SPN

IX. ročník
fyzikální
olympiády

Fyzikální olympiáda

ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE
KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1967 – 68

IX. ročník fyzikální olympiády

ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE
KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1967/68

PRAHA
STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Zpracovali: Josef Konrád a prof. dr. Rostislav Košťál
Recenzovali: Lubomír Vašek a František Živný
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1969

I. ČÁST: ZPRÁVA O PRŮBĚHU SOUTĚŽE

1. Organizace soutěže

Ve školním roce 1967/68 se pořádal devátý ročník soutěže fyzikální olympiáda pro žáky středních škol a pátý ročník téže soutěže pro žáky základních devítiletých škol.

Organizační řád fyzikální olympiády (FO) i matematické olympiády (MO) je dán výnosem ministerstva školství a kultury (MŠK) ze dne 14. března 1963, č. 2293/63-I/1 a byl uveřejněn ve Věstníku MŠK, r. 1963, seš. 12, kde jsou uvedeny i důvody pro zavedení těchto soutěží. Mají vést žáky k samostatné práci, vzbudit u nich větší zájem o studium matematiky a fyziky a zvýšit úroveň vyučování i vyučovací výsledky v těchto předmětech. Matematická i fyzikální olympiáda mají pomáhat ve vyhledávání žáků nadaných pro matematiku a fyziku a podporovat rozvoj jejich talentů. Tím napomáhají k zajištění většího počtu matematicky a fyzikálně školených pracovníků pro všechny obory lidského bádání, kde náročnost požadavků na odbornost pracovníků neustále roste a poroste.

Soutěž je dobrovolná a je určena pro žáky středních škol a pro žáky devátého ročníku základních devítiletých škol. Probíhá ve čtyřech kategoriích. Kategorie A je určena pro žáky třetích ročníků středních všeobecně vzdělávacích škol a třetích a čtvrtých ročníků středních odborných škol. Kategorie B je určena pro žáky druhých ročníků a kategorie C pro žáky prvních ročníků všech středních výběrových škol. Kategorie D se pořádá pro žáky devátých ročníků základních devítiletých škol.

Účast v kategorii pro vyšší třídu může žáku z nižší třídy povolit vyučující učitel spolu s referentem pro FO na škole. Tyto mimořádné případy hlásí referent krajskému výboru fyzikální olympiády.

Soutěž v kategorii A probíhá ve třech kolech, v kategoriích B, C a D ve dvou kolech.

V prvním kole mají soutěžící za úkol vyřešit do určeného termínu

9 úloh a v kategorii A, B a C prostudovat samostatně fyzikální téma. Tato témata pro všechny tři kategorie byla otištěna v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální.

Podle citovaného výnosu přispívají k rozvoji matematických a fyzikálních znalostí ještě další opatření, mezi něž patří prázdninové celostátní soustředění žáků kategorie B a krajská soustředění žáků kategorií B a C, v průběhu roku kursy přednášek pro žáky středních škol, přednáškové kursy pro učitele ZDŠ a konečně speciální třídy, zřízené na SVVŠ pro nadané matematiky a fyziky.

Speciální třídy se zřizují ve všech krajích podle výnosu MŠK ze dne 25. 3. 1965, čj. 10 262/65-II/1 na středních všeobecně vzdělávacích školách tak, že do nich jsou soustřeďováni (na základě dobrovolných přihlášek) žáci z celého příslušného kraje a popřípadě se jim zajišťuje internátní ubytování.

Podle organizačního řádu jsou pořadateli soutěže FO ministerstvo školství spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků (JČMF) a Československým svazem mládeže (ČSM).

2. Složení ústředního výboru fyzikální olympiády ve šk. r. 1967/68

Ústřední výbor fyzikální olympiády se skládá ze zástupců pořádajících institucí, tj. ze zástupce MŠ, zástupce JČMF, ČSM a z učitelů středních a vysokých škol. Kromě toho jsou členy ÚV FO i všichni předsedové krajských výborů fyzikální olympiády (KV FO).

Funkční období členů ÚV FO je tříleté.

Sídlem ÚV FO je od školního roku 1966/67 Brno, přírodovědecká fakulta University Jana Evangelisty Purkyně, Kotlářská 2.

Ve školním roce 1967/68 měl ÚV FO stejné složení jako v roce předešlém.

Předseda: RNDr. Rostislav Košťál, profesor elektrotechnické fakulty Vysokého učení technického v Brně a 1. fakulty Vojenské akademie Antonína Zápotockého ve Vyškově

Místopředseda: RNDr. Ivan Náter, docent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě

Jednatel: Josef Konrád, odborný asistent přírodovědecké fakulty University J. E. Purkyně v Brně

Další členové (v abecedním pořadí):
Josef Bartůněk, ústřední inspektor ministerstva školství v Praze
František Cimbůrek, profesor SVVŠ v Praze-Libni

RNDr. Marta Chytilová, CSc., vědecká pracovnice Výzkumného ústavu pedagogického v Praze
Milan Rádl, odborný asistent Vysoké školy strojnické a elektrotechnické v Plzni
Evžen Říman, CSc., zástupce docenta elektrotechnické fakulty Českého vysokého učení technického v Praze
Jan Tesař, profesor SVVŠ v důchodu, Praha
RNDr. Jan Valouch, profesor matematicko-fyzikální fakulty University Karlovy v Praze a ústřední tajemník JČMF v Praze
RNDr. Bohumil Vlach, docent přírodovědecké fakulty University J. E. Purkyně v Brně
Ivo Volf, odborný asistent pedagogické fakulty v Hradci Králové
Ing. Bohumil Vybíral, odborný asistent 1. fakulty Vojenské akademie Antonína Zápotockého ve Vyškově
Jozef Zámečník, odborný asistent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě
Do ÚV FO byl jmenován
František Živný, ředitel SVVŠ v důchodu, Nový Bohumín, který byl dříve předsedou KV FO Severomoravského kraje.

Na ustavující schůzi ÚV FO v r. 1966 byla určena komise pro výběr a úpravu příkladů, jejímž předsedou je dr. Ivan Náter (místopředseda ÚV FO). Komise se skládá ze dvou složek, z komise pro základní výběr příkladů a z komise pro konečnou redakci příkladů a vzorových řešení.

Komise pro základní výběr příkladů vybírá z návrhů, které zaslaly KV FO i jednotliví učitelé fyziky, ty příklady, které se hodí pro FO, a posoudí, pro kterou kategorii jsou vhodné. Práce v této komisi byla rozdělena takto:
Jozef Zámečník (příklady z mechaniky a vlnění),
Milan Rádl (molekulová fyzika a termika),
Ivo Volf (elektřina a elektromagnetické vlnění),
Zuzana Šimkovicová (místo Františka Cimbůrka — optika, atomistika a experimentální úlohy).

Komise pro konečnou redakci příkladů vybírala z navržených příkladů nejvhodnější úkoly, upravovala znění jejich textu, rozsah dílčích požadavků a posuzovala i upravovala jejich řešení. Obory byly rozvrženy takto:
Evžen Říman, příklady kategorie A,
dr. Marta Chytilová, kategorie B,
Jan Tesař, kategorie C,
František Cimbůrek, kategorie D (místo dr. B. Vlacha, který byl v zahraničí).

Komise vybrala ze zaslaných úloh příklady pro 2. kolo IX. ročníku FO (pro všechny kategorie), pro 3. kolo IX. ročníku FO (kategorie A) a jednotně zadávané příklady pro pokusná 3. kola kategorie D (krajská), dále pro 1. kolo X. ročníku FO (pro všechny kategorie).

3. Krajské výbory FO a jejich předsedové ve školním roce 1967/68

Pro řízení soutěže prvního kola a druhého kola všech kategorií se zřizují krajské výbory fyzikální olympiády (KV FO). Jejich předsedy a členy jmenuje odbor školství a kultury KNV na návrh poboček JČMF v kraji. Jsou v nich zástupci odborů školství a kultury KNV, zástupci poboček JČMF v kraji, zástupci KV ČSM a profesoři a učitelé fyziky. Pokud možno jsou v KV FO co nejvíce zastoupeni učitelé vysokých škol.

Předsednictvo KV FO tvoří předseda, místopředseda (resp. místopředsedové) a jednatel (resp. jednatelé).

Ve šk. roce 1967/68 byli předsedy KV FO v jednotlivých krajích:

Praha: František Černický, odborný asistent MFF UK v Praze

Středočeský: František Fišer, profesor SVVŠ v důchodu, Praha

Jihočeský: Konrád Hofman, odborný asistent pedagogické fakulty v Českých Budějovicích

Západočeský: Ing. Miloš Rabas, odborný asistent Vysoké školy strojnické a elektrotechnické v Plzni

Severočeský: Josef Sušanka, pracovník metodického oddělení odboru školství KNV v Ústí n. Labem

Východočeský: Zdeněk Ungermann, odborný asistent pedagogické fakulty v Hradci Králové

Jihomoravský: Lubomír Vašek, odborný asistent detašovaného pracoviště VUT Brno, pob. v Gottwaldově

Severomoravský: RNDr. Miroslav Bajer, docent Vysoké školy báňské v Ostravě

Západoslovenský: RNDr. Ivan Náter, docent Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě,
zástupkyně předsedy v ÚV FO Zuzana Šimkovicová, profesorka SVŠ v Bratislavě, Novohradská

Středoslovenský: Rastislav Baník, odborný asistent pedagogické fakulty v Banské Bystrici

Východoslovenský: RNDr. Jozef Tuček, CSc., docent přírodovědecké fakulty University P. J. Šafárika v Košicích

4. Okresní výbory fyzikální olympiády

V kategorii D řídí soutěž 1. a 2. kola okresní výbory fyzikální olympiády (OV FO), ustavené v sídlech ONV. OV FO se skládají z předsedy, místopředsedy, jednatele, zástupce odboru školství a kultury příslušného ONV, zástupce OV ČSM, popřípadě dalších profesorů nebo učitelů. Snažíme se, aby v OV FO byli zastoupeni pokud možno co nejvíce učitelé škol 2. cyklu.

5. Klasifikační zásady

Pro hodnocení úloh jsou každoročně uveřejňovány v letáku potřebné pokyny. Žákovská řešení se klasifikují takto:

1. výborně, jestliže je úloha rozřešena správně, nebo řešení má nanejvýš jen formální chyby nebo jen menší odbornou závadu;
2. dobře, jestliže řešení vystihuje úkol, ale má větší odborné nedostatky; dobře je hodnoceno i správné řešení, vyskytují-li se v něm závažné formální nedostatky;
3. nevyhovující, jestliže nedostatky odborného rázu jsou závažné, nebo je-li řešení z větší části neúplné; řešení je také nevyhovující, chybí-li výklad, nebo je-li neúplný, takže z něho nelze soudit na myšlenkový postup podaného řešení.

Řešené úlohy prvního kola opraví učitel vyučující ve třídě fyzice v dohodě s referentem pro FO na škole. Po ukončení prvního kola navrhne referent pro FO na škole úspěšné řešitele do 2. kola soutěže a odešle opravené úlohy všech řešitelů (i neúspěšných) spolu s návrhem hodnocení příslušnému KV FO. Po kontrole úloh rozhodne KV FO, kteří z navržených řešitelů budou zařazeni do 2. kola. KV FO si může dát předložit opravená řešení úloh již po ukončení jednotlivých termínů.

Úspěšnými řešiteli 1. kola soutěže jsou ti žáci, kteří úspěšně vyřešili aspoň 6 úloh. Ze dvou zadaných experimentálních úloh v kategoriích A, B a C musí každý soutěžící žák řešit (i když neúspěšně) aspoň jednu, má-li se stát úspěšným řešitelem 1. kola soutěže FO. V kategorii D byla experimentální úloha zařazena letos poprvé.

V druhém kole řeší soutěžící čtyři úlohy teoretické. Úspěšným řešitelem 2. kola je každý řešitel, který úspěšně vypracoval aspoň dvě úlohy.

Z nejúspěšnějších účastníků druhého kola kategorie A bylo vybráno na schůzi ÚV FO na návrhjed notlivých KV FO celkem 81 soutěžících ze všech krajů k účasti na třetím kole soutěže.

V třetím kole řešili účastníci čtyři úlohy teoretické a jednu experimentální. Úspěšnými řešiteli byli ti žáci, kteří rozřešili úspěšně aspoň tři ze zadaných úloh. Dvacet nejlepších řešitelů bylo prohlášeno vítězi třetího kola IX. ročníku FO.

6. Průběh soutěže ve školním roce 1967/68

Soutěž probíhala ve čtyřech kategoriích podle vyspělosti žáků (zpravidla podle ročníku škol), a to v kategorii A ve třech kolech, v kategorii B, C a D ve dvou kolech. V loňském ročníku byla pokusně zavedena soutěž v kategorii D také ve třetím kole (krajském) v Praze, ve Východočeském kraji a v Jihomoravském kraji (v tomto kraji už podruhé). Letos proběhlo třetí kolo kategorie D s jednotně zadanými příklady v Praze a v Severočeském, Východočeském, Jihomoravském, Severomoravském a Západoslovenském kraji.

A. První kolo soutěže kategorií A, B a C

První kolo soutěže probíhalo na školách v kategoriích A, B a C od září 1967 do 15. února 1968, v kategorii D do 31. března 1968. Úlohy pro první kolo byly zveřejněny v 1. čísle časopisu Fyzika ve škole, v Rozhledech matematicko-fyzikálních byly uveřejněny první tři úlohy již v posledním čísle časopisu před prázdninami, zbývající v dalším ročníku po prázdninách. Kromě toho vydalo Státní pedagogické nakladatelství nákladem 4000 výtisků leták s pokyny a příklady pro kategorie A, B a C. Leták byl letos upraven tak, že se daly příklady pro jednotlivé kategorie oddělit, takže i při sníženém počtu výtisků (loni 5000) dostalo více žáků příklady do rukou. Finanční náklad na letáky hradí MŠ.

Témata k prostudování byla uveřejněna v Rozhledech matematicko-fyzikálních 1967, v 1., 2. a 3. čísle.*)

Počet škol, které se letos účastnily soutěže FO, je podle jednotlivých kategorií a krajů uveden v tabulce 1. Proti loňsku počet škol, které se účastnily FO, poněkud poklesl. Počet účastníků v jednotlivých kategoriích je podle krajů uveden v tabulce 2, kde vždy S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, c. celkový počet žáků, d. z toho počet dívek.

---

*) Další jednotlivá témata k prohloubení znalostí z fyziky vycházejí v samostatné knižnici Škola mladých fyziků, kterou vydává Státní pedagogické nakladatelství.

Ze srovnání letošního prvního kola FO s loňským prvním kolem vyplývá, že letos se v kategorii A účastnilo soutěže o 42 žáků méně (o 4 % méně), v kategorii B je přírůstek 37 žáků (4 %), v kategorii C úbytek 194 žáků (9 %); celkem představuje úbytek soutěžících 199 žáků (5 %).

Silně poklesl počet soutěžících dívek (kategorie A o 42 %, B o 19 %, C o 14 %, celkem ve všech kategoriích o 20 %). Tento pokles je dán patrně tím, že v FO soutěží převážně žáci přírodovědných tříd, v nichž studuje poměrně méně dívek než ve třídách humanitních.

Procento úspěšných řešitelů 1. kola se proti loňskému roku podstatně neliší, zlepšení je v kategorii B (ze 48 % na 52 %), takže celkem vzrostl počet úspěšných řešitelů všech kategorií o 1 %. Počet dívek mezi úspěšnými řešiteli v kategorii A poklesl o 3 %, v kategorii B je nápadný vzestup o 20 %, v kategorii C vzestup o 2 %, celkem zlepšení o 11 %.

Počet žákovských prací, které učitelé na školách opravili a které z převážné části revidovali členové KV FO, přesahuje značně 20 000.

B. Druhé kolo kategorií A, B, C

Druhé kolo FO v kategoriích A, B, C proběhlo současně ve všech krajích dne 30. března 1968.

Do druhého kola jsou zváni pokud možno všichni úspěšní řešitelé úloh prvního kola, tj. ti žáci, kteří úspěšně vyřešili aspoň 6 z 9 úloh, přičemž museli řešit (i když neúspěšně) aspoň jednu úlohu experimentální.

Druhé kolo proběhlo ve všech krajích v jediném dni, protože v minulých letech, kdy ještě bývala zařazena experimentální úloha, se vždy vyskytovaly velké obtíže s ubytováním soutěžících žáků. Protože však některé kraje jsou rozlehlé a komunikační síť nevyhovující, není v nich možno uspořádat (především pro dopravní potíže) soutěž v jediném místě. Tak letos provedl kraj Severočeský opět soutěž ve třech městech (Ústí n. L., Most, Liberec), Severomoravský v Ostravě a v Olomouci a Středoslovenský v Banské Bystrici a v Žilině. Předseda ÚV FO dr. Košťál se účastnil a zkontroloval práci ve 2. kole v Jihomoravském kraji, jednatel ÚF FO Konrád v Praze.

Letos opět byly texty soutěžních úloh druhého kola rozmnoženy na ÚV FO tak, aby každý soutěžící dostal svůj text, a tím aby odpadlo zdlouhavé psaní textů na tabuli, což dříve žáky velmi zdržovalo. Pro slovenské kraje byly připraveny texty i v jazyce maďarském. Texty byly v zapečetěných obálkách poslány do krajů (do měst, v nichž se soutěž pořádala). Obálky byly otevřeny až před shromážděnými žáky.

Ze stejných technických důvodů jako v posledních letech nebyla do druhého kola zařazena experimentální úloha. V městech, kde se soutěž koná, není na školách dostatečné vybavení pro experimentální úlohy v tolika soupravách, aby se ve všech třech kategoriích dala úloha během půldne provést. Kromě toho, jak už bylo řečeno dříve, se obtížně opatřují noclehy pro žáky.

Výsledky druhého kola soutěže jsou uvedeny v přehledné tabulce 3. Loni byly slabé výsledky v 2. kole kategorie A vysvětlovány tím, že byly pro tuto kategorii zvoleny obtížné příklady. Letos je počet úspěšných řešitelů opět normální. V kategorii A je letos 49 % úspěšných řešitelů (loni 21 %, předloni 55 %), v kategorii B 37 % (45 %, 47 %), v kategorii C 45 % (35 %, 31 %), celkem ve všech kategoriích 44 % (34 %, 45 %). Letošní B kategorie, která jeví značný pokles, byla loni v kategorii C rovněž slabá. Loňská B kategorie má letos v kategorii A přibližně stejné (o něco lepší) výsledky.

Počet dívek, které postoupily do druhého kola, se v poměru k celkovému počtu soutěžících podstatně nezměnil, činí 15 % (loni 16 %, předloni 14 %). Jejich výsledky — počet úspěšných řešitelek (až na kategorii B) je tedy poněkud vyšší.

Z krajů došly rozbory klasifikace a posouzení vhodnosti zadaných úloh. Nejméně potíží bylo podle toho v kategorii A, nejvíce u příkladů 1. a 4. v kategorii C. Příklad 4. v kategorii C (který navazoval na studijní téma z hudební akustiky) řešilo úspěšně méně než 5 % žáků. Zřejmě se neprostudovalo nebo nebylo žákům dostupné dotyčné studijní téma.

Při hodnocení úloh druhého kola v kategorii A se upustilo od hodnocení přisouzením určitého počtu bodů kromě známky. Letos se použily mezistupně (tj. znaménko minus) jen pro bližší rozlišení při stejném výsledku klasifikace. Systém hodnocení kategorie A pro další ročníky bude nutno důkladně promyslet.

Nyní uvádíme pořadí prvých deseti řešitelů druhého kola FO v kategoriích A, B, C podle krajů. V kategorii A jsou tučným písmem vyznačeni žáci, kteří postoupili do třetího kola. Z Prahy a z krajů Jihomoravského a Severomoravského, kde postoupilo více než 10 žáků, jsou uvedeni všichni postupující. U žáků středních všeobecně vzdělávacích škol neuvádíme za jménem zkratku školy SVVŠ (u slovenských krajů SVŠ).

Praha:

A: Zdeněk Arnold, Praha 2, W. Piecka; **Vladimír Müller,** Praha 6, Na červeném vrchu; **Jan Mašek,** Praha 2, W. Piecka; **Jaromír Křepelka,** SPŠJT, Praha 4, Svatoslavova; **Tomáš Markvart,**

Ondřej Křivánek, Ivan Dvořák, Pavel Balek, Jiří Vinárek (2. ročník), všichni Praha 2, W. Piecka; **Jan Pelant,** Praha 6, Parléřova; **Ľubomír Lichner,** SPŠJT Praha 4, Svatoslavova; **Jan Kvasil** a **Vladimír Větrovský,** oba Praha 7, Nad štolou; **Vít Franěk,** Praha 4, Vítězná pláň; **Ivana Stulíková,** Praha 2, W. Piecka.

B: Tomáš Mašek, Praha 2, W. Piecka; Vladimír Vancl, SPŠJT Praha 4, Svatoslavova; Zdeněk Podrásky, Praha 2, W. Piecka; Zdeněk Slivka, Praha 8, Kollárova; Jiří Rákosník, SPŠ zeměměř., Praha 9, Pod Táborem; Karel Bareš, Praha 2, W. Piecka; Petr Stöckbauer, Praha 10, Voděradská; Vladimír Pistorius, Praha 7, Nad štolou; Pavel Štolba a Michal Tošovský, Praha 2, W. Piecka.

C: Josef Štěpánek, Praha 2, W. Piecka; Vojtěch Hanzal, Praha 2, W. Piecka; Jan Volf, Praha 2, Štěpánská; Vladimír Šíma a Jiří Mareš, Praha 2, W. Piecka; Luboš Piskáček a Eva Pokorná, Praha 2, Štěpánská; Jan Hála a Karel Juza, Praha 2, W. Piecka; Tomáš Večerka, Praha 7, Nad štolou.

Středočeský kraj:

A: Pavel Čížek, Radotín; **Jiří Čížek,** Beroun; **Jaromír Netušil** a **Milan Chvojka,** Český Brod; **Antonín Jančařík,** Říčany; Lubomír; Krejčí, Kolín; Jiří Man, Čáslav; František Bubeník a Milan Trch, Beroun; Václav Rys, Kladno.

B: Václav Šubrta, Nymburk; Kamil Žídek, Brandýs; Eva Dvořáková a Miloš Potměšil, Kolín; František Komín, SPŠ Kutná Hora; Karel Hoffman, Sedlčany; Bořivoj Schejbal, Hořovice; Zdeněk Havlas, Nymburk; Pavel Včelák, Kladno.

C: Jaroslav Balík, Vlašim; Vlastimil Vojáček, Říčany; Jan Vítkovský, Beroun; Josef Bílek, Říčany; František Lob, Český Brod; Milan Churavý, Kutná Hora; Pavel Vrba, Mělník; Vratislav Kadlec, Hořovice; Lubomír Antoš, Mnichovo Hradiště; Jiří Hrstka, Mělník.

Jihočeský kraj:

A: Pavel Vesélý, Kamenice n. Lipou; **František Koktán,** Tábor; **Jiří Laštovka,** České Budějovice; Vladimír Pávek a Miroslav Moučka, Pelhřimov; Bohumil Vrhel a Vlastislav Smolka, Strakonice; Ladislav Kváš, Pelhřimov; Jaroslav Slanec, Tábor; Miloslav Laňka, Pelhřimov.

B: Zdeněk Dráhovský, Písek.

C: Vladimír Vacek, Jindřichův Hradec; Ludvík Filip a František Máca, České Budějovice; Jan Kovář, Trhové Sviny; Václav Požárek, Pavel Samec a Jan Vrhel, Strakonice; Vladimír Kučera, Tábor; Miroslav Vaverka, České Budějovice; Bohuslav Vránek, Jindřichův Hradec.

TABULKA 1

Počet škol, které se účastnily IX. ročníku FO

Kraj	Celk. počet SVVŠ v kraji	Zapojeno SVVŠ				SPŠ				Ostatních				Celkový počet zapoj. škol			
		kategorie			celkem	kategorie			celkem	kategorie			celkem	kategorie			celkem
		A	B	C		A	B	C		A	B	C		A	B	C	
Praha	20	20	18	17	20	3	3	6	8	–	–	–	–	23	21	23	28
StČ	25	15	14	14	22	–	1	2	2	–	–	–	–	15	15	16	24
JČ	21	9	4	9	11	–	–	–	–	–	–	–	–	9	4	9	11
ZČ	17	12	9	12	12	–	–	3	3	–	–	–	–	12	9	15	15
SČ	27	17	18	17	21	1	1	5	5	–	–	–	–	18	19	22	26
VČ	36	27	31	30	34	3	3	7	7	1	1	2	2[1]	31	35	39	43
JM	38	31	34	31	35	3	3	11	11	–	–	3	3[2]	34	37	45	49
SM	37	25	27	26	32	5	2	1	7	–	–	1	1[3]	30	29	28	40
ZS	52	21	21	27	31	1	–	3	4	2	1	–	3[4]	24	22	30	38
SS	40	18	16	20	22	1	2	6	9	–	–	–	–	19	18	26	31
VS	39	9	9	11	11	–	–	4	4	–	–	–	–	9	9	15	15
Celkem	352	204	214		251	17	15	48	60	3	2	6	9	224	268		320
		201												218			
Loni	360	189	227		274	19	11	52	59	–	1	11	11	208	290		344
		207												219			

[1]) OU Synthesia Semtín (A, C), VŠJŽ Mor. Třebová (B, C).
[2]) SEŠ Znojmo (C), SZTŽ Třebíč (C), SZTŠ St. Město (C).
[3]) VŠJŽ Opava (C).
[4]) VŠJŽ Bratislava (A), ZDŠ Bratislava, Košická (B), UŠ Bratislava (A)

TABULKA 2

Počet žáků soutěžících v 1. kole

(S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů, c. celkový počet žáků, d. z toho počet dívek)

Kraj	Kategorie A				Kategorie B				Kategorie C				Celkem			
	S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú	
	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.
Praha	109	10	79	8	114	14	63	9	218	34	94	11	441	58	236	28
StČ	49	3	38	2	68	7	47	5	85	26	62	22	202	36	147	29
JČ	36	1	29	1	15	3	9	2	47	5	30	3	98	9	68	6
ZČ	29	5	20	2	49	10	35	6	145	31	52	10	223	46	107	18
SČ	82	8	59	3	83	15	45	8	145	55	78	24	310	78	182	35
VČ	87	15	69	10	115	24	80	21	198	52	115	31	400	91	264	62
JM	180	24	59	5	220	35	84	8	424	90	113	17	824	149	256	30
SM	97	13	74	9	108	19	53	9	183	45	80	19	388	77	207	37
ZS	130	16	79	8	134	34	57	10	202	55	77	20	466	105	213	38
SS	92	27	27	5	64	22	28	5	202	81	35	2	358	130	90	12
VS	52	6	20	–	44	6	23	2	95	34	42	10	191	46	85	12
Celk.	943	128	553	53	1014	189	524	85	1944	508	778	169	3901	825	1855	307
Ú v %			57	41			52	45			40	33			47	37
Loni	985	211	561	94	977	234	480	59	2138	589	850	184	4100	1034	1891	337
Ú v %			57	44			48	25			40	31			46	26

TABULKA 3

Počet žáků soutěžících v 2. kole

(S značí počet soutěžících, Ú počet úspěšných řešitelů,
c. celkový počet žáků, d. z toho počet dívek)

Kraj	Kategorie A				Kategorie B				Kategorie C				Celkem			
	S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú	
	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.
Praha	77	7	47	5	54	7	25	1	89	9	75	5	220	23	147	11
StČ	37	2	15	–	46	4	9	1	55	19	25	4	138	25	49	5
JČ	24	1	11	–	9	2	1	–	30	3	15	1	63	6	27	1
ZČ	17	2	6	1	29	6	12	–	32	8	16	1	78	16	34	2
SČ	55	2	16	1	42	8	14	–	66	17	15	3	163	27	45	4
VČ	57	7	21	–	70	14	20	3	89	21	35	3	216	42	76	6
JM	58	5	34	4	79	7	36	2	106	14	40	3	243	26	110	9
SM	73	9	51	4	50	6	18	–	74	17	36	9	197	32	105	13
ZS	78	7	35	2	55	9	31	4	72	19	29	5	205	35	95	11
SS	27	5	8	1	28	5	9	1	35	2	13	–	90	12	30	2
VS	20	–	10	–	20	2	2	–	32	5	5	1	72	7	17	1
Celkem	523	47	254	18	482	70	177	12	680	134	304	35	1685	251	735	65
Ú v %			49	38			37	17			45	27			44	26
Loni	524	78	119	13	454	49	202	13	803	167	285	33	1781	294	606	59
Ú v %			21	17			45	27			35	20			34	20

Západočeský kraj:

A: Milan Gütter, Plzeň, nám. Odborářů; **Karel Rusňák,** Klatovy; Miloslav Krupička, Helena Pavízová a Stanislav Selner, Plzeň, nám. Odborářů; Ludvík Čermák, Plzeň, ul. Pionýrů.

B: Emanuel Makrlík, Sušice; Petr Hrázský, Karlovy Vary; Josef Psutka, Domažlice; Jiří Reif, Plzeň, nám. Odborářů; Jiří Pospíšil, Ostrov; Petr Krahulec, Klatovy; Petr Jurajda, Ostrov; Josef Hoffmann, Sušice; Pavel Krejča, Klatovy; Václav Macháček, Karlovy Vary.

C: Richard Křížek, Mar. Lázně; Pavel Kopeček a Petr Tauš, Plzeň, nám. Odborářů; Dušan Poduška, Ostrov; Jiří Benda, SPŠ Plzeň; Vladimír Junger, Jan Černý, Jaroslav Neumann, Rudolf Švarc a Vladimír Cozl, všichni Plzeň, nám. Odborářů.

Severočeský kraj:

A: Jan Janeček, Litvínov; **Ladislav Kastl,** Liberec; **Jiří Lány,** Liberec; Václav Hořejší, Roudnice; Jiří Žid, SPŠ Liberec; Vladimír Kalina, Jablonec; Zdeněk Ramajzl, Litoměřice; Jiří Novotný, Děčín; Ludmila Boubelíková, Ústí n. L.; Jaroslav Vít, Jablonec.

B: Jiří Hořejší, Roudnice; Jaroslav Janda, Teplice; Josef Moulis a Martin Kubricht, Chomutov; Miloš Derner, Litvínov; Miloš Mazánek, Tanvald; Jaroslav Procházka, Chomutov; Jiří Stočes, Most; Josef Mazánek, Jablonec; Petr Ulvr, Tanvald.

C: Leoš Dvořák, Roudnice; Vladimír Šulc, Litoměřice; Jaroslava Fišerová, Liberec; Jiří Skorkovský, Teplice; Jan Alinče, SPŠ Liberec; Jaroslav Bukovský, Roudnice; Roman Lapka, Louny; Vladimír Mátl, Jablonec; Jiří Skotnica, Chomutov; František Škoda, Teplice.

Východočeský kraj:

A: Milan Volf, Dvůr Králové; **Jan Matouš,** Pardubice Spořilov; **Jan Kerhart,** Česká Třebová; **Jan Dvořák,** Rychnov n. Kn.; **Jindřich Havelka,** SPŠE Pardubice; Michal Allan, Pardubice; Jan Lochman, Dobruška; František Kopřiva, OU VChZ Synthesia, Semtín; Miroslav Andrle, Vysoké Mýto; Miroslav Ježek, Chrudim.

B: Jiří Kopřiva, Broumov; Martin Vojtíšek, Pardubice; Antonín Mikeš, Rychnov n. Kn.; Bohumil Špína, Turnov; Karel Trejbal, Semily; Václav Kadlec, Pardubice; Zdeňka Bryknarová, Nová Paka; Pavel Taras, Havlíčkův Brod; Anna Zelená, Broumov; Zdeněk Bušák, SPŠE Pardubice.

C: Tomáš Bouda, Nová Paka; Iva Boháčová, Rychnov n. Kn.; Josef Loskot, Vysoké Mýto; Vnislav Ackerman, SPŠE Pardubice; Pavel Friščák, Kostelec n. O.; Jan Havelka, VŠJŽ, Mor. Třebová;

Václav Škoda, Turnov; Jan Votava, Ústí n. O.; Dagmar Vališková, Vrchlabí; Josef Podlipný, Nová Paka.

Jihomoravský kraj:

A: Jiří Leicman, SPŠS Brno, Sokolská; **Drahomír Běták,** Kyjov; **Libor Polák,** Brno, Koněvova; **Vladimír Šoustal,** Holešov; **Jaromír Plášek,** Uherský Brod; **Ladislav Ježek,** SPŠE Brno, Leninova; **Tomáš Žák,** Brno, Křenová; **Věra Trejbalová** a **Mlada Křížová,** Brno, Koněvova; **Stanislav Krejčíř,** SPŠE Brno, Leninova; **Miroslav Šilhavý,** Třebíč; **Jan Filipenský,** SPŠE Brno, Leninova; **Svatopluk Kutěj,** SPŠE Brno, Leninova; **Pavel Polcar,** Velké Meziříčí; **Petr Levák,** SPŠS a žel., Břeclav; **Vladimír Hájek** a **Jan Schwarz,** Brno, Koněvova; **Miroslav Kouřil,** Brno, Elgartova.

B: Mojmír Šob, Velké Meziříčí; Martin Sirotek a Petr Chloupek, Brno, Koněvova; Pavel Pokorný a Hana Cagašová, Brno, Křenová; Jiří Dadok, Brno Král. Pole; Jiří Houf, Brno, Křenová; Petr Klíč, Brno, Koněvova; Milan Svoboda, Brno, Křenová; Arnošt Večerka, Prostějov.

C: Jiří Šenkýř, Milan Pantůček a Vladimír Dvořák, Brno, Křenová; Jana Daněčková, Znojmo; Lubomír Kloc, Brno, Lerchova; Marta Vlachová, Brno, Elgartova; Josef Došek, SPŠE Brno, Leninova; Jaroslav Kučera, Brno, Křenová; Miloš Mádr, Brno, Koněvova; Jan Dobeš, Brno, Křenová.

Severomoravský kraj:

A: Mojmír Simerský, SPŠVE Rožnov p. Radhoštěm; **Vladimír Berka,** Opava; **Pavel Kalášek,** Ostrava 1; **Jiří Demel,** Valašské Meziříčí; **Miroslav Kawalec,** Havířov; **František Pohl,** Ostrava 1; **Jaromír Bolek,** SPŠ Ostrava Vítkovice; **Jaroslav Sklenář,** Havířov; **Jaroslav Teda,** Ostrava Poruba; **Jiří Votava,** Hranice; **Jaroslav Indruch,** Přerov; **Petr Zimek,** Olomouc Hejčín; **Jan Kunčar,** Šumperk; **Petr Pachman,** Opava; **Vlastimil Kurek,** Havířov; **Petr Znišťal,** Frýdek Místek.

B: Petr Byczanski, Jablunkov; Václav Batko, Bílovec; Radim Blahota, Ostrava 1; Petr Cetkovský, Rýmařov; Milan Varkoček, Havířov; Miroslav Sedmík, Ostrava 4; Radomír Hankus, Krnov; Jiří Minařík, Bílovec; Stanislav Němeček, Šumperk; Ladislav Kočí, Šternberk.

C: Jiří Kotouč, Opava; Marie Němčíková, Karviná; Anna Opravilová, Havířov; Petr Sulovský, Olomouc Hejčín; Cyril Vojtek, Opava; Petr Domanský, SPŠCh Přerov; Jiří Chromec, Olomouc Hejčín; Vladislav Jakubík, Jablunkov; Radim Poncza, Karviná; Michalis Zervas, Bruntál.

Západoslovenský kraj:

A: Jozef Komorník, Holič; **Marián Ondzík,** Bratislava, Vazovova 38; **Jozef Prokeš,** Nitra, E. Gudernu; **Vladimír Čech** a **Anton Huťa,** Bratislava, Novohradská; **Jaromír Novák,** Pezinok; **Ľubomír Sestrienka,** Bratislava, Novohradská; Valéria Szarkaová, SVŠ maď., Komárno; Jozef Götz, Nitra, E. Gudernu; Róbert Vašíček, Nové Zámky.

B: Juraj Šafařík, I. ročník SVŠ, Peter Némethy, Karol Krupa, a Milan Mastihuba, Bratislava, Novohradská; Vladimír Mocko, Trenčín; Radomír Slavka, Nové Mesto n. Váhom; Karol Šafařík ZDŠ Bratislava, Košická; Radko Mesiar a Ladislav Hudec, Bratislava, Novohradská; Peter Beňuška, Bratislava, Pošeň.

C: Štefan Pleško, Bratislava, Novohradská; Peter Ostatník a Stanislav Janota, Bratislava, Vazovova 38; Pavol Černek, Karol Dobrovodský, Filip Guldan, Pavol Návrat, Naděžda Mináriková, Vladimír Černý a Pavol Havlík, všichni Bratislava, Novohradská.

Středoslovenský kraj:

A: Peter Nagy, Banská Bystrica; **Juraj Černák,** Turčanské Teplice; **Juraj Gondžúr,** Ružomberok; Mária Ruttkayová, Prievidza; Peter Podhoránsky, Ružomberok; Daniel Valentovič a Jaroslav Nemec, Martin; Ivan Vyskok, Prievidza.

B: Bohuš Sivák, Zvolen; Peter Pikna, Žilina, Hliny; Jozef Skokan, a Mikuláš Huba, Dolný Kubín; Pavol Magner, Žilina, H. Val; Vladimír Perďoch, Čadca; Peter Mach, Ružomberok; Milan Grendel, Banská Bystrica; Mária Kušková, Prievidza.

C: Milan Stacho, Vrútky; Dalibor Šindler, Žilina, H. Val; Marian Pivarči, Martin; Jozef Domeník, Ružomberok; Jaroslav Šnupárek, Zvolen; Jozef Figur, Ilava; Ľubomír Lúčan, Banská Bystrica; Pavol Mach, Ružomberok; Marian Šalát, Zvolen; Pavol Šťastný, Martin.

Východoslovenský kraj:

A: Jozef Špalek, Košice, Kováčska; **Juraj Glosík** a **Pavol Jasem,** Košice, Šrobárova; Alexander Káldy, Košice, Kováčska; Adam Ondrejka, Košice, Šrobárova; Vladimír Bulla a Vladimír Alter, Košice, Kováčska; Ján Zolovčík, Alexander Hocman a Trifon Karaivanov, Michalovce.

B: Viktor Hronský, Košice, Šrobárova; Dušan Kováč, Prešov, T. Ševčenku.

C: Andrej Mattieligh, Michalovce; Vladimír Uličiansky, Košice, Šrobárova; Peter Benczo a Gabriela Mattová, Michalovce; Ľudovít Štefan, SPŠE Košice.

C. Třetí kolo kategorie A

Třetí – celostátní – kolo kategorie A probíhalo ve dnech 28. až 30. dubna 1968 v Ostravě. Jeho přípravou a provedením byl pověřen Severomoravský KV FO v Ostravě. V průběhu třetího kola byl sice dřívější zkušený předseda KV FO František Živný nemocen, přesto však nový předseda KV FO dr. Bajer s členy KV FO Simerským a Mádrem celou soutěž jak organizačně, tak technicky bezvadně připravili. Teoretické úlohy připravil a rozmnožil s užší komisí dr. Náter, experimentální úlohu navrhl a připravil na katedře fyziky Vysoké školy báňské v Ostravě dr. Bajer. Texty a návody k této úloze rozmnožil M. Simerský, elektrické měřicí přístroje z největší části zapůjčila SPŠVE v Rožnově p. Radhoštěm, pomůcky (tj. panely, zdroje atd.) zhotovil Alois Košnovský a ing. Miroslav Knejzlík z katedry fyziky VŠB v Ostravě.

Pomocné organizační služby (doprovod soutěžících od vlaků do kolejí a stálou službu během soutěže) vykonávala ochotně skupina posluchačů VŠB, kterou vybral docent dr. Bajer.

Ubytování a částečné stravování bylo v nových kolejích VŠB v Porubě, teoretická část soutěže ve dvou posluchárnách a experimentální úloha v další posluchárně hornicko-geologické fakulty VŠB, částečné stravování ve vysokoškolské menze VŠB v Ostravě 5.

Postupující do třetího kola byli vybráni na schůzi ÚV FO, která se konala dne 15. dubna 1968 v Brně, z nejlepších řešitelů 2. kola ze všech krajů podle dosažených známek; v případě, kdy bylo potřeba jemnější rozlišení, se přihlédlo k mezistupňům (znaménko minus u známky).

Nejprve byli vybráni soutěžící bez nepříznivých známek (bez 3), pak s jednou nevyhovující známkou podle celkového součtu. Celkem bylo vybráno z Prahy 15, z kraje Středočeského 6, Jihočeského 3, Západočeského 2, Severočeského 3, Východočeského 5, Jihomoravského 18, Severomoravského 16, Západoslovenského 7, Středoslovenského 3 a Východoslovenského 3, celkem tedy 81 soutěžících.

Třetí kolo bylo slavnostně zahájeno v neděli 28. dubna 1968 ve společenské místnosti kolejí VŠB. K tomuto slavnostnímu zahájení se za KNV Severomoravského kraje dostavil krajský školní inspektor Josef Bajgar. Slavnostní shromáždění řídil předseda ÚV FO dr. Košťál. Po úvodním projevu informoval soutěžící o akci ministerstva školství, které poskytne 20 soutěžícím z FO a MO pětileté stipendium ke studiu odborné matematiky, fyziky nebo technických směrů v SSSR. Zjistil si hned případné zájemce. Dále zjistil, kteří z letošních účastníků třetího kola se v dřívějších letech zúčastnili celostátních nebo krajských soustředění nadaných matematiků a fyziků (vybraných zpravidla z úspěš-

ných řešitelů MO a FO), popřípadě prošli speciálními kursy. Ukázalo se, že téměř všichni účastníci třetího kola se takových soustředění zúčastnili. Z toho byl vyvozen závěr, že akce tohoto druhu jsou pro další rozvoj talentů velmi prospěšné.

Z členů ÚV FO se kromě předsedy dr. Košťála zúčastnili třetího kola v Ostravě jednatel J. Konrád, ústřední školní inspektor ministerstva školství J. Bartůněk, ing. Vybíral, dr. Vlach, ing. M. Rabas a František Černický.

V pondělí 29. dubna 1968 byly řešeny teoretické úlohy. Soutěžící se sešli v jedné posluchárně a pozdravil je ústřední školní inspektor s. Bartůněk. Soutěžící byli rozsazeni podle předem připraveného zasedacího pořádku do dvou poslucháren, v nichž dozírali členové KV FO i ÚV FO a pracovníci katedry fyziky VŠB s. Wyslych a Švec.

Večer navštívili soutěžící v divadle Jiřího Myrona představení Molièrova Tartuffa.

V úterý 30. dubna byly ve velké posluchárně připraveny 22 úlohy, dozor měli členové ÚV FO Černický a Rabas, členové KV FO Bajer a Mádr a pracovníci katedry fyziky VŠB. Posuzována byla experimentální zručnost, doba potřebná k zapojení atd. Soutěžící pak odcházeli zpracovat měření do jiné posluchárny. U měření se plynule střídali, takže dozírající a instruktoři nebyli v časové tísni.

Celkem byl průběh hladký a naprosto bez rušivých vlivů nebo projevů nekázně. Je nutno ocenit obětavost všech pracovníků katedry fyziky, pochopení vedení VŠB, ale i obětavost a ochotu pracovníků a pracovnic kolejí a menz.

Všechny práce opravovali vždy dva členové ÚV FO, a to

1. příklad ing. Vybíral a dr. Vlach z JMK,
2. příklad Černický a Cimbůrek z Prahy,
3. příklad ing. Rabas a Rádl ze ZČK,
4. příklad Volf a Ungermann z VČK,
5. příklad experimentální dr. Bajer a Simerský ze SMK. Výsledky třetího kola jsou uvedeny v tabulkách 4, 5 a 6.

Nejlepších 20 řešitelů bylo podle organizačního řádu FO prohlášeno vítězi IX. ročníku FO. Mezi vítězi je jedna dívka, mezi úspěšnými řešiteli rovněž jedna dívka.

Mezi úspěšnými řešiteli je celkem 9 žáků středních průmyslových škol, z toho 4 mezi vítězi (všichni 4 ze 4. ročníku SPŠ, z úspěšných je jeden ze 3. ročníku SPŠ). Celkem bylo ve 3. kole zastoupeno 48 SVVŠ (SVŠ) a 7 SPŠ.

Všichni vítězové dostali diplom, podepsaný ředitelem odboru středních škol ministerstva školství ing. Císařem a předsedou ÚV FO dr. Košťálem. Mimo to dostali peněžité částky, které věnovalo MŠ na

TABULKA 4

Počet žáků soutěžících v třetím kole kategorie A

Kraj	Celkový počet soutěžících		Úspěšní řešitelé			Z nich vítězové			Neúspěšní řešit.		
		z toho dívek	počet	%	z toho dívek	počet	%	z toho dívek	počet	%	z toho dívek
Praha	15	1	10	67	–	4	27	–	5	33	1
StČ	6	–	2	33	–	–	–	–	4	67	–
JČ	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	–
ZČ	2	–	2	100	–	–	–	–	–	–	–
SČ	3	–	2	67	–	2	67	–	1	33	–
VČ	5	–	2	40	–	1	20	–	3	60	–
JM	18	2	16	89	2	8	45	1	2	11	–
SM	16	–	8	50	–	4	25	–	8	50	–
ZS	7	–	3	43	–	1	14	–	4	57	–
SS	3	–	1	33	–	–	–	–	2	67	–
VS	3	–	2	67	–	–	–	–	1	33	–
Celkem	81	3	48	59	2	20	–	1	33	41	1

TABULKA 5

Vítězové 3. kola kategorie A IX. ročníku FO

Pořadí	Jméno	Tř.	Škola	Navrž. odměna Kčs
1.	Jan Filipenský	4	SPŠE Brno, Leninova	1 150
2.—4.	Ondřej Křivánek	3 P	SVVŠ Praha 2, W. Piecka 2	1 000
	Tomáš Markvart	3 S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka 2	1 000
	Miroslav Kawalec	3 P	SVVŠ Havířov	1 000
5.—6.	Pavel Polcar	3 P	SVVŠ Velké Meziříčí	800
	Mojmír Simerský	4	SPŠVE Rožnov p. Radhoštěm	800
7.—8.	Věra Trejbalová	3 M	SVVŠ Brno, Koněvova	650
	Jiří Demel	3 P	SVVŠ Valašské Meziříčí	650
9.—10.	Jan Janeček	3 P	SVVŠ Litvínov	500
	Pavel Kalášek	3 P	SVVŠ Ostrava 1	500
11.—15.	Vladimír Müller	3 M	SVVŠ Praha 6, Arabská	450
	Libor Polák	3 P	SVVŠ Brno, Koněvova	450
	Miroslav Šilhavý	3 P	SVVŠ Třebíč	450
	Ladislav Kastl	3 P	SVVŠ Liberec	450
	Jan Kerhart	3 P	SVVŠ Česká Třebová	450
16.—17.	Zdeněk Arnold	3 S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka	400
	Vladimír Hájek	3 M	SVVŠ Brno, Koněvova	400
18.—19.	Ladislav Ježek	4	SPŠE Brno, Leninova	300
	Jiří Leicman	4	SPŠS Brno, Sokolská	300
20.	Vladimír Čech	3 M	SVŠ Bratislava, Novohradská	300
				12 000

V tabulce značí P větev přírodovědnou, M počítací stroje (programátorská třída), S speciální třídu matematicko-fyzikální.

TABULKA 6

Další úspěšní řešitelé 3. kola kat. A IX. ročníku FO

Pořadí	Jméno	Tř.	Škola
21.–22.	Svatopluk Kutěj	3	SPŠE Brno, Leninova
	Jan Matouš	3 P	SVVŠ Pardubice
23.–24.	Jiří Vinárek	2 S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
	Jaroslav Sklenář	3 P	SVVŠ Havířov
25.–26.	Jozef Komorník	3 P	SVŠ Holič
	Peter Nagy	3 P	SVŠ Banská Bystrica
27.	Jaromír Plášek	3 P	SVVŠ Uherský Brod
28.	Jan Kunčar	3 P	SVVŠ Šumperk
29.–30.	Tomáš Žák	3 S	SVVŠ Brno, Křenová
	Mlada Křížová	3 M	SVVŠ Brno, Koněvova
31.	Ľubomír Sestrienka	3 M	SVŠ Bratislava, Novohradská
32.	Pavel Čížek	3 P	SVVŠ Radotín u Prahy
33.–34.	Jan Kvasil	3 P	SVVŠ Praha 7, Nad štolou
	Jaroslav Bolek	4	SPŠ Ostrava - Vítkovice

Pokračování tabulky 6.

Pořadí	Jméno	Tř.	Škola
35.–36.	Jaromír Křepelka	4	SPŠJT Praha 4, Svatoslavova
	Petr Levák	4	SPŠS a žel. Břeclav
37.–38.	Milan Gütter	3 S	SVVŠ Plzeň, nám. Odborářů
	Juraj Glosík	3 P	SVŠ Košice, Šrobárova
39.–42.	Milan Chvojka	3 P	SVVŠ Český Brod
	Drahomír Běták	3 P	SVVŠ Kyjov
	Karel Rusňák	3 P	SVVŠ Klatovy
	Jaroslav Teda	3 P	SVVŠ Ostrava Poruba
43.–46.	Pavel Balek	3 S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
	Jan Pelant	3 P	SVVŠ Praha 6, Parléřova
	Vladimír Šoustal	3 P	SVVŠ Holešov
	Jozef Špalek	3 P	SVŠ Košice, Kováčska
47.–48.	Ľubomír Lichner	4	SPŠJT Praha 4, Svatoslavova
	Jan Schwarz	3 P	SVVŠ Brno, Koněvova

P = přírodovědná třída, M = mat. stroje (program.), S = spec. třída M–F

zakoupení věcných a knižních odměn, celkem 12 000 Kčs. Odměny byly odstupňovány od 1150 do 300 Kčs. Všichni další úspěšní řešitelé dostali čestná uznání, podepsaná rovněž ing. Císařem a dr. Košťálem.

Z tabulky 4 je zřejmé, že Jihomoravský kraj má nejvíce úspěšných řešitelů i nejvíce vítězů, Západočeský kraj měl v soutěži jen 2 žáky, oba jsou úspěšní. Jihočeský kraj vyslal 3 soutěžící, z kterých se neumístil ani jeden. Jihomoravský kraj má ze všech devíti ročníků FO nejméně neúspěšných řešitelů, pouze 12,8 %, další je Praha se 32,1 %, ostatní kraje jich mají procentuálně mnohem více. Podstatné zlepšení je letos u Severomoravského kraje, takový prospěch neměli žáci tohoto kraje dosud v žádném ročníku FO.

Přehled o klasifikaci úloh 3. kola je uveden v tabulce 7. Z ní je patrno, že úlohy pro 3. kolo byly voleny vhodně, obtíž byla jen u úlohy 4 (z tlaků při pokusu Clémentově – Desormesově vypočítat Poissonovu konstantu), kterou polovina soutěžících neřešila vůbec a ti, kteří ji řešili, měli 16 řešení nevyhovujících.

Na schůzi ÚV FO, hodnotící výsledky 3. kola, byli vybráni žáci pro II. mezinárodní fyzikální olympiádu v Budapešti:

1. Jan Filipenský, SPŠE Brno, Leninova,
2. Ondřej Křivánek, SVVŠ Praha 2, W. Piecka,
3. Miroslav Kawalec, SVVŠ Havířov

a náhradníci

4. Mojmír Simerský, SPŠVE Rožnov p. Radhoštěm,
5. Pavel Polcar, SVVŠ Velké Meziříčí,
6. Tomáš Markvart, SVVŠ Praha 2, W. Piecka,
7. Věra Trejbalová, SVVŠ Brno, Koněvova,
8. Jiří Demel, SVVŠ Valašské Meziříčí.

D. Závěr soutěže kategorií A, B, C

Řešitelé třetího kola ze SVVŠ jsou všichni buď z přírodovědných větví třetího ročníku (jediný Jiří Vinárek z Prahy z druhého ročníku), nebo ze tříd programátorských (počítací stroje), či konečně ze speciálních tříd matematicko-fyzikálních. U posledních se ve 3. kole kategorie A projevuje příznivý vliv specializace jen u SVVŠ Praha 2, W. Piecka (4 úspěšní ze 7 soutěžících), u žáků ostatních škol jen sporadicky. (V nižších kategoriích je vliv specializace zřejmý u SVVŠ Plzeň, nám. Odborářů, SVVŠ Brno, Křenová a SVŠ Bratislava, Novohradská.)

Velmi pěkné jsou výsledky u žáků z průmyslových škol, neboť v kategorii A mohou soutěžit ve 3. i ve 4. ročníku. Žáci 4. ročníků jsou nesporně vyspělejší, i když obecnou fyziku mají jen v prvních ročnících.

TABULKA 7

Klasifikace úloh ve 3. kole kat. A IX. ročníku FO

Příkl.	Známky			Prům. známka	Téma úlohy
	výb.	dob.	nevyh.		
1.	36	11	34	1,94	*mechanika:* pohyb hmot, zavěšených přes kladku
2.	36	15	30	1,92	*elektrostatika:* kapacita složeného kondenzátoru
3.	45	5	31	1,83	*optika:* výpočet chyby při zobrazování dutým zrcadlem
4.	14	11	56	2,52	*termika:* výpočet Poissonovy konstanty met. Clémentovou – Desormesovou
5. exp.	35	33	12	1,68	*elektronika:* měření výstupních charakteristik plošného tranzistoru
Celk.	166	75	163	1,99	

Konečně také výběr žáků pro střední průmyslové školy, zejména SPŠ jaderné techniky nebo elektrotechnické, je mnohem lepší než pro SVVŠ.

Je celkem přirozené, že z jiných typů škol, které mají odborné zaměření, se účastní jen málo žáků: OU Synthesia Semtín, UŠ Bratislava, SEŠ Znojmo, SZTŠ Třebíč a Staré Město, ZDŠ Bratislava, Košická.

Nerovnoměrné výsledky v krajích lze vysvětlit jednak technickými možnostmi v krajích (počet vysokých škol, rozlehlost a komunikační možnosti), daleko více však tím, kolik učitelů vysokých škol v soutěži pracuje, i tím, jaké pochopení pro soutěž mají školy a školské úřady.

Význam soutěže FO vzrůstá i tím, že vysoké školy přihlížejí při přijímání posluchačů k výsledkům FO a MO. Tak např. v tomto roce uchazeči o studium matematiky nebo fyziky na přírodovědecké fakultě UJEP v Brně nedělali přijímací zkoušku, jestliže byli úspěšnými řešiteli aspoň druhého kola FO nebo MO.

Podle usnesení ÚV FO měly být pořádány v jednotlivých krajích kursy pro zvlášť nadané žáky, kterých by se zúčastnili nejlepší řešitelé

minulého ročníku z kategorie B (popř. A) a kde by se připravovali na mezinárodní fyzikální olympiádu.

Takový kurs byl uspořádán jen v Jihomoravském kraji. Bylo do něho vybráno 6 žáků nejvyšší třídy středních škol:

Jan Filipenský, SPŠE Brno, Leninova,
Pavel Polcar, SVVŠ Velké Meziříčí,
Jiří Leicman, SPŠS Brno, Sokolská,
Věra Trejbalová, SVVŠ Brno, Koněvova,
Bohumila Vlachová, SVVŠ Brno, Křenová a
Miroslav Šilhavý, SVVŠ Třebíč.

Z druhého ročníku tam byl zařazen

Mojmír Šob, SVVŠ Velké Meziříčí.

Severomoravský kraj měl pouze dva kandidáty pro takový kurs, a proto dojížděli na školení do Brna. Byli to

Miroslav Kawalec, SVVŠ Havířov a
Mojmír Simerský, SPŠVE Rožnov p. Radhoštěm.

Kromě Mojmíra Šoba, který je žákem 2. ročníku SVVŠ a umístil se ve 2. kole kategorie B na 1. místě, a Bohumily Vlachové, která nepostoupila do 3. kola kategorie A, umístilo se všech zbývajících 7 účastníků kursu mezi vítězi 3. kola FO v Ostravě, a to v tomto pořadí:

1. Jan Filipenský,
2.—4. Miroslav Kawalec,
5.—6. Pavel Polcar a Mojmír Simerský,
7.—8. Věra Trejbalová,
11.—15. Miroslav Šilhavý a
18.—19. Jiří Leicman.

Kurs byl zřízen na popud ÚV FO, vybrané lekce z učiva fyziky byly zaměřeny k mezinárodní fyzikální olympiádě. V kursu přednášeli odborní asistenti VAAZ ve Vyškově ing. Bohumil Vybíral (elektřinu a optiku) a Stanislav Zhejbal (mechaniku a termiku). Kurs byl rozdělen do 6 lekcí, které se konaly ve volnou sobotu a v pátek před volnou sobotou vždy po 12 hodinách. Probírala se v hrubých rysech fyzika, a to vysokoškolským způsobem. Účast v kursu byla vzorná.

O dobré přípravě i o správném výběru účastníků kursu svědčí to, že mezi třemi navrženými účastníky II. mezinárodní fyzikální olympiády byli dva (Filipenský a Kawalec) a mezi náhradníky další dva z tohoto kursu (Simerský a Polcar).

E. Soutěž kategorie D

První kolo soutěže v kategorii D probíhalo do 31. března 1968. Tento termín se zdá příliš pozdní, protože žáci 9. ročníků ZDŠ mají kratší školní rok.

Úlohy pro 1. kolo byly uveřejněny v časopise Fyzika ve škole a kromě toho ministerstvo školství vydalo v SPN leták pro kategorii D, který vyšel nákladem 10 000 výtisků.

Loni se účastnilo FO v kategorii D jen asi 51 % všech ZDŠ, letos počet zúčastněných škol poklesl na 48 %. Relativně nejvíc škol se účastnilo v Praze — 82 % (vedením kategorie D v Praze je pověřen člen KV FO Miroslav Voráček, pracovník KPÚ Praha), následuje Jihomoravský kraj (64 %), Západočeský a Západoslovenský kraj (po 56 %), Východočeský kraj (55 %) a Středoslovenský kraj (51 %). V ostatních krajích se zúčastnilo méně než 50 % škol.

Podrobné údaje o účasti škol jsou uvedeny v tabulce 8, počet soutěžících v 1. a ve 2. kole v tabulce 9.

TABULKA 8

Počet ZDŠ, které se zapojily do FO

Kraj	Počet ZDŠ v kraji	1. kola se zúčastnilo ZDŠ		2. kola se zúčastnilo ZDŠ		Počet okresů v kraji	Kontrola práce ve 2. kole provedena v okresech
		počet	v %	počet	v %		
Praha	170	140	82	102	60	10	4
StČ	330	98	30	93	28	12	3
JČ	192	73	38	66	34	8	2
ZČ	222	124	56	87	39	10	2
SČ	291	127	44	85	29	10	neudáno
VČ	314	172	55	117	37	11	6
JM	467	300	64	177	38	14	1
SM	440	194	44	147	33	10	10
ZS	544	245	45	162	30	12	2
SS	377	192	51	109	29	12	1
VS	340	92	27	64	19	9	—
Celkem	3687	1757	48	1209	36	118	31
Loni	3665	1847	51	1380	39	118	43

TABULKA 9

Počet soutěžících žáků v 1. a ve 2. kole kategorie D

(S je počet soutěžících, Ú je počet úspěšných řešitelů)

Kraj	Počet soutěžících v 1. kole					Počet soutěžících ve 2. kole				
	S	Ú	úsp. v %	z toho dívek S	z toho dívek Ú	S	Ú	úsp. v %	z toho dívek S	z toho dívek Ú
Praha	1 361	980	72	528	416	455	388	85	131	101
StČ	489	355	73	186	120	303	210	69	105	78
JČ	276	205	74	93	84	197	120	61	81	28
ZČ	392	241	62	67	33	237	173	72	32	16
SČ	807	343	43	297	122	309	219	71	108	72
VČ	1 124	486	43	212	69	373	305	84	58	53
JM	1 634	564	34	427	142	519	255	49	135	55
SM	1 074	475	44	350	145	358	229	64	98	49
ZS	1 708	973	57	760	387	680	320	47	289	116
SS	1 288	429	33	569	139	330	202	61	112	66
VS	480	176	38	187	62	174	123	71	61	55
Celkem	10 633	5227	49	3676	1719	3935	2544	65	1210	689
Loni	11 921	4911	41	4439	1972	4812	2545	54	1648	787

Proti loňskému roku počet soutěžících žáků poklesl, ale výsledky byly lepší než loni. Ani soutěž v kategorii D nemá být masovou záležitostí, je určena pro podporu a další rozvoj vědomostí nadaných žáků.

F. Třetí kolo kategorie D

Třetí kolo kategorie D (krajské) není dosud určeno organizačním řádem soutěže FO, ale již předloni bylo provedeno pokusně v kraji Jihomoravském, loni pak ve třech krajích: v Praze, ve Východočeském a v Jihomoravském kraji. Letos se k pořádání třetího kola přihlásilo již 6 krajů: Praha, Severočeský, Východočeský, Jihomoravský, Severomoravský a Západoslovenský.

Ve třetím kole kategorie D, které proběhlo ve všech krajích dne 25. května 1968, byly zaslány příklady centrálně stejným způsobem

jako pro krajská kola kategorie A, B, C. Výsledky třetího kola kategorie D jsou uvedeny v tabulce 10. Příklady pro 3. kolo nebyly obtížné, takže

TABULKA 10

Třetí kolo kategorie D

Kraj	Počet soutěžících		Počet úspěšných řešitelů			Soutěž 3. kola probíhala
	celk.	z toho dívek	celk.	v %	z toho dívek	
Praha	84	11	80	95	10	podruhé
Severočeský	45	12	29	65	6	poprvé
Východočeský	48	7	44	92	5	podruhé
Jihomoravský	78	13	58	74	6	potřetí
Severomoravský	39	1	37	95	1	poprvé
Západoslov.	66	14	46	70	9	poprvé
Celkem	360	58	294	81	37	

úspěchy žáky rozhodně povzbudily k další účasti v FO. Velmi dobré výsledky svědčí i o tom, že pro třetí kolo byli vybráni opravdu dobří žáci, celkem jen asi 1/7 úspěšných řešitelů 2. kola.

Nejlepší řešitelé třetího kola byli odměněni věcnými cenami a všichni úspěšní řešitelé dostali pochvalná uznání. V Jihomoravském kraji byl mezi nimi proveden nábor do 1. ročníku specializované třídy pro nadané matematiky a fyziky na SVVŠ Brno, Křenová, podobně jako v dřívějších dvou letech.

G. Závěr IX. ročníku FO

Hodnotíme-li výsledky IX. ročníku fyzikální olympiády, můžeme říci, že byla vykonána dobrá práce a že soutěž plní účel, pro který byla zřízena. Při hodnocení si však musíme uvědomit, kolik práce této soutěži věnovali profesoři a učitelé vysokých, středních, odborných i základních devítiletých škol i to, jaké pomoci se soutěži dostávalo od školských úřadů.

Ústřední výbor fyzikální olympiády proto vyslovuje dík za obětavou práci všem profesorům a učitelům fyziky na školách, všem pracovníkům školských úřadů, kteří soutěž podpořili, ministerstvu školství za všestrannou pomoc a pochopení a Jednotě československých matematiků a fyziků.

II. ČÁST: TÉMATA K PROSTUDOVÁNÍ

1. Kategorie A

Magnetické obvody. Točivé magnetické pole

Konrád Hofman, PF, České Budějovice

Magnetické pole, jak je v učebnici fyziky pro III. ročník SVVŠ vyloženo, se znázorňuje pomocí indukčních čar a kvantitativně se popisuje pomocí vektoru magnetické indukce B. Magnetická indukce B je přímo úměrná hustotě indukčních čar, tj. množství indukčních čar jdoucích kolmo jednotkovou plochou. Je-li magnetické pole homogenní, je indukční tok $\Phi = BS$, pro nehomogenní pole je $\Delta\Phi = B\Delta S$, kde ploška ΔS musí být tak malá, aby magnetické pole jdoucí kolmo ploškou ΔS bylo možno považovat za homogenní. Jednotka pro magnetickou indukci B je tesla [T] a pro indukční tok je jednotkou weber [Wb] = = Vs.

Mezi nimi platí vztah Wb = T m^2. Magnetické pole můžeme znázornit také pomocí magnetických siločar a kvantitativně popsat pomocí vektoru magnetické intenzity H, jež je nezávislá na magnetických vlastnostech prostředí a pro kterou je

$$H = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B ,$$

kde permeabilita vakua

$$\mu_0 = 4\pi \,.\, 10^{-7} \text{ H m}^{-1} \doteq \frac{1}{8 \,.\, 10^5} \text{ H m}^{-1} ,$$

μ_r (číslo bez rozměru) charakterizuje prostředí a nazývá se relativní permeabilita. Součin $\mu_0 \mu_r = \mu$ je permeabilita prostředí[1]).

Pro magnetické pole ve vakuu (a prakticky také ve vzduchu), kde $\mu_r = 1$, je

$$H = \frac{B_0}{\mu_0}.$$

Magnetickou indukci ve vakuu značíme B_0. Vektory H a B mají stejný směr, a proto také siločáry mají stejný průběh jako indukční čáry.

Uvažujme v dalším magnetické pole ve vakuu.

