

PRÓF. DR. ROSTISLAV KOŠTÁL, DOC. DR. IVAN NÁTER
A VÁCLAV SUCHÁNEK

XIII. ročník fyzikální olympiády

ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE
KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1971/72

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Zpracovali: prof. dr. Rostislav Košťál, doc. dr. Ivan Náter
a Václav Suchánek
Recenzovali: František Živný a dr. Jozef Zámečník

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1973

I. ČÁST: ZPRÁVA O PRŮBĚHU SOUTĚŽE

1. Cíl soutěže a její organizace

XIV. sjezd KSČ vyzvedl vědeckotechnický pokrok jako rozhodující prostředek vzestupu socialistického hospodářství. Tento vědeckotechnický pokrok vyžaduje systematickou péči o růst politické a odborné kvalifikace kádrů. Tato péče začíná vyhledáváním a rozvíjením mladých talentovaných lidí. Z toho vyplývají náročné úkoly pro naše školy: připravit mladou generaci k aktivní účasti na rozvoji socialistické ekonomiky i jednotlivých oblastí společenského života.

Ve školním roce 1971/72 pomáhala škole při plnění uvedených úkolů i soutěž fyzikální olympiáda. Na výběrových školách se konala již potřinácté, na základních devítiletých školách подеváté.

Organizační řád soutěže fyzikální olympiáda (FO), stejně jako matematické olympiády (MO), je dán výnosem ministerstva školství a kultury (MŠK) ze dne 14. března 1963, č. 2293/63—I/1 a byl uveřejněn ve Věstníku MŠK, r. 1963, seš. 12, kde jsou uvedeny i důvody pro zavedení těchto soutěží. Mají vzbudit u žáků zájem o hlubší studium fyziky a matematiky, vést žáky k samostatné práci, naučit je pracovat s odbornou literaturou, pomáhat při vyhledávání nadaných žáků a rozvíjení jejich talentu. Fyzikální, tak i matematická olympiáda vytváří předpoklady pro lepší přípravu studentů ke studiu na vysokých školách technického a matematicko-fyzikálního zaměření. Obě olympiády přispívají také ke zvyšování úrovně vyučování matematice a fyzice. U žáků ZDŠ pomáhá soutěž vytvářet příznivé podmínky pro vstup do technicky náročnějších učebních poměrů nebo pro studium na výběrových středních školách.

V XIII. ročníku probíhala soutěž FO v pěti kategoriích. Kategorie A byla určena žákům IV. ročníků výběrových středních škol, kategorie B žákům III. ročníků, kategorie C žákům II. ročníků a kategorie D žákům I. ročníků těchto škol. Na dobíhajících SVŠ

na Slovensku zařazovali se žáci podle systému předcházejících ročníků. Kategorie E byla pořádána pro žáky 9. ročníků ZDŠ. Každý žák může ovšem soutěžit i v kategorii odpovídající vyššímu ročníku, než který navštěvuje.

Také v tomto školním roce probíhala soutěž v kategoriích A a E ve třech kolech, v kategoriích B, C a D ve dvou kolech. V prvním kole bylo zadáno k řešení 7 úloh, jejichž řešení odevzdávali žáci ve dvou termínech. V kategoriích A, B, C a D byli úspěšnými řešiteli ti žáci, kteří vyřešili aspoň dobře 5 úloh, přičemž řešili (i když neúspěšně) zadanou experimentální úlohu. Mimoto měl účastník soutěže v kategoriích A až D prostudovat fyzikální téma příslušné kategorie, na něž navazovala zpravidla jedna soutěžní úloha 1. kola a jedna úloha 2. kola nebo 3. kola. Ve 2. (krajském) kole FO kategorie A, B, C a D byly zadány 4 úlohy, vesměs teoretické. Ve 3. (celostátním) kole kategorie A byly jako obvykle 4 úlohy teoretické a jedna laboratorní. V kategorii E byla zařazena v 1. kole po několikaleté přestávce opět jedna experimentální úloha. Na rozdíl od vyšších kategorií nebyla však pro úspěšného řešitele povinná. Pro tuto kategorii nebylo také určeno téma k prostudování. Druhé kolo FO kategorie E probíhalo v rámci okresu, 3. kolo pak v rámci kraje. V obou kolech byly zadány 4 teoretické úlohy. Úspěšný řešitel druhého a třetího kola kterékoliv kategorie musel vyřešit úspěšně, tj. výborně nebo dobře, aspoň 50 % zadaných úloh. Klasifikační zásady byly stejné jako v dřívějších ročnících soutěže FO.

Žákovská řešení se klasifikují takto:

1. Výborně, je-li úloha rozřešena správně nebo řešení má nanejvýš jen formální chyby nebo jen menší odbornou závadu.
2. Dobře, jestliže řešení vystihuje úkol, ale má větší odborné nedostatky; dobře je hodnoceno i správné řešení, vyskytují-li se v něm závažné formální nedostatky.
3. Nevyhovující, jestliže nedostatky odborného rázu jsou závažné nebo je-li řešení z větší části neúplné; řešení je také nevyhovující, chybí-li výklad nebo je neúplný, takže z něho nelze soudit na myšlenkový postup podaného řešení.

Pořadatelé soutěže FO jsou ministerstva školství ČSR a SSR spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků a se Socialistickým svazem mládeže ČSSR.

Vlastní soutěž řídil v rámci celé ČSSR ústřední výbor fyzikální olympiády (ÚV FO) jmenovaný ministerstvy školství, v rámci

krajů krajské výbory FO (KV FO) v a rámci okresů řídily soutěž kategorie E okresní výbory FO (OV FO). Na školách byl jeden z učitelů fyziky pověřen funkcí referenta FO.

2. Složení ústředního výboru fyzikální olympiády ve školním roce 1971—1972

Ústřední výbor fyzikální olympiády se podle organizačního řádu skládá ze zástupců pořadajících institucí (MŠ ČSR, MŠ SSR, JČSMF a SSM) a z učitelů vysokých, středních a základních škol, kteří jsou do funkce jmenováni na základě návrhu JČSMF. Kromě toho jsou členy ÚV FO i všichni předsedové krajských výborů fyzikální olympiády.

Sídlem ÚV FO je od roku 1966 Brno. Na počátku školního roku 1971/72 pracoval ÚV FO ve složení z roku 1970/71, jehož funkční období bylo MŠ ČSR a MŠ SSR prodlouženo do konce září 1971, přičemž byli do užšího výboru FO kooptováni ing. Daniel Klivanec, doc. ing. Vincent Kavečanský, CSc., doc. dr. Ladislav Thern, Pavol Škrinár, prof. gymnasia, a Emilie Chrapanová, učitelka ZDŠ. Do té doby nebyl schválen návrh nového výboru ÚV FO, který byl předložen ministerstvem školství prostřednictvím JČSMF.

Koncem měsíce října 1971 se vzdal funkce z osobních důvodů první jednatel Vlastimil Janků, odborný asistent Vojenské akademie Antonína Zápotockého v Brně. Současně s ním přestal fungovat i druhý jednatel František Malý, odborný asistent téže vysoké školy. Funkce jednatele ÚV FO se ujal Václav Suchánek, odborný asistent pedagogické fakulty UJEP v Brně, který byl uveden v návrhu nového ÚV FO.

V říjnu 1971 poslalo MŠ SSR opis rozhodnutí zaslaného JČSMF, že souhlasí s navrženým předsedou ÚV FO, 1. místopředsedou a slovenskými členy užšího výboru ÚV FO. V březnu 1972 schválilo MŠ ČSR členy ÚV FO z ČSR.

ÚV FO měl toto složení:

předseda: RNDr. Rostislav Košťál, profesor elektrotechnické fakulty VUT v Brně a 1. fakulty Vojenské akademie Antonína Zápotockého ve Vyškově

1. místopředseda: RNDr. Ivan Náter, docent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě

2. *místopředseda*: RNDr. Jiří Beránek, docent Vojenské akademie Antonína Zápotockého v Brně
1. *jednatel*: Vlastimil Janků, odborný asistent VAAZ v Brně do 28. 10. 1971;
od 28. 10. 1971 Václav Suchánek, odborný asistent pedagogické fakulty UJEP v Brně
2. *jednatel*: František Malý, odborný asistent VAAZ v Brně do 28. 10. 1971; od 28. 10. 1971 byla tato funkce zrušena.

Další členové (v abecedním pořadí):

František Cimbůrek, profesor gymnasia v Praze-Libni
Emilie Chrapanová, učitelka ZDŠ v Bratislavě
RNDr. Marta Chytilová, CSc., vědecká pracovnice VÚP v Praze
ing. Vincent Kavečanský, CSc., docent přírodovědecké fakulty UPJŠ v Košicích
Alois Kleveta, profesor gymnasia v Brně, Křenová
ing. Daniel Kluvanec, odborný asistent pedagogické fakulty v Nitře
Milan Rádl, odborný asistent Vysoké školy strojnické a elektro-technické v Plzni
Mojmír Simerský, profesor SPŠ VE v Rožnově p. Radhoštěm
Zuzana Šimkovicová, profesorka gymnasia v Bratislavě
Pavol Škrinár, profesor gymnasia v Prievidzi
Jan Tesař, profesor gymnasia v důchodu, Praha
RNDr. Ladislav Thern, docent Vysoké školy lesnické a dřevařské ve Zvoleni
RNDr. Bohumil Vlach, docent přírodovědecké fakulty UJEP v Brně
Ivo Volf, odborný asistent pedagogické fakulty v Hradci Králové
ing. Bohumil Vybíral, CSc., odborný asistent 1. fakulty VA AZ ve Vyškově
RNDr. Jozef Zámečník, odborný asistent elektrotechnické fakulty SVŠT v Bratislavě
František Živný, ředitel gymnasia v důchodu, Nový Bohumín.

Jednotu československých matematiků a fyziků zastupoval v ÚV FO prof. dr. Rostislav Košťál, Socialistický svaz mládeže ing. Bohumil Vybíral. Ministerstvo školství ČSR pověřilo zastupováním v ÚV FO Jaroslava Lánika, ústředního školního inspektora, ministerstvo školství SSR pověřilo zastupováním inspektora Gála.

Soutěžní úlohy vybíraly a upravovaly komise ustavené v rámci ÚV FO za vedení 1. místopředsedy doc. dr. Ivana Nátera. Na tzv. základním výběru pracovali členové komise takto:

František Živný a Ladislav Thern — příklady z mechaniky,

Milan Rádl a Pavol Skrinár — příklady z termiky,
Ivo Volf a Vincent Kavečanský — příklady z elektřiny,
František Cimbůrek a Jozef Zámečník — příklady z optiky, vlnění
a atomistiky.

V komisi pro konečnou redakci soutěžních úloh mimo předsedu komise dr. Ivana Nátera pracovali: Mojmír Simerský (referent pro kategorii A), ing. Daniel Kluvanec (referent pro kategorii B), dr. Marta Chytilová (referentka pro kategorii C), Jan Tesař (referent pro kategorii D), dr. Bohumil Vlach (referent pro kategorii E) a jednatel ÚV FO Václav Suchánek. Ve školním roce 1971/72 ukončila komise výběr soutěžních úloh pro 2. a 3. kolo XIII. ročníku FO a vybrala úlohy pro 1. kolo XIV. ročníku FO všech kategorií.

3. Krajské výbory FO ve školním roce 1971/1972 a jejich předsedové

Po dobrých zkušenostech ve XII. ročníku FO a vzhledem k tomu, že finanční školské záležitosti vyřizuje nadále OŠ NV města Brna, bylo rozhodnuto, aby na úrovni krajského výboru pracoval nadále výbor FO města Brna, i když bylo Brno znovu začleněno do pravomoci KNV Jihomoravského kraje.

Předsedy a členy KV FO jmenuje na návrh poboček JČMF, resp. JSMF odbor školství a kultury KNV. V krajských výborech FO pracují zástupci školské správy, poboček JČMF, resp. JSMF, SSM, a zejména profesori a učitelé fyziky. Podstatným přínosem pro práci KV FO je činnost učitelů vysokých škol jak technického, tak i universitního (zejména pedagogického) zaměření.

Předsedové KV FO pro jednotlivé kraje ve školním roce 1971/72:

Praha: RNDr. Jaroslav Vachek, CSc., odborný asistent MF fakulty UK v Praze

Středočeský: Miroslav Ševčík, profesor SPŠ v Kladně a vedoucí kabinetu fyziky KPÚ pro Středočeský kraj

Jihočeský: do 15. 11. 1971 Konrád Hofman, odb. asistent pedagogické fakulty v Čes. Budějovicích

od 16. 11. 1971 Jaroslav Maryška, profesor gymnasia Jindřichův Hradec

Západočeský: ing. Miloš Rabas, odb. asistent Vysoké školy strojní a elektrotechnické v Plzni

Severočeský: Jaroslav Honner, vedoucí kabinetu fyziky KPÚ v Ústí n. Labem

Východočeský: Zdeněk Ungermann, odb. asistent pedagogické fakulty v Hradci Králové

Brno: RNDr. Rostislav Košťál, profesor elektrotechnické fakulty VUT v Brně

Žihomoravský: Lubomír Vašek, CSc., docent technologické fakulty VUT v Gottwaldově

Severomoravský: RNDr. Miroslav Bajer, DrSc., docent Vysoké školy báňské v Ostravě

Bratislava: RNDr. Ivan Náter, docent elektrotechn. fakulty SVŠT v Bratislavě

Západoslovenský: RNDr. Ladislav Dunajský, CSc., docent Vysoké školy poľnohospodárske v Nitře

Středoslovenský: Pavol Ferko, odb. asistent pedagogické fakulty v Banské Bystrici

Východoslovenský: ing. Vincent Kavečanský, CSc., docent přírodovědecké fakulty UPJŠ v Košicích.

Obdobně jako v krajích jsou i v okresech jmenovány OV FO, které řídí v rámci okresu soutěž pro žáky ZDŠ. Je žádoucí, aby v OV FO pracovali vedle učitelů ZDŠ též učitelé středních výběrových škol, a tak ovlivňovali práci s talentovanými žáky nejvyššího ročníku ZDŠ.

4. Průběh soutěže ve školním roce 1971/1972

A. První kolo soutěže kategorií A, B, C a D

První kolo soutěže probíhalo na školách od září 1971 do 10. února 1972. Texty soutěžních úloh a studijních témat byly otištěny v letáku vydaném ve SPN v Praze z prostředků MŠ v nákladu 4000 výtisků. Do škol však mohly být distribuovány prostřednictvím KV FO až v říjnu pro opoždění tisku.

Pro jednotlivé kategorie byla určena tato studijní témata:

Kategorie A — Řešení kmitavých soustav užitím energie, zpracoval ing. Bohumil Vybíral, CSc., VAAZ Vyškov,

kategorie B — Setrvačné síly, zpracoval Zdeněk Ungermann, pedagogická fakulta Hradec Králové,

TABULKA 1

Počet středních škol, které se zúčastnily XIII. ročníku FO

Kraj	Gymnasia, SVŠ										SPŠ					Ostatní školy					Celkový počet zapojených škol						
	zapojeno										zapojeno					zapojeno					zapojených škol						
	kategorie										kategorie					kategorie					kategorie						
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D			
Praha	20	11	19	14	18	20	—	—	2	8	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
StČ	24	6	19	16	21	22	1	1	2	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
JČ	19	3	8	10	13	15	—	—	—	—	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ZČ	16	9	9	11	9	15	—	—	—	—	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
SC	22	12	18	16	19	22	1	1	2	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
VČ	33	18	23	25	23	31	2	2	2	5	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Brno	6	2	6	6	6	6	—	—	—	—	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
JM	31	12	19	20	26	28	1	2	4	9	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
SM	37	12	24	18	27	30	3	4	2	10	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Bratislava	9	1	7	7	9	9	—	—	—	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ZS	39	10	19	30	32	32	1	2	1	1	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
StS	39	5	16	20	26	27	—	—	—	1	3	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
VS	36	9	7	16	17	18	1	2	2	6	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Celkem	331	110	194	209	246	275	10	14	19	57	62	—	3	2	9	9	120	211	230	312	346	—	—	—	—	—	—
Loni	343	120	202	217	—	258	19	14	48	—	54	2	3	5	—	6	141	219	270	—	318	—	—	—	—	—	—

1) VG Mor. Třebová

2) SZS Brno, Jaseňská

3) SES Znojmo, SZTS Jihlava, SZTS Třebíč,
SZTS Klobouky u Brna

1) VG JZ Opava

2) VSOŠ Nové Město n. V.

3) VSOŠL Prešov

TABULKA 2

Počet žáků soutěžících v 1. kole

(S značí počet soutěžících, Ů počet úspěšných řešitelů, c celkový počet žáků, d z toho dívek)

Kraj	Kategorie A				Kategorie B				Kategorie C				Kategorie D				Celkem			
	S		Ů		S		Ů		S		Ů		S		Ů		S		Ů	
	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d
Praha	38	3	20	1	127	15	84	9	70	6	35	4	212	37	117	21	447	61	256	35
StČ	13	0	11	0	75	19	44	8	67	13	24	6	144	41	70	16	299	73	149	30
JČ	11	1	7	0	26	4	20	3	23	2	18	2	38	9	30	6	98	16	75	11
ZČ	16	3	11	1	87	6	18	2	49	8	17	1	86	8	39	6	238	25	85	10
SC	27	7	11	3	63	15	43	9	67	17	39	15	158	46	85	28	315	85	178	55
VČ	51	3	44	3	74	10	56	9	79	15	43	4	169	41	97	21	373	69	240	37
Brno	6	0	6	0	35	6	25	5	31	5	21	5	36	16	26	12	108	27	78	22
JM	34	7	23	5	75	11	50	8	87	13	45	5	233	52	118	35	429	83	236	53
SM	39	5	31	4	131	7	58	2	82	8	58	4	254	61	108	23	506	81	255	33
Bratislava	40	5	39	5	15	1	14	0	76	10	63	9	140	44	83	25	271	60	199	39
ZS	35	5	13	1	94	19	23	2	159	59	54	15	279	92	131	45	567	175	221	63
StS	22	0	15	0	59	13	19	1	90	7	39	0	161	22	83	10	332	42	156	11
VS	28	5	25	2	35	5	17	1	86	15	45	7	178	39	99	28	327	64	186	38
Celkem	360	44	256	25	896	131	471	59	966	178	501	77	2083	508	1086	276	4310	861	2314	437
Ů %			71	57			53	45			52	43			52	54		54		51
Loni	537	73	357	42	1146	171	641	95	1474	309	807	171	—	—	—	—	3157	553	1805	308
Ů %			64	58			56	56			55	55							57	56

kategorie C — Hodnota a chyba veličiny vypočtené z veličin naměřených, zpracoval prof. RNDr. Rostislav Košťál,
kategorie D — Kinematika jízdy motorového vozidla, zpracovali RNDr. Milan Bednařík a RNDr. Miroslava Široká, přírodovědecká fakulta PU Olomouc.

Témata k prostudování nejsou v této ročence otištěna. Předpokládáme, že tato témata budou pro trvalou potřebu soutěžících ve FO postupně vydána v knižnici SPN Škola mladých fyziků.

Počet středních škol, které se účastnily soutěže FO, je uveden v tabulce 1. Ve srovnání s XII. ročníkem FO vzrostl počet zapojených škol asi o 9 %. Srovnání jednotlivých kategorií není možné, poněvadž není stejný počet kategorií. Poněvadž ještě všechna gymnasia neměla 4. ročníky, jeví se v kategorii A úbytek o 15 %. Potěšitelná a nadějná je skutečnost, že největší účast škol je v kategorii D, např. gymnasií je zapojeno 74 %. Zvýšil se také počet zapojených středních odborných škol, zvláště SPŠ.

Tabulka 2 ukazuje rozvrstvení soutěžících žáků v prvním kole. Celkový počet soutěžících proti minulému ročníku jeví značný vzrůst (o 36 %), i když opět v kategorii A je značný úbytek (asi o 33 %). Počet úspěšných řešitelů však vzrostl jen o 28 %, tedy počet úspěšných řešitelů relativně poklesl (asi o 3 %). Největší procento úspěšných řešitelů je v kategorii A (71 %), v ostatních kategoriích jsou procenta úspěšných řešitelů téměř stejná (52–53 %). Počet soutěžících dívek vzrostl o 57 %, ale úspěšných řešitelek bylo více jen o 41 %; úspěšnost dívek klesla o 5 %.

Vzrůst počtu soutěžících na Slovensku je značně vyšší (téměř 52 %) než v českých zemích, stejně však vzrostl i počet úspěšných řešitelů.

B. Druhé kolo soutěže kategorií A, B, C a D

Druhé kolo soutěže FO kategorií A, B, C a D proběhlo v sobotu dne 11. března 1972. Druhého kola se zúčastnilo 89 % úspěšných řešitelů prvního kola (loni pouze 86 %). Ve většině krajů probíhala soutěž jen v sídlech krajských výborů FO; v kraji Severočeském se konala soutěž mimo Ústí n. Labem ještě v Mostě a Liberci, v kraji Severomoravském mimo Ostravu ještě v Olomouci. Jako obvykle dostal každý soutěžící otisk textu soutěžních úloh. Texty byly rozeslány ÚV FO do míst, kde se soutěž konala, v zalepených obálkách a byly otevřeny před žáky před zahájením soutěže. Doc. dr. Náter zajistil a rozeslal potřebný počet zadání v jazyce maďarském. Opravy a vyhodnocení byly provedeny v rámci kraje

TABULKA 3

Počet žáků soutěžících v 2. kole

(S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, c celkový počet žáků, d z toho dívek)

Kraj	Kategorie A				Kategorie B				Kategorie C				Kategorie D				Celkem			
	S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú	
	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d
Praha	20	1	4	0	84	12	34	3	34	4	26	3	105	16	63	5	243	33	127	11
StČ	11	0	6	0	37	6	16	1	20	2	12	1	59	12	9	1	127	20	43	3
JČ	7	0	2	0	20	3	5	0	18	2	15	2	29	6	10	2	74	11	32	4
ZČ	11	1	6	0	18	2	14	2	17	1	11	1	31	6	10	0	77	10	41	3
StČ	7	2	2	0	38	8	12	0	25	7	7	2	69	17	24	3	139	34	45	5
VČ	41	3	22	0	46	5	12	1	39	6	21	3	83	17	19	3	209	31	74	7
Brno	6	0	2	0	23	5	16	2	21	5	16	4	22	12	4	1	72	22	38	7
JM	22	5	9	0	44	8	11	1	44	5	31	3	112	33	15	3	222	51	66	7
SM	29	3	15	2	52	2	14	0	52	4	43	3	100	16	25	1	239	25	102	6
Bratislava	39	5	9	0	13	0	7	0	56	9	39	5	81	25	23	3	189	39	77	8
ZS	13	1	4	1	22	2	6	0	52	16	29	7	124	36	18	3	211	55	57	11
StZ	14	2	3	0	15	2	9	2	26	1	9	0	50	7	12	1	105	12	33	3
VS	23	2	4	1	16	1	4	0	44	7	22	1	80	22	17	1	163	32	47	3
Celkem	243	25	88	4	428	56	160	12	454	69	285	35	945	225	249	27	2070	375	782	78
Ú %			36	16			37	21		62	50		26	12				37	20	
Loni	333	38	115	9	567	76	193	16	661	131	169	19	—	—	—	—	1561	245	477	44
Ú %			35	24			34	21		25	15							30	18	

jednotně. Členové UV FO se podíleli na přípravě a průběhu 2. kola soutěže v kraji svého bydliště.

Výsledky 2. kola jsou uvedeny v tabulce 3. Celkový počet soutěžících ve 2. kole byl letos asi o 33 % vyšší než loni; procento úspěšných řešitelů vzrostlo na 37 % proti loňským 30 %. Také v tomto kole se jeví značný pokles účasti soutěžících v kategorii A (o 27 %), přitom procento úspěšných řešitelů se celkem nezměnilo (letos 36 %, loni 35 %). Tato skutečnost pak velmi nepříznivě ovlivnila 3. kolo soutěže kategorie A. Ostatní kategorie nelze dost dobře srovnávat, poněvadž přechod na gymnasia neprobíhal na všech školách stejně a byly značné rozdíly mezi situací na Slovensku a v českých zemích. V minulém ročníku procento úspěšnosti s postupem kategorie pomalu rostlo (C 25 %, B 34 %, A 35 %), což odpovídá rostoucím zkušenostem soutěžících. Letos největší procento úspěšných řešitelů je v kategorii C (62 %), což velmi kontrastuje s úspěšností v kategorii B (37 %) a A (36 %). V kategorii D je procento úspěšných řešitelů v tomto ročníku celkem stejné jako procento úspěšných v kategorii C v loňském ročníku (26 % – 25 %). Počet soutěžících dívek i procento úspěšnosti mírně vzrostly (asi o 2 %). Nápadně malé procento úspěšných dívek bylo v kategorii A (16 %) a v kategorii D (dokonce jen 12 %).

Také ve druhém kole je vyšší růst na Slovensku: v účasti o 52 %, v úspěšnosti o 116 %.

Při hodnocení řešení soutěžních úloh v kategorii A bylo jako v minulých letech užito klasifikační stupnice 1, 1 –, 2, 3, což usnadnilo přesnější stanovení pořadí prvních úspěšných řešitelů a výběr účastníků 3. kola.

Pořadí prvních deseti úspěšných řešitelů druhého kola v kategoriích A, B, C, D uvádíme podle krajů. V kategorii A jsou tučným tiskem vyznačeni žáci, kteří postoupili do 3. kola. Bylo-li jich více než 10, uvádíme všechny postupující. U žáků gymnasií, resp. všeobecně vzdělávacích škol neuvádíme zkratku školy.

Praha

A: Jiří Dolejší, Praha 7, Nad štolou; **Petr Seifert**, Praha 8, Libeň; **Jan Zajíc**, Praha 1, Štěpánská; **Arnošt Řenč**, Praha 6, Leninova.

B: Tomáš Burian, Praha 7, Nad štolou; Petr Hejl, Praha 1, Štěpánská; Ivana Hošková, Praha 2, W. Piecka; Josef Scholz, Praha 6, Parlérova; Tomáš Chrz, Praha 2, W. Piecka; Ivan Dlask, Praha 7, Nad štolou; Daniela Čepická, Dalibor Volný, Petr Jarolím, Jan Pergl – všichni Praha 2, W. Piecka.

C: Pavel Ferst, Praha 3, Sladkovského; Petr Tesař, Praha 6, Leninova; Petr Malý, Praha 8, Libeň; Jiří Šviga, Praha 3, Sladkovského; Oldřich Křížek, Anna Pudlaková — Praha 2, W. Piecka; Jiří Měska, Praha 3, Sladkovského; Jiří Matyska, Praha 6, Arabská; Martin Vrátný, Praha 7, Nad štolou; Jaroslav Fořt, Praha 2, W. Piecka.

D: Jiří Vlach, Praha 7, Nad štolou; Evžen Hrnčíř, Praha 7, Nad štolou; Richard Gürtler, Praha 2, W. Piecka; Michael Valášek, Praha 2, W. Piecka; Ludvík Rejchrt, Praha 4, Ohradní; Josef Jurica, SPŠ JT, Praha 4, Svatoslavova; Jan Huga, Praha 3, Sladkovského; Viktor Tekáč, Praha 7, Nad štolou; Dagmar Hášová, Jiří Obenberger — Praha 2, W. Piecka.

Středočeský kraj

A: Dag Jeger, František Mastný, Beroun; Rudolf Koudelka, Jiří Frýda, Kladno; Radomír Vacek, Nymburk; Jiří Kaiser, Příbram.

B: Josef Vermach, SPŠ, Kutná Hora; Tomáš Pergel, Poděbrady; Tomáš Fiala, Příbram; Vladimír Jaroš, Radotín; Jaromír Kukal, Benešov; Miroslav Joukl, Kutná Hora; Jindřich Kareš, Říčany; Jiří Tywoniak, Benešov; Jiří Blacha, N. Strašecí; Miroslava Paříková, Hořovice.

C: Vladimír Anděra, Kladno; Jaroslav Farský, Kolín; Bohuslav Böhм, Kladno; Miloš Pitner, Brandýs: Libor Havlíček, Benešov; Vladimír Veselý, Beroun; Milan Poustka, Benešov; Pavel Šinágl, Dobříš; Miloš Dvořák, Ml. Boleslav; Jitka Klečková, Beroun.

D: Ivan Řehoř, Radotín; Miroslav Růžička, Pavel Tenda — Sedlčany; Ivo Urban, Kolín; Hana Vaňková, Kladno; Pavel Brejník, Kladno; Josef Pich, Č. Brod; Milan Jirouše, SPŠ, Kutná Hora; Jiří Somer, Nymburk.

Jihočeský kraj

A: Karel Horák, Jaroslav Vlček — Strakonice.

B: Jiří Hanzálek, Josef Urban, Václav Helebrant, Zbyněk Neumann, Petr Špatenka — České Budějovice.

C: Ladislav Skrbek, Jindř. Hradec; Miloš Charvát, Karel Moulik — Strakonice; Václav Boukal, Zdeněk Petráš — Č. Budějovice; Jan Bronec, Pelhřimov, Alena Sližková, Pacov; Jaroslav Straka, Pelhřimov; Petr Jovanovič, Pavel Kindlman — Č. Budějovice.

D: Josef Voldřich, Vimperk; Jaroslav Kvičala, Jan Janoušek — Č. Budějovice; Jan Kozelka, Písek; Jiří Sýkora, Písek; Pavel Jova-

novič, Alena Rubešová, Miroslava Kochová — Č. Budějovice;
Miroslav Vácha, Tábor; Marek Vandas, Pisek.

Západočeský kraj

A: Vladimír Pelikán, Blovice; Miloslav Šafanda, Sušice;
Ivan Pospíšil, Ostrov n. Ohří; Václav Tomášek, Klatovy; Stanislav Hrdlička, Plzeň, nám. Odborářů; Jiří Hansa, Ostrov n. Ohří.

B: František Žák, Josef Juřek, Sv. Machalka — Plzeň, nám. Odborářů; Josef Žezule, Klatovy; Petr Milota, Lubor Špidla — Karlovy Vary; Jiří Bonn, Cheb; Jan Rychlík, Vlad. Planěk, Blanka Hnilicová — Plzeň, nám. Odborářů.

C: Václav Veselý, Klatovy; Ladislav Peksa, Jiří Zymák — Plzeň, nám. Odborářů; Jan Dvořák, Karlovy Vary; Václav Bouberele, Klatovy; Jiří Dolejš, Plzeň, n. Odborářů; Petr Král, Karlovy Vary; Karel Tesař, Mar. Lázně; Petr Kantner, Pavel Vošahlík — Plzeň, nám. Odborářů.

D: Michal Svřek, Karlovy Vary; Vlad. Charvát, Václav Šmrha, Vlad. Krásný, Stan. Janský, Pavel Odvárka, Pavel Křížek, Frant. Pillmann, Pavel Rádl — Plzeň, nám. Odborářů; Josef Farták, Sušice.

Severočeský kraj

A: Karel Hájek, Liberec; Jiří Horák, Děčín.

B: Josef Vokál, Česká Lípa; Vítězslav Švejdar, Děčín; Zdeněk Müller, Ústí; Jan Holub, Jiří Svoboda — Teplice; Petr Bořil, Michal Eban — Ústí; Miroslav Pavljuk, Litoměřice; Jan Palacký, Liberec; Milan Halaš, Chomutov.

C: Iva Voříšková, Ústí; Libor Mareš, Litoměřice; Jaroslav Havlík, Česká Lípa; Miroslav Kos, Kadaň; Juliana Siladiová, Ústí; Jiří Rouš, Chomutov; Antonín Srp, Zatec.

D: Alena Němcová, Teplice; Petr Jirásko, Liberec; Ivo Mrázek, SPŠ, Ústí; Pavel Pokorný, Litoměřice; Josef Kalát, Teplice; Jiří Škutchan, Litvínov; Petr Pollak, Roudnice; Josef Kříž, Litvínov; René Hradík, SPŠ, Ústí; Ondřej Novák, Liberec.

Východočeský kraj

A: Jiří Dohnal, Hradec Králové; Igor Koropečký, Pardubice; Pavel Drábek, Pardubice; Daniel Dvorský, Vysoké Mýto; František Fendrych, Hradec Králové; Oldřich Hejlek, SPŠ, Pardubice; Libor Slezák, Pardubice; Milan Pultar, Kostelec n. Orli.; Jindřich Šaršon, SPŠ, Pardubice; Jaroslav Kubík,

Hradec Králové; **Josef Macháček**, SPŠ E, Pardubice; **Jiří Hrubý**, Trutnov; **Jiří Sloupenský**, Ústí n. Orł.; **Jiří Kaněra**, Dobruška; **František Rosypal**, Litomyšl; **Tomáš Ficker**, Svitavy; **Petr Štěpánek**, SPŠ, Nové Město; **Jan Vít**, SPŠ, Nové Město; **Jaroslav Kotlář**, Rychnov.

B: Jan Mandel, Náchod; Zdenka Ungermannová, Hradec Král.; Miroslav Kmoch, Trutnov; Luděk Jančík, SPŠ, Hradec Král.; Jiří Petrák, Nová Paka; Pavel Brutar, Hradec Král.; Ladislav Solc, Broumov; Ludvík Bartošek, Pardubice; Josef Fiedler, Hradec Král.; Jaroslav Novák, Pardubice.

C: Jiří Hruška, Hradec Král.; Karel Krucký, Jiří Svoboda, Petr Hrdlička — Pardubice; Jaroslav Hubáček, Hradec Král.; Dobroslav Kindl, Jiří Hostinský — Pardubice; Zdeněk Zákostelský, Hradec Král.; Josef Ježek, Pardubice; Jana Šulcová, Trutnov.

D: Tomáš Blažek, Pardubice; Petr Holan, Nový Bydžov; Rostislav Jakubiček, Polička; Vladislav Stratílek, SPŠ E, Pardubice; Jaromír Sýkora, Hradec Král.; Roman Týfa, Trutnov; Jaroslav Zahradník, Rychnov n. Kn.; Jan Blažek, Chrudim; Jiří Fiala, Čes. Třebová; Radoslava Hrubá, Trutnov.

Brno

A: Jan Eichler, Brno, Koněvova; **Milan Hach**, Brno, Elgartova.

B: Luboš Bauer, Brno, Koněvova; Petr Pištěk, Jiří Malec — Brno, Křenová; Mil. Zitková, Brno, Koněvova; Jar. Jech, Pavel Šandera — Brno, Křenová; Tomáš Hruška, Jiří Tomášek — Brno, Koněvova; A. Leblochová, Petr Látal — Brno, Koněvova.

C: Michal Horák, Brno, Jarošova; Milan Fikar, Mich. Konečný, Štěp. Kolářová, Zdeněk Burda — Brno, Křenová; Mir. Merta, Brno, Jarošova; Petr Dub, Eva Konečná — Brno, Křenová; Karel Meduna, P. Láznička — Brno, Lerchova.

D: Zdeněk Vlček, Brno, Křenová; Boh. Franěk, Mag. Kuncová, Igor Svoboda — Brno, Koněvova.

Jihomoravský kraj

A: Jiří Binder, Mor. Budějovice; **Josef Sorbi**, Prostějov; Miloslav Koutný, Uh. Brod; **Rudolf Blumenstein**, Prostějov; **Karel Moravec**, Holešov; **Jan Hrdý**, Uh. Hradiště; **Petr Peluha**, Prostějov; **Vítek Musil**, Holešov; **Miloš Sobotka**, Žďár n. Sáz.

B: Zdeněk Hubáček, Otrokovice; Pavel Brada, Jihlava; Maryla Šeinerová, Třebíč; Milan Kadlec, Gottwaldov; Jaromír Dvořák, Prostějov; Jaroslav Kment, Žďár n. Sáz.; Oldřich Drahoš, SPŠ,

Gottwaldov; Vítězslav Zoufalý, Jihlava; Jan Lamper, Gottwaldov; Vit Ticháček, Kroměříž.

C: František Zejda, Boskovice; Ivan Sluštík, Gottwaldov; Jiří Pavel, Jihlava; Petr Chvoska, Gottwaldov; Jiří Brabec, Žďár n. Sáz.; Bohumír Opatřil, Tišnov; Pavel Dudík, Prostějov; Ladislav Málek, Žďár n. Sáz.; Lenka Sůvová, Gottwaldov; Stanislav Štefl, Telč.

D: Lubomír Vlášil, Prostějov; Jiří Jirovský, SPŠ E, Brno; Martin Klusáček, Třebíč; Pavel Procházka, SPŠ E, Brno; Miloš Salamon, Telč; Milan Roupec, Mor. Budějovice; Dušan Vychodil, Prostějov; Jiří Slovák, SPŠ E, Brno; Lubomír Švaříček, Znojmo; František Dostál, Mor. Budějovice.

Severomoravský kraj

A: Milan Menšík, Ostrava 1; Jiří Schlinger, Opava; Eva Radková, Ostrava 1; Jaroslav Zendulka, SPŠ E, Olomouc; Pavla Růžicková, Frýdek-Místek; Jan Chura, Ostrava 1; Karel Krejzl, Rožnov p. Radh.; Pavel Krkavec, Opava; Richard Svacha, Opava; Jaroslav Švrček, Přerov; Jan Hamerník, Rožnov p. Radh.; Jiří Kancnýř, Valašské Meziříčí; Igor Mačejovský, Ostrava 1.

B: Jan Podloucký, Přerov; Vítězslav Chromík, SPŠ, Ostrava 3; Stanislav Lasek, SPŠ, Karviná; Pavel Mikoláš, Ostrava 1; Jiří Drpalík, Opava; Vladimír Krupa, SPŠ E, Frenštát p. Radh.; Tadeusz Fryda, Český Těšín; Jaroslav Hulín, Havířov; Václav Janiš, Rožnov p. Radh.; Jan Kyška, Havířov.

C: Radomír Kuchta, Havířov; Daneš Hanák, Ostrava-Poruba; Jaromír Šimša, Ostrava 1; Jiří Vyhnálek, Miroslav Dosoudil – Olomouc; Zdeněk Mužík, Přerov; Oldřich Polách, Milan Bortel – Val. Meziříčí; David Gruber, Ostrava 1; Martin Nováček, Olomouc-Hejčín.

D: Miloslav Prchal, Ostrava 1; Tomáš Cahlík, Vsetín; Lubomír Baland, Č. Těšín; Miroslav Lýčka, Vsetín; Čestmír Ramík, Ostrava 1; Jiří Kolář, Ostrava 1; Petr Kořenek, Vsetín; Vladimír Bartoš, Ostrava 1; Vladislav Laník, Frýdek-Místek; Vladimír Pavlík, SPŠ, Ostrava 3.

Bratislava

A: Milan Lehotský, Milan Kolibiar, Ján Hanuš, Ján Valášek, Michal Mataš, Štefan Šurka, Ján Mráz, Miroslav Galbavý, Peter Kukuča – všichni Bratislava, Novohradská.

B: Ľubor Kollár, Pavol Zlatoš, Ján Krč, Peter Dobrota — všetci Bratislava, Novohradská; Juraj Žarnovičan, Bratislava, Vazovova.

C: Štefan Varga, Štefan Olejník, Michal Dibarbora, Miroslav Brunclík, František Pšenko, Pavol Meravý, Pavol Poliak, Ján Bilík, Igor Janetka — všetci Bratislava, Novohradská; Teodor Kusý, Bratislava, Vazovova.

D: Ján Krajčík, Ivan Janetka, Dušan Miklánek, Milan Kiaček, Peter Krajčí, Ján Slodička — všetci Bratislava, Novohradská; Tibor Bednárík, Bratislava, Vazovova; Alena Ludrovská, Bratislava, Tomášikova; Dušan Kolesár, Bronislav Molitoris — Bratislava, Novohradská.

Západoslovenský kraj

A: Marta Tóthová, SVŠ, Šamorín; František Šindler, Zl. Moravce; Pavol Jaros, SVŠ, Komárno; Ľudovít Fagula, SVŠ Trnava.

B: Vilém Götz, Nitra; Štefan Stehlík, Trenčín; Juraj Kubiček, SPŠ E, Piešťany; Tibor Kántor, Dezider Sztás — Komárno; Milan Ravas, Holič.

C: Jozef Dlhý, Nitra; Milan Kamarýt, Trenčín; Ján Kaňuk, Malacky; Peter Hroššo, Topoľčany; Ján Nižňanský, Trenčín; Štefan Kovalík, Partizánske; Peter Pokorný, Galanta; Ján Volár, N. Mesto; Svetozár Filip, Trenčín; Miroslav Záhoran, N. Zámky.

D: Jozef Kočan, Vladimír Makýš — Trnava; Miloš Mikula, Peter Štarke — Trenčín; Roman Ormandy, Trnava; Otto Masár, Trenčín; Zoltán Téglás, Komárno; Anna Szaboová, D. Streda; Peter Tongel, Zlaté Moravce; Martin Hošťák, Trenčín.

Stredoslovenský kraj

A: Ľubomír Klobušiak, SVŠ, Lipt. Mikuláš; Štefan Baláž, Prievidza; Jozef Tvarožek, SVŠ, Žilina.

B: Imrich Vrto, R. Sobota; Jozef Dalžuffo, SVŠ, Lučenec; Božena Ďurovová, Martin; František Zboray, SVŠ, Lučenec; Marian Sedláček, Prievidza; Vladimír Šnupálek, Zvolen; Vladimír Sládek, Martin; Juraj Kellner, Ružomberok; Beata Kačalová, SVŠ, Žiar n. Hr.

C: Vojtech Lukács, Šafárikovo; Ivan Mečiar, Prievidza; Ladislav Oravec, SVŠ, Zvolen; Július Korbaš, SVŠ, Pov. Bystrica; Jozef Korenek, SVŠ, B. Štiavnica; Ján Kabelka, SVŠ, Lučenec; Peter Ciesar, SVŠ, Púchov; Jozef Hruboš, Vrútky; Ján Bezecný, Ilava.

D: Jozef Grega, Ban. Bystrica; Peter Maličský, Dušan Martina —

Prievidza; Michal Kučera, Martin; Ján Boďa, Turč. Teplice; Milan Štefánik, Kys. Nové Mesto; Jozef Dudáš, Ban. Bystrica; Martin Valovič, Vrútky; Ondrej Martinský, SPŠ Ch. B. Štiavnica; Stanislav Leitman, Handlová.

Východoslovenský kraj

A: Ján Šalamon, SVŠ, Trebišov; **Juraj Koppel**, SVŠ, Košice, Šmeralova; Danica Jakubiková, SVŠ, Košice, Šrobárova.

