

PROF. RNDr. ROSTISLAV KOŠŤÁL,
MOJMÍR SIMERSKÝ, VÁCLAV SUCHÁNEK

XV. ročník fyzikální olympiády

ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE
KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1973/74

PRAHA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Zpracovali prof. dr. Rostislav Košťál, Mojmír Simerský a Václav
Suchánek

Recenzovali František Živný a Vladimír Kohout

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1975

I. ČÁST

ZPRÁVA O PRŮBĚHU SOUTĚŽE

1. Cíl soutěže a její organizace

XIV. sjezd KSČ v roce 1971 vytyčil základní úkoly pro další rozvoj naší socialistické společnosti. Jedním z vytyčených úkolů bylo urychlit růst vědeckotechnického pokroku, který má rozhodující význam pro další vzestup naší socialistické ekonomiky. Jednání ÚV KSČ v květnu 1974 k otázkám vědeckotechnického rozvoje se zabývalo hodnocením plnění uvedeného úkolu. Bylo poukázáno na nezastupitelnou úlohu vědeckotechnické inteligence, která pod vedením dělnické třídy svou tvůrčí prací a aktivitou přispívá k rozvoji národního hospodářství v duchu leninského plánu socialistické výstavby, v němž uplatnění vědy a techniky zaujímá jedno z předních míst.

Úkolem školy je připravit novou technickou inteligenci, která bude schopna vědeckotechnickou revoluci dále rozvíjet a postavit ji do služeb komunistické výstavby naší společnosti. Při plnění tohoto úkolu musí škola vytvářet takové podmínky a používat takové prostředky, aby objevila technicky talentované žáky, aby jejich schopnosti správně usměrňovala a dále rozvíjela. Poněvadž to není možno plně zajistit v rámci povinné výuky, jsou organizovány různé soutěže technického charakteru. Jedno z předních míst zaujímá soutěž fyzikální olympiáda, která byla založena z popudu JČSMF a v roce 1973/74 se konala již popatnácté pro žáky středních škol a po jedenácté pro žáky základních devítiletých škol.

Organizační řád soutěže fyzikální olympiáda (FO) je dosud

určen výnosem ministerstva školství a kultury (MŠK) ze dne 14. března 1963, č. 2293/63 – I/1, který byl uveřejněn ve Věstníku MŠK, r. 1963, seš. 12. Je však již připraven nový statut matematické a fyzikální olympiády, který přihlíží k novým státoprávním poměrům a vychází ze získaných zkušeností.

Zavedení obou soutěží je zdůvodňováno tím, že mají

a) vést žáky k samostatné práci, vzbudit u nich hlubší zájem o studium matematiky a fyziky, pomáhat žákům při ověřování nadání a schopností, a tím jim ulehčit volbu povolání nebo studijního oboru,

b) přispívat k zvyšování úrovně vyučování matematiky a fyziky,

c) přispívat k výchově dorostu pro vysoké školy technické a pro matematické a fyzikální studium na univerzitách, a tím zabezpečit větší příliv matematicky a fyzikálně erudovaných pracovníků pro oblast naší hospodářskotechnické výstavby.

Obě soutěže jsou vhodným prostředkem k vyhledávání a usměrňování talentovaných žáků, k rozvíjení jejich schopností a dovedností, přičemž dobrovolnost soutěže má velký emociální účinek. Nesporný je vliv obou olympiád na zvyšování úrovně vyučování matematice a fyzice. Při výběru soutěžních úloh, studijních témat, při organizaci soutěží, zvláště pak při instruktážích učitelů a hodnocení výsledků jednotlivých kol soutěží, jsou zapojeni pracovníci vysokých, středních i základních škol, což se neobejde bez určitého hodnocení a ovlivňování současného stavu vyučování těmito předměty z hledisek všech stupňů škol. U žáků ZDŠ pomáhá fyzikální olympiáda vytvářet příznivé podmínky pro vstup do technicky náročnějších učebních oborů nebo pro studium na výběrových středních školách.

O tom, že úspěšným řešitelům vyšších kol obou soutěží je třeba přiznat i určitou odbornou kvalifikaci, svědčí ustanovení navrhovaného statutu matematické a fyzikální olympiády, podle kterého úspěšní řešitelé okresního kola nebudou konat přijímací zkoušky z matematiky a fyziky na školy druhého cyklu a úspěšní

řešitelé krajského kola nejvyšší kategorie nebudou konat přijímací zkoušky z matematiky a fyziky na vysoké školy. V obou případech se uchazečům přizná z těchto předmětů plný počet bodů. V SSR platí toto ustanovení již nyní.

Od XIV. ročníku probíhá fyzikální olympiáda v pěti kategoriích. Kategorie A je určena pro žáky IV. ročníku výběrových středních škol, kategorie B pro žáky III. ročníku, kategorie C pro žáky II. ročníku a kategorie D pro žáky I. ročníku těchto škol. Na Slovensku humanitní větve gymnázia mají výuku fyziky až od II. ročníku. Bylo proto rozhodnuto, že žáci těchto větví v II. ročníku budou soutěžit v kategorii D, v třetím ročníku buď v kategorii C, nebo B (podle rozhodnutí žáka a doporučení učitele fyziky) a ve IV. ročníku v kategorii A. Přitom jako dříve každý žák může soutěžit i v kategorii odpovídající vyššímu ročníku, než který navštěvuje.

První kolo soutěže FO ve všech kategoriích probíhalo v rámci škol. Žáci měli za úkol rozřešit 7 úloh, z toho jedna úloha byla experimentální. Řešení úloh odevzdávali žáci svým učitelům fyziky ve dvou termínech, které byly uvedeny v letácích pro XV. ročník FO. V kategoriích A až D byli úspěšnými řešiteli ti žáci, kteří vyřešili alespoň dobře 5 ze zadaných úloh, přičemž museli řešit — třeba neúspěšně — i experimentální úlohu. Každý účastník soutěže v těchto kategoriích musel mimoto prostudovat fyzikální téma příslušné kategorie, neboť na ně navazovala jedna úloha prvního kola soutěže a některá úloha z dalších kol. Také v kategorii E byla jedna úloha experimentální, ale s ohledem na dosud malé laboratorní dovednosti žáků a nestejně podmínky pro laboratorní práci na školách nebyla experimentální úloha pro úspěšného řešitele povinná; stačilo, když úspěšně vyřešil 5 ze zadaných soutěžních úloh. Pro soutěžící této kategorie nebylo také určeno téma k prostudování.

Druhé kolo soutěže FO kategorie A až D probíhalo v krajích a bylo organizováno krajskými výbory fyzikální olympiády (KV FO). Druhé kolo kategorie E probíhalo v okresech a bylo

organizováno okresními výbory fyzikální olympiády (OV FO). Ve druhém kole FO všech kategorií byly účastníkům zadány 4 teoretické úlohy. Úspěšnými řešiteli se stali ti žáci, kteří vyřešili aspoň dobře 2 ze zadaných soutěžních úloh. Úspěšní řešitelé 2. kola FO dostali od KV FO, popř. OV FO pochvalné uznání. Odměňování úspěšných řešitelů věcnými dary je v českých zemích nově upraveno výnosem uveřejněným ve Věstníku MŠ ČSR, r. 1974, č. 2, ve kterém jsou jednotně stanoveny odměny pro první 3 úspěšné řešitele. Na Slovensku byli úspěšní řešitelé odměňováni z částek plánovaných OŠ KNV, popř. ONV tak jako v minulých ročnících.

Třetí kolo soutěže FO bylo organizováno pro kategorie A a E. Třetí kolo FO kategorie A byla soutěž celostátní. Řídil ji ÚV FO, organizoval KV FO Západoslovenského kraje na pedagogické fakultě v Nitře. Účastníkům soutěže byly zadány 4 teoretické úlohy a 1 úloha experimentální. Účastník soutěže, který vyřešil úspěšně, tj. výborně nebo dobře, alespoň 3 ze zadaných úloh, stal se úspěšným řešitelem, přitom účastník, který vyřešil úspěšně alespoň 4 zadané úlohy, byl prohlášen za vítěze třetího kola FO kategorie A.

Třetí kolo FO kategorie E bylo organizováno v krajích. Podobně jako ve druhém kole byly účastníkům zadány 4 teoretické úlohy. Podmínky pro to, aby účastník soutěže se stal úspěšným řešitelem, byly stejné jako ve druhém kole.

Také klasifikační zásady XV. ročníku FO byly stejné jako v dřívějších ročnících soutěže.

Pořadateli XV. ročníku FO byla ministerstva školství ČSR a SSR, Jednota československých matematiků a fyziků a Socialistický svaz mládeže ČSSR.

Organizačním orgánem, který řídil soutěž v rámci celé ČSSR, byl ústřední výbor fyzikální olympiády. V rámci krajů byla soutěž řízena krajskými výbory FO; v okresech soutěž FO kategorie E řídily okresní výbory FO. Na školách řídili soutěž učitelé fyziky, kteří byli pověřeni funkcí referenta pro FO.

2. Složení ústředního výboru fyzikální olympiády ve školním roce 1973/74

Ústřední výbor fyzikální olympiády se podle organizačního řádu skládá ze zástupců pořadajících institucí a z učitelů vysokých, středních a základních škol, kteří jsou do funkce jmenováni příslušnými ministerstvy školství na základě návrhu JČSMF. Kromě toho jsou členy ÚV FO i všichni předsedové krajských výborů FO.

Sídlem ÚV FO je od roku 1966 Brno. Na základě jmenovacích dekretů MŠ SSR z října 1971 a MŠ ČSR z března 1972 měl ÚV FO ve školním roce 1973/74 toto složení:

Předseda: RNDr. Rostislav Košťál, profesor EF VUT v Brně, v důchodu,

1. místopředseda: RNDr. Ivan Náter, docent EF SVŠT v Bratislavě,

2. místopředseda: RNDr. Jiří Beránek, docent VA AZ v Brně, jednatel: Václav Suchánek, odborný asistent PedF UJEP v Brně.

Další členové v abecedním pořadí:

František Cimbůrek, prof. gymnázia v Praze-Libni,
Emília Chrapanová, učitelka ZDŠ v Bratislavě, Košická ul.,
RNDr. Marta Chytilová, CSc., vědecká pracovnice VÚP v Praze,
ing. Vincent Kavečanský, CSc., docent PF UPJŠ v Košicích,
Alois Kleveta, profesor gymnázia ve Vyškově,
RNDr. ing. Daniel Kluvanec, CSc., odborný asistent PedF v Nitře,

Milan Rádl, odborný asistent VŠSE v Plzni,
Mojmír Simerský, zástupce ředitele SPŠ VE v Rožnově p. Radh.,
Zuzana Šimkovicová, profesorka gymnázia v Bratislavě, Novohradská,

Pavol Škrinár, profesor gymnázia v Prievidzi,
RNDr. Ladislav Thern, docent VŠLD ve Zvolenu,
RNDr. Bohumil Vlach, docent PF ÚJEP v Brně, v důchodu,

RNDr. Ivo Volf, odborný asistent PedF v Hradci Králové, Ing. Bohumil Vybíral, CSc., odborný asistent VVŠPV ve Vyškově, RNDr. Jozef Zámečník, odborný asistent EF SVŠT v Bratislavě, František Živný, ředitel gymnázia v důchodu, Nový Bohumín.

Ministerstvo školství ČSR zastupoval Václav Šůla, ústřední školní inspektor, MŠ SSR zastupoval Július Gál, ústřední školní inspektor. JČSMF zastupoval v ÚV FO prof. dr. R. Košťál, JSMF doc. dr. I. Náter a SSM ČSR ing. B. Vybíral.

V roce 1973 na dubnovém zasedání byl do ÚV FO kooptován Karel Žampa, ředitel ZDŠ Brno, Horní. Usnesením pléna ÚV FO dne 11. října 1973 byl do ÚV FO kooptován RNDr. Jan Schwarz, docent strojí fakulty VUT v Brně.

Soutěžní úlohy vybíraly a upravovaly komise ustavené ze členů ÚV FO pod vedením Mojmíra Simerského.

V komisi pro základní výběr úloh pracovali její členové takto:

František Živný a Zuzana Šimkovicová — úlohy z mechaniky, Milan Rádl a Pavol Škrinár — úlohy z termiky, Alois Kleveta a Vincent Kavečanský — úlohy z elektřiny, František Cimbůrek a Josef Zámečník — úlohy z optiky a atomistiky.

V komisi pro konečnou redakci soutěžních úloh mimo předsedu Mojmíra Simerského, místopředsedu Jana Schwarze a jednatele Václava Suchánka pracovali: referent pro kategorii A Ladislav Thern, referent pro kategorii B Daniel Kluvanec, referentka pro kategorii C Marta Chytilová, referent pro kategorii D Ivo Volf, referent pro kategorii E Bohumil Vlach.

Aby se zkvalitnila příprava soutěžních úloh, zajistila správnost jejich znění a řešení, byli referentům jednotlivých kategorií přiděleni na pomoc dva členové ÚV FO. V kategorii A — Cimbůrek a Zámečník, v kategorii B — Živný a Kavečanský, v kategorii C — Kleveta a Škrinár, v kategorii D — Rádl a Šimkovicová a v kategorii E — Žampa a Chrapanová.

Ve školním roce 1973/74 provedla komise výběr soutěžních úloh pro druhé a třetí kolo XV. ročníku FO a výběr úloh pro první kolo XVI. ročníku FO.

3. Krajské výbory FO ve školním roce 1973/74 a jejich předsedové

Předsedy a členy krajských výborů FO jmenují na návrh poboček JČSMF, popř. JSMF odbory školství příslušných KNV. Pracují v nich zástupci školské správy, poboček JČSMF, popř. JSMF a KV SSM a učitelé středních a základních škol. Práce krajských výborů FO je pozitivně ovlivňována, jsou-li do ní zapojeni i učitelé vysokých škol, ať už technického nebo pedagogického zaměření.

Předsedy KV FO v jednotlivých krajích ve školním roce 1973/74 byli:

- Praha: RNDr. Jaroslav Vachek, docent MFF UK v Praze,
StČ: Miroslav Ševčík, profesor SPŠ strojní v Kladně,
JČ: Vladimír Strnad, odborný asistent PedF v Čes. Budějovicích,
ZČ: Ing. Miloš Rabas, odborný asistent VŠSE v Plzni,
SČ: Jaroslav Honner, vedoucí kabinetu fyziky KPÚ v Ústí n. L.,
VČ: Zdeněk Ungermann, vedoucí kabinetu fyziky KPÚ v Hradci Králové,
JM: Doc. Lubomír Vašek, CSc., proděkan technologické fakulty VUT v Gottwaldově,
SM: prof. RNDr. Miroslav Bajer, DrSc., děkan hornické fakulty VŠB v Ostravě,
Bratislava: RNDr. Ivan Náter, docent EF SVŠT v Bratislavě,
ZS: RNDr. Ladislav Dunajský, CSc., docent VŠP v Nitře,

- StS: RNDr. Pavol Ferko, odborný asistent PedF v Banské Bystrici,
VS: Ing. Vincent Kavečanský, CSc., docent PF UPJŠ v Košicích.

Pro řízení FO kategorie E jsou v okresech jmenovány odbory školství ONV okresní výbory FO. Jejich práce je příznivě ovlivňována, účastní-li se jí profesori středních škol, kteří tím jednak blíže poznávají přípravu svých příštích žáků, jednak mohou přispět ke zvýšení úrovně vyučování fyzice na ZDŠ.

4. Průběh soutěže ve školním roce 1973/74

A. První kolo soutěže kategorií A, B, C a D

První kolo fyzikální olympiády probíhalo na školách od září 1973 do 10. února 1974. Texty soutěžních úloh a studijních témat pro jednotlivé kategorie byly uveřejněny v letáku vydaném SPN v Praze z prostředků ministerstev školství v počtu 4000 výtisků. Leták byl určen pro celou ČSSR. Úlohy a studijní témata českých autorů byly psány česky, slovenských autorů slovensky. KV FO je však mohly dodat do škol až v první polovině měsíce října 1973, poněvadž se jednak opozdil tisk, jednak distribuce výtisků prostřednictvím Komenia byla dosti zdoluhavá. Počáteční informace o soutěžních úlohách dávali učitelé fyziky žákům podle časopisů Matematika a fyzika ve škole a Rozhledy matematicko-fyzikální, které v předprázdninových číslech otiskly prvé tři, popř. všech sedm soutěžních úloh.

Pro jednotlivé kategorie byla určena tato studijní témata:
kategorie A — K. Hofman: Magnetické obvody; točivé magnetické pole,
kategorie B — S. Zhejbal: Pohyb soustavy těles spojených vláknem,
kategorie C — I. Náter: Vnútorné trenie v kvapalinách,

kategorie D — R. Košťál: Určování hustoty látek tuhých a kapalných.

Témata k prostudování nejsou v této ročence přetištěna, poněvadž byla uveřejněna v letáku a v této formě budou na školách k dispozici i příštím soutěžícím ve fyzikální olympiádě. Zvláště závažná témata budou i nadále vydávána v edici SPN Škola mladých fyziků. Referentem pro tuto knižnici je člen ÚV FO Mojmír Simerský.

Řešení prvních tří úloh odevzdávali žáci učitelům fyziky 30. 11. 1973, řešení ostatních úloh 10. 2. 1974. K těmto termínům vydával ÚV FO instrukční řešení soutěžních úloh s pokyny pro hodnocení. Byly vydávány pro potřebu opravujících a pro první informaci soutěžících, jak dalece jsou jejich řešení správná.

Počet středních škol zapojených do soutěže uvádí tabulka 1. Ve srovnání se XIV. ročníkem FO je počet zúčastněných škol větší asi o 1 %. U gymnázií, jejichž celkový počet klesl asi o 1 %, počet zapojených vzrostl téměř o 4 %. 100procentního zapojení gymnázií dosáhly kraje: Praha, Jihomoravský a Západoslovenský. Nejmenší procento zapojení gymnázií má kraj Východoslovenský (67 %).

Počet zúčastněných SPŠ klesl o 11 %. Počet zapojených ostatních typů středních škol, na některých se již vytvořila tradice soutěžit v FO, zůstává nezměněn.

V tabulce 2 jsou uvedeny počty žáků zapojených do prvního kola FO podle jednotlivých kategorií i celkově. Ve srovnání s loňskými výsledky celkový počet soutěžících poklesl o 0,5 %. Zatímco kategorie D má přírůstek 1 % a v kategorii C jsou počty vyrovnány, v kategorii B je přírůstek téměř 5 %, ale v kategorii A je pokles přes 11 %. Je to důsledek špatné situace v kategorii B v minulém ročníku, kde úspěšnost ve druhém kole byla jen 15 %. Srovnáme-li výsledky v českých zemích, vidíme, že ve všech kategoriích je pokles počtu účastníků největší v kategorii D; celkem o 9,1 %. Naproti tomu na Slovensku počet

Tabulka 1

Počet středních škol, které se zúčastnily XV. ročníku FO

Kraj	Gymnázia					SPŠ					Ostatní školy					Celkový počet škol zapojených				
	zapojeno					zapojeno					zapojeno					v kategoriích				
	v kategoriích					v kategoriích					v kategoriích					v kategoriích				
	A	B	C	D	celkem	A	B	C	D	celkem	A	B	C	D	celkem	A	B	C	D	celkem
Praha	20	17	13	14	20	20	—	2	2	8	8	—	—	—	—	17	15	16	28	28
StČ	24	17	17	18	19	23	1	—	1	4	4	—	—	1	1 ¹⁾	18	17	19	24	28
JČ	20	7	8	11	12	16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	8	11	12	16
ZČ	16	11	6	6	6	12	—	—	1	—	1	—	—	—	—	11	6	7	6	13
SČ	22	13	15	16	19	20	1	1	2	8	9	—	—	—	—	14	16	18	27	29
VČ	35	23	23	21	29	33	3	1	1	8	8	—	1	1	1 ²⁾	26	25	23	38	42

JM	37	25	26	32	34	37	4	5	4	12	13	—	—	—	3	3 ³⁾	29	31	36	49	53
SM	39	21	19	26	32	35	2	5	5	13	15	—	—	—	1	1 ⁴⁾	23	24	31	46	51
Brati- slava	10	8	7	6	7	8	—	—	—	2	2	—	—	—	—	—	8	7	6	9	10
ZS	33	22	29	30	29	33	—	1	1	1	2	1	1	1	1	1 ⁵⁾	23	31	32	31	36
StS	39	15	24	31	31	35	—	—	3	3	3	—	—	1	2	2 ⁶⁾	15	24	35	36	40
VS	36	9	17	15	22	24	—	2	3	8	8	—	—	—	—	—	9	19	18	30	32
Celkem	331	188	204	226	260	296	11	17	23	67	73	1	2	3	9	9	200	223	252	336	378
Loni	335	181	215	211	254	283	14	16	18	77	82	1	2	6	10	10	196	228	235	341	375

¹⁾ SZTŠ Mladá Boleslav, ²⁾ VG JŽ Mor. Třebová, ³⁾ SEŠ Gottwaldov, SEŠ Jihlava, SZTŠ Boskovice, ⁴⁾ VG Opava, ⁵⁾ VOŠST Nové Město nad Váhom, ⁶⁾ VG SNP Banská Bystrica, OU CHZWP Nováky.

Tabulka 2

Počet žáků soutěžících v 1. kole FO

(S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, c celkový počet žáků, d z toho dívek)

Kraj	Kategorie A				Kategorie B				Kategorie C				Kategorie D				Celkem			
	S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú	
	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d
Praha	66	9	60	9	100	20	51	9	109	26	58	5	217	54	90	22	492	109	259	45
Stř	62	8	50	6	63	16	44	11	59	9	39	7	135	26	90	16	319	59	223	40
JČ	22	1	22	1	17	1	16	1	37	8	36	8	42	9	36	6	118	19	110	16
ZČ	48	5	29	1	49	6	22	3	51	8	21	1	92	28	29	6	240	47	101	11
SČ	45	6	37	3	58	11	37	10	95	32	57	18	215	55	150	38	413	104	281	69
VČ	64	4	55	3	81	17	49	6	80	17	48	9	271	62	150	28	496	100	302	46

JM	109	18	92	13	99	22	66	13	132	22	64	12	272	76	140	29	612	138	362	67
SM	76	6	65	5	91	18	59	11	99	10	60	6	327	96	96	18	593	130	280	40
Brati- slava	64	3	64	3	49	6	47	5	93	14	79	13	187	60	129	37	393	83	319	58
ZS	81	18	44	10	198	58	94	28	221	67	83	26	405	124	126	22	905	267	347	86
StS	62	4	16	2	94	4	36	2	164	10	45	6	275	35	69	19	595	53	166	29
VS	25	2	20	2	82	14	66	11	72	14	46	5	190	38	99	16	369	68	231	34
Celk.	724	84	554	58	981	193	587	110	1212	237	636	116	2628	663	1204	257	5545	1177	2981	541
Ú %	—	—	76,5	69,0	—	—	59,8	56,9	—	—	52,4	48,9	—	—	45,8	38,7	—	—	53,7	45,9
Loni	821	92	507	50	935	137	540	60	1210	244	495	85	2602	658	1236	295	5568	1131	2778	490
Ú %	—	—	61,7	54,3	—	—	57,8	43,7	—	—	40,9	34,8	—	—	47,5	44,8	—	—	49,8	43,3

účastníků vzrostl o 15,7 % nejvíce v kategorii D; v kategorii A je i tu pokles účastníků.

I když počet soutěžících se proti loňskému ročníku zmenšil, počet úspěšných řešitelů celkově vzrostl z 49,8 % na 53,7 %. Vzrůst úspěšných řešitelů je největší v kategorii A, téměř o 15 %, v kategorii C skoro o 12 %, v kategorii B však jen o 2 %; v kategorii D však naopak pokleslo procento úspěšných řešitelů z 47,5 % na 45,8 %. Růst úspěšnosti s postupující kategorií je přirozený a odpovídá růstu zkušeností soutěžících. Učitelé fyziky by měli řešení soutěžních úloh prvního kola prodiskutovávat s účastníky FO v kategorii D, aby žáci poznali příčiny svých chyb, pronikli do metodiky řešení úloh FO a nenechali se případným neúspěchem v kategorii D odradit od pokračování v soutěži v kategorii C.

Celková úspěšnost v českých zemích je asi 58 %, na Slovensku 47 %. V ČSR je úspěšnost v jednotlivých kategoriích: A — 83 %, B — 61 %, C — 57 %, D — 49 %; V SSR: A — 62 %, B — 57 %, C — 46 %, D — 40 %. Dívky letos soutěžily o 4 % více než loni (v SSR o 9,2 %), ale jejich úspěšnost je menší než průměrná, největší rozdíl je v kategorii D a A. Dalo by se z toho soudit, že chlapci v prvním ročníku se dovedou lépe přizpůsobit požadavkům soutěže a ve čtvrtém ročníku dovedou lépe využít získané zkušenosti.

B. Druhé kolo soutěže kategorií A, B, C a D

Druhé kolo FO kategorií A až D se konalo v sobotu dne 9. března 1974. Soutěž byla uspořádána převážně jen v sídlech KV FO, v Severočeském kraji byla část soutěže také v Liberci a v Chomutově, v Severomoravském kraji uspořádali část soutěže také v Olomouci. Texty soutěžních úloh a jejich instrukční řešení připravil ÚV FO a rozeslal krajským výborům FO potřebný počet výtisků v zalepených obálkách podle jednotlivých kategorií. Obálky byly otevřeny před žáky těsně před zahájením soutěže. Po skonče-

ní soutěže byla instrukční řešení rozdána i soutěžícím z jednotlivých škol, aby byli informováni o správném postupu řešení, a mohli tak aspoň přibližně posoudit správnost nebo nesprávnost svého řešení. Pro slovenské kraje docent Náter připravil a rozeslal potřebný počet zadání úloh v jazyce maďarském. Řešení každé úlohy byla opravena dvěma opravujícími, z nichž alespoň jeden byl členem KV FO. Členové ÚV FO se podíleli na přípravě a průběhu druhého kola v kraji svého bydliště.

Výsledky druhého kola jsou shrnuty do tabulky 3. Z ní je patrné, že počet účastníků druhého kola v XV. ročníku FO vzrostl proti předcházejícímu ročníku asi o 13 %; tato skutečnost odpovídá zvýšení počtu úspěšných řešitelů prvního kola FO. Druhého kola se zúčastnilo 91 % úspěšných řešitelů prvního kola (loni 87 %). Vzrůst počtu účastníků zaznamenávají všechny kategorie: A o 11 %, B o 9 %, C o 32 % a D o 8 %. Přírůstek počtu účastníků druhého kola je na Slovensku pětikrát větší než v českých zemích.

I když počet účastníků druhého kola letos vzrostl, počet úspěšných řešitelů je skoro stejný jako loni; procento úspěšnosti kleslo z 29,5 % na 26,1 %. Největší pokles zaznamenává kategorie D o 8,6 %, kategorie A o 6,2 %; naopak lepší procento úspěšnosti mají kategorie B o 3,5 % a C o 1,7 %. Nejméně úspěšnou kategorií je i letos kategorie B, nejúspěšnější je kategorie C (loni byla kategorie C v úspěšnosti až na třetím místě). Zatímco procento úspěšných řešitelů druhého kola v kategorii A je stejné v ČSR i SSR, v ostatních kategoriích jsou tato procenta v ČSR vyšší než v SSR; celkové procento úspěšnosti v ČSR je asi 29 %, v SSR je 20 %. Zmenšení procenta úspěšnosti u dívek je ještě výraznější než v prvním kole; nejhůře se vedlo dívkám v kategorii A, kde procento úspěšných řešitelek nedosáhlo ani čtvrtiny celostátního průměru.

Z úspěšných řešitelů druhého kola uvádíme ty, kteří se umístili na prvním až desátém místě v jednotlivých kategoriích podle krajů. V kategorii A jsou tučně vytištěna jména všech řešitelů,

Tabulka 3

Počet žáků soutěžících ve 2. kole FO

(S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, c celkový počet, d z toho dívek)

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Kategorie D			Celkem							
	S	Ú		S	Ú		S	Ú		S	Ú		S	Ú						
		c	d		c	d		c	d		c	d		c	d					
Praha	60	9	27	1	51	9	19	3	58	5	35	3	90	22	47	9	259	45	128	16
StřČ	39	2	5	—	32	—	5	—	26	3	6	—	46	5	14	1	143	10	30	1
JČ	21	1	4	—	15	1	3	—	34	6	11	3	36	6	16	2	106	14	34	5
ZČ	29	1	5	—	21	3	8	—	19	1	8	—	23	5	11	1	92	10	32	1
SČ	29	3	6	—	31	8	10	1	48	15	15	2	116	23	27	6	224	49	58	9
VČ	49	3	10	—	47	6	6	—	45	7	18	3	134	23	22	1	275	39	56	4

JM	84	5	23	1	62	6	10	1	66	10	19	4	130	26	36	2	342	47	88	8
SM	60	6	24	1	57	10	13	—	59	6	26	1	94	17	19	4	270	39	82	6
Brati- slava	64	3	23	—	44	3	6	—	67	12	26	2	129	37	35	5	304	55	90	7
ZS	44	10	2	—	94	28	7	1	83	26	12	—	126	22	6	—	347	86	27	1
StS	16	2	9	—	36	2	9	—	45	6	14	1	68	19	11	2	165	29	43	3
VS	19	2	6	—	50	5	5	—	43	5	14	2	77	14	18	3	189	26	43	5
Celk.	514	47	144	3	540	81	101	6	593	102	204	21	1069	219	262	36	2716	449	711	66
Ú %	—	—	28,0	6,3	—	—	18,7	7,4	—	—	34,4	20,6	—	—	24,5	16,4	—	—	26,1	14,7
Loni	461	45	158	13	493	59	75	1	449	82	147	11	990	222	328	44	2393	408	708	69
Ú %	—	—	34,2	28,8	—	—	15,2	1,6	—	—	32,7	13,4	—	—	33,1	19,8	—	—	29,5	16,9

kteří postoupili do třetího kola. U žáků gymnázií není připisován název školy, jen její sídlo.

Praha

A: **Alexandr Fuchs**, Praha 10, Přípotoční; **Pavel Kotrba**, Praha 1, Štěpánská; **Petr Tesař**, Praha 6, Leninova; **Jiří Fexa**, Praha 2, W. Piecka; **Pavel Ferst**, Praha 3, Sladkovského n.; **Oldřich Křížek**, **Milan Neubert**, **Anna Pudláková**, **Jiří Popelík**, **Jaroslav Fořt**, všichni Praha 2, W. Piecka; **Pavel Mandík**, Praha 3, Sladkovského n.; **Václav Salač**, Praha 4, Ohradní; **Ivan Potočko**, Praha 6, Arabská; **Petr Malý**, Praha 8, Libeň; **Martin Vrátný**, Praha 7, Nad štolou; **Hynek Lausmann**, Praha 2, W. Piecka; **Jiří Matyska**, Praha 6, Arabská.

B: Michael Valášek, Blanka Fialová, Praha 2, W. Piecka; Jiří Vyskočil, Jiří Vlach, Praha 7, Nad štolou; Jiří Štěrba, Praha 2, W. Piecka; Ivan Kozák, SPŠ JT, Praha 4, Svatoslavova; Jan Hugo, Praha 3, Sladkovského n.; Evžen Hrnčíř, Praha 7, Nad štolou; Dagmar Hášová, Jiří Koukolík, Praha 2, W. Piecka.

C: Tomáš Kotrba, Praha 1, Štěpánská; Václav Kotěšovec, Praha 2, W. Piecka; Stanislav Červinka, Vladimír Škoda, Praha 1, Štěpánská; Jaroslav Zápotocký, Praha 1, Štěpánská; Ivo Bláha, Praha 2, W. Piecka; Magda Volkeová, Jindřich Poláček, Praha 6, Leninova; Jiří Pflieger, Praha 8, Libeň; Vladimír Strnad, Praha 1, Štěpánská.

D: Miloš Mrkvička, Praha 1, Štěpánská; Petr Kopecký, SPŠ ST, Praha 1, Panská; Jiří Kolafa, Praha 2, W. Piecka; Vladimír Brajko, Praha 8, Libeň; Jaroslav Červinka, SPŠ ST, Praha 1, Panská; Jiří Kub, Praha 7, Nad štolou; Jiří Kejř, Praha 3, Sladkovského n.; Jiří Dlouhý, Tomáš Jerie, Petr Végh, Praha 2, W. Piecka.

Středočeský kraj

A: **Zdeněk Svoboda**, Rakovník; Vladimír Meier, Mladá Boleslav; **Vladimír Anděra**, Kladno; **Miloš Dvořák**, Mladá Boleslav; Ivo Květ, Příbram.

B: Ivan Řehoř, Radotín; Pavel Tvrdík, Kolín; Jiří Somer, Nymburk; Pavel Trenda, Miroslav Růžička, Sedlčany.

C: Vlastimil Klíma, Benešov; Miroslav Moc, SPŠ Kolín; Vojtěch Zadražil, Český Brod; Miloš Růžička, Brandýs; Miroslav Krejčí, Mnichovo Hradiště; Milan Procházka, Mladá Boleslav.

D: Jan Bázler, Mladá Boleslav; Eduard Feierreisl, Nové Strašecí; Karel Jenšík, SPŠ Kutná Hora; Miroslav Kotrla, SPŠ Kutná Hora; Zdeněk Mužík, Kladno; Jaroslav Kopp, Brandýs; Petr Hora, Český Brod; Jiří Švec, Kladno; Josef Blažek, Mnichovo Hradiště; Miloslav Černý, SPŠ Kolín.

Jihočeský kraj

A: Pavel Kindlmann, České Budějovice; Karel Molík, Strakonice; Petr Jovanovič, Zdeněk Petráš, České Budějovice.

B: Marek Vandas, Písek; Josef Voldřich, Vimperk; Josef Sýkora, Písek.

C: Michal Šimek, Václav Pihera, Strakonice; Martin Bartoš, Třeboň; Marie Doležalová, České Budějovice, Jeronýmova; Jiří Hofman, České Budějovice, K. Šatala; Pavel Žampach, Třeboň; Josef Jírů, Pelhřimov; Josef Metlička, Miloš Houska, Karel Steidl, Strakonice.

D: Jan Kábrt, Jindřichův Hradec; František Popp, České Budějovice, K. Šatala; Václav Vilímek, Tábor; Jiří Kukrecht, Jan Honner, České Budějovice, K. Šatala; Dalibor Zikmund, Milevsko; Zdeněk Sýkora, Václav Holý, České Budějovice, K. Šatala; Otakar Procházka, Humpolec; Milan Zmátlo, Pehlřimov.

Západočeský kraj

A: Jiří Zymák, Plzeň, nám. Odborářů; Ladislav Peksa, Emil Pelikán, Plzeň, nám. Odborářů; Michal Svrček, Karlovy Vary; Jan Přada, Ostrov n. Ohří.

B: František Pillmann, Pavel Odvárka, Plzeň, nám. Odborářů; Jaroslav Krčmář, Sušice; Vladislav Krásný, Stanislav Jánský,

Milan Taubr, Plzeň, nám. Odborářů; Čestmír Suda, Sušice; Václav Šmrha, Plzeň, nám. Odborářů.

C: Jiří Bendl, SPŠ stavební, Plzeň; Karel Kubát, František Staněk, Josef Kasl, Jaroslav Šťastný, Plzeň, nám. Odborářů; Jiří Šmejkal, Plzeň, ul. Pionýrů; Vladimír Tomášek, Klatovy; Zdeněk Škarda, Blovice.

D: Jiří Koukol, Sušice; Jan Novák, Aleš Štrunc, Pavel Nutil, Jiří Viktora, Vlastimil Tumpach, Jiří Flajtringr, Josef Zelenka, Zdeněk Fogl, Alena Járová, všichni Plzeň, nám. Odborářů.

Severočeský kraj

A: Jaroslav Pavlík, Česká Lípa; Pavel Hrubý, Litoměřice; Jan Štěpánek, Podbořany; Jiří Březina, Chomutov; Jaromír Karas, Liberec; Jiří Rauš, Chomutov.

B: Martin Kapoun, Vít Hroch, Ústí n. Labem; Jaroslav Kotas, Česká Lípa; Jiří Svoboda, Liberec; Jiří Maryška, Jablonec n. Nisou; Milan Myšík, Děčín; Tomáš Sehnoutka, Jablonec n. Nisou; Josef Němec, Liberec; Jaroslava Pejznochová, Ústí n. Labem; Josef Kalát, Teplice.

C: Pavel Vondrák, Ústí n. Labem; Ivan Benda, Věra Švarc-bachová, Litoměřice; Václav Krupka, Louny; Jan Nouza, Miroslav Vancl, Ústí n. Labem; Pavel Esentier, Tanvald; René Pospíšil, Jaroslav Holomek, Leoš Tomíček, Liberec.

D: Jan Chaloupek, Liberec; Stanislav Drábek, Ústí n. Labem; Jiří Vavřík, Teplice; Ivan Doležal, Jablonec n. Nisou; Vladimír Havlena, Rumburk; Vlasta Novotná, Teplice; David Lukáš, Liberec; Miroslav Rajmon, Litoměřice; Pavel Strejc, Teplice; Lubomír Hanuš, Chomutov.

Východočeský kraj

A: Jiří Hůlka, Hradec Králové; Dobroslav Kindl, Pardubice; Jaroslav Dobiáš, Polička; Jiří Hruška, Jaroslav Hubáček, Miloš Steinhart, Hradec Králové; Jiří Mleziva, Václav Volf, Pardubice; Ivo Junek, Polička; Josef Kuba, Kostelec n. Orlicí.

B: František Starý, SPŠ E, Pardubice; Tomáš Blažek, Pardubice; Rostislav Jakubíček, Polička; Luděk Němec, Pardubice; Ladislav Böhm, Trutnov; Břetislav Vévoda, Svitavy.

C: Vladimír Ent, Ústí n. Orlicí; Jan Kolářek, Pardubice; Miroslava Otavová, Hradec Králové; Zdeněk Rudolf, Trutnov; Pavel Štovíček, Pardubice; Ladislav Svoboda, Hradec Králové; Zdeněk Maška, Litomyšl; Jiří Dvořák, Pardubice; Milan Macek, Ústí n. Orlicí; Petr Novák, Pardubice.

D: Jiří Faltejsek, Hradec Králové; Rupert Leitner, Semily; Richard Liska, Pardubice; Zdeněk Polák, Náchod; Libor Hnyk, Karel Palát, Hradec Králové; Jiří Hejhálek, SPŠ chemická, Pardubice; Jiří Dobeš, Pardubice; Pavel Odvalil, SPŠ E, Pardubice; Zdeněk Rozlívka, Hradec Králové.

Jihomoravský kraj

A: **Dub Petr**, Brno, Křenová; **Michal Horák**, Brno, tř. kpt. Jaroše; **Jaromír Šimša**, Žďár n. Sázavou; **Martin Kolínek**, Brno, Elgartova; **Pavel Lavička**, Jihlava; **Ilja Paseka**, Gottwaldov; **Antonín Němec**, SPŠ E Brno; **Rudolf Růžička**, Jihlava; **Jiří Brabec**, Žďár n. Sázavou; **Bohumil Opatřil**, Tišnov; **Jiří Runštuk**, Brno, Křenová; **Antonín Brablec**, Zastávka; **Eduard Malíšek**, SPŠ, Břeclav.

B: Ladislava Dvořáková, Brno, Koněvova; Lubomír Vlácil, Prostějov; Dalibor Musil, SPŠ S, Brno, Sokolská; Pavel Chvosta, SPŠ stavební, Gottwaldov; Jiří Jirovský, SPŠ E, Brno; Petr Ševčík, Brno, Elgartova; Josef Gerbrich, Brno, tř. kpt. Jaroše; František Bednařík, Uherský Brod; Lubomír Popelínský, Brno, Koněvova; Jan Šimek, Nové Město na Moravě.

C: Jiří Peňáz, Brno, tř. kpt. Jaroše; Miroslav Pavel, Jihlava; Petr Frgál, Prostějov; Josef Jaroš, Gottwaldov; Jan Jirků, Žďár n. Sázavou; Vladimír Kudláček, Gottwaldov; Jiří Vala, Brno, tř. kpt. Jaroše; Kamil Rinchenbach, Bystřice n. P.; Helena Černá, Brno, Křenová; Pavel Koranda, Prostějov.

D: Jan Vetchý, Žďár n. Sázavou; Luděk Klimeš, Blansko; Petr

Kožela, SPŠ strojní, Gottwaldov; Luboš Valenta, Žďár n. Sázavou; Milan Matuška, SPŠ E, Brno; Zdeněk Gottwald, Brno, tř. kpt. Jaroše; Jaroslava Jelínková, Hodonín; Jiří Halabala, Brno, Křenová.

Severomoravský kraj

A: Radomír Kuchta, Havířov, Tajovského; Petr Gerlich, SPŠ, Ostrava — Vítkovice; Zdeněk Mužík, Přerov; Jaroslav Dvořák, Antonín Otáhal, Ostrava — Zábřeh; Milan Bortel, Valašské Meziříčí; Ivo Semrád, Opava; Tomáš Gregor, Olomouc, Jiřího z Poděbrad; Zdeněk Klos, Nový Jičín; Stanislav Novák, Ostrava 1, Šmeralova; Jaromír Vlček, Havířov, Tajovského.

B: Miroslav Lýčka, Vsetín; Vladimír Pavlík, SPŠ, Ostrava — Vítkovice; Lubomír Baland, české, Český Těšín; Vladimír Hruška, Valašské Meziříčí; Karel Tůma, Ostrava 1, Šmeralova; Jan Hula, Bílovec; Lubomír Staš, Havířov, Tajovského; Čestmír Ramík, Miloslav Prchal, Ostrava 1, Šmeralova; Jiří Kodousek, Olomouc, Jiřího z Poděbrad.

C: Oskar Inkesch, SPŠ, Ostrava — Vítkovice; Michal Bednařík, Olomouc — Hejčín; Martin Calábek, Ostrava, Šmeralova; Petr Gaďorek, SPŠ, Ostrava — Vítkovice; Pavel Pařízek, Zábřeh; Kristian Walach, Ostrava — Zábřeh; Miroslav Šedivý, Přerov; Boris Bukovan, Ostrava — Poruba; Václav Kelar, Uničov; Stanislav Durčok, SPŠ VE Rožnov p. Radhoštěm.

D: Petr Voltr, SPŠ, Přerov; Jiří Navrátil, Olomouc — Hejčín; Ladislav Lžičař, SPŠ strojní, Olomouc; Lubica Bellušová, Rožnov p. Radhoštěm, Tomáš Cvik, Havířov, Tajovského; Petr Dočkal, Přerov; Jaromír Lankočí, Ostrava 1, Šmeralova; Antonín Novák, Olomouc, Jiřího z Poděbrad; Vladimír Pastrňák, Ostrava 1, Šmeralova; Martin Petrák, Ostrava — Vítkovice.

Bratislava

A: Zlatoš Pavol, Štefan Olejník, Jozef Širáň, Pavol Meravý, Miroslav Brunclík, Štefan Varga, Bohuslav

Partyk, František Pšenko, Bratislava, Novohradská; **Martin Breza**, Bratislava, ČA; **Pavol Poliak**, Bratislava, Novohradská.

B: Ján Krajčík, Ján Kučera, Jiří Bartoš, Bronislav Molitoris, Dušan Miklánek, Milan Kiaček, Bratislava, Novohradská.

C: Dušan Janičkovič, Igor Brilla, Adriena Ruttkay-Nedecká, Matúš Búci, Peter Miklovič, Viktor Birnstein, František Čech, Vladimír Gaži, Pavol Kossey, Ondrej Náther, Bratislava, Novohradská.

D: Juraj Koza, Otto Pernecký, Eva Toldyová, Bratislava, Novohradská; Otto Škultéty, Bratislava, na Metodovej ul.; Roman Záhorec, Bratislava, na Tomášikovej ul.; Marian Ritomský, Bratislava, ul. I. Horvátha; Gustáv Mrázik, Bratislava, Novohradská; Ján Ftáčnik, Bratislava, Tomášikova; Juraj Červeň, Igor Remža, Bratislava, Novohradská.

Západoslovenský kraj

A: **Juraj Miššík**, Nitra, E. Gudernu; **Ľubomír Jurica**, Trenčín.

B: Edmund Dobročko, Šaľa; Zoltán Téglás, maďarské, Komárno; Eugen Géci, Nové Mesto n. Váhom; Ján Války, Sereď; Miloš Mikula, Trenčín; Samuel Masár, Piešťany; Elena Löfflerová, Hlohovec.

C: Alexander Hulko, Nové Zámky; Ján Kolník, Nitra, E. Gudernu; Ján Zimmerman, Šaľa; Daniel Baček, Hlohovec; Vladimír Drienovský, Zlaté Moravce; Jiří Král, Trenčín; Stanislav Stupavský, Skalica; Miroslav Demeter, Levice; Viliam Páleník, Hlohovec; Attila Skuta, maďarské, Komárno.

D: Jozef Mertan, Trenčín; Martin Bednárík, Nitra, Párovská; Robert Štefanec, Vráble; Leonard Paulík, Topoľčany; Ivan Trebicharský, Nové Mesto n. Váhom; Marta Eleková, maďarské, Komárno.

Středoslovenský kraj

A: **Ivan Mečiar**, Prievidza; **Pavol Švento**, Ružomberok; Vladimír Zimány, Dolný Kubín; Ivan Podstanický, Žilina —

Hliny; Vojtech Lukács, Šafárikovo; Dušan Bruncko, Ružomberok; Štefan Krisztián, Šafárikovo; Jozef Bobek, Turzovka; Štefan Csernok, Šafárikovo.

B: Jozef Grega, Banská Bystrica; Martin Valovič, Martin – Vrútky; Jozef Krajčík; Ružomberok; Michal Kučera, Martin; Ján Boďa, Turčianske Teplice; Dušan Martina, Peter Maličský, Prievidza; Stanislav Leitman, Handlová; Zoltán Kostolný, Ružomberok.

C: Marian Suchovský, Brezno; Vladimír Technovský, Zvolen; Igor Podstanický, Martin Papcun, Žilina – Hliny; Ivan Benda, Prievidza; Eliška Vaňová, Banská Bystrica; Daniel Vančuška, Liptovský Hrádok; Pavol Makovický, Žilina – Horný Val; Karol Pekár, Štefan Bračok, Ružomberok.

D: Pavol Quittner, Prievidza; Mária Hrnčiarová, Banská Bystrica; Ivo Novák, Handlová; František Priehoda, Prievidza; Jozef Sakáloš, Prievidza; Igor Jančuška, Liptovský Hrádok; Peter Takáč, Rimavská Sobota; Pavla Olbřímková, Dušan Bella, Martin; Igor Bešše, Prievidza.

Východoslovenský kraj

A: Eduard Míčka, Július Štuler, Košice, Kováčska; Miloslav Kic, Prešov, T. Ševčenka; **Peter Kopčanský**, Humenné; Ján Petrovský, Košice, Kováčska; Miroslav Paulovič, Prešov, T. Ševčenka.

B: Ivan Dzurek, SPŠ E, Košice; Blahoslav Pastirčák, Prešov, Konštantínova; Jaroslav Jaroš, Poprad; Vladimír Mataj, Košice, Kováčska; Vladislav Jurko, Prešov, Konštantínova.

C: Marián Okál, Košice, Šmeralova; Marta Mlynárčiková, Poprad; Rudolf Bauer, Košice Kováčska; Juraj Kavečanský, Košice, Šrobárova; Miroslav Pollák, Košice, Kováčska; Eva Budécssová, Košice, Kováčska; Marián Parák, Košice, Šrobárova; Dušan Malenčík, Košice, Šmeralova; Marián Fecko, Košice, Kováčska; František Kováčik, Košice, Šmeralova.

D: Ján Dzurek, SPŠ E, Košice; Milan Lučka, Košice, Šme-

ralova; Marián Solčány, Michal Čverčko, Košice, Šmeralova; Ján Nyéki, Kežmarok; Tomáš Varró, Rožňava; Anton Jusko, SPŠE, Košice; Peter Skok, Prešov, T. Ševčenka; Ľubomír Mucha, Prešov, Konštantínova; Jana Foltinská, Poprad.

C. Třetí kolo kategorie A

Celostátní třetí kolo FO kategorie A se konalo ve dnech 24. až 26. dubna 1974 na pedagogické fakultě v Nitře. Přípravu a organizaci třetího kola měl na starosti KV FO Západoslovenského kraje v Nitře.

Účastníci třetího kola byli určeni na zasedání pléna ÚV FO dne 4. dubna 1974. Ze 144 úspěšných řešitelů druhého kola FO kategorie A bylo vybráno 81 účastníků. Mezi účastníky třetího kola byli zařazeni všichni úspěšní řešitelé druhého kola, kteří dosáhli alespoň hodnocení 1, 1, 3, 3. Aby každý kraj byl zastoupen aspoň 2 účastníky, bylo nutno ve dvou krajích zařadit po 1 účastníku, který měl ve druhém kole klasifikaci řešení 1, 2, 3, 3. Počet účastníků z jednotlivých krajů je uveden v tabulce 4.

Účastníci soutěže a pozvaní hosté se sjížděli do Nitry v dopoledních hodinách 24. dubna. Na soutěž se nedostavil Vladimír Meier z gymnázia v Mladé Boleslavi. Ubytování a stravování bylo zajištěno v internátu SPTŠ v Nitře, Drážovská ul. Přejech z internátu na pedagogickou fakultu a zpět byl zajišťován zvláštěními autobusy.