Potom vzorcům uvedeným v učebnici pro magnetickou indukce B_0: odpovídají vzorce pro H:

přímkový velmi dlouhý vodič

$$B_0 = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}, \qquad H = \frac{I}{2\pi r},$$

střed kruhového vodiče

$$B_0 = \mu_0 \frac{I}{2r}, \qquad H = \frac{I}{2r},$$

střed dlouhého a tenkého solenoidu

$$B_0 = \mu_0 \frac{NI}{l}, \qquad H = \frac{NI}{l}.$$

Jednotka pro intenzitu magnetického pole H plynoucí z předešlých vztahů je $\mathrm{Am^{-1}}$.

Magnetomotorické napětí a magnetické napětí

Intenzita magnetického pole H (obr. 1) ve vzdálenosti r od velmi dlouhého přímkového vodiče s proudem I je

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

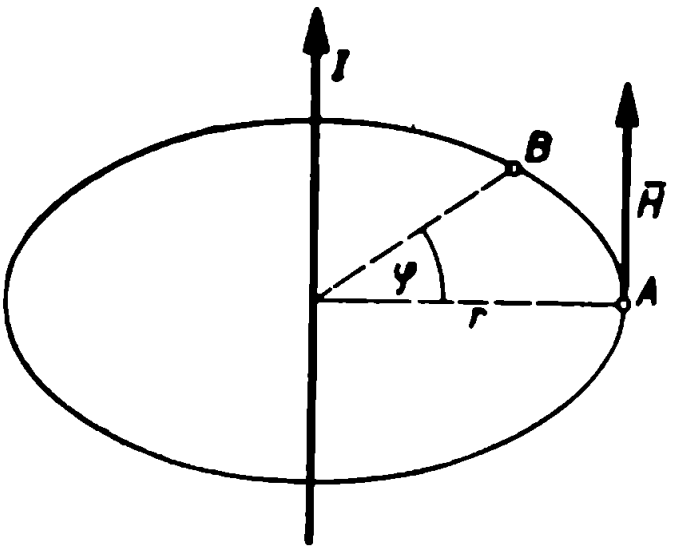
---

[1]) V učebnici fyziky pro III. ročník SVVŠ je uveden rozměr permeability $\mathrm{NA^{-2}}$. Dosadíme-li do zákonné jednotky $\mathrm{H\,m^{-1}}$ za $\mathrm{H} = \mathrm{Vs\,A^{-1}}$, je $\mathrm{H\,m^{-1}} = \mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}} = \mathrm{VAs\,m^{-1}\,A^{-2}} = \mathrm{VC\,m^{-1}\,A^{-2}} = \mathrm{J\,m^{-1}\,A^{-2}} = \mathrm{NA^{-2}}$.

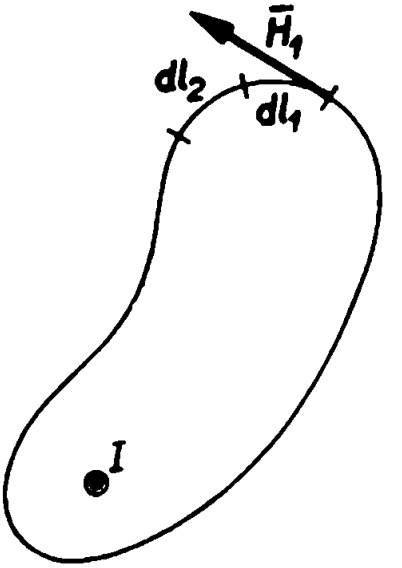
Z toho

$$H \,.\, 2\pi r = I = E_m \,. \qquad (1)$$

Součin $H \,.\, 2\pi r$, rovnající se proudu I, nazývá se magnetomotorické napětí E_m. Jednotkou magnetomotorického napětí je tedy ampér.



Obr. 1



Obr. 2

Dá se dokázat, že vztah (1) lze zobecnit pro libovolnou uzavřenou křivku. V tomto případě (obr. 2) musíme křivku rozdělit na elementy dl_1, dl_2, ... tak malé, že intenzita H je ve všech bodech určitého elementu konstantní, v místě elementu stanovit intenzitu $H_1, H_2, \ldots$ a za magnetomotorické napětí musíme vzít součet skalárních součinů

$$\overline{H_1} \,.\, \overline{dl_1} + \overline{H_2} \,.\, \overline{dl_2} + \ldots = I = E_m, \qquad (2)$$

přičemž sčítání musíme provést podél celé uzavřené křivky.

Prochází-li uzavřenou křivkou více proudů, je magnetomotorické napětí rovno součtu těchto proudů čili

$$E_m = \Sigma I_n \,.$$

Magnetomotorické napětí E_m dané součtem skalárních součinů $\overline{H_k} \,.\, \overline{dl_k}$ je pro libovolnou uzavřenou křivku rovno součtu všech proudů procházejících vnitřkem křivky.

Násobíme-li rovnici (1) zlomkem

$$\frac{\varphi}{2\pi},$$

získáme

$$H \,.\, r\varphi = I \frac{\varphi}{2\pi},$$

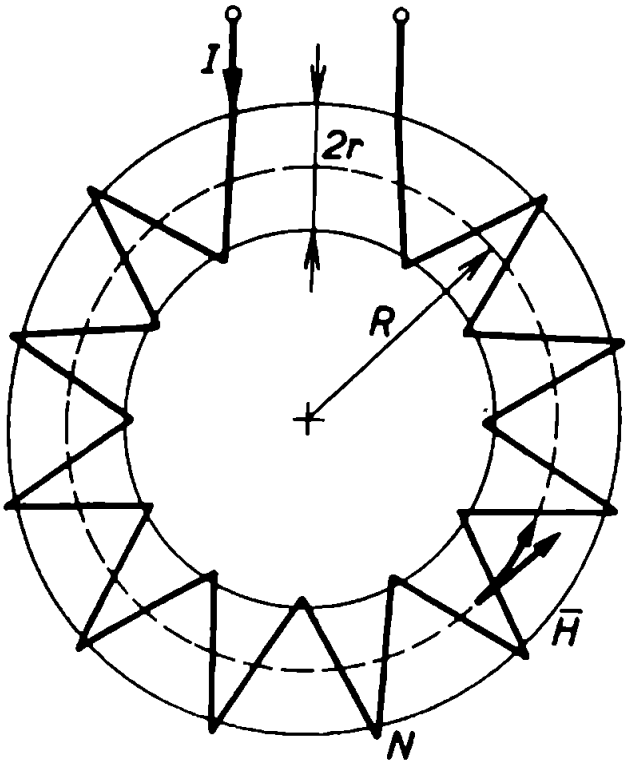
čili

$$H \,.\, \widehat{AB} = I \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Součin $H \,.\, \widehat{AB} = U_m$ je magnetické napětí mezi body A, B (obr. 1).

Prstencová cívka (toroid)

V prstencové cívce (obr. 3) s N závity rovnoměrně rozloženými



Obr. 3

se středním poloměrem prstence R značně větším, než je poloměr závitů r, vzniká homogenní magnetické pole s intenzitou H, prochází-li cívkou proud I. Aplikujme na toroid větu o magnetomotorickém napětí. Uzavřenou křivkou je kružnice s poloměrem R délky $l = 2\pi R$. Protože H má směr tečny k této kružnici, je magnetomotorické napětí

$$E_m = H \,.\, l = NI \,.$$

Kružnice totiž obepíná N vodičů s proudem I. Z toho plyne pro toroid

$$H = \frac{NI}{l} = Iz, \qquad B = \mu_0 \frac{NI}{l} = \mu_0 Iz \,,$$

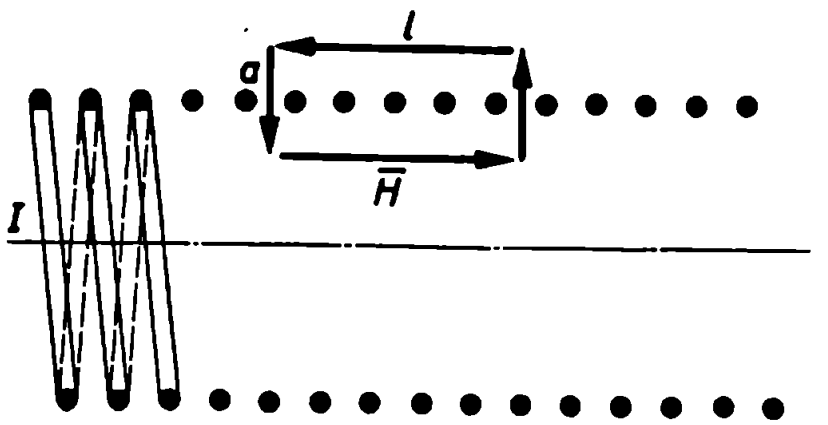
kde $z = \frac{N}{l}$ udává počet závitů na jednotce délky.

Solenoid

Uprostřed velmi dlouhého a tenkého solenoidu je homogenní magnetické pole, prochází-li závity proud I. Abychom odvodili vzorec pro intenzitu, postupujeme takto (obr. 4).

Zvolíme obdélník délky l a šířky a, který obepíná N závitů, a stanovíme magnetomotorické napětí

$$E_m = H \,.\, l + 0 \,.\, a + 0 \,.\, l + 0 \,.\, a = NI \,.$$



Obr. 4

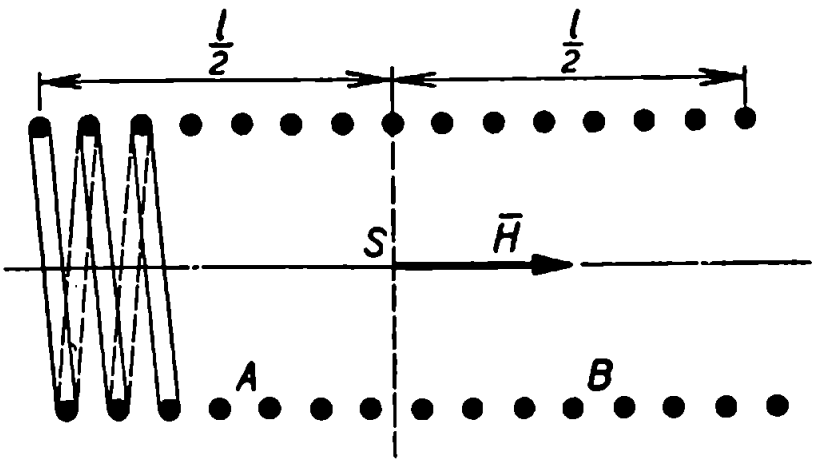
Složka intenzity H ve směru délky a se rovná nule a intenzita vně solenoidu je také nulová. Z předešlé rovnice je

$$H = \frac{NI}{l} = Iz\,.$$

Při odvození byla délka l malou částí délky celého solenoidu a N byl počet závitů na této délce. Snadno nahlédneme, že za délku můžeme vzít délku solenoidu, vezmeme-li za N počet závitů celého solenoidu. Vztah

$$H = \frac{NI}{l} = Iz \qquad [\mathrm{A/m}]$$

platí pro solenoid u něhož $l \gg r$, kde r je poloměr závitů.



Obr. 5

Intenzitu magnetického pole na konci solenoidu stanovíme touto úvahou:

Intenzita H je uprostřed solenoidu (obr. 5) vektorovým součtem intenzit buzených všemi závity. Myslíme-li si solenoid rozpůlen na části A, B, potom obě části mají stejný podíl na výsledné intenzitě, tedy levá polovina budí v S intenzitu $H = \frac{1}{2}Iz$. Odstraníme-li pravou polovinu solenoidu, stane se bod S středem

koncového závitu solenoidu. Na konci velmi dlouhého a tenkého solenoidu je tedy

$$H = \tfrac{1}{2}\,\frac{NI}{l} = \tfrac{1}{2}\,Iz\,.\,^{2})$$

Magnetické obvody. Hopkinsonův zákon

Magnetický obvod je cesta, kterou se uzavírá magnetický indukční tok.

Z větší části je zpravidla tvořen feromagnetickou látkou. Mějme prázdnou prstencovou cívku (toroid) s N závity, kdy $R \gg r$. R je střední poloměr prstence, r je poloměr závitů (obr. 3). Uvnitř cívky je homogenní magnetické pole s intenzitou

$$H = \frac{NI}{l}$$

a indukcí

$$B_0 = \mu_0 \frac{NI}{l}\,.$$

Indukční tok

$$\Phi = \mu_0 \frac{NI}{l}\,S\,,$$

je-li S plocha řezu.

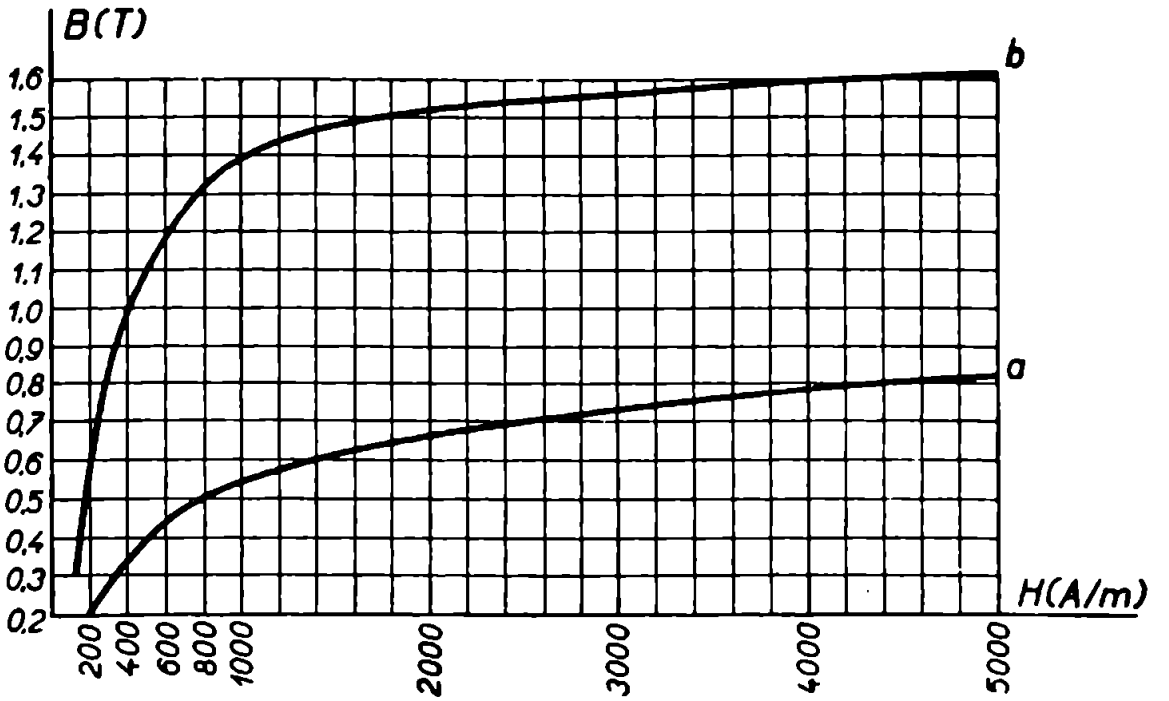
Dáme-li do cívky jádro z feromagnetické látky, intenzita H buzená proudem I se nezmění, ale indukce B_0 se μ_r-krát zvětší. Ve feromagnetiku je tedy indukce

$$B = \mu_r B_0 = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l}\,.$$

---

[2]) Vzorce pro solenoid platí přesně jen pro solenoid velmi dlouhý a velmi tenký, tedy pro ideální podmínky, které prakticky jsou nerealizovatelné. Podobně je tomu i u jiných vzorců.

Charakteristickou vlastností feromagnetických látek je závislost μ_r, a tudíž také μ, na intenzitě magnetického pole H a na předcházejícím stavu magnetickém. O tom je pojednáno v učebnici fyziky pro III. roč. SVVŠ. Při řešení příkladů se proto většinou neobejdeme bez magnetizační křivky (obr. 6).



Obr. 6

Indukční tok v toroidu s feromagnetickým jádrem je

$$\Phi = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l} S = \frac{NI}{\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{S}} = \frac{E_m}{R_m},$$

kde $E_m = NI$ je magnetomotorické napětí,

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{S} = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S} \qquad (3)$$

je magnetický odpor.

Vztah

$$\Phi = \frac{E_m}{R_m}$$

se nazývá Hopkinsonův zákon; je to vlastně obdoba Ohmova zákona pro uzavřený magnetický obvod[3]).

Magnetomotorické napětí E_m odpovídá elektromotorickému napětí E, magnetický tok Φ odpovídá elektrickému proudu I a magnetický odpor R_m odpovídá elektrickému odporu R. Vztah (3) pro magnetický odpor má stejný tvar jako vztah pro odpor vodiče

$$R = \frac{1}{\gamma}\,\frac{l}{S},$$

kde γ je měrná vodivost. Ze srovnání plyne, že permeabilitu prostředí μ lze považovat za jakousi měrnou magnetickou vodivost. Mezi měrnou magnetickou a elektrickou vodivostí, pokud se týká látek, jsou však značné rozdíly. Neexistují např. magnetické izolátory, což má za následek rozptyl indukčních čar, látky diamagnetické a paramagnetické mají $\mu_r \doteq 1$, existuje proto velké množství látek s prakticky stejnou magnetickou vodivostí jakou má vakuum, látky feromagnetické jsou dobrými magnetickými vodiči, ale jejich magnetický odpor je značně závislý na H.

Úloha 1. Na prstencovém jádře z ocelolitiny se střední délkou indukční čáry $l = 0{,}8$ m, průřezu $S = 10^{-3}$ m^2 je navinuto $N = 1000$ závitů. Jaký proud je třeba k vytvoření indukčního toku a) $\Phi = 10^{-3}$ Wb, b) $\Phi = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Wb. Jakou hodnotu má relativní permeabilita μ_r v těchto případech?

Řešení.

a)

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{10^{-3}\ \mathrm{Wb}}{10^{-3}\ \mathrm{m}^2} = 1\ \mathrm{T}.$$

[3]) Jednotka pro magnetický odpor je $\mathrm{AV^{-1}s^{-1}} = \mathrm{H^{-1}}$.

Z magnetizační křivky najdeme pro $B = 1$ T potřebné $H = 420$ A m^{-1}. Ze vztahu

$$H = \frac{NI}{l}$$

je

$$I = \frac{Hl}{N} = \frac{420 \text{ A m}^{-1} \cdot 0{,}8 \text{ m}}{1000} = 0{,}336 \text{ A} .$$

Ze vztahu

$$B = \mu_0 \mu_r H$$

plyne

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} .$$

Dosadíme-li za

$$\mu_0 = \frac{1}{8 \cdot 10^5} \text{ H m}^{-1} ,$$

je

$$\mu_r = \frac{1 \text{ T}}{\frac{1}{8 \cdot 10^5} \text{ H m}^{-1} \cdot 420 \text{ A m}^{-1}} \doteq 1{,}9 \cdot 10^3 \frac{\text{V s m}^{-2}}{\text{H A m}^{-2}} =$$

$$= 1{,}9 \cdot 10^3 \frac{\text{V s}}{\text{V s A}^{-1} \text{ A}} = 1900 .$$

b) Podobně stanovíme $I = 1{,}44$ A, $\mu_r = 0{,}67 \cdot 10^3 = 670$.

V tomto případě se stává jádro nasyceným, proto je potřebný proud velký a relativní permeabilita je značně menší než v a).

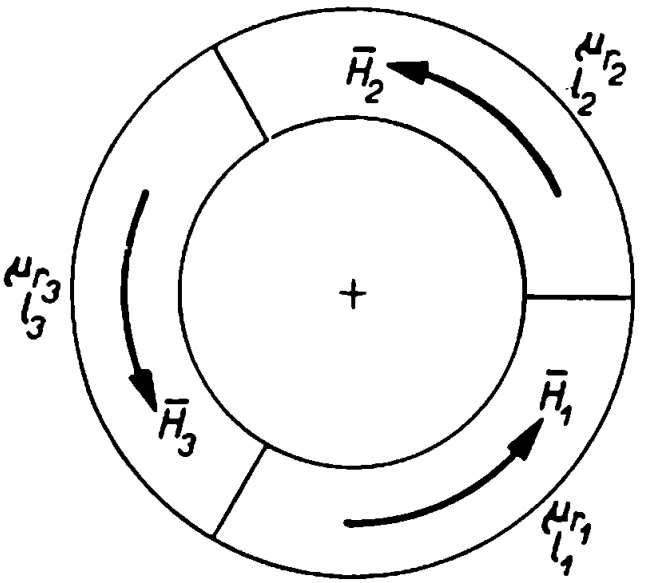
Složené magnetické obvody

Pro složené magnetické obvody platí zákony obdobné zákonům Kirchhoffovým a jejich důsledkům. Tak pro magnetické odpory zapojené sériově je výsledný odpor rovný součtu jednotlivých odporů čili

$$R_m = \Sigma R_{mk} .$$

Mějme toroid složený ze tří různých feromagnetických materiálů stejného průřezu S (obr. 7) ovinutý N závity s proudem I.

Délky středních indukčních čar a relativní permeability jednotlivých materiálů jsou $l_1, \mu_{r_1}; l_2, \mu_{r_2}; l_3, \mu_{r_3}$.



Obr. 7

Indukční tok Φ v magnetických odporech zapojených za sebou, zanedbáme-li rozptyl, je stejný, indukční čáry jsou vždy uzavřené. Je proto

$$E_m = \Phi (R_{m_1} + R_{m_2} + R_{m_3}) =$$

$$= BS \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_{r_1}} \frac{l_1}{S} + \frac{1}{\mu_0 \mu_{r_2}} \frac{l_2}{S} + \frac{1}{\mu_0 \mu_{r_3}} \frac{l_3}{S} \right) =$$

$$= \frac{B}{\mu_0 \mu_{r_1}} l_1 + \frac{B}{\mu_0 \mu_{r_2}} l_2 + \frac{B}{\mu_0 \mu_{r_3}} l_3 =$$

$$= H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 =$$

$$= NI = U_{m_1} + U_{m_2} + U_{m_3},$$

protože

$$H_1 l_1 = U_{m_1}, H_2 l_2 = U_{m_2}, H_3 l_3 = U_{m_3}$$

jsou magnetická napětí.

Úloha 2. Polovina prstence je z litiny, druhá polovina z ocelolitiny. Prstenec má průřez $S = 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$, střední délku $l = 0{,}6$ m a $N = 480$ závitů. Jak velký je proud I, je-li indukční tok $\Phi = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$ Wb. Jak velká jsou magnetická napětí na litině a na ocelolitině?

Řešení. Indukce v prstenci

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{0{,}6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Wb}}{10^{-3}\ \mathrm{m}^2} = 0{,}6\ \mathrm{T}.$$

Z magnetizačních křivek najdeme pro litinu $H_1 = 1400\ \mathrm{A\ m^{-1}}$, pro ocelolitinu $H_2 = 200\ \mathrm{A\ m^{-1}}$.

Magnetická napětí

$$U_{m1} = H_1 \cdot \frac{l}{2} = 1400\ \mathrm{A\ m^{-1}} \cdot 0{,}3\ \mathrm{m} = 420\ \mathrm{A},$$

$$U_{m2} = H_2 \cdot \frac{l}{2} = 200\ \mathrm{A\ m^{-1}} \cdot 0{,}3\ \mathrm{m} = 60\ \mathrm{A},$$

$$E_m = NI = U_{m1} + U_{m2} \rightarrow I = \frac{U_{m1} + U_{m2}}{N} = \frac{480\ \mathrm{A}}{480} = 1\ \mathrm{A}.$$

Potřebný proud $I = 1$ A. Magnetické napětí na litině je sedmkrát větší než na ocelolitině.

Magnetický obvod se vzduchovou mezerou

Prstencové jádro stálého průřezu S z feromagnetické látky s N závity je přerušeno vzduchovou mezerou (obr. 8). Délka střední indukční čáry ve feromagnetiku je l, ve vzduchové mezeře d. Rozptyl, který vzniká v okolí vzduchové mezery, zanedbáme.

Pro tento magnetický obvod je

$$E_m = NI = \Phi R_m = \Phi (R_{mž} + R_{m0}) =$$

$$= BS\left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r}\frac{l}{S} + \frac{1}{\mu_0}\frac{d}{S}\right) = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} l + \frac{B}{\mu_0} d = H_ž l + H_0 d,$$

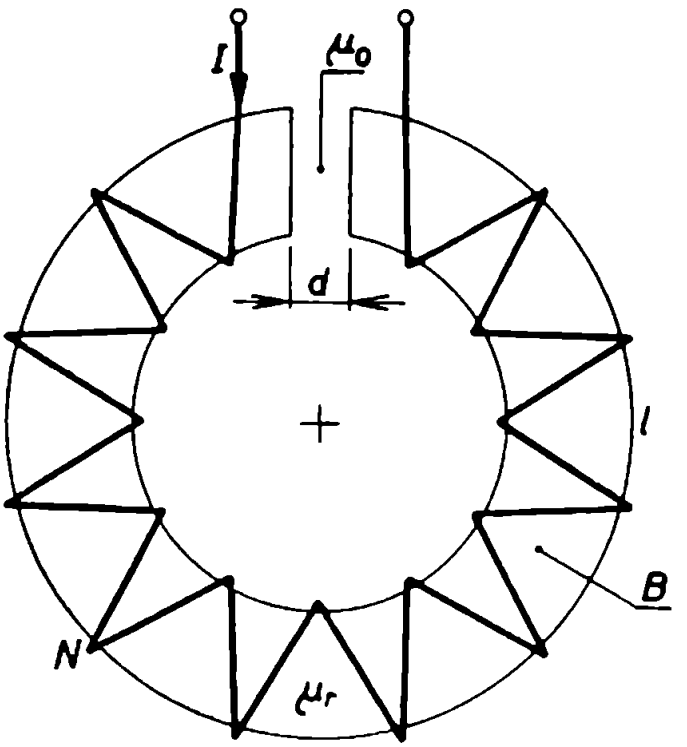
kde

$$H_ž = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

je magnetická intenzita ve feromagnetiku,

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \cdot \mu_r = \mu_r H,$$

je magnetická intenzita ve vzduchu.



Obr. 8

Zatímco magnetické indukční čáry jsou vždy uzavřené, všude spojité, jsou siločáry v tomto případě na rozhraní feromagnetika a vzduchu nespojité, intenzita H_0 ve vzduchu je μ_r-krát větší než ve feromagnetiku čili ve vzduchu je μ_r-krát více siločar než ve feromagnetiku. Proto na koncích feromagnetika vzniknou magnetické póly.

Poměr magnetických odporů je

$$R_{m_0} : R_{m_\check{z}} = d : \frac{l}{\mu_r} = \mu_r d : l,$$

a protože μ_r feromagnetických látek dosahuje velkých hodnot, dokud nenastal stav nasycení, je $R_{m_0} \gg R_{m_ž}$. Magnetomotorické napětí se z větší části spotřebuje na odporu vzduchové mezery, i když je d jen několik milimetrů. Uvedený případ můžeme chápat tak, že feromagnetikum s N závity s proudem I je zdrojem magnetomotorického napětí $E_m = NI$ a vnitřním odporem $R_{m_ž}$. Vzduchová mezera s magnetickým odporem R_m představuje spotřebič.

Úloha 3. V toroidu z ocelolitiny střední délky $l = 0{,}5$ m se vzduchovou mezerou tloušťky $d = 1$ cm je magnetická indukce $B = 1{,}2$ T. Jaký proud vybudí tuto indukci, je-li $N = 500$ závitů a nepřihlížíme-li k magnetickému rozptylu ve vzduchové mezeře. Kolik procent magnetomotorického napětí E_m je magnetické napětí na ocelolitině.

Řešení. Z magnetizační křivky pro ocelolitinu najdeme pro $B = 1{,}2$ T intenzitu $H_ž = 600\ \mathrm{A\,m^{-1}}$ a výpočtem získáme

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0} = 1{,}2 \,.\, 8 \,.\, 10^5\ \mathrm{A\,m^{-1}} = 9{,}6 \,.\, 10^5\ \mathrm{A\,m^{-1}}.$$

Magnetické napětí

$$U_{m_ž} = 600\ \mathrm{A\,m^{-1}} \,.\, 0{,}5 = 300\ \mathrm{A}\,,$$

$$U_{m_0} = 9{,}6 \,.\, 10^5\ \mathrm{A\,m^{-1}} \,.\, 10^{-2}\ \mathrm{m} = 9600\ \mathrm{A}\,,$$

$$E_m = U_{m_ž} + U_{m_0} = 9900\ \mathrm{A} = NI\,,$$

$$I = \frac{9900\ \mathrm{A}}{500} = 19{,}8\ \mathrm{A};$$

$$\frac{U_{m_ž}}{E_m}\,100\ \% = \frac{300}{9900} \cdot 100\ \% \doteq 3\ \%\,.$$

Při paralelním spojení magnetických odporů platí podobně jako v elektřině

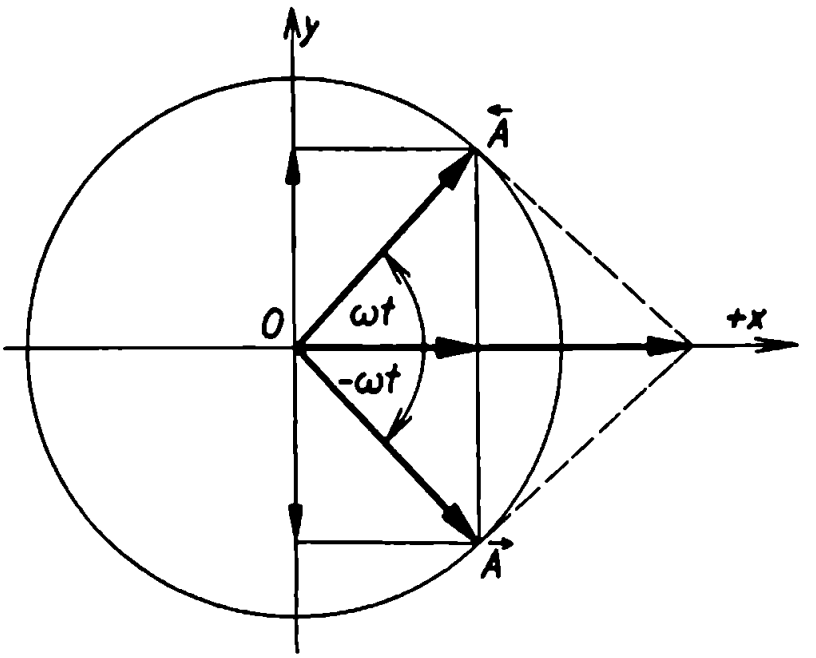
$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_{m_1}} + \frac{1}{R_{m_2}}\,.$$

Tím se ale dále zabývat nebudeme.

Točivé magnetické pole

Mějme dva točivé vektory $\overleftarrow{A}$, $\overrightarrow{A}$ stejně velké, z nichž první se

otáčí úhlovou rychlostí ω, druhý opačně úhlovou rychlostí $-\omega$. Na obr. 9 jsou tyto točivé vektory znázorněny v čase t. Stanovme jejich vektorový součet. Složky točivých vektorů do osy



Obr. 9

y se ruší, složky obou vektorů ve směru osy x jsou stejně velké a mají hodnotu $A \cos \omega t$, takže výslednice

$$\bar{x} = 2\,\overline{A} \cos \omega t = \overleftarrow{A} + \overrightarrow{A}\,. \qquad (4)$$

Rovnice $\bar{x} = 2\,\overline{A} \cos \omega t$ je rovnicí harmonických kmitů s amplitudou $2A$. Kmity jsou v ose x. Obvykle se ve vztazích pro harmonické kmity vyskytuje funkce sinus, zde je kosinus, ale to na věci nic nemění.

Z rovnice (4) plyne, že složením dvou točivých vektorů $\overleftarrow{A}$, $\overrightarrow{A}$ vznikne harmonické kmitání ve směru osy x s amplitudou $2A$. Větu můžeme obrátit. Harmonické kmity ve směru osy x dané vztahem $x = A \cos \omega t$ můžeme nahradit dvěma točivými vektory $\frac{1}{2}\overleftarrow{A}$ a $\frac{1}{2}\overrightarrow{A}$.

Rovnici (4) píšeme přesněji

$$\bar{x} = \overline{A} \cos(\omega t + 0) = \tfrac{1}{2}(\overleftarrow{A}_0 + \overrightarrow{A}_0),$$

kde značka $_0$ udává počáteční fázi točivých vektorů vzhledem ke kladnému směru osy x a 0 je současně počáteční fáze harmonického kmitání. Obecně můžeme psát

$$\bar{x} = \overline{A} \cos(\omega t + \varphi) = \tfrac{1}{2}(\overleftarrow{A}_\varphi + \overrightarrow{A}_\varphi).$$

Na obr. 10 je tento vztah znázorněn v čase $t = 0$.

Otočíme-li přímku, v níž probíhá harmonické kmitání, o úhel α, musíme o úhel α otočit také točivé vektory, vektor $\overleftarrow{A}$ má nyní počáteční fázi $\varphi + \alpha$, vektor $\overrightarrow{A}$ má však počáteční fázi $\varphi - \alpha$, jak je patrno z obr. 11. Je tedy

$$\overline{A_\alpha} \cos(\omega t + \varphi) = \tfrac{1}{2}(\overleftarrow{A}_{\varphi+\alpha} + \overrightarrow{A}_{\varphi-\alpha}). \qquad (5)$$

Mějme nyní tři cívky navzájem posunuté o úhel $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ (obr. 12) a veďme do nich trojfázový proud

$$i_1 = I_m \cos \omega t,$$
$$i_2 = I_m \cos(\omega t + \tfrac{2}{3}\pi),$$
$$i_3 = I_m \cos(\omega t + \tfrac{4}{3}\pi).$$

První cívka s proudem i_1 budí v S magnetickou indukci $B_0 \cos \omega t$, která se harmonicky mění a kterou můžeme podle (5) nahradit dvěma točivými vektory

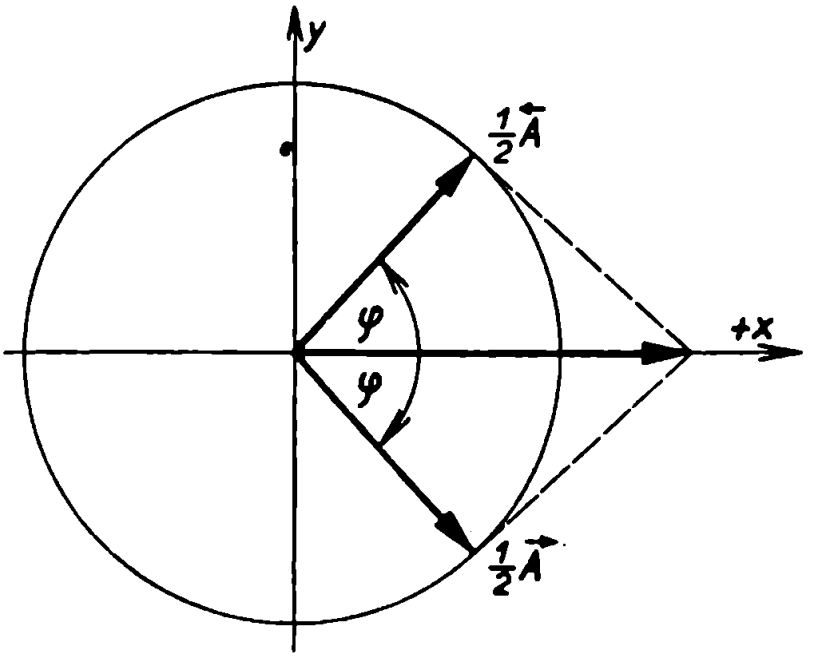
$$\overline{B_0} \cos \omega t = \tfrac{1}{2}(\overleftarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_0).$$

Podobně druhá cívka budí v S magnetickou indukci, která podle (5), protože $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, je dána vztahem

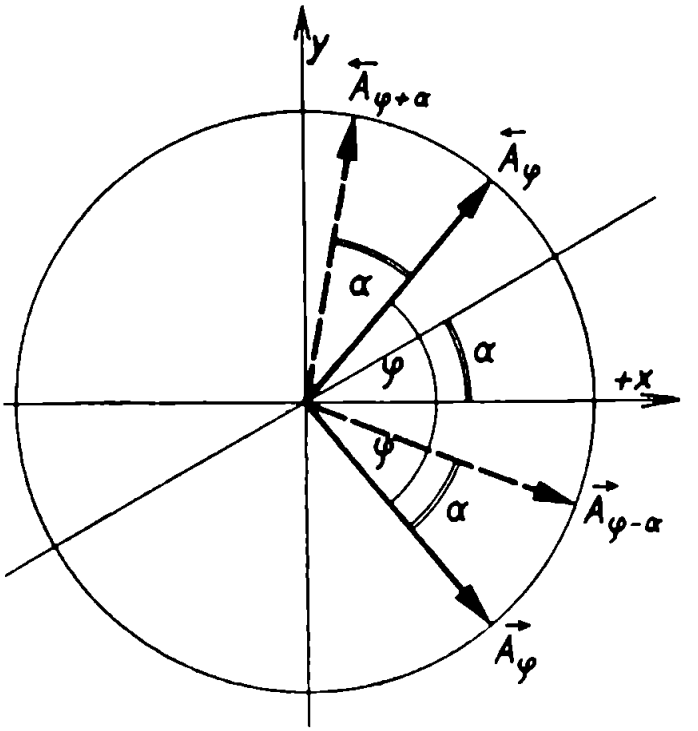
$$\overline{B_{\frac{2}{3}\pi}} \cos(\omega t + \tfrac{2}{3}\pi) = \tfrac{1}{2}(\overleftarrow{B}_{\frac{4}{3}\pi} + \overrightarrow{B}_0).$$

Podobně pro třetí cívku je $\varphi = \frac{4}{3}\pi$, $\alpha = \frac{4}{3}\pi$ a tudíž

$$\overline{B_{\frac{4}{3}\pi}} \cos(\omega t + \tfrac{4}{3}\pi) = \tfrac{1}{2}(\overleftarrow{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \overrightarrow{B}_0) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(\overleftarrow{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \overrightarrow{B}_0).$$


y
$\frac{1}{2}\vec{A}$
φ
φ
+x
$\frac{1}{2}\vec{A}$

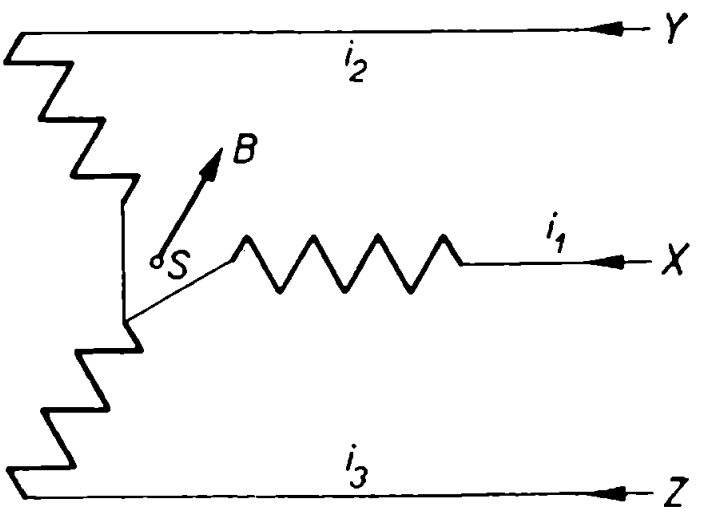
Obr. 10


y
$\vec{A}_{\varphi+\alpha}$
$\vec{A}_{\varphi}$
α
φ
α
+x
φ
α
$\vec{A}_{\varphi-\alpha}$
$\vec{A}_{\varphi}$

Obr. 11

Výsledná indukce $\overline{B}$ v bodě S je určena šesti točivými vektory, z nichž tři mají orientaci kladnou, tři zápornou. Vektory se stejnou orientací lze vektorově sečíst

$$\overline{B} = \tfrac{1}{2}\,(\overleftarrow{B_0} + \overleftarrow{B_{\frac{2}{3}\pi}} + \overleftarrow{B_{\frac{4}{3}\pi}} + \overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{B_0} = \tfrac{2}{3}\,\overrightarrow{B_0}\,,$$



Obr. 12

protože

$$\overleftarrow{B_0} + \overleftarrow{B_{\frac{2}{3}\pi}} + \overleftarrow{B_{\frac{4}{3}\pi}} = 0\,,$$

jak snadno zjistíme vektorovým sčítáním (obr. 13). V bodě S vzniká tedy točivé magnetické pole s magnetickou indukcí $\overline{B} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{B_0}$.

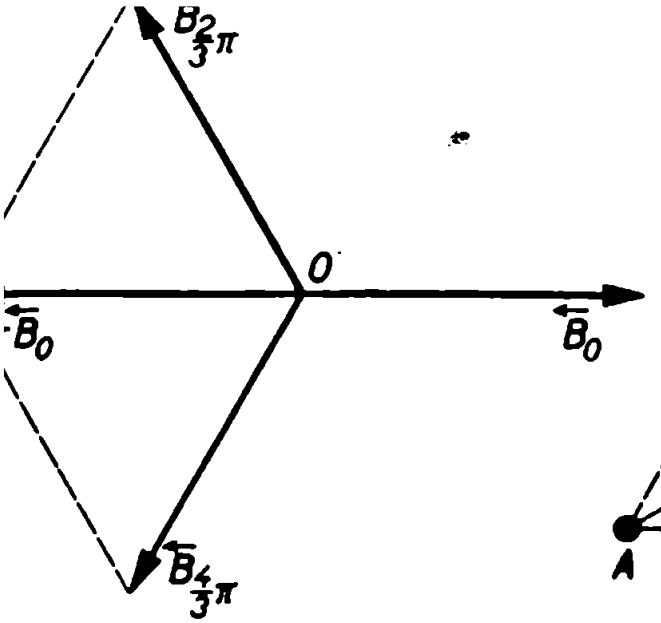
Úloha 4. Vrcholy rovnostranného trojúhelníku o straně a jsou vedeny kolmo k ploše trojúhelníku velmi dlouhé přímé vodiče. Prochází-li vodiči trojfázový proud, jaká magnetická indukce vznikne ve středu trojúhelníku, půlí-li rovina trojúhelníku přímé vodiče? Co se stane, zaměníme-li mezi sebou dvě fáze?

Řešení. Proudy, které jdou jednotlivými vodiči, jsou (obr. 14)

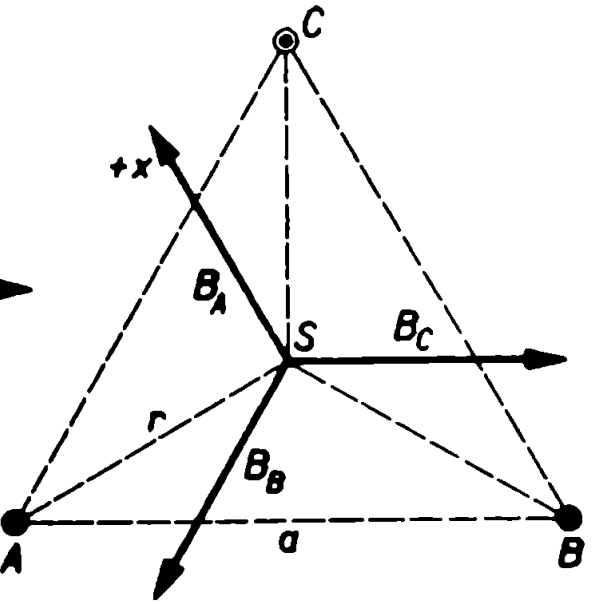
$i_A = I_m \cos \omega t\,,$

$i_B = I_m \cos\,(\omega t + \tfrac{2}{3}\pi),$

$i_C = I_m \cos\,(\omega t + \tfrac{4}{3}\pi)\,.$



Obr. 13



Obr. 14

Zvolíme-li bod S za počátek a kladný směr osy x ve směru indukce B_A, je

$$\overline{B}_A = \overline{B}_0 \cos \omega t = \tfrac{1}{2} (\overleftarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_0) ,$$

$$\overline{B}_B = \overline{B}_{\frac{2}{3}\pi} \cos (\omega t + \tfrac{2}{3}\pi) = \tfrac{1}{2} (\overleftarrow{B}_{\frac{4}{3}\pi} + \overrightarrow{B}_0) ,$$

$$\overline{B}_C = \overline{B}_{\frac{4}{3}\pi} \cos (\omega t + \tfrac{4}{3}\pi) = \tfrac{1}{2} (\overleftarrow{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \overrightarrow{B}_0) = 1 (\overleftarrow{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \overrightarrow{B}_0) .$$

Výsledná indukce v bodě S

$$\overline{B}_S = \tfrac{1}{2} (\overleftarrow{B}_0 + \overleftarrow{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \overleftarrow{B}_{\frac{4}{3}\pi} + \overrightarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_0) = \tfrac{3}{2} \overrightarrow{B}_0 ,$$

protože

$$\overleftarrow{B}_0 + \overleftarrow{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \overleftarrow{B}_{\frac{4}{3}\pi} = 0 .$$

V bodě S vzniká tedy točivé magnetické pole $\frac{3}{2} \overrightarrow{B}_0$, kde

$$B = \mu_0 \frac{I_m}{2\pi r} = \mu_0 \frac{I_m \sqrt{3}}{2\pi a} .$$

Zaměníme-li druhou fázi s třetí, je

$$i_A = I_m \cos \omega t ,$$
$$i_B = I_m \cos (\omega t + \tfrac{4}{3}\pi) ,$$
$$i_C = I_m \cos (\omega t + \tfrac{2}{3}\pi) .$$

Pro indukce nyní je

$$\overline{B}_A = \overline{B}_0 \cos \omega t = \tfrac{1}{2}\,(\overleftarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_0)\,,$$

$$\overline{B}_B = \overline{B}_{\frac{2}{3}\pi} \cos\,(\omega t + \tfrac{4}{3}\pi) = \tfrac{1}{2}\,(\overleftarrow{B}_{2\pi} + \overrightarrow{B}_{\frac{2}{3}\pi}) = \tfrac{1}{2}\,(\overleftarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_{\frac{2}{3}\pi})\,,$$

$$\overline{B}_C = \overline{B}_{\frac{4}{3}\pi} \cos\,(\omega t + \tfrac{2}{3}\pi) = \tfrac{1}{2}\,(\overleftarrow{B}_{2\pi} + \overrightarrow{B}_{-\frac{2}{3}\pi}) = \tfrac{1}{2}\,(\overleftarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_{\frac{4}{3}\pi})\,.$$

Výsledná indukce

$$\overline{B}_S = \tfrac{1}{2}\,(\overleftarrow{B}_0 + \overleftarrow{B}_0 + \overleftarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \overrightarrow{B}_{\frac{4}{3}\pi}) = \tfrac{3}{2}\,\overleftarrow{B}_0\,.$$

Zaměníme-li mezi sebou dvě fáze, změní točivé pole směr rotace.

2. Kategorie B

Hudební akustika

František Černický, Praha

Z obecné nauky o zvuku čili akustiky zopakujeme některé základní pojmy a vztahy a vybudujeme na nich soustavu pravidel a jevů z hudební akustiky. Pak si všimneme blíže některých hudebních nástrojů.

I. Zvuk mající jen *výšku* a *intenzitu* je *jednoduchý zvuk*. Vzniká jednoduchými kmity pružných těles. Může být vyjádřen např. výrazem

$$u = u_{\mathrm{m}} \sin \frac{2\pi}{T}\, t = u_{\mathrm{m}} \sin 2\pi f t = u_{\mathrm{m}} \sin \omega t. \qquad (1)$$

Zde je: u okamžitá akustická výchylka z rovnovážné polohy, u_{m} amplituda výchylky (rovná polovině rozkmitu), T perioda čili doba kmitu, f kmitočet čili frekvence, ω úhlový kmitočet. *Absolutní výška tónu* je rovna *frekvenci* f. Jednotkou pro měření frekvence je *hertz*, značka Hz; (1 Hz = $1\,\mathrm{s}^{-1}$). Intenzita zvuku je přímo úměrná u_{m}^2.

Skutečná zvučící tělesa vydávají zpravidla *zvuky složené*. Kmitočty jednotlivých složek tu lze považovat za celistvé násobky jistého kmitočtu nejmenšího, což je *základní kmitočet* f_1. Podle toho, jak jsou zastoupeny jednotlivé jednoduché zvuky ve zvuku složeném, posuzujeme jeho *barvu*. V dalším budeme pro složený zvuk užívat názvu *tón*. Stejně vysoké a stejně intenzívní tóny hrané na housle nebo flétnu či trubku se odlišují právě barvou.

Příbuznost tónů

Z pokusů se sirénami zjišťujeme, že příbuznost tónů mezi sebou je dána nikoli rozdílem jejich absolutních výšek, nýbrž jejich *poměrem*. Pro určitost mějme na mysli sirénu Seebeckovu, v jejíchž soustředných kružnicích jsou otvory; jejich počet v jednotlivých kružnicích je

$$24 \quad 27 \quad 30 \quad 32 \quad 36 \quad 40 \quad 45 \quad 48 \quad \ldots \qquad (2)$$

Ať ji rozezvučíme při malém, nebo při velkém počtu obrátek za sekundu, příbuznost vzniklých osmi tónů zůstává zachována. Vznikající tóny můžeme sledovat v posloupnosti od nižších k vyšším ($f_k > f_{k-1}$) nebo obráceně od vyšších k nižším; zde budeme předpokládat vždy posloupnost stoupající. Pro takovou řadu tónů se ujalo označení *stupnice dur (stupnice tvrdá)*. V hudbě tu přistupuje ještě označení počátečního tónu, např. C, příslušná stupnice je C dur. Pro jednotlivé stupně byly zavedeny názvy

$$C \quad D \quad E \quad F \quad G \quad A \quad H \quad c. \qquad (3)$$

Osmý tón má ve svém označení totéž písmeno jako počáteční tón, je *oktávou* tónu základního: $f = 2f_1$. Názvu *oktáva* se v hudbě užívá ještě v jiném významu; značí skupinu tónů s frekvencemi v rozsahu od některého tónu C (c, c′ atp.) až do následujícího c (c′, c″ atp.); tato horní mez sama už patří do oktávy následující. Tak všechny tóny od C do H tvoří tzv. *velkou* oktávu, konec řady (3) je začátkem *malé* oktávy atd. Jednotlivé stupně stupnice se zpravidla označují latinskými řadovými číslovkami: *prima, sekunda, tercie, kvarta, kvinta, sexta, septima, oktáva* nebo římskými číslicemi I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII.

Skutečnost, že příbuznost tónů tvrdé stupnice je nezávislá na výšce počátečního tónu a je dána poměrem příslušných kmitočtů, umožňuje jednoduché číselné vyjádření výšek tónů libovolné tvrdé stupnice. Tzv. *relativní výška tónu* je poměr kmitočtu daného tónu stupnice ke kmitočtu tónu základního

$$\frac{f_k}{f_1} = \frac{z_k n}{z_1 n} = \frac{z_k}{z_1};$$

zde je z_k počet otvorů v k-té kružnici, n počet otáček sirény za sekundu. Můžeme tedy sestavit tabulku I:

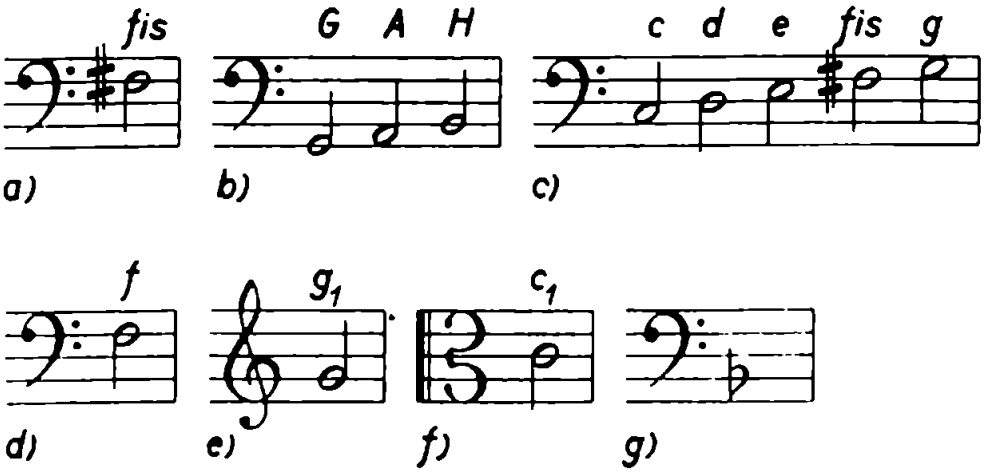
z_k	24	27	30	32	36	40	45	48
relativní výška tónu	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
stupeň	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII

Je účelné rozdělit celou stupnici na dvě poloviny zvané *tetrachordy* a všimnout si *intervalů* (odlehlostí) každých dvou sousedních tónů.

Pro dolní tetrachord máme $\frac{9}{8} : 1 = \frac{9}{8}$, $\frac{5}{4} : \frac{9}{8} = \frac{10}{9}$, $\frac{4}{3} : \frac{5}{4} = \frac{16}{15}$,
pro horní tetrachord máme $\frac{5}{3} : \frac{3}{2} = \frac{10}{9}$, $\frac{15}{8} : \frac{5}{3} = \frac{9}{8}$, $2 : \frac{15}{8} = \frac{16}{15}$.

Mezi koncem dolního tetrachordu a začátkem horního je interval $\frac{9}{8}$. Intervaly dané zlomky $\frac{9}{8}$ a $\frac{10}{9}$ se od sebe liší poměrně málo,[1]) v hudbě se označují jako *celé tóny* ($\frac{9}{8}$ je velký celý tón, $\frac{10}{9}$ je malý celý tón). Poslední interval $\frac{16}{15}$ v každém z těch dvou tetrachordů je výrazně odlišný. V hudbě se označuje názvem *půltón* (resp. zde přesněji velký půltón). S použitím těchto označení vyjadřuje schéma: 1 1 $\frac{1}{2}$ shodně stavbu dolního i horního tetrachordu tvrdé stupnice.

Jestliže nyní vytvoříme novou tvrdou stupnici tak, že k hornímu tetrachordu základní stupnice C dur jako spodnímu přidáme další tetrachord se shodnou stavbou jakožto tetrachord horní, dostaneme stupnici G dur: G A H c d e fis g. Zde jsme musili nahradit tón f tónem *vyšším*, aby byl druhý půltón ve stupnici až na konci horního tetrachordu. Toto zvýšení se v hudbě značí *křížkem* ♯ před notou a připojením přípony -is k původnímu jménu tónu, zde tedy *fis*, v notách s basovým klíčem (obr. 15a). Napsaná stupnice G dur má tři tóny z velké oktávy a pět tónů z oktávy malé (obr. 15b, 15c).



Obr. 15

Tóny v hudbě užívané se řadí do osmi oktáv, nejhlubší je *subkontraoktáva* od C_2 do H_2, pak následuje *kontraoktáva* od C_1 do H_1, dále *velká oktáva* od C do H, *malá oktáva* od c do h, pak *jednočárkovaná* od c_1 do h_1, *dvoučárkovaná* c_2 až h_2, obdobně c_3 až h_3 a c_4 až h_4. Na klavíru je nejnižší tón A_2, nejvyšší a_4. Mužský hlas obsahuje především

[1]) Interval $\frac{9}{8} : \frac{10}{9} = \frac{81}{80}$ je tzv. syntonické komma.

tóny malé oktávy, doplněné menší nebo větší částí velké oktávy u hlubokého hlasu (*bas*) nebo oktávy čárkované u vysokého hlasu (*tenor*). Ženský hlas zní o oktávu výše než mužský; hluboký ženský hlas je *alt*, vysoký se nazývá *soprán*.

Citlivost našeho ucha je různá pro tóny různých výšek; jako dolní mez se udává frekvence 16 Hz (frekvence nižší označujeme jako *infrazvuk*), horní hranice je různá u různých lidí a mění se s věkem, nejvyšší slyšitelné frekvence se blíží mezi 20 000 Hz (frekvence vyšší označujeme jako *ultrazvuk*).

Hudební skladba může např. obsahovat jen tóny vybrané z tónů stupnice G dur (obr. 15b, c) a všech stupnic z ní vzniklých zvýšením, resp. snížením všech stupňů o jednu nebo více oktáv. Taková skladba je v *tónině* G dur, tj. má všude fis místo f, fis_1 místo f_1 atd. Zpravidla se tento předpis v notách vyznačí hned za tzv. *klíčem* na začátku skladby nebo na začátku části skladby; obyčejně se toto tzv. *předznamenání* (v našem případě ♯) opakuje na začátku každého řádku této části. To znamená, že každé psané f (ve všech oktávách) se hraje či zpívá o půl tónu výše, dokud není předepsána změna u jednotlivé noty — ta pak platí pro celou následující část taktu — nebo dokud se nezmění předznamenání přechodem skladby do jiné tóniny.

Klíčů se v hudbě užívá několik. Klíč *basový* (F) (obr. 15d) stanoví, že tón daný notou na lince čtvrté zdola je malé f. Klíč *houslový* (G) (obr. 15e) stanoví, že tón daný notou na lince druhé zdola je jednou čárkované g, tedy g′, což se častěji píše g^1 nebo g_1. Méně často se vyskytuje klíč C, užívaný v několika polohách. Zde uvedeme jen C klíč *violový* čili *altový* (obr. 15f), který stanoví, že tón daný notou na střední lince osnovy je jednou čárkované c, tedy c′ (c_1).

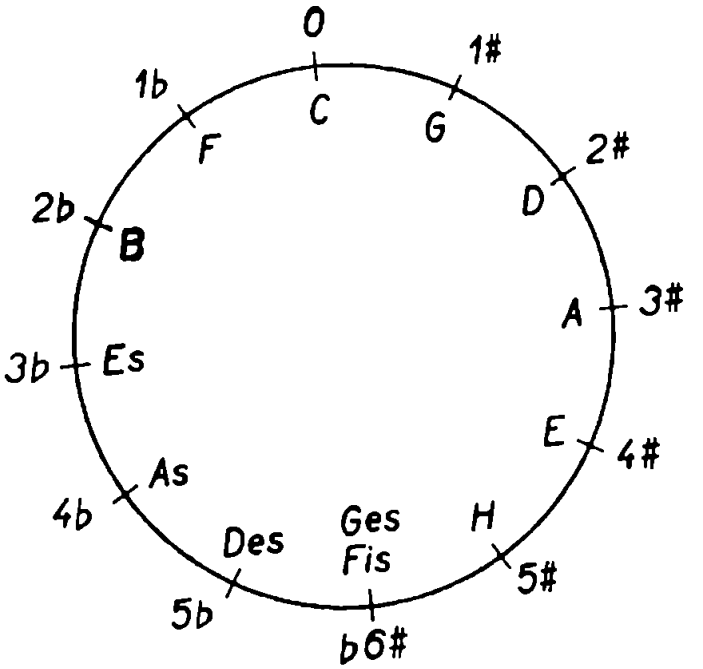
Shoda v absolutních výškách užívaných tónů se zaručí definicí určitého tónu jako normálního. R. 1885 bylo mezinárodní dohodou stanoveno, že tón a_1 — *komorní* a — má mít frekvenci 435 Hz. Nyní platí (od r. 1953) norma, podle níž má základní ladicí tón frekvenci 440 Hz. Podle tohoto normálu se ladí všechny hudební nástroje s předem připravenými výškami tónu, např. klávesové. Pro c_1 z toho dostaneme

$$f_{c1} \cdot \tfrac{5}{3} = f_{a1}, \text{ tj. } f_{c1} = \tfrac{3}{5} f_{a1} = 0{,}6 \,.\, 440 \text{ Hz} = 264 \text{ Hz}.$$

Podle starší normy bylo $f_{c1} = 0{,}6 \,.\, 435 \text{ Hz} = 261 \text{ Hz}$. Někdy se ještě užívá tzv. *fyzikálního* ladění, v němž $f_{c1} = 256 \text{ Hz} = 2^8 \text{ Hz}$; podle tohoto normálu přísluší každému tónu C v kterékoli z užívaných oktáv frekvence daná celým číslem.

Všimněme si ještě dalších běžně užívaných tvrdých stupnic. Vezmeme-li spodní tetrachord základní stupnice C dur za horní tetrachord nové stupnice a doplníme jej novým tetrachordem spodním, musíme

zde upravit polohu půltónu snížením tónu H_1 na Hes_1, což se zpravidla píše B_1.[2]) Tak vznikne stupnice F dur: F_1 G_1 A_1 B_1 C D E F. Její předznamenání je jedno ♭ (obr. 15g). Touto značkou se v notách vyjadřuje snížení o půl tónu; snížený tón dostává k základnímu jménu příponu -es, snížené e je es, snížené a je as.



Obr. 16

Analogicky můžeme vytvořit další tvrdé stupnice s libovolným tónem počátečním. V přirozeném ladění je potřebné zvýšení nebo snížení o půltón dáno poměrem $\frac{25}{24}$. Zrušení platného zvýšení nebo snížení se v notách vyznačuje další posuvkou ♮, které se říká *odrážka*.

Užívané stupnice a jejich předznamenání si snadno zapamatujeme podle schématu zvaného *kvintový kruh* v podobě hodinového ciferníku (obr. 16).

Stupnice C dur se umístí v poloze 0. Ve smyslu oběhu hodinových ruček pak následují stupnice vždy o kvintu vyšší, tj. G dur s jedním křížkem, D dur se dvěma atd. až Fis dur se šesti křížky. Opačným směrem se umístí stupnice vždy o kvintu nižší, tedy F dur s jedním bé, B dur se dvěma atd. až Ges dur se šesti bé. Tímto způsobem se stupnice Ges dur dostane ve schématu na totéž místo jako Fis dur.

---

[2]) Původně se rozlišovalo v abecedním sledu písmen a až g dvojí b: ♭ rotundum a ♮ quadratum; z tohoto se pak vytvořilo h.

Při tvoření tónu podle sluchu (na smyčcových nástrojích a při zpěvu) se uplatňuje tzv. *přirozené* ladění, odpovídající naší základní řadě čísel, resp. relativních vyšek tónu v tab. I. Hudební nástroje s tóny předem připravenými (klavír, varhany atd.) musí být laděny podle tzv. *temperovaného* ladění, při němž se stírá rozdíl mezi cis a des, dis a es atd. Mezi 8 tóny tvrdé stupnice je 7 intervalů, z toho 2 půltónové. V každém z ostatních pěti intervalů se umístí tón nový (cis = des, dis = es, fis = ges, gis = as, ais = b), takže v rozmezí oktávy je celkem 12 intervalů. V temperovaném ladění má každý z nich stejnou velikost x, takže pro oktávu platí

$$x^{12} = 2, \text{ tj. } x = \sqrt[12]{2} = 1{,}059\,5\,.$$

Výpočty se provádějí logaritmicky

$$\log x = \tfrac{1}{12} \log 2 = \tfrac{1}{12} \cdot 0{,}301\,03 = 0{,}025\,09\,.$$

Zavedením temperovaného ladění se mění všechny intervaly tvrdé stupnice (kromě oktávy) proti ladění přirozenému. Vypočtěme kvintu. Od primy ke kvintě je 7 půltónů, proto $\log y = 7 \cdot \log x = 7 \cdot 0{,}025\,09 = 0{,}175\,63$, kdežto v ladění přirozeném je kvinta dána relativní výškou $z = 1{,}5$, tj. $\log z = 0{,}176\,09$. Znamená tedy zavedení temperovaného ladění jisté zhoršení libozvučnosti akordů. Přesto je však velmi účelné a umožňuje jednak konstrukci složitých hudebních nástrojů a usnadňuje jejich použití, jednak umožňuje mnohotvárnost harmonie při kompozici tzv. *enharmonickou záměnou*, tj. vyjádřením téhož tónu dvojím způsobem, např. cis = des apod.

Kvintový kruh (obr. 16) ukazuje v temperovaném ladění správně všechny možné tóniny dur a jejich předznamenání. Shoda stupnice Ges dur o 6 ♭ se stupnicí Fis dur o 6 ♯ je prostě enharmonická záměna dvou stejně znějících, ale odlišně psaných tónů Ges a Fis. Také další myslitelné tvrdé tóniny jsou na obr. 16 již zastoupeny svou enharmonicky změněnou podobou: Cis dur se 7 ♯ není nic jiného než Des dur s 5 ♭, stejně Ces dur se 7 ♭ spadá v jedno s H dur o 5 ♯.

Všimněme si ještě jednou relativních výšek tónů tvrdé stupnice v tab. I. Zvýšením o oktávu, tj. násobením dvěma dostaneme z posloupnosti tam uvedené — zde ji označíme P_1 — posloupnost P_2, z ní dalším násobením dvěma P_3 a stejně P_4. Tak vznikne *tabulka II*:

P_1 ...	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2,
P_2 ...	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{15}{4}$	4,
P_3 ...	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{16}{3}$	6	$\frac{20}{3}$	$\frac{15}{2}$	8,
P_4 ...	8	9	10	$\frac{32}{3}$	12	$\frac{40}{3}$	15	16.

Tóny vyjádřené zde celými čísly jsou tzv. *alikvotní* tóny základního tónu, ve fyzice je nazýváme *tóny harmonické*. Zaznívají zpravidla zároveň s tónem základním a dodávají mu určitou barvu různou podle toho, s jakou intenzitou je ten který harmonický tón přítomen. Barva závisí na tom, v kterém místě a jak byla struna rozechvěna (smyčcem, drnknutím, kladívkem) či jakého je píšťala typu (retná či jazýčková, kovová či dřevěná, otevřená či krytá, široká či úzká) atp. U píšťal se dá provést tzv. *přefouknutí*, takže se základní tón neozývá, silně se ozve některý z harmonických tónů.