B: Karol Pelikán, Peter Višnyi, Ján Kollár — všichni SVŠ, Košice, Šrobárova; Imrich Zborovský, Prešov.

C: Ján Šomvársky, VŠS, Košice, Šmeralova; Tibor Lefkovič, Jozef Krchňavý, Vojtech Kavečanský, SVŠ, Košice, Šrobárova; Juraj Kuniak, Vladimír László — Košice, Šmeralova; Radimír Rexa, Viliam Geffert, SVŠ, Košice, Šrobárova; Miloslav Kic, SVŠ, Prešov.

D: Josef Galajda, VSOŠL, Prešov; Igor Valiga, SVŠ, Kežmarok; Richard Veselý, SVŠ, Košice, Šrobárova; Dušan Kazár, SVŠ, Košice, Šrobárova; Gabriel Toth, SVŠ, Košice, Šmeralova; Tibor Kollár, SVŠ, Prešov; Július Holéczy, SVŠ, Košice, Šrobárova; Zdenek Sládek, SVŠ, Košice, Šmeralova; Jozef Matuška, VSOŠL, Prešov; Pavel Petrus, SVŠ, Prešov.

C. Třetí kolo kategorie A

Celostátní třetí kolo FO kategorie A se konalo ve dnech 26. — 28. dubna 1972 v Plzni na Vysoké škole strojní a elektrotechnické, experimentální úloha i na pedagogické fakultě. Přípravou a organizačním zajištěním 3. kola byl pověřen KV FO Západočeského kraje v Plzni.

Účastníci tohoto kola byli vybráni na zasedání ÚV FO dne 6. dubna 1972 v Brně. Z 88 úspěšných řešitelů 2. kola bylo vybráno 77 účastníků pro 3. kolo, z toho 3 dívky. Počet účastníků z jednotlivých krajů je uveden v tabulce 4.

Všichni pozvaní účastníci se dostavili do Plzně na Vysokou školu strojní a elektrotechnickou dne 26. dubna 1972, kde dostali přesné informace o tom, jak bude soutěž probíhat, o ubytování ve vysokoškolské koleji v Malesicích a o stravování ve vysokoškolské menze v Plzni. Převážně z Plzně do Malesic a zpět byla zajišťována zvláštními autobusy.

Slavnostní zahájení soutěže se konalo v aule VŠSE v Plzni, Leninova 14. Účastníci soutěže i členové ÚV FO, popř. KV FO, byli přivítáni předsedou KV FO v Plzni ing. M. Rabasem. Za vy-

soké školy, které propůjčily pro konání soutěže své budovy, promluvil prorektor VŠSE prof. dr. ing. J. Hlávka a proděkan pedagogické fakulty v Plzni profesor dr. J. Kúst. Za ÚV FO měl hlavní projev předseda prof. RNDr. Rostislav Košťál. Za SSM pozdravil účastníky 3. kola FO ing. Bohumil Vybíral, ČSc., a předal jim dar ÚV SSM publikaci Josefa Kubína: Plzeň. Nakonec byly dány potřebné organizační pokyny pro soutěžící i funkcionáře FO.

Ve čtvrtek 27. 4. 1972 řešili účastníci ve dvou posluchárnách VŠSE 4 teoretické úlohy. Zadání úloh v potřebném množství výtisků pro každého soutěžícího zajistil člen ÚV FO Mojmír Simerský. Po odevzdání řešení byli účastníci seznámeni se stručným řešením zadáných úloh. V odpoledních hodinách se uskutečnila exkurze na vodní hrad Švihov, návštěva Chudenic a prohlídka Klatov; odborný výklad zajišťovali pracovník katedry dějepisu pedagogické fakulty v Plzni dr. Macek a posluchačka A. Böhmová.

V pátek 28. 4. 1972 řešili soutěžící laboratorní úlohu v laboratorích fyziky na VŠSE a pedagogické fakultě. Byli rozděleni do šesti skupin, takže provádění potřebných měření probíhalo bez závad. Přípravu laboratorní úlohy po všech stránkách zajistil KV FO Západočeského kraje.

Organizace celé soutěže zajistila, že soutěžící pracovali samostatně, vzájemně se nerušili a nepoužívali nedovolené pomůcky. Třetí kolo proběhlo bez rušivých vlivů a projevů nekázně. Při zhodnocení organizační stránky soutěže je nutno ocenit především péči a obětavost vedoucích funkcionářů KV FO v Plzni, odb. asistenta ing. Miloše Rabase a odb. asistenta Milana Rádla, ale i práci pracovníků kateder fyziky na VŠSE a pedagogické fakultě a správních pracovníků VŠSE, kteří se podíleli na finančně organizačních pracích. O úspěšný průběh se dále zasloužily rektorát VŠSE a děkanát pedagogické fakulty tím, že daly k dispozici místnosti a přístroje a že po dobu soutěže uvolnily potřebné pracovníky.

Řešení úloh třetího kola opravili tito členové ÚV FO:

- úlohu č. 1 Cimbůrek, Praha a Ševčík, StČK,
- úlohu č. 2 Ferko a Škrinár, StSK,
- úlohu č. 3 doc. Vlach a ing. Vybíral, Brno,
- úlohu č. 4 Simerský a Živný, SMK,
- úlohu č. 5 laborat. ing. Rabas a Rádla, ZČK.

Výsledky 3. kola FO kategorie A jsou uvedeny v tabulkách 4, 5 a 6. Tabulka 7 dává přehled klasifikace jednotlivých úloh. Srovnáme-li výsledky 3. kola s výsledky minulého ročníku FO, vidíme

TABULKA 5

Vítězové 3. kola kategorie A XIII. ročníku FO

Pořadí	Jméno	Třída	Škola
1.	Jiří Binder	4.B	G. Mor. Budějovice
2.	Jiří Horák	4.P	G. Děčín
3. - 4.	Igor Koropecský	4.S	G. Pardubice
3. - 4.	Milan Lehotský	3.S	SVŠ Bratislava, Novohradská
5.	Jiří Dolejší	4.A	G. Praha 7, Nad štolou
6.	Libor Slezák	4.S	G. Pardubice
7. - 8.	Pavel Drábek	4.S	G. Pardubice
7. - 8.	Jan Vít	4.	SPŠ str., Nové Město n. Met.
9.	Milan Kolibiar	3.P	G. Bratislava, Novohradská

značné snížení počtu úspěšných řešitelů — loni bylo úspěšných řešitelů 42 %, letos jen 31 %. Jednou z příčin tohoto snížení je jednak malý počet úspěšných řešitelů 2. kola, ze kterých byl výběr prováděn, jednak nižší kvalita letošních úspěšných řešitelů 2. kola, takže do 3. kola byli vybráni i řešitelé s klasifikací 2, 2, 3, 3, což v dřívějších ročnících se stalo jen výjimečně. Snížený počet úspěšných řešitelů má za následek snížený počet vítězů — loni 20 %, letos 12 % — z celkového počtu účastníků. 3. kola se účastnily 3 dívky, žádná se však nestala úspěšnou řešitelkou.

V celostátním kole soutěžili úspěšně již podruhé J. Binder z Moravských Budějovic, J. Horák z Děčína, Igor Koropecský z Pardubic a Fr. Fendrych z Hradce Králové. Mezi úspěšnými řešiteli 3. kola je i několik studentů 3. ročníku gymnasia, kteří mohou využít svých soutěžních zkušeností ve XIV. ročníku FO (M. Kolibiar z Bratislavy, K. Horák ze Strakonice, Št. Baláz z Prievidze).

Tabulka 7 ukazuje, že nejvíce úspěchů dosáhli soutěžící u experimentální úlohy a u úlohy č. 1, i když je úspěšně vyřešila slabá

TABULKA 6

Další úspěšní řešitelé 3. kola kategorie A XIII. ročníku FO

Pořadí	Jméno	Třída	Škola
10. – 13.	František Fendrych	4.G, S	G. Hradec Králové
10. – 13.	Jiří Frýda	4.A	G. Kladno
10. – 13.	Karel Hájek	4.S	G. Liberec
10. – 13.	Štefan Šurka	3.	SVŠ Bratislava, Novohradská
14.	Milan Menšík	4.	G. Ostrava, Šmeralova
15. – 16.	Daniel Dvorský	4.A	G. Vysoké Mýto
15. – 16.	Karel Horák	3.B	G. Strakonice
17.	Jiří Dohnal	4.G, S	G. Hradec Králové
18. – 21.	Štefan Baláž	3.G	G. Prievidza
18. – 21.	Vladimír Pelikán	4.A	G. Blovice
18. – 21.	Petr Seifert	4.D	G. Praha 8, Libeň
18. – 21.	Josef Sorbi	4.B	G. Prostějov
22.	Jan Zajíc	4.C, S	G. Praha 1, Štěpánská
23.	František Mastný	4.A	G. Beroun
24.	Jiří Sloupenský	4.P	G. Ústí nad Orlicí

TABULKA 7

Přehled výsledků klasifikace 3. kola kategorie A

Úloha čís.	Známky			Průměr. známka	Téma úlohy
	1	2	3		
1	22	16	39	2,22	Elektrostatika, kmity
2	19	6	52	2,42	Záření, ohyb světla na mřížce
3	5	14	58	2,69	Mechanické kmity soustavy
4	12	8	57	2,58	Obvod střídavého proudu
5 exper.	25	16	36	2,14	Měření momentu setrvačnosti kladky a momentu třecí síly
Celkem	83	60	242	2,41	

polovina soutěžících. Nejslabší výsledky dosáhli soutěžící u úlohy č. 3; 74 % řešení bylo nevyhovujících. Tato úloha navazuje na studijní téma kategorie A. Také v předcházejících kolech vykazovaly úlohy navazující na studijní téma poměrně malé procento úspěšných řešení. Téměř stejné procento neúspěšnosti mají i úlohy č. 4 a 2. Zvláště u úlohy č. 2 to neodpovídá její obtížnosti. Její tematika se však v úlohách předcházejících kol nevyskytovala.

Na schůzi komise ÚV FO pro vyhodnocení výsledků 3. kola kategorie A byly projednány výsledky (viz tabulky 4, 5, 6 a 7) a stanoveno, že do přípravy na 6. mezinárodní fyzikální olympiádu v Rumunsku budou zařazeni tito úspěšní řešitelé 3. kola (bylo přihlédnuto i k výsledkům 2. kola): 1. J. Binder, 2. J. Horák, 3. M.

Lchotský, 4. I. Koropečký, 5. J. Dolejší, 6. P. Drábek, 7. L. Slezák, 8. M. Kolibiar, 9. K. Hájek, 10. J. Vít a 11. D. Dvorský.

Úspěšní řešitelé na 1.–16. místě byli odměněni z prostředků ministerstva školství ČSR. Kromě toho zajistil ÚV SSM dvaceti úspěšným řešitelům 3. kola rekreační soustředění v Solenici u Orlické přehrady ve dnech 29. 7.–5. 8. 1972. Pedagogický dozor měl ing. Bohumil Vybíral, CSc.

D. Závěr soutěže kategorií A, B, C a D

Prevažná většina úspěšných řešitelů 2. kola jsou žáky přírodovědných odvětví nebo speciálních matematicko-fyzikálních tříd. Svědčí to o tom, že soustavná práce s talentovanými žáky, která je v programu uvedených větví, přináší dobré výsledky.

Také celostátní soustředění úspěšných řešitelů MO a FO klade si za cíl prohloubit a rozšířit znalosti vybraných žáků v důležitých partiích matematiky a fyziky. Letos se celostátní soustředění konalo v době od 18. 6. do 8. 7. v Trenčíně. Zúčastnilo se ho 90 žáků, kteří budou ještě nejméně jeden rok studovat na střední škole a mohou vědomosti a dovednosti získaných na soustředění využít nejen v dalším ročníku FO nebo MO, ale i při plnění školních povinností.

Organizací soustředění byl pověřen ÚV FO. ÚV FO zajišťoval také fyzikálně odbornou stránku soustředění (ve třídě fyzikální a matematicko-fyzikální). Na výuce se podíleli prof. RNDr. R. Košťál, odb. asistent V. Suchánek, odb. asistent V. Mitvalský, odb. asistent Z. Ungermann, odb. asistent ing. B. Vybíral, CSc. a M. Simerský, profesor SPŠ. Hospodářskou stránku celostátního soustředění zajišťoval ÚDPM KG v Bratislavě.

Stejný úkol jako celostátní soustředění plnila i krajská soustředění úspěšných řešitelů kategorií B a C organizovaná KV FO.

E. Soutěž kategorie E

První kolo kategorie E probíhalo do 28. února 1972. Texty úloh s příslušnými pokyny byly uveřejněny v samostatném letáku, který vydalo SPN v Praze jako účelový tisk ministerstva školství ČSR v nákladu 10 000 výtisků. Obdobný leták vyšel v Bratislavě ve slovenštině. Příklady pro 2. a 3. kolo byly připraveny jednotně pro celou ČSSR, pro slovenské kraje připravil slovenský a maďarský text úloh doc. dr. I. Náter, místopředseda ÚV FO.

Druhé kolo soutěže se mělo podle pokynů v letáku konat 12. dubna 1972. Poněvadž však tomuto datu předcházely zkoušky na výběrové střední školy, bylo toto kolo na žádost slovenských krajů, kde úspěš-

ný řešitel 2. kola FO je osvobozen od písemné zkoušky z matematiky, přeloženo na 29. března 1972. Toto značné posunutí termínu ovlivnilo nepříznivě přípravu tohoto kola i výběr účastníků zvláště proto, že ve velkém počtu okresů padl do týdne jarních prázdnin.

Třetí kolo soutěže se konalo již podle plánu 13. května 1972, ve všech krajích.

Tabulka 8 uvádí počet škol, které se zúčastnily soutěže FO v jednotlivých kolech ve srovnání s celkovým počtem ZDŠ. Počet zapojených škol vzrostl: v 1. kole o 2 %, ve 2. kole o 12 % a ve 3. kole o 9 % vzhledem k loňským počtům zapojených škol. Zapojení 53 % ZDŠ v soutěži však není stále ještě uspokojující.

TABULKA 8

Počet ZDŠ, které se zúčastnily XIII. ročníku FO

Kraj	Počet ZDŠ v kraji	1. kola se zúčastnilo		2. kola se zúčastnilo		3. kola se zúčastnilo	
		počet	%	počet	%	počet	%
Praha	163	139	85	124	76	50	30
StČ	299	147	49	116	39	36	12
JČ	183	97	53	72	39	22	12
ZČ	222	90	40	45	20	16	7
SČ	293	144	49	103	35	48	16
VČ	317	166	52	124	39	32	10
Brno	65	50	78	39	60	37	57
JM	401	201	50	156	38	48	12
SM	465	209	45	167	36	31	7
Bratislava .	69	41	59	40	58	25	36
ZS	470	258	55	222	47	41	9
StS	397	232	58	167	42	36	9
VS	332	164	49	122	36	33	10
Celkem . . .	3676	1938	53	1497	41	455	12
Loni	3682	1895	51	1331	36	419	11

TABULKA 9

Počet záklů soutěžících v 1., 2. a 3. kole kategorie E

(S značí počet soutěžících, Ů počet úspěšných řešitelů, % Ů počet úspěšných v %)

Kraj	1. kolo						2. kolo						3. kolo					
	celkem			z toho dívek			celkem			z toho dívek			celkem			z toho dívek		
	S	Ů	%	S	Ů	%	S	Ů	%	S	Ů	%	S	Ů	%	S	Ů	%
Praha	1123	621	55	347	164	47	491	291	59	110	49	45	82	64	78	8	7	87
StČ	470	322	68	134	90	67	284	133	46	75	27	36	55	38	69	12	5	42
JČ	528	273	52	192	85	44	214	80	37	74	23	31	21	19	90	4	4	100
ZČ	293	246	84	93	42	45	212	90	42	51	15	29	23	14	61	3	1	33
SČ	770	356	46	255	101	40	307	146	47	86	3	3	68	48	70	14	10	71
VČ	877	478	54	292	133	46	380	149	39	123	28	27	37	21	58	1	0	0
Brno	335	168	50	105	51	48	153	62	41	45	12	27	47	33	70	8	7	87
JM	722	469	65	224	119	53	423	129	30	100	22	22	73	52	71	11	6	54
SM	970	534	55	328	133	40	385	154	40	93	25	27	35	33	94	1	0	0
Branislava	380	291	77	118	82	69	284	87	31	80	17	21	75	56	75	14	9	64
ZS	1618	1062	65	589	406	69	987	402	41	382	152	39	67	24	36	20	1	5
StS	1558	611	39	667	203	30	594	252	42	187	74	40	51	29	59	5	4	80
VS	923	479	52	261	141	54	427	174	41	118	53	45	56	23	41	17	8	47
Celkem	10 567	5910	56	3605	1750	49	5141	2149	42	1524	500	33	690	454	66	118	62	53
Loni	10 430	5342	51	4030	1870	46	4409	2737	62	1465	774	53	677	460	68	121	69	57

Počet soutěžících žáků v 1. kole, jak ukazuje tabulka 9, vzrostl letos proti minulému roku jen o 1 %, ve 2. kole však o 17 %, ve 3. kole asi o 2 %. Počet úspěšných řešitelů v 1. kole se proti minulému ročníku zvětšil o 10 %, ve 2. kole naopak klesl o 21 %. Není to jev přirozený a bude třeba hledat příčiny; jednou z nich je jistě i výše uvedené přeložení termínu 2. kola. Ve 3. kole úspěšnost vzrostla na 66 %; jednou z příčin je i skutečnost, že do tohoto kola bylo vybráno jen 32 % úspěšných řešitelů 2. kola. Počet soutěžících dívek se letos v 1. kole zmenšil asi o 10 %, ve 2. kole naopak vzrostl o 2 %, ve 3. kole pak opět poklesl o 2 %. Z tabulky je také vidět, že procento úspěšných řešitelek je menší než celkové procento úspěšných řešitelů. Jak ukazují tabulky 8 a 9, není ještě situace v jednotlivých krajích vyrovnaná.

Na Slovensku letos počet účastníků v 1. kole proti minulému roku poklesl asi o 6 %, ve 2. kole naopak vzrostl o 23 %; počet úspěšných řešitelů v 1. kole vzrostl asi o 12 %, ve 2. kole naopak poklesl o 7 %. Ve 3. kole je v obou srovnávaných ročnících soutěže počtem soutěžících i úspěšných řešitelů na stejné výši.

Dále uvádíme jména vítězů 3. kola kategorie E (z každého kraje nejvýše deset). Za vítěze považujeme řešitele, kteří ze 4 zadáných úloh vyřešili úspěšně 3 úlohy. U každého žáka je zapsáno sídlo ZDŠ.

Praha

Stanislav Červinka, Praha, Kbely; Vladislav Sýkora, Praha 6, Červ. vrch; Tomáš Kotrba, Praha 2, Resslova 10; Ludm. Pachtová, Praha 4, Bráník; Karel Nenadál, Praha 9, Prosek; Milan Kubiš, Praha 4, Poláčkova; Libor Kotoun, Praha 10, Kodaňská; Richard Chvojka, Praha 10, Kodaňská; Václav Kotěšovec, Praha 2, Makarenkova; Magda Volkeová, Praha 6, Bílá ul.; Jaroslav Woska, Praha 6, Sušická.

Středočeský kraj

Stanislav Studnička, Dol. Kralovice; Vlastimil Klát, Mělník; René Kristen, Městec Král.; Jiří Pflieger, Hor. Počernice; Jaroslav Jícha, Příbram; Božena Ledvinková, Mutějovice; Milan Šilínek, Benešov, 1.; Jaroslav Krupička, Kladno, 7.; Zbyněk Janča, Břežno; Milan Sedliský, Mnich. Hradiště.

Jihočeský kraj

Jiří Frána, Besednice; Jaroslav Tišer, Strakonice; Libuše Baue-rová, Tábor; Josef Krýcha, Vimperk; Eva Hrušková, Chýnov;

Jaromír Trira, Strakonice, 2.; Věroslav Havel, Rožnov; Jar. Zlatohlávek, Tábor, 1.; Vlastimil Houf, Č. Budějovice, Dukelská; Václav Ferebauer, Č. Budějovice, Baarova.

Západočeský kraj

Frant. Hanzlík, Plánice; František Staněk, Stříbro; Václav Vočadlo, Plzeň, nám. Míru; Jindřich Müller, Plzeň, Tábořská; Karel Holub, Staňkov; Josef Toms, Cheb; Miroslav Švec, Rokycany; Vladimír Heřt, Plzeň, Na Dlouhých; Luboš Šneberger, Rokycany; Jaromír Fiala, Blovice.

Severočeský kraj

Pavel Esentier, Desná; Miroslav Kroulík, Čes. Lipa; Martin Nikl, Chomutov; Jan Menšík, Jablonec n. N.; Petr Kesler, Ústí n. L.; Bohuslav Matoušek, Litoměřice; Milan Ďurana, Teplice; Ota Košek, Nový Bor; Zdeněk Zúna, Lovosice; Zdena Žehrová, Jablonec.

Východočeský kraj

Josef Pavel, Rychnov n. Kn.; Lubomír Novák, Rovensko p. Troskami; Miloš Štěřba, Luže; Jiří Dvořák, Pardubice, ul. br. Veverkových; Miloš Ferjenčík, Pardubice, Staňkova ul.; Pavel Černohous, Lanškroun; Jaroslav Hlubuček, Turnov; Libor Jelínek, Pardubice, Družstevní ul.; Radoslav Jež, Moravská Chrástová; Aleš Khain, Pardubice, Makarenkovo nám.

Brno

Jiří Peňáz, Brno, tř. kpt. Jaroše; Břetislav Bakala, Brno, Křídlovická; Jiří Malý, Brno, Mendlovo nám.; Jarmila Spohrová, Brno, Sirotkova; Ingrid Vaňková, Brno, Slovanské nám.; Kamil Novák, Brno, Staňkova; Lubomír Šabatka, Brno, tř. kpt. Jaroše; Milan Šťastný, Brno, Gajdošova; Zdeněk Vaishar, Brno, Slovanské nám.; Jiří Michele, Brno, Lerchova.

Jihomoravský kraj

Drahoslav Melo, Hodonín; František Dermek, Vyškov; Karel Nepraš, Břeclav; Ivo Novotný, Gottwaldov, 5.; Miroslav Pavel, Jihlava; Petr Frgal, Prostějov; Jiří Boháč, Gottwaldov, 10.; Zbyněk Kepřt, Střelice; Miloslav Kuchtík, Znojmo; Miroslav Muselik, Kanice.

Severomoravský kraj

Stanislav Durčok, Dolní Lutyně; Vítězslav Jelínek, Dol. Lutyně; Jan Ježík, Val. Meziříčí; Miroslav König, Štramberk; Josef Lautner, Frýdek-Místek, 7; Kristián Walach, Ostrava 8; Jan Červínek, Opava; Jan Kohane, Havířov; Jaroslav Sojka, Ostrava-Mar. Hory; Jan Hecl, Šumperk.

Bratislava

Marián Slodička, Bratislava, Košická ul.; Pavol Minárik, Bratislava, Košická ul.; Igor Brilla, Bratislava, Hlboká ul.; Michal Zika, Bratislava, Košická ul.; Igor Makúch, Bratislava, Košická ul.; Vladimír Votruba, Bratislava, Košická ul.; Róbert Šimončíč, Bratislava, Nedbalova ul.; Juraj Skoček, Bratislava, Nevädzová ul.; Matúš Búci, Bratislava, Košická ul.; Juraj Wallner, Bratislava, Košická ul.

Západoslovenský kraj

Svetozár Malinarič, Nitra; Jozef Vavro, Smolenica; Zoltán Kecskés, Hurbanovo; András Panyi, maď. Iža; Alexandr Hulko, Nové Zámky; Habovštiak Daniel, Nitra; Kallay Ottó, maď. Štvrtok n. Ostrove; Ladislav Kokodič, Kubra; Juraj Matus, Zlaté Klasy; Viliam Páleník, Hlohovec.

Stredoslovenský kraj

Gabriel Szantó, Ožďany; Miroslav Kyseľ, B. Bystrica; Martin Papcun, Žilina, Hliny V.; Pavol Makovický, Žilina, Konevova ul.; Peter Slabej, Ožďany; Zdena Čižmarová, Pov. Bystrica; Ľubomír Brezovický, Ožďany; Pavol Timár, R. Sobota; Pavol Kondela, D. Hričov, Ján Simon, Dolný Kubín.

Východoslovenský kraj

Mikuláš Oravec, Prešov; Jurak Kavečanský, Košice, Šteiner.; Ľubica Šťavová, Spiš. N. Ves; Bohuslav Valiga, Tatr. Lomnica; Iveta Ferková, Prešov, Gottwald.; Dagmar Povýšilová, Erika Tekeľová — Prešov, Gottwald.; Štefan Hanuščin, Svidník; Peter Liška, Vranów; Marián Boháč, Družstevná.

Zkušenosti tohoto ročníku soutěže ukazují, že zvláště v kategorii E bylo správné snížení počtu soutěžních úloh 1. kola na 7. Také praxe nevyžadovat obecné řešení soutěžní úlohy, kladlo-li nároky na matematické dovednosti přesahující ve větší míře schopnosti

dobrého žáka 9. ročníku, působila příznivě na setrvání žáků v soutěži. V tomto směru byla učitelům dobrým vodítkem stručná řešení vydávaná ÚV FO a posílaná prostřednictvím OV FO na každou školu zapojenou do soutěže.

II. ČÁST: SOUTĚŽNÍ ÚLOHY

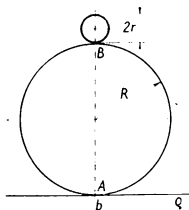
1. Úlohy kategorie A

Úlohy a jejich řešení recenzovali Mojmir Simerský a dr. Ivan Náter.

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl Konrád Hofman)

Na vodorovné rovině ϱ leží válec o poloměru R a dotýká se této roviny v přímce b (viz obr. 1). Nad svislým průměrem AB je položen tenkostěnný váleček o poloměru r v rovnovážné poloze vratké. Při nepatrném porušení rovnováhy se váleček počne odvalovat (bez klouzání) po válcové ploše.



Obr. 1

Stanovte:

- v jaké výšce h nad rovinou ϱ je osa válečku v okamžiku, v němž váleček opustí válcovou plochu;
- jakou rychlost v_0 má váleček v okamžiku, v němž jeho osa projde rovinou ϱ .

Úlohu řešte jednak v soustavě inerciální, jednak v soustavě spojené s pohybujícím se válečkem. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $R = 50,0 \text{ cm}$, $r = 1,00 \text{ cm}$; tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení:

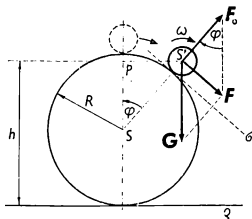
Řešení v inerciální soustavě spojené se Zemí:

a) Váleček opustí oblinu válce tehdy, když výslednice F tíhové síly G a reakce F_0 síly dostředivé je rovnoběžná se společnou tečnou rovinou σ obou válců (obr. 2).

Z trojúhelníku $SS'P$ vyjádříme

$$\cos \varphi = \frac{h - R}{R + r}. \quad (1)$$

Týž úhel svírá se svislým směrem síla F_0 , takže z pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami F , F_0 a s přeponou G vyjádříme



Obr. 2

$$\cos \varphi = \frac{F_0}{G} = \frac{\frac{m v^2}{R + r}}{m g} = \frac{v^2}{g (R + r)}, \quad (2)$$

značí-li m hmotnost válečku a v velikost rychlosti, kterou má v tomto okamžiku jeho osa.

Porovnáním (1) a (2) dostaneme po úpravě

$$v^2 = g(h - R). \quad (3)$$

Potenciální energie válečku se zmenšila o $W = mg(2R + r - h)$, váleček dostal kinetickou energii translačního pohybu $\frac{1}{2}mv^2$ a rotační energii $\frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2$, je-li $\mathcal{J}$ jeho moment setrvačnosti a ω úhlová rychlost jeho otáčení. Platí tedy

$$mg(2R + r - h) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2. \quad (4)$$

Je nyní

$$\mathcal{J} = mr^2; \quad \omega = \frac{v}{r}.$$

Dosadíme do (4) a po úpravě dostaneme

$$g(2R + r - h) = v^2. \quad (5)$$

Ze soustavy rovnic (3) a (5) vyjádříme

$$h = \frac{3R + r}{2}; \quad v = \sqrt{\frac{g(R + r)}{2}}. \quad (6)$$

Pro dané číselné hodnoty vyjde $h \doteq 75,5$ cm; $v \doteq 1,58$ m s⁻¹.

b) Když váleček proletuje horizontální rovinou ρ , je jeho potenciální energie zmenšena o $W' = mg(2R + r)$; váleček má kinetickou energii translačního pohybu $\frac{1}{2}mv_0^2$ a rotační energii

$\frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2$, kde v je rychlost daná druhým ze vztahů (6). Platí tedy

$$mg(2R + r) = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m \frac{g(R + r)}{2}.$$

Odtud vypočítáme

$$v_0 = \sqrt{\frac{g(7R + 3r)}{2}}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $v_0 = 4,16 \text{ m s}^{-1}$.

Řešení v neinerciální soustavě:

a) Váleček opustí oblinu válce, když tíhová síla $\mathbf{G}$ setrvačná síla $\mathbf{F}_s$ (způsobená posuvným pohybem osy válečku) a setrvačná odstředivá síla $\mathbf{F}_0$ (způsobená rotačním pohybem osy válečku) jsou v rovnováze, tj. když výslednice $\mathbf{F}'$ sil $\mathbf{F}_0$ a $\mathbf{G}$ má velikost $F' = G$ (obr. 3).

Síla $\mathbf{F}_s$ má velikost stejnou jako složka $\mathbf{G}_1$ tíhové síly, tedy

$$F_s = G \sin \varphi = mg \sin \varphi. \quad (7)$$

Setrvačná odstředivá síla $\mathbf{F}_0$ má velikost

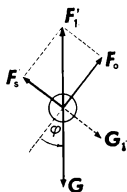
$$F_0 = m(R + r) \Omega^2,$$

kde Ω značí (obr. 4) okamžitou úhlovou rychlost rotačního pohybu osy válečku po kruhové dráze o poloměru $(R + r)$:

$$\Omega = \frac{v}{R + r},$$

kde v je rychlost osy válečku v inerciální soustavě, takže

$$F_0 = \frac{m v^2}{R + r}. \quad (8)$$



Obr. 3

Výslednice F' sil F_s a F_0 má stejnou velikost jako tíhová síla $G = mg$, tj. (viz obr. 3)

$$F'^2 = G^2 = m^2 g^2 = F_s^2 + F_0^2.$$

Po dosazení z (7) a (8) a s použitím vztahu $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ dostaneme opět (2)

$$\cos \varphi = \frac{v^2}{g(R+r)}.$$

Z (1) a (2) dostaneme (3).

Pozorovatel v neinerciální soustavě zjistí, že tíhová síla G vykonala práci

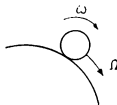
$$A = mg(2R + r - h). \quad (9)$$

Na váleček (jako celek) působí setrvačná síla F_0 , váleček rotuje po dráze s poloměrem $(R + r)$, takže má energii

$$W_1 = \frac{1}{2} m (R + r)^2 \Omega^2 = \frac{1}{2} m v^2. \quad (10)$$

Na každý „hmotný bod“ válečku, jenž má hmotnost m' , působí setrvačná odstředivá síla o velikosti $F'_0 = m' r \omega^2$. Váleček má celkovou hmotnost m a všechny jeho body rotují s poloměrem r úhlovou rychlostí ω (obr. 4); má tedy energii

$$W_2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2. \quad (11)$$



Obr. 4

Je nyní $W_1 + W_2 = A$, takže z (9), (10), (11) dostaneme (5). Odtud spolu s (3) dostaneme oba vztahy (6).

b) Tíhová síla vykonala práci

$$A' = mg(2R + r),$$

která je rovna součtu energie (11) a energie další, kterou má (jako rotační energii) váleček (jako celek) rotující obvodovou rychlostí v_0 (vzhledem k inerciální soustavě) po kružnici o nějakém poloměru R' . Pro tuto energii W_3 platí

$$W_3 = \frac{1}{2} m R' \Omega'^2 = \frac{1}{2} m v_0^2,$$

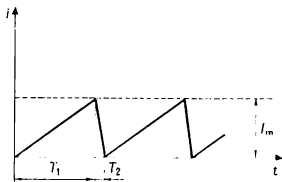
kde Ω' značí úhlovou rychlost otáčení válečku jako celku. Z rovnosti

$$A' = W_2 + W_3$$

a s ohledem na (6) dostaneme pro v_0 stejný výsledek jako v soustavě inerciální.

2. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

Cívkou, která má indukčnost L a odpor R , protéká proud i pilovitého průběhu (viz obr. 5), tj. takový, že nejprve po dobu T_1 rovnoměrně stoupá od nuly na hod-

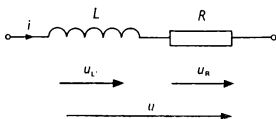


Obr. 5

notu I_m a potom po dobu T_2 rovnoměrně klesá opět na nulu. Jaký časový průběh má napětí u na cívce? Načrtněte ho. Při řešení považujte cívku za soustavu vytvořenou sériovým spojením vodiče 1 o indukčnosti L a nulovém odporu a vodiče 2 o odporu R a nulové indukčnosti.

Řešení:

Cívku můžeme podle zadání nahradit sériovým obvodem



Obr. 6

znázorněným na obr. 6. Celkové napětí u je součtem indukčního napětí u_L a napětí u_R na odporu:

$$u = u_L + u_R. \quad (1)$$

Za dobu T_1 se proud rovnoměrně změní z nuly na I_m , takže na indukčnosti se objeví napětí

$$u_L = L \frac{I_m}{T_1} \quad (2)$$

a na odporu je napětí

$$u_R = Ri. \quad (3)$$

Proud i se v časovém intervalu $0 \leq t \leq T_1$ dá vyjádřit vztahem

$$i = \frac{I_m}{T_1} t. \quad (4)$$

Do (1) dosadíme (2) a (3), v (3) za i dosadíme (4) a dostaneme

$$u = L \frac{I_m}{T_1} + \frac{R I_m}{T_1} t. \quad (5)$$

Vztahem (5) je vyjádřen časový průběh napětí v časovém intervalu od nuly do T_1 . Napětí zřejmě stoupá v tomto intervalu, a to od

$$U_1 = L \frac{I_m}{T_1} \quad (6)$$

do hodnoty

$$U_2 = L \frac{I_m}{T_1} + R I_m. \quad (7)$$

V době T_2 klesá proud i z hodnoty I_m na nulu, takže na indukčnosti je napětí

$$u'_L = -L \frac{I_m}{T_2} \quad (8)$$

a pro napětí na odporu opět platí (4), ale proud je nyní vyjádřen vztahem

$$i = I_m - \frac{I_m}{T_2} t,$$

počítáme-li čas od okamžiku $t = T_1$, takže na odporu je napětí

$$u'_R = R I_m - \frac{R I_m}{T_2} t.$$

Dosazením do (1) dostaneme

$$u = -L \frac{I_m}{T_2} + R I_m - \frac{R I_m}{T_2} t. \quad (9)$$

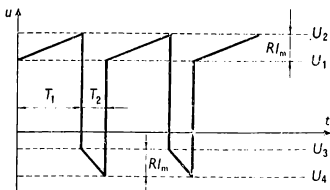
Napětí podle (9) klesá od

$$U_3 = R I_m - L \frac{I_m}{T_2} \quad (10)$$

do

$$U_4 = -L \frac{I_m}{T_2}. \quad (11)$$

Grafickým znázorněním vztahů (5), (9) jsou úsečky (obr. 7). V každé periodě tedy napětí nejprve vzroste



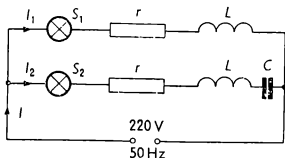
Obr. 7

z U_1 na U_2 , pak skokem klesne na U_3 a v druhé části periody rovnoměrně klesá na U_4 , přičemž rozdíly $U_2 - U_1$ a $U_3 - U_4$ jsou stejné, jak je zřejmé z (6), (7) a (10), (11); jejich velikost je $R I_m$.

3. úloha (navrhl Mojmir Simerský)

Dva stejné odporové spotřebiče S_1 , S_2 mají jmenovitá pracovní napětí 110 V a jmenovité příkony 40 W. Spotře-

bič S_1 je připojen k síti 220 V, 50 Hz v sérii s tlumivkou, spotřebič S_2 v sérii se stejnou tlumivkou a kondenzátorem (viz obr. 8). Parametry tlumivek a kondenzátoru jsou



Obr. 8

takové, že oba spotřebiče dostávají své jmenovité pracovní napětí a že účinník každé větve je $\cos \varphi = 0,600$.

Stanovte:

- činný odpor r a indukčnost L každé tlumivky;
- kapacitu C kondenzátoru ve větvi spotřebiče S_2 ;
- účinník celé soustavy;
- fázové posunutí mezi proudy I_1 a I_2 v obou větvích;
- činný a zdánlivý příkon každé větve;
- činný a zdánlivý příkon celé soustavy.

Obecné řešení se nevyžaduje.

Takovou soustavu představuje zářivkové osvětlovací těleso. Pokuste se vysvětlit, proč v průmyslově vyráběných zářivkových osvětlovacích tělesech nejsou obě větve stejné.

Řešení:

Proudy si označíme podle obr. 8; do první větve vtéká proud I_1 , do druhé I_2 a do celé soustavy proud I .

a) Proud I_1 vypočítáme z jmenovitých údajů spotřebiče:

$$I_1 = \frac{40 \text{ W}}{110 \text{ V}} = \frac{4}{11} \text{ A.}$$

Odpor spotřebiče označíme R a vypočítáme jeho velikost z jmenovitých údajů:

$$R = \frac{110^2 \text{ V}^2}{40 \text{ W}} = \frac{605}{2} \Omega. \quad (1)$$

Impedance Z celé větve musí být taková, aby při napětí 220 V protékal proud I_1 , tedy

$$Z = \frac{220 \text{ V}}{\frac{4}{11} \text{ A}} = 605 \Omega. \quad (2)$$

Reaktanci tlumivky označíme X_L . V horní větvi je tedy zapojen celkový odpor $R + r$ v sérii s indukční reaktancí X_L , takže

$$Z^2 = (R + r)^2 + X_L^2,$$

neboli po dosazení z (2)

$$605^2 \Omega^2 = (R + r)^2 + X_L^2. \quad (3)$$

Větev má účiník $\cos \varphi = 0,600$, a proto platí

$$\frac{R + r}{\sqrt{(R + r)^2 + X_L^2}} = 0,600.$$

Po umocnění a úpravě

$$9X_L^2 = 16 (R + r)^2. \quad (4)$$

Ze soustavy (3), (4) vypočítáme

$$R + r = 363 \, \Omega, \quad X_L = 484 \, \Omega$$

a po dosazení z (1)

$$r = 60,5 \, \Omega; \quad L \doteq \frac{484 \, \Omega}{314 \, \text{s}^{-1}} \doteq 1,54 \, \text{H}.$$

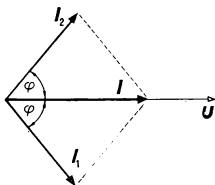
b) Větev se spotřebičem S_2 musí mít opět impedanci $605 \, \Omega$ a účinník $\cos \varphi = 0,600$. Činná složka této impedance je stejná jako v případě a), takže i výsledná reaktance musí mít stejnou velikost $484 \, \Omega$, avšak má nyní povahu kapacitní. Jestliže reaktanci kondenzátoru označíme X_C , musí být

$$484 \, \Omega = X_C - 484 \, \Omega \quad \text{neboli} \quad X_C = 968 \, \Omega.$$

Pro kapacitu kondenzátoru pak vyjde

$$C \doteq 3,3 \, \mu\text{F}.$$

c) Účinník celé soustavy je $\cos \varphi_0 = 1$, poněvadž jalové složky impedancí obou větví jsou navzájem vykompenzovány. Je to znázorněno vektorovým diagramem na obr. 9, v němž U je vektor síťového napětí, I vektor celkového proudu. Větev se spotřebičem S_1 má povahu indukční, tj. proud I_1 je ve fázi opožděn za napětím U o úhel φ , kdežto větev se spotřebičem S_2 má povahu kapacitní a proud I_2 se před napětím U ve fázi předbíhá o stejný úhel φ .



Obr. 9

d) Hodnotě $\cos \varphi = 0,600$ odpovídá úhel $\varphi \approx 53^\circ$, takže proudy v obou větvích jsou navzájem ve fázi posunuty asi o 106° , přičemž proud I_2 se o tento úhel ve fázi předbíhá před proudem I_1 .

e) Činný příkon každé z obou větví můžeme vypočítat z činného odporu a proudu, tedy

$$P = 363 \, \Omega \left(\frac{4}{11} \right)^2 A^2 = 48 \, W,$$

a zdánlivý příkon z impedance a proudu

$$P_s = 605 \, \Omega \left(\frac{4}{11} \right)^2 A^2 = 80 \, VA.$$

f) Činný příkon celé soustavy je dvojnásobkem činného příkonu každé větve, tedy

$$P_c = 96 \, W.$$

Zdánlivý příkon je číselně stejný, tedy 96 VA, poněvadž jalové složky jsou vykompenzovány, takže celá soustava má povahu činného odporu.

Uvedená úprava průmyslově vyráběných zářivkových osvětlovacích těles má dvě zásadní výhody:

1. kompenzaci jalových složek proudu, což by nebylo možné, kdyby obě větve byly stejné;
2. zmírnění tzv. stroboskopického jevu, tj. „kmitání“ (blikání) světla; světlo každé zářivky kmitá s kmitočtem 100 Hz, avšak v uvedené úpravě je tento kmitočet následkem fázového posunutí mezi oběma proudy dvojnásobný; světlo se proto jeví jako klidnější, poněvadž sítnice lidského oka následkem své setrvačnosti reaguje na periodické změny dopadajícího světelného toku tím méně, čím jsou tyto změny rychlejší.

4. úloha (navrhl Mojmir Simerský)

Mezi dvěma rovnoběžnými rovinnými deskami, z nichž každá má plošný obsah S a jejichž vzájemná vzdálenost je d , je udržováno stálé elektrické napětí U . Ze záporné desky vystupují elektrony a postupují k desce kladné. Okamžitý prostorový náboj mezi deskami je roven elektrostatickému náboji na kondenzátoru, který obě desky tvoří. Pole mezi deskami, které jsou uloženy ve vakuu, lze považovat za homogenní.

