

**SPN**

X. ročník  
fyzikální  
olympiády

# Fyzikální olympiáda

ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE  
KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1968 – 69

# X. ročník fyzikální olympiády

ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE  
KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1968/69

PRAHA  
STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Zpracovali: Josef Konrád, prof. dr. Rostislav Košťál a dr. Ivan Náter  
Recenzovali: František Živný a Jozef Zámečník  
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1970

# I. ČÁST

## ZPRÁVA O PRŮBĚHU SOUTĚŽE

### 1. Organizace soutěže

Ve školním roce 1968/69 se pořádal desátý ročník soutěže fyzikální olympiáda pro žáky středních škol a šestý ročník této soutěže pro žáky devátých ročníků základních devítiletých škol.

Organizační řád fyzikální olympiády (FO) i matematické olympiády (MO) je dán výnosem ministerstva školství a kultury (MŠK) ze dne 14. března 1963, č. 2293-63 — I/1 a byl uveřejněn ve Věstníku MŠK, r. 1963, seš. 12, kde jsou uvedeny i důvody pro zavedení těchto soutěží. Mají vzbudit u žáků větší zájem o studium matematiky a fyziky, vést je k samostatné práci, zvýšit úroveň vyučování i vyučovací výsledky v těchto předmětech. Matematická a fyzikální olympiáda mají pomáhat ve vyhledávání žáků nadaných pro matematiku a fyziku a podporovat rozvoj jejich talentů. Mají pomáhat žákům v lepší přípravě pro vysokoškolské studium, a tak zajistit hlubší a solidnější přípravu odborných pracovníků, matematicky a fyzikálně školených pro obory matematicko-fyzikální, přírodovědné i technické. Náročnost na odbornou přípravu na vysokých školách roste a stále poroste, protože na vědeckých pracovištích i v praxi se požadavky na všechny pracovníky rovněž neustále zvyšují.

Soutěž je dobrovolná a je určena pro žáky středních škol a pro žáky devátých ročníků základních devítiletých škol. Kategorie A je určena pro žáky třetích ročníků středních všeobecně vzdělávacích škol a třetích a čtvrtých ročníků středních odborných škol, kategorie B pro žáky druhých ročníků a kategorie C pro žáky prvních ročníků všech středních škol. Kategorie D je pro žáky devátých ročníků základních devítiletých škol.

Výjimečně nadaní žáci mohou soutěžit i ve vyšší kategorii, účast v ní povoluje vyučující učitel s referentem FO na škole. Tyto mimořádné případy ohlásí referent FO krajskému výboru fyzikální olympiády.

Soutěž v kategorii A probíhá podle citovaného výnosu MŠK ve třech kolech, v kategoriích B, C a D ve dvou kolech. (V kategorii D v minulých letech proběhla soutěž v některých krajích i ve třetím, krajském kole, letos už v devíti z jedenácti krajů.)

V prvním kole mají soutěžící řešit do určeného termínu 9 úloh a v kategoriích A, B a C samostatně prostudovat fyzikální téma. Tato témata pro všechny tři kategorie byla otištěna v Rozhledech matematicko-fyzikálních.

Ve druhém kole řeší soutěžící 4 úlohy a ve třetím celostátním kole kategorie A 5 úloh, z nichž jedna je laboratorní. (Ve třetím, krajském kole se v kategorii D zadávají žákům 4 úlohy.)

Rozvoji matematických a fyzikálních znalostí pomáhají ještě další opatření, zavedená podle citovaného výnosu MŠK: prázdninová soustředění (celostátní) nejlepších řešitelů matematické i fyzikální olympiády kategorie B, krajská soustředění žáků kategorií B a C, během školního roku kurzy pro žáky středních škol, kurzy pro učitele základních devítiletých škol a speciální třídy, zřízené na středních všeobecně vzdělávacích školách (gymnasiích) pro nadané matematiky a fyziky.

Speciální třídy se zřizují ve všech krajích podle výnosu MŠK ze dne 25. 3. 1965, č. 10 263-65/II/1 na vybraných středních všeobecně vzdělávacích školách (gymnasiích) tak, že jsou do nich soustředováni (na základě dobrovolných přihlášek) nadaní žáci z celého kraje a popř. se jim zajistí internátní ubytování.

Státní pedagogické nakladatelství začalo vydávat novou samostatnou knižnici, nazvanou Škola mladých fyziků. Vyšly v ní první dva svazky. Velkou část nákladu jednotlivých brožur zakupuje ministerstvo školství a prostřednictvím krajských národních výborů rozděljuje středním školám.

Pořadatelé soutěže FO jsou podle organizačního řádu ministerstvo školství spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků (JČSMF) a Československým svazem mládeže (ČSM).

## **2. Složení ústředního výboru fyzikální olympiády ve šk. r. 1968—69**

Ústřední výbor fyzikální olympiády se skládá ze zástupců pořádajících institucí, tj. ze zástupce MŠ, JČSMF, mládežnické organizace a z učitelů vysokých a středních škol. Kromě toho jsou členy ÚV FO i všichni předsedové krajských výborů fyzikální olympiády (KV FO)

Funkční období členů ÚV FO je tříleté.

Sídlem ÚV FO je od školního roku 1966/67 Brno, přírodovědecká fakulta University Jana Ev. Purkyně, Kotlářská 2.

Ve školním roce 1968/69 měl ÚV FO stejné složení jako v předešlém roce:

**Předseda:** RNDr. Rostislav Košťál, profesor elektrotechnické fakulty Vysokého učení technického v Brně a 1. fakulty Vojenské akademie Antonína Zápotockého ve Vyškově

**Místopředseda:** RNDr. Ivan Náter, docent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě

**Jednatel:** Josef Konrád, odborný asistent přírodovědecké fakulty University J. E. Purkyně v Brně

**Další členové (v abecedním pořadí):**

Josef Bartůněk, ústřední inspektor ministerstva školství v Praze

František Cimbůrek, profesor gymnasia v Praze-Libni

RNDr. Marta Chytilová, CSc., vědecká pracovnice Výzkumného ústavu pedagogického v Praze

Milan Rádl, odborný asistent Vysoké školy strojnické a elektrotechnické v Plzni

Evžen Říman, CSc., zástupce docenta elektrotechnické fakulty Českého vysokého učení technického v Praze

Jan Tesař, profesor SVVŠ v důchodu, Praha

RNDr. Miloslav Valouch, profesor matematicko-fyzikální fakulty University Karlovy v Praze a ústřední tajemník JČSMF v Praze

RNDr. Bohumil Vlach, docent přírodovědecké fakulty University J. E. Purkyně v Brně

Ivo Volf, odborný asistent pedagogické fakulty v Hradci Králové

Ing. Bohumil Vybíral, CSc., odborný asistent 1. fakulty Vojenské akademie Antonína Zápotockého ve Vyškově

Jozef Zámečník, odborný asistent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě

František Živný, ředitel SVVŠ v důchodu, Nový Bohumín

Na ustavující schůzi ÚV FO v r. 1966 byla určena komise pro výběr a úpravu úloh, jejímž předsedou je doc. dr. Ivan Náter (místopředseda ÚV FO). Komise pracuje ve dvou stupních: komise pro základní výběr úloh a komise pro konečnou redakci úloh a vzorových řešení.

Komise pro základní výběr úloh vybírá z návrhů, které zaslaly KV FO i jednotliví učitelé fyziky, ty úlohy, které se hodí pro FO, a posoudí, pro kterou kategorii jsou vhodné. Práce v této komisi byla rozdělena takto:

Jozef Zámečník a František Živný úlohy z mechaniky a vlnění,

Milan Rádl úlohy z molekulové fyziky a termiky,

Ivo Volf úlohy z elektřiny a elektromagnetického vlnění,  
František Cimbůrek úlohy z optiky, atomistiky a experimentální úlohy.

Komise pro konečnou redakci úloh vybírala z navržených úloh nevhodnější, upravovala znění jejich textu, rozsah dílčích požadavků a posuzovala a upravovala jejich řešení. Obory byly rozvrženy takto:

Evžen Říman, úlohy kategorie A,  
dr. Marta Chytilová, úlohy kategorie B,  
Jan Tesař, úlohy kategorie C,  
dr. Bohumil Vlach, úlohy kategorie D.

Komise vybrala ze zaslanych příkladů úlohy pro 2. kolo X. ročníku FO (pro všechny kategorie), pro 3. kolo X. ročníku FO kategorie A a jednotně zadávané úlohy pro pokusná 3. kola kategorie D (krajská), dále pro všechna kola XI. ročníku (pro všechny kategorie).

### **3. Krajské výbory FO ve šk. roce 1968/69 a jejich předsedové**

Pro řízení soutěže prvního kola a druhého kola kategorií A, B a C se zřizují krajské výbory fyzikální olympiády (KV FO). Jejich předsedy a členy jmenují odbory školství a kultury KNV na návrh poboček JČMF v kraji. Jsou v nich zástupci odborů školství a kultury KNV, zástupci poboček JČMF v kraji, zástupci KV ČSM a profesori a učitelé fyziky. Pokud možno jsou v KV FO zastoupeni co nejvíce učitelé vysokých škol.

Předsednictvo KV FO tvoří předseda, místopředseda (resp. místopředsedové) a jednatel (resp. jednatelé).

Ve šk. roce 1968-69 byli předsedy KV FO v jednotlivých krajích:

Praha: František Černický, odb. asistent MFF UK v Praze  
Středočeský: František Fišer, profesor SVVŠ v důchodu, Praha  
Jihočeský: Konrád Hofman, odborný asistent pedagogické fakulty  
v Českých Budějovicích

Západočeský: Ing. Miloš Rabas, odborný asistent Vysoké školy strojnické a elektrotechnické v Plzni

Severočeský: Josef Sušanka, ředitel Krajského pedagogického ústavu v Ústí nad Labem

Východočeský: Zdeněk Ungermann, odborný asistent pedagogické fakulty v Hradci Králové,

Jihomoravský: Lubomír Vašek, odborný asistent detašovaného pracoviště VUT v Brně, Gottwaldov

Severomoravský: RNDr. Miroslav Bajer, docent Vysoké školy báňské v Ostravě

Západoslovenský: RNDr. Ivan Náter, docent Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě

zástupkyně předsedy v ÚV FO Zuzana Šimkovičová, profesorka SVŠ v Bratislavě, Novohradská

Středoslovenský: Pavol Ferko, odborný asistent pedagogické fakulty v Banské Bystrici

Východoslovenský: RNDr. Edita Tarabčáková, odborná asistentka přírodovědecké fakulty University P. J. Šafárika v Košicích

## 4. Okresní výbory fyzikální olympiády

V kategorii D řídí soutěž 1. a 2. kola okresní výbory fyzikální olympiády (OV FO), ustavené v sídlech ONV. OV FO se skládají z předsedy, místopředsedy, jednatele, zástupce odboru školství a kultury příslušného ONV, zástupce OV ČSM, popř. dalších profesorů nebo učitelů. Snažíme se, aby v OV FO byli pokud možno zastoupeni co nejvíce učitelé fyziky škol 2. cyklu.

## 5. Klasifikační zásady

Pro hodnocení úloh jsou každoročně uveřejňovány v letáku potřebné pokyny. Žákovská řešení se klasifikují takto:

1. výborně, jestliže je úloha rozřešena správně nebo řešení má nanejvýš jen formální chyby nebo jen menší odbornou závadu;

2. dobře, jestliže řešení vystihuje úkol, ale má větší odborné nedostatky; dobře je hodnoceno i správné řešení, vyskytující-li se v něm závažné formální nedostatky;

3. nevyhovující, jestliže nedostatky odborného rázu jsou závažné nebo je-li řešení z větší části neúplné; řešení je také nevyhovující, chybí-li výklad nebo je-li neúplný, takže z něho nelze soudit na myšlenkový postup podaného řešení.

Řešené úlohy prvního kola opraví učitel vyučující ve třídě fyzice v dohodě s referentem pro FO na škole. Po ukončení prvního kola navrhne referent pro FO na škole úspěšné řešitele do 2. kola soutěže a odešle opravené úlohy všech řešitelů (i neúspěšných) spolu s návrhem



příslušnému KV FO. Po kontrole úloh rozhodne KV FO, kteří z navržených řešitelů budou zařazeni do 2. kola. KV FO si zpravidla dá předložit opravená řešení úloh již po ukončení jednotlivých termínů.

Úspěšnými řešiteli 1. kola soutěže jsou ti žáci, kteří vyřešili úspěšně aspoň 6 z 9 zadaných úloh. Ze dvou zadaných experimentálních úloh v kategoriích A, B a C musí každý soutěžící žák řešit (i když neúspěšně) aspoň jednu, má-li se stát úspěšným řešitelem 1. kola soutěže.

V druhém kole řeší soutěžící čtyři úlohy teoretické. Úspěšným řešitelem 2. kola je každý řešitel, který úspěšně vypracoval aspoň dvě úlohy.

Z neúspěšnějších účastníků druhého kola bylo vybráno na schůzi ÚV FO na návrh jednotlivých KV FO celkem 76 soutěžících ze všech krajů k účasti na třetím kole soutěže.

Ve třetím kole řešili účastníci čtyři úlohy teoretické a jednu úlohu experimentální. Úspěšnými řešiteli byli ti žáci, kteří vyřešili úspěšně aspoň tři ze zadaných úloh. Sedm nejlepších řešitelů bylo prohlášeno vítězi třetího kola X. ročníku FO.

## **6. Průběh soutěže ve školním roce 1968/69**

Soutěž probíhala ve čtyřech kategoriích podle vyspělosti žáků (zpravidla podle ročníku škol), a to v kategorii A ve třech kolech, v kategorii B, C a D ve dvou kolech.

Předloni byla provedena pokusně soutěž v kategorii D také ve třetím kole (krajském) ve třech krajích, loni už s jednotně zadanými úlohami v šesti krajích, letos v devíti z jedenácti krajů (ve všech krajích kromě Jihočeského a Východoslovenského).

### **A. První kolo soutěže kategorií A, B a C**

První kolo soutěže probíhalo na školách v kategoriích A, B a C od září 1968 do 8. února 1969; v kategorii D do 31. března 1969. Úlohy pro 1. kolo byly otištěny v 10. čísle časopisů Fyzika ve škole a Rozhledy matematicko-fyzikální (prvá trojice úloh) a v 1. čísle těchto časopisů po prázdninách (zbývající úlohy). Kromě toho vydalo Státní pedagogické nakladatelství nákladem 4000 výtisků leták s pokyny pro kategorii A, B a C. Také letos byl leták upraven tak, že se daly příklady pro jednotlivé kategorie oddělit, takže příklady dostalo do rukou více žáků. Finanční náklad na letáky hradí MŠ.

Témata k prostudování byla uveřejněna v Rozhledech matematicko-fyzikálních 1968 v 1., 2. a 3. čísle.

TABULKA 1 Počet škol, které se účastnily X. ročníku FO

Kraj	Celk. počet SVVŠ v kraji			Zapojeno SVVŠ						SPŠ						Ostatních						Celkový počet zapoj. škol							
	celkem			kategorie			celkem			kategorie			celkem			kategorie			celkem			kategorie			celkem				
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C					
Praha	23	15	15	3	4	6	8																		18	19	21	28	
StČ	27	22	20	2	3	5	5																			24	23	29	30
JČ	21	14	11			1	1																			14	11	12	16
ZČ	17	8	11			3	3																			8	8	14	20
SC	23	14	11	1	1	3	5																			15	12	12	23
VČ	38	24	24	1	3	2	3	3	3	3	3	3 <sup>1)</sup>														28	30	31	40
JM	38	26	28	1	2	8	9																			27	30	37	44
SM	37	23	24	2	3	9	9																			25	28	33	42
ZS	52	22	24			1	1																			23	24	26	32
SS	39	13	17			3	3																			13	18	22	30
VS	39	9	10			2	2																			9	10	11	12
<b>Celkem</b>	<b>354</b>	<b>190</b>	<b>192</b>	<b>10</b>	<b>17</b>	<b>43</b>	<b>49</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>204</b>	<b>213</b>	<b>248</b>	<b>317</b>													
<b>Loni</b>	<b>352</b>	<b>204</b>	<b>201</b>	<b>17</b>	<b>15</b>	<b>48</b>	<b>60</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>224</b>	<b>218</b>	<b>268</b>	<b>320</b>														

1) VŠJŽ Mor. Třebová (A, B, C), OU Synthesia Semtín (A, B, C), OU ČKD Choceň (A, B, C)

2) SZTŠ Třebíč (C)

3) VŠJŽ Opava (B, C)

4) VŠJŽ Bratislava (A), ZDŠ Košická ul., Bratislava (C), SEŠ Trenčín (C)

TABULKA 2

## Počet žáků soutěžících v 1. kole

(S značí počet soutěžících, Ů počet úspěšných řešitelů, c. celkový počet žáků, d. z toho počet dívek)

Kraj	Kategorie A						Kategorie B						Kategorie C						Celkem					
	S			Ů			S			Ů			S			Ů			S			Ů		
	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.		
Praha	74	8	46	6	122	17	85	12	141	24	47	12	337	49	178	30								
StČ	62	8	39	5	65	12	40	6	59	9	38	4	186	29	117	15								
JČ	45	4	12	-	44	5	26	3	50	8	12	5	139	17	50	8								
ZČ	33	8	23	2	27	4	19	-	46	16	34	6	106	28	76	8								
SC	49	2	43	2	69	16	37	10	120	51	38	13	238	69	118	25								
VČ	65	8	52	5	95	25	73	22	153	38	77	11	313	71	202	38								
JM	119	11	87	7	128	17	59	7	195	35	58	8	442	63	204	22								
SM	76	10	60	8	95	20	60	14	142	21	60	8	313	51	180	30								
ZS	95	13	57	9	107	22	71	15	187	45	62	12	389	80	190	36								
SS	30	3	26	3	77	8	17	2	131	30	44	11	238	41	87	16								
VS	29	2	22	2	36	10	24	7	51	7	38	3	116	19	84	12								
Celkem	678	77	467	49	865	156	511	98	1274	284	508	93	2817	517	1486	240								
úsp. v %			69	64			59	63			40	33			52	46								
Loni	943	128	553	53	1014	189	524	85	1944	508	778	169	3901	825	1855	307								
úsp. v %			57	41			52	45			40	33			52	46								

Další témata k prohloubení znalostí z fyziky vycházejí v samostatné knižnici „Škola mladých fyziků“, kterou vydává Státní pedagogické nakladatelství. V r. 1969 vyšly prvé dva svazky:

1. Hofman, Kirchhoffovy zákony,
2. Hofman, Vektorové znázornění střídavých proudů. Symbolická metoda.

Počet škol, které se letos účastnily soutěže FO, je podle krajů a kategorií uveden v tabulce 1. Proti loňsku se počet škol poněkud (ale nikoli podstatně) zmenšil, a to v kategorii A o 10 %, v kategorii B o 2 %, v kategorii C o 7,5 %.

Počet soutěžících 1. kola je uveden v tabulce 2 podle krajů a podle kategorií. V tabulkách značí vždy S počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, c. celkový počet žáků a d. z toho počet dívek. Z tabulky je zřejmé, že počet soutěžících ve všech kategoriích proti loňsku podstatně poklesl, v kategorii A o 28 %, v kategorii B o 15 %, v kategorii C dokonce o 34 %, celkem ve všech kategoriích o 984 žáky, tj. o 28 %. Počet úspěšných řešitelů se proti loňskému roku ovšem rovněž snížil, ale procentově se v kategorii A a B poněkud zlepšil a v kategorii C se nezměnil. Celkem se procento úspěšných řešitelů zvýšilo z loňských 47 % na 52 %.

Počet dívek, které se účastnily 1. kola, letos znovu značně poklesl. Procento úspěšných dívek v kategorii A a B je lepší než loni, zejména v kategorii A. Klesající počet soutěžících dívek souvisí patrně s dělením tříd na větve humanitní a přírodovědné. Dívky se hlásí většinou na větve humanitní a z těchto tříd se jen velmi málo žáků účastní soutěže FO.

## **B. Druhé kolo kategorií A, B a C**

Druhé kolo v kategoriích A, B a C proběhlo ve všech krajích současně dne 15. března 1969. Změna termínu proti plánovanému datu 29. 3. 1969 byla vynucena tím, že MŠ zavedlo jarní prázdniny a že nebylo vhodné dát druhé kolo na volnou sobotu před těmito prázdninami.

Do druhého kola byli pozváni v podstatě všichni úspěšní řešitelé 1. kola. Stejně jako loni bylo i letos 2. kolo provedeno v jediném místě až na kraj Severočeský (soutěž se konala v Ústí nad Labem, v Mostě a v Liberci), Severomoravský (v Ostravě a v Olomouci) a Středoslovenský (v Banské Bystrici a v Žilině). Předseda ÚV FO prof. Košťál se účastnil 2. kola a zkontroloval práci v Jihomoravském kraji, jednatel Josef Konrád v Západoslovenském kraji.

Texty soutěžních úloh 2. kola byly letos opět rozmnoženy pro všechny soutěžící, takže odpadlo zdlouhavé psaní textů na tabuli. Pro slovenské kraje byly texty připraveny i v jazyce maďarském. Texty byly

TABULKA 3

## Počet žáků soutěžících ve 2. kole

(S značí počet soutěžících, Ó počet úspěšných řešitelů, c. celkový počet žáků, d. z toho počet dívek)

Kraj	Kategorie A				Kategorie B				Kategorie C				Celkem			
	S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú	
	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.
Praha	46	6	33	3	70	7	43	3	40	8	29	4	156	21	105	10
StČ	34	3	12	1	32	7	13	3	31	4	20	1	97	14	45	5
JČ	12	-	10	-	26	3	13	2	12	5	2	-	50	8	25	2
ZČ	21	2	14	1	16	-	10	-	29	6	18	2	66	8	42	3
SC	38	-	24	-	22	6	5	-	31	11	10	1	91	17	39	1
VČ	48	4	19	2	52	8	18	2	72	10	39	2	172	22	76	6
JM	79	5	33	2	57	6	27	4	51	7	24	-	187	18	84	6
SM	57	8	38	1	56	14	29	6	55	8	33	5	168	30	100	12
ZS	56	9	25	2	67	13	34	6	62	12	31	5	185	34	90	13
SS	26	3	9	1	17	2	2	-	44	11	4	-	87	16	15	1
VS	22	2	3	-	22	6	6	2	36	3	4	-	80	11	13	2
Celk.	439	42	220	13	437	72	200	28	463	85	214	20	1339	199	634	61
úsp. %			50	31	46	39	46	39	46	39	46	24	46	24	48	31
Loni	523	47	254	18	482	70	177	12	680	134	304	35	1685	251	735	65
úsp. %			49	38	37	17	37	17	45	27	45	27	44	26	44	26

rozeslány do míst, kde se soutěž konala, v zapečetěných obálcích, které směly být otevřeny až před shromážděnými žáky. Ani letos nebyla zařazena do 2. kola experimentální úloha.

Výsledky druhého kola jsou uvedeny v přehledu v tabulce 3. Počet soutěžících byl letos ve všech kategoriích nižší než loni celkem o 21 %. Počet úspěšných řešitelů se u kategorií A a C v procentech celkem nezměnil, v kategorii B byl lepší než loni (lepší výběr žáků). Počet soutěžících dívek v procentech byl skoro stejný jako loni, v kategorii B absolutně i procentově byl lepší. Počet úspěšných řešitelek byl v kategorii B podstatně lepší (39 % proti loňským 17 %).

Podle usnesení ÚV FO se pro hodnocení úloh 2. kola kategorie A pro jemnější rozlišení při výběru soutěžících pro 3. kolo použilo stupnice známek 1, 1–, 2, 3; zdá se, že tento systém hodnocení plně vyhovuje, i když je jednoduchý.

Nyní uvádíme pořadí prvních deseti úspěšných řešitelů druhého kola v kategoriích A, B, C podle krajů. V kategorii A jsou tučným písmem vyznačeni žáci, kteří postoupili do 3. kola. Z Prahy, z kraje Severočeského a Jihomoravského, kde postupuje více než úspěšných 10 řešitelů, jsou uvedeni všichni. U žáků středních všeobecně vzdělávacích škol neuvádíme za jménem zkratku školy (SVVŠ, na Slovensku SVŠ).

## *Praha*

**A: Jiří Vinárek**, Praha 2, W. Piecka; **Václav Novotný**, SPŠJT Praha 4, Svatoslavova; **Tomáš Mašek**, Praha 2, W. Piecka; **Zdeněk Slivka**, Praha 8, Kollárova; **Jan Frouz**, SPŠE Praha 2, Ječná; **Petr Hadrava**, Praha 2, W. Piecka; **Arnošt Lavante**, Praha 1, Štěpánská 22; **Vladimír Vancl**, SPŠJT Praha 4, Svatoslavova; **Vladimír Hora**, Praha 7, Nad štolou, **Jiří Rákosník**, SPŠZem., Praha 9, Pod Tábořem; **Michal Tošovský**, Praha 2, W. Piecka; **Zdeněk Podráský**, Praha 2, W. Piecka.

**B: Miroslav Hradil**, Vojtěch Hanzal, oba Praha 2, W. Piecka; Zbyšek Stýblo, Praha 6, Arabská; Pavel Pudlák, Praha 7, Nad štolou; Josef Pražák, Marek Boguszak a Petr Šebelík, všichni Praha 2, W. Piecka; Jan Wolf, Praha 1, Štěpánská; Josef Štěpánek a Ondřej Matouš, Praha 2, W. Piecka.

**C: Jiří Dolejší**, Praha 7, Nad štolou; Miloš Lokajíček, Praha 2, W. Piecka; Jan Husák, Praha 7, Nad štolou; Vladimír Burda a Pavel Dušek, oba Praha 2, W. Piecka; Miroslav Súra, Praha 6, Arabská; Antonín Lešanovský, Ivan Gabáš, Andrej Kugler a Richard Nikl, všichni Praha 2, W. Piecka.

### *Středočeský kraj*

**A:** **František Komín**, SPŠ Kutná Hora; **Eva Dvořáková** a **Miloš Potměšil**, oba Kolín; **Kamil Židek**, Brandýs n. Labem; **Bořivoj Shejbal**, Hořovice; **Karel Hoffmann**, Sedlčany; **Václav Šubrta**, Nymburk; **Jaromír Vacek**, Český Brod; **Miroslav Rajdl**, Kutná Hora; **Josef Kymla**, Sedlčany.

**B:** Jiří Gemperle, Radotín; Jaroslav Balík, Vlašim; Květa Nováková, Český Brod; Josef Bílek a Vlastimil Vojáček, oba Říčany; Jan Vitkovský, Beroun; Josef Pavlíček, Hořovice; František Lob, Český Brod; Miloslav Rais a Miroslav Kudrna, oba Čáslav.

**C:** Jiří Hladík, Český Brod; Milan Kuklík, Vlašim; Jaroslav Vlach, Hořovice; Rudolf Koudelka, Kladno; Miroslav Křenek, Kutná Hora; Vít Čermák, Beroun; Miloslav Zikán, Hořovice; Jan Rambousek a Zbyněk Vyhnal, oba Český Brod; Pavel Kučera, Kutná Hora.

### *Jihočeský kraj*

**A:** **Milan Tenkrát**, Blatná; **Pavel Hejda**, Jindřichův Hradec; Miroslav Lexa, Tábor; Zdeněk Drátovský, Písek; Vojtěch Růžička, České Budějovice; Josef Mrkvička, Strakonice; Karel Maška, Pelhřimov; Josef Kvapil, Kamenice n. Lipou; Luboš Vosika, Kamenice n. Lipou; Rudolf Novák, Pelhřimov.

**B:** Jan Vyhnaněk, Pravoslav Němeček a František Máca, všichni České Budějovice; Bohuslav Vránek a Bohuslav Nunvář, oba Jindřichův Hradec; Helena Říhová, Strakonice; Miroslav Kozejca, České Budějovice; Jaromír Pangrác, Pelhřimov; Jan Kovář, Trhové Sviny; Vladimír Vacek, Jindřichův Hradec.

**C:** Karel Herbst a Jan Valnoha, České Budějovice.

### *Západočeský kraj*

**A:** **Jiří Pospíšil**, Ostrov n. Ohří; **Josef Psutka**, Domažlice; **Petr Jurajda**, Ostrov n. Ohří; **Josef Hoffmann**, Sušice; **Emanuel Makrlík**, Sušice; **Miroslav Březina**, Karlovy Vary; Karel Nejd, Plzeň, nám. Odborářů; Jiří Reif, Plzeň, nám. Odborářů; Josef Vejlupek, Klatovy; Jindra Taterová, Sušice.

**B:** Pavel Kopeček, Plzeň, nám. Odborářů; Jan Šafanda, Sušice; Vladimír Junger, Plzeň, nám. Odborářů; Rudolf Švarc, Plzeň, nám. Odborářů; Dušan Poduška, Ostrov n. Ohří; Zbyněk Potužák, Sušice; Jan Černý, Tomáš Fořt a Petr Tauš, Plzeň, nám. Odborářů; Jiří Zajíc, Plzeň, ul. Pionýrů.

C: Karel Fliegel, Pavel Tauš, Václav Gruber, Václav Vacovský, Vlastimil Vacek, Marta Velemanová, Jiří Tůma, Jaroslav Kotrba, Tomáš Beneda a Pavel Hecht, všichni Plzeň, nám. Odborářů.

### *Severočeský kraj*

A: **Jan Hořejší**, Roudnice; **Josef Pýcha**, Roudnice; **Ivo Brožek**, Ústí n. Labem; **Jaroslav Janda**, Teplice; **Miloš Zahradník**, Tanvald; **Josef Moulis**, Chomutov; **Antonín Kadlček**, Teplice; **Miloš Mazánek**, Tanvald; **Jaroslav Procházka**, Chomutov; **Jiří Pšentčík**, Liberec; **Jiří Stočes**, Most.

B: Vladimír Šulc, Litoměřice; Leoš Dvořák, Roudnice; Josef Skorkovský, Teplice; Jaroslav Bukovský, Roudnice; Pavel Hrabal, Litvínov.

C: Jiří Richter, SPŠstav. Liberec; Petr Jůza, Chomutov; Vítězslav Valenta, Děčín; Tomáš Havelka, Česká Lípa; Karel Kotek a Jan Pavlov, oba SPŠ Most; Karel Hájek, Liberec; Vratislav Hlaváček, Česká Lípa; Jiří Horák a Jiří Rejchrt, oba Děčín.

### *Východočeský kraj*

A: **Jiří Kouba**, Vys. Mýto; **Aleš Holubář**, Chotěboř; **Jindřich Havelka**, SPŠE, Pardubice; **Bohumil Hofman**, Vys. Mýto; **Karel Trejbal**, Semily; **Antonín Mikeš**, Rychnov n. Kněžnou; Jiří Kopřiva, Broumov; Petr Heinzl, Hradec Králové; František Hroch, Rychnov n. Kněžnou; Josef Jirásko, Semily.

B: Pavel Morávek, SPŠE, Pardubice; Josef Loskot, Vys. Mýto; Tomáš Bouda, Nová Paka; Karel Dyrtr, Ústí n. Orł.; Iva Boháčová, Rychnov n. Kněžnou; Karel Kacálek, Žamberk; Josef Benda, Náchod; Václav Škoda, Turnov; Petr Šimůnek, Rychnov n. Kněžnou; Jan Hilbauer, Chotěboř.

C: Jiří Rejlek, Jičín; František Rozsypal, Litomyšl; Vladislav Zamouřil, SPŠE, Pardubice; Josef Kokeš, Pardubice; Miloš Pšikal, Vys. Mýto; Stanislav Štancl, Česká Třebová; Zdeněk Rosa, SPŠel. Pardubice; Dana Boháčová, Rychnov n. Kněžnou; Olaf Künzel, Žamberk; Milan Čtvrtečka, SPŠE, Pardubice.

### *Jihomoravský kraj*

A: **Mojmír Šob**, Velké Meziříčí; **Stanislav Krejčíř**, SPŠE Brno, Leninova; **Bohumil Havel**, Brno, Koněvova; **Martin Širotek**, Brno, Koněvova; **Svatopluk Kutěj**, SPŠE Brno, Leninova; **Jan Šimek**,



Brno, Koněvova; **Luboš Kudláček**, Ivančice; **Hana Cagašová**, Brno, Křenová; **Petr Klíč**, Brno, Koněvova; **Milan Svoboda**, Brno, Křenová; **Jaroslav Hanák**, Veselí n. Mor.

B: Milan Pantůček, Jan Kohout a Jan Dobeš, všichni Brno, Křenová; Jaroslav Daniel, Mor. Budějovice; Václav Matoulek, Gottwaldov; Jaroslav Kučera, Brno, Křenová; Anna Ondráčková, Jihlava; Vladimír Dvořák, Petr Dvořáček a Zdeněk Kovář, všichni Brno, Křenová.

C: Václav Holý, Petr Kaňák, Jiří Němec, Pavel Hladký a Zdeněk Maláč, všichni Brno, Křenová; Jiří Binder, Mor. Budějovice; Josef Sorbi, Prostějov; Antonín Povolný, Brno, Koněvova; Jaromír Kuben, Prostějov; Ivan Kubáček, Brno, Křenová.

### *Severomoravský kraj*

A: **Antonín Rozsypal**, SPŠE Olomouc; **Radim Blaheta**, Ostrava 1, Šmeralova; **Petr Cetkovský**, Rýmařov; **Roman Kohut**, Ostrava 1, Šmeralova; **Milan Varkoček**, Havířov; **Radomír Hankus**, Krnov; **Petr Jaroš**, Frýdek-Místek; **Josef Matras**, Havířov; **Zdeněk Stuchlík**, SPŠ Ostrava-Vitkovice; **Jaroslav Šipula**, Nový Bohumín.

B: Josef Holečko, Ostrava 1, Šmeralova; Marie Němčíková, Karviná; Věra Axmanová, Litovel; Helena Balonová, Havířov; Jiří Jankuj, Valašské Meziříčí; Radomír Poncza, Karviná; Jaroslav Ramík, Ostrava 1, Šmeralova; Petr Sural, Frýdek-Místek; Miroslav Trčka, Havířov; Helena Kupková, Litovel.

C: Jan Knytl, Nový Jičín; Jaroslav Svrček, Přerov; Pavel Šrubař, Bílovec; Vladimír Dresler, Bílovec; Vladimír Smutný, Šternberk; František Šváb, Litovel; Eva Radková, Ostrava 1, Šmeralova; Jiří Dybal, Olomouc, Jiřího z Pod.; Vladimír Koubek, Litovel; Vítězslav Kolek, Olomouc, Jiřího z Pod.

### *Západoslovenský kraj*

A: **Juraj Šafařík**, 2. r. Bratislava, Novohradská; **Černý Vladimír**, 2. r. Bratislava, Novohradská; **Karol Šafařík**, 1. r. Bratislava, Novohradská; **Anna Mášejevová**, Bratislava, Novohradská; **Alojz Caletka**, Holič; **Juraj Breza**, Bratislava, Vazovova 38; **Tyschler Milan**, Bratislava, Tomašikova; Vladimír Mocko, Trenčín; Ladislav Hudec, Bratislava, Novohradská; Štefan Pleško, 2. r. Bratislava, Novohradská.

B: Filip Guldan, Pospiechová Adriena, oba Bratislava, Novohradská; Rudolf Ravas, Holič; Gustáv Thomas, Juraj Tekuš, Lívia Hoferková a Pavol Návrat všichni Bratislava, Novohradská; Stanislav

Janota a Peter Ostatník, Bratislava, Vazovova 38; Juraj Šurka, Bratislava, Novohradská.

C: Anton Černý, Ján Francu, Eva Ambrošová, Vladimír Šimkovič a Michal Čeppan, všetci Bratislava, Novohradská; István Langsádl, SVŠ maď., Komárno; Milan Kolibiar, ZDŠ Košická ul., Bratislava; Michal Hirjak, Tibor Nánási a Mária Ambrošová, všetci Bratislava, Novohradská.

#### *Středoslovenský kraj*

A: **Bohuš Sivák**, Zvolen; **Milan Grendel**, Banská Bystrica; Mikuláš Huba, Dolný Kubín; Mária Kušková, Prievidza; Alexander Láng, Miroslav Štrba, Ján Zvara, Ján Kulich a Jozef Vaško, všetci Zvolen.

B: Ľubomír Lúčan, Banská Bystrica; Milan Stacho, Vrútky.

C: Štefan Sakáloš, Prievidza; Milan Lamoš, Vrútky; Peter Kontsek, Martin; Ján Slabeycius, B. Bystrica.

#### *Východoslovenský kraj*

A: **Viktor Hronský**, Košice, Šrobárova; **Marián Štofka**, Košice, Kováčska; Róbert Gross, Košice, Šrobárova.

B: Belo Zorkovský a Eva Kočíková, Košice, Šrobárova; Viliam Schreter, Kežmarok; František Kováč, Košice, Šmeralova; Viera Kavečanská a Vladimír Kruško, oba Košice, Kováčska.

C: Juraj Šterbák, Prešov, Konštantínova ul., Juraj Krenický a Juraj Trenkler, oba Prešov, T. Ševčenku; Gedeon Mohr, Košice, Šrobárova.

### **C. Třetí kolo kategorie A**

Třetí kolo jubilejního X. ročníku FO bylo v Praze ve dnech 28. až 30. dubna 1969. Jeho přípravou a provedením byl pověřen KV FO v Praze. Soutěžící byli ubytováni a stravováni v kolejích Karlovy university.

Pro účastníky byla uspořádána exkurze do vysokonapěťové laboratoře elektrotechnické fakulty ČVUT (zajistil prof. Kalousek), jeden večer navštívili soutěžící operu Zdeňka Fibicha Šárka v Národním divadle. Ubytování a stravování zajistil dr. Jaroslav Vachek, odborný asistent MFF UK, divadelní představení prof. SVVŠ Pavel Fabinger. Laboratorní úlohu připravil a sledoval dr. Václav Müller z MFF UK.

Soutěžící pro 3. kolo byli vybráni na schůzi ÚV FO dne 10. dubna 1969. Celkem bylo vybráno 76 žáků, a to z Prahy 12, z kraje StČ 7,

TABULKA 4

## Počet žáků soutěžících ve třetím kole kategorie A

Kraj	Celkový počet soutěžících		Počet úspěšných řešitelů			Z nich vítězové			Neúspěšní řešitelé		
		z toho dívek		%	z toho dívek	počet	%	z toho dívek	počet	%	z toho dívek
Praha	12	-	7	58	-	1	14	-	5	42	-
StC	5	1	1	20	-	1	14	-	4	80	1
JČ	2	-	-	-	-	-	-	-	2	100	-
ZČ	6	-	-	-	-	-	-	-	6	100	-
SC	11	-	1	9	-	-	-	-	10	91	-
VC	5	-	1	20	-	-	-	-	4	80	-
JM	11	1	2	18	-	1	14	-	9	82	1
SM	10	-	4	40	-	1	14	-	6	60	-
ZS	7	1	3	40	-	3	43	-	4	57	1
SS	1	-	-	-	-	-	-	-	1	100	-
VS	2	-	-	-	-	-	-	-	2	100	-
Celkem	72*	3	19	26	-	7	100	-	53	74	3

Ze 76 pozvaných žáků se 4 nedostavili: dva ze Středočeského kraje, jeden z Východočeského a jeden ze Středošlonského kraje.

TABULKA 5

## Vítězové 3. kola kategorie A X. ročníku FO

Označení tříd: P = přírodovědná, S = speciální mat.-fyz., M = matem. stroje  
(programátorská)

Pořadí	Jméno	Tř.	Škola	Navržená odměna Kčs
1.	Vladimír Černý	2S	SVŠ Bratislava, Novohradská	1500
2.	Mojmír Šob	3P	SVVŠ Vel. Meziříčí	1300
3.--5.	František Komín	3	SPŠ Kutná Hora	1250
	Juraj Šafařík	2S	SVŠ Bratislava, Novohradská	1250
	Karol Šafařík	1S	SVŠ Bratislava, Novohradská	1250
6.	Václav Novotný	3	SPŠ JT Praha 4, Svatoslavova	1150
7.	Antonín Rozsypal	3	SPŠE Olomouc	1000

TABULKA 6

## Další úspěšní řešitelé 3. kola kategorie A

Pořadí	Jméno	Tř.	Škola	Navržená odměna Kčs
8. - 10.	Jiří Vinárek	3S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka	500
	Vladimír Hora	3P	SVVŠ Praha 7, Nad školou	500
	Jiří Rákosník	3	SPŠZ Praha 9, Pod Táborskou	500
11.	Jan Frouz	4	SPŠE Praha 2, Ječná	450
12.	Miloš Zahradník	3P	SVVŠ Tanvald	400
13.	Aleš Holubář	3P	SVVŠ Chotěboř	350
14. - 15.	Zdeněk Slivka	3P	SVVŠ Praha 8, Kollárova	300
	Bohumil Havel	3M	SVVŠ Brno, Koněvova	300
16. - 17.	Tomáš Mašek	3S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka	—
	Petr Cetkovský	3P	SVVŠ Rýmařov	—
18. - 19.	Milan Varkoček	3P	SVVŠ Havířov	—
	Zdeněk Stuchlík	4	SPŠ Ostrava-Vitkovice	—

TABULKA 7

## Přehled výsledků klasifikace 3. kola kategorie A

Příklad	Známky				Prům. známka	Téma příkladu
	1	1--	2	3		
1.	19	8	8	37	2,20	<i>mechanika</i> : nerovnoměrný pohyb konce tyče
2.	8	1	9	54	2,63	<i>molekulová fyzika</i> : netěsnost vývěvy
3.	5		4	63	2,80	<i>elektromagnetická indukce</i>
4.	2	3	17	50	2,64	<i>světelná energie</i> : osvětlení stínítka dutým zrcadlem
5. exp.	4	7	26	35	2,28	měření svorkového napětí a vnitřního odporu článku
Celkem	38	19	64	239	2,50	

JČ 2, ZČ 6, SČ11, VČ 6, JM 11, SM 10, ZS 7, SS 3, VS 2. Nedostavili se 4 soutěžící (StČ 2, VČ 1, SS 1).

V prvním dni řešili žáci 4 teoretické úlohy, v dalším dni experimentální úlohu.

Třetí kolo proběhlo bez rušivých vlivů nebo projevů nekázně.

Práce opravovali vždy dva členové ÚV FO, a to

1. úlohu Fišer a Cimbůrek z Prahy,
2. úlohu Volf a Ungermann z Východočeského kraje,
3. úlohu Živný a Bajer ze Severomoravského kraje,
4. úlohu Zámečník a Náter ze Západoslovenského kraje,
5. úlohu experimentální Černický a Chytilová z Prahy.

Přehled žáků soutěžících ve 3. kole podle krajů je v tabulce 4, vítězni řešitelé v tabulce 5 a další úspěšní řešitelé v tab. 6. Klasifikace jednotlivých příkladů je v tab. 7.

Výsledky letošního 3. kola kategorie A jsou nejslabší za celou dobu trvání FO. Vítězů je jen 7 (za vítěze byli uznáni soutěžící, kteří měli nejvýše jednu úlohu nevyhovující), celkem všech úspěšných řešitelů bylo jen 19 ze 72 soutěžících.

Ministerstvo školství věnovalo pro 3. kolo letos opět částku 12 000

Kčs na věcné odměny. Kromě vítězům byly letos navrženy odměny i dalším 8 úspěšným řešitelům (viz tab. 5 a 6).

Při tak slabém výsledku 3. kola se pochopitelně hledaly příčiny. Příklady ve srovnání s dřívějšími ročníky nebyly podstatně obtížnější, příčiny je tedy nutno hledat jinde. Podle rozboru na schůzi ÚV FO má velký vliv zavedení pětidenního týdne na školách. Rozvrh pro pět dní je přeplněn a těžko se pro studenty hledá čas na zájmovou činnost, např. pro fyzikální kroužky. V některých školách nebyla probrána optika, ačkoli podle osnov měla být probrána. Kurzy pro žáky se konaly letos v nepoměrně menší míře nebo se nepořádaly vůbec, protože např. ve městech, kde je více SVVŠ, nebylo možno spojit žáky z více škol, kteří by měli současně volné odpoledne.

Mezi soutěžícími byly letos 3 dívky, ale žádná z nich nebyla úspěšnou řešitelkou.

Přehled o klasifikaci úloh 3. kola je v tab. 7. Z něho je vidět, že úloha z mechaniky a experimentální úloha byly zvládnuty nejlépe, nejslabší byla úloha o elektromagnetické indukci, úloha z optiky asi překvapila, protože úlohy tohoto druhu se v FO nedávaly.

Na schůzi ÚV FO, na níž se hodnotily výsledky 3. kola, byli vybráni soutěžící pro III. mezinárodní fyzikální olympiádu v ČSSR:

1. Vladimír Černý, 2. r. SVŠ Bratislava, Novohradská,
2. Mojmir Šob, 3. r. SVVŠ Velké Meziříčí,
3. Juraj Šafařík, 2. r. SVŠ Bratislava, Novohradská,
4. Karol Šafařík, 1. r. SVŠ Bratislava, Novohradská,
5. František Komín, 3. r. SPŠE Kutná Hora,

náhradníci

6. Václav Novotný, 3. r. SPŠJT Praha 4, Svatoslavova,
7. Antonín Rozsypal, 3. r. SPŠE Olomouc,
8. Jiří Vinárek, 3. r. SVVŠ Praha 2, W. Piecka,
9. Vladimír Hora, 3. r. SVVŠ Praha 7, Nad štolou,
10. Jiří Rákosník, 3. r. SPŠZem., Praha 9, Pod Tábořskou.

Ve dnech 10.—17. června bylo pro 5 soutěžících a 2 náhradníky ve Vyškově na Mor. soustředění před mezinárodní olympiádou.

#### **D. Závěr soutěže kategorií A, B a C**

Úspěšní řešitelé 2. kola kategorií A, B a C ze SVVŠ (SVŠ) jsou vesměs z přírodovědných větví nebo ze speciálních tříd pro žáky nadané v matematice a fyzice nebo konečně z programátorských tříd (matematické stroje). Letos se velmi výrazně projevil vliv speciálních tříd matematicko-fyzikálních. Mezi úspěšnými řešiteli 2. kola bylo z Prahy 2, tř. W. Piecka z kategorie A 7 žáků, B 27, C 11 žáků, z Plzně, nám.

Odborářů A 2, B 6, C 13 žáků, z Brna, Křenová ul. A 4, B 11, C 8 žáků, Bratislava, Novohradská A 7, B 15, C 14 žáků.

Pozoruhodné jsou výsledky 3. kola kategorie A z Bratislavy, kde mezi vítězi je jeden žák z 1. ročníku a 2 žáci z 2. ročníku speciální třídy mat.—fyz. Tito žáci soutěžili už v dřívějších letech jako žáci ZDŠ Bratislava, Košická ul.

Účast středních průmyslových škol je letos slabší početně, ale ve 3. kole kategorie A jsou mezi vítězi 3 žáci 3. ročníků (SPŠ Kutná Hora, SPŠJT Praha a SPŠE Olomouc), mezi úspěšnými jeden žák ze 3. r. (SPŠZem., Praha) a 2 žáci ze 4. r. (SPŠE Praha a SPŠ Ostrava). Žáci 3. ročníků SPŠ mohou v kategorii A soutěžit ještě v příštím školním roce.

Ze zpráv KV FO vyjímáme:

Příklady, které navazují na studijní témata, činí velké potíže (témata nejsou všem žákům dostupná). V kategorii C je přechodná nesrovnalost v osnovách pro 1. ročník gymnasií a pro 1. ročník SVVŠ, látka příkladů neodpovídá osnovám. Školy požadují stručnější příklady a méně dílčích otázek.

Nedostatky v práci žáků: Žáci mají malou schopnost samostatně usuzovat, nemají jasno v jednotkách a vztazích mezi nimi. Obecná řešení nejsou důsledná. Chybí výklad postupu řešení nebo se omezuje jen na popis matematických operací, nevysvětluje fyzikální principy, jichž se k řešení používá. Neužívá se správné terminologie, nedělají se rozměrové zkoušky.

Snad nejhorší stránkou soutěže je nedostatečná forma písemných projevů, často i u prací 1. kola, kde žák není tísněn vymezeným časem jako ve 2. nebo ve 3. kole. Mnohem lepší je úprava prací žáků průmyslových škol, kteří jsou k pěkné grafické úpravě soustavně vedeni. Práce žáků ze SVVŠ jsou neurované, roztahané, nečitelné, se špatným pravopisem.

Pro přechodnou dobu přeměny SVVŠ ve čtyřletá gymnasia budou v soutěži FO potíže, protože nelze vyhovět současně osnovám všech typů škol a kromě toho přeměna škol v gymnasia se neprovádí současně na všech školách. Značně odlišná je výuka na SPŠ a přesto je z těchto škol řada výborných řešitelů i v kategorii A.

### **E. Soutěž kategorie D**

První kolo kategorie D probíhalo do 31. března 1969. Úlohy pro 1. kolo byly uveřejněny v časopise Fyzika ve škole a kromě toho vydalo ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství leták pro tuto kategorii nákladem 10 000 výtisků.

Počet ZDŠ, které se zúčastnily FO, letos opět značně poklesl. Nej-

více byla opět zastoupena Praha (78 % ZDŠ, loni 82 %), v ostatních krajích polovina škol nebo méně, nejméně v kraji Východoslovenském (28 % škol). Přehled o počtu ZDŠ zapojených do soutěže FO je v tabulce 8.

Počet úspěšných řešitelů 1. kola poklesl, ve většině krajů v poměru k počtu soutěžících. Počet soutěžících ve 2. kole je rovněž nižší (asi o 350 žáků proti loňsku), počet úspěšných řešitelů 2. kola poklesl značně (o 830 žáků, tj. z loňských 65 % na 48 %). Počet soutěžících dívek ve 2. kole byl přibližně stejný, ale úspěšných řešitelek bylo mnohem méně.

TABULKA 8

Počet ZDŠ, které se účastnily FO

Kraj	Počet ZDŠ v kraji	1. kola se zúčastnilo		2. kola se zúčastnilo		3. kola se zúčastnilo	
		Počet	%	Počet	%	Počet	%
Praha	173	124	72	105	60	44	25
StČ	97	51	53	35	36	22	24
JČ	185	65	35	53	29	—	—
ZČ	222	108	51	69	31	10	4,5
SČ	290	126	43	84	29	36	12
VČ	328	145	45	110	34	31	9,5
JM	457	225	50	162	35	46	10
SM	450	176	39	119	27	31	7
ZS	545	236	43	171	31	36	9,5
SS	382	185	41	110	29	41	11
VS	378	105	28	80	21	—	—
Celkem	3507	1546	44	1098	31	297	0,85
Loni	3667	1757	48	1209	36	—	—

Podrobné údaje o počtu soutěžících v 1. a 2. kole jsou uvedeny v tabulce 9.



TABULKA 9

## Počet žáků soutěžících v 1. a 2. kole kategorie D

Kraj	Počet žáků soutěžících v 1. kole					Počet soutěžících ve 2. kole				
	Soutěžících	Úsp.	Úsp. v %	Z toho dívek		Soutěžících	Úsp.	Úsp. v %	Z toho dívek	
				Sout.	Úsp.				Sout.	Úsp.
Praha	1200	435	36	300	130	420	270	64	125	71
StČ	172	110	64	35	20	98	54	55	21	14
JČ	192	157	82	60	55	150	55	37	54	20
ZČ	251	148	57	41	23	131	58	43	21	6
SC	852	328	39	376	127	284	116	41	102	28
VČ	723	445	62	229	169	364	202	55	121	63
JM	993	486	49	217	87	450	109	24	107	24
SM	666	347	52	187	82	313	154	49	70	38
ZS	1503	819	55	686	329	759	236	32	297	89
SS	1171	446	38	451	155	380	218	58	123	68
VS	427	249	58	154	80	249	144	58	80	50
Celkem	8150	3969	49	2736	1257	3598	1716	48	1121	472
Loni	10633	5227	49	3676	1719	3935	2544	65	1210	689

Z krajů došlo ÚV FO hodně připomínek k soutěži kategorie D. Učitelé chtějí příklady krátké, nechtějí příklady s dílčími otázkami. Považují za nevhodné dávat soutěž 3. kola na volnou sobotu (je to však nutné vzhledem k možnosti ubytování žáků ze vzdálených okresů), někteří považují příklady za obtížné a předpokládají, že to odradí většinu zájemců (FO však chce vést žáky k samostatnějšímu myšlení, příklady v učebnicích jsou zpravidla tak jednoduché, že stačí dosadit do vzorečku). Jsou nedostatky ve výuce, např. účinnost stroje je v učebnici odbyta několika málo řádky, v příkladech FO se užití účinnosti vyskytuje často. Obecná řešení dělají žákům potíže, začínají se však na školách dosti procvičovat.

Grafická úprava žákovských prací je špatná, žáci nejsou ve školách důsledně vedeni k přehledným a úhledným zápisům. Při numerickém počítání se utápějí ve zdlouhavých výpočtech.

#### F. Třetí kolo kategorie D

Organizační řád, daný výnosem MŠK o MO a FO, neuvádí třetí kolo (krajské) pro kategorii D. Před třemi roky začal třetí kolo pokusně

TABULKA 10

Třetí kolo kategorie D

Kraj	Počet soutěžících		Počet úspěš. řešitelů <sup>1</sup>			Soutěž 3. kola se konala
	celk.	z toho dívek	celk.	v %	z toho dívek	
Praha	84	17	64	76	11	potřetí
StČ	41	8	11	27	1	poprvé
ZČ	14	1	8	57	1	poprvé
SČ	51	14	26	51	4	podruhé
VČ	42	12	20	48	5	potřetí
JM	72	14	19	27	2	počtvrté
SM	38	3	16	42	—	podruhé
ZS	61	13	19	31	4	podruhé
SS	48	8	17	35	1	podruhé
<b>Celkem</b>	<b>451</b>	<b>90</b>	<b>200</b>	<b>44</b>	<b>29</b>	—

## TABULKA 11

## Přehled 10 ročníků FO

Počet soutěžících v 1. kole, úspěšných řešitelů 1. kola a úspěšných řešitelů 2. kola podle jednotlivých kategorií a celkem ve všech třech kategoriích

Ročník	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Kategorie A+B+C		
	Sout. v 1. k.	Úsp. v 1. k.	Úsp. ve 2. k.	Sout. v 1. k.	Úsp. v 1. k.	Úsp. ve 2. k.	Sout. v 1. k.	Úsp. v 1. k.	Úsp. ve 2. k.	Sout. v 1. k.	Úsp. v 1. k.	Úsp. ve 2. k.
I.	1213	478	241	788	255	121	1202	348	177	3203	1081	539
II.	608	269	138	509	163	103	823	266	155	1940	698	396
III.	692	365	160	436	149	75	1112	357	119	2240	871	354
IV.	711	305	229	572	229	141	2169	742	312	3452	1276	682
V.	430	198	141	1029	482	216	2215	995	437	3674	1675	794
VI.	696	377	139	888	332	91	1940	719	149	3524	1428	379
VII.	767	469	277	931	466	211	1439	611	179	3137	1546	667
VIII.	985	561	119	977	480	207	2138	850	285	4100	1891	611
IX.	943	553	254	1014	524	177	1944	778	304	3901	1855	735
X.	678	467	220	865	511	200	1274	508	214	2817	1486	634
I. - X.	7723	4042	1918	8009	3591	1542	16256	6174	2331	31988	13807	5791

organizovat Jihomoravský kraj, postupně se přidávalo více krajů, takže letos z 11 krajů provedlo třetí kolo kategorie D už 9 krajů (kromě Jihočeského a Východoslovenského). Příklady byly letos opět zadány jednotně z ÚV FO a rozeslány pro každého soutěžícího žáka. Místopředseda ÚV FO doc. dr. Náter připravil pro Slovensko texty v jazyce slovenském a maďarském.

Třetí kolo v ČSR proběhlo dne 16. května 1969, v SSR musel být termín pozměněn, protože právě dne 16. května byla v celé SSR prověrka pořádaná MŠ SSR na všech ZDŠ.

Přehled výsledků 3. kola kategorie D je v tabulce 10. Výsledky jsou zcela uspokojivé, což je důkazem, že žáci pro 3. kolo byli vybráni dobře. Nejlepší výsledky má Praha, protože z 270 úspěšných řešitelů 2. kola bylo vybráno do 3. kola jen 84 žáků.

TABULKA 12

Přehled soutěžících 3. kola za 10 ročníků podle krajů

Kraj	Počet soutěžících	Počet úsp. řešitelů	Z toho vítězů	Počet neúsp. řešitelů	% neúsp. řešitelů
Praha	199	134	61	65	33
StČ	41	19	7	22	54
JČ	34	18	3	16	47
ZČ	32	18	4	14	44
SČ	56	19	7	37	66
VČ	75	46	15	29	39
JM	113	91	51	22	19
SM	79	40	16	39	49
ZS	59	36	10	23	39
SS	22	9	3	13	59
VS	40	20	2	20	50
Ostatní	33	11	8	22	66
<b>Celkem</b>	<b>783</b>	<b>461</b>	<b>187</b>	<b>322</b>	<b>41</b>

Poněvadž v době 1. ročníku FO bylo 20 krajů, byli účastníci z devíti zrušených krajů zahrnuti do sloupce „ostatní“.

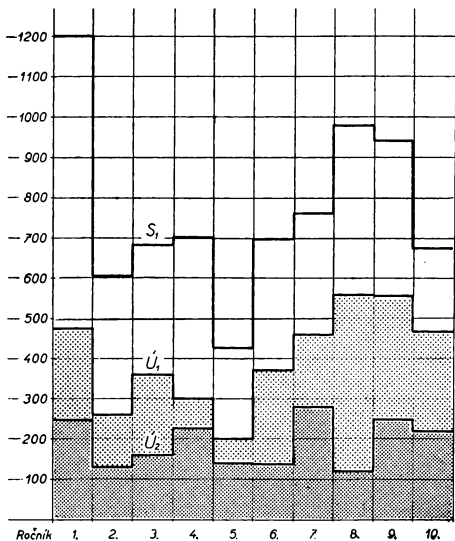


Diagram I

$S_1$  = počet soutěžících kategorie A v 1. kole

$U_1$  = počet úspěšných řešitelů 1. kola

$U_2$  = počet úspěšných řešitelů 2. kola

1300 1200 1100 1000 900 800 700 600 50 400 300  
 200 100 0 Roč. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

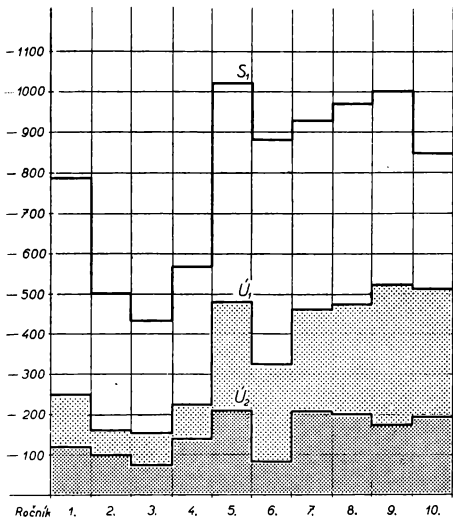


Diagram II

$S_1$  = počet soutěžících kategorie B v 1. kole

$U_1$  = počet úspěšných řešitelů v 1. kole

$U_2$  = počet úspěšných řešitelů ve 2. kole

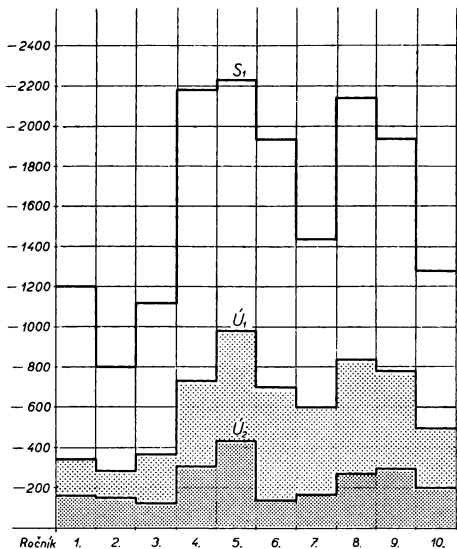


Diagram III

$S_1$  = počet soutěžících kategorie C v 1. kole

$U_1$  = počet úspěšných řešitelů 1. kola

$U_2$  = počet úspěšných řešitelů 2. kola

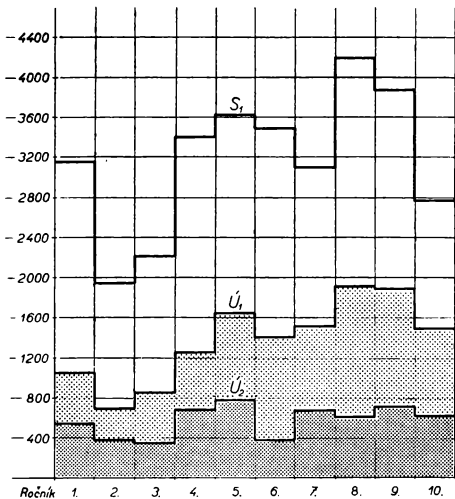


Diagram IV

$S_1$  = počet soutěžících kat. A + B + C v 1. kole

$U_1$  = počet úspěšných řešitelů 1. kola

$U_2$  = počet úspěšných řešitelů 2. kola



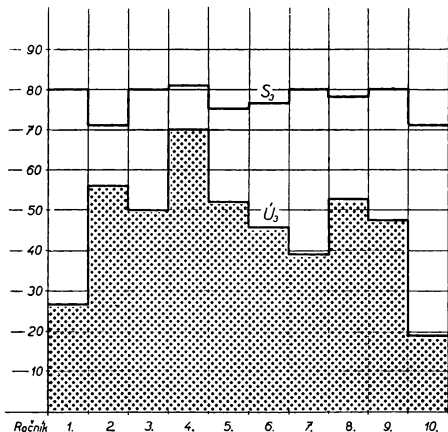


Diagram V

Počet soutěžících v 3. kole kategorie A a počet úspěšných řešitelů tohoto kola

### G. Zhodnocení a přehled deseti ročníků FO

Podíváme-li se zpět na všech deset ročníků fyzikální olympiády, posoudíme-li počty zúčastněných škol a žáků, vysvitne teprve obrovská práce, kterou učitelé této soutěži věnovali. Vždyť museli opravit a zkontrolovat opravy čtvrt miliónu žákovských prací v kategoriích A,

B a C a za uplynulé 4 ročníky kategorie D rovněž na čtvrt miliónu úloh. I když jsme si vědomi toho, že výsledky nejsou úměrné vynaložené práci, přece se ukazuje, že poměr úspěšných řešitelů FO např. ke studiu na vysokých školách je lepší, studium úspěšnější a hlubší. Bohužel nelze udělat podrobný průzkum, s jakým prospěchem studují účastníci olympiády po přechodu na vysokou školu; byl by jistě zajímavý.