Z tab. II s řadami P_1, P_2, P_3, P_4 se můžeme ještě dodatečně poučit o tom, proč byla zvolena právě řada čísel (2) pro vytvoření tvrdé stupnice, základního to útvaru v hudbě vyspělých národů. Vidíme, že celá čísla v tab. II se vyskytující tvoří přirozený základ pro tvorbu intervalů. S tím souvisí pocit uspokojení při současném znění některých dvojic či trojic tónů. Mluvíme o *konsonanci (libozvuku)*.

Souzvuk oktávy s primou (2 : 1) už ani nepociťujeme jako *dvojzvuk*; současný zpěv téže melodie hlasem mužským a ženským lze považovat za *unisono*. Po oktávě nejlépe splývá v jednotný zvuk dvojzvuk kvinty s primou (3 : 2), pak kvarty s primou (4 : 3). Můžeme tak za konsonanci považovat souznění takových dvou tónů, jichž frekvence jsou v poměru malých celých čísel. Souzvuk sekundy nebo septimy považujeme za *disonanci (nelibozvuk)*.

Zaznívají-li současně tři tóny, mluvíme o *trojzvuku*, obecně o *akordu*. Stupně I, III, V tvrdé stupnice mají frekvence v poměru 4 : 5 : 6 (srovnej P_3) a tvoří tzv. *terckvintový* akord, obyčejně nazývaný jen kvintový akord, resp. dur akord. S jeho vynikající konsonancí je v souhlasu skutečnost, že je dán poměrem tří nejmenších celých čísel (v rozmezí téže oktávy). Přeložíme-li kvintu o oktávu níže, dostaneme jeden z jeho převratů, tzv. *kvart-sext-akord* (3 : 4 : 5). Přeložíme-li naopak primu o oktávu výše, dostaneme jiný převrat základního durakordu, tzv. *sextakord* (5 : 6 : 8).

Vybudujeme-li trojzvuk na V. stupni, dostaneme $\frac{3}{2} : \frac{15}{8} : \frac{9}{4} =$ $= 4 : 5 : 6$, tedy zase dur akord, podobně na IV. stupni. Soustava trojzvuků na I., IV. a V. stupni zahrnuje v sobě všechny stupně tvrdé stupnice. Má základní význam pro *harmonii* jednoduché skladby. První stupeň se nazývá *tónika*, pátý *dominanta* a čtvrtý *subdominanta*, zkratkami T, D, S.

V hudbě se užívá běžně také tónin *měkkých (moll)*. Proti stejnojmenným tvrdým stupnicím mají měkké stupnice tři stupně snížené o malý půltón $\frac{25}{24}$ (v přirozeném ladění): tercii, sextu a septimu, v číslech $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{9}{5}$. Harmonie tu není již tak jednoduchá. Kvintakord moll je dán poměry $1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2} = 10 : 12 : 15$. V melodii se tu užívá nezměněné stup-

nice moll zpravidla jen sestupně, při stoupání melodie se sexta a septima o půltón zvyšují. Grafické znázornění kvintovým kruhem je pro stupnice moll otočeno o 90° proti obrazu stupnic dur, takže tónina c moll má 3 ♭, tónina a moll je bez předznamenání atd. Blíže se měkkými tóninami zabývat nebudeme.

Jak tvrdá, tak měkká stupnice patří mezi stupnice *diatonické*. Od nich se odlišuje stupnice *chromatická*; postupuje kroky půltónovými.

Všimněme si ještě charakteru trojzvuků vytvořených na ostatních stupních tvrdé stupnice, různých od T, D, S. Obě části trojzvuku jsou tercie. Na II. stupni je dolní tercie malá, horní velká, je to trojzvuk moll; rovněž tak na stupni III. a VI. Trojzvuk vytvořený na VII. stupni není ani dur, ani moll, je to trojzvuk *zmenšený*, tvořený dvěma malými tercie mi. Má vyrazný charakter disonance s tendencí po „*usmíření*" rozvedením do konsonantní tercie na VIII. stupni.

Z čísel v dosavadním textu uvedených by se dala odvodit ještě četná další pravidla hudební teorie, ale tím se zabývat nebudeme. Vedle zmíněných stupnic a intervalů se vyskytovaly a vyskytují u různých národů na různých stupních kulturního vývoje ještě četné jiné intervaly a stupnice, např. intervaly čtvrttónové, šestinotónové aj. Mezi českými skladateli je např. i skladatel a teoretik hudby čtvrttónové prof. Alois Hába. Pro zajímavost uveďme jen způsob konstrukce a hry na čtvrttónový klavír. Má dvě normální klaviatury nad sebou, jež jsou proti sobě laděním posunuty o čtvrt tónu temperované stupnice ($x' = \sqrt[24]{2}$). Hra je tu podstatně obtížnější než v soustavách obvyklých. Také označení jednotlivých stupňů je složité: a, vyšší a, ais, vyšší ais, h. . ., resp. a, nižší a, as, nižší as, g . . . .

Poznámka. V hudbě má velký význam i trvání daného tónu (hudební metrika). Od toho v tomto textu odhlížíme.

II. V této části studijního textu si všimneme některých vlastností hudebních nástrojů jako zdrojů zvuku. Rozdělujeme je do několika skupin. Nejdůležitější jsou nástroje strunové a nástroje dechové, méně se užívá nástrojů bicích.

Ve skupině nástrojů *strunových* jsou

nástroje smyčcové: housle, viola, violoncello, kontrabas,
nástroje drnkací : harfa, kytara, citera, mandolína atd.,
nástroje kladívkové: klavír, cimbál.

Zdrojem zvuku je tu rozechvěná *struna*, tj. napjaté vlákno kovové, střevové, hedvábné apod., v četných případech vlákno opředené. Vzniklé stojaté vlnění má uzly na obou koncích struny. Vedle základního tónu se vytvářejí též tóny harmonické s frekvencemi $f_k = k \,.\, f_1$, kde $k =$

$= 2, 3, 4, 5 \ldots$ a f_1 je výška tónu základního, při němž se na struně vytvoří jediná půlvlna.

Při ladění nástroje se mění kolíčkem napětí struny. Pro výšku tónu základního platí vzorec

$$f = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{F}{m_1}}, \tag{5}$$

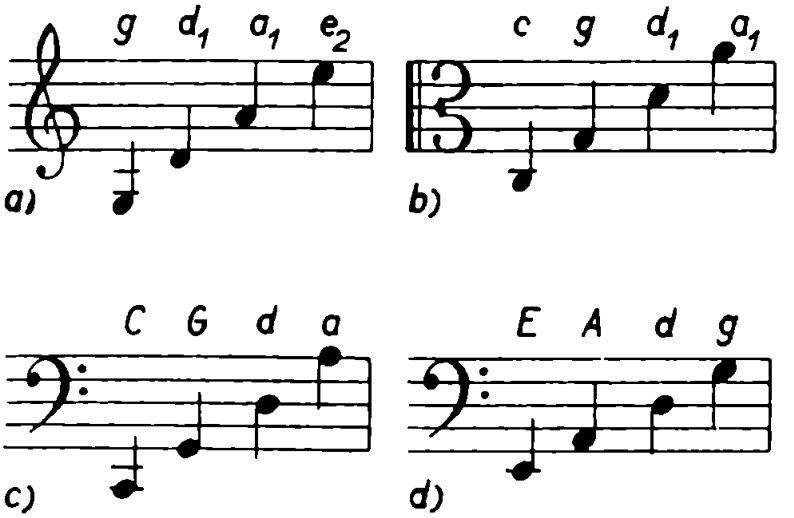
kde l je délka chvějící struny, F je síla strunu napínající a m_1 je hmotnost délkové jednotky struny. Tento vzorec lze také psát ve tvaru

$$f = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}, \tag{5'}$$

kde σ je napětí struny a ϱ její hustota.

A. Nástroje smyčcové

Při tahu smyčcem vznikají vlastně kmity netlumené, struně se během tahu stále dodává energie.



Obr. 17

Nejznámější ze smyčcových nástrojů jsou *housle*. Mají čtyři struny napjaté nad hmatníkem přes kobylku na ozvučné skříňce. Jsou naladěny v kvintách g, d_1, a_1, e_2 (obr. 17 a). Houslista hraje normálně tak, že zkracuje příslušnou strunu přitlačením některým prstem levé ruky v poloze základní (první) nebo v některé poloze vyšší, takže smyčcem rozechvívá část struny mezi prstem a kobylkou. Může však hrát i tak, že se struny na vhodném místě prstem jen lehce dotýká, takže zní celá

struna, rozdělená podle místa dotyku na 2 poloviny nebo 3 třetiny, 4 čtvrtiny atd. Ozývají se tu tedy tóny harmonické; v hudebním názvosloví se jmenují tóny *flažoletové.*

Trochu větší rozměry než housle má *viola.* S houslemi má 3 struny stejné, čtvrtá je nižší: c, g, d_1, a_1 (obr. 17b). Hra na violu je zcela obdobná hře na housle.

Violoncello (stručně: *cello*) má čtyři struny stejně laděné jako viola, avšak o oktávu níže: C, G, d, a (obr. 17c). Ozvučná skříň nástroje má už větší rozměry; hráč při hře sedí.

Kontrabas čili *basa* je největší ze smyčcových nástrojů. Basista hraje zpravidla vstoje. Čtyři struny basy jsou laděny v kvartách E_1, A_1, D, G. Noty pro kontrabas jsou psány o oktávu výše, tedy pro prázdné struny E, A, d, g (obr. 17d).

Kontrabasu se dnes hojně používá i bez smyčce. I na ostatní smyčcové nástroje se někdy část skladby hraje drnkáním – *pizzicato.*

B. Nástroje drnkací (trsací)

Strunové nástroje rozechvívané drnkáním byly známy už v nejstarších dobách historie lidstva. Dnes se užívá celé řady takových nástrojů. Uvedeme pouze typické představitele.

Harfa má buď diatonickou soustavu strun a 7 pedálů pro zvýšení tónu *(harfa pedálová)* nebo větší množství strun pevně naladěných *(harfa chromatická).* Struny se rozechvívají prsty pravé i levé ruky.

Kytara má 6 strun (E, A, d, g, h, e_1). Stiskem prstů levé ruky se struna zkrátí a dává příslušný vyšší tón. Rozechvívání se děje prsty pravé ruky. Kytary se hojně užívá k doprovodu zpěvu. Opatřena elektronickým zesilovačem má široké využití v moderních hudebních souborech.

Citera má dva druhy strun: jednak struny napjaté podél hmatníku s vestavěnými příčkami pro hraní melodie, jednak celou soustavu strun s pevnými kmitočty pro doprovod.

Mandolína má systém čtyř strun podobný jako housle, struny jsou však zdvojené; rozechvívají se tzv. *trsátkem.* Na stejném principu je založena celá skupina tzv. *tamburašských* nástrojů. Zvuk strun rozechvívaných trsátkem má ostřejší charakter pro větší zastoupení vyšších tónů harmonických.

C. Nástroje kladívkové

Sem patří především *klavír.* Má struny napjaty na litinovém rámu. Struny pro hluboké tóny jsou opředeny drátkem, aby jejich délka nepřesáhla přijatelnou mez. Rozsah je od A_2 do a_4, tedy sedm oktáv. Struny se rozechvívají *kladívky,* zpravidla dřevěnými s plstěným obalem, úderem prstů hráče do příslušných *kláves.* Rozechvěné struny se

utlumí po uvolnění příslušných kláves. Systém tlumítek lze zdvihnou *pedálem*, takže pak rozechvěné struny volně doznívají. Klavír je jeden z nejdůležitějších hudebních nástrojů.

Ke kladívkovým strunovým nástrojům patří též *cimbál*. Hráč má v každé ruce jednu paličku, jejímž úderem rozechvívá tu či onu ze strun pevně naladěných.

Dechové hudební nástroje

Podstatou dechového nástroje je píšťala retná nebo jazýčková. (Viz učebnice F 2 str. 147 a 148.)

D. Dřevěné dechové nástroje

Flétna je píšťala retná; zvuk tu vzniká v podobě tzv. *třecích tónů* tím, že hráč fouká vzduch z úst ve směru tečny k válcové trubici přes okrouhlý otvor *(ozvučný)*. Resonancí vzduchového sloupce zaznívá hlasitě tón tím hlubší, čím je tento sloupec delší, tj. čím více postranních otvorů hráč svými prsty uzavře. Klapky kryjící otvory umístěné mezi otvory hlavní řady umožňují zvednutím vznik tónů o půltón vyšších. Přefukování do vyšších tónů harmonických se provádí jednak změnou způsobu foukání, jednak vhodnou kombinací odkrytých a zakrytých otvorů. Rozsah je zpravidla od c_1 do h_3.

Poznámka: Flétna se počítá i nadále mezi tzv. „*dřeva*", i když se nyní vyrábí většinou z kovu.

Pikola je vlastně „malá" flétna; hraje o oktávu výše, její zvuk je nápadně pronikavý.

Zvláštním typem flétny je *flétna zobcová*. Hráč nefouká příčně přes nástroj, nýbrž ve směru délky nástroje.

Ostatní dřevěné nástroje dechové jsou svou podstatou píšťaly jazýčkové.

Hoboj má jako zdroj zvuku tzv. *strojek*, tvořený dvěma prohnutými plátky třtinovými. Hráč svírá strojek svými rty. Vlastní těleso píšťaly — tzv. *korpus* — je u hoboje mírně kuželovité. Je opatřen řadou otvorů a systémem klapek. Vedle základního tónu znějí u hoboje liché i sudé tóny harmonické. Přefukuje se pomocí „*oktávové*" klapky. Rozsah hoboje je od h do f_3.

Anglický roh je nástroj typu hoboje s rozsahem e až b_2. Konec korpusu má hruškovitý tvar.

Fagot má dvojitý strojek jako hoboj. Má funkci basového nástroje. Aby jeho skutečná délka nepřesáhla přijatelnou mez, je korpus v polovici pomocí U-trubice obrácen do opačného směru. Rozsah B_1 až b_2.

Do skupiny těchto dechových nástrojů patří svou povahou také *dudy*. Vlastní píšťala má zase řadu otvorů, jež dudák střídavě prsty odkrývá a

zakrývá. Proud vzduchu se vhání do píšťaly z měchu. Zvláštností hry na dudy je okolnost, že proud vzduchu je nepřerušovaný. Oddělené tóny téže výšky se tvoří vkládáním tónu jiného. Hluboký stále znějící tón basové píšťaly dud se nazývá *bručák* nebo *huk*.

Poněkud odlišnou konstrukci má *klarinet*. Má korpus válcovitého tvaru s rozšířeným koncem. Zvuk u něho vzniká chvěním jednoduchého třtinového *plátku* jako nárazného jazýčku na obdélníkovém otvoru zobcovité *hubičky*. Klarinet má tu vlastnost, že vydává jen liché tóny harmonické. Přefouknutím (s pomocí zvláštní klapky) dostává hráč tón o duodecimu, tj. oktávu a kvintu vyšší. Rozsah e až a_3.

Saxofon má za zdroj zvuku rovněž jednoduchý třtinový plátek jako klarinet. Kovový jeho korpus má tvar kuželovitý, takže se ozývají i sudé tóny harmonické. V moderní hudbě se ho užívá běžně v několika laděních pod názvy saxofon *sopránový*, *altový*, *tenorový*, *basový*.

Všeobecně je třeba říci, že u jazýčkových píšťal někdy převládá vliv velikosti a tvaru jazýčku (např. u *harmoniky* a *harmonia*), jindy vliv spřaženého sloupce vzduchového (např. u *trumpet*). U dřevěných dechových nástrojů zpravidla vzorec pro výšku tónu píšťaly otevřené $f = \frac{c}{2l}$, resp. kryté $f' = \frac{c}{4l}$ nevyhovuje. Čísla 2, resp. 4 je třeba nahradit čísly opravenými.

U píšťal vůbec má velký význam též tzv. *menzura*, tj. poměr délky píšťaly l k jejímu rozměru příčnému, např. průměru v případě píšťaly válcové. Zpravidla se však v hudbě mluví o menzuře „*široké*“, je-li např. $m = \frac{l}{d}$ rovno 9 až 14, nebo „*úzké*“, je-li např. $m = 25$. Při menzuře široké převládá tón základní, při úzké se více uplatňují vyšší tóny harmonické.

E. Varhany

Mnoho zajímavého by se dalo říci o tomto největším hudebním nástroji. Má větší nebo menší počet *rejstříků (hlasů)*. Každý rejstřík je samostatná soustava píšťal určité barvy zvuku od nejnižších do nejvyšších. U většiny rejstříků se ozývají tóny té výšky, která je dána stlačenou klávesou. Pro takové je ustálené označení *8°* — *rejstříky osmistopové*. Jméno to je odvozeno od otevřené píšťaly pro velké C, která činila ve staré míře osm stop. Velké C je zpravidla nejhlubší tón jak tzv. *manuálu*, tj. klávesnice stejného vzhledu jako u klavíru, tak i *pedálu*, což zde znamená klávesnici, na které hraje varhaník nohama.

Rejstříky označené *4°* — *rejstříky čtyřstopové* — znějí o oktávu výše, než je psáno v notách, podobně rejstříky *16°* znějí o oktávu níže. Vysky-

tují se též rejstříky dvoustopové, avšak rejstřík 32^{o} je vzácný. Tzv. *mixtury* jsou rejstříky, které mají místo jednoduchých píšťal skupiny dvou či tří (až pěti) píšťal k sobě patřících podle přirozeného ladění (např. v kvintě). Jinak je ovšem ladění každé sady píšťal temperované.

Táž klávesa uvádí v činnost jí náležející píšťalu ve všech zapojených rejstřících příslušné klávesnice. Přenos pohybu od klávesy hracího stolu až k ventilu vpouštějícímu vzdušný proud do určené píšťaly je proveden u nejstarších strojů *mechanicky* pomocí drátů, dřevěných táhel a dalších zařízení. Pokrokem bylo zavedení traktury *pneumatické*. Moderní stroje mají zpravidla ovládání *elektromagnetické*.

Různé barvy hlasů se u varhan dosahuje druhem píšťal; jsou otevřené nebo kryté, dřevěné nebo kovové (cín), retné nebo jazýčkové, s úzkou či širokou menzurou atp. U vícemanuálových varhan lze kombinovat určitou barvu, resp. směs barev pro melodii hranou na jednom manuálu s jinou barvou (směsí) pro doprovod hranou na manuálu druhém. Basové rejstříky jsou napojeny na klávesnici pedálovou.

Varhany mívají také větší či menší počet *spojek*, tj. zařízení, která na danou klávesu napojí klávesu o oktávu (či dvě oktávy) vyšší nebo nižší, nebo zařízení, které napojí celou jednu klaviaturu (manuál I. či II. či pedál) na klaviaturou jinou.

Dynamické odstíny není u varhan možné realizovat na téže píšťale přímo regulací vzduchového proudu. U slabších rejstříků se proto někdy užívá *žaluzií*. Zpravidla se však u varhan mění intenzita zvuku skokem, zapínáním a vypínáním silnějších rejstříků. To se děje buď individuálně přímým výběrem varhaníkem, nebo se užívá soustavy spojek zařazujících skupiny rejstříků v určitém sledu; celek se někdy ovládá jednoduchým pohybem, např. otáčením válce nohou.

F. Plechové (žestové) dechové nástroje

V podstatě jsou to zase píšťaly jazýčkové; zvuk tu vzniká přerušováním vzduchového proudu z plic hudebníka jeho sevřenými rty vpravenými do tzv. *nátrubku* na vstupu do nástroje. Rty tu fungují jako dvojitý blanitý (membranosní) jazýček. Výšku tónu tu určuje délka rezonujícího sloupce vzduchového. Mosazný korpus nástroje má u trubek a lesních rohů tvar velmi úzkého kužele stočeného do oválu, resp. kruhu. Přefukování do vyšších tónů harmonických je tu pravidlem, základní tón nástroje se nedá vyloudit. U přirozených trubek a přirozených lesních rohů je soubor možných tónů omezen *(fanfárové trubky, polnice, signální rohy)*. Chromatickou řadu tónů tu umožnilo v 19. století zavedení *ventilů*. Zpravidla má nástroj tři ventily, jimiž se prodlužuje znějící sloupec vzduchu tak, že zaznívá tón nižší o celý tón (ventil č. 1) nebo o půltón (ventil č. 2) nebo o $1\frac{1}{2}$ tónu (ventil č. 3).

Pozoun (tahový pozoun) poskytuje možnost spojité změny délky píšťaly vytahováním U-trubice spojující dvě části nástroje. Nástroj mající místo posuvné trubice systém ventilů je *trombon*. Užívá se pozounu (trombonu) *tenorového* s rozsahem B_1 až d_2 a *basového* s rozsahem F_1 až f_1.

V „dechovce" se užívá celé řady plechových hudebních nástrojů od *křídlovky* až do basového *helikónu*, jehož veliký stočený korpus spočívá na rameni hráče. V symfonickém orchestru je nejhlubší žesťový nástroj *tuba*.

G. Bicí hudební nástroje

U některých bicích nástrojů je zdrojem zvuku napjatá blána rozkmitávaná paličkou. U *bubnů* a *bubínků* jsou kůží potaženy obě podstavy válcové kostry. Ladění nástroje se tu během hry nemění. *Tympány* čili *kotle* mají napjatou kůži jen na horním okraji, naspodu kovového kotle je otvor pro vyrovnávání tlaku vzduchu. Tympány se během hry přeladují vhodným zařízením pro změnu napětí koženého potahu.

Jindy se využívá chvění desek. *Činely* jsou kruhové mosazné poklice, mírně vyklenuté. Rozechvívají se zpravidla vzájemnými nárazy, někdy též paličkou. *Zvony* jsou masívní prohnuté desky rozechvívané údery kladiva (u hodin) nebo tzv. *srdcem* (u zvonů kostelních). Umění zvonařské je v tom, docílit vhodným tvarem zvonu lahodné plnosti zvuku. Obecně totiž nejsou spoluznějící vrchní tóny desek a blan příčně chvějících harmonické. Desky je možno rozechvívat též smyčcem. Varietní charakter má hra smyčcem na *kanadskou pilu*. Ohýbáním široké pily rozechvívané smyčcem se spojitě mění výška jejího tónu. Soustava krátkých kovových destiček nahrazuje někdy v hudebních souborech malé zvony *(zvonková hra)*.

Tyče, resp. trubice kovové příčně chvějící nahrazují ve velkém symfonickém orchestru *zvony*. Speciální význam má *ladička*, ohnutá ocelová tyč tvaru U s nožkou. Její vrchní tóny (jsou neharmonické) brzy po úderu paličkou zaniknou a ladička pak vydává prakticky jednoduchý tón dané frekvence. Dřevěné příčně chvějící tyče jsou podstatou *xylofonu*. *Triangl* je do trojúhelníku zahnutá příčně rozechvívaná ocelová tyčka s vysokým cinkavým zvukem.

Užívá se ještě řady méně obvyklých hudebních nástrojů, o nichž se tu nebudeme zmiňovat. Rovněž lidský hlas a jeho orgány nebudou předmětem našich úvah v tomto studijním textu.

V moderní době je významným zdrojem zvuku též *membrána telefonu* a *ampliónu*. Může se rozechvět téměř na každý myslitelný způsob a *reprodukuje* s menším či větším zkreslením pomocí střídavých proudů vhodně

zesílených zvuk současně snímaný mikrofonem nebo zachycený na gramofonové desce či filmovém pásu nebo pásku magnetofonovém.

Klasickým hudebním nástrojům vyvstává v moderní době jakási konkurence používáním hudebních nástrojů *elektrofonických.*

Obohacením naší hudby se stávají kombinace *elektronkových tónových generátorů,* jak je často slýcháme ve filmu, v rozhlase nebo v televizi. Zde vůbec schází obvyklý zdroj zvuku (struna, jazýček apod.), příslušné frekvence vznikají přímo jako elektrické kmity, jež uvádějí po zesílení v činnost vhodné reproduktory. Dosahují se tím nové neobvyklé zvuky zajímavého zabarvení.

3. Kategorie C

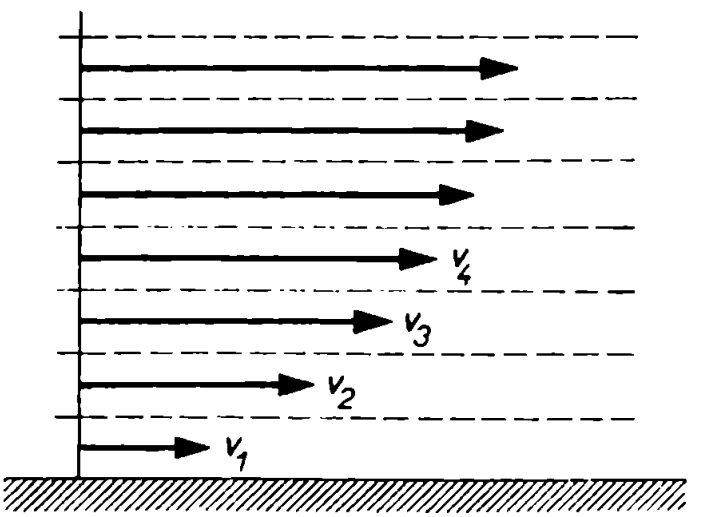
Vnútorné trenie v kvapalinách

Doc. dr. Ivan Náter, Bratislava

V rámci stredoškolského učiva zoznamujú sa žiaci v mechanike kvapalín (hydromechanike) s vlastnosťami tzv. ideálnej kvapaliny a so zákonitosťami vzťahujúcimi sa na pokoj (rovnovážny stav) a pohyb (prúdenie) takejto kvapaliny. U ideálnej kvapaliny predpokladáme také vlastnosti, ktoré umožňujú v jej vnútri existenciu len normálových napätí (tlakov), tj. napätí kolmých na ľubovoľne orientovanú plošku v kvapaline. Hovoríme tiež, že takéto kvapaliny sú dokonale tekuté. Na zmenu tvaru (odpovedajúcu deformácii v šmyku tuhého telesa) takejto kvapaliny netreba vynaložiť nijakú prácu, a to ani vtedy, ak táto zmena prebieha ľubovoľne rýchlo.

Skutočné kvapaliny sa od ideálnej líšia najmä tým, že nie sú dokonale tekuté. Nedokonalá tekutosť prejavuje sa u reálnych kvapalín tým, že v prúdiacej kvapaline vznikajú tangenciálne napätia na plochách, ktoré sú rovnobežné s prúdnicami, teda so smerom rýchlosti prúdenia kvapaliny. Existencia týchto tengenciálnych napätí je podmienená tzv. vnútorným trením alebo viskozitou (väzkosťou) kvapaliny.

Pojem vnútorného trenia objasníme si nasledujúcou úvahou: Uvažujme kvapalinu prúdiacu v dostatočne širokom vodorovnom žľabe. V určitom zvislom priečnom reze bude rýchlosť prúdenia kvapaliny konštantná vo vodorovnom smere (v bodoch, ktoré majú rovnakú výšku nad dnom žľabu), najväčšie zmeny bude však táto rýchlosť vykazovať vo zvislom smere. Príčinou zmeny rýchlosti prúdenia kvapaliny vo zvislom smere je už napr. skutočnosť, že tenká vrstva kvapaliny tesne priliehajúca ku dnu žľabu sa prakticky nepohybuje v dôsledku priľnavosti kvapaliny k pevnému dnu žľabu. Celú kvapalinu v žlabe si môžeme predstaviť rozdelenú na tenké vodorovné vrstvy, pričom rýchlosť prúdenia jednotlivých vrstiev vo zvislom smere nahor rastie (obr. 18). V dotykovej ploche dvoch susedných vrstiev, ktoré sa

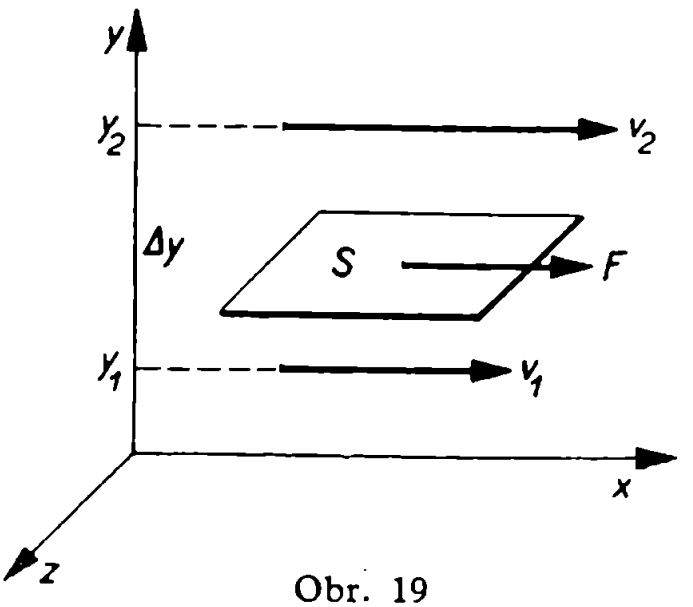


Obr. 18

pohybujú nerovnakými rýchlosťami a teda po sebe kĺžu, vznikajú trecie sily. Tieto rýchlejšiu (hornú) vrstvu brzdia a pomalšiu (spodnú) vrstvu urýchľujú. Príčinou uvedených trecích síl v kvapaline je práve vnútorné trenie.

Zaveďme si v uvedenom príklade pravouhlú sústavu súradníc pevne spojenú so stenami žľabu tak, aby os x bola orientovaná

rovnobežne s rýchlosťou prúdenia kvapaliny a ležala v rovine dna žľabu, os y nech je zvislá a os z vodorovná, ale kolmá na rýchlosť prúdenia kvapaliny (obr. 19). Vo výške y_1 nad dnom nech kvapalina prúdi rýchlosťou v_1, vo výške y_2 rýchlosťou v_2. Medzi dvoma susednými vrstvami vzniká na dotykovej ploche S tangenciálna trecia sila F (na obr. 19 zakreslená ako sila



Obr. 19

urýchľujúca pomalšiu spodnú vrstvu), ktorá je toľkokrát väčšia, koľkokrát väčšia je zvolená dotyková plocha S; ďalej závisí táto sila aj od toho, do akej miery sa mení rýchlosť prúdenia kvapaliny pri prechode od jednej vrstvy k druhej. Na vzdialenosť $\Delta y = y_2 - y_1$ pripadá prírastok rýchlosti $\Delta v = v_2 - v_1$. Veličina

$$\frac{\Delta v}{\Delta y}$$

udáva, ako rýchlo sa mení rýchlosť prúdenia pri prechode od vrstvy k vrstve a nazýva sa gradient rýchlosti. Číselne je rovná prírastku rýchlosti prúdenia, pripadajúcemu na jednotkovú vzdialenosť v smere najväčšieho vzrastu rýchlosti a má jednotku

$$\left[\frac{\Delta v}{\Delta y}\right] = \mathrm{s}^{-1}.$$

Sila F vnútorného trenia je úmerná aj gradientu rýchlosti, takže

$$F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} S. \tag{1}$$

Konštanta úmernosti η vo vzťahu (1) sa nazýva **súčiniteľ vnútorného trenia** (koeficient viskozity, dynamická viskozita) kvapaliny. Jeho prevrátená hodnota

$$\zeta = \frac{1}{\eta}$$

je **tekutosť** (fluidita) kvapaliny. Čím väčšia je hodnota súčiniteľa η, tým viac sa daná kvapalina líši od kvapaliny ideálnej.

Keďže sila vnútorného trenia závisí aj od veľkosti plochy S, na ktorej ju uvažujeme (meriame), je výhodnejšie charakterizovať vnútorné trenia v kvapaline tangenciálnym napätím τ vznikajúcim medzi susednými vrstvami kvapaliny. Napätie je všeobecne definované podielom sily a plochy, na ktorú táto sila pôsobí. Podľa (1) je teda

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y}. \tag{2}$$

Súčiniteľ η je dôležitou látkovou konštantou, charakterizujúcou vnútorné trenie v kvapaline. Jeho jednotka v sústave SI je

$$[\eta] = \left[\frac{F}{S} \cdot \frac{y}{v}\right] = \frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{m^3\,s^{-1}}} = \frac{\mathrm{N\,s}}{\mathrm{m^2}} = \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}.$$

Jednotka súčiniteľa vnútorného trenia v sústave SI sa nazýva **newtonsekunda na štvorcový meter**. V praxi sa dodnes používa jednotka viskozity zo sústavy CGS, ktorej rozmer je $\mathrm{g\,cm^{-1}s^{-1}}$ a ktorá má názov **poise** (čítaj poáz)

$$1 \text{ poise} = 1 \text{ P} = 10^{-1} \text{ N s m}^{-2}.$$

Vnútorné trenie hrá veľmi dôležitú úlohu u mazadiel, ktorými mažeme napr. čapy v ložiskách. Použitím mazadla mení sa po-

merne veľké suché trenie medzi čapom a ložiskom na omnoho menšie vnútorné trenie v mazadle (oleji, vazelíne). O tom, aké mazadlo je v danom prípade najvýhodnejšie (s ohľadom na hodnotu súčiniteľa viskozity), rozhodujú dva faktory: tlak čapu na ložisko a rýchlosť otáčania sa čapu.

Pri malom tlaku čapu na ložisko a veľkej rýchlosti otáčania sa čapu vytvorí sa medzi čapom a ložiskom vrstva mazadla takmer všade rovnakej hrúbky. V dôsledku priľnavosti je tesne pri obvodovej stene ložiska tenučká vrstva mazadla, ktorá je voči ložisku v pokoji (nepohybuje sa), tesne pri obvode čapu zas tenučká vrstva mazadla, ktorá sa pohybuje (otáča) spolu s čapom rovnakou uhlovou rýchlosťou. Tangenciálne napätie na obvode čapu, vyvolané vnútorným trením v mazadle, je preto priamo úmerné súčiniteľu vnútorného trenia mazadla.

Pri veľkom tlaku čapu na ložisko leží čap, pokiaľ sa neotáča, jednou povrchovou priamkou priamo na ložisku. Pri roztáčaní vzniká v tomto mieste takmer len suché trenie. Priľnavosťou sa však pri otáčaní čapu privádza mazadlo aj do týchto miest a hrúbka jeho vrstvy tu závisí od viskozity mazadla. Čím viskóznejšie je mazadlo a čím väčšia je rýchlosť otáčania sa čapu, tým rovnomernejšia je vrstva mazadla medzi čapom a ložiskom. Aby bolo trenie medzi čapom a ložiskom čo najmenšie, treba pri veľkom tlaku na ložisko a malej rýchlosti otáčania sa čapu použiť mazadlá s veľkou hodnotou súčiniteľa vnútorného trenia.

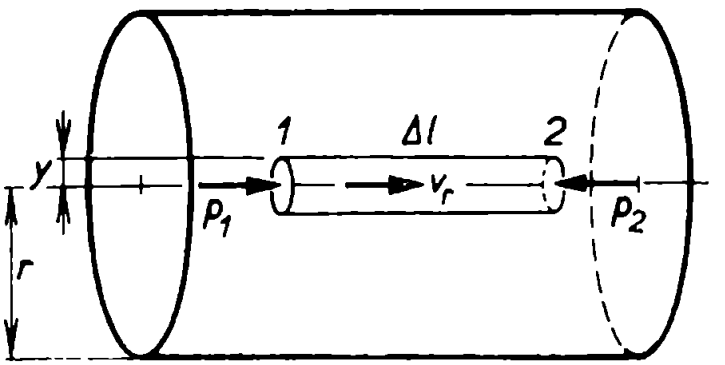
Uvažujme teraz prúdenie kvapaliny potrubím kruhového prierezu o polomere r. Ideálna kvapalina by v tomto potrubí prúdila tak, že v rovinnom reze kolmom na os potrubia bola by rýchlosť v prúdenia konštantná. Objem V kvapaliny, ktorý prierezom potrubia pretečie za čas t, určuje v tomto prípade jednoduchý vzťah

$$V = \pi r^2 . v . t .$$

Ak je však kvapalina viskózna, bude sa rýchlosť prúdenia od

stien potrubia (tu je táto rýchlosť nulová) k jeho osi zväčšovať a najväčšiu hodnotu dosiahne v strede potrubia.

Aby sme zistili, akou rýchlosťou prúdi viskózna kvapalina priamym kruhovým potrubím polomeru r, uvažujme vnútri prúdiacej kvapaliny v potrubí valček dĺžky Δl s polomerom y, ktorého pozdĺžna os je zhodná s osou potrubia (obr. 20).



Obr. 20

Ak majú čiastočky kvapaliny pretekať týmto valčekom od podstavy *1* k podstave *2* rovnomerným pohybom, musí byť rozdiel F' tlakových síl pôsobiacich na obidve podstavy v rovnováhe s trecou silou F pôsobiacou na plášť tohoto valčeka.

Sila $F' = \pi y^2 (p_1 - p_2) = \pi y^2 \Delta p$, kde Δp je pokles tlaku pripadajúci na dĺžku Δl potrubia pozdĺž jeho osi, zapríčinený energetickými úbytkami pri prekonávaní vnútorného trenia v prúdiacej kvapaline. Sila F podľa vzťahov (2) a (1) má veľkosť

$$F = \tau \,.\, S = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} \,.\, 2\pi y \Delta l \,.$$

Platí teda rovnica

$$\pi y^2 \Delta p = 2\eta \pi \Delta l y \,.\, \frac{\Delta v}{\Delta y},$$

takže

$$\Delta v = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \,.\, y \Delta y = z \Delta y, \qquad (3)$$

kde Δv je úbytok rýchlosti prúdiacej kvapaliny pri zväčšení vzdialenosti od osi potrubia o hodnotu Δy a

$$z = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot y \,. \tag{3a}$$

Výraz

$$\frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \,,$$

ktorý je konštantný, označme k, takže $z = k \,.\, y$. Veličiny z a y sú premenlivé, y je nezávisle premenná (mení sa v hraniciach $0 \leqq y \leqq r$); z je jej funkcia (závisle premenná). Z rovnice $z = k \,.\, y$ vidieť, že veličina z je priamo úmerná veličine y. Grafickým obrazom funkcie

$$z = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot y$$

je teda priamka, ktorá prechádza začiatkom súradnicovej sústavy yz. Pri hodnote $y = 0$ má aj z nulovú hodnotu, pri hodnote $y = r$ má z najväčšiu hodnotu

$$z_{\max} = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot r$$

(obr. 21).

Pretože ide o priamu úmernosť, je priemerná hodnota z_p veličiny z rovná aritmetickému priemeru jej najväčšej a najmenšej hodnoty, takže

$$z_p = \frac{1}{2} \cdot z_{\max} = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot r \,.$$

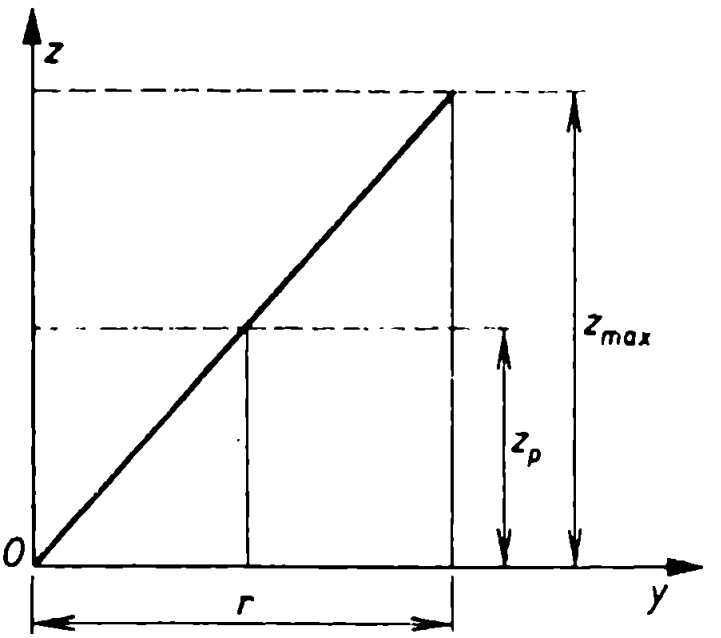
Podľa vzťahu (3) vyjadruje $\Delta v = z_p \,.\, r$ úbytok rýchlosti prúdiacej kvapaliny odpovedajúci prírastku vzdialenosti y od osi potrubia o hodnotu r. V tejto vzdialenosti od osi potrubia je však rýchlosť prúdiacej kvapaliny nulová. Preto výraz $z_p \,.\, r = v_r$

určuje rýchlosť čiastočiek kvapaliny, ktoré sa pohybujú po osi potrubia. Je teda

$$v_r = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot r^2 , \tag{4}$$

a vo vzdialenosti y od osi valca má preto rýchlosť prúdiacej kvapaliny hodnotu

$$v_y = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot r^2 - \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot y^2 = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot (r^2 - y^2) . \tag{4a}$$



Obr. 21

Ak považujeme x za nezávisle premennú a y za závisle premennú, je grafickým obrazom rovnice

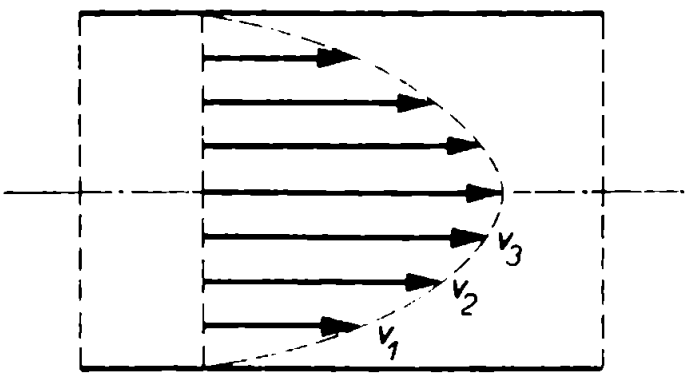
$$y = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot y^2$$

v súradnicovej sústave x, y parabola. Preto vyplňujú koncové body vektorov rýchlostí, vynesených zo všetkých bodov priesečnice osového a kolmého rezu potrubím, parabolu (obr. 22) a kon-

cové body vektorov príslušných rýchlostí vynesených zo všetkých bodov kolmého rezu potrubím rotačný paraboloid.

Pomocou integrálneho počtu, ktorý žiaci preberajú v matematike v III. triede SVŠ, možno vypočítať, že za čas t pretečie prierezom $S = \pi r^2$ kruhového potrubia kvapalina objemu

$$V = \frac{\pi r^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot t . \tag{5}$$



Obr. 22

Zo vzťahu (5) je zrejmé, že objem V veľmi rýchlo rastie s rastúcim polomerom potrubia, je priamo úmerný štvrtej mocnine tohoto polomeru.

Vnútorné trenie v kvapaline sa uplatňuje aj vtedy, ak sa v kvapaline pohybuje cudzie teleso. Vrstva kvapaliny priliehajúca k telesu priľne k jeho povrchu a je úplne unášaná telesom. Susedná vrstva kvapaliny je unášaná za telesom menšou rýchlosťou a tak vzniká medzi vrstvami trenie. Výsledkom týchto procesov je odpor, ktorý kvapalina kladie pohybujúcemu sa telesu. Veľkosť tohoto odporu závisí podstatne od tvaru a rozmerov telesa a, samozrejme, od viskozity kvapaliny. Ak sa v kvapaline viskozity η pohybuje guľa polomeru r rýchlosťou v, pôsobí proti nej odporová sila

$$F_S = 6\pi\eta r v . \tag{6}$$

Tento vzťah teoreticky odvodil *Stokes*, preto sa nazýva Stokesovým vzťahom. Na guľôčku voľne padajúcu v kva-

paline pôsobia tak celkom tri sily: tiaž G guľôčky, vztlaková sila F_A podľa Archimedovho zákona a odporová sila Stokesova F_S. Prvá z uvedených síl má smer zvislý nadol, zbývajúce dve smerujú zvislo hore. Pritom Stokesova sila je priamo úmerná rýchlosti padania guľôčky a teda narastá pri zrýchľovaní sa guľôčky. V okamihu, keď nastane rovnováha síl pôsobiacich na guľôčku, platí rovnica $F_A + F_S = G$ a od tohoto okamihu sa guľôčka pohybuje bez zrýchlenia konštantnou rýchlosťou v_m, pri ktorej práve nastala rovnováha síl. To je maximálna rýchlosť, akú môže voľne padajúca guľôčka v kvapaline dosiahnuť. Ak ϱ je hustota kvapaliny a ϱ' hustota guľôčky, sú

$$F_A = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \varrho g\,, \qquad F_S = 6\pi\eta r v\,,$$
$$G = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \varrho' g\,.$$

Z podmienky rovnováhy týchto síl, vyjadrenej rovnicou

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 \varrho g + 6\pi\eta r v_m = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \varrho' g\,,$$

môžeme vypočítať maximálnu rýchlosť guľôčky

$$v_m = \frac{2 \,.\, r^2 \,.\, (\varrho' - \varrho) \,.\, g}{9 \,.\, \eta}\,. \tag{7}$$

Zo vzťahu (7) je zrejmé, že maximálna rýchlosť padania guľôčky vo väzkej kvapaline je priamo úmerná štvorcu polomeru gule. Čím menšia guľôčka, tým pomalšie v kvapaline padá.

Stokesov vzťah môžeme použiť aj pri vyšetrovaní pohybu malých guľôčiek v plynnom prostredí, ktoré možno v tomto prípade považovať za väzkú kvapalinu.

Ak nejakým vhodným spôsobom odmeriame rýchlosť v_m padania guľôčky, môžeme zo vzťahu (7) vypočítať súčiniteľ vnútorného trenia kvapaliny

$$\eta = \frac{2 \,.\, r^2 \,(\varrho' - \varrho) \,.\, g}{9 \,.\, v_m}\,. \tag{8}$$

Zo vzťahu (8) vychádzame pri meraní súčiniteľa vnútorného trenia kvapalín Stokesovou metódou.

III. ČÁST: SOUTĚŽNÍ ÚLOHY

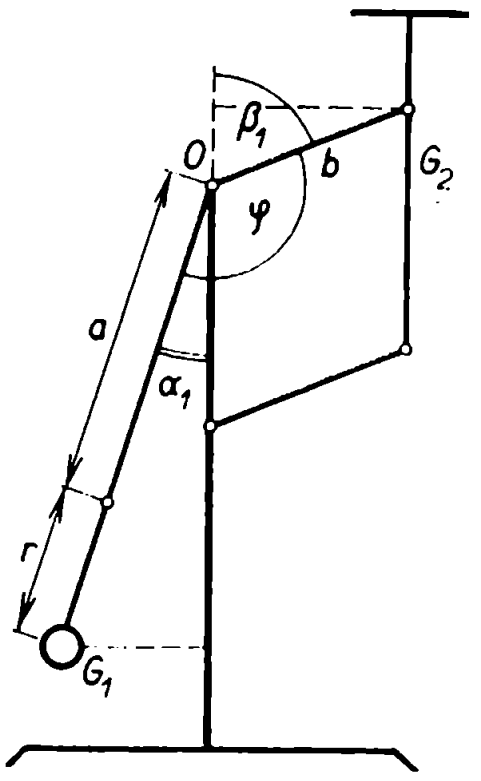
Výsledky experimentálních úloh upraveny podle žákovských měření

1. Úlohy kategorie A

Úlohy a řešení recenzoval Evžen Říman a dr. Ivan Náter

a) První kolo soutěže

1. příklad (navrhl František Černický)



Obr. 23

Listovní váhy mají vahadlo tvaru lomené páky, jejíž ramena a a b svírají úhel φ. Kratší rameno b nese můstek o tíze G_2. Na konci delšího ramena je otáčivě upevněno závaží G_1 tak, že jeho těžiště může zaujmout jednu ze dvou poloh se vzdálenostmi od osy páky buď $d_1 = a + r$, nebo $d_2 = a - r$ (obr. 23).

a) Určete délku a a délku r tak, aby při nezatíženém můstku nastala rovnováha při úhlu α_1 pro d_1 a při úhlu α_2 pro d_2, kde α_1 a α_2 jsou odchylky ramena od svislého směru. Hmotnosti ramen zanedbáme vzhledem k hmotnostem můstku a závaží.

Řešte nejprve obecně, pak číselně, je-li $G_1 = G_2\sqrt{3}$, $b = 6{,}0$ cm, $\varphi = 120°$, $\alpha_1 = 15°$, $\alpha_2 = 30°$.

b) Jak velký bude úhel α_3, resp. α_4 při zatížení můstku závažím $G = \frac{1}{2} G_1$?

Řešení:

Pro úhel β platí $\beta = \pi - (\varphi - \alpha) = \pi - \varphi + \alpha = 60° + \alpha$,

takže $\beta_1 = 60° + 15° = 75°$,

$\beta_2 = 60° + \alpha_2 = 60° + 30° = 90°$.

a) Z podmínky rovnosti momentů sil na lomené páce dostaneme

$$G_1 (a + r) \sin \alpha_1 = G_2 b \sin \beta_1 ,$$
$$G_1 (a - r) \sin \alpha_2 = G_2 b \sin \beta_2 .$$

Z těchto vztahů plyne

$$a + r = \frac{G_2}{G_1} b \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_1} ,$$
$$a - r = \frac{G_2}{G_1} b \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_2} ,$$

takže

$$a = \frac{1}{2} b \frac{G_2}{G_1} \left(\frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_1} + \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_2} \right) , \qquad (1)$$

$$r = \frac{1}{2} b \frac{G_2}{G_1} \left(\frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_1} - \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_2} \right) . \qquad (2)$$

Numericky ze vztahu (1)

$$a = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sin 75°}{\sin 15°} + \frac{\sin 90°}{\sin 30°} \right) =$$

$$= \sqrt{3} \left(\frac{\cos 15°}{\sin 15°} + \frac{1}{0{,}5} \right) \text{cm} = \sqrt{3} (\operatorname{cotg} 15° + 2) \text{ cm} =$$

$$= \sqrt{3} (2 + \sqrt{3} + 2) \text{ cm} = (4\sqrt{3} + 3) \text{ cm} =$$

$$= 9{,}928 \text{ cm} \doteq 10 \text{ cm}.$$

Vztah (2) dá po dosazení

$$r = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (\operatorname{cotg} 15^\circ - 2) \text{ cm} =$$

$$= \sqrt{3} (2 + \sqrt{3} - 2) \text{ cm} = 3 \text{ cm}.$$

Přitom se počítalo podle vztahu $\operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{1 - \cos \gamma}}$,

takže

$$\operatorname{cotg} 15^\circ = \operatorname{cotg} \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{1 - \cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} =$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

po usměrnění zlomku pod odmocninou a po úpravě.

b) $G = \frac{1}{2} G_1 = \frac{1}{2} G_2 \sqrt{3}$, $\alpha_3 = ?$; $\alpha_4 = ?$.

Do vztahů obdobných jako na začátku řešení

$G_1 (a + r) \sin \alpha_3 = (G_2 + G) b \sin \beta_3$, (3)

$G_1 (a - r) \sin \alpha_4 = (G_2 + G) b \sin \beta_4$, dosaďme (4)

$\beta_3 = 60^\circ + \alpha_3$, $G_1 = G_2 + \sqrt{3}$, $a = 4\sqrt{3} + 3$, $r = 3$,

čímž obdržíme

$$G_2 \sqrt{3} (a + r) \sin \alpha_3 = G_2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sin (60^\circ + \alpha_3).$$

Po snadné úpravě vyjde

$$2 (6 + 3\sqrt{3}) \sin \alpha_3 = \frac{1}{2} (6 + 3\sqrt{3}) (\sqrt{3} \cos \alpha_3 + \sin \alpha_3),$$

$$4 \sin \alpha_3 = \sqrt{3} \cos \alpha_3 + \sin \alpha_3,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ čili } \alpha_3 = 30^\circ.$$

Obdobně vztah (4) dá po dosazení a úpravě

$$(6 - \sqrt{3}) \sin \alpha_4 = (2\sqrt{3} + 3) \cos \alpha_4 ,$$

z něhož po dosazení a úpravě

$$\operatorname{cotg} \alpha_4 = \frac{6 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3} = 5\sqrt{3} - 8 = 0{,}660\,25 ,$$

$$\alpha_4 \doteq 56°30' .$$

2. příklad (navrhl Vojtěch Stach)

Dva paralelně spojené stejné kondenzátory, jejichž kapacity lze měnit od hodnoty C_1 do hodnoty C_2 ($C_1 > C_2$),

1. byly nastaveny na hodnoty C_1 a připojeny k baterii o napětí U;
2. po odpojení baterie byla změněna kapacita jednoho kondenzátoru z C_1 na C_2;
3. potom byla změněna i kapacita druhého kondenzátoru z C_1 na C_2.

Ve všech třech případech určete:

a) napětí na kondenzátorech,

b) náboje na kondenzátorech,

c) energie soustavy W_1, W_2, W_3 a vysvětlete, proč tyto hodnoty jsou různé a odůvodněte to.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $C_1 = 950$ pF, $C_2 = 50$ pF, $U = 200$ V.

Řešení:

Výsledná kapacita při paralelním spojení kondenzátorů je rovna součtu jednotlivých kapacit

$$C = \Sigma C_k .$$

Souvislost náboje Q, kapacity C a napětí U je vyjádřena

vztahem $Q = C\,U$. Energie nabitého kondenzátoru je $W = \frac{1}{2} C\,U^2$.

1. Spojíme dva kondenzátory o kapacitách C_1, C_1 paralelně a připojíme je k baterii, kterou po nabití kondenzátorů odpojíme. Na každém kondenzátoru bude

a) napětí $U_\mathrm{I} = U$. Výsledná kapacita C_I je $2\,C_1$.

b) Náboj na každém kondenzátoru je $Q_1 = C_1\,U$, celkový náboj obou je $Q_\mathrm{I} = 2\,C_1\,U$.

c) Energie bude

$$W_\mathrm{I} = \frac{1}{2} C_\mathrm{I}\,U_\mathrm{I}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\,C_1\,U^2 = C_1\,U^2.$$

2. Kapacitu jednoho kondenzátoru změníme z C_1 na C_2. Potom výsledná kapacita bude $C_\mathrm{II} = C_1 + C_2$. Velikost celkového náboje Q_II je táž jako dříve, tj.

$$Q_\mathrm{II} = Q_\mathrm{I} = 2\,C_1\,U.$$

a) Napětí na každém z kondenzátorů je stejné, takže

$$U_\mathrm{II} = \frac{Q_\mathrm{II}}{C_\mathrm{II}} = \frac{2\,C_1\,U}{C_1 + C_2}.$$

b) Na prvém kondenzátoru bude náboj

$$Q_{1_\mathrm{II}} = C_1\,U_\mathrm{II} = \frac{2\,C_1^2\,U}{C_1 + C_2},$$

na druhém bude náboj

$$Q_{2_\mathrm{II}} = C_2\,U_\mathrm{II} = \frac{2\,C_1\,C_2\,U}{C_1 + C_2}.$$

c) Energie bude

$$W_\mathrm{II} = \frac{1}{2} C_\mathrm{II}\,U_\mathrm{II}^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\frac{4\,C_1^2\,U^2}{(C_1 + C_2)^2} =$$

$$= \frac{2\,C_1^2\,U^2}{C_1 + C_2}.$$

3. Změníme kapacitu druhého kondenzátoru rovněž na hodnotu C_2, čímž obdržíme soustavu dvou paralelně spojených kondenzátorů s kapacitami C_2, C_2.

Výsledná kapacita bude $C_{III} = 2\,C_2$,

celkový náboj zůstává stále týž, tj.

$$Q_{III} = Q_{II} = Q_I = 2\,C_1\,U\,.$$

a) Napětí bude

$$U_{III} = \frac{Q_{III}}{C_{III}} = \frac{C_1 U}{C_2}\,.$$

b) Náboje na obou kondenzátorech jsou stejné jako v případě 1.

c) Energie je

$$W_{III} = \frac{1}{2}\,C_{III}\,U_{III}^2 = \frac{1}{2}\,.\,2\,C_2\,\frac{C_1^2\,U^2}{C_2^2} = \frac{C_1^2\,U^2}{C_2}\,.$$

Porovnejme vypočtené energie W_I, W_{II} a W_{III} a vypočtěme jejich změny (přírůstky) $\Delta_1 W = W_{II} - W_I$, $\Delta_2 W = W_{III} - W_{II}$:

$$\Delta_1 W = W_{II} - W_I = \frac{2\,C_1^2\,U^2}{C_1 + C_2} - C_1\,U^2 =$$

$$= \frac{2\,C_1^2 - C_1^2 - C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,U^2 = \frac{(C_1 - C_2)\,C_1\,U^2}{C_1 + C_2}\,,$$

$$\Delta_2 W = W_{III} - W_{II} = \frac{C_1^2\,U^2}{C_2} - \frac{2\,C_1^2\,U^2}{C_1 + C_2} =$$

$$= \frac{C_1 + C_2 - 2\,C_2}{C_2\,(C_1 + C_2)}\,C_1^2\,U^2 = \frac{(C_1 - C_2)\,C_1^2\,U^2}{C_2\,(C_1 + C_2)}\,.$$

Numerický výpočet: dosazením daných hodnot $C_1 = 950$ pF, $C_2 = 50$ pF, $U = 200$ V do odvozených

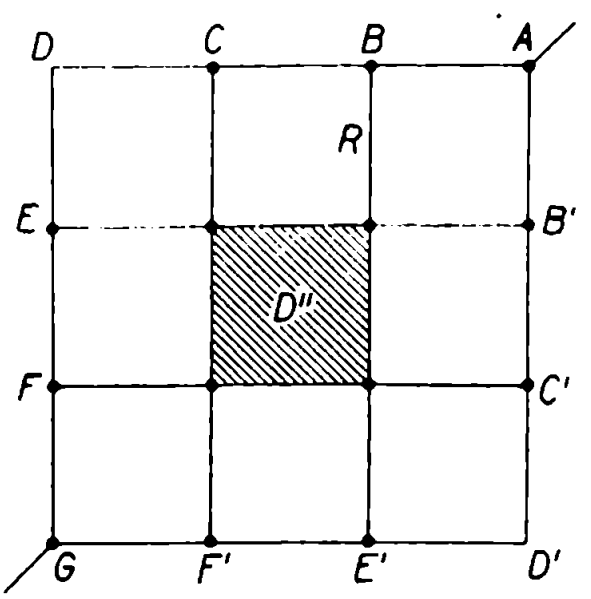
vztahů v 1., 2. a 3. případě a pro změny energie dostaneme:

1. $U_I = U = 200\ \mathrm{V}$; $Q_1 = Q_2 = C_1 U = 1{,}9 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{As}$; $Q_I = Q_1 + Q_2 = 3{,}8 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}$; $W_I = 3{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}$.
2. $Q_{II} = Q_I = 3{,}8 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}$; $U_{II} = 380\ \mathrm{V}$; $Q_{1_{II}} = 3{,}61 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}$; $Q_{2_{II}} = 0{,}19 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}$; $W_{II} = 7{,}22 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}$.
3. $Q_{III} = Q_{II} = Q_1 = 3{,}8 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}$; $U_{III} = 3800\ \mathrm{V}$; $Q_1 = Q_2 = 1{,}9 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}$; $W_{III} = 7{,}22 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}$.

Změny energie jsou

$$\Delta_1 W = W_{II} - W_I = 3{,}42 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J};$$
$$\Delta_2 W = W_{III} - W_{II} = 64{,}98 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}.$$

Tyto přírůstky vznikly z práce vynaložené na změnu kapacity.



Obr. 24

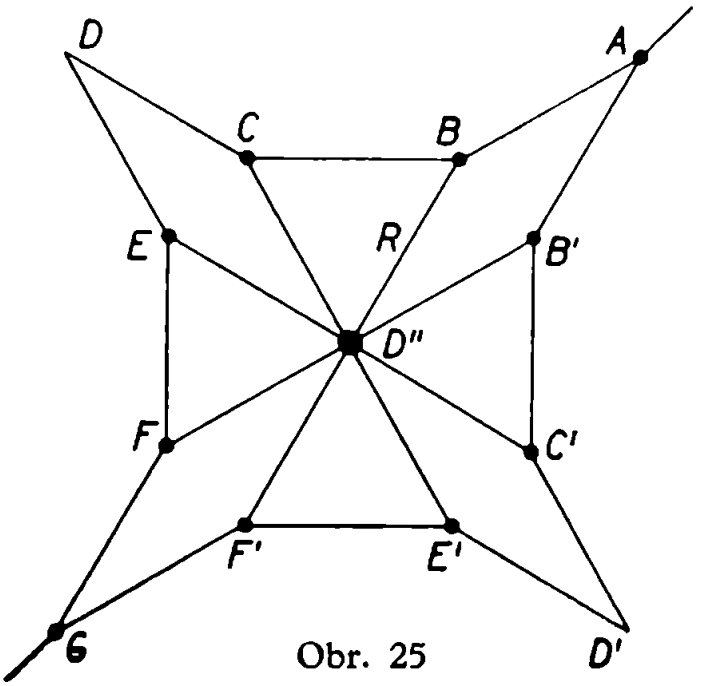
3. příklad
(navrhl Rastislav Baník)

Drôtená sieť pozostáva z deviatich štvorcov, z ktorých prostredný je vyplnený dokonale vodivou platničkou a odpor každej drôtenej strany štvorca je R. Vypočítajte celkový odpor medzi bodmi A a G siete (viď obr. 24).

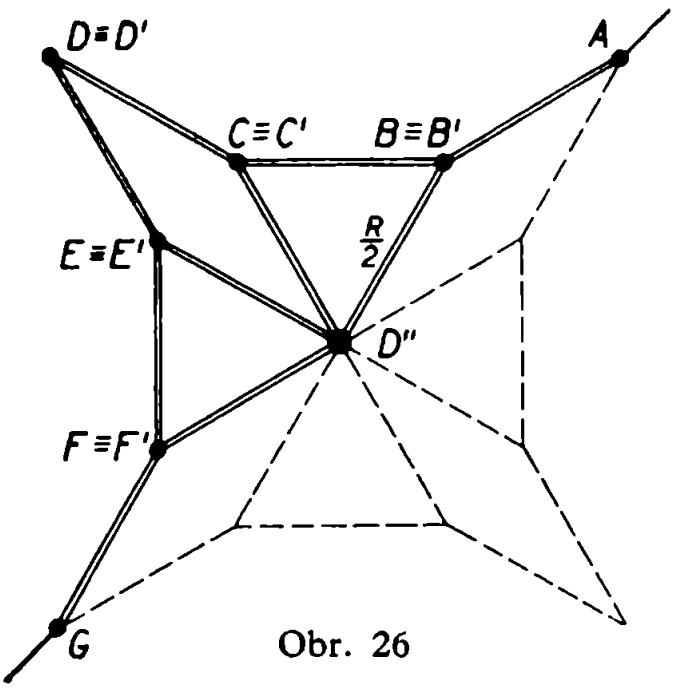
1. riešenie:

Všetky body platničky majú rovnaký potenciál, takže sieť možno znázorniť ako na obr. 25. Označíme všetky body

siete tak, ako to ukazuje obrázok. Z dôvodov symetrie vidíme niekoľko dvojíc bodov s rovnakým potenciálom: $C\,C'$, BB' , ...

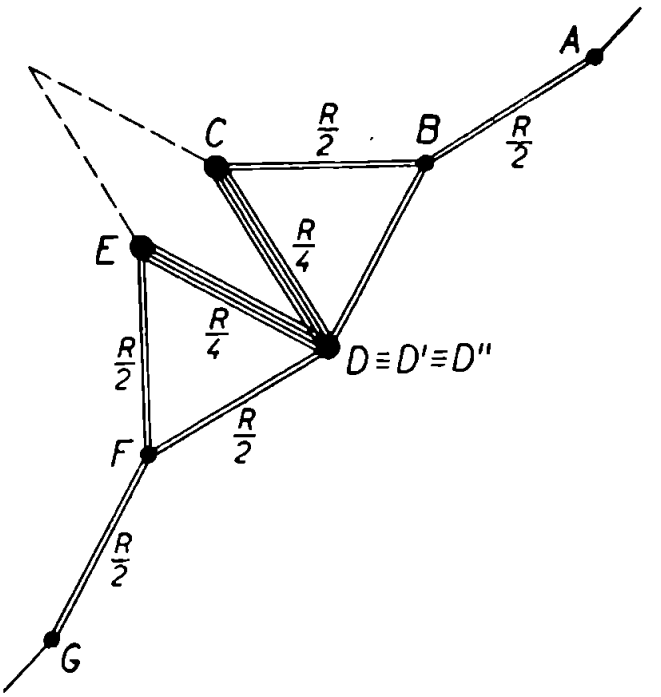


Obr. 25



Obr. 26

Ak pravú stranu (čiarkovanú; obr. 26) siete preklopíme na ľavú (nečiarkovanú), spoja se vždy len body s rovnakými potenciálmi; celkový odpor sa tým nezmení. Dostávame tedy zjednodušenú sieť, kde medzi susednými bodmi sú vždy dva drôty, teda odpor $\frac{R}{2}$.



