

PROF. DR. ROSTISLAV KOŠŤÁL,
VLASTIMIL JANKŮ, DR. IVAN NÁTER

XI. ročník fyzikální olympiády

ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE
KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1969/70

PRAHA
STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Zpracovali: prof. dr. Rostislav Košťál, Vlastimil Janků a dr. Ivan Náter

Recenzovali: František Živný a Jozef Zámečník

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1971

I. ČÁST

ZPRÁVA O PRŮBĚHU SOUTĚŽE

1. Organizace soutěže

Ve školním roce 1969/70 probíhal jedenáctý ročník soutěže fyzikální olympiáda pro žáky výběrových středních škol a sedmý ročník téže soutěže pro žáky devátých ročníků základních devítiletých škol.

Organizační řád fyzikální olympiády (FO) i matematické olympiády (MO) je dán výnosem ministerstva školství a kultury (MŠK) ze dne 14. března 1963, č. 2293/63-I/1, a byl uveřejněn ve Věstníku MŠK, r. 1963, seš. 12, kde jsou uvedeny i důvody pro zavedení těchto soutěží. Mají jednak vzbudit u žáků větší zájem o studium matematiky a fyziky a vést je k samostatné práci, jednak zvýšit úroveň vyučování a zlepšit výsledky vyučování v těchto předmětech. Matematická a fyzikální olympiáda podstatně pomáhají při vyhledávání žáků nadaných pro matematiku a fyziku a rozvíjejí jejich talenty. Obě soutěže vytvářejí předpoklady pro solidnější a hlubší přípravu příštích studentů na vysokých školách, zejména pro obory matematicko-fyzikální, přírodovědné a technické. Význam soutěží je zřejmý z rostoucích požadavků kladených na matematicko-fyzikální přípravu všech pracovníků různých vědeckých pracovišť a vysokých škol, pracovníků v praxi (inženýrů a techniků) a učitelů matematických, přírodovědných a technických předmětů na středních i základních školách.

Soutěž je dobrovolná, je určena pro žáky středních škol a pro žáky devátého ročníku základních devítiletých škol. Probíhá ve čtyřech kategoriích. Kategorie A je určena pro žáky nejvyšších ročníků středních výběrových škol, tj. pro žáky třetích ročníků SVVŠ, třetích a čtvrtých středních odborných škol. V kategorii B soutěžili letos žáci druhých ročníků SVVŠ a středních odborných škol a v kategorii C žáci prvních ročníků všech středních výběrových škol a též žáci druhých ročníků gymnasií (čtyřletých). Kategorie D je určena pro žáky devátých ročníků základních devítiletých škol.

Výjimečně soutěží nadaní žáci ve vyšší kategorii. Účast v soutěži vyšší kategorie povoluje vyučující učitel a referent FO na škole.

Podle výše uvedeného výnosu MŠK probíhá soutěž v kategorii A ve třech kolech, v kategoriích B, C ve dvou kolech. Kategorie D probíhá v celém státě závazně ve dvou kolech, v průběhu posledních pěti let však většina krajů přešla k pořádání třetího (krajského) kola.

V prvním kole mají soutěžící řešit do určeného termínu 9 úloh a v kategoriích A, B a C prostudovat samostatně fyzikální téma. Tato témata pro uvedené kategorie jsou publikována v Rozhledech matematicko-fyzikálních.

Ve druhém kole řeší soutěžící 4 úlohy ve všech kategoriích, ve třetím (celostátním) kole kategorie A je zadáno 5 úloh, z nichž jedna je laboratorní. Ve třetím (krajském) kole kategorie D jsou zadány žákům 4 úlohy.

K rozvíjení matematických a fyzikálních znalostí na školách přispívají ještě další opatření, realizovaná se souhlasem a za podpory ministerstev školství ČSR a SSR i školských odborů KNV. Jsou to zejména: celostátní prázdninové soustředění vybraných úspěšných řešitelů MO a FO (kategorie B); krajská soustředění vybraných úspěšných řešitelů kategorie B, C, popř. též kategorie D, přednášky pro žáky soutěžící v FO během školního roku, instruktáže a kurzy pro učitele a v posledních letech speciální matematicko-fyzikální třídy zřízené na dvanácti vybraných středních všeobecně vzdělávacích školách (gymnasiích).

Pořadatelé soutěže FO jsou podle organizačního řádu ministerstva školství ČSR a SSR spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků (JČSMF). Podle organizačního řádu z r. 1963 je dále spolupodatelé mládežnická organizace.

2. Složení ústředního výboru fyzikální olympiády ve školním roce 1969/70

Ústřední výbor se skládá ze zástupců pořadajících institucí MŠ ČSR, MŠ SSR, JČSMF, organizace mládeže ČSSR a z učitelů vysokých a středních škol, kteří jsou do funkce jmenováni ministerstvy školství na základě návrhu JČSMF. Kromě toho jsou členy ÚV FO i všichni předsedové krajských výborů fyzikální olympiády (KV FO).

Funkční období členů ÚV FO je tříleté.

Sídlem ÚV FO je od školního roku 1966/67 Brno.

Funkční období ÚV FO ustaveného v r. 1966 bylo prodlouženo MŠ do konce r. 1970. Proti minulému roku nastaly v ÚV FO tyto změny:

Odb. as. Josef Konrád byl uvolněn pro vážné onemocnění z funkce jednatele a člena ÚV FO. (Dlouholetý funkcionář fyzikální olympiády, odb. as. přírodověd. fakulty UJEP v Brně Josef Konrád zemřel v prosinci 1969.)

Zast. doc. Evžen Říman, CSc., byl uvolněn z funkce člena ÚV FO pro dlouhé onemocnění na vlastní žádost.

Prof. RNDr. Jan Valouch se vzdal po sjezdu JČSMF funkce člena ÚV FO – zástupce JČSMF.

Na základě návrhu JČSMF jmenovalo MŠ ČSR tyto nové členy ÚV FO a stanovilo jim funkční období do konce roku 1970:

doc. RNDr. Jiřího Beránka do funkce místopředsedy ÚV FO,

odb. as. Vlastimila Janků do funkce 1. jednatele ÚV FO,

odb. as. Františka Malého do funkce 2. jednatele ÚV FO,

prof. SPŠ Mojmíra Simerského členem ÚV FO.

Zastupováním JČSMF v ÚV FO byl pověřen prof. RNDr. Rostislav Košťál, předseda ÚV FO, zastupováním SODM ČSSR v ÚV FO byl pověřen Ing. Bohumil Vybíral, dřívější zástupce ČSM.

Ministerstvo školství SSR jmenovalo v březnu 1970 na žádost ÚV FO dalšího zástupce ze Slovenska, a to

Evu Tomanovou, pracovníci Výzkumného pedagog. ústavu v Bratislavě. ÚV FO ve škol. roce 1969/70 byl tedy v tomto složení:

Předseda: RNDr. Rostislav Košťál, profesor elektrotechnické fakulty Vysokého učení technického v Brně a 1. fakulty Vojenské akademie Antonína Zápotockého ve Vyškově

1. místopředseda: RNDr. Ivan Náter, docent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě

2. místopředseda: RNDr. Jiří Beránek, docent Vojenské akademie Antonína Zápotockého v Brně

1. jednatel: Vlastimil Janků, odborný asistent Vojenské akademie Antonína Zápotockého v Brně

2. jednatel: František Malý, odborný asistent Vojenské akademie Antonína Zápotockého v Brně

Další členové (v abecedním pořadí):

Josef Bartůněk, ústřední inspektor ministerstva školství ČSR v Praze
František Cimbůrek, prof. gymnasia v Praze-Libni

RNDr. Marta Chytilová, CSc., vědecká pracovnice Výzkumného ústavu pedagogického v Praze

Milan Rádl, odborný asistent Vysoké školy strojnické a elektrotechnické v Plzni

Mojmír Simerský, prof. SPŠ VE v Rožnově p. Radhoštěm
Zuzana Šimkovicová, profesorka gymnasia, Bratislava, Novohradská
Eva Tomanová, vědecká pracovnice Výzkumného ústavu pedagogického, Bratislava

Jan Tesař, profesor gymnasia v důchodu, Praha

RNDr. Bohumil Vlach, docent přírodovědecké fakulty UJEP v Brně

Ivo Volf, odborný asistent pedagogické fakulty v Hradci Králové

Ing. Bohumil Vybíral, CSc., odborný asistent 1. fakulty Vojenské akademie Antonína Zápotockého ve Vyškově

Jozef Zámečník, odborný asistent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě

František Živný, ředitel gymnasia v důchodu, Nový Bohumín

Na dobu funkčního období současného ÚV FO, tj. do konce r. 1970, byl za člena ÚV FO plenární schůzi ÚV dne 13. 4. 1970 kooptován zástupce Ústředního domu dětí a mládeže v Bratislavě J. Gašperák.

V rámci ÚV FO ustavená komise pro výběr a úpravu příkladů pracovala za vedení dr. Ivana Nátera (prvého místopředsedy ÚV FO) téměř ve stejném složení jako v minulých letech. Komise pracovala ve dvou stupních, jednak prováděla tzv. základní výběr příkladů, jednak se zabývala konečnou redakcí přijatých příkladů a jejich (tzv. vzorových) řešení.

Základním výběrem procházejí navržené příklady došlé od KV FO i od jednotlivých učitelů. Je posuzována vhodnost zařazení příkladů do soutěže FO, včetně kategorie, popř. kola soutěže. Práce při výběru příkladů byla rozdělena mezi členy komise takto:

Jozef Zámečník, Zuzana Šimkovicová a František Živný — příklady z mechaniky a vlnění

Milan Rádl — příklady z molekulární fyziky a termiky

Ivo Volf — příklady z elektřiny, magnetismu a z elektromagnetického vlnění

František Cimbůrek — příklady z optiky, atomistiky a experimentální úlohy

Zbývající členové komise se podílejí na konečné redakci příkladů. Z navržených příkladů vybírají nejvhodnější, upravují znění textu příkladů, rozsah dílčích požadavků a řešení. Práce v této komisi je rozdělena podle kategorií soutěže:

Mojmír Simerský — příklady pro kategorii A,

dr. Marta Chytilová — příklady pro kategorii B,

Jan Tesař — příklady pro kategorii C,

dr. Bohumil Vlach — příklady pro kategorii D.

Je-li nedostatek vhodných došlých úloh (a to se stává dost často), navrhuji iniciativně členové komise řadu úloh sami.

Jednotlivé návrhy soutěžních úloh jsou kolektivně posuzovány celou komisí pro konečnou redakci soutěžních úloh, kterou tvoří výše jmenovaní referenti pro jednotlivé kategorie, dále předseda komise dr. Ivan Náter a první jednatel ÚV FO.

V tomto školním roce byl dokončen výběr pro 2. kolo XI. ročníku všech kategorií, 3. kolo kategorií A a D a proveden výběr pro 1. kolo XII. ročníku všech kategorií a výhledový výběr pro 2. a 3. kola XII. ročníku.

Druhý místopředseda ÚV FO dr. Jiří Beránek je pověřen činností související s účastí československé delegace na mezinárodních fyzikálních olympiádách.

3. Krajské výbory FO ve školním roce 1969/70 a jejich předsedové

Pro řízení soutěží FO v prvním a druhém kole všech kategorií a pro řízení 3. kola kategorie D se zřizují krajské výbory fyzikální olympiády. Z tradičních důvodů užíváme tohoto označení též pro Slovensko, kde se oblast krajského výboru fyzikální olympiády (stručně kraje) shoduje se správním oddělení ministerstva školství SSR v Bratislavě, Banské Bystrici a v Košicích.

Předsedy i členy KV FO jmenuje na návrh poboček JČMF (resp. JSMF) odbor školství a kultury KNV (resp. oddělení MŠ SSR). V KV FO pracují zástupci školské správy, KPÚ, zástupci poboček JČMF (JSMF), zástupci organizace mládeže, a zejména profesori a učitelé fyziky. Podstatným přínosem pro práci KV FO je činnost učitelů vysokých škol jak technického, tak i universitního (zejména pedagogického) zaměření.

Počet členů KV FO není pevně stanoven. Pléna KV FO včetně předsedů OV FO se scházejí průměrně dvakrát ročně. Běžné záležitosti řeší operativně menší kolektivy, zejména předsednictva KV FO. Předsednictvo KV FO tvoří předseda, místopředseda (resp. místopředsedové), jednatel (jednatele).

Na začátku šk. roku 1969/70 došlo ke změnám předsedů KV FO v Praze a v kraji Středočeském, v lednu 1970 pak v kraji Severočeském.

Předsedové KV FO pro jednotlivé kraje ve šk. r. 1969/70:

- Praha: RNDr. Jaroslav Vachek, odborný asistent MFF UK v Praze
Středočeský: Miroslav Ševčík, profesor SPŠ v Kladně a vedoucí kabinetu fyziky KPÚ pro Středočeský kraj
Jihočeský: Konrád Hofman, odborný asistent pedagogické fakulty v Českých Budějovicích
Západočeský: Ing. Miloš Rabas, odborný asistent Vysoké školy strojnické a elektrotechnické v Plzni
Severočeský: Jaroslav Honner, vedoucí kabinetu fyziky KPÚ, Ústí nad Labem
Východočeský: Zdeněk Ungermann, odborný asistent pedagogické fakulty v Hradci Králové
Jihomoravský: Lubomír Vašek, CSc., docent technologické fakulty VUT v Gottwaldově
Severomoravský: RNDr. Miroslav Bajer, CSc., docent Vysoké školy báňské v Ostravě
Západoslovenský: RNDr. Ivan Náter, docent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě
Středoslovenský: Pavol Ferko, odborný asistent pedagogické fakulty v Banské Bystrici
Východoslovenský: RNDr. Edita Tarabčáková, odborná asistentka přírodovědecké fakulty UPJŠ v Košicích.

4. Okresní výbory fyzikální olympiády

V kategorii D řídí soutěž 1. a 2. kola okresní výbory fyzikální olympiády (OV FO), ustavené pro obvod ONV, zpravidla v sídlech ONV. Počet členů OV FO není pevně stanoven, zpravidla tvoří OV FO předseda, místopředseda, jednatel, zástupce odboru školství a kultury ONV, zástupce organizace mládeže a další učitelé a profesori. Snažíme se, aby v OV FO pracovali učitelé škol 2. cyklu.

5. Klasifikační zásady

Pro hodnocení úloh jsou každoročně uveřejňovány potřebné pokyny v letáčích „Fyzikální olympiáda“, vydávaných péčí MŠ v SPN jak pro kategorie A, B, C, tak pro kategorie D.

Žakovská řešení se klasifikují takto:

1. výborně, je-li úloha rozřešena správně nebo řešení má nanejvýš jen formální chyby nebo jen menší odbornou závadu;
2. dobře, jestliže řešení vystihuje úkol, ale má větší odborné nedostatky; dobře je hodnoceno i správné řešení, vyskytují-li se v něm závažné formální nedostatky;
3. nevyhovující, jestliže nedostatky odborného rázu jsou závažné nebo je-li řešení z větší části neúplné; řešení je také nevyhovující, chybí-li výklad nebo je-li neúplný, takže z něho nelze soudit na myšlenkový postup podaného řešení.

Řešené úlohy prvního kola opraví učitel vyučující ve třídě fyzice v dohodě s referentem pro FO na škole. Po ukončení prvního kola navrhne referent pro FO na škole úspěšné řešitele do 2. kola soutěže a odešle opravené úlohy všech řešitelů (i neúspěšných) spolu s návrhem hodnocení příslušnému KV FO. Po kontrole úloh rozhodne KV FO, kteří z navržených řešitelů budou zařazeni do 2. kola. KV FO si může dát předložit opravená řešení úloh již po ukončení jednotlivých termínů.

Úspěšnými řešiteli 1. kola soutěže jsou ti žáci, kteří úspěšně vyřešili aspoň 6 úloh. Ze dvou zadaných experimentálních úloh v kategoriích A, B a C musí každý soutěžící žák řešit (i když neúspěšně) aspoň jednu, má-li se stát úspěšným řešitelem 1. kola soutěže FO.

Ve 2. kole řeší soutěžící čtyři úlohy teoretické. Úspěšným řešitelem 2. kola je každý řešitel, který úspěšně vypracoval aspoň dvě úlohy.

Z nejúspěšnějších účastníků druhého kola kategorie A je vybráno na schůzi ÚV FO ze všech krajů na návrh KV FO nejvýše 80 účastníků 3. kola. Při výběru se přihlíží k výsledkům ve 2. kole (KV FO předkládají úlohy 2. kola všech navrhovaných účastníků). Z kraje, kde byly výsledky ve 2. kole slabší a podle prospěchu by nikdo nepostoupil, se zvou do 3. kola dva nejlepší úspěšní řešitelé jako zástupci kraje.

Ve 3. kole řeší účastníci čtyři úlohy teoretické a jednu úlohu laboratorní. Úspěšnými řešiteli jsou žáci, kteří vyřeší úspěšně aspoň tři ze zadaných úloh. Nejvýše dvacet nejlepších řešitelů (zpravidla těch, kteří vyřešili úspěšně aspoň čtyři ze zadaných pěti úloh) je prohlášeno vítězi 3. kola soutěže a je jim udělena finanční odměna.

6. Průběh soutěže ve školním roce 1969/70

Soutěž probíhala ve čtyřech kategoriích podle vyspělosti žáků, což odpovídá zpravidla ročníku navštěvované školy. V kategorii A probíhala ve třech, v kategoriích B a C ve dvou kolech. V kategorii D, která

probíhá podle organizačního řádu rovněž na celém území státu ve dvou kolech, se postupně stalo zvykem změřit síly jednotlivých žáků v krajském měřítku. Letos soutěžilo v 3. kole kategorie D již 10 krajů z 11, tj. všechny kraje kromě Jihočeského, kterému se nepodařilo překonat finanční obtíže při organizačním a materiálním zajištění 3. kola této kategorie.

A. První kolo soutěže kategorií A, B, a C

První kolo soutěže probíhalo na školách v kategoriích A, B, C od září 1969 do 10. února 1970. Úlohy pro 1. kolo byly zveřejněny v Rozhledech matematicko-fyzikálních (ročník 47, č. 10 a ročník 48 č. 1) a též v časopise Fyzika ve škole. Prvé 3 úlohy každé kategorie byly uveřejněny již před prázdninami. Kromě toho vydalo Státní pedagogické nakladatelství nákladem 4000 výtisků leták s pokyny a úlohami pro kategorie A, B a C. Leták byl hrazen z prostředků MŠ a prostřednictvím KV FO distribuován na školy.

Témata k prostudování byla uveřejněna v Rozhledech matematicko-fyzikálních č. 1, 2, 3 a 6. ročníku 48.

Počet škol, které se letos zúčastnily soutěže FO, je podle jednotlivých kategorií a podle krajů uveden v tabulce 1.

Proti loňsku se zmenšil počet soutěžících škol v kategorii A asi o 14 %, v kategorii B o 40 % a v kategorii C o 7 %, celkem o 16 %. Zjevný úbytek škol soutěžících v kategorii B odpovídá přechodu na čtyřletá gymnasia a vystihuje stav, že na některých školách ve školním roce 1970/71 nebudou třídy, v nichž se bude maturovat.

Příznivější pohled na letošní účast v soutěžích FO dává tabulka 2, charakterizující počet soutěžících žáků a úspěšných řešitelů 1. kola. Plyne z ní, že počet soutěžících žáků klesl o 12 %, zatímco absolutní počet úspěšných řešitelů je téměř stejný jako loni a celkově je procento úspěšných řešitelů (57 %) vyšší než loni (52 %). Přitom v kategorii A jsou počty soutěžících zhruba stejné jako loni, v kategorii C vesměs vyšší a v kategorii B, o které jsme se již zmínili, je celkový počet proti loňsku o 46 % a počet úspěšných řešitelů o 47 % nižší. Počet soutěžících dívek (v kategoriích A, B, C) se opět poněkud snížil z 18 % na 16 %.

B. Druhé kolo kategorií A, B, C

Soutěže druhého kola FO v kategoriích A, B, C probíhaly ve všech krajích současně, a to v sobotu 14. 3. 1970. Do druhého kola byla pozvána většina úspěšných řešitelů 1. kola (v řadě krajů všichni úspěšní

TABULKA 1

Počet středních škol, které se účastnily XI. ročníku FO

Kraj	Celkový počet gymn. (SVVŠ)			Zapojeno SVVŠ						SPŠ						Ostatní školy						Celkový počet zapojených škol					
	Kategorie			cel- kem			Kategorie			cel- kem			Kategorie			cel- kem			Kategorie			cel- kem					
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C						
Praha	23	15	10	17	18	2	—	6	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	17	10	23	25	
StČ	27	15	8	15	19	—	1	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15	9	19	23	
JČ	21	6	3	7	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	3	7	8	
ZČ	17	10	9	13	17	—	—	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	9	16	20	
SČ	22	13	8	16	16	1	1	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14	9	19	19	
VČ	38	19	8	25	27	2	1	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	22	10	29	31		
JM	38	22	17	27	30	2	2	8	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	24	19	37	40	
SM	37	20	14	24	29	5	—	7	8	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	26	14	32	38	
ZS	41	16	17	18	26	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	17	18	19	27	
StS	39	13	11	17	19	—	—	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	14	11	19	22	
VS	39	8	7	6	9	—	—	1	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8	8	9	13	
Celkem	352	157	112	185	218	12	6	39	42	4	2	5	6	173	120	229	266										
Loni	354	190	192	198	260	10	17	43	49	4	4	7	8	204	213	248	317										

¹ Vojenské gymnasium Moravská Třebová, ² SEŠ Znojmo, SZTS Třebíč, ³ Vojenské gymnasium Opava,
⁴ Vojenská středná odborná škola spojovací techniky v Novém Městě, ⁵ Vojenské gymnasium SNP Banská Bystrica

TABULKA 2

Počet zátků soutěžících v 1. kole

(S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, c. celkový počet zátků, d. z toho počet dívek.)

Kraj	Kategorie A				Kategorie B				Kategorie C				Celkem			
	S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú	
	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.
Praha	110	5	79	5	44	6	13	3	230	46	105	19	384	57	197	27
StC	36	8	30	7	29	-	21	-	56	8	38	7	121	16	89	14
JČ	27	2	18	1	7	1	4	-	35	2	23	-	69	5	45	2
ZČ	35	4	17	2	38	3	19	1	54	14	18	7	127	21	54	10
SC	44	11	27	8	23	3	11	1	107	25	52	11	174	39	90	20
VČ	59	7	53	7	26	1	22	1	168	30	124	22	253	38	199	30
JM	90	8	67	6	73	7	47	4	186	31	75	10	349	46	189	20
SM	73	13	66	13	49	9	25	4	185	23	66	8	307	45	157	25
ZS	95	14	64	9	102	29	58	14	179	44	89	21	376	87	211	44
StS	40	1	26	-	48	1	26	-	151	28	75	13	239	30	127	13
VS	27	1	25	1	24	1	22	-	39	6	20	3	90	8	67	4
Celkem	636	74	472	59	463	61	268	29	1390	257	685	121	2489	392	1425	209
Úsp. v %			74	79			58	48			49	47			57	53
Loni	678	77	487	49	865	156	511	98	1274	284	508	93	2817	517	1486	240
Úsp. v %			69	64			59	63			40	33			52	46

řešitelé 1. kola). Ve většině krajů probíhala soutěž v jediném místě, výjimkou byly kraje Severočeský (soutěž probíhala v Ústí n. Labem, v Mostě a v Liberci) a Severomoravský (soutěž probíhala v Olomouci a v Ostravě). Členové ÚV FO, kteří nejsou bezprostředně funkcionáři KV FO, byli přítomni průběhu 2. kola v městech svého bydliště. Texty soutěžních úloh byly rozmnoženy pro každého soutěžícího; pro Slovensko zajistil doc. Náter přípravu potřebného počtu výtisků v jazyce maďarském a též jejich rozeslání. Texty byly rozeslány do míst, kde se soutěž konala v zapečetěných obálkách a otevřeny před žáky po zahájení. Ve 2. kole byly zadány ve všech kategoriích pouze úlohy teoretické (příklady). Laboratorní úlohy nejsou zadávány především z důvodů časových a materiálně technických.

Výsledky druhého kola jsou uvedeny v tabulce 3. Celkový počet soutěžících ve 2. kole byl letos asi o 5 % nižší než loni; počet úspěšných řešitelů z účastníků však klesl na 39 % proti loňským 48 %. Účast v kategorii A byla zhruba stejná jako loni, procento úspěšných řešitelů kleslo o 7 %; v kategorii B klesl počet účastníků o 45 % a procento úspěšných řešitelů kleslo o 7 %. Nejmenší procento úspěšných řešitelů je v kategorii C (36 %), kde soutěžilo o 26 % žáků více než loni.

Počet soutěžících dívek je stejný jako loni a činí 14 % z celkového počtu účastníků. Při hodnocení výsledků 2. kola, zejména pro stanovení pořadí prvních úspěšných řešitelů a pro výběr účastníků 3. kola, bylo užito stupnice známek 1, 1–, 2, 3. Tento systém hodnocení je jednoduchý, přehledný a plně vyhovuje požadavkům soutěže.

Pořadí prvních desíti úspěšných řešitelů druhého kola v kategoriích A, B, C uvádíme podle krajů. V kategorii A jsou tučným tiskem vyznačení žáci, kteří postoupili do 3. kola. Z Prahy, odkud postoupilo 31 žáků, uvádíme všechny postupující. U žáků středních všeobecně vzdělávacích škol (resp. gymnasií) neuvádíme zkratku školy.

Praha

A: Václav Novotný, SPŠ jaderné techniky, Praha 4, Svatoslavova; Miroslav Hradil, Vojtěch Hanzal, Andrej Kugler – všichni Praha 2, W. Piecka; **Pavel Pudlák, Praha 7, Nad štolou; Bohumil Pátek, Praha 6, Leninova; Miloslav Handl, Marek Bohuzak, Přemysl Málek, Josef Pražák, Karel Juza, Jan Slavík, Ondřej Matouš, Josef Štěpánek a Petr Šebelík** – všichni Praha 2, W. Piecka; **Jiří Rákosník, SPŠ zeměměřičská, Praha 9, Pod Táborem; Jan Staněk, Praha 2, W. Piecka; Jiří Skála, SPŠ JT, Praha 4, Svatoslavova; Karel Andrejsek, Petr Stíbal, Miroslav Richter, Pavel Vachek**

– Praha 2, W. Piecka; **Jiří Luňáček**, SPŠ, JT, Praha 4, Svatoslavova; **Ivan Gabaš**, **Karel Ježek** – Praha 2, W. Piecka; **Miloš Štípl**, Praha 8 - Libeň; **Jan Broulík**, Praha 2, W. Piecka; **Tomáš Křeček**, Praha 8 - Libeň; **Slavomír Krasnický**, Praha 7, Nad štolou; **Zbyšek Stýblo**, Praha 6, Arabská; **Petr Matal**, Praha 1, Štěpánská.

B: Pavel Dušek, Praha 2, W. Piecka; Jiří Dolejší, Praha 7, Nad štolou; Jiří Domínek, Ladislav Půst – Praha 2, W. Piecka; Bohuslav Malek, Praha 6, Leninova; Vladimír Jireček, Praha 7, Nad štolou.

C: Petr Hejl, Praha 1, Štěpánská; Petr Dvořák, Praha 3, Sladkovského n.; Jan Šebek, Praha 1, Štěpánská; Tomáš Burian, Praha 7, Nad štolou; Dalibor Volný, František Drašnar – Praha 2, W. Piecka; Jiří Vlk, Praha 4, Budějovická; Tomáš Chrz, Daniela Čepická – Praha 2, W. Piecka; Miloš Jiránek, Praha 3, Sladkovského n.

Středočeský kraj

A: **Jaroslav Balík**, Vlašim; **Eva Nosková**, Mladá Boleslav; **Jiří Hrstka**, Mělník; **Josef Bílek**, Říčany; Jiří Gemperle, Radotín; Jiří Knobloch, Rakovník; Jan Vítkovský, Beroun; Vratislav Kadlec, Hořovice; František Lob, Český Brod; Jarmila Fronková, Mladá Boleslav.

B: Jaroslav Vlach, Miloslav Zikán – Hořovice; Josef Davídek, Český Brod; Čeněk Jarský, Kralupy.

C: Dag Jeger, Beroun; Jiří Frýda, Kladno; Zdeněk Kosek, Beroun; Jiří Blecha, Nové Strašecí; Rudolf Koudelka, Kladno; Vít Čermák, Beroun; Vladimír Jaroš, Radotín; Václav Tonder, Příbram; Miroslava Pařízková, Hořovice; Dagmar Lindová, Příbram.

Jihočeský kraj

A: **Jan Vyhnánek**, České Budějovice; **Vladimír Pech**, Pelhřimov; **Jaromír Šnobl**, Strakonice; **Bohuslav Nunvář**, Jindřichův Hradec; **Miroslav Kozojed**, České Budějovice; **Pavel Samec**, Strakonice; Bohuslav Vránek, Jindřichův Hradec; Rostislav Doležal, České Budějovice; Jan Kovář, Trhové Sviny; Vladimír Vacek, Jindřichův Hradec.

B: Žádní úspěšní řešitelé.

C: Karel Horák a Karel Pizinger – Strakonice; Jiří Hanzálek, Petr Špatenka a Josef Urban – České Budějovice; Jiří Zoubek a Antonín Nikodem – Strakonice; Josef Urban, České Budějovice; Jan Cícha, Tábor.

Západočeský kraj

A: Rudolf Švarc, Plzeň, n. Odborářů; Jaroslav Vlasák, Karlovy Vary; Pavel Kopeček, Plzeň, n. Odborářů; Jan Šafanda, Sušice; Dušan Poduška, Ostrov.

B: Tomáš Beneda, Václav Vacovský, Karel Fliegel, Pavel Hecht a Vlastimil Vacek — Plzeň, n. Odborářů; Miloslav Šafanda, Sušice; Václav Tomášek, Klatovy; Igor Hegner, Karel Virgler a Pavel Tauš — Plzeň, n. Odborářů.

C: Svatopluk Machalka, Josef Juřek, Blanka Hnilicová, František Žák, Magda Fořtová a Miroslav Křížek — Plzeň, n. Odborářů; Lubor Špidla, Karlovy Vary.

Severočeský kraj

A: Leoš Dvořák, Roudnice; Vladimír Novotný, Lovosice; Jaromír Bukovský, Roudnice; Lubomír Zampr, Liberec; Blanka Václavíková, Litvínov; František Škoda, Teplice; Jiří Maryška, Jablonec; Jiří Skotnica, Chomutov; Jiří Skorkovský, Teplice; Jana Přívratská, Liberec.

B: Jiří Horák, Děčín; Karel Hájek, Liberec; Petr Jelínek, Chomutov; Karel Kotek, SPŠ Most.

C: Václav Švejdar, Děčín; Marie Goniošiová a Jan Palacký, Liberec; Jan Holub, Teplice; Miroslav Pavljuk, Litoměřice; Božena Jenšovská, Žatec; Josef Jenčík, Jablonec.

Východočeský kraj

A: Zdeněk Bušák, SPŠ elektrotechnická, Pardubice; Oldřich Sisr, Hradec Králové, Bohuslav Čáp, SPŠ stavební, Hradec Králové; Karel Kacálek, Žamberk; Petr Šimůnek, Rychnov n. Kn.; Tomáš Bouda, Nová Paka; Václav Škoda, Turnov; Martin Šutka, Nová Paka; Václav Hajšman, Voj. gymnasium, Mor. Třebová; Jana Šimůnková, Jilemnice.

B: František Fendrych, Hradec Králové; Olaf Künzel, Žamberk; Jaroslav Kubík, Hradec Králové; Jindřich Machek, Žamberk; Igor Koropečký, Pardubice; Milan Bernard, SPŠ el. Pardubice; Miloš Pšikal, Vysoké Mýto; Josef Kokeš, Pardubice; Daniel Dvorský, Vysoké Mýto; Jindřich Šaršoun, SPŠ el. Pardubice.

C: Lubomír Procházka, Hradec Králové; Jiří Sloupenský, Ústí n. Orł.; Václav Kuhn, Jičín; Stanislav Štancl, Česká Třebová; Zdeněk

Stehno, SPŠ el. Pardubice; Jana Březinová, Rychnov n. Kn.; Vlastimil Vávra, Turnov; Ladislav Šolc, Broumov; Josef Leichter, Pavel Kubík – Vysoké Mýto.

Jihomoravský kraj

A: Jan Kohout, Jan Dobeš, Soňa Jánská, Milan Pantůček, Jaroslav Kučera, Zdeněk Kovář a Josef Tureček – Brno, Křenová; Milan Kadlec, Gottwaldov; Karel Svačina, SPŠ stroj. Gottwaldov; Jiří Hampl, Brno, Křenová.

B: Petr Firbas, Václav Holý a Jiří Němec – Brno, Křenová; Jiří Binder, Moravské Budějovice; Pavel Hladký, Zdeněk Kratochvíl a Pavel Renč – Brno, Křenová; Petr Ježek, Brno, Elgartova; Zdeněk Maláč, Brno, Křenová; Josef Sorbi, Prostějov.

C: Petr Pištěk, Brno, Křenová; Josef Švoma, Velké Meziříčí; Dalibor Míček, Valašské Klobouky; Pavel Šandera, Brno, Křenová; Jaroslav Kment, Ždár n. Sáz.; Zdeněk Hubáček, Otrokovice; Luboš Bauer, Brno, Koněvova; Maryla Šeinerová, Třebíč; Tomáš Hruška, Brno, Koněvova; Drahomíra Sýkorová, Třebíč.

Severomoravský kraj

A: Antonín Rozsypal, SPŠ el. Olomouc; Ivo Beránek, Nový Bohumín; Jiří Matys, SPŠ el. Mohelnice; Jaroslav Ramík, Ostrava 1; Petr Sural, Frýdek-Místek; Pavel Löffelmann, Bohumil Strakoš – Ostrava 1; Jiří Chromec, Olomouc-Hejčín; Helena Kupková, Litovel; Jiří Richterek, SPŠ Ostrava-Vítkovice.

B: Tomáš Homola, Olomouc-Hejčín; Vladimír Dresler, Bílovec; Libuše Jelínková, Olomouc-Hejčín; Pavel Šrubař, Bílovec; Janusz Kubatko, Český Těšín (SVVŠ s polským vyuč. jazykem); Jiří Jelínek, Jiří Dybal – Olomouc, Jiřího z Poděbrad; Miroslav Chrastina Jablunkov; Jaroslav Pečiva, Orlová III.; Eva Radková, Ostrava 1.

C: Jaroslav Švrček, Přerov; Petr Michalík, Havířov; Jan Podloucký, Přerov; Richard Švacha, Opava; Vítězslav Chromík, SPŠ Ostrava-Vítkovice; Milada Dvořáčková, Přerov; Jan Hamerník, Rožnov p. Radh.; Pavel Mikoláš, Ostrava 1.; Vladimír Smutný, Šternberk; Miroslav Hlista, Havířov.

Západoslovenský kraj

A: Vladimír Černý, Juraj Šafařík, Juraj Tekuš, Karol Šafařík, Peter Prónay, Filip Guldan, Daniel Žuffa, Zoltan Ivanička, Kamil Bárta a Michal Zajac – Bratislava, Novohradská.

B: Anton Černý a Ján Francú — Bratislava, Novohradská; Anna Žilinská, Piešťany; Stanislav Sýkora, Ján Petrovič, Eva Ambrošová, Mária Ambrošová — Bratislava, Novohradská; Vladimír Kliský, Nitra, E. Gudernu; Karel Nemoga a Roman Prokop — Bratislava, Novohradská.

C: Ján Valášek, Milan Kolibiar, Ján Hanuš, Štefan Šurka, Milan Lehocký a Mojmir Vároš — Bratislava, Novohradská; Ľudovít Faguľa, Trnava; Miroslav Haring, Bratislava, Vazovova; Mikuláš Arendáš a Igor Klačanský — Bratislava, Novohradská.

Stredoslovenský kraj

A: Milan Stacho a Anton Báthory — Vrútky; Ondrej Slavík, Šafárikovo.

B: Štefan Sakáloš, Prievidza; Ján Slabeycius, Banská Bystrica; Peter Kontsek, Martin.

C: Jozef Tvarožek a Igor Prokop — Žilina, Horný Val; Imrich Vrto, Rimavská Sobota; Štefan Baláž, Prievidza; Božena Ďurovová, Martin; Miroslav Sýkora, Žilina, Horný Val; Ladislav Hric, Banská Bystrica; František Zboray, Lučenec; Slavomír Antalík a Peter Dostalík — Zvolen.

Východoslovenský kraj

A: Belo Zorkovský, Peter Hruška a Vladimír Uličiansky — Košice, Šrobárova.

B: Peter Butkovič, Košice, Kováčská; Ondrej Hudák, Košice, Šrobárova; Juraj Šterbák, Prešov, Konštantínova; Stanislav Grega, Košice, Šrobárova.

C: Géza Boden, SPŠ maď., Košice; Vladimír Džudža SPŠ Košice; Ladislav Bagócsi, SPŠ el.-maď., Košice; Jaroslav Rákoš, Košice, Šmeralova.

C. Třetí kolo kategorie A

Termín konání třetího kola FO kategorie A byl stanoven pevně na dny 28. až 30. dubna 1970. Přípravou a provedením 3. kola soutěže byl pověřen Východočeský KV FO v Hradci Králové.

Účastníci celostátního kola XI. ročníku FO byli vybráni na zasedání ÚV FO dne 13. dubna 1970 v Brně. Podle výsledků ve 2. kole bylo pozváno celkem 80 soutěžících, a to z Prahy 31, z kraje Středočeského 4,

Jihočeského 6, Západočeského 2, Severočeského 6, Východočeského 3, Jihomoravského 10, Severomoravského 7, Západoslovenského 7, Středoslovenského 2 a Východoslovenského 2.

Odpoledne 28. dubna 1970 se dostavilo 79 pozvaných účastníků do Hradce Králové na pedagogickou fakultu. Každý účastník dostal informace o soutěži, ubytování a stravenky. Ubytování chlapců bylo zajištěno ve srubech v Novém Hradci a v Domově dělnické mládeže. Dívky byly ubytovány ve vysokoškolských kolejích. Stravování bylo zajištěno pro všechny účastníky v jídelně gymnasia J. K. Tyla.

Slavnostní zahájení soutěže se konalo v 18,30 hod. v budově divadla. Po uvítání předsedou KV FO Zdeňkem Ungermanem promluvili k účastníkům zástupce MŠ ČSR inspektor Josef Bartůnek a za ÚV FO docent RNDr. Bohumil Vlach. Účastníci zahájení pak zhlédli v divadle hru F. Saganové „Kůň v mdlobách“.

Ve středu 29. 4. 1970 řešili účastníci 4 teoretické úlohy. Zadání úloh v potřebném počtu výtisků pro každého soutěžícího zajistil člen ÚV a komise pro konečnou redakci úloh Mojmír Simerský. Při soutěži byly dodrženy obvyklé podmínky, každý soutěžící seděl sám v lavici. Po skončení úloh byli účastníci seznámeni s výsledky úloh, stručným řešením, jakož i s dalšími informacemi na nástěnce.

Odpoledne se uskutečnil zájezd do Opočna a okolí, večer se konala beseda s předsedou ÚV FO prof. RNDr. R. Košťálem a byly promítnuty fyzikální a astronomické filmy a uskutečněna návštěva planetária.

Ve čtvrtek dne 30. 4. 1970 řešili studenti laboratorní úlohu v laboratořích fyziky pedagogické fakulty a v laboratoři fyziky gymnasia J. K. Tyla.

Z členů ÚV FO se kromě Zdeňka Ungermanna a Ivo Volfa zúčastnili 3. kola jednatel ÚV FO VI. Janků, ústřední školní inspektor J. Bartůnek, Fr. Cimbůrek, M. Simerský, dr. B. Vlach a J. Zámečník. Za KV Středoslovenského kraje se zúčastnil M. Falis.

Průběh 3. kola byl hladký, soutěž byla dobře připravena; ze strany účastníků se nevyskytly žádné rušivé vlivy a projevy nekázně. Předseda KV FO informoval o soutěži tisk (Rudé právo, krajský deník Pochodeň), rozhlas i televizi, která vysílala v pondělí 4. 5. 1970 záběry z praktické úlohy.

Při zhodnocení organizační stránky 3. kola je třeba ocenit obětavost vedoucích funkcionářů KV FO odb. as. Zd. Ungermanna, odb. as. I. Volfa; dále práci odb. as. Karla Sieberta a gymn. profesora Přemysla Šedivého, kteří připravili a zajistili provedení laboratorní úlohy, a ochotu doc. dr. Režného, který zajistil odborný výklad při cestě do

Opočna a okolí, a Elišky Suché, hospodářky KPÚ, která se podílela na finančně organizačních pracích. O úspěšný průběh se dále zasloužili někteří posluchači pedagogické fakulty (pomocí při dozorech), vedení katedry fyziky, děkanát pedagogické fakulty a ředitelství gymnasia tím, že dali k dispozici potřebné místnosti s přístroji a uvolnili pracovníky těchto pracovišť.

Úlohy opravili členové ÚV FO, a to:

- úlohu č. 1 dr. Náter a Zámečník, ZSK,
- úlohu č. 2 Živný a Simerský, SMK,
- úlohu č. 3 Ing. Vybíral a dr. Vlach, JMK,
- úlohu č. 4 Cimbůrek a Tesař, Praha,
- laboratorní úlohu č. 5 Ungermann a Volf, VČK.

Výsledky 3. kola včetně navržených odměn vítězům jsou v tabulkách 4, 5 a 6, přehled výsledků klasifikace je v tabulce 7. Výsledky 3. kola jsou ve srovnání s loňskými podstatně lepší, přestože úlohy lze považovat za stejně obtížné jako loni. Celkem 30 účastníků vyřešilo úspěšně 4 úlohy z 5, plných 20 bylo prohlášeno vítězi. Mezi soutěžícími bylo letos 7 studentů SPŠ, z nich bylo 5 úspěšných (vítězi 3). Ve 3. kole soutěžily 3 dívky, úspěšnou řešitelkou se stala 1.

Ve 3. kole soutěžili úspěšně 3 studenti druhých ročníků SVVŠ — gymnasií (Andrej Kugler a Ivan Gabaš z Prahy, K. Šafařík z Bratislavy) a 2 studenti 3. ročníků SPŠ (Karel Svačina, SPŠ strojnická, Gottwaldov; Jiří Skála, SPŠ JT Praha).

Tabulka 7 ukazuje, že nejméně účastníků 3. kola vyřešilo úspěšně úlohu č. 4. Ve skutečnosti řadě studentů na ni nezbyl čas. Poměrně velké těžkosti měli soutěžící s úlohou č. 1. Laboratorní úloha kladla na žáky jen malé nároky po stránce teoretické, téměř vše bylo obsaženo v návodu; zato vyžadovala jistou zkušenost a zručnost při zpracování. Proto byl při klasifikaci kladen větší důraz na zpracování naměřených veličin a vyhodnocení výsledků.

Na schůzi komise ÚV FO pro vyhodnocení výsledků 3. kola kategorie A byly projednány výsledky (viz tabulky 4, 5, 6 a 7) a stanoveno, že prvních 6 vítězů bude tvořit reprezentační družstvo ČSSR na IV. mezinárodní fyzikální olympiádě v Moskvě.

Vítězové 3. kola kategorie A byli stejně jako v minulých letech odměněni z prostředků ministerstva školství. Kromě toho jim zajistil Socialistický svaz mládeže (vznikající v létě 1970 integrací mládežnických organizací v ČSSR) čtrnáctidenní rekreační pobyt. Pobyt se uskutečnil v době od 16. do 30. srpna 1970 na Kamencovém jezeře u Chomutova a byl spojen s prohlídkou západočeských lázní a dvoudenní návštěvou Prahy.

TABULKA 4

Počet žáků soutěžících ve 3. kole kategorie A

Kraj	Počet soutěžících		Celkový počet úspěšných řešitelů			Počet vítězů			Neúspěšní řešitelé		
	celkem	z toho dívek	celkem	%	z toho dívek	celkem	%	z toho dívek	celkem	%	z toho dívek
Praha	31	—	21	68	—	9	29	—	10	32	—
StČ	4	1	2	50	—	—	—	—	2	50	1
JČ	6	—	2	33	—	1	17	—	4	67	—
ZČ	2	—	1	50	—	—	—	—	1	50	—
SC	6	1	5	83	—	1	17	—	1	17	1
VČ	3	—	2	67	—	1	33	—	1	33	—
JM	10	1	9	90	—	4	40	—	1	10	—
SM	6	—	3	50	—	—	—	—	3	50	—
ZS	7	—	5	71	—	3	43	—	2	29	—
StS	2	—	1	50	—	1	50	—	1	50	—
VS	2	—	—	—	—	—	—	—	2	100	—
Celkem	79	3	51	65	1	20	25	—	28	35	2
Loni	72	3	19	26	—	7	10	—	53	74	3

Z 80 pozvaných žáků se nedostavil Antonín Rozsypal ze Severomoravského kraje pro onemocnění.

TABULKA 5

Vítězové 3. kola kategorie A XI. ročníku FO

Pořadí	Jméno	Třída	Škola
1.	Vladimír Černý	3S	SVŠ Bratislava, Novohradská
2. - 4.	Vojtěch Hanzal	3S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
2. - 4.	Jaroslav Kučera	3S	SVVŠ Brno, Křenová
2. - 4.	Václav Novotný	4	SPŠ Jad. tech. Svatoslavova, Praha 4
5.	Miloslav Handl	3S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
6.	Jan Slavík	3S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
7.	Andrej Kugler	2S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
8. - 9.	Karel Juza	3S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
8. - 9.	Pavel Pudlák	3P	SVVŠ Nad štolou, Praha 7
10. - 12.	Leoš Dvořák	3P	SVVŠ Roudnice n.L.
10. - 12.	Oldřich Sís	3S	SVVŠ Hr. Králové
10. - 12.	Milan Stacho	3P	SVŠ Vrutky
13.	Karol Šafařík	2S	SVŠ Bratislava, Novohradská
14.	Jiří Rákosník	4	SPŠ zeměměřičská, Praha 9, Pod Táborem
15. - 18.	Milan Pantůček	3S	SVVŠ Brno, Křenová
15. - 18.	Karel Svačina	3	SPŠ stroj. Gottwaldov
15. - 18.	Juraj Šafařík	3S	SVŠ Bratislava, Novohradská
15. - 18.	Jan Vyhnaněk	3S	SVVŠ Č. Budějovice
19. - 20.	Jan Dobeš	3S	SVVŠ Brno, Křenová
19. - 20.	Miroslav Hradil	3S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2

V tabulce značí P větev přírodovědnou, S speciální třídu matematicko-fyzikální.

D. Závěr soutěže kategorií A, B a C

Úspěšní řešitelé druhého kola jsou vesměs žáky přírodovědných větví nebo speciálních matematicko-fyzikálních tříd. V odstavci B (2. kolo) jsme jmenovitě uvedli celkem 280 nejlepších úspěšných řešitelů podle krajů, z nich je 103 žáků speciálních matematicko-fyzikálních tříd (37 %), 156 žáků přírodovědných větví (55,5 %), 1 žákyně humanitní větve, 1 žák specializace počítačací stroje, 1 žák specializace lineární programování a 18 žáků SPŠ (6,5 %). Tyto údaje stejně jako převaha účastníků speciálních tříd ve 3. kole (z Prahy — 20 ze 31, JMK — 8 z 10 a ZSK — 7 ze 7) svědčí o dobré práci s nadanými žáky. Uvedené skutečnosti by však neměly zájemce o fyziku, matematiku a techniku vůbec odradit, protože schopných fyziků, inženýrů i fyziků-pedagogů potřebujeme mnohem více, než mohou speciální třídy vychovat. Na druhé straně uspěla v soutěži (i při konkurenci studentů speciálních

TABULKA 6

Další úspěšní řešitelé 3. kola kategorie A XI. ročníku FO

Pořadí	Jméno	Třída	Škola
21.	Jaroslav Ramík	3S	SVVŠ Ostrava, Šmeralova
22. – 24.	Zdeněk Kovář	3S	SVVŠ Brno, Křenová
22. – 24.	Petr Šebelík	3S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
22. – 24.	František Škoda	3P	SVVŠ Teplice
25. – 27.	Marek Boguszak	3S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
25. – 27.	Miroslav Richter	3S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
25. – 27.	Daniel Zuffa	3S	SVŠ Bratislava, Novohradská
28. – 30.	Ondřej Matouš	3S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
28. – 30.	Jiří Skála	3	SPŠ Jad. tech. Praha 4, Svatoslavova ul.
28. – 30.	Petr Stíbal	3S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
31. – 32.	Rudolf Švarc	3S	SVVŠ Plzeň, nám. Odborářů
31. – 32.	Petr Vachek	3S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
33.	Jan Kohout	3S	SVVŠ Brno, Křenová
34. – 35.	Filip Guldan	3S	SVŠ Bratislava, Novohradská
34. – 35.	Pavel Löffelmann	3S	SVVŠ Ostrava, Šmeralova
36. – 41.	Ivo Beránek	3P	SVVŠ Nový Bohumín
36. – 41.	Ivan Gabaš	2S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
36. – 41.	Jiří Hampl	3S	SVVŠ Brno, Křenová
36. – 41.	Přemysl Málek	3S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
36. – 41.	Vladimír Novotný	3P	SVVŠ Lovosice
36. – 41.	Jan Staněk	3S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
42. – 43.	Soňa Jánková	3S	SVVŠ Brno, Křenová
42. – 43.	Lubomír Zampr	3S	SVVŠ Liberec
44. – 47.	Jaroslav Balík	3P	SVVŠ Vlašim
44. – 47.	Jaromír Bukovský	3P	SVVŠ Roudnice
44. – 47.	Zdeněk Bušák	4	SPŠ el. Pardubice
44. – 47.	Bohuslav Nunvář	3P	SVVŠ Jindř. Hradec
48.	Karel Andrejsek	3S	SVVŠ W. Piecka, Praha 2
49. – 51.	Jiří Hrstka	3P	SVVŠ Mělník
49. – 51.	Milan Kadlec	3P	SVVŠ Gottwaldov
49. – 51.	Slavomír Krasnický	3P	SVVŠ Nad štolou, Praha 7

tříd) řada studentů nejen přírodovědných větví, ale též studenti SPŠ, jejichž příprava ve vlastní fyzice je poměrně krátká a je soustředěna do prvního ročníku.

Ze zpráv KV FO uvádíme pouze některé závěry:

V kategorii A bylo studijní téma Rotační pohyby uveřejněno až v únorovém čísle Rozhledů a nemohlo být využito v soutěži. Studijní témata nejsou žákům dostatečně dostupná, protože časopis Rozhledy je málo odebíráno.

V kategorii C problematika příkladů předbílá tematiku osnov.

TABULKA 7

Přehled výsledků klasifikace 3. kola kategorie A

Úloha čís.	Známky				Průměr. známka	Téma úlohy
	1	1-	2	3		
1.	17	4	15	43	2,30	mechanika: šikmý vrh, zákon zachování me- chanické energie
2.	48	0	18	13	1,56	elektromagnetická in- dukce: pohyb přímého vodiče v homogenním magnetickém poli
3.	31	3	30	25	2,04	elektrostatika a kmity: nabitá kulička zavěšená na vlákně v elektrickém poli
4.	9	11	12	47	2,40	geometrická optika: roz- ptylná čočka – dyna- mika kruhového pohy- bu
5. exper.	18	0	28	33	2,21	střídavý el. proud: mě- ření indukčnosti a od- poru cívky v sériovém obvodu RL
CELKEM	113	18	103	161	2,10	

Navrhuje se, aby do soutěže byl zařazen jeden popř. dva příklady z elektřiny nebo optiky, které by navazovaly na látku ZDŠ.

Řada učitelů doporučuje stručnější příklady s menším počtem dílčích otázek.

Pokud jde o samotné úlohy, obsahují žákovská řešení jak věcné, tak formální nedostatky (nedůsledné obecné řešení, neúplný výklad postupu řešení, chybné používání jednotek, špatná úprava prací). Práce žáků SPŠ mají zpravidla mnohem lepší grafickou úpravu než práce žáků SVVŠ, nebo gymnasií.

E. Soustředění vybraných úspěšných řešitelů MO a FO

Podle organizačního řádu matematické a fyzikální olympiády, který vydalo MŠK v r. 1963, pořádají ministerstva školství soustředění vybraných účastníků MO a FO. Na základě dohody mezi MŠ ČSR a MŠ SSR kryje veškeré náklady FO celostátního charakteru v roce 1970 ministerstvo školství SSR ze svého rozpočtu. Ministerstvo školství SSR převedlo příslušné rozpočtové částky na Ústřední dom dětí a mládeže (ÚDDM) Kl. Gottwalda v Bratislavě, jehož prostřednictvím byly hrazeny náklady na zajištění 3. kola FO ve výši 27 206,— Kčs, odměny vítězům 3. kola FO kategorie A v celkové výši 12 000 Kčs, soustředění FO pro přípravu na IV. MFO ve Vyškově a zejména uspořádání celostátního soustředění vybraných řešitelů MO a FO v Martině. Toto soustředění se konalo od 15. 6. do 3. 7. 1970 v budově SPŠ v Martině, zúčastnilo se ho 90 žáků (z toho 7 dívek). Organizací soustředění z odborného hlediska byly pověřeny ÚV FO a ÚV MO, které provedly na základě návrhů KV MO a KV FO výběr žáků. Rozeslání pozvánek, případné pozvání náhradníků bylo zajištěno letos ÚV FO. ÚDDM Bratislava zajistil na základě rozhodnutí MS SSR soustředění po stránce materiální a personální (pedagogický dozor). Pedagogickou vedoucí soustředění byla pracovnice ÚDDM v Bratislavě Emilie Slobodová.

Podle účasti v jednotlivých olympiádách i podle zájmu, byli účastníci rozdělení do zhruba stejných tříd: matematické, matematicko-fyzikální (MF) a fyzikální (F). V soustředění byla vyložena tato fyzikální témata:

Chyby měření (odb. as. Ivan Baník, SVŠT Bratislava pro třídu F)
Mechanické kmity a vlny (odb. as. J. Zámečník a I. Baník, SVŠT Bratislava pro třídu F a odb. as. D. Pelech, pedagogická fakulta Banská Bystrica pro třídu MF)

Kromě toho přednášel odb. as. Zdeněk Ungermann z Hradce Králové pro fyzikální třídu o použití limity posloupností ve fyzice.

Zahájení soustředění se zúčastnil za ÚV FO jednatel Vl. Janků, závěrečné besedy se zúčastnil za ÚV FO Ing. B. Vybíral.

F. První a druhé kolo kategorie D

První kolo kategorie D probíhalo do 10. března 1970. Úlohy pro 1. kolo byly uveřejněny v časopisech Fyzika ve škole (10. číslo VII. ročníku a 1. číslo VIII. ročníku) a též v Rozhledech matematicko-fyzikálních. Prvé tři úlohy byly zveřejněny v červnu 1969. Jako obvykle vydalo SPN

TABULKA 8

Počet ZDŠ, které se zúčastnily FO

Kraj	Počet ZDŠ v kraji	1. kola se zúčastnilo		2. kola se zúčastnilo		3. kola se zúčastnilo	
		počet	%	počet	%	počet	%
Praha	168	116	69	86	51	45	27
StČ	297	79	27	53	18	26	9
JČ	192	79	41	56	29	—	—
ZČ	222	72	32	43	19	8	4
SČ	293	111	38	67	23	41	14
VČ	316	160	51	86	27	28	9
JM	465	188	40	103	22	47	10
SM	462	134	39	101	22	28	6
ZS	532	223	42	175	33	50	9
StS	387	233	59	118	30	51	13
VS	348	122	35	84	24	8	2
Celkem	3682	1517	41	972	26	332	9
Loni	3707	1546	42	1088	29		

účelový tisk ministerstva školství pro tuto kategorii leták o celkovém nákladu 10 000 výtisků.

Počet ZDŠ, které se zúčastnily FO se ve srovnání s loňskem vcelku nezměnil, největší účast škol mají Praha (69 %) a Středoslovenský kraj (59 %), nejméně škol je zapojených do soutěže v kraji Střeďočeském (27 %). Přehled o počtu škol zapojených do soutěže je v tabulce 8.

Počet soutěžících v 1. kole je prakticky stejný jako loni, procento úspěšných řešitelů 1. kola kleslo o 6 %. Počet dívek soutěžících v 1. kole je zhruba stejný jako loni (asi 33 %), úspěšných dívek vzhledem k celkovému počtu soutěžících dívek je letos 38 % proti loňským 48 %. Druhé kolo soutěže se konalo zpravidla v okresních městech ve středu 15. 4. 1970. Ve 2. kole soutěžilo letos o 596, tj. o 17 % méně než loni. Procento úspěšných řešitelů je zhruba stejné, letos 45 %, loni 48 %. Podrobné údaje jsou uvedeny v tabulce 9.