Přehled počtů soutěžících podle jednotlivých ročníků, úspěšných řešitelů 1. kola a úspěšných řešitelů 2. kola je v tabulce 11, zobrazen je v diagramech I, II, III a IV. Výsledky 3. kola kategorie A podle krajů sumárně ze všech 10 ročníků FO jsou v tabulce 12, graficky v diagramu V.

Úspěchy FO jsou samozřejmě umožněny také pochopením cílů a snah školskými úřady, především ministerstvem školství, a podporou JČMF. Těžiště práce však spočívá na profesorech a učitelích všech stupňů škol. Proto také z iniciativy ÚV FO byla celá řada učitelů a školských pracovníků, kteří po celou dobu soutěže nebo dlouhou řadu let pracují v FO, vyznamenána čestnými tituly zasloužilý učitel nebo vzorný učitel. Kromě toho celá řada učitelů dostala děkovný dopis MŠ, děkovný dopis JČMF a pochvalné uznání ÚV FO.

ÚV FO děkuje nejen těmto vyznamenaným učitelům a školským pracovníkům, ale všem učitelům na všech stupních škol, kteří obětavě pracovali ve FO, dále děkuje školským úřadům, které práci FO podporovaly, především ústřednímu inspektorovi MŠ Josefu Bartůňkovi, a Jednotě čs. matematiků a fyziků za organizační pomoc v soutěži.

## **H. Soutěž o nejlepší samostatnou studentskou práci s fyzikální nebo technickou tematikou**

Při příležitosti X. ročníku FO a v rámci oslav stého výročí narozenin dr. Vladimíra Nováka, profesora fyziky na Vysokém učení technickém v Brně, vypsali KV FO Jihomoravského kraje spolu s pobočkou JČMF v Brně soutěž pro studující středních škol na samostatnou studentskou práci s fyzikální nebo technickou tematikou.

Do soutěže došlo celkem 9 prací, z nich 3 byly slabší, 6 prací bylo odměněno. Byly to práce:

1. František Kosina, 3. r. SVVŠ Blansko:  
Přijímač pro rádiem řízené modely (29 stran)
2. Zdeněk Kratochvíl, 3. r. SVVŠ Brno, Křenová:  
Fotografie kosmických těles (11 stran)
3. Zdeněk Odstrčilík, 2. r. SVVŠ Kroměříž:  
Analýza fotografického záznamu (10 stran)

4. Oldřich Kozmík, 2. r. SVVŠ Kroměříž:  
Ověření Faradayova zákona (9 stran)
5. Zdeněk Zemánek, 2. r. SVVŠ Prostějov:  
Proměnné hvězdy (6 stran)
6. Stanislav Fryšavský, 1. r. SVVŠ Nové Město na Mor.:  
Svítilní trubice (9 stran)

Tato soutěž podchycující experimentální a technické zájmy studentů by se mohla stát základem pro širší — celostátní soutěž, z níž vítězové by mohli postoupit i do dalšího — mezinárodního kola. První pokus v Jihomoravském kraji byl rozhodně velmi úspěšný, některé práce byly překvapením.

## II. ČÁST

### TÉMATA K PROSTUDOVÁNÍ

#### 1. Kategorie A

##### Elektronkové zesilovače

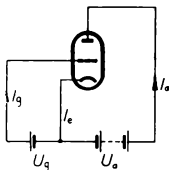
*Konrád Hofman, PF České Budějovice*

##### 1. Trioda, její charakteristiky a parametry

Především zopakujeme a doplníme to, co se o triodě probírá na gymnasiích.

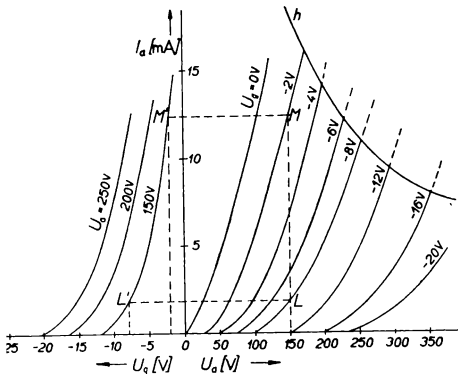
Emisní proud  $I_e$  se u triody (obr. 1) v obecném případě rozdělí na anodový proud  $I_a$  a mřížkový proud  $I_g$ . Je-li však mřížkové napětí menší než asi  $-1,3$  V, je mřížkový proud  $I_g \doteq 0$  a  $I_a \doteq I_e$ . Tento případ, kdy má tedy mřížka záporné napětí vůči katodě, čili tzv. záporné předpětí, je důležitý u elektronkových zesilovačů.

Anodový proud  $I_a$  závisí nejen na anodovém napětí  $U_a$ , ale hlavně na mřížkovém předpětí  $U_g$ , a protože tyto závislosti jsou nelineární



Obr. 1. Emisní proud triody  $I_e = I_a + I_g$

a nelze je také vyjádřit přesným matematickým vztahem, znázorníme je graficky pomocí charakteristik.



Obr. 2. Převodní a anodové charakteristiky triody

Anodové charakteristiky (obr. 2, vpravo) znázorňují závislost

$$I_a = f(U_a) \text{ při } U_g = \text{konst.},$$

to je závislost anodového proudu  $I_a$  na anodovém napětí  $U_a$ , přičemž mřížkové napětí je pro určitou charakteristiku stálé.

Převodní (statické) charakteristiky (obr. 2, vlevo) zná-

zornují závislost

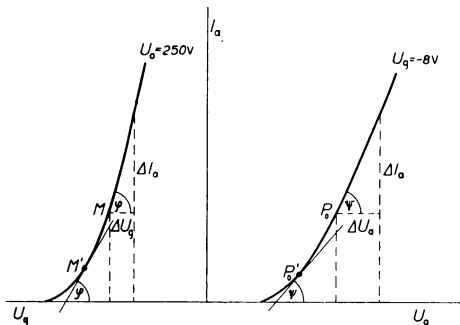
$$I_a = f(U_g) \text{ při } U_a = \text{konst.}$$

Z obr. 2 je současně patrné, jak ze soustavy anodových charakteristik lze sestavit soustavu převodních charakteristik a obráceně.

Pro triodu jsou důležité tři parametry.

$$\text{a) Strmost } S = \left( \frac{\Delta I_a}{\Delta U_g} \right)_{U_a} \quad (1)$$

je číselně rovna směrnici tečny  $\text{tg } \varphi$  v určitém bodě převodní charakteristiky (obr. 3a), přičemž index  $U_a$  značí, že  $U_a$  je konstantní. Udává se v  $\text{mA V}^{-1}$ . Změny  $\Delta I_a$ ,



Obr. 3a. Určení strmosti  $S$  z převodní charakteristiky

Obr. 3b. Určení vnitřního odporu  $R_i$  z anodové charakteristiky

$\Delta U_a$ ,  $\Delta U_g$  jsou obecně velmi malé (nekonečně malé). V přímkových částech charakteristik mohou však být libovolně velké.

$$\text{b) Průnik } D = \left( \frac{\Delta U_g}{\Delta U_a} \right)_{I_a}, \quad (2)$$

přičemž index  $I_a$  značí, že  $I_a$  je konstantní.

Bývá udáván v procentech. Reciproká hodnota průniku

$$\frac{1}{D} = \mu$$

je zesilovací činitel, je to číslo bez rozměru.

Ze vztahu (2) plyne

$$\Delta U_g + D (-\Delta U_a) = 0$$

při konst.  $I_a$ .

To znamená: Změní-li se anodové napětí  $U_a$  o  $-\Delta U_a$  a současně se změní mřížkové předpětí  $U_g$  o  $\Delta U_g = D\Delta U_a$ , anodový proud se nezmění.

Je to zřejmé z obr. 4a. Původní stav daný bodem  $M [U_g, I_a]$ , který leží na převodní charakteristice pro anodové napětí  $U_a$ , přejde po změně  $-\Delta U_a$  a změně  $\Delta U_g$  do stavu, který je určen bodem

$$N [U_g + \Delta U_g, I_a]$$

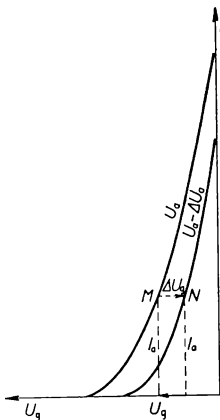
ležícím na převodní charakteristice s anodovým napětím  $U_a - \Delta U_a$ . Anodový proud se nezměnil.

Rovnici (2) můžeme napsat také takto

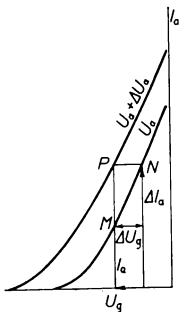
$$\Delta U_g = D\Delta U_a.$$

Tento vztah lze interpretovat takto: Změna anodového napětí  $\Delta U_a$  způsobí stejnou změnu anodového proudu  $\Delta I_a$  jako změna mřížkového předpětí  $\Delta U_g = D\Delta U_a$ , čili

změna  $\Delta U_a$  z hlediska změn anodového proudu je ekvivalentní změně  $\Delta U_g = D\Delta U_a$ .



Obr. 4a. Anodový proud se při současné změně  $\Delta U_a$  a  $\Delta U_g = D\Delta U_a$  nemění



Obr. 4b. Změna  $\Delta U_a$  je ekvivalentní změně  $\Delta U_g = D\Delta U_a$

Vysvětlíme to opět na grafu (obr. 4b). Vyjdeme z bodu  $M [U_g, I_a]$ .

Přírůstku  $\Delta U_g$  odpovídá přírůstek  $\Delta I_a$

(bod  $N [U_g + \Delta U_g, I_a + \Delta I_a]$ ),



příčemž anodové napětí zůstalo konstantní. Ponecháme-li mřížkové předpětí  $U_g$  stálé, ale anodové napětí  $U_a$  zvýšíme o  $\Delta U_a$ , dostaneme se do bodu  $P [U_g, I_a + \Delta I_a]$ . Přírůstek  $\Delta I_a$  je v obou případech stejný.

Protože

$$\Delta U_g = D\Delta U_a = \frac{1}{\mu} \Delta U_a ,$$

má změna mřížkového předpětí  $\Delta U_g$  na anodový proud  $\mu$ -krát větší vliv než stejná změna anodového napětí  $\Delta U_a$ .

Dále je z předešlého patrné, že zvětší-li se anodové napětí o  $\Delta U_a$ , posune se převodní charakteristika o  $\Delta U_g = -D\Delta U_a$  doleva.

$$c) \text{ Vnitřní odpor } R_1 = \left( \frac{\Delta U_a}{\Delta I_a} \right)_{U_g} , \quad (3)$$

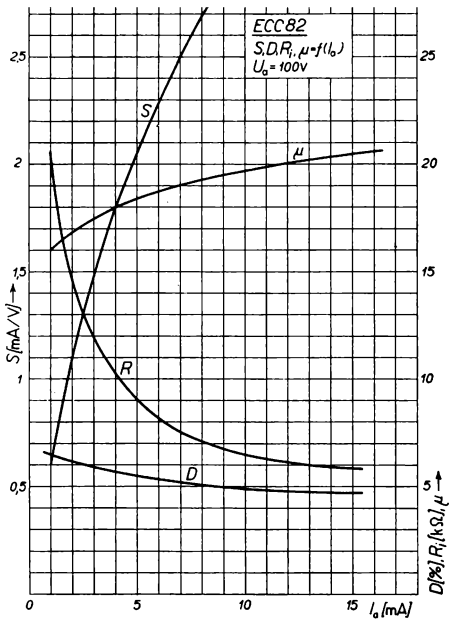
příčemž index  $U_g$  značí, že  $U_g$  je konstantní.

Z obr. 3b je zřejmé, že směrnice tečny anodové charakteristiky  $\operatorname{tg} \psi$  je úměrná  $\frac{1}{R_1}$ . Protože anodové charakteristiky jsou značně zakřiveny, závisí vnitřní odpor  $R_1$  velmi na pracovním bodě  $P_0$  (obr. 3b).

Vynásobíme-li vztahy (1), (2), (3), dostaneme Barkhausenovu rovnici

$$SR_1D = 1 \text{ nebo } R_1S = \mu .$$

Barkhausenova rovnice platí jen pro číselné hodnoty parametrů v témž určitém pracovním bodě daném dvěma souřadnicemi, např.  $U_g, I_g$ , jde-li o převodní charakteristiky, nebo  $U_a, I_a$ , jde-li o anodové charakteristiky. V každém pracovním bodě mají parametry jiné hodnoty. Proto v katalogích elektronek se uvádějí vedle uvedených charakteristik grafy udávající závislosti (obr. 4c)



Obr. 4c. Grafy udávající závislost parametrů triody na  $I_a$

$$\begin{array}{l}
 R_i = f(I_a) \quad \text{při } U_a = \text{konst.}, \\
 S = f(I_a) \quad \text{při } U_a = \text{konst.}, \\
 D = f(I_a) \quad \text{při } U_a = \text{konst.} \\
 \text{a} \quad \mu = f(I_a) \quad \text{při } U_a = \text{konst.}
 \end{array}$$

V teoretických úvahách se trioda nahrazuje tzv. ekvivalentní diodou, jejíž anodový proud je roven anodovému proudu uvažované triody.

Taková ekvivalentní dioda má anodu v tom místě, v němž má trioda mřížku, a napětí, tzv. řídicí, na anodě ekvivalentní diody je, jak se dá ukázat,

$$U_r = U_g + DU_a,$$

kde průnik  $D$  udává, do jaké míry se anodové napětí uplatňuje v napětí řídicím.<sup>1)</sup>

Tato úvaha platí jen pro střední část charakteristiky.

Čím více proniká anodové napětí mřížkou, čili čím

<sup>1)</sup> Uvažujeme-li elektrostaticky (bez prostorového náboje), je průnik  $D$  dán vztahem

$$D = \frac{C_{ak}}{C_{gk}},$$

kde  $C_{ak}$  je kapacita mezi anodou a katodou,  $C_{gk}$  je kapacita mezi mřížkou a katodou. Je-li totiž na mřížce napětí  $U_g$  a na anodě napětí  $U_a$ , je celkový náboj indukovaný na katodě

$$Q = C_{gk} U_g + C_{ak} U_a = C_{gk} \left( U_g + \frac{C_{ak}}{C_{gk}} U_a \right).$$

Týž náboj je na katodě diody, jejíž anoda má proti katodě kapacitu  $C_{gk}$  (tedy stejnou jako mřížka triody) a napětí

$$\left( U_g + \frac{C_{ak}}{C_{gk}} U_a \right).$$

Proud, který v oblasti prostorového náboje emituje katoda, je nyní určen intenzitou elektrického pole na katodě. Ta je však stejná v triodě i v uvažované ekvivalentní diodě, poněvadž jsou stejné náboje indukované na katodách.

e větší průnik  $D$ , tím méně ovládá mřížkové napětí anodový proud, čili tím je menší zesilovací činitel  $\mu$ , je to ostatně zřejmé ze vztahu

$$\mu = \frac{1}{D}.$$

Anodový proud náhradní diody je (při stálé teplotě katody) funkcí jen jejího anodového napětí, tedy řídicího napětí  $U_r$ . Protože anodový proud triody je stejný, je rovněž funkcí jen řídicího napětí, tedy

$$I_a = f(U_g + DU_a) = f\left(U_g + \frac{1}{\mu} U_a\right).$$

## 2. Vliv střídavého napětí na mřížce triody na anodový proud

Z definice strmosti (1) plyne

$$\Delta I_a = S \Delta U_g \quad (4)$$

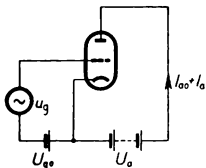
při konstantním  $U_a$ .

To znamená, že změně mřížkového napětí  $\Delta U_g$  odpovídá změna anodového proudu  $\Delta I_a = S \Delta U_g$ , je-li  $U_a$  konstantní (obr. 3a).

Mřížkové napětí můžeme periodicky měnit střídavým napětím (signálem) zavedeným na mřížku zároveň se stejnosměrným předpětím. Pak se bude v témž rytmu měnit anodový proud, tj. objeví se v něm analogická střídavá složka. Anodový proud se mění při změnách mřížkového napětí téměř okamžitě, poněvadž doba letu elektronů od katody k anodě je velmi krátká. Teprve při velmi vysokých kmitočtech, kdy doba letu elektronů je řádově srovnatelná s periodou signálu, jsou změny anodo-

vého proudu znatelně opožděny za změnami mřížkového napětí.

V dalším budeme stejnosměrné proudy a napětí značit indexem 0, tedy např.  $I_{a0}$ ,  $U_{a0}$ ,  $U_{g0}$ , abychom je odlišili od střídavých proudů a napětí, kde malá písmena ( $i_a$ ,  $u_a$ ,  $u_g$ ) značí okamžité hodnoty, velká písmena ( $I_a$ ,  $U_a$ ,  $U_g$ ) hodnoty efektivní a  $I_{am}$ ,  $U_{am}$ ,  $U_{gm}$  amplitudy střídavého proudu nebo napětí.



Obr. 5. Trioda se střídavým signálem v mřížkovém obvodu

vládá přes stejnosměrný proud  $I_{a0}$ .

Vztah (4) potom platí pro

$$\text{hodnoty okamžité } i_a = S u_g,$$

$$\text{hodnoty efektivní } I_a = S U_g,$$

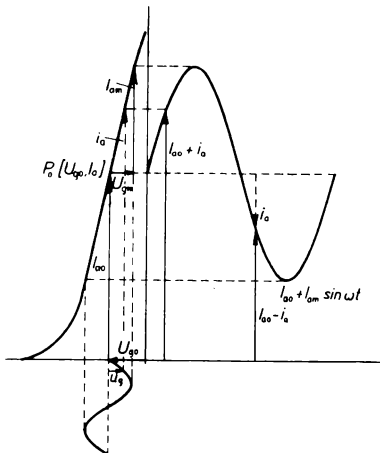
$$\text{amplitudy } I_{am} = S U_{gm}.$$

Střídavý proud  $i_a$  a střídavé napětí  $u_g$  mají stejnou fázi.

### 3. Anodová ztráta

Uvedený případ (obr. 5), kdy v anodovém obvodu není žádná zatěžovací impedance, nemá praktický význam.

Uvažujme zapojení podle obrázku 5. Mřížkové předpětí  $U_{g0}$  zvolíme tak, aby pracovní (klidový) bod [ $U_{g0}$ ,  $I_{a0}$ ] padl do střední téměř přímkové části převodní charakteristiky (obr. 6). Potom střídavému napětí  $u_g = U_{gm} \cdot \sin \omega t$  odpovídá (pracujeme-li v přímé části charakteristiky) střídavý anodový proud  $i_a = I_{am} \cdot \sin \omega t$ , který se pře-



Obr. 6. Vliv střídavého signálu na anodový proud

Střídavé napětí v mřížkovém obvodu vyvolá sice střídavý proud v anodovém obvodu, ale celý výkon anodového zdroje ohřívá anodu; tento výkon nazveme anodovou ztrátou a má velikost  $P_a = U_{a0} I_{a0}$ . Anodový proud se totiž s časem mění podle vztahu  $I_{a0} + I_{am} \sin \omega t$ , ale jeho průměrná hodnota je  $I_{a0}$ . Je to zřejmé z obr. 6. Každé hodnotě  $I_{a0} + i_a$  kladné půlvlny odpovídá hodnota

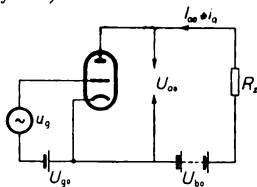
$I_{oa} - i_a$  záporné půlvlny, takže aritmetický průměr je  $I_{oa}$ . Anodová ztráta je proto stejná, ať je anodový proud se střídavou složkou, nebo bez ní.

Grafickým znázorněním rovnice  $P_a = U_{ao}I_{ao}$  je rovnosá hyperbola (hyperbola anodové ztráty). Maximální přípustná anodová ztráta je udána v katalozích elektronek a při návrhu zesilovače nesmí být překročena. Na obr. 2 křivka  $h$  je hyperbolou maximální přípustné anodové ztráty.

#### 4. Elektronkové zesilovače

##### *Poučka o ekvivalentním obvodu triody*

Zesilovač je zařízení, které zvětšuje napětí, proud nebo výkon tak, že vstupní hodnoty ovládají elektrický výkon dodávaný z místního zdroje výstupnímu obvodu. Nejčastěji přivádíme na vstup (mřížkový obvod) budicí napětí  $u_g$  (signál), z anodového obvodu (výstupu) získáme buď zesílené napětí (zesilovač napětí), nebo značně silný proud (zesilovač proudu) anebo značný výkon (zesilovač výkonu).



Obr. 7. Schéma triodového zesilovače

Proto musíme do anodového obvodu zapojit nějakou zatěžovací impedanci, kterou v nejjednodušším případě bude zatěžovací odpor  $R_z$ . Schéma takového zesilovače je na obr. 7.

Je-li v mřížkovém obvodu jen konstantní mřížkové předpětí  $U_{g0}$ ,

je také anodový proud konstantní  $I_{a0}$ . Napájecí napětí  $U_{b0}$  se zčásti spotřebuje na zatěžovacím odporu  $R_z$  a zbytek, napětí mezi anodou a katodou, je anodové napětí  $U_{a0}$  čili

$$U_{b0} = R_z I_{a0} + U_{a0}.$$

Střídavé mřížkové napětí  $u_g$  vyvolá střídavý anodový proud  $i_a$ , který však bude menší, než kdyby byl anodový obvod bez odporu  $R_z$ .

Zvětší-li se totiž anodový proud  $I_{a0}$  o střídavou složku  $i_a$ , zvětší se napětí na odporu  $R_z$  o  $u_z = R_z i_a$  a o tutéž hodnotu musí klesnout anodové napětí  $U_{a0}$ , neboť  $U_{b0}$  je konstantní.

Protože anodový proud je řízen jak mřížkovým, tak anodovým napětím, bude účinek mřížkového napětí  $u_g$  snížen o  $Du_a = DR_z i_a$  (zpětné působení anody na mřížku).

Je tedy

$$i_a = S(u_g - Du_a) = Su_g - SDR_z i_a.$$

Vypočítáme-li z této rovnice  $i_a$ , dostaneme

$$i_a = \frac{Su_g}{1 + SDR_z} = \frac{u_g}{DR_1(1 + SDR_z)} = \frac{u_g}{D} \frac{1}{R_1 + R_z}$$

čili

$$i_a = \frac{\mu u_g}{R_1 + R_z}. \quad (5)$$

Při úpravě bylo použito Barkhausenovy rovnice.

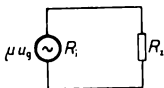
Dále je

$$-u_a = u_z = R_z i_a = \mu u_g \frac{R_z}{R_1 + R_z}. \quad (6)$$

Ze vztahu (5) plyne důležitá poučka o ekvivalentním



obvodu triody (Barkhausenova věta): Triodu, na jejíž mřížku je vloženo střídavé napětí  $u_g$ , je možno, pokud uvažujeme jen střídavý proud v anodovém obvodu, nahradit generátorem střídavého proudu o elektromotorickém napětí  $\mu u_g$  a vnitřním odporu  $R_i$  (obr. 8).



Obr. 8. Ekvivalentní obvod triody

Věta ovšem platí jen pro malé amplitudy napětí  $u_g$ , pokud totiž výsledné napětí mřížky (stejnoseměrné s přeloženou střídavou složkou) se stále pohybuje v tak malém intervalu kolem klidového bodu, že parametry  $\mu$ ,  $R_i$  lze považovat za stálé, tj. v němž lze charakteristiku považovat za přímko-

vou. Obvykle to bývá splněno pro efektivní hodnoty mřížkového střídavého napětí řádu nejvýše  $10^{-1}$  V.

Jak je z předešlého patrné, slouží stejnosměrné klidové veličiny  $U_{g0}$ ,  $U_{a0}$ ,  $I_{a0}$ ,  $U_{b0}$  při návrhu zesilovače jen k nastavení vhodných pracovních podmínek, dále nás zajímají jen střídavé proudy a napětí, o nichž právě jedná věta Barkhausenova.

Rovnici (5) můžeme dále upravit

$$i_a = \frac{\mu u_g}{R_1 + R_z} = S \frac{R_1}{R_1 + R_z} u_g = S' u_g,$$

kde

$$S' = S \frac{R_1}{R_1 + R_z} = \frac{\mu}{R_1 + R_z}$$

je tzv. dynamická strmost (strmost tzv. dynamické charakteristiky), kdežto statická převodní charakteristika má strmost

$$S = \frac{\mu}{R_1}.$$

U triody se zesilovací činitel  $\mu$  velmi málo mění, vnitřní odpor  $R_1$  je však značně závislý na pracovním bodě, proto je i strmost  $S$  stálá jen v malém pracovním rozsahu. Zvolíme-li však  $R_z \gg R_1$ , je dynamická strmost  $S'$  constantní ve větším rozsahu než strmost  $S$ .

V tomto větším rozsahu je pak dynamická charakteristika přibližně přímková. Poněvadž křivost dynamické charakteristiky způsobuje zkreslení (výstupní střídavé napětí není věrným obrazem napětí budicího), mohou triodové zesilovače pracovat s malým zkreslením.

### 5. Zatěžovací a dynamická charakteristika

Poučka o ekvivalentním obvodu nám umožňuje výpočet zesilovače na základě parametrů triody platných pro klidový bod určený hodnotami  $U_{ao}$ ,  $I_{ao}$ ,  $U_{go}$ . Poučka, jak bylo uvedeno, platí přesně jen v blízkém okolí klidového bodu. Činnost zesilovače při větším pracovním rozsahu, tj. pro větší amplitudy mřížkového napětí, zjišťujeme nejnázne graficky pomocí zatěžovací a dynamické charakteristiky.

Předpokládejme, že zatěžovací impedancí je opět odpor  $R_z$ . Přivádíme-li na mřížku jen mřížkové předpětí  $U_{go}$  a je-li anodové napětí  $U_{ao}$ , platí pro anodový obvod, jak již bylo dříve uvedeno,

$$U_{bo} = U_{ao} + R_z I_{ao}. \quad (7)$$

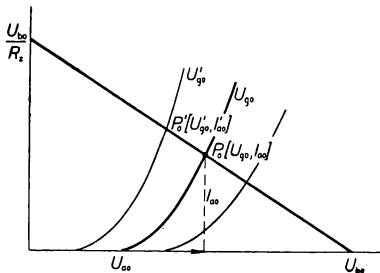
Považujeme-li  $U_{ao}$ ,  $I_{ao}$  za proměnné, je lineární rovnice (7) rovnicí zatěžovací přímkou. Dělením  $U_{bo}$  získáme úsekový tvar

$$\frac{U_{ao}}{U_{bo}} + \frac{I_{ao}}{\frac{U_{bo}}{R_z}} = 1,$$

z něhož je zřejmé, že úsek na ose  $x$ , na níž nanášíme napětí  $U_{ao}$ , je  $U_{bo}$ , úsek na ose  $y$ , kam se nanáší  $I_{ao}$ , je

$$\frac{U_{bo}}{R_z}$$

Poloha zatěžovací přímky (obr. 9) je tedy určena napětím  $U_{bo}$  a odporem  $R_z$ , nezávisí proto na elektronce.



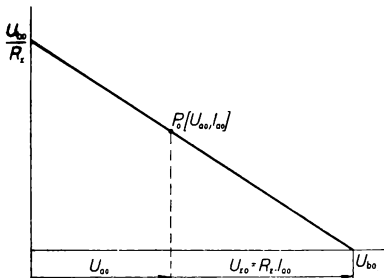
Obr. 9. Zatěžovací přímka

Sestrojíme nyní do soustavy anodových charakteristik zatěžovací přímku. Potom klidový bod  $P_o[U_{ao}, I_{ao}]$  je průsečíkem zatěžovací přímky a charakteristiky s parametrem  $U_{go}$  (obr. 10). Změníme-li mřížkové předpětí na  $U'_{go}$ , posune se bod  $P_o$  po zatěžovací přímce do bodu  $P'_o$ , jehož souřadnice opět určují  $U'_{ao}, I'_{ao}$ .

Privádíme-li nyní na mřížku triody (obr. 11) vedle mřížkového předpětí  $U_{go}$  ještě střídavé napětí  $u_g = U_{gm} \cdot \sin \omega t$ , čili je-li celkové napětí na mřížce

$$u_{gc} = U_{go} + U_{gm} \sin \omega t,$$

pohybuje se bod  $P_0$  kmitavým pohybem po úsečce  $MN$ , jeho pohyb však nemusí být harmonický (může nastat zkreslení).



Obr. 10. Změnou mřížkového předpětí se posune bod  $P_0$  do  $P_0'$  po zatěžovací přímce

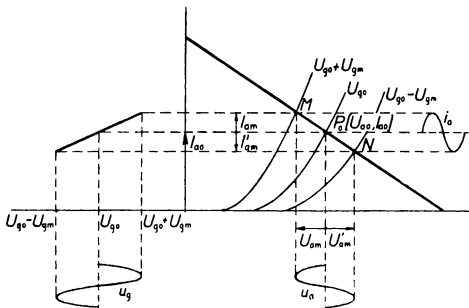
Přes klidové anodové napětí  $U_{a0}$  se překládá střídavé napětí  $u_a$  a přes klidový anodový proud  $I_{a0}$  se překládá střídavý proud  $i_a$ .

Ale ani kmitání anodového napětí  $u_a$ , ani kmitání anodového proudu  $i_a$  nemusí být harmonické.

Všimněme si ještě, že  $u_g$  a  $i_a$  mají stejnou fázi, ale  $u_a$  má fázi opačnou.

O tom, zda zkreslení nastane, nás poučí dynamická charakteristika, kterou získáme tak, že zatěžovací cha-

rakteristiku přeneseme do soustavy převodních charakteristik, a to tak, že celkový anodový proud  $i_{ac} = I_{a0} + i_a$ , který odpovídá průsečíkům různých anodových charak-



Obr. 11. Zatěžovací přímka a dynamická charakteristika

teristik se zatěžovací přímkou, se vynese k příslušným hodnotám mřížkového napětí (obr. 11).

Bude-li dynamická charakteristika přímková, zkreslení nenastane,  $u_a$ ,  $i_a$  budou harmonické.

## 6. Rozdělení zesilovačů

Zesilovače můžeme dělit podle různých hledisek. Všimneme si jen dělení podle použití.

a) Zesilovače napětí mají odevzdat na výstupu co nej-

větší napětí, přičemž zatěžovací impedancí prochází jen velmi slabý proud.

b) Zesilovače proudu mají dodat do výstupní impedance (např. do vinutí relé) silný proud úměrný mřížkovému proudu. Mřížkový proud však neprochází elektronkou, nýbrž jen mřížkovým odporem, a napětí na tomto odporu je mezi mřížkou a katodou, takže ovládá anodový proud.

c) Zesilovače výkonu mají dodat na výstupu (např. do reproduktoru) co největší výkon. K tomu se užívá tzv. koncových elektronek.

V dalším pojednáme jen o zesilovačích napětí a výkonu, a to za předpokladu, že zatěžovací impedancí je odpor  $R_z$ .

## 7. Zesilovače napětí

U těchto zesilovačů nám jde o získání co největšího napětí na odporu  $R_z$ , přičemž anodový proud bude malý. Triody používané pro tento účel, tzv. triody předzesilovací, mívají malou přípustnou anodovou ztrátu a velký vnitřní odpor. Tak např. trioda ECC83 má přípustnou anodovou ztrátu 1 W, vnitřní odpor 62,6 k $\Omega$  a zesilovací činitel 100.

Zesilovače pracují zpravidla s malým budicím napětím  $u_g$ , a proto můžeme použít poučky o ekvivalentním obvodu, z níž pro zesílení  $A$  ze vztahu (6) plyne

$$A = \frac{u_a}{u_g} = - \frac{u_z}{u_g} = - \mu \frac{R_z}{R_1 + R_z};$$
$$|A| = \frac{u_z}{u_g} = \mu \frac{R_z}{R_1 + R_z}. \quad (8)$$

Z tohoto vztahu je patrné, že zesílení  $A$  se bude tím více blížit zesilovacímu činiteli  $\mu$ , čím bude odpor  $R_z$

větší. Je-li však  $R_z \gg R_1$ , nemá již další zvětšování odporu  $R_z$  na zesílení téměř vliv, a proto nemá význam volit  $R_z > 500 \text{ k}\Omega$ .

## 8. Zesilovače výkonu

Při malém buzení, při němž získáme nezkreslený výkon, bude tento výkon maximální, volíme-li zatěžovací odpor  $R_z$  rovný vnitřnímu odporu triody  $R_1$ . Lze totiž dokázat, že zdroj dodává maximální výkon do spotřebiče tehdy, je-li odpor spotřebiče roven vnitřnímu odporu zdroje.

Protože se jedná o nezkreslený výkon, můžeme při řešení použít poučky o ekvivalentním obvodu triody. Výkon na zatěžovacím odporu  $R_z = R_1$  bude tedy ( $I_a$ ,  $U_g$  jsou efektivní hodnoty střídavého proudu a napětí)

$$\begin{aligned}
 P &= R_z I_a^2 = R_z \left( \frac{\mu U_g}{R_1 + R_z} \right)^2 = \frac{\mu^2 U_g^2}{4R_1} = \frac{1}{4} \mu \frac{\mu}{R_1} U_g^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \mu \frac{SR_1}{R_1} U_g^2 = \frac{1}{4} S \mu U_g^2 = \frac{1}{4} G U_g^2, \quad (9)
 \end{aligned}$$

kde  $G = S\mu$  je jakostní číslo (kvalita) triody.

Ze vztahu (9) plyne, že výkon je úměrný kvalitě triody, je tedy tím větší, čím je větší strmost a zesilovací činitel

$$\mu = \frac{1}{D}.$$

Protože strmost  $S$  nelze příliš zvětšit, je třeba zvětšit  $\mu$  čili zmenšit průnik  $D$ .

Anodový proud je určen řídicím napětím  $U_{ro} = U_{go} + + DU_{a0}$ . V zesilovači nemá téci mřížkový proud, musí

proto  $U_{go} < 0$ , ale musí procházet anodový proud čili musí

$$U_{ro} = U_{go} + DU_{ao} > 0.$$

Z těchto dvou podmínek plyne

$$-DU_{ao} < U_{go} < 0.$$

Tento interval je maximálním pracovním rozsahem pro volbu klidového předpětí  $U_{go}$ .

Pracovní rozsah bude tedy tím větší, čím bude větší průnik  $D$  a anodové napětí  $U_{ao}$ . Protože není vhodné zvětšovat příliš anodové napětí  $U_{ao}$ , bylo by třeba zvětšit průnik  $D$ .

## 9. Tetroda a pentoda

Průnik  $D$  má mít tedy dvě navzájem si odporující vlastnosti. Měl by být malý, aby bylo velké zesílení, měl by být velký, aby byl velký pracovní rozsah. Tento problém je u triody neřešitelný. Trioda má však ale i jiné nedostatky, jako je např. velké zpětné působení anody na mřížku a jiné.

Tyto nedostatky lze odstranit přidáním další mřížky, čímž vznikne elektronka zvaná tetroda (obr. 12a). Mřížka  $G_1$  je mřížkou řídicí,  $G_2$  je mřížkou stínící.

Ukážeme jen, že stínící mřížkou se dají řešit oba vzájemně si odporující požadavky na velikost průniku.

Pro tetrodu lze provést podobné úvahy, jaké jsme učinili u triody.

V teoretických úvahách můžeme tetrodu nahradit triodou mající anodu v místech stínící mřížky, na niž působí napětí

$$U_{so} = U_{g2o} + D_2U_{ao},$$



Obr. 12a.  
Tetroda



$D_2$  je průnik anody stínicí mřížkou, který se volí velmi malý. Tuto triodu nahradíme diodou s řídicím napětím

$$U_{ro} = U_{g1o} + D_1 U_{so} = U_{g1o} + D_1 U_{g2o} + D_1 D_2 U_{ao},$$

kde  $D_1$  je průnik druhé mřížky prvou, který se volí velký. Zvolíme-li tedy  $D_2$  malé a  $D_1$  velké, bude efektivní průnik anody  $D_1 D_2$  malý, a tudíž zesilovací činitel  $\mu$  velký, současně také posouvací napětí

$$D_1 U_{g2o} + D_1 D_2 U_{ao},$$

kteřé rozhoduje o pracovním rozsahu, bude rovněž velké, protože  $D_1$  je velké a  $U_{g2o}$  lze zvolit také dost velké ( $U_{g2o} \doteq U_{ao}$ ).

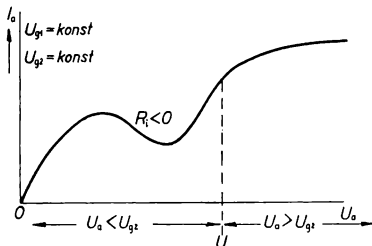
Tetroda tedy odstraňuje nedostatky triody, ale má novou vadu. Dopadem elektronů na anodu vzniká sekundární emise elektronů, která se u diody a triody nijak nepříznivě neprojevuje, poněvadž sekundární elektrony se opět vrací k anodě, jež je jedinou kladnou elektrodou soustavy. U tetrody se však může stát, že sekundární elektrony, emitované z anody, jsou přitahovány stínicí mřížkou, má-li tato mřížka kladnější napětí než anoda.

Anodový proud je pak dán rozdílem primárního proudu  $I_{ap}$  přicházejícího z katody a odcházejícího sekundárního  $I_{as}$ , tedy

$$I_a = I_{ap} - I_{as}.$$

Při zvětšování  $U_a$  roste jak proud  $I_{ap}$ , tak i proud  $I_{as}$ . V nějakém oboru hodnot  $U_a$  může nyní  $I_{as}$  stoupat rychleji než  $I_{ap}$ , takže funkce  $I_a = f(U_a)$  při konstantním  $U_{g1}$  a  $U_{g2}$  (anodová charakteristika) má klesající charakter. V tomto oboru (tzv. dynatronovém) má pak tetroda záporný vnitřní odpor, protože zvýšení anodového napětí odpovídá zmenšení anodového proudu, takže poměr obou změn je záporný. Obr. 12b znázorňuje typický průběh anodové charakteristiky tetrody.

Aby se tomu zamezilo, přidává se ještě další mřížka, tzv. brzdící, která má potenciál stejný jako katoda. Někdy bývá (u výkonových pentod) uvnitř baňky propojena



Obr. 12b. Anodová charakteristika tetrody

s katodou. Sekundární elektrony se potom vracejí zpět k anodě, poněvadž brzdící mřížka vytvoří před anodou záporný spád potenciálu, který je tak velký, že zastaví sekundární elektrony letící od anody a vrátí je zpět. Tato dnes nejužívanější elektronka se nazývá pentoda.

## 10. Získání záporného mřížkového předpětí

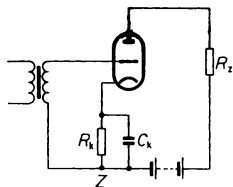
Záporné mřížkové předpětí se u přímo žhavených elektronek získává suchou baterií. U nepřímo žhavených elektronek se získá katodovým odporem  $R_k$  (obr. 13).

Prochází-li anodovým obvodem proud  $I_{a0}$ , vzniká na odporu  $R_k$  úbytek napětí  $R_k I_{a0}$ , katoda má proto potenciál o  $R_k I_{a0}$  vyšší než bod Z, který má potenciál stejný jako

mřížka. Je tedy mřížka o  $U_{go} = R_k I_{ao}$  zápornější než katoda.

Prochází-li anodovým obvodem kromě stejnosměrného proudu  $I_{ao}$  ještě střídavá složka  $i_a$ , kolísá také napětí na

odporu  $R_k$ , mřížkové předpětí není stálé. Abychom toto kolísání mřížkového předpětí odstranili, zapojujeme paralelně k odporu  $R_k$  kondenzátor  $C_k$  se značnou kapacitou, který pro střídavou složku představuje zkrat. Odporem  $R_k$  prochází potom jen stejnosměrný proud  $I_{ao}$ .



Obr. 13. Zesilovač s katodovým odporem

Uvedený způsob získávání mřížkového předpětí se nazývá samočinným (automatickým) proto, že stabilizuje pracovní podmínky elektronky.

Zvětší-li se např. anodový proud  $I_{ao}$ , má to za následek posunutí mřížkového předpětí směrem k zápornějším hodnotám, tj. do oblasti menšího anodového proudu, takže původní zvětšení proudu se tím zmírní.

## 11. Výkonové zesilovače — grafické řešení

Protože při zesilovačích výkonu se do mřížkového obvodu přivádí již zesílené, dosti velké napětí, pracuje elektronka ve větší části dynamické charakteristiky, která je nelineární, a proto nelze na řešení užít ekvivalentního obvodu. Ukazuje se dále, že optimální výkon, tj. maximální výkon při určitém malém tvarovém zkreslení, získáme,

volíme-li zatěžovací odpor

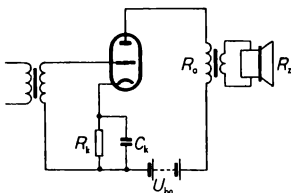
$$R_{z\text{opt}} = \frac{U_{\text{ao}}}{I_{\text{ao}}} - 2R_1,$$

jde-li o triodu, a

$$R_{z\text{opt}} = \frac{U_{\text{ao}}}{I_{\text{ao}}},$$

jedná-li se o výkonovou pentodu.

Odpor skutečné zátěže (např. reproduktoru) se ale zpravidla nerovná optimálnímu, a proto se mezi triodu a zátěž zapojí výstupní transformátor (obr. 14), který odpor zátěže  $R_z$  transformuje na takovou hodnotu  $R_{\text{a}}$ , která se co nejvíce blíží odporu optimálnímu.



Obr. 14. Výkonový zesilovač

Mějme transformátor, který má na primární straně  $N_1$  závitů, na sekundární  $N_2$  závitů. Poměr

$$p = \frac{N_1}{N_2}$$

nazveme převodem transformátoru. K sekundáru nechť je připojen odpor  $R_z$ . Je-li na sekundáru napětí  $U_2$  a vtéká-li

do odporu  $R_z$  proud  $I_2$ , potom v primáru musí působit napětí  $U_1 = pU_2$  a musí do primáru vtékat proud

$$I_1 = \frac{I_2}{p}.$$

Podle Ohmova zákona je

$$R_z = \frac{U_2}{I_2}$$

a primár klade vtékajícímu střídavému proudu odpor

$$R_a = \frac{U_1}{I_1} = \frac{pU_2}{\frac{I_2}{p}} = p^2 R_z,$$

takže odpor připojený k sekundáru se do primáru transformuje násobkem druhé mocniny převodu. Tato úvaha platí ovšem jen pro ideální transformátor, který je bezztrátový a má rovnoměrné přenosové vlastnosti v celém oboru kmitočtů.

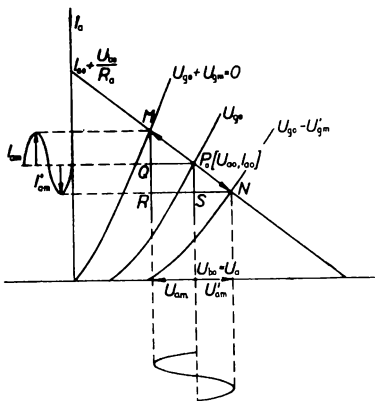
Stejnoseměrný zatěžovací odpor je tvořen činným odporem primárního vinutí transformátoru a katodovým odporem  $R_k$ . Součet těchto odporů je zpravidla malý vůči vnitřnímu odporu triody  $R_l$ . V dalším budeme uvažovat jen případ, kdy součet těchto odporů je vůči  $R_l$  zanedbatelný, potom je  $U_{ao} \doteq U_{bo}$ .

Pro střídavý signál je rozhodující střídavý, tzv. užitečný zatěžovací odpor  $R_a$ . Tomuto odporu odpovídá střídavá zatěžovací přímka (obr. 15), kterou získáme tak, že bod na ose  $y$

$$\left[ I_{ao} + \frac{U_{bo}}{R_a} \right]$$

spojíme s bodem  $P_o (U_{ao}, I_{ao})$ , který je udán v katalogu

elektronek. Bod  $P_0$  musí ležet pod, nebo nanejvýš na hyperbole maximální anodové ztráty.



Obr. 15. Grafické řešení zesilovače výkonu

Maximální přípustná amplituda střídavého signálu, má-li být napětí mřížky stále záporné, je  $U_{gm} = -U_{g0}$ .

Optimální výkon se rovná polovičnímu součinu amplitudy napětí  $U_{am}$  a amplitudy proudu  $I_{am}$  vytvořených maximálním budícím napětím s amplitudou  $-U_{g0}$ , za předpokladu, že jde o harmonické střídavé veličiny. Je dán plochou trojúhelníku  $MP_0Q$  nebo plochou trojúhel-

níku  $P_oNS$ . Tyto trojúhelníky však obecně nejsou shodné, protože nejsou stejné kladné a záporné půlvlny proudů ani napětí. Proto se volivá  $\frac{1}{4}$  plochy trojúhelníku  $MNR$ , tedy

$$P_v = \frac{1}{4} (U_{am} + U'_{am}) (I_{am} + I'_{am}) .$$

Protože příkon  $P_o$  se rovná anodové ztrátě  $P_a = U_{ao}I_{ao}$ , je účinnost triody

$$\eta = \frac{P_v}{P_a} = \frac{(U_{am} + U'_{am}) \cdot (I_{am} + I'_{am})}{8U_{ao} I_{ao}} .$$

Účinnost triod bývá asi 20 %.

## 2. Kategorie B

**Prenos tepla**

*Doc. RNDr. Ivan Náter, SVŠT Bratislava*

### 1. Úvod

Javy, ktoré súvisia s prenosom tepelnej energie, alebo stručnejšie s prenosom tepla, môžeme skúmať a opisovať dvojakým spôsobom:

1. zo stanoviska molekulovej fyziky,
2. fenomenologicky, tak, že tieto javy opisujeme pomocou makroskopicky pozorovateľných a merateľných zmien, ktoré charakterizujeme vhodne zvolenými veličinami a látkovými konštantami.

V tomto článku sa budeme zaoberať fenomenologickým opisom prenosu tepla.

Pokiaľ nebola známa súvislosť tepelných javov s molekulovou štruktúrou látok, zavádzala sa na jednoduché vysvetlenie týchto javov predstava o existencii tzv.

„tepelného fluida“, ktoré môže prechádzať z jednej časti telesa o vyššej teplote na druhú časť o nižšej teplote, alebo z telesa o vyššej teplote na teleso o teplote nižšej, ak sa tieto telesá dotýkajú. Presun tohto nevážiteľného fluida — tepla — má za následok na jednej strane zníženie, na druhej zvýšenie teploty telesa, alebo jeho časti. Táto predstava sa dlho udržala. Dôsledky z nej odvodené boli v súhlase so skutočnosťou najmä pri opisovaní javov súvisiacich s prenosom tepla. S touto predstavou úzko súvisí aj terminológia, ktorá sa v tejto oblasti fyziky dosiaľ používa. Z analógie medzi prenosom tepla a prúdením kvapalín zavádza sa pojem tepelného toku ako množstva tepla, ktoré prechádza zvolenou plochou v určitom časovom intervale.

Ak neberieme do úvahy prenos tepla prostredníctvom elektromagnetických vln (žiarením, radiáciou), môžeme prenos tepla rozdeliť na dva základné druhy:

1. Prenos tepla vedením, pri ktorom sa vyrovnávajú stredné kinetické energie neusporiadaného pohybu molekúl, nedochádza však k presunu molekúl (k presunu látky) v telesách. Tento druh prenosu tepla je typický pre tuhé látky a jediný, aký v nich môže existovať.

*Poznámka k terminológii:*

Slovenský termín	Český termín
súčiniteľ prestupu tepla	měrná tepelná přestupnost
súčiniteľ prechodu tepla stenou	měrná tepelná prostupnost
	měrná tepelná vodivost

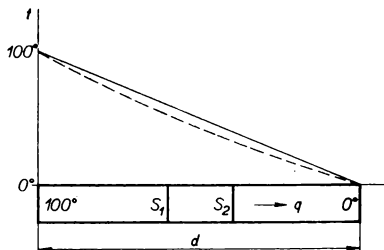
2. Prenos tepla prúdením, ktorý je typický pre kvapalné a plynné látky. Tu si zhluky molekúl s väčšou strednou kinetickou energiou vymieňajú miesta so zhlukmi molekúl s menšou strednou kinetickou energiou a navzájom sa



premiešavajú, takže s prenosom tepla prenáša sa súčasne aj látka. Prenos tepla prúdením v kvapalinách a plynoch je vždy sprevádzaný aj prenosom tepla vedením, ktoré tu však hrá len podradnú úlohu.

## 2. Hustota tepelného toku

Zaoberajme sa najprv prenosom tepla vedením v homogénnom tuhom telese. Ak sa teplota v jednotlivých elementoch telesa s časom nemení (od miesta k miestu je však rozličná), hovoríme o ustálenom stave, alebo o *ustálenom* (stacionárnom) tepelnom toku. V opačnom prípade ide o neustálený (nestacionárny) stav. Budeme uvažovať len ustálené stavy.



Obr. 16

Aby sa stacionárny tepelný tok mohol uskutočniť, musíme v jednom mieste telesa udržiavať trvale konštantnú vyššiu teplotu, v inom mieste konštantnú nižšiu teplotu.

Teplo potom prechádza z miesta s vyššou teplotou na miesto s nižšou teplotou. Takýto prípad môžeme realizovať napr. v kovovej tyči, keď jeden jej koniec ponoríme do vriacej vody teploty  $t_1 = 100\text{ }^\circ\text{C}$ , druhý do zmesi ľadu a vody teploty  $t_2 = 0\text{ }^\circ\text{C}$  (obr. 16). Teplomermi, priloženými k tyči v rozličných miestach, kontrolujeme teplotu pozdĺž tyče. V ustálenom stave je priebeh teploty pozdĺž tyče graficky znázornený čiarkovanou krivkou. Keby sme vhodnou izoláciou zabránili prenosu tepla do okolia tyče, pokles teploty pozdĺž tyče by bol lineárny (v grafe plná priamka).

V zmesi ľadu a vody stále viac ubúda ľadu a pribúda vody, ľad sa postupne roztápa teplom preneseným tyčou z vriacej vody. Pri ustálenom tepelnom toku cez ľubovoľný prierez tyče, kolmý na jej pozdĺžnu os, nastáva v tom istom časovom intervale  $\tau$  prenos rovnakého množstva tepla  $Q$ . Toto tvrdenie dokážeme jednoduchou nepriamou úvahou. Predpokladajme, že prierezom  $S_1$  (obr. 16) za zvolený časový interval nastal prenos množstva tepla  $Q_1$ , prierezom  $S_2$  za rovnaký časový interval množstva tepla  $Q_2$ . Ak by bolo  $Q_1 > Q_2$ , musela by sa v úseku tyče medzi rezmi  $S_1$  a  $S_2$  zvyšovať teplota. Ak by bolo  $Q_1 < Q_2$ , muselo by to zas viesť k ustavičnému znižovaniu teploty medzi uvažovanými rezmi. To by však v oboch prípadoch znamenalo, že prenos tepla vedením v tyči nie je ustálený. Z tejto úvahy jednoznačne vyplýva tvrdenie, ktoré sme mali dokázať.

Nech má uvažovaná tyč všade rovnakú prierezovú plochu  $S$ . Na dĺžku  $d$  tyče pripadá teplotný rozdiel

$$t_1 - t_2 \quad (t_1 > t_2).$$

Podiel

$$\frac{t_1 - t_2}{d}$$

nazývame *teplotným spádom*. Merania ukazujú, že množstvo tepla  $Q$ , ktoré prejde prierezom tyče za čas  $\tau$ , je priamo úmerné veľkosti prierezovej plochy  $S$ , časovému intervalu  $\tau$  a teplotnému spádu. Môžeme teda písať

$$Q = \lambda S \tau \frac{t_1 - t_2}{d}. \quad (1)$$

Konštanta úmernosti  $\lambda$  vo vzťahu (1) závisí len od materiálu tyče, je to látková konštanta a nazýva sa *súčiniteľ tepelnej vodivosti*. Relatívne veľká hodnota konštanty  $\lambda$  prislúcha materiálu, ktorý označujeme ako dobrým vodičom tepla (napr. kov), malou tepelnou vodivosťou sa vyznačujú tepelne izolujúce látky. Číselne predstavuje súčiniteľ tepelnej vodivosti množstvo tepla, ktoré pri jednotkovom teplotnom spáde za časovú jednotku prejde jednotkovou plochou postavenou kolmo na smer tepelného toku. Jeho jednotkou v sústave SI je  $\text{J m}^{-1} \text{s}^{-1} \text{deg}^{-1}$ , v technickej praxi  $\text{kcal m}^{-1} \text{h}^{-1} \text{deg}^{-1}$ .

Najlepšími vodičmi tepla sú kovy, najmä striebro a meď. Nekovy vedú teplo podstatne horšie a používajú sa ako tepelné izolátory. Tepelná vodivosť kvapalín je priemerne asi 1000 ráz menšia než kovov a najmenšia je tepelná vodivosť plynov (v tenkých vrstvách, alebo v malých objemoch, aby nemohlo vzniknúť prúdenie). Vzduchom vyplnené póry v tuhých látkach preto značne znižujú ich tepelnú vodivosť, čo sa využíva pri výrobe tepelne izolujúcich látok (duté tehly, penový a plynový betón apod.).

Veľičina, ktorou kvantitatívne charakterizujeme tepelný tok, je hustota tepelného toku  $q$ , ktorú definujeme vzťahom

$$q = \frac{Q}{S \tau}. \quad (2)$$

Císelne táto veličina predstavuje množstvo tepla, ktoré v daných okolnosti prejde za jednotku času jednotkovou plochou postavenou kolmo na smer tepelného toku. Jednotkou hustoty tepelného toku v sústave SI je  $\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$ . V telese, ktoré sa vyznačuje konštantnou prierezovou plochou (kolmo na smer tepelného toku), pri ustálenom vedení tepla musí byť  $q = \text{konšt.}$ , hustota tepelného toku nezávisí od času ani od miesta v uvažovanom telese.

Zo vzťahu (2) môžeme ľahko vyjadriť množstvo tepla  $Q$ , prechádzajúce za čas  $\tau$  plochou  $S$  kolmo na smer tepelného toku, pomocou hustoty tepelného toku

$$Q = qS\tau. \quad (2a)$$

Ak pri vyjadrení hustoty tepelného toku použijeme vzťah (1), dostávame

$$q = \lambda \frac{t_1 - t_2}{d}. \quad (3)$$

Príklad: Vypočítajte, aké množstvo tepla prejde za čas  $\tau = 3 \text{ h}$  cez  $3 \text{ m}^2$  tehlovej steny hrúbky  $d = 0,5 \text{ m}$ , keď vnútorný povrch steny má teplotu  $t_1 = 18^\circ\text{C}$  a vonkajší teplotu  $t_2 = -2^\circ\text{C}$ . Tepelným stratám do okolia sme zabránili. Súčiniteľ tepelnej vodivosti tehlovej steny  $\lambda = 0,45 \text{ kcal m}^{-1} \text{ h}^{-1} \text{ deg}^{-1}$ .

Riešenie: Podľa zadania sú  $\tau = 3 \text{ h}$ ,  $S = 3 \text{ m}^2$ ,  $d = 0,5 \text{ m}$ ,  $t_1 = 18^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = -2^\circ\text{C}$ . Zo vzťahu (1) dostaneme

$$Q = \lambda S \tau \frac{t_1 - t_2}{d} = 0,45 \text{ kcal m}^{-1} \text{ h}^{-1} \text{ deg}^{-1} \cdot 3 \text{ m}^2 \cdot 3 \text{ h} \cdot \frac{18^\circ\text{C} - (-2^\circ\text{C})}{0,5 \text{ m}} = 162 \text{ kcal}.$$

Za tri hodiny prejde cez  $3 \text{ m}^2$  uvažovanej steny množstvo tepla 162 kcal.

Vzťah (3) sme odvodili z pokusov a úvah, pri ktorých sme predpokladali, že teplota v každej rovine kolmej na pozdĺžnu os tyče je všade rovnaká. Takéto vedenie tepla sa nazýva *jednorozmerné*. Je však veľmi prirodzené predpokladať, že veľmi jednoduchý a prehľadný vzťah (3) má pre izotropné látky všeobecnú platnosť, čo plne potvrdzujú dôsledky z neho vyplývajúce. Vzťah (3) je teda základným vzťahom prenosu tepla vedením v izotropných telesách, podľa ktorého hustota tepelného toku v danom smere je priamo úmerná teplotnému spádu.

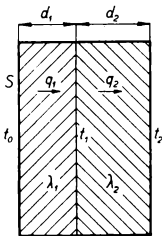
Príklad: Doteraz uvedené vzťahy použijeme na riešenie tejto úlohy: Rovinná doska sa skladá z dvoch k sebe tesne priliehajúcich vrstiev hrúbok  $d_1$  a  $d_2$ , ktorých súčinitele tepelnej vodivosti sú  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ . Treba vypočítať množstvo tepla  $Q$ , ktoré za ustáleného tepelného toku prejde doskou za čas  $\tau$ , ak plocha dosky je  $S$  a okrajové teploty sú  $t_0$  a  $t_2$  ( $t_0 > t_2$ ). Ďalej treba vypočítať teplotu  $t_1$  na rozhraní oboch vrstiev (obr. 17).

Riešenie: Označme hustotu tepelného toku v prvej vrstve  $q_1$ , v druhej  $q_2$ . Podľa vzťahu (3) sú

$$q_1 = \lambda_1 \frac{t_0 - t_1}{d_1} \quad \text{a} \quad q_2 = \lambda_2 \frac{t_1 - t_2}{d_2}, \quad (4)$$

pretože podľa zadania úlohy je zrejme  $t_0 > t_1 > t_2$ .

Podľa predchádzajúcich úvah pri ustálenom tepelnom toku je však  $q_1 = q_2 = q$ . Ak zo vzťahov (4) vyjadríme



Obr. 17

teplotné rozdiely  $t_0 - t_1$ , resp.  $t_1 - t_2$

$$t_0 - t_1 = q \frac{d_1}{\lambda_1}, \quad t_1 - t_2 = q \frac{d_2}{\lambda_2}$$

a sčítame ľavé strany týchto rovníc a tiež ich pravé strany, dostaneme

$$t_0 - t_2 = q \left( \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} \right),$$

odkiaľ vychádza

$$q = \frac{t_0 - t_2}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}}. \quad (5)$$

Podľa (2a) je potom

$$Q = qS\tau = \frac{t_0 - t_2}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}} S\tau.$$

Teplotu  $t_1$  môžeme vypočítať napr. z prvej z rovníc (4) s použitím výsledku (5)

$$t_1 = t_0 - q \frac{d_1}{\lambda_1} = t_0 - \frac{t_0 - t_2}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}} \cdot \frac{d_1}{\lambda_1}.$$

Môžeme ovšem pre výpočet teploty  $t_1$  použiť aj druhú z rovníc (4). Tak dostaneme výsledok

$$t_1 = t_2 + q \frac{d_2}{\lambda_2} = t_2 + \frac{t_0 - t_2}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}} \cdot \frac{d_2}{\lambda_2}.$$

Obe získané vyjadrenia teploty  $t_1$  sú ovšem zhodné. Presvedčte sa o tom napr. tak, že od prvého výrazu

vyjadrujúceho teplotu  $t_1$  odčítate druhý. Tento rozdiel sa identicky rovná nule.

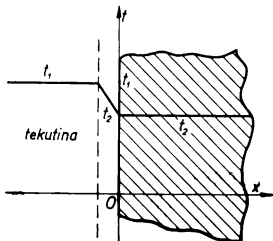
### 3. *Prestup tepla*

Naše predchádzajúce úvahy sa vzťahovali na vedenie tepla v telesách rozličných skupenstiev, museli sme však predpokladať, že pri vedení tepla v kvapalinách a plynoch sa ich jednotlivé objemové elementy nepohybujú. Skutočnosť však môže byť iná. Ak ohrievame kvapalinu alebo plyn zdola, poruší sa v nich mechanická rovnováha, pretože teplejšie spodné vrstvy tekutiny majú menšiu mernú hmotnosť ako chladnejšie vrstvy horné. V tekutinách nastáva účinkom tiažového poľa prúdenie, pri ktorom prechádza teplo z miest o vyššej teplote na miesta o nižšej teplote omnoho rýchlejšie než pri čistom vedení tepla. Prúdenie tekutiny môžeme podľa potreby aj umele udržiavať pomocou miešačiek, čerpadiel, ventilátorov.