Obr. 27

Podobne urobíme ďalšie preklopenie (obr. 27). Medzi bodmi E, D a C, D je odpor $\frac{R}{4}$, z bodu F do bodu D je cez bod E odpor

$$\frac{R}{2} + \frac{R}{4} = \frac{3}{4} R .$$

Medzi bodmi F a D je celkový odpor R', kde

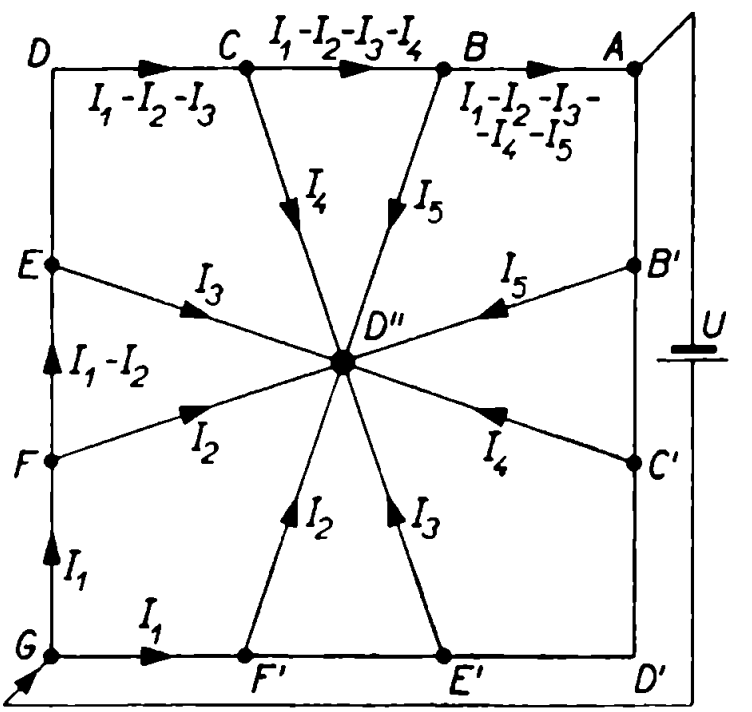
$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{\frac{3}{4}R} + \frac{1}{\frac{R}{2}}, \quad R' = \frac{3}{10}R.$$

Medzi bodmi G a D je odpor $\frac{1}{2}R + \frac{3}{10}R = \frac{8}{10}R$, práve taký odpor je i medzi bodmi D a A, takže celkový odpor medzi bodmi G a A je teda

$$\frac{8}{5}R = 1{,}6\,R\,.$$

2. riešenie (pomocou Kirchhoffových zákonov).

Stredná vodivá platnička je vlastne spojovacím uzlom. Predpokladajme, že sieť je pripojená na zdroj napätia U, takže jednotlivými drôtmi tečú elektrické prúdy. Pritom následkom súmernosti celého zariadenia stačí uvažovať



Obr. 28

len prúdy v polovici siete. Nerozvetvený prúd z batérie označme I.

Označme písmenom	ten prúd, ktorý tečie od bodu	k bodu	a tiež prúd od bodu	k bodu
I_1	G	F	G	F'
I_2	F	D''	F'	D''
I_3	E	D''	E'	D''
I_4	C	D''	C'	D''
I_5	B	D''	B'	D''

Smery týchto prúdov (ktoré možno voliť ľubovoľne) sú vyznačené na obr. 28.

V uzloch sa prúdy rozvetvujú, takže

od uzlu	k uzlu	tečie prúd
F	E	$I_1 - I_2$
E	C	$I_1 - I_2 - I_3$ (odporom $2R$)
C	B	$I_1 - I_2 - I_3 - I_4$
B	A	$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 - I_5$

Na určenie týchto piatich prúdov potrebujeme päť (nezávislých) rovníc. Uvažujme nejprv uzavreté obvody v sieti samotnej, pretože tie neobsahujú nijaký zdroj, takže „súčet súčinov odporu a prechádzajúceho prúdu“ sa rovná nule.

Podľa II. Kirchhoffovho zákona $\Sigma R_k I_k = \Sigma U$ dostaneme pre uzavretý obvod čiže slučku rovnicu

$F E D'' F$

$$R(I_1 - I_2) + R I_3 - R I_2 = 0, \quad (1)$$

$E D C D'' E$

$$2R(I_1 - I_2 - I_3) + R I_4 - R I_3 = 0, \quad (2)$$

$C B D'' C$

$$R(I_1 - I_2 - I_3 - I_4) + R I_5 - R I_4 = 0. \quad (3)$$

Ak tieto rovnice delíme veličinou R a zlúčime, dostaneme sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} I_1 - 2\,I_2 + I_3 &= 0\,, \qquad (1')\\ 2\,I_1 - 2\,I_2 - 3\,I_3 + I_4 &= 0\,, \qquad (2')\\ I_1 - I_2 - I_3 - 2\,I_4 + I_5 &= 0\,. \qquad (3') \end{aligned}$$

Pre uzol D'' platí podľa I. Kirchhoffovho zákona $\Sigma\, I_k = 0$ rovnica

$$I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0. \qquad (4')$$

Riešme sústavu rovníc (1'), (2'), (3'), (4') a považujme pritom napr. I_1 za veličinu danú. Sčítacou metódou ľahko nájdeme

$$I_2 = \frac{3}{5}\,I_1; \qquad I_3 = \frac{1}{5}\,I_1;$$

$$I_4 = -\frac{1}{5}\,I_1; \qquad I_5 = -\frac{3}{5}\,I_1\,.$$

Pre celkový prúd I vstupujúci do uzla G platí

$$I - I_1 - I_1 = 0, \text{ čiže } I = 2\,I_1\,. \qquad (6)$$

Ako piatu rovnicu napíšme vzťah pre uzavretý obvod idúci zo zdroja (U) trebárs cez body G, F, D'', B, A a späť do zdroja. Tento vzťah je

$$R\,I_1 + R\,I_2 - R\,I_5 + R\,(I_1 - I_2 - I_3 - I_4 - I_5) = U$$

a po úprave dostaneme

$$R\,(2\,I_1 - I_3 - I_4 - 2\,I_5) = U\,. \qquad (7)$$

Nazvime hľadaný celkový odpor R_c; celkový prúd je podľa (6) $I = 2\,I_1$, takže Ohmov zákon dá

$$U = R_c I = R_c\,.\,2\,I_1\,. \qquad (8)$$

Dosadením výsledkov (5) do (7) dostaneme

$$R\left(2\,I_1 - \frac{1}{5}\,I_1 + \frac{1}{5}\,I_1 + \frac{6}{5}\,I_1\right) = U\,,$$

čiže

$$\frac{16}{5} R I_1 = U. \qquad (7')$$

Dosaďme do vzťahu (7') veličinu U podľa (8); dostaneme

$$R_c \,.\, 2 I_1 = \frac{16}{5} R I_1$$

a z toho vychádza

$$R_c = \frac{8}{5} R \,.$$

Použitou metódou sme tedy určili nielen R_c, ale tiež veľkosti všetkých prúdov.

4. příklad (navrhla Jana Štěpánková)

Elektron vnikne mezi desky kondenzátoru Braunovy trubice rychlostí v (obr. 29a). Na fluorescenčním stínítku ve vzdálenosti a_0 od kondenzátoru se vytvoří světelná stopa, která je vzdálena od středu stínítka o délku y_0.
Vzdálenost desek kondenzátoru je d a jejich délka l.
Vypočtěte intenzitu elektrického pole kondenzátoru, je-li jeho kapacita C.

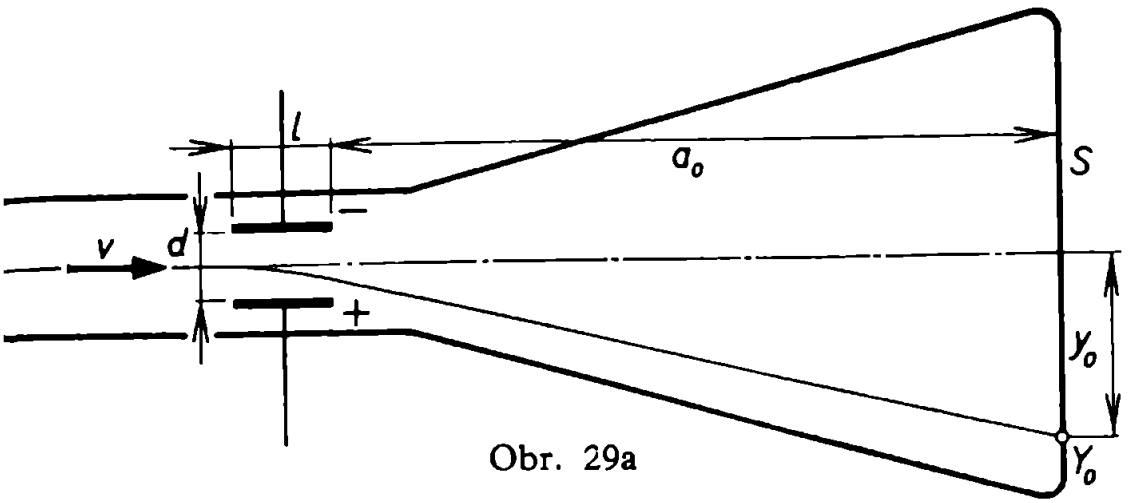
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v = 1{,}5 \,.\, 10^7$ m s^{-1}, $a_0 = 13{,}9$ cm, $y_0 = 4{,}0$ cm, $d = 16{,}0$ mm, $l = 5{,}0$ cm, $C = 5$ pF, $e = -1{,}6 \,.\, 10^{-19}$ C, $m = 9{,}11 \,.\, 10^{-31}$ kg, kde e je náboj elektronu a m jeho klidová hmotnost.

Řešení:

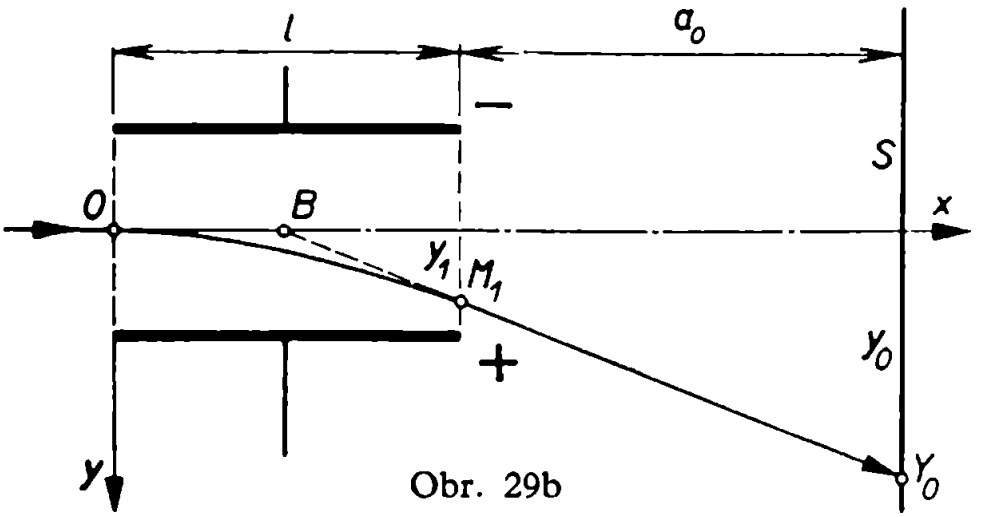
Označme napětí na deskách kondenzátoru U, intenzitu elektrického pole kondenzátoru E. Ostatní veličiny jsou označeny v zadání.

Budiž počátkem souřadnic $O = [0; 0]$ bod, v němž letící elektron vstupuje do prostoru mezi deskami konden-

zátoru, osou x symetrála Braunovy trubice a kolmice jdoucí bodem O a směřující dolů nechť je osou y (obr. 29b).



Obr. 29a



Obr. 29b

V homogenním elektrickém poli kondenzátoru lze intenzitu elektrického pole E vyjádřit vztahem

$$E = \frac{U}{d}.$$

Na elektron v elektrickém poli působí konstantní síla

$$F = |e|\, E$$

a uděluje mu podle zákona síly konstantní zrychlení

$$a = \frac{F}{m} = \frac{|e|\,E}{m}. \tag{1}$$

Proto se elektron pohybuje mezi deskami kondenzátoru — podobně jako hmotný bod při vodorovném vrhu ve vakuu — po parabole, jejíž vrcholovou tečnou je zde osa x.

Poloha elektronu, vlétnuvšího konstantní rychlostí v po ose x, je v elektrickém poli kondenzátoru určena rovnicemi

$$x = vt, \ (2a), \quad y = \frac{1}{2}\,a\,t^2, \tag{2b}$$

kde t značí dobu, kterou se elektron pohybuje v elektrickém poli kondenzátoru.

Vztahy (2a, b) jsou tzv. parametrické rovnice paraboly; t je zde proměnnou veličinou, zvanou parametr.

Eliminujeme-li parametr t z rovnic (2a, b), tj. dosadíme-li $t = \frac{x}{v}$ do (2b), obdržíme rovnici paraboly v pravoúhlých souřadnicích

$$y = \frac{|e|\,E}{2mv^2}\,x^2. \tag{3}$$

Stanovme souřadnice bodu $M_1 = [x_1; y_1]$, ve kterém elektron opouští prostor mezi deskami kondenzátoru. Protože elektron se posunul ve směru osy x o délku $x_1 = l$, dá vztah (3) pro souřadnici y

$$y = \frac{|e|\,E}{2mv^2}\,.\,l^2. \tag{3a}$$

Letící elektron se pohybuje po parabolické dráze od vrcholu $O = [0; 0]$ až k bodu $M_1 = [x_1; y_1]$, v němž opouští prostor mezi deskami kondenzátoru; od M_1 až

k místu $Y_0 = [l + a_0; y_0]$, kde dopadne na stínítko, se pohybuje po přímce, která je tečnou paraboly v bodě M_1 a prochází bodem $B = \left[\frac{l}{2}; 0\right]$ na ose x, jak znázorňuje obr. 29b.

K důkazu tohoto tvrzení lze použít např. poučky, že tečna paraboly $x^2 = 2py$, vedená v dotykovém bodě $[x_1; y_1]$, protíná osu x v bodě $\frac{x_1}{2}; 0$.

Přímka $B M_1$ protne stínítko v bodě $Y_0 = [l + a_0; y_0]$, jehož souřadnice splňují vztah

$$\frac{y_0 - y_B}{x_0 - x_B} = \frac{y_1 - y_B}{x_1 - x_B},$$

po dosazení známých souřadnic

$$\frac{y_0}{\frac{l}{2} + a_0} = \frac{\frac{|e| E}{2 m v^2} \cdot l^2}{l - \frac{l}{2}},$$

$\frac{2 y_0}{l + 2a_0} = \frac{|e| E l}{m v^2}$, a tedy hledaná intenzita el. pole je

$$E = \frac{2 y_0 m v^2}{|e| l (2a_0 + l)}. \tag{4}$$

Rozměrová zkouška vztahu (4):

$$[E] = \frac{\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,m}}{\mathrm{C\,m\,m}} = \frac{\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}}{\mathrm{C\,m}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{A\,s\,m}} = \frac{\mathrm{V\,A\,s}}{\mathrm{A\,s\,m}} = \frac{\mathrm{volt}}{\mathrm{metr}}.$$

Dosazením daných hodnot do vztahu (4) obdržíme

$$E = 6250 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} .$$

Dané veličiny d a C umožňují vypočíst také napětí U a náboj Q na deskách kondenzátoru:

$$U = E\,d = \frac{2\,m\,d\,v^2\,y_0}{|e|\,l\,(2\,a_0 + l)} ,$$

$$Q = C\,U = \frac{2\,m\,d\,v^2\,y_0\,C}{|e|\,l\,(2\,a_0 + l)} .$$

5. příklad (navrhl Miroslav Havel)

Spirála zhotovená z ocelového drátu je připojena ke zdroji stejnosměrného proudu se stálým napětím U. Jak velký proud bude procházet spirálou v ustáleném stavu, má-li spirála při teplotě t_0 odpor R_0? Teplotní součinitel odporu je α, součinitel přestupu tepla do okolního prostředí je β a teplota okolního prostředí je udržována na hodnotě t_1.
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $U = 6{,}0$ V, $t_0 = 0{,}0$ °C, $t_1 = 20{,}0$ °C, $R_0 = 12\ \Omega$, $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{deg}^{-1}$, $\beta = 2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J\ s^{-1}\ deg^{-1}}$.

Řešení:

V ustáleném stavu je veškeré Jouleovo teplo předáváno okolnímu prostředí. Množství tepla, které přejde z tělesa o teplotě t (spirála) na těleso o teplotě $t_1 < t$ (obklopující prostředí), je možno pokládat za úměrné teplotnímu rozdílu, tzn. musí platit

$$U\,I = \beta\,(t - t_1) , \qquad (1)$$

kde U značí napětí, I proud.

Současně musí platit Ohmův zákon a vztah pro závislost odporu na teplotě

$$R_t = \frac{U}{I}; \quad R_t = R_0 (1 + \alpha t) .$$

Z těchto rovnic vyjádříme t a dosadíme do (1). Dostaneme pro proud kvadratickou rovnici

$$\alpha U R_0 I^2 + \beta R_0 (1 + \alpha t_1) I - \beta U = 0 ,$$

jejíž řešení je

$$I_{1,2} = \frac{-(1 + \alpha t_1) \beta R_0 \pm \sqrt{\beta^2 R_0^2 (1 + \alpha t_1)^2 + 4 \beta U^2 \alpha R_0}}{2 R_0 \alpha U} .$$

Vzhledem k tomu, že jmenovatel je kladný, musí být kladný i čitatel, aby vyšla hodnota I kladná. Proto má smysl pouze kladné znaménko před odmocninou.
Rozměrová zkouška: $[1 + \alpha t] =$ číslo bezrozměrné,

$$[\beta R_0 (1 + \alpha t_1)] = \mathrm{J\,s^{-1}\,deg^{-1}\,V\,A^{-1}} =$$
$$= \mathrm{V\,A\,s\,s^{-1}\,deg^{-1}\,V\,A^{-1}} = \mathrm{V^2\,deg^{-1}} ,$$
$$[4 \beta U^2 \alpha R_0] = \mathrm{J\,s^{-1}\,deg^{-1}\,V^2\,deg^{-1}\,V\,A^{-1}} =$$
$$= \mathrm{V\,A\,deg^{-2}\,V^2\,V\,A^{-1}} = \mathrm{V^4\,deg^{-2}} .$$

Rozměr čitatele je $\mathrm{V^2\,deg^{-1}}$.
Rozměr jmenovatele $[2 \alpha R_0 U] = \mathrm{deg^{-1}\,V\,A^{-1}\,V} =$
$= \mathrm{V^2\,deg^{-1}\,A^{-1}}$.
Rozměr $[I] = \mathrm{V^2\,deg^{-1}\,V^{-2}\,deg\,A} = \mathrm{A}$.

Do výsledného vztahu dosadíme číselné hodnoty a po provedení naznačených úkonů dostaneme

$$I = 0{,}3\ \mathrm{A} .$$

6. úkol (navrhla dr. Marta Chytilová)

Určení indexu lomu destilované vody

Určete index lomu destilované vody dvěma metodami.

Porovnejte výsledky a posuďte, kterou metodou dosáhnete větší přesnosti.

Metoda první: Určete index lomu destilované vody použitím válcové tenkostěnné nádoby s vodou. Popis metody viz V. Pilát, Pokusy z optiky, SPN Praha, 1965, str. 137, úloha 3,05.

Poznámka k provedení pokusu. Při použití zdroje světla podle návodu vsuňte mezi štěrbinu na povrchu nádoby a zdroj světla větší clonu se svislou štěrbinou. Je výhodné použít jako zdroj světla lampu ze žákovské optické soupravy nebo jinou optickou lampu s clonou se svislou štěrbinou.

Úkoly: a) Vysvětlete metodu měření. Narýsujte paprsky v půdorysné rovině a odvoďte z obrázku, ze kterých naměřených veličin se vypočítá index lomu.

b) Proveďte měření s použitím červeného filtru, upevněného ke štěrbině clony. Velikost úhlů měřte v celých stupních; proveďte deset měření, pro každé určete index lomu kapaliny a vypočítejte aritmetický průměr hodnot. Tloušťku stěny nádoby zanedbejte.

c) Opakujte měření s použitím zeleného filtru. Porovnejte výslednou hodnotu s hodnotou určenou podle bodu b).

Metoda druhá: Určete index lomu destilované vody jinou metodou podle vlastní volby; např. použitím kyvety, v níž kapalina tvoří planparalelní vrstvu; použitím nádoby tvaru poloválce podle pokusu V. Pilát, Pokusy z Optiky, str. 150, pokus č. 3,16; použitím refraktometru aj. Viz také: Z. Horák, Praktická fyzika, SNTL 1958, str. 535; Živný, Lepil, Praktická cvičení z fyziky, SPN, 1965, str. 159.

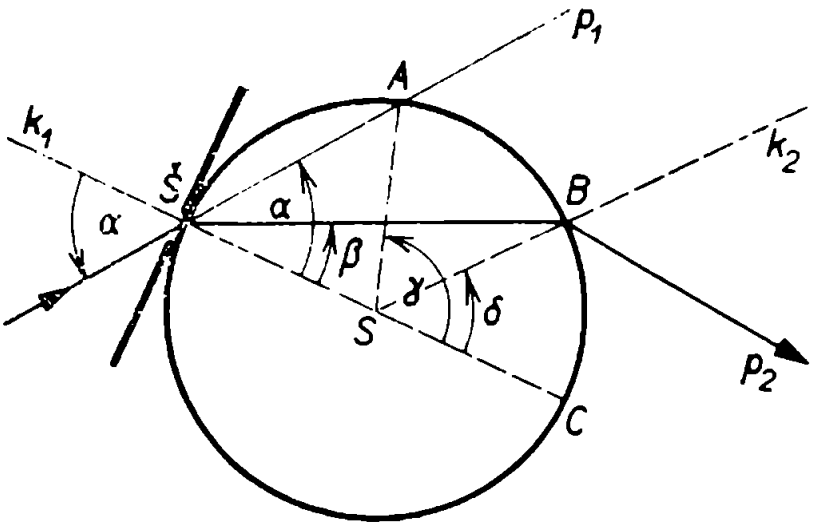
Úkoly a), b), c) řešte jako při použití první metody.

1. *Metoda první:*

Potřeby: tenkostěnná válcová nádoba, štěrbina vyříznutá v tmavém papíru, světelný zdroj, úhloměr, červený a zelený filtr.

Provedení: válcovou nádobu naplníme do poloviny vodou a položíme pod ni úhloměr tak, aby jeho střed splynul se středem podstavy nádoby. Před nádobu umístíme svisle štěrbinu $Š$ (lze ji přilepit na nádobu) a lampu seřídíme tak, aby za štěrbinou procházel úzký svazek rovnoběžných paprsků. Nádobu natočíme nejprve tak, aby paprsky dopadaly na přední část stěny kolmo, tj. aby na protější části stěny paprsek jdoucí vzduchem i paprsek jdoucí vodou dopadaly do téhož bodu C (na úhloměru 0°). Mezi zdroj a štěrbinu umístíme filtr.

Nádobu natáčíme postupně o různé úhly a měříme vždy $\sphericalangle CSA = \gamma = 2\alpha$ a $\sphericalangle CSB = \delta = 2\beta$ (v celých stupních — viz obr. 30). Měření provedeme nejprve



Obr. 30

v červeném, pak v zeleném světle, vždy pro 10 hodnot úhlů, a sestavíme v tabulku.

Měření s červeným filtrem:

i	2α	2β	$\sin \alpha$	$\sin \beta$	n	Δ_+
1	15	11	0,1305	0,0958	1,36	0,016
2	20	15	0,1736	0,1305	1,33	
3	24	18	0,2071	0,1564	1,33	
4	30	22	0,2588	0,1908	1,36	0,016
5	34	25	0,2924	0,2164	1,35	0,006
6	39	29	0,3338	0,2504	1,33	
7	44	32	0,3746	0,2756	1,36	0,016
8	48	36	0,4067	0,3090	1,32	
9	54	39	0,4540	0,3338	1,36	0,016
10	59	43	0,4924	0,3665	1,34	

$$\bar{n} = 1{,}344; \Sigma\Delta_+ = 0{,}070$$

Střední chyba $\bar{\delta} = \frac{5}{2n} \frac{\Sigma \Delta_+}{\sqrt{n-1}}$

$$\bar{\delta} = \frac{5}{20} \frac{0{,}070}{3} = 0{,}006 .$$

Vychází tedy $n = 1{,}344 \pm 0{,}006 \doteq 1{,}34$.

V tabulkách je udána hodnota pro červené světlo $n = 1{,}331$.

Měření se zeleným filtrem:

i	2α	2β	sind α	sin β	n	Δ_+
1	18	13	0,1564	0,1132	1,38	0,031
2	23	17	0,1994	0,1478	1,35	0,001
3	28	21	0,2419	0,1822	1,33	
4	33	24	0,2840	0,2079	1,37	0,021
5	37	27	0,3173	0,2334	1,36	0,011
6	42	31	0,3584	0,2672	1,34	
7	46	34	0,3907	0,2924	1,33	
8	52	38	0,4384	0,3256	1,35	0,001
9	57	42	0,4772	0,3584	1,33	
10	61	44	0,5072	0,3746	1,35	0,001

$$\bar{n} = 1{,}349; \Sigma\Delta_+ = 0{,}066$$

Střední chyba $\bar{\delta} = \frac{5}{20} \cdot \frac{0{,}066}{3} = 0{,}005$.

$$n = 1{,}349 \pm 0{,}005 \doteq 1{,}35 .$$

V tabulkách je pro zelené světlo udána hodnota $n = 1{,}337$.

2. Metoda druhá

Potřeby: kyveta, stínítko, měřítko.

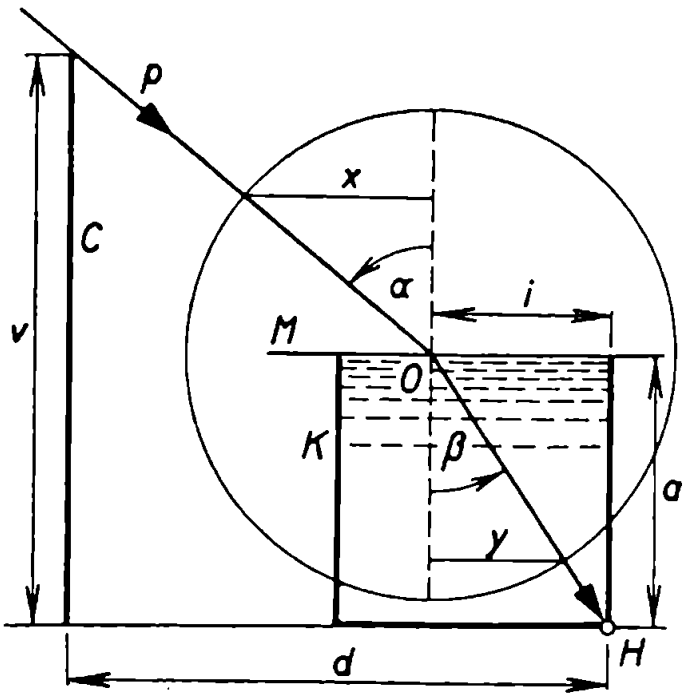
Sestavení pokusu: Kyvetu K naplníme přesně po okraj destilovanou vodou. Na horní hrany kyvety připevníme měřítko M (viz obr. 31a). Před kyvetu postavíme plechovou clonu rovnoběžně s hranou H. Díváme-li se nyní přes okraj clony na hranu H, promítne se na měřítko M do vzdálenosti i od vzdálenější horní hrany. Je-li výška plechové clony v, její vzdálenost od hrany H je d, hrana

krychle a, pak

$$\sin\alpha = \frac{d-i}{\sqrt{(v-a)^2+(d-i)^2}}, \quad \sin\beta = \frac{i}{\sqrt{a^2+i^2}}$$

a tedy

$$n = \frac{(d-i)\sqrt{a^2+i^2}}{i\sqrt{(v-a)^2+(d-i)^2}}.$$



Obr. 31a

Jednodušeji než podle tohoto vztahu můžeme vypočítat hodnotu indexu lomu, nakreslíme-li si celou sestavu ve vhodném měřítku (viz obr. 31a); narýsujeme libovolným poloměrem kružnici o středu O a změříme délky x a y. Pak

$$n = \frac{x}{y}.$$

Tabulka pro měření v červeném světle:

Čís. měř.	d [cm]	i [cm]	n	Δ_+
1	9,2	2,88	1,326	
2	9,9	3,04	1,327	
3	10,8	3,40	1,334	0,0070
4	12,1	3,65	1,328	0,0010
5	13,5	3,96	1,325	
6	14,7	4,12	1,321	
7	16,9	4,64	1,328	0,0020
8	19,5	5,21	1,330	0,0010
9	21,2	5,62	1,327	
10	24,5	6,25	1,324	

$\bar{n} = 1{,}3270; \Sigma\Delta_+ = 0{,}0110, \qquad \bar{\delta} = \frac{5}{20}\frac{0{,}011}{3} = 0{,}0009\,.$

Pro červené světlo je $n = 1{,}327 \pm 0{,}001$.

Tabulka pro zelené světlo:

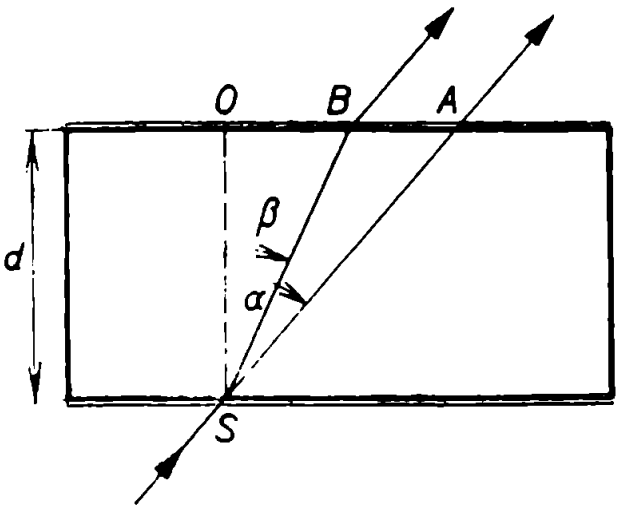
Čís. měř.	d [cm]	i [cm]	n	$\Delta_\pm$
1	9,2	2,85	1,333	
2	9,9	3,01	1,332	
3	10,8	3,37	1,332	
4	12,1	3,63	1,339	0,006
5	13,5	3,94	1,324	
6	14,7	4,10	1,320	
7	16,9	4,62	1,339	0,006
8	19,5	5,20	1,341	0,008
9	21,2	5,61	1,337	0,004
10	24,5	6,24	1,333	

$\bar{n} = 1{,}3330; \Sigma\Delta_+ = 0{,}024, \qquad \bar{\delta} = \frac{5}{20}\frac{0{,}024}{3} = 0{,}002\,.$

Pro zelené světlo je $n = 1{,}333 \pm 0{,}002$.

3. Další metoda: použití planparalelní kyvety.
Potřeby: kyveta s planparalelními stěnami, zdroj světla, štěrbina, filtry, měřítko.

Uspořádání pokusu: Kyvetu naplníme do poloviny vodou, na jednu stěnu nalepíme svislou štěrbinu, na protější stěnu bílý papír (obr. 31b). Změříme vzdálenost *d*.



Obr. 31b

Nejprve zjistíme bod *O* na stínítku, kam dopadá paprsek při kolmém dopadu na stěnu (obraz štěrbiny po průchodu vodou splývá s obrazem při průchodu vzduchem nad vodou). Pak měníme směr dopadu a měříme vzdálenost *OA* paprsku jdoucího vzduchem a *OB* paprsku lomeného vodou.

Pak platí $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, $\sin \alpha = \frac{AO}{AS} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}}$.

Označíme $OA = a$, $BO = b$.

$$\sin \beta = \frac{BO}{BS} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + d^2}}.$$

Odtud

$$n = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{d^2 + b^2}{d^2 + a^2}}.$$

Měření s červeným filtrem: $d = 103$ mm.

Měř. č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a [mm]	6,4	15,6	20,6	28,0	32,4	39,7	45,0	51,6	61,5	70,5
b [mm]	5,0	11,0	15,0	20,6	23,5	28,8	32,7	36,4	43,2	48,1
$n_č$	1,28	1,41	1,36	1,34	1,35	1,34	1,32	1,34	1,33	1,34

Střední hodnota $n_č = 1{,}341$.

Měření se zeleným filtrem: $d = 103$ mm.

Měř. č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a [mm]	7,0	13,4	19,5	25,5	31,0	39,1	46,3	56,0	63,5	67,6
b [mm]	5,0	9,2	13,0	18,1	21,6	25,9	32,2	36,3	42,8	45,7
n_z	1,40	1,44	1,48	1,39	1,40	1,40	1,37	1,38	1,36	1,35

Střední hodnota $n_z = 1{,}397$.

4. Metoda minimální deviace

Prochází-li světlo hranolem, vychází paprsek po dvojím lomu v hranolu odchýlen o úhel δ (deviace) od původního směru. Měníme-li úhel dopadu na přední stěnu hranolu, mění se deviace δ. Jde-li paprsek hranolem tak, že prochází kolmo k rovině souměrnosti hranolu, je deviace minimální (obr. 32).

K měření byla použita skleněná tenkostěnná pravoúhlá nádoba, lámavý úhel hranolu byl tedy $\varphi = 90°$. Pro případ minimální deviace (pro jakýkoli úhel φ) platí podle obr. 32:

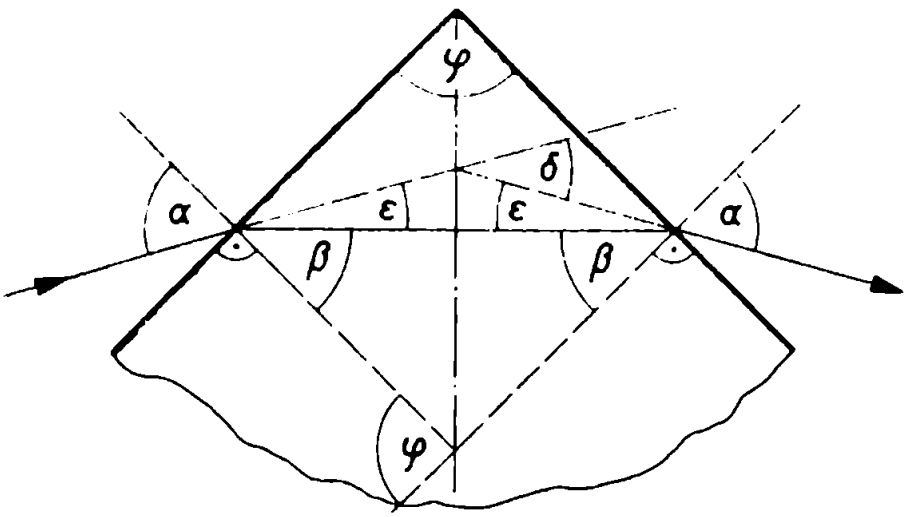
$$2\beta = \varphi, \quad 2\varepsilon = 2(\alpha - \beta) = \delta,$$

a tedy

$$\beta = \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha = \frac{\varphi + \delta}{2}$$

a odtud

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{\varphi + \delta}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$



Obr. 32

Paprsek po průchodu nádobkou zachytíme na stínítku. Úhloměr musíme položit vždy tak, aby paprsek vycházející z nádobky ležel na přímce, jdoucí středem úhloměru. Nepoužije-li se spektrometr, kde lze úhly odečítat přesně, je i měření touto metodou obtížné a málo přesné. Paprsek je po průchodu kyvetou slabý a neostrý.

Měření s červeným filtrem

č.	δ	n
1	49	1,324
2	50	1,328
3	47	1,315
4	48	1,320
5	51	1,332
6	53	1,340
7	50	1,328
8	51	1,332
9	51	1,332
10	49	1,324

$\bar{n}_č = 1{,}327$

Měření se zeleným filtrem

č.	δ	n
1	54	1,345
2	55	1,350
3	52	1,336
4	53	1,340
5	54	1,340
6	52	1,336
7	55	1,350
8	52	1,336
9	53	1,340
10	52	1,336

$\bar{n}_z = 1{,}341$

Pozn. Všechny uvedené metody jsou málo přesné, protože měření úhlů na úhloměru, resp. změření délek je málo přesné, pro pochopení úlohy jsou však instruktivní. Metoda minimální deviace je přesná, použije-li se spektrometr.

Pro měření indexu lomu se v praxi používají refraktometry, které však nejsou zpravidla ve školních sbírkách pomůcek.

7. příklad (navrhl Konrád Hofman)

Dva stejné prstence z ocelolitiny střední délky $l = 40{,}0$ cm mají po $N = 200$ závitech. Jeden má vzduchovou mezeru tloušťky $d = 1{,}0$ mm, druhý je bez mezery. Vinutím plného prstence jde proud $I_1 = 1{,}0$ A. Jak velký proud musí procházet vinutím druhého prstence, aby v něm vznikla stejná magnetická indukce?

Řešení:
Potřebujeme vztahy, uvedené ve studijním textu:

Pro permeabilitu platí $\mu = \mu_0 \mu_r$. (1)

Intenzita magnetického pole toroidu $H = \frac{N I}{l}$, (2)

kde N je počet závitů toroidu, I je proud protékající toroidem, l je střední délka toroidu.

Magnetická indukce $B = \mu H = \mu_0 \mu_r H$. (3)

Magnetický indukční tok $\Phi = B S$. (4)

Magnetomotorické napětí $\mathscr{E}_m = N I$. (5)

Magnetický odpor obvodu $R_m = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S}$. (6)

Hopkinsonův zákon $\Phi = \frac{\mathscr{E}_m}{R_m}$. (7)

Relativní permeabilitu ocelolitiny označme μ_0, vzduchu $\mu_r \doteq 1$; permeabilitu vakua klaďme přibližně $\mu \doteq \doteq \frac{1}{8} \cdot 10^{-5}\ \mathrm{H\ m^{-1}}$.

Postup řešení: Určíme μ_r, pak magnetické odpory R_{m1}, R_{m2} a konečně I_2.

1. Neznámou relativní permeabilitu μ_r (která je v obou případech stejná, a tudíž je také magnetická indukce v obou prstencích táž) určíme z údajů pro prvý, tj. plný prstenec, jehož vinutím o počtu závitů N protéká proud I a jehož jádro má délku l.

Vztah (2) dá

$$H_1 = \frac{N I_1}{l} = \frac{200 \cdot 1\mathrm{A}}{0{,}4\ \mathrm{m}} = 500\ \mathrm{A\ m^{-1}}. \quad (8)$$

Z magnetizační křivky (obr. 6 stud. textu) zjistíme, že při intenzitě $H_1 = 500\ \mathrm{A\ m^{-1}}$ má magnetická indukce ocelolitiny hodnotu $B = 1{,}1\ \mathrm{T}$. Vztah (3) dá tedy

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H_1} = \frac{1{,}1\ \mathrm{T}}{\frac{1}{8} \cdot 10^{-5}\ \mathrm{H\ m^{-1}} \cdot 500\ \mathrm{A\ m^{-1}}} = 1760. \quad (9)$$

Výsledek (9) nemá rozměr, neboť čitatel má rozměr $\mathrm{T} = \mathrm{V\ s\ m^{-2}}$ a jmenovatel má rozměr $\mathrm{A\ H\ m^{-2}} = \mathrm{A\ V\ s\ A^{-1}\ m^{-2}} = \mathrm{V\ s\ m^{-2}}$, neboť $\mathrm{H} = \mathrm{V\ s\ A^{-1}}$.

2. Magnetické odpory prstencových jader stanovíme podle (6). Prvý, tj. plný prstenec, má magnetický odpor

$$R_{m1} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S}, \quad (10a)$$

druhý se vzduchovou mezerou tloušťky d

$$R_{m2} = \frac{1}{\mu_0 \cdot 1} \frac{d}{S} + \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l - d}{S} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r S} (d\mu_r + l - d) =$$

$$= \frac{1}{\mu_0 \mu_r S} \cdot [l + (\mu_r - 1)\, d]\ . \quad (10b)$$

3. Užitím vztahu (5) obdržíme z rovnosti vztahů (4) a (7) pro magnetomotorické napětí rovnici $B\,S\,R_m = \mathscr{E}_m = N\,I$, takže pro prvý prstenec platí $N\,I_1 = B\,S\,R_{m1}$ a pro druhý $N\,I_2 = B\,S\,R_{m2}$, z čehož dělením a po dosazení vztahů (10 ab) a (8) obdržíme hledaný vztah

$$I_2 = I_1 \frac{R_{m_2}}{R_{m_1}} = I_1 \frac{l + (\mu_r - 1)\, d}{l} = I_1 \left[1 + (\mu_r - 1) \cdot \frac{d}{l}\right],$$

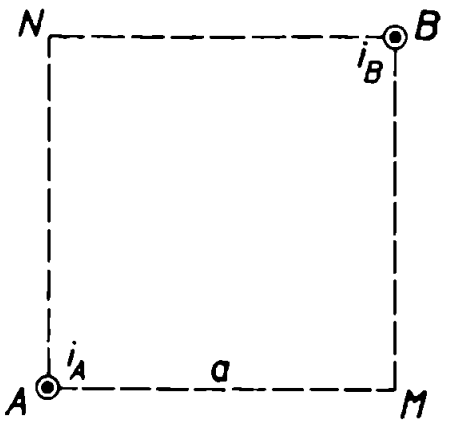
jehož dimenzionální správnost je zřejmá, neboť μ_r je bezrozměrné, kdežto d, l mají rozměr délky.

Číselně: Po dosazení daných hodnot za I_1, d, l a vypočte-

ného μ_r podle (9) dostáváme

$$I_2 = 1 \left[1 + (1760 - 1) \frac{0{,}001}{0{,}400} \right] \text{A} \doteq$$

$$\doteq (1 + 4{,}4)\ \text{A} = 5{,}4\ \text{A}\,.$$



Obr. 33

Druhým prstencem musí protékat proud 5,4 A, aby v něm vznikla stejná magnetická indukce.

8. příklad (navrhl Konrád Hofman)
Je dán čtverec o straně a s vrcholy A M B N (obr. 33). Vrcholy A a B procházejí kolmo k rovině čtverce velmi dlouhé přímé vodiče, kterými jdou proudy

$$i_A = I_m \cos \omega t,\ \ i_B = I_m \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

a) Stanovte magnetickou indukci v bodech M, N, jsou-li body A, B uprostřed přímých vodičů.

b) Jaká bude indukce v bodech M, N, jsou-li body A, B na koncích přímých vodičů?
Řešte užitím točivých vektorů.

a) Bod M zvolíme za počátek a kladný směr osy x zvolíme ve směru AM. Proud $i_A = I_m \cos \omega t$ budí v bodě M magnetickou indukci

$$B_A = B_{\frac{\pi}{2}} \cos \omega t = \mu_0 \frac{I_m}{2\pi a} \cos \omega t\,,$$

kterou můžeme nahradit dvěma točivými vektory

$$B_A = B_{\frac{\pi}{2}} \cos \omega t = \frac{1}{2}\left(\overleftarrow{B}_{\frac{\pi}{2}} + \overrightarrow{B}_{\frac{\pi}{2}}\right).$$

Podobně indukce vyvolaná proudem i_B je dána vztahem

$$B_B = B_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\overleftarrow{B}_{\frac{\pi}{2}} + \overrightarrow{B}_{\frac{\pi}{2}}\right).$$

Výsledná indukce v bodě M

$$B_M = \frac{1}{2}\left(\overleftarrow{B}_{\frac{\pi}{2}} + \overleftarrow{B}_{\frac{\pi}{2}} + \overrightarrow{B}_{\frac{\pi}{2}} + \overrightarrow{B}_{-\frac{\pi}{2}}\right) = \overleftarrow{B}_{\frac{\pi}{2}},$$

protože součet vektorů $\overrightarrow{B}_{\frac{\pi}{2}} + \overrightarrow{B}_{-\frac{\pi}{2}} = 0$, mají totiž stejnou velikost, ale opačný směr. V bodě M vzniká tedy točivé magnetické pole $\overleftarrow{B}_{\frac{\pi}{2}}$, jehož indukce $B = \mu_0 \frac{I_m}{2\pi a}$.

V druhém případě zvolíme za počátek bod N a za kladný směr osy x směr BN.

Potom je $B_A = B_0 \cos \omega t = \frac{1}{2}(\overleftarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_0)$,

$$B_B = B_{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(\overleftarrow{B}_\pi + \overrightarrow{B}_0).$$

Výsledná indukce v bodě N

$$B_N = \frac{1}{2}(\overleftarrow{B}_0 + \overleftarrow{B}_\pi + \overrightarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_0) = \overrightarrow{B}_0,$$

protože $\overleftarrow{B}_0 + \overleftarrow{B}_\pi = 0$.

V bodě N vzniká točivé pole $\overrightarrow{B}_0$ s indukcí $B = \mu_0 \frac{I_m}{2\pi a}$.

V bodech M, N vznikají točivá pole stejná, ale opačného smyslu.
b) Magnetická indukce v bodě P, který je ve vzdálenosti a od středu přímkového velmi dlouhého vodiče $B = \mu_0 \frac{I}{2\pi a}$, je z poloviny buzena jednou, z poloviny druhou půlí vodiče. Jedna polovina vodiče budí tedy v bodě P, který je na konci této poloviny, indukci $B = \mu_0 \frac{I}{4\pi a}$. Je-li tedy čtverec na konci přímkových vodičů, mění se jen velikost indukce, která bude poloviční.

9. úkol (navrhl dr. Ivan Náter)

Meranie teplotného súčiniteľa elektrického odporu kovového vodiča

Pomôcky: Kúpeľ s transformátorovým olejom, plynový kahan alebo elektrický varič, izolovaný drôt navinutý na nevodivom valci (cievka). Zdroj jednosmerného elektromotorického napätia (batéria), regulačný reostat, teplomer, súbor prístrojov na meranie odporu priamou alebo môstikovou metódou.
Úvod: Elektrický odpor R_t kovového vodiča v rozmedzí stredných teplôt (napr. 0 °C — 100 °C) je lineárnou funkciou teploty t;

$$R_t = R_0(1 + \alpha t),$$

kde R_0 je odpor tohoto vodiča pri teplote $t_0 = 0$ °C a α je teplotný súčiniteľ odporu materiálu vodiča.
Z dvoch známych hodnôt odporu R_1 a R_2 daného vodiča pri teplotách t_1 a t_2 môžeme vypočítať súčiniteľ α:

$$\alpha = \frac{R_2 - R_1}{R_1 t_2 - R_2 t_1}. \qquad (1)$$

Grafickým obrazom funkcie $R = f(t)$ je priamka, ktorá s osou teplôt zviera uhol φ. Smernica tejto priamky predelená odporom R_0 určuje súčiniteľ α:

$$\alpha = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{R_0} . \qquad (2)$$

Prevedenie: Do olejového kúpeľa ponorte cievku a pripojte ju na meracie zariadenie tak, aby ste mohli kedykoľvek odmerať jej odpor. Kúpeľ zohrievajte vhodným tepelným zdrojom a teplomerom stále kontrolujte jeho teplotu. Po zvýšení teploty kúpeľa o 4 až 5 °C odstavte tepelný zdroj a počkajte, až sa teplota kúpeľa ustáli, potom odmerajte odpor ponorenej cievky pri tejto teplote. Po ďalšom zohriatí kúpeľa meranie opakujte.

Úlohy: a) Zvoľte si vhodnú metódu na meranie odporu, nakreslite schému zapojenia a realizujte meracie zariadenie.

b) Odmerajte odpor cievky pri 10 rozličných, postupne sa zvyšujúcich teplotách v intervale 0 °C až 100 °C. Namerané hodnoty zapíšte do vhodnej tabuľky.

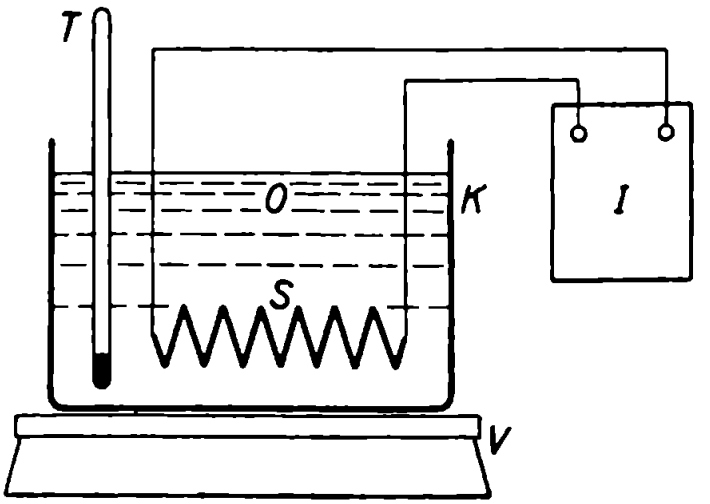
c) Podľa vzťahu (1) vypočítajte súčiniteľ α z každých dvoch po sebe idúcich nameraných hodnôt odporu a zapíšte do tabuľky.

d) Najpravdepodobnejšiu hodnotu α_s určte ako aritmetický priemer hodnôt vypočítaných v c). Vypočítajte absolútnu a relatívnu chybu veličiny α_s.

e) Do grafu závislosti odporu od teploty zakreslite body odpovedajúce nameraným hodnotám a narysujte priamku, ktorá sa najviac približuje týmto bodom. Určte jej smernicu, odčítajte hodnotu R_0 a z týchto hodnôt vypočítajte súčiniteľ α podľa vzťahu (2). Vysvetlite, ako ste určili smernicu priamky z grafu.

f) Porovnajte výsledky získané v d) a e) aj s ohľadom na veľkosť absolútnej chyby α_s.

Zostavenie pokusu (viď obr. 34):



Obr. 34

a) Na varič *V* postavíme kádinku s olejom, upevníme v nej teplomer *T* a špirálu z meraného drôtu *S*. Odpor tohoto drôtu zmeráme vhodným prístrojom, napr. Icometom, prístrojom Omega alebo aj mostíkovou metódou. V našom prípade bol použitý Icomet.

b) Olejová lázeň bola zohrievaná od 20 °C do 120 °C a odpor bol odčítaný v okamihu, keď teplomer ukazoval celé desiatky stupňov. Cievka bola z medeného drôtu. Namerané hodnoty sú zapísané do tabuľky I.

Tabuľka I:

teplota [°C]	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
odpor *R* [Ω]	8,8	9,0	9,3	9,6	9,9	10,2	10,5	10,9	11,2	11,5	11,8

c) Výpočet súčiniteľa podľa tabuľky I:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 10\ °\mathrm{C}$$

t_2 [°C]	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$\alpha \cdot 10^4$ [deg^{-1}]	27	37	37	37	37	37	48	37	37	37

d) Určenie priemernej hodnoty α_s:

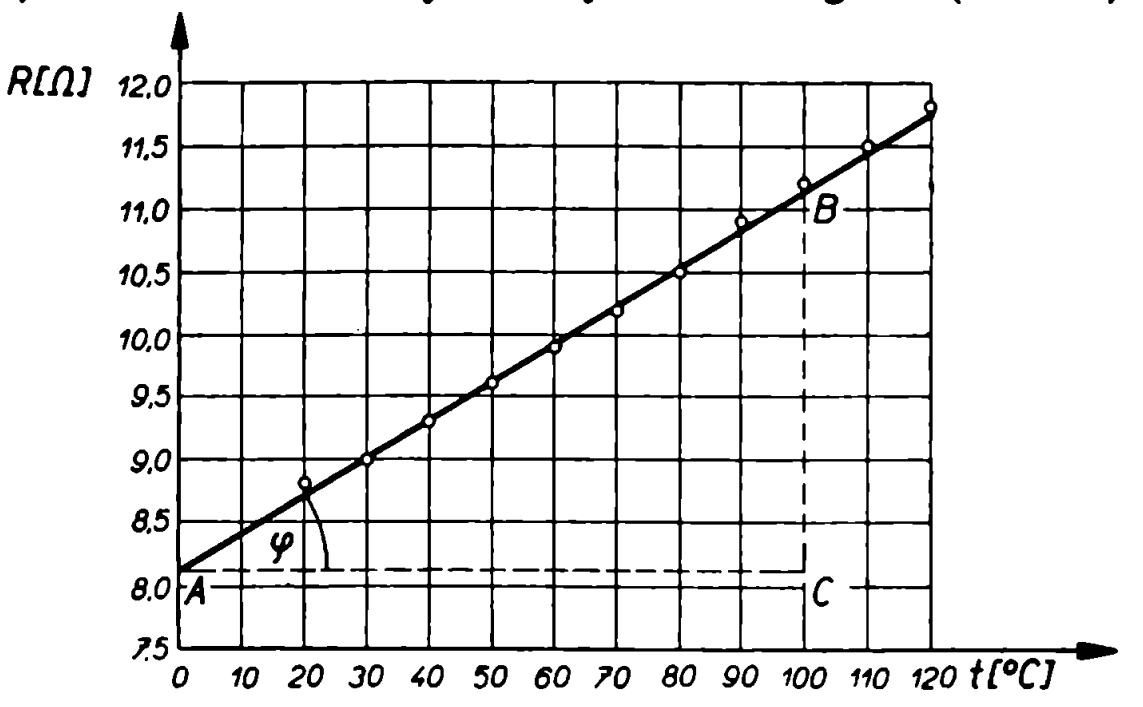
$$\alpha_s = \frac{\Sigma\alpha}{10} = 0{,}003\,71\ \mathrm{deg}^{-1}.$$

Stredná chyba je

$$\overline{\delta} = \frac{5}{20} \cdot \frac{\Sigma\Delta_+}{3} = \frac{5}{20} \cdot \frac{0{,}0011}{3} \doteq 0{,}0001\ \mathrm{deg}^{-1}.$$

Relatívna chyba veličiny α_s je $\frac{\overline{\delta}}{\alpha_s} = \frac{0{,}0001}{0{,}003\,71} \doteq 0{,}03 = 3\ \%$.

e) Namerané hodnoty boli vynesené do grafu (obr. 35).



Obr. 35

Týmito bodmi bola vedená priamka, ktorá sa im čo najviac približuje, na ose odporov bol odčítavý odpor pri teplote 0 °C. Z grafu bol vypočítaný súčiniteľ zo vzťahu

$$\alpha = \frac{B\,C}{C\,A}, \quad \alpha = \frac{R_t - R_0}{(t - t_0)\,R_0}$$

pre hodnoty teplôt $t = 100$ °C, $t_0 = 0$ °C,
teda

$$\alpha = \frac{11{,}2 - 8{,}1}{100\,R_0}\,\frac{\Omega}{\mathrm{deg}} = \frac{3{,}1}{810}\,\mathrm{deg}^{-1} = 0{,}0038\,\mathrm{deg}^{-1}.$$

V tabuľkách je pre meď udávaná hodnota

$$\alpha = 0{,}0043\ \mathrm{deg}^{-1}.$$

f) Hodnota α podľa e) je určená presnejšie ako v d), pretože smer priamky se dá presnejšie určiť u bodov vzdialených ako u bodov blízkych.

b) Druhé kolo soutěže

1. příklad (navrhl Milan Krebs)

Kolo bicyklu o poloměru r jede po vodorovné rovině a otáčí se frekvencí f.

1. Jak velkou rychlostí se pohybuje střed kola?
2. Určete vodorovnou a svislou složku rychlosti bodu na obvodu kola a jeho výslednou rychlost v závislosti na čase.
3. Ve kterém okamžiku má bod na obvodu kola maximální a ve kterém okamžiku minimální rychlost? Určete tyto rychlosti.

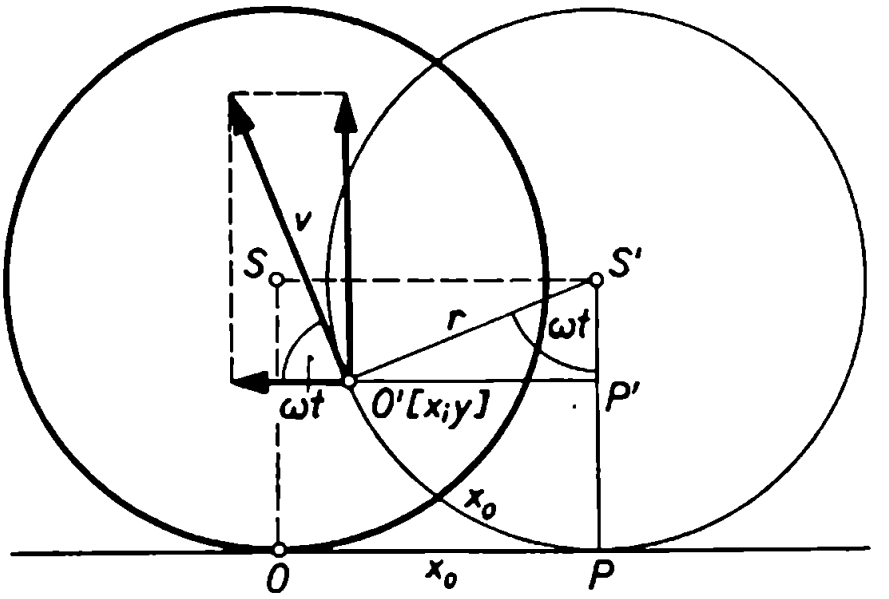
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $r = 35$ cm, $f = 120$ ot./min.

Řešení:

1. Z obr. 36 vyplývá, že se kolo za čas t otočí o úhel $\alpha = \omega\,t$, a tedy jeho střed se posune o vzdálenost rovnou

délce oblouku na povrchu kola odpovídajícímu středovému úhlu ωt, čili $x_0 = r\,\omega\,t = OP = \overset{\frown}{PO'}$. Pro parametrické vyjádření souřadnic bodu $O'\,(x;y)$ dostaneme z trojúhelníku $OP'S'$ obecné vztahy

$$x = r\,\omega\,t - r\sin\omega\,t\,,$$
$$y = r - r\cos\omega\,t\,.$$



Obr. 36

2. Rychlost, jakou se pohybuje střed kola, je

$$v_0 = \frac{2\,\pi\,r}{T} = 2\,\pi\,r\,f = r\,\omega\,.$$

3. Složky rychlosti bodu na povrchu kola vypočteme z předpokladu, že jeho pohyb lze složit z rovnoměrného pohybu ve směru osy x rychlostí $v_0 = r\,\omega$ a z rotace kolem bodu S' s obvodovou rychlostí $v' = r\,\omega$.

Provedeme-li rozklad vektoru rychlosti na složky ve

směru souřadných os, dostaneme, jak vyplývá z obrázku,

$$v_x = v_0 - v_x' = r\omega - r\omega \cos \omega t ,$$
$$v_y = v_y' = r\,\omega \sin \omega\, t .$$

4. Absolutní hodnoty rychlosti bodu na obvodu kola vypočteme ze složek v_x a v_y pomocí vztahu

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(r\omega - r\,\omega \cos \omega\, t)^2 + r^2\,\omega^2 \sin^2 \omega\, t} =$$
$$= v_0 \sqrt{2\,(1 - \cos \omega\, t)} .$$

5. Výraz pro absolutní hodnotu rychlosti nabude maximum a minimum:

a) maximum pro $\cos \omega\, t = -1$ čili

$$\text{pro } \omega\, t = \pi + 2\,k\,\pi ,$$
$$\frac{2\,\pi}{T}\, t = \pi + 2\,k\,\pi ; \quad t = (2\,k + 1)\,\frac{T}{2} ,$$
$$v_{\max} = v_0 \sqrt{2.2} = 2\,r\,\omega .$$

b) Minimum pro $\cos \omega\, t = 1$ čili

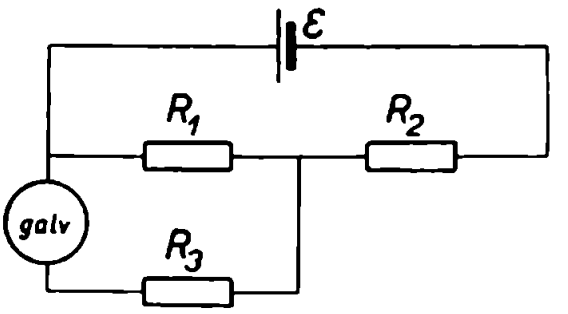
$$\omega\, t = 0 + 2\,k\,\pi ,$$
$$\frac{2\,\pi}{T}\, t = 2\,k\,\pi \quad \text{čili } t = k\,T ,$$
$$v_{\min} = r\,\omega \sqrt{2\,(1 - 1)} = 0 .$$

Maximální rychlost rovnou dvojnásobné rychlosti středu kola nabude bod na obvodu kola vždy v nejvyšší poloze (po lichém počtu půlotáček). Minimální, tj. nulovou rychlost má vždy po sudém počtu půlotáček v nejnižším bodě dráhy. V tomto bodě lne kolo k podložce, a bod na obvodu se tedy nepohybuje.

2. příklad (navrhla dr. Marta Chytilová)

Galvanometr je zařazen do obvodu podle schématu (obr. 37). Odpor $R_1 = 10{,}0\ \Omega$, $R_2 = 1000\ \Omega$, elektromoto-

rické napětí akumulátoru $U = 2{,}00$ V, jeho odpor je zanedbatelný, odpor galvanometru $R_g = 90{,}0\ \Omega$. Je-li $R_3 = 100{,}0\ \Omega$, je výchylka galvanometru 100 dílků. Za předpokladu, že výchylka je přímo úměrná proudu, určete citlivost galvanometru v μA na dílek.
Řešte pokud možno nejprve obecně.



Obr. 57

Řešení:

Odpor obvodu s galvanometrem a s odpory R_1 a R_3 označme R_4.

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_g + R_3} = \frac{R_g + R_1 + R_3}{R_1 (R_g + R_3)}.$$

Celkový odpor obvodu je

$$R = R_4 + R_2 = \frac{R_1 (R_g + R_3)}{R_g + R_1 + R_3} + R_2 =$$

$$= \frac{R_1 (R_g + R_3) + R_2 (R_g + R_1 + R_3)}{R_g + R_1 + R_3}.$$

Obvodem prochází proud $I = \frac{U}{R}$. Z toho odporem R_1 prochází proud I_1, galvanometrem proud I_2; platí

$$I = I_1 + I_2, \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_g + R_3}{R_1}.$$

Číselný výpočet:

$$R = \frac{10 \,.\, 190 + 1000 \,.\, 200}{200}\ \Omega = \frac{201\,900}{200}\ \Omega \doteq 1010\ \Omega\,.$$

$$I_1 + I_2 = \frac{4}{2019}\ \mathrm{A}\,,$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{190}{10} = 19, \qquad I_1 = 19\, I_2 .$$

$$\frac{I_1 + I_2}{I_2} = 20, \quad I_1 + I_2 = 20\, I_2, \quad I_2 = \frac{1}{20} I .$$

$$I_2 = \frac{4}{2019 \,.\, 20}\ \mathrm{A} = \frac{1}{10\,095}\ \mathrm{A} \doteq 10^{-4}\,\mathrm{A} = 100 \,.\, 10^{-6}\,\mathrm{A} =$$

$= 100\ \mu\mathrm{A}$.

Citlivost galvanometru je 1 μA na dílek.

3. příklad (navrhl Konrád Hofman)

V prstenci se vzduchovou mezerou je střední délka feromagnetika l, tloušťka vzduchové mezery d. Na prstenci je N závitů. Prochází-li závity proud I, je magnetická indukce v mezeře B_0. Stanovte relativní permeabilitu feromagnetika za předpokladu, že průřez indukčního toku v mezeře je k-krát větší než průřez feromagnetika.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $l = 50$ cm, $d = 2{,}5$ cm, $N = 500$, $I = 4{,}0$ A, $B_0 = 0{,}10$ T, $k = 1{,}2$, $\mu_0 \doteq 1{,}257 \,.\, 10^{-6}$ m kg s^{-2} A^{-2}.

Řešení:

Označíme-li plochu průřezu feromagnetika S, je plocha průřezu indukčního toku v mezeře $k\,S$. Je-li indukce ve feromagnetiku B, v mezeře B_0, je indukční tok $\Phi = B\,S = k\,B_0\,S$, tedy $B = k\,B_0$. Intenzita pole ve feromagnetiku

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu_\mathrm{r}} = \frac{k B_0}{\mu_0 \mu_\mathrm{r}},$$

ve vzduchu

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} .$$

Magnetomotorické napětí

$$\mathscr{E}_m = N I = H l + H_0 d = k \frac{B_0}{\mu_0 \mu_r} l + \frac{B_0}{\mu_0} d .$$

Z toho

$$\mu_r = \frac{k B_0 l}{\mu_0 N I - B_0 d}$$

Po dosazení

$$\mu_r = \frac{1{,}2 \,.\, 0{,}1 \,.\, 0{,}5}{1{,}257 \,.\, 10^{-6} \,.\, 500 \,.\, 4 - 0{,}1 \,.\, 2{,}5 \,.\, 10^{-2}},$$

$$\mu_r = 4290 .$$

4. příklad (navrhl Zdeněk Ungermann).

Svítící předmět a stínítko jsou postaveny kolmo k optické ose tenké spojné čočky a jsou od sebe vzdáleny o délku l. Posunujeme-li čočkou po optické ose v prostoru mezi předmětem a stínítkem, vytvoří se na stínítku ostrý obraz předmětu ve dvou polohách čočky.

a) Jakou velikost má poměr $\frac{l}{f}$, kde f značí ohniskovou vzdálenost čočky?