V odpoledních hodinách byl pro účastníky soutěže organizován výlet sedačkovou lanovkou na Zobor. Přítomní členové ÚV FO, KV FO a hosté byli přijati děkanem pedagogické fakulty. Slavnostní zahájení soutěže se konalo v 17 hodin v aule pedagogické fakulty. Tajemník KV FO ZSK dr. ing. Daniel Kľuvanec, CSc., přivítal účastníky soutěže a přítomné hosty. Soutěž otevřel svým projevem předseda ÚV FO prof. dr. Rostislav Košťál. Poukázal v něm na celospolečenský význam soutěže a uvedl řadu hodnotících údajů k patnáctiletému trvání FO. Za pedagogickou fakultu přivítal soutěžící i hosty děkan fakulty prof. dr. Michal

Tabulka 4

Počet žáků soutěžících ve 3. kole FO kategorie A

Kraj	Počet soutěžících		Celkový počet úspěšných řešitelů			Počet vítězů			Neúspěšní řešitelé		
	Celkem	z toho dívek	celkem	%	z toho dívek	celkem	%	z toho dívek	celkem	%	z toho dívek
Praha	17	1	5	29,4	0	2	11,8	0	12	70,6	1
StČ	3	0	2	66,7	0	1	33,3	0	1	33,3	0
JČ	3	0	1	33,3	0	0	0,0	0	2	66,7	0
ZČ	3	0	1	33,3	0	0	0,0	0	2	66,7	0
SČ	5	0	1	20,0	0	0	0,0	0	4	80,0	0
VČ	9	0	5	55,5	0	4	44,5	0	4	44,5	0
JM	13	0	2	15,4	0	2	15,4	0	11	84,6	0
SM	11	0	2	18,2	0	1	9,1	0	9	81,8	0
Bratislava	10	0	6	60,0	0	1	10,0	0	4	40,0	0
ZS	2	0	0	0,0	0	0	0,0	0	2	100	0
StS	2	0	0	0,0	0	0	0,0	0	2	100	0
VS	2	0	0	0,0	0	0	0,0	0	2	100	0
Celkem	80	1	25	31,3	0	11	13,8	0	55	68,7	1
Loni	80	5	38	47,5	1	8	10,0	0	42	52,5	4

Soták a po něm pozdravil přítomné ministr školství SSR prof. ing. Štefan Chochol, CSc. Účastníkům soutěže popřál mnoho úspěchů i zástupce SÚV SSM ing. O. Schaling. Jako upomínkový dar odevzdal účastníkům soutěže i hostům publikaci Jozefa Vodrážky a dr. Štefana Rakovského: Topoľčianky. Slavnostního zahájení byli účastni L. Hamaš, ředitel KPÚ v Bratislavě, RNDr. Jozef Janovič, CSc., za ÚV JSMF a sekretář JČSMF Miloš Jelínek.

Po oficiální části slavnostního zahájení následoval kulturní program, ve kterém vystupovaly kulturní složky SSM při PedF v Nitře a taneční soubor Ponitran. Všichni si odnášeli pěkné a radostné umělecké zážitky.

První část vlastní soutěže — řešení čtyř teoretických úloh se konala dne 25. dubna od 7,30 hod. v aule. Potřebný počet výtisků zadání úloh zajistil předseda komise pro konečnou redakci úloh M. Simerský. Na vypracování řešení měli soutěžící 4 hodiny čistého času. Dozor při soutěži zajišťovali členové ÚV a KV FO. Po skončení soutěže bylo účastníkům rozdáno instrukční řešení soutěžních úloh, aby si ještě v živé paměti mohli s ním srovnat své řešení, a tak zhruba odhadnout jeho úspěšnost.

V odpoledních hodinách byla uspořádána exkurze do závodu Tesla Vráble. Na to navazovala prohlídka zámku Topoľčianky a jeho okolí a arboréta v Mlýňanech. Po večeri zhlédli soutěžící film s tematikou SNP Kapitán Dabač.

V pátek dne 26. dubna od 7.30 hod. řešili soutěžící po skupinách experimentální úlohu. V laboratořích katedry fyziky pedagogické fakulty bylo připraveno 20 pracovišť, kde účastníci soutěže prováděli měření potřebná k určení voltampérové charakteristiky Zenerovy diody při laboratorní teplotě a při teplotě kapalného dusíku. Každý soutěžící dostal tištěný návod, jak postupovat při měření a jak zpracovat výsledky.

V obou částech soutěže se dbalo na to, aby soutěžící pracovali samostatně, aby používali jen dovolené pomůcky a vzájemně se nerušili. Celý průběh třetího kola FO kategorie A byl plynulý,

bez závad a projevů nekázně. Svědčí to o dokonalé připravenosti soutěže a dobrém organizačním vedení. Dík za to patří všem pracovníkům KV FO Západoslovenského kraje, především dr. ing. Danielu Kluvancovi, tajemníkovi KV FO a vedoucímu katedry fyziky PedF v Nitře, a Dušanu Vajdovi, vedoucímu kabinetu fyziky KPÚ v Bratislavě. Na úspěšném a důstojném průběhu soutěže mají zásluhy všichni pracovníci katedry fyziky PedF v Nitře. Dík patří též děkanátu pedagogické fakulty a vedení katedry fyziky za to, že daly k dispozici potřebné místnosti a přístroje a že po dobu soutěže uvolnily angažované pracovníky. Dále nutno poděkovat ředitelství SPTS v Nitře a správním zaměstnancům fakulty, kteří velmi svědomitě zajišťovali materiální a ekonomické potřeby soutěže. Velmi kladně nutno ocenit i práci členů SSM na PedF, kteří se aktivně zapojili do přípravy soutěže a velmi dobře plnili přidělené úkoly.

Řešení úloh třetího kola opravovali tito členové ÚV FO: úlohu č. 1: Cimbůrek (Praha) a Ševčík (StČ), úlohu č. 2: Thern a Škrinár (StS), úlohu č. 3: Chytilová a Vybíral (JM), úlohu č. 4: Náter a Zámečník (Bratislava), úlohu č. 5: Kluvanec a Morvay (ZS).

Výsledky třetího kola jsou shrnuty do tabulek 4, 5, 6 a 7. Tabulka 4 ukazuje, jak se soutěžící z jednotlivých krajů zařadili mezi úspěšné řešitele, popř. vítěze. Nejlepších výsledků dosáhli účastníci z krajů StČ, Bratislavy a VČ. Dívky byly v soutěži zastoupeny jedinou účastnicí, a ani té se nedařilo. Tabulka 5 obsahuje seznam vítězů celostátního kola, tabulka 6 uvádí další úspěšné řešitele. Přehled klasifikace jednotlivých úloh a průměrné hodnoty jsou v tabulce 7. Z ní je vidět, že nejúspěšnější úlohou byla úloha první. Její tematika byla obsažena v jedné úloze předchozích kol, takže nečinila soutěžícím žádné potíže; rozřešilo ji úspěšně přes 58 % soutěžících. Druhou v pořadí úspěšnosti je úloha třetí, která navazovala na studijní téma předepsané pro kategorii A a jejíž tematika byla již v úlohách předchozích kol.

Tabulka 5
Vítězové 3. kola kategorie A XV. ročníku FO

Pořadí	Jméno žáka	Třída	Škola a místo
1.	Zdeněk Svoboda	4. P	G Rakovník
2.	Jiří Hruška	4. S	G Hradec Králové
3. – 5.	Jiří Fexa	3. S	G Praha 2, W. Piecka
3. – 5.	Jaroslav Hubáček	4. S	G Hradec Králové
3. – 5.	Pavel Kotrba	4. S	G Praha 1, Štěpánská
6. – 9.	Dobroslav Kindl	4. S	G Pardubice
6. – 9.	Miloš Steinhart	4. S	G Hradec Králové
6. – 9.	Jaromír Šimša	4. P	G Žďár nad Sázavou
6. – 9.	Štefan Varga	4. S	G Bratislava, Novohradská
10.	Radomír Kuchta	4. S	G Havířov, Tajovského
11.	Michal Horák	4. S	G Brno, tř. kpt. Jaroše

V označení třídy S znamená speciální matematicko-fyzikální třídu,
P přírodovědnou větev.

Ale výsledek, 38 % úspěšných řešení, není nijak uspokojivý. Na třetím místě je úloha experimentální, kterou úspěšně vyřešilo také 39 % účastníků, zarážející je však skutečnost, že jen 4 výborně. Ačkoliv šlo jen o měření napětí a proudu a ačkoliv měření charakteristiky diody je zařazeno mezi laboratorní práce na gymnáziích, ukázali účastníci třetího kola, že dovednost pracovat

Tabulka 6

Další úspěšní řešitelé 3. kola kategorie A XV. ročníku FO

Pořadí	Jméno žáka	Třída	Škola a místo
12.	Štefan Olejník	4. S	G Bratislava, Novohradská
13. – 16.	Vladimír Anděra	4. P	G Kladno
13. – 16.	Jaroslav Dobiáš	4. P	G Polička
13. – 16.	Jaroslav Pavlík	4. P	G Česká Lípa
13. – 16.	František Pšenko	4. S	G Bratislava, Novohradská
17. – 22.	Alexandr Fuchs	4. P	G Praha 1, Přípotoční
17. – 22.	Pavel Kindlmann	4. P	G České Budějovice
17. – 22.	Stanislav Novák	4. P	G Ostrava 1, Šmeralova
17. – 22.	Bohuslav Partyk	4. S	G Bratislava, Novohradská
17. – 22.	Ladislav Peksa	4. S	G Plzeň, nám. Odborářů
17. – 22.	Martin Vrátný	4. S	G Praha 7, Nad školou
23.	Oldřich Křížek	4. S	G Praha 2, W. Piecka
24. – 25.	Pavol Meravý	4. S	G Bratislava, Novohradská
24. – 25.	Pavol Zlatoš	4. S	G Bratislava, Novohradská

V označení třídy S znamená speciální matematicko-fyzikální třídu,
P přírodovědnou větev.

Tabulka 7
Přehled klasifikace úloh 3. kola kategorie A

Úloha	Klasifikace			Průměrná známka	Tematický obor úlohy
	1	2	3		
1.	23	24	33	2,12	Fotometrie – výpočet osvětlení
2.	7	18	55	2,60	Řešení složeného magnetického pole točivými vektory
3.	10	21	49	2,48	Řešení magnetického pole toroidu s jádrem tvořeným zčásti litinou, zčásti ocelolitinou, popř. se vzduchovou mezerou
4.	7	8	65	2,72	Úloha na vzájemné působení proudů, které procházejí pevnou a pohyblivou cívkou
5. exper.	4	27	49	2,56	Měření charakteristik Zenerovy diody při teplotách laboratoře a kapalného dusíku
Celkem	51	98	251	2,50	

laboratorní metodou a zpracovat získané informace není ještě ani u tohoto výběru žáků na potřebné výši. Také úloha č. 2 navazovala na studijní téma, ale přitom patřila mezi nejméně úspěšné úlohy; úspěšně ji vyřešila necelá třetina účastníků soutěže. Ukazuje se, že je třeba, aby užívání vektorů proniklo ještě ve větší míře do normální výuky fyziky na středních školách. Nejméně úspěšnou úlohou byla úloha čtvrtá, kterou úspěšně vyřešilo jen 18 % řešitelů. Jistě na to měla vliv i skutečnost, že to byla úloha poslední a soutěžícím na ni většinou nezbyl čas.

Srovnáme-li výsledky třetího kola kategorie A XV. ročníku s loňským ročníkem, vidíme, že počet úspěšných řešitelů klesl o 34 %, i když počet vítězů naopak vzrostl o 37 %. V celostátním kole XV. ročníku soutěžili podruhé úspěšně Jiří Hruška z Hradce Králové (v pořadí loni 31.—34., letos 2.) a Radomír Kuchta z gymnázia Havířov (loni v pořadí 20.—30., letos 10.). Mezi úspěšné řešitele třetího kola se zařadil žák třetího ročníku Jiří Fexa z gymnázia Praha 2, W. Piecka. Získané zkušenosti bude moci uplatnit v příštím ročníku FO.

Na schůzi komise, na které byly vyhodnoceny výsledky třetího kola tak, jak je podávají tabulky 4 až 7, bylo rozhodnuto, že do přípravy na 7. mezinárodní olympiádu v Polsku bude zařazeno prvních 12 úspěšných řešitelů celostátního kola.

Vítězové i úspěšní řešitelé třetího kola kategorie A obdrželi čestná uznání; úspěšným řešitelům s pořadím 1. až 16. byly uděleny věcné odměny z prostředků ministerstva školství SSR.

Na základě provedeného vyhodnocení lze konstatovat, že třetí kolo kategorie A XV. ročníku FO splnilo svoje politickovýchovné a odborné poslání.

D. Závěr soutěže kategorií A, B, C a D

Úspěšní řešitelé druhého kola studovali převážně na přírodovědných větvích nebo ve speciálních matematicko-fyzikálních třídách gymnázií. Zvláště výrazné je to u úspěšných řešitelů třetího kola FO kategorie A, z nichž 2/3 studovali ve specializovaných třídách a 1/3 na přírodovědných větvích. V těchto třídách a větvích patří fyzika mezi preferované předměty; přidělený počet hodin a osnovy fyziky umožňují dát žákům hlubší fyzikální vědomosti a vypěstovat u nich ve zvýšené míře polytechnické dovednosti. Přistoupí-li k tomu ještě soustavná péče učitele fyziky o talentované žáky, jak je to v programu uvedených větví, odrazí se to i ve výsledcích fyzikální olympiády. Výsledky

fyzikální olympiády můžeme považovat v určitém smyslu za jeden z ukazatelů, podle nichž lze hodnotit efektivnost naší výchovy příští technické inteligence.

Péči školy o talentované žáky doplňovaly i kursy organizované krajskými výbory FO pro žáky několika škol města nebo okresu. Byla na nich probírána témata prohlubující a rozšiřující učební látku fyziky příslušného ročníku. Větší rozšíření těchto kursů naráželo i v tomto ročníku na nedostatek společného volného času v důsledku pětidenního pracovního týdne. Využití volných sobot brání mimo jiné i řidší sobotní komunikace dopravních prostředků.

Nejúčinnější formou péče o talentované žáky je bezesporu celostátní soustředění vybraných úspěšných řešitelů MO a FO, kategorie B, popř. C. Svědčí o tom skutečnost, že 63 % účastníků loňského celostátního soustředění ve třídě fyzikální nebo matematickofyzikální se stalo úspěšnými řešiteli druhého kola FO. Účastníci třetího kola kategorie A byli z 34 % absolventy loňského celostátního soustředění, mezi úspěšnými řešiteli třetího kola jich je 40 %.

Ve školním roce 1973/74 se konalo celostátní soustředění na chatách Komsomol a Mladá garda v Zadově, p. Stachy, okres Prachatice ve dnech 16. 6. až 6. 7. 1974. Organizační a materiální stránku soustředění zajišťoval KV FO v Českých Budějovicích, zvláště jeho předseda Vladimír Strnad, ve spolupráci s ekonomickým oddělením PedF v Českých Budějovicích. Potřebné finanční prostředky poskytlo ministerstvo školství ČSR.

ÚV FO organizoval výběr účastníků, jejich pozvání a informování a dále pak zajišťoval výukovou náplň pro třídu fyzikální a matematicko-fyzikální. V obou třídách bylo zařazeno základní téma Kmity a vlny v rozsahu 34 hodin, které přednášel prof. dr. R. Košťál, ve třídě fyzikální byla ještě zařazena doplňková témata: Použití diferenciálního a integrálního počtu ve fyzice v rozsahu 12 hod., přednášel Zdeněk Ungermann, Vlnová optika v rozsahu 12 hod., přednášel Vladimír Strnad, Úvod do fyziky pevných

látek v rozsahu 10 hodin, přednášel doc. dr. František Lukeš, CSc. Ve večerních hodinách bylo zařazeno několik fyzikálních besed.

Celostátního soustředění se zúčastnilo 90 úspěšných řešitelů druhého kola MO a FO kategorie B; 8 účastníků měly kraje Praha, ZČ, SČ, JM, SM a StS; ostatní kraje měly po 7 účastnících.

Stejný úkol jako soustředění celostátní plnila i soustředění krajská, organizovaná krajskými výbory FO a financovaná příslušnými KNV. Jejich odborná náplň byla v podstatě shodná s náplní celostátního soustředění, jejich organizace a délka trvání nebyla ve všech krajích jednotná, poněvadž tato akce nenachází u všech školských správ stejné pochopení a nejsou jí přidělovány stejné finanční prostředky.

E. Soutěž kategorie E

První kolo kategorie E probíhalo na ZDŠ od září 1973 do 30. ledna 1974. Texty soutěžních úloh se základními informacemi byly uveřejněny v samostatném letáku. Jeho české znění vydalo SPN v Praze jako účelový tisk MŠ ČSR v nákladu 10 000 výtisků, leták se slovenským textem vyšel v SPN v Bratislavě.

Také texty úloh pro druhé a třetí kolo FO kategorie E byly jednotné pro celou oblast ČSSR. České texty úloh zajistil pro účastníky druhého kola v českých zemích člen ÚV FO dr. Ivo Volf, pro třetí kolo jednatel ÚV FO V. Suchánek; slovenské, popř. maďarské texty úloh pro slovenské kraje pro druhé i třetí kolo zajišťoval doc. dr. Ivan Náter; polské texty úloh potřebné pro některé okresy Severomoravského kraje zajistil předseda komise M. Simerský.

Pro všechna kola FO kategorie E byla vydávána instrukční řešení soutěžních úloh pro potřebu opravujících učitelů a pro informaci soutěžících. Instrukční řešení s pokyny pro hodnocení žákovských řešení byla vydávána jen v českém znění pro celou ČSSR. Instrukční řešení úloh pro první a druhé kolo zajišťoval

Tabulka 8
Počet ZDŠ, které se zúčastnily XV. ročníku FO

Kraj	Počet ZDŠ v kraji	1. kola se zúčastnilo		2. kola se zúčastnilo		3. kola se zúčastnilo	
		Počet	%	Počet	%	Počet	%
Praha	162	142	87,7	131	80,9	49	30,2
StČ	301	179	59,5	148	49,2	56	18,6
JČ	184	140	76,1	97	51,9	24	13,0
ZČ	222	146	65,8	98	44,1	28	12,6
SČ	288	178	61,8	137	47,5	56	19,4
VČ	313	209	66,8	168	53,7	31	9,9
JM	458	305	66,6	241	52,6	62	13,5
SM	460	322	70,0	273	59,3	39	8,5
Bratislava	68	54	79,4	50	73,5	16	23,5
ZS	478	320	66,9	267	55,8	55	11,5
StS	398	270	67,8	205	51,5	35	8,7
VS	384	220	57,3	184	47,9	62	16,1
Celkem	3716	2485	66,8	1999	53,8	513	13,8
Loni	3706	2257	60,9	1727	46,6	461	12,4

prostřednictvím krajských výborů FO distribuoval dr. Ivo Volf, pro třetí kolo jednatel ÚV FO.

Druhé kolo FO kategorie E se konalo podle plánu ve středu dne 27. února 1974. Třetí kolo však bylo kvůli posunutí dní pracovního klidu po 9. květnu přeloženo na sobotu 19. dubna 1974.

Tabulka 8 dává přehled o celkovém počtu úplných ZDŠ v jed-

notlivých krajích a o počtu škol, které se zapojily do FO v jednotlivých kolech soutěže. I když na všech školách nejsou stejné podmínky a fyzikální olympiáda není jediným prostředkem péče o talentované žáky, přece jen zapojení školy do této soutěže je jakýmsi ukazatelem správného postoje učitele fyziky k úkolu přispět svou výchovně vzdělávací prací k přípravě potřebného počtu nových pracovníků pro obory důležité pro vědeckotechnický rozvoj naší ekonomiky. Zapojení ZDŠ do soutěže není ve všech krajích stejně intenzivní, ale ve všech krajích již překročilo 50 % škol. Svědčí to o vzrůstající propagační práci krajských a okresních výborů FO mezi učiteli fyziky. Sledujeme-li procento zapojených ZDŠ od XII. ročníku FO, vidíme trvalý růst; 51 %, 53 %, 61 %, 67 %. Letos také již není velký rozdíl mezi zapojením škol v ČSR (67,8 %) a v SSR (65,0 %). Přitom ovšem ani zapojení dvou třetin všech ZDŠ do FO nemůžeme považovat za optimální výsledek a bude třeba další práce, aby byl překonán pasivní postoj některých učitelů fyziky k soutěži. Rovněž snížení procenta neodborného vyučování fyzice by věci prospělo.

Procento zapojení škol do druhého kola je již ukazatelem kvalitativním, je však hodně ovlivňováno i mimoškolními faktory, jako je např. rodinné prostředí žáků. Procento zapojení škol do třetího kola je pak spíše ukazatelem pochopení, které nachází soutěž u školských ekonomických orgánů, poněvadž povolené finanční prostředky určují, jak široký nebo úzký bude výběr účastníků do třetího kola soutěže.

Počet soutěžících žáků v jednotlivých kolech FO je uveden v tabulce 9. Proti minulému ročníku vzrostl počet účastníků prvního kola o 19,2 %, přitom na Slovensku bylo zvýšení o 23,4 %, v českých zemích jen o 16,8 % (loni tomu bylo naopak). Pozoruhodné je sledovat účast dívek v FO: v kategorii E tvoří dívky 35,5 % soutěžících, v kategorii D 25,5 %, v kategorii C 19,5 %, a v kategorii B 14,6 % a v kategorii A 11,2 %. Přitom na gymnáziích, ze kterých je převážná většina soutěžících ve

Tabulka 9

Počet žáků soutěžících v 1., 2. a 3. kole FO kategorie E

(S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, % Ú počet úspěšných v %)

Kraj	1. kolo						2. kolo						3. kolo					
	celkem			z toho dívek			celkem			z toho dívek			celkem			z toho dívek		
	S	Ú	%	S	Ú	%	S	Ú	%	S	Ú	%	S	Ú	%	S	Ú	%
Praha	1358	712	52,4	467	261	51,6	532	465	87,4	157	134	85,4	75	70	93,3	12	12	100
Stř	830	501	60,4	290	165	56,9	409	340	83,1	128	105	82,0	84	58	69,0	27	16	59,3
JČ	822	389	47,4	308	148	48,1	353	284	80,4	136	109	80,1	27	19	70,3	9	5	55,6
ZČ	752	467	62,1	246	121	49,2	328	266	80,5	97	78	80,4	36	27	75,0	9	6	66,7
SČ	1104	513	46,4	344	166	48,2	433	341	78,5	142	102	71,8	83	60	72,2	21	11	52,4
VČ	1158	683	58,9	450	238	52,9	542	444	81,9	176	140	79,5	38	34	84,2	5	5	100

JM	1705	869	50,9	564	283	50,2	830	591	71,2	260	170	65,3	87	55	64,1	19	7	36,8
SM	1787	850	47,6	507	266	52,5	678	570	84,0	188	149	79,2	48	31	64,6	7	5	71,4
Brati- slava	489	442	90,4	167	145	86,8	437	291	66,5	142	98	69,0	46	45	97,8	17	17	100
ZS	2189	1296	59,2	769	437	56,8	1235	767	62,1	413	236	57,1	68	48	70,5	19	8	42,1
StS	1781	909	51,0	742	327	44,0	839	659	78,5	300	228	76,0	40	29	72,5	10	6	60,0
VS	1182	807	68,3	536	316	58,9	794	577	72,7	295	212	71,9	104	61	58,7	34	16	47,0
Celk.	15157	8438	55,6	5390	1853	34,3	7410	5595	75,5	2434	1761	72,3	736	537	72,9	189	114	60,3
Loni	12716	6747	53,0	4599	2139	46,5	5928	2519	42,4	1829	632	34,5	689	359	52,1	131	55	41,9

fyzikální olympiádě, studuje více dívek než chlapců. Tradiční vlivy způsobují, že s postupujícími lety se zájem dívek o matematiku a fyziku zmenšuje. Jistě to není vývoj příznivý.

Počet úspěšných řešitelů prvního kola je letos absolutně i relativně vyšší než loni. V ČSR bylo 52 % úspěšných řešitelů, v SSR 61 %.

Druhého kola se zúčastnilo celkem asi 87 % úspěšných řešitelů prvního kola; na Slovensku 95 %, v českých zemích jen 82 %. Účast ve druhém kole se proti minulému roku zvýšila o 25 % (v ČSR 18,7 %, v SSR 33,7 %). Procento úspěšnosti ve druhém kole dosahuje neobvyklé výše. Jistě k tomu přispěl přísnější výběr účastníků, jak je to vidět hlavně v českých krajích; v ČSR bylo 80 % úspěšných, v SSR 66 %. V prvním kole bylo procento úspěšných dívek daleko menší než celkové procento, ve druhém kole je procento úspěšnosti dívek naopak větší než celkové procento; vědomosti dívek, které se zúčastnily druhého kola, byly tedy kvalitnější než u chlapců.

Třetího kola soutěže se zúčastnilo jen 13 % úspěšných řešitelů druhého kola, v minulém roce to bylo 27 % a ve XIII. ročníku ještě 32 %. Je to způsobováno tím, že zatímco počet soutěžících, a tím i počet úspěšných řešitelů rok od roku stoupá, finanční limit krajských výborů FO má za následek, že počet účastníků třetího kola se celkem nemění: XIII. ročník 690, XIV. ročník 689, XV. ročník 736. Rozdíly mezi jednotlivými kraji jsou značné, od 27 účastníků do 104. V ČSR je průměrný počet účastníků třetího kola na jeden kraj 59,7, v SSR je to však 64,5 účastníků. Z toho by se dalo soudit, že na Slovensku školské úřady FO více přejí. Tento nestejný výběr však celkově neovlivnil procento úspěšnosti: celkově 72,9 %, v ČSR 74 %, v SSR 71 %. V třetím kole jsou dívky opět méně úspěšné než chlapci, jejich procento úspěšnosti je menší než v minulém ročníku.

Dále uvádíme jména vítězů třetího kola FO kategorie E, z každého kraje nejvýše 10. Za vítěze považujeme ty úspěšné

řešitele třetího kola, kteří vyřešili výborně nebo dobře tři úlohy ze čtyř zadaných. U každého žáka je uvedeno sídlo příslušné ZDŠ.

Praha

Jiří Kroňdák, Praha 10, Jakutská; Mirko Navara, Praha 8, Lyčkovo nám.; Jana Boušková, Praha 4, Křesomyslova; Petr Horský, Praha 4, Jižní; Jiří Koch, Marie Březíková, Praha 4, Křesomyslova; Pavel Dubský, Praha 3, Lupáčova; Jiří Konečný, Praha 3, Jiřího n.; Jana Uhlířová, Praha 4, Křesomyslova; Hana Závětová, Praha 7, Fr. Křížka.

Středočeský kraj

Zdeněk Mašát, Kolín; Eva Bláhová, Neratovice; Vladimír Rolc, Kněžves; Bohuslav Šámal, Dolní Bečkovice; Alena Hlubocká, Kolín; Roman Beneš, Lysá n. Labem; František Kareš, Kladno; Pavel Zeinert, Mutějovice; Marie Gartová, Rakovník; František Vosláš, Dolní Kralovice.

Jihočeský kraj

Jiří Plašil, Tábor 3; Václav Hauser, Jindřichův Hradec 2; Robin Schinko, Český Krumlov, Fučíkova; Miloslava Hanzlíková, Blatná, Komenského; Jan Cvejn, Písek, M. Gorkého; Růžena Hanousová, České Budějovice, Rudolfov; Čestmír Houška, České Budějovice, Čechova; Marie Koubová, Milevsko; Miluše Johová, Jindřichův Hradec 2; Pavel Sláma, Český Krumlov, Zápotočského.

Západočeský kraj

Jiří Basl, Plzeň, Chválenická; Miroslav Veselý, Staňkov; Stanislava Doležalová, Mariánské Lázně; Pavel Goblirsch, Lině; Václav Braun, Nepomuk; Eva Seibertová, Ostrov n. Ohří; Vladimír Šrámek, Plzeň, Jiráskovo n.; Hana Martínková, Ostrov n. Ohří; Zdeněk Kučera, Cheb; Jaroslav Nečas, Karlovy Vary.

Severočeský kraj

Jana Kasíková, Jablonec n. Nisou, Sokolí; Zdeněk Kalousek, Jablonec n. Nisou, Žižkův vrch; Pavel Němec, Ústí n. Labem, České mládeže; Libor Holečko, Liberec, J. Švermy; Zdeněk Rais, Nový Bor, U lesa; Vladimír Dobeš, Jablonec n. Nisou, Žižkův vrch; Josef Badalec, Nový Bor, U lesa; Pavel Janeček, Liberec, J. Švermy; Ondřej Macoun, Liberec, Husova; Jitka Řimalová, Litoměřice, Pionýrská.

Východočeský kraj

Pavel Jančík, Hořice, Daliborka; Jan Kratochvíl, Pardubice, Prodloužená; Petr Bahník, Pardubice, Prodloužená; Ilja Turek, Hradec Králové, SNP; Václav Hampl, Česká Třebová, Leninova; Pravomil Novák, Úpice, Lány; Miloslav Pátek, Havlíčkův Brod, Křížová; Petr Mervart, Vysoké Mýto, Jiráskova; Alena Kelnarová, Hradec Králové, SNP; Jiří Smejkal, Chotěboř, Smetanova.

Jihomoravský kraj

Jiří Kaďourek, Brno, Janouškova; Jan Kodovský, Gottwaldov 1; Sládek Petr, Brno, Janouškova; Antonín Novotný, Nezamyslice; Květoš Svrčina, Valašské Klobouky; Pavel Votava, Jihlava 1.; Luděk Matyska, Brno, Janouškova; Petr Mareček, Okříšky; Ladislav Mareček, Brno, Kotlářská; Karel Vilím, Brno, Merhautova.

Severomoravský kraj

Petr Halata, Palkovice; Pavel Kolařík, Ostrava — Poruba, Čkalovova; Petr Hiltavský, Petrovice; Jan Kuzník, Jablunkov; Jiří Bednář, Petřvald; Helena Ryšková, Hranice, Šromotovo n.; Helena Šnapková, Ostrava — Radvanice; Tomáš Chmura, Ostrava — Mariánské Hory; Lubomír Najzar, Havířov — Bludovice; František Purgert, Hranice, 1. máje.

Bratislava

Marian Krempaský, Ján Prokop, Košická; Gabriela Hvizdošová, Nevádzová; Ivan Mizera, Bajkalská; Ida Hrušová, Košická; Mikuláš Herman, Nedbalova; Jana Hejdová, Nevádzová; Štefan Varga, Palisády; Juraj Macko, Ľubica Daňková, Košická.

Západoslovenský kraj

Jozef Bartek, Nové Mesto n. Váhom 2.; Emil Krondiak, Komárno, Pohraniční, slovenská; Eugen Šimko, Komárno, Sídliisko 2; Peter Kolník, Nitra, R. Jašíka; Gabriela Bačová, Nitra, ul. J. Kráľa; Štefan Jedlík, Komárno, ul. Práce, maďarská; Dana Kosmáková, Trnava, Bottova ul.; Ľudovít Gajdoš, Nitra, Zobor; Jozef Gogola, Bošany; Július Grác, Šurany.

Stredoslovenský kraj

Ľudmila Dudková, Banská Bystrica, Tr. SNP; Milan Veščičík, Žilina — Hliny; Petr Houba, Žilina — Hliny V; Milan Lulek, Považská Bystrica 3; Jozef Šoltéz, Banská Bystrica, Tr. SNP; Josef Šulek, Dolný Kubín — Koh. sad; Ján Bednár, Beluša; Peter Bonda, Martin, Mládežnícká; Ján Kabát, Prievidza — Stred; Roman Vida, Prievidza — Necpaly.

Východoslovenský kraj

Stanislav Dzurjanin, Michalovce 1; Edita Šišajová, Trebišov, SNP; Mária Jacková, Humenné, Sídliisko 3; Július Hvizdnák, Humenné, Kukureliho; Ľudmila Smreková, Prešov, Kúpeľná; Anton Medlík, Sabinov; Anna Turesanyiová, Humenné, Kukureliho; Oľga Štefčíková, Jaromír Kotras, Spišská Nová Ves 4 a 1; Martin Plšek, Košice 15.

F. Přípravné kolo pro 8. ročník ZDŠ

Se souhlasem a ve spolupráci s odborem školství KNV a KPÚ Jihomoravského kraje ÚV FO uspořádal v tomto kraji ve školním

roce 1973/74 pokusně přípravné kolo FO pro 8. ročník ZDŠ.

Zavedením tohoto kola měly být sledovány tyto cíle:

a) Podchytit zájem o fyziku již u žáků 8. ročníku ZDŠ, kdy se začínají upevňovat zájmové oblasti žáků.

b) Usměrnit tento zájem na rozvíjení fyzikálního myšlení pomocí řešení fyzikálních úloh.

c) Pozitivně ovlivnit individuální přístup učitelů fyziky k fyzikálně nadaným žákům.

d) Metodickým vedením vytvořit u žáků předpoklady, aby se mohli úspěšně zúčastnit soutěže v kategorii E.

Soutěž v přípravném kole byla organizována takto:

a) Přípravné kolo bylo určeno pro žáky 8. ročníku ZDŠ, kteří se dobrovolně do soutěže přihlásí. Účast v přípravném kole není podmínkou pro účast ve FO kategorie E.

b) Přípravné kolo probíhalo jen na školách, a to v měsících březnu až květnu 1974.

c) Účastníci soutěže řešili tři soutěžní úlohy.

d) Texty soutěžních úloh a pokyny pro soutěžící zaslal ÚV FO prostřednictvím krajského výboru FO JMK jednotlivým okresním výborům FO, které je rozeslaly na všechny úplné ZDŠ svého okresu.

e) Referenti pro FO a učitelé fyziky seznámili žáky s touto soutěží, se soutěžními úlohami a s pokyny pro soutěžící.

f) Účastníci soutěže odevzdali řešení úloh svým učitelům fyziky do 23. 5. 1974, kteří je ve spolupráci s referenty pro FO opravovali podle vzorových řešení a pokynů pro klasifikaci, které jim zaslal ÚV FO prostřednictvím OV FO.

g) V prvním týdnu června provedli učitelé fyziky s účastníky přípravného kola besedu, na níž seznámili jednotlivé žáky s hodnocením jejich řešení, upozornili je na nedostatky a předvedli jim správný postup a vzorový záznam řešení.

K textům úloh byly připojeny pokyny pro řešitele přípravného kola. Mimo pokyny formálního charakteru byla naznačena metodika řešení fyzikálních úloh. Předpokládalo se, že tyto pokyny

učitelé fyziky s účastníky soutěže prodiskutují a blíže osvětlí. Tím se mělo dosáhnout určité jednotnosti ve vedení soutěžících.

Pokyny pro hodnocení žákovských řešení úloh přípravného kola zachovávaly obvyklou pětistupňovou klasifikaci, ale podrobně určovaly podmínky, kterým musí řešení vyhovovat, aby bylo hodnoceno určitým klasifikačním stupněm. Klasifikační norma byla náročnější, než je obecný klasifikační řád pro ZDŠ.

Referenti pro FO podali OV FO zprávu o průběhu přípravného kola na škole a sdělili připomínky k obsahu, organizaci a průběhu soutěže. Připojili k ní také soubor řešení klasifikovaných různým stupněm. OV FO vypracovaly přehled dosažených výsledků a podaných připomínek a spolu s řešeními je poslaly KV FO JMK, který je postoupil ÚV FO. Celý materiál prostuduje pověřená komise, posoudí, do jaké míry bylo dosaženo sledovaných cílů, a vypracuje zprávu s příslušným návrhem pro podzimní zasedání pléna ÚV FO.

Organizace jednotlivých kol FO, příprava soutěžních úloh, rozmnožování a distribuce instrukčních řešení, oprava žákovských řešení (v tomto ročníku jich bylo 188 tisíc), instruktáže učitelů fyziky i žáků, individuální práce s řešiteli a rozsáhlá agenda představují neobyčejné množství drobné, ale velmi odpovědné práce, kterou vykonávají stovky učitelů fyziky ze škol všech stupňů. Poněvadž jde o práci nehonorovanou a některými činiteli ještě přehlíženou, ale společensky neobyčejně důležitou, zaslouží si ocenění i touto cestou.

II. ČÁST

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY

1. Úlohy kategorie A

Úlohy a jejich řešení recenzovali dr. Ladislav Thern a Mojmír Simerský.

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl Zdeněk Slanina)

Z boční stěny nádrže vychází n trubic délky r , jejichž osy svírají s vodorovnou rovinou ostré úhly $\alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha$. Průsečíky těchto os se stěnou nádrže leží v téže vodorovné rovině. V nádrži je kapalina o hustotě ρ a v místech připojení trubic ke stěně nádrže je udržován stálý tlak p vzhledem k atmosférickému tlaku. Průřez trubice svírající s vodorovnou rovinou úhel α je S_1 .

a) Určete průřez S_k trubice svírající s vodorovnou rovinou úhel $k\alpha$ ($1 < k \leq n$) tak, aby touto trubicí vytékal za stejnou dobu stejný objem kapaliny jako trubicí první.

b) Určete poměr q celkové kinetické a celkové potenciální tíhové energie kapaliny vytékající z trubic. Předpokládáme, že nulová potenciální energie tíhová je ve vodorovné rovině, v níž leží průsečíky os trubic s boční stěnou nádrže.

Řešení:

a) Označme v_k rychlost proudění kapaliny v k -té trubici. Užitím Bernoulliho rovnice pro výtok kapaliny z trubice dostaneme

$$p = \frac{1}{2} \rho v_k^2 + \rho g h_k, \quad (1)$$

kde h_k značí výšku konce k -té trubice nad vodorovnou rovinou, v níž leží průsečíky os všech trubic; k této rovině budeme vztahovat potenciální tíhovou energii kapaliny. Zřejmě platí

$$h_k = r \cdot \sin k\alpha. \quad (2)$$

Dosazením z (2) do (1) dostaneme

$$v_k = \sqrt{\frac{2p}{\rho} - 2gr \sin k\alpha}. \quad (3)$$

Podle zadání musí být

$$S_k v_k = S_1 v_1 \quad (4)$$

a podle (3) pro $k = 1$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2p}{\rho} - 2gr \sin \alpha}. \quad (5)$$

Z (4) vyjádříme S_k , dosadíme z (3) a (5) a dostaneme

$$S_k = S_1 \sqrt{\frac{p - gr\rho \sin \alpha}{p - gr\rho \sin k\alpha}}.$$

b) Za dobu t proteče každou trubicí kapalina o hmotnosti m . Celková kinetická energie kapaliny vyteklé za dobu t ze všech trubic je

$$W_k = \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^n v_k^2 = \frac{pmn}{\varrho} - grm \sum_{k=1}^n \sin k\alpha.$$

Celková potenciální tíhová energie je

$$W_p = mg \sum_{k=1}^n h_k = mgr \sum_{k=1}^n \sin k\alpha.$$

Pro poměr q obou energií dostaneme po úpravách

$$\begin{aligned} q = \frac{W_k}{W_p} &= \frac{pn}{gr\varrho \sum_{k=1}^n \sin k\alpha} - 1 = \\ &= \frac{pn \sin \frac{\alpha}{2}}{gr\varrho \sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}} - 1. \end{aligned}$$

2. úloha (navrhl ing. Bohumil Vybíral)

Je-li ve výšce h_0 nad povrchem Země atmosférický tlak b_0 a hustota vzduchu ϱ_0 , pak ve výšce h nad povrchem Země je atmosférický tlak

$$b = b_0 \cdot \exp \left[- \frac{\varrho_0}{b_0} g(h - h_0) \right],$$

kde g značí tíhové zrychlení a znak „exp“ představuje zápis přirozené exponenciální funkce:

místo e^x píšeme $\exp x$

(e značí základ přirozených logaritmů).

Obdobný vztah

$$b' = b'_0 \cdot \exp \left[- \frac{\varrho'_0}{b'_0} g(h - h_0) \right]$$

by platil, kdyby plynový obal Země byl tvořen jakýmkoli plynem, který ve výšce h_0 má hustotu ϱ'_0 .

Uvedené vztahy platí za předpokladu, že teplota plynu je ve všech výškách konstantní.

a) Stanovte (konstantní) objem V plynové náplně balónu, který má vystoupit z výšky $h_0 = 0$ do výšky h ; balón byl ve výšce $h_0 = 0$ zcela naplněn plynem, který v této výšce má hustotu ϱ'_0 ($\varrho'_0 < \varrho_0$).

Konstrukce balónu se zátěží má celkovou hmotnost m_b , a objem zanedbatelný proti objemu V . Balón je dole opatřen otvorem, který umožňuje vyrovnávání tlaku plynové náplně s tlakem okolního vzduchu. Tento otvor je tak malý, že lze zanedbat difúzi mezi plynem v balónu a okolním vzduchem.

b) Určete absolutní a relativní úbytek hmotnosti plynové náplně balónu ve výšce h .

c) Určete výšku Δh , o kterou balón ještě vystoupí, když ve výšce h se uvolní část zátěže o hmotnosti Δm_b . Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\varrho_0 = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$; $\varrho'_0 = 0,400 \varrho_0$; $h = 5000 \text{ m}$; $m_b = 2500 \text{ kg}$; $\Delta m_b = 50,0 \text{ kg}$; $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$; $b_0 = 760 \text{ torrů}$.

Poznámka: K řešení úlohy doporučujeme prostudovat článek Barometrická formule a její aplikace od Ing. Bohumila Vybírala, CSc.; článek byl uveřejněn v Rozhledech matematicko-fyzikálních, ročník 51, školní rok 1972/73, číslo 1, září 1972.

Řešení:

Ve výšce h , do které má balón vystoupit, nastane rovnováha sil. Označíme-li ϱ hustotu vzduchu ve výšce h a ϱ' hustotu plynu v téže výšce, musí podle zákona Archimédova být

$$(V\varrho - V\varrho' - m_b)g = 0. \quad (1)$$

Hustoty ϱ a ϱ' vyjádříme pomocí zákona Boyleova, neboť jde o děje izotermické. Poměr hustot je v tomto případě roven poměru tlaků, takže s použitím barometrické rovnice dostaneme

$$\varrho = \varrho_0 \cdot \frac{b}{b_0} = \varrho_0 \cdot \exp\left(-\frac{\varrho_0}{b_0}gh\right) \quad (2)$$

a

$$\varrho' = \varrho'_0 \cdot \frac{b}{b_0} = \varrho'_0 \cdot \exp\left(-\frac{\varrho_0}{b_0}gh\right). \quad (3)$$

Dosadíme z (2) a (3) do (1) a potom vyjádříme

$$V = \frac{m_b}{\varrho_0 - \varrho'_0} \cdot \exp \frac{\varrho_0}{b_0} gh. \quad (4)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $V = 6,03 \cdot 10^3 \text{ m}^3$.

b) Plyn expanduje izotermicky tak, že ve výšce h pro jeho objem V' platí podle zákona Boyleova

$$V' = \frac{b_0}{b} \cdot V$$

a s použitím barometrické rovnice

$$V' = V \cdot \exp \frac{\varrho_0}{b_0} gh. \quad (5)$$

Poněvadž balón má stálý objem V , unikl z něho plyn o hmotnosti

$$\Delta m = (V' - V) \varrho'.$$

Dosazením z (3) a (5) dostaneme po úpravě

$$\Delta m = V \varrho'_0 \left[1 - \exp \left(- \frac{\varrho_0}{b_0} gh \right) \right],$$

kde $V \varrho'_0 = m_0$ značí hmotnosť plynu ve výšce $h_0 = 0$. Relativní úbytek hmotnosti plynu tedy je

$$\frac{\Delta m}{m_0} = 1 - \exp \left(- \frac{\varrho_0}{b_0} gh \right).$$

Pro zadané hodnoty vyjde $\frac{\Delta m}{m_0} \doteq 0,412$.

c) Po uvolnění zátěže platí podle (4)

$$V = \frac{m_h - \Delta m_h}{\varrho_0 - \varrho'_0} \cdot \exp \frac{\varrho_0}{b_0} g(h + \Delta h). \quad (6)$$

Porovnaním (4) a (6) dostaneme vzťah, z něhož vyjádříme

$$\Delta h = \frac{b_0}{g \varrho_0} \cdot \ln \frac{m_h}{m_h - \Delta m_h}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $\Delta h \doteq 160$ m.

3. úloha (navrhol RNDr. Árpád Kecskés, CSc.)

Ďalekohľad je zaostrý tak, že okom, akomodovaným na nekonečno, vidíme v ňom ostrý obraz Mesiaca. Vo vzdialenosti d od okulára umiestnime tienidlo.

Ako musíme posunúť okulár, ktorý má ohniskovú vzdialenosť f , aby sa ostrý obraz Mesiaca objavil na tienidle?

Úlohu riešte pre ďalekohľad

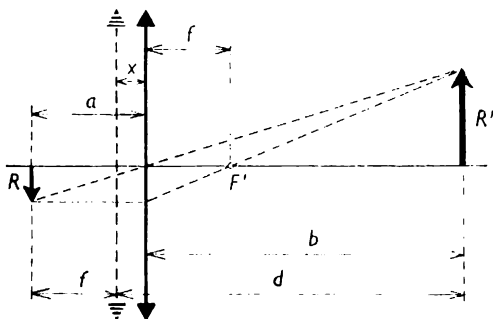
a) hviezdársky (Keplerov),

b) pozemský (Galileiho).

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $f = 2,00$ cm;
 $d = 16,0$ cm.

Riešenie:

Objektív vytvorí reálny obraz R vo svojej obrazovej ohniskovej rovine, ktorá je zároveň predmetovou ohniskovou rovinou okulára. Vzdialenosť, o ktorú musíme posunúť



Obr. 1

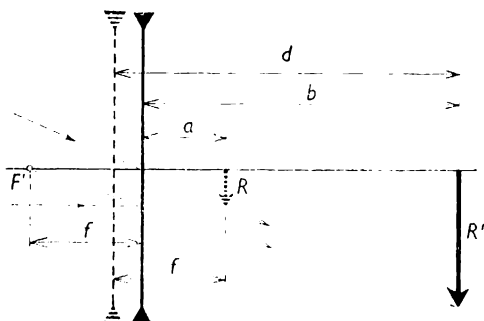
okulár smerom od objektívu, označíme x . Situácia pre prípady a) aj b) je znázornená na obr. 1 a obr. 2, na ktorých pôvodná poloha okulára je vyznačená čiarkovane. Pri riešení vychádzame zo šošovkovej rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (1)$$

a) Z obr. 1 je zrejmé, že do (1) musíme dosadiť $a = f + x$, $b = d - x$. Dostaneme kvadratickú rovnicu, ktorá má riešenie

$$x_{1,2} = \frac{(d - f) \pm \sqrt{(d - f)^2 - 4f^2}}{2}.$$

Pre zadané hodnoty vychádza $x_1 \doteq 13,7$ cm; $x_2 \doteq 0,29$ cm. Prakticky je použiteľný len výsledok x_2 , lebo pre x_1 by síce tiež vznikol ostrý obraz, ale veľmi malý.



Obr. 2

b) Reálny obraz R (obr. 2) je v tomto prípade pre okulár virtuálnym predmetom, takže do (1) musíme dosadiť $a = -(f - x)$; $b = d - x$ a nakoľko ide o rozptylku namiesto f musíme dosadiť $-f$. Dostaneme opäť kvadratickú rovnicu, ktorej korene sú

$$x_{1,2} = \frac{(d + f) \pm \sqrt{(d + f)^2 - 4f^2}}{2}.$$

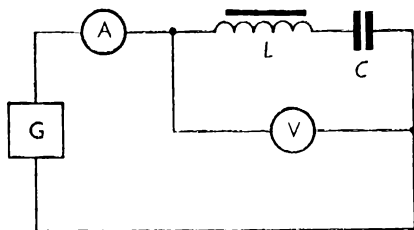
Pre zadané hodnoty vychádza $x_1 \doteq 17,8$ cm; $x_2 \doteq 0,23$ cm. Vyhovuje len výsledok x_2 , nakoľko pre x_1 by bolo potrebné posunúť okulár až za tienidlo.

4. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

Určení rezonančních křivek

Definice

Rezonanční křivku elektrického obvodu složeného z cívky a kondenzátoru můžeme definovat jako graf funkce $Z = F(f)$, kde Z značí impedanci obvodu a f kmitočet harmonického střídavého proudu, který obvodem protéká. Rezonance sériová (obr. 3) nastává při kmitočtu,



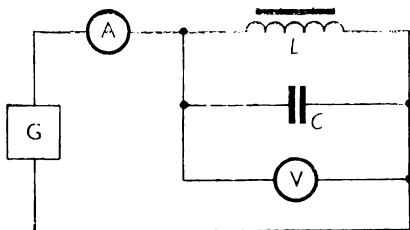
Obr. 3

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad (1)$$

kde L značí indukčnost cívky, C kapacitu kondenzátoru. Při tomto kmitočtu má obvod nejmenší impedanci $Z_{\min}$. Rezonance paralelní (obr. 4) nastává při kmitočtu

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}, \quad (2)$$

kde R značí činný odpor cívky. Kondenzátor přitom považujeme za ideální, tj. předpokládáme, že jeho dielektrikum je dokonalým izolantem. Při kmitočtu f_p má obvod maximální impedanci $Z_{\max}$. Pokud



Obr. 4

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 \ll \frac{1}{LC},$$

platí s dobrou přibližností $f_p \approx f_s$.

Použité přístroje a součástky (obr. 3, obr. 4)

- G ... nízkofrekvenční generátor se spojitě proměnným kmitočtem, jehož hodnotu lze přečíst na stupnici,
- L ... cívka (s jádrem) o indukčnosti 1 až 5 H (např. tlumivka ze zářivkového osvětlovacího tělesa, vyhlazovací tlumivka pro malý usměrňovač apod.),
- C ... kondenzátor (co nejjakostnější, nikoli elektrolytický) takové kapacity, aby spolu s cívkou vytvořil obvod s rezonančním kmitočtem v rozmezí 150 až 500 Hz,
- A ... střídavý ampérmetr (vyhoví i avomet I),
- V ... střídavý voltmetr s velkým vnitřním odporem, nejlépe nízkofrekvenční elektronkový, vyhoví však i avomet II.

Úlohy

- a) Vyberte vhodnou cívku a přibližně změřte její indukčnost (libovolnou metodou); podle výsledku měření stanovte potřebnou kapacitu kondenzátoru tak, aby rezonanč-

ní kmitočet byl v doporučeném rozmezí.

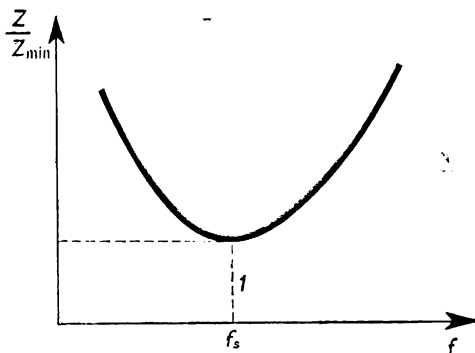
b) Vyberte vhodný kondenzátor.

c) Sestavte obvod podle obr. 3.

d) Měřte impedanci tohoto obvodu (počítejte ji z naměřených hodnot napětí a proudu) při 20 různých kmitočtech v okolí kmitočtu rezonančního, který předem přibližně určíte podle minima $Z_{\min}$ impedance.

e) Graficky zakreslete funkci $\frac{Z}{Z_{\min}} = F_1(f)$, tzv. normovanou rezonanční křivku sériového obvodu.

