R_1 : R_2$.

3. úloha (navrhl Mojmir Simerský)

Obdĺniková smyčka z veľmi tenkého drátu má elektrický odpor R . Smyčka sa rovnomerne otáča s úhlovou rýchlosťou ω v homogennom magnetickom poli o indukciu B . Osa otáčenia leží v rovine určenej smyčkou, je rovnobežná s niektorou dvojicou jej strán a kolmá k magnetickému indukciu B .

a) Dokažte, že smyčkou, ktorá má obsah S , protéká sinusový striedavý prúd, stanovte jeho kmitočet f a jeho efektívnu hodnotu I .

Proveďte diskusiu pre rôzne polohy osy otáčenia vzhľadom ke smyčke (neprotína smyčku, protína smyčku, splýva s niektorou stranou smyčky).

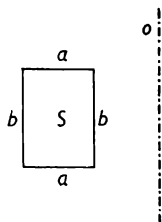
b) Jak veľký moment sily M vzhľadom k ose otáčenia musí pôsobiť, aby sa smyčka udržiavala v rovnomernom otáčivom pohybe?

Trenie a odpor prostredia zanedbávame.

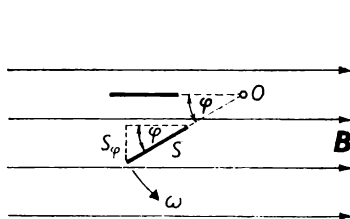
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $R = 1,00 \cdot 10^{-2} \Omega$, $\omega = 314 \text{ rad s}^{-1}$, $B = 0,500 \text{ T}$, $S = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

Řešení:

a) Strany smyčky mají délky a , b , osa otáčení o leží v rovině smyčky a smyčku neprotíná (obr. 22); je rovnoběžná např. se stranami o délce b . Necht' v čase $t = 0$ s je rovina smyčky rovnoběžná s indukcí $\mathbf{B}$ (obr. 23), takže



Obr. 22



Obr. 23

magnetický indukční tok, který jí prochází, je nulový. V čase t je rovina smyčky otočena o úhel $\varphi = \omega t$. Obsah jejího průmětu do roviny kolmé k indukcí $\mathbf{B}$ označíme S_φ . Tímto průmětem je obdélník o stranách $b, a_\varphi = a \sin \varphi$, takže $S_\varphi = S \sin \varphi$. Smyčkou nyní prochází magnetický indukční tok

$$\Phi = BS \sin \varphi = BS \sin \omega t. \quad (1)$$

Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce má indukované elektromotorické napětí velikost

$$u = \frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \cos \omega t. \quad (2)$$

Z (2) je zřejmé, že jde o sinusové střídavé napětí o efektivní hodnotě

$$U = \frac{BS\omega}{\sqrt{2}} \text{ a kmitočtu } f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Proud protékající smyčkou je rovněž sinusový střídavý, o též kmitočtu a o efektivní hodnotě

$$I = \frac{U}{R} = \frac{BS\omega}{R\sqrt{2}}.$$

Úvaha, kterou jsme dospěli ke vztahu (1), zůstává v platnosti, i když osa otáčení protíná smyčku nebo splývá s některou její stranou, takže nalezené výsledky mají obecnou platnost.

b) Vzhledem k podmínkám úlohy se elektrický výkon

$$P = RI^2 = \frac{(BS\omega)^2}{2R}$$

rovná výkonu $P' = M\omega$; odtud vyjádříme $M = \frac{B^2 S^2 \omega}{2R}$.

Pro zadané hodnoty: $f = 50 \text{ Hz}$, $I \doteq 2,22 \text{ A}$,

$$M \doteq 1,57 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

4. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Pozorovatel pozoruje Měsíc hvězdářským dalekohledem, jehož objektiv má ohniskovou vzdálenost f_1 a okulár ohniskovou vzdálenost f_2 , $f_1 \gg f_2$. Okem vidí pozorovatel průměr Měsíce v zorném úhlu $\alpha = 30'$. Vzdálenost zřetelného vidění bez akomodace pro pozorovatele je d .

a) Určete vzdálenost objektivu od okuláru, jestliže pozorovatel pozoruje okulárem zdánlivý obraz Měsíce ve vzdálenosti d od oka.

Nakreslete náčrtek.

Určete průměr pozorovaného obrazu. Předpokládáme, že optický střed oka pozorovatele splývá se středem okuláru.

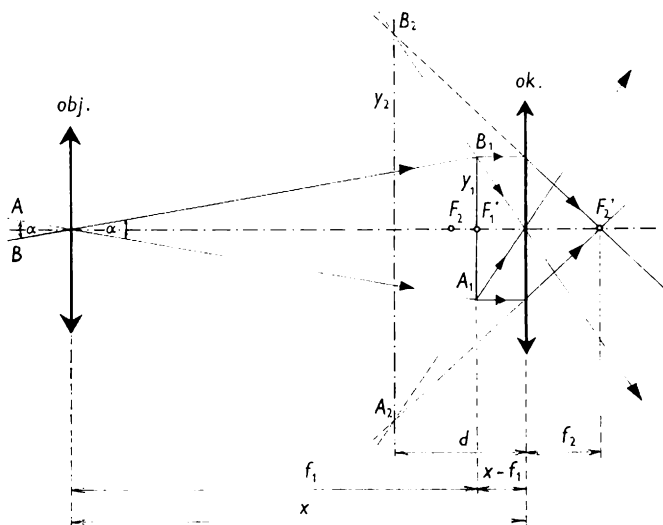
b) Určete vzdálenost objektivu od okuláru, jestliže pozorovatel pozoruje skutečný obraz Měsíce vytvořený na projekční stěně kolmé k optické ose dalekohledu ve vzdálenosti d od okuláru.

Nakreslete náčrtek. Určete průměr pozorovaného obrazu. Po obecném vyřešení řešte pro hodnoty $f_1 = 2,000$ m, $f_2 = 5,00$ cm, $\alpha = 30'$, $d = 25,0$ cm.

Při řešení uvažte, že úhel α je velmi malý.

Řešení:

a) Hledanou vzdálenost objektivu od okuláru označíme x , průměr pozorovaného obrazu Měsíce y_2 , průměr skutečného obrazu Měsíce, vytvořeného objektivem, označíme y_1 . Situace je zřejmá z náčrtu na obr. 24.



Obr. 24

Objektivem se vytvoří skutečný obraz Měsíce v rovině obrazového ohniska objektivu. Tento obraz je předmětem pro okulár. Pozorovatel jej pozoruje okulárem ve vzdálenosti d jako zdánlivý obraz. Pro okulár platí zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{x - f_1} + \frac{1}{d}. \quad (1)$$

Poněvadž úhel α je velmi malý, platí

$$\text{arc } \alpha = \frac{y_1}{f_1} = 0,00873.$$

Pro příčné zvětšení okuláru platí

$$-\frac{y_1}{y_2} = \frac{x - f_1}{d};$$

odtud vyjádříme

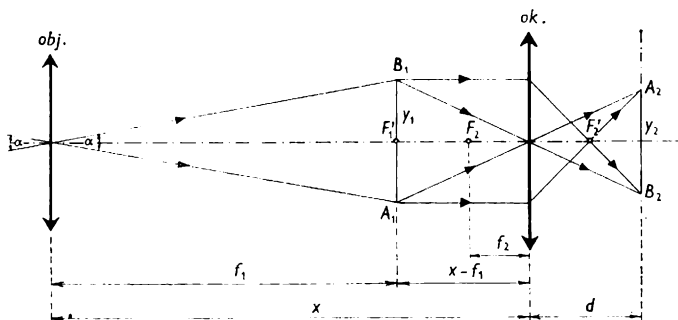
$$y_2 = -\frac{y_1 d}{x - f_1} = -\frac{f_1 d \text{ arc } \alpha}{x - f_1} = -0,00873 \frac{f_1 d}{x - f_1} \quad (2)$$

Z (1) dostaneme

$$x = \frac{d(f_1 + f_2) - f_1 f_2}{d - f_2}. \quad (3)$$

Pro zadané hodnoty (je třeba dosazovat $d = -25,0$ cm) vyjde $x = 204$ cm, $y_2 = 10,5$ cm. Obraz pozorovaný v dalekohledu je vzhledem k Měsíci zdánlivý, převrácený, zvětšený.

b) Situace je znázorněna v náčrtku na obr. 25, veličiny jsou zde označeny stejně jako na obr. 24. Skutečný obraz Měsíce vytvořený objektivem je předmětem pro okulár,



Obr. 25

který jej zobrazí jako skutečný obraz ve vzdálenosti d . V daných podmínkách zapíšeme zobrazovací rovnici pro okulár dalekohledu a rovnici pro příčné zvětšení okuláru. Dostáváme pak rovnice stejného tvaru jako (1), (2), (3). Při řešení pro zadané hodnoty musíme do (3) a (2) dosadit $d = 25,0$ cm. Pak vyjde $x \doteq 206$ cm, $y_2 \doteq -7,0$ cm. Obraz na projekční stěně je vzhledem k Měsíci skutečný, přímý, zvětšený.

5. úloha experimentální (navrhl dr. Pavel David)

Charakteristika termistoru

Termistor je polovodičová součástka (polovodičový rezistor) s nelineární voltampérovou charakteristikou a poněkud se záporným teplotním součinitelem odporu. Výroba termistorů je založena na spékání kysličníků některých kovů (Fe, Mn, Ni, Al, Cu apod.), při němž také dochází k vzájemné difúzi. Termistory mají široké uplatnění např. v měřicí technice, poněvadž jejich odpor se velmi značně mění i při malých změnách teploty, nebo

pro samočinnou regulaci proudu v elektrických obvodech (např. ve žhavicích obvodech televizních elektronkových přijímačů).

Vaším úkolem je změřit voltampérovou charakteristiku termistoru, tj. funkci $U = f(I)$, kde U značí napětí na termistoru, I proud protékající termistorem, znázornit ji graficky a pomocí grafu řešit některé další dílčí úkoly.

Úkol:

1. a) Navrhněte zapojení pro měření voltampérové charakteristiky termistoru, je-li v sérii s ním zapojen rezistor R a napětí zdroje se reguluje potenciometrem.

b) Uvažte, zda je třeba přihlížet k vlastní spotřebě použitých měřidel (voltmetru, ampérmetru), mění-li se proud při měření v rozmezí od 10 mA do 160 mA a napětí na termistoru v rozmezí od 0 V do 25 V. O vlastní spotřebě (vnitřním odporu) použitých měřidel se informujte buď v technické dokumentaci, nebo dotazem u dohlízejícího učitele.

2. V navrženém zapojení, bude-li schváleno dohlízejícím učitelem, popř. v zapojení pozměněném podle jeho pokynů, změřte voltampérovou charakteristiku termistoru a znázorněte ji graficky.

3. Ze změřených hodnot napětí a proudu vypočítejte (pro různé hodnoty proudu) příslušné hodnoty odporu R_T termistoru a graficky znázorněte funkci $R_T = F(I)$.

4. Pomocí grafu voltampérové charakteristiky termistoru určete nejvyšší napětí, k němuž je možné připojit termistor (mající pokojovou teplotu) bez sériového rezistoru (tj. s nulovým sériovým odporem), aniž dojde k jeho zničení. Odůvodněte a vysvětlete.

5. Pomocí téhož grafu určete odpor rezistoru, který musí být zařazen do série s termistorem, aby tato sériová kombinace mohla být připojena ke zdroji napětí 30 V

a protékal ji proud 120 mA. Teplotní závislost odporu rezistoru zanedbejte. Bude tento stav stabilní? Vysvětlete.

Potřeby:

Termistor se svorkovnicí, odpor 100 Ω se svorkovnicí, potenciometr (105 Ω až 150 Ω , 2 A), ampérmetr a voltmetr (avomet, DU 10, DU 20, Univo aj.), 2 uzlové propojovací můstky, návody pro měřicí přístroje, spojovací vodiče (15 ks); zdroj střídavého napětí 40 V, popř. s oddělovacím transformátorem.

Další pokyny pro měření:

1. K měření použijte střídavý proud ze zdroje o napětí 40 V, napětí regulujte potenciometrem.

2. Do série s termistorem zapojte ochranný rezistor o odporu $R = 100 \Omega$.

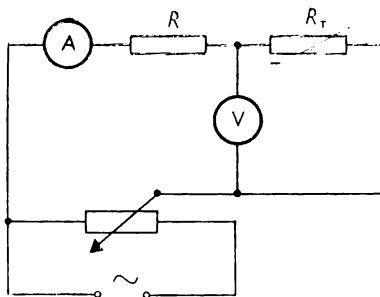
3. Sestavte obvod a před připojením ke zdroji si nechte zapojení schválit dohlížejícím učitelem.

4. Při měření je třeba dodržet stejné fyzikální podmínky (nedotýkat se termistoru apod.) a pečlivě udržovat proudy na předepsaných hodnotách až do ustálení teploty termistoru, což vždy bude trvat 3 minuty až 5 minut. Proud procházející termistorem nastavujte v intervalu od 0 mA do 80 mA po 10 mA, v intervalu od 80 mA do 160 mA po 20 mA. Měření provádějte při postupném zvětšování proudu. Ověření, zda je obvod uzavřen, proveďte při proudu co nejmenším (do 10 mA).

5. Měření trvá vzhledem k nutnosti ustalování teploty poměrně dlouho, proto pracujte bez časových ztrát. Vlastní měření charakteristiky termistoru trvá asi hodinu, na ostatní experimentální práci tedy zbývá čas asi půl hodiny.

Řešení:

1. a) K měření lze použít např. zapojení podle obr. 26.



Obr. 26

Potenciometrem lze regulovat střídavé napětí od 0 V do 40 V.

b) Voltmetrem měříme přesně napětí na termistoru. Proud protékající miliampérmetrem je součtem proudů tekoucích voltmetrem a termistorem. Proudová spotřeba voltmetru na všech rozsazích při plné výchylce při měření střídavého napětí činí $60 \mu\text{A}$ u měřicího přístroje DU 10; nejmenší měřené proudy termistorem dosahují hodnoty 10 mA. Protože proudy voltmetrem dosahují (v krajním případě) 0,6 % proudu termistorem, lze je zanedbat, a není tedy zapotřebí počítat s vlastní spotřebou voltmetru.

2., 3. V tabulce č. 14 jsou změřené hodnoty napětí U při nastavovaných hodnotách proudu I a vypočítané hodnoty odporu termistoru $\left(R_T = \frac{U}{I}\right)$. Funkce $U = f(I)$ a $R_T = F(I)$ jsou v grafu na obr. 27.

4. Napětí U , na které je možno připojit termistor bez spojení s ochranným rezistorem, musí splňovat podmínku

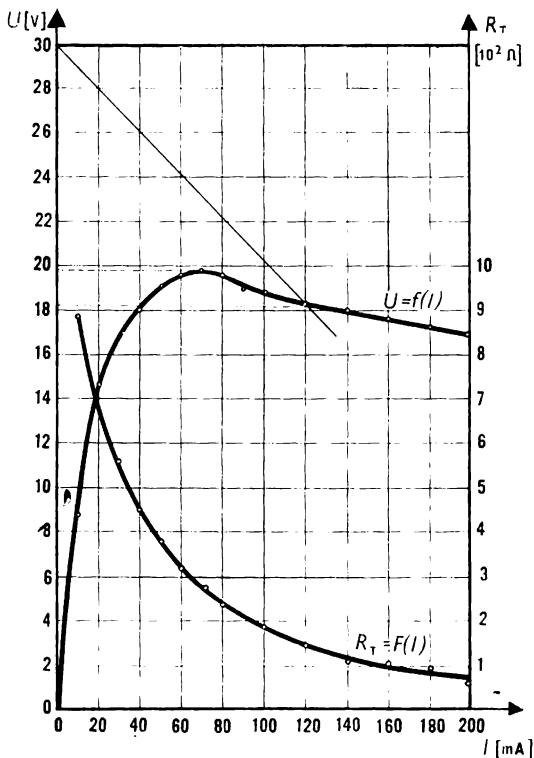
TABULKA 14

I [mA]	U [V]	R_T [Ω]	I [mA]	U [V]	R_T [Ω]
10	8,8	880	90	19,2	213
20	15,0	750	100	19,0	190
30	17,0	567	120	18,5	154
40	18,0	450	140	18,0	128
50	19,0	380	160	17,7	111
60	19,5	325	180	17,2	94
70	19,7	278	200	17,0	61
80	19,6	245			

$0 \text{ V} \leq U < 19,7 \text{ V}$. Maximální hodnota tohoto napětí je dána maximálním napětím na termistoru a je určena lokálním maximem znázorněné funkce $U = f(I)$. V uvedeném intervalu hodnot napětí je charakteristika stoupající — ke zvětšení proudu je zapotřebí zvětšení napětí na termistoru. Je-li napětí konstantní, nemůže dojít ke vzrůstu proudu. Pracovní stav termistoru je zde tedy stabilní.

Pracovní stav s napětím $U = 19,7 \text{ V}$ a proudem $I = 70 \text{ mA}$ je reálný stav, ale při sebemenší fluktuaci (např. změně napětí, proudu, zvýšení teploty) přejde termistor do stavu s vyšším proudem a zničí se uvolněným Jouleovým teplem. Při připojení ke zdroji o napětí $U > 19,7 \text{ V}$ proud termistorem překročí hodnotu $I = 70 \text{ mA}$ a termistor nedosáhne stabilního pracovního stavu. Charakteristika v oblasti proudů větších než 70 mA je klesající — vzrůstu proudu odpovídá pokles napětí na termistoru. To má za následek další vzrůst proudu. Proto proud termistorem poroste při konstantním napětí zdroje stále více, až se termistor zničí.

5. Při připojení sériového rezistoru a termistoru ke zdroji o napětí $U_0 = 30 \text{ V}$ dojde k ohřátí termistoru



Obr. 27

Jouleovým teplem. Součet napětí na rezistoru a na termistoru se musí rovnat svorkovému napětí zdroje. Při proudu $I_1 = 120$ mA je na termistoru napětí $U_1 = 18,4$ V. Na rezistoru musí průchodem proudu I_1 vzniknout napětí $U'_1 = U_0 - U_1$, v našem případě 11,6 V. Odpor před-

řádného rezistoru určíme pomocí Ohmova zákona: $R_1 = \frac{U'_1}{I_1}$, pro dané hodnoty $R_1 \doteq 97 \, \Omega$. Pracovní nastavení termistoru bude stabilní. Při náhodném zvětšení proudu je vzrůst napětí na rezistoru větší než pokles napětí na termistoru. Vzniklému stavu odpovídá napětí zdroje vyšší než U_0 . Důsledkem je pokles proudu na hodnotu I_1 . Při poklesu proudu pod hodnotu I_1 je součet napětí na rezistoru a na termistoru menší než U_0 . Napětí U_0 vyvolá vzrůst proudu na hodnotu I_1 . Graficky se odpor předřádného rezistoru dá stanovit způsobem zřejmým z grafu na obr. 27, ze sklonu přímky spojující body (0 mA; 30 V) a (120 mA; 18,4 V).

2. Úlohy kategorie B

Úlohy a řešení recenzovali dr. ing. Daniel Kluvanec, CSc. a Mojmir Simerský

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl Jaroslav Maryška)

Na pružině o tuhosti k je zavěšena miska hmotnosti m_1 . Z výšky h nad rovinou misky uvolníme závaží o hmotnosti m_2 , které dopadne na misku. Po dopadu závaží na misku začne miska se závažím konat ve svislém směru harmonický pohyb. Určete jeho amplitudu A .

Dopad závaží na misku považujte za dokonale nepružný. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 0,90 \, \text{kg}$, $m_2 = 0,10 \, \text{kg}$, $h = 0,10 \, \text{m}$, $k = 5,0 \, \text{kg s}^{-2}$, $g = 9,8 \, \text{m s}^{-2}$.

Řešení:

Amplitudu A kmitavého pohybu určíme ze vztahu

$$A = x - y, \quad (1)$$

kde x značí největší prodloužení kmitající pružiny a

$$y = \frac{g(m_1 + m_2)}{k} \quad (2)$$

její prodloužení, když je na ní zavěšena miska se závažím (střední prodloužení pružiny při jejím kmitání). Je třeba stanovit x .

Při největším prodloužení má pružina potenciální energii pružnosti

$$W_{p \max} = \frac{1}{2} kx^2, \quad (3)$$

která je součtem tří energií:

a) Energie W_{p0} pružiny, na níž je zavěšena miska (počáteční stav). Platí pro ni

$$W_{p0} = \frac{1}{2} kx_0^2, \quad (4)$$

kde

$$x_0 = \frac{gm_1}{k} \quad (5)$$

značí prodloužení pružiny se zavěšenou miskou.

b) Kinetická energie W_k odpovídající rychlosti v_1 , kterou se při dopadu závaží počne miska se závažím pohybovat:

$$W_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2)v_1^2. \quad (6)$$

c) Změna ΔW_t potenciální energie tíhové, když miska se závažím klesne o délku $x - x_0$:

$$\Delta W_t = g(m_1 + m_2)(x - x_0). \quad (7)$$

Je třeba ještě stanovit v_1 ve vztahu (6).

Při dopadu na misku má závaží rychlost o velikosti $v = \sqrt{2gh}$ a ze zákona zachování hybnosti plyne

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh}. \quad (8)$$

Do vztahu

$$W_{p \max} = W_{po} + W_k + \Delta W_t$$

dosadíme z (3), (4), (6), (7), za x_0 z (5), za v_1 z (8). Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro určení veličiny x :

$$kx^2 - 2g(m_1 + m_2)x - \left[\frac{2m_2^2gh}{m_1 + m_2} - \frac{m_1g^2(m_1 + 2m_2)}{k} \right] = 0.$$

Podmínce úlohy vyhovuje větší z obou reálných řešení této rovnice, tedy

$$x = \frac{g(m_1 + m_2)}{k} + \sqrt{\frac{g^2m_2^2}{k^2} + \frac{2ghm_2^2}{k(m_1 + m_2)}}. \quad (9)$$

Do (1) dosadíme z (9) a (2) a dostaneme

$$A = \sqrt{\frac{g^2m_2^2}{k^2} + \frac{2ghm_2^2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

Pro zadané hodnoty: $A \doteq 21 \text{ cm}$.

2. úloha (navrhl Jaroslav Maryška)

Na plný váleček o průměru d , který je z tvrdé oceli, je nasunut stejně vysoký litinový prstenec o průměru D . Soustava je vložena mezi čelisti lisu, jimiž se na válec a na prstenec přenáší síla F ve směru geometrické osy válce. Modul pružnosti oceli je E_1 , modul pružnosti litiny E_2 , mez pevnosti oceli je σ_{p1} a mez pevnosti litiny σ_{p2} . Boční deformaci válce a litinového prstence a třecí síly mezi válcem a prstencem zanedbáváme. Předpokládáme, že pro deformaci oceli i litiny platí Hookův zákon.

a) Určete nejmenší velikost F' síly F , při níž dojde k porušení jedné ze součástí. Poruší se nejprve ocelový válec nebo litinový prstenec (s přihlédnutím k zadaným hodnotám)?

b) Určete velikosti sil F'_1, F'_2 , které při splnění podmínky a) působí na ocelový válec a na litinový prstenec.

c) Stanovte nejmenší mez pevnosti σ_p , kterou by měla mít druhá součástka, aby po porušení první součástky působením síly o velikosti F' nedošlo k následnému porušení druhé součástky.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 5,0$ cm, $D = 6,0$ cm, $E_1 = 2,1$ N mm⁻², $E_2 = 1,0 \cdot 10^5$ N mm⁻², $\sigma_{p1} = 8,0 \cdot 10^2$ N mm⁻², $\sigma_{p2} = 1,0 \cdot 10^3$ N mm⁻².

Řešení:

a) Pro velikost F síly F platí

$$F = F_1 + F_2, \quad (1)$$

kde F_1 značí velikost síly působící na válec, F_2 velikost síly působící na prstenec. Poměrná deformace je stejná pro válec i pro prstenec:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F_1}{E_1 S_1} = \frac{F_2}{E_2 S_2}, \quad (2)$$

kde l značí výšku válce i prstence bez deformace, Δl zmenšení výšky následkem pružné deformace, S_1 průřez válce, S_2 průřez prstence.

Ze soustavy rovnic (1), (2) vyjádříme

$$F_1 = \frac{E_1 S_1}{E_1 S_1 + E_2 S_2} F, \quad F_2 = \frac{E_2 S_2}{E_1 S_1 + E_2 S_2} F. \quad (3)$$

Napětí σ_1 v oceli a σ_2 v litině jsou

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{E_1}{E_1 S_1 + E_2 S_2} F, \quad \sigma_2 = \frac{E_2}{E_1 S_1 + E_2 S_2} F. \quad (4)$$

Z (4) dostaneme

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2}$$

a pro zadané hodnoty $\sigma_1 = 2,1 \sigma_2$.

Poněvadž $\sigma_1 > \sigma_2$, kdežto $\sigma_{p1} < \sigma_{p2}$, poruší se nejprve ocelový válec; dojde k tomu tehdy, když $\sigma_1 = \sigma_{p1}$, neboli, podle (3), když síla F má velikost F' , pro kterou platí

$$\sigma_{p1} = \frac{E_1}{E_1 S_1 + E_2 S_2} F'.$$

V tomto vztahu položíme

$$S_1 = \frac{1}{4} \pi d^2, \quad S_2 = \frac{1}{4} \pi (D^2 - d^2) \quad (5)$$

a vyjádříme

$$F' = \frac{\pi \sigma_{p1}}{4} \left[d^2 + (D^2 - d^2) \frac{E_2}{E_1} \right] \quad (6)$$

Pro zadané hodnoty: $F' \doteq 1,9 \cdot 10^6 \text{ N}$.

b) Velikosti F'_1 , F'_2 obou sil určíme z (3) pro $F = F'$ podle (6) a pro S_1 , S_2 podle (5). Po úpravě vyjde

$$F'_1 = \frac{1}{4} \pi d^2 \sigma_{p1}, \quad F'_2 = \frac{1}{4} \pi (D^2 - d^2) \sigma_{p1} \frac{E_2}{E_1}.$$

Pro zadané hodnoty: $F'_1 = 1,6 \cdot 10^6 \text{ N}$, $F'_2 = 3,3 \cdot 10^5 \text{ N}$.

c) Při porušení ocelového válce působí na prstenec síla o velikosti F' podle (6). Prstenec by se právě ještě neporušil, když měl mez pevnosti

$$\sigma_p = \frac{F'}{S_2}$$

a po dosazení z (6) a (5)

$$\sigma_p = \sigma_{p1} \left(\frac{d^2}{D^2 - d^2} + \frac{E_2}{E_1} \right).$$

Pro zadané hodnoty: $\sigma_p = 2,2 \cdot 10^3 \text{ N mm}^{-2}$.

3. úloha (navrhl dr. Ivan Baník)

Tri tělesa, 1, 2, 3 mají teploty T_1 , T_2 , T_3 , pro které platí $T_1 > T_2 > T_3$. Ideální tepelný stroj pracuje na základě Carnotova cyklu.

a) Tepelný stroj koná práci tak, že těleso 1 slouží jako ohřívač a těleso 3 jako chladič stroja.

b) Tepelný stroj koná práci tak, že těleso 1 slouží jako ohřívač. V první části děja těleso 2 je chladič, v druhé části děja je ohřívač. Těleso 3 je chladič stroja. Nech teplo přijaté tělesem 2 v první části děja je rovné teplu odovzdanému v druhé části děja.

1. Za předpokladu, že v obou případech bylo tělesu 1 odebráno rovnaké teplo, uvažte, či celkové práce vykonané dějmi v případech a) a b) sú rovnaké.

2. Koľko tepla je odovzdané telesu 3 v prípadoch a) a b)? Tepelné kapacity telies sú veľmi veľké, takže zmeny teplôt počas deja zanedbávate.

Riešenie:

1. V prípade a) vykoná stroj prácu

$$A_1 = Q_1 \eta_{13} = Q_1 \frac{T_1 - T_3}{T_1}, \quad (1)$$

kde Q_1 znamená teplo odobrané telesu 1, η_{13} účinnosť tepelného stroja.

V prípade b) vykoná stroj prácu

$$A_2 = A_{12} + A_{23} = Q_1 \eta_{12} + Q_2 \eta_{23}, \quad (2)$$

kde A_{12} znamená prácu vykonanú v prvej časti deja, A_{23} prácu vykonanú v druhej časti deja, Q_2 teplo, ktoré teleso 2 prijme v prvej časti deja, η_{12} účinnosť stroja v prvej časti deja, η_{23} jeho účinnosť v druhej časti deja. Pre veličiny η_{12} , η_{23} , Q_2 platí

$$\begin{aligned} \eta_{12} &= \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad \eta_{23} = \frac{T_2 - T_3}{T_2}, \quad Q_2 = Q_1 - A_{12} = \\ &= Q_1 \left(1 - \frac{T_1 - T_2}{T_1} \right). \end{aligned}$$

Dosadením za η_{12} , η_{23} , Q_2 do (2) a úpravou dostaneme

$$A_2 = Q_1 \frac{T_1 - T_3}{T_1}.$$

Porovnaním s (1) zisťujeme, že $A_1 = A_2$, t. j. že celková vykonaná práca je v oboch prípadoch rovnaká.

2. Teplo odovzdané telesu 3 je v prvom prípade $Q_3 =$

$= Q_1 - A_1$, v druhom prípade $Q'_3 = Q_1 - A_2$. Pretože $A_1 = A_2$, je tiež $Q_3 = Q'_3$.

4. úloha (navrhl Jaroslav Maryška)

Z nádoby uniklo určité množstvo dvouatomového dokonalého plynu. Tento dej je možno považovať za adiabatický. Pripojený tlakoměr ukázal pokles tlaku z pôvodní hodnoty p_1 na hodnotu p_2 . Plyn zbylý v nádobe potom prijímal teplo z okolí, až se jeho teplota ustálila na hodnotě, kterou měl před dějem.

a) Určete změnu $\Delta \varrho$ hustoty plynu a vyjádřete ji v procentech.

b) Jaká je hodnota konečného tlaku p_3 v nádobě? Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $p_1 = 50 \text{ Pa}$, $p_2 = 46 \text{ Pa}$.

Řešení:

Stavové veličiny plynu, který zůstal v nádobě, nejsou ovlivněny skutečným stavem plynu, který unikl. Můžeme si tedy děj představit jako adiabatickou expanzi, při níž se tlak plynu zmenšil z p_1 na p_2 a objem zvětšil z V_1 na V_2 , přičemž veličiny p_1 , V_1 , p_2 , V_2 jsou navzájem vázány vztahy platnými pro dokonalé plyny.

a) Poněvadž celková hmotnost plynu se nezměnila, platí pro hustoty ϱ_1 a ϱ_2 na počátku a na konci děje (adiabatická expanze)

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}}. \quad (1)$$

Pomocí (1) vyjádříme změnu hustoty plynu:

$$\Delta \varrho = \varrho_1 - \varrho_2 = \varrho_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right]$$

a v procentech

$$\Delta \varrho [\%] = 100 \frac{\Delta \varrho}{\varrho_1} = 100 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right].$$

Pro zadané hodnoty a pro $\kappa = 1,40$ (hodnota pro dvouatomové plyny) vyjde $\Delta \varrho [\%] = 6,0 \%$.

b) Plyn měl nejprve teplotu T_1 , která se při adiabatické expanzi změnila na T_2 . Pak se změnila na původní hodnotu T_1 , a to izochorickým dějem, pro který platí

$$p_3 = p_2 \frac{T_1}{T_2}.$$

Ze stavové rovnice dostaneme, s použitím (1)

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}},$$

takže

$$p_3 = p_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Pro zadané hodnoty: $p_3 = 47 \text{ Pa}$.

5. úloha (navrhl dr. Václav Koubek)

Vyšetrovanie priebehu nabíjacieho prúdu kondenzátora v obvode RC

Pomôcky:

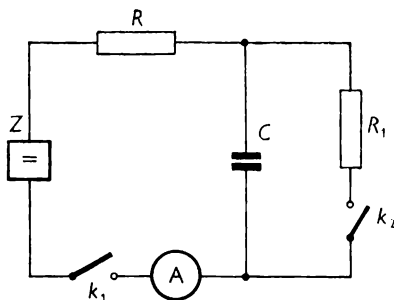
Zdroj Z jednosmerného napätia do 200 V, rezistor R 470 k Ω , kondenzátor s kapacitou 60 μ F až 70 μ F na napätie najmenej 200 V, miliampérmeter do 3 mA (napr. Avomet, DU 10), dva vypínače, rezistor R_1 1 k Ω až 2 k Ω , stopky.

