VLASTIMIL JANKŮ, PROF. DR. ROSTISLAV KOŠŤÁL,
DOC. DR. IVAN NÁTER

XII. ročník fyzikální olympiády

ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE
KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1970/71

PRAHA
STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Zpracovali: Vlastimil Janků, prof. dr. Rostislav Košťál a doc. dr. Ivan Náter
Recenzovali: František Živný a Jozef Zámečník

I. ČÁST

ZPRÁVA O PRŮBĚHU SOUTĚŽE

1. Cíl soutěže a její organizace

XIV. sjezd Komunistické strany Československa, který se konal v květnu 1971 a jehož přípravou a jednáním žila celá naše společnost, vytyčil pro příští období závažný úkol urychlit tempo vědeckotechnického pokroku, který je rozhodující pákou vzestupu socialistického hospodářství. Sjezd zdůraznil rovněž úkol systematicky pečovat o růst politické a odborné kvalifikace kádrů a o uplatňování mladých talentovaných lidí. Zvláště náročné úkoly při formování socialistického vědomí mladých lidí musí plnit naše školství, jehož posláním je připravit mladou generaci v souladu s potřebami socialistické ekonomiky i jednotlivých oblastí společenského života.

V tomto školním roce přispívala vědomě k plnění výše uvedených základních úkolů též soutěž fyzikální olympiáda, která se konala již podvanácté pro žáky výběrových středních škol a poosmé pro žáky devátých tříd základních devítiletých škol.

Organizační řád soutěže fyzikální olympiáda (FO) je stejně jako pro matematickou olympiádu (MO) dán výnosem ministerstva školství a kultury (MŠK) ze dne 14. března 1963, č. 2293/63—I/1. Obě soutěže mají vzbudit u žáků větší zájem o studium fyziky a matematiky, vést žáky k samostatné práci, mají pomoci při vyhledávání nadaných žáků a při rozvoji jejich talentu. Jak fyzikální, tak matematická olympiáda vytvářejí předpoklady pro solidnější a hlubší přípravu studentů na vysokých školách technického, přírodovědného a matematicko-fyzikálního zaměření. U žáků ZDŠ se díky soutěži vytvářejí příznivé podmínky pro vstup do technicky náročnějších zaměstnání nebo pro další studium.

Ve XII. ročníku probíhala soutěž FO ve čtyřech kategoriích. (Kategorie A byla určena pro žáky IV. ročníků gymnasií, III. ročníků SVVŠ a III. a IV. ročníků středních odborných škol; kategorie B pro žáky II. a III. ročníků gymnasií a II. ročníků středních odborných škol; kategorie C pro žáky I. ročníků všech výběrových středních škol a kategorie D pro žáky 9. ročníků ZDŠ.) Jako obvykle probíhala soutěž v kategoriích A a D ve třech kolech, v kategoriích B a C ve dvou kolech. V prvém kole bylo zadáno k řešení 9 úloh, úspěšný řešitel jich musel dobře vyřešit nejméně 6, přičemž musel v kategoriích A, B a C řešit (třeba i neúspěšně) jednu úlohu experimentální. Kromě toho měl účastník soutěže (v kategorii A, B, C) prostudovat fyzikální téma, na něž navazovala zpravidla jedna úloha 1. kola a jedna úloha 2. nebo 3. kola. V druhém krajském kole kategorií A, B, C jsou zadány 4 úlohy, ve třetím, celostátním kole kategorie A se zadává 5 úloh, z nichž jedna je laboratorní. V kategorii D nebyly zadány experimentální úlohy, ani nebylo určeno téma k prostudování, 2. kolo probíhá v rámci okresu, 3. kolo v rámci kraje. Úspěšný řešitel druhého nebo třetího kola kterékoli kategorie musí vyřešit úspěšně, tj. výborně nebo dobře aspoň 50 % zadaných úloh. Klasifikační zásady se ve srovnání s dřívějšími ročníky soutěže FO nezměnily.

Pořadateli soutěže FO jsou ministerstva školství ČSR a SSR spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků. K zdárnému průběhu soutěže (podíl na odměnách vítězů, propagace soutěže) přispívá též již tradičně organizace mládeže a dětí, Socialistický svaz mládeže (SSM).

Vlastní soutěž řídí v rámci celé ČSSR Ústřední výbor fyzikální olympiády (ÚV FO) jmenovaný ministerstvy školství, v rámci krajů (resp. velkých měst) krajské výbory FO (KV FO) a v rámci okresů řídí soutěž pro žáky ZDŠ okresní výbory FO (OV FO). Na středních školách i na ZDŠ je jeden z učitelů fyziky pověřen funkcí referenta FO.

2. Složení Ústředního výboru fyzikální olympiády ve školním roce 1970/71

Ústřední výbor fyzikální olympiády se skládá ze zástupců pořádajících institucí (MŠ ČSR, MŠ SSR, JČSMF, SSM) a z učitelů vysokých a středních škol, kteří jsou do funkce jmenováni na základě návrhu JČSMF. Kromě toho jsou členy ÚV FO i všichni předsedové krajských výborů fyzikální olympiády (KV FO).

Sídlem ÚV FO je od r. 1966 Brno. Funkční období ÚV FO ustaveného v r. 1966 bylo ministerstvy školství znovu prodlouženo a sice do konce srpna 1971. V průběhu šk. roku 1970/71 nastaly ve složení ÚV FO tyto změny:

S. Josef Bartůněk, ústřední školní inspektor MŠ ČSR, odešel v červenci 1970 do důchodu a z tohoto důvodu přestal být členem ÚV FO.

Členy ÚV FO byli na návrh hlavního výboru Jednoty slovenských matematiků a fyziků jmenováni tito další zástupci Slovenska: Emilie

Chrapanová (Bratislava), ing. Daniel Kluvanec (Západoslovenský kraj), Pavol Škrinár, doc. RNDr. Ladislav Thern (Středoslovenský kraj) a doc. ing. Vincent Kavečanský (Východoslovenský kraj).

Měl tedy ÚV FO ve školním roce 1970/71 následující složení:

předseda: RNDr. Rostislav Košťál, profesor elektrotechnické fakulty VUT v Brně a 1. fakulty Vojenské akademie Antonína Zápotockého ve Vyškově;

1. místopředseda: RNDr. Ivan Náter, docent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě;

2. místopředseda: RNDr. Jiří Beránek, docent Vojenské akademie Antonína Zápotockého v Brně;

1. jednatel: Vlastimil Janků, odborný asistent Vojenské akademie Antonína Zápotockého v Brně;

2. jednatel: František Malý, odborný asistent Vojenské akademie Antonína Zápotockého v Brně.

Další členové (v abecedním pořadí):

František Cimbůrek, prof. gymnasia v Praze-Libni,
Emilie Chrapanová, učitelka ZDŠ v Bratislavě,
RNDr. Marta Chytilová, CSc., vědecká pracovnice Výzkumného ústavu pedagogického v Praze,
ing. Vincent Kavečanský, CSc., docent přírodovědecké fakulty University P. J. Šafaříka v Košicích,
ing. Daniel Kluvanec, odborný asistent pedagogické fakulty v Nitře,
Milan Rádl, odborný asistent Vysoké školy strojnické a elektrotechnické v Plzni,
Mojmír Simerský, profesor SPŠ VE v Rožnově p. Radhoštěm,
Zuzana Šimkovicová, profesorka gymnasia v Bratislavě,
Pavol Škrinár, profesor gymnasia v Prievidzi,
Jan Tesař, profesor gymnasia v důchodu, Praha,
RNDr. Ladislav Thern, docent Vysoké školy lesnické a dřevařské ve Zvolenu,
RNDr. Bohumil Vlach, docent přírodovědecké fakulty University J. E. Purkyně v Brně,
Ivo Volf, odborný asistent pedagogické fakulty v Hradci Králové,
ing. Bohumil Vybíral, CSc., odborný asistent 1. fakulty Vojenské akademie Antonína Zápotockého ve Vyškově,
Jozef Zámečník, odborný asistent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě,
František Živný, ředitel gymnasia v důchodu, Nový Bohumín.

Jednotu československých matematiků a fyziků zastupoval v ÚV FO prof. RNDr. Rostislav Košťál, Socialistický svaz mládeže ing. Bohumil Vybíral. Ministerstva školství ČSR a SSR nedelegovala v tomto školním roce do ÚV FO přímé zástupce, pracovníky ministerstev, což ve srovnání s dřívějšími léty ztěžovalo operativnost jednání ÚV FO.

Úlohy navržené do soutěže stejně jako v minulých ročnících soutěže posuzovala komise, jejíž práci řídil prvý místopředseda ÚV FO docent dr. Ivan Náter. Na tzv. základním výběru soutěžních úloh se podíleli:
Jozef Zámečník a František Živný — mechanika a vlnění,
Milan Rádl — molekulární fyzika a termika,
Ivo Volf — elektřina, magnetismus a elektromagnetické vlnění,
František Cimbůrek — optika, atomistika, experimentální úlohy.

V komisi pro konečnou redakci soutěžních úloh pracovali dr. Ivan Náter (předseda komise), Mojmír Simerský (kategorie A), dr. Marta Chytilová (kategorie B), Jan Tesař (kategorie C), dr. Bohumil Vlach (kategorie D), ing. Daniel Kluvanec a jednatel ÚV FO Vlastimil Janků. Ve školním roce 1970/71 ukončila komise výběr soutěžních úloh pro 2. a 3. kola všech kategorií XII. ročníku a vybrala úlohy pro 1. kolo XIII. ročníku, v němž proběhne soutěž ve čtyřech kategoriích pro střední výběrové školy a v jedné kategorii pro ZDŠ.

3. Krajské výbory FO ve školním roce 1970/71 a jejich předsedové

Ve srovnání s předešlými ročníky soutěže FO byly v říjnu 1970 ustaveny dva nové výbory velkých měst, které pracovaly na úrovni krajských výborů, a sice pro Bratislavu a pro Brno. Zdá se, jak plyne z vyhodnocení výsledků soutěže v tomto školním roce, že se tato organizační změna osvědčila.

Na začátku školního roku došlo též ke změně předsedy KV FO ve Východoslovenském kraji.

Předsedy i členy KV FO jmenuje na návrh poboček JČMF, resp. JSMF, odbor školství a kultury KNV. V KV FO pracují zástupci školské správy, KPÚ, poboček JČMF, resp. JSMF, SSM a zejména profesoři a učitelé fyziky. Podstatným přínosem je v práci KV FO činnost učitelů z vysokých škol jak technického, tak i universitního (zejména pedagogického) zaměření.

Předsedové KV FO pro jednotlivé kraje ve šk. r. 1970/71

Praha:	RNDr. Jaroslav Vachek, CSc., odborný asistent MF fakulty University Karlovy v Praze,
Středočeský:	Miroslav Ševčík, profesor SPŠ v Kladně a vedoucí kabinetu fyziky KPÚ pro Středočeský kraj,
Jihočeský:	Konrád Hofman, odborný asistent pedagogické fakulty v Českých Budějovicích,
Západočeský:	ing. Miloš Rabas, odborný asistent Vysoké školy strojnické a elektrotechnické v Plzni,

Severočeský:	Jaroslav Honner, vedoucí kabinetu fyziky KPÚ v Ústí nad Labem,
Východočeský:	Zdeněk Ungermann, odborný asistent pedagogické fakulty v Hradci Králové,
Brno:	RNDr. Rostislav Košťál, profesor elektrotechnické fakulty VUT v Brně,
Jihomoravský:	Lubomír Vašek, CSc., docent technologické fakulty VUT v Gottwaldově,
Severomoravský:	RNDr. Miroslav Bajer, DrSc., docent Vysoké školy báňské v Ostravě,
Bratislava:	RNDr. Ivan Náter, docent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě,
Západoslovenský:	RNDr. Ladislav Dunajský, CSc., docent Vysoké školy polnohospodárské v Nitře,
Středoslovenský:	Pavol Ferko, odborný asistent pedagogické fakulty v Banské Bystrici,
Východoslovenský:	Ing. Vincent Kavečanský, CSc., docent přírodovědecké fakulty University P. J. Šafaříka v Košicích.

Jako v krajích, tak i v okresech jsou jmenovány OV FO, které řídí v rámci okresu soutěž pro žáky ZDŠ. Je žádoucí, aby v OV FO pracovali vedle učitelů ZDŠ též učitelé středních výběrových škol, a tak ovlivňovali práci s talentovanými žáky nejvyšších ročníků ZDŠ.

4. Průběh soutěže ve školním roce 1970/71

A. První kolo soutěže kategorií A, B a C

Soutěžící řešili úlohy prvého kola v kategoriích A, B a C od září 1970 do 10. února 1971. Úlohy pro 1. kolo a pokyny soutěžícím byly otištěny v letáku vydaném ve SPN z prostředků MŠ v nákladu 4000 výtisků. Letáky byly již počátkem září 1970 distribuovány na jednotlivé školy prostřednictvím KV FO. Kromě toho byly úlohy zveřejněny v Rozhledech matematicko-fyzikálních a sice v č. 10 ročníku 48 a v č. 1 ročníku 49.

Témata k prostudování byla rovněž otištěna v číslech 1—3 ročníku 49 Rozhledů matematicko-fyzikálních.

Pro jednotlivé kategorie byla určena tato témata:

kategorie A — Elektrické pole, zpracoval RNDr. Oldřich Pivnička, Rozhledy MF, r. 49, číslo 3, str. 112—124,

kategorie B — Hydrodynamika, zpracoval Stanislav Zhejbal, Rozhledy MF, r. 49, číslo 1 a 2, str. 42—46, 78—84,

TABULKA 1

Počet středních škol, které se účastnily XII. ročníku FO

Kraj	Celkový počet gym. (SVVŠ)	Zapojeno gym.				S P Š				Ostatní školy				Celk. počet zapoj. škol			
		Kategorie			Celkem	Kategorie			Celkem	Kategorie			Celkem	Kategorie			Celkem
		A	B	C		A	B	C		A	B	C		A	B	C	
Praha	23	10	18	17	20	1	—	6	7	—	—	—	—	11	18	23	27
StČ	24	12	18	10	22	1	1	3	3	—	—	—	—	13	19	13	25
JČ	19	3	6	8	9	—	—	1	1	—	—	—	—	3	6	9	10
ZČ	16	5	12	12	14	1	1	3	3	—	—	—	—	6	13	15	17
SČ	22	6	21	21	22	2	1	5	5	—	—	—	—	8	22	26	28
VČ	38	8	24	27	32	3	2	5	6	1	1	2	2[1]	12	27	34	40
Brno	6	4	6	5	6	—	1	3	3	—	—	—	—	4	7	8	9
JM	31	11	20	20	24	2	2	6	6	—	1	2	2[2]	13	23	28	32
SM	36	14	26	26	31	6	4	11	12	—	1	—	1[3]	20	31	37	44
Bratislava	9	7	8	8	8	—	—	1	1	—	—	—	—	7	8	9	9
ZS	42	18	19	24	26	1	—	1	1	1	—	—	1[4]	20	19	26	28
StS	39	12	14	24	26	—	—	1	1	—	—	—	—	12	14	25	27
VS	38	10	10	15	18	2	2	2	4	—	—	—	—	12	12	17	22
Celkem	343	120	202	217	258	19	14	48	53	2	3	5	6	141	219	270	318
Loni	352	157	112	185	218	12	6	39	42	4	2	5	6	173	120	229	266

[1] Voj. gymnasium JŽ Moravská Třebová a OU VCHZ Syntezia Semtín
[2] SEŠ Znojmo a SZTŠ Třebíč
[3] Voj. gymnasium JŽ Opava
[4] Voj. odb. škola spoj. techniky Nové Město n. Váhom

kategorie C — Hodnota a chyba měřené veličiny, zpracoval prof. RNDr. Rostislav Košťál, Rozhledy MF, r. 49, číslo 2, str. 85—92.

Témata k prostudování nejsou v této ročence přetištěna. Předpokládáme, že tato témata budou pro trvalou potřebu soutěžících v FO postupně vydána v knižnici SPN Škola mladých fyziků. Na výše uvedená studijní témata navazovala v každé kategorii jedna úloha prvního kola, u kategorie A pak též jedna úloha druhého a třetího kola, u kategorie B jedna úloha druhého kola. Vzhledem k tomu, že ve druhém kole soutěže nejsou pro materiální a časové potíže zadávány laboratorní úlohy, nenavazovala žádná úloha druhého kola kategorie C na studijní téma.

Počet středních škol, které se účastnily soutěže FO, je uveden v tabulce 1. Ve srovnání s loňským ročníkem soutěže se počet škol zapojených do FO zvýšil asi o 20 %, přičemž v kategoriích B a C byly přírůstky 83 % a 18 %, zatímco v kategorii A nastal úbytek 19 %. Uvedené údaje vystihují jednak přechod na čtyřletá gymnasia (pokud jde o účast v kategoriích A a B), vcelku však ukazují, že zájem o soutěž na středních výběrových školách vzrostl. Obdobný obraz poskytuje tabulka 2, kde je uveden počet žáků soutěžících v prvém kole. Celkový počet soutěžících se zvýšil o 25 %, procento úspěšných řešitelů je stejné jako loni — 57 %. Velmi podstatně se zvýšil počet soutěžících v kategorii B, a sice o 145 %. Celkový počet dívek soutěžících v prvém kole je o 40 % vyšší než loni.

B. Druhé kolo soutěže kategorií A, B a C

Druhé kolo soutěže FO kategorií A, B, C proběhlo v sobotu 20. 3. 1971 ve všech sídlech krajských výborů FO a kromě toho v dalších městech Severočeského a Severomoravského kraje (v Liberci, v Chomutově a v Olomouci). Opravy a vyhodnocení byly v rámci kraje provedeny ve všech případech společně. Členové ÚV FO se podíleli na přípravě a průběhu soutěže 2. kola v rámci kraje svého bydliště. Do soutěže byla pozvána většina úspěšných řešitelů 1. kola. Jako obvykle dostal každý soutěžící text soutěžních úloh příslušné kategorie, pro Slovensko zajistil doc. Náter potřebný počet zadání v maďarském jazyce.

Výsledky 2. kola jsou uvedeny v tabulce 3, celkový počet soutěžících vzrostl proti XI. ročníku FO o 24 %, procento úspěšných řešitelů však kleslo na 30 % ze soutěžících ve srovnání s loňskými 39 %. Porovnáme-li jednotlivé kategorie tohoto a minulého ročníku, zjistíme
u kategorie A pokles účastníků o 20 %,
u kategorie B přírůstek účastníků o 135 %,
u kategorie C přírůstek účastníků o 14 %.

TABULKA 2

Počet žáků soutěžících v 1. kole

(S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, c. celkový počet žáků, d. počet dívek z celkového počtu žáků)

Kraj	Kategorie A				Kategorie B				Kategorie C				Celkem			
	S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú	
	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.
Praha	46	5	30	5	154	23	101	13	114	22	53	14	314	50	184	32
StČ	24	2	21	1	100	16	57	7	74	8	43	3	198	26	121	11
JČ	12	1	3	1	35	4	26	3	41	7	32	5	88	12	61	9
ZČ	21	4	11	2	45	7	17	3	79	18	33	6	145	29	61	11
SČ	16	—	9	—	137	30	56	12	167	46	82	31	320	76	147	43
VČ	44	4	37	3	112	13	71	8	184	46	112	23	340	63	220	34
Brno	41	2	34	—	30	3	34	3	39	6	28	5	110	11	86	8
JM	24	2	16	1	94	18	66	13	125	24	80	12	243	44	162	26
SM	62	7	54	7	158	24	98	15	192	32	115	15	412	63	267	37
Bratislava	86	23	54	14	89	9	42	5	111	17	67	10	286	49	163	29
ZS	85	19	37	6	88	15	29	6	165	45	68	24	338	79	134	36
StS	43	2	26	1	60	5	38	5	94	16	59	16	197	23	123	22
VS	33	2	25	1	44	4	16	2	89	22	35	7	166	28	76	10
Celkem	537	73	357	42	1146	171	641	95	1474	309	807	171	3157	553	1805	308
úsp. v %			64	58			56	56			55	55			57	56
Loni	636	74	472	59	463	61	268	29	1390	257	685	121	2489	392	1425	209
úsp. v %			74	79			58	48			49	47			57	53

TABULKA 3

Počet žáků soutěžících ve 2. kole

(S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, c. celkový počet žáků, d. počet dívek z celkového počtu žáků)

Kraj	Kategorie A				Kategorie B				Kategorie C				Celkem			
	S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú	
	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.
Praha	30	5	16	3	100	13	46	5	52	14	24	6	182	32	86	14
StČ	17	–	3	–	49	2	24	1	27	3	7	–	93	5	34	1
JČ	2	1	–	–	24	3	9	–	30	5	9	1	56	9	18	1
ZČ	11	2	8	–	15	3	4	2	29	4	10	–	55	9	22	2
SČ	9	–	4	–	40	8	15	3	51	15	3	–	100	23	22	3
VČ	32	3	11	–	63	6	17	–	86	15	16	1	181	24	44	1
Brno	32	–	13	–	21	3	7	1	22	5	12	3	75	8	32	4
JM	15	1	7	–	55	10	20	1	67	12	17	1	137	23	44	2
SM	49	7	21	3	91	14	28	2	104	13	27	2	244	34	76	7
Bratislava	52	12	15	2	38	5	9	–	64	9	11	–	154	26	35	2
ZS	34	5	9	1	27	4	5	–	63	23	14	3	124	32	28	4
StS	25	1	4	–	28	3	5	1	31	6	5	–	84	10	14	1
VS	25	1	4	–	16	2	4	–	35	7	14	2	76	10	22	2
Celkem	333	38	115	9	567	76	193	16	661	131	169	19	1561	245	477	44
úsp. v %			35	24			34	21			25	15			30	18
Loni	441	52	188	16	240	27	98	9	582	98	209	26	1263	177	495	51
úsp. v %			43	31			41	33			36	27			39	29

Pozoruhodné je, že do druhého kola soutěže postoupilo pouze 17 % dívek a že počet úspěšných dívek ve druhém kole je velmi malý — 18 %. Nejmenší procento úspěšných řešitelů 2. kola je jako v minulých ročnících v kategorii C — 25 %. Je to pochopitelné, protože v této kategorii je relativně nejvyšší účast žáků v soutěži.

Jak z tabulky 1, tak z výsledků druhého kola vyplývá, že v některých krajích (zejména ve Východočeském a Severomoravském kraji) se do soutěže hojně a často úspěšně (i v kategorii A) zapojují studenti středních průmyslových škol.

Z úspěšných řešitelů druhého kola uvádíme ty, kteří se umístili na prvém až desátém místě v jednotlivých kategoriích podle krajů. V kategorii A jsou tučně vytištěna jména všech řešitelů, kteří postoupili do 3. kola. U žáků gymnasií (resp. středních všeobecně vzdělávacích škol) není připisován název školy, ale jen její sídlo.

Praha:

A: **Antonín Lešanovský, Andrej Kugler, Ivan Gabaš, Miloš Lokajíček, Vladimír Burda, Pavel Dušek, Helena Husová, Ladislav Půst** a **Richard Nykl** — všichni Praha 2, W. Piecka; **Eva Pokorná,** Praha 1, Štěpánská; **Milena Nečásková** — Praha 2, W. Piecka.

B: Tomáš Burian — Praha 7, Nad štolou; Petr Dvořák — Praha 3, Sladkovského n.; František Drašnar, Helena Machová, Ondřej Felix, Jaroslav Jelínek, Ivana Hošková a Jan Frynta — všichni Praha 2, W. Piecka; Jiří Fuksa, Praha 7, Nad štolou; Miron Tegze — Praha 2, W. Piecka.

C: Jiří Měska — Praha 3, Sladkovského n.; Jiří Zlonický — SPŠE Praha 1, Na příkopě; Martin Vrátný — Praha 7, Nad štolou; Jan Rollo — Praha 3, Sladkovského n.; Petr Sláčálek, Jiří Popelík — Praha 2, W. Piecka; Petr Malý — Praha 8, U libeňského zámku; Jan Trlifaj, Pavel Ferst, Jiří Šviga — Praha 3, Sladkovského n.; Oldřich Křížek, Anna Pudláková — Praha 2, W. Piecka.

Středočeský kraj:

A: **Miloslav Zikán** — Hořovice; **Miroslav Křenek** — Kutná Hora; **Lubomír Janda** — SPŠ Kladno.

B: Tomáš Fiala — Příbram; František Mastný — Beroun; Jiří Frýda, Rudolf Koudelka — Kladno; Josef Vermach — SPŠ Kutná Hora; Dag Jeger, Zdeněk Kosek — Beroun; Vladimír Jaroš — Radotín; František Hampl, Prokop Novák — Kladno.

C: Jaroslav Farský — SPŠ Kolín; Zdeněk Janů, Miloš Pitner —

Brandýs; Tomáš Truneček — Beroun; Bohuslav Böhm — SPŠ Kladno; Vladimír Meier — Mladá Boleslav; Radislav Kasík — Slaný.

Jihočeský kraj:

B: Karel Horák, Jaroslav Vlček — Strakonice; Josef Urban, Jiří Hanzálek, Petr Špatenka — České Budějovice; Jan Rampich — Strakonice; Jan Cícha, Jiří Jirka, Václav Kubart — Tábor.
C: Pavel Kindlmann, Petr Jovanovič — České Budějovice; Jitka Stejskalová — Jindřichův Hradec; Vojtěch Jirsa — Strakonice; Pavel Novák — České Budějovice; Ladislav Skrbek — Jindřichův Hradec; Jan Bronec — Pelhřimov; František Šulista — SPŠ stav. České Budějovice; Josef Straka — Pelhřimov.

Západočeský kraj:

A: **Václav Vacovský, Tomáš Beneda, Karel Stiebitz** — Plzeň, n. Odborářů; **Jiří Benda** — SPŠ el. Plzeň; **Pavel Touš,** Karel Fliegel, Vlastimil Vacek, Igor Hegner — Plzeň, n. Odborářů.
B: Miloslav Šafanda — Sušice; Magda Fořtová, Blanka Hnilicová — Plzeň, n. Odborářů; Josef Plašil — Karlovy Vary.
C: Jiří Zymák, Ladislav Peksa, Jiří Dolejš — Plzeň, n. Odborářů; Jan Klaschka — Mariánské Lázně; Emil Pelikán — Plzeň, n. Odborářů; Václav Bouberle, Václav Veselý — Klatovy; Petr Král, Martin Maliňák — Karlovy Vary; Pavel Vošahlík — Plzeň, n. Odborářů.

Severočeský kraj

A: **Jiří Horák** — Děčín; **Petr Jelínek** — Chomutov; **Vratislav Hlaváček** — Česká Lípa; Vítězslav Valenta — Děčín.
B: Jan Holub, Vladimír Hála — Teplice; Karel Hájek — Liberec; Václav Švejdar — Děčín; Václav Špaček — Teplice; Milena Kautská — Litvínov; Jiří Svoboda — Teplice; Rostislav Hroza — Žatec; Marie Křenková — Liberec; Helena Bauerová — Teplice.
C: Jan Štěpánek — Podbořany; Jaroslav Pavlík — Česká Lípa; Milan Kalný — Litoměřice.

Východočeský kraj

A: **František Fendrych** — Hradec Králové; **Antonín Pácha** — SPŠ-el. Jičín; **Igor Koropecký, Pavel Drábek** — Pardubice;

Jindřich Machek – Žamberk; **Jiří Dohnal, Jaroslav Kubík** – Hradec Králové; **Milan Kálal** – SPŠ-el. Jičín; Josef Kodeš, Libor Slezák – Pardubice.

B: František Rozsypal – Litomyšl; Jiří Limpouch, Lubomír Procházka – Hradec Králové; Jiří Petrák – Nová Paka; Ludvík Bartošek – Pardubice; Jan Mandel – Náchod; Ladislav Šolc – Broumov; Josef Leichter – Vysoké Mýto; Jiří Rejlek – Jičín; Stanislav Štancl – Česká Třebová.

C: Jiří Svoboda – Pardubice; Jaroslav Hubáček – Hradec Králové; Dobroslav Kindl, Jiří Cabrnoch – Pardubice; Jan Rýznar – Svitavy; Jiří Šádek – SPŠ stav. Hradec Králové; Petr Šmída – SPŠ-el. Pardubice; Josef Cihlář – SPŠ str. Hradec Králové; Jiří Krejčí – SPŠ stav. Hradec Králové; Jindřich Kopáček – SPŠ-el. Pardubice.

Brno

A: **Jiří Němec, Petr Firbas, Václav Holý, Zdeněk Maláč, Jan Helešic, Miloš Paleček** – všichni Brno, Křenová; **Jaroslav Nesvadba, Miloš Pelíšek** – Brno, Koněvova; **Pavel Hladký,** Aleš Uher – Brno, Křenová.

B: Pavel Šandera – Brno, Elgartova; Luboš Bauer, Miloslava Zítková – Brno, Koněvova; Petr Píštěk, Jiří Burša – Brno, Elgartova; Tomáš Hruška – Brno, Koněvova; Petr Ježek – Brno, Elgartova.

C: Michal Horák – Brno, kpt. Jaroše; Petr Dub; Milan Fikar, Zdeněk Burda – Brno, Křenová; Karel Meduna – Brno, Lerchova; Miloslava Musilová – SPŠ stav. Brno; Štěpánka Kolářová, Stanislav Češka, Pavel Dofek – Brno, Křenová; Miroslav Merta – Brno, kpt. Jaroše.

Jihomoravský kraj

A: **Jiří Binder** – Moravské Budějovice; **Jiří Vlček** – Gottwaldov; **Karel Svačina** – SPŠ str. Gottwaldov; **Vítek Musil** – Holešov; **Jan Hrdý** – Uherské Hradiště; Stanislav Prokop – Třebíč; Vladislav Musil – Boskovice.

B: Jaroslav Kment – Žďár nad Sázavou; Josef Švoma – Velké Meziříčí; Dalibor Míček – Valašské Klobouky; Josef Sorbi – Prostějov; Zdeněk Hubáček – Otrokovice; Jiří Nešpor – Holešov; Stanislav Hozík – Gottwaldov; Jaromír Dvořák – Prostějov; Karel Moravec, Hana Kubištová – Holešov; Oldřich Drahoš – SPŠ stav. Gottwaldov; Miroslav Hrázský – Břeclav.

C: Pavel Lavička, Jiří Pavel — Jihlava; Jan Tesař — Znojmo; Lubomír Jahelka — Třebíč; Alice Breznická — Znojmo; Josef Andrys — Hodonín; Jiří Brabec — Žďár nad Sázavou; Pavel Chvosta — SPŠ stav. Gottwaldov; Karel Trojan — Znojmo; František Zejda — Boskovice.

Severomoravský kraj

A: **Ludmila Simerská** — SPŠ vakuové elektroniky Rožnov pod Radh.; **Vladimír Dresler** — Bílovec; **Tomáš Homola** — Olomouc-Hejčín; **Jiří Dybal, Jiří Jelínek** — Olomouc, Jiřího z Poděbrad; **Janusz Kubatko** — Český Těšín s polským vyuč. jazykem; **Jiří Schlinger** — Opava; **Pavel Šrubař** — Bílovec; **Vladimír Ditrich, Libuše Jelínková, Zdeňka Pavelková** — Olomouc-Hejčín; **Igor Mačejovský, Milan Menšík** — Ostrava 1; **Petr Valošek** — Český Těšín.

B: Jan Podloucký — Přerov; Vladimír Smutný — Šternberk; Jan Knytl — Nový Jičín; Eva Radková — Ostrava 1; Karel Kršňák — Šumperk; Tadeusz Feruga — Český Těšín s polským vyuč. jazykem; Jan Hamerník, Václav Janiš — Rožnov p. Radh.; Vítězslav Chromík — SPŠ Ostrava-Vítkovice; Pavla Růžičková — Frýdek-Místek; Richard Švacha — Opava.

C: Radomír Kuchta — Havířov; Stanislav Novák — Ostrava 1; Antonín Otáhal — Ostrava 4; David Gruber - Ostrava 1; Pavel Navrátil — Olomouc, Jiřího z Poděbrad; Zdeněk Mužík — Přerov; Petr Gerlich — SPŠ Ostrava-Vítkovice; Jaromír Šimša — Ostrava 1; Miroslav Adamovský — Ostrava-Poruba; Oldřich Krejčí — Ostrava 1; Pavel Nikl — Ostrava 4; Oldřich Polách — Valašské Meziříčí.

Bratislava

A: **Karel Šafařík, Jan Franců, Anton Černý, Pavol Hanula, Stanislav Sýkora, Roman Prokop, Mária Ambrošová, Oľga Koronthályová, Vladimír Šimkovič, Ján Petrovič, Dušan Valachovič** — všichni Bratislava, Novohradská.

B: Milan Kolibiar, Marián Uherko, Milan Lehotský, Michal Maťaš, Dušan Prcúch, Peter Dobrota, Ján Hanuš, Miroslav Galbavý, Martin Dudák — všichni Bratislava, Novohradská.

C: Ľubor Kollár, Bystrík Babor — Bratislava, Novohradská; Ladislav Gilányi, Ľubor Kozakovič — Bratislava, I. Horvátha; Ján Krč, Juraj Hargaš — Bratislava, Novohradská; Ivan Tkáč — Bratislava, Metodova; Ján Maco — Bratislava, Vazovova; Miroslav Belica, Štefan Varga — Bratislava, Novohradská.

Západoslovenský kraj

A: **Anna Žilinská** — Piešťany; **Štefan Langschadl, Imrich Szarka** — SVŠ s maď. vyuč. jaz. Komárno; **Peter Herman** — Topoľčany; **Gabor Varjú** — SVŠ maď. Komárno; Vladimír Kliský — Nitra; Július Bandzi, Arpád Kadlicsek, — SVŠ maď. Komárno; Viliam Čuperka — Holič.
B: Desider Edes — SVŠ maď. Komárno; Ľudovít Faguľa — Trnava; Peter Višnyi — Trenčín; Tibor Kántor — SVŠ maď. Komárno; František Šindler — Zlaté Moravce.
C: Ján Kaňuk — Malacky; Peter Hroššo — Topoľčany; Juraj Repka — Zlaté Moravce; Milan Kamarýt — Trenčín; Peter Pokorný — SVŠ maď. Galanta; Peter Szabó, Magdaléna Takácsová — SVŠ maď. Komárno; Katarína Farská — Topoľčany; Ivan Poliačik — Trenčín; Josef Szabó — SVŠ maď. Komárno.

Středoslovenský kraj

A: **Peter Kontsek** — Martin; **Štefan Sakáloš** — Prievidza; Peter Bernát, Daniel Donoval — Banská Bystrica.
B: Imrich Vrťo — Rimavská Sobota; Božena Ďurovová — Martin; Štefan Baláž — Prievidza; Jozef Tvarožek, Miroslav Sýkora — Žilina, Horný Val.
C: Ľubomír Snoha — Lučenec; Jozef Širáň — Kremnica; Peter Šindler, Kamil Hanuliak — Žilina, Horný Val; Jozef Korenek — Banská Štiavnica.

Východoslovenský kraj

A: **Ondrej Hudák** — Košice, Šrobárova; **Peter Regec** — Kežmarok; **Juraj Šterbák** — Prešov, Konštantinova; **Štefan Kuric** — Kežmarok.
B: Ján Šalamon — Trebišov; László Nagy — Košice, Kuzmányho; Danica Jakubíková, Vladimír Lisý — Košice, Šrobárova.
C: Ján Krivoš — Košice, Šmeralova; Pavol Pavlo — Trebišov; Ján Zajac, Tibor Lefkovič, Vojtech Kavečanský — Košice, Šrobárova; Alica Semanová, Ján Šomvársky — Košice, Šmeralova; Marián Záhorák — Prešov, T. Ševčenku; Radimír Rexa — Košice, Šrobárova; Zoltán Loderer — SPŠ-el. Košice.

C. Třetí kolo kategorie A

Celostátní třetí kolo FO kategorie A se konalo v Banské Bystrici ve dnech 28.—30. 4. 1971. Přípravu a organizaci třetího kola zajišťoval KV Středoslovenského kraje v Banské Bystrici.

TABULKA 4

POČET ŽÁKŮ SOUTĚŽÍCÍCH VE 3. KOLE KATEGORIE A

Kraj	Počet soutěžících		Celkový počet úspěšných řešitelů			Počet vítězů			Neúspěšní řešitelé		
	celkem	z toho dívek	celkem	%	z toho dívek	celkem	%	z toho dívek	celkem	%	z toho dívek
Praha	10	2	8	80	–	4	40	–	2	20	2
StČ	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	–
JČ	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
ZČ	5	–	3	60	–	1	20	–	2	40	–
SČ	3	–	1	33	–	1	33	–	2	67	–
VČ	8	–	4	50	–	2	25	–	4	50	–
Brno	9	–	6	67	–	4	44	–	3	33	–
JM	5	–	3	60	–	–	–	–	2	40	–
SM	14	3	2	14	–	–	–	–	12	86	3
Bratislava	11	2	4	36	–	2	18	–	7	64	2
ZS	5	1	1	20	1	1	20	1	4	80	–
StS	2	–	1	50	–	1	50	–	1	50	–
VS	4	–	–	–	–	–	–	–	4	100	–
Celkem	79	8	33	42	1	16	20	1	46	58	7
Loni	79	3	51	65	1	20	25	–	28	35	2

Z 80 pozvaných žáků se nedostavila pro onemocnění Helena Husová z Prahy.

Na zasedání ÚV FO konaném dne 7. dubna 1971 v Brně bylo rozhodnuto pozvat do třetího kola soutěže podle výsledků ve druhých, krajských kolech 80 úspěšných řešitelů, viz tabulka 4. Při výběru účastníků 3. kola a též při vyhodnocení 3. kola bylo užito klasifikační stupnice 1, 1-, 2 a 3.

Dne 28. 4. se dostavilo do Banské Bystrice 79 pozvaných účastníků. Jejich ubytování, snídaně a večeře byly zajištěny v chatě LESÁK na Tájově, obědy ve studentském domově v Banské Bystrici. Vlastní soutěž byla zahájena v odpoledních hodinách v zasedací síni KNV. Přítomné přivítal předseda KV FO Středoslovenského kraje Pavol Ferko, zahajovací projev přednesl předseda ÚV FO prof. RNDr. Rostislav Košťál, dále účastníky pozdravil za ÚV SSM ing. Bohumil Vybíral. Zahájení a dalšího průběhu se též zúčastnili Anton Auxt, krajský školní inspektor v Banské Bystrici, členové ÚV FO doc. dr. Náter, Simerský, Cimbůrek, ing. Rabas, Ševčík, Škrinár, doc. dr. Thern, dále členové KV FO Kecskés, Náterová, Pelech a učitelé katedry fyziky Pedagogické fakulty v Banské Bystrici.

Dne 29. 4. řešili soutěžící ve velké zasedací síni Klubu stavbařů čtyři teoretické úlohy, v odpoledních hodinách se pak uskutečnil zájezd po stopách Slovenského národního povstání do Nízkých Tater.

TABULKA 5

VÍTĚZOVÉ 3. KOLA KATEGORIE A XII. ROČNÍKU FO

Pořadí	Jméno	Třída	Škola
1.	Pavel Dušek	3S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
2.	Ivan Gabaš	3S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
3.	Karel Šafařík	3S	SVŠ Bratislava, Novohradská
4.	Andrej Kugler	3S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
5.	Štefan Sakáloš	3P	SVŠ Prievidza
6.	Václav Holý	3S	SVVŠ Brno, Křenová
7. – 11.	Jiří Němec	3S	SVVŠ Brno, Křenová
7. – 11.	Zdeněk Maláč	3S	SVVŠ Brno, Křenová
7. – 11.	Jan Helešic	3S	SVVŠ Brno, Křenová
7. – 11.	Vladimír Šimkovič	3S	SVŠ Bratislava, Novohradská
7. – 11.	Jiří Benda	4	SPŠ el. Plzeň
12. – 14.	Anna Žilinská	3P	SVŠ Piešťany
12. – 14.	Igor Koropecký	3S	Gymnasium Pardubice
12. – 14.	Richard Nykl	3S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
15. – 16.	František Fendrych	3S	Gymnasium Hradec Králové
15. – 16.	Jiří Horák	3P	Gymnasium Děčín

V tabulce značí S speciální třídu matematicko-fyzikální, P přírodovědnou větev.

Laboratorní úlohu řešili účastníci dne 30. 4. v laboratořích SPŠ spojovej techniky J. Murgaša.

V průběhu soutěže byly dodrženy všechny obvyklé podmínky, byl zajištěn dozor, dbalo se, aby se soutěžící vzájemně nerušili a aby neužívali nedovolené pomůcky, tj. tabulky s přehledy fyziky. Zadání teoretických úloh v potřebném počtu výtisků zajistil člen komise pro konečnou redakci soutěžních úloh M. Simerský, přípravu laboratorní úlohy po všech stránkách zajistil KV FO Středoslovenského kraje. Všechny přípravné a organizační práce byly zvládnuty díky obětavosti funkcionářů KV FO, především předsedy KV FO Pavola Ferka a tajemníka KV FO Dušana Pelecha.

Úlohy třetího kola opravovali členové ÚV FO, a sice:

úlohu č. 1 ing. Miloš Rabas a Milan Rádl, Západočeský kraj,
úlohu č. 2 František Cimbůrek, Praha, a Miroslav Ševčík, Středočeský kraj,
úlohu č. 3 Zdeněk Ungermann a Ivo Volf, Východočeský kraj,
úlohu č. 4 dr. Ivan Náter a Jozef Zámečník, Bratislava,
úlohu č. 5 Pavol Ferko a dr. Ladislav Thern, Středoslovenský kraj.

Výsledky třetího kola soutěže kategorie A jsou uvedeny v tabulkách 4, 5 a 6. Tabulka 7 vystihuje přehledně klasifikaci jednotlivých úloh.

TABULKA 6

DALŠÍ ÚSPĚŠNÍ ŘEŠITELÉ 3. KOLA KATEG. A XII. ROČNÍKU FO

Pořadí	Jméno	Třída	Škola
17. – 20.	Anton Černý	3S	SVŠ Bratislava, Novohradská
17. – 20.	Jan Franců	3S	SVŠ Bratislava, Novohradská
17. – 20.	Tomáš Homola	3P	SVVŠ Olomouc-Hejčín
17. – 20.	Antonín Pácha	4	SPŠ el. Jičín
21.	Milan Kálal	4	SPŠ el. Jičín
22.	Karel Svačina	4	SPŠ str. Gottwaldov
23.	Petr Firbas	3S	SVVŠ Brno, Křenová
24.	Jaroslav Nesvadba	3P	SVVŠ Brno, Koněvova
25. – 26.	Vladimír Burda	3S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
25. – 26.	Jiří Vlček	3P	SVVŠ Gottwaldov
27. – 30.	Jiří Binder	3P	Gymnasium Moravské Budějovice
27. – 30.	Vladimír Dresler	3P	SVVŠ Bílovec
27. – 30.	Antonín Lešanovský	3S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
27. – 30.	Pavel Touš	3S	SVVŠ Plzeň, n. Odborářů
31. – 33.	Miloš Lokajíček	3S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
31. – 33.	Ladislav Půst	3S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
31. – 33.	Václav Vacovský	3S	SVVŠ Plzeň, n. Odborářů

Ve srovnání s loňským ročníkem se snížil při stejném počtu soutěžících počet úspěšných řešitelů o 36 %. Počet vítězů, tj. těch, kteří vyřešili úspěšně čtyři úlohy, se snížil na 16. Do třetího kola bylo pozváno 9 dívek, dostavilo se jich 8, z nich byla úspěšná jediná, která se však zařadila mezi vítěze.

V celostátním kole soutěžil již potřetí úspěšně Karel Šafařík z Bratislavy, podruhé Andrej Kugler a Ivan Gabaš z Prahy, Karel Svačina

TABULKA 7

PŘEHLED VÝSLEDKŮ KLASIFIKACE 3. KOLA KATEGORIE A

Úloha čís.	Známky			Průměrná známka	Téma úlohy
	1	2	3		
1.	21	10	47	2,34	Termodynamika, kmity. (Adiabatická změna plynu.)
2.	20	21	37	2,22	Elektrostatika. (Potenciál el. pole.)
3.	15	20	43	2,36	Magnetické pole. (Pohyb elektronu v mag. poli.)
4.	20	17	41	2,27	Základy optiky. (Snelliův zákon.)
5. exper.	17	10	51	2,46	Geometrická optika. (Měření ohniskové vzdálenosti tenké čočky.)