Jaký je vztah mezi těmito polohami čočky a vzdáleností předmětu od stínítka?

b) Dokažte, že v každé z těchto poloh je vzdálenost čočky od předmětu rovna vzdálenosti čočky od stínítka v druhé poloze.

c) Jakou velikost by měl poměr $\frac{l}{f}$, kdyby

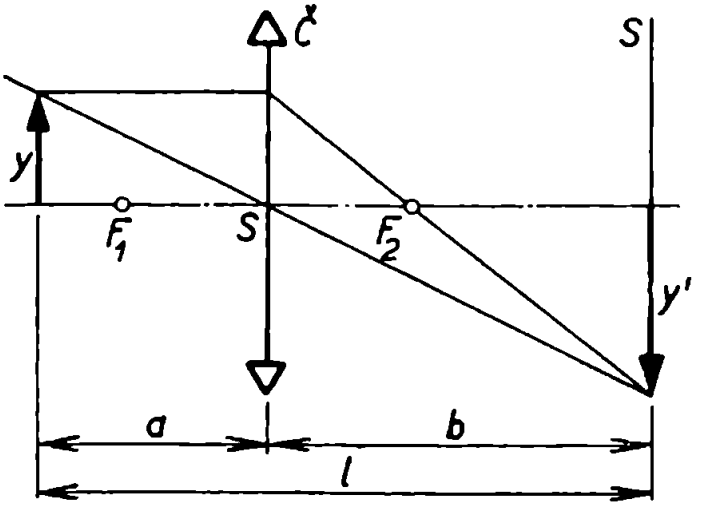
α) existovala jen jedna poloha,

β) neexistovala žádná poloha čočky, při které by se vytvořil na stínítku reálný obraz?

d) Dokažte, že v případě a) je velikost předmětu geometrickým průměrem velikostí obou obrazů.

Řešení:

Velikost předmětu označíme y, velikost obrazu y', vzdálenost čočky od předmětu a, vzdálenost čočky od obrazu b. Z obrázku 38 je patrno, že $a + b = l$. (1)



Obr. 38

V první poloze čočky budeme označovat příslušné veličiny indexem 1, v druhé poloze indexem 2.

a) Vzhledem ke vztahu (1) platí čočková rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{l - a} = \frac{1}{f},$$

ze které po ekvivalentních úpravách vyjde kvadratická rovnice

$$a^2 - a\,l + f\,l = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$a_{1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4fl}}{2} = \frac{l}{2} \pm \frac{\sqrt{l^2 - 4fl}}{2}. \qquad (2)$$

Mají-li vzniknout dva různé reálné obrazy, musí platit nerovnost

$$l > 4f, \text{ tj. } \frac{l}{f} > 4 . \tag{3}$$

neboť l i f mají kladné hodnoty.

Ze vztahu (2) je patrno, že $a_1 + a_2 = l$ (4a)

a také, že obě polohy čočky jsou stejně daleko od středu vzdálenosti l.

Mají-li se čočkou vytvořit dva reálné obrazy, pak musí mít poměr $\frac{l}{f}$ hodnotu větší než 4. Ze vztahu (4a) je patrno, že v obou uvažovaných polohách čočky je součet vzdáleností čočky od předmětu roven vzdálenosti předmětu od stínítka.

b) Podle upraveného vztahu (1) platí pro první polohu čočky vztah $a_1 + b_1 = l$,

pro druhou polohu čočky $a_2 + b_2 = l$.

Porovnáme-li obě tyto rovnice s rovnicí (4a), vyjde $b_1 = a_2$, $b_2 = a_1$, což se mělo dokázat. (4b)

c) α) Má-li existovat jen jedna poloha čočky, při které se vytvoří na stínítku reálný obraz, pak musí diskriminant výrazu (2) být roven nule, takže platí $l(l - 4f) = 0$. Protože $l \neq 0$, musí být $l = 4f$. (3b)

Ze vztahu (2) nebo (4a) je zřejmé, že v tomto případě je

$$a_1 = a_2 = \frac{l}{2} . \tag{5}$$

Má-li se vytvořit reálný obraz jen v jedné poloze čočky, pak musí podle vztahu (3b) platit

$$\frac{l}{f} = 4 .$$

c) β) Z výrazu (2) je patrno, že kořeny $a_{1,2}$ nejsou reálné, jestliže $l(l - 4f) < 0$. Vzhledem k tomu, že l i f jsou kladné, je tato nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$l - 4f < 0 . \qquad (3c)$$

Jestliže poměr $\frac{l}{f} < 4$, nevytvoří se reálný obraz v žádné poloze čočky.

d) Lineární zvětšení obrazů je určeno rovnicí $z = \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}$, takže $y' = -\frac{b}{a} y$. Platí tedy

$$y_1' = -\frac{b_1}{a_1} y \quad \text{a} \quad y_2' = -\frac{b_2}{a_2} y$$

a podle vztahu (4b)

$$y_1' = -\frac{a_2}{a_1} y \text{ a } y_2' = -\frac{a_1}{a_2} y,$$

takže $y_1' \cdot y_2' = y^2$,

a tedy

$$y = \sqrt{y_1' \cdot y_2'},$$

což se mělo dokázat.

c) Třetí kolo soutěže

1. příklad (navrhl Evžen Říman)

Na koncích lanka, které je vedeno přes lehce otáčivou kladku tvaru masívního plného kotouče o neznámé hmotnosti m, jsou zavěšena dvě závaží o hmotnostech m_1 a m_2 ($m_1 < m_2$). Závaží o hmotnosti m_2 se nachází ve výšce h nad povrchem zemským. Po uvolnění kladky se soustava

dá do pohybu a závaží m_2 dopadne na povrch zemský za dobu t.

Vypočtěte hmotnost m kotouče kladky, jsou-li dány veličiny m_1, m_2, h, t, g, přičemž tření, odpor vzduchu a hmotnost lanka považujte za zanedbatelné. Moment setrvačnosti plného kotouče o poloměru r je $J = \frac{1}{2} m r^2$. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 11{,}0$ kg, $m_2 = 12{,}5$ kg, $h = 2{,}45$ m, $t = 3{,}00$ s, $g = 9{,}81$ m s^{-2}.

Řešení:

a) Použijeme *zákon o zachování mechanické energie* při pohybu těles v tíhovém poli zemském.
Od začátku pohybu až po dopad tělesa hmotnosti m_2 na zemský povrch se zmenšila jeho potenciální tíhová energie o hodnotu $W_{p2} = m_2 g h$ a současně se zvětšila potenciální tíhová energie tělesa hmotnosti m_1 o hodnotu $W_{p1} = m_1 g h$. Celkové zmenšení potenciální tíhové energie soustavy je

$$\Delta W_p = W_{p2} - W_{p1} = (m_2 - m_1) g h .$$

Závaží o hmotnosti m_2 se v okamžiku dopadu na zemský povrch pohybovalo okamžitou rychlostí v a mělo kinetickou energii $W_{k2} = \frac{1}{2} m_2 v^2$. Stejnou rychlostí se v tomto okamžiku pohybovalo těleso hmotnosti m_1, a mělo tedy kinetickou energii $W_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v^2$. Kotouč kladky se otáčel okamžitou úhlovou rychlostí $\omega = \frac{v}{r}$, kde r je poloměr kotouče. Jeho kinetická energie

$$W_{k3} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{4} m r^2 . \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{4} m v^2 .$$

Číselné řešení:

$$m = \frac{9{,}80 \,.\, 9{,}00}{2{,}45}\,(12{,}5 - 11{,}0) - 2\,(11{,}0 + 12{,}5)\ \text{kg},$$

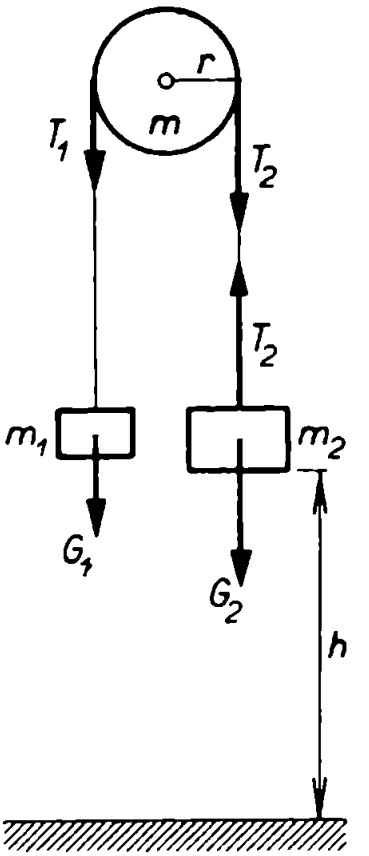
$m = 7{,}00$ kg .

Hmotnost kladky byla 7,00 kg.

b) *Řešení silovými rovnicemi*

Síla, kterou působí gravitační pole zemské na těleso hmotnosti m_1, je G_1, na těleso hmotnosti m_2 působí tíhová síla G_2. Protože $G_2 > G_1$, bude se soustava působením této stálé síly pohybovat rovnoměrně zrychleně se zrychlením a.

Silové působení je zprostředkováno vláknem (obr. 39). Napětí vlákna mezi závažím m_1 a kladkou je T_1, mezi závažím m_2 a kladkou je T_2.



Obr. 39

Můžeme tedy psát silové rovnice pro závaží m_2:

$$G_2 - T_2 = m_2 a,\quad G_2 = m_2 g, \quad (1)$$

pro závaží m_1:

$$-G_1 + T_1 = m_1 a\,,\ G_1 = m_1 g, \quad (2)$$

neboť směr pohybu závaží m_2 k zemi je kladný, pro závaží m_1 je kladný směr ke kladce.

Na kladku působí momenty sil T_1 a T_2 na rameni r, tedy moment

$$M = (T_2 - T_1)\, r$$

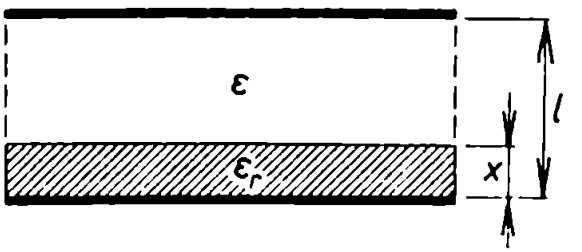
je celkový moment, který otáčí kladkou.

Pro otáčivý pohyb kladky platí vztah $M = \mathcal{J}\,\varepsilon$, kde ε je úhlové zrychlení, jež souvisí se zrychlením posuvného pohybu a vztahem $\varepsilon = \frac{a}{r}$. Jest tedy $M = \frac{1}{2}\, m\, r^2\, \frac{a}{r}$,

c) Znázorněte graficky závislost P na p pro $0 \leqq p \leqq 100$ a pro $\varepsilon_r = 5$.

Řešení:

a) Kondenzátor můžeme považovat za soustavu dvou kondenzátorů, spojených v sérii. Plošný obsah desek



Obr. 40

označíme S. Kondenzátor s dielektrikem o relativní permitivitě ε_r má kapacitu

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{x} = \frac{100\ \varepsilon_0\ \varepsilon_r S}{p\, l}, \qquad (1)$$

kondenzátor se vzduchem má kapacitu

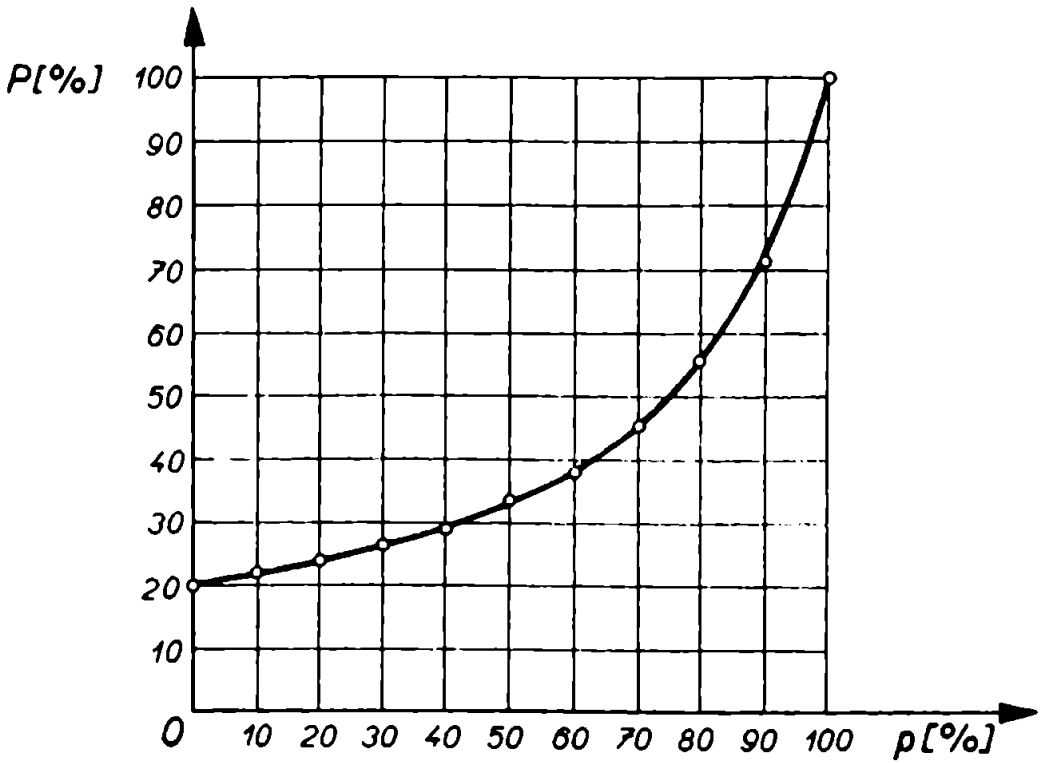
$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{l - x} = \frac{100\ \varepsilon_0 S}{l\,(100 - p)}. \qquad (2)$$

Je-li soustava nabita nějakým nábojem Q, pak tento náboj leží na obou pomyslných kondenzátorech. Na prvním kondenzátoru je proto napětí $U_1 = \frac{Q}{C_1}$ a pole zde má intenzitu $E_1 = \frac{U_1}{x} = \frac{Q}{x\, C_1}$. Dosazením za C_1 z (1) najdeme $E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$. Podobně zjistíme, že v části se vzduchem má pole intenzitu $E_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$.

Odtud najdeme hledaný poměr

$$E_2 : E_1 = \varepsilon_r : 1 ,$$

což znamená, že intenzita pole ve vzduchu je ε_r-krát větší než v pevném dielektriku.



Obr. 41

b) Celkovou kapacitu C uvažované soustavy vyjádříme tak, že do známého vztahu pro výpočet kapacity sériového spojení kondenzátorů dosadíme z (1) a (2). Po úpravě zjistíme, že

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{100\, \varepsilon_0\, \varepsilon_r\, S}{l\,[100\, \varepsilon_r - p\,(\varepsilon_r - 1)]} . \qquad (3)$$

Pro $p = 100$ má (3) maximální hodnotu

$$C_{max} = \frac{\varepsilon_0\, \varepsilon_r\, S}{l} . \qquad (4)$$

Ze vztahů (3) a (4) pro C, vyjádřeno v procentech vzhledem k C_{max}, dostaneme

$$P = \frac{10\,000}{100\,\varepsilon_r - p(\varepsilon_r - 1)}. \tag{5}$$

c) Vypočítáme nyní některé hodnoty P podle (5) pro p v rozmezí od 0 do 100 a pro $\varepsilon_r = 5$:

p	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
P	20,0	21,7	23,8	26,3	29,4	33,3	38,5	45,5	55,6	71,5	100

Graf této závislosti je znázorněn na obr. 41.

3. příklad (navrhl Lubomír Vašek)

Duté sférické (kulové) zrcadlo má poloměr křivosti R. Jeho vrchol označme V. Světelný paprsek postupující rovnoběžně s optickou osou dopadá na zrcadlo v bodě A, vzdáleném o délku y od optické osy. Odražený paprsek protíná optickou osu v bodě B.

Vypočtěte největší možnou hodnotu veličiny y, jestliže má být vyhověno požadavku, že relativní chyba, které se dopouštíme, klademe-li $VB = \frac{R}{2}$, smí být nejvýše p %.

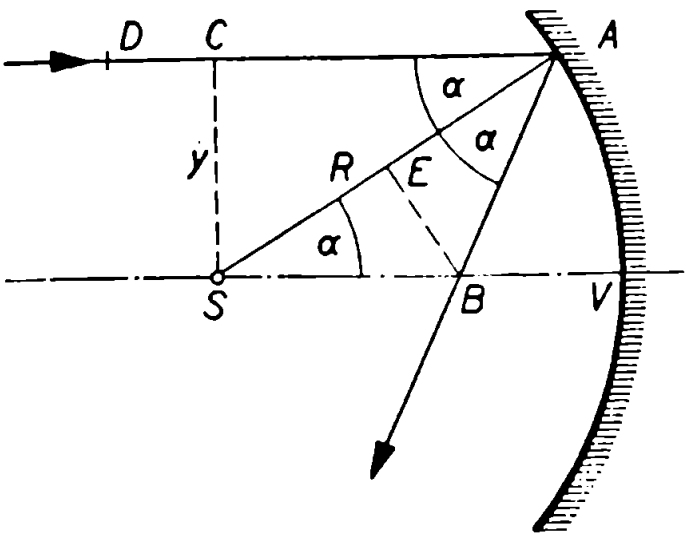
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $R = 50$ cm, $p = 1$.

Řešení:

V obr. 42 značí S střed křivosti dutého zrcadla, V jeho vrchol, úhel dopadu je $\sphericalangle DAS = \alpha$, úhel odrazu je $\sphericalangle SAB = \alpha$. E budiž pata kolmice spuštěné z bodu B na

spojnici SA. Úsečka SV je bodem B rozdělena na dvě části: $SB = b_1$, $BV = b_2$. Uvažovaná absolutní chyba je $\frac{R}{2} - VB = \frac{R}{2} - b_2$. Relativní chyba bude

$$\left(\frac{R}{2} - b_2\right) : \frac{R}{2} = 1 - \frac{2\,b_2}{R}.$$



Obr. 42

Proto podle zadání platí

$$1 - \frac{2\,b_2}{R} = \frac{p}{100}, \text{ z čehož}$$

$$b_2 = \frac{R}{2}\left(1 - \frac{p}{100}\right). \tag{1}$$

Z trojúhelníku SAC vyplývá, že $\sin \alpha = \frac{y}{R}$, takže

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}.$$

Protože úhel $BSA = \alpha$, $\sphericalangle\, SAB = \alpha$, je trojúhelník SAB

rovnoramenný, takže $SE = \frac{R}{2}$. Z trojúhelníku SEB vyplývá, že $SB = b_1 = \frac{SE}{\cos \alpha} = \frac{R}{2 \cos \alpha}$.

Proto

$$b_2 = SV - b_1 = R - b_1 = R - \frac{R}{2 \cos \alpha} =$$

$$= R - \frac{R^2}{2\sqrt{R^2 - y^2}}. \qquad (2)$$

Dosazením (2) do (1) dostaneme

$\frac{R}{2}\left(1 - \frac{p}{100}\right) = R - \frac{R^2}{2\sqrt{R^2 - y^2}}$, kteroužto rovnici upravíme na tvar ryze kvadratické rovnice

$$y^2 (100 + p)^2 = R^2 (p^2 + 200\, p),$$

z níž vypočteme hledané

$$y_{\max} = + R \frac{\sqrt{p\,(200 + p)}}{100 + p}.$$

Numericky:

$$y_{\max} = 50 \text{ cm } \frac{1 \,.\, 201}{101} = 7{,}018 \text{ cm} \doteq 7 \text{ cm}.$$

Je-li paprsek jdoucí rovnoběžně s osou ve vzdálenosti $y = 7$ cm, je odchylka bodu B od vzdálenosti $\frac{R}{2}$ pouze 1 %.

4. příklad (navrhl dr. Ivan Náter)

Poissonova konštanta $\varkappa$ je pre daný plyn definovaná vzťahom $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$, kde c_p je merné teplo plynu pri konš-

tantnom tlaku, c_v jeho merné teplo pri konštantnom objeme.

Clément a Desormes navrhli túto nepriamu metódu merania konštanty $\varkappa$ pre vzduch:
Do veľkej sklenenej fľaše opatrenej výpustným ventilom nahustíme vzduch. Keď sa teplota vzduchu vo fľaši vyrovná s teplotou okolia, odmeriame pripojeným otvoreným manometrom pretlak $\Delta_1 p$ vzduchu vo fľaši voči barometrickému tlaku b okolitého vzduchu. Potom na veľmi krátky čas otvoríme výpustný ventil (jeho otvor musí byť tak veľký, aby sa za tento krátky čas tlak vzduchu vo fľaši vyrovnal s barometrickým tlakom okolitého vzduchu) a po opätovnom uzavretí výpustného ventilu počkáme, až sa tlak vzduchu, ktorý ostal vo fľaši, ustáli. Jeho pretlak $\Delta_2 p$ voči barometrickému tlaku b znova odmeriame manometrom. Z nameraných hodnôt $\Delta_1 p$, $\Delta_2 p$ a b môžeme vypočítať hodnotu konštanty $\varkappa$ pre vzduch.

a) Vysvetlite a odôvodnite zmeny stavových veličín vzduchu vo fľaši

α) po otvorení výpustného ventilu,

β) po opätovnom uzavretí výpustného ventilu.

b) Odvoďte vzťah pre výpočet Poissonovej konštanty $\varkappa$ pre vzduch z nameraných hodnôt $\Delta_1 p$, $\Delta_2 p$ a b.

c) Vysvetlite, prečo musí byť otvor výpustného ventilu veľký.

Riešenie:

a) α) Po otvorení výpustného ventilu s dostatočne veľkým otvorom expanduje nahustený vzduch z fľaše do okolia, kde je nižší tlak b, až sa tlak vzduchu vo fľaši vyrovná s týmto barometrickým tlakom b. Určité množstvo vzduchu unikne z fľaše ventilovým otvorom. Opísaná expanzia je adiabatická, pretože trvá len veľmi krátky čas,

expandujúci vzduch neprijíma ani neodovzdáva tepelnú energiu. Expandujúci vzduch koná prácu len na úkor svojej vnútornej energie, preto sa jeho teplota zníži.

β) Ihneď po opätovnom uzatvorení výpustného ventilu má vzduch, ktorý ostal vo fľaši, voči okoliu zníženú teplotu a jeho tlak je rovný barometrickému tlaku b. Postupne však tento vzduch cez steny fľaše prijíma od okolia tepelnú energiu, zväčšuje sa jeho vnútorná energia a súčasne sa zvyšuje aj jeho teplota. Tepelnú energiu prijíma vzduch až potiaľ, kým sa jeho teplota nevyrovná s teplotou okolia. Počas zvyšovania teploty vzduchu vo fľaši, pretože sa jeho objem nemôže meniť, zväčšuje sa jeho tlak — zmena je izochorická. Po vyrovnaní teploty vzduchu vo fľaši s teplotou okolia vykazuje vzduch vo fľaši voči barometrickému tlaku b pretlak $\Delta_2 p$.

b) Zmena stavu vzduchu vo fľaši po otvorení výpustného ventilu je adiabatická. Označme vnútorný objem fľaše V_1, objem vzduchu z fľaše po jeho expanzii cez výpustný ventil V_2. Pre adiabatickú zmenu vzduchu platí Poissonov vzťah

$$p_1 V_1^{\varkappa} = b\, V_2^{\varkappa}, \qquad (1)$$

kde $p_1 = b + \Delta_1 p$ je tlak vzduchu vo fľaši tesne pred otvorením výpustného ventilu. Súčasne však pre stavové veličiny uvažovaného vzduchu platí stavová rovnica

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{b\, V_2}{T_2}, \qquad (2)$$

kde sme symbolom T_1 označili teplotu vzduchu vo flaši tesne pred otvorením výpustného ventilu (je totožná s teplotou okolia) a symbolom T_2 teplotu vzduchu vo fľaši tesne pred opätovným uzatvorením výpustného ventilu.

Po opätovnom uzatvorení výpustného ventilu vzduch,

ktorý ostal vo fľaši, mení svoj stav izochoricky, preto platí

$$\frac{b}{T_2} = \frac{p_2}{T_1}, \tag{3}$$

kde $p_2 = b + \Delta_2 p$ je tlak vzduchu vo fľaši po vyrovnaní jeho teploty s teplotou T_1 okolia.

Ak za $\frac{b}{T_2}$ dosadíme z (3) do (2), dostaneme po úprave

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 . \tag{4}$$

Všetky zmeny stavu vzduchu, ktorý bol pôvodne vo fľaši, môžeme teda nahradiť jedinou izotermickou zmenou (za predpokladu, že aj vzduch, ktorý z fľaše unikol, pri prijímaní tepelnej energie od okolia menil svoj stav izochoricky; to je ovšem nie splnené, pretože u tohoto vzduchu nastala izobarická zmena).

Zo vzťahu (4) vychádza

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\varkappa}$$

a zo vzťahu (1) zas

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} = \frac{b}{p_1} .$$

Delením pravých a ľavých strán posledných dvoch rovníc dostaneme po úprave

$$\varkappa = \frac{\log b - \log p_1}{\log p_2 - \log p_1},$$

alebo po dosadení za p_1 a p_2

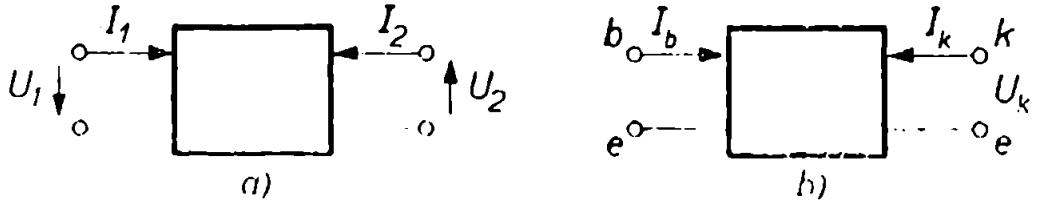
$$\varkappa = \frac{\log b - \log (b + \Delta_1 p)}{\log (b + \Delta_2 p) - \log (b + \Delta_1 p)} .$$

c) Otvor výpustného ventilu musí byť veľký, aby unikanie plynu z fľaše trvalo skutočne len krátky čas, za ktorý ne-

mohla nastať výmena tepla medzi plynom vo fľaši a okolím. Len vtedy môžeme expanziu plynu považovať za adiabatickú.

5. úkol experimentální (navrhl dr. Miroslav Bajer) **Měření výstupních charakteristik plošného tranzistoru v zapojení se společným emitorem**

Pomůcky: baterie 18 V, tranzistor typu 103NU70, 2 potenciometry 1,3 kΩ, 1 odpor 33 kΩ, klíč, mikroampérmetr, miliampérmetr, voltmetr, milimetrový papír.



Obr 43.

Návod: Tranzistor lze považovat za čtyřpól (obr. 43a), na jehož vstupu je stejnosměrné napětí U_1, na výstupu napětí U_2, do vstupních svorek vtéká proud I_1, do výstupních svorek proud I_2.

Vlastnosti tranzistoru lze charakterizovat dvěma funkčními rovnicemi, z nichž nejvýznamnější jsou tyto: $U_1 = f_1(I_1, U_2)$; $I_2 = f_2(I_1, U_2)$. Každou z těchto funkcí lze znázornit soustavou charakteristik podobně jako u triody.

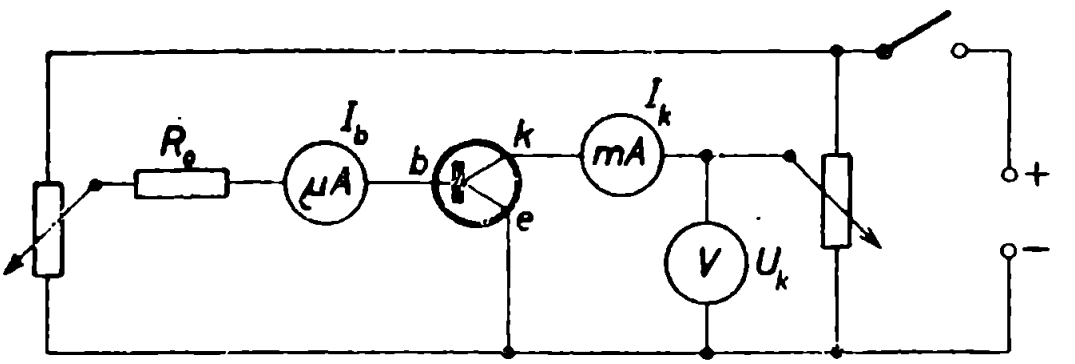
Výstupní charakteristikou tranzistoru nazýváme závislost $I_2 = f(U_2)$ při $I_1 = \text{konst.}$

Poněvadž tranzistor má jen 3 elektrody, je zřejmé, že v čtyřpólu podle obr. 43a je některá elektroda společná vstupnímu i výstupnímu obvodu. Tím dostáváme tři základní způsoby zapojení, a to:

1. zapojení se společnou bází (SB);
2. zapojení se společným emitorem (SE);
3. zapojení se společným kolektorem (SK).

U plošných tranzistorů je nejběžnější zapojení se společným emitorem (obr. 43b), poněvadž mimo jiné dává největší výkonové zesílení. V tomto případě se střídavý elektrický signál zavádí do báze. Malá změna proudu báze vyvolá velké změny emitorového a kolektorového proudu, a tím i velké zesílení napěťové, proudové a výkonové.

Výstupní charakteristikou plošného tranzistoru v zapojení SE rozumíme závislost proudu kolektoru (I_k) na napětí kolektoru (U_k) při konstantním proudu báze (I_b).



Obr. 44

Charakteristiky měříme v zapojení podle obr. 44; odpor R_0 je ochranný odpor, který omezuje proud tekoucí mikroampérmetrem při náhodném zkratu apod.

Při měření postupujeme takto:
Nastavíme nulový proud báze ($I_b = 0$) a měníme napětí kolektoru (0, 0,5, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 V). Na miliampérmetru čteme proud kolektoru I_k. Pak provedeme totéž měření pro jiné hodnoty parametru I_b ($I_b = 20$ μA; $I_b = 40$μA; $I_b = 60$ μA).

Naměřené hodnoty zapisujeme do tabulky.

Úkol:

1. Proveďte všechna měření podle návodu, tj. změřte čtyři výstupní charakteristiky plošného tranzistoru 103NU70.
2. Z naměřených hodnot sestrojte grafy, a to grafické obrazy závislosti $I_k = f(U_k)$ při $I_b = \text{konst.}$, celkem tedy 4 grafy.
3. Určete proudový zesilovací činitel β, který je pro toto zapojení dán poměrem změny kolektorového proudu (ΔI_k) ke změně proudu báze (ΔI_b) při stejném napětí na kolektoru (U_k), tedy

$$\beta = \left(\frac{I_k}{I_b}\right)_{U_k = \text{konst.}}$$

Proudový zesilovací činitel určete z grafů výstupních charakteristik pro pracovní bod $U_k = 4$ V, $I_b = 40$ μA.

Postup měření:

Zapojení bylo provedeno přesně podle obr. 44. Nastavíme potenciometrem hodnotu proudu báze I_b a napětí na kolektoru U_{KE} zvyšujeme od 0 V do 12 V. Před odečtením proudu kolektoru I_k vždy ještě zkontrolujeme proud báze, který se poněkud mění při malých hodnotách U_k.

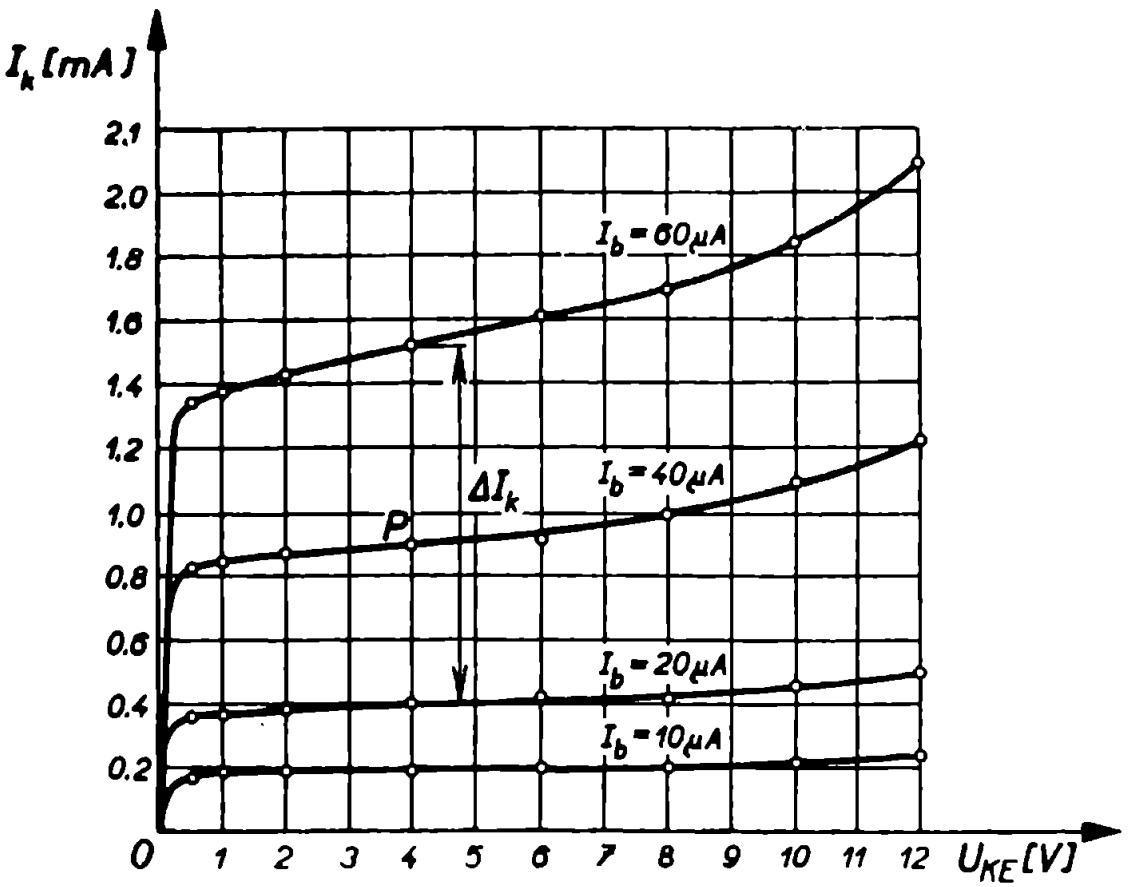
Hodnota U_{KE} není zcela přesná, protože voltmetr ukazuje součet napětí U_{KE} a napětí na miliampérmetru. Uvážíme-li však, že úbytek napětí na miliampérmetru je asi 0,05 V nebo i menší a proud I_k se mění jen nepatrně proti změnám U_{KE} (od hodnot 0,5 V výše), je tato chyba zanedbatelná. Proud I_k při nastavení $I_b = 0$ byl použitým miliampérmetrem neměřitelný (citlivost miliampérmetru byla 50 μA/dílek).

Výsledky měření jsou graficky znázorněny na obr. 45.

Určení zesilovacího činitele v pracovním bodě $U_{KE} = 4$ V, $I_b = 40$ μA:

Tabulka měření:

Čís. měř.	U_{KE} [V]	$I_b = 10\,\mu A$ I_k [μA]	$I_b = 20\,\mu A$ I_k [μA]	$I_b = 40\mu\,A$ I_k [μA]	$I_b = 60\,\mu A$ I_k [μA]
1	0	0	0	0	0
2	0,5	175	355	825	1350
3	1	180	360	850	1375
4	2	190	375	875	1440
5	4	195	400	900	1525
6	6	200	415	925	1610
7	8	205	440	1025	1705
8	10	215	455	1100	1850
9	12	235	500	1225	2100



Obr. 45

Přivedeme-li na bázi tranzistoru střídavý signál o amplitudě 20 μA, tedy o rozkmitu $I_b = 40$ μA, dostaneme na výstupu střídavou složku kolektorového proudu o celkovém rozkmitu (viz obr. 45)

$$I_k = 1{,}15 \text{ mA} = 1150 \text{ μA} .$$

Zesilovací činitel je tedy

$$\beta = \frac{I_k}{I_b} = \frac{1150 \text{ μA}}{40 \text{ μA}} = 28{,}75 \doteq 28{,}8; \; U_{KE} = 4 \text{ V}.$$

Abychom určili zesilovací činitel v daném pracovním bodě přesně, museli bychom jej počítat pro velmi malou amplitudu střídavého signálu, nebo jej určit ze směrnice tečny k převodové charakteristice $I_k = f(I_b)$; $U_{KE} = 4$ V. Avšak zjištění zesilovacího činitele z výstupní charakteristiky, jak bylo provedeno, běžně vyhovuje.

2. Úlohy kategorie B

Příklady recenzovali dr. Marta Chytilová a dr. Ivan Náter

a) První kolo soutěže

1. příklad (navrhl Přemysl Šedivý)

Na horním konci nakloněné roviny délky d a výšky h zadržíme vedle sebe zarážkou válec a kouli ze stejnorodých látek. Válec se dotýká roviny v povrchové přímce, která má vodorovný směr. Uvolníme-li tělesa, konají valivý pohyb bez klouzání.

a) Které těleso se dostane dříve ke spodnímu konci nakloněné roviny, uvolníme-li je současně?

b) Kde se bude nacházet v tomto případě prvé těleso v okamžiku, kdy druhé dorazilo ke spodnímu konci nakloněné roviny?

c) Které těleso a o jakou dobu dříve musíme uvolnit, mají-li obě tělesa dorazit současně ke spodnímu konci nakloněné roviny?

Moment setrvačnosti válce vzhledem k ose spojující středy kruhových podstav je $\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2$, moment setrvačnosti koule vzhledem k ose jdoucí jejím středem je $\mathcal{J}_2 = \frac{2}{5} m_2 r_2^2$, kde m_1 je hmotnost válce, m_2 hmotnost koule, r_1 je poloměr podstavy válce, r_2 poloměr koule. Tření a odpor vzduchu zanedbáváme. Valivý pohyb obou těles považujeme za složený z posuvného pohybu a otáčivého pohybu tělesa.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 2{,}0$ m, $h = 0{,}20$ m, $g = 10$ m s^{-2}.

Řešení:

Při valivém pohybu po nakloněné rovině bez klouzání konají hmotné středy těles rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb, kromě toho konají tělesa rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb. Označme rychlost postupného pohybu na spodním konci nakloněné roviny pro válec v_1, pro kouli v_2. Nemá-li nastat klouzání těles, platí pro úhlové rychlosti rovnice

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r_1}; \qquad \omega_2 = \frac{v_2}{r_2}.$$

Během valení po nakloněné rovině se přeměňuje potenciální energie tíhová tělesa v kinetickou energii postupného a otáčivého pohybu. Pro válec platí

$$m_1 g h = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{\mathcal{J}_1 \omega_1^2}{2} = \frac{3 v_1^2 m_1}{4}; \quad v_1^2 = \frac{4}{3} g h;$$

Pro kouli platí

$$m_2 g h = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{7 v_2^2 m_2}{10}; \quad v_2^2 = \frac{10}{7} g h .$$

Hmotný střed válce urazí rovnoměrně zrychleným pohybem dráhu d za dobu

$$t_1 = \frac{2 d}{v_1} = d \sqrt{\frac{3}{g h}};$$

podobně platí pro kouli

$$t_2 = \frac{2 d}{v_2} = d \sqrt{\frac{14}{5 g h}}.$$

Odtud plyne $t_1 > t_2$.

Uvolníme-li obě tělesa současně, dostane se ke spodnímu konci nakloněné roviny koule dříve než válec.

b) Koule dorazí ke spodnímu konci za dobu t_2; za stejnou dobu urazí hmotný střed válce dráhu

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_2^2,$$

$$a_1 = \frac{2 d}{t_1^2} = \frac{2 d}{d^2} \cdot \frac{g h}{3} = \frac{2 g h}{3 d},$$

$$s_1 = \frac{2 g h}{6 d} \cdot d^2 \cdot \frac{14}{5 g h} = \frac{14}{15} d .$$

Za stejnou dobu, za kterou urazí koule dráhu d, urazí válec dráhu $\frac{14}{15} d$.

c) Válec uvolníme dříve než kouli. Válec uvolníme za dobu $t = t_1 - t_2$ po uvolnění koule.

$$t = t_1 - t_2 = d \left(\sqrt{\frac{3}{g h}} - \sqrt{\frac{14}{5 g h}} \right) = \frac{d}{\sqrt{g h}} (\sqrt{3} - \sqrt{2{,}8}).$$

Po dosazení dostáváme

$$s_1 = \frac{14}{15} \cdot 2{,}0 \text{ m} \doteq 1{,}9 \text{ m};$$

$$t = \frac{2{,}0}{\sqrt{10 \cdot 0{,}20}} (\sqrt{3} - \sqrt{2{,}8}) \text{ s} \doteq 0{,}08 \text{ s}.$$

2. příklad (navrhl Milan Bednařík a Miroslava Široká) Velmi tenká tyč o délce h je v rovnovážné poloze podepřena v koncovém bodě o vodorovnou podložku. Na tyči jsou upevněny ve výškách h, $\frac{2}{3}h$, $\frac{1}{3}h$ od vodorovné podložky tři hmotné body, z nichž každý má hmotnost m; hmotnost tyče je vzhledem k hmotnosti bodů zanedbatelná. Při nepatrném vychýlení z rovnovážné polohy se tyč otáčí kolem vodorovné osy, procházející opěrným bodem, až dopadne na vodorovnou podložku.

a) Jak velikou rychlostí v dopadne horní koncový bod tyče na podložku?

b) V jaké výši h' nad vodorovnou podložkou leží na tyči bod, který dopadne na podložku stejnou rychlostí, jako kdyby padal ze stejné výšky volným pádem?

Řešení:

Tyč ve svislé poloze má vzhledem k vodorovné podložce potenciální energii tíhovou W_p. Předpokládáme, že tyč se opírá o podložku v jednom bodě (rozměry průřezu zanedbáváme). Při rotaci kolem vodorovné osy, procházející opěrným bodem, se přemění potenciální energie tíhová na energii kinetickou rotačního pohybu W_k.

Potenciální energie tíhová tyče ve svislé poloze je

$$W_p = m g h + \frac{2}{3} m g h + \frac{1}{3} m g h = 2 m g h .$$

Kinetická energie rotačního pohybu v okamžiku dopadu na vodorovnou podložku je

$W_k = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2$, kde $\mathcal{J}$ je moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení, ω je úhlová rychlost tyče při dopadu na vodorovnou podložku. Moment setrvačnosti $\mathcal{J}$ se rovná součtu momentů setrvačnosti jednotlivých hmotných bodů tělesa vzhledem k ose rotace

$$\mathcal{J} = m h^2 + m \frac{4 h^2}{9} + m \frac{h^2}{9} = \frac{14}{9} m h^2.$$

$$W_k = \frac{7}{9} m h^2 \omega^2.$$

Podle zákona zachování mechanické energie platí $W_p = W_k$

$$2 m g h = \frac{7}{9} m h^2 \omega^2,$$

a odtud úhlová rychlost tyče při dopadu je

$$\omega = \sqrt{\frac{18}{7} \frac{g}{h}}.$$

Tato úhlová rychlost je pro všechny body tyče stejná. Rychlost horního konce tyče (prvního hmotného bodu) v okamžiku dopadu je $v = h\omega$ a po dosazení

$$v = \sqrt{\frac{18}{7} g h}.$$

b) Bod tyče, který leží při svislé poloze tyče ve výšce h' nad podložkou, nabude v okamžiku dopadu tyče rychlosti

$$v' = h'\omega = h' \sqrt{\frac{18}{7} \frac{g}{h}}.$$

Kdyby hmotný bod padal z téže výšky h' volným pádem, nabyl by při dopadu rychlosti

$$v'' = \sqrt{2\,g\,h'}\,.$$

Z podmínky $v'' = v'$ plyne

$$\sqrt{2\,g\,h'} = h'\sqrt{\frac{18}{7}\,\frac{g}{h}}\,,$$

a odtud hledaná výška $h' = \frac{7}{9}\,h$.

3. příklad (navrhl Milan Bednařík a Miroslava Široká)

Uzavřená válcová nádoba o výšce $2\,h$ je do poloviny naplněna vodou. Tlak vzduchu uvnitř nádoby se rovná atmosférickému tlaku p vně nádoby. Do dna nádoby uděláme velmi malý otvor, kterým voda začne vytékat.

a) Jakou rychlostí vytéká voda otvorem v okamžiku, kdy povrch vody poklesl o délku d?

b) Při které poloze povrchu vody přestane voda vytékat? Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $2\,h = 1{,}00$ m, $p = 10^5\ \mathrm{N\,m^{-2}}$, hustota vody $\varrho = 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

Řešení:

a) Původně je volný povrch vody ve výšce h nad vodorovným dnem nádoby. Výška vzduchového sloupce nad volným povrchem vody je rovněž h. Poklesne-li volný povrch vody o výšku d, změní se tím výška vzduchového sloupce na hodnotu $h + d$. Poněvadž je nádoba zavřená, změní se tlak vzduchu nad volným povrchem vody z hodnoty p na hodnotu p_1.

Počáteční objem vzduchu je $V = h\,S$, kde S je obsah

průřezu nádoby. Po poklesu volného povrchu vody je objem vzduchu $V_1 = (h + d)\, S$. Předpokládáme-li, že se teplota vzduchu v nádobě během poklesu volného povrchu vody nemění, můžeme použít Boyleův zákon

$$p\, V = p_1\, V_1$$

a po dosazení

$$p\, h\, S = p_1\, (h + d)\, S\,.$$

Odtud tlak

$$p_1 = \frac{h}{h + d}\, p\,.$$

Rychlost vytékající vody určíme z Bernoulliovy rovnice. Předpokládáme, že vytékající kapalina je dokonalá, zanedbáváme tření u výtokového otvoru a předpokládáme, že rychlost poklesu volného povrchu vody je zanedbatelná vzhledem k výtokové rychlosti vody; potom píšeme Bernoulliovu rovnici ve tvaru

$$p_1 + (h - d)\, \varrho\, g = p + \frac{1}{2}\, \varrho\, v^2\,,$$

a odtud po dosazení za p_1 a po úpravě vypočteme rychlost:

$$v = \sqrt{\frac{2}{\varrho}\left[(h - d)\, \varrho\, g - \frac{p\, d}{h + d}\right]}\,. \qquad (1)$$

b) Označme x délku, o kterou poklesl volný povrch vody v okamžiku, kdy voda přestala z otvoru vytékat. Tuto délku vypočteme ze vztahu (1), víme-li, že pro $d = x$ je rychlost $v = 0$. Potom platí

$$(h - x)\, \varrho\, g - \frac{p\, x}{h + x} = 0\,.$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2\, \varrho\, g + p\, x - h^2\, \varrho\, g = 0\,,$$

jejíž kořeny jsou

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4h^2 \varrho^2 g^2}}{2 \varrho g}.$$

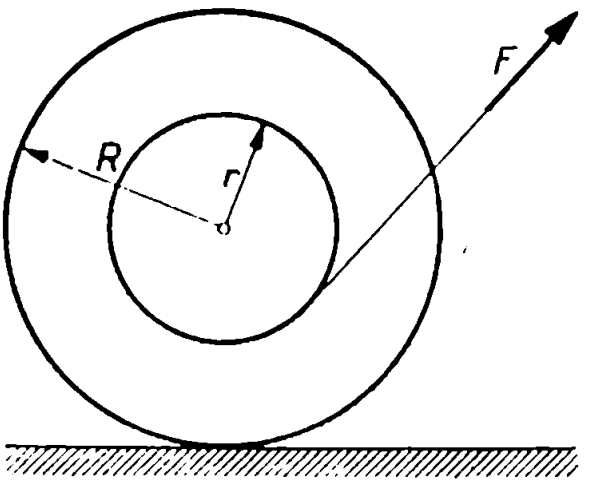
Fyzikální význam má pouze kladný kořen

$$x_1 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4h^2 \varrho^2 g^2}}{2 \varrho g} > 0.$$

Numerické řešení b): $x \doteq 2{,}3$ cm.

4. příklad (navrhl dr. Josef Kuběna)

Na vodorovné podložce leží dřevěná cívka, např. od nití, jejíž kruhová čela mají poloměr R. Válec, který čela spojuje, má poloměr r (obr. 46). Uprostřed válce je navinuta



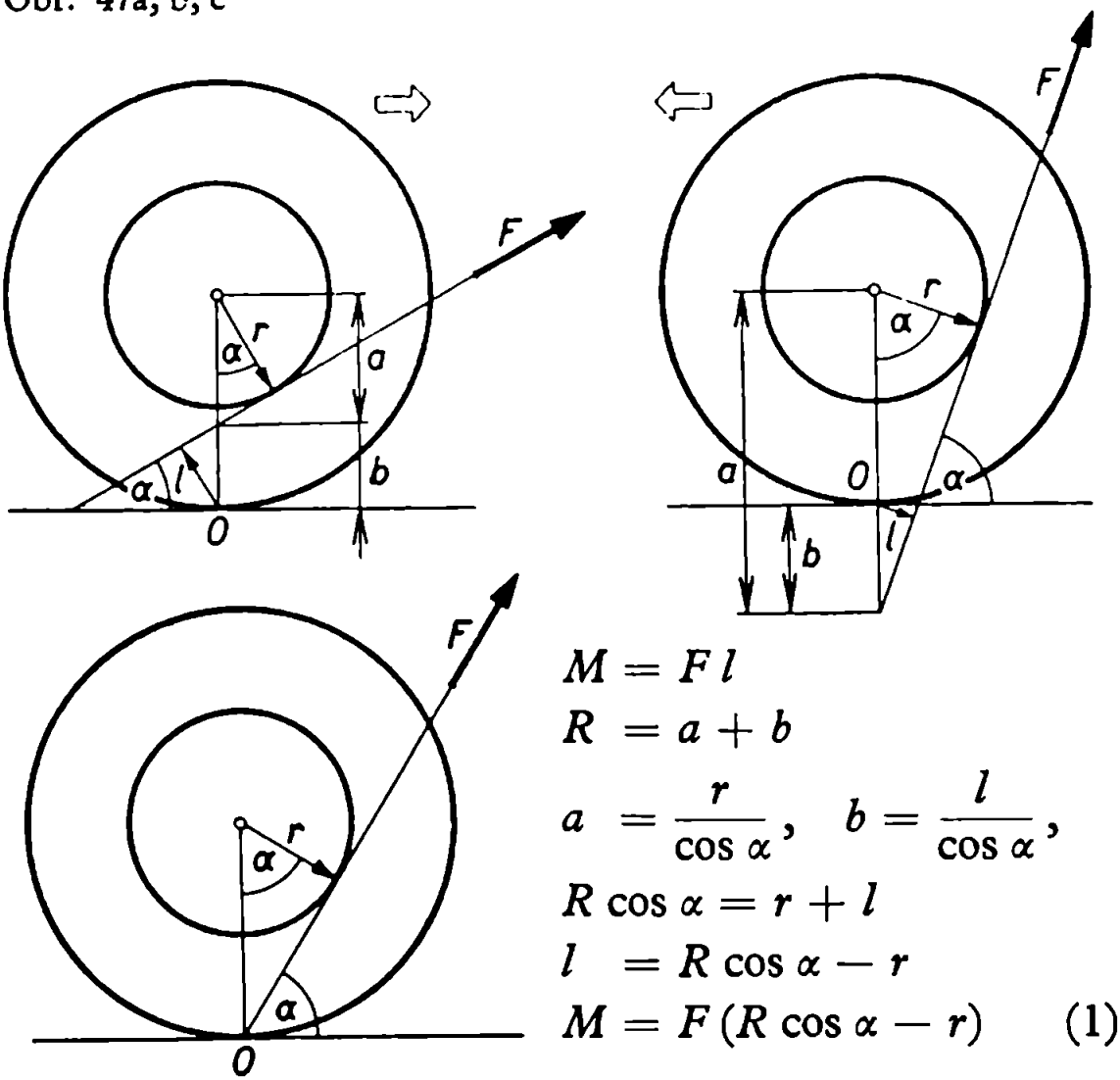
Obr. 46

nit v několika závitech. Táhneme-li za ni tak, že nit svírá s vodorovnou podložkou úhel α, koná cívka valivý pohyb bez klouzání. Vyšetřte pohyb cívky pro $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$.

Po obecném vyšetření řešte pro číselné hodnoty $r = 2{,}0$ cm, $R = 4{,}0$ cm.

Řešení:
Pohyb cívky po podložce lze chápat jako otáčení kolem osy *o*, která spojuje dotykové body kruhových čel s podložkou. Otáčivý pohyb cívky je způsoben momentem síly F vzhledem k této ose (obr. 47a):

Obr. 47a, b, c



$$M = F\,l$$
$$R = a + b$$
$$a = \frac{r}{\cos\alpha}, \quad b = \frac{l}{\cos\alpha},$$
$$R\cos\alpha = r + l$$
$$l = R\cos\alpha - r$$
$$M = F\,(R\cos\alpha - r) \qquad (1)$$

Smysl otáčení kolem osy *o* závisí na znaménku momentu síly M. Zachováme-li orientaci síly F stálou, rozhoduje o znaménku momentu síly M podle (1) činitel $(R\cos\alpha - r)$:

1. $M > 0$ pro $R \cdot \cos\alpha - r > 0$; $\frac{r}{R} < \cos\alpha \leqq 1$.

   Rotace cívky vzhledem k ose je ve smyslu záporném (obr. 47a), cívka se valí vpravo, tj. k ruce, jež táhne nit.

2. $M < 0$ pro $R\cos\alpha - r < 0$; $0 \leqq \cos\alpha < \frac{r}{R}$, rotace cívky vzhledem k ose o je ve smyslu záporném (obr. 47 b), cívka se valí vlevo, tj. od nás se vzdaluje.

3. $M = 0$ pro $R\cos\alpha - r = 0$; $\cos\alpha = \frac{r}{R}$, rotace nenastane (obr. 47 c), cívka se může jen posunovat bez otáčení směrem vpravo.

Po dosazení číselných hodnot dostaneme

$\cos\alpha > \frac{1}{2}$, $0 \leqq \alpha < 60°$, nastane případ 1,

$\cos\alpha < \frac{1}{2}$, $60° < \alpha \leqq 90°$, nastane případ 2,

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60°$, nastane případ 3.

5. příklad (navrhla dr. Marta Chytilová)

Plyn dané hmotnosti má teplotu t_1, tlak p_1 a objem V_1. Izotermickým stlačením se změní jeho tlak na p_2 a objem na V_2; potom se izobarickým dějem sníží jeho teplota na t_3, přitom se změní objem na V_3; nakonec se izotermickým roztahováním změní objem na V_4. Určete výsledný tlak plynu p_4. Kromě veličin počátečního stavu (p_1, V_1, t_1) známe teplotu t_3 a objem V_4.

1. Řešte obecně.
2. Řešte pro hodnoty $t_1 = 127$ °C, $p_1 = 10^5$ N m^{-2},

$V_1 = 2 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$, $t_3 = -73\ ^\circ\mathrm{C}$, $V_4 = 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$

a) výpočtem,

b) graficky v soustavě souřadnic (V, p);
(T, p);
(T, V).

Řešení:

Předpokládáme, že plyn je dokonalý.

Počáteční stav plynu je dán hodnotami: T_1, p_1, V_1;

Konečný stav je dán hodnotami: $T_4 = T_3, p_4, V_4$;

Použijeme stavovou rovnici ve tvaru

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_4 V_4}{T_3},$$

$$p_4 = \frac{p_1 V_1 T_3}{V_4 T_1}.$$

K témuž výsledku dojdeme, sledujeme-li děje za sebou:
Hodnoty počátečního stavu jsou: T_1, p_1, V_1.

Po izotermickém stlačení: $T_2 = T_1$, $p_2 > p_1$, $V_2 < V_1$, podle Boyleova zákona platí

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 . \qquad (1)$$

Po izobarickém ději jsou hodnoty stavových veličin: T_3, V_3, $p_3 = p_2$, podle Gay-Lussacova zákona pro děj izobarický platí

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}. \qquad (2)$$

Po izotermickém roztahování jsou hodnoty veličin:
$T_4 = T_3$, $V_4 > V_3$, $p_4 < p_3$, podle Boyleova zákona platí

$$p_3 V_3 = p_4 V_4 , \qquad (3)$$

$$p_4 = \frac{p_3 V_3}{V_4} = \frac{p_2 V_2 T_3}{V_4 T_2} \text{ podle (2),}$$

$$= \frac{p_1 V_1 V_2 T_3}{V_4 T_2 V_2} \text{ podle (1),}$$

$$= \frac{p_1 V_1 T_3}{V_4 T_1} .$$

2. a) $T_1 = (273 + 127)\,°\text{K} = 400\,°\text{K}$, $p_1 = 10^5\ \text{N m}^{-2}$, $V_1 = 2 . 10^{-3}\ \text{m}^3$, $T_3 = (273 - 73)\,°\text{K} = 200\,°\text{K}$, $V_4 = 10^{-3}\ \text{m}^3$,

$$p_4 = \frac{p_1 V_1 T_3}{V_4 T_1} = 10^5\ \text{N m}^{-2} .$$

b) *Grafické řešení:*

Podle stavové rovnice platí $\frac{p V}{T} = B = \text{konst.}$

Z počátečního stavu plynu vypočítáme

$$B = \frac{p_1 V_1}{T_1} = 0{,}5\ \text{J deg}^{-1}.$$

α) Grafické řešení v soustavě souřadnic (V, p) (viz obr. 48): V dané soustavě souřadnic sestrojíme bod A, kterým prochází první izoterma $T_1 = 400\,°\text{K}$. Její rovnice v dané soustavě souřadnic je $p V = B T_1 = \text{konst.}$,

$$p V = 2 . 10^2\ \text{J} .$$

Druhá izoterma pro $T_3 = 200\,°\text{K}$ prochází bodem D; její rovnice v dané soustavě souřadnic je

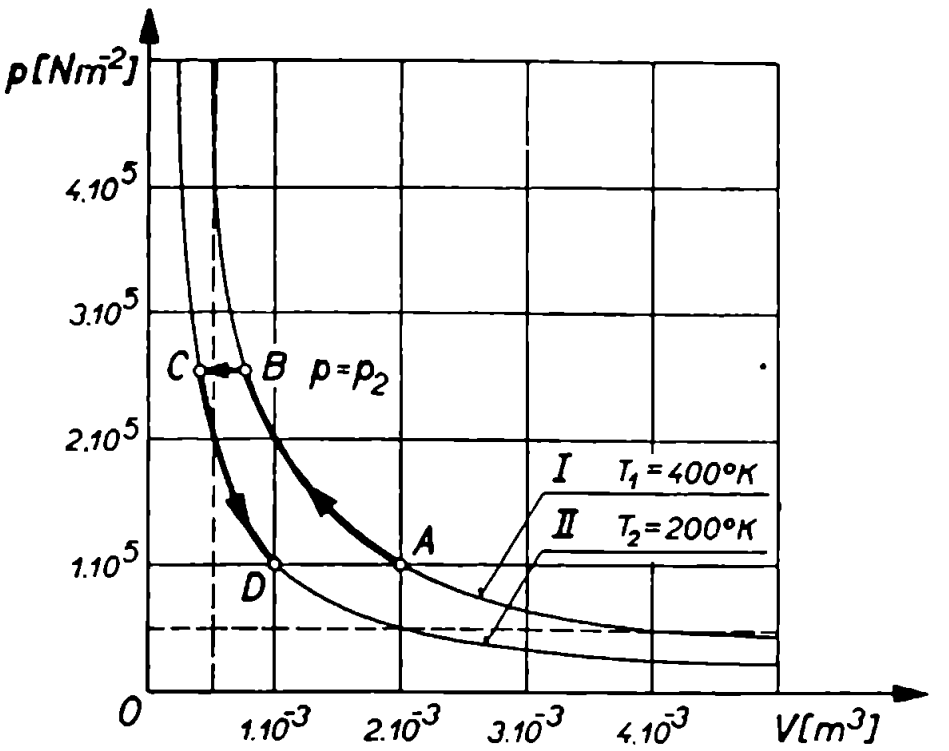
$$p V = B T_3 = \text{konst.} ,$$

$$p V = 10^2\ \text{J} .$$

Z této rovnice určíme

$$p_4 = \frac{10^2}{10^{-3}} \text{ N m}^{-2} = 10^5 \text{ N m}^{-2} .$$

Pro sestrojení izotermy I, dané rovnicí $p\,V = 2 . 10^2$ J, použijeme tabulku (I), pro sestrojení izotermy II, dané rovnicí $p\,V = 10^2$ J, použijeme tabulku (II).



Obr. 48

Tabulka I

V [m³]	0,5 . 10⁻³	1 . 10⁻³	2 . 10⁻³	4 . 10⁻³
p [N m⁻²]	4 . 10⁵	2 . 10⁵	1 . 10⁵	0,5 . 10⁵

Tabulka II

V [m^3]	$0{,}5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$
p [N m^{-2}]	$2 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^5$	$0{,}5 \cdot 10^5$	$0{,}25 \cdot 10^5$

První fáze děje probíhá na izotermě (I) z bodu A do bodu B, který můžeme libovolně zvolit, protože v úloze není určen, splňuje podmínku $p_2 > p_1$. Druhá fáze děje je děj izobarický, je zobrazen úsečkou BC, $p = \text{konst.} = p_2$. Třetí fáze probíhá po izotermě (II) od bodu C do bodu D.

β) Grafické řešení v soustavě souřadnic (T, p) (obr. 49a): V dané soustavě souřadnic sestrojíme opět bod A. Izoterma (I) $T = 400$ °K je v tomto případě přímka rovnoběžná s osou p, podobně izoterma (II) je rovnoběžná s osou p pro $T = 200$ °K. Rovnice $p = \frac{B}{V} T$ pro $V = \text{konst.}$ vyjadřuje v soustavě souřadnic (T, p) soustavu izochor; všechny procházejí počátkem souřadnic. Izochora $V = V_4$ se vyjádří rovnicí $p = \frac{B}{V_4} T$, kde $B = 0{,}5$ J, $V_4 = 10^{-3}$ m^3. V průsečíku této přímky a izotermy (II) je bod odpovídající stavu D, z jeho polohy určíme $p_4 = 10^5$ N m^{-2}.

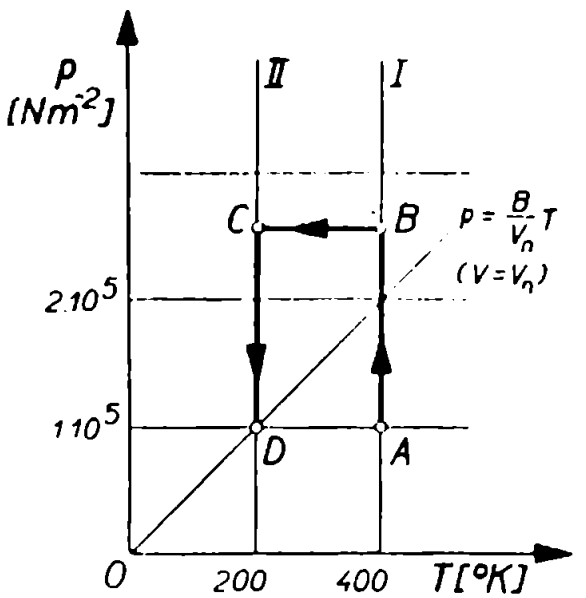
První fáze děje probíhá po izotermě (I) z bodu A do bodu B, který volíme opět libovolně pro $p_2 > p_1$. Druhý děj je izobarický, zobrazený úsečkou BC pro $p = \text{konst.} = p_2$. Třetí fáze probíhá po izotermě (II) z bodu C do bodu D.

γ) Grafické řešení v soustavě (T, V) (obr. 49b):

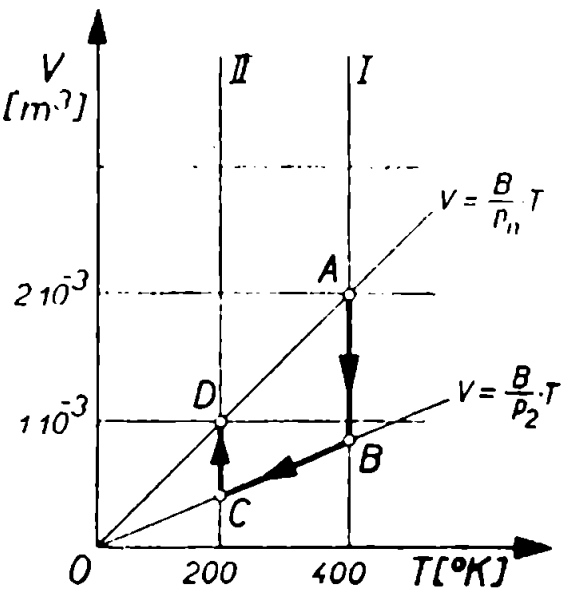
Izoterma (I) pro $T = 400$ °K a izoterma (II) pro

$T = 200$ °K jsou přímky rovnoběžné s osou V. Na izotermě (I) je dána poloha bodu A. Rovnice $V = \frac{B}{p} T$ pro $p = \text{konst.}$ vyjadřuje v soustavě (T, V) soustavu izobar; všechny procházejí počátkem souřadnic. Na izotermě (II) určíme bod D, kterému odpovídá $V = V_4 = 10^{-3}\ \text{m}^3$. V rovnici izobary, vedené tímto bodem $V = \frac{B}{p_4} T = KT$, určíme podle grafu

$K = \frac{V_4}{T_4} = 0{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3\ \text{deg}^{-1}$ a odtud $p_4 = \frac{B}{K} = 10^5\ \text{N m}^{-2}$.