Ve zprávách KV FO je ke kategorii D mnoho připomínek, většinou z okresů i škol. Týkají se zejména náročnosti příkladů 1. kola a délky zadaných příkladů. Jsou žádány krátké příklady bez dílčích otázek.

TABULKA 9

Počet žáků soutěžících v 1. a 2. kole kategorie D
(S – počet soutěžících, Ú – počet úspěšných řešitelů)

Kraj	Počet žáků soutěžících v 1. kole					Počet žáků soutěžících ve 2. kole				
	S	Ú	Úsp. v %	Z toho dívek		S	Ú	Úsp. v %	Z toho dívek	
				S	Ú				S	Ú
Praha	809	379	47	278	117	276	228	82	75	56
StČ	307	143	47	117	54	110	65	59	47	23
JČ	354	171	48	113	59	149	80	54	54	32
ZČ	300	240	80	38	21	168	45	27	17	7
SC	657	239	36	190	77	221	127	57	66	28
VC	775	305	39	234	83	270	148	55	75	39
JM	688	287	42	208	84	275	87	32	78	16
SM	590	236	40	186	67	235	141	60	67	34
ZS	1357	720	53	533	233	670	281	42	215	74
StS	1377	430	31	552	131	383	201	52	123	60
VS	642	249	39	235	82	245	99	40	80	24
Celkem	7856	3399	43	2684	1008	3002	1402	45	897	403
Loni	8150	3969	49	2763	1257	3598	1716	48	1121	472

Oprávněně kritizují nedostatky v zadání úloh v letáku (chybějící zadané údaje v př. 3. a 7. prvního kola). Tyto údaje byly sice KV FO dodatečně sděleny v září 1969, ale na okresy a školy došly pravděpodobně pozdě. Dále požadují KV FO větší množství „vzorových“ řešení úloh.

Pokud jde o vlastní práce žáků, zůstávají slabou stránkou obecná řešení a úprava prací.

G. Třetí kolo kategorie D

Třetí kolo kategorie D se konalo v sobotu 23. května 1970 zpravidla v krajském městě, letos ve všech krajích kromě Jihočeského kraje. Z tabulky 10 je zřejmá jak účast, tak i počet úspěšných řešitelů 3. kola. Podle názoru rady KV FO byly zadané úlohy sice náročné (procento úspěšných řešitelů se letos zmenšilo na 32 %), ale úměrné možnostem

TABULKA 10

Počet žáků soutěžících ve 3. kole kategorie D

Kraj	Počet soutěžících		Počet úspěšných řešitelů			Soutěž 3. kola se konala
	celkový	z toho dívek	celkový	v %	z toho dívek	
Praha	74	14	41	55	9	počtvrté podruhé potřetí počtvrté popáté potřetí potřetí potřetí poprvé
StČ	58	21	18	31	4	
ZČ	11	1	3	27	—	
SC	69	15	20	28	5	
VČ	37	8	12	32	—	
JM	68	14	23	34	6	
SM	39	4	18	46	—	
ZS	74	16	19	25	3	
StS	89	25	11	12	1	
VS	19	4	5	26	—	
Celkem (10 krajů)	538	122	170	32	28	
Loni (9 krajů)	451	90	200	44	29	

žáků a umožnily dobře stanovit konečné pořadí žáků. Jak plyne z tabulky 10, má nejlepší výsledky Praha, kde soutěžilo ve 3. kole jen 74 žáků z 228 úspěšných ve 2. kole. Pro 3. kolo kategorie D, stejně jako pro 2. kolo, byly příklady připraveny pro celou ČSSR jednotně, pro slovenské kraje připravil text úloh ve slovenském a maďarském jazyce doc. dr. Náter, místopředseda ÚV FO.

Dále uvádíme jména vítězů 3. kola kategorie D. Za vítěze považujeme ty úspěšné řešitele, kteří vyřešili úspěšně 3 úlohy ze 4 zadaných. Z každého kraje uvádíme nejvýše 10 vítězů, v krajích, kde nejsou vítězové ve výše uvedeném slova smyslu, uvádíme jména 3 nejlepších úspěšných řešitelů. U každého žáka je zapsáno sídlo ZDŠ.

Praha

Jiří Zlonický, Praha 3, Jarov; Petr Slačálek, Praha 8, Lyčkovo n.; Jaroslav Šimáček, Praha 4, Táborská; Václav Daněček, Praha 4, Poláčkova; Jiří Měska, Praha 8, Lyčkovo n.; Petr Malý, Praha 9,

U prosecké školy; Milan Neubert, Praha 4, Křesomyslova; Jaroslav Fořt, Praha 3, nám. Barikád; Jan Trlifaj, Praha 8, Lyčkovo nám.; Alena Hoření, Praha 6, Krupkovo nám.

Středočeský kraj

Zdeněk Svoboda, Rakovník; Vladimír Meier, Mladá Boleslav; Anna Zichová, Příbram; Stanislav Chrudimský, Mělník.

Západočeský kraj

Jaroslav Vorel, Sušice; Václav Veselý, Klatovy; Vratislav Kotešovec, Kralovice.

Severočeský kraj

Michal Kubík, Ústí n. L., Vojnovičova; J. Siladiová, Ústí n. L., Moskevská; P. Hradecký a J. Švub, Liberec, U soudu; M. Bittner, Ústí n. L., Gottwaldova.

Východočeský kraj

Josef Hruška, Hradec Králové, Gorkého; Pavel Michek, Chrudim; Dobroslav Kindl, Sezemice; Jiří Svoboda, Pardubice, Dašická; Vítězslav Sekanina, Turnov, Čs. armády; Zdeněk Zákostelský, Hradec Králové, Slezské předměstí.

Žihomoravský kraj

Milan Fikar, Znojmo, Pražská; Michal Horák, Brno, kpt. Jaroše; Antonín Němec, Blansko, Dvorská; Jan Šalanský, Brno, Slov. nám.; Miluše Musilová, Blansko, Dvorská; Pavel Janík, Gottwaldov 5; Zdeněk Burda, Znojmo, Pražská; Lubomír Jahelka, Okříšky; Zdeňka Nosková, Telč III.; Štěpánka Kolářová, Pohořelice.

Severomoravský kraj

Vladimír Mačejovský, Ostrava-Poruba, Thälmannova; Petr Batko, Studénka; Radomír Kuchta, Havířov II.; Petr Selinger, Vrbno p. Pradědem; Ivo Semrád, Opava, Leninova; Jaromír Šimša, Havířov I.; Jaroslav Havelka, Studénka.

Západoslovenský kraj

Vilém Götz, Nitra, n. Mieru; Bystrík Babor a Ľubomír Kollár, Bratislava, Košická; Darina Kučerová, Tlmače, okr. Levice; Bohuš Partyk, Bratislava, Košická; Ján Kanuk, Gajary, okr. Bratislava-vidiek; Pavol Meravý, Bratislava, Košická.

Středoslovenský kraj

J. Dalzuffo, Lučenec II.; P. Gottreich, Lučenec V.; Štefan Rada, Ožďany.

Východoslovenský kraj

Ján Zajac a Ján Krivoš, Košice, Februarového víťazstva; Pavol Pavlo, Trebišov.

H. Závěry k průběhu soutěže FO

V průběhu XI. ročníku fyzikální olympiády vykonali kus práce na úseku šíření hlubších fyzikálních znalostí jak funkcionáři FO všech stupňů, tak učitelé i soutěžící. Přesto nemůžeme být s výsledky plně spokojeni. Mnoho by bylo možno i v samotném průběhu soutěže zlepšit. Učitelé ZDŠ i středních výběrových škol považují často zadané příklady za příliš náročné a obsírné.

ÚV FO, zejména jeho komise, by velmi uvítal návrhy na vhodné příklady, sice stejně náročné, ale stručné zadáním. Tato výzva je zvláště aktuální pro kategorii D.

ÚV FO nepovažuje soutěž FO (ani v kategorii D) za záležitost masovou, avšak neúčast ani jednoho studenta SVVŠ (gymnasia) v soutěži (někde dokonce po několik let) vybízí k zamyšlení nad prací učitelů fyziky na této škole.

Rovněž nezapojení celých okresů do fyzikální olympiády (Nymburk, Kutná Hora – SČK, Humenné – VSK) signalizuje nedostatečnou práci s talentovanými žáky ZDŠ.

Naproti tomu lze za dobrou organizátorskou i propagační činnost v soutěži FO kategorie D vyzvednout kraje Praha (zajišťuje jednatel KV M. Voráček) a kraj Středoslovenský (předseda KV FO P. Ferko).

V závěru vyslovujeme poděkování všem učitelům ZDŠ, středních výběrových škol i pracovníkům školské správy a vysokoškolským učitelům, kteří se na přípravě a průběhu soutěží FO podíleli, a jsme přesvědčeni, že i v příštím období budou pomáhat žákům prostřednictvím FO v hlubším a aktivním pochopení přírodovědných poznatků a zákonitostí.

II. ČÁST

TÉMATA K PROSTUDOVÁNÍ

1. Kategorie A

Rotační pohyby a setrvačníky

Ing. Bohumil Vybíral, CSc., VAAZ, Vyškov

Úvod

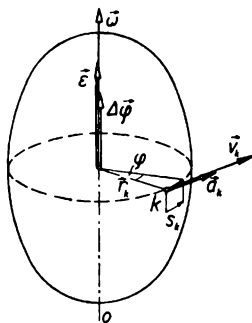
V učivu pro 1. ročník gymnasia je věnováno rotačním pohybům těles málo místa a o setrvačnicích se nehovoří vůbec. Důvody pro to jsou metodické, jde totiž o velmi obtížnou partii mechaniky. Protože teorie o pohybu těles je velmi důležitá pro fyzikální a zejména pro technické aplikace, a protože lze sestavit z této partie řadu poučných a zajímavých úloh, byl tento článek zařazen jako studijní text pro kategorie A v XI. roč. fyzikální olympiády.

1. Popis pohybového stavu tělesa

V tomto článku se budeme zabývat pohybem dokonale tuhého tělesa, tedy tělesa, u něhož vzdálenosti částic, z nichž je těleso složeno, jsou neproměnné.

Nejjednodušším pohybem dokonale tuhého tělesa je *pohyb translační (posuvný)*. Je to pohyb, při němž libo-

volná přímka spojená s tělesem zůstává stále rovnoběžná s kteroukoliv svou předcházející polohou. V důsledku toho všechny body tělesa opisují shodné dráhy, tzn., že i jejich rychlosti a zrychlení jsou v každém okamžiku stejné.



Obr. 1

*Rotacím (otáčivým) pohybem kolem pevné osy nazýváme pohyb, při němž alespoň dva body tělesa (určující osu rotace) jsou v klidu. Při rotaci opisují všechny body tělesa kruhové oblouky se středem na ose rotace. Můžeme proto za souřadnici udávající polohu tělesa zvolit středový úhel φ (viz obr. 1), měřený od jisté výchozí polohy. Tomuto úhlu budeme říkat *úhlová dráha*. Bude užitečné zavést si úhlovou dráhu jako*

vektor, ležící v ose rotace. Jeho orientaci určíme podle pravidla pravé ruky: ukazují-li prsty pravé ruky směr pohybu bodů rotujícího tělesa, udává palec orientaci vektoru úhlové dráhy.

Úhlová dráha φ , která je stejná pro všechny body rotujícího tělesa, je dána jako funkce času. Bude proto vhodné dále si zavést pojem *okamžité úhlové rychlosti* vztahem

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad (1)$$

a okamžitého *úhlového zrychlení* vztahem

$$\epsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}. \quad (2)$$

Je zřejmé, že ω a ϵ jsou vektory, jejichž směr a orientace je totožná se směrem a orientací vektoru φ . Rozměr jednotky úhlové rychlosti je s^{-1} , úhlového zrychlení s^{-2} . Pro dráhu, velikost rychlosti a tečného zrychlení k -tého bodu tělesa platí vztahy

$$s_k = \varphi r_k, \quad (3)$$

$$v_k = \omega r_k, \quad (4)$$

$$a_k = \epsilon r_k, \quad (5)$$

kde r_k je vzdálenost k -tého bodu od osy rotace.

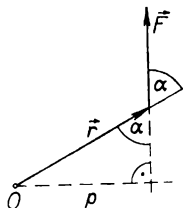
Otáčením tělesa kolem okamžité osy nazýváme takový pohyb, při němž jeden bod tělesa — jímž prochází osa rotace — je pevný.

Zcela volné těleso koná *obecný pohyb*; lze ukázat, že tento pohyb může být v každém okamžiku rozložen na jedinou elementární translaci a jedinou elementární rotaci kolem okamžité osy.

2. Dynamika rotačního pohybu tělesa

2.1. Moment síly

Představme si těleso, jehož jeden bod je pevný (např. bod O v obr. 2) a na něž působí síla \mathbf{F} , která neprochází tímto bodem. Pak tato síla způsobí otáčení tělesa. Otáčivý účinek síly bude tím větší, čím větší bude síla a čím dále bude působit od pevného bodu. Za míru otáčivého účinku síly můžeme proto považovat součin z velikosti síly a vzdálenosti její vektorové přímky od pevného bodu. Tento součin nazýváme *momentem síly* vzhledem k bodu O ; bod O pak nazýváme mo-

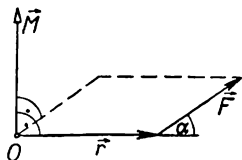


Obr. 2

mentovým bodem. Pro velikost momentu síly tedy dostáváme

$$M = pF = rF \sin \alpha . \quad (6)$$

Protože síla \mathbf{F} způsobí rotaci kolem osy kolmé na rovinu určenou silou \mathbf{F} a polohovým vektorem \mathbf{r} , tedy kolem osy v prostoru jistým způsobem orientované, je moment síly vektorovou veličinou ležící v této ose. Velikost tohoto vektoru je dána rovnicí (6), směr a orientace obrázkem 3, přičemž orientaci určíme podle pravidla pravé ruky stejně jako u vektorů φ , ω , ϵ .



Obr. 3

Velikost, směr i orientaci momentu síly \mathbf{M} lze vyjádřit jedinou vektorovou rovnicí užitím tzv. vektorového součinu (označuje se \times) vektorů \mathbf{r} a \mathbf{F}

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} : \quad (7)$$

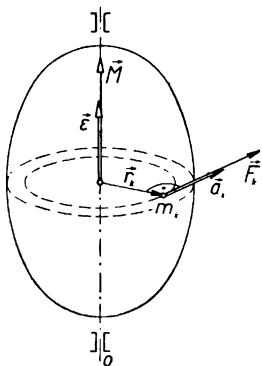
Operace vektorového součinu dvou vektorů se zavádí ve vektorové algebře, která se však na střední škole neprobírá. Uvedeme proto pro úplnost jeho definici: *vektorový součin* dvou vektorů je vektor; jeho velikost je rovna součinu velikostí obou vektorů a sinu menšího úhlu, který oba vektory svírají a který je kolmý k rovině obou vektorů a je orientován na tu stranu, z níž se jeví pozorovateli přechod od prvního vektoru ke druhému, přenesenému do společného působiště, při otočení o menší úhel, ve smyslu kladném, tj. proti pohybu hodinových ručiček. Ucelený přehled o vektorové algebře podává článek [1] a z učebnic např. [2].

Dosud jsme předpokládali, že těleso má jeden pevný bod. Bude-li těleso mít dva pevné body, které určují

polohu pevné rotační osy tělesa, uplatní se pro rotaci jen průmět momentu síly do pevné rotační osy.

2.2. Základní rovnice pro rotační pohyb

Nechť jde o těleso otočné kolem pevné osy O (obr. 4). Toto těleso si můžeme představit složeno z n bodů (částic). Hmotnost k -tého bodu označme m_k . Na k -tý bod nechť působí síla \mathbf{F}_k ležící v rovině kolmé na osu rotace a působící kolmo na průvodič \mathbf{r}_k . Tato síla uděluje k -tému bodu tečné zrychlení \mathbf{a}_k , které je určeno II. Newtonovým zákonem $m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k$. Jelikož pro velikost tečného zrychlení při rotaci tělesa platí vztah (5), můžeme pro velikost síly psát $F_k = m_k r_k \varepsilon$, kde ε je velikost úhlového zrychlení, jež je společné pro všechny body tělesa. Síla \mathbf{F}_k působí momentem o velikosti $M_k = F_k r_k = \varepsilon m_k r_k^2$.



Obr. 4

Velikost celkového momentu působícího na těleso dostaneme součtem přes všechny body, tj.

$$M = \sum_{k=1}^n M_k = \varepsilon \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \varepsilon \mathcal{J}, \quad (8)$$

kde

$$\mathcal{J} = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2. \quad (9)$$

je tzv. *moment setrvačnosti* daného tělesa vzhledem ke

zvolené ose. Správněji píšeme výsledek (8) vektorově ve tvaru

$$\mathbf{M} = \mathcal{J}\epsilon. \quad (10)$$

Výraz (10), vyjadřující vztah mezi momentem síly a uděleným úhlovým zrychlením, se nazývá *základní rovnice rotačního pohybu*.

2.3. Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti (9) je mírou setrvačných účinků tělesa při rotačním pohybu. Z výrazu (9) je zřejmé, že moment setrvačnosti tělesa závisí na rozložení hmotnosti v tělese vzhledem k rotační ose a jeho velikost nejvíce ovlivňují části tělesa nejvzdálenější od rotační osy. Velikost momentu setrvačnosti tedy závisí na poloze a směru rotační osy. Pro určitou polohu a směr osy má moment setrvačnosti určitou velikost a můžeme jej proto pokládat za veličinu skalární.

V případě tělesa se spojitě rozloženou hmotností vypočítáme moment setrvačnosti podle vztahu (9) tím, že dáme limitu příslušného součtu, tedy

$$\mathcal{J} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n m_k r_k^2. \quad (11)$$

Podrobnější informaci o výpočtu momentu setrvačnosti najde čtenář v článku [3].

1. úloha

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního rotačního válce (desky) poloměru r a hmotnosti m vzhledem k ose souměrnosti.

Řešení

Válec rozdělíme na n tenkých dutých válců tloušťky

$$\Delta r = \frac{r}{n}.$$

Hmotnost k -tého válce bude

$$m_k = 2\pi r_k \Delta r h \rho,$$

kde h je výška válce a ρ jeho hustota. Pro poloměr k -tého válce můžeme psát

$$r_k = k\Delta r = r \frac{k}{n}$$

a pro jeho moment setrvačnosti

$$m_k r_k^2 = 2\pi r^4 h \rho \frac{k^3}{n^4} = 2mr^2 \frac{k^3}{n^4},$$

kde $m = \pi r^2 h \rho$ je hmotnost válce. Moment setrvačnosti celého válce vypočteme dosazením do vztahu (11)

$$\begin{aligned} J &= 2mr^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 = 2mr^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \left[\frac{n}{2} (n+1) \right]^2 = \\ &= 2mr^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]^2 = \frac{1}{2} mr^2. \end{aligned}$$

2.4. Kinetická energie rotujícího tělesa

Nechť jde o těleso rotující kolem pevné osy úhlovou rychlostí ω . Pak pro postupnou rychlost k -tého bodu platí vztah (4) a pro jeho kinetickou energii vztah

$$\frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} m_k r_k^2 \omega^2.$$

Pro kinetickou energii celého tělesa dostáváme

$$W = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k r_k^2.$$

Protože suma na pravé straně je moment setrvačnosti (9) vzhledem k rotační ose, můžeme psát

$$W = \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (11)$$

3. Obecný pohyb tělesa

Jak bylo řečeno v 1. kapitole lze obecný pohyb tělesa rozložit na translaci, reprezentovanou např. pohybem těžiště, a na rotaci kolem těžiště. Dynamický popis tohoto pohybu určují *impulsové věty*, přičemž první věta popisuje translaci a druhá věta rotaci tělesa. V důsledku omezeného rozsahu článku se budeme zabývat jen druhou impulsovou větou. Vážný zájemce o mechaniku najde informaci o první impulsové větě např. v učebnicích [2], [4].

3.1. Moment hybnosti

Podobně jako moment síly definujeme u rotačních pohybů i *moment hybnosti* jako vektorový součin polohového vektoru a hybnosti

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (13)$$

kde \mathbf{r} je polohový vektor bodu tělesa, o jehož hybnosti $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ uvažujeme.

Stanovme nyní moment hybnosti tělesa rotujícího kolem pevné osy (viz obr. 4). Vzhledem k tomu, že

rychlost \mathbf{v}_k je kolmá na průvodič \mathbf{r}_k , můžeme pro velikost momentu hybnosti k -tého bodu psát

$$b_k = r_k p_k \sin 90^\circ = r_k m_k v_k = \omega m_k r_k^2.$$

Pro velikost celkového momentu hybnosti tělesa dostáváme

$$b = \sum_{k=1}^n b_k = \omega \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \omega \mathcal{J}, \quad (14)$$

kde \mathcal{J} je moment setrvačnosti tělesa k dané ose. Jelikož úhlová rychlost je vektor, bude moment hybnosti rovněž vektor ležící v ose rotace. Rovnici (14) můžeme tedy psát vektorově ve tvaru

$$\mathbf{b} = \mathcal{J}\boldsymbol{\omega}. \quad (15)$$

3.2. Druhá impulsová věta

Pro moment hybnosti k -tého bodu tělesa v čase t platí

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k. \quad (16)$$

Vzroste-li za krátký časový interval Δt průvodič o $\Delta \mathbf{r}_k$ a hybnost o $\Delta \mathbf{p}_k$, vzroste moment hybnosti o $\Delta \mathbf{b}_k$. V čase $t + \Delta t$ bude platit

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_k + \Delta \mathbf{b}_k &= (\mathbf{r}_k + \Delta \mathbf{r}_k) \times (\mathbf{p}_k + \Delta \mathbf{p}_k) = \\ &= \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k + \mathbf{r}_k \times \Delta \mathbf{p}_k + \Delta \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k + \Delta \mathbf{r}_k \times \Delta \mathbf{p}_k. \end{aligned} \quad (17)$$

Použili jsme zákona distributivního, který zůstává v platnosti i při vektorovém součinu (nelze ovšem zaměnit pořadí členů v součinu). Zanedbáme-li malý člen $\Delta \mathbf{r}_k \times \Delta \mathbf{p}_k$, odečteme-li rovnici (16) od rovnice (17) a vydělíme-li vzniklou rovnici časovým intervalem Δt , dostaneme

$$\frac{\Delta \mathbf{b}_k}{\Delta t} = \mathbf{r}_k \times \frac{\Delta \mathbf{p}_k}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{r}_k}{\Delta t} \times \mathbf{p}_k.$$

Protože

$$\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{v}_k \text{ a } \frac{\Delta \mathbf{r}_k}{\Delta t} = \mathbf{v}_k,$$

je druhý člen jako součin dvou stejnosměrných vektorů roven nule ($\sin 0^\circ = 0$), platí tedy

$$\frac{\Delta \mathbf{b}_k}{\Delta t} = \mathbf{r}_k \times \frac{\Delta \mathbf{p}_k}{\Delta t} = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = \mathbf{M}_k. \quad (18)$$

Je tedy časová změna momentu hybnosti k -tého bodu rovna momentu síly působícímu na k -tý bod.

Sečteme-li momenty (18) pro celé těleso, dostaneme

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Delta \mathbf{b}_k}{\Delta t} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}_k = \mathbf{M}$$

a z toho

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \sum_{k=1}^n \mathbf{b}_k = \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta t} = \mathbf{M}. \quad (19)$$

Tento výsledek, který vyjadřuje, že časová změna celkového momentu hybnosti tělesa vzhledem k určitému bodu je rovna výslednému momentu vnějších sil k témuž bodu, se nazývá *druhá impulsová věta*. Tuto větu lze interpretovat geometricky: Rychlost koncového bodu vektoru celkového momentu hybnosti je rovna výslednému momentu sil k témuž bodu. Půjde-li o těleso rotující kolem pevné osy, můžeme užitím vztahu (15) přepsat výsledek (19) do tvaru

$$\frac{\Delta}{\Delta t} (\mathcal{J}\omega) = \mathbf{M}. \quad (20)$$

Bude-li výsledný moment sil roven nule, pak bude i $\Delta \mathbf{b} = 0$, a tedy celkový moment hybnosti tělesa bude stálý co do velikosti i co do směru

$$\mathbf{b} = \mathcal{J}\omega = \text{konst.} \quad (21)$$

Tento důležitý výsledek se nazývá *zákon zachování momentu hybnosti*.

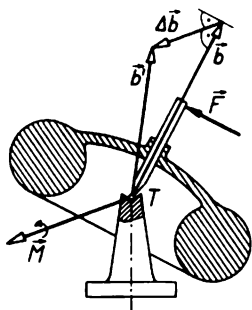
Uveďme příklad, ve kterém se uplatní tento zákon. Roztočíme-li osobu stojící na otáčivé stoličce s pažemi upaženými (velký moment setrvačnosti) a osoba připaží (malý moment setrvačnosti), vzroste její úhlová rychlost. Tohoto úkazu využívá např. krasobruslař při piruetě nebo gymnasta při sklopce. Protože se jedná o izolovanou soustavu ($\mathbf{M} = 0$), platí zde zákon zachování momentu hybnosti. Kinetická energie v obou polohách není stejná, ale liší se o práci, kterou osoba vykonala při zmenšování momentu setrvačnosti na překonání odstředivých sil.

4. Setrvačníky

4.1. Volný setrvačnick

Setrvačnickem nazýváme tuhé homogenní, osově souměrné rotační těleso s velkým momentem setrvačnosti. Pro homogenní těleso rotující kolem osy souměrnosti platí vztahy, které byly odvozeny pro rotaci tělesa kolem pevné osy. Osa souměrnosti je totiž tzv. *osou volnou*, tj. osou, kolem které bude těleso stabilně rotovat, i když nebude uložena v ložiskách (domyslíme-li si ovšem působení tíhové síly nebo podepřeme-li těleso v těžišti).

Vyšetřeme nejprve chování tzv. *volného setrvačnicku*, tj. setrvačnicku, u něhož moment působících sil je roven nule. Takovým setrvačnickem je např. setrvačnick podepřený v těžišti (viz obr. 5). Roztočíme-li takový setrvačnick přesně kolem osy souměrnosti, která se nazývá osou setrvačnicku, bude v důsledku $\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{b} = \text{konst.}$ (viz rovnici 19), tedy moment hybnosti, i osa setrvačnicku, budou mít v prostoru stálý směr.



Obr. 5

Této vlastnosti setrvačníku se využívá v letectví u indikačních a stabilizačních přístrojů, jako je např. umělý horizont indikující polohu letadla v mlze, zatáčkoměr, setrvačnickový kompas a tzv. automatický pilot, který slouží k automatickému řízení a k stabilizaci letadla.

4.2. Setrvačnick podrobený vnějšímu působení

Uvažujme o setrvačníku z minulého odstavce, o kterém jsme předpokládali, že byl roztočen přesně podle osy souměrnosti, tedy tak, že osa setrvačníku splývá se směrem momentu hybnosti $\mathbf{b} = \mathcal{J}\boldsymbol{\omega}$. Působí-li na setrvačnick vnější moment síly, můžeme si jej rozložit do směru osy setrvačníku a do kolmice na osu. Všimněme si odděleně účinků těchto složek.

Moment síly působící v ose setrvačníku ovlivňuje podle II. impulsové věty pouze velikost momentu hybnosti, a tím úhlové rychlosti setrvačníku. Tedy setrvačnick roztáčí nebo brzdí (např. vlivem tření v podpěrném bodě).

Nechť nyní působí v časovém intervalu Δt kolmo na osu setrvačníku v rovině nákresny (viz obr. 5) síla \mathbf{F} . Podle II. impulsové věty (19) vyvolá moment \mathbf{M} této síly, který míří kolmo z nákresny, změnu momentu hybnosti $\Delta\mathbf{b} = \mathbf{M}\Delta t$ v témž směru. Osa setrvačníku se pak postaví do směru výsledného momentu hybnosti \mathbf{b}' . Účinek síly \mathbf{F} je tedy takový, že osa setrvačníku se snaží sklopit do směru osy rotace vynucené silou \mathbf{F} .

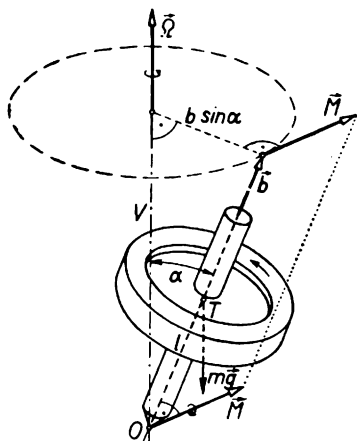
Vyšetřme nyní chování setrvačníku, působí-li kolmo na jeho osu moment síly \mathbf{M} stálé velikosti. Toho můžeme dosáhnout např. tím, že setrvačnicko pod těžištěm v bodě O (obr. 6) a vykloníme o úhel α od svislice V . K vyšetření pohybu setrvačníku v tomto případě užijeme geometrické podoby II. impulsové věty. Protože moment síly \mathbf{M} působí stále kolmo na rovinu danou momentem hybnosti \mathbf{b} a svislicí V procházející opěrným bodem O , musí koncový bod vektoru \mathbf{b} vykonávat rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru $b \sin \alpha$. Podle II. impulsové věty je rychlost pohybu koncového bodu vektoru \mathbf{b} rovna momentu síly \mathbf{M} . Označme Ω úhlovou rychlost tohoto pohybu, který se nazývá *pohybem precesním*. Ze vztahu $\omega r = v$ mezi úhlovou rychlostí ω a rychlostí v při pohybu po kružnici, ve kterém odpovídá $\omega \sim \Omega$, $r \sim b \sin \alpha$ a $v \sim M$, dostaneme vztah

$$\Omega b \sin \alpha = M .$$

Z toho

$$\Omega = \frac{M}{b \sin \alpha} = \frac{M}{J \omega \sin \alpha} \quad (22)$$

je velikost úhlové rychlosti precesního pohybu setrvač-



Obr. 6

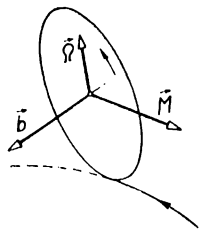
niku. Směr a orientace vektoru Ω jsou dány obr. 6. V případě setrvačnicku na obr. 6, který nazýváme *setrvačnickem těžkým*, protože moment síly o velikosti $M = mgl \sin \alpha$ je způsoben tíhou setrvačnicku, dostáváme

$$\Omega = \frac{mgl}{J\omega}.$$

U těžkého setrvačnicku nezávisí tedy úhlová rychlost precesního pohybu na úhlu α .

Právě popsaná teorie setrvačnicku je jen přibližná, protože jsme nepočítali s příspěvkem momentu hybnosti od precesního pohybu. Jelikož bývá tento příspěvek velmi malý ($\Omega \ll \omega$), je vztah (22) dostatečně přesný.

Precesního pohybu je využito ve vojenství k stabilizaci letu rotujících střel, ve sportovní oblasti k stabilizaci letu disku a v dopravě např. k stabilizaci kymácení velkých lodí. Příznivě se projevuje precese u jednostopých vozidel. Nahne-li motocyklista motocykl tělem např. vlevo, vznikne moment \mathbf{M} tíhové síly (obr. 7), který vyvolá precese o úhlové rychlosti Ω , otáčející kolo také vlevo. Moment tíhové síly je přitom vyrovnáván momentem odstředivé síly, a proto je motocykl v zatáčce dynamicky stabilnější než automobil, u kterého se precese projevuje nepříznivě.



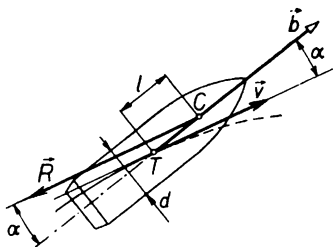
Obr. 7

2. úloha

Střela ráže (tj. vnějšího průměru) $d = 100$ mm a hmotnosti $m = 30,0$ kg byla vystřelena z hlavně kanonu počáteční rychlostí $v_0 = 900$ m s⁻¹. V hlavní byla střele udělena rotace tak, že střela se zařezávala do závitu

o stoupání $s = 30d$.

V důsledku kmitu hlavně při výstřelu se osa střely odchýlila od tečny k dráze o malý úhel α . Ve vzduchu bude na střelu působit síla odporu vzduchu $R = 2,00 \cdot 10^3 \text{ N}$ ve směru rovnoběžném s tečnou k dráze, a to v působišti C vzdáleném o $l = 1,5d$ od těžiště (viz obr. 8). Vypočítejte:



Obr. 8

- celkovou počáteční kinetickou energii střely,
- kolik otáček precesního pohybu střela vykoná, je-li doba letu střely $t = 64,1 \text{ s}$ a budeme-li předpokládat $R = \text{konst.}$

Při výpočtu momentu setrvačnosti považujte střelu za válec.

Řešení

- Pro celkovou počáteční kinetickou energii střely platí

$$W_k = \frac{1}{2} (mv_0^2 + \mathcal{J}\omega^2),$$

kde

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{2} \right)^2 \text{ a } \omega = \frac{2\pi}{T},$$

přičemž T je doba potřebná k jedné otáčce střely v hlavni, tj. k proběhnutí závitu výšky s . Platí tedy

$$s = v_0 T = 2\pi v_0 T = \frac{2\pi v_0}{\omega},$$

z toho

$$\omega = \frac{2\pi v_0}{s} = \frac{\pi v_0}{15d}.$$

Po dosazení do hořejšího vztahu dostaneme

$$W_k = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{30} \right)^2 \right].$$

b) Střela bude vykonávat precesní pohyb s úhlovou rychlostí (22).

Velikost momentu síly je $M = Rl \sin \alpha = 1,5 R d \sin \alpha$, velikost momentu hybnosti je

$$b = \mathcal{J}\omega = \frac{\pi d m v_0}{120}.$$

Po dosazení do výrazu (22) dostáváme

$$\Omega = \frac{180}{\pi} \frac{R}{m v_0}.$$

Velikost úhlové rychlosti precesního pohybu tedy nezávisí na úhlu α (pro velké α by však střela ztratila stabilitu). Doba jedné otáčky je

$$T_p = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\pi^2}{90} \frac{m v_0}{R},$$

pro počet otáček precesního pohybu během letu střely dostáváme

$$n = \frac{t}{T_p}.$$

Číselně

$$a) W_k = \frac{1}{2} 30,0 \cdot 900^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{30} \right)^2 \right] \mathcal{J} = 1,22 \cdot 10^7 \mathcal{J},$$

$$b) T_p = \frac{\pi^2}{90} \frac{30,0 \cdot 900}{2,00 \cdot 10^3} \text{ s} = 1,48 \text{ s}, \quad n = \frac{64,1}{1,48} = 43,3.$$

Literatura:

- [1] Josef Zámečník, *Základy vektorové algebry, Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 47 (1968–69), č. 2, 75–80 a č. 3, 130–137.
- [2] Antonín Bělař a kol., *Fyzika pro učitele I.*, Praha 1967.
- [3] Zdeněk Ungermann, *Odvození momentu setrvačnosti elementárními prostředky, Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 46 (1967 až 68), č. 8 a 9.
- [4] Zdeněk Horák, František Krupka, *Fyzika*, Praha 1966.

2. Kategorie B

Pružná deformace tuhého tělesa

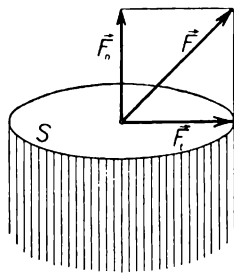
Zdeněk Ungermann, PF Hradec Králové

Ve studijním textu se zaměříme hlavně na pružnou deformaci v tahu, v tlaku, ve smyku a v torzi. Než začnete studovat tento text, je nutné si nejdříve zopakovat příslušnou látku z druhého ročníku SVVŠ (F II, str. 81–88).

1. Pružnost v tahu a v tlaku

Vnější sílu F , která působí na rovinnou plochu tuhého tělesa, můžeme rozložit na dvě složky, z nichž jedna F_n je kolmá k uvažované ploše a druhá F_t je s ní rovnoběžná (obr. 9). Jestliže S je obsah uvažované plochy, pak

$\sigma = \frac{F_n}{S}$ je normálové napětí (tah,



Obr. 9

tlak) a $\tau = \frac{F_t}{S}$ je tečné (tangenciální) napětí (smyk, torze). Místo σ v dalším používáme také p . Jednotkou napětí v soustavě SI je N m^{-2} .

Pro deformaci v tahu a v tlaku zavádíme relativní podélné prodloužení

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0},$$

které značí prodloužení drátu jednotkové délky.

Pro pružnou deformaci v tahu nebo v tlaku platí zákon Hookův: Relativní podélné prodloužení je přímo úměrné normálovému napětí. To znamená, že pro deformaci v tahu a v tlaku je

$$\varepsilon = \frac{1}{E} p_1, \quad (1)$$

kde E je Youngův modul pružnosti v tahu.

Při tahu je síla F_n orientována od tělesa a při tlaku má orientaci opačnou, dáváme jí záporné znaménko. Při deformaci v tahu je $\varepsilon > 0$ a také $\Delta l > 0$, při deformaci v tlaku je podle (1) $\varepsilon < 0$ a také $\Delta l < 0$, $l_0 > l$ a jde o zkracování.

Při deformaci v tahu i v tlaku se mění nejen délka, ale též příčné rozměry. Mírou této příčné deformace je relativní příčné zkrácení (prodloužení), jež je definováno vztahem

$$\eta = \frac{\Delta d}{d},$$

kde d je některý příčný rozměr (např. průměr drátu) a Δd jeho zkrácení (prodloužení).

Podle Hookova zákona platí

$$\eta = k p ; \quad (2)$$

k je součinitel příčné deformace.

Podle (1) je $p = \varepsilon E$, a tedy vztah (2) můžeme upravit:

$$\eta = k \varepsilon E = \mu \varepsilon .$$

$\mu = k \cdot E = \eta/\varepsilon$ je Poissonovo číslo a znamená např. poměr relativního příčného zkrácení (prodloužení) k relativnímu podélnému prodloužení (zkrácení). Poissonovo číslo má u většiny látek hodnotu přibližně 0,3.

Úloha

Vypočtěte relativní změnu objemu tyče čtvercového průřezu o hraně průřezu a , je-li Youngův modul materiálu tyče v tahu E a Poissonova konstanta μ . Normálové napětí je p . Deformující síla působí ve směru délky l .

Řešení

Označení veličin: $V, V_k \dots$ počáteční a konečný objem tyče, $l \dots$ počáteční délka tyče před deformací, $\Delta a \dots$ lineární příčná deformace (zkrácení), $\Delta l \dots$ lineární podélná deformace (prodloužení).

Pro změnu objemu při deformaci v tahu dostáváme

$$\begin{aligned} \Delta V = V_k - V &= (a - \Delta a)^2 (l + \Delta l) - a^2 l = -2a l \Delta a + \\ &+ (\Delta a)^2 l + a^2 \Delta l - 2a \Delta a \cdot \Delta l + (\Delta a)^2 \Delta l = \Delta l [a^2 + \\ &+ (\Delta a)^2] + \Delta a (l \Delta a - 2a \Delta l - 2a l) \doteq a(a \Delta l - \\ &- 2 l \Delta a) . \end{aligned} \quad (3)$$

Při úpravě vztahu (3) považujeme $(\Delta a)^2$ jako zanedbatelné vzhledem k a^2 , $l \Delta a$, $a \Delta l$ považujeme jako zanedbatelné vzhledem k $(a \cdot l)$. Hledaná relativní změna se určí užitím vztahu (3)

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{a(a \Delta l - 2l \Delta a)}{a^2 l} = \frac{\Delta l}{l} - 2 \frac{\Delta a}{a} = \varepsilon - 2 \eta.$$

Další úpravou a užitím Hookova zákona dostaneme výsledek

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon (1 - 2\mu) = \frac{1 - 2\mu}{E} p. \quad (4)$$

Jelikož $\mu < 1/2$, plyne z (3), že se objem při deformaci v tahu zvětšuje. V případě deformace v tlaku se výsledek liší znaménkem, tj.

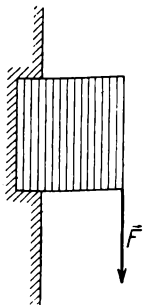
$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{2\mu - 1}{E} p$$

a jedná se tedy o zmenšování objemu.

Součinitel $\gamma = -\frac{\Delta V}{V} \cdot \frac{1}{p}$ se nazývá objemová stlačitelnost. $K = \frac{1}{\gamma}$ je modul objemové pružnosti.

2. Pružnost ve smyku

Na rozdíl od deformace v ohybu, kde uvažujeme nosník, který má rozměry průřezu proti délce zanedbatelné, předpokládejme nyní nosník, který má řádově stejné rozměry průřezu a délky.



Obr. 10

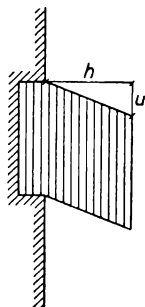
Na volném konci nosníku (obr. 10) v jeho čelní ploše působí síla F . Druhým koncem je nosník vetknut do zdi. Tak jako ohyb je doprovázen nepatrným smykem, tak i smyk v tomto případě, je doprovázen ohybem. Ohyb je však zpravidla tak malý, že jej můžeme proti smyku zanedbat.

Je-li příčný průřez, ve kterém působí síla F , roven S , pak

$$\tau = \frac{F}{S}$$

nazýváme tečným napětím a sílu F tečnou silou. Tečná síla způsobí posunutí jednotlivých vrstev nosníku čili smyk (obr. 11). Označme písmenem u celkové posunutí. Jelikož u je závislé na délce h nosníku, zavádíme další veličinu charakterizující tuto deformaci, tj. relativní posunutí γ (zkos)

$$\gamma = \frac{u}{h}. \quad (5)$$



Obr. 11

I pro tuto pružnou deformaci platí Hookův zákon, tedy

$$\gamma = k \tau. \quad (6)$$

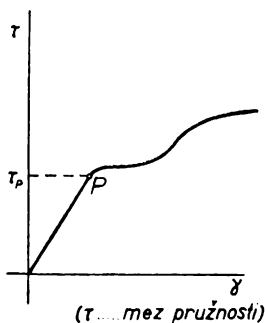
Zavedeme-li místo konstanty k její převrácenou hodnotu, kterou nazveme modulem pružnosti ve smyku G ($G = \frac{1}{k}$), dostaneme z (6) základní rovnici pro smyk

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \text{ nebo } \tau = G\gamma. \quad (7)$$

Rovnice (7) nám umožňuje definovat modul pružnosti. Modul pružnosti ve smyku je číselně roven myšlenému tečnému napětí, které by způsobilo posunutí u rovné délce h , tj. způsobilo by zkos $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Tato definice nemůže sloužit k měření modulu pružnosti, jelikož není možné dosáhnout tak velkého zkosu. Již daleko dříve

dochází k přerušení materiálu a dále je třeba připomenout, že deformace pro velké γ je nepružná, a tedy vztah (7) neplatí. Následující tabulka udává hodnoty deformačních konstant některých látek.

Materiál	E (N m^{-2})	G (N m^{-2})	μ
Ocel	$21,5 \cdot 10^{10}$	$8,3 \cdot 10^{10}$	0,30
Stříbro	$8,0 \cdot 10^{10}$	$2,9 \cdot 10^{10}$	0,39
Mosaz	$10,5 \cdot 10^{10}$	$4,3 \cdot 10^{10}$	0,37
Měď	$12,0 \cdot 10^{10}$	$4,6 \cdot 10^{10}$	0,32
Hliník	$7,4 \cdot 10^{10}$	$2,7 \cdot 10^{10}$	0,34



Obr. 12

Relativní posunutí je podle Hookova zákona (7) při pružné deformaci přímo úměrné tečnému napětí. Závislost tečného napětí na γ i mimo platnost Hookova zákona můžeme zjišťovat experimentálně. Diagram na obr. 12 znázorňuje tuto závislost pro měkkou ocel. Křivka deformace nemá pro všechny látky stejný průběh. Má však podobný průběh jako při tahu (FII, str. 86), takže i zde mluvíme o mezi kluzu ve smyku, mezi pevnosti ve smyku.

3. Pružnost v torzi

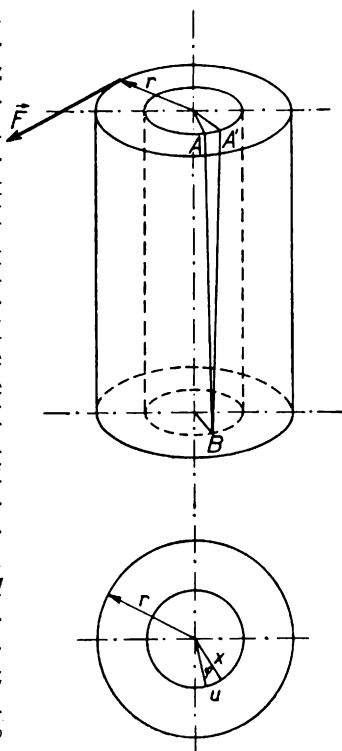
Deformace v torzi vznikne tehdy, budeme-li působit na tyč, drát, provaz, válec silou, která bude ležet v rovině průřezu a bude kolmá k podélné ose tělesa (obr. 13).

Druhý konec je pevný, tj. vzniká reakční moment. Budeme uvažovat jen průřez kruhový, jelikož při nekruhovém průřezu je problém složitější a v praxi se nepoužívá. Uvedený moment síly způsobí pootočení horní podstavy, např. válce. Tím se ovšem pootočí i další průřezy pod horní podstavou a tady vlastně dochází mezi těmito vrstvami ke skluzu. Je tedy zřejmé, že deformace torzí úzce souvisí s deformací smykem. O tom nás také přesvědčí následující úvaha. Dejme si za úkol stanovit závislost mezi momentem síly F a úhlem stočení φ .

Uvažujme válec délky l a poloměru r , na který působí na obvodě podstavy síla F (obr. 13). Horní průřez je deformačním momentem $M = Fr$ pootočen o úhel φ (v radiánech), je to tzv. celkové stočení. Vrstva AB se vlastně smykem posunula do polohy $A'B'$.

Relativní posunutí γ není v celém válci konstantní, mění se se vzdáleností od osy válce. Např. pro vzdálenost x od osy dostáváme podle obr. 13

$$\gamma = \frac{u}{l},$$



Obr. 13

kde $u = x\varphi$, a tedy

$$\gamma = \frac{\varphi}{l} x. \quad (8)$$

Relativní posunutí γ je velmi malé i při velkém stočení, pokud je poloměr válce malý proti jeho délce.

Podle Hookova zákona je podle (7) tečné napětí přímo úměrné relativnímu posunutí, tj.

$$\tau = \gamma G$$

a podle (8) je

$$\tau = \frac{\varphi}{l} G x. \quad (9)$$

Ze vztahu (9) je patrné, že tečné napětí roste přímo úměrně se vzdáleností od osy válce. Průměrné tečné napětí určíme tedy jako aritmetický průměr tečného napětí pro $x = 0$ a pro $x = r$. Pro průměrné tečné napětí dostáváme tak podle (9)

$$\bar{\tau} = \frac{\varphi}{2l} G r. \quad (10)$$

Jelikož síla F působí na plochu $S = \pi r^2$, je

$$\bar{\tau} = \frac{F}{\pi r^2}. \quad (11)$$

Použitím (10) a (11) dostáváme

$$F = \pi \frac{\varphi}{2l} G r^3$$

a moment síly

$$M = F r = \frac{\pi G r^4}{2l} \varphi. \quad (12)$$

Z (12) můžeme určit celkové stočení φ

$$\varphi = \frac{2l}{\pi G r^4} M. \quad (13)$$

Vidíme, že celkové stočení φ je jednak závislé na délce válce l (drátu, tyče . . .), na momentu působící síly M , na materiálu válce (G) a na poloměru válce r . Tato závislost je velmi důležitá. Zmenšuje-li se poloměr deformovaného válce stálé výšky, stočení způsobené tímž momentem M roste se čtvrtou mocninou poloměru. To znamená, že tenký drát, tenké vlákno se i působením velmi malé síly poznatelně stočí; je-li toto vlákno spojeno se zrcátkem, na které dopadá úzký svazek světelných paprsků, můžeme toto stočení měřit. Podle vztahu (13) pak můžeme určit velikost M , a tedy i velikost působící síly F . Toho používáme např. u torzních vah k měření velmi malých sil. Tak byly změřeny gravitační, elektrické síly a síly povrchového napětí kapalin. Dále se např. tohoto poznatku používá u velmi citlivých zrcátkových galvanometrů.

Ve vztahu (13) pro celkové stočení se objevil modul pružnosti ve smyku, kterému proto také někdy říkáme modul torze. Změříme-li všechny ostatní veličiny ve vztahu $\varphi = \frac{2lM}{\pi G r^4}$, můžeme z rovnice vypočítat modul pružnosti ve smyku G . Tato metoda se nazývá statická. Kromě této metody měření G existuje ještě metoda dynamická, metoda torzních kmitů.

4. Torzní kmity

Deformujeme-li torzní drát, na kterém je zavěšena např. koule, o úhel φ_0 a pustíme, pak koule i drát konají

torzní kmity, které při malém φ_0 patří mezi kmity harmonické. K otočení drátu o úhel φ potřebujeme podle (12) moment síly

$$M = \frac{\pi Gr^4}{2l} \varphi.$$

Podle principu akce a reakce působí drát reakčním momentem

$$M' = - \frac{\pi Gr^4}{2l} \varphi = - D \varphi, \quad (14)$$

kde $D = \frac{\pi Gr^4}{2l}$ je tzv. direkční moment, který má ana-

logický význam jako tuhost pružiny. Direkční moment D závisí na fyzikálních vlastnostech deformovaného drátu. Bude-li moment setrvačnosti koule \mathcal{J} , bude při zkroucení o úhel φ působit na kouli moment M' , který působí kmitavý pohyb koule kolem osy drátu. Pro moment síly při rotačním pohybu tělesa platí

$$M' = \mathcal{J} \alpha^1), \quad (15)$$

kde \mathcal{J} je moment setrvačnosti tělesa a α je úhlové zrychlení tělesa. Použijeme-li vztahu (15), pak z rovnice (14) obdržíme

$$\alpha = - \frac{D}{\mathcal{J}} \varphi. \quad (16)$$

Podle definice harmonického pohybu je zrychlení přímo úměrné okamžité výchylce, ale je opačně orientované (F II, str. 108). Konstanta úměrnosti je $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$.

¹⁾ Viz např.: 7. ročník fyzikální olympiády, SPN Praha 1967, str. 48; Fyzika pro II. ročník SVVŠ, SPN Praha 1965, str. 118, 119.

Srovnáme-li vztah (16) s touto definicí, pak pro torzní kmity platí

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}},$$

a dosadíme-li za D , potom

$$T = \sqrt{\frac{8\pi J l}{Gr^4}}. \quad (17)$$

Změříme-li poloměr drátu r , délku drátu l , dobu kmitu T a známe-li moment setrvačnosti zavěšeného tělesa vzhledem k ose totožné s podélnou osou drátu, pro kouli $J = \frac{2}{5} m R^2$, m je hmotnost koule, R její poloměr, pak můžeme ze vztahu (17) určit modul pružnosti ve smyku G . Platí

$$G = \frac{8\pi J l}{T^2 r^4}.$$

Vztahu (17) se dá použít k měření momentu setrvačnosti těles vzhledem k ose zavěšeného vlákna, známe-li modul pružnosti ve smyku.

Shrňme-li uvedené poznatky, pak vidíme, že chování materiálu při pružných deformacích je charakterizováno modulem pružnosti v tahu (E) a ve smyku (G) a Poissonovým číslem μ . Mezi těmito veličinami platí vztah

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (18)$$

Úlohy

1. Gumová hadice má délku l a vnitřní průměr d . Tahem prodloužíme hadici o Δl . Určete vnitřní průměr natažené hadice, jestliže je Poissonovo číslo μ . Předpokládejte, že jde o pružnou deformaci.

Řešte nejdříve obecně a pak pro hodnoty $l = 50$ cm, $d = 1$ cm, $\Delta l = 10$ cm a $\mu = 0,4$.

Řešení

Pro příčnou deformaci v tahu platí zákon Hookův ve formě (2), tj.

$$\eta = \mu \varepsilon, \quad (19)$$

kde $\eta = \frac{\Delta d}{d}$ je relativní příčné zkrácení a $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

relativní podélné prodloužení. Dosadíme-li do vztahu (19), dostaneme

$$\Delta d = \mu \frac{\Delta l}{l} d$$

a průměr po natažení

$$d_k = d - \Delta d = d \frac{l - \mu \Delta l}{l}. \quad (20)$$

Číselně: $d_k = \frac{23}{25}$ cm = 0,9 cm.

2. Ocelový drát hustoty ρ , délky l a průřezu S je napínán silou F . Jak se změní hustota oceli, je-li pro ocel Youngův modul E a modul pružnosti ve smyku G . Uvažujte elastickou deformaci.

Řešení

Označíme-li m hmotnost drátu, V původní objem drátu a ΔV změnu objemu, pak změna hustoty je dána

$$\Delta \rho = \rho - \frac{m}{V + \Delta V}. \quad (21)$$

Jelikož $m = V\rho$, pak z (21) po úpravě dostáváme

$$\Delta \rho = \rho - \frac{\rho}{1 + \frac{\Delta V}{V}} = \frac{\frac{\Delta V}{V}}{1 + \frac{\Delta V}{V}} \rho. \quad (22)$$

Podle vztahu (4) je

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\mu) \frac{p}{E},$$

a jelikož modul pružnosti v tahu a ve smyku souvisejí s Poissonovým číslem [viz (18)], dostaneme tak výsledek ve tvaru

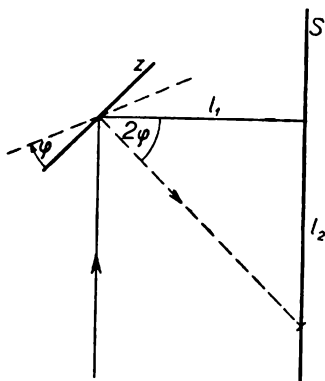
$$\begin{aligned} \Delta \rho &= \rho \frac{1 - \frac{E - 2G}{G}}{1 + \left(1 - \frac{E - 2G}{G}\right) \frac{F}{ES}} \frac{F}{SE} = \\ &= \rho F \frac{3G - E}{3GF + ESG - EF}. \end{aligned} \quad (23)$$

Mohli bychom počítat též přibližně. Ve vztahu (22) můžeme $\frac{\Delta V}{V}$ proti 1 zanedbat a pak dostaneme

$$\Delta \rho = \rho \frac{\Delta V}{V} = \rho \frac{F}{ES} \frac{3G - E}{G}. \quad (24)$$

Změna hustoty je určena vztahem (23) nebo (24). Pro ocel je $E = 2,5 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$, $G = 8 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$. Je-li $F = 10^3 \text{ N}$, $l = 4 \text{ m}$, $S = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ a $\rho = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, pak $\Delta \rho = 7 \text{ kg m}^{-3}$.

3. Zrcátko galvanometru visí na tenkém drátě délky l a průměru d . Světelný paprsek odražený od zrcátka dopadá kolmo na stupnici ve vzdálenosti l_1 od zrcátka.



Obr. 14

Prochází-li cívkou galvanometru elektrický proud, posune se světelná stopa na stupnici o délku l_2 . Určete krouticí moment, je-li modul pružnosti ve smyku G .

Řešení

Při řešení použijeme známého poznatku, že při otočení zrcadla o úhel φ se odražený paprsek odchýlí o úhel 2φ (obr. 14). S na obrázku znamená stupnici galvanometru a Z je zrcátko galvanometru. Krouticí moment určíme podle vztahu (12)

$$M = \frac{\pi d^4 G}{2 l 16} \varphi,$$

$$M = \frac{\pi d^4 G}{32 l} \varphi. \quad (25)$$

Pro malé φ je $\text{tg } 2\varphi = 2\varphi = \frac{l_2}{l_1}$ a odtud podle (25)

$$M = \frac{\pi d^4 G}{64 l} \frac{l_2}{l_1}.$$

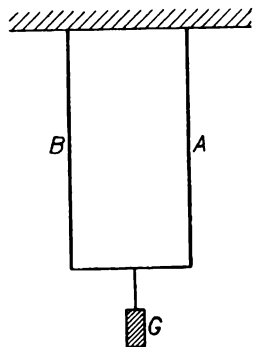
Cvičení

4. Ocelový drát o průměru d má délku l , visí-li na něm závaží o tíze F_1 . O kolik se drát prodlouží, jestliže se tíha závaží zvětší o ΔF . Modul pružnosti oceli v tahu je E .

Řešte obecně a pak pro hodnoty $d = 10^{-3}$ m, $l = 50$ m, $F_1 = 200$ N, $\Delta F = 100$ N, $E = 2,0 \cdot 10^{11}$ N m⁻². [Výsledek: $\Delta l = l \Delta F / \left(\frac{\pi d^2}{4} E + F_1 \right)$, $\Delta l = 0,0032$ m.]