Průměrná známka ze všech příkladů: 2,33

z SPŠ stroj. v Gottwaldově. V průběhu náročné soutěže se umístilo dobře též několik studentů, kteří nematurují v r. 1971 a mohou soutěžit v kategorii A ještě v r. 1972 (Koropecký z Pardubic, Horák z Děčína, Fendrych z Hradce Králové a Binder z Moravských Budějovic).

Z tabulky 7 vyplývá, že nejméně účastníků vyřešilo úspěšně laboratorní úlohu. Zdá se, že tuto úlohu mnoho soutěžících podcenilo a nedomyslelo. Úloha sama o sobě byla snadná, vyžadovala důsledný logický postup podle návodu a využití běžných poznatků z geometrické optiky a zběhlost při zpracování měření. Klasifikace ostatních úloh odpovídá zhruba nárokům, které jednotlivé úlohy na řešitele kladly.

Vítězové 3. kola kategorie A byli i letos odměněni z prostředků ministerstva školství. Kromě toho jim Socialistický svaz mládeže zajistil týdenní rekreační pobyt ve Vrátné dolině na Malé Fatře.

D. Závěr soutěže kategorií A, B a C

Úspěšní řešitelé druhého kola studují většinou na přírodovědných větvích nebo navštěvují speciální matematicko-fyzikální třídy. Asi 7 % úspěšných řešitelů druhého kola studuje na SPŠ. Rozbor výsledků v jednotlivých kategoriích ukazuje na vyrovnanost v kategorii C, a to jak mezi žáky běžných přírodovědných větví a speciálních tříd, tak mezi žáky gymnasií a SPŠ. Mezi úspěšnými řešiteli kategorie B však začínají převládat žáci z matematicko-fyzikálních tříd a tato převaha je zřejmá u vítězů kategorie A, jak vyplývá z tabulky 5. Lze tedy dospět k závěru, že soustavná práce s talentovanými žáky přináší dobré výsledky.

Obdobný charakter má i celostátní soustředění úspěšných řešitelů MO a FO, které jednak prohlubuje znalosti žáků a jednak orientuje zájem žáků na matematicko-fyzikální a technické problémy. Letošní celostátní soustředění řešitelů MO a FO se konalo v době od 13. 6. do 28. 6. 1971 v Rajnochovicích, okres Kroměříž. Zúčastnilo se ho 85 žáků, kteří budou ještě nejméně jeden rok studovat na střední škole a mohou poznatků získaných v přednáškách a besedách využít i v dalším ročníku soutěží FO, popř. MO.

Organizací soustředění byl po odborné stránce pověřen ÚV FO. Přípravu soustředění zajišťoval odb. asistent pedagogické fakulty UJEP v Brně Václav Suchánek. Výuku fyzikální problematiky v průběhu soustředění zajistili prof. RNDr. Rostislav Košťál, gymn. profesor Alois Kleveta, odb. asistent ing. Bohumil Vybíral a odb. asistent Zdeněk Ungermann.

Stejný účel jako celostátní soustředění plní i krajská soustředění úspěšných řešitelů kategorií B a C, většinou týdenní.

E. Soutěž kategorie D

První kolo kategorie D probíhalo do 10. března 1971. Úlohy pro prvé kolo byly jednak uveřejněny v 1. čísle časopisu Matematika a fyzika ve škole, šk. r. 1970/71, jednak byl vydán jako účelový tisk ministerstva školství leták Fyzikální olympiáda obsahující zadání úloh prvého kola soutěže a příslušné pokyny. Obdobný leták vyšel v Bratislavě ve slovenštině.

Tabulka 8 uvádí počet škol zapojených do soutěže FO; tento počet se zvýšil ve srovnání s loňským rokem o 19 % a v prvém kole soutěže FO bylo letos zapojeno více než polovina ZDŠ. Počet zapojených škol vzrostl též ve druhém i ve třetím kole, které letos poprvé probíhalo ve všech krajích.

Počet soutěžících žáků, jak ukazuje tabulka 9, vzrostl v prvém kole o 33 %, ve druhém kole o 47 % a ve třetím, výběrovém kole o 26 %.

TABULKA 8

Počet ZDŠ, které se zúčastnily FO

Kraj	Počet ZDŠ v kraji	1. kola se zúčastnilo		2. kola se zúčastnilo		3. kola se zúčastnilo	
		počet	%	počet	%	počet	%
Praha	166	140	84	126	76	49	29
StČ	291	125	43	92	70	42	14
JČ	182	93	51	32	38	20	11
ZČ	222	89	40	45	21	14	6
SČ	288	127	44	79	27	44	15
VČ	312	163	52	113	36	31	10
Brno	64	45	70	26	41	12	19
JM	402	205	51	137	34	44	11
SM	454	204	45	128	28	31	7
Bratislava	63	40	63	37	59	20	32
ZS	494	230	47	191	38	41	8
StS	396	252	64	162	41	31	8
VS	348	182	52	163	47	40	12
Celkem	3682	1895	51	1331	36	419	11
Loni	3682	1517	41	972	26	332	9

Procento úspěšných řešitelů ve všech kolech této kategorie vzrostlo proti loňsku a je větší než 50 %. Počet dívek zapojených do soutěže je relativně největší v 1. kole — 39 %, pak klesá, ve 2. kole činí 32 % a ve 3. kole pouze 18 %. Procenta úspěšných řešitelek se v této kategorii jen málo odlišují od procenta úspěšných řešitelů celkem.

Posoudíme-li výsledky jednotlivých krajů v soutěži, pak vedle městských oblastí — Prahy, Brna a Bratislavy, dosahuje již po několik let v této kategorii dobrých výsledků kraj Středoslovenský.

Zdá se, že třetí kolo soutěže se vžilo a že i přes jistou náhodnost výběru (do 3. kola je zváno v průměru 25 % úspěšných řešitelů 2. kola) ukazuje zřetelněji na žáky nadané pro fyziku a matematiku.

Dále uvádíme jména nejúspěšnějších řešitelů, kteří se v krajském kole umístili na prvém až desátém místě. U každého žáka je zapsáno sídlo ZDŠ.

Praha

Nina Karpinská — Praha 4, Křesomyslova; Jan Staněk — Praha 6, n. Svobody; Jan Wagner — Praha 8, Lyčkovo n.; Michael Valášek — Praha 1, Uhelný trh; Martin Baumann — Praha 8, Lyčkovo n.; Libor Vojáček — Praha 10, Gutova; Jiří Vyskočil, Jiří Vlach — Praha 7,

TABULKA 9

Počet žáků soutěžících v kategorii D

S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů

Kraj	1. kolo						2. kolo						3. kolo					
				z toho dívek						z toho dívek						z toho dívek		
	S	Ú	%Ú	S	Ú	%Ú	S	Ú	%Ú	S	Ú	%Ú	S	Ú	%Ú	S	Ú	%Ú
Praha	1014	577	56	332	187	56	480	413	86	144	116	80	80	69	86	9	8	89
StČ	479	306	64	164	101	62	274	207	75	80	62	77	77	48	62	14	4	29
JČ	307	223	73	88	63	72	217	132	61	61	22	36	20	16	80	3	1	33
ZČ	358	230	64	120	69	58	195	99	51	61	35	57	23	15	65	4	4	100
SČ	670	281	42	212	94	44	249	170	68	78	52	67	76	57	75	15	10	67
VČ	763	472	62	292	156	53	358	244	68	124	75	60	40	29	72	6	3	50
Brno	321	87	27	139	42	30	83	25	30	40	9	23	16	13	81	5	3	60
JM	730	430	59	267	143	54	394	191	65	124	46	37	71	49	69	10	4	40
SM	1011	553	55	366	174	49	408	269	66	125	57	46	36	32	89	4	4	100
Bratislava	352	225	64	132	83	63	213	111	52	74	25	34	82	56	68	17	11	65
ZS	1445	771	53	597	274	46	713	386	54	249	112	45	74	27	37	20	10	50
StS	1710	627	37	696	224	32	593	316	53	189	106	56	39	29	74	7	4	57
VS	1270	560	44	625	260	42	332	174	52	116	57	49	43	20	46	7	3	43
Celkem	10430	5342	51	4030	1870	46	4509	2737	61	1465	774	53	667	460	68	121	69	57
Loni	7856	3399	43	2684	1008	38	3002	1402	45	897	403	45	538	170	32	122	28	23

Korunovační; Jaroslav Fiala, Dana Límová — Praha 3, Čapajevovo n.; Blanka Fialová — Praha 4, Křesomyslova.

Středočeský kraj

Jan Procházka — Bakov nad Jizerou; Jiří Sloup — Neratovice; Jiří Somer, Vladimír Anděl — Poděbrady; Karel Krejčík — Švermov; Václav Somol — Mutějovice; Vladimír Šoda — Neratovice; Zdeněk Felix — Kralupy nad Vltavou; Milan Kaiser — Příbram; Zdeněk Linka — Mnichovo Hradiště; Jiří Mikšovský — Městec Králové; Ivan Řehoř — Radotín.

Jihočeský kraj

Jan Janoušek — České Budějovice, Jirovcova; Miroslav Vácha — Tábor, 3. ZDŠ; Marek Vandas — Písek, kpt. Jaroše; Josef Voldřich — Stachy; František Drdák — Besednice; Jiří Sýkora — Písek, Dukelských hrdinů; Vladimír Veselý — Vodňany; Jiří Zita — Humpolec, Podhrad; Karel Pártl — Besednice; Petr Břicháček — Český Krumlov, Tavírna; František Penz — České Budějovice, Nerudova.

Západočeský kraj

František Pillmann — Plzeň, Táborská; Miloš Prýmas — Plzeň, Houškova; Eva Doudová — Cheb; Vladimír Charvát — Nýřany; Karel Mařík — Dolní Bělá; Pavel Rádl — Tlučná; Jiří Pöpperl — Sokolov; Anna Hanalová — Holýšov; Václav Jakoubek — Cheb; Jiří Špaček — Mariánské Lázně, Komenského.

Severočeský kraj

Martin Kapoun — Ústí nad Labem — ZDŠ při pedagogické fakultě; Jiří Maryška — Pěnčín; Alena Němcová — Teplice, Švabinského; Jaroslav Kotas — Doksy; Pavel Raiman — Liberec, 5. května; Petr Svoboda — Louny; Petr Polak — Roudnice; Margit Hosnedlová — Teplice, Buzulucká; Tomáš Sehnoutka — Jablonec, Floriánova; Pavel Kobrle — Lovosice, Pionýrská; Marcela Dvořáková — Nový Bor.

Východočeský kraj

Jan Blažek — Nasavrky; Jiří Hůlka — Hradec Králové, Pospíšilova; Petr Macháček — Moravská Chrastová; Přemysl Stožický — Rybitví;

Jan Stejskal — Telčice; Jan Sehnal — Vysoké Mýto, Jiráskova; Miloš Kleprlík — Červený Kostelec; Vladislav Böhm — Trutnov, Horní Staré Město; Jiří Fiala — Česká Třebová, Fučíkova; Milan Hladký — Trutnov, Gorkého.

Brno

Josef Gerbrich — Brno, kpt. Jaroše; Dalibor Musil — Brno, Jugoslávská; Petr Novák — Brno, Merhautova; Ladislava Dvořáková — Brno, Úvoz; Petr Lorenc — Brno, Hroznová; Lubomír Popelínský — Brno, Botanická; Jiří Syrový — Brno, Kotlářská; Magda Kuncová — Brno, Merhautova; Karel Vetešník — Brno, Hroznová; Aleš Merta — Brno, Úvoz; Zdeněk Vlček — Brno-Tuřany.

Jihomoravský kraj

Aleš Burian — Kuřim; František Sukup — Napajedla; Jiří Samsonek — Rousínov; Jiří Červinka — Gottwaldov, 5. ZDŠ; Martin Klusáček — Třebíč, Hanělova; Jiří Jirovský — Okříšky; František Bednařík — Luhačovice; Petr Chvátal — Třebíč, n. Osvobození; Vlastimil Hela — Bojkovice; Petr Ševčík — Kanice.

Severomoravský kraj

Vladimír Hruška — Zašová; Jiří Koloděj — Havířov, Kollárova; Miroslav Lýčka — Vsetín, Gottwaldovo n.; Eduard Sojka — Ostrava-Mariánské Hory; Ivo Fikáček — Ostrava 1, Ostrčilova; Karol Slowik — Český Těšín — s polským vyuč. jaz.; Lumír Gattnar — Opava, Kateřinky; Jaromír Horák — Krnov, 1. ZDŠ; Lubomír Balanda — Český Těšín, Komenského; Jan Kohane — Havířov, Komenského.

Bratislava

Ján Krajčík — Bratislava, Čs. armády; Jozef Vyskoč — Bratislava, Jelačičova; Peter Paniak — Bratislava, Nevädzová; Ivan Janetka — Bratislava, Kvačalova; Juraj Wallner — Bratislava, Košická; Ján Suchal — Bratislava, Nevädzová; Miroslav Drkoš, Soňa Švidroňová, Pavol Kossey — Bratislava, Košická; Peter Melkus — Bratislava, Nevädzová; Jiří Bartoš — Bratislava, Vodárenská; Ján Ferianc — Bratislava, Nedbalova; Svetozár Krno — Bratislava, Palisády.

Západoslovenský kraj

Miloš Mikula — Trenčín, Pionierská; Zora Dunajská — Krškany; Viliam Koiš — Šamorín; Vladimír Makýš — Trnava, Bottova; Jarmila Dunajská — Krškany; Juraj Jánošík — Trnava, Bottova; Mária Karvajová — Nitra, Zobor; Jarmila Kochová — Nitra, Jašíkova; Eva Kováčiková — Tlmače; Peter Mesko — Topoľčianky.

Středoslovenský kraj

Marian Franček — Žilina, Jilemnického; Dušan Martina — Nováky, E. Ottu; Igor Záborský — Žilina, Jilemnického; Ivan Minárik — Nová Dubnica; Ján Boďa — Turč. Teplice; Jozef Dudáš — Banská Bystrica, n. Čs. armády; Jozef Grega — Banská Bystrica, tr. SNP; Irena Pisklová — Nová Dubnica; Michal Kučera — Martin, Bernolákova; Attila Darányi — Lučenec, 3. ZDŠ.

Východoslovenský kraj

Karin Chudíková — Dol. Smokovec; Igor Valiga — Tatranská Lomnica; Jaroslav Banoci — Prešov, Gottwaldova; Gejza Pulen — Plešivec; Norbert Werner — Rožnava, U zeleného stromu; Jozef Lukáč — Poprad, Marxova; Marián Jusko — Prešov, Odborárska; Ivan Dzurek — Košice, Febr. víť.; Tibor Kollár — Prešov, Sídl. III; Ján Pulík — Košice VI.; Štefan Švec — Bardejov.

V závěru je třeba se zmínit o některých zkušenostech získaných v soutěži kategorie D v průběhu tohoto ročníku soutěže. U některých úloh nebylo letos důsledně žádáno obecné řešení. Tato okolnost pravděpodobně přispěla ke zvýšení počtu úspěšných řešitelů, někde však ztížila výběr účastníků do třetího kola soutěže. Jak plyne ze zpráv KV FO, vyskytují se různé názory na vhodnost výše uvedeného opatření; je doporučováno, aby obecné řešení bylo důsledně vyžadováno u úloh druhého a třetího kola. V celku byly úlohy kategorie D v tomto ročníku považovány za přiměřené a vhodné. Vzhledem k tomu, že ministerstvo školství ČSR stanovilo na den 14. 4. 1971 přijímací zkoušky na některé střední výběrové školy, muselo být 2. kolo přeloženo na 2. 4. 1971. Zdárný průběh 2. kola FO kategorie D byl ve všech okresech ČSSR zajištěn díky obětavosti a úsilí funkcionářů OV FO. Třetí kolo kategorie D proběhlo v plánovaném termínu, tj. 15. 5. 1971. V krajích Jihočeském a Západočeském mělo toto kolo pro finanční obtíže charakter soutěže zástupců jednotlivých okresů, zúčastnilo se ho 20, resp. 23 žáků. Jsme přesvědčeni, že se v příštích letech najdou prostředky potřebné k zajištění normálního průběhu 3. kola kategorie ZDŠ i ve výše uvedených krajích.

V tomto ročníku soutěže byl na základě požadavků funkcionářů KV FO a OV FO podstatně zvýšen počet řešených soutěžních úloh rozesílaných na OV FO a pak referentům FO na ZDŠ. Při zvýšených počtech rozesílaných řešených úloh bylo však třeba přejít k řešením velmi stručným. Tato stručná řešení, poněkud zpřesněná a rozšířená, jsou základem 4. kapitoly II. části této ročenky. Pak lze oprávněně namítat, že řešitel, žák 9. třídy ZDŠ, by uvedené úlohy řešil zdlouhavěji a těžkopádněji. Schopnější žák, řešitel FO, nebo absolvent 9. třídy ZDŠ by měl být schopen s porozuměním sledovat řešení úloh kategorie D, uvedená v této knížečce, a pak též být schopen samostatně řešit obdobné úlohy.

II. ČÁST

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY

Výsledky experimentálních úloh byly upraveny podle žákovských měření.

1. Úlohy kategorie A

Úlohy recenzovali Mojmír Simerský a dr. Ivan Náter.

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. František Smutný)

Lyžař sjede z kopce, jehož úhel sklonu je α, za dobu t_1. Potom jede setrvačností po dobu t_2 po vodorovné rovině, načež vyjíždí na protější kopec, jehož úhel sklonu je β. Určete, jak daleko vyjede na druhý kopec. Při řešení předpokládejte, že energie se ztrácí jenom třením, k jiným překážkám pohybu nepřihlížejte. Součinitel smykového tření μ je po celé dráze stálý.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\alpha = 45°$; $\beta = 30°$; $t_1 = 5{,}0$ s; $t_2 = 10$ s; $\mu = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$; $g \doteq 9{,}8$ m s^{-2}.

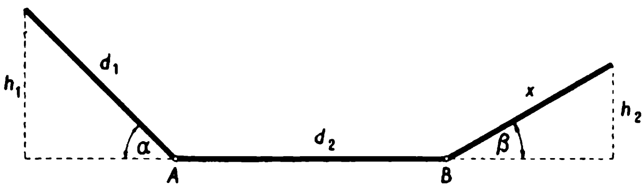
Řešení:

Situace je znázorněna na obr. 1.

Ze zákona o zachování energie plyne:

$$mgh_2 = mgh_1 - W_z, \tag{1}$$

je-li h_1 výška, ze které lyžař sjíždí, h_2 výška, do které vystoupí na protější kopec, m hmotnost lyžaře, g tíhové zrychlení a W_z je energie ztracená třením.



Obr. 1

Z pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnami h_1, h_2 vyjádříme $h_1 = d_1 \sin \alpha$, $h_2 = x \sin \beta$, což po dosazení do (1) dá

$$mgx \sin \beta = mgd_1 \sin \alpha - W_z. \tag{2}$$

Energii W_z vyjádříme jako součet součinů třecích sil a drah. Třecí síly na drahách d_1, d_2, x označme po řadě F_1, F_2, F_3. Pak je

$$W_z = F_1 d_1 + F_2 d_2 + F_3 x. \tag{3}$$

Na dráze d_1 je tření způsobeno normálovou složkou tíhy lyžaře, tedy složkou o velikosti $mg \cos \alpha$ a třecí síla je

$$F_1 = \mu\, mg \cos \alpha. \tag{4}$$

Na dráze d_2 působí celá tíha a třecí síla je

$$F_2 = \mu\, mg. \tag{5}$$

Na dráze x je třecí síla

$$F_3 = \mu\, mg \cos \beta. \tag{6}$$

Z (4), (5), (6) dosadíme do (3), odtud pak za W_z do (2) a vyjádříme délku x. Po úpravě vyjde

$$x = \frac{d_1 (\sin \alpha - \mu \cos\alpha) - \mu d_2}{\sin \beta + \mu \cos \beta}. \tag{7}$$

Vyjádříme ještě dráhy d_1 a d_2 pomocí daných veličin. Na dráze d_1 působí na lyžaře složka tíhy připadající do směru nakloněné roviny, zmenšená o třecí sílu, tj. výsledná síla

$$F_1' = mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

a uděluje mu zrychlení

$$a_1 = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha). \tag{8}$$

Poněvadž zrychlení a_1 je konstantní, koná lyžař pohyb rovnoměrně zrychlený. Za dobu t_1 urazí dráhu

$$d_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2,$$

neboli s přihlédnutím k (8)

$$d_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \tag{9}$$

a nabude konečné rychlosti

$$v_1 = a_1 t_1 = g t_1 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha). \tag{10}$$

Na vodorovnou část dráhy vjíždí lyžař s počáteční rychlostí v_1 podle (10) a je brzděn třením. Třecí síla (5) zde způsobuje konstantní zpomalení

$$-a_2 = -\mu g. \tag{11}$$

Jde o rovnoměrně zpomalený pohyb s počáteční rychlostí (10) a se zpomalením (11). Za dobu t_2 urazí lyžař dráhu

$$d_2 = v_1 t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = g t_1 t_2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \frac{g}{2} \mu t_2^2. \tag{12}$$

Z (9) a (12) dosadíme do (7), po úpravě dostaneme obecný výsledek

$$x = \frac{g}{2} \frac{[t_1 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \mu t_2]^2}{\sin \beta + \mu \cos \beta} . \tag{13}$$

Obecný výsledek je (13), pro dané hodnoty vyjde $x \doteq \doteq 74$ m.

Jiný způsob řešení

S prvního kopce sjíždí lyžař se zrychlením (8), za dobu t_1 dosáhne konečné rychlosti (10). Na vodorovnou část dráhy vjíždí s počáteční rychlostí (10) a je brzděn třením, tj. koná pohyb rovnoměrně zpomalený s počáteční rychlostí (10) a se zpomalením (11).

Za dobu t_2 se jeho rychlost zmenší na

$$v_2 = v_1 - a_2 t_2 = g [t_1 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \mu t_2]. \tag{14}$$

S touto počáteční rychlostí počne vyjíždět na druhý kopec. Jeho pohyb je zde zpomalován silou, která je rovna složce jeho tíhy připadající do směru nakloněné roviny s úhlem sklonu β, zvětšené o třecí sílu. Celková zpomalující síla je

$$F_3' = mg (\sin \beta + \mu \cos \beta)$$

a vyvolá zpomalení

$$-a_3 = -g (\sin \beta + \mu \cos \beta). \tag{15}$$

Lyžař nyní vyjíždí na kopec po nějakou dobu t_3, za kterou se jeho rychlost zmenší na nulu. Pro tuto dobu tedy platí

$$0 = v_2 - a_3 t_3$$

neboli

$$t_3 = \frac{v_2}{a_3} \tag{16}$$

a lyžař ujede za tuto dobu dráhu

$$x = v_2 t_3 - \frac{1}{2} a_3 t_3^2 .$$

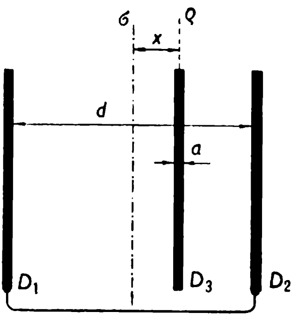
Dosazením z (16) vyloučíme t_3 a dostaneme po úpravě

$$x = \frac{1}{2} \frac{v_2^2}{a_3} .$$

Dosazením za v_2 z (14) a za a_3 z (15) dostaneme výsledek (13).

Poznámka: Úloha byla řešena za předpokladu, že v průsečnicích nakloněných rovin s horizontální rovinou (body A, B dráhy) platí zákon o zachování energie. Pohyb lyžaře byl považován za pohyb hmotného bodu.

2. *úloha* (navrhl Mojmír Simerský)



Obr. 2

Dvě velmi velké rovnoběžné kovové desky D_1, D_2 jsou spolu vodivě spojeny, jejich vzdálenost je d (viz obr. 2). Mezi nimi je zasunuta stejná kovová deska D_3 tloušťky a. Deska D_3 je od desek D_1 a D_2 elektricky izolována. Rovina σ, která půlí vzdálenost d, má od střední roviny ϱ desky D_3 vzdálenost x. Účinná plocha každé desky má obsah S.

a) Vypočítejte kapacitu C mezi vloženou deskou D_3 a spojenými deskami D_1, D_2 za předpokladu, že elektrická pole v soustavě jsou homogenní.

b) Stanovte, pro kterou hodnotu x má kapacita C minimální hodnotu $C_{\min}$ a vypočítejte $C_{\min}$.

c) Stanovte, pro které hodnoty x nabývá poměr $\frac{C}{C_{\min}}$ hodnoty n, kde n je dané číslo > 1.

d) Graficky znázorněte funkci $n = \mathrm{f}\left(\frac{x}{d-a}\right)$ v oboru $0 \leqq \frac{x}{d-a} \leqq 0{,}45$.

e) Vyložte, jak lze výsledků této úlohy využít k seřizování technických otočných kondenzátorů při jejich výrobě.

Řešení:

a) Výslednou kapacitu vypočítáme jako kapacitu dvou rovinných kondenzátorů spojených paralelně. Desky obou kondenzátorů mají obsah S, vzdálenosti mezi deskami jsou

$$\frac{d}{2} + x - \frac{a}{2}, \qquad \frac{d}{2} - x - \frac{a}{2}.$$

Sečtením kapacit obou těchto kondenzátorů dostaneme

$$C = \frac{\varepsilon S}{\frac{d}{2} + x - \frac{a}{2}} + \frac{\varepsilon S}{\frac{d}{2} - x - \frac{a}{2}},$$

když ε je permitivita prostředí mezi deskami. Jednoduchou úpravou dostaneme výsledek ve tvaru

$$C = \frac{4\varepsilon S\,(d-a)}{(d-a)^2 - 4x^2}. \tag{1}$$

b) Kapacita C má minimální velikost C_{min} pro takovou hodnotu x, pro kterou je jmenovatel v (1) maximální, tedy pro $x = 0$, tj. když deska D_3 je právě uprostřed mezi deskami D_1 a D_2. V tomto případě je

$$C_{min} = \frac{4\,\varepsilon S}{d - a}\,. \tag{2}$$

c) Je-li $n > 1$ dané číslo, bude podle zadání, s použitím (1) a (2):

$$\frac{4\,\varepsilon S\,(d-a)}{(d-a)^2 - 4\,x^2} = n\,\frac{4\varepsilon S}{d-a}\,. \tag{3}$$

Touto podmínkou je určena hledaná hodnota x. Jde o ryze kvadratickou rovnici, jejíž řešení jsou

$$x_{1,2} = \pm\,\frac{d-a}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{n}}\,.$$

d) Když z (3) vyjádříme n, dostaneme po úpravě

$$n = \frac{1}{1 - 4\left(\dfrac{x}{d-a}\right)^2}$$

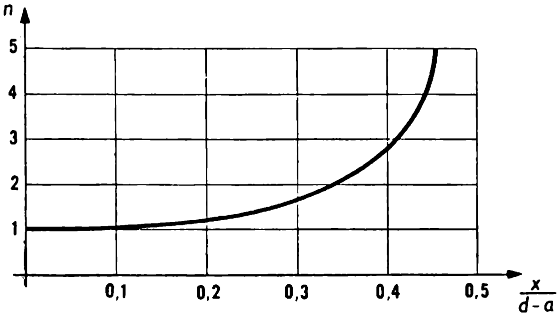
a tuto funkci graficky znázorníme v předepsaném intervalu.

Tabulka hodnot:

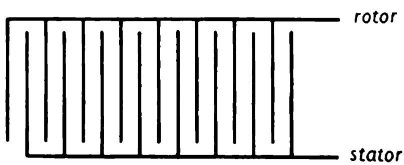
$\frac{x}{d-a}$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
n	1,00	1,01	1,04	1,10	1,19	1,33	1,56	1,96	2,78	5,26

Graf je znázorněn na obr. 3.

e) Technický otočný kondenzátor je soustava paralelně spojených kondenzátorů, jichž se týká naše úloha (viz obr. 4). Při přesném nastavení plechů rotoru doprostřed mezi plechy statoru je kapacita kondenzátoru minimální. Ke správnému seřízení postačí měřič kapacit.



Obr. 3



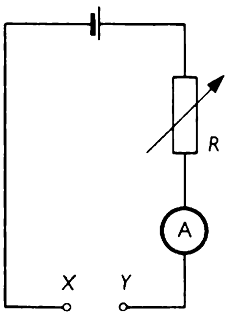
Obr. 4

3. úkol experimentální (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

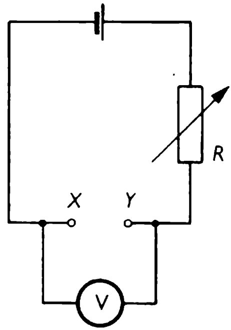
Měření odporu metodou substituční

Pomůcky: Voltmetr, ampérmetr, reostat, odporová dekáda, baterie, odpor neznámé hodnoty.

Popis metody: Zapojíme obvod podle obr. 5, resp. obr. 6. Mezi svorky X, Y připojíme neznámý odpor R_x a regulačním reostatem R nastavíme proud tak, aby ampérmetr A, resp. voltmetr V dával dobře čitelnou výchylku. Údaj ampérmetru I_0, resp. voltmetru U_0 zaznamenáme. Pak odpojíme neznámý odpor R_x a nahradíme ho odporovou dekádou. Na dekádě nastavíme



Obr. 5



Obr. 6

postupně odpory R_1, R_2 takové, aby údaje měřidel I_1, I_2, resp. U_1, U_2 byly v prvním případě o něco větší, v druhém případě o něco menší než I_0, resp. U_0. Velikost neznámého odporu vypočítáme ze vztahů

$$R_x = R_1 + \frac{I_1 - I_0}{I_1 - I_2}(R_2 - R_1), \qquad (1)$$

$$\text{resp. } R_x = R_1 + \frac{U_1 - U_0}{U_1 - U_2}(R_2 - R_1). \qquad (2)$$

Úlohy:

a) Odvoďte (pomocí lineární interpolace) vztahy (1) a (2) pro výpočet odporu R_x.

b) Změřte velikost neznámého odporu pětkrát v zapojení podle obr. 5 a pětkrát v zapojení podle obr. 6. Při každém měření změňte poněkud velikost proměnného odporu R.

c) Velikost neznámého odporu stanovte jako aritmetický průměr z deseti hodnot určených podle bodu b).

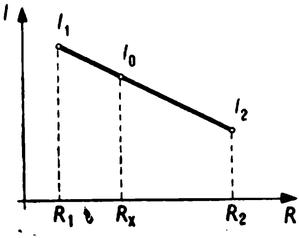
Poznámky: **1.** Ampérmetr a voltmetr volte se stejnou třídou přesnosti (např. Avomet) a poměry v obvodu nastavujte tak, aby ručičky ukazovaly přibližně stejné výchylky (ve stupních) v zapojení podle obr. 5 a v zapojení podle obr. 6.

2. Při nastavování dekády v zapojení podle obr. 5 postupujte od větších hodnot odporu k menším, v zapojení podle obr. 6 naopak, abyste nepřetížili ampérmetr, popř. voltmetr.

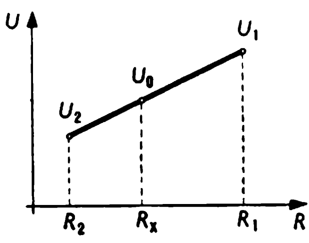
3. Proud v obvodu, nastavený reostatem R, nesmí překročit hodnotu, která je pro použitou odporovou dekádu nejvýše přípustná.

Řešení:

a) Za předpokladu, že mezi odporem a proudem je



Obr. 7



Obr. 8

lineární závislost (viz obr. 7), plyne z podobnosti trojúhelníků:

$$\frac{I_1 - I_2}{R_2 - R_1} = \frac{I_1 - I_0}{R_x - R_1}.$$

Předpokládáme-li lineární závislost mezi odporem a napětím (viz. obr. 8), platí obdobně

$$\frac{U_1 - U_2}{R_1 - R_2} = \frac{U_1 - U_0}{R_1 - R_x}.$$

Z těchto rovnic dostaneme vztahy pro výpočet odporu R_x.

b) Naměřené hodnoty a výpočet neznámého odporu R_x.

Při zapojení podle obr. 5

I_0 [mA]	I_1 [mA]	R_1 [Ω]	I_2 [mA]	R_2 [Ω]	R_x [Ω]
15,0	15,2	53,0	14,8	57,0	55,0
10,0	10,1	46,0	9,9	51,0	48,5
12,5	12,7	54,0	12,4	60,0	58,0
7,5	7,7	50,0	7,48	59,0	56,4
12,0	12,1	50,0	11,9	54,0	52,0

Při zapojení podle obr. 6

U_0 [V]	U_1 [V]	R_1 [Ω]	U_2 [V]	R_2 [Ω]	R_x [Ω]
0,40	0,41	44,0	0,39	42,0	43,0
0,50	0,51	53,0	0,49	51,0	52,0
0,45	0,46	54,0	0,44	52,0	53,0
0,30	0,31	56,0	0,29	52,0	54,0
0,35	0,36	54,0	0,32	51,0	52,5

c) Aritmetický průměr z deseti hodnot určených v části b) je $\overline{R}_x = 52{,}4\ \Omega \doteq 52\ \Omega$.

4. úloha (navrhli dr. Jozef Tuček a Emanuel Síleš)

Dva rovnako veľké vodivé kruhové kotúče K_1, K_2 o polomeroch R majú spoločnú os o. Sú navzájom rovnobežné a ich vzdialenosť je d. Kotúč K_1 je nehybný, kotúč K_2 sa okolo osi o rovnomerne otáča. V oboch kotúčach sú v rovnakej vzdialenosti od osi o veľmi malé kruhové otvory. Na kotúči K_1 je kladný náboj $+Q$, na kotúči K_2 záporný náboj $-Q$. Kotúče sú vo vákuu o permitivite ε_0. Elektrické pole medzi nimi možno považovať za homogénne. V určitom okamihu preletí stredom otvoru v kotúči K_1, v smere rovnobežnom s osou o, elektrón urýchlený napätím U_0. V tomto okamihu je stred otvoru v druhom, otáčajúcom sa kotúči K_2 pootočený proti stredu otvoru v kotúči K_1 o uhol φ uvažovaný v zmysle proti otáčaniu tohoto kotúča, takže tento otvor „dobieha" otvor v kotúči K_1.

a) Určte najmenšiu frekvenciu otáčania kotúča K_2, aby elektrón preletel stredom jeho otvoru. Vplyv tiažového poľa na letiaci elektrón je zanedbatelný.

b) Určte podmienku pre veličiny U_0, Q, d, R, aby úloha bola riešiteľná.

Riešenie:

a) Elektrón, ktorého náboj je e a hmotnosť m, dosiahne po urýchlení napätím U_0 konečnú rýchlosť

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}\,. \tag{1}$$

Elektrické pole medzi kotúčmi má indukciu

$$D = \frac{Q}{\pi R^2}\,.$$

a intenzitu

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \pi R^2}\,. \tag{2}$$

Na elektrón v tomto poli pôsobí stála sila $F = eE$ a dodáva mu konštantné spomalenie (vzhľadom na polaritu nábojov)

$$-a = -\frac{F}{m} = -\frac{eE}{m}\,. \tag{3}$$

Elektrón po vstupe medzi kotúče koná rovnomerne spomalený pohyb s počiatočnou rýchlosťou v_0 podľa (1), a pre jeho vzdialenosť x od pevného kotúča platí

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 , \qquad (4)$$

ak počítame čas t od okamihu, v ktorom elektrón preletí stredom otvoru v pevnom kotúči K_1.

Dobu t_0 jeho preletu medzi kotúčmi vypočítáme zo vzťahu (4), keď v ňom položíme $x = d$, $t = t_0$. Dostaneme kvadratickú rovnicu, ktorej riešenie je

$$(t_0)_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2ad}}{a} . \qquad (5)$$

Našej úlohe vyhovuje len menšia z oboch hodnôt (5), t.j.

$$t_0 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2ad}}{a} , \qquad (6)$$

lebo druhá väčšia hodnota značí dobu, za ktorú by sa elektrón po zastavení a zmene orientácie pohybu opäť dostal do vzdialenosti d od pevného kotúča, keby spomaľujúce pole nebolo priestorovo obmedzené.

Za dobu t_0 podľa (6) sa musí kotúč K_2, ktorý sa otáča uhlovou rýchlosťou ω, otočiť o uhol $\varphi + 2k\pi$, kde k je nula alebo ľubovoľné prirodzené číslo. Pretože máme určiť najmenšiu frekvenciu, položíme $k = 0$. Potom máme podmienku

$$\omega t_0 = \varphi \qquad \text{alebo} \qquad \omega = \frac{\varphi}{t_0} . \qquad (7)$$

Frekvencia rotačného pohybu je

$$f = \frac{\omega}{2\pi} . \qquad (8)$$

Do (8) dosadíme ω zo (7), t_0 dosadíme zo (6), v_0 z (1), a z (3), E z (2). Po úprave zlomku dostaneme

$$f = \frac{\varphi}{4\pi d}\sqrt{\frac{2eU_0}{m}}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{Qd}{\pi\varepsilon_0 R^2 U_0}}\right). \qquad (9)$$

b) Vzťah (9) dáva reálnu, od nuly rôznu hodnotu len vtedy, ak je splnená podmienka

$$\frac{Qd}{\pi\varepsilon_0 R^2 U_0} < 1,$$

alebo ak vyjadríme podmienku pre urýchľovacie napätie

$$U_0 > \frac{Qd}{\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

5. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

Uzavřený čtvercový závit o straně a má hmotnost m a elektrický odpor R. Je upevněn nad póly magnetu, jejichž rozměry jsou stejné jako rozměry závitu (obr. 9). V určitém okamžiku je závit uvolněn a padá. Magnetické pole má takovou indukci, že závit tímto polem proletuje s konstantní rychlostí.

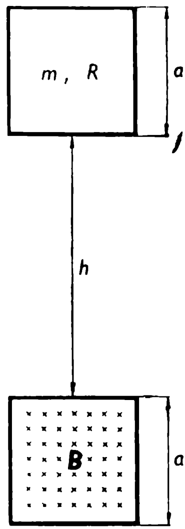
a) Jaké napětí U se indukuje v závitu při jeho průletu magnetickým polem?

b) Jaký proud I protéká závitem při jeho průletu magnetickým polem?

c) Jakým výkonem P je závit ohříván při průletu magnetickým polem?

d) Jak velká je magnetická indukce B mezi póly magnetu?

Magnetické pole mezi póly magnetu



Obr. 9

považujte za homogenní. Odpor prostředí při pohybu závitu zanedbejte.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $a = 2{,}0$ cm; $m = 0{,}20$ g; $R = 0{,}30\ \Omega$; $h = 20$ cm; tíhové zrychlení $g = 9{,}8\ \mathrm{m\ s^{-2}}$.

Řešení:

a) Po pádu z výšky h nabude závit rychlosti

$$v = \sqrt{2\,gh} \tag{1}$$

a touto rychlostí se bude pohybovat dále v magnetickém poli, takže tímto polem proletí za dobu

$$t = \frac{2\,a}{v} = \frac{2\,a}{\sqrt{2gh}}\,. \tag{2}$$

Když závit vstupuje do magnetického pole, indukuje se v něm napětí U; když vystupuje z pole, indukuje se v něm napětí stejně velké, ale opačné polarity. Obě napětí vykonají za dobu t podle (2) práci

$$A = \frac{U^2}{R}\,t = \frac{U^2}{R}\,\frac{2a}{\sqrt{2gh}}\,. \tag{3}$$

Tato práce se musí rovnat energii, kterou by závit získal, kdyby výšku $2a$ proletěl volným pádem. Podle zadání se totiž závit pohybuje v magnetickém poli stálou rychlostí v podle (1), takže pohybovou energii nezíská. Tuto pohybovou energii, kterou by získal a která se promění v teplo, vyjádříme nyní jako rozdíl příslušných polohových energií potenciálních, tj.

$$W = 2\,mga. \tag{4}$$

Porovnáním (3) a (4) dostaneme rovnici k určení hledaného napětí U:

$$\frac{U^2}{R}\frac{2a}{\sqrt{2gh}} = 2\,mga\,.$$

Z této rovnice vyjádříme U

$$U = \sqrt{Rgm}\,\sqrt[4]{2gh}\,. \tag{5}$$

Rozměrová zkouška:

$$[\sqrt{Rgm}\,\sqrt[4]{2gh}\,] = \mathrm{V}^{\frac{1}{2}}\,A^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{m}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{kg}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{m}^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{s}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{m}^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \mathrm{V}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{kg}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{ms}^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{V}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{V}^{\frac{1}{2}} = \mathrm{V}.$$

Obecný výsledek je (5), pro dané hodnoty vyjde $U \doteq$ $\doteq 34$ mV.

b) Proud tekoucí závitem při průletu magnetickým polem určíme podle zákona Ohmova:

$$I = \frac{U}{R} = \sqrt{\frac{gm}{R}}\,\sqrt[4]{2gh}\,. \tag{6}$$

Obecný výsledek je (6), pro dané hodnoty vyjde $I \doteq$ $\doteq 0{,}11$ A.

c) Výkon stanovíme jako součin UI a dosadíme z (5) a (6). Po úpravě dostaneme

$$P = gm\sqrt{2gh}\,. \tag{7}$$

Obecný výsledek je (7), pro dané hodnoty vyjde P $\doteq$ $\doteq 3{,}9$ mW.

d) Za dobu $\frac{t}{2}$, kde t značí dobu podle (2), vstoupí závit do magnetického pole celou svou plochou a magnetický indukční tok se v něm rovnoměrně změní z hodnoty $\Phi_1 = 0$ na hodnotu $\Phi_2 = Ba^2$. Podle indukčního zákona se v něm indukuje napětí

$$U = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\dfrac{t}{2}}.$$

Po dosazení za t z (2) a po jednoduché úpravě dostaneme

$$U = B\,a\sqrt{2gh}\,.$$

Porovnáním s (5) vyjádříme indukci pole

$$B = \frac{\sqrt{Rmg}}{a\sqrt[4]{2gh}}\,. \tag{8}$$

Rozměrová zkouška:

$$\left[\frac{\sqrt{Rmg}}{a\sqrt[4]{2gh}}\right] = \frac{\mathrm{kg}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{m}\mathrm{s}^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{m}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{kg}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{m}\,\mathrm{m}^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{s}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{m}^{\frac{1}{4}}} =$$

$$= \mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-2}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{Vsm}^{-2}.$$

Obecný výsledek je (8), pro dané hodnoty vyjde $B \doteq$ $\doteq 0{,}86\ \mathrm{T}$.

6. úkol experimentální (navrhl Mojmír Simerský)

Měření žhavicího příkonu a odporu žhavicího vlákna elektronky

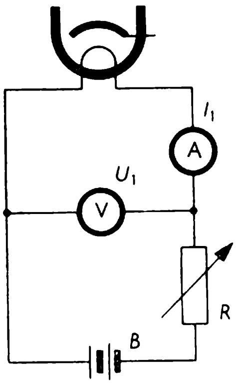
Žhavicí příkon a odpor žhavicího vlákna elektronky se měří stejnosměrným nebo střídavým proudem v zapojení podle obr. 10 nebo podle obr. 11.

V obr. 10 je B akumulátorová baterie vhodného svorkového napětí, R regulační reostat. V obr. 11 je TR_1 síťový transformátor 220 V/6,3 V, TR_2 regulační autotransformátor.

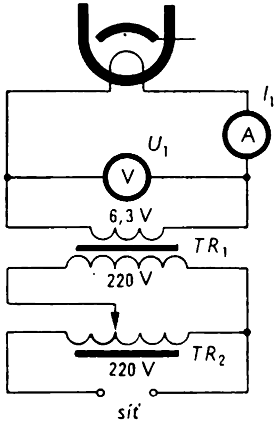
Žhavicí příkon P_f se určí ze vztahu $P_f = U_f I_f$, odpor R_f žhavicího vlákna ze vztahu $R_f = \frac{U_f}{I_f}$.

Úlohy: Měřte žhavicí příkon P_f a odpor žhavicího vlákna R_f u některé elektronky řady E (jmenovité žhavicí napětí 6,3 V). Při měření nastavujte

a) různé hodnoty žhavicího napětí, a to od nuly do 7,0 V, po 0,5 V;



Obr. 10



Obr. 11

b) různé hodnoty žhavicího proudu od nuly do hodnoty asi o 10 % větší než jmenovitý žhavicí proud podle Příručního katalogu TESLA; postupujte tak, abyste dostali nejméně 10 hodnot.

c) Výsledky znázorněte graficky, tj. nakreslete celkem čtyři grafy: $P_f = f_1(U_f)$; $R_f = f_2(U_f)$; $P_f = f_3(I_f)$; $R_f = f_4(I_f)$. Stačí dva obrázky, do jednoho zakreslete závislosti P_f a R_f na U_f, do druhého závislosti P_f a R_f na I_f.

d) Pokuste se o výklad nalezených závislostí.