Iná je situácia na rozhraní, ktoré oddeľuje tuhú látku od kvapaliny alebo plynu. Ak teplo prechádza z tekutiny do tuhej látky alebo naopak, hovoríme o *prestupe tepla rozhraním*.

Uvažujme prípad znázornený na obr. 18. Rovinné rozhranie  $\sigma$  nech oddeľuje tekutinu teploty  $t_1$  od tuhého telesa, ktoré vhodným spôsobom udržiavame na teplote  $t_2 < t_1$ . Pretože v tekutinách sa teploty rýchlo vyrovnávajú, môžeme predpokladať, že teplota v tekutine aj v malých vzdialenostiach od steny je všade rovnaká ( $t_1$ ). Na povrchu tuhého telesa je však tenká vrstva tekutiny (hraničná vrstva), vytvorená adsorpciou — priľnutím, kde tekutina môže prúdiť len laminárne rovnobežne s rovinou rozhrania. Touto vrstvou môže sa teplo smerom k stene šíriť len vedením, preto v tejto vrstve môže vzniknúť aj

pomerne veľký teplotný spád. Teplota ako funkcia vzdialenosti  $x$  od rozhrania je graficky znázornená na obr. 18.



Obr. 18

Pre hustotu tepelného toku  $q$  v hraničnej vrstve z meraní vychádza lineárna závislosť od teplotného rozdielu  $t_1 - t_2$

$$q = \alpha (t_1 - t_2). \quad (6)$$

Konštanta úmernosti  $\alpha$  v tomto vzťahu sa nazýva *súčiniteľ prestupu tepla*. Nezávisí len od akosti stýkajúcich sa látok, ale aj od drsnosti povrchu tuhého telesa a od toho, či je tekutina v pokoji, alebo či sa pohybuje. V sústave SI sa meria v jednotkách  $\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{deg}^{-1}$ , v technickej praxi v jednotkách  $\text{kcal m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{deg}^{-1}$ .

Cez plochu  $S$  rozhrania prejde teda za čas  $\tau$  podľa (2a) množstvo tepla

$$Q = \alpha S \tau (t_1 - t_2). \quad (7)$$

Príklad: Vzduch v miestnosti má teplotu  $t_1 = 24^\circ\text{C}$ , vnútorné povrchové plochy stien teplotu  $t_2 = 19^\circ\text{C}$ .



Koľko tepla prejde za 24 h do jednej steny, ktorej rozmery sú 4 m a 3,5 m, ak súčiniteľ prestupu tepla  $\alpha = 5 \text{ kcal m}^{-2} \text{ h}^{-1} \text{ deg}^{-1}$ ?

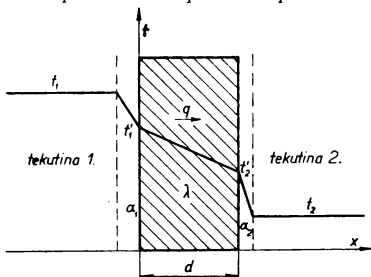
Riešenie: Podľa zadania sú  $\alpha = 5 \text{ kcal m}^{-2} \text{ h}^{-1} \text{ deg}^{-1}$ ,  $S = 4 \text{ m} \cdot 3,5 \text{ m} = 14 \text{ m}^2$ ,  $\tau = 24 \text{ h}$ ,  $t_1 = 24 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 19 \text{ }^\circ\text{C}$ . Dosadením do vzťahu (7) dostaneme

$$Q = 5 \text{ kcal m}^{-2} \text{ h}^{-1} \text{ deg}^{-1} \cdot 14 \text{ m}^2 \cdot 24 \text{ h} \cdot (24 \text{ }^\circ\text{C} - 19 \text{ }^\circ\text{C}) = 8400 \text{ kcal}.$$

Do jednej steny prejde z miestnosti za 24 hodín 8400 kcal tepla.

#### 4. Prechod tepla stenou

Predchádzajúce vzťahy, najmä (3) a (6), použijeme teraz na riešenie problému tzv. *prechodu tepla stenou*. Podľa



Obr. 19

obr. 19 uvažujme tuhú stenu hrúbky  $d$ , ktorá oddeľuje dve tekutiny. Tekutina vľavo od steny nech má teplotu

$t_1$ , tekutina vpravo od steny teplotu  $t_2 < t_1$ . Súčiniteľ tepelnej vodivosti steny nech je  $\lambda$ , súčiniteľ prestupu tepla v prvej hraničnej vrstve  $\alpha_1$ , v druhej  $\alpha_2$ . Aká je hustota tepelného toku z tekutiny o vyššej teplote cez stenu do tekutiny o nižšej teplote?

Vychádzame z podmienky konštantnej hustoty tepelného toku. V prvom rozhraní sa ustáli nejaká teplota  $t'_1$ , v druhom  $t'_2$ , pričom sú  $t_1 > t'_1 > t'_2 > t_2$ . Teplota ako funkcia vzdialenosti  $x$  od prvého rozhrania je graficky znázornená na obr. 19.

Podľa (3) a (6) vyjadríme postupne hustotu tepelného toku v prvej hraničnej vrstve, v stene a v druhej hraničnej vrstve

$$q = \alpha_1 (t_1 - t'_1), \quad q = \lambda \frac{t'_1 - t'_2}{d},$$

$$q = \alpha_2 (t'_2 - t_2).$$

Z týchto rovníc vyjadríme najprv príslušné teplotné rozdiely

$$t_1 - t'_1 = \frac{q}{\alpha_1}, \quad t'_1 - t'_2 = \frac{qd}{\lambda}, \quad t'_2 - t_2 = \frac{q}{\alpha_2}.$$

Sčítaním ľavých strán a pravých strán posledných troch rovníc dostávame

$$t_1 - t_2 = q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right).$$

Podľa tohto výsledku hustota tepelného toku pri ustálenom prechode stenou je

$$q = k (t_1 - t_2). \quad (8)$$

Konštanta úmernosti  $k$  je určená vzťahom

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (9)$$

Táto konštanta sa nazýva *súčiniteľ prechodu tepla stenou*. Fyzikálny rozmer súčiniteľa prechodu tepla stenou je totožný s rozmerom súčiniteľa prestupu tepla.

V nasledujúcich tabuľkách sú uvedené súčinitele tepelnej vodivosti a súčinitele prestupu tepla pre niektoré látky.

**TABUĽKA 1**  
**Súčinitele tepelnej vodivosti**

Látka	$\lambda$ kcal m <sup>-1</sup> h <sup>-1</sup> deg <sup>-1</sup>
Striebro	363,60
Meď	327,60
Železo	50,40 až 61,20
Tehla	0,36 až 0,72
Sklo	0,36 až 0,72
Drevo	0,11 až 0,21
Betón	0,18 až 1,10

**TABUĽKA 2.**  
**Súčinitele prestupu tepla**

Látka	$\alpha$ kcal m <sup>-2</sup> h <sup>-1</sup> deg <sup>-1</sup>
Kľudný vzduch	3 až 10
Prúdiaci vzduch	10 až 500
Prúdiaca kvapalina	200 až 5000

### 3. Kategorie C

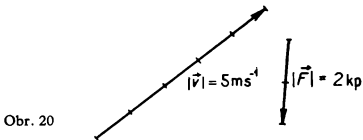
#### Základy vektorovej algebry

Jozef Zámečník, SVŠT Bratislava

Vo fyzike, matematike i technickej praxi stretávame sa s veličinami, ktoré vo väčšine možno rozdeliť do dvoch skupín, a to na skaláry a vektory.

Veličiny, ktoré s ohľadom na zvolenú jednotku sú úplne určené jediným číselným údajom, menujú sa skaláry (dĺžka čiary 5 m, čas 2 s, hmotnosť 3 kg, teplota 10 °C, energia 20 J, elektrický náboj -2 C a podobne).

Veličiny, ktoré sa vyznačajú absolútnou hodnotou a aj smerom, menujú sa vektory (posunutie bodu, orientovaná úsečka, rýchlosť pri pohybe bodu, zrýchlenie, sila a iné). Vektor, ktorého absolútna hodnota sa rovná nule, menuje sa nulový vektor.



V literatúre sa z technických dôvodov používajú pre označenie vektora najčastejšie tučné písmená. V obrázkoch, kde je treba popisovať šablónou, i v písanom texte, označujeme vektor obyčajne pruhom, alebo šipkou nad písmenom (napr.  $\vec{v}$ , alebo  $\vec{v}$ ). Absolútnu hodnotu vektora označujeme  $|\vec{v}| = v$  (obr. 20).

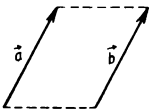
Každý vektor, nech je jeho fyzikálny význam akýkoľvek (sila, rýchlosť apod.), možno zobraziť orientovanou úsečkou. Absolútnu hodnotu vektora znázorníme dĺžkou orientovanej úsečky vo vhodne zvolenej mierke a smer orientovanej úsečky stotožníme s jeho smerom. Ak však vyznačíme určitú, inak ľubovoľnú vektorovú veličinu — vektor orientovanou úsečkou, treba mať na pamäti, že je to len obraz tohto vektora.

So skalármi počítame podľa pravidiel bežnej aritmetiky.

Vektory však predstavujú veličiny obsahovo bohatšie. Preto počítanie s nimi vyžaduje osobitných pravidiel. Boli zavedené tak, aby boli v čo najväčšej zhode s pravidlami bežnej aritmetiky a súčasne čo najviac vyhovovali praktickým potrebám fyziky a matematiky.

### I. Rovnosť vektorov

Dva vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , ktoré majú rovnaký fyzikálny význam považujeme za sebe rovné a píšeme  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  vtedy a len vtedy, ak sa zhodujú v absolútnej hodnote ( $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ ) a aj v smere ( $\mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{b}$ ) (obr. 21).



Obr. 21

Navzájom teda môžeme porovnávať len napr. rýchlosť s rýchlosťou, silu so silou a podobne.

Príklad: Majme dva pohybujúce sa hmotné body. Rýchlosť prvého nech je  $v_1$  a druhého  $v_2$ . Nech  $v_1 = 20 \text{ ms}^{-1}$  a  $v_2 = 20 \text{ ms}^{-1}$ . Platí teda, že

$$v_1 = v_2. \quad (1)$$

Rovnosť (1) nám však nič nehovorí o smeroch týchto rýchlostí.

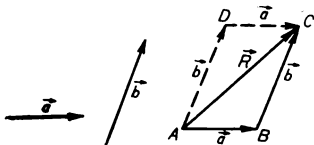
Smer rýchlosti prvého hmotného bodu môže byť so smerom rýchlosti druhého hmotného bodu súhlasný, ale práve tak môže byť naň kolmý, alebo práve opačný. Ak však platí, že

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \quad (2)$$

je jednoznačne povedané, že rýchlosti hmotných bodov sú rovnaké čo do veľkosti i čo do smeru. Vektorová rovnica (2) je teda obsahovo bohatšia ako skalárna rovnica (1). Ak teda  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \Rightarrow v_1 = v_2$  a nie naopak.

## II. Sčítanie vektorov

Súčet aspoň dvoch vektorov  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  tohože druhu je opäť vektor  $\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ , ktorého obraz dostaneme, ak ku koncovému bodu obrazu prvého sčítanca pripojíme v správnom smere obraz druhého sčítanca a spojíme úsečkou počiatok obrazu prvého sčítanca s koncovým bodom obrazu druhého sčítanca. Rovnaký výsledok však dostaneme, ak poradie pri sčítaní zameníme. Po doplnení



Obr. 22

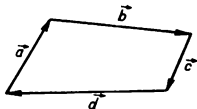
trojuholníka  $ABC$  (obr. 22) na rovnobežník  $ABCD$ , v ktorom  $\vec{AB} = \vec{DC} = \mathbf{a}$  a  $\vec{AD} = \vec{BC} = \mathbf{b}$ , vidíme, že platí  $\mathbf{R} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ . Čiže pri sčítaní vektorov nezáleží na

poradí, v akom ich sčítujeme

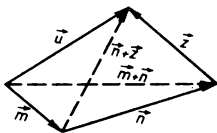
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Hovoríme tiež, že vektory sčítame podľa rovnobežníkového pravidla.

Pri sčítaní dvoch, alebo väčšieho počtu vektorov sa môže stať, že koncový bod obrazu posledného sčítanca sa stotožní s počiatkom obrazu prvého sčítanca. Absolútna hodnota súčtu v tom prípade sa rovná nule a súčet sám je nulový vektor  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$  (obr. 23).



Obr. 23



Obr. 24

Keďže súčet vektorov je opäť vektor a pri sčítaní nezáleží na poradí sčítancov, pri súčte väčšieho počtu vektorov môžeme jednotlivé členy súčtu spojiť v ľubovoľné čiastočné súčty a tie potom sčítať v ľubovoľnom poradí.

Príklad (obr. 24):

$$\mathbf{u} = \mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{z} = (\mathbf{m} + \mathbf{n}) + \mathbf{z} = \mathbf{m} + (\mathbf{n} + \mathbf{z}).$$

### III. Jednotkový vektor

Pri počítaní s vektormi je veľmi výhodné zaviesť pojem jednotkového vektora. Jednotkový vektor je vektor daného smeru, ktorého absolútna hodnota je číslo  $+1$  (bez rozmeru).

Pre označenie jednotkového vektora sa často používajú malé písmená gréckej abecedy, napr.  $\vec{e}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{\sigma}$  a podobne,

alebo jednotkový vektor, napríklad súhlasne rovnobežný s vektorom  $\mathbf{a}$ , sa často označuje symbolom  $\mathbf{a}^0$  (každé číslo povýšené na nultú je  $+1$ ).

#### IV. Násobenie vektora skalárom (čísлом)

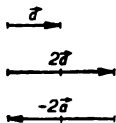
Ak násobíme ľubovoľný vektor  $\mathbf{a}$  skalárom (čísлом)  $s$ , dostaneme opäť vektor  $\mathbf{b} = s\mathbf{a} = \mathbf{a}s$ , ktorý je s vektorom  $\mathbf{a}$  súhlasne rovnobežný, ak skalárny faktor  $s$  je kladný

( $s > 0$ ), nesúhlasne rovnobežný, ak skalárny faktor  $s$  je záporný ( $s < 0$ ) a ktorého absolútna hodnota sa rovná súčinu absolútnych hodnôt vektora  $\mathbf{a}$  a skaláru  $s$  ( $|\mathbf{b}| = |s| \cdot |\mathbf{a}|$ ) (obr. 25). Ak  $s = 0$  je  $s\mathbf{a} = \mathbf{0}$  (nulový vektor). Obrátene, kedykoľvek vektor  $\mathbf{b}$  je rovnobežný s vektorom  $\mathbf{a}$ , jestvuje jednoznačne určený skalárny faktor  $s$ , ktorý splňuje rovnicu  $\mathbf{b} = s\mathbf{a}$ . Jeho absolútna hodnota je

$|s| = b : a$  a jeho znamienko je kladné, ak je vektor  $\mathbf{b}$  s vektorom  $\mathbf{a}$  súhlasne rovnobežný, záporné v prípade opačnom. Ak teda hľadáme pomer dvoch rovnobežných vektorov, stačí nájsť pomer ich veľkostí a prisúdiť im znamienko  $+$  (plus) ak sú oba vektory súhlasne rovnobežné, poprípade  $-$  (mínus) ak sú navzájom nesúhlasne rovnobežné. Teda

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \pm \frac{b}{a}.$$

Príklad: Pre absolútnu hodnotu tiaže  $G$  telesa o hmotnosti  $m$  môžeme podľa II. Newtonovho zákona písať  $G = mg$ , kde  $g$  je absolútna hodnota zrýchlenia voľne padajúcich telies. Zrýchlenie je však vektorová veličina a hmotnosť skalárna. Bude teda platiť  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ . Tiaž  $\mathbf{G}$  sme teda vyjadrili ako násobok skaláru  $m$  a vektora  $\mathbf{g}$ ,

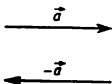


Obr. 25

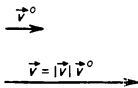


a preto smer tiaže bude totožný so smerom zrýchlenia voľne padajúcich telies a jeho absolútna hodnota bude  $m$ -krát väčšia ako  $g$  ( $m$  je vždy kladné).

Násobok  $(-1)$   $\mathbf{a}$  stručne píšeme  $-\mathbf{a}$ . Vektor  $-\mathbf{a}$  je teda vektor, ktorého absolútna hodnota sa rovná absolútnej hodnote vektora  $\mathbf{a}$ , má však opačný smer. Vektor  $-\mathbf{a}$  nazývame vektorom opačným k vektoru  $\mathbf{a}$  (obr. 26).



Obr. 26



Obr. 27

Nie je to vektor záporný. Záporný vektor nepoznáme. Každý nenulový vektor, napr.  $\mathbf{v}$  si môžeme predstaviť ako súčin jednotkového vektora  $\mathbf{v}^0$ , ktorý je s ním súhlasne rovnobežný a jeho absolútnej hodnoty  $|\mathbf{v}|$  (obr. 27)

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \mathbf{v}^0. \quad (3)$$

Ak rovnicu (3) vynásobíme zlomkom  $1 : |\mathbf{v}|$  dostaneme

$$\mathbf{v}^0 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \quad (4)$$

Podľa rovnice (4) jednotkový vektor v smere ľubovoľného vektora určíme, ak daný vektor vynásobíme prevrátenou hodnotou jeho absolútnej hodnoty.

Deľiť  $\mathbf{a}$  ľubovoľným číslom  $m$  rôznym od nuly znamená násobiť ho číslom  $\frac{1}{m}$ , tj.

$$\frac{\mathbf{a}}{m} = \frac{1}{m} \mathbf{a}.$$

Vlastnosti, ktoré platia pre násobenie vektora číslom, si ukážeme na príkladoch.

Príklad:  $(2\mathbf{v}) 3 = 3(2\mathbf{v}) = (3 \cdot 2) \mathbf{v} = 6\mathbf{v}$ .

V podobných prípadoch zátvorky nie sú teda potrebné.

Príklad:  $3(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = 3\mathbf{v} + 3\mathbf{u}$  (obr. 28).

Príklad:  $2\mathbf{v} + 3\mathbf{v} = (2 + 3) \mathbf{v} = 5\mathbf{v}$ .

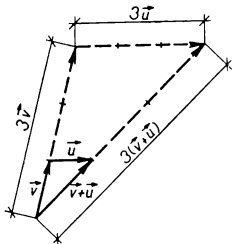
#### V. Rozdiel dvoch vektorov

Každý rozdiel dvoch vektorov môžeme zapísať pomocou súčtu

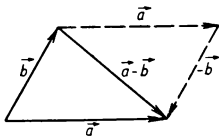
$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Rozdiel dvoch vektorov dostaneme, ak k menšencu pridáme vektor vzhľadom na menšiteľa opačného smeru a rovnakej absolútnej hodnoty.

Graficky je rozdiel prevedený na obr. 29. Ak obrazy menšenca a menšiteľa sú vynesené z tohože bodu, obraz rozdielu je teda orientovaná úsečka vedená od koncového bodu menšiteľa ku koncovému bodu menšenca.



Obr. 28



Obr. 29

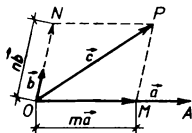
*Poznámka:* Rozdiel dvoch vektorov nie je nikdy záporný. Tento fakt veľmi podstatnou mierou prispieva k názornosti a prehľadnosti vektorového počtu. Podľa veľkosti môžeme porovnávať len absolútne hodnoty vektorov.

## VI. Rozklad vektora na zložky

S rozkladom napríklad sily na zložky sme sa stretli už na ZDŠ. Zaoberajme sa teraz s rozkladom vektora na zložky trochu všeobecnejšie.

Majme vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , ktoré ležia v jednej rovine a nech vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  nie sú navzájom rovnobežné. Prenesme ich do spoločného počiatku  $O$  (obr. 30). Koncovým bodom vektora  $\mathbf{c} = \overrightarrow{OP}$  vedme priamky  $PN$  a  $PM$ , rovnobežne s  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ . Z rovnobežníka  $OMP$  potom zistíme, že

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}.$$



Obr. 30

Rovnosť, ktorú sme dostali, vyjadruje rozklad vektora  $\mathbf{c}$  na zložky  $m\mathbf{a}$  a  $n\mathbf{b}$  v smeroch vektorov  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ . Geometricky tieto zložky dostaneme tak, keď koncovým bodom vektora  $\mathbf{c}$  vedieme rovnobežky so smermi vektorov  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  (obr. 30). Dĺžky úsečiek, ktoré tieto rovnobežky vytnú na vektoroch  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , sú absolútne hodnoty zložiek.

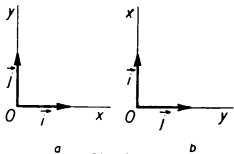
Je zrejmé, že vektor  $\mathbf{c}$  možno rozložiť na ľubovoľné iné vektory, ktoré s ním ležia v tej istej rovine.

Podobne možno postupovať aj v trojrozmernom priestore, čo však nie je úkolom tohoto článku.

Ak je dané poradie dvoch rôznobežných vektorov, napríklad už uvedených vektorov  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , do ktorých potom rozkladáme všetky ostatné vektory v rovine, hovoríme, že vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  tvoria usporiadanú dvojicu vektorov — systém.

Systém sa nazýva pravotočivý, ak stotožnenie prvého vektora do smeru druhého vektora nastane otáčaním prvého vektora okolo jeho počiatočného bodu po kratšej ceste proti pohybu hodinových ručičiek. V opačnom prípade je systém ľavotočivý.

Špeciálny prípad systému dvoch rôznobežných vektorov sú dva navzájom kolmé jednotkové vektory, ktoré ďalej budeme označovať  $i, j$ . Tieto jednotkové vektory určujú v naznačenom poradí osi  $x, y$  nám už známeho pravouhlého súradného systému (obr. 31). Pravouhlý (ortogonálny) systém môže byť teda pravotočivý (obr. 31a), alebo ľavotočivý (obr. 31b). Vo fyzike sa najčastejšie používa systém pravotočivý, a preto i my v ďalšom budeme používať len pravotočivý systém. V pravouhlom systéme jednotkových vektorov  $i, j$  môžeme určiť polohu ľubovoľného bodu  $M$  polohovým vektorom. Označme ho  $r$ . Vektor  $r$  môžeme však vyjadriť ako súčet jeho zložiek v smeroch základných jednotkových vektorov  $i, j$ . Teda



Obr. 31

$r = xi + yj$ ,

*Poznámka:* Polohový vektor je vektor, ktorý má vždy počiatočný bod v počiatku súradného systému a koncový bod v bode, polohu ktorého určuje.

kde  $xi, yj$  sú pravouhlé priemety vektora  $r$  do osi  $x, y$  a nazývajú sa zložky vektora  $r$ . Čísla  $x, y$  sú absolútne hodnoty týchto priemetov (zložiek) a nazývajú sa súradnice vektora  $r$  a teda súčasne i súradnice bodu  $M$ . Ak teda

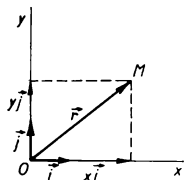
poznáme polohový vektor, potom poznáme i súradnice jeho koncového bodu a naopak, ak poznáme súradnice ľubovoľného bodu, vieme napísať jeho polohový vektor.

Napríklad  $A = (3, -2)$ , potom polohový vektor  $r_A$ , ktorý určuje polohu bodu  $A$  je  $r_A = 3i - 2j$ . Z vlastnosti pravouhlého trojuholníka (obr. 32) vyplýva, že absolútna hodnota vektora  $r$  je

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5)$$

Konkrétne pre polohový vektor  $r_A$  bude

$$r_A = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$



Obr. 32

Uvažujme teraz ľubovoľný vektor  $\vec{AB}$  ( $A$  je počiatkový a  $B$  koncový bod). Zostrojme polohový vektor  $r = \vec{AB}$  (obr. 33). Súradnice vektora  $r$  v pravouhlom súradnom systéme budú teda súčasne pravouhlé priemety vektora  $\vec{AB}$  do osí súradného systému.

Vektor  $r$  dostaneme, ak od polohového vektora  $r_B$  odčítame polohový vektor  $r_A$ . Teda

$$r = r_B - r_A.$$

Príklad: Nech  $A = (3, 2)$ ;  $B = (4, 4)$ . Potom

$$\begin{aligned} r = r_B - r_A &= 4i + 4j - (3i + 2j) = 4i + 4j - 3i - 2j = \\ &= i + 2j = \vec{AB}. \end{aligned}$$

Pre absolútnu hodnotu vektora  $AB$  teda platí

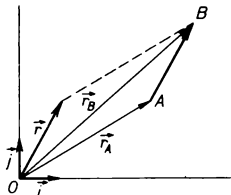
$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2}.$$

Príklad: V jednom bode pôsobia tri sily, ktorých veľkosti

priemetov do jednotlivých osí pravouhlého súradného systému sú  $x_1 = 1 \text{ N}$ ,  $y_1 = 2 \text{ N}$ ;  $x_2 = -2 \text{ N}$ ,  $y_2 = 3 \text{ N}$ ;  $x_3 = 3 \text{ N}$ ,  $y_3 = -4 \text{ N}$ .

Treba určiť veľkosť výslednice týchto síl.

Riešenie: Označme jednotlivé sily  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  a ich výslednicu  $F$ . Ak poznáme pravouhlé priemety, do osí súradného systému, čiže súradnice jednotlivých síl, potom môžeme písať



Obr. 33

$$\begin{aligned} F_1 &= x_1 i + y_1 j = \\ &= (i + 2j) \text{ N}, \end{aligned}$$

$$F_2 = x_2 i + y_2 j = (-2i + 3j) \text{ N},$$

$$F_3 = x_3 i + y_3 j = (3i - 4j) \text{ N},$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = (2i + j) \text{ N},$$

$$F = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} \text{ N} = \sqrt{5} \text{ N}.$$

Veľkosť výslednej sily je  $\sqrt{5} \text{ N}$ .

*Poznámka:* 1. Ak narábame s konkrétnou fyzikálnou veličinou, v tomto prípade so silou, potom súradniciam daného vektora treba priradiť i rozmer jednotky v ktorej danú fyzikálnu veličinu meriame.

2.  $1 \text{ N} = 1 \text{ newton} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$ .

Úlohy:

1. Je daný bod  $M = (5,3)$ . Určte absolútnu hodnotu jeho polohového vektora.

2. Polohový vektor bodu  $P$  zvierá s osou  $x$  uhol  $45^\circ$ . Jeho absolútna hodnota je  $r = 6 \text{ cm}$ . Určte súradnice

bodú  $P$  a vyjadrite vektor  $\vec{r} = \vec{OP}$  pomocou jednotkových vektorov  $\vec{i}, \vec{j}$ .

3. Sú dané body  $A = (1, 2)$  a  $B = (3, -4)$ . Znázornite graficky vektor  $\vec{AB}$  a jeho zložky na osiach v pravouhлом súradnom systéme. Určte absolútnu hodnotu tohoto vektora.

4. Určte súradnice, absolútne hodnoty a uhly, ktoré zvierajú vektory  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  s osou  $x$ , ak  $\vec{a} = 2\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{d} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ .

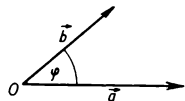
## VII. Uhol dvoch vektorov

### Skalárny súčin dvoch vektorov

Majme dva ľubovoľné vektory  $\vec{a}, \vec{b}$ . Pod uhlom  $\varphi$  vektorov  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  rozumieme uhol zovretý týmito vektormi, ak ich preniesieme do spoločného počiatku  $O$  (obr. 34).

Budeme ho označovať tiež  $\sphericalangle \vec{a}, \vec{b}$ . Môže nadobúdať hodnoty od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ .

Ukázalo sa užitočným zaviesť niekoľko súčinov medzi vektormi. Skalárny súčin dvoch vektorov  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$ , ktorý označujeme  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , je skalár (číslo), a to v prípade nenulových vektorov súčin



Obr. 34

ich absolútnych hodnôt a kosínusu nimi zovretého uhla.

Teda

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos (\sphericalangle \vec{a}, \vec{b}). \quad (6)$$

Čítame „ $\vec{a}$  krát  $\vec{b}$  skalárne“.

Príklad: Nech  $a = 5$ ,  $b = 4$ ,  $\sphericalangle \vec{a}, \vec{b} = 120^\circ$ . Potom  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cos (\sphericalangle \vec{a} \cdot \vec{b}) = 5 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ =$   
 $= -10$ .

Keďže vo všeobecnosti vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  sú fyzikálne veličiny, potom skalár  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  má istý rozmer, daný súčinom rozmerov obidvoch vektorov.

Z rovnosti (6) je vidieť, že ak sa niektorý z vektorov rovná  $\mathbf{0}$ , je  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ . Taktiež  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  ak  $\cos(\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ . Teda podmienka kolmosti dvoch nenulových vektorov je, aby ich skalárny súčin sa rovnal nule.

Z rovnosti (6) je tiež zrejmé, že platí  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ .

Pre skalárny súčin jednotkových vektorov  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  podľa (6) možno písať

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (7)$$

Ak sú vektory určené svojimi pravouhlými súradnicami

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}, \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j},$$

potom uplatnením (7) bude

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}) = \\ &= a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = a_x b_x + \\ &\quad + a_y b_y. \end{aligned}$$

Teda

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y. \quad (8)$$

Podľa (8) skalárny súčin dvoch vektorov sa rovná súčtu súčinov rovnomenných súradníc oboch vektorov.

Použitím (5), (6), (7) môžeme určiť uhol dvoch vektorov

$$\cos(\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}. \quad (9)$$

Príklad: Vypočítajme  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  a určme  $\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b}$  ak  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ .

Podľa (8)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1 + 2$  a podľa (9)

$$\cos(\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{10},$$



z čoho

$$\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b} \doteq 71^{\circ}35'.$$

Skalárny súčin sa vo fyzike okrem iného používa pri zavádzaní pojmu práce. Hovoríme, že sila  $\mathbf{F}$  koná prácu  $A$ , ak sa pohybuje jej pôsobisko. V najjednoduchšom prípade je sila konajúca prácu konštantná (smer i absolútna hodnota) a jej pôsobisko sa pohybuje po priamke (obr. 35). Práca  $A$ , ktorá sa pritom vykoná, je definovaná súčinom dĺžky dráhy  $s$ , ktorú urazilo pôsobisko sily, a absolútnej hodnoty priemetu  $F_s$  sily  $\mathbf{F}$  do smeru dráhy. Teda



Obr. 35

$A = F_s s = F s \cos \varphi$ , čo možno zapísať vo vektorovom tvare  $A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ .

Úlohy:

1. Vypočítajte  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  a určte uhol vektorov ak  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ .
2. Pôsobením sily  $\mathbf{F} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$  kp sa hmotný bod posunul o úsečku  $\mathbf{s} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$  m. Vypočítajte prácu sily  $\mathbf{F}$  a uhol medzi touto silou a úsečkou  $\mathbf{s}$ .

### VIII. Vektorový súčin dvoch vektorov

Majme dva vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , ktoré nie sú navzájom rovnobežné. Ich vektorový súčin je vektor  $\mathbf{c}$ , ktorý je kolmý na rovinu, ktorú určujú vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ . Označujeme ho  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Absolútna hodnota vektora  $\mathbf{c}$  sa rovná súčinu absolútnych hodnôt vektorov  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  a sínusu uhla vektorov  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ . Teda

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (10)$$

O orientácii vektora  $\mathbf{c}$  zatiaľ pomlčíme.

## IX. Niektoré použitia vektorov v mechanike

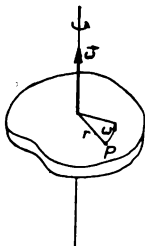
Použitie vektorov v mechanike je veľmi účelné a mnohostranné. Uvediem ešte, veľmi stručne, aspoň dva prípady.

### a) Otáčanie sa tuhého telesa okolo pevnej osi

Ak sa tuhé telo otáča rovnomerne okolo pevnej priamky — osi otáčania, potom jednotlivé body telesa sa pohybujú po kružniciach v rovinách na túto os kolmých. Ich stredy sú na osi otáčania. Obežné rýchlosti týchto bodov sú vo všeobecnosti rôzne, avšak uhly, ktoré opíšu kolmice spustené z jednotlivých bodov na os otáčania v tomže časovom intervale, budú rovnaké. Nech  $\omega$  je uhol opísaný za jednotku času. Nazýva sa uhlová rýchlosť. Danému uhlu môžeme priradiť aj vektor. Proto uhlová rýchlosť  $\omega$  otáčania sa tuhého telesa okolo osi je vektor s osou otáčania rovnobežný a orientovaný na tú stranu, z ktorej sa otáčanie javí v zmysle proti pohybu hodinových ručičiek a jeho absolútna hodnota  $\omega$  je uhol opísaný za jednotku času (obr. 36).

Pozorujme teraz pohyb ľubovoľného bodu  $P$  telesa a určme jeho rýchlosť. Jeho pohyb je rovnomerný po kružnici o polomere  $r$ , v rovine kolmej na os (obr. 36). Ako je nám známe, absolútna hodnota rýchlosti bodu pohybujúceho sa rovnomerne po kružnici polomeru  $r$  s uhlovou rýchlosťou  $\omega$  je  $v = \omega r$ .

Príklad: Koleso sa otáča súčasne okolo vodorovnej a zvislej osi, pričom za jednu sekundu vykoná okolo



Obr. 36

vodorovnej osi dve otáčky a okolo zvislej osi jednu otáčku. Určte vektor výslednej uhlovej rýchlosti.

Riešenie: Zvoľme pravouhlý súradný systém tak, aby os  $x$  bola totožná s vodorovnou osou otáčania a os  $y$  so zvislou osou otáčania. Potom otáčanie okolo osi  $x$  je charakterizované vektorom uhlovej rýchlosti  $\omega_x$  a otáčanie okolo osi  $y$  vektorom  $\omega_y$ .

Výsledný pohyb kola je zložený z uvedených dvoch otáčavých pohybov a je charakterizovaný vektorom výslednej uhlovej rýchlosti  $\omega$ , pre ktorý platí

$$\omega = \omega_x + \omega_y.$$

Ak určíme vektor  $\omega$  naznačeným spôsobom, bude to iba jeho okamžitá hodnota, lebo vektor  $\omega_x$ , respektive  $\omega_y$  vo všeobecnosti nie je konštantný — mení stále svoj smer. Podľa (3)

$$\omega_x = \omega_x \mathbf{i}, \quad \omega_y = \omega_y \mathbf{j},$$

kde

$$\omega_x = \frac{2\pi}{T_x}, \quad \omega_y = \frac{2\pi}{T_y}.$$

*Poznámka:* Predpokladáme, že z koncových bodov jednotkových vektorov  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  vidíme otáčanie kola proti pohybu hodinových ručičiek. Ak by sa koleso otáčalo v smere pohybu hodinových ručičiek, potom príslušný vektor  $\omega_x$ , resp.  $\omega_y$  by bol opačne orientovaný.

Ak dosadíme za  $T_x = 0,5$  s a za  $T_y = 1$  s, potom

$$\omega = (4\pi \mathbf{i} + 2\pi \mathbf{j}) \text{ s}^{-1}$$

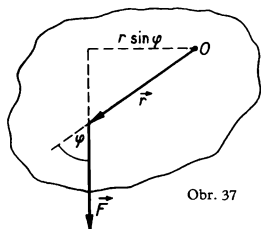
a podľa (5)

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = 2\pi \sqrt{5} \text{ s}^{-1}.$$

b) Moment sily

Ak na tuhé teleso, schopné otáčať sa okolo pevnej osi pôsobí sila, potom otáčivý účinok tejto sily vyjadrujeme jej momentom.

Nech  $O$  je bod na osi otáčania a súčasne počiatok súradného systému (obr. 37),  $r$  nech je polohový vektor pôsobiska sily  $F$ .



Obr. 37

Vieme, že moment  $M$  sily  $F$  vypočítame zo vzťahu

$$M = rF \sin \varphi ,$$

čo však podľa (10) je absolútna hodnota vektorového súčinu vektorov  $r$  a  $F$ . Moment  $M$  je teda vektorová veličina, pre ktorú platí

$$M = r \times F .$$

### Záver

Prebrali sme tieto operácie: sčítanie a odčítanie vektorov, násobenie vektora číslom, skalárny súčin dvoch vektorov a veľmi stručne a neúplne vektorový súčin dvoch vektorov. Tým končia základné operácie vektorovej algebry. Pokiaľ ide o delenie vektora vektorom, vektorová algebra takúto operáciu nepozná. Možno hovoriť len o pomere dvoch rovnobežných vektorov ako o čísele, ktorým je treba násobiť prvý vektor, aby sme dostali druhý. Práve tak nemožno vo vektorovej algebre vektor umocniť.

### III. ČÁST

## SOUTĚŽNÍ ÚLOHY

Řešení experimentálních úloh je zpracováno podle žakovských měření

### Úlohy kategorie A

*Úlohy a řešení recenzoval Evžen Říman, CSc., a dr. Ivan Náter.*

#### a) První kolo soutěže

##### 1. příklad (navrhl Stanislav Ondrejka)

Před pevnou zvislou pružnou rovinnou doskou  $\sigma$  stojí na vodorovnej hladkej podložke v mieste  $A$ , ktoré je od dosky  $\sigma$  vzdialené o dĺžku  $l$ , pružná guľôčka hmotnosti  $m_1$ . Na túto guľôčku narazí centrálné druhá, rovnako veľká pružná guľôčka o hmotnosti  $m_2$  rýchlosťou  $v_2$ , orientovanou kolmo na dosku  $\sigma$ .

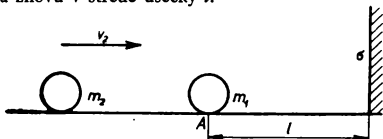
Vypočítajte

a) v akom pomere musia byť hmotnosti guľôčiek, ak sa majú znova zraziť

1. vnútri dĺžky  $l$ , smerujúcej z bodu  $A$  kolmo na dosku  $\sigma$ ,
2. na priamke, ktorá obsahuje úsečku  $l$ , ale mimo tejto úsečky, tj. vľavo od bodu  $A$  (viď obr. 38),

b) aký musí byť pomer hmotností guľôčiek, aby k ďalšej zrážke nedošlo,

c) pri akom pomere hmotností sa obidve guľôčky zrazia znovu v strede úsečky  $l$ .



Obr. 38

Trenie a rotačný pohyb guľôčiek neuvažujte. Polomery guľôčiek sú (voči dĺžke  $l$ ) zanedbateľné.

*Riešenie:*

Zvolíme za kladnú orientáciu všetkých rýchlostí (tj.  $v_2, w_1, w_2$ ) orientovaný smer rýchlosti  $v_2$ . Po ukončení nárazu guľôčky o hmotnosti  $m_2$  na guľôčku o hmotnosti  $m_1$  má guľôčka  $m_1$  rýchlosť  $w_1$  (kladnú pred nárazom na dosku  $\sigma$ , zápornú a rovnako veľkú po odraze od dosky). Guľôčka  $m_2$  získa rýchlosť  $w_2 \geq 0$ .

Pre pružnú zrážku platí aj zákon o zachovaní hybnosti aj zákon o zachovaní energie (pred zrážkou a po nej).

Keďže  $v_1 = 0$  (guľôčka  $m_1$  je v pokoji), platí pre hybnosť

$$m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2, \quad (1)$$

pre energiu

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2. \quad (2)$$

Zo vzťahu (1) vyjadríme

$$w_2 = \frac{m_2 v_2 - m_1 w_1}{m_2} = v_2 - \frac{m_1}{m_2} w_1, \quad (1a)$$

čo dosadené do (2) dá po úprave pre neznámu  $w_1$  kvadratickú rovnicu

$$\left[ \left( m_1 + \frac{m_1}{m_2} \right) w_1 - 2 m_2 v_2 \right] w_1 = 0. \quad (3)$$

Jej prvý koreň je

$$w_1 = \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2, \quad (3a)$$

druhý koreň je

$$w_1' = 0. \quad (3a')$$

Dosadením (3a) resp. (3a') do (1a) dostaneme hodnoty pre rýchlosť guľôčky  $m_2$  po zrážke, a to

$$w_2 = v_2 - \frac{m_1}{m_2} w_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} v_2, \quad (3b)$$

resp.

$$w_2' = v_2 - \frac{m_1}{m_2} w_1' = v_2. \quad (3b')$$

Diskusia koreňov: Kvadratická rovnica (3) má síce z hľadiska matematického dve riešenia, avšak fyzikálne vyhovujú danej úlohe len hodnoty vo vzťahoch (3a), (3b). Zrážka nastane práve preto, že pôvodný pohyb nemôže nezmenene pokračovať ďalej. A práve pôvodný pohybový stav vystihujú riešenia (3a') a (3b'). Korene (3a') a (3b') by vystihovali stav, keby guľôčky mohli jedna cez druhú prenikať — tento prípad zo zrejmých

dôvodov odpadá. Reálny fyzikálny význam majú teda len korene (3a) a (3b).

Avšak v celom časovom intervale pred zrážkou guľôčiek (kedy platia tiež rovnice (1) a (2)), sú platné práve riešenia (3a') a (3b'). Guľôčky zachovávajú svoj pôvodný pohybový stav — guľôčka  $m_2$  sa pohybuje rýchlosťou  $v_2$  a guľôčka  $m_1$  je v pokoji.

Vyšetrovania jednotlivých prípadov:

Výrazy (3a) a (3b) ukazujú, že rýchlosti  $w_1$  a  $w_2$  splňujú vždy nerovnosť

$$w_1 > w_2,$$

pretože

$$2 m_2 > m_2 - m_1,$$

čo dostaneme porovnaním čitateľov vo vzťahoch (3ab).

a<sub>1</sub>) Ak má nová zrážka nastať medzi bodom  $A$  a doskou  $\sigma$ , musí platiť nielen  $w_1 > 0$ , čo je splnené vždy, ale tiež

$$w_2 > 0, \quad (4a)$$

tj. obidve guľôčky sa musia po náraze pohybovať tým istým smerom.

Dosadením vzťahov (3a), (3b) do (4a) a po krátení zlomkom  $\frac{v_2}{m_1 + m_2}$  dostaneme nerovnosť  $m_2 - m_1 > 0$ , z ktorej nájdeme podmienku

$$\frac{m_1}{m_2} < 1. \quad (4b)$$

Odpoveď: Ak sa majú guľôčky znova zraziť vnútri úsečky  $l$ , musí byť splnená podmienka (4b).

Ak sú obidve guľôčky rovnako hmotné, tj.  $\frac{m_1}{m_2} = 1$ ,



dostaneme z (3a) a (3b) hodnoty

$$w_1 = v_2; \quad w_2 = 0,$$

čo značí: Dve pružné guľôčky o rovnakej hmotnosti si pri centrálnej zrážke vymenia rýchlosti a nová zrážka nastane opäť v bode  $A$ .

a<sub>2</sub>) Ak má nová zrážka nastať vľavo od bodu  $A$ , musí byť  $w_2 < 0$ , ale pritom musí tiež platiť  $|w_2| < |w_1|$ .

Dosadením vzťahov (3a) a (3b) do týchto vzťahov dostaneme z prvého po úprave nerovnosť

$$m_2 - m_1 < 0,$$

z čoho

$$\frac{m_1}{m_2} > 1,$$

z druhého nerovnosť

$$m_1 - m_2 < 2 m_2,$$

z ktorej

$$\frac{m_1}{m_2} < 3.$$

Spojením týchto nerovností vznikne podmienka

$$1 < \frac{m_1}{m_2} < 3. \quad (5)$$

Obidve guľôčky sa zrazia znovu mimo úsečky  $l$ , ak sú splnené nerovnosti (5).

b) Aby k ďalšej zrážke nedošlo, musí platiť súčasne:

$$w_2 < 0, \quad |w_2| \geq w_1.$$

Z prvej podmienky plynie zas  $\frac{m_1}{m_2} > 1$ , z druhej dostaneme

$$m_1 - m_2 \geq 2 m_2,$$

čiže

$$\frac{m_1}{m_2} \geq 3. \quad (6)$$

Ďalšia zrážka nenastane, ak je splnená podmienka (6).

Ak je  $\frac{m_1}{m_2} = 3$ , vtedy vzťahy (3a), (3b) dajú

$$w_1 = \frac{1}{2} v_2 = -w_2.$$

V tomto prípade sa guľôčka  $m_1$  po odraze od dosky  $\sigma$  pohybuje za guľôčkou  $m_2$  doľava rovnakou rýchlosťou.

Ak je  $\frac{m_1}{m_2} > 3$ , má odrazená guľôčka  $m_2$  väčšiu rýchlosť ako guľôčka  $m_1$ .

c) Ak sa majú guľôčky znova zraziť v strede úsečky  $l$ , musí  $m_2$  prejsť dráhu  $s_2 = \frac{l}{2}$ , zatiaľ čo  $m_1$  prejde dráhu

$s_1 = \frac{3}{2} l$ , takže

$$\frac{s_1}{s_2} = 3.$$

Keďže pohyb je rovnomerný, platí  $s_2 = w_2 t$ ,  $s_1 = w_1 t$ , takže

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{w_1}{w_2} = 3;$$

z čoho

$$w_1 = 3 w_2$$

a po dosadení vzťahov (3a), (3b) a krátení dostaneme

$$2 m_2 = 3 (m_2 - m_1),$$

takže

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}.$$

Gulôčky sa znova zrazia v strede úsečky  $l$ , ak  $m_2 = 3 m_1$ .

## 2. príklad (navrhl Milan Rádl)

Střední rychlost  $\bar{u}$  neuspořádaného pohybu volných elektronů v kovech závisí na vlastnostech krystalické mřížky kovu a na teplotě. Při průtoku elektrického proudu přistupuje k tomuto pohybu ještě usměrněný pohyb elektronů o střední rychlosti  $\bar{v}$ , pro niž platí  $\bar{v} \ll \bar{u}$ .

Předpokládejme, že okamžitá rychlost příslušející tomuto usměrněnému pohybu elektronů roste vlivem sil elektrického pole v době mezi dvěma po sobě následujícími srážkami elektronu s ionty kovu rovnoměrně od nuly do

hodnoty  $v$ , takže  $\bar{v} = \frac{v}{2}$ .

a) Stanovte počet volných elektronů  $n$  v objemové jednotce mědi, jestliže na každý atom mědi připadá jeden volný elektron, a dále stanovte řád vzdálenosti atomů v krystalové mřížce mědi za zjednodušeného předpokladu, že atomy zaujímají objemy tvaru krychlí, jejichž stěny se navzájem dotýkají.

b) Určete střední rychlost  $\bar{v}$  usměrněného pohybu volných elektronů v měděném vodiči délky  $l$  o průřezu  $S$ , na jehož koncích bylo udržováno napětí  $U$ .

c) Stanovte dobu  $\tau$  mezi dvěma po sobě následujícími srážkami elektronu s ionty krystalové mřížky.

Řešte nejprve obecně, potom pouze části a) a b) pro hodnoty  $l = 10,0$  m,  $S = 1,00$  mm<sup>2</sup>, měrný odpor mědi  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ωm,  $U = 1,00$  V, hmotnost elektronu

$m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg, elementární náboj  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Avogadrovo číslo  $N = 6,02 \cdot 10^{26}$  kmol<sup>-1</sup>, hmotnost kilogramatomu mědi  $\alpha = 63,5$  kg, měrná hmotnost mědi  $s = 8,90 \cdot 10^3$  kg m<sup>-3</sup>.

a) Označme  $V$  objem kilogramatomu mědi,  $\alpha$  jeho hmotnost a  $N$  počet atomů, který obsahuje. Je-li měrná hmotnost mědi  $s$ , pak

$$V = \frac{\alpha}{s}.$$

V objemové jednotce je tedy

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N s}{\alpha} \quad (1)$$

atomů, což je současně i počet volných elektronů.

Objem připadající na jeden atom mědi je

$$V_1 = \frac{V}{N} = \frac{\alpha}{N s}$$

a řád vzdálenosti jednotlivých atomů v krystalové mřížce je dán vztahem

$$d \approx \sqrt[3]{\frac{\alpha}{N s}}.$$

b) Pro proud  $I$  protékající vodičem průřezu  $S$  platí vztah

$$I = n e \bar{v} S, \quad (2)$$

kde  $\bar{v}$  je střední rychlost jejich usměrněného pohybu a  $e$  je elementární náboj elektronu.

Ze známých hodnot napětí  $U$ , měrného odporu  $\rho$ , průřezu  $S$  a délky vodiče  $l$  určíme odpor vodiče  $R$  a proud  $I$

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad I = \frac{U}{R} = \frac{U S}{\rho l} \quad (3)$$

a ze vztahů (1), (2) a (3) určíme střední rychlost  $v$  usměrněného pohybu elektronů

$$\bar{v} = \frac{U \alpha}{\rho l e N s}. \quad (4)$$

c) Příčinou usměrněného pohybu volných elektronů je elektrické pole ve vodiči, jehož intenzita je

$$E = \frac{U}{l}.$$

Toto pole působí na každý elektron silou

$$F_1 = e E = \frac{e U}{l},$$

která uděluje elektronu hmotnosti  $m$  zrychlení

$$a = \frac{F_1}{m} = \frac{e U}{m l}.$$

Označíme-li dobu mezi dvěma srážkami elektronu  $\tau$ , pak během této doby získá elektron rovnoměrně zrychleným pohybem rychlost

$$v = a \tau = \frac{U e}{m l} \tau$$

a jeho střední rychlost  $v$  v uvedeném časovém intervalu je tedy

$$\bar{v} = \frac{0 + v}{2} = \frac{v}{2} = \frac{U e \tau}{2 l m}.$$

Porovnáním se vztahem (4) získáme pro dobu  $\tau$  vztah

$$\tau = \frac{2 m \alpha}{e^2 \rho N s}.$$

Numericky:

a)  $n = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ,  $d$  je řádově  $10^{-10} \text{ m}$ .

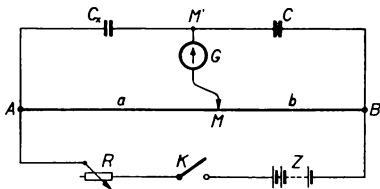
b)  $v = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$ .

c)  $\tau = 4,9 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ .

### 3. úkol experimentální (navrhl Jan Tesař)

#### Měření kapacity můstkovou metodou stejnosměrným proudem

*Potřeby:* kondenzátor neznámé kapacity  $C_x$ , sada kondenzátorů známých kapacit, Wheatstoneův můstek pro měření odporů, regulační reostat odporu  $R$ , citlivý galvanometr  $G$  na stejnosměrný proud s nulou uprostřed stupnice, baterie  $Z$ , klíč  $K$ , spojovací vodiče.



Obr. 39

*Výklad:* Uzavřeme klíčem  $K$  obvod (viz obr. 39). Pro napětí mezi body  $AM'$  a  $M'B$  platí úměra

$$U_{AM'} : U_{M'B} = C : C_x \quad (1)$$

a pro napětí mezi body  $AM$  a  $MB$  úměra

$$U_{AM} : U_{MB} = a : b, \quad (2)$$

kde  $AM = a$  a  $MB = b$ , je-li vodič z homogenního materiálu a má všude stejný průřez.

Dokažte vztahy (1) a (2).

Jestliže při střídavém zapínání a vypínání obvodu klíčem  $K$  zůstane ukazovatel galvanometru v klidu, pak platí

$$C_x = C \frac{b}{a}. \quad (3)$$

Dokažte vztah (3).

*Postup měření:*

1. Zapojte obvod podle obr. 39. Odpor  $R$  slouží jako ochranný odpor. Postavte pohyblivý kontakt  $M$  blízko středu vodiče  $AB$ , na reostatu  $R$  nastavte největší odpor a vyhledejte v sadě kondenzátor takové kapacity  $C$ , aby ukazovatel galvanometru při přerušování proudu kmital s nejmenšími rozkmity.
2. Najděte takovou polohu kontaktu  $M$ , aby ukazovatel galvanometru zůstal při střídavém zapínání a vypínání obvodu klíčem  $K$  v klidu.
3. Zmenšováním odporu  $R$  až po jeho úplné vyřazení zvětšujte citlivost měření. Změřte teď  $a$  a  $b$  a vypočítejte hodnotu  $C_x$  ze vztahu (3). Naměřené hodnoty  $a$  a  $b$  i vypočítanou hodnotu  $C_x$  zaznamenejte do tabulky.
4. Zapněte odpor  $R$  znovu na nejvyšší hodnotu a opakujte měření podle 2. a 3. několikrát.
5. Z hodnot  $a$ ,  $b$ ,  $C_x$  určených při každém měření vypočítejte aritmetické průměry a absolutní i relativní chyby měření.

Absolutní chyba ukazovatele galvanometru na stupnici se rovná polovině hodnoty nejmenšího dílku měřítka.

Absolutní i relativní chybu kapacity určíte ze záznamu na kondenzátoru.

*Řešení:*

a) Důkaz vztahu (1)

Při sériovém zapojení dvou kondenzátorů je na obou kondenzátorech stejný náboj  $Q$ . Napětí na kondenzátoru  $C_x$  označme  $U_{AM}$ , napětí na kondenzátoru  $C$  označme  $U_{M'B}$ .

$$U_{AM} = \frac{Q}{C_x}, \quad U_{M'B} = \frac{Q}{C}$$

a odtud

$$U_{AM} : U_{M'B} = C : C_x.$$

b) Důkaz vztahu (2)

Mostový drát je homogenní, všude stejného průřezu a je pohyblivým kontaktem  $M$  rozdělen v úseky  $a$  a  $b$ . Odporů těchto úseků jsou úměrné jejich délkám, tedy  $R_a = \rho \frac{a}{S}$ ,  $R_b = \rho \frac{b}{S}$ . Napětí na vodičích spojených za sebou jsou úměrná jejich odporům, tedy

$$U_{AM} : U_{MB} = \rho \frac{a}{S} : \rho \frac{b}{S},$$

$$U_{AM} : U_{MB} = a : b.$$

c) Důkaz vztahu (3)

Nastavíme-li pohyblivý kontakt  $M$  tak, aby galvanometrem neprocházel proud, znamená to, že body  $M$  a  $M'$  mají nulový rozdíl potenciálů a že tedy napětí mezi body  $A$  a  $B$  je rozděleno ve stejném poměru pro větve  $AM'B$



a  $AMB$ :

$$U_{AM'} : U_{M'B} = U_{AM} : U_{MB}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za levou a pravou stranu ze vztahů (1) a (2), dostáváme

$$C : C_x = a : b,$$

čili

$$C_x = C \frac{b}{a}.$$

#### d) Měření

Mostový drát měl odpor řádově  $10 \Omega$ , za zdroj proudu byly použity dva akumulátory NiFe. Tedy ani při úplném vyřazení ochranného odporu  $R$  (asi  $200 \Omega$ ) se nemohl mostový drát přehřátím poškodit. Byl použit galvanometr s nulou uprostřed a s rozsahem stupnice do  $\pm 1 \text{ mA}$  (stupnice měla  $\pm 10$  dílků). Přesnost měřidla byla podle vyznačené třídy přesnosti  $1 \%$ . Provedení kontaktu dovolilo odečítat délky  $a$  a  $b$  s přesností  $1 \text{ mm}$ . Mostový drát nebyl kalibrován, předpokládalo se, že má všude stejný průřez.

Kondenzátor známé kapacity měl na štítku údaj  $C = 10 \mu\text{F} \pm 5 \%$ , tedy byl značně přesný.

Střední chybu aritmetického průměru vypočteme ze

vztahu  $\bar{\delta} = \frac{5}{2} \frac{\sum \Delta_+}{n\sqrt{n-1}}$ , čili pro  $n = 10$  platí

$\bar{\delta} = \frac{1}{12} \sum \Delta_+$ . ( $\sum \Delta_+$  je součet kladných odchylek od aritmetického průměru.)

Střední chyba veličin  $a$  a  $b$  je

$$\bar{\delta}_a = 0,052 \text{ cm}, \quad \bar{\delta}_b = 0,052 \text{ cm}, \quad \text{tj. asi } 0,1 \%$$

Tabulka měření :

Číslo měření	$a$ [cm]	$b$ [cm]	$C_x$ [ $\mu$ F]	$\Delta a_+$ [cm]	$\Delta b_+$ [cm]	$(\Delta C_x)_+$ [ $\mu$ F]
1	48,5	51,5	10,62		0,07	0,031
2	48,4	51,6	10,66		0,17	0,081
3	48,6	51,4	10,58	0,03		
4	48,8	51,2	10,49	0,23		
5	48,8	51,2	10,49	0,23		
6	48,5	51,5	10,62		0,07	0,031
7	48,7	51,3	10,53	0,13		
8	48,4	51,6	10,66		0,17	0,081
9	48,5	51,5	10,62		0,07	0,031
10	48,5	51,5	10,62		0,07	0,031
aritm. průměr	48,57cm	51,43cm	10,589 $\mu$ F	$\Sigma \Delta a_+ = 0,62$ cm	$\Sigma \Delta b_+ = 0,62$ cm	$\Sigma (\Delta C_x)_+ = 0,286 \mu$ F

Střední chyba naměřené hodnoty kapacity  $C_x$  je  $\overline{\delta C_x} = 0,026 \mu\text{F}$ . Protože možná chyba daného kondenzátoru kapacity  $C$  je 5 %, je i kapacita měřeného kondenzátoru zjištěna s přesností 5 %, protože veličiny  $a$  a  $b$  mají střední chyby zanedbatelně malé proti chybě kondenzátoru  $C$ .

Je tedy nutno výsledek uvádět s touto přesností

$$C_x = (10,6 \pm 0,5) \mu\text{F}.$$

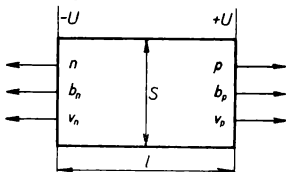
#### 4. příklad (navrhl Mojmir Simerský)

Je-li v polovodiči elektrické pole  $E$ , pohybují se v něm nositelé nábojů (elektrony a díry) průměrnými rychlostmi, které jsou úměrné intenzitě pole  $v = b E$ . Součinitel  $b$  je pohyblivost nositele náboje. Určete měrnou vodivost polovodiče, jestliže v něm elektrony mají koncentraci  $n$  a pohyblivost  $b_n$ , díry koncentraci  $p$  a pohyblivost  $b_p$ . Elektron i díra mají náboje  $\mp e$ .

Řešte jen obecně, tj. vyjdárete měrnou vodivost pomocí veličin  $e$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $b_n$ ,  $b_p$ .

**Řešení:**

Uvažujme homogenní vzorek polovodiče, jehož stálý



Obr. 40

průřez je  $S$  a délka  $l$  (obr. 40). Elektrony mají koncentraci  $n$  a pohyblivost  $b_n$ , díry koncentraci  $p$  a pohyblivost  $b_p$ . Celkový proud  $I$  se skládá z proudu elektronů  $I_n$  a proudu děr  $I_p$ , které se sečtou, neboť nositelé nábojů mají opačná znaménka a pohybují se navzájem opačnými směry. Je tedy

$$I = I_n + I_p. \quad (1)$$

Podle definice elektrického proudu platí  $I = \frac{Q}{t}$ . Uvažujme nejprve proud vzniklý pohybem elektronů

$$I_n = \frac{Q_n}{t} \quad (2)$$

kde  $Q_n$  je náboj, který přenesou elektrony v době  $t$ . Volme za  $t$  dobu, kterou elektrony potřebují k uražení dráhy  $l$ , tj.

$$t = \frac{l}{v_n} = \frac{l}{b_n E}, \quad (3)$$

kde  $v_n$  je průměrná rychlost elektronů,  $E$  intenzita pole ve vzorku. Elektrické pole je homogenní, platí tedy

$$E = \frac{U}{l}. \quad (4)$$

V době  $t$  projde jedním koncovým průřezem vzorku elektronový náboj obsažený v celém vzorku, tj.

$$Q_n = e n S l, \quad (5)$$

neboť  $S l$  je objem vzorku,  $n S l$  je počet elektronů v něm a  $e n S l$  je absolutní hodnota jejich úhrnného náboje. Dosazením do vztahů (4), (3) a (5) do (2) dostaneme pro elektronový proud vztah

$$I_n = \frac{Q_n}{t} = Q_n \frac{b_n}{l} E = e n S l \frac{b_n}{l} \frac{U}{l} = e n b_n \frac{S}{l} U. \quad (6)$$

Obdobně platí pro velikost děrového proudu vztah

$$I_p = e p b_p \frac{S}{l} U. \quad (7)$$

Dosazením (6) a (7) do (1) dostáváme pro celkový proud  $I$  vztah

$$I = I_n + I_p = e(n b_n + p b_p) \frac{S}{l} U.$$

Porovnáním se vztahem  $I = GU$ , kde  $G$  je vodivost a  $G = \gamma \frac{S}{l}$ , kde  $\gamma$  je měrná vodivost, dostáváme pro měrnou vodivost

$$\gamma = e(n b_n + p b_p).$$

Rozměrová zkouška:

$$[e] = \text{A s}; [n] = [p] = \text{m}^{-3}; [b_n] = \frac{v}{E} = \frac{\text{m s}^{-1}}{\text{V m}^{-1}} = \text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1};$$

$$[\gamma] = \text{A s m}^{-3} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} = \frac{\text{A}}{\text{V m}} = \Omega^{-1} \text{m}^{-1} = \text{S m}^{-1},$$

což je rozměr měrné vodivosti ( $\text{S} = \Omega^{-1} = \text{siemens}$  — jednotka vodivosti).