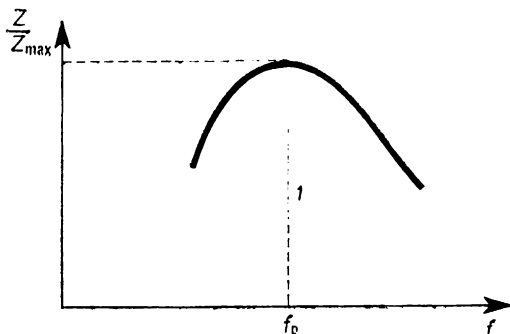
f) Obdobné měření provedte v zapojení podle obr. 4, stanovte maximální impedanci $Z_{\max}$ při rezonančním kmitočtu.



Obr. 5

g) Graficky znázorněte funkci $\frac{Z}{Z_{\max}} = F_2(f)$, tzv. normovanou rezonanční křivku paralelního obvodu.

Grafy mají typické průběhy podle obr. 5 a obr. 6.



Obr. 6

Poznámky

1. Neměřte při kmitočtu 50 Hz, protože podle zkušenosti zde často dochází k interferenci s technickým kmitočtem sítě.

2. Při měření se nesmí měnit vnitřní odpor použitého voltmetru. Proto, budete-li napětí měřit avometem II, proveďte celé měření na téměř měřicím rozsahu.

3. Odvození vztahů (1), (2) a další cenná poučení najdete v publikaci K. Hofman: Vektorové znázornění střídavých proudů. Symbolická metoda. Edice: Škola mladých fyziků, svazek č. 2, SPN, Praha 1968.

Řešení:

a) Měření indukčnosti cívky

Cívku jsme zapojili do obvodu stejnosměrného proudu a z naměřených hodnot napětí U a proudu I jsme vypočetli ohmický odpor vinutí cívky

$$R = \frac{U}{I} = \frac{2,7 \text{ V}}{0,22 \text{ A}} \doteq 12 \, \Omega.$$

Po zavedení střídavého proudu ze sítě ($f = 50 \text{ Hz}$) do stejného obvodu jsme vypočetli impedanci cívky

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{50 \text{ V}}{0,05 \text{ A}} = 1000 \Omega.$$

Indukčnost L cívky jsme vypočetli ze vztahu

$$L = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{Z^2 - R^2}.$$

Pro vypočtené hodnoty R a Z vychází $L = 3,3 \text{ H}$.

b) *Určení kapacity kondenzátoru*

Ze vztahu (1) plyne

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}.$$

Pro frekvenci $f = 150 \text{ Hz}$ a indukčnost $L = 3,3 \text{ H}$ vychází $C = 0,25 \mu\text{F}$. Měli jsme k dispozici kondenzátor kapacity $C = 0,6 \mu\text{F}$, což řádově odpovídá vypočtené hodnotě. Pro hodnotu kapacity $C = 0,6 \mu\text{F}$ a indukčnost cívky $L = 3,3 \text{ H}$ je kmitočet při sériové rezonanci $f_s = 113 \text{ Hz}$.

Pro kmitočet při rezonanci paralelní podle vztahu (2) pro ohmický odpor $R = 12 \Omega$ vychází $f_p = 113 \text{ Hz}$. Tedy $f_s = f_p$, neboť je splněna podmínka

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 \ll \frac{1}{LC}.$$

c) *Sériový obvod byl sestaven podle obr. 3.*

Hodnoty nastavených kmitočtů f , naměřené hodnoty napětí U a proudu I , vypočtené hodnoty impedance Z a poměru $\frac{Z}{Z_{\min}}$ jsou uvedeny v tabulce 10. Pro zjednodušení

Tabulka 10

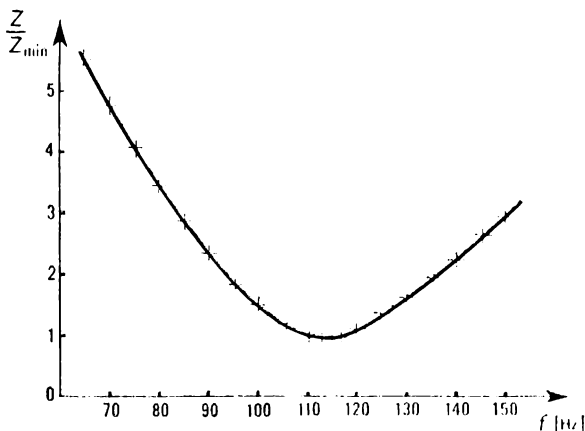
Čís. měř.	I [mA]	U [V]	Z [Ω]	$\overline{Z}_{\min}$	f [Hz]
1.	2,0	3,30	1650	5,50	65
2.	2,0	2,85	1423	4,75	70
3.	2,0	2,45	1225	4,08	75
4.	2,0	2,05	1025	3,42	80
5.	2,0	1,75	875	2,92	85
6.	2,0	1,40	700	2,33	90
7.	2,0	1,10	550	1,83	95
8.	2,0	0,90	450	1,50	100
9.	2,0	0,70	350	1,17	105
10.	2,0	0,65	325	1,08	110
11.	2,0	0,62	310	1,03	113
12.	2,0	0,60	300	1,00	115
13.	2,0	0,62	310	1,03	117
14.	2,0	0,70	350	1,17	120
15.	2,0	0,85	425	1,42	125
16.	2,0	1,00	500	1,66	130
17.	2,0	1,20	600	2,00	135
18.	2,0	1,35	675	2,25	140
19.	2,0	1,55	775	2,58	145
20.	2,0	1,70	850	2,83	150

Tabulka 11

Čís. měř.	I [mA]	U [V]	Z [Ω]	$\overline{Z}_{\max}$	f [Hz]
1.	0,6	0,50	830	0,15	65
2.	0,6	0,60	1000	0,18	70
3.	0,6	0,70	1170	0,21	75
4.	0,6	0,85	1420	0,25	80
5.	0,6	1,00	1670	0,30	85
6.	0,6	1,30	2170	0,39	90
7.	0,6	1,70	2830	0,51	95
8.	0,6	2,20	3670	0,66	100
9.	0,6	2,95	4920	0,88	105
10.	0,6	3,30	5500	0,99	110
11.	0,6	3,35	5580	1,00	113
12.	0,6	3,20	5330	0,96	115
13.	0,6	3,05	5080	0,91	117
14.	0,6	2,90	4830	0,87	120
15.	0,6	2,60	4330	0,78	125
16.	0,6	2,30	3840	0,69	130
17.	0,6	2,00	3330	0,60	135
18.	0,6	1,80	3000	0,54	140
19.	0,6	1,70	2830	0,51	145
20.	0,6	1,55	2580	0,46	150

výpočtů byla během měření udržována konstantní hodnota proudu.

Normovaná rezonanční křivka sériového obvodu určená grafem funkce $\frac{Z}{Z_{\min}} = F_1(f)$ pro tabelované hodnoty je na obr. 7. Z grafu plyne, že skutečný rezonanční kmitočet

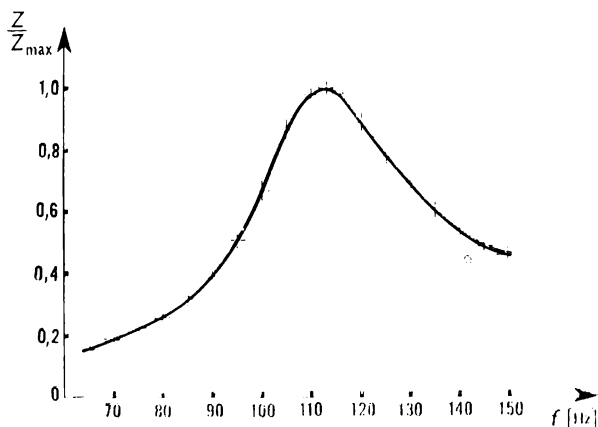


Obr. 7

sériového obvodu byl $f_{sn} \doteq 115$ Hz. Odchylka od vypočtené hodnoty $\Delta(f_s) = 2$ Hz, což je asi 1,8 % vypočtené hodnoty. Tato chyba odpovídá přesnosti měření použitých měřidel.

d) *Paralelní obvod byl sestaven podle obr. 4.*

Hodnoty nastavených kmitočtů f , naměřené hodnoty napětí U a proudu I , vypočtené hodnoty impedance Z a poměru $\frac{Z}{Z_{\max}}$ jsou uvedeny v tabulce 11.



Obr. 8

Normovaná rezonanční křivka paralelního obvodu určená grafem funkce $\frac{Z}{Z_{\max}} = F_2(f)$ pro tabelované hodnoty je na obr. 8. Z grafu plyne, že skutečný rezonanční kmitočet paralelního obvodu byl asi $f_{pn} = 112$ Hz, takže je dosti dobře splněna přibližnost $f_{sn} \approx f_{pn}$, přičemž $f_{pn} < f_{sn}$, jak má být.

5. úloha (navrhl Konrád Hofman)

Prstenec z litiny, jehož střední délka je l , má vzduchovou mezeru d_1 a magnetomotorické napětí E_m v něm budí magnetickou indukci o velikosti B .

Jakou šířku d_2 musí mít vzduchová mezera prstence z ocelolitiny, který má stejnou střední délku a stejný průřez, aby při stejně velkém magnetomotorickém napětí v něm byla vzbuzena stejně velká magnetická indukce?

Intenzita magnetického pole v litině má velikost H_1 , v ocelolitině H_2 . Předpokládáme $d_1 \ll l$; $d_2 \ll l$.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $B = 0,6 \text{ T}$; $d_1 = 1 \text{ mm}$; $l = 8 \text{ dm}$.

Řešení:

Poněvadž v obou případech mají veličiny B , S , E_m stejné velikosti, jsou stejné i magnetické toky a tedy i stejné magnetické odpory:

$$\frac{d_1}{\mu_0 S} + \frac{l}{\mu_0 \mu_{r1} S} = \frac{d_2}{\mu_0 S} + \frac{l}{\mu_0 \mu_{r2} S},$$

kde μ_0 značí permeabilitu vakua, μ_{r1} poměrnou permeabilitu litiny, μ_{r2} poměrnou permeabilitu ocelolitiny. Odtud dostaneme po úpravě s přihlédnutím k obecnému vztahu

$$B = \mu_0 \mu_r H$$

obecný výsledek

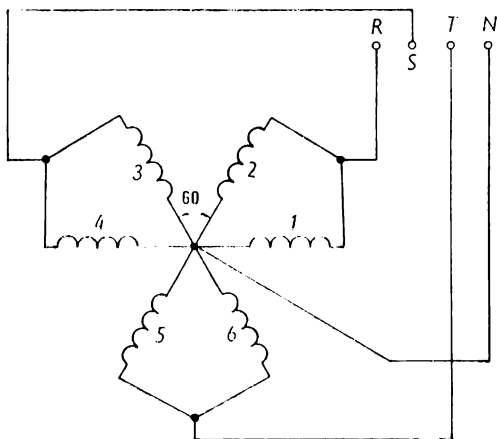
$$d_2 = d_1 + l \mu_0 \cdot \frac{H_1 - H_2}{B}.$$

Řešení pro zadané hodnoty: Z magnetizačních křivek určíme veličiny H_1 , H_2 , za μ_0 dosadíme známou konstantu. Potom vyjde $d_2 = 3 \text{ mm}$.

6. úloha (navrhl Konrád Hofman)

Na obr. 9 je znázorněno 6 stejných cívek postavených tak, že jejich osy leží v téže rovině a každé dvě sousední spolu svírají úhel 60° . Cívky jsou napájeny trojfázovým proudem, jak je vyznačeno na obrázku (R , S , T zde značí vodiče fázové, N vodič nulový).

Jaká magnetická indukce B vznikne ve středu O soustavy, budí-li každá cívka v bodě O magnetickou indukci s harmonicky proměnnou velikostí o amplitudě B ?



Obr. 9

Řešení:

Použijeme vztahu

$$\mathbf{A}_\alpha \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{A}}_{q+\alpha} + \vec{\mathbf{A}}_{q-\alpha}),$$

podle něhož můžeme harmonické kmity charakterizovat dvojicí točivých vektorů.

Platí-li pro trojfázový proud vztahy

$$i_1 = I_m \cos \omega t,$$

$$i_2 = I_m \cos \left(\omega t + \frac{2}{3} \pi \right),$$

$$i_3 = I_m \cos \left(\omega t + \frac{4}{3} \pi \right),$$

budí jednotlivé cívky v bodě O tyto magnetické indukce:

1. cívka ($\alpha = 0$; $\varphi = 0$):

$$\mathbf{B}_0 \cos \omega t = \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{B}}_0 + \vec{\mathbf{B}}_0),$$

2. cívka $\left(\alpha = \frac{1}{3}\pi; \varphi = 0\right)$:

$$\mathbf{B}_{\frac{1}{3}\pi} \cos \omega t = \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{B}}_{\frac{1}{3}\pi} + \vec{\mathbf{B}}_{-\frac{1}{3}\pi}),$$

3. cívka $\left(\alpha = \frac{2}{3}\pi; \varphi = \frac{2}{3}\pi\right)$:

$$\mathbf{B}_{\frac{2}{3}\pi} \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{B}}_{\frac{4}{3}\pi} + \vec{\mathbf{B}}_0),$$

4. cívka $\left(\alpha = \pi; \varphi = \frac{2}{3}\pi\right)$:

$$\mathbf{B}_\pi \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{B}}_{\frac{5}{3}\pi} + \vec{\mathbf{B}}_{-\frac{1}{3}\pi}),$$

5. cívka $\left(\alpha = \frac{4}{3}\pi; \varphi = \frac{4}{3}\pi\right)$:

$$\mathbf{B}_{\frac{4}{3}\pi} \cos\left(\omega t + \frac{4}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{B}}_{\frac{2}{3}\pi} + \vec{\mathbf{B}}_0),$$

6. cívka $\left(\alpha = \frac{5}{3}\pi; \varphi = \frac{4}{3}\pi\right)$:

$$\mathbf{B}_{\frac{5}{3}\pi} \cos\left(\omega t + \frac{4}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{B}}_{3\pi} + \vec{\mathbf{B}}_{-\frac{1}{3}\pi}).$$

Výsledná indukce $\mathbf{B}$ v bodě O je určena 12 točivými vektory, z nichž 6 má orientaci kladnou, 6 zápornou. Vektory kladné orientace se navzájem ruší. Pro výslednou magnetickou indukci v bodě O vyjde

$$\mathbf{B} = \frac{3}{2} (\vec{\mathbf{B}}_0 + \vec{\mathbf{B}}_{-\frac{1}{3}\pi}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \vec{\mathbf{B}}_{-\frac{1}{6}\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \vec{\mathbf{B}}_{\frac{11}{6}\pi}.$$

7. úloha (navrhl Josef Louvar)

Pro pozorovatele na Zemi má Slunce hvězdnou velikost m_1 , hvězda α -Centauri velikost m_2 . Vzdálenost Země od Slunce je d_1 , vzdálenost Země od hvězdy α -Centauri je d_2 ; vzdálenost Slunce od této hvězdy lze považovat přibližně za stejnou, tj. d_2 .

Na spojnici Slunce a hvězdy α -Centauri najděte místo, v němž mají pro pozorovatele obě hvězdy stejnou velikost, a stanovte tuto velikost m_0 .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = -26,72^m$; $m_2 = 0,30^m$; $d_1 = 1,0$ A.U.; $d_2 = 1,3$ ps.

Řešení:

Použijeme Pogsonovy rovnice

$$m_2 - m_1 = 2,5 \log \frac{I_1}{I_2},$$

kde m_1, m_2 značí hvězdné velikosti dvou hvězd a I_1, I_2 jejich pozorované jasnosti, přímo úměrné osvětlením způsobeným těmito hvězdami na Zemi.

Hvězda velikosti m ve vzdálenosti p má jasnost I_p , ve vzdálenosti q jasnost I_q a má zde velikost x . Protože jasnosti jsou přímo úměrné osvětlením a osvětlení jsou nepřímě úměrná druhým mocninám vzdáleností, platí

$$\frac{I_p}{I_q} = \frac{q^2}{p^2},$$

takže z Pogsonovy rovnice plyne

$$x - m = 2,5 \log \frac{q^2}{p^2} = 5 \log \frac{q}{p}. \quad (1)$$

Označíme-li y vzdálenost hledaného místa od Slunce, dostaneme pomocí (1) tyto dva vztahy:

$$m_0 - m_1 = 5 \log \frac{y}{d_1}, \quad (2)$$

$$m_0 - m_2 = 5 \log \frac{d_2 - y}{d_2}. \quad (3)$$

Ze soustavy rovnic (2) a (3) vyjde

$$y = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} A,$$

$$m_0 = m_1 + 5 \log \frac{d_2}{d_1 + d_2} A,$$

kde

$$A = 10^{\frac{m_1 - m_2}{5}} = \text{num log} \frac{m_1 - m_2}{5}$$

(symbol „num log“ značí „číslo příslušné udanému logaritmu“). Pro zadané hodnoty vyjde $y = 0,63$ ps; $m_0 = -1,15^m$. Z výsledku pro zadané hodnoty lze usoudit, že obě hvězdy mají téměř stejnou absolutní jasnost, tj. že jsou si velmi podobné.

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl ing. Bohumil Vybíral)

Pružný balónek o hmotnosti m byl ve výšce $h_0 = 0$ naplněn héliem. Za barometrického tlaku b_0 a tlaku hélia p_0 ($p_0 > b_0$) má balónek objem V_0 . Teplota hélia je rovna teplotě okolního vzduchu, hustota hélia při této teplotě a tlaku p_0 je ρ , hustota vzduchu za téže teploty a tlaku b_0 je ρ_0 .

a) Určete počáteční zrychlení a_0 balónku po jeho uvolnění.

b) Vypočítejte výšku h , do které balónek vystoupí,

víte-li, že balónek praskne, když se jeho objem zvětší na velikost αV_0 . Přitom předpokládejte, že objem balónku je nepřímo úměrný rozdílu mezi tlakem plynové náplně a tlakem okolního vzduchu. Dále předpokládejte, že teplota vzduchu se s výškou nemění, takže atmosférický tlak ve výšce h je

$$b = b_0 \exp \left(- \frac{\rho_0}{b_0} gh \right).$$

Tíhové zrychlení g považujte za nezávislé na výšce h .

c) Udejte podmínky řešitelnosti úlohy.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 2,50 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, $b_0 = 730 \text{ torrů}$, $V_0 = 7,50 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $\rho = 0,164 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_0 = 1,17 \text{ kg m}^{-3}$, $\alpha = 5,00$, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení:

a) Hélium v balónku má hmotnost $V_0 \rho$, na balónek působí tíhová síla o velikosti $(m + V_0 \rho)g$, vztlaková síla má velikost $V_0 \rho_0 g$.

Ze vztahu

$$V_0 \rho_0 g - (m + V_0 \rho) g = (m + V_0 \rho) a_0$$

vyjádříme

$$a_0 = g \left(\frac{V_0 \rho_0}{V_0 \rho + m} - 1 \right). \quad (1)$$

b) Podle předpokladu uvedeného v zadání platí, značí-li k činitel úměrnosti,

$$V_0 = \frac{k}{p_0 - b_0} ; \quad \alpha V_0 = \frac{k}{p - b}, \quad (2)$$

kde αV_0 značí objem balónku ve výšce h , v níž má hélium tlak p a okolní vzduch tlak b . Z (2) plyne

$$\alpha = \frac{p_0 - b_0}{p - b} . \quad (3)$$

Pro tlak p platí podle zákona Boyleova

$$p = p_0 \frac{V_0}{\alpha V_0} = \frac{p_0}{\alpha} \quad (4)$$

a pro tlak b vzduchu

$$b = b_0 \exp \left(- \frac{\varrho_0}{b_0} gh \right) . \quad (5)$$

Dosazením z (4) a (5) do (3) dostaneme vztah, z něhož po úpravě vyjádříme

$$h = \frac{b_0}{\varrho_0 g} \cdot \ln \alpha . \quad (6)$$

c) Má-li být $a_0 > 0$, dostáváme z (1) podmínku

$$V_0 \varrho_0 > V_0 \varrho + m . \quad (7)$$

Vztah (6) udává výšku, v níž balónek praskne následkem zvětšení svého objemu. Musí však mít možnost do této výšky vystoupit, tj. vztlaková síla zde nesmí být menší než tíhová síla, která na balónek působí. Tíhová síla má velikost $(m + V_0 \varrho)g$, vztlaková síla pak $\alpha V_0 \varrho_h g$, kde ϱ_h značí hustotu vzduchu ve výšce h . Pro ϱ_h dostaneme s použitím zákona Boyleova

$$\varrho_h = \varrho_0 \frac{b}{b_0} = \varrho_0 \exp \left(- \frac{\varrho_0}{b_0} gh \right) .$$

Dosadíme-li za h z (6), dostaneme po úpravě podmínku

$$V_0 \varrho_0 \geq m + V_0 \varrho ,$$

která je splněna vždy, když je splněna podmínka (7). To

znamená: Počne-li balónek stoupat, stoupá vždy tak vysoko, až praskne. Pro zadané hodnoty vyjde

$$a_0 \doteq 13,3 \text{ m s}^{-2}; \quad h \doteq 13,7 \text{ km}.$$

2. úloha (navrhl Konrád Hofman)

Toroid střední délky $l + d$ má N závitů, jimiž protéká proud I . Vložíme-li do něho feromagnetické jádro se vzduchovou mezerou šířky d , $d \ll l$, má magnetické pole v mezeře intenzitu k -krát větší než magnetické pole v toroidu bez jádra.

Určete:

- relativní permeabilitu μ_r jádra,
- intenzitu H_m a indukci B_m magnetického pole v mezeře a intenzitu H_f magnetického pole v jádru,
- magnetické napětí U_m na mezeře,
- poměr $U_m : E_m$, kde E_m značí magnetomotorické napětí toroidu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $l = 400 \text{ mm}$, $d = 1,00 \text{ mm}$, $N = 800$, $I = 1,25 \text{ A}$, $k = 200$.

Řešení:

Magnetomotorické napětí toroidu je určeno vztahem

$$E_m = NI \quad (1)$$

a pro intenzitu H_0 magnetického pole v toroidu bez jádra platí

$$E_m = H_0(l + d) \approx H_0 l. \quad (2)$$

Pro toroid s jádrem platí

$$E_m = H_f l + H_m d. \quad (3)$$

Magnetická indukce je stejná v mezeře i v jádru (stejný magnetický indukční tok a stejný průřez), tj.

$$B = \mu_0 \mu_r H_f = \mu_0 H_m \quad \text{neboli} \quad H_m = \mu_r H_f. \quad (4)$$

Dále podle zadání

$$H_m = k H_0. \quad (5)$$

a) Ze soustavy rovnic (1), (2), (3), (4), (5) vyjádříme

$$\mu_r = \frac{kl}{l - kd}.$$

b) Z téže soustavy rovnic vyjádříme

$$H_m = k \frac{NI}{l}, \quad (6)$$

$$H_f = NI \frac{l - kd}{l^2}$$

a z definice

$$B_m = \mu_0 k \frac{NI}{l}. \quad (7)$$

c) S použitím (6) určíme

$$U_m = H_m d = kNI \frac{d}{l}. \quad (8)$$

d) S použitím (7) a (1) dostaneme

$$U_m : E_m = kd : l.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $\mu_r = 400$, $H_m = 5,00 \cdot 10^5 \text{ A m}^{-1}$, $B_m = 0,630 \text{ T}$, $H_f = 1,25 \cdot 10^3 \text{ A m}^{-1}$, $U_m = 500 \text{ A}$, $U_m : E_m = 1 : 2$.

3. úloha (navrhol dr. Ladislav Thern)

Rezistor a kondenzátor s kapacitou C sú spojené v sérii a pripojené na zdroj striedavého napätia o amplitúde

U_0 a kmitočet f . Napätia na kondenzátore i na rezistore sú rovnako veľké a sú pripojené priamo na platne vychyľovacej sústavy obrazovky osciloskopu. Výslednica intenzít oboch elektrických polí spôsobuje pohyb elektrónového lúča, ktorý kreslí na tienidlo dráhu bodu, v ktorom lúč na tienidlo dopadá.

a) Určte prúd, ktorý prechádza obvodom, a napätia na jeho prvkoch.

b) Určte dráhu, rýchlosť a zrýchlenie stopy elektrónového lúča na tienidle ako funkcie času a tvar dráhy, ak viete, že výchylka lúča je priamo úmerná vychyľovaciemu napätiu a že napätie U spôsobuje výchylku dĺžky s stopy elektrónového lúča na tienidle. Riešte metódou použitia točivých vektorov. Po všeobecnom riešení počítajte pre hodnoty $C = 10,0 \mu\text{F}$; $U_0 = 107 \text{ V}$, $f = 50,0 \text{ Hz}$, $U = 50,0 \text{ V}$, $s = 25,0 \text{ mm}$.

Poznámka: Predpokladajte, že vychyľovaciu sústavu obrazovky tvoria 4 zhodné obdĺžnikové platne, ktorých stredy sú rovnako vzdialené od roviny tienidla. Platne sú usporiadané v rovnakej vzdialenosti okolo nevychýleného — na tienidlo kolmo dopadajúceho — elektrónového lúča tak, že ich dlhšie strany sú rovnobežné s lúčom. Spojnice stredov protilahlých platní sú vzájomne kolmé a zároveň kolmé na platne, ktorých stredy spájajú.

Riešenie:

Označíme R odpor rezistora, X_C reaktanciu kondenzátora, U_{R0} amplitúdu napätia na rezistore, U_{C0} amplitúdu napätia na kondenzátore, E_0 amplitúdu intenzity elektrického poľa medzi každou dvojicou platní vychyľovacej sústavy obrazovky.

a) Podľa zadania $U_{R0} = U_{C0}$, takže aj $R = X_C = \frac{1}{\omega C}$. Sériová kombinácia rezistora a kondenzátora má impedanciu

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \frac{\sqrt{2}}{\omega C},$$

kde $\omega = 2\pi f$ znamená uhlový kmitočet. Prúd má amplitúdu

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0 \omega C}{\sqrt{2}}.$$

Pre zadané hodnoty: $I_0 = 0,238 \text{ A}$.

b) Napätia na rezistore a na kondenzátore majú rovnaké amplitúdy $U_{R0} = U_{C0} = I_0 X_C = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ a sú navzájom

fázovo posunuté o $\frac{\pi}{2}$. Vhodným pripojením na vychyľovacie platne obrazovky a vhodnou voľbou okamihu $t = 0$ dosiahneme to, že intenzity polí vychyľujúcich v smeroch navzájom kolmých osí x, y sú

$$E_x = E_0 \cos \omega t; \quad E_y = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Teraz použijeme točivé vektory:

$$\text{os } x (\alpha = 0, \varphi = 0): E_x = E_0 \cos \omega t = \frac{1}{2} (\vec{E}_0 + \vec{E}_0),$$

$$\text{os } y \left(\alpha = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2} \right):$$

$$E_y = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} (\vec{E}_0 + \vec{E}_{-\pi}).$$

Výsledná intenzita $\mathbf{E}$ elektrického poľa je charakterizovaná štyrmi točivými vektormi, pričom $\vec{E}_0$ a $\vec{E}_{-\pi}$ sa navzájom rušia, takže

$$\mathbf{E} = \vec{\mathbf{E}}_0.$$

Ide o točivé elektrické pole s intenzitou $\vec{\mathbf{E}}_0$, tj. pole sa rovnomerne otáča v kladnom zmysle s uhlovou rýchlosťou ω . Pole má intenzitu konštantnej veľkosti $E_0 = |\vec{\mathbf{E}}_0|$, takže pôsobí výchylku stopy elektrónového zväzku, ktorá má konštantnú veľkosť r , ale $\vec{\mathbf{r}}$ je točivý vektor vždy toho istého smeru ako $\vec{\mathbf{E}}_0$ a opačnej orientácie vzhľadom na záporný náboj elektrónov. Stopa elektrónového zväzku na tienidle je teda kružnica o polomere r , pre ktorý platí

$$r : s = \frac{U_0}{\sqrt{2}} : U,$$

alebo

$$r = \frac{s}{\sqrt{2}} \cdot \frac{U_0}{U}.$$

Pre dráhu k platí $k = r\omega t$, ak položíme $k = 0$ pre $t = 0$. Rýchlosť má konštantnú veľkosť $v = r\omega$ a je vždy $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$. Zrýchlenie má konštantnú veľkosť

$$a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = v\omega$$

a vektor $\mathbf{a}$ smeruje vždy k stredu kruhovej dráhy. Pre uhlovú dráhu β , uhlovú rýchlosť ω a uhlové zrýchlenie ε platí

$$\beta = \omega t; \quad \omega = \text{konšt.}, \quad \varepsilon = 0.$$

Z týchto výsledkov je zrejmé, že dráha a uhlová dráha sú lineárnymi funkciami času (bez absolútneho člena, t.j. priama úmernosť).

Obvodová rýchlosť má konštantnú veľkosť, ale jej smer sa mení s uhlovou rýchlosťou ω . To isté platí o zrýchlení.

Uhlová rýchlosť je konštantná, uhlové zrýchlenie je nulové. Pre zadané hodnoty vychádza: $r \doteq 37,8 \text{ mm}$, $\omega \doteq 314 \text{ s}^{-1}$, $v \doteq 11,9 \text{ m s}^{-1}$, $a \doteq 3,73 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-2}$.

4. úloha (navrhol RNDr. Arpád Kecskés)

Nad vodorovnou rovinou vo výške h je lampa o svietivosti I .

a) Určte bod A roviny, v ktorom je osvetlenie najväčšie, a stanovte toto osvetlenie $E_{\max}$.

b) Určte funkciu, ktorá vyjadruje osvetlenie E roviny v bode B v závislosti od vzdialenosti x bodu B od bodu A .

c) Určte množinu bodov, v ktorých osvetlenie roviny je p % osvetlenia v bode A .

Po všeobecnom riešení vykonajte číselný výpočet pre hodnoty $h = 2,0 \text{ m}$, $I = 300 \text{ cd}$, $p = 10, 20, \dots, 60$ % . Výsledky znázornite graficky.

Riešenie:

Osvetlenie E nejakej plochy v niektorom jej bode B , ktorý má od zdroja svetla vzdialenosť d , je dané vzťahom

$$E = \frac{I}{d^2} \cos \alpha, \quad (1)$$

kde I značí svietivosť zdroja v smere k bodu B , α (ostrý) uhol, ktorý zvierá svetelný lúč s kolmicou vztýčenou v bode B na uvažovanú plochu.

a) Najväčšie osvetlenie je v bode A , ktorý je päťou kolmice spustenej zo (bodového) zdroja na uvažovanú rovinu, lebo v tomto bode má $\cos \alpha = \cos 0^\circ = 1$ najväčšiu hodnotu a vzdialenosť d hodnotu najmenšiu, takže skutočne, podľa (1) je v tomto bode najväčšie osvetlenie

$$E_{\max} = \frac{I}{h^2} . \quad (2)$$

Pre dané hodnoty vychádza $E_{\max} = 75 \text{ lx}$.

b) Body A , B na vodorovnej rovine a bodový zdroj L tvoria vrcholy pravouhlého trojuholníka, takže

$$d^2 = x^2 + h^2; \quad \cos \alpha = \frac{h}{d} . \quad (3)$$

Dosadením (3) do (1) dostaneme

$$E_B = f(x) = I \cdot h \frac{1}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} . \quad (4)$$

c) Hľadáme bod B vo vzdialenosti x_p od bodu A , v ktorom je osvetlenie $E_B = \frac{p}{100} E_{\max}$. S použitím (2) a (4) dostaneme vzťah, z ktorého vyjadríme

$$x_p = h \left[\left(\frac{100}{p} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (5)$$

Z dôvodov súmernosti hľadanou množinou je kružnica so stredom v bode A a s polomerom x_p daným vzťahom (5). Pre grafické znázornenie sú tieto možnosti:

1. Narysovať 6 sústredných kružníc so stredom v bode A a s polomerami priamo úmernými dĺžkam x_p ; ku každej pripísať príslušné percento maximálneho osvetlenia a prípadne aj osvetlenie E_B .

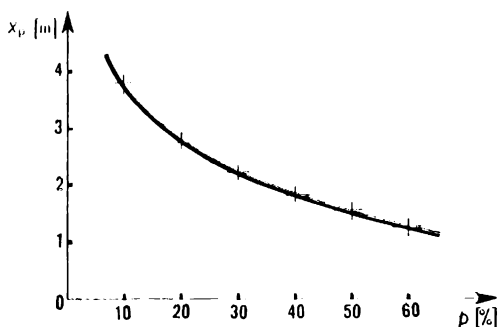
2. Narysovať polopriamku z bodu A a vyznačiť na nej body vo vzdialenostiach priamo úmerných dĺžkam x_p , tieto body okótovať percentami alebo hodnotami osvetlenia.

3. Znázorniť funkciu $x_p = f(p)$ alebo $x_p = f(E_B)$.

Tabuľka číselných hodnôt:

p [%]	10	20	30	40	50	60
x_p [m]	3,82	2,77	2,22	1,84	1,53	1,27
E_B [lx]	7,5	15,0	22,5	30,0	37,5	45,0

Graf funkcie $x_p = f(p)$ je na obr. 10.



Obr. 10

c) Třetí kolo soutěže

1. úloha (navrhol RNDr. Arpád Kecskés)

Ulica šírky d je osvetlená lampami o rovnakej svietivosti I , ktoré sú zavesené v rovnakých vzájomných vzdialenostiach vo výške v nad strednou čiarou ulice.

a) Na spojnici dvoch susedných lúč (považujte ich za bodové svetelné zdroje rovnomerne svietiace všetkými

smermi) určte bod, v ktorom je osvetlenie minimálne.
 b) Podľa výsledku posúďte, ktoré miesta dlažby ulice sú najmenej osvetlené medzi dvoma susednými lampami. Svoje tvrdenie odôvodnite a pripojte náčrt.

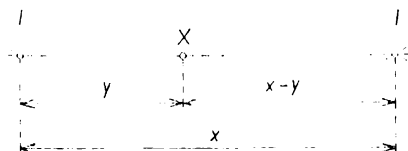
c) Určte, v akej vzájomnej vzdialenosti x musia byť zavesené dve susedné lampy, aby najmenej osvetlené miesta dostávali od týchto dvoch lúčov osvetlenie $E_{\min}$. Riešte najprv obecné, potom pre hodnoty $I = 1000 \text{ cd}$, $v = 8,0 \text{ m}$, $d = 14 \text{ m}$, $E_{\min} = 2,4 \text{ lx}$.

d) Určte, o koľko percent je toto osvetlenie väčšie, ak vezmeme do úvahy ešte ďalšie dve lampy v poradí najbližšie.

Riešte len pre zadané hodnoty a pre vypočítanú hodnotu x .

Riešenie:

a) Náčrt situácie je na obr. 11.



Obr. 11

V bode X na spojnici je osvetlenie

$$E = I \cdot \left[\frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x - y)^2} \right],$$

kde x označuje vzdialenosť medzi susednými bodovými zdrojmi svetla. Osvetlenie E je v tomto prípade funkciou jedinej premennej y .

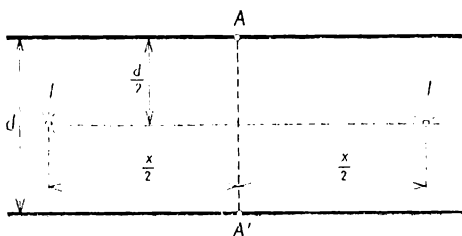
Táto funkcia má miestne minimum pre hodnotu $y = y_m$,

ktorú nájdeme anulovaním prvej derivácie. Lhkým výpočtom dostaneme výsledok

$$y_m = \frac{1}{2}x,$$

t.j. najmenšie osvetlenie je v bode rovnako vzdialenom od obidvoch lmp.

b) Situácia je znázornená na obr. 12.



Obr. 12

Najmenej sú osvetlené miesta A , A' na okrajoch ulice, ktoré sú rovnako vzdialené od obidvoch lmp. Vyplýva to z výsledku časti a) a z toho, že tieto dve miesta majú v danom prípade najväčšie vzdialenosti od lmp.

c) Bod A (alebo A') má od každej z obidvoch najbližších lmp vzdialenosť

$$r = \sqrt{v^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \quad (1)$$

a svetelné lúče tam dopadajúce zvierajú so zvislým smerom uhol α , pre ktorý platí

$$\cos \alpha = \frac{v}{r}.$$

V bode A má byť osvetlenie

$$E_{\min} = \frac{2 I \cos \alpha}{r^2} = \frac{2 I v}{r^3} . \quad (2)$$

Po dosadení z (1) dostaneme vzťah, z ktorého vyjadríme

$$x = \left[4 \left(\frac{2 I v}{E_{\min}} \right)^{\frac{2}{3}} - d^2 - 4 v^2 \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Pre zadané hodnoty vypočítame: $x \doteq 31$ m.

d) Pre osvetlenie E_m bodov A, A' spôsobené dvoma ďalšími — v poradí najbližšími — lampami platí obdobne vzťah (2), ale vo vzťahu (1) treba dĺžku x nahradiť dĺžkou $3x$. Pre zadané hodnoty a pre $x = 31$ m dostaneme $E_m \doteq 0,15$ lx, čo robí asi 6 % hodnoty $E_{\min} = 2,4$ lx.

2. úloha (navrhol dr. Ladislav Thern)

Pravidelný päťuholník so stredom S má vrcholy A, B, C, D, E . Päť rovnakých valcových cievok umiestime tak, aby boli rovnako vzdialené od bodu S a ich osi splývali so spojnicami SA, SB, SC, SD, SE . Týmito cievkami tečú harmonické striedavé prúdy s rovnakými amplitúdami a s rovnakým uhlovým kmitočtom ω . Cievkou v polohe SA tečie prúd $i = I_0 \cos \omega t$, prúd cievkou v polohe SB

je proti nemu oneskorený vo fáze o uhol $\varphi = \frac{2}{5} \pi$, prúd

cievkou v polohe SC o uhol 2φ atď. Každá cievka vytvára magnetické pole, ktorého indukcia má v bode S amplitúdu B_0 .

S použitím točivých vektorov určte, akú magnetickú indukciu B vytvára v bode S sústava všetkých piatich cievok.

Riešenie:

Prvá cievka v polohe SA vytvára v bode S magnetickú indukciu $B_1 = B_0 \cos \omega t$, ktorú môžeme nahradiť dvojicou otáčajúcich sa vektorov:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2} (\overleftarrow{\mathbf{B}}_0 + \overrightarrow{\mathbf{B}}_0).$$

Obdobne pre ďalšie cievky:

Druhá cievka ($\varphi = -\frac{2}{5}\pi$, $\alpha = \frac{2}{5}\pi$):

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{2} (\overleftarrow{\mathbf{B}}_0 + \overrightarrow{\mathbf{B}}_{-\frac{4}{5}\pi}) = \frac{1}{2} (\overleftarrow{\mathbf{B}}_0 + \overrightarrow{\mathbf{B}}_{\frac{6}{5}\pi})$$

a pre tretiu, štvrtú a piatu cievku:

$$\mathbf{B}_3 = \frac{1}{2} (\overleftarrow{\mathbf{B}}_0 + \overrightarrow{\mathbf{B}}_{-\frac{6}{5}\pi}) = \frac{1}{2} (\overleftarrow{\mathbf{B}}_0 + \overrightarrow{\mathbf{B}}_{\frac{2}{5}\pi}),$$

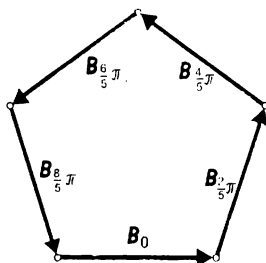
$$\mathbf{B}_4 = \frac{1}{2} (\overleftarrow{\mathbf{B}}_0 + \overrightarrow{\mathbf{B}}_{-\frac{8}{5}\pi}) = \frac{1}{2} (\overleftarrow{\mathbf{B}}_0 + \overrightarrow{\mathbf{B}}_{\frac{8}{5}\pi}),$$

$$\mathbf{B}_5 = \frac{1}{2} (\overleftarrow{\mathbf{B}}_0 + \overrightarrow{\mathbf{B}}_{-\frac{4}{5}\pi}) = \frac{1}{2} (\overleftarrow{\mathbf{B}}_0 + \overrightarrow{\mathbf{B}}_{\frac{4}{5}\pi}).$$

Sústava všetkých piatich cievok budí teda v bode S magnetickú indukciu

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} (5\overleftarrow{\mathbf{B}}_0 + \overrightarrow{\mathbf{B}}_0 + \overrightarrow{\mathbf{B}}_{\frac{2}{5}\pi} + \overrightarrow{\mathbf{B}}_{\frac{4}{5}\pi} + \overrightarrow{\mathbf{B}}_{\frac{6}{5}\pi} + \overrightarrow{\mathbf{B}}_{\frac{8}{5}\pi}).$$

Vektory, ktoré sa otáčajú vpravo, môžeme sčítať spôsobom znázorneným na obr. 13. Dostaneme uzavretý obrazec — pravidelný päťuholník, čo znamená, že súčet uvedených vektorov je nulový vektor.



Obr. 13

Tak dostávame výsledok:

$$\mathbf{B} = \frac{5}{2} \overleftarrow{\mathbf{B}_0}.$$

Podľa toho vektor $\mathbf{B}$ má stálu veľkosť $\frac{5}{2} B_0$ a otáča sa vľavo.

3. úloha (navrhol dr. Ladislav Thern)

Jedna tretina prstencového jadra toroidu je z liatiny, dve tretiny z oceľoliatiny. Jadro má prierez S a strednú dĺžku l . Cievkou navinutou na jadro tečie prúd I , ktorý vytvára v toroide magnetický indukčný tok Φ . Závislosť intenzity H magnetického poľa od indukcie B je daná pre oceľoliatinu približným vzorcom

$$H = 1,0 \cdot 10^2 \cdot (5,0 B^2 - 3,0 B + 2,0) \quad [\text{A m}^{-1}; \text{T}],$$

ktorý platí s vyhovujúcou presnosťou (na dve platné číslice) v intervale, ktorý budete pre svoje výpočty potrebovať. (V tomto vzorci znamenajú písmená H a B len číselné hodnoty — a len pre uvedené jednotky — prí-

slušných veličín.) Pre liatinu je uvedená tabuľka, z ktorej určte intenzitu H odčítaním z grafu, ktorý zostrojte.

$H \text{ [A m}^{-1}\text{]}$	800	1400	2400	4200
$B \text{ [T]}$	0,500	0,600	0,700	0,800

a) Určte intenzity H_1 , H_2 magnetického poľa v liatine a oceľoliatine, magnetické napätia U_{m1} , U_{m2} na príslušných častiach jadra toroidu a hodnoty μ_{r1} , μ_{r2} relatívnej permeability liatiny a oceľoliatiny.

b) Určte počet N závitov cievky navinutej na jadro.

c) Na zhotovenie cievky boli k dispozícii izolované medené drôty o rozličných priemeroch D . Rozhodnite, aký priemer drôtu možno zvoliť, a posúďte, či sa cievka nebude nadmerne zahrievať, k čomu by došlo, keby hustota prúdu prekročila hodnotu $j_{\max}$. (Hrúbku izolačného povlaku na drôtoch zanedbávame.)

d) Jadro toroidu rozšírime o vzduchovú medzeru šírky d a zariadime, aby indukčný tok mal opäť pôvodnú hodnotu Φ . Uveďte veličiny, ktoré sa nezmenia a určte zmeny ostatných veličín.

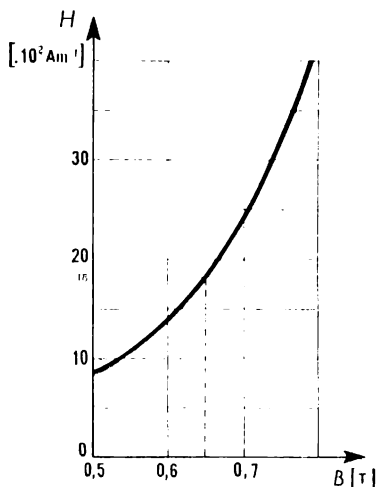
Po obecnom riešení každej časti úlohy počítajte vždy pre hodnoty $S = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, $l = 0,750 \text{ m}$, $I = 0,465 \text{ A}$, $\Phi = 0,812 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$, permeabilita vákua $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$, $d = 1,0 \text{ mm}$, $D = 0,50; 0,55; 0,60; \dots; 0,80 \text{ mm}$, $j_{\max} = 3,5 \text{ A mm}^{-2}$.

Riešenie:

a) Pre veľkosť B magnetickej indukcie v toroide platí

$$B = \frac{\Phi}{S}.$$

Intenzity H_1 , H_2 magnetického poľa v oboch častiach jadra určíme jednak zo zadaného vzorca výpočtom, jednak pomocou grafu na obr. 14, ktorý sme zostrojili podľa tabuľky.



Obr. 14

Zodpovedajúce magnetické napätia sú

$$U_{m1} = \frac{1}{3} H_1 l; \quad U_{m2} = \frac{2}{3} H_2 l \quad (1)$$

a relatívne permeability

$$\mu_{r1} = \frac{B}{\mu_0 H_1}; \quad \mu_{r2} = \frac{B}{\mu_0 H_2} \quad (2)$$

Pre zadané hodnoty dostaneme $B \doteq 0,65 \text{ T}$, z grafu vyčítame $H_1 \doteq 1800 \text{ A m}^{-1}$, zo vzorca vypočítame $H_2 \doteq 220 \text{ A m}^{-1}$. Dosadením do (1) vypočítame $U_{m1} \doteq 450 \text{ A}$, $U_{m2} \doteq 110 \text{ A}$. Dosadením do (2) dostaneme $\mu_{r1} \doteq 290$, $\mu_{r2} = 2400$.

b) Pre magnetomotorické napätie platí
 $E_m = U_{m1} + U_{m2}$, alebo s použitím (1):

$$E_m = \frac{1}{3} (H_1 + 2H_2) l.$$

Pretože platí tiež $E_m = NI$, môžeme si vyjadriť N :

$$N = \frac{l}{3I} (H_1 + 2H_2).$$

Jednak zo zadaných a jednak zo skôr vypočítaných hodnôt dostaneme:

$$N \doteq 1200.$$

c) Potrebný počet závitov musí vojsť do jednej vrstvy, čo znamená, že $ND \leq l$, alebo $D \leq \frac{l}{N}$. Zo známych hodnôt l a N dostaneme $D \leq 0,62 \text{ mm}$.

Prúd v drôte, z ktorého je vinutie zhotovené, má hustotu

$$j = \frac{4I}{\pi D^2}.$$

Ak si zvolíme $D = 0,60 \text{ mm}$, vychádza $j \doteq 1,6 \text{ A mm}^{-2}$, takže $j < j_{\max}$. Pri voľbe $D = 0,50 \text{ mm}$ vyšlo by pre hustotu prúdu približne $2,4 \text{ A mm}^{-2}$, takže najväčšia prípustná hodnota prúdu by nebola prekročená ani v tomto prípade. V praxi si zvolíme $D = 0,60 \text{ mm}$, aby závit mohli byť vinuté čo najhustejšie a vinutie sa zahrievalo čo najmenej.

d) Nemenia sa veličiny Φ , S , B , N , teda ani H_1 , H_2 , U_{m1} , U_{m2} , μ_{r1} , μ_{r2} .

Stredná dĺžka sa zmení na $l + d$ a na vzduchovej medzere d pribudne magnetické napätie U_{m3} , pre ktoré platí

$$U_{m3} = \frac{B}{\mu_0} \cdot d = \frac{\Phi d}{\mu_0 S}.$$

Pre zadané hodnoty vychádza $U_{m3} \doteq 520$ A.

Magnetomotorické napätie sa zväčší na hodnotu

$$E_m^* = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3}.$$

Zo zadaných a skôr vypočítaných hodnôt dostaneme

$$E_m^* \doteq 1080 \text{ A}.$$

Prúd v cievke sa zväčší na hodnotu

$$I^* = \frac{E_m^*}{N}$$

čiže približne bude $I \doteq 0,90$ A.

Hustota prúdu sa zväčší na hodnotu $j^* \doteq 3,2 \text{ A mm}^{-2}$ pri voľbe $D = 0,60 \text{ mm}$ a teda aj teraz je $j^* < j_{\max}$. (Pri voľbe $D = 0,55 \text{ mm}$ by bola hustota prúdu už $j^* \doteq 3,8 \text{ A mm}^{-2} > j_{\max}$, čiže cievka by sa nadmerne zahrievala.)

4. úloha (navrhol dr. Ladislav Thern)

Presné analytické rovníoramenné váhy boli upravené tak, že ľavá miska bola nahradená obdĺžnikovým kovovým rámečkom o rozmeroch a , b ($a < b$). Kratšie strany rámečka boli uvedené do polohy vodorovnej, dlhšie do zvislej. Horná kratšia strana rámečka bola izolujúcou spojkou pripevnená na háčik ľavého vahadla a bola pre-

rušená, aby vodičmi pripojenými k voľným koncom mohol byť do rámčeka zavedený jednosmerný prúd — označme ho I_r .

K dolnej kratšej strane rámčeka boli z obidvoch strán čo najbližšie postavené dve rovnaké valcové cievky so spoločnou geometrickou osou vo vodorovnej polohe tak, aby táto os prechádzala stredom strany rámčeka. Každá z obidvoch cievok mala priemer d ($d < a$), dĺžku l a počet závitov N . Cievky boli spojené do série a spoločný prúd I_s nimi prechádzajúci vytvoril magnetické polia s intenzitami orientovanými súhlasne.

Váhy boli uvedené do rovnovážnej polohy najprv bez prúdov. Po zapnutí prúdov I_r , I_s sa rovnováha porušila a k jej obnoveniu bolo treba pridať na pravú misku váh závažie o hmotnosti m .

a) Nájdite obecný vzťah platný pre veličiny I_r , I_s , m .

b) Keď pre prúdy platí $I_r = I_s = I$, pri ktorej hodnote I , prúdu I je $m = m_0$ a pri ktorej hodnote m , hmotnosti m závažia je $I = I_0$? (m_0 , I_0 sú dané hodnoty).