5. Dvě tyče A , B délky l , jedna železná (A) a druhá měděná, jsou zavěšeny tak, že jejich vzdálenost je $d = 0,8$ m (obr. 15). Konce tyčí jsou spojeny další pevnou horizontální tyčí. Jak daleko od tyče A musíme zavěsit závaží, aby spojovací tyč zůstala horizontální. Pro měď je $E_1 = 1,2 \cdot 10^{11}$ N m⁻² a pro železo $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ N m⁻².

[Výsledek: $x = \frac{E_1 d}{E_1 + E}$, $x = 0,3$ m]



Obr. 15

6. Předpokládejme pružnou deformaci tyče (E) v tahu. Působíme-li na tyč silou F_1 , má průměr d_1 . Při působení silou F_2 má průměr d_2 . Určete průměr d_0 nezátížené tyče a Poissonovo číslo μ .

$$\left[\text{Výsledek: } d_0 = \frac{F_2 d_1^3 - F_1 d_2^3}{F_2 d_1^2 - F_1 d_2^2}, \mu = \frac{1}{4} \pi E \frac{d_1^2 d_2^2 (d_1 - d_2)}{F_2 d_1^3 - F_1 d_2^3} \right]$$

Povinná literatura

Fyzika pro II. ročník SVVŠ, SPN Praha 1965, str. 81—88.

Doporučená literatura

Ant. Bělař a kol., Fyzika pro učitele, I. díl, SPN Praha 1967, str. 86—91.

Říman, Slavík, Šoler, Fyzika, SNTL Praha 1964.

Slavík a kol.: Základy fyziky I, NČSAV Praha 1962, str. 232—261.

3. Kategorie C

Grafická statika

Ing. Bohumil Vybíral, CSc., VAAZ Vyškov

Úvod

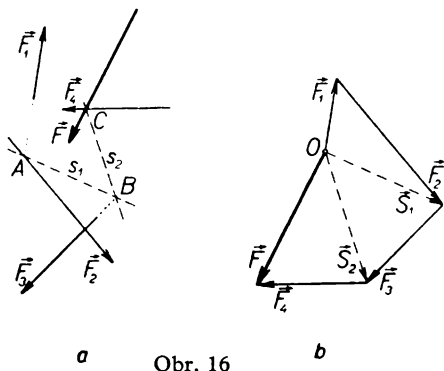
Ve fyzikální a zejména v technické praxi se setkáme s úlohami skládání a rozkladu sil, které prostředky probíranými v 1. roč. gymnasia nevyřešíme. Úkolem tohoto článku je podat přehledně metody *grafické statiky*, tj. grafického řešení skládání a rozkladu sil a řešení rovnováhy těles. K dokonalému pochopení článku se předpokládá znalost těch partií o silách, které se probírají v 1. roč. gymnasia.

1. Grafické skládání systému sil v téže rovině

1.1. Skládání různoběžných sil

Nechť působí na dokonale tuhé těleso soustava různoběžných sil, ležících v téže rovině. Výslednici sil dostaneme tak, že složíme nejprve dvě síly v částečnou výslednici, tuto výslednici pak složíme s třetí silou v druhou částečnou výslednici. Tak postupujeme dále, až dostaneme celkovou výslednici všech sil. Jak si ukážeme na příkladě, stane se řešení přehlednější, uijeme-li dvou obrazců. V tzv. *vláknovém* neboli *výslednicovém obrazci* (obr. 16a) budeme určovat polohu výslednice, ve druhém tzv. *složkovém* neboli *silovém obrazci* (obr. 16b) budeme skládat jednotlivé síly (složky) ve výslednici a určíme tak její směr, orientaci a velikost.

Na obr. 16a jsou dány síly F_1 , F_2 , F_3 a F_4 , jejichž výslednici máme nalézt. V obr. 16b nejprve sečteme síly F_1 a F_2 v částečnou výslednici S_1 .*) Poněvadž vektorová



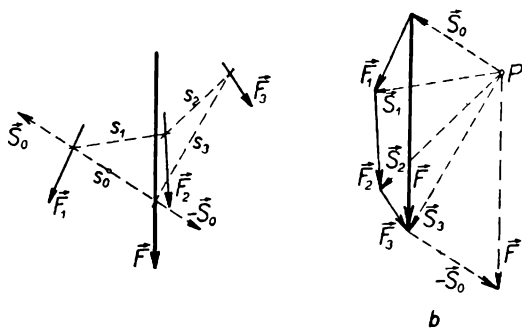
a Obr. 16

b

*) Pro větší přehlednost budeme v tomto článku užívat pro síly vedle normalizovaného označení písmenem F i jiných písmen.

přímka této výslednice musí procházet průsečíkem A vektorových přímek sil \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 v obr. 16a, vedeme bodem A rovnoběžku s_1 se silou \mathbf{S}_1 . V obr. 16b složíme sílu \mathbf{S}_1 se silou \mathbf{F}_3 ve výslednici \mathbf{S}_2 . Tato síla musí procházet průsečíkem B přímky s_1 s vektorovou přímkou síly \mathbf{F}_3 v obr. 16a. Dále složíme v obr. 16b sílu \mathbf{S}_2 se silou \mathbf{F}_4 ve výslednici \mathbf{F} , která je celkovou výslednicí. Tato síla musí procházet průsečíkem C přímky s_2 s vektorovou přímkou síly \mathbf{F}_4 v obr. 16a. Tím je úloha vyřešena.

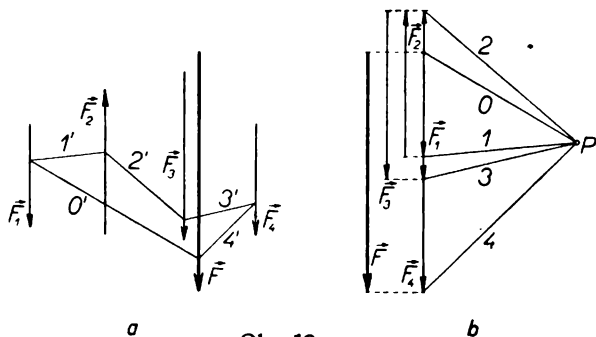
Nebude-li průsečík alespoň dvou vektorových přímek dostatečně blízko, zvolíme pomocnou sílu \mathbf{S}_0 směru dostatečně odlišného od daných sil. Při řešení pak postupujeme stejně jako v předchozím případě. Na obr. 17a, 17b je příklad řešení takové úlohy. Na rozdíl od příkladu v obr. 16 zde však začneme silami \mathbf{S}_0 a \mathbf{F}_1 a nakonec přičteme k částečné výslednici \mathbf{S}_3 sílu $-\mathbf{S}_0$ a dostaneme celkovou výslednici \mathbf{F} . Na vektorové přímce s_0 v obr. 17a tedy působí síly \mathbf{S}_0 , $-\mathbf{S}_0$, jejichž účinek se ruší. Výslednici \mathbf{F} dostaneme také přímo spojením koncových bodů sil \mathbf{S}_0 a \mathbf{S}_3 , takže v praxi není třeba provádět sčítání se silou $-\mathbf{S}_0$.



Obr. 17

1.2. Skládání rovnoběžných sil

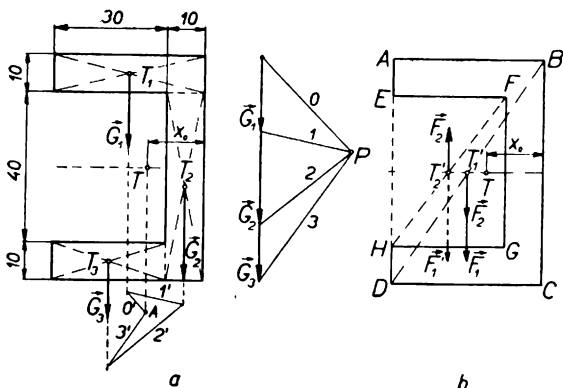
Skládání rovnoběžných sil ležících v téže rovině provádíme stejným způsobem jako skládání různoběžných sil málo odlišného směru, jak bylo vyloženo v předešlém odstavci. Nebudeme zde opakovat fyzikální výklad tohoto řešení, nýbrž popíšeme praktický postup řešení, a to na případě systému čtyř sil z obr. 18a. Místo pomocné síly S_0 volíme přímo bod P , kterému říkáme *pól* složkového obrazce. S pólem spojíme počáteční a koncové body vektorů jednotlivých sil a dostaneme *pólové paprsky* 0 až 4 (viz obr. 18b). Těmto paprskům odpovídá pomocná síla a částečné výslednice z obr. 17b. Rovnoběžkami $0'$ až $4'$ s pólovými paprsky vytvoříme v obr. 18a vláknový obrazec. Uvědomíme si přitom, že ve vláknovém obrazci se na vektorové přímce protínají ty pólové paprsky, které ve složkovém obrazci procházejí počátečním a koncovým bodem příslušné síly. Výslednice bude tedy procházet průsečíkem paprsků $0'$, $4'$. Jinak řečeno, tři úsečky, které tvoří ve složkovém obrazci trojúhelník, se ve vláknovém obrazci protínají v jednom bodě.



Obr. 18

1.3. Grafické vyšetřování polohy těžiště

Těžiště tělesa je působíště tíhové síly tělesa, tedy síly, kterou dostaneme složením tíhových sil jednotlivých hmotných bodů, popřípadě částí tělesa. Protože tíhové síly jsou rovnoběžné, půjde při vyšetřování polohy těžiště o úlohu najít výslednici rovnoběžných sil. Úloha bude jednoduchá, půjde-li o vyšetření těžiště homogenního tělesa s osou nebo rovinou souměrnosti, které můžeme rozložit na části, jejichž polohu těžišť známe.



Obr. 19

Jako příklad vyřešíme graficky polohu těžiště tenké homogenní desky na obr. 19a. Desku si rozdělíme na obdélníky, jejichž těžiště T_1 až T_3 určíme snadno. V těchto těžištích budou působit tíhové síly \mathbf{G}_1 až \mathbf{G}_3 , jejichž velikosti jsou přímo úměrné velikostem příslušných ploch. Tyto síly složíme užitím složkového a výslednicového obrazce. Těžnice prochází bodem A . Druhá těžnice

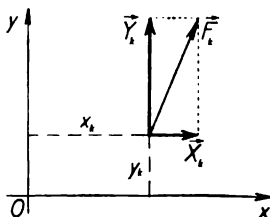
splývá s osou souměrnosti. Řešení můžeme provést rychleji tak, že od tíhy F_1 plné desky $ABCD$ odečteme tíhu F_2 vyřiznuté části $EFGH$ (viz obr. 19b). Nyní půjde o to najít výslednici dvou rovnoběžných sil nesouhlasně orientovaných. Řešení je zde provedeno graficky metodou vyloženou v učebnici pro 1. roč. SVVŠ. Oběma způsoby řešení vychází $x_0 = 15,0$ mm.

2. Rovnováha a rozklad sil v téže rovině

2.1. Podmínky rovnováhy dokonale tuhého tělesa

Aby těleso, které je v klidu, nezměnilo svůj pohybový stav, musí být výslednice všech sil působících na těleso rovna nule, tím je zamezeno posouvání tělesa, a musí být roven nule i výsledný moment sil působících na těleso; tím je zamezeno otáčení tělesa. Říkáme, že těleso je ve statické rovnováze. K zamezení pohybu se tělesa ukládají na podpory, v nichž vznikají síly, budeme jim říkat reakce, které udržují těleso v klidu. Úkolem statiky je vyšetřit velikost těchto reakcí.

Budeme se zabývat případem, kdy na těleso působí obecně n sil ležících v téže rovině, např. (x, y) . Pak si libovolnou sílu F_k rozložíme na složky X_k a Y_k ve směru souřadnicových os (viz obr. 20). Silovou podmínku rovnováhy nyní můžeme vyslovit tak, že součet všech složkových sil o velikosti X_k pro k od 1 do n musí být roven nule; totéž musí platit pro složky o velikosti Y_k . V matematickém zápisu



Obr. 20

$$\sum_{k=1}^n X_k = O, \quad \sum_{k=1}^n Y_k = O,$$

kde Σ je sumační znaménko. Síla F_k působí vzhledem k bodu O momentem o velikosti (psáno ve složkách): $x_k Y_k - y_k X_k$. Momentová podmínka požaduje, aby součet všech momentů sil k libovolnému bodu byl roven nule, tj. aby platilo

$$\sum_{k=1}^n (x_k Y_k - y_k X_k) = 0.$$

Dlužno ještě připomenout, že mezi složky vnějších sil počítáme i složky neznámých reakcí. Protože k řešení těchto složek máme jen tři uvedené rovnice, je nutné zvolit takové uložení tělesa, aby se počet neznámých složek reakcí rovnal právě třem. Pak říkáme, že úloha je *staticky určitá*.

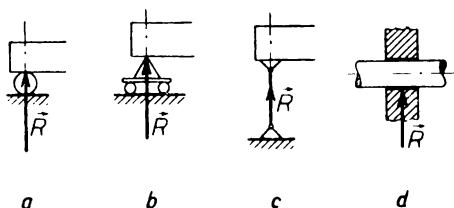
Budou-li v nejjednodušším případě působit na těleso dvě síly, tak nutnou podmínkou rovnováhy je, že musí působit v téže vektorové přímce. Nutnou podmínkou pro rovnováhu tří sil působících na těleso je, že musí procházet jedním bodem. Jinak by totiž tyto síly dávaly nenulový moment, který by způsobil rotaci tělesa.

2.2. Druhy uložení

Všimněme si nyní nejčastěji se vyskytujících uložení nosníků v rovině. Můžeme je rozdělit do tří skupin:

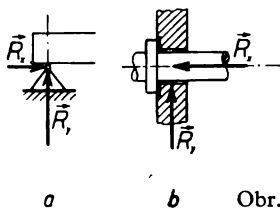
1. Reakce uložení představuje jednu neznámou (viz obr. 21a, b, c, d). Obr. 21d znázorňuje radiální ložisko.

2. Reakce uložení představuje dvě neznámé (viz obr. 22a, b). Obr. 22 znázorňuje axiální a radiální ložisko.

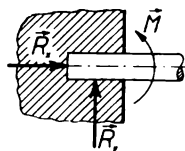


Obr. 21

3. Reakce uložení představují tři neznámé (viz obr. 23).
 Jde o tzv. vetknutý nosník.
 O tření v uložení neuvažujeme.



Obr. 22



Obr. 23

2.3 Vyšetřování reakcí — rozklad sil

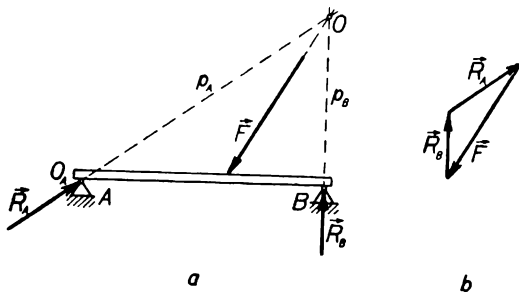
Rozdělení reakcí do podpor závisí na druhu uložení tělesa (nosníku) a na způsobu jeho zatížení. Jde o tři skupiny úloh statiky. Rovnováha výsledné síly působící na těleso může být zajištěna:

1. dvěma silami v podporách, z nichž jedna prochází daným bodem a druhá působí v dané přímce,
2. třemi silami působícími v daných různoběžných přímkách,

3. dvěma rovnoběžnými silami, z nichž jedna působí v dané přímce rovnoběžné s vyrovnávanou silou.

Jednotlivé skupiny úloh probereme na příkladech.

Jako představitele první úlohy vezměme si nosník z obr. 24a zatížený silou \mathbf{F} . Máme najít reakce v podpo-

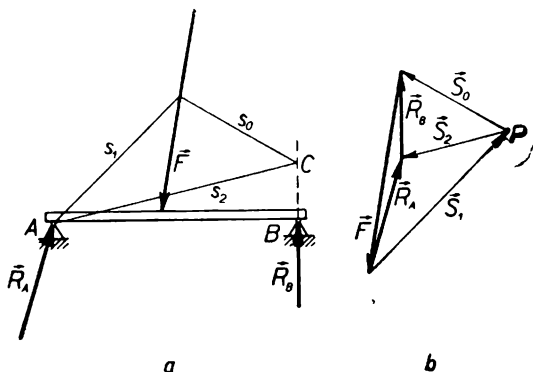


Obr. 24

rách A , B . Úloha má tři neznámé složky (velikost a směr síly \mathbf{R}_A a velikost síly \mathbf{R}_B) a je tedy staticky určitá. Z minulého odstavce víme, že reakce \mathbf{R}_A musí procházet bodem O_A a reakce \mathbf{R} musí ležet na přímce p_B . Aby tři síly byly v rovnováze, musí procházet jedním bodem. V našem případě je to průsečík vektorové přímky síly \mathbf{F} s přímkou p_B , tedy bod O . Tímto bodem musí procházet vektorová přímka p_A reakce \mathbf{R}_A . Sílu \mathbf{F} pak rozložíme užitím silového trojúhelníku do směrů p_A a p_B na reakce \mathbf{R}_A , \mathbf{R}_B (obr. 24b). Všimněme si, že silový trojúhelník je uzavřen; jde o síly v rovnováze.

Vychází-li průsečík O vektorových přímek daleko, postupujeme obdobně jako v případě skládání sil na obr.

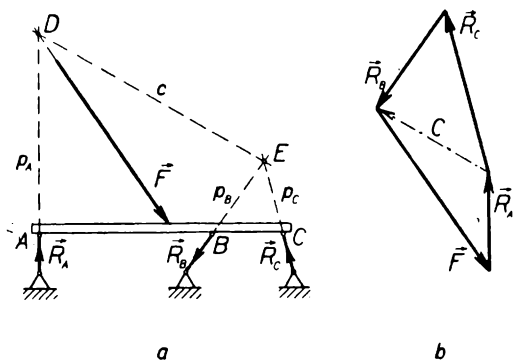
17. Sílu \mathbf{F} (obr. 25) uvedeme do rovnováhy dvěma pomocnými silami \mathbf{S}_0 a \mathbf{S}_1 tak, že zvolíme pól P (obr. 25b), ve kterém se protínají vektorové přímky těchto sil. Ve



Obr. 25

vláknovém obrazci nakreslíme vektorové přímky s_0, s_1 , z nichž přímka s_1 musí procházet podporou A , tedy podporou, jejíž reakce má dvě neznámé složky. Vlákenný obrazec uzavřeme vektorovou přímku s_2 procházející podporou A a bodem C . Nyní ve složkovém obrazci rozložíme sílu \mathbf{S}_0 na sílu \mathbf{S}_2 a na reakci \mathbf{R}_B . Výslednice pomocných sil \mathbf{S}_1 a \mathbf{S}_2 dává velikost a směr reakce \mathbf{R}_A . Tím je úloha vyřešena.

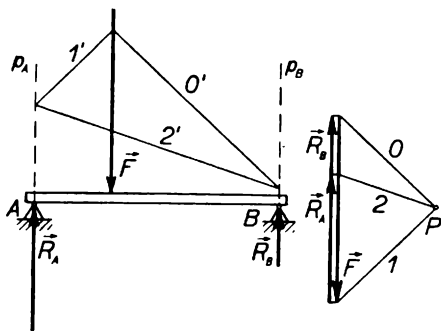
Jako představitele druhé úlohy statiky si vezměme nosník na obr. 26 uložený na třech prutových podporách, jejichž osy p_A, p_B, p_C se neprotínají v jednom bodě. Průsečíkem D přímky p_A s vektorovou přímku síly \mathbf{F} a průsečíkem E přímek p_B a p_C vedeme přímku c , zvanou *Culmannova přímka*. Sílu \mathbf{F} nyní uvedeme do rovnováhy



Obr. 26

silami ve směrech přímek p_A, c . Tím dostaneme reakci \vec{R}_A a sílu C , kterou dále rozložíme ve směrech p_C, p_B na reakce \vec{R}_C a \vec{R}_B .

Příklad na třetí úlohu statiky je na obr. 27. Jde o vy-



Obr. 27

šetření reakcí na sílu \mathbf{F} kolmou na spojnici podpor. V tomto případě je složka reakce ve směru této spojnice nulová a jde tedy o vyšetření jen dvou složek reakcí, působících ve směrech daných přímk p_A, p_B . Úlohu vyřešíme opět užitím vláknového a složkového obrazce, jak je znázorněno na obr. 27. Fyzikální výklad řešení této úlohy, která je podobná úloze z obr. 25, přenecháme čtenáři. Podobně jako v obr. 18, jsou v obr. 27 místo pomocných sil zjednodušeně vyznačeny pólové paprsky.

Bude-li nosník uložen na dvou, popřípadě více pevných podporách, nebo má-li být zatížení vyrovnáno třemi, popřípadě více rovnoběžnými reakcemi, jde o úlohy *staticky neurčité*, které je možno řešit jedině užitím teorie pružnosti.

Tři úlohy statiky, které jsme řešili, představují rovněž tři případy *rozkladu sil*. Složkové síly při rozkladu mají však opačnou orientaci než příslušné reakce.

III. ČÁST

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY

Výsledky experimentálních úloh byly upraveny podle žákovských měření.

1. Úlohy kategorie A

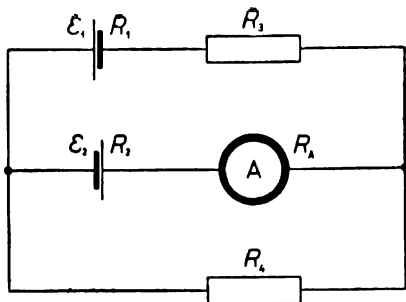
Úlohy 1. kola recenzovali Evžen Říman a dr. Ivan Náter, úlohy 2. a 3. kola a řešení všech úloh recenzovali Mojmir Simerský a dr. Ivan Náter.

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhla Eva Procházková)

V obvodu naznačeném na obr. 28a jsou zapojeny baterie elektromotorických napětí \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 s vnitřními odpory R_1 , R_2 , dále odpory R_3 , R_4 a ampérmetr s vnitřním odporem R_A .

a) Určete proudy ve všech větvích obvodu.



Obr. 28a

b) Určete proudy ve všech větvích obvodu, jestliže u baterie o elektromotorickém napětí \mathcal{E}_2 změňte polaritu.

c) Určete svorkové napětí první baterie, jestliže baterie o elektromotorickém napětí \mathcal{E}_2 má polaritu jako v případě b) a ampérmetrem neprochází proud (takto určujeme napětí tzv. kompenzační metodou).

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $\mathcal{E}_1 = 10,0$ V, $\mathcal{E}_2 = 2,0$ V, $R_1 = 0,50$ Ω , $R_2 = 0,10$ Ω , $R_3 = 10,0$ Ω , $R_4 = 1,0$ Ω , $R_A = 0,50$ Ω .

Řešení:

a) Označíme I_1 , I_2 , I_3 hledané proudy v jednotlivých větvích obvodu (viz obr. 28b). Pro uzel D platí

$$I_3 + I_2 - I_1 = 0. \quad (1)$$

Pro obvody $ABFEA$ a $ABDCA$ máme dvě další rovnice

$$R_4 I_3 + I_1 (R_1 + R_3) = \mathcal{E}_1, \quad (2)$$

$$R_4 I_3 - I_2 (R_2 + R_A) = -\mathcal{E}_2. \quad (3)$$

Řešením soustavy (1), (2), (3) vypočítáme hledané proudy. Pro stručnost zápisu označíme

$$N = (R_1 + R_3 + R_4) (R_2 + R_A) + R_4 (R_1 + R_3) = \\ = (R_1 + R_3 + R_4) (R_2 + R_4 + R_A) - R_4^2 = (R_1 + \\ + R_3) (R_2 + R_4 + R_A) + R_4 (R_2 + R_A) > 0$$

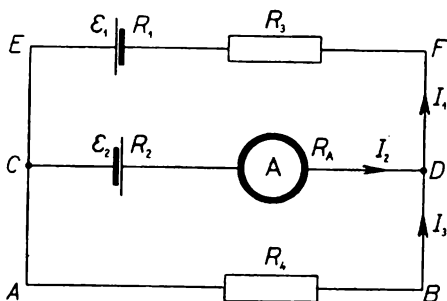
a potom můžeme obecné výsledky zapsat takto:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 (R_2 + R_4 + R_A) + \mathcal{E}_2 R_4}{N}, \quad (4)$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 R_4 + \mathcal{E}_2 (R_1 + R_3 + R_4)}{N}, \quad (5)$$

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 (R_2 + R_A) - \mathcal{E}_2 (R_1 + R_3)}{N}. \quad (6)$$

Poněvadž platí $N > 0$, je zřejmě $I_1 > 0$; $I_2 > 0$ a oba proudy protékají ve směrech vyznačených na obr. 28b.



Obr. 28b

Proud I_3 může být kladný, nulový nebo záporný, podle toho, zda je

$$\mathcal{E}_1 (R_2 + R_A) \cong \mathcal{E}_2 (R_1 + R_3).$$

V prvním případě protéká proud I_3 tak, jak je vyznačeno v obr. 28b, v třetím případě je jeho směr opačný.

Obecné výsledky jsou (4), (5), (6), pro dané číselné hodnoty vychází $I_1 \doteq 1,0$ A; $I_2 \doteq 1,9$ A; $I_3 \doteq -0,9$ A. Proud I_1 a I_2 mají směry jako na obr. 28b, proud I_3 má směr opačný.

b) Poněvadž baterie v prostřední větvi je nyní opačně pólována, musíme ve výsledcích psát všude $-\mathcal{E}_2$ místo \mathcal{E}_2 . Proud I_3 nyní označíme I'_3 a z (4), (5), (6) získáme výsledky

$$I'_1 = \frac{\mathcal{E}_1 (R_2 + R_4 + R_A) - \mathcal{E}_2 R_4}{N}, \quad (7)$$

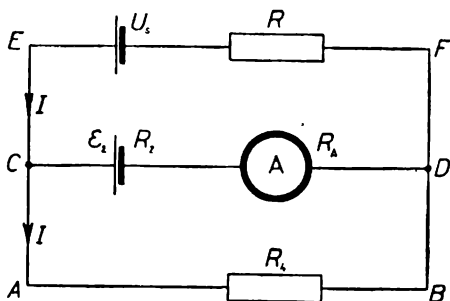
$$I'_2 = \frac{\mathcal{E}_1 R_4 - \mathcal{E}_2 (R_1 + R_3 + R_4)}{N}, \quad (8)$$

$$I'_3 = \frac{\mathcal{E}_1 (R_2 + R_A) + \mathcal{E}_2 (R_1 + R_3)}{N}. \quad (9)$$

Proud I'_3 je kladný, tj. protéká stejným směrem jako I_3 v obr. 28b. Proud I'_1 a I'_2 mohou být kladné, nulové nebo záporné, tj. kterýkoli z nich může mít jakýkoli směr; závisí to na číselných hodnotách daných veličin.

Obecné výsledky jsou (7), (8), (9), pro dané číselné hodnoty vychází $I'_1 \doteq 0,8$ A; $I'_2 \doteq -0,7$ A; $I'_3 \doteq 1,5$ A. Proud I'_1 , I'_3 mají směry jako I_1 a I_3 na obr. 28b, proud I'_2 má směr opačný proti směru proudu I_2 na obr. 28b.

c) Prostřední větev je bez proudu, obvodem protéká jediný proud I (viz obr. 29). Podle Kirchhoffových



Obr. 29

zákonů platí pro obvody $ABFEA$ a $ABDCA$ rovnice

$$U_s = I (R_3 + R_4),$$

$$\mathcal{E}_2 = I R_4,$$

je-li U_s svorkové napětí horní baterie.

Z uvedených rovnic vypočítáme

$$U_s = \mathcal{E}_2 \frac{R_3 + R_4}{R_4}. \quad (10)$$

Obecný výsledek je (10), pro zadané hodnoty vychází $U_s \doteq 22 \text{ V}$.

2. úloha (navrhl Vojtěch Stach)

a) Určete změnu energie kondenzátoru nabitého nábojem Q , jestliže se jeho kapacita změní z hodnoty C_1 na hodnotu C_2 ($C_1 > C_2$).

b) Mějme soustavu dvou paralelně spojených kondenzátorů, z nichž každý má kapacitu C_1 a náboj Q . Určete změnu energie jednoho z kondenzátorů, když jeho kapacita se změní na C_2 a kapacita druhého se nezmění.

c) Vypočítejte změnu energie soustavy kondenzátorů při změně podle b). Porovnejte změny energie v b) a c) vzhledem k a) a vysvětlete rozdíly.

Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $C_1 = 450 \text{ pF}$, $C_2 = 50 \text{ pF}$, $Q = 1,8 \cdot 10^{-1} \mu\text{C}$.

Řešení:

Pro energii obsaženou v dielektriku kondenzátoru o kapacitě C nabitého nábojem Q na napětí U platí

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (1)$$

Mezi nábojem, kapacitou a napětím je vztah

$$Q = C U. \quad (2)$$

Těchto vztahů budeme v dalším používat.

a) Kondenzátor má náboj Q a kapacitu C_1 , takže má podle (1) energii

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1}. \quad (3)$$

Když se jeho kapacita zmenší na C_2 , zůstanou náboje na elektrodách a energie nabude hodnoty

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_2}. \quad (4)$$

Odečtením (3) od (4) vypočítáme změnu

$$\Delta W_a = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2} \frac{C_1 - C_2}{C_1 C_2}. \quad (5)$$

Energie se zvýšila, neboť podle zadání $C_1 > C_2$, takže veličina ΔW_a je kladná.

b) Uvažovaný kondenzátor soustavy má zprvu energii stejnou jako prve, tedy (3). Když se jeho kapacita změní na C_2 , máme soustavu o výsledné kapacitě $C_1 + C_2$, s nábojem $2Q$. Napětí na soustavě podle (2) je

$$U = \frac{2Q}{C_1 + C_2}.$$

Toto napětí je na uvažovaném kondenzátoru o kapacitě C_2 . Podle (1) je jeho energie

$$W'_2 = \frac{1}{2} C_2 \frac{4Q^2}{(C_1 + C_2)^2}. \quad (6)$$

Rozdíl energií vypočítáme odečtením (3) od (6). Po úpravě dostaneme

$$\Delta W_b = - \frac{Q^2}{2C_1} \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right)^2. \quad (7)$$

Energie uvažovaného kondenzátoru se tedy při zmenšení jeho kapacity zmenšila.

c) Celá soustava má nejprve energii rovnou dvojnásobku (2), tedy

$$W''_1 = \frac{Q^2}{C_1}. \quad (8)$$

Když se kapacita jednoho z kondenzátorů změní na C_2 , má soustava kapacitu $C_1 + C_2$ a náboj $2Q$ a její energie je podle (1)

$$W''_2 = \frac{1}{2} \frac{4Q^2}{C_1 + C_2}. \quad (9)$$

Odečtením (8) od (9) vypočítáme

$$\Delta W_c = \frac{Q^2}{C_1} \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}. \quad (10)$$

Energie soustavy se zvětšila.

Obecné výsledky jsou (5), (7), (10), pro dané číselné hodnoty vychází $\Delta W_a \doteq 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ J}$; $\Delta W_b \doteq -2,3 \cdot 10^{-5} \text{ J}$; $\Delta W_c = 5,8 \cdot 10^{-5} \text{ J}$.

Porovnáme nyní výsledky (5), (7), (10). Dokážeme si, že platí tyto nerovnosti:

$$\Delta W_a > \Delta W_c \quad (11); \quad \Delta W_c > |\Delta W_b| \quad (12)$$

Zřejmě platí, je-li $C_1 > C_2$, nerovnost

$$2C_1C_2 = C_1C_2 + C_1C_2 < C_1C_1 + C_1C_2 = C_1(C_1 + C_2)$$

a pro reciproké hodnoty

$$\frac{1}{2C_1C_2} > \frac{1}{C_1(C_1 + C_2)}.$$

Násobíme-li tuto nerovnost kladným číslem Q^2 ($C_1 - C_2$), dostaneme nerovnost (11).

Dále zřejmě platí

$$\frac{1}{2} \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} < 1.$$

Násobíme-li tuto nerovnost kladným číslem

$$\frac{Q^2}{C_1} \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2},$$

dostaneme nerovnost (12).

Výklad výsledků

Nerovnost (11) vyložíme takto: Představme si, že kapacitu kondenzátoru zmenšujeme oddalováním jeho elektrod a přitom konáme práci proti přitažlivé síle mezi elektrodami. V případě a) se na elektrodách udržují konstantní náboje, kdežto v případě c) se tyto náboje zmenšují — odtékají do druhého kondenzátoru soustavy,

protože na kondenzátoru s klesající kapacitou roste napětí. Proto je práce vynaložená v případě a) větší než v případě c), a poněvadž se tato práce mění v energii elektrostatického pole, zvětší se energie tohoto pole v případě a) více než v případě c).

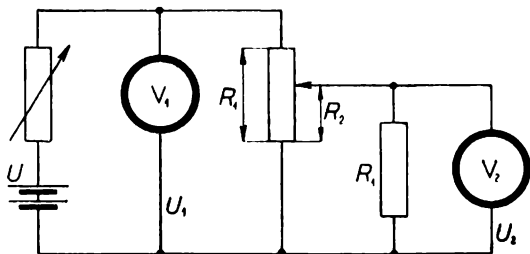
V případě b) jsme zjistili, že se energie uvažovaného kondenzátoru zmenšila. Je to způsobeno odtékáním nábojů z jeho elektrod do druhého kondenzátoru soustavy. Z (6) je patrné, že pro $C_2 = 0$ by bylo také $W'_2 = 0$, poněvadž všechny náboje by se přemístily do druhého kondenzátoru. Snadno také dokážeme, např. podle znaménka derivace, že veličina W'_2 , považujeme-li ji podle funkční rovnice (6) za funkci proměnné C_2 , je funkcí rostoucí, tj., že při zmenšení C_2 se zmenší i funkční hodnota.

Nerovnost (12) vyjadřuje, že energie celé soustavy v případě c) vzrostla o více, než o kolik klesla energie kondenzátoru se zmenšující se kapacitou. Kondenzátor se stálou kapacitou přijal totiž ještě energii další, neboť k zmenšení kapacity prvního kondenzátoru bylo nutno vynaložit práci proti přitažlivé síle.

3. úkol — experimentální (navrhl Mojmir Simerský)

Měření regulační charakteristiky zatíženého potenciometru

Potřeby: zdroj stejnosměrného napětí (asi 6 V), regulační reostat, dva stejné válcové potenciometry nejvýše asi po 100 Ω (aby bylo možno zanedbat spotřebu energie ve voltmetru, který měří napětí U_2), dva avometry, odporový můstek Omega, spojovací dráty.



Obr. 30

V zapojení podle schématu na obr. 30 značíme U_1 napětí na celém potenciometru o odporu R_1 , U_2 je napětí na části potenciometru o odporu R_2 , kde $R_2 = p R_1$ ($0 \leq p \leq 1$).

Regulační charakteristikou potenciometru nazýváme závislost poměru $\frac{U_2}{U_1}$ na čísle p .

a) Změřte a zakreslete regulační charakteristiku zatíženého potenciometru pro speciální případ, kdy spotřebič má stejný odpor jako potenciometr.

Měřte v 10 různých polohách jezdcе potenciometru a příslušnou hodnotu p stanovte vždy tak, že můstkem Omega, popř. jinou vhodnou metodou změříte odpor obou částí děliče (bez připojeného spotřebiče). Zapište do tabulky hodnoty R_2 , p , příslušné naměřené hodnoty U_2 , U_1 a poměr $\frac{U_2}{U_1}$. Podle tabulky sestrojte graf.

Čís. měř.	R_2 [Ω]	U_2 [V]	U_1 [V]	p	$\frac{U_2}{U_1}$

b) Odvoďte teoreticky vztah $\frac{U_2}{U_1}$ jako funkci čísla p a sestrojte příslušný graf.

c) Porovnejte oba grafy a odůvodněte případné odchylky.

Řešení:

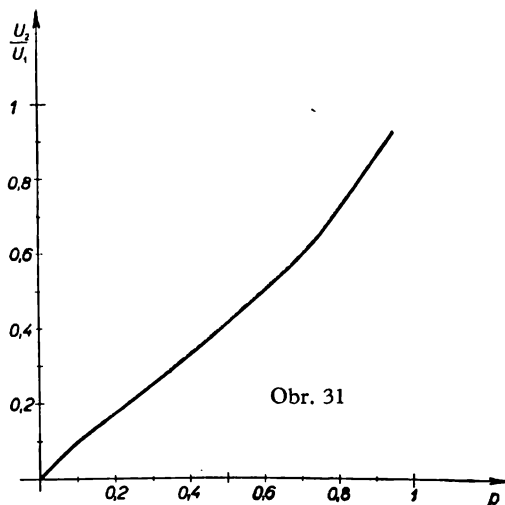
a) Bylo měřeno v zapojení, které je uvedeno v zadání úlohy. Zdrojem proudu byla sedmičláňková akumulátrová baterie NiFe (alkalická), reostatem o maximálním odporu 10Ω bylo napětí U_1 udržováno na konstantní hodnotě $6,3 \text{ V}$ a nastavováno avometem čís. 1439078. Válcový potenciometr R_1 měl jmenovitý odpor $35,0 \Omega$, hodnota byla zkontrolována můstkem Omega čís. 974384. Odpor spotřebiče (válcový reostat s jmenovitým odporem 100Ω) byl pomocí můstku Omega nastaven na hodnotu $35,0 \Omega$.

Pro různé hodnoty čísla p byly předem vypočítány hodnoty odporu R_2 , které potom byly nastavovány pomocí můstku Omega. Výstupní napětí U_2 zatíženého potenciometru bylo měřeno avometem čís. 833104.

Napětí U_1 bylo měřeno na měřicím rozsahu 6 V (na „prodloužené“ části stupnice), napětí U_2 na rozsazích $1,2 \text{ V}$ (měření čís. 1 až 4) a 6 V (měření čís. 5 až 19).

Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce, v jejímž posledním sloupci jsou hodnoty poměru $\frac{U_2}{U_1}$ vypočítané teoreticky podle bodu b) zadání.

V obr. 31 je zakreslena změřená závislost poměru $\frac{U_2}{U_1}$ na čísle p .



č. měř.	R_2 [Ω]	U_2 [V]	U_1 [V]	ρ	$\frac{U_2}{U_1}$ měř.	$\frac{U_2}{U_1}$ výpočt.
1	1,75	0,30	6,30	0,05	0,048	0,048
2	3,50	0,58	6,30	0,10	0,092	0,092
3	5,25	0,84	6,30	0,15	0,133	0,133
4	7,00	1,08	6,30	0,20	0,171	0,173
5	8,75	1,31	6,30	0,25	0,208	0,211
6	10,50	1,52	6,30	0,30	0,241	0,248
7	12,25	1,83	6,30	0,35	0,291	0,285
8	14,00	2,04	6,30	0,40	0,324	0,323
9	15,75	2,31	6,30	0,45	0,367	0,361
10	17,50	2,59	6,30	0,50	0,411	0,400
11	19,25	2,83	6,30	0,55	0,448	0,441
12	21,00	3,14	6,30	0,60	0,498	0,483
13	22,75	3,41	6,30	0,65	0,542	0,530
14	24,50	3,71	6,30	0,70	0,588	0,578
15	26,25	4,05	6,30	0,75	0,643	0,632
16	28,00	4,45	6,30	0,80	0,707	0,690
17	29,75	4,90	6,30	0,85	0,778	0,754
18	31,50	5,33	6,30	0,90	0,846	0,836
19	33,25	5,80	6,30	0,95	0,920	0,906

b) Podle zadání jde o dělič napětí (viz obr. 32), v němž je určena hodnota odporu R_1 , a ostatní dva odpory jsou

$$R_2 = pR_1, \quad (1)$$

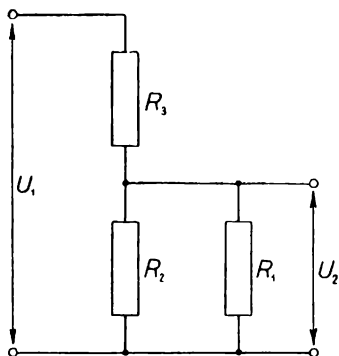
$$R_3 = (1 - p)R_1. \quad (2)$$

Pro poměr napětí platí

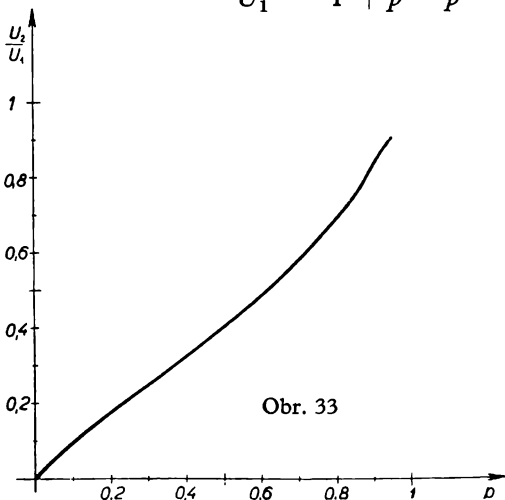
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Po úpravě a dosazení za R_2 a R_3 z (1) a (2) dostaneme výsledek

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{p}{1 + p - p^2}. \quad (3)$$



Obr. 32



Obr. 33

Podle vztahu (3) byl počítán poslední sloupec tabulky a výsledek zakreslen graficky v obrázku 33.

c) Grafy v obrázcích 31 a 33 se liší jen málo, vypočítané a naměřené hodnoty poměru $\frac{U_2}{U_1}$ se nikde neliší více než o 3 %. Z toho lze soudit, že měření bylo provedeno velmi přesně. Příčinou soustavných chyb mohou být odpory spojovacích vodičů, s nimiž se při odvozování vztahu (3) nepočítalo, hlavně však nepřesnosti použitých měřidel (třída přesnosti 1,0, tj. 1 % hodnoty odpovídající maximální výchylce).

4. úloha (navrhl Evžen Říman)

Vrhač min vyvrhl dvě miny stejnou počáteční rychlostí v_0 . Prvá byla vystřelena v čase t_1 pod elevačním úhlem α_1 , druhá v čase t_2 pod elevačním úhlem α_2 ($\alpha_2 < \alpha_1$). Obě miny se ve vzduchu srazily.

Určete počáteční rychlost v_0 , jsou-li dány časy t_1 , t_2 a elevační úhly α_1 , α_2 , přičemž předpokládáme, že pohyb se děje v homogenním tíhovém poli, a nepřehlídíme k odporu vzduchu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $t_1 = 0$ s, $t_2 = 4,8$ s; pro elevační úhly platí $\cos \alpha_1 = \frac{16}{65}$, $\cos \alpha_2 = \frac{5}{13}$; $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení:

Pohyb obou těles (min) se děje v rovině ($O; x; y$), kde x je souřadnice vodorovná, y svislá. Je-li t obecný čas, pak dráhy obou těles jsou dány parametrickými rovnicemi

Dosazením z (5) do (4) máme po převedení členů

$$v_0 \left[\frac{(t_2 - t_1) \sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1} - \frac{(t_2 - t_1) \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1} \right] = \\ = \frac{g}{2} \left[\frac{(t_2 - t_1)^2 \cos^2 \alpha_2}{(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)^2} - \frac{(t_2 - t_1)^2 \cos^2 \alpha_1}{(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)^2} \right].$$

Po jednoduché úpravě dostaneme obecný výsledek:

$$v_0 = \frac{g}{2} (t_2 - t_1) \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\sin (\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (6)$$

Při číselném řešení nepotřebujeme tabulky goniometrických funkcí, poněvadž jsou dány oba kosiny. K vyčíslení výrazu (6) potřebujeme ještě siny obou úhlů, které snadno vypočítáme: $\sin \alpha_1 = \frac{63}{65}$; $\sin \alpha_2 = \frac{12}{13}$;

dále je $\sin (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{3 \cdot 41}{65 \cdot 13}$. S těmito hodnotami a s ostatními hodnotami uvedenými v zadání vyjde

$$v_0 = 104 \text{ m s}^{-1}. \quad (7)$$

Jiný způsob řešení:

Se stejným označením t_0 ; x_0 ; y_0 vyjádříme z (1) a (2) pro $t = t_0$, $x = x_0$ rozdíly

$$t_0 - t_1 = \frac{x_0}{v_0 \cos \alpha_1}; \quad t_0 - t_2 = \frac{x_0}{v_0 \cos \alpha_2}$$

a z těchto rovnic plyne

$$x_0 = \frac{(t_2 - t_1) v_0 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1}. \quad (8)$$

Když z parametrických rovnic (1) a (2) odvodíme kartézské rovnice obou trajektorií, tj. vyloučíme rozdíly $(t - t_1)$ a $(t - t_2)$, máme

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha_1}, \quad (9)$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_2 - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha_2}. \quad (10)$$

Obě trajektorie se protínají v počátku souřadnicové soustavy, neboť rovnice (9) a (10) jsou splněny pro $x = 0$, $y = 0$ a ještě v jednom bodě, který má podle našeho označení souřadnice x_0 ; y_0 . Položíme-li v (9) a (10) $y = y_0$, $x = x_0$, můžeme pravé strany porovnat a zkrátit veličinou x_0 .

$$\operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{g}{2} \frac{x_0}{v_0^2 \cos^2 \alpha_1} = \operatorname{tg} \alpha_2 - \frac{g}{2} \frac{x_0}{v_0^2 \cos^2 \alpha_2}.$$

Z této rovnice vyjádříme x_0 ; po snadné úpravě vyjde

$$x_0 = \frac{2(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) v_0^2}{g \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha_1} - \frac{1}{\cos^2 \alpha_2} \right)}.$$

Porovnáme s (8), dostaneme rovnici pro v_0 , jejímž řešením získáme výsledek (6).

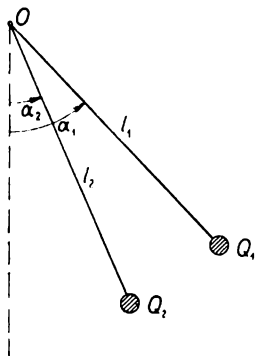
5. úloha (navrhl František Černický)

V bodě O jsou upevněny konce závěsných vláken ($l_1 = l_2 = l$) dvou stejných kovových kuliček o hmotnostech m . Držíme-li první kuličku nabitou nábojem Q_1 v takové poloze, že její napjaté závěsné vlákno je odchýleno od svislého směru o úhel α_1 , ustálí se druhá kulička

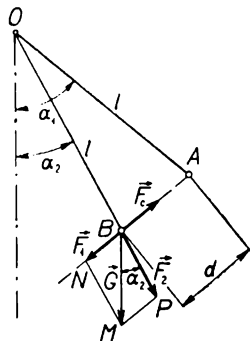
s nábojem Q_2 v takové poloze, že její napjaté závěsné vlákno je odchýleno od svislého směru o úhel α_2 (obr. 34).

a) Určete hmotnost m každé kuličky.

b) Určete polohu závěsných vláken, ve kterých se vlákna ustálí po uvolnění první kuličky.



Obr. 34



Obr. 35

Vzájemné gravitační působení kuliček je zanedbatelné.

Řešte nejprve obecně za předpokladu, že $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$, pak pro hodnoty $Q_1 = 0,12 \mu\text{C}$, $Q_2 = -0,20 \mu\text{C}$, $l = 0,4 \text{ m}$, $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$, $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$, $\frac{1}{4\pi\epsilon} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V m}}{\text{A s}}$. Hmotnost vláken zanedbejte.

Pokyn: V úloze b) označte odklon vlákna od svislice α_3 a kladte $\text{tg } \alpha_3 \doteq \sin \alpha_3$.

Řešení:

a) Tíhu kuličky, která je v bodě B (viz obr. 35), označíme \mathbf{G} a rozložíme ji na dvě složky \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 , z nichž

V rovnoramenném trojúhelníku BAO je

$$d = \overline{BA} = 2l \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}. \quad (7)$$

Do (6) dosadíme z (7), v (5) položíme $G = mg$, podle (1) porovnáme velikosti obou sil a dostaneme rovnici, ze které vyjádříme obecný výsledek. Po snadné úpravě máme

$$m = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|Q_1 Q_2| \cotg \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}}{4l^2 g \sin \alpha_2 \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}}. \quad (8)$$

Pro dané číselné hodnoty vyjde

$$m \doteq 9,9 \cdot 10^{-4} \text{ kg}. \quad (9)$$

b) Po uvolnění závěsu horní kuličky se obě kuličky dotknou a náboje se na ně stejnoměrně rozloží, tj. každá kulička potom má náboj

$$Q = \frac{Q_1 + Q_2}{2}. \quad (10)$$

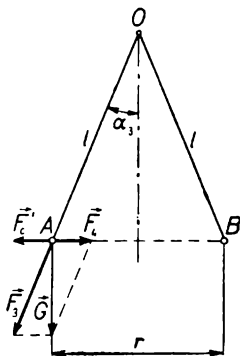
Poněvadž se kuličky odpuzují, vychýlí se závěsy souměrně vzhledem k svislému směru (obr. 36).

Tíhu \mathbf{G} jedné kuličky rozložíme na složky \mathbf{F}_3 a \mathbf{F}_4 . První složka napíná vlákno, druhá je v rovnováze s Coulombovou silou \mathbf{F}'_c , tj. platí

$$F_4 = F'_c. \quad (11)$$

Z obr. 36 nalezneme

$$F_4 = G \operatorname{tg} \alpha_3 \quad (12)$$



Obr. 36

a velikost síly F'_c vyjádříme z Coulombova zákona

$$F'_c = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{r^2}, \quad (13)$$

kde Q je náboj podle (10), r vzdálenost obou kuliček, která je

$$r = 2l \sin \alpha_3. \quad (14)$$

Do (13) dosadíme z (10) a (14), v (12) dosadíme $G = m \cdot g$, tangentu malého úhlu α_3 , podle zadání, aproximujeme sinem, pak porovnáme ve smyslu vztahu (11):

$$\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{16 l^2 \sin^2 \alpha_3} = mg \sin \alpha_3.$$

Z této rovnice vyjádříme $\sin^3 \alpha_3$, napřed ovšem ještě za m dosadíme výsledek (8) předešlého bodu. Po snadné úpravě vyjde

$$\sin^3 \alpha_3 = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{4 |Q_1 Q_2|} \sin \alpha_2 \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}.$$

To je obecný výsledek; pro zadané číselné hodnoty vyjde

$$\alpha_3 \doteq 7,5^\circ.$$

6. úkol — experimentální (navrhl Antonín Ryska)

Měření účinnosti elektrických vaříčů

Potřeby: ponorný elektrický vaříč, obyčejný vaříč, nádoba na ohřívání vody, odměrný válec, stopky, voltmetr, ampérmetr, popř. wattmetr nebo elektroměr.

Návod: Účinnost vaříče určete tak, že změříte čas τ potřebný k ohřátí objemu V vody z teploty t_1 na teplotu t_2

vařičem o příkonu P . Příkon P vařiče stanovte pomocí elektroměru, popř. přímým měřením napětí a proudu. Protože budete pracovat s napětím 220 V, musíte měřit za dozoru učitele.

Úkol: Změřte účinnost některého typu běžného elektrického vařiče a vařiče ponorného. Porovnejte výsledky.

Řešení:

Účinnost vařičů určíme porovnáním tepla Q_1 dodaného elektrickým proudem a tepla Q_2 přijatého kapalinou (vodou). Platí

$$Q_1 = U I \tau,$$

$$Q_2 = k m c \Delta t, \text{ kde } k = 4,19 \text{ cal J}^{-1}.$$

(Pozn.: Pokud m je udáno v gramech, c v cal g⁻¹ deg⁻¹, vycházejí obě tepla v J.)

Protože hustota vody je pro přibližně stejné počáteční teploty (menší než 20 °C) málo odchylná od hustoty $\rho_0 = 1 \text{ g cm}^{-3}$, lze hmotnost vody m v obou případech vyjádřit vztahem $m = \rho_0 V$.

Pak je účinnost vařiče

$$\eta = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{k c \rho_0 V \Delta t}{U I \tau}. \quad (1)$$

Měřené veličiny jsou uvedeny v tabulce:

Vařič	V [ml]	t_1 [°C]	t_2 [°C]	τ [s]	U [V]	I [A]
a) běžný	1500	17,2	51,8	874,0	225,0	1,66
b) ponorný	1800	15,9	53,3	293,0	221,0	4,81

Dosažením do vztahu (1) byly získány tyto výsledky:

- a) $\eta_1 \doteq 67 \%$ pro vaříč běžný,
- b) $\eta_2 \doteq 94 \%$ pro vaříč ponorný.

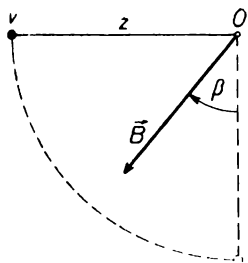
Závěr: Při porovnání obou hodnot vidíme, že ponorný vaříč má mnohem vyšší účinnost než vaříč obyčejný. Je to způsobeno přímým stykem ponorného vaříče s ohřívanou kapalinou, zatímco při použití běžného vaříče je přestup tepla do kapaliny omezen obalem nádoby i vzduchovou vrstvou kolem vaříče. K úplnějšímu vyhodnocení by bylo třeba vypočítat resp. odhadnout chyby jednotlivých veličin užitých při výpočtu účinnosti (vztah 1) a pak najít chybu takto vypočtené účinnosti vaříče.

7. úloha (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

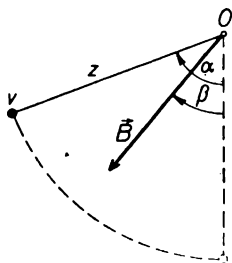
Na dvou tuhých stejně dlouhých volně pohyblivých závěsech o zanedbatelné tíze je zavěšen přímý měděný vodič ve vodorovné poloze, umístěný v homogenním magnetickém poli, jehož vektor magnetické indukce \mathbf{B} je kolmý k měděnému vodiči a svírá se svislým směrem úhel β . Měděný vodič má průřez S , délku l a měrnou hmotnost ρ .

a) Jak veliký by musel být proud I_1 v měděném vodiči, aby vodič i závěsy zaujaly polohu vodorovnou (viz obr. 37)? Jak velkou silou by byly oba závěsy v této poloze napínány?

b) Jak veliký by musel být proud I_2 v měděném vodiči, mají-li veličiny B , β , S , ρ , l tytéž hodnoty jako v a) a vodič zůstane vodorovný, ale závěsy zaujmou šikmou polohu (obr. 38), takže svírají se svislým směrem úhel α ($\alpha \leq 90^\circ$)?



Obr. 37



Obr. 38

Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $B = 1,5 \text{ T}$, $\beta = 40^\circ$, $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $S = 60 \text{ mm}^2$, $l = 0,80 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$, $\alpha = 70^\circ$.

Řešení:

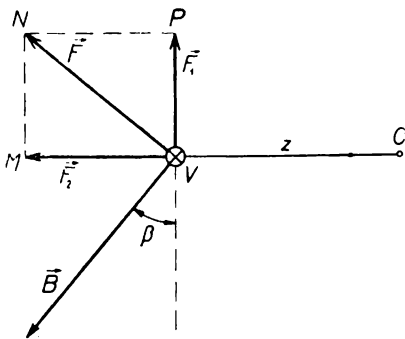
a) Proud musí protékat směrem naznačeným na obr. 39, tj. směrem do náčrtovny, aby vertikální složka F_1 síly F , vyvolané magnetickým polem, směřovala vzhůru. Tato síla totiž musí být v rovnováze s tíhou vodiče:

$$F_1 = \rho S l g. \quad (1)$$

Protéká-li vodičem proud I_1 , má síla F velikost

$$F = B I_1 l. \quad (2)$$

Z pravoúhlého trojúhelníku NVP , v němž při vrcholu V je úhel $(90^\circ - \beta)$, vyjádříme



Obr. 39

$$F_1 = F \sin \beta . \quad (3)$$

Za F nyní dosadíme z (2) do (3), pak (3) do (1) a dostaneme rovnici, ze které vypočítáme

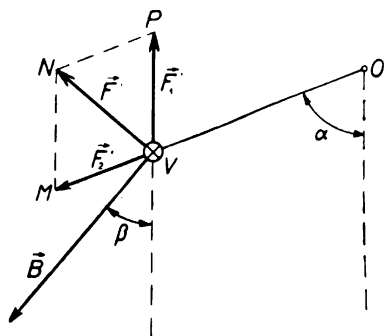
$$I_1 = \frac{\rho S g}{B \sin \beta} . \quad (4)$$

Velikost složky \mathbf{F}_2 , která napíná závěsy, určíme z pravoúhlého trojúhelníku NVM , který má při vrcholu V úhel β :

$$F_2 = F \cos \beta .$$

Za F dosadíme z (2), za I_1 ovšem musíme vzít (4). Po úpravě dostaneme

$$F_2 = \rho S l g \cotg \beta . \quad (5)$$



Obr. 40

váze s tíhou vodiče, vyjádříme z trojúhelníku NVP . Pomocí obr. 40 snadno nalezneme jeho vnitřní úhly. Při vrcholech N, V, P jsou po řadě úhly $90^\circ - (\alpha - \beta)$; $90^\circ - \beta$; α . Použijeme sinové věty a dostaneme

$$F'_1 = F' \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha} .$$

Síla (5) ovšem napíná oba závěsy, tj. každý závěs je napínán silou poloviční.

b) Magnetické pole nyní vyvolává (viz obr. 40) sílu \mathbf{F}' ; rozložíme ji na vertikální složku \mathbf{F}'_1 a složku \mathbf{F}'_2 , která má směr závěsu. Pro F' nyní platí

$$F' = B I_2 l . \quad (6)$$

Velikost vertikální složky \mathbf{F}'_1 , která je v rovno-

Za F' dosadíme z (6), položíme $F'_1 = \rho S l g$, dostaneme určovací rovnici pro I_2 ; z ní vypočítáme

$$I_2 = \frac{\rho S g \sin \alpha}{B \cos (\alpha - \beta)}. \quad (7)$$

Velikost síly F'_2 , která napíná závěsy, můžeme rovněž počítat z trojúhelníku NVP :

$$F'_2 = F' \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}.$$

Za F' dosadíme z (6), pro I_2 vezmeme (7). Po úpravě vyjde

$$F'_2 = \frac{\rho S g l \cos \beta}{\cos (\alpha - \beta)}. \quad (8)$$

Obecné výsledky jsou (4), (5), (7), (8), pro zadané číselné hodnoty vychází $I_1 \doteq 5,4$ A; $F_2 \doteq 5,0$ N; $I_2 \doteq 3,8$ A; $F'_2 \doteq 3,7$ N.