Poznámka: Tento výpočet platí v oblasti Ohmova zákona, tj. pro slabá elektrická pole.

## 5. příklad (navrhl Václav Havel)

Kovová tyč délky  $l$  padá volným pádem ve vodorovné poloze z výšky  $h$  tak, že svírá se směrem sever—jih úhel  $\alpha$ . Za předpokladu, že se neuvažuje odpor vzduchu, udejte, jak se mění elektromotorické napětí na koncích tyče v závislosti na čase. Jak velké bude toto napětí

těsně před dopadem tyče na zem? Horizontální složka magnetické indukce zemské je  $B_H$ .

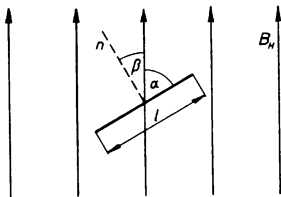
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $l = 5,0$  m,  $h = 50$  m,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $B_H = 2,0 \cdot 10^{-5}$  T, tíhové zrychlení  $g = 9,81$  m s<sup>-2</sup>.

*Řešení:*

Podle zákona o elektromagnetické indukci je absolutní hodnota indukovaného elektromotorického napětí rovna změně magnetického (indukčního) toku v jednotce času, tedy

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t},$$

neboť omezíme-li se na absolutní hodnotu, nemusíme brát v úvahu znaménko. Polohu tyče vůči indukčním



Obr. 41

čárám ukazuje obr. 41. Při pádu má tyč stále vodorovnou polohu a v krátké době  $\Delta t$  opíše plochu

$$\Delta S = l v \Delta t, \quad (2)$$

$$\text{kde} \quad v = g t \quad (3)$$

je okamžitá rychlost volného pádu v čase  $t$  měřeném od začátku pádu.

Magnetický indukční tok plochou  $\Delta S$  se určí vztahem

$$\Delta \Phi = B_H \Delta S \cos \beta = B_H \Delta S \sin \alpha, \quad (4)$$

neboť  $\beta$  značí úhel, který svírá normála  $n \perp l$  se směrem horizontální složky  $B_H$ .

Dosazením (4), (2) a (3) do (1) obdržíme pro velikost indukovaného elektromotorického napětí vztah

$$\mathcal{E} = B_H \frac{\Delta S}{\Delta t} \sin \alpha = B_H \frac{g l t \Delta t \sin \alpha}{\Delta t} = B_H l g t \sin \alpha. \quad (5)$$

Odpověď na druhou otázku obdržíme dosazením rychlosti v okamžiku dopadu, tj.  $v = \sqrt{2gh}$ , kde  $h$  je počáteční výška tyče:

$$\mathcal{E}_{\max} = B_H l \sqrt{2gh} \sin \alpha. \quad (6)$$

Dosazením daných hodnot a užitím vztahu  $1 \text{ tesla} = 1 \text{ T} = \text{V s m}^{-2}$ , obdržíme ze vztahu (5)

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ V s m}^{-2} \cdot 5,0 \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} t = \\ &= 8,5 \cdot 10^{-4} \text{ V s}^{-1} \cdot t \end{aligned}$$

a ze vztahu (6)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\max} &= 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ V s m}^{-2} \cdot 5,0 \text{ m} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 50 \text{ m}} \cdot \\ &\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10^{-5} \cdot 5,0 \sqrt{3} \text{ V s m}^{-1} \cdot 10 \text{ m s}^{-1} \sqrt{9,81} \doteq \\ &\doteq 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 2,7 \text{ mV}. \end{aligned}$$

Dimenzionální zkouška byla provedena současně s numerickým výpočtem.

## 6. úkol experimentálny (navrhl dr. Ivan Náter)

Z grafu závislosti svorkového napätia batérie od celkového prúdu z nej odoberaného určte elektromotorické napätie batérie.

*Pomôcky:* batéria, voltmeter známeho vnútorného odporu, ampérmeter, posuvný reostat, spojovacie vodiče.

*Postup:* Navrhňte vhodné zapojenie. Svorkové napätie batérie a prúd merajte desaťkrát pri rôznom zaťažení a namerané hodnoty zaznamenajte do tabuľky. Zostrojte graf závislosti svorkového napätia zdroja  $U$  od prúdu  $I$  a určte z neho hodnotu elektromotorického napätia  $\mathcal{E}$  batérie.

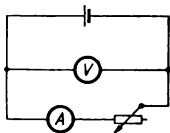
*Riešenie:*

Elektromotorické napätie zdroja je napätie na svorkách zdroja nepracujúceho, tj. na svorkách zdroja, ku ktorému nepripájame spotrebič, alebo na ktoré pripájame elektrický obvod s tak veľkým odporom  $R$ , že vedením neprechádza merateľný prúd  $I_a$ . Ako voltmeter treba voliť taký prístroj (s takým veľkým vnútorným odporom), že i prúd  $I_v$  je zanedbateľný. V prípade daného odporu  $R$  (valcový reostat alebo odporová dekáda) nameráme voltmetrom v obvode napätie  $U$ , ktoré je menšie ako  $\mathcal{E}$ . Toto napätie nazývame svorkové napätie.

V elektrickom obvode podľa obr. 42 je prúd  $I_v \doteq 0$  (podľa predpokladu), čiže  $I_a = I$ .

Pre obvod potom platí

$$\mathcal{E} = U + I R_i, \quad \text{z toho} \quad U = \mathcal{E} - I R_i,$$

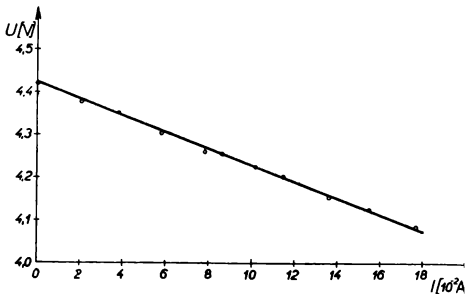


Obr. 42



kde  $R_i$  je vnútorný odpor zdroja. Je teda  $U$  lineárnou funkciou prúdu  $I$  a v prípade  $I = 0$  je  $U = \mathcal{E}$ .

Nameráme hodnoty  $I$  a  $U$  pre rôzne hodnoty vonkajšieho odporu  $R$  (ktoré nemusíme poznať – napr. u valcového reostatu) a extrapoláciou nájdeme hodnotu  $\mathcal{E}$  tak, že v grafe závislosti  $U = f(I)$  predĺžime priamku tak, až pretne os  $U$ .



Obr. 43

Tabuľka:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$I$ [A]	0,176	0,154	0,136	0,113	0,102	0,086	0,078	0,056	0,036	0,022
$U$ [V]	4,08	4,13	4,16	4,21	4,23	4,26	4,27	4,31	4,35	4,38

Ako zdroj bola použitá plochá batéria. Výsledky merania sú v tabuľke a graf je na obr. 43.

Priesečník grafu funkcie  $U = f(I)$  s osou  $U$  dáva hodnotu pre elektromotorické napätie zdroja

$$\mathcal{E} = 4,42 \text{ V}.$$

## 7. príklad (navrhl Konrád Hofman)

a) Při malém mřížkovém budicím napětí  $U_g$  se získá triodou maximální výkon, je-li zatěžovací odpor  $R_z$  rovný vnitřnímu odporu triody  $R_i$ . Dokažte.

b) Stanovte tento výkon u triody ( $\mu$ ,  $R_i$ ), je-li mřížkové budicí napětí  $U_g$ .

c) Je-li  $R_z = R_i$ , liší se směrnice tečny anodové charakteristiky v pracovním bodě od směrnice zatěžovací přímky jen znaménkem. Dokažte.

d) Podmínka pro optimální výkon při zatěžovacím odporu je  $R_z = 2 R_i$ . Jaký je tento výkon, je-li mřížkové budicí napětí  $U'_g$ ?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $\mu = 5$ ,  $R_i = 1,0 \text{ k}\Omega$ ,  $U_g = 2,0 \text{ V}$ ,  $U'_g = 18 \text{ V}$ .

*Řešení:*

a) Výkon na odporu  $R_z$  je

$$P = R_z I_a^2 = R_z \frac{\mu^2 U_g^2}{(R_i + R_z)^2} = a \frac{R_z}{(R_i + R_z)^2},$$

kde  $a = \mu^2 U_g^2$ .

Výkon  $P$  je tedy funkcí zatěžovacího odporu  $R_z$ .

a<sub>1</sub>) Po úpravě je

$$P R_z^2 + (2 P R_i - a) R_z + P R_i^2 = 0.$$

Z toho

$$R_z = \frac{a - 2 P R_i \pm \sqrt{a^2 - 4 a P R_i}}{2 P}. \quad (1)$$

Aby  $R_z$  bylo reálné, musí být diskriminant

$$a^2 - 4 a P R_1 \geq 0.$$

Protože  $a > 0$ , je po dělení

$$a - 4 P R_1 \geq 0; P \leq \frac{a}{4 R_1}.$$

Maximální výkon bude

$$P_{\max} = \frac{a}{4 R_1} = \frac{\mu^2 U_g^2}{4 R_1} = \frac{1}{4} S \mu U_g^2.$$

Pro  $P_{\max}$  plyne z (1)

$$R_z = \frac{a - 2 \frac{a}{4 R_1} R_1}{2 \frac{a}{4 R_1}} = R_1.$$

Tedy  $R_z = R_1$ , čímž je důkaz proveden.

a<sub>2</sub>) Řešení užitím derivace:

Podmínka pro extrém je  $P' = \frac{dP}{dR_z} = 0$ ,

$$P' = a \frac{(R_1 + R_z)^2 - 2 R_z (R_1 + R_z)}{(R_1 + R_z)^4} = a \frac{R_1 - R_z}{(R_1 + R_z)^3} = 0.$$

Z toho

$$R_z = R_1.$$

O extrému rozhodneme podle druhé derivace

$$\begin{aligned} P'' &= a \frac{-(R_1 + R_z)^3 - (R_1 - R_z)(R_1 + R_z)^2 \cdot 3}{(R_1 + R_z)^6} = \\ &= a \frac{-R_1 - R_z - 3 R_1 + 3 R_z}{(R_1 + R_z)^4} = a \frac{2 R_z - 4 R_1}{(R_1 + R_z)^4}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li  $R_z = R_1$ , platí  $P'' = -a \frac{1}{16 R_1^4} < 0$ ,

což značí, že pro  $R_z = R_1$  je výkon maximální.

$$\text{b) } P_{\max} = \frac{\mu^2 U_g^2}{4 R_1} = 0,025 \text{ W} = 25 \text{ mW}.$$

c) Směrnice tečny anodové charakteristiky v pracovním bodě je  $k = \frac{1}{R_1}$ , směrnice zatěžovací přímky je

$$k' = -\frac{1}{R_z}.$$

Protože  $R_z = R_1$ ,  $k = -k'$ .

d) Výkon

$$P = \mu^2 U_g^2 \frac{R_z}{(R_1 + R_z)^2} = \frac{2}{9} \frac{\mu^2 U_g^2}{R_1} = \frac{2}{9} S \mu U_g^2 = 1,8 \text{ W}.$$

## 8. příklad (navrhl Lubomír Vašek)

Svítící bod  $A$  leží ve výšce  $h_1$  nad klidným povrchem vody. V hloubce  $h_2$  pod povrchem vody je horizontálně položeno rovinné zrcadlo. Vypočítejte, v jaké svislé vzdálenosti od svítícího bodu  $A$  leží jeho zdánlivý obraz v zrcadle. Relativní index lomu ze vzduchu do vody je  $n$ .

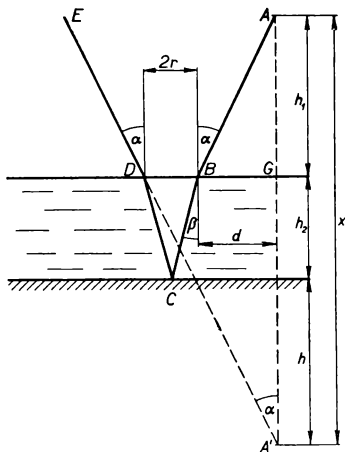
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $h_1 = 5,0$  cm.

$$h_2 = 8,0 \text{ cm}, \quad n = \frac{4}{3}.$$

**Řešení:**

Vybereme jeden světelný paprsek  $p$  vycházející ze svítícího bodu  $A$ , který dopadá na vodní hladinu v bodě  $B$

pod malým úhlem  $\alpha$  (obr. 44). Paprsek se láme ve vodě ke kolmici pod úhlem  $\beta$ , dopadá na zrcadlo v bodě  $C$  pod úhlem  $\beta$ , odráží se pod stejným úhlem  $\beta$ , dopadá



Obr. 44

na vodní hladinu v bodě  $D$  pod úhlem  $\beta$  a láme se do vzduchu pod úhlem  $\alpha$ . Oko umístěné v bodě  $E$  by vidělo svítící bod v prodlouženém směru paprsku vstupujícího

do oka, tedy v bodě  $A'$ , který je obrazem svítícího bodu  $A$  v zrcadle.

Hledaná vzdálenost podle obr. 44 je

$$x = h_1 + h_2 + h. \quad (1)$$

Označme v obrázku vzdálenosti  $GB = d$ ,  $BD = 2r$ . Pak z  $\triangle A'GD$  vychází

$$h + h_2 = \frac{2r + d}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Avšak z  $\triangle BDC$  dostaneme

$$r = h_2 \operatorname{tg} \beta,$$

$$d = h_1 \operatorname{tg} \alpha,$$

takže

$$h + h_2 = \frac{2h_2 \operatorname{tg} \beta + h_1 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 2h_2 \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} + h_1. \quad (2)$$

Podle Snelliova zákona je

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n. \quad (3)$$

Vzhledem k tomu, že jsme volili světelný paprsek tak, aby úhel  $\alpha$  byl malý, bude i úhel  $\beta$  malý, a proto lze psát

$$\sin \alpha \doteq \operatorname{tg} \alpha, \quad \sin \beta \doteq \operatorname{tg} \beta.$$

Rovnici (3) pak můžeme psát

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \doteq \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \doteq n \text{ nebo } \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \doteq \frac{1}{n}.$$

Dosazením do (2) dostaneme

$$h + h_2 = 2h_2 \frac{1}{n} + h_1,$$

odkud

$$h = \frac{2 h_2}{n} + h_1 - h_2.$$

Dosazením do (1) obdržíme

$$x = h_1 + h_2 + \frac{2 h_2}{n} + h_1 - h_2 = 2 \left( h_1 + \frac{h_2}{n} \right).$$

Numericky

$$x = 2 \left( 5,0 + \frac{8,0}{\frac{4}{3}} \right) \text{ cm} = 2 (5,0 + 6,0) \text{ cm} = 22 \text{ cm}.$$

## 9. příklad (navrhl Mojmír Simerský)

Dvě různá homogenní prostředí mají absolutní indexy lomu  $N_1$  a  $N_2$  ( $N_1 < N_2$ ) a jsou oddělena kulovou plochou o poloměru  $r$ . Střed křivosti  $S$  kulového rozhraní leží v druhém prostředí.

a) Stanovte ohniskovou vzdálenost  $f$  pro přechod osových světelných paprsků z prostředí o indexu lomu  $N_1$  do druhého prostředí.

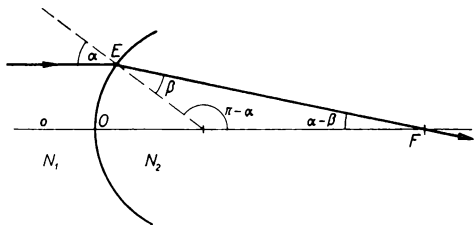
b) Vyšetřete, kdy platí  $f = 2r$ .

c) Na milimetrovém papíře narýsujte graf závislosti  $\frac{f}{r}$  na relativním indexu lomu v mezích  $1,0 \leq n \leq 2,5$ .

**Řešení:**

Ze Snelliova zákona lomu  $N_1 \sin \alpha = N_2 \sin \beta$  obdržíme pro relativní index lomu vztah

$$n = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (1)$$



Obr. 45

a) Užitím sinové věty na trojúhelník  $ESF$  (obr. 45) vyjádříme délku úsečky  $SF$

$$SF = \frac{r \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{r \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}.$$

Čitatele i jmenovatele dělíme výrazem  $\sin \beta$ , zlomek  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$  nahradíme podle (1) a kosiny ve jmenovateli aproximujeme jedničkami (neboť úhly  $\alpha, \beta$  jsou pro osové paprsky velmi malé). Pak platí

$$SF = \frac{r}{n - 1}.$$

Ohnisková vzdálenost  $f$  je

$$f = OS + SF = r + \frac{r}{n - 1} = r \frac{n}{n - 1} = r \frac{N_2}{N_2 - N_1}. \quad (2)$$

b) Dosazením požadavku  $f = 2r$  do (2) obdržíme po



zkrácení

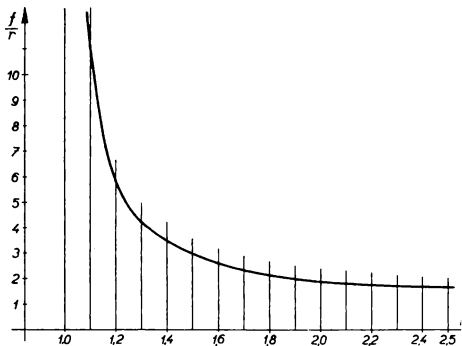
$$n = 2,0 .$$

Aby byla ohnisková vzdálenost  $f = 2r$ , musí mít relativní index lomu hodnotu  $n = 2,0$ .

c) Hodnoty  $\frac{f}{r}$  v závislosti na relativním indexu lomu  $n$  jsou podle (2) dány vztahem

$$\frac{f}{r} = \frac{n}{n-1}$$

a jsou vypočteny v následující tabulce. Graf závislosti je na obr. 46 (větev hyperboly).



Obr. 46

$n$	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50
$\frac{f}{r}$	-	11,0	6,0	4,33	3,50	3,00	2,67	2,43	2,25	2,11	2,00	1,91	1,83	1,77	1,71	1,67

## b) Druhé kolo soutěže

### 1. příklad (navrhl Zdeněk Ungermann)

Ve vodě postupují k vodní hladině dva rovnoběžné světelné paprsky. Jeden se láme do vzduchu a druhý nejdříve do olejové vrstvy na hladině vody a pak do vzduchu. Dokažte, že paprsky ve vzduchu budou rovnoběžné, a určete jejich vzdálenost, je-li jejich původní vzdálenost ve vodě  $l_1$ , úhel dopadu na vodní hladinu  $\alpha$  a tloušťka olejové vrstvy  $d$ . Absolutní index lomu vody je  $N_1$ , oleje  $N_2$  a vzduchu  $N_3 = 1$ .

*Řešení:*

a) Máme dokázat, že pro paprsky ve vzduchu platí  $1' \parallel 2'$ , tj.  $\beta = \alpha'$  (obr. 47).

Pro lom v bodech  $A, B, C$  platí podle Snelliova zákona

$$N_1 \sin \alpha = N_3 \sin \beta, \quad (1)$$

$$N_1 \sin \alpha = N_2 \sin \beta_1, \quad (2)$$

$$N_2 \sin \beta_1 = N_3 \sin \alpha'. \quad (3)$$

Dosazením (3) do (2) obdržíme

$$N_1 \sin \alpha = N_3 \sin \alpha'. \quad (4)$$

Dosazením (1) do (4) dostaneme

$$N_3 \sin \beta = N_3 \sin \alpha', \text{ tzn.}$$

$\sin \beta = \sin \alpha'$ , takže  $\beta = \alpha'$ , neboť oba úhly jsou v intervalu  $(0^\circ, 90^\circ)$ . Tím je žádaný důkaz proveden.

- b) Označme  $l_1 = AD$  vzdálenost paprsků 1, 2,  
 $l'_1 = EB$  vzdálenost paprsků 1', 2'',  
 $l_2 = FC$  vzdálenost paprsků 2' a 2'.

$l_1$  je dáno, ostatní dvě vzdálenosti určíme postupně z pravoúhlých trojúhelníků majících společnou přeponu.

$$\triangle ABD \text{ a } \triangle ABE \text{ určují } AB = \frac{l_1}{\cos \alpha} = \frac{l'_1}{\cos \beta},$$

takže

$$l'_1 = l_1 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}. \quad (5)$$

Jelikož  $\sphericalangle FBC = \beta - \beta_1$ , platí pro společnou přeponu  $\triangle BCG$  a  $\triangle BCF$

$$BC = \frac{d}{\cos \beta_1} = \frac{l_2}{\sin(\beta - \beta_1)},$$

odkud

$$l_2 = d \frac{\sin(\beta - \beta_1)}{\cos \beta_1} = d \left( \sin \beta - \frac{\cos \beta \sin \beta_1}{\cos \beta_1} \right). \quad (6)$$

Ze vztahů (1), (2) a zadané velikosti  $N_3 = 1$  vyjádříme hodnoty pro  $\sin \beta$  a  $\sin \beta_1$ , načež pomocí vztahu  $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$  (platného pro  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ ) určíme  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \beta_1$ :

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad (7a)$$

$$\sin \beta = N_1 \sin \alpha \Rightarrow \cos \beta = \sqrt{1 - N_1^2 \sin^2 \alpha}, \quad (7b)$$

$$\sin \beta_1 = \frac{N_1}{N_2} \sin \alpha \Rightarrow \cos \beta_1 = \frac{1}{N_2} \sqrt{N_2^2 - N_1^2 \sin^2 \alpha}. \quad (7c)$$

Hledaná vzdálenost  $x = l'_1 - l_2$  paprsků 1' a 2' ve vzduchu je vzhledem k (5) a (6) a po dosazení vztahů (7a), (7b), (7c) a po úpravě



$$x = l'_1 - l_2 = l_1 \frac{\sqrt{1 - N_1^2 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} - N_1 d \sin \alpha \left( 1 - \frac{\sqrt{1 - N_1^2 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{N_2^2 - N_1^2 \sin^2 \alpha}} \right).$$

Půjde-li paprsek 1 podle obr. 47b vpravo od paprsku 2 (nebo bude-li úhel  $\alpha$  v obr. 47a orientován na opačnou stranu od kolmice k rozhraní v bodě  $A$  a  $B$ ), pak se délky  $l'_1$  a  $l_2$  sčítají a hledaná vzdálenost obou paprsků bude

$$x = l'_1 + l_2 = l_1 \frac{\sqrt{1 - N_1^2 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} + N_1 d \sin \alpha \left( 1 - \frac{\sqrt{1 - N_1^2 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{N_2^2 - N_1^2 \sin^2 \alpha}} \right).$$

## 2. příklad (navrhl Mojmir Simerský)

V homogenním magnetickém poli s indukcí  $B$  se pohybuje kolmo na indukční čáry přímý vodič účinné délky  $l$  a odporu  $R$  stálou rychlostí  $v_0$  až do okamžiku, kdy k němu připojíme kondenzátor kapacity  $C$ . Jaká musí být rychlost vodiče  $v_0$  a jaký musí být pohyb vodiče po jeho připojení ke kondenzátoru, má-li se kondenzátor nabíjet stálým proudem  $I$ ?

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $B = 0,10$  T,  $l = 30$  cm,  $C = 200$   $\mu$ F,  $R = 15$   $\Omega$ ,  $I = 60$   $\mu$ A.

*Řešení:*

Za dobu  $t$  od připojení kondenzátoru přinese proud  $I$  celkový náboj

$$Q = I t,$$

takže kondenzátor se nabije na napětí

$$U_c = \frac{Q}{C} = \frac{I t}{C}. \quad (1)$$

Proud  $I$  je v obvodu udržován rozdílem indukovaného napětí  $U_p$  a napětí v kondenzátoru  $U_c$ .

Podle zákona o elektromagnetické indukci platí

$$U_p = B l v, \quad (2)$$

takže podle Ohmova zákona je proud

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_p - U_c}{R} = \frac{B l v}{R} - \frac{I t}{R C}, \quad (3)$$

kde jsme dosadili za  $U_p$ , resp.  $U_c$  ze vztahu (2), resp. (3). Vyjádřením neznámé  $v$  z rovnice (3) dostaneme

$$v = \frac{R I}{B l} + \frac{I}{B l C} t. \quad (4)$$

Vztah (4) ukazuje, že rychlost  $v$  roste úměrně s časem  $t$ ; proto pohyb vodiče je rovnoměrně zrychlený s počáteční rychlostí

$$v_0 = \frac{R I}{B l}$$

a se zrychlením

$$a = \frac{I}{B l C},$$

které, jak ukazuje tento vztah, nezávisí na odporu vodiče.

Při výpočtu z daných hodnot užijeme převodních vztahů

$$\text{ohm} = \frac{\text{volt}}{\text{ampér}} = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \text{V A}^{-1}; \quad \text{tesla} = \frac{\text{weber}}{\text{m}^2} =$$

$$= \frac{\text{V s}}{\text{m}^2} = \text{V s m}^{-2}; \quad \text{farad} = \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}} =$$

$$\frac{\text{ampérsekunda}}{\text{volt}} = \frac{\text{A s}}{\text{V}} = \text{A s V}^{-1}.$$

Počáteční rychlost je tedy při zadaných hodnotách

$$v_0 = \frac{R I}{B l} = \frac{15 \Omega \cdot 60 \cdot 10^{-6} \text{ A}}{10^{-1} \text{ T} \cdot 3 \cdot 10^{-1} \text{ m}} =$$

$$= 30 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V A}^{-1} \cdot \text{A}}{\text{V s m}^{-2} \cdot \text{m}} = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1} = 3,0 \text{ cm s}^{-1}$$

a zrychlení pohybu vodiče je

$$a = \frac{I}{B l C} = \frac{60 \cdot 10^{-6} \text{ A}}{10^{-1} \text{ T} \cdot 30 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 200 \cdot 10^{-6} \text{ F}} =$$

$$= \frac{1 \text{ A}}{10^{-1} \text{ V s m}^{-2} \cdot \text{m} \cdot \text{A s V}^{-1}},$$

$$a = 10 \text{ m s}^{-2}.$$

### 3. příklad (navrhl Konrád Hofman)

U triodového zesilovače napětí bylo na zatěžovacím odporu  $R_z$  naměřeno zesílení  $A$ . Když se zvětšil zatěžovací odpor na hodnotu  $R'_z$ , přičemž pracovní bod zůstal zachován, bylo zesílení  $A'$ .

a) Stanovte parametry triody.

b) Stanovte strmosti příslušných dynamických charakteristik.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $R_z = 14 \text{ k}\Omega$ ,  $A = 14$ ,  $R'_z = 34 \text{ k}\Omega$ ,  $A' = 17$ .

*Řešení:*

Vztah pro zesílení (viz studijní téma) poskytuje pro první, resp. pro druhé zesílení rovnice

$$A = \mu \frac{R_z}{R_1 + R_z},$$

$$A' = \mu \frac{R'_z}{R_1 + R'_z}.$$

Řešením získáme zesilovací činitel

$$\mu = \frac{A A' (R'_z - R_z)}{A R'_z - A' R_z}$$

a vnitřní odpor

$$R_i = \frac{R_z R'_z (A' - A)}{A R'_z - A' R_z}.$$

b) Strmost  $S$  získáme z Barkhausenovy rovnice

$$S = \frac{\mu}{R_i} = \frac{A A' (R'_z - R_z)}{R_z R'_z (A' - A)}.$$

Strmost dynamické charakteristiky je

$$S' = S \frac{R_i}{R_i + R_z}.$$

Pro dané hodnoty vypočteme

$$\mu = \frac{14 \cdot 17 \cdot (34 - 14)}{14 \cdot 34 - 17 \cdot 14} = 20,$$

$$R_i = \frac{14 \cdot 34 \cdot (17 - 14)}{14 \cdot 34 - 17 \cdot 14} \text{ k}\Omega = 6,0 \text{ k}\Omega,$$

$$S = \frac{20}{6} \text{ mA V}^{-1} \doteq 3,3 \text{ mA V}^{-1}; \text{ průnik } D =$$

$$= \frac{1}{\mu} \cdot 100 \% = 5 \%; S'_1 = 1,0 \text{ mA V}^{-1}, S'_2 = 0,50 \text{ mA V}^{-1}.$$

Rozměrové zkoušky:

$$[\mu] = \frac{\text{k}\Omega}{\text{k}\Omega} = 1; \quad [R_i] = \frac{\text{k}\Omega \cdot \text{k}\Omega}{\text{k}\Omega} = \text{k}\Omega;$$

$$[S] = \frac{\text{k}\Omega}{\text{k}\Omega \cdot \text{k}\Omega} = 10^{-3} \Omega^{-1} = 10^{-3} \frac{\text{A}}{\text{V}} = \frac{\text{mA}}{\text{V}};$$

$$[S'] = [S] \frac{\text{k}\Omega}{\text{k}\Omega} = \frac{\text{mA}}{\text{V}}.$$



#### 4. příklad (navrhl Pavel Fabinger)

Z výšky  $h_0$  je volně spuštěn tenisový míček. Při dopadu na zem se mění  $p\%$  jeho kinetické energie deformací v energii deformační a tepelnou. Odpor prostředí zanedbáváme.

a) Najděte vztah pro výšku  $n$ -tého výskoku a pro rychlost  $n$ -tého dopadu míčku na zem.

b) Zjistěte, jakou zákonitost splňují časové intervaly mezi dvěma po sobě následujícími dopady míčku na zem.

c) Zjistěte, od kolikátého výskoku je výška rovna nebo menší než  $h' = \frac{1}{2} h_0$ .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $h_0 = 10$  m,  $p = 36$ ,  $g = 10$  m s<sup>-2</sup>.

*Řešení:*

Označíme-li  $h_k$  výšku, do které se odrazí míček po  $k$ -tém dopadu, platí pro jeho polohovou energii

$$W_k = m g h_k. \quad (1)$$

Podle zadání je  $W_{k+1} = W_k (1 - 0,01 p)$ .

Dosadíme-li do posledně uvedeného vztahu (1), obdržíme

$$h_{k+1} = h_k (1 - 0,01 p), \quad (2)$$

což značí, že výšky, jichž dosáhne míček po jednotlivých odrazech, tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem  $q_1 = 1 - 0,01 p$ . Proto bude výška  $n$ -tého výskoku

$$h_n = h_0 q_1^n = h_0 (1 - 0,01 p)^n. \quad (3)$$

Při  $n$ -tém dopadu padá míček z výšky  $h_{n-1}$ . Torricelliův vztah  $v = \sqrt{2gh}$  dá pro rychlost  $v_n$  míčku při  $n$ -tém dopadu výraz

$$\begin{aligned} v_n &= \sqrt{2gh_{n-1}} = \sqrt{2gh_0(1 - 0,01p)^{n-1}} = \\ &= v_1(1 - 0,01p)^{\frac{n-1}{2}}, \end{aligned} \quad (4)$$

kde jsme zavedli označení  $\sqrt{2gh_0} = v_1$  (tj. rychlost prvního dopadu).

Dopadové rychlosti tvoří tedy geometrickou posloupnost s kvocientem

$$q_2 = (1 - 0,01p)^{\frac{1}{2}} = q_1^{\frac{1}{2}}.$$

b) Po  $n$ -tém dopadu se míček odráží rychlostí  $v_{n+1}$ , která je dána vztahem (4); z ní lze podle zákonů pro svislý vrh vzhůru určit dobu  $T_n$  mezi  $n$ -tým a  $(n + 1)$  dopadem:

$$T_n = 2\frac{v_{n+1}}{g} = 2\frac{v_1}{g}(1 - 0,01p)^{\frac{n}{2}} = T_0(1 - 0,01p)^{\frac{n}{2}}, \quad (5)$$

kde je zavedeno označení  $2\frac{v_1}{g} = T_0$ .

Doby  $T_n$  tvoří tedy opět geometrickou posloupnost s kvocientem  $q_2$ . Pohyb tedy není periodický.

c) Příklad, že  $h_n = \frac{1}{2}h_0$  dá dosazením tohoto výrazu do (3) rovnici

$$h_0(1 - 0,01p)^n = \frac{1}{2}h_0.$$

Po krácení  $h_0$  a logaritmování dostaneme

$$n = \frac{\log 0,5}{\log (1 - 0,01 p)} \quad (6)$$

Hledaným řešením bude tedy to nejmenší přirozené číslo  $n$ , které je větší než hodnota pravé strany výrazu (6).

Dosazením daných hodnot do (3), (4), (5) a (6) dostáváme

$$h_n = 10 (1 - 0,36)^n \text{ m} = 10 \cdot 0,64^n \text{ m};$$

$$v_n = 10 \sqrt{2} \cdot 0,8^{n-1} \text{ m s}^{-1};$$

$$T_n = 2 \sqrt{2} \cdot 0,8^n \text{ s}.$$

Protože

$$\frac{\log 0,5}{\log 0,64} = \frac{0,699 - 1}{0,806 - 1} = \frac{0,301}{0,194} \doteq 1,5,$$

je řešením pro případ c) přirozené číslo  $n = 2$ .

## c) Třetí kolo soutěže

### 1. příklad (navrhl Jan Tesař)

Tyč o délce  $l$  je na obou koncích zakončena kuličkami. Kuličky se pohybují ve žlábcích, které spolu svírají úhel  $90^\circ$ . Jedna z kuliček koná rovnoměrný pohyb rychlostí  $v$ .

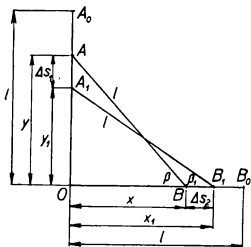
a) Určete rychlost druhé kuličky.

b) Jaký pohyb koná druhá kulička? Dokažte výpočtem a ukažte na grafu.

c) Při které poloze mají obě kuličky stejné rychlosti?  
 Řešte jen obecně.

**Řešení:**

Nachází-li se jedna kulička v bodě  $A_0$  (obr. 48a) je druhá kulička v bodě  $O$ . První kulička se pohybuje rovnoměrně směrem k bodu  $O$  stálou rychlostí  $v$  a v určitém okamžiku je v bodě  $A$ . Druhá kulička je v tom okamžiku v bodě  $B$ . Za dobu  $\Delta t$  se přemístí první kulička do bodu  $A_1$ , druhá kulička vykoná za tutéž dobu dráhu  $BB_1 = \Delta s_2$ .



Obr. 48a

Dráhu  $AA_1$  označíme  $\Delta s_1$ . Úhly, které svírá tyč v polohách  $AB$  a  $A_1B_1$  s přímkou  $OB$ , označíme po řadě  $\beta, \beta_1$ . Průměrnou rychlost druhé kuličky budeme značit  $w_p$ , okamžitou rychlost  $w$ .

a) Z pravoúhlých trojúhelníků  $AOB$  a  $A_1OB_1$  určíme  $y = l \sin \beta, y_1 = l \sin \beta_1, x = l \cos \beta, x_1 = l \cos \beta_1$ . Proto platí

$$\begin{aligned} \Delta s_1 &= y - y_1 = l(\sin \beta - \sin \beta_1) = \\ &= 2l \sin \frac{\beta - \beta_1}{2} \cos \frac{\beta + \beta_1}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Obdobně dokážeme

$$\begin{aligned} \Delta s_2 &= x_1 - x = l(\cos \beta_1 - \cos \beta) = \\ &= -2l \sin \frac{\beta_1 - \beta}{2} \sin \frac{\beta_1 + \beta}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Z rovnice (1) vyjádříme  $l$  a dosadíme do rovnice (2). Vyjde

$$\Delta s_2 = \Delta s_1 \operatorname{tg} \frac{\beta + \beta_1}{2}.$$

Násobíme-li tuto rovnici výrazem  $\frac{1}{\Delta t} \neq 0$ , dostaneme

$$\frac{\Delta s_2}{\Delta t} = \frac{\Delta s_1}{\Delta t} \operatorname{tg} \frac{\beta + \beta_1}{2}.$$

Výraz  $\frac{\Delta s_1}{\Delta t} = v$  značí stálou rychlost první kuličky na celé dráze  $A_0O$ , výraz  $\frac{\Delta s_2}{\Delta t} = w_p$  značí průměrnou rychlost druhé kuličky na dráze  $BB_1$  v časovém intervalu  $\Delta t$ . Platí tedy vztah

$$w_p = v \operatorname{tg} \frac{\beta + \beta_1}{2}.$$

Okamžitou rychlost druhé kuličky v místě  $B$  dostaneme, když body  $B_1$  a  $B$ , a tedy úhly  $\beta$  a  $\beta_1$  se budou k sobě nemezeně blížit:

$$w = v \lim_{\beta \rightarrow \beta_1} \operatorname{tg} \frac{\beta + \beta_1}{2} = v \operatorname{tg} \beta.$$

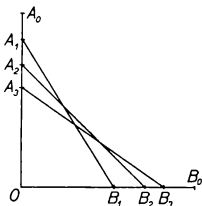
Podle obr. 48a platí

$$w = v \operatorname{tg} \beta = v \frac{y}{x} = v \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x}. \quad (3)$$

Rychlost druhé kuličky je určena obecně výrazem (3) a platí pro všechny úhly  $\beta$  v intervalu  $0 \leq \beta < 90^\circ$  a pro všechny hodnoty  $x$  v mezích  $0 < x \leq l$ . V bodě  $O$  by se druhá kulička musela začít pohybovat rychlostí

nekonečně velikou, tedy pohyb nelze řešit pro počátek pohybu první kuličky z bodu  $A$ , nýbrž až z bodu jakkoli blízkého k bodu  $A$  směrem k bodu  $O$ .

b) Z rovnice (3) je patrné, že rychlost druhé kuličky na dráze  $OB_0$  není konstantní, je závislá na vzdálenosti  $x$  první kuličky od bodu  $O$ . Koná-li tedy první kulička po dráze  $A_0O$  pohyb rovnoměrný, koná druhá kulička pohyb nerovnoměrný. Při tomto pohybu se úhel  $\beta$  zmenšuje, a proto se zmenšuje i hodnota okamžité rychlosti druhé kuličky. Na dráze  $OB_0$  koná druhá kulička pohyb nerovnoměrně zpomalený.



Obr. 48b

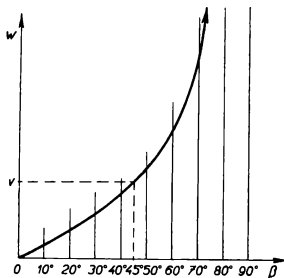
Správnost těchto poznatků o pohybu druhé kuličky je patrná také z obr. 48b. Protože první kulička se pohybuje rovnoměrně, vykoná ve třech za sebou jdoucích stejných časových intervalech stejné dráhy  $A_0A_1$ ,  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ . V těchto třech stejných za sebou následujících časových intervalech vykoná druhá kulička nestejně dlouhé (zkracující se) dráhy  $OB_1$ ,  $B_1B_2$ ,  $B_2B_3$ .

Graf závislosti rychlosti druhé kuličky  $w$  na vzdálenosti  $x = BO$  druhé kuličky od počátku je na obr. 48c. Je to v podstatě graf funkce tangens, svislé měřítko je však určeno předepsanou stálou rychlostí  $v$  první kuličky.

c) V místech, kde je okamžitá rychlost druhé kuličky stejná jako rychlost první kuličky, musí platit  $w = v$ , takže podle vztahu (3) je  $\text{tg } \beta = 1$ . Této hodnotě odpo-

vídá v intervalu  $0 < \beta < 90^\circ$  jen úhel  $45^\circ$ . Potom však platí  $y = x = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ .

Obě kuličky mají stejně velké rychlosti v okamžiku, kdy mají od bodu  $O$  stejné vzdálenosti  $y = x = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ , když totiž tyč svírá s oběma žlábků stejně velké úhly  $45^\circ$ .



Obr. 48c

## 2. příklad (navrhl Mojmir Simerský)

Z recipientu, v němž byla teplota  $t$ , byl vzduch čerpán vývěvou, která z recipientu vyčerpávala za dobu  $\tau$  množství vzduchu o objemu  $V$ . Vlivem různých netěs-

ností bylo možno dosáhnout jen takového zředění vzduchu, při kterém se v recipientu ustálil tlak na konečné hodnotě  $p_1$ . Pak vznikla v čerpacím potrubí další netěsnost, jež měla za následek, že se konečný tlak v recipientu zvětšil na hodnotu  $p_2$  ( $p_2 > p_1$ ). Vývěva přitom neustále pracovala.

Vypočítejte, kolik molekul vzduchu propouštěla za dobu  $\tau$  netěsnost, která způsobila, že tlak v recipientu vzrostl z hodnoty  $p_1$  na hodnotu  $p_2$ .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $V = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ ,  $p_1 = 0,018 \text{ torrů}$ ,  $p_2 = 0,065 \text{ torrů}$ ,  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\tau = 1,0 \text{ s}$ .

**Řešení:**

Všechny zadané veličiny až na tlaky jsou v soustavě SI. Určíme proto převodní vztah pro 1 torr. Podle definice je 1 torr roven hydrostatickému tlaku  $\rho h g$  rtuťového sloupce délky  $h = 1 \text{ mm}$ ; měrná hmotnost rtuti je  $\rho \doteq 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , tíhové zrychlení  $g \doteq 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . Proto je

$$1 \text{ torr} = \rho g h = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \doteq 133 \text{ N m}^{-2}.$$

Tlakový rozdíl v našem příkladě bude

$$p_2 - p_1 = 0,047 \text{ torrů} = 0,047 \cdot 133 \text{ N m}^{-2} \doteq 6,3 \text{ N m}^{-2}.$$

Stavová rovnice pro 1 kilomol plynu zní

$$p V = R T. \quad (1)$$

Při čerpání plynu se ustálí tlak tehdy, jestliže vývěva odčerpává tolik molekul plynu, kolik jich netěsností do vývěvy v téže době vniká. Předpokládejme, že prvou netěsností vniká do vývěvy  $x_1$  molekul a druhou netěsností  $x_2$  molekul za 1 sekundu. Protože Avogadrovo číslo



$N$  je rovno počtu molekul v 1 kilomolu, tedy  $x_1$  molekul je  $\frac{x_1}{N}$  kilomolů, podobně  $x_2$  molekul je  $\frac{x_2}{N}$  kilomolů.

Při první netěsnosti je výsledný tlak  $p_1$ , objem  $V$ , absolutní teplota  $T = (t + 273)^\circ\text{K}$ , pak pro počet kilomolů  $\frac{x_1}{N}$  platí stavová rovnice

$$p_1 V = \frac{1}{N} x_1 R (t + 273). \quad (1)$$

Druhá netěsnost propouští  $x_2$  molekul. Celkem tedy do vývěvy vniká  $(x_1 + x_2)$  molekul vzduchu, tj.  $\frac{x_1 + x_2}{N}$  kilomolů. Stavová rovnice pro tlak  $p_2$  a pro stejný objem a stejnou teplotu vzduchu pak zní:

$$p_2 V = \frac{1}{N} (x_1 + x_2) R (t + 273). \quad (2)$$

Odečtením (1) od (2) dostaneme

$$(p_2 - p_1) V = \frac{1}{N} x_2 R (t + 273),$$

a odtud počet molekul, propouštěných druhou netěsností

$$x_2 = \frac{(p_2 - p_1) V N}{R (t + 273)}.$$

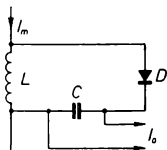
Pro zadané hodnoty veličin dá tento vztah

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{6,3 \text{ N m}^{-2} \cdot 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 6,0 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}}{8,3 \cdot 10^3 \text{ J deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1} \cdot (20 + 273) \text{ deg}} = \\ &= \frac{7500}{2432} \cdot 10^{18} \doteq 3 \cdot 10^{18} \text{ molekul.} \end{aligned}$$

Druhá netěsnost propouštěla za 1 sekundu asi  $3 \cdot 10^{18}$  molekul.

### 3. příklad (navrhl Mojmir Simerský)

Cívka o indukčnosti  $L$  je periodicky, vždy jednou za dobu  $T$  připojována ke zdroji stejnosměrného napětí. Jakmile proud, který cívku protéká, vzroste na hodnotu  $I_m$ , což trvá dobu  $t_1 < T$ , je cívka odpojena. Předpokládáme, že proud v cívce po odpojení klesá rovnoměrně a zanikne za dobu  $t_2 = T - t_1$ . Indukovaným napětím se přes diodu (viz obr. 49) nabíjí kondenzátor, z něhož je odebírán proud  $I_0$ . Kapacita kondenzátoru je tak velká, že napětí  $U_C$  na jeho svorkách lze považovat za konstantní. Celkový odpor cívky a diody, zapojených podle obr. 49, je  $R$ .



Obr. 49

Jak velkou indukčnost má cívka?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $I_m = 5,0 \cdot 10^{-2}$  A,  $I_0 = 1,0 \cdot 10^{-2}$  A,  $T = 6,4 \cdot 10^{-5}$  s,  $t_2 = 7,5 \cdot 10^{-8}$  s,  $R = 800 \Omega$ ,  $U_C = 350$  V.

Řešení:

Potřebné vztahy: dynamická definice indukčnosti  $U_L = L \frac{I}{t}$ , Ohmův zákon, definice proudu  $Q = I t$ .

Po odpojení cívky zanikne proud  $I_m$  za dobu  $t_2$ , takže

na cívce vznikne napětí

$$U_L = L \frac{I_m}{t_2}. \quad (1)$$

Na kondenzátoru je v ustáleném stavu napětí  $U_C$ , takže v obvodu působí účinné napětí  $U_L - U_C$ , které podle Ohmova zákona vyvolá proud

$$I = \frac{1}{R} (U_L - U_C). \quad (2)$$

V době  $t_2$  obdrží kondenzátor náboj

$$Q = I t_2,$$

který za ustáleného stavu musí být roven náboji, který v době  $T$  z kondenzátoru odečte,

$$Q = I_0 T.$$

Z toho plyne

$$I t_2 = I_0 T. \quad (3)$$

Dosazením (1) do (2) obdržíme

$$I = \frac{1}{R} \left( \frac{L I_m}{t_2} - U_C \right) = \frac{1}{R t_2} (L I_m - U_C t_2),$$

což dosazeno do (3) dá

$$\frac{1}{R t_2} (L I_m - U_C t_2) t_2 = I_0 T.$$

Odtud

$$L = \frac{R I_0 T + U_C t_2}{I_m}.$$

Při dosazování zadaných hodnot použijeme převodních vztahů  $\Omega = \text{V A}^{-1}$ , henry =  $\text{A s V}^{-1}$ :

$$L = \frac{8,0 \cdot 10^2 \text{ VA} \cdot 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ A} \cdot 6,4 \cdot 10^{-5} \text{ s} + 3,5 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}}{5,0 \cdot 10^{-2} \text{ A}}$$

$$= 20 \text{ A}^{-1} (5,12 \cdot 10^{-4} \text{ V s} + 26,25 \cdot 10^{-4} \text{ V s}) \doteq 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ H}.$$

Indukčnosť cívky je  $6,3 \cdot 10^{-2} \text{ H}$ .

#### 4. príklad (navrhl Michal Konč)

Duté zrkadlo má polomer krivosti  $R$  a jeho kruhový okraj má priemer  $d$ . V ohnisku zrkadla je umiestnený svetelný zdroj o svietivosti  $I$ . Pred zrkadlom vo vzdialenosti  $l$  ( $l > \frac{R}{2}$ ) od jeho vrchola je rovinné tienidlo kolmé na optickú os zrkadla. Určte

- osvetlenie tienidla v bode  $C$  na optickej osi,
- svetelný tok odrážaný zrkadlom.

Riešte najprv všeobecne, potom časť a) pre hodnoty  $R = 1,0 \text{ m}$ ,  $d = 0,20 \text{ m}$ ,  $I = 50 \text{ cd}$ ,  $l = 1,0 \text{ m}$ . Straty pri odraze považujte za zanedbateľné.

*Riešenie:*

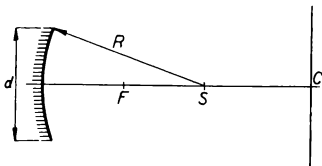
a) Na tienidlo dopadajú svetelné lúče priamo zo zdroja, ktorý je v ohnisku  $F$  zrkadla a spôsobuje osvetlenie  $E_1$  v bode  $C$  na tienidle, a lúče, ktoré sa odrážajú od zrkadla a spôsobujú v bode  $C$  osvetlenie  $E_2$ . Pre osvetlenie v bode  $C$  potom platí (viď obr. 50)

$$E = E_1 + E_2. \quad (1)$$

Na výpočet osvetlenia  $E_1$  v bode  $C$  môžeme použiť Lambertov zákon, podľa ktorého osvetlenie je priamo úmerné svietivosti zdroja a nepriamo úmerné štvorc

vzdialenosti zdroja a bodu, v ktorom osvetlenie uvažujeme. Teda

$$E_1 = \frac{I}{\left(l - \frac{R}{2}\right)^2}. \quad (2)$$



Obr. 50

Osvetlenie  $E_2$  bude také, ako na vrchole zrkadla, lebo zrkadlom odrazené lúče sú rovnobežné a svetelný tok sa už nemení. Teda opäť podľa Lambertovho zákona

$$E_2 = \frac{I}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}. \quad (3)$$

Dosadením (2) a (3) do (1) dostaneme

$$E = \frac{4I}{(2l - R)^2} + \frac{4I}{R^2}. \quad (4)$$

Rozmerová skúška:

$$[E] = \frac{\text{cd}}{\text{m}^2} = \text{lx}.$$

Rovnica (4) je obecným vyjadrením osvetlenia v bode  $C$  na tienidle.

Po dosadení daných hodnôt je

$$E = 400 \text{ lx} .$$

b) Keďže  $d \ll R$ , môžeme považovať zrkadlo za rovinnú kruhovú dosku s priemerom  $d$ , na ktorej je všade osvetlenie  $E_2$ . Svetelný tok  $\Phi$ , ktorý na zrkadlo dopadá, podľa zákona geometrickej optiky sa celý odráža. Teda

$$\Phi = E_2 S , \quad (5)$$

kde

$$S = \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 \quad (6)$$

je plošný obsah zrkadla; dosadením (3) a (6) do (5) dostaneme

$$\Phi = \frac{4 I}{R^2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = I \frac{\pi d^2}{R^2} . \quad (5')$$

Rozmerová skúška:

$$[\Phi] = \frac{\text{cd}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2 = \text{lx} \cdot \text{m}^2 = \text{lm} .$$

Rovnosť (5') je obecným vyjadrením svetelného toku, ktorý je odrážaný zrkadlom.

Po dosadení daných hodnôt je

$$\Phi = 2 \pi \text{ lm} .$$

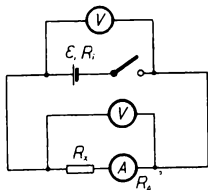
## 5. úkol (navrhl dr. Václav Müller)

### Měření svorkového napětí a vnitřního odporu článku

Je-li elektrický obvod (obr. 51) uzavřen, platí vztah

$$U + R_1 I = \mathcal{E} , \quad (1)$$

jestliže zanedbáme proud, tekoucí voltmetrem  $V$  a vnitřní odpor ampérmetru  $A$ . Písmenem  $U$  je značeno napětí na odporu  $R_x$ ,  $R_1$  je vnitřní odpor článku,  $I$  je proud tekoucí obvodem při zatížení článku odporem  $R_x$ ,  $\mathcal{E}$  je elektromotorické napětí.



Obr. 51

Ze vztahu (1) lze stanovit

$$R_1 = \frac{U_1}{I} = \frac{\mathcal{E} - U}{I}.$$

Pro  $R_x = 0$  (zkrat) je  $I_z = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$ .

K měření napětí je nutno použít voltmetr o dostatečně velkém vnitřním odporu, aby bylo možno zanedbat proud voltmetrem procházející.

### Úkoly:

1. Stanovte měřením závislosti  $U_1 = \mathcal{E} - U$  na proudu  $I$  a sestrojte graf této závislosti pro
  - a) monočlánek,
  - b) alkalický článek NiCd.
2. Vypočtěte vnitřní odpory obou článků a příslušné relativní i absolutní chyby.
3. Pro oba články vypočtěte proudy při zkratu.
4. Posuďte, který z obou článků je vhodnější při měřeních, vyžadujících stálost svorkového napětí při různých zatíženích článků.

Při měření závislosti  $U_1 = f(I)$  zvyšujte proud  $I$  změnami odporu  $R_x$  o přibližně stejné vhodně zvolené hodnoty a měřte vždy  $U$  i  $\mathcal{E}$ . Proveďte deset měření.

Naměřené hodnoty zapište do vhodných tabulek a sestrojte požadované grafy.

Při výpočtu relativních a absolutních chyb vnitřních odporů obou článků stanovte odhadem absolutní chyby  $U$ ,  $\mathcal{E}$  a proudu  $I$ .

Z grafů vypočítejte vnitřní odpory obou článků s příslušnými chybami pro nejvyšší hodnoty  $U_1$  a  $I$  lineárních závislostí  $U_1 = f(I)$ . Připomínky k měření:

1. Proveďte zapojení podle schématu bez připojení článku.
2. Zapojení dejte schválit dozrájícímu učiteli.
3. Měření závislosti  $U_1 = f(I)$  proveďte
  - a) u monočlánku pro proud  $I$  maximálně do 1 A,
  - b) u alkalického článku pro proud maximálně do 1,4 A.

Naměřte v případě a) 5 hodnot a v případě b) 10 hodnot veličin  $I$ ,  $U$ ,  $\mathcal{E}$  při postupném snižování zatěžovacího odporu  $R_x$ .

4. Měřený článek zatěžujte klíčem vždy jen po dobu nutnou k odečtení příslušných hodnot  $I$ ,  $U$ ,  $\mathcal{E}$ .
5. Pro výpočet proudu při zkratu  $I_z$  použijte hodnoty elektromotorického napětí  $\mathcal{E}$ , změřené na počátku úlohy na článku odporem  $R_x$  ještě nezatíženém.

**Řešení:**

Použité přístroje: odporová dekáda 0,1 x až 10 000 x, monočlánek 1,5 V, alkalický článek NiCd, spínač, univerzální přístroj UNIVO, který pro rozsah do 3 V má vnitřní odpor 3 k $\Omega$ , třída přesnosti pro proud stejnosměrný 1,5 %, pro střídavý proud 2,5 %.

Měření bylo provedeno pro 5 hodnot u monočlánku a pro 10 hodnot u alkalického článku.



**TABULKA 1**  
**I. Monočlánek (graf na obr. 52a)**

Čís. měř.	$I$ [A]	$U$ [V]	$\mathcal{E}$ [V]	$R_i[\Omega]$	$\Delta_+$ [ $\Omega$ ]
1	0,095	1,56	1,60	0,421	
2	0,191	1,50	1,58	0,419	
3	0,298	1,41	1,53	0,403	0,003
4	0,405	1,35	1,51	0,396	0,010
5	0,508	1,27	1,47	0,393	0,013

$$R_1 = 0,406 \Omega, \quad \Sigma \Delta_+ = 0,026 \Omega.$$

Střední chyba měření

$$\bar{\delta} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\Sigma \Delta_+}{n/n-1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{0,026}{5 \cdot 2} \Omega = 0,007 \Omega,$$

relativní chyba je 1,7 %.

Vnitřní odpor monočláneku

$$R_1 = (0,406 \pm 0,007) \Omega.$$

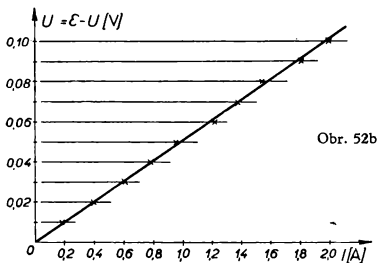
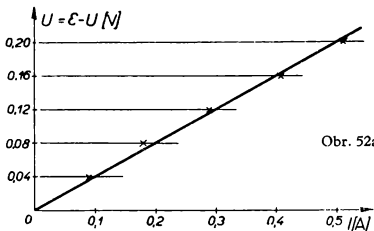
**TABULKA 2**  
**II. Alkalický článek (graf na obr. 52b)**

Čís. měř.	$I$ [A]	$U$ [V]	$\mathcal{E}$ [V]	$R_i$ [m $\Omega$ ]	$\Delta_+$ [m $\Omega$ ]
1	0,21	1,25	1,26	47,6	2,7
2	0,39	1,23	1,25	51,4	
3	0,60	1,20	1,23	50,0	0,3
4	0,80	1,16	1,20	50,0	0,3
5	0,97	1,15	1,20	51,6	
6	1,22	1,11	1,17	49,2	1,1
7	1,38	1,09	1,16	50,7	
8	1,55	1,07	1,15	51,6	
9	1,79	1,04	1,13	50,3	
10	1,96	1,01	1,11	51,0	

Střední hodnota  $\bar{R}_1 = 50,3 \text{ m}\Omega$ ,  $\Sigma\Delta_+ = 4,4 \text{ m}\Omega$ .

$$\bar{\delta} = \frac{1}{12} \Sigma\Delta_+ = 0,4 \text{ m}\Omega.$$

Relativní chyba je 0,8 %.



Vnitřní odpor alkalického článku  $R_1 = (50,3 \pm 0,4) \text{ m}\Omega$ .  
 3. Proud při zkratu

$$I_z = \frac{\mathcal{E}}{R_1},$$

a) pro monočlánek

$$I_z = \frac{1,60}{0,406} \text{ A} = 3,95 \text{ A},$$

b) pro alkalický článek

$$I_z = \frac{1,26}{50,3 \cdot 10^{-3}} \text{ A} = 25,0 \text{ A}.$$

4. Pro měření je vhodnější alkalický článek, protože má mnohem menší vnitřní odpor, a tedy svorkové napětí je při různém zatížení vnějším odporem stálejší.
5. Hodnoty měřené přístrojem UNIVO mohou být zatíženy chybou, která pro stejnosměrný proud může být 1,5 %. Chyba čtení (deprézský systém s podložným zrcadlem) na přístroji je proti tomu zanedbatelná. Při určení chyby vnitřního odporu je třeba dbát jednak chyby přístroje, jednak chyby z rozptylu měření.

Chyba  $R_1$  vzniklá chybou přístroje:

$$R_1 = \frac{\mathcal{E} - U}{I}, \quad \bar{\delta}(R_1) = R_1 \sqrt{\left(\frac{\delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} + \frac{\delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{I}\right)^2}$$

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = 1,5 \%, \quad \frac{\delta U}{U} = 1,5 \%, \quad \frac{\delta I}{I} = 1,5 \%,$$

$$\bar{\delta}(R_1) = R_1 \sqrt{3^2 + 1,5^2} \% = R_1 \sqrt{11,25} \% = 3,4 \% R_1.$$

Relativní chyba při výpočtu údajů z měření přístrojem UNIVO je 3,4 %.

- a) Pro monočlánek je relativní chyba celkem  $3,4\% + 1,7\% \doteq 5\%$ .  
Vnitřní odpor je tedy  $R_1 = (0,406 \pm 0,020) \Omega$ .
- b) Pro alkalický článek je relativní chyba  $3,4\% + 0,8\% \doteq 4\%$ . Vnitřní odpor je tedy  $R_1 = (50,3 \pm 2,0) \text{ m}\Omega$ .

## Úlohy kategorie B

Úlohy a řešení recenzovala dr. Marta Chytilová a dr. Ivan Náter

### a) První kolo soutěže

#### 1. příklad (navrhli Milan Bednařík a Miroslava Široká)

Válec ze stejnorodé látky o hmotnosti  $m$  a o poloměru podstavy  $r$  byl uveden do pohybu po nakloněné rovině vzhůru počáteční rychlostí  $v$ . Válec koná po nakloněné rovině valivý pohyb bez klouzání. Vypočítejte výšku  $h$  nad místem počátku pohybu, do které vystoupí, jestliže

- a) se pohybuje po nakloněné rovině jen působením impulsu a tíhové síly, třecí síla je zanedbatelně malá,  
b) kromě tíhové síly na něj působí třecí síla, součinitel valivého tření je  $\mu$ .

Nakloněná rovina svírá s vodorovnou rovinou úhel  $\alpha$ . Moment setrvačnosti válce vzhledem k ose otáčení při valivém pohybu je

$$J = \frac{1}{2} m r^2 .$$

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $v = 2,0 \text{ m s}^{-1}$ ,  $r = 10 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\mu = 0,020$  m.

**Řešení:**

Označme  $m$  hmotnost,  $r$  poloměr,  $v$  počáteční rychlost

válce,  $\alpha$  úhel sklonu nakloněné roviny,  $\mu$  součinitel valivého tření (má rozměr jako  $r$ ),  $h$  výšku válce nad základnou nakloněné roviny v nejvyšší poloze válce,  $W_k$  kinetickou energii válce na počátku pohybu,  $W_p$  potenciální energii tíhovou válce vzhledem k základně nakloněné roviny pro nejvyšší polohu válce,  $F_t$  třecí sílu,  $\Delta W$  změnu vnitřní energie válce a podložky při působení brzdicí síly  $F_t$  na válec po dráze  $l = \frac{h}{\sin \alpha}$ ,  $g$  tíhové zrychlení.

a) Na počátku pohybu má válec kinetickou energii

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 .$$

Pohyb se děje bez klouzání, proto rychlost bodů na povrchu válce při rotačním pohybu válce je v počáteční poloze  $v = \omega r$ . Protože  $\mathcal{J} = \frac{1}{2} m r^2$ , je

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4} m v^2 = \frac{3}{4} m v^2 .$$

Protože v a) předpokládáme pohyb bez tření, platí zákon zachování mechanické energie

$$W_k = W_p$$

čili

$$\frac{3}{4} m v^2 = m g h .$$

Odtud

$$h = \frac{3 v^2}{4 g} .$$

b) Na válec působí třecí síla  $F_t = \frac{\mu m g \cos \alpha}{r}$  po

dráze  $l$ . Mechanická práce  $A = F_l l$  vyjadřuje velikost změny vnitřní energie  $\Delta W$  válce a podložky.