Riešte najprv obecné, potom pre hodnoty $d = 10,0$ cm, $l = 40,0$ cm, $N = 640$, $m_0 = 50$ mg, $I_0 = 1,0$ A.

c) V tej istej súradnicovej sústave nakreslite grafy funkcie $I_r = f(I_s)$ pre $m = 10, 40, 70, 100$ mg a pre zadané hodnoty d , l , N .

d) Pomocou týchto grafov riešte graficky časť b) úlohy pre zadané hodnoty. Takto získané výsledky porovnajte s vypočítanými výsledkami.

Poznámky:

1. Pre pomer $l : d$ predpokladáme hodnotu takú veľkú, že cievky môžeme považovať za „nekonečne dlhé“ solenoidy.

2. K hrúbke vodiča, z ktorého je rámček zhotovený, neprizeráme.

Riešenie:

a) Intenzita magnetického poľa medzi cievkami má veľkosť

$$H = \frac{NI_s}{l}.$$

Na kratšiu stranu rámčeka vloženú do magnetického poľa pôsobí sila o veľkosti

$$F = BI_r d,$$

kde B znamená veľkosť indukcie magnetického poľa medzi cievkami. „Účinná dĺžka“ kratšej strany rámčeka (tj. dĺžka vodiča s prúdom I_r , na ktorý pôsobí magnetické pole silou F) je rovná priemeru solenoidu. Závažie musí mať tiaž o veľkosti $G = F$; z tejto podmienky dostaneme po úprave

$$I_r I_s = \frac{lg}{\mu_0 N d} \cdot m = Km, \quad (1)$$

kde je μ_0 permeabilita vákua, g tiažové zrýchlenie.

Pre zadané hodnoty dostaneme

$$K \doteq 4,88 \cdot 10^4 \text{ A}^2 \text{ kg}^{-1}.$$

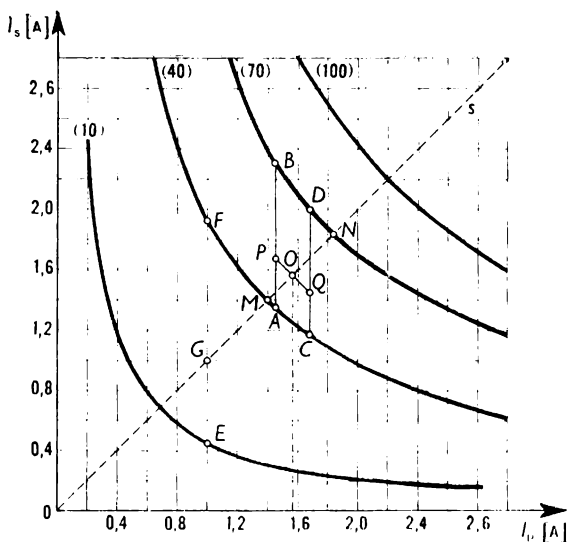
b) Z (1) vyjde pre uvažovaný prípad

$$I_1 = \sqrt{K \cdot m_0}; \quad m_1 = \frac{I_0^2}{K}$$

a pre zadané hodnoty: $I_1 \doteq 1,56 \text{ A}$, $m_1 \doteq 20,5 \text{ mg}$.

c) Ide o kladné vetvy štyroch hyperbol, ktorých rovnice sú dané vzťahom (1) pre zadané hodnoty. Graficky sú znázornené na obr. 15.

d) Postupy sú vyznačené tiež na obr. 15. Zakreslíme symetrálu s prvého kvadrantu (predpokladáme, že pre osi I_r a I_s sme použili rovnakú mierku). Pre jej body platí $I_r = I_s$. Medzi priesečníkmi M a N tejto symetrály s krivkami (40) a (70) pre $m = 40 \text{ mg}$ a $m = 70 \text{ mg}$ odhadneme polohu bodu, ktorý zodpovedá parametru $m_0 = 50 \text{ mg}$.



Obr. 15

Vedíme rovnobežky p , q so zvislou osou, pričom priamka p je naľavo a priamka q napravo od odhadnutého bodu. Priamka p pretína krivky (40) a (70) v bodoch A , B , priamka q v bodoch C , D .

Nezakreslená krivka (50) pre $m = 50$ mg pretína priamky p , q v bodoch P , Q , pre ktoré platí

$$PA = \frac{1}{3} AB, \quad QC = \frac{1}{3} CD,$$

lebo dĺžky v smere osi I_s pri $I_r = \text{konšt.}$ sú priamo úmerné hodnotám parametra m . Spojnica PQ pretína symetrálu s v bode O , ktorého súradnice určia hľadanú hodnotu prúdu I_1 pre $m = 50$ mg tým presnejšie, čím kratšia je úsečka

PQ , tj. čím menšia je vzdialenosť rovnobežiek p, q . Úsečka PQ je totiž tetivou oblúka PQ nezakreslenej hyperboly (50) a aproximuje ho.

Namiesto rovnobežiek s osou I_s mohli sme viesť rovnobežky s osou I_r a postupovať celkom obdobne.

Vedme potom rovnobežku s osou I_s , pre body ktorej platí $I_r = I_0 = 1,0$ A. Jej priesečníky s krivkami (10) a (40) pre $m = 10$ mg a $m = 40$ mg označme E a F , priesečník so symetrálou s označme G . Z dôvodov predtým uvedených platí teraz

$$m_1 = 10 \text{ mg} + \frac{EG}{EF} \cdot 30 \text{ mg},$$

kde EG a EF znamenajú dĺžky príslušných úsečiek (ich pomer určíme z grafu meraní). (Obdobne môžeme viesť aj rovnobežku s osou I_r pre $I_s = I_0 = 1,0$ A a postupovať obdobne.)

5. úloha — experimentálna (navrhol Ladislav Morvay)

Meranie charakteristík Zenerovej diódy

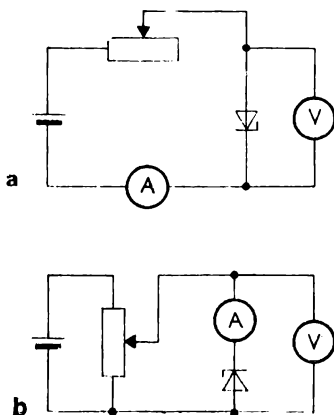
Pomôcky: Zenerova dióda, výpis z katalógu polovodičových prvkov, zdroj jednosmerného napätia, reostat, ampér-meter, voltmeter, termoska s kvapalným dusíkom.

Cieľ merania:

1. Namerať voltampérovú charakteristiku Zenerovej diódy pri teplote laboratória a pri teplote kvapalného dusíka (-190°C).
2. Namerané charakteristiky porovnať a rozdiely fyzikálne zdôvodniť.
3. Z charakteristík v závernom smere graficky určiť dynamický odpor Zenerovej diódy, ktorý je definovaný vzťahom $R_d = \frac{dU}{dI}$, pri napätiach $U < U_z$, kde U_z je Zenerovo napätie.

Príprava merania:

1. Vypíšte z katalógu charakteristické údaje diódy, ktorú máte k dispozícii.
2. Zostavte meraný obvod; zo schém na obr. 16a, 16b vyberte zapojenie vhodné pre svoje meranie a voľbu schémy zdôvodnite.



Obr. 16

Postup pri meraní:

1. Diódu pripojte do obvodu v priepustnom smere. Nastavujte rôzne hodnoty napätia U_i a merajte im odpovedajúce prúdy I_i . Napätie zvyšujte od nuly a kontrolujte, či nie je prekročený najväčší dovolený prúd v priepustnom smere. Namerajte aspoň desať dvojíc (U_i , I_i) a zapíšte ich do tabuľky.
2. Diódu potom pripojte v smere závernom a podobne ako v bode 1. merajte voltampérovú charakteristiku v tomto smere. Pri zvyšovaní napätia postupujte opatrne, aby ste

pri hodnote Zenerového napätia U_z neprekročili dovolený Zenerov prúd I_z . Dvojice hodnôt (U_i, I_i) opäť zapíšte do tabuľky.

3. Po ukončení merania pri laboratórnej teplote zachyťte diódu medzi svorky zátky termosky a potom ju vložte so zátkou do termosky naplnenej kvapalným dusíkom.

4. Odmerajte teraz, rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch, voltampérovú charakteristiku diódy v priepustnom i v závernom smere.

Spracovanie výsledkov merania:

1. Na milimetrovom papieri zobrazte body (U_i, I_i) vo vhodne zvolenom súradnicovom systéme (U, I) . Týmito bodmi preložte spojitú, plynulú čiaru.

Obidve voltampérové charakteristiky nakreslite do toho istého obrázku.

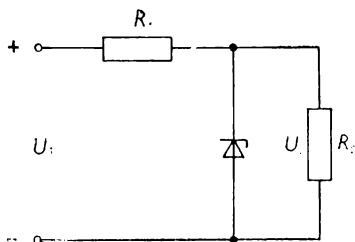
2. Graficky určte dynamicky odpor diódy pri troch rôznych hodnotách napätia. Porovnajte hodnoty odporu, ktoré prislúchajú určitému napätiu, pri laboratórnej teplote a pri teplote kvapalného dusíka.

3. Fyzikálne odôvodnite rozdiely vo výsledkoch merania pre obidve rôzne teploty.

4. Na obr. 17 je schematicky znázornená stabilizácia napätia pomocou Zenerovej diódy — na spotrebiči o odpore R_2 sa udržiava takmer stále napätie, i keď sa (v určitých medziach) mení napätie U napájacieho zdroja a odber prúdu spotrebičom R_2 . Z výsledkov merania vysvetlite princíp činnosti uvedeného stabilizátora a určte hodnotu napätia, ktoré je možné stabilizovať diódou použitou pri vašom meraní.

Riešenie:

1. Charakteristické údaje meranej diódy KZ 704:
 $U_z = 7 \div 9,2 \text{ V}$. $I_{AK} = 300 \text{ mA}$ pre $U_{AK} = 1,3 \text{ V}$,



Obr. 17

$K_t = 5 \cdot 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$, $I_{KA} \leq 50 \mu\text{A}$ pre $U_{KA} = 1 \text{ V}$.
Medzné hodnoty: $I_z = 320 \text{ mA}$, $P_d = 2,6 \text{ W}$.

2. Pri určovaní charakteristík diódy v priepustnom smere sme použili zapojenie podľa obr. 16a, pretože v tomto prípade je odpor diódy porovnateľný s vnútorným odporom ampérmetra a je veľmi malý vzhľadom k vnútornému odporu voltmetra. Prúd pretekajúci voltmetrom je zanedbateľne malý oproti prúdu, ktorý prechádza diódou.

Pri meraní charakteristík v závernom smere sme použili zapojenie podľa obr. 16b, pretože v tomto prípade je odpor diódy viacnásobne väčší než vnútorný odpor ampérmetra. Napätie, ktoré sa vytvorí na ampérmetri, je veľmi malé vzhľadom k napätiu na dióde a preto ho môžeme zanedbať. Vnútorný odpor voltmetra je v tomto prípade porovnateľný s odporom diódy a preto je nutné merať len prúd prechádzajúci vetvou s diódou.

3. Namerané hodnoty dvojíc (U_i , I_i) pre určenie volt-ampérových charakteristík Zenerovej diódy v priepustnom a závernom smere, pri laboratórnej teplote a pri teplote kvapalného dusíka sú zostavené do tabuľky 12.

4. Grafy voltampérových charakteristík Zenerovej diódy

Tabulka 12

Při teplotě laboratoře				Při teplotě kapalného dusíku			
Směr							
propustný		závěrný		propustný		závěrný	
U_{AK} [V]	I_{AK} [mA]	U_{KA} [V]	I_{KA} [mA]	U_{AK} [V]	I_{AK} [mA]	U_{KA} [V]	I_{KA} [mA]
0,40	0,015	1,0	0,00	0,70	0,020	1,0	0,035
0,50	0,055	2,0	0,005	0,80	0,045	2,0	0,155
0,55	0,170	3,0	0,015	0,90	0,235	3,0	0,355
0,60	0,840	4,0	0,033	1,00	7,00	4,0	0,520
0,65	3,500	4,5	0,320	1,10	19,0	4,5	0,90
0,70	13,20	5,0	0,880			5,0	2,20
0,75	49,00	5,5	4,350			5,5	19,60
		6,0	32,0			6,0	82,0
		6,5	105,0			6,5	495
		7,0	350,0				

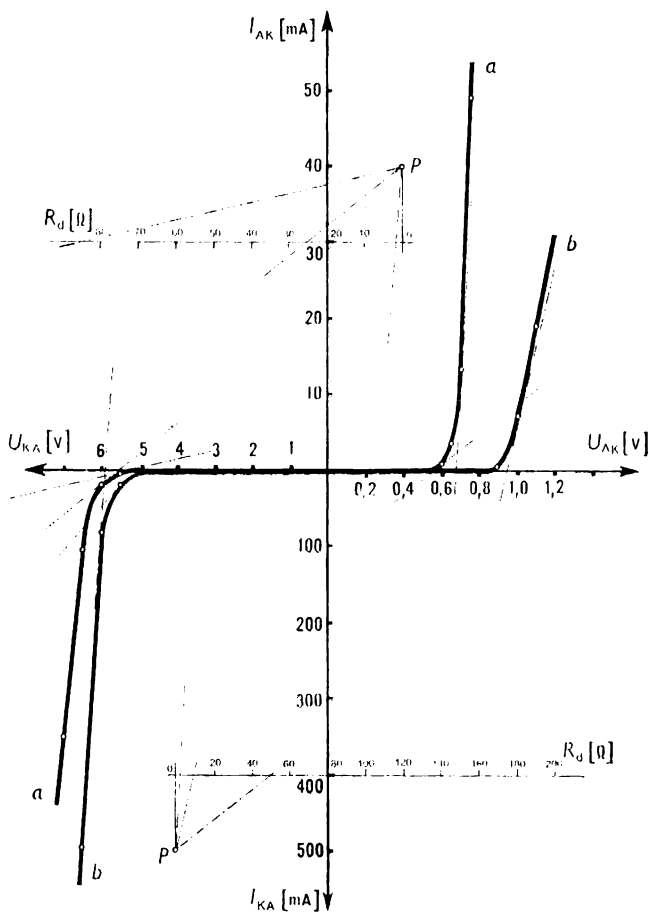
sú na obr. 18. Krivka *a* zodpovedá laboratórnej teplote, $t \doteq 20^{\circ}\text{C}$; a krivka *b* teplote kvapalného dusíka.

5. Určenie dynamického odporu diódy grafickou deriváciou:

Dynamický odpor diódy je definovaný vzťahom

$$\frac{1}{R_d} = \frac{dI}{dU}.$$

Dynamický odpor diódy pri určitom napätí U_0 určíme ako prevrátenú hodnotu smernice dotyčnice krivky, ktorá znázorňuje funkciu $I = f(U)$ v bode U_0, I_0 .



Обр. 18

Označme dynamický odpor diódy pri laboratórnej teplote R_d , pri teplote kvapalného dusíka R'_d . Z grafu je možné určiť dynamický odpor diódy prislúchajúci určitému napätiu pri rôznych teplotách len pre záverný smer.

Pre $U_{KA} = 5,5 \text{ V}$ je pri laboratórnej teplote $R_d = 85 \Omega$, pri teplote kvapalného dusíka $R'_d = 18 \Omega$; pre $U_{KA} = 6,0 \text{ V}$ je $R_d = 25 \Omega$ a $R'_d = 1,5 \Omega$. Z toho je zrejmé, že znížením teploty diódy pri určitom napätí sa jej vodivosť v závernom smere zväčšila.

Pre priepustný smer nie je možné toto porovnanie previesť. Z toho, že pre $U_{AK} = 0,725 \text{ V}$ je pri laboratórnej teplote $R_d = 2 \Omega$ a pre $U_{AK} = 1,05 \text{ V}$ pri teplote kvapalného dusíka je ešte $R'_d = 9 \Omega$, je možné usúdiť, že znížením teploty diódy sa jej vodivosť v priepustnom smere zmenšila.

Celkove môžeme povedať, že znížením teploty Zenerovej diódy sa posunula jej voltampérová charakteristika doprava. Pritom dôjde i k posunutiu Zenerovho napätia. Je to dôsledkom toho, že pri zníženej teplote polovodiča dôjde ku zmenšeniu pravdepodobnosti výskytu majoritných nosičov náboja na tej energetickej hladine, ktorá odpovedá vodivému stavu polovodiča.

6. Funkcia stabilizátora napätia so Zenerovou diódou podľa obr. 17.

Na odpore R_1 sa vytvorí napätie U_1 , na vetvách so Zenerovou diódou alebo so spotrebičom o odpore R_2 vznikne napätie U_2 . Platí, že $U = U_1 + U_2$. Zatiaľ čo U_2 je menšie než Zenerovo napätie U_z , je prúd pretekajúci diódou veľmi malý, takže prúd prechádzajúci spotrebičom o odpore R_2 je prakticky rovný prúdu prechádzajúcemu odporom R_1 . Ak sa zväčší odber prúdu spotrebičom, v dôsledku zníženia odporu R_2 pri stálom napätí U , poklesne napätie U_2 . Dôsledkom toho zväčší sa dynamický odpor diódy a zmenší sa pretekajúci prúd, preto vzrast prúdu

prechádzajúci odporom R_1 je menší než vzrast prúdu prechádzajúci spotrebičom o odpore R_2 . Pokles napätia U_2 je menší, než by zodpovedalo vzrastu prúdu spotrebiča. Ak sa zmenší odber prúdu spotrebičom v dôsledku zväčšenia odporu R_2 , zvýši sa napätie U_2 . V dôsledku toho sa zmenší dynamický odpor diódy a zväčší sa prechádzajúci prúd, preto pokles prúdu prechádzajúceho odporom R_1 je menší než pokles prúdu, ktorý prechádza spotrebičom o odpore R_2 a vzrast napätia U_2 je menší, než zodpovedá poklesu prúdu spotrebiča.

Zmena odberu prúdu spotrebiča má teda malý vplyv na napätie U_2 .

Ak sa zväčší napätie U pri stálej hodnote odporu R_2 , zvýši sa napätie U_2 , dynamický odpor diódy sa zmenší a zväčší sa prúd pretekajúci diódou a odporom R_1 , čo má za následok zvýšenie napätia na odpore R_1 a zníženie napätia U_2 . Naopak, ak sa zníži napätie U zníži sa i napätie U_2 . V dôsledku toho sa zvýši dynamický odpor diódy, zmenší sa prúd prechádzajúci diódou a zväčší sa prúd prechádzajúci spotrebičom o odpore R_2 , čiže zväčší sa napätie U_2 . Dynamická rovnováha nastane vtedy, keď napätie U_2 sa približne rovná Zenerovmu napätiu. V našom prípade môžeme diódou stabilizovať napätie približne 7 V.

2. Úlohy kategórie B

Úlohy a jejich řešení recenzovali dr. ing. Daniel Kluvanec a Mojmír Simerský.

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhla dr. Jana Štěpánková)

Nádoby, jejichž objemy jsou V_1 , V_2 , obsahují dva plyny o tlacích p_1 , p_2 a teplotách T_1 , T_2 . Jsou spojeny

trubicí, která je opatřena kohoutem. Když kohout otevřeme, plyny se promísí a jejich výsledná teplota a výsledný tlak se ustálí na hodnotách T, p .

Uřčete tyto hodnoty T, p za předpokladů, že oba plyny jsou dokonalé, že Poissonova konstanta má pro ně stejnou hodnotu a že nádoby, spojující trubice a kohout, jsou z materiálu, který nevede teplo.

Řešení:

Označení veličin:

- m_1 ... hmotnost prvního plynu,
- m_2 ... hmotnost druhého plynu,
- M_{m1} ... molová hmotnost prvního plynu,
- M_{m2} ... molová hmotnost druhého plynu,
- c_{p1} ... měrné teplo prvního plynu při stálém tlaku,
- c_{p2} ... měrné teplo druhého plynu při stálém tlaku,
- c_{v1} ... měrné teplo prvního plynu při stálém objemu,
- c_{v2} ... měrné teplo druhého plynu při stálém objemu,
- R ... univerzální plynová konstanta.

Budeme předpokládat $T_1 < T_2$, takže po smíšení se první plyn ohřeje o $\Delta T_1 = T - T_1$ a druhý plyn se ochladí o $\Delta T_2 = T_2 - T$. Vnitřní energie prvního plynu se tím zvětší o

$$\Delta U_1 = m_1 c_{v1} \Delta T_1 = m_1 c_{v1} (T - T_1) \quad (1)$$

a vnitřní energie druhého plynu se zmenší o

$$\Delta U_2 = m_2 c_{v2} \Delta T_2 = m_2 c_{v2} (T_2 - T). \quad (2)$$

Poněvadž celková vnitřní energie se nezmění, musí platit

$\Delta U_1 = \Delta U_2$ a porovnáním (1) a (2) dostaneme

$$m_1 c_{v1} (T - T_1) = m_2 c_{v2} (T_2 - T). \quad (3)$$

Ze vztahů

$$c_{p1} = c_{v1} + \frac{R}{M_{m1}},$$

$$c_{p2} = c_{V2} + \frac{R}{M_{m2}}$$

dostaneme snadnými úpravami, s přihlédnutím k rovnosti Poissonových konstant obou plynů,

$$\frac{c_{V1}}{c_{V2}} = \frac{M_{m2}}{M_{m1}}. \quad (4)$$

Pro oba plyny před smíšením platí podle stavové rovnice

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M_{m1}} RT_1 \quad (5)$$

a

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M_{m2}} RT_2. \quad (6)$$

Odtud dostaneme

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1 V_1 T_2}{p_2 V_2 T_1} \cdot \frac{M_{m1}}{M_{m2}}. \quad (7)$$

Z (4) a (7) plyne

$$\frac{c_{V1}}{c_{V2}} \cdot \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1 V_1 T_2}{p_2 V_2 T_1} \quad (8)$$

a z (3) dostaneme snadnou úpravou

$$\frac{c_{V1}}{c_{V2}} \cdot \frac{m_1}{m_2} = \frac{T_2 - T}{T - T_1}. \quad (9)$$

Porovnáním (8) a (9) dostaneme vztah, z něhož vyjádříme

$$T = \frac{T_1 T_2 (p_1 V_1 + p_2 V_2)}{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1}$$

nebo

$$T = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2}}. \quad (10)$$

Při teplotě T a tlaku p zaujme první plyn objem V'_1 , druhý V'_2 a platí

$$pV'_1 = \frac{m_1}{M_{m1}} RT, \quad (11)$$

$$pV'_2 = \frac{m_2}{M_{m2}} RT, \quad (12)$$

přičemž

$$V'_1 + V'_2 = V_1 + V_2. \quad (13)$$

Ze vztahů (11), (12), (13) vyjádříme

$$p = \frac{RT}{V_1 + V_2} \left(\frac{m_1}{M_{m1}} + \frac{m_2}{M_{m2}} \right). \quad (14)$$

Z (5) a (6) vyjádříme poměry $\frac{m_1}{M_{m1}}$, $\frac{m_2}{M_{m2}}$, dosadíme do (14), za T tam dosadíme z (10) a po úpravě dostaneme výsledek

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

2. úloha (navrhol dr. ing. Daniel Klivanec)

Ladičku položíme horizontálne tak, že ju možno rozkmitať vo vertikálnej rovine. Plochu horného ramena ladičky posypeme jemným pieskom. Ladičku rozkmitáme, jej kmitočet je f . Predpokládame, že jednotlivé body ramien ladičky konajú harmonický kmitavý pohyb.

Určte:

- podmienku, ktorú musí splňovať amplitúda A kmitov v určitom mieste ladičky, aby nedošlo k oddeleniu zrníek piesku od jej povrchu;
- amplitúdu A' kmitov ladičky v tom mieste jej povrchu, kde zrnká piesku sa oddeľujú od kmitajúcej ladičky tak,

že dosiahnu výšku h nad rovnovážnou polohou ramena ladičky. Zrnká piesku považujeme za hmotné body. Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $f = 500 \text{ Hz}$, $h = 3,0 \text{ mm}$.

Riešenie:

a) Zrníčka sa udržia na povrchu ladičky v tých miestach, v ktorých maximálne zrýchlenie a_m splňuje podmienku

$$a_m \leq g, \quad (1)$$

kde g je tiažové zrýchlenie. Pre harmonické kmity platí

$$a_m = \omega^2 A = 4\pi^2 f^2 A.$$

Podľa (1) musí teda byť

$$A \leq \frac{g}{4\pi^2 f^2}.$$

b) Nech oddelenie zrníek od ramena ladičky sa uskutoční pri výchylke s . Výška h , ktorú zrnko dosiahne, je

$$h = s + \frac{v^2}{2g}, \quad (2)$$

kde v je jeho okamžitá rýchlosť pri výchylke s . Pri výchylke $s = A' \sin \omega t$ má zrnko rýchlosť

$$v = \omega A' \cos \omega t = \omega A' \sqrt{1 - \left(\frac{s}{A'}\right)^2} \quad (3)$$

a zrýchlenie

$$a = \omega^2 A' \sin \omega t = \omega^2 s. \quad (4)$$

Oddelenie zrnka od ladičky nastane pri výchylke s , pre ktorú platí $a = g$.

Dosadením $a = g$ do (4) dostaneme s , dosadením za s do (3) dostaneme v , dosadením za s a v do (2) po úprave dostaneme

$$A' = \frac{1}{4\pi^2 f^2} \sqrt{g(8\pi^2 f^2 h - g)}.$$

Pre dané hodnoty vyjde $A \leq 1,0 \mu\text{m}$; $A' = 78 \mu\text{m}$.

3. úloha (navrhla Eva Procházková)

Do směsi ledu a vody teploty t_0 (za normálního tlaku) je ve svislé poloze částečně ponořena zkumavka, jejíž teplota je rovna teplotě směsi. Zkumavku zčásti naplníme glycerínem o hmotnosti m a teplotě t ($t > t_0$). Teplota glycerínu klesá a po určité době se ustálí na hodnotě t_0 . Objem ledové směsi se při tom zmenší o V . Předpokládáme, že výměna tepla se uskutečňovala jen mezi ledovou směsí a glycerínem. Hustota vody ve směsi je ρ_1 , hustota ledu ρ_2 , měrné skupenské teplo tání ledu je l .

Určete měrné teplo c glycerínu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 20,0 \text{ g}$; $t = 130^\circ\text{C}$; $V = 1,68 \text{ cm}^3$; $\rho_1 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$; $\rho_2 = 917 \text{ kg m}^{-3}$; $l = 3,34 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1}$.

Řešení:

Glycerín odevzdá teplo

$$Q = mc(t - t_0). \quad (1)$$

Tím roztaje ve směsi led o hmotnosti m_1 , pro kterou platí

$$Q = m_1 l. \quad (2)$$

Tento led měl objem

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_2}$$

a voda vzniklá jeho roztáním má objem

$$V_2 = \frac{m_1}{\rho_1},$$

takže objem směsi se zmenší o

$$V = V_1 - V_2 = m_1 \frac{q_1 - q_2}{q_1 q_2} . \quad (3)$$

Porovnáme (1) a (2), vyjádříme m_1 , dosadíme do (3) a dostaneme vztah, z něhož vyjde obecný výsledek

$$c = \frac{V q_1 q_2 l}{m(q_1 - q_2)(t - t_0)} .$$

Pro zadané hodnoty vyjde $c \doteq 2,38 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

4. úloha (navrhl Konrád Hofman)

Baterie dvou kondenzátorů o kapacitách C_1, C_2 ($C_1 < C_2$) zapojených sériově byla nabita na napětí U_0 . Potom byly kondenzátory bez vybití spojeny paralelně.

a) Určete napětí U na kondenzátorech spojených paralelně,
b) určete náboj Q' , který po přepojení přešel z jednoho kondenzátoru na druhý.

c) Určete práci A , která byla při tom vykonána.

d) Uvažte, jak se práce A projevila.

Odpor spojovacích vodičů neuvažujte.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $C_1 = 1,00 \mu\text{F}$; $C_2 = 3,00 \mu\text{F}$; $U_0 = 200 \text{ V}$.

Řešení:

a) Soustava kondenzátorů spojených sériově má kapacitu

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (1)$$

a náboj

$$Q = C U_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_0. \quad (2)$$

Náboj Q je na každém z obou kondenzátorů. Při paralelním spojení má soustava náboj $2Q$ a kapacitu $C_1 + C_2$, takže je na ní napětí

$$U = \frac{2Q}{C_1 + C_2}.$$

Po dosazení za Q z (2) dostaneme obecný výsledek

$$U = \frac{2C_1C_2}{(C_1 + C_2)^2} U_0. \quad (3)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $U \doteq 75 \text{ V}$.

b) Při paralelním spojení je na prvním kondenzátoru náboj $Q_1 = C_1 U$, na druhém $Q_2 = C_2 U$. Poloviční rozdíl obou nábojů je právě hledaný náboj Q' , poněvadž před spojením do paralelní soustavy měly oba kondenzátory náboje stejné. S přihlédnutím k (3) dostaneme

$$Q' = \frac{1}{2} (Q_2 - Q_1) = \frac{C_1 C_2 (C_2 - C_1)}{(C_1 + C_2)^2} U_0.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $Q' = 75 \mu\text{C}$.

c) Soustava spojená sériově má energii $W_1 = \frac{1}{2} C U_0^2$; dosazením z (1) dostaneme

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_0^2. \quad (4)$$

Soustava spojená paralelně má energii

$$W_2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) U^2. \quad (5)$$

Vykonaná práce je rovna rozdílu $W_1 - W_2$. Použijeme vztahů (4) a (5), za U dosadíme z (3) a po úpravě dostaneme

$$A = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2 (C_2 - C_1)^2}{(C_1 + C_2)^3} U_0^2.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $A \doteq 3,75 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

Práce se projeví jiskrou (teplo a vyzáření elektromagnetické energie) při spojování nabitých kondenzátorů do paralelní baterie.

5. úloha (navrhol Václav Koubek)

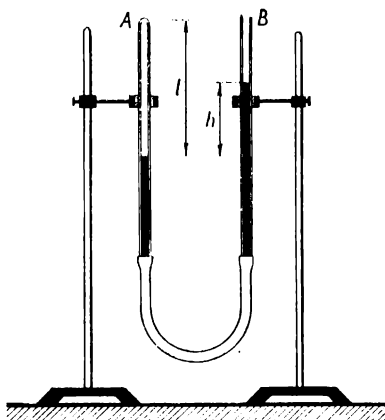
Overenie Boylovho zákona. Meranie atmosferického tlaku

Cieľ práce:

Overiť Boylov zákon v tvare

$$p \cdot V = k', \quad (1)$$

kde p je tlak a V objem plynu o stálej teplote, k' je konštanta.



Obr. 19

Pomôcky: Aparatúra podľa obr. 19, dĺžkové meradlo s milimetrovým delením.

Príprava merania:

Aparatúra pozostáva z dvoch sklenených trubíc A , B o dĺžke 20–30 cm a o priemere asi 0,5 cm, ktoré sú spojené gumovou hadičkou. Trubica A má jeden koniec uzavretý. Sústava trubíc je čiastočne naplnená ortuťou, ktorá v trubici A uzatvára stĺpec vzduchu o dĺžke l a objeme $V = Sl$ (S je obsah prierezu trubice.)

Postup merania:

Trubice A , B posunujeme v zvislom smere tak, aby sa rozdiel výšok ortuťových stĺpcov menil. Meriame dĺžku l vzduchového stĺpca a príslušnú hodnotu h . Vykonáme 8–10 meraní. Dvojice l_i , h_i zapisujeme do tabuľky

	l_i	h_i	hl_i	ghl_i
i	$[10^{-3} \text{ m}]$	$[10^{-3} \text{ m}]$	$[10^{-4} \text{ m}^2]$	$[10^{-1} \text{ Nm}^{-1}]$
1				
2				
3				

Spracovanie nameraných hodnôt:

Vzduch v trubici A má tlak

$$p = \rho gh + b, \quad \text{kde } \rho \doteq 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

je hustota ortuti a $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ je tiažové zrýchlenie.

Podľa Boylovho zákona (1) je

$$(\rho gh + b) l = k, \quad (2)$$

kde $k = k'S$.

a) V súradnicovej sústave (x, y) , kde na os x nanášame hodnoty l_i a na os y hodnoty $\rho g h_i l_i$ zostrojíte body $(l_i, \rho g h_i l_i)$ a uvážte, či môžeme získaný graf považovať za graf lineárnej funkcie.

b) Napíšte rovnicu funkcie, ktorá je znázornená grafom podľa úlohy a).

c) Vysvetlite, ktorá geometrická vlastnosť grafu zodpovedá konštante b . Meraním na grafe určte hodnotu b a vyjadrite ju v jednotkách N m^{-2} a torr.

d) Zostrojíte body $(l_i, \rho g h_i + b)$ a narysujete spojitú čiaru zobrazujúcu závislosť $p = p(l)$.

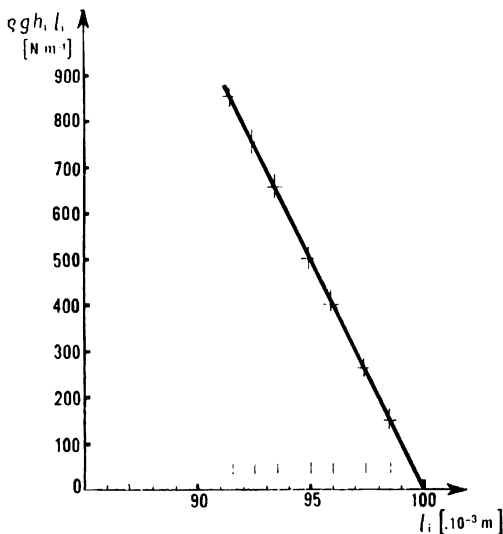
Prípravu úlohy a potrebné meranie vykonajte len za dozoru profesora a za prísneho dodržiavania všetkých bezpečnostných predpisov pre prácu s ortuťou.

Riešenie:

Meranie bolo prevedené na aparátúre podľa obr. 19. Namerané hodnoty l_i a h_i a vypočítané hodnoty $(h_i l_i)$ a $(\rho g h_i l_i)$ sú zostavené do tabuľky 13.

Tabuľka 13

i	l_i 10^{-3}m	h_i 10^{-3}m	$l_i h_i$ 10^{-4}m^2	$\rho g l_i h_i$ 10^{-1}N m^{-1}	$\rho g h_i + b$ N m^{-2}
1	100,0	0	0	0	100 000
2	98,5	10	9,85	1313	101 500
3	97,5	20	19,50	2600	102 500
4	96,0	30	28,50	3840	104 100
5	95,0	40	38,00	5070	105 300
6	93,5	50	46,75	6240	107 000
7	92,5	60	55,50	7410	108 200
8	91,5	70	64,05	8540	109 300



Obr. 20

a) Na obr. 20 je graf preložený bodmi ($l_i, \rho g h_i l_i$) pre hodnoty uvedené v tabuľke 13. Vyznačené body ležia dostatočne presne na preloženej priamke a preto ho môžeme považovať za graf lineárnej funkcie.

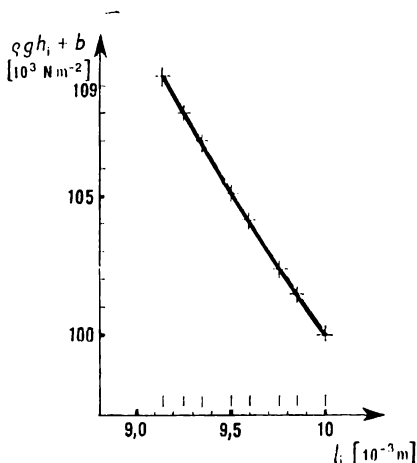
b) Z rovnice (2) plynie

$$\rho g h l = -b l + k, \quad (3)$$

čo je lineárna funkcia, jej graf je na obr. 20.

c) Konštanta b je rovná zápornej hodnote smernice priamky znázorňujúcej funkciu (3), teda

$$\begin{aligned} b &= -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\rho g h_1 l_1 - \rho g h_8 l_8}{l_1 - l_8} = \\ &= \frac{854 \cdot \text{Nm}^{-1}}{8,5 \cdot 10^{-3} \text{m}} \doteq 1,00 \cdot 10^5 \text{Nm}^{-2} \doteq 750 \text{ torr.} \end{aligned}$$



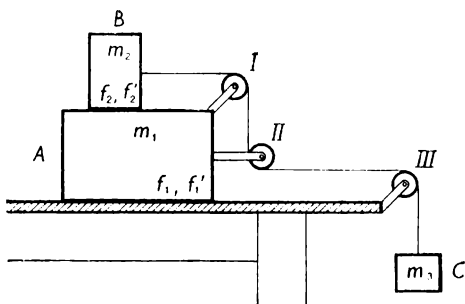
Obr. 21

d) Na obr. 21 sú vyznačené body $(l_i, \rho g h_i + b)$. Spojitá čiara preložená týmito bodmi je grafom funkcie $p = p(l)$. Podľa vzťahu (2) je to časť hyperboly.

6. úloha (navrhl Stanislav Zhejbal)

Na vodorovné rovině leží kvádr A o hmotnosti m_1 , na něm je těleso B o hmotnosti m_2 (obr. 22). Těleso B je spojeno vláknem vedeným přes tři kladky s tělesem C tak, že vlákno z kladky II je na kladku III vedeno vodorovně. Těleso C se může pohybovat ve svislém směru. Součinitel smykového tření tělesa A a vodorovné roviny je f_1 , součinitel smykového tření tělesa A a tělesa B je f_2 . Součinitele statického tření jsou f'_1 (těleso A a vodorovná rovina) a f'_2 (těleso A a těleso B).

a) Určete podmínku, kterou musí splňovat součinitele tření, aby při zadaných hmotnostech těles se těleso A v dané soustavě těles mohlo pohybovat.



Obr. 22

b) Určete největší hmotnost m_3 tělesa C tak, aby při zadaných hmotnostech a součinitelích tření se tělesa A a B právě ještě pohybovala jako jediné těleso.

Hmotnosti vlákna a kladek jsou zanedbatelné vzhledem k hmotnostem těles, délka vlákna se nemění, třecí síly při otáčení kladek zanedbáváme vzhledem k ostatním silám. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 1,5 \text{ kg}$, $m_2 = 1,0 \text{ kg}$, $f_1 = 0,10$, $f_2 = 0,70$, $f'_1 = 0,20$, $f'_2 = 0,80$.

Řešení:

a) Na obr. 23 jsou vyznačeny síly, které působí na tělesa A , B , C . Tah vlákna má velikost F , síly tření mají velikost F_{t1} (těleso A na vodorovné rovině) a F_{t2} (těleso B na tělese A). Orientaci síly působící ve vodorovném směru považujeme za kladnou, působí-li tato síla směrem vpravo. Na těleso A působí síly: F u kladky II, $-F$ u kladky I a síly tření F_{t2} a $-F_{t1}$. Předpokládáme-li, že se neprojeví otáčivý účinek sil F a $-F$, je pohyb tělesa A ovlivněn jen silami tření. Aby se těleso A mohlo v dané soustavě pohybovat, musí být splněna podmínka

$$F_{t2} \geq F_{t1},$$

Mají-li se tělesa A a B pohybovat jako těleso jediné, musí všechna zrychlení mít stejnou velikost $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Když ze soustavy rovnic (3), (4), (5) vyloučíme a a F , můžeme vyjádřit

$$m_3 = \frac{(m_1 + m_2) F_{t2} - m_2 F_{t1}}{m_1 g + F_{t1} - F_{t2}}. \quad (6)$$

V (6) značí

$$F_{t1} = f_1(m_1 + m_2)g, \quad (7)$$

neboť těleso A se po vodorovné rovině pohybuje, kdežto F_{t2} značí sílu tření statického

$$F_{t2} = f'_2 m_2 g, \quad (8)$$

protože těleso B se po tělese A nepohybuje.

Když do (6) dosadíme ze (7) a (8), dostaneme po úpravě

$$m_3 = \frac{m_2(m_1 + m_2)(f'_2 - f_1)}{m_1(1 + f_1) - m_2(f'_2 - f_1)}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $m_3 \doteq 1,8$ kg.

7. úloha (navrhl dr. ing. Daniel Kľuvanec)

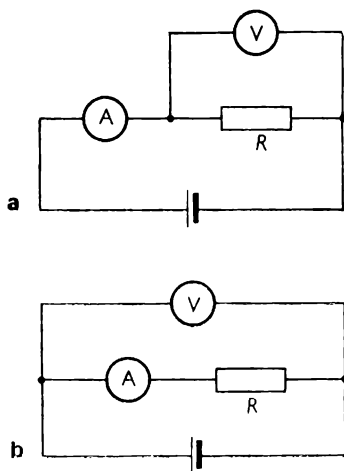
V meraní odporu priamou metódou zapojíme voltmeter a ampérmetr k neznámemu odporu R najskôr podľa schémy (a) a potom podľa schémy (b) (obr. 24).

Údaje voltmetra a ampérmetra v zapojení (a) sú U_1 , I_1 , v zapojení (b) U_2 , I_2 .

Z nameraných hodnôt:

a) Určte odpor R a vnútorné odpory R_v voltmetra a R_A ampérmetra.

b) Určte absolútne chyby ΔR_1 , ΔR_2 , ktorých sa dopustíme, keď odpor stanovíme len z nameraných hodnôt U_1 , I_1 alebo len z nameraných hodnôt U_2 , I_2 . V meraniach (a),



Obr. 24

(b) bol použitý ten istý zdroj napätia. Vnútorný odpor zdroja a odpory spojovacích drôtov neuvažujte.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty

$U_1 = 83,1 \text{ V}$, $I_1 = 1,34 \text{ A}$, $U_2 = 83,4 \text{ V}$, $I_2 = 1,32 \text{ A}$.

c) Zdôvodnite rozdiel veľkostí chýb ΔR_1 , ΔR_2 pre zadané hodnoty.

Riešenie:

a) V zapojení podľa schémy (a) platí

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{RR_v}{R + R_v} \quad (1)$$

a tiež

$$U_1 = U_2 - R_A I_1, \quad (2)$$

lebo napätie zdroja je U_2 (je to napätie, ktoré odmeráme voltmetrom v zapojení podľa schémy (b)).

V zapojení podľa schémy (b) pre neznámy odpor R môžeme písať

$$\frac{U_2}{I_2} = R + R_A. \quad (3)$$

Z (1), (2), (3) pre R , R_V a R_A platí

$$R = \frac{U_2}{I_2} - \frac{U_2 - U_1}{I_1}, \quad R_V = \frac{U_2(I_1 - I_2) + U_1 I_2}{U_2 I_1 (I_1 - I_2)} U_1,$$

$$R_A = \frac{U_2 - U_1}{I_1}.$$

b) Absolútna chyba ΔR merania odporu R je rozdiel presnej hodnoty R odporu a približnej hodnoty R' , tj.

$$\Delta R = R - R'.$$

Potom pre ΔR_1 a ΔR_2 platí

$$\Delta R_1 = R - \frac{U_1}{I_1} = U_2 \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2},$$

$$\Delta R_2 = R - \frac{U_2}{I_2} = -R_A = -\frac{U_2 - U_1}{I_1}.$$

Číselne:

a) $R = 63,0 \, \Omega$, $R_V = 4140 \, \Omega$, $R_A = 0,2 \, \Omega$.

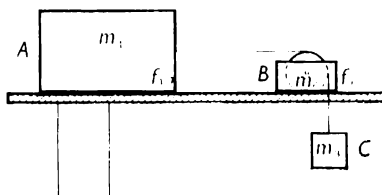
b) $\Delta R_1 \doteq 1,0 \, \Omega$, $\Delta R_2 \doteq -0,2 \, \Omega$.

c) Pre zadané hodnoty je $|\Delta R_1| \doteq 5 |\Delta R_2|$. Dôvod je tento: Vnútrotný odpor voltmetra je asi 66krát väčší ako meraný odpor, ale vnútrotný odpor ampérmetra je asi 315 krát menší v porovnaní s meraným odporom. Teda nerovnosť $R \gg R_A$ je splnená podstatne lepšie ako nerovnosť $R \ll R_V$, takže vlastná spotreba ampérmetra pri meraní v zapojení podľa schémy (b) má podstatne menší vplyv

na meranie ako vlastná spotreba voltmetra v zapojení podľa schémy (a).

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl Stanislav Zhejbal)

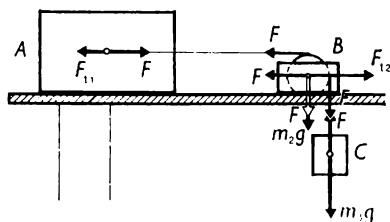


Obr. 25

Na obr. 25 je znázorněna soustava tří těles spojených vláknem. Hmotnosti těles A , B , C jsou m_1 , m_2 , m_3 . V tělese B je výřez, v němž se může otáčet kladka. Tělesa A a B se mohou pohybovat po vodorovné podložce, v níž je podélný výřez pro průchod vlákna k tělesu C . Součinitel smykového tření tělesa A a podložky je f_1 , součinitel statického tření tělesa B a podložky je f_2 . Určete podmínky pro hmotnosti m_1 a m_3 , aby se pohybovala jen tělesa A a C a těleso B bylo v klidu. Podmínku pro m_1 vyjádřete pomocí hmotností m_2 a součinitelů tření, podmínku pro m_3 pomocí hmotností m_1 a m_2 a součinitelů tření.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 6,0$ kg, $m_2 = 1,0$ kg, $f_1 = 0,20$; $f_2 = 0,60$.

Hmotnost vlákna a kladky je zanedbatelná vzhledem k hmotnostem těles, třecí síla při otáčení kladky je zanedbatelná proti ostatním silám. Délka vlákna se nemění.



Obr. 26

Řešení:

Na obr. 26 jsou vyznačeny síly, které v soustavě působí. Třecí síla F_{t1} má při pohybu tělesa A velikost

$$F_{t1} = f_1 m_1 g. \quad (1)$$

Třecí síla F_{t2} vzniká současným působením tíhové síly a tahové síly. Je-li těleso B v klidu, má tato třecí síla velikost

$$F_{t2} = f_2 (m_2 g + F). \quad (2)$$

Velikost tahové síly vyjádříme z pohybových rovnic; pohybují-li se tělesa A , C se zrychlením a , jde o rovnice

$$m_1 a = F - f_1 m_1 g,$$

$$m_3 a = m_3 g - F,$$

z nichž dostaneme

$$F = \frac{m_1 m_3 (1 + f_1) g}{m_1 + m_3}. \quad (3)$$

Těleso A se pohybuje, je-li splněna podmínka

$$F_{t1} \leq F, \quad (4)$$

a těleso B je v klidu za podmínky

$$F_{t2} > F. \quad (5)$$

Dosazením z (1), (2), (3) dostáváme podmínky

$$f_1 m_1 \leq \frac{m_1 m_3 (1 + f_1)}{m_1 + m_3},$$

$$\frac{f_2 m_2}{1 - f_2} > \frac{m_1 m_3 (1 + f_1)}{m_1 + m_3},$$

z nichž pro m_3 plyne

$$m_1 f_1 \leq m_3 < \frac{m_1 m_2 f_2}{m_1 (1 + f_1) (1 - f_2) - m_2 f_2}. \quad (6)$$

Jedna podmínka pro m_1 vyplývá z (6), uvážíme-li, že jmenovatel zlomku vpravo musí být nezáporný, aby vztah (6) měl fyzikální smysl.

Odtud

$$m_1 \geq \frac{m_2 f_2}{(1 + f_1)(1 - f_2)}. \quad (7)$$

Z (4) a (5) plyne, s ohledem na (1) a (2):

$$f_1 m_1 g \leq F < \frac{f_2 m_2 g}{1 - f_2}$$

a odtud

$$m_1 < \frac{f_2 m_2}{f_1 (1 - f_2)}. \quad (8)$$

Spojením (7) a (8) dostaneme podmínku

$$\frac{f_2 m_2}{(1 + f_1)(1 - f_2)} \leq m_1 < \frac{f_2 m_2}{f_1 (1 - f_2)}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde

$$1,20 \text{ kg} \leq m_3 < 1,58 \text{ kg},$$

$$1,25 \text{ kg} \leq m_1 < 7,50 \text{ kg}.$$

2. úloha (navrhl Konrád Hofman)

Z n stejných galvanických článků, z nichž každý má elektromotorické napětí $\mathcal{E}$ a vnitřní odpor r , má být sestavena baterie tak, že se články spojí do stejných paralelních větví, z nichž každá obsahuje stejný počet článků spojených sériově. K této baterii je připojen spotřebič o odporu R .

a) Stanovte počet x paralelních větví tak, aby proud protékající spotřebičem měl danou hodnotu I . Provedte diskuzi řešení.

b) Z výsledku diskuse určete, jakou největší hodnotu I_m může mít proud I , a stanovte, jakou hodnotu x_m má v tomto případě počet větví baterie.

c) Určete maximální příkon P_m , který v tomto případě dodává baterie do spotřebiče.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $n = 90$; $\mathcal{E} = 1,50 \text{ V}$; $r = 0,500 \Omega$; $R = 5,00 \Omega$.

Řešení:

a) Každá větev má elektromotorické napětí $\mathcal{E}_0 = \frac{n}{x} \mathcal{E}$

a vnitřní odpor $r'_0 = \frac{n}{x} r$. Celá baterie má elektromotorické

napětí $\mathcal{E}_0$ a vnitřní odpor $r_0 = \frac{r'_0}{x} = \frac{nr}{x^2}$. Do spotřebiče dodává proud

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0 + R} = \frac{n \cdot x \mathcal{E}}{nr + Rx^2}. \quad (1)$$

Tento vztah představuje kvadratickou rovnici vzhledem k neznámé x ; řešením dostaneme

$$x_{12} = \frac{n\mathcal{E} \pm \sqrt{n^2\mathcal{E}^2 - 4nrRI^2}}{2RI}. \quad (2)$$

Úloha má 2, 1, nebo žádné řešení, podle toho, zda

$$n^2 \mathcal{E}^2 - 4nrRI^2 \geq 0.$$

b) Největší hodnotu I_m má proud I v případě, že rovnice (1) má jedno řešení, tj. že její diskriminant je nulový. Odtud

$$I_m = \frac{1}{2} \mathcal{E} \sqrt{\frac{n}{rR}} \quad (3)$$

dosazením do (2)

$$x_m = \sqrt{\frac{nr}{R}}.$$

c) Pomocí (3) vyjádříme

$$P_m = RI_m^2 = \frac{n\mathcal{E}^2}{4r}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $I_m = 4,50 \text{ A}$; $x_m = 3$; $P_m = 101 \text{ W}$.