- Stanovte proud I , který soustavou protéká.
- Zakreslete graf funkce $I = f_1(U)$ v intervalu

$$0 \text{ V} \leq U \leq 10 \text{ V}$$

pro hodnoty $S = 2,0 \text{ cm}^2$; $d = 0,50 \text{ mm}$. Hodnoty konstant vyhledejte v tabulkách.

- Pro hodnoty z bodu b) zakreslete graf funkce $R = f_2(U)$, kde R značí elektrický odpor soustavy, v intervalu $1 \text{ V} \leq U \leq 10 \text{ V}$.

Řešení:

- Elektrostatický náboj na kondenzátoru je

$$Q = \frac{\epsilon_0 S}{d} U, \quad (1)$$

kde ϵ_0 značí permitivitu vakua.

Je-li I velikost proudu tvořeného elektrony, které proletují soustavou, a t doba průletu, má prostorový náboj velikost

$$Q' = I t. \quad (2)$$

Potřebujeme vyjádřit dobu t . Na elektron v uvažovaném homogenním poli působí stálá síla o velikosti

$$F = e E,$$

kde e je absolutní hodnota náboje elektronu a E intenzita pole. Síla o velikosti

$$F = e E = \frac{e U}{d}$$

uděluje elektronu o hmotnosti m zrychlení

$$a = \frac{F}{m} = \frac{e U}{m d}. \quad (3)$$

Dobu průletu t vypočítáme ze zákonů platných pro pohyb rovnoměrně zrychlený, jehož zrychlení je (3), a dráha, kterou elektron vykoná, má danou délku d . Z toho vypočítáme

$$t = d \sqrt{\frac{2m}{e U}}.$$

Dosadíme do (2) a porovnáme s (1), poněvadž podle zadání má být $Q = Q'$. Odtud vyjádříme proud

$$I = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{e}{2m}} \frac{S}{d^2} U^{\frac{3}{2}}. \quad (4)$$

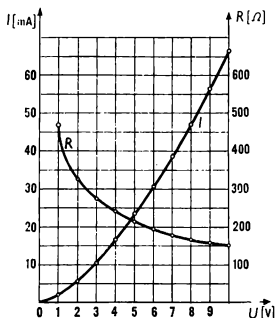
b), c) S hodnotami uvedenými v zadání a s konstantami ε_0 , e , m vyjde

$$I = 2,1 U^{\frac{3}{2}} \cdot [\text{mA}; \text{V}].$$

Grafem této závislosti je tzv. semikubická parabola. Z napětí a proudu vypočítáme elektrický odpor soustavy. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce a grafu (obr. 10).

U [V]	0	1	2	3	4
I [mA]	0	2,1	6,0	10,9	16,8
R [Ω]	—	476	333	275	238

U [V]	5	6	7	8	9	10
I [mA]	23,5	30,8	39,0	47,5	56,5	66,5
R [Ω]	213	195	180	168	159	150



Obr. 10

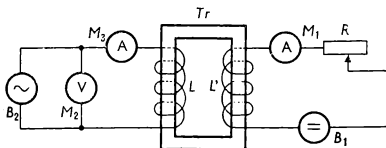
5. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

Měření indukčnosti cívky v závislosti na stejnosměrné magnetizaci železného jádra

Pomůcky: rozkladný transformátor Tr , dvě cívky s 1200 závitů s indukčnostmi L , L' , stejnosměrný zdroj B_1 , regulační reostat R , střídavý zdroj B_2 (síťové napětí zmenšené transformátorem), ampérmetr M_1 na stejnosměrný proud, voltmetr M_2 na střídavé napětí, ampérmetr M_3 na střídavý proud.

Úkoly:

- a) Sestavte zapojení podle obr. 11.



Obr. 11

- b) Libovolnou metodou změřte odpor R_c cívky L .
 c) Dokažte, že indukčnost L se vypočítá ze vztahu

$$L = \frac{\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R_c^2}}{\omega}, \quad (1)$$

v němž U značí efektivní hodnotu napětí zdroje B_2 , I efektivní hodnotu proudu protékajícího cívku, ω úhlový kmitočet použitého střídavého proudu.

- d) Regulačním reostatem R měňte proud I_0 protékající cívku L' od nuly do 1,000 A v intervalech po 0,050 A

a pro každou nastavenou hodnotu proudu I_0 vypočítejte indukčnost L cívky ze vztahu (1).

e) Graficky znázorněte funkci $L = f(I_0)$.

f) Pokuste se o výklad změřené závislosti.

Poznámky:

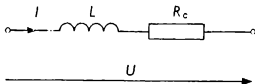
1. Efektivní hodnotu U střídavého napětí volte co nejmenší, nejlépe kolem 1 V. (Můžete např. ke zdroji střídavého napětí 24 V až 30 V připojit primární cívku síťového transformátoru pro rádiopřijímače a napětí U odebrat ze žhavicího vinutí tohoto transformátoru.) V žádném případě by nemělo napětí U překročit hodnotu asi 4 V.

2. Pro kmitočet zdroje předpokládejte hodnotu 50 Hz.

3. Rozsahy měřidel M_1 , M_2 , M_3 volte co nejvýhodněji, tj. tak, abyste měřené hodnoty mohli číst v druhé polovině stupnice.

Řešení:

c) Cívku můžeme nahradit sériovým obvodem podle



Obr. 12

obr. 12, jehož impedance má velikost

$$Z = \sqrt{R_c^2 + \omega^2 L^2}, \quad (\text{a})$$

kde ω značí úhlový kmitočet protékajícího proudu. Impedanci Z však lze také vyjádřit z efektivních hodnot U a I , napětí a proudu:

$$Z = \frac{U}{I}. \quad (\text{b})$$

Porovnáním (a) a (b) dostaneme vztah (1) uvedený v zadání.

f) Na stejnosměrné magnetizaci jádra závisí jeho permeabilita, tedy i indukčnost cívky.

6. úloha (navrhl ing. Bohumil Vybíral)

Kyvadlo (viz obr. 13) je tvořeno dokonale tuhou tyčkou o zanedbatelné hmotnosti, jejíž délka je $4a$. Tyčka je ve svislé poloze udržována závěsem Z vzdáleným od horního konce o délku a a dvěma pružinami stejných tuhostí k , jejichž hmotnost je zanedbatelná. První pružina je ve vzdálenosti a , druhá ve vzdálenosti $2a$ od závěsu. Na dolním konci tyčky je velmi malá kulička o hmotnosti m , na horním konci velmi malá kulička o hmotnosti $3m$.

a) Vypočítejte úhlovou frekvenci ω_1 tohoto kyvadla.

b) Na jakou hodnotu ω_2 se úhlová frekvence změní, když z kyvadla odstraníme horní kuličku? Počítejte s velmi malými úhly vychýlení, pro které lze hodnoty $\sin$ ů přibližně nahradit velikostmi jejich argumentů.

Řešení:

Vyjdeme ze zákona zachování energie při kmitání. Maximální hodnota W_p potenciální energie v krajní poloze kyvadla je rovna maximální hodnotě W_k kinetické energie při průchodu kyvadla nulovou polohou:

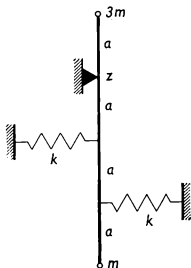
$$W_p = W_k. \quad (1)$$

a) Potenciální energie W_p je součtem energie gravitační W'_p a energie pružné W''_p . Vychýlíme-li kyvadlo o úhel φ (viz obr. 14), zvedne se dolní kulička o délku

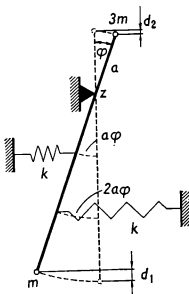
$$d_1 = 3a(1 - \cos \varphi)$$

a horní kulička klesne o délku

$$d_2 = a(1 - \cos \varphi).$$



Obr. 13



Obr. 14

Celková gravitační energie, kterou soustava vychýlením dostala, je

$$W'_p = mg3a(1 - \cos \varphi) - 3mga(1 - \cos \varphi) = 0, \quad (2)$$

kde g značí tíhové zrychlení.

Při vychýlení tyčky o úhel φ se horní pružina stlačí o délku $a\varphi$ (aproximujeme ji velmi malým kruhovým obloukem o poloměru a a středovém úhlu φ), dolní se prodlouží o délku $2a\varphi$, takže vychýlením dostane kyvadlo pružnou energii

$$W_p'' = \frac{1}{2} k (a \varphi)^2 + \frac{1}{2} k (2 a \varphi)^2 = \frac{5}{2} k a^2 \varphi^2. \quad (3)$$

Při průchodu rovnovážnou polohou má dolní kulička posuvnou rychlost $3 a \varphi \omega_1$, horní kulička $a \varphi \omega_1$, kde ω_1 značí úhlovou frekvenci kyvadla. Kyvadlo má tedy maximální kinetickou energii

$$W_k = \frac{1}{2} m (3 a \varphi \omega_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 m (a \varphi \omega_1)^2 = 6 m a^2 \varphi^2 \omega_1^2. \quad (4)$$

Do (1) dosadíme za W_p součet (2) a (3), za W_k z (4). Dostaneme rovnici, ze které vyjádříme

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5 k}{12 m}}. \quad (5)$$

b) Kyvadlo bez horní kuličky dostane při vychýlení o úhel φ gravitační energii

$$W_p^* = 3 m g a (1 - \cos \varphi) = 3 m g a \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

neboli přibližně

$$W_p^* \doteq 3 m g a \cdot 2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} m g a \varphi^2. \quad (6)$$

Pružná energie je stejná, tj. má hodnotu (3). Maximální kinetická energie je nyní

$$W_k^* = \frac{1}{2} m (3 a \varphi \omega_2)^2 = \frac{9}{2} m a^2 \varphi^2 \omega_2^2. \quad (7)$$

Za W_p dosadíme do (1) součet (6) a (3), za W_k z (7). Dostaneme rovnici, ze které vypočítáme

$$\omega_2 = \frac{1}{3} \sqrt{5 \frac{k}{m} + \frac{3g}{a}}. \quad (8)$$

Napišeme-li (8) ve tvaru

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{5}{9} \frac{k}{m} + \frac{1}{3} \frac{g}{a}}$$

a porovnáme s (5), vidíme, že $\omega_2 > \omega_1$; to znamená, že po odstranění horní kuličky se úhlová frekvence kyvadla zvětší.

7. úloha (navrhl Konrád Hofman)

Na vodní hladině jsou v bodech F_1, F_2 , jejichž vzájemná vzdálenost je $2e$, dva koherentní zdroje vlnění o délce vlny λ .

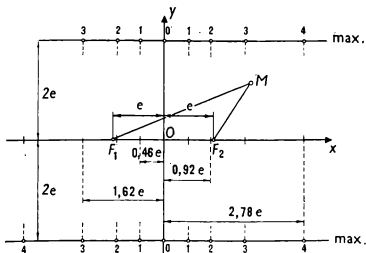
a) Najděte množiny bodů, v nichž interferencí vznikají maxima různých řádů, a stanovte nejvyšší řád interferenčního maxima. Z řešení vylučte body přímky $F_1 F_2$ neležící uvnitř úsečky $F_1 F_2$.

b) Stanovte, za jaké podmínky vzniknou jenom maxima nultého řádu.

c) Určete (ve vhodně zvolené soustavě souřadnic) polohy maxim na rovnoběžkách s přímkou $F_1 F_2$ ve vzdálenosti $2e$, je-li $\lambda = \frac{2}{5}e$. Souřadnice hledaných poloh vyjádřete pomocí délky e .

Řešení:

a) V bodě M (viz obr. 15) vzniká interferencí maximum, když absolutní hodnota rozdílu drah je rovna celistvému násobku délky vlny, tedy



Obr. 15

$$|F_1 M - F_2 M| = k \lambda, \quad (1)$$

kde k je nula nebo přirozené číslo a udává řád maxima.

Pro $k = 0$ plyne z (1):

$$F_1 M = F_2 M,$$

tj. geometrickým místem bodů M je osa úsečky $F_1 F_2$.

Pro $k > 0$ jsou vztahem (1) určeny jako hledaná geometrická místa hyperboly s ohnisky F_1, F_2 . Všechny tyto hyperboly mají stejnou délkovou excentricitu e a jejich reálné osy mají délky $k \lambda$.

Protože reálná osa hyperboly musí být kratší než dvojnásobek délkové excentricity, tj. $k \lambda < 2e$, plyne pro řád k podmínka

$$k < \frac{2e}{\lambda}, \quad (2)$$

takže řád nejvyššího maxima je roven největšímu přirozenému číslu n , které vyhovuje podmínce

$$n < \frac{2e}{\lambda}.$$

b) Mají-li vzniknout jenom maxima nultého řadu, nesmí být vztah (2) splněn ani pro $k = 1$, tj. musí být

$$1 > \frac{2e}{\lambda} \quad \text{neboli} \quad \lambda > 2e.$$

c) Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, jak je vyznačeno na obrázku 15, mají hyperboly rovnice

$$\frac{4x^2}{k^2\lambda^2} - \frac{4y^2}{4e^2 - k^2\lambda^2} = 1, \quad (3)$$

protože reálná poloosa má délku

$$a = \frac{k\lambda}{2}$$

a imaginární poloosa má délku

$$b = \sqrt{e^2 - \frac{k^2\lambda^2}{4}} = \sqrt{\frac{4e^2 - k^2\lambda^2}{4}}.$$

Pro $\lambda = \frac{2}{5}e$ dostaneme z (3)

$$\frac{25x^2}{k^2e^2} - \frac{25y^2}{e^2(25 - k^2)} = 1. \quad (4)$$

Rovnoběžky s osou x vedené ve vzdálenosti $2e$ mají rovnice

$$y = \pm 2e. \quad (5)$$

Hledáme průsečíky čar (4) a (5). Pro jejich souřadnice x najdeme obecně

$$x_{1,2} = \pm \frac{k e}{5} \sqrt{\frac{125 - k^2}{25 - k^2}}. \quad (6)$$

Z (6) je zřejmé, že $k < 5$, což plyne i z (2) pro $\lambda = \frac{2}{5} e$.

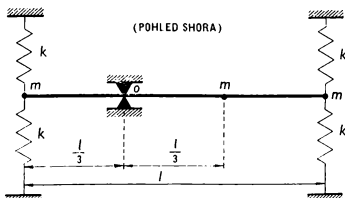
Pro $k = 0, 1, 2, 3, 4$ dostaneme z (6)

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_1 &\doteq \pm 0,46 e, \\ x_2 &\doteq \pm 0,96 e, \\ x_3 &\doteq \pm 1,62 e, \\ x_4 &\doteq \pm 2,78 e. \end{aligned}$$

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl ing. Bohumil Vybíral)

Na homogenní tyčce délky l a hmotnosti $3m$ jsou tři kuličky zanedbatelného průměru, z nichž každá má hmot-

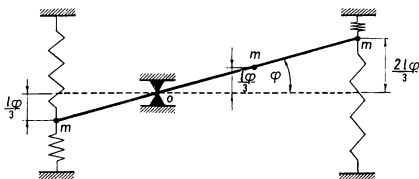


Obr. 16

nost m . Dvě kuličky jsou na koncích tyčky, třetí ve vzdálenosti $\frac{l}{3}$ od pravého konce tyčky. Soustava je držena čtyřmi pružinami (viz obr. 16 — pohled shora) stejných tuhostí k . Svislá osa o , kolem níž může soustava ve vodorovné rovině kmitat, je ve vzdálenosti $\frac{l}{3}$ od levého konce tyčky. Výchylka φ z rovnovážné polohy je tak malá, že $\sin \varphi \doteq \varphi$. Stanovte úhlovou frekvenci kmitů, které soustava vykonává po vychýlení o úhel φ .

Řešení:

Při vychýlení o úhel φ (obr. 17) se délky pružin upevněných od osy vlevo změní o $\frac{1}{3} l\varphi$, od osy vpravo o $\frac{2}{3} l\varphi$,



Obr. 17

přičemž kruhové oblouky aproximujeme úsečkami kolmými k tyčce v její rovnovážné poloze. Potenciální pružná energie soustavy nabude své maximální hodnoty

$$W_p = 2 \cdot \frac{1}{2} k \left[\left(\varphi \frac{l}{3} \right)^2 + \left(\varphi \frac{2l}{3} \right)^2 \right] = \frac{5}{9} k l^2 \varphi^2. \quad (1)$$

Potenciální energie tíhová zůstává stejná, protože osa udržuje tyčku ve vodorovné poloze.

Maximální kinetická energie při průchodu rovnovážnou polohou je součtem kinetické energie W_{k1} kuliček a kinetické energie W_{k2} tyčky. Maximální úhlová rychlost je $\Omega_m = \varphi \omega$, kde ω značí úhlovou frekvenci soustavy. Je proto

$$W_{k1} = \frac{1}{2} m \left(\Omega_m \frac{l}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\Omega_m \frac{l}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\Omega_m \frac{2l}{3} \right)^2$$

a po úpravě a dosazení za Ω_m

$$W_{k1} = \frac{1}{3} ml^2 \omega^2 \varphi^2. \quad (2)$$

Při výpočtu kinetické energie W_{k2} tyčky si uvědomíme, že se uplatní jen třetina hmotnosti tyčky. Pro část nalevo od osy má největší posuvná rychlost velikost $\Omega_m \frac{l}{3}$ a uplatní se zde jen devítina hmotnosti tyčky. Pro část napravo má největší posuvná rychlost velikost $\Omega_m \frac{2l}{3}$ a uplatní se zde dvě devítiny hmotnosti tyčky. Je tedy

$$W_{k2} = \frac{1}{2} \frac{m}{3} \left(\Omega_m \frac{l}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{2m}{3} \left(\Omega_m \frac{2l}{3} \right)^2 = \frac{1}{6} ml^2 \omega^2 \varphi^2. \quad (3)$$

Do podmínky $W_p = W_{k1} + W_{k2}$ dosadíme z (1), (2) a (3), tím dostaneme vztah, z něhož vyjádříme

$$\omega = \sqrt{\frac{10 \, k}{9 \, m}}.$$

2. úloha (navrhl Konrád Hofman)

Po hladké nakloněné rovině svírající s vodorovnou rovinou úhel φ se bez klouzání valí rotační těleso (válec, koule) o hmotnosti m , poloměru r a momentu setrvačnosti J . Stanovte zrychlení těžiště tělesa.

Úlohu řešte

- a) ze zákona síly;
- b) ze zákona zachování mechanické energie.

Řešení:

a) Na odvalující se těleso působí směrem dolů v těžišti síla o velikosti $F_1 = m g \sin \varphi$, ve směru nakloněné roviny a ve styčné přímce (nebo styčném bodě) tělesa s nakloněnou rovinou síla opačně orientovaná o velikosti F_2 . Je-li a posuvné zrychlení, musí být

$$F_1 - F_2 = m a \text{ neboli } m g \sin \varphi - F_2 = m a. \quad (1)$$

Označíme-li ε úhlové zrychlení valivého pohybu, pak

$$J \varepsilon = F_2 r \quad (2)$$

a dále platí

$$a = \varepsilon r. \quad (3)$$

Do (2) dosadíme za ε z (3), pak za F_2 do (1). Dostaneme vztah, z něhož vyjádříme

$$a = \frac{m g r^2 \sin \varphi}{m r^2 + J}. \quad (4)$$

b) Nakloněná rovina má výšku h a délku d , takže

$$\sin \varphi = \frac{h}{d}. \quad (5)$$

Proběhne-li těleso po nakloněné rovině, ztrácí potenciální energii mgh a získá energii kinetickou $\frac{1}{2}mv^2$ a energii rotační $\frac{1}{2}J\omega^2$, kde v značí posuvnou rychlost těžiště a ω úhlovou rychlost odvalování v okamžiku, v němž těleso proběhne dráhu délky d . Je tedy

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2. \quad (6)$$

Značí-li t dobu potřebnou k proběhnutí dráhy o délce d , platí

$$d = \frac{1}{2}at^2, \quad (7)$$

$$v = at \quad (8)$$

a dále platí

$$\omega = \frac{v}{r}. \quad (9)$$

Ze (7) a (8) vyjádříme

$$v^2 = 2ad. \quad (10)$$

Dosazením do (6) dostaneme

$$\omega^2 = \frac{2ad}{r^2}. \quad (11)$$

Z (10) a (11) dosadíme do (6) a vyjádříme

$$a = \frac{mgr^2}{mr^2 + J} \frac{h}{d}$$

a s přihlédnutím k (5) dostaneme výsledek (4).

3. úloha (navrhl ing. Miloš Rabas)

Ke zdroji stejnosměrného napětí U je připojen kondenzátor sestavený ze dvou rovnoběžných rovinných desek, z nichž každá má obsah S a jejichž vzájemná vzdálenost je d . Dielektrikum mezi deskami má permitivitu ε . Jedna z desek harmonicky kmitá ve směru intenzity elektrostatického pole mezi deskami, s kmitočtem f a s amplitudou A ($A \ll d$).

Dokažte, že obvodem protéká harmonický střídavý proud, stanovte jeho amplitudu a kmitočet.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $U = 500 \text{ V}$;

$S = 10 \text{ cm}^2$; $d = 2,0 \text{ mm}$; $A = 0,10 \text{ mm}$; $f = 500 \text{ Hz}$;

$\varepsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$.

Při řešení použijte vztahu $x(x+h) \doteq x^2$, pokud $|h| \ll x$.

Řešení:

Nechť za dobu Δt se vzdálenost desek změní z hodnoty d na hodnotu $d + \Delta d$, přičemž $|\Delta d| \ll d$. Kapacita kondenzátoru se tím změní o

$$\Delta C = \varepsilon S \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d + \Delta d} \right) \doteq \frac{\varepsilon S \Delta d}{d^2}. \quad (1)$$

Náboj na kondenzátoru se tím změní o $\Delta Q = U \Delta C$ a obvodem proteče proud

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

neboli, po dosazení z (1)

$$i = \frac{\varepsilon U S}{d^2} \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{\varepsilon U S}{d^2} v, \quad (2)$$

kde v značí okamžitou rychlost pohyblivé desky. Poněvadž deska harmonicky kmitá, platí pro její okamžitou rychlost

$$v = A \omega \cos \omega t.$$

Dosadíme do (2) a dostaneme

$$i = \frac{\varepsilon U S}{d^2} A \omega \cos \omega t. \quad (3)$$

Z (3) je zřejmé, že jde o harmonický střídavý proud s úhlovým kmitočtem ω , tj. s kmitočtem f , a s amplitudou

$$I_m = \frac{2 \pi \varepsilon S U A f}{d^2}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $I_m \doteq 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ A}$; $f = 500 \text{ Hz}$.

4. úloha (navrhl Vladimír Černý)

Vo vzdialenosti l od vonkajšieho povrchu prázdnej sklenenej guľovej baňky, ktorá má vonkajší polomer R , je postavený plochý predmet. Pri jeho pozorovaní v odraze vidíme dva obrazy, z ktorých menší pokrýva p % väčšieho. Určte hrúbku d skla, z ktorého je baňka vyrobená. Lom svetla v stene baňky zanedbajte. Predmet je veľmi malý, takže zobrazovanie sa uskutočňuje len nulovými lúčmi.

Riešte najskôr všeobecne, potom pre hodnoty $R = 6,0 \text{ cm}$; $l = 3,0 \text{ cm}$; $p = 98$.

Riešenie:

Väčší obraz vzniká odrazom od vonkajšieho povrchu baňky, tj. od vypuklého zrkadla s polomerom krivosti R . Ak si označíme a vzdialenosť obrazu od zrkadla, potom pre zväčšenie platí

$$Z_1 = -\frac{a}{l}. \quad (1)$$

Ďalej platí zobrazovacia rovnica

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{a} = -\frac{2}{R}. \quad (2)$$

Dosadením za a z (2) do (1) určíme

$$Z_1 = \frac{R}{R + 2l}. \quad (3)$$

Menší obraz vzniká odrazom od vnútorného povrchu, ktorý má polomer krivosti $R - d$ a vzdialenosť predmetu je $l + d$. Podľa (3) pre zväčšenie platí

$$Z_2 = -\frac{R - d}{R + d + 2l}. \quad (4)$$

Ak má predmet plošný obsah S , väčší obraz obsah S_1 , menší obraz obsah S_2 , potom

$$S_1 = SZ_1^2; \quad S_2 = SZ_2^2, \quad (5)$$

lebo plošné obsahy podobných obrazcov sú v pomere druhých mocnín príslušných dĺžok.

Podľa zadania je

$$S_2 = S_1 \frac{p}{100}.$$

Po dosadení z (5) máme

$$Z_2^2 = Z_1^2 \frac{p}{100}, \quad \text{tj.} \quad Z_2 = Z_1 \sqrt{\frac{p}{100}}.$$

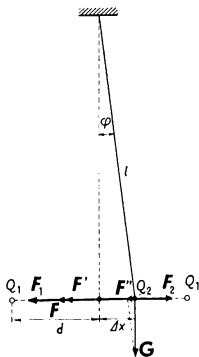
Dosadíme z (3) a (4), tým dostaneme vzťah, z ktorého vyjadríme

$$d = \frac{R(10 - \sqrt{p})(R + 2l)}{R(10 + \sqrt{p}) + 20l}.$$

Pre zadané hodnoty je $d \doteq 0,40$ mm.

c) Třetí kolo soutěže

1. úloha (navrhl Vladimír Černý)



Obr. 18

Dve vodivé guľôčky sú upevnené vo vzájomnej vzdialenosti $2d$ v tejže vodorovnej rovine a každá z nich je nabitá elektrickým nábojom Q_1 . Uprostred medzi nimi (obr. 18) je na izolovanom závese dĺžky l zavesená vodivá guľôčka o hmotnosti m , nabitá nábojom Q_2 , pričom $Q_1 Q_2 > 0$. Zavesenú guľôčku vychýlime o veľmi malú dĺžku Δx v smere spojnice pevných guľôčiek a pustíme.

Určte periódu T kmitov zavesenej guľôčky.

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $Q_1 = Q_2 = 2,0 \cdot 10^{-8}$ C, $d = 0,10$ m, $l = 1,0$ m, $m = 0,50$ g, tiažové zrýchlenie $g = 9,8$ m s⁻², permitivita prostredia medzi

guľôčkami $\epsilon = \frac{1}{3,6 \pi \cdot 10^{10}} \text{ F m}^{-1}$; rozmery guľôčiek a hmotnosť závesu zanedbajte.

Pri riešení predpokladajte, že zavesená guľôčka sa pohybuje po veľmi krátkej úsečke (aproximácia kruhového oblúka) a že uhol vychýlenia závesu je taký malý, že jeho sinus možno približne nahradiť jeho tangensom. Ďalej použite pre každé n platný približný vzťah $(1 + h)^n \doteq 1 + nh$, pokiaľ $|h| \ll 1$.

Riešenie:

Zavedieme označenie $k = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \varepsilon}$.

Na vychýlenú guľôčku (obr. 18) pôsobia dve elektrostatické sily, ktorých veľkosti sú

$$F_1 = \frac{k}{(d - \Delta x)^2} = \frac{k}{d^2} \left(1 - \frac{\Delta x}{d}\right)^{-2} \doteq \frac{k}{d^2} \left(1 + 2 \frac{\Delta x}{d}\right),$$

$$F_2 = \frac{k}{(d + \Delta x)^2} = \frac{k}{d^2} \left(1 + \frac{\Delta x}{d}\right)^{-2} \doteq \frac{k}{d^2} \left(1 - 2 \frac{\Delta x}{d}\right).$$

Ich výslednica má veľkosť

$$F' = F_1 - F_2 = \frac{k}{d^2} 4 \frac{\Delta x}{d} = \frac{Q_1 Q_2}{\pi \varepsilon d^3} \Delta x$$

a je orientovaná nesúhlasne s výchylkou Δx .

Tiažová sila $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ má v smere a orientácii výslednice $\mathbf{F}'$ zložku o veľkosti $F'' = mg \sin \varphi \doteq mg \operatorname{tg} \varphi = mg \frac{\Delta x}{l}$.

Na zavesenú guľôčku teda pôsobí v smere výchylky celková sila o veľkosti

$$F = F' + F'' = \left(\frac{Q_1 Q_2}{\pi \varepsilon d^3} + \frac{mg}{l} \right) \cdot \Delta x \quad (1)$$

orientovaná nesúhlasne s výchylkou. Pretože veľkosť tejto sily je priamo úmerná veľkosti výchylky, koná gu-

ľôčka harmonické kmity. Uhlový kmitočet tohoto pohybu je daný vzťahom

$$F = \omega^2 m \Delta x. \quad (2)$$

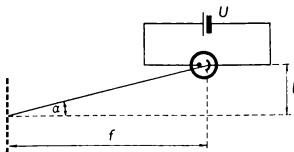
Porovnávaním (1) a (2) dostaneme vzťah, z ktorého vyjadríme uhlový kmitočet ω . Z toho určíme periódu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{\pi \epsilon m d^3} + \frac{g}{l}}}.$$

Pre zadané hodnoty výjde $T \doteq 1,0$ s.

2. úloha (navrhl dr. Jozef Zámečník)

Na optickú mriežku, ktorá má n vrypov na dĺžke l_0 , dopadá úzky zväzok lúčov monochromatického svetla. V rovine rovnobežnej s mriežkou, ktorá má od mriežky vzdialenosť f (obr. 19), je postavená miniatúrna fotónka



Obr. 19

tak, že na jej katóde vzniká interferenčné maximum prvého rádu; jeho vzdialenosť od maxima nultého rádu je l . Prúd fotónky práve zanikne, keď jej anóda má proti foto-

katóde záporné napätie U . Prostredie medzi mriežkou a fotónkou má absolútny index lomu N .

Určte výstupnú prácu fotokatódy.

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $n = 100$, $l_0 = 1,00$ mm, $l = 1,50$ cm, $f = 30,0$ cm, $N = 1,00$, $U = -0,580$ V, rýchlosť šírenia sa elektromagnetického žiarenia vo vákuu $c = 3,00 \cdot 10^8$ m s⁻¹, elementárny náboj $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C, Planckova konštanta $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ J s.

Riešenie:

Každý fotón dopadajúci na fotokatódu nesie energiu

$$W = h \nu = \frac{h c}{N \lambda}, \quad (1)$$

kde ν značí kmitočet použitého monochromatického svetla, λ dĺžku jeho vlny v uvažovanom prostredí, N absolútny index lomu tohoto prostredia, c rýchlosť šírenia elektromagnetického žiarenia vo vákuu, h Planckovu konštantu.

Energia (1) sa spotrebuje jednak na uvoľnenie fotoelektrónu (výstupná práca A_v fotokatódy), jednak na udelenie rýchlosti v vystupujúcemu fotoelektrónu:

$$W = A_v + \frac{1}{2} m v^2, \quad (2)$$

kde m značí hmotnosť elektrónu. Pretože elektrón je práve zabrzdzený napätím U , platí pre jeho kinetickú energiu pri výstupe z fotokatódy:

$$\frac{1}{2} m v^2 = e |U|, \quad (3)$$

kde e značí elementárny náboj. Dosadením z (3) do (2) dostaneme

$$W = A_v \cdot e |U|. \quad (4)$$

Porovnaním (1) a (4) máme

$$A_v = \frac{hc}{N\lambda} - e |U|. \quad (5)$$

Dĺžku vlny λ stanovíme z podmienok zadania. Pre interferenčné maximum platí

$$d \sin \alpha = k \lambda,$$

kde d značí mriežkovú konštantu použitej optickej mriežky, α odchýlku pre maximum k -teho rádu. V našom prípade je $k = 1$, teda

$$\lambda = d \sin \alpha. \quad (6)$$

Mriežková konštanta, podľa zadania, je

$$d = \frac{l_0}{n} \quad (7)$$

a pre uhol α platí (obr. 19)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{f}$$

alebo

$$\sin \alpha = \frac{l}{\sqrt{f^2 + l^2}}. \quad (8)$$

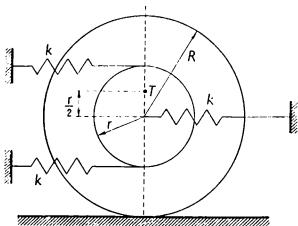
Dosadením z (8) a (7) do (6) určíme λ , potom dosadením do (5) dostaneme všeobecný výsledok

$$A_v = \frac{hc n}{N l_0 l} \sqrt{f^2 + l^2} - e |U|.$$

Pre zadané hodnoty výjde $A_v = 3,18 \cdot 10^{-19} \text{ J} \doteq 1,99 \text{ eV}$.

3. úloha (navrhl ing. Bohumil Vybíral)

Na vodorovné podložce leží přímý kruhový válec, jehož podstavy mají poloměr R . Válec se může bez tření odvalovat po podložce. Má hmotnost m a moment setrvačnosti J vzhledem ke své podélné ose. Je nehomogenní, jeho těžiště neleží na ose, nýbrž ve vzdálenosti $\frac{r}{2}$ od ní ($r < R$). V rovnovážné poloze je udržován třemi pružinami stejných tuhostí k a zanedbatelných hmotností, z nichž dvě jsou uchyceny ve vzdálenosti r od osy, třetí v bodě ležícím na ose. V rovnovážné poloze leží body, v nichž jsou pružiny uchyceny, na svislé přímce procházející těžištěm T (obr. 20).



Obr. 20

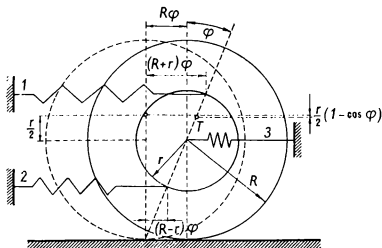
a) Vypočítejte úhlovou frekvenci kmitavého pohybu této soustavy, když válec nepatrně vychýlíme z rovnovážné polohy a pustíme.

b) Poněvadž těžiště je nad osou válce, mohla by soustava být v rovnovážné poloze vratké. Stanovte podmínku pro

tuhost k každé pružiny, aby soustava nebyla vratká, ale mohla kmitat. Při řešení předpokládejte, že úhel vychýlení válce z rovnovážné polohy je tak malý, že jeho sinus lze aproximovat hodnotou argumentu.

Řešení:

a) Při odvalení o úhel φ (obr. 21) postoupí osa válce o délku $R\varphi$, takže délka pružiny 3 se změní o $R\varphi$. Délka pružiny 1 se změní o $(R + r)\varphi$, délka pružiny 2 o $(R - r)\varphi$,



Obr. 21

když malé kruhové oblouky aproximujeme krátkými úsečkami rovnoběžnými s podložkou.

Vychýlením tedy soustava získá potenciální energii pružnosti

$$\begin{aligned} W_{p1} &= \frac{1}{2} k \varphi^2 [R^2 + (R + r)^2 + (R - r)^2] = \\ &= \frac{1}{2} k \varphi^2 (3R^2 + 2r^2). \end{aligned} \quad (1)$$

Těžiště soustavy klesne o délku

$$\frac{r}{2} (1 - \cos \varphi) \doteq \frac{r}{4} \varphi^2$$

a soustava tím ztratí potenciální energii polohy

$$W_{p2} = \frac{1}{4} mgr \varphi^2. \quad (2)$$

Když od (1) odečteme (2), dostaneme maximální potenciální energii při vychýlení

$$W_p = \frac{1}{2} k \varphi^2 (3 R^2 + 2 r^2) - \frac{1}{4} mgr \varphi^2. \quad (3)$$

Maximální kinetická energie je součtem energie pohybu posuvného a energie pohybu rotačního při průchodu soustavy rovnovážnou polohou:

$$W_k = \frac{1}{2} m (\Omega_m R)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J} \Omega_m^2, \quad (4)$$

kde Ω_m značí maximální úhlovou rychlost, tedy $\Omega_m = \omega \varphi$, když soustava kmitá s úhlovou frekvencí ω . Dosažením do (4) dostaneme

$$W_k = \frac{1}{2} \omega^2 \varphi^2 (m R^2 + \mathcal{J}). \quad (5)$$

Z podmínky rovnosti energií (3) a (5) vyjádříme úhlovou frekvenci

$$\omega = \sqrt{\frac{k (3 R^2 + 2 r^2) - \frac{1}{2} mgr}{m R^2 + \mathcal{J}}}. \quad (6)$$

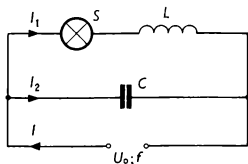
b) Úhlová frekvence musí být reálná a nenulová, tj. čítecitel ve vztahu (6) musí být kladný. Odtud plyne pro tuhost každé pružiny podmínka

$$k > \frac{mgr}{2(3R^2 + 2r^2)}.$$

4. úloha (navrhl Mojmir Simerský)

Spotřebič S s charakterem odporu, jehož jmenovitý příkon je P a jmenovité pracovní napětí U , má být připojen k síti střídavého proudu o napětí U_0 ($U_0 > U$) a kmitočtu f , v sérii s tlumivkou, jejíž činný odpor je zanedbatelný. Paralelně (obr. 22) je připojen takový kondenzátor, že celá soustava má účinník $\cos \varphi = 1$ (přesně).

Stanovte



Obr. 22

- indukčnost L tlumivky;
- kapacitu C kondenzátoru;
- proud I vtékající do obvodu;
- zdánlivý, činný a jalový výkon v každé větvi a v celé soustavě.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $P = 40,0 \text{ W}$, $U = 120 \text{ V}$, $U_0 = 220 \text{ V}$, $f = 50,0 \text{ Hz}$.

Řešení:

a) Větvi spotřebiče má protékat proud I_1 určený jmenovitými údaji, tedy

$$I_1 = \frac{P}{U}. \quad (1)$$

Spotřebič má odpor

$$R = \frac{U^2}{P}. \quad (2)$$

Větev představuje sériové spojení odporu R a indukčnosti L ; její impedance je

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{U_0}{I_1}, \quad (3)$$

kde $\omega = 2 \pi f$ značí úhlový kmitočet proudu I_1 .

Do (3) dosadíme z (1) a (2) a vyjádříme

$$L = \frac{1}{2 \pi f} \cdot \frac{U}{P} \sqrt{U_0^2 - U^2}. \quad (4)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $L \doteq 1,76 \text{ H}$.

b) Fázové poměry znázorníme vektorovým diagramem (obr. 23), v němž I_2 značí proud tekoucí kapacitní větví. Proud I_1 je proti napětí U_0 ve fázi opožděn o úhel ψ , pro který platí

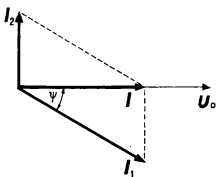
$$\cos \psi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}};$$

$$\sin \psi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

a po dosazení z (2) a (4)

$$\cos \psi = \frac{U}{U_0};$$

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{U_0^2 - U^2}}{U_0}. \quad (5)$$



Obr. 23

Proud I_2 předbíhá před napětím U_0 o čtvrt periody. Podle diagramu je zřejmě $I_2 = I_1 \sin \psi$ a po dosazení z (1) a (5)

$$I_2 = \frac{P}{U} \frac{\sqrt{U_0^2 - U^2}}{U_0}. \quad (6)$$

Kondenzátor má reaktanci

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{U_0}{I_2}$$

a kapacitu

$$C = \frac{I_2}{\omega U_0}.$$

Za I_2 dosadíme z (6) a dostaneme obecný výsledek

$$C = \frac{1}{2\pi f} \frac{P}{U} \frac{\sqrt{U_0^2 - U^2}}{U_0^2}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $C \doteq 4,05 \mu F$.

c) Pro proud I najdeme z obr. 23 $I = I_1 \cos \psi$ a po dosazení z (1) a (5)

$$I = \frac{P}{U_0}. \quad (7)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $I \doteq 0,182 \text{ A}$.

d) Zdánlivý výkon ve větvi se spotřebičem je $P_{s1} = U_0 I_1$ a po dosazení z (1)

$$P_{s1} = P \frac{U_0}{U}. \quad (8)$$

Činný výkon je zde $P_1 = P_{s1} \cos \psi$, jalový $P_{q1} = P_{s1} \sin \psi$; dosazením z (5) a (8) dostaneme

$$P_1 = P; \quad P_{q1} = P \frac{\sqrt{U_0^2 - U^2}}{U}.$$

V kapacitní větvi je jalový výkon $P_{q2} = U_0 I_2$. Po dosazení z (6) dostaneme

$$P_{q2} = P \frac{\sqrt{U_0^2 - U^2}}{U} = P_{q1}.$$

Vidíme, že jalové výkony v obou větvích jsou stejně velké. Činný výkon v kapacitní větvi je nulový, tedy $P_2 = 0$. Zdánlivý výkon je zde stejně velký jako výkon jalový, tedy $P_{s2} = P_{q2}$.

Zdánlivý výkon v celé soustavě je $P_s = U_0 I$; po dosazení ze (7) dostaneme $P_s = P$. Celkový činný výkon P_c je co do velikosti stejný, poněvadž $\cos \varphi = 1$; jalový výkon P_q je nulový, protože $\sin \varphi = 0$.

Pro zadané hodnoty vyjde $P_{s1} = 73,3 \text{ VA}$; $P_1 = 40,0 \text{ W}$; $P_{q1} = P_{q2} = 61,5 \text{ VA}$; $P_2 = 0$; $P_{s2} = 61,5 \text{ VA}$; $P_s = 40,0 \text{ VA}$; $P_c = 40,0 \text{ W}$; $P_q = 0$.

5. úloha — laboratorní (navrhl Milan Rádl)

Stanovení momentu setrvačnosti a momentu třecí síly

Pomůcky: válec s navinutou nití, otáčivý kolem osy upevněné v držáku na školní lavici; dvě závaží o daných hmotnostech m_1 a m_2 ($m_1 > m_2$); stopky; posuvné měřítko; délkové měřítko.

Úlohy:

1. Závaží o hmotnosti m_1 zavěste na nit a změřte dobu t_1 jeho pádu k zemi z výšky h pokud možno největší. Doba

pádu změřte desetkrát při stejné výšce h a pro další výpočty použijte aritmetického průměru naměřených hodnot.

Z veličin h a t_1 stanovte zrychlení a_1 , s nímž závaží klesá. Obdobné měření proveďte se závažím o hmotnosti m_2 a stanovte jeho zrychlení a_2 .

Dále změřte poloměr r drážky, v níž je nit na válci navinuta.