V tomto případě má zákon zachování energie tvar

$$W_k = W_p + \Delta W,$$

tedy

$$\frac{3m v^2}{4} = m g h' + \frac{\mu m g \cos \alpha}{r} \cdot \frac{h'}{\sin \alpha},$$

a odtud

$$h' = \frac{3 v^2 r}{4 g (r + \mu \cot \alpha)},$$

kde  $h'$  je výška výstupu nad základnou nakloněné roviny, uvažujeme-li vliv tření.

Výpočet dá

a)  $h \doteq 0,31 \text{ m}$ ,

b) pro  $r = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$ ,  $\mu = 0,020$  m je

$$h' \doteq 0,23 \text{ m}.$$

## 2. příklad (navrhl Ivo Volf)

Dutá bóje kulového tvaru se má při plování ponořit polovinou svého objemu do kapaliny.

a) Určete tloušťku stěny bóje, je-li měrná hmotnost materiálu stěny  $\rho_1$ , měrná hmotnost kapaliny  $\rho_2$ , poloměr bóje  $r$ .

b) Jak závisí tloušťka stěny bóje na jejím poloměru za jinak stejných podmínek?

c) Použije-li se za jinak stejných podmínek ke konstrukci bóje materiálu o větší měrné hmotnosti, je nutno tloušťku bóje zvětšit nebo zmenšit?

d) Jakou tloušťku ocelového plechu je nutno volit ke

zhotovení bóje o poloměru 1000 mm, aby plovla za daných podmínek ve vodě?

*Řešení:*

Označme  $x$  tloušťku stěny bóje,  $r$  vnější poloměr,  $r - x$  vnitřní poloměr bóje,  $V_1$  její vnější objem,  $V_2$  objem dutiny,  $\rho_1$  měrnou hmotnost materiálu bóje,  $\rho_2$  měrnou hmotnost kapaliny.

a) Na plovoucí bóji ponořenou polovinou objemu do kapaliny působí tíhová síla

$$G = (V_1 - V_2)\rho_1 g = \frac{4}{3} \pi [r^3 - (r - x)^3]\rho_1 g$$

a vztlaková síla

$$F = \frac{V_1}{2} \rho_2 g = \frac{2}{3} \pi r^3 \rho_2 g,$$

kteří jsou v rovnováze.

Tedy

$$\frac{4}{3} \pi [r^3 - (r - x)^3]\rho_1 g = \frac{2}{3} \pi r^3 \rho_2 g,$$

po úpravě

$$(r - x)^3 = r^3 \left(1 - \frac{\rho_2}{2\rho_1}\right)$$

a odtud

$$x = r \left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_2}{2\rho_1}}\right). \quad (1)$$

b) Pro daný materiál a danou kapalinu je za stálé teploty potřebná tloušťka stěny bóje přímo úměrná vnějšímu poloměru bóje.

c) Použijeme-li materiál o hustotě  $\rho_1' > \rho_1$  a předpokládáme-li, že  $r$  a  $\rho_2$  se nemění, pak platí

$$\frac{\rho_2}{2\rho_1'} < \frac{\rho_2}{2\rho_1}, \quad \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_2}{2\rho_1'}} > \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_2}{2\rho_1}},$$

$$1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_2}{2\rho_1'}} < 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_2}{2\rho_1}};$$

a tedy  $x' < x$ .

Tloušťka stěny bóje se musí zmenšit.

d) Za předpokladu, že  $\rho_1 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , pro vodu  $\rho_2 = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , vychází podle (1)

$$x = 1,00 \left( 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1,00 \cdot 10^3}{2 \cdot 7,8 \cdot 10^3}} \right) \text{ m},$$

$$x \doteq 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2 \text{ cm}.$$

### 3. příklad (navrhl Ivo Volf)

V uzavřené nádobě je směs dvou plynů o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , o kilomolových hmotnostech  $\mu_1$  a  $\mu_2$ , o teplotě  $t$  a tlaku  $p$ . Určete měrnou hmotnost směsi plynů za daných podmínek. Oba plyny považujeme za plyny dokonalé.

Řešte nejprve obecně a pak pro kyslík a dusík o hmotnostech  $m_1 = m_2 = 100 \text{ g}$ ,  $t = 0,0 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $p = 1,00 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$ .

**Řešení:**

Označme  $m_1$ ,  $m_2$  hmotnosti plynů,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  kilomolové hmotnosti plynů,  $p_1$ ,  $p_2$  parciální tlaky plynů při teplotě



$t$  a objemu nádoby  $V$ ,  $p$  tlak směsi plynů při teplotě  $t$  a objemu nádoby  $V$ ,  $R$  univerzální plynovou konstantu,  $\rho$  měrnou hmotnost směsi plynů při teplotě  $t$  a tlaku  $p$ .

Poněvadž oba plyny považujeme za dokonalé plyny, platí pro ně stavová rovnice

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} R T, \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} R T.$$

Sečtením rovnic dostaneme

$$(p_1 + p_2) V = \left( \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) R T$$

a dále

$$V = \left( \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) R T \cdot \frac{1}{p_1 + p_2},$$

$$V = \left( \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) R T \frac{1}{p}.$$

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{m_1 + m_2}{\left( \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) R T} \cdot p.$$

Výpočet:  $m_1 = m_2 = 1,00 \cdot 10^{-1}$  kg,  $\mu_1 = 2 \cdot 14,2$  kg kmol<sup>-1</sup>,  $\mu_2 = 2 \cdot 16$  kg kmol<sup>-1</sup>,  $p = 1,00 \cdot 10^5$  N m<sup>-2</sup>,  $T = 273$  °K,  $R = 8314,3$  J kmol<sup>-1</sup> deg<sup>-1</sup>.

$$\rho \doteq 1,3 \text{ kg m}^{-3}.$$

Rozměrová zkouška:

$$[\rho] = \frac{\text{kg N m}^{-2}}{\text{kg kg}^{-1} \text{ kmol N m kmol}^{-1} \text{ deg}^{-1} \text{ deg}}$$

$$[\rho] = \text{kg m}^{-3}.$$

#### 4. příklad (navrhl dr. František Smutný)

Každá ze dvou destiček bimetalového proužku má tloušťku  $d$ . Při teplotě  $t_0$  je proužek přímý a má délku  $l_0$ . Součinitelé teplotní délkové roztažnosti kovů bimetalu jsou  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ ;  $\alpha_1 > \alpha_2$ .

a) Určete střední poloměr křivosti  $r$  proužku při zvýšení teploty o  $\Delta t = t - t_0$  (obr. 53a).

b) Ve zvláštním případě je bimetalový proužek složen z destičky zinkové ( $\alpha_1 = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ deg}^{-1}$ ) a ocelové ( $\alpha_2 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ deg}^{-1}$ ),  $d = 2,0 \text{ mm}$ ,  $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Pro tento případ sestrojte graf závislosti poloměru křivosti  $r$  na teplotě  $t$  pro  $t \geq 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

c) Jaký tvar má proužek při teplotě  $t < 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ?

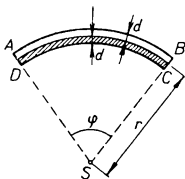
d) Doplňte ve zvláštním případě b) graf závislosti  $r$  na  $t$  pro  $t < 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

V celém rozsahu změn teploty znázorněném na grafu považujeme oba součinitele teplotní délkové roztažnosti za konstantní. Jejich hodnoty  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  jsou dány pro počáteční teplotu  $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Řešení:**

Označme  $d$  tloušťku destičky, kterou považujeme za nezávislou na teplotě,  $t_0$  teplotu, při které je proužek přímý a má délku  $l_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  součinitele teplotní délkové roztažnosti ( $\alpha_1 > \alpha_2$ ),  $t$  konečnou teplotu, které odpovídá střední poloměr křivosti  $r$ .

a)  $\Delta t = t - t_0$ .



Obr. 53a

Podle obr. 53a platí

$$AB = l_0 (1 + \alpha_1 \Delta t) = \varphi(r + d), \quad (1)$$

$$CD = l_0 (1 + \alpha_2 \Delta t) = \varphi(r - d),$$

$$AB - CD = l_0 \Delta t (\alpha_1 - \alpha_2) = 2\varphi d. \quad (2)$$

Ze vztahu (1)

$$\varphi = \frac{l_0 (1 + \alpha_1 \Delta t)}{r + d},$$

ze vztahu (2)

$$\varphi = \frac{l_0 \Delta t (\alpha_1 - \alpha_2)}{2d},$$

tedy platí

$$\frac{1 + \alpha_1 \Delta t}{r + d} = \frac{\Delta t (\alpha_1 - \alpha_2)}{2d}$$

a odtud

$$r = \frac{d}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \frac{2 + \Delta t (\alpha_1 + \alpha_2)}{\Delta t}. \quad (3)$$

V mezích použitelnosti bimetalového proužku podle zadaných údajů můžeme použít přibližného vztahu

$$r \doteq \frac{d}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \frac{2}{\Delta t},$$

protože člen  $\Delta t (\alpha_1 + \alpha_2)$  s ohledem na malé hodnoty součinitelů  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  můžeme vůči číslu 2 zanedbat.

b)  $\alpha_1 = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ deg}^{-1}$ ,  $\alpha_2 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ deg}^{-1}$ ,  $d = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t \geq t_0$ .

Podle (3) platí po dosazení

$$r = \frac{10^3}{9} \cdot \frac{2 + (t - t_0) \cdot 4,2 \cdot 10^{-5}}{t - t_0} \text{ m}.$$

Rozměrová zkouška:

$$r = \frac{\text{m}}{\text{deg}^{-1}} \frac{\text{deg} \cdot \text{deg}^{-1}}{\text{deg}} = \text{m}.$$

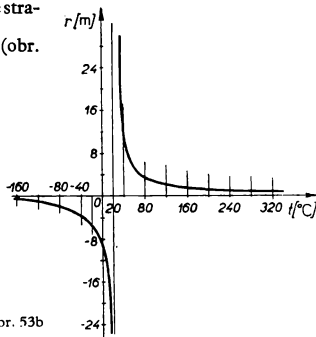
Tabulka pro funkci  $r = f(t)$  pro  $t \geq t_0$ , kde  $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  a kde teplota  $t$  je nižší než teploty tání obou materiálů:

$t [^\circ\text{C}]$	20	30	40	50	60	70	80	100	120	220	320
$r [\text{m}]$	$+\infty$	22,2	11,1	7,3	5,6	4,4	3,6	2,8	2,2	1,1	0,8

Pro  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  se křivka blíží asymptoticky k přímce rovnoběžné s osou pořadnic v bodě  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Horní mez použitelnosti bimetalového proužku je  $t \doteq 419 \text{ }^\circ\text{C}$  (teplota tání zinku).

c) Pro  $t < 20 \text{ }^\circ\text{C}$  má proužek poloměr křivosti  $r < 0$ , zinek je na vyduť straně oblouku.

d) Viz graf (obr. 53b).



Obr. 53b

$t$ [°C]	20	10	0	-10	-20	-30	-40	-50	-100
$r$ [m]	$-\infty$	-22,2	-11,1	-7,4	-5,6	-4,4	-3,6	-3,2	-1,8

### 5. príklad (navrhli dr. Jozef Tuček a Emanuel Síleš)

Gúľa z rovnorodnej látky o hmotnosti  $m_1$ , o teplote  $t_1$  a o mernom teple  $c_1$  sa pohybuje rýchlosťou  $v_1$ . Zrazí sa centrálnne s guľou hmotnosti  $m_2$ , o teplote  $t_2$  a o mernom teple  $c_2$ , ktorá bola pred zrážkou v pokoji. Zraz guľ je dokonale nepružný.

Určte výslednú teplotu telesa, ktoré vznikne po zrážke. Predpokladáme, že premeny energie prebiehajú v izolovanej sústave telies a že merné teploty  $c_1$  a  $c_2$  sú konštantné pri zmene teplôt telies, ktoré pri zrážke nastali.

*Riešenie:*

Pre prvú guľu označme hmotnosť  $m_1$ , teplotu  $t_1$ , rýchlosť  $v_1$ , merné teplo  $c_1$ , kinetickú energiu  $W_1$ ; pre druhú guľu  $m_2$ ,  $t_2$ ,  $v_2$ ,  $c_2$ ,  $W_2$ . Keby obidve telesá boli privedené do styku bez nárazu, vyrovnala by sa ich teplota v izolovanej sústave na teplotu  $t'$ , pričom by platilo

$$m_1 c_1 (t_1 - t') = m_2 c_2 (t' - t_2),$$

$$t' = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}.$$

Pre dokonale nepružný zraz guľ platí podľa zákona zachovania hybnosti

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v,$$

kde  $v$  je rýchlosť vzniknutého telesa o hmotnosti  $m_1 + m_2$ .

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Celková kinetická energia sústavy pred zrazom je

$$W_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2.$$

Kinetická energie telesa po zraze je

$$W = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2 = \\ = \frac{m_1 v_1^2}{2} \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

$$W = W_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad W < W_1.$$

Zákon zachovania energie je v tomto prípade vyjadrený takto:

$$W_1 = W + \Delta W,$$

kde  $\Delta W$  je zmena vnútornej energie sústavy telies, ktorá má za následok zmenu teploty sústavy o  $\Delta t$ .

V izolovanej sústave je možno  $\Delta W$  vyjadriť tiež množstvom tepla

$$\Delta W = (m_1 c_1 + m_2 c_2) \Delta t,$$

z toho

$$\Delta t = \frac{\Delta W}{m_1 c_1 + m_2 c_2}.$$

Výsledná teplota sústavy je

$$t = t' + \Delta t = \frac{1}{m_1 c_1 + m_2 c_2} \left( m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 + \right. \\ \left. + \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} \right).$$

## 6. úkol experimentální (navrhla dr. Marta Chytilová) Určení měrného tepla kapaliny

*Pomůcky:* směšovací kalorimetr (Dewarova nádoba), olej, kovový válec s držákem na ohřívání, teploměry s dělením po  $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$  a po  $1,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

*Úkoly:*

1. Určete tepelnou kapacitu kalorimetru  $K$  v jednotkách  $\text{kJ deg}^{-1}$ .

Viz Praktická cvičení z fyziky (SPN 1968), str. 95.  
Vypočítejte absolutní chybu výsledku.

2. Určete měrné teplo oleje v jednotkách  $\text{kJ kg}^{-1} \text{deg}^{-1}$ .

Viz Praktická cvičení z fyziky, str. 31.

Volte počáteční teplotu v kalorimetru nižší, než je teplota vzduchu v laboratoři tak, že olej předběžně ochladíte ve vodní lázni. Kovový válec ohřívajte ve vodní lázni asi na teplotu varu vody. Teplota vodní lázně v okamžiku přenesení válce do kalorimetru je zároveň počáteční teplotou válce. Určete absolutní a relativní možné chyby dílčích měření. Rozhodněte, které z nich se více uplatní při určení chyby výsledku a které lze zanedbat. Určete absolutní chybu výsledku.

3. Určete měrné teplo oleje v jednotkách  $\text{kJ kg}^{-1} \text{deg}^{-1}$  kontrolním měřením tak, že ohřejete olej ve vodní lázni na počáteční teplotu asi  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$  a zároveň ochladíte kovový válec ve vodní lázni na teplotu nižší, než je teplota vzduchu v laboratoři. Porovnejte oba výsledky.

Zůstává zjištěný rozdíl v mezích absolutních chyb? Posuďte, zda některá z obou variant dává přesnější výsledek a proč.

*Řešení:*

1. Určení tepelné kapacity Dewarovy nádoby

Tepelná kapacita  $K$  kalorimetru je množství tepla,

kterým se kalorimetr s míchačkou a ponořenou částí teploměru ohřeje o  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Do kalorimetrické nádoby dáme odvážené množství vody hmotnosti  $m_1$ , teploty  $t_1$  a přidáme množství  $m_2$  vody ohřáté na teplotu  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ). Výsledná teplota v kalorimetru je  $t$ . Tato teplota je nižší, než by odpovídalo výsledné teplotě při smíchání dvou množství vody různých teplot, protože se musel ohřát i kalorimetr o teplotní rozdíl  $\Delta t = t - t_1$ .

Je-li měrné teplo vody  $c$ , předala teplá voda  $m_2c(t_2 - t)$  kcal, studená voda s kalorimetrem přijala teplo  $m_1c \cdot (t - t_1) + K(t - t_1)$ . Platí tedy kalorimetrická rovnice

$$m_1c(t - t_1) + K(t - t_1) = m_2c(t_2 - t),$$

odkud vyjde

$$K = \frac{m_2c(t_2 - t)}{t - t_1} - m_1c.$$

Teploty byly měřeny teploměrem s dělením po  $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Naměřené veličiny jsou uvedeny v tabulce:

Měřená veličina	Její označení	Naměřená hodnota	Jednotka	Chyba	
				absol.	rel. %
hmotnost kalorimetru s míchačkou	$m_0$	0,226	kg	0,0005	0,2
hmotnost kalorimetru s chladnou vodou	$m_0 + m_1$	0,359	kg	0,0005	0,2
hmotnost chladné vody	$m_1$	0,133	kg	0,001	0,7
teplota chladné vody	$t_1$	13,3	$^{\circ}\text{C}$	0,1	0,7
tepl. ohřáté vody	$t_2$	27,7	$^{\circ}\text{C}$	0,1	0,4
teplota směsi	$t$	20,6	$^{\circ}\text{C}$	0,1	0,5
hmotnost kalorim. se směsí	$m_0 + m_1 + m_2$	0,507	kg	0,0005	0,1
hmotnost ohřáté vody	$m_2$	0,148	kg	0,001	0,7



Po dosazení dostaneme

$$K = \left[ \frac{0,148 (27,7 - 20,6)}{20,6 - 13,3} - 0,133 \right] \text{ kcal deg}^{-1} = \\ = 0,011 \text{ kcal deg}^{-1} .$$

Absolutní chyba výsledku je menší než  $0,001 \text{ kcal deg}^{-1}$ .

Tepelná kapacita kalorimetru je tedy

$$K = (0,011 \pm 0,001) \text{ kcal deg}^{-1} = (0,046 \pm 0,005) \text{ kJ deg}^{-1} .$$

## 2. Určení měrného tepla kapaliny metodou směšovací

V kalorimetru o tepelné kapacitě  $K$  je  $m_1$  kapaliny neznámého měrného tepla  $c_1$  a počáteční teploty  $t_1$ . Do této kapaliny ponoříme kovové těleso hmotnosti  $m_2$  a známého měrného tepla  $c_2$ , které bylo zahřáto na teplotu  $t_2$ . Výsledná teplota po vyrovnání teplot je  $t$ .

Z kalorimetrické rovnice pro teplo přijaté kalorimetrem s měřenou kapalinou a pro teplo vydané kovovým předmětem

$$(m_1 c_1 + K)(t - t_1) = m_2 c_2 (t_2 - t)$$

vypočteme

$$c_1 = \frac{m_2 c_2}{m_1} \cdot \frac{t_2 - t}{t - t_1} - \frac{K}{m_1} .$$

V Dewarově nádobě bylo měřeno měrné teplo terpentýnového oleje. Za kovové těleso bylo použito železné závaží 1 kg, jehož měrné teplo je  $c_2 = 0,108 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$ . Olej byl ochlazen studenou vodou na teplotu  $9,3 \text{ }^\circ\text{C}$ . Teplota oleje byla odečítána na teploměru s dělením po  $0,1 \text{ }^\circ\text{C}$ , teplota lázně pro kovové těleso teploměrem s dělením po  $1 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Naměřené veličiny jsou uvedeny v tabulce:

Měřená veličina	Označení	Naměřená hodnota	Jednotka	Chyba	
				absol.	rel. %
hmotnost kalorimetru s míchačkou	$m_0$	0,226	kg	0,0005	0,2
hmotnost $m_0 +$ olej	$m$	0,347	kg	0,0005	0,2
hmotnost oleje $m - m_0$	$m_1$	0,121	kg	0,001	0,8
hmotnost tělesa	$m_2$	1,000	kg	0,001	0,1
počát. teplota oleje	$t_1$	9,3	°C	0,1	1,0
počát. tepl. železa	$t_2$	89,5	°C	1,0	1,0
konečná tepl. oleje	$t$	53,9	°C	0,1	0,2
tepl. kapac. kalorim.	$K$	0,011	$\frac{\text{kcal}}{\text{deg}}$	0,001	9

Po dosazení dostaneme:

$$c_1 = \left( \frac{(0,108 \cdot 1 \cdot 89,5 - 53,9)}{0,121} - \frac{0,011}{0,121} \right) \text{kcal kg}^{-1} \text{deg}^{-1},$$

$$c_1 = 0,621 \text{ kcal kg}^{-1} \text{deg}^{-1}.$$

Při měření se nejméně přesně určí teplota lázni, nepřihlíží se k výměně tepla s okolím. Nejméně přesně lze určit teplotu kovového tělesa, zejména nelze zabránit jeho ochlazení, než je ponořeno do kalorimetru.

Relativní chyba je asi 3 %, tedy absolutní chyba výsledku měření je 0,02 kcal kg<sup>-1</sup> deg<sup>-1</sup>.

Měrné teplo oleje je tedy

$$c_1 = (0,62 \pm 0,02) \text{ kcal kg}^{-1} \text{deg}^{-1} = (2,60 \pm 0,08) \text{ kJ kg}^{-1} \text{deg}^{-1}.$$

### 3. Kontrolní měření měrného tepla oleje

Kontrolní měření provedeme stejným způsobem jako v úkolu 2. Olej však ve vodní lázni ohřejeme na počáteční

teplotu asi 80 °C a kovový předmět ochladíme ve vodní lázni na teplotu nižší, než je teplota vzduchu v laboratoři.

Výměnu tepla vyjadřuje kalorimetrická rovnice

$$m_2 c_2 (t - t_1) + K(t - t_1) = m_1 c_1 (t_2 - t),$$

z níž vypočteme

$$c_1 = \frac{(m_2 c_2 + K)(t - t_1)}{m_1 (t_2 - t_1)}.$$

Měření je opět v tabulce:

Měřená veličina	Označení	Naměřená hodnota	Jednotka	Chyba	
				absol.	rel. %
hmotnost kalorimetru s míchačkou	$m_0$	0,226	kg	0,0005	0,2
hmotnost $m_0 \times$ olej	$m$	0,345	kg	0,0005	0,2
hmotnost oleje $m - m_0$	$m_1$	0,119	kg	0,001	0,9
hmotnost tělesa	$m_2$	1,000	kg	0,001	0,1
poč. teplota tělesa	$t_1$	8,0	°C	0,1	1,2
poč. teplota oleje	$t_2$	66,1	°C	0,5	1,0
konečná tepl. oleje	$t$	29,5	°C	0,1	0,3
tepel. kapacita kalor.	$K$	0,011	$\frac{\text{kcal}}{\text{deg}}$	0,001	9

Po dosazení dostaneme

$$c_1 = \frac{(0,108 \cdot 1 + 0,011)(29,5 - 8,0)}{0,119(66,1 - 29,5)} \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1},$$

$$c_1 = 0,588 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}.$$

Relativní chyba je větší, asi 4 %, tedy absolutní chyba tohoto měření je  $0,024 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1} = 0,10 \text{ kJ deg}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ .

Při kontrolním měření byla tedy zjištěna hodnota

$$c_1 = (0,59 \pm 0,03) \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1} = (2,47 \pm 0,10) \text{ kJ kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}.$$

Při srovnání této hodnoty s hodnotou dříve nalezenou zjišťujeme, že tato hodnota je nižší, což je zaviněno tím, že ztráty tepla z kalorimetru při teplotě oleje podstatně vyšší než teplota vzduchu v laboratoři jsou větší než při měření prvním, kdy počáteční i konečná teplota byly bližší teplotě vzduchu.

## 7. příklad (navrhl Jan Tesař)

V trubici tvaru  $U$ , která má všude stejný průřez  $S$ , je sloupec dokonalé kapaliny celkové délky  $h$ . Tlakovou silou působící na povrch kapaliny v jednom ramenu vytlačíme z tohoto ramena sloupec kapaliny o délce  $d$ . V okamžiku, kdy síla přestane působit, uvede se kapalina v trubici do kmitavého pohybu (viz obr. 54).

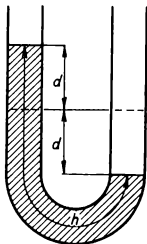
a) Určete kmitočet  $f$  kapalinového sloupce. Tření kapaliny o stěny trubice zanedbejte.

b) Jak závisí kmitočet na hustotě kapaliny a na průřezu trubice?

*Řešení:*

Označme průřez trubice  $S$ , hustotu kapaliny  $\rho$ , délku sloupce kapaliny  $h$ , maximální posunutí povrchu kapaliny od rovnovážné polohy  $d$  (amplituda výchylky),  $x$  okamžitá posunutí (okamžitá výchylka) orientované od rovnovážné polohy.

a) Hmotnost sloupce kapaliny  $m = S h \rho$ . V jednom ramenu trubice se povrch kapaliny zvedne o výšku  $d$ , v druhém ramenu o tutéž výšku klesne. Kmitání sloupce



Obr. 54

kapaliny způsobuje síla  $F$ , jejíž velikost se rovná tíze sloupce kapaliny o výšce  $2d$ .

$$F = S \cdot 2d \rho g = 2S \rho g d = k d.$$

Pro okamžité posunutí kapaliny platí

$$F = kx.$$

Síla je přímo úměrná okamžitému posunutí (okamžité výchylce) a je orientována do rovnovážné polohy, tedy nesouhlasně s výchylkou. Má obdobnou vlastnost jako pružná síla, která způsobuje jednoduchý kmitavý pohyb tělesa zavěšeného na pružině. Součinitel  $k = 2S \rho g$  odpovídá tuhosti pružiny. Pro kmitočet platí obdobně jako pro netlumené jednoduché kmity tělesa na pružině

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2S \rho g}{S h \rho}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{h}}. \quad (1)$$

Kmitočet sloupce kapaliny je vyjádřen vztahem (1).

b) Ve vztahu (1) se nevyskytují veličiny  $S$  a  $\rho$ , kmitočet sloupce kapaliny nezávisí tedy ani na průřezu trubice, ani na hustotě kapaliny.

## 8. příklad (navrhl dr. Ivan Náter)

V trojposchodovém obytném dome s bytmi rovnakého typu je v každém bytě místnost bez oken, kteréj podlaha má tvar štvorca o straně  $a$ . Výška miestnosti je  $b$ . Z troch strán priliehajú k tejto miestnosti iné obytné priestory bytu, štvrtú stenu tvorí vonkajšia stena domu. Tehlové steny vnútorných priečok majú hrúbku  $d_1$ , vonkajšia betonová stena hrúbku  $d_b$ . Všetky steny sú z oboch strán omietnuté omietkou hrúbky  $d_0$ . Súčiniteľ tepelnej vodivosti tehlového muriva je  $\lambda_1$ , betónu  $\lambda_b$ , omietky  $\lambda_0$ . Súčiniteľ prestupu tepla pre vnútorný kľudný vzduch je

$\alpha_1$ , pre vonkajšiu prúdiaci vzduch  $\alpha_2$ . V uvažovaných miestnostiach od prízemnia až po tretie poschodie chceme udržať teplotu  $t_1$ . V obývacích izbách je všade teplota  $t_2 < t_1$ , vonkajšia teplota je  $t_3 < t_2$ .

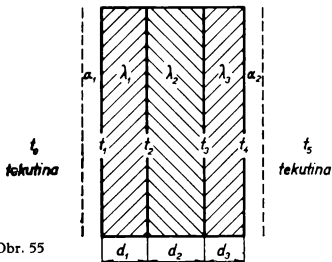
a) Aké musia byť výkony ohrievacích telies v uvažovaných miestnostiach na prvom alebo druhom poschodí?

b) Aké by boli výkony ohrievacích telies podľa a), ak  $t_1 = t_2 = t$ ?

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty  $a = 3,0$  m,  $b = 2,5$  m,  $d_t = 0,15$  m,  $d_b = 0,30$  m,  $d_o = 0,01$  m,  $\lambda_t = 0,50$  kcal m<sup>-1</sup> h<sup>-1</sup> deg<sup>-1</sup>,  $\lambda_b = 0,30$  kcal m<sup>-1</sup> h<sup>-1</sup> deg<sup>-1</sup>,  $\lambda_o = 0,80$  kcal m<sup>-1</sup> h<sup>-1</sup> deg<sup>-1</sup>,  $\alpha_1 = 4,0$  kcal m<sup>-2</sup> h<sup>-1</sup> deg<sup>-1</sup>,  $\alpha_2 = 100,0$  kcal m<sup>-2</sup> h<sup>-1</sup> deg<sup>-1</sup>,  $t_1 = 25$  °C,  $t_2 = 20$  °C,  $t_3 = 0$  °C,  $t = 20$  °C.

*Riešenie:*

Musíme vypočítať tepelné straty prechodom tepla cez všetky steny uvažovanej miestnosti. V každom prípade ide o prechod tepla stenou zloženou z troch vrstiev. Vyriešime túto úlohu všeobecne. Podľa obr. 55 značme



Obr. 55

hrúbky jednotlivých vrstiev steny  $d_1, d_2, d_3$ , ich súčinitele tepelných vodivostí  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , súčinitele prestupu tepla  $\alpha_1, \alpha_2$ , teplotu pred stenou  $t_0$ , teplotu na rozhraní prvej tekutiny a steny  $t_1$ , na rozhraní prvej a druhej vrstvy steny  $t_2$ , teplotu na rozhraní druhej a tretej vrstvy steny  $t_3$ , na rozhraní steny a druhej tekutiny  $t_4$ , za stenou  $t_5$ .

Vychádzame z podmienky konštantnej hustoty tepelného toku vo všetkých prostrediach:

$$q = \alpha_1(t_0 - t_1) = \lambda_1 \frac{t_1 - t_2}{d_1} = \lambda_2 \frac{t_2 - t_3}{d_2} = \lambda_3 \frac{t_3 - t_4}{d_3} = \\ = \alpha_2(t_4 - t_5).$$

Ak z týchto piatich rovníc vyjadríme príslušné teplotné rozdiely a takto získaných päť rovníc sčítame, dostaneme

$$t_0 - t_5 = q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2} \right),$$

odkiaľ môžeme vypočítať hustotu tepelného toku  $q$ :

$$q = \frac{t_0 - t_5}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Tepelné množstvo, ktoré prejde stenou plochy  $S$  za čas  $\tau$ , je

$$Q = \frac{t_0 - t_5}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2}} S \tau. \quad (1)$$

a) Teplom získaným z ohrievacieho telesa sa musia nahradiť tepelné straty prechodom tepla cez všetky steny miestnosti.

Z uvažovaných miestností na prvom a druhom poschodí uniká teplo len bočnými stenami, lebo nad a pod týmito

miestnosťami sú rovnaké miestnosti, v ktorých sú tiež teploty  $t_1$ . Podľa (1) je celkové unikajúce tepelné množstvo za čas  $\tau$

$$Q_a = \left[ \frac{3(t_1 - t_2)}{\frac{2}{\alpha_1} + \frac{2d_o}{\lambda_o} + \frac{d_t}{\lambda_t}} + \frac{t_1 - t_3}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{2d_o}{\lambda_o} + \frac{d_b}{\lambda_b} + \frac{1}{\alpha_2}} \right] \cdot ab\tau,$$

pretože s ohľadom na tepelné straty sú všetky tri vnútorné priečky rovnocenné, každá stena je z oboch strán omietnutá rovnako hrubou omietkou rovnakej kvality a plocha jednej steny je  $ab$ .

Výkon ohrievacieho telesa musí teda byť  $P_a = \frac{Q_a}{\tau}$ ,

$$P_a = \left[ \frac{3(t_1 - t_2)}{\frac{2}{\alpha_1} + \frac{2d_o}{\lambda_o} + \frac{d_t}{\lambda_t}} + \frac{t_1 - t_3}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{2d_o}{\lambda_o} + \frac{d_b}{\lambda_b} + \frac{1}{\alpha_2}} \right] ab. \quad (2)$$

b) Výkon  $P_b$  dostaneme priamo zo vzťahu (2), ak sem dosadíme  $t_1 = t_2 = t$ :

$$P_b = \frac{t - t_3}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{2d_o}{\lambda_o} + \frac{d_b}{\lambda_b} + \frac{1}{\alpha_2}} ab.$$

Numerické riešenie:

Dosadením zadaných hodnôt do všeobecných výsledkov dostaneme

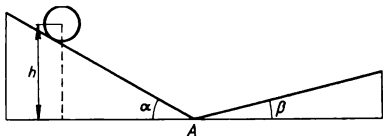
$$P_a = 2,8 \cdot 10^2 \text{ kcal h}^{-1},$$

$$P_b = 1,2 \cdot 10^2 \text{ kcal h}^{-1}.$$



## 9. úkol (navrhla dr. Marta Chytilová)

a) Určete dobu kmitu pohybu kuličky, která se kutálí po dvou nakloněných rovinách z výšky  $h$ ; roviny svírají s vodorovnou rovinou úhly  $\alpha$  a  $\beta$ . Uvažujeme jen vzájemné přeměny potenciální tíhové energie a kinetické energie (obr. 56).



Obr. 56

b) Pro danou dvojici úhlů, např.  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 15^\circ$ , ověřte pokusem:

1. závislost doby kmitu těžé kuličky na výšce  $h$  (každé měření opakujte pětkrát pro pět různých výšek);
2. závislost doby kmitu kuličky na její hmotnosti. Proveďte měření pro 5 kuliček různých hmotností při stálé výšce  $h$ , každé měření opakujte pětkrát.

Dobu kmitu určete z naměřené doby jistého počtu kmitů tak, že čas začnete měřit při průchodu kuličky nejnižší polohou  $A$ . Výsledky měření запиšte do tabulek a porovnejte s teoretickým řešením podle a).

*Řešení:*

Označme  $t_1$  dobu výstupu kuličky po nakloněné rovině vpravo,  $t_2$  dobu výstupu kuličky po nakloněné rovině vlevo,  $T$  dobu kmitu kuličky.

V řešení předpokládáme, že kulička přechází z jedné

nakloněné roviny na druhou bez nárazu — plynule. Nakloněné roviny tedy nemají být spojeny v ostré hraně, ale v malém oblouku. Zanedbáváme rotační pohyb kuličky.

a) Teoretická část:

Kulička volně spuštěná po nakloněné rovině vlevo z výšky  $h$  dosáhne při zanedbatelném tření v bodě  $A$  rychlosti

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Touto počáteční rychlostí vystupuje po nakloněné rovině vpravo za stejných předpokladů pohybem rovnoměrně zpomaleným rychlostí

$$v = v_0 - g t \sin \beta.$$

Za dobu  $t_1$  dosáhne nejvyššího bodu své dráhy na nakloněné rovině vpravo, v tomto bodě je její rychlost nulová

$$t_1 = \frac{v_0}{g \sin \beta}.$$

Po stejnou dobu se kulička vrací do bodu  $A$ , kde dosáhne opět rychlosti  $v_0$ , a stoupá po nakloněné rovině vlevo po dobu

$$t_2 = \frac{v_0}{g \sin \alpha}.$$

Doba kmitu kuličky je

$$\begin{aligned} T &= 2(t_1 + t_2) = \frac{2v_0}{g} \left( \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right) = \\ &= 2 \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}. \end{aligned}$$

b) Měření:

Při úhlu  $30^\circ$  a  $15^\circ$  kulička při svém pohybu naráží na

rozhraní obou nakloněných rovin a ztrácí značnou část kinetické energie. Proto byly voleny úhly menší,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 13^\circ$ . Byla měřena doba 3 kmitů, větší počet kmitů nebylo možno měřit pro útlum pohybu. Pro každou výšku  $h$  bylo provedeno 5 měření doby kmitu stopkami s dělením po 0,1 s.

$h$ [cm]	trojnásobek doby kmitu při měření [s]					$T_{\text{stř.}}$ [s]	$T$ podle teor. vztahu [s]
	1.	2.	3.	4.	5.		
12,5	6,0	6,1	6,0	6,0	6,0	2,00	2,33
10,7	5,5	5,5	5,4	5,6	5,4	1,83	2,16
9,2	5,2	5,0	5,3	5,3	5,2	1,70	2,00
7,5	4,8	4,7	4,7	4,7	4,7	1,57	1,81
5,8	4,0	4,1	4,1	3,9	4,0	1,33	1,59

Při měření jsou značné rozdíly proti teoretickému výpočtu, dané především tím, že se nepřihlíželo k tomu, že pohyb je vlivem tření silně tlumený, takže kulička neprobíhá dráhu odpovídající výšce  $h$ , ale postupně vždy dráhu kratší.

Druhé měření bylo provedeno z konstantní výšky  $h = 12,5$  cm, ale s pěti různě hmotnými kuličkami; opět byla měřena vždy doba 3 kmitů:

$m$ [g]	trojnásobek doby kmitu při měření [s]					$T_{\text{stř.}}$ [s]
	1.	2.	3.	4.	5.	
11,3	6,2	5,9	6,0	5,9	6,0	2,00
15,7	6,0	5,9	6,2	5,9	6,0	2,00
18,7	5,8	6,0	6,1	6,1	6,1	2,05
23,1	6,0	5,9	5,9	6,0	6,1	1,95

Vyjádříme-li z posledního vztahu v odst. a)

$$\frac{T}{\sqrt{h}} = \sqrt{\frac{8}{g}} \cdot \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \text{konst.}$$

a přezkoušíme-li tuto závislost pro měření v první tabulce, zjistíme, že v mezích možností našeho málo přesného měření je doba kmitu přímo úměrná odmocnině z výšky  $h$ :

$h$ [cm]	12,5	10,7	9,2	7,5	5,8
$T$ [s]	2,00	1,83	1,70	1,57	1,33
$T h^{\frac{1}{2}}$	0,59	0,56	0,56	0,57	0,55

Z druhé tabulky je zřejmé, že doba kmitu nezávisí na hmotnosti kuličky, přesněji řečeno v našem měření se závislost nedala zjistit.

## b) Druhé kolo soutěže

### 1. příklad (navrhl Jan Tesař)

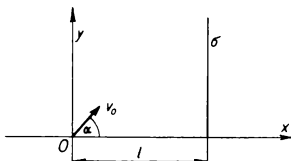
Dokonale pružné těleso (hmotný bod) je vrženo počáteční rychlostí  $v_0$  šikmo vzhůru z bodu  $O$  tak, že směr počáteční rychlosti svírá s vodorovnou rovinou vedenou bodem  $O$  úhel  $\alpha$ . Těleso narazí na dokonale pružnou svislou rovinnou stěnu  $\sigma$ , která je kolmá k rovině  $\tau$  trajektorie pohybujícího se tělesa. Vzdálenost bodu  $O$  od stěny je  $l$  (obr. 57).

a) V jaké vzdálenosti  $d$  od stěny  $\sigma$  dopadne těleso po

odrazu na této stěně na vodorovnou rovinu vedenou bodem  $O$ ?

b) Určete vzdálenost bodu  $O$  od stěny  $\sigma$  v tom případě, jestliže těleso po odrazu na stěně  $\sigma$  dopadne zpět do bodu  $O$ .

Předpokládejte, že se těleso pohybuje ve vakuu.



Obr. 57

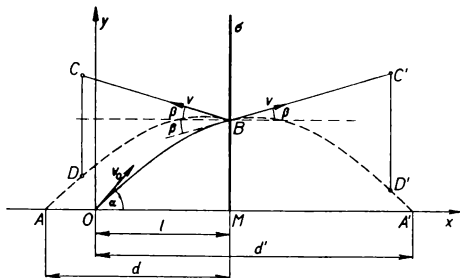
**Řešení:**

Průsečnici rovin  $\sigma$  a  $\tau$  zvolíme za osu  $x$  a přímku ležící v rovině a procházející bodem  $O$  kolmo k ose  $x$  za osu  $y$  (obr. 58). Těleso narazí na desku  $\sigma$  v bodě  $B$  pod úhlem  $\beta$  rychlostí  $v$  v čase  $t_1$  od okamžiku, kdy došlo k vrhu, a dopadne po odrazu na zem v čase  $t_2$ . Souřadnice libovolného bodu na dráze šikmého vrhu označíme obecně  $x$  a  $y$ , délku šikmého vrhu budeme značit  $d'$  a průsečík osy  $x$  s rovinou  $\sigma$  písmenem  $M$ .

a) Až do okamžiku, kdy těleso narazí na desku, pohybuje se jako při šikmém vrhu. Poloha kteréhokoli bodu na dráze je určena vztahy

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \quad (1)$$

kde  $t$  značí čas, který uplynul od okamžiku, kdy těleso bylo uvedeno do pohybu. Trajektorie tělesa po odrazu od stěny  $\sigma$  leží v rovině  $\tau$  dopadu, úhel odrazu se rovná úhlu dopadu  $\beta$ , a protože jde o náraz pružného tělesa



Obr. 58

na pružnou stěnu, je kinetická energie tělesa po rázu stejně veliká jako před rázem. Proto je i počáteční rychlost  $v$  po odrazu stejně velká jako rychlost, jakou těleso na desku  $\sigma$  narazilo. Kdyby nebylo přitažlivosti zemské, vykonaloby těleso za čas  $(t - t_1)$  dráhu  $BC = v(t - t_1)$ . Volným pádem však za tutéž dobu klesne o délku  $CD$ , takže se v čase  $t$  nachází v místě  $D$ , které je od roviny  $\sigma$  vzdáleno o délku  $v(t - t_1) \cos \beta$ . Kdyby se odstranila deska  $\sigma$  a nedošlo k rázu, nacházelo by se těleso v čase  $t$  v bodě  $D'$ , který má od osy  $x$  a od roviny  $\sigma$  stejné vzdálenosti jako bod  $D$ . To platí obecně pro všechny body na trajektorii tělesa po odrazu od stěny. Trajektorie  $\widehat{BA}$

je tedy souměrně sdružená podle roviny  $\sigma$  s trajektorií  $\widehat{BA'}$ , kterou by těleso vykonalo, kdyby nenarazilo na pevnou stěnu. Proto platí  $A'M = MA$ , takže

$$d = d' - l. \quad (2)$$

Bod  $A'$  má souřadnice  $A'(d', 0)$ , a proto platí podle upravených vztahů (1)

$$d' = v_0 t_2 \cos \alpha, \quad v_0 t_2 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0.$$

Druhou z těchto rovnic upravíme na tvar

$$t_2 \left( v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_2 \right) = 0.$$

Kořen  $t_2 = 0$  odpovídá místu  $O$ , druhý kořen místu  $A'$ , takže

$$t_2 = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \quad \text{a} \quad d' = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

a podle vztahu (2)

$$d = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} - l. \quad (3)$$

Místo dopadu tělesa na zem je od pevné desky vzdáleno o délku  $d$  určenou vztahem (3).

b) Má-li těleso po odrazu od pevné stěny dopadnout na zemský povrch v místě, z něhož bylo vrženo, pak  $d = l$ .

Podle upraveného vztahu (2) pak platí  $l = \frac{d'}{2}$ , takže

$$l = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}. \quad (4)$$

Má-li těleso dopadnout po odrazu od pevné desky do místa, z něhož bylo vrženo, musí být stěna vzdálena od tohoto místa o délku  $l$  určenou vztahem (4).

## 2. příklad (navrhla dr. Marta Chytilová)

Při jisté operaci řízené ze Země se změnila kruhová rychlost umělé družice Země z hodnoty  $v_1$  na hodnotu  $v_2$ .

a) Uvažujte dva případy: 1.  $v_2 < v_1$ , 2.  $v_2 > v_1$ .

Vysvětlete, jak se ve kterém případě změní vzdálenost družice od středu Země a její oběžná doba.

b) Určete změnu vzdálenosti družice od středu Země a změnu její oběžné doby v případě 1.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $v_1 = 7,79 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$ ,  $v_2 = 7,36 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$ .

*Řešení:*

Označme  $r_1$ ,  $r_2$  vzdálenosti družice od středu Země,  $T_1$ ,  $T_2$  oběžné doby družice okolo Země,  $M$  hmotnost Země,  $m$  hmotnost družice,  $R$  poloměr Země.

a) Na kruhové oběžné dráze o poloměru  $r$  udržuje družici gravitační síla určená Newtonovým gravitačním zákonem, která vyvolává příslušné dostředivé zrychlení

$$a_d = \frac{v^2}{r}.$$

Podle Newtonova zákona síly platí

$$\kappa \frac{M m}{r^2} = \frac{m v^2}{r},$$

odkud můžeme vyjádřit  $v^2$ :

$$v^2 = \kappa \frac{M}{r} = \kappa \frac{M}{R^2} \cdot \frac{R^2}{r} = g \frac{R^2}{r},$$

protože  $\kappa \frac{M}{R^2} = g$  je tíhové zrychlení na zemském po-



vrchu. Je tedy

$$r_1 = \frac{g R^2}{v_1^2}, \quad r_2 = \frac{g R^2}{v_2^2}. \quad (1)$$

1. Je-li  $v_2 < v_1$ , je

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} > 1, \text{ proto } r_2 > r_1.$$

Doba oběhu  $T$  družice okolo Země je  $T = \frac{2\pi r}{v}$ , tedy

$$T_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1}, \quad T_2 = \frac{2\pi r_2}{v_2}, \quad (2)$$

odkud vychází

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{v_2}{v_1}.$$

Protože

$$\frac{r_1}{r_2} < 1 \text{ a } \frac{v_2}{v_1} < 1, \text{ je } T_2 > T_1.$$

2. Je-li  $v_2 > v_1$ , obdobnou úvahou jako v 1. dostaneme

$$r_2 < r_1, \quad T_2 < T_1.$$

b) Z (1) dostaneme

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 &= R^2 g \left( \frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2} \right) = \\ &= 6,37^2 \cdot 10^{12} \text{ m}^2 \cdot 10 \text{ m s}^{-2} \left( \frac{1}{7,36^2} - \frac{1}{7,79^2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{10^6} (\text{ms}^{-1})^2 \doteq 8 \cdot 10^5 \text{ m}. \end{aligned}$$

Z rovnic (2), použijeme-li i rovnice (1), dostaneme

$$\begin{aligned}T_2 - T_1 &= 2 \pi \left( \frac{r_2}{v_2^2} - \frac{r_1}{v_1^2} \right) = 2 \pi \left( \frac{R^2 g}{v_2^3} - \frac{R^2 g}{v_1^3} \right) = \\ &= 2 \pi R^2 g \left( \frac{1}{v_2^3} - \frac{1}{v_1^3} \right).\end{aligned}$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme

$$T_2 - T_1 = 9 \cdot 10^2 \text{ s}.$$

### 3. příklad (navrhla dr. Marta Chytilová)

Tyč válcového tvaru ze stejnorodého materiálu o hmotnosti  $m$  je zavěšena na třech svislých drátech tak, že podélná osa tyče je vodorovná. Dráty upevněné v krajních bodech tyče jsou ze stejného materiálu o modulu pružnosti v tahu  $E_1$ , třetí drát upevněný uprostřed tyče je z jiného materiálu o modulu pružnosti v tahu  $E_2$  ( $E_2 > E_1$ ). Průřezy všech tří drátů jsou stále stejné.

a) Jak velkou silou je napínán který drát?

b) Jak se změní tyto tahové síly, jestliže střední drát má modul pružnosti v tahu  $E_1$  a krajní dráty  $E_2$ ?

Řešte nejprve obecně, potom pro  $m = 100 \text{ kg}$ ,  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{2}$  (odpovídá mědi a oceli).

*Řešení:*

Označme  $l$  původní délku drátů,  $S$  průřezovou plochu drátů,  $\Delta l$  prodloužení drátů,  $F_1$  sílu, kterou jsou napínány krajní dráty,  $F_2$  sílu, kterou je napínán prostřední drát.

Ze souměrnosti umístění drátů vyplývá, že krajní dráty jsou napínány stejnými silami  $F_1$ .

a) Podle Hookeova zákona je (obr. 59a)

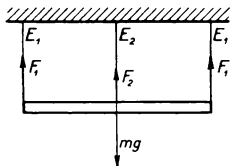
$$F_1 = \frac{\Delta l}{l} S E_1, F_2 = \frac{\Delta l}{l} S E_2 \text{ a odtud } \frac{F_1}{F_2} = \frac{E_1}{E_2}. \quad (1)$$

Za rovnováhy musí platit

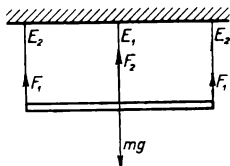
$$F_2 + 2 F_1 = m g. \quad (2)$$

Řešením rovnic (1) a (2) dostaneme

$$F_2 = \frac{m g}{1 + 2 \frac{E_1}{E_2}}, F_1 = \frac{m g \frac{E_1}{E_2}}{1 + 2 \frac{E_1}{E_2}}.$$



Obr. 59a



Obr. 59b

b) Řešíme analogicky jako a) (obr. 59b):

$$F_1 = \frac{\Delta l}{l} S E_2, F_2 = \frac{\Delta l}{l} S E_1, \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{E_2}{E_1}. \quad (1')$$

$$2 F_2 + F_1 = m g. \quad (2')$$

Z rovnic (1') a (2') dostaneme

$$F_2 = \frac{m g}{1 + 2 \frac{E_2}{E_1}}, F_1 = \frac{m g \frac{E_2}{E_1}}{1 + 2 \frac{E_2}{E_1}}.$$

c) Numerické řešení pro dané hodnoty a  $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$ :

$$\text{a) } F_2 = \frac{100 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m s}^{-2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}}, \quad F_1 = \frac{100 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m s}^{-2} \cdot \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}},$$

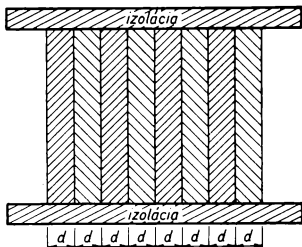
$$F_2 = 500 \text{ N}, \quad F_1 = 250 \text{ N}.$$

$$\text{b) } F_2 = \frac{100 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m s}^{-2}}{1 + 2 \cdot 2}, \quad F_1 = \frac{100 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m s}^{-2} \cdot 2}{1 + 2 \cdot 2},$$

$$F_2 = 200 \text{ N}, \quad F_1 = 400 \text{ N}.$$

#### 4. příklad (navrhl dr. Ivan Náter)

Medené bloky rovnakej hrúbky  $d$  v počte  $n$  sú pritlačené tesne na seba a vložené do tepelne izolujúceho rámu podľa obr. 60. Na vonkajšom povrchu prvého bloku udržujeme teplotu  $t_1$ , na vonkajšom povrchu posledného



Obr. 60

bloku teplotu  $t_2$  ( $t_2 < t_1$ ). Ak medzi blokmi necháme také tenké vzduchové medzery, že sa v nich vytvoria len hraničné vrstvy prestupu tepla, musíme počet blokov zmenšiť na  $\frac{n}{m}$  ( $\frac{n}{m}$  je celé číslo), ak sa hustota tepelného toku pri tých istých vonkajších podmienkach nemá zmeniť.

a) Vypočítajte súčiniteľ prestupu tepla zo vzduchu do medi, ak súčiniteľ tepelnej vodivosti medi je  $\lambda$ .

b) O koľko percent by poklesla hustota tepelného toku, keby sme vzduchové medzery vytvorili medzi všetkými  $n$  blokmi?

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty  $d = 2,0$  m,  $n = 240$ ,  $\lambda = 381$  J m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup> deg<sup>-1</sup>,  $m = 60$ .

*Riešenie:*

a) Vyjadríme hustotu tepelného toku v medených blokoch bez medzier a s medzerami; podľa zadania majú byť rovnaké. V prípade blokov s medzerami máme  $\frac{n}{m}$  blokov a  $\left(\frac{n}{m} - 1\right)$  medzier, v ktorých sa vytvorí  $2\left(\frac{n}{m} - 1\right)$  hraničných vrstiev prestupu tepla. Preto je

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{n d}{\lambda}} \quad \text{a tiež} \quad q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{n d}{m \lambda} + 2\left(\frac{n}{m} - 1\right) \cdot \frac{1}{\alpha}} .$$

Porovnaním pravých strán týchto rovníc dostaneme

$$\frac{n d}{\lambda} = \frac{n d}{m \lambda} + 2\left(\frac{n}{m} - 1\right) \frac{1}{\alpha} .$$

Z tohoto vzťahu vyjadríme súčiniteľ prestupu tepla  $\alpha$

$$\alpha = \frac{2 \lambda (n - m)}{n (m - 1) d} . \quad (1)$$

b) Ak necháme všetky bloky a vytvoríme medzi nimi medzery, budeme mať  $(n - 1)$  medzier, v ktorých sa vytvorí  $2 (n - 1)$  hraničných vrstiev prestupu tepla. Hustota tepelného toku bude

$$q' = \frac{t_1 - t_2}{\frac{n d}{\lambda} + \frac{2 (n - 1)}{\alpha}} .$$

Pokles hustoty tepelného toku je  $q - q'$ :

$$q - q' = (t_1 - t_2) \left[ \frac{1}{\frac{n d}{\lambda}} - \frac{1}{\frac{n d}{\lambda} + \frac{2 (n - 1)}{\alpha}} \right] .$$

Súčiniteľ prestupu tepla  $\alpha$  je určený vzťahom (1).

Percentuálny pokles hustoty tepelného toku je

$$p = \frac{q - q'}{q} \cdot 100 \% = \left( 1 - \frac{q'}{q} \right) \cdot 100 \% .$$

Po dosadení za  $q$  a  $q'$  a po jednoduchej úprave dostaneme

$$p = \left[ 1 - \frac{\frac{n d}{\lambda}}{\frac{n d}{\lambda} + \frac{2 (n - 1)}{\alpha}} \right] \cdot 100 \% .$$

Ak ešte dosadíme za  $\alpha$  z (1), dostaneme po úprave

$$p = \frac{1 + n m - n - m}{1 + n m - 2 m} \cdot 100 \% .$$

Po dosazení číselných hodnôt vychádza

a)  $\alpha = 4,2 \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ deg}^{-1}$ ,

b)  $p = 98 \%$ .

### 3. Úlohy kategórie C

Úlohy a riešenie recenzovala dr. Marta Chytilová a dr. Ivan Náter

#### a) Prvé kolo súťaže

##### 1. príklad (navrhol Josef Pastorčák)

V mezihvězdném prostoru se pohybují rovnoměrně po přímé dráze proti sobě dvě tělesa, první rychlostí  $v_1$ , druhé rychlostí  $v_2$ . V určitém okamžiku vyšle první těleso krátkovlnný rádiový signál, který se odrazí od druhého tělesa a vrátí se na těleso první, kde je přijat za dobu  $t$  od vysílání. Rádiový signál se šíří rychlostí  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$  nezávisle na rychlosti tělesa, které signál vyslalo nebo odrazilo.

V jaké vzdálenosti byla od sebe obě tělesa

a) v okamžiku vyslání signálu,

b) v okamžiku příjmu signálu prvním tělesem.

Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty  $v_1 = 2,0 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$ ,  $v_2 = 3,0 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$ ,  $t = 2,4 \text{ s}$ .

*Řešení:*

Nechť písmena  $A$ ,  $B$  značí polohy těles v okamžiku vyslání signálu,  $A_1$ ,  $B_1$  polohy těles v okamžiku, kdy signál narazí na druhé těleso,  $A_2$ ,  $B_2$  polohy těles v okamžiku, kdy se signál vrátil na první těleso (obr. 61). Dále ozna-

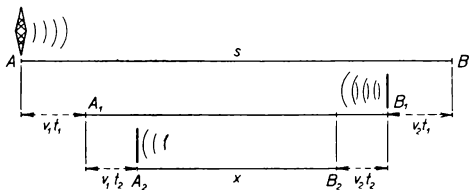
čime  $AB = s$ ,  $A_2B_2 = x$ ;  $t_1$  je doba, za kterou dojde signál z  $A$  do  $B_1$ ,  $t_2$  je doba, za kterou dojde signál z  $B_1$  na  $A_2$ .

Za dobu  $t_1$  urazí signál dráhu

$$AB_1 = c t_1 = s - v_2 t_1,$$

za dobu  $t_2$  dráhu

$$B_1A_2 = c t_2 = x + v_2 t_2.$$



Obr. 61

Odtud plyne

$$s = c t_1 + v_2 t_1, \quad (1)$$

$$x = c t_2 - v_2 t_2. \quad (2)$$

Dále je z obr. 61 patrné, že

$$s - x = v_1 t_1 + v_1 t_2 + v_2 t_1 + v_2 t_2$$

$$s - x = (v_1 + v_2)(t_1 + t_2).$$

Protože  $t_1 + t_2 = t$ , je

$$s - x = (v_1 + v_2) t. \quad (3)$$

Po odečtení (2) od (1) obdržíme

$$s - x = c(t_1 - t_2) + v_2 t$$



a po porovnání pravých stran těchto výrazů a po úpravě

$$t_1 - t_2 = \frac{v_1 t}{c}. \quad (4)$$

Po sečtení rovnic (1) a (2) a po dosazení podle (4) dostaneme

$$s + x = c t + \frac{v_1 v_2 t}{c}$$

a podle vztahu (3)

$$s - x = v_1 t + v_2 t.$$

Z posledních dvou rovnic vypočítáme

$$s = \frac{1}{2} c t \left(1 + \frac{v_1}{c}\right) \left(1 + \frac{v_2}{c}\right), \quad (5)$$

$$x = \frac{1}{2} c t \left(1 - \frac{v_1}{c}\right) \left(1 - \frac{v_2}{c}\right). \quad (6)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$s = 4,2 \cdot 10^5 \text{ km},$$

$$x = 3,0 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

V okamžiku, kdy první těleso vyšle signál, jsou obě tělesa od sebe vzdálena  $4,2 \cdot 10^5$  km a v okamžiku, kdy prvé těleso přijme odražený signál, mají vzdálenost  $3,0 \cdot 10^5$  km. Obecně jsou tyto vzdálenosti určeny vztahy (5) a (6).

## 2. příklad (navrhl Jan Tesař)

Těleso se uvede v místě  $O$  z klidu do rovnoměrně zrychleného pohybu a dosáhne v čase  $t_1$  rychlosti  $v_1$  a v čase  $t_2$  rychlosti  $v_2 = n v_1$ . V časovém intervalu  $\Delta t = t_2 - t_1$  vykoná dráhu  $s$ .

a) Určete zrychlení pohybujícího se tělesa.

b) Jaké vzdálenosti od bodu  $O$  má těleso v časech  $t_1$  a  $t_2$ ?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $\Delta t = 10,0$  s,  $s = 30,0$  m,  $n = 5$ .

**Řešení:**

Vzdálenost tělesa od bodu  $O$  v čase  $t_1$  je

$$s_1 = \frac{a}{2} t_1^2,$$

v čase  $t_2$

$$s_2 = \frac{a}{2} t_2^2,$$

kde  $a$  značí konstantní zrychlení tělesa.

a) Protože se těleso pohybuje pohybem rovnoměrně zrychleným, platí vzhledem ke vztahu  $v_2 = n v_1$  rovnice

$$a(t_1 + \Delta t) = n a t_1,$$

ze které vyjde

$$t_1 + \Delta t = n t_1 \quad (1)$$

a odtud

$$t_1 = \frac{\Delta t}{n - 1}. \quad (2)$$

Dráha vykonaná tělesem v časovém intervalu  $\Delta t$  je

$$s = s_2 - s_1 = \frac{a}{2} (t_2^2 - t_1^2) = \frac{a}{2} [(t_1 + \Delta t)^2 - t_1^2].$$

Dosadíme-li do pravé strany této rovnice hodnoty ze vztahů (1) a (2), dostaneme po úpravách

$$s = \frac{a}{2} (n^2 t_1^2 - t_1^2) = \frac{a}{2} (n^2 - 1) t_1^2 = \frac{a}{2} (n^2 - 1) \cdot \frac{\Delta^2 t}{(n - 1)^2} = \frac{a}{2} \frac{n + 1}{n - 1} \Delta^2 t,$$

takže

$$a = \frac{2s(n-1)}{(n+1)\Delta^2 t} \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$a = \frac{2 \cdot 30,0 \cdot 4}{6 \cdot 100} \text{ m s}^{-2} = 0,400 \text{ m s}^{-2}.$$

Těleso se pohybuje se zrychlením  $0,4 \text{ m s}^{-2}$ . Jeho hodnota je obecně určena vztahem (3).

b) Vzdálenost

$$s_1 = \frac{a}{2} t_1^2 = \frac{(n-1)s}{(n+1)\Delta^2 t} \frac{\Delta^2 t}{(n-1)^2} = \frac{s}{n^2 - 1} \quad (4)$$

Vzdálenost  $s_2$

$$s_2 = s_1 + s = \frac{s}{n^2 - 1} + s = s \frac{n^2}{n^2 - 1} \quad (5)$$

Po dosazení číselných hodnot vyjde

$$s_1 = 1,25 \text{ m}, \quad s_2 = 31,3 \text{ m}.$$

Těleso je od bodu  $O$  v čase  $t_1$  vzdáleno o  $1,25 \text{ m}$  a v čase  $t_2$  o  $31,3 \text{ m}$ . Obecně jsou tyto vzdálenosti určeny vztahy (4) a (5).

### 3. úkol (navrhl Jan Tesař)

#### **Měření plošného obsahu rovinného obrazce vážením**

*Potřeby:* kartónový papír, kružidlo, nůžky, laboratorní váhy a sada závaží, délkové měřítko s milimetrovým dělením.