Poznámky: 1. Budete-li měřit v zapojení podle obr. 10, nevyjímejte po celou dobu měření elektronku z objímky, abyste popř. nepřetížili voltmetr, na němž by po vyjmutí elektronky bylo plné napětí zdroje *B*.

2. Po každém nastavení počkejte, až se ustálí tepelné poměry žhavicího tělíska, tj. až se ručičky měřidel ustálí v konečných polohách.

3. Budete-li měřit v zapojení podle obr. 11, musíte stále kontrolovat nastavené hodnoty, poněvadž napětí sítě kolísá. Máte-li střídavý stabilizátor, zapojte ho mezi síť a vstupní svorky transformátoru TR_2.

Řešení:

Žhavicí příkon P_f a odpor žhavicího vlákna R_f byly určeny podle pokynů v zadání pro elektronku EL 12. Měření bylo provedeno při zapojení podle obr. 11. Naměřené hodnoty a vypočtené hodnoty P_f a R_f jsou uvedeny v následujících tabulkách.

a)

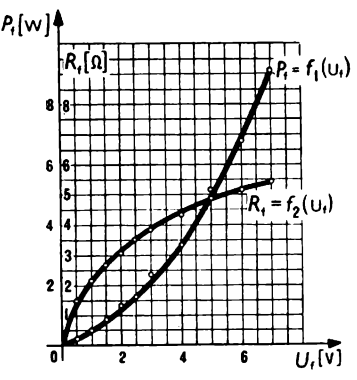
U_f [V]	I_f [A]	P_f [W]	R_f [Ω]
0	0	0	0
0,5	0,33	0,163	1,51
1,0	0,45	0,45	2,22
1,5	0,56	0,84	2,68
2,0	0,65	1,30	3,07
2,5	0,72	1,80	3,47
3,0	0,79	2,37	3,80
3,5	0,86	3,00	4,07
4,0	0,93	3,70	4,30
4,5	0,98	4,41	4,59
5,0	1,05	5,25	4,77
5,5	1,10	6,05	5,00
6,0	1,15	6,90	5,22
6,2	1,18	7,32	5,26
7,0	1,30	9,10	5,38

b)

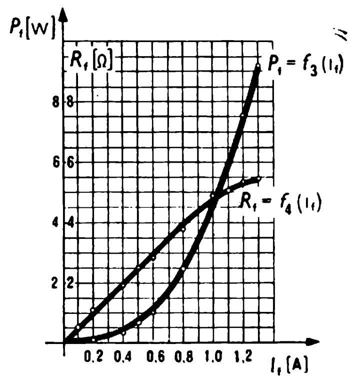
I_f [A]	U_f [V]	P_f [W]	R_f [Ω]
0,1	0,06	0,006	0,6
0,2	0,22	0,044	1,1
0,3	0,48	0,144	1,6
0,4	0,72	0,288	1,8
0,5	1,20	0,60	2,4
0,6	1,70	1,02	2,83
0,7	2,37	1,66	3,38
0,8	3,06	2,45	3,82
0,9	3,82	3,44	4,24
1,0	4,80	4,80	4,80
1,1	5,50	6,05	5,00
1,2	6,30	7,56	5,25
1,3	7,07	9,20	5,44

c) Výsledky $P_f = f_1(U_f)$, $R_f = f_2(U_f)$ resp. $P_f = f_3(I_f)$ a $R_f = f_4(I_f)$ jsou graficky znázorněny v obrázcích 12 a 13.

d) Poněvadž odpor žhavicího vlákna elektronky s teplotou roste (v prvním přiblížení lineárně), má naměřená závislost průběh podstatně jiný, než kdyby tento odpor byl v celém oboru teplot konstantní; v tomto případě by totiž grafem měřené závislosti byla kvadratická parabola.



Obr. 12



Obr. 13

Vzrůst žhavicího příkonu s rostoucím žhavicím napětím je zřetelně pomalejší než v případě kvadratické závislosti. Při vyšších teplotách jsou rozdíly ještě výraznější, poněvadž závislost odporu vlákna na teplotě již nelze aproximovat jednoduchou lineární funkcí (viz obr. 12).

U závislosti žhavicího příkonu na proudu jeví křivka naopak růst rychlejší, než by odpovídal kvadratické závislosti, poněvadž odpor, který s teplotou roste, je nyní činitelem, jímž se dvojmoc proudu násobí. Uvedené odchylky od kvadratického průběhu jsou zřejmé, uvážíme-li platnost vztahu

$$P = \frac{U^2}{R} = RI^2.$$

Odpor R v závislosti na žhavicím proudu I_f nebo žhavicím napětí U_f roste, neboť při rostoucím $I_f(U_f)$ se zvyšuje teplota žhavicího vlákna.

7. *úloha* (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

Dva bodové náboje $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$ ve vakuu jsou od sebe vzdáleny o délku a. Na přímé spojnici těchto nábojů určete bod X, který má tu vlastnost, že práce vnějších sil při přenesení libovolného náboje z nekonečna do tohoto bodu je nulová. Proveďte diskusi vzhledem k velikostem nábojů Q_1 a Q_2.

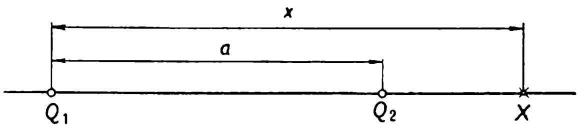
Řešení:

Body, v nichž sídlí oba náboje, označíme souhlasně Q_1, Q_2, přímku, která je spojuje, orientujeme podle obrázku 14. Počátek soustavy souřadnic ($x = 0$) položíme do bodu Q_1. Hledaný bod X má souřadnici x, která může být kladná nebo záporná, tj. bod X může ležet vpravo nebo vlevo od bodu Q_1.

Ve smyslu zadání má mít elektrické pole, buzené oběma náboji, v bodě X nulový potenciál. Z toho plyne podmínka

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|x|} - \frac{|Q_2|}{|x-a|}\right) = 0. \qquad (1)$$

Vzdálenosti hledaného bodu X od obou nábojů musíme totiž brát v absolutních hodnotách. Rovnice (1) má smysl pro $x \neq 0$, $x \neq a$, tj. bod X nemůže splynout



Obr. 14

s některým z obou nábojů. Abychom nemuseli počítat s absolutními hodnotami, umocníme rovnici (1) dvěma; po zkrácení a úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2(Q_1^2 - Q_2^2) - 2\,aQ_1^2\,x + a^2Q_1^2 = 0\,,$$

jejíž kořeny jsou

$$x_1 = \frac{aQ_1}{Q_1 - Q_2}; \quad x_2 = \frac{aQ_1}{Q_1 + Q_2}.$$

Poněvadž $Q_2 < Q_1$, zapíšeme výsledky takto:

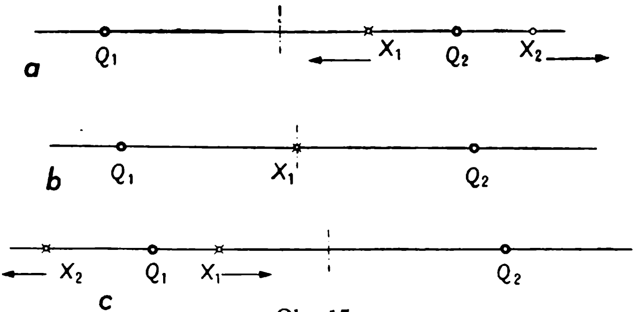
$$x_1 = \frac{aQ_1}{Q_1 + Q_2}; \quad x_2 = \frac{aQ_1}{Q_1 - Q_2}.$$

Musíme nyní rozlišovat tři případy:

a) $Q_1 > |Q_2|$; v tomto případě je $\frac{a}{2} < x_1 < a$; $x_2 > a$, tj. jeden z hledaných bodů leží mezi středem úsečky Q_1Q_2 a bodem Q_2, druhý na polopřímce Q_1Q_2 za bodem Q_2. Když se zmenšuje rozdíl $Q_1 - |Q_2|$, blíží se první bod středu úsečky Q_1Q_2, druhý bod se od bodu Q_2 vzdaluje.

b) $Q_1 = |Q_2|$; nyní je $x_1 = \frac{a}{2}$, x_2 neexistuje. Podmínce úlohy vyhovuje jediný bod, a to střed úsečky Q_1Q_2.

c) $Q_1 < |Q_2|$; nyní je $0 < x_1 < \frac{a}{2}$; $x_2 < 0$, tj. jeden z hledaných bodů leží mezi bodem Q_1 a středem úsečky Q_1Q_2, druhý na polopřímce Q_2Q_1 za bodem Q_1; když se zmenšuje rozdíl $|Q_2| - Q_1$, blíží se první bod středu úsečky Q_1Q_2, druhý se od bodu Q_1 vzdaluje.



Obr. 15

Uvedené případy jsou znázorněny na obr. 15 a, b, c, přičemž v případě a) bylo voleno $Q_1 = 3\,|Q_2|$, v případě c) $Q_1 = \frac{|Q_2|}{3}$.

8. úloha (navrhl Václav Havel)

Dvě stejné, dokonale pružné kovové kuličky, z nichž každá má hmotnost m a poloměr r, jsou nabity stejně velkými nesouhlasnými náboji $\pm Q$ a upevněny tak, že vzdálenost jejich středů je $2R$. Kuličky jsou ve vakuu a v beztížném stavu. Po uvolnění se počnou vlivem elektrických sil pohybovat a dojde mezi nimi k pružné srážce. Za jakou dobu po rázu se kuličky opět dostanou do původní vzájemné polohy, v níž jejich středy mají vzdálenost $2R$?

Úlohu řešte pro případ, že

a) jsou uvolněny obě kuličky;

b) je uvolněna jen jedna kulička.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $Q = 2{,}0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$; $R = 50\,\mathrm{cm}$; $r = 5{,}0\,\mathrm{mm}$; $m = 0{,}16\,\mathrm{g}$; permitivita vakua $\varepsilon_0 = \frac{1}{3{,}6\pi}\,10^{-10}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$.

Řešení:

a) Před uvolněním měla soustava potenciální energii

$$W_1 = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R}, \tag{1}$$

v okamžiku rázu se tato energie změnila na

$$W_2 = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r}. \tag{2}$$

Rozdíl obou energií $\Delta W = W_1 - W_2$ se změní v energii kinetickou. Poněvadž kuličky jsou stejné, podělí se o tuto energii rovným dílem. Každá z nich tedy dostane rychlost v_1, pro kterou platí

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{\Delta W}{2} \quad \text{neboli} \quad v_1 = \sqrt{\frac{\Delta W}{m}}. \tag{3}$$

Po rázu přestanou působit elektrické síly, poněvadž kuličky se dotykem vybíjí. Budou se pak od sebe vzdalovat rychlostí v_2, která je dvojnásobkem rychlosti v_1

podle (3). Mají-li se dostat do původní polohy, musí se od sebe vzdálit o délku $2(R - r)$, a to trvá dobu $t = \frac{2(R-r)}{v_2} = \frac{R-r}{v_1}$. Když za v_1 dosadíme z (3) a za ΔW z (1) a z (2), dostaneme po úpravě

$$t = \frac{2}{Q}\sqrt{2\pi\varepsilon_0 \, mRr\,(R - r)}\,. \tag{4}$$

Rozměrová zkouška:

$$\left[\frac{2}{Q}\sqrt{2\pi\varepsilon_0 \, mRr\,(R-r)}\right] = \mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{s}^{-1}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\,\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^3\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{kg}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{s}^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{s}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\mathrm{m}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{kg}^{\frac{1}{2}}\mathrm{m}^{\frac{3}{2}}\right) = \mathrm{s}\,.$$

Obecný výsledek je (4), pro dané hodnoty vyjde $t \doteq 3{,}3$ s.

b) Celá energie ΔW se nyní předá jediné kuličce, pro jejíž rychlost v_3 pak platí

$$\frac{1}{2}\,mv_3^2 = \Delta W \text{ neboli } v_3 = \sqrt{\frac{2\Delta W}{m}}\,. \tag{5}$$

Touto rychlostí se vzdaluje po rázu volná kulička od pevné. Dráhu $2(R-r)$ vykoná za dobu $t' = \frac{2(R-r)}{v_3}$.

Po dosazení za v_3 z (5) a za ΔW z (1) a z (2) dostaneme po úpravě

$$t' = \frac{4}{Q}\sqrt{\pi\varepsilon_0 \, mRr\,(R-r)}\,. \tag{6}$$

Rozměrová zkouška je stejná jako v případě a).
Obecný výsledek je (6), pro dané hodnoty vyjde $t' \doteq 4{,}7$ s.

9. úloha (navrhl dr. Evžen Říman)

V zapojení podle obr. 16, v němž je dáno svorkové napětí zdroje U a všechny odpory, vypočítejte

a) proudy ve všech větvích obvodu;

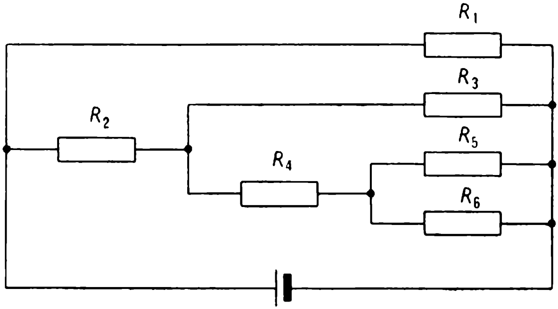
b) napětí na všech odporech;

c) příkony všech odporů;

d) velikost jediného odporu, jímž lze (z hlediska zdroje) nahradit všechny odpory znázorněné sítě;

e) celkový příkon, který zdroj dodává do obvodu.

Řešte pro hodnoty $U = 6{,}3$ V; $R_1 = 12{,}6\ \Omega$; $R_2 =$



Obr. 16

$= 5{,}0\ \Omega$; $R_3 = 7{,}0\ \Omega$; $R_4 = 7{,}0\ \Omega$; $R_5 = 3{,}5\ \Omega$; $R_6 =$
$= 7{,}0\ \Omega$.

Řešení:

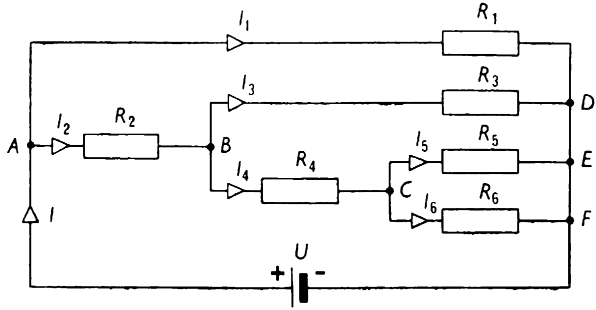
Proudy v jednotlivých větvích a uzly sítě označíme podle obr. 17.

a) Pro uzly A, B, C platí podle 1. Kirchhoffova zákona

$$I = I_1 + I_2, \tag{1}$$
$$I_2 = I_3 + I_4, \tag{2}$$
$$I_4 = I_5 + I_6. \tag{3}$$

Pro smyčky $ECFE$, $FCBDEF$, $ADBA$, $ADEFA$ platí podle 2. Kirchhoffova zákona

$$R_5I_5 - R_6I_6 = 0, \tag{4}$$



Obr. 17

$$R_3I_3 - R_4I_4 - R_6I_6 = 0, \tag{5}$$
$$R_1I_1 - R_2I_2 - R_3I_3 = 0, \tag{6}$$
$$R_1I_1 = U. \tag{7}$$

Řešením soustavy rovnic (1) až (7) dostaneme pro zadané hodnoty

$I_1 = 0{,}50$ A, $I_2 = 0{,}70$ A, $I_3 = 0{,}40$ A, $I_4 = 0{,}30$ A, $I_5 = 0{,}20$ A, $I_6 = 0{,}10$ A, $I = 1{,}20$ A.

b) Napětí na každém odporu vypočítáme jako součin velikosti odporu a proudu jím protékaného. Vychází:

$U_1 = 6{,}3$ V, $U_2 = 3{,}5$ V, $U_3 = 2{,}8$ V, $U_4 = 2{,}1$ V, $U_5 = 0{,}70$ V, $U_6 = 0{,}70$ V.

c) Příkon každého odporu vypočítáme pomocí vztahu $P_i = U_iI_i = R_iI_i^2$. Odbržíme tyto výsledky $P_1 = 3{,}2$ W, $P_2 = 2{,}5$ W, $P_3 = 1{,}1$ W, $P_4 = 0{,}63$ W, $P_5 = 0{,}14$ W, $P_6 = 0{,}070$ W.

d) Na obvodu je napětí $U = 6{,}3$ V, obvodem protéká proud $I = 1{,}2$ A. Celý obvod lze proto z hlediska zdroje nahradit jediným odporem o velikosti

$$R = \frac{U}{I} = 5{,}3\ \Omega\,.$$

e) Celkový příkon dostaneme buď jako součet dílčích příkonů P_i, nebo ho vypočteme jako součin napětí zdroje a celkového proudu

$$P = UI = 7{,}6 \ \mathrm{W}.$$

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhli dr. Jozef Tuček a Emanuel Síleš)

Homogénny plochý kotúč K_1 o polomere r a hmotnosti m koná posuvný pohyb tak, že jeho stred sa pohybuje stálou rýchlosťou v po priamke p. Tento kotúč narazí na iný kotúč K_2 rovnakého polomeru a rovnakej hmotnosti, ktorý je v pokoji. Stred kotúča K_2 má od priamky p vzdialenosť $d < 2r$. Oba kotúče sú na tejže vodorovnej podložke a ich zrážka je dokonale pružná.

Určite veľkosti v_1 a v_2 rýchlostí kotúčov po zrážke a ostré uhly α_1 a α_2, ktoré vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ zvierajú s priamkou p. Trenie neuvažujeme.

Riešenie:

Zo zákona zachovania energie

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

vyplýva

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2. \tag{1}$$

Zo zákona o zachovaní hybnosti

$$\mathrm{m}\mathbf{v} = \mathrm{m}\mathbf{v}_1 + \mathrm{m}\mathbf{v}_2$$

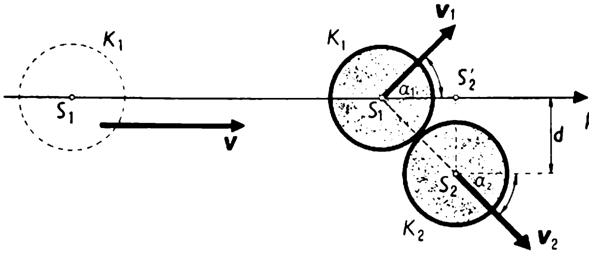
dostaneme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \tag{2}$$

Vzťahy (1) a (2) sú súčasne splnené len vtedy, keď vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ sú navzájom kolmé, takže pre uhly α_1 a α_2 platí

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 90°. \tag{3}$$

Kotúč K_2 sa odrazí v smere spojnice stredov S_1, S_2 oboch kotúčov v okamihu zrážky (pozri obr. 18). Z pravouhlého trojuholníka $S_2S_2'S_1$ vyjadríme



Obr. 18

$$\sin \alpha_2 = \frac{d}{2r}$$

a vzhľadom na (3)

$$\cos \alpha_1 = \frac{d}{2r}.$$

Tým sú určené smery vektorov $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$. Ich veľkosti sú

$$v_1 = v \cos \alpha_1 = v \frac{d}{2r},$$

$$v_2 = v \cos \alpha_2 = v \sin \alpha_1 = \frac{v}{2r} \sqrt{4r^2 - d^2}.$$

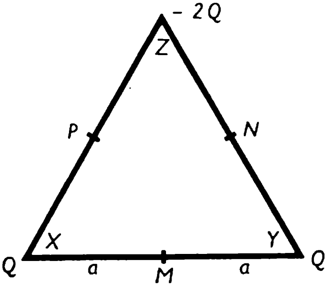
2. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

Rovnostranný trojúhelník o straně $2a$ má vrcholy X, Y, Z. Ve vrcholech X, Y jsou ve vakuu umístěny stejné kladné náboje Q a ve vrcholu Z záporný náboj $-2Q$. Středy stran XY, YZ, ZX označme po řadě M, N, P.

Stanovte práci vykonanou při přemístění kladného náboje q z bodu M do bodu N, z bodu N do bodu P a z bodu P do bodu M; vypočítejte také součet těchto prací.

Řešte nejprve obecně, potom pro $Q = 1{,}00 \,.\, 10^{-8}$C, $q = 1{,}00 \,.\, 10^{-10}$C, $a = 10{,}0$ cm.

Řešení:



Obr. 19

Nejdříve určíme potenciály elektrického pole v bodech M, N, P a označíme je po řadě φ_M, φ_N, φ_P. Výraz $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ označíme k, $k \doteq 9 \,.\, 10^9 \,\mathrm{m\,F^{-1}}$.

Potenciál φ_M je součtem potenciálů vyvolaných v bodě M náboji sídlícími v bodech X, Y, Z. Úsečky XM, YM, ZM (viz obr. 19) mají po řadě délky a, a, $a\sqrt{3}$, takže

$$\varphi_M = \frac{kQ}{a} + \frac{kQ}{a} - \frac{2kQ}{a\sqrt{3}} = \frac{2kQ}{3a}\left(3 - \sqrt{3}\right). \qquad (1)$$

Obdobně nalezneme

$$\varphi_N = \frac{kQ}{a\sqrt{3}} + \frac{kQ}{a} - \frac{2kQ}{a} = \frac{kQ}{3a}\left(\sqrt{3} - 3\right). \qquad (2)$$

Pro potenciál v bodě P vyjde hodnota stejná, tedy

$$\varphi_P = \varphi_N = \frac{kQ}{3a}\left(\sqrt{3} - 3\right). \qquad (3)$$

Práci vykonanou při přemístění náboje q z bodu M do bodu N označíme A_{MN}, obdobně označíme práce A_{NP}, A_{PM}. Vyjádříme práci A_{MN} pomocí rozdílu potenciálů

$$A_{MN} = q(\varphi_N - \varphi_M).$$

Po dosazení z (1) a (2) dostaneme

$$A_{MN} = \frac{kQq}{a}\left(\sqrt{3} - 3\right). \tag{4}$$

Z (3) je ihned zřejmé, že $A_{NP} = 0$. (5)

Pro A_{PM} platí

$$A_{PM} = q\,(\varphi_M - \varphi_P) = q\,(\varphi_M - \varphi_N) = -A_{MN}. \tag{6}$$

Pro zadané hodnoty vyjde $A_{MN} \doteq -1{,}14 \,.\, 10^{-7}\mathrm{J}$; $A_{NP} = 0$; $A_{PM} \doteq 1{,}14 \,.\, 10^{-7}\mathrm{J}$. Poněvadž $A_{MN} < 0$, koná pole práci při přemístění náboje z bodu M do bodu N a stejně velikou práci vykonají, podle (6), vnější síly při přemístění náboje z bodu P do bodu M. Při přemístění náboje z bodu N do bodu P se práce nekoná.

Součet všech tří prací je nulový, jak je zřejmé ze vztahů (4), (5), (6).

3. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

Jednoduchý obvod složený z odporu R, indukčnosti a kapacity má při kmitočtech f_1 a f_2 ($f_2 < f_1$) stejnou impedanci $Z = nR$ ($n > 1$). Stanovte

a) rezonanční kmitočet f_r obvodu;

b) indukčnost L a kapacitu C v obvodu;

c) činitel jakosti, tj. poměr $Q = \dfrac{\omega_r L}{R} = \dfrac{1}{\omega_r RC}$,

kde $\omega_r = 2\,\pi f_r$ značí úhlový rezonanční kmitočet.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $R = 10{,}0\,\Omega$; $n = 2{,}00$; $f_1 = 45{,}0$ kHz; $f_2 = 35{,}0$ kHz.

Řešení:

a) Ze zadaných podmínek dostáváme

$$nR = \sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}\,, \tag{1}$$

$$nR = \sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2}\,, \tag{2}$$

kde $\omega_1 = 2\,\pi f_1$, $\omega_2 = 2\,\pi f_2$ značí úhlové kmitočty. Porovnáním (1) a (2) dostaneme

$$\left(\omega_1\,L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2 = \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2. \tag{3}$$

Odmocněním vztahu (3) dostáváme rovnost mezi absolutními hodnotami. Můžeme však uvažovat takto: Poněvadž $f_1 > f_2$, vyplývá z rovnosti impedancí, že $f_1 > f_r$ a obvod má při tomto kmitočtu povahu indukční a obdobně $f_2 < f_r$ a obvod má při kmitočtu f_2 povahu kapacitní. To znamená, že při kmitočtu f_1 převládá reaktance indukční, při kmitočtu f_2 kapacitní. Proto můžeme místo (3) psát

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L\,.$$

Z tohoto vztahu vypočítáme

$$LC = \frac{1}{\omega_1\,\omega_2} = \frac{1}{4\pi^2 f_1 f_2}\,. \tag{4}$$

Pro rezonanční kmitočet f_r platí vzorec Thomsonův

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,. \tag{5}$$

Po dosazení z (4) dostaneme

$$f_r = \sqrt{f_1 f_2}\,. \tag{6}$$

Pro zadané hodnoty vyjde $f_r \doteq 39{,}7$ kHz.

b) Ze vztahu (1) dostaneme po úpravě

$$R\sqrt{n^2 - 1} = 2\,\pi f_1 L - \frac{1}{2\pi f_1 C}\,. \tag{7}$$

Ze vztahů (5) a (7) vyjádříme s přihlédnutím k (6)

$$L = \frac{R\sqrt{n^2-1}}{2\pi(f_1 - f_2)}; \qquad C = \frac{f_1 - f_2}{2\pi f_1 f_2 R\sqrt{n^2-1}}. \qquad (8)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $L = 2{,}76 \,.\, 10^{-4}$ H; $C = 5{,}83 \,.\, 10^{-8}$ F.

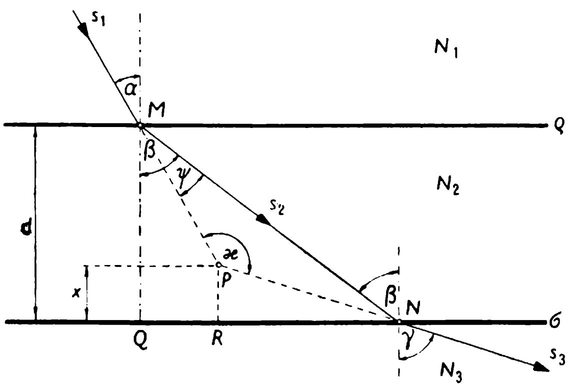
c) Do definice činitele jakosti uvedené v zadání úlohy dosadíme za f_r z (6) a za L nebo za C z (8) a po úpravě dostaneme

$$Q = \frac{\sqrt{f_1 f_2 (n^2-1)}}{f_1 - f_2}.$$

Pro zadané hodnoty vychází $Q = 6{,}87$.

4. úloha (navrhl Arpád Kecskés)

Svetelný lúč s_1 (pozri obr. 20) prechádza prostredím o absolútnom indexe lomu N_1, potom ako s_2 planparalelnou vrstvou hrúbky d o absolútnom indexe lomu N_2, z ktorej vystupuje do prostredia o absolútnom indexe



Obr. 20

lomu N_3 ako s_3. Na prvé rozhranie ρ dopadá lúč s_1 pod uhlom α. Pre absolútne indexy lomu platí $N_1 > N_2 > N_3$.

a) V akej vzdialenosti x od druhého rozhrania σ sa pretnú predĺžené lúče s_1 a s_3?

b) Určte podmienku riešiteľnosti úlohy a vysvetlite ju — za uvedeného predpokladu $N_1 > N_2 > N_3$.

c) K akej hodnote x_m sa blíži vzdialenosť x, keď sa uhol α neobmedzene zmenšuje?

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $N_1 = 1{,}75$; $N_2 = 1{,}50$; $N_3 = 1{,}00$; $d = 10{,}0$ cm; $\alpha = 30°$.

Riešenie:

a) Označme α uhol dopadu na rozhranie ρ a β uhol lomu na tomto rozhraní, ktorý je zároveň uhlom dopadu na rozhranie σ (pozri obr. 20). Z pravouhlého trojuholníka MQN, v ktorom $MQ = d$, vyjadríme

$$MN = \frac{d}{\cos\beta}. \tag{1}$$

V obecnom trojuholníku NMP sú pri vrcholoch N, M, P uhly

$$\varphi = \gamma - \beta; \quad \psi = \beta - \alpha; \quad \chi = 180° - (\gamma - \alpha).$$

Pomocou sínusovej vety vyjadríme

$$NP = MN\frac{\sin\psi}{\sin\chi} = MN\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\gamma - \alpha)}. \tag{2}$$

V pravouhlom trojuholníku PRN je pri vrchole P uhol γ, odvesna PR má hľadanú dĺžku $x = NP\cos\gamma$.

Do tohto vzťahu dosadíme NP z (2), MN z (1) a dostaneme

$$x = d\,\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\gamma - \alpha)} = d\,\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\cdot$$

$$\cdot\,\frac{\sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha\sin\beta}{\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha}. \tag{3}$$

Podľa zákona lomu platí

$$N_1 \sin \alpha = N_2 \sin \beta = N_3 \sin \gamma;$$

z toho vyjadríme

$$\sin \beta = \frac{N_1}{N_2} \sin \alpha; \quad \sin \gamma = \frac{N_1}{N_3} \sin \alpha$$

a ďalej budeme ešte potrebovať

$$\cos \beta = \frac{1}{N_2} \sqrt{N_2^2 - N_1^2 \sin^2 \alpha};$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{N_3} \sqrt{N_3^2 - N_1^2 \sin^2 \alpha}.$$

Dosadíme do (3) a upravíme, pričom predpokladáme, že $\alpha \neq 0$. Po úprave dostaneme

$$x = d \sqrt{\frac{N_3^2 - N_1^2 \sin^2 \alpha}{N_2^2 - N_1^2 \sin^2 \alpha}} \, \frac{N_1 \cos \alpha - \sqrt{N_2^2 - N_1^2 \sin^2 \alpha}}{N_1 \cos \alpha - \sqrt{N_3^2 - N_1^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (4)$$

Pre dané hodnoty vyjde $x \doteq 1{,}1$ cm.

b) Vo všeobecnom výsledku (4) musí byť $\sin \alpha \leqq \frac{N_3}{N_1}$ lebo potom tiež $\sin \alpha < \frac{N_2}{N_1}$ (podľa zadania je $N_3 < N_2$) a všetky odmocniny v (4) sú reálne. Menovateľ

$$N_1 \cos \alpha - \sqrt{N_3^2 - N_1^2 \sin^2 \alpha}$$

je vždy rôzny od nuly, pokiaľ $N_1 \neq N_3$, lebo rovnosť $N_1^2 \cos^2 \alpha = N_3^2 - N_1^2 \sin^2 \alpha$ alebo $N_1^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = N_3^2$ nastáva práve len pre $N_1 = N_3$.

V medznom prípade $\sin \alpha = \frac{N_3}{N_1}$ je $x = 0$, lebo lúč s_3, lomený pod uhlom 90°, leží v rozhraní σ.

Keď $\frac{N_3}{N_1} < \sin\alpha < \frac{N_2}{N_1}$, dochádza k úplnému odrazu na rozhraní σ.

Keď $\sin\alpha > \frac{N_2}{N_1}$ nastáva úplný odraz už na rozhraní ρ. Pre dané hodnoty dostávame podmienku

$$\sin\alpha \leqq \frac{4}{7} \text{ alebo } \alpha \leqq 34{,}75°.$$

c) Pri úprave výrazu (4) sme krátili činiteľom $\sin\alpha$. Pretože

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = 1,$$

môžeme limitu $x_\mathrm{m} = \lim\limits_{\alpha\to 0} x$ vypočítať dosadením $\alpha = 0$ do (4). Všeobecne dostaneme

$$x_\mathrm{m} = d\,\frac{N_3}{N_2}\,\frac{N_1 - N_2}{N_1 - N_3}$$

a pre dané hodnoty $x_\mathrm{m} \doteq 2{,}2$ cm.

c) Třetí kolo soutěže

1. úloha (navrhl ing. Miloš Rabas)

Válec délky $2l$, jehož průřez má plošný obsah S, je na obou koncích uzavřen a naplněn vzduchem o tlaku p_0. Uprostřed válce je dokonale těsnící píst o hmotnosti m. Posuneme-li píst z jeho rovnovážné polohy o velmi malou délku Δl, počne kmitat. Vypočítejte jeho kmitočet f.

Změny stavu plynu ve válci považujte za adiabatické, ke tření a k vlivu tíže nepřihlížejte; osa válce je v poloze vodorovné, tloušťku pístu zanedbejte.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $l = 20$ cm; $S = 3{,}0$ cm^2; $p_0 = 1{,}0$ kp cm^{-2}; $m = 10$ g; $\varkappa = 1{,}4$.
Pokyn k řešení: Je-li $0 < |h| \ll 1$, pak přibližně platí $(1 + h)^n \doteq 1 + nh$ pro jakoukoli hodnotu exponentu n.

Řešení:

Při posunutí pístu o vzdálenost Δl z rovnovážné polohy se objem vzduchu na jedné straně zvětší o $\Delta V = S\Delta l$, na druhé straně se o stejnou hodnotu zmenší. Jsou-li p_1, p_2 tlaky vzduchu na obou stranách po vychýlení pístu a $V_0 = Sl$ poloviční objem válce, platí

$$p_0 V_0^{\varkappa} = p_1 (V_0 + \Delta V)^{\varkappa} = p_2 (V_0 - \Delta V)^{\varkappa}.$$

Vyjádříme p_1, p_2 a aproximujeme podle pokynů k řešení:

$$p_1 = p_0 \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^{-\varkappa} \doteq p_0 \left(1 - \varkappa \frac{\Delta l}{l}\right), \qquad (1)$$

$$p_2 = p_0 \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^{-\varkappa} \doteq p_0 \left(1 + \varkappa \frac{\Delta l}{l}\right). \qquad (2)$$

Na píst působí ze strany, na kterou byl posunut, síla $F_2 = Sp_2$, z druhé strany síla $F_1 = Sp_1$. Protože $p_2 > p_1$, je píst tažen zpět do rovnovážné polohy silou

$$F = F_2 - F_1 = S(p_2 - p_1).$$

Po dosazení z (2) a (1) a po úpravě dostaneme pro tuto sílu vztah

$$F = 2\, Sp_0 \varkappa \frac{\Delta l}{l}. \qquad (3)$$

Podle (3) je velikost síly F přímo úměrná výchylce Δl a směřuje stále k rovnovážné poloze pístu. Proto je pohyb pístu harmonický a platí

$$F = m\,\omega^2 \Delta l, \qquad (4)$$

kde ω značí úhlový kmitočet. Porovnáním (3) a (4) vypočítáme ω, pak $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Po úpravě dostaneme obecný výsledek

$$f = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{Sp_0\varkappa}{2\,ml}}\,.$$

Pro zadané hodnoty vychází $f \doteq 32$ Hz.

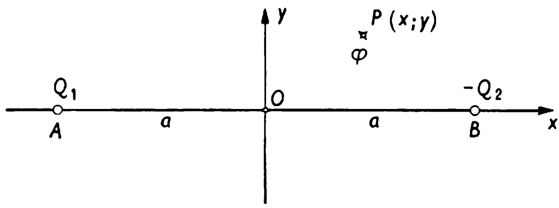
2. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

V bodě A je bodový náboj Q_1, v bodě B bodový náboj $-Q_2$, vzdálenost obou bodů je $2\,a$. Nalezněte v prostoru množinu všech bodů, jejichž potenciál je nulový, a určete body nulového potenciálu na přímce AB.

Proveďte diskusi pro $Q_1 > |Q_2|$, $Q_1 = |Q_2|$, $Q_1 < |Q_2|$. Řešte úlohu nejprve v rovině, přičemž vhodně volte soustavu souřadnic.

Řešení:

Soustavu souřadnic v rovině Oxy zvolíme tak, aby body A, B ležely na ose x a byly položeny souměrně



Obr. 21

vzhledem k počátku O (viz obr. 21). Pro potenciál elektrického pole vytvořeného bodovými náboji Q_1, $-Q_2$

v obecném bodě $P(x,y)$ platí

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} - \frac{Q_2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right). \quad (1)$$

Podle zadání hledáme množinu bodů, v nichž je potenciál nulový. Položíme tedy v (1) $\varphi = 0$ a po úpravě dostaneme

$$x^2 + y^2 - 2a\frac{Q_1^2+Q_2^2}{Q_1^2-Q_2^2}x + a^2 = 0.$$

Tato rovnice představuje kružnici, jejíž střed S leží na ose x, tj. na přímce AB; souřadnice středu S je

$$x_S = a\frac{Q_1^2+Q_2^2}{Q_1^2-Q_2^2}. \quad (2)$$

Kružnice má poloměr

$$r = \left|\frac{2aQ_1Q_2}{Q_1^2-Q_2^2}\right|. \quad (3)$$

Provedený výpočet platí pro jakoukoli rovinu proloženou body A, B. Hledanou množinou všech bodů nulového potenciálu v prostoru je tedy koule o poloměru (3), jejíž střed má od středu úsečky AB vzdálenost (2) a leží na přímce AB.

Diskuse:

a) $Q_1 > |Q_2|$

Podle (2) je $x_S > a$, střed koule leží mimo úsečku AB za bodem B. Koule protíná přímku AB v bodech M, N, jejichž souřadnice jsou $x_S \pm r$; vypočítáme je z (2) a (3). Po úpravě, s přihlédnutím k zápornému znaménku náboje $-Q_2$, dostaneme

$$x_M = a\frac{Q_1+|Q_2|}{Q_1-|Q_2|}, \quad x_N = a\frac{Q_1-|Q_2|}{Q_1+|Q_2|}.$$

Poněvadž $x_M > a, 0 < x_N < a$, leží bod M mimo úsečku AB za bodem B, bod N mezi středem O úsečky a bodem B. Pro $|Q_2| \to Q_1$ je $x_M \to \infty$, $x_N \to 0$, tj. bod M se bez omezení vzdaluje, bod N se blíží středu úsečky AB.

b) $Q_1 = |Q_2|$

Rovnice (1), v níž položíme $\varphi = 0$, dává po úpravě $x = 0$. Je to rovnice osy y, tj. osy úsečky AB. V prostoru je to rovina souměrnosti úsečky AB. Na přímce AB je v tomto případě střed úsečky AB jediným bodem nulového potenciálu.

c) $Q_1 < |Q_2|$

Střed koule má v tomto případě zápornou souřadnici

$$x_S = -a\frac{Q_1^2 + Q_2^2}{Q_2^2 - Q_1^2}$$

a poloměr koule je opět (3).

Poněvadž $|x_S| > a$, leží střed koule mimo úsečku AB, před bodem A. Pro průsečíky M, N koule s přímkou AB platí

$$x_M = -a\frac{|Q_2| - Q_1}{|Q_2| + Q_1}; \quad x_N = -a\frac{|Q_2| + Q_1}{|Q_2| - Q_1}.$$

Poněvadž $|x_M| < a$, $|x_N| > a$, leží bod M mezi bodem A a středem úsečky AB, bod N je mimo úsečku AB, před bodem A.

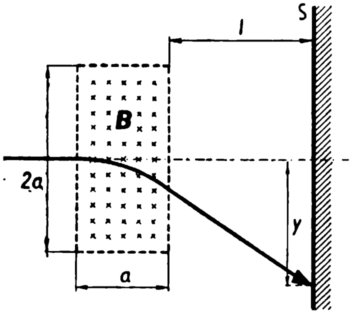
Pro $|Q_2| \to Q_1$ je $x_M \to 0$, $x_N \to \infty$, tj. bod M se blíží středu úsečky AB, bod N se bez omezení vzdaluje.

3. úloha (navrhl ing. Bohumil Vybíral)

Elektron, který byl v obrazovce urychlen napětím U, letí po ose obrazovky a dostane se do homogenního magnetického pole o indukci $\mathbf{B}$ kolmé k ose obrazovky.

Pole je ohraničeno tak, že jeho kolmým průřezem je obdélník o stranách a, $2a$ (viz obr. 22).

a) Vypočítejte, v jaké vzdálenosti y od osy obrazovky dopadne elektron na stínítko S kolmé k ose obrazovky, jehož vzdálenost od konce magnetického pole je l.



Obr. 22

b) Udejte podmínku řešitelnosti úlohy a vyložte její význam, popř. doplňte náčrty.

c) Stanovte, při které nejmenší velikosti B_{min} magnetické indukce **B** se elektron „odrazil“ od vychylovacího pole, tj. vrátil se zpět ve směru rovnoběžném s osou obrazovky.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $U = 1{,}00 \cdot 10^3$ V; $a = 15{,}0$ mm; $l = 100$ mm; $B = 5{,}00 \cdot 10^{-3}$ T; měrný náboj elektronu $\frac{e}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ C kg^{-1}.

Řešení:

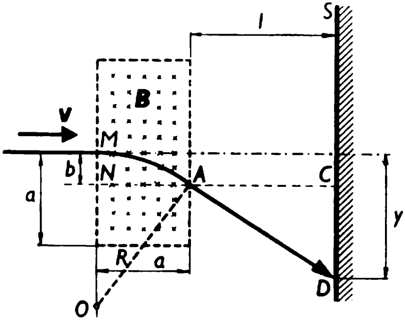
a) Urychlovací pole vykonalo práci $A = e\,U$, elektron tím získal kinetickou energii $W = \frac{1}{2} mv^2$, tj. rychlost v. Poněvadž $A = W$, vstupuje elektron do magnetického pole s rychlostí

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} . \qquad (1)$$

V magnetickém poli působí na elektron síla o velikosti

$$F = evB, \qquad (2)$$

která je kolmá k vektoru **B** i k vektoru **v**. Protože **F** $\perp$ **v**, nekoná síla **F** práci, nýbrž jenom zakřivuje dráhu elektronu, přičemž nemění velikost rychlosti elektronu. Jde tedy o sílu dostředivou. V homogenním magnetickém poli má indukce **B** stálou velikost, takže dostředivá síla (2)



Obr. 23

je konstantní a elektron se pohybuje po kruhovém oblouku (viz obr. 23) MA, jehož poloměr R vypočítáme ze vztahu

$$evB = \frac{mv^2}{R}.$$

Po dosazení z (1) vyjádříme poloměr kruhového oblouku

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}. \qquad (3)$$

Když elektron v bodě A opustí magnetické pole, pohybuje se dále setrvačností po tečně vedené v bodě A ke kruhovému oblouku MA, který má střed O a poloměr R.

Z podobnosti trojúhelníků ANO a DCA plyne

$$\frac{R - b}{a} = \frac{l}{y - b}, \qquad (4)$$

kde b značí vzdálenost bodu A od osy obrazovky. Z pravoúhlého trojúhelníku ANO vyjádříme

$$R - b = \sqrt{R^2 - a^2}\,. \tag{5}$$

Ze soustavy rovnic (3), (4), (5) vyloučíme R, b a vyjádříme y. Po úpravě vyjde

$$y = \sqrt{\frac{2U}{B^2}\frac{m}{e}} + \frac{a(a+l) - \frac{2U}{B^2}\frac{m}{e}}{\sqrt{\frac{2U}{B^2}\frac{m}{e} - a^2}}\,. \tag{6}$$

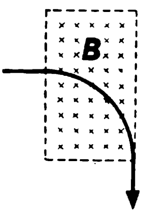
Pro zadané hodnoty dostaneme $y = 10{,}5$ cm.

b) V obecném výsledku (6) musí být jmenovatel reálný a různý od nuly. Z toho dostaneme po úpravě podmínku

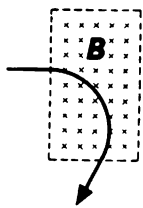
$$B < \frac{1}{a}\sqrt{2U\frac{m}{e}} = B_0\,.$$

Pro $B = B_0$ dává vztah (3) výsledek $R = a$, elektron po výstupu z magnetického pole letí rovnoběžně s rovinou stínítka, takže na stínítko nedopadne (viz obr. 24). Při $B > B_0$ je $R < a$, elektron se po výstupu z vychylovacího pole od stínítka vzdaluje (obr. 25).

Pro zadané hodnoty dostáváme $B_0 = 7{,}05 \cdot 10^{-3}$ T, a tedy podmínku řešitelnosti úlohy $B < 7{,}05 \cdot 10^{-3}$ T.



Obr. 24

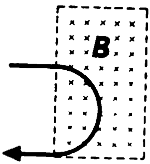


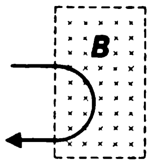
Obr. 25

c) Směr pohybu elektronu se obrátí o 180°, když $R \leqq \frac{a}{2}$. Mezní případ je $R = \frac{a}{2}$; z (3) dostaneme pro tento případ velikost indukce

$$B_{\min} = \frac{2}{a}\sqrt{2U\frac{m}{e}}\,.$$

Pro dané hodnoty vychází $B_{\min} = 1{,}41 \,.\, 10^{-2}$ T.