2. Dokažte výpočtem, že pomocí veličin m_1 , m_2 , a_1 , a_2 , r a tíhového zrychlení g lze vyjádřit moment setrvačnosti J válce a moment M_T třecí síly vzhledem k ose takto:

$$J = \frac{(m_1 - m_2)g + m_2 a_2 - m_1 a_1}{a_1 - a_2} r^2,$$

$$M_T = \frac{g(m_2 a_1 - m_1 a_2) + a_1 a_2 (m_1 - m_2)}{a_1 - a_2} r.$$

3. Z daných a naměřených hodnot vypočítejte J a M_T .

Řešení bodu 2:

Závaží o hmotnosti m_1 klesá se zrychlením

$$a_1 = \frac{2h}{t_1^2}$$

a nit je napínána silou o velikosti

$$F_1 = m_1(g - a_1). \quad (1)$$

Tato síla působí na válec momentem $F_1 r$, proti němuž působí moment M_T třecí síly. Výsledný moment

$$F_1 r - M_T$$

udílí válci úhlové zrychlení ε_1 a platí

$$J \varepsilon_1 = F_1 r - M_T,$$

neboli, poněvadž $a_1 = r \varepsilon_1$,

$$\frac{f a_1}{r} = F_1 r - M_T. \quad (2)$$

Podobně pro druhé závaží o hmotnosti m_2 :

$$\frac{f a_2}{r} = F_2 r - M_T, \quad (3)$$

kde

$$F_2 = m_2 (g - a_2). \quad (4)$$

Ze soustavy rovnic (1), (2), (3), (4) vypočítáme f a M_T :

$$f = \frac{(m_1 - m_2)g + m_2 a_2 - m_1 a_1}{a_1 - a_2} r^2,$$

$$M_T = \frac{g(m_2 a_1 - m_1 a_2) + a_1 a_2 (m_1 - m_2)}{a_1 - a_2} r.$$

2. Úlohy kategorie B

Úlohy a jejich řešení recenzovali ing. Daniel Kluvanec a dr. Ivan Náter.

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

Dieslov motor má kompresní poměr $V_1 : V_2 = k$. Vzduch ve válci motoru má počáteční tlak p_1 , objem V_1 a teplotu t_1 .

a) Jaký je tlak p_2 a teplota t_2 vzduchu ve válci motoru na konci adiabatické komprese při uvedeném kompresním poměru?

b) Jakou práci A vykonaly při kompresi vnější síly?

Předpokládáme, že vzduch ve válci je dokonalý plyn.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $k = 1,5$;
 $p_1 = 1,00 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$; $V_1 = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$; $t_1 = 27,0^\circ \text{C}$.
Potřebné konstanty vyhledejte ve fyzikálních tabulkách.

Řešení:

a) Pro adiabatický děj platí

$$p_2 = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^k p_1 = k^k p_1. \quad (1)$$

Ze stavové rovnice ideálního plynu dostaneme

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1, \quad (2)$$

kde T_1 a T_2 jsou absolutní teploty odpovídající teplotám t_1 a t_2 .

Když do (2) dosadíme $\frac{V_2}{V_1} = k^{-1}$ a za poměr $\frac{p_2}{p_1}$ z (1), dostaneme

$$T_2 = k^{k-1} T_1. \quad (3)$$

Obecné výsledky jsou (1) a (3), pro zadané hodnoty vyjde $p_2 = 4,43 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$; $t_2 = 613^\circ \text{C}$.

b) Práce A vykonaná vnějšími silami při adiabatické kompresi je rovna přírůstku vnitřní energie plynu:

$$A = m c_V (T_2 - T_1). \quad (4)$$

Rozdíl absolutních teplot určíme z (3)

$$T_2 - T_1 = T_1 (k^{k-1} - 1). \quad (5)$$

Měrné teplo c_V při stálém objemu je

$$c_V = c_p \kappa^{-1}. \quad (6)$$

Hmotnost m vzduchu určíme ze stavové rovnice

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1, \quad (7)$$

kde M značí kilomolovou hmotnost vzduchu a R univerzální plynovou konstantu. Když z (7), (6), (5) dosadíme do (4), dostaneme obecný výsledek

$$A = \frac{p_1 V_1 M c_p}{R \kappa} (k^{\kappa-1} - 1).$$

Pro zadané hodnoty a s hodnotami pro vzduch nalezenými v tabulkách

$$M = 28,96 \text{ kg kmol}^{-1},$$

$$c_p = 1,005 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ deg}^{-1},$$

$$\kappa = 1,40,$$

$$R = 8314 \text{ J deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$$

vyjde $A \doteq 489 \text{ J}$.

2. úloha (navrhl Jan Tesař)

Pružina ve vzduchovce má tuhost k a je před výstřelem stlačena o délku y_m .

a) Určete rychlost v , kterou je z této vzduchovky vystřelen náboj o hmotnosti m .

b) V jaké vzdálenosti d od místa výstřelu dopadne náboj na vodorovnou rovinu proloženou ústím hlavně, je-li vystřelen pod elevačním úhlem α ?

Tření při pohybu střely v hlavní a odpor vzduchu za-

nedbejte. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $k = 20 \text{ N m}^{-1}$; $y_m = 0,20 \text{ m}$; $m = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$; $\alpha = 45^\circ$.

Řešení:

a) Stlačením o délku y_m dostane pružina potenciální pružnou energii

$$W_p = \frac{1}{2} k y_m^2. \quad (1)$$

Tuto energii předá pružina náboji, který po opuštění hlavně má kinetickou energii

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2, \quad (2)$$

kde m značí hmotnost náboje a v jeho rychlost v okamžiku, kdy opouští hlavěň. Poněvadž zanedbáváme ztráty energie, položíme $W_p = W_k$ a porovnáním (1) a (2) dostaneme obecný výsledek

$$v = y_m \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $v = 20 \text{ m s}^{-1}$.

b) Jde o šikmý vrh vzhůru s počáteční rychlostí (3) pod elevačním úhlem α . Z početních vztahů platných pro šikmý vrh vzhůru plyne, že náboj dopadne na vodorovnou rovinu proloženou ústím hlavně ve vzdálenosti

$$d = \frac{2 v^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v^2 \sin 2 \alpha}{g}$$

a po dosazení za v z (3)

$$d = \frac{k y_m^2 \sin 2 \alpha}{m g}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $d \doteq 41 \text{ m}$.

3. úloha (navrhl Antonín Ryska)

Pístová vývěva čerpá vlhký vzduch z recipientu, v němž je celkový počáteční tlak p_1 a teplota t_1 . Ve válci vývěvy je pracovní teplota t_2 a čerpaný vzduch se v něm stlačuje na tlak p_2 , přičemž $k = p_2 : p_1$ je tzv. kompresní poměr vývěvy. Stanovte, jaká může být nejvyšší relativní vlhkost r vzduchu v recipientu, aby voda ve válci vývěvy nekondenzovala.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $k = 100$; $t_1 = 18^\circ\text{C}$; $t_2 = 65^\circ\text{C}$.

Potřebné hodnoty tlaku syté vodní páry vyhledejte v tabulkách.

Řešení:

Má-li plyn v recipientu celkový tlak p_1 a relativní vlhkost r , má zde vodní pára částečný tlak

$$p_{p1} = r p_{11}, \quad (1)$$

kde p_{11} je napětí syté páry při teplotě t_1 . Po stlačení pístu se tlak páry zvětší v kompresním poměru vývěvy, tedy na hodnotu

$$p_{p2} = k p_{p1}. \quad (2)$$

Nemá-li pára kondenzovat, musí být

$$p_{p2} < p_{12}, \quad (3)$$

když p_{12} je napětí syté páry při teplotě t_2 .

Do (2) dosadíme z (1) a z podmínky (3) pak dostaneme po úpravě

$$r < \frac{1}{k} \cdot \frac{p_{12}}{p_{11}}. \quad (4)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $r < 0,12$.

4. úloha (navrhl ing. Daniel Kluvanec)

Dve guľôčky malých rovnakých priemerov s elektrickými nábojmi Q_1, Q_2 sú zavesené na rovnako dlhých nevodivých vláknach dĺžky l zanedbateľnej hmotnosti v spoločnom bode závesu.

a) Určte pomer $k_1 = d_1 : d_2$, kde d_1 je vzdialenosť guľôčiek vo vzduchu a d_2 je ich vzdialenosť v petroleji. Obidve guľôčky sú z ocele a plné.

b) Ak sú oceľové guľôčky duté, môže ich vzdialenosť vo vzduchu a v petroleji byť rovnaká.

Určte pre tento prípad pomer $k_2 = V_1 : V_2$, kde V_1 je objem dutiny a V_2 je objem oceľovej časti guľôčky.

Uhol α závesných vlákien je vždy taký, že $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \doteq \sin \frac{\alpha}{2}$.

Úlohu riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty:

merná hmotnosť ocele $\varrho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$,

merná hmotnosť petroleja $\varrho_0 = 0,80 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$,

relativna permitivita petroleja $\varepsilon_r = 2,0$.

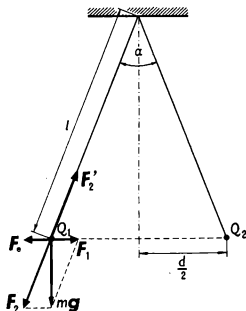
Riešenie:

a) Pre rovnovážny stav guľôčiek vo vzduchu (1) a v petroleji (2) podľa obr. 24 platí $F_e = F_1$ (F_e je elektrická odpudivá sila, F_1 je zložka tiaže guľôčky), tj.

$$\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{d_1^2} = m g \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \doteq m g \sin \frac{\alpha_1}{2} = m g \frac{d_1}{2l} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{d_2^2} &= m g \left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} = \\ &= m g \left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho} \right) \frac{d_2}{2l}, \end{aligned} \quad (2)$$

kde m je hmotnosť guľôčky a α_1, α_2 sú uhly, o ktoré sú odchýlené závesné vlákna guľôčiek vo vzduchu a v petroleji.



Obr. 24

Podelením rovnice (1) rovnicou (2) dostaneme

$$\epsilon_r \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = \frac{d_1}{d_2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right)}$$

a úpravou

$$k_1 = \frac{d_1}{d_2} = \sqrt[3]{\epsilon_r \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right)}.$$

Číselne

$$k_1 = \sqrt[3]{2,0 \left(1 - \frac{0,80 \text{ kg m}^{-3}}{7,8 \text{ kg m}^{-3}} \right)} = \sqrt[3]{1,79} \doteq 1,2.$$

b) Aby vzdialenosti guľôčiek vo vzduchu a v petroleji boli rovnaké ($d_1 = d_2$), musí stredná hustota ϱ' dutých guľôčiek spĺňať vzťah

$$\varepsilon_r \left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho'} \right) = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^3 = 1,$$

tj.

$$\varrho' = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1} \varrho_0 = \frac{V_2 \varrho}{V_1 + V_2}. \quad (3)$$

Z rovnice (3) pre pomer k_2 platí

$$k_2 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\varepsilon_r (\varrho - \varrho_0) - \varrho}{\varrho_0 \varepsilon_r}.$$

Číselne

$$k_2 = \frac{6,2}{1,6} \doteq 3,9.$$

5. úloha (navrhl V. Koubek)

Meranie elektromotorického napätia a vnútorného odporu zdroja

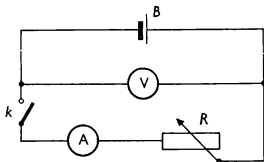
Pomôcky: batéria suchých článkov, voltmeter (do 6 V), miliampérmeter (do 60 mA), reostat (asi 1000 Ω), vypínač.

Postup merania:

1a) Zostavte obvod podľa obr. 25.

Po uzavretí obvodu vypínačom k sa výchylka voltmetra V zmenší. Vysvetlite prečo.

1b) Reostatom nastavte výchylku ampérmetra $I_1 \approx 40 \text{ mA}$ a na voltmetri zistíte príslušnú hodnotu svorkového napätia U_1 .



Obr. 25

Merajte napätia U_i prislúchajúce rôznym hodnotám prúdu $I_i < I_1$ (8–10 meraní). Výsledky zapisujte do tabuľky.

2a) Zostrojte graf funkcie $U = f(I)$ a aproximujte ho priamkou.

2b) Z grafu funkcie $U = f(I)$ určte elektromotorické napätie $\mathcal{E}$ zdroja a jeho vnútorný odpor R_i .

2c) Vyjadrite funkciu $U = f(I)$ fyzikálnym vzťahom.

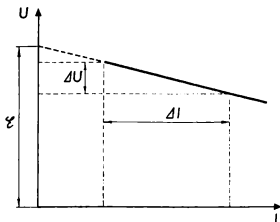
Riešenie:

1a) Pred uzavretím obvodu udáva voltmetr približne elektromotorické napätie batérie, nakoľko prúd prechádzajúci voltmetrom je zanedbateľne malý. Po uzavretí obvodu vypínačom ukazuje voltmeter svorkové napätie, ktoré je menšie než elektromotorické napätie batérie o napätie vytvorené na vnútornom odpore batérie prechádzajúcim prúdom.

2a) Graf funkcie $U = f(I)$ je podobný ako na obr. 26.

2b) Elektromotorické napätie $\mathcal{E}$ zdroja je určené prie-

sečníkom napäťovej osi s priamkou, znázorňujúcou závislosť napätia od prúdu (pozri obr. 26).



Obr. 26

Vnútorňý odpor je určený pomerom sebe zodpovedajúcich zmien ΔU napätia a ΔI prúdu, meraných na grafe priamky na obr. 26, teda

$$R_i = - \frac{\Delta U}{\Delta I}.$$

Záporné znamienko pri tomto pomere zodpovedá zápornej smernici priamky na obr. 26.

2c) Ak vyjadríme úvahu v 1a) matematicky, dostaneme fyzikálny vzťah pre funkciu

$$U = f(I), \text{ totiž } U = \mathcal{E} - R_i I.$$

Posledná rovnica vyjadruje, že napätie je lineárnou funkciou prúdu, grafom tejto funkcie je priamka so zápornou smernicou úmernou vnútornému odporu R_i zdroja. Táto priamka vytína na napäťovej osi úsek rovný elektromotorickému napätiu $\mathcal{E}$.

6. úloha (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

Ke zdroji elektromotorického napětí $\mathcal{E} = 1,50 \text{ V}$ s vnitřním odporem $R_i = 1,00 \, \Omega$ připojíme spotřebič s odporem $R = 4,00 \, \Omega$.

a) Vypočítejte proud I v obvodu a napětí U na spotřebiči.

b) Jaký proud I_1 v uvedeném obvodu naměříme měřicím přístrojem se základními rozsahy 60 mV ; $1,2 \text{ mA}$, který jsme upravili na ampérmetr s rozsahem $0,3 \text{ A}$?

c) Jaké napětí U_1 naměříme na spotřebiči týmž měřicím přístrojem, který jsme upravili na voltmetr s rozsahem $1,2 \text{ V}$?

d) Jaký proud I_2 a jaké napětí U_2 naměříme při současném použití ampérmetru upraveného podle bodu b) a voltmetru upraveného podle bodu c), je-li voltmetr připojen

1 — ke svorkám spotřebiče;

2 — ke vstupní svorce spotřebiče a výstupní svorce ampermetru?

Jaké hodnoty R_1 , R_2 vypočítáme pro odpor spotřebiče z hodnot proudu a napětí naměřených v případech 1 a 2? Vysvětlete, proč jedna z vypočítaných hodnot je správné hodnotě $4,00 \, \Omega$ bližší než druhá.

Řešení:

a) Podle Ohmova zákona vypočítáme

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i}; \quad U = \frac{R \mathcal{E}}{R + R_i}.$$

Pro dané hodnoty vyjde $I = 0,30 \text{ A}$; $U = 1,20 \text{ V}$.

b) Odpor galvanometru je

$$R_G = \frac{60 \text{ mV}}{1,2 \text{ mA}} = 50,0 \, \Omega.$$

Chceme-li proudový měřicí rozsah zvětšit do 0,3 A, tj. 250krát, musíme paralelně připojit bočník o vodivosti

$$G_B = \frac{249}{50} \text{ S}.$$

Vodivost ampérmetru potom je

$$G_A = \frac{249}{50} \text{ S} + \frac{1}{50} \text{ S} = 5,00 \text{ S}$$

a jeho odpor

$$R_A = \frac{1}{5} \, \Omega = 0,200 \, \Omega.$$

Poněvadž ampérmetr je zapojen v sérii se spotřebičem, naměříme proud

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R_A + R}.$$

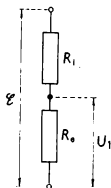
Pro dané hodnoty vyjde $I_1 \doteq 0,288 \text{ A}$.

c) Napěťový rozsah má být zvětšen 20krát. Musíme proto připojit předřadný odpor o velikosti $(19 \cdot 50) \, \Omega = 950 \, \Omega$ a voltmetr bude mít odpor $R_V = 1000 \, \Omega$. Odpor spotřebiče a paralelně připojeného voltmetru je

$$R_e = \frac{R R_V}{R + R_V}.$$

a pro dané hodnoty $R_e \doteq 3,98 \, \Omega$.

Napětí U_1 vypočítáme např. pomocí obr. 27, který představuje schéma děliče napětí. Z úměry



Obr. 27

$$U_1 : \mathcal{E} = R_e : (R_e + R_i)$$

vyjádříme

$$U_1 = \mathcal{E} \frac{R_e}{R_e + R_i}$$

a pro dané hodnoty vyjde $U_1 \doteq 1,20 \text{ V}$.

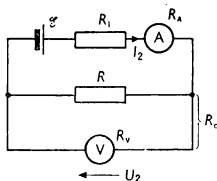
d) — 1 Podle obr. 28 je

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R_A + R_e},$$

$$U_2 = I_2 R_e$$

a pro dané hodnoty $I_2 \doteq 0,290 \text{ A}$; $U_2 \doteq 1,155 \text{ V}$.

d) — 2 Napětí U'_2 vy-
počítáme pomocí obr. 29,
který můžeme považovat
za schéma děliče napětí:



Obr. 28

$$U'_2 : \mathcal{E} = \frac{(R + R_A) R_v}{R + R_A + R_v} : \left[R_i + \frac{(R + R_A) R_v}{R + R_A + R_v} \right].$$

Z této úměry vyjde pro dané hodnoty $U'_2 \doteq 1,205 \text{ V}$.
Pro proud I'_2 platí

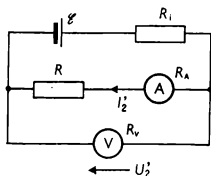
$$I'_2 = \frac{U'_2}{R + R_A}$$

a pro dané hodnoty $I'_2 \doteq 0,290 \text{ A}$.

Počítáme-li odpor spotřebiče z hodnot napětí a proudu,
vyjde

$$R_1 \doteq \frac{1,155 \text{ V}}{0,290 \text{ A}} \doteq 3,98 \Omega; \quad R_2 \doteq \frac{1,205 \text{ V}}{0,290 \text{ A}} \doteq 4,15 \Omega.$$

Hodnota R_1 je správné hodnotě $4,00 \Omega$ bližší proto, poněvadž nerovnost $R \ll R_v$ (tj. $4 \ll 1000$ neboli $1 \ll 250$)

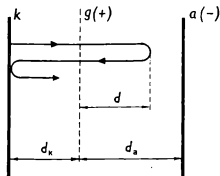


Obr. 29

je splněna podstatně výrazněji než nerovnost $R_A \ll R$ (tj. $0,2 \ll 4,0$ neboli $1 \ll 20$). Učiníme tedy menší chybu, když nepřihlížíme k vlastní spotřebě voltmetru v zapojení podle obr. 28, než když nepřihlížíme k vlastní spotřebě ampérmetru v zapojení podle obr. 29.

7. úloha (navrhl Mojmir Simerský)

Rovinná mřížka má od rovinné katody vzdálenost d_k . Mřížka má proti katodě kladné napětí U_g , anoda má proti katodě záporné napětí U_a ($|U_a| \ll U_g$). Z katody vystoupí (ve vakuu) elektron, proletí mřížkou, potom je elektrickým polem brzděn tak, že se zastaví ve vzdálenosti d ($d < d_a$, kde d_a



Obr. 30

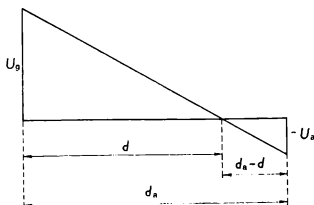
značí vzdálenost mřížky od anody) od mřížky a letí zpět, znovu proletí mřížkou, vrátí se ke katodě atd., tedy kmitá (viz obr. 30). Určete periodu T a kmitočet f těchto kmitů. Pole mezi mřížkou a elektrodami jsou homogenní.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $U_g =$

$$= 400 \text{ V}; \quad U_a = -20,0 \text{ V}; \quad d_k = 1,00 \text{ mm}; \quad d_a = 5,00 \text{ mm}.$$

Řešení:

Určíme nejprve vzdálenost d mezi mřížkou a tou potenciálovou hladinou, na které se elektron zastaví. Je to hladina s nulovým potenciálem, tj. s potenciálem katody.



Obr. 31

Z potenciálového diagramu pro prostor mezi mřížkou a anodou (viz obr. 31) vypočítáme pomocí podobnosti trojúhelníků:

$$d = d_a \frac{U_g}{U_g + |U_a|}. \quad (1)$$

Elektron vystoupí z katody a je urychlován elektrickým polem o konstantní intenzitě $E_1 = \frac{U_g}{d_k}$, takže koná pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením

$$a_1 = \frac{e E_1}{m} = \frac{e U_g}{m d_k},$$

kde e značí elementární náboj a m hmotnost elektronu. Podle zákonů platných pro rovnoměrně zrychlený pohyb se dostane k mřížce za dobu

$$t_1 = d_k \sqrt{\frac{2m}{e U_g}}.$$

Po průletu mřížkou se elektron dostává do brzdícího pole o intenzitě $E_2 = -\frac{U_g}{d}$, v němž se pohybuje pohybem rovnoměrně zpomaleným se zrychlením

$$a_2 = -\frac{e E_2}{m} = -\frac{e U_g}{m d},$$

a zastaví se na konci dráhy d za dobu

$$t_2 = d \sqrt{\frac{2m}{e U_g}}.$$

Pohyb od katody k hladině nulového potenciálu tedy trvá dobu $T_1 = t_1 + t_2$ a pohyb zpět ke katodě trvá stejnou dobu, takže celková doba kmitu je

$$T = 2 T_1 = 2 (t_1 + t_2) = 2 (d + d_k) \sqrt{\frac{2m}{e U_g}}$$

a po dosazení za d podle (1):

$$T = 2 \left(d_a \frac{U_g}{U_g + |U_a|} + d_k \right) \sqrt{\frac{2m}{e U_g}}. \quad (2)$$

Pro zadané číselné hodnoty a konstanty $e \doteq 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m \doteq 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ vychází

$$T \doteq 1,94 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

a

$$f \doteq 5,15 \cdot 10^8 \text{ Hz.}$$

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl Alois Vaněk)

Těleso o hmotnosti m se působením stálé síly o velikosti F_0 pohybuje v homogenním tíhovém poli z bodu A rovnoměrně přímočaře svisle vzhůru rychlostí v . V bodě B dráhy počne na těleso působit svisle vzhůru síla o velikosti $F_1 = F_0 + F$ a pohyb je od tohoto okamžiku rovnoměrně zrychlený.

a) Určete dobu t , za kterou těleso urazí dráhu

$$s = AC > s_0 = AB.$$

b) Vypočítejte dobu kmitu T_1 matematického kyvadla délky l zabudovaného v tělese.

c) Určete čas t_1 , který ukážou v bodě C kyvadlové hodiny zabudované v tělese, budou-li měřit čas od počátku pohybu tělesa, tj. od bodu A . Předpokládejte, že kyvadlo hodin je matematické.

Úlohu řešte nejprve obecně, části a) a c) také pro hodnoty

$$s = 1\,900 \text{ m}; s_0 = 900 \text{ m}; v = 10,0 \text{ m s}^{-1};$$

$$F = 1\,250 \text{ N}; m = 100 \text{ kg}; g = 9,81 \text{ m s}^{-2}.$$

Řešení:

a) Dráhu AB urazí těleso za dobu

$$t_0 = \frac{s_0}{v}, \quad (1)$$

dráhu BC za dobu t_2 , pro kterou platí

$$s - s_0 = v t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2, \quad (2)$$

kde

$$a = \frac{F}{m} \quad (3)$$

je zrychlení tělesa na dráze BC .

Z kvadratické rovnice (2) vyjádříme t_2 a vezmeme v úvahu jen kladné řešení, poněvadž záporné řešení nemá fyzikální smysl. Za zrychlení a pak dosadíme z (3), a poněvadž $t = t_0 + t_2$, dostaneme po dosazení z (1) obecný výsledek

$$t = \frac{s_0}{v} + \frac{m}{F} \left[-v + \sqrt{v^2 + \frac{2F}{m}(s - s_0)} \right]. \quad (4)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $t \doteq 102$ s.

b) Na matematické kyvadlo působí kromě tíhové síly ještě setrvačná síla orientovaná stejně jako síla tíhová.

Její velikost je F , takže působí zrychlením o velikosti $\frac{F}{m}$ a tato velikost se přičítá k velikosti tíhového zrychlení, určujeme-li dobu kmitu T_1 matematického kyvadla délky l . Proto

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{F}{m}}}. \quad (5)$$

c) Na úseku AB jdou hodiny správně, jejich kyvadlo má dobu kmitu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6)$$

Na tomto úseku tedy hodiny naměří dobu t_0 podle (1). Na úseku BC však jdou hodiny zabudované v tělese rychleji, jak je zřejmé z (5), a naměří dobu

$$t_3 = t_2 \frac{T}{T_1}, \quad (7)$$

kde t_2 značí dobu vyjádřenou z (2), která je určena druhým členem na pravé straně vztahu (4). Celkově tedy naměří hodiny čas

$$t_1 = t_0 + t_3.$$

Po dosazení z (1), (7), (4), (5), (6) dostaneme obecný výsledek

$$t_1 = \frac{s_0}{v} + \frac{m}{F} \left[-v + \sqrt{v^2 + \frac{2F}{m}(s - s_0)} \right] \sqrt{1 + \frac{F}{mg}}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $t_1 \doteq 108 \text{ s}$.

2. úloha (navrhl dr. Miroslav Bajer)

Platinová tyčka o hmotnosti m je umístěna ve skleněné trubici se zúženým koncem (obr. 32), která je při teplotě t_0 naplněna rtutí o hmotnosti m_1 . Trubicí s tyčinkou a rtutí zahřejeme v olejové lázni z teploty t_0 na teplotu t_1 . Z trubice vyteče rtuť o hmotnosti m_2 . Sklo trubice má v intervalu $t_0 \leq t \leq t_1$ průměrný součinitel délkové teplotní roztažnosti α , rtuť má v tomto intervalu teplot průměrný součinitel objemové teplotní roztažnosti β . Při teplotě t_0 má



Obr. 32

rtuť hustotu σ , platina hustotu ϱ .

Stanovte součinitel délkové teplotní roztažnosti α platiny v daném teplotním intervalu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 0,387 \text{ kg}$; $m_1 = 0,854 \text{ kg}$; $m_2 = 0,0140 \text{ kg}$; $t_0 = 18,0^\circ\text{C}$; $t_1 = 124^\circ\text{C}$;

$$\alpha = 0,810 \cdot 10^{-5} \text{ deg}^{-1}; \quad \beta = 0,182 \cdot 10^{-3} \text{ deg}^{-1};$$

$$\sigma = 13,55 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}; \quad \varrho = 21,4 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}.$$

Řešení:

Při zahřátí zvětší rtuť svůj objem o

$$\Delta V_1 = \beta \frac{m_1}{\sigma} (t_1 - t_0), \quad (1)$$

platinová tyčka o

$$\Delta V_2 = 3\alpha \frac{m}{\varrho} (t_1 - t_0), \quad (2)$$

dutina trubice o

$$\Delta V_3 = 3\alpha \left(-\frac{m_1}{\sigma} + \frac{m}{\varrho} \right) (t_1 - t_0). \quad (3)$$

Vytlačená rtuť má objem $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 - \Delta V_3$, neboli s ohledem na (1), (2) a (3),

$$\Delta V = \left[\beta \frac{m_1}{\sigma} + 3\alpha \frac{m}{\varrho} - 3\alpha \left(-\frac{m_1}{\sigma} + \frac{m}{\varrho} \right) \right] (t_1 - t_0). \quad (4)$$

Tento objem můžeme vyjádřit také takto:

$$\Delta V = \frac{m_2}{\sigma} [1 + \beta (t_1 - t_0)], \quad (5)$$

neboť $\frac{m_2}{\sigma}$ značí objem, který by vytlačená rtuť měla při

teplotě t_0 . Porovnaním (4) a (5) dostaneme vzťah, z něhož vyjádříme

$$a = \frac{\varrho}{3m} \left[\frac{m_2}{\sigma(t_1 - t_0)} + 3\alpha \left(\frac{m_1}{\sigma} + \frac{m}{\varrho} \right) - \frac{\beta}{\sigma} (m_1 - m_2) \right].$$

Pro zadané hodnoty vyjde $a \doteq 7,6 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$.

3. úloha (navrhl ing. Daniel Kluvanec)

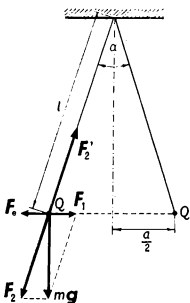
Dve guľôčky rovnakých hmotností a polomerov sú zavesené na rovnako dlhých nevodivých vláknach v spoločnom bode závesu. Keď majú rovnaké náboje, ich vzdialenosť je a_0 . Určte ich vzájomnú vzdialenosť a , ak jednu z guľôčiek pozbavíme náboja. Polomery guľôčiek sú zanedbatelné vzhľadom k dĺžke vlákien. Uhol α závesných vlákien je vždy taký, že

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \doteq \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Riešte najskôr všeobecne, potom pre hodnotu $a_0 = 5,0 \text{ cm}$.

Riešenie:

Pre rovnovážny stav guľôčiek, ktoré obsahujú náboj Q , podľa obr. 33 platí



Obr. 33

$F_e = F_1$ (F_e je elektrická odpudivá síla a F_1 je složka tíže guľôčky), tj.

$$\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{a_0^2} = mg \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \doteq mg \sin \frac{\alpha_1}{2} = mg \frac{a_0}{2l}. \quad (1)$$

Jednu guľôčku pozbavíme náboja, napr. dotykom prsta, obe guľôčky sa vplyvom tíže dotknú a rozdelia si náboj v pomere ich kapacít. Vzhľadom k tomu, že rozmery guľôčiek sú rovnaké, rovnaké sú aj ich kapacity a náboje Q_1 guľôčiek budú rovnaké $Q_1 = \frac{Q}{2}$. Po dotyku a rozdelení náboja sa guľôčky znova odpudzujú a ustália sa vo vzdialenosti a . Vtedy platí

$$\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\left(\frac{Q}{2}\right)^2}{a^2} = mg \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} \doteq mg \sin \frac{\alpha_2}{2} = mg \frac{a}{2l}. \quad (2)$$

Podelením rovnice (1) rovnicou (2) dostaneme

$$\frac{4 a^2}{a_0^2} = \frac{a_0}{a}$$

a z toho

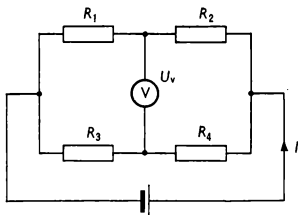
$$a = \frac{a_0}{\sqrt[3]{4}}.$$

Číselné riešenie

$$a = \frac{5,0 \text{ cm}}{\sqrt[3]{4}} \doteq \frac{5,0}{1,587} \text{ cm} \doteq 3,2 \text{ cm}.$$

4. úloha (navrhl Ivo Volf)

Odpory R_1 , R_2 , R_3 , R_4 jsou zapojeny podle schématu na obr. 34. Znáte-li údaj U_v voltmetru, určete svorkové napětí U zdroje a celkový proud I v obvodu. Předpoklá-



Obr. 34

dáme, že vnitřní odpor voltmetru je takový, že proud, který jím protéká, je zanedbatelný.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $R_1 = 5,0 \, \Omega$; $R_2 = 20 \, \Omega$; $R_3 = 15 \, \Omega$; $R_4 = 10 \, \Omega$; $U_v = 12 \, \text{V}$.

Řešení:

Odpory R_1 , R_2 tvoří dělič napětí. Na odporu R_1 je napětí

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (1)$$

Podobně odpory R_3 a R_4 ; na odporu R_3 je napětí

$$U_3 = U \frac{R_3}{R_3 + R_4}. \quad (2)$$

Na voltmetru je napětí U_v , pro které platí $U_v = |U_1 - U_3|$ a po dosazení z (1) a (2) a úpravě

$$U_v = U \frac{|R_1 R_4 - R_2 R_3|}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}.$$

Odtud vyjádříme

$$U = U_v \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{|R_1 R_4 - R_2 R_3|}. \quad (3)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $U = 30 \text{ V}$.

Celkový odpor soustavy je

$$R_v = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}, \quad (4)$$

takže napětí U zde způsobuje proud

$$I = \frac{U}{R_v}$$

a po dosazení z (3) a (4)

$$I = U_v \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{|R_1 R_4 - R_2 R_3|}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde $I = 2,4 \text{ A}$.

3. Úlohy kategorie C

Úlohy a jejich řešení recenzovali dr. Marta Chytilová a dr. Ivan Náter.

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl Jan Tesař)

Kolo setrvačníku má tvar pláště dutého rotačního válce o poloměru R a hmotnost m . Jeho tloušťka je vzhledem

k poloměru R zanedbatelná. Setrvačník je připevněn k hřídeli o poloměru r . Hmotnost hřídele i ostatních dílů setrvačníku jsou zanedbatelné vzhledem k hmotnosti kola. Za těchto předpokladů pro moment setrvačnosti kola platí $J = mR^2$.

Na hřídeli je navinuto lano, na jehož volném konci je závaží o hmotnosti m' . Po uvolnění lano se setrvačník uvede do zrychleného otáčivého pohybu.

a) Určete zrychlení ε otáčivého pohybu setrvačníku a dokažte, že otáčivý pohyb je rovnoměrně zrychlený ($\varepsilon = \text{konst.}$). Tření neuvažujeme.

b) Určete v čase t od počátku pohybu: úhlovou rychlost ω , úhel otočení φ , rychlost v a dráhu s kteréhokoli bodu kola setrvačníku, počet N vykonaných otáček kola.

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $m = 100 \text{ kg}$, $m' = 40 \text{ kg}$, $R = 1,00 \text{ m}$, $r = 0,050 \text{ m}$, $t = 30 \text{ s}$.

Řešení:

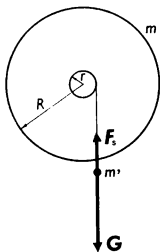
a) Závaží klesá (viz obr. 35) se zrychlením a , takže na závěs působí tíhová síla $G = m'g$ a setrvačná síla $F_s = -m'a$. Lano je napínáno silou o velikosti

$$F = m'(g - a).$$

Tato síla působí na ramenu délky r a vyvíjí moment

$$M = Fr = m'(g - a)r. \quad (1)$$

Pro tento moment dále platí



Obr. 35

$$M = \mathcal{J} \varepsilon, \quad (2)$$

kde $\mathcal{J} = m R^2$ je moment setrvačnosti otáčející se soustavy a ε její úhlové zrychlení. Dále je

$$a = r \varepsilon. \quad (3)$$

Do (1) dosadíme z (2) a (3), pak vyjádříme

$$\varepsilon = \frac{m' g r}{m R^2 + m' r^2} = \text{konst.} \quad (4)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $\varepsilon \doteq 0,20 \text{ s}^{-2}$.

b) Pomocí (4) vyjádříme

$$\text{úhlovou rychlost: } \omega = \varepsilon t = \frac{m' g r t}{m R^2 + m' r^2},$$

$$\text{úhel otočení: } \varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 = \frac{1}{2} \frac{m' g r t^2}{m R^2 + m' r^2},$$

$$\text{rychlost: } v = R \omega = \frac{m' g r R t}{m R^2 + m' r^2},$$

$$\text{dráhu: } s = R \varphi = \frac{1}{2} \frac{m' g r R t^2}{m R^2 + m' r^2},$$

$$\text{počet otáček: } N = \frac{s}{2 \pi R} = \frac{1}{4 \pi} \frac{m' g r t^2}{m R^2 + m' r^2}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde: $\omega \doteq 6,0 \text{ s}^{-1}$; $\varphi = 90 \text{ rad}$; $v \doteq 6,0 \text{ m s}^{-1}$; $s \doteq 90 \text{ m}$; $N \doteq 14$.

Jiný způsob řešení:

V určitém okamžiku má klesající závaží rychlost v_0 a soustava se otáčí okamžitou úhlovou rychlostí ω_0 . Za krátkou dobu Δt klesne závaží o malou délku $\Delta h = r \Delta \varphi$, kde $\Delta \varphi$

značí velmi malý úhel otočení. Úhlová rychlost soustavy vzroste o malou hodnotu $\Delta\omega$.

Tíhová síla vykonala práci

$$A = m' r g \Delta\varphi.$$

Energie setrvačníku vzrostla o

$$\Delta W_1 = \frac{1}{2} m R^2 [(\omega_0 + \Delta\omega)^2 - \omega_0^2] = m R^2 \omega_0 \Delta\omega,$$

zanedbáme-li velmi malý člen $(\Delta\omega)^2$.

Rychlost klesajícího závaží vzrostla o Δv , jeho kinetická energie se tedy zvětšila o

$$\Delta W_2 = \frac{1}{2} m' [(v_0 + \Delta v)^2 - v_0^2] = m' v_0 \Delta v,$$

když opět zanedbáme velmi malý člen $(\Delta v)^2$.

Je nyní

$$v_0 = r \omega_0, \quad \Delta v = r \Delta\omega,$$

takže

$$\Delta W_2 = m' r^2 \omega_0 \Delta\omega.$$

Vyjádríme rovnost $\Delta A = \Delta W_1 + \Delta W_2$ a získaný vztah dělíme dobou Δt . Uvážíme dále, že

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega_0; \quad \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon.$$

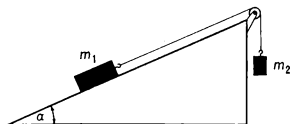
Dostaneme tedy vztah

$$m' g r \omega_0 = m R^2 \omega_0 \varepsilon + m' r^2 \omega_0 \varepsilon,$$

z něhož plyne (4).

2. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Na nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel α , je těleso o hmotnosti m_1 . Těleso je spojeno nití vedenou přes pevnou kladku v nejvyšším bodě roviny se závažím o hmotnosti m_2 (obr. 36).

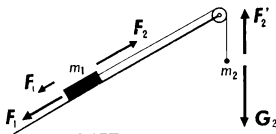


Obr. 36

a) Předpokládáme, že soustava těles ponechána sama sobě se pohybuje rovnoměrně zrychleně. Určete zrychlení pohybu těles, je-li součinitel smykového tření μ . Proveďte diskusi orientace a velikosti zrychlení.

b) Za které podmínky konají tělesa rovnoměrný přímočarý pohyb?

c) Určete velikost, směr a orientaci tlakové síly F na čep kladky v případě a) a v případě b).



Obr. 37

Řešení:

a₁) Předpokládáme, že těleso stoupá se zrychlením a_1 (obr. 37). Na těleso působí síla o velikosti $F_2 - F_1 - F_t$ a uděluje mu zrychlení a_1 . Platí tedy

$$m_1 a_1 = F_2 - F_1 - F_t, \quad (1)$$

$$\text{přičemž složka tíhové síly } F_1 = m_1 g \sin \alpha \quad (2)$$

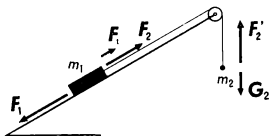
$$\text{a třecí síla } F_t = \mu m_1 g \cos \alpha. \quad (3)$$

Na závaží, které klesá se zrychlením a_1 , působí směrem dolů tíhová síla $G_2 = m_2 g$ a směrem vzhůru síla F'_2 , stejně velká jako F_2 , takže platí

$$m_2 a_1 = G_2 - F_2 = m_2 g - F_2. \quad (4)$$

Z (4) vyjádříme F_2 a dosadíme do (1), za F_1 a F_t tam dosadíme z (2) a (3). Ze získaného vztahu vyjádříme

$$a_1 = \frac{g}{m_1 + m_2} (m_2 - m_1 \sin \alpha - \mu m_1 \cos \alpha). \quad (5)$$



Obr. 38

a₂) Předpokládáme, že těleso klesá se zrychlením a_2 (obr. 38). Obdobnými úvahami dostaneme vztahy

$$m_1 a_2 = F_1 - F_2 - F_t, \quad (6)$$

$$m_2 a_2 = F_2 - G_2 = F_2 - m_2 g. \quad (7)$$

Ze (7) vyjádříme F_2 , dosadíme do (6), za F_1 a F_t tam dosadíme z (2) a (3). Ze získaného vztahu vyjádříme

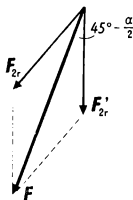
$$a_2 = \frac{g}{m_1 + m_2} (m_1 \sin \alpha - \mu m_1 \cos \alpha - m_2). \quad (8)$$

b) Pro případ a_1) položíme v (5) $a_1 = 0$, pak dostaneme

$$\frac{m_2}{m_1} = \sin \alpha + \mu \cos \alpha. \quad (9)$$

Pro případ a_2) položíme v (8) $a_2 = 0$, pak dostaneme

$$\frac{m_2}{m_1} = \sin \alpha - \mu \cos \alpha. \quad (10)$$



Obr. 39

c) Podle obr. 38 působí na čep dvě stejně velké síly F_{2r} a F'_{2r} , reakce k F_2 a F'_2 , jejichž výslednice F svírá se svislým směrem úhel $45^\circ - \frac{\alpha}{2}$ a má orientaci vyznačenou v obr. 39. Její velikost stanovíme např. pomocí kosinové věty. Po úpravě vyjde

$$F = F_{2r} \sqrt{2(1 + \sin \alpha)}. \quad (11)$$

Pro případ a_1) dostaneme F_{2r} z (4) po dosazení za a_1 z (5). Po úpravě vyjde

$$F_{2r} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha). \quad (12)$$

Pro případ a_2) vyjádříme F_{2r} z (7) po dosazení za a_2 z (8).
Vyjde

$$F_{2r} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin \alpha - \mu \cos \alpha). \quad (13)$$

Při rovnoměrném pohybu je síla F'_2 v rovnováze s tíhovou silou G_2 , tedy

$$F_{2r} = m_2 g.$$

Stejný výsledek dostaneme, když vezmeme (12) spolu s podmínkou (9) nebo (13) spolu s podmínkou (10).

3. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Ve výšce h nad povrchem Země v rovině rovníku obíhá kolem Země umělá družice rovnoměrným pohybem po kružnici.

a) Určete její rychlost v_1 v inerciální vztažné soustavě spojené se středem Země.

b) Určete její rychlost v_2 ve vztažné soustavě spojené s pozorovacím místem na rovníku.

Řešte obecně a potom pro hodnotu $h = 1,6 \cdot 10^6$ m.

c) Určete výšku H nad povrchem Země a rychlost v_H umělé družice Země vzhledem k pozorovateli na rovníku, který družici pozoruje trvale v nadhlavníku („stacionární“ družice).

Předpokládáme, že Země je homogenní koule. Příslušné konstanty vyhledejte v tabulkách.

Řešení:

Označení veličin: m hmotnost družice; M hmotnost Země; R poloměr Země; h výška družice nad povrchem Země; v_1 rychlost družice ve vztažné soustavě a); v_2 rych-

lost družice ve vztažné soustavě b); T perioda otáčivého pohybu Země; v_0 rychlost bodu na oběžné dráze, který je vzhledem ke středu Země v klidu, v soustavě spojené s pozorovacím místem na rovníku.

a) Pohybuje-li se družice po kružnici, je gravitační síla rovna síle dostředivé:

$$\kappa \frac{mM}{(R+h)^2} = \frac{mv_1^2}{R+h}.$$

Odtud

$$v_1 = \sqrt{\frac{\kappa M}{R+h}}. \quad (1)$$

Gravitační konstantu vyjádříme pomocí tíhového zrychlení (pro případ, že těleso hmotnosti m je na povrchu Země):

$$\frac{\kappa m M}{R^2} = mg; \quad \text{odtud} \quad \kappa = \frac{gR^2}{M}.$$

Dosadíme do (1) a dostaneme obecný výsledek

$$v_1 = R \sqrt{\frac{g}{R+h}}. \quad (1a)$$

Pro zadané hodnoty vyjde

$$v_1 \doteq 7,0 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

b) Stanovíme nejprve rychlost v_0 , kterou má v naší vztažné soustavě bod na oběžné dráze, který je vzhledem ke středu Země v klidu. Tento bod se z hlediska pozorovatele na rovníku pohybuje po kruhové dráze o poloměru $R+h$, a to s úhlovou rychlostí zemské rotace, takže

$$v_0 = \frac{2\pi}{T} (R+h).$$

Potom je

$$v_2 = v_1 \pm v_0 = R \sqrt{\frac{g}{R+h}} \pm \frac{2\pi}{T} (R+h). \quad (2)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $v_2 \doteq (7,0 \pm 0,6) \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$.

c) Stacionární družice má vzhledem k pozorovateli na rovníku rychlost $v_H = 0$. Její výšku určíme z (2), vezme-li zde záporné znaménko, položíme $v_2 = 0$ a $h = H$. Dostaneme výsledek

$$H = \sqrt[3]{\frac{R^2 g T^2}{4 \pi^2}} - R. \quad (3)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $H \doteq 3,6 \cdot 10^7 \text{ m}$.

V inerciální soustavě určíme oběžnou rychlost stacionární družice ze vztahu

$$v'_H = \frac{2\pi}{T} (R+H).$$

Za H dosadíme z (3), po úpravě dostaneme

$$v'_H = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{T} R^2 g}.$$

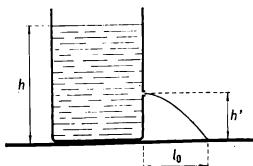
Pro zadané hodnoty:

$$v'_H \doteq 3,1 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

4. úloha (navrhli dr. M. Bednařík a dr. M. Šíroková)

V otevřené válcové nádobě sahá kapalina do výšky h . Ve výšce h' nad dnem nádoby, $h' < h$, se otevře ve stěně malý otvor. Kapalina tryská vodorovným směrem ze stěny nádoby a dopadá ve vzdálenosti l_0 od stěny nádoby na

vodorovnou rovinu dna válce. Předpokládáme, že při výtoku kapaliny se výška h nemění. Neuvažujeme odpor prostředí, tření ani kontrakci paprsku kapaliny v otvoru (obr. 40).



Obr. 40

a) Válec se uzavře dokonale těsnícím pístem. Působením vnější síly se posunuje píst tak, že se zvyšuje tlak vzduchu nad kapalinou, a tím se zvětšuje vzdálenost l dopadu paprsku kapaliny na vodorovnou rovinu dna válce. Vyjádřete přetlak p jako funkci délky l . Sestrojte tabulku hodnot této funkce v oboru $l_0 \leq l \leq 5l_0$.

Sestrojte příslušný graf.

b) Při kterém přetlaku p_1 je vzdálenost dopadu paprsku kapaliny od stěny nádoby na vodorovnou rovinu dna válce dvojnásobná jako při výtoku kapaliny z otevřené nádoby? Jaké zvýšení Δh sloupce kapaliny v nádobě nahradí přetlak vzduchu p_1 ?

Řešení:

a) Označení: p_0 hydrostatický tlak v hloubce $h - h'$, p přetlak nad povrchem kapaliny, její hustota ρ .

V otevřené nádobě je $p = 0$, výtoková rychlost v_0 , vzdálenost dopadu paprsku na vodorovnou rovinu dna l_0 ; pro $p \neq 0$, výtoková rychlost v , vzdálenost dopadu paprsku na vodorovnou rovinu dna l .

Časový interval od okamžiku výtoku do dopadu je $t =$

$= \sqrt{\frac{2h'}{g}}$. Pro hydrostatický tlak p_0 a výtokovou rychlost v_0 platí

$$p_0 = \rho g (h - h'), \quad v_0^2 = \left(\frac{l_0}{t}\right)^2 = \frac{l_0^2 g}{2h'}.$$

Při výtoku z otevřené nádoby platí za daných podmínek

$$p_0 = \frac{\rho v_0^2}{2} = \frac{\rho g l_0^2}{4h'}.$$

Při výtoku za přetlaku p a za jinak stejných podmínek

$$p + p_0 = \frac{\rho v^2}{2}, \quad \text{kde } v^2 = \left(\frac{l}{t}\right)^2 = \frac{l^2 g}{2h'}.$$

Pro přetlak p z toho vyplývá po dosazení za p_0 a v^2

$$p = \frac{\rho v^2}{2} - p_0 = \frac{\rho g}{4h'} (l^2 - l_0^2),$$

tedy

$$p = \frac{p_0}{l_0^2} (l^2 - l_0^2). \quad (1)$$

Tabulka pro sestrojení grafu

l	l_0	$2l_0$	$3l_0$	$4l_0$	$5l_0$
p	0	$3p_0$	$8p_0$	$15p_0$	$24p_0$

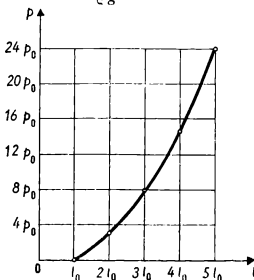
Graf funkce $p = f(l)$ je na obr. 41.

b) Pro $l_1 = 2l_0$ plyne ze vztahu (1) $p_1 = 3p_0 = 3\rho g (h - h')$. Tomuto přetlaku p_1 odpovídá zvýšení sloupce kapaliny v nádobě o Δh . Platí pro ně

$$3p_0 = \rho g \Delta h,$$

a odtud

$$\Delta h = \frac{3 p_0}{\rho g} = 3 (h - h').$$



Obr. 41

5. úloha — experimentální (navrhl Josef Jurčík)

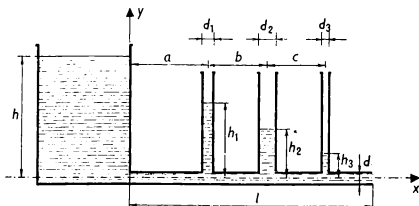
Měření výtokové rychlosti, objemového toku a výkonu proudící vody

Pomůcky: přístroj pro demonstraci výtoku kapaliny trubicí stálého průřezu (viz obr. 42), posuvné měřítko s noniem, milimetrové měřítko, odměrný válec, stopky, gumová hadice.

Provedení:

1. Změřte tyto rozměry přístroje s předepsanou přesností: délky l , a , b , c na milimetr, vnitřní průměry d , d_1 , d_2 , d_3 na desetinu milimetru.

Gumovou hadici připojenou k vodovodu zasuněte do nádoby přístroje a při otevřené výtokové trubici přístroje seříďte kohoutkem vodovodu průtok vody tak, aby se povrch vody



Obr. 42

ustálil v nádobě v konstantní výšce h . Vodu nechte volně odtékat. Změřte výšky h , h_1 , h_2 , h_3 s přesností na milimetr. Odměrným válcem změřte objem vyteklé vody za dobu t , změřenou stopkami s přesností na desetinu sekundy. Měření proveďte pětkrát, запиšte do tabulky a vypočítejte průměrný tok Q v $\text{cm}^3 \text{s}^{-1}$.

2. Podle naměřených hodnot narýsujte průřez přístroje ve skutečných rozměrech. Spojte v nákrese lomenou čarou středy úseček znázorňujících povrchy vody v nádobě a v trubicích a střed koncového průřezu výtokové trubice. Označte ji (2). Vypočítejte zvýšení Δh_i vodních sloupců v manometrických trubicích způsobené kapilární elevací, vypočítejte výšky $h'_1 = h_1 - \Delta h_1$; $h'_2 = h_2 - \Delta h_2$; $h'_3 = h_3 - \Delta h_3$ a nakreslete je do obrázku. V obrázku nakreslete spojitou křivku, na které leží středy úseček znázorňujících povrchy vody v nádobě a v trubicích ve výš-

kách h , h'_1 , h'_2 , h'_3 a střed koncového průřezu výtokové trubice; označte ji (3). Úsečku spojující krajní body křivky (3) označte (1).

3. Proveďte tyto výpočty a úvahy:

a) Vypočítejte teoretickou výtokovou rychlost v_0 vody.

b) Z naměřeného průměrného objemového toku Q

vypočítejte skutečnou výtokovou rychlost $v = \frac{Q}{S}$ pro $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

Vypočítejte poměr $v : v_0$.

c) Vypočítejte výkon P_0 proudící vody za předpokladu, že statický tlak vody proudící trubicí klesá lineárně $P_0 = F v_0$. Sílu F určete touto úvahou: Označte p_0 hydrostatický tlak vody u výtokového otvoru nádoby, $p_0 = h \varrho g$; průměrný statický tlak vody proudící v trubicí je podle grafu (1).

$$p = \frac{p_0}{2} = \frac{h \varrho g}{2}; F = p S = \frac{h \varrho g S}{2}.$$

d) Vypočítejte výkon proudící vody za předpokladu, že statický tlak klesá podle křivky (3).

$$P = F' v.$$

Sílu F' určete touto úvahou: V obrázku sestrojte soustavu souřadnic $(x; y)$ a změřte pořadnici y' bodu křivky (3) pro $x' = \frac{l}{2}$; odpovídající statický tlak p' ve výtokové trubicí je

$$p' = \frac{p_0 y'}{h}; F' = p' S = \frac{p_0 y' S}{h}.$$

Vypočítejte poměr $p : p_0$.

6. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

V rtuťovém barometru, který používáme jako standardní přístroj, má rtuťový sloupec za určitého atmosférického tlaku a teploty výšku h_0 . Barometr, jehož údaje porovnááme se standardním barometrem, má za stejných podmínek výšku sloupce rtuti h'_0 , $h'_0 < h_0$. Závadný barometr udává menší hodnotu proto, že nad rtutí není dostatečné vakuum. Délka trubice tohoto barometru je l a průřez trubice je S .

a) Jestliže závadný barometr má výšku sloupce rtuti h' , má za téže teploty standardní barometr výšku sloupce rtuti h . Určete výšku h sloupce rtuti ve standardním barometru jako funkci h' . Funkční rovnici $h = f(h')$ upravte na dvojčlen, jehož první člen je h' . Charakterisujte druhý člen.

b) Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty: $h_0 = 760$ mm, $h'_0 = 755$ mm, $l = 850$ mm, $S = 1,00$ cm². Sestavte tabulku správných hodnot h pro naměřené nesprávné hodnoty h' v mezích 740 mm $\leq h' \leq 780$ mm. Rozsah intervalů volte 5 mm. Podle tabulky narýsujte graf na milimetrový papír. Porovnejte graf s grafem lineární funkce.

Řešení:

a) Plyn nad rtutí závadného barometru má za uvedených podmínek objem

$$V = S(l - h'_0)$$

a tlak, rovný hydrostatickému tlaku sloupce rtuti o výšce $h_0 - h'_0$: $p = \rho g(h_0 - h'_0)$, kde ρ je hustota rtuti za dané teploty. Násobením levých a pravých stran obou rovnic dostaneme

$$pV = \rho g S(l - h'_0)(h_0 - h'_0). \quad (1)$$

V soulase s Boyleovým zákonem platí stejný vztah i pro jinou dvojici hodnot h a h' za téže teploty;

$$\varrho g S (l - h') (h - h') = \varrho g S (l - h'_0) (h_0 - h'_0).$$

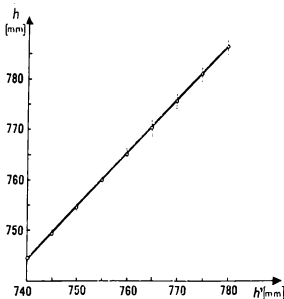
Po úpravě dostaneme

$$h = h' + \frac{(l - h'_0) (h_0 - h'_0)}{l - h'}. \quad (2)$$

Označme konstantní hodnoty v čitateli druhého členu

$$l - h'_0 = a, \quad h_0 - h'_0 = b.$$

Z podmínek úlohy platí $a > 0$, $b > 0$; pro jmenovatele druhého členu platí $l - h' > 0$. Je tedy výraz $\frac{ab}{l - h'}$ v da-



Obr. 43

ných podmínkách monotónní stoupající funkci proměnné h' , nabývá jen kladných hodnot. A také funkce

$$h = h' + \frac{ab}{l - h'} \quad (3)$$

je monotónní stoupající funkce proměnné h' .

b) Pro dané hodnoty platí $a = 95 \text{ mm}$, $b = 5 \text{ mm}$ a správné hodnoty h pro naměřené nesprávné hodnoty h' v mezích $740 \text{ mm} \leq h' \leq 780 \text{ mm}$ udává tabulka

$h'[\text{mm}]$	740	745	750	755	760	765	770	775	780
$h[\text{mm}]$	744,3	749,5	754,8	760,0	765,3	770,6	775,9	781,3	786,8

Graf funkce $h = f(h')$ je na obr. 43. Z grafu je vidět, že funkce (3) je přibližně lineární.

7. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Osobní automobil A délky l_1 a nákladní automobil B s přívěsem úhrnné délky l_2 jedou za sebou stejnou rychlostí v pořadí B , A . Vzdálenost předního okraje vozidla A od koncových světel vozidla B je d . Řidič vozidla A chce předjet vozidlo B . V jistém okamžiku přejde z rovnoměrného pohybu do pohybu se stálým zrychlením a .

a) Po zkrácení vzdálenosti d na d_1 dosáhne vozidlo A rychlosti v_1 a při této rychlosti předjíždí vozidlo B . Určete velikost rychlosti v_1 . Určete délku dráhy s , kterou urazí vozidlo A od počátku zrychlování pohybu do okamžiku, kdy je přední okraj vozidla B za koncovými světly vozidla A ve vzdálenosti d . Za jakou dobu t_1 urazí vozidlo A dráhu s ?

b) Vozidlo A jede rovnoměrně zrychleným pohybem od počátku zrychlování pohybu až do okamžiku, kdy přední okraj vozidla B je za koncovými světly vozidla A ve vzdálenosti d . Za jakou dobu t_2 od počátku zrychlování pohybu se dostane vozidlo A do této polohy vzhledem k B ? Při jaké rychlosti v_2 se zařadí vozidlo A před vozidlo B ve vzdálenosti d ?

Zakřivení dráhy při předjíždění zanedbáváme. Vozidlo B zachovává stálou rychlost v vzhledem k zemi.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $l_1 = 4,0$ m, $l_2 = 16$ m, $v = 80$ km h⁻¹, $a = 1,5$ m s⁻², $d = 20$ m, $d_1 = 5,0$ m.

Řešení:

Úlohu řešíme v inerciální vztažné soustavě vozu B .

a) Počáteční stav vozu A : $v'_0 = 0$ m s⁻¹.

Po dobu t'_1 koná vůz A rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením a ; za dobu t'_1 dosáhne rychlosti $v'_1 = a t'_1$ a urazí dráhu

$$s_1 = d - d_1 = \frac{a t'^2_1}{2}.$$

Odtud

$$t'_1 = \sqrt{\frac{2(d - d_1)}{a}} \quad \text{a} \quad v'_1 = \sqrt{2a(d - d_1)}.$$

Po dobu t'_2 koná vůz A rovnoměrný pohyb rychlostí v'_1 a urazí dráhu $s_2 = d_1 + l_2 + d + l_1 = v'_1 t'_2$.

Odtud

$$t'_2 = \frac{d_1 + l_2 + d + l_1}{v'_1} = \frac{d_1 + l_2 + d + l_1}{\sqrt{2a(d - d_1)}}.$$

Pro celkovou dráhu a celkový čas platí

$$s' = s_1 + s_2, \quad t_1 = t'_1 + t'_2.$$

Po dosazení číselných hodnot:

$$v'_1 \doteq 6,7 \text{ m s}^{-1} \doteq 24 \text{ km h}^{-1}.$$

Rychlost vozidla A při předjíždění vzhledem k zemi je asi 104 km h^{-1} .

Dráha s , kterou urazí vozidlo A od počátku zrychlování pohybu do okamžiku, kdy je přední okraj vozidla B za koncovými světly vozidla A ve vzdálenosti d , má velikost $s = s' + v t_1$. Po dosazení dostaneme

$$s = 2d + l_1 + l_2 + v t_1.$$

Pro dané číselné hodnoty vychází

$$s \doteq 304 \text{ m}, \quad t_1 \doteq 11 \text{ s}.$$

b) Počáteční stav vozu A : $v_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$.

Po dobu t_2 koná vůz rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením a ; za dobu t_2 dosáhne rychlosti $v'_2 = a t_2$, urazí dráhu

$$s' = d + l_2 + l_1 + d = \frac{a t_2^2}{2};$$

odtud a ze vztahu pro v'_2 plyne

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(2d + l_2 + l_1)}{a}}, \quad v'_2 = \sqrt{2a(2d + l_2 + l_1)}.$$

Po dosazení číselných hodnot

$$t_2 = \sqrt{80} \text{ s} \doteq 8,9 \text{ s}, \quad v'_2 = \sqrt{180} \text{ m s}^{-1} \doteq 13,4 \text{ m s}^{-1} \doteq 48 \text{ km h}^{-1}.$$

Vůz A se po předjíždění zařadí ve vzdálenosti d před vůz B při rychlosti $v_2 = v + v'_2 \doteq 128 \text{ km h}^{-1}$.

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Dokonalý plyn stálé hmotnosti má při teplotě $T_1 = 400 \text{ K}$ a tlaku $p_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$ objem $V_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Postupně projde těmito ději: izotermickým stlačením nabývá objemu V_2 a tlaku $p_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$; izobarickým dějem se sníží jeho teplota na 200 K ; izotermickým roztahováním nabývá objemu $V_4 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

a) Určete konečný tlak p_4 plynu.

b) Narýsujte graf celkového děje ze stavu 1 do stavu 4 postupně v soustavách souřadnic: V, p (V nezávisle proměnná); T, p (T nezávisle proměnná); T, V (T nezávisle proměnná).

Řešení:

Výchozí stav plynu:

$$T_1, p_1, V_1 \quad (T_1 = 400 \text{ K}, p_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}, V_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)$$

Stav na konci 1. izotermického děje:

$$T_2 = T_1, p_2, V_2 \\ (p_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2})$$

Stav na konci izobarického děje:

$$T_3, p_3 = p_2, V_3 \quad (T_3 = 200 \text{ K})$$

Stav na konci 2. izotermického děje:

$$T_4 = T_3, p_4, V_4 \\ (V_4 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)$$

Pro dokonalý plyn platí stavová rovnice ve tvaru:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1 V_1}{T_1}.$$

Z daných hodnot pro výchozí stav plynu plyne pro konstantu

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = 0,5 \text{ J K}^{-1} = B.$$

a) Konečný tlak p_4 plynu vypočteme ze stavové rovnice

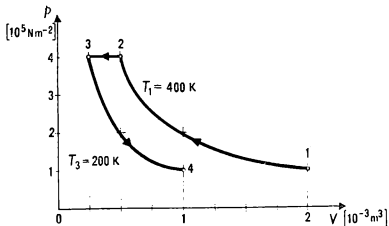
$$B = \frac{p_4 V_4}{T_4} = \frac{p_4 V_4}{T_3}.$$

Vychází

$$p_4 = B \frac{T_3}{V_4} = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}.$$

b) 1. izotermický děj je vyjádřen funkcí

$$p = B T_1 \frac{1}{V}; \quad B T_1 = 200 \text{ J}.$$



Obr. 44

Izobarický děj je vyjádřen funkcí

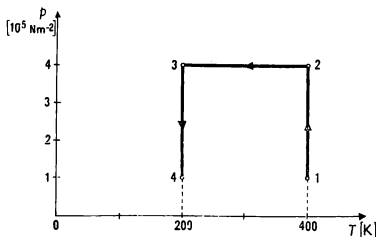
$$V = \frac{B}{p_2} T; \quad \frac{B}{p_2} = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ K}^{-1}.$$

2. izotermický děj je vyjádřen funkcí

$$p = B T_3 \frac{1}{V}; \quad B T_3 = 100 \text{ J}.$$

Tabulka pro děje izotermické:

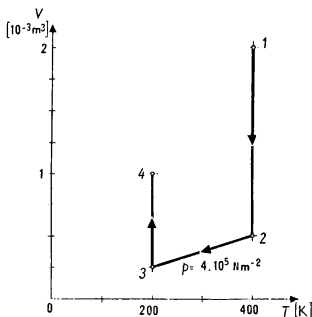
Děj	V (10^{-3} m^3)	(V_3) 0,25	(V_2) 0,50	0,75	(V_4) 1,00	1,25	1,50	1,75	(V_1) 2,00
1.	p (10^5 N m^{-2})	8,00	(p_2) 4,00	2,67	2,00	1,60	1,33	1,15	(p_1) 1,00
2.	p (10^5 N m^{-2})	(p_3) 4,00	2,00	1,33	(p_4) 1,00	—	0,66	—	0,50



Obr. 45

Graf celkového děje ze stavu 1 do stavu 4:

- (1) v soustavě souřadnic V, p je na obr. 44,
- (2) v soustavě souřadnic T, p je na obr. 45,
- (3) v soustavě souřadnic T, V je na obr. 46.



Obr. 46

2. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Koule o poloměru r se skládá ze dvou homogenních částí: z vnitřní koule o poloměru $\frac{r}{2}$ a o hustotě ϱ_2 a z vnějšího obalu o hustotě ϱ_1 .

a) Určete průměrnou hustotu koule.

b) Je-li vnitřní koule z hliníku ($\varrho_{Al} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$), jakou hustotu má obal, jestliže koule plove na vodě?

Řešení:

Označení:

pro celou kouli — hmotnost m , objem V , poloměr r ,
hustota $\bar{\varrho}$,

pro vnitřní kouli — hmotnost m_2 , objem V_2 , poloměr
 $\frac{r}{2}$, hustota ϱ_2 ,

pro vnější obal — hmotnost m_1 , objem V_1 , hustota ϱ_1 .

a) Pro průměrnou hustotu koule platí

$$\bar{\varrho} = \frac{m}{V},$$

pro objem $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ a hmotnost $m = m_1 + m_2$.

Poněvadž pro hmotnosti m_1 a m_2 platí

$$m_2 = V_2 \varrho_2 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{r}{2} \right)^3 \varrho_2$$

a

$$m_1 = V_1 \varrho_1 = (V - V_2) \varrho_1 = \frac{4}{3} \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{8} \right) \varrho_1 = \frac{7 r^3}{6} \varrho_1,$$

vychází pro hmotnost koule

$$m = \frac{\pi r^3}{6} (7 \varrho_1 + \varrho_2).$$

Ze vztahů pro m a V vychází pro průměrnou hustotu

$$\bar{\varrho} = \frac{\pi r^3}{6} (7 \varrho_1 + \varrho_2) \frac{3}{4 \pi r^3} = \frac{7 \varrho_1 + \varrho_2}{8}. \quad (1)$$

b) Hustota hliníku je $\varrho_2 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; hustota vody je $\varrho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

Koule plove na vodě, jestliže platí

$$\bar{\varrho} < \varrho.$$

Dosadíme-li za ϱ ze vztahu (1), dostaneme $\frac{7\varrho_1 + \varrho_2}{8} < \varrho$,
a tedy

$$\varrho_1 < \frac{8\varrho - \varrho_2}{7} \doteq 0,76 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}.$$

Koule bude plovat na vodě, bude-li hustota $\varrho_1 < 0,76 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

3. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Povrchové napětí rtuti bylo měřeno využitím kapilární deprese ve dvou kapilárách o průměrech d_1 , d_2 ponořených do nádoby se rtutí. Za stejných podmínek byla naměřena snížení h_1 , h_2 volných povrchů rtuti v kapilárách.

a) Odvoďte vztah, ze kterého se určí povrchové napětí z kapilární deprese za předpokladu, že rtuť dokonale nesmáčí sklo.

b) Bylo naměřeno $d_1 = (1,50 \pm 0,01) \text{ mm}$, $d_2 = (2,50 \pm 0,01) \text{ mm}$, $h_1 = (9,8 \pm 0,1) \text{ mm}$, $h_2 = (5,7 \pm 0,1) \text{ mm}$. Určete relativní chybu vypočtené hodnoty povrchového napětí rtuti v obou případech.

c) Vypočítejte povrchové napětí rtuti v obou případech při konstantních veličinách: hustota rtuti $\varrho = 13\,600 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$. V obou případech určete absolutní chybu vypočtené hodnoty povrchového napětí a запиšte hodnotu povrchového napětí rtuti s absolutní chybou.

Řešení:

a) V hloubce h pod vnější hladinou rtuti je hydrostatický tlak

$$p = h \varrho g.$$

Na hladinu rtuti v kapiláře působí tedy (směrem svisle vzhůru) tlaková síla

$$F_p = Sp,$$

kde S je průřez kapiláry. Platí pro něj $S = \frac{1}{4} \pi d^2$.

Tedy

$$F_p = \frac{1}{4} \pi d^2 h \varrho g. \quad (1)$$

Tato síla je udržována v rovnováze kapilární silou F_k působící po obvodu hladiny rtuti uvnitř kapiláry směrem svisle dolů, tedy

$$F_k = F_p. \quad (2)$$

Zavedeme-li si povrchové napětí σ , jehož velikost je určena silou působící na délkovou jednotku obvodu hladiny, potom v případě, že hladina v kapiláře je kruhová a její obvod má velikost πd , můžeme sílu F_k vyjádřit vztahem

$$F_k = \sigma \pi d. \quad (3)$$

Dosadíme-li z (1) a (3) do (2), dostaneme

$$\sigma \pi d = \frac{1}{4} \pi d^2 h \varrho g$$

a odtud plyne pro povrchové napětí

$$\sigma = \frac{1}{4} d h \varrho g. \quad (4)$$

b) Relativní chyba veličiny je poměr absolutní chyby k průměrné hodnotě měřené veličiny. Relativní chyba veličiny, která je součinem dvou měřených veličin, se rovná součtu relativních chyb měřených veličin.

$$\frac{\Delta \sigma_1}{\bar{\sigma}_1} = \frac{\Delta d_1}{\bar{d}_1} + \frac{\Delta h_1}{\bar{h}_1} = \frac{0,01}{1,50} + \frac{0,1}{9,8} = 0,017 = 1,7 \%,$$

$$\frac{\Delta \sigma_2}{\bar{\sigma}_2} = \frac{\Delta d_2}{\bar{d}_2} + \frac{\Delta h_2}{\bar{h}_2} = \frac{0,01}{2,50} + \frac{0,1}{5,7} = 0,022 = 2,2 \%.$$

c) Do vztahu (4) dosadíme průměrné hodnoty měřených veličin d a h a dostaneme průměrné hodnoty povrchového napětí $\bar{\sigma}_1$ a $\bar{\sigma}_2$. Násobíme-li je příslušnými relativními chybami, dostaneme absolutní chyby těchto veličin $\Delta \sigma_1$ a $\Delta \sigma_2$. Hodnoty povrchového napětí pak píšeme ve tvaru $\sigma = \bar{\sigma} \pm \Delta \sigma$. Pro naměřené hodnoty vychází:

$$\bar{\sigma}_1 = 49 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1},$$

$$\Delta \sigma_1 = \bar{\sigma}_1 \cdot 0,017 \doteq 8 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1} \doteq 1 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1},$$

$$\sigma_1 = (49 \pm 1) \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1},$$

$$\bar{\sigma}_2 = 48 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1},$$

$$\Delta \sigma_2 = \bar{\sigma}_2 \cdot 0,022 \doteq 1 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1},$$

$$\sigma_2 = (48 \pm 1) \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

4. úloha (navrhli dr. M. Bednařík a dr. M. Šíroká)

Automobil A se pohybuje po přímé vodorovné silnici stálou rychlostí v_A a dojíždí automobil B , jehož rychlost je v_B , $v_B < v_A$. Automobil A začne předjíždět automobil B v okamžiku, kdy se k němu přiblížil na kritickou vzdálenost l . Vjede do levého pruhu vozovky a zařadí se

zpět do pravého pruhu vozovky v bezpečném odstupu b od automobilu B . Kritická vzdálenost je taková nejmenší vzdálenost mezi vozidly, při níž by řidič rychlejšího vozu A stačil v případě, že by řidič pomalejšího vozu začal náhle brzdit, ještě zastavit.

a) Určete kritickou vzdálenost l , známe-li rychlosti v_A , v_B a předpokládáme-li, že uplyne doba τ od okamžiku, kdy řidič vozu A spatří právě rozsvícená brzdová světla vozu B , do okamžiku, kdy začne jeho vůz brzdit, a že oba vozy se pohybují se stálým zrychlením a .

b) Jak velké dráhy s_A , s_B ujedou automobily A , B během předjíždění při stálých rychlostech v_A , v_B ? Délky automobilů jsou d_A , d_B .

Řešte nejdříve obecně a pak pro hodnoty: $v_A = 108 \text{ km h}^{-1}$, $v_B = 72 \text{ km h}^{-1}$, $\tau = 1,0 \text{ s}$, $a = -5,0 \text{ m s}^{-2}$, $b = 20 \text{ m}$, $d_A = 4,0 \text{ m}$, $d_B = 6,0 \text{ m}$. Zakřivení dráhy vozu A při předjíždění zanedbáváme.

Řešení:

a) Předpokládáme, že v okamžiku, kdy vzájemná vzdálenost obou automobilů je l , začne řidič automobilu B brzdit se stálým zrychlením velikosti a . Jeho brzdná dráha je

$$s_B = -\frac{v_B^2}{2a}.$$

Spatří-li řidič vozu A brzdová světla vozu B , reaguje rovněž brzděním; účinek jeho brzdění se však projeví za dobu τ , ujede tedy až do zastavení dráhu

$$s_A = v_A \tau - \frac{v_A^2}{2a}.$$

Nemá-li dojít k nárazu vozu A na vůz B , musí platit

$$l = v_A \tau - \frac{v_A^2 - v_B^2}{2a} = 80 \text{ m.}$$

b) Předpokládáme, že automobil A začne předjíždět automobil B , je-li od něho v kritické vzdálenosti l , a že se zařadí před automobil B za dobu t v odstupu b . Ujede tedy dráhu (zanedbáme-li zakřivení)

$$s_A = l + b + d_A + d_B + s_B,$$

přitom platí

$$s_A = v_A t \text{ a } s_B = v_B t.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme:

$$s_A = \frac{v_A}{v_A - v_B} (l + b + d_A + d_B),$$

$$s_B = \frac{v_B}{v_A - v_B} (l + b + d_A + d_B).$$

Dosadíme-li za l výraz z části a), dostaneme:

$$s_A = \frac{v_A}{v_A - v_B} \left(b + d_A + d_B + v_A \tau - \frac{v_A^2 - v_B^2}{2a} \right) = 330 \text{ m.}$$

$$s_B = \frac{v_B}{v_A - v_B} \left(b + d_A + d_B + v_A \tau - \frac{v_A^2 - v_B^2}{2a} \right) = 220 \text{ m.}$$

4. Úlohy kategorie D

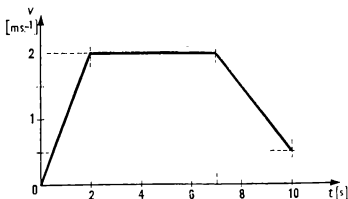
Úlohy a jejich řešení recenzovali Jan Tesař a dr. Ivan Náter.

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl Jan Tesař)

Na obr. 47 je graficky znázorněna závislost rychlosti přímočarého posuvného pohybu tělesa na čase. V čase $t = 0$ je těleso v místě A .

- Popište jednotlivé fáze tohoto pohybu.
- Zaznamenejte do tabulky, jaká jsou zrychlení a ,



Obr. 47

rychlosti v , vzdálenosti d tělesa od místa A na koncích každé z prvních deseti sekund.

c) Sestrojte pro prvních deset sekund grafy závislosti zrychlení a a vzdálenosti d na čase.

Řešení:

a) První dvě sekundy je pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením $a_1 = 1,0 \text{ m s}^{-2}$. V době od $t = 2 \text{ s}$ až $t =$

$= 7 \text{ s}$ je pohyb rovnoměrný, s rychlostí $2,0 \text{ m s}^{-1}$. V posledních třech sekundách je pohyb rovnoměrně zpomalený se zpomalením

$$a_2' = 0,50 \text{ m s}^{-2} \text{ (nebo se zrychlením } a_2 = -0,50 \text{ m s}^{-2}\text{)}.$$

b) Tabulka hodnot pro zrychlení a , rychlost v a vzdálenost d :

$t [\text{s}]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a [\text{m s}^{-2}]$	1	1	1	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$v [\text{m s}^{-1}]$	0	1	2	2	2	2	2	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$d [\text{m}]$	0	$\frac{1}{2}$	2	4	6	8	10	12	$13\frac{3}{4}$	15	$15\frac{3}{4}$

c) Graf závislosti zrychlení a a vzdálenosti d na čase dává obr. 48.

2. úloha (navrhl Jan Tesař)

Těleso hmotnosti m_1 visí na laně vedeném přes pevnou kladku, která je otáčivá kolem vodorovné osy. K druhému konci lana je připevněn kvádr o hmotnosti m_2 , ležící na hladké vodorovné desce stolu. Část lana mezi kladkou a kvádrem je vodorovná (obr. 49).

a) O jakou délku d se posune kvádr za dobu t ?

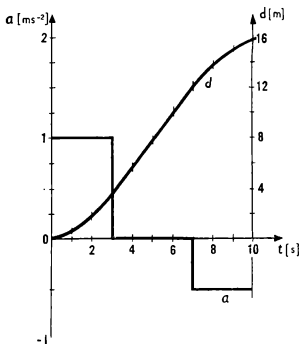
b) Jakou silou je napínáno lano při pohybu soustavy?

Hmotnost lana a kladky je vzhledem k hmotnosti kvádrů zanedbatelná. Tření neuvažujte.

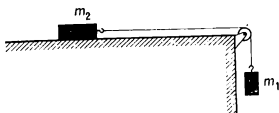
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 3,0 \text{ kg}$, $m_2 = 72 \text{ kg}$, $t = 5,0 \text{ s}$. Tíhové zrychlení $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení:

a) V soustavě působí pouze tíhová síla, která má velikost $m_1 g$. Soustava má hmotnost $m_1 + m_2$, takže se pohybuje se zrychlením



Obr. 48



Obr. 49

$$a = g \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Za dobu t se kvádr posune o délku

$$d = \frac{1}{2} g \frac{m_1}{m_1 + m_2} t^2.$$

Pro zadané hodnoty vyjde

$$d \doteq 5,0 \text{ m}.$$

b) Vlákno je napínáno tíhovou silou působící na zavěšené těleso, zmenšenou o setrvačnou sílu, která má velikost $m_1 a$, tedy

$$F = m_1 (g - a).$$

Po dosazení z (1) a úpravě vyjde

$$F = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Týž výsledek dostaneme, uvažujeme-li, že hledaná síla má stejnou velikost jako síla, která klouzajícimu kvádru uděluje zrychlení a , tedy $F = m_2 a$.

Pro zadané hodnoty vyjde $F \doteq 28 \text{ N}$.

3. úloha (navrhl Jan Tesař)

Jakou rychlostí v_0 je nutno vrhnout svisle dolů z výšky h těleso tak, aby dopadlo na zemský povrch o dobu τ dříve než při volném pádu?

Odpor vzduchu zanedbáváme.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $h = 40 \text{ m}$, $\tau = 1,0 \text{ s}$, tíhové zrychlení $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení:

Označme t dobu, za kterou těleso dopadne z výšky h volným pádem, tedy

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1)$$

Pro svislý vrh dolů z téže výšky při počáteční rychlosti v_0 platí pro náš případ:

$$h = v_0(t - \tau) + \frac{1}{2} g(t - \tau)^2. \quad (2)$$

Dosadíme (1) do (2), a tím získáme vztah k určení v_0 .
Po úpravě vyjde

$$v_0 = \frac{g \tau (\sqrt{8gh} - g\tau)}{\sqrt{8gh} - 2g\tau}.$$

Pro zadané hodnoty vyjde

$$v_0 \doteq 12 \text{ m s}^{-1}.$$

4. úloha experimentální (navrhl Jan Tesař)

Určení hustoty písku pyknometrem

Pomůcky: Vypraný a vysušený písek, pyknometr, váhy, sada závaží, destilovaná voda, obdélníkový list papíru, pijavý papír nebo vata.

Postup měření:

1. Rozpůlte obdélníkový list papíru a obě polovice položte na misky vah.

2. Na papír položený na jedné z misek nasype písek,

jehož hustotu máte určit, a vážením zjistíte jeho hmotnost m .

3. Naplňte pyknometr destilovanou vodou až po okraj a pak zasuňte do hrdla pyknometru zabroušenou zátku. Pyknometr osušte pijavým papírem nebo vatou a na váhách určete hmotnost m_1 pyknometru s vodou.

4. Odlijte z pyknometru část vody a nasypťte do něho všechen odvážený písek z papíru, potřepťte pyknometrem, aby mezi zrnky písku nezůstaly vzduchové bubliny, opatřně ho dolijte destilovanou vodou a znovu do něho zasuňte zátku a osušte ho.

5. Vážením určete hmotnost m_2 pyknometru s vodou a s pískem.

6. Dokažte, že hustota ϱ písku je určena vztahem

$$\varrho = \frac{m}{m + m_1 - m_2} \varrho', \quad (1)$$

kde ϱ' značí hustotu destilované vody.

7. Vypočítejte ze vztahu (1) hustotu ϱ písku.

Řešení bodu 6

Objem V_1 písku naspaného na papír je $V_1 = \frac{m}{\varrho}$, kde ϱ značí hustotu písku.

Tento objem se rovná objemu vody, která vytekla z pyknometru s vodou po napsypání písku do pyknometru. Hmotnost této vody je $m + m_1 - m_2$ a její objem je dán vztahem

$$V_2 = \frac{m + m_1 - m_2}{\varrho'},$$

kde ϱ' je hustota destilované vody.

Protože $V_1 = V_2$, je $\frac{m}{\varrho} = \frac{m + m_1 - m_2}{\varrho'}$, odkud vyplývá přímo vztah (1).

5. úloha (navrhl Jan Tesař)

Těleso se pohybovalo po přímé dráze nejprve pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením a po dobu t_1 působením stálé síly F a potom po dobu t_2 jen setrvačností rychlostí v , kterou mělo na konci doby t_1 . Za celkovou dobu t pohybu vykonalo těleso dráhu s . Tření neuvažujte.

a) Jak dlouho působila na těleso při pohybu stálá síla F a jak dlouho se těleso pohybovalo jen setrvačností?

b) Určete doby t_1 a t_2 , jestliže je $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $t = 5,0$ s, $s = 1,8$ m, $a = 0,16$ m s⁻².

Řešení:

Označení veličin:

Pokud na těleso působila stálá síla F , pohybovalo se pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením a po dráze s_1 , potom setrvačností po dráze s_2 pohybem rovnoměrným rychlostí $v = a t_1$.

a) Protože

$$s_1 = \frac{1}{2} a t_1^2,$$

$$s_2 = v t_2 = a t_1 t_2 = a (t - t_1) t_1 = a t t_1 - a t_1^2, \text{ je}$$

$$s = s_1 + s_2 = a t t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2. \quad (1)$$

Ze vztahu (1) vychází po úpravě kvadratická rovnice

$$a t_1^2 - 2 a t t_1 + 2 s = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$(t_1)_{1,2} = \frac{2 a t \pm \sqrt{4 a^2 t^2 - 8 a s}}{2 a} = t \pm \sqrt{t^2 - \frac{2 s}{a}}. \quad (2)$$

Protože musí být $t_1 < t$, vyhovuje fyzikálně jen kořen

$$t_1 = t - \sqrt{t^2 - \frac{2 s}{a}} \text{ a pak } t_2 = \sqrt{t^2 - \frac{2 s}{a}}. \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$t_1 = \left(5 - \sqrt{25 - \frac{3,6}{0,16}} \right) \text{ s} = 3,4 \text{ s}; \quad t_2 = 1,6 \text{ s}.$$

Těleso se pohybovalo působením síly F po dobu 3,4 s, setrvačností po dobu 1,6 s. Obě tyto doby jsou obecně určeny vztahy (3).

b) Jestliže $\sqrt{\frac{2 s}{a}} = t$, pak je podle vztahů (3)

$$t_1 = t; \quad t_2 = 0.$$

Kdyby $t = \sqrt{\frac{2 s}{a}}$, pak by se těleso pohybovalo po celou dobu t pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením $0,16 \text{ m s}^{-2}$.

6. úloha (navrhl Jan Tesař)

V balóně je zavěšen siloměr, na němž visí těleso o hmotnosti m .

a) Jak velikou silou F_1 je napínána pružina siloměru, stoupá-li balón se zrychlením a_1 ?

b) S jak velikým zrychlením a_2 balón klesá, je-li pružina siloměru napínána silou F_2 ?