Cieľ merania:

Stanoviť závislosť $I = I(t)$ nabíjacieho prúdu I kondenzátora od času t .

Postup práce:

1. Zostavíme obvod podľa schémy na obr. 28.



Obr. 28

2. Na zdroji napätia Z nastavíme také napätie U_0 , aby po zapnutí vypínača k_1 miliampérmeter ukázal plnú výchylku. Počas nabíjania kondenzátora výchylka ampérmetra postupne klesá. Po každom nabití kondenzátora vypneme vypínač k_1 a zapneme vypínač k_2 . Kondenzátor sa vybíja cez odpor R_1 (vybíjanie trvá 1 s až 2 s).

3. Zapneme vypínač k_1 a súčasne stlačíme stopky. Ukazovateľ miliampérmetra ukáže najskôr maximálnu výchylku a potom sa vracia k nulovej polohe. Meriame postupne časy t_i , za ktoré výchylka prístroja klesne na jednotlivé vopred zvolené hodnoty I_i prúdu. Vykonáme 10 až 15 meraní dvojíc t_i, I_i . Hodnoty času t_i sú priemery vypočítané z viacerých meraní. Namerané hodnoty zapisujeme do tabuľky.

1. Narysujte graf (a) závislosti $I = I(t)$ nabíjacieho prúdu kondenzátora od času.

2. Zobrazená závislosť by mala mať tvar grafu jednej z dvoch funkcií

$$I = At^n, \quad (1)$$

$$I = Ba^{kt}, \quad (2)$$

kde A, B, a, n, k sú konštanty. Hodnoty z tabuľky použite na zostrojenie grafov (b) a (c) v súradnicových systémoch

$$\text{b} \dots x = \log t, \quad y = \log I,$$

$$\text{c} \dots x = t, \quad y = \log I.$$

Skúmaním narysovaných grafov rozhodnite, ktorá z rovníc (1) a (2) vyhovuje výsledkom merania. Rozhodnutie vysvetlite a zdôvodnite vhodnou matematickou úpravou vzťahu (1) alebo (2).

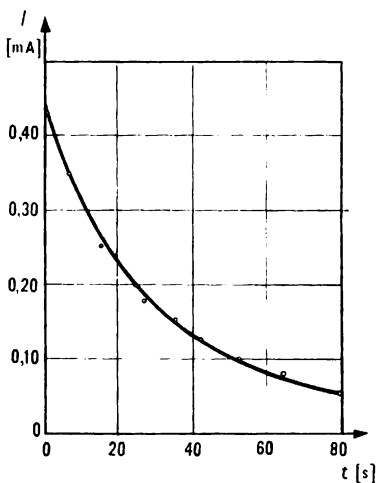
Riešenie:

1. Na zostrojenie grafu (a) závislosti $I = I(t)$ nabíjacieho prúdu I od času použijeme hodnoty zapísané v 1. a 2. stĺpci tabuľky nameraných hodnôt — tab. 15. Graf — obr. 29.

2. Zobrazená závislosť $I = I(t)$ na grafe (a) je graf

TABULKA 15

i	1	2	3	4
	I	t	$\log I$	$\log t$
	mA	s		
1	0,43	0,0	-0,37	—
2	0,35	6,7	-0,46	0,82
3	0,25	16,4	-0,60	1,21
4	0,20	24,4	-0,70	1,39
5	0,17	26,4	-0,77	1,42
6	0,15	35,3	-0,82	1,55
7	0,12	42,7	-0,92	1,63
8	0,10	50,5	-1,00	1,70
9	0,07	65,5	-1,16	1,82
10	0,05	78,9	-1,22	1,90



Obr. 29

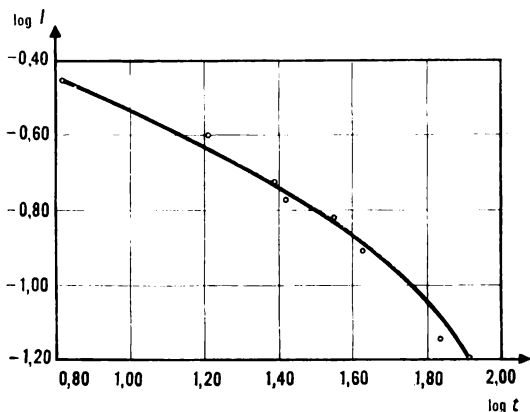
jednej z dvoch funkcií (1), (2). Logaritmovaním rovníc (1) a (2) dostaneme funkcie

$$\log I = n \log t + \log A, \quad (3)$$

$$\log I = tk \log a + \log B. \quad (4)$$

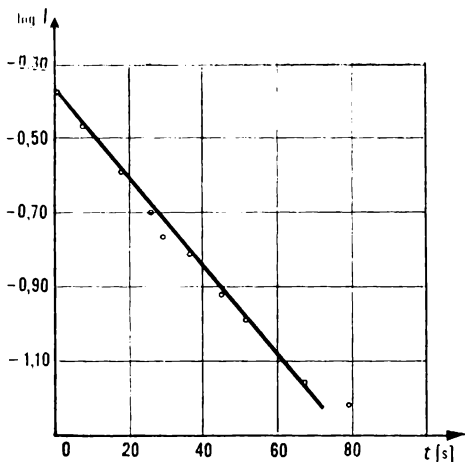
Ak graf (a) je obraz funkcie (1), potom závislosť $\log I = f(\log t)$ je lineárna; ak graf (a) je obrazom funkcie (2), je lineárna závislosť $\log I = f(t)$. O tom, aká je závislosť medzi týmito veličinami, sa presvedčíme zostrojením grafov týchto závislostí z nameraných hodnôt. Graf (b) zostrojíme pomocou hodnôt veličín uvedených v stĺpcoch 4 a 3 tabuľky, graf (c) pomocou hodnôt uvedených v stĺpcoch 2 a 3.

Graf (b) — obr. 30, graf (c) — obr. 31.



Obr. 30

Závislosť $I = I(t)$ je daná exponenciálnou funkciou $I = Ba^{kt}$, lebo sme sa presvedčili, že jej veličiny $\log I$ a t



Obr. 31

sú lineárne závislé (graf (c)), závislosť veličín $\log I$ a $\log t$ je nelineárna.

6. úloha (navrhl dr. ing. Daniel Kľuvanec, CSc.)

Dva bodové náboje Q_1 a Q_2 sú vo vákuu vo vzájomnej vzdialenosti d . Jeden z nich je kladný, druhý záporný a o ich veľkostiach platí $|Q_1| = p|Q_2|$, kde $p > 1$.

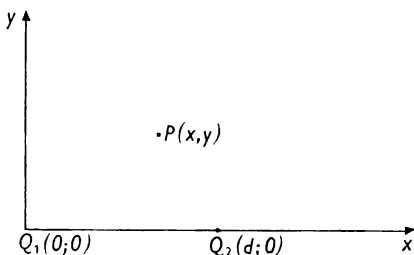
a) Dokážte, že body nulového potenciálu elektrického poľa nábojov Q_1 , Q_2 vytvárajú v každej rovine, ktorá obsahuje uvedenú dvojicu nábojov, kružnicu. Aký tvar má ekvipotenciálna plocha nulového potenciálu?

b) Určte polomer kružníc nulového potenciálu a polohu ich stredov ako funkcie p vo zvolenom súradnicovom systéme.

c) Uvážte, ako sa mení poloha stredu kružnice nulového potenciálu a jej polomer, ak p nadobúda hodnôt z intervalu $1 < p < \infty$.

Riešenie:

a) — obr. 32



Obr. 32

Body, v ktorých sú náboje, označíme rovnako Q_1, Q_2 . Súradnicovú sústavu zvolíme tak, aby bod Q_1 bol v počiatku a bod Q_2 mal súradnice $(d; 0)$. Vo všeobecnom bode $P(x; y)$ je potenciál

$$V = V_1 + V_2 = \frac{k_0 Q_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{k_0 Q_2}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}},$$

kde V_1, V_2 sú potenciály elektrických polí nábojov Q_1, Q_2 , $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, ϵ_0 je absolútna permitivita vákua. Pre $V = 0$, $|Q_1| = p|Q_2|$ dostaneme jednoduchou úpravou

$$(d-x)^2 + y^2 = \frac{x^2 + y^2}{p^2} \quad (1)$$

a ďalšími úpravami dojdeme k rovnici

$$\left(x - \frac{dp^2}{p^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{dp}{p^2 - 1}\right)^2. \quad (2)$$

Ide zrejme o rovnicu kružnice. Množinou všetkých takýchto zhodných kružníc vo všetkých rovinách obsahujúcich body Q_1, Q_2 je guľa.

b) Z (2) je zrejmé, že kružnica má polomer

$$R = f_1(p) = \frac{dp}{p^2 - 1} \quad (3)$$

a že jej stred leží na osi x vo vzdialenosti

$$m = f_2(p) = \frac{dp^2}{p^2 - 1} \quad (4)$$

od počiatku. Pretože pre každú hodnotu $p > 1$ platí $m > d$, ležia stredy všetkých kružníc (príp. gule) na osi x napravo od bodu Q_2 .

c) Funkcie (3) a (4) sú v intervale $1 < p < \infty$ klesajúce.

Pre $p \gg 1$ platí $R \approx \frac{d}{p}$, $m \approx d$, t. j. stred kružnice (príp. gule) sa sprava blíži k bodu Q_2 a polomer R klesá k nule pre $p \rightarrow \infty$. Keď sa parameter p blíži k jednotke (sprava), nadobúdajú obe funkcie ľubovoľne veľké hodnoty, čo znamená, že stred kružnice (príp. gule) sa stále vzdaluje po osi x smerom doprava a kružnica (príp. guľa) prechádza do priamky (príp. roviny).

O akú priamku (príp. rovinu) ide, zistíme z rovnice (1) pre $p = 1$. Dostaneme $x = \frac{d}{2}$, čo je rovnica osi súmernosti bodov Q_1, Q_2 ; v priestore ide o rovinu súmernosti týchto dvoch bodov.

7. úloha (navrhl ing. Igor Štubňa)

Bezťažový stav telesa je taký stav, keď vo vzťažnej sústave spojennej s telesom je tiaž telesa nulová. Lietadlo sa pohybuje v zvislej rovine po kruhovej dráhe o polomere R .

a) V ktorom bode dráhy môže byť lietadlo v bezťažovom stave? Svoje tvrdenie fyzikálne odôvodnite.

b) Akú okamžitú rýchlosť v má lietadlo v bezťažovom stave?

c) Určte dobu t' , počas ktorej bude lietadlo v tzv. približnom bezťažovom stave, kedy veľkosť a výsledného zrýchlenia lietadla splňuje podmienku $a \leq 0,1 g$, kde g je tiažové zrýchlenie. Veľkosť v rýchlosti lietadla považujte počas približného bezťažového stavu za stálu. Tiažové zrýchlenie vo všetkých bodoch dráhy pohybu lietadla je g .

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnotu $R = 1,0 \cdot 10^3 \text{ m}$.

Riešenie:

Úlohu riešime vo vzťažnej sústave spojennej s lietadlom.

a) V bezťažovom stave môže byť lietadlo len v najvyššom bode svojej dráhy, ak má rýchlosť tak veľkú, že veľkosť jeho zotrvačného zrýchlenia a_s je rovná veľkosti tiažového zrýchlenia g .

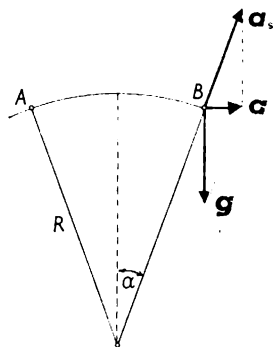
b) Z úvahy v časti a) vyplýva, že musí platiť $\frac{v^2}{R} = g$; odtiaľ určíme

$$v = \sqrt{gR}. \quad (1)$$

Pre dané hodnoty: $v = 99 \text{ m s}^{-1} \approx 360 \text{ km h}^{-1}$.

c) — obr. 33

V stave približne bezťažovom je lietadlo, ak má rýchlosť v podľa (1), pri lete po oblúku AB , v ktorého okrajových bodoch má jeho výsledné zrýchlenie a veľkosť $a = 0,1 g$.



Obr. 33

Označme opäť veľkosť jeho zotrvačného zrýchlenia $a_s = \frac{v^2}{R}$. Výsledné zrýchlenie a v okrajových bodoch má veľkosť

$$a = \frac{g}{10} = \sqrt{a_s^2 + g^2 - 2a_s g \cos \alpha}.$$

Odtiaľ určíme, keď dosadíme za a_s a za v dosadíme z (1): $\cos \alpha = 0,995$; $\alpha = 5^\circ 40'$; $2\alpha = 11^\circ 20'$; $\text{arc } 2\alpha \doteq 0,20$. Oblúk AB má dĺžku $R \text{ arc } 2\alpha$ a lietadlo po ňom preletí za dobu $t' = \frac{R}{v} \text{ arc } 2\alpha$ a po dosadení z (1)

$$t' = \sqrt{\frac{R}{g}} \arccos 2\alpha.$$

Pre dané hodnoty a vypočítanú hodnotu α vyjde $t' \doteq 2,0$ s.

b) Druhé kolo súťaže

Všetchny úlohy 2. kola navrhl dr. ing. Daniel Kluvanec, CSc.

1. úloha

Športovec počas vrhu guľou pôsobí na guľu hmotnosti m po priamočiarej dráhe dĺžky s priemernou silou F . Guľa opustí ruku športovca vo výške h nad plochou vrhačského sektoru v bode, ktorého vodorovná odľahlosť od obvodu vrhačského kruhu v smere vrhu je d_0 .

a) Určte uhol φ odklonu silového pôsobenia športovca od vodorovnej roviny tak, aby športovec dosiahol maximálnu dĺžku vrhu.

b) Predpokladajme, že športovec splnil podmienku a). Určte celkovú dĺžku vrhu, meranú v smere spojnice stredu vrhačského kruhu a miesta dopadu gule od obvodu vrhačského kruhu. Predpokladáme, že guľa sa pohybovala v zvislej rovine, ktorá prechádza stredom vrhačského kruhu a miestom dopadu gule.

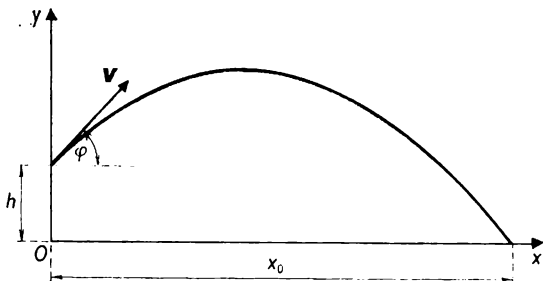
Rozmery gule neuvažujte.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $m = 7,25$ kg, $s = 2,00$ m, $h = 2,00$ m, $d_0 = 0,500$ m, $F = 310$ N.

Riešenie:

a) — obr. 34

Začiatok O súradnicovej sústavy (x, y) položíme do paty kolmice prechádzajúcej bodom, v ktorom guľa opustí



Obr. 34

ruku športovca, na rovinu vrhačského sektoru. Os x je vodorovná, orientovaná v smere vrhu, os y je orientovaná zvisle nahor. Obidve osi x, y ležia v rovine vrhu.

Gula opustí ruku športovca v bode (O, h) . Pre súradnice dráhy gule platí

$$x = vt \cos \varphi, \quad (1)$$

$$y = h + vt \sin \varphi - \frac{1}{2}gt^2, \quad (2)$$

kde v je rýchlosť gule v bode (O, h) , g tiažové zrýchlenie a t čas.

Dĺžku x_0 časti vrhu (celý vrh má dĺžku $d = d_0 + x_0$) vypočítame z (1), pričom za t dosadíme dobu t_1 letu gule od vypustenia z rúk športovca až po jej dopad na zem. Dobu t_1 vypočítame z (2), keď $y = 0$. Platí

$$t_1 = \frac{v \sin \varphi + \sqrt{v^2 \sin^2 \varphi + 2gh}}{g}$$

(druhý čas t_2 , ktorý dostaneme riešením rovnice $y = 0$, nemá fyzikálny význam, $t_2 < 0$).

Športovec dosiahne maximálnu dĺžku d vrhu, keď dĺžka

$$x_0 = \frac{v}{g} (v \sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi \sqrt{v^2 \sin^2 \varphi + 2gh}) \quad (3)$$

je maximálna.

Cieľom ďalšieho riešenia je upraviť funkciu

$$\frac{gx_0}{v} = f(\varphi)$$

na kvadratickú funkciu jednoduchú, resp. zloženej funkcie premennej φ . Za účelom tejto matematickej úpravy urobíme niekoľko substitúcií.

$$\text{Najskôr } a = v \sin \varphi \quad (a > 0). \quad (4)$$

Dosadením do (3) a úpravou máme

$$\frac{\frac{gx_0}{v}}{a \sqrt{1 - \frac{a^2}{v^2}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{a^2}}. \quad (5)$$

Druhou mocninou (5), substitúciou

$$1 + \frac{2gh}{a^2} = b^2 \quad (b > 1) \quad (6)$$

a úpravou dostaneme vzťah

$$\frac{gx_0^2}{2h} = v^2 \frac{b+1}{b-1} - \frac{2gh}{(b-1)^2}. \quad (7)$$

Poslednou substitúciou

$$b-1 = \frac{1}{c}, \quad \text{t. j.} \quad b = \frac{1}{c} + 1 \quad (c > 0), \quad (8)$$

dosadením do (7) a úpravou máme

$$c^2 - c \frac{v^2}{gh} + \frac{1}{2gh} \left(\frac{gx_0^2}{2h} - v^2 \right) = 0. \quad (9)$$

Zo (4), (6) a (8) je

$$c = \frac{v \sin \varphi}{\sqrt{v^2 \sin^2 \varphi + 2gh} - v \sin \varphi}. \quad (10)$$

Rovnica (9) je hľadaná kvadratická funkcia

$$\frac{gx_0}{v} = f(c),$$

pričom c je zložená funkcia (10) premennej φ .

Riešením (9) máme

$$c_{1,2} = \frac{v^2}{2gh} \pm \sqrt{\frac{v^4}{4g^2h^2} - \frac{1}{2gh} \left(\frac{gx_0^2}{2h} - v^2 \right)}. \quad (11)$$

Hodnota $\frac{gx_0}{v}$ a teda i x_0 dosiahne maximum, keď rovnica (9) má jeden dvojnásobný koreň, t. j.

$$c = \frac{v^2}{2gh}.$$

Jeho porovnaním s (10) a úpravou dostaneme

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{v^2}{2(v^2 + gh)}}. \quad (12)$$

Pre rýchlosť vrhu gule platí

$$\frac{1}{2}mv^2 = Fs, \quad \text{t. j.} \quad v = \sqrt{\frac{2Fs}{m}}. \quad (13)$$

Dosadením do (12) máme

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{F_s}{2F_s + mgh}}$$

a pre zadané hodnoty: $\varphi \doteq 42^\circ$.

b) Aby platilo $c = \frac{v^2}{2gh}$, musí byť v (11)

$$\frac{v^4}{4g^2h^2} - \frac{1}{2gh} \left(\frac{gx_0^2}{2h} - v^2 \right) = 0$$

a z toho

$$x_0 = \frac{v}{g} \sqrt{v^2 + 2gh}.$$

Dosadením za v z (13) a úpravou máme

$$x_0 = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2F_s}{m} \left(\frac{2F_s}{m} + 2gh \right)}.$$

Celková dĺžka vrhu

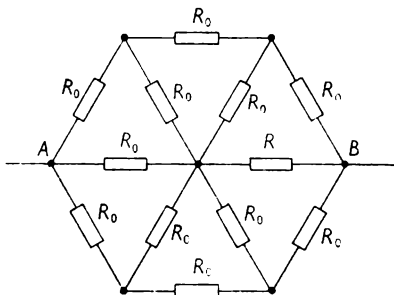
$$d = d_0 + \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2F_s}{m} \left(\frac{2F_s}{m} + 2gh \right)}.$$

Pre zadané hodnoty: $d \doteq 19,8 \text{ m}$.

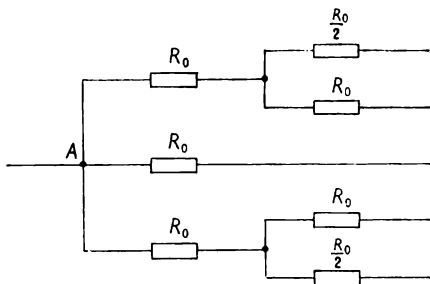
2. úloha

Dvanásť rovnakých rezistorov je zapojené tak, ako je to v schéme na obr. 35. Určte celkový odpor R medzi bodmi A a B obvodu, keď odpor jedného rezistora je R_0 .

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnotu $R_0 = 1,0 \, \Omega$.



Obr. 35



Obr. 36

Riešenie:

Úlohu je možné riešiť niekoľkými postupmi.

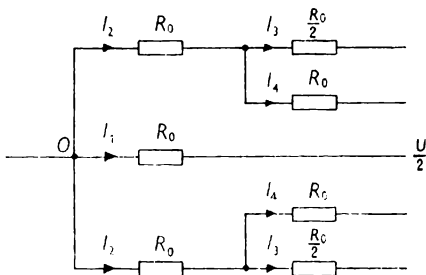
1. Rezistory v hornej a dolnej vetve nahradíme dvoma polovičnými; tým je obvod rozdelený na dve polovice, z ktorých jednu je možné nakresliť podľa obr. 36.

Výsledný odpor tejto časti je $R' = \frac{2}{5} R_0$.

Potom celkový odpor je $R = 2R' = \frac{4}{5} R_0$.

2. Predpokladajme, že obvod pripojíme v bodoch A, B na zdroj napätia U . Vzhľadom na symetriu obvodu je možné

- obvod rozdeliť na dve časti, ktoré sú zrkadlové,
- určiť napätie na polovici obvodu i prúdy, ktoré jednotlivými rezistormi tečú (obr. 37).



Obr. 37

Z napätia a odporov možno určiť prúdy

$$I_1 = I; \quad I_2 = \frac{3}{4} I; \quad I_3 = \frac{1}{2} I; \quad I_4 = \frac{1}{4} I.$$

Celkový príkon obvodu

$$RI_c^2 = R(I_1 + 2I_2)^2 = \frac{25}{4} I^2 R,$$

kde I_c je celkový prúd, ktorý tečie do obvodu ze zdroja; je rovný súčtu príkonov jednotlivých rezistorov, t.j.

$$R \frac{25}{4} I^2 =$$

$$= 2 \left(2R_0 \frac{9}{16} I^2 + R_0 I^2 + 2 \frac{R_0}{2} \frac{4}{16} I^2 + 2R_0 \frac{1}{16} I^2 \right).$$

Po úprave: $R = \frac{4}{5} R_0$.

Pre zadanú hodnotu: $R = 0,80 \, \Omega$.

3. úloha

Rovinný vákuový kondenzátor má obsah plochy dosiek S a vzdialenosť medzi doskami d . Kondenzátor pripojíme na zdroj napätia U . Medzi doskami kondenzátora vznikne elektrické pole, ktorého intenzita je menšia ako prierná intenzita vákua.

a) Určte plošnú hustotu σ náboja na doskách kondenzátora.

b) Určte intenzitu E elektrického poľa kondenzátora. Do toho istého kondenzátora vložíme dve rovinné doskové dielektriká, ktorých hrúbky sú d_1 , d_2 , $d_1 + d_2 = d$; relatívne permitivity sú ϵ_{r1} , ϵ_{r2} , prierné intenzity E_{p1} , E_{p2} . Dielektriká svojimi plochami plne prekrývajú dosky kondenzátora.

c) Určte intenzity E_1 , E_2 elektrických polí v dielektrikách.

d) Určte napätia U_1 , U_2 na prvom a na druhom dielektriku.

e) Určte kapacitu C kondenzátora s dielektrikami.

f) Určte hustotu náboja σ' na doskách kondenzátora s dielektrikami.

g) Postupne zvyšujeme napätie na kondenzátore. Ktoré dielektrikum sa v dôsledku elektrického prierazu poruší ako prvé? Určte najmenšie napätie U_p na kondenzátore, pri ktorom dôjde k prierazu.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $S = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $d = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, $U = 2,4 \cdot 10^4 \text{ V}$, $d_1 = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $d_2 = 8,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $\epsilon_{r1} = 8,0$, $\epsilon_{r2} = 3,0$, $E_{p1} = 1,5 \cdot 10^7 \text{ V m}^{-1}$, $E_{p2} = 3,5 \cdot 10^7 \text{ V m}^{-1}$.

Riešenie:

a) Pre hustotu σ náboja platí

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \epsilon_0 \frac{U}{d}.$$

b) Pre intenzitu E elektrického poľa máme

$$E = \frac{U}{d}.$$

c) Pre intenzity E_1 , E_2 polí v dielektrikách platí

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U \quad \text{a} \quad E_1 : E_2 = \epsilon_{r2} : \epsilon_{r1}.$$

Po úprave

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} d_2},$$

$$E_2 = \frac{U}{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} d_1 + d_2}.$$

d) Napätia U_1 , U_2 na dielektrikách sú

$$U_1 = E_1 d_1 = \frac{U}{d_1 + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} d_2} d_1,$$

$$U_2 = E_2 d_2 = \frac{U}{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} d_1 + d_2} d_2 .$$

e) Kapacita C kondenzátora s dielektrikami je

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} , \text{ kde } C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{S}{d_1} , C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{S}{d_2} .$$

Po úprave

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}} .$$

f) Hustota σ' náboja na doskách kondenzátora je

$$\sigma' = \frac{CU}{S} = \varepsilon_0 \frac{U}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}} .$$

g) Pre pomer intenzít E_1 a E_2 platí

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} .$$

Ak platí

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} > \frac{E_{p1}}{E_{p2}} ,$$

poruší sa ako prvé dielektrikum o relatívnej permitivitve ε_{r1} . Ak platí opačná nerovnosť, poruší sa najprv dielektrikum o relatívnej permitivitve ε_{r2} . Ak

$$\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} = \frac{E_{p1}}{E_{p2}} ,$$

dôjde k prerazu v oboch dielektrikách súčasne.

K tomu, aby došlo k prirazu prvého dielektrika, je potrebné na kondenzátore napätie U_{p1} , na priraz druhého dielektrika napätie U_{p2} . Menšia z oboch hodnôt je rovná priraznému napätiu U_p kondenzátora.

$$U_{p1} = \left(d_1 + \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} d_2 \right) E_{p1} ,$$

$$U_{p2} = \left(d_2 + \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} d_1 \right) E_{p2} .$$

Pre zadané hodnoty:

- a) $\sigma \doteq 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ C m}^{-2}$; b) $E \doteq 2,0 \cdot 10^6 \text{ V m}^{-1}$;
- c) $E_1 \doteq 9,5 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1}$, $E_2 \doteq 2,5 \cdot 10^6 \text{ V m}^{-1}$;
- d) $U_1 \doteq 3,8 \cdot 10^3 \text{ V}$, $U_2 \doteq 2,0 \cdot 10^4 \text{ V}$; e) $C \doteq 0,84 \text{ pF}$;
- f) $\sigma' \doteq 6,7 \cdot 10^{-5} \text{ C m}^{-2}$;
- g) pretože $\frac{3}{8} < \frac{3}{7}$, poruší sa ako prvé dielektrikum o relatívnej permitivitve ε_{r2} , a to pri napätí $U_p = U_{p2} \doteq 3,3 \cdot 10^5 \text{ V}$.

4. úloha

Tuhé teleso je uložené tak, že sa môže otáčať okolo pevnej osi, ktorá je totožná s osou y pravoúhlého súradnicového systému (x, y, z) pevne spojeného s telesom. So súradnicovým systémom (x, y, z) je spojená ortonormálna báza vektorov $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, pričom jednotkové vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sú orientované v smere osí x, y, z súradnicového systému. V bode P_1 telesa pôsobí sila $\mathbf{F}_1$, v bode P_2 sila $\mathbf{F}_2$, v bode P_3 sila $\mathbf{F}_3$.

a) Určte výsledný moment $\mathbf{M}$ uvedenej trojice síl vzhľadom na ľubovoľný bod na osi rotácie telesa.

b) Určte veľkosť M_0 kolmého priemetu momentu $\mathbf{M}$ do osi rotácie telesa.

c) Určte orientáciu rotácie telesa, ktorá je zapríčinená trojicou síl. Rovina vektorov $\mathbf{i}$, $\mathbf{k}$ delí priestor na dva polpriestory. Rotáciu posudzujte z polpriestoru, do ktorého je orientovaný vektor $\mathbf{j}$.

d) Určte okamžitú uhlovú rýchlosť ω telesa v čase $t > 0$ s, keď predpokladáme, že v čase $t = 0$ s bolo teleso v pokoji.

Moment zotrvačnosti telesa je $\mathcal{J}$.

Sily trenia v osi rotácie neuvažujte.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty

$$\begin{aligned} P_1(3,0; 2,0; 0,0) \text{ cm}, & \quad \mathbf{F}_1 = (5,0; 5,0; 7,0) \text{ N}, \\ P_2(-5,0; 0,0; 3,0) \text{ cm}, & \quad \mathbf{F}_2 = (10; 7,0; -6,0) \text{ N}, \\ P_3(1,0; -1,0; 6,0) \text{ cm}, & \quad \mathbf{F}_3 = (0,0; 10; 10) \text{ N}, \\ \mathcal{J} = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2, & \quad t = 10 \text{ s}. \end{aligned}$$

Riešenie:

a) Moment $\mathbf{M}$ je možné počítať k ľubovoľnému bodu na osi y .

Najjednoduchšie je počítať $\mathbf{M}$ k bodu O .

Pre výsledný moment $\mathbf{M}$ potom platí

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = \\ &= [O, P_1] \times \mathbf{F}_1 + [O, P_2] \times \mathbf{F}_2 + [O, P_3] \times \mathbf{F}_3. \end{aligned}$$

b) Veľkosť M_0 kolmého priemetu momentu $\mathbf{M}$ do orientácie osi y je

$$M_o = |\mathbf{M} \cdot \mathbf{j}| = |([O, P_1] \times \mathbf{F}_1 + [O, P_2] \times \mathbf{F}_2 + [O, P_3] \times \mathbf{F}_3) \cdot \mathbf{j}|.$$

c) Ak $\mathbf{M} \cdot \mathbf{j} > 0$, je orientácia rotácie telesa posudzovaná z polpriestoru vektora $\mathbf{j}$ kladná, t.j. proti smeru pohybu hodinových ručičiek.

Ak $\mathbf{M} \cdot \mathbf{j} < 0$, je orientácia rotácie opačná, t.j. v smere pohybu hodinových ručičiek.

d) Príčinou rotácie je len moment M_o . Platí

$$\varepsilon = \frac{M_o}{J} \quad \text{a} \quad \omega = \frac{M_o}{J} t.$$

Pre zadané hodnoty:

a) $\mathbf{M} = (-77; -31; -20) \cdot 10^{-2} \text{ N m}.$

Pri výpočte $\mathbf{M}$ k inému bodu ako O môže výst prvá a tretia súradnica momentu $\mathbf{M}$ iná.

b) $M_o = 31 \cdot 10^{-2} \text{ N m}$

c) $\mathbf{M} \cdot \mathbf{j} = -31 \cdot 10^{-2} \text{ N m} < 0$, rotácia je v smere pohybu hodinových ručičiek

d) $\omega \doteq 62 \text{ s}^{-1}.$

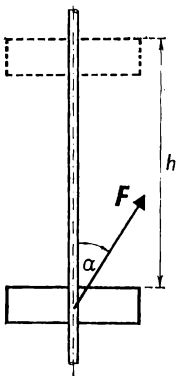
3. Úlohy kategorie C

Úlohy a řešení recenzovali dr. Marta Chytilová, CSc. a Mojmir Simerský

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Těleso o hmotnosti m se může posunovat po svislé tyči působením síly F , jejíž vektorová přímka svírá se svislým směrem ostrý úhel α (obr. 38). Působením síly F se těleso



Obr. 38

pohybuje rovnoměrným pohybem vzhůru po dráze délky h . Součinitel smykového tření při pohybu tělesa po tyči je f .

a) Znázorněte všechny síly, které na těleso při pohybu působí, a určete velikost síly F .