Obr. 26


Obr. 27

Na obr. 26 je načrtnuta dráha elektronu v mezním případě $\left(R = \frac{a}{2}, B = B_{\min}\right)$, obr. 27 odpovídá případu $R < \frac{a}{2}$, $B > B_{\min}$.

4. úloha (navrhl Jozef Zámečník)

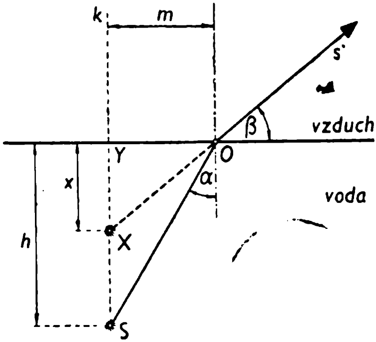
V hĺbke h pod povrchom vody je svietiaci bod. Voda má absolútny index lomu N, vzduch N_0.

a) V akej hĺbke x pod povrchom vody vidíme svietiaci bod, keď sa dívame v smere, ktorý s rozhraním zviera uhol β?

b) Graficky znázornite pomer $\frac{x}{h}$ ako funkciu uhlu β v intervale $0 \leqq \beta \leqq 90°$ pre $N = \frac{4}{3}$; $N_0 = 1{,}00$.

Riešenie:

a) Svietiaci bod vidíme v hĺbke x, tj. v bode X, v ktorom predĺžený lúč s vychádzajúci z vody pretne kolmicu k, spustenú zo svietiaceho bodu S na rozhranie medzi vodou a vzduchom (pozri obr. 28).



Obr. 28

Z pravouhlých trojuholníkov OYX a OYS vyjadríme

$$x = m \operatorname{tg} \beta; \qquad m = h \operatorname{tg} \alpha, \tag{1}$$

kde m je vzdialenosť bodu O, v ktorom sa lúč na rozhraní lomí, od kolmice k.
Z (1) vyjadríme

$$x = h \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta. \tag{2}$$

Podľa Snelliovho zákona platí

$$N \sin \alpha = N_0 \sin (90° - \beta) = N_0 \cos \beta.$$

Z toho vyjadríme

$$\sin \alpha = \frac{N_0}{N} \cos \beta; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{N_0 \cos \beta}{\sqrt{N^2 - N_0^2 \cos^2 \beta}}. \tag{3}$$

Dosadíme z (3) do (2) a po úprave dostaneme

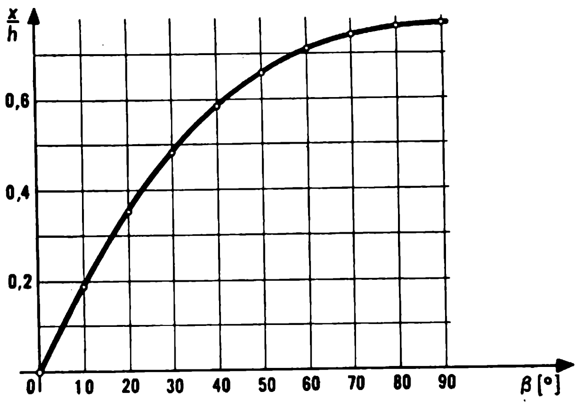
$$x = h \frac{N_0 \sin \beta}{\sqrt{N^2 - N_0^2 \cos^2 \beta}} . \tag{4}$$

b) Zo všeobecného výsledku (4) vyjadríme pomer $\frac{x}{h}$ pre dané hodnoty N, N_0. Po úprave máme

$$\frac{x}{h} = \frac{3 \sin \beta}{\sqrt{16 - 9 \cos^2 \beta}} . \tag{5}$$

Dosadíme do (5) rôzne hodnoty β, dostaneme

β[°]	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\frac{x}{h}$	0,000	0,193	0,362	0,493	0,589	0,656	0,701	0,729	0,745	0,750



Obr. 29

Závislosť je znázornená na obr. 29.

5. úloha — laboratorní (navrhl Ján Krajčo)

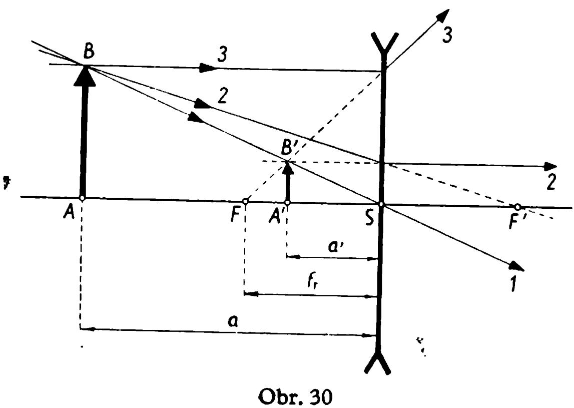
Meranie ohniskovej vzdialenosti tenkej šošovky

Pomôcky: Žiacka súprava pre optiku s tromi spojenými šošovkami rozličných ohniskových vzdialeností a s rozptylnou šošovkou ohniskovej vzdialenosti f_r (7 cm $< f_r <$ $<$ 11 cm), meradlo s milimetrovým delením.

Návod:

Koncový bod B svietiacej úsečky AB môžeme zobraziť rozptylnou šošovkou ako priesečník B' ktorýchkoľvek dvoch z troch význačných nulových lúčov 1, 2, 3 (pozri obr. 30). Obraz A' B' skutočnej úsečky AB je vždy neskutočný. Preto sa nedá zachytiť na tienidle. Ak bod B leží od rozptylky vo vzdialenosti a, je jeho obraz B' vzdialený od tejto rozptylky o dĺžku a' a leží na tej istej strane ako predmet. Podľa znamienkovej dohody je teda $a' < 0$ a zobrazovacia rovnica pre rozptylku má tvar

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = -\frac{1}{f_r}, \tag{1}$$



Obr. 30

kde f_r značí ohniskovú vzdialenosť rozptylky ak $a > 0$, $f_r > 0$.

Ohniskovú vzdialenosť rozptylky môžeme určiť tak, že najprv vytvoríme spojkou skutočný obraz y' osvetleného predmetu y. Ak medzi spojnú šošovku a ňou vytvorený obraz y' umiestnime rozptylku, ktorej ohniskovú vzdialenosť f_r hľadáme, takým spôsobom, aby optické osi oboch šošoviek splývali, potom obraz y' je pre rozptylku neskutočným predmetom. Ak je ohnisková vzdialenosť f_s použitej spojky menšia ako ohnisková vzdialenosť rozptylky, teda ak platí

$$f_s < f_r, \qquad (2)$$

je centrovaná sústava oboch šošoviek sústavou spojnou. Potom rozptylná šošovka zobrazí neskutočný predmet y' ako skutočný obraz y'', ktorý možno zachytiť na tienidle.

Postup merania:

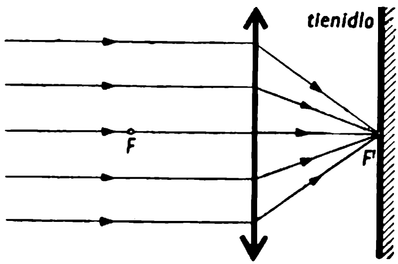
1. Aby ste mohli splniť podmienku (2), odmerajte najprv len informatívne ľubovoľným spôsobom ohniskové vzdialenosti troch spojných šošoviek, ktoré máte k dispozícii, a vyberte z nich tú, ktorá je pre požadované meranie vhodná. Metódu určenia f_s opíšte.
2. Narysujte náčrtok sústavy, ktorú použijete na meranie ohniskovej vzdialenosti rozptylky a chodu význačných svetelných lúčov touto sústavou.
3. Uvážte, ktoré vzdialenosti musíte odmerať, aby ste mohli určiť a a a' vystupujúce vo vzťahu (1).
4. Urobte potrebné merania.
5. Z nameraných hodnôt určte a, a' a zo vzťahu (1) vypočítajte f_r.
6. Merania a výpočty podľa 4. a 5. zopakujte ešte štyrikrát pri rozličných polohách predmetu y pred predmetovým ohniskom spojnej šošovky.
7. Ohniskovú vzdialenosť rozptylky určte ako aritmetický priemer všetkých piatich hodnôt f_r, ktoré ste

vypočítali z nameraných vzdialeností. Výsledok správne zaokrúhlite.

Riešenie:

1. Informatívne zistíme ohniskové vzdialenosti troch daných spojok, očíslovaných 1, 2, 3.

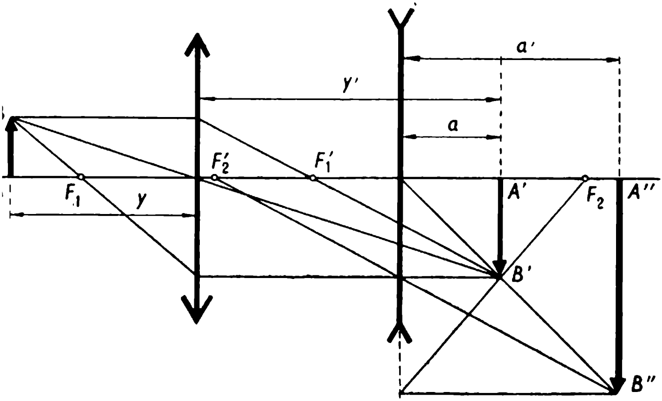
Pred bodový zdroj (žiarovku) upevníme k nemu patriacu spojku s tubusom. Dostávame zväzok rovnobežných lúčov. Ak tieto dopadajú na tenkú spojku, lámu sa do jej predmetového ohniska (viď obrázok 31). Preto za



Obr. 31

šošovkou pohybujeme tienidlom tak, aby sme dostali na ňom iba bodku. To je však iba ideálny prípad; vzhľadom k chybám šošovky hľadáme takú polohu, v ktorej sa na tienidle vytvorí krúžok s najmenším polomerom. Takto sme veľmi približne určili
pre šošovku číslo 1 $f_s = 5{,}6$ cm,
pre šošovku číslo 2 $f_s = 13{,}2$ cm,
pre šošovku číslo 3 $f_s = 18{,}3$ cm.
V našom prípade vieme, že rozptylka má ohniskovú vzdialenosť f_r (7 cm $< f_r <$ 11 cm). Aby centrovaná sústava používaná v meraní bola spojná, musí byť splnená podmienka (2). Tejto podmienke vyhovuje, a to v plnej miere, iba jediná spojka, a to spojka označená číslom 1, pre ktorú $f_s = 5{,}6$ cm.

2. Na obrázku 32 sú nakreslené chody lúčov obidvoma ohniskami každej zo šošoviek a lúče prechádzajúce stredmi. Postupujeme tak, že najprv zobrazíme spojkou predmet (úsečku AB), vznikne skutočný obraz $A'B'$, ktorý je neskutočným predmetom pre rozptylku, v nej sa zobrazí ako skutočný obraz $A''B''$.



Obr. 32

3. Postupujeme tak, že skutočný obraz $A'B'$ zachytíme na tienidle, potom medzi tienidlo a spojku zasunieme rozptylku. Ich vzdialenosť, ako vidieť z obrázka 32, je a. Teraz sa tienidlo posúva tak, až ostro zachytíme obraz $A''B''$. Potom znova odmeriame vzdialenosť rozptylky a tienidla, čím podľa obr. 32 dostávame vzdialenosť a'. Merania a výpočty zostavíme do tabuľky (na str. 78). Podľa návodu bol pri výpočtu f_r užitý vzťah (1).

Aritmetický priemer $\overline{f_r} = 10{,}9$ cm, $\Sigma(\Delta f_r)^2 = 1{,}36$ cm^2. Pre absolútnu strednú chybu aritmetického priemeru platí

$$\delta = \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n(n-1)}},$$ kde n značí počet meraní.

Číslo merania	a [cm]	a' [cm]	f_r [cm]	Δf_r [cm]	$(\Delta f_r)^2$ [cm²]
1	7,0	19,8	10,8	−0,1	0,01
2	5,4	9,9	11,8	0,9	0,81
3	6,3	16,4	10,3	−0,6	0,36
4	5,9	12,5	11,2	0,3	0,09
5	6,7	18,2	10,6	−0,3	0,09

Potom $\delta\ (f_r) = \sqrt{\frac{1{,}36}{20}}\ \text{cm} = 0{,}3\ \text{cm}.$

Relatívna chyba merania je potom 2,5 %.
Číselný výsledok sme zaokrúhlili na desatiny, pretože už toto miesto je zaťažené chybou. Táto chyba je spôsobená ako nepresnosťami v meraní dĺžky, tak pri hľadaní ostrého obrazu. Ohnisková vzdialenosť rozptylky je $f_r = 10{,}9 \pm 0{,}3$ cm. Riešenie je prevedené pri znamienkovej dohode odpovedajúcej vzťahu (1).

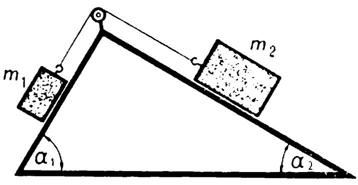
2. Úlohy kategorie B

Úlohy recenzovali dr. Marta Chytilová a dr. Ivan Náter.

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl Rastislav Baník)

Na obrázku 33a je znázornený rez dvoma naklonenými rovinami, ktoré zvierajú s vodorovnou rovinou uhly α_1 a α_2, $\alpha_1 > \alpha_2$. Na priesečnici naklonených rovín je upevnená kladka; niť vedená cez kladku spojuje hranol o hmotnosti m_1 s hranolom o hmotnosti m_2. Súčiniteľ šmykového trenia μ je pre obe telesá a podložky rovnaký.



Obr. 33a

Určte pomer $p = \frac{m_1}{m_2}$, ak telesá konajú

a) rovnomerne zrýchlený pohyb,

b) rovnomerný pohyb.

Preveďte diskusiu pre obe možnosti, a to že klesá hranol o hmotnosti m_1, alebo hranol o hmotnosti m_2. Hmotnosť nite a moment zotrvačnosti kladky neuvažujeme.

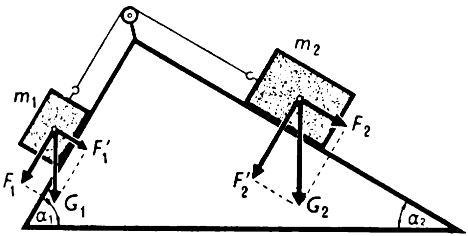
Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 30°$, $\mu = 0{,}2$.

Riešenie:

Označme

F_{t1} silu trenia, ktorá pôsobí na teleso o hmotnosti m_1,
F_{t2} silu trenia, ktorá pôsobí na teleso o hmotnosti m_2.

Označenie ostatných síl je zrejmé z obr. 33b.



Obr. 33b

Pre sily platí:

$G_1 = m_1 g$; $G_2 = m_2 g$;
$F_1 = m_1 g \sin \alpha_1$; $F_2 = m_2 g \sin \alpha_2$;
$F_1' = m_1 g \cos \alpha_1$; $F_2' = m_2 g \cos \alpha_2$;
$F_{t1} = \mu\, m_1 g \cos \alpha_1$; $F_{t2} = \mu\, m_2 g \cos \alpha_2$.

a) Pohyb sústavy je rovnomerne zrýchlený

1. Teleso o hmotnosti m_1 klesá.

$\boldsymbol{F}_{t1}$ je nesúhlasne rovnobežná s $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_{t2}$ je súhlasne rovnobežná s $\boldsymbol{F}_2$.
Pre velikosti síl platí

$$F_1 - F_{t1} > F_2 + F_{t2},$$

potom

$$p = \frac{m_1}{m_2} > \frac{\sin \alpha_2 + \mu \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 - \mu \cos \alpha_1} \doteq 0{,}9,$$
$$p > 0{,}9.$$

2. Teleso o hmotnosti m_2 klesá.

$\boldsymbol{F}_{t1}$ je súhlasne rovnobežná s $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_{t2}$ je nesúhlasne rovnobežná s $\boldsymbol{F}_2$. Pre velikosti síl platí

$$F_1 + F_{t1} < F_2 - F_{t2},$$

potom

$$p = \frac{m_1}{m_2} < \frac{\sin \alpha_2 - \mu \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1} \doteq 0{,}3;$$
$$p < 0{,}3.$$

b) Pohyb sústavy je rovnomerný.

1. Teleso o hmotnosti m_1 klesá. Z rovnosti síl vyplýva

$$p = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2 + \mu \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 - \mu \cos \alpha_1} \doteq 0{,}9.$$

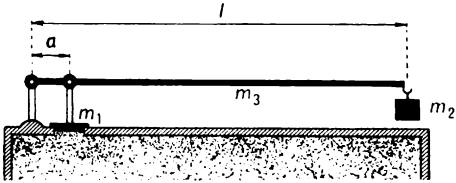
2. Teleso o hmotnosti m_2 klesá. Potom

$$p = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2 - \mu \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1} \doteq 0{,}3.$$

Ak $0{,}3 < p < 0{,}9$, telesa sa nepohybujú.

2. úloha (navrhl dr. Josef Kuběna)

Pojistný ventil zajišťuje parní kotel před nepřípustným přetlakem. Stěny kotle jsou konstruovány tak, že v něm může být maximální tlak p při vnějším tlaku atmosférickém b. Na obr. 34 je znázorněno schéma konstrukce ventilu. Ve víku kotle je kruhový otvor o průměru d_1, který uzavírá ventil o hmotnosti m_1. Těsnění je zajištěno pryžovým prstenem. Ventil je upevněn k ocelové tyči všude stejného průřezu o délce l a hmotnosti m_3 ve vzdálenosti a od vodorovné osy otáčení na konci páky. Na volném konci páky je upevněno závaží o hmotnosti m_2.



Obr. 34

Určete hmotnost závaží m_2 tak, aby při překročení tlaku p uvnitř kotle se ventil nadzvedl. Předpokládáme, že páka je ve vodorovné poloze.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $p = 9{,}0$ at, $b = 1{,}0$ at, $d_1 = 50$ mm, $l = 1{,}00$ m, $a = 10{,}0$ cm, $m_1 = 2{,}00$ kg, $m_3 = 8{,}00$ kg.

Řešení:

Při maximálním tlaku páry působí na ventil tyto síly: tlaková síla velikosti $F_1 = \dfrac{p\pi d^2}{4}$, orientovaná svisle vzhůru, tíhová síla velikosti $G = m_1 g$ a tlaková síla vnějšího atmosférického vzduchu velikosti $F_2 = \dfrac{b\pi d^2}{4}$, obě síly jsou orientovány svisle dolů.

Velikost výslednice sil působících na ventil je $F = F_1 - F_2 - G$. Tato síla se přenáší na páku a působí při vodorovné poloze páky otáčivým momentem velikosti $M_1 = F a_1$, orientovaným v ose páky podle obrázku dopředu.

Na páku ve vodorovné poloze působí dále moment tíhy závaží $M_2 = m_2 g l$ a moment tíhy páky velikosti $M_3 = \frac{m_3 g l}{2}$. Oba jsou orientovány v ose páky podle obrázku vzad.

Páka je v rovnovážné poloze, je-li splněna momentová věta $\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}_3 = 0$, nebo v algebraickém tvaru:

$$M_1 - M_2 - M_3 = 0,$$

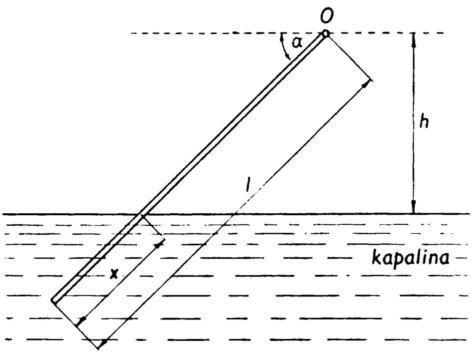
$$(F_1 - F_2 - G)\, a - m_2 g l - \frac{m_3 g l}{2} = 0,$$

$$m_2 = \frac{a}{l}\left[\frac{(p-b)\, d^2}{4g} - m_1\right] - \frac{m_3}{3}.$$

Dosadíme $(p - b) = 8$ at $= 8 \cdot 9{,}80665 \cdot 10^4\ \mathrm{Nm}^{-2}$ a další číselné hodnoty a vypočítáme $m_2 = 12$ kg.

3. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Tenká tyč z homogenního materiálu všude stejného průřezu o hustotě ϱ_1 je v jednom koncovém bodě otáčivá



Obr. 35

kolem nehybné vodorovné osy o a druhý konec má volně spuštěn do kapaliny hustoty $\varrho_2 > \varrho_1$ (obr. 35).

a) Jaká část délky l tyče je ponořena v kapalině, je-li tyč v rovnovážné poloze a svírá s vodorovnou rovinou úhel α, pro který platí $0 < \alpha < 90°$?

b) Jak se změní délka ponořené části tyče, změní-li se výška h osy o nad povrchem kapaliny? Proveďte diskusi a určete mezné polohy osy o.

c) Obě předcházející části úlohy řešte i v případě, že osa o je pod povrchem kapaliny.

Řešení:

Označení veličin: S — průřez tyče, x — délka ponořené části tyče.

a) Tyč je v rovnovážné poloze, jestliže je splněna momentová věta pro všechny síly působící na tyč.

Na tyč působí v půlicím bodě tíhová síla $G = \varrho_1 lSg$ svisle dolů a v půlicím bodě ponořené části vztlaková síla F, $F = \varrho_2 xSg$, svisle vzhůru.

Velikosti momentů sil jsou $M_1 = \dfrac{Gl\cos\alpha}{2}$, $M_2 = F\dfrac{(2l - x)}{2}\cos\alpha$, $\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 = 0$ nebo v algebraické formě

$$M_1 - M_2 = 0,$$

$$\varrho_1 l^2 - \varrho_2 x(2l - x) = 0,$$

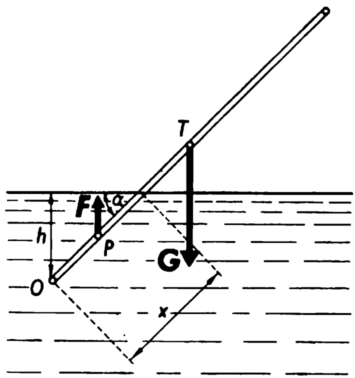
$$\varrho_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\varrho_2\frac{x}{l} + \varrho_1 = 0,$$

$$\frac{x}{l} = \frac{\varrho_2 \pm \sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1\varrho_2}}{\varrho_2}.$$

Pro zvolené označení platí dolní znaménko, $\dfrac{x}{l} = \dfrac{\varrho_2 - \sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1\varrho_2}}{\varrho_2}$.

b) Poněvadž poměr $\frac{x}{l}$ je jen funkcí hustot kapaliny a materiálu tyče, zůstává tento poměr stálý při posunutí osy o vzhledem k povrchu kapaliny. Při zvětšování h roste úhel α v mezích $0° \leqq \alpha \leqq 90°$, přičemž h se mění v mezích $0 \leqq h \leqq l - x$ nebo

$$0 \leqq h \leqq l \sqrt{1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}} .$$



Obr. 36

c) Podle obrázku 36 jsou momenty sil $M_1 = \frac{Gl \cos \alpha}{2}$, $M_2 = \frac{Fx \cos \alpha}{2}$. Algebraická rovnice momentová je pak $M_1 - M_2 = 0$, po úpravě dostaneme $\varrho_1 l^2 - \varrho_2 x^2 = 0$,

$$\frac{x}{l} = \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}} < 1 .$$

I v tomto případě je poměr $\frac{x}{l}$ jen funkcí hustot kapaliny a materiálu tělesa a zůstává při posunutí osy o vzhledem k povrchu kapaliny stálý.

Při zvětšování h roste úhel α v mezích $0° \leqq \alpha \leqq 90°$, a h se mění v mezích $0 \leqq h \leqq x$

nebo $\quad 0 \leqq h \leqq l\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}$.

4. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Určete oběžnou dobu T umělé družice Země jako funkci její výšky h nad povrchem Země pro kruhovou dráhu družice.

Podle výsledku řešte úlohy:

a) Je-li ve výšce h nad povrchem Země oběžná doba umělé družice T, ve které výšce nad povrchem Země je oběžná doba umělé družice dvojnásobná?

b) Určete oběžnou dobu družice v těsné blízkosti povrchu Země a výšku nad povrchem Země, ve které oběžná doba družice je dvojnásobkem oběžné doby při povrchu Země.

c) Určete oběžnou dobu umělé družice Měsíce v těsné blízkosti jeho povrchu, je-li gravitační zrychlení na povrchu Měsíce $g_M = \frac{g}{6}$, poloměr Měsíce $R_M = \frac{R}{3{,}7}$. V které vzdálenosti od povrchu Měsíce je oběžná doba jeho družice dvojnásobkem oběžné doby při povrchu Měsíce?

Ve všech úlohách předpokládáte, že umělá družice opisuje kruhovou dráhu. Poloměr Země $R \doteq 6{,}4 \cdot 10^6$ m; tíhové zrychlení na povrchu Země $g \doteq 9{,}8$ m s^{-2}.

Řešení:

Předpoklady: Země — homogenní kulové těleso, poloměr R, hmotnost M; umělá družice obíhá po kružnici, poloměr $R + h$, se středem ve středu Země, její hmotnost je m.

Gravitační síla, kterou působí Země na družici, je silou dostředivou

$$\varkappa \frac{Mm}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{R+h},$$

$$v = \frac{2\pi\,(R+h)}{T}.$$

a) Řešením soustavy rovnic určíme oběžnou dobu družice ve výšce h.

$$T = 2\,\pi\,(R+h)\sqrt{\frac{R+h}{\varkappa\,M}}.$$

Pokud je družice na povrchu Země, platí $mg = \dfrac{\varkappa Mm}{R^2}$, $\varkappa M = gR^2$.

$$T = 2\pi\,\frac{R+h}{R}\sqrt{\frac{R+h}{g}}.$$

Ve výšce h' je oběžná doba $T' = 2\,T$,

$$2\,T = 2\pi\,\frac{R+h'}{R}\sqrt{\frac{R+h'}{g}},$$

$$h' = \sqrt[3]{4}\,(R+h) - R.$$

b) Pro $h = 0$ je $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}} \doteq 84$ min,

$T' = 2\;T_0 \doteq 168$ min, $h' = R\,(\sqrt[3]{4} - 1) \doteq 3{,}7\,.\,10^6$ m.

c) $T_{Mo} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_M}{g_M}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}\sqrt{\dfrac{6}{3{,}7}} \doteq 107$ min,

$T_M = 2\,T_{Mo} \doteq 214$ min, $h_M = \dfrac{R}{3{,}7}\,(\sqrt[3]{4} - 1) \doteq 10^6$ m.

5. úloha (navrhl Josef Louvar)

Kovovým délkovým měřítkem z homogenního materiálu o součiniteli délkové teplotní roztažnosti α se správně měří při teplotě t, při níž má dílek měřítka délku d. Měřítkem byla měřena délka tyče z homogenního materiálu: při teplotě t_1 bylo naměřeno n_1 dílků měřítka, při teplotě t_2 bylo naměřeno n_2 dílků měřítka. Určete

a) součinitele délkové teplotní roztažnosti α' materiálu tyče,

b) délku l_0 tyče při teplotě 0 °C.

Předpokládáme, že délka měřítka i délka tyče se mění s teplotou lineárně.

Pozn.: Délku l_0 vyjádřete výrazem, obsahujícím kromě daných veličin také α'.

Řešení:

Nechť d_0, d_1, d_2, d jsou délky jednoho dílku měřítka při teplotě 0 °C, t_1, t_2, t a nechť l_0, l_1, l_2 jsou délky tyče při teplotě 0 °C, t_1, t_2, pak lze napsat vztahy pro délkovou teplotní roztažnost měřítka i tyče, ze kterých lze snadno vyjádřit jak součinitel délkové roztažnosti materiálu tyče α', tak délku l_0 tyče při teplotě 0 °C.

$$d = d_0 (1 + \alpha\, t),\ d_1 = d\,\frac{1 + \alpha\, t_1}{1 + \alpha\, t},\ d_2 = d\,\frac{1 + \alpha\, t_2}{1 + \alpha\, t},$$

$$l_1 = l_0 (1 + \alpha' t_1),\ l_2 = l_0 (1 + \alpha' t_2)\,.$$

a) Počet dílků čtených na měřítku je

$$n_1 = \frac{l_1}{d_1} = \frac{l_0 (1 + \alpha' t_1)(1 + \alpha t)}{d(1 + \alpha t_1)} \quad \text{při teplotě } t_1,$$

$$n_2 = \frac{l_2}{d_2} = \frac{l_0 (1 + \alpha' t_2)(1 + \alpha t)}{d(1 + \alpha t_2)} \quad \text{při teplotě } t_2.$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{(1 + \alpha' t_1)\,(1 + \alpha t_2)}{(1 + \alpha t_1)\,(1 + \alpha' t_2)},$$

$$\alpha' = \frac{n_2(1 + \alpha t_2) - n_1(1 + \alpha t_1)}{n_1 t_2(1 + \alpha t_1) - n_2 t_1(1 + \alpha t_2)}.$$

b) $$l_0 = \frac{l_1}{1 + \alpha' t_1} = \frac{n_1 d\,(1 + \alpha t_1)}{(1 + \alpha t)(1 + \alpha' t_1)}.$$

6. úkol experimentální (navrhl Konrád Hofman)

Z valivého pohybu po nakloněné rovině stanovte tíhové zrychlení.

Návod: a) Zrychlení valivého pohybu tenkostěnného válce po nakloněné rovině $a = \frac{g \sin \alpha}{2}$.

1. Určení $\sin \alpha$. Zvolte dosti dlouhou a dokonale hladkou nakloněnou rovinu tak, aby tření bylo zanedbatelné. Změřte délku d a výšku h nakloněné roviny; $\sin \alpha = \frac{h}{d}$.

2. Určení zrychlení posuvného pohybu na nakloněné rovině. Použitím stopek změřte dobu t, za kterou urazí válec dráhu d po nakloněné rovině. Opakujte měření času desetkrát při stálé výšce h. Z naměřených hodnot vypočítejte aritmetický průměr $\bar{t}$. Pro tuto hodnotu vypočítejte zrychlení posuvného pohybu válce. Ze vzorce pro zrychlení valivého pohybu vypočítejte tíhové zrychlení g.

Měření opakujte pro dvě jiné hodnoty výšky h. Vypočítejte aritmetický průměr ze zjištěných hodnot g.

b) Proveďte měření s plným válcem. Zrychlení valivého pohybu plného válce po nakloněné rovině $a = \frac{2g \sin\alpha}{3}$.

c) Proveďte měření s plnou kuličkou. Zrychlení valivého pohybu plné kuličky po nakloněné rovině $a = \frac{5\,g \sin \alpha}{7}$.

Řešení:

Nejprve odvodíme vztahy pro zrychlení a posuvného pohybu a pro tíhové zrychlení g. Vykoná-li těleso valivý pohyb po celé délce nakloněné roviny, změní se jeho potenciální energie tíhová na kinetickou energii posuvného pohybu a na kinetickou energii otáčivého pohybu

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2. \tag{1}$$

Dosadíme-li do (1) vztahy $v^2 = 2\,ad$; $\omega^2 = \dfrac{v^2}{r^2} = \dfrac{2ad}{r^2}$, dostaneme obecný vzorec pro zrychlení tělesa valícího se bez klouzání po nakloněné rovině

$$a = \frac{mgr^2}{mr^2 + J} \frac{h}{d} = \frac{mgr^2}{mr^2 + J} \sin \alpha. \tag{2}$$

Ze vzorce (2) vyplývá pro tenkostěnný válec ($J = mr^2$) jednak vztah pro zrychlení postupného pohybu $a = \dfrac{1}{2} g \sin \alpha$ a jednak vztah pro tíhové zrychlení

$$g = \frac{4\,d^2}{ht^2}, \tag{3a}$$

kde $t = \sqrt{\dfrac{2d}{a}}$ značí dobu pohybu tělesa po dráze d na nakloněné rovině.

Podobně plyne pro tíhové zrychlení zjištěné z pohybu plného válce $\left(J = \dfrac{1}{2} mr^2\right)$

$$g = \frac{3d^2}{h\,t^2} \tag{3b}$$

a z pohybu koule $\left(J = \dfrac{2}{5} mr^2\right)$

$$g = \frac{14\,d^2}{5ht^2}\,. \tag{3c}$$

a) Určení tíhového zrychlení z pohybu tenkostěnného válce.

Rozměry charakterizující nakloněnou rovinu (d, h_1) měříme ocelovým měřítkem s přesností na 0,001 m. Dobu pohybu t_1 měříme stopkami a odečítáme ji na 0,1 s. Podle návodu je doba měřena desetkrát, je vypočítán aritmetický střed doby a jeho střední chyba. Měření se pak opakuje pro jiné výšky nakloněné roviny (h_2, h_3). Ze vztahu (3a) vypočteme pro každý případ tíhové zrychlení, za konečný výsledek považujeme průměr získaných tří hodnot (g_1, g_2, g_3).

Měřené a vypočtené hodnoty zapíšeme do tabulky:

Vztah pro výpočet $g = \frac{4d^2}{ht^2}$	1. série měření $d = 1{,}50$ m, $h_1 = 0{,}241$ m		2. série měření $d = 1{,}50$ m, $h_2 = 0{,}341$ m		3. série měření $d = 1{,}50$ m, $h_3 = 0{,}128$ m	
č. měření n	t_1 [s]	Δt_1 [s]	t_2 [s]	Δt_2 [s]	t_3 [s]	Δt_3 [s]
1	1,8	−0,1	1,6	−0,05	2,8	0,1
2	1,9	0,0	1,6	−0,05	2,8	0,1
3	2,0	0,1	1,6	−0,05	2,6	−0,1
4	2,0	0,1	1,6	−0,05	2,7	0,0
5	1,7	−0,2	1,7	0,05	2,9	0,2
6	1,6	−0,3	1,6	−0,05	2,6	−0,1
7	2,0	0,1	1,7	0,05	2,6	−0,1
8	2,1	0,2	1,6	−0,05	2,7	0,0
9	2,0	0,1	1,8	0,15	2,6	−0,1
10	1,9	0,0	1,7	0,05	2,7	0,0
	$\bar{t}_1 = 1{,}9$ s, $\Sigma\Delta_+ t_1 = 0{,}6$ s		$\bar{t}_2 = 1{,}65$ s, $\Sigma\Delta_+ t_2 = 0{,}3$ s		$\bar{t}_3 = 2{,}7$ s, $\Sigma\Delta_+ t_3 = 0{,}4$ s	

Stř. chyba aritm. průměru

$$\bar{\delta} = \frac{5}{2}\,\frac{\Sigma\Delta_+}{n\sqrt{n-1}}\,;\ \bar{\delta}(t_1) = 0{,}05\text{ s};\ \bar{\delta}(t_2) = 0{,}02\text{ s};\ \bar{\delta}(t_3) = 0{,}03\text{ s}.$$

Příslušné relativní chyby nalezených dob jsou po řadě 2,6 %, 1,2 % a 1,1 %.

Vypočtené hodnoty zrychlení jsou

$$g_1 = 10{,}3 \text{ m s}^{-2};\ g_2 = 9{,}7 \text{ m s}^{-2};\ g_3 = 9{,}7 \text{ m s}^{-2}.$$

Vzhledem k tomu, že délky d, h byly zjištěny poměrně přesně (s relativní chybou maximálně 0,2 %), přispívá k relativní chybě vypočtené hodnoty g především chyba zjištěné doby. Vzhledem k tomu, že se ve vzorci vyskytuje čtverec doby, je hodnota g_1 určena s relativní chybou asi 5 %, hodnota g_2 s relativní chybou 2,4 % a hodnota g_3 s relativní chybou 2,2 %.

Aritmetický střed $\bar{g} = 9{,}9 \text{ m s}^{-2}$ určuje tíhové zrychlení a jeho relativní chyba je maximálně výše uvedených 5 %, takže lze psát výsledek

$$g = (9{,}9 \pm 0{,}5) \text{ m s}^{-2}.$$

b) Určení tíhového zrychlení v případě pohybu plného válce se provádí obdobně, dosazujeme do vzorce (3b). Stále je $d = 1{,}50$ m.

	1. séric měření $h_1 = 0{,}241$ m		2. série měření $h_2 = 0{,}341$ m		3. série měření $h_3 = 0{,}128$ m	
č. měření n	t_1 [s]	Δt_1 [s]	t_2 [s]	Δt_2 [s]	t_3 [s]	Δt_3 [s]
1	1,6	−0,1	1,5	0,0	2,3	0,0
2	1,6	−0,1	1,6	0,1	2,4	0,1
3	1,7	0,0	1,6	0,1	2,2	−0,1
4	1,8	0,1	1,7	0,2	2,2	−0,1
5	2,0	0,3	1,4	−0,1	2,2	−0,1
6	1,6	−0,1	1,4	−0,1	2,2	−0,1
7	1,6	−0,1	1,4	−0,1	2,5	0,2
8	1,7	0,0	1,4	−0,1	2,4	0,1
9	1,6	−0,1	1,5	0,0	2,3	0,0
10	1,8	0,1	1,5	0,0	2,3	0,0
	$\bar{t}_1 = 1{,}7$ s; $\Sigma\Delta_+ = 0{,}5$		$\bar{t}_2 = 1{,}5$ s; $\Sigma\Delta_+ = 0{,}4$		$\bar{t}_3 = 2{,}3$ s; $\Sigma\Delta_+ = 0{,}4$	

Stř. chyba aritm. průměru $\bar{t}$	0,04s	0,03 s	0,03 s
relativní chyba	2,5 %	2 %	1,3 %
vypočtené tíhové zrychlení	9,7 m s^{-2}	8,8 m s^{-2}	10,0 m s^{-2}
relativní chyba	5,0 %	4,0 %	2,6 %

Průměrné zrychlení je pak (9,5 ± 0,5) m s^{-2}.

c) Při určování tíhového zrychlení z pohybu koule užijeme vzorce (3c). Opět je $d = 1{,}50$ m.

	1. série měření $h_1 = 0{,}241$ m		2. série měření $h_2 = 0{,}341$ m		3. série měření $h_3 = 0{,}128$ m	
č. měření n	t_1 [s]	Δt_1 [s]	t_2 [s]	Δt_2 [s]	t_3 [s]	Δt_3 [s]
1	1,5	−0,1	1,4	0,0	2,1	−0,1
2	1,6	0,0	1,3	−0,1	2,2	0,0
3	1,6	0,0	1,2	−0,2	2,3	0,1
4	1,6	0,0	1,5	0,1	2,2	0,0
5	1,7	0,1	1,4	0,0	2,0	−0,2
6	1,8	0,2	1,5	0,1	2,3	0,1
7	1,5	−0,1	1,3	−0,1	2,3	0,1
8	1,5	−0,1	1,5	0,1	2,3	0,1
9	1,6	0,0	1,5	0,1	2,1	−0,1
10	1,6	0,0	1,4	0,0	2,2	0,0
	$\bar{t}_1 = 1{,}6$ s	$\Sigma\Delta_+ = 0{,}3$	$\bar{t}_2 = 1{,}4$ s	$\Sigma\Delta_+ = 0{,}4$	$\bar{t}_3 = 2{,}2$ s	$\Sigma\Delta_+ = 0{,}4$

stř. chyba $\bar{t}$	0,025 s	0,03 s	0,03 s
relativní chyba $\bar{t}$	1,6 %	2,1 %	1,4 %
vypočtené tíhové zrychlení g_i	10,2 m s^{-2}	9,4 m s^{-2},	10,1m s^{-2}
relativní chyba g_i	3,2 %	4,2 %	2,8 %

Průměrné zrychlení je pak v tomto případě

$$\bar{g} = (9{,}9 \pm 0{,}4)\ \mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Přesto, že měření byla velmi hrubá (nebylo možné přesně měřit dobu pohybu), jsou výsledky poměrně přesné.

7. *úloha* (navrhla dr. Marta Chytilová)

Ideální plyn má při teplotě $T_1 = 300\ °K$ a tlaku $p_1 = 10^3\ N\ m^{-2}$ objem $V_1 = 0,25\ m^3$.

a) Sestrojte graf izotermického děje tohoto plynu v soustavách souřadnic: $p - V$, $V - T$, $p - T$. Proveďte úlohu také pro děj izobarický a izochorický. Vysvětlete s použitím stavové rovnice.

b) Ke každému grafu z úlohy a) sestrojte příslušný graf pro dokonalý plyn dvojnásobné hmotnosti. Vysvětlete, v čem se příslušné grafy úlohy a) a b) od sebe liší.

c) Za předpokladu, že grafy z úlohy a) platí pro vodík dané hmotnosti, sestrojte příslušné grafy pro hélium téže hmotnosti. Vysvětlete, v čem se příslušné grafy pro vodík a hélium od sebe liší.

Ke každému grafu sestavte tabulku hodnot a grafy ve všech případech narýsujte na milimetrový papír.

Řešení:

Chování ideálního plynu vystihuje stavová rovnice

$$pV = \frac{m}{M} RT, \tag{1}$$

m značí hmotnost plynu (v kg), M kilomolovou hmotnost daného plynu.

a) Z rovnice (1) plyne pro izotermický děj ($T = T_1$)

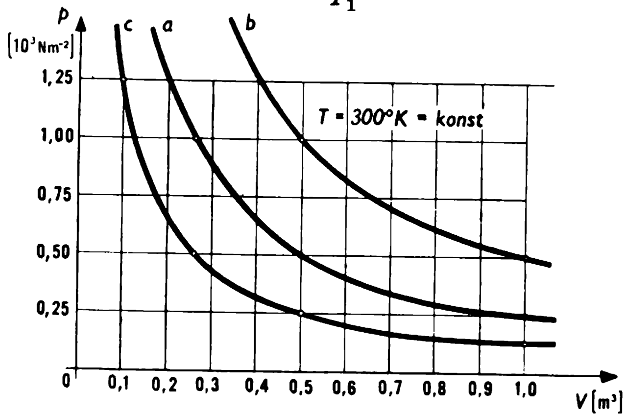
$$p = \frac{p_1 V_1}{V}. \tag{2a}$$

Pro děj izobarický ($p = p_1$) pak platí

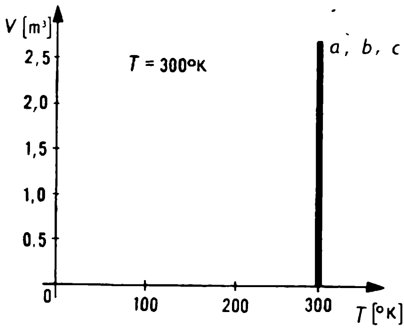
$$T = \frac{T_1 V}{V_1} \tag{3a}$$

a konečně pro děj izochorický ($V = V_1$) je

$$p = \frac{p_1 T}{T_1}. \tag{4a}$$



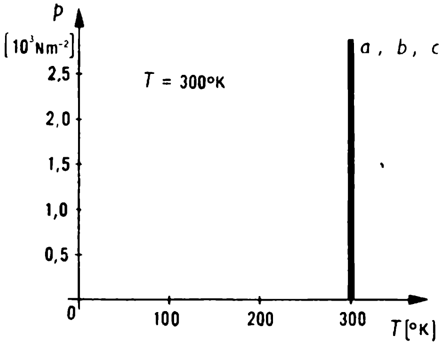
Obr. 37



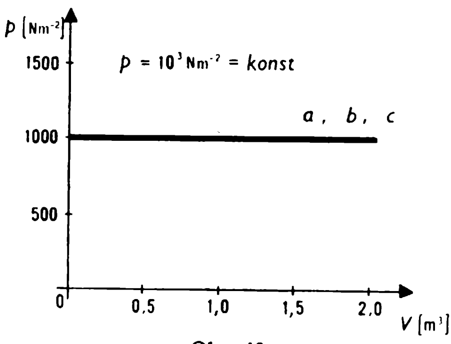
Obr. 38

Vztahy (2a), (3a), (4a) umožňují sestavit tabulku hodnot pro jednotlivé děje a vynést žádané grafy. (Viz závislosti a) v obr. 37 až 45.)

b) Jestliže hmotnost plynu se zdvojnásobí ve srovnání se zadáním, pak vzhledem k relaci (1) bude pro izotermický děj součin pV též dvojnásobný, tj. např. při stejném objemu bude tlak dvakrát větší než v případě a). Příslušné závislosti jsou znázorněny křivkami b) v obr. 37 až 45.