Řešte ve vztažné soustavě spojené se Zemí i ve vztažné soustavě, spojené s pohybujícím se balónem.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 4,0$ kg, tíhové zrychlení $g = 9,8$ m s⁻², $a_1 = 1,8$ m s⁻², $F_2 = 35$ N.

Řešení:

Označení veličin:

V souřadné soustavě spojené s balónem označíme F'_1 velikost síly, již napíná pružinu siloměru těleso, které spolu s balónem stoupá se zrychlením a_1 , a F'_2 velikost síly, jestliže toto těleso se zrychlením a_2 spolu s balónem klesá. V soustavě spojené se Zemí budeme velikosti těchto sil značit F_1 a F_2 .

(Poznámka: V souřadné soustavě spojené s balónem si všímáme jenom změny vůči stavu, když se balón nepohybuje.)

a) Jestliže těleso o hmotnosti m zavěšené v balóně na siloměru spolu s balónem stoupá se zrychlením a_1 , napíná pružinu tohoto siloměru setrvačnou silou velikosti $F'_1 = m a_1$ v souřadné soustavě spojené s balónem a silou $F_1 = m g + m a_1$ v souřadné soustavě spojené se Zemí, neboť těleso je udržováno v konstantní výšce nad zemským povrchem silou o velikosti $G = m g$ a síly F' a G jsou rovnoběžně a souhlasně orientované.

Platí tedy:

$$F'_1 = m a_1 \quad \text{a} \quad F_1 = m (g + a_1). \quad (1)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $F'_1 = 7,2 \text{ N}$, $F_1 = 46,4 \text{ N}$. Stoupá-li balón se zrychlením a_1 , je pružina siloměru napínána v souřadné soustavě spojené s balónem silou $7,2 \text{ N}$ a v souřadné soustavě spojené se Zemí silou $46,4 \text{ N}$. Obě tyto síly jsou obecně určeny vztahem (1).

b) Jestliže za týchž podmínek jako v části a) této úlohy těleso zavěšené v balóně spolu s balónem padá se zrychlením a_2 , je nadlehčováno setrvačnou silou o velikosti $F'_2 = m a_2$. Touto silou, která má opačnou orientaci než tíha G tělesa, je siloměr napínán (správněji stlačován) v souřadné soustavě spojené s balónem. V souřadné soustavě spojené se Zemí je proto pružina siloměru napínána silou $F_2 = G - F'_2 = (g - a_2) m$, takže

$$a_2 = \frac{m g - F_2}{m}. \quad (2)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $a_2 = 1,05 \text{ m s}^{-2}$.

Je-li pružina siloměru napínána silou 35 N , klesá balón se zrychlením $1,05 \text{ m s}^{-2}$. Obecně je tato hodnota určena vztahem (2).

7. úloha (navrhl Jan Tesař)

Těleso o hmotnosti m bylo vrženo svisle dolů z výšky h nad zemským povrchem rychlostí v_0 a dopadlo na zem rychlostí v .

a) Za jakou dobu t_1 dopadlo na zem?

b) Jak velká byla průměrná odporová síla F_1 , kterou vzduch působil na padající těleso po dráze h ?

c) Jak velkou průměrnou silou F_2 působilo těleso při dopadu na zemský povrch, jestliže při nárazu přešlo do úplného klidu za dobu t_2 po dopadu na zem?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $h = 23 \text{ m}$, $v_0 = 18 \text{ m s}^{-1}$, $v = 24 \text{ m s}^{-1}$, $m = 0,050 \text{ kg}$, $t_2 = 0,010 \text{ s}$, tíhové zrychlení $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení:

Protože je pohyb tělesa brzděn stálou silou F_1 , má zrychlení pohybu hodnotu $a = g - \frac{F_1}{m}$.

a) Vržené těleso koná současně dva souhlasně orientované pohyby, pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením $a = g - \frac{F_1}{m}$ a rovnoměrný pohyb rychlostí v_0 . Platí tedy rovnice

$$v = v_0 + a t_1 = v_0 + g t_1 - \frac{F_1}{m} t_1 \quad (1)$$

a zároveň

$$h = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 - \frac{1}{2} \frac{F_1}{m} t_1^2.$$

Násobíme-li rovnici (1) výrazem $(-t_1)$ a druhou rovnici dvěma a pak obě rovnice sečteme, vyjde $2h - v t_1 = v_0 t_1$, takže

$$t_1 = \frac{2h}{v_0 + v}. \quad (2)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $t_1 \doteq 1,1 \text{ s}$.

Těleso dopadne na zemský povrch za $1,1 \text{ s}$. Obecně je tato doba určena vztahem (2).

b) Dosadíme-li do rovnice (1) za t_1 hodnotu ze vztahu (2), vyjde po úpravě $2h F_1 = m(2hg - v^2 + v_0^2)$.

Pak je

$$F_1 = \frac{m}{2h} (2hg - v^2 + v_0^2). \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $F_1 \doteq 0,22 \text{ N}$.

Vzduch brzdil padající těleso po dráze h průměrnou silou $0,22 \text{ N}$. Obecně je tato síla určena vztahem (3).

c) Nárazová síla F_2 , kterou působilo těleso na zemský povrch po dobu t_2 , má impuls $I = F_2 t_2$. Protože se za dobu t_2 změnila absolutní hodnota rychlosti tělesa o v , je

$$F_2 = \frac{mv}{t_2}. \quad (4)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$F_2 = 120 \text{ N}.$$

Velikost průměrné nárazové síly, kterou těleso působilo na zemský povrch při dopadu na zem je určena vztahem (4).

Poznámka: Část b) úlohy je možno řešit také takto:

Podle zákona zachování a přeměny mechanické energie je práce $A = F_1 h$, kterou vykoná padající těleso při překonávání síly F_1 po dráze h , rovna rozdílu $W - W_0$, kde W značí mechanickou energii, kterou mělo těleso v okamžiku, kdy bylo vrženo, a W_0 mechanickou energii v okamžiku, kdy dopadlo na zem. Proto je

$$F_1 h = mgh + \frac{1}{2} (v_0^2 - v^2) m.$$

Z této rovnice vyjde po jednoduché úpravě vztah (3).

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

Na téže spádnicí nakloněné roviny, která svírá s vodorovnou rovinou úhel α , jsou dva body M , N , jejichž vzdálenost $MN = d$. V bodech M a N jsou uvedeny současně do pohybu po spádnicí dva hmotné body stejných hmotností m . Počáteční rychlosti obou hmotných bodů mají stejnou velikost v_0 .

a) Při kterém úhlu α se oba hmotné body setkají v bodě M ?

b) Při které velikosti v_0 je úloha řešitelná?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_0 = 2,0 \text{ m s}^{-1}$, $d = 3,2 \text{ m}$, tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení:

Označení veličin: Z textu je zřejmé, že hmotné body se pohybují proti sobě. Vektorovým veličinám, jež jsou orientovány po spádnicí dolů, přisuzujeme znaménko $+$, vektorům s orientací po spádnicí nahoru znaménko $-$.

Těleso nacházející se v bodě M koná pohyb rovnoměrně zpožděný, druhé rovnoměrně zrychlený. Zrychlení obou pohybů má stejnou velikost $a = g \sin \alpha$. Hmotné body se setkají za dobu t od okamžiku, kdy byly uvedeny do pohybu.

a) V místě, kde se oba hmotné body setkají, je jejich vzdálenost rovna nule. V místě M platí tedy rovnice

$$-v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0 \quad (1)$$

a

$$v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = d. \quad (2)$$

Odečteme-li levou a pravou stranu rovnice (1) od odpovídajících stran rovnice (2), vyjde vztah $2v_0 t = d$, z něhož se vypočítá

$$t = \frac{d}{2v_0}. \quad (3)$$

Dosadíme-li hodnotu t ze vztahu (3) do vztahu (1), dostaneme $\frac{d}{2} = \frac{1}{2} a t^2$, a poněvadž na nakloněné rovině je

$a = g \sin \alpha$, platí $d = \frac{g d^2}{4 v_0^2} \sin \alpha$, takže

$$\sin \alpha = \frac{4 v_0^2}{g d}. \quad (4)$$

Pro dané hodnoty vyjde $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ a $\alpha = 30^\circ$.

Vztah (4) vyjadřuje podmínku, již musí vyhovovat úhel α , aby se hmotné body setkaly v bodě M . Pro dané hodnoty je to úhel 30° .

b) Protože $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, je $0 < \sin \alpha < 1$. Vzhledem ke vztahu (4) je

$$\frac{4 v_0^2}{g d} < 1$$

a

$$v_0 < \frac{1}{2} \sqrt{g d}. \quad (5)$$

Pro dané hodnoty vyjde $v_0 < 2,83 \text{ m s}^{-1}$.

Má-li být úloha řešitelná, musí být splněna podmínka (5). Pro dané hodnoty musí platit $v_0 < 2,83 \text{ m s}^{-1}$.

2. úloha (navrhl Jan Tesař)

a) Jak veliké zrychlení a_Z má Země v gravitačním poli Slunce a jak veliké zrychlení a_S má Slunce v gravitačním poli zemském?

b) Vypočítejte poměr $p = \frac{m_S}{m_Z}$, kde m_S značí hmotnost Slunce a m_Z hmotnost Země.

Předpokládejte, že Slunce a Země mají kulový tvar a že střed Země obíhá kolem středu Slunce pohybem rovnoměrným po kružnici o poloměru r . Oběžná doba Země kolem Slunce je T , poloměr Země je R .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $r = 1,49 \cdot 10^{11}$ m, $R = 6,38 \cdot 10^6$ m, $T = 3,16 \cdot 10^7$ s, $4\pi^2 \doteq 39,5$.

Řešení:

Označení veličin: Úhlovou rychlost Země na její oběžné dráze kolem Slunce označíme ω , Newtonovu gravitační konstantu κ , tíhové zrychlení g .

a) Země je udržována v rovnoměrném pohybu po kruhové dráze o poloměru r dostředivou silou velikosti $F_1 = = r \omega^2 m_Z$, takže její zrychlení na této dráze je určeno vztahem

$$a_Z = r \omega^2 = \frac{4 \pi^2 r}{T^2}. \quad (1)$$

Dosadíme-li do vztahu (1) dané hodnoty, vyjde $a_Z \doteq 5,89 \cdot 10^{-3}$ m s⁻².

Země má na svém povrchu tíhové zrychlení g . Podle Newtonova gravitačního zákona je tedy $\kappa \frac{m_Z}{R^2} = g$. Protože střed Země je od středu Slunce vzdálen o délku r , má Slunce v gravitačním zemském poli zrychlení

$$a_S = \kappa \frac{m_Z}{r^2} = \kappa \frac{m_Z R^2}{R^2 r^2} = g \left(\frac{R}{r} \right)^2. \quad (2)$$

Dosadíme-li do vztahu (2) dané hodnoty, vyjde $a_S = 1,79 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$.

Země má v gravitačním poli Slunce zrychlení $5,89 \text{ m s}^{-2}$, jež je obecně určeno vztahem (1). Slunce má v gravitačním poli zemském zrychlení $1,79 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$, obecně určené vztahem (2).

b) Slunce přitahuje Zemi silou F_1 o velikosti $F_1 = m_Z a_Z$, Země působí na Slunce silou o velikosti $F_2 = m_S a_S$. Protože síla F_2 je reakcí síly F_1 , platí vektorová rovnice $F_1 + F_2 = 0$, jež má ve skalárním vyjádření tvar $m_Z a_Z - m_S a_S = 0$, takže

$$p = \frac{m_S}{m_Z} = \frac{a_Z}{a_S} = \frac{4\pi^2 r^3}{g R^2 T^2}. \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot do vztahu (3) vyjde $p = 3,27 \cdot 10^5$. Poměr p je obecně určen vztahem (3) a má velikost $3,27 \cdot 10^5$.

3. úloha (navrhl Jan Tesař)

Cyklista projíždí zatáčkou, jejíž poloměr křivosti je r .

a) Jakou největší rychlostí v se může pohybovat, nemá-li dostat smyk? Součinitel klidového tření je μ .

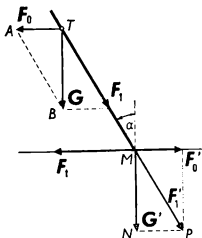
b) O jaký úhel α je cyklista při této největší rychlosti odkloněn od svislého směru?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $r = 20 \text{ m}$, $\mu = 0,32$.

Řešení:

Označení veličin: Při pohybu rychlostí v v zatáčce, jejíž poloměr křivosti je r , působí na cyklistu dostředivá síla F_0 a třecí síla F_t . Hmotnost cyklisty a kola označíme m , tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

a) Aby cyklista získal v zatáčce dostředivou sílu F_0 , potřebnou k rovnoměrnému pohybu po kruhovém oblouku o poloměru r , musí se odklonit od směru svislého o úhel α směrem ke středu své kruhové dráhy (obr. 50).



Obr. 50

Jeho tíha G (cyklisty i kola) soustředěná v těžišti T se rozloží přitom na vodorovnou složku F_0 , která je pro cyklistu potřebnou dostředivou silou, a ve složku F_1 , jež působí na vodorovný povrch silnice ve směru odchýleném od svislého směru o úhel α . Označíme-li velikost tíhy cyklisty s kolem $G = mg$, pak síla F_0 má velikost $F_0 =$

$= mg \operatorname{tg} \alpha = \frac{mv^2}{r}$, jestliže se cyklista pohybuje největší rychlostí v , při které ještě nedojde ke smyku. Z tohoto vztahu určíme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{rg}. \quad (1)$$

Sílu F_1 můžeme přemístit do bodu M , kde se tato síla rozloží na dvě složky, vodorovnou F'_0 a svislou G' . Troj-

úhelníky ATB a PNM jsou shodné, proto je $F'_0 = F_0$ a $G' = G$. Nemá-li dojít ke smyku, musí být třecí síla $F_t \geq F'_0 = F_0$. Protože třecí síla má velikost $F_t = \mu G' = \mu G = \mu mg$, platí

$$F_0 \leq \mu mg. \quad (2)$$

Dosadíme-li do vztahu (2) za F_0 hodnotu $F_0 = \frac{mv^2}{r}$, vyjde

$$v \leq \sqrt{\mu g r}. \quad (3)$$

Pro dané hodnoty je největší možná rychlost $v = 8 \text{ m s}^{-1}$. Cyklista se smí v zatáčce pohybovat nejvýše rychlostí určenou vztahem (3).

b) Dosadíme-li do vztahu (1) za v hodnotu ze vztahu (3), vyjde

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu g r}{g r} = \mu. \quad (4)$$

Pro danou hodnotu pro koeficient μ najdeme v tabulkách $\alpha = 17^\circ 45'$.

Velikost úhlu α je určena vztahem (4).

4. úloha (navrhl Milan Rádl)

Na střelu o hmotnosti m působila ve vodorovné hlavni ve směru osy po dobu t_1 proměnlivá síla F , jejíž velikost rovnoměrně klesala během doby t_1 z původní hodnoty F_1 na hodnotu F_2 . Střela zasáhla cíl v místě A rychlostí v .

- Jakou rychlostí v_0 opustila střela hlaveň?
- Za jakou dobu t_2 po opuštění hlavně zasáhla střela cíl?
- V jaké vodorovné vzdálenosti d od svislé přímky procházející ústím hlavně se nacházel cíl?

Tření střely v hlavni a odpor prostředí neuvažujte. Části a), b) úlohy řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 0,025 \text{ kg}$, $t_1 = 0,50 \text{ s}$, $F_1 = 25 \text{ N}$, $F_2 = 15 \text{ N}$, $v = 420 \text{ m s}^{-1}$, tíhové zrychlení $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$.

Část c) úlohy řešte jen pro hodnoty dané a vypočítané v částech a), b) úlohy.

Řešení:

Protože se velikost síly během doby t_1 rovnoměrně měnila z hodnoty F_1 na hodnotu F_2 , má její průměrná hodnota v tomto časovém intervalu velikost

$$F_p = \frac{F_1 + F_2}{2}. \quad (1)$$

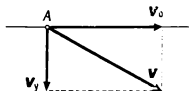
a) Proměnná síla působila na střelu v hlavni po dobu t_1 impulsem $I = F_p t_1$. Tím došlo k změně rychlosti střely o hodnotu v_0 . Protože impuls I síly F je roven změně hybnosti $m v_0$ střely, platí $F_p t_1 = m v_0$, takže

$$v_0 = \frac{F_p t_1}{m} = \frac{(F_1 + F_2) t_1}{2m}. \quad (2)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $v_0 = 400 \text{ m s}^{-1}$.

Střela opustila hlavěň rychlostí 400 m s^{-1} . Tato hodnota je obecně určena vztahem (2).

b) Po opuštění hlavně konala střela současně dva pohyby, přímočarý rovnoměrný ve vodorovném směru rychlostí v_0 a volný pád ve svislém směru. Protože zasáhla cíl za dobu t_2 , měla svislá složka v_y rychlosti v hodnotu $v_y = g t_2$. Podle obr. 51 platí vzhledem k Pythagorově



Obr. 51

větě $v_y = \sqrt{v^2 - v_0^2}$, takže

$$t_2 = \frac{1}{g} \sqrt{v^2 - v_0^2} = \frac{1}{g} \sqrt{v^2 - \left[\frac{(F_1 + F_2) t_1}{2m} \right]^2}. \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $t_2 \doteq 12,8$ s.

Střela zasáhla cíl za 12,8 s po opuštění hlavně. Tato hodnota je obecně určena vztahem (3).

c) Cíl A měl od ústí hlavně ve vodorovném směru vzdálenost $d = v_0 t_2$. Po dosazení vyjde $d = 5120$ m.

5. Úlohy kategorie E

Úlohy a jejich řešení recenzovali dr. Bohumil Vlach a dr. Ivan Náter.

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl Ivo Volf)

Základní jednotkou hmotnosti SI je 1 kg. Je definován jako hmotnost mezinárodního kilogramu, tj. platino-iridiového válce, uloženého v Mezinárodním ústavu pro míry a váhy v Sèvres u Paříže. Mezinárodní kilogram je zhotoven ze slitiny 90 % platiny a 10 % iridia; má tvar válce, který má výšku h stejně velikou jako průměr d kruhové podstavy.

a) Stanovte rozměry (h , d) mezinárodního kilogramu a narýsujte jeho půdorys a nárys ve skutečné velikosti.

b) Stanovte rozměry válců ze železa a z hliníku o hmotnosti 1 kg, které mají výšky stejné jako průměry kruhových podstav.

Hustota platiny je $\varrho_1 = 21\,450 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 21,45 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$,

hustota iridia je $\varrho_2 = 22\,500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 22,50 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Řešení:

a) Abychom mohli stanovit rozměry (h , d) mezinárodního kilogramu, musíme nejprve určit jeho objem V . Objem V se skládá z objemu V_1 platiny a z objemu V_2 iridia. Platí

$$V = V_1 + V_2.$$

Platiny je v mezinárodním kilogramu 90 %, tj. $m_1 = 0,900 \text{ kg}$. Je-li hustota platiny ϱ_1 , potom objem platiny $V_1 = \frac{m_1}{\varrho_1}$.

Iridia je v mezinárodním kilogramu 10 %, tj. $m_2 = 0,100 \text{ kg}$, a je-li hustota iridia ϱ_2 , potom objem iridia $V_2 = \frac{m_2}{\varrho_2}$.

Objem mezinárodního kilogramu

$$V = \frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2} = \frac{m_1 \varrho_2 + m_2 \varrho_1}{\varrho_1 \varrho_2}. \quad (1)$$

Mezinárodní kilogram má tvar rovnostranného válce, jehož objem

$$V = \frac{1}{4} \pi d^3, \quad (2)$$

kde d je průměr kruhové podstavy. Z (1) a (2) plyne

$$d = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi} \frac{m_1 \varrho_2 + m_2 \varrho_1}{\varrho_1 \varrho_2}}, \quad h = d. \quad (3)$$

Pro dané číselné hodnoty vychází:

$$d \doteq 0,0389 \text{ m}, \quad h \doteq 0,0389 \text{ m}. \quad (4)$$

Půdorys válce je kružnice o poloměru $r = \frac{1}{2} d$, nárys je čtverec o straně délky d .

b) Ocel má hustotu $\varrho_3 = 7700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, hliník $\varrho_4 = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Jeden kilogram oceli má objem

$$V_3 = \frac{1 \text{ kg}}{\varrho_3}, \quad \text{hliníku } V_4 = \frac{1 \text{ kg}}{\varrho_4}. \quad (5)$$

Z rovnic (2) a (5) plyne

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{4 \text{ kg}}{\pi \varrho_3}}, \quad d_4 = \sqrt[3]{\frac{4 \text{ kg}}{\pi \varrho_4}}; \quad h_3 = d_3, \quad h_4 = d_4. \quad (6)$$

Pro dané číselné hodnoty vychází:

$$\begin{aligned} d_3 &\doteq 0,0548 \text{ m}, & h_3 &\doteq 0,0548 \text{ m}, \\ d_4 &\doteq 0,0778 \text{ m}, & h_4 &\doteq 0,0778 \text{ m}. \end{aligned}$$

Mezinárodní kilogram má tvar válce, jehož výška a průměr kruhové podstavy mají velikost 0,0389 m.

Válec stejného tvaru a stejné hmotnosti zhotovený z oceli má výšku a průměr podstavy 0,0547 m, válec z hliníku má výšku a průměr podstavy 0,0778 m.

2. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Na vodě plove pravidelný čtyřboký hranol ze stejnorodé látky o měrné tíze $\gamma_0 = 500 \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}$. Podstava hranolu je čtverec o straně $a = 0,20 \text{ m}$, výška hranolu je $b = 0,10 \text{ m}$.

Položíme-li doprostřed horní podstavy hranolu ocelovou krychli o objemu V_1 a o tíze G_1 , ponoří se hranol tak, že jeho horní podstava je v rovině povrchu vody. Hranol se ponoří stejně, připevníme-li doprostřed jeho dolní podstavy ocelovou krychli o objemu V_2 a o tíze G_2 ; měrná tíha oceli je $\gamma_1 = 7700 \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}$, měrná tíha vody je $\gamma_2 = 1000 \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}$.

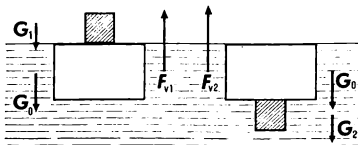
a) Vypočtete veličiny $G_1, V_1; G_2, V_2$.

b) Vysvětlete, proč platí $G_1 < G_2; V_1 < V_2$, i když se hranol v obou případech ponořuje stejně. Dokažte, že platí

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Řešení:

a) V obou případech (viz obr. 52) je plovoucí těleso (hranol s krychlí) v rovnovážné poloze, proto síly působící na těleso v prvním i druhém případě musí být v rovnováze.



Obr. 52

Směrem svisle dolů působí tíhy hranolu a krychle, směrem vzhůru vztlaková síla.

V prvním případě pro rovnováhu sil platí:

$$G_0 + G_1 = F_{v1}. \quad (1)$$

Tíhu hranolu G_0 vypočítáme ze vztahu

$$G_0 = a^2 b \gamma_0, \quad (2)$$

kde součin $a^2 b$ určuje objem hranolu. Vztaková síla F_{v1} je podle Archimédova zákona určena vztahem

$$F_{v1} = a^2 b \gamma. \quad (3)$$

Dosazením z (2) a (3) do (1) dostaneme:

$$a^2 b \gamma_0 + G_1 = a^2 b \gamma.$$

Odtud plyne pro tíhu krychle

$$G_1 = a^2 b (\gamma - \gamma_0). \quad (4)$$

Pro její objem vychází

$$V_1 = a^2 b \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_1}. \quad (5)$$

Číselně: $G_1 = 2\text{kp}$, $V_1 = 259\text{ cm}^3$.

V druhém případě pro rovnováhu sil platí

$$G_0 + G_2 = F_{v2}. \quad (6)$$

Pro tíhu hranolu G_0 platí vztah (2). Vztaková síla F_{v2} se rovná součtu vztakových sil působících na hranol a krychli a je určena vztahem

$$F_{v2} = a^2 b \gamma + V_2 \gamma, \quad (7)$$

kde V_2 je objem připevněné krychle. Platí pro něj $V_2 = \frac{G_2}{\gamma_1}$.

Pro vztlakovou sílu F_{v2} tedy platí:

$$F_{v2} = \left(a^2 b + \frac{G_2}{\gamma_1} \right) \gamma. \quad (8)$$

Dosadíme-li z (2) a (8) do (6), dostaneme

$$a^2 b \gamma_0 + G_2 = \left(a^2 b + \frac{G_2}{\gamma_1} \right) \gamma.$$

Odtud pak plyne vztah pro tíhu připevněné krychle

$$G_2 = a^2 b \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_1 - \gamma} \gamma_1. \quad (9)$$

Objem této krychle je pak $V_2 = a^2 b \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_1 - \gamma}$.

Číselně:

$$G_2 = 2,149 \text{ kp}, \quad V_2 = 298 \text{ cm}^3.$$

b) Vztlaková síla F_{v2} je větší než vztlaková síla F_{v1} o vztlakovou sílu působící na ponořenou krychli, proto musí být $G_2 > G_1$. Poněvadž obě krychle jsou z téže látky, musí být i $V_2 > V_1$.

Poněvadž $G_1 = V_1 \gamma_1$ a $G_2 = V_2 \gamma_1$, platí

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{V_1 \gamma_1}{V_2 \gamma_1} = \frac{V_1}{V_2},$$

což se mělo dokázat.

3. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Na vodorovném stole stojí šikmá válcová nádoba, jejíž povrchové přímky svírají se svislicí úhel 15° . Podstavy válce jsou kruhové o (vnitřním) průměru $d = 4,0 \text{ cm}$.

Do válce lijeme vodu až do okamžiku, kdy se válec převrhne.

a) Narýsujte obrázek a z něho určete vzdálenost h těžiště T vodního tělesa od podstavy válce v okamžiku, kdy se válec převrhne. Hmotnost a tloušťku stěn válce zanedbáváme.

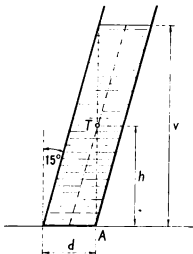
b) Vypočítejte hmotnost m vody ve válci v okamžiku, kdy se válec převrhne.

c) Za nezměněných podmínek provedeme pokus se rtutí místo s vodou. Jaká je vzdálenost h_1 těžiště T_1 rtuťového tělesa od podstavy válce a hmotnost m_1 rtuťového tělesa v okamžiku, kdy se válec převrhne? Na čem závisí v našich případech stálost polohy válce s kapalinou?

Hustota vody je $\rho_1 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, hustota rtuti je $\rho_2 = 13\,600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Řešení:

a) Na obr. 53 je narýsován (v měřítku 1 : 4) válec a těžiště vodního tělesa v okamžiku, kdy se válec převrhne. Nepřihlíží-li se k hmotnosti válce a tloušťce jeho stěn, nabude válec rovnovážné polohy vratké, bude-li těžiště T vodního tělesa ležet na kolmici k podstavě válce v bodě A . Vzdálenost h určená měřením na obrázku je $h = 7,46 \text{ cm} \doteq 7,5 \text{ cm}$.



Obr. 53

b) Hmotnost vodního válce v okamžiku rovnovážné polohy vratké je

$$m = V \varrho_1, \quad (1)$$

kde V je jeho objem. Objem šikmého válce, jehož vodorovné řezy jsou shodné s jeho kruhovou podstavou, je dán vztahem

$$V = \frac{1}{4} \pi d^2 v, \quad (2)$$

kde v je výška válce. Platí

$$v = 2h. \quad (3)$$

Hmotnost vodního válce je tedy dána vztahem [po dosazení (2) a (3) do (1)]

$$m = \frac{1}{2} \pi d^2 h \varrho_1. \quad (4)$$

Pro dané číselné hodnoty vychází $m = 188 \text{ g}$.

c) Válec plněný rtutí má rovnovážnou polohu vratkou, když výška těžiště rtuťového válce je stejná, jako byla v případě s vodou. V tomto okamžiku je hmotnost rtuťového válce podle (4)

$$m_1 = \frac{1}{2} \pi d^2 h \varrho_2.$$

Pro dané číselné hodnoty vychází $m_1 = 2,563 \text{ kg}$.

Stálost polohy šikmého válce se zmenšuje s rostoucím úhlem, který svírají povrchy válce se svislým směrem. Na kapalině nezáleží.

4. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

V jednom kalorimetru je rtuť o hmotnosti $m_1 = 5,00 \text{ kg}$ a o teplotě $t_1 = 60,0^\circ \text{C}$. V druhém kalorimetru je voda o stejné hmotnosti $m_1 = 5,00 \text{ kg}$ a o stejné teplotě $t_1 =$

$= 60,0\text{ }^{\circ}\text{C}$; do prvního i druhého kalorimetru přidáme tající ledovou tříšť o stejných hmotnostech $m_2 = 0,123\text{ kg}$ a o teplotě $t_2 = 0,0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

a) Vypočítejte teplotu t_3 , která se ustálí v kalorimetru se rtutí, a teplotu t_4 , která se ustálí v kalorimetru s vodou.

b) I když hmotnosti látek v obou kalorimetrech jsou stejné, výsledné teploty t_3 a t_4 jsou velmi rozdílné. Vysvětlete, proč tomu tak je.

Měrné teplo vody je $c_0 = 1,00 \frac{\text{kcal}}{\text{kg } ^{\circ}\text{C}}$;

měrné teplo rtuti $c_1 = 0,033 \frac{\text{kcal}}{\text{kg } ^{\circ}\text{C}}$;

měrné skupenské teplo tání ledu je $l = 80,0 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$.

Řešení:

Jsou-li dvě tělesa různých teplot v přímém styku v kalorimetru, kde předpokládáme, že nedochází k tepelným ztrátám, pak těleso teplejší předává teplo tělesu chladnějšímu tak dlouho, až se jejich teploty vyrovnají. Je tedy teplo vydané teplejším tělesem rovno teplu přijatému chladnějším tělesem ve smyslu zákona zachování tepelné energie.

Teplejším tělesem je v prvním kalorimetru rtuť o hmotnosti m_1 , teplotě t_1 a měrném teple c_1 . Ochlazením rtuti z teploty t_1 na výslednou teplotu t_3 se uvolní teplo

$$Q_1 = c_1 m_1 (t_1 - t_3). \quad (1)$$

Ledová tříšť o teplotě $t_2 = 0,00\text{ }^{\circ}\text{C}$ bude přijímáním tepla nejprve tát ve vodu o stejné teplotě. Přitom přijme teplo

$$Q'_2 = l m_2, \quad (2)$$

kde l je měrné skupenské teplo tání ledu a m_2 je jeho hmotnost. Voda z ledové tříště o hmotnosti m_2 , teplotě t_2 a měrném teple c_0 se ohřeje na výslednou teplotu t_3 a přitom přijme teplo

$$Q_2'' = c_0 m_2 (t_3 - t_2). \quad (3)$$

Náš předpoklad, že teplo vydané se rovná teplu přijatému, je vyjádřen rovnicí

$$Q_1 = Q_2' + Q_2''. \quad (4)$$

Po dosazení z (1), (2) a (3) do (4) dostaneme:

$$c_1 m_1 (t_1 - t_3) = l m_2 + c_0 m_2 (t_3 - t_2).$$

Odtud vychází pro výslednou teplotu t_3 :

$$t_3 = \frac{c_1 m_1 t_1 - l m_2 + c_0 m_2 t_2}{c_0 m_2 + c_1 m_1}.$$

Vezmeme-li v úvahu, že $t_2 = 0,0^\circ\text{C}$, je

$$t_3 = \frac{c_1 m_1 t_1 - l m_2}{c_0 m_2 + c_1 m_1}.$$

Po dosazení známých číselných hodnot vychází $t_3 = 0,208^\circ\text{C} \doteq 0,21^\circ\text{C}$.

Ochlazením vody ve druhém kalorimetru se uvolní teplo

$$Q_1 = c_0 m_1 (t_1 - t_4).$$

Teplo přijaté na roztání ledové tříště je opět dáno vztahem (2), teplo přijaté na ohřátí vody z ledu na výslednou teplotu t_4 je

$$Q_2'' = c_0 m_2 (t_4 - t_2).$$

Zákon zachování tepelné energie je tedy v tomto případě vyjádřen vztahem

$$c_0 m_1 (t_1 - t_4) = l m_2 + c_0 m_2 (t_4 - t_2),$$

odkud plyne pro výslednou teplotu t_4 s přihlédnutím k tomu, že $t_2 = 0,0^\circ\text{C}$,

$$t_4 = \frac{c_0 m_1 t_1 - l m_2}{c_0 (m_2 + m_1)}.$$

Po dosazení známých číselných hodnot $t_4 = 56,64^\circ\text{C} \doteq 56,6^\circ\text{C}$.

b) Rtuť má ve srovnání s vodou velmi malé měrné teplo. Skoro všechno teplo získané ochlazením rtuti se spotřebovalo na roztání ledu.

5. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Měděný válcový drát o hmotnosti m má délku d a elektrický odpor R_1 . Jiný měděný válcový drát má stejnou hmotnost m , délku $3d$ a elektrický odpor R_2 .

a) Vypočtěte poměr elektrických odporů $R_2 : R_1$.

b) Vypočtěte poměr elektrických odporů, když za jinak nezměněných podmínek je délka druhého drátu nd , kde n je celé číslo, $n = 2, 3, 4, \dots$

c) Zdůvodněte výsledky v případech a), b) užitím vztahu $R = \rho \frac{d}{S}$ pro elektrický odpor.

d) Jak se změní poměr $R_2 : R_1$, jestliže se rozměry drátů nezmění, ale oba dráty jsou z hliníku? Výsledek zobecněte.

Řešení:

a) Pro hmotnost m válcového drátu délky d platí $m = S_1 d s$, kde S_1 je průřez drátu a s je hustota mědi. Pro druhý měděný drát délky $3d$ o stejné hmotnosti platí $m = S_2 3 d s$, kde S_2 je průřez druhého drátu. Z obou rovnic plyne $S_1 = 3 S_2$. Poněvadž druhý drát má třikrát větší délku a třikrát menší průřez než drát první, platí pro jejich odpory

$$R_2 : R_1 = 9 : 1.$$

b) Je-li délka druhého drátu nd , kde n je celé číslo: $n = 2, 3, 4, \dots$, pak z rovnosti jejich hmotností plyne

$$S_1 d s = S_2 n d s$$

a odtud

$$S_1 = n S_2.$$

Poněvadž druhý drát je n -krát delší a má n -krát menší průřez než drát první, platí pro jejich odpory

$$R_2 : R_1 = n^2 : 1.$$

c) Pro elektrický odpor drátu platí vztah

$$R = \varrho \frac{d}{S},$$

kde ϱ je měrný odpor materiálu drátu. Pro odpory drátů z případu a) tedy platí

$$R_1 = \varrho \frac{d}{S_1} \text{ a } R_2 = \varrho \frac{3d}{S_2} = \varrho \frac{3d}{\frac{1}{3} S_1} = 9 \varrho \frac{d}{S_1}.$$

Jejich poměr je pak

$$R_2 : R_1 = 9 : 1.$$

Pro případ b)

$$R_1 = \varrho \frac{d}{S_1} \text{ a } R_2 = \varrho \frac{n d}{\frac{1}{n} S_1} = n^2 \varrho \frac{d}{S_1}$$

a tedy

$$R_2 : R_1 = n^2 : 1.$$

d) Úvaha i výpočet jsou úplně stejné, poněvadž oba dráty jsou z téhož materiálu, a mají tedy stejný měrný odpor. Z výsledku plyne, že za stejných podmínek poměr odporů drátů $R_2 : R_1$ je nezávislý na materiálu drátů.

6. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Určení průměrné hustoty ϱ užitkového skla

Pomůcky: láhev (např. od sodovky nebo od mléka), váhy, odměrný válec, větší nádoba na vodu (kbelík) taková, aby se v ní měřená láhev ponořila do vody ve svislé poloze.

Postup práce: Určete hmotnost m_0 čisté suché láhve. Užitím odměrného válce určete vnitřní objem V_0 láhve naplněné až po okraj vodou.

Láhev částečně naplňte vodou tak, aby plovla ve vodě ve svislé poloze; do láhve nyní opatrně přilévejte vodu tak, aby se plovoucí láhev ponořila do vody právě po okraj. Nyní určete hmotnost m_1 láhve s vodou; znáte-li veličinu m_1 a hustotu vody $\varrho_0 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, určete vnější objem V_1 láhve. Rozdíl $V = V_1 - V_0$ udává objem skla.

Ze získaných hodnot vypočítejte průměrnou hustotu užitého skla.

Řešení:

Úvaha a výpočet vnějšího objemu láhve a hustoty skla.

V případě, že částečně naplněná a plovoucí láhev se ponoří do vody až po okraj hrdla, je tíha láhve a vody v láhvi rušena vztahovou silou, která se rovná tíze vytlačené vody stejného objemu, jako je vnější objem láhve. Poněvadž v daném pozorovacím místě tíha tělesa v kp je rovna hmotnosti tělesa v kg, je hmotnost vytlačené vody rovna hmotnosti m_1 láhve s vodou. Její objem V_1 , a tedy i vnější objem láhve, je pak dán vztahem

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_0}.$$

Objem skla láhve je

$$V = V_1 - V_0 = \frac{m_1}{\rho_0} - V_0$$

a průměrná hustota skla je potom

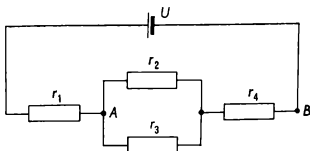
$$\rho = \frac{m_0}{\frac{m_1}{\rho_0} - V_0}.$$

7. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Soustava čtyř odporů ($r_1 = 4,00 \, \Omega$, $r_2 = 6,00 \, \Omega$, $r_3 = 12,0 \, \Omega$, $r_4 = 8,00 \, \Omega$) naznačená na obr. 54 je připojena k baterii o elektrickém napětí $U = 12,0 \, \text{V}$.

a) Vypočítejte celkový odpor R soustavy čtyř odporů a celkový proud I v elektrickém obvodu.

- b) Vypočítejte proud jdoucí každým odporem r_1, r_2, r_3, r_4 .
 c) Určete napětí mezi body A a B v elektrickém obvodu.
 Odporů spojovacích drátů zanedbáváme.



Obr. 54

Řešení:

a) Paralelně spojené odpory r_2 a r_3 můžeme nahradit odporem r' , pro nějž platí

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3},$$

a tedy

$$r' = \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}.$$

Celkový odpor R soustavy sériově spojených odporů je potom

$$\begin{aligned} R &= r_1 + r' + r_4 = r_1 + r_4 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3} = \\ &= \frac{(r_1 + r_4)(r_2 + r_3) + r_2 r_3}{r_2 + r_3}. \end{aligned}$$

Pro dané hodnoty odporů je celkový odpor $R = 16,0 \, \Omega$.

Celkový proud je podle Ohmova zákona $I = \frac{U}{R}$, tedy

$$I = \frac{U(r_2 + r_3)}{(r_1 + r_4)(r_2 + r_3) + r_2 r_3}.$$

Po dosazení známých hodnot vychází $I = 0,750 \text{ A}$.

b) Proud I_i prochází odporem r_i . Sériově spojenými odpory prochází stejný proud, tedy $I_1 = I_4 = I = 0,750 \text{ A}$.

Pro proudy jdoucí paralelně spojenými odpory r_2 a r_3 platí

$$I_2 : I_3 = r_3 : r_2$$

a

$$I_2 + I_3 = I.$$

Řešením obou rovnic a použitím vztahu pro I vychází:

$$I_2 = \frac{U r_3}{(r_1 + r_4)(r_2 + r_3) + r_2 r_3},$$

$$I_3 = \frac{U r_2}{(r_1 + r_4)(r_2 + r_3) + r_2 r_3}.$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $I_2 = 0,500 \text{ A}$, $I_3 = 0,250 \text{ A}$.

c) Napětí U_{AB} mezi body obvodu A a B se rovná napětí U na celém vnějším obvodu, zmenšeném o úbytek napětí na odporu r_1 . Tedy platí

$$U_{AB} = U - r_1 I.$$

Dosadíme-li do této rovnice za I výraz z případu a) a výsledek upravíme, dostaneme

$$U_{AB} = U \frac{r_4 (r_2 + r_3) + r_2 r_3}{(r_1 + r_4) (r_2 + r_3) + r_2 r_3}.$$

Pro dané číselné hodnoty vychází $U_{AB} = 9,00 \text{ V}$.

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

V kalorimetru je směs ledové tříště a vody o celkové hmotnosti $m_1 = 2,0 \text{ kg}$ a teplotě $t_1 = 0,0^\circ\text{C}$. Poměr hmotností vody a ledu neznáme.

a) Do kalorimetru přidáme vodu o hmotnosti $m_2 = 1,0 \text{ kg}$ a o teplotě $t_2 = 60,0^\circ\text{C}$. Led roztaje a teplota vody v kalorimetru se ustálí na $t_3 = 5,0^\circ\text{C}$. Určete hmotnost m ledové tříště, která byla na počátku v kalorimetru.

b) Vypočtete hmotnost m'_2 vody, teploty $t_2 = 60,0^\circ\text{C}$, která by se musela přidat do kalorimetru v případě a), aby se v něm po roztání ledu teplota vody ustálila na $t_1 = 0,0^\circ\text{C}$.

Měrné teplo vody je $c = 1,00 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$, měrné skupenské teplo tání ledu $l = 80,0 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$.

Řešení:

a) Voda hmotnosti m_2 a teploty t_2 přidaná do kalorimetru se stykem se směsí ochladí na výslednou teplotu t_3 . Vydá přitom množství tepla Q_1 , jehož velikost je určena vztahem

$$Q_1 = c \cdot m_2 (t_2 - t_3), \quad (1)$$

kde c je měrné teplo vody.

Ledová tříšť při styku s přidanou vodou přijímá teplo. Nejprve na tání, při kterém led o teplotě $t_1 = 0,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ přejde izotermicky na vodu. Množství tohoto tepla, označíme si je Q'_2 , je dáno vztahem

$$Q'_2 = l m, \quad (2)$$

kde l je měrné skupenské teplo tání ledu.

