

SPN

VIII. ročník
fyzikální
olympiády

Fyzikální olympiáda

ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE
KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1966 — 67

VIII. ročník fyzikální olympiády

ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE
KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1966/67

.

PRAHA 1968
STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Zpracovali Josef Konrád a prof. dr. Rostislav Košťál
Recenzovali František Živný a dr. Ivan Náter

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1968

I. ČÁST: ZPRÁVA O PRŮBĚHU SOUTĚŽE

1. Organizace soutěže

Ve školním roce 1966/67 se konal osmý ročník soutěže fyzikální olympiády pro žáky středních škol a po čtvrté také pro žáky ZDŠ.

Organizační řád fyzikální olympiády (FO) i matematické olympiády (MO) byl stanoven výnosem ministerstva školství a kultury (MŠK) ze dne 14. března 1963, čj. 2293/63-I/1 a uveřejněn ve Věstníku MŠK 1963, seš. 12, kde jsou uvedeny i důvody pro zavedení těchto soutěží: vést žáky k samostatné práci, vzbudit u žáků zájem o úspěšné studium matematiky a fyziky a zvýšit úroveň vyučování a vyučovací výsledky v těchto předmětech. Obě soutěže mají přispět k vyhledávání a k podpoře žáků vynikajících v matematice a fyzice, a tím napomáhat k zajištění většího počtu matematicky a fyzikálně školených pracovníků pro naši hospodářskotechnickou výstavbu.

Soutěž je dobrovolná a je určena pro žáky výběrových škol 2. cyklu a devátého ročníku základních devítiletých škol. Probíhá ve čtyřech kategoriích. Kategorie A je určena pro žáky třetích ročníků středních všeobecně vzdělávacích škol a třetích a čtvrtých ročníků středních odborných škol. Kategorie B je určena pro žáky druhých ročníků a kategorie C pro žáky prvních ročníků všech středních výběrových škol. Kategorie D se pořádá pro žáky devátých ročníků ZDŠ.

Účast v kategorii pro vyšší třídu může žák z nižší třídy povolit vyučující učitel s referentem pro FO ve škole. Tyto mimořádné případy hlásí referent krajskému výboru FO.

Soutěž v kategorii B, C a D probíhá ve dvou kolech, v kategorii A ve třech kolech.

V prvním kole mají soutěžící za úkol do určeného termínu řešit 9 úloh a v kat. A, B a C prostudovat samostatně fyzikální téma. Tato témata pro všechny tři kategorie byla otištěna v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální.

Podle citovaného výnosu MŠK pomáhají rozvoji matematických a fyzikálních znalostí a dovedností ještě opatření, mezi něž patří prázdninová celostátní soustředění žáků kategorie B a krajská sou-

středění žáků kategorie B a C, během roku kursy přednášek pro žáky středních škol, přednáškové kursy pro učitele ZDŠ a konečně speciální třídy pro nadané matematiky a fyziky.

Speciální třídy jsou zřízeny ve všech krajích podle výnosu MŠK ze dne 25. 3. 1965, čj. 10 262/65-II/1 na středních všeobecně vzdělávacích školách tak, že do nich byli soustředováni (na základě dobrovolných přihlášek) žáci vždy z celého příslušného kraje a bylo jim popřípadě zajištěno internátní ubytování.

Podle organizačního řádu jsou pořadateli soutěže FO ministerstvo školství spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků (JČMF) a Československým svazem mládeže (ČSM).

Řízením soutěže FO pověřilo MŠ na návrh ÚV JČMF Ústřední výbor fyzikální olympiády (ÚV FO).

2. Složení Ústředního výboru fyzikální olympiády ve šk. r. 1966/67

ÚV FO se skládá ze zástupců pořádajících institucí, tzn. ze zástupce MŠ, zástupce JČMF, ČSM a z učitelů středních a vysokých škol. Kromě toho jsou členy ÚV FO i všichni předsedové krajských výborů FO (KV FO).

Funkční období členů ÚV FO je tříleté.

Sídlem ÚV FO je od školního roku 1966/67 Brno, přírodovědecká fakulta University Jana Ev. Purkyně, Kotlářská 2.