Obr. 39



Obr. 40

c) Pro m (kg) vodíku platí za zadaných (počátečních) podmínek stavová rovnice

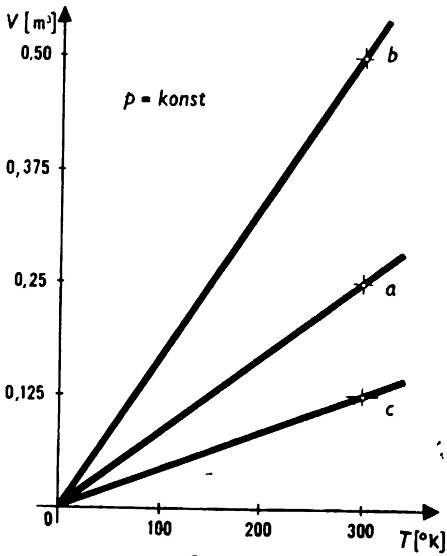
$$p_1 V_1 = \frac{m}{M_1} R T_1, \qquad (1a)$$

kde $M_1 \doteq 2$ kg kmol^{-1} je kilomolová hmotnost vodíku. Pro stejné množství hélia ($M_2 \doteq 4$ kg kmol^{-1}) platí obdobně za stejného počátečního objemu V_1 a stejné absolutní teploty T_1

$$p_{1(c)} V_1 = \frac{m}{M_2} R T_1 . \qquad (1c)$$

Srovnání vztahů (1c) a (1a) vede k závěru $p_{1(c)} = \frac{p_1}{2}$.

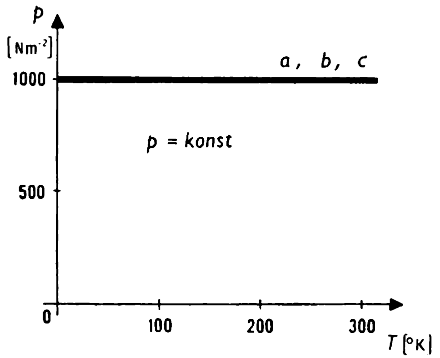
Je tedy za stejného objemu a stejné teploty v tomto případě hodnota tlaku poloviční ve srovnání s případem a). Příslušné grafy jsou v obrázcích 37 až 45 označeny symbolem c). Z tabulek uvádíme (pro stručnost) jenom



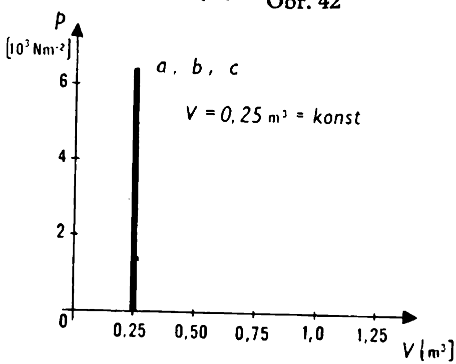
Obr. 41

tabulku p-V pro $T = T_1 = 300$ °K, a to pro všechny tři vyšetřované případy.

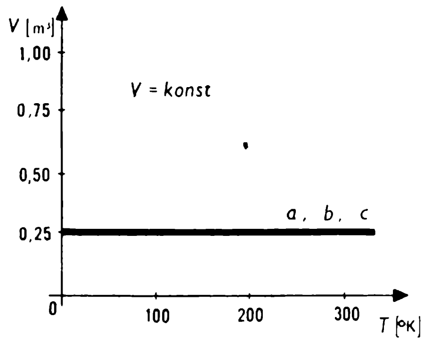
	V [m³]	0,05	0,10	0,25	0,50	1,00	2,00	5,00
a) m [kg] vodíku	$10^{-3}.p$ [Nm⁻²]	5,0	2,5	1,0	0,25	0,25	0,125	0,050
b) 2 m [kg] vodíku	$10^{-3}.p$ [N m⁻²]	10,0	5,0	2,0	1,0	0,50	0,25	0,10
c) m [kg] hélia	$10^{-3}.p$ [N m⁻²]	2,5	1,25	0,5	0,25	0,125	0,063	0,025



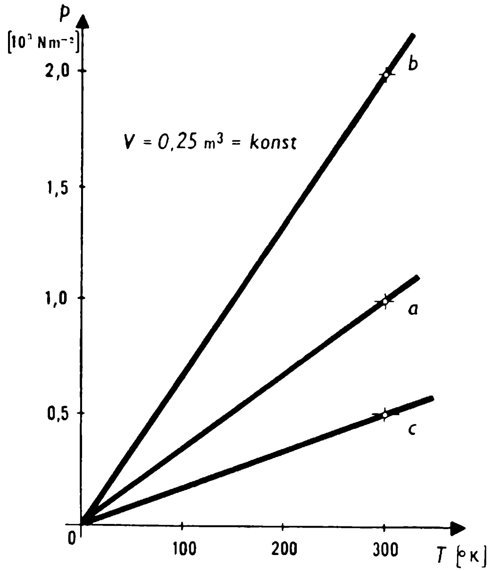
Obr. 42



Obr. 43


V [m³]
1,00
0,75
0,50
0,25
V = konst
a, b, c
0
100
200
300
T [°K]

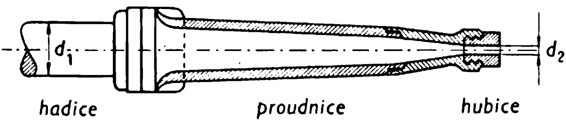
Obr. 44


p
[10³ Nm⁻²]
2,0
1,5
1,0
0,5
V = 0,25 m³ = konst
b
a
c
0
100
200
300
T [°K]

Obr. 45

8. úloha (navrhl Stanislav Zhejbal)

Při likvidaci požáru vesnického domku požárníci použili přenosnou motorovou stříkačku PS 4. Sací koš této stříkačky byl spuštěn na dno studny, která má kruhovou podstavu o poloměru R. K dopravě vody na požářiště byla použita útočná hadice C 52 o vnitřním průměru d_1 zakončená proudnicí (obr. 46). Hubice, která zmenšuje otvor proudnice, a tak slouží k dosažení požadovaného dostřiku, má průměr d_2. Podle výchylky na manometru na výtlačné straně čerpadla vyvinula stříkačka tlak p_1.



Obr. 46

Určete

a) rychlost, kterou voda proudí z proudnice,

b) skutečný dostřik vodního paprsku, jestliže proudnice svírá s vodorovným směrem úhel α a jestliže vlivem odporu prostředí se velikost dostřiku zmenší o A %,

c) velikost průřezu vodního paprsku v nejvyšším bodě dráhy určené podle bodu b),

d) dobu t, za kterou se vyčerpá voda ze studny, jestliže výška hladiny vody před zahájením likvidace požáru měřená ode dna studny byla h.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $R = 0{,}750$ m, $d_1 = 5{,}20$ cm, $d_2 = 1{,}25$ cm, $p_1 = 4{,}05 \cdot 10^5$ N m^{-2}, $\alpha = 30°$, $A = 30$, $h = 5{,}50$ m, $b = 1{,}01 \cdot 10^5$ N m^{-2}. Ztráty kinetické energie při výtoku vody hadicí zanedbejte.

Řešení:

a) Označme p_1, v_1 tlak a rychlost vody v hadici,
$p_2 = b$, v_2 tlak a rychlost vody po opuštění hadice.

Užijeme Bernoulliovy rovnice pro ustálené vodorovné proudění dokonalé kapaliny

$$p_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = b + \frac{1}{2} \varrho v_2^2 \tag{1}$$

a rovnice kontinuity

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \tag{2}$$

Vyjádříme-li ještě průřezy hadice a hubice S_1 a S_2 pomocí jejich průměrů d_1 a d_2, dostáváme z (1) a (2) vztah pro rychlost v_2, kterou proudí voda z proudnice.

$$v_2 = d_1^2 \sqrt{\frac{2 (p_1 - b)}{(d_1^4 - d_2^4) \varrho}}. \tag{3}$$

Pro zadané hodnoty vychází $v_2 = 24{,}7 \text{ m s}^{-1}$.

b) Pro dálku šikmého vrhu ve vakuu platí $d = \frac{v_2^2}{g} \sin 2\alpha$. Podle zadání je skutečný dostřik $d' = d \left(1 - \frac{A}{100}\right)$. Obecný výsledek dostaneme po dosazení (3), pro zadané hodnoty vychází $d' = 37{,}7$ m.

c) Předpokládáme, že v nejvyšším bodě nedojde k roztržení vodního paprsku. Označíme S_3 a v_3 průřez a rychlost v nejvyšším bodě.

Zřejmě platí pro vodní paprsek opět rovnice kontinuity

$$S_2 v_2 = S_3 v_3,$$

dále je

$$v_3 = v_2 \cos \alpha;$$

z toho

$$S_3 = \frac{S_2}{\cos \alpha} = \frac{\pi d_2^2}{4 \cos \alpha}.$$

Po dosazení daných hodnot

$$S_3 = 1{,}42 \,.\, 10^{-4} \text{ m}^2.$$

d) Je-li S_4 průřez studny, platí pro objem vody použité k likvidaci požáru

$$S_4 h = S_2 v_2 t.$$

Vyjádříme-li $S_4 = \pi R^2$, vychází

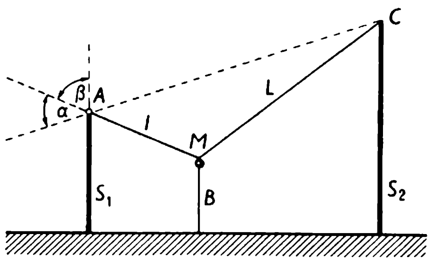
$$t = \frac{4\,R^2\,h}{v_2 d_2^2}.$$

Pro zadané hodnoty $t \doteq 53$ min.

9. úkol — experimentální (navrhl Jiří Pospíšil)

Měření doby kyvu bifilárního kyvadla

Pomůcky: Dva stojany (ze stavebnice mechaniky), úhloměr, délkové měřítko, stopky, dvě nitě o délkách l a L ($l \neq L$), kulička s očkem, bodec ve stojánku.



Obr. 47

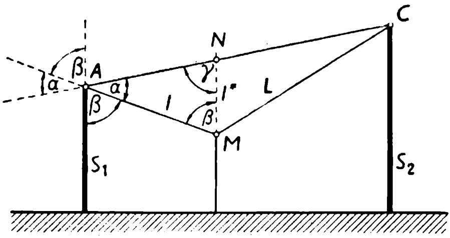
Návod: Sestavíme pokus podle náčrtku na obrázku 47. Změříme úhly α, β a délku l. Rovnovážnou polohu si fixujeme bodcem B ve stojánku. Pak vychýlíme kuličku M tak, že rovina AMC svírá se svislou rovinou úhel $\varepsilon \leq 5°$, a měříme dobu kyvu bifilárního kyvadla; čas začneme měřit vždy při průchodu kuličky rovnovážnou polohou.

Postup: Kyvadlo bifilární na dvou nestejně dlouhých nitích l a L, upevněných v nestejných výškách, má dobu kyvu

$$t = \pi \sqrt{\frac{l \sin \alpha}{g \sin (\alpha + \beta)}}. \tag{1}$$

Úkoly

a) Dokažte vztah (1).
b) Změřte desetkrát dobu kyvu pro předem zvolené úhly α, β a délku l.
c) Vypočtěte dobu kyvu ze vztahu (1).
d) Určete pravděpodobnou chybu výsledku.



Obr. 48

Řešení:

a) Bifilární kyvadlo má stejnou dobu kyvu t jako matematické kyvadlo délky $l^* = MN$ (viz obr. 48).
Ze sinové věty pro trojúhelník AMN dostaneme

$$l^* = \frac{l \sin \alpha}{\sin \gamma},$$

kde $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.
Pak je $\sin \gamma = \sin (\alpha + \beta)$
a pro dobu kyvu platí

$t = \pi \sqrt{\frac{l^*}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l \sin \alpha}{g \sin(\alpha + \beta)}}$, což je vztah (1) ze zadání.

b) Měření doby kyvu bylo provedeno při úhlech $\alpha = 73{,}0°$ a $\beta = 32{,}7°$; délkovým měřítkem byla zjištěna vzdálenost $l = 24{,}6$ cm.
Doba kyvu byla měřena desetkrát, a sice vždy trvání 50 kyvů. Výsledky měření jsou uvedeny v tabulce.

Číslo měření n	$\tau = 50\, t$ [s]	$\Delta\, \tau$ [s]
1	25,6	−0,65
2	25,2	−0,25
3	24,4	0,55
4	24,2	0,75
5	25,8	−0,85
6	24,9	0,05
7	24,8	0,15
8	25,0	−0,05
9	24,9	0,05
10	24,7	0,25

$$\bar{\tau} = 24{,}95 \text{ s}; \quad \Sigma\, \Delta_+ \tau = 1{,}80 \text{ s}$$

Střední chyba aritmetického průměru

$\delta(\bar{\tau}) = \frac{5}{2} \frac{\Sigma\, \Delta_+ \tau}{n \sqrt{n-1}}$, po dosazení $\delta(\bar{\tau}) = 0{,}1$ s.

Doba kyvu $t = \frac{\tau}{50}$, takže požadovaný výsledek lze psát

$$t = (0{,}499 \pm 0{,}002) \text{ s}. \qquad (2)$$

b) Vypočteme-li dobu kyvu ze vzorce (1)

$$t = \pi \sqrt{\frac{l \sin \alpha}{g \sin(\alpha + \beta)}},$$

vychází

$$t = 3{,}14 \sqrt{\frac{0{,}246 \,.\, 0{,}956}{9{,}81 \,.\, 0{,}963}} \text{ s} = 0{,}495 \text{ s}.$$

c) Dobu kyvu vypočtenou podle vzorce (1) ovlivňují všechny veličiny, vyskytující se ve vzorci, které byly zjištěny jen s omezenou přesností. Pokud by byly úhly a délka l nalezeny s relativními chybami 1 %, lze soudit, že relativní chyba doby t při užití vzorce (1) bude asi 1,5 %.

Lze potom zapsat výsledek takto

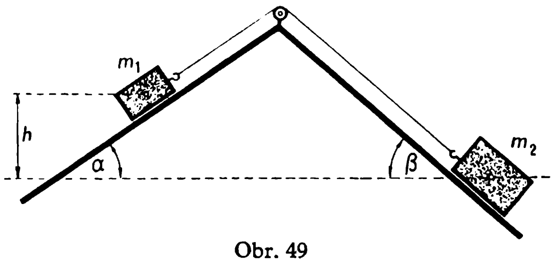
$$t = (0{,}495 \pm 0{,}007)\ \text{s}. \qquad (3)$$

Jak plyne z hodnot (2) a (3), je hodnota získaná měřením v intervalu hodnot získaných výpočtem.

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Na obr. 49 je znázorněn řez dvěma nakloněnými rovinami, které svírají s vorodovnou rovinou úhly α, β.



Obr. 49

Na průsečnici nakloněných rovin je upevněna kladka. Nit vedená přes kladku spojuje dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2. Těžiště tělesa vpravo je o délku h níže než těžiště tělesa vlevo. Z této polohy se tělesa začnou pohybovat působením tíhového pole a za dobu t od počátku pohybu je spojnice jejich těžišť vodorovná. Součinitel smykového tření μ je pro obě tělesa a podložky stejný.

a) Určete velikost zrychlení a pohybu těles.

b) Určete poměr hmotností obou těles.

Proveďte rozměrovou zkoušku pro oba výsledky v soustavě jednotek SI.

Tření v ose a na obvodu kladky neuvažujeme; nit je dokonale ohebná, neproměnné délky, její hmotnost je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti těles. Moment setrvačnosti kladky neuvažujeme.

Řešení:

a) Aby se těžiště těles dostala za dobu t do téže vodorovné přímky, musí těleso vpravo stoupat a těleso vlevo klesat. Obě tělesa se pohybují rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a po stejně dlouhých drahách s. Těžiště tělesa vpravo se zvýší o h_2 a těžiště tělesa vlevo klesne o h_1.

Zřejmě platí tyto vztahy

$$s = \frac{1}{2} at^2,$$

$$h = h_1 + h_2 = s(\sin\alpha + \sin\beta).$$

Z nich plyne

$$a = \frac{2h}{t^2(\sin\alpha + \sin\beta)}. \tag{1}$$

b) Celková hmotnost pohybujících se těles je $m_1 + m_2$. Na těleso vlevo působí ve směru rovnoběžném s levou nakloněnou rovinou složka tíhové síly $\boldsymbol{F}_1$ dolů a třecí síla $\boldsymbol{F}_{t1}$ vzhůru; na těleso vpravo působí ve směru rovnoběžném s pravou nakloněnou rovinou složka tíhové síly $\boldsymbol{F}_2$ dolů a třecí síla $\boldsymbol{F}_{t2}$ dolů. Tahové síly napjatého vlákna jsou stejně veliké a nesouhlasně orientované. Na soustavu působí výsledná tahová síla o velikosti

$$F = F_1 - F_{t1} - F_2 - F_{t2}, \tag{2}$$

která udílí soustavě zrychlení a.

Platí

$$F = (m_1 + m_2)\ a. \tag{3}$$

Ze vztahů (2) a (3) dostaneme:

$$(m_1 + m_2)\ a = m_1 g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2 g\,(\sin\beta + {} + \mu\cos\beta),$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{g\,(\sin\beta + \mu\cos\beta) + a}{g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - a}. \tag{4}$$

Po dosazení ze vztahu (1) do (4)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{gt^2\,(\sin\alpha + \sin\beta)\,(\sin\beta + \mu\cos\beta) + 2h}{gt^2\,(\sin\alpha + \sin\beta)\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - 2h}.$$

Rozměrové zkoušky relací (1) a (4):

$$[a] = \mathrm{m\,s^{-2}};\quad \left[\frac{m_1}{m_2}\right] = \frac{\mathrm{m\,s^{-2}}}{\mathrm{m\,s^{-2}}} = 1.$$

2. úloha (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

V nádobě tvaru válce o průřezu S se svislou osou je dokonale těsnícím pístem uzavřen vzduch. Píst se pohybuje ve válci bez tření. Na pístu je položeno závaží o hmotnosti m_z. Hmotnost pístu je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti závaží. Vzduch o teplotě t_1 vyplňuje válcový objem o výšce h_1. Atmosférický tlak nad pístem je b. Během izobarického děje přijme vzduch množství tepla Q.

a) Určete výslednou teplotu t_2 vzduchu ve válcové nádobě.

b) Určete výslednou výšku h_2 válcového objemu vzduchu.

c) Jak velkou práci vzduch při izobarickém ději vykonal.

d) Určete změnu vnitřní energie vzduchu.

e) Určete změnu tíhové potenciální energie závaží.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $b = 1{,}0\,.\,10^5$ N m^{-2}, $S = 1{,}0\,.\,10^{-2}$ m^2, $h = 0{,}10$ m, $m_z = 10$ kg, $t_1 = 27$ °C, $Q = 5{,}0\,.\,10^2$ J.

Potřebné konstanty vyhledejte v tabulkách!
Předpokládáme, že vzduch je ideální plyn.

Řešení:

Děj probíhá při tlaku vzduchu $p = b + \dfrac{m_z g}{S} = \text{konst.}$

Počáteční objem vzduchu je $V_1 = h_1 S$. (1)

a) V počátečním stavu platí

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1, \tag{2}$$

kde m je hmotnost vzduchu (v kg), M je kilomolová hmotnost vzduchu, R je plynová konstanta (pro 1 kilomol) a T_1 je absolutní teplota.

Přijaté teplo $\quad Q = mc_p (T_2 - T_1)$, (3)

c_p je měrné teplo vzduchu při stálém tlaku.

Hledanou teplotu T_2 nalezneme ze vztahu (3); dosadíme-li ještě m ze vztahu (2) a V_1 z (1), pak vychází

$$T_2 = T_1 \left(\frac{QR}{pSh_1Mc_p} + 1 \right). \tag{4}$$

b) Konečný objem vzduchu je $V_2 = Sh_2$. Pro izobarický děj platí $V_2 = V_1 \dfrac{T_2}{T_1}$; po dosazení ze (4) dostaneme

$$h_2 = h_1 \left(\frac{QR}{pSh_1Mc_p} + 1 \right). \tag{5}$$

c) Při izobarické expanzi vykonal vzduch práci

$$A = p (V_2 - V_1) = pS (h_2 - h_1),$$

po dosazení z (5) dostaneme

$$A = \frac{QR}{Mc_p}\,. \tag{6}$$

d) Množstvím tepla Q se zvětšila vnitřní energie vzduchu o $W_1 = Q$. Vykonáním práce A se zmenšila vnitřní energie vzduchu o $W_2 = A$. Celková změna vnitřní energie vzduchu je

$$\Delta W = W_1 - W_2 = Q\left(1 - \frac{R}{Mc_p}\right). \tag{7}$$

e) Změna potenciální tíhové energie závaží je

$$\Delta W_p = m_z g\,(h_2 - h_1) = \frac{m_z g Q R}{p S M c_p}\,. \tag{8}$$

Do výrazů (4) — (8) dosadíme dané hodnoty a konstanty $M = 29$ kg kmol^{-1}, $c_p = 1{,}005\,.\,10^3$ J kg^{-1} deg^{-1}, $g = 9{,}81$ m s^{-2}, $R = 8{,}31\,.\,10^3$ J deg^{-1} kmol^{-1}. Pak dostáváme:

a) $T_2 = 690$ °K, $t_2 = 417$ °C,
b) $h_2 = 2{,}3\,.\,10^{-1}$ m,
c) $A = 140$ J,
d) $\Delta W = 360$ J,
e) $\Delta W_p = 13$ J.

3. úloha (navrhl Václav Suchánek)

V nádobě dokonale tepelně izolované smícháme ledovou tříšť o hmotnosti m_1 a teplotě t_1 s vodou o teplotě t_2. Určete hmotnost vody tak, aby v nádobě vznikla směs ledu a vody v rovnovážném stavu za normálního tlaku a obě složky měly stejné hmotnosti.

Proveďte diskusi pro tyto případy:

a) Část ledu roztaje.
b) Část vody zmrzne.
c) Nenastane žádný z případů a), b).

Řešení:

Hledanou počáteční hmotnost vody označíme m_2. Výsledná hmotnost ledu se rovná výsledné hmotnosti vody, označíme je $\overline{m}$. Zřejmě platí

$$m_1 + m_2 = 2\,\overline{m}. \tag{1}$$

Značí-li c_1 měrné teplo ledu, c_2 měrné teplo vody, l skupenské měrné teplo tání ledu, popř. skupenské měrné teplo tuhnutí vody, pak lze vyjádřit změny vzniklé při smíchání kalorimetrickou rovnicí

$$m_1 c_1 (t_0 - t_1) + (\overline{m} - m_1)\, l = m_2 c_2 (t_2 - t_0), \tag{2}$$

v níž $t_0 = 0$ °C je teplota rovnovážného stavu ledu a vody za normálního tlaku.
Přihlédneme-li k (1), dostaneme z (2)

$$m_2 = \frac{m_1\,[2\,c_1(t_0 - t_1) - l]}{2\,c_2\,(t_2 - t_0) - l}\,. \tag{3}$$

Z relace (3) je zřejmé, že pro danou hmotnost ledu m_1 je hmotnost vody m_2 určena zcela jednoznačně při daných teplotách t_1, t_2.

Diskuse pro různé případy:

a) Část ledu roztaje.

V tomto případě je $\overline{m} - m_1 = \frac{1}{2}\,(m_2 - m_1) < 0$, tj. $m_2 < m_1$. Pro tento případ dostaneme ze vztahu (3)

$$2\,c_1\,(t_0 - t_1) - l < 2\,c_2\,(t_2 - t_0) - l.$$

Předpokládáme-li, že pro měrná tepla vody a ledu platí $c_2 \doteq 2\,c_1$, vyjde po dosazení $t_0 = 0$ °C

$$-\,t_1 < 2\,t_2. \tag{4}$$

b) Část vody zmrzne.

$$\overline{m} - m_1 = \frac{1}{2}\,(m_2 - m_1) > 0, \text{ tj. } m_2 > m_1.$$

Pro tento případ plyne ze (3) za stejných předpokladů jako v části a)

$$- t_1 > 2\, t_2. \qquad (5)$$

c) Nenastane-li žádný z případů a), b), pak je v kalorimetrické rovnici (2) druhý člen na levé straně rovnice nulový, a tedy platí

$$m_1 c_1 (t_0 - t_1) = m_2 c_2 (t_2 - t_0).$$

Odtud vzhledem k tomu, že $m_1 = m_2 = \overline{m}$, dostáváme za stejných předpokladů jako v části *a*)

$$- t_1 = 2\, t_2. \qquad (6)$$

Hodnoty teplot ledové tříště t_1 a vody t_2 musí splňovat postupně relace (4), (5) a (6), aby nastaly případy a), b) a c).

4. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Válcová nádoba o plošném obsahu dna S je naplněna vodou do výšky h. Ve válcové stěně jsou dva otvory o stejných průřezech S_1 umístěné v protilehlých povrchových přímkách tak, že jeden je těsně u dna a druhý je ve výšce h_1 ($h_1 < h$). Nádoba je postavena dnem na vodorovné podložce, po které se může pohybovat bez tření. Hmotnost nádoby je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti vody v ní obsažené.

a) Určete velikost zrychlení a, které získá nádoba s vodou v okamžiku otevření obou otvorů. Určete směr a orientaci vektoru zrychlení $\mathbf{a}$ vzhledem k vektorům výtokových rychlostí vody.

b) Řešte úlohu a) v případě, že oba otvory jsou umístěny ve výšce h_1 tak, že jejich spojnice se středem kruhového průřezu ve výšce h_1 jsou k sobě kolmé.

Řešení:

a) Polohu otvorů vystihuje obr. 50. Z otvoru ve výšce h_1 proudí voda rychlostí $\mathbf{v}_1$, $v_1 = \sqrt{2g(h-h_1)}$. Z otvoru u dna nádoby proudí voda rychlostí $\mathbf{v}_2$, $v_2 = \sqrt{2gh}$.

Hybnost vody, která vyteče za krátkou dobu Δt otvorem ve výšce h_1, je $\mathbf{p}_1$, $p_1 = S_1 \varrho v_1^2 \Delta t$; hybnost vody, která vyteče za krátkou dobu Δt otvorem blízko dna, je p_2,

$$p_2 = S_1 \varrho v_2^2 \Delta t.$$

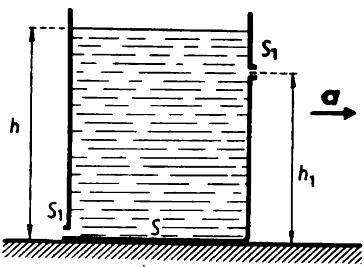
Z prvé impulsové věty pro pohyb nádoby

$$\mathbf{F} \Delta t = \Delta \mathbf{p} \tag{1}$$

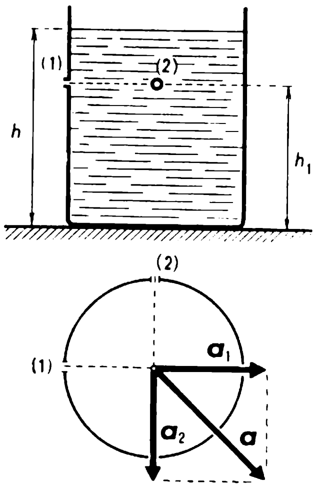
plyne $\quad 2 S_1 \varrho g h_1 = a S h \varrho;$

a odtud $\quad a = \dfrac{2 S_1 g h_1}{S h}.$

Zrychlení $\mathbf{a}$ nádoby s vodou je orientováno souhlasně s rychlostí proudění vody z otvoru ve výšce h_1.



Obr. 50



Obr. 51

b) Změna hybnosti $\Delta \boldsymbol{p}$ v tomto případě má velikost

$$p = 2 g \varrho S_1 (h - h_1) \sqrt{2} \Delta t.$$

Užijeme-li rovnice (1), určíme velikost zrychlení $\boldsymbol{a}$ pohybu nádoby

$$a = \frac{2 S_1 g (h - h_1) \sqrt{2}}{Sh} .$$

Kdyby byl otevřen jen otvor (1), bylo by zrychlení pohybu nádoby s vodou $\boldsymbol{a}_1$; kdyby byl otevřen jen otvor (2), bylo by zrychlení pohybu nádoby s vodou $\boldsymbol{a}_2$; $a_1 = a_2$.
Orientaci vektoru $\boldsymbol{a}$ určíme součtem vektorů (viz obr. 51)

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2.$$

Velikost zrychlení $\boldsymbol{a}$ v případě a) i b) nezávisí na hustotě kapaliny. Nalezené hodnoty platí pro libovolnou kapalinu, pro kterou lze zanedbat vnitřní tření.

3. Úlohy kategorie C

Úlohy recenzovali Jan Tesař a dr. Ivan Náter.

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl ing. Bohumil Vybíral)

Rovnoběžné mantinely *a*, *b* kulečníku jsou od sebe vzdáleny o délku *d*. Od mantinelu *a* jsou současně vrženy po stejné dráze kolmo k mantinelu *b* dvě stejné koule A, B různými rychlostmi $v_A > v_B$. Rozměry koulí zanedbejte. Rychlejší koule (A) se odrazí od mantinelu *b* bez ztráty energie a střetne se s koulí pomalejší (B), přičemž si obě koule vymění rychlost. Koule B se po odrazu od koule A pohybuje rychleji než koule A, odrazí se pak od mantinelu *a* a střetne se podruhé s koulí A.

Vypočtěte:

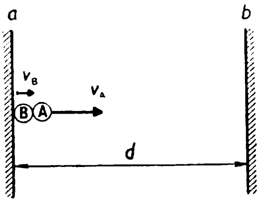
a) polohy míst, kde dojde k prvnímu a druhému střetnutí;

b) doby, které uplynou od okamžiku uvedení koulí do pohybu do jejich prvního a druhého střetnutí.

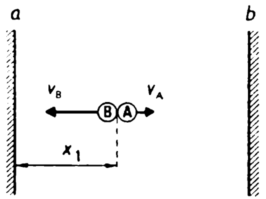
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 1{,}26$ m, $v_A = 7{,}0$ m s^{-1}, $v_B = 2{,}0$ m s^{-1} a také pro hodnoty $v'_A = 7{,}0$ m s^{-1}, $v'_B = 5{,}0$ m s^{-1}.

Řešení:

Na obr. 52 je znázorněn počáteční stav pohybu, kdy dochází k vrhu obou koulí od mantinelu a různými rychlostmi v_A, v_B. K prvnímu rázu obou koulí dojde ve vzdálenosti x_1 od mantinelu a za dobu t_1 po uvedení koulí do pohybu. Při rázu si koule vymění své rychlosti, takže koule A se bude po rázu pohybovat kolmo k mantinelu b rychlostí v_B, koule B se bude vracet po své počáteční dráze, avšak rychlostí v_A k mantinelu a (obr. 53).

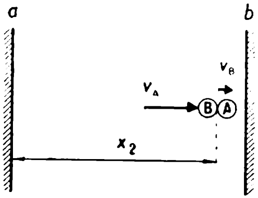


Obr. 52

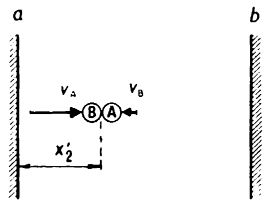


Obr. 53

K druhému rázu může dojít dříve, než se koule A dostane k mantinelu b, a to za dobu t_2 po uvedení koulí do pohybu ve vzdálenosti x_2 od mantinelu a (obr. 54) nebo až po odrazu koule A od mantinelu b (obr. 55). V tomto případě dojde k druhému rázu ve vzdálenosti x'_2 od mantinelu a za dobu t'_2 od okamžiku, kdy byly koule vrženy. Časový interval mezi prvním a druhým rázem označíme τ_2 u děje zobrazeného na obr. 54 a τ_2' u děje zobrazeného na obr. 55.



Obr. 54



Obr. 55

a) Za předpokladu, že rychlosti v_A a v_B zůstávají během pohybu konstantní, platí pro první ráz (obr. 53) soustava rovnic

$$x_1 = v_B t_1; \quad d + (d - x_1) = v_A t_1.$$

Kořeny této soustavy rovnic jsou

$$x_1 = \frac{2 v_B d}{v_A + v_B}, \tag{1}$$

$$t_1 = \frac{2d}{v_A + v_B}. \tag{2}$$

Dojde-li k druhému rázu ve vzdálenosti x_2 za časový interval $\tau_2 = t_2 - t_1$ mezi prvým a druhým rázem, platí podle obr. 54 a obr. 53 vztahy:

$$\tau_2 = \frac{x_2 - x_1}{v_B} \text{ pro kouli A a}$$

$$\tau_2 = \frac{x_1 + x_2}{v_A} \text{ pro kouli B.} \tag{3}$$

Zároveň platí nerovnost $x_2 < d$.

Ze vztahů (3) vyjde $x_2 = \dfrac{v_A + v_B}{v_A - v_B} x_1$ a po dosazení ze vztahu (1) plyne $x_2 = \dfrac{2v_B}{v_A - v_B} d$. (4)

Vzhledem k nerovnosti $x_2 < d$ nastane tento případ tehdy, jestliže $\dfrac{2v_B}{v_A - v_B} < 1$, tj. jestliže $v_B > 3\,v_A$. Pak platí podle prvního ze vztahů (3)

$$\tau_2 = \frac{1}{v_B}(x_2 - x_1) = \frac{1}{v_B}\left(\frac{1}{v_A - v_B} - \frac{1}{v_A + v_B}\right) 2\,v_B d =$$
$$= 2\,d\left(\frac{1}{v_A - v_B} - \frac{1}{v_A + v_B}\right) = \frac{4\,dv_B}{(v_A - v_B)(v_A + v_B)}. \quad (5)$$

Platí-li pro rychlosti nerovnost $v_B < v_A < 3\,v_B$, dojde k druhému rázu koulí ve vzdálenosti x_2' od mantinelu a za dobu $\tau_2' = t_2' - t_1$ po prvním rázu. Potom pro kouli A platí

$\tau_2' = \dfrac{(d - x_1) + (d - x_2')}{v_B}$ a pro kouli B zároveň

$$\tau_2' = \frac{x_1 + x_2'}{v_A}. \quad (6)$$

Porovnáme-li výrazy (6), dostaneme po úpravě rovnici $v_A(2\,d - x_1 - x_2') = v_B(x_1 + x_2')$, ze které vypočítáme

$$x_2' = \frac{2dv_A}{v_A + v_B} - x_1 = \frac{2\,d(v_A - v_B)}{v_A + v_B}. \quad (7)$$

Podle druhého ze vztahů (6) je $\tau_2' = \dfrac{1}{v_A}\left(x_1 + \right.$

$$\left. + \frac{2dv_A}{v_A + v_B} - x_1\right) = \frac{2d}{v_A + v_B}. \quad (8)$$

Místo, ve kterém dojde k prvnímu rázu, je vzdáleno od mantinelu a o délku x_1, určenou obecně vztahem (1).

Pro první dané hodnoty v_A a v_B je to 0,56 m, pro druhé dané hodnoty v'_A a v'_B je to 1,1 m. Protože v prvních daných hodnotách je $v_A > 3v_B$, dojde pro ně k druhému rázu ve vzdálenosti 1,0 m, určené obecně vztahem (4). Pro druhé dané hodnoty je $v'_A < 3\,v'_B$. Proto dojde k druhému rázu v tomto případě ve vzdálenosti 0,42 m, jež je obecně určena ze (7).

b) Dobu t_2 určíme ze vztahu $t_2 = t_1 + \tau_2$. Vzhledem ke vztahům (2) a (5) je

$$t_2 = \frac{2\,d}{v_A + v_B} + \frac{4\,d\,v_B}{(v_A - v_B)\,(v_A + v_B)} = \frac{2d}{v_A - v_B}. \quad (9)$$

Vzhledem ke vztahům (2) a (8) je

$$t'_2 = t_1 + \tau'_2 = \frac{2d}{v_A + v_B} + \frac{2d}{v_A + v_B} = \frac{4d}{v_A + v_B}. \quad (10)$$

K prvnímu rázu koulí dojde podle vztahu (2) při daných hodnotách v_A a v_B za dobu 0,28 s po uvedení koulí do pohybu, při daných hodnotách v'_A a v'_B dojde k prvému rázu za 0,21 s.

K druhému rázu dojde pro dané hodnoty v_A a v_B podle vztahu (9) za dobu 0,50 s a při hodnotách v'_A a v'_B podle vztahu (10) za 0,42 s po uvedení koulí do pohybu.

2. úloha (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

Vozidlo se pohybuje pohybem přímočarým rovnoměrným rychlostí v. V místě B vyšle zvukový signál, šířící se rychlostí c, který dospěje po dráze AB do místa A za dobu t po průjezdu vozidla místem A.

a) Jaká je vzdálenost AB?

b) Jestliže se signál v místě A odrazí, v jaké vzdálenosti AC dostihne odražený signál vozidlo?

c) Jaká musí být rychlost v vozidla, má-li být $BC = \frac{1}{n} AB$?

Řešení:

Vozidlo se pohybuje stálou rychlostí v po přímé dráze procházející body A a B. Za dobu t_1 po průjezdu místem A projíždí vozidlo místem B, kde vyšle za jízdy zvukový signál, šířící se rychlostí c. Signál se v místě A odrazí a dostihne vozidlo, pohybující se stále po přímé dráze procházející body A a B, v místě C za dobu t_3 po odraze v místě A.

Dráhu AB urazí vozidlo za dobu $t_1 = \frac{AB}{v}$, signál se rozšíří do téže vzdálenosti za dobu $t_2 = \frac{AB}{c}$.

a) Protože zvukový signál, vyslaný vozidlem v místě B, dospěje do bodu A za dobu t po průjezdu vozidla místem A, platí rovnice $t = t_1 + t_2 = AB \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{c}\right) = \frac{AB(c + v)}{cv}$,

takže

$$AB = \frac{cvt}{c + v}. \tag{1}$$

Vzdálenost AB je určena vztahem (1).

b) Odražený zvukový signál dostihne vozidlo v místě C za dobu $t_1 + t_2 + t_3 = t + t_3$ po průjezdu vozidla bodem A. Odražený zvukový signál proběhne tutéž dráhu AC za dobu t_3.

Platí tedy $AC = ct_3 = v(t + t_3)$, takže $t_3 = \frac{vt}{c - v}$

a $AC = ct_3 = \frac{cvt}{c - v}$. (2)

Vzdálenost AC je určena vztahem (2).

c) Vzdálenost $BC = AC - AB$. Má-li být $BC = \frac{1}{n} AB$, musí platit vztah $AB = nBC = n(AC - AB)$, z něhož vyjde $(n + 1)\, AB = nAC$. Po dosazení za AB a AC ze vztahů (1) a (2) dostaneme $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{c+v}{c-v}$.

Po dalších úpravách vyjde $v = \dfrac{c}{2n+1}$. (3)

Má-li být splněna podmínka části c) úlohy, musí platit (3).

3. úloha (navrhl Jan Tesař)

Po dvou rovnoběžných přímých kolejích se pohybují proti sobě lokomotiva s tendrem o délce d_1 a vlak délky d_2. Lokomotiva s tendrem má stálou rychlost v_1 a vlak jede stálou rychlostí v_2. Lokomotiva mine vlak za dobu t_1. Předjíždí-li lokomotiva s tendrem, která se vrací stejnou rychlostí v_1, vlak pohybující se rychlostí v_2, míjí ho za dobu t_2.

a) Jakou rychlostí se pohybuje vlak?

b) Jak dlouhý je vlak?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d_1 = 8{,}0$ m, $v_1 = 54$ km h^{-1}, $t_1 = 4{,}0$ s, $t_2 = 16$ s.

Řešení:

Relativní rychlost lokomotivy s tendrem vzhledem k vlaku označíme v, pohybují-li se vlak a lokomotiva proti sobě, a v', pohybují-li se souhlasným směrem.

a) Lokomotiva s tendrem a vlak projíždějí vedle sebe po dráze $d_1 + d_2$. Jede-li lokomotiva proti vlaku, jsou rychlosti $v_1 + v_2$ opačně orientovány, a proto má lokomotiva vzhledem k vlaku relativní rychlost $v = v_1 + v_2$. Platí tedy rovnice

$$t_1 (v_1 + v_2) = d_1 + d_2. \tag{1}$$

Jsou-li rychlosti v_1 a v_2 stejně orientovány, je relativní rychlost lokomotivy vzhledem k vlaku $v' = v_1 - v_2$ a platí rovnice

$$t_2 (v_1 - v_2) = d_1 + d_2. \tag{2}$$

Porovnáním výrazů (1) a (2) dostáváme

$$(v_1 + v_2)\, t_1 = (v_1 - v_2)\, t_2,$$

odkud vyjde po úpravě

$$v_2 = \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1} v_1 . \tag{3}$$

Po dosazení daných hodnot vyjde rychlost vlaku $v_2 = 32 \text{ km h}^{-1}$.

b) Délku vlaku d_2 určíme buď užitím vztahu (1), nebo ze vztahu (2). Užijeme-li vztahu (1), vychází

$$d_2 = (v_1 + v_2)\, t_1 - d_1$$

a po dosazení za v_2 z (3)

$$d_2 = t_1 v_1 \left(1 + \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1}\right) - d_1, \quad \text{takže}$$

$$d_2 = \frac{2\, t_1 t_2}{t_1 + t_2} v_1 - d_1 . \tag{4}$$

Po dosazení daných hodnot do obecného vztahu (4) vychází $d_2 = 88$ m. Hledaná délka vlaku je 88 m.

4. úloha (navrhl Jan Tesař)

Vlak se rozjíždí na vodorovné rovině po přímé dráze působením stálé tažné síly lokomotivy a urazí za dobu t_1 dráhu s_1. Na konci dráhy s_1 přechází vodorovná rovina v nakloněnou rovinu s úhlem sklonu α. Potom vlak stoupá rovnoměrným pohybem za působení tažné síly jako při rozjíždění po vodorovné rovině.

Jaké stoupání ($\sin \alpha$) má vlak?

Vzdálenost AC je určena vztahem (2).

c) Vzdálenost $BC = AC - AB$. Má-li být $BC = \frac{1}{n} AB$, musí platit vztah $AB = nBC = n(AC - AB)$, z něhož vyjde $(n + 1)\, AB = nAC$. Po dosazení za AB a AC ze vztahů (1) a (2) dostaneme $\frac{n+1}{n} = \frac{c+v}{c-v}$.

Po dalších úpravách vyjde $v = \frac{c}{2n+1}$. (3)

Má-li být splněna podmínka části c) úlohy, musí platit (3).

3. úloha (navrhl Jan Tesař)

Po dvou rovnoběžných přímých kolejích se pohybují proti sobě lokomotiva s tendrem o délce d_1 a vlak délky d_2. Lokomotiva s tendrem má stálou rychlost v_1 a vlak jede stálou rychlostí v_2. Lokomotiva mine vlak za dobu t_1. Předjíždí-li lokomotiva s tendrem, která se vrací stejnou rychlostí v_1, vlak pohybující se rychlostí v_2, míjí ho za dobu t_2.

a) Jakou rychlostí se pohybuje vlak?

b) Jak dlouhý je vlak?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d_1 = 8{,}0$ m, $v_1 = 54$ km h^{-1}, $t_1 = 4{,}0$ s, $t_2 = 16$ s.

Řešení:

Relativní rychlost lokomotivy s tendrem vzhledem k vlaku označíme v, pohybují-li se vlak a lokomotiva proti sobě, a v', pohybují-li se souhlasným směrem.

a) Lokomotiva s tendrem a vlak projíždějí vedle sebe po dráze $d_1 + d_2$. Jede-li lokomotiva proti vlaku, jsou rychlosti $v_1 + v_2$ opačně orientovány, a proto má lokomotiva vzhledem k vlaku relativní rychlost $v = v_1 + v_2$. Platí tedy rovnice

$$t_1 (v_1 + v_2) = d_1 + d_2. \qquad (1)$$

Jsou-li rychlosti v_1 a v_2 stejně orientovány, je relativní rychlost lokomotivy vzhledem k vlaku $v' = v_1 - v_2$ a platí rovnice

$$t_2 (v_1 - v_2) = d_1 + d_2. \tag{2}$$

Porovnáním výrazů (1) a (2) dostáváme

$$(v_1 + v_2)\, t_1 = (v_1 - v_2)\, t_2,$$

odkud vyjde po úpravě

$$v_2 = \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1} v_1 . \tag{3}$$

Po dosazení daných hodnot vyjde rychlost vlaku $v_2 = 32 \text{ km h}^{-1}$.

b) Délku vlaku d_2 určíme buď užitím vztahu (1), nebo ze vztahu (2). Užijeme-li vztahu (1), vychází

$$d_2 = (v_1 + v_2)\, t_1 - d_1$$

a po dosazení za v_2 z (3)

$$d_2 = t_1 v_1 \left(1 + \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1}\right) - d_1, \quad \text{takže}$$

$$d_2 = \frac{2\, t_1 t_2}{t_1 + t_2} v_1 - d_1 . \tag{4}$$

Po dosazení daných hodnot do obecného vztahu (4) vychází $d_2 = 88$ m. Hledaná délka vlaku je 88 m.