3. úloha (navrhol Václav Koubek)

Závažie s hmotnosťou m a dva k nemu pripojené rovnaké balónky naplnené héliom tvoria sústavu, ktorá sa vznáša vo vzduchu. Obidve vlákna spájajúce závažie s balónmi majú rovnakú dĺžku l .

a) Každý z balónov nabijeme rovnakým elektrickým nábojom Q . Bude sa naďalej sústava balónov a závažia vznášať? Svoje tvrdenie odôvodnite.

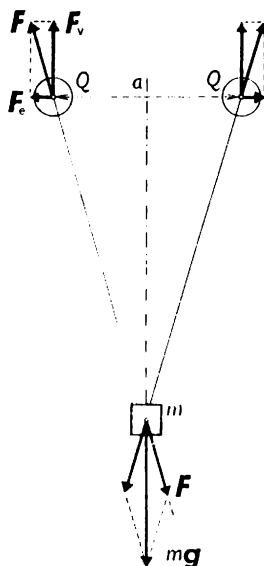
b) Bolo zistené, že stredu balónov po ich nabití elektrickým nábojom Q sa vzdialili na vzdialenosť a . Určte náboj Q balónov.

Hmotnosti balónov a vlákien sú v porovnaní s hmotnosťou závažia zanedbateľné. Vlákna sú elektricky nevodivé.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $m = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$; $a = 0,60 \text{ m}$; $l = 1,0 \text{ m}$.

Riešenie:

a) Ak sa sústava vznášala vo vzduchu pred nabitím elektrickými nábojmi, bude sa vznášať aj po nabití nábojom Q , lebo elektrická sila medzi balónmi pôsobí len vo vodorovnom smere. Výslednica síl v zvislom smere, ktorá bola nulová, zostane nezmenená.



Obr. 27

b) Výslednica F vztlakovej sily F_v a elektrickej sily F_e má veľkosť (obr. 27)

$$F = \frac{mg}{2 \cos \alpha},$$

kde g je tiažové zrýchlenie a 2α je uhol medzi vláknami. Veľkosť F_e zložky F_e sily F vyjadríme takto:

$$F_e = \frac{mg}{2 \cos \alpha} \sin \alpha = \frac{mg}{2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Z Coulombovho zákona ďalej platí

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} = k_0 \frac{Q^2}{a^2}, \quad (2)$$

kde ϵ_0 je permitivita vákua a $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Dosadením (2) do (1) a vyjadrením $\operatorname{tg} \alpha$ pomocou a a l a úpravou máme

$$Q = \pm a \sqrt{\frac{mga}{2k_0 \sqrt{4l^2 - a^2}}}.$$

Číselne: $Q = \pm 0,55 \cdot 10^{-6} \text{C}$.

4. úloha (navrhol RNDr. Arpád Keczkés)

Po naklonenej rovine, ktorá zvierá s vodorovnou rovinou uhol α , súčasne spustíme z rovnakej výšky tri telesá: guľu, rotačný plný valec a rotačný dutý tenkostenný valec. Všetky tri telesá majú rovnakú hmotnosť m a rovnaký polomer r . Predpokladáme, že konajú len valivý pohyb v smere spádnic naklonenej roviny. Rýchlosti telies na začiatku pohybu sú nulové.

a) Určte pomer $a_1 : a_2 : a_3$ veľkostí zrýchlení a_1 , a_2 , a_3 pohybu gule, valca a dutého valca.

b) Vypočítajte t_1 , t_2 , za ktoré vykonajú dráhu s na naklonenej rovine od začiatku pohybu valec a dutý valec, keď

gula dráhu s vykonalá za čas t_0 . Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnotu $t_0 = 2,00$ s.

Sily trenia pri pohybe telies po naklonenej rovine vzhľadom k ostatným silám zanedbajte. Momenty zotrvačnosti $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ gule, valca a dutého tenkostenného valca vzhľadom na ich rotačné osi sú

$$\mathcal{J}_1 = \frac{2}{5}mr^2; \quad \mathcal{J}_2 = \frac{1}{2}mr^2; \quad \mathcal{J}_3 = mr^2.$$

Riešenie:

a) Zo zákona zachovania energie je

$$mgs \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} + \frac{\mathcal{J}\omega^2}{2},$$

kde v je okamžitá postupná a ω uhlová rýchlosť telesa po vykonaní dráhy s . Po dosadení $\omega = \frac{v}{r}$ možno z tejto rovnosti vypočítať

$$v = \sqrt{2s \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{\mathcal{J}}{mr^2}}} = \sqrt{2sa},$$

kde a je zrýchlenie pohybu. Teda

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{\mathcal{J}}{r^2}}. \quad (1)$$

Pre pomer $a_1 : a_2 : a_3$ po dosadení za $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ máme

$$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{1}{1,4} : \frac{1}{1,5} : \frac{1}{2,0}.$$

b) Pre dobu t , za ktorú teleso vykoná dráhu s pri zrýchlenom pohybe, platí

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}.$$

Použitím (1) a dosadením za a_1, a_2, a_3

$$t_0 : t_1 : t_2 = \sqrt{1,4} : \sqrt{1,5} : \sqrt{2,0}.$$

To znamená, že ak guľa vykoná dráhu s za čas t_0 , potom valec túto dráhu vykoná za čas

$$t_1 = \sqrt{\frac{1,5}{1,4}} t_0 \text{ a dutý valec za čas } t_2 = \sqrt{\frac{2,0}{1,4}} t_0.$$

Číselne: $t_1 \doteq 2,06 \text{ s}$; $t_2 \doteq 2,40 \text{ s}$.

3. Úlohy kategórie C

Úlohy a jejich řešení recenzovali dr. Marta Chytilová a Mojmir Simerský

a) První kolo soutěže

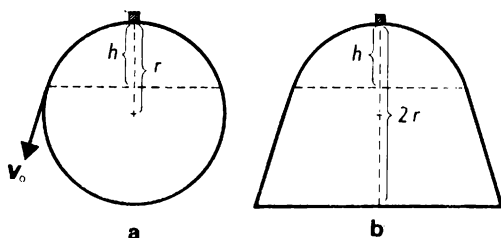
1. úloha (navrhol Matúš Briestenský)

Z najvyššieho bodu gule s polomerom r kľže malé teleso po povrchu gule dolu.

a) V akej hĺbke h pod najvyšším bodom sa teleso oddelí od povrchu gule (obr. 28a)?

b) Určte rýchlosť v_0 telesa v mieste jeho oddelenia od guľovej plochy, ak v najvyššom bode gule má nulovú rýchlosť.

c) Od gule odrežeme úseč s výškou h a priložíme ju podstavou na zhodnú hornú podstavu rotačného zrezaného



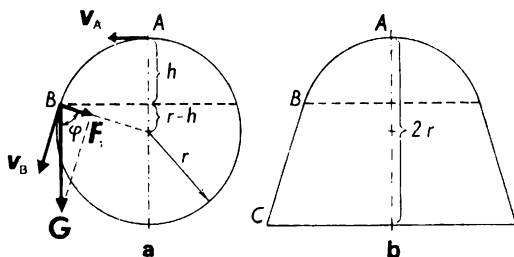
Obr. 28

kužela. Povrchová priamka zrezaného kužela je rovnobežná so smerom vektora $\mathbf{v}_0$. Výška takto vzniknutého telesa je $2r$ (obr. 28b). Určte rýchlosť v malého telesa, ktoré kľže z pokojovej polohy v najvyššom bode guľovej plochy, v okamihu, kedy dosiahne dolnú vodorovnú podstavu kužela.

Trenie neuvažujeme.

Riešenie:

a) Predpokladajme, že teleso o hmotnosti m má v najvyššom bode A guľe (obr. 29) rýchlosť $\mathbf{v}_A$ vo vodorovnom smere a kľže po povrchu až do bodu B , v ktorom má



Obr. 29

rýchlosť v_B . Teleso sa v tomto bode oddelí, keď normálová zložka tiažovej sily $\mathbf{G}$ o veľkosti $F_1 = mg \cos \varphi$ sa rovná dostredivej sile, ktorej veľkosť je $\frac{m}{r} v_B^2$:

$$mg \cos \varphi = \frac{m}{r} v_B^2,$$

pričom $\cos \varphi = \frac{r-h}{r}$; odtiaľ

$$v_B^2 = g(r-h). \quad (1)$$

Na dráhe AB sa tiažová potenciálna energia zmenší o $\Delta W_p = mgh$. Ak vylúčime iné premeny energie, vzrastie kinetická energia telesa o $\Delta W_k = \frac{m}{2} (v_B^2 - v_A^2)$, pričom $\Delta W_k = \Delta W_p$.

Z tejto rovnosti vyplýva

$$v_B^2 - v_A^2 = 2gh. \quad (2)$$

Zo sústavy (1) a (2) vyjadríme

$$h = \frac{gr - v_A^2}{3g}; \quad v_B^2 = \frac{2gr + v_A^2}{3}. \quad (3)$$

Riešenie má fyzikálny zmysel, ak $v_A^2 \leq gr$.

b) Pre $v_A \rightarrow 0$ platí podľa (3):

$$h = \frac{r}{3}; \quad v_0 = \sqrt{\frac{2gr}{3}}.$$

c) Pri klzavom pohybe z bodu A (pokožová poloha) do bodu C vzrastie kinetická energia telesa na hodnotu

$W_k = \frac{1}{2} mv^2$ a jeho potenciálna energia tiažová sa zmenší o $\Delta W'_p = 2mgr$.

Z rovnosti $W_k = \Delta W'_p$ určíme

$$v = 2\sqrt{gr}.$$

2. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Nakloněná rovina AB svírá s vodorovnou rovinou úhel φ . V nejvyšším bodě B je upevněna kladka, přes níž je vedena nit. Hmotnost kladky a nitě, tření v čepu a na obvodu kladky neuvažujeme.

a) K jednomu konci nitě je připoutáno těleso o hmotnosti m_1 , které se pohybuje bez tření po dráze AB , nit je rovnoběžná s AB . K druhému konci nitě je připoutáno těleso o hmotnosti m_2 , které volně visí na vlákně podél výšky nakloněné roviny. Určete hmotnost m_2 tak, aby soustava těles byla v rovnovážné poloze v klidu.

b) Určete zrychlení soustavy, není-li splněna podmínka rovnovážné polohy soustavy těles podle úlohy a). Provedte diskusi.

c) V bodě B se připojí druhá nakloněná rovina BA' kolmá k rovině AB tak, že spojnice bodů AA' je vodorovná. Těleso o hmotnosti m_2 se pohybuje bez tření po nakloněné rovině BA' . Úseky nití jsou rovnoběžné s příslušnými nakloněnými rovinami. Určete hmotnost m_2 tak, aby soustava těles byla v rovnovážné poloze.

d) Určete zrychlení soustavy, není-li splněna podmínka rovnovážné polohy soustavy těles podle úlohy c). Provedte diskusi.

e) Řešte úlohy a) až d), je-li k_1 součinitel smykového tření pro těleso o hmotnosti m_1 na rovině AB a k_2 součinitel smykového tření pro těleso o hmotnosti m_2 na rovině BA' . Předpokládáme, že oba součinitelé statického tření mají přesně stejnou velikost jako odpovídající součinitelé k_1 , k_2 smykového tření.

Provedte diskusi.

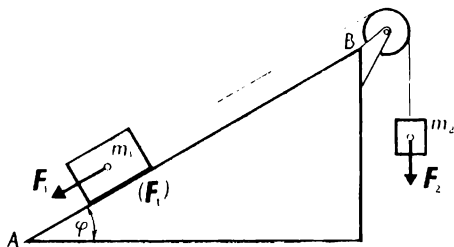
f) Po obecném vyřešení úlohy řešte úlohy a) až d) pro hodnoty

$$\varphi = 30^\circ, m_1 = 1,0 \text{ kg}, g = 10 \text{ m s}^{-2}. \text{ Pro stejné hodno-}$$

ty řešte úlohu e), je-li $k_1 = 0,20$, $k_2 = 0,30$. Ve všech případech b) až d) sestrojte na milimetrový papír grafy funkce $a = f(m_2)$.

Řešení:

Situace je znázorněna na obr. 30. Pro působící síly platí



Obr. 30

$$F_1 = m_1 g \sin \varphi,$$

$$F_2 = m_2 g,$$

$$F_t = k_1 m_1 g \cos \varphi.$$

a) V rovnovážné poloze je soustava v klidu nebo v rovnoměrném pohybu: $F_1 = F_2$, tj. $m_1 g \sin \varphi = m_2 g$ neboli

$$m_2 = m_1 \sin \varphi. \quad (1)$$

b) Soustava koná pohyb rovnoměrně zrychlený. Těleso o hmotnosti m_1 stoupá, popř. klesá, když

$m_2 > m_1 \sin \varphi$; popř. $m_2 < m_1 \sin \varphi$.

Pro velikost zrychlení a_1 , popř. a_2 , platí

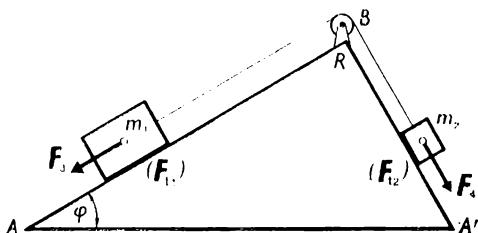
$$m_2 g - m_1 g \sin \varphi = a_1 (m_1 + m_2),$$

popř.

$$m_1 g \sin \varphi - m_2 g = a_2(m_1 + m_2);$$

odtud plyne

$$a_{1,2} = g \frac{\pm m_2 \mp m_1 \sin \varphi}{m_1 + m_2}. \quad (2), (3)$$



Obr. 31

c) Situace je znázorněna na obr. 31. Pro působící síly platí:

$$F_3 = m_1 g \sin \varphi,$$

$$F_4 = m_2 g \cos \varphi,$$

$$F_{t1} = k_1 m_1 g \cos \varphi,$$

$$F_{t2} = k_2 m_2 g \sin \varphi.$$

V rovnovážné poloze je soustava v klidu nebo v rovnoměrném pohybu, je-li $F_3 = F_4$, tj. $m_1 g \sin \varphi = m_2 g \cos \varphi$, neboli

$$m_2 = m_1 \operatorname{tg} \varphi. \quad (4)$$

d) Soustava koná pohyb rovnoměrně zrychlený. Těleso o hmotnosti m_1 stoupá, popř. klesá, když

$$m_2 g \cos \varphi > m_1 g \sin \varphi, \quad \text{popř.} \quad m_2 g \cos \varphi < m_1 g \sin \varphi.$$

Pro velikosti zrychlení a_3 , popř. a_4 dostaneme obdobně jako v případě b)

$$a_{3,4} = g \frac{\pm m_2 \cos \varphi \mp m_1 \sin \varphi}{m_1 + m_2}. \quad (5), (6)$$

e_a) V rovnovážné poloze je soustava v klidu nebo v rovnoměrném pohybu. K silám vyznačeným v obr. 30 přistupuje ještě síla smykového tření o velikosti $F_t = k_1 m_1 g \cos \varphi$. Soustava je v klidu nebo těleso o hmotnosti m_1 rovnoměrně stoupá, popř. klesá, když $F_1 + F_t = F_2$, popř. $F_1 - F_t = F_2$,

tj. když

$$m_1 g (\sin \varphi \pm k_1 \cos \varphi) = m_2 g,$$

neboli buď

$$m_2 = m_1 (\sin \varphi + k_1 \cos \varphi) = m_{21}, \quad (7)$$

nebo

$$m_2 = m_1 (\sin \varphi - k_1 \cos \varphi) = m_{22}. \quad (8)$$

e_b) Soustava koná pohyb rovnoměrně zrychlený. Těleso o hmotnosti m_1 stoupá, popř. klesá, když $m_2 > m_{21}$, popř. $m_2 < m_{22}$. Pro velikost zrychlení a_5 , popř. a_6 dostaneme obdobně jako dříve

$$a_{5,6} = g \frac{\pm m_2 \pm m_1 (\sin \varphi \mp k_1 \cos \varphi)}{m_1 + m_2}. \quad (9) (10)$$

e_c) V rovnovážné poloze je soustava v klidu nebo v rovnoměrném pohybu. K silám vyznačeným v obr. 31 přistupují ještě síly smykového tření o velikostech

$$F_{t1} = k_1 m_1 g \cos \varphi \quad \text{a} \quad F_{t2} = k_2 m_2 g \sin \varphi.$$

Soustava je v klidu nebo těleso o hmotnosti m_1 rovnoměrně stoupá, popř. klesá, když

$$F_3 + F_{t1} = F_2 - F_{t2}, \quad \text{popř.} \quad F_3 - F_{t1} = F_2 + F_{t2},$$

tj. když

$$m_1 g \sin \varphi \pm k_1 m_1 g \cos \varphi = m_2 g \cos \varphi \mp k_2 m_2 \sin \varphi,$$

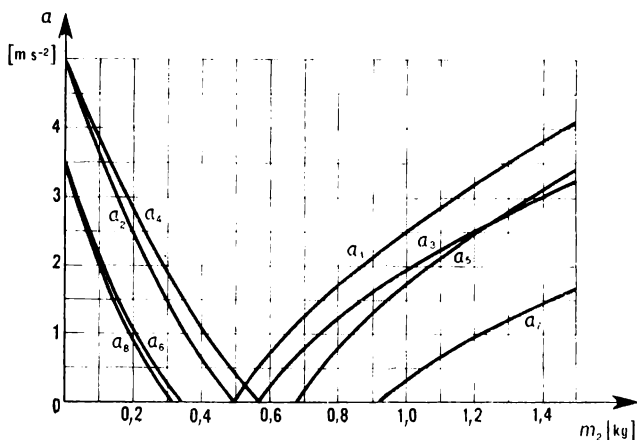
tzn. buď

$$m_2 = m_1 \frac{\sin \varphi + k_1 \cos \varphi}{\cos \varphi - k_2 \sin \varphi} = m_1 \frac{\operatorname{tg} \varphi + k_1}{1 - k_2 \operatorname{tg} \varphi} = m_{23}, \quad (11)$$

nebo

$$m_2 = m_1 \frac{\sin \varphi - k_1 \cos \varphi}{\cos \varphi + k_2 \sin \varphi} = m_1 \frac{\operatorname{tg} \varphi - k_1}{1 + k_2 \operatorname{tg} \varphi} = m_{24}. \quad (12)$$

e_d) Soustava koná pohyb rovnoměrně zrychlený. Těleso o hmotnosti m_1 stoupá, popř. klesá, když $m_2 > m_{23}$, popř. $m_2 < m_{24}$. Pro velikost zrychlení a_7 , popř. a_8 dostaneme, obdobně jako dříve



Obr. 32

$$a_{7,8} = g \frac{\pm m_2(\cos \varphi \mp k_2 \sin \varphi) \mp m_1(\sin \varphi \pm k_1 \cos \varphi)}{m_1 + m_2} \quad (13) \quad (14) .$$

f) Pro zadané hodnoty vychází:

podle (1) $m_2 = 0,50$ kg; podle (4) $m_2 \doteq 0,58$ kg;

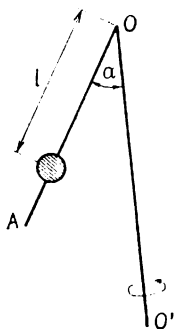
podle (7) $m_{21} \doteq 0,67$ kg; podle (8) $m_{22} \doteq 0,33$ kg;

podle (11) $m_{23} \doteq 0,94$ kg; podle (12) $m_{24} \doteq 0,32$ kg.

Grafy funkcí $a = f(m_2)$, které jsou v řešení označeny (2), (3), (5), (6), (9), (10), (13) a (14), jsou pro zadané hodnoty sestrojeny na obr. 32.

3. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Ke svislé tyči s osou OO' je připojeno rameno OA , které svírá s osou OO' úhel α (obr. 33). Na ramenu OA



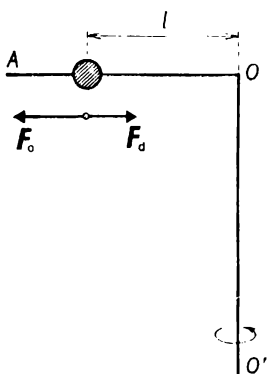
Obr. 33

je nasunuta koule o hmotnosti m . Součinitel statického tření koule na ramenu OA je k . Hmotnost ramena OA je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti koule, délka ramena není omezena. Celé zařízení se otáčí kolem osy OO' stálou úhlovou rychlostí ω .

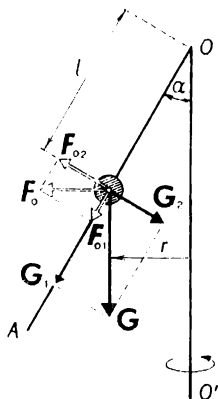
- a) V které vzdálenosti l od bodu O se ustálí střed koule, je-li $\alpha = 90^\circ$? Proveďte rozbor úlohy ve vztažné soustavě inerciální a ve vztažné soustavě otáčející se kolem osy OO' úhlovou rychlostí ω .
- b) Určete vzdálenost l pro $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
- c) Určete vzdálenost l pro $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- d) Sestrojte graf funkce $l = f(\alpha)$ pro $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$, $k = 0,10$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Řešení:

- a) Ve vztažné soustavě inerciální se těleso otáčí na tyči kolem osy ve vzdálenosti l , dostředivá síla je podmíněna statickým třením jako vazebnou silou (obr. 34).



Obr. 34



Obr. 35

Ve vztažné soustavě neinerciální působí na těleso setrvačná síla odstředivá, která je v rovnováze se silou statického tření.

V obou případech platí:

$$kmg = m\omega^2 l \quad \text{neboli} \quad l = \frac{kg}{\omega^2}.$$

b) Situace je znázorněna na obr. 35. Úlohu budeme řešit ve vztažné soustavě neinerciální. Setrvačná síla odstředivá F_0 má velikost $F_0 = mr\omega^2 = ml\omega^2 \sin \alpha$ a její složky F_{01} a F_{02} mají velikosti

$$F_{01} = F_0 \sin \alpha = ml\omega^2 \sin^2 \alpha$$

a

$$F_{02} = F_0 \cos \alpha = ml\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Tíhová síla G má složky o velikostech

$$G_1 = mg \cos \alpha \quad \text{a} \quad G_2 = mg \sin \alpha.$$

Síla statického tření má velikost

$$F_t = k|F_{02} - G_2|$$

a tato velikost se musí rovnat velikosti výslednice sil F_{01} a G_1 . Odtud dostaneme podmínku

$$k|F_{02} - G_2| = F_{01} + G_1. \quad (1)$$

Může být nyní buď $F_{02} > G_2$, nebo $F_{02} < G_2$; případ $F_{02} = G_2$ vyloučíme, poněvadž pravá strana (1) je od nuly různá.

V prvním případě vychází z (1)

$$l = \frac{g}{\omega^2 \sin \alpha} \cdot \frac{1 + k \operatorname{tg} \alpha}{k - \operatorname{tg} \alpha} \quad (2)$$

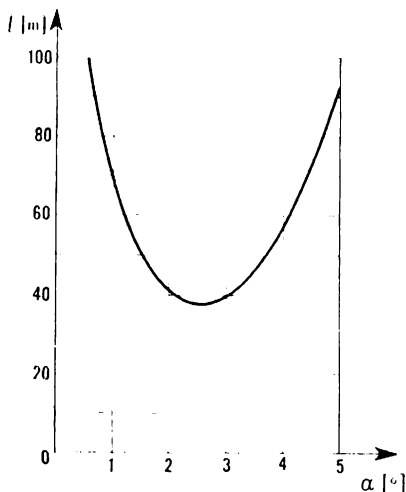
a v druhém případě

$$l = \frac{g}{\omega^2 \sin \alpha} \cdot \frac{k \operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + k}. \quad (3)$$

a v třetím případě vychází z podmínky $F_{01} = G_1$

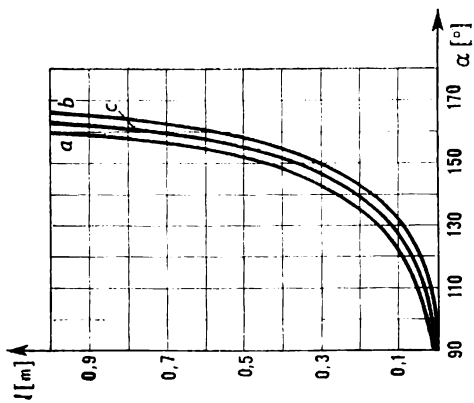
$$l = \frac{g}{\omega^2 \sin \beta} \cdot \cotg \beta. \quad (7)$$

Vztah (5) má fyzikální význam pro $\tg \beta > k$, vztah (6) pro $0 < \tg \beta \leq \frac{1}{k}$, vztah (7) pro $\tg \beta > 0$.

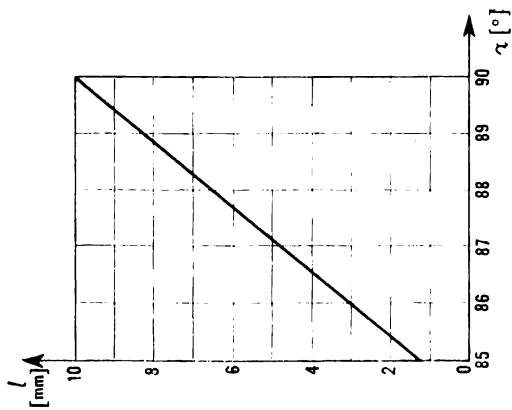


Obr. 37

d) Funkce $l = f(\alpha)$, které jsou v řešení označeny (2), (3), (5), (6) a (7), platí po řadě v oborech (přibližně): $0 < \alpha < 5^\circ 40'$; $84^\circ 20' \leq \alpha < 90^\circ$; $5^\circ 40' < \beta < 90^\circ$, tj. $90^\circ < \alpha < 174^\circ 20'$; $0 < \beta \leq 84^\circ 20'$, tj. $95^\circ 40' \leq \alpha < 180^\circ$; $0 < \beta < 90^\circ$, tj. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Na obr. 37 je znázorněna funkce (2), na obr. 38 funkce (3), na obr. 39 křivka a



Obr. 39



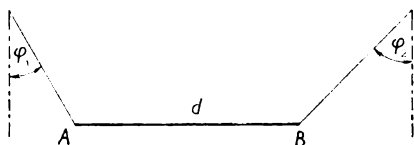
Obr. 38

znázorňuje funkci (5), křivka b funkci (6) a křivka c funkci (7).

4. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Abychom určili polohu těžiště velmi tenké nehomogenní tyče délky d , zavěsíme tyč v koncových bodech A , B na dvě vlákna tak, že osa tyče je vodorovná (obr. 40). Vlákna svírají se svislým směrem ostré úhly φ_1 , φ_2 . Hmotnost vláken je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti tyče.

a) Určete polohu těžiště tyče, znáte-li hodnoty veličin d , φ_1 , φ_2 .



Obr. 40

Proveďte diskusi. Ověřte správnost výsledku pro $\varphi_1 = \varphi_2$.

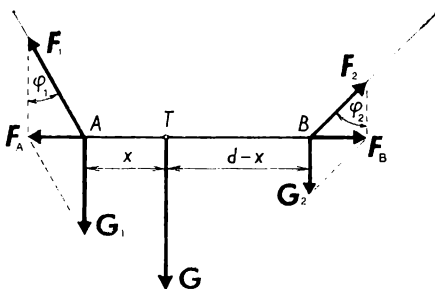
b) Po obecném vyřešení úlohy řešte pro hodnoty: $d = 2,0$ m, $\varphi_1 = 30^\circ$, $\varphi_2 = 45^\circ$.

c) Ověřte správnost výsledku úlohy b) jejím grafickým řešením ve vhodném měřítku.

d) Uvažte, jak je možno využít uvedeného postupu určení polohy těžiště velmi tenké nehomogenní tyče pro těleso nehomogenní, libovolného tvaru.

Řešení:

a) Předpokládáme, že tyč je dokonale tuhé těleso; označme T její těžiště. Zanedbáváme příčné rozměry tyče vzhledem k délce, můžeme ji proto zobrazit úsečkou. Označme (obr. 41) $AT = x$, $TB = d - x$. Tíhovou sílu G , která



Obr. 41

působí na tyč, rozložíme na svislé složky $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$, působíště první složky je v A , druhé v B .

Pro jejich velikosti platí $G = G_1 + G_2$, (1)

$$G_1 x = G_2 (d - x). \quad (2)$$

V bodě A působí na tyč síla $\mathbf{G}_1$ a tahová síla $\mathbf{F}_1$ ve směru vlákna; jejich výslednice $\mathbf{F}_A$ má směr vodorovný. Podobně výslednice sil $\mathbf{G}_2$ a $\mathbf{F}_2$ v bodě B je síla $\mathbf{F}_B$, která má také vodorovný směr. Tyč je v rovnovážné poloze, proto platí

$$F_A = F_B. \quad (3)$$

Z obrázku plyne:

$$F_A = G_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad F_B = G_2 \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (4)$$

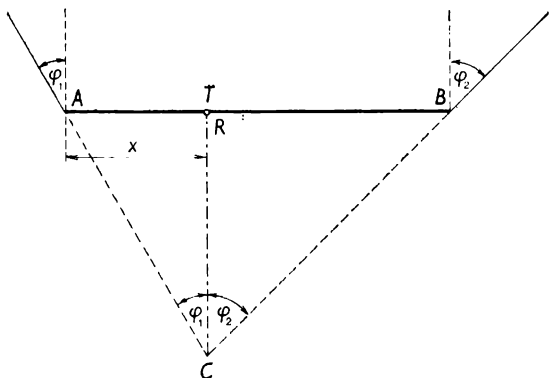
Z (3), (4) a (1) vyplývá

$$G_1 = \frac{G \operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}, \quad G_2 = \frac{G \operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}. \quad (5)$$

Dosadíme-li (5) do (2), dostaneme

$$x = \frac{d \operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}, \quad d - x = \frac{d \operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}.$$

Pro $\varphi_1 \gtrless \varphi_2$ je $AT \gtrless TB$.



Obr. 42

- b) Po dosazení daných hodnot dostaneme $AT \doteq 0,72$ m.
- c) Grafické řešení, které vyplývá z obr. 40, je provedeno na obr. 42 (v měřítku 1 : 40).
- d) Na povrchu tělesa zvolíme dva body A_1 a B_1 , v nich zavěsíme těleso na dvě vlákna tak, že spojnice A_1B_1 je vodorovná. V rovnovážné poloze jsou úsečka A_1B_1 a přímky, v nichž leží vlákna, v téže svislé rovině. Obě přímky se protínají v bodě C_1 , kterým proložíme rovinu ϱ_1 kolmou k úsečce A_1B_1 . V této rovině leží těžiště tělesa. Na povrchu tělesa zvolíme další dva body A_2 a B_2 tak, že jejich spojnice není rovnoběžná s A_1B_1 , a postup opakujeme. Dostaneme rovinu ϱ_2 . Na průsečnici t rovin ϱ_1 a ϱ_2 leží těžiště tělesa. Konečně zvolíme na povrchu tělesa body A_3 a B_3 tak, že jejich spojnice není rovnoběžná ani s A_1B_1 , ani s A_2B_2 , a postup opakujeme. Dostaneme rovinu ϱ_3 a její průsečík s přímkou t určuje těžiště T tělesa.

5. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Těleso tvaru rotačního válce se skládá ze dvou homogenních válců o společné podstavě. Hustota prvního válce je ρ_1 a jeho výška je h_1 ; hustota druhého válce je ρ_2 a výška h_2 , platí $\rho_1 > \rho_2$, $h_1 < h_2$.

a) Válec plove na vodě tak, že jeho rotační osa je svislá. Určete podmínku, za které je jeho rovnovážná poloha stálá.

b) Do které hloubky pod povrchem vody se ponoří spodní podstava válce, který plove v rovnovážné poloze stálé?

c) Určete vzdálenost těžiště tělesa od působíště vztlakové síly v případě b).

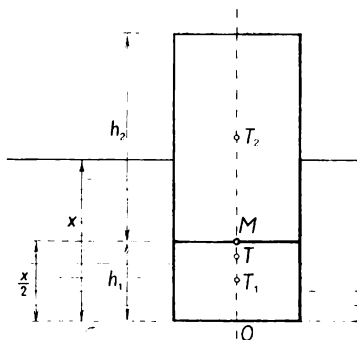
d) Určete hustotu kapaliny, do které se právě celý válec ponoří.

e) Po obecném vyřešení úlohy řešte pro hodnoty:

$\rho_1 = 7,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_2 = 7,0 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-3}$, $h_1 = 1,0 \text{ cm}$, $h_2 = 29 \text{ cm}$.

Řešení:

a) Podle obr. 43 je T_1 těžiště prvního válce, T_2 těžiště



Obr. 43

druhého válce, T těžiště celého tělesa, O střed volné podstavy prvního válce. Válec plove ve vodě se svislou rotační osou v rovnovážné poloze stálé, je-li jeho těžiště T pod působištem M vztlakové síly. Je-li plošný obsah společné podstavy S , platí pro tíhy válců

$$G_1 = Sh_1\rho_1g, \quad G_2 = Sh_2\rho_2g.$$

Pro polohu těžiště T celého tělesa platí

$$\frac{TT_1}{TT_2} = \frac{G_2}{G_1} = \frac{h_2\rho_2}{h_1\rho_1}$$

a odtud

$$\frac{TT_1}{T_1T_2} = \frac{h_2\rho_2}{h_1\rho_1 + h_2\rho_2}.$$

Protože $T_1T_2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$, vychází

$$TT_1 = \frac{h_2\rho_2(h_1 + h_2)}{2(h_1\rho_1 + h_2\rho_2)}.$$

Poloha těžiště T je určena vzdáleností

$$OT = TT_1 + OT_1 = \frac{h_1^2\rho_1 + 2h_1h_2\rho_2 + h_2^2\rho_2}{2(h_1\rho_1 + h_2\rho_2)}. \quad (1)$$

Plove-li válec se svislou osou ve vodě, ponoří se jeho podstava do hloubky x . Působíště M vztlakové síly je ve vzdálenosti $\frac{x}{2}$ od ponořené podstavy. Je-li ve vodě ponořena volná podstava prvního válce, je podmínka plování válce se svislou osou v rovnovážné poloze stálé vyjádřena vztahem

$$OT < \frac{x}{2}. \quad (2)$$

Je-li ve vodě ponořena volná podstava druhého válce, je podmínka pro plování válce se svislou osou v rovnovážné poloze stále dána vztahem

$$h_1 + h_2 - OT < \frac{x}{2}. \quad (3)$$

Poněvadž podle zadání je $\varrho_1 > \varrho_2$, platí $OT < \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ a podmínka (3) přejde ve tvar

$$\frac{1}{2}(h_1 + h_2) < \frac{x}{2},$$

což není možné, poněvadž pro hloubku x ponoru plovoucího tělesa musí platit

$$x \leq h_1 + h_2.$$

Z toho vyplývá, že těleso nemůže plovat v rovnovážné poloze stále, je-li do vody ponořena volná podstava druhého válce.

b) Hloubka x ponořené podstavy ve vodě vyplývá z rovnosti tíhy tělesa a tíhy vody jím vytlačené

$$Sh_1\varrho_1g + Sh_2\varrho_2g = Sx\varrho_0g,$$

kde ϱ_0 je hustota vody. Odtud plyne

$$x = \frac{h_1\varrho_1 + h_2\varrho_2}{\varrho_0}. \quad (4)$$

Podmínka (2) tím přejde ve vztah

$$\frac{h_1^2\varrho_1 + 2h_1h_2\varrho_2 + h_2^2\varrho_2}{h_1\varrho_1 + h_2\varrho_2} < \frac{h_1\varrho_1 + h_2\varrho_2}{\varrho_0}.$$

c) Pro vzdálenost těžiště T od působišť M vztlakové síly

platí

$$MT = \frac{x}{2} - OT = \frac{h_1 \varrho_1 + h_2 \varrho_2}{2 \varrho_0} - \frac{h_1^2 \varrho_1 + 2 h_1 h_2 \varrho_2 + h_2^2 \varrho_2}{2 (h_1 \varrho_1 + h_2 \varrho_2)}.$$

d) Jestliže se těleso právě celé ponoří do kapaliny o hustotě ϱ , platí

$$Sh_1 \varrho_1 g + Sh_2 \varrho_2 g = S(h_1 + h_2) \varrho g$$

a odtud

$$\varrho = \frac{h_1 \varrho_1 + h_2 \varrho_2}{h_1 + h_2}.$$

Dosadíme-li do vztahů (1) a (4) dané hodnoty, dostaneme

$$OT \doteq 0,11 \text{ m} \quad \text{a} \quad x \doteq 0,27 \text{ m}.$$

Pro zadané hodnoty je splněna podmínka (2). Těleso plove ve vodě v rovnovážné poloze stále se svislou osou, je-li do vody ponořena volná podstava prvního válce.

Válec se právě celý ponoří, je-li hustota kapaliny $\varrho = 9,1 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-3}$.

6. úloha (navrhol dr. Ivan Náter)

Určenie súčiniteľa vnútorného trenia kvapaliny Stokesovou metódou

Pomôcky:

Vysoký sklenený valec (trubica s priemerom aspoň 3 cm, asi 120 cm dlhá, dolu dobre uzavretá), transformátorový olej alebo iná vhodná viskózná kvapalina, hustomer (Mohrove váhy), mikrometer, stopky, citlivé váhy so závažím, oceľové guľôčky s priemerom najviac 1 mm, milimetrové meradlo.

Úvod:

Na guľu, ktorá se pohybuje vo viskóznej kvapaline, pôsobí sila tiaže, vztlaková sila podľa Archimedovho zákona a sila odporu prostredia vyjadrená Stokesovým

vzťahom

$$F = 6\pi\eta rv,$$

kde η je súčiniteľ vnútorného trenia kvapaliny, r polomer pohybujúcej sa guľôčky a v jej rýchlosť. Ak necháme v kvapaline guľôčku padať, dosiahne maximálnu rýchlosť $v_{\max}$, keď sú všetky tieto tri sily v rovnováhe. Guľôčka sa ďalej pohybuje rovnomerne touto maximálnou rýchlosťou.

Úlohy:

1. Z podmienky rovnováhy síl odvodte vzťah pre výpočet súčiniteľa vnútorného trenia pomocou známej rýchlosti $v_{\max}$.

2. Urobte merania:

a) Určte hmotnosť jednej guľôčky vážením väčšieho počtu guľôčiek.

b) Odmerajte priemer guľôčky (mikrometrom). Meranie opakujte aspoň päťkrát na rozličných guľôčkách.

c) Určte hustotu kvapaliny. Meranie hustomerom opakujte aspoň päťkrát.

d) Na trubici s olejom si ohraničte značkami dráhy rozličných dĺžok (napr. 70 cm, 80 cm, 90 cm) tak, aby dráhy začínali aspoň 20 cm pod povrchom oleja. Potom vpusťte guľôčku pokojným ponorením do oleja a odmerajte čas, za ktorý guľôčka prejde niektorú vymedzenú dráhu. Pre každú dráhu opakujte meranie aspoň päťkrát. Za predpokladu, že pohyb guľôčky je na celej dráhe rovnomerný, vypočítajte $v_{\max}$. Namerané hodnoty zapíšte do vhodných tabuliek, vypočítajte aritmetické priemery z hodnôt získaných opakovaným meraním a ich relatívne a absolútne chyby.

3. Vypočítajte súčiniteľ vnútorného trenia kvapaliny a relatívnu aj absolútnu chybu tohto výsledku. Uvážte,

ktorá z meraných hodnôt najviac ovplyvní presnosť vy-
počítanej hodnoty.

Riešenie:

1. Na guľôčku pôsobí zvislo nadol tiaž guľôčky $G = mg$
zvislo nahor vztlaková sila $F_v = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ a sila odporu
prostredia daná vzťahom $F = 6\pi\eta r v$.

Guľôčka sa bude pohybovať rovnomerným pohybom
s maximálnou rýchlosťou $v_{\max}$ zvislo nadol, ak pôsobiace
sily budú v rovnováhe.

$$mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g + 6\pi\eta r v.$$

Tabulka 14

Č.	k počet kuličiek	$k m$ [g]	m [g]	Δ_+ [g]
1	10	0,89	0,0890	+ 0,0002
2	40	3,55	0,0888	+ 0,0004
3	20	1,79	0,0894	
4	30	2,69	0,0896	
5	50	4,46	0,0892	
			$\bar{m} = 0,0892$	$\Sigma\Delta_+ = 0,0006$

Z tejto rovnice určíme vzťah pre výpočet súčiniteľa vnútorného trenia v kvapaline:

$$\eta = \frac{mg - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho}{6\pi r v}, \quad [\eta] = \text{Nsm}^{-2}. \quad (1)$$

2. a) Meranie hmotnosti m oceľových guľôčiek

Namerané hodnoty sú v tabuľke 14.

Pravdepodobná chyba priemernej hodnoty je daná vzťahom

$$\vartheta(m) = \frac{5}{3} \frac{\Sigma \Delta_+}{n(n-1)},$$

kde n je počet meraní. Pre 5 meraní je $\vartheta(\bar{m}) = \frac{1}{6} \Sigma \Delta_+.$

Pre naše merania je $\vartheta(\bar{m}) = 0,0001 \text{ g}.$

Relatívna chyba priemeru je

$$\vartheta_r(\bar{m}) = \frac{\vartheta(\bar{m})}{\bar{m}} = \frac{0,0001 \text{ g}}{0,0892 \text{ g}} \doteq 0,001 = 0,1 \text{ ‰}.$$

Hmotnosť oceľovej guľôčky je $m = (0,0892 \pm 0,0001) \text{ g}.$

b) Meranie priemeru d guľôčky mikrometrom

Namerané hodnoty sú v tabuľke 15.

Pravdepodobná chyba priemernej hodnoty $\vartheta(\bar{d}) = 0,0026 \text{ mm} \doteq 0,003 \text{ mm}.$ Hodnota priemeru guľôčky je $d = (2,472 \pm 0,003) \text{ mm}.$

Relatívna chyba je $\vartheta_r(\bar{d}) = \frac{0,0026 \text{ mm}}{2,472 \text{ mm}} \doteq 0,001 = 0,1 \text{ ‰}.$

c) Meranie hustoty transformátorového oleja hustomerom

Namerané hodnoty sú v tabuľke 16.

Tabulka 15

Č.	d [mm]	Δ_+ [mm]
1	2,46	+ 0,012
2	2,47	+ 0,002
3	2,48	
4	2,48	
5	2,47	+ 0,002
	$\bar{d} = 2,472$	$\Sigma\Delta_+ = 0,016$

Tabulka 16

Č.	ϱ [g cm ⁻³]	Δ_+ [g cm ⁻³]
1	0,875	
2	0,88	
3	0,87	+ 0,005
4	0,87	+ 0,005
5	0,88	
	$\bar{\varrho} = 0,875$	$\Sigma\Delta_+ = 0,01$

Pravdepodobná chyba priemernej hodnoty je $\vartheta(\bar{\varrho}) = 0,0016 \text{ g cm}^{-3} \doteq 0,002 \text{ g cm}^{-3}$.

Hustota oleja má hodnotu $\varrho = (0,875 \pm 0,002) \text{ g cm}^{-3}$.

Relatívna chyba je $\vartheta_r() = \frac{0,0016 \text{ g cm}^{-3}}{0,875 \text{ g cm}^{-3}} \doteq 0,002 = 0,2 \%$.

d) Meranie maximálnej rýchlosti $v_{\max}$

Pretože guľôčka sa pohybuje rovnomerným pohybom,

je $v_{\max} = \frac{h}{t}$, kde h je výškový rozdiel značiek a t je čas,

za ktorý guľôčka prebehne dráhu h . Urobili sme merania pre 3 rozličné hodnoty h . Odhadujeme, že meranie dĺžky h je zaťažené chybou $\pm 5 \text{ mm}$.

Namerané hodnoty sú v tabuľke 17.

Tabuľka 17

Č.	$h_1 = 0,800 \text{ m}$		$h_2 = 0,700 \text{ m}$		$h_3 = 0,600 \text{ m}$	
	$t_1 \text{ [s]}$	$\Delta_+ \text{ [s]}$	$t_2 \text{ [s]}$	$\Delta_+ \text{ [s]}$	$t_3 \text{ [s]}$	$\Delta_+ \text{ [s]}$
1	5,8		4,8	+0,14	4,1	+0,06
2	5,6	+0,08	4,9	+0,04	4,0	+0,16
3	5,7		5,1		4,2	
4	5,5	+0,18	4,9	+0,04	4,3	
5	5,8		5,0		4,2	
	$\bar{t}_1 = 5,68$	$\Sigma = 0,26$	$\bar{t}_2 = 4,94$	$\Sigma = 0,22$	$\bar{t}_3 = 4,16$	$\Sigma = 0,22$

Pravdepodobné chyby priemerných hodnôt $\bar{t}$ sú pre jednotlivé h :

$$\vartheta_1(\bar{t}) = 0,043 \text{ s} \pm 0,04 \text{ s}; \quad \vartheta_2(\bar{t}) = 0,036 \text{ s} \pm 0,04 \text{ s};$$

$$\vartheta_3(\bar{t}) = 0,036 \text{ s} \pm 0,04 \text{ s};$$

relatívne chyby priemerných hodnôt $\bar{t}$ pre jednotlivé h sú:

$$\vartheta_{r1}(\bar{t}) \pm 0,8 \% ; \quad \vartheta_{r2}(\bar{t}) \pm 0,7 \% ; \quad \vartheta_{r3}(\bar{t}) \pm 0,9 \%$$

Pre maximálne rýchlosti pre jednotlivé h vychádza:

$$v_{\max 1} = (0,140 \pm 0,002) \text{ ms}^{-1};$$

$$v_{\max 2} = (0,141 \pm 0,002) \text{ ms}^{-1};$$

$$v_{\max 3} = (0,144 \pm 0,002) \text{ ms}^{-1};$$

priemerná hodnota maximálnej rýchlosti vychádza

$$\bar{v}_{\max} = (0,142 \pm 0,006) \text{ ms}^{-1}.$$

Relatívna chyba vypočítanej hodnoty maximálnej rýchlosti je $\vartheta_r(\bar{v}_{\max}) \doteq 0,04 = 4 \%$.

3. Výpočet súčiniteľa vnútorného trenia:

Namerané hodnoty sú

$$m = (8,92 \pm 0,01) \cdot 10^{-5} \text{ kg}, \quad \vartheta_r(\bar{m}) = 0,001,$$

$$g = 9,81 \text{ ms}^{-2},$$

$$r = \frac{1}{2} d = (1,236 \pm 0,002) \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad \vartheta_r(\bar{r}) = 0,001,$$

$$\rho = (875 \pm 2) \text{ kg m}^{-3}, \quad \vartheta_r(\rho) = 0,002,$$

$$v_{\max} = (0,142 \pm 0,006) \text{ m s}^{-1}, \quad \vartheta_r(\bar{v}_{\max}) = 0,04.$$

Po dosadení do vzťahu (1) — dosadzujeme priemerné hodnoty veličín — dostaneme priemernú hodnotu súčiniteľa vnútorného trenia kvapaliny

$$\bar{\eta} = 0,260 \text{ Nsm}^{-2}.$$

Relatívna chyba je $\vartheta_r(\bar{\eta}) \doteq 0,004 = 0,4 \%$.

Pre absolútnu chybu súčiniteľa vnútorného trenia transformátorového oleja dostaneme

$$\vartheta(\bar{\eta}) = \vartheta_r(\bar{\eta}) \cdot \bar{\eta} \doteq 0,001 \text{ Nsm}^{-2}.$$

Vypočítaná hodnota súčiniteľa vnútorného trenia transformátorového oleja je

$$\eta = (0,260 \pm 0,001) \text{ N s m}^{-2}.$$

Vypočítaná hodnota súčiniteľa je zaťažená hlavne chybami pri meraní hustoty transformátorového oleja a pri meraní dráhy h , ako vidieť z absolútnych chýb nameraných veličín.

7. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

V dutém rotačním válci se svislou osou se posunuje vzduchotěsně, bez tření píst ve směru osy. Výška válce je $2d$, jeho průřez je S ; hmotnost pístu je m , tloušťka pístu je zanedbatelná vzhledem k délce d . Každá z obou podstav válce je opatřena trubicí s kohoutem. Píst je upevněn uprostřed válce. Oba kohouty jsou otevřeny tak, že v obou polovinách válce je vzduch, jehož tlak se rovná atmosférickému tlaku p_a vnějšího vzduchu.

a) Kohout u dolní podstavy válce se uzavře a píst se uvolní. Určete posunutí x pístu, jestliže píst dosáhne rovnovážné polohy.

b) V počáteční poloze pístu se oba kohouty uzavřou a píst se uvolní. Určete posunutí y pístu, jestliže píst dosáhne rovnovážné polohy. Při uvedených dějích je teplota vzduchu stálá. Vzduch považujeme za dokonalý plyn.

Po obecném řešení řešte úlohu pro hodnoty: $d = 2,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}$, $S = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, $m = 5,0 \text{ kg}$, $p_a = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$, hustota vzduchu za daného atmosférického tlaku a teploty $\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$.