Ve šk. r. 1966/67 měl ÚV FO toto složení:

Předseda: RNDr. *Rostislav Košťál*, profesor elektrotechnické fakulty Vysokého učení technického v Brně a Vyššího vojenského učiliště ve Vyškově,

místopředseda: RNDr. *Ivan Náter*, docent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě,

jednatel: *Josef Konrád*, odborný asistent přírodovědecké fakulty University J. E. Purkyně v Brně,

další členové (v abecedním pořadí):

Josef Bartůněk, ústřední inspektor ministerstva školství v Praze,

František Cimbůrek, profesor SVVŠ v Praze Libni,

RNDr. *Marta Chytilová*, vědecká pracovnice Výzkumného ústavu pedagogického v Praze,

Milan Rádl, odborný asistent Vysoké školy strojnické a elektrotechnické v Plzni,

Evžen Říman, CSc., zást. docenta elektrotechnické fakulty Českého vysokého učení technického v Praze,
Jan Tesař, profesor SVVŠ v důchodu, Praha,
RNDr. *Jan Valouch*, profesor matematicko-fyzikální fakulty University Karlovy v Praze a ústřední sekretář JČMF v Praze,
RNDr. *Bohumil Vlach*, docent přírodovědecké fakulty University J. E. Purkyně v Brně,
Ivo Volf, profesor SVVŠ v Hradci Králové,
ing. *Bohumil Vybíral*, odborný asistent Vyššího vojenského učiliště ve Vyškově,

Jozef Zámečník, odborný asistent elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě.

Na ustavující schůzi nového ÚV FO ve dnech 31. 8. a 1. 9. 1966 byla určena komise pro výběr příkladů. Jejím předsedou je dr. Ivan Náter (místopředseda ÚV FO). Komise pracuje ve dvou stupních:

V komisi pro základní výběr příkladů pracovali tito členové ÚV FO:
Jozef Zámečník (příklady z mechaniky a vlnění),
Milan Rádl (molekulová fyzika a termika),
Ivo Volf (elektřina a elektromagnetické vlnění),
František Cimbůrek (optika a atomistika).

V komisi pro konečnou redakci příkladů pracovali tito členové ÚV FO:

Evžen Říman (příklady pro kategorii A),
dr. *Marta Chytilová* (kategorie B),
Jan Tesař (kategorie C),
dr. *Bohumil Vlach* (kategorie D).

[Členové komise pro základní výběr příkladů recenzovali všechny návrhy úloh, zaslané jednotlivými KV FO (asi 140 návrhů úloh), vyřadili nevhodné úlohy a vhodné úlohy doporučili zařadit do jednotlivých kategorií, resp. kol jako soutěžní úlohy. Z doporučených úloh členové komise pro konečnou redakci příkladů po definitivní úpravě textů a řešení vybrali úlohy pro 2. kolo VIII. ročníku FO (všechny kategorie), pro 3. kolo VIII. ročníku FO (kategorie A) a pro 1. kolo IX. ročníku FO (všechny kategorie).

3. Krajské výbory FO ve šk. r. 1966/67 a jejich předsedové

Pro řízení soutěže prvního kola a druhého kola všech kategorií se zřizují krajské výbory fyzikální olympiády (KV FO). Jejich předsedy

a členy jmenuje odbor školství a kultury KNV na návrh poboček JČMF v kraji. Jsou v nich zástupci odborů školství a kultury, zástupci poboček JČMF v kraji, zástupci KV ČSM a profesori a učitelé fyziky. Pokud možno jsou v KV FO co nejvíce zastoupeni učitelé vysokých škol. Předsednictvo KV FO tvoří předseda, místopředseda (resp. místopředsedové) a jednatel (resp. jednatele).

Ve šk. r. 1966/67 byli předsedy KV FO v jednotlivých krajích:

Praha: *František Černický*, odborný asistent MFF UK v Praze
Středočeský: *František Fišer*, prof. SVVŠ v d., Praha

Jihočeský: *Konrád Hofman*, odb. asistent ped. fakulty v Č. Budějovicích

Západočeský: ing. *Miloš Rabas*, odb. asistent Vysoké školy strojnické a elektrotechnické v Plzni

Severočeský: *Josef Sušanka*, pracovník metod. oddělení odboru školství KNV v Ústí nad Labem

Východočeský: *Zdeněk Ungermann*, odborný asistent pedagogické fakulty v Hradci Králové

Jihomoravský: *Lubomír Vašek*, odborný asistent strojnické fakulty VUT v Brně, pobočka v Gottwaldově