Poznámka: Vztahy (4) a (5) vyplnou z (7) a (8), položíme-li

$$\alpha = 90^\circ.$$

8. úloha (navrhl Ing. Bohumil Vybíral)

Člověk hmotnosti M stojící zpřímá na otočném stolečku se zanedbatelným třením v ložisku je roztočen kolem své svislé osy s upaženými pažemi. Doba jedné jeho otáčky je T_1 . Připaží-li, klesne doba otáčky na hodnotu

$T_2 = \frac{T_1}{n}$. Poté mu dáme do každé ruky závaží hmotnosti

m a roztočíme jej znovu s upaženými pažemi tak, že doba jedné otáčky je T'_1 . Připaží-li, klesne doba otáčky

na hodnotu $T'_2 = \frac{T'_1}{n'}$. Vzájemná vzdálenost závaží při upažených pažích je d_1 , při připažených pažích d_2 a rozložení závaží v obou případech je symetrické vzhledem k ose rotace.

a) Jaký je moment setrvačnosti člověka s pažemi upaženými a s pažemi připaženými?

b) Jaký by musel mít poloměr válec hmotnosti M , aby měl stejný moment setrvačnosti jako člověk s připaženými pažemi?

Při výpočtu zanedbejte moment setrvačnosti stolečku.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $M=68,0$ kg, $n=2,00$, $m=1,00$ kg, $n'=3,30$, $d_1=1,62$ m, $d_2=0,42$ m.

Řešení:

a) Označíme \mathcal{J}_1 moment setrvačnosti člověka s pažemi upaženými, \mathcal{J}_2 s pažemi připaženými. Pro první případ platí podle zákona zachování momentu hybnosti

$$\mathcal{J}_1 \frac{2\pi}{T_1} = \mathcal{J}_2 \frac{2\pi}{T_2}. \quad (1)$$

V druhém případě se moment setrvačnosti zvětší o $2 \frac{md_1^2}{4} = \frac{md_1^2}{2}$, resp. o $\frac{md_2^2}{2}$, takže platí

$$\left(\mathcal{J}_1 + \frac{md_1^2}{2}\right) \frac{2\pi}{T'_1} = \left(\mathcal{J}_2 + \frac{md_2^2}{2}\right) \frac{2\pi}{T'_2}. \quad (2)$$

Dále je podle zadání

$$T_1 = n T_2 \quad (3), \quad T'_1 = n' T'_2. \quad (4)$$

Když z (3) dosadíme do (1) a z (4) do (2), dostaneme po úpravě

$$\mathcal{J}_1 = n \mathcal{J}_2, \quad (5)$$

$$J_1 + \frac{m d_1^2}{2} = n' \left(J_2 + \frac{m d_2^2}{2} \right) \quad (6)$$

a ze soustavy (5), (6) vypočítáme

$$J_1 = \frac{m n (d_1^2 - n' d_2^2)}{2(n' - n)}, \quad (7)$$

$$J_2 = \frac{m (d_1^2 - n' d_2^2)}{2(n' - n)}. \quad (8)$$

Obecné výsledky jsou (7), (8), pro dané číselné hodnoty vychází $J_1 \doteq 1,57 \text{ kg m}^2$; $J_2 \doteq 0,785 \text{ kg m}^2$.

b) Moment setrvačnosti válce $J = \frac{MR^2}{2}$ se podle zadání rovná momentu J_2 , tedy

$$\frac{MR^2}{2} = \frac{m (d_1^2 - n' d_2^2)}{2(n' - n)}.$$

Z této rovnosti plyne

$$R = \sqrt{\frac{m}{M} \frac{d_1^2 - n' d_2^2}{n' - n}}. \quad (9)$$

Obecný výsledek je (9), pro dané číselné hodnoty vyjde $R \doteq 0,15 \text{ m}$.

9. úloha (navrhl Konrád Hofman)

Ve výšce d přeletí nad pozorovatelem letadlo vodorovným směrem rychlostí v .

a) Jaký tvar mají vlnoplochy, pohybuje-li se zdroj vlnění rychlostí $v > c$, kde c je rychlost zvuku ve vzduchu?

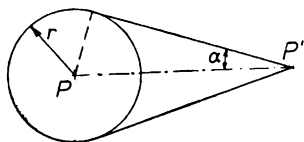
b) Jaká je vzdálenost letadla od pozorovatele v okamžiku, kdy pozorovatel zaslechne jeho zvuk?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 1000 \text{ m}$, $v = 510 \text{ m s}^{-1}$, $c = 340 \text{ m s}^{-1}$.

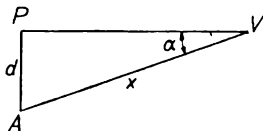
Řešení:

a) Jestliže v čase $t = 0$ je zdroj zvuku v nějakém bodě P (viz obr. 41), pak za dobu t bude v bodě P' , přičemž $PP' = vt$. Akustická vlna se za touž dobu rozšířila z bodu P do kulové vlnoplochy o poloměru $r = ct$. Kužel, jenž se dotýká uvažované vlnoplochy a má vrchol v bodě P' , má při vrcholu úhel 2α a platí, jak je zřejmé z obrázku:

$$\sin \alpha = \frac{r}{PP'} = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v}. \quad (1)$$



Obr. 41



Obr. 42

Poněvadž podle (1) není úhel α závislý na době t , dotýká se kužel všech elementárních kulových vlnoploch, jejichž středy jsou na spojnici PP' . Je proto jejich obalovou plochou, tj. vlnoplochou.

Vlnoplochami jsou tedy kužely, jejichž vrcholy leží na dráze, po které se zdroj zvuku pohybuje, a pro jejichž poloviční úhly při vrcholech platí (1).

b) Pozorovatel je v bodě A (viz obr. 42). Zvuk zaslechne tehdy, když je právě zasažen kuželovou vlnoplochou.

Nechť tato vlnoplocha má vrchol v bodě V . Z pravoúhlého trojúhelníku AVP vyjádříme vzdálenost $x = AV$, tj. vzdálenost pozorovatele od zdroje zvuku.

S přihlédnutím k (1) je obecný výsledek

$$x = AV = \frac{d}{\sin \alpha} = d \frac{v}{c}. \quad (2)$$

Pro dané číselné hodnoty vyjde $x = 1500$ m.

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhla Olga Zibrinová)

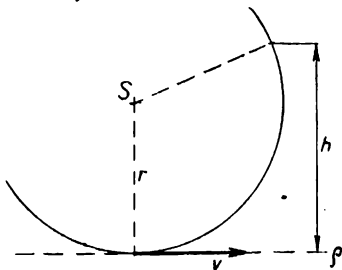
Malá guľôčka visí na pevnej niti dĺžky r . V kľudovej polohe je stred guľôčky vo vodorovnej rovine ϱ .

a) Akými veľkými rýchlosťami v vo vodorovnom smere môže byť guľôčka uvedená do pohybu, ak má opustiť kruhovú dráhu v ľubovoľnej výške h , pre ktorú platí $r \leq h \leq 2r$?

(h meriame od roviny ϱ — obr. 43).

b) Akú hodnotu v_0 má táto rýchlosť, ak guľôčka opustí kruhovú dráhu vo výške h_0 ($r \leq h_0 < 2r$)?

c) Do akej najväčšej výšky h_m vystúpi guľôčka, ak je uvedená do pohybu takou rýchlosťou v_0 , že opustí kruhovú dráhu vo výške h_0 ako v úlohe b)?



Obr. 43

d) V akej vzdialenosti d od svojej kludovej polohy by preletel stred guľôčky rovinou ϱ , keby guľôčka opustila kruhovú dráhu vo výške $h' = 2r$ nad rovinou ϱ a pritom sa bez straty energie uvoľnila zo závesu?

Hmotnosť niti a odpor prostredia zanedbejte.

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $r = 0,20$ m, $h_0 = 0,30$ m, zrýchlenie zemskej tiaže $g \doteq 10$ m s⁻².

Riešenie:

Hmotnosť guľôčky označíme m . Ak opustí guľôčka kruhovú dráhu se stredom S v mieste B , ktorého výška h nad rovinou ϱ vyhovuje nerovnosti $r \leq h \leq 2r$, má obvodová rýchlosť guľôčky veľkosť v_1 (viď obr. 44). Na guľôčku pôsobí v bode B zložka F_1 tiaže guľôčky v smere vektora \vec{BS} a opačne orientovaná odstredivá sila F_0 (ak je súradný systém spojený s guľôčkou). Veľkosti týchto síl sú

$$F_0 = \frac{m v_1^2}{r}; \quad F_1 = m g \cos \alpha, \quad (1)$$

kde α je ostrý uhol, ktorý zvierajú spojnice BS so zvislým smerom, a g zrýchlenie zemskej tiaže.

a) Guľôčka opustí kruhovú dráhu v mieste, kde niť práve prestane byť napínaná, tj. kde $F_0 = F_1$. Pretože je zrejme

$$\cos \alpha = \frac{h - r}{r}, \quad (2)$$

platí pre bod B , ak prihliadneme k (1) a (2):

$$\frac{m v_1^2}{r} = m g \frac{h - r}{r} \Rightarrow v_1 = \sqrt{g(h - r)}. \quad (3)$$

V kludovej polohe A má guľôčka kinetickú energiu $\frac{m v^2}{2}$, v bode B má kinetickú energiu $\frac{m v_1^2}{2}$ a vzhľadom k rovine ϱ má v bode B potenciálnu energiu $m g h$. Podľa zákona zachovania mechanickej energie platí

$$m g h = \frac{1}{2} m (v^2 - v_1^2). \quad (4)$$

Do (4) dosadíme za v_1 z (3) a potom vyjadríme v . Po úprave dostaneme

$$v = \sqrt{g(3h - r)}. \quad (5)$$

Ak sa mení h od r do $2r$, mení sa v od $\sqrt{2r g}$ do $\sqrt{5r g}$; musí teda byť

$$\sqrt{2r g} \leq v \leq \sqrt{5r g}. \quad (6)$$

Všeobecný výsledok je (6), pre dané hodnoty vyjde približne

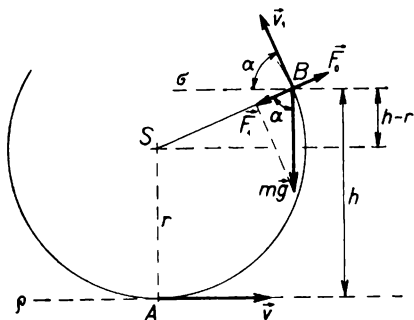
$$2,0 \text{ m s}^{-1} \leq v \leq 3,2 \text{ m s}^{-1}.$$

b) Do (5) dosadíme h_0 miesto h a dostaneme všeobecný výsledok

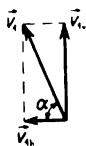
$$v_0 = \sqrt{g(3h_0 - r)}.$$

Pre dané hodnoty vyjde $v_0 \doteq 2,6 \text{ m s}^{-1}$.

c) Po opustení kruhovej dráhy vo výške h_0 nad rovinou ϱ má guľôčka rýchlosť v_1 a pohybuje sa tak, ako keby bola vrhnutá šikmo nahor touto rýchlosťou pod elevačným úhľom α (viď obr. 44). Vertikálna zložka tejto rýchlosti (viď obr. 45) má veľkosť $v_{1v} = v_1 \cos \alpha$. Guľôčka teda vystúpi nad vodorovnú rovinu σ , prechádzajúcu bodom B v obr. 44 do takej výšky, ako keby bola vrhnutá kolmo nahor so začiatočnou rýchlosťou v_{1v} . Výstup trvá čas t_1 , pre ktorý platí



Obr. 44



Obr. 45

$$v_{1v} - g t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{1v}}{g}, \quad (7)$$

a výška, do ktorej guľôčka nad rovinu σ vystúpi, je

$$y_0 = v_{1v} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2.$$

Za t_1 dosadíme z (7) a po úprave dostaneme

$$y_0 = \frac{v_{1v}^2}{2g} = \frac{v_1^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (8)$$

Výška h_m , do ktorej guľôčka vystúpi nad rovinu ρ , je $h_m = h_0 + y_0$. Za y_0 dosadíme z (8), za v_1 z (3), kde položíme $h = h_0$, $\sin \alpha$ vyjadríme pomocou $\cos \alpha$ podľa (2), kde tak isto položíme $h = h_0$. Po úprave dostaneme všeobecný výsledok

$$h_m = h_0 \left[1 + \frac{(h_0 - r)(2r - h_0)}{2r^2} \right].$$

Pre dané hodnoty vyjde $h_m \doteq 0,34$ m.

V najvyššom bode svojej dráhy má guľôčka vo vertikálnom smere rýchlosť nulovú, jej rýchlosť \mathbf{v}_m sa teda rovná horizontálnej zložke \mathbf{v}_{1h} (viď obr. 45). Je teda

$$v_m = v_{1h} = v_1 \cos \alpha .$$

Za v_1 dosadíme z (3), za $\cos \alpha$ z (2), opäť pre $h = h_0$. Obecný výsledok je teda

$$v_m = \frac{h_0 - r}{r} \sqrt{g(h_0 - r)}$$

a pre dané hodnoty je $v_m = 0,50 \text{ m s}^{-1}$.

d) Ak opustí guľôčka kruhovú dráhu vo výške $h' = 2r$ nad rovinou ϱ , tj. ak leží bod B v obr. 44 na spojnici AS , má rýchlosť \mathbf{v}_1 vodorovný smer. Jej veľkosť určíme z (3) pre $h = 2r$; označíme ju v'_1 a je

$$v'_1 = \sqrt{g r} . \quad (9)$$

Teraz ide zrejme o vodorovný vrh s počiatočnou rýchlosťou (9). Na vodorovnú rovinu ϱ dopadne guľôčka za takú dobu t_2 , počas ktorej by klesala voľným pádom z výšky $h' = 2r$, takže je

$$2r = \frac{1}{2} g t_2^2 \Rightarrow t_2 = 2 \sqrt{\frac{r}{g}} . \quad (10)$$

Vo vodorovnom smere sa guľôčka pohybuje stálou rýchlosťou v'_1 , takže za dobu t_2 postúpi vo vodorovnom smere o dĺžku $d = v'_1 t_2$. To však je práve vzdialenosť od kludovej polohy, v ktorej stred guľôčky preletí rovinou ϱ . Za v'_1 dosadíme z (9), za t_2 z (10) a po úprave dostaneme obecný výsledok

$$d = 2r .$$

Pre danú hodnotu je $d = 0,40 \text{ m}$.

2. úloha (navrhl Lubomír Vašek)

Vodou, která má absolutní index lomu N_1 , procházejí dva rovnoběžné paprsky s_1, s_2 . Paprsek s_1 vychází z vody přímo do vzduchu, jehož absolutní index lomu je $N_0 < N_1$, paprsek s_2 prochází nejprve planparalelní destičkou o absolutním indexu lomu $N_2 > N_0$ a z ní teprve do vzduchu.

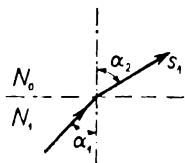
a) Budou paprsky s_1 a s_2 rovnoběžné i ve vzduchu?

b) Dostane se paprsek s_2 do vzduchu, bude-li se paprsek s_1 na vodní hladině totálně odrážet? Uvažte případy $N_2 > N_1$ a $N_2 < N_1$.

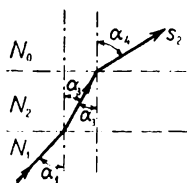
Řešení:

a) Poměry pro paprsek s_1 jsou znázorněny na obr. 46. Pro úhel dopadu α_1 a úhel lomu α_2 platí podle zákona Snelliova

$$N_1 \sin \alpha_1 = N_0 \sin \alpha_2 \Rightarrow \sin \alpha_2 = \frac{N_1}{N_0} \sin \alpha_1. \quad (1)$$



Obr. 46



Obr. 47

Dráha paprsku s_2 je znázorněna na obr. 47. Paprsek se láme z vody do planparalelní destičky pod úhlem α_3 a tento úhel je zároveň úhlem dopadu na rozhraní mezi destičkou a vzduchem; do vzduchu vstupuje paprsek pod úhlem α_4 .

Pro první lom platí

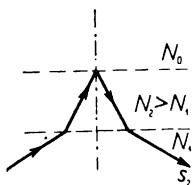
$$N_1 \sin \alpha_1 = N_2 \sin \alpha_3 \quad (2)$$

a pro druhý lom obdobně

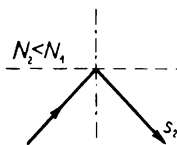
$$N_2 \sin \alpha_3 = N_0 \sin \alpha_4 . \quad (3)$$

Porovnáním (2) a (3) vidíme, že pro $\sin \alpha_4$ dostaneme hodnotu stejnou jako pro $\sin \alpha_2$ ze vztahu (1), takže $\alpha_2 = \alpha_4$, což znamená, že oba paprsky budou rovnoběžné i ve vzduchu.

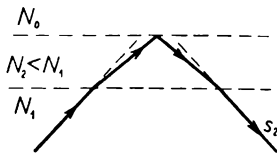
b) Jestliže se paprsek s_1 totálně odráží, pak se totálně odráží i paprsek s_2 .



Obr. 48



Obr. 49



Obr. 50

Je-li $N_2 > N_1$, odráží se paprsek na rozhraní mezi destičkou a vzduchem (viz obr. 48), poněvadž na rozhraní mezi vodou a destičkou se láme ke kolmici, takže k úplnému odrazu zde nemůže dojít. Je-li $N_2 < N_1$, odrazí se paprsek již na rozhraní mezi vodou a destičkou, je-li $\sin \alpha_1 > \frac{N_2}{N_1}$, neboť je zde splněna podmínka pro úplný odraz. Poměry jsou znázorněny na obr. 49.

Je-li $\frac{N_0}{N_1} < \sin \alpha_1 < \frac{N_2}{N_1}$, odrazí se paprsek na rozhraní mezi destičkou a vzduchem, poněvadž při přechodu z vody do destičky není splněna podmínka pro úplný odraz. Dráha paprsku je znázorněna na obr. 50.

3. úloha (navrhli Ivo Volf a František Živný)

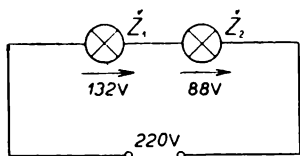
Dvě žárovky na jmenovité napětí $U_1 = 120 \text{ V}$ o jmenovitých příkonech $P_1 = 40 \text{ W}$, $P_2 = 60 \text{ W}$ máte připojit na střídavou síť $220 \text{ V}/50 \text{ Hz}$.

a) Zdůvodněte, proč sériové zapojení není vhodné.

b) Použijete-li vhodný odpor, kondenzátor nebo tlumivku, můžete navrhnout tři zapojení, v nichž obě žárovky dostávají své jmenovité napětí. Udejte schémata zapojení, vypočítejte potřebné hodnoty odporu, kapacity kondenzátoru a indukčnosti tlumivky (k jejímu činnému odporu nepřihlížejte) a účinník celého zapojení. Udejte a zdůvodněte, které zapojení považujete za nejvýhodnější.

Řešení:

a) Zapojení je znázorněno na obr. 51. Vlákno žárovky Z_1 má odpor $R_1 = \frac{U_1^2}{P_1}$; pro dané hodnoty je $R_1 = \frac{120^2 \cdot \text{W}^{\cancel{2}/\cancel{2}}}{40 \text{ W}} = 360 \Omega$. Jmenovitý proud žárovky je



Obr. 51

$I_1 = \frac{P_1}{U_1}$, pro dané hodnoty je $I_1 = \frac{40 \text{ W}}{120 \text{ V}} = \frac{1}{3} \text{ A}$.

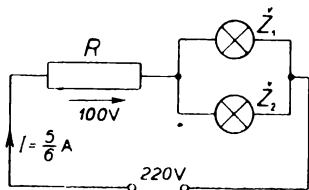
Vlákno druhé žárovky má odpor $R_2 = \frac{U_1^2}{P_2}$, pro dané

hodnoty je $R_2 = \frac{120^2 \text{ V}^2}{60 \text{ W}} = 240 \Omega$. Jmenovitý proud druhé žárovky je $I_2 = \frac{P_2}{U_1}$, pro dané hodnoty je $I_2 =$

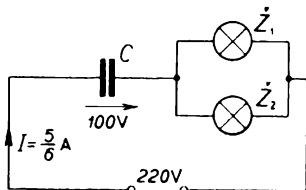
$$= \frac{60 \text{ W}}{120 \text{ V}} = \frac{1}{2} \text{ A.}$$
 V sériovém zapojení se napětí rozdělí v poměru odporů, tj. žárovka \dot{Z}_1 dostává napětí 132 V, žárovka \dot{Z}_2 dostává 88 V. Žárovka \dot{Z}_1 je přetížena (její pracovní napětí je asi o 10 % větší než jmenovité), žárovka \dot{Z}_2 je značně podžhvena (její pracovní napětí je skoro o 27 % menší než jmenovité).

Účinník je $\cos \varphi = 1$, protože síť je zatížena činným odporem (k indukčnostem vláken nepřihlížíme — jejich reaktance jsou proti činným odporům zanedbatelné).

b) Žárovky zapojíme paralelně a do série s nimi zařadíme odpor (viz obr. 52). Do obvodu má vtékat proud $\frac{5}{6} \text{ A}$ (součet jmenovitých proudů obou žárovek) a tento



Obr. 52



Obr. 53

proud má na předřazeném odporu R vytvořit úbytek napětí 100 V. Velikost předřazeného odporu musí tedy být 120Ω a výkon na něm asi 83 W. Tento výkon je ztrátový — mění se v teplo. Účinník je opět $\cos \varphi = 1$, neboť síť je opět zatížena činným odporem.

Místo předřadného odporu použijeme kondenzátor (viz obr. 53). Potřebné napětí na kondenzátoru, které označíme U_c , vypočítáme ze vztahu

$$220^2 \text{ V}^2 = U_c^2 + 120^2 \text{ V}^2 \Rightarrow U_c = \pm 184 \text{ V.}$$

Potřebný proud I je týž jako v předchozím případě, tedy $I = \frac{5}{6}$ A. Kondenzátor musí mít reaktanci $X_c = \frac{U_c}{I}$, pro $U_c \doteq 184$ V, $I = \frac{5}{6}$ A vyjde $X_c \doteq 221 \Omega$. Potřebná kapacita kondenzátoru je

$$C = \frac{1}{2 \pi f X_c} \quad (f \dots \text{kmitočet sítě})$$

a pro dané a vypočítané hodnoty vychází $C \doteq 14,5 \mu\text{F}$. Účíník vypočítáme ze vztahu

$$\cos \varphi = \frac{R_z}{\sqrt{R_z^2 + X_c^2}},$$

kde R_z značí odpor obou paralelně spojených žárovek (144Ω) a X_c reaktanci kondenzátoru (221Ω). Pro tyto hodnoty vyjde $\cos \varphi \doteq 0,55$.

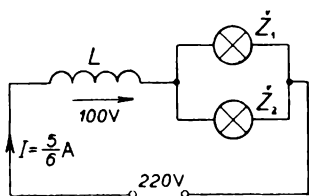
Předřadíme-li paralelně spojeným žárovkám tlumivku (viz obr. 54), musí být

reaktance této tlumivky stejná jako reaktance kondenzátoru v předchozím bodě, tedy $X_L = 221 \Omega$. Potřebnou indučnost vypočítáme ze vztahu

$$L = \frac{X_L}{2 \pi f}$$

a pro uvažované hodnoty vyjde $L \doteq 0,7$ H.

Účíník je stejný jako s kondenzátorem, tedy $\cos \varphi \doteq 0,55$, pouze fázové poměry jsou jiné: v zapojení s předřazeným kondenzátorem má celý obvod povahu kapacitní, takže proud je v předstihu před napětím, kdežto



Obr. 54

nyní má obvod povahu indukční a napětí je v předstihu před proudem, a to o fázový úhel, jehož velikost je dána účíníkem.

Pokud jde o vhodnost jednotlivých zapojení, můžeme učinit tento závěr:

Zcela nevhodné je zapojení s předřazeným odporem, protože jednak by odporové těleso muselo být značně rozměrné, dimenzované na příkon 83 W, jednak na odporu vznikají neužitečné ztráty energie (příkon 83 W z celkového příkonu 183 W, tedy přes 40 % celkového příkonu).

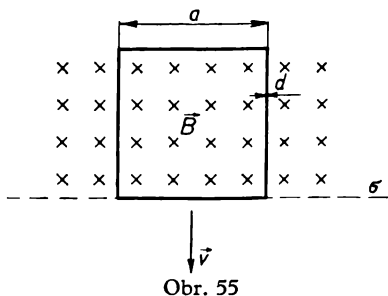
Z ostatních dvou zapojení bychom dali přednost zapojení s tlumivkou podle obr. 54. Při použití kondenzátoru je totiž nebezpečí, že při náhodném probití kondenzátoru dostanou obě žárovky plné napětí sítě 220 V a zničí se.

4. úloha (navrhl Mojmír Simerský)

Homogenní magnetické pole o indukci B je z jedné strany omezeno rovinou σ rovnoběžnou s indukčními čárami. V něm je uložen čtvercový závit o straně a tak, že jeho rovina je kolmá k indukčním čárám a jedna jeho strana rovnoběžná s rovinou σ . Závit je zhotoven z vodiče o průměru d , jehož měrný odpor je ρ . Průměr d je proti délce a zanedbatelný.

a) Jakou stálou rychlostí v (viz obr. 55) musí být závit z pole vysouván, má-li se v něm indukovat konstantní napětí U ?

b) Jaké síly je zapotřebí k vysouvání závitu?



Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $B = 0,50 \text{ T}$; $a = 5,0 \text{ cm}$; $U = 0,10 \text{ V}$; $d = 1,0 \text{ mm}$; $\rho = 0,018 \text{ } \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$.

Řešení:

a) Závít je z magnetického pole vysouván stálou rychlostí v , takže jeho vysunutí trvá dobu

$\Delta t = \frac{a}{v}$. Za tuto dobu se magnetický indukční tok, který závítem prochází, rovnoměrně zmenší z hodnoty $\Phi_1 = B a^2$ na hodnotu $\Phi_2 = 0$. Podle indukčního zákona se v závitu indukuje napětí o velikosti

$$U = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Delta t} = \frac{B a^2}{\frac{a}{v}} = B a v,$$

takže potřebná stálá rychlost vysouvání je

$$v = \frac{U}{B a}. \quad (1)$$

Pro zadané hodnoty vyjde $v = 4,0 \text{ m s}^{-1}$.

b) Elektrický odpor závitu je

$$R = \rho \frac{4a}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{16 \rho a}{\pi d^2}$$

a za dobu Δt vykoná napětí U v závitu práci

$$A = \frac{U^2}{R} \Delta t = \frac{\pi U^2 d^2}{16 \rho a} \Delta t = \frac{\pi U^2 d^2}{16 \rho v}. \quad (2)$$

Stejně velkou práci musí vykonat síla F , která závit z magnetického pole vysouvá, za dobu Δt potřebnou k úplnému vysunutí závitu. Poněvadž za tuto dobu je závit vytažen o délku a , je

$$A = F a. \quad (3)$$

Porovnáním (2) a (3) a dosazením za v z (1) vyjádříme hledanou sílu F . Po snadné úpravě dostaneme

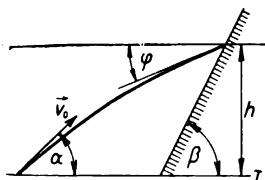
$$F = \frac{\pi U d^2 B}{16 \rho}. \quad (4)$$

Při dosazování zadaných hodnot do obecného výsledku (4) musíme průměr vodiče d dosadit v milimetrech, poněvadž měrný odpor je dán v $\Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$; pak vyjde $F \doteq 0,55 \text{ N}$.

c) Třetí kolo soutěže

1. úloha (navrhl Zdeněk Ungermann)

Dokonale pružná koule je vržena z horizontální roviny počáteční rychlostí v_0 pod elevačním úhlem α . Ještě před vrcholem trajektorie vruh narazí koule na dokonale pružnou stěnu, která s horizontální rovinou svírá úhel $\beta < 90^\circ$ (obr. 56). Při nárazu na stěnu je koule ve výšce h nad horizontální rovinou τ . Stěna má takové rozměry, že koule na ni již podruhé nenarazí.



Obr. 56

a) Určete největší výšku h_0 nad horizontální rovinou τ , do které koule po odrazu od stěny vystoupí.

b) Stanovte, jaký musí být úhel β , aby výška h_0 byla maximální. Vypočítejte tuto maximální hodnotu h_{0m} výšky h_0 . Dané veličiny jsou v_0 , h , α .

K odporu vzduchu nepřihlížejte. Předpokládejte dále, že koule má tak malý poloměr, že ho lze vzhledem k délce dráhy zanedbat.

Pokyn k řešení: Určete úhel φ vyznačený v obrázku, pak s ním počítejte dále až do konečného výsledku, v němž tedy kromě daných veličin bude vystupovat také tento úhel.

Řešení:

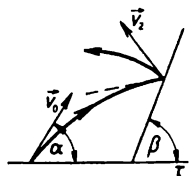
a) Koule dostane při vrhu kinetickou energii $\frac{1}{2} m v_0^2$, je-li m její hmotnost. Při nárazu na stěnu ve výšce h má koule vzhledem k horizontální rovině τ potenciální energii $m g h$, kde g značí tíhové zrychlení. Její rychlost se zmenšila na $v_1 < v_0$ a její kinetická energie na $\frac{1}{2} m v_1^2$. Podle zákona zachování energie platí

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m g h + \frac{1}{2} m v_1^2$$

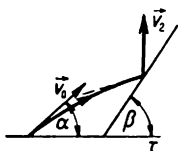
a z tohoto vztahu vyjádříme

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2 g h}. \quad (1)$$

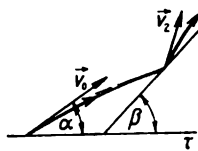
S touto rychlostí narazí koule na stěnu. Předpokládáme, že odraz je dokonale pružný, takže v okamžiku odrazu má koule rychlost o velikosti v_1 vyjádřené vztahem (1). Směr vektoru \mathbf{v}_2 rychlosti v okamžiku odrazu určíme z rovnosti



Obr. 57



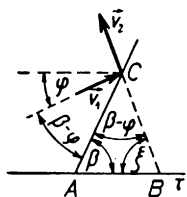
Obr. 58



Obr. 59

úhlu dopadu a úhlu odrazu. Jsou tři možnosti znázorněné na obr. 57, 58, 59.

Případ 1. — obr. 57: Koule se po odrazu vrací k místu, z něhož byla vržena. Po odrazu koná takový pohyb, jako kdyby byla z místa, v němž se odrazila, vržena s počáteční rychlostí \mathbf{v}_2 , jejíž velikost je $v_2 = v_1$ podle (1), pod elevačním úhlem ξ , který najdeme pomocí zákona odrazu — viz obr. 60, 61.



Obr. 60



Obr. 61



Obr. 62

Úhel φ , který vektor \mathbf{v}_1 svírá s horizontální rovinou, určíme pomocí obr. 61, když uvážíme, že horizontální složka rychlosti se při ideálním šikmém vrhu nemění, tj. má stále velikost $v_{0h} = v_0 \cos \alpha$. Odtud vyjádříme, s přihlédnutím k (1):

$$\cos \varphi = \frac{v_{0h}}{v_1} = \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}} \quad (2)$$

V trojúhelníku ABC na obr. 60 jsou při vrcholech po řadě úhly β ; ξ ; $\beta - \varphi$; odtud vypočítáme

$$\xi = \pi - (2\beta - \varphi). \quad (3)$$

Rychlost \mathbf{v}_2 na obr. 60 považujeme za počáteční rychlost šikmého vrhu vzhůru z bodu, v němž koule narazila na stěnu. Její velikost je $v_2 = v_1$ a její vertikální složka má velikost (viz obr. 62)

$$v_{2v} = v_2 \sin \xi = v_1 \sin \xi,$$

kde úhel ξ je dán vztahem (3), takže

$$v_{2v} = v_1 \sin (2\beta - \varphi). \quad (4)$$

Ve vertikálním směru koná koule pohyb rovnoměrně zpomalený s počáteční rychlostí (4) a platí

$$y = h + v_{2v} t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (5)$$

je-li y výška koule nad horizontální rovinou τ a t doba počítaná od okamžiku nárazu. Pro okamžitou hodnotu rychlosti ve vertikálním směru platí

$$v_y = v_{2v} - g t. \quad (6)$$

Když se koule zastaví v nejvyšším bodě své dráhy, což trvá dobu T od nárazu, je $v_y = 0$. Když v (6) položíme $v_y = 0$, $t = T$, dostaneme vztah

$$0 = v_{2v} - g T,$$

z něhož vyjádříme

$$T = \frac{v_{2v}}{g}. \quad (7)$$

Pro $t = T$ podle (7) nabývá výška y daná vztahem (5) své největší hodnoty, kterou podle zadání označíme h_0 . Dosazením T za t z (7) do (5) vypočítáme

$$h_0 = h + \frac{v_{2v}^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_{2v}^2}{g^2} = h + \frac{v_{2v}^2}{2g}.$$

Upravíme dosazením za v_{2v} z (4) po předchozím dosazení za v_1 z (1) a dostaneme obecný výsledek

$$h_0 = h + \frac{1}{2g} (v_0^2 - 2gh) \sin^2 (2\beta - \varphi). \quad (8)$$

Případ 2. — obr. 58: Koule po odrazu stoupá svisle vzhůru. Úhel ξ je nyní pravý, což znamená, že pro úhly β a φ platí, s přihlédnutím k (3):

$$2\beta - \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ neboli}$$

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2},$$

a výška (8) nabude své největší možné velikosti

$$h_{0m} = h + \frac{1}{2g} (v_0^2 - 2gh) = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (9)$$

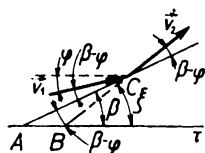
V tomto případě, jak je zřejmé z výsledku (9), vystoupí koule do stejné výšky, jako kdyby byla z horizontální roviny τ vržena svisle vzhůru s počáteční rychlostí v_0 .

Případ 3. — obr. 63: Koule se po odrazu vzdaluje od místa vrhu. Úhel ξ má nyní velikost

$$\xi = 2\beta - \varphi,$$

neboť je to vnější úhel v trojúhelníku ABC , jehož protilehlé vnitřní úhly jsou β ; $\beta - \varphi$. Proto

$$\sin \xi = \sin (2\beta - \varphi)$$



Obr. 63

a výpočet je stejný jako pro případ 1 a platí také výsledek (8).

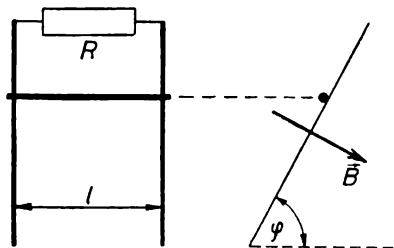
b) Řešením je případ 2 předchozího bodu. Je to zřejmé i z (8), požadujeme-li, aby činitel $\sin^2(2\beta - \varphi)$ měl svou maximální hodnotu 1; v tomto případě musí být

$$|\sin(2\beta - \varphi)| = 1 \text{ neboli } 2\beta - \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

kde k je nějaké celé číslo. Podmínkám naší úlohy vyhovuje jen $k = 0$, tedy $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$.

2. úloha (navrhl Rastislav Baník)

Dve rovnobežné elektricky dokonale vodivé tyče mají vzájemnou vzdialenosť l a rovina, v ktorej sú položené, zvierá s horizontálnou rovinou úhol φ (obr. 64). Medzi tyčami je zapojený odpor R . Rovina, v ktorej tyče ležia, je kolmá na indukčné čiary homogénneho magnetického poľa, ktorého indukcia má veľkosť B . Na tyčiach je



Obr. 64

položená vodorovná dokonale vodivá priečka o hmotnosti m , ktorá kľže smerom dolu. Elektrické kontakty medzi priečkou a tyčami nie sú dokonalé, ale predstavujú prechodový odpor R' . Pohyb priečky je brzdený trením, ktorého súčiniteľ je μ .

Vypočítajte konečnú rýchlosť, ktorú priečka pri svojom pohybe dosiahne.

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $l = 32,0$ cm; $\varphi = 30^\circ$; $B = 0,800$ T; $m = 100$ g; $R = 1,50$ Ω ; $R' = 0,100$ Ω ; $\mu = 0,0850$; $g = 9,81$ m s⁻².

Riešenie:

Ak má priečka rýchlosť v , potom v tej jej časti, ktorá leží medzi oboma tyčami (viď obr. 65), sa indukuje elektromotorické napätie $\mathcal{E} = B l v \sin \alpha$, kde α je úhol medzi vektormi \mathbf{v} a \mathbf{B} . Tento uhol je v našom prípade pravý, takže indukované elektromotorické napätie je

$$\mathcal{E} = B l v. \quad (1)$$

V obvode, tvorenom časťou priečky, časťami tyčí a pripojeným odporom, pôsobí celkový odpor $R + R'$, takže preteká prúd

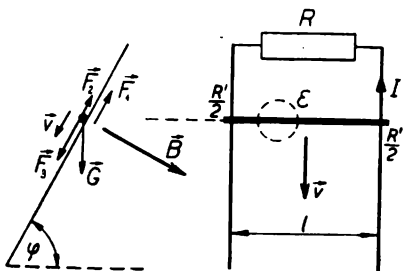
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R'}. \quad (2)$$

Magnetické pole pôsobí na priečku silou, ktorá má veľkosť

$$F_1 = B I l \quad (3)$$

a smeruje nahor v smere naklonenej roviny, určenej tyčami. Rovnakú orientáciu má aj tretia sila, ktorá má veľkosť

$$F_2 = \mu m g \cos \varphi \quad (4)$$



Obr. 65

a je vyvolaná normálovou zložkou tiaže priečky **G**. Dolu po naklonenej rovine ťahá priečku sila **F₃**, zložka tiaže pripadajúca do smeru naklonenej roviny; táto sila má veľkosť

$$F_3 = m g \sin \varphi . \quad (5)$$

Konečnú rýchlosť v_k dosiahne priečka vtedy, keď sily **F₁**, **F₂**, **F₃** budú v rovnováhe, tj. keď bude platiť

$$F_3 = F_1 + F_2 . \quad (6)$$

Dosadíme do (6) z (3), (4), (5), za *I* dosadíme z (2) a za *ℓ* z (1), kde miesto všeobecnej rýchlosti *v* položíme konečnú rýchlosť v_k . Dostaneme tak rovnicu

$$m g \sin \varphi = \frac{B^2 l^2 v_k}{R + R'} + \mu m g \cos \varphi ,$$

z ktorej vyjadríme obecný výsledok

$$v_k = \frac{(R + R') m g (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)}{B^2 l^2} .$$

Pre zadané hodnoty vyjde

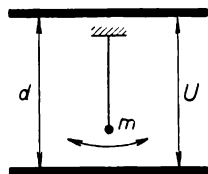
$$v_k \doteq 10,2 \text{ m s}^{-1} .$$

3. úloha (navrhl Ing. Bohumil Vybíral)

V homogenním elektrickém poli kondenzátoru tvořeného dvěma vodorovnými deskami, jejichž vzájemná vzdálenost je *d*, je na nevodivé niti zavěšena malá vodivá kulička o hmotnosti *m*. Kulička je nabitá kladným nábojem *Q*, hmotnost jejího závěsu je zanedbatelná. Mezi deskami je napětí *U* (obr. 66). Je-li horní deska záporná proti dolní, má zavěšená kulička jako kyvadlo dobu kmitu *T₁*. Je-li horní deska kladná, je doba kmitu *T₂*.

a) Z daných veličin vyjádřete tíhové zrychlení g . Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 5,0$ cm; $m = 1,0$ g; $U = 20$ kV; $T_1 = 0,41$ s; $T_2 = 0,31$ s; $Q = 6,7 \cdot 10^{-9}$ C.

b) Podle obecného řešení úlohy a) usudte, jaká podmínka musí být splněna, aby tíhové zrychlení mohlo být uvedenou metodou změřeno co nejpřesněji.



Obr. 66

Řešení:

a) Elektrické pole mezi deskami má intenzitu $E = \frac{U}{d}$ a na kuličku působí silou

$$F = Q E = \frac{Q U}{d}. \quad (1)$$

Je-li horní deska záporná, působí síla (1) svisle vzhůru, je-li horní deska kladná, působí tato síla svisle dolů. V prvním případě působí na kuličku ve svislém směru celková síla

$$F_1 = m g - F, \quad (2)$$

v druhém případě síla

$$F_2 = m g + F. \quad (3)$$

Účinné zrychlení ve svislém směru je v prvním případě

$$a_1 = \frac{F_1}{m} \quad (4)$$

a v druhém případě

$$a_2 = \frac{F_2}{m}. \quad (5)$$

Příslušné doby kmitu kyvadla jsou proto

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a_1}}; \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a_2}}, \quad (6)$$

kde l je délka kyvadla.

Do (6) dosadíme z (4) a z (5), za F_1 z (2), za F_2 z (3) a dostaneme

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - \frac{F}{m}}}; \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{F}{m}}}. \quad (7)$$

Soustavou rovnic (7) jsou určeny veličiny l a g . Vyloučíme l a vyjádříme g , pak do výsledku ještě za F dosadíme z (1). Po úpravě dostaneme obecný výsledek

$$g = \frac{Q U}{m d} \frac{T_1^2 + T_2^2}{T_1^2 - T_2^2}. \quad (8)$$

Pro dané hodnoty vyjde $g \doteq 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

b) V obecném výsledku (8) je ve jmenovateli rozdíl $T_1^2 - T_2^2$, který může být zatížen velmi značnou chybou, nejsou-li doby T_1 a T_2 navzájem značně odlišné. Podmínky při pokusu je proto nutno zvolit tak, aby platilo: $T_1 \gg T_2$. K tomu je zapotřebí, aby síla, kterou na kuličku působí elektrické pole, byla srovnatelná s tíhou kuličky; toho lze dosáhnout dostatečně vysokým napětím mezi deskami. Dále je nutné, aby obě doby kmitu byly stanoveny co nejpřesněji, např. metodou postupného měření. Rozkmity musí být malé, aby kmity byly izochronní.

4. úloha (navrhli dr. Jozef Tuček a Emanuel Síleš)

Sklenená valcová nádoba s rovinným dnom je čiastočne naplnená vodou a rotuje okolo svojej osi, ktorá je zvislá, s frekvenciou ν . Relatívny index lomu pre prechod svetelných lúčov zo vzduchu do vody je n .

Vypočítajte ohniskovú vzdialenosť šošovky, ktorá sa pri rotácii nádoby vytvorí z vody.

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $n = 1,33$; $\nu = 8,33 \text{ s}^{-1}$; $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Návod: Počítajte s osovými lúčmi a uvážte, že pre malé uhly platí $\text{tg } \alpha \doteq \sin \alpha$. Povrch vody pri rotácii nádoby (rotačný paraboloid) nahraďte v okolí osi otáčania guľovým vrchlíkom.

Riešenie:

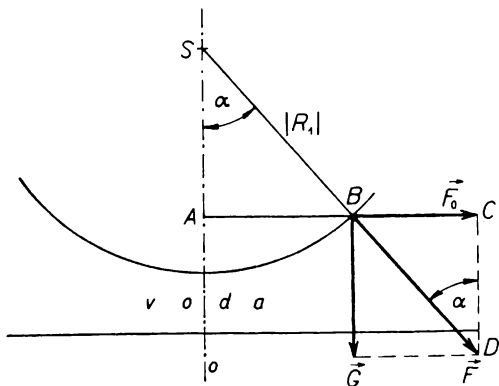
Ak je šošovka obmedzená guľovými vrchlíkmi o polomeroch R_1 a R_2 a ak je n relatívny index lomu pre prechod svetelných lúčov zo vzduchu do vody, potom je ohnisková vzdialenosť f určená vzťahom

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (1)$$

V našom prípade ide o plankonkávnu rozptylku, tj. $R_2 \rightarrow \infty$; $\frac{1}{R_2} \rightarrow 0$; $R_1 < 0$, takže z (1) vyjde

$$F = \frac{R_1}{1 - n}. \quad (2)$$

Polomer R_1 určíme pomocou náčrtu (viď obr. 67): V bode B , ktorý pri rotácii má od osi o vzdialenosť r , pô-



Obr. 67

sobí na časticu vody, ktorej hmotnosť je m , jednak tiaž $G = mg$, jednak odstredivá sila $F_0 = m r \omega^2$, kde ω je uhlová rýchlosť otáčavého pohybu. Výslednica \mathbf{F} oboch síl má smer spojnice BS bodu B so stredom S vytvoreného vrchlíku. Zrejme je $BS = |R_1|$.

Z pravouhlého trojuholníka BAS vyjadríme

$$\sin \alpha = \frac{r}{|R_1|} \quad (3)$$

a z pravouhlého trojuholníka BCD

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_0}{G} = \frac{m r \omega^2}{m g} = \frac{r \omega^2}{g}. \quad (4)$$

Pretože α je veľmi malý uhol, môžeme, podľa zadania, položiť $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$, tj. porovnať (3) a (4) a vyjadriť

$$|R_1| = \frac{g}{\omega^2}. \quad (5)$$

V (5) vyjádříme uhlovou rychlost ω pomocí frekvence, potom dosadíme za $|R_1|$ do (2) a dostaneme všeobecný výsledek

$$f = \frac{g}{(2\pi \nu)^2 (1 - n)}.$$

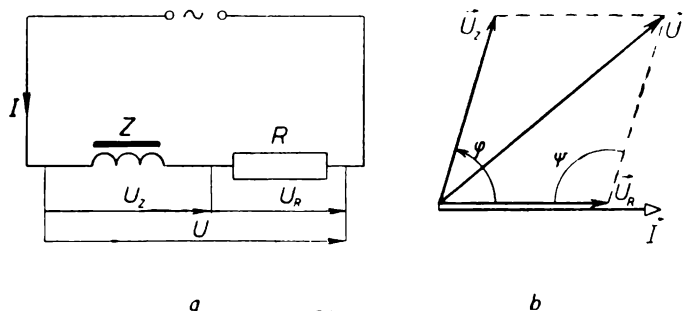
Pre dané číselné hodnoty vyjde $f \doteq -1,1$ cm.

5. úloha — laboratorní (navržena Přemyslem Šedivým)

Měření indukčnosti a odporu cívky zařazené v sériovém obvodě RL

Pomůcky: zdroj střídavého napětí s rozsahem 30 V, regulační reostat o rozsahu 100 Ω , rozkladný transformátor s cívkou o 600 závitů a s jádrem s mezerou 2×1 mm, avomet A jako ampérmetr a voltmetr V (DU 10).

Návod: Připojíme-li ke svorkám zdroje střídavého napětí U sériově cívku o impedanci Z a ohmický odpor R , bude napětí U_R na ohmickém odporu ve fázi s proudem I



Obr. 68

protékajícím obvodem a napětí U_Z na cívce bude před-
 bíhat napětí U_R o úhel $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ (obr. 68a a 68b).
 Pro napětí U na celém obvodu podle kosinové věty platí

$$U^2 = U_R^2 + U_Z^2 - 2U_R U_Z \cos \psi = U_R^2 + U_Z^2 +$$

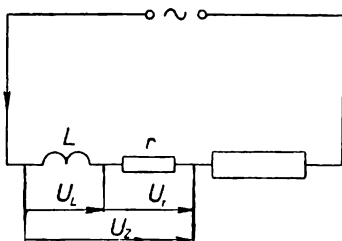
$$+ 2U_R U_Z \cos \varphi,$$

takže

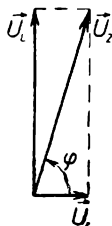
$$\cos \varphi = \frac{U^2 - U_R^2 - U_Z^2}{2 U_R U_Z}. \quad (1)$$

Známe-li proud I , můžeme vypočítat impedanci cívky Z

$$Z = \frac{U_Z}{I}. \quad (2)$$



a Obr. 69



b

Máme-li vypočítat indukčnost L a ohmický odpor r cívky,
 nahradíme ji cívkou ideální o indukčnosti L a ohmickým
 odporem r , zapojenými do série (obr. 69a a 69b). Značí-li
 ω úhlovou frekvenci užitého střídavého proudu, pak
 podle obr. 69b platí

$$U_L = U_Z \sin \varphi = \omega L I,$$

kde U_L značí napětí na ideální cívce. Je tedy

$$L = \frac{U_Z \sin \varphi}{\omega I} = \frac{Z \sin \varphi}{\omega}. \quad (3)$$

Zároveň platí

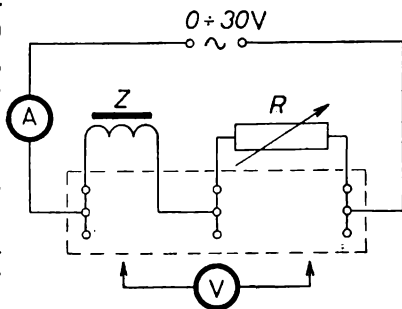
$$U_r = U_Z \cos \varphi = r I,$$

takže

$$r = \frac{U_Z \cos \varphi}{I} = Z \cos \varphi. \quad (4)$$

Úkol: Měřením v zapojení podle obr. 70 stanovte impedanci Z , účinník $\cos \varphi$, indukčnost L a ohmický odpor r dané cívky.

Postup řešení: a) Sestavte obvod podle obr. 70, ve kterém R značí ohmický odpor nastavený na regulačním reostatu a Z impedanci cívky transformátoru s mezerou v jádře 2×1 mm.



Obr. 70

b) Změřte U_Z , U_R a I pro pět různých hodnot napětí U v rozmezí 0 V až 30 V a zapište je do tabulky. Odpor R reostatu nastavte tak, aby napětí U_R a U_Z byla přibližně stejná.

c) Vypočítejte hodnoty $\cos \varphi$ a Z ve všech jednotlivých případech a stanovte jejich aritmetické průměry. Hodnoty veličin L a r vypočítejte ze vztahu (3) a (4) z aritmetických průměrů hodnot Z a $\cos \varphi$.

d) Určete relativní i absolutní chyby naměřených i vypočítaných hodnot.

Řešení:

Měření bylo provedeno v obvodě sestaveném podle návodu v zadání (obr. 70). Naměřené veličiny U , U_R , U_Z , I a rovněž vypočtené veličiny odpovídající příslušným měřením jsou uvedeny v následující tabulce.

U [V]	U_R [V]	U_Z [V]	I [A]	$\cos \varphi$	$\Delta_+ \cos \varphi$	Z [Ω]	$\Delta_+ Z$ [Ω]
9,5	5,7	7,0	0,074	0,112	—	95	—
13,8	7,2	10,8	0,110	0,149	0,008	98	—
19,0	10,0	14,8	0,140	0,142	0,001	106	5,4
23,9	13,4	18,0	0,174	0,140	—	104	3,4
30,3	15,0	24,0	0,241	0,162	0,021	100	—

$$\overline{\cos \varphi} = 0,141$$

$$\overline{Z} = 100,6 \Omega$$

Součet kladných odchylek od aritmetického průměru je tedy pro účinník $\Sigma \Delta_+(\cos \varphi) = 0,030$ a pro impedanci $\Sigma \Delta_+ Z = 8,8 \Omega$. Střední chyba aritmetického průměru účinníku, resp. impedance byla vypočtena podle vzorce

$$\delta = \frac{5}{3} \frac{\Sigma \Delta_+}{n \sqrt{n-1}};$$

$$\delta(\cos \varphi) = \frac{5}{3} \frac{0,030}{5 \cdot 2} = 0,005,$$

$$\delta Z = \frac{5}{3} \frac{8,8}{5 \cdot 2} \Omega = 1,5 \Omega.$$

Odpovídající relativní chyby jsou $\varrho(\cos \varphi) = 3,7 \%$

$$\varrho(Z) = 1,5 \%$$

Použitím vzorce (3) v zadání úlohy vypočteme indukčnost

cívky. $\bar{L} = \frac{\bar{Z} \cdot \overline{\sin \varphi}}{\omega}$, kde $\omega = 50 \cdot 2\pi \text{ s}^{-1}$ odpovídá frekvenci užitého střídavého proudu.

Průměrnou hodnotu $\sin \varphi$ najdeme snadno, $\overline{\sin \varphi} = \sqrt{1 - (\overline{\cos \varphi})^2}$; vzhledem ke vztahu $\sin \varphi = \sqrt{(1 + \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)}$ je možno relativní chybu $\sin \varphi$ vypočítat takto:

$$\begin{aligned} \varrho(\sin \varphi) &= \frac{1}{2} \varrho(1 + \cos \varphi) + \frac{1}{2} \varrho(1 - \cos \varphi) = \\ &= \left[\frac{\delta(1 + \cos \varphi)}{1 + \cos \varphi} + \frac{\delta(1 - \cos \varphi)}{1 - \cos \varphi} \right] \frac{1}{2} \cdot 100 \% = \\ &= \left(\frac{0,005}{1,135} + \frac{0,005}{0,865} \right) 50 \% = 0,5 \%. \end{aligned}$$

Po dosazení do vzorce (3) ze zadání úlohy vychází $L = 0,317 \text{ H}$ s relativní chybou $\varrho(L) = \varrho(Z) + \varrho(\sin \varphi) = 1,5 \% + 0,5 \% = 2 \%$, za předpokladu, že frekvence střídavého proudu je v průběhu měření stálá.

Ohmický odpor cívky vypočteme snadno podle vztahu (4) ze zadání úlohy, vychází $r = 14,2 \Omega$ a příslušná relativní chyba $\varrho(r) = 5 \%$.

Shrnuté výsledky

účinek	$\cos \varphi = 0,141 \pm 0,005,$
impedance cívky	$Z = (100,6 \pm 1,5) \Omega,$
indukčnost cívky	$L = (0,317 \pm 0,006) \text{ H},$
ohmický odpor cívky	$r = (14,2 \pm 0,7) \Omega.$

Poznámka: Přesnost (na základě měření) nalezených veličin odpovídá zhruba přesnosti použitých měřicích přístrojů.

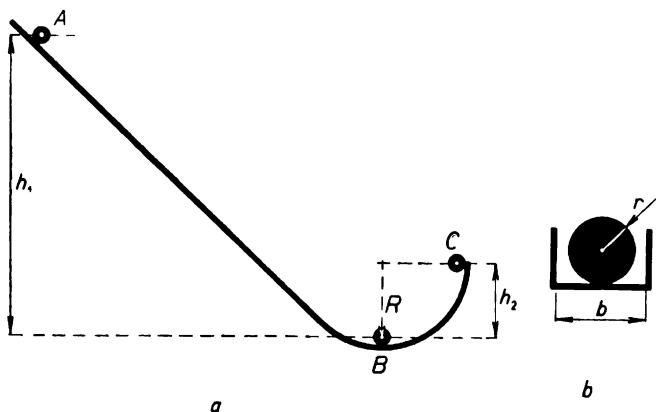
2. Úlohy kategorie B

Úlohy a jejich řešení recenzovali dr. Marta Chytilová a dr. Ivan Náter.

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl Ing. Bohumil Vybíral)

Homogenní kulička o hmotnosti m a o poloměru r se pohybuje ve žlábků podle obr. 71a z polohy A . Příčný profil žlábků znázorňuje obr. 71b. Kulička koná valivý pohyb bez klouzání. Výška $h_1 > h_2$, rozměr $b > 2r$.