## Návod

Dva přímé hranoly nebo válce z téhož homogenního materiálu hustoty  $\rho$  o stejné výšce  $h$ , jejichž podstavy mají obsahy  $S_1$  a  $S$ , mají hmotnosti  $m_1$  a  $m$ . Známe-li velikost podstavy  $S_1$  jednoho z těchto těles, dá se vypočítat velikost  $S$  podstavy druhého tělesa ze vztahu

$$S = S_1 \frac{m}{m_1}. \quad (1)$$

Lze tedy velikost libovolné (i zcela nepravidelné) rovinné plochy určit vážením a srovnáním se známým obsahem jiné plochy.

*Úkol:* Určete vážením obsah kruhu o poloměru  $r$ .

### Postup práce

- Odvoďte vztah (1).
- Vystříhnete z listu kladívkového papíru kruh o poloměru  $r$  (asi 10 cm) a obrazec, jehož obsah se snadno počítá, nejlépe čtverec o straně  $a$ . Změřte deset různých průměrů kruhové desky a vypočítejte její poloměr. Stranu čtverce  $a$  určete jako aritmetický průměr z deseti měření vzdáleností protilehlých stran čtvercové desky. Určete absolutní i relativní chyby měření.
- Vážením na laboratorních vahách určete s dosažitelnou přesností hmotnost obou vystřižených papírových desek. Každou z nich zvažte pětkrát, určete aritmetické průměry naměřených hodnot a absolutní i relativní chyby obou naměřených veličin.
- Vypočítejte obsah  $S_1$  čtvercové desky.
- Podle vztahu (1) určete obsah narýsovaného kruhu a vypočítejte absolutní i relativní chybu této veličiny.

### Kontrolní úkol

Ze vztahu  $\pi = \frac{S}{r^2}$  určete výpočtem hodnotu Ludolfova čísla a porovnejte ji s hodnotou z tabulek.

#### Řešení:

$m$  je hmotnost kruhové desky,  $d$  její průměr,  $S$  obsah podstavy;  $m_1$  hmotnost čtvercové desky,  $a$  její strana,  $S_1$  obsah podstavy,  $h$  tloušťka papíru (kartónu),  $\rho$  měrná hmotnost papíru.

a) Odvození vztahu (1):

Objem kruhové desky je  $V = S h$ , její hmotnost  $m = S h \rho$ , a tedy tíha kruhové desky

$$m g = S h \rho g,$$

tíha čtvercové desky

$$m_1 g = S_1 h \rho g.$$

Dělením obou vztahů dostaneme

$$\frac{m}{m_1} = \frac{S}{S_1},$$

a tedy

$$S = S_1 \frac{m}{m_1}.$$

b) Měření průměru  $d$  kruhové desky

Měření průměru u vystřiženého kartónu bylo možné jen s přesností na milimetry, desetiny milimetru by byly zcela nespolehlivé.

$n$	$d$ [cm]	$\Delta_+$ [cm]
1	15,2	
2	15,3	
3	15,2	
4	15,3	
5	15,2	
6	15,1	0,10
7	15,2	
8	15,2	
9	15,1	0,10
10	15,2	

Střední chyba

$$\bar{\delta} = \frac{5}{2} \frac{\Sigma \Delta_+}{n \sqrt{n-1}},$$

pro 10 měření je  $\bar{\delta} = \frac{\Sigma \Delta_+}{12}$ .

Pro naše měření

$$\bar{\delta} = \frac{0,20}{12} \text{ cm} = 0,017 \text{ cm}$$

$$\bar{\delta} \doteq 0,02 \text{ cm}.$$

$$d_{\text{stř}} = 15,20; 0,20 = \Sigma \Delta_+$$

Průměr desky je  $d = (15,20 \pm 0,02) \text{ cm}$ .

Absolutní chyba je 0,02 cm, relativní 0,1 %.

Měření strany  $a$  čtverce

$n$	$a$ [cm]	$\Delta_+$ [cm]
1	13,4	
2	13,4	
3	13,5	
4	13,4	
5	13,3	0,11
6	13,5	
7	13,3	0,11
8	13,5	
9	13,4	
10	13,4	

Střední chyba tohoto měření

$$\bar{\delta} = \frac{\Sigma \Delta_+}{12} = 0,018 \text{ cm} \doteq 0,02 \text{ cm}.$$

Strana čtverce  $a = (13,41 \pm 0,02) \text{ cm}$ .

Absolutní chyba je 0,02 cm, relativní 0,1 %.

$$a_{\text{stř}} = 13,41; 0,20 = \Sigma \Delta_+$$

c) Měření hmotnosti  $m$  kruhové desky

Hmotnost byla zjištěna vážením na lékárnických

vahách. Protože chyba při tomto měření je nepatrná, bylo vážení provedeno jen jednou pro každou desku.

	Body obratu jazýčku		Rovnováž. poloha
nulová poloha	1,1	17,3	$n_{01} = 9,2$
	1,3	1,2	
závaží $m_1 = 10,48$ g	0,5	15,9	$n_1 = 8,2$
	0,7	0,6	
závaží $m_2 = 10,50$ g	4,8	17,9	$n_2 = 11,4$
	5,0	4,9	
nulová poloha	3,6	14,6	$n_{02} = 9,2$
	3,8	3,7	

$$n_0 = 9,2 \text{ dílku}$$

$$m = m_1 + \frac{n_0 - n_1}{n_2 - n_1} (m_2 - m_1),$$

$$m = \left[ 10,48 + \frac{9,2 - 8,2}{11,4 - 8,2} (10,50 - 10,48) \right] \text{ g} = 10,486 \text{ g}.$$

Absolutní chyba je menší než 0,01 g, relativní menší než 0,1 %. Měření hmotnosti čtvercové desky:

	Body obratu jazýčku		Rovnováž. poloha
nulová poloha	1,2	17,1	$n_{01} = 9,2$
	1,4	1,3	
závaží $m_1 = 10,42$ g	0,6	16,1	$n_1 = 8,4$
	0,8	0,9	
závaží $m_2 = 10,44$ g	3,6	18,4	$n_2 = 11,0$
	3,8	3,7	
nulová poloha	1,1	17,3	$n_{02} = 9,3$
	1,3	1,2	

$$n_0 = 9,2 \text{ dílku}$$

$$m = \left[ 10,42 + \frac{9,2 - 8,4}{11,0 - 8,4} (10,44 - 10,42) \right] \text{ g} = 10,426 \text{ g}.$$

Absolutní chyba je menší než 0,01 g, relativní menší než 0,1 %.

d) Výpočet obsahu čtvercové desky

$S_1 = \bar{S}_1 \pm \bar{\delta}(S_1)$ , kde  $\bar{S}_1$  je střední hodnota  $S_1$  a  $\bar{\delta}(S_1)$  je stř. chyba.

$$\bar{S}_1 = \bar{a}^2 = 13,41^2 \text{ cm}^2 = 179,8 \text{ cm}^2.$$

$$\bar{\delta}(S_1) = S_1 \cdot 2 \frac{\bar{\delta}(a)}{a} = 2 a \bar{\delta}(a) = 13,41 \cdot 2 \cdot 0,02 \text{ cm}^2 \doteq \doteq 0,5 \text{ cm}^2.$$

$$S_1 = (179,8 \pm 0,5) \text{ cm}^2.$$

Absolutní chyba je 0,5 cm<sup>2</sup>, relativní 0,3 %.

e) Výpočet obsahu kruhové desky

$$S = \bar{S} \pm \bar{\delta}(S),$$

$$\bar{S} = \bar{S}_1 \frac{m}{m_1} = 179,8 \cdot \frac{10,49}{10,43} \text{ cm}^2 = 180,8 \text{ cm}^2.$$

$$\bar{\delta}(S) = S \sqrt{\left(\frac{\bar{\delta}(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}(m_1)}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}(S)}{S}\right)^2} =$$

$$= 180,8 \sqrt{0,001^2 + 0,001^2 + 0,003^2} \text{ cm}^2 \doteq 0,5 \text{ cm}^2.$$

$$S = (180,8 \pm 0,5) \text{ cm}^2.$$

Absolutní chyba je 0,5 cm<sup>2</sup>, relativní chyba 0,3 %.

Kontrolní úkol:

$$S = \frac{\pi d^2}{4}, \quad \pi = \frac{4 S}{d}.$$



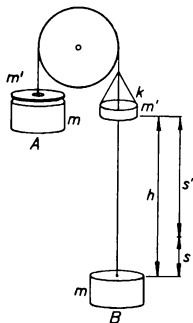
$$\pi = \bar{\pi} \pm \bar{\delta}(\pi),$$

$$\bar{\pi} = \frac{4S}{d^2} = \frac{4 \cdot 180,8}{15,20^2} = 3,131,$$

$$\bar{\delta}(\pi) = 3,131 \sqrt{0,003^2 + 0,002^2} = 0,01.$$

$\pi = 3,13 \pm 0,01$ . Z tabulek přesná hodnota je 3,142. Výsledek měření je dobrý. Nejméně přesně se dají zjistit rozměry vystřiženého obrazce. Není zaručena homogenita (stejná tloušťka) materiálu. Přesnější výsledek by se asi dostal vystřížením z tužší fólie hliníkové, u níž by byla homogenita lepší.

#### 4. příklad (navrhla Věra Brandlová)



Obr. 62

Na jednom konci vlákna vedeného přes pevnou kladku je zavěšen válec  $A$  o hmotnosti  $m$ , na druhém konci visí válec  $B$  o stejné hmotnosti. Na válci  $A$  leží přívazek o hmotnosti  $m'$ . Nad válcem  $B$  je k vláknu připoután ve výšce  $h$  nad horní podstavou válce  $B$  kroužek  $k$  o stejné hmotnosti  $m'$ , jako má přívazek. Celá soustava těles je v klidu. Jestliže kroužek  $k$  uvolníme, uvede se soustava do pohybu (obr. 62).

a) Za jakou dobu a ve kterém místě dopadne kroužek  $k$  na válec  $B$ ?

b) Jak se pohybuje soustava po dopadu kroužku na válec  $B$ ?

Závaží  $B$  i kroužek  $k$  jsou dokonale nepružné. Tření a otáčivý pohyb kladky neberte v úvahu.

**Řešení:**

Kroužek  $k$  dopadne na válec  $B$  za dobu  $t$  rychlostí  $v'$  ve vzdálenosti  $s'$  od klidové polohy kroužku. Válec  $B$  má v okamžiku rázu rychlost  $v$  a za dobu  $t$  vykonal dráhu  $s$ . Po rázu kroužku  $k$  a válce  $B$  má soustava rychlost  $w$ . Vzhledem k tomu, že se ve fyzice pokládá obvykle orientace tíhového zrychlení za kladnou, jsou veličiny  $a$  (zrychlení pohybu válce  $B$ ),  $v$  a  $s$  orientovány záporně. Proto má zápornou orientaci i tíhová síla  $G'$ , kterou působí přívazek o hmotnosti  $m'$  na soustavu po uvolnění kroužku  $k$ , neboť válec  $B$  se pohybuje jejím působením ve směru orientovaném záporně.

a) Uvolněný kroužek padá volným pádem a dopadne na válec  $B$  rychlostí

$$v' = g t .$$

Po stejnou dobu jako kroužek  $k$  se pohybuje válec  $B$  působením stálé tíhové síly  $G' = m' g$  přívazku pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením  $a$ . Protože zrychlení  $a$  je opačně orientováno než zrychlení  $g$  volného pádu, platí rovnice

$$(2 m + m') a = - m' g ,$$

takže

$$a = - \frac{m' g}{2 m + m'} \quad \text{a} \quad v = a t = - \frac{m'}{2 m + m'} g t = \\ = - \frac{m'}{2 m + m'} v' . \quad (1)$$

Vzdálenosti  $s'$  a  $s$  jsou určeny rovnicemi

$$s' = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{a} \quad s = \frac{1}{2} a t^2 ,$$

takže podíl  $\frac{s}{s'} = \frac{a}{g} = \frac{m'}{2m + m'}$  a  $s = s' \frac{m'}{2m + m'}$ .

Zároveň podle obr. 62 platí  $s' + s = h$ . Dosadíme-li do této rovnice za  $s$  hodnotu z předcházejícího výrazu, vyjde po úpravě

$$h = s' \left( 1 + \frac{m'}{2m + m'} \right) = \frac{2(m + m')}{2m + m'} s'.$$

Odtud vypočítáme

$$s' = \frac{2m + m'}{2(m + m')} h. \quad (2)$$

Dobu  $t$ , za kterou kroužek  $k$  dopadne na válec  $B$ , určíme ze vztahu

$$s' = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{2m + m'}{2(m + m')} h,$$

z něhož vyjde

$$t = \sqrt{\frac{2m + m'}{m + m'} \frac{h}{g}}. \quad (3)$$

Kroužek  $k$  dopadne po uvolnění na válec  $B$  za dobu určenou vztahem (3) v místě, které je vzdáleno od klidové polohy kroužku o vzdálenost určenou vztahem (2).

b) Výslednou rychlost soustavy po rázu kroužku  $k$  a válce  $B$  vypočítáme užitím zákona zachování hybnosti. Hybnost soustavy na počátku rázu je

$$m'v' + (2m + m')v,$$

při ukončení rázu

$$(2m + 2m')w.$$

Platí tedy rovnice

$$2(m + m')w = m'v' + v(2m + m'),$$

z níž vypočítáme

$$w = \frac{m' v' + (2m + m') v}{2(m + m')} .$$

Po dosazení za  $v$  ze vztahu (1) vyjde po úpravách

$$w = \frac{m'v' - m'v'}{2(m + m')} = 0 .$$

Po dopadu kroužku  $k$  na válec  $B$  se uvede soustava do klidu, jak je patrné z posledního vztahu.

## 5. příklad (navrhl Jan Tesař)

Malá dokonale pružná kulička o hmotnosti  $m$  je zavěšena na pevné nepružné niti délky  $l$  tak, že se dotýká svislé dokonale pružné stěny ve výšce  $h$  nad vodorovnou rovinou  $\tau$  (obr. 63). Poloměr kuličky lze vzhledem k délce závěsu zanedbat. Kuličku vychýlíme při napjatém závěsu v rovině  $\sigma$  kolmé ke stěně, o úhel  $\alpha$  do polohy  $B$  a pak ji uvolníme. Po uvolnění se kulička pohybuje v rovině  $\sigma$ , narazí na stěnu a při nárazu se ze závěsu uvolní.

a) Jakou velikost a orientaci má rychlost kuličky po odrazu od stěny?

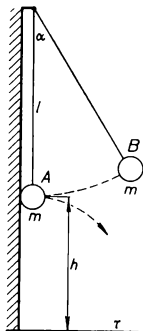
b) Jak velká je průměrná nárazová síla  $F$  při rázu kuličky se stěnou, trvá-li ráz dobu  $t_1$ ?

c) Jaký pohyb koná kulička po uvolnění ze závěsu po nárazu na stěnu?

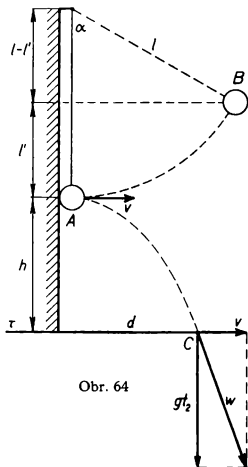
d) V jaké vzdálenosti  $d$  od stěny dopadne kulička na rovinu  $\tau$ ? Závisí tato vzdálenost na hmotnosti kuličky a na tíhovém zrychlení?

e) Vypočítejte potenciální tíhovou energii  $W_p$  kuličky v místě  $B$  vzhledem k rovině  $\tau$  a její kinetickou energii  $W_1$  při dopadu na rovinu  $\tau$  a porovnejte obě hodnoty.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $m = 5,0 \cdot 10^{-3}$  kg,  $l = 0,90$  m,  $h = 1,25$  m,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $t_1 = 0,010$  s,  $g \doteq 10$  m s<sup>-2</sup>.



Obr. 63



Obr. 64

**Řešení:**

Kinetickou energii kuličky při jejím nárazu na stěnu označíme  $W_2$ . Po ukončení rázu má kulička rychlost  $v$  a na vodorovnou rovinu  $\tau$  dopadne za dobu  $t_2$  v bodě  $C$  (viz obr. 64).

Kulička se při vychýlení závěsu o úhel  $\alpha$  zvedne ze své klidové polohy v bodě  $A$  o délku

$$l' = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha)$$

do polohy  $B$  a její potenciální tíhová energie se při tom zvýší o hodnotu

$$\Delta W_p = m g l(1 - \cos \alpha).$$

Podle zákona zachování mechanické energie má kinetická energie kuličky při nárazu na stěnu hodnotu  $W_2 = \Delta W_p$ , takže platí rovnice

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = m g l(1 - \cos \alpha),$$

odkud

$$v_1 = \sqrt{2 g l(1 - \cos \alpha)},$$

kde  $v_1$  značí rychlost kuličky při nárazu na stěnu. Po pružném rázu změní se orientace rychlosti kuličky v opačnou, její velikost se však nezmění. Proto je

$$v = \sqrt{2 g l(1 - \cos \alpha)}. \quad (1)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,90 (1 - 0,50)} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} = 3,0 \text{ m s}^{-1}.$$

Rychlost kuličky je po odrazu od stěny orientována kolmo před stěnu. Její velikost je určena obecně vztahem (1) a pro dané hodnoty má velikost  $v = 3,0 \text{ m s}^{-1}$ .

b) Během nárazu na stěnu se změní rychlost kuličky o hodnotu  $\Delta v = v - (-v) = 2v$ . Podle zákona zachování hybnosti platí

$$F t_1 \doteq m \Delta v,$$

takže

$$F = \frac{m \Delta v}{t_1} = \frac{2 m v}{t_1} = \frac{2 m}{t_1} \sqrt{2 g l(1 - \cos \alpha)}. \quad (2)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$F = \frac{2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,0}{0,010} \text{ kg m s}^{-2} = 3,0 \text{ N.}$$

Při nárazu na stěnu má nárazová síla velikost 3,0 N. Obecně je tato velikost určena vztahem (2).

c) Kulička se odrazí od stěny vodorovným směrem ve výšce  $h$  nad rovinou  $\tau$ . Proto koná po odrazu od stěny pohyb složený ze dvou pohybů: z volného pádu z výšky  $h$  a z rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru vodorovném stálou rychlostí  $v$ . Je to tedy vodorovný vrh s počáteční rychlostí  $v$ , určenou vztahem (1) (viz obr. 64).

d) Dobu  $t_2$ , po kterou se kulička pohybuje vodorovným vrhem, určíme z rovnice pro volný pád

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Po dosazení vyjde

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,25 \text{ m}}{10 \text{ m s}^{-2}}} = 0,50 \text{ s}.$$

Za tuto dobu dopadne kulička na rovinu  $\tau$  ve vzdálenosti

$$\begin{aligned} d = v t_2 &= \sqrt{\frac{2 g l (1 - \cos \alpha) \cdot 2 h}{g}} = \\ &= 2 \sqrt{h l (1 - \cos \alpha)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Po dosazení vyjde  $d = 1,5 \text{ m}$ .

Kulička dopadne na rovinu  $\tau$  ve vzdálenosti 1,5 m od pevné stěny. Obecně je tato vzdálenost určena vztahem (3). Protože se ve výrazu (3) nevyskytuje  $m$  ani  $g$ , nezávisí vzdálenost místa dopadu kuličky na rovinu  $\tau$  od pevné stěny ani na hmotnosti kuličky, ani na velikosti tíhového zrychlení.

e) V místě  $B$  je kulička vzdálena od roviny  $\tau$  o délku  $h_1 = h + l' = h + l(1 - \cos \alpha)$ . Proto má kulička v této poloze vzhledem k rovině  $\tau$  potenciální tíhovou energii

$$W_p = m g h_1 = m g [h + l(1 - \cos \alpha)].$$

Rychlost kuličky  $w$  v místě dopadu na rovinu  $\tau$  je vektorovým součtem dvou na sebe kolmých rychlostí, jejichž velikosti jsou  $v$  a  $g t_2$ . Podle Pythagorovy věty je vzhledem k vztahu (1) a vztahu pro  $t_2$

$$w = \sqrt{v^2 + g^2 t_2^2} = \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha) + g^2 \frac{2 h}{g}},$$

$$w = \sqrt{2 g [h + l(1 - \cos \alpha)]}.$$

Kinetická energie kuličky v místě dopadu má tedy hodnotu

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} m w^2 = \frac{1}{2} m 2 g [h + l(1 - \cos \alpha)] = \\ &= m g [h + l(1 - \cos \alpha)]. \end{aligned}$$

Porovnáme-li vztahy pro  $W_p$  a  $W_1$ , vychází

$$W_p = W_1,$$

což je v souladu se zákonem zachování mechanické energie.

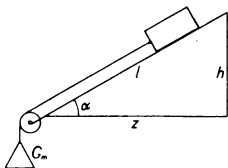
## 6. úkol (navrhl Jan Tesař)

**Měření velikosti součinitele smykového tření v klidu  $\mu_0$  a v pohybu  $\mu$ .**

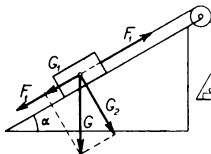
*Pomůcky:* tribometr nebo hladká nakloněná rovina, dřevěný kvádr, který má ve středu nejmenších bočních stěn zašroubovány kroužky a jednu z podstavných stěn má hladkou, libela, nit, miska na závaží, závaží, listovní váhy nebo siloměr, pevná kladka, délkové měřítko.



*Označení veličin:* Součinitele smykového tření v klidu označíme  $\mu_0$ , třecí sílu  $F_t$ , délku nakloněné roviny  $l$ , výšku  $h$ , základnu  $z$  a její úhel s vodorovnou rovinou  $\alpha$ , tíhu kvádrů  $G$ , pohybovou složku jeho tíhy  $G_1$ , tlakovou složku  $G_2$ . Při měření součinitele  $\mu$  tření v pohybu budeme uvedené veličiny značit čárkovanými písmeny. Tíhu misky označíme  $G_m$  (obr. 65).



Obr. 65



Obr. 66

### Návod:

I. Leží-li kvádr na nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou libovolný úhel  $\alpha$ , avšak takový, aby kvádr po nakloněné rovině neklouzal, může se tento kvádr uvést z klidu do pohybu po nakloněné rovině směrem vzhůru určitou nejmenší silou  $F_1$ , působící rovnoběžně s délkou nakloněné roviny, jestliže tato síla má velikost (viz obr. 66) právě

$$F_1 = F_t + G_1. \quad (1)$$

Nejmenší síla působící rovnoběžně s délkou nakloněné roviny směrem dolů, která ještě uvede kvádr z klidu do pohybu, má hodnotu (obr. 67)

$$F_2 = F_t - G_1. \quad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) vypočítáme

$$F_t = \frac{1}{2} (F_1 + F_2) \quad \text{a} \quad G_1 = \frac{1}{2} (F_1 - F_2). \quad (3a, b)$$

Protože tlakovou silou, kterou působí kvádr na nakloněnou rovinu, je složka  $G_2$  tíhy kvádru, kolmá k nakloněné rovině, je  $F_t = \mu_0 G_2$ , takže

$$\mu_0 = \frac{F_t}{G_2}, \quad (4)$$

kde  $G_2 = G \frac{z}{l}$ .

Ze vztahu (3a) a (4) určíme

$$\mu_0 = \frac{(F_1 + F_2) l}{2 G z}. \quad (5)$$

Známe-li  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $l$ ,  $G$  a  $z$ , vypočítáme ze vztahu (5) hodnotu součinitele  $\mu_0$  smykového tření v klidu.

II. Najdeme-li zkusmo tak veliký úhel  $\alpha$  nakloněné roviny, že se kvádr uvede malým silovým impulsem po této rovině do rovnoměrného pohybu směrem dolů, je pohybová složka  $G_1'$  v rovnováze s třecí silou  $F_t'$ . Proto platí  $G_1' = F_t' = \mu G_2'$ , takže

$$\mu = \frac{G_1'}{G_2'} = \frac{G \sin \alpha'}{G \cos \alpha'} = \operatorname{tg} \alpha' = \frac{h'}{z'}. \quad (6)$$

Z naměřených hodnot  $h'$  a  $z'$  určíme podle vztahu (6) velikost součinitele smykového tření v pohybu.

*Úkoly:*

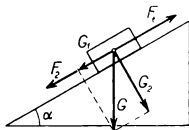
- I. 1. Odůvodněte správnost vztahů (1) a (2) a odvoďte z nich vztahy (3a, b).

2. Užitím vztahů (3a) a (4) určete vztah (5).

3. Provedte měření:

- Změřte velikost tíhy  $G$  kvádrů a tíhy  $G_m$  misky na závaží.
- Základnu nakloněné roviny uveďte pomocí libely do vodorovné polohy.
- Položte kvádr na nakloněnou rovinu hladkou stěnou a sestavte pokus podle obr. 65 a nastavte úhel  $\alpha$  tak, aby kvádr zůstal v klidu. Upravte pokus podle obr. 66. Na misku umístěte takové závaží, aby se kvádr uvedl do pohybu. Velikost závaží postupně zmenšujte, až najdete nejmenší závaží, při kterém se ještě kvádr uvede do pohybu sám, bez vnějšího impulsu. Součet síly tohoto nejmenšího závaží a tíhy misky určuje velikost síly  $F_1$ .
- Obdobně určete při úpravě pokusu podle obr. 66 velikost síly  $F_2$ .
- Změřte délky  $l$  a  $z$  a vypočítejte podle vztahu (5) velikost  $\mu_0$  součinitele smykového tření v klidu.

II. a) Položte kvádr na nakloněnou rovinu s malým úhlem  $\alpha$  (obr. 67) a udělte mu slabý náraz směrem dolů. Zastaví-li se kvádr po nárazu, zvětšujte



Obr. 67

postupně sklon nakloněné roviny a opakujte pokus tak dlouho, až těleso po slabém nárazu pokračuje v rovnoměrném pohybu. Při tomto úhlu  $\alpha'$  změřte velikost  $z'$  základny nakloněné roviny a její výšku  $h'$ .

- b) Užitím vztahu (6) určete velikost  $\mu$  součinitele smykového tření v pohybu.

### III. Porovnejte $\mu_0$ a $\mu$ .

*Řešení:*

- I. 1. Síly  $F_t$  a  $G_1$  (obr. 66) působí ve stejném směru a se stejnou orientací. Velikost jejich výslednice je číselně rovna aritmetickému součtu velikostí sil  $F_t$  a  $G_1$ . Síla  $F_1$  bude mít stejnou velikost jako výslednice sil  $F_t$  a  $G_1$ , ale bude opačně orientována

$$F_1 = G_1 + F_t.$$

Podobně tomu bude u vztahu (2), kde všechny síly působí ve stejné vektorové přímce, ale tažná síla  $F_2$  je orientována souhlasně se silou  $G_1$  a nesouhlasně se silou  $F_t$ . Velikost výslednice sil  $F_t$  a  $G_1$  je rovna velikosti tažné síly a je číselně vyjádřena rozdílem velikostí sil  $F_t$  a  $G_1$ ;  $F_2 = F_t - G_1$ . Tím je dokázána platnost vztahů (1) a (2).

Ze vztahů (1) a (2) vypočteme velikosti sil  $F_t$  a  $G_1$ :

$$F_t = \frac{1}{2} (F_1 + F_2), \quad (3a)$$

$$G_1 = \frac{1}{2} (F_1 - F_2). \quad (3b)$$

2. Pro koeficient tření v klidu  $\mu_0$  platí

$$\mu_0 = \frac{F_t}{G_2}, \quad (4)$$

kde  $F_t$  je určeno vztahem (3a), a pro  $G_2$  platí

$$G_2 = G \frac{z}{l}.$$

Dosadíme do (4) a dostaneme vztah (5):

$$\mu_0 = \frac{(F_1 + F_2) l}{2 G z}. \quad (5)$$

3. Tíha kvádrů byla  $G = 0,190 \text{ kp} = 1,863 \text{ N}$ , tíha misky na závaží  $G_m = 0,011 \text{ kp} = 0,108 \text{ N}$ .

Nejmenší závaží, kterým se kvádr uvedl do pohybu bez vnějšího impulsu směrem nahoru po nakloněné rovině (obr. 66), bylo  $m_1 = 101,5 \text{ g}$ , při pohybu směrem dolů (obr. 67) bylo potřeba závaží  $m_2 = 19,4 \text{ g}$ . Tažné síly jim odpovídající jsou  $m_1 g = 0,991 \text{ N}$ ,  $m_2 g = 0,190 \text{ N}$ .

Pro síly  $F_1$  a  $F_2$  dostáváme

$$F_1 = G_m + m_1 g = (0,108 + 0,991) \text{ N} = 1,099 \text{ N},$$

$$F_2 = G_m + m_2 g = (0,108 + 0,190) \text{ N} = 0,298 \text{ N}.$$

Rozměry nakloněné roviny byly určeny měřením:  $l = 0,500 \text{ m}$ ,  $z = 0,491 \text{ m}$ .

Dosazením příslušných hodnot do vztahu (5) dostaneme

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{(F_1 + F_2) l}{2 G z} = \frac{(1,099 + 0,298) \cdot 0,500}{2 \cdot 1,863 \cdot 0,491} = \\ &= \frac{1,397 \cdot 0,500}{1,863 \cdot 0,982}, \end{aligned}$$

$$\mu_0 = 0,375.$$

II. Určili jsme zkusmo takový úhel nakloněné roviny, že kvádr se po slabém nárazu uvedl do rovnoměrného pohybu, a změřili jsme výšku  $h'$  a základnu  $z'$  nakloněné roviny pro tento případ.

$$h' = 143 \text{ mm}, \quad z' = 479 \text{ mm}.$$

Dosadíme do vztahu (6), který udává součinitele smykového tření v pohybu

$$\mu = \frac{G \sin \alpha'}{G \cos \alpha'} = \operatorname{tg} \alpha' = \frac{h'}{z'} ;$$

dostaneme

$$\mu = \frac{0,143}{0,479} = 0,299 .$$

Úhel  $\alpha'$  má velikost  $\alpha' \doteq 16^\circ 30'$ .

III. Měřením jsme zjistili, že koeficient tření v klidu je větší než koeficient tření v pohybu.

## 7. příklad (navrhl Jan Tesař)

Kruhová deska z homogenního materiálu se středem  $S$  o poloměru  $R$ , všude stejné tloušťky, je otáčivá ve vodorovné rovině okolo svislé osy procházející bodem  $S$  kolmo k rovině desky.

Na desku působí tři síly  $F_1, F_2, F_3$  o velikostech  $F_1 = F_2 = F_3$ , jejichž vektorové přímky jsou vodorovné a mají v každém okamžiku směry tečen ke kružnici se středem  $S$  o poloměru  $r < \frac{R}{3}$ . Působíště  $A, B, C$  sil

$F_1, F_2, F_3$  jsou vrcholy rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku, jehož přepona  $AB = 2r$  prochází bodem  $S$ .

a) Určete graficky i početně výslednici  $F$  sil  $F_1, F_2, F_3$ .

- b) Jaký pohyb koná deska působením sil  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ?
- c) Jakou vzdálenost má vektorová přímková síla  $F$  od středu desky?

*Řešení:*

Výslednici sil  $F_2$  a  $F_3$  označíme  $F_1'$ . Vzdálenost bodu  $S$  od vektorové přímky výsledné síly  $F$  budeme značit  $p$ .

Úloha zahrnuje tři možnosti:

1. Momenty sil  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  mají stejnou orientaci (obr. 68a);

2. moment síly  $F_3$  působící ve vrcholu  $C$  trojúhelníku  $ABC$  (vrchol proti základně) má opačnou orientaci než momenty sil  $F_1$  a  $F_2$  (obr. 68b);

3. moment jedné ze sil, jejímž působištěm je některý z koncových bodů základny trojúhelníku  $ABC$ , např. síly  $F_2$ , má opačnou orientaci než momenty zbývajících dvou sil (obr. 68c).

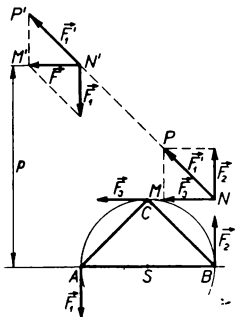
a) Působiště sil  $F_2$  a  $F_3$  přemístíme do průsečíku jejich vektorových přímek, přeneseme do něho síly  $F_2$  a  $F_3$  a sestrojíme jejich výslednici  $F_1'$ . Obdobně získáme vektorovým součtem výslednici všech tří sil (v obr. 68abc jsou konstrukce pro všechny tři možnosti).

Ve všech případech je vektorový trojúhelník sil  $M'N'P'$  shodný s trojúhelníkem  $MNP$  ( $M'P' = MP$ ,  $N'P' = NP$ ,  $\sphericalangle N'P'M' = \sphericalangle NPM = 45^\circ$ ). Úsečky  $N'P'$  a  $NP$  zobrazující sílu  $F_1$  jsou úhlopříčkami čtverců, jejichž strany zobrazují stejně velké síly  $F_2$  a  $F_3$ . Proto má síla  $F_1'$  velikost  $F_1' = F_3 \sqrt{2}$ .

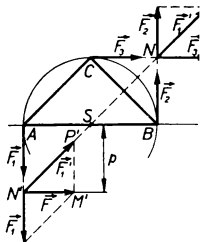
Protože úsečka  $N'M'$  zobrazující výslednou sílu  $F$  je v případech 1 a 2 rovnoběžná, stejně orientovaná a stejně velká jako úsečka  $NM$  zobrazující sílu  $F_3$ , má výsledná

síla  $F$  stejnou velikost a také stejný směr i orientaci jako síla  $F_3$  a vzhledem k desce nemění svou polohu.

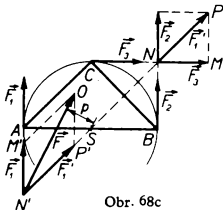
V případě 3 je úsečka  $N'O$  zobrazující sílu  $F$  úhlopříčkou rovnoběžníku  $N'P'OM'$ , jehož druhá úhlopříčka  $M'P'$  zobrazuje sílu  $F_3$ . Proto je  $N'O = 2 RO$  (bod  $R$  je průsečík úhlopříček). Délku úsečky  $RO$  určíme z pra-



Obr. 68a



Obr. 68b



Obr. 68c



voúhlého trojúhelníku  $RP'O$  pomocí Pythagorovy věty:

$$RO = \frac{(MP')^2}{4} + (P'O)^2 = \frac{1}{2} P'O \sqrt{5}.$$

Je tedy

$$F = F_1 \sqrt{5}.$$

b) Výslednice  $F$  musí mít na těleso stejné účinky jako složky  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ . Protože ve všech třech případech neprochází výslednice  $F$  svislou osou procházející středem  $S$  desky kolmo k rovině desky, kolem které je deska otáčivá, uvede síla  $F$  desku do otáčivého pohybu kolem této osy.

c) Má-li však síla  $F$  nahradit při otáčení působení sil  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  při otáčení desky, musí se moment této síly vzhledem k ose otáčení rovnat součtu momentů sil  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  vzhledem k téže ose.

1. Platí tedy v případě 1

$$Fp = F_1r + F_2r + F_3r = r(F_1 + F_2 + F_3).$$

Protože  $F_1 = F_2 = F_3$ , platí  $p = 3r$ .

2. V případě 2 platí

$$Fp = F_1r + F_2r - F_3r,$$

takže

$$p = r.$$

3. V případě 3 je  $Fp = F_2r - F_3r - F_1r = -rF_1$

$$|p| = \frac{r}{F} F_1 = \frac{r}{F_1 \sqrt{5}} F_1 = \frac{r \sqrt{5}}{5}.$$

## 8. příklad (navrhl Jan Tesař)

Kvádř z homogenního materiálu, jehož hrany mají délky  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , má tíhu  $G$ . Leží na vodorovné rovině.

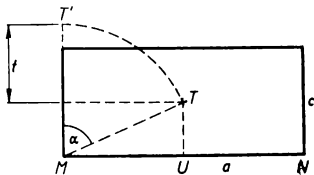
a) Jak velkou má kvádr stabilitu? Za podstavu volte stěnu omezenou hranami  $a$  a  $b$  a předpokládejte, že se kvádr. při překlápění otáčí okolo osy určené hranou  $b$ .

b) Platí výsledek části a) úlohy i tehdy, stojí-li kvádr na šikmé rovině?

c) V které poloze a vzhledem ke které ose otáčení má kvádr největší stabilitu?

**Řešení:**

Obr. 69 znázorňuje řez kvádrů rovinou procházející těžištěm  $T$  kvádrů rovnoběžně s hranami  $a$ ,  $c$ . Střed úsečky  $MN$  délky  $a$ , ve které protíná rovina řezu podstavu kvádrů, označíme  $U$ .



Obr. 69

a) Stabilita těles se vyjadřuje prací, kterou je třeba vynaložit na otočení tělesa kolem osy (hrany  $b$ ) o takový úhel  $\alpha$ , aby těleso přešlo z polohy stálé do polohy vratké. Těžiště, ve kterém působí celková tíha kvádrů, se při převedení tělesa z polohy stálé do polohy vratké zvedne po oblouku  $TT'$  do výšky

$$h = MT' - UT = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - c}{2}, \quad (1)$$

takže se vykoná práce

$$A = \frac{G}{2} (\sqrt{a^2 + c^2} - c). \quad (2)$$

Překlápí-li se kvádr, který má za podstavu stěnu o hranách  $a$ ,  $b$  kolem hrany  $b$ , je jeho stabilita určena vztahem (2).

b) Stojí-li kvádr na nakloněné (šikmé) rovině, je úsečka  $MT$  potočena z původní polohy na obr. 69 o úhel nakloněné roviny. Při jejím otočení do svislé polohy změní se poloha těžiště ve svislém směru o jinou hodnotu než  $h$  určenou vztahem (1). Proto ani stabilita tělesa není v tomto případě určena vztahem (2).

c) Předpokládejme  $a > b > c$ .

1. Leží-li kvádr na podstavě určené hranami  $a$ ,  $b$ , je jeho stabilita při otáčení kolem osy určené hranou  $b$  dána vztahem (2), při otáčení kolem osy určené hranou  $a$

$$A' = \frac{G}{2} (\sqrt{b^2 + c^2} - c).$$

Za uvedeného předpokladu je v tomto případě stabilita menší než podle (2).

2. Leží-li kvádr na podstavě určené hranami  $b$ ,  $c$ , je jeho stabilita při otáčení kolem osy určené hranou  $b$

$$A_1 = \frac{G}{2} (\sqrt{c^2 + a^2} - a), \quad (3)$$

při otáčení kolem osy určené hranou  $c$

$$A'_1 = \frac{G}{2} (\sqrt{c^2 + b^2} - b). \quad (4)$$

Za uvedeného předpokladu je stabilita podle (3) menší než podle (4).

3. Leží-li kvádr na podstavě určené hranami  $a$  a  $c$ , je jeho stabilita při otáčení kolem osy určené hranou  $a$

$$A_2 = \frac{G}{2} (\sqrt{c^2 + b^2} - b), \quad (5)$$

při otáčení kolem osy určené hranou  $c$

$$A'_2 = \frac{G}{2} (\sqrt{a^2 + b^2} - b). \quad (6)$$

Za uvedeného předpokladu je stabilita podle (6) větší než podle (5).

Zbývá ještě rozhodnout, která ze stabilit, určených vztahy (2), (4), (6) má největší hodnotu.

Protože podle předpokladu  $a > b$ , je zřejmě stabilita podle (4) menší než podle (6).

Abychom zjistili, která z hodnot  $A$  a  $A'_2$  je větší, budeme předpokládat, že  $A > A'_2$ . Je-li tato nerovnost splněna, je náš předpoklad správný, je-li tato nerovnost nesprávná, je náš předpoklad chybný.

Dosadíme do nerovnosti  $A > A'_2$  ze vztahů (2) a (6) a zároveň vyjádříme délku  $b$  (delší hrany) jako součet nejkratší hrany a jisté kladné hodnoty  $x$ , takže  $b = c + x$ . Pak má podle předpokladu platit

$$\frac{G}{2} (\sqrt{a^2 + c^2} - c) > \frac{G}{2} (\sqrt{a^2 + b^2} - b),$$

$$\frac{G}{2} (\sqrt{a^2 + c^2} - c) > \frac{G}{2} \left[ \sqrt{a^2 + (c + x)^2} - (c + x) \right].$$

Provedeme ekvivalentní úpravy této nerovnosti a dostaneme postupně

$$\sqrt{a^2 + c^2} + x > \sqrt{a^2 + c^2 + 2cx + x^2},$$

$$a^2 + c^2 + 2x \sqrt{a^2 + c^2 + x^2} > a^2 + c^2 + 2cx + x^2.$$

Po úpravě vyjde

$$\sqrt{a^2 + c^2} > c$$

a po umocnění

$$a^2 + c^2 > c^2.$$

Tato nerovnost je správná, a proto platí také  $A > A'_2$ .

Kvádr stojící na vodorovné rovině má největší stabilitu, je-li postaven tak, že nejkratší z jeho hran je svislou boční hranou, a překlápí-li se okolo kratší podstavné hrany.

## 9. příklad (navrhl Jozef Zámečník)

Kužel s polomerom podstavy  $r$  a o výške  $h$  sa valí bez klzania svojim plášťom po vodorovnej rovine tak, že stred jeho podstavy koná rovnomerný pohyb po kružnici. Na pôvodné miesto sa kužel vráti za čas  $T$ .

Vypočítajte veľkosť  $\omega$  výslednej uhlovej rýchlosti kužela a uhol, ktorý zvierá vektor uhlovej rýchlosti  $\omega$  s vodorovnou rovinou.

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty  $r = 0,10$  m,  $h = 0,50$  m,  $T = 5,0$  s.

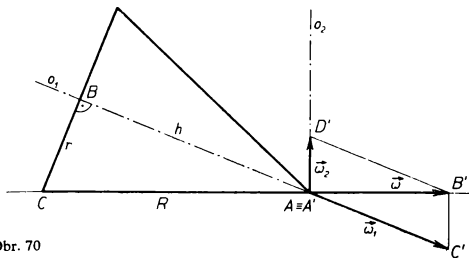
*Riešenie:*

Celkový pohyb kužela môžeme rozložiť na dva rotačné pohyby (obr. 70): rotáciu okolo osi  $o_1$ , ktorá ide stredom  $B$  podstavy kužela a jeho vrcholom  $A$ , a na rotáciu okolo zvislej osi, ktorá ide tiež vrcholom kužela. Vektor  $\omega_1$  uhlovej rýchlosti prvej rotácie leží v ose  $o_1$  kužela, vektor  $\omega_2$  uhlovej rýchlosti druhej rotácie je kolmý k povrchovej priamke  $AC$  kužela a prechádza bodom  $A$ . Dĺžku strany kužela označíme  $R$  (viď obr. 70).

Pri rotácii okolo osi  $o_2$  valí sa podstava kužela po kružnici so stredom  $A$  a polomerom  $R$ . Dĺžka tejto kružnice je

$2\pi R$  a pretože je vytvorená rovnomerným pohybom, je rýchlosť tohoto pohybu

$$v = \frac{2\pi R}{T} = R \omega_2 .$$



Obr. 70

Pretože sa pohyb kužela koná bez klzania, musí byť rýchlosť pohybu bodov na obvode podstavy kužela pri rotácii okolo osi  $o_1$  rovnaká:

$$v = r \omega_1 . \quad (2)$$

Musí teda platiť

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R}{r} .$$

Vzhľadom k rovnosti týchto pomerov sú priamo úmerné dve dvojice strán trojuholníkov  $ABC$  a  $A'B'C'$ . Pretože  $BC \perp A'C'$  a  $AC \perp B'C'$ , sú uhly  $ABC$  a  $A'B'C'$  rovnaké. V trojuholníkoch  $ACB$  a  $A'C'B'$  majú dve dvojice strán rovnaký pomer a uhly týmito stranami zovreté sú rovnaké. Preto sú oba trojuholníky podobné

a mají rovnaké aj uhly  $ABC$  a  $A'B'C'$ . Sú teda oba trojuholníky pravouhlé a vektor  $\omega$  leží vo vodorovnej rovine.

Podľa Pytagorovej vety platia rovnice

$$R = \sqrt{r^2 + h^2} \quad \text{a} \quad \omega = \sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}.$$

Ak do poslednej rovnice dosadíme za  $\omega_1$  a  $\omega_2$  zo vzťahov (1) a (2), dostaneme po úprave

$$\begin{aligned} \omega &= v \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2 r^2}} = \frac{2 \pi R}{R r T} \sqrt{r^2 + h^2 - r^2} = \\ &= \frac{2 \pi h}{r T}. \end{aligned} \quad (3)$$

Po dosadení daných hodnôt dostaneme

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}}{1,0 \cdot 10^{-1} \cdot 5,0 \text{ m s}} = 2\pi \text{ s}^{-1} \doteq 6,3 \text{ s}^{-1}.$$

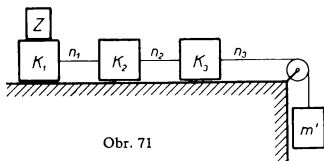
Vektor výslednej uhlovej rýchlosti leží vo vodorovnej rovine a má veľkosť  $6,3 \text{ s}^{-1}$ . Všeobecne je táto hodnota určená vzťahom (3).

## b) Druhé kolo súťaže

### 1. príklad (navrhl Milan Rádl a Jan Tesař)

Na vodorovné hladké desce jsou postaveny v řadě tři stejně hmotné krychle  $K_1, K_2, K_3$ , jejichž podstavy, kterými leží na desce, jsou hladké. Krychle jsou navzájem spojeny nitěmi  $n_1$  a  $n_2$ . Od krychle  $K_3$  je vedena přes pevnou kladku nit  $n_3$ , na které je zavěšeno těleso hmotnosti  $m'$  (obr. 71). Krychle  $K_1$  je zatížena těžkým závažím  $Z$  tak, že soustava krychlí a tělesa hmotnosti  $m'$  je v klidu. Hmotnosti krychlí jsou  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  a  $m' = 3m$ .

- a) S jak velkým zrychlením  $a$  se bude soustava pohybovat po sejmutí závaží  $Z$  z krychle  $K_1$ ?
- b) Jakými silami  $F_1, F_2, F_3$  jsou napínány nitě  $n_1, n_2, n_3$
1. před sejmutím závaží  $Z$  z krychle  $K_1$ ,
  2. po sejmutí závaží  $Z$  z krychle  $K_1$ ,
  3. zatížíme-li závažím  $Z$  krychli  $K_2$ ?



Obr. 71

Řešte nejprve obecně, potom pro  $m = 1,00$  kg. Tření, odpor prostředí a hmotnost nití a kladky zanedbejte.

*Řešení:*

a) Hmotnost  $m_s$  celé soustavy těles navzájem spojených nitěmi  $n_1, n_2, n_3$  je  $m_s = m_1 + m_2 + m_3 + m' = 6m$ . Po sejmutí závaží  $Z$  z krychle  $K_1$  je tato soustava uvedena do pohybu a udržována v pohybu tíhou tělesa o hmotnosti  $m'$ , tedy silou  $F = m'g = 3mg$ , kde  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  značí tíhové zrychlení. Podle druhého Newtonova pohybového zákona platí pro zrychlení soustavy vztah

$$a = \frac{F}{m_s} = \frac{3mg}{6m} = 0,5g = 4,90 \text{ m s}^{-2}.$$

Po sejmutí závaží  $Z$  z krychle  $K_1$  se bude soustava



všech čtyř těles pohybovat pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením  $a = 4,90 \text{ m s}^{-2}$ .

b) 1. Před sejmutím závaží  $Z$  z krychle  $K_1$  jsou všechny nitě napínány tíhou tělesa o hmotnosti  $m'$ , tedy silou  $F = m'g = 3mg = 29,4 \text{ N}$ .

2. Při rovnoměrně zrychleném pohybu, který nastane po sejmutí závaží  $Z$  s krychle  $K_1$ , působí na nit  $n_1$  síla  $F_1$ , jež uděluje krychli  $K_1$  o hmotnosti  $m_1 = m$  zrychlení  $a = 4,90 \text{ m s}^{-2}$ . Nit  $n_2$  je napínána silou  $F_2$ , jež uděluje krychlím  $K_1$  a  $K_2$  o celkové hmotnosti  $m_1 + m_2 = 2m$  totéž zrychlení, a na nit  $n_3$  působí síla  $F_3$ , jež uděluje všem krychlím o celkové hmotnosti  $3m$  stejné zrychlení. Je tedy

$$F_1 = ma = 0,5mg = 4,90 \text{ N},$$

$$F_2 = 2ma = mg = 9,81 \text{ N},$$

$$F_3 = 3ma = 1,5mg = 14,7 \text{ N}.$$

Tím jsou určeny síly, jimiž jsou napínány nitě při rovnoměrně zrychleném pohybu soustavy.

3. Zatižíme-li závažím  $Z$  krychli  $K_2$ , jsou tíhou  $F = m'g$  tělesa o hmotnosti  $m'$  napínány nitě  $n_3$  a  $n_2$ , nit  $n_1$  je bez napětí.

### 3. příklad (navrhl Jan Tesař)

Z vozu pohybujícího se po vodorovné rovině rovnoměrným přímočarým pohybem rychlostí  $v_1$  vrhneme svisle vzhůru těleso rychlostí  $v_0$ . Za dobu  $t_1$ , za kterou se vůz vzdálil o délku  $d$  od místa, kde byl v okamžiku vrhu, dopadne těleso na to místo ve voze, z něhož bylo vrženo. Pohyb tělesa ve vzduchu pozorují dvě osoby, pozorovatel  $A$  z vozu, ze kterého bylo těleso vrženo, a pozorovatel  $B$ , který je v klidu na zemském povrchu.

a) Určete rychlost  $v_1$  vozu.

b) Jaký pohyb koná těleso ve vzduchu po vrhu vzhledem k pozorovateli  $A$  a jaký vzhledem k pozorovateli  $B$ ?

c) Jak velkou rychlostí  $v_0$  bylo těleso vrženo? Jak velký úhel  $\alpha$  vzhledem k pozorovateli  $B$  svírá s vodorovnou rovinou na počátku vrhu vektor  $\mathbf{v}$  výsledné rychlosti vrženého tělesa?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $d = 48,0$  m,  $t_1 = 12,0$  s, tíhové zrychlení  $g = 10$  m s<sup>-2</sup>.

Odpor vzduchu a proudění vzduchu zanedbejte.

*Řešení:*

a) Vůz koná rovnoměrný přímočarý pohyb. Jeho rychlost má tedy hodnotu  $v_1 = \frac{d}{t_1}$ . Po dosazení daných hodnot vyjde

$$v_1 = \frac{48,0}{12,0} \text{ m s}^{-1} = 4,00 \text{ m s}^{-1}.$$

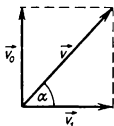
Vůz se pohybuje rychlostí  $v_1 = 4,00$  m s<sup>-1</sup>.

b) Od okamžiku ( $t = 0$ ), kdy bylo těleso vrženo, koná těleso vzhledem k pozorovateli  $B$  dva pohyby. Vrhem je uvedeno v pohyb svisle vzhůru neznámou rychlostí  $\mathbf{v}_0$ , setrvačností se však zároveň udržuje (vzhledem k pozorovateli  $B$ ) v rovnoměrném přímočarém pohybu ve vodorovném směru rychlostí  $\mathbf{v}_1$ , která má stejnou velikost, stejný směr i stejnou orientaci s rychlostí vozu. Proto je těleso ustavičně svisle nad místem ve voze, ze kterého bylo vrženo. Vzhledem k pozorovateli  $A$  koná tedy jen jeden pohyb, vrh svislý vzhůru s počáteční rychlostí  $v_0$ . Vzhledem k pozorovateli  $B$  koná těleso dva k sobě kolmé pohyby, které jsou složkami šikmého vrhu, jehož vektor počáteční rychlosti  $\mathbf{v}$  je určen vektorovým

součtem vektorů  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_0$ . Elevační úhel tohoto pohybu  $\alpha$  je podle obr. 72 určen výrazem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0}{v_1}. \quad (1)$$

c) Výška  $h$  tělesa nad vodorovnou rovinou vedenou místem, z něhož bylo těleso vrženo, je v každém okamžiku stejná pro pozorovatele  $A$  i  $B$ . Proto můžeme rychlost  $v_0$  určit ze zákonů pro vrh svislý vzhůru. Při tomto vrhu těleso stoupá stejně dlouho jako padá. Stoupá tedy po



Obr. 72

dobu  $t' = \frac{t_1}{2}$  a za čas  $t'$  od počátku vrhu je v nejvyšším místě, kde je jeho rychlost rovna nule, takže platí

$$v_0 - g t' = 0,$$

a tedy

$$v_0 = g t' = \frac{1}{2} g t_1. \quad (2)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$v_0 = \frac{10 \cdot 12,0 \text{ m s}}{2 \text{ s}^2} = 60 \text{ m s}^{-1}.$$

Dosadíme-li do výrazu (1) za  $v_0$  hodnotu podle (2)

a za  $v_1 = \frac{d}{t_1}$ , vyjde

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{g t_1^2}{2 d}. \quad (3)$$

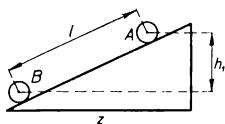
Po dosazení daných hodnot vypočítáme  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{10 \cdot 12,0^2}{2 \cdot 48,0} = 15$  a podle tabulek

$$\alpha = 86^\circ 20'.$$

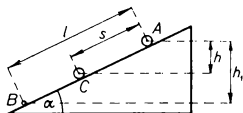
Těleso bylo vrženo svisle vzhůru rychlostí  $60 \text{ m s}^{-1}$ , určenou obecně vztahem (2). Vzhledem k pozorovateli  $B$  koná pohyb jako při šikmém vrhu, jehož elevační úhel  $86^\circ 20'$  je obecně určen vztahem (3).

### 3. příklad (navrhl Jan Tesař)

Na nakloněné rovině, na níž délce  $AB = l$  odpovídá výškový rozdíl  $h_1$  (obr. 73a), jsou překážkou v místě  $A$



Obr. 73a



Obr. 73b

udržovány v klidu ve stejné výšce nad vodorovnou základnou nakloněné roviny dva rotační válce stejných hmotností  $m$ . Podélné osy obou válců jsou vodorovné. Válců jsou zhotoveny z homogenních látek, jeden je dutý, druhý je plný. Oba válce mají stejné podstavy o poloměrech  $R$  a jsou stejné výšky. Jeden má moment setrvačnosti  $J_1$ , druhý  $J_2$ . Uvolníme-li válce bez nárazu, uvedou se do valivého pohybu bez klouzání. Jeden proběhne po nakloněné rovině dráhu délky  $l$  za dobu  $t_1$ , druhý za dobu  $t_2$ .

a) Který z válců má větší moment setrvačnosti? Odůvodněte.

b) Vypočítejte okamžité rychlosti posuvných pohybů obou válců v bodě  $B$ . Který z válců má v bodě  $B$  větší rychlost? Platí tento závěr obecně pro všechny body na dráze  $l$ ?

c) Vypočítejte doby  $t_1$  a  $t_2$ , za kterou proběhnou válce dráhy délky  $l$ , a porovnejte jejich velikosti.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $R = 0,020$  m,  $l = 1,00$  m,  $h_1 = 0,10$  m,  $m = 1,00$  kg,  $\mathcal{J}_1 = 2,00 \cdot 10^{-4}$  kg m<sup>2</sup>,  $\mathcal{J}_2 = 2,62 \cdot 10^{-4}$  kg m<sup>2</sup>, tíhové zrychlení  $g = 10$  m s<sup>-2</sup>.

Třecí síla je vzhledem k tíze válců zanedbatelná.

**Řešení:**

Plný válec má v bodě  $B$  úhlovou rychlost rotačního pohybu  $\omega_1$ , dutý  $\omega_2$ . Libovolně zvolený bod  $C$  na dráze  $l$  má od bodu  $A$  vzdálenost  $AC = s$  (obr. 73b), které odpovídá výškový rozdíl  $h$ . V bodě  $C$  označíme posuvnou rychlost plného válce  $v$ , dutého  $v'$ .

a) Vnitřní poloměr dutého válce označme  $r$ , vnější je  $R$ . Dutý válec rozdělme na velký počet ( $n$ ) hmotných bodů hmotností  $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$  tak, že  $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$ . Vzdálenosti těchto bodů od osy otáčení označme  $r_1, r_2, r_3 \dots r_n$ . Moment setrvačnosti dutého válce je pak  $\mathcal{J} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$ , kde  $r_1, r_2, \dots, r_n$  jsou menší než  $R$ , ale větší než  $r$ . Rozdělíme-li podobně plný válec na  $n$  hmotných bodů stejných hmotností  $m_1, m_2, \dots, m_n$  jako válec dutý, mají tyto hmotné body od osy otáčení vzdálenosti  $r'_1, r'_2, \dots, r'_n$ . Moment setrvačnosti je určen obdobným výrazem jako moment setrvačnosti válce dutého. Určitý počet  $k$  ( $k < n$ ) hmotných bodů má však vzdálenosti  $r'_1, r'_2 \dots r'_k$  menší než  $r$ . Proto má plný válec menší moment setrvačnosti než válec dutý. Vzhledem k daným hodnotám  $\mathcal{J}_1$  a  $\mathcal{J}_2$  ( $\mathcal{J}_2 > \mathcal{J}_1$ ) má plný válec moment setrvačnosti  $\mathcal{J}_1$ , dutý  $\mathcal{J}_2$ .

b) Zanedbáme-li třecí sílu, je pohyb každého z obou válců po nakloněné rovině způsoben pohybovou složkou  $F = m g \sin \alpha$  tíhové síly  $G = m g$ . Síla  $F$  má konstantní

velikost. Proto konají oba válce rovnoměrně zrychlené valivé pohyby. Valivý pohyb se však dá rozložit na pohyb posuvný a pohyb rotační. Oba válce konají tedy rovnoměrně zrychlené pohyby rotační kolem svých podélných os a zároveň se po nakloněné rovině posouvají rovnoměrně zrychleným pohybem. Posuvný pohyb těles je určen pohybem jejich těžišť. Pohyb těžišť válců po přímkách rovnoběžných s délkou nakloněné roviny má v každém okamžiku stejně velkou rychlost, jako je obvodová rychlost kteréhokoli bodu na plášti válce. Proto má těžiště plného válce v bodě  $B$  rychlost  $v_1 = R \omega_1$  a těžiště dutého válce rychlost  $v_2 = R \omega_2$ . Podle zákona přeměny a zachování mechanické energie platí tedy v místě  $B$  pro plný válec rovnice

$$\begin{aligned} m g h_1 &= \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \left( m v_1^2 + \mathcal{J}_1 \frac{v_1^2}{R^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} v_1^2 \left( m + \frac{\mathcal{J}_1}{R^2} \right), \end{aligned}$$

z níž vypočítáme

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{2 m g h_1 R^2}{m R^2 + \mathcal{J}_1}} = R \sqrt{\frac{2 m g h_1}{m R^2 + \mathcal{J}_1}} \\ \text{a obdobně} \\ v_2 &= R \sqrt{\frac{2 m g h_1}{m R^2 + \mathcal{J}_2}} \text{ pro válec dutý.} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Protože  $\mathcal{J}_2 > \mathcal{J}_1$ , je po porovnání obou výrazů zřejmé, že  $v_1 > v_2$ .

Plný válec se pohybuje po nakloněné rovině v bodě  $B$  větší rychlostí než válec dutý.

Zvolíme-li na délce  $l$  nakloněné roviny libovolný bod  $C$ , vzdálený o  $s$  od bodu  $A$ , platí pro rychlosti těžišť obou

válců upravené výrazy (1). Proto je

$$v = R \sqrt{\frac{2 m g h}{m R^2 + \mathcal{J}_1}} \quad \text{a} \quad v' = R \sqrt{\frac{2 m g h}{m R^2 + \mathcal{J}_2}}. \quad (2)$$

Podle těchto výrazů je zřejmé, že plný válec má v libovolném bodě dráhy vždy větší rychlost než válec dutý.

Číselné hodnoty rychlostí po proběhnutí dráhy  $l$  dostaneme dosazením daných hodnot do výrazů (1):

$$v_1 = 0,020 \sqrt{\frac{2 \cdot 1,0 \cdot 10 \cdot 0,10}{1,0 \cdot 0,020^2 + 2,0 \cdot 10^{-4}}} \text{ m} \sqrt{\frac{\text{kg m m}}{\text{s}^2 \text{ kg m}^2}} = 1,2 \text{ m s}^{-1},$$

$$v_2 = 0,020 \sqrt{\frac{2 \cdot 1,0 \cdot 10 \cdot 0,10}{1,0 \cdot 0,020^2 + 2,62 \cdot 10^{-4}}} \text{ m s}^{-1} = 1,1 \text{ m s}^{-1}.$$

Plný válec se pohybuje v bodě  $B$  posuvnou rychlostí  $1,2 \text{ m s}^{-1}$ , dutý válec rychlostí  $1,1 \text{ m s}^{-1}$ . Obecně jsou tyto rychlosti určeny vztahy (1). Větší posuvnou rychlost má válec plný nejen v bodě  $B$ , jak plyne ze vztahů (1), nýbrž podle vztahů (2) ve všech bodech na dráze  $l$ .

c) Protože posuvné pohyby válců jsou rovnoměrně zrychlené, platí pro plný válec rovnice

$$l = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} v_1 t_1,$$

takže

$$t_1 = \frac{2l}{v_1}.$$

Písmenem  $a$  je označeno zrychlení pohybujícího se těžiště plného válce. Vzhledem k prvnímu ze vztahů (1) je

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{2l}{R} \sqrt{\frac{m R^2 + \mathcal{J}_1}{2 m g h_1}} \\ \text{a obdobně pro dutý válec} \\ t_2 &= \frac{2l}{R} \sqrt{\frac{m R^2 + \mathcal{J}_2}{2 m g h_1}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$t_1 = \frac{2 \cdot 1,0}{0,020} \sqrt{\frac{1,0 \cdot 4,00 \cdot 10^{-4} + 2,0 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 1,0 \cdot 10 \cdot 0,10}} \sqrt{\frac{\text{kg m}^2 \text{ s}^2}{\text{kg m m}}} = \\ = \sqrt{3,0} \text{ s} \doteq 1,7 \text{ s}$$

a  $t_2 = 1,8 \text{ s}$ .