4. úloha (navrhl Jan Tesař)

Vlak se rozjíždí na vodorovné rovině po přímé dráze působením stálé tažné síly lokomotivy a urazí za dobu t_1 dráhu s_1. Na konci dráhy s_1 přechází vodorovná rovina v nakloněnou rovinu s úhlem sklonu α. Potom vlak stoupá rovnoměrným pohybem za působení tažné síly jako při rozjíždění po vodorovné rovině.

Jaké stoupání ($\sin \alpha$) má vlak?

Tření a ostatní překážky pohybu zanedbejte. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $t_1 = 60$ s, $s_1 = 350$ m, tíhové zrychlení $g \doteq 10$ m s^{-2}.

Řešení:

Hmotnost vlaku označíme m, tažnou sílu lokomotivy F, zrychlení pohybu vlaku po vodorovné rovině a.

Protože tažná síla lokomotivy je stálá, koná vlak na vodorovné rovině pohyb rovnoměrně zrychlený.

Ze vzorce $s_1 = \frac{a}{2} t_1^2$ vypočítáme $a = \frac{2s_1}{t_1^2}$, takže tažná síla lokomotivy má hodnotu

$$F = ma = \frac{2ms_1}{t_1^2}. \qquad (1)$$

Protože vlak se pohybuje na nakloněné rovině rovnoměrným pohybem, je tažná síla lokomotivy v rovnováze se složkou $G_1 = mg \sin \alpha$ tíhy vlaku, rovnoběžnou s délkou nakloněné roviny. Platí tedy vztah $F = G_1$.

Po dosazení ze vztahu (1) vyjde $mg \sin \alpha = \frac{2ms_1}{t_1^2}$

a po úpravě $\sin \alpha = \frac{2\,s_1}{gt_1^2}$. $\qquad$ (2)

Po dosazení daných hodnot je $\sin \alpha = \frac{2 \,.\, 360}{10 \,.\, 3600} \cdot \frac{m}{ms^{-2}\, s^2} = 0{,}02 = 2\,\%$.

Vlak má na nakloněné rovině stoupání 2 %.

Obecně je tato hodnota určena vztahem (2).

5. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Dokonale pružná ocelová kulička padá z dolního okraje střechy domu. Počáteční rychlost kuličky je nulová. Pozorovatel v pokoji u okna výšky d v tomto domě změřil, že kulička proletěla vzdálenost od horního k dolnímu okraji okna za dobu t_1.

Kulička dopadne na vodorovný chodník u paty domu, kde dojde k dokonalému odrazu. Pozorovatel uvidí kuličku u dolního okraje okna za dobu t_2 poté, co kulička volným pádem minula dolní okraj okna.

Určete výšku dolního okraje střechy domu nad chodníkem. Uvažte, že při svislém vrhu vzhůru je doba výstupu stejná jako doba pádu.

Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $d = 1{,}5$ m, $t_1 = 0{,}12$ s, $t_2 = 2{,}0$ s.

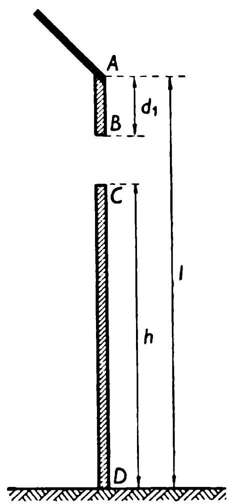
Řešení:

Na obrázku 56 značí bod A dolní okraj střechy, bod B horní okraj okna, bod C spodní okraj okna a bod D místo, kam kulička dopadne na chodník. Vzdálenost AB dolního okraje střechy od horního okraje okna označíme d_1, výšku CD spodního okraje okna nad chodníkem označíme h a vzdálenost spodního okraje střechy od chodníku označíme l.

Kulička proběhne vzdálenost d_1 za dobu t_3 a vzdálenost h za dobu $\frac{1}{2} t_2$. Vzdálenost AD urazí kulička za dobu t_4 a dopadne na chodník. Doby výstupu kuličky po odrazu od chodníku jsou stejně dlouhé jako doby pádu po týchž drahách.

Proběhla-li kulička vzdálenost od horního okraje okna k spodnímu okraji okna za dobu t_1, musí platit pro polohu dolního okraje okna vztah

$$d_1 = \frac{1}{2} g\, t_3^2 ;$$



Obr. 56

dále musí platit

$$d_1 + d = \frac{1}{2} g\,(t_3 + t_1)^2.$$

Vyloučíme-li z této soustavy rovnic neznámou veličinu d_1, vyjde rovnice $gt_3t_1 = d - \frac{1}{2} gt_1^2$, ze které vypočítáme

$$t_3 = \frac{2\,d - gt_1^2}{2\,gt_1}\,. \tag{1}$$

Volný pád kuličky od spodního okraje střechy až na chodník trvá dobu $t_4 = t_3 + t_1 + \frac{1}{2} t_2$. Dosadíme-li do této rovnice za t_3 hodnotu ze vztahu (1), vyjde po úpravě

$$t_4 = \frac{2\,d + gt_1^2 + gt_1t_2}{2\,gt_1}\,. \tag{2}$$

Z obr. 56 je patrno, že

$$l = \frac{1}{2}\,gt_4^2 = \frac{1}{2}\,g\,\frac{(2\,d + gt_1^2 + gt_1t_2)^2}{4\,g^2t_1^2}\,,$$

takže

$$l = \frac{(2d + gt_1^2 + gt_1t_2)^2}{8gt_1^2}\,. \tag{3}$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $l \doteq 27$ m, jestliže $g = 10$ m s^{-2}.

Dolní okraj střechy je ve výšce 27 m nad chodníkem. Obecně je tato hodnota určena vztahem (3).

6. úkol experimentální (navrhl Jan Tesař)

Měření součinitele μ smykového tření

Pomůcky: Nakloněná rovina s měnitelným úhlem sklonu, špalíček tvaru kvádru, délkové měřítko s milimetrovým dělením.

Návod: Pohybuje-li se špalíček po nakloněné rovině o úhlu sklonu α, jejíž výška je h a základna z, rovnoměrným pohybem, pak se třecí síla F_t, kterou působí nakloněná rovina na špalíček, ruší složkou G_1 tíhy G špalíčku, rovnoběžnou s délkou nakloněné roviny. Druhá složka G_2 je k nakloněné rovině kolmá. V tomto případě platí vztah

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{z}\,. \tag{1}$$

Úkoly

a) Dokažte vztah (1).

b) Položte špalíček na nakloněnou rovinu a měňte její úhel sklonu α tak dlouho, až špalíček, podle vašeho odhadu, po mírném nárazu proběhne po spádové přímce celou délku nakloněné roviny rovnoměrným pohybem. Pak změřte výšku h nakloněné roviny a její základnu z. Proveďte deset měření s týmž špalíčkem ležícím na téže nakloněné rovině stále stejnou stěnou. Naměřené hodnoty zapište do tabulky.

c) Stanovte pravděpodobné hodnoty $\bar{h}$, $\bar{z}$ jako aritmetické průměry naměřených hodnot a vypočítejte jejich absolutní a relativní chyby.

d) Hodnotu součinitele smykového tření vypočítejte z pravděpodobných hodnot $\bar{h}$ a $\bar{z}$ užitím vztahu (1).

e) Určete relativní a absolutní chybu veličiny μ vypočítané v části d) úlohy.

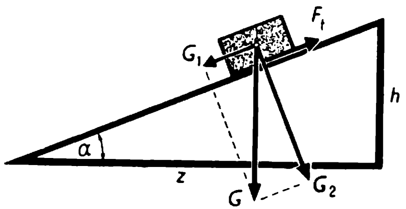
Řešení:

a) Pohybuje-li se špalíček rovnoměrným pohybem po nakloněné rovině s úhlem sklonu α, pak je pohybová složka G_1 tíhy špalíčku v rovnováze s třecí silou F_t (viz obr. 57). Platí tedy rovnice

$$mg \sin \alpha = \mu\, mg \cos \alpha.$$

Odtud $\mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{z}$ cbd.

b) Podle návodu najdeme takový úhel sklonu nakloněné roviny, pro který se špalíček po mírném nárazu



Obr. 57

(podle odhadu) pohybuje rovnoměrně, a změříme výšku nakloněné roviny h a základnu nakloněné roviny z. Naměřené hodnoty zapíšeme do tabulky.

n	h [mm]	Δ_+h [mm]	z [mm]	Δ_+z [mm]
1.	114	1,2	495	
2.	116		490	3,5
3.	118		495	
4.	116		490	3,5
5.	114	1,2	500	
6.	116		490	3,5
7.	112	3,2	495	
8.	114	1,2	490	3,5
9.	118		500	
10.	114	1,2	490	3,5

$\bar{h} = 115{,}2$ mm $\quad \bar{z} = 493{,}5$ mm $\quad \Sigma\Delta_+h = 8{,}0$ mm
$\Sigma_+\Delta z = 17{,}5$ mm

c) Střední chybu aritmetického průměru vypočteme podle vzorce

$$\bar{\delta} = \frac{5}{2} \frac{\Sigma\Delta_+}{n\sqrt{n-1}}.$$

Po dosazení vychází $\bar{\delta}(h) = 0{,}7$ mm; $\bar{\delta}(z) = 1{,}5$ mm. Nalezené hodnoty lze tedy zapsat

$$h = (115{,}2 \pm 0{,}7)\ \text{mm},$$
$$z = (493{,}5 \pm 1{,}5)\ \text{mm}.$$

Relativní chyba výšky nakloněné roviny je 0,6 % a relativní chyba základny nakloněné roviny je 0,3 %.

d) Součinitel smykového tření μ se vypočítá podle vzorce (1).

$$\mu = \frac{h}{z} = \frac{115{,}5}{493{,}5} = 0{,}234.$$

e) Protože relativní chyba podílu je nejvýše rovna součtu relativních chyb čitatele a jmenovatele, je

$$\varrho(\mu) = \varrho(h) + \varrho(z).$$

Po dosazení

$$\varrho(\mu) = 0{,}6\ \% + 0{,}3\ \% = 0{,}9\ \%.$$

Pak pro absolutní střední chybu veličiny μ platí

$$\bar{\delta}(\mu) = \mu\varrho(\mu).$$

Pro výše vypočtené hodnoty je $\bar{\delta}(\mu) = 0{,}002$, takže konečný výsledek lze psát

$$\mu = 0{,}234 \pm 0{,}002.$$

7. úloha (navrhl Josef Konrád)

Z téhož bodu na ochozu věže byly vrženy současně čtyři míče A, B, C, D stejnou počáteční rychlostí v_0. Míč A byl vržen svisle vzhůru, míč C svisle dolů, míče B a D vodorovně směry navzájem opačně orientovanými. Jaký geometrický obrazec tvoří polohy všech čtyř míčů v témž okamžiku?

a) Dokažte jeho tvar početně při vhodně zvolené souřadnicové soustavě.

b) Nakreslete ve vhodném měřítku dráhy letu všech čtyř míčů s vyznačením poloh za dobu t, $2t$, $3t$, ... Pak spojte polohy všech čtyř míčů v uvedených časových okamžicích.

Řešení:

a_1) Uvažujme, jaký pohyb konají míče vzhledem k pravoúhlému souřadnému systému, za jehož počátek volíme bod O, který začne padat volným pádem v čase $t = 0$ z místa na ochozu věže, z něhož jsou současně s ním, tj. v čase $t = 0$, uvedeny v pohyb míče A, B, C, D. V takto zvolené souřadnicové soustavě se pohybují všechny 4 míče vzhledem k padajícímu bodu O rovnoměrnými pohyby stálou a stejnou rychlostí v_0 a v čase t mají od bodu O stejnou vzdálenost $d = v_0 t$.

Polohy míčů tvoří tedy v této soustavě v kterémkoli okamžiku čtyřúhelník o středu O, jehož vrcholy jsou pohybující se body A, B, C, D. Úsečky AC a BD jsou úhlopříčkami tohoto čtyřúhelníku. Orientujeme-li kladně rychlosti míčů A a B, pak vrcholy tohoto čtyřúhelníku mají souřadnice $A\ (0;\ v_0 t)$, $C\ (0;\ -v_0 t)$, $B\ (v_0 t;\ 0)$, $D\ (-v_0 t;\ 0)$. Úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ jsou k sobě kolmé (neboť BD leží stále v ose x, AC v ose y), jsou stejně dlouhé ($AC = BD = 2\, v_0 t$) a navzájem se půlí ($OA = OC = OB = OD$). Čtyřúhelník $ABCD$ je v kterémkoli okamžiku čtverec, jehož úhlopříčky $u_1 = AC$ a $u_2 = BD$ leží stále v souřadných osách a v jakémkoli časovém intervalu Δt zvětší svou délku o $\Delta u = 2\, v_0 \Delta t$.

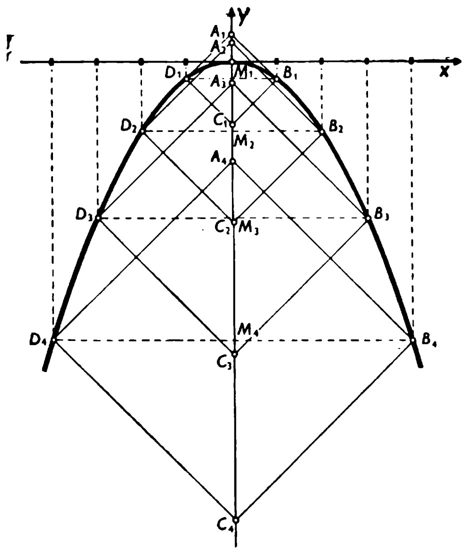
a_2) Uvažujeme-li pohyb míčů vzhledem k soustavě spojené pevně se zemí, jejímž počátkem je pevný bod S na ochozu věže, z něhož jsou všechny čtyři míče současně uvedeny do pohybu a jímž prochází svisle osa y a vodorovně osa x, pak mají při obvyklé orientaci souřadnic v čase t míče A, B, C, D tyto polohy: $A \left(0;\ v_0 t - \frac{g}{2}\, t^2\right)$,

$C\left(0;\ -v_0t - \frac{g}{2}t^2\right)$, $B\left(v_0t;\ -\frac{g}{2}t^2\right)$, $D\left(-v_0t;\ -\frac{g}{2}t^2\right)$.

Body A, B, C, D tvoří čtyřúhelník, v němž AC a BD jsou úhlopříčky, které stojí na sobě kolmo, neboť úsečka AC je v ose y, tedy stále svislá. Body B a D mají stejnou souřadnici y, a proto je úsečka BD stále rovnoběžná s osou x. Úhlopříčky $u_1 = AC$ a $u_2 = BD$ jsou stejně dlouhé, neboť $|u_1| = y_A - y_C = 2\,v_0t$ a $|u_2| = x_B - x_D = 2\,v_0t$.

Střed úhlopříčky AC má souřadnice $M\left(0; -\frac{g}{2}t^2\right)$, střed úhlopříčky BD je $M'\left(0; -\frac{g}{2}t^2\right)$. Je tedy $M = M'$.

Vzhledem k uvedeným vlastnostem úhlopříček čtyř-



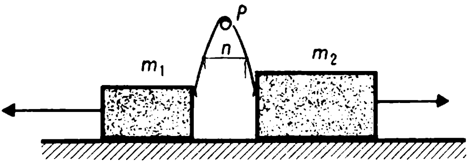
Obr. 58

úhelníku $ABCD$ tvoří polohy míčů v každém okamžiku vrcholy čtverce, jehož jedna úhlopříčka je svislá, druhá vodorovná.

b) Dráhy letu všech čtyř míčů jsou zakresleny v obrázku 58.

8. úloha (navrhl Jan Tesař)

Obrázek 59 znázorňuje dva kvádry, první má hmotnost m_1, druhý m_2. Kvádry leží na vodorovné rovině v přímém vodicím žlábku a dotýkají se konců pružiny P



Obr. 59

stažené nití n. Přepálí-li se nit n, pružina roztlačí kvádry na opačné strany. Součinitele tření, který je stejný pro oba kvádry, označme μ. První kvádr se zastaví za dobu t_1 ve vzdálenosti d_1, druhý za dobu t_2 ve vzdálenosti d_2 od svých původních klidových poloh. Poměr hmotností obou kvádrů je $\dfrac{m_2}{m_1} = k$.

a) Jaký je poměr dob $\dfrac{t_1}{t_2}$ a poměr vzdáleností $\dfrac{d_1}{d_2}$?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnotu $k = 3$.

b) Jakou hodnotu musí mít poměr k, aby se oba kvádry zastavily ve stejných vzdálenostech od svých původních klidových poloh?

Řešení:

Pružina roztlačí po uvolnění oba kvádry, podle třetího pohybového zákona, stejně velikými opačně orientovanými silami, stejných velikostí F. Impulsem jedné z těchto sil se uvede do pohybu rychlostí v_1 první kvádr, impulsem druhé se roztlačí rychlostí v_2 druhý kvádr. Ze zákona zachování hybnosti vyjde rovnice

$$m_2 v_2 + m_1 v_1 = 0 ,$$

takže počáteční rychlost prvního kvádru je záporná, opačně orientovaná než rychlost v_2, jejíž orientaci pokládáme za kladnou. Protože v úloze jde jen o velikosti pohybových veličin, budeme kvůli zjednodušení výpočtů orientovat u prvního kvádru zrychlení, rychlost i dráhu kladně zprava doleva, u druhého kvádru zleva doprava. Pak platí $m_1 v_1 = m_2 v_2$, takže

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2 . \tag{1}$$

Kdyby při pohybech kvádrů nepůsobilo tření, pohybovaly by se oba setrvačností rovnoměrným pohybem. Třecí síla $\boldsymbol{F}_t$ brzdí pohyb prvního, třecí síla $\boldsymbol{F}'_t$ brzdí pohyb druhého kvádru.

Protože velikosti třecích sil $\boldsymbol{F}_t$ a $\boldsymbol{F}'_t$ jsou stálé a jejich vektory jsou opačně orientovány než rychlosti kvádrů, na které tyto síly působí, mají obě třecí síly vzhledem k rychlostem příslušných kvádrů opačnou orientaci. Proto platí $F_t = -\mu m_1 g$ a $F'_t = -\mu m_2 g$. Zrychlení obou kvádrů mají tedy stejné záporné hodnoty

$$a_1 = a_2 = a = -\mu g . \tag{2}$$

Proto se po uvolnění pružiny pohybují oba kvádry rovnoměrně zpomaleně se záporným zrychlením $a = -\mu g$ a jejich okamžité rychlosti a dráhy se vypočítají z obecných vztahů

$$v = v_0 + at, \; s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 ,$$

kde v_0 značí počáteční rychlost, v značí okamžitou rychlost v čase t a s značí dráhu vykonanou za čas t.

Časové intervaly od počátku pohybů kvádrů až do jejich zastavení označíme po řadě t_1 a t_2 a dráhy vykonané za tyto doby d_1 a d_2.

Protože konečné rychlosti obou kvádrů mají nulovou hodnotu a jejich počáteční rychlosti jsou v_1 a v_2, platí pro první kvádr vztahy

$$v_1 + at_1 = 0\,,$$

$$d_1 = v_1 t_1 + \frac{1}{2}\, at_1^2\,.$$

Dosadíme-li do těchto dvou rovnic za zrychlení ze vztahu (2), vyjde po úpravě

$$t_1 = \frac{v_1}{\mu g}\,,$$

$$d_1 = \frac{v_1^2}{\mu g} - \frac{1}{2}\,\mu g\,\frac{v_1^2}{\mu^2 g^2} = \frac{1}{2}\,\frac{v_1^2}{\mu g}\,. \tag{3}$$

Obdobně vyjde

$$t_2 = \frac{v_2}{\mu g}\,, \quad d_2 = \frac{v_2^2}{\mu g}\,. \tag{4}$$

Se zřetelem ke vztahu (1) se vypočítá ze vztahů (3) a (4)

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} = k, \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{m_2^2}{m_1^2} = k^2\,. \tag{5}$$

Doby pohybů kvádrů jsou nepřímo úměrné jejich hmotnostem a jejich dráhy jsou nepřímo úměrné druhým mocninám jejich hmotností, jak je patrno ze vztahu (5). Je-li $k = 3$, pak je také $\frac{v_1}{v_2} = 3$, $\frac{t_1}{t_2} = 3$, $\frac{d_1}{d_2} = 9$.

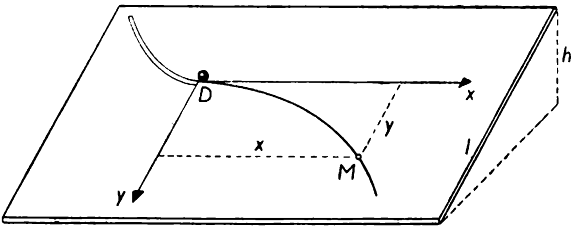
b) Má-li být $d_2 = d_1$, pak je podle vztahu (5) $k = \frac{m_2}{m_1} = 1$. Oba kvádry urazí stejně dlouhé dráhy, jestliže jejich hmotnosti jsou stejné.

9. úkol experimentální (navrhl Jan Tesař)

Vrh kuličky po nakloněné rovině

Pomůcky: Velké rýsovací prkno, stojany na podložení prkna, těžká hladká kulička, žlábek ohnutý do oblouku, plavuň (nebo jiný vhodný prášek), milimetrový papír.

Návod: Na prkno napněte milimetrový papír (viz obr. 60) a upravte je jako nakloněnou rovinu, která svírá s vodorovnou rovinou malý úhel α. Potom změřte délku l



Obr. 60

a výšku h nakloněné roviny. V levém horním rohu prkna upevníte žlábek tak, aby tečna k spodnímu konci žlábku byla vodorovná. Od konce žlábku naznačíte na milimetrovém papíře souřadné osy x a y s počátkem O v místě, kde opouští spuštěná kulička žlábek. Osa x je vodorovná, kladná osa y je spádnicí nakloněné roviny.

Úkoly

a) Poloha bodu M na dráze kuličky je určena souřadnicemi x, y. Vyjádřete rovnicemi velikosti těchto souřadnic v čase t, opouští-li kulička žlábek v místě O rychlostí v_0 v čase $t_0 = 0$ s.

b) Vyloučíte-li z těchto dvou rovnic čas t, získáte rovnici, ze které se vypočítá

$$v_0 = x \sqrt{\frac{gh}{2yl}}, \tag{1}$$

kde g značí tíhové zrychlení. Odvoďte tento vztah.

Postup měření

Aby se poznala celá dráha kuličky, pustí se kulička nejprve jen na zkoušku, aby se poznal přibližný průběh její dráhy. Potom se v těch místech, kde se kulička pohybovala, posype milimetrový papír jemnou rovnoměrnou vrstvou plavuňového prášku, na které kulička při dalším vypuštění ze žlábku vyznačí svou dráhu.

Zvolte vhodně deset bodů na dráze vyznačené kuličkou a zapište do tabulky příslušné hodnoty souřadnic těchto bodů.

Z naměřených hodnot vypočítejte podle vztahu (1) velikost v_0 počáteční rychlosti kuličky v bodě O.

Vysvětlete, co způsobuje, že všechny tyto hodnoty rychlosti v_0 nejsou stejné.

Řešení:

a) Kulička o hmotnosti m má na nakloněné rovině s úhlem sklonu α zrychlení $a = g \sin \alpha = g \frac{h}{l}$, takže urazí po spádnici na nakloněné rovině za dobu t dráhu

$$y = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{gh}{l} t^2 .$$

Je tedy

$$t = \sqrt{\frac{2yl}{gh}} .$$

Souřadnice x polohy kuličky v čase t

$$x = v_0 t .$$

Platí potom pro polohu bodu M na dráze kuličky

$$M\left(v_0t;\ \frac{gh}{2l}t^2\right).$$

b) Dosadíme-li do souřadnice x bodu M výraz pro dobu t, je

$$x = v_0\sqrt{\frac{2yl}{gh}}.$$

Odtud plyne vztah (1)

$$v_0 = x\sqrt{\frac{gh}{2yl}}.$$

c) Měření a jeho vyhodnocení.

Na dráze kuličky po nakloněné rovině zvolíme deset vhodných bodů, jak je uvedeno v návodu. Pro tyto body změříme souřadnice x, y a zapíšeme je do tabulky. Podle vztahu (1) vypočítáme pro každý případ počáteční rychlost v_0. Z těchto rychlostí vypočteme aritmetický průměr a střední chybu aritmetického průměru. Měření byla provedena při výšce nakloněné roviny $h = 0{,}090$ m a její délce $l = 0{,}400$ m.

Bod č.	x [m]	y [m]	v_0 [ms^{-1}]	Δ_+v_0 [ms^{-1}]
1	0,020	0,005	0,300	0,0073
2	0,030	0,010	0,318	
3	0,050	0,028	0,315	
4	0,060	0,040	0,300	0,0073
5	0,080	0,075	0,312	
6	0,090	0,095	0,306	0,0013
7	0,100	0,119	0,307	0,0003
8	0,110	0,143	0,306	0,0013
9	0,120	0,170	0,300	0,0073
10	0,130	0,198	0,309	
			$\overline{v_0} = 0{,}3073$	$\Sigma\Delta_+v_0 = 0{,}0248$

Pro střední chybu aritmetického průměru vychází

$$\delta(\overline{v_0}) = \frac{5}{2}\,\frac{\Sigma\Delta_+v_0}{n\sqrt{n-1}} = \frac{0{,}0248}{12}\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 0{,}002\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Z našeho měření tedy vyšlo

$$v_0 = (0,307 \pm 0,002)\ \mathrm{m\ s^{-1}}. \tag{2}$$

Předpokládáme-li, že veličiny vyskytující se ve vzorci (1) h, l, x, y byly měřeny z relativními chybami 1 %; 0,5 %; 2 %; 2 % je rychlost vypočtená podle (1) zatížena relativní chybou 3,75 % $\doteq$ 4 %.
Je tedy počáteční rychlost kuličky

$$v_0 = (0,31 \pm 0,01)\ \mathrm{m\,s^{-1}}. \tag{3}$$

Srovnáme-li výsledek (3) s vypočtenými hodnotami, zjistíme, že je reálnější než (2). Při vyhodnocení (3) jsme totiž přihlíželi k nepřesnostem při měření základních veličin (délek), kdežto v případě (2) jsme tyto veličiny považovali za přesně určené.

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl Jan Tesař)

Loďka na řece ujede dráhu $d = AB$ z místa A do místa B proti proudu a stejnou cestou zpět po proudu za dobu t_2. Vzhledem k vodě je rychlost loďky na dráze AB i na dráze BA stejná a má velikost v_2. V klidné vodě by loďka ujela stejnou dráhu za dobu t_1. Velikost rychlosti proudu je v_1.

a) Určete délku dráhy d a doby t_1 a t_2, znáte-li dobu $\tau = t_2 - t_1$. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_1 = 2,0\ \mathrm{km\ h^{-1}}$, $v_2 = 5,0\ \mathrm{km\ h^{-1}}$, $\tau = 0,38\ \mathrm{h}$.

b) Proveďte diskusi pro $v_1 \gtreqless v_2$.

Řešení:

Vzhledem k břehu řeky se loďka pohybuje po dráze AB rychlostí $v_3 = v_2 - v_1$, po dráze BA rychlostí $v_4 = v_1 + v_2$.

a) Dráhu AB a zpět vykoná loďka za dobu

$$t_2 = \frac{d}{v_2 - v_1} + \frac{d}{v_2 + v_1} = \frac{v_2}{v_2^2 - v_1^2}\, 2d. \tag{1}$$

V klidné vodě by loďka urazila stejnou dráhu za dobu

$$t_1 = \frac{2d}{v_2} \,. \qquad (2)$$

Rozdíl $\tau = t_2 - t_1 = 2\,d \dfrac{v_1^2}{v_2\,(v_2^2 - v_1^2)}$,

takže

$$d = \frac{\tau}{2} \frac{(v_2^2 - v_1^2)}{v_1^2} v_2 \,. \qquad (3)$$

Vzhledem ke vztahům (1) a (2) je $t_2 = \dfrac{\tau v_2^2}{v_1^2}$ (4)

a dále $t_1 = \dfrac{(v_2^2 - v_1^2)}{v_1^2} \tau \,.$ (5)

Pro dané hodnoty vyjde ze vztahů (3), (4) a (5) $d = 5{,}0$ km; $t_2 = 2{,}38$ h a $t_1 = 2{,}0$ h.

Loďka urazí v tekoucí vodě dráhu 5 km proti proudu a 5 km po proudu zpět za dobu 2,38 h. V klidné vodě by tuto dráhu urazila za 2 h.

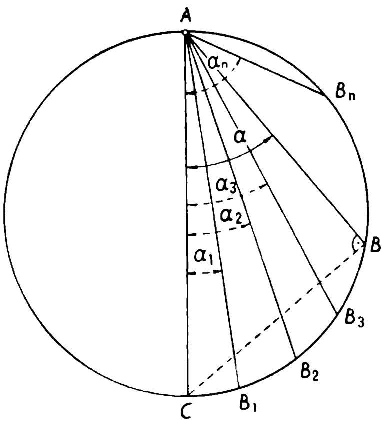
b) Je-li $v_2 > v_1$, mají rychlosti v_3 a v_4 kladné hodnoty. Proto je úloha reálná. V případech $v_2 \leqq v_1$ by byla relativní rychlost $v_3 = v_2 - v_1$ na dráze AB záporná ($v_2 < v_1$) nebo rovna nule ($v_2 = v_1$). Loďka by se tedy proti proudu z místa A do místa B nedostala.

2. úloha (navrhl Jan Tesař)

Z bodu A pouštíme volně kuličky přímými žlábky, které v téže svislé rovině svírají se svislým směrem různé úhly α. Dokažte, že body, do kterých se dostanou kuličky za stejnou dobu t od počátku pohybu, leží na kružnici. Jakou plochu vyplní tyto body, nejsou-li žlábky v téže svislé rovině?

Řešení:

Mají-li být všechny kuličky za stejnou dobu t po vypuštění na téže kružnici k, musí být bod A, z něhož kuličky začaly klouzat, nejvyšším bodem kružnice k,



Obr. 61

ležící ve svislé rovině. Všechny kuličky se budou pohybovat po přímých drahách, které jsou tětivami kružnice k. Na obrázku 61 znázorňují úsečky AB_1, AB_2, AB_3, ... AB_n žlábky, jimiž kloužou kuličky působením tíhového zemského pole. Žlábky svírají se svislým směrem AC různě veliké úhly α_1, α_2, α_3, ...α_n.

a) Uvažujme obecně pohyb kuličky ve žlábku, který svírá se svislým směrem úhel α. Označíme-li tíhové zrychlení g, pak uvažovaná kulička klouže žlábkem bez tření se stálým zrychlením $a = g \sin (R - \alpha) = g \cos \alpha$. Při pohybu rovnoměrně zrychleném žlábkem urazí kulička za dobu t dráhu AB,

$$AB = \frac{1}{2} g t^2 \cos \alpha,$$

takže $t = \sqrt{\frac{2\,AB}{g \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{2\,AC}{g}} = \text{konst.}$ (1)

(Z obr. 61 totiž plyne $AB = AC \cos \alpha$.)

Ze vztahu (1) vychází $AC = \frac{1}{2} g t^2$. (2)

Ze vztahu (1) je patrno, že všechny kuličky se dostanou za stejnou dobu t po svých drahách až na tutéž kružnici k, nezávisle na tom, jak jsou jejich dráhy odchýleny od svislého směru, což se mělo dokázat. Kružnice může ležet v kterékoli svislé rovině proložené bodem A. Svislý průměr této kružnice je úsečka $AC = \frac{1}{2} g t^2$ téže délky, jakou urazí za dobu t těleso padající volným pádem.

b) Výsledky úvah v části a) úlohy platí nejen pro kuličky pohybující se ve žlábcích ležících jen v jedné určité svislé rovině, nýbrž pro všechny kuličky pohybující se ve žlábcích ležících v libovolné rovině, jejímž svislým průměrem je úsečka $AC = \frac{1}{2} g t^2$. Koncové body drah všech kuliček volně vypuštěných z bodu A všemi možnými směry, jež jsou odchýleny od svislého směru o libovolné různé úhly α, vyplňují v prostoru na konci doby t povrch koule, jejímž svislým průměrem je úsečka $AC =$
$= \frac{1}{2} g t^2$.

3. úloha (navrhl Jan Tesař)

Výkon P lokomotivy o hmotnosti m je konstantní. Součinitel tření na kolejích je stálý, nezávislý na rychlosti lokomotivy. Vypočítejte:

a) Maximální rychlost v_m lokomotivy na vodorovné přímé trati.

b) Zrychlení lokomotivy v okamžiku, kdy jede rychlostí v ($v < v_m$).

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $P = 3{,}0 \,.\, 10^4$ W, $m = 2{,}5 \,.\, 10^4$ kg, $\mu = 1{,}0 \,.\, 10^{-2}$, $v = 10$ m s^{-1}.

Řešení:

Označme třecí sílu F_t, tažnou sílu lokomotivy F_p, F část tažné síly, která uděluje lokomotivě zrychlení a. Tíhové zrychlení značíme g.

Vzhledem k obecnému vztahu $P = Fv$, platí

$$P = (F + F_t)\, v = (ma + \mu mg)\, v. \tag{1}$$

a) Vlak dosáhne maximální rychlosti v_m v okamžiku, když zrychlení jeho pohybu je rovno nule, takže je

$$\frac{1}{m}\left(\frac{P}{v_m} - \mu mg\right) = 0.$$

Odtud vyjde

$$v_m = \frac{P}{\mu mg}\,. \tag{2}$$

Po dosazení daných hodnot do vztahu (2) vyjde $v_m = 12$ m s^{-1}.

b) Ze vztahu (1) vyjde

$$a = \frac{1}{m}\left(\frac{P}{v} - \mu mg\right). \tag{3}$$

Po dosazení daných hodnot do (3) dostaneme $a = 0{,}02$ m s^{-2}.

Lokomotiva dosáhne maximální rychlosti 12 m s^{-1} a v okamžiku, když má rychlost 10 m s^{-1}, se pohybuje se zrychlením 0,02 m s^{-2}.

4. úloha (navrhl Jan Tesař)

Přes kladku otáčivou kolem vodorovné osy je vedena nit, na níž visí na jednom konci těleso hmotnosti m_1, na druhém konci těleso hmotnosti $m_2 > m_1$. Hmotnost kladky je ve srovnání s hmotností obou těles velmi malá, tření je zanedbatelné.

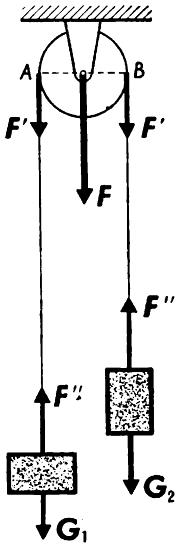
a) Určete velikosti a orientace zrychlení prvního a druhého tělesa.

b) Jak veliká tlaková síla F působí na osu kladky při pohybu těles?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 1{,}0$ kg; $m_2 = 1{,}1$ kg.

Řešení:

Protože $m_2 > m_1$, není soustava „tělesa a kladka" v rovnovážné poloze. Hmotnější těleso (m_2) klesá, druhé těleso stoupá. Síly působící na jednotlivá tělesa jsou vyznačeny na obr. 62; F', F'' značí síly napětí v niti ($F' = F''$). Píšeme pohybový zákon pro jednotlivá tělesa, přičemž orientujeme zrychlení kladně ve směru svisle dolů.



Obr. 62

a) Newtonův pohybový zákon pro těleso hmotnosti m_2 (při zvolené orientaci zrychlení) zní

$$m_2a_2 = G_2 - F'';$$

obdobně Newtonův pohybový zákon pro těleso hmotnosti m_1

$$m_1a_1 = G_1 - F''.$$

Vzhledem k tomu, že se soustava pohybuje jako celek a že těleso hmotnosti m_1 stoupá, platí

$$a_1 = -a_2.$$

Přihlédneme-li dále ke vztahu pro napětí v niti (viz obr. 62), lze přepsat pohybové zákony takto

$$m_2a_2 = m_2g - F', \tag{1}$$

$$-m_1a_2 = m_1g - F'. \qquad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) dostaneme jednak pro zrychlení tělesa o hmotnosti m_2

$$a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g, \qquad (3)$$

jednak pro sílu, kterou je napínána nit,

$$F' = \frac{2\, m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \qquad (4)$$

Po dosazení daných hodnot do vztahu (3) vychází $a_2 = 0{,}47\ \mathrm{m\,s^{-2}}$. Těleso o hmotnosti m_2 se pohybuje svisle dolů se zrychlením $0{,}47\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, zatímco těleso o hmotnosti m_1 se pohybuje svisle vzhůru (stoupá) se zrychlením stejně velkým, tj. $0{,}47\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

b) V bodech A a B na obr. 62 jsou síly, kterými je napínána nit (F'), rovnoběžné a souhlasně orientovány (svisle dolů). Výslednice těchto sil má působiště v ose kladky, je orientována svisle dolů a má charakter tlakové síly působící na osu kladky. Její velikost

$$F = 2F' = \frac{4\, m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \qquad (5)$$

Po dosazení daných hodnot vychází velikost tlakové síly $F = 21$ N.

4. Úlohy kategorie D

Všechny úlohy této kategorie navrhl dr. Bohumil Vlach, úlohy recenzoval dr. Ivan Náter.

a) První kolo soutěže

1. úloha

Města A a B jsou spojena přímou (skoro) vodorovnou silnicí délky d. Z města A směrem k městu B vyjede cyklista průměrnou rychlostí v_1; současně z města B

vyjede proti němu druhý cyklista průměrnou rychlostí v_2. Za jakou dobu t od současného startu a jak daleko od města A se cyklisté setkají?

Úkol řešte:

a) graficky,

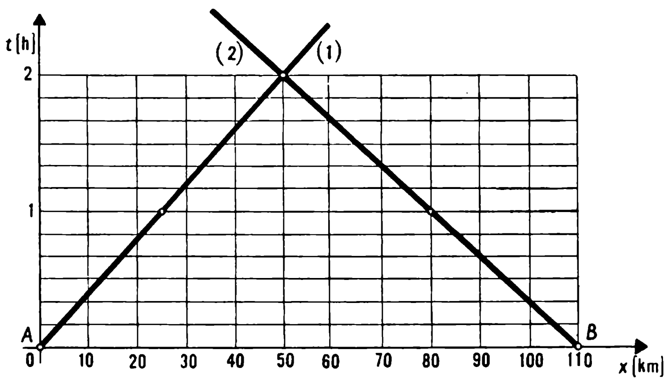
b) výpočtem, a to nejprve obecně, potom pro hodnoty

$$d = 110 \text{ km}, \; v_1 = 25 \frac{\text{km}}{\text{h}}, \; v_2 = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Ke grafickému řešení užijte milimetrového papíru. Vzdálenost d naneste jako vodorovnou úsečku tak, že 1 km $\triangleq$ 2 mm. Čas nanášejte ve směru kolmém k úsečce znázorňující dráhu tak, že 1 h $\triangleq$ 3 cm.

Řešení:

a) Grafické řešení úlohy je provedeno na obr. 63.



Obr. 63

b) Cyklisté se k sobě blíží rychlostí $v_1 + v_2$.

Potkají se za dobu $t = \dfrac{d}{v_1 + v_2}$ (1)

od současného startu. Toto setkání nastane ve vzdálenosti

$$x = v_1 t = \frac{v_1}{v_1 + v_2} d \tag{2}$$

od města A. Po dosazení zadaných hodnot do (1) a (2) vycházejí stejné hodnoty jako při odečtení z grafu

$$t = 2{,}0 \text{ h}; \; x = 50 \text{ km}.$$

2. úloha

a) Zvednete v jedné ruce pod vodou člověka tíhy G? (Člověk se topí, ztratil vědomí a vy ho zachraňujete.)

b) Zvednete v jedné ruce pod vodou blok železa tíhy G?

c) Ukažte, že poměr vztlakových sil, které působí na dvě tělesa stejné tíhy, zcela ponořené v téže kapalině, se rovná obrácenému poměru měrných tíh těchto těles.

Úlohy řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $G = 77$ kp, měrná tíha vody $\gamma_0 = 1{,}00 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}$, střední měrná tíha lidského těla $\gamma_1 = 1{,}10 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}$, střední měrná tíha železa $\gamma_2 = 7{,}70 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}$.

Řešení:

a) Označíme objem lidského těla V_1, platí $V_1 = \frac{G}{\gamma_1}$. Ve vodě je lidské tělo nadlehčováno silou

$$F_1 = V_1 \gamma_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} G. \tag{1}$$

Výsledná síla, která působí na lidské tělo ve směru svisle dolů, pak je

$$\overline{F}_1 = G - F_1 = G \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right). \tag{2}$$

Topícího se člověka musíme zvedat působením síly aspoň tak veliké jako je $\overline{F}_1$, která je však opačně orientovaná, tj. působí svisle vzhůru. Pro dané hodnoty vychází $\overline{F}_1 = 7{,}0$ kp. Závaží o tíze 7 kp udržíme v jedné ruce, proto také lze zvednout jednou rukou pod vodou člověka tíhy 77 kp.

b) Řešíme obdobně jako předešlou část úlohy. Výsledná síla působící na blok železa ve vodě je

$$\overline{F}_2 = G\left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_2}\right). \tag{3}$$

Dosazením daných hodnot do (3) vychází $\overline{F}_2 = 67$ kp. Závaží o tak veliké tíze neudržíme v jedné ruce.

c) Vztlaková síla v případě a) je vyjádřena vztahem (1). Podobně pro vztlakovou sílu v případě druhého tělesa (bloku železa) je vztlaková síla

$$F_2 = V_2\gamma_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_2} G. \tag{4}$$

Použijeme-li oba vztahy pro vztlakové síly, je poměr vztlakových sil působících na dvě tělesa stejné tíhy, která jsou ponořena do téže kapaliny

$\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}$, což se mělo dokázat.

Pro dané hodnoty je poměr vztlakových sil roven 7,0.

3. úloha

Tlak uvnitř zavařovací sklenice (s jahodovým kompotem) je p_1, atmosférický tlak je p_2. Víko přiléhá ke sklenici na mezikruží o vnitřním průměru d_1 a o vnějším průměru d_2. Vnější průměr víka je rovněž d_2.

a) Jak velkou tlakovou silou F je víko přitlačováno ke sklenici?

b) Jak velký je tlak p na styčné ploše víka a okraje sklenice?

c) Podle výsledků v případech a) a b) usuďte, můžete-li s tímto kompotem v tlumoku vystoupit (bez obavy, že se sklenice otevře „sama") na Gerlach, na Mont Blanc, na Mont Everest.

Pokles atmosférického tlaku s rostoucí nadmořskou výškou zjistěte v Matematických, fyzikálních a chemických tabulkách (tabulky F 1, F 11).

Počítejte nejprve obecně a potom pro hodnoty $p_1 = 0{,}25\ \dfrac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$, $p_2 = 1{,}0\ \dfrac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$, $d_1 = 9{,}0\ \text{cm}$, $d_2 = 10{,}0\ \text{cm}$.

Řešení:

a) Vzduch uvnitř sklenice tlačí na víko silou

$$F_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2 p_1;$$

ovzduší tlačí na víko silou F_2, která je vzhledem k F_1 opačně orientovaná,

$$F_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2 p_2 .$$

Víko je pak ke sklenici tlačeno silou

$$F = F_2 - F_1 = \frac{\pi}{4} (d_2^2 p_2 - d_1^2 p_1). \qquad (1)$$

Po dosazení daných hodnot dostaneme $F = 63$ kp.

b) Styčná plocha víka a okraje sklenice má obsah $S = \dfrac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2)$. Na této ploše působí síla F vyjádřená vztahem (1), takže hledaný tlak

$$p = \frac{F}{S} = \frac{d_2^2 p_2 - d_1^2 p_1}{d_2^2 - d_1^2} . \qquad (2)$$

Dosadíme-li dané hodnoty do obecného výsledku (2), vyjde $p = 4{,}2\ \dfrac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$.

c) Výšky uvedených hor jsou postupně:

$h_G = 2663$ m; $h_B = 4810$ m; $h_E = 8882$ m.