Řešení:

a) Označme x posunutí pístu při dosažení rovnovážné polohy. Počáteční stav plynu v dolní části válce: tlak p_a , objem dS ; konečný stav téhož plynu po dosažení rovnovážné polohy pístu: tlak p_1 , objem $(d - x)S$. Z Boyleova zákona plyne

$$p_a dS = p_1 (d - x) S$$

a odtud dostaneme

$$p_1 = \frac{p_a d}{d - x} . \quad (1)$$

Síly, které působí na píst v rovnovážné poloze: svisle

dolů tíhová síla $\mathbf{G}$, $G = mg$, a svisle vzhůru tlaková síla $\mathbf{F}$, $F = (p_1 - p_a) S$. Poněvadž píst je v rovnovážné poloze, platí

$$mg = (p_1 - p_a) S.$$

Po dosazení z (1) a po úpravě dostaneme

$$x = \frac{mgd}{mg + p_a S}. \quad (2)$$

b) Označme y posunutí pístu po dosažení rovnovážné polohy. Počáteční a konečný stav plynu v horní části válce: tlak p_a , objem dS ; tlak p_1 , objem $(d + y) S$. Podle Boyleova zákona platí

$$p_a dS = p_1 (d + y) S. \quad (3)$$

Počáteční a konečný stav plynu v dolní části válce: tlak p_a , objem dS ; tlak p_2 , objem $(d - y) S$. Z Boyleova zákona plyne

$$p_a dS = p_2 (d - y) S. \quad (4)$$

Síly, které působí na píst v rovnovážné poloze: svisle dolů působí tíhová síla $\mathbf{G}$ a tíha vzduchu v horní části válce $\mathbf{G}_1$, $G_1 = dS\varrho g$ (ϱ je hustota vzduchu); svisle vzhůru tlaková síla $\mathbf{F}$, $F = (p_2 - p_1) S$. V rovnovážném stavu platí

$$mg + dS\varrho g = (p_2 - p_1) S. \quad (5)$$

Řešíme soustavu rovnic (3), (4) a (5). Po vyloučení p_1 a p_2 dostaneme pro y kvadratickou rovnici

$$y^2 g(m + dS\varrho) + 2yp_a dS - gd^2(m + dS\varrho) = 0.$$

Diskriminant rovnice je kladný, rovnice má tedy dva reálné kořeny. Úloze vyhovuje jen kladný kořen:

$$y = \frac{-p_a dS + \sqrt{(p_a dS)^2 + [gd(m + dS\varrho)]^2}}{g(m + dS\varrho)}. \quad (6)$$

Po dosazení daných hodnot veličin do vztahů (2) a (6) dostaneme:

$$x = \frac{1}{15}m \doteq 6,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad y \doteq 4,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Dvě pružiny jsou zavěšeny vedle sebe. Jejich počáteční délky jsou stejné. Levá pružina má n -krát větší tuhost než pravá; působí-li tedy na ně stejně velké tahové síly, je prodloužení pravé pružiny n -krát větší než levé; n je celé kladné číslo.

Na volné konce pružin upevníme konce homogenní tyče o hmotnosti m a délce l , všude stejného průřezu; přitom jsou osy pružin svislé.

V které vzdálenosti x od levého konce tyče zavěsíme závaží o hmotnosti m_1 tak, aby v rovnovážné poloze soustavy byla podélná osa tyče vodorovná?

Proveďte diskusi řešení a stanovte podmínku jeho reálnosti.

Řešení:

Levou pružinu napíná síla $F_l = \frac{mg}{2} + m_1g \frac{l-x}{l}$,

pravou pružinu napíná síla $F_p = \frac{mg}{2} + m_1g \frac{x}{l}$.

Tyč je v rovnovážné poloze s vodorovnou podélnou osou, platí-li $F_l = nF_p$. V tom případě je splněn vztah

$$x = l \frac{2m_1 - m(n-1)}{2m_1(n+1)}$$

a po úpravě

$$x = \frac{l}{n+1} \left[1 - \frac{m(n-1)}{2m_1} \right]. \quad (1)$$

Diskuse:

1. Je-li $n = 1$, potom $x = \frac{l}{2}$ a žádaná rovnovážná poloha nastane pro každou hodnotu hmotnosti $m_1 (m_1 > 0)$.

2. Je-li $n > 1$, potom $x < \frac{l}{n+1}$, poněvadž druhý člen v hranaté závorce vztahu (1) je různý od nuly. Poněvadž pro fyzikální řešení musí být $x \geq 0$, musí platit

$$1 \geq \frac{m(n-1)}{2m_1}.$$

Z toho plyne podmínka

$$m_1 \geq \frac{1}{2} m(n-1).$$

Z bodů 1 a 2 plyne, že x leží v intervalu $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$,

a pro hmotnost m_1 platí $m_1 \geq \frac{1}{2} m(n-1)$.

2. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

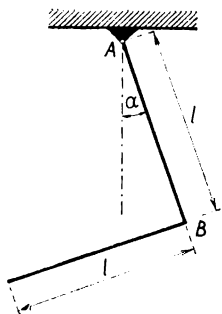
Tenký homogenní tuhý prut délky $2l$, všude stejného průřezu, je uprostřed ohnut do pravého úhlu.

a) Určete polohu jeho těžiště.

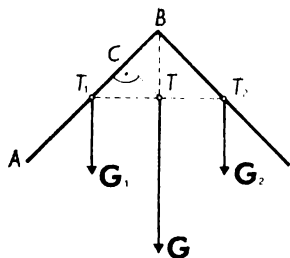
b) Prut zavěsíme v koncovém bodě v kloubu A tak, že je otáčivý ve svislé rovině (obr. 44). Určete odchylku α ramena AB od svislého směru, je-li soustava v rovnovážné poloze.

Řešení:

a) Těžiště ramen T_1, T_2 leží uprostřed ramen (obr. 45). Trojúhelník TT_1C je pravoúhlý rovnoramenný; proto platí $CT_1 = CT = \frac{l}{4}$. Těžiště T tělesa leží na ose pravého



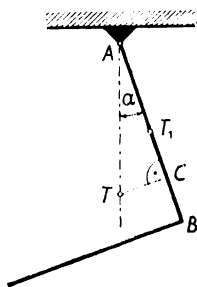
Obr. 44



Obr. 45

úhlu ohnutého prutu ve vzdálenosti $\frac{l}{4}$ od každého ramena.

b) Při zavěšení prutu v bodě A (obr. 46) je těžnice AT



Obr. 46

svislá. Odchylku α ramena AB od svislého směru určíme z trojúhelníku ATC, kde $TC = \frac{l}{4}$ a $AC = AT_1 + T_1C = \frac{3l}{4}$.

Potom pro odchylku α platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \quad \alpha \doteq 18^\circ 30'.$$

3. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

V nádobě stálého objemu V je tlak vzduchu rovný atmosférickému tlaku p_0 . Pistovou vývěvou se odčerpává vzduch z nádoby tak, že při každém cyklu se odčerpá vzduch o objemu V_0 . Teplota vzduchu v nádobě se nemění.

a) Určete tlak p_1 vzduchu v nádobě po n cyklech vývěvy.
b) Po dosažení tlaku p_1 vzduchu v nádobě se kompresorem znovu tlak vzduchu zvětšuje. Při každém cyklu kompresoru se dodá do nádoby vzduch téhož objemu V_0 za atmosférického tlaku. Určete tlak p_2 vzduchu v nádobě po n cyklech kompresoru. Rozhodněte, který ze tří vztahů $p_2 \gtrless p_0$ platí. Odpověď odůvodněte.

c) Vyjádřete graficky na milimetrovém papíře změnu tlaku vzduchu v nádobě v procentech atmosférického tlaku po jednotlivých cyklech vývěvy a kompresoru pro

$$V_0 = \frac{V}{10}, \quad n = 10.$$

Poznámka: Podle zákona Daltonova se celkový tlak plynu v uzavřené nádobě rovná součtu částečných tlaků.

Řešení:

a) Počáteční stav plynu v nádobě je určen objemem V a tlakem p_0 . Po prvním cyklu vývěvy klesne tlak vzduchu v nádobě na p'_1 . Předpokládáme, že v pracovním prostoru vývěvy o objemu V_0 bylo před připojením k nádobě vakuum. Podle Boyleova zákona platí:

$$p_0 V = p'_1 (V + V_0); \quad p'_1 = p_0 \frac{V}{V + V_0}.$$

Po oddělení pracovního prostoru vývěvy má vzduch v nádobě opět objem V a tlak p'_1 . Při druhém cyklu se zvětší objem tohoto vzduchu na $V + V_0$ a tlak klesne na p'_2 . Podle Boyleova zákona platí

$$p'_1 V = p'_2 (V + V_0); \quad p'_2 = p'_1 \frac{V}{V + V_0} = p_0 \left(\frac{V}{V + V_0} \right)^2 \text{ atd.}$$

Po n -tém cyklu je tlak vzduchu v nádobě

$$p'_n = p_0 \left(\frac{V}{V + V_0} \right)^n = p_1. \quad (1)$$

b) Stav vzduchu v nádobě na počátku druhé řady dějů je určen objemem V a tlakem p_1 . Při prvním cyklu kompresoru se oddělí z atmosférického vzduchu část o objemu V_0 a tlaku p_0 , která po uzavření v nádobě nabývá objemu V a tlaku p'_0 . Podle Boyleova zákona platí

$$p_0 V_0 = p'_0 V; \quad p'_0 = \frac{p_0 V_0}{V}.$$

O tento parciální tlak se podle zákona Daltonova zvětší tlak vzduchu v nádobě a nabývá tedy hodnoty

$$p'_1 = p_1 + p'_0 = p_1 + \frac{p_0 V_0}{V}.$$

Děj se opakuje při každém cyklu kompresoru. Výsledný tlak vzduchu v nádobě je tedy po n cyklech kompresoru

$$p_2 = p_1 + n \frac{p_0 V_0}{V} = p_0 \left[\left(\frac{V}{V + V_0} \right)^n + \frac{n V_0}{V} \right]. \quad (2)$$

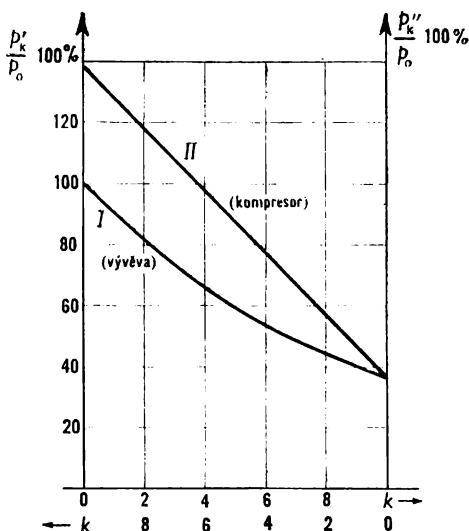
Poněvadž při každém cyklu kompresoru se přidává vzduch o objemu V_0 a tlaku p_0 , platí $p_2 > p_0$; při každém cyklu vývěvy se odděluje vzduch téhož objemu V_0 , avšak o tlaku menším než p_0 .

$$c) \frac{p'_k}{p_0} = \left(\frac{V}{V + V_0} \right)^k = \left(\frac{10}{11} \right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 10, \quad (I)$$

$$\frac{p_k''}{p_0} = \left(\frac{V}{V + V_0} \right)^n + \frac{kV_0}{V} = \left(\frac{10}{11} \right)^{10} + \frac{k}{10} \quad (\text{II})$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\frac{p_k'}{p_0} \cdot 100 \%$	100	90,9	82,6	75,1	68,3	62,1	56,5	51,3	46,7	42,4	38,6
$\frac{p_k''}{p_0} \cdot 100 \%$	138,6	128,6	118,6	108,6	98,6	88,6	78,6	68,6	58,6	48,6	38,6

Grafy funkcí I a II jsou na obr. 47.



Obr. 47

I je funkce monotónně klesající s rostoucím k , II je lineární funkce stoupající s rostoucím k .

4. úloha (navrhol dr. Ivan Náter)

Viskózná kvapalina má hustotu ϱ a súčiniteľ viskozity η . Vo veľkej hĺbke h pod povrchom tejto kvapaliny je malá guľôčka s polomerom r a priemernou hustotou ϱ_0 , $r \ll h$, $\varrho_0 < \varrho$. Po uvoľnení guľôčka stúpa v kvapaline spočiatku za veľmi krátky čas t_0 zrýchleným pohybom, až dosiahne maximálnu rýchlosť. Touto rýchlosťou sa pohybuje ďalej a za čas t sa vynorí na povrchu kvapaliny. Určte čas t , ak predpokladáme, že platí $t_0 \ll t$. Riešte najskôr všeobecne, potom pre hodnoty $\varrho = 9 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-3}$, $\varrho_0 = 6 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-3}$, $\eta = 6 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-2} \text{ s}$, $r = 9 \text{ mm}$, $h = 36 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Riešenie:

Po uvoľnení v hĺbke h pod povrchom kvapaliny pôsobia na guľôčku tieto sily: tiaž guľôčky G , vztlaková sila F , odporová sila F_t podľa Stokesovho vzťahu. Spočiatku sa guľôčka pohybuje zrýchleným pohybom, preto sila F_t , ktorá je priamoúmerná rýchlosti, rastie. Pri kritickej rýchlosti v_k sa dosiahne rovnováha síl. Potom platí

$$\mathbf{G} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_t = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Ak orientujeme zvislú súradnicovú os nahor, priradíme veľkostiam síl F_t a G znamienko mínus, sile F znamienko plus. S vektorovou rovnicou (1) rovnocennú algebraickú rovnicu potom píšeme v tvare

$$F = G + F_t,$$

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \varrho g = \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho_0 g + 6 \pi \eta r v_k.$$

Odtiaľ

$$v_k = \frac{2r^2g(\varrho - \varrho_0)}{9\eta}.$$

Za čas t sa guľôčka pohybuje v kvapaline zvislo nahor stálou rýchlosťou v_k ; platí teda $h = v_k t$ a odtiaľ vyplýva

$$t = \frac{h}{v_k} = \frac{9h\eta}{2r^2g(\varrho - \varrho_0)} = 40 \text{ s.}$$

4. Úlohy kategórie D

Úlohy a jejich řešení recenzovali dr. Ivo Volf a Mojmír Simerský

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. Ivo Volf)

Vzájemná vzdálenost dvou stanic autobusu je $s = 12 \text{ km}$. Autobus projede tuto vzdálenost za dobu $t = 30 \text{ min}$ rovnoměrným pohybem. Autobusy vyjíždějí v intervalech po 5 minutách.

a) Kolik protijedoucích autobusů potká člověk, jede-li autobusem z jedné stanice na druhou?

b) Kolik autobusů jedoucích oběma směry míjí chodce, jde-li z jedné stanice na druhou stálou rychlostí $v = 6 \text{ km h}^{-1}$?

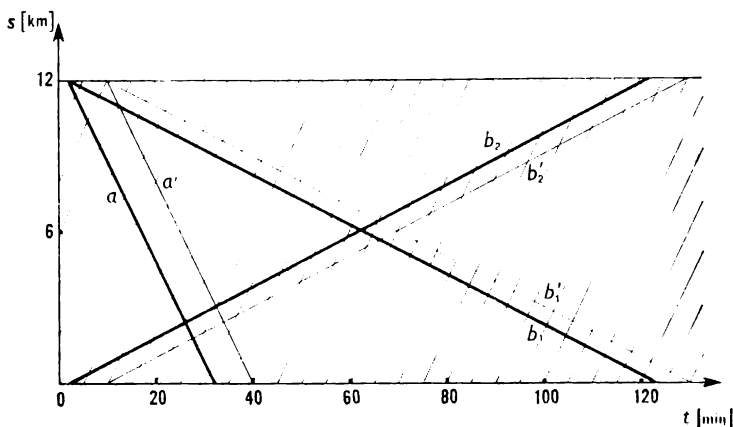
Úlohu řešte graficky.

Úlohu řešte také výpočtem a úvahou.

Řešení:

Grafické řešení:

Sestrojíme základní grafikon (obr. 48) jízdy autobusů jezdících v pětiminutových intervalech (stačí jedním směrem); je to soustava rovnoběžných úseček.



Obr. 48

a) Sestrojíme grafikon jednoho protijedoucího autobusu. V obecném případě je to např. úsečka a , která protíná 12 úseček základního grafikonu. Člověk jedoucí autobusem potká tedy 12 protijedoucích autobusů. Ve zvláštním případě, kdy čas odjezdu autobusu jedním směrem koinciduje s časem odjezdu některého autobusu v protisměru —, znázorňuje to např. úsečka a' — člověk v autobusu potká 13 protijedoucích autobusů.

b) Sestrojíme grafikony chůze v obou směrech — jsou to např. úsečky b_1, b_2 . Spočítáme pak, že chodce mijí 18 autobusů jedoucích týmž směrem a 30 jedoucích v protisměru — celkem 48 autobusů. Ve zvláštních případech (úsečky b_1', b_2') může být tento počet větší o 1 nebo o 2.

Početní řešení:

Označení veličin:

Δt intervaly, v nichž autobusy jezdí;

u rychlost autobusu.

a) Protijedoucí autobusy se setkávají v intervalech

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t}{2}.$$

Počet n potkávaných autobusů protijedoucích je tedy

$$n = \left[\frac{t}{\Delta t_1} \right] = \left[\frac{2t}{\Delta t} \right],$$

kde hranaté závorky značí tzv. celou část příslušného čísla. Pro zadané hodnoty vyjde $n = 12$; v případě koincidence je tento počet větší o 1, tedy 13.

b) Relativní rychlosti chodce vzhledem k autobusům jedoucím v protisměru a v témž směru mají velikosti

$$v_{1,2} = u \pm v.$$

Pro časové intervaly $\Delta t_{2,3}$, v nichž chodce míjejí autobusy, platí

$$\Delta t_{2,3} : \Delta t = u : (u \pm v). \quad (1)$$

Doba chůze mezi stanicemi je

$$t' = \frac{s}{v}. \quad (2)$$

Počet N autobusů, které chodce v obou směrech míjejí, je

$$N = \left[\frac{t'}{\Delta t_2} + \frac{t'}{\Delta t_3} \right].$$

Po úpravě a dosazení z (1) a (2) dostaneme

$$N = \left[\frac{2s}{v \cdot \Delta t} \right].$$

Pro zadané hodnoty vyjde $N = 48$. Pro případ jedné nebo dvou koincidencí je tento počet větší o 1 nebo o 2.

2. úloha (navrhl dr. Ivo Volf)

Elektrický vlak jede z místa A do místa B po trati délky s . Během doby t_1 má získat rychlost v , dále jede konstantní rychlostí v a začne brzdit ve vzdálenosti s_3 před místem B .

Určete:

- a) Zrychlení a_1 při rozjíždění,
- b) dráhu s_1 při rozjíždění,
- c) dobu brzdění t_3 ,
- d) velikost zrychlení a_2 v posledním úseku trati,
- e) délku dráhy s_2 rovnoměrné jízdy,
- f) dobu t_2 rovnoměrné jízdy,
- g) celkovou dobu t jízdy na trati s .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $s = 9$ km; $t_1 = 2$ min; $v = 100$ km h⁻¹; $s_3 = 1100$ m.

- h) Sestrojte grafy rychlosti a dráhy jako funkce času.

Řešení

a) Zrychlení při rozjíždění: $a_1 = \frac{v}{t_1}$.

b) Dráha při rozjíždění: $s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} v t_1$.

c) a d) Doby brzdění t_3 a velikost zrychlení a_2 v posledním úseku trati vypočítáme ze soustavy rovnic:

$$s_3 = v t_3 + \frac{1}{2} a_2 t_3^2,$$

$$v + a t_3 = 0.$$

Vyjde

$$t_3 = \frac{2s_3}{v}; \quad a_2 = -\frac{v^2}{2s_3}.$$

e) Délka dráhy s_2 rovnoměrné jízdy je určena:

$$s_2 = s - s_1 - s_3 = s - \frac{1}{2} v t_1 - s_3.$$

f) Doba t_2 rovnoměrné jízdy rovná se

$$t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{s - s_3}{v} - \frac{1}{2} t_1.$$

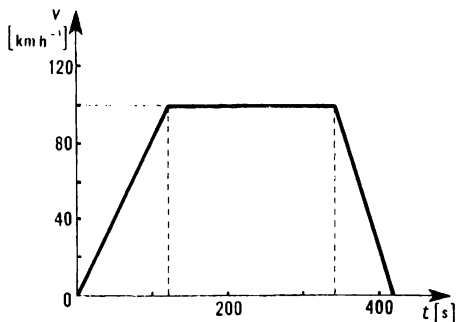
g) Celková doba t jízdy na trati s má velikost

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{2} t_1 + \frac{s + s_3}{v}.$$

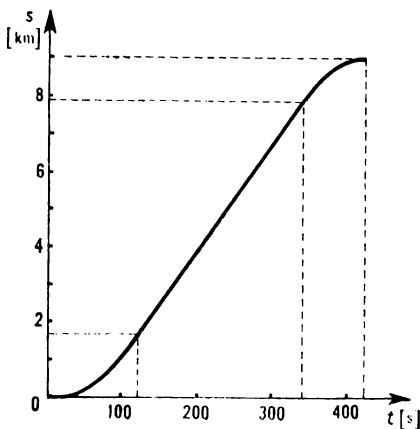
Pro zadané hodnoty vychází

$$\begin{aligned} a_1 &\doteq 0,23 \text{ m s}^{-2}; s_1 \doteq 1,7 \cdot 10^3 \text{ m}; t_3 \doteq 79 \text{ s}; a_2 = \\ &= -0,35 \text{ m s}^{-2}; s_2 \doteq 6,2 \cdot 10^3 \text{ m}; t_2 \doteq 2,2 \cdot 10^2 \text{ s}; \\ t &\doteq 4,2 \cdot 10^2 \text{ s}. \end{aligned}$$

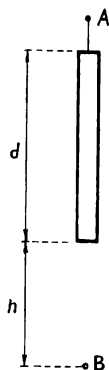
h) Graf rychlosti a dráhy jako funkce času jsou na obr. 49 a 50.



Obr. 49



Obr. 50



Obr. 51

3. úloha (navrhl dr. Ivo Volf)

Pravítko délky d je zavěšeno na stěně na krátkém vlákně. Pod ním je ve stěně velmi malý otvor B (obr. 51).

- V jaké výšce h nad otvorem B je dolní okraj pravítka, jestliže při pádu pravítka zakrývá otvor B po dobu t ?
- Stanovte, po jakou maximální dobu t_m může být otvor B pravítkem zakryt.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 30$ cm, $t = 0,10$ s, $g = 9,8$ m s⁻².

Řešení:

a) Označení veličin:

t_1 — doba od uvolnění pravítka do zakrytí otvoru dolním koncem pravítka,

t_2 — doba od uvolnění pravítka do odkrytí otvoru horním koncem pravítka.

Podle zákona volného pádu platí

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2; \quad h + d = \frac{1}{2} g t_2^2, \quad (1)$$

přičemž

$$t = t_2 - t_1. \quad (2)$$

Z (1) a (2) vyloučíme t_1 a t_2 a vyjádříme

$$h = \frac{g}{2} \left(\frac{d}{gt} - \frac{t}{2} \right)^2. \quad (3)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $h \doteq 0,32$ m.

b) Dobu t_m vypočítáme z (3) pro $h = 0$:

$$t_m = \sqrt{\frac{2d}{g}}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $t_m \doteq 0,25$ s.

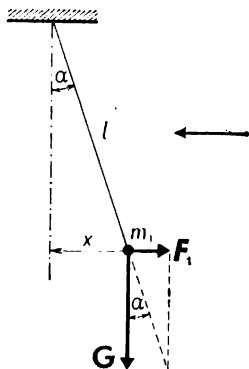
4. úloha (navrhl dr. Ivo Volf)

Vlak hmotnosti m se pohybuje stálou rychlostí v . Chlapec si zavěsil v oddělení jednoho vagónu kyvadlo, vytvořené z kuličky o hmotnosti m_1 a vlákna délky l , jehož hmotnost je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti kuličky. Když vlak začal brzdit s konstantním zrychlením a , vychýlila se kulička kyvadla ze své rovnovážné polohy o délku x ve vodorovném směru. Určete z těchto údajů velikost brzdící síly a délku dráhy, na níž se vlak zastavil.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $m = 5 \cdot 10^5$ kg; $v = 72$ km h⁻¹; $m_1 = 0,10$ kg; $l = 1,5$ m; $x = 0,10$ m; $g \doteq 10$ m s⁻².

Řešení:

Při brzdění působí na kuličku setrvačná síla F_1 o velikosti $F_1 = m_1 \cdot |a|$, kde a značí zrychlení uvažovaného rovno-



Obr. 52

měrně zpomaleného pohybu, a tíhová síla $\mathbf{G}$ o velikosti $G = m_1 g$. Pro úhel vychýlení α (obr. 52) platí jednak

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_1}{G} = \frac{|a|}{g}, \quad (1)$$

jednak

$$\sin \alpha = \frac{x}{l}. \quad (2)$$

Z (1) a (2) vyloučíme α a vypočítáme velikost zrychlení

$$|a| = g \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad (3)$$

takže brzdicí síla má velikost

$$F = mg \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}.$$

Ze vztahů platných pro pohyb rovnoměrně zpomalený

dostaneme pro délku brzdné dráhy

$$s = \frac{1}{2} \frac{v^2}{|a|}$$

a po dosazení z (3)

$$s = \frac{v^2 \sqrt{l^2 - x^2}}{2gx}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $F \doteq 3,3 \cdot 10^5 \text{ N}$; $s \doteq 300 \text{ m}$.

5. úloha (navrhl dr. Ivo Volf)

Stanovte objem broku užitím pyknometru a přímým měřením. Máte k dispozici tyto pomůcky: 50 broků, mikrometr, pyknometr, váhy, závaží, odměrný válec.

- Navrhněte postup měření.
- Proveďte měření.
- Stanovte absolutní a relativní chybu měření.

Řešení:

Měření objemu broku užitím pyknometru

a) Postup měření

Nejprve zvážíme n broků; jejich hmotnost označíme m_0 . Zvážíme pyknometr naplněný destilovanou vodou; hmotnost označíme m_1 . Přitom změříme teplotu vody t_1 . Nakonec zvážíme pyknometr s vodou, do něhož jsme vsypali broky; hmotnost označíme m_3 . Hmotnost vody, která vytekla při vsypání broků, je rovna rozdílu ($m_0 + m_1 - m_2$). Je-li hustota vody při teplotě t_1 rovna ϱ , potom její objem je určen vztahem

$$V = \frac{m_0 + m_1 - m_3}{\varrho}.$$

Objem V je roven objemu n broků, a proto objem jednoho

broku V_0 se rovná

$$V_0 = \frac{1}{n} V = \frac{m_0 + m_1 - m_3}{n \cdot \rho}.$$

b) Měření

Vázení jsme prováděli na laboratorních váhách zn. Meopta. Přívazkem 2 cg změnila se rovnovážná poloha o 1 dílek stupnice. Poněvadž předpokládáme, že naše odčítání na stupnici je zatíženo chybou $\pm 0,5$ dílku, byly naměřené hodnoty hmotností zatíženy chybou ± 1 cg. Vázení bylo prováděno metodou dvojího vážení. Rovnovážné polohy byly určovány ze tří výchylek.

Hmotnost 50 broků $m_0 = (25,65 \pm 0,01)$ g,

hmotnost pyknometru s vodou $m_1 = (82,77 \pm 0,01)$ g,

hmotnost pyknometru s vodou a broky $m_2 = (106,27 \pm 0,01)$ g.

Při měření byla teplota vody 22°C , tomu odpovídá v tabulkách hustota $\rho = 0,99777 \text{ g cm}^{-3}$.

Protože odečtení teploty je zatíženo chybou $\pm 0,5^\circ\text{C}$, je hustota vody

$$\rho = (0,9978 \pm 0,0002) \text{ g cm}^{-3}.$$

Střední hodnota objemu jednoho broku je

$$\bar{V}_0 = \frac{25,65 + 82,77 - 106,27}{50 \cdot 0,9978} \text{ cm}^3 = 0,04289 \text{ cm}^3.$$

Absolutní chyba čitatele je 0,03 g, relativní chyba je 0,018, relativní chyba jmenovatele je rovna relativní chybě hustoty ρ , která je rovna 0,0002, proto relativní chyba střední hodnoty $\bar{V}_0$ je rovna 0,0182. Absolutní chyba je potom

$$\begin{aligned} \vartheta(\bar{V}_0) &= 0,04289 \text{ cm}^3 \cdot 0,0182 = 0,000780 \text{ cm}^3 = \\ &= 0,0008 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Objem jednoho broku má hodnotu

$$V_0 = (0,0429 \pm 0,0008) \text{ cm}^3 = (42,9 \pm 0,8) \text{ mm}^3.$$

Měření objemu broku měřením mikrometrem

a) Postup měření

Předpokládáme-li, že brok je přibližně kulové těleso, a změříme-li průměr broku, můžeme jeho objem vypočítat užitím vztahu

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{6} \pi d^3.$$

Abychom určili průměrný objem, změřili jsme průměry 10 různých broků a určili jsme střední hodnotu průměru a příslušnou chybu měření.

b) Měřením byly získány hodnoty uvedené v tabulce 18. Pravděpodobná chyba aritmetického průměru je určena

vztahem $\vartheta(\bar{d}) = \frac{5 \sum \Delta d_+}{3n \sqrt{n-1}}$, kde n je počet měření. Pro naše

měření je $\vartheta(\bar{d}) \doteq 0,008 \text{ mm}$. Hodnota průměru broku je

$$d = (4,351 \pm 0,008) \text{ mm}; \quad \vartheta_r(\bar{d}) = 0,0015.$$

Střední hodnota objemu jednoho broku je

$$\bar{V}_0 = \frac{\pi \bar{d}^3}{6} = \frac{\pi \cdot 4,351^3}{6} \text{ mm}^3 \doteq 43,13 \text{ mm}^3.$$

Relativní chyba střední hodnoty objemu je dána vztahem

$$\vartheta_r(\bar{V}) = 3\vartheta_r(\bar{d}) = 0,0045.$$

Absolutní chyba střední hodnoty objemu je

$$\begin{aligned} \vartheta(\bar{V}) &= \bar{V} \vartheta_r(\bar{V}) = 43,13 \text{ mm}^3 \cdot 0,0045 = \\ &= 0,194 \text{ mm}^3 \doteq 0,2 \text{ mm}^3. \end{aligned}$$

Tabulka 18

Číslo měření	$d_i[\text{mm}]$	$\Delta d_{i+}[\text{mm}]$
1	4,39	0,039
2	4,40	0,049
3	4,34	
4	4,33	
5	4,36	0,009
6	4,35	
7	4,31	
8	4,33	
9	4,31	
10	4,39	0,039
	$\bar{d} = 4,351$	$\Sigma \Delta d_+ = 0,136$

Hodnota objemu jednoho broku získaná měřením mikrometrem je

$$V_0 = (43,1 \pm 0,2) \text{ mm}^3.$$

Závěr:

Při měření mikrometrem je hodnota objemu jednoho broku v intervalu

$$42,9 \text{ mm}^3 \leq V_0 \leq 43,3 \text{ mm}^3,$$

při užití pyknometru

$$42,1 \text{ mm}^3 \leq V_0 \leq 43,7 \text{ mm}^3.$$

Oba intervaly se překrývají. Interval při měření mikrometrem je užší, tzn. že toto měření je přesnější.

6. úloha (navrhl dr. Ivo Volf)

Těleso volně padá z vrcholku věže výšky H . Když proběhlo dráhu l , začalo volně padat druhé těleso z okna umístěného v hloubce h pod vrcholem věže.

a) Dokažte, že platí $H = \frac{(l + h)^2}{4l}$, jestliže obě tělesa dosáhnou povrchu Země současně.

b) Určete, v jaké výšce nad povrchem Země je okno.

c) Stanovte časový interval mezi začátky pohybu obou těles.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $H = 45$ m, $l = 20$ m.

Řešení:

a) První (druhé) těleso padá po dobu $t_1(t_2)$ a platí

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \quad (1)$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(H - h)}{g}}, \quad (2)$$

přičemž podle zadání

$$t_1 = t_2 + t_3, \quad (3)$$

kde t_3 značí dobu volného pádu prvního tělesa na dráze délky l , takže

$$t_3 = \sqrt{\frac{2l}{g}}. \quad (4)$$

Dosazením z (1), (2), (4) do (3) a úpravou dostaneme

$$H = \frac{(l + h)^2}{4l}. \quad (5)$$

b) Z (5) dostaneme odmocněním a úpravou

$$h = 2 \sqrt{Hl} - l$$

a pro výšku h_0 okna dostaneme

$$h_0 = H - h = H - 2 \sqrt{Hl} + l = (\sqrt{H} - \sqrt{l})^2.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $h_0 \doteq 5,0$ m.

c) Interval $\Delta t = t_3$ je dán vztahem (4). Pro zadanou hodnotu a $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$ vyjde $t \doteq 2,0$ s.

7. úloha (navrhol dr. Ivan Náter)

Na vozíku, ktorý sa môže pohybovať po vodorovnej trati bez trenia, je človek s hmotnosťou m a tri telesá s hmotnosťami $m_1, m_2 = 2m_1$ a $m_3 = 3m_1$. Vozík má hmotnosť M a je v pokoji voči Zemi. Človek postupne vyhodí prvé dve telesá tak, že ich začiatočná rýchlosť v_0 (voči vozíku) je vodorovná a má smer pozdĺžnej osi vozíka.

a) Určte rýchlosť vozíka po vyhodení každého telesa, ak obe boli vyhodené na tú istú stranu vozíka.

b) Určte rýchlosť vozíka po vyhodení každého telesa, ak druhé bolo vyhodené na opačnú stranu vozíka ako prvé.

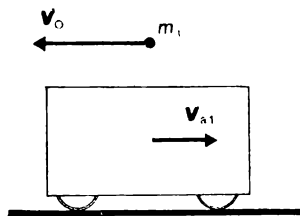
c) Akou rýchlosťou a na ktorú stranu vozíka, po vyhodení oboch prvých telies v prípadoch a) aj b), musí človek vyhodiť tretie teleso, aby sa vozík zastavil?

Urobte diskusiu.

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $M = 100 \text{ kg}$, $m = 75 \text{ kg}$, $m_1 = 5,0 \text{ kg}$, $v_0 = 3,0 \text{ m s}^{-1}$.

Riešenie:

Úlohu riešime pomocou zákona zachovania hybnosti; vzťažná sústava je spojená s koľajnicami (obr. 53). Pretože ide o pohyb priamočiary, nemusíme používať vektorové rovnice, ak urobíme dohodu, že hybnosti (a rýchlosti)



Obr. 53

budeme považovať za kladné, ak majú orientáciu zhodnú s orientáciou priamky, po ktorej sa pohybuje vozík.

a) Sústava mala na začiatku deja nulovú hybnosť, preto po vyhodení prvého telesa platí

$$0 = (M + m + 5m_1) v_{a1} - m_1 v_0,$$

kde v_{a1} je rýchlosť vozíka po vyhodení prvého telesa. Odtiaľ vyjadríme

$$v_{a1} = v_0 \cdot \frac{m_1}{M + m + 5m_1}. \quad (1)$$

Pred vyhodením druhého telesa mala sústava hybnosť $m_1 v_0$; rýchlosť vozíka po vyhodení druhého telesa označíme v_{a2} ; potom platí

$$m_1 v_0 = (M + m + 3m_1) v_{a2} - 2m_1(v_0 - v_{a1}),$$

lebo druhé teleso má pri vyhodení rýchlosť $(v_0 - v_{a1})$ voči trati. Dosadením za v_{a1} z (1) dostaneme

$$v_{a2} = m_1 v_0 \cdot \frac{3(M + m) + 13m_1}{(M + m + 3m_1) \cdot (M + m + 5m_1)}. \quad (2)$$

b) Po vyhodení prvého telesa má vozík rýchlosť $v_{b1} = v_{a1}$

podľa (1). Druhé teleso vyhodíme rýchlosťou orientovanou opačne ako v prípade a), takže pre rýchlosť v_{b2} platí

$$m_1 v_0 = (M + m + 3m_1) v_{b2} + 2m_1(v_0 + v_{b1}).$$

Po dosadení za $v_{b1} = v_{a1}$ z (1) vyjadríme

$$v_{b2} = -m_1 v_0 \cdot \frac{M + m + 7m_1}{(M + m + 3m_1) \cdot (M + m + 5m_1)}. \quad (3)$$

Z výsledku je zrejmé, že rýchlosti v_{b1} a v_{b2} sú orientované navzájom opačne.

c) Tretie teleso musíme vrhnúť rýchlosťou orientovanou súhlasne s rýchlosťou vozíka. Pre prípad a) teda pre rýchlosť v_{c1} platí

$$(M + m + 3m_1) v_{a2} = 3m_1(v_{c1} + v_{a2}),$$

lebo tretie teleso je vzhľadom k trati vrhnuté rýchlosťou $(v_{c1} + v_{a2})$, kde v_{c1} je jeho rýchlosť vzhľadom k vozíku. Dosadením za v_{a2} z (2) určíme

$$v_{c1} = \frac{1}{3} v_0(M + m) \cdot \frac{3(M + m) + 13m_1}{(M + m + 3m_1)(M + m + 5m_1)}.$$

Pre prípad b) platí analogicky

$$v_{b2}(M + m + 3m_1) = 3m_1(v_{c2} + v_{b2})$$

a po dosadení za v_{b2} z (3) vychádza

$$v_{c2} = -\frac{1}{3} v_0(M + m) \frac{M + m + 7m_1}{(M + m + 3m_1)(M + m + 5m_1)}.$$

Pre zadané hodnoty vychádza:

$$v_{a1} = v_{b1} \doteq 0,075 \text{ m s}^{-1}; \quad v_{a2} \doteq 0,23 \text{ m s}^{-1};$$

$$v_{b2} \doteq -0,083 \text{ m s}^{-1}; \quad v_{c1} \doteq 2,7 \text{ m s}^{-1}; \quad v_{c2} \doteq -0,97 \text{ m s}^{-1}.$$

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Miroslav Ouhrabka)

Dva autobusy vyjely současně z místa A do místa B . Jeden z nich projel první polovinu dráhy rychlostí v_1 , druhou polovinu dráhy rychlostí v_2 , $v_2 \neq v_1$. Druhý autobus se pohyboval rychlostí v_1 v první polovině doby jízdy z místa A do místa B , v druhé polovině doby rychlostí v_2 .

a) Určete průměrné rychlosti $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ pohybu obou autobusů.

b) Stanovte, který z autobusů dojede do místa B dříve; určete dobu Δt jeho předstihu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_1 = 30,0 \text{ km h}^{-1}$, $v_2 = 50,0 \text{ km h}^{-1}$, $s = 150 \text{ km}$. K řešení si nakreslete situační náčrtek.

c) Určete, v jaké vzdálenosti Δs od místa B se nachází zpožděný autobus v okamžiku, v němž první autobus právě dojede do místa B . Řešte jen pro zadané hodnoty.

Řešení:

a) Vzdálenost mezi místy A, B označíme s , dobu jízdy prvního autobusu v prvním úseku jeho trati t_1 , ve druhém úseku t_2 , celkovou dobu jeho jízdy $t_3 = t_1 + t_2$, dobu jízdy druhého autobusu t_4 .

$$t_1 = \frac{s}{2v_1}, t_2 = \frac{s}{2v_2}, t_3 = \frac{s(v_1 + v_2)}{2v_1v_2},$$

$$\bar{v}_1 = \frac{s}{t_3} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2};$$

$$\bar{v}_2 = \frac{1}{t_4} \left(\frac{1}{2} v_1 t_4 + \frac{1}{2} v_2 t_4 \right) = \frac{1}{2} (v_1 + v_2).$$

Pro zadané hodnoty vyjde: $\bar{v}_1 = 37,5 \text{ km h}^{-1}$, $\bar{v}_2 = 40 \text{ km h}^{-1}$.

$$b) \quad t_4 = \frac{s}{\bar{v}_2} = \frac{2s}{v_1 + v_2},$$

$$\Delta t = t_3 - t_4 = \frac{s(v_1 - v_2)^2}{2v_1v_2(v_1 + v_2)}.$$

Poněvadž $\Delta t > 0$, dojde druhý autobus do místa B vždy dříve, při jakýchkoli hodnotách v_1, v_2 .

Pro zadané hodnoty: $\Delta t = 0,25 \text{ h}$.

c) V uvažovaném případě je $\Delta t < \frac{1}{2} t_4$, tj. opožděný autobus jede rychlostí v_2 . Proto

$$\Delta s = v_2 \Delta t = \frac{s(v_1 - v_2)^2}{2v_1(v_1 + v_2)}.$$

Pro zadané hodnoty: $\Delta s = 12,5 \text{ km}$.

2. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Miroslav Ouhrabka)

Dva chlapci o hmotnostech m_1, m_2 stojí proti sobě na kolečkových bruslích ve vzájemné vzdálenosti d na přímé vodorovné cestě tak, že podélné osy bruslí jsou v téže přímce rovnoběžné s cestou. Jeden z nich drží míč o hmotnosti m a hodí ho druhému, který ho zachytí za dobu t . Pohyb míče lze považovat za rovnoměrný přímočarý ve vodorovném směru. Součinitel odporu proti pohybu obou chlapců po silnici je f .

a) Popište fyzikální děje, které proběhnou.

b) Určete, o jakou délku Δs se změní vzájemná vzdálenost chlapců po ukončení těchto dějů.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 2,0 \text{ m}$, $m = 4,0 \text{ kg}$, $t = 0,30 \text{ s}$, $m_1 = 60 \text{ kg}$, $m_2 = 40 \text{ kg}$, $f = 0,050$.

Řešení:

Označíme $v = \frac{d}{t}$ rychlost míče, v_1 počáteční rychlost prvního chlapce po vyhození míče, v_2 počáteční rychlost druhého chlapce po uchopení míče; s_1 dráhu, o kterou se posune první chlapec; s_2 dráhu, o kterou se posune druhý chlapec.

Úlohu řešíme ve vztažné soustavě spojené s cestou.

a) Po vyhození míče se dá (podle zákona zachování hybnosti) první chlapec do pohybu směrem od druhého s počáteční rychlostí v_1 ; pohyb je rovnoměrně zpomalený, vzhledem k odporu, který působí proti pohybu. Chlapec se zastaví po vykonání dráhy s_1 . Druhý chlapec se po uchopení míče počne pohybovat směrem od prvního s počáteční rychlostí v_2 a zastaví se po vykonání dráhy s_2 . Chlapci se navzájem vzdálí o délku $\Delta s = s_1 + s_2$.

b) Použijeme zákona zachování hybnosti. Přímku, po níž se chlapci pohybují, orientujeme od prvního k druhému takže místo vektorových rovnic

$$O(m_1 + m) = mv + m_1v_1,$$

$$mv + m_2O = (m_2 + m)v_2$$

můžeme psát algebraické rovnice:

$$O = mv - m_1v_1,$$

$$mv = (m_2 + m)v_2,$$

z nichž vyjádříme

$$v_1 = \frac{mv}{m_1}, \quad v_2 = \frac{mv}{m_2 + m}. \quad (1)$$

Zpomalení způsobená odporem proti pohybu mají veličnosti

$$a_1 = a_2 = a = fg \quad (2)$$

a pro součet brzdných drah platí

$$s = s_1 + s_2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2a};$$

po dosazení z (1) a (2) s použitím vztahu $v = \frac{d}{t}$ dostaneme

$$\Delta s = \frac{m^2 d^2}{2fgt^2} \cdot \left[\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{(m_2 + m)^2} \right].$$

Pro zadané hodnoty a $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ vyjde $\Delta s = 0,58 \text{ m}$.

3. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Miroslav Ouhrabka)

Automobil o hmotnosti m se pohybuje rovnoměrným pohybem po zatáčce tvaru kruhového oblouku o poloměru r . Součinitel smykového tření pneumatik a silnice je f_0 , celková odporová síla proti pohybu je $F_0 = fG$ (tření je v tom zahrnuto).

a) Určete největší rychlost $v_{\max}$, s níž automobil může bez smyku projíždět zatáčkou

b) Určete užitečný výkon P motoru při této rychlosti. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$, $r = 50 \text{ m}$, $f = 0,10$, pro betonovou silnici $f_{01} = 0,90$, pro asfaltovou $f_{02} = 0,50$.

Řešení:

a) Úlohu budeme řešit ve vztažné soustavě spojené s automobilem. Setrvačná síla odstředivá F_{od} je v rovnováze se silou smykového tření F_t :

$$F_{\text{od}} + F_t = 0$$

neboli, vzhledem k orientaci uvažovaných sil,

$$F_{\text{od}} = F_t. \quad (1)$$

Dosazením

$$F_{\text{od}} = -\frac{mv_{\text{max}}^2}{r}; F_t = f_0 mg$$

do (1) dostaneme vztah, z něhož vyjádříme

$$v_{\text{max}} = \sqrt{f_0 rg}. \quad (2)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $v_{1\text{max}} = 21 \text{ m s}^{-1} = 76 \text{ km h}^{-1}$;
 $v_{2\text{max}} = 16 \text{ m s}^{-1} = 57 \text{ km h}^{-1}$.

b) Síla F_p , která udržuje automobil v pohybu, je v rovnováze se silou F_0 působící proti pohybu, přičemž $F_0 = fmg$, tj.

$$F_p + F_0 = 0 \text{ neboli } F_p = fmg.$$

Pro užitečný výkon dostáváme s ohledem na (2):

$$P = F_p v_{\text{max}} = fmg \sqrt{f_0 rg}.$$

Pro zadané hodnoty: $P_1 = 21 \text{ kW}$, $P_2 = 16 \text{ kW}$.

4. úloha (navrhli dr. Ivo Volf a Miroslav Ouhrabka)

Při závodech dosáhl cyklista rychlosti v . Touto rychlostí projel cílem i zatáčkou před cílovou rovinkou. V této zatáčce o poloměru r se jízdní kolo s cyklistou odchýlilo o úhel α od svislého směru. Po průjezdu cílem se cyklista pohyboval setrvačností po přímé vodorovné cestě, přičemž průměrná brzdicí síla byla $F_t = fG$.

a) Určete rychlost v , s níž cyklista dojel do cíle.

b) Určete dráhu s_0 , kterou cyklista ještě vykonal po průjezdu cílem.

c) Určete dráhu s'_0 v případě, že se cyklista po průjezdu cílem pohyboval setrvačností do kopce se stoupáním p %. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $r = 30 \text{ m}$, $\alpha = 20^\circ$, $f = 0,050$, $p = 3$.

Poznámka: $\sin 20^\circ = 0,342$, $\cos 20^\circ = 0,940$, $\operatorname{tg} 20^\circ = 0,364$.

Řešení:

a) Řešíme ve vztažné soustavě spojené s cyklistou. Hmotnost cyklisty s jeho jízdním kolem označíme m . Výslednice setrvačné síly odstředivé F_0 a tíhové síly G je od svislého směru odchýlena o úhel α , přičemž

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_0}{G}.$$

Dosazením $F_0 = \frac{mv^2}{r}$, $G = mg$ dostaneme vztah, z něhož vyjádříme

$$v = \sqrt{rg \operatorname{tg} \alpha}.$$

Pro zadané hodnoty: $v \doteq 10 \text{ m s}^{-1}$.

b) Řešíme v soustavě spojené se závodní dráhou. Cyklista s kolem má při průjezdu cílem kinetickou energii

$$W_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mrg \operatorname{tg} \alpha.$$

Síla působící proti pohybu má velikost $F_t = fmg$ a na dráze s_0 vykoná práci $A = fmg s_0$. Z rovnosti $W_k = A$ dostaneme vztah, z něhož vyjádříme

$$s_0 = \frac{r \operatorname{tg} \alpha}{2f}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $s_0 \doteq 1,1 \cdot 10^2 \text{ m}$.

c) Pohyb do kopce se stoupáním $p\%$ je brzděn silou F , která je rovna součtu síly tření $F_t = mgf \cos \beta$ a pohybové složky tíhy $G_1 = mg \sin \beta$, kde β je úhel, pro nějž platí

$$\sin \beta = \frac{p}{100}. \text{ Tedy}$$

$$F = mg(f \cos \beta + \sin \beta)$$

a po dosazení za goniometrické funkce úhlu β

$$F = \frac{mg}{100} (f \sqrt{10^4 - p^2} + p).$$

Na dráze s'_0 vykoná brzdicí síla práci $A' =$

$= \frac{mgs'_0}{100} (f \sqrt{10^4 - p^2} + p)$. Potenciální energie tíhová cyklisty se zvětší o

$$\Delta W_p = mg \frac{s'_0 p}{100}.$$

Z rovnosti $W_k = A' + \Delta W_p$ dostaneme po dosazení vztah, z něhož vyjádříme

$$s'_0 = \frac{50 r \operatorname{tg} \alpha}{f \sqrt{10^4 - p^2} + 2p}.$$

Pro zadané hodnoty dostaneme $s'_0 \doteq 49,6$ m.

5. Úlohy kategorie E

Úlohy a jejich řešení recenzovali dr. Bohumil Vlach a Mojmir Simerský

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Vzdálenost z Bratislavy do Prahy po železnici je $d = 396$ km. Z Prahy vyjede v 8 h 58 min rychlík R_1 průměrnou rychlostí $v_1 = 1,06 \frac{\text{km}}{\text{min}}$ do Bratislavy. Týž

den vyjede z Bratislavy do Prahy rychlík R_2 v 11 h 21 min průměrnou rychlostí $v_2 = 1,34 \frac{\text{km}}{\text{min}}$. Oba rychlíky se setkají v místě X .

a) Určete vzdálenost d_1 místa setkání rychlíků od Prahy. V kolik hodin se v tomto místě rychlíky setkají?

b) Podle jízdního řádu ČSD určete město, které přibližně odpovídá místu X . Určete čísla (popř. jména) rychlíků, jejichž doba průjezdu určeným městem se dá srovnat s výsledky naší úlohy.

Řešení:

a) Čas odjezdu rychlíku R_1 z Prahy označíme $t_1 = 8 \text{ h } 58 \text{ min} = 538 \text{ min}$.

Čas odjezdu rychlíku R_2 z Bratislavy označíme $t_2 = 11 \text{ h } 21 \text{ min} = 681 \text{ min}$.

Čas setkání obou rychlíků v místě X označíme t .

Je-li dána průměrná rychlost, pak můžeme uvažovat, že se vlak touto rychlostí pohybuje rovnoměrně a pro vzdálenost d_1 platí

$$d_1 = v_1(t - t_1), \quad (1)$$

kde $(t - t_1)$ je čas, který uplyne od doby odjezdu rychlíku R_1 z Prahy do setkání s rychlíkem R_2 v místě X .

Rychlík R_2 ujede od svého odjezdu z Bratislavy do doby setkání s rychlíkem R_1 dráhu, pro niž platí

$$d - d_1 = v_2(t - t_2). \quad (2)$$

Řešením soustavy rovnic (1) a (2) určíme čas setkání t obou rychlíků a vzdálenost d_1 místa X od Prahy:

$$t = \frac{d + v_1 t_1 + v_2 t_2}{v_1 + v_2}, \quad d_1 = v_1 \frac{d + v_2(t_2 - t_1)}{v_1 + v_2} \quad (3)$$

Výrazy (3) jsou obecným řešením části a) úlohy. Pro zadané hodnoty veličin vyjde

$$t \doteq 783 \text{ min} = 13 \text{ h } 03 \text{ min}, d_1 \doteq 260 \text{ km}.$$

b) Podle jízdního řádu ČSD pro rok 1973/74 trať č. 25 odpovídá místu X přibližně Brno, jehož vzdálenost od Prahy po železnici je 259 km. Rychlík R_1 odpovídá přibližně rychlíku č. 571, který z Prahy vyjíždí v 8.58 a do Brna přijíždí v 13.06, rychlík R_2 rychlíku č. 74 (Hungaria), který z Bratislavy vyjíždí v 11.33 a do Brna přijíždí v 13.07.

2. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Pes honí kočku, která se může zachránit na stromě. Obě zvířata běží rovnoměrně přímočaře (pes rychlostí $v_1 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, kočka rychlostí $v_2 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) po drahách, kterými se dá proložit společná přímka procházející patou stromu. Ze vzdálenosti $d = 0,50 \text{ m}$ od paty stromu dovede kočka skočit na strom.

a) Dohoní pes kočku, běží-li obě zvířata ke stromu z téže strany a je-li v daném okamžiku pes vzdálen od paty stromu o $d_1 = 70 \text{ m}$ a kočka o $d_2 = 36,5 \text{ m}$?

b) Dostihne pes kočku, blíží-li se zvířata ke stromu z protilehlých stran a v daném okamžiku je pes vzdálen od paty stromu o $d_3 = 59,5 \text{ m}$ a kočka o $d_4 = 16,5 \text{ m}$?

Řešení:

a) Čas, za který doběhne pes do vzdálenosti d od paty stromu, označíme t_1 ; čas, který potřebuje kočka, označíme t_2 . Za předpokladu, že běh zvířat je rovnoměrný pohyb, platí pro ně

$$t_1 = \frac{d_1 - d}{v_1}; \quad t_2 = \frac{d_2 - d}{v_2}. \quad (1)$$

Dosadíme-li do vztahů (1) dané veličiny, dostaneme: $t_1 \doteq 4,6$ s; $t_2 \doteq 4,5$ s. Poněvadž $t_1 > t_2$, pes kočku nedohoní.

b) Čas, za který pes doběhne do vzdálenosti d od paty stromu na straně kočky, označíme t_3 ; čas, který potřebuje kočka, aby doběhla do vzdálenosti d od paty stromu, označíme t_4 . Pro tyto časy platí:

$$t_3 = \frac{d_3 + d}{v_1} ; \quad t_4 = \frac{d_4 - d}{v_2} . \quad (2)$$

Po dosazení daných hodnot do vztahů (2) vyjde: $t_3 \doteq 4,0$ s; $t_4 \doteq 2,0$ s. Čas t_3 je výrazně větší než čas t_4 , proto také v tomto případě pes kočku nedohoní.

3. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Dřevěný trám délky $d = 4,0$ m a tíhy $G = 120$ kp je otáčivý kolem vodorovné osy procházející jeho těžištěm. Předpokládáme, že trám je stejnorodý, všude stejného průřezu; příčné rozměry trámu zanedbáváme.

a) Žák A tíhy $G_1 = 50$ kp se postaví na trám do vzdálenosti $d_1 = 0,20$ m nalevo od osy otáčení. Do které vzdálenosti d_2 od osy otáčení se musí postavit žák B tíhy $G_2 = 65$ kp, aby trám byl v rovnovážné poloze?

b) Jakmile se ustaví rovnovážná poloha podle a), postupuje žák A nalevo od osy a současně žák B napravo od osy otáčení. Délka kroku žáka A je $l_1 = 0,40$ m. Určete délku l_2 kroku žáka B tak, aby trám byl stále v rovnovážné poloze. Určete počet n celých kroků, které udělá každý žák při zachování rovnovážné polohy trámu.

c) Obě úlohy řešte i graficky a porovnejte výsledky obou postupů řešení. Pro grafické řešení užíjte měřítko: $1 \text{ m} \doteq 10 \text{ cm}$; $1 \text{ kp m} \doteq 2 \text{ mm}$.

Řešení:

Poněvadž trám se otáčí kolem osy procházející jeho těžištěm, nemá tíha trámu vliv na jeho rovnováhu a údaj o její velikosti nepřispívá k řešení úlohy.

a) Aby trám byl v rovnovážné poloze, musí být momenty tíh obou žáků vzhledem k ose otáčení sobě rovny. Musí platit

$$G_1 d_1 = G_2 d_2,$$

odkud plyne

$$d_2 = d_1 \frac{G_1}{G_2}. \quad (1)$$

Pro zadané hodnoty vychází $d_2 \doteq 0,15$ m. Žák *B* se musí postavit do vzdálenosti 0,15 m napravo od osy otáčení.

b) Vykona-li žák *A* k kroků, postoupí do vzdálenosti $(d_1 + kl_1)$ nalevo od osy trámu; vykona-li žák *B* k kroků, postoupí do vzdálenosti $(d_2 + kl_2)$ napravo od osy trámu. Poněvadž se má přitom zachovat rovnováha, musí být splněna momentová rovnice

$$G_1(d_1 + kl_1) = G_2(d_2 + kl_2).$$

Z ní vychází

$$l_2 = l_1 \frac{G_1}{G_2}. \quad (2)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $l_2 \doteq 0,31$ m. Délka kroku žáka *B* musí být 0,31 m.

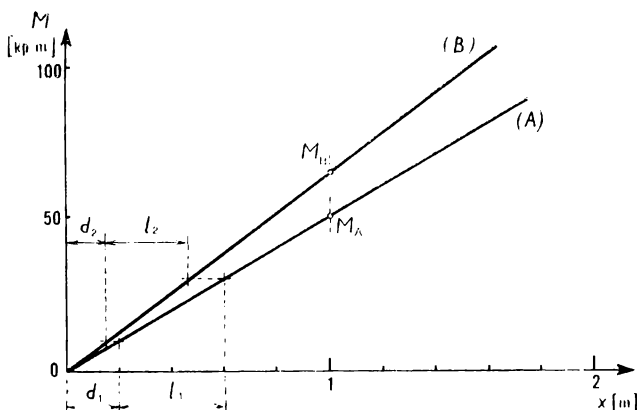
Poněvadž žák *A* dělá delší kroky, je počet n celých kroků, které udělá každý žák, určen počtem kroků, které udělá žák *A* na délce $\frac{d}{2} - d_1$, tzn. že číslo n je určeno „celou částí“ smíšeného zlomku

$$\frac{d}{2} - d_1$$

l_1

Pro zadané hodnoty dostaneme $n = 4$. Každý žák udělá 4 kroky.

c) Je-li x vzdálenost žaka tíhy G od osy trámu, pak velikost otáčivého momentu M je dána vztahem $M = Gx$, tzn. že moment tíhy žaka je přímo úměrný jeho vzdálenosti od osy otáčení. Grafem této závislosti je přímka procházející počátkem souřadného systému, v němž na jednu osu nanášíme vzdálenost a na druhou velikost momentu otáčení. Sestrojíme grafy pro momenty obou žáků: $M_A = G_1 x$, $M_B = G_2 x$. Např. pro $x = 1$ m je $M_A = 50$ kp m a $M_B = 65$ kp m. Přímka (A) přísluší žaku A, přímka (B) žaku B (obr. 54).



Obr. 54

Pro vzdálenost d_1 žáka A vychází z grafu (A) určitá hodnota otáčivého momentu M_A . Poněvadž při rovnováze musí mít stejnou hodnotu i otáčivý moment způsobený tíhou žáka B , vedeme v grafu koncovým bodem momentu M_A rovnoběžku s osou x , až nám protne graf (B). Tomuto průsečíku odpovídá na ose x hodnota vzdálenosti d_2 . Z grafu vychází $d_2 \doteq 0,14$ m.

Přičteme-li k vzdálenosti d_1 délku kroku l_1 , odpovídá v grafu (A) vzdálenosti $(d_1 + l_1)$ určitý otáčivý moment. Téže hodnotě otáčivého momentu na grafu (B) odpovídá na ose x vzdálenost $(d_2 + l_2)$, z které můžeme určit délku kroku žáka B . Z grafu odečtená hodnota je $l_2 \doteq 0,30$ m.

Srovnáme-li hodnoty délek d_2 a l_2 získané výpočtem a z grafu, vidíme, že grafické řešení je méně přesné.

Počet n celých kroků, které udělá každý žák, určíme tím, že zjistíme, kolikrát můžeme nanést délku l_1 na úsečku $\frac{d}{2} - d_1$. Je to možné provést čtyřikrát, tedy $n = 4$.

4. úloha (navrhl Václav Suchánek)

Tající sníh o hmotnosti $m_1 = 0,10$ kg se přidá do vody o hmotnosti $m_2 = 0,30$ kg a o teplotě $t_2 = 40,0$ °C. Po roztání sněhu se teplota vody ustálila na hodnotě $t = 16,0$ °C. Kolik procent p vody obsahoval sníh?

Měrné teplo vody je $c = 1,00 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$, měrné skupenské teplo tání ledu za normálního tlaku je $80 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$. Řešte pokud možno obecně a potom pro dané hodnoty. Ztráty tepla zanedbáváme.

Řešení:

Tající sníh obsahuje vodu o hmotnosti m_v a led o hmot-

nosti m , pro něž platí $m_v + m = m_1$. Voda i led mají teplotu $t_1 = 0,0^\circ\text{C}$. Teplo, které se uvolní při ochlazení vody o hmotnosti m_2 z teploty t_2 na teplotu t , dané vztahem $Q_2 = cm_2(t_2 - t)$, se spotřebuje jednak na tání ledu (teplo Q'_1), jednak na ohřátí vody o hmotnosti m_1 z teploty t_1 na teplotu t (teplo Q''_1). Pro teplo Q'_1 platí $Q'_1 = lm$, kde l je měrné skupenské teplo tání ledu. Pro teplo Q''_1 platí vztah $Q''_1 = cm_1(t - t_1)$.

Zanedbáváme-li ztráty tepla, platí podle zákona zachování tepelné energie

$$Q'_1 + Q''_1 = Q_2$$

nebo

$$lm + cm_1(t - t_1) = cm_2(t_2 - t). \quad (1)$$

Použijeme-li vztahu $m_v + m = m_1$, pak z kalorimetrické rovnice (1) plyne

$$m_v = \frac{m_1[l + c(t - t_1)] - cm_2(t_2 - t)}{l} \quad (2)$$

Kolik je to procent z hmotnosti sněhu, udává vztah

$$p = \frac{m_v}{m_1} 100 \%$$

a po dosazení z (2)

$$p = \frac{m_1[l + c(t - t_1)] - cm_2(t_2 - t)}{m_1 l} 100 \% .$$

Pro dané hodnoty veličin vychází $p = 30 \%$. Sníh obsahoval 30 % vody.

5. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Určení průměrné hustoty cihly

- Určete průměrnou hustotu ρ plné, vysušené cihly.
- Ponořte cihlu na dobu 24 hodin úplně do vody. Urče-

te objem V vody, kterou cihla přijala. Určete průměrnou hustotu ϱ , cihly v tomto případě.

Poznámka: Cihlu vysušujte několik dní na kamnech nebo na jiném topném tělese. Každý rozměr změřte pětkrát na různých místech cihly. Určete aritmetický průměr naměřených hodnot každého rozměru.

Změnu rozměrů cihly způsobenou navlhnutím zanedbáváme.

Řešení:

a) Rozměry cihly si označíme a , b a c . Měření rozměrů bylo provedeno ocelovým měřítkem děleným na mm. Naměřené hodnoty jednotlivých rozměrů jsou v tabulce 19; aritmetické průměry naměřených hodnot jsou označeny $\bar{a}$, $\bar{b}$ a $\bar{c}$.

Cihla má tvar kvádra a její objem je dán vztahem

$$V = abc.$$

Průměrná hodnota objemu je $\bar{V} = \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ a po dosazení dostaneme $\bar{V} = 29,1 \cdot 13,9 \cdot 6,9 \text{ cm}^3 = 2790,981 \text{ cm}^3$. Vzhledem k drobným poškozeninám cihly vezmeme pro objem hodnotu

$$V = 2790 \text{ cm}^3 = 2,79 \text{ dm}^3.$$

Hmotnost m cihly byla určována na kuchyňských váhách, které dovolují vážit s přesností na 1 dkg. Naměřená hodnota byla $m = 4,56 \text{ kg}$.

Do vztahu pro hustotu látky $\varrho = \frac{m}{V}$ jsme dosadili vypočtenou hodnotu objemu V a naměřenou hodnotu hmotnosti m a dostali jsme

$$\varrho = \frac{4,56 \text{ kg}}{2,79 \text{ dm}^3} = 1,63 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1,63 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Tabuľka 19

Číslo měření	a [cm]	b [cm]	c [cm]
1.	29,1	13,8	6,7
2.	29,0	13,7	6,8
3.	29,3	14,0	7,0
4.	29,2	13,9	7,0
5.	29,1	14,0	6,9
	$\bar{a} = 29,14$	$\bar{b} = 13,88$	$\bar{c} = 6,88$
	$\bar{a} \doteq 29,1$	$\bar{b} \doteq 13,9$	$\bar{c} \doteq 6,9$

Průměrná hustota vysušené cihly byla $1,63 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

b) Hmotnost m_1 cihly ponořené 24 hodin ve vodě (po odkapání vody) byla $m_1 = 4,81 \text{ kg}$. Z toho plyne, že hmotnost m_v vody nasáklé do cihly byla

$$m_v = m_1 - m = 0,25 \text{ kg}.$$

Předpokládáme-li, že voda má hustotu $\rho_0 = 1,00 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$,

byl objem V_v nasáklé vody

$$V_v = \frac{m_v}{\rho_0} = 0,25 \text{ dm}^3 = \frac{1}{4} \text{ l.}$$

Při 24hodinovém máčení přijala cihla $\frac{1}{4}$ litru vody.

Průměrná hustota ρ_1 vlhké cihly je dána vztahem

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V},$$

poněvadž ke změně objemu cihly způsobené navlhnutím nepřihlížíme. Pro určené hodnoty vychází

$$\rho_1 = \frac{4,81 \text{ kg}}{2,79 \text{ dm}^3} = 1,72 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1,72 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Po máčení ve vodě vzrostla průměrná hustota cihly z $1,63 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ na $1,72 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

Poznámka: Měření bylo provedeno s cihlou starší výroby a určenou pro zdivo neomítané. Technologie její výroby, a tím i některé fyzikální vlastnosti (např. hustota) jsou poněkud odlišné od vlastností normální cihly.

6. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

V elektrickém zásobníku teplé vody připojeném na elektrické napětí $U = 220 \text{ V}$ se má od 22 hodin do 6 hodin příštího dne ohřát voda o objemu $V = 100 \text{ l}$ z počáteční teploty $t_1 = 15^\circ\text{C}$ na teplotu $t_2 = 95^\circ\text{C}$.

a) Jaký příkon musí mít topné těleso zásobníku za předpokladu, že všechno teplo v něm vzniklé se spotřebuje na zvýšení teploty vody?

b) Určete proud I procházející topným tělesem. Vy-

počtete, kolik se zaplatí za uvedené ohřátí vody při sazbě $0,30 \frac{\text{Kčs}}{\text{kWh}}$.

c) Topná spirála topného tělesa je z chromniklového drátu všude stejného průřezu $S = 0,50 \text{ mm}^2$. Vypočtete délku d topného drátu.

Řešení:

Doba určená k ohřívání vody $\tau = 8 \text{ h} = 28\,800 \text{ s}$, hmotnost ohřívané vody $m = 100 \text{ kg}$. Teplo vyvinuté v topné spirále za dobu τ je $Q = 0,000\,24P\tau$; teplo spotřebované vodou k ohřátí je $Q' = cm(t_2 - t_1)$, kde c je měrné teplo vody a rovná se $1,00 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$. Měrný odpor chromniklu je $\varrho = 1,1 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$.

a) Předpokládáme-li, že všechno teplo vzniklé v topném tělese se spotřebuje na zvýšení teploty vody, platí $Q = Q'$ nebo

$$0,00024P\tau = cm(t_2 - t_1).$$

Odtud vypočteme

$$P = \frac{cm(t_2 - t_1)}{0,000\,24\tau} \quad (1)$$

Dosadíme-li dané a uvedené hodnoty, dostaneme

$$P = \frac{1 \cdot 100 \cdot 80}{0,000\,24 \cdot 28\,800} \text{ W} = 1157 \text{ W} \doteq 1,16 \text{ kW}.$$

Topné těleso zásobníku musí mít příkon $1,16 \text{ kW}$.

b) Ze vztahu pro příkon elektrického spotřebiče $P = UI$ plyne

$$I = \frac{P}{U} = \frac{cm(t_2 - t_1)}{0,000\,24\tau U} \quad (2)$$

a po dosazení dané hodnoty napětí a vypočteného příkonu

$$I = \frac{1157}{220} \text{ A} \doteq 5,2\text{A}.$$

Práce elektrického proudu za dobu τ při příkonu P je

$$A = P\tau = \frac{cm(t_2 - t_1)}{0,000\,24}$$

a po dosazení daných hodnot dostaneme

$$A = \frac{1 \cdot 100 \cdot 80}{0,000\,24} \text{ Ws} \doteq 9,26 \text{ kWh}.$$

Je-li sazba $0,30 \frac{\text{Kčs}}{\text{kWh}}$, pak zaplacená částka $\check{c}$ je

$$\check{c} = 0,30 \frac{\text{Kčs}}{\text{kWh}} \cdot 9,26 \text{ kWh} \doteq 2,80 \text{ Kčs}.$$

c) Pro výkon elektrického proudu s použitím Ohmova zákona platí

$$P = UI = \frac{U^2}{R}$$

a odtud

$$R = \frac{U^2}{P}.$$

Pro odpor drátu délky d a průřezu S platí vztah

$$R = \varrho \frac{d}{S},$$

kde ϱ je měrný odpor materiálu drátu. Spojením obou výrazů pro odpor R a úpravou dostaneme

$$d = \frac{U^2 S}{\varrho P} = \frac{U^2 S \cdot 0,000\,24}{\varrho \text{cm}(t_2 - t_1)}. \quad (3)$$

Dosadíme-li dané hodnoty, dostaneme $d \doteq 19,0$ m.

7. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Na každé ze tří stejných žárovek je napsáno: 220 V, 40 W. Žárovky zapojujeme postupně do pěti různých elektrických obvodů, jak ukazují obrázky 55a—e. Obvody připojujeme ke zdroji elektrického napětí $U = 220$ V; odpory přívodních drátů zanedbáváme.

a) Vypočtete odpor R_0 každé žárovky a celkový odpor každého obvodu.

b) Vypočtete celkový proud procházející každým obvodem. Vypočtete napětí na každé žárovce a proud procházející každou žárovkou ve všech obvodech. Který obvod má největší a který nejmenší příkon?

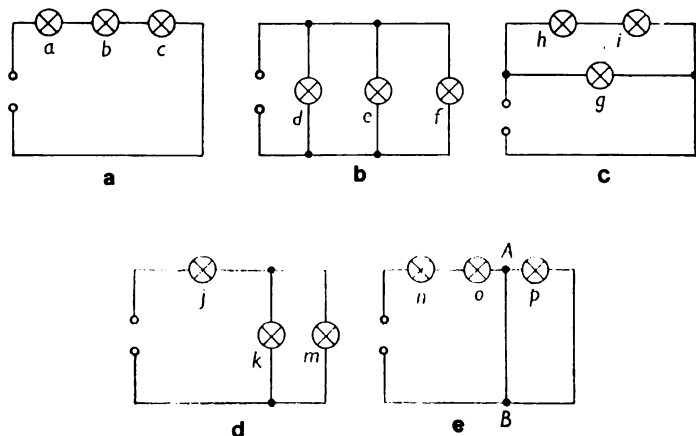
c) Proč v obvodu z obr. 55a svítí všechny žárovky stejně jasně? Svítí také v obvodu z obr. 55b všechny žárovky stejně jasně? Proč? Porovnejte jasnost světla žárovek v obvodech z obr. 55a a 55b. Která žárovka z obvodů podle obr. 55c, d, e svítí nejjasněji a která nejméně jasně?

Řešení:

a) Všechny žárovky mají stejný odpor R_0 , pro který platí

$$R_0 = \frac{U^2}{P_0},$$

kde $P_0 = 40$ W je jmenovitý příkon každé žárovky. Po dosazení daných hodnot vychází



Obr. 55

$$R_0 = \frac{(220 \text{ V})^2}{40 \text{ W}} = 1210 \, \Omega.$$

Poněvadž v obvodu 55a jsou žárovky spojeny sériově, je celkový odpor R_1 obvodu

$$R_1 = 3R_0 = 3 \frac{U^2}{P_0}.$$

Celkový odpor R_2 obvodu z obr. 55b je

$$R_2 = \frac{1}{3} R_0 = \frac{U^2}{3P_0},$$

poněvadž v tomto obvodu jsou všechny tři žárovky spojeny paralelně.

Pro celkový odpor R_3 obvodu z obr. 55c platí

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{2R_0} + \frac{1}{R_0}$$

a z toho

$$R_3 = \frac{2}{3} R_0 = \frac{2U^2}{3P_0},$$

poněvadž série dvou žárovek je paralelně připojena k žárovce třetí.

Pro celkový odpor R_4 obvodu z obr. 55d platí

$$R_4 = R_0 + \frac{R_0}{2} = \frac{3}{2} R_0 = \frac{3U^2}{2P_0},$$

neboť k jedné žárovce je sériově připojena paralelní dvojice žárovek.

Celkový odpor R_5 obvodu z obr. 55e je

$$R_5 = 2R_0 = 2 \frac{U^2}{P_0},$$

poněvadž v obvodu jsou spojeny sériově dvě žárovky. Třetí žárovka je vodičem AB zkratována.

Po dosazení daných hodnot jsou hodnoty celkových odporů obvodů: $R_1 = 3630 \Omega$, $R_2 = 403,3 \Omega$, $R_3 = 806,7 \Omega$, $R_4 = 1815 \Omega$, $R_5 = 2420 \Omega$.

b) Z Ohmova zákona plyne pro proudy v jednotlivých obvodech:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = U \frac{P_0}{3U^2} = \frac{P_0}{3U}.$$

Podobně dostaneme

$$I_2 = \frac{3P_0}{U}, I_3 = \frac{3P_0}{2U}, I_4 = \frac{2P_0}{3U}, I_5 = \frac{P_0}{2U}.$$

Po dosazení daných hodnot dostaneme: $I_1 \doteq 0,06 \text{ A}$, $I_2 \doteq 0,545 \text{ A}$, $I_3 \doteq 0,27 \text{ A}$, $I_4 \doteq 0,121 \text{ A}$, $I_5 \doteq 0,091 \text{ A}$.

Napětí na jednotlivých žárovkách podle pravidel pro jednoduchý nebo rozvětvený obvod jsou:

$$U_a = U_b = U_c = \frac{1}{3} U, \quad U_d = U_e = U_f = U, \quad U_g = U, \\ U_h = U_i = \frac{1}{2} U, \quad U_j = \frac{2}{3} U, \quad U_k = U_m = \frac{1}{3} U, \quad U_n = \\ = U_o = \frac{1}{2} U, \quad U_p = 0.$$

Proudy procházející jednotlivými žárovkami jsou podle pravidel pro proud v jednoduchém a rozvětveném obvodu:

$$I_a = I_b = I_c = I_1 = \frac{P_0}{3U}, \quad I_d = I_e = I_f = \frac{1}{3} I_2 = \frac{P_0}{U}, \\ I_h = I_i = \frac{1}{3} I_3 = \frac{P_0}{2U}, \quad I_g = \frac{2}{3} I_3 = \frac{P_0}{U}, \quad I_j = I_4 = \\ = \frac{2P_0}{3U}, \quad I_k = I_m = \frac{1}{2} I_4 = \frac{P_0}{3U}, \quad I_n = I_o = I_5 = \frac{P_0}{2U}, \\ I_p = 0.$$

Největší příkon má obvod z obr. 55b, poněvadž jím prochází největší proud

$$P_2 = UI_2 = 3P_0,$$

nejmenší příkon má obvod z obr. 55a, poněvadž jím prochází nejmenší proud

$$P_1 = UI_1 = \frac{1}{3} P_0.$$

Číselné hodnoty napětí na jednotlivých žárovkách:

$$U_a = U_b = U_c = U_k = U_m \doteq 73,3 \text{ V}, U_d = U_e = U_f = \\ = U_g = 220 \text{ V}, U_h = U_i = U_n = U_o = 110 \text{ V}, U_j \doteq \\ \doteq 146,7 \text{ V}, U_p = 0 \text{ V}.$$

Číselné hodnoty proudů protékajících jednotlivými žárovkami:

$$I_a = I_b = I_c = I_k = I_m \doteq 0,06 \text{ A}, I_d = I_e = I_f = I_g \doteq \\ \doteq 0,181 \text{ A}, I_h = I_j = I_n = I_o \doteq 0,091 \text{ A}, I_j \doteq 0,121 \text{ A}, \\ I_p = 0 \text{ A}.$$

c) V obvodu z obr. 55a svítí všechny žárovky stejně jasně, poněvadž je na nich stejné napětí a mají tedy stejný příkon

$$P_a = P_b = P_c = U_a I_a = \frac{1}{3} U \frac{P_0}{3U} = \frac{1}{9} P_0.$$

V obvodu podle obr. 55b svítí také všechny žárovky stejně jasně, poněvadž je na nich stejné napětí, ale poněvadž jejich příkon je

$$P_d = P_e = P_f = U_d I_d = U \frac{P_0}{U} = P_0,$$

tztn. je 9krát větší než příkon žárovek obvodu z obr. 55a, svítí mnohem jasněji než žárovky obvodu prvního.

V ostatních obvodech svítí nejjasněji žárovka g ; svítí stejně jasně jako žárovky v obvodu podle obr. 55b. Nejméně jasně svítí žárovka p , poněvadž vůbec nesvítí.

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Stejnorodé koule K_1 a K_2 o poloměrech $r_1 = 5,0 \text{ cm}$ a $r_2 = 1,0 \text{ cm}$ se kutálejí bez tření po vodorovné podložce; jejich středy se pohybují rovnoměrně přímočaře.

a) Rychlost obou koulí je stejná $v = 0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Koule K_1 koná f_1 otoček za sekundu, koule K_2 koná f_2 otoček za sekundu. Určete veličiny f_1 a f_2 a vypočítejte jejich poměr ($f_1 : f_2$). Dokažte, že platí

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

b) Koule se pohybují tak, že každá z nich vykoná za sekundu týž počet otoček $f = 10$. Určete rychlosti v_1, v_2 obou koulí a vypočítejte jejich poměr ($v_1 : v_2$). Dokažte, že platí

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Řešení:

a) Vykoná-li koule o poloměru r jednu otočku, posune se její střed o délku její hlavní kružnice: $2\pi r$. Proto je rychlost koule dána součinem délky hlavní kružnice a počtu otoček za sekundu:

$$v = 2\pi r f. \quad (1)$$

Poněvadž rychlost obou koulí je stejná, plyne pro jejich počty otoček za sekundu

$$f_1 = \frac{v}{2\pi r_1} \quad (2) \quad \text{a} \quad f_2 = \frac{v}{2\pi r_2} \quad (3)$$

Pro dané hodnoty je $f_1 \doteq 1,6$ otoček za sekundu,
 $f_2 \doteq 8,0$ otoček za sekundu.

Poměr ($f_1 : f_2$) vypočteme podělením rovnic (2) a (3):

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{v}{2\pi r_1} : \frac{v}{2\pi r_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Pro dané hodnoty je $f_1 : f_2 = 1 : 5$.

Odvození obecného vztahu pro poměr ($f_1 : f_2$) je důkazem platnosti vztahu uvedeného v zadání úlohy.

b) Podle vztahu (1) jsou rychlosti jednotlivých koulí

$$v_1 = 2\pi r_1 f \quad (4) \quad \text{a} \quad v_2 = 2\pi r_2 f. \quad (5)$$

Pro zadané hodnoty je $v_1 = 3,14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = 0,628 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Poměr rychlostí ($v_1 : v_2$) dostaneme, když navzájem podělíme rovnice (4) a (5):

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2\pi r_1 f}{2\pi r_2 f} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Pro zadané hodnoty je $v_1 : v_2 = 5$.

Odvození obecného vztahu pro poměr ($v_1 : v_2$) je provedením požadovaného důkazu.

2. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Dřevěný trám délky 4,0 m a tíhy 120 kp je podepřen pod těžištěm na vodorovné hraně, kolem níž může kývat. Předpokládáme, že trám je stejnorodý, všude stejného průřezu. Je ve vodorovné rovnovážné poloze.

Ve vzdálenosti $d = 1,0$ m na obou stranách od podpěry stojí chlapci A a B. Tíha chlapce A je $G_1 = 55$ kp, chlapec drží v ruce závaží o tíze 10 kp. Tíha chlapce B je $G_2 = 65$ kp. Chlapec A chce odhodit závaží. Aby se po odhození závaží zachovala rovnovážná poloha trámu, musí se přemístit buď chlapec A, nebo chlapec B.

a) Předpokládejte, že zůstane v klidu chlapec B. Do které vzdálenosti x od podpěry se musí přemístit chlapec A?

b) Předpokládejte, že zůstane v klidu chlapec A . Do které vzdálenosti y od podpěry se musí přemístit chlapec B ?

c) Dokažte, že platí $xy = d^2$.

Řešte nejprve obecně a potom pro zadané hodnoty.

Řešení:

Poněvadž trám je podepřen pod těžištěm a k příčným rozměrům trámu se nepřihlíží, nebudeme uvažovat vliv tíhy trámu na rovnovážnou polohu. Užijeme podmínky rovnováhy sil na dvojzvrtné páce.

a) Při rovnovážné poloze trámu musí platit

$$G_1 x = G_2 d \quad \text{a odtud} \quad x = d \frac{G_2}{G_1}. \quad (1)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $x \doteq 1,18$ m.

Chlapec A se musí přemístit do vzdálenosti 1,18 m od podpěry.

b) Podmínku rovnováhy na trámu v tomto případě vyjadřuje vztah

$$G_2 y = G_1 d \quad \text{a odtud} \quad y = d \frac{G_1}{G_2}. \quad (2)$$

Pro zadané hodnoty je $y \doteq 0,85$ m.

Chlapec B se musí přemístit do vzdálenosti 0,85 m od podpěry.

c) Požadovaný důkaz provedeme tím, že vztah (1) vynásobíme vztahem (2). Dostaneme

$$xy = d \frac{G_2}{G_1} \cdot d \frac{G_1}{G_2} = d^2,$$

jak bylo dokázat.

3. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Provedli jsme dva pokusy:

1. Do vody o hmotnosti $m_1 = 0,100$ kg a teplotě $t_1 = 0,0$ °C se naleje voda o hmotnosti $m_2 = 0,200$ kg a teplotě $t_2 = 80,0$ °C. Teplota vody se ustálí na hodnotě t_3 .

2. Do vody o hmotnosti $m_1 = 0,100$ kg a teplotě $t_2 = 80,0$ °C se naleje voda o hmotnosti $m_2 = 0,200$ kg a teplotě $t_1 = 0,0$ °C. Teplota vody se ustálí na hodnotě t_4 .

a) Určete výsledné teploty t_3 a t_4 při obou pokusech.

b) Vysvětlete, proč je $t_3 > t_4$.

Měrné teplo vody je $c = 1,00 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$. Tepelné ztráty zanedbáváme.

Počítejte nejprve obecně a potom pro zadané hodnoty.

Řešení:

Poněvadž tepelné ztráty zanedbáváme, je množství tepla Q_1 uvolněné při ochlazování teplejší vody rovno množství tepla Q_2 , které spotřebuje na ohřátí chladnější voda. Tepla Q_1 i Q_2 vypočteme pomocí vztahu $Q = cm\Delta t$, kde Δt je příslušná teplotní změna. Rovnice vyjadřující rovnost uvolněného a spotřebovaného tepla se nazývá kalorimetrická rovnice.

a) Pro první pokus má kalorimetrická rovnice tvar

$$cm_2(t_2 - t_3) = cm_1(t_3 - t_1)$$

a z ní plyne

$$t_3 = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Pro zadané hodnoty vychází $t_3 = 53,3$ °C.

Pro druhý pokus je tvar kalorimetrické rovnice

$$cm_1(t_2 - t_4) = cm_2(t_4 - t_1) ,$$

a z ní dostaneme

$$t_4 = \frac{m_1 t_2 + m_2 t_1}{m_1 + m_2} . \quad (2)$$

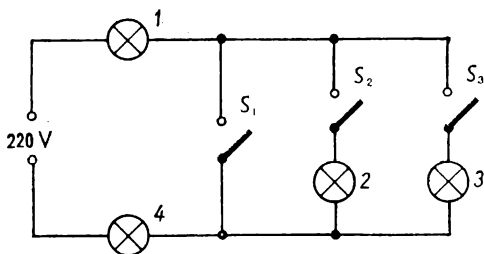
Pro zadané hodnoty vychází $t_4 \doteq 26,7^\circ\text{C}$.

b) Při prvním pokusu je hmotnost teplé vody dvakrát větší než hmotnost vody studené, při pokusu druhém je tomu naopak. Proto musí být t_3 dvakrát větší než t_4 . Obecně odvodíme vztah mezi teplotami t_3 a t_4 , když do vztahů (1) a (2) dosadíme $t_1 = 0,0^\circ\text{C}$ a oba vztahy pak navzájem podělíme; dostaneme

$$t_3 : t_4 = m_2 : m_1 .$$

4. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Na každé ze čtyř stejných žárovek je napsáno 110 V; 40 W. Žárovky 1, 2, 3 a 4 jsou zapojeny do elektrického obvodu podle obr. 56. Obvod je připojen ke zdroji elektrického napětí 220 V. Určete celkový odpor a příkon obvodu, napětí na každé žárovce a příkon každé žárovky, když



Obr. 56

- a) všechny tři spínače S_1 , S_2 a S_3 jsou uzavřeny,
 - b) spínač S_1 je otevřen a spínače S_2 a S_3 jsou uzavřeny,
 - c) spínače S_1 a S_2 jsou otevřeny a spínač S_3 je uzavřen.
- Odpor přívodních a spojovacích vodičů zanedbáváme.

Řešení:

a) Spínač S_1 zkratuje obvod se žárovkami 2 a 3, takže napětí na nich je nulové, $U_2 = U_3 = 0$ V, stejně tak příkony $P_2 = P_3 = 0$. Žárovky 1 a 4 jsou sériově připojeny na napětí 220 V, takže každá má jmenovité napětí 110 V — $U_1 = U_4 = 110$ V — a mají proto jmenovitý příkon: $P_1 = P_4 = 40$ W.

Celkový odpor R_a obvodu se rovná dvojnásobku odporu jedné žárovky. Označíme-li jmenovité hodnoty žárovky U_1 a P_1 , je odpor jedné žárovky dán vztahem $\frac{U_1^2}{P_1}$ a celkový odpor obvodu se rovná

$$R_a = 2 \frac{U_1^2}{P_1},$$

pro dané hodnoty pak $R_a = 605 \Omega$.

Použijeme-li Ohmova zákona, je příkon P_a obvodu dán vztahem

$$P_a = \frac{U^2}{R_a},$$

kde U je napětí sítě ($U = 220$ V).

Dosadíme-li za R_a a použijeme-li vztahu $U = 2U_1$, dostaneme

$$P_a = 2P_1.$$

Pro dané hodnoty je $P_a = 80$ W.

b) V tomto obvodu je k sériově spojeným žárovkám 1 a 4 sériově připojena paralelní dvojice žárovek 2 a 3. Poněvadž odpor paralelně spojené dvojice žárovek se rovná

polovičnímu odporu jedné žárovky, je celkový odpor obvodu R_b obvodu roven

$$R_b = 2,5 \frac{U_1^2}{P_1}$$

a pro dané hodnoty $R_b = 756,3 \Omega$.

Příkon obvodu je podobně jako v a) dán vztahem

$$P_b = \frac{U^2}{R_b}.$$

Po dosazení za U a R_b dostaneme $P_b = 1,6P_1$ a číselně $P_b = 64 \text{ W}$.

Poněvadž celkový odpor R_b je $\frac{5}{2}$ krát větší než odpor jedné žárovky, platí pro napětí na žárovkách 1 a 4:

$$U'_1 = U'_4 = \frac{2}{5} U, \text{ číselně } U'_1 = U'_4 = 88 \text{ V},$$

a pro napětí na žárovkách 2 a 3

$$U'_2 = U'_3 = \frac{1}{5} U, \text{ číselně } U'_2 = U'_3 = 44 \text{ V}.$$

Pro příkony žárovek platí

$$P'_1 = P'_4 = \left(\frac{4}{5} U_1 \right)^2 : \frac{U_1^2}{P_1} = 0,64P_1,$$

$$P'_2 = P'_3 = \left(\frac{2}{5} U_1 \right)^2 : \frac{U_1^2}{P_1} = 0,16P_1,$$

číselně pak $P'_1 = P'_4 = 25,6 \text{ W}$ a $P'_2 = P'_3 = 6,4 \text{ W}$.

c) Je-li uzavřen jen spínač S_3 , pak žárovka 2 není zapojena do obvodu, a proto $U''_2 = 0 \text{ V}$ a $P''_2 = 0 \text{ W}$. Žá-

rovky 1, 3 a 4 jsou spojeny sériově, a proto celkový odpor R_c obvodu se rovná

$$R_c = 3 \frac{U_1^2}{P_1},$$

což dává po dosazení daných hodnot $R_c = 907,5 \Omega$.

Příkon obvodu je nyní

$$P_c = \frac{U^2}{R_c} = \frac{4}{3} P_1$$

a po dosazení daných hodnot $P_c \doteq 53,3 \text{ W}$.

Na všech třech žárovkách je stejné napětí

$$U_1 = U_3 = U_4 = \frac{1}{3} U \text{ a číselně } U_1 = U_3 = U_4 \doteq 73,3 \text{ V.}$$

Z toho plyne, že i příkony těchto žárovek jsou stejné

$$P_1 = P_3 = P_4 = \frac{4}{9} P_1,$$

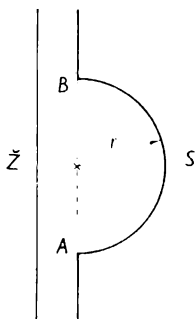
a po dosazení daných hodnot $P_1 = P_3 = P_4 \doteq 17,8 \text{ W}$.

c) Třetí kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Silnice S a železnice $\check{Z}$ jsou nejprve přímočaré a rovnoběžné. V místě A silnice odbočuje a vytváří půlkružnici o poloměru $r = 6,0 \text{ km}$; v místě B se vrací k železnici (obr. 57). Mezi místy A a B jede vlak průměrnou rychlostí $v_0 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Současně s vlakem vyjede po silnici motocyklista z místa A do místa B .

a) Jakou průměrnou rychlostí v_1 se musí pohybovat motocykl, aby byl v místě B současně s vlakem?



Obr. 57

b) Jakou průměrnou rychlostí v_2 se musí pohybovat motocykl, aby byl v místě B o $t_0 = 2,0$ min dříve než vlak?

c) Motocyklista jel tři čtvrtiny dráhy mezi místy A a B průměrnou rychlostí v_1 podle případu a). Potom se po dobu $t_4 = 30$ s zdržel drobnou opravou motocyklu. Jakou průměrnou rychlostí v_3 se musí pohybovat v poslední čtvrtině dráhy, aby byl v místě B současně s vlakem?

Počítejte nejprve obecně a potom dosadte zadané hodnoty.

Řešení:

a) Poněvadž je dána průměrná rychlost, považujeme pohyb vlaku za rovnoměrný. Proto dráhu délky $AB = 2r = 12,0$ km projede vlak za dobu danou vztahem:

$t_1 = \frac{2r}{v_0}$. Motocykl má za stejnou dobu projet dráhu délky πr , takže jeho průměrná rychlost musí být

$$v_1 = \frac{\pi r}{t_1} = \frac{\pi}{2} v_0.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $v_1 = 78,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Má-li být motocyklista v místě B současně s vlakem, musí se pohybovat průměrnou rychlostí $78,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Motocykl projede půlkruhovou dráhu za dobu $t_2 = \frac{\pi r}{v_2}$, přitom musí platit $t_2 = t_1 - t_0$. Dosazením za t_1 a t_2 a úpravou dostaneme vztah, z něhož vyjádříme

$$v_2 = \frac{\pi r v_0}{2r - t_0 v_0}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $v_2 = 91 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Má-li být motocykl v místě B o 2 min dříve než vlak, musí se pohybovat průměrnou rychlostí $91 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

c) Doba, za kterou vykoná motocykl dráhu AB , je složena ze tří časových úseků: z doby, za kterou ujede $\frac{3}{4} AB$, určené vztahem $\frac{3\pi r}{4v_1}$; z doby opravy $t_4 = \frac{1}{2}$ min a z doby, kterou ujede poslední čtvrtinu dráhy AB , určené vztahem $\frac{\pi r}{4v_3}$. Poněvadž motocyklista se má dostat z místa A do místa B za stejnou dobu jako vlak, platí

$$\frac{3\pi r}{4v_1} + t_4 + \frac{\pi r}{4v_3} = \frac{2r}{v_0}.$$

Po dosazení za v_1 dostaneme vztah, z něhož vyjádříme

$$v_3 = \frac{\pi r v_0}{2(r - 2v_0 t_4)}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $v_3 \doteq 91 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

V poslední čtvrtině cesty musel motocyklista jet rychlostí $91 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

2. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Dřevěný trám délky 4,0 m a tíhy 120 kp je podepřen pod těžištěm na vodorovné hraně, kolem níž může kývat. Předpokládáme, že trám je stejnorodý, všude stejného průřezu, a že je ve vodorovné rovnovážné poloze.

Ve vzdálenosti $d = 1,00$ m na obou stranách od podpěry stojí na trámu dva chlapci A a B . Tíha chlapce A je $G_1 = 60,0$ kp; chlapec drží v ruce míč tíhy $G_2 = 3,00$ kp. Tíha chlapce B je $G_3 = 63,0$ kp. Chlapci si přehazují míč tak, že trám se jen mírně kývá kolem rovnovážné polohy.

Chlapec A hodí míč chlapci B a současně se posune do vzdálenosti a_1 od podpěry trámu (míč je ve vzduchu). Chlapec B chytí míč a chlapec A se současně posune do vzdálenosti a_2 od podpěry trámu.

Nyní hodí míč chlapec B chlapci A a současně se posune do vzdálenosti b_1 od podpěry (míč je ve vzduchu); chlapec A chytí míč a chlapec B se současně posune do vzdálenosti b_2 od podpěry trámu.

a) Vypočítejte vzdálenosti a_1 , a_2 , b_1 a b_2 .

b) Dokažte, že platí $a_2 = b_2$; vysvětlete, proč tomu tak je.

Řešení:

Poněvadž trám je podepřen pod těžištěm a k příčným rozměrům trámu se nepřihlíží, tíha trámu neovlivňuje jeho rovnovážnou polohu. Trám představuje dvojzvratnou páku, na níž je rovnováha, jsou-li momenty dvou působících sil stejně veliké, ale opačně orientované. Podmínky rovnováhy pro jednotlivé postupné situace:

a₁) Chlapec *A* vyhodí míč: $a_1 G_1 = d G_3$, (1)

a₂) chlapec *B* chytí míč: $a_2 G_1 = d(G_3 + G_2)$, (2)

a₃) chlapec *B* vyhodí míč: $a_2 G_1 = b_1 G_3$, (3)

a₄) chlapec *A* chytí míč: $a_2(G_1 + G_2) = b_2 G_3$. (4)

Z rovnic (1) až (4) postupně vyjádříme:

$$a_1 = d \frac{G_3}{G_1}, \quad a_2 = d \frac{G_3 + G_2}{G_1}, \quad b_1 = d \frac{G_3 + G_2}{G_3},$$

$$b_2 = d \frac{G_1 + G_2}{G_3} \cdot \frac{G_3 + G_2}{G_1}.$$

Pro zadané hodnoty vychází: $a_1 = 1,05 \text{ m}$, $a_2 = 1,10 \text{ m}$;
 $b_1 = 1,05 \text{ m}$, $b_2 = 1,10 \text{ m}$.

b) Poněvadž podle zadání úlohy je $G_1 + G_2 = G_3$, plyne již z rovnice (4) žádaný důkaz, že platí $b_2 = a_2$.

Vysvětlení: Poněvadž v poslední popisované situaci je trám opět v rovnovážné poloze a na obou stranách od podpěry působí opět stejné tíhy, musí být $b_2 = a_2$.

3. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Do vody o hmotnosti m_1 a teplotě $t_1 = 20,0^\circ\text{C}$ se přidá led o hmotnosti m_2 a teplotě $t_2 = 0,00^\circ\text{C}$. Platí: $m_1 + m_2 = m = 2,00 \text{ kg}$.

a) Vypočtete hmotnost m_2 ledu tak, aby po jeho roztání se teplota vody ustálila na hodnotě $t_2 = 0,00^\circ\text{C}$,

b) Vypočtete hmotnost m_2 ledu tak, aby po jeho roztání se teplota vody ustálila na hodnotě $t_3 = 5,00^\circ\text{C}$.

c) Jaká by musela být v případě a) počáteční teplota vody, aby platilo: $m_1 = m_2$?

Řešte nejprve obecně a potom pro zadané hodnoty. Měrné teplo vody je $c = 1,00 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$, měrné skupenské teplo tání ledu je $l = 80,0 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$.

Řešení:

a) Hmotnost ledu v tomto případě označíme m_{2a} , takže hmotnost vody je $(m - m_{2a})$. Při tání ledu o hmotnosti m_{2a} se spotřebuje teplo o velikosti $Q = lm_{2a}$. Voda o hmotnosti $(m - m_{2a})$ se tím ochladí z teploty t_1 na teplotu t_2 . Přitom vydá množství tepla $Q' = c(m - m_{2a})(t_1 - t_2)$. Poněvadž nepřehlídíme k tepelným ztrátám, plyne ze zákona zachování tepelné energie kalorimetrická rovnice:

$$lm_{2a} = c(m - m_{2a})(t_1 - t_2).$$

Z ní vypočteme

$$m_{2a} = \frac{cm(t_1 - t_2)}{l + c(t_1 - t_2)}.$$

Pro zadané hodnoty dostaneme $m_{2a} = 0,40 \text{ kg}$.

Má-li být výsledná teplota 0°C , musíme do vody o hmotnosti $1,60 \text{ kg}$ přidat led o hmotnosti $0,40 \text{ kg}$.

b) Hmotnost ledu nyní označíme m_{2b} . Při tání ledu o hmotnosti m_{2b} se spotřebuje teplo Q_1 o velikosti $Q_1 = lm_{2b}$. Voda o hmotnosti m_{2b} , vzniklá roztáním ledu, se zahřeje z teploty t_2 na teplotu t_3 a k tomu spotřebuje teplo Q_2 dané vztahem $Q_2 = cm_{2b}(t_3 - t_2)$. Voda o hmotnosti $(m - m_{2b})$ se současně ochladí z teploty t_1 na teplotu t_3 a uvolní přitom teplo $Q_3 = c(m - m_{2b})(t_1 - t_3)$.

Poněvadž nepřehlížíme ke ztrátám tepla, platí kalorimetrická rovnice

$$lm_{2b} + cm_{2b}(t_3 - t_2) = c(m - m_{2b})(t_1 - t_3).$$

Z ní vypočteme

$$m_{2b} = \frac{cm(t_1 - t_3)}{l + c(t_1 - t_2)}.$$

Pro zadané hodnoty vychází $m_{2b} = 0,30$ kg.

Aby výsledná teplota vody byla 5°C , je nutno přidat do vody o hmotnosti 1,70 kg led o hmotnosti 0,30 kg.

c) Má-li platit $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$, potom kalorimetrickou rovnici z případu a) musíme upravit na tvar

$$l \frac{m}{2} = c \frac{m}{2} (t'_1 - t_2),$$

kde t'_1 je hledaná počáteční teplota vody. Z ní vypočteme

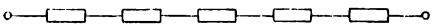
$$t'_1 = t_2 + \frac{l}{c}.$$

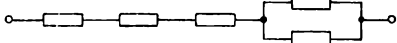
Pro zadané hodnoty dostaneme $t_1 = 80^\circ\text{C}$.

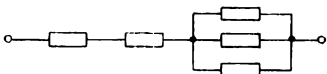
Má-li být výsledná teplota 0°C při stejné hmotnosti vody a ledu, musí být počáteční teplota vody 80°C .

4. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

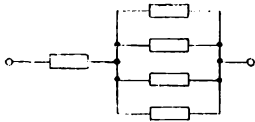
Pět stejných elektrických spotřebičů, z nichž každý má odpor $R_0 = 1,00 \Omega$, sestavte do sedmi různých soustav. V jednotlivých soustavách se spojí do série 5, 3, 2, 1, 0 spotřebičů s vhodnými paralelními kombinacemi spotřebičů zbývajících, přičemž v každé větvi smí být jen jeden spotřebič; tyto paralelní kombinace se mohou spojovat i za sebou. Určete odpory všech soustav,

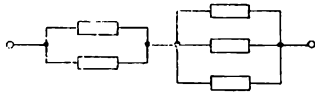
1. soustava, $n = 5$ 

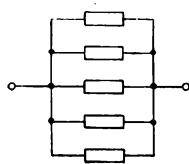
2. soustava, $n = 3$ 

3. soustava, $n = 2$ 

4. soustava, $n = 1$ 

5. soustava, $n = 1$ 

6. soustava, $n = 0$ 

7. soustava, $n = 0$ 

Obr. 58

Řešte nejprve obecně a potom pro zadanou hodnotu R_0 .
 Odpor spojovacích vodičů zanedbáváme.

Řešení:

Schémata soustav žádaných vlastností jsou na obr. 58, kde n značí počet sériově spojených spotřebičů.

Odpor i -té soustavy označíme R_i , kde $i = 1, 2, \dots, 7$.
 Při výpočtu odporů jednotlivých soustav vycházíme z poznatků: odpor série spotřebičů je roven součtu odporů jednotlivých členů série; odpor rozvětvené části obvodu je roven tolikáté části odporu jednoho spotřebiče, kolik je jich paralelně spojeno. Proto

$$R_1 = 5R_0, \quad R_2 = \frac{7}{2} R_0, \quad R_3 = \frac{7}{3} R_0, \quad R_4 = 2 R_0,$$

$$R_5 = \frac{5}{4} R_0, \quad R_6 = \frac{5}{6} R_0, \quad R_7 = \frac{1}{5} R_0.$$

Pro zadanou hodnotu odporu R_0 vychází:

$$R_1 = 5,00 \, \Omega, \quad R_2 = 3,50 \, \Omega, \quad R_3 = 2,33 \, \Omega, \quad R_4 = 2,00 \, \Omega, \\ R_5 = 1,25 \, \Omega, \quad R_6 = 0,83 \, \Omega, \quad R_7 = 0,20 \, \Omega.$$

6. Úlohy přípravného kola

Úlohy a jejich řešení recenzovali dr. Bohumil Vlach a Mojmír Simerský.