Voda, ve kterou led roztál, a voda ze směsi se stykem s přidanou vodou zahřívá, až dosáhne konečné teploty t_3 — přijímá teplo Q''_2 . Hmotnost zahříváné vody se rovná hmotnosti původní směsi, tj. m_1 , proto velikost tepla Q''_2 je dána vztahem

$$Q''_2 = c m_1 t_3. \quad (3)$$

Poněvadž nepřihlížíme k tepelným ztrátám, je velikost tepla Q_1 vydaného přidanou vodou rovna součtu přijatých tepel Q'_2 a Q''_2 , jak plyne ze zákona zachování tepelné energie. Matematické vyjádření je

$$Q_1 = Q'_2 + Q''_2. \quad (4)$$

Po dosazení z (1), (2) a (3) do (4) dostaneme

$$c m_2 (t_3 - t_2) = m l + c m_1 t_3,$$

odkud plyne vztah pro hmotnost ledu ve směsi

$$m = \frac{c m_2 (t_3 - t_2) - c m_1 t_3}{l}. \quad (5)$$

Po dosazení daných hodnot vychází $m = 0,56\text{ kg}$.

b) Má-li být výsledná teplota opět $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, musí mít přidaná voda takovou hmotnost m'_2 , aby vydané teplo

při ochlazení na $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ stačilo jen na roztání ledu. Vydané teplo Q'_1 je určeno vztahem

$$Q'_1 = c m'_2 t_2. \quad (6)$$

Z předcházející úvahy plyne

$$Q'_1 = Q'_2$$

a po dosazení z (6) a (2)

$$c m'_2 t_2 = l m.$$

Po dosazení z (5) vychází pro hmotnost m'_2

$$m'_2 = \frac{c m_2 (t_3 - t_2) - c m_1 t_3}{c t_2}.$$

Číselné řešení

$$m'_2 = 0,75 \text{ kg}.$$

2. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Tři stejné žárovky s jmenovitými hodnotami 4 V, 1 W a dvě stejné žárovky s jmenovitými hodnotami 12 V, 1 W zařadte do obvodu s akumulátorem o napětí 12 V tak, aby každá žárovka svítila s příkonem 1 W.

a) Nakreslete schéma obvodu.

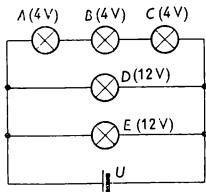
b) Jedna žárovka se přepálila a všechny ostatní svítí dále. Která žárovka se přepálila?

c) Vypočtete odpor každé žárovky a proud, který jí protéká. Odpor přírodních vodičů a vnitřní odpor akumulátoru zanedbáváme.

Řešení:

a) Schéma obvodu je na obr. 55.

b) Přepálila se žárovka D (12 V) nebo E (12 V), které jsou připojeny paralelně.



Obr. 55

c) Užitím Ohmova zákona

$$I = \frac{U}{R} \text{ a vztahu pro příkon}$$

$P = UI$ vypočteme odpor

$$R = \frac{U^2}{P}.$$

Podle toho odpor čtyřvoltové žárovky $R_1 = 16 \, \Omega$, odpor dvanáctivoltové žárovky $R_2 = 144 \, \Omega$.

Proud I_1 jdoucí větví se čtyřvoltovými žárovkami je podle Ohmova zákona

$$I_1 = \frac{U}{3R_1}$$

a po dosazení

$$I_1 = \frac{1}{4} \text{ A.}$$

Proudy jdoucí větvemi s dvanáctivoltovými žárovkami jsou stejné a rovnají se

$$I_2 = I_3 = \frac{U}{R_2}$$

a po dosazení

$$I_2 = I_3 = \frac{1}{12} \text{ A.}$$

3. úloha (navrhl Lubomír Vašek)

Ze zdroje elektrického napětí $U = 220 \text{ V}$ se má napájet spotřebič proudem $I = 35,0 \text{ A}$ při úbytku $p = 3 \%$ napětí ve vedení. V jaké vzdálenosti od zdroje napětí se může spotřebič umístit, je-li elektrické vedení z hliníkového drátu o průřezu $S = 25 \text{ mm}^2$? Měrný odpor hliníku je $\varrho = 0,0282 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$.

Řešení:

Úbytek napětí na vedení je

$$\Delta U = p U.$$

Toto napětí vytvoří procházející proud na odporu vedení R_v . Platí tedy

$$\Delta U = R_v I. \quad (1)$$

Odpor vedení je určen vztahem $R_v = \varrho \frac{2d}{S}$, kde d je vzdálenost spotřebiče od zdroje napětí. Dosadíme-li do (1) za ΔU a R_v , dostaneme

$$p U = \varrho \frac{2d}{S} I,$$

odkud vypočteme

$$d = \frac{p U S}{2 \varrho I}. \quad (2)$$

Pro dané číselné hodnoty vychází $d = 83,6 \text{ m}$.

4. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Jedna stěna stejnorodé dřevěné krychle o hraně $a = 5,00 \text{ dm}$ je pokryta měděným plechem tloušťky x . Plech je na krychli připevněn.

a) Vypočítejte tloušťku x plechu, ponoří-li se krychle ve vodě tak, že nad povrchem vody vyčnívá právě jen plech.

b) Těleso, které jsme uvažovali v případě a), ponoříme do vody tak, že plech je na spodní podstavě krychle. Vypočítejte část y hrany krychle, která vyčnívá nad povrch vody.

c) Veličiny x a y porovnejte a výsledek porovnání vysvětlete.

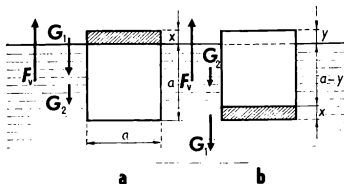
Měrná tíha mědi je $\gamma_1 = 8,90 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}$, dřeva $\gamma_2 = 0,50 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}$, vody $\gamma_3 = 1,00 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}$.

Řešení:

a) Popsaná situace je znázorněna na obr. 56a.

U plovoucího tělesa jsou síly působící na těleso v rovnováze. Směrem svisle dolů působí tíha plechu G_1 a tíha krychle G_2 , směrem svisle vzhůru působí vztlaková síla F_v , která se podle Archimédova zákona rovná tíze vody vytlačené ponořeným objemem krychle. Platí tedy

$$G_1 + G_2 = F_v. \quad (1)$$



Obr. 56

Tíha měděného plechu je

$$G_1 = a^2 x \gamma_1, \quad (2)$$

kde $a^2 x$ je objem plechu.

Tíha krychle je

$$G_2 = a^3 \gamma_2, \quad (3)$$

kde a^3 je objem krychle.

Vztlaková síla je

$$F_v = a^3 \gamma_3, \quad (4)$$

neboť krychle je ponořena celým svým objemem.

Po dosazení z (2), (3) a (4) do (1) vypočteme hledanou tloušťku plechu

$$x = \frac{a(\gamma_3 - \gamma_2)}{\gamma_1}. \quad (5)$$

Po dosazení daných číselných hodnot $x = 0,28$ dm.

b) Situace je znázorněna na obr. 56b.

Poněvadž těleso opět plove, což je důsledkem rovnováhy působících sil, a síly působící svisle dolů jsou stejné jako v případě a) — tíha plechu G_1 a tíha krychle G_2 —, musí být i vztlaková síla stejně velická. Vztlaková síla je rovna tíze vody vytlačené plechem a ponořeným objemem krychle, tj.

$$F_v = [a^2 x + a^2 (a - y)] \gamma_3. \quad (6)$$

Z rovnosti levých stran rovnic (4) a (6) plyne i rovnost výrazů na pravých stranách

$$a^3 \gamma_3 = [a^2 x + a^2 (a - y)] \gamma_3.$$

Po zjednodušení dostaneme $y = x$; číselně $y = 0,28$ dm.

c) Z řešení části b) vyplynul vztah mezi y a x . V obou případech se tíha tělesa rovná tíze vody, jejíž objem se rovná objemu krychle. Proto musí být $x = y$.

e) Třetí kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

a) Dokažte, že plná kulička o průměru $d = 1,00$ cm a o hmotnosti $m = 9,00$ g není z čistého zlata.

b) Kulička v případě a) je ze slitiny zlata a stříbra. Vypočítejte hmotnost m_1 zlata a hmotnost m_2 stříbra, které jsou ve slitině kuličky.

Hustota zlata je $\varrho_1 = 19,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, stříbra $\varrho_2 = 10,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
Počítejte nejprve obecně.

Řešení:

a) Kulička má objem $V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = 0,52 \text{ cm}^3$. Hmotnost zlata tohoto objemu by byla

$$\bar{m} = V \varrho_1 = 10,1 \text{ g}.$$

Poněvadž hmotnost m kuličky je $m = 9,00$ g, je $\bar{m} > m$, tzn., že kulička není z ryzího zlata.

b) Pro hmotnost m kuličky platí $m = m_1 + m_2$ a její objem

$$V = \frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2}.$$

Řešením soustavy obou rovnic je

$$m_1 = \frac{m - V \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2} \varrho_1, \quad m_2 = \frac{V \varrho_1 - m}{\varrho_1 - \varrho_2} \varrho_2.$$

Po dosazení číselných hodnot $m_1 = 7,70$ g, $m_2 = 1,30$ g.

2. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Krabice bez víka ze stejnorodého materiálu tvaru kváдру má rozměry podstavy $a = 5,00$ dm, $b = 4,00$ dm a výšku $h = 3,00$ dm. Tloušťka stěn i dna krabice je stejná, $t = 0,10$ dm. Dno uvnitř krabice je pokryto měděným plechem.

a) Vypočítejte tloušťku x plechu tak, aby krabice plavala na vodě ponořená právě po okraj.

b) Do dna krabice v případě a) vyvrtáme otvor tak malý, že vzniklý úbytek hmotnosti krabice můžeme zanedbat. Rozhodněte, zda krabice obrácená dnem vzhůru se ve vodě potopí nebo bude plavat. Rozhodnutí zdůvodněte výpočtem.

Měrná tíha vody je $\gamma_0 = 1,00 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}$, materiálu krabice

$$\gamma_1 = 0,50 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}, \quad \text{mědi } \gamma_2 = 8,90 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}.$$

Řešení:

a) Pro plovoucí těleso je jeho tíha rovna tíze vody vytlačené ponořeným objemem. Tíhu tělesa tvoří jednak tíha krabice

$$G_1 = [abh - (a - 2t)(b - 2t)(h - t)] \gamma_1,$$

jednak tíha plechu

$$G_2 = (a - 2t)(b - 2t)x \gamma_2.$$

Tíha vody stejného objemu, jako je objem krabice, je

$$G_0 = abh \gamma_0.$$

Platí tedy

$$[abh - (a - 2t)(b - 2t)(h - t)] \gamma_1 + x(a - 2t)(b - 2t) \gamma_2 = abh \gamma_0.$$

Odtud plyne

$$x = \frac{abh(\gamma_0 - \gamma_1) + (a - 2t)(b - 2t)(h - t)\gamma_1}{(a - 2t)(b - 2t)\gamma_2}.$$

Po dosazení daných hodnot dostaneme

$$x = 0,348 \text{ dm}.$$

b) Objem materiálu krabice

$$V_1 = abh - (a - 2t)(b - 2t)(h - t) = 7,10 \text{ dm}^3,$$

objem měděné desky

$$V_2 = (a - 2t)(b - 2t)x = 6,35 \text{ dm}^3.$$

Objem vody vytlačené celým tělesem je

$$V = V_1 + V_2 = 13,45 \text{ dm}^3.$$

Tíha vody vytlačené tělesem o objemu V je

$$G_0 = V\gamma_0 = 13,45 \text{ kp}.$$

Tíha samotné krabice je

$$G_1 = V_1\gamma_1 = 3,55 \text{ kp},$$

tíha mědi

$$G_2 = V_2\gamma_2 = 56,5 \text{ kp}.$$

Tíha tělesa

$$G_3 = G_1 + G_2 = 60,1 \text{ kp}.$$

Poněvadž $G_3 > G_0$, klesne krabice ke dnu.

3. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

V létě padaly kroupy. V meteorologické stanici měřili jejich teplotu. Do kalorimetru, v němž byla voda o hmotnosti $m_1 = 2,00 \text{ kg}$ a teplotě $t_1 = 30,0^\circ\text{C}$, dali kroupy o hmotnosti $m_2 = 0,50 \text{ kg}$. Když kroupy roztály, teplota vody v kalorimetru se ustálila na $t_2 = 8,10^\circ\text{C}$. Jakou teplotu t měly kroupy?

$$\begin{aligned} \text{Měrné teplo vody je } c_1 &= 1,00 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}, \text{ ledu } c_2 = \\ &= 0,50 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}, \text{ měrné skupenské teplo tání ledu } l = \\ &= 80 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}. \end{aligned}$$

Řešte nejprve pokud možno obecně.

Řešení:

Teplo, které vydala voda o hmotnosti m_1 a teplotě t_1 tím, že se ochladila na teplotu t_2 , je

$$Q_1 = c_1 m_1 (t_1 - t_2). \quad (1)$$

Toto teplo přijmou kroupy o hmotnosti m_2 a teplotě t . Na ohřátí krup na bod tání 0°C je třeba tepla

$$Q'_2 = c_2 m_2 (0 - t). \quad (2)$$

Na roztátí krup na vodu téže teploty je třeba tepla

$$Q''_2 = l m_2. \quad (3)$$

Voda z krup se nakonec ohřeje na výslednou teplotu t_2 a přijme přitom teplo $Q'''_2 = c_1 m_2 (t_2 - 0)$.

Poněvadž se celý děj uskutečňuje v kalorimetru, předpokládáme, že tepelné ztráty jsou zanedbatelně malé a že

platí zákon zachování tepelné energie: teplo vydané teplejším tělesem se rovná teplu přijatému tělesem chladnějším. Matematicky:

$$Q_1 = Q_2' + Q_2'' + Q_2'''.$$

Po dosazení ze vztahů (1), (2) a (3) dostaneme

$$c_1 m_1 (t_1 - t_2) = -c_2 m_2 t + l m_2 + c_1 m_2 t_2$$

a odtud

$$t = \frac{c_1 m_2 t_2 + l m_2 - c_1 m_1 (t_1 - t_2)}{m_2 c_2}.$$

Dosadíme-li dané hodnoty, vypočteme $t = -1,2^\circ\text{C}$.

4. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Máme n naprosto stejných drátů, z nichž každý má elektrický odpor r . Spojíme-li je za sebou, výsledný odpor je R_1 ; spojíme-li je vedle sebe, výsledný odpor je R_2 .

a) Nakreslete schéma zapojení a vypočtěte poměr výsledných odporů $R_1 : R_2$.

b) Hodnotu poměru vypočteného v případě a) ověřte pro $r = 1\ \Omega$, $n = 4$ za předpokladu, že každý drát má délku d a průřez S .

Řešení:

a) Při spojení za sebou je výsledný odpor roven součtu odporů jednotlivých vodičů, tedy $R_1 = nr$.

Při spojení vedle sebe je výsledná vodivost rovna součtu vodivostí jednotlivých větví, tedy $\frac{1}{R_2} = n \frac{1}{r}$ a odtud

$$R_2 = \frac{r}{n}.$$

Pro poměr $R_1 : R_2$ platí

$$R_1 : R_2 = n r : \frac{r}{n} = n^2 : 1.$$

b) Při sériovém spojení máme vlastně drát o délce $4d$ a stejném průřezu S . Jeho odpor je $R_1 = 4 \Omega$. Při paralelním zapojení máme vlastně drát stejné délky d a průřezu $4S$.

Jeho odpor je $R_2 = \frac{1}{4} \Omega$. Pro poměr $R_1 : R_2$ pak vyjde

$$R_1 : R_2 = 4 \Omega : \frac{1}{4} \Omega = 16 : 1 = 4^2 : 1.$$

III. ČÁST: ŠESTÁ MEZINÁRODNÍ FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA

1. Průběh a výsledky soutěže

Organizátorem VI. mezinárodní fyzikální olympiády (VI. MFO) byla ve studijním roce 1971/72 Rumunská socialistická republika.

Ministr školství RSR pozval na VI. MFO kromě států, které se zúčastnily dřívějších olympiád — Bulharska, Československa, Jugoslávie, Maďarska, NDR, Polska a SSSR, ještě další státy. Z nich se dostavila Francie a Kuba; z dřívějších účastníků se nedostavila — stejně jako v minulém roce — Jugoslávie. Švédsko vyslalo jen svého pozorovatele. Měla tedy VI. MFO soutěžící z devíti států.

Z každého státu bylo pozváno 5 soutěžících, jeden vedoucí družstva a jeden pedagogický instruktor. Vedoucím družstva ČSSR byl jmenován MŠ ČSR a MŠ SSR prof. dr. Rostislav Košťál, předseda ÚVFO, pedagogickým instruktorem doc. dr. Ivan Náter, 1. místopředseda ÚVFO. Poněvadž prof. Košťál se nemohl z osobních důvodů olympiády zúčastnit, vedl družstvo doc. dr. Ivan Náter a funkci pedagogického instruktora převzal doc. dr. Bohumil Vlach, člen užšího ÚVFO.

Pro účastníky VI. MFO a jejich náhradníky bylo uspořádáno soustředění. Na schůzi předsednictva ÚVFO byli do soustředění vybráni podle výsledků 3. kola kat. A

s přihlédnutím k výsledkům 2. kola tito úspěšní řešitelé:

1. Binder Jiří, 4. r. G Mor. Budějovice,
2. Horák Jiří, 4. r. G Děčín,
3. Koropečký Igor, 4. r. G Pardubice,
4. Lehotský Milan, 3. r. G Bratislava, Novohradská,
5. Dolejší Jiří, 4. r. G Praha 7, Nad štolou,
6. Drábek Pavel, 4. r. G Pardubice,
7. Slezák Libor, 4. r. G Pardubice,
8. Kolibiár Milan, 3. r. G Bratislava, Novohradská,
9. Hájek Karel, 4. r. G Liberec,
10. Vít Jan, 4. r. SPŠStr Nové Město n. Metují,
11. Dvorský Daniel, 4. r. G Vysoké Mýto.

Všichni pozvaní splňovali podmínky stanovené statutem a směrnice pro MFO a soustředění se zúčastnili. Soustředění se konalo v době 15. 6. až 25. 6. 1972 na střední zemědělsko-technické škole ve Vyškově. Přednášel Alois Kleveta, profesor gymnasia v Brně, Křenová ul. (dř. odb. asistent VAAZ), 30 hod. partie z mechaniky, vlnění a část termiky a ing. Bohumil Vybíral, odborný asistent VAAZ ve Vyškově, 30 hod. partie z elektřiny, optiky a termodynamiky. Každý den od 16. 6. do 24. 6. bylo 7 hodin přednášek a 25. 6. 4 hodiny přednášek; jeden den — ve středu 21. 6. — se nepřednášelo — byl to den studijní. Pedagogické vedení měl prof. Alois Kleveta. Účastníci byli ubytováni a stravováni v internátě SZTŠ ve Vyškově.

Před ukončením soustředění bylo stanoveno pořadí účastníků pro VI. MFO:

1. Binder, 2. Horák, 3. Koropečký, 4. Lehotský, 5. Dolejší, shodně s výsledky 3. kola, a pořadí náhradníků
6. Slezák, 7. Drábek, 8. Kolibiár a 9. Hájek.

Poněvadž Igor Koropečký se z osobních důvodů nemohl zúčastnit celého zájezdu a poněvadž formality pro odjezd

u Jiřího Horáka nebyly včas vyřízeny, nastoupili místo nich první dva náhradníci.

Do Rumunska tedy odjelo družstvo v tomto složení:

1. Binder Jiří,
2. Lehotský Milan,
3. Dolejší Jiří,
4. Slezák Libor a
5. Drábek Pavel.

VI. MFO se konala ve dnech 8. až 18. července 1972. Družstvo i s vedoucími odletělo 8. 7. ve 12 hod. z Prahy a v Bukurešti bylo očekáváno zástupci pořádající organizace. Delegace všech států byly ubytovány a stravovány v internátě Agronomického institutu Nikolae Bălceska v Bukurešti.

Vedoucími jednotlivých delegací na VI. MFO byli:

Bulharsko (BLR): Nicolai Alexandrov Nicolov, CSc.,
univ. asistent,

Československo (ČSSR): doc. RNDr. Ivan Náter,

Francie (F): Pierre Legrand, profesor lycea,

Kuba (K): insp. Fernando Gonzáles García,

Maďarsko (MLR): prof. Rezső Kunfalvi, redaktor,

Německá demokratická republika (NDR):

doc. dr. Joachim Wendt, ředitel matem.-fyzikální sekce
pedagogického institutu,

Polsko (PLR): prof. Mgr. Waldemar Gorzkowski,

Rumunsko (RSR): dr. Oncescu Mircea,

Sovětský svaz (SSSR): prof. dr. Makar Dimitrievici Ka-
rasev.

Pedagogickými instruktory byli:

BLR: insp. Nicola Milanov Velcev,

ČSSR: doc. RNDr. Bohumil Vlach,

F: —

K: Juan Francisco Romero Matos, profesor,

MLR: Géza Tichy, univ. asistent,

NDR: dr. Liebers Klaus, vedoucí laboratoře fyziky a astronomie,

PLR: dr. Andrzej Szymacha, adjunkt Institutu,

RSR: Lidia Panaiotu, univ. lektorka,

SSSR: Galina Sergejevna Tarasjuková, univ. asistentka.

Všechna družstva měla po pěti soutěžících, jen Kuba měla čtyři soutěžící, z nich jednu dívku.

Vedle toho se zúčastnil jako pozorovatel lektor L. Gunnar Ekegärd ze Švédska.

Každé družstvo dostalo tlumočníka, který družstvo doprovázel.

Prvé zasedání mezinárodní komise bylo 9. července večer v lyceu N. Bălceska. Na zasedání se řešila otázka způsobu překladu soutěžních úloh a rozsazení žáků při řešení úloh.

Soutěž se řídila statutem s určitými odchylkami. Předsedou mezinárodní komise byl pověřen prof. dr. Ion Ursu, předseda národní komise RSR pro atomovou fyziku. Protože byl v době soutěže na služební cestě mimo RSR, zastupoval ho na zasedáních komise Nicolae Martalovu, místopředseda národní komise RSR pro atomovou fyziku. Na čtyři teoretické úlohy byla vyměřena doba 5 hodin, na laboratorní úlohu doba 4 hodin. Stanovení cen a udělení pochvalných uznání bylo plánováno podle směrnic.

Dne 10. července překládali v době od 7 do 10 hodin vedoucí jednotlivých družstev texty soutěžních úloh do svých jazyků. Soutěž probíhala v době od 10 hod. do 15 hod. v budově lycea N. Bălceska. V této době pak

členové mezinárodní komise a pedagogičtí instruktoři diskutovali o soutěžních úlohách; k některým úlohám měli připomínky.

Slavnostní zahájení soutěže bylo až 10. července v 18 hod. v sále G. Enescu státní konservatoře. Slavnostní projev měl s. Titeica, místopředseda Akademie věd RSR. Za delegace promluvil vedoucí delegace BLR Nicolai Nicolov a za soutěžící žáky člen družstva RSR Pentiuc Stefan Gheorghe. Slavnostní zahájení bylo zpestřeno pěveckým sborem lycea Mihai Viteazul.

Dne 11. 7. 1972 v době od 8 do 10 hodin překládali vedoucí delegací text laboratorní úlohy, která se pak pracovala od 10.30 do 14.30.

Řešení úloh opravovala komise sestavená z pracovníků přírodovědecké fakulty bukurešťské university ve dnech 10. 7. až 15. 7. 1972. Řešení teoretické úlohy bylo hodnoceno maximálně 10 body, laboratorní úlohy 20 body.

Z letošních účastníků se účastnil již 5. MFO: Szabó Zoltán (MLR), Gács Lajos (MLR) a Schmidt Hans Jürgen (NDR).

V neděli 16. července dopoledne zasedala mezinárodní komise, která po menších úpravách schválila hodnocení soutěžních úloh a zároveň provedla úpravy statutu a směrníc.

Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce (str. 183 až 185).

Vzhledem k tomu, že zadané úlohy byly svým obsahem na hranicích školské fyziky, a proto obtížné pro všechny soutěžící, bylo všem soutěžícím připočteno k dosaženým bodům vždy 20 % a podle tohoto výsledku byly stanoveny ceny. Ceny byly dány i těm, kteří se dostali právě na hranici a nepřekročili ji.

Potádl	J m é n o	Stát	Úloha					Celkem	+ 20 %	Konečný počet bodů
			1	2	3	4	5			
1.	Szabó Zoltán	MLR	10	5	10	7,5	15	47,5	9,5	57
2.	Provotorov Sergej	SSSR	8	0	9,5	10	18	45,5	9,1	54,6
3.—4.	Bouc Serge	F	4,5	4,5	6	9,5	18	42,5	8,5	51
5.	Condriuc Liviu	RSR	6,5	2	6	9	19	42,5	8,5	51
	Pentiu Stefan Gh.	RSR	7,5	8,5	2,5	7	14	39,5	7,9	47,4
6.	Liagusin Sergej	SSSR	8	6	5	0	19	38	7,6	45,6
7.—9.	Imhof Gyula	MLR	10	0,5	6,5	2,5	18	37,5	7,5	45
	Poirier Michel	F	2,5	2	6	9	18	37,5	7,5	45
	Schmidt Hans Jürgen	NDR	4,5	4,5	4,5	4	20	37,5	7,5	45
10.	Ocneanu Adrian	RSR	3,5	5	5,5	4	19	37	7,4	44,4
11.—12.	Kövér András	MLR	5	2,5	8	2,5	18	36	7,2	43,2
	Mkrtcean									
13.	Ruben	SSSR	7,5	3	5	3	17,5	36	7,2	43,2
	Tugui Tiberiu	RSR	7	8	6	3,5	11	35,5	7,1	42,6
14.—16.	Éber Nándor	MLR	6	0,5	6	4	17	33,5	6,7	40,2
	Golnik Andrzej	PLR	10	0	7	4,5	12	33,5	6,7	40,2
	Stepniewski Roman	PLR	4	2	6	3,5	18	33,5	6,7	40,2

Pořadí	J m é n o	Stát	Úloha					Celkem	+ 20 %	Konečný počet bodů
			1	2	3	4	5			
17.	Binder Jiří	ČSSR	5,5	0	7,5	4	16	33	6,6	39,6
18.—19.	Achilles Dieter Gancev Alexandar Hristov	NDR	0	0	6	7,5	19	32,5	6,5	39
20.	Marin Mihail	BLR	0	4,5	6,5	4,5	17	32,5	6,5	39
21.	Dygas Józef	RSR	5	2,5	6,5	0	18	32	6,4	38,4
22.—23.	Mattheis Roland	PLR	10	0	6,5	3	12	31,5	6,3	37,8
	Plotnev Igor	NDR	5	1	6	0	19	31	6,2	37,2
24.	Drábek Pavel	SSSR	9	9	0	0	13	31	6,2	37,2
25.—26.	Missbach Frank	ČSSR	3,5	3	3	4	17	30,5	6,1	36,6
	Michael	NDR	5,5	2	4,5	1	17	30	6	36
	Vaidman Lev	SSSR	6,5	3	8,5	0	12	30	6	36
27.—30.	Bacchus									
	François	F	3	1,5	2	7,5	15	29	5,8	34,8
	Fischer Frank	NDR	4	1,5	4,5	0	19	29	5,8	34,8
	Dolejší Jiří	ČSSR	5	1	5,5	4,5	13	29	5,8	34,8
	Miller Janusz	PLR	4,5	1,5	5,5	3	14,5	29	5,8	34,8
31.—32.	Gács Lajos	MLR	2,5	1	5	1	18	27,5	5,5	33
	Lehotský Milan	ČSSR	2,5	3	8	2	12	27,5	5,5	33

Pořadí	J m é n o	Stát	Úloha					Celkem	+ 20 %	Konečný počet bodů
			1	2	3	4	5			
33.	Otwinowski	PLR	6,5	6	5	1	8	26,5	5,3	31,8
34.	Zdzisław	ČSSR	4,5	1	5,5	4,5	10	25,5	5,1	30,6
35.	Slezák Libor									
	Neikov Hrisimir Nencev	BLR	2	0	4	1	17	24	4,8	28,8
36.	Ricaud Claude	F	3	1,5	0	4,5	14,5	23,5	4,7	28,2
37.	Lebeau Gilles	F	2	0	0	7	13	22	4,4	26,4
38.	Traianov Atanas									
	Liubomirov	BLR	3	1,5	1,5	3,5	11	20,5	4,1	24,6
39.—40.	Demirev Plamen									
	Anastasov	BLR	3	1	1,5	1	13	19,5	3,9	23,4
	Kalkandjiev									
41.	Todor Kirilov	BLR	2	4	1	0,5	12	19,5	3,9	23,4
	Emilio Arturo									
	Marill Freyre									
	de Andrade	K	5,5	2	0	1	10	18,5	3,7	22,2
42.	Rafael Gregorio									
	Cepeda Herrera	K	3,5	0	0	0	4	7,5	1,5	9
	Isneri Talavera									
43.—44.	Bustamante	K	1	1	0	0	1	3	0,6	3,6
	Orlando Antonio Castellanos									
	Sánchez	K	1	1	1	0	0	3	0,6	3,6

Dostali tedy:

- | | |
|------------------------------|-----------------------|
| 1. cenu: 1. Szabó (MLR), | 2. Provotorov (SSSR); |
| 2. cenu: 1. Bouce (F), | 2. Condiuc (RSR), |
| | 3. Pentiuc (RSR); |
| 3. cenu: 1. Liagusin (SSSR), | 2. Imhof (MLR), |
| 3. Poirier (F), | 4. Schmidt (NDR), |
| 5. Ocneanu (RSR), | 6. Kövér (MLR), |
| 7. Mrktcean (SSSR), | 8. Tugui (RSR), |
| 9. Éber (MLR), | 10. Golnik (PLR), |
| 11. Stepniewski (PLR), | 12. Binder (ČSSR), |
| 13. Achilles (NDR), | 14. Gancev (BLR); |

pochvalné uznání:

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 1. Marin (RSR), | 2. Dygas (PLR), |
| 3. Mattheis (NDR), | 4. Pletnev (SSSR), |
| 5. Drábek (ČSSR), | 6. Missbach (NDR), |
| 7. Vaidman (SSSR), | 8. Bacchus (F), |
| 9. Dolejší (ČSSR), | 10. Fischer (NDR), |
| 11. Miller (PLR), | 12. Gács (MLR), |
| 13. Lehotský (ČSSR), | 14. Otwinowski (PLR), |
| 15. Slezák (ČSSR). | |

Deset dalších účastníků bylo neúspěšných.

Vedle toho byly uděleny speciální ceny

za mechaniku: Z. Szabóovi, G. Imhofovi, A. Golnikovi,
J. Dygasovi;

za elektřinu: Z. Szabóovi;

za optiku: S. Provotorovi a

za laboratorní úlohu: H. J. Schmidтови.

Je tedy podle získaných bodů toto pořadí jednotlivých států (u každého státu je uveden též počet získaných cen a pochvalných uznání):

Stát	Počet bodů	Počet cen			Pochv. uznání	Neúsp.
		1.	2.	3.		
1. RSR	223,8		2	2	1	
2. MLR	218,4	1		3	1	
3. SSSR	216,6	1		2	2	
4. NDR	192,0			2	3	
5. Fr	185,4		1	1	1	2
6. PLR	184,8			2	3	
7. ČSSR	174,6			1	4	
8. BLR	139,2			1		4
9. K	38,4					4

V tomto roce se naše družstvo poprvé umístilo špatně.

Dne 17. července bylo v aule lycea N. Bălceska slavnostní zakončení soutěže za přítomnosti místopředsedy Martalova a dvou generálních inspektorek MŠ. Byly vyhlášeny výsledky a odevzdány diplomy a věcné ceny úspěšným řešitelům.

Volný čas byl vyplněn akcemi, které seznámily účastníky s některými přírodními krásami a kulturními památkami země.

Již před zahájením soutěže navštívily delegace 9. 7. dopoledne pionýrský areál v Bukurešti. Odpoledne 11. 7. po ukončení laboratorní úlohy byla podniknuta okružní prohlídková cesta po Bukurešti. Od 12. do 15. července byl uspořádán rekreační pobyt všech účastníků na černomořském pobřeží. Z Bukurešti odcestovali účastníci autobusy do Konstancie a cestou si prohlédli vykopávky starořímské pevnosti Histria a navštívili pionýrský tábor v Navodari. V Konstanci byli ubytováni soutěžící ve středoškolském internátu a vedoucí družstev s pedagogickými instruktory v hotelu Palace. Dne 13. července byli vedoucí družstev

a pedagogičtí instruktoři přijati primátorem města Konstance. Odpoledne navštívili spolu s žáky Mamaiu. V odpoledních hodinách si prohlédli archeologické muzeum, akvárium a delfinium v Konstanci. Dne 14. 7. navštívili mezinárodní mládežnický tábor v Kostinešti a ve večerních hodinách se zúčastnili slavnostního zakončení tohoto tábora, které bylo spojeno s kulturním programem. Dne 15. 7. strávili účastníci den na pláži v Mangálii a vrátili se do Bukurešti. V neděli 16. 7. odpoledne navštívili účastníci výstavku technické tvořivosti žáků středních všeobecných škol a středních odborných škol.

Dne 18. 7. odletěla naše delegace z Bukurešti do Prahy.

2. Soutěžní úlohy

1. úloha

Text:

Tři válce stejných hmotností, délek a vnějších poloměrů leží zpočátku v klidu na nakloněné rovině. Součinitel smykového tření f na nakloněné rovině je známý a je stejný pro všechny válce.

Prvý válec je dutý (je to roura), druhý válec je homogenní, třetí válec má stejnou dutinu jako první, ale tato dutina je zakryta víky zanedbatelných hmotností a je naplněna kapalinou stejné hustoty, jakou mají stěny válce. Tření kapaliny se stěnami válce je zanedbatelné. Hustota materiálu prvního válce je n -krát větší než hustota druhého a třetího válce.

Určete:

1. Posuvná zrychlení válců, když žádný z nich neklouže. Porovnejte tato zrychlení.

2. Podmínku pro úhel α nakloněné roviny, aby žádný válec neklouzal.

3. Vzájemné poměry úhlových zrychlení všech válců v případě, že válce klouzají. Porovnejte tato úhlová zrychlení vzhledem k jejich velikostem.

4. Sílu, kterou na sebe navzájem působí kapalina a stěny válce v případě klouzání. Hmotnost kapaliny m_1 je známá.

Řešení:

Označme vnější poloměr válce R a jeho délku l , vnitřní poloměr dutého válce (prvého i třetího) r , hustotu prvního válce ϱ_1 a druhého válce ϱ_2 . Poněvadž hmotnost druhého a třetího válce je táž, a poněvadž hustota kapaliny třetího válce je táž jako hustota stěny válce, musí mít stěna třetího válce a kapalina uvnitř hustotu ϱ_2 ; přitom musí platit $\varrho_1 > \varrho_2$.

1. Pro hmotnost prvního válce platí

$$m = \pi (R^2 - r^2) l \varrho_1, \quad (1)$$

pro hmotnost druhého válce

$$m = \pi R^2 l \varrho_2 \quad (2)$$

a pro hmotnost třetího válce

$$m = \pi (R^2 - r^2) l \varrho_2 + \pi r^2 l \varrho_2 = \pi R^2 l \varrho_2. \quad (3)$$

Označme úhel nakloněné roviny s rovinou vodorovnou α (obr. 57). Předpokládáme, že součinitel smykového tření f válců po nakloněné rovině je tak velký, že nemůže nastat klouzavý pohyb.

Zrychlení válců můžeme vypočítat jednak ze silové rovnice, jednak z energetické rovnice.

α) Ze silové rovnice:

Označme sílu tření valivého F_t , moment setrvačnosti válce J , posuvné zrychlení a a úhlové zrychlení ε ; pak platí

$$m a = m g \sin \alpha - F_t,$$

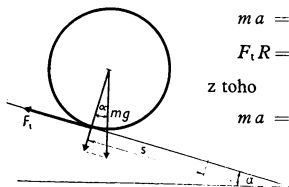
$$F_t R = J \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{a}{R};$$

z toho

$$m a = m g \sin \alpha - \frac{J}{R} \frac{a}{R},$$

a tedy

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{J}{m R^2}}. \quad (4)$$



Obr. 57

Pak

$$\begin{aligned} F_t &= \frac{J \varepsilon}{R} = \frac{J a}{R^2} = \frac{J g \sin \alpha}{\left(1 + \frac{J}{m R^2}\right) R^2} = \\ &= \frac{g \sin \alpha}{\frac{R^2}{J} + \frac{1}{m}} = \frac{m g \sin \alpha}{1 + \frac{J}{m R^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

β) Z energetické rovnice:

Když se válec dostane valivým pohybem z původní klidové polohy o délku s po nakloněné rovině, pak potenciální energie válce klesne o

$$W_p = m g s \sin \alpha$$

a válec nabude kinetické energie

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2,$$

kde $v = \frac{ds}{dt}$ je rychlost posuvného pohybu a

$\omega = \frac{v}{R}$ rychlost otáčivého pohybu; tedy

$$W_k = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J} \frac{1}{R^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2.$$

Z rovnosti obou energií plyne

$$\frac{1}{2} \left[m + \frac{\mathcal{J}}{R^2} \right] \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = m g s \sin \alpha$$

a derivováním podle t dostáváme

$$\left(m + \frac{\mathcal{J}}{R^2} \right) \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} = m g \sin \alpha \frac{ds}{dt}.$$

Z toho po zkrácení $\frac{ds}{dt}$ vychází

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{\mathcal{J}}{m R^2}}.$$

Závisí tedy zrychlení pohybujících se válců na jejich momentu setrvačnosti.

Vypočteme proto momenty setrvačnosti válců v jednotlivých případech vzhledem k jejich ose.

V prvním případě zvolme dutý válec o poloměrech základny x a $x + dx$. Pak je objem elementárního válce

$$2 \pi x dx l,$$

jeho hmotnost (hustota obecně ρ) $2 \pi x \rho l dx$ a jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose válce $2 \pi x^3 \rho l dx$. Pro dutý válec o poloměrech r a R v prvním případě pak vychází

$$\begin{aligned} J_1 &= 2 \pi \rho_1 l \int_r^R x^3 dx = \frac{1}{2} \pi \rho_1 l (R^4 - r^4) = \\ &= \frac{1}{2} m (R^2 + r^2) = \frac{1}{2} m R^2 \left[1 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

V druhém případě, když $r = 0$, vychází

$$J_2 = \frac{1}{2} m R^2. \quad (7)$$

V třetím případě — poněvadž tření kapaliny se stěnami nádoby je zanedbatelné — rotují pouze stěny válce, nikoliv kapalina, a tedy moment setrvačnosti je též jako v prvním případě, přičemž rotující část má hmotnost

$$\pi (R^2 - r^2) l \rho_2.$$

Je tedy

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2} (\pi R^2 l \rho_2 - \pi r^2 l \rho_2) (R^2 + r^2) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi R^2 l \rho_2 - \pi R^2 l \rho_2 \frac{r^2}{R^2} \right) (R^2 + r^2) = \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Označme $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = n$. Z rovnic (1), (2), (3) pro hmotnost válců plyne, že $n > 1$ a že

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = 1,$$

$$1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{n};$$

z toho

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n},$$

a tedy

$$1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 = 2 - \frac{1}{n}$$

a

$$1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4 = 1 - 1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

Pak jednotlivé momenty setrvačnosti (6), (7), (8) jsou dány vztahy

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \frac{1}{2} m R^2 \left(2 - \frac{1}{n}\right), \\ \mathcal{J}_2 &= \frac{1}{2} m R^2, \\ \mathcal{J}_3 &= \frac{1}{2} m R^2 \frac{1}{n} \left(2 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Pak podle (4) je posuvné zrychlení válců, když žádný válec neklouže (neprokluzuje),

$$a_1 = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{2g \sin \alpha}{4 - \frac{1}{n}} = \frac{2g \sin \alpha}{3 + \left(1 - \frac{1}{n} \right)},$$

$$a_2 = \frac{2g \sin \alpha}{3},$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{2g \sin \alpha}{2 + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} = \\ &= \frac{2g \sin \alpha}{2 + \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \right]} = \frac{2g \sin \alpha}{3 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2}. \end{aligned}$$

Poněvadž $0 < \frac{1}{n} < 1$, je $1 - \frac{1}{n} > 0$, takže

$$3 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) > 3 > 3 - \left(1 - \frac{1}{n} \right),$$

a tedy

$$a_1 < a_2 < a_3.$$

2. Válce se budou pohybovat valivým pohybem, bude-li síla tření valivého F_t menší, než je síla tření smykového. Poněvadž síla tření smykového je rovna součinu součinitele smykového tření a kolmého tlaku, musí být síla tření F_t menší než součin součinitele smykového tření a kolmého tlaku

$$F_t < f m g \cos \alpha.$$

Užitím (5) plyne

$$\frac{m g \sin \alpha}{1 + \frac{m R^2}{J}} < f m g \cos \alpha.$$

Z toho podmínka pro úhel α

$$\operatorname{tg} \alpha < f \left(1 + \frac{m R^2}{\mathcal{J}} \right).$$

Aby tuto podmínku splňovaly všechny válce, musí být

$$\operatorname{tg} \alpha < f \left(1 + \frac{m R^2}{\mathcal{J}_{\max}} \right).$$

Poněvadž $\mathcal{J}_{\max} = \mathcal{J}_1$, je $\mathcal{J}_{\max} = \frac{1}{2} \cdot m R^2 \left(2 - \frac{1}{n} \right)$ a musí být

$$\operatorname{tg} \alpha < f \left(1 + \frac{2 m R^2}{m R^2 \left(2 - \frac{1}{n} \right)} \right),$$

$$\operatorname{tg} \alpha < f \left(1 + \frac{2 n}{2 n - 1} \right),$$

$$\operatorname{tg} \alpha < f \frac{4 n - 1}{2 n - 1}.$$

To je podmínka pro úhel α , aby všechny válce se pohybovaly valivým pohybem.