Z tabulek najdeme přibližné atmosférické tlaky v těchto výškách:

$$p_G = 549 \text{ torr} = 0{,}75\ \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2};\quad p_B = 415 \text{ torr} = 0{,}56\ \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2};$$

$$p_E = 235 \text{ torr} = 0{,}32\ \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}.$$

Podle (1) je víko tlačeno ke sklenici silou

$$F_x = \frac{\pi}{4}\,(d_2^2 p_x - d_1^2 p_1)\,. \tag{3}$$

Sklenice se „sama" neotevře, pokud $F_x > 0$, tj. pokud

$$d_2^2 p_x - d_1^2 p_1 > 0\,.$$

Pro dané hodnoty dostaneme z (3) $F_G = 43$ kp, $F_B =$ $= 28$ kp, $F_E = 9{,}4$ kp. Sklenice se „sama" neotevře ani na Mont Everestu.

4. úloha

a) Brzo ráno byl na horách mráz, teplota vzduchu a sněhu byla $t_1 = -10$ °C. V chatě si uvařili lyžaři k snídani čaj o objemu $V = 2{,}5$ l.

Určete hmotnost m_1 sněhu teploty t_1, který nasypali do čaje teploty $t_2 = 100$ °C, aby ho ochladili na teplotu $t_3 = 40$ °C (vhodnou k pití).

b) Ve dne se náhle oteplilo, sníh zvlhl. Když se lyžaři pozdě odpoledne vrátili do chaty, zjistili, že ke stejnému ochlazení stejného objemu čaje potřebovali sníh o hmotnosti $1{,}3\ m_1$. Určete poměr hmotností sněhu a vody v použitém vlhkém sněhu teploty $t_0 = 0$ °C.

Řešte pokud možno nejprve obecně a potom pro dané hodnoty.

Hustota čaje $\varrho = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, měrné teplo čaje $c_1 = 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg °C}}$ (jako u vody), měrné teplo sněhu $c_2 = 0{,}5 \frac{\text{kcal}}{\text{kg °C}}$, měrné skupenské teplo tání sněhu $l = 80 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$.

Řešení:

a) Sestavíme příslušnou kalorimetrickou rovnici. Teplo potřebné k ochlazení čaje z teploty t_2 na teplotu t_3 je rovno součtu následujících tepel: 1. tepla potřebného k ohřátí m_1 (kg) sněhu z teploty t_1 na t_0, 2. tepla potřebného k roztání téhož množství sněhu a 3. tepla potřebného k ohřátí vody vzniklé táním sněhu z teploty t_0 na výslednou společnou teplotu t_3.

$$V\varrho c_1 (t_2 - t_3) = m_1 c_2 (t_0 - t_1) + m_1 l + m_1 c_1 (t_3 - t_0);$$

odtud vychází

$$m_1 = \frac{V\varrho c_1 (t_2 - t_3)}{c_2 (t_0 - t_1) + l + c_1 (t_3 - t_0)}. \qquad (1)$$

Z obecného výsledku (1) plyne pro dané hodnoty $m_1 = 1{,}2$ kg. K ochlazení čaje bylo tedy třeba 1,2 kg sněhu.

b) Vlhký sníh obsahuje vodu a sníh, přičemž teplota obou složek je t_0. K ochlazení bylo použito vlhkého sněhu o hmotnosti 1,3 m_1; označme hmotnosti odpovídajících složek: m_2 — hmotnost vody, m_3 — hmotnost sněhu.

Zřejmě je $m_2 + m_3 = 1{,}3\, m_1$. (2)

Teplo potřebné k ochlazení čaje je nyní rovno teplu potřebnému k ohřevu veškeré vody hmotnosti 1,3 m_1 a teplu potřebnému k roztání sněhu.

$$V\varrho c_1 (t_2 - t_3) = 1{,}3\, m_1 c_1 (t_3 - t_0) + m_3 l. \qquad (3)$$

Z rovnic (2) a (3) vypočteme m_2 a m_3 a určíme jejich poměr

$$\frac{m_3}{m_2} = \frac{V\varrho c_1 (t_2 - t_3) - 1{,}3\, m_1 c_1 (t_3 - t_0)}{1{,}3\, m_1 [l + c_1 (t_3 - t_0)] - V\varrho c_1 (t_0 - t_1)}. \quad (4)$$

Dosadíme-li ještě za m_1 z (1) do (4), dostaneme po úpravě

$$\frac{m_3}{m_2} = \frac{c_2 (t_0 - t_1) + l - 0{,}3\ c_1 (t_3 - t_0)}{0{,}3\ l + 0{,}3\ c_1\ (t_3 - t_0) - c_2\ (t_0 - t_1)}. \quad (5)$$

Pro dané hodnoty je hledaný poměr $m_3 : m_2 = 2{,}36$.

5. úloha

Voda o hmotnosti m teploty t_0 se ohřála na teplotu varu t_1 na elektrickem vařiči o příkonu P za dobu τ_1. Za dobu τ_2 od okamžiku, kdy voda začala vřít, se beze zbytku vypařila při stejném příkonu vařiče.

Ztráty tepla zanedbáváme a neuvažujeme vypařování vody po dobu τ_1.

Určete měrné skupenské teplo varu l vody.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $t_0 = 0\ °C$, $t_1 = 100\ °C$, $\tau_1 = 15$ min, $\tau_2 = 1$ h 20 min.

Řešení:

K ohřátí vody z teploty t_0 na teplotu t_1 se spotřebuje teplo

$$Q_1 = mc_1 (t_1 - t_0), \quad (1)$$

kde $c_1 = 1{,}0\ \frac{\text{kcal}}{\text{kg °C}}$ je měrné teplo vody.

Toto teplo bylo dodáno vařičem za dobu τ_1 při stálém příkonu P, měřeném např. v $\frac{\text{kcal}}{\text{s}}$.

$$mc_1 (t_1 - t_0) = P\tau_1. \quad (2)$$

Na úplné vypaření vody bylo potřeba tepla $Q_2 = ml$, které bylo dodáno vařičem při stálém příkonu P za dobu τ_2,

$$ml = P\tau_2. \tag{3}$$

Ze vztahů (2) a (3) vyjádříme měrné skupenské teplo varu vody

$$l = c_1 (t_1 - t_0) \frac{\tau_2}{\tau_1}. \tag{4}$$

Doby τ_1, τ_2 by měly při dosazování do vztahů (2) a (3) být vyjádřeny v sekundách; užijeme-li však výsledného vztahu (4), stačí dosadit obě doby v minutách. Pro dané hodnoty vychází $l = 533 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$.

6. úloha

Elektrický kalorimetr má dvě topné spirály o odporech R_1 a R_2. Připojujeme ho ke zdroji o napětí U a ohříváme v něm vodu.

Je-li připojena jen spirála o odporu R_1, ohřeje se voda o hmotnosti m z teploty t_0 na teplotu t_1 za dobu τ_1. Je-li připojena jen spirála o odporu R_2, ohřeje se voda o stejné hmotnosti m stejným způsobem za dobu τ_2.

Za jakou dobu se ohřeje voda o stejné hmotnosti m z teploty t_0 na teplotu t_1, jsou-li připojeny současně obě spirály

a) vedle sebe (potřebnou dobu označte τ_3),

b) za sebou (potřebnou dobu označte τ_4)?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $t_0 = 0\ °\text{C}$, $t_1 = 100\ °\text{C}$, $\tau_1 = 15$ min, $\tau_2 = 30$ min.

Řešení:

Teplo potřebné k ohřátí vody o hmotnosti m z teploty t_0 na teplotu t_1 označme Q.

V případě zapojení prvé spirály platí

$$Q = \frac{U^2}{R_1}\tau_1, \quad R_1 = \frac{U^2 \tau_1}{Q}. \tag{1}$$

V případě zapojení druhé spirály

$$Q = \frac{U^2}{R_2}\tau_2, \quad R_2 = \frac{U^2 \tau_2}{Q}. \qquad (2)$$

a) Odpor topného tělesa je nyní $R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ a pak je vybavené teplo

$$Q = \frac{U^2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \tau_3.$$

Po dosazení výrazů (1) a (2) za odpory R_1 a R_2 dostaneme

$$\tau_3 = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}. \qquad (3)$$

Dosadíme-li do obecného výsledku (3) hodnoty uvedené v zadání, je $\tau_3 = 10$ min.

b) Odpor topného tělesa je v tomto případě $(R_1 + R_2)$ a teplo vybavené ve vařiči je $Q = \frac{U^2}{R_1 + R_2} \tau_4$. Užijeme-li výrazů (1) a (2), dostaneme

$$\tau_4 = \tau_1 + \tau_2. \qquad (4)$$

Pro daný zvláštní případ je $\tau_4 = 45$ min.

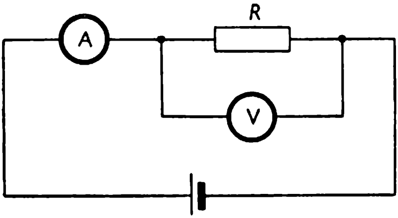
7. úloha

V elektrickém obvodu stejnosměrného proudu naznačeném na obrázku 64 ukazuje ampérmetr proud I a voltmetr napětí U. Je známo, že odpor voltmetru je R_1.

a) Určete neznámý odpor R.

b) Jakou chybu bychom udělali v určení odporu R, kdybychom odpor R_1 voltmetru považovali za tak veliký, že proud jím procházející lze zanedbat? Kolik je to procent z hodnoty určené v případě a)?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $I = 2{,}00$ A, $U = 220$ V, $R_1 = 4000\ \Omega$.



Obr. 64

Řešení:

a) Celkový proud v obvodu I, který prochází ampérmetrem, se rozdělí na proud I_1 jdoucí odporem R a na proud I_2 jdoucí voltmetrem. Platí tyto vztahy

$$I = I_1 + I_2, \quad I_1 = \frac{U}{R}, \quad I_2 = \frac{U}{R_1}. \tag{1}$$

Ze vztahů (1) dostaneme pro neznámý odpor R

$$R = \frac{R_1 U}{R_1 I - U}. \tag{2}$$

Pro dané hodnoty vychází z obecného vyjádření (2) $R = 113\ \Omega$.

b) Výraz pro neznámý odpor (2) lze přepsat takto

$$R = \frac{U}{I - \dfrac{U}{R_1}}. \tag{3}$$

Je-li R_1 velmi veliké, pak zlomek $\dfrac{U}{R_1}$ ve výrazu (3) je velmi malý a můžeme jej zanedbat. V tomto případě

$$R' = \frac{U}{I}. \tag{4}$$

Chyba, které se dopustíme za předpokladu, že proud procházející voltmetrem je zanedbatelně malý, je

$$\Delta R = R - R' = \frac{R_1 U}{R_1 I - U} - \frac{U}{I} = \frac{U^2}{I(R_1 I - U)}. \quad (5)$$

Po dosazení daných hodnot $R = 3{,}3\ \Omega$.

Poměr $\frac{\Delta R}{R}$ vypočteme užitím výrazů (2) a (5) $p = \frac{\Delta R}{R} = \frac{U}{R_1 I}$. Vyjádříme-li tento poměr v procentech, vychází pro dané hodnoty 2,75 %.

8. úloha

Z místa A se přenáší do místa B elektrický výkon P. Odpor vedení je R.

Určete pokles ΔU napětí na vedení a ztrátu ΔP výkonu ve vedení v případech, že přenos elektrického výkonu se děje při napětí

a) U,

b) 10 U.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $P = 70$ kW, $R = 100\ \Omega$, $U = 22\,000$ V.

c) Pokles ΔU napětí a ztrátu ΔP výkonu vyjádřete v procentech hodnot napětí a výkonu v místě A a rozhodněte, v kterém případě a), b) je přenos elektrického výkonu ekonomičtější.

Řešení:

a) Výkon elektrického proudu lze vyjádřit buď

$$P = UI, \qquad \text{nebo} \qquad P = RI^2. \quad (1)$$

Z prvé rovnice (1) je

$$I = \frac{P}{U}. \quad (2)$$

Vyjádříme pokles ΔU napětí na vedení podle Ohmova zákona a dosadíme za I z (2)

$$\Delta U = RI = \frac{PR}{U}. \tag{3}$$

Ztráta ΔP elektrického výkonu ve vedení odpovídá Joulovu teplu vybavenému na vedení o odporu R

$$\Delta P = \Delta UI = RI^2.$$

Přihlédneme-li ke vztahu (2), resp. ke vztahům (2) a (3), dostaneme

$$\Delta P = \frac{P^2R}{U^2}. \tag{4}$$

Dosadíme-li hodnoty ze zadání úlohy do (3) a do (4), pak obdržíme $\Delta U \doteq 320$ V; $\Delta P = 1{,}0$ kW.

b) Při napětí $U' = 10\,U$ vychází z obecně platných vztahů (3) a (4)

$$\Delta U' = \frac{PR}{U'} = \frac{PR}{10\,U}, \tag{5}$$

$$\Delta P' = \frac{P^2R}{100\,U^2}. \tag{6}$$

Pro dané hodnoty $\Delta U' = 32$ V; $\Delta P' = 10$ W.

c) Pro pokles napětí ΔU vzhledem k napětí v místě A platí

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{PR}{U^2}.$$

Při vyjádření v procentech

$$p_1 = \frac{PR}{U^2}\,100. \tag{7}$$

Podobně pro ztrátu výkonu ve vedení v % dostaneme

$$p_2 = \frac{P^2R}{U^2P}\,100 = p_1\,. \tag{8}$$

Ze vztahu (8) vyplývá, že ekonomičtější je přenos elektrické energie při napětí 10 U, protože ztráty výkonu jsou stokrát menší. Procenta vystihující pokles napětí a ztrátu výkonu jsou stejná a pro dané hodnoty jsou v případě a) $p_1 = 1{,}4$ % a v případě b) $p_1' = 0{,}014$ %.

9. úloha

Dva automobily I, II vyjely současně po téže silnici z města A do města B. Automobil I jel první polovinu dráhy $AB = d$ průměrnou rychlostí v_1, druhou polovinu této dráhy průměrnou rychlostí v_2. Dráhu d vykonal za dobu t_1. Automobil II ujel dráhu d za dobu t_2. V první polovině doby t_2 jel průměrnou rychlostí v_1, v druhé polovině doby t_2 průměrnou rychlostí v_2.

Stanovte, který automobil byl v cíli dříve a o jakou dobu. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_1 = 40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_2 = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $d = 100$ km.

Řešení:

Pro jízdní dobu t_1 automobilu I platí

$$t_1 = \frac{\frac{d}{2}}{v_1} + \frac{\frac{d}{2}}{v_2}\,,\ \text{tj.}$$

$$t_1 = \frac{d(v_1 + v_2)}{2\,v_1v_2}\,. \tag{1}$$

Pro dráhu d ujetou automobilem II platí

$$d = v_1\frac{t_2}{2} + v_2\frac{t_2}{2}\,,$$

odtud je

$$t_2 = \frac{2\,d}{v_1 + v_2}\,. \tag{2}$$

Rozdíl obou dob $t_1 - t_2$ označíme Δt a po užití rovnic (1) a (2) dostaneme

$$\Delta t = \frac{(v_2 - v_1)^2}{2v_1\, v_2\,(v_2 + v_1)}\, d\,. \tag{3}$$

Z rovnice (3) plyne, že $\Delta t > 0$, tj. $t_1 > t_2$. To znamená, že automobil I pojede déle, a proto tedy automobil II bude v cíli dříve o dobu udanou rovnicí (3). Po dosazení hodnot v_1, v_2 a d ze zadání vychází $\Delta t = \frac{1}{12}$ h $= 5$ min. Automobil II dojede do cíle dříve o 5 minut.

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha

Města A a B spojuje přímá vodorovná silnice délky $d = 9{,}0$ km. Od města A k městu B ve směru silnice vane vítr stálou rychlostí v_0. Z obou měst vyjeli současně proti sobě dva cyklisté s takovým úsilím, že by za bezvětří jeli oba stálou rychlostí v_1. Cyklista K (který vyjel z města A) dojel do B za dobu $t_1 = 30$ min. Cyklista L (který vyjel z města B) dojel do A za dobu $t_2 = 40$ min.

a) Vypočtěte rychlost větru v_0 a rychlost cyklistů v_1 za bezvětří.

b) Za jakou dobu t_3 by kterýkoli z cyklistů projel za bezvětří vzdálenost d mezi oběma městy?

c) Ve které vzdálenosti d_1 od města A a za jakou dobu t_4 od společného startu se oba cyklisté při jízdě za větru setkali?

Řešení:

a) Za větru je rychlost cyklisty K $v_1 + v_0$, pro ujetou dráhu platí $d = (v_1 + v_0)\, t_1$, odtud plyne

$$v_1 + v_0 = \frac{d}{t_1}. \tag{1}$$

Rychlost cyklisty L je za větru $v_1 - v_0$, ujetá dráha $d = (v_1 - v_0)\, t_2$ a potom

$$v_1 - v_0 = \frac{d}{t_2}. \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) dostaneme

$$v_0 = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right), \tag{3}$$

$$v_1 = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right). \tag{4}$$

Po dosazení daných hodnot do obecných výsledků (3) a (4) vychází rychlost větru $v_0 = 2{,}3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ a rychlost cyklistů za bezvětří $v_1 = 15{,}8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

b) Pro hledanou dobu t_3 platí

$$t_3 = \frac{d}{v_1} = 2\,\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}. \tag{5}$$

Pro doby uvedené v zadání vychází podle (5) doba potřebná k ujetí z jednoho města do druhého za bezvětří $t_3 = 34$ min.

c) Pro dobu t_4 od společného startu, za kterou se oba cyklisté setkají, platí

$$d = (v_1 + v_0)\, t_4 + (v_1 - v_0)\, t_4,$$

pak $\quad t_4 = \dfrac{d}{2v_1} = \dfrac{1}{2}\, t_3.$ (6)

K setkání dojde ve vzdálenosti

$$d_1 = (v_1 + v_0)\, t_4 = d\, \frac{t_2}{t_1 + t_2}\,. \tag{7}$$

Pro dané hodnoty je $t_4 = 17$ min, $d_1 = 5{,}1$ km.

2. úloha

Krychle ze stejnorodé látky o hustotě $\varrho_0 = 240\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ má hranu $d = 0{,}100$ m. Do jaké hloubky se ponoří svislé hrany, plave-li krychle

a) na vodě o hustotě $\varrho_1 = 1000\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$;

b) na rtuti o hustotě $\varrho_2 = 13\,600\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?

c) Ukažte, že poměr hloubek ponoru hran krychle ve vodě a ve rtuti je převrácenou hodnotou poměru hustot obou kapalin.

Řešení:

a) Hloubku ponoru označíme x_1. Vyjádříme rovnost tíže krychle a vztlaku, který působí na těleso ponořené do vody

$$d^3 \varrho_0 g = d^2 x_1 \varrho_1 g,$$

odtud plyne

$$x_1 = d\, \frac{\varrho_0}{\varrho_1}\,. \tag{1}$$

b) Označíme-li v tomto případě hloubku ponoru x_2, platí

$$d^3\varrho_0 g = d^2 x_2 \varrho_2 g; \quad x_2 = d\,\frac{\varrho_0}{\varrho_2}. \qquad (2)$$

c) Z užití vztahů (1) a (2) plyne bezprostředně výrok uvedený v zadání,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}. \qquad (3)$$

Dosadíme-li dané hodnoty do obecných výsledků (1), (2) a (3), vychází $x_1 = 2{,}4$ cm; $x_2 = 0{,}176$ cm $\doteq 0{,}18$ cm a poměr

$$\frac{2{,}4}{0{,}176} = \frac{13\,600}{1000} = 13{,}6.$$

3. úloha

V kalorimetru ve vodě o hmotnosti $m_1 = 1{,}00$ kg a teplotě $t_1 = 50{,}0$ °C se pohltila vodní pára o hmotnosti $m_2 = 0{,}010$ kg teploty $t_2 = 100$ °C.

a) Jaká je výsledná teplota t_3 v kalorimetru?

b) Vypočtěte hmotnost m_3 vody o teplotě $t_2 = 100$ °C, kterou bychom museli přidat do kalorimetru místo páry, aby se teplota vody opět ustálila na hodnotě t_3?

c) Vysvětlete, proč se teplota vody ustálí v případech a), b) na stejné hodnotě t_3, když hmotnost m_2 vodní páry a hmotnost m_3 přidané vody nejsou stejné.

Měrné teplo vody je $c = 1{,}00\,\dfrac{\text{kcal}}{\text{kg °C}}$, měrné skupenské teplo kapalnění vodní páry $l = 550\,\dfrac{\text{kcal}}{\text{kg}}$. Ke ztrátám tepla vedením a sáláním nepřihlížíme.

Řešení:

V případech a) i b) vyjdeme z kalorimetrické rovnice. Z ní vyjádříme v případě a) t_3 a v případě b) m_3 a po dosazení hodnot ze zadání úlohy dostaneme výsledky vyjádřené číselně.

a) $$m_2 l + m_2 c\,(t_2 - t_3) = m_1 c\,(t_3 - t_1),$$

odtud

$$t_3 = \frac{m_2(l + ct_2) + m_1 c t_1}{(m_1 + m_2)\,c}\,; \quad t_3 = 55{,}9\ ^\circ\mathrm{C}.$$

b) $$m_3 c\,(t_2 - t_1) = m_1 c\,(t_3 - t_1),$$

pak

$$m_3 = \frac{m_1(t_3 - t_1)}{t_2 - t_3}\,; \quad m_3 = 0{,}134\ \mathrm{kg} = 134\ \mathrm{g}.$$

c) V případě b), při němž není vodě v kalorimetru předáváno teplo uvolněné při kapalnění srážení vodní páry, musí být pochopitelně hmotnost m_3 vody o teplotě 100 °C podstatně větší než hmotnost m_2 vodní páry v případě a). V obou případech musí být předáno vodě v kalorimetru stejné teplo.

4. úloha

Jsou dány tři elektrické odpory $r_1 = 4{,}00\ \Omega$, $r_2 = 6{,}00\ \Omega$, $r_3 = 8{,}00\ \Omega$. Načrtněte schéma takového zapojení odporů r_1, r_2, r_3, aby výsledný odpor R byl ze všech možných případů

a) největší; vypočtěte tento odpor R_1,

b) nejmenší; vypočtěte tento odpor R_2.

c) Nalezněte takové zapojení odporů r_1, r_2, r_3, aby výsledný odpor $R_3 = 4{,}00\ \Omega$.

Řešení:

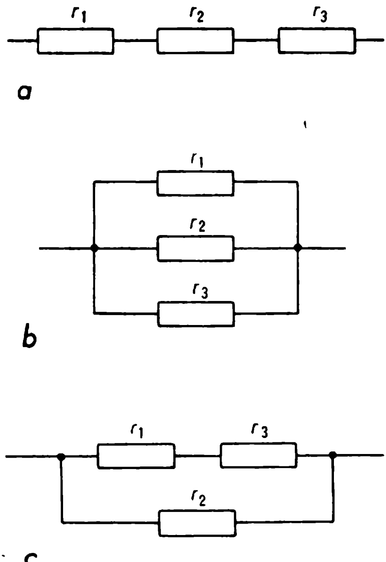
a) Odpory jsou zapojeny za sebou, viz obr. 65a. Pak platí $R_1 = r_1 + r_2 + r_3$, $R_1 = 18{,}00\ \Omega$.

b) Odpory jsou zapojeny vedle sebe, viz obr. 65b. Platí

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1 r_2 r_3},$$

z toho

$$R_2 = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}; \quad R_2 = \frac{24}{13}\,\Omega = 1{,}85\,\Omega.$$



Obr. 65

c) Pro zapojení dvou odporů za sebou a třetího odporu paralelně (vedle nich) dostaneme hodnotu výsledného odporu vždy menší než R_1 a větší než R_2. Ze tří různých seskupení vyhovuje podmínce $R_3 = 4{,}00\,\Omega$ zapojení znázorněné na obr. 65c. Pro výsledný odpor R_3 pak platí

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{r_1 + r_3} + \frac{1}{r_2}, \quad R_3 = \frac{(r_1 + r_3)r_2}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

Po dosazení je skutečně $R_3 = 4{,}00\ \Omega$.

c) Třetí kolo soutěže

1. úloha

Na přímé vodorovné silnici jsou dva kilometrovníky A, B vzdálené od sebe o délku $d = 10{,}0$ km. Od kilometrovníku A vyjede cyklista K rychlostí v_1, od kilometrovníku B vyjede cyklista L rychlostí v_2. Je bezvětří.

a) Vyjedou-li cyklisté současně tak, že jedou proti sobě, zmenšuje se jejich vzájemná vzdálenost za každou sekundu o 5,00 m. Vyjedou-li současně tak, že cyklista K dohání cyklistu L, zmenšuje se jejich vzájemná vzdálenost za každou sekundu o 1,00 m. Vypočtěte rychlosti v_1 a v_2.

b) Za jakou dobu t_1 od společného startu a v jaké vzdálenosti d_1 od kilometrovníku A se cyklisté jedoucí proti sobě potkají?

c) Za jakou dobu t_2 od společného startu a v jaké vzdálenosti d_2 od kilometrovníku A dohoní cyklista K cyklistu L, jedou-li cyklisté za sebou?

Řešení:

a) Jedou-li cyklisté proti sobě, je rychlost, kterou se k sobě přibližují

$$v_1 + v_2 = 5{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

podobně v případě, že jedou cyklisté za sebou, platí

$$v_1 - v_2 = 1{,}00\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Z předešlých dvou vztahů dostáváme rychlosti jednotlivých cyklistů

$$v_1 = 3{,}00\ \frac{m}{s}; \quad v_2 = 2{,}00\ \frac{m}{s}.$$

b) V okamžiku setkání obou cyklistů je vzdálenost ujetá oběma cyklisty dohromady d a platí

$$d = (v_1 + v_2)t_1, \quad \text{z toho} \quad t_1 = \frac{d}{v_1 + v_2};$$

po dosazení hodnot $d = 10{,}0$ km a $v_1 = 3{,}00\ \frac{m}{s} = 10{,}8\ \frac{km}{h}$, $v_2 = 2{,}00\ \frac{m}{s} = 7{,}20\ \frac{km}{h}$ vychází $t_1 = \frac{10}{18}\ h = 33{,}3$ min.

Vzdálenost od kilometrovníku A je pak

$$d_1 = v_1 t_1 = \frac{v_1}{v_1 + v_2}\ d, \quad d_1 = 6{,}00\ \text{km}.$$

c) Pro dráhu ujetou cyklistou K od startu až do okamžiku dostižení cyklisty L platí

$$v_1 t_2 = d + v_2 t_2, \quad \text{pak} \quad t_2 = \frac{d}{v_1 - v_2}.$$

Po dosazení hodnot uvedených v části b) $t_2 = \frac{25}{9}\ h = 2$ h 47 min. Hledaná vzdálenost $d_2 = v_1 t_2 = \frac{v_1}{v_1 - v_2}\ d$, $d_2 = 30{,}0$ km.

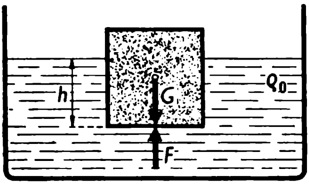
2. úloha

Na vodě hustoty $\varrho_0 = 1000\ \frac{kg}{m^3}$ plavou dvě krychle o stejných hranách a. První je ze stejnorodé látky o hustotě $\varrho_1 = 800\ \frac{kg}{m^3}$, druhá ze stejnorodé látky o hustotě $\varrho_2 = 400\ \frac{m^3}{kg}$.

a) Jaké části (h_1, h_2) svislých hran krychlí jsou ponořené ve vodě?

b) Jaká je vzájemná vzdálenost d horních stěn krychlí?

c) Ukažte, že platí $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$. Obsah této rovnice vyjádřete větou.



Obr. 66

Řešení:

a) Na každou krychli působí její tíha G a vztlaková síla F určená Archimédovým zákonem (viz obr. 66). V případě, že těleso plove po kapalině, jsou velikosti obou uvedených sil stejné. Platí

$$a^3\varrho_1 g = a^2 h_1 \varrho_0 g \Rightarrow h_1 = \frac{\varrho_1}{\varrho_0}\, a, \tag{1}$$

$$a^3\varrho_2 g = a^2 h_2 \varrho_0 g \Rightarrow h_2 = \frac{\varrho_2}{\varrho_0}\, a. \tag{2}$$

Pro dané hustoty je $h_1 = \frac{4}{5} a$, $h_2 = \frac{2}{5} a$.

b) Vzdálenost horních stěn obou krychlí je rovna rozdílu ponořených svislých hran krychlí, tj.

$d = h_1 - h_2$. Použijeme-li výsledků z části a)

$d = a\,\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_0}$, pro dané hustoty $d = \frac{2}{5} a$.

c) Užijeme-li obecný výsledek z části a), tj. dosadíme-li do poměru $\frac{h_1}{h_2}$ hodnoty ze vztahů (1) a (2), dostaneme

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\, a}{\frac{\varrho_2}{\varrho_0}\, a} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2},$$ což se mělo ukázat.

Uvedený vztah vystihuje tu skutečnost, že výšky ponoru obou krychlí jsou ve stejném poměru jako jejich hustoty.

3. úloha

Do vody o hmotnosti $m_1 = 1{,}0$ kg a teplotě $t_1 = 16$ °C v kalorimetru jsme vhodili kousek oceli o hmotnosti $m_2 = 0{,}10$ kg a teplotě $t_2 = 520$ °C. Část vody se přeměnila v páru a v kalorimetru se ustálila teplota na hodnotě $t_3 = 20$ °C. Vypočtěte hmotnost m_3 vody, která se přeměnila v páru.

Měrné teplo vody je $c_1 = 1{,}0 \frac{\text{kcal}}{\text{kg °C}}$; měrné teplo oceli je $c_2 = 0{,}11 \frac{\text{kcal}}{\text{kg °C}}$; měrné skupenské teplo varu vody je $l = 540 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$.

Ztráty tepla vedením a sáláním zanedbejte.

Řešení:

Ochlazením oceli z teploty t_2 na teplotu t_3 se uvolnilo teplo

$$Q = m_2c_2 (t_2 - t_3).$$

Tímto teplem se jednak neznámé množství vody m_3 ohřálo nejprve z teploty t_1 na teplotu $\bar{t} = 100$ °C a pak vypařilo a jednak se zbytek vody (o hmotnosti $m_1 - m_3$) ohřál na teplotu t_3. Všechny změny vystihuje kalorimetrická rovnice

$$m_3c_1 (\bar{t} - t_1) + m_3l + (m_1 - m_3)\, c_1 (t_3 - t_1) = Q.$$

Za Q dosadíme teplo uvolněné ochlazením oceli a z kalorimetrické rovnice vyjádříme m_3,

$$m_3 = \frac{m_2c_2(t_2 - t_3) - m_1c_1(t_3 - t_1)}{c_1(\bar{t} - t_1) + l - c_1 (t_3 - t_1)}.$$

Po dosazení daných hodnot do obecného výsledku vychází $m_3 = 0{,}0024$ kg $= 2{,}4$ g.

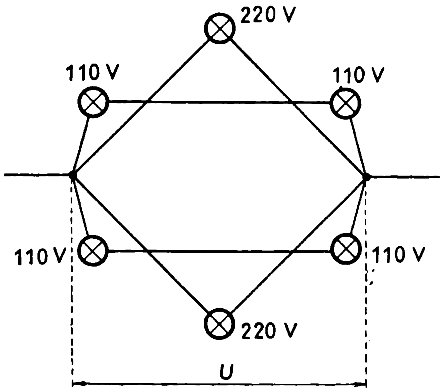
4. úloha

Na reklamní tabuli samoobsluhy se má zřídit svítící pravidelný šestiúhelník ze šesti žárovek. K dispozici jsou čtyři stejné žárovky s údaji 110 V, 60 W a dvě stejné žárovky s údaji 220 V, 60 W. Tabule může být připojena jen na osvětlovací síť o napětí $U = 220$ V.

a) Načrtněte schéma zapojení tak, aby všechny žárovky svítily plným výkonem.

b) Vypočtěte celkový elektrický odpor R zapojení žžrovek a celkový proud I odebíraný ze sítě.

c) Cena 1 kWh elektrické energie je v době od 6 hodin do 22 hodin 0,70 Kčs a v době od 22 hodin do 6 hodin 0,15 Kčs. Kolik Kčs se zaplatí za elektrickou energii na reklamu za 30 dní v zimě, svítí-li tabule denně od 18 hodin do 24 hodin?



Obr. 67

Řešení:

a) Schéma zapojení, splňující uvedené podmínky, je načrtnuto na obrázku 67.

b) Údaje žárovek označíme takto: $U_1 = 110$ V, $P_1 = 60$ W, $U_2 = 220$ V, $P_2 = 60$ W.

Ze vztahů pro výkon elektrického proudu

$P = UI = \dfrac{U^2}{R}$ najdeme odpory jednotlivých žárovek

$$r_1 = \frac{U_1^2}{P_1}, \qquad r_1 = 202\,\Omega,$$

$$r_2 = \frac{U_2^2}{P_2}, \qquad r_2 = 807\ \Omega.$$

Pro celkový odpor R platí

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{r_2} + \frac{2}{2r_1},$$

odtud

$$R = \frac{r_2 r_1}{2r_1 + r_2} = \frac{U_1^2\, U_2^2}{P_1\,(2U_1^2 + U_2^2)}.$$

Pro dané hodnoty $R = \dfrac{1210}{9}\ \Omega \doteq 134\ \Omega$.

Celkový proud vypočteme z Ohmova zákona

$$I = \frac{U}{R}, \quad I = \frac{220\,.\,9}{1210}\ \mathrm{A} = 1{,}64\ \mathrm{A}.$$

c) Dosadíme-li nalezenou hodnotu pro celkový odpor R všech žárovek v daném zapojení do vzorce $P = \dfrac{U^2}{R}$, dostáváme příkon elektrického proudu

$$P = \frac{220^2\,.\,9}{1210}\ \mathrm{W} = 360\ \mathrm{W}.$$

Za jednu hodinu se tedy spotřebuje při rozsvícené reklamní tabuli elektrická energie 0,36 kWh.

Za elektrickou energii je při zadaných podmínkách za jeden zimní měsíc zaplaceno

$$0{,}36\,.\,(4\,.\,0{,}70 + 2\,.\,0{,}15)\,.\,30\ \text{Kčs} = 33{,}50\ \text{Kčs}.$$

III. ČÁST

PÁTÁ MEZINÁRODNÍ FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA

1. Průběh a výsledky soutěže

Pátá mezinárodní fyzikální olympiáda (V. MFO) byla uspořádána v Bulharsku ve dnech 2. 7.—11. 7. 1971. Z dosavadních účastníků se letos nedostavila Jugoslávie a nepřibyl žádný nový účastník. Zúčastnily se tedy V. MFO tyto státy: Bulharsko, Československo, Maďarsko, NDR, Polsko, Rumunsko a SSSR. Z každého státu bylo pozváno 5 soutěžících, jeden vedoucí delegace a jeden pedagogický instruktor.

Družstvo ČSSR bylo vybráno z 11 nejlepších řešitelů 3. kola kat. A FO, kteří byli pozváni na přípravné soustředění v době od 11. 6. do 20. 6. 1971 do Rajnochovic (okr. Kroměříž):

Jméno:	Třída a spec.:	Škola:
1. Pavel Dušek	3S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka,
2. Ivan Gabaš	3S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka,
3. Karel Šafařík	3S	SVŠ Bratislava, Novohradská,
4. Andrej Kugler	3S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka,
5. Štefan Sakáloš	3P	SVŠ Prievidza,
6. Václav Holý	3S	SVVŠ Brno, Křenová,
7.—11.		
Jiří Němec	3S	SVVŠ Brno, Křenová,
Zdeněk Maláč	3S	SVVŠ Brno, Křenová,
Jan Helešic	3S	SVVŠ Brno, Křenová,

Vlad. Šimkovič	3S	SVŠ Bratislava, Novohradská,
Jiří Benda	4	SPŠ el., Plzeň.

Z pozvaných oznámili Jiří Benda a Vlad. Šimkovič, že se nemohou soustředění zúčastnit. Štefan Sakáloš oznámil, že se zúčastní mezinárodní matematické olympiády, a poněvadž se musí zúčastnit soustředění pro MMO, nezúčastní se ani soustředění pro MFO. Na soustředění přijelo tedy jen 8 úspěšných řešitelů, z nichž bylo vytvořeno družstvo shodně podle výsledků 3. kola kat. A:

1. Dušek Pavel,
2. Gabaš Ivan,
3. Šafařík Karel,
4. Kugler Andrej,
5. Holý Václav;

náhradníky byli:

6. Němec Jiří,
7. Maláč Zdeněk,
8. Helešic Jan.

Všichni splňovali podmínky stanovené statutem a směrnicemi.

Na soustředění přednášel partie z mechaniky a termiky Alois Kleveta, prof. gymnasia v Brně na Křenové ul., partie z elektřiny a optiky ing. Boh. Vybíral, odb. asistent 1. fakulty VA AZ ve Vyškově.

Studenti měli denně 6 hodin přednášek, celkem 54 hodin, které měly seminární formu. Výuka byla i v sobotu a neděli. Pedagogickým vedoucím soustředění byl prof. Alois Kleveta.

Vedoucím družstva byl ministerstvem školství ČSR a ministerstvem školství SSR jmenován prof. RNDr. Rostislav Košťál, předseda ÚV FO, a pedagogickým instruktorem doc. RNDr. Ivan Náter ze SVŠT v Bratislavě, místopředseda ÚV FO.

Družstvo odjíždělo z Prahy večer 29. 6. 1971 v lehátkovém voze rychlíkem jedoucím do Varny. Další účastníci družstva přistoupili v Brně a Bratislavě. V pohraničním bulharském městě Ruse musela delegace 1. 7. v ranních hodinách přestoupit na rychlík, který přijel večer do Sofie. Družstva i vedoucí byli ubytováni v komsomolském internátě, kde probíhala vlastní soutěž.

Vedoucími jednotlivých delegací na 5. MFO byli:

Bulharsko (BLR):	dr. Petko Rusev Kamadžiev, CSc.,
Československo (ČSSR):	prof. dr. Rostislav Košťál,
Maďarsko (MLR):	prof. Rezsö Kunfalvi, redaktor,
Německá demokratická republika (NDR):	doc. dr. Joachim Wendt, ředitel pedagogického institutu,
Polsko (PLR):	mgr. Waldemar Gorzkowski, st. asistent,
Rumunsko (RSR):	Anatolie Hristev, universitní lektor,
Sovětský svaz (SSSR):	prof. Makar Dmitrijevič Karasev

a pedagogickými instruktory:

BLR:	Nicola Milanov Velčev, inspektor pro fyziku,
ČSSR:	doc. dr. Ivan Náter,
MLR:	Géza Tichy, universitní asistent,
NDR:	Jürgen Streich, úředník magistrátu v Berlíně,
PLR:	dr. Andrzej Szymacha, adjunkt institutu,
RSR:	Vasile Fălie, profesor,
SSSR:	Galina Sergejevna Tarasjuková.

Každá delegace dostala tlumočníka.

Večer 2. 7. 1971 bylo prvé zasedání mezinárodní komise. Členové mezinárodní komise byli seznámeni s opatřeními pro průběh 5. MFO. Bylo mlčky přijato, že organizátor měl vedle vedoucího a pedagogického instruktora ještě předsedu, kterým byl jmenován ministerstvem osvěty BLR akademik prof. Asen Dacev, který řídil schůze. Jeho zástupcem byl N. M. Velčev. Na 4 teoretické úlohy byla stanovena doba 5 hodin a rovněž na vypracování laboratorní úlohy doba 5 hodin. Každá teoretická úloha a teoretická část laboratorní úlohy a experimentální část laboratorní úlohy byla hodnocena maximálně 10 body. Nejvyšší počet dosažitelných bodů byl tedy 60.

Šest družstev mělo plný počet soutěžících — po pěti, jen Polsko přijelo se čtyřmi soutěžícími — jeden člen družstva před odjezdem onemocněl.

Z letošních účastníků se již dřívějších MFO zúčastnili: Jan Oficialski, a to 3. MFO a 4. MFO, a Karel Šafařík 3. MFO.

V mezinárodní komisi bylo schváleno, aby se příští 6. MFO konala v RSR. V RSR byl tento návrh předem schválen.

V neděli 3. července bylo odpoledne slavnostní zahájení 5. MFO v komsomolské škole na třídě Geo-Mileva 71 v sousedství internátní budovy, v níž byli ubytováni soutěžící i vedoucí družstev. Slavnostního zahájení se zúčastnila náměstkyně ministra osvěty. Po projevu akademika Daceva promluvil jménem delegací vedoucí sovětské delegace prof. Karasev.

Po ukončení se vedoucí odebrali do zasedacího sálu ministerstva osvěty, kde museli připravit překlady zadaných úloh. Podobně jako v Moskvě se nikdo z vedoucích a pedagogických instruktorů nemohl před provedením úloh setkat se soutěžícími, protože všichni vedoucí a pedagogičtí instruktoři byli ubytováni na tuto noc v hotelu. Před ubytováním byla slavnostní večeře v restauraci, které se zúčastnila též náměstkyně ministra osvěty BLR.

Další den dostali účastníci k řešení teoretické úlohy, a to v místnostech školy na tř. Geo-Mileva. Pro každého soutěžícího byl vymezen prostor, omezený vysokými deskami, v němž byl stůl a židle a z jedné strany vchod, takže soutěžící na sebe neviděli. Vedoucí a pedagogičtí instruktoři přišli do budovy až v době, kdy soutěžící již pracovali. Po krátké chvíli opouštěli však budovu, aby se zúčastnili dopoledního výletu. Náš účastník soutěže Pavel Dušek však asi po jedné hodině musel být z pracoviště odnesen. Lékař, který byl přítomen, jej vzhledem k jeho zdravotnímu stavu nenechal pracovat ani příští den. Příčinou bylo pravděpodobně nepříznivé působení izolace soutěžících na pracovišti. Proto jsme v soutěži měli jen čtyři soutěžící.

Odpoledne se prováděly opravy úloh. Na každou úlohu připravili organizátoři skupinu opravujících, kteří o úloze rozhodovali. Kontrolu měl vždy jeden člen mezinárodní komise. V některých případech byla úloha opravována za přítomnosti tlumočníků.