1. úloha (navrhli Karel Žampa a dr. Bohumil Vlach)

Při poruše vodovodní přípojky v novostavbě voda zaplavila sklep, jehož podlaha má obsah $S = 50,0 \, \text{m}^2$. Vrstva vody ve sklepě má tloušťku $h = 0,10 \, \text{m}$ a další voda již do sklepa nepřitéká. Vodorovná podlaha sklepa je $d = 2,80 \, \text{m}$ pod rovinou chodníku vedle domu,

Voda se ze sklepa vyčerpá čerpadlem na dlažbu chodníku a odtud odtéče do odpadového kanálu. Uprostřed podlahy sklepa je sběrná jímka, do níž se umístí koš čerpadla. Měrná tíha vody je $\gamma = 1000 \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}$.

a) Jak veliká práce musí být vykonána na vyčerpání vody ze sklepa na chodník?

b) Jakou práci přitom vykoná čerpadlo, je-li jeho účinnost $\eta = 80\%$?

c) Jak se změní velikost vykonané práce, jestliže zvětšíme nebo zmenšíme výkon použitého čerpadla?

Řešení:

a) Ve sklepě je těleso z vody, které má objem $V = Sh$; jeho tíha je $G = Sh\gamma$. Práce A vykonaná při vyčerpání vody se rovná práci potřebné ke zvednutí tělesa tíhy G do výšky d , proto platí:

$$A = Sh\gamma d.$$

Po dosazení zadaných hodnot do vztahu pro práci A dostaneme $A = 14\,000 \text{ kp m}$.

Práce potřebná k vyčerpání vody ze sklepa na chodník je $A = 14\,000 \text{ kp m}$.

b) Práce A je jen 80% práce A_1 , kterou vykonal motor čerpadla. Obecně platí $A = \eta A_1$, kde η je účinnost motoru. Odtud pro práci A_1 dostaneme:

$$A_1 = \frac{A}{\eta}$$

a po dosazení vyjde $A_1 = 17\,500 \text{ kp m}$.

Motor čerpadla vykoná práci $A_1 = 17\,500 \text{ kp m}$.

c) Práce potřebná k vyčerpání vody ze sklepa na chodník zůstává stejná. Velikost práce, kterou vykoná motor čer-

padla, je však závislá na účinnosti čerpadla. Čím menší je účinnost čerpadla, tím větší musí být práce vykonaná motorem a naopak, čím je účinnost čerpadla větší, tím je práce motoru menší. Poněvadž účinnost čerpadla je vždy menší než 1, je práce vykonaná motorem vždy větší, než je práce potřebná ke zvednutí tělesa z vody tíhy G do výšky d .

2. úloha (navrhli Karel Žampa a dr. Bohumil Vlach)

Aeroklub Svazarmu zakoupil balón. Balón je naplněn vodíkem, jehož měrná tíha je $\gamma = 0,09 \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}$, a má objem $V = 700 \text{ m}^3$. Obal balónu, koš s příslušenstvím a posádkou balónu mají celkovou tíhu $G = 447 \text{ kp}$. Nadlehčení těchto těles, způsobené Archimédovou silou ve vzduchu, zanedbáváme. Měrná tíha vzduchu je $\gamma_1 = 1,27 \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}$.

a) Vznese se balón po odpoutání kotevního lana, je-li v jeho koši také přítěž $G_1 = 600 \text{ kp}$?

b) Jaká přítěž G_2 musí být v koši balónu, aby se po odpoutání kotevního lana balón volně vznášel ve vzduchu v blízkosti povrchu Země?

c) Letci nedopatřením vypustili z balónu část vodíku a objem balónu se zmenšil na $V_1 = 650 \text{ m}^3$. Podle případu b) je v koši balónu přítěž G_2 . Jakou přítěž G_3 musí letci vyhodit z koše balónu, aby se balón opět volně vznášel ve vzduchu v blízkosti Země?

Řešení:

Vztlková síla, která působí na balón objemu V , je podle Archimédova zákona dána vztahem $F = V\gamma_1$, kde γ_1 je měrná tíha vzduchu. Po dosazení daných hodnot dostaneme $F = 889 \text{ kp}$.

Celková tíha G_0 je rovna součtu tíhy G_v vodíku o objemu V , tíhy G obalu balónu s příslušenstvím a posádkou a tíhy G_1 přítěže. Matematicky vyjádřeno: $G_0 = G_v + G + G_1$.

Po dosazení daných hodnot dostaneme $G_0 = (63 + 447 + 600) \text{ kp} = 1100 \text{ kp}$.

Poněvadž celková tíha G_0 je větší než vztlaková síla F , balón se po odpoutání kotevního lana nevznese.

b) Má-li se balón volně vznášet ve vzduchu, musí se celková tíha G'_0 rovnat vztlakové síle F . Aby tato podmínka byla splněna, musíme přítěž G_1 nahradit přítěží G_2 tak velikou, aby platilo:

$$G'_0 = G_v + G + G_2 = F.$$

Odtud dostaneme pro novou přítěž

$$G_2 = F - (G_v + G)$$

a po dosazení číselných hodnot dostaneme $G_2 = 379 \text{ kp}$.

Balón se bude volně vznášet blízko povrchu Země, bude-li v koši přítěž $G_2 = 378 \text{ kp}$.

c) Vypočteme změněnou vztlakovou sílu F' a novou tíhu vodíku G'_v v balónu: $F' = V_1 \gamma_1 = 825,5 \text{ kp}$, $G'_v = V_1 \gamma = 58,5 \text{ kp}$. Aby se balón v tomto případě vznášel ve vzduchu, musí být splněna podmínka, že vztlaková síla se rovná celkové tíze. Její matematické vyjádření je

$$F' = G'_v + G + G_2 - G_3,$$

$$\text{a odtud} \quad G_3 = G'_v + G + G_2 - F'.$$

Po dosazení dostáváme $G_3 = 59,0 \text{ kp}$.

Aby se balón opět vznášel ve vzduchu, museli letci vyhodit přítěž $G_3 = 59,0 \text{ kp}$.

3. úloha (navrhli Karel Žampa a dr. Bohumil Vlach)

Za Slovenského národného povstání partyzáni napadli německý nákladní vlak. Stříleli na vlak ze směru kolmého na boční stěny vagónu.

a) Boční stěny jednoho vagónu byly proraženy střelou kulometu. Vzniklé otvory O_1 a O_2 byly vzdáleny od přední stěny vagónu o délky $d_1 = 2,50$ m a $d_2 = 2,62$ m. Šířka vagónu je $a = 3,60$ m. Rychlost střely ve vagónu je $v = 450 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Vypočtěte rychlost v_1 vlaku.

b) V jiném případě se vlak pohyboval opět rychlostí v_1 , stejnou jako v případě a), ale délky d_1 a d_2 byly: $d_1 = 2,50$ m, $d_2 = 2,60$ m. Vypočtěte rychlost v_2 střely ve vagónu.

Při řešení si nakreslete náčrtek prostřeleného vagónu.

Řešení:

Prostřelený vagón znázorňuje obr. 59.

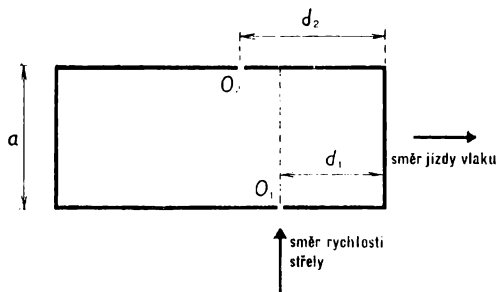
a) Ve směru kolmém ke směru pohybu vagónu se střela pohybovala pohybem rovnoměrným rychlostí v , a proto pro její dráhu uvnitř vagónu platí: $a = vt$, kde t je čas, po který střela letěla od jedné stěny vagónu ke druhé.

Z předcházejícího vztahu pro něj platí $t = \frac{a}{v}$. Za tento čas se vlak posunul o délku $d_2 - d_1$. Považujeme-li také pohyb vlaku za rovnoměrný s rychlostí v_1 , určuje ji vztah

$$v_1 = \frac{d_2 - d_1}{t}.$$

Dosadíme-li za t z předchozího vztahu, dostaneme

$$v_1 = v \cdot \frac{d_2 - d_1}{a}.$$



Obr. 59

Dosadíme-li zadané hodnoty, vyjde $v_1 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Rychlost v_1 vlaku byla $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Za též čas (např. t), za který se vagón pohybující se rychlostí v_1 posune o délku $d_2 - d_1$, vykoná střela pohybující se rychlostí v_2 uvnitř vagónu dráhu a . Proto platí

$$t = \frac{d_2 - d_1}{v_1} = \frac{a}{v_2}.$$

Odtud vypočítáme

$$v_2 = \frac{a}{d_2 - d_1} v_1.$$

Po dosazení zadaných hodnot vychází $v_2 = 540 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Rychlost v_2 střely ve vagónu byla v tomto případě $540 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

III. ČÁST:

SEDMÁ MEZINÁRODNÍ FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA

1. Průběh a výsledky soutěže

Sedmá mezinárodní fyzikální olympiáda (VII. MFO) se měla konat v r. 1973 a měla ji uspořádat NDR. NDR však odřekla a nebylo možno zajistit, aby se organizování VII. MFO ujal jiný stát. Proto byla soutěž VII. MFO uspořádána až po dvou letech — v r. 1974.

Organizátorem VII. MFO byla Polská lidová republika. Olympiády se zúčastnilo všech sedm států, které již po mnoho let se MFO zúčastňují: Bulharsko, Československo, Maďarsko, NDR, Polsko, Rumunsko a SSSR. Nově se letos zúčastnila NSR. Po třetí se již nezúčastnila Jugoslávie a také loňští noví účastníci — Francie, Kuba a pozorovatel ze Švédska — se soutěže nezúčastnili. Měla tedy VII. MFO účastníky z osmi států. Olympiáda byla uspořádána od 8. do 20. července 1974 ve Varšavě.

Z každého státu bylo pozváno 5 soutěžících, jeden vedoucí družstva a jeden pedagogický instruktor. Vedoucím našeho družstva byl doc. dr. Ivan Náter, 1. místopředseda ÚVFO, a pedagogickým instruktorem doc. dr. Bohumil Vlach, člen užšího ÚVFO.

Pro účastníky VII. MFO a jejich náhradníky bylo uspořádáno opět soustředění. Na schůzi předsednictva ÚVFO byli do soustředění vybráni podle výsledků 3. kola kat. A tito úspěšní řešitelé kat. A:

- | | |
|---------------------|----------------------------------|
| 1. Svoboda Zdeněk | G Rakovník, 4. r. |
| 2. Hruška Jiří | G Hradec Králové, 4. r. |
| 3. Fexa Jiří | G Praha 2, W. Piecka, 3. r. |
| 4. Hubáček Jaroslav | G Hradec Králové, 4. r. |
| 5. Kotrba Pavel | G. Praha 1, Štěpánská, 4. r. |
| 6. Kindl Dobroslav | G Pardubice, 4. r. |
| 7. Steinhart Miloš | G Hradec Králové, 4. r. |
| 8. Šimša Jaromír | G Žďár n. Sáz., 4. r. |
| 9. Varga Štefan | G Bratislava, Novohradská, 4. r. |
| 10. Kuchta Radomír | G Havířov, 4. r. |
| 11. Horák Michal | G Brno, kpt. Jaroše, 4. r. |
| 12. Olejník Štefan | G Bratislava, Novohradská, 4. r. |

Všichni pozvaní splňovali podmínky stanovené statutem a směrnicemi pro MFO a zúčastnili se soustředění až na Jaromíra Šimšu, který se zúčastnil soustředění pro MMO. Soustředění se konalo v době od 19. do 29. června 1974 na střední zemědělské technické škole ve Vyškově. Pedagogickým vedením soustředění byl pověřen Alois Kleveta, profesor gymnázia ve Vyškově, býv. dlouholetý odborný asistent VAAZ. Na soustředění přednášel Alois Kleveta 32 hod. mechaniku, vlnění a část termiky a ing. Bohumil Vybíral, CSc., odborný asistent Vysoké vojenské školy pozemního vojska ve Vyškově, 32 hod. termodynamiku, elektřinu a optiku. Každý den od 20. června byly dopoledne 4 hodiny přednášek a odpoledne 3 hodiny přednášek, jen v neděli a poslední sobotu byly pouze 4 hodiny přednášek dopoledne. Účastníci byli ubytováni a stravováni v internátě SZTŠ ve Vyškově.

Před ukončením soustředění bylo stanoveno pořadí účastníků pro VII. MFO:

1. Svoboda, 2. Kindl, 3. Hruška, 4. Olejník, 5. Hubáček a pořadí náhradníků 6. Kuchta, 7. Varga, 8. Fexa.

Do Polska odjelo družstvo pěti prvých vybraných účastníků soustředění:

- | | |
|---------------------|----------------------------|
| 1. Svoboda Zdeněk | G Rakovník, |
| 2. Kindl Dobroslav | G Pardubice, |
| 3. Hruška Jiří | G Hradec Králové, |
| 4. Olejník Štefan | G Bratislava, Novohradská, |
| 5. Hubáček Jaroslav | G Hradec Králové. |

Vedoucími jednotlivých družstev na VII. MFO byli:

1. Bulharsko (BLR): Gleb Grigorievič Zadorožnij, oddělení fyziky univerzity v Sofii,
2. Československo (ČSSR): doc. RNDr. Ivan Náter, docent SVŠT v Bratislavě,
3. Maďarsko (MLR): prof. Rezső Kunfalvi, redaktor, Budapešť,
4. Německá demokratická republika (NDR): prof. dr. Joachim Wendt, ředitel matematicko-fyzikální sekce pedagogického institutu v Güstrowě,
5. Německá spolková republika (NSR): prof. Erich Baumann, Mnichov,
6. Polsko (PLR): Mgr. Waldemar Gorzkowski, fyzikální institut Polské akademie věd, Varšava,
7. Rumunsko (RSR): dr. Anatolie Hristew, fyzikální fakulta univerzity v Bukurešti,
8. Sovětský svaz (SSSR): Galina Sergejevna Tarasjuková, fyzikální fakulta univerzity v Moskvě.

Pedagogickými instruktory byli:

1. BLR: Nicola Milanov Velcev, inspektor na ministerstvu národní výchovy, Sofia,
2. ČSSR: doc. RNDr. Bohumil Vlach, Brno,
3. MLR: dr. Géza Tichy, univ. asistent, Budapešť,
4. NDR: Udo Walta, dipl. odborný učitel, vědecký spolupracovník na pedagogické fakultě v Güstrowě,

5. NSR: Mr. Otto F. Horns, Hamburk,
6. PLR: dr. Kazimierz Rzażewski, institut teoretické fyziky univerzity ve Varšavě,
7. RSR: Marius Gall, profesor lycea, Bukurešť,
8. SSSR: Oleg Fedorovič Kabardin, člen experimentální školy Akademie pedagogických nauk, Moskva.

Každé družstvo dostalo „pilota“, vedoucího delegace, který byl tlumočník a družstvo doprovázel. Družstva jednotlivých států i vedoucí a pedagogičtí instruktoři byli ubytováni v kempinku Gromada v ul. Zwierki Wigury. Stravování bylo v jídelně Almatu, vzdálené asi 4 km od kempinku.

První zasedání mezinárodní komise bylo 8. července odpoledne. Předsedou mezinárodní komise byl prof. dr. hab. Iwo Białynicki-Birula, vedoucí katedry teoretické fyziky přírodovědecké fakulty univerzity ve Varšavě. Slavnostní zahájení se nekonalo.

Na zasedání byla schválena úprava statutu, jak byla předem zaslána do jednotlivých států z Varšavy. Bylo oznámeno, že budou zadány jen tři teoretické úlohy, každá bude bodována 10 body, a jedna úloha laboratorní, která bude bodována 20 body. Stupně celkové klasifikace budou:

1. cena 100 % až 90 % bodů,
 2. cena 89 % až 78 % bodů,
 3. cena 77 % až 65 % bodů,
- pochvalný
dekret 64 % až 50 % bodů,

pod 50 % bude vydáno potvrzení o účasti. Na tři teoretické úlohy byla vyměřena doba pět hodin a na laboratorní úlohu rovněž doba pět hodin. Po ukončení překládali vedoucí družstev soutěžní úlohy do svých jazyků.

Večer byla celá mezinárodní komise přijata na recepci

ministrem školství PLR Jerzym Kuberskim. Recepce se konala v Domě učitelů. V diskusi se ukázalo, že PLR studium matematiky a fyziky značně podporuje.

V úterý 9. července řešili soutěžící teoretické úlohy. Měli k tomu vyměřenu dobu od 10 hod. do 15 hod. Pak měli studenti volno.

Ve středu 10. července byla exkurze do závodu na automobily Fiat Polski. Po obědě měli soutěžící volno. V 16 hod. se sešla v Pasteurově ústavu mezinárodní komise, která vyhodnotila tři teoretické úlohy pracované minulý den.

Ve čtvrtek 11. července překládali členové mezinárodní komise experimentální úlohu a potom ji soutěžící pracovali.

V pátek 12. července bylo dopoledne volno a odpoledne od 16 hodin zasedala mezinárodní komise. Na zasedání byla nejdříve vyhodnocena experimentální úloha a pak bylo provedeno celkové zhodnocení. Nejvyšší možný dosažitelný počet bodů mohl být u jednotlivce 50 bodů a byl jen 46 bodů. Komise vycházela z tohoto počtu bodů jako ze 100 %. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce. Jména jsou uváděna z polského přepisu jmen.

Pořadí	Jméno	Stát	Úloha				Celkem
			1	2	3	4	
1. - 2.	Deminet Jaroslaw	PLR	10	10	8	18	46
	Tarasiuk Jerzy	PLR	9	10	7	20	46
3.	Meszéna Géza	MLR	10	10	4	18	42
4. 7.	Hruška Jiří	ČSSR	6	10	2	17	35
	Kurczanow Anatolij	SSSR	9	6	4	16	35
	Rudniew Aleksiej	SSSR	9	1	8	17	35
	Svoboda Zdeněk	ČSSR	9	8	1	17	35
8.	Pálfalvi György	MLR	6	5	7	16	34
9.	Vladár Károly	MLR	2	8	4	19	33
10. -	Bergmann Jörg	NDR	9	5	0	18	32
11.	Kerstan Felix	NDR	7	10	3	12	32

Pořadí	Jméno	Stát	Úloha				Celkem
			1	2	3	4	
12. —	Ganciu-Petcu Mihai	RSR	4	10	4	10	28
— 13.	Masicz Sergiej	SSSR	6	8	2	12	28
14.	Țiteica Maria	RSR	5	10	3	9	27
15. —	Brüstel Ulf	NDR	3	5	0	18	26
— 17.	Falkin Evgenij	SSSR	8	0	0	18	26
	Nanij Oleg	SSSR	6	2	4	14	26
18.	Martin Hans-Georg	NDR	6	5	0	14	25
19.	Stănculescu Sorin	RSR	5	10	4	2	21
20. —	Ábrahám Tibor	MLR	8	1	4	7	20
— 24.	Hanke Martin	NDR	2	0	0	18	20
	Todorow Aleksandr						
	Todorow	BLR	1	8	4	7	20
	Tuhari Gheorghe						
	Antonin	RSR	1	0	4	15	20
	Vamus Călin	RSR	7	8	3	2	20
25.	Kiudžijew Asien						
	Wieliczko	BLR	0	5	4	10	19
26.	Mościcki Andrzej	PLR	2	0	0	16	18
27.	Stojanow Dymitr						
	Georgijew	BLR	1	0	4	12	17
28.	Kindl Dobroslav	ČSSR	9	0	0	7	16
29. —	Łusakowski Andrzej	PLR	6	2	4	3	15
— 30.	Meier Karlheinz	NSR	3	0	0	12	15
31. —	Bławzdziejewicz Jerzy	PLR	8	0	2	3	13
— 32.	Olechnik Štefan	ČSSR	6	0	0	7	13
33.	Wallschläger						
	Heinrich	NSR	2	0	0	7	9
34. —	Hubáček Jaroslav	ČSSR	8	0	0	0	8
— 35.	Németh Tibor	MLR	2	0	1	5	8
36.	Kazankiewa						
	Emilia Todorowa	BLR	0	2	0	5	7
37.	Giorgijew Georgij						
	Nikolow	BLR	1	3	1	1	6
38.	Hogh-Binder Jens	NSR	1	0	0	3	4
39.	Rainer Olff	NSR	2	0	1	0	3
40.	Schmidt Uta	NSR	0	0	0	0	0

Dostali tedy:

1. cenu: 1.—2. Deminet (PLR)
Tarasiuk (PLR)
3. Meszéna (MLR)
2. cenu: —
3. cenu: 1.—4. Hruška (ČSSR)
Kurczanov (SSSR)
Rudniew (SSSR)
Svoboda (ČSSR)
5. Pálfalvi (MLR)
6. Vladár (MLR)
- 7.—8. Bergmann (NDR)
Kerstan (NDR)

pochvalné uznání:

- 1.—2. Ganciu-Petcu (RSR)
Masicz (SSSR)
3. Țiteica (RSR)
- 4.—6. Brüstel (NDR)
Falkin (SSSR)
Nanij (SSSR)
7. Martin (NDR)

Zbývajících 22 účastníků bylo neúspěšných. Z toho se dá soudit, že požadavky soutěže byly nadprůměrné.

J. Deminet z PLR získal ještě zvláštní cenu za originální řešení úlohy z optiky a M. Țiteica z RSR, která se probodovala jako žena až do MFO, obdržela cenu za odvahu,

Je tedy podle získaných bodů toto pořadí států (u každého státu je uveden též počet získaných cen a pochvalných uznání):

Pořadí	Stát	Počet bodů	Počet cen			Počet pochval. uznání	Počet neúspěšných
			1.	2.	3.		
1.	SSSR	150	—	—	2	3	—
2.	PLR	138	2	—	—	—	3
3.	MLR	137	1	—	2	—	2
4.	NDR	135	—	—	2	2	1
5.	RSR	116	—	—	—	2	3
6.	ČSSR	107	—	—	2	—	3
7.	BLR	69	—	—	—	—	5
8.	NSR	31	—	—	—	—	5

Za jednotlivé úlohy získala družstva tento počet bodů:

Pořadí	Stát	Bodů za úlohu				Celkem bodů
		1	2	3	4	
1.	SSSR	38	17	18	77	150
2.	PLR	35	22	21	60	138
3.	MLR	28	24	20	65	137
4.	NDR	27	25	3	80	135
5.	RSR	22	38	18	38	116
6.	ČSSR	38	18	3	48	107
7.	BLR	3	18	13	35	69
8.	NSR	8	0	1	22	31
Celkem bodů		199	162	97	425	883
v %		49,8	40,5	24,3	53,1	44,2

Naše družstvo patřilo u příkladu z atomistiky k nejlepším (stejný počet bodů s SSSR), u příkladu z termodynamiky k nejslabším (společně s NDR, lepší jen než NSR).

Z letošních účastníků se nikdo nezúčastnil předcházejících MFO. Mezi soutěžícími byly letos tři dívky: Rumunka Maria Țiteica, Bulharka Emilia Todorowa Kazankliewa a Němka z NSR Uta Schmidt.

Závěrečný akt VII. MFO se konal 13. července v 10 hod. dopoledne ve velké posluchárně na ulici Hoža. Závěrečného aktu se zúčastnil ministr školství Jerzy Kuberski. Při tomto závěrečném aktu bylo organizátorům VII. MFO doc. dr. hab. Pioterovi Decowskému, dr. Andrzejowi Szymachowi a Mgr. Waldemarowi Gorzkowskému uděleno nejvyšší vyznamenání ministerstva školství PLR (Medal Komisii Edukacji Narodowej). Všichni vedoucí a pedagogičtí instruktoři dostali od ministra pamětní medaile. Pak poděkovala vedoucí delegace SSSR G. S. Tarasjuková ministerstvu školství PLR za uspořádání olympiády a promluvil vedoucí delegace MLR R. Kunfalvi za účastníky všech dosavadních olympiád. Potom oznámil vedoucí delegace NDR prof. Wendt, že příštího roku bude VIII. MFO uspořádána v NDR.

Na závěr byly oficiálně vyhlášeny výsledky a uděleny 3 první ceny, 8 třetích cen a 7 pochvalných uznání. Všichni úspěšní řešitelé dostali od ministerstva školství věcné dary značné hodnoty, zbývající pak potvrzení o účasti na VII. MFO a dar.

Od neděle 14. července do soboty 20. července byly uspořádány pro všechna družstva a jejich vedoucí týdenní exkurze, kterých se zúčastnili i pracovníci polské FO. Exkurze vedla polská cestovní kancelář Orbis.

Dne 14. července si účastníci prohlédli státní muzeum hodin v Jędrzejově a pak dojeli až do Nového Sącza. Ná-

sledující den se cestou zastavili u zpívajícího pomníku, pak na zřícenině hradu Cornštýna na Dunajci a na zřícenině hradu Niecky. Potom jeli 24 km na pltích po Dunajci do Sczawnice, zhlédli dřevěný kostelík v Powrožniku a navštívili lázně Krinici.

Dne 16. července byla exkurze do Wieliczky a pak do Krakova, 17. července byla prohlídka malířské galerie v Sukenicích a galerie Czartoryskich v Krakově. Dne 18. července prohlédli si účastníci Oświęczim, Wawel a Sukenici.

19. července se navrátili všichni do Varšavy a 20. července naše družstvo odjelo rychlíkem Polonia do ČSSR.

2. Soutěžní úlohy

1. úloha

Text:

S vodíkovým atomem v základním stavu se srazí stejný vodíkový atom, který má rychlost v . Použitím Bohrova modelu atomu vodíku, ionizační energie R atomu vodíku a jeho hmotnosti m_H určete maximální hodnotu rychlosti v_0 , při které je ještě srážka atomů pružná.

Když je dosaženo rychlosti v_0 , stanou se srážky atomů nepružnými a budou doprovázeny zářením. Určete rozdíl mezi frekvencemi záření, které budou pozorovány v původním a opačném směru k počáteční rychlosti pohyblivého se atomu. Vyjádřete tento rozdíl v procentech vzhledem k střední hodnotě frekvence.

Je dáno:

ionizační energie vodíkového atomu $R = 13,6 \text{ eV} = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J}$, hmotnost vodíkového atomu $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Řešení:

Energie elektronu v n -kvantové dráze je dána u vodíku vztahem

$$W_n = - \frac{Nh}{n^2},$$

kde N je Rydbergův kmitočet a h Planckova konstanta. V základním stavu má vodík jeden elektron v jednokvantové dráze. Aby nastala ionizace vodíku, musí se dostat elektron do dráhy $n \rightarrow \infty$. Proto je ionizační energie pro atom vodíku

$$W_\infty - W_1 = +Nh;$$

v zadání je označena R a její hodnota je $R = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J}$.

Nejmenší rychlost atomu, při níž je srážka už nepružná, odpovídá u jednoho z atomů přechodu elektronu z první kvantové dráhy do kvantové dráhy druhé. Vzrůst vnitřní energie atomu při tomto přechodu je

$$\Delta W = W_2 - W_1 = -R \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{3}{4} R.$$

a) Položíme-li počátek do hmotného středu soustavy obou atomů, pohybují se oba atomy v této soustavě proti sobě rychlostí $\frac{v_0}{2}$. Má tedy tato soustava před srážkou kinetickou energii

$$2 \cdot \frac{1}{2} m_H \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} m_H v_0^2.$$

Má-li dojít k vybuzení atomu nejmenší rychlostí v_0 pohybujícího se atomu, musí zůstat oba atomy po srážce v hmotném středu v klidu. Rozdíl kinetických energií soustavy před rázem a po rázu (po rázu je kinetická energie

nulová) musí se rovnat energii potřebné pro vybuzení atomu, tj. energii ΔW . Platí tedy

$$2 \cdot \frac{1}{2} m_H \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 - 0 = \frac{3}{4} R,$$

a z toho

$$v_0 = \sqrt{\frac{3R}{m_H}}, \quad v_0 = 6,25 \cdot 10^4 \text{ ms}^{-1}.$$

Proto při rychlosti $v < 6,25 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$ zůstane ráz pružný.

b) Jestliže pohyb atomu vztáhneme k pevnému atomu, pak rychlost prvního atomu $v_1 = 0$ a rychlost druhého atomu $v_2 = v_0$. Po nepružném rázu atomů plyne z principu zachování hybnosti pro společnou rychlost atomů

$$m_H v_0 = 2m_H v,$$

a odtud

$$v = \frac{v_0}{2}.$$

Původní kinetická energie soustavy před rázem — první atom v klidu, druhý atom pohybující se rychlostí v_0 — je

$$\frac{1}{2} m_H v_0^2$$

a po nepružném rázu

$$\frac{1}{2} \cdot 2m_H \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} m_H v_0^2.$$

Rozdíl obou kinetických energií

$$W = \frac{1}{2} m_H v_0^2 - \frac{1}{4} m_H v_0^2 = \frac{1}{4} m_H v_0^2$$

je roven změně vnitřní energie $\Delta W = \frac{3}{4} R$, z čehož dostáváme totéž jako dříve

$$v_0 = \sqrt{\frac{3R}{m_H}}.$$

c) Označme f frekvenci záření, které vydává klidný atom při přechodu elektronu z hladiny $n = 2$ do hladiny $n = 1$. Poněvadž se vybuzený atom pohybuje rychlostí $\frac{v_0}{2}$, vychází podle Dopplerova principu pro frekvenci záření pozorovanou před pohybujícím se atomem

$$f' = f \left(1 + \frac{\frac{v_0}{2}}{c} \right)$$

a za pohybujícím se atomem

$$f'' = f \left(1 - \frac{\frac{v_0}{2}}{c} \right).$$

Rozdíl těchto frekvencí vyjádřený v procentech frekvence f bude

$$\begin{aligned} \frac{f' - f''}{f} 100 \% &= \frac{2 \cdot \frac{v_0}{2}}{c} 100 \% = \frac{v_0}{c} 100 \% = \\ &= \frac{6,25 \cdot 10^4}{3,00 \cdot 10^8} \cdot 100 \% \doteq 2 \cdot 10^{-2} \%. \end{aligned}$$

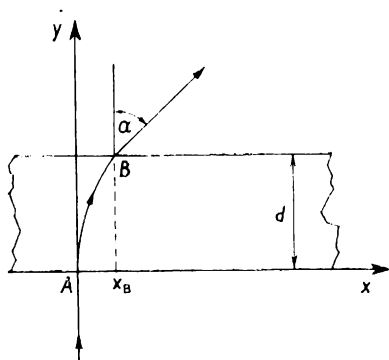
2. úloha

Text:

Na planparalelní desku o indexu lomu měnícím se podle vztahu

$$n = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}} \quad (1)$$

dopadá v bodě A (o souřadnici $x_A = 0$) kolmo k desce úzký svazek paprsků světla. Paprsek opouští desku v bodě B odchýlen o úhel α od původního směru (obr. 60).

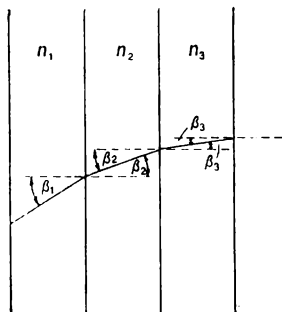


Obr. 60

1. Jak velký je index lomu n_B v bodě B ?
2. Vyjádřete souřadnici x_B bodu B .
3. Jaká je tloušťka desky?

Je dáno:

$$n_0 = 1,2, \quad R = 13,0 \text{ cm}, \quad \alpha = 30^\circ.$$



Obr. 61

Řešení:

Vyšetřeme nejdříve chod světelného paprsku systémem rovnoběžných planoparalelních desek (obr. 61) o indexech lomu $n_1, n_2, \dots$

Podle Snelliova zákona je

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

čili

$$n_1 \sin \beta_1 = n_2 \sin \beta_2;$$

podobně dále

$$n_2 \sin \beta_2 = n_3 \sin \beta_3$$

čili

$$n_i \sin \beta_i = \text{konst.} \quad (2)$$

Zůstává tedy součin indexu lomu vrstvy a příslušného sinu úhlu konstantní a nezávislý na tloušťce vrstvy a na počtu vrstev. Tento vztah lze tedy použít i pro spojitou změnu lámavého úhlu.

1. V bodě A je $x = 0$, úhel dopadu $\beta_A = 90^\circ$ a index lomu podle (1) $n_A = n_0$. Mezi úhly β_A a β_B musí být podle

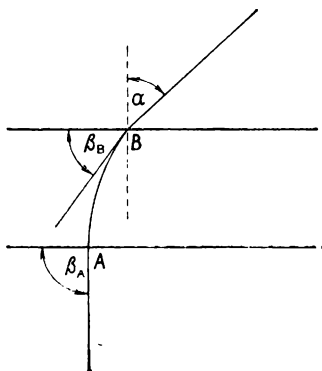
(2) vztah

$$n_A \sin \beta_A = n_B \sin \beta_B. \quad (3)$$

Poněvadž $n_A = n_0$, $\beta_A = 90^\circ$, je

$$n_B = \frac{n_0}{\sin \beta_B}. \quad (4)$$

Dále platí při lomu z vrstvy do prostředí o indexu lomu $n = 1$ podle Snelliova zákona (obráz. 62)



Obr. 62

$$\sin \alpha = n_B \sin (90^\circ - \beta_B)$$

čili

$$\sin \alpha = n_B \cos \beta_B = n_B \sqrt{1 - \sin^2 \beta_B};$$

užitím (4) dostáváme

$$\sin \alpha = n_B \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_B} \right)^2},$$

$$\sin \alpha = \sqrt{n_B^2 - n_0^2}$$

a z toho

$$n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}.$$

Po dosazení daných hodnot dostáváme

$$n_B = \sqrt{\left(\frac{12}{10}\right)^2 + \left(\frac{5}{10}\right)^2} = \frac{13}{10} = 1,3.$$

2. Souřadnici x_B bodu B určíme z daného vztahu (1) pro n a ze známého n_0 , R a n_B (obr. 62). Z (1) plyne

$$n_B = \frac{n_0 R}{R - x_B}$$

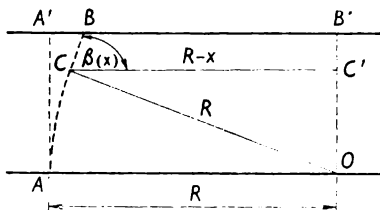
a odtud

$$x_B = R \frac{n_B - n_0}{n_B} = R \left(1 - \frac{n_0}{n_B}\right).$$

Po dosazení dostáváme

$$x_B = 13,0 \left(1 - \frac{1,2}{1,3}\right) \text{ cm} = 13,0 \frac{0,1}{1,3} \text{ cm} = 1,0 \text{ cm}.$$

3. Abychom zodpověděli, jaká je tloušťka desky, musíme určit tvar dráhy. Pro směr paprsku v bodě C o souřadnici x platí podle (2) a (3) (obr. 63)



Obr. 63

$$n(x) \cdot \sin \beta(x) = n_0$$

a užitím (1) dostáváme

$$\sin \beta(x) = \frac{n_0}{n(x)} = \frac{R - x}{R}.$$

Z obr. 63 je vidět: Jestliže proložíme body A, C kruhový oblouk o středu O , protínající kolmo stěnu planparalelní destičky, pak $\frac{R - x}{R} = \sin \widehat{COC'} = \sin \beta(x)$, neboť paprsek jde v bodě C ve směru tečny a svírá se směrem CC' úhel $\beta(x)$. Proto paprsek, který je v tečně v bodě C , zůstává i nadále tečnou této kružnice a nemůže se z této dráhy odchýlit. Protože je paprsek již v bodě A tečnou k vyšetřované kružnici, nemůže ji opustit až do bodu B .

Poněvadž $x_B = 1,0$ cm, je $BB' = 12$ cm, a tedy

$$d = B'O = \sqrt{R^2 - (R - x_B)^2},$$

$$d = \sqrt{13^2 - 12^2} \text{ cm} = \sqrt{169 - 144} \text{ cm} = 5,0 \text{ cm}.$$

Je tedy tloušťka destičky 5,0 cm.

3. úloha

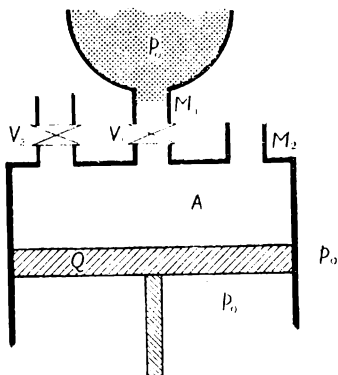
Text:

Vědecká expedice, která pobývala na liduprázdném ostrově, spotřebovala všechny zdroje energie. Na ostrově nevané vítr ani netekou řeky. Obloha je pokryta tlustou vrstvou mračen. Atmosférický tlak je konstantní. Teplota atmosféry a teplota vody neobyčejně klidného oceánu obklopujícího ostrov je během dne i noci stálá. Na tomto ostrově byl objeven zdroj chemicky neutrálního plynu, který vyvěral se stálým výtokem z jeskyně. Vyvěrající plyn měl stejný tlak a teplotu jako atmosféra. Členové výpravy

mají k použití dvě polopropustné membrány, z nichž jedna propouští molekuly plynu, ale molekuly vzduchu zadržuje. Druhá membrána propouští naproti tomu molekuly vzduchu a nepropouští molekuly plynu. Poněvadž členové expedice mají možnost sestavit jednoduchá mechanická zařízení, jako jsou pístové stroje, ventily atd., rozhodli se postavit motor. Ukažte, že při využití tohoto plynu nejsou zde teoretické hranice pro vykonanou práci ideálním motorem.

Řešení:

Schematické znázornění motoru může vypadat tak, jak ukazuje obr. 64. Plyn označme X . Prostor s plynem X se uzavře prvou membránou M_1 a přes ventil V_1 se spojí s válcem, v němž se pohybuje píst Q . Prostor A nad pístem Q je opatřen ještě dvěma dalšími otvory: první je uzavřen membránou M_2 a druhý ventilem V_2 .



Obr. 64

Motor bude pracovat takto:

V 1. fázi cyklu bude ventil V_1 otevřen a ventil V_2 zavřen. Do prostoru A se dostane membránou M_1 plyn X o parciálním tlaku p_0 a membránou M_2 vzduch o parciálním tlaku p_0 , takže v prostoru A bude tlak $2p_0$. Proto se píst vzdálí od základny válce a vykoná práci přetlakem proti atmosférickému tlaku působícímu z druhé strany pístu. Při této pracovní fázi projde do prostoru A membránou M_1 další plyn X . Jestliže je objem prošlého plynu roven V_0 , je práce vykonaná plynem v této fázi (izobarický děj) $p_0 V_0$. Po spotřebování určitého množství plynu X uzavřeme ventil V_1 a necháme směs vzduchu a plynu X v prostoru A izotermicky rozpínout. Přitom bude parciální tlak plynu X klesat podle vztahu

$$p = \frac{p_0 V_0}{V}.$$

Membrána M_2 přitom způsobí, že bude parciální tlak vzduchu v prostoru A stále p_0 , a tedy se bude vyrovnávat s tlakem vzduchu na druhé straně pístu. Práci koná pouze plyn X v prostoru A .

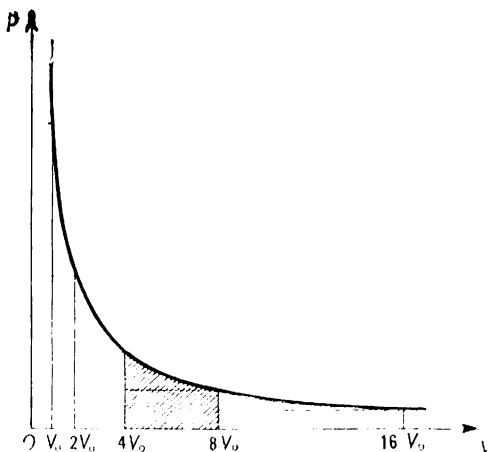
Nyní máme vyšetřit, zda při izotermickém rozpínání plynu může konečné množství plynu vykonat nekonečně velkou práci.

K vyřešení tohoto úkolu sestrojíme diagram závislosti tlaku p na objemu při izotermickém ději (obr. 65)

$$p = \frac{p_0 V_0}{V}.$$

Sestrojíme obdélníky o základně $(2^n - 2^{n-1}) V_0$ pro $n = 1, 2, \dots$ a o výšce

$$p = \frac{p_0 V_0}{2^n V_0} = \frac{p_0}{2^n}.$$



Obr. 65

Pak plocha každého obdélníku bude

$$L = (2^n - 2^{n-1}) V_0 \frac{p_0}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) p_0 V_0 = \frac{1}{2} p_0 V_0.$$

Práce vykonaná při změně objemu ΔV je dána vztahem $\Sigma p \Delta V$. Poněvadž se při změně objemu $(2^n - 2^{n-1}) V_0$ mění tlak z $\frac{p_0}{2^{n-1}}$ na $\frac{p_0}{2^n}$, musí být práce $L_{n-1,n}$ vykonaná při této změně číselně rovna obsahu vyčárkované plochy v diagramu a musí splňovat nerovnost

$$(2^n - 2^{n-1}) V_0 \frac{p_0}{2^{n-1}} > L_{n-1,n} > (2^n - 2^{n-1}) V_0 \frac{p_0}{2^n}$$

čili

$$p_0 V_0 > L_{n-1,n} > \frac{1}{2} p_0 V_0.$$

Poněvadž uvedených obdélníků lze sestrojit nekonečně mnoho, může být celková práce nekonečně velká i při konečném množství užitého plynu X .

Po dosažení určitého objemu při rozpínání plynu otevřeme ventil V_2 , tím unikne plyn X a tlak bude z obou stran pístu stejný. Proto je možno uvést píst bez vynaložení práce do původní polohy a celý cyklus opakovat.

Práce vykonaná plynem při jeho rozpínání se koná na úkor tepla přijatého z okolí. Tento výsledek není v rozporu s 2. větou termodynamiky, protože současně probíhají další děje (např. míchání plynu X se vzduchem).

4. úloha

Text:

Ve skříňce jsou zapojeny v jednoduchém obvodu dvě stejné polovodičové diody a rezistor. Určete použitím připravených přístrojů velikost rezistance rezistoru.

Pokyn:

Předpokládejte, že dioda vede proud jen v jednom směru.

Přístroje a pomůcky:

2 univerzální měřicí přístroje, baterie, proměnný rezistor, vodiče a milimetrový papír.

Řešení:

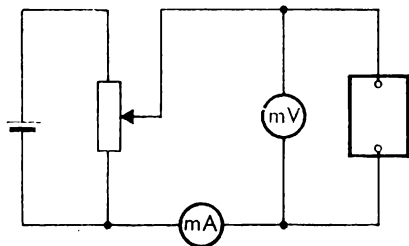
I. Nejprve je třeba zjistit vlastnosti obvodu při dvou různých vstupních napětích U_1 a U_2 obou polarit. K tomu použijeme spojení podle obr. 66.

Označme proudy při napětí U_1

$$+i_1(U_1), -i'_1(U_1)$$

a při napětí U_2

$$+i_2(U_2), -i'_2(U_2).$$



Obr. 66

Měřením vychází:

1. Proud prochází obvodem oběma směry.
2. Proud procházející obvodem je různý pro opačné polarity napětí.
3. Proud je v obou směrech nelineární funkcí napětí.

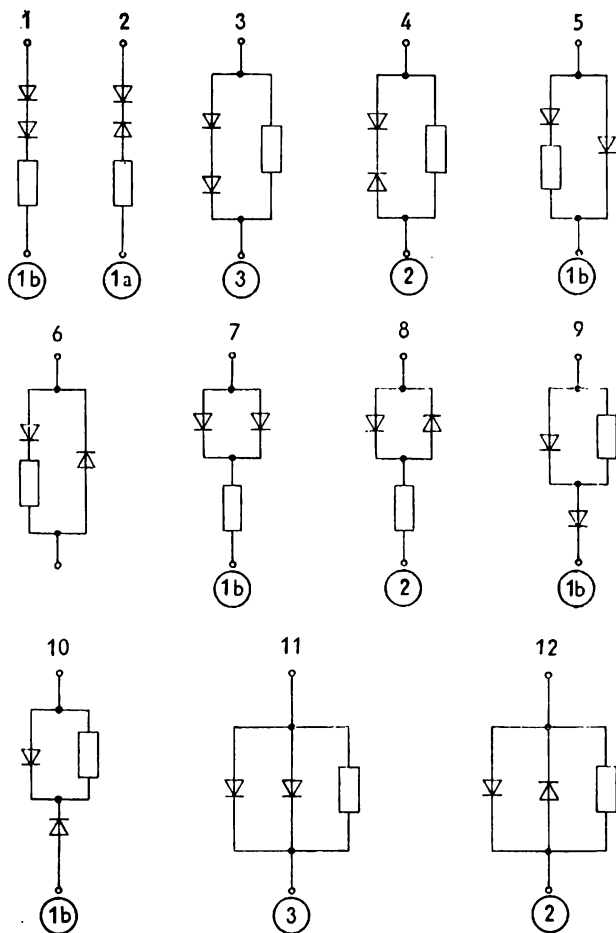
Všechna možná principiální zapojení obou diod a rezistoru jsou uvedena v obr. 67.

Vylučme nyní ta zapojení, která nevyhovují uvedeným třem poznatkům nalezeným měřením. Postupujme od podmínky 1 k podmínce 2 a k podmínce 3. Nesplněnou podmínku napíšeme pod obrázek do kroužku. Tak nesplňuje podmínku

- 1a proud neprochází ani jedním, ani druhým směrem: 2,
- 1b obvod vede proud jen jedním směrem: 1, 5, 7, 9, 10,
- 2 obvod se chová nezávisle na polaritě napětí: 4, 8, 12,
- 3 proud jdoucí obvodem je aspoň v jednom směru lineární funkcí napětí: 3, 11.

Uvedeným měřením vyhovuje jen zapojení 6 (obr. 67). Menší proud jde větví, v níž je dioda v propustném směru sériově zapojena s rezistorem.

II. Po tomto zjištění můžeme přistoupit k určení re-



Obr. 67

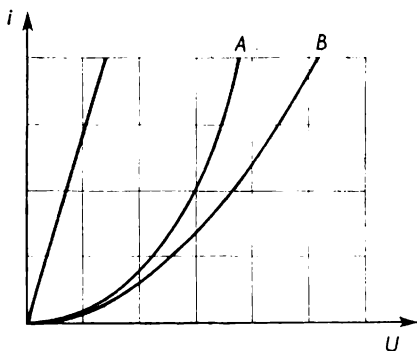
zistance rezistoru. K tomu účelu musíme určit voltampérovou charakteristiku obvodu. Najdeme pro jednotlivé zvolené hodnoty proudu i příslušná potřebná napětí v obou směrech. Označíme-li absolutní hodnoty napětí U_A při proudu jdoucím větví jen s diodou A a absolutní hodnotu napětí U_B při proudu jdoucím větví s diodou B a rezistorem (musí být $U_B > U_A$), pak musí platit

$$U_R = U_B - U_A.$$

Je tedy rozdíl napětí při stejně velkém proudu v obou směrech roven napětí na rezistoru. Proto vyneseme-li do grafu obr. 68 pro určitá i $U_B - U_A$, dostaneme spojením jednotlivých bodů průběh závislosti proudu na napětí u rezistoru

$$i = \frac{1}{R} U;$$

pro tuto závislost vychází v grafu přímka, jejíž směrnice udává vodivost, a tedy převrácená hodnota směrnice je odpor.



Obr. 68

Obsah

I. část: Zpráva o průběhu soutěže	5
1. Cíl soutěže a její organizace	5
2. Složení ústředního výboru fyzikální olympiády ve školním roce 1973/74	9
3. Krajské výbory FO ve školním roce 1973/74 a jejich předsedové	11
4. Průběh soutěže ve školním roce 1973/74	12
A. První kolo soutěže kategorií A, B, C a D	12
B. Druhé kolo soutěže kategorií A, B, C a D	18
C. Třetí kolo kategorie A.	29
D. Závěr soutěže kategorií A, B, C a D	36
E. Soutěž kategorie E	38
F. Přípravné kolo pro 8. ročník ZDŠ.	46
II. část: Soutěžní úkoly	49
1. Úlohy kategorie A	49
a) První kolo soutěže	49
b) Druhé kolo soutěže	69
c) Třetí kolo soutěže	79
2. Úlohy kategorie B	99
a) První kolo soutěže	99
b) Druhé kolo soutěže	117
3. Úlohy kategorie C.	125

a) První kolo soutěže	125
b) Druhé kolo soutěže	154
4. Úlohy kategorie D	161
a) První kolo soutěže	161
b) Druhé kolo soutěže	177
5. Úlohy kategorie E	183
a) První kolo soutěže	183
b) Druhé kolo soutěže	200
c) Třetí kolo soutěže.	208
6. Úlohy přípravného kola	216
III. část: Sedmá mezinárodní fyzikální olympiáda	222
1. Průběh a výsledky soutěže	222
2. Soutěžní úlohy	231

Edice Pomocné knihy pro žáky

Prof. dr. Rostislav Košťál, Mojmír Simerský a Václav Suchánek

**Patnáctý ročník
fyzikální
olympiády**

Obálku navrhl Josef Prchal

Obrázky rýsoval Josef Kubík

Vydání 1. — Praha 1975 — Počet stran 248

Odpovědná redaktorka: Jiřina Cívínová

Výtvarná redaktorka: Milada Slaninová

Technický redaktor: J. Tarantová

Z nové sazby písmem Plantin vytiskl Tisk,
knižní výroba, n. p., Brno, závod 3, Český Těšín
AA 9,24 (8,33 AA textu, 0,91 AA grafiky) - VA 9,83

Náklad 3500 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/5

Cena brožovaného výtisku Kčs 11,50

505/21, 825

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,
v Praze jako svou publikaci č. 55-0-28

14-705-75 Kčs 11,50