3. Nyní předpokládejme, že válce klouzají při uplatnění smykového tření; pak přitom konají válce rotační pohyb. Pro sílu tření nyní platí

$$F_t = f N,$$

kde $N = m g \cos \alpha$, a pro příslušný otáčivý moment

$$\mathcal{J}_e = f N R.$$

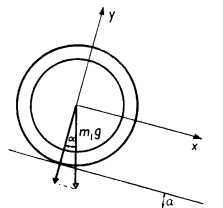
Z toho

$$\varepsilon = \frac{fNR}{J} = \frac{fRmg \cos \alpha}{J}.$$

Poněvadž pro všechny válce je f , R , m , g , α stejné, je poměr úhlových zrychlení, při nichž nastane klouzání, podle (9)

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 &= \frac{1}{J_1} : \frac{1}{J_2} : \frac{1}{J_3} = \\ &= \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} : 1 : \frac{n}{2 - \frac{1}{n}} = \\ &= 1 : \left(2 - \frac{1}{n}\right) : n. \end{aligned}$$

4. Když válecek klouzá po nakloněné rovině, pak by kapalina chtěla setrvačností zůstat na svém místě. Sílu, kterou působí kapalina na stěnu válce, rozložíme na složku ve směru nakloněné roviny a na složku k ní kolmou (obr. 58);



Obr. 58

přitom přihlédneme k tření válce po nakloněné rovině. Kapalina klouže zároveň s válcem, a proto se setrvačností uplatní jen síly související s kapalinou. Ve směru osy y působí kapalina hmotnosti m_1 na válecek silou orientovanou proti pohybu, tedy směrem kladné osy y

$$F_y = m_1 g \cos \alpha.$$

Ve směru kladné osy x působí na kapalinu vnější síla $m_1 g \sin \alpha$, která jí společně s hledanou silou F_x uděluje zrychlení

$$g \sin \alpha - f g \cos \alpha.$$

Proto má platit

$$m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) = F_x + m_1 g \sin \alpha$$

a z toho

$$F_x = -m_1 g f \cos \alpha.$$

Pak tedy

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m_1 g \cos \alpha \sqrt{1 + f^2}.$$

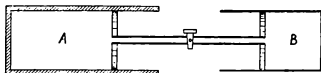
Poněvadž $f = \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je úhel nakloněné roviny, při němž se válec uvede z klidu do pohybu, je

$$F = m_1 g \cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = m_1 g \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}.$$

2. úloha

Text:

Dva válce A a B se stejnými průměry mají volné pohyblivé písty (obr. 59), jejichž hmotnosti jsou zanedbatelné, a společnou ojnici. Ojnice je krátká trubice opatřená kohoutem, který je zpočátku uzavřen.



Obr. 59

Válec A i jeho píst jsou adiabaticky izolovány, naproti tomu válec B je spojen s termostatem, jehož teplota je $t = 27^\circ\text{C}$.

Na počátku se píst ve válci A nepohybuje. Ve válci je argon o hmotnosti $M = 32\text{ kg}$. Tlak tohoto plynu je větší než atmosférický tlak.

Válec B o objemu $V = 5,54\text{ m}^3$ je naplněn kyslíkem o normálním atmosférickém tlaku.

Je-li píst uvolněn, pohybuje se ve válci A dostatečně pomalu (kvasistaticky) a po dosažení rovnovážného stavu pozorujeme, že se objem plynu ve válci A osmkrát zvětšil, popř. že se hustota kyslíku ve válci B dvakrát zvětšila.

Vzhledem k tomu, že termostatu bylo odevzdáno tepelné množství $Q = 747,9 \cdot 10^4\text{ J}$, se požaduje:

1. Ukázat na základě kinetické teorie plynů (analýza srážek molekul plynu s pohyblivým pístem), že plyn ve válci A vyhovuje následující rovnici:

$$T V^{\frac{2}{3}} = \text{konst.}$$

2. Určit počáteční a konečné hodnoty parametrů p , T , V pro argon.

3. Určit velikost výsledného tlaku směsi plynů po otevření spojovacího kohoutu mezi oběma válci.

Pro argon je dané $\mu = 40\text{ kg kmol}^{-1}$.

Poznámka:

V zadání je uvedeno, že se objem plynu ve válci A osmkrát zvětšil, popř. že se hustota kyslíku ve válci B dvakrát zvětšila. Bylo by možno užít obou těchto údajů. Počítá-li se postupně ze změny ve válci A prostřednictvím tepla Q zadaného číselně $Q = 747,9 \cdot 10^4\text{ J}$ změna ve válci B ,

nevyjde z vlastnosti pro objem V u prvního plynu uvedený poměr hustot druhého plynu a vycházejí hodnoty nemožné. Rovněž naopak, když se vychází od poměru hustot druhého plynu. Úloha by vyžadovala změnu daných hodnot. Proto při řešení vycházíme jen z údaje, že se objem ve válci A osmkrát zvětšil. Číselně počítáme jen poměry hodnot ve válci A a z daného tepla pak i teploty T_1 a T'_1 , ostatní veličiny počítáme jen obecně.

Udávání tlaku v atm, tj. v jednotkách, kterých se dnes nemá užívat, bylo ponecháno. Rovněž bylo ponecháno označení kilomolové hmotnosti.

Řešení:

1. Odvození vztahu $T V^{\frac{2}{3}} = \text{konst.}$

a) Užitím kinetické teorie plynů

Označme osu jdoucí směrem pohybu pístu z a rychlost pístu u . Dále označme hmotnost molekuly m a její rychlost před nárazem na píst $\mathbf{v}$ a po nárazu na píst $\mathbf{v}'$. Složky těchto rychlostí — tangenciální a normálové — označme v_t, v_n, v'_t, v'_n (obr. 60).

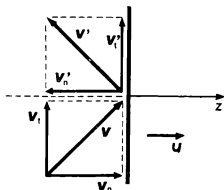
Výsledná rychlost při nárazu molekuly na píst je

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u};$$

pro složky rychlosti po nárazu platí

$$v'_t = v_t, \quad v'_n = -v_n,$$

a tedy pro rychlost ve směru pohybu, tj. ve směru osy z , platí



Obr. 60

$$v'_z - u = -(v_z - u)$$

a z toho

$$v'_z = -v_z + 2u.$$

Rozdíl energií molekuly po rázu na píst a před rázem je — poněvadž $u \ll v_z$ —

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v'^2_z - \frac{1}{2} m v^2_z &= \frac{1}{2} m (v^2_z - 4v_z u + 4u^2 - v^2_z) = \\ &= -2m v_z u. \end{aligned}$$

Označme n_i počet molekul v objemové jednotce, které mají rychlost v_{iz} . Poněvadž se molekuly mohou ve směru osy z pohybovat v kladné i záporné orientaci rychlostí v_{iz} , narazí jich v jednotce času na plošný element pístu ds

$$\frac{n_i}{2} v_{iz} ds,$$

a tedy za dobu $d\tau$ jich narazí

$$N_i = \frac{n_i}{2} v_{iz} ds d\tau.$$

Celková změna jejich energie je pak

$$dW_{iz} = -2m v_{iz} u \frac{n_i}{2} v_{iz} ds d\tau = -m u ds d\tau n_i v_{iz}^2,$$

a tedy změna energie všech molekul pohybujících se různými rychlostmi v_{iz} , o počtu n_i pro jednotlivé rychlosti, je za dobu $d\tau$

$$dW_z = -m u ds d\tau \sum_i n_i v_{iz}^2. \quad (1)$$

Označme

$$\sum n_i v_{iz}^2 = n v_z^2, \quad (2)$$

kde n je počet všech molekul v jednotce objemové a $\bar{v}_z^2$ je střední kvadratická rychlost molekul směrem osy z . Poněvadž střední kvadratické rychlosti molekul ve směrech os x , y a z jsou stejné, je

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 = 3 \bar{v}_z^2,$$

a tedy

$$n \bar{v}^2 = 3 n \bar{v}_z^2.$$

Poněvadž střední energie jedné molekuly je

$$\bar{w} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} m \bar{v}_z^2,$$

je energie celého objemu V , v němž je nV molekul,

$$W = nV \bar{w} = \frac{3}{2} m n V \bar{v}_z^2. \quad (3)$$

Změna objemu v čase $d\tau$ je na ploše pístu ds celkem

$$dV = u ds d\tau \quad (4)$$

a poněvadž změna energie se děje jen pohybem ve směru osy z , je podle (1) a (2) změna energie

$$dW = dW_z = - m u ds d\tau n \bar{v}_z^2.$$

Užitím (4) pak

$$dW = - m n \bar{v}_z^2 dV. \quad (5)$$

Vydělením (5) a (3) dostáváme

$$\frac{dW}{W} = -\frac{2}{3} \frac{dV}{V}$$

a po integraci

$$\ln(W V^{\frac{2}{3}}) = \text{konst.}$$

čili

$$W V^{\frac{2}{3}} = \text{konst.}$$

Poněvadž energie plynu je úměrná teplotě, vychází

$$T V^{\frac{2}{3}} = \text{konst.},$$

což se mělo odvodit.

b) Užitím zákonů termodynamiky

Uvedený vztah lze snadněji odvodit ze vztahu pro stavovou rovnici, pro děj adiabatický a pro hodnotu κ pro jednoatomový plyn

$$p v = R T, \quad (6)$$

$$p v^{\kappa} = K, \quad (7)$$

$$\kappa = \frac{5}{3},$$

kde v je objem jednoho kilomolu. Vydělením vztahu (7) vztahem (6) dostáváme

$$v^{\kappa-1} T = \text{konst.}, \quad (8)$$

a tedy pro $\kappa = \frac{5}{3}$ vychází

$$v^{\frac{2}{3}} T = \text{konst.}$$

a pro celý objem V

$$V^{\frac{2}{3}} T = \text{konst.}$$

2. Označme původní stav ve válci A písmeny p_1, V_1, T_1 a výsledný stav písmeny p'_1, V'_1, T'_1 . Dále označme původní stav ve válci B písmeny p_2, V_2, T_2 a výsledný stav písmeny p'_2, V'_2, T'_2 .

Pro první válec A , v němž jde o děj adiabatický, platí podle (7) a (8) pro celkový objem V

$$\begin{aligned} p_1 V_1^\kappa &= p'_1 V'^\kappa_1, \\ V_1^{\kappa-1} T_1 &= V'^{\kappa-1}_1 T'_1. \end{aligned}$$

Vedle toho plyne ze stavové rovnice a ze vztahu pro adiabatický děj

$$\begin{aligned} p v &= R T, \\ p v^\kappa &= K \end{aligned}$$

vztah mezi tlakem a teplotou vyloučením v

$$p^{\kappa-1} = \text{konst. } T^\kappa$$

čili

$$p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} T^{-1} = K_1$$

anebo

$$p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} T_1^{-1} = p'^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}_1 T'^{-1}_1.$$

Pro $\kappa = \frac{5}{3}$ dostáváme rovnice

$$p_1 V_1^{\frac{5}{3}} = p'_1 V'^{\frac{5}{3}}_1, \quad (9)$$

$$V_1^{\frac{2}{3}} T_1 = V'^{\frac{2}{3}}_1 T'_1, \quad (10)$$

$$p_1^{\frac{2}{5}} T_1^{-1} = p_1'^{\frac{2}{5}} T_1'^{-1}. \quad (11)$$

Vyjděme z toho, že $\frac{V_1'}{V_1} = 8$; pak z (10)

$$\frac{T_1'}{T_1} = \left(\frac{V_1'}{V_1} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} \quad (12)$$

a pak z (11)

$$\frac{p_1'}{p_1} = \left(\frac{T_1'}{T_1} \right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{32}. \quad (13)$$

Poněvadž jde v A o změnu adiabatickou, je práce A_1 vykonaná argonem rovna úbytku jeho vnitřní energie. Práce vykonaná argonem je dodána kyslíku, který ji při izotermické změně dodá ve formě tepla Q termostatu. Musí tedy platit

$$A_1 = -\Delta U_1 = -A_2 = -Q_2 = Q. \quad (14)$$

Jestliže označíme kilomolovou hmotnost argonu μ , je v množství M (v kg) argonu $\frac{M}{\mu}$ kilomolů argonu. Označíme-li kilomolové teplo při konstantním tlaku C_p a při konstantním objemu C_V , pak pro ně platí

$$C_p - C_V = R, \quad \frac{C_p}{C_V} = \kappa$$

a z toho

$$C_V (\kappa - 1) = R$$

čili

$$C_V = \frac{R}{\kappa - 1}.$$

Pro změnu vnitřní energie pak platí

$$\Delta U_1 = \frac{M}{\mu} \frac{R}{\kappa - 1} (T'_1 - T_1)$$

a podle (14) je

$$\Delta U_1 = -Q,$$

a tedy

$$Q = -\frac{M}{\mu} \frac{R}{\kappa - 1} T_1 \left(\frac{T'_1}{T_1} - 1 \right).$$

Z toho

$$T_1 = Q \frac{\mu(\kappa - 1)}{MR} \frac{1}{\left(1 - \frac{T'_1}{T_1}\right)}$$

a po dosazení za $Q = 747,9 \text{ J}$, $\mu = 40 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$, $R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K kmol}}$, $M = 32 \text{ kg}$, $\kappa = \frac{5}{3}$ a podle (12) $\frac{T'_1}{T_1} = \frac{1}{4}$ dostáváme

$$T_1 = 747,9 \cdot 10^4 \frac{40 \cdot 2}{3 \cdot 32 \cdot 8,314 \cdot 10^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)} \text{ K} = 1000 \text{ K}.$$

Pak podle (12)

$$T'_1 = 250 \text{ K}.$$

Plyn v nádobě B vydal teplo rovné dodané práci. Práce vykonaná při změně objemu z V_2 na V'_2 při změně izotermické je

$$A_2 = \int_{V'_2}^{V_2} p \, dV$$

a užitím stavové rovnice

$$p V = \frac{m}{\mu_2} R T_2,$$

kde m je hmotnost kyslíku a μ_2 kilomolová hmotnost kyslíku, dostáváme

$$A_2 = \frac{m}{\mu_2} R T_2 \int_{V_2}^{V_2'} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu_2} R T_2 \ln \frac{V_2'}{V_2}.$$

Pak podle (14)

$$Q = \frac{m}{\mu_2} R T_2 \ln \frac{V_2}{V_2'}$$

a z toho

$$\ln \frac{V_2}{V_2'} = \frac{Q \mu_2}{m R T_2},$$

kde

$$m = V_2 \varrho_2,$$

$$\varrho_2 = \frac{\varrho_0}{1 + 0,003661 \cdot 27} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{1,42893}{1,098847} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$m = \frac{1,42893}{1,098847} V_2,$$

$$\mu_2 = 32 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}},$$

$$R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K kmol}},$$

$$T_2 = T_2' = (27 + 273) \text{ K} = 300 \text{ K},$$

$$Q = 747,9 \cdot 10^4 \text{ J}$$

Dosazením hodnot určíme $\ln \frac{V_2}{V_2'}$. Z daných hodnot vychází však nemožný výsledek. K danému V_2 lze pak určit V_2' . Poněvadž p_2 je dáno — $p_2 = 1,00 \text{ atm}$, lze vypočítat ze vztahu pro izotermickou změnu

$$p_2 V_2 = p_2' V_2'$$

tlak p_2' a k tomu $p_1' = p_2'$.

Pak podle (13)

$$p_1 = 32 p_1'.$$

Ke známým hodnotám $p_1 T_1$ určíme ze stavové rovnice

$$p_1 V_1 = \frac{M}{\mu} R T_1$$

objem V_1 a k tomu objem $V_1' = 8 V_1$.

3. Prvý plyn měl objem V_1' , tlak p_1' a teplotu T_1' , druhý plyn objem V_2' , tlak $p_2' = p_1'$ a teplotu $T_2' = T_2$. Po smíchání plynů bude mít směs tlak p , teplotu T , objem $V_1' + V_2' = V_1 + V_2$ a musí platit

$$\frac{p(V_1' + V_2')}{T} = p_1' \left(\frac{V_1'}{T_1'} + \frac{V_2'}{T_2'} \right);$$

z toho

$$p = p_1' \frac{\frac{T}{T_1'} V_1' + \frac{T}{T_2'} V_2'}{V_1' + V_2'}.$$

Poněvadž válec B je v termostatu o teplotě

$$T_2 = T_2' = T = 300 \text{ K},$$

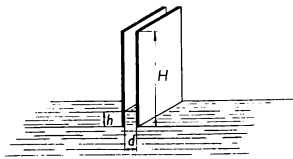
je

$$p = p_1 \frac{T' V'_1 + V'_2}{V'_1 + V'_2}.$$

3. úloha

Text:

Rovinný pravoúhlý nabitý kondenzátor stojí svisle tak, že jeho spodní okraj se právě dotýká tekutého dielektrika (obr. 61).



Obr. 61

Určete výšku, do které kapalina vystoupí mezi deskami kondenzátoru, a vysvětlete tento jev. Kapilární síly jsou zanedbatelné. Předpokládá se, že vzdálenost mezi deskami kondenzátoru je mnohokrát menší než lineární rozměry desek.

Je dána intenzita E počátečního elektrického pole mezi deskami nabitého kondenzátoru, hustota ρ , relativní dielektrická konstanta ε_r kapaliny a výška H desek kondenzátoru.

Proveďte diskusi úlohy.

Řešení:

Kapacita deskového kondenzátoru je

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 H l}{d},$$

kde H je výška desek, l šířka desek a d vzdálenost desek.

Energie kondenzátoru o kapacitě C_0 , potenciálním rozdílu U_0 a náboji Q_0 je

$$W_0 = \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C_0}. \quad (1)$$

Když se kapalina vtáhne mezi desky kondenzátoru do výšky h , bude kapacita kondenzátoru sestávat z kapacit paralelně zapjatých dvou kondenzátorů. Kapacita vzduchového kondenzátoru bude

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 (H - h) l}{d}$$

a kapacita kondenzátoru s kapalinovým dielektrikem bude

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r h l}{d}; \quad (2)$$

tedy celková kapacita bude

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r h l}{d} + \frac{\epsilon_0 (H - h) l}{d}.$$

Energie bude sestávat z elektrické energie kondenzátoru a z gravitační energie kapaliny, která se vtáhla mezi desky kondenzátoru. Celková energie musí být rovna energii

původní. Označíme-li m hmotnost vtažené kapaliny, bude tedy platit

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} + m g \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C_0}$$

čili

$$\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} + \frac{1}{2} l h^2 d \varrho g = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C_0}.$$

Poněvadž

$$C = \frac{\varepsilon_0}{d} h l (\varepsilon_r - 1) + C_0,$$

je

$$\frac{1}{2} Q_0^2 \cdot \left(\frac{1}{C_0} - \frac{1}{\frac{\varepsilon_0}{d} (\varepsilon_r - 1) h l + C_0} \right) = \frac{1}{2} l h^2 d \varrho g$$

čili

$$Q_0^2 \frac{\frac{\varepsilon_0}{d} (\varepsilon_r - 1) h l}{C_0 \left(C_0 + \frac{\varepsilon_0}{d} (\varepsilon_r - 1) h l \right)} = l h^2 d \varrho g.$$

Z toho

$$C_0 \frac{\varepsilon_0}{d} (\varepsilon_r - 1) l d \varrho g h^2 + C_0^2 d \varrho g h - Q_0^2 \frac{\varepsilon_0}{d} (\varepsilon_r - 1) = 0$$

a řešením

$$\begin{aligned} h_{1,2} &= \\ &= \frac{-C_0^2 d \varrho g \pm \sqrt{C_0^4 d^2 \varrho^2 g^2 + 4 C_0 Q_0^2 \frac{\varepsilon_0^2}{d^2} (\varepsilon_r - 1)^2 l d \varrho g}}{2 C_0 \frac{\varepsilon_0}{d} (\varepsilon_r - 1) l d \varrho g} = \end{aligned}$$

$$= - \frac{C_0}{2 \frac{\varepsilon_0}{d} (\varepsilon_r - 1) l} \pm \sqrt{\frac{C_0^3 d \varrho g + 4 Q_0^2 \frac{\varepsilon_0^2}{d^2} (\varepsilon_r - 1)^2 l}{4 C_0 \frac{\varepsilon_0^2}{d^2} (\varepsilon_r - 1)^2 l^2 d \varrho g}}.$$

Poněvadž

$$Ed = U_0 = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{Q_0 d}{\varepsilon_0 H l},$$

vychází

$$Q_0 = \varepsilon_0 H l E,$$

a poněvadž

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 H l}{d},$$

je

$$\begin{aligned} h_{1,2} &= - \frac{\varepsilon_0 H l}{d \cdot 2 \frac{\varepsilon_0}{d} (\varepsilon_r - 1) l} \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_0^3 H^3 l^3}{d^3} d \varrho g + 4 \varepsilon_0^2 H^2 l^2 E^2 \frac{\varepsilon_0^2}{d^2} (\varepsilon_r - 1)^2 l}{4 \frac{\varepsilon_0 H l}{d} \frac{\varepsilon_0^2}{d^2} (\varepsilon_r - 1)^2 l^2 d \varrho g}} = \\ &= - \frac{H}{2 (\varepsilon_r - 1)} \pm \sqrt{\frac{H^2 \varrho g + 4 \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)^2 H E^2}{4 (\varepsilon_r - 1)^2 \varrho g}} = \\ &= - \frac{H}{2 (\varepsilon_r - 1)} \pm \sqrt{\frac{H^2}{4 (\varepsilon_r - 1)^2} + \frac{\varepsilon_0 H E^2}{\varrho g}} = \\ &= \frac{H}{2 (\varepsilon_r - 1)} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_0 E^2}{\varrho g} \frac{4 (\varepsilon_r - 1)^2}{H}} \right) = \\ &= \frac{H}{2 (\varepsilon_r - 1)} \left[-1 \pm \left(1 + \frac{2 \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)^2 E^2}{\varrho g H} \right) \right]. \end{aligned}$$

Z toho přibližně (h musí být kladné)

$$h \doteq \frac{H}{2(\varepsilon_r - 1)} \frac{2\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)^2 E^2}{\rho g H} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\rho g} E^2. \quad (3)$$

Jestliže mezi desky kondenzátoru dáme dielektrikum o permitivitě $\varepsilon > \varepsilon_0$, bude jeho kapacita podle (2) větší. Při nabitém kondenzátoru, jehož desky nejsou spojeny se zdrojem, je elektrický náboj na deskách stálý. Proto se se zvětšující kapacitou zmenšuje energie. Tato přebývající energie může vykonat práci, která se projeví tím, že kapalina vystoupí mezi deskami kondenzátoru. Toto vystoupení kapaliny je podle (3) větší, když je větší intenzita elektrického pole, větší relativní permitivita kapaliny a menší její hustota.

4. úloha

Text:

Tenká ploskovypuklá čočka má průměr $2R$, poloměr křivosti r a index lomu N_0 . Je postavena tak, že po její levé straně je vzduch ($N_1 = 1$) a po její pravé straně průhledné prostředí, jehož index lomu je $N_2 \neq 1$. Konvexní strana čočky hraničí se vzduchem. Ve vzduchu ve vzdálenosti x od čočky (měřeno na hlavní optické ose) se nachází bodový monochromatický zdroj světla.

1. Dokažte, že v Gaussově prostoru mezi polohou obrazu určenou vzdáleností x' od čočky a polohou světelného zdroje platí vztah

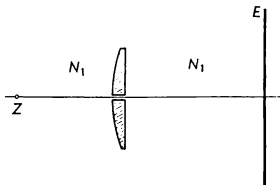
$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1; \quad (1)$$

přitom f je předmětová (ve vzduchu) a f' obrazová (v prostředí s indexem lomu N_2) ohnisková vzdálenost.

Poznámka: Všechny indexy lomu jsou absolutní.

2. Čočka je rozříznuta kolmo ke své rovinné ploše na dvě stejné části. Tyto části jsou od sebe vzdáleny o $\delta \ll \ll R$ (Billetova dvojčočka). Na osu symetrie tohoto systému ve vzdálenosti x_1 ($|x_1| > |f|$) je umístěn bodový zdroj světla Z (obr. 62).

Vpravo od tohoto systému ve vzdálenosti d je stínítko E rovnoběžné s čočkou. Na tomto stínítku vznikne potom N interferenčních proužků, je-li vpravo od čočky také vzduch. Určete N jako funkci vlnové délky světla λ



Obr. 62

$$N = f(\lambda).$$

Poznámka: Označení bylo zde převedeno na náš způsob označení: p_1 na x , p_2 na x' , f_1 na f , f_2 na f' , n_0 na N_0 , n_1 na N_1 , n_2 na N_2 , poloměr křivosti čočky R na r , průměr čočky $2r$ na $2R$ a vzdálenost s_1 na x_1 .

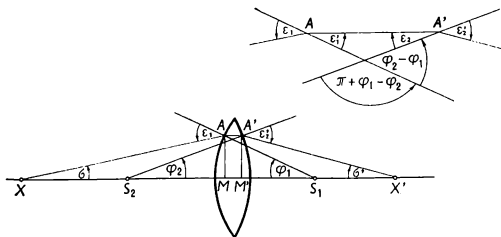
Řešení:

1. Uvedený vztah (1) odvodíme nejprve pro čočku dvojvypuklou a pak přejdeme k čočce ploskovypuklé. Odvození můžeme provést několika způsoby.

a) Odvození z lomu na dvou kulových plochách.

Zvolíme čočku dvojvypuklou, takže $r_1 > 0$, $r_2 < 0$. Označme středy křivosti jednotlivých ploch S_1 a S_2 (obr. 63), úhel dopadu a lomu na první ploše ε_1 , ε'_1 a na druhé ploše ε_2 , ε'_2 . Poněvadž jde o Gaussův prostor, a tedy o malé úhly, lze psát pro lom

$$N_1 \varepsilon_1 = N_0 \varepsilon'_1, \quad N_0 \varepsilon_2 = N_2 \varepsilon'_2. \quad (2)$$



Obr. 63

Dále vyznačme úhel paprsku vycházejícího z bodu X s optickou osou σ , úhel paprsku dopadajícího do bodu X' s optickou osou σ' , úhel normály v bodě dopadu A s optickou osou φ_1 a úhel normály v bodě A' s optickou osou φ_2 . Pak při užití orientovaných přímek a úhlů platí podle obr. 63

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_1 - \varepsilon_2 &= -\varphi_1 + \varphi_2, \\ \varepsilon_1 &= \sigma - \varphi_1, \\ -\varepsilon'_2 &= -\sigma' + \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Upravou a odečtením rovnic (2) dostáváme

$$N_1 \varepsilon_1 - N_2 \varepsilon'_2 = N_0 (\varepsilon'_1 - \varepsilon_2)$$

a dosazením za ε_1 , ε'_2 a $(\varepsilon'_1 - \varepsilon_2)$ z (3)

$$N_1 (\sigma - \varphi_1) - N_2 (\sigma' - \varphi_2) = N_0 (-\varphi_1 + \varphi_2). \quad (4)$$

Poněvadž podle obr. 63

$$\sigma \doteq \operatorname{tg} \sigma = \frac{MA}{XM}, \quad \sigma' \doteq \operatorname{tg} \sigma' = \frac{M'A'}{X'M'},$$

$$\varphi_1 \doteq \sin \varphi_1 = \frac{MA}{S_1 A}, \quad \varphi_2 \doteq \sin \varphi_2 = \frac{M'A'}{S_2 A'}$$

a poněvadž považujeme čočku za tenkou, lze psát $M'A' = MA$, $XM = -x$, $X'M' = -x'$, $S_1 A = -r_1$, $S_2 A' = -r_2$, dostaneme dosazením do (4)

$$N_1 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{r_1} \right) - N_2 \left(-\frac{1}{x'} + \frac{1}{r_2} \right) = N_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

$$-\frac{N_1}{x} + \frac{N_2}{x'} = (N_0 - N_1) \frac{1}{r_1} - (N_0 - N_2) \frac{1}{r_2}. \quad (5)$$

Když $x' \rightarrow \infty$, dostáváme pro f

$$-\frac{N_1}{f} = (N_0 - N_1) \frac{1}{r_1} - (N_0 - N_2) \frac{1}{r_2}, \quad (6)$$

když $x \rightarrow \infty$, dostáváme pro f'

$$+\frac{N_2}{f'} = (N_0 - N_1) \frac{1}{r_1} - (N_0 - N_2) \frac{1}{r_2},$$

a tedy

$$-\frac{N_1}{f} = \frac{N_2}{f'}$$

čili

$$f' = -\frac{N_2}{N_1} f. \quad (7)$$

Dosazením vztahu (6) do rovnice (5) dostaneme

$$-\frac{N_1}{x} + \frac{N_2}{x'} = -\frac{N_1}{f}$$

čili

$$\frac{f}{x} - \frac{N_2}{N_1} \frac{f}{x'} = 1$$

a užitím (7) dostaneme

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1. \quad (8)$$

Pro čočku ploskovypuklou platí opět rovnice (8) — není v ní přímo r_1 a r_2 — a pro ohniskové vzdálenosti dostaneme ze (6) a (7) pro $r_2 \rightarrow \infty$

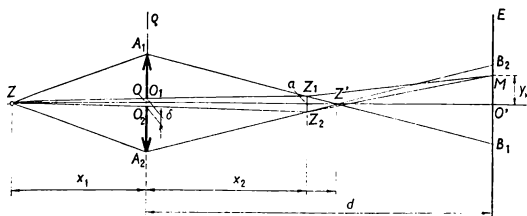
$$f = -\frac{N_1}{N_0 - N_1} r_1, \quad f' = \frac{N_2}{N_0 - N_1} r_1.$$

Tím je uvedený vztah dokázán pro tenkou čočku a Gausův prostor.

b) Odvození lze provést užitím Fermatova principu.

2. Interference Billetovou dvojčočkou

Vyznačme si tenkou čočku v rovině ϱ (obr. 64). Vzdálenost zdroje monochromatického světla Z od této roviny



Obr. 64

označme x_1 a zvolme $|x_1| > |f|$, aby se vytvořily skutečné obrazy Z_1 a Z_2 oběma částmi dvojčočky. Šířku mezeru mezi oběma částmi označíme δ ($\delta \ll R$) a body omezující mezeru O_1, O_2 . Paprsky jdoucí body O_1 a O_2 se nelámou, paprsky ZA_1 , resp. ZA_2 , se lámou a protnou se s paprsky procházejícími body O_1 a O_2 v bodech Z_1 a Z_2 , které jsou reálnými obrazy bodu Z vytvořenými dvojčočkou. Tím dostáváme dva koherentní zdroje a paprsky vycházející z těchto zdrojů mohou interferovat. Vzdálenost obrazů Z_1 a Z_2 od čočky O_1Z_1, O_2Z_2 je přibližně rovna vzdálenosti OZ' a označíme ji x_2 . Vzdálenost stínítka rovnoběžného s čočkou od čočky označme d a vzdálenost $Z_1Z_2 = a$.

Pro vzdálenost a platí podle obrázku

$$a = \delta \frac{x_1 + x_2}{x_1} = \delta \left(1 + \frac{x_2}{x_1} \right).$$

V místech, kam přijde světlo z obou zdrojů Z_1 a Z_2 ve stejné fázi, vznikne barevný proužek. Poněvadž v místě průsečíku optické osy se stínítkem je $Z_1 O' = Z_2 O'$, vznikne zde barevný proužek. V místě M ve vzdálenosti y_k od optické osy se objeví barevný proužek, jestliže bude platit

$$Z_2 M - Z_1 M = k \lambda,$$

kde λ je délka vlny světla. Indexem k u y vyznačujeme, že jde o k -tý interferenční proužek. Vyjádříme-li vzdálenosti pomocí d , a a y_k , dostaneme pro body blízké optické ose

$$\begin{aligned} k \lambda = Z_2 M - Z_1 M &= \sqrt{(d - x_2)^2 + \left(y_k + \frac{a}{2}\right)^2} - \\ &\quad - \sqrt{(d - x_2)^2 + \left(y_k - \frac{a}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{\left(y_k + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(y_k - \frac{a}{2}\right)^2}{\sqrt{(d - x_2)^2 + \left(y_k + \frac{a}{2}\right)^2} + \sqrt{(d - x_2)^2 + \left(y_k - \frac{a}{2}\right)^2}} = \\ &= \frac{a y_k}{d - x_2}, \end{aligned}$$

poněvadž $\left(y_k \pm \frac{a}{2}\right)^2$ je malé vzhledem k $(d - x_2)^2$. Tedy k -tý proužek (na ose je nultý) bude přibližně ve vzdálenosti od osy

$$y_k = k \frac{d - x_2}{a} \lambda$$

a barevné proužky budou přibližně ve vzdálenosti

$$u = y_k - y_{k-1} = \frac{d - x_2}{a} \lambda;$$

po úpravě

$$y_k = k \frac{(d - x_2)}{\delta \left(1 + \frac{x_2}{x_1}\right)}, \quad u = \frac{d - x_2}{\delta \left(1 + \frac{x_2}{x_1}\right)} \lambda.$$

Poněvadž

$$B_1 B_2 = A_1 A_2 \frac{d - x_2}{x_2} = 2R \frac{d - x_2}{x_2},$$

je počet interferenčních proužků v celém intervalu $B_1 B_2$ vymezeném krajními paprsky jdoucími dvojčočkou

$$\begin{aligned} N &= \frac{B_1 B_2}{u} = 2R \frac{d - x_2}{x_2} \frac{\delta \left(1 + \frac{x_2}{x_1}\right)}{(d - x_2) \lambda} = \\ &= 2R \frac{\delta \left(1 + \frac{x_2}{x_1}\right)}{x_2 \lambda}. \end{aligned}$$

5. úloha

Text:

Máme dva válce z téhož materiálu a o stejných vnějších rozměrech. Jsou k dispozici dvě pravítka, jedno se stupnicí, druhé bez stupnice a nádoba s vodou.

Je známo, že jeden válec je plný a v druhém je dutina, která má tyto vlastnosti:

- a) má válcový tvar,
- b) její osa je rovnoběžná s osou tělesa (válce),
- c) její délka je prakticky stejná jako délka válce.

Určete experimentálně a zdůvodněte teoreticky:

1. relativní (vzhledem k vodě) hustotu materiálu, z něhož jsou zhotovena tělesa,
2. poloměr válcové dutiny,
3. vzdálenost osy válcové dutiny od osy válce.

Poukažte na zdroje chyb, proveďte výpočet chyb a určete, které z nich nejvíce ovlivňují výsledky.

Popište další možné způsoby řešení, které jste našli.

Řešení:

Mlčky je v úloze předpokládáno, že hustota válců je menší než hustota vody a větší než 0,5 hustoty vody a že válce plovou s osou vodorovnou.

1. Určení poměru hustoty materiálu, z něhož jsou tělesa, a hustoty vody

Označme vnější poloměr válců R a jejich délku l . Objem plného válce označme V , objem vytlačené vody tímto válcem V_1 . Hustota materiálu válců je ϱ a hustota vody ϱ_1 . Pak pro hmotnost plného válce platí

$$m = V \varrho = \pi R^2 l \varrho \quad (1)$$

a pro hmotnost vody vytlačené plným válcem

$$m = V_1 \varrho_1 = S_1 l \varrho_1, \quad (2)$$

kde S_1 je plošný obsah části podstavy válce, která je ponořena do vody. Ze vztahů (1) a (2) plyne

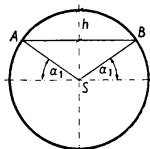
$$\pi R^2 \varrho = S_1 \varrho_1$$

čili

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{S_1}{\pi R^2}.$$

Poloměr určíme změřením průměru válce d

$$R = \frac{d}{2}.$$



Obr. 65

Plocha S_1 sestává z $\triangle SBA$ a z kruhové výseče ASB o středovém úhlu $\pi + 2\alpha_1$ (obr. 65). Plošný obsah $\triangle SBA$ je roven

$$P_{\Delta} = (R - h) R \cos \alpha_1 = (R - h) \sqrt{(2R - h)h};$$

plošný obsah výseče kruhové ASB

$$P_v = \pi R^2 \frac{\pi + 2\alpha_1}{2\pi} = \pi R^2 \frac{\pi + 2 \arcsin \frac{R-h}{R}}{2\pi},$$

a tedy

$$S_1 = \frac{R^2}{2} \left(\pi + 2 \arcsin \frac{R-h}{R} \right) + (R-h) \sqrt{(2R-h)h}. \quad (3)$$

Je tedy hustota materiálu

$$\varrho = \varrho_1 \left[\frac{1}{2\pi} \left(\pi + 2 \arcsin \frac{R-h}{R} \right) + \frac{R-h}{\pi R^2} \sqrt{(2R-h)h} \right]. \quad (4)$$

Určíme měřítkem průměr válce, z toho vypočteme poloměr, pak určíme výšku h a ze vztahu (4) určíme ϱ vzhledem k hodnotě ϱ_1 .

2. Určení poloměru válcové dutiny

Označíme-li poloměr válcové dutiny r , je hmotnost válce s dutinou

$$m' = \pi R^2 l \varrho - \pi r^2 l \varrho = \pi l \varrho (R^2 - r^2).$$

Označíme-li plochu ponořené základny S'_1 , je hmotnost vytlačené vody

$$m'_1 = S'_1 l \varrho_1.$$

Z těchto rovnic vychází podle zákona Archimédova

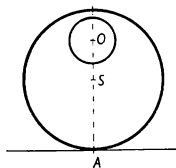
$$\pi l \varrho (R^2 - r^2) = S'_1 l \varrho_1,$$

$$R^2 - r^2 = S'_1 \frac{\varrho_1}{\pi \varrho},$$

$$r^2 = R^2 - \frac{\varrho_1}{\pi \varrho} S'_1. \quad (5)$$

K určení S'_1 postupujeme jako v 1; naměříme h' a vypočteme S'_1 podle vztahu (3), v němž dosadíme $h = h'$ a dříve určené R .

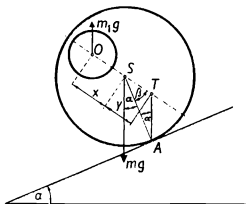
3. Určení vzdálenosti osy válcové dutiny od osy válce



Obr. 66

Položíme-li dutý válec povrchovou přímkou na vodorovnou rovinu, musí se ustálit v takové poloze, že bude těžiště nad povrchovou přímkou, kterou se válec dotýká vodorovné roviny. Poloha bude stabilní, když osa dutiny bude nad osou válce; pak bude totiž těžiště nejníž (obr. 66) a při vychýlení z rovnovážné polohy se těžiště bude zvedat.

Když položíme dutý válec na nakloněnou rovinu (obr. 67), pak — pokud nepřekročí úhel α nakloněné roviny určitý úhel — bude válec v klidu, když bude těžiště svisle nad povrchovou přímkou, kterou se válec dotýká nakloněné roviny. Úhel, který svírá přímka, která je průsečnicí roviny proložené oběma osami s nákretnou, se spojnici SA , označme β (obr. 67).



Obr. 67

Označme vzdálenost obou os x a vzdálenost ST y . Polohu těžiště můžeme určit tak, že si představíme, že tíhová síla mg plného válce působí v bodě S svisle dolů, tíhová síla m_1g válce, který by tvořil dutinu v materiálu stejné hustoty, že působí v bodě O svisle vzhůru. Když je válec v klidu, musí být součet momentů těchto sil vzhledem k těžišti roven nule

$$mgy \sin(\alpha + \beta) = m_1g(x + y) \sin(\alpha + \beta);$$

z toho

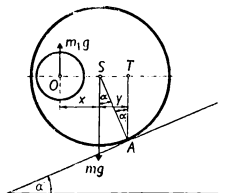
$$(m - m_1)y = m_1x,$$

$$x = \frac{m - m_1}{m_1} y = \frac{m'}{m_1} y, \quad (6)$$

kde m' je hmotnost dutého válce.

Jestliže úhel α zvětšujeme, pak k vyrovnaní rovnováhy se úhel β zvětšuje. Když nabude hodnoty $\frac{\pi}{2} - \alpha$, bude

spojnice OT vodorovná (obr. 68) a při dalším zvětšení úhlu nelze získat rovnováhu a válec se valí po nakloněné rovině. Naznačíme-li na podstavě válce přímky OT a TA , pak



Obr. 68

$$\sin \alpha = \frac{y}{R}$$

a po dosazení do (6) dostaneme

$$x = \frac{m'}{m_1} R \sin \alpha.$$

Poněvadž

$$\begin{aligned} \frac{m'}{m_1} &= \frac{m - m_1}{m_1} = \\ &= \frac{\pi (R^2 - r^2) l \varrho}{\pi r^2 l \varrho_1} = \frac{R^2}{r^2} - 1, \end{aligned}$$

je

$$x = \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) R \sin \alpha.$$

Je třeba naměřit R a α a podle (5) určit r z naměřených, resp. určených veličin S , ϱ a ϱ_1 .

4. Zdroje chyb

Hustota je určena s chybou, která souvisí s naměřením R a naměřením h . Výška h se ve vodě určí zvlášť nepřesně.

Poloměr válcové dutiny je zatížen chybou z naměřeného R , výšky h' a z chyby určeného poměru hustot $\frac{\varrho}{\varrho_1}$. Je dán rozdílem dvou veličin, takže chyba je značně velká.

Vzdálenost os obou válců je zatížena chybou z určení poloměru R , vypočteného poloměru r a z určeného úhlu α .

Chyby uvedených veličin se určí užitím teorie chyb měřené a vypočtené veličiny.

Obsah

I. část: Zpráva o průběhu soutěže	3
1. Cíl soutěže a její organizace	3
2. Složení ústředního výboru fyzikální olympiády ve školním roce 1971/72	5
3. Krajské výbory FO ve šk. roce 1971/72 a jejich předsedové	7
4. Průběh soutěže ve školním roce 1971/72	8
A. První kolo soutěže kategorií A, B, C a D	8
B. Druhé kolo soutěže kategorií A, B, C a D	11
C. Třetí kolo soutěže kategorií A	19
D. Závěr soutěže kategorií A, B, C a D	25
E. Soutěž kategorie E	25
II. část: Soutěžní úlohy	32
1. Úlohy kategorie A	32
a) První kolo soutěže	32
b) Druhé kolo soutěže	56
c) Třetí kolo soutěže	64
2. Úlohy kategorie B	77
a) První kolo soutěže	77
b) Druhé kolo soutěže	93
3. Úlohy kategorie C	100
a) První kolo soutěže	100
b) Druhé kolo soutěže	120
4. Úlohy kategorie D	130
a) První kolo soutěže	130
b) Druhé kolo soutěže	142
5. Úlohy kategorie E	149
a) První kolo soutěže	149
b) Druhé kolo soutěže	165
c) Třetí kolo soutěže	172
III. část: Šestá mezinárodní fyzikální olympiáda	178
1. Průběh a výsledky soutěže	178
2. Soutěžní úlohy	188

Edice: Pomocné knihy pro žáky

Prof. dr. Rostislav Košťál, Václav Suchánek
a doc. dr. Ivan Náter

Třináctý ročník fyzikální olympiády

Obálku navrhl Josef Prchal

Obrázky rýsoval Josef Kubík

Odpovědná redaktorka: Jiřina Cívínová

Výtvarná redaktorka: Milada Slaninová

Technický redaktor: Miloš Jirsa

Z písmá Plantin vytisklo Rudé právo, tiskařské závody,
Brno

1. vydání

AA 8,32 — VA 8,87

Náklad 3000 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/5

Cena brožovaného výtisku Kčs 11,—

505/21,852

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,
v Praze jako svou publikaci č. 35-0-28

14-519-73 Kčs 11,—