Dne 5. července byli ráno vedoucí delegací odvezeni znovu na ministerstvo osvěty k přeložení textu laboratorní úlohy. Soutěžící pracovali laboratorní úlohu opět v místnostech školy na tř. Geo-Mileva. Mezitím zasedala mezinárodní komise, aby se vyjádřila k hodnocení teoretických úloh. Odpoledne dvě skupiny opravovaly laboratorní úlohy. Oprava se protáhla až přes půlnoc, a tak mezinárodní komise své zasedání zahájila až po 1. hodině v noci. Výsledky byly tyto:

Jméno:		Stát:	Příklad:						Celkem:
První cena			1	2	3	4	5a	5b	
1.—2.	Šafařík Karel	ČSSR	0	9	10	9	10	10	48
	Tichy-Rács Ádám	MLR	5	5	10	10	9	9	48
3.	Gläser Ulf-Hendrik	NDR	2	8	10	7	10	9	46
4.—5.	Gabaš Ivan	ČSSR	0	8	10	9	8	10	45

	Varlamov Andrej	SSSR	6	6	5	8	10	10	45

Druhá cena

6.—7.	Abrikosov Alexej	SSSR	10	0	10	10	4	10	44
	Kugler Andrej	ČSSR	5	2	10	10	8	9	44
8.	Mosó Tamás	MLR	10	9	10	2	3	9	43
9.—10.	Ivanovici Vladimir	RSR	4	9	8	5	6	9	41
	Majewski Wladyslaw	PLR	7	8	7	10	3	6	41
11.	Oficialski Jan	PLR	5	7	8	5	6	9	40

Třetí cena

12.—13.	Dumitrescu Teodor	RSR	10	9	0	0	10	10	39
	Kiss Vladimir	RSR	4	7	7	10	6	5	39
14.—17.	Ganev Nikolaj	BLR	1	5	7	7	9	9	38
	Rusiecki Aleksander	PLR	1	6	10	6	7	8	38
	Snigerov Aleksandr	SSSR	1	7	10	0	10	10	38
	Ziólkowski Marek	PLR	0	9	10	2	8	9	38
18.—19.	Gács Lajos	MLR	9	5	7	0	7	9	37
	Iglóš Ferenc	MLR	8	10	0	2	8	9	37
20.—23.	Ionescu Viorel	RSR	0	4	8	6	9	8	35
	Jung Thomas	NDR	7	5	9	1	8	5	35
	Schmidt Hans-Jürgen	NDR	0	5	10	0	10	10	35

	Vogler Klaus--Dieter	NDR	1	6	9	0	10	9	35

Pochvalné uznání

24.—25.	Budnik Sergej	SSSR	2	7	10	0	10	5	34
	Mišonov Todor	BLR	4	3	9	10	8	0	34
26. — 28.	Holý Václav	ČSSR	0	1	8	8	7	8	32
	Kreutziger Johannes	NDR	1	4	10	0	9	8	32
	Szabó Zoltán	MLR	1	8	8	2	4	9	32
29.	Saldžiunas Vitas	SSSR	5	6	1	0	9	10	31
30.	Vulcan Teodor	RSR	4	6	5	2	4	9	30

Neúspěšní:

31.	Sarijski Cvetan	BLR	1	0	3	8	8	5	25
32.	Filipov Lačezar	BLR	4	1	6	7	0	2	20
33.	Marinov Plamen	BLR	0	3	0	2	1	5	11

Úlohy zadané na 5. MFO byly ve srovnání s dřívějšími úlohami nejnáročnější, a to jak po stránce odborné, tak i časové. Proto nemohlo být dosaženo tak příznivých výsledků jako dříve a na návrh organizátorů a pak i jiných členů mezinárodní komise bylo stanoveno mírnější rozmezí pro přidělení cen, a to takto:

	původně	pořadí řešitele	počet řešit.	upraveno	pořadí řeš.	počet řešit.
I. cena	60 – 55	–	–	60 – 45	1 – 5	5
II. cena	54 – 47	1, 2	2	44 – 40	6 – 11	6
III. cena	46 – 40	3 – 11	9	39 – 35	12 – 23	12
pochv. uzn.	39 – 31	12 – 29	18	34 – 30	24 – 30	7

Podíl účastníků jednotlivých států na cenách a uznáních (v pořadí podle získaných cen a uznání — 1. cena 4 body, 2. cena 3 body, 3. cena 2 body a pochv. uznání 1 bod):

	1. cena	2. cena	3. cena	pochv. uznání	bodů
1. Československo (4 úč.)	2	1		1	12
2. Maďarsko	1	1	2	1	12
3.—4. NDR	1		3	1	11
SSSR	1	1	1	2	11
5. Polsko (4 úč.)		2	2		10
6. Rumunsko		1	3	1	10
7. Bulharsko			1	1	3

Pořadí jednotlivých družstev podle získaných bodů:

MLR	197	
SSSR	192	
RSR	184	
NDR	183	
ČSSR	169	(4 účastníci)
PLR	157	(4 účastníci)
BLR	128	

Toto pořadí nemůže být podkladem pro srovnání práce účastníků z jednotlivých států, poněvadž dvě družstva pracovala jen se 4 účastníky. Srovnání lze však provést, přepočte-li se počet bodů získaných družstvem na jednoho účastníka. Pak je pořadí toto:

1.	ČSSR	42,25 bodů
2.	MLR	39,4 bodů
3.	PLR	39,25 bodů
4.	SSSR	38,4 bodů
5.	RSR	36,8 bodů
6.	NDR	36,6 bodů
7.	BLR	25,6 bodů

I přes onemocnění absolutního vítěze 3. kola kat. A získalo naše družstvo jak v počtu cen pro jednotlivce, tak i v počtu získaných bodů na jednoho člena družstva prvé místo, a to je skutečně pro nás velký úspěch.

Slavnostní ukončení 5. MFO se konalo ve Varně ve sportovním paláci, kde byly předány soutěžícím diplomy a věcné dary, delegacím pak upomínkové dárky. Naše delegace předala vedoucím delegací publikaci manželů Erhartových Jižní Čechy a vedoucím a instruktorům po dvou gramofonových deskách sborových zpěvů souboru Lúčnica. Za vedoucí promluvil vedoucí rumunské delegace Anatolie Hristev a za soutěžící náš účastník Karel Šafařík. Hostitelé se postarali též o to, aby účastníci 5. MFO poznali Bulharsko, a to jednak již v průběhu soutěže, jednak po jejím dokončení.

Dne 2. 7. byla odpoledne uspořádána okružní jízda Sofií, při níž bylo navštíveno Dimitrovovo mauzoleum a položen před mauzoleem věnec.

Dne 3. 7. byl dopoledne výlet na Vitošu, Zlaté mosty, Kopitoto a ke kostelu Bojana.

Večer 4. 7. po napsání teoretických úloh navštívili všichni účastníci v divadle balet Romeo a Julie.

Dne 6. 7. ráno opouštěly delegace ve dvou autobusech Sofii a odjížděly do Varny. Cestou byly zastávky v Sopotě, na Šipce a v Gabrovu, kde účastníci zhlédli velmi zajímavé etnografické muzeum. Z Gabrova odjely delegace do Tarnova, kde se večer setkaly v restauraci Sveta Gora s vedoucími okresu. Ráno pak byla prohlídka Tarnova a zříceniny Carevič a pak odjezd do Targowiště, kde si účastníci prohlédli 2. polytechnickou vyšší školu; pak se pokračovalo v cestě do Varny. Ve Varně byli všichni účastníci ubytováni ve vysokoškolském studentském domově Dimitar Blagoev a stravovali se v restauraci Orbita. Ve Varně si prohlédli planetárium a akvárium.

Z Varny byly pak po tři dny podnikány výlety po černomořském pobřeží. Nejprve se jelo na klimatická místa Družba a Zlaté písky. Druhý den byl uspořádán zájezd na Albenu a Balčik, pak na mys Kaliakra a na klimatické místo Rusalka. Třetí den si účastníci prohlédli Sluneční pobřeží a město Nessebar. Večer bylo ve Varně uspořádáno setkání s komsomolci vyšších škol ve Varně.

Dne 12. 7. odpoledne se delegace vracely letadlem do Sofie a odtud se naše delegace vracela letadlem do Prahy.

2. Soutěžní úlohy

1. úloha

Na hladkém klínu trojúhelníkového průřezu o hmotnosti M leží dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2, která jsou spojena vláknem. Vlákno jde přes kladku, která je upevněna na horní hraně (vrcholu) klínu. Úhly sklonu dvou šikmých rovin klínu vzhledem k horizontální rovině jsou α_1, resp. α_2. Hmotnosti vlákna a kladky jsou zanedbatelné v porovnání s hmotnostmi m_1, m_2 a M. Na počátku je soustava v klidu na hladké vodorovné rovině.

Vypočtěte zrychlení klínu, jestliže soustava podléhá jen tíhovým silám a pohybuje se bez tření.

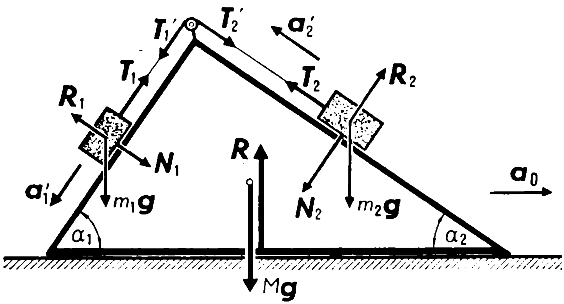
Jak se vyjádří zrychlení obou těles pomocí zrychlení klínu?

Při kterém poměru hmotností m_1 a m_2 zůstane klín v klidu a obě tělesa po něm klouzají?

Řešení:

Označme relativní zrychlení prvého tělesa vzhledem ke klínu $\boldsymbol{a}_1'$ a druhého tělesa vzhledem ke klínu $\boldsymbol{a}_2'$

(obr. 68). Vzhledem k tomu, že vlákno není protažitelné, je relativní zrychlení prvého tělesa a druhého tělesa vzhledem ke klínu stejné, tedy $|a_1'| = |a_2'| = a'$. Označ-



Obr. 68

me zrychlení klínu vzhledem k podložce $\boldsymbol{a}_0$. Pak pro zrychlení jednotlivých těles $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ vzhledem k podložce platí

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1' + \boldsymbol{a}_0, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2' + \boldsymbol{a}_0.$$

Na těleso o hmotnosti m_1 působí síly: tíhová síla tělesa $m_1\boldsymbol{g}$, klín tlakem $\boldsymbol{R}_1$ a vlákno tahem $\boldsymbol{T}_1$. Proto pohybová rovnice prvého tělesa zní

$$m_1(\boldsymbol{a}_1' + \boldsymbol{a}_0) = m_1\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{T}_1. \tag{1}$$

Na druhé těleso o hmotnosti m_2 působí síly: tíhová síla tělesa $m_2\boldsymbol{g}$, klín tlakem $\boldsymbol{R}_2$ a vlákno tahem $\boldsymbol{T}_2$. Pohybová rovnice druhého tělesa má tvar

$$m_2(\boldsymbol{a}_2' + \boldsymbol{a}_0) = m_2\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{T}_2. \tag{2}$$

Na klín o hmotnosti M působí jednak jeho tíhová síla $M\boldsymbol{g}$, pak reakce podložky $\boldsymbol{R}$, prvé těleso tlakem $\boldsymbol{N}_1$, druhé těleso tlakem $\boldsymbol{N}_2$ a reakce tažných sil vlákna $\boldsymbol{T}_1' = -\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2' = -\boldsymbol{T}_2$. Vzhledem k tomu, že hmotnosti nitě a kladky jsou zanedbatelné vzhledem k hmotnostem těles a klínu, musí být velikosti napětí vláken stejné $T_1 = T_2 = T$. Pohybová rovnice klínu má tvar

$$M\boldsymbol{a}_0 = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{T}_1' + \boldsymbol{T}_2'. \qquad (3)$$

Z těchto vektorových rovnic plynou algebraické rovnice, které dostaneme pro síly působící na jednotlivá tělesa ve směru nakloněných rovin a kolmo k nim

$$m_1 (a' - a_0 \cos \alpha_1) = m_1 g \sin \alpha_1 - T, \qquad (4)$$

$$m_2 (a' - a_0 \cos \alpha_2) = -m_2 g \sin \alpha_2 + T, \qquad (5)$$

$$m_1 a_0 \sin \alpha_1 = m_1 g \cos \alpha_1 - N_1, \qquad (6)$$

$$m_2 a_0 \sin \alpha_2 = -m_2 g \cos \alpha_2 + N_2, \qquad (7)$$

pro sílu působící na klín kolmo k podložce

$$0 = Mg - R + N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 + T(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \qquad (8)$$

a pro sílu působící na klín ve vodorovném směru

$$Ma_0 = N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2 + T (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \qquad (9)$$

Sečtením rovnic (4) a (5) dostáváme

$$(m_1 + m_2)a' - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)a_0 = (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)g. \qquad (10)$$

Z rovnice (6) a (7) vychází

$$N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2 = -(m_1 \sin^2 \alpha_1 + m_2 \sin^2 \alpha_2)\, a_0 + (m_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)\, g. \qquad (11)$$

Z rovnice (4) násobené $\cos \alpha_1$ a z rovnice (5) násobené $\cos \alpha_2$ vychází sečtením

$$T (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)\, a' - (m_1 \cos^2 \alpha_1 + m_2 \cos^2 \alpha_2)\, a_0 - (m_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)\, g. \qquad (12)$$

Dosazením (11) a (12) do (9) vychází

$$Ma_0 = -(m_1 \sin^2 \alpha_1 + m_2 \sin^2 \alpha_2)\, a_0 + (m_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)\, g + (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)\, a' - (m_1 \cos^2 \alpha_1 + m_2 \cos^2 \alpha_2)\, a_0 - (m_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)\, g,$$

$$Ma_0 = -(m_1 + m_2) a_0 + (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)\, a',$$

$$(M + m_1 + m_2)\, a_0 - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)\, a' = 0. \quad (13)$$

Dosazením za a' z rovnice (13) do rovnice (10) dostáváme

$$(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2) a_0 - \frac{(m_1 + m_2)(M + m_1 + m_2)}{m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2}\, a_0 = -(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)\, g,$$

$$a_0 = \frac{(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{(m_1 + m_2)(M + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2}\, g. \quad (14)$$

Z rovnice (13) pak vychází pro a'

$$a' = \frac{M + m_1 + m_2}{m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2}\, a_0,$$

$$a' = \frac{(M + m_1 + m_2)(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{(m_1 + m_2)(M + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2}\, g. \quad (15)$$

Zrychlení klínu bude nulové, když bude podle (14) platit

$$m_1 \sin \alpha_1 = m_2 \sin \alpha_2.$$

Pak z (15) plyne, že též $a' = 0$, tzn. že nelze realizovat takový případ, aby se tělesa, která byla na počátku v klidu, po klínu pohybovala a přitom klín se nepohyboval.

2. úloha

Komora je naplněna vzduchem o teplotě 0 °C a o tlaku $p_0 = 1{,}334 \,.\, 10^5$ N m^{-2}. Uvnitř komory je svislá skleněná trubice o průřezu $S = 1{,}00$ cm^2. Na horním konci je trubice vzduchotěsná a dolním koncem je ponořena do vany se rtutí. Rtuťový sloupec v trubici dosahuje výšky $h_0 = 700$ mm od hladiny rtuti ve vaně. Nad rtutí je trubice naplněna vodíkem. Posunutím jedné ze stěn komory se sníží tlak vzduchu v komoře izotermicky na $p_1 = 8{,}00 \,.\, 10^4$ N m^{-2}, přičemž výška sloupce rtuti v trubici dosáhne nové hodnoty $h_1 = 400$ mm. Zahřátím, při konstantním objemu komory, se zvýší teplota na T_2 a výška rtuťového sloupce bude $h_2 = 500$ mm. Pak následuje izobarická expanze vzduchu, přičemž výška rtuťového sloupce nabude hodnoty $h = 450$ mm.

Za předpokladu, že se pozorovaná soustava nachází stále v termodynamické rovnováze, vypočtěte:

1. hmotnost vodíku,
2. teplotu T_2,
3. tlak vodíku v konečném stavu.

Hustota rtuti při teplotě 0 °C je $\varrho_0 = 1{,}36 \,.\, 10^4$ kg m^{-3}, teplotní součinitel objemové roztažnosti rtuti $\beta = 1{,}8 \,.\, 10^{-4}$ deg^{-1}, plynová konstanta $R = 8{,}317 \,.\, 10^3$ J . kmol^{-1} deg^{-1}. Roztažnost skla a změnu hladiny rtuti ve vaně zanedbejte.

Poznámka: Nechť ΔT je maximální teplotní rozdíl mezi stavy soustavy. Položíme-li $\beta \Delta T = x \ll 1$, pak lze použít např. aproximace

$$\frac{1}{1 + x} \doteq 1 - x.$$

Poznámka: V textu zde uvedeném je změna proti danému textu: $S = 1{,}00$ cm^2 místo $S = 1$ cm^2, $p_1 = 8{,}00 \,.\, 10^4$ N m^{-2} místo $p_1 = 8 \,.\, 10^4$ N m^{-2}.

Řešení:

Na počátku je vodík v trubičce pod tlakem

$$p_0 - h_0 \varrho_0 g,$$

kde ϱ_0 je hustota rtuti při 0 °C. Označíme-li výšku trubičky nad hladinou rtuti H, pak je objem uzavřeného vodíku $(H - h_0)S$, kde S je vnitřní průřez trubice.

Při izotermické změně objemu komory zůstane opět teplota vodíku 0 °C a vodík bude pod tlakem

$$p_1 - h_1\varrho_0 g.$$

Objem uzavřeného vodíku je nyní $(H - h_1)\,S$. Poněvadž jde o změnu izotermickou, musí platit

$$(p_0 - h_0\varrho_0 g)\,(H - h_0)\,S = (p_1 - h_1\,\varrho_0 g)\,(\,H - h_1)\,S.$$

Odtud lze určit výšku trubičky H nad hladinou rtuti:

$$H\,(p_0 - h_0\varrho_0 g - p_1 + h_1\varrho_0 g) = (p_0 - h_0\varrho_0 g)\,h_0 - \\ - (p_1 - h_1\varrho_0 g)\,h_1,$$

$$H = \frac{(p_0 - h_0\varrho_0 g)\,h_0 - (p_1 - h_1\varrho_0 g)\,h_1}{p_0 - p_1 - (h_0 - h_1)\,\varrho_0 g}. \qquad (1)$$

a) Poněvadž podle stavové rovnice je

$$(p_0 - h_0\varrho_0 g)\,(H - h_0)\,S = \frac{m'}{M}\,RT_0,$$

kde m' je hmotnost vodíku, M jeho kilomolová hmotnost $\left(\frac{m'}{M}\text{ tedy počet kilomolů}\right)$, lze ze známé konstanty $R = 8{,}317\,.\,10^3$ J kmol^{-1} deg^{-1} a kilomolové hmotnosti M vypočíst m'

$$m' = \frac{M}{RT_0}\,(p_0 - h_0\varrho_0 g)\,(H - h_0)\,S. \qquad (2)$$

b) Zahřátím, při konstantním objemu komory, zvýší se teplota na T_2 a pak pro hustotu rtuti bude platit

$$\varrho_2 = \frac{\varrho_0}{1 + \beta\,(T_2 - T_0)} \doteq \varrho_0\,[1 - \beta(T_2 - T_0)];$$

přitom pro izochorickou změnu vzduchu platí

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_0}. \tag{3}$$

Pro změnu v trubičce, v níž se mění V, p i T, musíme užít stavové rovnice; podle ní

$$(p_2 - h_2\varrho_2 g)(H - h_2) S \frac{1}{T_2} = (p_1 - h_1\varrho_0 g)(H - h_1) S \frac{1}{T_0},$$

$$\left[p_1 \frac{T_2}{T_0} - h_2\varrho_0 g + h_2\varrho_0 g\beta (T_2 - T_0)\right](H - h_2)\frac{1}{T_2} =$$

$$= (p_1 - h_1\varrho_0 g)(H - h_1)\frac{1}{T_0},$$

$$\left(\frac{p_1}{T_0} + h_2\varrho_0 g\beta - \frac{h_2\varrho_0 g + h_2\varrho_0 g\beta T_0}{T_2}\right)(H - h_2) =$$

$$= (p_1 - h_1\varrho_0 g)(H - h_1)\frac{1}{T_0},$$

$$\left(p_1 + h_2\varrho_0 g\beta T_0 - \frac{h_2\varrho_0 g + h_2\varrho_0 g\beta T_0}{T_2} T_0\right)(H - h_2) =$$

$$= (p_1 - h_1\varrho_0 g)(H - h_1),$$

$$\frac{h_2\varrho_0 g + h_2\varrho_0 g\beta T_0}{T_2} T_0 =$$

$$= -\frac{H - h_1}{H - h_2}(p_1 - h_1\varrho_0 g) + p_1 + h_2\varrho_0 g\beta T_0$$

a z toho

$$T_2 = T_0 h_2\varrho_0 g \quad (1 + \beta T_0)\Bigg[p_1 + h_2\varrho_0 g\beta T_0 -$$

$$- \frac{H - h_1}{H - h_2}(p_1 - h_1\varrho_0 g)\Bigg]^{-1}, \tag{4}$$

kde H je dáno vztahem (1).

c) Při izobarické expanzi vzduchu změní se teplota na hodnotu T, takže příslušná hustota vodíku bude

$$\varrho_3 = \varrho_0[1 - \beta\,(T - T_0)],$$

a proto příslušný tlak vodíku bude

$$p' = p_2 - h\varrho_3 g,$$

$$p' = p_2 - h\varrho_0 g\,[1 - \beta\,(T - T_0)].$$

Podle stavové rovnice platí

$$\{p_2 - h\varrho_0 g\,[1 - \beta(T - T_0)]\}\,(H - h)\,S\,\frac{1}{T} =$$

$$= \{p_2 - h_2\varrho_0 g\,[1 - \beta(T_2 - T_0)]\}\,(H - h_2)\,S\,\frac{1}{T_2}.$$

Poněvadž $\beta \Delta T \ll 1$, lze $\beta(T - T_0)$ a $\beta(T_2 - T_0)$ zanedbat a vypočíst T;

$$T = T_2\,\frac{(p_2 - h\varrho_0 g)\,(H - h)}{(p_2 - h_2\varrho_0 g)\,(H - h_2)}$$

a k tomu

$$p' = p_2 - h\varrho_0 g\left[1 - \beta\left(T_2\,\frac{(p_2 - h\varrho_0 g)\,(H - h)}{(p_2 - h_2\varrho_0 g)\,(H - h_2)} - T_0\right)\right],$$

kam za p_2 dosadíme ze vztahu (3) a za H ze vztahu (1).

Po dosazení daných hodnot a $T_0 = 273{,}15$ °K a $M = 2{,}0160$ kg dostáváme

$$H = 1{,}297\ \text{m},\quad m' = 2{,}12\,.\,10^{-6}\ \text{kg},\quad T_2 = 359\ \text{°K},$$

$$p_2 = 10{,}50\,.\,10^4\ \text{N m}^{-2}\ \text{a}\ p' = 4{,}69\,.\,10^4\ \text{N m}^{-2}.$$

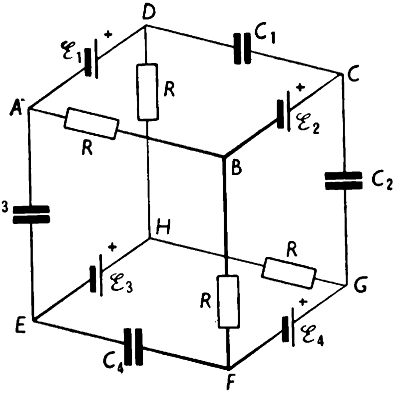
3. úloha

V daném zapojení (obr. 69) jsou $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$, $\mathscr{E}_4$ stejnosměrná elektromotorická napětí zdrojů. Zařazené odpory mají všechny stejnou hodnotu R a vnitřní odpory zdrojů napětí jsou zanedbatelné.

Vypočtěte energii spotřebovanou na nabití kondenzátorů C_1, C_2, C_3, C_4 $\left(W = \frac{1}{2} C U^2\right)$.

Vypočtěte náboj kondenzátoru C_2, jestliže body H a B budou vodivě spojeny nakrátko.

Číselné hodnoty: $\mathscr{E}_1 = 4$ V, $\mathscr{E}_2 = 8$ V, $\mathscr{E}_3 = 12$ V, $\mathscr{E}_4 = 16$ V, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1\ \mu$F.



Obr. 69

Řešení:

Vyjdeme-li z bodu A, může ustálený proud procházet obvodem $ADHGFBA$. Označme směr proudu od A k D atd. Pak v obvodu je napětí $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_4$ a je v něm zapjat celkový odpor $4R$. Prochází tedy tímto obvodem proud

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_4}{4R}.$$

Označme si nyní potenciál bodu E jako nulový; tedy $\varphi_E = 0$; pak potenciály ostatních bodů jsou:

$$\varphi_H = \varphi_E + \mathscr{E}_3 = \mathscr{E}_3,$$

$$\varphi_D = \varphi_H + RI = \mathscr{E}_3 + \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_4}{4} = \frac{\mathscr{E}_1 + 4\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_4}{4},$$

$$\varphi_G = \varphi_H - RI = \mathscr{E}_3 - \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_4}{4} = \frac{-\mathscr{E}_1 + 4\mathscr{E}_3 + \mathscr{E}_4}{4},$$

$$\varphi_A = \varphi_D - \mathscr{E}_1 = \frac{\mathscr{E}_1 + 4\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_4}{4} - \mathscr{E}_1 = \frac{-3\mathscr{E}_1 + 4\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_4}{4},$$

$$\varphi_F=\varphi_G-\mathscr{E}_4=\frac{-\mathscr{E}_1+4\mathscr{E}_3+\mathscr{E}_4}{4}-\mathscr{E}_4=\frac{-\mathscr{E}_1+4\mathscr{E}_3-3\mathscr{E}_4}{4},$$

$$\varphi_B=\varphi_A+RI=\frac{-3\mathscr{E}_1+4\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_4}{4}+\frac{\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_4}{4}=$$

$$=\frac{-2\mathscr{E}_1+4\mathscr{E}_3-2\mathscr{E}_4}{4}=\frac{-\mathscr{E}_1+2\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_4}{2},$$

$$\varphi_B=\varphi_F-RI=\frac{-\mathscr{E}_1+4\mathscr{E}_3-3\mathscr{E}_4}{4}-\frac{\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_4}{4}=$$

$$=\frac{-2\mathscr{E}_1+4\mathscr{E}_3-2\mathscr{E}_4}{4}=\frac{-\mathscr{E}_1+2\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_4}{2},$$

$$\varphi_C=\varphi_B+\mathscr{E}_2=\frac{-\mathscr{E}_1+2\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_4}{2}+\mathscr{E}_2=$$

$$=\frac{-\mathscr{E}_1+2\mathscr{E}_2+2\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_4}{2}.$$

Dosadíme-li daná emn, dostaneme

$\varphi_A=5\text{V}$, $\varphi_B=2\text{V}$, $\varphi_C=10\text{V}$, $\varphi_D=9\text{V}$, $\varphi_E=0\text{V}$, $\varphi_F=-1\text{V}$, $\varphi_G=15\text{V}$, $\varphi_H=12\text{V}$.

Na jednotlivých kondenzátorech je v ustáleném stavu potenciální rozdíl:

na C_1: $U_1=\varphi_C-\varphi_D=$

$$=\frac{-2\mathscr{E}_1+4\mathscr{E}_2+4\mathscr{E}_3-2\mathscr{E}_4-\mathscr{E}_1-4\mathscr{E}_3+\mathscr{E}_4}{4}=$$

$$=\frac{-3\mathscr{E}_1+4\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_4}{4},$$

na C_2: $U_2=\varphi_G-\varphi_C=$

$$= \frac{-\mathscr{E}_1 + 4\mathscr{E}_3 + \mathscr{E}_4 + 2\mathscr{E}_1 - 4\mathscr{E}_2 - 4\mathscr{E}_3 + 2\mathscr{E}_4}{4} =$$

$$= \frac{\mathscr{E}_1 - 4\mathscr{E}_2 + 3\mathscr{E}_4}{4},$$

$$\text{na } C_3\text{: } U_3 = \varphi_E - \varphi_A = \frac{3\mathscr{E}_1 - 4\mathscr{E}_3 + \mathscr{E}_4}{4},$$

$$\text{na } C_4\text{: } U_4 = \varphi_F - \varphi_E = \frac{-\mathscr{E}_1 + 4\mathscr{E}_3 - 3\mathscr{E}_4}{4}.$$

V našem případě je $U_1 = 1\text{V}$, $U_2 = 5\text{V}$, $U_3 = -5\text{V}$, $U_4 = -1\text{V}$. Pak energie na jednotlivých kondenzátorech je $W_k = \frac{1}{2} C_k U_k^2$, a tedy $W_1 = 0{,}5$ μJ, $W_2 = 12{,}5$ μJ, $W_3 = 12{,}5$ μJ a $W_4 = 0{,}5$ μJ. Celkem je na kondenzátorech energie $W = 26$ μJ.

Jestliže body H a B budou spojeny nakrátko, pak se vytvoří obvod $ADHBA$ a obvod $HGFBH$. Proud v prvém obvodu je $I_1 = \frac{\mathscr{E}_1}{2R}$ a v druhém obvodu $I_2 = -\frac{\mathscr{E}_4}{2R}$.

Pak

$$\varphi_C = \varphi_B + \mathscr{E}_2,$$

$$\varphi_G = \varphi_B (\equiv \varphi_H) - RI_2 = \varphi_B + \frac{\mathscr{E}_4}{2},$$

a tedy

$$\varphi_C - \varphi_G = \mathscr{E}_2 - \frac{\mathscr{E}_4}{2} = 8\text{V} - 8\text{V} = 0\text{V}.$$

Při spojení bodu H a B nakrátko je na kondenzátoru C_2 náboj nulový.

4. úloha

Před svislým rovinným zrcadlem je akvárium kulového tvaru z tenkého skla naplněné vodou. Poloměr akvária je R, vzdálenost středu akvária od zrcadla je *3R*. Na přímce jdoucí středem akvária kolmo k zrcadlu je ve velké vzdálenosti pozorovatel. V bodě akvária, který je od oka pozorovatele nejvzdálenější, je rybka. V daném okamžiku začne se rybka pohybovat podél stěny akvária rychlostí v.

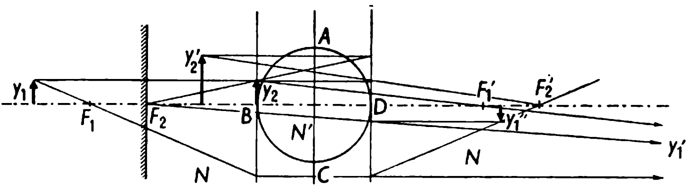
Jakou relativní rychlostí vzdalují se od sebe obrazy rybky, které vidí pozorovatel?

Index lomu vody je $n = \frac{4}{3}$.

Řešení:

1. způsob

Obraz rybky vytvořený zrcadlem zobrazíme (obr. 70) nejdříve lámavou plochou ABC a k obrazu, jako předmětu,



Obr. 70

vytvoříme obraz druhou lámavou plochou ADC. Pak najdeme obraz rybky lámavou plochou ADC. Z rychlosti pohybu rybky a příslušného příčného zvětšení obou výsledných obrazů odvodíme, jakou rychlostí se oba obrazy od sebe vzdalují.

Označme N absolutní index lomu vnějšího prostředí, N' absolutní index lomu vody, R poloměr kulové plochy a β příčné zvětšení. Pak pro prvou lámavou plochu ABC, u níž měříme vzdálenosti od bodu B, můžeme psát

$$\frac{N'}{x_1'} - \frac{N}{x_1} = \frac{N' - N}{R}, \quad f_1 = -\frac{NR}{N' - N},$$

$$f_1' = \frac{N'R}{N' - N}, \quad \beta_1 = \frac{Nx_1'}{N'x_1}.$$

Pro lom na kulové ploše ADC z prostředí o absolutním indexu lomu N' do prostředí o absolutním indexu lomu N platí

$$\frac{N}{x_2'} - \frac{N'}{x_2} = \frac{N - N'}{-R}, \quad f_2 = \frac{N'R}{N - N'}, \quad f_2' = -\frac{NR}{N - N'},$$

$$\beta_2 = \frac{N'x_2'}{Nx_2},$$

kde je též $R > 0$. Položíme-li $\frac{N'}{N} = n$, platí rovnice

$$\frac{n}{x_1'} - \frac{1}{x_1} = \frac{n-1}{R}, \tag{1}$$

$$f_1 = -\frac{R}{n-1}, \quad f_1' = \frac{nR}{n-1}, \tag{2}$$

$$\beta_1 = \frac{x_1'}{nx_1}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{x_2'} - \frac{n}{x_2} = \frac{n-1}{R}, \tag{4}$$

$$f_2 = -\frac{nR}{n-1}, \quad f_2' = \frac{R}{n-1}, \tag{5}$$

$$\beta_2 = \frac{nx_2'}{x_2} \tag{6}$$

a přitom

$$x_1' - x_2 = 2R. \tag{7}$$

Rybka vytvoří v zrcadle obraz ve vzdálenosti $x_1 = -4R$ od bodu B v prostoru o indexu lomu N. Obraz rybky v zrcadle je předmětem pro lámavou plochu ABC; pak podle (1)

$$\frac{n}{x_1'} = \frac{n-1}{R} - \frac{1}{4R} = \frac{4n - 4 - 1}{4R},$$

$$x_1' = \frac{4nR}{4n-5}\,.$$

Z (3) vychází

$$\beta_1 = \frac{x_1'}{nx_1} = \frac{4nR}{4n-5}\,\frac{1}{(-4nR)} = -\frac{1}{4\,n-5}\,.$$

Ze (7) vychází pro $x_1 = -4R$

$$x_2 = x_1' - 2R = \frac{4nR - 8nR + 10R}{4n-5} = \frac{-4n+10}{4n-5}\,R\,;$$

pak ze (4)

$$\frac{1}{x_2'} = \frac{n-1}{R} + \frac{n(4n-5)}{-4n+10}\,\frac{1}{R} =$$

$$= \frac{10n - 10 - 4n^2 + 4n + 4n^2 - 5n}{R\,(10-4n)} = \frac{9n-10}{(10-4n)R}\,,$$

$$x_2' = \frac{10-4n}{9n-10}\,R.$$

Ze (6) vychází

$$\beta_2 = \frac{nx_2'}{x_2} = n\,\frac{10-4n}{9n-10}\,R\,\frac{4n-5}{10-4n}\,\frac{1}{R} = n\,\frac{4n-5}{9n-10}\,.$$

Tedy celkové zvětšení obrazu rybky v zrcadle způsobené akváriem bude

$$\beta_{\mathrm{I}} = -\frac{1}{4n-5}\,n\,\frac{4n-5}{9n-10} = -\frac{n}{9n-10}\,.$$

Pro $n = \frac{4}{3}$ vychází

$$\beta_{\mathrm{I}} = -\frac{\frac{4}{3}}{2} = -\frac{2}{3}\,.$$

Pro rybku v akváriu vzhledem k bodu D je $x_2 = -2R$, a tedy podle (4)

$$\frac{1}{x_2'} = \frac{n-1}{R} - \frac{n}{2R} = \frac{2n-2-n}{2R},$$

$$x_2' = \frac{2}{n-2} R$$

a pro zvětšení podle (6)

$$\beta_{\mathrm{II}} = \frac{nx_2'}{x_2} = n \frac{2R}{n-2} \cdot \frac{1}{-2R} = -\frac{n}{n-2}.$$

Pro $n = \frac{4}{3}$ vychází

$$\beta_{\mathrm{II}} = -\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}-2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2.$$

Jestliže se rybka pohybuje rychlostí v kolmo k optické ose, vzdaluje se prvý obraz od optické osy rychlostí

$$v_1 = -\frac{n}{9n-10} v$$

a druhý obraz rychlostí

$$v_2 = -\frac{n}{n-2} v.$$

V našem případě pro $n = \frac{4}{3}$ je

$$v_1 = -\frac{\frac{4}{3}}{2} v = -\frac{2}{3} v,$$

$$v_2 = -\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}-2} v = 2v.$$

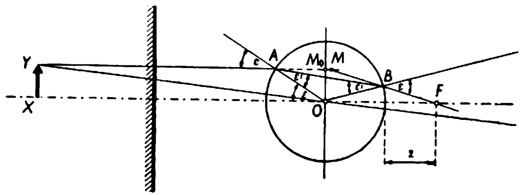
Pohybují se tedy obrazy opačným směrem od osy, a tedy se vzájemně vzdalují rychlostí

$$v' = |v_1| + |v_2| = \frac{2}{3}\,v + 2v = \frac{8}{3}\,v\,.$$

2. způsob

Odvodíme si rovnici pro zobrazování nekonečně tenkou sférickou čočkou (bez užití orientovaných úhlů). Nejprve odvodíme rovnici pro tlustou čočku, a odtud přejdeme k čočce nekonečně tenké.

Zvolme si předmět XY. Paprsek jdoucí středem čočky dopadá na obě rozhraní kolmo a neláme se. Paprsek rovnoběžný s osou se láme podle zákona lomu a platí (označení je v obrázku 71)



Obr. 71

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = n \text{ a pro } \varepsilon \to 0 \text{ je } \varepsilon = n\varepsilon'.$$

Bod F je ohniskem; označme vzdálenost $CF = z$, kde C je průsečík kulové plochy s osou. Pro úhly ve vzniklých trojúhelnících dostáváme

$\widehat{XOA} = \varepsilon$, a tedy $\widehat{FOB} = \pi - (\pi - 2\varepsilon') - \varepsilon = 2\varepsilon' - \varepsilon$;
$\widehat{OBF} = \pi - \varepsilon$ a $\widehat{OFB} = \pi - (\pi - \varepsilon) - (2\varepsilon' - \varepsilon) =$
$= 2(\varepsilon - \varepsilon')$.

Pak

$$\frac{R + z}{R} = \frac{\sin(\pi - \varepsilon)}{\sin 2(\varepsilon - \varepsilon')}$$

a pro $\varepsilon \to 0$

$$\frac{R+z}{R} = \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon - \varepsilon')}, \quad \frac{R+z}{R} = \frac{n}{2(n-1)}$$

a z toho

$$z = R\,\frac{2-n}{2\,(n-1)}\,. \tag{1}$$

Když se bude ε zmenšovat, pak se bod M bude blížit bodu M_0, takže rovina lomu, která nahradí tlustou čočku, půjde bodem O kolmo na hlavní osu. Dostaneme tak rovnici sférické čočky, kde ohnisko má od bodu O vzdálenost $R+z$,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{R+z} = \frac{1}{f}\,.$$

Užitím (1) dostáváme

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{R+z} = \frac{1}{R\left(1 + \dfrac{2-n}{2\,(n-1)}\right)} =$$

$$= \frac{2\,(n-1)}{R\,(2n-2+2-n)} = \frac{2(n-1)}{nR}\,,$$

a tedy

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2(n-1)}{nR}\,. \tag{2}$$

Jestliže jde o zobrazení sférickou čočkou obrazu v zrcadle, je pro zrcadlo $x_1 = 5R$ a z rovnice (2) dostáváme

$$\frac{1}{x_1'} = \frac{2(n-1)}{nR} - \frac{1}{5R} = \frac{10n - 10 - n}{5nR} =$$

$$= \frac{9n-10}{5nR}\,.$$

Použitím vztahu pro příčné zvětšení u čoček

$$\beta_1 = \frac{x_1'}{x_1}$$

vychází

$$\beta_1 = \frac{5nR}{9n - 10}\,\frac{1}{5R} = \frac{n}{9n - 10}\,.$$

Jestliže jde o přímé zobrazení rybky, je $x_2 = R$ a

$$\frac{1}{x_2'} = \frac{2(n-1)}{nR} - \frac{1}{R} = \frac{2n - 2 - n}{nR} = \frac{n-2}{nR}$$

a zvětšení

$$\beta_2 = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{nR}{n-2}\,\frac{1}{R} = \frac{n}{n-2}\,.$$

Jestliže se rybka pohybuje rychlostí v kolmo k optické ose, vzdaluje se prvý obraz od optické osy rychlostí

$$v_1 = \frac{n}{9n - 10}\,v$$

a druhý obraz rychlostí

$$v_2 = \frac{n}{n-2}\,v.$$

V našem případě pro $n = \frac{4}{3}$ je

$$v_1 = \frac{\frac{4}{3}}{2}\,v = \frac{2}{3}\,v,$$

$$v_2 = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{2}{3}}\,v = -2v.$$

Pohybují se tedy obrazy opačným směrem od osy a vzdalují se tedy rychlostí

$$v' = |v_1| + |v_2| = \frac{2}{3} v + 2v = \frac{8}{3} v.$$

5. úloha — laboratorní

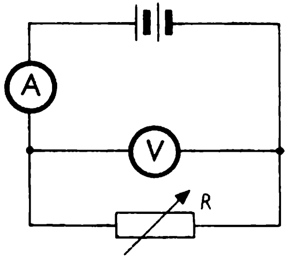
Jsou k dispozici: zdroj elektromotorického napětí, ampérmetr, voltmetr, reostat a spojovací vodiče.

Pomocí vhodného zapojení daných přístrojů a příslušných měření nakreslete diagram závislosti užitečného výkonu P na proudu I.

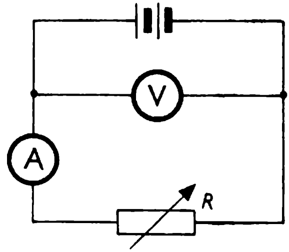
Použitím údajů z tohoto diagramu proveďte tyto úkony:

1. Vypočtěte vnitřní odpor r zdroje.
2. Vypočtěte elektromotorické napětí $\mathcal{E}$ zdroje.
3. Nakreslete diagram závislosti užitečného výkonu P na vnějším odporu R.
4. Nakreslete diagram závislosti celkového výkonu P_1 na vnějším odporu R.
5. Nakreslete diagram závislosti účinnosti η zdroje na vnějším odporu R.

Poznámka: Základní diagram závislosti užitečného výkonu na proudu nakreslete pomocí nejméně 30—35 bodů.



Obr. 72



Obr. 73

Řešení:

K měření zapojíme přístroje podle obr. 72 nebo 73. Měříme tak, že se ke každému R, počínajíc od R maximálního, určí příslušný proud I a příslušné napětí U. Proběhne se celý odpor a provede se 30—35 měření. Užitečný výkon P je dán součinem $P = IU$. Provedeme pak grafické znázornění $P = \mathrm{f}(I)$.

Označíme-li vnitřní odpor článku r a elektromotorické napětí zdroje $\mathscr{E}$, platí

$$I = \frac{\mathscr{E}}{r + R}, \tag{1}$$

$$U = IR, \tag{2}$$

$$\mathscr{E} = I(R + r) = U + rI. \tag{3}$$

Pak celkový výkon

$$P_1 = \mathscr{E} I \tag{4}$$

a užitečný výkon

$$P = UI = \mathscr{E} I - rI^2. \tag{5}$$

Když $I = 0$, je $P = 0$. Extrémní hodnota užitečného výkonu nastane, když

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}I} = \mathscr{E} - 2rI = 0,$$

tedy při

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{2r}. \tag{6}$$

Poněvadž

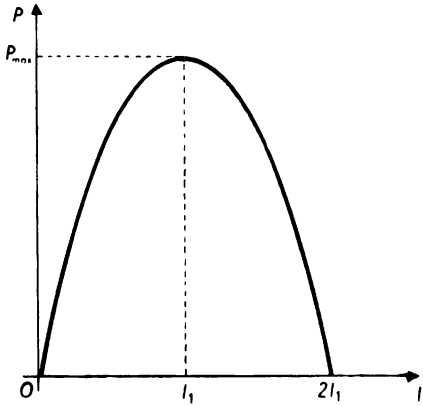
$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}I^2} = -2r < 0,$$

nastane pro $I_1 = \dfrac{\mathscr{E}}{2r}$ maximální užitečný výkon, který bude

$$P_{max} = \frac{\mathscr{E}^2}{2r} - \frac{\mathscr{E}^2}{4r} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}\,. \tag{7}$$

Když $I_2 = 2I_1$, bude $P_2 = \mathscr{E} I_2 - rI_2^2 = 2\mathscr{E} I_1 - 4rI_1^2 =$
$= 2I_1 (\mathscr{E} - 2rI_1)$,
a to je podle (6) rovno nule.

Z rovnice (5) vychází, žc grafickým znázorněním $P = f(I)$ je parabola (obr. 74).



Obr. 74

Měření provedeme tak, že postupně nastavujeme odpor R od největší hodnoty k nejmenší.

Měření sestavíme v tabulku

I	U	$P = UI$	$R = \frac{U}{I}$	$P_1 = \mathscr{E} I$	$\eta = \frac{R}{R + r}$
A	V	W	Ω	W	–

1. a 2. Z grafického znázornění určíme I_1 a P_{max} a z rovnic (6) a (7) určíme r a $\mathcal{E}$

$$P_{max} = \frac{4r^2 I^2}{4r} = rI_1^2, \quad r = \frac{P_{max}}{I_1^2},$$

$$\frac{P_{max}}{I_1} = \frac{\mathcal{E}^2 2r}{4r\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}}{2}, \quad \mathcal{E} = \frac{2P_{max}}{I_1}.$$

3. Podle vztahu (2) vypočteme $R = \frac{U}{I}$ v každém řádku tabulky a zapíšeme do čtvrtého sloupce. Z těchto dat sestrojíme diagram závislosti

$$P = f_1(R).$$

4. Z el. proudu a vypočteného $\mathcal{E}$ vypočteme v každé řádce podle (4) příslušné P_1. V každé řádce máme R určeno a můžeme sestrojit diagram závislosti

$$P_1 = f_2(R).$$

5. Účinnost zdroje

$$\eta = \frac{P}{P_1}$$

vyjádříme si v závislosti na odporu R. Z (2) a (3) plyne

$$P = RI^2 \text{ a } P_1 = (R + r)\, I^2,$$

a tedy

$$\eta = \frac{P}{P_1} = \frac{R}{R + r}.$$

Hodnoty η vypočteme v každém řádku užitím vypočteného R a určeného r. Z hodnot sestrojíme diagram

$$\eta = f_3\,(R).$$

OBSAH

Edice: Pomocné knihy pro žáky

Vlastimil Janků, prof. dr. Rostislav Košťál a doc. dr. Ivan Náter

DVANÁCTÝ ROČNÍK FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY

Obálku navrhl Josef Prchal
Obrázky rýsoval Josef Kubík
Vydání 1. – Praha 1972 – Počet stran 197
Odpovědná redaktorka: Jiřina Civínová
Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk
Technická redaktorka: Marcela Vilimová
Vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p., závod 2, Ostrovní 30, Praha 1
AA 7,84 – VA 8,35
Náklad 2700 výtisků
Tematická skupina a podskupina 03/5
Cena brožovaného výtisku Kčs 10,50
505/21, 852
Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou publikaci č. 25-0-28

14-529-72 Kčs 10,50