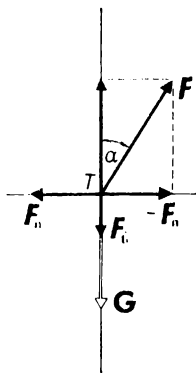
b) Určete mechanickou práci A vykonanou působením síly F na těleso po dráze h .

c) Určete poměr η práce A_0 vykonané při zvedání tělesa svisle vzhůru rovnoměrným pohybem bez zvedacího zařízení a práce A . Vyjádřete tento poměr v procentech; je to účinnost zvedacího zařízení.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $m = 2,0 \text{ kg}$, $\alpha = 45^\circ$, $h = 4,0 \text{ m}$, $f = 0,20$, $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení:

a) Při rovnoměrném posuvném pohybu tělesa po tyči vzhůru působí na těleso 4 síly, které jsou v rovnováze: síla F , která svírá se svislým směrem ostrý úhel α a je orientována vzhůru, tíhová síla G , orientovaná svisle dolů, třecí síla F_t , orientovaná svisle dolů a tlaková síla F_n , kterou působí tyč na těleso a která je vodorovná (obr. 39). Pro



Obr. 39

vyjádření této podmínky předpokládáme, že všechny síly působí v těžišti T tělesa. Zvolíme osu souřadnic x procházející tímto bodem a orientovanou svisle vzhůru.

Podle orientace sil vzhledem k ose x přiřadíme velikostem sil znaménko $+$ nebo $-$. Podle obr. 39 platí:

$$F \cos \alpha = fF \sin \alpha + mg,$$

$$F = \frac{mg}{\cos \alpha - f \sin \alpha}, \quad F > 0 \text{ pro } f < \cotg \alpha.$$

b) Pro vykonanou práci platí

$$A = hF \cos \alpha = \frac{mgh}{1 - f \tg \alpha}.$$

c) Při zvednutí tělesa po dráze h rovnoměrným pohybem se vykoná práce $A_0 = mgh$, takže zvedací zařízení má účinnost

$$\eta = \frac{A_0}{A} = 1 - f \tg \alpha.$$

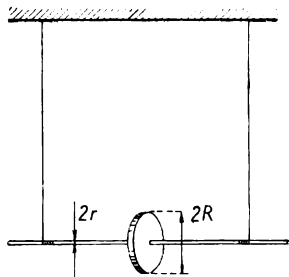
Pro dané hodnoty vztah $f < \cotg \alpha$ je splněn.

$$F = 35 \text{ N}, \quad A = 98 \text{ J}, \quad \eta = 80 \text{ } \%$$

2. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Maxwellovo kyvadlo je masivní kotouč o hmotnosti m a poloměru R upevněný na čepu o poloměru r , na jehož koncích jsou navinuty dvě niti stejné délky. Soustava je zavěšena na nitích na vodorovném ramenu (obr. 40).

Spustíme-li soustavu z nejvyšší polohy, koná kotouč s čepem posuvný pohyb svisle dolů a současně otáčivý pohyb kolem vodorovné osy. Po dosažení nejnižší polohy stoupá soustava vzhůru opět za současného otáčení kotouče kolem vodorovné osy.



Obr. 40

a) Určete zrychlení a posuvného pohybu kyvadla dolů. Moment setrvačnosti a hmotnost čepu, hmotnost nití a tření neuvažujeme. Za těchto podmínek je posuvný pohyb kotouče a čepu rovnoměrně zrychlený, vyloučí-li se krajní polohy kyvadla. Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k vodorovné ose je $\mathcal{J} = \frac{mR^2}{2}$.

b) Jak velkou silou F je napínána každá nit při pohybu kotouče s čepem dolů? Změní se velikost této síly, pohybuje-li se kotouč s čepem vzhůru?
Řešte úlohu obecně a potom pro hodnoty: $m = 1,0 \text{ kg}$, $R = 50 \text{ mm}$, $r = 4,0 \text{ mm}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení:

a) V nejvyšší poloze kotouče s čepem je kyvadlo v klidu, potenciální energie tíhová soustavy je maximální, její kinetická energie je nulová. Za dobu t po uvolnění soustavy je hmotný střed kotouče s čepem vzdálen od své nejvyšší polohy o délku x . Rychlost hmotného středu soustavy má v tomto okamžiku velikost v , zrychlení velikost a , úhlová rychlost má velikost ω , přičemž platí

$$x = \frac{1}{2}at^2, \quad v = at, \quad \omega = \frac{v}{r} = \frac{at}{r}. \quad (1)$$

V uvažované poloze má soustava kinetickou energii

$$W_k = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad J = \frac{mR^2}{2} \quad (2)$$

a její potenciální energie tíhová je o hodnotu $\Delta W_p = mgx$ menší než v nejvyšší poloze. Poněvadž vzhledem k Zemi nedošlo ke změně celkové energie soustavy, platí rovnost $W_k = \Delta W_p$. Z této rovnosti dostaneme po dosazení z (1) a (2) vztah, z něhož vyjádříme

$$a = \frac{2r^2g}{2r^2 + R^2}.$$

b) Označme $\varepsilon = \frac{a}{r}$ velikost úhlového zrychlení otáčivého pohybu a F velikost síly, která napíná každou z obou nití. Druhý pohybový zákon pro otáčivý pohyb kotouče s čepem vyjádříme vztahem

$$2Fr = J\varepsilon,$$

z něhož určíme

$$F = \frac{mR^2g}{2(2r^2 + R^2)} = \text{konst.}$$

Velikost síly, která napíná niti, je stejná pro pohyb soustavy dolů i vzhůru.

Pro dané hodnoty: $a \doteq 0,13 \text{ m s}^{-2}$, $F \doteq 4,9 \text{ N}$.

3. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Měsíc obíhá kolem Země průměrnou rychlostí $v_M = 1,02 \text{ km s}^{-1}$. Průměrná vzdálenost Měsíce od Země je $60,3$ poloměrů Země R_Z . Předpokládáme, že Měsíc koná rovnoměrný pohyb po kružnici rychlostí v_M . Z těchto dat určete:

a) rychlost v_{D1} , kterou by se pohybovala umělá družice Země v těsné blízkosti jejího povrchu, a rychlost v_{D2} , kterou by se pohybovala umělá družice Země po kruhové dráze ve vzdálenosti R_Z od povrchu Země;

b) poloměr dráhy R_S a rychlost v_S stacionární umělé družice Země. Stacionární umělá družice obíhá kolem Země po kruhové dráze v rovině rovníku a zůstává stále nad tímž místem na povrchu Země.

c) Narýsujte model kruhových drah tří uvažovaných umělých družic Země a kruhové dráhy Měsíce za předpokladu, že všechna tři tělesa obíhají kolem Země v téže rovině. Poloměr dráhy Měsíce zobrazíte úsečkou délky 100 mm .

Řešení:

a) Označíme T_M oběžnou dobu Měsíce, $R_M = 60,3 R_Z$ poloměr jeho oběžné dráhy, T_{D1} oběžnou dobu umělé družice, která by obíhala kolem Země po kruhové dráze o poloměru $R_{D1} = R_Z$ v těsné blízkosti jejího povrchu, T_{D2} oběžnou dobu umělé družice obíhající kolem Země po kruhové dráze o poloměru $R_{D2} = 2R_Z$.

Pro rychlosti v_M a v_{D1} platí podle vztahu pro rovnoměrný pohyb po kružnici

$$v_M = \frac{2\pi R_M}{T_M}, \quad (1)$$

$$v_{D1} = \frac{2\pi R_{D1}}{T_{D1}} = \frac{2\pi R_Z}{T_{D1}}. \quad (2)$$

Podle třetího Keplerova zákona platí pro Měsíc a první uvažovanou družici

$$\left(\frac{T_M}{T_{D1}}\right)^2 = \left(\frac{R_M}{R_Z}\right)^3. \quad (3)$$

Ze soustavy rovnic (1), (2) dostaneme

$$v_{D1} = v_M \cdot \frac{T_M}{T_{D1}} \cdot \frac{R_Z}{R_M}$$

a po dosazení za $\frac{T_M}{T_{D1}}$ z (3)

$$v_{D1} = v_M \sqrt{\frac{R_M}{R_Z}}.$$

Pro danou hodnotu v_M a pro $R_M = 60,3 R_Z$ vyjde $v_{D1} \doteq 7,92 \text{ km s}^{-1}$.

Podobně pro druhou uvažovanou družici:

$$v_{D2} = v_M \sqrt{\frac{R_M}{R_{D2}}} = v_M \sqrt{\frac{R_M}{2R_Z}} = v_{D1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a pro dané hodnoty $v_{D2} \doteq 5,60 \text{ km s}^{-1}$.

b) Oběžná doba stacionární umělé družice je

$$T_S = 23 \text{ h } 56 \text{ min} \doteq 8,62 \cdot 10^4 \text{ s}.$$

Podle třetího Keplerova zákona platí pro Měsíc a stacionární družici

$$\left(\frac{T_S}{T_M}\right)^2 = \left(\frac{R_S}{R_M}\right)^3. \quad (4)$$

Pro rychlost stacionární družice platí

$$v_S = \frac{2\pi R_S}{T_S} \quad (5)$$

Ze soustavy rovnic (4), (1) vypočítáme, považujeme-li poloměr R_M dráhy Měsíce za známý:

$$R_S = \sqrt[3]{\frac{T_S^2 v_M^2 R_M}{4\pi^2}}$$

a dosazením do (5)

$$v_S = \sqrt[3]{\frac{2\pi v_M^2 R_M}{T_S}}$$

Pro dané hodnoty a pro $R_M = 60,3 R_Z \doteq 60,3 \cdot 6,38 \cdot 10^3 \text{ km} \doteq 3,85 \cdot 10^5 \text{ km}$ vyjde $R_S \doteq 4,23 \cdot 10^4 \text{ km} \doteq 6,63 R_Z$, $v_S \doteq 3,08 \text{ km s}^{-1}$.

c) Podle zadání: $R_M \dots 100 \text{ mm}$, pak podle vypočítaných hodnot $R_{D1} = R_Z \dots 1,7 \text{ mm}$, $R_{D2} \dots 3,3 \text{ mm}$, $R_S \dots 11 \text{ mm}$.

4. úloha (navrhl Milan Rádl)

Vnitřní průřez koryta o délce l je rovnoramenný lichoběžník, jehož dolní základna je a , horní c a výška h . Koryto má vodorovné dno a je zcela naplněno vodou o hustotě ρ .

a) Určete tlakovou sílu F_1 , kterou působí voda na dno, a tlakové síly F_2 a F_3 , jimiž působí voda na šikmé podélné stěny koryta.

b) Určete výslednici F těchto sil a porovnejte s tíhou G

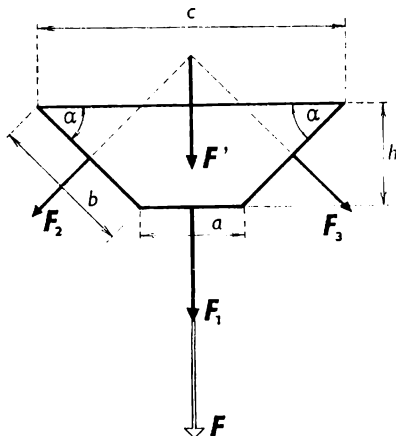
vody v korytě. Jak se uplatní tlakové síly F_4 a F_5 , kterými působí voda na svislé příčné stěny koryta?

Řešte úlohu obecně a potom pro hodnoty: $l = 10,0$ m, $a = 1,0$ m, $c = 3,0$ m, $h = 1,0$ m, $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení:

a) Tlaková síla F_1 , která působí na dno koryta a je orientována svisle dolů, má velikost

$$F_1 = h\rho g l a.$$



Obr. 41

Tlakové síly F_2 a F_3 , které jsou kolmé k šikmým stěnám koryta a orientované z koryta ven (obr. 41), mají stejné velikosti

$$F_2 = F_3 = \rho b l, \quad (1)$$

kde p značí průměrný tlak vody u šikmé stěny, b šířku této stěny. Poněvadž hydrostatický tlak je přímo úměrný hloubce pod povrchem kapaliny, je

$$p = \frac{1}{2} \rho h g. \quad (2)$$

Délku b vyjádříme pomocí věty Pythagorovy; pak dosazením za p , b do (1) dostaneme

$$F_2 = F_3 = \frac{1}{4} \rho h g l \sqrt{4h^2 + (c - a)^2}.$$

b) Síly F_2 a F_3 rozložíme na složky vodorovné a svislé. Vodorovné složky nepřispívají k výslednici (jsou stejně velké a navzájem opačně orientované), svislé složky jsou stejně velké a jejich výslednice má velikost

$$F' = 2F_2 \cos \alpha, \quad (3)$$

kde α značí ostrý úhel, který šikmé stěny koryta svírají s vodorovnou rovinou. Pomocí obr. 41 vyjádříme

$$\cos \alpha = \frac{c - a}{2b}. \quad (4)$$

Dosazením z (1) a (4) do (3) s přihlédnutím k (2) dostaneme po úpravě

$$F' = \frac{1}{2} \rho h g l (c - a).$$

Výslednice F sil F_1 a F' , orientovaná svisle dolů, má velikost

$$F = F_1 + F' = \frac{1}{2} \rho g l (c + a). \quad (5)$$

Voda v korytě má objem

$$V = \frac{1}{2}(a + c) hl$$

a tíhu o velikosti

$$G = V \rho g = \frac{1}{2}(a + c) hl \rho g. \quad (6)$$

Z (5) a (6) je zřejmé, že $F = G$.

Tlakové síly F_4 , F_5 jsou vodorovné a navzájem opačně orientované, takže k výslednici nepřispívají; projevují se jen namáháním příčných stěn koryta.

Pro zadané hodnoty: $F_1 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N}$, $F_2 = F_3 = 7,1 \cdot 10^4 \text{ N}$, $F = G = 2,0 \cdot 10^5 \text{ N}$.

5. úloha (navrhli Lubomír Vašek, CSc., a dr. Marta Chytilová)

Ocelová koule o objemu V a hustotě ρ_1 plove ve rtuti o hustotě ρ_2 .

a) Určete poměr p objemu V_1 části koule ponořené ve rtuti a objemu V celé koule. Vyjádřete poměr p v procentech. Neuvažujeme vztlakovou sílu, kterou působí vzduch nad volným povrchem rtuti na kouli.

b) Nad rtuť nalejeme do nádoby takový objem vody hustoty ρ_0 , aby koule byla ponořena pod povrchem vody. Koule vystoupí částí objemu V'_1 ze rtuti. Určete poměr p' objemu V'_1 a objemu koule V . Vyjádřete poměr p' v procentech.

c) Řešte úlohu a) tak, že uvážíte také vztlakovou sílu, kterou působí vzduch o hustotě ρ nad volným povrchem rtuti na kouli. Odhadněte relativní chybu, které se dopustíme, zanedbáme-li vzduch nad povrchem rtuti.

Řešte úlohu obecně a potom pro hodnoty:

$$\rho_1 = 7,700 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}, \quad \rho_2 = 13,600 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}, \quad \rho_0 = 1,000 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}, \quad \rho = 1,280 \text{ kg m}^{-3}.$$

Řešení:

a) — obr. 42

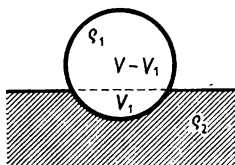
Podle zákona Archimédova

$$V \rho_1 g = V_1 \rho_2 g,$$

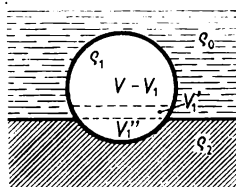
odtud

$$V_1 = V \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (1)$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot 100 \%.$$



Obr. 42



Obr. 43

b) — obr. 43

Objem části ponořené ve rtuti označíme V_1'' ; potom

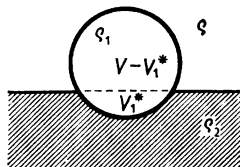
$$V_1 = V_1' + V_1''. \quad (2)$$

Při rovnováze sil působících na kouli platí

$$V \rho_1 g = V_1'' \rho_2 g + (V - V_1'') \rho_0 g.$$

Za V'' dosadíme z (2), za V_1 z (1); po úpravě dostaneme

$$\frac{V'_1}{V} = \frac{\varrho_0(\varrho_2 - \varrho_1)}{\varrho_2(\varrho_2 - \varrho_0)} \cdot 100 \text{ } \%.$$



Obr. 44

c) — obr. 44

Ponořená část má objem V_1^* . Pak platí

$$V\varrho_1g = V_1^*\varrho_2g + (V - V_1^*)\varrho g.$$

Odtud určíme poměr

$$\frac{V_1^*}{V} = \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_2 - \varrho} \cdot 100 \text{ } \%.$$

Relativní chybu označíme δ a vyjádříme ji v procentech:

$$\delta = \frac{\frac{V_1}{V} - \frac{V_1^*}{V}}{\frac{V_1}{V}} = \frac{\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_2 - \varrho}}{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}} = \frac{\varrho(\varrho_2 - \varrho_1)}{\varrho_1(\varrho_2 - \varrho)},$$

$$\delta = \frac{\varrho(\varrho_2 - \varrho_1)}{\varrho_1(\varrho_2 - \varrho)} \cdot 100 \text{ } \%.$$

Pro zadané hodnoty: $\frac{V_1}{V} \doteq 56,62 \text{ } \%$, $\frac{V'_1}{V} \doteq 3,44 \text{ } \%$,

$$\frac{V_1^*}{V} \doteq 56,61 \text{ } \%, \delta \doteq 0,01 \text{ } \%.$$

6. úloha (navrhl Alois Kleveta)

Určení měrného tepla oceli

Příprava úlohy:

Měrné teplo c látky definujeme vztahem

$$c = \frac{Q}{m \Delta t}.$$

Měrné teplo je podíl tepla dodaného tělesu z dané látky a součinu hmotnosti tělesa a příslušného zvýšení teploty tělesa. Předpokládáme, že při tom nenastane změna skupenství látky. Jednotkou měrného tepla je $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$. Měrné teplo určíme kalorimetrem.

Označme K tepelnou kapacitu kalorimetru. Jestliže kalorimetr přijme teplo Q_1 a jeho teplota se přitom zvýší o Δt_1 , platí $Q_1 = K \Delta t_1$. Odtud $K = \frac{Q_1}{\Delta t_1}$; tepelnou kapacitu K

kalorimetru určíme jako podíl tepla Q_1 dodaného kalorimetru a příslušného zvýšení teploty Δt_1 . Jednotkou tepelné kapacity K kalorimetru je J K^{-1} .

Při měření použijeme vodu jako kalorimetrickou kapalinu, protože voda ocel nerozpouští, ani s ní chemicky nereaguje. Označme hmotnost vody v kalorimetru m_1 , její počáteční teplotu t_1 a měrné teplo c_1 ; označme hmotnost ocelového předmětu m , jeho počáteční teplotu t_2 , $t_2 > t_1$, měrné teplo oceli c . Ponoříme-li ocelový předmět do vody v kalorimetru, předpokládáme, že nastane výměna tepla v izolované soustavě, kterou tvoří ocelový předmět, voda a kalorimetr. Výslednou teplotu označme t , $t_1 < t < t_2$. Voda a kalorimetr přijmou teplo $(m_1 c_1 + K)(t - t_1)$; ocelový předmět odevzdá teplo $m c (t_2 - t)$. Platí tedy:

$$(m_1 c_1 + K)(t - t_1) = m c (t_2 - t),$$

$$c = \frac{(m_1 c_1 + K)(t - t_1)}{m(t_2 - t)} . \quad (1)$$

Měrné teplo c určíme ze vzorce (1), jestliže známe hodnoty všech veličin na pravé straně vzorce.

V tabulkách MFChT (vydání 1971) č. 49 vyhledáme pro vodu měrné teplo c_{20} . Pokud teplota vody v kalorimetru se během měření příliš neliší od $20\text{ }^\circ\text{C}$, dosadíme $c_1 = c_{20} = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Hodnoty ostatních veličin ve vzorci (1) určíme měřením: určíme tepelnou kapacitu K kalorimetru, změříme hmotnost m_1 vody v kalorimetru, hmotnost m_2 ocelového předmětu, teploty t_1, t_2, t .

K měření potřebujeme tedy tyto pomůcky: ocelový předmět, směšovací kalorimetr s míchačkou, teploměr se stupnicí, jejíž nejmenší dílek je $0,1\text{ }^\circ\text{C}$, váhy k určení hmotnosti s přesností $0,1\text{ g}$.

Postup měření:

1. Určete tepelnou kapacitu K kalorimetru.

Do kalorimetru nalejte (studenou) vodu o hmotnosti m_1 , uzavřete kalorimetr a za stálého míchání měřte teplotu vody v minutových intervalech (asi po dobu 10 min), až se teplota ustálí. Měření zapište do tab. 1. Změřte teplotu t_1 vody a kalorimetru. Pak do kalorimetru přilijte vodu o hmotnosti m_2 a o teplotě $t_2, t_2 > t_1$. Za stálého míchání měřte opět teplotu vody v minutových intervalech, až se teplota ustálí (tab. 2). Změřte teplotu t soustavy, $t_1 < t < t_2$. Teplo přijaté vodou o hmotnosti m_1 a kalorimetrem se rovná teplo odevzdanému vodou o hmotnosti m_2

$$(m_1 c_1 + K)(t - t_1) = m_2 c_1 (t_2 - t),$$

$$K = m_2 c_1 \frac{t_2 - t}{t - t_1} - m_1 c_1 . \quad (2)$$

2. Změřte hodnoty zbývajících veličin ve vzorci (1).

Změřte hmotnost m ocelového předmětu.

Předmět vložte do vhodné zkumavky tak, abyste ho mohli rychle a bezpečně vyjmout. Zkumavku upevněnou na stojanu ponořte do vodní lázně, jejíž teplotu udržujete stálou, blízkou teplotě varu vody. Změřte ustálenou teplotu vzduchu ve zkumavce, která se rovná teplotě t_2 předmětu. Změřte hmotnost m_1 vody, kterou nalejete do kalorimetru. Jako v případě 1 měřte teplotu vody v minutových intervalech, až se teplota soustavy ustálí (tab. 3); změřte teplotu t_1 vody a kalorimetru.

Ocelový předmět vyjměte ze zkumavky a rychle ponořte do vody v kalorimetru. Měřte teplotu vody v půlminutových intervalech, až dosáhne maximální hodnoty t (tab. 4). Aby tepelné ztráty vzniklé výměnou tepla mezi kalorimetrem a okolím byly pokud možno malé, volíte teplotu t_1 tak, aby teplota vzduchu v místnosti byla asi uprostřed mezi teplotami t_1 a t .

Naměřené hodnoty veličin použijte k výpočtu měrného tepla c podle vzorce (1). Nalezenou číselnou hodnotu správně zaokrouhlete podle přesnosti měření hodnot ostatních veličin.

Závěr:

Podle teplot vody použité v kalorimetru při měření posuďte, zda byl splněn předpoklad stálosti měrného tepla vody vyjádřený konstantou c_{20} .

Posuďte, jak byl splněn předpoklad, že teplota vzduchu v místnosti, kde jste měření konali, byla asi uprostřed mezi teplotami t_1 a t .

Podle tabulek 1—4 sestrojte na milimetrový papír grafy změny teploty v čase. Podle grafů posuďte, jak měření přispěla ke stanovení konečných teplot soustavy.

Posuďte, proč je účelnější ohřívat ocelový předmět v hor-

kém vzduchu v suché zkumavce než přímo v horké vodní lázni. Posudte, které okolnosti řešení úlohy přispěly k tomu, že jsme mohli předpokládat platnost kalorimetrické rovnice a použít při řešení úlohy vztahů (1) a (2) z ní vyvozených. Porovnejte nalezenou hodnotu c měrného tepla oceli s hodnotou c_{20} chemicky čistého železa (MFChT tab. 34). Výsledky svých úvah запиšte.

Řešení:

1. Určení tepelné kapacity kalorimetru

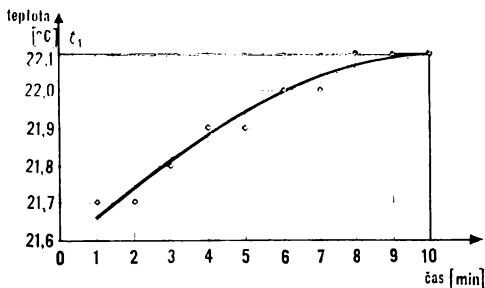
Kalorimetr s míchačkou měl hmotnost 104,0 g, kalorimetr se studenou vodou měl hmotnost 250,7 g. Studená voda měla tedy hmotnost $m_1 = 250,7 \text{ g} - 104,0 \text{ g} = 146,7 \text{ g}$.

TABULKA 16

čas min	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
teplota °C	21,7	21,7	21,8	21,9	21,9	22,0	22,0	22,1	22,1	22,1

Za stálého míchání byla teplota vody měřena v minutových intervalech, až se ustálila na hodnotě $t_1 = 22,1 \text{ °C}$ (tabulka č. 16, graf na obr. 45).

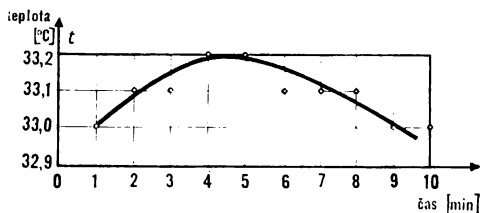
Pak byla do kalorimetru přilita voda o hmotnosti m_2 a teplotě $t_2 = 40,0 \text{ °C}$. Hmotnost m_2 byla opět stanovena vážením. Kalorimetr se studenou vodou měl hmotnost 250,7 g, kalorimetr se směsí vody teplejší a studenější měl hmotnost 509,9 g. Odtud $m_2 = 509,9 \text{ g} - 250,7 \text{ g} = 259,2 \text{ g}$. Průběh teploty směsi vody při stálém míchání je zaznamenán na tabulce č. 17 a graficky znázorněn na obr. 46. Tím byla určena hodnota $t = 33,2 \text{ °C}$.



Obr. 45

TABULKA 17

čas min	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
teplota °C	33,0	33,1	33,1	33,2	33,2	33,1	33,1	33,1	33,0	33,0



Obr. 46

Z uvedených hodnot vychází podle vztahu (2) v zadání:

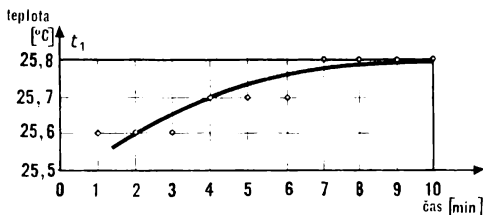
$$K \doteq 50 \text{ J K}^{-1}.$$

2. Určení měrného tepla ocelového válečku

K určení měrného tepla ocelového válečku podle vztahu (1) v zadání byly změřeny následující veličiny:

TABULKA 18

čas min	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
teplota °C	25,6	25,6	25,6	25,7	25,7	25,7	25,8	25,8	25,8	25,8

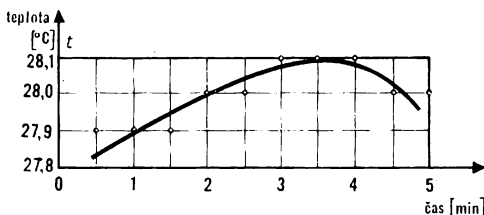


Obr. 47

- a) hmotnost válečku: $m = 100,2 \text{ g}$;
 b) hmotnost vody v kalorimetru: $m_1 = 324,2 \text{ g}$; kalorimetr s míchačkou (o hmotnosti $104,0 \text{ g}$), vodou a válečkem měl hmotnost $528,4 \text{ g}$, neboli $m_1 = 528,4 \text{ g} - 104,0 \text{ g} - 100,2 \text{ g} = 324,2 \text{ g}$;
 c) počáteční teplota válečku: $t_2 = 96,0 \text{ °C}$;
 d) teplota t_1 vody v kalorimetru byla měřena v minutových intervalech; naměřené hodnoty jsou v tabulce č. 18 a v grafu na obr. 47; ustálená hodnota je podle toho $t_1 = 25,8 \text{ °C}$;
 d) výslednou teplotu soustavy tvořené ocelovým válečkem, vodou a kalorimetrem určíme z průběhu teploty v závislosti na čase (tab. č. 19, graf na obr. 48); výsledná teplota soustavy: $t = 28,1 \text{ °C}$.
 Z naměřených hodnot vyjde pro měrné teplo ocelového válečku:

TABULKA 19

čas min	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
teplota °C	27,9	27,9	27,9	28,0	28,0	28,1	28,1	28,1	28,0	28,0



Obr. 48

$$c = 4,8 \cdot 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Závěr:

Měření proběhlo při teplotě místnosti 26°C . Předpoklad stálosti měrného tepla vody byl v mezích přesnosti použité měřicí metody splněn.

Druhý předpoklad správnosti měření, který požaduje, aby teplota vzduchu v místnosti byla asi uprostřed mezi teplotami t_1 a t , byl splněn aspoň přibližně.

Z grafů na obr. 45 a 47 vyplývá rovnoměrnost vzrůstu teploty chladnější vody s časem. Za konečnou teplotu chladnější vody byla vzata teplota, jejíž hodnota byla konstantní v nejdelším časovém intervalu (ke konci měření). Z grafů na obr. 46 a 48 byla určena konečná teplota směsi jako nejvyšší hodnota zjištěná v průběhu měření.

Způsob ohřívání ocelového předmětu v horkém vzduchu v suché zkumavce má vzhledem k ohřívání v horké vodní

lázni tu výhodu, že v prvním případě na ohřátém válečku neulpívají kapky vody, popř. sražených par, které by svou přítomností v kalorimetru, při použití druhého způsobu ohřívání, vnášely do měření nepřesnost. Nevýhodou ohřívání válečku v horkém vzduchu je ovšem to, že k ohřevu je zapotřebí delší doby, má-li být dosaženo vyšší teploty; přesnost měření měrného tepla kovu však právě vyžaduje, aby bylo dosaženo většího teplotního rozdílu. Předpokladem platnosti kalorimetrické rovnice a vztahů z ní vyplývajících je požadavek měření v soustavě tepelně izolované. Omezení vlivu tepelných ztrát vznikajících výměnou tepla mezi kalorimetrem a okolím bylo dosaženo volbou teploty t_1 tak, aby teplota vzduchu v místnosti byla aspoň přibližně uprostřed mezi teplotami t_1 a t .

Naměřená hodnota měrného tepla ocelového válečku dobře souhlasí s hodnotou uváděnou v tabulkách pro ocel s obsahem 1 % uhlíku; lze proto konstatovat, že měření bylo provedeno pečlivě a že ocel, z níž je váleček zhotoven, obsahuje asi 1 % uhlíku. Měrné teplo čistého železa je menší, a to asi $4,5 \cdot 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

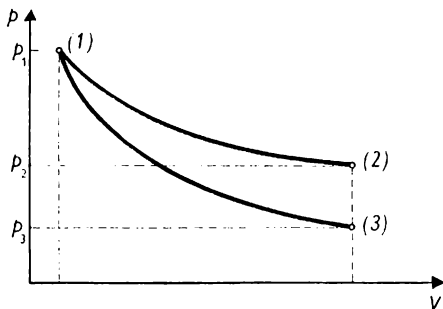
7. úloha (navrhl Lubomír Vašek, CSc.)

Dusík dané hmotnosti m , počátečního tlaku p_1 [obr. 49, bod (1)] a teploty T_1 zvětšil objem z hodnoty V_1 na hodnotu V_2 , $V_2 = nV_1$, n celé kladné číslo, dějem izotermickým [(1) — (2)] nebo adiabatickým [(1) — (3)].

a) Určete rozdíl tlaků plynu $\Delta p = p_2 - p_3$ na konci prvního a druhého děje.

b) Určete změnu střední kvadratické rychlosti molekul plynu, která nastane během děje izotermického a během děje adiabatického.

c) Určete, jak se změní počet molekul v jednotce objemu při ději izotermickém a při ději adiabatickém.



Obr. 49

Dusík považujte za dokonalý plyn.

Řešte úlohu obecně a potom pro hodnoty: $p_1 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $T_1 = 300 \text{ K}$, molová hmotnost dusíku $M_m = 28 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$, Poissonova konstanta $\kappa = 1,4$, $n = 4$.

Řešení:

a) Pro izotermický děj platí

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_1}{n}$$

a pro adiabatický děj

$$p_3 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa = p_1 \left(\frac{1}{n} \right)^\kappa, \quad (1)$$

takže

$$\Delta p = p_2 - p_3 = \frac{p_1}{n} \left[1 - \left(\frac{1}{n} \right)^{\kappa-1} \right].$$

b) Při ději izotermickém se střední kvadratická rychlost molekul nemění.