Plný válec proběhne dráhu  $l$  za 1,7 s, dutý za dobu 1,8 s. Obecně jsou tyto doby určeny vztahy (3). Z nich je zřejmé, že plný válec proběhne dráhu  $l$  za kratší dobu než válec dutý.

#### 4. příklad (navrhl Jozef Zámečník)

Koleso o polomere  $r$  s vodorovnou osou otáčení sa valí bez klzania po vodorovnej rovine rýchlosťou  $v$  po kruhovej dráhe o polomere  $R$ .

Vypočítajte veľkosť výslednej uhlovej rýchlosti kola a uhol, ktorý zvierá vektor uhlovej rýchlosti s vodorovnou rovinou.

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty  $r = 0,50 \text{ m}$ ,  $R = 5,0 \text{ m}$ ,  $v = 5,0 \text{ m s}^{-1}$ .

*Riešenie:*

Koleso sa súčasne otáča okolo osi vodorovnej a zvislej (obr. 74). Vektor  $\omega_1$  uhlovej rýchlosti rotujúceho telesa spadá do osi otáčení. Vektor  $\omega_2$  pohybu po kružnici polomeru  $R$  je zvislý. Preto bude vektor  $\omega$  výslednej uhlovej rýchlosti vektorovým súčtom zložiek  $\omega_1$  a  $\omega_2$  (obr. 75), ktorých absolútne hodnoty vypočítame zo vzťahov

$$\omega_1 = \frac{v}{r} \quad \text{a} \quad \omega_2 = \frac{v}{R}. \quad (1)$$



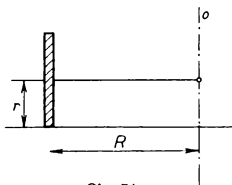
Je teda

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad \text{a} \quad \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \quad (2)$$

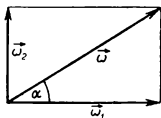
Uplatnením rovníc (1) a druhej z rovníc (2) dostaneme

$$\omega = v \sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2}} = \frac{v}{rR} \sqrt{R^2 + r^2}. \quad (3)$$

Ak dosadíme do vzťahu (3) dané hodnoty, dostaneme  $\omega \doteq 10,0 \text{ s}^{-1}$ .



Obr. 74



Obr. 75

Pre uhol  $\alpha$ , ktorý zvierá vektor  $\omega$  výslednej uhlovej rýchlosti s vodorovnou rovinou platí, ako vidieť z obr. 75,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r}{R} = \frac{0,50}{5,0} = 0,10, \text{ takže } \alpha \doteq 5^\circ 43'. \quad (4)$$

Koleso rotuje celkovou uhlovou rýchlosťou  $10,0 \text{ rad s}^{-1}$  okolo osi, ktorá zvierá s vodorovnou rovinou uhol  $5^\circ 43'$ . Všeobecne sú tieto veličiny určené vzťahmi (3) a (4).

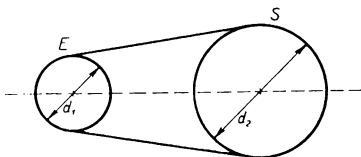
#### 4. Úlohy kategorie D

Úlohy a řešení recenzoval dr. Bohumil Vlach a dr. Ivan Náter.

##### a) První kolo soutěže

##### 1. příklad (navrhl Miroslav Dvořák)

Řemenice elektromotoru má průměr  $d_1$  a vykoná  $n_1$  otáček za minutu. Řemenem se pohání stroj, jehož řemenice má průměr  $d_2$  (obr. 76). Když byl vyměněn elektro-



Obr. 76

motor za nový s  $n_1'$  otáčkami za minutu, bylo nutno vyměnit buď řemenici elektromotoru, nebo řemenici stroje, aby měla řemenice stroje též počet obrátek za minutu jako dříve. Udejte průměry řemenic pro oba případy.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $d_1 = 120$  mm,  $n_1 = 960$  otáček za minutu,  $n_1' = 1800$  otáček za minutu,  $d_2 = 350$  mm.

**Řešení:**

Řemenice elektromotoru je kolo hnací, řemenice stroje kolo hnané. Předpokládáme, že řemen na řemenicích

neklouže, takže obvodová rychlost hnacího kola je vždy rovna obvodové rychlosti kola hnaného. Je-li průměr kola  $d$  a počet jeho otáček za jednotku času  $n$ , potom obvodová rychlost je dána rovnicí

$$v = \pi d n . \quad (1)$$

a) Vyměňujeme řemenici na novém motoru:

Počet  $n_2$  otáček řemenice na stroji musí zůstat nezměněn. Proto průměr  $d_1'$  na novém motoru musí být takový, aby obvodová rychlost nové řemenice byla stejná jako obvodová rychlost staré řemenice na původním elektromotoru. Proto platí rovnice

$$\begin{aligned} \pi d_1' n_1' &= \pi d_1 n_1 , \\ d_1' &= \frac{n_1}{n_1'} d_1 . \end{aligned} \quad (2)$$

Má-li zůstat počet  $n_2$  otáček řemenice stroje po výměně elektromotoru nezměněn, musí mít řemenice nového elektromotoru průměr  $d_1'$  daný rovnicí (2).

Dosadíme-li do (2) zadané hodnoty, vypočteme

$$d_1' = 64,0 \text{ mm} .$$

*Diskuse:* Poněvadž v našem případě  $n_1' > n_1$ , musí být  $d_1' < d_1$ , jak je také vidět z rovnice (2). Skutečně platí

$$64,0 \text{ mm} < 120 \text{ mm} .$$

b) Vyměňujeme řemenici stroje:

Počet  $n_2$  otáček řemenice stroje není v zadání uveden. Vyplyvá však z rovnosti obvodových rychlostí obou řemenic v původním sestavení, tj.

$$\pi d_1 n_1 = \pi d_2 n_2 ,$$

proto

$$n_2 = \frac{d_1}{d_2} n_1 . \quad (3)$$

Na novém elektromotoru, který má počet otáček za minutu  $n'_1$ , necháme původní řemenici o průměru  $d_1$ . Průměr nové řemenice  $d'_2$  na stroji určíme opět na základě rovnosti obvodových rychlostí

$$\begin{aligned}\pi d'_2 n_2 &= \pi d_1 n'_1, \\ d'_2 &= \frac{n'_1}{n_2} d_1.\end{aligned}\quad (4)$$

Do rovnice (4) dosadíme za  $n_2$  z rovnice (3) a dostaneme hledaný průměr nové řemenice na stroji:

$$d'_2 = \frac{n'_1}{n_1} d_2.\quad (5)$$

Má-li zůstat počet  $n_2$  otáček řemenice stroje po výměně elektromotoru nezměněn, musí mít nová řemenice stroje průměr daný rovnicí (5).

Dosadíme-li do rovnice (5) zadané hodnoty, dostaneme

$$d'_2 = 656 \text{ mm}.$$

*Diskuse:* Poněvadž v našem případě  $n'_1 > n_1$ , musí být i  $d'_2 > d_2$ . Skutečně platí

$$656 \text{ mm} > 350 \text{ mm}.$$

## 2. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

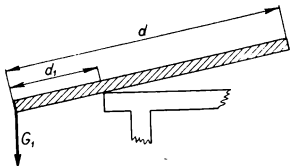
Truhláři a tesaři užívají při odhadování tíhy prkna  $G$  zvláštního způsobu. Posunují prkno po hraně truhlářské hoblice po délce a po každém posunutí zatíží volný konec prkna tíhou svého těla  $G_1$  (obr. 77). To udělají několikrát, až bude zatížené prkno v rovnovážné poloze. K určení tíhy prkna jim stačí změřit délku  $d$  prkna a vzdálenost  $d_1$  zatíženého konce prkna od hrany hoblice, je-li prkno v rovnovážné poloze. Kromě toho je třeba znát tíhu těla  $G_1$  osoby, která prkno zatěžuje. Předpokládá se, že prkno

má po celé délce stálou šířku a výšku a že je ze stejnorodého materiálu.

Řešte pro hodnoty  $d = 4,00$  m,  $d_1 = 40,0$  cm,  $G_1 = 80,0$  kp.

Řešte úlohu také graficky.

Vyjádřete tíhu prkna také obecně.



Obr. 77

**Řešení:**

Prkno považujeme za dvojzvrtnou páku, jejíž osou otáčení je hrana hoblice. Úlohu řešíme na základě zákona o rovnováze na dvojzvrtné páce.

Úlohu je možno řešit více způsoby, např. podle toho,

a) považujeme-li prkno za jediné těleso, jehož tíha  $G$  působí jen v jeho těžišti  $T$ ,

b) nebo myslíme-li si prkno rozděleno hranou hoblice (osou páky) na dvě tělesa (o délkách  $d_1$  a  $d - d_1$ ), jejichž tíhy působí samostatně v těžištích ( $T_1$  a  $T_2$ ) těchto těles.

Pro výpočty vyjádříme délky ve stejných jednotkách  $d = 4,00$  m = 400 cm,  $d_1 = 40,0$  cm.

a) Prkno považujeme za jediné těleso, jehož tíha působí v těžišti  $T$  (obr. 78). Rovnováhu momentů sil  $G_1$  a  $G$  vzhledem k ose  $o$  vyjádříme rovnicí

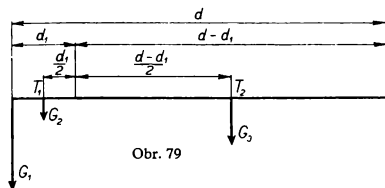
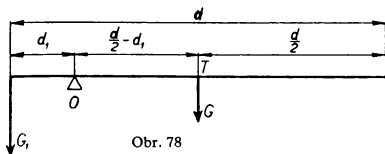
$$G_1 d_1 = G \left( \frac{d}{2} - d_1 \right). \quad (1)$$

Poněvadž  $\frac{d}{2} - d_1 = 160$  cm, dostáváme pro výpočet tíhy prkna  $G$  vztah

$$80,0 \text{ kp} \cdot 40,0 \text{ cm} = G \cdot 160 \text{ cm} ,$$

a odtud pro tíhu prkna

$$G = 20,0 \text{ kp} .$$



b) Prkno je osou otáčení (hranou hoblice) rozděleno ve dvě samostatná tělesa (obr. 79). Část prkna o délce  $d_1$  má těžiště v bodě  $T_1$  a tíha této části je

$$G_2 = \frac{G}{d} d_1 .$$

Část prkna o délce  $(d - d_1)$  má těžiště v bodě  $T_2$  a tíha

této části prkna je

$$G_3 = \frac{G}{d} (d - d_1).$$

Podle našeho předpokladu platí  $G = G_2 + G_3$ . Podle obrázku 79 je rovnováha momentů sil dána rovnicí

$$G_1 d_1 + G_2 \frac{d_1}{2} = G_3 \frac{d - d_1}{2}.$$

Dosadíme-li za  $G_2$  a  $G_3$  z předešlých vztahů, dostaneme rovnici

$$G_1 d_1 + \frac{G d_1^2}{d} = \frac{G (d - d_1)^2}{2}.$$

Rovnici upravíme a dostaneme

$$G_1 d_1 = G \left( \frac{d}{2} - d_1 \right),$$

což je rovnice totožná s rovnicí (1). Proto po dosazení daných hodnot dostaneme stejný výsledek

$$G = 20,0 \text{ kp}.$$

c) Grafické řešení úlohy:

Z obr. 79 vidíme, že rameno síly  $G_1$  (stolařova tíha) je  $d_1 = 40$  cm a rameno tíhy prkna  $G$  je  $\frac{d}{2} - d_1 = 160$  cm. Délku  $\frac{d}{2} - d_1$  označme  $q$ . Potom rovnice (1) dostane tvar

$$G_1 d_1 = G q.$$

Z toho plyne

$$\frac{G_1}{G} = \frac{q}{d_1}.$$

To je známá poučka: Na páce je rovnováha, jsou-li ramena sil v obráceném poměru k velikostem sil. V této rovnosti poměrů je neznámá velikost tíhy desky  $G$ . Graficky ji najdeme užitím podobnosti trojúhelníků (obr. 80).

Zvolíme vhodné měřítko, např. 1 cm délky ve skutečnosti odpovídá  $\frac{1}{2}$  mm na obrázku, 1 kp odpovídá 1 mm

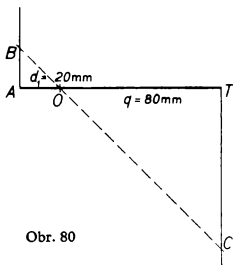
na obrázku. Podle obr. 80 narýsuje nejprve ramena sil  $G_1$  a  $G$ . Označme  $d_1 = AO$ ,  $q = OT$ . V bodech  $A$  a  $T$  vztyčíme kolmice. Na kolmici v bodě  $T$  nanese délku odpovídající síle  $G_1$ , dostaneme bod  $C$ . Spojnice bodů  $C$  a  $O$  určí na kolmici v bodě  $A$  bod  $B$ . Trojúhelníky  $AOB$  a  $TOC$  jsou podobné (oba jsou pravoúhlé a mají stejný jeden ostrý úhel). Platí proto

$$\frac{AB}{TC} = \frac{AO}{TO},$$

tj.

$$\frac{AB}{G_1} = \frac{d_1}{q}.$$

Tedy délka  $AB$  je úměrná tíze prkna. Měřítkem změřme délku  $AB$ : v našem případě (v použitém měřítku) najdeme  $AB = 20,0$  mm, tzn. tíha prkna je 20,0 kp.



Obr. 80



d) Obecné vyjádření tíhy prkna

Z rovnice (1) vypočteme  $G$  a dostaneme

$$G = \frac{2 d_1}{d - 2 d_1} G_1. \quad (2)$$

Rovnice (2) vyjadřuje tíhu prkna obecně. Dosadíme-li hodnoty uvedené v zadání, vypočteme opět tíhu prkna  $G = 20,0$  kp.

*Diskuse rovnice (2):*

Aby rovnice (2) měla v našem případě fyzikální smysl, nesmí mít zlomek na pravé straně rovnice hodnotu nula nebo naopak nesmí nabývat neomezeně velkých hodnot. Tzn. délka  $d_1$  je omezena podmínkou

$$0 < d_1 < \frac{d}{2}.$$

Nechť se zlomek na pravé straně rovnice (2) rovná 1. Potom

$$d_1 = \frac{d}{4}.$$

Je-li zlomek na pravé straně rovnice větší nebo menší než 1, pak vypočteme, že

$$d_1 > \frac{d}{4} \quad \text{nebo} \quad d_1 < \frac{d}{4}.$$

Z těchto úvah vyplývá: Je-li stolařova tíha stejná jako tíha prkna, pak při rovnováze je osa otáčení (hrana hoblice) právě ve čtvrtině délky prkna. Není-li stolařova tíha stejná jako tíha prkna, pak stolař hledá rovnováhu tak, že posouvá prkno kolem čtvrtiny jeho délky. Je-li stolař těžší než prkno, pak osa otáčení je mezi čtvrtinou

délky prkna a koncem prkna. Je-li stolař lehčí než prkno, je osa otáčení prkna mezi čtvrtinou a polovinou délky prkna.

Užívá-li stolař této metody často, může si sestavit podle rovnice (2) tabulku a z ní snadno určovat tíhu prkna:

délka $d_1$	$\frac{1}{10} d$	$\frac{1}{8} d$	$\frac{1}{5} d$	$\frac{1}{4} d$	$\frac{2}{5} d$	$\frac{3}{8} d$	$\frac{4}{10} d$	atd.
tíha prkna $G$	$\frac{G_1}{4}$	$\frac{G_1}{3}$	$\frac{2}{3} G_1$	$G_1$	$\frac{4}{3} G_1$	$3 G_1$	$4 G_1$	atd.

### 3. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

Jízdní kolo má na hřídeli pedálu ozubené kolo s počtem  $z_2$  zubů ( $z_2 = 46$ ), na hřídeli zadního kola tři převody se  $z_1 = 20, 18, 16$  zuby. Vnější průměr kola s pneumatikou je  $d = 60,0$  cm, průměr náhonového hřídele dynamka je  $d_1 = 3,00$  cm. Náhonové kolo dynamka přiléhá k pneumatice na jejím vnějším obvodu. Rychlost jízdy je  $v = 10,0$  km/h.

a) Vypočtete, kolik otáček za minutu udělá kolo s pneumatikou.

b) Vypočtete, kolik otáček za minutu udělá při stálém záběru pedálové kolo při použití každého ze tří možných převodů.

c) Vypočtete, kolik otáček za sekundu vykoná dynamko při dané rychlosti jízdy.

d) Je při řešení otázky c) rozhodující převodový poměr zařazeného záběru ozubených kol? Svě řešení zdůvodněte.

**Řešení:**

a) Nejprve dané veličiny vyjádříme v jednotkách vhodných pro výpočet:

$$d = 60,0 \text{ cm} = 0,600 \text{ m},$$

$$v = 10,0 \text{ km/h} = 167 \text{ m/min.}$$

Vnější obvod pneumatiky kola se valí po silnici. Vykoná-li kolo s pneumatikou jednu otáčku, jízdní kolo vykoná dráhu rovnou vnějšímu obvodu pneumatiky, tj.  $\pi d$ .

Nechť kolo vykoná  $n_1$  otáček za minutu. Potom jízdní kolo ujede za čas  $t$  dráhu  $n_1 \pi d t$ . Podle zadání je dráha ujetá za  $t = 1 \text{ min}$  rovna 167 m.

Pak  $n_1 \pi d = 167 \text{ m/min.}$

Odtud vypočteme  $n_1 = 88,5 \text{ ot./min.}$

Při dané rychlosti jízdy vykoná kolo s pneumatikou  $n_1 = 88,5 \text{ ot./min.}$

b) Tři převodová ozubená kolečka jsou pevně spojena s kolem s pneumatikou. Proto musí vykonávat vždy stejný počet otáček  $n_1$  jako toto kolo. Pedálové ozubené kolo s počtem zubů  $z_2$  je spojeno vždy s některým z převodových koleček řetězovým převodem. Proto v časové jednotce (v jedné minutě) musí jak na pedálovém kole, tak na převodovém kolečku zabrat do řetězu stejný počet zubů. To vyjádříme rovnicí

$$n_2 z_2 = n_1 z_1. \quad (1)$$

V této rovnici  $n_2$  znamená počet otáček pedálového kola za minutu. Odtud

$$n_2 = \frac{n_1}{z_2} z_1.$$

Poněvadž podíl  $\frac{n_1}{z_2} = 1,92 \text{ ot./min}$  je v našem případě

konstantní, dostáváme pro výpočet otáček pedálového kola rovnici

$$n_2 = 1,92 \cdot z_1 \text{ ot./min.} \quad (2)$$

Dosazujeme-li sem postupně hodnoty  $z_1 = 20, 18, 16$ , dostaneme pro  $n_2$  postupně hodnoty

$$n_2 = 38,4 \text{ ot./min; } 34,6 \text{ ot./min; } 30,7 \text{ ot./min.}$$

Koná-li kolo s pneumatikou stále 88,5 ot./min, pak při postupném zařazování převodových koleček o počtu zubů  $z_1 = 20; 18; 16$  vykoná pedálové kolo (při neustálém záběru) postupně 38,4 ot./min, 34,6 ot./min, 30,7 ot./min.

c) Pneumatika a náhonové kolečko k sobě přiléhají vnějšími obvody, proto jejich obvodové rychlosti musí být stejné. Známe počet  $n_1 = 88,5 \text{ ot./min}$  kola s pneumatikou. Odtud určíme  $n_1'$  počet otáček kola s pneumatikou za jednu sekundu

$$n_1' = \frac{n_1 \cdot 1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 1,47 \text{ ot./s.}$$

Označíme-li  $n_3$  počet otáček náhonového kola dynamka za sekundu, pak pro obvodové rychlosti platí

$$\pi d_1 n_3 = \pi d n_1',$$

odtud

$$n_3 = \frac{d}{d_1} n_1'. \quad (3)$$

Z tohoto vztahu vypočteme

$$n_3 = 29,4 \text{ ot./s.}$$

Při dané rychlosti jízdy je počet otáček náhonového kolečka dynamka  $n_3 = 29,4 \text{ ot./s.}$

d) Při řešení otázky c) na převodovém poměru zařazeného záběru ozubených kol nezáleží. V rovnici (3)

$n_3 = \frac{d}{d_1} n'_1$  je veličina  $\frac{d}{d_1} = \frac{60,0 \text{ cm}}{3,00 \text{ cm}} = 20$  konstantou jízdního kola. Tedy  $n_3$  záleží jen na  $n'_1$ . Z rovnice (1) vypočteme, že

$$n'_1 = \frac{1 \text{ min}}{60,0 \text{ s}} \frac{z_2}{z_1} n_2.$$

V rovnici (2) jsme ukázali, že v našem případě je  $n_2 = 1,92 \text{ ot./min} \cdot z_1$ . Proto vypočítáme

$$n_3 = \frac{1,92 \text{ ot.}}{60,0 \text{ s}} \frac{d}{d_1} n_2.$$

Z tohoto vztahu je vidět, že  $n_3$  je v našem případě konstantní a nezáleží na poměru  $\frac{z_2}{z_1}$ . Je to tím, že počet otáček zadního kola je konstantní a je dán rychlostí jízdy  $v = 10,0 \text{ km/h}$ .

#### 4. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

V elektrickém ohříváči vody má voda teplotu  $t_1$  a ve studni teplotu  $t_2$ . Smícháním vody z ohříváče a ze studně chceme získat vodu o teplotě  $t$  a o hmotnosti  $m$ . Určete hmotnosti teplé a studené vody, které k tomu potřebujeme.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $t_1 = 92,0 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 13,0 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $m = 100 \text{ kg}$ ,  $t = 38,0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Tepelné ztráty do okolí a ohřátí nádoby při míchání vody zanedbejte.

*Řešení:*

Fyzikální podmínka řešitelnosti úlohy: Abychom zjistili, je-li podle zadání úloha řešitelná, formulujeme ji takto:

Chceme získat vodu o hmotnosti  $m$  a o teplotě  $t$  tak

že smícháme neznámé množství vody o hmotnosti  $m_1$  a o teplotě  $t_1$  s jiným neznámým množstvím vody o hmotnosti  $m_2$  a o teplotě  $t_2$ .

Nechť je  $t_1 > t_2$ . Smícháme-li dvě množství vody o nestejných teplotách  $t_1$  a  $t_2$ , pak po vyrovnání teplot musí být výsledná teplota  $t$  menší než teplota teplejší vody  $t_1$  a vyšší než teplota chladnější vody  $t_2$ . Musí tedy platit

$$t_1 > t > t_2 .$$

Tato podmínka je v zadání splněna, tedy úloha je řešitelná, má fyzikální smysl.

Při smíchání se teplejší voda ochladí o teplotní rozdíl  $t_1 - t$  a přitom vydá tepelné množství  $Q_1 = m_1 c (t_1 - t)$ . Chladnější voda se ohřeje o teplotní rozdíl  $t - t_2$  a přitom přijme tepelné množství  $Q_2 = m_2 c (t - t_2)$ ;  $c$  je měrné teplo vody.

Podle zákona zachování tepelného množství musí platit  $Q_1 = Q_2$ ,

$$m_1 c (t_1 - t) = m_2 c (t - t_2), \quad \text{po krácení } c$$
$$m_1 (t_1 - t) = m_2 (t - t_2) . \quad (1)$$

Dále platí

$$m_1 + m_2 = m . \quad (2)$$

Rovnice řešíme např. substituční metodou a dostaneme

$$m_1 = \frac{m}{t_1 - t_2} (t - t_2), \quad (3)$$

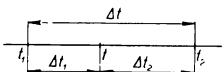
$$m_2 = \frac{m}{t_1 - t_2} (t_1 - t) . \quad (4)$$

Dosadíme-li do těchto rovnic číselné hodnoty podle zadání, dostaneme

$$m_1 = 31,6 \text{ kg} , \quad m_2 = 68,4 \text{ kg} .$$

Správnost výsledků můžeme ověřit dosazením vypočtených hodnot do rovnic (1) a (2).

Abychom získali 100 kg vody 38,0 °C teplé, musíme smíchat 31,6 kg vody o teplotě 92,0 °C a 68,4 kg vody o teplotě 13,0 °C.



Obr. 81

*Diskuse výsledků:*

Zaveďme označení teplotních rozdílů podle obr. 81.

Rozdíl teplot  $t_1 - t_2$  obou vod, které mícháme, označíme  $\Delta t$  a nazveme celkový teplotní interval. Rozdíl  $t - t_2$  označíme  $\Delta t_2$  a nazveme teplotní interval chladnější vody, rozdíl  $t_1 - t$  označíme  $\Delta t_1$  a nazveme teplotní interval teplejší vody.

Potom rovnici (1) můžeme napsat ve tvaru

$$m_1 \Delta t_1 = m_2 \Delta t_2 .$$

Tuto rovnici upravíme na tvar:

$$m_1 : m_2 = \Delta t_2 : \Delta t_1 .$$

Podle tohoto vztahu můžeme říci: Hmotnosti vod  $m_1$  a  $m_2$  jsou v obráceném poměru jejich teplotních intervalů, nebo: Chladnější vody je tolikrát více než teplejší, kolikrát je tepelný interval teplejší vody větší než teplotní interval chladnější vody.

Tato skutečnost je také patrna z rovnic (3) a (4), které nyní můžeme napsat ve tvaru:

$$m_1 = \frac{m}{\Delta t} \Delta t_2 ,$$

$$m_2 = \frac{m}{\Delta t} \Delta t_1 .$$

V obou rovnicích je stejný výraz  $\frac{m}{\Delta t} = k$

(v našem případě  $k = 1,26 \text{ kg/deg}$ ). Proto rovnice můžeme napsat také ve tvaru

$$\begin{aligned}m_1 &= k \Delta t_2, \\m_2 &= k \Delta t_1.\end{aligned}$$

Tento výsledek lze vyjádřit větou: Hmotnost jedné vody je úměrná teplotnímu intervalu druhé vody, konstanta úměrnosti je  $k$ .

## 5. příklad (navrhla Marie Turková)

Z odporové šroubovice do vařiče o příkonu  $P$  při síťovém napětí  $U$  bylo vyrobeno ve školní dílně  $n$  stejných reostatů pro žákovské pokusy.

a) Jakého maximálního napětí lze použít k pokusům s tímto reostatem?

b) Jaký je odpor žákovského reostatu?

c) Jaký příkon bude mít tento reostat při nastavení na maximální odpor v obvodu napájeném  $n_1$  sériově spojenými ocelokadmiovými akumulátory, z nichž každý má napětí  $U_a$ .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $P = 400 \text{ W}$ ,  $U = 220 \text{ V}$ ,  $n = 10$ ,  $n_1 = 4$ ,  $U_a = 1,30 \text{ V}$ .

*Řešení:*

Odpor odporové šroubovice označme  $R$ , odpor žákovského reostatu  $R_z$ .

Odpor  $R$  není v zadání úlohy udán, ale víme, že příkon dodávaný elektrickému spotřebiči je dán rovnicí  $P = UI$  a že  $I = \frac{U}{R}$ . Proto příkon elektrické energie



na odporu  $R$  je dán také rovnicí

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

Odtud vypočteme

$$R = \frac{U^2}{P}. \quad (1)$$

Rozměrová zkouška

$$[R] = \frac{V^2}{VA} = \frac{V}{A} = \Omega.$$

Dosadíme-li hodnoty ze zadání, vypočteme odpor dané odporové šroubovice  $R = 121 \Omega$ .

a) Předpokládáme, že síťové napětí  $U$  je maximální napětí, kterého lze použít pro celou šroubovici vaříče. Podél homogenního vodiče (neboli odporu) elektrické napětí klesá rovnoměrně.

Je-li na celém homogenním  $R$  maximální napětí  $U$ , pak na jeho  $n$ -té části je maximální napětí  $U_z$

$$U_z = \frac{U}{n}.$$

Dosadíme-li sem hodnoty ze zadání, dostaneme  $U_z = 22,0 \text{ V}$ .

Na žákovský odpor je možno připojit maximální napětí  $22,0 \text{ V}$ . Při vyšším napětí by se reostat poškodil nebo i spálil.

b) Je-li odpor homogenního vodiče  $R$ , pak odpor jeho  $n$ -té části je

$$R_z = \frac{R}{n}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za  $R$  z rovnice (1), dosta-

neme

$$R_z = \frac{U^2}{n P}. \quad (2)$$

Dosadíme-li sem hodnoty ze zadání, dostaneme

$$R = 12,1 \Omega.$$

Odpor žákovského reostatu je 12,1  $\Omega$ .

c) Příkon elektrické energie je určen vztahem  $P = \frac{U^2}{R}$ .

Zařadíme-li do série  $n_1$  akumulátorů o napětí  $U_a$ , dostaneme zdroj o napětí  $U_1 = n_1 U_a$ . Proto příkon elektrické energie na žákovském odporu je dán vztahem

$$P_z = \frac{(n_1 U_a)^2}{R_z}.$$

Dosadíme-li sem za  $R_z$  ze vztahu (2), dostaneme

$$P_z = \frac{(n_1 U_a)^2 n P}{U^2}.$$

Dosadíme-li číselné hodnoty podle zadání, dostaneme  $P_z = 2,23 \text{ W}$ .

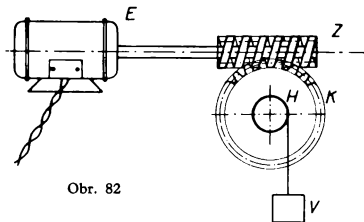
*Diskuse:* V našem případě je v zadání předepsáno zařazení čtyř ocelokadmiových akumulátorů, tzn. napětí 5,20 V. Žákovský reostat se však nepoškodí, přivedeme-li na něj napětí až 22,0 V, tedy odpor se nepoškodí příkonem 40,0 W. Výpočtem zjistíme, že žákovský odpor se nepoškodí, když ho zařadíme do elektrického obvodu napájeného 17 sériově spojenými ocelokadmiovými akumulátory.

## 6. příklad (navrhl Miroslav Dvořák)

Jaký příkon musí mít elektromotor pro domovní výtah, který má zvednout kabinu o celkové tíze  $G$  do

jedenáctého podlaží (do výšky  $h$ ) za čas  $t$ , má-li elektromotor účinnost  $\eta_1$  a závitnicový převod účinnost  $\eta_2$ ? Výkon elektromotoru je příkonem pro závitnicový převod.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $G = 1000 \text{ kp}$ ,  $h = 42,0 \text{ m}$ ,  $t = 35,0 \text{ s}$ ,  $\eta_1 = 90 \%$ ,  $\eta_2 = 65 \%$ .



Obr. 82

**Řešení:**

Situaci ukazuje obr. 82. Účinnost stroje je dána poměrem

$$\eta = \frac{\text{výkon}}{\text{příkon}}.$$

Příkon elektromotoru ( $E$ ) označíme  $P_1$ , výkon elektromotoru  $W_1$ . Příkon energie na závitnicový převod (který se skládá ze závitnicového šroubu  $Z$  a kola na hřídeli  $K, H$ ) označíme  $P_2$ , jeho výkon označíme  $W_2$ . Podle zadání

$$W_2 = \frac{G h}{t}.$$

Myšlenka řešení je obsažena v zadání: výkon elektromotoru  $W_1$  je příkonem pro závitnicový převod.

$$W_1 = P_1 \eta_1; \quad W_2 = P_2 \eta_2 .$$

Poněvadž  $W_1 = P_2$ , vypočítáme z těchto rovnic

$$P_1 = \frac{W_2}{\eta_1 \eta_2} .$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu výraz pro  $W_2$ , dostaneme konečný výsledek

$$P_1 = \frac{G h}{\eta_1 \eta_2 t} .$$

Pro číselné hodnoty zadané v příkladu dostaneme  $P_1 = 2051 \text{ kpm/s}$ .

Elektromotor pro domovní výtah musí mít příkon

$$P_1 = 2051 \text{ kpm/s} = 27,4 \text{ k} = 20 \frac{1}{4} \text{ kW} .$$

*Diskuse:* Z rovnice  $W_2 = \frac{G h}{t}$  vypočteme, že zvedání kabiny vyžaduje výkon

$$W_2 = 1200 \text{ kpm/s} = 16,0 \text{ k} .$$

Představme si elektromotor a závitnicový převod jako jediný složený stroj. Z nalezených hodnot vypočteme účinnost tohoto stroje  $\eta_3$

$$\eta_3 = \frac{W_2}{P_1} ,$$

$$\eta_3 = 0,58 = 58 \% .$$

Vidíme, že  $\eta_3 < \eta_1$ , ale i  $\eta_3 < \eta_2$ . Můžeme soudit, že čím je zařízení na konání mechanické práce složitější, tím je

jeho účinnost menší, to znamená, že tím větší ztráty energie nastávají.

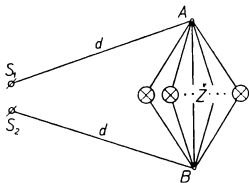
### 7. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

Od kabelu rozvodné sítě, na kterém je napětí  $U$ , se klade hliníkové vedení do vzdálenosti  $d$ , kde má být napájeno  $n$  žárovek, každá o příkonu  $P_1$ . Jaký minimální průměr musí mít toto vedení, aby na něm nebyl úbytek napětí větší než  $p\%$ ?

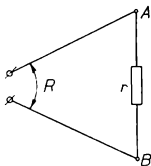
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $U = 220\text{ V}$ ,  $d = 50\text{ m}$ ,  $P_1 = 200\text{ W}$ ,  $n = 50$ ,  $p = 2,00$ .

**Řešení:**

Na obr. 83 jsou  $S_1, S_2$  svorky rozvodné sítě (je na nich



Obr. 83



Obr. 84

napětí  $U$ ). Žárovky jsou spojeny paralelně, proto jsou všechny připojeny k uzlům  $A, B$ . Délka hliníkového vedení (drátu) od svorek k uzlům podle zadání je  $d = S_1A = S_2B$ , proto délka hliníkového drátu je  $2d$ . Odpor hliníkového vedení označíme  $R$ . Měrný odpor hliníku najdeme v tabulkách  $\rho = 0,0278\ \Omega\ \text{mm}^2/\text{m}$ .

Obr. 84 ukazuje zjednodušené (tzv. náhradní) schéma zapojení žárovek. Celou soustavu žárovek si představujeme jako jediný vodič o odporu  $r$ . Odpor jedné žárovky budeme označovat  $r_1$ . Odpor vedení od uzlů  $A, B$  k žárovkám zanedbáme.

Odpor hliníkového drátu  $R$  o délce  $2d$  a o průměru  $2b$  je dán rovnicí

$$R = \rho \frac{2d}{\pi b^2}.$$

Kdybychom  $R$  znali, pak by byl hledaný průměr hliníkového drátu

$$2b = 2 \sqrt{\frac{\rho 2d}{\pi R}}. \quad (1)$$

Odpor  $R$  není v zadání úlohy. Víme však, že na hliníkovém drátu může být nanejvýš napětí  $U_1$  rovné  $p$  % napětí  $U$

$$U_1 = \frac{U}{100} p. \quad (2)$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu hodnoty ze zadání, vypočteme

$$U_1 = 4,40 \text{ V.}$$

V zadání se  $U_1$  nazývá úbytek napětí na přívodních drátech.

Podle Ohmova zákona je

$$R = \frac{U_1}{I}.$$

Potřebujeme tedy určit velikost proudu  $I$ . Užijeme k tomu hodnot, které se v zadání vztahují na soustavu žárovek. Přitom si uvědomujeme, že hliníkovým drátem i sou-

stavou žárovek (jako jediným vodičem) musí procházet stejný proud  $I$ .

Abychom určili velikost proudu  $I$ , určíme nejprve odpor  $r$ , tj. odpor soustavy žárovek jako celku. Víme, že při spojení žárovek vedle sebe se sčítají jejich vodivosti. V zadání úlohy je příkon žárovky  $P_1$  zadán pro maximální napětí. Proto pro odpor jediné žárovky platí

$$r_1 = \frac{U^2}{P_1}.$$

Po dosazení daných hodnot vypočteme  $r_1 = 242 \Omega$ .  
Vodivost jedné žárovky je

$$\frac{1}{r_1} = \frac{P_1}{U^2}.$$

Vodivost  $n$  stejných žárovek spojených vedle sebe je

$$\frac{n}{r_1} = \frac{n P_1}{U^2}.$$

Proto odpor soustavy žárovek je

$$r = \frac{r_1}{n} = \frac{U^2}{n P_1}. \quad (3)$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme  $r = 4,84 \Omega$ . Poněvadž na hliníkových drátech je napětí  $U_1$ , na soustavě žárovek (a tedy na každé žárovce) je napětí  $U_2 = U - U_1$ . Dosadíme-li za  $U_1$  ze vztahu (2), vypočteme

$$U_2 = \frac{U}{100} (100 - p). \quad (4)$$

Po dosazení do tohoto vztahu vyjde  $U_2 = 216 \text{ V}$ .

Proud soustavou žárovek je  $I = \frac{U_2}{r} = 44,6 \text{ A}$ . Dosa-

díme-li do tohoto vztahu ze (4) a (3), vypočteme

$$I = \frac{n P_1 (100 - p)}{100 U} . \quad (5)$$

Víme, že hliníkovými dráty musí procházet stejný proud při napětí  $U_1$ . Proto odpor hliníkových drátů

$$R = \frac{U_1}{I} . \quad (6)$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu ze zadání, vypočteme  $R = 0,099 \Omega \doteq 0,10 \Omega$ . Dosadíme-li tuto hodnotu do vztahu (1), vypočteme hledaný minimální průměr hliníkového drátu

$$2b = 5,9 \text{ mm} \doteq 6 \text{ mm} .$$

Rozměrová zkouška vztahu (1)

$$[2b] = \sqrt{\frac{\Omega \text{ mm}^2/\text{m} \cdot \text{m}}{\Omega}} = \text{mm} .$$

*Diskuse:* Zkušenější řešitel by se nezdržoval výpočtem dílčích hodnot, ale našel by obecný výraz pro průměr  $2b$ . Dosadíme-li do rovnice (6) za  $U_1$  a za  $I$  z rovnice (2) a (5), vypočteme

$$R = \frac{U^2 p}{n P_1 (100 - p)} . \quad (7)$$

Dosadíme-li do rovnice (1) za  $R$ , pak z rovnice (7) vypočteme hledaný průměr hliníkového drátu

$$2b = \frac{2}{U} \sqrt{\frac{2d n P_1 \rho (100 - p)}{\pi p}} . \quad (8)$$

Provedme nejprve rozměrovou zkoušku rovnice (8). Víme, že veličiny  $n$ ,  $p$  nemají fyzikální rozměr, rozměr



$P_1$  je  $V^2/\Omega$ .

$$[b] = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{m V^2 \text{ mm}^2 \Omega}{\Omega m}} = \text{mm}.$$

Dosadíme-li do rovnice (8) zadané hodnoty, dostaneme opět výsledek  $2b = 5,94$  mm. Užitím obecného výpočtu dojdeme k výsledku rychleji.

Z rovnice (5) vidíme, že čím větší je počet  $n$  žárovek zařazených v našem případě do vedení, tím větší je proud. Proudem vzniká v hliníkovém vedení teplo, kterým by se mohlo vedení poškodit nebo i spálit.

Z rovnice (8) vidíme, že žárovek nesmíme zařadit více než  $n$ , neboť pro  $(n + 1)$  žárovek by musel být průměr vedení větší. Z rovnice (8) také vidíme, že by se průměr vodiče musel zvětšit, kdybychom zvětšili délku  $d$ .

Obecný výsledek (8) ukazuje, jak průměr vodiče  $2b$  závisí na počtu žárovek a na délce vodiče. Z dílčích výsledků tato závislost není tak jednoznačně patrná.

## 8. příklad (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Kovová trubička z homogenního materiálu má všude stejný průřez. Její délka je  $l$ , její elektrický odpor je  $R_0 = 10,0 \Omega$ . Do její dutiny se zasouvá těsně kovová válcová tyčinka stejné délky  $l$  jako trubička. Je rovněž z homogenního materiálu, má všude stejný průřez a má elektrický odpor také  $R_0 = 10,0 \Omega$ . Předpokládá se, že dotyk mezi tyčinkou a trubičkou je dokonalý.

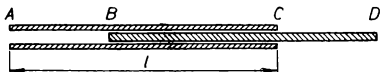
a) Jaký elektrický odpor má vodič, který vznikne tak, že tyčinka je celá vysunutá z trubičky, ale ještě se jí dotýká?

b) Jaký elektrický odpor má vodič, který vznikne tak, že tyčinka je celá zasunutá do trubičky?

c) Je-li tyčinka zasunuta částečně do trubičky tak, že částí své délky odpovídající odporu  $x$  z trubičky vyčnívá (obr. 85), je odpor takto vzniklého vodiče dán vztahem

$$R = \frac{3x + R_0}{2}.$$

Ukažte, jak k tomuto vztahu dojde.



Obr. 85

**Řešení:**

Spojíme-li vodiče za sebou, sčítají se jejich odpory. Spojíme-li vodiče vedle sebe, sčítají se jejich vodivosti.

a) Vodiče jsou zapojeny za sebou. Proto výsledný odpor je

$$R = R_0 + R_0 = 2 R_0; \quad R = 20,0 \Omega.$$

Vodič, který vznikne tak, že tyčinka je právě celá vysunutá z trubičky, má odpor  $20,0 \Omega$ .

b) Vodiče jsou spojeny vedle sebe. Výsledná vodivost  $\frac{1}{R}$  spojených vodičů je

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0} = \frac{2}{R_0};$$

$$R = \frac{R_0}{2} = 5,0 \Omega.$$

Je-li tyčinka celá zasunutá do trubičky, je výsledný odpor tohoto vodiče  $R = 5,0 \Omega$ .

c) Situaci ukazuje obr. 85:

Vodič si myslíme složený ze tří částí  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , jejichž odpory jsou přímo úměrné jejich délce. Poněvadž  $AB = CD$ , jsou i odpory  $x$  těchto částí vodičů stejné. Odpor vodiče délky  $BC$  vznikl spojením dvou vodičů o stejných odporech vedle sebe. Podle části b) je odpor tohoto vodiče  $\frac{R_0 - x}{2}$ .

Výsledný odpor je tedy

$$R = 2x + \frac{R_0 - x}{2},$$

$$R = \frac{3x + R_0}{2}.$$

## 9. příklad (navrhl Julius Kessner)

Voltmetr s měrným rozsahem  $U_v$  a o vnitřním odporu  $R_v$  má být použit při měření v elektrické osvětlovací síti o napětí  $U > U_v$ .

a) Jak velký pomocný odpor musíme použít a jakým způsobem jej musíme zařadit, aby se voltmetr při měření nepoškodil?

b) Pomocný odpor chceme zhotovit jako cívku z nikelinového drátu o průřezu  $S$  a o měrném odporu  $\rho$ . Jak dlouhý musí být drát?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $U_v = 20 \text{ V}$ ,  $R_v = 400 \Omega$ ,  $U = 220 \text{ V}$ ,  $S = 0,1 \text{ mm}^2$ ,  $\rho = 0,44 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ .

**Řešení:**

a) Má-li být na voltmetru napětí  $U_v$ , musí být zbytek napětí na odporu, který je zařazen s voltmetrem v sérii,

neboť napětí na vodičích zařazených v sérii jsou v poměru velikostí těchto odporů.

Označme hledaný odpor  $R_x$ ; bude na něm napětí  $U - U_v$ .

1. Řešení poměrem:

Hledaný odpor  $R_p$  a vnitřní odpor voltmetru  $R_v$  budou ve stejném poměru jako napětí, která na nich mají být:

$$\frac{R_p}{R_v} = \frac{U - U_v}{U_v},$$
$$R_p = \frac{U - U_v}{U_v} R_v. \quad (1)$$

Po dosazení daných hodnot  $R_p = 4000 \Omega$ .

2. Řešení úsudkem:

Na odporu  $R_v$  je napětí  $U_v$ , na odporu  $R_p$  má být napětí  $U - U_v$ . Na vnitřním odporu voltmetru  $U_v$  připadá na 1 volt napětí  $\frac{R_v}{U_v}$ . Hledaný odpor musí mít tedy velikost

$$R_p = \frac{R_v}{U_v} (U - U_v),$$

což je výsledek totožný s výsledkem (1).

Aby se voltmetr o měrném rozsahu  $U_v$  při měření napětí v osvětlovací síti  $U$  nepoškodil, musíme mu předřadit (zapojit do série) pomocný odpor daný vztahem (1). Pro dané hodnoty je  $R_p = 4000 \Omega$ .

*Diskuse:*

Zařadíme-li pomocný odpor  $R_p$  jako předřadný odpor, pak stupnice voltmetru pro největší výchylku ručičky neudává napětí  $U_v$ , nýbrž  $U$ . Znamená-li na voltmetru

při původním rozsahu jeden dílek stupnice jeden volt, při zařazení odporu  $R_p$  znamená jeden dílek stupnice  $\frac{U}{U_v}$  voltu. Při zadaných hodnotách by to bylo 11 voltů.

b) Délku drátu k zhotovení odporu  $R_p$  vypočteme ze vztahu

$$R_p = \rho \frac{l}{S},$$

$$l = \frac{S}{\rho} R_p.$$

Rozměrová zkouška:

$$[l] = \frac{\text{mm}^2}{\Omega \text{ mm}^2/\text{m}} \Omega = \text{m};$$

délka drátu vyjde v metrech. Po dosazení daných hodnot vypočteme

$$l = 909 \text{ m}.$$

Na zhotovení odporu  $R_p = 4000 \Omega$  je potřeba 909 m nikelinového drátu průřezu  $S = 0,100 \text{ mm}^2$ .

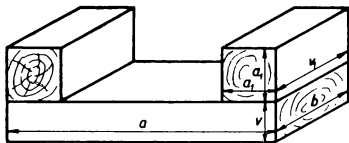
## b) Druhé kolo soutěže

### 1. příklad (navrhl Julius Kessner)

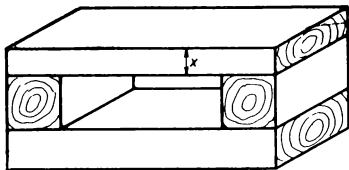
Na dřevěnou desku tvaru kvádrů o rozměrech podstavy  $a = 60,0 \text{ cm}$ ,  $b = 30,0 \text{ cm}$  a výšce  $v = 8,0 \text{ cm}$  jsou připevněny dva stejné dřevěné hranoly o čtvercových základnách  $a_1 = 10,0 \text{ cm}$  a výškách  $v_1 = 30,0 \text{ cm}$ , jak ukazuje obr. 86. Deska i hranoly jsou ze stejného bukového dřeva hustoty  $\rho = 600 \text{ kg/m}^3$ . Hranoly jsou k desce připevněny kolíky ze stejného dřeva, takže těleso je homogenní. Deska s hranoly plove na vodě. Druhou

kvádřovou desku (ze stejného dřeva) o stejných rozměrech podstavu položíme na hranoly na první desce tak, že okraje obou desek jsou přesně nad sebou (aby se neporušila rovnováha plování). Hustota vody je  $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

a) Jaká musí být výška druhé desky, aby se celé těleso potápělo tak, že spodní stěna druhé desky se bude právě dotýkat vodní hladiny (obr. 87)?



Obr. 86



Obr. 87

b) Řešte stejnou úlohu jako v a) za předpokladu, že hranoly připevněné na první desce jsou stejným způsobem připevněny na její spodní straně.

c) Předpokládáme, že těleso je ve stejné poloze jako v a). Jaké musí být hrany podstav obou hranolů, aby výška

horní desky byla stejná jako výška spodní desky? Těleso se má opět potopit tak, aby se spodní stěna horní desky právě dotýkala hladiny.

Řešte nejprve obecně a potom numericky.

**Řešení:**

Podle podmínky úlohy se tíha celého tělesa musí rovnat tíze vody, jejíž objem se rovná objemu ponořené části tělesa (Archimédův zákon).

a) 1. Obecné řešení:

Tíha  $G_1$  celého tělesa (tíha spodní desky + tíha obou hranolů + tíha horní desky) se musí rovnat tíze  $G_2$  vody, jejíž objem se rovná objemu spodní desky a objemu obou hranolů.

$$G_1 = G_2,$$

$$(abv + 2 a_1^2 v_1 + abx) \rho g = (abv + 2 a_1^2 v_1) \rho_1 g.$$

Rovnici dělíme  $g$  a vypočteme:

$$x = \frac{(abv + 2 a_1^2 v_1) (\rho_1 - \rho)}{ab\rho}. \quad (1)$$

Výška horní desky je dána vztahem (1).

2. Numerické řešení:

$$a = 60,0 \text{ cm} = 0,600 \text{ m},$$

$$a_1 = 10,0 \text{ cm} = 0,100 \text{ m},$$

$$b = 30,0 \text{ cm} = 0,300 \text{ m},$$

$$v_1 = 30,0 \text{ cm} = 0,300 \text{ m},$$

$$v = 8,0 \text{ cm} = 0,080 \text{ m},$$

$$\rho = 600 \text{ kg/m}^3,$$

$$\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3,$$

$x$  je výška horní desky.

Rozměrová zkouška pravé strany rovnice (1)

$$[x] = \frac{\text{m}^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{\text{m}^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = \text{m}.$$

Výška horní desky z rovnice (1) vyjde v metrech; dosadíme-li dané veličiny, vypočteme

$$x = 0,076 \text{ m} = 7,6 \text{ cm} .$$

Výška horní desky musí být při daných podmínkách 7,6 cm.

b) Položíme-li desku na vodu tak, že hranoly jsou na spodní straně desky, pak za daných podmínek je objem vytlačené vody, a tedy i tíha vody  $G_2$  vytlačená tělesem stejná jako v případě a). Ale i tíha celého tělesa  $G_1$  je stejná jako v případě a). Platí tedy v tomto případě nahoře uvedené vztahy a dostaneme i stejný výsledek

$$x = 7,6 \text{ cm} .$$

### c) 1. Obecný výpočet:

Neznámou veličinou je nyní hrana  $a_1$  čtvercové základny obou hranolů. Označme ji nyní  $x$ . Tloušťka horní desky je nyní  $v$ . Tíhu celého tělesa označme  $G_3$ , tíhu vody vytlačené ponořenou částí tělesa  $G_4$ . Platí

$$G_3 = (2abv + 2x^2v_1)\rho g ,$$

$$G_4 = (abv + 2x^2v_1)\rho_1 g .$$

Má platit

$$G_3 = G_4 ,$$

$$(2abv + 2x^2v_1)\rho g = (abv + 2x^2v_1)\rho_1 g ,$$

odkud vypočteme

$$x^2 = \frac{abv(2\rho - \rho_1)}{2v_1(\rho_1 - \rho)} ,$$

$$x = \sqrt{\frac{abv(2\rho - \rho_1)}{2v_1(\rho_1 - \rho)}} . \quad (2)$$

### 2. Numerický výpočet:

Dané veličiny jsou stejné až na výšku horní desky,



kteřá je také  $v$ , a dělku ětvercově podstavy hranolů, kteřá je nyně  $x$ . Rozměrová zkouška vztahu (2)

$$[x] = \sqrt{\frac{\text{m}^3 \text{ kg/m}^3}{\text{m kg/m}^3}} = \text{m} .$$

Dosaděme-li daně veliěiny do posledněch vztahů, dostaneme

$$x^2 = 0,0120 \text{ m}^2 ,$$

$$x = 0,11 \text{ m} .$$

Dělka hrany ětvercově podstavy hranolů je  $x = 11 \text{ cm}$ .

## 2. přěklad (navrhl Miroslav Dvořák)

Jede-li automobil ŠKODA 1000 MB pŕuměrnou rychlostě 65 km/h, spotřebuje na dráze  $d = 100 \text{ km}$  objem  $V = 7,2$  litrů benzěnu. Jeho motor má pŕi tom pŕuměrný výkon  $P = 20 \text{ k}$ .

Vypoětěte ũěinnost  $\eta$  motoru automobilu ŠKODA 1000 MB, je-li hustota benzěnu  $\rho = 0,70 \text{ kg/dm}^3$  a věhřevnost benzěnu  $H = 11\,000 \text{ kcal/kg}$ .

Poětějte nejprve obecně, potom pro daně hodnoty.

*Řešení:*

ũěinnost  $\eta$  motoru je dána poměrem  $\eta = \frac{\text{výkon}}{\text{pŕikon}}$ . Výkon motoru je dán, pŕikon motoru vypoěteme z daných hodnot.

1. Výpoěet pŕikonu (obecně řešení): Rychlost automobilu je  $v$ . Automobil spotřebuje za ěas  $t$  množství benzěnu o hmotnosti  $m$ :

$$m = \frac{v t}{d} V \rho .$$

Spálením množství benzínu o hmotnosti  $m$  je dodáno motoru za čas  $t$  množství tepla

$$Q = \frac{v t}{d} V \rho H.$$

Pro příkon  $P$  motoru pak dostaneme

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{v V \rho H}{d}.$$

2. Výpočet účinnosti (obecné řešení):

$$\eta = \frac{P}{P'} = \frac{P d}{v V \rho H}.$$

3. Numerický výpočet:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P d}{v V \rho H} = \\ &= \frac{20 \text{ k} \cdot 100 \text{ km}}{65 \text{ km/h} \cdot 7,2 \text{ dm}^3 \cdot 0,70 \text{ kg/dm}^3 \cdot 11\,000 \text{ kcal/kg}} = \\ &= \frac{20 \cdot 75 \cdot 9,81 \text{ J/s} \cdot 100}{\frac{65}{3600 \text{ s}} \cdot 7,2 \cdot 0,70 \cdot 11\,000 \text{ kcal}} = \\ &= \frac{\frac{20 \cdot 75 \cdot 9,81 \cdot 100}{4200} \text{ kcal}}{\frac{65 \cdot 7,2 \cdot 0,70 \cdot 11\,000}{3\,600} \text{ kcal}} = 0,35. \end{aligned}$$

Účinnost automobilu ŠKODA MB 1000 je  $\eta = 35 \%$ .

**3. příklad** (navrhl Miroslav Voráček)

Jaký je poměr odporů dvou žárovek stejného příkonu  $P$ , z nichž jedna je na napětí  $U_1$ , druhá na napětí  $U_2$ ?

Počítejte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $U_1 = 220 \text{ V}$ ,  $U_2 = 120 \text{ V}$ .

**Řešení:**

Vyjdeme ze zákona pro příkon elektrického spotřebiče  $P = UI$ . Proud  $I$  jdoucí spotřebičem vyjádříme z Ohmova zákona.

a) Obecné řešení:

Rovnost příkonů obou žárovek vyjádříme rovnicí

$$U_1 I_1 = U_2 I_2. \quad (1)$$

Podle Ohmova zákona platí

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}; \quad I_2 = \frac{U_2}{R_2}, \quad (2)$$

kde  $R_1$  a  $R_2$  jsou odpory žárovek.

Do rovnice (1) dosadíme z rovnic (2) za  $I_1$  a  $I_2$ . Po úpravě dostaneme výsledek:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{U_1^2}{U_2^2} = p.$$

Poměr odporů dvou žárovek, které mají stejný příkon, ale jsou určeny pro různá napětí  $U_1$  a  $U_2$ , se rovná druhé mocnině poměru napětí  $U_1$  a  $U_2$

$$p = \frac{R_1}{R_2} = \left( \frac{U_1}{U_2} \right)^2.$$

b) Numerické řešení:

Dosadíme-li do poslední rovnice hodnoty ze zadání, dostaneme

$$p = \left( \frac{220}{120} \right)^2 = \left( \frac{11}{6} \right)^2 \doteq 3,36.$$

Ze dvou žárovek, které mají stejný příkon, ale jedna je na napětí 220 V, druhá na 120 V, má žárovka pro 220 V odpor 3,36krát větší než žárovka na 120 V.

#### 4. příklad (navrhl Evžen Říman)

Elektromotor o příkonu  $P$  při napětí  $U$  je připojen k rozvodné síti měděným vedením délky  $l$ . Jak velký musí být průměr přívodních měděných drátů, je-li dovolená ztráta příkonu na přívodních drátech  $p$  %?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $P = 35$  kW,  $U = 400$  V,  $l = 2160$  m, měrný odpor mědi  $\varrho = 0,0176 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ ,  $p = 5,0$ .

*Řešení:*

Přívodními dráty i elektromotorem prochází stejný proud  $I$ . Poněvadž pro elektromotor je dán příkon  $P$  i napětí  $U$ , platí

$$I = \frac{P}{U}.$$

Odpor přívodních drátů označíme  $R$ . Při průchodu proudem  $I$  vodičem odporu  $R$  se za čas  $t$  vykoná práce

$$A = R I^2 t. \quad (1)$$

Práce  $A$  se stále mění v teplo a odvádí se do okolí vodiče. Ztráta příkonu  $P_1$  na přívodních drátech je

$$P_1 = \frac{A}{t}.$$

Podle zadání je

$$P_1 = \frac{p P}{100}.$$

Z rovnice (1) vypočteme odpor přívodních drátů  $R$

$$R = \frac{\rho U^2}{100 P}. \quad (2)$$

Přitom jsme použili všech předcházejících vztahů.

Obecné řešení:

Odpor vodiče délky  $l$  a průřezu  $\pi \frac{d^2}{4}$  je dán vztahem

$$R = \rho \frac{4l}{\pi d^2}. \quad (3)$$

Dosadíme-li do rovnice (2) za  $R$  z rovnice (3), dostáváme pro hledaný průměr přívodních drátů  $d$

$$d^2 = \frac{4\rho l P 100}{\pi \rho U^2},$$

$$d = \frac{20}{U} \sqrt{\frac{\rho l P}{\pi \rho}}. \quad (4)$$

Numerický výpočet:

Rozměrová zkouška vztahu (4):

$$d = \frac{1}{V} \sqrt{\Omega \text{ mm}^2/\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{V} \cdot \text{A}} = \frac{1}{V} \sqrt{V^2 \text{ mm}^2} = \text{mm}.$$

Průměr  $d$  vyjde v mm. Po dosazení daných hodnot vyjde

$$d = \frac{20}{400} \sqrt{\frac{0,0176 \cdot 2160 \cdot 35\,000}{3,142 \cdot 5,0}} \text{ mm},$$

$$d = 14,5 \text{ mm}.$$

Nemá-li být ztráta příkonu větší než 5,0 %, musí být průměr přívodních drátů aspoň 14,5 mm. Při menším průměru by podle rovnic (1) a (2) byla ztráta větší.

### c) Třetí kolo soutěže

#### 1. příklad (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Parník  $A$  má délku  $d_1$  a rychlost v klidné vodě  $v_1$ ; parník  $B$  má délku  $d_2$  a rychlost v klidné vodě  $v_2$  ( $v_1 > v_2$ ).

Parníky plují po proudu řeky a parník  $A$  předhání parník  $B$  (rychlost proudu vody v řece označte  $c$ ). Od okamžiku, kdy je před parníku  $A$  na úrovni zádi parníku  $B$ , do okamžiku, kdy záď parníku  $A$  je na úrovni přídě parníku  $B$ , uplyne čas  $t_1$ .

Plují-li parníky na tomtéž místě řeky proti sobě, pak od okamžiku, kdy jsou na stejné úrovni přídě obou lodí, uplyne čas  $t_2$ .

a) Vypočtete rychlosti obou parníků v klidné vodě.

b) Nechť oba parníky plují proti proudu řeky a parník  $A$  opět předhání parník  $B$ . Na základě výsledků z a) určete čas  $t_3$ , který uplyne od okamžiku, kdy bude před lodí  $A$  na úrovni zádi lodí  $B$ , do okamžiku, kdy bude záď lodí  $A$  na úrovni přídě lodí  $B$ .

Počítejte nejprve obecně a potom pro hodnoty  $d_1 = 65$  m,  $d_2 = 40$  m,  $t_1 = 70$  s,  $t_2 = 14$  s.