Obr. 49a



Obr. 49b

První fáze děje probíhá po izotermě (I) z bodu A do bodu B, který volíme opět libovolně pro $V_2 < V_1$; druhý děj je izobarický, zobrazený úsečkou BC na přímce spojující bod B s počátkem souřadnic (izobara pro $p = p_2$); třetí fáze probíhá po izotermě (II) z bodu C do bodu D.

6. úkol (navrhl František Černický)

Určení poměru povrchového napětí vody a lihu metodou vážení kapek

Pomůcky: Dvě kapilární trubice různé světlosti s rovně zabroušeným okrajem s hadičkou a tlačkou, stojan s držákem, kádinka, technické váhy, sada závaží, destilovaná voda, líh.

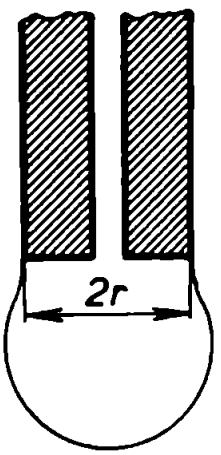
Úvod: Do kapiláry nasajeme destilovanou vodu, upevníme ve svislé poloze a necháme z ní volně odkapávat určitý počet kapek, např. $n = 100$ kapek. Kapky jímáme do kádinky, kterou jsme dříve vyvážili tárou na vahách, a zjistíme hmotnost m_1 zachycené vody. Totéž opakujeme pro líh a zjistíme hmotnost m_2 stejného počtu n kapek lihu.

Úkoly: 1. Dokažte platnost vztahu $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{m_1}{m_2}$,

kde σ_1, σ_2 značí povrchové napětí vody, popř. lihu.

2. Měření hmotnosti zachycených kapek proveďte pětkrát pro různé počty kapek a naměřené hodnoty zapište do tabulky. Určete podíl $k = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ jako aritmetický průměr nalezených hodnot. Vypočtěte absolutní chybu hodnoty k a správně ji zaokrouhlete.

3. Opakujte měření podle úkolu 2. s kapilárou jiné světlosti. Porovnejte oba výsledky. Ovlivňuje světlost kapiláry výsledky měření? Vysvětlete.



Obr. 50a

Měření:

Necháme-li odkapávat z kapiláry kapky, pak těsně před odtržením kapky (obr. 50a) působí na ni dvě síly: tíhová síla $G = m\,g$, kde m je hmotnost kapky, a síla povrchového

napětí $F = 2\pi r\sigma$, kde σ je povrchové napětí kapaliny a působí na obvodu kružnice poloměru r. V okamžiku odpadnutí kapky je $F = G$,

čili $$m g = 2\pi r\sigma,$$

odkud $$\sigma = \frac{m g}{2\pi r}.$$

Pro vodu $\sigma_1 = \frac{m_1 g}{2\pi r}$ a pro líh $\sigma_2 = \frac{m_2 g}{2\pi r}$.

Platí tedy zřejmě $$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Hodnotu poměru označme k.

Necháme-li vykapat n kapek vody a n kapek lihu, platí

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{n m_1}{n m_2} = \frac{m_1}{m_2} = k,$$

kde $n m_1$ je navážené množství vody, $n m_2$ navážené množství lihu.

Měření s kapilárou s větším vnějším průměrem:

Počet kapek n	hmotnost		k	Δ_+
	vody m_1 [g]	lihu m_2 [g]		
50	6,39	1,93	3,311	0,001
60	7,67	2,32	3,306	
100	12,76	3,86	3,306	
150	19,17	5,78	3,317	0,007
200	25,53	7,71	3,311	0,001

$$\bar{k} = 3{,}310,\ \Sigma\Delta_+ = 0{,}009$$

Střední chyba $\bar{\delta} = \frac{5}{2n}\frac{\Sigma\Delta_+}{\sqrt{n-1}} = \frac{5}{2\,.\,5}\cdot\frac{0{,}009}{2} = 0{,}002$

$$k = 3{,}310 \pm 0{,}002$$

Totéž měření s kapilárou menšího vnějšího průměru:

Počet kapek n	hmotnost vody m_1 [g]	hmotnost lihu m_2 [g]	k	Δ_+
50	4,60	1,39	3,317	0,005
60	5,46	1,65	3,309	
100	9,13	2,75	3,320	0,008
150	13,71	4,14	3,311	
200	18,19	5,51	3,303	

$$\bar{k} = 3{,}312; \Sigma\Delta_+ = 0{,}013$$

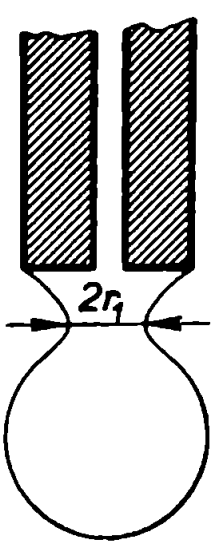
$$\delta = \frac{0{,}013}{4} = 0{,}003$$

$$k = 3{,}312 \pm 0{,}003$$

Poměr povrchového napětí vody a lihu je v obou případech $k = 3{,}31$, tedy výsledek měření nezávisí na vnějším průměru kapiláry. Je to v souhlasu se vztahem

$$k = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{m_1}{m_2},$$

kde se vnější rozměr kapiláry neobjevuje.



Obr. 50b

Při větším průměru kapiláry jsou kapky větší, a tedy vážením zjistíme hmotnost kapaliny přesněji. V tabulkách je uveden pro vodu a etylalkohol při $t = 20\ ^\circ\mathrm{C}$ poměr $k = \frac{72{,}8}{22{,}0} = 3{,}30$, naše měření tedy souhlasí přesně s tabulkami.

Při měřeních srovnávacích se vyloučí chyba, která vzniká tím, že se kapka neodtrhne na obvodu $2\pi r$ podle obr. 50a, ale na zúženém obvodu $2\pi r_1$ podle obr. 50b.

7. příklad (navrhl František Černický)
Velikost půltónu v rovnoměrně temperovaném ladění je $x = 1{,}0595\ldots$ ($x^{12} = 2$).
a) Určete relativní výšky velké tercie a zvětšené kvinty.
b) Přidejte ke zvětšené kvintě další interval velké tercie a stanovte jméno a frekvenci dosaženého tónu, je-li základním tónem c_1 (ve fyzikálním ladění).
c) Zmenšený čtverozvuk je dán třemi stejnými intervaly velikosti x^3. Napište jména jeho čtyř tónů, je-li spodním tónem α) cis, β) d, γ) dis.

Řešení:

a) Velká tercie obsahuje 4 stejné půltóny velikosti x, má tedy velikost x^4, logaritmicky $\log u = 4$, $\log x = 4 . 0{,}025\,09 = 0{,}100\,36$, tj. velká tercie má velikost $u = 1{,}260$. Kvinta v temperovaném ladění má hodnotu x^7, tedy zvětšená kvinta hodnotu $x^8 = v$, tj. $\log v = 8 \log x = 2 \log u = 0{,}200\,72$, odtud $v = 1{,}588 = x^8$.
b) Přidáním další velké tercie dostaneme $x^{12} = 2$. Dosažený tón má jméno his_1 a frekvenci $f = 2 . f_{c1} = 2 . 256$ Hz $= 512$ Hz (ve fyzikálním ladění). Je enharmonickou záměnou tónu c_2.
c) cis — e — g — b; d — f — as — ces; dis — fis — a — c.

8. příklad (navrhla Eva Procházková)
Do kalorimetru dáme vodu o hmotnosti m_1 a teplotě t_1 a led o hmotnosti m_2 a teplotě t_2.

1. Které změny v kalorimetru mohou nastat a k jakému výslednému stavu látky v kalorimetru vedou?
2. $m_1 = 2{,}00$ kg, $t_1 = 5{,}0$ °C. Která změna nastane v případech:

a) $m_2 = 0{,}40$ kg, $t_2 = -90{,}0$ °C;
b) $m_2 = 0{,}20$ kg, $t_2 = -25{,}0$ °C;
c) $m_2 = 0{,}10$ kg, $t_2 = -10{,}0$ °C;
d) $m_2 = 4{,}00$ kg, $t_2 = -100{,}0$ °C.

Měrné teplo vody $c_1 = 1$ kcal kg^{-1} deg^{-1}, ledu $c_2 = 0{,}50$ kcal kg^{-1} deg^{-1}, měrné skupenské teplo tání ledu (tuhnutí vody) $l = 80$ kcal kg^{-1}, teplota tání ledu (tuhnutí vody) je 0 °C. V každém případě vypočítejte výslednou teplotu a hmotnost vody i hmotnost ledu při ní.
Tepelné ztráty ani tepelnou kapacitu kalorimetru neuvažujeme.

Řešení:

I. V kalorimetru mohou nastat tyto změny:
1. Všechen led roztaje, voda má teplotu t_3, pro niž platí $0 \leqq t_3 < t_1$.
2. Část ledu roztaje, v kalorimetru přibude vody, směs ledu a vody má teplotu 0 °C.
3. Část vody ztuhne, v kalorimetru přibude ledu, směs vody a ledu má teplotu 0 °C.
4. Všechna voda ztuhne, v kalorimetru zbude jen led o teplotě $t_4 \leqq 0$ °C.

Kdyby všechna voda dodaná do kalorimetru se ochladila na teplotu 0 °C, uvolnilo by se množství tepla $Q_1 = m_1 c_1 t_1$. Kdyby se všechen led ohřál na teplotu 0 °C, bylo by potřeba množství tepla $Q_2 = m_2 c_2 (-t_2)$. Mezi oběma množstvími tepla může platit jeden ze vztahů:
a) $Q_1 > Q_2$; potom další led roztaje, popř. všechen led roztaje a teplota celkového množství vody se zvýší na t_3, nastává tedy případ 1. nebo 2.

b) $Q_1 < Q_2$; potom další voda ztuhne, popř. všechna voda ztuhne a teplota klesne na t_4, nastává tedy případ 3. nebo 4.

c) $Q_1 = Q_2$; směs je v rovnováze při 0 °C.

II. Ve všech případech $Q_1 = 1 \,.\, 2 \,.\, 5$ kcal $= 10$ kcal.

a) $Q_2 = 0{,}5 \,.\, 0{,}4 \,.\, 90$ kcal $= 18$ kcal.

$Q_1 > Q_2$; $Q_2 - Q_1 = 8$ kcal. Ztuhne množství vody o hmotnosti $m = \frac{Q_2 - Q_1}{l} = 0{,}1$ kg.

Výsledný stav: $m_1 = 1{,}9$ kg, $m_2 = 0{,}5$ kg, $t = 0$ °C.

b) $Q_2 = 0{,}5 \,.\, 0{,}2 \,.\, 25$ kcal $= 2{,}5$ kcal.

$Q_1 > Q_2$; $Q_1 - Q_2 = 7{,}5$ kcal. Roztaje množství ledu o hmotnosti $m = \frac{Q_1 - Q_2}{l} = 0{,}094$ kg.

Výsledný stav: $m_1 = 2{,}094$ kg, $m_2 = 0{,}106$ kg, $t = 0$ °C.

c) $Q_2 = 0{,}5 \,.\, 0{,}1 \,.\, 10$ kcal $= 0{,}5$ kcal.

$Q_1 > Q_2$; $Q_1 - Q_2 = 9{,}5$ kcal. Může roztát led o hmotnosti $m = \frac{Q_1 - Q_2}{l} = \frac{9{,}5}{80}$ kg, což je více, než bylo do kalorimetru dodáno, proto roztaje všechen led a celkové množství vody o hmotnosti $m_1 + m_2$ bude mít teplotu t:

$$Q_1 - Q_2 = l\, m_2 + c_1 (m_1 + m_2)\, t$$

$$t = \frac{Q_1 - Q_2 - l\, m_2}{c_1 (m_1 + m_2)} = 0{,}71 \text{ °C}.$$

Výsledný stav: $m_1 = 2{,}1$ kg, $m_2 = 0$ kg, $t = 0{,}71$ °C.

d) $Q_2 = 0{,}5 \,.\, 4 \,.\, 100$ kcal $= 200$ kcal.

$Q_1 < Q_2$. Může ztuhnout voda o hmotnosti

$$m = \frac{Q_2 - Q_1}{l} = \frac{190}{80} \text{ kg},$$

což je více, než bylo na počátku do kalorimetru nalito, proto ztuhne všechna voda a celkové množství ledu o hmotnosti $m_1 + m_2$ bude mít teplotu t, pro kterou platí

$$Q_1 - Q_2 = -l m_1 + c_2 (m_1 + m_2) t ,$$

$$t = \frac{Q_1 - Q_2 + l m_1}{c_2 (m_1 + m_2)} = -10 \text{ °C}.$$

Výsledný stav: $m_1 = 0$ kg, $m_2 = 6$ kg, $t = -10$ °C.

9. úkol (navrhla dr. Marta Chytilová)

Určení závislost periody harmonického pohybu tělesa zavěšeného na pružině na jeho hmotnosti; určení tuhosti pružiny

1. Těleso o hmotnosti m, zavěšené na pružině, jejíž hmotnost m_0 je velmi malá vzhledem k hmotnosti m, koná harmonický pohyb; perioda tohoto pohybu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

kde k je tuhost pružiny.

Úkoly:

1. Odvoďte tento vztah.

Není-li splněna podmínka $m_0 \ll m$, je perioda pohybu

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_0}{3}}{k}}.$$

(Odvození viz Fyzika ve škole IV, 1966, č. 7, str. 302).

2. Sestavte pokus, kterým ověříte závislost $T \sim \sqrt{m}$. Použijte postupně závaží různé hmotnosti (např. 100 g, 200 g, 300 g ... 1000 g), pokud prodloužení pružiny splňuje zákon Hookův. Změřte pokaždé dobu, např. 20

kmitů; čas začnete měřit vždy ve stejné fázi pohybu při průchodu závaží rovnovážnou polohou; vypočítejte periodu. Pro každou hodnotu m vypočítejte $\frac{T}{\sqrt{m}}$, k; určete aritmetický průměr $\bar{k}$.

3. Určete hmotnost pružiny m_0 zvážením. Pro každou hodnotu m vypočítejte $m' = m + \frac{m_0}{3}$.

4. a) Narýsujte graf závislosti T na $\sqrt{m}$. V kterém rozsahu hodnot m lze považovat tuto závislost za přímou úměrnost?

b) Narýsujte graf závislosti T na $\sqrt{m'}$. Jak se liší od grafu a)?

5. Jak ověříte správnost hodnoty k, určené v úkolu 2, statickou metodou? Navrhněte příslušný pokus, popište postup a proveďte měření k_1 v rozsahu změn hmotnosti m v úkolu 2. Vypočítejte aritmetický průměr $\bar{k}_1$.

Kterou metodou určíte tuhost pružiny přesněji? Odůvodněte odhadem relativní chyby.

1. úkol:

Na pružinu hmotnosti m_0, která má v nezatíženém stavu délku l_0, zavěsíme závaží hmotnosti m. Pružina se prodlouží o Δl. Tuhost pružiny je $k = \frac{F_1}{\Delta l}$, kde $F_1 = m g$.

Tedy $k = \frac{m g}{\Delta l}$, a odtud k $\Delta l = m g$.

Tahem rukou prodloužíme pružinu ještě o délku y. Při tomto prodloužení působí na závaží směrem dolů síla $F_1 = m g$, směrem nahoru síla $F_2 = k(\Delta l + y)$, takže výslednice $F = F_1 - F_2$:

$$F = m g - k(\Delta l + y) = m g - k \Delta l - k y .$$

Protože $k \Delta l = m g$, je výsledná síla

$$F = -k \, . \, y$$

a působí směrem vzhůru. Je-li síla přímo úměrná výchylce a působí-li opačným směrem, než měříme výchylku, koná pružina po uvolnění harmonický pohyb. Zrychlení je $a = \frac{F}{m} = -\frac{k y}{m}$.

Při kmitavém pohybu platí pro zrychlení vztah $a = -\omega^2 y$, kde a je okamžité zrychlení, ω je 2π násobná frekvence a y okamžitá výchylka.

$$-\omega^2 y = -\frac{k y}{m}, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Protože $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, je

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{k}{m}, \text{ čili}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \text{ což jsme měli dokázat.}$$

Rozměrová zkouška:

$$[T] = \sqrt{\frac{\mathrm{kg}}{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{kg\ m\ s^{-2}}}} = \mathrm{s}\,.$$

2. úkol:

Na pružinu zavěšujeme tělesa, jejichž hmotnost byla zjištěna vážením, měříme dobu 20 kmitů a vypočteme tuhost pružiny a poměr $\frac{T}{\sqrt{m}}$;

tuhost pružiny $k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$ počítáme logaritmicky:

n	m [kg]	doba 20 kmitů t [s]	perioda T [s]	tuhost pružiny k [N m^{-1}]	Δ_+ [N m^{-1}]	T $\sqrt{m}$
1	0,179 70	16,5	0,825	10,424		1,946
2	0,359 32	23,3	1,165	10,452		1,944
3	0,538 81	28,7	1,435	10,353		1,955
4	0,718 29	32,9	1,645	10,506	0,012	1,941
5	0,864 69	35,7	1,785	10,735	0,241	1,876

$$\bar{k} = 10{,}494 \text{ N m}^{-1}, \Sigma\Delta_+ = 0{,}253 \text{ N m}^{-1},$$

střední chyba měření $\bar{\delta} = \frac{0{,}253}{4} \text{ N m}^{-1} = 0{,}07 \text{ N m}^{-1}$,

a tedy tuhost pružiny

$$k = (10{,}49 \pm 0{,}07) \text{ N m}^{-1}.$$

3. úkol:

Hmotnost pružiny je zjištěna vážením: $m_0 = 16{,}95$ g $=$ $= 0{,}016\,95$ kg. Hmotnostem závaží m odpovídají přepočtené hmotnosti

$$m' = m + \frac{m_0}{3}, \quad \frac{m_0}{3} = 0{,}00565 \text{ kg}.$$

	m [kg]	m' [kg]
1	0,179 70	0,185 35
2	0,359 32	0,364 97
3	0,538 81	0,544 46
4	0,718 29	0,723 94
5	0,864 69	0,870 34

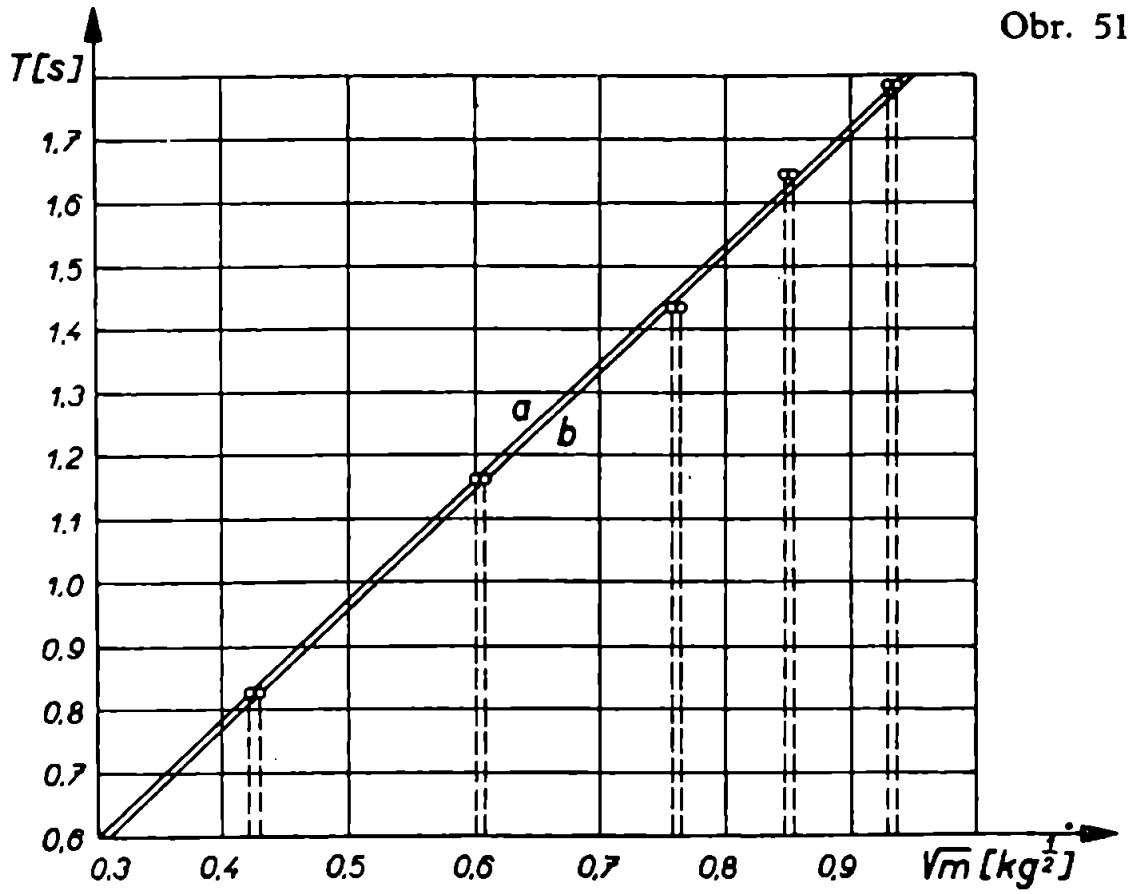
4. *úkol:*

Graficky máme znázornit závislost a) T na $\sqrt{m}$,

b) T na $\sqrt{m'}$.

Hodnoty jsou zapsány v tabulce a vyneseny graficky (obr. 51):

Obr. 51



	1	2	3	4	5
$\sqrt{m}$ [kg$^{1/2}$]	0,4239	0,5994	0,7340	0,8475	0,9299
$\sqrt{m'}$ [kg$^{1/2}$]	0,4304	0,6041	0,7379	0,8532	0,9329
T [s]	0,825	1,165	1,435	1,645	1,785

Graf a) je obrazem závislosti T na $\sqrt{m}$, graf b) obrazem závislosti T na $\sqrt{m'}$. Obě závislosti je možno považovat za lineární (v rozsahu měření, v němž platí zákon Hookeův).

Body křivky b) jsou posunuty vpravo; sklon obou čar není přesně stejný.

5. úkol:

Statické určení tuhosti pružiny.

Platí vztah $k = \frac{F}{\Delta l}$, čili relativní prodloužení je přímo úměrné působící síle. Na pružinu zavěšujeme různě velká závaží a měříme její prodloužení. Použijeme stejná závaží jako v úkole č. 2.

n	Hmotnost závaží m [kg]	Δl [m]	k_1 [N m^{-1}]	Δ_+ [N m^{-1}]
1	0,179 70	0,1718	10,500	0,004
2	0,359 32	0,3145	10,518	0,022
3	0,538 81	0,5045	10,477	
4	0,718 29	0,6712	10,498	0,002
5	0,864 69	0,8087	10,489	

$$\bar{k}_1 = 10{,}496 \text{ N m}^{-1}, \Sigma\Delta_+ = 0{,}028 \text{ N m}^{-1},$$

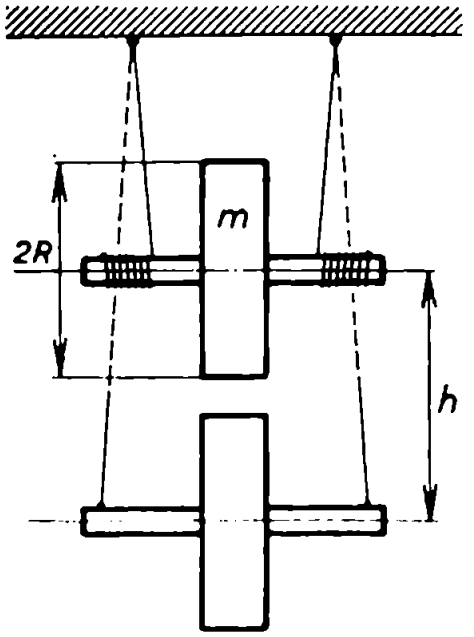
$$\delta = \frac{0{,}028}{4} \text{ N m}^{-1} = 0{,}007 \text{ N m}^{-1},$$

$$k_1 = (10{,}496 \pm 0{,}007) \text{ N m}^{-1}.$$

Srovnáním s hodnotou k z dynamických měření

$$k = (10{,}49 \pm 0{,}07) \text{ N m}^{-1}$$

vidíme, že metoda statická je desetkrát přesnější, neboť chyba je řádově desetkrát menší. Značná chyba při měření dynamickém vzniká tím, že kmity jsou tlumené.



Obr. 52

b) Druhé kolo soutěže

1. příklad (navrhl Přemysl Šedivý)

Maxwellovo kyvadlo tvaru válce zvedneme do výšky h tak, že je otočíme n-krát kolem osy, a tím navineme na hřídel příslušnou délku závěsů. Po uvolnění se vrátí kotouč působením tíhového pole po dráze h do původní polohy (obr. 52). Poloměr kotouče je R, jeho hmotnost m.
a) Jakou rychlost dosáhne těžiště kotouče na konci dráhy h?
b) Určete dobu pohybu kotouče po dráze h.
c) Určete frekvenci otáčivého pohybu kotouče na konci dráhy h. Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k ose otáčení je $\mathcal{J} = \frac{1}{2} m R^2$. Odpor vzduchu, tření, hmotnost a moment setrvačnosti hřídele zanedbáváme.
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $h = 1{,}00$ m, $n = 40$, $R = 5{,}0$ cm, $g \doteq 10$ m s^{-2}.

Řešení:

a) Poloměr hřídele r (s přídavkem poloviny tloušťky závěsného vlákna) vypočteme ze vztahu $n\,2\pi r = h$,

$$r = \frac{h}{2\pi n}.$$

Při pohybu dolů se potenciální energie tíhová kotouče přemění v energii kinetickou, která je součtem energie posuvného pohybu a energie pohybu rotačního:

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2.$$

Dosadíme-li

$$\omega = \frac{v}{r}, \quad \mathcal{J} = \frac{1}{2} m R^2, \text{ dostáváme}$$

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \frac{R^2}{2 r^2} \cdot v^2,$$

$$2 g h = v^2 \left(1 + \frac{R^2}{2 r^2}\right),$$

$$v = \sqrt{\frac{2 g h}{1 + \frac{R^2}{2 r^2}}}.$$

b) Posuvný pohyb těžiště kotouče je rovnoměrně zrychlený, proto platí

$$h = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{v t}{2}; \quad t = \frac{2 h}{v} = \sqrt{\frac{2 h}{g} \left(1 + \frac{R^2}{2 r^2}\right)}.$$

c) Ze vztahu $v = 2 \pi r f$ dostáváme pro frekvenci otáčení

$$f = \frac{v}{2 \pi r} = \frac{v n}{h}.$$

Po dosazení číselných hodnot

a) $r = \frac{1}{2 \pi . 40}$ m $\doteq 4 . 10^{-3}$ m.

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 1}{1 + \frac{25 \cdot 10^{-4}}{0{,}32 \cdot 10^{-4}}}}\ m\,s^{-1} =$$

$$= \sqrt{\frac{20 \cdot 0{,}32}{25{,}32}}\ m\,s^{-1} \doteq 0{,}5\ m\,s^{-1}.$$

b) $t = \frac{2}{0{,}5}\ s = 4\ s$.

c) $f = 20\ s^{-1}$.

2. příklad (navrhl Jan Tesař)

a) Určete povrchovou energii kapky kapaliny o poloměru r a o plošné hustotě energie σ.

b) Kapka se rozpráší na menší stejně veliké kapky o poloměru r_1. Kolikrát větší je úhrnná povrchová energie kapek než povrchová energie původní kapky?

c) Jak velikou práci je nutno vykonat při rozprášení původní kapky na kapky o menším poloměru?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $r = 4{,}0 \cdot 10^{-3}$ m, $r_1 = 8{,}0 \cdot 10^{-8}$ m, $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}\ J\,m^{-2}$.

Řešení:

Povrchové napětí je číselně rovno povrchové energii v jednotkovém povrchu tělesa. Platí tedy

$$\sigma = \frac{W}{S} \text{ a } W = S\,\sigma .$$

Proto má kapka kapaliny o poloměru r povrchovou energii

$$W = 4\,\pi\,r^2\,\sigma . \qquad (1)$$

b) Rozprášením kapky o poloměru r vznikne n kapek o poloměru r_1. Proto je

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = n \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3; \quad n = \frac{r^3}{r_1^3}. \tag{2}$$

Povrchová energie těchto n kapek je

$$W_1 = n\, 4\pi r_1^2 \sigma = \frac{r^3}{r_1^3} \cdot 4\pi r_1^2 \sigma = \frac{r}{r_1} \cdot 4\pi r^2 \sigma,$$

takže poměr obou energií je

$$k = \frac{W_1}{W} = \frac{r}{r_1}. \tag{3}$$

Po rozprášení kapky o poloměru r na n kapek o poloměru r_1 se zvýší celková povrchová energie $k = \frac{r}{r_1}$ krát.

c) Práce na rozprášení kapky je rovna rozdílu povrchových energií

$$A = W_1 - W = 4\pi r^2 \sigma \frac{r - r_1}{r_1}.$$

Po dosazení hodnot:

a) $W = 4\pi \cdot 16 \cdot 10^{-6} \cdot 73 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J} \doteq 1{,}5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}$.

b) $k = \frac{r}{r_1} = 5 \cdot 10^4$.

c) $A = 4\pi r^2 \sigma \frac{r - r_1}{r_1}$.

Poněvadž $r_1 \ll r$, platí

$$\frac{r - r_1}{r_1} \doteq \frac{r}{r_1} = k,$$

$$A \doteq 4\pi r^2 \sigma k = W \cdot k = 1{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^4\ \mathrm{J} = 0{,}75\ \mathrm{J}.$$

3. příklad (navrhli Milan Bednařík a Miroslava Široká)
Stejnorodý válcový kotouč o poloměru podstavy r a o hmotnosti m_1 je otáčivý kolem vodorovné osy, která prochází středem kotouče kolmo k rovině podstavy. Na obvod kotouče připevníme těleso o hmotnosti m_2, které považujeme za hmotný bod. Kotouč s tělesem tvoří fyzické kyvadlo. Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k ose otáčení je

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} m_1 r^2 .$$

a) Určete dobu kmitu fyzického kyvadla.
b) Určete redukovanou délku fyzického kyvadla.
Tření a odpor vzduchu zanedbáváme.
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $r = 0{,}25$ m, $m_1 = 2{,}00$ kg, $m_2 = 1{,}00$ kg.

Řešení:
Pro dobu kmitu fyzického kyvadla platí vztah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{m g d}},$$

kde moment setrvačnosti je

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} m_1 r^2 + m_2 r^2 ,$$

celková hmotnost kyvadla je $m = m_1 + m_2$ a vzdálenost d osy otáčení od těžiště kyvadla

$$d = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2} .$$

Po dosazení a po úpravě dostáváme pro dobu kmitu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g} \cdot \frac{m_1 + 2 m_2}{2 m_2}} .$$

Označíme-li l^* redukovanou délku fyzického kyvadla, platí pro dobu kmitu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^*}{g}}.$$

Porovnáním obou posledních vztahů pro dobu kmitu obdržíme pro redukovanou délku

$$l^* = \frac{m_1 + 2m_2}{2m_2} r.$$

Numericky: $T = 1{,}4$ s, $l^* = 0{,}50$ m.

4. příklad (navrhl František Černický)

Struna napínaná silou F má základní tón o frekvenci f.
a) Určete sílu F_1, kterou musí být struna napínána, aby její základní tón v přirozeném ladění byl
1. o malou tercii vyšší než tón frekvence f;
2. o velkou tercii nižší než tón frekvence f.
Předpokládáme, že se přitom nezmění délka ani průřez struny.
b) Určete akord, který tvoří soubor těchto tří tónů.
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $F = 25$ N, $f = 440$ Hz.
c) V tomto zvláštním případě zapište trojzvuk písmeny s příslušnými indexy, popř. v notové osnově s houslovým klíčem a půlovými notami.

Řešení:

a) Pro výšku tónu struny platí vztah

$$f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{m_1}}, \qquad (1)$$

kde F je síla strunu napínající, m_1 hmotnost struny jednotkové délky, l délka struny.

1. Má-li být tón struny vyšší o malou tercii v přirozeném ladění, musí platit $f_1 : f = 6 : 5$. Užitím vztahu (1) dostaneme

$$f_1^2 : f^2 = F_1 : F.$$

Odtud plyne pro hledanou sílu F_1

$$F_1 = F\left(\frac{f_1}{f}\right)^2 = F\left(\frac{6}{5}\right)^2. \qquad (2)$$

2. Pro tón o velkou tercii nižší platí

$$f_2 = \frac{f}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} f;$$

z toho užitím vztahu (1) dostaneme

$$F_2 = F\left(\frac{f_2}{f}\right)^2 = F\left(\frac{4}{5}\right)^2. \qquad (3)$$

b) Srovnáme-li uvažované tři tóny podle výšky, dostaneme:

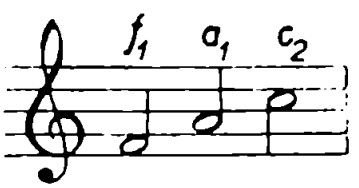
$$f_2 : f : f_1 = \frac{4}{5} : 1 : \frac{6}{5} = 4 : 5 : 6. \qquad (4)$$

Těmito čísly je charakterizován tvrdý trojzvuk (durový akord).

Numericky: a) $F_1 = 25\ \mathrm{N}\left(\frac{6}{5}\right)^2 = 25 \cdot \frac{36}{25}\ \mathrm{N} = 36\ \mathrm{N}.$

b) $F_2 = 25\ \mathrm{N}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 25 \cdot \frac{16}{25}\ \mathrm{N} = 16\ \mathrm{N}.$

c) 1. Tón o frekvenci 440 Hz je komorní a, tj. a_1, tón o frekvenci $440\ \mathrm{Hz} \cdot \frac{6}{5} =$



Obr. 53

$= 528$ Hz — je tón c_2, tón o frekvenci 440 Hz . $\frac{4}{5} = 325$ Hz — je tón f_1.

Trojzvuk z úlohy b) je tedy f_1, a_1, c_2, tj. kvintakord F dur.

2. Pomocí notové osnovy s houslovým klíčem, viz obr. 53.

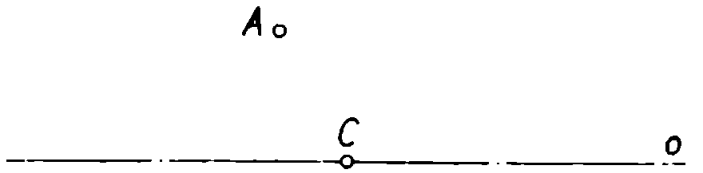
3. Úlohy kategorie C

Příklady recenzovali Jan Tesař a dr. Ivan Náter

a) První kolo soutěže

1. příklad (navrhl Jan Tesař)

Přímka na obr. 54 je optickou osou dutého zrcadla, jehož středem křivosti je bod *C*. Světelný paprsek, vycházející



Obr. 54

z bodu *A* a dopadající na duté zrcadlo v jeho vrcholu *S*, svírá s optickou osou úhel $\alpha = 15°$. a) Sestrojte obraz A_1 bodu *A* vytvořený tímto zrcadlem, popište postup konstrukce a odůvodněte její správnost.

b) Kolik řešení má daná úloha? Proveďte konstrukce všech řešení.

c) Je obraz A_1 skutečný nebo zdánlivý? Odůvodněte.

Řešení:

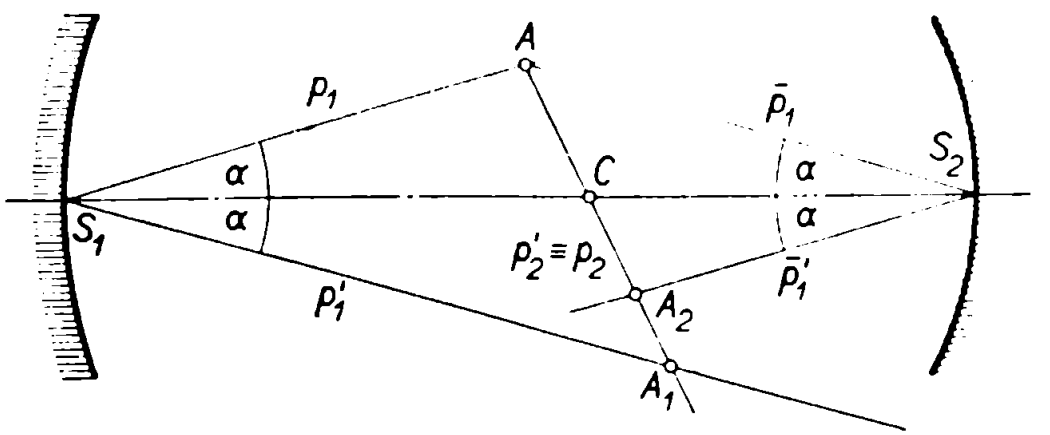
Postup konstrukce obrazu A_1 k svítícímu předmětu A: Bodem A vedeme paprsek p_1, který svírá s osou o úhel 15°. Jeho průsečík s osou o je vrcholem zrcadla S. Po odraze jde paprsek p_1' na opačnou stranu osy pod stejným úhlem 15°. Druhý paprsek $p_2 \equiv AC$, který jde středem zrcadla C, se na ploše zrcadla odráží zpět do středu C, tedy $p_2' \equiv p_2$. Průsečík obou paprsků p_1' a p_2' dává obraz A_1 svítícího bodu A.

Rozbor úlohy:

Pro řešení je rozhodující, kde jsou průsečíky paprsků, vedených z bodu A na obě strany a svírajících s osou o daný úhel, s touto osou vzhledem k bodu C. Stačí uvažovat polohu bodu A v jedné polorovině, ohraničené osou o.

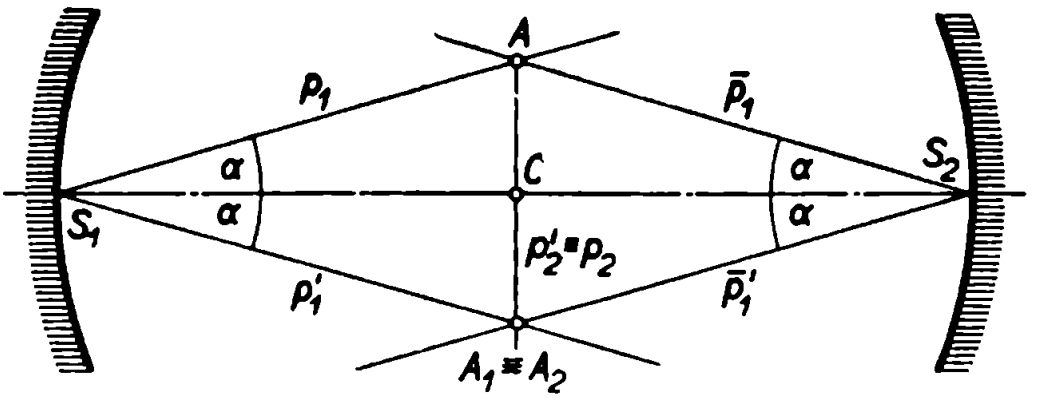
Z bodu C vedeme polopřímky na obě strany pod úhlem 15°.

a) Leží-li bod A v té části poloroviny, která neobsahuje přímku o mezi polopřímkami, vedenými bodem C, má úloha dvě řešení A_1 a A_2, obě reálná (obr. 55). Je-li v tomto případě bod A na kolmici k ose o v bodě C, obě řešení splývají, $A_1 \equiv A_2$ (obr. 56).

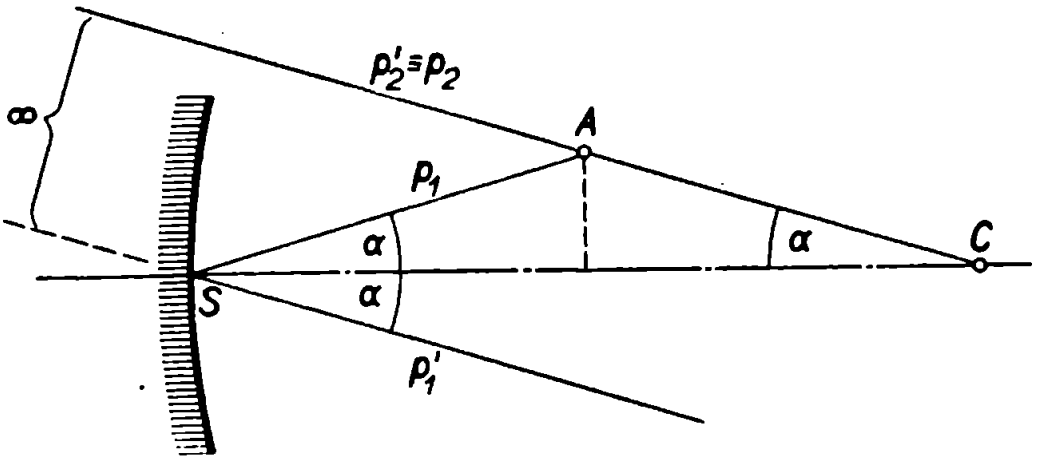


Obr. 55

b) Leží-li bod A na některé polopřímce z bodu C pod úhlem 15°, jsou paprsky p_1' a p_2' rovnoběžné, tedy obraz A_1 bodu A je v úběžnu (v nekonečnu) a úloha nemá řešení (obr. 57).



Obr. 56

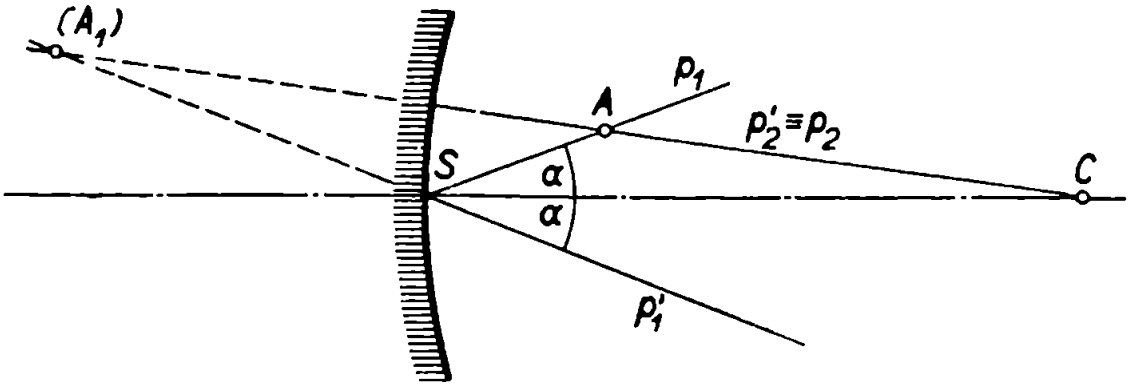


Obr. 57

c) Leží-li bod A v těch dvou částech poloroviny, které obsahují osu o, je možné jen jedno řešení, obraz A_1 bodu A je zdánlivý, protože paprsky p_1' a p_2' se rozbíhají a zdánlivý obraz A_1 je v jejich prodloužení za zrcadlem (obr. 58).

Zdůvodnění:
V případě a) leží bod A ve větší vzdálenosti od zrcadla

(levého i pravého), než je ohnisková dálka, a úloha má reálné řešení jak pro zrcadlo levé, tak pro zrcadlo pravé. V případě b) leží bod A právě ve vzdálenosti f od zrcadla a obraz nelze sestrojit.



Obr. 58

c) Vzdálenost bodu A od levého zrcadla je menší než f a obraz je zdánlivý. Pro pravé zrcadlo je předmět A za zrcadlem, a tedy by musel být zdánlivý.

2. příklad (navrhl Přemysl Šedivý)

Automobil se rozjíždí rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a_1, až dosáhne rychlosti v_1. Potom se pohybuje rovnoměrně rychlostí v_1. V jisté vzdálenosti od cílové stanice začne konat po vypnutí motoru pohyb rovnoměrně zpomalený se záporným zrychlením a_2 a v okamžiku, kdy dosáhne rychlosti v_2, je brzděn až do cílové stanice. Po dobu brzdění má jeho pohyb záporné zrychlení a_3. Cílová stanice má vzdálenost s od místa, z kterého automobil vyjel.

a) Za jakou dobu t projel automobil dráhu s?

b) Jak velká je průměrná rychlost automobilu na dráze s?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $s = 4{,}6$ km,

$a_1 = 0{,}70\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $a_2 = -0{,}20\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $a_3 = 1{,}00\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $v_1 = 100\ \mathrm{km\,h^{-1}}$, $v_2 = 60\ \mathrm{km\,h^{-1}}$.

Řešení:

Automobil se rozjížděl po dobu t_1 na dráze s_1, rovnoměrný pohyb konal na dráze s_2 po dobu t_2, se zrychlením a_2 se pohyboval na dráze s_3 po dobu t_3 a se zrychlením a_3 po dobu t_4 na dráze s_4. V soustavě SI je

$$v_1 = \frac{100\,000}{3600}\ \mathrm{m\,s^{-1}} = \frac{250}{9}\ \mathrm{m\,s^{-1}},\ v_2 = \frac{50}{3}\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Jestliže na těleso pohybující se rychlostí v_1 působí po dobu t stálá síla, která mu uděluje zrychlení a, dosáhne těleso na konci doby t rychlosti v_2 a urazí za tuto dobu dráhu s. Těleso koná po dobu t současně dva souhlasně orientované pohyby: rovnoměrný rychlostí v_1 a rovnoměrně zrychlený se zrychlením a. Proto platí vztahy

$$v_2 = v_1 + at\,, \qquad s = v_1\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2\,.$$

Po úpravě vyjde rovnice

$$t = \frac{v_2 - v_1}{a}\,, \tag{1}$$

$$s = t\left(v_1 + \frac{1}{2}\,a\,t\right) = \frac{v_2 - v_1}{a}\left(v_1 + \frac{1}{2}\,a\,\frac{v_2 - v_1}{a}\right) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\,a}\,. \tag{2}$$

a) V první části dráhy se automobil pohybuje pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením a_1. Jeho počáteční rychlost je nulová, konečná má hodnotu v_1. Podle upra-

vených vztahů (1) a (2) proto platí

$$t_1 = \frac{v_1}{a_1} \text{ a } s_1 = \frac{v_1^2}{2\,a_1}. \tag{3}$$

Na třetím úseku dráhy, který je projížděn rovnoměrně zpomaleným pohybem se zrychlením a_2, je počáteční rychlost v_1, konečná rychlost v_2. Podle vztahu (1) a (2) nyní platí

$$t_3 = \frac{v_2 - v_1}{a_2} \text{ a } s_3 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\,a_2}. \tag{4}$$

Do cílové stanice dojíždí automobil pohybem rovnoměrně zpomaleným se zrychlením a_3. Počáteční rychlost na tomto úseku dráhy je v_2, konečně rychlost je rovná nule. Proto platí

$$t_4 = -\frac{v_2}{a_3} \text{ a } s_4 = -\frac{v_2^2}{2\,a_3}. \tag{5}$$

Druhý úsek dráhy, který je projížděn rovnoměrným pohybem, má délku $s_2 = s - (s_1 + s_3 + s_4)$. Po dosazení ze vztahů (3), (4) a (5) vyjde

$$s_2 = s - \frac{1}{2}\left(\frac{v_1^2}{a_1} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{a_2} - \frac{v_2^2}{a_3}\right). \tag{6}$$

Automobil projede tento úsek dráhy za dobu

$$t_2 = \frac{s_2}{v_1} = \frac{1}{v_1}\left[s - \frac{1}{2}\left(\frac{v_1^2}{a_1} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{a_2} - \frac{v_2^2}{a_3}\right)\right]. \tag{7}$$

Dráhu s urazil automobil za dobu $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$. Dosadíme-li do tohoto vztahu hodnoty ze vztahů (3), (7),

4) a (5), dostaneme

$$t = \frac{v_1}{a_1} + \frac{1}{v_1}\left[s - \frac{1}{2}\left(\frac{v_1^2}{a_1} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{a_2} - \frac{v_2^2}{a_3}\right)\right] + \\ + \frac{v_2 - v_1}{a_2} - \frac{v_2}{a_3}. \qquad (8)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$t \doteq 208 \text{ s} \doteq 3{,}5 \text{ min}.$$

Doba, za kterou automobil projel danou dráhu s, je obecně určena vztahem (8) a má hodnotu 3,5 min.

b) Automobil projel dráhu s průměrnou rychlostí

$$v = \frac{s}{t} = \frac{4600}{208} \text{ m s}^{-1} = 22{,}115 \text{ m s}^{-1} = 79{,}6 \text{ km h}^{-1}.$$

Dílčí výsledky: $s_1 = 551$ m, $s_2 = 2\,675$ m,
$s_3 = 1235$ m, $s_4 = 139$ m,
$t_1 = 39{,}7$ s, $t_2 = 96{,}3$ s,
$t_3 = 55{,}6$ s, $t_4 = 16{,}7$ s.

3. úkol (navrhl Ivo Volf)

Určení vnitřního průměru kapiláry

Potřeby: Kapilára délky l (asi 20 cm), její úlomky (dva až čtyři) délky asi 2 až 3 cm, délkové měřítko s milimetrovou stupnicí, laboratorní váhy a sada závaží, mikrometr, pyknometr.

Návod: Známe-li délku l kapiláry, její hustotu ϱ, hmotnost m a vnější průměr d_1, určíme její vnitřní průměr d podle vztahu

$$d = \sqrt{d_1^2 - 4\frac{m}{\pi \varrho l}}. \qquad (1)$$

Postup práce:

a) Odvoďte vztah (1).
b) Vážením na laboratorních vahách určete z pěti měření s největší možnou přesností hmotnost kapiláry.
c) Užitím pyknometru určete hustotu úlomků kapiláry. Jejich hustota je stejná jako hustota kapiláry.
d) Z deseti měření určete mikrometrem vnější průměr kapiláry.
e) Délku kapiláry zjistěte z deseti měření délkovým měřítkem s milimetrovou stupnicí.
f) Podle vztahu (1) vypočítejte vnitřní průměr kapiláry.
g) Při všech měřeních určujte absolutní a relativní chyby naměřených veličin.

Měření:

a) Objem válce o průměru d_1 a délce l je $V_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} l$.

Objem dutiny $V_0 = \frac{\pi d^2}{4} l$, kde d je průměr dutiny.

Objem dutého válce

$$V = V_1 - V_0 = \frac{\pi d_1^2}{4} l - \frac{\pi d^2}{4} l .$$

Objem tělesa vypočtený z hmotnosti m a hustoty ϱ je

$$V = \frac{m}{\varrho} .$$

Platí tedy

$$\frac{\pi d_1^2}{4} l - \frac{\pi d^2}{4} l = \frac{m}{\varrho}$$

a odtud

$$d = \sqrt{d_1^2 - \frac{4m}{\pi \varrho l}} . \qquad (1)$$

b) Vážením na laboratorních vahách byla zjištěna hmotnost kapiláry. Vážení byla prováděna metodou kyvů. Označíme n_{01} nulovou polohu vah před vážením, n_{02} nulovou polohu vah po vážení. Pak je

$$n_0 = \frac{n_{01} + n_{02}}{2} \text{ nulová poloha vah.}$$

Závaží z_1 dá rovnovážnou polohu n_1 (vpravo od n_0), závaží z_2 dá rovnovážnou polohu n_2 (vlevo od n_0), $z_2 > z_1$. Hmotnost m dostaneme ze vztahu $m = z_1 + x$, kde

$$x = (z_2 - z_1)\frac{n_0 - n_1}{n_2 - n_1}.$$

Výsledky vážení jsou uvedeny v tabulce. Nulová poloha byla stálá, $n_0 = 9{,}6$ dílku.

Vážení	z_1 [g]	n_1	z_2 [g]	n_2	x [g]	m [g]	Δ_+ [g]
1	0,14	8,2	0,19	13,2	0,014	0,154	
2	0,14	8,5	0,19	13,0	0,012	0,152	
3	0,14	8,4	0,19	12,6	0,014	0,154	
4	0,14	8,9	0,19	10,4	0,023	0,163	0,005
5	0,14	7,9	0,19	11,2	0,026	0,166	0,008

$$\bar{m} = 0{,}158 \text{ g}, \quad \Sigma\Delta_+ = 0{,}013 \text{ g}$$

$$\bar{\delta} = \frac{0{,}013}{4} \text{ g} = 0{,}003 \text{ g}. \qquad \bar{\delta} = \frac{\sqrt{}}{2n} \cdot \frac{\Sigma\Delta_+}{\sqrt{n-1}}$$

$$m = (0{,}158 \pm 0{,}003) \text{ g}. \qquad n \ldots \text{počet měření}$$

Absolutní chyba je 0,003 g, relativní chyba 1,9 %.

c) Zjištění hustoty úlomků kapiláry pyknometrem. Označení veličin:

m_1 — hmotnost pyknometru s destilovanou vodou,
m_2 — hmotnost úlomků kapiláry,
m_3 — hmotnost pyknometru s vodou a s úlomky kapiláry,
ϱ_v — hustota vody při teplotě vzduchu v místnosti $t =$ $= 23{,}2\ °C$.

Pro hustotu ϱ tělísek (úlomků kapiláry) platí

$$\varrho = \varrho_v \frac{m_2}{m_1 + m_2 - m_3} . \qquad (2)$$

Vážením byly zjištěny hmotnosti m_1, m_2, m_3. Postup vážení byl stejný jako v b) a byly zjištěny hmotnosti

$m_1 = (43{,}570 \pm 0{,}010)$ g, relativní chyba 0,02 %,
$m_2 = (2{,}366 \pm 0{,}010)$ g, relativní chyba 0,44 %,
$m_3 = (44{,}954 \pm 0{,}011)$ g, relativní chyba 0,02 %.

Hustota vody při teplotě 23,2 °C je $\varrho_v = 0{,}997\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$.

Po dosazení číselných hodnot do (2)

$$\varrho = 0{,}997 \cdot \frac{2{,}366}{2{,}366 + 43{,}570 - 44{,}954}\ \mathrm{g\ cm^{-3}} =$$

$$= \frac{2{,}359}{0{,}982}\ \mathrm{g\ cm^{-3}} = 2{,}40\ \mathrm{g\ cm^{-3}} .$$

Absolutní chyba čitatele je 0,010 g, absolutní chyba jmenovatele 0,031 g. Relativní chyba čitatele je 0,44 %, relativní chyba jmenovatele 0,48 %. Relativní chyba zlomku je rovna součtu relativních chyb čitatele a jmenovatele, tedy

$$\bar{\delta} = 0{,}92\ \% \doteq 1\ \% ,$$

absolutní chyba hustoty je tedy $0{,}024\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$.

$$\varrho = (2{,}40 \pm 0{,}02)\ \mathrm{g\ cm^{-3}} .$$

d) Měření vnějšího průměru kapiláry mikrometrem (v 10 různých místech):

Čís. měř.	n_1 [mm]	n_0 [mm]	$d_1 = n_1 - n_0$ [mm]	Δ_+ [mm]
1	0,448	− 0,005	0,453	—
2	9,479	− 0,005	0,484	—
3	0,513	− 0,003	0,516	0,025
4	0,449	− 0,010	0,459	—
5	0,482	− 0,010	0,492	0,001
6	0,500	− 0,003	0,503	0,012
7	0,468	− 0,010	0,478	—
8	0,515	− 0,012	0,527	0,036
9	0,483	− 0,007	0,490	—
10	0,501	− 0,008	0,509	0,018

$$\bar{d}_1 = 0{,}491 \text{ mm}, \Sigma\Delta_+ = 0{,}092 \text{ mm}$$

$$\bar{\delta} = \frac{5}{2n} \cdot \frac{\Sigma\Delta_+}{\sqrt{n-1}} = \frac{5}{20} \cdot \frac{0{,}092 \text{ mm}}{3} = 0{,}007 \text{ mm}.$$

$$d_1 = (0{,}491 \pm 0{,}007) \text{ mm}.$$

e) Určení délky kapiláry.
Měření provedeno desetkrát.

Č.	l_1 [cm]	l_0 [cm]	l [cm]	Δ_+ [cm]
1	39,50	1,20	38,30	
2	38,87	0,55	38,32	0,009
3	39,53	1,20	38,33	0,019
4	39,30	0,99	38,31	
5	38,83	0,52	38,31	
6	39,49	1,18	38,31	
7	39,10	0,80	38,30	
8	38,34	0,02	38,32	0,009
9	39,59	1,29	38,30	
10	38,63	0,32	38,31	

$$l = 38{,}311 \text{ cm}, \quad \Sigma\Delta_+ = 0{,}037 \text{ cm}$$

$$\delta = \frac{0{,}037}{12} \text{ cm} = 0{,}003 \text{ cm}.$$

$$l = (38{,}311 \pm 0{,}003) \text{ cm} \doteq 38{,}31 \text{ cm}.$$

f) Výpočet vnitřního průměru kapiláry podle (1)

$$d = \sqrt{d_1^2 - \frac{4m}{\pi \varrho l}} = \sqrt{0{,}002\,411 - \frac{4 \cdot 0{,}158}{2{,}402 \cdot 38{,}31}} \text{ cm} =$$

$$= \sqrt{0{,}002\,411 - 0{,}002\,187} \text{ cm} = \sqrt{0{,}000\,224} \text{ cm} =$$

$$= 0{,}0149 \text{ cm}.$$

Relativní chyba veličiny d_1 je 1,5 %, veličiny d_1^2 tedy 3 %. Relativní chyba veličiny m je asi 2 %, veličiny ϱ asi 1 %, u veličiny l je zanedbatelně malá. Bude tedy relativní chyba členu $\frac{4m}{\pi \varrho l}$ také asi 3 %. Relativní chyba veličiny d bude proto $\frac{3\,\%}{2} = 1{,}5\,\%$, takže $d = 0{,}15$ mm je určeno s chybou menší než 0,01 mm:

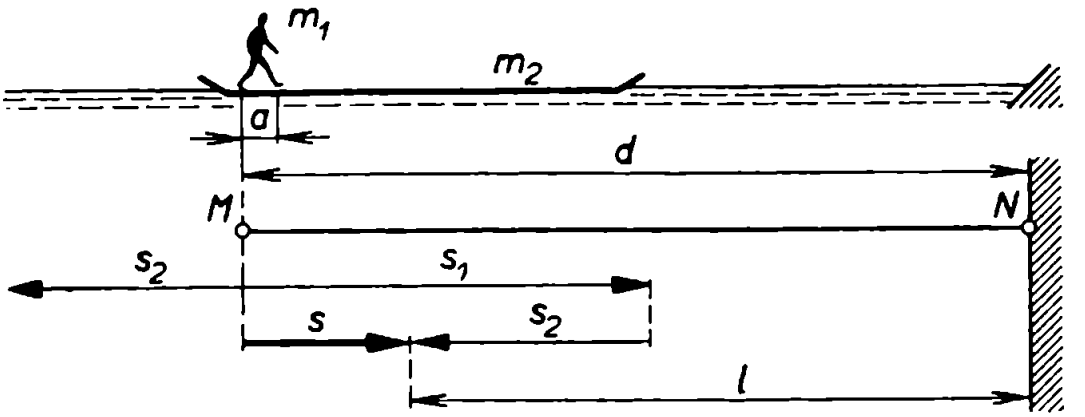
$$d \doteq 0{,}15 \text{ mm}.$$

4. příklad (navrhl Rastislav Baník)

Muž hmotnosti m_1 stojaci na pokojnom člne hmotnosti m_2 sa nadchádza vo vzdialenosti d od brehu. Urobí v člne n krokov smerom kolmo k brehu a zastaví sa. Dĺžka jedného kroku je a. Aká bude vzdialenosť l muža od brehu v okamihu, keď sa zastaví? Predpokladáme, že sa čln môže po vode pohybovať bez trenia.
Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $d = 10{,}0$ m, $a = 0{,}75$ m, $n = 4$, $m_1 = 75$ kg, $m_2 = 125$ kg.

Riešenie:

Miesto na vodnej hladine, v ktorom sa nadchádzal muž, pokiaľ boľ čln v pokoji, je na obr. 59 označené M. Muž sa pohybuje v člne smerom kolmým k brehu (k miestu N) priemernou rýchlosťou v_1 vzhľadom k člnu a vykoná za čas t dráhu $s_1 = v_1 t$. V okamihu, keď sa dá muž do



Obr. 59

pohybu, uvedie sa do pohybu i čln s mužom priemernou rýchlosťou v_2 a urazí za dobu t dráhu $s_2 = v_2 t$. Muž vykonáva teda súčasne dva protismerné pohyby, vlastný pohyb vzhľadom k člnu (dráhu s_1) a pohyb s člnom vzhľadom k brehu (dráha s_2). Pretože dráhy s_1 a s_2 sú protismerné, označíme s_1 kladným a s_2 záporným znamienkom. Preto muž sa priblíži k brehu o vzdialenosť $s = s_1 + s_2$ $(s_2 < 0)$.

Pretože zanedbávame trenie pohybujúceho sa člna o vodu, nepôsobí na dvojicu telies, čln a muž, žiadna vonkajšia sila. Muž a čln tvoria teda izolovanú sústavu telies. Na počiatku sú obidve telesá v pokoji, preto je hybnosť sústavy rovná nule a podľa zákona zachovania hybnosti zôstáva nulovou aj pri pohybe muža v člne. Súčet hybností muža a člna (s mužom) je teda rovný

nule. Preto platí rovnica $m_1 v_1 + (m_1 + m_2) v_2 = 0$, lebo s člnom sa pohybuje aj muž. Rýchlosť v_2 má teda hodnotu

$$v_2 = - v_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} . \qquad (1)$$

Ak sa pohybuje muž v člne po dobu t, vykoná v ňom dráhu $s_1 = n\,a = v_1\,t$ a čln s mužom dráhu

$$s_2 = v_2 t = -v_1\,t \frac{m_1}{m_1 + m_2} = - n\,a \frac{m_1}{m_1 + m_2} . \qquad (2)$$

Muž sa teda priblíži k brehu o dĺžku

$$s = s_1 + s_2 = s_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = n\,a \frac{m_2}{m_1 + m_2} , \qquad (3)$$

takže v okamihu, keď sa zastaví, má od brehu vzdialenosť

$$l = d - s = d - n\,a \frac{m_2}{m_1 + m_2} . \qquad (4)$$

Pre dané hodnoty výjde

$$l = 10\ \mathrm{m} - 4 \,.\, 0{,}75 \,.\, \frac{125}{75 + 125}\ \mathrm{m} \doteq 8{,}1\ \mathrm{m} .$$

V okamihu, keď sa muž prestane pohybovať, je muž od brehu vzdialený 8,1 m. Všeobecne je táto vzdialenosť určená vzťahom (4).

5. příklad (navrhl František Černický)

Z vrcholu věže, který je ve výši h_0 nad okolní vodorovnou rovinou ϱ, bylo vrženo katapultem těleso hmotnosti m v elevačním úhlu α rychlostí v_0.

a) Najděte vztahy pro závislost rychlosti a dráhy tělesa na čase, a to zvlášť pro složky ve směru vodorovném a zvlášť pro složky ve směru svislém.

b) Vypočítejte souřadnice (x, y) polohy tělesa na konci každé z prvních deseti sekund letu za předpokladu, že lze zanedbat odpor vzduchu. Vypočítané hodnoty zaznamenejte do vhodné tabulky.
c) Podle tabulky části b) úlohy najděte výšku h vrhu nad rovinou τ proloženou vrcholem věže.
d) Ze vztahů v části a) úlohy vypočítejte dobu t_1 výstupu a dobu t_2, kdy těleso proletí rovinou τ.
e) Vypočítejte tíhovou potenciální energii W_p vzhledem k rovině τ a kinetickou energii W_k tělesa při průchodu vrcholem dráhy.
f) Určete rychlost v' tělesa v čase t_2.
g) Vypočítejte dobu t_3, ve které těleso dopadne do vodorovné roviny ϱ v okolí věže, a vodorovnou vzdálenost d místa dopadu do místa počátku vrhu.
h) Užitím výsledků části a) úlohy najděte vztah mezi výškou y tělesa nad rovinou τ a vodorovnou vzdáleností x od místa startu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $h_0 = 100$ m, $\alpha = 30°$, $v_0 = 80$ m s^{-1}, $m = 1{,}0$ kg.