Při ději adiabatickém platí pro střední kvadratické rychlosti při teplotách T_1 a T_3 , kde T_1 značí teplotu plynu ve stavu

(1), T_3 jeho teplotu ve stavu (3):

$$v_{k1} = \sqrt{\frac{3RT_1}{M_m}}, \quad v_{k3} = \sqrt{\frac{3RT_3}{M_m}}, \quad (2)$$

kde R značí univerzální plynovou konstantu.

Ze stavové rovnice vyjádříme

$$T_3 = \frac{p_3 V_2}{p_1 V_1} T_1$$

a s přihlédnutím k (1)

$$T_3 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa} \cdot \frac{V_2}{V_1} T_1 = \left(\frac{1}{n}\right)^{\kappa-1} \cdot T_1. \quad (3)$$

Vyjádříme nyní změnu $\Delta v_k = v_{k1} - v_{k3}$ s použitím (2), za T_3 dosadíme z (3). Po úpravě dostaneme

$$v_k = \sqrt{\frac{3RT_1}{M_m}} \left[1 - \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^{\kappa-1}} \right].$$

c) Počet molekul v jednotce objemu plynu ve stavech (1), (2), (3) označíme n_1, n_2, n_3 .

Při ději izotermickém je počet molekul v jednotce objemu přímo úměrný tlaku plynu:

$$n_2 = n_1 \frac{p_2}{p_1} = n_1 \frac{V_1}{V_2} = n_1 \frac{1}{n},$$

takže

$$n_1 - n_2 = n_1 \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{p_1}{kT_1} \left(1 - \frac{1}{n} \right), \quad (4)$$

kde k značí konstantu Boltzmannovu.
Při ději adiabatickém platí

$$n_1 = \frac{p_1}{kT_1}, \quad n_3 = \frac{p_3}{kT_3}.$$

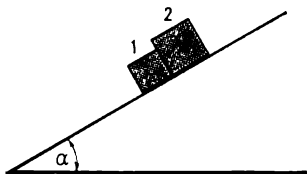
Když za T_3 dosadíme z (3) a za p_3 z (1) a vypočítáme rozdíl $n_1 - n_3$, dostaneme výsledek shodný s (4). To je samozřejmé, protože ve stavech (2) a (3) má plyn stejný objem a (podle zadání) stejnou hmotnost, tedy i stejný počet molekul v jednotce objemu.

Pro zadané hodnoty: $\Delta p \doteq 1,1 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, $\Delta v_k \doteq 1,3 \cdot 10^2 \text{ m s}^{-1}$, $n_1 - n_2 = n_1 - n_3 \doteq 1,8 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$.

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Na nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel α , jsou dvě tělesa tvaru kvádrů o hmotnostech m_1 a m_2 ; tělesa se navzájem dotýkají bočními stěnami (obr. 50). Součinitelé smykového tření mezi podložkou a tělesy jsou f_1 a f_2 .



Obr. 50

a) Z počáteční klidové polohy se tělesa pohybují po nakloněné rovině působením tíhového pole. Jak velkou silou

přítom na sebe navzájem působí? Proveďte diskusi.

b) Určete úhel α_1 , při kterém jsou tělesa na nakloněné rovině v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Po obecném vyřešení úlohy řešte ve zvláštním případě pro hodnoty $\alpha = 30^\circ$, $m_1 = 1,0$ kg, $m_2 = 2,0$ kg, $f_1 = 0,25$, $f_2 = 0,10$, $g = 10$ m s⁻².

Řešení:

a) Ve směru pohybu po nakloněné rovině působí na každé z obou těles složka tíhové síly a třecí síla; jejich výslednice F_1 , F_2 mají velikosti:

$$F_1 = m_1 g \sin \alpha - f_1 m_1 g \cos \alpha,$$

$$F_2 = m_2 g \sin \alpha - f_2 m_2 g \cos \alpha.$$

Na těleso jako celek působí výsledná síla $F_1 + F_2$ a dává tělesu o hmotnosti $m_1 + m_2$ zrychlení a .

$$F_1 + F_2 = (m_1 + m_2) a. \quad (1)$$

Označme F sílu, kterou na sebe navzájem působí dotýkající se tělesa. Na těleso o hmotnosti m_1 působí tedy síla $F_1 + F$ a těleso se pohybuje po nakloněné rovině se zrychlením a . Platí

$$F_1 + F = m_1 a. \quad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) dostaneme

$$F = \frac{m_1 m_2 g (f_1 - f_2) \cos \alpha}{m_1 + m_2}.$$

Pro $f_1 > f_2$ působí těleso o hmotnosti m_2 na těleso o hmotnosti m_1 silou orientovanou šikmo dolů; pro $f_1 \leq f_2$ nepůsobí na sebe tělesa vnějšími silami.

b) Tělesa jsou na nakloněné rovině v rovnoměrném

přímočarém pohybu, platí-li $a = 0$, neboli, s přihlédnutím k (1),

$$\frac{F_1 + F_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Za F_1 , F_2 dosadíme, položíme $\alpha = \alpha_1$ a po úpravě dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Tělesa jsou tedy na nakloněné rovině v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, platí-li $\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \alpha_1$.

Pro zadané hodnoty: $F = 0,87 \text{ N}$, $\alpha_1 = 8,5^\circ$, $\alpha \leq 8,5^\circ$.

2. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

V klidné vodě plavou dvě lodi v rovnoběžných směrech proti sobě; jejich rychlosti mají stejnou velikost v_0 . Při setkání si vymění za plavby dvě tělesa stejné hmotnosti m . Počáteční hmotnosti lodí jsou stejné $M + m$. Směr plavby lodí se při výměně těles nemění.

a) Výměna těles proběhne tak, že z jedné lodi je vrženo těleso kolmo ke směru rychlosti v_0 na druhou loď a potom stejným způsobem je těleso z druhé lodi vrženo na první. Určete výsledné rychlosti lodí.

b) Výměna proběhne současnými vrhy obou těles z jedné a z druhé lodi. Určete výsledné rychlosti lodí.

c) Určete velikosti počáteční relativní rychlosti v_{r0} lodí a výsledných relativních rychlostí v_{ra} a v_{rb} . Porovnejte je navzájem.

Řešení:

Zvolíme souřadnicovou osu x ve směru pohybu obou lodí

a orientovanou souhlasně s rychlostí v_0 první lodi. Pak hybnost první lodi je orientována souhlasně s osou x a její velikosti přiřadíme znaménko $+$; hybnost druhé lodi je orientována nesouhlasně s osou x a její velikosti přiřadíme znaménko $-$.

a) Použijeme zákona zachování hybnosti pro soustavu první lodi a tělesa vrženého z druhé lodi a pro soustavu druhé lodi a tělesa vrženého z první lodi:

$$(M + m) v_0 - mv_0 = (M + 2m) v_1 ,$$

$$-Mv_0 + mv_1 = (M + m) v_2 .$$

Z obou těchto vztahů určíme výsledné rychlosti lodí:

$$v_1 = -v_2 = v_0 \frac{M}{M + 2m} .$$

b) Ze zákona zachování hybnosti plyne v tomto případě

$$Mv_0 - mv_0 = (M + m) v'_1 ,$$

$$-Mv_0 + mv_0 = (M + m) v'_2 .$$

Z obou těchto vztahů určíme výsledné rychlosti lodí:

$$v'_1 = -v'_2 = v_0 \frac{M - m}{M + m} ;$$

a poněvadž

$$v_1 - v'_1 = v_0 \frac{2m^2}{(M + 2m)(M + m)} > 0 ,$$

je vždy $v_1 > v'_1$.

c) Pro relativní rychlosti lodí platí:

$$v_{ro} = 2v_0 ; \quad v_{ra} = 2v_1 = 2v_0 \frac{M}{M + 2m} ,$$

$$v_{rb} = 2v'_1 = 2v_0 \frac{M - m}{M + m},$$

přičemž zřejmě $v_{ro} > v_{ra} > v_{rb}$.

3. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

V nádobě je vrstva kapaliny o hustotě ρ_1 a nad ní je vrstva jiné kapaliny, která se s prvou nemísí, chemicky s ní nereaguje a má hustotu ρ_2 . Na rozhraní obou kapalin plave krychle ze stejnorodé látky; hrana krychle má délku a .

Dolní vodorovná podstava krychle je v hloubce $\frac{a}{4}$ pod rozhraním kapalin, horní podstava krychle je v hloubce a pod volným povrchem kapaliny o hustotě ρ_2 .

a) Určete tlakovou sílu F_1 , která působí na dolní podstavu krychle, a tlakovou sílu F_2 , která působí na horní podstavu krychle.

b) Určete hustotu ρ materiálu, z něhož je krychle zhotovena.

c) Ponoří se krychle hlouběji do dolní kapaliny, jestliže zvětšíme tloušťku vrstvy horní kapaliny?

Po obecném vyřešení řešte úlohu ve zvláštním případě: $\rho_1 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ (voda), $\rho_2 = 0,80 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ (olej), $a = 10 \text{ cm}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení

a) V rovnovážném stavu působí na dolní podstavu krychle vztlková síla o velikosti

$$F_1 = a^3 g \left(\frac{1}{4} \rho_1 + \frac{7}{4} \rho_2 \right) \quad (1)$$

a na horní podstavu hydrostatická tlaková síla o velikosti

$$F_2 = a^3 g \varrho_2 . \quad (2)$$

Síla F_1 je orientována svisle vzhůru, síla F_2 svisle dolů.

b) Tíhová síla G , která působí na krychli, je v rovnováze s výslednicí sil F_1 a F_2 . Platí tedy $G = F_1 - F_2$, neboli

$$a^3 \varrho g = a^3 g \left(\frac{1}{4} \varrho_1 + \frac{7}{4} \varrho_2 - \varrho_2 \right) .$$

Odtud vyjádříme

$$\varrho = \frac{1}{4} \varrho_1 + \frac{3}{4} \varrho_2 .$$

c) Předpokládejme, že tloušťka vrstvy horní kapaliny se zvětší o x a že se následkem toho krychle ponoří hlouběji do dolní kapaliny o délku y . V rovnovážném stavu soustavy působí potom na dolní podstavu krychle síla F'_1 a na horní podstavu krychle síla F'_2 ; obě podstavy jsou vodorovné. Tíhová síla G , která působí na krychli, je opět v rovnováze s výslednicí sil F'_1 , F'_2 , přičemž

$$F'_1 = a^2 g \left[\left(x + \frac{7}{4} a \right) \varrho_2 + \left(y + \frac{1}{4} a \right) \varrho_1 \right] ,$$

$$F'_2 = a^2 g (x + y + a) \varrho_2 .$$

Z rovnosti $G = F_1 - F_2 = F'_1 - F'_2$ vyplývá s přihlédnutím k (1) a (2):

$$a^3 g \left(\frac{1}{4} \varrho_1 + \frac{3}{4} \varrho_2 \right) = a^3 g \left(\frac{1}{4} \varrho_1 + \frac{3}{4} \varrho_2 \right) + a^2 y g (\varrho_1 - \varrho_2) .$$

Tento vztah je identicky splněn jen pro $y = 0$, což znamená, že krychle se neponoří hlouběji do dolní kapaliny, zvětšíme-li tloušťku vrstvy horní kapaliny.

Pro zadané hodnoty: $F_1 \doteq 17 \text{ N}$, $F_2 \doteq 8,0 \text{ N}$, $\varrho \doteq 0,85 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

4. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

V nádobě o objemu V je směs dusíku a vodíku. Při teplotě T je dusík zcela disociován a disociace vodíku je zanedbatelná; tlak plynu je p .

Při teplotě $2T$ jsou oba plyny zcela disociovány, tlak plynu je $3p$, a objem V je stálý.

Uřčete poměr q hmotností dusíku a vodíku ve směsi.

Oba plyny považujeme za dokonalé.

Řešení:

Označme m_1 hmotnost dusíku ve směsi, m_2 hmotnost vodíku ve směsi. Máme určit poměr $q = \frac{m_1}{m_2}$.

V prvním i ve druhém případě se výsledný tlak směsi plynů rovná součtu parciálních tlaků dusíku a vodíku (Daltonův zákon parciálních tlaků).

Označme M_1 molovou hmotnost nedisociovaného dusíku a M_2 molovou hmotnost nedisociovaného vodíku; oba plyny mají molekuly dvouatomové. V disociovaném stavu jsou jejich molové hmotnosti $\frac{1}{2} M_1$ a $\frac{1}{2} M_2$. Zapišeme stavovou rovnici v prvním a ve druhém případě:

$$p = \left(\frac{2m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \frac{RT}{V},$$
$$3p = \left(\frac{2m_1}{M_1} + \frac{2m_2}{M_2} \right) \frac{2RT}{V}.$$

Dělíme levou stranu první rovnice levou stranou druhé rovnice a totéž provedeme pro pravé strany obou rovnic; dostaneme

$$\frac{2}{3} = \frac{2qM_2 + M_1}{2qM_2 + 2M_1}$$

a odtud

$$q = \frac{M_1}{2M_2} = \frac{M_{r1}}{2M_{r2}},$$

kde M_{r1} značí relativní molekulovou hmotnost dusíku, M_{r2} relativní molekulovou hmotnost vodíku. Pro tyto hodnoty ($M_{r1} \doteq 28$, $M_{r2} \doteq 2,0$) vyjde $q \doteq 7,0$.

4. Úlohy kategorie D

Úlohy a řešení recenzovali dr. Ivo Volf a Mojmír Simerský

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Miroslav Ouhrabka)

Cestující ve vlaku pohybujícím se rychlostí v_1 vidí v okně po dobu t_1 nákladní vlak délky d_2 , jedoucí souběžně s ním v témž směru.

a) Jaká je rychlost v_2 nákladního vlaku?

b) Jak dlouho pozoruje v okně vlakvedoucí nákladního vlaku první vlak délky d_1 ?

c) Řešte úlohu pro případ, že se vlaky pohybují rychlostmi v_1 , v_2 po souběžných kolejích vzájemně proti sobě. Jak dlouho bude možno pozorovat vstřicný vlak?

Řešte obecně, potom pro hodnoty $v_1 = 45 \text{ km h}^{-1}$, $t_1 = 60 \text{ s}$, $d_1 = 500 \text{ m}$, $d_2 = 600 \text{ m}$.

Řešení:

a) Relativní rychlost osobního vlaku vzhledem k náklad-

nímu je $|v_1 - v_2|$. Touto rychlostí se za dobu t_1 projede dráha d_2 . Z toho vyplývá vztah

$$d_2 = |v_1 - v_2| t_1, \quad (1)$$

který vede ke dvěma řešením:

$$v_1 > v_2 \dots v_2 = v_1 - \frac{d_2}{t_1},$$

$$v_1 < v_2' \dots v_2' = v_1 + \frac{d_2}{t_1}.$$

Pro dané hodnoty: $v_2 = 9,0 \text{ km h}^{-1} = 2,5 \text{ m s}^{-1}$; $v_2' = 81 \text{ km h}^{-1} = 22,5 \text{ m s}^{-1}$.

b) Jde o dobu t_2 potřebnou k vykonání dráhy d_1 rychlostí $|v_1 - v_2|$, takže platí

$$d_1 = |v_1 - v_2| t_2 \text{ a odtud } t_2 = \frac{d_1}{|v_1 - v_2|}.$$

Za $|v_1 - v_2|$ dosadíme z (1) a po úpravě dostaneme

$$t_2 = t_1 \frac{d_1}{d_2}.$$

Pro zadané hodnoty: $t_2 = 50 \text{ s}$.

c) Relativní rychlost je nyní $v_1 + v_2$. Označíme-li t_1^* , t_2^* doby analogické dobám t_1 , t_2 , dostaneme

$$t_1^* = \frac{d_2}{v_1 + v_2}; \quad t_2^* = \frac{d_1}{v_1 + v_2}.$$

Pro zadané hodnoty a vypočítanou hodnotu v_2 , popř. v_2' vyjde $t_1^* = 40 \text{ s}$, $t_2^* = 33 \text{ s}$, popř. $t_1^* = 17 \text{ s}$, $t_2^* = 14 \text{ s}$.

2. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Miroslav Ouhrabka)

Sáňky kloužou z výšky h po svahu s úhlem sklonu α . Tření zanedbejte a určete v úlohách a—c:

- a) zrychlení a pohybu sáněk,
- b) rychlost v sáněk na konci svahu,
- c) dráhu s a dobu t pohybu po svahu.

Ve skutečnosti působí na pohyb smykové tření, charakterizované součinitelem f . Stanovte nyní:

- d) zrychlení a' pohybu,
- e) rychlost v' sáněk na konci svahu,
- f) dráhu s' a dobu t' pohybu sáněk po svahu,
- g) celkovou dráhu s^* a dobu t^* pohybu sáněk, než se zastaví na vodorovné rovině po sjezdu ze svahu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $h = 30$ m, $\alpha = 20^\circ$, $f = 0,20$, $g = 10$ m s⁻².

Řešení:

a) Zrychlení je způsobeno složkou tíhové síly připadající do směru nakloněné roviny (svahu), a má tedy velikost

$$a = g \sin \alpha.$$

b) Konečná rychlost je podle zákona zachování mechanické energie stejná jako při volném pádu z výšky h , tedy

$$v = \sqrt{2gh}.$$

c) Dráha s je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku, v němž proti odvěsně h leží úhel α :

$$s = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Dobu pohybu po svahu určíme ze vztahu platného pro pohyb rovnoměrně zrychlený:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}.$$

Po dosazení za a a s dostaneme

$$t = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

d) Na sánky, jejichž hmotnost označíme m , působí ve směru nakloněné roviny síla ma' , která je rovna složce $mg \sin \alpha$ tíhové síly zmenšené o třecí sílu $mf g \cos \alpha$. Odtud vypočítáme

$$a' = g \sin \alpha - fg \cos \alpha = g \sin \alpha (1 - f \cotg \alpha).$$

Přitom předpokládáme, že $f \cotg \alpha < 1$.

e) Konečnou rychlost stanovíme ze vztahu pro pohyb rovnoměrně zrychlený: $v' = \sqrt{2a's}$ a po dosazení za a' a s :

$$v' = \sqrt{2gh(1 - f \cotg \alpha)}.$$

f) Dráha je stejná jako v části c) tedy $s' = s = \frac{h}{\sin \alpha}$.

Ze vztahu $t' = \sqrt{\frac{2s}{a'}}$ platného pro pohyb rovnoměrně zrychlený vyjádříme dosazením za s a a' :

$$t' = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g(1 - f \cotg \alpha)}}.$$

g) Brzdnou dráhu na rovině označíme s_0 , dobu potřebnou k zastavení pak t_0 . Podle zákona zachování energie platí

$$mgh = mgsf \cos \alpha + mgfs_0,$$

neboť potenciální energie tíhová mgh se spotřebuje na přemáhání třecí síly na svahu (potřebná práce je $mgsf \cos \alpha$) a na rovině ($mgsf s_0$). Z uvedeného vztahu vyjádříme, po dosazení za s :

$$s_0 = h \left(\frac{1}{f} - \cotg \alpha \right).$$

Dobu t_0 stanovíme z podmínky

$$v' + a'' t_0 = 0,$$

kde v' značí konečnou rychlost sáněk na úpatí svahu a zároveň jejich počáteční rychlost při následujícím pohybu rovnoměrně zpomaleném; $a'' = -fg$ značí zrychlení tohoto pohybu. Po dosazení za v' vyjde

$$t_0 = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{2h}{g} (1 - f \cotg \alpha)}.$$

Pro celkovou dráhu s^* a celkovou dobu t^* platí

$$s^* = s + s_0; \quad t^* = t' + t_0.$$

Pro dané hodnoty: $a \doteq 3,4 \text{ m s}^{-2}$, $v \doteq 24,5 \text{ m s}^{-1}$, $s \doteq 88 \text{ m}$, $t \doteq 7,2 \text{ s}$, $a' \doteq 1,55 \text{ m s}^{-2}$, $v' \doteq 16 \text{ m s}^{-1}$, $s' \doteq s \doteq 88 \text{ m}$, $t' \doteq 11 \text{ s}$, $s_0 \doteq 67 \text{ m}$, $t_0 \doteq 8 \text{ s}$, $s^* \doteq 155 \text{ m}$, $t^* \doteq 19 \text{ s}$.

3. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Miroslav Ouhrabka)

Strojvůdce vlaku pohybujícího se rovnoměrně přímočaře po vodorovné trati začne náhle brzdit. Rychlost vlaku se za dobu t rovnoměrně změní z hodnoty v_1 na hodnotu v_2 .

a) Určete zrychlení pohybu.

b) Ve vagónu leží na podlaze kufr. Vyznačte na obrázku všechny síly, které během brzdění vlaku působí na kufr ve vztažné soustavě spojené s vagónem.

c) Při které hodnotě součinitele f_0 statického tření mezi kufrem a podlahou začne kufr právě klouzat po podlaze vagónu?

d) Určete dráhu, kterou vlak během brzdění urazil.

e) Součinitel smykového tření při pohybu kufru má hodnotu $f < f_0$. Jakou dráhu vykoná kufr během brzdění vzhledem k podlaze vagónu a jakou dráhu vykoná kufr během brzdění vzhledem ke kolejnicím?

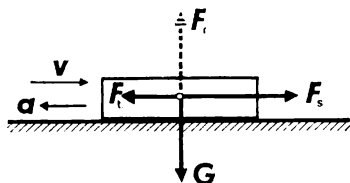
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_1 = 45 \text{ km h}^{-1}$, $v_2 = 18 \text{ km h}^{-1}$, $t = 4,0 \text{ s}$, $f = 0,15$.

Řešení:

a) Pro zrychlení platí podle definice

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t}. \quad (1)$$

b) Všechny síly jsou znázorněny na obr. 51, v němž G značí tíhovou sílu, F_s setrvačnou sílu, F_t třecí sílu orientovanou proti pohybu kufru při brzdění vlaku; pro úplnost je zakreslena ještě reakce F_r podložky.



Obr. 51

c) Třecí síla má velikost $F_t = f_0 mg$ a setrvačná síla $F_s = m|a|$, značí-li m hmotnost kufru, a zrychlení při brzdění. Kufr právě počne klouzat, když obě tyto síly jsou stejně velké. Z této rovnosti vyjádříme, s přihlédnutím k(1):

$$f_0 = \frac{|v_2 - v_1|}{gt}.$$

d) Jde o pohyb rovnoměrně zpomalený s počáteční rychlostí v_1 a se zrychlením (1). Pro dráhu platí

$$s = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2$$

a po dosazení z (1) a úpravě

$$s = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) t. \quad (2)$$

e) Označme a_k zrychlení kufru vzhledem k vagónu. Síla F , která způsobuje pohyb kufru, má velikost

$$F = m a_k = F_s - F_t = m |a| - f m g.$$

Odtud určíme, s přihlédnutím k (1):

$$a_k = \frac{|v_2 - v_1|}{t} - f g,$$

a poněvadž počáteční rychlost kufru vzhledem k vagónu je nulová, platí pro dráhu s_k , kterou kufr vykoná během brzdění,

$$s_k = \frac{1}{2} a_k t^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{|v_1 - v_2|}{t} - f g \right) t^2. \quad (3)$$

Vzhledem ke kolejnicím vykoná kufr dráhu

$$s_k^* = s_k + s,$$

kde pro s_k a s platí (3) a (2).

Pro zadané hodnoty: $a \doteq -1,9 \text{ m s}^{-2}$, $f_0 \doteq 0,19$, $s \doteq 35 \text{ m}$, $s_k \doteq 3,2 \text{ m}$, $s_k^* \doteq 38 \text{ m}$.

4. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Dva závodníci A , B startují současně na běžecké trase délky s . Závodník A běží první polovinu dráhy rychlostí v_1 a druhou polovinu dráhy rychlostí v_2 . Závodník B běží v první polovině celkové doby svého běhu rychlostí v_1 a ve druhé polovině rychlostí v_2 ; $v_2 > v_1$.

- Který z obou běžců doběhl do cíle první?
- Určete dobu a délku dráhy předstihu vítěze.
- Řešte pro hodnoty $s = 1\,500\text{ m}$, $v_1 = 4,0\text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 6,0\text{ m s}^{-1}$. Výsledky ověřte grafickým řešením.

Grafy dráhy $s = f(t)$ sestrojte na milimetrový papír.

Řešení:

- Běžec A proběhne první polovinu dráhy za dobu t_1 , druhou polovinu za dobu t_2 , celou dráhu za dobu

$$t_A = t_1 + t_2 = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2} = \frac{s(v_1 + v_2)}{2v_1v_2}. \quad (1)$$

Běžec B proběhne dráhu za dobu t_B . Nejprve za dobu $\frac{1}{2}t_B$ proběhne dráhu s_1 , pak za stejnou dobu dráhu s_2 , přičemž $s_1 + s_2 = s$, neboli

$$\frac{v_1 t_B}{2} + \frac{v_2 t_B}{2} = s.$$

Odtud vyjádříme

$$t_B = \frac{2s}{v_1 + v_2}. \quad (2)$$

Je třeba rozhodnout, která z dob (1), (2) je delší. Vyjádříme rozdíl $\Delta t = t_A - t_B$; po úpravách vyjde

$$\Delta t = \frac{s(v_2 - v_1)^2}{2v_1v_2(v_1 + v_2)}, \quad (3)$$

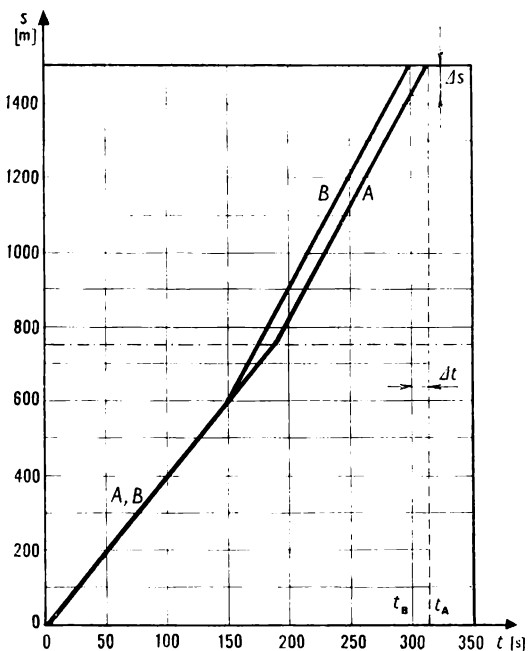
takže $\Delta t > 0$, neboli $t_A > t_B$; jako první doběhne běžec B .

b) Časový předstih vítěze je dán vztahem (3). Délku dráhy předstihu označíme Δs , takže

$$\Delta s = v_2 \Delta t,$$

neboť vítěz běžel v době Δt rychlostí v_2 . Po dosazení z (3) dostaneme

$$\Delta s = \frac{s(v_2 - v_1)^2}{2v_1(v_1 + v_2)}.$$



Obr. 52

c) Pro zadané hodnoty: $\Delta t \doteq 13$ s, $\Delta s \doteq 75$ m, $t_A \doteq 313$ s, $t_B \doteq 300$ s.

Grafy jsou na obr. 52.

5. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Dva automobily vyjely současně z místa X a za dobu t_0 dojely do místa Y . První automobil urazil první polovinu své dráhy stálou rychlostí v_1 a druhou polovinu stálou rychlostí v_2 ; $v_2 > v_1$. Druhý automobil projel celou trasu se stálým zrychlením a .

a) Sestrojte na milimetrový papír do týchž os souřadnic (t, v) grafy rychlosti obou automobilů jako funkce času pro hodnoty $v_1 = 30$ km h⁻¹, $v_2 = 45$ km h⁻¹, $t_0 = 10$ minut. Z grafů rozhodněte, zda automobily na své trase dosáhnou stejné rychlosti. Ve kterém čase od počátku pohybu se to stane?

b) Sestrojte na milimetrový papír do týchž os souřadnic (t, s) grafy dráhy obou automobilů jako funkce času pro uvedené hodnoty. Z grafů rozhodněte, zda na své trase předhoni jeden z automobilů druhý. Ve kterém čase od počátku pohybu se to stane?

c) Řešte úlohu a) obecně, proveďte diskusi a ověřte správnost grafického řešení pro dané hodnoty.

Řešení:

Je třeba vypočítat dráhu s , doby t_1, t_2 , v nichž se první automobil pohybuje rychlostmi v_1, v_2 , zrychlení a a konečnou rychlost v_k druhého automobilu. První tři veličiny vypočítáme ze soustavy rovnic

$$s = v_1 t_1 + v_2 t_2,$$

$$t_1 + t_2 = t_0,$$

$$v_1 t_1 = v_2 t_2$$

a dostaneme

$$s = 2t_0 \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}, \quad t_1 = t_0 \frac{v_2}{v_1 + v_2}, \quad t_2 = t_0 \frac{v_1}{v_1 + v_2}. \quad (1)$$

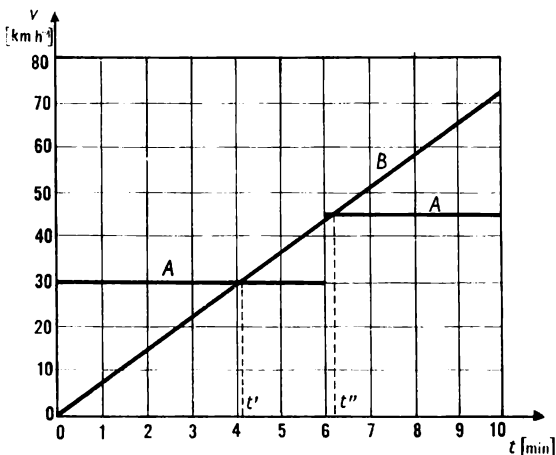
Pro dané hodnoty: $s = 6,0 \text{ km}$, $t_1 = 6,0 \text{ min}$, $t_2 = 4,0 \text{ min}$.
Zrychlení a druhého automobilu určíme ze vztahu

$$s = \frac{1}{2} a t_0^2,$$

za s dosadíme z (1); pak

$$a = 4 \frac{v_1 v_2}{t_0(v_1 + v_2)}, \quad v_k = a t_0 = 4 \frac{v_2 v_1}{v_1 + v_2}. \quad (2)$$

Pro zadané hodnoty: $a = 432 \text{ km h}^{-2} = 0,12 \text{ km min}^{-2}$,
 $v_k = 72 \text{ km h}^{-1}$.



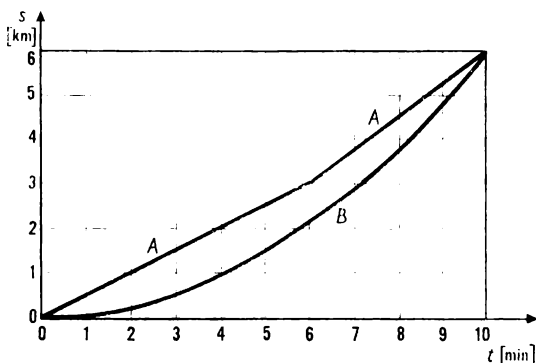
Obr. 53

a) — obr. 53

Z grafu je zřejmé, že oba automobily dosáhnou stejných rychlostí v časech $t' \doteq 4,2$ min, $t'' \doteq 6,3$ min.

b) — obr. 54

Z grafu je zřejmé, že automobil B nikde nepředjede automobil A .



Obr. 54

c) Obecné řešení je zčásti již provedeno — vztahy (1) a (2). Zbývá ještě obecné vyjádření časů t' a t'' . Předpokládáme, že v čase t' má automobil A rychlost v_1 , tj. i automobil B má rychlost

$$v_1 = at' = \frac{4v_1v_2}{t_0(v_1 + v_2)} t' ;$$

odtud

$$t' = \frac{t_0(v_1 + v_2)}{4v_2} .$$

Předpoklad je splněn, když $t' < t_1$. Úpravou s použitím vztahu (1) dostaneme podmínku $v_2 > v_1$, která je pro zadané hodnoty splněna. Pro tyto hodnoty vyjde $t' \doteq 4,2$ min, což souhlasí s grafem.

Předpokládáme dále, že v čase t'' má automobil A rychlost v_2 . Pak obdobně vypočítáme

$$t'' = \frac{t_0(v_1 + v_2)}{4v_1}$$

a pro dané hodnoty $t'' \doteq 6,3$ min, což rovněž souhlasí s grafem. Předpoklad je splněn, když $t_1 < t'' < t_0$. Po dosazení obecných vztahů a úpravách nalezneme podmínku $v_2 < 3v_1$, která je pro zadané hodnoty splněna.

6. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Miroslav Ouhrabka)

Měření plošného obsahu rovinného obrazce

Potřeby: kladívkový papír, přešpán nebo jiný vhodný materiál, nůžky, laboratorní váhy a sada závaží, délkové měřítko, milimetrový papír, pravítko, tužka.

Návod:

a) Z papíru či jiného vhodného materiálu vystříhnete kruh o poloměru $r = 10$ cm a čtverec o straně $a = 10$ cm. Určete plošný obsah S_1 , S_2 obrazců výpočtem a odhadněte relativní a absolutní chybu měření.

b) Položte kruh na milimetrový papír a ostrou tužkou proveďte jeho obrys. Určete počet n_1 celých čtverečků centimetrové sítě ($S_0 = 1$ cm²), ležících uvnitř obrazce, a počet n_2 čtverečků této sítě, jimiž prochází obrysová čára. Potom střední hodnotu $\bar{S}_1$ určíme

$$\bar{S}_1 = n_1 S_0 + 0,5 n_2 S_0 .$$

Meze intervalu pro hodnotu S_1 jsou dány

$$S_{\min} = n_1 S_0 ; \quad S_{\max} = (n_1 + n_2) S_0 .$$

c) Vezměte v úvahu jemnější síť čtverečků se stranou $a' = 5$ mm (plošný obsah $S'_0 = 0,25$ cm²). Změřte stejným způsobem jako v části b) a srovnejte střední hodnotu i šířku intervalu obou měření.

d) Rozdělte kruh dvěma navzájem kolmými průměry na 4 kvadranty a zaveďte vhodnou soustavu souřadnic (x, y) . Potom průměr ležící v ose x rozdělte nejprve na dílky po $x_1 = 1$ cm, později $x_2 = 0,5$ cm (popř. i $x_3 = 3$ mm). Daný kruh potom pokryjte soustavou pásků dané šířky a o proměnných výškách $2h_i$. Potom

$$S_1 = \sum_{n=1}^n 2h_i x = 2x \sum_{n=1}^n h_i .$$

Protože počet pásků je velký, lze psát přibližně

$$S_1 \doteq 2x \sum_{i=1}^n y_i ,$$

kde x a $2y_i$ jsou délky stran daných obdélníků, pokrývajících obrazec. Zřejmě lze opět zvolit dvě soustavy těchto obdélníků: jedna obsahuje daný obrazec, druhá je danému obrazci vepsána.

Navrhněte způsob, jak lze tuto metodu zjednodušit, jak lze stanovit střední hodnotu a chybu měření.

e) Obsah rovinného obrazce stanovte vážením na laboratorních váhách. Navrhněte metodu měření, přičemž použijete čtverec známého obsahu S_2 . Určete chybu měření. V případě, že sami na metodu měření nepřiďte, použijte návod, který je uveřejněn v ročence X. ročník fyzikální olympiády, SPN, Praha 1970, str. 186–192.

f) Srovnajte střední hodnoty a šířku intervalu pro S_1 v uvedených metodách měření. Jako kontrolní úkol určete ve všech případech hodnotu podílu $S_1 : S_2$ a vysvětlete, o jakou hodnotu jde.

Řešení:

Užíváme označení:

x ... naměřená hodnota,

x_0 ... správná hodnota (o níž předpokládáme, že se během měření nemění),

$\Delta x = x_0 - x$... absolutní chyba jednoho určitého měření,

$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{x_0 - x}{x_0}$... relativní chyba jednoho určitého měření.

Hodnotu x_0 , kterou ovšem neznáme, nahrazujeme v praxi aritmetickým průměrem $\bar{x}$ nebo jinou hodnotou x^* , o níž můžeme předpokládat, že je hodnotě x_0 velmi blízká. Hodnoty $\bar{x}$, x^* určujeme výpočtem z většího počtu měření.

Abychom mohli porovnávat různé měřicí metody, musíme pracovat s relativními chybami. Často používáme střední kvadratickou chybu $\delta(x)$, pravděpodobnou chybu $\vartheta(x)$, krajní chybu $\kappa(x)$. Obvykle se tyto chyby počítají s ohledem na hodnotu $\bar{x}$. Jejich definice i výpočet je složitější. My se jen naučíme relativní chyby odhadovat a počítat s nimi. Proto označení $\delta(x)$, $\delta(\bar{x})$, $\delta(x^*)$ budou pro nás pouze vyjadřovat odhadnuté hodnoty možných relativních chyb, kterých se při měření veličiny x můžeme dopustit. Plošný obsah S_1 kruhu o poloměru r je dán vztahem $S_1 = \pi r^2$, plošný obsah čtverce o straně délky a je $S_2 = a^2$. Určíme velikost chyb, kterých se dopouštíme při měření plošných obsahů S_1 a S_2 .

a) Plošný obsah S_1 můžeme určit měřením poloměru r , plošný obsah S_2 měřením délky a strany čtverce.

1. Jestliže poloměr r je změřen s absolutní chybou o velikosti Δr , pak absolutní chyba ΔS_1 v určení obsahu kruhu je

$$\Delta S_1 = \pi (r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \Delta r + \pi (\Delta r)^2.$$

Budeme-li předpokládat $\Delta r \ll r$, potom $\Delta S_1 \approx 2\pi r \Delta r$. Relativní chyba je potom podle definice

$$\delta(S_1) = \frac{\Delta S_1}{S_1} = \frac{2\pi r \Delta r}{\pi r^2} = \frac{2\Delta r}{r} = 2\delta(r).$$

2. Pro čtverec podobně dostaneme $\delta(S_2) = \frac{\Delta S_2}{S_2} = 2\delta(a)$.

Vykonáme-li řadu měření poloměru r (např. 10 měření), můžeme určit průměrnou hodnotu $\bar{r}$ a vypočítat $S_1^* = \pi \bar{r}^2$. Absolutní chybu $\Delta S_1 = 2\pi \bar{r} \Delta r$ můžeme přibližně považovat i za absolutní chybu v určení hodnoty S_1^* . Hodnota S_1^* není obecně aritmetickým průměrem $\bar{S}_1$ hodnot $\pi r_1^2, \pi r_2^2, \dots$, které bychom získali pro každé měření r . Prakticky se však hodnoty S_1 a S_1^* příliš neliší, je-li počet naměřených hodnot dostatečně velký a jsou-li absolutní chyby jednotlivých měření velmi malé.

b) Měření plošného obsahu čtvercovou sítí
Nechť zvolenou jednotkou je čtverec sítě o plošném obsahu $S_0 = 1 \text{ cm}^2$. Potom napočítáme přibližně $n_1 = 281$ čtverců ležících uvnitř kruhu a $n_2 = 67$ čtverců, jimiž právě prochází hranice kruhu. Obsah kruhu je tedy asi

$$S_1^* = n_1 S_0 + \frac{1}{2} n_2 S_0 = (281 + 33,5) \text{ cm}^2 = 314,5 \text{ cm}^2.$$

Je třeba zaokrouhlit na hodnotu $S_1^* \approx 314 \text{ cm}^2$ (nebo

315 cm²), protože zvolená jednotka byla 1 cm². Části této zvolené jednotky můžeme sice odhadovat, ale uvedená metoda v zásadě nepřipouští přesnější výsledek. Přesvědčíme se o tom dosazením hodnot $n_1 = 281$ a $n_2 = 67$ do vztahů $S_{\max} = (n_1 + n_2) S_0$ a $S_{\min} = n_1 S_0$, které v podstatě ukazují, jaké maximální chyby v určení plošného obsahu S_1 kruhu se touto metodou můžeme dopustit. V našem případě je správná hodnota S_1 i naměřená hodnota S_1^* uzavřena v intervalu $< 281 \text{ cm}^2; 384 \text{ cm}^2 >$.

c) Zjermníme-li čtvercovou síť na čtverce o obsahu 0,25 cm², potom obdržíme např. $n_1 = 1187$, $n_2 = 140$, $S_1^* = 314,25 \text{ cm}^2$ a opět zaokrouhlíme na hodnotu $S_1^* = 314 \text{ cm}^2$, neboť velikost maximální chyby měření značně převyšuje velikost plošného obsahu čtverečku zvolené čtvercové sítě. Správná hodnota S_1 i naměřená hodnota S_1^* leží v intervalu $< 296 \text{ cm}^2; 332 \text{ cm}^2 >$.

Porovnáme-li hodnoty S_1^* z obou měření (při různých zjemněních), pak je zřejmé, že se od sebe příliš neliší. Je tedy velmi pravděpodobné, že hodnota $S_1^* = 314 \text{ cm}^2$ představuje velice dobré přiblížení ke správné velikosti plošného obsahu měřeného kruhu. Tento závěr je potvrzen v případě c) zúžením intervalu, v němž se nachází správná i naměřená hodnota.

Můžeme tedy učinit závěr:

Plošný obsah kruhu $S_1^* = (314 \pm 18) \text{ cm}^2$, přičemž hodnota 314 cm² představuje nejlepší možné přiblížení ke správné hodnotě, čísla 296 a 332 nás informují o tom, kde správná hodnota S_1 může vůbec být.

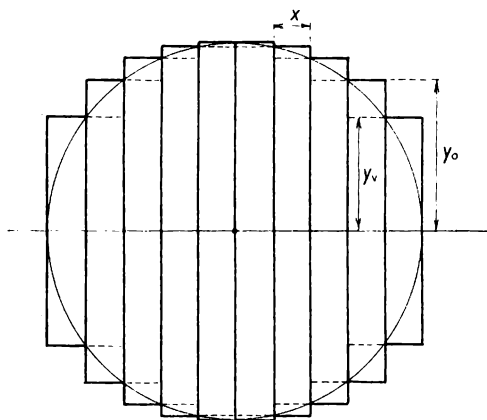
Určíme ještě relativní chybu měření. Podle definice

$$\delta(S_1) = \frac{\Delta S_1}{S_1} \approx \frac{\Delta S_1^*}{S_1^*} = \frac{18}{314} = 0,057, \text{ tedy } \delta(S_1) \doteq$$

$\doteq 6 \%$ pro druhé měření; pro první měření je obdobně

$\delta(S_1) \doteq 11\%$. Relativní chyba nás tedy informuje o přesnosti celého měření.

d) Další možnou metodou určení plošného obsahu kruhu je proužková metoda.



Obr. 55

1. Můžeme postupovat např. podle obr. 55; průměr daného kruhu rozdělíme na dílky o velikosti x centimetrů. Danému kruhu opišeme, popř. vepíšeme proužky podle obrázku. Obrázek napovídá, že plošný obsah $\sum_v$ všech proužků vepsaných danému kruhu je asi menší než plošný obsah S_1 kruhu a že správná hodnota S_1 plošného obsahu kruhu je asi menší než plošný obsah $\sum_o$ všech proužků opsaných danému kruhu. Vypočítáme tedy hodnotu

$S_1^* = \frac{\sum_o + \sum_v}{2}$; při postupném zjemňování dělení se bude hodnota S_1^* přibližovat správné hodnotě S_1 a bude

se zužovat interval $\langle \Sigma_v; \Sigma_o \rangle$, tj. maximální chyba v určení obsahu kruhu se bude zmenšovat. Uvedené skutečnosti se dají matematicky přesně dokázat a jsou podkladem pro definici tzv. Riemannova integrálu, s jehož použitím lze počítat plošné obsahy s libovolnou přesností.

Uvedeme výsledky měření plošného obsahu kruhu o poloměru $r = 10,0$ cm. Při šířce proužku $x = 1,0$ cm byly změřeny výšky y_o a y_v proužků opsaných a vepsaných; výsledky jsou v tab. č. 20.

TABULKA 20

y_o cm	4,4	6,0	7,2	8,0	8,7	9,2	9,6	9,8	9,9	10,0
y_v cm	0,0	4,4	6,0	7,2	8,0	8,7	9,2	9,6	9,8	9,9

y_o cm	10,0	9,9	9,8	9,6	9,2	8,7	8,0	7,2	6,0	4,4
y_v cm	9,9	9,8	9,6	9,2	8,7	8,0	7,2	6,0	4,4	0,0

Z uvedených hodnot stanovíme $\Sigma_v = 2 \times 165,6 \text{ cm}^2 \doteq 331 \text{ cm}^2$, $\Sigma_o = 2 \times 145,6 \text{ cm}^2 \doteq 291 \text{ cm}^2$, $S_1^* = 311 \text{ cm}^2$. Hodnoty Σ_o , Σ_v neudávají, přesně vzato, maximální chybu, neboť při jejich určování jsme se rovněž mohli dopustit chyby. Obsah Σ_i každého proužku je také zatížen nějakou chybou. Pokusíme se určit maximální chybu přesněji.

Měříme-li hodnoty x , y s přesností na 0,5 mm, pak relativní chyba v určení šířky x jednoho proužku je asi

$$\delta(x) = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0,05 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}, \text{ tj. } 5 \% \text{ a maximální relativní}$$

chyba v určení délky y proužku bude $\delta(y) = \frac{0,1 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}$, tj. asi 3 %. Je nyní $\sum_i = 2xy$, tedy $\delta(\sum_i) = \delta(2xy) = \delta(xy) = \sqrt{\delta^2(x) + \delta^2(y)}$, což v našem případě činí asi 5 %. Maximální absolutní chyba v určení obsahu proužku je pak 5 % z hodnoty $2 \times 1 \times 10 \text{ cm}^2$, tedy $\Delta\sum_i \doteq 1 \text{ cm}^2$. Je-li celá plocha složena z celkového počtu právě k proužků, bude absolutní (střední kvadratická) chyba $\Delta\sum = \sqrt{k(\Delta\sum_i)^2}$; v našem případě $\Delta\sum_o = \sqrt{10 \times 1 \text{ cm}^2} \doteq 3 \text{ cm}^2$, $\Delta\sum_v = \sqrt{8 \times 1 \text{ cm}^2} \doteq 3 \text{ cm}^2$ a relativní chyby

$$\delta(\sum_o) = \frac{\Delta\sum_o}{\sum_o} \doteq 1 \% \doteq \delta(\sum_v).$$

Tato relativní chyba bude i relativní chybou hodnoty $S_1^* = \frac{\sum_o + \sum_v}{2}$; proto $S_1^* = (311 \pm 3) \text{ cm}^2$.

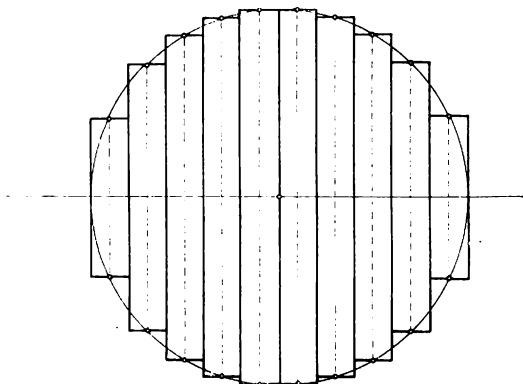
Maximální chyba v cm^2 je dána šířkou intervalu $\langle 291 - 3; 331 + 3 \rangle$.

Zjemněním rozdělení na proužky o šířce $x = 0,5 \text{ cm}$ obdržíme $\sum_v = 304 \text{ cm}^2$, $\sum_o = 324 \text{ cm}^2$, $S_1^* = 314 \text{ cm}^2$, $\delta(x) \doteq 10 \%$, $\delta(y) \doteq 3 \%$, $\delta(\sum_i) \doteq 10 \%$, $\delta\sum_o = \sqrt{20} \times 2 \text{ cm}^2 \doteq 9 \text{ cm}^2 \doteq \sqrt{18} \times 2 \text{ cm}^2 = \delta\sum_v$, $\delta(\sum_o) \doteq 3 \% \doteq \delta(\sum_v)$, tj. $\delta(S_1^*) \doteq 3 \%$. Celkem $S_1^* = (314 \pm 9) \text{ cm}^2$.

Porovnáme-li výsledky získané touto metodou, vidíme, že po zjemnění jsme se lépe přiblížili správné hodnotě, ale absolutní chyba výsledku vzrostla. Příčinou je zřejmě zvětšená relativní chyba $\delta(x)$ pro šířku $x = 0,5 \text{ cm}$. Interval určující maximální chybu se jen málo zúžil, a to na $\langle 304 - 9; 324 + 9 \rangle$, měřeno v cm^2 . Podstatnějšího

zpřesnění bychom tedy dosáhli jen tehdy, kdybychom přesněji měřili šířku x proužku.

2) Při určování plošného obsahu proužkovou metodou můžeme též postupovat podle obr. 56. V tomto případě bychom obdrželi výsledky podobné jako při předchozím způsobu. Rozbor možných chyb je ponechán čtenáři.



Obr. 56

e) Měření plošného obsahu kruhu můžeme provést i vážením. V našem případě porovnáváme hmotnost čtverce vystřižnutého z vhodného materiálu s hmotností kruhu vystřižnutého z téhož materiálu. Budeme-li předpokládat, že oba obrazce jsou z téhož stejnorodého materiálu hustoty ϱ a že mají všude stejnou tloušťku h , pak

$$m_1 g = S_1 h \varrho g, \quad m_2 g = S_2 h \varrho g.$$

Odtud $m_1 : m_2 = S_1 : S_2$. Známe-li tedy plošný obsah S_2 a hmotnosti m_1, m_2 , můžeme určit neznámý plošný

obsah S_1 . Bylo naměřeno: $S_2 = 100 \text{ cm}^2$, $m_1 = 6,38 \text{ g}$, $m_2 = 2,03 \text{ g}$, takže

$S_1^* = \frac{m_1}{m_2} S_2$, pro uvedené hodnoty: $S_1^* = 314 \text{ cm}^2$. Pokusíme se ještě o odhad relativní chyby. Stranu a čtverce měříme s chybou $\Delta a = 0,5 \text{ mm}$ (tj. s přesností na 1 mm), tj.

$$\delta(a) = \frac{\Delta a}{a} = 0,5 \% , \quad \delta(S_2) = 1 \% .$$

Školní váhy váží s přesností asi na 1 cg , tedy $\delta(m_1) = \frac{0,5}{638} = 0,1 \%$, $\delta(m_2) = 0,2 \%$. Pro relativní (kvadratickou) chybu v určení hodnoty S_1 tedy máme

$$\delta(S_1) = \sqrt{\delta^2(m_1) + \delta^2(m_2) + \delta^2(S_2)}$$

a pro uvedené hodnoty: $\delta(S_1) = 1 \%$. Celkem tedy můžeme prohlásit, že

$$S_1^* = (314 \pm 3) \text{ cm}^2.$$

Největší chybu působí malá přesnost měření obsahu S_2 .

f) Popis a výklad některých dalších metod najde čtenář v knize Brož, J. a kol.: Základy fyzikálních měření I.

7. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Miroslav Ouhrabka)

Automobil o hmotnosti m jede rovnoměrně zrychleným pohybem do kopce se stoupáním $p \%$. Počáteční rychlost automobilu je nulová a na konci dráhy s má velikost v . Úhrnná odporová síla proti pohybu je $F = kG$.

a) Určete užitečnou práci motoru automobilu.

b) Určete průměrný užitečný výkon motoru automobilu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 1,5 \cdot 10^3 \text{ kg}$,
 $s = 100 \text{ m}$, $p = 2 \text{ ‰}$, $v = 45 \text{ km h}^{-1}$, $k = 0,10$.

Řešení:

a) Motor vykoná práci

$$A = A_1 + A_2 + A_3. \quad (1)$$

A_1 zde značí práci potřebnou k pozvednutí tělesa o hmotnosti m do výšky h , tedy

$$A_1 = mgh, \quad (2)$$

kde

$$h = s \sin \alpha = s \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{sp}{\sqrt{100^2 + p^2}}, \quad (3)$$

jestliže stoupáním, jak je obvyklé, rozumíme poměr rozdílu výšek dvou míst k jejich vodorovné vzdálenosti.

K překonání odporové síly je třeba vykonat práci

$$A_2 = kGs = kmgs. \quad (4)$$

Na konci dráhy má automobil rychlost v , jeho kinetická energie je rovna práci A_3 v (1):

$$A_3 = \frac{1}{2} mv^2. \quad (5)$$

Do (1) dosadíme z (2), (4), (5), za h z (3) a po úpravě dostaneme

$$A = m \left[gs \left(k + \frac{p}{\sqrt{100^2 + p^2}} \right) + \frac{1}{2} v^2 \right]. \quad (6)$$

Pro zadané hodnoty: $A = 2,9 \cdot 10^5 \text{ J}$.

b) Ze vztahů platných pro rovnoměrně zrychlený pohyb s konečnou rychlostí v určíme dobu t , po kterou pohyb trval:

$$t = \frac{2s}{v}. \quad (7)$$

Pro průměrný užitečný výkon motoru platí $P = \frac{A}{t}$; po dosazení z (6) a (7) a úpravě

$$P = \frac{1}{2} mv \left[g \left(k + \sqrt{100^2 + p^2} \right) + \frac{v^2}{2s} \right].$$

Pro zadané hodnoty: $P = 18 \text{ kW}$.

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Grafy (1), (2), (3) na obr. 57 znázorňují rychlosti tří přímočarých pohybů jako funkce času.

a) Charakterizujte každý z těchto pohybů, vyjádřete vztahy pro rychlosti jako funkce času.

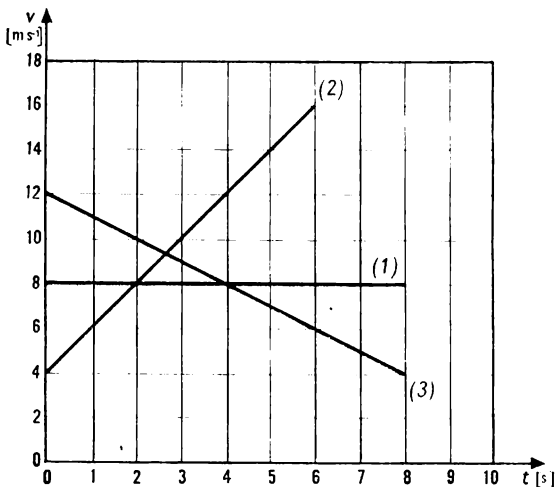
b) Určete zrychlení pohybů a znázorněte je graficky jako funkce času.

c) Narýsujte grafy dráhy jako funkce času, jestliže pro $t = 0 \text{ s}$ platí $s_{01} = 10 \text{ m}$, $s_{02} = 20 \text{ m}$, $s_{03} = 0 \text{ m}$.

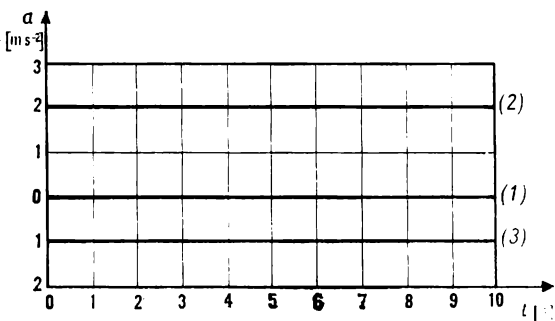
Ke grafickému znázornění použijte milimetrový papír.

Řešení:

a) Graf (1) značí pohyb přímočarý rovnoměrný, $v = 8,0 \text{ m s}^{-1}$; graf (2) pohyb rovnoměrně zrychlený, $v = v_0 + at$, $v_0 = 4,0 \text{ m s}^{-1}$, $a = 2,0 \text{ m s}^{-2}$; graf (3) pohyb rovnoměrně zpomalený, $v = v_0 + at$, $v_0 = 12 \text{ m s}^{-1}$, $a = -1,0 \text{ m s}^{-2}$.



Obr. 57



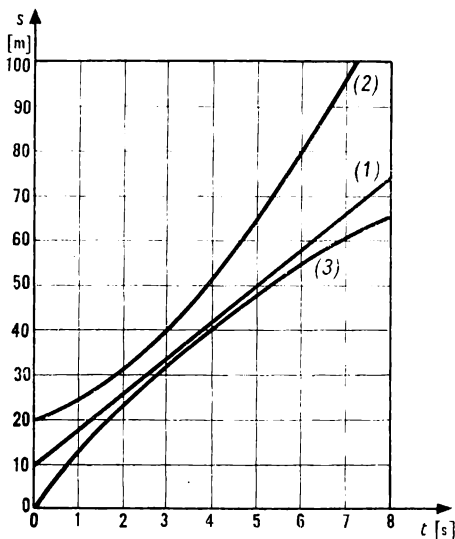
Obr. 58

b) Hodnoty zrychlení jsou uvedeny v části a), grafy jsou na obr. 58.

c) Vyjdeme z obecného vztahu pro dráhu:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Pro případ (1): $s_0 = 10 \text{ m}$, $v_0 = 8,0 \text{ m s}^{-1}$, $a = 0 \text{ m s}^{-2}$,
 pro případ (2): $s_0 = 20 \text{ m}$, $v_0 = 4,0 \text{ m s}^{-1}$, $a = 2,0 \text{ m s}^{-2}$,
 pro případ (3): $s_0 = 0 \text{ m}$, $v_0 = 12 \text{ m s}^{-1}$, $a = -1,0 \text{ m s}^{-2}$.
 Grafy jsou na obr. 59.



Obr. 59

2. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Výsadkář, který má s výzbrojí hmotnost m , vyskočí ve výšce H nad povrchem Země za bezvětrí z vrtulníku,

který je v okamžiku výskoku v klidu vzhledem k povrchu Země. Výsadkář má padat nejprve bez otevření padáku volným pádem (odpor vzduchu neuvažujeme). Ve výšce h nad povrchem Země otevře padák a dopadne na povrch Země rychlostí v_2 .

a) Vzhledem k počátečním podmínkám $s_0 = 0$ m, $v_0 = 0$ m s⁻¹, $t_0 = 0$ s určete polohu s_1 , rychlost v_1 a čas t_1 na konci první fáze pohybu a polohu s_2 , rychlost v_2 a čas t_2 na konci druhé fáze pohybu, za předpokladu, že ve druhé fázi je pohyb rovnoměrně zpomalený.

Sestrojte grafy rychlosti a dráhy jako funkce času během první a druhé fáze pádu pro $H = 1\,000$ m, $h = 200$ m, $v_2 = 5,0$ m s⁻¹, $g = 10$ m s⁻²; použijte milimetrový papír.

b) Určete potenciální energii tíhovou, kinetickou energii a celkovou mechanickou energii výsadkáře na počátku pádu, ve výšce h a na konci pádu (potenciální energii tíhovou při povrchu Země volíme jako nulovou). Uvažte, v čem se liší přeměna energie v obou fázích pohybu. Pro výpočty použijte hodnot z úlohy a), $m = 90$ kg.

Řešení:

a) Počáteční podmínky jsou $s_0 = 0$ m, $v_0 = 0$ m s⁻¹, $t_0 = 0$ s. V první fázi svého pohybu padá výsadkář volným pádem se zrychlením g ; stav na konci první fáze je dán hodnotami $s_1 = H - h$, $v_1 = gt_1$, t_1 . Dobu pádu t_1 a konečnou rychlost v_1 určíme ze vztahů

$$H - h = \frac{1}{2}gt_1^2, \quad t_1 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}, \quad v_1 = \sqrt{2g(H-h)}.$$

V druhé fázi padá výsadkář pohybem rovnoměrně zpomaleným; stav na konci druhé fáze je dán hodnotami: $s_2 = H$, $s' = H - h$, v_2 , t_2 . Zrychlení a i čas t_2 určíme ze vztahů

$$H = (H - h) + v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a(t_2 - t_1)^2,$$

$$v_2 = v_1 + a(t_2 - t_1).$$

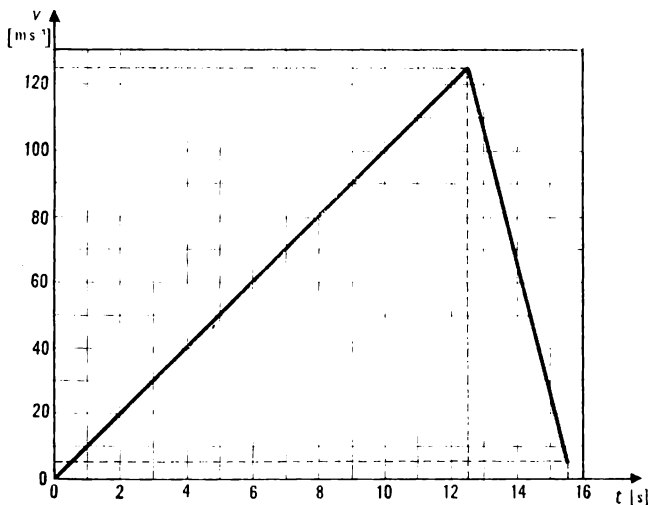
Z této soustavy rovnic vypočítáme

$$a = \frac{v_2^2 - 2g(H - h)}{2h}, \quad t_2 = t_1 + \frac{2h}{v_2 + \sqrt{2g(H - h)}}.$$

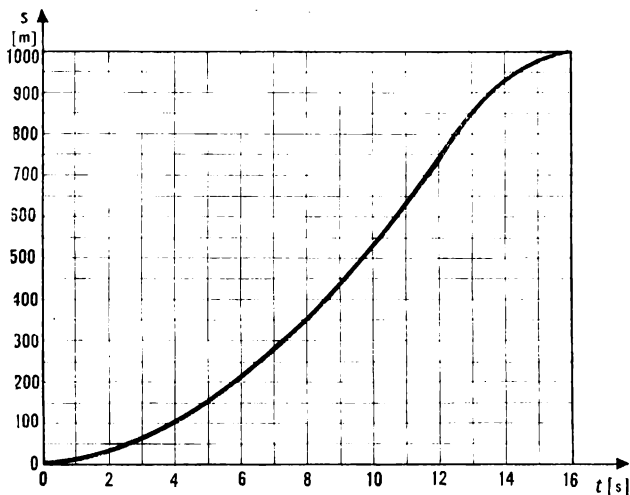
Pro dané hodnoty: $s_1 = 800 \text{ m}$, $v_1 = 125 \text{ m s}^{-1}$, $t_1 \doteq 12,5 \text{ s}$, $s_2 = 1\,000 \text{ m}$, $v_2 \doteq 5,0 \text{ m s}^{-1}$, $a \doteq -40 \text{ m s}^{-2}$, $t_2 \doteq 15,5 \text{ s}$.

Grafy jsou na obr. 60 a obr. 61.

b) Pro hodnoty energií platí podle zadání úlohy:



Obr. 60



Obr. 61

na počátku: $W_{p0} = mgH$, $W_{k0} = 0 \text{ J}$, $W_0 = W_{p0} + W_{k0} = mgH$,

ve výšce h : $W_{p1} = mgh$, $W_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = mg(H - h)$,

$$W_1 = W_{p1} + W_{k1} = mgH,$$

pro dané hodnoty: $W_0 = W_1 = 9,0 \cdot 10^5 \text{ J}$,

na povrchu Země: $W_{p2} = 0 \text{ J}$, $W_{k2} = \frac{1}{2}mv_2^2$, $W_2 = W_{p2} + W_{k2}$,

pro dané hodnoty: $W_{k2} = 1,1 \cdot 10^3 \text{ J}$.

V první fázi pohybu se mechanická energie zachovává; potenciální energie tíhová se přeměňuje na energii kinetickou.

Ve druhé fázi pádu se mechanická energie nezachovává, přeměňuje se zčásti na vnitřní energii výsadkáře a prostředí, projeví se změnou teploty, změnami tlaku, prouděním vzduchu.

3. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Miroslav Ouhrabka)

Sáňky o hmotnosti m sjíždějí po přímé dráze z kopce, jehož sklon vzhledem k vodorovné rovině je α . Vyjíždějí z místa A . Až do místa B (vzdálenost AB označíme s) jedou po dobrém sněhu, takže odpor proti pohybu lze zanedbat. Pak jedou dále po špatném sněhu do místa C (vzdálenost BC označíme d); v úseku BC působí stálá brzdicí síla F_t . Bylo zjištěno, že rychlost v_C sáněk v místě C je $v_C = nv_B$, kde v_B značí jejich rychlost v místě B , n je dané kladné číslo.

a) Stanovte poměr $p = \frac{d}{s}$

b) Proveďte diskusi výsledku, je-li dáno m , α . Jaký pohyb konají sáňky v úseku BC v různých diskutovaných případech?