Obr. 71

Moment setrvačnosti kuličky vzhledem k ose procházející jejím středem je $\mathcal{J} = \frac{2}{5} m r^2$. Poloměr křivosti dráhy středu kuličky $R = h_2$.

a) Určete výšku h , do které vystoupí kulička.

b) Určete výslednou sílu, která působí na kuličku v nejnižší poloze dráhy (v bodě B).

Při pohybu kuličky uvažujeme jen změny mechanické energie kuličky. Vodorovnou rovinu vedenou středem kuličky v poloze B volíme za rovinu s nulovou potenciální tíhovou energií kuličky.

Řešení:

Označení veličin je patrné z textu úlohy a z obrázků 71a a 71b. Z klidové polohy A koná kulička současně posuvný a otáčivý pohyb bez klouzání. V poloze B má rychlost v_2 a úhlovou rychlost ω_2 ; v poloze C má rychlost v_3 a úhlovou rychlost ω_3 ;

$$\omega_2 = \frac{v_2}{r}, \quad \omega_3 = \frac{v_3}{r}. \quad [(1)]$$

a) Mechanická energie kuličky v poloze A a v poloze C se zachovává:

$$m g h_1 = m g h_2 + \frac{m v_3^2}{2} + \frac{\mathcal{J} \omega_3^2}{2}, \quad (2)$$

moment setrvačnosti je podle zadání

$$\mathcal{J} = \frac{2 m r^2}{5},$$

proto

$$\mathcal{J} \omega_3^2 = \frac{2 m v_3^2}{5}.$$

Rovnici (2) lze pak psát

$$g(h_1 - h_2) = \frac{7}{10} v_3^2.$$

Odtud

$$v_3^2 = \frac{10g}{7} (h_1 - h_2) > 0. \quad (3)$$

Poněvadž $v_3 \neq 0$, vystoupí kulička do výšky $h > h_2$. Ve výšce h_2 opustí podložku, proto při dalším pohybu do výšky h zůstává její úhlová rychlost stálá ω_3 ; ve výšce h má rychlost posuvného pohybu nulovou.

Mechanická energie kuličky v poloze A a ve výšce h se zachovává:

$$m g h_1 = m g h + \frac{\mathcal{J} \omega_3^2}{2}. \quad (4)$$

Ze vztahu (3), přihlédneme-li k (1), plyne

$$\omega_3^2 = \frac{10g}{7r^2} (h_1 - h_2). \quad (5)$$

Po dosazení výrazu za \mathcal{J} a dílčího výsledku (5) do (4), dostaneme

$$h_1 = h + \frac{2(h_1 - h_2)}{7},$$
$$h = h_2 + \frac{5}{7} (h_1 - h_2). \quad (6)$$

b) Mechanická energie kuličky v poloze A a B se zachovává:

$$m g h_1 = \frac{m v_2^2}{2} + \frac{\mathcal{J} \omega_2^2}{2}. \quad (7)$$

Po úpravě podobné jako v a) dostaneme

$$v_2^2 = \frac{10 g h_1}{7}. \quad (8)$$

Kdyby kulička byla v poloze B v klidu, působila by na ni podložka jen pružnou silou $F_1 = m g$ svisle vzhůru. Je-li kulička v poloze B v pohybu rychlostí v_2 po zakřivené dráze o poloměru křivosti R , působí na ni podložka kromě síly F_1 , ještě dostředivou silou $F_2 = \frac{m v_2^2}{R}$ orientovanou také svisle vzhůru.

Výslednice obou sil má velikost

$$F = F_1 + F_2 = m g + \frac{m v_2^2}{R} = m g \left(1 + \frac{10 h_1}{7 h_2} \right) \quad (9)$$

a je orientovaná svisle vzhůru.

2. úloha (navrhl Zdeněk Ungermann)

Těleso je vrženo z povrchu Země svisle vzhůru rychlostí v_0 .

a) Určete rychlost tělesa ve vzdálenosti r od středu Země. Hmotnost Země je M .

b) Určete výšku vrhu a proveďte diskusi řešení.

Při řešení berte v úvahu ubývání tíhového zrychlení s rostoucí vzdáleností tělesa od středu Země a zanedbejte vliv rotace Země na tíhové zrychlení. Předpokládejte, že pohyb se děje ve vakuu.

Pro potenciální energii tělesa hmotnosti m ve vzdálenosti r od středu Země použijte vztahu $W_p = -\kappa \frac{mM}{r}$.

K tomu prostudujte článek Volf-Chytilová, Pohyb družic v gravitačním poli, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 44, č. 3, nebo brožuru VII. ročník FO, SPN 1967.

Řešení:

Označme:

v_0 počáteční rychlost tělesa v bodě A ,

v rychlost tělesa v bodě B ve vzdálenosti r od středu Země, homogenní koule o poloměru R ,

r_k vzdálenost nejvyššího bodu dráhy od středu Země,

m hmotnost tělesa,

M hmotnost Země,

g_0 tíhové zrychlení při povrchu Země.

Platí $g_0 = \kappa \frac{M}{R^2}$, kde $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

Potenciální energie tíhová tělesa v bodě B $W_p = -\kappa \frac{Mm}{r}$. Protože nebereme v úvahu odpor vzduchu,

mechanická energie tělesa v bodě A a B se zachovává:

$$\frac{m v_0^2}{2} - \kappa \frac{mM}{R} = \frac{m v^2}{2} - \kappa \frac{mM}{r};$$

po úpravě

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2\kappa M}{R} + \frac{2\kappa M}{r}, \text{ po dosazení } \kappa M = g_0 R^2$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g_0 R + \frac{2g_0 R^2}{r}.$$

V nejvyšším bodě dráhy $v = 0$,

$$0 = v_0^2 - 2g_0 R + \frac{2g_0 R^2}{r_k},$$
$$r_k = \frac{2g_0 R^2}{2g_0 R - v_0^2}.$$

Diskuse:

a) Je-li $2g_0 R > v_0^2$, je číselná hodnota r_k konečné reálné číslo, těleso se vrátí zpět k Zemi.

b) Je-li $2g_0 R = v_0^2$, roste r_k přes všechny meze, těleso se trvale vzdaluje od Země. $v_0 = \sqrt{2g_0 R}$ je úniková rychlost tělesa při povrchu Země.

Po dosazení $g_0 = 9,81 \text{ ms}^{-2}$, $R = 6,37 \cdot 10^3 \text{ m}$ vychází
 $v_0 = 11,2 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$.

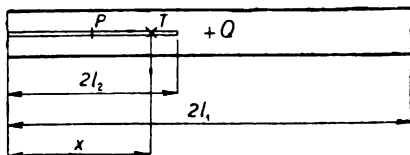
3. úloha (navrhl Josef Louvar)

Válcová trubice z homogenní plastické hmoty o délce $2l_1$ a o vnějším průměru $2r$ ($r \ll l_1$) má všude stejnou tloušťku stěny a je na jednom konci uzavřena. Dno je tak tenké, že jeho hmotnost lze zanedbat. Hmotnost trubice je m_1 . Do trubice vložíme drát délky $2l_2$, který má všude stejný průměr, o málo menší než vnitřní průměr trubice. Drát se opírá jedním koncem o dno trubice. Podíl hmotnosti drátu a jeho délky $2l_2$ označme μ .

Trubice s drátem, ponořená uzavřeným koncem do vody, má plavat ve svislé poloze. V kterých mezích je nutno volit délku drátu $2l_2$?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, $\mu = 3,00 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^{-1}$, $l_1 = 1,00 \cdot 10^{-1} \text{ m}$,

$r = 2,00 \cdot 10^{-3}$ m, měrná hmotnost vody $\rho = 1,00 \cdot 10^3$ kg m⁻³.



Obr. 72

Řešení:

Označme (viz obr. 72):

T hmotný střed (těžiště soustavy),

Q těžiště prázdné trubice,

P těžiště drátu,

S působíště vztlakové síly vody na trubici,

A střed dna trubice (= střed vnější plochy dna, hmotnost dna se zanedbává),

$\overline{AT} = x, y =$ délku ponořené části trubice ve vodě,

ρ hustotu vody,

m_1 hmotnost trubice,

$2l_1$ její délku,

m_2 hmotnost drátu,

$2l_2$ délku drátu,

μ podíl hmotnosti a příslušné délky drátu, zřejmě platí $m_2 = 2\mu l_2$.

Pro polohu těžiště soustavy T platí (rozložení tíhové síly na dvě složky rovnoběžné, souhlasně orientované)

$$m_1 g (l_1 - x) - m_2 g (x - l_2) = 0,$$

$$AT = x = \frac{l_1 m_1 + l_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{l_1 m_1 + 2\mu l_2^2}{m_1 + 2l_2 \mu}.$$

Podle Archimédova zákona se tíha plovoucího tělesa rovná tíze kapaliny, která má stejný objem, jako je objem ponořené části tělesa v kapalině,

$$(m_1 + m_2)g = \pi r^2 y \rho g .$$

$$y = \frac{m_1 + m_2}{\pi r^2 \rho} = \frac{m_1 + 2 \mu l_2}{\pi r^2 \rho};$$

$$AS = \frac{y}{2} = \frac{m_1 + 2 \mu l_2}{2 \pi r^2 \rho} .$$

Plove-li trubice ve svislé poloze, je v rovnovážné poloze. Je to tehdy, jestliže platí $AS \geq AT$. Pro $AS > AT$ je trubice v rovnovážné poloze stálé. Mohou nastat dva mezní případy:

1. $AS = AT$, $S \equiv T$; v tomto případě je délka drátu nejmenší, označme ji $2p$; trubice je v rovnovážné poloze vratké.
2. Trubice plovoucí ve svislé poloze je ponořena ve vodě až k hornímu otevřenému okraji; označme v tomto případě délku drátu $2s$; platí $2p \leq 2l_2 \leq 2s$.

Diskuse mezních případů:

Ad 1.

$$AS = \frac{m_1 + 2\mu p}{2\pi r^2 \rho}, \quad AT = \frac{l_1 m_1 + 2\mu p^2}{m_1 + 2\mu p};$$

$$\frac{m_1 + 2\mu p}{2\pi r^2 \rho} = \frac{l_1 m_1 + 2\mu p^2}{m_1 + 2\mu p},$$

$$4\mu (\mu - \pi r^2 \rho) p^2 + 4\mu m_1 p + m_1 - 2\pi r^2 \rho l_1 = 0. \quad (1)$$

Kořeny této rovnice jsou

$$p_{1,2} = \frac{-\mu m_1 \pm \sqrt{\pi r^2 \rho m_1 \mu (2\mu l_1 + m_1 - 2\pi r^2 \rho l_1)}}{2\mu (\mu - \pi r^2 \rho)}. \quad (1')$$

Podmínce úlohy vyhovují kořeny $p_{1,2} > 0$.

a) Předpokládejme, že jmenovatel je kladný, $\mu > \pi r^2 \rho$. (2)

Pak platí $2\mu l_1 + m_1 - 2\pi r^2 \rho l_1 > 2\pi r^2 \rho l_1 + m_1 - 2\pi r^2 \rho l_1 = m_1 > 0$.

Platí tedy diskriminant $D > 0$; rovnice má dva reálné kořeny, z nich nevyhovuje podmínce úlohy kořen p_2 , protože $p_2 < 0$. Pro p_1 platí $p_1 > 0$, jestliže

1. součinitel kvadratického členu rovnice (1) je kladný; tato podmínka je splněna předpokladem (2);
2. absolutní člen rovnice (1) je záporný $m_1 - 2\pi r^2 \rho l_1 < 0$. (3)

Jsou-li splněny podmínky (2) a (3), plove trubice ve svislé rovnovážné poloze vratké a délka drátu je

$$2p_1 = \frac{-\mu m_1 + \sqrt{\pi r^2 \rho m_1 \mu (2\mu l_1 + m_1 - 2\pi r^2 \rho l_1)}}{\mu (\mu - \pi r^2 \rho)}.$$

Podmínky (2) a (3) jsou splněny pro číselné hodnoty úlohy $2p = 2,21 \cdot 10^{-2}$ m.

b) Předpokládejme, že jmenovatel výrazu pro $p_{1,2}$ je záporný, $\mu < \pi r^2 \rho$. (4)

1. Předpokládejme, že platí $m_1 - 2\pi r^2 \rho l_1 < 0$ (3), pak

1.1. $2\mu l_1 + m_1 - 2\pi r^2 \rho l_1 \geq 0$;

$$\pi r^2 \rho > \mu \geq \pi r^2 \rho - \frac{m_1}{2l_1}. \quad (4')$$

Diskriminant rovnice (1) $D \geq 0$; rovnice má dva reálné kořeny. Z nich p_2 je zřejmě kladný, p_1 je také kladný, jsou-li splněny podmínky (3) a (4').

Jsou-li splněny podmínky (3) a (4'), trubice plove ve svislé rovnovážné poloze při délce drátu $2p_{1,2}$ podle (1'). Podmínka (4) není pro číselné hodnoty úlohy splněna.

$$1.2. \quad 2\mu l_1 + m_1 - 2\pi r^2 \rho l_1 < 0; \quad \mu < \pi r^2 \rho - \frac{m_1}{l_1},$$

potom $D < 0$; rovnice (1) nemá reálné kořeny.

2. Předpokládejme, že platí $m_1 - 2\pi r^2 \rho l_1 > 0$; (5) pak diskriminant rovnice (1) $D > 0$, rovnice má dva reálné kořeny. Z nich p_2 je zřejmě kladný a vyhovuje úloze, p_1 nevyhovuje úloze.

Jsou-li splněny podmínky (4) a (5), trubice plove ve svislé rovnovážné poloze vratké při délce drátu

$$2p_2 = \frac{-\mu m_1 - \sqrt{\pi r^2 \rho m_1 \mu (2\mu l_1 + m_1 - 2\pi r^2 \rho l_1)}}{\mu (\mu - \pi r^2 \rho)}.$$

Podmínka (4) není pro číselné hodnoty úlohy splněna. Ad 2.

Ponoří-li se plovoucí trubice ve svislé poloze až k hornímu okraji do vody, platí podle Archimédova zákona

$$(m_1 + m_2)g = \pi r^2 \rho 2l_1 g,$$

$$m_1 + 2s\mu = 2\pi r^2 \rho l_1,$$

$$2s = \frac{2\pi r^2 \rho l_1 - m_1}{\mu};$$

$2s > 0$, je-li splněn vztah (3).

Pro dané hodnoty úlohy je vztah (3) splněn,

$$2s = 5,04 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

Trubica plove ve svislé rovnovážné poloze ve vodě, je-li pro délku drátu $2l_2$ splněna podmínka:

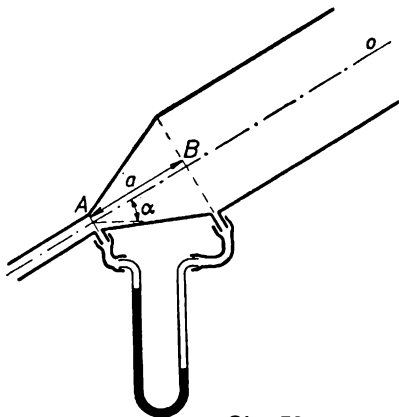
$$2p \leq 2l_2 \leq 2s.$$

Pro dané hodnoty úlohy platí

$$2,21 \cdot 10^{-2} \text{ m} \leq 2l_2 \leq 5,04 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

4. úloha (navrhl Jozef Zámečník)

Trubica s prierezmi rozličných plošných obsahov sa môže otáčať okolo vodorovnej osi, ktorá prechádza bodom B a je kolmá na pozdĺžnu os trubice o (obr. 73). V každe



Obr. 73

polohe trubice prúdi ňou voda ustáleným prúdením. Na ortuťovom manometri pripojenom k trubici sa určí rozdiel tlakov prúdiacej vody v bode B a v bode A . Body

A a B sú na pozdĺžnej osi trubice. Ich vzdialenosť je a . Prierez trubice vedený kolmo na os v bode A je veľmi malý vzhľadom na prierez vedený bodom B . Vodu prúdiacu trubicou považujte za dokonalú kvapalinu.

Určte rýchlosť prúdenia vody v trubici v bode A ako funkciu uhla odklonu osi o od vodorovnej roviny vedenej bodom A . Prevedte diskusiu riešenia, určte obor nájdenej funkcie.

Riešenie:

Nech značí:

S_A (S_B) prierez trubice vedený kolmo k ose o bodom A (B),

v_A (v_B) rýchlosť prúdenia vody prierezom S_A (S_B),

p_A (p_B) tlak prúdiacej vody v prierezu S_A (S_B),

h_B výšku bodu B od vodorovnej roviny vedenej bodom A ,

ρ hustotu vody, g zrýchlenie tiaže,

Δp rozdiel tlakov prúdiacej vody v bode B a v bode A meraný manometrom, ktorý považujeme za konštantný.

Za predpokladu, že voda je dokonalá kvapalina, platí podľa Bernoulliovej rovnice:

$$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + p_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + p_B + \rho g h_B. \quad (1)$$

Podľa rovnice spojitosti toku

$$v_A S_A = v_B S_B. \quad (2)$$

Ďalej označme

$$\Delta p = p_B - p_A. \quad (3)$$

Z rovnice (1)–(3) dostaneme:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho v_A^2 \left(1 - \frac{S_A^2}{S_B^2} \right) - \rho g h_B.$$

Pretože platí $S_A \ll S_B$, $1 - \frac{S_A^2}{S_B^2} \doteq 1$, dostaneme po úprave

$$v_A = \sqrt{\frac{2}{\rho} (\Delta p + \rho g h_B)} = \sqrt{\frac{2}{\rho} (\Delta p + \rho g a \sin \alpha)}.$$

Riešenie je reálne, pokiaľ

$$\sin \alpha \geq - \frac{\Delta p}{\rho g a}.$$

5. úloha (navrhl Evžen Říman)

Elektrický ohřívač vzduchu má příkon P_1 a účinnost η . Za dobu τ jím projde vzduch o objemu V_0 , který se ohřeje za stálého tlaku p_0 z teploty t_0 na teplotu t . Hustota vzduchu za tlaku p_0 je ρ_0 , jeho měrné teplo c_p .

Určete výslednou teplotu t .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $P = 2,5 \text{ kW}$, $\eta = 90 \%$, $\tau = 60 \text{ min}$, $V_0 = 200 \text{ m}^3$, $p_0 = 10^5 \text{ N m}^{-2}$, $c_p = 1,005 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$, $\rho_0 = 1,29 \text{ kg m}^{-3}$, $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$.

Řešení:

Za dobu τ se zvýší teplota vzduchu o hmotnosti $m = V_0 \rho_0$ z teploty t_0 na t přijetím množství tepla

$$Q = m c_p (t - t_0) = V_0 \rho_0 c_p (t - t_0).$$

Průměrný výkon ohříváče je

$$P_2 = \frac{Q}{\tau} = \frac{V_0 \rho_0 c_0 (t - t_0)}{\tau},$$

$$P_2 = P_1 \eta,$$

$$t = \frac{P_1 \eta \tau}{V_0 \rho_0 c_p} + t_0.$$

Dosadíme číselné hodnoty

$$t = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 0,9 \cdot 3,6 \cdot 10^3}{2,0 \cdot 10^2 \cdot 1,29 \cdot 1,005 \cdot 10^3} \text{ } ^\circ\text{C} \doteq 31 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Zkouška rozměru výsledku:

$$[t] = \frac{\text{W s}}{\text{m}^3 \text{ kg m}^{-3} \text{ J kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}} = \text{ } ^\circ\text{C}.$$

6. úkol — experimentální (navrhl Zdeněk Ungermann)

Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Potřeby: Ocelový drát délky asi 0,5 m, těleso, jehož moment setrvačnosti snadno určíme (koule, kruhový kotouč), délkové měřítko dělené na mm, posuvné měřítko s noniem, mikrometr, váhy, závaží, stopky.

- Vypracujte návrh měření a nakreslete náčrtek pokusu.
- Vypracujte postup měření.
- Proveďte měření; pro každou naměřenou veličinu určete absolutní a relativní chybu.
- Proveďte hodnocení úlohy.

Moment setrvačnosti homogenní koule o poloměru r a hmotnosti m vzhledem k ose, která prochází jejím středem, je $J = \frac{2}{5} m r^2$, moment setrvačnosti homogenního

kruhového kotouče o poloměru r a hmotnosti m vzhledem k rotační ose kotouče je $\mathcal{J} = \frac{1}{2} m r^2$.

Řešení:

a) Při dynamické metodě určení modulu pružnosti ve smyku je užito torzních kmitů tělesa upevněného na dolním konci svislého ocelového drátu, jehož horní konec je pevně vetknut (viz obr. 74). Z rozboru torzních kmitů tělesa zavěšeného na drátě lze pro modul pružnosti ve smyku odvodit vztah

$$G = \frac{8\pi \mathcal{J} l}{T^2 r_0^4}, \quad (1)$$

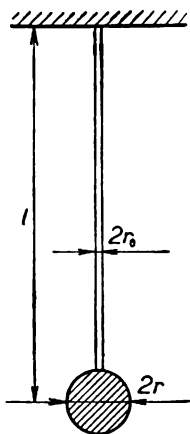
v němž značí \mathcal{J} moment setrvačnosti uvažovaného tělesa vzhledem k rotační ose procházející jeho středem, l délku drátu, T dobu kmitu tělesa zavěšeného na drátě a konajícího torzní kmitu, $2r_0$ průměr drátu.

Dosadíme-li v případě koule, resp. kotouče za momenty setrvačnosti výrazy uvedené v zadání, obdržíme

pro kouli
$$G = \frac{16\pi m r^2}{5 T^2 r_0^4}, \quad (2)$$

pro kotouč
$$G = \frac{4\pi m r^2}{T^2 r_0^4}. \quad (3)$$

Ve vztazích (2) a (3) značí m hmotnost tělesa (koule nebo kotouče) a $2r$ je průměr koule, popř. podstavy kotouče.



Obr. 74

b) Měřením lze získat pro oba případy všechny veličiny potřebné k výpočtu modulu pružnosti ve smyku podle vzorce (2), resp. (3). Je vhodné měřit délku drátu l metrovým měřítkem s milimetrovým dělením; dále je třeba měřit průměr drátu $2r_0$, průměr koule (podstavy kotouče) posuvným měřítkem, dobu kmitu stopkami a hmotnost koule (kotouče) je nutno zjistit vážením. Absolutní chybu nalezené hmotnosti odhadneme, u ostatních veličin lze z opakovaných měření nalézt aritmetický průměr a vypočítat střední chybu aritmetického průměru (absolutní chybu) pomocí vztahu

$$\delta = \frac{5}{3} \frac{\Sigma \Delta_+}{n\sqrt{n-1}}, \text{ kde } \Delta_+ \text{ značí kladnou odchylku}$$

naměřené veličiny od aritmetického průměru. Z nalezených „absolutních“ chyb pak snadno určíme chyby relativní.

Čís. měř.	Průměr koule		Průměr drátu		Délka drátu		Doba 10 kmitů	
	$2r$ [mm]	Δ_+ [mm]	$2r_0$ [mm]	Δ_+ [mm]	l [mm]	Δ_+ [mm]	$10 T$ [s]	Δ_+ [s]
1	25,45		0,42	0,003	494		6,8	
2	25,45		0,42	0,003	498	4,0	7,4	0,34
3	25,45	0,500	0,41		491		7,0	
4	25,50		0,41		490		7,2	0,14
5	25,45		0,42	0,003	494		6,8	
6	25,45		0,41		497	3,0	7,4	0,34
7	25,45		0,42	0,003	492		7,0	
8	25,40		0,42	0,003	494		7,2	0,14
9	25,45		0,42	0,003	496	2,0	6,8	
10	25,45		0,42	0,003	494		7,0	
aritm. průměr	25,450 $\Sigma \Delta_+ = 0,500$		0,417 $\Sigma \Delta_+ = 0,021$		494 $\Sigma \Delta_+ = 9,0$		7,06	0,96
střední chyba δ	0,003 mm		0,0012 mm		0,5 mm		0,053 s	
relativní chyba	0,012 %		0,28 %		0,10 %		0,75 %	

7. úloha (navrhl Zdeněk Ungermann)

Dutý ocelový válec má vnější průměr d_2 a vnitřní průměr d_1 . Do jeho dutiny vložíme měděný válec o průměru $d < d_1$ (obr. 75). Obě tělesa mají stejnou délku l . Působí na ně tlaková síla F ve směru osy válců.

a) Určete tlak na podstavy obou těles.

b) Určete změnu šířky mezery δ , znáte-li Poissonovy konstanty μ_1 a μ_2 a Youngův modul pružnosti mědi a oceli E_1 a E_2 .

Předpokládejte, že tělesa jsou dokonale pružná, zanedbejte stlačitelnost vzduchu.

Řešení:

Nechť značí Δl zkrácení délky válců působením síly F ; p_1 tlak na měděný válec, p_2 tlak na dutý ocelový válec.

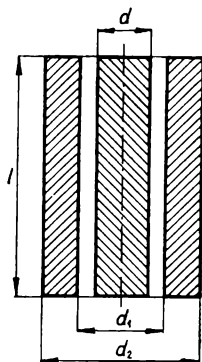
a) Podle Hookova zákona pro pružné zkrácení tlakovou silou platí

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{p_1}{E_1}, \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{p_2}{E_2};$$

z obou předešlých vztahů plyne

$$\frac{p_1}{E_1} = \frac{p_2}{E_2}. \quad (1)$$

Vyjádříme celkovou sílu působící na obě tělesa ve



Obr. 75

Vnitřní průměr dutého ocelového válce je po stlačení

$$D_1 = d_1 + \Delta d_1 = d_1 \left(1 + \frac{\mu_2 p_2}{E_2} \right).$$

Velikost mezery po deformaci těles je

$$\Delta = D_1 - D = (d_1 - d) + \left(\frac{\mu_2 p_2 d_1}{E_2} - \frac{\mu_1 p_1 d}{E_1} \right).$$

Změna velikosti mezery je

$$\delta = (d_1 - d) - \Delta = \frac{\mu_2 p_2 d_1}{E_2} - \frac{\mu_1 p_1 d}{E_1}.$$

Dosadíme-li za p_1, p_2

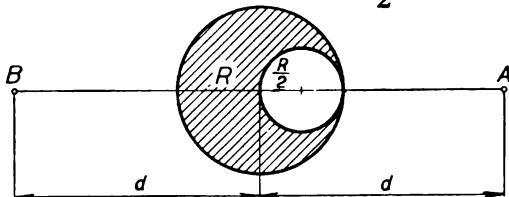
$$\delta = \frac{4 E}{\pi [d^2 E_1 + E_2 (d_2^2 - d_1^2)]} (\mu_2 d_1 - \mu_1 d).$$

8. úloha (navrhla dr. Marta Chytilová)

Homogenní koule o poloměru R a o hmotnosti M působí gravitační silou na hmotný bod o hmotnosti m ve vzdálenosti $d > R$ od středu koule.

a) Určete velikost, směr a orientaci gravitační síly, kterou působí koule na hmotný bod.

b) V kouli je dutina o poloměru $\frac{R}{2}$ podle obr. 76.



Obr. 76

Porovnáme hmotnosti obou koulí:

$$M = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}; \quad M_1 = \frac{4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 \rho}{3} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3 \cdot 8} = \frac{M}{8}.$$

Vektorová přímka síly \mathbf{F}_2 je na spojnici středu koule s bodem v poloze A a je orientovaná do středu koule. Gravitační sílu \mathbf{F}_A , kterou působí těleso podle obr. 76 na hmotný bod v poloze A , lze složit ze síly \mathbf{F}_1 a síly \mathbf{F}'_2 , která je stejně veliká jako síla \mathbf{F}_2 , avšak nesouhlasně orientovaná. Pro velikost síly \mathbf{F}_A platí

$$F_A = F_1 - F_2 = \frac{\propto M m (7d^2 + 2R^2 - 8dR)}{2d^2(2d - R)^2}. \quad (2)$$

Hodnota zlomku (2) je kladná, jestliže platí nerovnost

$$7d^2 + 2R^2 - 8dR > 0.$$

Tato nerovnost je zřejmě splněna pro podmínku $d > R$ uvedenou v zadání.

Platí tedy pro velikost sil: $F_1 > F_2$; $F_A < F$. Síla \mathbf{F}_A je orientovaná do středu koule o poloměru R .

b—2) Předpokládejme, že hmotný bod o hmotnosti m je v poloze B . Při stejném označení jako v úloze b—1) platí pro velikosti sil $F_1 = F$,

$$F_2 = \frac{\propto M_1 m}{\left(d + \frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\propto M m}{2(2d + R)^2}.$$

Vektorová přímka síly \mathbf{F}_2 je na spojnici středu koule s bodem v poloze B a je orientována do středu koule. Gravitační sílu \mathbf{F}_B , kterou působí těleso podle obr. 76 na hmotný bod v poloze B , lze složit ze síly \mathbf{F}_1 a síly \mathbf{F}'_2 ,

Označme poměr objemů

$$\frac{V_1}{V_2} = k.$$

Podle Gay-Lussacova zákona platí

$$V_1 = V_0(1 + \gamma t_1), \quad V_2 = V_0(1 + \gamma t_2),$$

odtud

$$k = \frac{1 + \gamma t_1}{1 + \gamma t_2}. \quad (1)$$

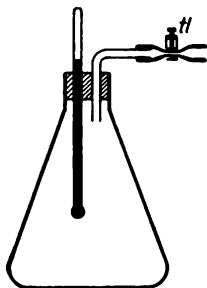
Objem V_1 a V_2 vzduchu v baňce určete nepřímou z těchto měření:

a) Určete hmotnost m_1 suché baňky s příslušenstvím podle obr. 77 (tlačka je otevřena).

b) Uzavřete tlačku a ponořte baňku dnem dolů do horké vodní lázně až po zátku. Po ustálení teploty vzduchu v baňce změřte tuto teplotu t_1 . Objem vzduchu v baňce je V_1 .

c) Baňku ponořte do studené vodní lázně dnem vzhůru a pod povrchem vody otevřete tlačku. Proč vniká voda do baňky? Kdy vnikání vody do baňky ustane?

Uveďte baňku stále ponořenou hrdlem ve vodě do takové polohy, aby klidné povrchy vody v baňce a v nádobě byly ve stejné vodorovné rovině. Po ustálení teploty vzduchu v baňce změřte jeho teplotu t_2 . Potom uzavřete tlačku. Vzduch v baňce má objem V_2 . Proč můžeme předpokládat, že vzduch v baňce



Obr. 77

Řešení:

Ze vztahů (1) a (4) v zadání úlohy snadno dostaneme

$$\gamma = \frac{m_2 - m_1}{t_1(m_3 - m_2) - t_2(m_3 - m_1)}. \quad (5)$$

Měření bylo provedeno ve školní laboratoři za těchto podmínek:

teplota vzduchu $t = 21,0 \text{ }^\circ\text{C}$,
tlak vzduchu $b = 762 \text{ torry}$,
relativní vlhkost vzduchu $\varphi = 50 \text{ } \%$.

Postup měření je zřejmý z návodu úlohy. Hmotnost suché baňky s příslušenstvím byla zjištěna vážením na laboratorních vahách

$$m_1 = (115,000 \pm 0,005) \text{ g},$$

tedy s relativní chybou $0,004 \text{ } \%$.

Na stejných vahách byla pak zjišťována hmotnost baňky se vzduchem a vodou teploty t_2 označená m_2 a hmotnost baňky naplněné vodou teploty t_2 označená m_3 . Hodnoty m_2 jsou uvedeny níže (v tabulce), hodnota m_3 byla ve všech případech nalezena stejná

$m_3 = (400,800 \pm 0,005) \text{ g}$, tj. s relativní chybou $0,001 \text{ } \%$.

V průběhu pokusu po ponoření baňky se vzduchem do studené lázně dnem vzhůru vniká při otevřené tlačce do baňky voda, protože v důsledku ochlazení zmenšil vzduch svůj objem. Vnikání vody do baňky ustane v okamžiku, kdy teplota vzduchu bude stejná, jako je teplota vodní lázně, tj. v okamžiku, kdy vzduch přestane zvětšovat svůj objem. Protože v uvažované hloubce pod vodní hladinou je stálý hydrostatický tlak vody, lze považovat změnu

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl Ivo Volf)

Určete průměrnou hustotu Slunce, znáte-li zdánlivý střední průměr Slunce $\alpha = 32'$, oběžnou dobu Země kolem Slunce $T = 365,25$ dne. Předpokládáme, že Země se pohybuje kolem Slunce rovnoměrným pohybem po kružnici.

Řešte nejprve obecně.

Řešení:

Označme M — hmotnost Slunce, V — objem Slunce, $\rho = \frac{M}{V}$, m — hmotnost Země, R — střední vzdálenost Země od Slunce. Předpokládáme, že Slunce je koule o poloměru r a že Země je koule o poloměru r_Z ; vzdálenost středů obou koulí je R ; T je oběžná doba Země.

Poněvadž platí $r_Z \ll R$, můžeme považovat Zemi na její oběžné dráze kolem Slunce za hmotný bod, který koná rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru R . V každém bodě oběžné dráhy působí Slunce na Zemi gravitační silou $F = \kappa \frac{m M}{R^2}$, která je dostředivou silou pro oběžnou dráhu Země kolem Slunce:

$$\kappa \frac{m M}{R^2} = \frac{4\pi^2 R m}{T^2};$$

odtud

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{\kappa T^2}.$$

c) Určete vektor zrychlení pohybu závaží v okamžiku uvolnění v poloze II.

Jsou dány hodnoty x_0 , s , m , g (tíhové zrychlení). Řešte jen obecně. Závaží považujeme za hmotný bod. Hmotnost pružiny a odpor vzduchu neuvažujeme.

Řešení:

Soustavu tvoří závaží a pružina; závaží považujeme za hmotný bod; hmotnost pružiny je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti závaží; těžiště soustavy je v hmotném bodu. Potřebné fyzikální veličiny jsou označeny takto:

W_1 potenciální energie tíhové soustavy,

W_2 energie pružnosti soustavy,

W_I úhrnná mechanická energie soustavy v poloze I,

W_{II} úhrnná mechanická energie soustavy v poloze II.

V poloze I zvolíme $W_1 = 0$.

a) V poloze I působí na soustavu tíhová síla o velikosti $m g$ a síla pružnosti o velikosti $k x_0$; obě síly jsou v rovnováze

$$m g = k x_0 .$$

Odtud určíme tuhost pružiny $k = \frac{m g}{x_0}$.

$$\text{V poloze I platí: } W_1 = 0; W_2 = \frac{k x_0^2}{2} = \frac{m g x_0}{2};$$

$$W_I = W_1 + W_2 = \frac{m g x_0}{2} .$$

$$\begin{aligned} \text{V poloze II platí: } W_1 &= m g s; W_2 = \frac{k(x_0 - s)^2}{2} = \\ &= \frac{m g}{2} x_0 \left(1 - \frac{s}{x_0}\right)^2; \end{aligned}$$

a) Určete tlak p_2 uvnitř vzdušnice při teplotě t_2 za předpokladu, že hmotnost vzduchu ve vzdušnici se nezměnila a že objem vzdušnice se nezměnil.

b) Určete hmotnost vzduchu, který je nutno při teplotě t_2 do vzdušnice přidat, aby se tlak vzduchu zvýšil opět na hodnotu p_1 při stálém objemu vzdušnice.

Vzduch považujeme za dokonalý plyn, kilomolová hmotnost vzduchu je M_m .

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $t_1 = 37,0 \text{ }^\circ\text{C}$, $t_2 = -3,0 \text{ }^\circ\text{C}$, $p_1 = 1,9 \text{ at}$, $V = 8,0 \text{ l}$, $M_m = 29 \text{ kg mol}^{-1}$.

Řešení:

Stavové veličiny vzduchu ve vzdušnici označíme

ve dne $p_1, T_1, V, m,$

v noci $p_2, T_2, V, m,$

V_m – molový objem, M_m – molovou hmotnost vzduchu,

$$V_m = \frac{V}{m} M_m. \quad (1)$$

a) Podle zákona Gay-Lussacova $p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1}$.

b) Do stavové rovnice pro molový objem $p V_m = R T$ dosadíme z (1):

$$\frac{p V M_m}{m} = R T,$$

$$m = \frac{p V M_m}{R T}. \quad (2)$$

Pro stav vzduchu v noci podle (2) platí

$$m = \frac{p_2 V M_m}{R T_2}.$$

Označme m_1 hmotnost vzduchu o objemu V při teplotě T_2 a tlaku p_1 . Podle (2) platí

$$m_1 = \frac{p_1 V M_m}{R T_2}.$$

Do vzdušnice byl přidán vzduch o hmotnosti $\Delta m = m_1 - m = (p_1 - p_2) \frac{V M_m}{R T_2}$.

Dosadíme hodnoty veličin:

a) $p_2 = 1,9 \cdot \frac{270}{310} \text{ at} \doteq 1,7 \text{ at};$

b) $1 \text{ at} \doteq 10^5 \text{ N m}^{-2}; p_1 - p_2 = (1,9 - 1,7) \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2} = 2,0 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-2};$

$V = 8,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3; M_m = 29 \text{ kg kmol}^{-1}; R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ J kmol}^{-1} \text{ deg}^{-1};$

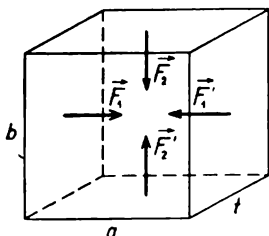
$T_2 = 270 \text{ }^\circ\text{K};$

$\Delta m \doteq 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$

Rozměrová zkouška:

$[\Delta m] = \text{N m}^{-2} \text{ m}^3 \text{ kg kmol}^{-1} \text{ J}^{-1} \text{ kmol deg}^{-1} \text{ deg} = \text{kg}.$

4. úloha (navrhl Zdeněk Ungermann)



Obr. 78

Na měděnou desku tvaru kvádru tloušťky t , výšky b a šířky a působí síly $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}'_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}'_2$ podle obrázku 78. $F_1 = F'_1, F_2 = F'_2$.

a) Určete změnu výšky b a šířky a kvádru, znáte-li Youngův modul pružnosti E a Poissonovu konstantu μ .

b) Určete relativní změnu objemu $\frac{\Delta V}{V}$ desky za předpokladu, že můžeme zanedbat změnu tloušťky desky.

Řešení:

a) Použijeme vztahů pro podélnou a příčnou deformaci. Působením síly F_1 nastane podle Hookova zákona prodloužení délky a

$$\Delta_1 a = \frac{a F_1}{E b t} \quad (1)$$

a zkrácení délky b

$$\Delta_1 b = -\frac{\mu F_1}{E t}. \quad (2)$$

Působením síly F_2 nastane podle Hookova zákona prodloužení délky b

$$\Delta_2 b = \frac{b F_2}{E a t} \quad (3)$$

a zkrácení délky a

$$\Delta_2 a = -\frac{\mu F_2}{E t}. \quad (4)$$

Celková změna délky a je

$$\begin{aligned} \Delta a = \Delta_1 a + \Delta_2 a &= \frac{1}{E t} \left(\frac{a F_1}{b} - \mu F_2 \right) = \frac{1}{E} \left(p_1 a - \right. \\ &\quad \left. - \mu p_2 a \right) = \frac{a}{E} (p_1 - \mu p_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Celková změna délky b je

$$\begin{aligned} \Delta b = \Delta_1 b + \Delta_2 b &= \frac{1}{E t} \left(\frac{b F_2}{a} - \mu F_1 \right) = \frac{1}{E} (p_2 b - \\ &\quad - \mu p_1 b) = \frac{b}{E} (p_2 - \mu p_1). \end{aligned} \quad (6)$$

b) Změna objemu desky je

$$\Delta V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)t - abt = bt\Delta a + at\Delta b + \Delta a\Delta b t \doteq bt\Delta a + at\Delta b;$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{abt} \doteq \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}.$$

Dosadíme podle (5) a (6). Relativní změna objemu je

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{p_1}{E} + \frac{p_2}{E} - \frac{\mu p_1}{E} - \frac{\mu p_2}{E} = \frac{1 - \mu}{E} (p_1 + p_2).$$

3. Úlohy kategorie C

Úlohy a jejich řešení recenzovali Jan Tesař a dr. Ivan Náter.

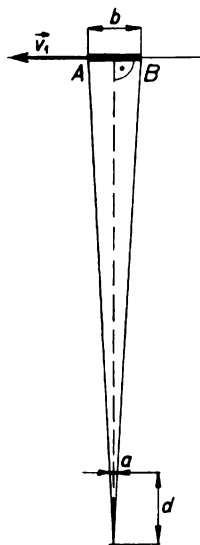
a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl Jan Tesař)

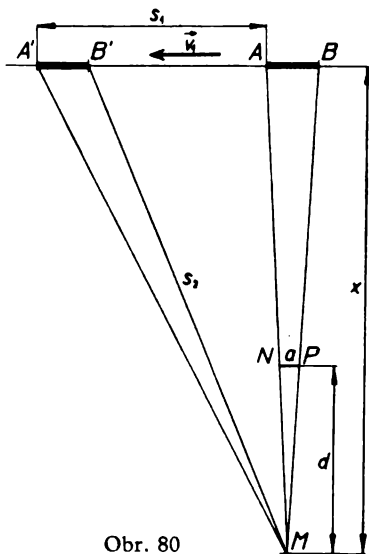
Z kulometu se střílí po nepřátelském pancéřovém automobilu, který se dá při pozorování úplně zakrýt tužkou o průměru a , jež je ve svislé poloze ve vzdálenosti d před okem. Automobil má délku b . Situaci ukazuje obr. 79.

a) O kolik délek automobilu se musí mířit před automobil, který se pohybuje rovnoměrně po přímé silnici rychlostí v_1 , aby se zasáhl cíl, je-li průměrná rychlost střely v_2 ($v_2 \gg v_1$)?

b) Jak daleko je automobil od kulometu v okamžiku, kdy je zasažen střelou?



Obr. 79



Obr. 80

c) Jak dlouho trvá pohyb střely, než po opuštění hlavně zasáhne cíl?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $a = 6,0$ mm, $b = 3,0$ m, $d = 60$ cm, $v_1 = 20$ m s⁻¹, $v_2 = 500$ m s⁻¹.

Řešení:

V okamžiku, kdy střela opouští hlavně, je automobil vzdálen od kulometu, nacházejícího se v místě M , o délku x , v poloze označené na obr. AB . Střelou je zasažen v poloze $A'B'$ za dobu t po vystřelení náboje. Za dobu t vykoná automobil dráhu s_1 , střela dráhu s_2 . Má-li střela zasáhnout automobil, musí střelec mířit o n délek automobilu před cíl, takže $s_1 = n b$ (viz obr. 80).

a) Za čas t vykoná automobil dráhu $s_1 = v_1 t$, strela dráhu $s_2 = v_2 t$. Vyloučíme-li z těchto dvou rovnic t , dostaneme $s_2 = \frac{v_2 s_1}{v_1}$, takže vzhledem ke vztahu $s_1 = n b$ vyjde

$$s_2 = \frac{n b v_2}{v_1}. \quad (1)$$

Vzdálenost x má podle Pythagorovy věty hodnotu

$$x = \sqrt{s_2^2 - s_1^2} = n b \sqrt{\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1} = \frac{n b}{v} \sqrt{v_2^2 - v_1^2}. \quad (2)$$

Z podobnosti $\triangle MNP$ a $\triangle MAB$ je podle obr. 80 patrné, že platí $\frac{x}{b} = \frac{d}{a}$, takže $x = \frac{b d}{a}$. Porovnáme-li tento vztah se vztahem (2), dostaneme

$$\frac{b d}{a} = \frac{n b}{v_1} \sqrt{v_2^2 - v_1^2} \text{ a dále}$$

$$n = \frac{d}{a} \frac{v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \doteq \frac{d}{a} \frac{v_1}{v_2}, \quad (3)$$

neboť hodnota v_1^2 je zanedbatelně malá vzhledem k hodnotě v_2^2 .

Po dosazení daných hodnot do (3) vyjde $n \doteq \frac{0,6 \cdot 20}{0,006 \cdot 500} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ s} = 4$.

Má-li být automobil zasažen střelou, musí střelec mířit o 4 délky automobilu před něj, jak je patrné ze vztahu (3).

b) Při zásahu je automobil od kulometu vzdálen o délku

s_2 , určenou vztahem (1). Vzhledem ke vztahu (3) vychází po úpravě

$$s_2 = \frac{d b v_2^1}{a \sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \doteq \frac{d b}{a}. \quad (4)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $s_2 \doteq \frac{0,6^1}{0,006} \cdot 3 \text{ m} = 300 \text{ m}$.

V okamžiku zásahu je automobil vzdálen od kulometu o 300 m. Obecně je tato vzdálenost určena vztahem (4).

c) Ze vztahu $s_2 = v_2 t$ vychází $t = \frac{s_2}{v_2}$ a po dosazení za s_2 ze vztahu (4) je

$$t = \frac{d b}{a \sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \doteq \frac{d b}{a v_2}. \quad (5)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$t \doteq \frac{0,6 \cdot 3}{0,006 \cdot 500} \frac{\text{m}^2}{\text{m}^2 \text{ s}^{-1}} = 0,6 \text{ s}.$$

Střela vykoná po opuštění hlavně až po zásah do cíle dráhu s_2 za 0,6 s. Obecně je tato hodnota určena výrazem (5).

2. úloha (navrhl Jan Tesař)

Vlak o n stejně dlouhých vozech se rozjíždí z klidu po přímé trati pohybem rovnoměrně zrychleným. Pozorovatel stojí v místě, kde bylo čelo prvního vozu, dokud byl vlak v klidu. Konec posledního vozu projede kolem pozorovatele v čase t_n od okamžiku, kdy se dal vlak do pohybu.

a) Určete časový interval Δt_1 , ve kterém projíždí kolem pozorovatele první vůz vlaku.

b) Určete časový interval Δt_n , ve kterém projíždí kolem pozorovatele poslední vůz vlaku.

Mezery mezi jednotlivými vozy neuvažujte.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $t_n = 12$ s, $n = 9$.

Řešení:

Délku vozu budeme značit d , zrychlení vlaku a . Čas, ve kterém projede kolem pozorovatele konec $(n - 1)$ vozu, označíme t_{n-1} .

a) Za dobu Δt_1 ujede vlak rovnoměrně zrychleným pohybem dráhu rovnou délce vozu. Je tedy $d = \frac{1}{2} a \cdot (\Delta t_1)^2$, takže

$$a = \frac{2d}{(\Delta t_1)^2}. \quad (1)$$

Vzdálenost čela prvního vozu od konce vlaku je nd . Proto platí $\frac{1}{2} a t_n^2 = nd$. Dosadíme-li do tohoto výrazu

za a hodnotu ze vztahu (1), vyjde $nd = \frac{1}{2} \frac{2d}{(\Delta t_1)^2} t_n^2$ a po úpravě

$$t_n = \Delta t_1 \sqrt{n} \text{ a } \Delta t_1 = \frac{t_n}{\sqrt{n}}. \quad (2)$$

Po dosazení daných hodnot do druhého ze vztahů (2) vyjde

$$\Delta t_1 = \frac{12}{3} \text{ s} = 4 \text{ s}.$$

První vůz bude kolem pozorovatele projíždět po dobu 4 s. Tato hodnota je obecně určena druhým ze vztahů (2).

b) Konec ($n - 1$) vozu projede kolem pozorovatele podle upraveného prvního ze vztahů (2) za dobu $t_{n-1} = \Delta t_1 \sqrt{n - 1}$. Proto je

$$\begin{aligned} \Delta t_n &= t_n - t_{n-1} = \Delta t_1 (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \\ &= t_n \left(1 - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $\Delta t_n = 12 \left(1 - \sqrt{\frac{8}{9}} \right) \text{ s} = 4(3 - \sqrt{8}) \text{ s} \doteq 0,7 \text{ s}$.

Poslední vůz bude kolem pozorovatele projíždět po dobu 0,7 s. Tento časový interval je obecně určen vztahem (3).

3. úkol — experimentální (navrhl Jan Tesař)

Určení průměru tenkého drátu

Pomůcky: tenký drát, milimetrové měřítko, mikrometr, laboratorní váhy a sada závaží, pyknometr.

Návod

a) Odstříhneme kus drátu a milimetrovým měřítkem změříme jeho délku l .

b) Vážením na laboratorních vahách určíme hmotnost m tohoto kusu drátu.

c) Měrnou hmotnost ρ materiálu drátu určíme užitím

pyknometru (viz Živný - Lepil, Praktická cvičení z fyziky nebo brožura IV. ročník FO, SPN 1964, str. 66).

d) Průměr drátu vypočítáme ze vztahu $d = 2 \sqrt{\frac{m}{\pi \rho l}}$.

Úkoly

(1)

1. Dokažte správnost vztahu (1).
2. Proveďte všechna potřebná měření a odhadněte nebo určete absolutní i relativní chyby měření.
3. Podle vztahu (1) vypočítejte průměr drátu. Určete relativní a absolutní chybu vypočítané hodnoty d .
4. Zkontrolujte vypočítanou hodnotu d s hodnotou získanou přímým měřením mikrometrem.

Řešení:

1. Objem odstřiženého kusu drátu je $\frac{1}{4} \pi d^2 l$,
hmotnost tohoto kusu drátu $\frac{1}{4} \pi d^2 \rho l$.

Z toho vypočítáme $d = 2 \sqrt{\frac{m}{\pi \rho l}}$,
což je vztah (1).

2. Měřtkem s milimetrovým dělením byla měřena délka drátu.

Č. měř.	l [mm]	Δ_+ [mm]
1	36,5	
2	37,0	0,4
3	36,0	
4	36,5	
5	37,0	0,4
aritm. průměr	36,6	$\Sigma \Delta_+ = 0,8$

Střední chyba aritmetického průměru je dána vztahem

$$\delta = \frac{5}{3} \frac{\Sigma \Delta_+}{n \sqrt{n-1}},$$

v našem případě je

$$\delta = \frac{5}{3} \frac{0,08}{5 \cdot 2} \text{ mm} \doteq 0,1 \text{ mm}.$$

Je tedy délka drátu $l = (36,6 \pm 0,1)$ mm.

Tato délka je udána s relativní chybou 0,3 %.

Vážením na laboratorních vahách byly určeny:

hmotnost drátku m ,

hmotnost pyknometru naplněného vodou m_1 ,

hmotnost pyknometru naplněného vodou s drátkem uvnitř pyknometru m_2 . Při vážení byly metodou tří kyvů stanoveny nulové polohy při nezatižených vahách a rovnovážné polohy, při závaží hmotnosti z . Nulová poloha byla vždy zjištěna před vážením a po vážení a pro výpočet byla užita střední hodnota n_0 . Hmotnost váženého předmětu je vypočítána pomocí vztahu

$$m = z_1 + \frac{n_0 - r_1}{r_2 - r_1} (z_2 - z_1).$$

Za absolutní chybu hmotnosti (takto zjištěné) je vzata hmotnost příslušející při vážení vychýlení o jeden dílek, tj. převrácená hodnota citlivosti vah

$$m = \frac{z_2 - z_1}{r_2 - r_1}.$$

Hodnoty nalezené při vážení jsou zapsány v tabulce. (Počet dílků ukázaný jazýčkem vah je označen v tabulce [d.]

vázení předmětu	n_0 [d.]	z_1 [g]	r_1 [d.]	z_2 [g]	r_2 [d.]	m [g]	δm [g]
drátku	7,3	0,66	6,0	0,67	7,75	0,667	$5,7 \cdot 10^{-3}$
pyknometru s vodou	7,5	29,00	7,0	29,01	8,0	29,005	$10,0 \cdot 10^{-3}$
pyknometru s vodou a s drátkem	8,2	29,58	7,5	29,59	8,75	29,586	$8,0 \cdot 10^{-3}$

Shrneme-li výsledky z tabulky, jsou hmotnost drátku $m = (0,667 \pm 0,006)$ g, určená s relativní chybou 0,9 ‰,

hmotnost pyknometru s vodou $m_1 = (29,005 \pm 0,010)$ g, určená s relativní chybou 0,03 ‰,

hmotnost pyknometru s vodou a s drátkem

$m_2 = (29,586 \pm 0,008)$ g, určená s relativní chybou 0,03 ‰.

Výraz $m_1 - m_2 + m$ udává hmotnost vody, která byla vytěsněna z pyknometru při vložení drátku. Objem tohoto množství vody je roven objemu drátku a rovná se

$V = \frac{m_1 - m_2 + m}{\rho_0}$, kde ρ_0 značí hustotu vody za dané

teploty.

Hustota drátu je pak zřejmě

$$\rho = \frac{m}{m_1 - m_2 + m} \rho_0. \quad (2)$$

Po dosazení výše zjištěných hodnot a hodnoty $\rho_0 = 0,998 \text{ g cm}^{-3}$ (pro teploty kolem 20°C) je]

$$\rho = \frac{0,667}{0,086} 0,998 \text{ g cm}^{-3} = 7,75 \text{ g cm}^{-3}.$$

Relativní chyba takto vypočtené veličiny viz vzorec (2), je vzhledem k výrazu $(m_1 - m_2 + m)$ značná a přesahuje 10 %. Skutečný výsledek je vzhledem k rozložení odchylek od správných hodnot v obou směrech mnohem méně odlišný od správné hodnoty.

3. Po dosazení výrazu (2) do (1) je

$$d = 2 \sqrt{\frac{m_1 - m_2 + m}{\pi \rho_0 l}}. \quad (3)$$

Pro hodnoty zjištěné měřením vychází

$$d = 2 \sqrt{\frac{0,086}{\pi \cdot 0,998 \cdot 3,66}} \text{ cm} = 0,175 \text{ cm} \text{ a relativní}$$

chyba takto zjištěného průměru přesahuje 5 %.

4. Kontrolní měření průměru drátu bylo provedeno mikrometrem.

Střední chyba aritm. průměru

$$\delta = \frac{5}{3} \frac{0,022}{5 \cdot 2} \text{ mm} = 0,004 \text{ mm}.$$

n	d [mm]	Δ_+ [mm]
1	1,74	0,016
2	1,72	
3	1,71	0,006
4	1,72	
5	1,73	
	$\bar{d} = 1,724$	$\Sigma\Delta_+ = 0,022$

Průměr drátku stanovený měřením pomocí mikrometrického šroubu je pak $d = (1,724 \pm \pm 0,004)$ mm určený s relativní chybou 0,2%. Hodnota průměru drátku zjištěná nepřímou metodou je s hodnotou zjištěnou přímým měřením celkem v dobrém

souhlase, odchylka obou výsledků činí v tomto případě 2 %, proti očekávaným 5 % (relativní chyba nepřímo nalezeného průměru drátku).

4. úloha (navrhl Ivo Volf)

Na stavbě se zvedají pomocí jeřábu tělesa, která se upevňují na hák jeřábu pomocí lana. Lano unese těleso nejvýše o tíze G , jestliže toto těleso je v klidu. Pohybuje-li se těleso rovnoměrně zrychleně svisle vzhůru se zrychlením a_1 , unese lano těleso o největší tíze G_1 .

a) Jakou největší tíhu mohou mít tělesa, která lze tímto lanem zvedat (G_2) nebo spouštět (G_2') rovnoměrným pohybem?

b) Určete velikost a_1 zrychlení tělesa o tíze G_1 , zvedá-li je jeřáb rovnoměrně zrychleným pohybem svisle vzhůru.

c) Jakou největší tíhu může mít těleso, které lze na tomto lanu spouštět svisle dolů rovnoměrně zrychleným pohybem se stejným zrychlením a_1 ?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $G = 1980 \text{ N}$, $G_1 = 1800 \text{ N}$, tíhové zrychlení $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$.

Tření a ostatní překážky pohybu zanedbejte.