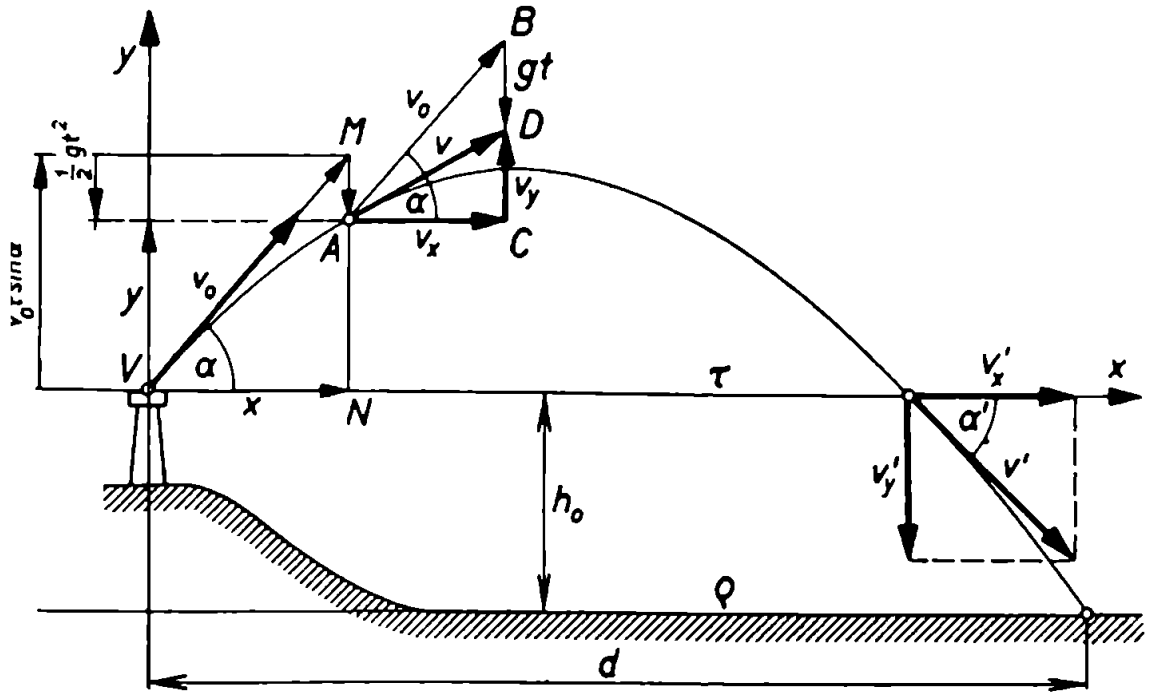
Řešení:

Čas budeme značit obecně t, složku rychlosti ve směru vodorovném v_x, ve směru svislém v_y. Tíhové zrychlení $g \doteq 10$ m s^{-2}. Dráha (trajektorie) tělesa při šikmém vrhu ve vakuu leží ve svislé rovině σ, proložené vektorovou přímkou počáteční rychlosti, kterou bylo těleso vrženo.
a) Vodorovnou a svislou přímku, které leží v rovině σ a procházejí vrcholem V věže, volíme za souřadné osy x a y (viz obr. 60). Kdyby se nenacházelo těleso v tíhovém poli zemském, konalo by při vrhu rychlostí v_0 rovnoměrný pohyb po přímce VM svírající s osou y úhel α a vykonalo by za čas t dráhu $s_1 = v_0 t$, znázorněnou orientovanou úsečkou VM. Zároveň klesne působením tíhového pole

zemského volným pádem po dráze $s_2 = \frac{1}{2} g t^2$, znázorněné orientovanou úsečkou MA. Nachází se tedy v čase t v bodě $A\ (x; y)$. Vodorovná složka vektoru s je x. Z trojúhelníku VNM je patrno, že platí rovnice

$$x = s_1 \cos \alpha = v_0 t \cos \alpha \quad \text{a} \quad y = s_1 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 =$$

$$= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 . \qquad (1)$$



Obr. 60

Obdobným způsobem určíme z trojúhelníku ABC rychlosti

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad \text{a} \quad v_y = BC - BD = v_0 \sin \alpha - g t . \qquad (2)$$

Protože čas t je proměnná veličina, určují rovnice (1) polohu tělesa a rovnice (2) okamžitou rychlost tělesa konajícího šikmý vrh v libovolném čase.

b) Dosadíme-li do vztahu (1) dané hodnoty za v_0, g, α a za t postupně hodnoty 1 s, 2 s, ... až 10 s, sestavíme tabulku

t [s]	0	1	2	3	4	5
x [m]	0	$40\sqrt{3}$	$80\sqrt{3}$	$120\sqrt{3}$	$160\sqrt{3}$	$200\sqrt{3}$
y [m]	0	35	60	75	80	75

t [s]	6	7	8	9	10
x [m]	$240\sqrt{3}$	$280\sqrt{3}$	$320\sqrt{3}$	$360\sqrt{3}$	$400\sqrt{3}$
y [m]	60	35	0	−45	−100

c) Z tabulky v části b) úlohy je patrno, že y nabývá největší hodnoty v čase $t = 4$ s, sousední hodnoty jsou souměrně sdružené. Je tedy výška vrhu nad vodorovnou rovinou, vedenou vrcholem věže, rovna 80 m.

d) Těleso přestane stoupat v okamžiku, kdy se složka v_y jeho rychlosti rovná nule. Platí tedy $v_0 \sin \alpha - g\, t_1 = 0$, takže

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{80 \,.\, 0{,}5}{10}\ \mathrm{m\ s^{-1}\ m^{-1}\ s^2} = 4\ \mathrm{s}, \qquad (3)$$

což souhlasí s výsledky části b) a c) úlohy. Doba výstupu tělesa je určena vztahem (3).

Vodorovnou rovinou τ proletí těleso v okamžiku, kdy

souřadnice y jeho dráhy je rovna nule. Platí tedy rovnice

$$v_0 t_2 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0.$$

Kořen $t_2' = 0$ této rovnice se vztahuje k počátku vrhu, druhý kořen

$$t_2 = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 0{,}5}{10} \text{ m s}^{-1} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1} = 8 \text{ s} \qquad (4)$$

určuje čas, ve kterém těleso proletí rovinou τ.

e) Podle výsledku c) a d) úlohy dosáhne vržené těleso největší výšky h v čase určeném vztahem (3), kdy složka v_y jeho rychlosti je rovna nule. Proto platí podle druhého ze vztahů (1)

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 g}.$$

Těleso má tedy v této nejvyšší poloze vzhledem k rovině τ tíhovou potenciální energii

$$W_p = m g h = \frac{1}{2} m v_0^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6400 \cdot \frac{1}{4} \text{ kg m}^2 \text{s}^{-2} =$$

$$= 800 \text{ J} \qquad (5)$$

a kinetickou energii rovnou podle vztahů (2):

$$W_k = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6400 \cdot \frac{3}{4} \text{ J} =$$

$$= 2400 \text{ J}, \qquad (6)$$

neboť podle výsledků části d) úlohy je $v_y = 0$.

Velikost tíhové potenciální energie při průletu tělesa vrcholem dráhy je určena vztahem (3) a velikost kinetické energie vztahem (6).

Protože celková mechanická energie tělesa měla na počátku pohybu hodnotu $W = \frac{1}{2} m v_0^2$, je patrno, že je splněn

zákon přeměny a zachování mechanické energie, neboť $W_p + W_k = W$.

f) V čase t_2 je těleso v rovině τ. Proto je jeho potenciální energie tíhová vzhledem k této rovině rovna nule a celková mechanická energie tělesa má hodnotu $W' = \frac{1}{2} m v'^2$, kde v' značí rychlost tělesa v čase t_2. Podle zákona zachování energie má W' stejnou hodnotu $W' = \frac{1}{2} m v_0^2$, jakou mělo těleso na počátku své dráhy. Proto platí $W' = W$, takže $|v'| = v_0$.

Podle vztahů (2) jsou složky rychlosti v' ve směru souřadných os $v'_x = v_0 \cos \alpha = v_x$ a $v'_y = v_0 \sin \alpha - g t_2 = v_0 \sin \alpha - 2 v_0 \sin \alpha = - v_0 \sin \alpha = -v_y$, kde v_y značí velikost svislé složky počáteční rychlosti v čase $t = 0$.

Při průchodu vodorovnou rovinou procházející vrcholem věže má těleso stejně velikou rychlost, jakou bylo vrženo; její vektorová přímka však svírá s kladným směrem osy x úhel $\alpha' = -\alpha$.

g) Velikost souřadnice y místa dopadu tělesa na vodorovnou rovinu v okolí hory je $y_0 = -100$ m. Čas t_3 určíme proto podle druhého ze vztahů (1) z rovnice

$$v_0 t_3 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_3^2 = y_0 .$$

Po jednoduché úpravě vyjde kvadratická rovnice

$$g t_3^2 - 2 v_0 t_3 \sin \alpha + 2 y_0 = 0 ,$$

jejíž vyhovující kořen je

$$t_3 = \frac{2 v_0 \sin \alpha + \sqrt{4 v_0^2 \sin^2 \alpha - 8 y_0 g}}{2 g} =$$

$$= \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2 y_0 g}}{g} , \qquad (7)$$

neboť úloze vyhovuje jen kladný kořen. Po dosazení daných hodnot vyjde

$$t_3 = \frac{40 + 1600 + 2000}{10}\ \mathrm{s} = 10\ \mathrm{s}.$$

Podle prvního vztahu (1) je místo dopadu tělesa vzdáleno od místa jeho vrhu o $d = v_0 t_3 \cos\alpha = 400 \,.\, \sqrt{3}$ m, kde $t_3 = 10$ s značí dobu, která je obecně vyjádřena vztahem (7) a udává, kdy těleso dopadne na vodorovnou rovinu.

h) Vztah mezi výškou tělesa nad vodorovnou rovinou τ a jeho vzdáleností od místa vrhu určíme tak, že vyloučíme z rovnice (1) čas t. Z první z těchto rovnic vyjádříme

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$ a dosadíme do druhé. Vyjde

$$y = \frac{x \sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2. \quad (8)$$

Rovnice (8) je rozměrově správná. Po dosazení daných číselných hodnot vyjde upravená číselná rovnice

$$y = x \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{960} x^2 . \quad (8a)$$

Vztah mezi výškou tělesa a jeho vodorovnou vzdáleností od místa vrhu je určen vztahem (8) obecně, vztahem (8a) číselnou rovnicí.

6. příklad (navrhl dr. Antonín Syrový)

Těleso visí na siloměru, který je připevněn ke stropu výtahu.

a) Výtah stoupá se zrychlením $a > 0$. Siloměr je napínán silou F. Jaká je tíha G tělesa?

b) Siloměr ukazuje sílu $F' < G$. Jak se výtah pohybuje?
c) Jaký by byl údaj siloměru, kdyby se nosné lano výtahu přetrhlo?
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty

$$F = 225\ \mathrm{N}, a = 1{,}25\ \mathrm{m\ s^{-2}}, F' = 175\ \mathrm{N}.$$

Řešení:

Síly a zrychlení, které jsou orientovány svisle vzhůru, budeme značit kladně, jsou-li orientovány svisle dolů, označíme je záporně. Tíhové zrychlení $g \doteq 10\ \mathrm{m\ s^{-2}}$.
a) Podle II. Newtonova pohybového zákona platí

$$F - G = m\,a = \frac{G}{g}\,a\,. \tag{1}$$

Odtud vypočítáme

$$G = \frac{g}{g + a}\,F = \frac{10\,.\,125}{10 + 1{,}25}\ \mathrm{N} = 200\ \mathrm{N}\,. \tag{2}$$

Tíha tělesa je určena vztahem (2).
b) Podle upraveného vztahu (1) platí

$$a' = \frac{g}{G}\,(F' - G)\,. \tag{3}$$

Dosadíme-li do rovnice (3) za hodnotu G ze vztahu (2), dostaneme

$$a' = \frac{g\,(g + a)}{g\,F}\cdot\left(F' - \frac{g}{g + a}\,F\right) = (g + a)\,\frac{F'}{F} - g. \tag{4}$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$a' = \left[(10 + 1{,}25)\,.\,\frac{175}{225} - 10\right]\mathrm{m\ s^{-2}} = -\,1{,}25\ \mathrm{m\ s^{-2}}\,.$$

Výtah se pohybuje dolů se zrychlením 1,25 $\mathrm{m\ s^{-2}}$ nebo vzhůru se zpožděním 1,25 $\mathrm{m\ s^{-2}}$. Obecně je tato hodnota určena vztahem (4).

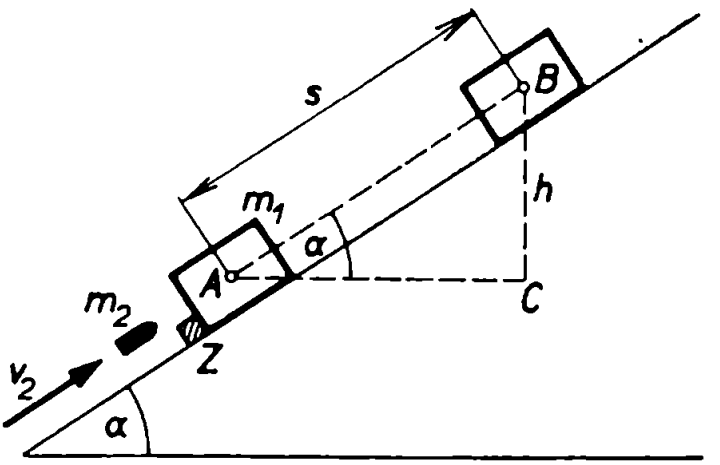
c) Přetrhne-li se lano výtahu, padá kabina dolů se zrychlením $a'' = -g$ volným pádem. Podle vztahu (1) je tedy

$$F'' = G + \frac{G}{g} a'' = G + \frac{G}{g}(-g) = 0 . \qquad (5)$$

Po přetržení lana nebude siloměr napjat. Kabina padající volným pádem představuje beztížný stav.

7. příklad (navrhl Rastislav Baník)

Na naklonenej rovine, ktorá zviera s horizontálnou rovinou uhol α, je hranol o hmotnosti m_1 a opiera sa o zarážku Z (viď obr. 61). Hranol je zasiahnutý strelou hmot-



Obr. 61

nosti m_2, ktorá letela rýchlosťou v_2 rovnobežne s naklonenou rovinou zdola nahor, pričom uviazla v hranole.
a) Do akej výšky hranol vystúpi?
b) Akú dobu trvá, kým sa opäť vráti k zarážke?
Súčiniteľ trenia medzi hranolom a naklonenou rovinou je μ. Hmotnosť hranola je podstatne väčšia ako hmotnosť strely, takže posunutie hranola počas vnikania strely je

nepatrné. Trenie statické a dynamické považujeme približne za rovnaké.

Riešenie:

Zrýchlenie hranola pri pohybe po naklonenej rovine nahor označíme a_1, pri pohybe nadol a_2. Dráhu telesa po naklonenej rovine nahor označíme s a výšku, do ktorej vystúpi, h. Hranol vystupuje za čas t_1, klesá za čas t_2, takže sa pohybuje za $t = t_1 + t_2$. Začiatočnú rýchlosť hranola označíme v_0, pohybovú zložku tiaže hranola (so strelou) F_1, tlakovú zložku F_2, treciu silu F_t.

a) Pretože strela po náraze na hranol v ňom uviazne, ide o nepružný zraz. Začiatočnú rýchlosť hranola pri stúpaní po naklonenej rovine v_0 určíme zo zákona zachovania hybnosti. Pred zrazom je hybnosť strely $m_2 v_2$, hybnosť hranola je rovná nule. Po zrazu sa hranol so strelou pohybuje rýchlosťou v_0. Platí teda

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_0, \text{ takže}$$

$$v_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 . \qquad (1)$$

Pri stúpaní po naklonenej rovine pôsobí na hranol pohybová zložka jeho tiaže

$$F_1 = (m_1 + m_2) g \sin \alpha$$

a trecia sila

$$F_t = \mu F_2 = \mu (m_1 + m_2) g \cos \alpha$$

Obidve tieto sily sú súhlasne orientované proti smeru rýchlosti pohybujúceho se hranola. Preto má hranol pri stúpaní zrýchlenie

$$a_1 = -g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \qquad (2)$$

a nadobudne v čase t rýchlosť

$$v = v_0 - g t (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) .$$

Najväčšiu výšku dosiahne za čas t_1, keď jeho rýchlosť sa rovná nule. Preto platí

$$v_0 - g\,t_1\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 0, \quad \text{takže}$$

$$t_1 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{v_2}{g\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{3}$$

Hranol stúpa na naklonenej rovine po dráhe

$$s = v_0\,t_1 + \frac{1}{2}\,a_1\,t_1^2 = \frac{1}{2}\,t_1\,(2\,v_0 + a_1\,t_1).$$

Po dosadení zo vzťahov (1), (2) a (3) vyjde

$$s = \frac{m_2\,v_2}{2\,g\,(m_1 + m_2)\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}\left[\frac{2\,m_2\,v_2}{m_1 + m_2} - g\,\frac{m_2\,v_2}{g\,(m_1 + m_2)}\right] = \frac{m_2^2\,v_2^2}{2\,g\,(m_1 + m_2)^2\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

Z trojuholníka ABC sa určí výška

$$h = s\sin\alpha = \frac{m_2^2\,v_2^2\sin\alpha}{2\,g\,(m_1 + m_2)^2\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{5}$$

Výška, do ktorej hranol po naklonenej rovine vystúpi, je určená vzťahom (5).

b) Ak hranol dosiahne najväčšiu výšku, začne kĺzať po naklonenej rovine nadol po dráhe s. Tento pohyb je rovnomerne zrýchlený, pretože na hranol pôsobí stálá sila F_1, orientovaná v smere pohybu hranola a stála sila trenia F_t, orientovaná opačným smerom. Preto sa hranol pohybuje smerom nadol so zrýchlením

$$a_2 = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \tag{6}$$

a dopadne na zarážku za čas t_2, ktorý určíme zo vzťahu

$$s = \frac{1}{2}\,a_2\,t_2^2, \quad \text{takže} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2\,s}{a_2}}.$$

Po dosadení zo vzťahov (4) a (6) vyjde

$$t_2 = \sqrt{\frac{m_2^2 v_2^2}{g^2 (m_1 + m_2)^2 (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} = \frac{m_2 v_2}{g (m_1 + m_2)} \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}. \quad (7)$$

Vzťah (6) obsahuje závislosť na uhle α. Ak by bol uhol α malý, takže $\mu\cos\alpha > \sin\alpha$, hranol by sa smerom nadol nepohyboval. Keď pohyb nadol nastane, bude sa hranol pohybovať celkom za čas $t = t_1 + t_2$. Po dosadení zo vzťahov (3) a (7) vyjde

$$t = \frac{m_2 v_2}{g (m_1 + m_2)} \left(\frac{1}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}} \right). \quad (8)$$

Hranol by sa po naklonenej rovine pohyboval za čas t, ktorý je určený vzťahom (8).

8. příklad (navrhl Vladislav Kvapil)
Dva kotouče upevněné na společné ose, kolmé k rovinám kotoučů, konají rovnoměrný otáčivý pohyb s frekvencí f. Vystřelíme proti nim ve směru rovnoběžném s osou rotace. Střela proletí prvním kotoučem a než proletí vzdálenost l mezi kotouči, otočí se kotouče o úhel α. Pohyb střely po dráze l je rovnoměrný. Silové působení rotujícího kotouče na pronikající střelu je zanedbatelně malé, neboť střela pronikne kotoučem za nepatrný zlomek sekundy. Určete rychlost střely.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $l = 2{,}00$ m, $f = 50\ \mathrm{s}^{-1}$, $\alpha = 45°$.

Řešení:

Za předpokladu, že silový účinek rotujícího kotouče na

pronikající střelu je nulový, můžeme pohyb střely po dráze l mezi oběma kotouči považovat za přímočarý ve směru rovnoběžném s osou rotace. Urazí-li střela vzdálenost l za dobu t, je její rychlost určena rovnicí

$$v = \frac{l}{t}. \tag{1}$$

Úhlovou rychlost rotujících kotoučů označíme ω. V obloukové míře má úhel α velikost $\frac{\pi}{4}$ rad.

Za dobu t, než střela proletí vzdálenost l mezi oběma kotouči, otočí se otvor vytvořený střelou v kotouči bližším k místu výstřelu o úhel α. Úhlová dráha α otvoru po střele má při rovnoměrné rotaci úhlovou rychlostí ω hodnotu $\alpha = \omega t$, takže

$$t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha}{2\pi f}. \tag{2}$$

Dosadíme-li do vztahu (1) za t hodnotu ze vztahu (2), vypočítáme velikost rychlosti střely

$$v = \frac{2\pi f l}{\alpha}. \tag{3}$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $\frac{2\pi \cdot 2 \cdot 50 \cdot 4}{\pi}$ m s^{-1} =

= 800 m s^{-1}.

Střela se pohybuje rychlostí 800 m s^{-1}. Obecně je tato hodnota určena vztahem (3).

9. úkol (navrhl dr. Ivan Náter)

Určenie súčiniteľa vnútorného trenia kvapaliny Stokesovou metódou

Pomôcky: Vysoký sklený valec s kvapalinou (napr. od-

merný valec asi 50 cm vysoký, naplnený transformátorovým olejom alebo inou vhodnou viskóznou kvapalinou), hustomer, mikrometer, stopky, váhy so závažím, oceľové guľôčky o priemere 1,0 mm až 1,5 mm, milimetrové meradlo.

Úvod: Na guľu, ktorá sa pohybuje vo viskóznej kvapaline, pôsobí sila tiaže, vztlaková sila podľa Archimedovho zákona a sila odporu prostredia vyjadrená Stokesovým vzťahom

$$F = 6\pi \eta r v ,$$

kde η je súčiniteľ vnútorného trenia kvapaliny, r je polomer pohybujúcej sa guľôčky a v je jej rýchlosť. Ak necháme v kvapaline guľôčku padať, dosiahne maximálnu rýchlosť v_{max}, keď sú všetky tieto tri sily pôsobiace na guľôčku v rovnováhe. Guľôčka sa ďalej pohybuje rovnomerným pohybom touto maximálnou rýchlosťou.

Úlohy: 1. Z podmienky rovnováhy síl odvoďte vzťah pre výpočet súčiniteľa vnútorného trenia pomocou známej rýchlosti v_{max}.

2. Preveďte merania:

a) Určte hmotnosť jednej guľôčky odvážením určitého počtu guľôčiek. Opakujte váženie aspoň päťkrát, vždy s iným počtom guľôčiek.

b) Odmerajte priemer guľôčky (mikrometrom). Opakujte meranie aspoň päťkrát.

c) Odmerajte hustotu kvapaliny, meranie opakujte aspoň päťkrát.

d) Ohraničte na valci s kvapalinou značkami určitú dráhu s, začiatok ktorej je aspoň 10 cm pod povrchom kvapaliny. Odmerajte dĺžku dráhy s (meranie opakujte aspoň päťkrát).

e) Vpusťte guľôčku do kvapaliny a odmerajte čas, za

ktorý guľôčka prejde dráhu s (meranie opakujte aspoň päťkrát). Zapíšte namerané hodnoty do tabuľky, vypočítajte aritmetické priemery z opakovaných meraní a ich absolútne a relatívne chyby. Z meraní d) a e) určte v_{max} za predpokladu, že pohyb guľôčky je na celej dráhe s rovnomerný.

3. Vypočítajte súčiniteľ vnútorného trenia kvapaliny. Uvážte, ktorá z nameraných hodnôt ovplyvní najviac presnosť vypočítanej hodnoty.

Riešenie:

1. Na guľôčku, ktorá sa pohybuje vplyvom sily tiaže v kvapaline, pôsobia tri sily. Smerom zvislo nadol sila tiaže guľôčky $G = m\,g$, smerom nahor vztlaková sila podľa Archimedovho zákona

$$F_1 = \frac{4}{3}\,\pi r^3\,\varrho\,g\,,$$

kde r je polomer guľôčky a ϱ hustota kvapaliny, a sila odporu prostredia $F = 6\,\pi\eta r v$,
kde η je viskozita (súčiniteľ vnútorného trenia) kvapaliny. Po prebehnutí dosť dlhej dráhy je rýchlosť pohybu guľôčky konštantná v_{max} a všetky tri sily sú v rovnováhe:

$$G = F_1 + F\,,$$

$$m\,g = \frac{4}{3}\,\pi r^3\,\varrho\,g + 6\,\pi\,\eta\,r\,v_{max},$$

$$\eta = \frac{m\,g - \frac{4}{3}\,\pi r^3\,\varrho\,g}{6\,\pi\,r\,v_{max}}\,. \qquad (1)$$

2. *Meranie:*

a) Zistenie hmotnosti guľôčok.

Váženie prevedené pre päť rôznych počtov guľôčiek

Č.	Počet guľ.	Hmotnosť všetkých guľ. [g]	Hmotnosť 1 guľ. [g]	Δ_+ [g]
1	10	0,93	0,093	0,0012
2	15	1,40	0,093	0,0012
3	20	1,82	0,091	
4	25	2,30	0,092	0,0002
5	30	2,70	0,090	—

$$\overline{m} = 0{,}0918\ \text{g};\ \Sigma\Delta_+ = 0{,}0026\ \text{g}$$

Stredná chyba $\overline{\delta} = \frac{5}{2n}\frac{\Sigma\Delta_+}{\sqrt{n-1}} = \frac{0{,}0026}{4}\ \text{g} = 0{,}0006\ \text{g}$,

relat. chyba 0,2 %.

$$m = (0{,}0918 \pm 0{,}006)\ \text{g}$$

$$m \doteq 0{,}092\ \text{g} = 92 \cdot 10^{-6}\ \text{kg}\ .$$

b) Meranie priemeru guľôčky mikrometrom:

Č.	n [mm]	n_0 [mm]	$d = n - n_0$ [mm]	Δ_+ [mm]
1	2,41	0,060	2,47	
2	2,42	0,065	2,48	
3	2,37	0,070	2,44	
4	2,45	0,070	2,52	0,03
5	2,46	0,065	2,52	0,03

$$\overline{d} = 2{,}49\ \text{mm},\ \Sigma\Delta_+ = 0{,}06\ \text{mm}$$

$$\delta = \frac{0{,}06}{4}\ \text{mm} = 0{,}015\ \text{mm}$$

Priemer guľôčky je $d = (2{,}49 \pm 0{,}02)$ mm (s relat. chybou 1 %).

c) Hustota meraná hustomerom:

Č.	ϱ [g cm^{-3}]	Δ_+[g cm^{-3}]
1	0,861	
2	0,859	
3	0,861	
4	0,864	0,003
5	0,859	

$\bar{\varrho} = 0{,}861$ g cm^{-3}, $\Sigma\Delta_+ = 0{,}003$ g cm^{-3}

$$\bar{\delta} = \frac{0{,}003}{4} = 0{,}001 \text{ g cm}^{-3}$$

$\varrho = (0{,}861 \pm 0{,}001)$ g cm^{-3} (s relat. chybou 0,1 %).

d) Meranie dráhy medzi 2 vyznačenými hladinami.

Č.	s [cm]	Δ_+ [cm]
1	42,6	
2	42,7	0,03
3	42,5	
4	42,7	0,03
5	42,8	0,13

$s = 42{,}67$ cm; $\Sigma\Delta_+ = 0{,}19$ cm

$$\bar{\delta} = \frac{0{,}19}{4} \text{ cm} = 0{,}047 \text{ cm}$$

$s = (42{,}67 \pm 0{,}05)$ cm.

Relatívna chyba je 0,1 %.

e) Meranie času:

n	t [s]	Δ_+ [s]
1	3,2	0,12
2	3,1	
3	2,9	
4	3,0	0,02
5	3,2	0,12

$\overline{\delta} = 0{,}26\ \text{s} : 4 = 0{,}06\ \text{s}$

$t = (3{,}08 \pm 0{,}06)\ \text{s}$

Relat. chyba je 2 %.

$$\overline{t} = 3{,}08\ \text{s};\quad \Sigma\Delta_+ = 0{,}26\ \text{s}$$

Maximálna rýchlosť $v_{\max} = \frac{s}{t}$.

$s = (0{,}4267 \pm 0{,}0005)\ \text{m},$

$t = (3{,}08 \pm 0{,}06)\ \text{s},$

$v_{\max} = (0{,}138 \pm 0{,}003)\ \text{m s}^{-1}.$

3. *Výpočet súčiniteľa vnútorného trenia kvapaliny.*

Do vzťahu (1) dosadíme číselné hodnoty (v sústave SI):

hmotnosť jednej guľočky $m = 0{,}000\,091\ \text{kg} = 91 \cdot 10^{-6}\ \text{kg},$

gravitačné zrýchlenie $g = 9{,}81\ \text{m s}^{-2},$

hustota oleja $\varrho = 8{,}61 \cdot 10^{2}\ \text{kg m}^{-3},$

polomer guľôčky $r = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{m},$

rýchlosť guľôčky $v_{\max} = 0{,}138\ \text{m s}^{-1}.$

$$\eta = \frac{92 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}81 - \frac{4}{3}\pi\, 1{,}25^3 \cdot 10^{-9} \cdot 861 \cdot 9{,}81}{6\pi\, 1{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}138}\ \text{N s m}^{-2},$$

Relatívna chyba čitateľa je 0,2 %, menovateľa 2,1 %, teda relatívna chyba zlomku je 2,3 %.

Výsledek merania je teda $\eta = (0{,}26 \pm 0{,}01)\ \text{N s m}^{-2}.$

Tabuľky pre SVŠ (SVVŠ) udávajú pre transformátorový olej hodnotu $\eta = 0{,}032\ \mathrm{N\ s\ m^{-2}}$. Značný rozdiel nameranej hodnoty oproti hodnote v tabuľkách možno vysvetliť tým, že druh transformátorového oleja nie je dostatočne určený, olej bol dosť starý, meranie bolo prevedené pri teplote miestnosti $t = 15{,}2$ °C, v tabuľkách uvádzané hodnoty sú udané pre $t = 20$ °C a viskozita s klesajúcou teplotou rastie.

Chybu výsledku ovplyvní najviac nepresné meranie doby pohybu guľôčky medzi dvoma značkami, lebo táto doba je pomerne krátka a stopkami nie je možné merať presnejšie ako na 0,1 s.

b) Druhé kolo soutěže

1. příklad (navrhl Jan Tesař)

Těleso nacházející se v místě O v klidu se uvede do přímočarého rovnoměrně zrychleného pohybu po vodorovné rovině. Po době t_1 projíždí týmž místem O druhé těleso rovnoměrným pohybem rychlostí v_1 stejným směrem jako těleso první. Obě tělesa se setkají za čas t_2 od okamžiku, kdy se první těleso začalo pohybovat.

a) Určete obecně zrychlení a prvního tělesa.

b) Určete vzdálenost obou těles v okamžiku, kdy se první těleso rozjíždí, a zjistěte, kde a za jakou dobu se obě tělesa setkají. Obě tělesa považujte za hmotné body. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $t_1 = 1{,}5$ s, $t_2 = 2{,}0$ s, $v_1 = 2{,}0\ \mathrm{m\ s^{-1}}$.

Úlohu b) pro dané hodnoty řešte graficky.

Řešení:

První těleso se pohybuje po dobu t, druhé po dobu $t - t_1$. K setkání obou těles dojde za doby t_2 a t_3 ve vzdálenostech s_2 a s_3 od bodu O.

a) Dráha prvního tělesa je určena vztahem $s = \frac{a}{2} t^2$, dráha druhého tělesa vztahem $s = v_1(t - t_1)$. (1)
Za čas t_2, kdy se obě tělesa setkají, jsou od bodu O stejně vzdálena. Proto platí $\frac{a}{2} t_2^2 = v_1 (t_2 - t_1)$, odkud vypočítáme zrychlení

$$a = \frac{2 v_1 (t_2 - t_1)}{t_2^2} = \frac{2 \,.\, 2{,}0 \,.\, 0{,}5}{4} \text{ m s}^{-1} \text{ s s}^{-2} = 0{,}50 \text{ m s}^{-2} . \tag{2}$$

Zrychlení prvního tělesa je určeno vztahem (2).
b) V okamžiku, kdy se první těleso začne pohybovat, je od něho druhé těleso vzdáleno podle upraveného vztahu (1) o délku

$$d = - v_1 t_1 = - 2{,}0 \,.\, 1{,}5 \text{ m s}^{-1} \text{ s} = - 3{,}0 \text{ m} . \tag{3}$$

V místě setkání mají obě tělesa stejnou vzdálenost od bodu O. Proto platí rovnice $\frac{a}{2} t^2 = v_1 (t - t_1)$, kterou lze upravit na tvar

$$a t^2 - 2 v_1 t + 2 v_1 t_1 = 0$$

a ze které vypočítáme

$$t_{3,4} = \frac{2 v_1 \pm \sqrt{4 v_1^2 - 8 a v_1 t_1}}{2 a} = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1 (v_1 - 2 a t_1)}}{a} .$$

Dosadíme-li do tohoto výrazu za a hodnotu ze vztahu (2), vyjde po úpravách

$$t_{3,4} = \frac{t_2^2 \pm t_2 \sqrt{t_2^2 - 4 t_1 t_2 + 4 t_1^2}}{2 (t_2 - t_1)} = \frac{t_2 [t_2 \pm (2 t_1 - t_2)]}{2 (t_2 - t_1)} . \tag{4}$$

Druhý kořen vede k rovnosti $t_4 = t_2$, první z nich má

hodnotu

$$t_3 = \frac{t_1\, t_2}{t_2 - t_1} = \frac{1{,}5\ .\ 2{,}0}{0{,}5}\ \mathrm{s} = 6{,}0\ \mathrm{s}. \qquad (5)$$

Hodnoty veličin s_2 a s_3 určíme ze vztahu (1), dosadíme-li za t postupně hodnoty t_2 a t_3. Pak vyjde

$$s_2 = v_1\,(t_2 - t_1) \quad \text{a} \quad s_3 = v_1\,(t_3 - t_1) =$$

$$= v_1 \left(\frac{t_1\, t_2}{t_2 - t_1} - t_1 \right) = \frac{v_1\, t_1^2}{t_2 - t_1}\ . \qquad (6)$$

Po dosazení daných hodnot do vztahu (6) vyjde

$$s_2 = 2{,}0\ .\ 0{,}5\ \mathrm{m\ s^{-1}\ s} = 1{,}0\ \mathrm{m}\ ,$$

$$s_3 = \frac{2{,}0\ .\ 2{,}25}{0{,}50}\ \mathrm{m\ s^{-1}\ s^2\ s^{-1}} = 9{,}0\ \mathrm{m}\ .$$

V okamžiku, kdy se první těleso začne pohybovat, je vzdálenost obou těles 3,0 m obecně určena vztahem (3). Tělesa se setkají poprvé za 2,0 s, podruhé za 6,0 s od okamžiku, kdy se začalo první těleso pohybovat, ve vzdálenostech 1,0 m a 9,0 m od bodu O. Doby, kdy se obě tělesa setkají, a místa, kde se setkají, jsou obecně určeny vztahy (5) a (6).

c) Závislost dráhy prvního tělesa na čase je určena funkční rovnicí $s = \frac{a}{2}\, t^2$, pro dráhu druhého tělesa platí rovnice $s = v_1\,(t - t_1)$. Dosadíme-li do těchto rovnic za a hodnotu vypočítanou v části a) úlohy a za v_1 a t_1 hodnoty dané, dostaneme číselné rovnice:

$$s = 0{,}25\, t^2 \quad \text{a} \quad s = 2\, t - 3\ .$$

Grafem první z nich je parabolický oblouk v 1. kvadrantu, grafem druhé funkce je polopřímka. Některé dílčí hodnoty, vycházející z těchto rovnic, jsou zaznamenány v tabulkách:

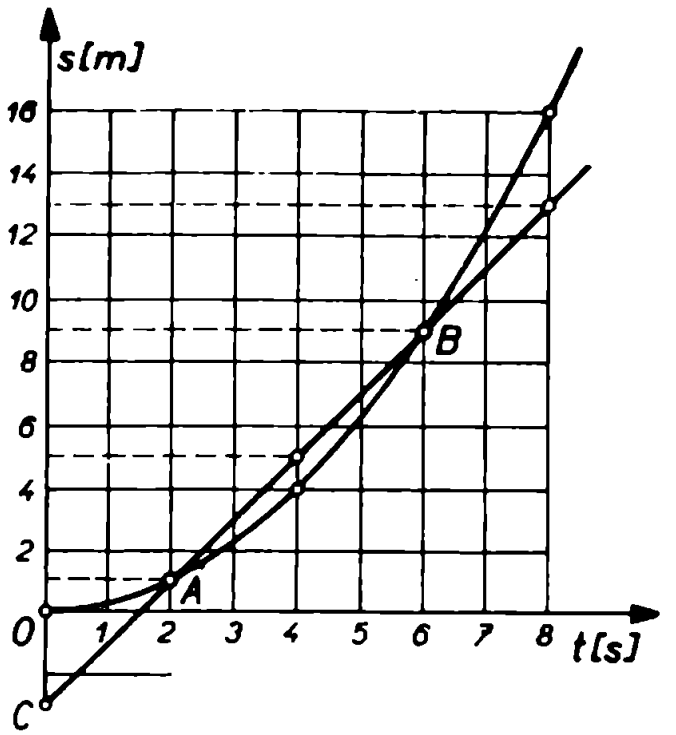
Pro funkci $s = 0{,}25\ t^2$:

t [s]	0	2	3	4	6	8
s [m]	0	1	2,25	4	9	16

Pro funkci $s = 2\ t - 3$

t [s]	0	1	2	3	4	6	8
s [m]	−3	−1	1	3	5	9	13

Průsečíky obou grafů určují doby a místa, kde se obě tělesa setkají (obr. 62), úsečka OC určuje vzdálenost obou těles v okamžiku, kde se první těleso začne pohybo-



Obr. 62

vat. Z grafů je patrno, že hodnoty veličin d, t_2, t_3, s_2, s_3 byly výpočtem správně určeny.

2. příklad (navrhl Jan Tesař)

Ocelová koule hmotnosti m je zavěšena na siloměru a celá je ponořena do kapaliny hustoty ϱ_1. Siloměr ukazuje sílu F_1.

a) Je koule plná nebo dutá?

b) Je-li dutá, vypočtěte objem dutiny.

Řešte pokud možno obecně, potom pro hodnoty $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$, $F_1 = 8{,}2\,\mathrm{N}$, měrná hmotnost oceli $\varrho = 7{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, měrná hmotnost vody $\varrho_1 = 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Řešení:

Objem koule označíme V_1 a F označíme sílu, kterou je koule v kapalině nadlehčována. Objem dutiny budeme značit V_2, objem oceli hmotnosti m označíme V. Koule ponořená ve vodě napíná siloměr silou $F_1 = 8{,}2$ N, jako by ho napínalo závaží hmotnosti $m_2 = 0{,}82\,\mathrm{h\,g}$ (klademe $g \doteq 10\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$).

Objem V_1 koule se rovná objemu vytlačené kapaliny, která má podle Archimédova zákona hmotnost $m_1 = m - m_2$. Proto

$$V_1 = \frac{m_1}{\varrho_1} = \frac{m - m_2}{\varrho_1}. \tag{1}$$

Objem oceli v kouli má velikost

$$V = \frac{m}{\varrho}. \tag{2}$$

Velikost dutiny je určena vztahem

$$V_2 = V_1 - V = \frac{m - m_2}{\varrho_1} - \frac{m}{\varrho} = \frac{m(\varrho - \varrho_1) - m_2\varrho}{\varrho\,\varrho_1} =$$

$$= \frac{g\,m\,(\varrho - \varrho_1) - F_1\varrho}{g\,\varrho\,\varrho_1} . \qquad (3)$$

Úloha je možná jen tehdy, jestliže $V_2 \geqq 0$, je-li tedy splněna nerovnost $(\varrho - \varrho_1)\,m - m_2\varrho \geqq 0$, z níž vychází

$$\frac{\varrho - \varrho_1}{\varrho} \geqq \frac{m_2}{m} . \qquad (4)$$

Dosadíme-li do nerovnosti (4) dané hodnoty, vyjde

$$\frac{7{,}7\,.\,10^3 - 10^3}{7{,}7\,.\,10^3} = \frac{67}{77} \doteq 0{,}87 > 0{,}82 . \qquad (5)$$

Protože je pro dané hodnoty splněna nerovnost (5), a tedy i nerovnost (4), je úloha možná.

a) Koule by byla plná, kdyby $V_2 = 0$. Pak by platila rovnost (4). Za vztahu (5) je však patrno, že rovnost (4) není splněna. Proto není koule plná, je dutá, neboť

$$\frac{\varrho - \varrho_1}{\varrho} > \frac{m_2}{m} , \quad \text{takže } V_2 > 0 .$$

b) Po dosazení daných hodnot do vztahu (3) vyjde

$$V_2 = \frac{1\,.\,(7{,}7 - 1)\,.\,10^3 - 0{,}82\,.\,7{,}7\,.\,10^3}{7{,}7\,.\,10^3\,.\,10^3}\ \mathrm{kg\ kg\ m^{-3}} .$$

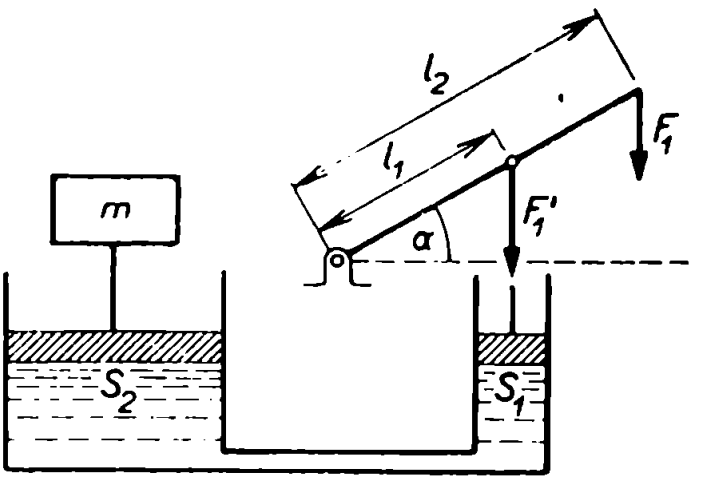
$$.\ \mathrm{kg^{-2}\ m^6} = 0{,}050\,.\,10^{-3}\ \mathrm{m^3} = 50\ \mathrm{cm^3} .$$

Objem dutiny je obecně určen výrazem (3) a má velikost 50,0 $\mathrm{cm^3}$.

3. příklad (navrhl Jan Tesař)

Hydraulický lis má kruhové písty o poloměrech r_1 a r_2 $(r_2 > r_1)$. Prvý píst o poloměru r_1 je prostřednictvím táhla připojen kloubem k jednozvratné páce ve vzdálenosti l_1 od osy otáčení. Celá páka má délku l_2. Účinnost celého zařízení je η.

Jak velikou silou F_1 musíme působit na konci páky, má-li lis zvedat těleso hmotnosti m rovnoměrným pohybem? Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $r_1 = 0{,}030$ m, $r_2 = 0{,}150$ m, $l_1 = 0{,}16$ m, $l_2 = 0{,}80$ m, $\eta = 88$ %, $m = 2{,}75$ t. (Viz obr. 63.)



Obr. 63

Řešení:

Páka svírá s vodorovnou rovinou úhel α. Má-li se lisem zvedat těleso tíhy $G = m\,g$, musíme působit na volném konci páky neznámou silou F_1. Při stoprocentní účinnosti zařízení by přitom působila na užší píst o průřezu S_1 síla F_1' a na širší píst o průřezu S_2 síla F_2. Protože však zařízení má účinnost η, je tíhová síla tělesa přemáhána silou ηF_2. Platí tedy

$$G = m\,g = \eta\,F_2\,. \qquad (1)$$

Síla F_1 působící na konci páky má moment $F_1\,l_2 \cos\alpha$, který lze podle momentového zákona nahradit stejně velikým momentem $F_1'\,l_1 \cos\alpha$ síly F_1', která je souhlasně orientována se silou F_1 a působí na píst o průřezu S_1.

Je tedy

$$F_1 l_2 \cos \alpha = F_1' l_1 \cos \alpha ,$$

takže

$$F_1' = F_1 \frac{l_2}{l_1} . \qquad (2)$$

Síla F_1' tlačí na píst o průřezu S_1 hydraulického lisu tlakem $\frac{F_1'}{S_1}$, takže na širší píst by při stoprocentní účinnosti zařízení působila tlaková síla

$$F_2 = S_2 \frac{F_1'}{S_1} = \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{l_2}{l_1} F_1 .$$

Podle vztahu (1) je však $G = \eta F_2$, takže

$$F_1 = \frac{1}{\eta} \frac{S_1 l_1}{S_2 l_2} G = \frac{\pi r_1^2 l_1}{\eta \pi r_2^2 l_2} G = \frac{1}{\eta} \frac{r_1^2 l_1}{r_2^2 l_2} m g . \qquad (3)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$F_1 = \frac{100}{88} \cdot \frac{0{,}03^2 \cdot 0{,}16}{0{,}15^2 \cdot 0{,}8} \cdot 2750 \cdot 10 \text{ N} = 250 \text{ N} .$$

Síla, kterou je možno uvažovaným zařízením zvedat rovnoměrným pohybem těleso hmotnosti m, je obecně určena vztahem (3) a má velikost 250 N.

4. příklad (navrhl dr. Ivan Náter)

Na koleso v súkolí stroja se prenáša príkon P. Koleso sa otáča s frekvenciou f v dvoch ložiskách s vnútorným priemerom d_1. Priemer čapov kolesa je $d_2 < d_1$. Čapy kolesa zasahujú do ložisiek dĺžkou h. Aký má byť súčiniteľ vnútorného trenia mazadla, ak pri danej frekvencii kolesa straty trením v ložiskách nemajú presahovať p %

dodávaného príkonu. Predpokladáme, že tlak čapov na ložiská je zanedbateľne malý.
Riešte nejprv všeobecne, potom pre hodnoty $P = 450\ W$, $d_1 = 0{,}045$ m, $d_2 = 0{,}044$ m, $h = 0{,}080$ m, $p = 6$, $f = 8{,}0\ s^{-1}$.

Riešenie:

Straty na príkone trením v ložiskách označíme P_0.
Ak čap nevyvíja nijaký tlak na ložisko, vytvorí sa okolo otáčajúceho sa čapu vrstva mazadla všade rovnako hrubá. Hrúbka tejto vrstvy je $b = \frac{d_1 - d_2}{2}$. Tesne pri stene ložiska sa mazadlo pohybuje nulovou rýchlosťou, tesne pri čape je jeho rýchlosť v rovnaká ako obvodová rýchlosť povrchovej plochy čapu. Je teda

$$v = \pi d_2 f .$$

Gradient rýchlosti vo vrstve mazadla od ložiska k čapu je

$$\frac{v}{b} = \frac{2\pi d_2 f}{d_1 - d_2} .$$

Tangenciálne napätie τ od vnútorného trenia tesne pri povrchu čapu je potom

$$\tau = \eta \frac{v}{b} = \frac{2\pi \eta d_2 f}{d_1 - d_2}$$

a trecia sila na obvode čapu

$$F = S\tau = \frac{2\pi^2 \eta d_2^2 f h}{d_1 - d_2} ,$$

lebo plocha S, v ktorej sa čap stýka s mazadlom, je $S = \pi d_2 h$. Výkon týchto síl v oboch ložiskách je

$$P_0 = 2 F v = \frac{4\pi^3 \eta d_2^3 f^2 h}{d_1 - d_2} .$$

Má však platiť $P_0 \leqq \frac{p\,P}{100}$, odkiaľ dostaneme podmienku

$$\eta \leqq \frac{p\,P}{100}\,\frac{d_1 - d_2}{4\,\pi^3\,d_2^3\,f^2\,h}\,, \tag{1}$$

ktorou je určená hľadaná hodnota súčiniteľa vnútorného trenia mazadla.

Po dosadení daných hodnôt vychádza

$$\eta \leqq \frac{6\,.\,450\,.\,(0{,}0045 - 0{,}0044)}{100\,.\,4\,.\,\pi^3\,.\,0{,}044^3\,.\,8\,.\,0{,}08}\,\frac{\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}\,m}}{\mathrm{m^3\,s^{-2}\,m}} =$$

$$= 0{,}5\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}.$$

Súčiniteľ vnútorného trenia mazadla musí byť menší ako 0,5 kg m^{-1} s^{-1}, ako vychádza zo vzťahu (1).

4. Úlohy kategorie D

Příklady recenzovali Jan Cimbůrek a dr. Ivan Náter

a) První kolo soutěže

1. příklad (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Toník a Jeník použili dřevěný trám délky $d = 4{,}0$ m, který byl podepřen v těžišti, jako houpačku. Toník vážil $G_1 = 50$ kp, Jeník $G_2 = 30$ kp.

a) V jaké vzdálenosti od osy se na jedné polovině trámu posadil Toník, když se Jeník posadil úplně na konec druhé poloviny trámu? Polohu podpory trámu nezměnili.

b) Proč by se chlapci nemohli houpat, kdyby se Toník posadil také úplně na konci trámu?

c) Za chlapci přišla Jana, která vážila $G_3 = 25$ kp, a chtěla se s nimi houpat. Chlapci vyřešili situaci tak, že se každý

z nich posadil úplně na okraj opačné poloviny trámu. Do jaké vzdálenosti y od osy posadili na jednom ramenu trámu Janu, aby byla rovnováha? Na které rameno, kde byl Jeník, nebo kde byl Toník?

d) Když Jana odešla, upravili chlapci trám na nerovnoramennou páku. Na kterou stranu a o jakou délku z posunuli těžiště trámu od podpěry, aby na páce byla rovnováha, jestliže se posadili úplně na konec trámu?

Trám vážil $G_4 = 80$ kp, příčné rozměry trámu zanedbáváme. Každý případ řešte nejprve obecně, pak číselně.

Řešení:

Za uvedených podmínek považujeme trám za páku, jíž za rovnováhy můžeme použít k práci (v našem případě k houpání) působením nepatrné síly. Proto všechny případy vyřešíme tak, že najdeme příslušnou podmínku rovnováhy trámu. Představujeme si, že trám je v rovnováze ve vodorovné poloze. Na páce je rovnováha, když součet momentů jednoho směru se rovná součtu momentů směru druhého.

a) Označme x vzdálenost od osy, v jaké se posadil na trám Toník. Za rovnováhy musí platit:

$$x\,G_1 = \frac{d}{2}\,G_2; \qquad \text{odtud} \qquad x = \frac{d}{2}\,\frac{G_2}{G_1}.$$

Numericky: $x = 2\ \text{m} \cdot \frac{30\ \text{kp}}{50\ \text{kp}} = 1{,}2\ \text{m}.$

Toník se posadil ve vzdálenosti 1,2 m od osy.

b) Protože $G_1 > G_2$, je v tomto případě moment tíhy Toníka $\frac{d}{2}\,G_1$ větší než moment tíhy Jeníka $\frac{d}{2}\,G_2$. Na páce nemůže být rovnováha.

c) Protože podle b) je $\frac{d}{2} G_1 > \frac{d}{2} G_2$, musí chlapci Janu posadit na to rameno trámu, na kterém sedí Jeník. Za rovnováhy musí být

$$\frac{d}{2} G_1 = \frac{d}{2} G_2 + y G_3, \text{ odkud vychází}$$

$$y = \frac{d}{2} \cdot \frac{G_1 - G_2}{G_3}.$$

Numericky:

$$y = 2 \text{ m} \cdot \frac{50 \text{ kp} - 30 \text{ kp}}{25 \text{ kp}} = 1{,}6 \text{ m}.$$

Janu posadí chlapci ve vzdálenosti 1,6 m od osy směrem k Jeníkovi.

d) Protože $G_1 > G_2$, musí sedět Jeník na delším rameně nerovnoramenné páky. Po posunutí těžiště o vzdálenost z musí za rovnováhy platit:

$$\left(\frac{d}{2} - z\right) G_1 = \left(\frac{d}{2} + z\right) G_2 + z G_4, \text{ odkud vychází}$$

$$z = \frac{d}{2} \cdot \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2 + G_4}.$$

Numericky: $z = 2 \text{ m} \cdot \frac{50 \text{ kp} - 30 \text{ kp}}{50 \text{ kp} + 30 \text{ kp} + 80 \text{ kp}} = 0{,}25 \text{ m}.$

Těžiště trámu posunuli chlapci o vzdálenost 0,25 m od podpěry směrem k Jeníkovi.

2. příklad (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Při stavbě údolní přehrady spadla do vody tři tělesa: 1. masívní ocelový blok, 2. ocelové těleso, v němž byla

neprodyšně uzavřena dutina o objemu $V = 100$ dm^3, 3. masívní žulový blok. Každé těleso vážilo $G = 1000$ kp. Měrná tíha oceli je $\gamma_1 = 7{,}7$ kp/dm^3, měrná tíha žuly je $\gamma_2 = 2{,}7$ kp/dm^3, měrná tíha vzduchu je $\gamma_3 = 0{,}0012$ kp/dm^3. Jak velikou práci vykoná jeřáb při zvednutí každého z těchto těles do výše $h = 4{,}0$ m

a) ve vodě,

b) na vzduchu?

c) Proč nemá v našem případě smysl uvažovat o síle, kterou jsou podle Archimédova zákona tělesa nadlehčována ve vzduchu?

Řešení:

a) Použijeme Archimédův zákon. Vypočteme postupně objem V_1, V_2, V_3 každého tělesa. Tak určíme množství a tíhu G_1, G_2 a G_3 vody tělesy vytlačené; tím také určíme síly, kterými jsou tělesa ve vodě nadlehčována. Tuto nadlehčující sílu odečteme od tíhy tělesa; tak dostaneme síly F_1, F_2, F_3, které jeřáb překonává při práci. Velikost práce A_1, A_2, A_3 v jednotlivých případech se určí jako součin příslušné síly a dráhy h. Symbolem γ označíme měrnou tíhu vody.

α) Pro ocelový blok:

$$V_1 = \frac{G}{\gamma_1};\ G_1 = V_1\gamma = G\frac{\gamma}{\gamma_1};\ F_1 = G - G_1;\ A_1 = F_1 h;$$

$$A_1 = G\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}\right)h\,.$$

Numericky:

$$A_1 = 1000\ \text{kp}\,.\left(1 - \frac{1\ \text{kp/dm}^3}{7{,}7\ \text{kp/dm}^3}\right).\ 4\ \text{m} = 3480\ \text{kpm}\,.$$

Při zvednutí plného ocelového bloku ve vodě do výšky $h = 4$ m vykoná jeřáb práci $A_1 = 3480$ kpm.

β) Ocelové těleso s dutinou:

Protože toto těleso má stejnou tíhu G a je ze stejné látky jako těleso v případě α), jeho vnější objem V_2 je o objem V dutiny větší než V_1.

$$V_2 = \frac{G}{\gamma_1} + V;\ G_2 = V_2\,\gamma = \left(\frac{G}{\gamma_1} + V\right)\gamma\,.$$

$F_2 = G - G_2;\ A_2 = F_2\,h\,,$

$$A_2 = \left[G - \left(\frac{G}{\gamma_1} + V\right)\gamma\right] h\,.$$

Numericky:

$$A_2 = \left[1000\text{ kp} - \left(\frac{1000\text{ kp}}{7{,}7\text{ kp/dm}^3} + 100\text{ dm}^3\right) 1\text{ kp/dm}^3\right] \cdot$$

$$\cdot\, 4\text{ m} = 3080\text{ kpm}\,.$$

γ) Žulový blok:

$$V_3 = \frac{G}{\gamma_2};\ G_3 = V_3\,.\,\gamma = G\,\frac{\gamma}{\gamma_2};\ F_3 = G - G_3;\ A_3 = F_3\,h;$$

$$A_3 = G\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_2}\right) h\,.$$

Numericky:

$$A_3 = 1000\text{ kp}\left(1 - \frac{1\text{ kp/dm}^3}{2{,}7\text{ kp/dm}^3}\right) .\ 4\text{ m} = 2518\text{ kpm}\,.$$

b) Na vzduchu váží každé těleso $G = 1000$ kp. Proto při zvednutí každého z těchto těles do výše $h = 4$ m vykoná jeřáb práci $A = G\,h = 4000$ kpm.

c) Síla, kterou je ocelový blok nadlehčován ve vzduchu, je $P_1 = V_1\,\gamma_3 = 0{,}12$ kp; síla, kterou je ocelové těleso nadlehčováno ve vzduchu, je $P_2 = V_2\,\gamma_3 = 0{,}23$ kp; síla,

kterou je žulový blok nadlehčován ve vzduchu, je $P_3 = V_3 \gamma_3 = 0{,}37$ kp. Každé těleso váží $G = 1000$ kp. Proto nemá v našem případě smysl uvažovat nadlehčovací sílu, která je řádově 10 000krát menší než G.

3. příklad (navrhl dr. Bohumil Vlach)

Ze čtyř vajíček vyfoukněte vnitřek, jako byste chtěli dělat kraslice. Nepatrné otvory ve skořápce zalepte kanagomem nebo parafínem. Vajíčka přilepte na lehkou lepenkovou destičku (asi 0,2 m × 0,15 m), kterou natřete parafínem tak, aby se nesmáčela vodou. Tak vznikne jakýsi vor. Vor zvažte (tíhu voru označte G_1). Položte vor na vodu ve větší nádobě a na destičku sypte písek tak dlouho, až se její spodní plocha právě dotkne vody. Potom písek odvažte (tíhu písku označte G_2).

a) Vyslovte Archimédův zákon pro náš vor s pískem.
b) Určete průměrný objem jednoho vajíčka.
c) Kolik písku by unesl náš vor, kdyby plaval na petroleji (měrná tíha petroleje je $\gamma_1 = 0{,}8$ kp/dm^3)?
d) Kolik písku by unesl vor, kdyby plaval na rtuti (měrná tíha rtuti je $\gamma_2 = 13{,}6$ kp/dm^3)?

Řešení:

Navážili jsme: tíha voru $G_1 = 47{,}35$ p,
tíha písku $G_2 = 179{,}40$ p,
tíha voru s pískem $G = G_1 + G_2$,
$G = 226{,}75$ p.

a) Vor s pískem je nadlehčován silou F, která se rovná tíze vody vytlačené všemi 4 vajíčky: $F = 226{,}75$ p.
b) Tíha vody vytlačené všemi 4 vajíčky je 226,75 p. Poněvadž měrná tíha vody je $\gamma = 1000$ kp/m^3, je objem všech 4 vajíček 226,75 cm^3. Objem V jednoho vajíčka $V = 56{,}69$ cm^3.

c) Tíhu G_3 petroleje vytlačeného všemi 4 vajíčky vypočteme, když objem vajíček 226,75 cm^3 násobíme měrnou tíhou petroleje.
$G_3 = 187{,}069$ p.
Od tíhy G_3 odečteme váhu voru G_1 a dostaneme tíhu písku, který unese vor plovoucí na petroleji. Vor na petroleji unese 138,71 p písku.

d) Případ řešíme úplně stejně jako případ c), jen místo měrné tíhy petroleje počítáme s měrnou tíhou rtuti. Vor na rtuti unese 3024,20 p = 3,02 kp písku.

4. příklad (navrhl Pavel Kutný)

Peloton cyklistů se pohybuje stálou rychlostí $v_1 = 36$ km/h. V okamžiku, kdy bylo čelo pelotonu vzdáleno o délku $s = 10$ km, vyjela od místa startu spojka na motocyklu stálou rychlostí $v_2 = 54$ km/h. Spojka dostihla čelo pelotonu, vrátila se podél pelotonu zpět a zařadila se na jeho konec. Celá akce spojky až do zařazení na konec pelotonu trvala dobu $t = 34$ minuty. Jaká byla délka pelotonu?
Předpokládáme, že se délka pelotonu po celou dobu neměnila. Řešte nejprve obecně.

Řešení:

Rychlost pelotonu $v_1 = 36$ km/h $= 10$ m/s, délka pelotonu je d, rychlost spojky $v_2 = 54$ km/h $= 15$ m/s, doba jízdy spojky $t = 34$ min $= 2040$ s, vzdálenost čela pelotonu $s = 10^4$ m. Spojka dostihne čelo pelotonu za dobu t_1. Za tuto dobu se peloton posunul o délku $v_1 t_1$. Spojka tedy urazí za dobu t_1 dráhu

$$v_2 t_1 = s + v_1 t_1 .$$

Při cestě zpět dostihne konec pelotonu v době t_2. Peloton se mezitím posune dopředu o délku $v_1 t_2$. Spojka tedy

urazí za dobu t_2 dráhu

$$v_2 t_2 = d - v_1 t_2 .$$

Z obou rovnic určíme doby t_1 a t_2. Daná celková doba $t = t_1 + t_2$,

$$t = \frac{s}{v_2 - v_1} + \frac{d}{v_2 + v_1} .$$

Z toho

$$d = \frac{(v_2 + v_1)(v_2 - v_1)\, t - s}{v_2 - v_1} .$$

$$d =$$

$$= \frac{(15\,\mathrm{m\,s^{-1}} + 10\,\mathrm{m\,s^{-1}})(15\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}) . 2040\,\mathrm{s} - 10^4\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}} =$$

$$= 10^3\,\mathrm{m}.$$

$d = 1\,\mathrm{km}$.

5. příklad (navrhl dr. Ivan Náter)

Valcová nádoba je zhotovená z medeného plechu hrúbky a. Vonkajší polomer nádoby je r_1, jej vonkajšia výška je h_1. Vypočítajte tiaž vody G, ktorú musíme naliať do nádoby, aby nádoba plávala na vode zo zvislou osou ponorená do výšky $h = 0{,}8\ h_1$, keď merná tiaž medi je γ_1, merná tiaž vody γ_2. Aký je tlak na dno nádoby zdola a zhora? Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty: $a = 0{,}3$ cm, $r_1 = 15$ cm, $h_1 = 25$ cm, $\gamma_1 = 8{,}9$ p/cm^3, $\gamma_2 = 1$ p/cm^3.

Riešenie:

Objem steny nádoby $V_1 = \pi\,[r_1^2 - (r_1 - a)^2]h_1$, objem dna nádoby $V_2 = \pi\,(r_1 - a)^2$ a tiaž celej nádoby $G = (V_1 + V_2)\,\gamma_1$.

Vztlak, ktorým je nádoba nadľahčovaná pri ponorení do $0{,}8\ h_1$ je

$$G_1 = \pi r_1^2 \,.\, 0{,}8\ h_1\ \gamma_2 \,.$$

Tiaž vody, ktorú musíme do nádoby naliať, označme G_x, jej objem V_x. Za rovnováhy musí byť

$$G + G_x = G_1\,, \text{ odkiaľ } G_x = G_1 - G\,.$$

Po dosadení

$$G_x = \pi\, r_1^2 \,.\, 0{,}8\ h_1\ \gamma_2 -$$

$$- \{\pi\,[\,r_1^2 - (r_1 - a)^2]\ h_1 + \pi\,(r_1 - a)^2\ a\}\ \gamma_1 =$$

$$= \pi\,[r_1^2\ h_1\ (0{,}8\ \gamma_2 - \gamma_1) + (r_1 - a)^2\ (h_1 - a)\ \gamma_1]\,.$$

$$V_x = \frac{G_x}{\gamma_2}\,.$$

Hydrostatický tlak na dno

a) zdola je $p_1 = 0{,}8\ h_1\ \gamma_2$, lebo spodná plocha nádoby je v hĺbke $0{,}8\ h_1$ pod hladinou okolitej vody.

b) Pre výpočet tlaku na dno nádoby zhora musíme najprv zistiť, do akej výšky h_x siaha voda v nádobe. Musí platiť:

$$V_x = \pi\,(r_1 - a)^2\ h_x, \text{ teda}$$

$$h_x = \frac{V_x}{\pi\,(r_1 - a)^2} = \frac{G_x}{\pi\,(r_1 - a)^2\ \gamma_2} =$$

$$= \frac{r_1^2\ h_1\ (0{,}8\ \gamma_2 - \gamma_1) + (r_1 - a)^2\ (h_1 - a)\ \gamma_1}{(r_1 - a)^2\ \gamma_2}\,.$$

Potom tlak zhora

$$p_2 = h_x \gamma_2 = \frac{r_1^2\ h_1\ (0{,}8\ \gamma_2 - \gamma_1) + (r_1 - a)^2\ (h_1 - a)\ \gamma_1}{(r_1 - a)^2}\,.$$

Numerické riešenie:

$$G_x = \pi[15^2 \,.\, 25 \,.\, (0{,}8 \,.\, 1 - 8{,}9) + (15 - 0{,}3)^2 \,(25 - 0{,}3) \,.\, 8{,}9]\ \mathrm{p} = 6192\ \mathrm{p} = 6{,}192\ \mathrm{kp}\,.$$

$$V_x = \frac{6192\ \mathrm{p}}{1\ \mathrm{p/cm^3}} = 6192\ \mathrm{cm^3} = 6{,}192\ \mathrm{dm^3};$$

$$p_1 = 0{,}8 \,.\, 25 \,.\, 1\ \mathrm{p/cm^2} = 20\ \mathrm{p/cm^2},$$

$$h_x = \frac{6192\ \mathrm{cm^3}}{\pi\,(15 - 0{,}3)^2\ \mathrm{cm^2}} = 9{,}121\ \mathrm{cm},$$

$$p_2 = 9{,}121 \,.\, 1\ \mathrm{p/cm^2} = 9{,}121\ \mathrm{p/cm^2}\,.$$

6. příklad (navrhl František Fišer)

Ve válcové nádobě o vnitřním poloměru r je voda o hmotnosti m_1 a teplotě t_1. Do vody lijeme olovo o teplotě tání olova t_2. Měrné teplo vody je c_1, měrné teplo olova je c_2, měrné skupenské teplo tání olova je l_t.

a) Určete hmotnost m_2 nejmenšího množství olova, které musíme nalít do vody, aby se voda právě uvedla do varu.

b) O jakou výšku h stoupne při tom povrch vody v nádobě? Měrná hmotnost olova při teplotě 100 °C je ϱ.

Oba případy řešte nejprve obecně a potom číselně pro hodnoty:

$m_1 = 1{,}0$ kg, $t_1 = 20$ °C, $t_2 = 327$ °C, $c_1 = 1$ kcal/kg °C, $c_2 = 0{,}03$ kcal/kg °C, $l_t = 6$ kcal/kg, $\varrho = 11{,}3$ kg/dm^3, $r = 5{,}0$ cm. Tepelné ztráty neuvažujeme.

Řešení:

Měrné teplo vody je $c_1 = 1$ kcal/kg . °C, bod varu vody je $t = 100$ °C.

a) Voda přijme teplo $Q_1 = m_1\, c_1\, (t - t_1)$.