Řešení:

Úlohu lze řešit na základě změn mechanické energie.

a) Na dráze AB klesnou sáňky o výšku $h_1 = s \sin \alpha$. Jejich potenciální energie tíhová se zmenší o $\Delta W_{p1} = mgh_1 = mgs \sin \alpha$. V bodě B mají sáňky kinetickou energii $W_k = \frac{1}{2}mv_B^2$. Z rovnosti $\Delta W_{p1} = W_k$ plyne, že

$$v_B^2 = 2gs \sin \alpha . \quad (1)$$

Na úseku BC klesnou sáňky o výšku $h_2 = d \sin \alpha$. Jejich

potenciální energie tíhová se zmenší o $\Delta W_{p2} = mgd \sin \alpha$. Jejich rychlost se změní z hodnoty v_B na hodnotu v_C , tedy kinetická energie sáňek bude změněna o $\Delta W_k = \frac{1}{2} m(v_C^2 - v_B^2)$. Na přemáhání odporové síly F_t je třeba vynaložit práci $A = F_t d$. Z rovnosti $\Delta W_{p2} = \Delta W_k + A$ plyne, s přihlédnutím ke vztahu (1) a k podmínce $v_C = nv_B$, po úpravě

$$p = \frac{d}{s} = \frac{mg(n^2 - 1) \sin \alpha}{mg \sin \alpha - F_t}. \quad (2)$$

b) Podle zadání je $d > 0$, $s > 0$, tedy $p > 0$. Pro $n > 1$ je čítec ve vztahu (2) kladný, je tedy kladný i jmenovatel, neboli $F_t < mg \sin \alpha$ a v úseku BC konají sáňky pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením $a = g \sin \alpha - \frac{F_t}{m}$.

Pro $n < 1$ je čítec ve vztahu (2) záporný, takže $F_t > mg \sin \alpha$ a v úseku BC konají sáňky pohyb rovnoměrně zpomalený se zrychlením $a' = - \left| g \sin \alpha - \frac{F_t}{m} \right|$.

Pro $n = 1$ je pohyb na úseku BC rovnoměrný, se stálou rychlostí v_B podle (1), takže podle principu setrvačnosti je $F_t = mg \sin \alpha$. Vztah (2) má pak v čitateli i ve jmenovateli 0, tedy p je neurčitý výraz.

Poznámka:

Úlohu lze řešit i jinak, např. kinematicky. Pro úsek AB platí vztahy

$$s = \frac{1}{2} at^2, \quad v_B = at, \quad a = g \sin \alpha,$$

z nichž dostaneme (1).

Na dráze BC se sáňky pohybují rovnoměrně zrychleně se zrychlením

$$a'' = \frac{mg \sin \alpha - F_t}{m}.$$

Měříme-li čas od okamžiku, kdy jsou sáňky v místě B , je

$$d = v_B t + \frac{1}{2} a'' t^2, \quad v_C = v_B + a'' t.$$

Podle zadání je $v_C = n v_B$. Po dosazení a úpravě získáme vztah (2).

4. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Miroslav Ouhrabka)

Těleso koná pohyb rovnoměrně zrychlený tak, že v okamžiku $t_0 = 0$ s má rychlost v_0 . Za dobu t_1 vykoná dráhu s_1 , za další stejnou dobu t_1 vykoná dráhu $2s_1$.

a) Určete počáteční rychlost v_0 a zrychlení a pohybu.

b) Určete dráhu, kterou těleso vykoná v časovém intervalu od $t_2 = (k - 1)t_1$ do $t_3 = kt_1$, kde $k > 1$.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $s_1 = 1,0$ m, $t_1 = 1,0$ s, $k = 6,0$.

Řešení:

a) Z podmínek uvedených v zadání plynou vztahy:

$$s_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 + v_0 t_1,$$

$$3s_1 = \frac{1}{2} a (2t_1)^2 + v_0 (2t_1) = 2a t_1^2 + 2v_0 t_1.$$

Z této soustavy rovnic vyjádříme

$$v_0 = \frac{s_1}{2t_1} ; \quad a = \frac{s_1}{t_1^2} .$$

b) Za dobu t vykoná těleso dráhu

$$s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t = \frac{s_1}{2t_1^2} t^2 + \frac{s_1}{2t_1} t . \quad (1)$$

Do vztahu (1) dosadíme časy t_2, t_3 podle zadání, příslušné dráhy označíme s_{k-1}, s_k :

$$s_{k-1} = \frac{s_1}{2t_1^2} (k-1)^2 t_1^2 + \frac{s_1}{2t_1} (k-1) t_1 ,$$

$$s_k = \frac{s_1}{2t_1^2} k^2 t_1^2 + \frac{s_1}{2t_1} k t_1 .$$

Po odečtení a úpravě

$$\Delta s_k = s_k - s_{k-1} = k s_1 .$$

Pro dané hodnoty: $v_0 = 0,50 \text{ m s}^{-1}$, $a = 1,0 \text{ m s}^{-2}$, $\Delta s_6 = 6,0 \text{ m}$.

5. Úlohy kategorie E

Úlohy a jejich řešení recenzovali dr. Bohumil Vlach a Mojmir Simerský

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Pes pronásleduje zajíce. Jejich dráhy jsou v téže přímce, kolmé na přímočarý okraj rozsáhlého lesa. Zajíc (běžící průměrnou rychlostí $v_1 = 14,5 \text{ m s}^{-1}$) se zachrání, do-

sáhne-li okraje lesa dříve než pes (jehož průměrná rychlost je $v_2 = 15,0 \text{ m s}^{-1}$). Pohyb obou sledujeme od okamžiku, kdy je pes vzdálen od lesa o $d_0 = 861 \text{ m}$ a zajíc je ve vzdálenosti $d_1 = 20,0 \text{ m}$ před ním.

V okamžiku, kdy je pes ve vzdálenosti $d_2 = 1,00 \text{ m}$ za zajícem, zajíc (bod dráhy, v němž se zajíc nachází, označme A) prudce změni směr vpravo a ubíhá nezměněnou rychlostí rovnoběžně s okrajem lesa. Překvapený pes přeběhne bod A , vrátí se a nezměněnou rychlostí sleduje stopu zajíce. Ztratil však čas $t_0 = 2 \text{ sekundy}$.

Když byl pes opět ve vzdálenosti $d_2 = 1,00 \text{ m}$ za zajícem (bod dráhy, v němž se nachází zajíc, označme B), zajíc prudce zahrnul vlevo a ubíhal kolmo na okraj lesa. Pes opět ztratil čas $t_0 = 2 \text{ s}$.

a) Vypočtete dobu t_1 , za kterou se pes poprvé přiblížil k zajíci na vzdálenost d_2 .

b) Vypočtete vzdálenost x bodu A od lesa.

c) Za jakou dobu t_2 proběhl zajíc dráhu AB ?

d) Zachránil se zajíc? (Odpověď odůvodněte výpočtem, jestli zajíc doběhl k okraji lesa dříve než pes.)

Předpokládáme, že zajíc kličkováním neztratil žádný čas.

Řešení:

Situace je znázorněná na obr. 62.

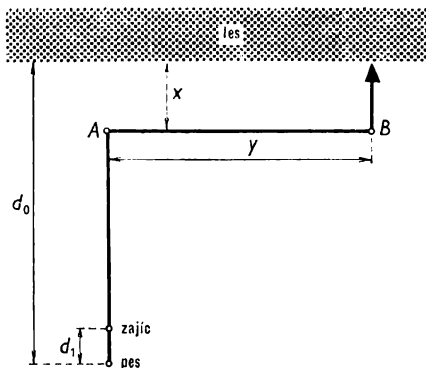
a), b) Za dobu t_1 uběhne zajíc dráhu $d_0 - d_1 - x$, pes dráhu $d_0 - d_2 - x$; odtud

$$d_0 - d_1 - x = v_1 t_1, \quad d_0 - d_2 - x = v_2 t_1.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$t_1 = \frac{d_1 - d_2}{v_2 - v_1}; \quad x = d_0 - \frac{v_2 d_1 - v_1 d_2}{v_2 - v_1}.$$

Pro zadané hodnoty: $t_1 \doteq 38 \text{ s}$, $x \doteq 290 \text{ m}$.



Obr. 62

c) Čas počítáme od okamžiku, v němž zajíc vyběhl z bodu A . Zajíc běží po dobu t_2 , pes po dobu $t_2 - t_0$, zajíc uběhne dráhu y , pes dráhu $y - d_2$; odtud

$$y = v_1 t_2; \quad y - d_2 = v_2 (t_2 - t_0).$$

Řešením dostaneme

$$t_2 = \frac{v_2 t_0 - d_2}{v_2 - v_1}.$$

Pro zadané hodnoty: $t_2 \doteq 58$ s.

d) Čas počítáme od okamžiku, v němž zajíc vyběhl z bodu B . Do lesa doběhne zajíc za dobu

$$t_3 = \frac{x}{v_1},$$

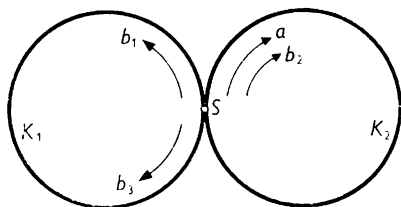
pes za dobu

$$t_4 = t_0 + \frac{x}{v_2}.$$

Pro zadané hodnoty a vypočítanou hodnotu x vyjde $t_3 \doteq 20$ s, $t_4 \doteq 21,3$ s, tedy $t_4 > t_3$; zajíc se zachrání.

2. úloha (navrhli Karel Žampa a dr. Bohumil Vlach)

Dětská cvičná sportovní dráha (obr. 63) má tvar osmičky vytvořené dvěma kružnicemi K_1 , K_2 o společném bodě S a stejných poloměrech $r = 25,0$ m. Na dráze jezdí na ko-



Obr. 63

lech dva chlapci, A , B . Chlapec A jezdí průměrnou rychlostí $v_1 = 5,0$ m s⁻¹, chlapec B průměrnou rychlostí $v_2 = 3,0$ m s⁻¹.

a) Určete doby t_A , t_B , za které chlapci projedou celou trať.

b) Oba chlapci startují současně z bodu S , chlapec A startuje vždy ve směru šipky a (obr. 63). Za kterou dobu (t_1 , t_2 , t_3) se chlapci poprvé setkají, jestliže chlapec B startuje ve směru: (1) šipky b_1 , (2) šipky b_2 , (3) šipky b_3 ? Jakou dráhu ujel každý chlapec v uvedených případech od startu do okamžiku prvního setkání? Kolikrát každý z nich projel celou cvičnou dráhu?

Řešení:

a) Označíme $l = 4\pi r$ délku celé dráhy. Pro doby t_A , t_B platí

$$t_A = \frac{4\pi r}{v_1} ; \quad t_B = \frac{4\pi r}{v_2} .$$

Pro zadané hodnoty: $t_A \doteq 63$ s, $t_B \doteq 105$ s.

b) 1. Chlapec A se k chlapci B blíží rychlostí $v_1 - v_2$, chlapec B má délkový předstih $\frac{l}{2}$. Oba chlapci se poprvé setkají za dobu t_1 , za kterou chlapec A dohoní chlapce B :

$$\frac{l}{2} = (v_1 - v_2) t_1 \quad \text{neboli} \quad t_1 = \frac{2\pi r}{v_1 - v_2} .$$

Chlapec A ujede za tuto dobu dráhu

$$s_{1A} = v_1 t_1 = \frac{2\pi r v_1}{v_1 - v_2} ,$$

chlapec B dráhu

$$s_{1B} = \frac{2\pi r v_2}{v_1 - v_2} .$$

Počty objížděk označíme n_{1A} , n_{1B} ; platí pro ně

$$n_{1A} = \frac{t_1}{t_A} = \frac{v_1}{2(v_1 - v_2)} ; \quad n_{1B} = \frac{v_2}{2(v_1 - v_2)}$$

Pro zadané hodnoty: $t_1 \doteq 79$ s, $s_{1A} \doteq 390$ m, $s_{1B} \doteq 240$ m,

$$n_{1A} = \frac{5}{4}, \quad n_{1B} = \frac{3}{4} .$$

2. Chlapec A se od chlapce B vzdaluje rychlostí $v_1 - v_2$. Oba se poprvé setkají za dobu t_2 , za kterou jejich vzájemná vzdálenost (měřená podél dráhy) nabude hodnoty l , protože dráha je uzavřená. Platí tedy

$$l = (v_1 - v_2) t_2 \quad \text{neboli} \quad t_2 = \frac{4\pi r}{v_1 - v_2}.$$

Ostatní veličiny vyjádříme obdobně jako v předchozím případě a obdobně je označíme:

$$s_{2A} = \frac{4\pi r v_1}{v_1 - v_2}, \quad s_{2B} = \frac{4\pi r v_2}{v_1 - v_2},$$

$$n_{2A} = \frac{v_1}{v_1 - v_2}, \quad n_{2B} = \frac{v_2}{v_1 - v_2}.$$

Pro zadané hodnoty: $t_2 \doteq 160 \text{ s}$, $s_{1B} \doteq 780 \text{ m}$, $s_{2B} \doteq 470 \text{ m}$, $n_{2A} = \frac{5}{2}$, $n_{2B} = \frac{3}{2}$.

3. Chlapci jedou proti sobě a setkají se za dobu t_3 , za kterou chlapec A projede určitou část dráhy a chlapec B její zbytek. Z toho dostaneme vztah

$$v_1 t_3 + v_2 t_3 = l \quad \text{neboli} \quad t_3 = \frac{4\pi r}{v_1 + v_2}$$

a obdobně jako v předchozích případech

$$s_{3A} = \frac{4\pi r v_1}{v_1 + v_2}, \quad s_{3B} = \frac{4\pi r v_2}{v_1 + v_2},$$

$$n_{3A} = \frac{v_1}{v_1 + v_2}, \quad n_{3B} = \frac{v_2}{v_1 + v_2}.$$

Pro dané hodnoty: $t_3 \doteq 39 \text{ s}$, $s_{3A} \doteq 200 \text{ m}$, $s_{3B} \doteq 120 \text{ m}$, $n_{3A} = \frac{5}{8}$, $n_{3B} = \frac{3}{8}$.

3. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Stejnorodý dřevěný trám tvaru kvádru o hranách $a = 4,00$ m, $b = 0,35$ m, $c = 0,25$ m a měrné tíže $\gamma = 4\,900$ N m⁻³ plave na vodě tak, že hrana c je svislá. Měrná tíha vody je $\gamma_1 = 9\,800$ N m⁻³.

a) Jaká část x hrany c trámu vyčnívá nad vodu?

b) Na jednom konci trámu stojí dívka A tíhy $G_1 = 490$ N. Ve vzdálenosti y od druhého konce trámu stojí dívka B tíhy $G_2 = 588$ N. Jaká musí být vzdálenost y , aby hrana c trámu zůstala ve svislé poloze? V tomto případě vypočítejte, jaká část x_1 hrany c trámu vyčnívá nad vodou.

c) Stojí-li dívky na trámu za podmínek určených v případě b), mohou trám užít jako houpačku s mírnou výchylkou. Vysvětlete.

Řešte nejprve obecně a potom pro zadané hodnoty. Obecné řešení vám ušetří mnoho počítání.

Řešení:

a) Trám má tíhu $G_3 = abc\gamma$, ponořená část má objem $ab(c - x)$ a vytlačená voda má tíhu $G_4 = ab(c - x)\gamma_1$. Z rovnosti $G_3 = G_4$ určíme

$$x = c \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1} \right)$$

a pro zadané hodnoty $x \doteq 0,13$ m.

b) Trám považujeme za páku o délce a . Pro rovnováhu platí podmínka

$$G_1 \frac{a}{2} = G_2 \left(\frac{a}{2} - y \right).$$

Odtud vyjádříme

$$y = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{G_1}{G_2} \right)$$

a pro zadané hodnoty: $y = \frac{1}{3} \text{ m}$.

Tíha trámu zatíženého oběma dívkami je $G_5 = abc\gamma + G_1 + G_2$, tíha vody vytlačené ponořenou částí $G_6 = ab(c - x_1)\gamma_1$. Z rovnosti $G_5 = G_6$ vypočítáme

$$x_1 = c \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1} \right) - \frac{G_1 + G_2}{ab\gamma_1} = x - \frac{G_1 + G_2}{ab\gamma_1}$$

a pro zadané hodnoty: $x_1 = 0,05 \text{ m}$.

c) Jde o dvojzvratnou páku v rovnovážné poloze. Houpačka funguje lépe než na vzduchu, poněvadž Archimédova síla vrací páku do rovnovážné polohy.

4. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Československé mince o hodnotách 5 Kčs a 2 Kčs jsou ze slitiny mědi ($\rho_1 = 8\,930 \text{ kg m}^{-3}$) a niklu ($\rho_2 = 8\,600 \text{ kg m}^{-3}$).

Určete měřením hmotnost m_1 mědi a hmotnost m_2 niklu v těchto mincích. Hmotnosti m_1 a m_2 vyjádřete také v procentech celkové hmotnosti mince.

Poznámka: Hmotnost mincí určete vážením, objemy mincí vhodným odměrným válcem. K měření použijte aspoň 20 kusů mincí, které nejprve omyjte v mýdlové vodě a opláchněte čistou vodou.

Řešení:

Hmotnosti a objemy mincí označíme M_x , V_x , kde $x = 5$,

popř. $x = 2$ pro pětikorunovou, popř. dvoukorunovou minci.

Platí:

$$m_1 + m_2 = M_x, \quad (1)$$

$$\frac{m_1}{\varrho_1} = \frac{m_2}{\varrho_2} = V_x. \quad (2)$$

Řešením rovnic (1) a (2) dostaneme

$$m_1 = \frac{M_x - V_x \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2} \varrho_1; \quad m_2 = \frac{V_x \varrho_1 - M_x}{\varrho_1 - \varrho_2} \varrho_2.$$

Bylo naměřeno: $M_5 = 7,00 \text{ g}$, $V_5 = 0,790 \text{ cm}^3$, $M_2 = 6,00 \text{ g}$, $V_2 = 0,680 \text{ cm}^3$.

Dosazením naměřených a zadaných hodnot bylo stanoveno:

pro pětikorunovou minci:

$m_1 = 5,37 \text{ g}$, $m_2 = 1,48 \text{ g}$; hmotnost m_1 je 77 % a hmotnost m_2 je 21 % hmotnosti M_5 ;

pro dvoukorunovou minci:

$m_1 = 4,70 \text{ g}$, $m_2 = 1,20 \text{ g}$; hmotnost m_1 je 78 % a hmotnost m_2 je 20 % hmotnosti M_2 .

Poznámka: Podle zákona o čs. mincích je v pětikorunové i dvoukorunové minci 80 % mědi a 20 % niklu.

5. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Miroslav Ouhrabka)

Ocelový hranolek o hranách a , b , c , vyhřátý na teplotu t , se položí na vodorovný a hladký povrch ledu teploty $t_0 = 0,0 \text{ }^\circ\text{C}$. Po určité době se hranolek právě ponoří do ledu a jeho teplota se ustálí na hodnotě t_0 . Určete počáteční teplotu t hranolku.

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty: $a = 0,05 \text{ m}$, $b = 0,03 \text{ m}$, $c = 0,12 \text{ m}$; hustota ledu $\rho_1 = 920 \text{ kg m}^{-3}$, měrné skupenské teplo tání ledu $l = 335 \text{ kJ kg}^{-1}$, hustota oceli $\rho_2 = 7\,800 \text{ kg m}^{-3}$, měrné teplo oceli $c = 461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Tepelné ztráty zanedbáváme.

Řešení:

Objem V_1 ledu, který roztál, je roven objemu hranolku, tedy $V_1 = abc$. Led, který roztál, má hmotnost $m_1 = \rho_1 V_1 = abc\rho_1$, hranolek má hmotnost $m_2 = abc\rho_2$. Platí kalorimetrická rovnice

$$m_1 l = m_2 c (t - t_0),$$

kde t značí počáteční teplotu hranolku. Po dosazení za m_1 , m_2 , $t_0 = 0,0^\circ \text{C}$ vyjádříme

$$t = \frac{\rho_1 l}{\rho_2 c}$$

a pro zadané hodnoty: $t \doteq 86^\circ \text{C}$.

6. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

a) Na jednom reostatu je napsáno: $1\,000 \, \Omega$, $2,0 \text{ W}$, na druhém $1\,000 \, \Omega$, 300 V .

Na jaké nejvyšší elektrické napětí U může být připojen prvý reostat? Jaký největší proud I_1 , I_2 může procházet každým reostatem?

b) Při nějakém pokusu je třeba, aby k elektrickému napětí $U = 200 \text{ V}$ byl připojen odpor $1\,000 \, \Omega$. K dispozici je však jen několik stejných rezistorů R_0 , z nichž na každém je napsáno: $1\,000 \, \Omega$, $10,0 \text{ W}$.

Z těchto rezistorů R_0 sestavte reostat, který má celkový odpor $R = 1\,000 \, \Omega$ a při připojení k elektrickému napětí

U není příkon na žádném z rezistorů větší než 10,0 W. Načrtněte také schéma reostatu. Řešte úsudkem.

Řešení:

a) Jmenovitý odpor reostatů označíme R , jmenovitý nejvyšší přípustný příkon prvního reostatu P_1 , jmenovité nejvyšší pracovní napětí druhého reostatu U_2 . Potom platí následující vztahy:

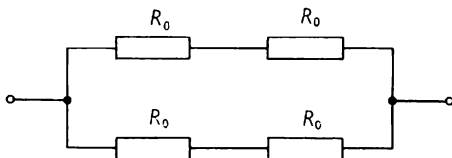
$$P_1 = RI_1^2, \quad I_1 = \frac{P_1}{U}, \quad I_2 = \frac{U_2}{R}$$

a odtud vyjádříme

$$I_1 = \sqrt{\frac{P_1}{R}}, \quad U = \sqrt{RP_1} \quad \text{a k tomu} \quad I_2 = \frac{U_2}{R}.$$

Pro zadané hodnoty: $U \doteq 45 \text{ V}$, $I_1 \doteq 0,045 \text{ A}$, $I_2 \doteq 0,30 \text{ A}$.

b) Vyhovuje zapojení znázorněné na obr. 64. Každá z obou větví má odpor $2R_0$, výsledný odpor je $R_0 =$



Obr. 64

$= 1\,000 \, \Omega$. Na každém ze čtyř rezistorů je napětí 100 V, takže příkon každého z nich je

$$P = \frac{100^2 \text{ V}^2}{1\,000 \, \Omega} = 10,0 \text{ W}.$$

7. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Miroslav Ouhrabka)

Za velkých mrazů zamrzá vodojem. Každou hodinu v něm vznikne led o hmotnosti 1,0 kg. Předchází se tomu tím, že po dobu mrazů svítí ve vodojemu žárovka.

Vypočtete příkon žárovky za předpokladu, že 95 % jejího příkonu se využije na ohřátí vody. Měrné skupenské teplo tání ledu je $l = 335 \text{ kJ kg}^{-1}$.

Řešení:

Za nějakou dobu t sekund vznikne led o hmotnosti

$$m = \frac{1,0 \text{ kg}}{3\,600 \text{ s}} t.$$

Teplo potřebné k jeho roztání je $Q = lm$, tedy

$$Q = 335\,000 \frac{1,0 \text{ t}}{3\,600} \text{ J}.$$

Žárovka o příkonu P a tepelné účinnosti 0,95 vyvine za dobu t teplo

$$Q^* \doteq Pt \cdot 0,95 \text{ J}.$$

Z rovnosti $Q = Q^*$ vyjádříme

$$P \doteq \frac{335\,000 \cdot 1,0}{0,95 \cdot 3\,600} \text{ W} \doteq 98 \text{ W}.$$

Zvolíme žárovku s jmenovitým příkonem 100 W.

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Stejnorodé neohebné pravítko délky $d = 30 \text{ cm}$ vyčnívá čtvrtinou své délky přes hranu stolu. Je právě ještě v rov-

novázné poloze (tj. tlačí jen na hranu stolu), když na konci přechývající části působí síla $F_1 = 0,250 \text{ N}$ svisle dolů.

a) Vypočítejte tíhu G pravítka.

b) Na konci téhož pravítka působí svisle dolů síla $F_2 = 0,125 \text{ N}$. O jakou délku přechývá nyní pravítko přes hranu stolu, je-li opět právě ještě v rovnovážné poloze?

Řešení

a) Na jedné straně dvojzvrtné páky (pravítka) působí tíhová síla $\frac{3}{4} G$ na rameni délky $\frac{3}{8} d$ (vzdálenost těžiště části pravítka ležící na stole od hrany stolu), na druhé straně tíhová síla $\frac{1}{4} G$ na rameni délky $\frac{1}{8} d$ a síla F_1 na rameni délky $\frac{1}{4} d$. Z rovnosti

$$\frac{3}{4} G \cdot \frac{3}{8} d = \frac{1}{4} G \cdot \frac{1}{8} d + F_1 \cdot \frac{1}{4} d$$

vyjádříme $G = F_1$, pro zadané hodnoty $G = 0,250 \text{ N}$.

b) Přechývající délku označíme x , druhá část má délku $d - x$. Tíha přechývající části je $G_1 = G \cdot \frac{x}{d}$, tíha druhé části $G_2 = G \cdot \frac{d - x}{d}$. Pro rovnovážnou polohu páky platí

$$G_2 \cdot \frac{d - x}{2} = G_1 \cdot \frac{x}{2} + F_2 \cdot x.$$

Po dosazení za G_1 , G_2 a pro $G = F_1$ vypočítáme z tohoto vztahu $x = \frac{1}{3} d$, pro zadané hodnoty: $x = 10 \text{ cm}$.

2. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Stejnorodý dřevěný trám tvaru kváдру o hranách $a = 4,00 \text{ m}$, $b = 0,35 \text{ m}$, $c = 0,25 \text{ m}$ a měrné tíže $\gamma = 4\,900 \text{ N m}^{-3}$ plave na vodě tak, že hrana c je svislá. Měrná tíha vody $\gamma_1 = 9\,800 \text{ N m}^{-3}$.

Na jeden konec trámu se postaví dívka tíhy $G = 490 \text{ N}$ a ve vzdálenosti $d = \frac{1}{3} \text{ m}$ od druhého konce trámu se zavěsí těleso z oceli o měrné tíže $\gamma_2 = 74\,500 \text{ N m}^{-3}$. Tíhu závěsného drátu nebo motouzu zanedbáváme.

a) Vypočítejte tíhu G_1 zavěšeného ocelového tělesa tak, aby hrana c trámu byla svislá.

b) Jakou délku x má část hrany c , která v tomto případě vyčnívá nad povrch vody?

Řešení:

Trám považujeme za páku, která se může otáčet kolem vodorovné osy jdoucí jejím těžištěm.

a) Na jedné straně páky působí tíhová síla G na rameni délky $\frac{1}{2}a$, na druhé straně síla G' na rameni délky $\frac{a}{2} - d$, kde G' značí tíhovou sílu G_1 zmenšenou o vztlakovou sílu.

Poněvadž ocelové těleso má objem $\frac{G_1}{\gamma_2}$, má vztlaková síla velikost $\frac{G_1 \gamma_1}{\gamma_2}$. Ze vztahu

$$G \cdot \frac{a}{2} = G_1 \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \left(\frac{a}{2} - d\right)$$

vypočítáme.

$$G_1 = \frac{a \gamma_2}{(a - 2d)(\gamma_2 - \gamma_1)} G \quad (1)$$

a pro zadané hodnoty: $G_1 \doteq 677 \text{ N}$.

b) Celková tíha G^* trámu, dívky a ocelového tělesa je

$$G^* = abc\gamma + G + G_1,$$

vztlaková síla je

$$F' = ab(c - x)\gamma_1 + G_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Z rovnosti $G^* = F'$ dostaneme, s přihlédnutím k (1), vztah, z něhož vyjádříme

$$x = \frac{abc(\gamma_1 - \gamma)(a - 2d) - 2G(a - d)}{(a - 2d)ab\gamma_1}$$

Pro zadané hodnoty: $x \doteq 4,6$ cm.

3. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Na rovinném poli o obsahu $S = 10\,000\text{ m}^2$ je vrstva sněhu tloušťky $d = 0,30\text{ m}$ a teploty $t_0 = 0,0\text{ }^\circ\text{C}$. Hustota sněhu $\rho = 250\text{ kg m}^{-3}$. Slunečním zářením sníh roztál a vzniklá voda se ohřála na teplotu $t = 5,0\text{ }^\circ\text{C}$.

a) Jaké teplo Q bylo pro tuto změnu potřebné?

b) Vypočtěte hmotnost m hnědého uhlí o výhřevnosti $H = 18\,400\text{ kJ kg}^{-1}$, jehož spálením by se uvolnilo stejné teplo.

Měrné skupenské teplo tání ledu $l = 335\text{ kJ kg}^{-1}$, měrné teplo vody $c = 4,18\text{ kJ kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$.

Řešte nejprve obecně.

Řešení:

a) Sníh má objem Sd , hmotnost $Sd\rho$. Teplo potřebné pro změnu skupenství $Q_1 = Sd\rho l$, teplo potřebné k ohřevu vzniklé vody $Q_2 = Sd\rho c(t - t_0)$; celkové potřebné teplo

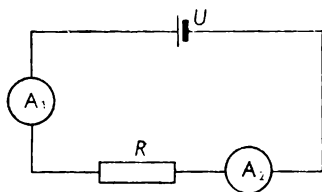
$$Q = Q_1 + Q_2 = Sd\rho[l + c(t - t_0)] . \quad (1)$$

Pro zadané hodnoty: $Q \doteq 270\,000\,000\text{ kJ}$.

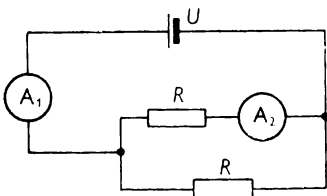
b) Ze vztahu $Q = mH$ vyjádříme $m = \frac{Q}{H}$, kde teplo Q je dáno vztahem (1). Pro zadané hodnoty: $m \doteq 15\text{ t}$.

4. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

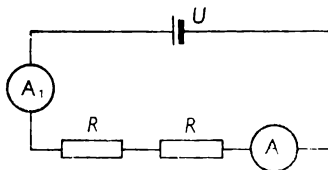
V obvodu podle obr. 65 je zařazen spotřebič o odporu R a dva stejné ampérmetry A_1 , A_2 . Obvody podle obr. 66 a podle obr. 67 vzniknou tak, že do obvodu podle obr. 65 se zařadí další spotřebič o stejném odporu R tak, jak je na obrázcích naznačeno. Vnitřní odpory ampérmetrů A_1 , A_2 jsou zanedbatelně malé ve srovnání s odporem R .



Obr. 65



Obr. 66



Obr. 67

Odpory přívodních a spojovacích vodičů rovněž zanedbáváme. Na všech obvodech je stálé napětí U .

a) Jsou výchylky na ampérmetrech A_1 , A_2 v obvodu podle obr. 65 stejné nebo různé? Zdůvodněte.

b) Jsou výchylky na ampérmetrech A_1 , A_2 v obvodu podle obr. 66 stejné nebo různé? Zdůvodněte.

c) Jsou výchylky na ampérmetrech A_1 , A_2 v obvodu podle obr. 67 stejné nebo různé? Zdůvodněte.

d) Jsou výchylky na ampérmetrech A_1 a na ampérmetrech A_2 v obvodech podle obr. 65 a podle obr. 66 stejné nebo různé? Zdůvodněte.

e) Jsou výchylky na ampérmetrech A_1 a na ampérmetrech A_2 v obvodech podle obr. 65 a podle obr. 67 stejné nebo různé?

Zdůvodněte.