Řešení:

Největší tažnou sílu, při které se lano ještě nepřetrhne, označíme F ; G_3 je největší tíha, kterou může ještě mít těleso, jež je spouštěno na laně svisle dolů rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a_1 .

a) Při rovnoměrném přímočarém pohybu má pohybující se těleso zrychlení nulové, právě tak jako v klidu. Proto lze při rovnoměrném pohybu zatížit lano tělesem nejvýše stejné tíhy, jakou nejvýše smí mít těleso napínající lano, je-li soustava v klidu. Těleso tíhy G je tedy největší tažnou silou, jejímž působením se lano ještě při rovnoměrném pohybu nepřetrhne. Platí tedy

$$G = G_2 = G_2' = F = 1980 \text{ N} . \quad (1)$$

Rovnoměrným pohybem lze lanem zvedat nebo spouštět tělesa největší tíhy určené vztahem (1).

b) Při rovnoměrně zrychleném pohybu tělesa se zrychlením a_1 svisle vzhůru udržuje těleso tíhy G_1 v pohybu síla $F - G_1$. Proto je

$$\begin{aligned}
 F - G_1 &= \frac{G_1}{g} a_1, \text{ takže} \\
 a_1 &= \frac{F - G_1}{G_1} g = \frac{G - G_1}{G_1} g = \\
 &= \frac{1980 - 1800}{1800} 10 \text{ m s}^{-2} = 1 \text{ m s}^{-2}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Hodnota a_1 zrychlení je určena vztahem (2).

c) Při rovnoměrně zrychleném pohybu svisle dolů se zrychlením a_1 působí na padající těleso tíhy G_3 síla $G_3 - F = G_3 - G$. Proto platí

$$G_3 - G = \frac{G_3}{g} a_1, \text{ takže } a_1 = \frac{G_3 - G}{G_3} g. \quad (3)$$

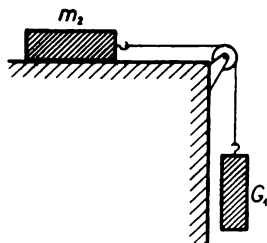
Po porovnání vztahů (2) a (3) dojdeme k rovnici

$$\begin{aligned}
 \frac{G_3 - G}{G_3} &= \frac{G - G_1}{G_1} \text{ a po úpravách} \\
 G_3 &= \frac{G G_1}{2G_1 - G} = \frac{1800 \cdot 1980}{3600 - 1980} \text{ N} = 2200 \text{ N}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Při pohybu rovnoměrně zrychleném svisle dolů se zrychlením $a_1 = 1 \text{ m s}^{-2}$ unese lano tělesa o největší tíze 2200 N. Obecně je tato hodnota určena vztahem (4).

5. úloha (navrhl Jan Tesař)

Kvádř o hmotnosti m_2 (obr. 81) uvedeme do pohybu po vodorovné rovině



Obr. 81

a) nejprve tíhovou silou G_1 závaží o hmotnosti m_1 ,

b) potom tíhovou silou G'_1 závaží o hmotnosti $m'_1 = n m_1$.

1. Vypočítejte zrychlení kvádru, jestliže zanedbáváme tření.

2. Vypočítejte zrychlení kvádru, je-li součinitel tření μ_1 .

c) Je správné tvrzení, že v případě, když zanedbáme tření, je

zrychlení kvádru tolikrát větší, kolikrát je větší tíha G_1 závaží, které působí pohyb kvádru?

d) Jak velikou hodnotu μ_2 musí mít součinitel tření, aby tvrzení c) bylo správné, jestliže tření zanedbáváme?

Otáčivý pohyb kladky zanedbejte ve všech případech.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 0,03$ kg, $m_2 = 0,20$ kg, $n = 2$, $\mu_1 = 0,10$, $g \doteq 10$ m s⁻².

Řešení:

V případě, že zanedbáme tření, označíme zrychlení pohybu kvádru a_1 a sílu napínající vlákno F_1 , jestliže se kvádř pohybuje působením tíhy G_1 závaží o hmotnosti m_1 . Nezanedbáme-li tření, pak označíme zrychlení pohybujícího se kvádru a_2 a sílu napínající vlákno F_2 . Pohybuje-li se kvádř působením tíhy G'_1 závaží o hmotnosti $m'_1 = n m_1$, budeme uvedené veličiny značit stejnými

písmeny, avšak čárkovanými (a'_1 , a'_2 , F'_1 , F'_2). Třetí sílu označíme F_t .

a—1) Pohybuje-li se soustava „závaží tíhy $G_1 +$ kvádr“ působením síly G_1 bez tření, pak na kvádr působí napjaté vlákno silou $F_1 = m_2 a_1$, na závaží působí přitom síla $m_1 g - F_1 = m_1 a_1$. Dosadíme-li do druhé z těchto rovnic za F_1 hodnotu $m_2 a_1$ podle první rovnice, dostaneme po úpravě

$$a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}. \quad (1a)$$

a—2) Bereme-li v úvahu třetí sílu $F_t = \mu_1 m_2 g$, pak působí pohyb kvádru síla $F_2 - F_t = m_2 a_2$ a pohyb závaží síla $m_1 g - F_2 = m_1 a_2$, kde F_2 značí tažnou sílu napjaté nitě. Z těchto dvou rovnic vyjde po vyloučení F_2 a po dosazení za F_t rovnice $m_1 g - m_2 a_2 - \mu_1 m_2 a_2 = m_1 a_2$ a po úpravě

$$a_2 = \frac{m_1 - \mu_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (2a)$$

b—1) Jestliže pohyb soustavy „závaží hmotnosti $m'_1 +$ kvádr“ působí tíha G'_1 závaží o hmotnosti m'_1 , pak platí podle upravených vztahů (1a) a (2a)

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{m'_1 g}{m'_1 + m_2} = \frac{n m_1 g}{n m_1 + m_2} \quad \text{a obdobně } a'_2 = \\ &= \frac{n m_1 - \mu_1 m_2}{n m_1 + m_2} g. \quad (1b) \quad \text{a} \quad (2b) \end{aligned}$$

c) Porovnáme-li vztahy (1a) a (1b), je patrné, že $a'_1 \neq n a_1$. Tvrzení v části c) úlohy neplatí.

d) Má-li platit tvrzení z části c) úlohy v případě, že nezanedbáme tření, musí platit rovnice $a'_2 = n a_2$,

z níž po dosazení z upravených vztahů (2a) a (2b) vyjde

$$\frac{n m_1 - \mu_2 m_2}{n m_1 + m_2} = n \frac{m_1 - \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Odtud se vypočítá

$$\mu_2 = \frac{n m_1^2}{m_2 [m_1(n + 1) + m_2]} . \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot do výrazů (1a), (1b), (2a), (2b), (3) vyjde

$$a_1 = \frac{0,03}{0,03 + 0,2} \cdot 10 \text{ m s}^{-2} \doteq 1,3 \text{ m s}^{-2} \text{ a obdobně}$$
$$a_1' = 2,3 \text{ m s}^{-2}, \quad a_2 \doteq 0,43 \text{ m s}^{-2}, \quad a_2' \doteq 1,5 \text{ m s}^{-2},$$
$$\mu_2 \doteq 0,031.$$

Obecně jsou tyto hodnoty určeny vztahy (1a), (1b), (2a), (2b), (3).

6. úloha (navrhl Jan Tesař)

Dvě dokonale pružné koule si při centrálním rázu vyměnily své rychlosti. (Centrální ráz koulí nastane, jestliže se koule k sobě přibližují po přímce procházející jejich těžišti a srazí se.)

a) Jaký je poměr hmotností těchto koulí?

b) Jaká je rychlost druhé koule vzhledem k první při ukončení rázu v těchto případech:

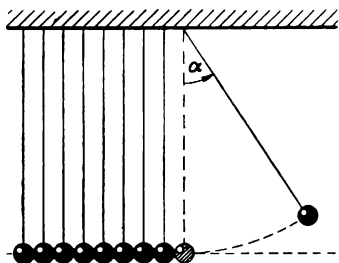
1. rychlost \mathbf{v}_1 první koule a rychlost \mathbf{v}_2 druhé koule před rázem měly stejnou orientaci,
2. první koule měla rychlost $\mathbf{v}_1 = 0$, druhá $\mathbf{v}_2 \neq 0$,

3. koule se před rázem pohybovaly proti sobě rychlostmi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

c) Několik (n) dokonale pružných koulí stejných hmotností visí na vláknech tak, že koule se dotýkají a jejich těžiště jsou na téže vodorovné přímce (obr. 82).

Co nastane, jestliže

1. jednu krajní kouli vychýlíme z klidové polohy ve svislé rovině σ proložené přímkou p o úhel α a necháme ji dopadnout na řadu ($n - 1$) zbývajících koulí,



Obr. 82

2. vychýlíme ve svislé rovině σ dvě sousední krajní koule a necháme je současně

dopadnout na řadu ($n - 2$) zbývajících koulí?

Řešení:

První koule o hmotnosti m_1 má při ukončení rázu rychlost w_1 , druhá koule o hmotnosti m_2 má při ukončení rázu rychlost w_2 . Protože vektorové přímky rychlostí $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ jsou v tomto případě totožné, jde o souhlasné nebo opačně orientované vektory, se kterými můžeme počítat jako s kladnými a zápornými skalárními veličinami. Proto musíme zvolit určitou orientaci za kladnou. Za kladnou volíme orientaci rychlosti v_2 , kterou má při počátku rázu koule pohybující se rychleji. Platí tedy

$$|v_2| > |v_1| \quad \text{a} \quad v_2 > 0. \quad (1)$$

Podle textu úlohy je $w_1 = v_2$ a $w_2 = v_1$. (2)

Část a) úlohy můžeme řešit trojím způsobem:

a—1) Pro soustavu dvou dokonale pružných koulí platí zákon zachování hybnosti. Užijeme ho pro centrální ráz koulí. Hybnost soustavy po rázu se rovná hybnosti soustavy před rázem:

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 .$$

Uvážíme-li, že koule po rázu vyměnily rychlosti, viz (2), pak

$$m_1(v_2 - v_1) = m_2(v_2 - v_1) .$$

Protože $v_2 \neq v_1$ (kdyby $v_2 = v_1$, nedošlo by k rázu), plyne po vydělení výrazem $(v_2 - v_1)$, že obě koule musí být stejně hmotné:

$$m_2 = m_1 . \quad (3)$$

a—2) Užijeme zákona zachování a přeměny mechanické energie. Kinetická energie soustavy dvou dokonale pružných koulí před i po centrálním rázu je konstantní:

$$\frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 .$$

Z toho vzhledem ke (2)

$$m_1(v_2^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - v_1^2) .$$

Protože $v_2 \neq v_1$, vychází opět vztah (3) $m_2 = m_1$.

a—3) V první polovině rázu na sebe obě koule působí vzájemně stejně velikými opačně orientovanými nárazovými silami, přitom se deformují a vyrovnávají si své rychlosti. V okamžiku, kdy rychlosti obou koulí nabudou stejné hodnoty w , přestanou koule na sebe působit silami a nebudou se již dále stlačovat. Na konci tohoto děje (stlačování) mají obě koule celkovou hybnost $(m_1 + m_2)w$, na začátku rázu měly hybnost $m_1 v_1 + m_2 v_2$.

Podle zákona zachování hybnosti platí $(m_1 + m_2) w = m_1 v_1 + m_2 v_2$, takže

$$w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (4)$$

Ihned po ukončení stlačování začnou se dokonale pružné koule vzpružovat (nabývat původního tvaru). Protože při vzpružování se celá elastická energie, kterou každá koule získala při stlačování, mění beze zbytku v energii kinetickou, děje se stlačování i vzpružování každé koule působením stejně velikých silových impulsů. Proto dochází u každé koule během vzpružování i stlačování k stejně velikým změnám hybnosti. Matematickým vyjádřením zákona zachování hybnosti při centrálním rázu u první koule je rovnice $m_1(w_1 - w) = m_1(w - v_1)$, z níž vyjde $w_1 + v_1 = 2w$. Protože však $w_1 = v_2$, platí vzhledem ke vztahu (4) rovnice $v_1 + v_2 = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$.

Po úpravách vyjde z této rovnice $m_1(v_2 - v_1) = m_2(v_2 - v_1)$ a odtud $m_2 = m_1$ jako v části a—1).

b) Druhá (před rázem rychlejší) koule má po ukončení rázu vzhledem k první rychlost $v = w_2 - w_1 = v_1 - v_2$. (5)

b—1) Při souhlasné orientaci rychlostí ($v_1 > 0, v_2 > 0$) je s přihlédnutím k relaci (1)

$$v = v_1 - v_2 < 0.$$

V tomto případě při ukončení rázu prvá koule zvětší svou rychlost z v_1 na v_2 a druhá koule zmenší rychlost z v_2 na v_1 , orientace rychlostí obou koulí zůstává po ukončení rázu stejná jako před rázem.

b—2) Je-li první koule při počátku rázu v klidu, takže $v_1 = 0$ a $v_2 > 0$, pak $v = v_1 - v_2 = -v_2$. Při ukončení rázu se v tomto případě druhá koule zastaví a první koule se od ní odrazí rychlostí v_2 stejně orientovanou, jako byla orientována rychlost druhé koule na počátku rázu.

b—3) Jsou-li rychlosti obou koulí na počátku rázu opačně orientovány, platí $v_1 < 0$ a $v_2 > 0$. Relativní rychlost druhé koule vzhledem k první kouli je $v = v_1 - v_2$.

Obě koule se při ukončení rázu od sebe odrazí a jejich rychlosti změni svou orientaci i velikost. První koule nabude rychlosti v_2 , druhá rychlosti v_1 .

Relativní rychlost druhé koule vzhledem k první kouli je po rázu ve všech třech případech záporná.

c—1) Narazí-li vychýlená koule po uvolnění na první kouli v řadě, předá jí svou rychlost a sama se zastaví. První koule z řady narazí na druhou kouli v řadě, předá jí svou rychlost a sama se zastaví. Výměna rychlostí pokračuje až k poslední kouli, která se od řady odrazí a vychýlí se ze své polohy tak, že její závěs svírá se svislým směrem úhel α' . Zanedbáme-li ztráty energie během rázů, získá poslední koule v řadě podle zákona zachování energie tak velkou energii, jakou měla první koule při vychýlení o úhel α . Proto $\alpha' = \alpha$.

c—2) Obdobnou úvahou jako v části c—1) zjistíme, že po sérii rázů, které nastanou po vychýlení dvou koulí a po jejich nárazu na řadu zbývajících $(n - 2)$ koulí, odskočí poslední dvě koule z řady do takové výše, do jaké byly vychýleny první dvě. Ostatní koule budou po ukončení rázů v klidu.

7. úloha (navrhl Jan Tesař)

Z téhož místa byly vystřeleny tři rakety stejnou počáteční rychlostí v_0 pod elevačními úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Raketa vystřelená pod elevačním úhlem α_1 dopadla na zem za čas t_1 .

a) Vypočítejte počáteční rychlost raket.

b) Dokažte, že při stejné počáteční rychlosti

1. dosáhne největší výšky raketa vystřelená pod největším možným úhlem, tedy při svislém vrhu vzhůru,
2. rakety vystřelené pod úhly α a $(90^\circ - \alpha)$ mají stejné délky vrhu,
3. největší délku vrhu má raketa vystřelená pod úhlem 45° .

c) Vypočítejte doby letu, největší výšky a délky vrhů raket vystřelených pod elevačními úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha_3 = 60^\circ$, $t_1 = 6$ s.

Odpor vzduchu zanedbejte, gravitační pole považujte za stejnorodé.

Ve vhodném měřítku zakreslete dráhy všech tří raket.

Řešení:

Raketa vystřelená pod elevačním úhlem dosáhne největší výšky h_1 a dopadne na zem za dobu t_1 ve vzdálenosti d_1 od místa výstřelu. (Index i nabývá hodnot 1, 2, 3.)

■ a) Pohyb rakety vystřelené počáteční rychlostí v_0 pod úhlem α lze rozložit na pohyb ve směru vodorovném

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad x = v_0 t \cos \alpha \quad (1a, b)$$

a na pohyb ve směru svislém

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2a, b)$$

Při dopadu rakety na zem je $y = 0$, čas $t \neq 0$, použitím (2b) získáme dobu letu rakety ve vzduchu

$$\bar{t} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (3)$$

Ze vztahu (3) dostaneme pak (protože \bar{t}_1 je známé) hledanou počáteční rychlost

$$v_0 = \frac{g \bar{t}_1}{2 \sin \alpha}. \quad (4)$$

Po dosazení daných hodnot je $v_0 = 60 \text{ m s}^{-1}$.

b—1) Vzhledem k tomu, že v nejvyšším místě dráhy je svislá složka rychlosti nulová, je doba stoupání t' s použitím (2a)

$$t' = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

a pak je

$$h = y' = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (5)$$

Z výrazu (5) plyne bezprostředně, že největší výšky dosáhne raketa pro $\alpha = 90^\circ$, tj. při svislém vrhu.

b—2) Délku vrhu rakety obdržíme z (1b) po dosazení doby letu \bar{t}

$$d = x = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin (2\alpha)}{g}. \quad (6)$$

Protože $\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ a současně $\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, jsou délky vrhu při úhlech α a $(90^\circ - \alpha)$ stejné.

b—3) Největší délku vrhu má zřejmě raketa pro maximální hodnotu goniometrické funkce v relaci (6), tedy když $\sin(2\alpha) = 1$; to je splněno pro $2\alpha = 90^\circ$, tedy pro $\alpha = 45^\circ$.

Poznámka: Pokud není žákům 1. ročníku znám vztah pro $\sin 2\alpha$, lze nalézt elevační úhel pro maximální dostřel následovně:

Za trigonometrické funkce $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$ dosadíme z pravoúhlého trojúhelníku (a, b — odvěsny, c — přepona), pak je $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{a}{c} \frac{b}{c} = \frac{ab}{a^2 + b^2}$.

Zřejmě správnou nerovnost $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

píšeme po úpravě $\frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$, přičemž v poslední nerovnosti platí znaménko rovnosti pro $a = b$, tj. pro úhel 45° . Při úhlu 45° dosahuje součin $\sin \alpha \cos \alpha$ své maximální hodnoty a rovná se $\frac{1}{2}$. Pak je

$$d_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

c) Obecné výrazy pro dobu letu rakety, největší výšku a délku vrhu při jednotlivých elevačních úhlech najdeme snadno po dosazení v_0 relace (4) do výrazu (3), (5) a (6). Dostaneme

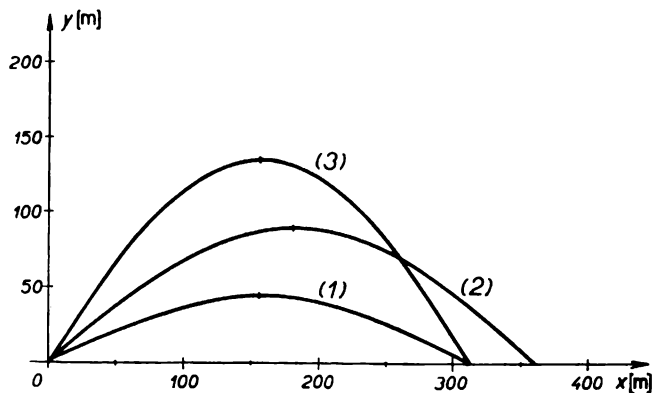
$$\bar{t}_1 = \bar{t}_1 \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_1} \quad (7), \quad h_1 = \bar{t}_1^2 \frac{g \sin^2 \alpha_1}{g \sin^2 \alpha_1}, \quad (8)$$

$$d_1 = \bar{t}_1^2 \frac{g \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{2 \sin^2 \alpha_1}. \quad (9)$$

Výsledky pro dané hodnoty jsou zapsány do tabulky

	\bar{t}_i [s]	h_i [m]	d_i [m]
$\alpha_1 = 30^\circ$	6,0	45	313
$\alpha_2 = 45^\circ$	8,5	90	360
$\alpha_3 = 60^\circ$	10,4	135	312

Dráhy všech tří raket jsou zakresleny v obr. 83.



Obr. 83

8. úloha (navrhl Jan Tesař)

Automobil se pohybuje do mírného kopce stálou rychlostí v_1 . Tu část skutečného výkonu P motoru automobilu, která se využije na udržování vozidla v pohybu, označme P_1 . Jede-li automobil při stejné hodnotě P_1 z kopce dolů, nabude rychlosti v_2 . Jaké rychlosti v_0 nabude při stejném P_1 , pohybuje-li se po vodorovné rovině?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_1 = 5 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 20 \text{ m s}^{-1}$, tíhové zrychlení $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení:

Hmotnost automobilu označíme m . Úhel sklonu nakloněné roviny je malý, takže $\cos \alpha \doteq 1$. Třecí sílu na nakloněné rovině budeme značit F_t , na vodorovné rovině F'_t . Tažnou sílu motoru auta označíme F_1 při jízdě do kopce, F_2 při jízdě z kopce a F_0 při jízdě po vodorovné rovině. Součinitel tření je μ .

Pohybuje-li se vozidlo stálou rychlostí v působením tažné síly F motoru, koná motor užitečnou práci o výkonu $P_1 = Fv$. Vzhledem k tomuto obecnému vztahu má v dané úloze tažná síla motoru auta hodnoty $F_1 = \frac{P_1}{v_1}$ při jízdě do kopce, $F_2 = \frac{P_1}{v_2}$ při jízdě z kopce a $F_0 = \frac{P_1}{v_0}$ při jízdě po vodorovné rovině.

Při rovnoměrném pohybu auta do kopce překonává tažná síla F_1 motoru pohybovou složku tíhy auta na nakloněné rovině a třecí sílu F_t . Proto platí

$$\frac{P_1}{v_1} = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha. \quad (1)$$

Při rovnoměrném pohybu auta po nakloněné rovině dolů překonává tažná síla F_2 motoru spolu s pohybovou složkou tíhy auta třecí sílu F_t . Platí tedy

$$\frac{P_1}{v_2} = -mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha. \quad (2)$$

Po sečtení rovnic (1) a (2) dostaneme po úpravě

$$\mu m g = P_1 \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \frac{1}{2 \cos \alpha}. \quad (3)$$

Při rovnoměrném pohybu auta po vodorovné rovině překonává jeho motor pouze třecí sílu $F_t' = \mu m g$. Platí tedy rovnice

$$\mu m g = \frac{P_1}{v_0}. \quad (4)$$

Porovnáme-li rovnici (3) s rovnicí (4), vyjde

$$v_0 = 2 \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} \cos \alpha. \quad (5)$$

Dosadíme-li do vztahu (5) dané hodnoty, vyjde

$$v_0 \doteq 2 \cdot \frac{5 \cdot 20}{20 + 5} \cdot 1 \text{ m s}^{-1} = 8 \text{ m s}^{-1}.$$

Automobil se pohybuje po vodorovné rovině rovnoměrně rychlostí 8 m s^{-1} . Obecně je tato hodnota určena vztahem (5).

9. úkol — experimentální (navrhl Jan Tesař)

Rovnováha sil

Pomůcky: stojan na upevnění pevných kladek, tři pevné kladky, vlákna, závažíčka s háčky k pokusům z mechaniky, dva siloměry jejichž hmotnost je zanedbatelná vůči hmotnostem použitých závaží, kreslicí papír, rýsovací potřeby, nůžky.

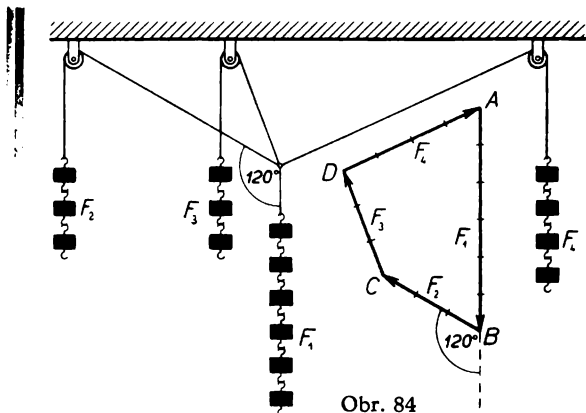
Návod: Výslednici dvou nebo více sil, jež mají společné působiště, najdeme nejnadhěji pomocí vektorového mnohoúhelníku sil. Obrazem výslednice všech daných sil je spojnice společného působiště všech sil a koncového bodu vektoru, zobrazujícího sílu, kterou jsme přičítali naposled. Tato úsečka určuje vektorovou přímku výslednice a velikost, směr i orientaci výslednice. Síla \mathbf{F} , která je stejně

veliká, ale opačně orientovaná než výslednice a která má s výslednicí společnou vektorovou přímkou, je silou, která je se skládanými silami v rovnováze. Podmínkou rovnováhy sil je tedy, aby vektorový mnohoúhelník byl uzavřen. Má-li se např. nalézt, kdy nastane rovnováha čtyř sil F_1 , F_2 , F_3 a F_4 , sestojíme uzavřený vektorový čtyřúhelník těchto sil. Čtyřúhelník je však jednoznačně určen pěti prvky. Známe-li velikosti všech čtyř sil, je potřebí znát ještě jednu podmínku, např. úhel, který svírají vektorové přímky sil F_1 a F_2 .

Postup řešení si vysvětlíme na úloze:

Vyšetřete, kdy nastane rovnováha sil $F_1 = 6$ jednotek síly (v dalším označení js), $F_2 = F_3 = 3$ js, $F_4 = 4$ js. Vektorové přímky sil F_1 a F_2 svírají spolu úhel 120° .

Experimentální ověření správnosti tvrzení, že síly jsou v rovnováze, je-li jejich vektorový mnohoúhelník uzavřen, ověříme pokusem naznačeným na obr. 84. Na kreslicí papír narýsujeme dostatečně velký uzavřený vektorový



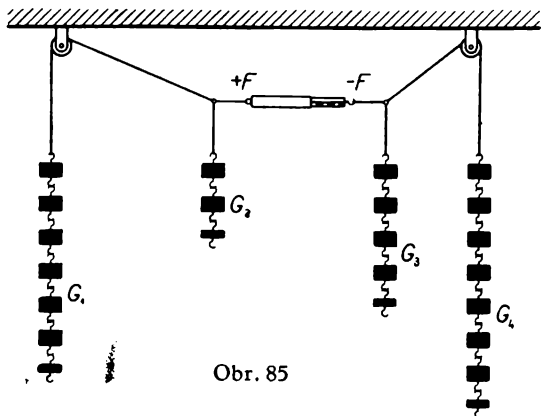
Obr. 84

mnohoúhelník, jehož strany AB, BC, CD, DA zobrazují velikosti, směry i orientace sil F_1, F_2, F_3, F_4 , a vystříhneme ho. Na stojan na upevnění kladek nasadíme tři kladky a na vlákna přes ně vedená zavěsíme závaží daná úlohou. Protože závaží, které realizuje sílu F_1 , působí směrem svisle dolů, přiložíme vystřížený vektorový mnohoúhelník k napjatým vláknům tak, že úsečka AB přilehne k vláknu, napínanému silou F_1 . Potom přemístíme jednu nebo dvě kladky tak, aby ještě jedna z úseček, např. DA , přiléhala k vláknu, na němž působí příslušná síla, v našem případě F_4 . Přesvědčíme se, že také ostatní vlákna nesoucí závaží F_2 a F_3 budou napjata ve směru úseček BC a CD a dané čtyři síly budou v rovnováze.

Úkoly

a) Proveďte úlohu uvažovanou v návodu graficky i pokusně.

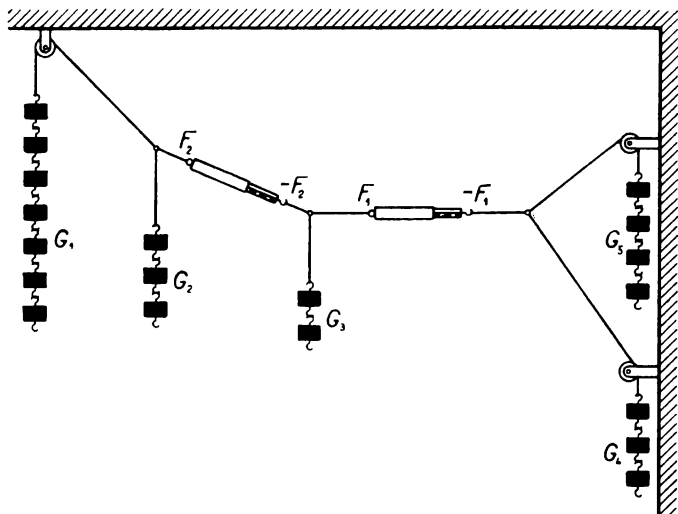
b) Najděte, kdy nastane rovnováha sil $G_1 = 6,5 \text{ js}$, $G_2 = 2,5 \text{ js}$, $G_3 = 4,5 \text{ js}$, $G_4 = 7,5 \text{ js}$, umístěných podle obr. 85. Síly G_2 a G_3 jsou svislé. Určete graficky i pokusně



Obr. 85

(vloženým siloměrem) velikost síly \mathbf{F} . (Návod: Síla \mathbf{F} udržuje v rovnováze síly \mathbf{G}_1 a \mathbf{G}_2 a také síly \mathbf{G}_3 a \mathbf{G}_4 .)

c) Najděte, kdy nastane rovnováha sil $G_1 = 7$ js, $G_2 = 3$ js, $G_3 = 2$ js, $G_4 = 3$ js, $G_5 = 4$ js, napínající vlákna vedoucí přes kladky podle obr. 86. Síly \mathbf{G}_2 a \mathbf{G}_3 jsou svislé, síla \mathbf{F}_1 je vodorovná.



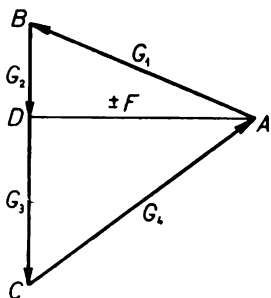
Obr. 86

Určete velikosti sil \mathbf{F}_1 i \mathbf{F}_2 graficky i pokusně (vloženými siloměry).

Řešení:

a) Postup při provádění úlohy je uveden v zadání úlohy.

b) Svislé síly G_2 a G_3 mají stejný směr i orientaci. Jejich výslednice má tedy velikost rovnou součtu velikostí těchto sil a má s nimi stejný směr i orientaci. Na obr. 87 je tato výslednice zobrazena svislou úsečkou BC . Síly



Obr. 87

G_1 , $G_2 + G_3$, G_4 jsou v sestavě na obr. 85 v rovnováze. Zobrazí-li se tedy ještě síly G_1 a G_4 úsečkami AB a CA , musí úsečky AB , BC , CA tvořit uzavřený mnohoúhelník, v tomto případě je to trojúhelník, má-li obr. 87 vystihovat stav rovnováhy sil G_1 , G_2 , G_3 , G_4 . Jde tedy geometricky o konstrukci trojúhelníku určeného třemi stranami AB , BC , CA , odpovídajícími velikostem sil G_1 , $G_2 + G_3$, G_4 .

V sestavě zobrazené na obr. 85 je zařazen ještě siloměr, který je napínán oběma směry dvěma stejně velikými opačně orientovanými silami $\pm F$. Síla $+F$ je výslednicí sil G_1 a G_2 , síla $-F$ je výslednicí sil G_3 a G_4 . Za stavu rovnováhy se pohybové účinky těchto dvou sil ruší. Z obr. 85 je patrné, že síla $+F$ se na obr. 87 znázorní úsečkou AD . Je-li tato úsečka orientována od bodu A k bodu D , spojuje počátek vektoru G_1 s koncem vektoru G_2 , a zobrazuje tedy výslednici $+F$ sil G_1 a G_2 , je-li orientována ve směru DA , spojuje počátek vektoru G_3 s koncem vektoru G_4 , a znázorňuje tedy výslednici $-F$ sil G_3 a G_4 .

Úsečky AB , BD , DC , CA , AD , DA udávají nejen velikosti, nýbrž i směry a orientace sil, které zobrazují. Obdobně jako v úkolu a) se lze pokusně přesvědčit o správnosti grafického řešení úkolu b). Že úsečka AD udává

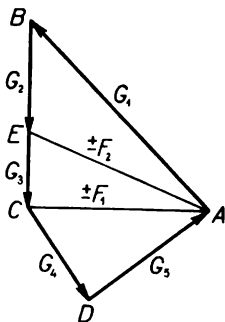
správné velikosti sil $\pm F$, ukáže pokus naznačený na obr. 85.

Úlohu lze řešit ještě jinak. Sestavu na obr. 85 je možno považovat za soustavu šesti sil $G_1, G_2, -F, +F, G_3, G_4$, které jsou v rovnováze. Proto je soustava těchto šesti sil graficky zobrazena uzavřeným vektorovým mnohoúhelníkem a pak strany tohoto mnohoúhelníku určují velikosti, směry a orientace sil, kterým odpovídají. V našem případě je uvedený uzavřený vektorový mnohoúhelník zobrazen na obr. 87 stranami AB, BD, DA, AD, DC, CA , které zobrazují síly $G_1, G_2, -F, +F, G_3, G_4$.

Z grafu i na siloměru bylo souhlasně naměřeno, že síly $\pm F$ mají velikost 6 js.

c) Sestava sil znázorněná na obr. 86 je soustavou devíti sil $G_1, G_2, -F_2, +F_2, G_3, -F_1, +F_1, G_4, G_5$, které jsou v rovnováze. Síla $+F_2$ je výslednicí sil G_1 a G_2 , síla $-F_2$ je výslednicí sil G_3, G_4 a G_5 , síla $+F_1$ je výslednicí sil G_1, G_2 a G_3 , síla $-F_1$ je výslednicí sil G_4 a G_5 , jak je patrné z obr. 86. Protože pohybové účinky sil $+F_2$ a $-F_2$ a také sil $+F_1$ a $-F_1$ se ruší, musí být v rovnováze nejen devět vpředu uvedených sil, nýbrž také síly G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 .

Geometricky se úloha vyřeší takto: Na obr. 88 je výslednice obou svisle dolů orientovaných sil G_2 a G_3 zobrazena svislou úsečkou BC . Protože výslednice $+F_1$ sil G_1, G_2, G_3 je vodorovná, leží počáteční bod A úsečky znázorňující sílu $+F_1$ na přímce kolmé k úsečce BC vedené bodem C a má od počátečního bodu B úsečky BE znázorňující sílu



Obr. 88

G_2 vzdálenost určenou velikostí síly G_1 . Úsečka AC zobrazuje sílu $+F_1$, úsečka CA sílu $-F_1$. Koncový bod D úsečky CD zobrazující sílu G_4 je totožný s počátečním bodem úsečky DA znázorňující sílu G_5 . Bod D má od bodů A, C vzdálenosti odpovídající velikostem sil G_5 a G_4 . Úsečka AE zobrazuje výslednici $+F_2$ sil G_1 a G_2 , úsečka EA výslednici $-F_2$ sil G_3, G_4 a G_5 .

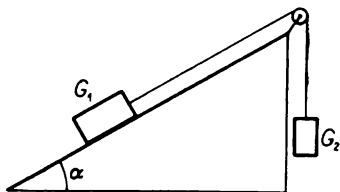
Rovnováhu soustavy sil naznačené na obr. 86 dokazuje na obr. 88 uzavřený mnohoúhelník sil o stranách $AB, BE, EA, AE, EC, CA, AC, CD, DA$, jež odpovídají silám $G_1, G_2, -F_2, +F_2, G_3, -F_1, +F_1, G_4, G_5$, a také uzavřený mnohoúhelník sil G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 zobrazený stranami AB, BE, EC, CD, DA .

Správnost grafického řešení úlohy se dokáže pokusně obdobným způsobem jako v úkolu b).

Velikosti F_1 a F_2 sil $+F_1$ a $\pm F_2$ naměřené z grafu i na siloměrech jsou stejné a mají hodnoty $F_1 = 5$ js, $F_2 = 5,3$ js.

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl Jan Tesař)



Obr. 89

Kvádř o tíze G_1 je spojen podle obr. 89 se závažím tíhy G_2 a uvede se působením tíhové síly z klidu do pohybu po nakloněné rovině s úhlem sklonu α .

a) Jak veliký je poměr

$\frac{G_2}{G_1}$, jestliže kvádr vykoná za dobu t od počátku pohybu dráhu s

- a₁) ve směru dolů,
a₂) ve směru nahoru?

b) Jakou hodnotu musí mít poměr $\frac{G_2}{G_1}$, má-li kvádr konat po nakloněné rovině pohyb rovnoměrný?

Tření a otáčivý pohyb kladky zanedbejte.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\alpha = 30^\circ$, $s = 1$ m, $t = 0,8$ s.

Řešení:

Zrychlení kvádrů při pohybu po nakloněné rovině označíme a , hmotnost kvádrů m_1 , hmotnost závaží m_2 .

Kvádr se pohybuje po nakloněné rovině působením stálé síly $F = |G_1 \sin \alpha - G_2|$. Proto koná pohyb rovnoměrně zrychlený. Zrychlení tohoto pohybu vypočítáme

jednak ze vztahu $s = \frac{1}{2} a t^2$, jednak z výrazu $a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{|G_1 \sin \alpha - G_2|}{G_1 + G_2} g$, neboť síla F uvádí

do pohybu a udržuje v pohybu kvádr i závaží. Je tedy

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{|G_1 \sin \alpha - G_2|}{G_1 + G_2} g. \quad (1)$$

a₁) Pohybuje-li se kvádr dolů, je $G_1 \sin \alpha - G_2 > 0$, a pro tento případ po úpravách relace (1) obdržíme

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{g t^2 \sin \alpha - 2s}{g t^2 + 2s}. \quad (2)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{10 \cdot 0,64 \cdot 0,5 - 2 \cdot 1}{10 \cdot 0,64 + 2} \frac{\text{m}}{\text{m}} = \frac{1}{7} \doteq 0,14.$$

a₂) Při pohybu kvádru nahoru udržuje pohyb soustavy „kvádr a závaží tíhy G_2 “ se zrychlením a síla $F = G_2 - G_1 \sin \alpha > 0$.

Pak po úpravách relace (1) vyjde obdobný vztah jako v části a₁):

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{g t^2 \sin \alpha + 2 s}{g t^2 - 2 s}. \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $\frac{G_2}{G_1} =$

$$= \frac{10 \cdot 0,64 \cdot 0,5 + 2}{10 \cdot 0,64 - 2} = \frac{13}{11} \doteq 1,2.$$

Má-li kvádr vykonat za dobu t dráhu s při pohybu směrem dolů, pak musí mít poměr tíhy závaží a kvádru hodnotu 0,14, při pohybu směrem nahoru hodnotu 1,2. Tyto hodnoty jsou obecně určeny vztahy (2) a (3).

b) Má-li se kvádr pohybovat po nakloněné rovině rovnoměrně, pak má zrychlení rovno nule. Proto je $F = G_1 \sin \alpha - G_2 = 0$, takže

$$\frac{G_2}{G_1} = \sin \alpha = 0,5. \quad (4)$$

Má-li se kvádr pohybovat po nakloněné rovině pohybem rovnoměrným, musí platit vztah (4).

2. úloha (navrhl Jan Tesař)

Přes pevnou kladku, otáčející se kolem vodorovné osy, je vedeno vlákno, na jehož koncích jsou zavěšena závaží o hmotnostech m_1 a m_2 (obr. 90). Hmotnost kladky a nitě lze vzhledem k hmotnostem závaží zanedbat.

a) Jak veliké je zrychlení pohybu závaží?

b) Jak velkými tlakovými silami působí čep kladky při pohybu závaží na ložiska?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 1,00$ kg, $m_2 = 1,10$ kg, tíhové zrychlení $g \doteq 10$ m s⁻². Tření a otáčivý pohyb kladky zanedbejte.

Řešení:

Sílu napínající vlákno při pohybu závaží označíme F' , tlakovou sílu na čep kladky F . Zrychlení orientujeme kladně ve směru svisele dolů. Předpokládáme, že závaží hmotnosti m_2 klesá a druhé závaží stoupá. Hledané zrychlení má velikost a .

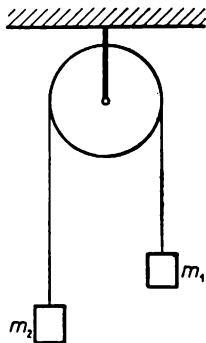
a) Na závaží hmotnosti m_2 působí síla $m_2 g - F'$ a uděluje mu zrychlení a . Proto platí

$$m_2 g - F' = m_2 a . \quad (1)$$

Závaží hmotnosti m_1 uděluje síla $m_1 g - F'$ zrychlení $-a$, takže platí

$$m_1 g - F' = -m_1 a . \quad (2)$$

Odečtením rovnice (2) od rovnice (1) vyloučíme F' a po úpravě obdržíme



Obr. 90

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g. \quad (3)$$

Dosadíme-li do vztahu (3) dané hodnoty, vyjde $a \doteq \doteq 0,48 \text{ m s}^{-2}$. Protože $m_2 > m_1$, $a > 0$. Proto závaží o hmotnosti m_2 klesá, závaží o hmotnosti m_1 stoupá, jak jsme předpokládali.

b) Dosadíme-li do rovnice (1) za a hodnotu ze vztahu (3), vyjde

$$F' = m_2(g - a) = m_2g \left(1 - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (4)$$

Protože napětí vlákna je po celé jeho délce stejné, působí vlákno na čep kladky tažnou silou F' po obou stranách kladky. Obě síly jsou spolu rovnoběžné a obě jsou shodně orientované s tíhovým zrychlením g . Proto působí čep kladky při pohybu závaží na ložiska tlakovou silou

$$F = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (5)$$

Pro dané hodnoty vychází $F = \frac{4 \cdot 1,1 \cdot 1}{1,1 + 1} 10 \text{ kg m s}^{-2} \doteq \doteq 21 \text{ N}$.

3. úloha (navrhl Jan Tesař)

Kvádř o hmotnosti m , ležící v místě A nakloněné roviny, je uveden z klidu do pohybu počáteční rychlostí v_0 tak, že jeho těžiště se pohybuje vzhůru po přímce rovnoběžné s délkou nakloněné roviny. V místě B , vzdáleném od počáteční polohy kvádru o délku l , má kvádř

rychlost $v_1 < v_0$. Třecí síla F_t , působící na kvádr při jeho pohybu po nakloněné rovině, je konstantní a je přímo úměrná tíze G kvádrů. Konstanta úměrnosti má hodnotu k .

a) Určete výšku h , o kterou se zvedne těžiště kvádrů při jeho pohybu po dráze AB .

b) Určete dobu t_1 , za kterou kvádr vykoná dráhu AB , a zrychlení a tohoto pohybu.

Odpor vzduchu zanedbejte. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_0 = 4,0 \text{ m s}^{-1}$, $v_1 = 1,0 \text{ m s}^{-1}$, $l = 2,0 \text{ m}$, $k = 0,25$, tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení:

Za nulovou hladinu potenciální tíhové energie kvádrů považujeme vodorovnou rovinu procházející těžištěm kvádrů v poloze A . Vzhledem k této rovině má potenciální tíhová energie kvádrů v poloze A hodnotu $W_0 = 0$, v poloze B hodnotu $W_1 = m g h$. Kinetickou energii kvádrů označíme v poloze A písmenem W'_0 , W'_1 v poloze B . Dráhu l vykoná kvádr za čas t_1 . Protože pohybová složka tíhy kvádrů i třecí síla F_t mají konstantní hodnoty, pohybuje se kvádr po nakloněné rovině pohybem rovnoměrně zpomaleným se záporným zrychlením a . Při pohybu přemáhá pohybující se kvádr třecí sílu $F_t = k m g$, a proto vykoná na dráze l práci $A = k m g l$.

a) Výšku h určíme nejjednodušeji užitím zákona zachování a přeměny mechanické energie, z něhož vyjde rovnice $W'_0 - W'_1 = W_1 - W_0 + A$, a po úpravě

$$\frac{1}{2} m (v_0^2 - v_1^2) = m g h + k m g l, \text{ takže}$$

$$h = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2g} - kl. \quad (1)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$h = \frac{16 - 1}{20} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} - \text{m}^{-1} \text{ s}^2 = 0,25 \cdot 2 \text{ m} = 0,25 \text{ m}.$$

b) V čase $t = 0$ má kvádr rychlost v_0 , v čase t_1 má rychlost $v_1 = v_0 + a t_1$, odkud určíme

$$a = - \frac{v_0 - v_1}{t_1}. \quad (2)$$

Dráha vykonaná kvádrem za dobu t_1 se skládá ze dvou složek, z dráhy vykonané pohybem rovnoměrným rychlostí v_0 a z dráhy pohybu rovnoměrně zpomaleného o zrychlení a . Platí tedy $l = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 =$

$$\begin{aligned} &= t_1 \left(v_0 - \frac{1}{2} \frac{v_0 - v_1}{t_1} t_1 \right) = \frac{1}{2} t_1 (v_0 + v_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_1 = \frac{2l}{v_0 + v_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$t_1 = \frac{4}{4 + 1} \text{ m m}^{-1} \text{ s} = 0,8 \text{ s}.$$

Dosadíme-li do vztahu (2) za t_1 hodnotu ze vztahu (3), vypočítáme

$$a = - \frac{v_0 - v_1}{2l} (v_0 + v_1) = - \frac{v_0^2 - v_1^2}{2l}. \quad (4)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$a = - \frac{16 - 1}{4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ m}^{-1} = -3,75 \text{ m s}^{-2}.$$

Kvádr se bude pohybovat po dráze AB po dobu $0,8 \text{ s}$ určenou obecně vztahem (3) se zrychlením $-3,75 \text{ m s}^{-2}$.

Úlohu lze řešit také jinak:

Způsobem uvedeným v části b) úlohy určíme vztahy (3) a (4). Těleso pohybující se vzhůru po nakloněné rovině má zrychlení

$$a = -g \sin \alpha - \frac{F_t}{m} = -g (\sin \alpha + k) = -g \left(\frac{h}{l} + k \right).$$

Porovnáme-li tento výraz se vztahem (4), vyjde

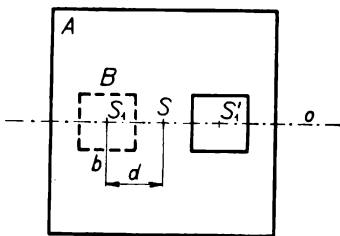
$$h = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2g} - kl,$$

což souhlasí se vztahem (1).

4. úloha (navrhl Jan Tesař)

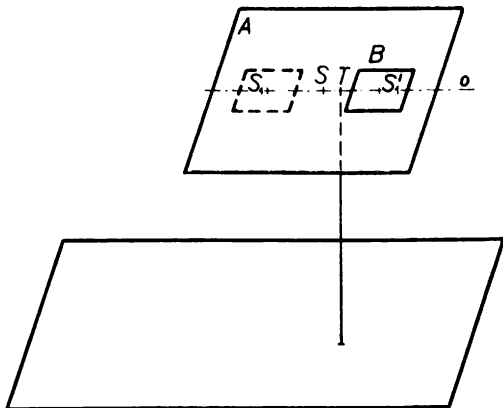
Z velmi tenké homogenní čtvercové desky A o straně a , jejíž tloušťku c lze vzhledem k délce a šířce zanedbat, je vyříznuta čtvercová deska o straně b ($b \leq \frac{1}{2} a$). Střed S_1 desky B byl před vyříznutím desky B ve vzdálenosti d ($\frac{1}{2} b \leq d \leq \frac{1}{2} (a - b)$) od středu S desky A

na jedné z jejích os stran (obr. 91). Vyříznutá deska B je přilepena na desku A tak, že v nové poloze je souměrně sdružená s původní polohou vzhledem ke středu desky A . Tíhu lepidla, jímž je deska B přilepena k desce A , zanedbáme.



Obr. 91

Kterým místem T své plochy se takto upravená deska A opírá o konec svislé zahrocené tyče, je-li v rovnováze ve vodorovné poloze (obr. 92)?



Obr. 92

- a) Výpočtem řešte úlohu pro hodnoty $b = \frac{a}{n}$, $d = \frac{a}{2n}$, kde $n \geq 2$.
- b) Graficky řešte úlohu pro $a = 8 \text{ cm}$, $b = \frac{a}{n}$, $d = \frac{a}{2n}$, $n = 2$.
- c) Porovnejte výsledky částí b) a a) úlohy.

Řešení:

Tíhu desky A označíme G , tíha desky B je G_1 . Označíme-li tíhové zrychlení g a ρ hustotu materiálu desky, je $G = a^2 c \rho g$ a $G_1 = b^2 c \rho g$, takže

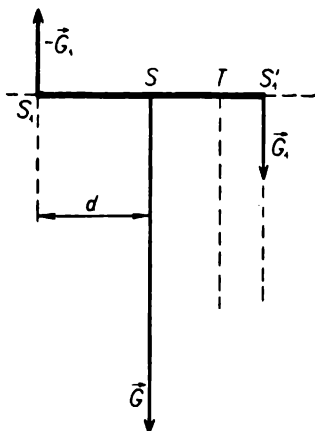
$$\frac{G_1}{G} = \frac{b^2}{a^2}. \quad (1)$$

Pro hodnoty uvedené v části a) úlohy vyjde

$$G_1 = G \frac{b^2}{a^2} = G \frac{a^2}{n^2 a^2} = \frac{G}{n^2}. \quad (2)$$

Desku A budeme značit indexem 1 (A_1) před její úpravou a indexem 2 (A_2) po její úpravě uvedené v textu úlohy.

Nemá-li deska A_2 , opřená o hrot svislé opěrné tyče, konat posuvný pohyb, musí být opřena ve svém těžišti T , jehož vzdálenost ST od středu S desky A označíme x . Protože tíha desky A_2 je stejná jako tíha desky A_1 , lze považovat otvor po vyříznuté desce B za sílu $-\mathbf{G}_1$, opačně orientovanou, než je orientována tíha desky A_1 a tíha desky B , přilepené na desce A .



Obr. 93

Má-li být deska A_2 v rovnováze, nesmí konat ani otáčivý pohyb. Vzdálenost $x = ST$ určíme proto užitím momentové věty. Volíme-li bod T za vztažný bod, pak podle obr. 93 platí rovnice $Gx = G_1(d - x) + G_1(d + x)$. Po úpravě a po dosazení za G_1 podle vztahu (1) platí

$$x = 2d \frac{G_1}{G} = 2d \frac{b^2}{a^2}. \quad (3)$$

a) Pro dané hodnoty je

$$x = 2 \frac{a}{2n} \frac{a^2}{n^2 a^2} = \frac{a}{n^3} \leq \frac{a}{8}. \quad (4)$$

Znaménko rovnosti platí pro $n = 2$.

Bod T leží na ose souměrnosti desky A_2 . Jeho vzdálenost $x = ST$ od středu desky A je obecně určena vztahem (3), pro dané hodnoty vztahem (4).

b) Graficky má být úloha řešena pro $n = 2$. Pak je $b = \frac{a}{2} = 4$ cm, $d = \frac{a}{4} = 2$ cm. Pro x a G_1 vyjdou podle vztahů (4) a (2) hodnoty $x = \frac{a}{8} = 1$ cm, $G_1 = \frac{G}{4}$.

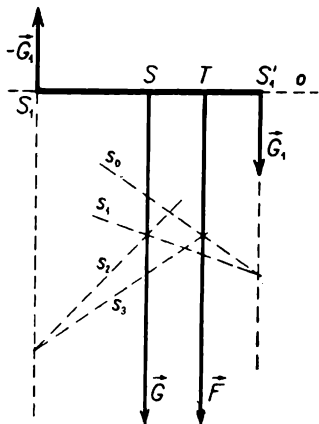
Graficky lze úlohu řešit dvěma způsoby:

b₁) podle návodu ve studijním textu,

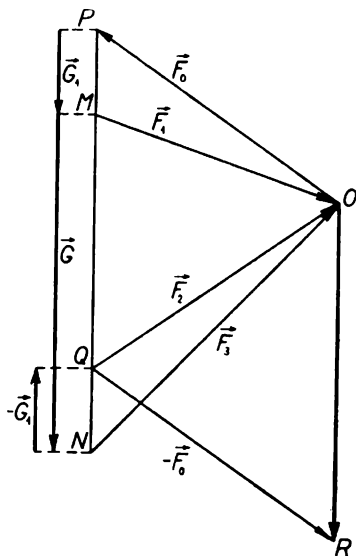
b₂) postupným skládáním sil.

Způsob, kterým se skládají dvě rovnoběžné síly o různých působištích, je uveden v učebnici Fyzika pro 1. roč. SVVŠ, vydané SPN v r. 1964.

b₁) Podle návodu ve studijním textu je úloha řešena na obr. 94 a 95. Protože síly \mathbf{G}_1 , \mathbf{G} , $-\mathbf{G}_1$ jsou svislé, sečteme je vektorově na svislé přímce (obr. 95). Tak určíme velikost, směr i orientaci výsledné síly \mathbf{F} . Abychom zjistili na obr. 94 polohu bodu T , zvolíme na obr. 95 libovolně bod O a přidáme k síle \mathbf{F} vektorově dvě stejně veliké opačně orientované síly $\mathbf{F}_0 = \vec{OP}$ a $-\mathbf{F}_0 = \vec{QR}$. Pak spojíme bod O s koncovými body M , N vektorů \mathbf{G}_1 a $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}$. Orientované úsečky \vec{MO} , \vec{NO} , \vec{QO} zobrazují síly $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{G}_1$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}$, $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_0 +$



Obr. 94

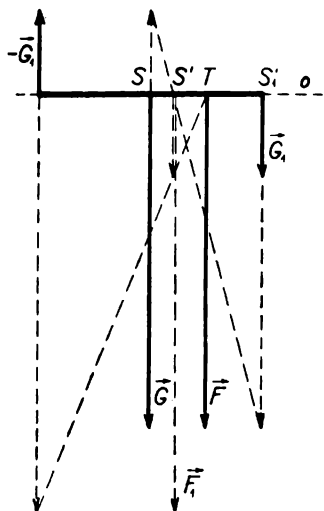


Obr. 95

$+ \mathbf{G}_1 + \mathbf{G} - \mathbf{G}_1$. Vektorový součet úseček $\vec{OP} + \vec{PM} + \vec{MN} + \vec{NQ} + \vec{QR} = \vec{OR}$ zobrazuje tedy také velikost, směrem a orientaci vektor \mathbf{F} výslednice sil \mathbf{G}_1 , \mathbf{G} , $-\mathbf{G}_1$, neboť $\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_0 = 0$.

Působíště síly \mathbf{F} je určeno na obr. 94. Na vektorové přímce síly \mathbf{G}_1 zvolíme libovolně bod, z něhož vedeme paprsky s_0 rovnoběžně s \vec{OP} a s_1 rovnoběžně s \vec{OM} . Průsečíkem paprsku s_1 s vektorovou přímkou síly \mathbf{G} vedeme paprsek s_2 rovnoběžně s \vec{ON} . Obdobně postupujeme dále, až sestrojíme paprsek s_3 , rovnoběžný s \vec{OQ} . Protože

paprsky s_0, s_1, s_2, s_3 udávají směry vektorových přímek částečných součtů skládaných sil, je průsečík paprsků s_0 a s_3 bodem, jímž prochází vektorová přímka výsledné síly \mathbf{F} . Směr, orientace a velikost síly \mathbf{F} byly určeny na obr. 95.



Obr. 96

b₂) Postupným skládáním sil je úloha řešena na obr. 96. Síla \mathbf{F}_1 je výslednicí sil \mathbf{G}_1 a \mathbf{G} , síla \mathbf{F} je výslednicí sil \mathbf{F}_1 a $-\mathbf{G}$. Síla \mathbf{F} je tedy výslednicí sil $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}, -\mathbf{G}_1$.

c) Měřením na obr. 94 i na obr. 96 zjistíme, že vzdálenost $x = ST = 1$ cm, což souhlasí s výsledkem části a) úlohy, neboť podle vztahu (4) je pro hodnoty $a = 8$ cm a $n = 2$ vzdálenost $x = 1$ cm.

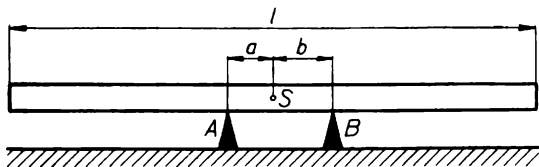
4. Úlohy kategorie D

Úlohy a jejich řešení reценzovali dr. Bohumil Vlach a dr. Ivan Náter.

a) První kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Stejnorodý dřevěný trám délky l všude stejného příčného průřezu je vodorovně položen na podpěrách A a B



Obr. 97

(obr. 97). Podpěra A je od středu S trámu vzdálena o délku a , podpěra B je od středu trámu vzdálena o délku b ($b > a$). Tíha trámu je G . Uprostřed trám stojí chlapec o tíze G_1 .

a) Jak daleko může chlapec postoupit od středu S po trámu, aby se trám neotáčel kolem podpěry A nebo B ?

b) Jakou nejmenší tíhu musí mít závaží, které umístíme na jednom nebo na druhém konci trámu, aby chlapec mohl stát na opačném konci trámu a trám se neotáčel?

Tloušťku trámu zanedbejte.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $l = 5$ m, $a = 0,4$ m, $b = 0,5$ m, $G = 100$ kp, $G_1 = 50$ kp.