Severomoravský: *František Živný*, ředitel SVVŠ v důchodu, N. Bohumín

Západoslovenský: RNDr. *Ivan Náter*, docent Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě, zástupkyně předsedy v ÚV FO *Zuzana Šimkovicová*, profesorka SVŠ v Bratislavě, Novohradská

Středoslovenský: *Rastislav Baník*, odborný asistent pedagogické fakulty v Banské Bystrici

Východoslovenský: RNDr. *Jozef Tuček*, CSc., docent přírodovědecké fakulty University P. J. Šafárika v Košicích

4. Okresní výbory fyzikální olympiády

V kategorii D řídí soutěž prvního a druhého kola okresní výbory fyzikální olympiády (OV FO), zřízené v sídlech ONV. OV FO se skládají z předsedy, místopředsedy, jednatele, zástupce odboru školství a kultury příslušného ONV, zástupce OV ČSM, popřípadě dalších profesorů nebo učitelů. Snažíme se, aby v OV FO byli zastoupeni pokud možno co nejvíce učitelé škol 2. cyklu.

5. Klasifikační zásady

Pro zpracování úloh jsou každoročně uveřejňovány v letáku potřebné pokyny. Řešení úloh se klasifikuje takto:

1. *výborně*, jestliže je úloha rozřešena správně, nebo řešení má nanejvýš formální chyby nebo jen menší odbornou závadu;
2. *dobře*, jestliže řešení vystihuje úkol, ale má větší odborné nedostatky; dobře je hodnoceno i správné řešení, vyskytují-li se v něm závažné formální nedostatky;
3. *nevyhovující*, jestliže nedostatky odborného rázu jsou závažné nebo řešení je z větší části neúplné; řešení je také nevyhovující, chybí-li výklad nebo je-li neúplný, takže z něho nelze soudit na myšlenkový postup podaného řešení.

Řešené úlohy prvního kola opraví učitel vyučující ve třídě fyzice a referent pro FO na škole. Po ukončení prvního kola navrhne referent pro FO na škole úspěšné řešitele do druhého kola soutěže a odešle opravené úlohy všech řešitelů (i neúspěšných) spolu s návrhem příslušnému KV FO. Po kontrole úloh rozhodne KV FO, kteří z navržených řešitelů budou zařazeni do druhého kola. KV FO si může dát předložit opravená řešení úloh již po ukončení jednotlivých termínů.

Úspěšnými řešiteli prvního kola soutěže jsou ti žáci, kteří úspěšně vyřešili aspoň šest úloh. Ze dvou zadaných experimentálních úloh v kategoriích A, B a C musí každý soutěžící žák řešit (i když neúspěšně) aspoň jednu, má-li se stát úspěšným řešitelem prvního kola soutěže FO. V kategorii D experimentální úlohy dosud zadávány nebyly.

V druhém kole řeší soutěžící čtyři úlohy teoretické. Úspěšným řešitelem druhého kola je každý řešitel, který úspěšně vypracoval aspoň dvě úlohy.

Z nejúspěšnějších účastníků druhého kola kategorie A bylo na schůzi ÚV FO vybráno na návrh jednotlivých KV FO celkem 80 soutěžících ze všech krajů k účasti na třetím kole soutěže.

V třetím kole řešili účastníci čtyři úlohy teoretické a jednu experimentální. Úspěšnými řešiteli byli ti žáci, kteří rozřešili úspěšně aspoň tři ze zadaných úloh. Dvacet nejlepších řešitelů bylo prohlášeno vítězi třetího kola osmého ročníku soutěže FO.

Řešení úloh je nutno vždy doprovodit slovním výkladem tak, aby každý porozuměl myšlenkovému postupu. Úloha bez slovního výkladu se hodnotí jako nevyhovující.

6. Průběh soutěže ve školním roce 1966/67

Soutěž probíhala ve čtyřech kategoriích podle vyspělosti žáků (zpravidla podle studijního ročníku), a to v kategorii A ve třech kolech, v kategoriích B, C a D ve dvou kolech. V Praze, ve Východočeském kraji a v Jihomoravském kraji proběhla letos v kategorii D pokusně soutěž i v třetím (krajském) kole; v Jihomoravském kraji již podruhé.