Řešení:

Označíme I_1 proud v obvodu podle obr. 65, I_2 celkový proud v obvodu podle obr. 66, I_2^* proud ve větvi s ampérmetrem A_2 v obvodu podle obr. 66, I_3 proud v obvodu podle obr. 67. Podle Ohmova zákona platí

$$I_1 = \frac{U}{R}, I_2 = \frac{2U}{R}, I_3 = \frac{U}{2R} \quad \text{a} \quad \text{dále} \quad I_2^* = \frac{I_2}{2}.$$

a) Výchylky jsou stejné — oběma ampérmetry protéká též proud I_1 .

b) Výchylka na ampérmetru A_1 je dvojnásobkem výchylky na ampérmetru A_2 , poněvadž $I_2 = 2I_2^*$.

c) Výchylky jsou stejné — oběma ampérmetry protéká též proud I_3 .

d) Výchylka na ampérmetru A_1 v obr. 66 je dvojnásobkem výchylky na ampérmetru v obr. 65, protože $I_2 = 2I_1$. Na obou ampérmetrech A_2 jsou výchylky stejné, poněvadž $I_1 = I_2^*$.

e) Stejně výchylky na ampérmetrech v obr. 65 jsou dvojnásobky stejných výchylek na ampérmetrech v obr. 67, protože $I_1 = 2I_3$.

c) Třetí kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Z místa M vyjel v 10,00 hodin automobil A_1 průměrnou rychlostí $v = 30 \text{ km h}^{-1}$. Za dobu $t = 0,50 \text{ h}$ za ním vyjel stejný automobil A_2 stejnou rychlostí v . Za další dobu $t = 0,50 \text{ h}$ po startu automobilu A_2 vyjel motocykl průměrnou rychlostí $v_1 = 70 \text{ km h}^{-1}$. Všechna tři vozidla jedou týmž směrem. V okamžiku, kdy motocykl dohoní automobil A_1 , se obě tato vozidla zastavila na dobu $t_0 = 0,10 \text{ h}$. Motocyklista předal řidiči automobilu vzkaz. Potom automobil pokračoval v cestě a motocyklista se vracel zpět, opět průměrnou rychlostí v_1 .

a) Kolik bylo hodin, když motocyklista dohonil automobil A_1 ?

b) Jaké vzdálenosti ujela tato vozidla do okamžiku setkání?

c) V kolik hodin potkal vracející se motocyklista automobil A_2 ?

d) V kolik hodin se vrátil na místo startu M ?

Řešení:

a) Označíme t_1 dobu, za kterou motocykl dohoní automobil A_1 . Pak platí

$$v(2t + t_1) = v_1 t_1, \quad \text{odtud} \quad t_1 = \frac{2vt}{v_1 - v}. \quad (1)$$

Pro zadané hodnoty: $t_1 = 45$ min, motocykl dohoní automobil v 11 h 45 min, poněvadž vyjel v 11,00 h.

b) Hledanou vzdálenost označíme d ; pak

$$d = v_1 t_1 \quad (2)$$

a doba t_1 je dána vztahem (1). Pro zadané hodnoty: $d \doteq 52,5$ km.

c) Označíme t_2 dobu, která uplyne od času, kdy se motocykl počne vracet, do času, v němž potká automobil A_2 . Automobil jel do času setkání po dobu $t + t_1 + t_0 + t_2$ a ujel dráhu $v(t + t_1 + t_0 + t_2)$, která je o délku $v_1 t_2$ kratší než dráha d podle (2):

$$v(t + t_1 + t_0 + t_2) = v_1 t_1 - v_1 t_2;$$

odtud

$$t_2 = \frac{v_1 t_1 - v(t + t_1 + t_0)}{v_1 + v}.$$

Pro zadané hodnoty: $t_2 \doteq 7,2$ min. Při setkání uplynula od startu motocyklu doba $t_1 + t_0 + t_2$, pro zadané hodnoty tedy 58,2 min, takže k setkání došlo asi v 11 h 58 min.

d) Motocykl se vrátil do místa startu za dobu $2t_1 + t_0$; pro zadané hodnoty je to 96 minut. Vrátil se ve 12 h 35 min.

2. úloha (navrhl dr. Milan Bednařík)

Plechová nádoba tvaru válce o poloměru $r_1 = 0,10$ m, výšce $v_1 = 0,10$ m a tloušťce stěny $d = 0,0010$ m plave

ve vodě tak, že její dno je vodorovné. Nádoba je vyrobena z plechu o měrné tíze $\gamma_1 = 78\,500 \text{ N m}^{-3}$, měrná tíha vody $\gamma = 9\,800 \text{ N m}^{-3}$.

a) Do jaké hloubky h je nádoba ve vodě ponořena?

b) Postavíme-li doprostřed dna nádoby stejnorodý válec o poloměru $r_2 = 0,020 \text{ m}$ a výšce $v_2 = 0,050 \text{ m}$, zvětší se hloubka ponořené části o $y = 0,0060 \text{ m}$. Určete měrnou tíhu γ_2 vloženého válce.

c) Stanovte měrnou tíhu γ' kapaliny, v níž by se prázdná nádoba ponořila do hloubky stejné jako v případě b).

Řešení:

a) Nádoba má tíhu

$$G = \{\pi(r_1 - d)^2 d + \pi[r_1^2 - (r_1 - d)^2] v_1\} \gamma_1. \quad (1)$$

Voda vytlačená ponořenou částí má tíhu

$$G^* = \pi r_1^2 h \gamma.$$

Z rovnosti $G^* = G$ dostaneme vztah, z něhož po úpravě vyjde

$$h = d \frac{(r_1 - d)^2 + v_1(2r_1 - d)}{r_1^2 \gamma} \gamma_1. \quad (2)$$

Pro zadané hodnoty: $h = 0,024 \text{ m}$.

b) Tíha vloženého válce $\pi r_2^2 v_2 \gamma_2$ je rovna tíze vody o objemu $\pi r_1^2 y$. Z této rovnosti vyjádříme

$$\gamma_2 = \frac{r_1^2 y}{r_2^2 v_2} \gamma.$$

Pro zadané hodnoty: $\gamma_2 = 29\,400 \text{ N m}^{-3}$.

c) Tíha G nádoby je rovna tíze kapaliny o objemu $\pi r_1^2(h + y)$; z této rovnosti určíme

$$\gamma' = \frac{G}{\pi r_1^2 (h + y)},$$

kde veličiny G , h jsou dány vztahy (1) a (2). Pro zadané hodnoty: $\gamma' = 7\,850 \text{ N m}^{-3}$.

3. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Při vytápění domu se v zimním období spálí hnědé uhlí o hmotnosti $M = 10,0 \text{ t}$ a o výhřevnosti $H = 18\,400 \text{ kJ kg}^{-1}$.

a) Jaké teplo Q_1 se využije k vytápění, jsou-li tepelné ztráty 70 %?

b) Představme si, že v krajinách jižní Evropy se voda v létě ohřeje slunečním zářením na teplotu $t = 45^\circ \text{C}$ a ohřátá voda se přechovává v tepelně izolované válcové nádobě. Tato ohřátá voda se v zimě využívá k vytápění stejného domu, přičemž se ochladí na teplotu $t_1 = 22^\circ \text{C}$; tepelné ztráty při tomto způsobu vytápění zanedbáváme. Vypočítejte hmotnost m vody; měrné teplo vody $c = 4,18 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

c) Vypočítejte nejmenší výšku h válcové nádoby o poloměru $r = 5,00 \text{ m}$, v níž se voda přechovává.

Řešení:

a) Spálením uhlí se uvolní teplo $Q = MH$, z toho je využita část $Q_1 = 0,30 MH$; pro zadané hodnoty: $Q_1 = 54\,400\,000 \text{ kJ}$.

b) Z rovnosti $Q_1 = mc(t - t_1)$ vyjádříme

$$m = \frac{0,30 MH}{c(t - t_1)}.$$

Pro zadané hodnoty: $m = 570 \text{ t}$.

c) Označme V objem vody, přičemž pro zadané hod-

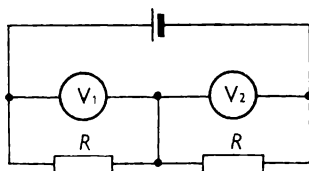
noty $V \doteq 570 \text{ m}^3$. Válcová nádoba má nejmenší výšku

$$h = \frac{V}{\pi r^2},$$

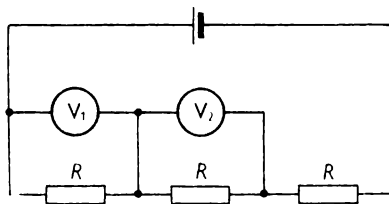
pro zadané hodnoty: $h \doteq 7,3 \text{ m}$.

4. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

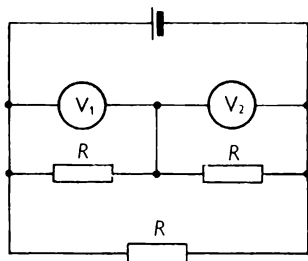
V obvodu podle obr. 68 jsou zařazeny dva spotřebiče o stejných odporech R a dva stejné voltmetry V_1 , V_2 . Obvody podle obr. 69 a obr. 70 vzniknou tak, že do obvodu podle obr. 68 se zařadí třetí spotřebič o stejném odporu R tak, jak ukazují obrázky. Vnitřní odpory voltmetrů jsou velké ve srovnání s odporem R ; odpory přívodních vodičů zanedbáváme vzhledem k velikosti odporu R . Na všech obvodech je stejné napětí U .



Obr. 68



Obr. 69



Obr. 70

a) Jsou výchylky na voltmetrech v obvodu podle obr. 68 stejné nebo různé? Zdůvodněte. Vyjádřete údaje voltmetrů pomocí napětí U .

b) Jsou výchylky na voltmetrech v obvodu podle obr. 69 stejné nebo různé? Zdůvodněte. Vyjádřete údaje voltmetrů pomocí napětí U .

c) Jsou výchylky na voltmetrech v obvodu podle obr. 70 stejné nebo různé? Zdůvodněte. Vyjádřete údaje voltmetrů pomocí napětí U .

Řešení:

a) Na obou spotřebičích jsou stejná napětí $U_1 = \frac{U}{2}$, výchylky jsou stejné, oba voltmetry ukazují napětí U_1 .

b) Na každém ze tří spotřebičů je stejné napětí $U_2 = \frac{U}{3}$, výchylky jsou stejné, oba voltmetry ukazují napětí U_2 .

c) Jde o obdobu části a), poněvadž třetí spotřebič nemá vliv na napětí, které je na každém z obou ostatních spotřebičů. Výchylky jsou stejné, oba voltmetry ukazují napětí $U_3 = U_1 = \frac{U}{2}$.

III. ČÁST

VIII. MEZINÁRODNÍ FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA

1. Průběh a výsledky soutěže

Organizátorem VIII. mezinárodní fyzikální olympiády (VIII. MFO) byla ve studijním roce 1974/75 Německá demokratická republika.

Zúčastnila se jí družstva devíti států: Bulharska, Československa, Francie, Maďarska, Německé demokratické republiky, Německé spolkové republiky, Polska, Rumunska a SSSR. Neúčastnila se družstva Jugoslávie (počtvrté) a Kuby (podruhé).

Z každého státu bylo pozváno 5 soutěžících, jeden vedoucí družstva a jeden pedagogický instruktor. Vedoucím družstva ČSSR byl doc. RNDr. Ivan Náter, docent elektrotechnické fakulty SVŠT v Bratislavě, 1. místopředseda ÚVFO, pedagogickým instruktorem byl RNDr. Alois Kleveta, profesor gymnázia ve Vyškově, člen užšího ÚVFO.

Pro účastníky VIII. MFO a jejich náhradníky bylo uspořádáno soustředění na SZTŠ ve Vyškově v době od 15. 6. do 25. 6. 1975. Podle usnesení ÚVFO bylo na ně pozváno 10 prvních vítězů 3. kola kat. A:

1. Vyskočil Jiří

Praha

G Praha 7,
Nad štolou

2. Lýčka Miroslav	SM	G Vsetín
3. Valášek Michal	Praha	G Praha 2, W. Piecka
4.—5. Krásný Vladislav	ZČ	G Plzeň, nám. Odborářů
Hůlka Jiří	VČ	G Hradec Králové
6. Hula Jan	JM	G Žďár n. Sáz.
7.—8. Vlach Jiří	Praha	G Praha 7, Nad štolou
Klusáček Martin	JM	G Třebíč
9. Miklánek Dušan	Bratislava	G Bratislava, Novohradská
10.—13. Dobročka Edmund	ZS	G Šaľa

Poněvadž Michal Valášek a Dušan Miklánek nenastoupili na soustředění, byli povoláni z pořadí 10.—13. Tvrdík Pavel, StrČ, G Kolín a Svrček Michal, ZČ, G Karlovy Vary. Vedoucím soustředění byl dr. Alois Kleveta, který přednášel 32 hod. partie z mechaniky, vlnění a část termiky. Dalším přednášejícím byl RNDr. Vladimír Mitvalský, odborný asistent katedry fyziky strojní fakulty VUT v Brně, který přednášel 22 hodin partie z elektřiny a termodynamiky, a RNDr. Jiří Komrska, CSc., vědecký pracovník Ústavu přístrojové techniky v Brně, který přednášel 10 hod. partie z optiky.

Před ukončením bylo stanoveno pořadí účastníků — bylo to prvních pět vítězů 3. kola, kteří se zúčastnili soustředění:

1. Jiří Vyskočil	z G Praha 7, Nad štolou
2. Miroslav Lýčka	z G Vsetín
3. Vladislav Krásný	z G Plzeň
4. Jiří Hůlka	z G Hradec Králové
5. Jan Hula	z G Žďár n. S.

a pořadí náhradníků: Jiří Vlach z G Praha 7 a Pavel Tvrdík z G Kolín. Do NDR odjíždělo pět vybraných účastníků.

VIII. MFO se konala ve dnech 7. až 17. 7. 1975 v Güstrowě, okres Schwerin. Družstvo i s vedoucími odjíždělo z Prahy 7. 7. ráno do Berlína a odtud autobusem do Güstrowa. Zde bylo zahajovací zasedání mezinárodní komise. Předsedou mezinárodní komise FO byl akademik prof. G. Kelbg. Vedoucí jednotlivých družstev byli přijati rektorem Vysoké školy pedagogické Liselotty Hermannové v Güstrowě a vedoucím města Güstrowa. Účastníci byli ubytováni po 7 dní v koleji Vysoké školy pedagogické v Güstrowě a 3 dny v Berlíně.

VIII. MFO byla zde pojata jako důležitá společenská akce. Informoval o ní denní i periodický tisk, reportáže přinesl rozhlas a televize. Všechny písemnosti i technické prostředky byly označeny emblémem olympiády. Účastníci měli odznak s emblémem, pošta příležitostné razítko.

Soutěž probíhala na Vysoké škole pedagogické Liselotty Hermannové v Güstrowě.

Vedoucími jednotlivých družstev na VIII. MFO byli:

Bulharsko (BLR): Gleb Grigorievič Zadorožnij,
Československo (ČSSR): doc. RNDr. Ivan Náter,
Francie (F): Pierre Legrand,
Maďarsko (MLR): prof. Rezső Kunfalvi, redaktor,
Německá demokratická republika (NDR): prof. dr. Joachim
Wendt,
Německá spolková republika (NSR): dr. Gunter Lind,
Polsko (PLR): prof. Mgr. Waldemar Gorzkowski,
Rumunsko (RSR): dr. Anatolie Hristev,
Sovětský svaz (SSSR): DrSc. V. Rasumowski.

Pedagogickými instruktory byli:

BLR: Nikola Milanov Velcev, inspektor,
ČSSR: RNDr. Alois Kleveta, profesor gymnázia,
F: René Ravier,
MLR: dr. Géza Tichy, univ. asistent,
NDR: Udo Walta, dipl. odborný učitel,
NSR: Dietmar Stockert,
PLR: dr. Andrzej Filipkowski,
RSR: Marius Gall,
SSSR: Galina Sergejevna Tarasjuková, univ. asistentka.

Každé družstvo mělo tlumočníka.

Byly zadány tři teoretické úlohy a jedna úloha laboratorní. Na vypracování tří teoretických úloh byla vyměřena doba 5 hodin, na vypracování laboratorní úlohy doba 4 hodin.

Dne 8. 7. večer překládali v době do 2 hod. ráno (některé skupiny až do 4 hod. ráno) vedoucí jednotlivých družstev texty soutěžních úloh do svých jazyků. Soutěž probíhala dne 9. 7. od 8 hod. do 13. hod.

Dne 10. 7. večer překládali v době do 23.30 hod. text laboratorní úlohy, která se pak pracovala 11. 7.

Řešení úloh opravovala komise sestavená z vysokoškolských pracovníků.

Z letošních účastníků se již zúčastnili VII. MFO:

1. Dimiter Stojanov z BLR,
2. Jörg Bergmann z NDR,
3. Martin Hanke z NDR,
4. Hans-Georg Martin z NDR,
5. Andrzej Łusakowski z PLR.

Dne 12. 7. v 10 hod. zasedala mezinárodní komise, která rozhodla o hodnocení soutěžících. Každá teoretická

úloha se hodnotila nejvýš 10 body, laboratorní úloha nejvýš 20 body. Každý soutěžící mohl tedy dosáhnout maximálně 50 bodů. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce.

Mezinárodní komise se usnesla, aby výchozím počtem bodů nebyl možný dosažitelný počet bodů, tj. 50 bodů, nýbrž nejlepší dosažený počet bodů, tj. 43 bodů. Pak tedy připadla řešitelům

s 100—90 % bodů, tj. s 43—39 body I. cena,
s 90—78 % bodů, tj. s 38—34 body II. cena,
s 78—65 % bodů, tj. s 33—28 body III. cena,
s 65—50 % bodů, tj. s 27—22 body pochvalné uznání.

Dostali tedy:

- | | | |
|----------|--------------------|--------|
| 1. cenu: | 1. Korschunow | (SSSR) |
| | 2.—5. Schmidt | (MLR) |
| | Fritzsche | (NDR) |
| | Wagner | (NDR) |
| | Oprea | (RSR) |
| | 6.—7. Lýčka | (ČSSR) |
| | Bergman | (NDR) |
| 2. cenu: | 1.—3. Szép | (MLR) |
| | Hanke | (NDR) |
| | Łaszkowski | (PLR) |
| | 4. Delande | (F) |
| | 5.—6. Hula | (ČSSR) |
| | Avdejev | (SSSR) |
| | 7.—8. Frangu | (RSR) |
| | Schachnowitsch | (SSSR) |
| | 9. Faragó | (MLR) |
| 3. cenu: | 1.—2. Bławzdiewicz | (PLR) |
| | Łusakowski | (PLR) |

Pořadí	Jméno	Stát	Hodnocení úloh				Součet bodů
			1	2	3	4	
1.	Korschunov Sergej Jevg.	SSSR	9	6	10	18	43
2. — 5.	Schmidt József	MLR	7	6	9	18	40
	Fritzsche Volker	NDR	8	6	8	18	40
	Wagner Matthias	NDR	9	4	8	19	40
	Oprea Radu	RSR	9	8	9	14	40
6. — 7.	Lýčka Miroslav	ČSSR	9	2	9	19	39
	Bergman Jörg	NDR	9	6	8	16	39
8. — 10.	Szép Jenő	MLR	9	2	10	17	38
	Hanke Martin	NDR	9	5	8	16	38
	Łaskowski Antoni	PLR	9	5	10	14	38
11.	Delande Dominique	F	9	7	8	13	37
12. — 13.	Hula Jan	ČSSR	9	4	9	14	36
	Avdejev Leonid Viktor	SSSR	8	2	10	16	36
14. — 15.	Frangu Laurentiu	RSR	9	6	8	12	35
	Schachnowitsch Jewgenij Isaak.	SSSR	9	4	4	18	35
16.	Fagaró Béla	MLR	9	3	7	15	34
17. — 18.	Bławzdiewicz Jerzy	PLR	9	3	8	13	33
	Łusakowski Andrzej	PLR	9	4	9	11	33
19.	Makedonov Juri Wlad.	SSSR	8	6	3	15	32
20. — 21.	Györgyi Géza	MLR	8	3	8	12	31
	Pietraszkiewicz Dariusz	PLR	9	5	3	14	31

22. — 24.	Hůlka Jiří Delpuch Pierre-Michel Borju Wadim Jur.	ČSSR F	9 9 9	3 3 3	8 6 7	10 12 11	30 30 30
25. — 26.	Martin Hans-Georg Sulikowski Bogusław	NDR PLR	2 9	3 4	8 5	16 11	29 29
27. — 28.	Godefrey René Wiroszek Artilla	F MLR	8 8	3 2	6 3	11 15	28 28
29.	Stojanov Dimitër	BLR	9	2	7	8	26
30. — 32.	Moine René Anton Frank Täzläuanu Mihaj Simsenew Peter	F NSR RSR BLR	5 5 9 6	6 — 5 4	9 7 4 4	5 13 7 10	25 25 25 24
33. — 34.	Mayen Didier Popow Walentin Vyskočil Jiří	F BLR ČSSR	5 7 2	2 1 3	7 5 5	10 10 13	24 23 23
37.	Hansen Wolfgang	NSR	4	—	2	15	21
38.	Nedew Swetlosar	BLR	6	2	9	3	20
39. — 40.	Struwe Walter Masca Mircea	NSR RSR	3 10	— 5	5 2	11 2	19 19
41.	Krásný Vladislav	ČSSR	9	—	5	4	18
42.	Matthaei Ralf	NSR	1	—	1	15	17
43. — 44.	Krestew Teodor Zaharcisiu Eugen	BLR RSR	1 6	— 2	4 3	11 5	16 16
45.	Jacob Peter	NSR	1	2	2	10	15

3.	Makedonow	(SSSR)
4.—5.	Györgyi	(MLR)
	Pietraszkiewicz	(PLR)
6.—8.	Hůlka	(ČSSR)
	Delpeuch	(F)
	Borju	(SSSR)
9.—10.	Martin	(NDR)
	Sulikowski	(PLR)
11.—12.	Godefrey	(F)
	Wirosztek	(MLR)

pochvalné
uznání:

1.	Stojanov	(BLR)
2.—4.	Moine	(F)
	Anton	(NSR)
	Täzläuanu	(RSR)
5.—6.	Simsenew	(BLR)
	Mayen	(F)
7.—8.	Popow	(BLR)
	Vyskočil	(ČSSR)

Devět dalších řešitelů bylo neúspěšných.

Podle získaných bodů je pořadí jednotlivých států (u každého státu je uveden též počet získaných cen a pochvalných uznání) uvedeno v tabulce na následující stránce.

Cenu za originální řešení 1. úlohy dostal Polák Jerzy Bławzdziwicz a cenu za nejlepší řešení teoretických úloh dostal Rumun Radu Oprea.

Dne 14. 7. bylo závěrečné shromáždění spojené s udělením cen a pochvalných uznání v aule školy v Güstrowě a všichni pak jeli do Berlína na prohlídku města i okolí.

Naši soutěžící dosáhli mezi 45 soutěžícími výsledků, které jsou uvedeny v tabulce na následující stránce.

Stát	Počet bodů	Počet cen			Pochval. uznání	Neúspěšných
		1.	2.	3.		
1. NDR	186	3	1	1	—	—
2. SSSR	176	1	2	2	—	—
3. MLR	171	1	2	2	—	—
4. PLR	164	—	1	4	—	—
5. ČSSR	146	1	1	1	1	1
6. F	144	—	1	2	2	—
7. RSR	135	1	1	—	1	2
8. BLR	109	—	—	—	3	2
9. NSR	97	—	—	—	1	4
Celkem		7	9	12	8	9

Pořadí	Jméno	Úloha				Celkem	Vyhodnocení
		1	2	3	4		
6.-7.	Miroslav Lýčka	9	2	9	19	39	1. cena
12.-13.	Jan Hula	9	4	9	14	36	2. cena
22.-24.	Jiří Hůlka	9	3	8	10	30	3. cena
35.-36.	Jiří Vyskočil	2	3	5	13	23	pochval. uznání
41.	Vladislav Krásný	9	0	5	4	18	neúspěšný
Celkem bodů		38	12	36	60	146	
v % (z 50 bodů)		76	24	72	60	58,4	

Na jednotlivé úlohy získala družstva tento počet bodů:

Pořadí	Stát	Bodů za úlohu				Celkem bodů
		1	2	3	4	
1.	NDR	37	24	40	85	186
2.	SSSR	43	21	34	78	176
3.	MLR	41	16	37	77	171
4.	PLR	45	21	35	63	164
5.	ČSSR	38	12	36	60	146
6.	F	36	21	36	51	144
7.	RSR	43	26	26	40	135
8.	BLR	29	9	29	42	109
9.	NSR	14	2	17	64	97
Celkem bodů		326	152	290	560	1 328
v % (ze 450 bodů)		72,4	33,8	64,4	62,2	59,0

Volný čas byl vyplněn exkurzemi a návštěvou pamětihodností. Uskutečnila se exkurze do Schwerinu, kde se vedoucí delegací setkali s pracovníky školství z města i z kraje, dále návštěva památníků obětí pochodu smrti, prohlídka polytechnického muzea, návštěva sochařské galerie v Güstrowě, exkurze vedoucích do Rostocku, exkurze do továrny na kabely, prohlídka zámku a muzea v Güstrowě, prohlídka přístavu v Rostocku, prohlídka zoo v Rostocku, prohlídka proudového kanálu výzkumného pracoviště fakulty pro stavbu lodí, prohlídka doků. Dále pak byla uskutečněna prohlídka Postupimi, zámku Sanssouci, zámku Cecilienhof, návštěva vyhlídkového prostoru televizní věže a památníku sovětských vojáků, čs. skupina navštívila památník Julia Fučíka.

Vedoucí delegací byli přijati zástupcem ministra školství v zámku v Güstrowě.

Dne 17. 7. se vracelo naše družstvo do Prahy.

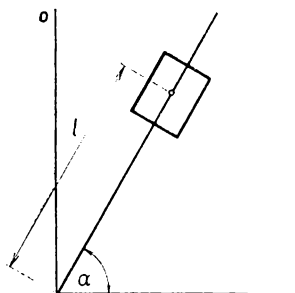
I když tento ročník MFO znamená pro nás zlepšení proti ročníku VI. a VII. MFO, zůstává daleko za ročníky I.—V. MFO.

2. Soutěžní úlohy

1. úloha

Text:

K vertikální ose o je připojeno boční tyčové rameno pod úhlem $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (obr. 71). Konstrukce se může otáčet kolem osy o úhlovou rychlostí ω . Na tyči je posunovatelné těleso tíhy $G = mg$. Přemísťování se děje s třením o součiniteli tření μ ($\mu = \tan \beta$; $\beta =$ úhel tření).



Obr. 71

a) Pro jaké úhly α při $\omega = 0$ je těleso v klidu a pro jaký úhel α je těleso v pohybu?

b) Nechť se soustava otáčí konstantní úhlovou rychlostí

ω . V jakých polohách je těleso v relativním klidu vzhledem k rameni? Během každé konkrétní rotace zůstává úhel α nezměněn.

Při řešení použijte tyto vztahy:

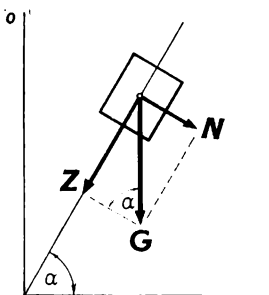
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta ,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta .$$

Řešení:

a) $\omega = 0$

Když $\omega = 0$, působí těleso na rameno silou $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$,



Obr. 72

kteřá se rozkládá (obr. 72) na složku ve směru ramene o velikosti

$$Z = mg \sin \alpha$$

a na složku k rameni kolmou o velikosti

$$N = mg \cos \alpha .$$

Poněvadž velikost síly tření R je úměrná velikosti síly N , platí

$$R = \mu N = \mu mg \cos \alpha .$$

Těleso bude v klidu, pokud

$$Z \leq R$$

čili

$$mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha .$$

Poněvadž $\mu = \operatorname{tg} \beta$, dostáváme podmínku

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu = \operatorname{tg} \beta .$$

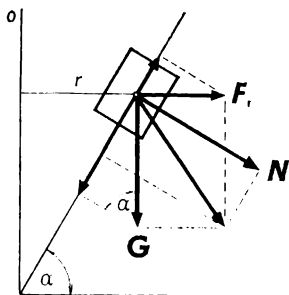
Těleso zůstane v klidu, pokud

$$\alpha \leq \beta$$

a bude se pohybovat, když

$$\alpha > \beta .$$

b) Když se soustava otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω kolem osy o , pak působí na těleso (považujeme je za hmotný bod v hmotném středu tělesa) síla směrem dolů $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ a síla odstředivá $\mathbf{F}_r$ ve vodorovném směru orientovaná od osy o (obr. 73), pro jejíž velikost platí



Obr. 73

$$F_r = mr\omega^2.$$

Výslednice průmětů těchto sil do směru ramene může být orientována dolů nebo nahoru.

Pro velikost složky ve směru ramene orientovanou dolů platí

$$Z = mg \sin \alpha - mr\omega^2 \cos \alpha$$

a pro velikost složky ve směru ramene orientovanou nahoru platí

$$Z = mr\omega^2 \cos \alpha - mg \sin \alpha.$$

Složka kolmá ke směru ramene má v obou případech velikost

$$N = mg \cos \alpha + mr\omega^2 \sin \alpha.$$

Pro velikost síly tření po rameni, která jde vždy proti pohybu, vychází

$$R = \operatorname{tg} \beta (mg \cos \alpha + mr\omega^2 \sin \alpha).$$

Má-li být těleso vzhledem k tyči v klidu, musí platit

$$Z \leq R$$

čili

$$\pm (mg \sin \alpha - mr\omega^2 \cos \alpha) \leq \operatorname{tg} \beta (mg \cos \alpha + mr\omega^2 \sin \alpha);$$

z toho jednak

$$\begin{aligned} g \sin \alpha \cos \beta - r\omega^2 \cos \alpha \cos \beta &\leq \\ &\leq g \sin \beta \cos \alpha + r\omega^2 \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

čili

$$\begin{aligned} g(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha) &\leq \\ &\leq +r\omega^2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta), \end{aligned}$$

$$g \sin (\alpha - \beta) \leq +r \omega^2 \cos (\alpha - \beta) ,$$

jednak

$$\begin{aligned} r \omega^2 \cos \alpha \cos \beta - g \sin \alpha \cos \beta &\leq \\ &\leq g \sin \beta \cos \alpha + r \omega^2 \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

čili

$$r \omega^2 \cos (\alpha + \beta) \leq g \sin (\alpha + \beta) .$$

Musí tedy být splněny dva vztahy

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta) \leq \frac{r \omega^2}{g} , \quad \operatorname{tg} (\alpha + \beta) \geq \frac{r \omega^2}{g} .$$

Označme

$$r_1 = \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tg} (\alpha - \beta) , \quad r_2 = \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tg} (\alpha + \beta) .$$

Nyní je třeba rozeznávat tyto případy:

$$\text{a) } \alpha > \beta, \quad \text{b) } \alpha = \beta, \quad \text{c) } \alpha < \beta.$$

V případě a) bude podmínka pro klid splněna, když bude r splňovat podmínku

$$r_1 \leq r \leq r_2 .$$

Poněvadž

$$r_1 = l_1 \cos \alpha , \quad r_2 = l_2 \cos \alpha ,$$

vychází pro polohu těžiště závaží ve vzdálenosti l

$$l_1 \leq l \leq l_2 .$$

V případě b) je $r_1 = 0$, a tedy též $l_1 = 0$, a tedy

$$0 \leq r \leq r_2 \quad \text{čili} \quad 0 \leq l \leq l_2 .$$

V případě c) vychází $r_1 < 0$, což nemá fyzikální význam, a $r_2 > 0$, tedy i $l_2 > 0$. Je tedy

$$0 \leq l \leq l_2 .$$

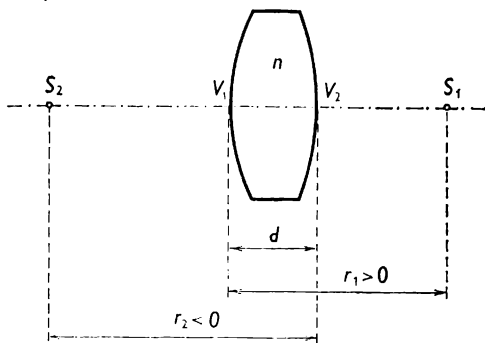
2. úloha

Text:

Pro tlustou skleněnou čočku (index lomu n) ve vzduchu s poloměry křivosti r_1 a r_2 a tloušťkou d (viz obr. 74), je ohnisková vzdálenost f určena tímto vztahem:

$$f = \frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2-r_1)+d(n-1)]}.$$

Poznámka: $r_i > 0$ značí: střed křivosti S_i leží vpravo od bodu V_i ; $r_i < 0$ značí: střed křivosti S_i leží vlevo od bodu V_i ($i = 1, 2$).



Obr. 74

a) Pro kolik různých vlnových délek může mít určitá čočka tutéž ohniskovou vzdálenost?

b) Určete vztah mezi r_i , d a indexy lomu, pro které má daná čočka tutéž ohniskovou vzdálenost pro více vlnových délek; proveďte diskusi.