Řešení:

Úlohu řešíme užitím zákona o rovnováze na páce. Pro žáky 9. roč. je možná nové to, že pro stanovení rovnováhy je třeba uvažovat i vlastní tíhu páky.

a) Vzdálenost, o kterou může chlapec nanejvýš postoupit od středu trámu S na straně podpory A , označíme x_1 . (Osa otáčení páky bude v bodě A .) Písmenem x_2 označíme vzdálenost, o kterou může chlapec nanejvýš postoupit na straně podpory B . (Osa otočení páky bude v bodě B .) Podmínky rovnováhy jsou:

$$(x_1 - a)G_1 = aG, \quad (x_2 - b)G_1 = bG. \quad (1)$$

Z rovnic (1) vypočítáme:

$$x_1 = \frac{(G + G_1)a}{G_1}, \quad x_2 = \frac{(G + G_1)b}{G_1}. \quad (2)$$

Žák provede rozměrovou zkoušku rovnic (2). Dosadíme-li do rovnic (2) číselné hodnoty, vypočteme:

$$x_1 = 1,2 \text{ m}, \quad x_2 = 1,5 \text{ m}.$$

Na stranu podpory A může chlapec postoupit nanejvýš o délku 1,2 m, na stranu podpory B nanejvýš o délku 1,5 m.

b) Tíhu závaží, které musíme položit na konec trámu na straně podpěry B , aby chlapec mohl stát až na konci trámu na straně podpěry A , označíme Z_1 . Ze zadání úlohy plyne („Jakou nejmenší tíhu musí mít závaží . . .“), že za osu otáčení považujeme v tomto případě podpěru A . Tíhu závaží v druhém případě, kdy je osa otáčení v podpěře B , označíme Z_2 . V obou případech působí na páku tři síly: tíha Z_1 (nebo Z_2) a tíhy G_1 a G .

Rovnice rovnováhy jsou:

$$\begin{aligned} \left(\frac{l}{2} - a\right) G_1 &= \left(\frac{l}{2} + a\right) Z_1 + a G, & \left(\frac{l}{2} - b\right) G_1 &= \\ &= \left(\frac{l}{2} + b\right) Z_2 + b G. \end{aligned} \quad (3)$$

Z rovnic (3) vypočteme:

$$Z_1 = \frac{l G_1 - 2a(G + G_1)}{l + 2a}, \quad Z_2 = \frac{l G_1 - 2b(G + G_1)}{l + 2b}. \quad (4)$$

Žák provede rozměrovou zkoušku rovnic (4). Dosadíme-li do rovnic (4) číselné hodnoty, vypočteme:

$$Z_1 \doteq 22 \text{ kp}, \quad Z_2 \doteq 17 \text{ kp}.$$

Aby se chlapec mohl postavit na konec trámu na straně podpěry A , musí být na druhém konci trámu závaží o tíze (asi) 22 kp; v druhém případě musí být na druhém konci trámu, než stojí chlapec, závaží o tíze (asi) 17 kp.

Diskuse:

a) Z rovnic (2) vypočítáme vztah:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{b} \left(= \frac{G + G_1}{G_1} \right). \quad (5)$$

Rovnice ze vztahu (5) vyjadřuje známou zkušenost, že chlapec může postoupit tím dále od středu trámu, čím je na těžší straně od středu trámu podpěra více vzdálená od středu trámu.

b) Důležité je, aby si žák všiml, že otázka zní: Jakou *nejmenší* tíhu . . . atd. podle zadání . . . V těchto případech je osou otáčení podpěra, která je na těžší straně od osy trámu, na kterou chlapec postupuje.

Kdybychom za osu otáčení považovali podpěru, která je na druhé straně od středu trámu, než jak postupuje chlapec, pak bychom řešili otázku: Jakou *největší* tíhu . . . I pro tento případ dovedete napsat rovnice rovnováhy a vypočítat $\bar{Z}_1 = 100$ kp, $\bar{Z}_2 = 88$ kp. Proč jsou tíhy \bar{Z}_1, \bar{Z}_2 větší než tíhy Z_1, Z_2 ?

2. úloha (navrhl Jaroslav Hrázský)

Na moři nastal výbuch. Pozorovatelé na lodi značně vzdálené od místa výbuchu naměřili, že zvuk šfřící se vzduchem dospěl z místa výbuchu k lodi o čas Δt později než zvuk šfřící se vodou.

a) Jak daleko byla loď od místa výbuchu v okamžiku, kdy se výbuch udál, v těchto případech:

1. loď byla zakotvena,
2. loď se přibližovala k místu výbuchu rychlostí v ,
3. loď se vzdalovala od místa výbuchu stejnou rychlostí v ?

b) Jak daleko byla loď od místa výbuchu v případech 2. a 3. v okamžicích, kdy přijala zvukový signál ze vzduchu a kdy přijala zvukový signál z vody?

Vzduchem se šíří zvuk rychlostí c_1 , vodou rychlostí c_2 ($v < c_1 < c_2$).

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty

$$c_1 = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}, c_2 = 1\,440 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}, \Delta t = 11 \text{ s}.$$

Řešení:

Je žádoucí, aby ve všech případech žák nakreslil jednoduché schéma situace. K řešení uijeme zákona dráhy rovnoměrného přímočarého pohybu.

Případ a)

1. Hledanou vzdálenost zakotvené lodi od místa výbuchu označíme x_1 . Nejprve vypočteme čas t_1 , za který dostihne loď signál postupující ve vodě. Platí:

$$x_1 = c_2 t_1, \quad x_1 = c_1(t_1 + \Delta t). \quad (1)$$

Z rovnic (1) vypočítáme:

$$t_1 = \frac{c_1}{c_2 - c_1} \Delta t. \quad (2)$$

Dosadíme-li za t_1 z rovnice (2) do kterékoliv rovnice (1), vypočítáme:

$$x_1 = \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} \Delta t. \quad (3)$$

Provedeme rozměrovou zkoušku rovnice (3). Obě strany rovnice (3) mají rozměr m. Dosadíme-li do rovnice (3) číselné hodnoty, dostaneme: $x_1 = 4896$ m.

V okamžiku výbuchu byla loď od místa výbuchu vzdálena 4896 m.

2. Vzdálenost lodi, přibližující se po přímce k místu výbuchu, v okamžiku výbuchu označíme x_2 . Relativní rychlosti vzájemného přibližování lodi a signálu postupujícího ve vodě a signálu postupujícího ve vzduchu jsou: $c_2 + v$, $c_1 + v$. Čas, za který dostihne loď signál postupující ve vodě, označíme t_2 . Platí:

$$x_2 = (c_2 + v) t_2, \quad x_2 = (c_1 + v) (t_2 + \Delta t). \quad (4)$$

Z rovnice (4) vypočteme:

$$t_2 = \frac{(c_1 + v)}{c_2 - c_1} \Delta t. \quad (5)$$

Dosadíme-li do kterékoliv rovnice (4) za t_2 z rovnice (5), bude:

$$x_2 = \frac{(c_1 + v)(c_2 + v)}{c_2 - c_1} \Delta t. \quad (6)$$

Rozměrová zkouška rovnice (6): Rychlost lodi v vyjádříme v jednotkách $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Nyní máme všechny dané číselné veličiny vyjádřeny v soustavě jednotek SI. Dosadíme-li do rovnice (6) číselné hodnoty, vypočteme $x_2 = 5075$ m.

Loď plující po přímce k místu výbuchu byla v okamžiku výbuchu vzdálená od místa výbuchu 5075 m.

3. Vzdálenost lodi od místa výbuchu v okamžiku výbuchu označíme x_3 . Relativní rychlosti přibližování lodi a signálů jsou $c_2 - v$, $c_1 - v$. Čas, za který dostihne loď signál postupující ve vodě, označíme t_3 . Stejným způsobem jako v předešlém případě vypočteme:

$$t_3 = \frac{c_1 - v}{c_2 - c_1} \Delta t ; \quad (7)$$

$$x_3 = \frac{(c_1 - v)(c_2 - v)}{c_2 - c_1} \Delta t . \quad (8)$$

Dosadíme-li do rovnice (8) číselné hodnoty, vypočteme $x_3 = 4719$ m.

Pluje-li loď po přímce od místa výbuchu, je v okamžiku výbuchu vzdálená od místa výbuchu 4719 m.

Diskuse k případu a)

1. Z porovnání rovnic (3), (6), (8) vidíme, že obecný vztah pro vzdálenost lodi od místa výbuchu v okamžiku výbuchu má tvar:

$$x_{1, 2, 3} = \frac{(c_1 \pm v)(c_2 \pm v)}{c_2 - c_1} \Delta t . \quad (9)$$

Ze vztahu (9) dostaneme správný výsledek, dosazujeme-li za rychlost lodi postupně hodnoty 0, plus a nebo minus v .

2. Z rovnic (3), (6), (8) vypočteme

$$x_1 : x_2 : x_3 = c_1 c_2 : (c_1 + v)(c_2 + v) : (c_2 - v)(c_1 - v). \quad (10)$$

Z výrazu (10) je skutečně vidět, že x_2 musí být největší a x_3 nejmenší. Je tomu tak proto, že hodnota Δt je ve všech případech táž.

Případ b)

Rovnice (5), (7) udávají doby t_2, t_3 , za které signál postupující ve vodě dostihne loď. Příslušné doby, za které dostihne loď signál postupující vzduchem, jsou podle zadání:

$$\bar{t}_2 = t_2 + \Delta t, \quad \bar{t}_3 = t_3 + \Delta t. \quad (11)$$

Vzdálenosti d_1, d_2 , v nichž dostihne zvukový signál jdoucí vodou a zvukový signál jdoucí vzduchem loď plující k místu výbuchu, jsou:

$$d_1 = c_2 t_2, \quad d_2 = c_1 (t_2 + \Delta t). \quad (12)$$

Dosazením za t_2 z rovnice (5) do rovnice (12) vypočteme:

$$d_1 = \frac{c_1 + v}{c_2 - c_1} c_2 \Delta t, \quad d_2 = \frac{c_2 + v}{c_2 - c_1} c_1 \Delta t. \quad (13)$$

Rozměrová zkouška rovnic (13). Dosazením číselných hodnot do rovnice (13) vypočteme: $d_1 = 5040$ m, $d_2 = 4930$ m.

Pluje-li loď k místu výbuchu, dostihne ji signál jdoucí vodou ve vzdálenosti 5040 m a signál jdoucí vzduchem ve vzdálenosti 4930 m.

Vzdálenosti d_3, d_4 , v nichž signály jdoucí vodou a vzduchem dostihnou loď plující po přímce od místa výbuchu, vyjádříme užitím rovnic (7) a (11).

$$d_3 = c_2 t_3, \quad d_4 = c_1 (t_3 + \Delta t). \quad (14)$$

Dosadíme-li za t_3 z rovnice (7) do rovnice (14), vypočteme:

$$d_3 = \frac{c_1 - v}{c_2 - c_1} c_2 \Delta t, \quad d_4 = \frac{c_2 - v}{c_2 - c_1} c_1 \Delta t. \quad (15)$$

Dosažením číselných hodnot do rovnice (15), vypočteme $d_3 = 4752 \text{ m}$, $d_4 = 4862 \text{ m}$.

Loď plující po přímce od místa výbuchu dostihl signál jdoucí vodou ve vzdálenosti 4752 m a signál jdoucí vzduchem ve vzdálenosti 4862 m od místa výbuchu.

Diskuse k případu b)

Porovnáním obecných i číselných hodnot zjistíme:

$$d_1 - d_2 = d_4 - d_3 = v \Delta t = 110 \text{ m}.$$

3. úloha (navrhl Václav Suchánek)

Do nekrytého kalorimetru, v němž je voda o hmotnosti m_1 a o teplotě t_1 , jsme nalili roztavené olovo hmotnosti m_2 a teploty t_2 (teplota tání olova). Výsledná teplota látek v kalorimetru je t . Při nalévání olova do vody se část vody uvedené do varu vypařila (za normálního tlaku). Určete hmotnost m_3 vody, která zůstala v kalorimetru. Tepelné ztráty kromě tepla potřebného k odpaření vody zanedbáváme.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m_1 = 0,50 \text{ kg}$, $t_1 = 60 \text{ }^\circ\text{C}$, $t = 65 \text{ }^\circ\text{C}$, $m_2 = 0,50 \text{ kg}$, $t_2 = 327 \text{ }^\circ\text{C}$, měrné teplo olova v mezích teplotních změn při pokusu považujeme za stálé $c_2 = 0,030 \frac{\text{kcal}}{\text{kg } ^\circ\text{C}}$, měrné skupenské teplo tání olova $l_t = 6 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$, měrné skupenské teplo varu vody $l_v = 539 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$.

Řešení:

Celkový děj si myslíme rozložený na dílčí děje, které dovedeme charakterizovat následovně:

1. Roztavené olovo o teplotě tání olova t_2 se nejprve přemění na tuhou látku téže teploty; přitom se uvolní (skupenské) teplo $Q_1 = m_2 l_t$.

2. Tuhé olovo o teplotě t_2 se potom ochladí na konečnou teplotu t ; přitom olovo vydá množství tepla $Q_2 = m_2 \cdot c_2 (t_2 - t)$.

3. Hmotnost vody, která se vypaří, označíme x . Hmotnost zbývající vody je $m_3 = m_1 - x$. Množství vody o hmotnosti x se nejprve ohřálo z teploty t_1 na 100°C množstvím tepla $Q_3 = x c_1 (100^\circ\text{C} - t_1)$, kde $c_1 = 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$ je měrné teplo vody. Ohřátá voda se vypařila; k tomu se spotřebovalo teplo $Q_4 = x l_v$.

4. Zbývající voda o hmotnosti $m_3 = m_1 - x$ se ohřála na teplotu t z teploty t_1 . K tomu se spotřebovalo množství tepla $Q_5 = (m_1 - x) (t - t_1) c_1$.

5. Kromě tepla potřebného k ohřátí a vypaření vody žádnou další spotřebu tepla neuvažujeme. (Pokus idealizujeme; nepočítáme s teplem potřebným k ohřátí kalorimetru a s teplem, které se odvádí do okolí kalorimetru vedením a zářením.) Proto podle zákona zachování tepelné energie platí, že teplo vydané olovem se rovná teplu, které přijala voda. Tento předpoklad zapíšeme rovnicí:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 + Q_5.$$

Tuto rovnici napíšeme ve tvaru:

$$m_2 l_t + m_2 c_2 (t_2 - t) = x c_1 (100^\circ\text{C} - t_1) + x l_v + (m_1 - x) c_1 (t - t_1). \quad (1)$$

Z rovnice (1) vypočteme:

$$x = \frac{m_2[l_t + c_2(t_2 - t)] - m_1 c_1 (t - t_1)}{c_1 (100^\circ\text{C} - t) + l_v}. \quad (2)$$

Podle vztahu $m_3 = m_1 - x$ vypočteme z rovnice (2)

$$m_3 = \frac{m_1 [c_1(100^\circ\text{C} - t_1) + l_v] - m_2 [l_t + c_2(t_2 - t)]}{c_1 (100^\circ\text{C} - t) + l_v}. \quad (3)$$

Žák provede rozměrové zkoušky v rovnicích (2) a (3).
Rozměr na obou stranách těchto rovnic je kg.

Dosazením číselných hodnot do rovnice (3) vypočteme:

$$m_3 \doteq 0,49 \text{ kg}.$$

Hmotnost vody, která zůstala v kalorimetru po ustálení tepelné rovnováhy, je asi 0,49 kg.

Diskuse:

Množství vypařené vody vzhledem k množství roztaveného olova se jeví jako velmi malé. Je třeba si uvědomit, že jak měrné, tak i měrné skupenské teplo u vody je mnohokrát větší než u kovů.

4. úloha (navrhl Milan Kepřt)

V nádobě s vodou plave kus ledu. Teplota vody i ledu je 0°C . K ledu mohou být přimrzlé nebo v ledu zamrzlé kousky různých látek teploty 0°C . Nechť všechen led roztaje tak, že výsledná teplota vody v nádobě je opět 0°C . Teplo potřebné k roztání ledu je přivedeno zvenčí.

Rozhodněte, zda po roztání ledu se výška povrchu vody nade dnem nádoby zmenší, zvětší nebo nezmění v těchto případech:

- a) led je čistý
1. bez dutin,
 2. v ledu je uzavřena dutina;
- b) k ledu je přimrzlý kousek korku tak, že
1. korek je na ledě nad vodou,
 2. korek je zamrzlý uvnitř ledu,
 3. korek je pod vodou na ponořené části ledu;
- c) k ledu je přimrzlý kousek železa tak, že
1. železo je na ledě nad vodou,
 2. železo je zamrzlé uvnitř ledu,
 3. železo je pod vodou přimrzlé na ponořené části ledu.

Úlohu řešte:

a) úvahou (úsudkem) bez použití matematiky,

b) obecným matematickým výpočtem tak, že např. tíhu ledu označíte G_1 , měrnou tíhu ledu γ_1 , tíhu kusu korku G_2 , jeho měrnou tíhu γ_2 , tíhu kusu železa G_3 , jeho měrnou tíhu γ_3 , tíhu vody vytlačené ledem G_0 , měrnou tíhu vody γ_0 , objem vody vytlačené ponořenou částí ledu V_0 , objem vody, která vznikne roztáním ledu V_1 .

Řešení:

Všechny veličiny označíme, jak je uvedeno v textu úlohy. Pro tíhu vody vytlačené ponořenou částí ledového tělesa platí $G_0 = V_0 \gamma_0$ a pro tíhu vody vzniklé při roztavení všeho ledu $G_1 = V_1 \gamma_1$ (při 0°C).

a—a) Archimédův zákon říká, že tíha ledu G_1 se rovná tíze vody G_0 vytlačované ponořenou částí ledu. Nezáleží na tvaru ledového tělesa, nebo na tom, je-li těleso kompaktní nebo jsou-li v něm uzavřené dutiny.

Tíha vody, která vznikne roztáním všeho ledu, $V_1 \gamma_0$, se rovná nejen tíze ledu G_1 , ale také tíze vody, která před roztáním ledu byla vytlačena ponořenou částí ledu. Podle zadání je teplota vody i ledu stále 0°C ; to znamená, že měrná tíha vody vytlačované ponořenou částí ledu i měrná tíha vody vzniklé roztáním ledu je stále γ_0 ; proto obě tato množství vody musí mít i stejný objem. Závěr: Voda vzniklá roztáním ledu (za daných podmínek) právě vyplní prostor, který dříve zaujímal ponořená část ledu. Proto v případech a1., a2. se výška hladiny vody v nádobě nezmění.

a—b) Archimédův zákon zapíšeme rovnicí:

$$G_1 = G_0 . \quad (1)$$

Rovnice (1) platí, necht' má ledové těleso jakýkoliv tvar. Z předcházejících úvah víme, že jsou správné rovnice

$$G_1 = V_1 \gamma_0, \quad G_0 = V_0 \gamma_0 . \quad (2)$$

Dosadíme-li z rovnice (2) do rovnice (1), pak po malé úpravě dostaneme:

$$V_1 = V_0 . \quad (3)$$

Rovnice (3) říká, že objem vody vzniklé roztáním všeho ledu se rovná (za daných podmínek) objemu vody, která dříve byla vytlačována ponořenou částí ledu. Z toho plyne stejný závěr, k jakému jsme došli úsudkovým řešením případu.

b—a) Ve všech těchto případech podle Archimédova zákona platí, že tíha vody G_0 , vytlačovaná ponořenou částí plovoucího tělesa (led a korek) a mající objem V_0 , se rovná součtu tíhy ledu G_1 a tíhy korku G_2 ($G_0 = G_1 + G_2$).

Roztaje-li se led, korek bude plavat na vodě. Přitom tíha vody, vzniklé táním ledu bude opět G_1 (tj. $\gamma_0 V_0$ jako

tíha ledu před táním) a tíha vody vytlačované ponořenou částí plovoucího korku bude opět G_2 (tj. stejná jako tíha korku).

Z toho plyne, že součet tíhy vody vzniklé táním ledu a tíhy vody vytlačované plovoucím korkem se rovná tíze vody, kterou před roztáním ledu vytlačovala ponořená část tělesa (složeného z ledu a korku). O měrné tíze vody γ_0 podle zadání předpokládáme, že je stále táž. Proto součet objemu vody V_1 vzniklé táním ledu a objemu vody V_2 vytlačované ponořenou částí plovoucího korku má stejnou velikost jako objem vody V_0 vytlačované ponořenou částí plovoucího ledu s korkem před roztáním ledu.

Proto ve všech třech případech v otázce b) výška hladiny vody v nádobě se nezmění.

b—b) Archimédův zákon vyjadřuje rovnice:

$$G_0 = G_1 + G_2. \quad (4)$$

Rovnice (4) je správná, ať je korek na ledě, v ledu, nebo pod ledem.

Označíme-li objem vody vytlačované ponořenou částí plovoucího korku V_2 , pak podle předpokladu ze zadání úlohy o měrné tíze vody a podle hořejších úvah platí rovnice

$$G_0 = V_0 \gamma_0, \quad G_1 = V_1 \gamma_0, \quad G_2 = V_2 \gamma_0. \quad (5)$$

Dosadíme-li za G_0 , G_1 , G_2 z rovnice (5) do rovnice (4), pak po malé úpravě dostaneme:

$$V_0 = V_1 + V_2. \quad (6)$$

Rovnice (6) říká, že objem vody vytlačené tuhým tělesem (led a korek) se rovná součtu objemu vody vzniklé táním všeho ledu a objemu vody vytlačované ponořenou částí plovoucího korku (po roztání ledu). Z toho plyne stejný závěr, k němuž jsme došli úvahou.

c— a) Necht' je železo k ledu připojeno jakkoliv, led je železem vždy zatížen a potápí se více, než kdyby byl čistý. Představme si, že nějakým způsobem železo z plovoucího ledu odstraníme. Led se okamžitě vynoří nad hladinu více, než když byl zatížen. Objem vody vytlačovaný ponořenou částí zatíženého ledu se zmenší o takovou část, aby tíha této části objemu vody se rovnala tíze železa. Hladina vody v nádobě poklesne o hodnotu odpovídající této části objemu vody. Ale tento objem vody je větší než objem železa (stejně tíhy), protože měrná tíha vody je menší než měrná tíha železa. Když led, z něhož bylo odstraněno železo, roztaje, výška hladiny vody v nádobě se nezmění, jak se ukázalo v případě a).

Nyní vhodme železo (které původně zatěžovalo led) do nádoby s vodou; železo se potopí, tím vytlačí objem vody rovný objemu železa; hladina vody v nádobě sice vystoupí, ale ne o tolik, o kolik poklesla, když jsme železo z ledu odstranili.

Proto ve všech případech c) hladina vody v nádobě poklesne.

c— b) Plave-li kus ledu s železem (nezáleží na tom, jak je železo k ledu připojeno) na vodě, vyjádříme Archimédův zákon opět rovnicí:

$$G_0 = G_1 + G_3 . \quad (7)$$

Podle úvah v předcházejících případech opět platí

$$G_0 = V_0 \gamma_0, \quad G_1 = V_1 \gamma_0 ;$$

ale pro G_3 musíme užít vztahu

$$G_3 = V_3 \gamma_3 ,$$

kde V_3 je objem celého kousku železa, protože železo se po roztání ledu ve vodě potopí a vytlačuje objem vody V_3 .

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (7), pak po úpravě bude

$$V_0 = V_1 + V_3 \frac{\gamma_3}{\gamma_0}. \quad (8)$$

Poněvadž $\frac{\gamma_3}{\gamma_0} > 1$, platí

$$V_0 > V_1 + V_3. \quad (9)$$

Rovnice (9) říká, že objem vody vytlačované plovoucím ledem zatíženým železem je větší než součet objemu vody vzniklé roztáním ledu a objemu železa. *Proto hladina vody v nádobě poklesne.*

5. úloha (navrhl Mojžíř Simerský)

Těleso o měrné tíze γ_1 je ve vzduchu, jehož měrná tíha je γ_0 , na správných vahách vyváženo závažím tíhy G a měrné tíhy γ_2 . Určete tíhu tohoto tělesa ve vakuu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\gamma_1 = 240 \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}$, $\gamma_2 = 8500 \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}$, $\gamma_0 = 1,2 \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}$, $G = 1,0 \text{ kp}$.

Řešení:

Hledanou tíhu tělesa ve vakuu označíme G_1 . Jeho objem je $V_1 = \frac{G_1}{\gamma_1}$. Archimédova síla, kterou je těleso ve vzduchu nadlehčováno, je $\frac{G_1}{\gamma_1} \gamma_0$.

Obdobná úvaha platí i pro závaží tíhy G .

Rovnice rovnováhy na vahách je:

$$G_1 - \frac{G_1}{\gamma_1} \gamma_0 = G - \frac{G}{\gamma_2} \gamma_0. \quad (1)$$

Z rovnice (1) vypočteme:

$$G_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_0}{\gamma_1 - \gamma_0} \frac{\gamma_1}{\gamma_2} G. \quad (2)$$

Provedení rozměrové zkoušky rovnice (2) je snadné, neuvádíme ji. Dosadíme-li do rovnice (2) číselné hodnoty, vypočteme: $G_1 = 1,00488$ kp. Tíha tělesa ve vakuu je $1,0049$ kp.

Diskuse:

Vypočítali jsme, že tíha tělesa je větší než tíha závaží. Protože $\gamma_1 \ll \gamma_2$, je objem tělesa větší než objem závaží; proto je těleso ve vzduchu nadlehčováno větší silou než závaží. Proto musí být těleso těžší než tíha závaží.

6. úloha (navrhl Jaroslav Hrázský)

Chod elektromotoru (o příkonu P_0 při napětí U_0) je bezpečný jen pro napětí, které se od udávaného napětí U_0 liší nejvýše o p %.

Vypočtete rozdíl mezi maximálním a minimálním příkonem motoru, mění-li se v síti napětí mezi povolenými krajními hodnotami.

Předpokládejte, že vnitřní odpor motoru se při změně napětí v síti nemění.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $U_0 = 220$ V, $P_0 = 4400$ W, $p = 15$.

Řešení:

Horní mez kolísajícího napětí označme $U_2 = U_0 + \frac{U_0}{100} p$; dolní mez kolísajícího napětí označme $U_1 = U_0 - \frac{U_0}{100} p$.

Vnitřní odpor elektromotoru vypočítáme ze vztahu $R = \frac{U_0^2}{P_0}$.

a) Rozdíl mezi maximální hodnotou (kolísajícího) proudu I_2 a minimální hodnotou (kolísajícího) proudu I_1 je:

$$\Delta I = I_2 - I_1, \quad \Delta I = \frac{1}{R} (U_2 - U_1). \quad (1)$$

Do rovnice (1) dosadíme výše uvedené hodnoty za R , U_1 , U_2 a vypočteme:

$$\Delta I = 2 \frac{p P_0}{100 U_0}. \quad (2)$$

Žák provede rozměrovou zkoušku v rovnici (2). Dosa-díme-li do rovnice (2) číselné hodnoty, vypočteme $\Delta I = 6 \text{ A}$.

b) Rozdíl mezi maximálním příkonem P_2 a minimál-ním příkonem P_1 motoru je:

$$\Delta P = P_2 - P_1, \quad \Delta P = \frac{1}{R} (U_2^2 - U_1^2). \quad (3)$$

Dosadíme-li do rovnice (3) výše uvedené vztahy za R , U_1 , U_2 vypočteme:

$$\Delta P = 4 \frac{p P_0}{100}.$$

Dosadíme-li do rovnice (4) číselné hodnoty, vypočteme:

$$\Delta P = 2640 \text{ W}.$$

Rozdíl mezi maximálním a minimálním proudem je 6 A, rozdíl mezi maximálním a minimálním příkonem motoru je 2,6 kW.

Diskuse:

Oba rozdíly se jeví v číselných hodnotách velmi veliké. Z rovnice (2) a (4) je vidět, že tyto rozdíly jsou přímo úměrné hodnotě p . V daném případě je číselná hodnota $p = 15$ veliká.

7. úloha (navrhl Vilém Mádr)

Primární cívka transformátoru má Z_1 závitů, sekundární Z_2 závitů. Napětí na primární cívce je U_1 . Předpokládáme, že účinnost transformátoru je 100 %.

a) Jaký je transformační poměr a jaké je napětí U_2 na sekundární cívce?

b) Jaké proudy procházejí primární a sekundární cívkou, má-li transformátor příkon P ?

c) Tento výkon se má přenášet při napětí v sekundární cívce U_3 nebo U_4 do stejné vzdálenosti vedením ze stejného materiálu. Určete poměr průřezů drátů, mají-li být ztráty v obou případech stejné.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $Z_1 = 2500$, $Z_2 = 125$, $U_1 = 2400 \text{ V}$, $U_3 = 120 \text{ V}$, $U_4 = 240 \text{ V}$, $P = 48\,000 \text{ W}$.

Řešení:

a) Transformační poměr označme p . Platí:

$$p = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad \text{nebo } p = \frac{U_2}{U_1}. \quad (1)$$

Z rovnic (1) vypočteme:

$$U_2 = \frac{Z_2}{Z_1} U_1. \quad (2)$$

Dosadíme-li do první z rovnic (1) a do rovnice (2) dané hodnoty, vypočteme: $p = \frac{1}{20}$, $U_2 = 120$ V.

Transformační poměr uvažovaného transformátoru je $\frac{1}{20}$; napětí na sekundární cívce v daném případě je 120 V. Poněvadž $p < 1$, je i $U_2 < U_1$; říkáme, že jde o „transformaci dolů“.

b) Výkon (nebo příkon) P elektrického proudu je dán vztahem $P = UI$. Protože účinnost transformátoru podle zadání je 100 %, v našem případě platí: $U_1 I_1 = U_2 I_2 = P$. Vyjádříme-li U_2 užitím rovnice (2), můžeme napsat:

$$I_1 = \frac{P}{U_1}, \quad I_2 = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{P}{U_1}. \quad (3)$$

Žák provede rozměrovou zkoušku v rovnicích (3). Dosadíme-li do rovnice (3) hodnoty podle zadání, vypočteme $I_1 = 20$ A, $I_2 = 400$ A. Primární cívkou transformátoru proteče proud 20 A, sekundární cívkou 400 A. Všimneme si, že z rovnice (3) plyne vztah

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{p}.$$

c) O „prvém případě“ budeme hovořit tehdy, je-li na sekundární cívce napětí U_3 (proud označíme I_3 , odpor R_3); jako „druhý případ“ označujeme ten, kdy je na sekundární cívce napětí U_4 (proud značíme I_4 , odpor R_4). Pro výkon P na sekundární cívce v obou případech platí

$$U_3 I_3 = P, \quad U_4 I_4 = P. \quad (4)$$

Z rovnic (4) vypočteme

$$I_3 = \frac{P}{U_3}; \quad I_4 = \frac{P}{U_4}. \quad (5)$$

Jouleovo teplo (hledaná tepelná ztráta) je dáno vztahem $Q = RI^2$; proto rovnost tepelných ztrát v obou případech napíšeme vztahem

$$R_3 I_3^2 = R_4 I_4^2. \quad (6)$$

Dosadíme-li do rovnice (6) za I_3, I_4 z rovnic (5), bude

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{U_3^2}{U_4^2}. \quad (7)$$

Odpor drátu délky d , průřezu S a měrného odporu ρ je dán vztahem $R = \frac{d}{S} \rho$. Proto platí rovnice

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{S_4}{S_3}. \quad (8)$$

Nyní můžeme místo rovnice (7) napsat rovnici

$$\frac{S_4}{S_3} = \frac{U_3^2}{U_4^2}. \quad (9)$$

Žák provede rozměrovou zkoušku rovnice (9). Dosadíme-li do rovnice (9) dané hodnoty, vypočteme, že $S_3 : S_4 = 4 : 1$. Za podmínek určených v zadání je poměr průřezů drátů 4 : 1.

8. úloha (navrhl Jaroslav Hrázský)

Motocykl Pionýr Jawa 50 má pro jízdu v noci světlomet se žárovkou pro napětí $U = 6\text{ V}$ a příkon $P_1 = 15\text{ W}$, koncové světlo se žárovkou pro stejné napětí U a pro příkon $P_2 = 5\text{ W}$. Obě žárovky jsou spojeny paralelně. Svorkové napětí dynamka vzroste z $U_1 = 4\text{ V}$ při malém počtu obrátek motoru za minutu na napětí $U_2 = 9\text{ V}$ při velkém počtu obrátek za minutu. Vypočítejte, oč se zvětší proud v hlavním vedení a oč se zvětší příkony žárovek při vzrůstu svorkového napětí z U_1 na U_2 .

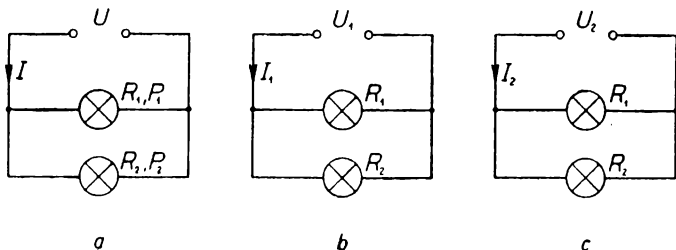
Předpokládáme, že se odpor žárovek při vzrůstu napětí nemění. Odpor spojovacích drátů zanedbáváme.

Řešte nejprve obecně, pak pro uvedené hodnoty.

Řešení:

Zapojení obou spotřebičů (žárovek) je naznačeno v obr. 98.

a) Užitím obecného vztahu pro příkon elektrické energie $P = UI = \frac{U^2}{R}$ dovedeme hodnotami zadání



Obr. 98

vyjádřit odpor žárovky světloometu R_1 a odpor žárovky koncového světla R_2 :

$$R_1 = \frac{U^2}{P_1}, \quad R_2 = \frac{U^2}{P_2}. \quad (1)$$

Z rovnice (1) vypočteme výsledný odpor R soustavy obou žárovek zapojených paralelně užitím vztahu $\frac{1}{R} =$

$$= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R = \frac{U^2}{P_1 + P_2}. \quad (2)$$

Je-li svorkové napětí dynamka U_1 , oběma žárovkami prochází celkový proud $I_1 = \frac{U_1}{R}$, je-li svorkové napětí dynamka U_2 , prochází oběma žárovkami celkový proud $I_2 = \frac{U_2}{R}$. Hledaný rozdíl proudů označíme $\Delta I = I_2 - I_1$. Užitím rovnice (2) vypočteme

$$\Delta I = \frac{(P_1 + P_2)(U_2 - U_1)}{U^2}. \quad (3)$$

Žák provede rozměrovou zkoušku v rovnici (3). Dosa-díme-li do rovnice (3) dané hodnoty, vypočteme $\Delta I \doteq \doteq 2,8 \text{ A}$.

Za předpokladů určených zadáním se proud v hlavním vedení zvětší o 2,8 A.

b) Zvětšení příkonu žárovky světloometu ΔP_1 , zvětšení příkonu žárovky koncového světla ΔP_2 a zvětšení společného příkonu obou žárovek ΔP vyjádříme podle hořejšího výkladu rovnicemi:

$$\Delta P_1 = \frac{1}{R_1} (U_2^2 - U_1^2), \quad \Delta P_2 = \frac{1}{R_2} (U_2^2 - U_1^2),$$

$$\Delta P = \frac{1}{R} (U_2^2 - U_1^2). \quad (4)$$

Rovnici (4) upravíme užitím rovnic (1) a (2) takto:

$$\Delta P_1 = \frac{U_2^2 - U_1^2}{U^2} P_1, \quad \Delta P_2 = \frac{U_2^2 - U_1^2}{U^2} P_2,$$

$$\Delta P = \frac{U_2^2 - U_1^2}{U^2} (P_1 + P_2). \quad (5)$$

Žák provede rozměrovou zkoušku některé z rovnic (5).

Dosazením daných hodnot do rovnic (5) vypočteme:

$$\Delta P_1 = 27 \frac{1}{12} \text{ W}, \quad \Delta P_2 = 9 \frac{1}{36} \text{ W}, \quad \Delta P = 36 \frac{1}{9} \text{ W}. \quad (6)$$

Z rovnic (5) a (6) je vidět, že $\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2$.

Za daných předpokladů se příkon žárovky reflektoru zvýší o $27 \frac{1}{12} \text{ W}$, příkon žárovky koncového světla se

zvýší o $9 \frac{1}{36} \text{ W}$. Společně v obou žárovkách se příkon

zvýší o $36 \frac{1}{9} \text{ W}$.

9. úloha (navrhl Miroslav Voráček)

Stupnice měřidla DU 10 má pro měření stejnosměrného napětí 60 dílků. Napětové rozsahy měřidla jsou: 3 V, 6 V, 12 V, 30 V, 60 V, 120 V, 300 V, 600 V.

a) Na kterém dílku stupnice bude ručka měřidla při jednotlivých rozsazích, měříme-li napětí 5,80 V za předpokladu, že odhadneme ještě desetiny dílků?

b) Určete maximální chybu údaje měřidla (v dílcích stupnice i ve voltech) při jednotlivých rozsazích, měří-li měřidlo DU 10 na stejnosměrných rozsazích každou hodnotu s přesností $\pm 1,5\%$ z plného rozsahu stupnice.

c) Uduďte a odůvodněte, na kterém rozsahu měřidla je možné nejpřesnější měření uvedeného napětí 5,80 V.

Řešení a) a b) zapište do tabulky s těmito sloupci: napěťový rozsah, poloha ručky, maximální chyba v dílcích a ve voltech.

Řešení:

Předpokládáme, že žáci-řešitelé FO se seznámili s měřidlem DU 10 nebo jiným obdobným měřidlem.

a) Napěťové rozsahy měřidla označme obecně písmenem χ ; každý z těchto rozsahů se postupně měří na téže šedesátidílkové stupnici, jejíž dílky jsou stejné. Změna napětí o jeden V znamená na stupnici změnu o $\frac{60}{\chi}$ 1 V dílků. Tedy při napětí 5,8 V ručka ukazuje $\frac{60 \cdot 5,8 V}{\chi}$ dílků stupnice. Tuto hodnotu označíme y ; po vynásobení dostaneme

$$y = \frac{348 V}{\chi} \text{ dílků.} \quad (1)$$

Dosazujeme-li do rovnice (1) postupně za χ napěťové rozsahy, vypočteme dílek, na který ručka ukazuje. Hodnoty y pro všech 8 měrných rozsahů jsou uvedeny v druhém sloupci tabulky.

b) Maximální chybu údaje měřidla v dílcích označíme Δd (třetí sloupec tabulky); maximální chybu údaje měřidla ve voltech označíme ΔV (čtvrtý sloupec tabulky).

Rozsah stupnice měřidla je stále 60 dílků. Proto podle zadání je pro všechny případy Δd stejné:

$$\Delta d = \pm \frac{60}{100} 1,5 \text{ dílků} = \pm 0,9 \text{ dílků.}$$

Maximální chybu údaje měřidla ve voltech počítáme z obdobného vztahu:

$$\Delta V = \pm \frac{x}{100} 1,5.$$

Odpověď na otázky v případech a), b) udává následující tabulka.

x (ve voltech)	y (v dílcích)	Δd (dílků)	ΔV (voltů)
3	nelze měřit	$\pm 0,9$	$\pm 0,045$
6	58,0	$\pm 0,9$	$\pm 0,09$
12	29,0	$\pm 0,9$	$\pm 0,18$
30	11,6	$\pm 0,9$	$\pm 0,45$
60	5,8	$\pm 0,9$	$\pm 1,8$
120	2,9	$\pm 0,9$	$\pm 0,90$
300	$1,16 \pm 1,2$	$\pm 0,9$	$\pm 4,5$
600	$0,58 \pm 0,6$	$\pm 0,9$	$\pm 9,0$

c) Nejpřesněji lze měřit dané napětí tehdy, je-li napěťový rozsah měřidla 6 V; v tomto případě je ΔV jen $\pm 0,09$ V; při napěťovém rozsahu 3 V by sice chyba ΔV byla menší, ale výchylka ručky by přesahovala stupnici měřidla ($y = 116 d$). Pro všechny větší napěťové rozsahy je chyba $|\Delta V| > 0,09$ V.

b) Druhé kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Na dvojkolejně trati jede vlak A rychlostí v_1 proti vlaku B , který se pohybuje rychlostí v_2 . Délky d obou vlaků jsou stejné. Předpokládáme, že $v_1 > v_2$. Oba vlaky dojedou současně na protější okraje vodorovného přímého mostu délky d_1 . Předpokládáme, že $d_1 > 2d$.

a) Za jakou dobu Δt_1 od okamžiku jejich příjezdu na okraje mostu se oba vlaky setkají a v jaké vzdálenosti a od okraje mostu, na který přijel vlak A , to bude?

b) Za jakou dobu Δt_2 od okamžiku, kdy se setkají, se oba vlaky minou?

c) Za jakou dobu Δt_3 od okamžiku příjezdu vlaků na okraje mostu právě opustí most poslední vagón pomalejšího vlaku?

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $v_1 = 43,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_2 = 36,0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $d = 150 \text{ m}$, $d_1 = 500 \text{ m}$.

Řešení:

Rychlosti vlaků vyjádříme v jednotkách $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$v_1 = 12,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_2 = 10,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

a) Čela lokomotiv se k sobě přibližují relativní rychlostí $v_1 + v_2$. Proto platí $(v_1 + v_2) \Delta t_1 = d_1$,

$$\Delta t_1 = \frac{d_1}{v_1 + v_2}. \quad (1)$$

Dosadíme-li do rovnice (1) dané hodnoty, vypočteme:

$$\Delta t_1 = 22,7 \text{ s} .$$

Vzdálenost a vypočteme z rovnice:

$$\begin{aligned} a &= v_1 \Delta t_1 , \\ a &\doteq 272 \text{ m} . \end{aligned} \quad (2)$$

b) Δt_2 je doba, která uplyne od okamžiku, kdy se setkají přední stěny lokomotiv, do okamžiku, kdy se minou zadní stěny posledních vagónů. Čela lokomotiv se od sebe vzdalují rychlostí $v_1 + v_2$. Proto si můžeme situaci představit tak, že jeden vlak stojí a druhý ho míjí rychlostí $v_1 + v_2$. Proto platí

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2) \Delta t_2 &= 2d , \\ \Delta t_2 &= \frac{2d}{v_1 + v_2} . \end{aligned} \quad (3)$$

Dosazením daných hodnot do rovnice (3) vypočteme

$$\Delta t_2 = 13,6 \text{ s} .$$

c) Δt_3 je doba, za kterou vlak o menší rychlosti přejede celý most a dráhu rovnou délce vlaku d ; proto platí

$$\Delta t_3 = \frac{d_1 + d}{v_2} . \quad (4)$$

Dosazením do rovnice (4) vypočteme $\Delta t_3 = 65,0 \text{ s}$.

2. úloha (navrhl Jaroslav Hrázský)

Chlapec o tíze G_1 se koupá ve vodě, jejíž měrná tíha je γ_0 . Vezme-li si korkový pás o tíze G_2 a měrné tíze γ_2 , vznáší se ve vodě.

a) Vypočtete měrnou tíhu γ_1 chlapcova těla.

b) Jak těžký korkový pás musí chlapec mít, aby za rovnováhy $\frac{1}{n}$ objemu jeho těla byla nad povrchem vody? (Korkový pás je ponořen celý.)

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $G_1 = 60$ kp, $G_2 = 0,60$ kp, $\gamma_0 = 1000 \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}$, $\gamma_2 = 200 \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}$, $n = 6$.

Řešení:

Vztlak působící na plně ponořené tělo chlapce a korkový pás musí být roven jejich celkové tíze $F = G_1 + G_2$.

$$\left(\frac{G_1}{\gamma_1} + \frac{G_2}{\gamma_2} \right) \gamma_0 = G_1 + G_2, \text{ odtud } \frac{G_1}{\gamma_1} \gamma_0 = G_1 + G_2 - \frac{G_2}{\gamma_2} \gamma_0, \text{ dále } \frac{G_1}{\gamma_1} = \frac{G_1 \gamma_2 + G_2 \gamma_2 - G_2 \gamma_0}{\gamma_0 \gamma_2}$$

a konečně měrná tíha chlapcova těla

$$\gamma_1 = \frac{\gamma_0 \gamma_2}{G_1 \gamma_2 + G_2 \gamma_2 - G_2 \gamma_0} G_1.$$

V druhém případě vztlak působící na plně ponořený korkový pás tíhy G_3 a na $\frac{n-1}{n}$ objemu chlapcova těla je roven tíze chlapcova těla i korkového pásu:

$$\left(\frac{n-1}{n} \frac{G_1}{\gamma_1} + \frac{G_3}{\gamma_2} \right) \gamma_0 = G_1 + G_2, \text{ odtud: } \frac{G_3}{\gamma_2} \gamma_0 - G_3 = G_1 - \frac{n-1}{n} \frac{G_1}{\gamma_1} \gamma_0, \quad G_3 \frac{\gamma_0 - \gamma_2}{\gamma_2} =$$

$$= G_1 \frac{n \gamma_1 - (n - 1)}{n \gamma_1} \text{ a konečně tíha korkového pásu}$$

$$G_3 = G_1 \frac{n[\gamma_1 - (n - 1)\gamma_0] \gamma_2}{n \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2)}.$$

Pro dané hodnoty:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3} \cdot 0,2 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}}{60 \text{ kp} \cdot 0,2 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3} - 0,6 \text{ kp} (1 - 0,2) \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}}. \\ \cdot 60 \text{ kp} &= \frac{0,2 \cdot 60}{12 - 0,48} \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3} = 1,04 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3} = \\ &= 1040 \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}. \end{aligned}$$

Tíha korkového pásu je $G_3 =$

$$= 60 \text{ kp} \frac{(6,24 - 5) \frac{\text{kp}^2}{\text{dm}^6} \cdot 0,2}{6,24 (1 - 0,2) \frac{\text{kp}^2}{\text{dm}^6}} \doteq 3 \text{ kp}.$$

3. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Ve fyzikálním praktiku měl žák ohřát vodu o hmotnosti m_1 z teploty t_1 na teplotu t_2 . Použitý elektrický ponorný vařič o příkonu P a účinnosti η z nepozornosti vypnul až v okamžiku, kdy voda právě začala vřít (teplotu varu vody označme t_3).

a) Za jakou dobu τ_1 se voda o hmotnosti m_1 ponorným ohřívacem ohřála z teploty t_1 na teplotu t_2 ? Za jakou dobu τ_2 se tato voda ohřála z teploty t_2 do varu?

Vařící vodu může žák ochladit na žádanou teplotu t_2 několika způsoby.

b) V jakém poměru žák smíchá vařící vodu s vodou teploty t_1 , aby získal vodu o hmotnosti m_1 a o teplotě t_2 ? Vypočtete hmotnost m_y použité vody vařící a hmotnost m_x použité vody o teplotě t_1 . Nezáleží-li na výsledné hmotnosti vody teploty t_2 , může žák vařící vodu ochladit tak, že do ní přidá vodu teploty t_1 , nebo do ní vhodí kus ledu teploty $t_0 = 0^\circ\text{C}$.

c) Jakou hmotnost m_2 musí mít voda teploty t_1 , kterou žák přidá do vařící vody o hmotnosti m_1 , aby výsledná teplota směsi byla t_2 ?

d) Jakou hmotnost m_3 musí mít led o teplotě t_0 , který žák musí vhodit do vařící vody o hmotnosti m_1 , aby výsledná teplota byla t_2 ?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $P = 1,0 \text{ kW}$, $\eta = 95 \%$, $t_1 = 20^\circ\text{C}$, $t_2 = 90^\circ\text{C}$, $t_3 = 100^\circ\text{C}$, $m_1 = 1,0 \text{ kg}$, měrné teplo vody $c = 1,0 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$, měrné skupenské teplo tání ledu $l = 80 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$. Tepelné ztráty a vypařování vody zanedbejte.

Řešení:

Užijeme Jouleova-Lencova zákona o zachování tepelné energie, vyjádřeného kalorimetrickou rovnicí.

a) Podle Jouleova-Lencova zákona je teplo Q (v cal), které vznikne ve vodiči za dobu τ přeměnou elektrické energie o příkonu P (ve W) při účinnosti η :

$Q = k P \eta \tau$, kde $k = 0,24 \frac{\text{cal}}{\text{J}}$. V našem případě jsou:

$$m_1 c (t_2 - t_1) = Q_1; \quad \tau_1 = \frac{m_1 c (t_2 - t_1)}{Q_1};$$

$$m_1 c (t_3 - t_2) = Q_2; \quad \tau_2 = \frac{m_1 c (t_3 - t_2)}{Q_2}.$$

Pro dané hodnoty: Dosazením do rovnice pro τ_1 a τ_2 vypočteme:

$$\tau_1 = 307 \text{ s} = 5 \text{ min } 7 \text{ s}; \quad \tau_2 = 44 \text{ s}.$$

b) Hmotnost chladnější vody o teplotě t_1 označme m_x ,
hmotnost vařící vody o teplotě t_3 označme m_y , platí:

$$m_x c (t_2 - t_1) = m_y c (t_3 - t_2); \quad \frac{m_x}{m_y} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}; \quad m_x +$$
$$+ m_y = m_1; \quad m_x = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} m_1; \quad m_y = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} m_1.$$

Dosazením daných hodnot dostaneme

$$\frac{m_x}{m_y} = \frac{1}{7}; \quad m_x = \frac{1}{7} m_y; \quad m_x = 0,125 \text{ kg}; \quad m_y = 0,875 \text{ kg}.$$

c) Hmotnost vody o teplotě t_1 označme m_2 ; platí:

$$m_2 c (t_2 - t_1) = m_1 c (t_3 - t_2); \quad m_2 = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} m_1. \quad \text{Dosa-}$$

zením do tohoto vztahu vypočteme, že žák musel do vařící vody přidat vodu teploty t_1 o hmotnosti $m_2 =$
 $= \frac{1}{7} m_1; \quad m_2 = 0,14 \text{ kg}.$

d) Hmotnost ledu označme m_3 ; pak

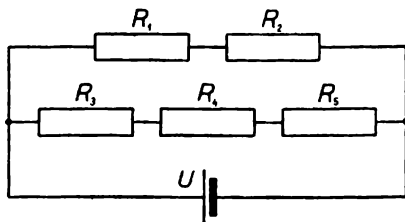
$$m_3[l + c(t_2 - t_0)] = m_1 c (t_3 - t_2); m_3 = \frac{c(t_3 - t_2)}{l + c(t_2 - t_0)} m_1.$$

Dosazením daných hodnot vypočteme:

$$m_3 = \frac{1}{17} m_1; m_3 = 0,06 \text{ kg.}$$

4. úloha (navrhl Konrád Hofman)

K baterii akumulátorů se svorkovým napětím U je připojeno pět stejných elektrických spotřebičů podle obrázku 99. Celkový příkon spotřebičů je P .



Obr. 99

a) Jak velký je odpor každého spotřebiče?

b) Jak velká napětí jsou na jednotlivých spotřebičích?

Odpor přívodních drátů zanedbáváme a předpokládáme, že odpor spotřebičů se s teplotou nemění.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $U = 12 \text{ V}$,
 $P = 30 \text{ W}$.

Řešení:

Pro odpory platí $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R$.
Nevětvený proud označíme I , proudy ve větvích I_1 a I_2
podle obrázku. Potom výkon $P = U I$, $I = \frac{P}{U} =$
 $= \frac{30}{12} \text{ A} = \frac{5}{2} \text{ A}$.

Pro proudy I_1 a I_2 platí $I_1 : I_2 = 3R : 2R$, $I_1 + I_2 = I$,
čili $I_1 : I_2 = 3 : 2$,

$$I_1 + I_2 = \frac{5}{2} \text{ A}.$$

Z první rovnice vypočítáme $I_1 = \frac{3}{2} I_2$ a dosadíme do
druhé, pak dostaneme:

$$\frac{3}{2} I_2 + I_2 = \frac{5}{2} \text{ A}, \quad I_2 = 1,0 \text{ A}, \quad I_1 = \frac{3}{2} \text{ A} = 1,5 \text{ A}.$$

Odpor R můžeme vypočítat z horní nebo dolní větve.
Pro dolní větev je

$$U = (R_3 + R_4 + R_5) I_2 = 3 R I_2.$$

$$\text{Z toho} \quad R = \frac{U}{3 I_2} = \frac{12}{3} \Omega = 4,0 \Omega.$$

Napětí na odporech horní větve je 6 V , napětí na odporech
dolní větve je 4 V .

c) Třetí kolo soutěže

1. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Rybář plul proti proudu řeky. Právě pod středem mostu mu vypadl z loďky do vody nafouknutý plovací pás. Rybář zpozoroval ztrátu až za dobu t . Ihned se s loďkou po řece vrátil a dostihl plovací pás ve vzdálenosti d za středem mostu.

Vypočtěte rychlost c vody proudící v řece za předpokladu, že rychlost c_1 loďky vzhledem k vodě byla stále stejná.

Počítejte nejprve obecně a potom pro hodnoty $t = 0,5$ h; $d = 5$ km.

Řešení:

a) Myšlenka řešení: Čas počítáme od okamžiku, kdy byl rybář pod středem mostu. Ujijeme zákonů rovnoměrného pohybu.

Obecné řešení: Plovací pás byl volně unášen proudící vodou, proto se pohyboval hledanou rychlostí c ; dráhu d vykonal za dobu $t_1 = \frac{d}{c}$. Odtud

$$c = \frac{d}{t_1}. \quad (1)$$

Hledáme čas t_1 . Rozdělme si ho na tři části

$$t_1 = t + t_2 + t_3. \quad (2)$$

Čas t je doba, která uplynula do doby, než rybář zpozoroval ztrátu; za tuto dobu vykonal proti proudu řeky dráhu $(c_1 - c)t$; když se vracel, vykonal tuto dráhu za dobu

$t_2 = \frac{c_1}{c_1 + c} t$; od středu mostu dostihl pás za dobu

$$t_3 = \frac{d}{c_1 + c}.$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice (2) dostáváme

$$t_1 = \frac{2c_1 t + d}{c_1 + c}. \quad (3)$$

Dosazením z rovnice (3) do rovnice (2) dostáváme

$$c = \frac{d}{2t}. \quad (4)$$

Diskuse: Pozoruhodné je, že ve výsledku se neobjevuje rychlost loďky.

Dosazením daných hodnot do rovnice (4) vypočítáme

$$c = 5 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Voda v řece proudí rychlostí $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Jiné řešení:

Plovací pás je unášený vodou, má tedy vůči vodě nulovou rychlost. V okamžiku, kdy rybář zpozoroval jeho ztrátu, je vzájemná vzdálenost loďky a pásu daná dráhou, kterou rybář projel vůči vodě za čas t :

$$s = c_1 t. \quad (1)$$

Po otočení loďky urazí rybář tuto vzdálenost za stejný čas t , protože se vůči vodě pohybuje stejnou rychlostí c_1 .

Do okamžiku, kdy rybář dostihl plovací pás, byl pás unášen vodou neznámou rychlostí c po dobu $2t$ a vzdálil se od mostu o dráhu d . Proto

$$d = c 2t. \quad (2)$$

Z rovnice (2) dostaneme přímo

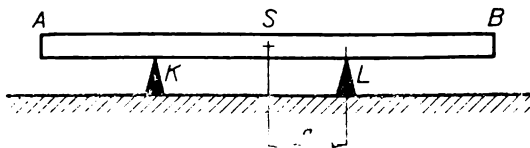
$$c = \frac{d}{2t}. \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot do rovnice (3) dostaneme

$$c = 5 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

2. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Stejnorodý dřevěný trám tíhy G a délky $AB = d$ leží na podpěrách K, L ve vodorovné poloze (obr. 100).



Obr. 100

Podpěra L je od středu S trámu vzdálena o délku a směrem ke konci B trámu. Když odstraníme podpěru K , máte určit:

a) Jakou silou F_1 musíme působit na konci A trámu a jakou silou F_2 musíme působit na konci B trámu, aby v obou případech trám zůstal v rovnováze ve vodorovné poloze? Určete také směry sil F_1 a F_2 .

b) Jaké by musely být vzdálenosti a_1 , resp. a_2 podpěry L od středu trámu, aby za podmínek uvedených v úkolu

a) platilo: $F_1 = \frac{1}{n} G$ nebo $F_2 = \frac{1}{n} G$; n je celé číslo.

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty

$G = 100 \text{ kp}$, $d = 5,00 \text{ m}$, $a = 0,400 \text{ m}$, $n = 3$.

Příčné rozměry trámu zanedbáváme.

Řešení:

Ve všech případech užitíme pravidla o rovnováze na páce:

a) pro rovnováhu platí:

$$F_1 \left(\frac{d}{2} + a \right) = G a, \quad (1)$$

$$F_2 \left(\frac{d}{2} - a \right) = G a. \quad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) vypočteme

$$F_1 = \frac{2 G a}{d + 2a}; \text{ síla } F_1 \text{ směřuje vzhůru,} \quad (3)$$

$$F_2 = \frac{2 G a}{d - 2a}; \text{ síla } F_2 \text{ směřuje dolů.} \quad (4)$$

V rovnicích (3), (4) provedeme rozměrovou zkoušku; dosazením daných hodnot do rovnic (3) a (4) vypočteme

$$F_1 = 13,8 \text{ kp}; \quad F_2 = 19,0 \text{ kp}.$$

b) Do rovnic (3) a (4) dosadíme danou podmínku:

$$\frac{G}{n} = \frac{2 G a_1}{d + 2a_1}, \quad (5)$$

$$\frac{G}{n} = \frac{2 G a_2}{d - 2a_2}. \quad (6)$$

Z rovnic (5) a (6) vypočteme:

$$a_1 = \frac{d}{2} \frac{1}{n-1}, \quad (7)$$

$$a_2 = \frac{d}{2} \frac{1}{n+1}. \quad (8)$$

Dosadíme-li do rovnic (7) a (8) dané hodnoty, vypočteme:

$$a_1 = 1,25 \text{ m}$$

$$a_2 = 0,625 \text{ m}.$$

3. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Plechová válcová nádoba tíhy G o poloměru r plove na vodě ve svislé poloze, protože je naspodu zatížena kusem železa tíhy G_1 .

a) Vypočtete, jak hluboko se nádoba ponoří, je-li zatížena tak, že železo je buď položeno uvnitř na dně nádoby, nebo je zavěšeno pod dnem nádoby (tíhu a objem závěsu, na kterém je železo, nebudeme uvažovat).

b) Vypočtete rozdíl Δh hloubek ponoru v obou případech a vysvětlete tento jev. Vyjádřete Δh pomocí veličin vztahujících se k zatěžkávacímu železu.