**Řešení:**

Přídě lodí označíme jako body  $P_1$  a  $P_2$ . Vyjdeme z počátečních poloh těchto bodů a rozdílem jejich drah za daný čas vyjádříme situaci popsanou v zadání. Rychlost proudu řeky je  $c$ .

a) Situaci v prvním případě ukazuje obr. 88, z něhož čteme:

$$(v_1 + c) t_1 - [d_2 + (v_2 + c) t_1] = d_1.$$

Situaci v druhém případě ukazuje obr. 89, z něhož

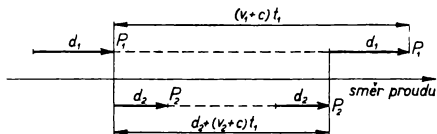
vyvodíme

$$(v_1 + c) t_2 + (v_2 - c) t_2 = d_1 + d_2.$$

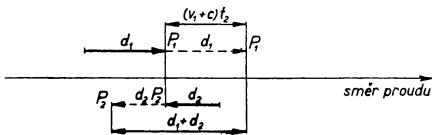
Obě rovnice upravíme a dostaneme

$$v_1 - v_2 = \frac{d_1 + d_2}{t_1}, \quad (1)$$

$$v_1 + v_2 = \frac{d_1 + d_2}{t_2}.$$



Obr. 88



Obr. 89

Z těchto rovnic vypočteme

$$v_1 = \frac{d_1 + d_2}{2} \left( \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_1} \right),$$

$$v_2 = \frac{d_1 + d_2}{2} \left( \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right).$$

Numerické řešení: Dosazením zadaných hodnot vypočteme

$$v_1 = 4,5 \text{ m/s}, \quad v_2 = 3,0 \text{ m/s}.$$

b) Situaci si lze představit podle obr. 88, ale směr proudu řeky je nutno obrátit. Dostaneme rovnici

$$(v_1 - c) t_3 - [d_2 + (v_2 - c) t_3] = d_1.$$

Po úpravě dostaneme výsledek

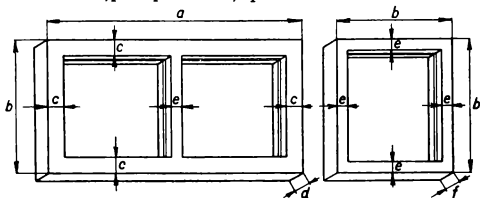
$$t_3 = \frac{d_1 + d_2}{v_1 - v_2}.$$

Dosazením daných a vypočtených hodnot do této rovnice dostaneme

$$t_3 = 70 \text{ s}.$$

## 2. příklad (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Na břehu rybníka je chata. Chlapci mají za úkol umýt v rybníku kuchyňské okno a okénko od spižírny chaty (obr. 90). Chlapci vědí, že práce je snazší, když se okna položí na vodu. Nejsou si však jisti, zda se okna nepotopí. Proto se nejprve přesvědčují pokusem.



Obr. 90



a) Rozhodněte, jaký byl výsledek jejich pokusu, jestliže pokládali okna na vodu tak, že pod sklem není vzduch. Potopí se okno od kuchyně nebo okno od spíže?

b) Chlapci se také pokusili pokládat na vodě okna na sebe. Jaký byl výsledek tohoto pokusu?

Při svém rozhodnutí vycházejte z početní úvahy. Počítejte nejprve obecně a potom pro hodnoty  $a = 140$  cm,  $b = 45$  cm,  $c = 4,0$  cm,  $d = 5,0$  cm,  $e = 2,0$  cm,  $f = 3,0$  cm. Tloušťka skla  $h = 0,30$  cm, měrná tíha vody  $\gamma_0 = 1,00$  kp/dm<sup>3</sup>, měrná tíha dřeva  $\gamma_1 = 0,50$  kp/dm<sup>3</sup>, měrná tíha skla  $\gamma_2 = 2,5$  kp/dm<sup>3</sup>.

Všechny rozměry jsou zakresleny v obrázku. Rámy jsou kresleny co nejjednodušeji, aby se zjednodušil výpočet. Sklo je sice zapuštěné v rámu, ale pro jednoduchost uvažujeme jen sklo mimo dřevo.

*Řešení:*

Těleso plave na vodě tehdy, když jeho tíha je menší než tíha vody, jejíž objem se rovná objemu tělesa (důsledek Archimédova zákona).

a) Rám kuchyňského okna rozložíme na pět hranolů: dva hranoly o rozměrech  $a, c, d$ , dva hranoly o rozměrech  $(b - 2c), c, d$  a jeden hranol o rozměrech  $(b - 2c), e, d$ .

Objem rámu  $V_1$  kuchyňského okna je

$$V_1 = 2ac d + 2(b - 2c)cd + (b - 2c)ed.$$

Po úpravě bude

$$V_1 = d[2ac + (b - 2c)(2c + e)]. \quad (1)$$

Dvě stejné skleněné tabule o rozměrech  $\frac{1}{2}(a - 2c - e)$ ,  $(b - 2c)h$  mají objem

$$V_2 = (a - 2c - e)(b - 2c)h. \quad (2)$$

Objem okna  $V$  je

$$V = V_1 + V_2 \quad (3)$$

a tíha okna

$$G = V_1 \gamma_1 + V_2 \gamma_2 . \quad (4)$$

Tíha vody, jejíž objem se rovná objemu okna, je

$$G_1 = (V_1 + V_2) \gamma_0 .$$

Okno plave nebo se potopí podle toho, které znaménko platí v nerovnosti

$$G \leq G_1 . \quad (5)$$

Dosazením daných hodnot do rovnic (1), (2), (3) a (4) vypočteme

$$V_1 = 7,45 \text{ dm}^3, \quad V_2 = 1,44 \text{ dm}^3, \quad V = 8,89 \text{ dm}^3 .$$

Tíha okna je  $G = 7,32 \text{ kp}$ , tíha vody, jejíž objem se rovná objemu okna, je  $G_1 = 8,89 \text{ kp}$ . Poněvadž podle nerovnosti (5) platí

$$7,32 \text{ kp} < 8,89 \text{ kp} ,$$

kuchyňské okno plave na vodě.

Dřevěný rám spižirny si rozdělíme na dva hranoly o rozměrech  $b, e, f$  a na dva hranoly o rozměrech  $(b - 2e), e, f$ .

Objem dřevěného rámu okna je

$$V_1 = 4 e f (b - e) . \quad (6)$$

Sklo je hranol o čtvercové základně o straně  $(b - 2e)$  a o výšce  $h$ . Objem skla je

$$V_2 = (b - 2e)^2 h . \quad (7)$$

Objem okna je tedy celkem

$$V = V_1 + V_2 . \quad (8)$$

Tíha okna je

$$G = V_1 \gamma_1 + V_2 \gamma_2 , \quad (9)$$

tíha vody, jejíž objem se rovná objemu okna, je

$$G_1 = (V_1 + V_2) \gamma_0 . \quad (10)$$

Dosazením do rovnic (6), (7), (8), (9) a (10) vypočteme

$$V_1 = 1,03 \text{ dm}^3, V_2 = 0,51 \text{ dm}^3, V = 1,54 \text{ dm}^3.$$

Tíha okna je  $G = 1,79 \text{ kp}$ . Tíha vody, jejíž objem se rovná objemu okna, je  $G_1 = 1,54 \text{ kp}$ .

Poněvadž  $G > G_1$ , tj.  $1,79 \text{ kp} > 1,54 \text{ kp}$ , okno do spíže se potopí.

b) Součet tíh obou oken je  $\bar{G} = 9,12 \text{ kp}$  a tíha vody, jejíž objem se rovná součtu objemů obou oken, je  $\bar{G}_1 = 10,4 \text{ kp}$ . Platí tedy  $\bar{G} < \bar{G}_1$ .

Položí-li se okno od spíže na kuchyňské okno, výsledné těleso opět plave na vodě.

### 3. příklad (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Žák  $A$  měl v laboratorních pracích za úkol smíchat množství vody o hmotnosti  $m_1$  a o teplotě  $t_1$  s množstvím vody o hmotnosti  $m_2$  a o teplotě  $t_2$  a s množstvím vody o hmotnosti  $m_3$  a o teplotě  $t_3$ . Výslednou teplotu  $t$  měl vypočítat a ověřit měřením.

Během pokusu však žák  $B$  vhodil nepozorovaně do nádoby s vodou kousek ledu (hmotnost ledu označíme  $m_4$ ) o teplotě  $t_0 = 0,0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Žák  $A$  vypočetl výslednou teplotu  $t$ , ale naměřil teplotu o  $\Delta t$  nižší.

a) Vypočtete výslednou teplotu  $t$ .

b) Vypočtete hmotnost ledu  $m_4$ , který žák  $B$  vhodil do vody v nádobě.

Počítejte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $m_1 = 0,20 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0,30 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 0,15 \text{ kg}$ ,  $t_1 = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_3 = 60 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\Delta t = 4,0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Měrné teplo vody  $c = 1,0 \text{ kcal/kg} \cdot \text{ }^\circ\text{C}$ , měrné skupenské teplo tání ledu  $l = 80 \text{ kcal/kg}$ .

Tepelné ztráty zanedbáváme.

**Řešení:**

Použijeme zákona zachování tepla jako zvláštního případu zákona zachování energie.

Poněvadž musíme předpokládat, že  $t_1 \neq t_2 \neq t_3$ , můžeme též předpokládat, že teplota jedné vody je nejvyšší, např.  $t_3$ , a teplota jedné vody je nejnižší, např.  $t_1$ . Platí tedy  $t_1 < t_3$  a pak musí pro výslednou teplotu platit  $t_1 < t < t_3$ . Pro teplotu  $t_3$  pak mohou platit buď nerovnosti  $t_1 < t_2 < t < t_3$ , nebo  $t_1 < t < t_2 < t_3$ . Podle toho, které nerovnosti platí, vyjádříme zákon zachování tepla některou z následujících rovnic:

$$m_1(t - t_1)c + m_2(t - t_2)c = m_3(t_3 - t)c,$$

$$m_1(t - t_1)c = m_2(t_2 - t)c + m_3(t_3 - t)c.$$

Z kterékoli z těchto rovnic dostaneme stejnou výslednou teplotu  $t$ :

$$t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2 + m_3 t_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Dosazením daných hodnot do této rovnice vypočteme výslednou teplotu směsi  $t = 30^\circ\text{C}$ .

b) Výsledné množství vody (bez vody vzniklé roztavením ledu) označme  $M = m_1 + m_2 + m_3$ . Žák  $A$  očekával, že toto množství vody bude mít teplotu  $t$ . Naměřil však o  $\Delta t$  méně. Proto množství tepla  $Q = M c \Delta t$  se spotřebovalo na roztavení ledu a na ohřátí vody z ledu vzniklé z teploty  $0,0^\circ\text{C}$  na teplotu  $t - \Delta t$ . Vyjádřeno rovnicí:

$$m_4 l + m_4 c (t - \Delta t) = M c \Delta t,$$

Odkud

$$m_4 = \frac{M \Delta t c}{l + c(t - \Delta t)}.$$

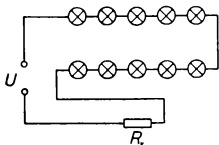
Dosadíme-li do této rovnice dané hodnoty, vypočteme

$$m_4 = 0,024 \text{ kg} = 24 \text{ g} .$$

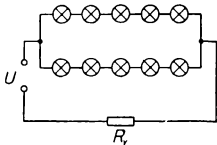
Žák *B* hodil do nádoby s vodou 24 g ledu.

#### 4. příklad (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Z počtu  $2n$  stejných žárovek (každá žárovka je na napětí  $U_1$  a má odpor  $R_1$ ) se má na reklamním štítě vytvořit dvojitá svítící řada. K dispozici je zdroj elektrického napětí  $U$ .



Obr. 91



Obr. 92

Dvojitou svítící řadu je možno vytvořit buď v zapojení podle obr. 91 (spojení sériové), nebo podle obr. 92 (toto spojení budeme nazývat spojení paralelní).

a) Vypočtěte předřazený odpor  $R_x$  při sériovém zapojení a předřazený odpor  $R_y$  při paralelním zapojení.

b) Vypočtěte proud v každé žárovce při obou zapojeníích.

c) Co se stane, když se přepálí jedna žárovka v sériovém zapojení, a co se stane, když se přepálí jedna žárovka v paralelním zapojení, za předpokladu, že žárovka snese přetížení elektrickým proudem asi o 20 %?

Části úlohy a) a b) počítejte nejprve obecně a potom

pro hodnoty  $U = 220 \text{ V}$ ,  $U_1 = 12 \text{ V}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $n = 5$ .  
Část c) úlohy řešte jen pro zadané hodnoty. Odpor  
přívodních drátů zanedbáváme.

*Řešení:*

Užijeme Ohmova zákona a poznatku, že v uzavřeném elektrickém obvodu je napětí na vodičích rozloženo v poměru jejich odporů.

V sériovém zapojení má řada žárovek odpor  $2n R_1$ , na kterém má být napětí  $2n U_1$ . Napětí zdroje  $U$  se na odporech v obvodě rozdělí v poměru

$$R_x : 2n R_1 = (U - 2n U_1) : 2n U_1.$$

Z této rovnice vypočteme

$$R_x = \frac{U - 2n U_1}{U_1} R_1. \quad (1)$$

V paralelním zapojení má dvojitá řada žárovek odpor  $\frac{n}{2} R_1$ , na kterém má být napětí  $n U_1$ . Platí tedy

$$R_y : \frac{n}{2} R_1 = (U - n U_1) : n U_1.$$

Odtud vypočteme

$$R_y = \frac{U - n U_1}{2 U_1} R_1. \quad (2)$$

Numerické řešení:

Dosazením zadaných hodnot do rovnic (1) a (2) dostaneme

$$R_x = 167 \Omega,$$

$$R_y = 133 \Omega.$$

b) V sériovém zapojení je odpor celého obvodu  $R_s =$

$= R_x + 2 n R_1$ . Dosazením za  $R_x$  z rovnice (1) vypočteme

$$R_s = U \frac{R_1}{U_1}.$$

Potom pro velikost proudu každou žárovkou v sériovém zapojení dostaneme vztah

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}. \quad (3)$$

V paralelním zapojení je odpor celého obvodu

$$R_p = R_y + \frac{n}{2} R_1.$$

Dosazením za  $R_y$  ze vztahu (2) vypočteme

$$R_p = \frac{1}{2} U \frac{R_1}{U_1}.$$

Proud v nerozvětvené části obvodu

$$I_2 = 2 \frac{U_1}{R_1}. \quad (4)$$

Obě větve s žárovkami jsou stejné, proto v každé větvi, a tedy v každé žárovce je proud

$$I_3 = \frac{I_2}{2} = \frac{U_1}{R_1}. \quad (5)$$

Proud v každé žárovce v sériovém zapojení je dán vztahem (3), při paralelním zapojení vztahem (5). Porovnáním vztahů (3) a (5) je vidět, že proud v každé žárovce je v obou případech stejný.

Dosazením daných hodnot do rovnice (3) nebo (5) vypočteme

$$I_1 = I_3 = 0,60 \text{ A}.$$

c) Když se přepálí jedna žárovka v sériovém zapojení, obvod se tím přeruší a proud nebude procházet. Všechny zbývající žárovky zhasnou.

Jestliže se přepálí jedna žárovka v paralelním spojení, tato větev bude vyřazena, žárovky v ní rovněž zhasnou. Celkový proud půjde druhou větví, která má odpor  $R = n R_1 + R_y$ . Dosadíme-li do tohoto vztahu za  $R_y$  z rovnice (2), vypočteme

$$R = \frac{U R_1 + n U_1 R_1}{2 U_1},$$

a tedy obvodem (každou žárovkou) bude procházet proud

$$I = \frac{U}{R},$$

$$I = \frac{2 U_1 U}{U R_1 + n U_1 R_1}.$$

Dosadíme-li do této rovnice hodnoty ze zadání, vypočteme, že v tomto případě prochází každou žárovkou proud 0,94 A.

Žárovka na 12 V o odporu  $20 \Omega$  má plný výkon, prochází-li jí proud 0,60 A. Tento proud považujeme za 100 %. Proud 0,96 A je tedy o více než o 50 % vyšší. Toto zvýšení proudu žárovky ve zbývající větví nevydrží a přepálí se.

Proto je výhodnější spojení sériové podle obr. 91.



## IV. ČÁST

# TŘETÍ MEZINÁRODNÍ FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA V ČSSR

### 1. Průběh a výsledky soutěže

Na schůzi mezinárodní komise pro fyzikální olympiádu v r. 1968 v Budapešti bylo rozhodnuto, aby se třetí mezinárodní fyzikální olympiáda (3. MFO) v r. 1969 konala v ČSSR, poněvadž ČSSR slaví 10. výročí založení fyzikální olympiády, a aby byl před jejím uspořádáním projednán a schválen statut, jehož návrh připravil ÚV FO v ČSSR. Projednáním statutu byl pověřen prof. dr. Rostislav Košťál, člen mezinárodní komise.

Mezinárodní komise se sešla ve dnech 16. a 17. ledna 1969 v Brně. Pozváni byli vedoucí všech osmi delegací z druhé mezinárodní fyzikální olympiády. Dostavili se zástupci z Bulharska (z velvyslanectví), Jugoslávie, Maďarska, NDR (dva) a Polska. Za ČSSR byl jednání přítomen vedle předsedy komise prof. Košťála doc. dr. Ivan Náter, místopředseda ÚV FO, odb. asistent Josef Konrád, jednatel ÚV FO, a doc. dr. Jiří Beránek. Statut a směrnice byly vypracovány na jednání v němčině a pak přeloženy do češtiny, ruštiny, francouzštiny a angličtiny.

Pro přípravu 3. MFO byl utvořen pracovní výbor, který se po několika schůzích rozdělil na organizační pracovní výbor a na pracovní výbor pro sestavení úloh. Schůze výborů začaly již v prosinci a bylo jich svoláno devět. Ke zvládnutí úkolů byla do práce zapojena katedra

fyziky 2. fakulty VAAZ v Brně i katedra fyziky 1. fakulty VAAZ ve Vyškově, od konce měsíce května též pracovníci katedry experimentální fyziky přírodovědecké fakulty University J. E. Purkyně v Brně. Poněvadž v dubnu onemocněl jednatel ÚV FO a poněvadž nebyla povolena sekretářka, nesl veškerou zodpovědnost za průběh 3. MFO sám předseda.

Třetí mezinárodní fyzikální olympiáda se řídila přesně schváleným statutem i směrnicemi. Tam, kde směrnice dávaly organizátorovi možnost rozhodnout podle vlastního uvážení a podle jeho možností, byly sestaveny speciální směrnice pro 3. MFO. Podle stanov musely být pozvány na 3. MFO všechny státy, které se v minulých ročnících zúčastnily MFO: Bulharsko, Jugoslávie, Maďarsko, NDR, Polsko, Rumunsko a SSSR. Ministerstvo školství vybralo z navržených dalších států Anglii, Francii, Itálii a Švédsko, takže s ČSSR bylo tedy naplánováno 12 států. Do jednotlivých 11 států byly pak poslány informace o 3. MFO. Po různých intervencích přišla zpráva z Anglie, že se 3. MFO nezúčastní, poněvadž nemají ekvivalentní domácí soutěž. Z Itálie a ze Švédska přišly v červnu dotazy na bližší informaci o 3. MFO, které byly od nás ihned vyřízeny, ale už asi nemohly umožnit těmto státům cestu na 3. MFO. Francie neodpověděla.

Z každého státu bylo pozváno pět soutěžících, jeden vedoucí delegace a jeden pedagogický instruktor. Vedoucím delegace ČSSR byl předseda ÚV FO prof. dr. R. Košťál. Na schůzi ÚVFO bylo stanoveno, že účastníky 3. MFO za ČSSR bude prvních pět vítězů 3. kola FO. Proto bylo od nás jmenováno pro 3. MFO toto družstvo:

1. Vladimír Černý, 2. S ročník SVŠ Bratislava, Novohradská,
2. Mojmír Šob, 3.P ročník SVVŠ Velké Meziříčí,

3. František Komín, 3. r. SPŠ Kutná Hora,
4. Juraj Šafařík, 2.S r. SVŠ Bratislava, Novohradská,
5. Karol Šafařík, 1.S r. SVŠ Bratislava, Novohradská,

a jako náhradníci:

6. Václav Novotný, 3. r. SPŠJT Praha 4, Svatoslavova,
7. Antonín Rozsypal, 3. r. SPŠE Olomouc.

Všichni splňovali podmínky, stanovené statutem a směrnici. Soutěže v Brně se zúčastnilo 5 jmenovaných členů družstva.

Třetí MFO byla naplánována na dobu od 22. června do 2. července v Brně. Delegace se začaly sjíždět v neděli 22. června (jen vedoucí delegace SSSR přijel o dva dny dříve). Delegace byly očekávány na nádraží předsedou ÚV FO a několika členy KV FO Jihomoravského kraje a taxíky dopravovány do kolejí VUT v Leninově ul. Členové delegace SSSR byli ubytováni v kolejích VAAZ. Při příjezdu do kolejí byl všem účastníkům předán program, odznak opravňující ke vstupu do soutěžních prostorů, kapesné, program do divadla, prospekty a každé delegaci dva plány města Brna. Všechny informace byly připraveny v pěti uvedených jazycích. Stravování bylo zajištěno v menze VUT na třídě Obránců míru 21.

Druhý den, v pondělí, byla dopoledne uspořádána prohlídka Brna a okolí. Odpoledne v 17 hod. bylo slavnostní zahájení v aule 3. fakulty VAAZ. Za předsednickým stolem zasedli předseda KNV Zdeněk Vávra, velitel — prorektor VAAZ pověřený funkcí rektora generálporučík Ing. Jaroslav Dočkal, zástupce ministerstva školství ČSR ústřední školní inspektor Josef Bartůněk, zástupce ministerstva školství SSR školní inspektor Košťál, zástupce university J. E. Purkyně prorektor

prof. dr. Miroslav Novotný a členové organizačního výboru doc. dr. Jiří Beránek a dr. Jan Kučírek. Odbor školství KNV byl zastoupen vedoucí ped. oddělení inspektorkou Věrou Doležalovou.

Po nástupu za předsednický stůl zazpívalo Brněnské pěvecké sdružení Foerster, řízené profesorem Karlem Hradilem, Nešverův sbor Moravě. Potom předseda ÚV FO Košťál uvítal přítomné a přednesl projev k mezinárodní fyzikální olympiádě a k 10. výročí fyzikální olympiády v ČSSR. Po projevu promluvil předseda KNV Zdeněk Vávra, zástupce ministerstva školství ústřední školní inspektor ČSR Josef Bartůněk a za delegace vedoucí polské delegace prof. dr. Czesław Scisłowski.

Po těchto projevech oznámil předseda ÚVFO jména 53 pracovníků ve fyzikální olympiádě, kterým za tuto práci zaslali náměstek ministra školství ČSR (resp. náměstek ministra školství SSR) a Jednota československých matematiků a fyziků děkovné dopisy a ÚV FO udělil pochvalná uznání. Toto pochvalné uznání udělil ÚV FO ještě dalším 60 zasloužilým pracovníkům FO. Po zazpívání Foerstrova sboru Velké, širé rodné lány a Novákova sboru Kyjov a po informacích bylo slavnostní zahájení ukončeno. Veškeré projevy byly tlumočeny (doc. Beránkem a dr. Kučírkem) do franštiny, ruštiny a němčiny.

Po slavnostním zahájení byla informační schůze pro všechny účastníky MFO. Na ní bylo kromě instrukcí oznámeno, že na 4 teoretické úlohy je vymezena doba 5 hodin a rovněž i na řešení experimentální úlohy je dána doba 5 hodin. Dále bylo oznámeno, že klasifikace bude vyjádřena u každé úlohy v nejpříznivějším případě 8 body, tedy celkem bude devítistupňová. U laboratorní úlohy se hodnotí teoretické zpracování úlohy maximálně

8 body a rovněž i experimentální provedení maximálně 8 body. Nejvyšší počet dosažitelných bodů je tedy  $6 \times 8$  bodů = 48 bodů. Podle směrnic se udělí tedy

prvá cena řešiteli, který získá	48—44 bodů,
druhá cena řešiteli, který získá	43—38 bodů,
třetí cena řešiteli, který získá	37—32 body,
a pochvalné uznání řešiteli, který získá	31—25 bodů.

Řešitelé, kteří dosáhnou menšího počtu bodů, jsou neúspěšní.

Užijeme-li těchto směrnic i pro družstva, přísluší

prvá cena družstvu, které získá	240—217 bodů,
druhá cena družstvu, které získá	216—188 bodů,
třetí cena družstvu, které získá	187—157 bodů,
a pochvalné uznání družstvu, které získá	156—121 bodů.

O udělení věcných cen rozhoduje pak organizátor.

Večer se sešla podle statutu mezinárodní komise, na níž předseda oznámil jména členů mezinárodní komise za jednotlivé státy:

Bulharsko:	dr. Petko Rusev Kamadžiev, CSc.,
Československo:	prof. dr. Rostislav Košťál,
Jugoslávie:	dr. Božidar Milić,
Maďarsko:	prof. Rezső Kunfalvi,
NDR:	dr. Joachim Wendt,
Polsko:	prof. dr. Czesław Scisłowski,
Rumunsko:	prof. dr. Nicolas Stănescu,
SSSR:	Anatolij Ivanovič Janzov, člen korespondent,

a jména pedagogických instruktorů za jednotlivé státy:

Bulharsko:	Nicola Milanov Velčev,
------------	------------------------

Československo:	doc. dr. Ivan Náter,
Jugoslávie:	Milan Raspopović, CSc., profesor,
Maďarsko:	Géza Tichy,
NDR:	Martin Griwatz,
Polsko:	dr. Tadeusz Pniewski,
Rumunsko:	Lidia Panaiotová,
SSSR:	Galina Tarasiuková.

Potom předseda mezinárodní komise seznámil všechny členy s přípravnými pracemi a bylo ověřeno, že všichni soutěžící odpovídají podmínkám soutěže. SSSR však byl zastoupen šesti účastníky a k rumunskému družstvu se připojil ještě další rumunský student, který se jel soukromě podívat do ČSSR. Bylo rozhodnuto, že šestý účastník ze SSSR Vladimír Petuchov a Gheorghe Rusu z RSR se mohou zúčastnit MFO, ale jen mimo soutěž.

Pro každou skupinu korektorů byl ustanoven jeden člen mezinárodní komise jako dozírající. Pro prvou úlohu byl určen dr. Kamadžiev z BLR, pro 2. úlohu prof. Stănescu z RSR, pro 3. úlohu prof. Scisłowski z PLR, pro 4. úlohu dr. Milić z Jugoslávie a pro pátou úlohu prof. Kunfalvi z MLR a dr. Wendt z NDR.

V úterý dopoledne se začalo s vlastní soutěží. Proběhla opět v aule 3. fakulty VAAZ. Nejprve byly na schůzi mezinárodní komise předány členům mezinárodní komise texty čtyř úloh v češtině, franštině, ruštině, němčině a angličtině. Vedoucí delegací s pedagogickými instruktory pořídili překlady do příslušných jazyků. Potom byly překlady rozdány soutěžícím. K řešení úloh byla dána doba 5 hodin.

Po odevzdání a roztrídění úloh se hned začalo s opravou. Pro každou úlohu byla sestavena komise na opravování. Odpovědnými referenty pro jednotlivé úlohy byli doc. Náter, doc. Říčka, doc. Burcev a doc. Šantavý.

Přítomni byli i tlumočníci, prof. Cabicar (rumunština a maďarština), dr. Krhoun (polština) a Jan Krejčí (srbština).

Večer se soutěžící i s vedoucími zúčastnili v Janáčkově opeře Smetanovy Prodané nevěsty.

Ve středu ráno se sešla opět nejdříve mezinárodní komise, aby přeložila text experimentální úlohy do příslušných jazyků. Experimentální úloha se pracovala ve dvou laboratořích katedry fyziky 2. fakulty VAAZ, které byly upraveny tak, aby soutěžící na práci sousedů neviděli. Na řešení úlohy bylo dáno 5 hodin. Skupinu korektorů experimentální úlohy vedl doc. Schwarz.

Soutěžící a vedoucí delegací se zúčastnili odpoledne zájezdu na slavkovské bojiště — k mohyle míru na Praci a na Žuráň.

Ve čtvrtek byl zájezd do Bratislavy spojený s prohlídkou města, Slavína, hradu a výletem na Děvín. Večer se účastníci vrátili do Brna.

Po večeri byla závěrečná schůze mezinárodní komise, na níž předložil předseda výsledky hodnocení prací soutěžících. Komise tyto výsledky jednomyslně schválila, takže pořadí jednotlivců bylo toto:

Jméno	Stát	Počet bodů za úlohu					
		1.	2.	3.	4.	5a	5b
<b>I. cena:</b>							
<i>Bez ztráty bodů, tj. se 48 body</i>							
1. Mojmir Šob	ČSSR	8	8	8	8	8	8
2. Péter Maróti	MLR	8	8	8	8	8	8
3. Wolfgang Pilz	NDR	8	8	8	8	8	8
<i>Se 47 body:</i>							
4. Vladimír Černý	ČSSR	8	7	8	8	8	8

*Se 46 body:*

5. Andrej Klimov SSSR 8 8 8 6 8 8

*Se 45 body:*

6. František Komín ČSSR 6 7 8 8 8 8

7. Antonie Djordjević SFRJ 7 6 8 8 8 8

8. József Spitzer MLR 8 8 7 8 8 6

*Se 44 body:*

9. Marin Dimitrov Mitov BLR 8 8 8 4 8 8

10. Péter Kálmán MLR 8 8 8 6 6 8

11. Petre Dan<sup>†</sup> RSR 8 8 7 6 8 7

12. Vladimír Gavrilenko SSSR 7 8 8 5 8 8

13. Alexej Černoucan SSSR 7 7 7 8 7 8

**II. cena:**

*Se 43 body:*

14. Karol Šafařík ČSSR 8 8 7 8 6 6

15. Klemens Müller NDR 7 7 7 8 7 7

*Se 42 body:*

16. Emeri Simeonov Sokačev BLR 8 8 8 3 7 8

*Se 41 body:*

17. Przemysław Prusinkiewicz PLR 7 8 8 7 5 6

18. Vladimír Merkulev SSSR 8 7 8 3 7 8

*S 39 body:*

19. Juraj Šafařík ČSSR 3 8 8 8 6 6

20. Ante Jevicki SFRJ 6 7 6 4 8 8

21. László Audor MLR 8 8 6 1 8 8

*S 38 body:*

22. Péter Horváthy MLR 7 6 8 2 7 8

23. Jan Officialski PLR 8 8 8 2 6 6



### III. cena:

*S 37 body:*

24. Zdravko Pribeg	SFRJ	8	4	8	1	8	8
25. Krešo Tisaj	SFRJ	6	3	6	8	6	8
26. Joachim Loose	NDR	8	8	2	6	6	7
27. Juliusz Poltz	PLR	8	8	8	2	5	6

*Se 36 body:*

28. Joachim Bergmann	NDR	8	4	8	1	7	8
----------------------	-----	---	---	---	---	---	---

*S 35 body:*

29. Miroslav Dorešić	SFRJ	3	7	2	8	7	8
----------------------	------	---	---	---	---	---	---

*Se 34 body:*

30. Izak Mair Bivas	BLR	6	4	8	—	8	8
31. Sorin Mancas	RSR	5	5	7	2	8	7

*S 32 body:*

32. Nikolaj Kondratěv	SSSR	5	3	7	2	7	8
-----------------------	------	---	---	---	---	---	---

### Pochvalné uznání:

*Se 30 body:*

33. Michael Josch	NDR	5	1	7	4	8	5
-------------------	-----	---	---	---	---	---	---

*S 29 body:*

34. Dimitr Lubenov Danov	BLR	7	3	4	8	3	4
--------------------------	-----	---	---	---	---	---	---

*S 28 body:*

35. Svilen Ivanov Bidikov	BLR	8	—	6	—	6	8
---------------------------	-----	---	---	---	---	---	---

*S 26 body:*

36. Feliks Przytycki	PLR	2	1	7	4	6	6
----------------------	-----	---	---	---	---	---	---

*S 25 body:*

37. Viktor Birsan	RSR	8	5	7	2	3	—
-------------------	-----	---	---	---	---	---	---

Jeden soutěžící z Polska a dva soutěžící z Rumunska nebyli úspěšnými řešiteli.

Pochvalu za mimořádně pěkné řešení první úlohy dostal Petre Dan z RSR a Vladimír Merkulov ze SSSR.

Potom se projednala otázka příští mezinárodní fyzikální olympiády. Bylo dohodnuto, že vedoucí sovětské delegace projedná na příslušném ministerstvu organizování 4. MFO v SSSR. V případě, že by nebylo možno organizovat 4. MFO v SSSR, projednal by vedoucí delegace NDR její uspořádání v NDR.

Aplikujeme-li směrnice platné pro jednotlivce na celá družstva, je pořadí družstev a získané ceny:

### **I. cena:**

1. Československo 222 bodů

### **II. cena:**

2. Maďarsko 214 bodů

3. Sovětský svaz 207 bodů

4. Německá demokratická republika 194 body

5. Jugoslávie 193 body

### **III. cena:**

6. Bulharsko 177 bodů

7. Polsko 162 body

### **Pochvalné uznání:**

8. Rumunsko 128 bodů

To znamená, že všechny státy byly úspěšné.

V pátek dopoledne byl uspořádán zájezd na Macochu a do jeskyň Moravského krasu. Odpoledne v 16,30 byl slavnostní závěr soutěže v aule 3. fakulty VAAZ.

Slavnostního závěru se zúčastnil velitel — prorektor

VAAZ pověřený funkcí rektora generálporučík Ing. Jaroslav Dočkal, zástupce velitele — prorektor gen. doc. Ing. Jaroslav Mašek, CSc., zástupce města Brna — předseda školské komise Václav Pazourek a krajský školní inspektor Zábaj Tauvinkl. Dále za předsednickým stolem zasedli členové organizačního výboru doc. dr. Jiří Beránek a dr. Jan Kučírek. Po slavnostních fanfárách uvítal přítomné předseda ÚV FO a přednesl zahajovací projev. Nato vyhlásil výsledky soutěže a předal diplomy, pochvalná uznání a odměny, věnované některými národními podniky, ministerstvem školství a ÚV FO z prostředků ministerstva školství. Dále předal předseda upomínkové dary členům delegací, a to vedoucím delegace Landischovu publikaci Praha a pedagogickým instruktorům publikaci V. Heckela Krásy Československa. Potom se přihlásil ke slovu vedoucí delegace NDR, ředitel dr. Wendt. Za soutěžící promluvil česky reprezentant nejúspěšnějších řešitelů Péter Maróti z Maďarska. Závěrem předneseným předsedou ÚV FO a slavnostními fanfárami bylo toto shromáždění zakončeno.

Večer se konala hostina pro všechny účastníky v hotelu Continental.

V sobotu byl uspořádán zájezd do Předklášteří, na hrad Pernštejn a odtud na Vírskou přehradu. V neděli ráno se odjíždělo do Prahy. Původně byla plánována cesta přes České Budějovice, Hlubokou a Orlík. Vzhledem k požadavku zástupce MŠ, aby se do Prahy přijelo k večeri včas, a vzhledem k požadavku některých delegací, aby se z Brna odjíždělo později, byla změněna trasa cesty, a to přes Náměšť n. Oslavou, kde byla prohlídka zámku, a přes Kutnou Horu, kde byla prohlídka chrámu sv. Barbory.

Starost o zájezd MFO v Praze nechtěl nikdo z praž-

ských členů ÚV FO a z členů KV FO města Prahy a KV FO Středočeského kraje převzít. Proto předseda zajistil, že tuto péči převezme JČMF v Praze, kde se ochotně nabídly k této práci pracovnice sekretariátu JČMF paní Valouchová a paní Matyášová. Zástupce ministerstva školství a člen ÚV FO ústřední inspektor Josef Bartůnek však JČMF oznámil, že se o výpravu MFO v Praze postará sám.

Delegace SSSR byla ubytována v hotelu Merkur, ostatní delegace v dívčích kolejích University Karlovy v Praze 6-Petřiny, Na Větrníku. Stravování bylo zajištěno v menze koleje Arnošta z Pardubic ve Voršilské ulici.

V pondělí 30. června byl uspořádán zájezd na hrad Karlštejn a odpoledne bylo volno.

V úterý 1. července byla nejdříve prohlídka Prahy, v 11 hodin vedoucí delegací, pedagogičtí instruktoři a zástupci soutěžících byli přijati náměstkem primátora hlavního města Prahy, pak byl společný oběd v restauraci U Kalicha. Večer navštívili účastníci představení Revue z bedny v Laterně magice.

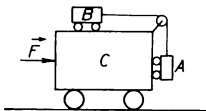
Ve středu 2. července dopoledne nebo po obědě pak jednotlivé delegace odjížděly. Jen sovětská delegace odjížděla až večer a polská delegace se zdržela o den déle.

Veškeré cesty v Brně, na Moravě, na Slovensku, do Prahy a po jejím okolí byly zajištěny dvěma autokary města Brna. Vedoucími těchto autokarů (kromě 23. 6.) byli členové KV FO Jihomoravského kraje prof. Julius Kessner a prof. Dagmar Košťálová. Funkci pokladníka a účetního vykonával prof. Julius Kessner.

## **2. Soutěžní úlohy**

### **1. úloha**

Soustava těles znázorněná na obr. 93 je tvořena třemi



Obr. 93

vozičky  $A$ ,  $B$ ,  $C$  o hmotnostech  $m_1 = 300 \text{ g}$ ,  $m_2 = 200 \text{ g}$  a  $m_3 = 1500 \text{ g}$ .

1. Na voziček  $C$  působí horizontální síla takové velikosti, že vozičky  $A$ ,  $B$  jsou v klidu vzhledem k vozičku  $C$ .
  - a) Vypočtete tah v lanku

ku spojujícím vozičky  $A$  a  $B$ .

b) Určete velikost síly  $F$ .

2. Předpokládejte, že voziček  $C$  je nepohyblivý.

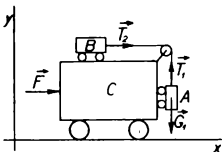
a) Vypočtete zrychlení voziček  $A$  a  $B$ .

b) Vypočtete tah v lanku.

Při řešení zanedbejte síly odporu a tření. Momenty setrvačnosti kladky i koleček voziček považujte za zanedbatelné. Hmotnost lanka rovněž zanedbejte.

*Řešení:*

Případ 1.



Obr. 94

Síla  $F$  je takové velikosti, že vozičky  $A$  a  $B$  zůstávají v klidu vzhledem k vozičku  $C$ , tzn., že se pohybují se stejným zrychlením jako voziček  $C$ . Označme síly  $G_1$ ,  $T_1$  a  $T_2$  působící na jednotlivá tělesa tak, jak je vyznačeno na obr. 94, a užitíme pohybových rovnic jednak pro vozičky  $A$  a  $B$ , jednak pro celý systém.

bových rovnic jednak pro vozičky  $A$  a  $B$ , jednak pro celý systém.

Vozíček  $B$  se pohybuje v souřadné soustavě  $Oxy$  se zrychlením  $a_x$  a působí na něj za podmínek v zadání 1. výsledná síla  $T_2$ . Platí

$$T_2 = m_2 a_x . \quad (1)$$

Poněvadž  $T_1$  a  $T_2$  značí tahy v tomtéž laně, platí pro jejich velikosti

$$T_1 = T_2 .$$

Na vozíček  $A$  působí ve směru  $Oy$  síly  $T_1$  a  $G_1$ . Protože podle podmínky (1) jsou vozíčky  $A$  a  $B$  v klidu vzhledem k vozíčku  $C$ , je zrychlení  $a_y = 0$  a pak platí

$$T_1 - m_1 g = 0 .$$

Je tedy také

$$T_2 = m_1 g . \quad (2)$$

Pro pohyb celé soustavy lze napsat pohybovou rovnici

$$F = (m_1 + m_2 + m_3) a_x \quad (3)$$

vzhledem k tomu, že síly mezi vozíčky  $A$  a  $C$  a též mezi vozíčky  $B$  a  $C$  jsou vnitřní síly vzhledem k soustavě všech tří těles. Poznamenejme, že též tah  $T_2$  je vzhledem k soustavě všech těles vnitřní silou, jak je zřejmé z rozboru sil působících na kladku. Z rovnic (1) a (2) obdržíme

$$a_x = \frac{m_1}{m_2} g ;$$

po dosazení do (3)

$$F = (m_1 + m_2 + m_3) \frac{m_1}{m_2} g .$$

Numerické řešení:

$$T_2 = T_1 = 0,300 \cdot 9,81 \text{ N} = 2,94 \text{ N},$$

$$F = 2,00 \cdot \frac{300}{200} \cdot 9,81 \text{ N} = 29,4 \text{ N} .$$

### Případ 2.

Je-li voziček *C* nepohyblivý, pak voziček *A* se pohybuje se zrychlením  $a_y$  a voziček *B* se zrychlením  $a_x$ . Vzhledem k pevnosti lana (neprotahuje se) platí

$$a_x = -a_y = a .$$

Pak lze psát pohybové rovnice pro vozičky *A*, resp. *B*

$$T_1 = G_1 - m_1 a , \quad (4)$$

$$T_2 = m_2 a . \quad (5)$$

Pro velikosti tahů v lanku platí opět

$$T_1 = T_2 . \quad (6)$$

Ze vztahů (4), (5) a (6) bezprostředně plyne

$$(m_1 + m_2) a = m_1 g$$

a odtud vypočteme výsledné vztahy

$$a = a_x = -a_y = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g ,$$

$$T_2 = T_1 = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} g .$$

Číselné výsledky:

$$a = a_x = \frac{300}{500} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} = 5,89 \text{ m s}^{-2} ,$$

$$T_2 = T_1 = 1,18 \text{ N} .$$

## 2. úloha

V měděném kalorimetru o hmotnosti  $m_1$  je voda o hmotnosti  $m_2$ ; jejich teplota je  $t_2$ . Do vody v kalorimetru dáme led o hmotnosti  $m_3$  a o teplotě  $t_3 < 0^\circ\text{C}$ .

- a) Určete teplotu a hmotnosti vody a ledu v rovnovážném stavu, jestliže veličiny  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  mají zcela obecné hodnoty. Napište kalorimetrické rovnice pro všechny možné děje, které je nutno při řešení úlohy uvažovat.
- b) Určete teplotu a hmotnosti vody a ledu, je-li  $m_1 = 1,00\text{ kg}$ ,  $m_2 = 1,00\text{ kg}$ ,  $m_3 = 2,00\text{ kg}$ ,  $t_2 = 10^\circ\text{C}$ ,  $t_3 = -20^\circ\text{C}$ .

Poznámka: Energetické ztráty zanedbejte. Barometrický tlak předpokládejte normální. Měrné teplo mědi je  $c_1 = 0,094\text{ kcal kg}^{-1}\text{ deg}^{-1}$ , měrné teplo ledu  $c_3 = 0,492\text{ kcal kg}^{-1}\text{ deg}^{-1}$ , měrné skupenské teplo tání ledu  $l = 79,7\text{ kcal kg}^{-1}$ .

*Řešení:*

V řešení úlohy je nutno uvažovat veličiny uvedené a označené v textu zadání a dále tyto veličiny:

$t$  teplota výsledného rovnovážného stavu směsi,

$t_0 = 0^\circ\text{C}$  teplota tání ledu při normálním tlaku,

$M_2$  výsledná hmotnost vody,

$M_3$  výsledná hmotnost ledu,

$m'_2 \leq m_2$  hmotnost vody, která se změní v led,

$m'_3 \leq m_3$  hmotnost ledu, který se změní na vodu,

$c_2 = 1,00\text{ kcal kg}^{-1}\text{ deg}^{-1}$  měrné teplo vody.

a) Obecně mohou nastat čtyři možné děje a jim odpovídající výsledné rovnovážné stavy:

1.  $t_0 < t < t_2$ ,  $m'_2 = 0$ ,  $m'_3 = m_3$ ,  $M_2 = m_2 + m_3$ ,  
 $M_3 = 0$ .



Neznámou výslednou teplotu  $t$  vypočítáme z kalorimetrické rovnice

$$(m_1c_1 + m_2c_2)(t_2 - t) = m_3c_3(t_0 - t_3) + m_3l + m_3c_2(t - t_0). \quad (1)$$

Fyzikální smysl má jen takové řešení, pro něž je splněna podmínka  $t_0 < t < t_2$ .

2.  $t_3 < t < t_0$ ,  $m'_2 = m_2$ ,  $m'_3 = 0$ ,  $M_2 = 0$ ,  $M_3 = m_2 + m_3$ .

Neznámou výslednou teplotu  $t$  vypočítáme z kalorimetrické rovnice

$$m_1c_1(t_2 - t) + m_2c_2(t_2 - t) + m_2l + m_2c_3(t_0 - t) = m_3c_3(t - t_3). \quad (2)$$

Fyzikální smysl má jen takové řešení, pro něž je splněna podmínka  $t_3 < t < t_0$ .

3.  $t = t_0$ ,  $m'_2 = 0$ ,  $0 \leq m'_3 \leq m_3$ ,  $M_2 = m_2 + m'_3$ ,  $M_3 = m_3 - m'_3$ .

Neznámou hmotnost  $m'_3$  vypočítáme z kalorimetrické rovnice

$$(m_1c_1 + m_2c_2)(t_2 - t_0) = m_3c_3(t_0 - t_3) + m'_3l. \quad (3)$$

Fyzikální smysl má jen takové řešení, které vyhovuje podmínce  $0 \leq m'_3 \leq m_3$ .

4.  $t = t_0$ ,  $0 \leq m'_2 \leq m_2$ ,  $m'_3 = 0$ ,  $M_2 = m_2 - m'_2$ ,  $M_3 = m_3 + m'_2$ .

Neznámou hmotnost  $m'_2$  vypočítáme z kalorimetrické rovnice

$$(m_1c_1 + m_2c_2)(t_2 - t_0) + m'_2l = m_3c_3(t_0 - t_3). \quad (4)$$

Fyzikální smysl má jen takové řešení, které vyhovuje podmínce  $0 \leq m'_2 \leq m_2$ .

b) Dosazením číselných hodnot do rovnic (1), (2), (3) dostaneme řešení, která nemají fyzikální smysl (nevyhovují uvedeným podmínkám pro  $t$ , resp.  $m_3$ ). Skutečný fyzikální děj při daných číselných hodnotách veličin  $m_1, m_2, m_3, t_2, t_3, c_1, c_2, c_3, t_0, l$  je vyjádřen rovnicí (4), z níž plyne

$$m_2' = \frac{m_3 c_3 (t_0 - t_3) - (m_1 c_1 + m_2 c_2) (t_2 - t_0)}{l}.$$

Dosazením číselných hodnot dostaneme  $m_2' = 0,11$  kg. Je tedy

$$t = 0 \text{ } ^\circ\text{C}, M_2 = m_2 - m_2' = 0,89 \text{ kg}, M_3 = m_3 + m_2' = 2,11 \text{ kg}.$$

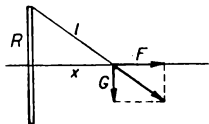
### 3. úloha

Kulička o hmotnosti  $m$  nabitá elektrickým nábojem  $q$  je připevněna k jednomu konci nevodivého vlákna. Druhý konec vlákna je připevněn v nejvyšším bodě kruhového prstence o poloměru  $R$ . Prstenec je z tuhého drátu zanedbatelného průřezu a leží ve svislé rovině. Na prstenci je rovnoměrně rozložen náboj  $Q$  stejného znaménka jako  $q$ . Určete takovou délku  $l$  vlákna, aby po vychýlení byla kulička na ose prstence kolmá k jeho rovině.

Řešte nejprve obecně a pak pro číselné hodnoty  $Q = q = 9,0 \cdot 10^{-8}$  C,  $R = 5,0$  cm,  $m = 1,0$  g,  $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$  F m<sup>-1</sup>. Hmotnost vlákna zanedbejte.

*Řešení:*

Vlákno se napne do směru výslednice sil  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$  a  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ , kde  $\mathbf{E}$  je



Obr. 95

intenzita elektrického pole buzeného prstencem na ose ve vzdálenosti  $x$  od roviny prstence (obr. 95). Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{x}{R} = \frac{E q}{m g}. \quad (1)$$

Pro výpočet intenzity elektrického pole rozdělíme prstencem na  $n$  stejných dílků (obr. 96), takže na každém dílku bude náboj  $\frac{Q}{n}$ .

Velikost intenzity elektrického pole buzeného jedním dílkem je

$$\Delta E = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 l^2 n}.$$

Tuto intenzitu rozložíme na složku do směru osy  $x$  a na složku do směru kolmého k ose  $x$ . Velikosti složek jsou

$$\Delta E_x = \Delta E \cos \alpha = \frac{\Delta E x}{l},$$

$$\Delta E_R = \Delta E \sin \alpha.$$

Ke každému dílku existuje druhý, pro nějž složka intenzity kolmá k ose je stejně velká, ale opačně orientovaná. Složky kolmé k ose se tedy ruší a výsledná intenzita má velikost

$$E = E_x = n \Delta E_x = \frac{Q x}{4 \pi \epsilon_0 l^3}. \quad (2)$$

Dosazením vztahu (2) do vztahu (1) obdržíme pro délku vlákna

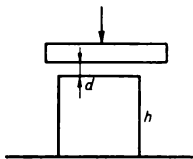
$$l = \sqrt[3]{\frac{Q q R}{4 \pi \varepsilon_0 m g}}$$

Číselně

$$l = \sqrt[3]{\frac{9,0 \cdot 10^{-8} \cdot 9,0 \cdot 10^{-8} \cdot 5,0 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 8,9 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3} \cdot 9,8}} \text{ m} = 7,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

#### 4. úloha

Nad skleněnou broušenou kostkou o hraně 2,00 cm je umístěna broušená destička tak, že mezi ní a kostkou vznikne planparalelní tenká vzduchová interferenční vrstva (obr. 97). Ozáříme-li destičku kolmo shora zářením vlnových délek 440,0 nm až 1150 nm, pro něž je destička propustná, je splněna podmínka maximálního odrazu



Obr. 97

na interferenční vrstvě právě pro dvě vlnové délky uvedeného oboru, a to pro  $\lambda = 400,0$  nm a ještě pro jednu další vlnovou délku. Určete vlnovou délku této další vlny. Vypočtete, oč by bylo nutno zvýšit teplotu kostky, aby se dotkla destičky. Teplotní součinitel délkové roztažnosti je  $\alpha = 8,0 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$ , index lomu vzduchu  $n = 1$ . Vzdálenost dolní stěny kostky od destičky se při zahřívání nemění.

**Řešení:**

Podmínka maxima na odraz je

$$2dn - \frac{\lambda_k}{2} = k \lambda_k, \text{ kde } k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{tj. } 2dn = (2k + 1) \frac{\lambda_k}{2}, \quad (1)$$

kde  $d$  je tloušťka vrstvy,  $n$  index lomu a  $k$  řád maxima. Označíme  $\lambda' = 1150$  nm. Ježto pro  $\lambda = 400,0$  nm je podle předpokladu splněna podmínka maxima, označíme  $\lambda_p = 400,0$  nm, kde  $p$  je neznámé celé číslo, udávající řád maxima, pro něž platí

$$\lambda_p(2p + 1) = 4dn. \quad (2)$$

Z rovnice (1) plyne, že při pevném  $d$  roste  $\lambda_k$  s klesajícím řádem  $k$  a naopak. Podle podmínky v zadání musí tedy platit

$$\lambda_{p-1} < \lambda' < \lambda_{p-2},$$

tj.

$$\frac{4dn}{2(p-1)+1} < \lambda' < \frac{4dn}{2(p-2)+1}.$$

Dosadíme-li sem za  $4dn$  z rovnice (2), dostaneme

$$\frac{\lambda_p(2p+1)}{2(p-1)+1} < \lambda' < \frac{\lambda_p(2p+1)}{2(p-2)+1}.$$

Úpravou první nerovnosti dostaneme postupně

$$\lambda_p(2p+1) < \lambda'(2p-1), \quad 2p(\lambda' - \lambda_p) > \lambda' + \lambda_p,$$

tj.

$$p > \frac{1}{2} \frac{\lambda' + \lambda_p}{\lambda' - \lambda_p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1150 + 400,0}{1150 - 400,0} = 1, \dots \quad (3)$$

Podobně z druhé nerovnosti máme

$$\lambda_p (2p + 1) > \lambda' (2p - 3), \quad 2p (\lambda' - \lambda_p) < 3\lambda' + \lambda_p,$$
$$p < \frac{1}{2} \frac{3\lambda' + \lambda_p}{\lambda' - \lambda_p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 1150 + 400,0}{1150 - 400,0} = 2, \dots \quad (4)$$

Z nerovností (3) a (4) plyne

$$p = 2.$$

Výpočet tloušťky vrstvy  $d$ :

$$d = \frac{\lambda_p}{4} (2p + 1) = \frac{400,0}{4} (2 \cdot 2 + 1) \text{ nm} = 500,0 \text{ nm}.$$

Výpočet vlnové délky další vlny:

Dosadíme-li za  $d$  do rovnice (1), vypočteme  $\lambda_{p-1}$ , tj.  $\lambda_1$ :

$$\lambda_1 = \frac{4 d n}{2(p-1) + 1} = \frac{4 d n}{2p - 1}.$$

Po dosazení dostáváme

$$\lambda_1 = \frac{4 \cdot 500,0 \cdot 1}{2 \cdot 2 - 1} \text{ nm} = 666,7 \text{ nm}.$$

Výpočet zvýšení teploty  $\Delta t$ :

Obecně platí  $\Delta l = \alpha l \Delta t$ . Označíme-li délku hrany kostky  $h$ , máme  $d = \alpha h \Delta t$  a odtud

$$\Delta t = \frac{d}{\alpha h} = \frac{5,000 \cdot 10^{-7}}{8,0 \cdot 10^{-6} \cdot 2,00 \cdot 10^{-2}} = 3,1 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

## 5. úloha

Použijte tyto pomůcky:

2 NiFe akumulátory, 1 suchý článek, 1 odporový drát

o neznámém odporu  $X$  opatřený milimetrovým měřítkem a jezdcem, 1 odporovou dekádu (nastavená hodnota  $R$ ), 1 galvanometr (nulový indikátor) a 1 ochranný odpor.

Uvažujte

a) uzavřený proudový obvod sestávající ze dvou sériově zapojených NiFe akumulátorů, z odporové dekády a z neznámého odporu  $X$ ,

b) sériové zapojení suchého článku a galvanometru s ochranným odporem.

Navrhněte a zdůvodněte

takové připojení větve b) k obvodu a), které umožňuje najít tu polohu jezdce na odporu  $X$ , při které galvanometrem neprochází proud.

Určete v tomto zapojení

1. poměr svorkového napětí dvojice sériově zapojených NiFe akumulátorů a elektromotorického napětí suchého článku (svorkové napětí NiFe akumulátorů považujte za konstantní);

2. neznámý odpor  $X$ .

Najděte podmínku pro odpor  $R$ , aby úloha měla řešení.

*Řešení:*

Větev b) je nutno připojit k obvodu a) podle obr. 98. V něm značí

$U_a$  svorkové napětí NiFe akumulátorů,

$U_c$  elektromotorické napětí suchého článku,

$R_p$  ochranný odpor,

$G$  galvanometr,

$K$  klíč,

$l$  délku odporového drátu.

Požadavek, aby na odporu  $X$  bylo možno najít takovou

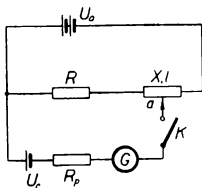
polohu jezdce, při které galvanometrem neprochází proud, můžeme splnit jen tehdy, jsou-li u akumulátoru a u suchého článku propojeny svorky souhlasné polarity.

Řešení obsahuje dva kroky. Podle volby těchto kroků existují dva způsoby řešení.

### 1. způsob

#### 1. krok:

Zvolíme  $R = 0$ . Pak je jezdec ve vzdálenosti  $a$  od konce drátu podle obr. 98. Mezi koncovými body můstkového drátu délky  $l$  je napětí  $U_a$  (vnitřní odpor akumulátoru je zanedbatelně malý proti  $X$ ). Neprochází-li galvanometrem proud, je na úseku  $a_1$  napětí  $U_1$ . Pro homogenní drát všude stejného průměru je potom poměr



Obr. 98

$$\frac{U_a}{U_c} = \frac{l}{a_1} = \frac{1}{m}. \quad (1)$$

#### 2. krok:

Pro určení hodnoty neznámého odporu drátu  $X$  musíme na odporu  $R$  nastavit vhodnou hodnotu  $R \neq 0$ . Galvanometrem nebude procházet proud při určité poloze jezdce; označme příslušnou vzdálenost jezdce od konce drátu  $a_2$ . Označme dále

$$\frac{a_2}{l} = n. \text{ Potom platí } \frac{U_c}{U_a} = \frac{R + nX}{R + X}. \quad (2)$$



Ze vztahů (1) a (2) můžeme určit neznámou hodnotu odporu  $X$

$$\frac{m U_a}{U_a} = \frac{R + nX}{R + X},$$

$$mR + mX = R + nX,$$

$$X = R \frac{1 - m}{m - n}.$$

*Podmínka:*

Aby se mohla nastavit při druhém kroku poloha jezdce na drátu, musí být

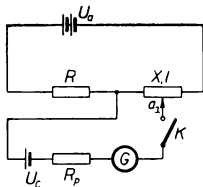
$$U_c > R \frac{U_a}{R + X},$$

z čehož po úpravách plyne

$$R < X \frac{m}{1 - m}. \quad (3)$$

Toto je podmínka pro odpor  $R$ , aby úloha měla řešení. Dále musí být  $l > m > n > 0$ .

## 2. způsob



Obr. 99

### 1. krok:

Zvolíme  $R \neq 0$ , (tj. 2. krok v 1. způsobu). Pak platí podle dřívějšího

$$\frac{U_c}{U_a} = \frac{R + nX}{R + X}. \quad (2)$$

### 2. krok:

Jeden pól suchého článku připojíme podle obr. 99. Výhoda tohoto zapojení je

v tom, že je akumulátor při obou krocích zatížen stejným proudem. Platí zde při označení  $q = \frac{a_3}{l}$

$$\frac{U_a}{U_c} = \frac{R + X}{qX}. \quad (4)$$

Ze vztahů (2) a (4) dostaneme

$$\frac{U_c}{U_a} = \frac{R + nX}{R + X} = \frac{qX}{R + X},$$

$$X = \frac{R}{q - n};$$

přítom musí být  $1 > q > n > 0$ , a tedy

$$R < X. \quad (5)$$

Poznámka:

1. Při řešení musí student odhadnout velikost odporu  $X$ , aby mohl splnit podmínku (3), resp. (5).

2. U prvního způsobu lze volit i v prvním kroku odpor  $R \neq 0$ . Pak platí rovnice ( $R_1$  je hodnota odporu v 1. kroku,  $R_2$  v druhém kroku)

$$\frac{U_c}{U_a} = \frac{R_1 + mX}{R_1 + X},$$

$$\frac{U_c}{U_a} = \frac{R_2 + nX}{R_2 + X}.$$

Z toho

$$\begin{aligned} (R_1 + mX)(R_2 + X) &= (R_2 + nX)(R_1 + X), \\ mX R_2 + R_1 X + mX^2 &= nX R_1 + R_2 X + nX^2, \\ (m - n) X^2 + (R_1 - R_2 - n R_1 + m R_2) X &= 0, \\ (X_1 = 0), \quad X_2 &= \frac{(1 - n) R_1 - (1 - m) R_2}{m - n}. \end{aligned}$$

# Obsah

<b>I. část. Zpráva o průběhu soutěže</b> . . . . .	3
1. Organizace soutěže . . . . .	3
2. Složení ústředního výboru FO ve šk. r. 1968/69 . . . . .	4
3. Krajské výbory FO a jejich předsedové . . . . .	5
4. Okresní výbory FO . . . . .	7
5. Klasifikační zásady . . . . .	7
6. Průběh soutěže ve šk. r. 1968/69 . . . . .	8
A. První kolo soutěže kategorií A, B a C . . . . .	8
B. Druhé kolo kategorií A, B a C . . . . .	11
C. Třetí kolo kategorie A . . . . .	17
D. Závěr soutěže kategorií A, B a C . . . . .	21
E. Soutěž kategorie D . . . . .	22
F. Třetí kolo kategorie D . . . . .	25
G. Zhodnocení a přehled deseti ročníků FO . . . . .	32
H. Soutěž o nejlepší samostatnou studentskou práci s fyzikální nebo technickou tematikou (kraj JM) . . . . .	33
<b>II. část. Témata k prostudování</b> . . . . .	35
1. Kategorie A: K. Hofman, Elektronkové zesilovače . . . . .	35
2. Kategorie B: Dr. I. Náter, Prenos tepla . . . . .	62
3. Kategorie C: Joz. Zámečník, Základy vektorovej algebry . . . . .	75
<b>III. část. Soutěžní úlohy</b> . . . . .	92
1. Úlohy kategorie A . . . . .	92
a) První kolo soutěže . . . . .	92
b) Druhé kolo soutěže . . . . .	121
c) Třetí kolo soutěže . . . . .	130
2. Úlohy kategorie B . . . . .	147
a) První kolo soutěže . . . . .	147
b) Druhé kolo soutěže . . . . .	171
3. Úlohy kategorie C . . . . .	182
a) První kolo soutěže . . . . .	182
b) Druhé kolo soutěže . . . . .	214
4. Úlohy kategorie D . . . . .	225
a) První kolo soutěže . . . . .	225

b) Druhé kolo soutěže . . . . .	252
c) Třetí kolo soutěže . . . . .	261
<b>IV. část. Třetí mezinárodní fyzikální olympiáda . . . . .</b>	<b>272</b>
1. Průběh a výsledky soutěže . . . . .	272
2. Soutěžní úlohy . . . . .	283

*Edice: Pomocné knihy pro žáky*

Josef Konrád, prof. dr. Rostislav Košťál a dr. Ivan Náter

**Desátý ročník**  
**fyzikální**  
**olympiády**

Obálku navrhl Josef Prchal

Obrázky rýsoval ing. Jaromír Černožorský

Vydání 1. — Praha 1970 — Počet stran 299

Odpovědná redaktorka: Jiřina Cívínová

Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk

Technická redaktorka: Jana Dostálová

Vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p., závod 4, Ostrovní 30, Praha 1

AA 10,30 — VA 10,88

Náklad 4 100 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03-5

Cena brožovaného výtisku Kčs 13,00

505/21, 852

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou publikaci č. 05-0-28

**14-371-70 Kčs 13,00**