Nakreslete možný tvar čočky. Vyznačte polohy středů křivosti S_1 , S_2 .

c) Ukažte, že se u ploskovypuklé čočky dá dosáhnout

určité ohniskové vzdálenosti jen pro jednu vlnovou délku.

d) Udejte ještě ve dvou dalších případech podmínky pro parametry tlusté čočky, pro které je možno určitou ohniskovou vzdálenost realizovat pouze jednou vlnovou délkou. Přihlédněte při tom k fyzikální a geometrické skutečnosti.

Řešení:

Index lomu je jednoznačná funkce vlnové délky

$$n = n(\lambda) .$$

a) Úpravou uvedeného vztahu pro f dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} (r_2 - r_1)fn^2 + dfn^2 - dfn - (r_2 - r_1)fn - dfn + df &= \\ &= nr_1r_2 , \end{aligned}$$

která je kvadratickou rovnicí pro n při daných r_1, r_2, d a f , a tedy existují maximálně dva indexy lomu n_1, n_2 , tj. i dvě vlnové délky λ_1, λ_2 , které splňují danou rovnici pro f . Tedy pro ohniskové vzdálenosti jako funkce n , resp. λ , platí

$$f(n_1) = f(n_2) \quad \text{nebo} \quad f(\lambda_1) = f(\lambda_2) .$$

b) Z toho plyne vztah mezi r_1, r_2, d a n_1, n_2 :

$$\begin{aligned} &\frac{n_1r_1r_2}{(n_1 - 1) [n_1(r_2 - r_1) + d(n_1 - 1)]} = \\ &= \frac{n_2r_1r_2}{(n_2 - 1) [n_2(r_2 - r_1) + d(n_2 - 1)]} . \end{aligned}$$

Úpravou dostáváme

$$n_1(n_2 - 1) [n_2(r_2 - r_1) + d(n_2 - 1)] = n_2(n_1 - 1)(r_2 - r_1) + d(n_1 - 1) ,$$

$$\begin{aligned}
& n_1 n_2^2 (r_2 - r_1) + n_1 n_2 (n_2 - 1) d - n_1 n_2 (r_2 - r_1) - \\
& - n_1 (n_2 - 1) d = n_1^2 n_2 (r_2 - r_1) + n_1 n_2 (n_1 - 1) d - \\
& - n_1 n_2 (r_2 - r_1) - n_2 (n_1 - 1) d, \\
& n_1 n_2 (n_2 - n_1) (r_2 - r_1) + n_1 n_2 (n_2 - n_1) d - (n_2 - n_1) d = \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Protože $n_2 \neq n_1$, dostáváme

$$n_1 n_2 (r_2 - r_1) + n_1 n_2 d - d = 0$$

čili

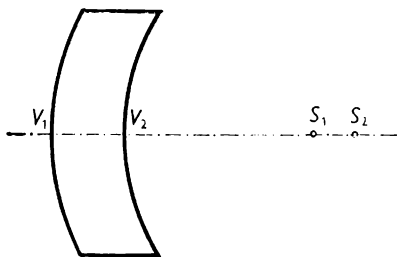
$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_1 n_2} \right).$$

Poněvadž $n_1 > 1$, $n_2 > 1$, $d > 0$, vyplývá z tohoto vztahu

$$0 < r_1 - r_2 < d. \quad (1)$$

α) Všimněme si nejprve případů, kdy poloměry křivosti mají konečnou hodnotu.

1. případ: $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ (obr. 75).



Obr. 75

Pak z (1) vyplývá

$$r_1 > r_2$$

a z toho

$$r_2 < r_1 < d + r_2.$$

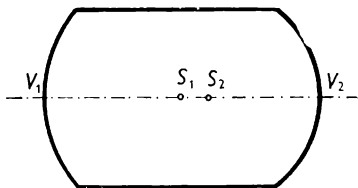
Musí tedy S_2 ležet vpravo od S_1 a musí být

$$S_1 S_2 < V_1 V_2.$$

2. případ: $r_1 > 0, r_2 < 0$ (obr. 76).

Pak z (1) plyne

$$0 < |r_1| + |r_2| < d,$$



Obr. 76

a proto zleva doprava následují po sobě body V_1, S_1, S_2, V_2 .

3. případ: $r_1 < 0, r_2 > 0$.

Pak podmínka (1) nemůže být splněna.

4. případ: $r_1 < 0, r_2 < 0$ (obr. 77).

Pak plyne z (1)

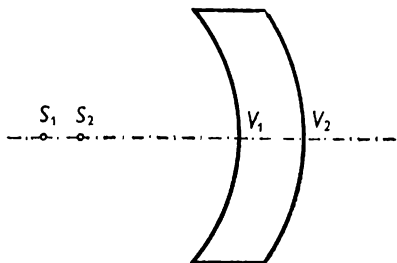
$$0 < -|r_1| + |r_2| < d$$

a z toho

$$|r_1| < |r_2| < d + |r_1|.$$

Musí tedy být S_2 vpravo od S_1 a $S_1 S_2 < V_1 V_2$.

β) Když některý z poloměrů křivosti poroste do neko-



Obr. 77

nečna, pak dostaneme ploškovypuklou nebo ploškodutou čočku; tento případ je řešen v bodě c.

c) Úpravou vztahu pro ohniskovou vzdálenost tlusté čočky dostáváme

$$f = \frac{nr_1}{(n-1) \left[n \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) + \frac{d}{r_2} (n-1) \right]}$$

a odtud pro $r_2 \rightarrow \infty$

$$f = \frac{r_1}{n-1} ;$$

a podobně pro $r_1 \rightarrow \infty$

$$f = \frac{nr_2}{(n-1) \left[n \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) + \frac{d}{r_1} (n-1) \right]}$$

a odtud

$$f = \frac{r_2}{1-n} .$$

Je tedy f na indexu lomu závislé v první mocnině, a proto pro různá n vycházejí různé ohniskové vzdálenosti.

d) Vztah pro ohniskovou vzdálenost upravme na tvar

$$(r_2 - r_1)fn^2 + dfn^2 - dfn - (r_2 - r_1)fn - dfn + df = \\ = nr_1r_2$$

a tuto rovnici píšme ve tvaru

$$An^2 + Bn + C = 0, \quad (2)$$

kde

$$A = (r_2 - r_1 + d)f, \quad (3) \\ B = -[(r_2 - r_1)f + 2df + r_1r_2], \\ C = df.$$

Řešením dostáváme

$$n_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Určitou ohniskovou vzdálenost lze realizovat jen jednou vlnovou délkou tehdy,

α) když rovnice (2) pro n nebude kvadratická, tj. bude $A = 0$ a pak $n = -\frac{C}{B} > 1$,

β) když rovnice (2) bude mít jeden dvojný kořen, tj. diskriminant rovnice (2) bude roven nule, tedy

$$B^2 - 4AC = 0 \quad \text{a pak} \quad n = -\frac{B}{2A} > 1,$$

γ) když v rovnici (2) bude $B = 0$; pak rovnice bude mít

sice dva kořeny lišící se znaménkem, ale fyzikální význam bude mít jen kořen kladný

$$n^2 = -\frac{C}{A} > 1,$$

δ) když $B^2 - 4AC > B^2$ a přitom
bude $A > 0$, nebo $A < 0$.

ad α) Poněvadž $f \neq 0$, nastane tento případ, když bude současně splněno $d = r_1 - r_2$ a

$$n = \frac{df}{(r_2 - r_1)f + 2df + r_1r_2} > 1$$

čili

$$d = r_1 - r_2 \quad \text{a} \quad n = \frac{df}{df + r_1r_2} > 1.$$

ad β) Z podmínky

$$[(r_2 - r_1)f + 2df + r_1r_2]^2 - 4(r_2 - r_1 + d)df^2 = 0$$

vyplývá

$$[(r_2 - r_1)f + r_1r_2]^2 + 4r_1r_2df = 0$$

a vedle toho musí být splněna podmínka

$$\frac{(r_2 - r_1)f + 2df + r_1r_2}{2(r_2 - r_1 + d)f} > 1.$$

ad γ) Tento případ nastane, když bude

$$(r_2 - r_1)f + 2df + r_1r_2 = 0$$

a

$$\frac{d}{r_1 - r_2 - d} > 1.$$

ad δ) Když $A > 0$, pak musí být $C < 0$ čili $df < 0$. Poněvadž $d > 0$, musí být $f < 0$, a tedy z (3)

$$r_2 - r_1 + d < 0.$$

Když $A < 0$, pak musí být $C > 0$ čili $df > 0$. Poněvadž $d > 0$, musí být $f > 0$, a tedy z (3)

$$r_2 - r_1 + d < 0.$$

Tedy je-li $r_2 - r_1 + d < 0$, pak pro $f \neq 0$ je f jednoznačně dána vlnovou délkou.

Pro ploskovypuklou nebo ploskodutou čočku, pro niž $r_1 \rightarrow \infty$ nebo $r_2 \rightarrow -\infty$ je tato podmínka také splněna. Rozbor je uveden v bodě c).

3. úloha

Text:

Řešte následující rovinnou úlohu z iontové optiky: Z bodu Q vychází svazek paprsků, tvořených jednomocnými kladnými ionty (náboj $+e$) se stejnými neproměnnými hmotnostmi m . Paprsky leží v nákresné rovině. Ionty byly urychleny napětím U . V homogenním magnetickém poli o indukci B , která protíná nákresnou rovinu kolmo zezadu dopředu, jsou ionty vychylovány. Toto magnetické pole má být ohraničeno tak, aby se původně rozbíhavé paprsky sbíhaly v bodě A ($QA = 2a$) a aby byly symetrické vzhledem k ose souměrnosti úsečky QA .

(Poznámka:

Předpokládá se, že se ionty pohybují nerelativistickými rychlostmi.)

Z možných ohraničení magnetického pole uvažujte o takovém druhu, při kterém souvislé magnetické pole

působí v okolí osy souměrnosti úsečky a body Q a A jsou v prostoru mimo magnetické pole.

a) Určete poloměr křivosti R trajektorií částic v magnetickém poli jako funkci napětí U a indukce B .

b) Určete charakteristické vlastnosti trajektorií částic ve výše popsaném uspořádání.

c) Získejte ohraničení magnetického pole geometrickou konstrukcí pro případy:

$$R < a ,$$

$$R = a ,$$

$$R > a .$$

d) Určete obecnou rovnici pro ohraničení magnetického pole.

Řešení:

a) Ionty o náboji $+e$ byly urychleny napětím U , takže platí

$$eU = \frac{1}{2}mv^2 ,$$

kde m je hmotnost iontu a v získaná rychlost. Pro její velikost vychází

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} .$$

V homogenním magnetickém poli o indukci B působí na pohybující se ion síla. Poněvadž rychlost v je kolmá k indukci B , je tato síla (Lorentzova) o velikosti $F = evB$ stálá, a proto způsobí, že se ion pohybuje po kružnici. Z rovnosti Lorentzovy síly a odstředivé síly

$$evB = \frac{mv^2}{R}$$

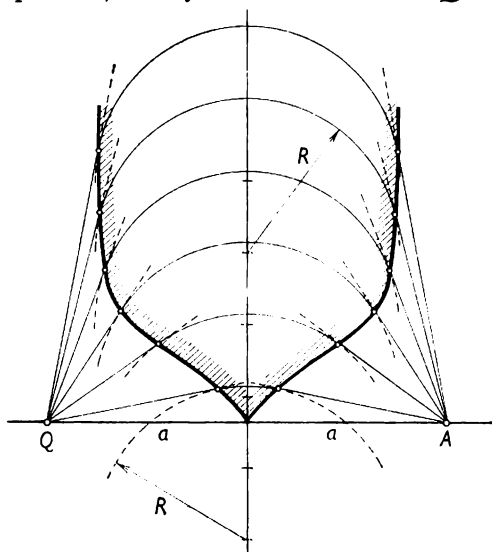
vychází pro poloměr kruhové dráhy

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

b) Dráhy iontů jsou v magnetickém poli kruhové a vně magnetického pole jsou to tečny, které na tyto kruhové dráhy navazují.

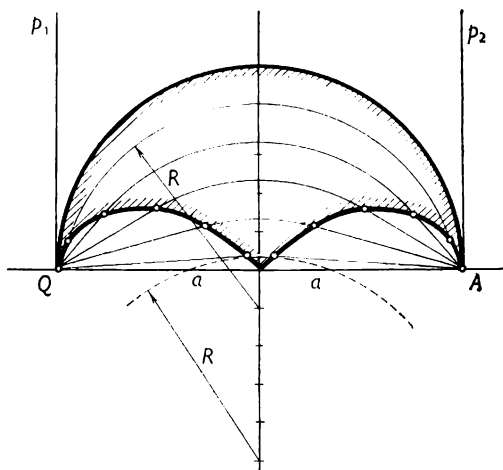
Ohraničení magnetického pole je symetrické. Osa souměrnosti je osa úsečky QA . Dráhy iontů protínají osu souměrnosti pod pravým úhlem, tzn. že středy křivosti kruhových drah iontů leží na ose souměrnosti.

Vzhledem k tomu, že magnetické pole mífí zezadu dopředu, probíhají dráhy iontů nad úsečkou QA .



Obr. 78

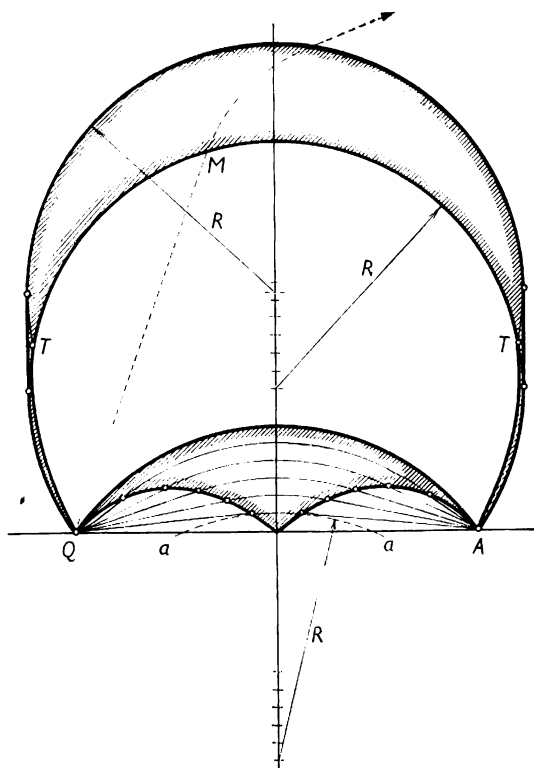
c) Jestliže $R < a$, dostáváme pro ohrazení magnetického pole křivku v obr. 78, pro $R = a$ křivku v obr. 79 a pro $R > a$ křivku v obr. 80.



Obr. 79

Při $R = a$ je magnetické pole vymezeno dvěma symetrickými křivkami spojujícími body dotyku tečen ke kružnicím a procházejícími bodem Q , resp. bodem A , a přímkami kolnými na spojnici QA .

Poněvadž ion vycházející z bodu Q ve směru p_1 se okamžitě dostane do magnetického pole, a tedy je vychylován po kružnici se středem ve středu úsečky QA , nemůže se uplatnit pole nad touto půlkružnicí. Proto je prakticky magnetické pole vymezeno dvěma symetrickými křivkami spojujícími bod Q s bodem A a půlkružnicí nad úsečkou QA .



Obr. 80

Při $R > a$ je tomu podobně jako v případě $R = a$. K tomu přistupuje ještě magnetické pole vymezené zvnitřku kružnicí procházející body Q a A , množinou bodů dotyku tečen z bodu Q k soustavě kružnic (o středech na ose úsečky QA a o poloměru R) tvořící úsek QT , kde T je průsečík uvedené křivky s kružnicí procházející

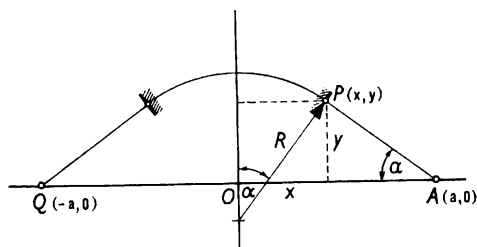
bodů Q , A a zvnějšku obálkou kružnic o středech na ose úsečky QA o poloměru R a kružnicí procházející bodem T o poloměru R . K tomu patří i symetrická část. Existují tedy v tomto případě dvě souvislá magnetická pole.

Poznámka:

Toto pole působí i na další ionty, např. na ion vylétující z bodu Q ve směru QM , který je polem ovlivněn, ale nedostane se do bodu A .

d) Rovnici ohraničení magnetického pole dostaneme takto:

α) v souřadnicích pravoúhlých (obr. 81):



Obr. 81

$$x = R \sin \alpha,$$

$$y = (a - x) \operatorname{tg} \alpha = (a - x) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

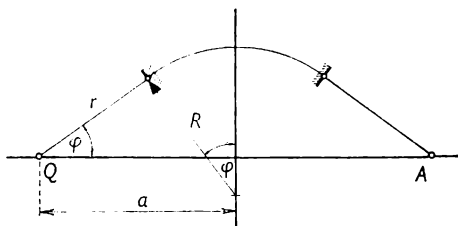
$$y = \frac{(a - x) x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

β) v souřadnicích polárních (obr. 82):

$$r \cos \varphi + R \sin \varphi = a,$$

$$r = \frac{a - R \sin \varphi}{\cos \varphi},$$

$$r = \frac{a}{\cos \varphi} \left(1 - \frac{R}{a} \sin \varphi \right).$$



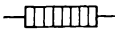
Obr. 82

4. úloha

Text:

Na pracovišti jsou připraveny následující pomůcky:

polovodičový prvek
posuvný odpor
pevný odpor
zdroj napětí

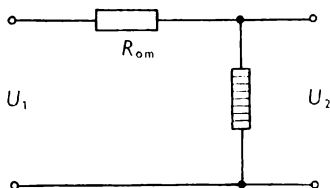

140 Ω,
300 Ω,
9,0 V,

2 univerzální měřicí přístroje se zablokovaným ohmmetrem a spojovací vodiče; použijte je k řešení následujících úkolů:

a) Stanovte voltampérovou charakteristiku polovodičového prvku v rozmezí určeném jeho maximálním přípustným výkonem 250 mW; naměřené hodnoty zaznamenejte do tabulky a nakreslete charakteristiku. Před začátkem měření uvažte, jak je možno bezpečně vyloučit přetížení

polovodičového prvku a запиšte tuto úvahu do protokolu. Nakreslete schéma zvoleného zapojení a proveďte diskusi systematických chyb zapojení.

b) Vypočítejte vnitřní odpor (dynamický odpor) polovodičového prvku při proudu 25 mA.



Obr. 83

c) Změřte v zapojení podle obrázku 83 závislost výstupního napětí U_2 na vstupním napětí U_1 a výsledek vyjádřete graficky. Vstupní napětí U_1 měňte od 0 V do 9 V. Přitom polovodičový prvek zapojte tak, aby napětí U_2 dosáhlo největší možné hodnoty. Zakreslete úplné schéma zapojení do protokolu a proveďte diskusi výsledků měření.

d) Určete, jaká je velikost změny výstupního napětí U_2 v tomto obvodu, jestliže se vstupní napětí U_1 zvýší ze 7 V na 9 V. Zdůvodněte kvalitativně vztah

$$\frac{\Delta U_1}{\Delta U_2}.$$

e) Do jaké skupiny polovodičových prvků patří prvek použitý v experimentu?

Uveďte příklad praktického použití zapojení v daném obrázku.

Poznámka:

Měřicí přístroje mohou být použity jako voltmetr nebo ampérmetr. Mají třídu přesnosti 2,5 % a tyto parametry:

Měřicí rozsah	Vnitřní odpor
50 μA	2 $\text{k}\Omega$
300 μA	1 $\text{k}\Omega$
3 mA	100 Ω
30 mA	10 Ω
300 mA	1 Ω
0,3 V	6 $\text{k}\Omega$
1 V	20 $\text{k}\Omega$
3 V	60 $\text{k}\Omega$
10 V	200 $\text{k}\Omega$

Řešení:

a) Aby se vyloučilo výkonové přetížení neznámého polovodičového prvku, nesmí se v žádném případě překročit jeho dovolená výkonová ztráta. Proto před měřením je vhodné určit charakter polovodičového prvku. Před měřením pro určení typu prvku (zhruba) vyjděme z této úvahy: Na prvku je napětí U_1 při malém protékajícím proudu. Při zvětšení napětí o malé ΔU na U_1 zvětší se skokem proud, např. v důsledku nulového dynamického odporu prvku, takže by prvkem tekla téměř nekonečně velký proud I_1 . Proto tento proud musí být omezen odporem R_{om} , pro nějž platí

$$P \geq U_1 I_1, \quad (1)$$

$$P \geq U_1 \cdot \frac{U - U_1}{R_{\text{om}}}, \quad (2)$$

kde U je napětí zdroje, a tedy

$$R_{\text{om}} \geq \frac{U_i(U - U_i)}{P} = \frac{1}{P}(UU_i - U_i^2). \quad (3)$$

Výraz na pravé straně závisí na U_i , které neznáme. Máme-li najít R_{om} tak, aby vyhovovalo pro všechna U_i , musíme je volit větší než největší z možných hodnot pravé strany.

Musíme tedy nejprve najít takové U_i , pro něž pravá strana má maximální hodnotu. Musí tedy platit

$$\frac{\partial R_{\text{om}}}{\partial U_i} = \frac{1}{P}(U - 2U_i) = 0,$$

pak z toho

$$U_i = \frac{U}{2} \quad (4)$$

a poněvadž

$$\frac{\partial^2 R_{\text{om}}}{(\partial U_i)^2} = -\frac{2}{P},$$

je tedy extrém maximum.

Dosadíme-li nyní za U_i ze (4) do (3), dostaneme

$$R_{\text{om}} \geq \frac{\frac{U}{2} \left(U - \frac{U}{2} \right)}{P} = \frac{U^2}{4P}$$

a pro zadané hodnoty vychází

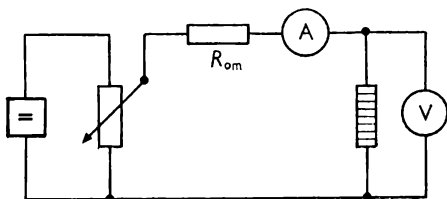
$$R_{\text{om}} \geq \frac{9,0^2}{4 \cdot 0,250} \Omega = 81 \Omega.$$

Nejmenší z vyhovujících hodnot R_{om} je dáno předcházejícím vztahem, v němž platí jen znaménko rovnosti. Pro zadané hodnoty vychází $R_{\text{om}} = 81 \Omega$. Při použití potenciometrického nastavení napětí může být odpor menší, ne-

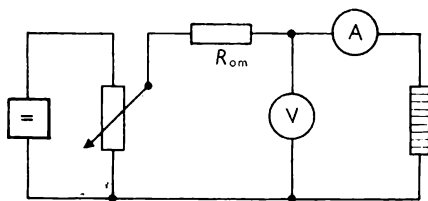
boť v případě $\frac{U}{2}$ je v sérii s prvkem odpor $\frac{140}{2} \Omega = 70 \Omega$.

Další podrobnější rozbor úloha nepotřebuje (k přesnému určení by se dal určit odpor uvažováním zatíženého děliče).

Schéma připojení ampérmetru a voltmetru k měřenému prvku se provede podle obr. 84 nebo obr. 85. Za R_{om} možno použít odpor 300Ω .

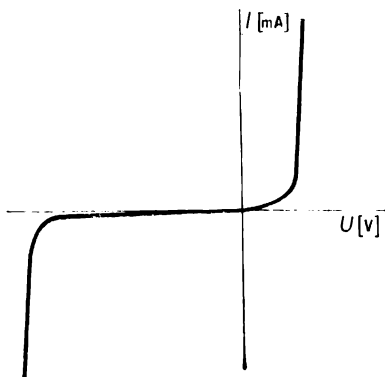


Obr. 84



Obr. 85

Při předběžném změření je nutno zjistit tvar charakteristiky (obr. 86). Podle tvaru charakteristiky jde o Zenerovu diodu. Nepoužije-li se omezujícího odporu, je nutné vypočítat maximální dovolené hodnoty proudu. Nejprve je třeba z charakteristiky určit body zlomu. V závěrném



Obr. 86

směru zlom nastává při 6–7 V, v propustném při 0,7 V. Pak dovolený maximální proud pro propustný směr je

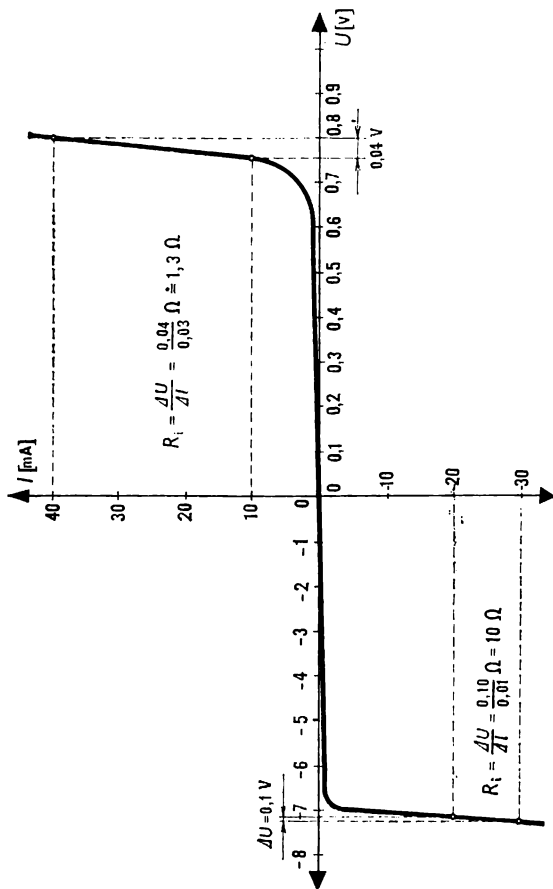
$$I_{\max} = \frac{P}{U_{\text{zlom}}} = \frac{0,250}{0,7} \text{ A} = 0,36 \text{ A}$$

a pro závěrný směr je

$$I_{\max} = \frac{P}{U_{\text{zlom}}} = \frac{0,250}{7} \text{ A} = 0,036 \text{ A}.$$

Proto při měření bez ochranného omezovacího odporu stačí udržovat přibližně proud $I < 0,36 \text{ A}$, resp. $I < 0,036 \text{ A}$ (přesně lze určit až při měření charakteristiky vždy z předcházející hodnoty U_2).

Systematická chyba nastane vždy při zapojení měřicích přístrojů, a to podle obr. 84 nebo 85. Při spojení podle obr. 84 je ampérmetrem měřen i proud jdoucí voltmetrem a při spojení podle obr. 85 je napětí na voltmetru rovno



Obr. 87

napětí na polovodiči i na ampérmetru. Ze znalostí konstant měřicích přístrojů lze tyto chyby vyloučit — úloha to však nevyžaduje.

Další systematická chyba vzniká zahříváním měřeného prvku a všech použitých přístrojů.

Nyní lze sestavit tabulku naměřených hodnot a pak příslušný graf (obr. 87).

b) Z naměřených hodnot podle části a) lze určit dynamický odpor Zenerovy diody. Zenerova dioda se využívá v závěrném směru, např. ke stabilizaci. Proto určení dynamického odporu provedeme pro závěrný směr.

$$R_{\text{dyn}} = \frac{\Delta U}{\Delta I}, \text{ přesněji } \frac{\partial U}{\partial I},$$

kde ΔU je rozdíl napětí dvou nejbližších měření v okolí $I = 25 \text{ mA}$ a ΔI rozdíl příslušných proudů.

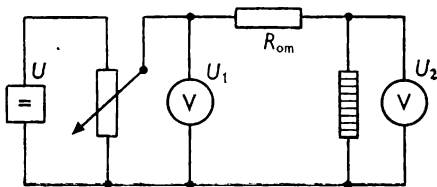
Je možno též stanovit dynamický odpor v propustném směru.

Z naměřených hodnot vychází

$$R_{\text{dyn v zav.}} \doteq 10 \, \Omega,$$

$$R_{\text{dyn v prop.}} \doteq 1,3 \, \Omega.$$

c) Měření provedeme podle schématu zapojení na obr. 88. Dioda musí být zapojena v závěrném směru. Při zvyšování



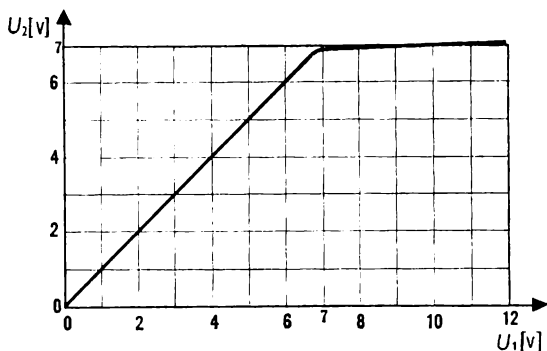
Obr. 88

napětí U_1 roste U_2 zprvu lineárně a po dosažení Zenerova napětí (tj. $U_{z\text{lom}})$ napětí U_2 je téměř konstantní (stabilizace napětí) (obr. 89) (odpor $300\ \Omega$ zaručuje, že nelze diodu přetížit). To je způsobeno malým dynamickým odporem diody pro napětí větší, než je Zenerovo napětí.

d) Při zvyšování napětí U_1 ze 7 V na 9 V se změnilo výstupní napětí o $\Delta U_2 = 0,1\text{ V}$ (z grafu), a tedy poměr

$k = \frac{\Delta U_1}{\Delta U_2}$ určuje potlačení kolísání vstupního napětí

na výstupu, tedy je to určitý koeficient charakterizující stabilizační účinek jak diody, tak i celého zapojení s diodou. Je-li ΔU_2 menší při stejném ΔU_1 , tj. k se zvětší a stabilizační účinek obvodu je lepší.



Obr. 89

e) Název polovodičového prvku byl uveden již dříve, stejně jako jeho použití. Je to tedy Zenerova dioda, která se převážně používá ke stabilizaci napětí.

OBSAH

I. část: Zpráva o průběhu soutěže	5
1. Cíl soutěže a její organizace	5
2. Složení ústředního výboru fyzikální olympiády ve školním roce 1974/75	7
3. Krajské výbory FO ve školním roce 1974/75 a jejich předsedové	11
4. Okresní výbory FO ve školním roce 1974/75	12
5. Průběh soutěže ve školním roce 1974/75	12
A. První kolo soutěže kategorií A, B, C a D	12
B. Druhé kolo soutěže kategorií A, B, C a D	15
C. Třetí kolo soutěže A	25
D. Kategorie E	31
E. Akce na podporu FO	36
1. Kurzy pro žáky během školního roku	36
2. Semináře pro učitele škol 1. cyklu	37
3. Krajská soustředění úspěšných řešitelů FO a MO	37
4. Celostátní soustředění úspěšných řešitelů MO a FO z III. ročníků škol 2. cyklu	37
5. Třídy se zaměřením pro matematiku a fyziku	38
II. část: Soutěžní úlohy	41
1. Úlohy kategorie A	41
a) První kolo soutěže	41
b) Druhé kolo soutěže	69
c) Třetí kolo soutěže	79
2. Úlohy kategorie B	98
a) První kolo soutěže	98
b) Druhé kolo soutěže	116

3. Úlohy kategorie C	129
a) První kolo soutěže	129
b) Druhé kolo soutěže	152
4. Úlohy kategorie D	159
a) První kolo soutěže	159
b) Druhé kolo soutěže	182
5. Úlohy kategorie E	191
a) První kolo soutěže	191
b) Druhé kolo soutěže	202
c) Třetí kolo soutěže	208
III. část: VIII. mezinárodní fyzikální olympiáda	214
1. Průběh a výsledky soutěže	214
2. Soutěžní úlohy	224

POZNÁMKY

Edice: Pomocné knihy pro žáky

Prof. RNDr. Rostislav Košťál a Mojmír Simerský

Šestnáctý ročník fyzikální olympiády

Obálku navrhl Josef Prchal
Obrázky rýsoval Josef Kubík

Odpovědná redaktorka: Jiřina Cívínová
Výtvarná redaktorka: Milada Slaninová
Technický redaktor: Miloš Jirsa

Z písma Plantin vytiskl Tisk, knižní výroba, n. p.
Brno, závod 3, Český Těšín

AA 9,20 (8,22 AA textu, 0,98 AA grafiky) — VA 9,7
Vydání 1. — Praha 1977 — Počet stran 256

Náklad 3550 výtisků
Tematická skupina a podskupina 03/5
Cena brožovaného výtisku Kčs 11,50

505/21,825

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,
v Praze jako svou publikaci č. 65-0-28

14-215-77	Kčs 11,50
-----------	-----------