Počítejte nejprve obecně a potom pro hodnoty:

$$G = 2,0 \text{ kp}, G_1 = 10 \text{ kp}, r = 1,0 \text{ dm}, \text{ měrná tíha vody } \gamma_0 = 1,0 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}, \text{ měrná tíha železa } \gamma_1 = 7,8 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}.$$

Řešení:

Užijeme Archimédova zákona.

a) 1. Necht' je železo na dně uvnitř nádoby, hloubku ponoru označme h_1 , pak v rovnováze platí podle Archimédova zákona

$$\pi r^2 h_1 \gamma_0 = G + G_1, \text{ odtud } h_1 = \frac{G + G_1}{\pi r^2 \gamma_0}. \quad (1)$$

Dosazením daných hodnot do rovnice (1) vypočteme

$$h_1 \doteq 3,8 \text{ dm.}$$

2. Necht' je železo zavěšeno pode dnem nádoby; hloubku ponoru označme h_2 . Pak platí

$$\pi r^2 h_2 \gamma_0 + \frac{G_1}{\gamma_1} \gamma_0 = G + G_1, \text{ odtud}$$

$$h_2 = \frac{G + G_1 \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right)}{\pi r^2 \gamma_0}. \quad (2)$$

Dosazením daných hodnot do (2) vypočteme

$$h_2 \doteq 3,4 \text{ dm.}$$

b) Z výsledků v případě a) vypočteme

$$h_1 - h_2 = \Delta h = 0,4 \text{ dm.} \quad (3)$$

Je-li železo v nádobě, vytlačuje vodu jen nádoba. Je-li však železo zavěšeno pode dnem nádoby, vytlačuje vodu i nádoba i železo; železo je přímo nadlehčováno Archimédovou silou. Proto se nádoba v prvním případě potopí hlouběji než v případě druhém.

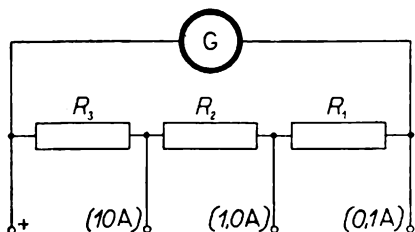
Δh ve vztahu (3) je výška válce, který má stejný poloměr jako uvažovaná válcová nádoba a jehož objem se rovná objemu železa. Můžeme tuto skutečnost také vyjádřit takto: Kdybychom vodu vytlačenou železem měli ve tvaru válce, jehož základna se rovná základně válcové

nádoby, pak Δh by byla výška tohoto válce. Skutečně po dosazení za Δh do vzorce pro objem válce dostáváme

$$\pi r^2 \Delta h = \frac{G_1}{\gamma_1}.$$

4. úloha (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Na obrázku 101 je naznačen galvanometr G , jehož vnitřní odpor je $R_g = 25 \Omega$; při největší výchylce ručičky prochází galvanometrem proud $I_g = 0,01 \text{ A}$.



Obr. 101

Galvanometr chceme použít jako ampérmetr se třemi rozsahy, a to do velikostí proudu $I_1 = 0,10 \text{ A}$, $I_2 = 1,0 \text{ A}$, $I_3 = 10,0 \text{ A}$. Měřený proud rozvětvíme tak, aby větvi s galvanometrem mohl procházet v každém případě nanejvýš proud I_g . Zapojení galvanometru ve všech případech ukazuje obr. 101.

Vypočítejte velikosti odporů R_1 , R_2 , R_3 . Odpory přírodních drátů zanedbáváme.

Řešení:

Při paralelním spojení odporů jsou velikosti proudů v jednotlivých větvích v obráceném poměru k velikostem těchto odporů.

Podle obrázku 101 vytváříme v jednotlivých případech spojení o dvou větvích. Větví, v níž je galvanometr, prochází proud I_g , proud procházející druhou větví označíme I_v . Musí platit:

$$I_g + I_v = I_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Užitím rovnice (1) vypočteme z daných hodnot, že:

a) v případě, že $I_1 = 0,10$ A je $I_v = 0,09$ A,

a tedy
$$\frac{I_v}{I_g} = 9, \quad I_v = 9 I_g;$$

b) v případě, že $I_2 = 1,0$ A je $I_v = 0,99$ A,

$$\frac{I_v}{I_g} = 99, \quad I_v = 99 I_g;$$

c) v případě, že $I_3 = 10$ A je $I_v = 9,99$ A,

$$\frac{I_v}{I_g} = 999, \quad I_v = 999 I_g.$$

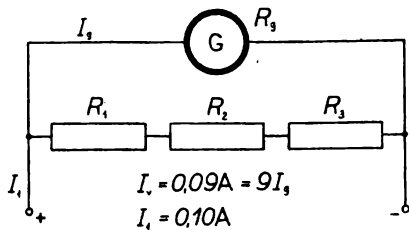
V obrázcích 102, 103 a 104 je pro každý případ naznačeno zapojení a jsou uvedeny údaje vystihující situaci, tj. proudy v obou větvích.

Pro poměry odporů v jednotlivých větvích pak lze psát rovnice

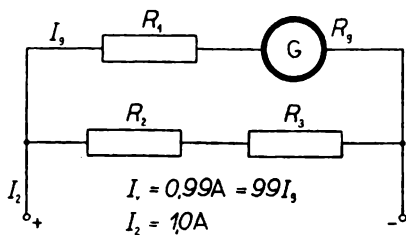
a) $(R_1 + R_2 + R_3) : R_g = I_g : I_v,$

čili

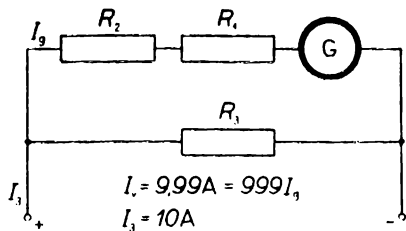
$$(R_1 + R_2 + R_3) : R_g = 1 : 9 ;$$



Obr. 102



Obr. 103



Obr. 104

$$\text{b) } (R_2 + R_3) : (R_1 + R_g) = 1 : 99 ;$$

$$\text{c) } R_3 : (R_1 + R_2 + R_g) = 1 : 999.$$

Úpravou těchto rovnic dostáváme pro neznámé odpory R_1, R_2, R_3 tyto tři rovnice

$$9 (R_1 + R_2 + R_3) = R_g, \quad (2)$$

$$99 (R_2 + R_3) = R_1 + R_g, \quad (3)$$

$$999 R_3 = R_1 + R_2 + R_g. \quad (4)$$

Dosazením za součet $R_2 + R_3$ z rovnice (3) do rovnice (2) vypočteme

$$R_1 = 2,5 \Omega .$$

Dosazením za součet $R_2 + R_1$ z rovnice (4) do rovnice (2), vypočteme

$$R_3 = 0,027 \Omega .$$

Z rovnice (2) po dosazení hodnot R_1 a R_3 vychází $R_2 = 0,25 \Omega$.

IV. ČÁST

ČTVRTÁ MEZINÁRODNÍ FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA

1. Průběh a výsledky soutěže

Organizátorem IV. mezinárodní fyzikální olympiády (IV. MFO) byl ve studijním roce 1969/70 Sovětský svaz. IV. MFO se konala ve dnech 5.–15. července 1970 v Moskvě.

Ministr středních škol SSSR pozval na IV. MFO kromě osmi států, které se zúčastnily II. MFO a III. MFO – Bulharska, Československa, Jugoslávie, Maďarska, NDR, Polska a Rumunska – podle oznámení předsedy na zahajovací schůzi mezinárodní komise (MK) – ještě Koreu, Kubu, Mongolsko, Vietnam, Dánsko, Norsko, Švédsko a Francii. Z těchto států se zajímala o účast na soutěži jen Francie; na soutěž však nepřijela. Zůstali tedy titíž účastníci jako na II. MFO a III. MFO.

Z každého státu bylo pozváno 6 soutěžících, jeden vedoucí delegace a jeden pedagogický instruktor. Vedoucím delegace ČSSR byl jmenován MŠ SSR předseda ÚV FO prof. dr. Rostislav Košťál, pedagogickým instruktorem 1. místopředseda ÚV FO doc. dr. Ivan Náter. Kromě toho byla umožněna i účast 2. místopředsedovi ÚV FO doc. dr. Jiřímu Beránkovi zásluhou finančního zabezpečení Vojenskou akademií Antonína Zápotockého v Brně a ministerstvem národní obrany.

Na schůzi ÚV FO bylo stanoveno, že účastníky IV. MFO bude prvých 6 vítězů 3. kola kat. A FO. Proto bylo jmenováno toto družstvo:

1. Černý Vladimír, 3. r. SVŠ Bratislava, Novohradská,
2. Hanzal Vojtěch, 3. r. SVVŠ Praha 2, W. Piecka,
3. Kučera Jaroslav, 3. r. SVVŠ Brno, Křenová,
4. Novotný Václav, 4. r. SPŠ JT Praha 4, Svatoslavova,
5. Handl Miloslav, 3. r. SVVŠ Praha 2, W. Piecka,
6. Slavík Jan, 3. r. SVVŠ Praha 2, W. Piecka
a náhradníci:
7. Kugler Andrej, 2. r. SVVŠ Praha 2, W. Piecka,
8. Juza Karel, 3. r. SVVŠ Praha 2, W. Piecka,

9. Pudlák Pavel, 3. r. SVVŠ Praha 7, Nad štolou,
10. Dvořák Leoš, 3. r. SVVŠ Roudnice n. L.,
11. Stacho Milan, 3. r. SVŠ Vrútky,
12. Sistr Oldřich, 3. r. SVVŠ Hradec Králové.

Všichni splňovali podmínky stanovené statutem a směrnici.

Všichni účastníci i jejich náhradníci byli pozváni na přípravné soustředění, které se konalo ve dnech 15. 6. – 22. 6. 1970 ve Vyškově. Z pozvaných se odhlásil Pavel Pudlák, poněvadž se zúčastnil soustředění pro mezinárodní matematickou olympiádu, takže účastníků soustředění bylo 11. Přednášel odb. as. Alois Kleveta partie z elektřiny a optiky, odb. as. Stanislav Zhejbal partie z mechaniky a termiky. Oba přednášející byli z 1. fakulty VAAZ ve Vyškově. Studenti měli denně 4 hod. + 3 hod. přednášek, které byly vedeny formou seminárních cvičení; výuka byla i v sobotu a neděli. Celkový počet absolvovaných hodin výuky byl 46. Přednášející označili souhlasně s výsledky 3. kola kat. A uvedených 6 studentů za nejvhodnější reprezentanty pro IV. MFO. Pedagogickým vedoucím soustředění byl odb. as. Alois Kleveta.

Československá delegace odjízďela 3. 7. 1970 z Prahy a přijela do Moskvy 5. 7. 1970 v 16 hodin. Soutěžící byli ubytováni podobně jako ostatní soutěžící ve škole internátu Akademie pedagogických věd v Chávské ulici, kde bylo také zajištěno stravování. Vedoucí delegaci byli ubytováni v hotelu Lenigradskaja gostinica, vzdáleném asi 20 min. jízdy autobusem. Do Chávské ulice byli vedoucí delegaci převáženi autobusem.

Vedoucí jednotlivých delegací na 4. MFO:

Bulharsko (BLR): dr. Petko Rusev Kamadžiev, CSc.,
 Československo (ČSSR): prof. dr. Rostislav Košťál,
 Jugoslávie (SFRJ): dr. Božidar Milić,
 Maďarsko (MLR): prof. Rezső Kunfalvi, redaktor,
 Německá demokratická republika (NDR): doc. dr. Joachim Wendt,
 ředitel pedagogického institutu,
 Polsko (PLR): Mgr. Waldemar Gorzkowski, st. asistent,
 Rumunsko (RSR): prof. dr. Nicolas Stănescu,
 Sovětský svaz (SSSR): prof. Valentina Ivanovna Iveranova.
 Pedagogičtí instruktoři:
 BLR: Nicola Milanov Velčev, inspektor pro fyziku,
 ČSSR: doc. dr. Ivan Náter,
 SFRJ: Milan Raspopovič, profesor gymnasia,
 MLR: Géza Tichy, asistent university,
 NDR: Martin Griwatz, hlavní referent ministerstva pro vzdělání,

PLR: dr. Andrzej Szymacha, adjunkt Institutu,
RSR: Lidia Panaiot, profesorka,
SSSR: Galina Sergejevna Tarasjuk.

Každá delegace dostala tlumočníka a pedagogického referenta. Při řízení pomáhalo vedení školy (asi 5 členů), dále několik příslušníků Akademie pedagogických věd ministerstva středních škol a administrativní personál. Pedagogický referent a tlumočník doprovázeli své svěřené družstvo. Kromě toho byly ustanoveny tříčlenné komise na opravu jednotlivých příkladů.

Prvé zasedání mezinárodní komise bylo 6. 7. ve 20 hodin ve škole – internátu v Chávské ulici. Soutěž se řídila statutem a směrnicemi, které byly projednány a schváleny na zasedání mezinárodní komise ve dnech 16. a 17. ledna 1969 v Brně, se změnami, které si organizátor vyžádal na tomto zahajovacím zasedání podle předloženého nového statutu a směrnic. Změny byly komisí přijaty jen pro IV. MFO. Z navržených změn bylo schváleno, že organizátor – tj. SSSR – bude mít vedle odpovědného vedoucího a pedagogického instruktora předsedu, který se stává členem mezinárodní komise a kterým byl ministerstvem středních škol SSSR jmenován akademik V. Zubov, vicepresident Akademie pedagogických věd SSSR. Vedle toho byl ustanoven organizační výbor v čele s prof. dr. Valentinem Alexandrovičem Fabrikantem.

Organizátor dále oznámil, že na 4 teoretické úlohy je vyměřena doba 5 hodin a že každá úloha se boduje od 0 do 10 bodů. U laboratorní úlohy se hodnotí teoretické zpracování úlohy a experimentální část, každá maximálně 10 body. Na vypracování laboratorní úlohy byla dána doba 5 hodin. Proto byl nejvyšší počet dosažitelných bodů 60. Stanovení cen a pochvalných uznání bylo ponecháno podle směrnic.

Olympiádu zahájil akademik Zubov dne 7. 7. 1970 v 16 hodin v sále školy – internátu v Chávské ul. Za předsednickým stolem zasedl předseda MK, členové organizačního komitétu a předsedové jednotlivých delegací. Po uvítacím projevu akademika Zubova promluvil za delegace vedoucí bulharské delegace dr. Petko Rusev Kamadžiev, CSC.

Po ukončení slavnostního zahájení byli členové mezinárodní komise převezeni do Akademie pedagogických věd a byly jim předloženy texty 4 úloh k překladu do příslušného jazyka. Přitom bylo zabezpečeno, že nikdo ze žáků nesměl z internátu odejít a nikdo z vedoucích nemohl být do internátu vpuštěn. Po vykonané práci byla slavnostní večeře pro vedoucí delegací a pedagogické instruktory v hotelu Leningradskaja gostinica.

Laboratorní práce se překládala v Akademii pedagogických nauk až 9. července 2 hodiny před zahájením laboratorní úlohy v Chávské ulici.

Teoretické úlohy se pracovaly v sále školy — internátu, pro experimentální úlohy bylo upraveno několik tříd rovněž v Chávské ulici.

Po odevzdání teoretických úloh se ihned začalo s opravou každého příkladu v tříčlenných komisích a večer byly členům MK na zasedání hlášeny výsledky.

Po odevzdání laboratorní úlohy byla provedena opět korektura a večer byly ohlášeny konečné výsledky, které byly po diskusi a opravách schváleny.

Výsledky byly tyto (jména jsou převedena z azbuky do latinky):

	Jméno	Stát	Příklad						Celkem
			1	2	3	4	5a	5b	
1.	Vološin Michal	SSSR	10	10	10	9	8	10	57
2. - 3.	Gorbačevskij Sergěj	SSSR	10	10	9	10	7	9	55
	Petrov Boris	SSSR	10	9	9	10	9	8	55
4.	Zjulkowski Marek	PLR	9	10	10	4	10	7	50
5.	Fischer Manfred	NDR	10	10	-	9	10	10	49
6. - 7.	Djorđević Antonije	SFRJ	10	10	-	9	9	9	47
	Ljuksjutov Igor	SSSR	10	-	10	8	10	9	47
8. - 9.	Keresturi Andrasz	MLR	10	10	5	7	8	6	46
	Oficialski Jan	PLR	10	9	7	9	5	6	46
10. - 11.	Bulyženkov Igor	SSSR	7	4	10	5	10	9	45
	Ormoš Pal	MLR	10	9	-	7	10	9	45
12.	Handl Miroslav	ČSSR	10	10	-	8	8	8	44
13. - 14.	Nagy Andras	MLR	10	10	-	5	10	8	43
	Černý Vladimír	ČSSR	8	9	-	9	8	9	43
15. - 18.	Hanzal Vojtěch	ČSSR	6	10	-	9	9	8	42
	Kravcov Vladimír	SSSR	-	10	9	9	8	6	42
	Kučera Jaroslav	ČSSR	8	10	-	10	5	9	42
	Novotný Václav	ČSSR	7	9	-	8	10	8	42
19. - 20.	Felie Drahoš	RSR	10	-	3	10	10	7	40
	Curcudeu Florin	RSR	9	-	10	7	8	6	40
21.	Sima Oktavian	RSR	10	-	5	9	10	5	39
22.	Čeněk Antoni	PLR	9	8	-	5	9	7	38
23. - 25.	Sailer Kornel	MLR	10	5	-	8	6	6	35
	Apostol Jon	RSR	10	-	10	-	8	7	35
	Rydel Arkadiuš	PLR	10	9	-	4	7	5	35
26.	Chyrčakovski Stanislav	PLR	10	6	-	6	7	5	34
27. - 28.	Krcikalla Manfred	NDR	3	10	-	9	7	4	33
	Majeovski Vladislav	PLR	8	-	2	8	8	7	33
29.	Načev Ivo	BLR	5	-	-	8	10	9	32
30. - 31.	Zavalevski Alexandr	SFRJ	9	-	-	6	8	8	31
	Nikolov Ognjan	BLR	5	-	6	2	9	9	31

32. - 34.	Džuruč Oliver	SFRJ	-	7	-	7	9	7	30
	Dolenc Branko	SFRJ	-	-	9	9	7	5	
35. - 36.	Josch Michael	NDR	7	9	-	2	7	5	30
	Chorvati Peter	MLR	7	-	-	10	6	6	29
37.	Doru Delion	RSR	5	-	-	8	8	8	29
	Cončev Rumen	BLR	8	-	-	7	8	5	28
38.	Angelov Vladimír	BLR	7	-	-	2	9	9	27
39.	Dimesi Ferenc	MLR	10	6	-	-	6	4	26
40. - 41.	Slavik Jan	ČSSR	-	10	-	8	4	3	25
	Bavčar Miran	SFRJ	8	-	-	4	8	5	25
42.	Kolev Plamen	BLR	5	-	-	-	10	9	24
43.	Belič Milivoj	SFRJ	-	-	-	6	6	7	19
44. - 45.	Hančev Cvetan	BLR	-	-	-	-	8	8	16
	Reimannová Inge	NDR	3	-	-	-	9	4	16
46.	Ien Ludwig	NDR	-	10	-	-	4	1	15
47.	Werner Matiasch	NDR	-	-	-	2	7	5	14
48.	Manoliu Andrej	RSR	-	-	-	-	7	3	10

Podle směrnic měli obdržet prvou cenu řešitelé, kteří získali víc než 54 bodů, 2. cenu řešitelé se 47–54 body, 3. cenu řešitelé se 40–46 body a pochvalné uznání řešitelé s 31–39 body. Po dosažených výsledcích schválila MK návrh předsedy, aby se hranice posunuly tak, aby bylo více cen. Hranice upravil pořadatel takto:

	původně	pořadí řešitele	počet řešitelů	upraveno	pořadí řešitelů	počet řešitelů
I. cena	60–55	1–3	3	60–50	1–4	4
II. cena	54–47	4–7	4	49–45	5–11	7
III. cena	46–40	8–20	13	44–39	12–21	10
pochv. uznání	39–31	21–31	11	38–30	22–34	13

Podíl účastníků jednotlivých států na cenách a uznáních:

	původně	ubyl přefazením výš	přibyl
I. cena	3 SSSR		1 PLR
II. cena	1 PLR 1 NDR	1 PLR	2 MLR 1 PLR
III. cena	1 SFRJ 1 SSSR		1 SSSR
	3 MLR 1 PLR	2 MLR 1 PLR	1 RSR
pochv. uznání	2 SSSR 5 ČSSR	1 SSSR	
	2 RSR		
	4 PLR 1 MLR	1 RSR	2 SFRJ 1 NDR
	2 RSR 1 SFRJ		
	2 BLR 1 NDR		

Dostal tedy:

1. cenu: Vološin (SSSR), Gorbačevskij (SSSR), Petrov (SSSR), Zjulkowski (PLR)
 2. cenu: Fischer (NDR), Djordević (SFRJ), Ljuksjutov (SSSR), Keresturi (MLR), Oficialski (PLR), Bulyženkov (SSSR), Ormoš (MLR)
 3. cenu: Handl (ČSSR), Nagy (MLR), Černý (ČSSR), Hanzal (ČSSR), Kravcov (SSSR), Kučera (ČSSR), Novotný (ČSSR), Felie (RSR), Curcudeu (RSR), Sima (RSR)
- pochvalné uznání: Čeněk (PLR), Sailer (MLR), Apostol (RSR), Rydel (PLR), Chyrčakovski (PLR), Krcikalla (NDR), Majevski (PLR), Načev (BLR), Zavalevski (SFRJ), Nikolov (BLR), Džuruč (SFRJ), Dolenc (SFRJ), Josch (NDR).

Vedle toho byla udělena speciální cena za experimentální úlohu M. Fischerovi z NDR a jediné soutěžící dívce Inge Reimannové z NDR cena za odvalu.

Neúspěšných řešitelů bylo $17 - 3 = 14$, a to 1 z ČSSR, 2 z MLR, 2 z RSR, 2 z SFRJ, 3 z NDR a 4 z BLR.

Pořadí jednotlivých družstev podle dosažených bodů:

1. SSSR	301 bodů,
2. ČSSR	238 bodů,
3. PLR	236 bodů,
4. MLR	224 bodů,
5. RSR	193 bodů,
6. SFRJ	182 bodů,
7. BLR	158 bodů,
8. NDR	157 bodů.

Naše družstvo bylo úplně vyrovnané. Pět úspěšných řešitelů získalo po 42–44 bodech, jen jeden řešitel 25 bodů. Souviselo to s tím, že tento řešitel, i když onemocněl, zúčastnil se soutěže; získal pro nás dobrých 25 bodů.

Naše reprezentanty musíme hodnotit velmi příznivě, a to nejen za velký úspěch v soutěži, ale i za vzorné vystupování.

Podíváme-li se na výsledky jednotlivých úloh, upoutají pozornost především výsledky 3. příkladu. Z 60 možných bodů nezískala 2 družstva žádný bod (ČSSR a NDR), jedno družstvo 5 bodů (MLR), jedno družstvo 6 bodů (BLR) a jedno družstvo 8 bodů (SFRJ). Družstvo PLR získalo 20 bodů, družstvo RSR 24 bodů a družstvo SSSR 47 bodů. Příklad nebyl vhodný pro soutěž středoškolských studentů.

Dne 14. července bylo ukončení 4. MFO v sále školy — internátu v Chávké ulici. Akademik Zubov odevzdal úspěšným řešitelům diplomy a ceny a ostatním řešitelům potvrzení o účasti. Pak předal akademik Zubov dary vedoucím delegací a pedagogickým instruktorům. Jménem všech delegací promluvil vedoucí delegace SFRJ dr. Božidar Milić a za soutěžící M. Fischer z NDR.

Nato následovala slavnostní večeře v jídelně školy — internátu v Chávké ulici.

Po večeri sešla se naposled MK, aby projednala několik otázek, mezi nimi otázku organizátora příští MFO.

Volný čas byl vyplněn exkurzemi a kulturními podniky.

V pondělí 6. 7. dopoledne byla prohlídka Moskvy — delegace měly vždy k dispozici čtyři autobusy, odpoledne prohlídka Lomonosovovy university.

V úterý 7. 7. byla prohlídka televizní věže v Ostankinu a návštěva Leninova mauzolea.

V pátek 10. 7. byl uspořádán celodenní zájezd do měst Suzdalu a Vladimira.

V sobotu 11. 7. byl uspořádán zájezd do města Klinu spojený s prohlídkou muzea Čajkovského a večer navštívili účastníci MFO cirkusové představení.

V neděli 12. 7. dopoledne navštívily delegace Leninovo muzeum v Gorki-Leninskije a odpoledne byla plavba raketou po řece Moskvě a pak prohlídka zábavního parku.

V pondělí 13. 7. byla dopoledne exkurze na výstavu úspěchů sovětského hospodářství a odpoledne prohlídka Kremle.

V úterý 14. 7. byla dopoledne prohlídka Tretjakovské galerie a odpoledne po slavnostním ukončení olympiády pak společná večeře.

Ve středu 15. července delegace odjížděly. Naše delegace odletěla večer do Prahy a mimopražští účastníci opouštěli následující den Prahu.

Pro srovnání uvádíme výsledky všech dosavadních MFO:

		1 3 účastníci max. 120 bodů		2 3 účastníci max. 120 bodů		3 5 účastníků max. 240 bodů		4 6 účastníků max. 360 bodů	
1.	MLR	107	MLR	93	ČSSR	222	SSSR	301	
2.	PLR	104	ČSSR	85	MLR	214	ČSSR	238	
3.	ČSSR	103	PLR	84	SSSR	207	PLR	236	
4.	BLR	68	BLR	82	NDR	194	MLR	224	
5.	RSR	43	SSSR	79	SFRJ	193	RSR	193	
			SFRJ	74	BLR	177	SFRJ	182	
			NDR	71	PLR	162	BLR	158	
			RSR	62	RSR	128	NDR	157	

Je vidět, že ČSSR patří ke státům, které se v této soutěži nejlépe uplatňují. Stálé úspěchy ČSSR ve FO staly se příčinou hlubšího zájmu ostatních delegací o organizaci FO u nás.

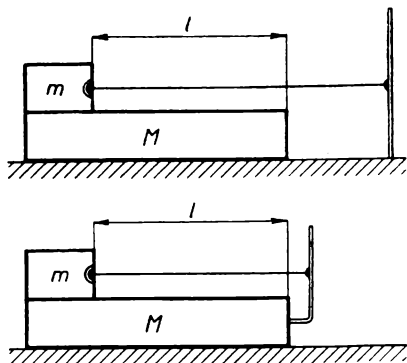
2. Soutěžní úlohy

1. úloha

Text:

Na hladké vodorovné ploše se může pohybovat bez tření dostatečně dlouhý kvádr o hmotnosti $M = 1,00$ kg. Na horní vodorovné ploše kvádru se může pohybovat se třením vozíček, na kterém je upevněn motor. Přední hrana vozíčku se nachází v okamžiku uvolnění vozíčku ve vzdálenosti $l = 50$ cm od přední hrany kvádru. Součinitel vlečného tření $f = 0,020$, hmotnost vozíčku s motorem je $m = 100$ g. Motor na vozíčku navíjí na hřídel vlákno konstantní rychlostí $v_0 = 10,0$ cm s⁻¹. V prvním případě je druhý konec vlákna připevněn ke kolíku, který je

v dostatečně velké vzdálenosti připevněn k podložce. V druhém případě je druhý konec vlákna připevněn ke kolíku, který je pevně spojen s kvádrem o hmotnosti M (obr. 105).



Obr. 105

Za předpokladu, že kvádr o hmotnosti M je v klidu, uvede se vozíček do pohybu rychlostí v_0 a potom se uvolní kvádr.

Určete v obou případech druh pohybu a rychlost vozíčku a kvádru po uvolnění kvádru.

Určete v obou případech dobu, za kterou vozíček dosáhne předního okraje kvádru.

(Vzhledem k zadanému textu jsou zde provedeny tyto úpravy: $M = 1,00$ kg místo $M = 1$ kg, $l = 50$ cm místo $L = 50$ cm, $f = 0,020$ místo $K = 0,02$, $v_0 = 10,0$ cm s⁻¹ místo $V_0 = 10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.)

Řešení:

a) *Prvý případ*

Na kvádr působí vlivem tření síla

$$F = f m g .$$

Vlivem této síly se bude pohybovat kvádr vzhledem k podložce rovnoměrně zrychleně se zrychlením

$$a = \frac{F}{M} = \frac{f m g}{M}$$

a s nulovou počáteční rychlostí. Po době t nabývá kvádr rychlosti

$$v_1 = \frac{f m g}{M} t .$$

Vozíček se pohybuje vzhledem k podložce rychlostí v_0 , s jakou se navíjí vlákno. Je tedy rychlost pohybu vozíčku vzhledem ke kvádru v rovna rozdílu obou rychlostí vzhledem k podložce, tedy

$$v = v_0 - v_1$$

čili

$$v = v_0 - \frac{f m g}{M} t .$$

Pohybuje se tedy vozíček vzhledem ke kvádru rovnoměrně zpomaleně a v okamžiku

$$t_1 = \frac{M v_0}{f m g}$$

přestane se vozíček vzhledem ke kvádru pohybovat.

Pro dráhu relativního pohybu vozíčku vzhledem ke kvádru platí

$$s = v_0 t - \frac{f m g}{2 M} t^2 .$$

Urazí tedy voziček po kvádru až do relativního klidu vozičku vzhledem ke kvádru dráhu

$$s_1 = \frac{M v_0^2}{f m g} - \frac{f m g}{2 M} \left(\frac{M v_0}{f m g} \right)^2 = \frac{M v_0^2}{2 f m g}.$$

Dosadíme-li $M = 1,00$ kg, $m = 0,100$ kg, $v_0 = 0,100$ m s⁻¹, $f = 0,020$, $g = 10,0$ m s⁻², vychází pro dráhu s_1

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1,00 \cdot 0,100^2}{2 \cdot 0,020 \cdot 0,100 \cdot 10,0} \text{ m} = \frac{0,100}{0,040 \cdot 10,0} \text{ m} = \\ &= \frac{100}{400} \text{ m} = 0,25 \text{ m}. \end{aligned}$$

Poněvadž přední okraj vozičku je vzdálen od předního okraje kvádru o $l = 0,50$ m, nemůže voziček nikdy dosáhnout předního okraje kvádru.

b) Druhý případ

Poněvadž vlákno vozičku je připevněno na kvádru, jde o pohyb soustavy bez působení vnějších sil; proto musí platit princip zachování hybností. Jestliže původní rychlost vozičku vzhledem k podložce, a tedy i vzhledem ke klidnému kvádru, je v_0 a označíme-li po uvolnění kvádru rychlost vozičku vzhledem k podložce v_1 a rychlost kvádru vzhledem k podložce v_2 , musí podle principu zachování hybností platit

$$m v_0 = m v_1 + M v_2. \quad (1)$$

Poněvadž se voziček pohybuje po kvádru rovnoměrně rychlostí v_0 , musí platit

$$v_0 = v_1 - v_2. \quad (2)$$

Vyloučíme-li z rovnice (1) rychlost v_2 užitím vztahu (2), dostaneme

$$v_2 = v_1 - v_0,$$

$$m v_0 = m v_1 + M v_1 - M v_0,$$

a tedy

$$v_0(m + M) = (m + M)v_1$$

čili

$$v_1 = v_0,$$

a pak z (2) plyne

$$v_2 = 0.$$

Vychází tedy, že se kvádr po uvolnění nebude pohybovat a voziček se bude pohybovat rovnoměrně rychlostí v_0 jako před uvolněním kvádrů.

Voziček se tedy dostane na konec kvádrů za dobu

$$t = \frac{l}{v_0}.$$

Dosadíme-li dané hodnoty, vychází

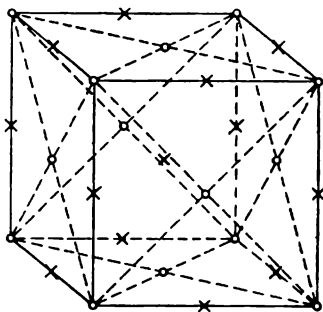
$$t = \frac{0,50}{0,10} \text{ s} = 5,0 \text{ s};$$

tedy voziček se dostane na konec kvádrů za dobu $t = 5,0 \text{ s}$.

2. úloha

Text:

Elementární buňka krystalové mřížky chloridu sodného (NaCl) má tvar krychle o hraně $a = 5,60 \text{ \AA}$. Na obr. 106 znázorňujícím elementární buňku jsou atomy sodíku



Obr. 106

vyznačeny kolečky a atomy chlóru křížky. Celá krystalová mřížka NaCl je periodicky složena z těchto elementárních buněk. Poměrná atomová hmotnost sodíku je 23,0 a chlóru 35,5. Hustota chloridu sodného je $\rho = 2,22 \text{ g cm}^{-3}$. Určete hmotnost atomu vodíku (v gramech) a vysvětlete způsob řešení.

(V zadání je užíváno slov atomová váha. Poněvadž vzorové řešení počítá m_{H} na tři platná místa, je uvedeno zde $a = 5,60 \text{ \AA}$ místo $a = 5,6 \text{ \AA}$ — mělo by být $5,63 \text{ \AA}$ — a pro sodík $A = 23,0$ místo $A = 23$.)

Řešení:

Hustota je rovna podílu hmotnosti elementární buňky a jejího objemu a^3 .

K výpočtu hmotnosti elementární buňky musíme uvážit:

Atom ve vrcholu krychle náleží 8 elementárním buňkám; proto se každý tento atom uplatňuje jen $\frac{1}{8}$ své hmotnosti.

Atom na hraně krychle náleží 4 elementárním buňkám; proto se každý tento atom uplatňuje $\frac{1}{4}$ své hmotnosti.

Atom ve středu stěny náleží 2 elementárním buňkám; proto se každý tento atom uplatňuje jen $\frac{1}{2}$ své hmotnosti.

Atom ve středu krychle náleží jen jedné elementární buňce; proto se uplatňuje celou svou hmotností.

Elementární buňka má 8 atomů sodíku ve vrcholech, které se uplatňují jako jeden atom sodíku, 12 atomů chlóru na hranách, které se uplatňují jako 3 atomy chlóru, 6 ato-

mů sodíku ve středu stěny, které se uplatňují jako 3 atomy sodíku a 1 atom chlóru ve středu krychle, který se uplatňuje plně jako 1 atom chlóru. Má tedy elementární buňka 4 atomy sodíku a 4 atomy chlóru. Je tedy poměrná hmotnost elementární buňky

$$4(A_{\text{Na}} + A_{\text{Cl}}).$$

Hmotnost elementární buňky dostaneme vynásobením atomovou hmotnostní konstantou $\frac{m(^{12}\text{C})}{12}$. Hmotnost elementární buňky je tedy

$$m(\text{NaCl}) = 4(A_{\text{Na}} + A_{\text{Cl}}) \frac{m(^{12}\text{C})}{12}. \quad (1)$$

Označíme-li poměrnou atomovou hmotnost vodíku $A_{\text{H}} = 1,008$, platí pro ni

$$A_{\text{H}} = \frac{m_{\text{H}}}{\frac{m(^{12}\text{C})}{12}} = 1,008,$$

kde m_{H} je hmotnost atomu vodíku. Vychází tedy pro atomovou hmotnostní konstantu

$$\frac{m(^{12}\text{C})}{12} = \frac{m_{\text{H}}}{1,008}$$

a dosazením do (1) dostáváme

$$m(\text{NaCl}) = \frac{4(A_{\text{Na}} + A_{\text{Cl}}) m_{\text{H}}}{1,008}.$$

Pro hustotu NaCl pak vychází

$$\rho = \frac{4(A_{\text{Na}} + A_{\text{Cl}}) m_{\text{H}}}{1,008 a^3},$$

a odtud

$$m_{\text{H}} = \frac{1,008 \rho a^3}{4 (A_{\text{Na}} + A_{\text{Cl}})}.$$

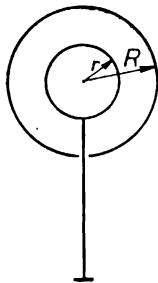
Dosazením daných hodnot ($a = 5,60 \text{ \AA} = 5,60 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$) vychází

$$\begin{aligned} m_{\text{H}} &= \frac{1,008 \cdot 2,22 \cdot 5,60^3 \cdot 10^{-24}}{4 (23,0 + 35,5)} \text{ g} = \\ &= \frac{1,008 \cdot 2,22 \cdot 5,60^3 \cdot 10^{-24}}{4 \cdot 58,5} \text{ g} = 1,68 \cdot 10^{-24} \text{ g}. \end{aligned}$$

3. úloha

Text:

Mějme tenkostěnnou kovovou dutou kouli o poloměru $R = 20,0 \text{ cm}$. Uvnitř je soustředná kovová koule o poloměru $r = 10,0 \text{ cm}$. Tato koule je spojena se zemí velmi dlouhým vodičem procházejícím otvorem v duté kouli (obr. 107). Na vnější kouli je náboj $Q = 1,00 \cdot 10^{-8} \text{ C}$.



Obr. 107

Určete potenciál vnější koule.

Určete kapacitu této soustavy vodičů.

Uveďte náhradní elektrické schéma pro tuto soustavu.

(Vzhledem k zadanému textu jsou zde provedeny tyto úpravy: $R = 20,0 \text{ cm}$ místo $R = 20 \text{ cm}$, $r = 10,0 \text{ cm}$ místo $r = 10 \text{ cm}$, $Q = 1,00 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ místo $Q = 0,01 \text{ mikrocoulomb}$.)

Řešení:

Náboje na koulích

Náboj Q dodaný duté kouli se rozdělí na její vnější plochu

$$Q_e = Q - q$$

a na její vnitřní plochu

$$Q_i = q,$$

přičemž množství q je zatím neznámé. Tento náboj Q_i indukuje na vnitřní kouli náboj stejně velký opačného znaménka

$$Q_2 = -q$$

a vzhledem k tomu, že koule je uzemněna, odvede se souhlasný náboj $+q$ do země a není třeba s ním počítat, poněvadž je uvedeno, že koule je spojena velmi dlouhým vodičem se zemí.

Potenciál pole a potenciál vnější koule

Potenciál pole můžeme počítat tak, jako by náboje byly soustředěny ve středu koulí.

Pro bod ve vzdálenosti $x \geq R$ od středu koulí vychází

$$V_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q - q}{x} + \frac{q}{x} - \frac{q}{x} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q - q}{x},$$

kde $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi \{c\}^2} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ a $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Proto na vnější kouli ($x = R$) je potenciál

$$V_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q - q}{R}. \quad (1)$$

Pro bod ve vzdálenosti x od středu koulí, přičemž $R \geq x \geq r$, je od vnější plochy vnější koule potenciál týž jako na vnější kouli a k tomu přistupuje potenciál od náboje na vnitřní ploše vnější koule $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$ a potenciál od náboje na vnitřní kouli $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x}$; je tedy

$$V_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q - q}{R} + \frac{q}{R} - \frac{q}{x} \right).$$

Pro potenciál vnější koule ($x = R$) vychází pak

$$V_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q - q}{R}$$

(souhlasně jako dřív) a pro potenciál vnitřní koule ($x = r$) vychází

$$V_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q - q}{R} + \frac{q}{R} - \frac{q}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R} - \frac{q}{r} \right).$$

Poněvadž tato koule je uzemněna, musí být tento potenciál $V_r = 0$, a proto musí

$$\frac{Q}{R} - \frac{q}{r} = 0$$

a z toho

$$q = Q \frac{r}{R}. \quad (2)$$

Dosadíme-li vztah (2) do vztahu (1), dostáváme pro potenciál vnější koule

$$V_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R} - \frac{Q r}{R^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R - r}{R^2} Q. \quad (3)$$

Kapacita této soustavy vodičů

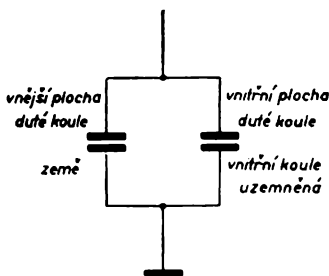
Jde zde o vzájemnou kapacitu dvou vodičů, která je rovna podílu náboje, který přejde při vodivém spojení z jednoho vodiče na druhý, a rozdílu jejich původních potenciálů.

Poněvadž vnitřní koule je spojena se zemí, musí na ni přejít celý náboj vnější koule, tj. $Q - q + q = Q$, a tedy užitím (3) a $V_r = 0$ dostáváme

$$C = \frac{Q}{V_R - V_r} = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{R - r} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R} - \frac{r}{R^2}}. \quad (4)$$

Náhradní schéma

Z výpočtu kapacity je vidět, že jde o dva paralelně spojené kondenzátory, a to o kulový kondenzátor, jehož polepy tvoří uzemněná vnitřní koule a vnitřní plocha duté koule, a druhý kondenzátor, jehož polepy tvoří vnější plocha duté koule a země. Ekvivalentní schéma udává obr. 108.



Obr. 108

Číselné výsledky

Dosadíme-li dané hodnoty, dostáváme užitím (2) pro náboj q

$$q = Q \frac{r}{R} = 1,00 \cdot 10^{-8} \frac{0,100}{0,200} \text{ C} = 0,50 \cdot 10^{-8} \text{ C},$$

užitím (3) pro potenciál vnější koule

$$V_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R-r}{R^2} Q = \frac{9,00 \cdot 10^{16}}{10^7} \frac{0,200 - 0,100}{0,0400} 1,00 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{F}} \frac{\text{m}}{\text{m}^2} \text{C} = \frac{0,900 \cdot 10}{0,0400} \text{V} = 225 \text{V}$$

a užitím (4) pro kapacitu

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{R-r} = \frac{10^7}{9,00 \cdot 10^{16}} \cdot \frac{0,0400}{0,10} \text{F} = \frac{0,0400}{0,900 \cdot 10^9} \text{F} = \frac{4}{9} \cdot 10^{-10} \text{F} = 0,444 \cdot 10^{-10} \text{F}.$$

V soustavě elektrostatické vychází $C = 9 \cdot 10^{11} \cdot \frac{4}{9} 10^{-10} \text{cm} = 40 \text{cm}.$

4. úloha

Text:

V zrcadlovém dalekohledu je použito duté zrcadlo o poloměru křivosti 2,00 m. V ohnisku zrcadla je umístěn přijímač záření ve tvaru kruhové desky, jejíž rovina je kolmá k optické ose dalekohledu.

Jaký rozměr musí mít přijímač, aby zachytil veškerý tok záření, který je odražen zrcadlem, jestliže průměr zrcadla je 50 cm?

Kolikrát se zmenší tok záření zachycený přijímačem, jestliže se rozměry přijímače zmenší na jednu osminu?

Poznámka: Při výpočtu je možno pro malé hodnoty x použít přibližného vztahu

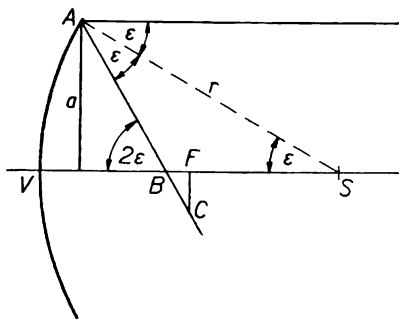
$$\sqrt{1 - x^2} \doteq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

K ohybu světla se nepřihlíží.

(Vzhledem k zadanému textu byla provedena tato úprava: poloměr křivosti 2,00 m místo 2 m.)

Řešení:

Při odvození zrcadlové rovnice se omezujeme na nulové paprsky, tj. na tzv. Gaussův prostor. Neomezíme-li se na tento prostor, pak systém paprsků rovnoběžných s optickou osou neodráží se od zrcadla do jednoho bodu. Pro zjištění průsečíku jednotlivých odražených paprsků s optickou osou a průsečíku jednotlivých odražených paprsků s rovinou kolmou k optické ose v ohnisku použijeme zákona odrazu.



Obr. 109

Označme střed křivosti zrcadla S a vrchol zrcadla V (obr. 109). Zvolme paprsek rovnoběžný s optickou osou, který dopadá na zrcadlo v bodě A na okraji zrcadla pod úhlem ε . Tento paprsek se odráží pod úhlem ε a protíná

optickou osu v bodě B a rovinu jdoucí ohniskem kolmo na optickou osu v bodě C . Označme průměr zrcadla $2a = 0,500$ m, poloměr křivosti zrcadla r . Pak ohnisková vzdálenost $f = \frac{r}{2} = VF = FS$. Označme dále $FC = x$.

a) Poněvadž úhel \widehat{BSA} je rovněž ε , je trojúhelník ABS rovnoramenný a

$$BS = \frac{r}{2 \cos \varepsilon};$$

pak

$$BF = \frac{r}{2} \left(\frac{1}{\cos \varepsilon} - 1 \right),$$

$$\widehat{CBF} = \widehat{VBA} = 2\varepsilon$$

a

$$\begin{aligned} x = FC &= BF \operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{r}{2} \left(\frac{1}{\cos \varepsilon} - 1 \right) \operatorname{tg} 2\varepsilon = \\ &= \frac{r}{2} \frac{1 - \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} \frac{2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon}. \end{aligned}$$

Poněvadž $\sin \varepsilon = \frac{a}{r}$, je

$$\begin{aligned} x &= r \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}} \right) \frac{a}{r \left(1 - 2 \frac{a^2}{r^2} \right)} = \\ &= a \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}} \right) \frac{1}{1 - \frac{2a^2}{r^2}} \end{aligned}$$

a pro $a \ll r$, tj. pro $\frac{a}{r} \ll 1$,

$$x \doteq a \left(1 - 1 + \frac{a^2}{2r^2} \right) = \frac{a^3}{2r^2}.$$

Must mít tedy přijímač poloměr

$$x = \frac{a^3}{2r^2}. \quad (1)$$

Pro dané hodnoty vychází

$$x = \frac{25^3}{2 \cdot 200^2} \text{ cm} = \frac{25}{2 \cdot 64,0} \text{ cm} \doteq 1,96 \text{ mm} \doteq 2,0 \text{ mm}.$$

b) Jestliže se zmenší rozměry přijímače na $\frac{1}{n}$, pak se zachytí tok ze zrcadla o poloměru a_1 , pro který podle (1) platí

$$a_1^3 = 2r^2 \frac{x}{n},$$

tedy

$$a_1 = \sqrt[3]{2r^2 \frac{x}{n}},$$

a tedy pro $n = 8$ dostáváme

$$a_1 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2r^2 x} = \frac{a}{2}$$

čili zachytí se světelný tok ze zrcadla o poloměru $\frac{a}{2}$.

Protože tok jdoucí kruhovou plochou je úměrný velikosti plochy, tedy druhé mocnině jejího poloměru, zmenší se při zmenšení rozměrů přijímače na osminu tok z hodnoty

úměrné a^2 na hodnotu úměrnou $\frac{a^2}{4}$, tedy na hodnotu čtyřikrát menší.

5. úloha (laboratorní)

Text:

Na stole jsou na stojáncích 3 různé čočky, jedno stínítko s nakresleným geometrickým obrazem a svislý drátek; kromě toho je na stole měřicí pás.

S využitím *pouze* těchto předmětů určete ohniskové vzdálenosti čoček a jejich algebraická znaménka.

a) Uveďte nejméně dva možné způsoby měření. Pro každý z nich nakreslete schéma polohy přístrojů a chod paprsků v celé soustavě.

b) Podejte teoretické zdůvodnění a uveďte všechny vztahy potřebné pro požadované výpočty.

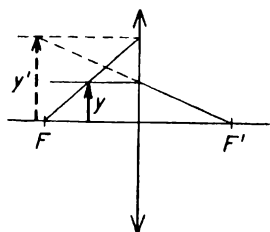
c) Měření proveďte všemi nalezenými způsoby a vypočítejte ohniskové vzdálenosti čoček.

d) Sestavte protokol o provedené práci.

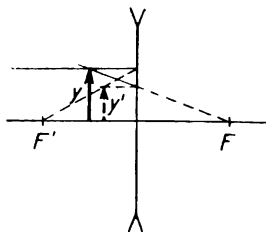
Řešení:

Jestliže postavíme mezi oko a předmět (tj. daný obrazec) čočku těsně k obrazci, vytvoří se vždy zdánlivý obraz. Vzdalujeme-li pak obrazec od oka (a tedy i od čočky) a pozorujeme-li vytvořený obraz, mohou nastat dva případy:

a) Zdánlivý obraz se zvětšuje (obr. 110) až při určité poloze vznikne obraz nekonečně velký — předmět je v ohnisku — a pak při dalším vzdalování obrazce uvidíme na straně oka skutečný obraz. V tomto případě jde o spojku.



Obr. 110



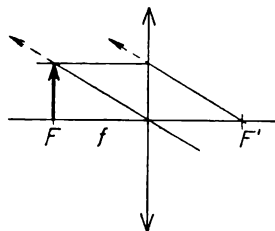
Obr. 111

b) Zdánlivý obraz se stále zmenšuje (obr. 111) a skutečný obraz se nevytvoří. V tomto případě jde o rozptylku.

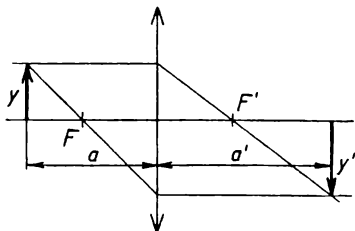
Tím si roztrídíme dané čočky na spojky a rozptylky. Z poznatků o čočkách vyplývají tyto metody:

A. Spojka

1. Najdeme takovou polohu předmětu, ve které zdánlivý obraz předmětu přechází v obraz skutečný. Pak vzdálenost předmětu od čočky je ohnisková vzdálenost čočky (obr. 112).



Obr. 112

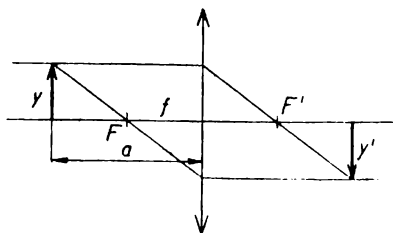


Obr. 113

2. Ohniskovou vzdálenost určíme z polohy libovolného skutečného obrazu (obr. 113). Předmět dáme do takové polohy, aby vznikl skutečný obraz. Do místa skutečného obrazu dáme tyčinku (svislý drátek), aby splýnula se svislou přímkou obrazu daného předmětu. Je-li tyčinka postavena přesně do polohy obrazu, pak při pohnutí hlavou vlevo a vpravo splývá obraz stále s tyčinkou. Musíme proto tyčinkou tak dlouho pohybovat, až přestane relativní pohyb tyčinky k obrazu. Změřením vzdálenosti předmětu od čočky a ($a > 0$) a vzdálenosti obrazu od čočky a' ($a' > 0$) a užitím rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

vypočteme ohniskovou vzdálenost f .



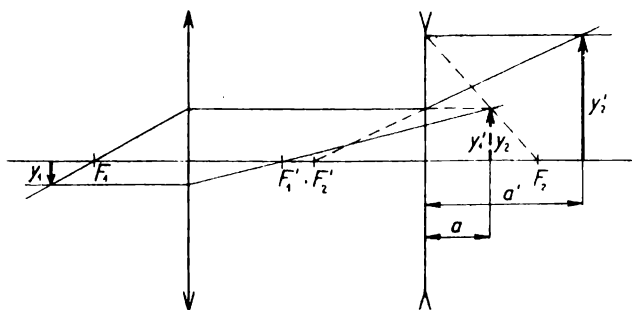
Obr. 114

3. Jestliže najdeme takovou polohu předmětu, že jeho obraz je stejně vzdálen od čočky jako předmět, ale na opačné straně než předmět, je předmět v dvojnásobné ohniskové vzdálenosti (obr. 114). Změříme-li vzdálenost předmětu od čočky a , máme určenu dvojnásobnou ohniskovou vzdálenost, a tedy

$$f = \frac{a}{2}.$$

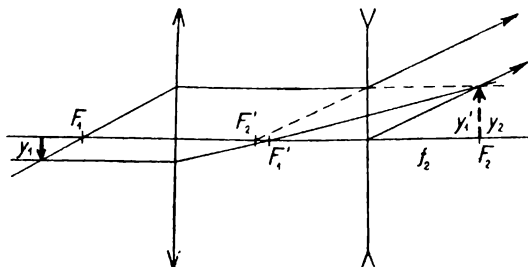
B. Rozptylka

1. Spojkou vytvoříme skutečný obraz daného předmětu; jeho polohu určíme užitím svíslé tyčinky. Nyní mezi spojku a tyčinku dáme rozptylku do takové polohy, aby vznikl ještě skutečný obraz. Obraz vytvořený spojkou bude pro rozptylku zdánlivým předmětem (obr. 115). Vzdálenost zdánlivého předmětu od rozptylky označme a ($a < 0$) a pomocí tyčinky najdeme polohu obrazu. Vzdálenost obrazu od rozptylky označme a' ($a' > 0$). Užitím rovnice (1) určíme f .



Obr. 115

2. Jestliže se při uspořádání stejném jako v příp. 1 najde taková poloha rozptylky, že skutečný obraz právě přechází ve zdánlivý, je vzdálenost zdánlivého předmětu od rozptylky rovna ohniskové vzdálenosti rozptylky (obr. 116).



Obr. 116

3. Opticky silnější spojku, jejíž ohniskovou vzdálenost f_1 známe, dejme těsně k měřené rozptylce. Předmět postavme do takové polohy, aby vznikl skutečný obraz. Změříme vzdálenost a předmětu od soustavy a vzdálenost a' obrazu od soustavy. Ze vztahu

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2},$$

kde f_2 je ohnisková vzdálenost rozptylky, vypočte se f_2 .

Obsah

I. část. Zpráva o průběhu soutěže	3
1. Organizace soutěže	3
2. Složení ústředního výboru FO ve škol. roce 1969/70	4
3. Krajské výbory FO a jejich předsedové	7
4. Okresní výbory FO	8
5. Klasifikační zásady	8
6. Průběh soutěže ve škol. roce 1969/70	9
A. První kolo soutěže kategorií A, B a C	10
B. Druhé kolo kategorií A, B a C	10
C. Třetí kolo kategorie A	18
D. Závěr soutěže kategorií A, B a C	22
E. Soustředění vybraných úspěšných řešitelů MO a FO	25
F. První a druhé kolo kategorie D	25
G. Třetí kolo kategorie D	27
H. Závěry k průběhu soutěže FO	30
II. část. Témata k prostudování	31
A. Kategorie A: Ing. Bohumil Vybíral, CSc.: Rotační pohyby a setrvačníky	31
B. Kategorie B: Zdeněk Ungermann: Pružná deformace tuhého tělesa	47
C. Kategorie C: Ing. Bohumil Vybíral, CSc.: Grafická statika	62
III. část. Soutěžní úlohy	74
1. Úlohy kategorie A	74
a) První kolo soutěže	74
b) Druhé kolo soutěže	103
c) Třetí kolo soutěže	115
2. Úlohy kategorie B	132
a) První kolo soutěže	132
b) Druhé kolo soutěže	159
3. Úlohy kategorie C	166
a) První kolo soutěže	166
b) Druhé kolo soutěže	196
4. Úlohy kategorie D	208
a) První kolo soutěže	208
b) Druhé kolo soutěže	234
c) Třetí kolo soutěže	242
IV. část. Čtvrtá mezinárodní fyzikální olympiáda	252
1. Průběh a výsledky soutěže	252
2. Soutěžní úlohy	259

Edice: Pomocné knihy pro žáky

Prof. dr. Rostislav Košťál, Vlastimil Janků a dr. Ivan Náter

Jedenáctý ročník fyzikální olympiády

Obálku navrhl Josef Prchal

Obrázky rýsoval ing. Jaromír Černožorský

Vydání 1. — Praha 1971 — Počet stran 280.

Odpovědná redaktorka: Jiřina Cívínová

Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk

Technická redaktorka: Marcela Vilimová

Z písma Plantin vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p., závod 2,
Ostrovni 30, Praha 1.

AA 11,80 — VA 12,29

Náklad 3000 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/5

Cena brožovaného výtisků Kčs 14,50

505/21, 852

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou publi-
kaci č. 15-0-28

14-389-71

Kčs 14,50