Olovo odevzdá teplo $Q_2 = m_2 l_t + m_2 c_2 (t_2 - t) = m_2 [(l_t + c_2 (t_2 - t)]$.

Z rovnosti $Q_1 = Q_2$ obdržíme

$$m_2 = \frac{m_1 c_1 (t - t_1)}{l_t + c_2 (t_2 - t)} .$$

Po dosazení číselných hodnot

$$m_2 = \frac{1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ kcal/kg °C} \cdot 80 \text{ °C}}{6 \text{ kcal/kg} + 0{,}03 \text{ kcal/kg °C} \cdot 227 \text{ °C}} \doteq 6{,}25 \text{ kg.}$$

b) Objem olova $V = \frac{m_2}{\varrho}$, $\pi r^2 h = \frac{m_2}{\varrho}$, $h = \frac{m_2}{\pi r^2 \varrho}$.

Číselně:

$$h = \frac{6{,}25 \text{ kg}}{3{,}14 \cdot 0{,}5^2 \text{ dm}^2 \cdot 11{,}3 \text{ kg/dm}^3} ,$$

$$h \doteq 0{,}7 \text{ dm} = 0{,}07 \text{ m} .$$

7. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

Jak vysoké napětí musí být udržováno na svorkách dynama, které napájí elektromotor ve vzdálenosti $l = 1{,}8$ km měděným vodičem o průměru $d = 3{,}2$ mm, jestliže elektromotor vyžaduje při napětí $U_m = 110$ V proud $I = 10$ A?

Řešení:

Odpor vedení $R_v = \varrho \frac{2l}{S}$, kde ϱ je měrný odpor mědi, $\varrho = 0{,}0175 \, \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$, $2l$ je délka vodiče, S je průřez vodiče, odpor motoru je R_m, napětí na vedení U_v.

Nejprve zjistíme odpor R_v vedení ze vztahu $R_v = \varrho \frac{2l}{S}$.

$$R_v = 0{,}0175\ \Omega\ \mathrm{mm^2/m} \cdot \frac{2 \cdot 1800\ \mathrm{m}}{8{,}04\ \mathrm{mm^2}} = 7{,}8\ \Omega .$$

Odpor vedení je 7,8 Ω.

Odpor motoru zjistíme ze vztahu $R_m = \frac{U_m}{I} = \frac{110\ \mathrm{V}}{10\ \mathrm{A}} =$

$= 11\ \Omega$.

Odpor motoru je 11 Ω.

Je-li na motoru o odporu $R_m = 11\ \Omega$ napětí $U_m = 110$ V, lze vypočítat napětí na sériově připojeném vedení o odporu $R_v = 7{,}8\ \Omega$ ze vztahu

$$U_m : U_v = R_m : R_v\text{, z čehož}$$

$$U_v = \frac{U_m R_v}{R_m} = \frac{110\ \mathrm{V} \cdot 7{,}8\ \Omega}{11\ \Omega} = 78\ \mathrm{V} .$$

Napětí na vedení je 78 V.

Na svorkách dynama musí být napětí U, které se rovná $U = U_m + U_v$:

$$U = 110\ \mathrm{V} + 78\ \mathrm{V} = 188\ \mathrm{V} .$$

Na napájecím dynamu musí být napětí 188 V, aby na napájeném elektromotoru bylo napětí 110 V.

8. příklad (navrhl Ivan Červeň)

Na vianočnom stromčeku je v sérii zapojených 10 žiaroviek pre napätie $U = 12$ V a pre príkon $P = 8$ W. Napätie siete je $U' = 120$ V. Jedna zo žiaroviek sa vypáli. V obchode síce dostať žiarovky na napätie 12 V, ale len o príkonoch $P_1 = 4$ W alebo $P_2 = 16$ W. Ktorou z týchto žiaroviek bude výhodnejšie nahradiť vypálenú žiarovku, keď je žiadúce, aby žiadna zo žiaroviek nebola napäťove

preťažená o viac ako $p = 10\ \%$? Odpor žiarovek považujeme za nezávislý od príkonu.

Riešenie:

Treba vypočítať, aké bude napätie na jednotlivých žiarovkách po nahradení vypálenej žiarovky a) 4 W, b) 16 W žiarovkou.

a) Najprv vypočítame odpor 8 W žiarovky:

$$R_8 = \frac{U^2}{P} = \frac{12^2}{8}\,\Omega = 18\,\Omega\,.$$

Analogickým spôsobom vyjde pre odpory 4 W a 16 W žiaroviek

$$R_4 = 36\,\Omega \text{ a } R_{16} = 9\,\Omega\,.$$

Po nahradení 8 W žiarovky 4 W bude odpor všetkých žiaroviek zapojených v sérii

$$R = (9\,.\,18 + 36)\,\Omega\,.$$

Na každej z 8 W žiaroviek bude potom napätie

$$U = \frac{18}{9\,.\,18 + 36}\,.\,120\ \mathrm{V} = 10{,}9\ \mathrm{V}\,.$$

Na 4 W žiarovke bude napätie

$$U = \frac{36}{9\,.\,18 + 36}\,.\,120\ \mathrm{V} = 21{,}8\ \mathrm{V}\,,$$

čiže žiarovka bude preťažená o viac ako 80 %. Tento spôsob nie je teda vhodný.

b) Po nahradení 8 W žiarovky 16 W bude na 16 W žiarovke napätie:

$$U = \frac{9}{9\,.\,18 + 9}\,.\,120\ \mathrm{V} = 6{,}3\ \mathrm{V}\,,$$

žiarovka nebude preťažená a na každej z 8 W žiaroviek

bude napätie

$$U = \frac{18}{9 \,.\, 18 + 9} \,.\, 120 \text{ V} = 12{,}63 \text{ V},$$

čiže žiarovky 8 W sú preťažené len o 5,25 %. Tento spôsob je teda vhodný.

9. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

Ocelová roura vnějšího průměru $d_1 = 30$ mm a vnitřního $d_2 = 22$ mm je rozmrazována elektrickým proudem z rozmrazovacího transformátoru. Napětí mezi body, v nichž je transformátor připojen, je $U = 8{,}1$ V a protékající proud je $I = 1500$ A. Měrný odpor oceli roury je $\varrho = 0{,}12\ \Omega\,\text{mm}^2/\text{m}$.

a) Určete délku l rozmrazované roury.

b) Stačí množství tepla Q uvolněné za dobu $t = 5$ min k roztavení ledu v rouře, předpokládáme-li, že led o teplotě 0 °C vyplňuje celý rozmrazovaný úsek roury?

Řešení:

a) Výpočet odporu R roury:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{8{,}1}{1500}\ \Omega = 0{,}0054\ \Omega\,.$$

Výpočet obsahu S průřezu roury:

$$S = \pi\,(r_1^2 - r_2^2) = 3{,}14\,(15^2 - 11^2)\ \text{mm}^2 \doteq 327\ \text{mm}^2.$$

Výpočet délky l roury:

$$R = \varrho\,\frac{l}{S}; \quad l = \frac{R\,S}{\varrho} = \frac{0{,}0054 \,.\, 327}{0{,}12}\ \text{m} \doteq 14{,}7\ \text{m}\,.$$

Rozmrazovaná roura je asi 15 m dlouhá.

b) Výpočet objemu ledu v rouře: $l = 15$ m, $r = 11$ mm $=$ $= 0{,}011$ m.

$$V = \pi\, r^2\, l = 3{,}14 \,.\, 0{,}011^2 \,.\, 15\ \text{m}^3 \doteq 0{,}0057\ \text{m}^3\,.$$

V rouře je asi 0,0057 m^3 ledu.
Výpočet hmotnosti ledu v rouře:
Měrná hmotnost ledu $s = 918$ kg/m^3, takže hmotnost ledu je $m = V s = 0{,}0057 \,.\, 918$ kg $\doteq 5{,}2$ kg.
Led v rouře má hmotnost asi 5,2 kg.
Výpočet tepla potřebného k roztavení 5,2 kg ledu teploty 0 °C na vodu téže teploty:
Měrné skupenské teplo tání ledu $l_0 = 80$ kcal/kg,

$$Q_1 = m\, l_0 = 5{,}2 \,.\, 80 \text{ kcal} = 416 \text{ kcal}\,.$$

K roztavení ledu je potřeba 416 kcal tepla.
Výpočet tepla vzniklého průtokem proudu:

$$Q_2 = 0{,}000\,24 \text{ kcal/J} \,.\, U\, I\, t =$$
$$= 0{,}000\,24 \,.\, 8{,}1 \,.\, 1500 \,.\, 300 \text{ kcal} \doteq 870 \text{ kcal}\,.$$

Průtokem proudu po dobu 5 minut vznikne asi 870 kcal tepla. Toto teplo stačí na roztavení ledu, který zcela vyplňuje rouru.

b) Druhé kolo soutěže

1. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

Skleněná lahvička se zabroušenou zátkou o tíze G_s má objem dutiny V_d. Jaký objem vody je nutno do ní dát, aby se právě vznášela ve vodě?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $G_s = 55{,}0$ p, $V_d = 100{,}0$ cm^3, měrná tíha skla je $\gamma_s = 2500$ kp/m^3.

Řešení:

Objem skla lahvičky označíme V_s, objem lahvičky i s dutinou $V = V_s + V_d$, tíhu vytlačené vody G_1, tíhu skla lahvičky G_s, tíhu vody v lahvičce G_v, měrnou tíhu vody γ_v.

Podle Archimédova zákona se těleso vznáší v kapalině, jestliže jeho tíha je rovna tíze vytlačené kapaliny. Má-li

se tedy dutá skleněná lahvička o tíze G_s vznášet ve vodě, musíme do ní dát takový objem V_s vody o tíze G_v, aby se součet tíhy G_s prázdné lahvičky a tíhy G_v vody do lahvičky nalité rovnal tíze G_1 vytlačené vody. Platí tedy rovnice

$$G_1 = G_s + G_v .$$

Odtud vypočítáme

$$G_v = G_1 - G_s$$

a dělíme-li obě strany rovnice měrnou tíhou γ_v vody, vyjde

$$\frac{G_v}{\gamma_v} = \frac{G_1}{\gamma_v} - \frac{G_s}{\gamma_v} . \qquad (1)$$

Tíha vytlačené vody je $G_1 = (V_s + V_d)\,\gamma_v$

a

$$\frac{G_v}{\gamma_v} = V_v .$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (1), vyjde

$$V_v = V_s + V_d - \frac{G_s}{\gamma_v} = \frac{G_s}{\gamma_s} + V_d - \frac{G_s}{\gamma_v} . \qquad (2)$$

Po dosazení daných hodnot dostaneme

$$V_v = \frac{55}{2{,}5}\ \mathrm{cm^3} + 100\ \mathrm{cm^3} - \frac{55}{1}\ \mathrm{cm^3} = 67\ \mathrm{cm^3}.$$

Do lahvičky je nutno dát 67 cm³ (ml) vody. Tato hodnota je obecně určena výrazem (2).

2. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

O jakou hodnotu stoupne za dobu τ teplota v elektricky vyhřívaném kalorimetru o příkonu P, obsahuje-li kalorimetr

a) vodu hmotnosti m_1,
b) vodu hmotnosti m_2 a ocel hmotnosti m_3.

Množství tepla, předané kalorimetru a ztráty tepla do okolí se zanedbávají.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\tau = 2$ min, $P = 600$ W, $m_1 = 2{,}0$ kg, $m_2 = 1{,}0$ kg, $m_3 = 1{,}0$ kg. Měrné teplo oceli $c_2 = 0{,}115$ kcal/kg °C.

Řešení:

Množství tepla vzniklého průchodem proudu označíme $Q = k P \tau$, kde $k = 0{,}000\,24$ kcal/J, původní teplotu látky v kalorimetru t_1, konečnou teplotu látky v kalorimetru t_2, teplotní rozdíl $t_2 - t_1$, měrné teplo vody c_1.

Zanedbáme-li množství tepla předané kalorimetru a ztráty tepla do okolí, pak se množství tepla vzniklého průchodem proudu rovná množství tepla přijatého látkami v kalorimetru.

a) Z kalorimetrické rovnice

$$k P \tau = m_1 c_1 (t_2 - t_1) \text{ vypočítáme}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{k P \tau}{m_1 c_1} = \frac{0{,}000\,24 \text{ kcal/J} \,.\, 600 \text{ J/s} \,.\, 120 \text{ s}}{2{,}0 \text{ kg} \,.\, 1{,}0 \text{ kcal/kg} \,.\, °\text{C}} =$$

$$= 8{,}6 \text{ °C}.$$

Teplota vody stoupne o 8,6 °C.

b) Z kalorimetrické rovnice

$$k P \tau = (m_1 c_1 + m_2 c_2)(t_2 - t_1) \text{ vypočítáme}$$

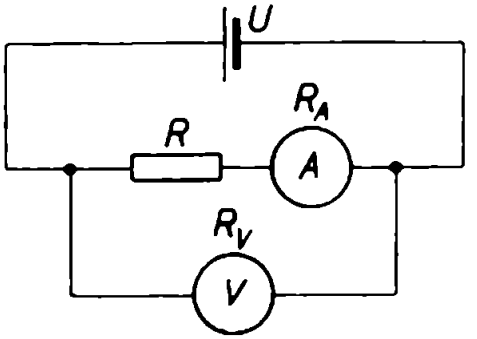
$$t_2 - t_1 = \frac{k P \tau}{m_1 c_1 + m_2 c_2} =$$

$$= \frac{0{,}000\,24 \,.\, 600 \,.\, 120}{1{,}0 \,.\, 1{,}0 + 1{,}0 \,.\, 0{,}115} \text{ °C} = 15{,}5 \text{ °C}.$$

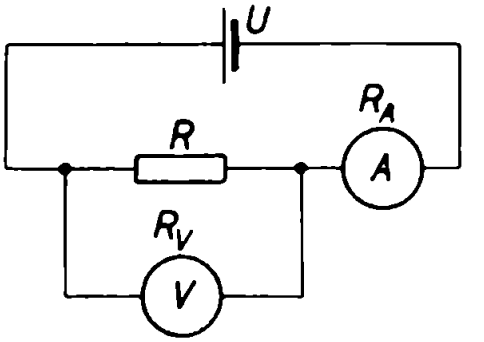
Teplota vody a oceli stoupne asi o 15,5 °C.

3. příklad (navrhla dr. Marta Chytilová)

Pro určení odporu spotřebiče R změříme voltmetrem napětí U na jeho svorkách a ampérmetrem proud, který prochází spotřebičem. K měření můžeme sestavit obvod podle obr. 64 nebo 65. V obou obvodech použijeme stejné měřicí přístroje při stejném měrném rozsahu a stejný zdroj napětí U.



Obr. 64



Obr. 65

a) Ve kterém obvodu naměříme ampérmetrem větší proud? Odůvodni svou odpověď.

b) Ve kterém obvodu naměříme voltmetrem větší napětí? Odůvodni svou odpověď.

c) Vyslov podmínku, za které naměříme v obou obvodech ampérmetrem přibližně stejně velký proud a voltmetrem přibližně stejně velké napětí.

Odpor ampérmetru je R_A, odpor voltmetru je R_V. Odpory spojovacích drátů neuvažujeme.

Řešení:

a) Ampérmetr naměří větší proud v obvodu podle obr. 65, protože zde měří úhrnný proud v obvodu; v obvodu podle obr. 64 měří proud jen v jedné větvi.

b) Voltmetr naměří větší napětí v obvodu podle obr. 64, protože zde měří na svorkách vodiče o odporu $R + R_A$;

v obvodu podle obr. 65 měří napětí jen na svorkách vodiče o odporu R.

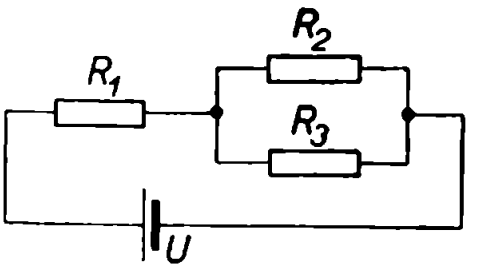
c) V obou obvodech naměří ampérmetr přibližně stejně velký proud, jestliže odpor voltmetru R_V je mnohonásobně větší než odpor R; v obou obvodech naměří voltmetr stejně velké napětí, jestliže je odpor R_A ampérmetru zanedbatelně malý proti odporu R.

Jsou-li současně splněny podmínky

$$R_A \ll R, \; R_V \gg R, \text{ platí } R = \frac{U}{I}.$$

4. příklad (navrhl Konrád Hofman)

Odpory R_1, R_2, R_3 můžeme zařadit do elektrického obvodu třemi způsoby tak, že dva odpory spojíme paralelně a třetí k nim připojíme sériově (na obr. 66 je znázorněn jeden ze tří možných způsobů obvodů). V jakém poměru jsou celkové proudy jdoucí obvodem v každém z těchto případů? Napětí zdroje je ve všech případech stejné a $R_1 = 10{,}0\ \Omega$, $R_2 = 20{,}0\ \Omega$, $R_3 = 30{,}0\ \Omega$.



Obr. 66

Vnitřní odpor zdroje a odpor spojovacích drátů zanedbáváme.

Řešení:

Výsledný odpor v prvém případě

$$R' = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_1 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3},$$

v druhém případě

$$R'' = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_2 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_3},$$

v třetím případě

$$R''' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2}.$$

Nazveme-li čitatele předešlých zlomků a, je

$$I_1 = \frac{U}{a}(R_2 + R_3),$$

$$I_2 = \frac{U}{a}(R_1 + R_3),$$

$$I_3 = \frac{U}{a}(R_1 + R_2).$$

$I_1 : I_2 : I_3 = (R_2 + R_3) : (R_1 + R_3) : (R_1 + R_2) = 5 : 4 : 3$.
Celkové proudy jsou v poměru 5 : 4 : 3 .

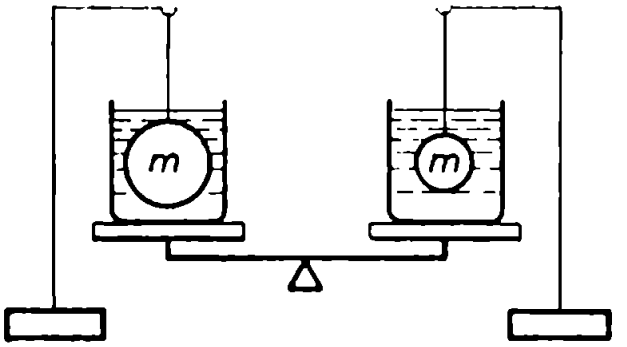
c) Třetí kolo soutěže

1. příklad (navrhla dr. Marta Chytilová)

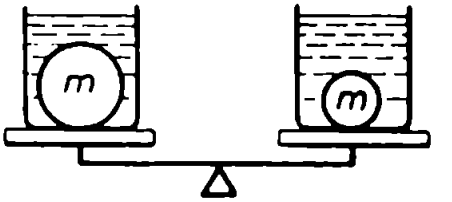
Dvě stejné nádoby položíme na misky rovnoramenných vah a nalejeme do každé z nich vodu stejného objemu. Do vody v každé nádobě zcela ponoříme kouli zavěšenou na niti na stojanu mimo váhy. Obě koule mají stejnou hmotnost, jedna z nich je skleněná, druhá ocelová. Koule se nedotýkají dna nádob (obr. 67).

a) V jaké poloze je vahadlo vah? Je hydrostatický tlak u dna nádob stejný nebo různý? Nakresli náčrtek a odůvodni své odpovědi.

b) Po přestřižení nití spadnou obě koule na dno nádob (obr. 68). V jaké poloze je vahadlo vah? Změní se hydrostatický tlak u dna nádob? Nakresli náčrtek a odůvodni své odpovědi.



Obr. 67



Obr. 68

Řešení:

a) Skleněná koule má větší objem než koule ocelová. Působí na ni větší vztlaková síla ve vodě, koule působí větší tlakovou silou na vodu a prostřednictvím vody na misku vah, vahadlo klesne na straně skleněné koule. Hydrostatický tlak vody u dna je větší tam, kde je ponořena skleněná koule, volný povrch vody stoupne do větší výše.

b) Po dopadu koulí na dno nádob se vahadlo ustálí v rovnovážné poloze, na obou miskách jsou tělesa stejné hmotnosti. Hydrostatický tlak vody u dna nádoby se skleněnou koulí zůstává větší než u druhé nádoby, protože volný povrch vody v nádobě se skleněnou koulí zůstává jako v případě a) výše než v druhé nádobě.

2. příklad (navrhla dr. Marta Chytilová)

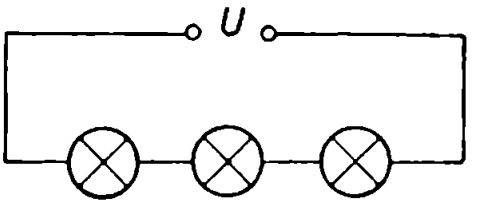
Na třech stejných žárovkách jsou údaje 120 V, 40 W.

a) Nakresli schémata všech možných elektrických obvodů, které obsahují tyto tři žárovky a mají různě velký

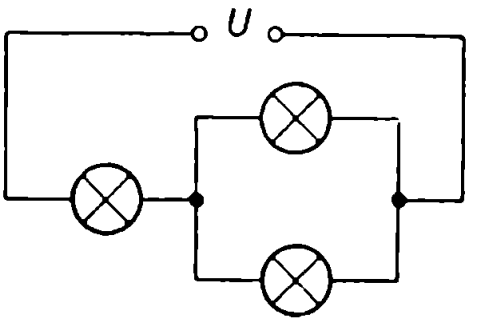
úhrnný odpor. Odpor spojovacích drátů a vnitřní odpor zdroje napětí zanedbej.

b) Který z obvodů a) má největší a který nejmenší odpor? Odůvodni.

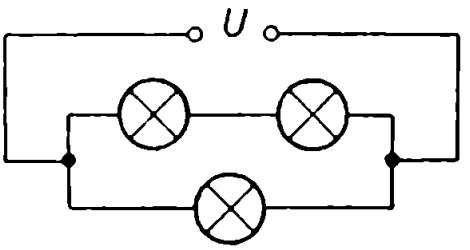
c) Obvody z úlohy a) připojíme ke zdroji napětí $U = 120$ V. Jaká podmínka musí být pro každou žárovku obvodu splněna, aby všechny žárovky v obvodu svítily stejně jasně? Ve kterém obvodu z úlohy a) je tato podmínka splněna?



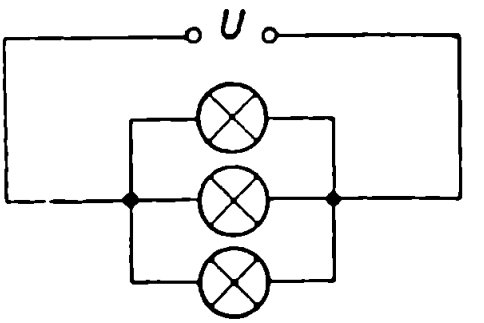
Obr. 69



Obr. 70



Obr. 71



Obr. 72

Řešení:

a) Všechna možná spojení jsou znázorněna na obr. 69, 70, 71 a 72.

b) R_1 je odpor jedné žárovky, úhrnný odpor obvodu v obr. 69 je $R = 3\,R_1$.

Úhrnný odpor v obr. 70 je

$$R = R_1 + \frac{R_1}{2} = \frac{3\,R_1}{2}\,.$$

Úhrnný odpor obvodu podle obr. 71 je

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\,R_1} + \frac{1}{R_1} = \frac{3}{2\,R_1}\,.$$

$$R = \frac{2}{3}\,R_1\,.$$

Úhrnný odpor obvodu podle obr. 72 je

$$R = \frac{R_1}{3}\,.$$

Porovnání výsledných odporů všech 4 možných obvodů:

$$3\,R_1 > \frac{3}{2}\,R_1 > \frac{2}{3}\,R_1 > \frac{1}{3}\,R_1\,.$$

Odpor obvodu podle obr. 69 je největší, podle obr. 72 nejmenší.

c) Žárovky podle obr. 69 svítí stejně jasně, protože na každé z nich je stejné napětí $\frac{U}{3}$ a všemi prochází stejný proud I; všechny mají tedy stejný příkon.

Žárovky podle obr. 72 svítí stejně jasně, protože na každé z nich je stejné napětí U a každou z nich prochází stejný proud I_1. Všechny mají tedy stejný příkon.

V obvodu podle obr. 70 se na žárovce $Ž_1$ a na dvojici $Ž_2$ a $Ž_3$ rozdělí napětí v poměru $U_1 : U_2 = R_1 : \frac{R_1}{2} = 2 : 1$, žárovkou $Ž_1$, prochází proud I, žárovkou $Ž_2$ nebo $Ž_3$ proud

$I_1 = \frac{I}{2}$. Příkon žárovky $Ž_1$ je $P_2 = \frac{U}{3} \cdot \frac{I}{2} = \frac{1}{6} U I$.
Žárovka $Ž_1$ svítí jasněji, má větší příkon než každá ze žárovek $Ž_2$ a $Ž_3$.
Žárovky v obvodu podle obr. 71:

$$I_1 : I_2 = R_1 : 2 R_1 = 1 : 2; \quad I_1 = \frac{I}{3}; \quad I_2 = \frac{2}{3} I .$$

Na každé žárovce $Ž_1$ a $Ž_2$ je napětí $\frac{U}{2}$; na žárovce $Ž_3$ napětí U. Příkon žárovky $Ž_1$ nebo $Ž_2$ je

$$P_1 = \frac{U}{2} \frac{I}{3} = \frac{1}{6} U I ,$$

příkon žárovky $Ž_3$ je

$$P_2 = U . \frac{2}{3} I = \frac{2}{3} U I .$$

Žárovka $Ž_3$ svítí jasněji než žárovky $Ž_1$ a $Ž_2$, $Ž_3$ má větší příkon než každá ze žárovek $Ž_1$ a $Ž_2$.

3. příklad (navrhla dr. Marta Chytilová)

Kus ledu o hmotnosti $m = 1{,}0$ kg má teplotu $t_1 = -10\ °C$.
a) Vypočítejte úhrnné množství tepla Q, které se potřebuje k roztavení ledu za normálního tlaku a k úplnému vypaření vzniklé vody při teplotě varu za normálního tlaku.

Měrné teplo ledu je $c_l = 0{,}5$ kcal/kg °C, vody $c_v = 1{,}0$ kcal/kg °C, měrné skupenské teplo tání ledu $l_0 = 80$ kcal/kg, měrné skupenské teplo varu vody $l_1 = 539$ kcal/kg.
b) Určete jednotlivé složky úhrnného množství tepla v %

z tohoto základu a znázorněte graficky na milimetrovém papíru.

Řešení:

$$t_1 = -10\ ^\circ\mathrm{C},\ t_2 = 0\ ^\circ\mathrm{C},\ t_3 = 100\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Množství tepla potřebné k ohřátí ledu na 0 °C je

$$Q_1 = m\,c_l\,(t_2 - t_1) = 1{,}0\ .\ 0{,}5\ .\ 10\ \mathrm{kcal} = 5\ \mathrm{kcal}.$$

Množství tepla k roztavení ledu na vodu 0 °C teplou je

$$Q_2 = m\,l_l = 1{,}0\ .\ 80\ \mathrm{kcal} = 80\ \mathrm{kcal}\ .$$

Množství tepla k ohřátí vody z 0 °C na 100 °C je

$$Q_3 = m\,c_v\,(t_3 - t_2) = 1{,}0\ .\ 1{,}0\ .\ 100\ \mathrm{kcal} = 100\ \mathrm{kcal}.$$

Množství tepla k odpaření vody 100 °C teplé na páru 100 °C teplou je

$$Q_4 = m\,l_1 = 1{,}0\ .\ 539\ \mathrm{kcal} = 539\ \mathrm{kcal}\ .$$

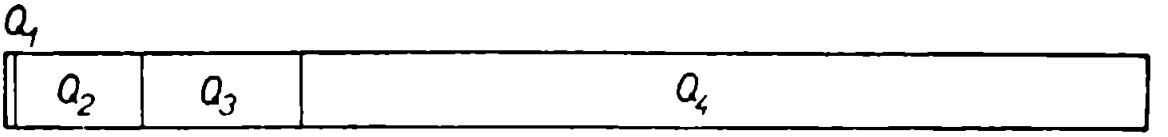
Úhrnné množství tepla je tedy

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 724\ \mathrm{kcal} \doteq 720\ \mathrm{kcal}\ .$$

b) 720 kcal = 100 % .

$$Q_1 = 0{,}7\ \%\ Q,$$
$$Q_2 = 11{,}0\ \%\ Q,$$
$$Q_3 = 13{,}8\ \%\ Q,$$
$$Q_4 = 74{,}5\ \%\ Q\ .$$

Nejvhodnější zobrazení je pomocí obdélníku, např. délky 20 cm, pak 1 % odpovídá šířka 0,2 cm (značí přibližně 7 kcal). Viz obr. 73.

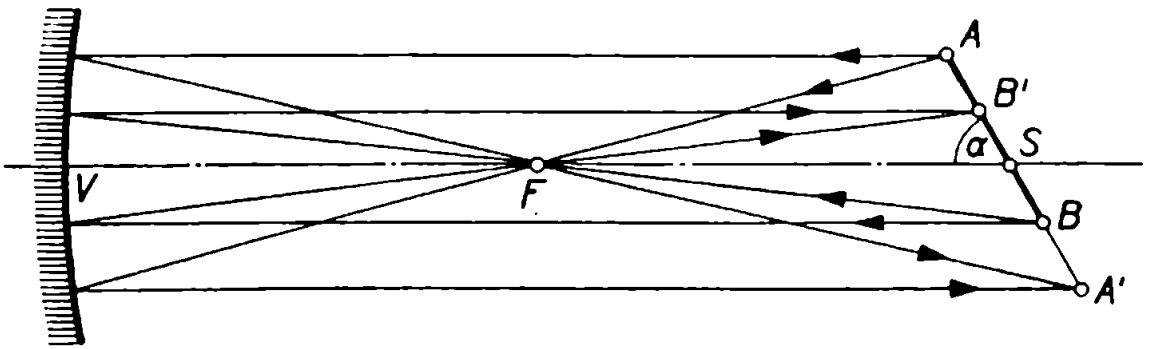


Obr. 73

4. příklad (navrhla dr. Marta Chytilová)

Před dutým zrcadlem o poloměru křivosti $r = 15{,}0$ cm je svítící úsečka, která prochází středem křivosti zrcadla S a svírá s optickou osou úhel $\alpha = 60°$; bod A je nad optickou osou a je blíže k zrcadlu, bod B je pod optickou osou; délka $SA = 2{,}0$ cm, $SB = 1{,}0$ cm.

Narýsuj obraz úsečky AB a urči jeho vlastnosti (obraz skutečný — neskutečný, délka větší — menší — stejná jako u předmětu, obraz přímý — převrácený vzhledem k předmětu).



Obr. 74

Řešení:

Konstrukce je provedena na obr. 74. Obraz $A'B'$ úsečky AB je skutečný (vzdálenost všech bodů úsečky AB od zrcadla je větší než f), délka obrazu $A'B'$ je větší než předmět AB, obraz je převrácený vzhledem k předmětu.

IV. ČÁST: DRUHÁ MEZINÁRODNÍ FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA

1. Průběh a výsledky soutěže

Organizátorem II. mezinárodní fyzikální olympiády (II. MFO) byla ve šk. roce 1967/68 Maďarská lidová republika. Soutěž proběhla v době od 23. června do 1. července 1968 v Budapešti a zúčastnilo se jí osm států: Bulharsko, Československo, Jugoslávie, Maďarsko, Německá demokratická republika, Polsko, Rumunsko a Sovětský Svaz. I. MFO v Polsku se zúčastnilo jen 5 států: Bulharsko, ČSSR, Maďarsko, Polsko a Rumunsko. Nově se II. MFO zúčastnily Jugoslávie, NDR a SSSR.

Soutěž ještě neprobíhala podle navrženého statutu. Návrh statutu byl předložen Československem (ve znění anglickém, českém, francouzském, německém, polském a ruském) již na I. mezinárodní fyzikální olympiádě a nikdo ze zúčastněných států nepodal připomínky; drobné připomínky byly jen z ČSSR, a to po nových diskusích v předsednictvu ÚV FO. Pak byl vypracován v ČSSR návrh statutu a směrnic k němu v konečném znění a předložen Polsku a Maďarsku k připomínkám — podle dohody na I. mezinárodní fyzikální olympiádě. Připomínky zaslalo několik dní před zahájením II. MFO Polsko. Vedoucí delegace ČSSR, který byl pověřen přípravou statutu, předložil poslední znění zpracovaného statutu a směrnic při zahájení II. MFO. Bylo usneseno, že se vedoucí delegací sejdou v říjnu t. r. v Brně, aby byly statut i směrnice prodiskutovány.

Z každého státu byli pozváni jen tři studenti a jeden vedoucí delegace. Vedením československé delegace pově-

řilo ministerstvo školství předsedu ÚV FO prof. RNDr. Rostislava Košťála. Na schůzi ÚV FO dne 18. 4. 1968 bylo stanoveno, že účastníky II. MFO budou první tři vítězové 3. kola kategorie A. Na schůzi předsednictva (a dalších určených členů ÚV FO) bylo proto dne 15. 5. 1968 určeno toto pořadí účastníků a náhradníků pro II. MFO:

Účastníci:

1. Jan Filipenský, IV. r. SPŠE Brno, Leninova,
2. Ondřej Křivánek, 3. r. SVVŠ Praha 2, W. Piecka 2,
3. Miroslav Kawalec, 3. r. SVVŠ Havířov,

náhradníci:

4. Mojmír Simerský, 4. r. SPŠVE, Rožnov p. Radhoštěm,
5. Pavel Polcar, 3. r. SVVŠ Velké Meziříčí,
6. Tomáš Markvart, 3. r. SVVŠ Praha 2, W. Piecka 2.

Maďarská lidová republika však stanovila pro účast v MFO věkovou hranici na 1. 1. 1949. Poněvadž náš vítěz 3. kola Jan Filipenský tuto podmínku nesplňoval (byl starší o 16 dní), žádal ÚV FO organizátora, aby tato podmínka byla zrušena. Vyřízení došlo teprve několik dní před odjezdem, když byl již za Filipenského povolán 1. náhradník. Proto střední průmyslová škola elektrotechnická v Brně, která měla v roce 1967 a v r. 1968 celostátního vítěze, nemohla opět vyslat svého absolventa na MFO.

Do Maďarska tedy odjížděli:

1. Ondřej Křivánek,
2. Miroslav Kawalec,
3. Mojmír Simerský.

Všech soutěžících na II. MFO bylo celkem 24; byli to

jen hoši. Mezi rumunskými účastníky byl i studující vojenské střední školy.

Soutěž byla zahájena druhý den po příjezdu, tj. 24. června v 18 hodin v posluchárně Vysoké školy technické v Budapešti. U předsednického stolu zasedli zástupce ministerstva školství a hlavní funkcionáři maďarské fyzikální společnosti a fyzikální olympiády. Po ukončení projevů promluvil za delegáty pozvaných států vedoucí československé delegace profesor RNDr. R. Košťál.

Po skončení slavnostního zahájení byla informační schůze účastníků, kterou řídil prof. R. Kunfalvi, vedoucí maďarské FO. Byly podány instrukce k průběhu olympiády a bylo oznámeno, že příklady budou dány k překladu vedoucím delegací půl hodiny před začátkem soutěže a že se klasifikace bude provádět bodováním tak, jak tomu bylo na I. MFO, od 10 bodů (nejlepší) až po 0 bodů (nevyhovující). Na řešení tří teoretických příkladů dne 25. června byla dána doba 5 hodin, na vypracování laboratorní úlohy, která se prováděla 26. června, bylo dáno rovněž 5 hodin.

Teoretické úlohy se řešily ve velké posluchárně Vysoké školy technické, řešení laboratorní úlohy ve fyzikálním ústavě přírodovědecké fakulty, ve velké laboratoři, která byla upravena tak, aby účastníci neviděli na práci sousedů.

Největší možný dosažitelný počet bodů byl 40. Úspěšným řešitelem byl ten řešitel, který dosáhl aspoň 20 bodů. Vzhledem k tomu, že experimentální úloha byla klasifikována příliš přísně, bylo dodatečně stanoveno, že úspěšným řešitelem je i ten řešitel, který dosáhl 19 bodů.

V době od 27. června do 29. června se pořádaly výlety a mezitím v Budapešti opravily maďarské komise úlohy. Do maďarštiny překládali práce tlumočníci, popř. vedoucí delegací.

Na zasedání vedoucích delegací byly dne 30. června v knihovně Studentského domova maďarským vedením předloženy výsledky soutěže ke schválení. Po diskusi byly výsledky schváleny.

Výsledky byly tyto:

	Jméno	Příklady	1.	2.	3.	4.	Součet
1.—2.	Mojmír Simerský	ČSSR	9	9	9	8	35
	Tomáš Kreglewski	Pol.	8	9	9	9	35
3.	László Takács	Maď.	10	5	9	9	33
4.—6.	Peter Georgiev	Bulh.	7	10	9	5	31
	Emil Matejev	Bulh.	6	10	9	6	31
	László Mihály	Maď.	9	5	9	8	31
7.—8.	Ondřej Křivánek	ČSSR	7	9	9	5	30
	Andrej Detela	Jug.	8	6	8	8	30
9.	Ferenc Marossy	Maď.	9	5	10	5	29
10.—11.	Joachim Loose	NDR	0	10	10	8	28
	Gad. Sel. Feizov	SSSR	8	5	9	6	28
12.—13.	Stefan Jackowski	Pol.	7	8	5	7	27
	Alex. Petr. Vinogradov	SSSR	6	6	9	6	27
14.—16.	Miroslav Dorešić	Jug.	7	9	0	8	24
	Petre Dan	Rum.	9	8	0	7	24
	Sergěj Vikt. Solncev	SSSR	7	5	5	7	24
17.—18.	Wolfgang Pilz	NDR	0	5	9	8	22
	Jacek Kossut	Pol.	7	5	5	5	22
19.	Uwe Kofer	NDR	0	5	8	8	21
20.—22.	Gentho Mincev	Bulh.	9	4	0	7	20
	Miroslav Kawalec	ČSSR	9	5	0	6	20
	Hrvoje Galić	Jug.	0	5	9	6	20
23.—24.	Ilie Matra	Rum.	7	5	0	7	19
	Laurentiu Tincu	Rum.	8	2	0	9	19

Všichni účastníci byli tedy úspěšní.

Z našich se umístili Mojmír Simerský na 1.—2. místě, Ondřej Křivánek na 7.—8. místě a Miroslav Kawalec na 20.—22. místě.

Ceny byly uděleny podle dosažených bodů takto:

1. cena: Simerský — 35 bodů (ČSSR), Kreglewski — 35 bodů (Polsko).
2. cena: Takács — 33 body (Maďarsko).
3. cena: Georgiev — 31 bodů, Matejev — 31 bodů (oba Bulharsko), Mihály — 31 bodů (Maďarsko).
4. cena: Křivánek — 30 bodů (ČSSR), Detela — 30 bodů (Jugoslávie).

Zvláštní cenu obdrželi:

Marossy (Maď.), Feizov (SSSR) a Loose (NDR).

Pořadí jednotlivých družstev podle dosažených bodů bylo toto:

1.	Maďarsko	93 bodů,
2.	ČSSR	85 bodů,
3.	Polsko	84 bodů,
4.	Bulharsko	82 bodů,
5.	SSSR	79 bodů,
6.	Jugoslávie	74 bodů,
7.	NDR	71 bodů,
8.	Rumunsko	62 bodů.

Všechna družstva byla tedy úspěšná.

Loňské prvé tři státy Maďarsko, ČSSR a Polsko obsadily opět prvá tři místa. Bulharsko, které loni bylo čtvrté, se značně zlepšilo a obsadilo v těžší soutěži opět čtvrté místo. Nově nastupující státy se zařadily na páté až sedmé místo.

Naše druhé místo v pořadí družstev a prvá a čtvrtá cena jednotlivců je pro nás skutečně úspěchem.

Po příjezdu do Budapešti byly všechny delegace uby-

továny ve Studentském domově Vysoké školy technické v Budapešti XI, Irínyi József u. 9. Stravování v Budapešti bylo zajištěno v menze Vysoké školy technické v Budapešti XI, Bercsényi u. 28.

V pondělí 24. června si prohlédli všichni účastníci Ústřední výzkumný fyzikální ústav a město. V úterý 25. června odpoledne byla prohlídka města a návštěva koupaliště Gellért. Ve středu 25. června šli účastníci na koupaliště Palatinus, nebo si prohlíželi město. Večer se zúčastnili koncertu v zahradě hotelu Károlyi kert, kde vyslechli Haydnovu skladbu Roční období.

Ve čtvrtek 27. června odjeli účastníci autobusem do Tihany, pak do Balatonfüredu, kde se mohli vykoupat. Večer odjeli do Veszprému, kdy byli ubytováni ve Veszprémské chemické univerzitě a stravovali se v univerzitní menze. V pátek 28. června byl uspořádán zájezd na koupaliště v Badacsonu a večer se výprava vrátila znovu do Veszprému. V sobotu 29. června odjeli účastníci autobusem do Tihany, odtud pak lodí do Siófoku a vrátili se do svých ubytoven v Budapešti.

V neděli 30. června byla dopoledne porada mezinárodní komise, jak bylo již uvedeno, a večer v 18 hodin pak bylo slavnostní vyhlášení výsledků v interhotelu IFJUSÁG.

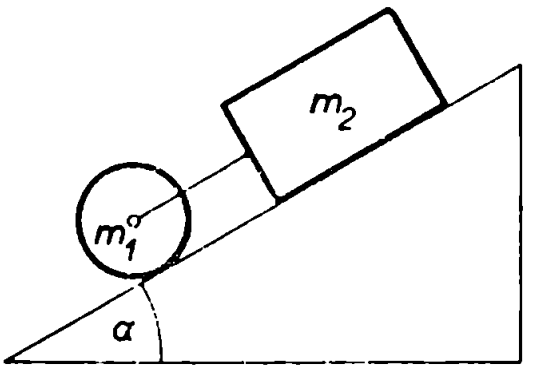
Po předání darů a po slavnostním proslovu, který měl zástupce ministerstva školství, promluvil jménem všech delegací vedoucí delegace ČSSR profesor RNDr. Rostislav Košťál, za soutěžící pak Mojmír Simerský (ČSSR) a Tomáš Kreglewski (Polsko). Slavnost byla zakončena společnou večeří v hotelu IFJUSÁG.

Celá soutěž probíhala v přátelském duchu všech účastníků.

V pondělí 1. července se delegace rozjížděly do svých domovů.

2. Soutěžní úlohy

1. příklad. Na nakloněné rovině s úhlem sklonu $\alpha = 30^\circ$ je homogenní válec o hmotnosti $m_1 = 8$ kg a o průměru $2r = 10$ cm. Na ose válce je připevněna nehmotným vláknem cihla o hmotnosti $m_2 = 4$ kg. S jakým zrychlením se tělesa pohybují? Koeficient vlečného tření mezi cihlou a nakloněnou rovinou je $f = 0{,}2$. Valivé tření a tření v ose zanedbejte. Moment setrvačnosti válce je $\mathcal{J} = \frac{1}{2} m r^2$ (obr. 75).



Obr. 75

Řešení:

Hledané zrychlení označme a.

a) Řešení užitím principu zachování energie:

Když je soustava v klidu a pak sestoupí o výšku h, tj. o dráhu s na nakloněné rovině, zmenší se potenciální energie o hodnotu

$$W_p = (m_1 + m_2)\, g\, h = (m_1 + m_2)\, g\, s \sin\alpha.$$

Při tomto pohybu nabyla soustava kinetickou energii

$$W_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}\,\omega^2,$$

kde $\mathcal{J}$ je moment setrvačnosti válce otáčejícího se kolem osy a ω je úhlová rychlost otáčení. Poněvadž $\mathcal{J} = \frac{1}{2} m_1 r^2$

$$\text{a } \omega = \frac{v}{r}, \text{ je } \frac{1}{2}\mathcal{J}\,\omega^2 = \frac{1}{4} m_1 r^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{4} m_1 v^2,$$

$$W_k = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{m_1}{2}\right) v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m_1 + m_2\right) v^2.$$

Třením spotřebovaná práce je

$$A = f m_2 g \cos \alpha \, . \, s \, .$$

Z principu zachování energie plyne

$$(m_1 + m_2) g s \sin \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) v^2 + f m_2 g s \cos \alpha . \tag{1}$$

Poněvadž ze vztahů

$$s = \frac{1}{2} a t^2 , \qquad v = a t$$

plyne $s = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a}$ čili $v^2 = 2 a s$,

dostáváme po dosazení do (1) a po zkrácení

$$a = \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - f m_2 \cos \alpha}{\frac{3}{2} m_1 + m_2} g \, .$$

Po dosazení daných číselných hodnot dostáváme

$$a = \frac{12 \, . \, \frac{1}{2} - 0{,}2 \, . \, 4 \, . \, \frac{1}{2} \sqrt{3}}{16} g = \frac{6 - 0{,}4 \sqrt{3}}{16} g =$$

$$= \frac{15 - \sqrt{3}}{40} g = 0{,}3317 \, g = 3{,}254 \text{ m s}^{-2} \, .$$

b) Řešení užitím sil (1. způsob):

Složka tíhové síly válce do směru pohybu (obr. 76) je $F_1 = m_1 g \sin \alpha$,

složka tíhové síly cihly do směru pohybu je

$$F_2 = m_2 g \sin \alpha ,$$

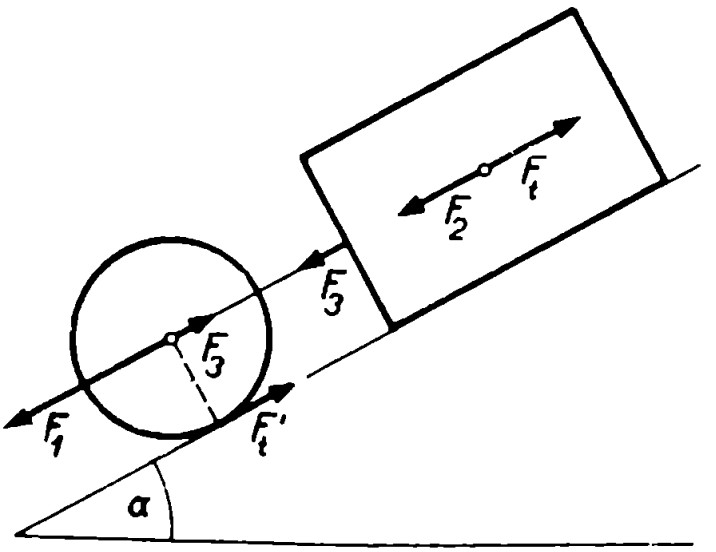
síla, kterou na sebe působí válec a cihla F_3 a síla vlečného

tření u cihly

$$F_t = f\, m_2\, g \cos \alpha\,.$$

Tyto síly působí jednak posuvný pohyb válce se zrychlením a — tedy síla zrychlení posuvného pohybu válce bude

$$F_t' = m_1\, a\,,$$



Obr. 76

jednak otáčivý pohyb válce. Aby vzniklo otáčení válce po nakloněné rovině (nikoliv jen pohyb smykem), musí mezi válcem a nakloněnou rovinou vzniknout tření. Tření valivé se zanedbává, nikoliv však tření vlečné F_t', které souvisí s brzdícím pohybem cihly (vyšetření podmínky úloha nežádala). Tato síla působí momentem vzhledem k ose válce o velikosti

$$M = F_t'\, r\,,$$

pro nějž platí

$$M = \mathcal{J}\, \varepsilon,\ \text{kde}\ \mathcal{J} = \frac{1}{2}\, m_1\, r^2,\ \varepsilon = \frac{a}{r}\,.$$

Pak tedy

$$F_t' = \frac{M}{r} = \frac{J}{r}\varepsilon = \frac{1}{2} m_1 a .$$

Tedy celková síla zrychlení válce je

$$m_1 a + \frac{1}{2} m_1 a$$

a musí být rovna síle na těleso působící, tedy

$$\frac{3}{2} m_1 a = F_1 - F_3 . \qquad (2)$$

Síly působící na cihlu způsobí posuvný pohyb se zrychlením a, a tedy pro výslednou sílu zrychlení $m_2 a$ musí platit

$$m_2 a = F_3 + F_2 - F_t . \qquad (3)$$

Sečtením rovnic (2) a (3) dostáváme

$$\left(\frac{3}{2} m_1 + m_2\right) a = F_1 + F_2 - F_t$$

a po dosazení

$$a = \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - f m_2 \cos \alpha}{\frac{3}{2} m_1 + m_2} g ,$$

tedy stejný výsledek jako v a).
Z rovnic (2) a (3) lze vypočíst též síly F_3 a F_t; vychází $F_3 = 0{,}192$ N a $F_t = 6{,}80$ N.

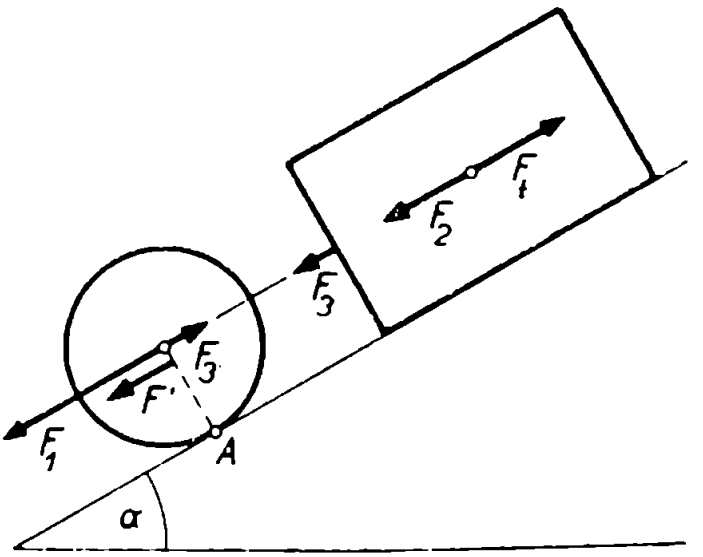
c) Řešení užitím sil (2. způsob):
Válec koná v určitém okamžiku vlastně otáčivý pohyb kolem okamžité přímky dotyku válce s nakloněnou rovinou (obr. 77). Sílu, působící v ose, která způsobuje tento otáčivý pohyb, označme F'; kolem bodu A působí mo-

mentem

$$M = F' r, \text{ kde } M = \mathcal{J}' \varepsilon .$$

Je-li moment setrvačnosti válce vzhledem k jeho rotační ose $\mathcal{J}$, je podle Steinerovy věty moment setrvačnosti válce vzhledem k bodu A

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J} + m_1 r^2 = \frac{1}{2} m_1 r^2 + m_1 r^2 = \frac{3}{2} m_1 r^2 .$$



Obr. 77

Poněvadž $\varepsilon = \frac{a}{r}$, je

$$F' = \frac{M}{r} = \frac{\mathcal{J}' \varepsilon}{r} = \frac{3}{2} m_1 a,$$

a tedy pohybová rovnice válce má tvar

$$\frac{3}{2} m_1 a = F_1 - F_3 .$$

Další postup je jako v případě b).

Poznámka:
Eliminujeme-li z rovnic (2) a (3) zrychlení a, dostaneme

$$m_2 F_1 - m_2 F_3 - \frac{3}{2} m_1 F_3 - \frac{3}{2} m_1 F_2 + \frac{3}{2} m_1 F_t = 0;$$

Z toho

$$F_3 \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2\right) = m_2 F_1 - \frac{3}{2} m_1 F_2 + \frac{3}{2} m_1 F_t .$$

Aby nastal valivý pohyb, musí být $F_3 \geqq 0$. To nastane pro úhel α, pro nějž po dosazení za F_1, F_2, a F_t dostáváme

$\left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \text{ je kladné}\right)$

$$m_2 m_1 g \sin \alpha - \frac{3}{2} m_1 m_2 g \sin \alpha + \frac{3}{2} m_1 f m_2 g \cos \alpha \geqq 0$$

čili

$$\sin \alpha - \frac{3}{2} \sin \alpha + \frac{3}{2} f \cos \alpha \geqq 0 ,$$

$$-\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{3}{2} f \cos \alpha \geqq 0 ,$$

$$\operatorname{tg} \alpha \leqq 3f = 0{,}60 , \quad \alpha \leqq 30°58' .$$

Valivý pohyb tedy nastane tehdy, pokud úhel α bude menší než 30°58′.

2. příklad

V skleněné nádobce je 300 cm³ toluenu o teplotě 0 ° C. V druhé nádobce je 110 cm³ toluenu o teplotě 100 °C (součet objemů je tedy 410 cm³). Jaký bude společný objem, když obě kapaliny slejeme? Teplotní součinitel objemové roztažnosti toluenu je $\beta = 0{,}001$ deg^{-1}. Tepelné ztráty zanedbejte.

Řešení:

Abychom stanovili výsledný objem po smíchání, musíme nejdřív určit výslednou teplotu. Abychom stanovili výslednou teplotu, musíme určit poměr hmotností jednotlivých množství kapalin m_1 a m_2. Poněvadž poměr hmotností jednotlivých množství kapalin musí být týž jako poměr jejich objemů za téže teploty, vypočteme si nejdříve příslušné objemy pro teplotu 0 °C. Označme proto u prvého množství kapaliny

objem při teplotě t_1 písmenem V_1,
objem při teplotě 0 °C písmenem V_{10},

u druhého množství kapaliny

objem při teplotě t_2 písmenem V_2,
objem při teplotě 0 °C písmenem V_{20}.

Pak musí platit

$$V_{10} = \frac{V_1}{1 + \beta t_1}, \quad V_{20} = \frac{V_2}{1 + \beta t_2},$$

kde β je teplotní součinitel objemové roztažnosti kapaliny. Označíme-li hustotu kapaliny při teplotě 0 °C písmenem ϱ_0, pak jsou hmotnosti kapalin

$$m_1 = \varrho_0 V_{10}, \quad m_2 = \varrho_0 V_{20},$$
$$m_1 + m_2 = \varrho_0 (V_{10} + V_{20}). \tag{1}$$

Označíme-li teplotu kapaliny po smíchání t'

$$t' = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}, \tag{2}$$

pak objemy kapalin při této teplotě budou

$$V_1' = V_{10} (1 + \beta t'), \quad V_2' = V_{20} (1 + \beta t'),$$

a tedy celkový objem užitím (2) a (1)

$$V = V_1' + V_2' = V_{10} + V_{20} + (V_{10} + V_{20})\,\beta\,t' =$$

$$= V_{10} + V_{20} + (V_{10} + V_{20})\,\beta\,\frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= V_{10} + V_{20} + \frac{\beta}{\varrho_0}(m_1 t_1 + m_2 t_2) =$$

$$= V_{10} + V_{20} + \beta V_{10} t_1 + \beta V_{20} t_2 = V_1 + V_2 .$$

Zůstává tedy objem kapalin i po smíchání týž jako před smícháním.

Pro případ $t_1 = 0\ °C$, $t_2 = 100\ °C$, $V_1 = V_{10} = 300\ cm^3$, $V_2 = 110\ cm^3$, $\beta = 0{,}001\ deg^{-1}$ vychází

$$V_{20} = \frac{V_2}{1 + \beta t_2} = \frac{110}{1{,}1}\ cm^3 = 100\ cm^3,$$

$$m_1 : m_2 = V_{10} : V_{20} = 3 : 1 ,$$

$$t' = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} = \frac{100}{4}\ °C = 25\ °C$$

a objem při této výsledné teplotě

$$V = 400\,(1 + 0{,}025)\ cm^3 = 410{,}0\ cm^3 ,$$

tedy výsledný objem je týž jako součet původních objemů.

3. příklad

Půlválec je zhotoven ze skla o indexu lomu $n = \sqrt{2}$. Na rovinnou plochu dopadají světelné paprsky pod úhlem dopadu $\alpha = 45°$. Světelné paprsky jsou v rovině kolmé na osu válce. Z které části válce paprsky vystupují (obr. 78)?

Řešení:

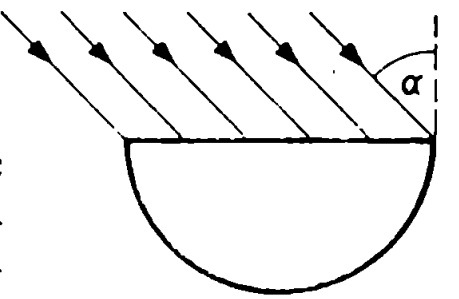
Pro index lomu platí podle Snelliova zákona

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n ,$$

kde α je úhel dopadu a β je úhel lomu. V našem případě je $\alpha = 45°, n = \sqrt{2}$, a tedy

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{1}{2}$$

čili $\beta = 30°$.



Obr. 78

Paprsky, které se na rovinné ploše lomí, budou dopadat na válcovou oblinu pod různými úhly a projdou jen tehdy, když jejich úhel dopadu bude menší nebo roven meznímu úhlu ε, pro který platí ($\alpha = 90°$)

$$\sin \varepsilon = \frac{\sin 90°}{n} = \frac{1}{2}\sqrt{2} .$$

Mezní úhel pro sklo v daném případě má velikost $\varepsilon = 45°$.

Zvolme nákresnou rovinu kolmou k ose válce a v této rovině proveďme konstrukci chodu paprsků. Bod S je obrazem osy válcové plochy. Paprsek jdoucí levým krajním bodem A se lomí do bodu A_1. Úhel ASA_1 označme φ_1. Označme obecně φ úhel, který svírá spojnice bodu na povrchu válce se středem S s polopřímkou SA. Pak na povrch válce od $\varphi = 0°$ do $\varphi_1 = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$ (tj. v obr. 79a na povrch od A do A_1) nedopadá žádný lomený paprsek.

Je-li ψ úhel dopadu na válcovou oblinu, pak platí pro všechny paprsky, dopadající na hraniční rovinu poloválce

mezi body A a S (obr. 79a)

$$\psi = 180° - \varphi - (90° - \beta)$$

a pro paprsky dopadající mezi body S a B (obr. 79b)

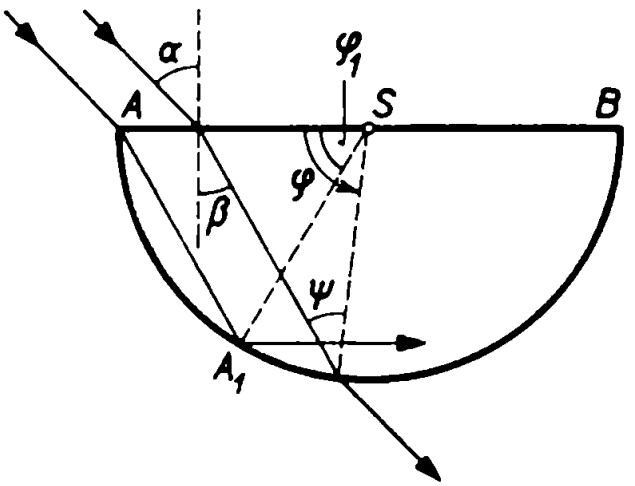
$$\psi = 180° - (180° - \varphi) - (90° - \beta) .$$

Paprsek vystoupí z válce tehdy, bude-li

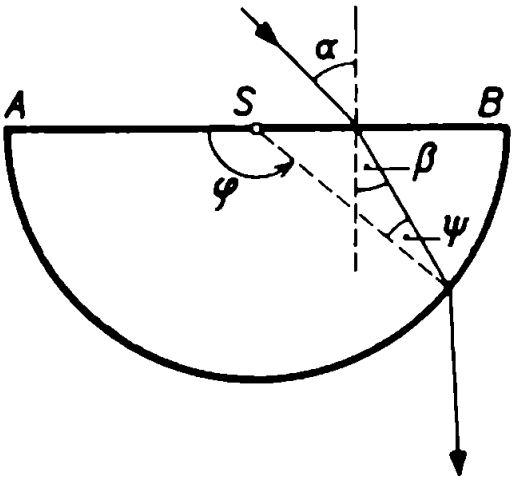
$$\psi \leqq \varepsilon .$$

Po dosazení za β a ε obdržíme

$$180° - \varphi - 60° \leqq 45°, \text{ takže } \varphi \geqq 75°,$$
$$180° - 180° + \varphi - 120° \leqq 45°, \text{ tedy } \varphi \leqq 165°.$$



Obr. 79a



Obr. 79b

Vychází tedy, že v prostoru $75° \leqq \varphi \leqq 165°$ bude úhel, který svírá lomený paprsek s kolmicí dopadu na válcovou plochu menší nebo roven úhlu meznímu, a proto bude pro tento úhel φ paprsek ze skla vystupovat. Je to tedy právě z poloviny válcové plochy.

4. úkol — experimentální

Dostanete tři zavřené krabičky, které nesmíte otevřít. V každé krabičce je zabudován element elektrického obvodu.

a) Určete, co je v krabičce zabudováno, aniž ji otevřete.
b) Určete měřením charakteristické údaje zabudovaných elementů.

K měření lze použít:
2 univerzální měřicí přístroje (UNIVO),
zdroj střídavého proudu o 50 Hz,
zdroj stejnosměrného proudu.

Střídavý proud lze odebírat z rozvodné desky z horních bílých zdířek, stejnosměrný proud z dolních bílých zdířek.
Při použití měřicích přístrojů je třeba dbát těchto pokynů:

1. Před provedením jednotlivého měření postavit přepínač do vhodné polohy (= nebo ∿).
2. Jeden přívodní drát zapnout do kontaktu označeného —, druhý do kontaktu zvoleného rozsahu měření.
3. Při každém měření začínat od největšího rozsahu.
4. Stupnice je dělena na 60 dílků.
5. Zakryté kontakty nesmějí být použity.
6. Měřicí rozsah

6 A	1,2 A	0,3 A	120 mA	30 mA	6 mA	1,2 mA
Vnitřní odpor přístroje v Ω						
0,17	0,85	3,4	8,5	34,0	170	850

Měřicí rozsah ve V	600	300	120	30	6	3
Vnitřní odpor přístroje v kΩ	600	300	120	30	6	3

7. Možná chyba přístroje při stejnosměrném proudu je 2 %, při střídavém proudu 3 %.

Řešení:

a) α) Jestliže připojíme na zdířky krabičky stejnosměrné napětí a pak stejně veliké střídavé napětí a v obou případech prochází elementem stejný proud, pak jde o element s ohmickým odporem.

β) Jestliže elementem prochází při střídavém napětí menší proud než při stejně velkém stejnosměrném napětí, jde o cívku s ohmickým odporem a indukčností.

γ) Jestliže elementem prochází proud při střídavém napětí, ale neprochází při stejnosměrném napětí, obsahuje krabička kondenzátor.

V jedné krabičce byl element s ohmickým odporem, v druhé cívka s ohmickým odporem a indukčností, ve třetí kondenzátor.

b) Měření ohmického odporu, induktance a kapacity kondenzátoru bylo pak provedeno obvyklými metodami.

Obsah

I. část. Zpráva o průběhu soutěže 5

1. Organizace soutěže 5
2. Složení Ústředního výboru FO ve šk. r. 1967/68 6
3. Krajské výbory FO a jejich předsedové 8
4. Okresní výbory FO 9
5. Klasifikační zásady 9
6. Průběh soutěže ve šk. r. 1967/68 10
   A. První kolo soutěže kategorií A, B a C 10
   B. Druhé kolo kategorií A, B a C 11
   C. Třetí kolo kategorie A 20
   D. Závěr soutěže kategorií A, B a C 26
   E. Soutěž kategorie D 28
   F. Třetí kolo (krajské) kat. D 30
   G. Závěr IX. ročníku FO 31

II. část. Témata k prostudování 33

1. Kategorie A: K. Hofman, Magnetické obvody. Točivé magnetické pole 33
2. Kategorie B: Fr. Černický, Hudební akustika 52
3. Kategorie C: Dr. I. Náter, Vnútorné trenie v kvapalinách . . 66

III. část. Soutěžní úlohy 76

1. Úlohy kategorie A 76
   a) První kolo soutěže 76
   b) Druhé kolo soutěže 112
   c) Třetí kolo soutěže 120
2. Úlohy kategorie B 137
   a) První kolo soutěže 137
   b) Druhé kolo soutěže 164
3. Úlohy kategorie C 171
   a) První kolo soutěže 171
   b) Druhé kolo soutěže 202
4. Úlohy kategorie D 211
   a) První kolo soutěže 211
   b) Druhé kolo soutěže 225
   c) Třetí kolo soutěže 230

IV. část. Druhá mezinárodní fyzikální olympiáda 237

1. Průběh a výsledky soutěže 237
2. Soutěžní úlohy 243

Edice: Pomocné knihy pro žáky

Josef Konrád a prof. dr. Rostislav Košťál

Devátý ročník fyzikální olympiády

Obálku navrhl Josef Prchal — Obrázky rýsoval ing. Jan Volejník — Vydání 1. — Praha 1969 — Počet stran 255 Odpovědná redaktorka: Jiřina Civínová — Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk — Technická redaktorka: Zoe Blahová

Z nové sazby písmem Plantin vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p., závod 4, Ostrovní 30, Praha 1 — AA 10,33 — VA 10,87 — Tematická skupina a podskupina 03/5 — Cena brožovaného výtisku Kčs 13,00 505/21, 852

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou publikaci č. 95-0-28

15—090—69 Kčs 13,00