A. První kolo soutěže kategorie A, B, C

První kolo soutěže probíhalo na školách v kategoriích A, B a C od září 1966 do 15. února 1967, v kategorii D do 31. března 1967. Úlohy pro první kolo byly uveřejněny v 1. čísle Rozhledů matematicko-fyzikálních a v 1. čísle časopisu Fyzika ve škole. Kromě toho nákladem 5000 výtisků vydalo Státní pedagogické nakladatelství leták s pokyny a úlohami pro kategorii A, B a C. Letáky byly rozeslány n. p. Učební pomůcky na KV FO, které je rozeslaly školám. Autorem letáku je jednatel ÚV FO.

Témata k prostudování byla uveřejněna v Rozhledech matematicko-fyzikálních 1966 v 1., 2. a 3. čísle. Na tento způsob publikování jsou však ze škol velké stížnosti, protože náklad Rozhledů je malý a když žáci (např. z prvních ročníků) se na počátku školního roku chtějí přihlásit k odběru Rozhledů, už časopis nedostanou.

Úlohy prvního kola si podle výnosu MŠ mohou KV FO dát posílat vždy hned po odevzdání každé trojice k sjednocení klasifikace v celém kraji. Této možnosti využívají takřka všechny kraje, kontrolují klasifikaci, jak ji provedli učitelé ve školách, a sjednocují ji pro celý kraj. Pouze v Západočeském kraji se prováděla kontrola jen namátkově, v kraji Severočeském se oprava úloh nekontrolovala.

Počet zapojených škol podle jednotlivých kategorií a krajů je uveden v tabulce 1. Počet účastníků v jednotlivých kategoriích podle krajů je uveden v tabulce 2, kde značí S počet soutěžících, U počet úspěšných řešitelů.

Poznámky k tabulce 1:

- 1) OU dopr. podniků, Praha 5 — Motol, kat. C.
- 2) OU železniční Chomutov a Soběduhy, obě kat. C.
- 3) OU Chepos Chotěboř (kat. C), OU n. p. VChZ Synthesia Semtín (kat. B a C), OU ČKD Chocẽň (kat. C).
- 4) Dopravní šk. Valtice, SZTŠ Třebíč, SZŠ Třebíč, SEŠ Znojmo (všechny kat. C).
- 5) ZDŠ Bratislava, Košická ul. (kat. C).

Počet škôl zapojených v VIII. ročníku FO

9

Tabulka 2

Počet žáků soutěžících v 1. kole

(S značí počet soutěžících, U počet úspěšných řešitelů, c. celkový počet žáků, d. z toho počet dívek)

Kraj	kategorie A				kategorie B				kategorie C				celkem			
	S		U		S		U		S		U		S		U	
	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.
Praha	146	23	120	17	89	9	66	5	227	52	105	21	462	84	291	43
Stč.	94	22	52	14	83	20	49	7	88	19	42	8	265	61	143	29
Jč.	44	5	31	3	38	3	27	2	49	8	27	6	131	16	85	11
Zč.	42	11	27	6	37	7	19	5	83	22	59	9	162	40	105	20
St.	75	18	55	14	55	9	43	4	138	33	76	18	268	60	174	36
Vč.	145	26	75	7	133	35	55	11	262	58	109	28	540	119	239	46
Jm.	118	11	78	5	132	20	65	9	332	74	132	21	582	105	275	35
Sm.	66	8	52	7	102	22	54	7	243	63	108	28	411	93	214	42
Zsl.	118	41	38	11	124	22	62	3	293	106	85	28	535	169	185	42
Stsl.	111	37	18	6	132	72	26	4	312	131	67	12	555	240	111	22
Vsl.	26	9	15	4	52	15	14	2	111	23	40	5	189	47	69	11
Celkem	985	211	561	94	977	234	480	59	2138	589	850	184	4100	1034	1891	337
U v %			57	44			48	25			40	31			46	26
Loni	767	135	469	60	931	210	466	95	1439	317	611	100	3137	662	1546	254
U v %			61	44			48	45			43	31			49	38

Ze srovnání letošního prvního kola s loňským prvním kolem FO vyplývá, že letos se soutěže účastnilo celkem o 30 % žáků více (v kategorii A o 15 %, v kategorii B o 5 % a v C o 49 %). Přitom v 1. kole je úměrně více i dívek, celkem o 56 % víc (v kategorii A o 56 %, v kategorii B o 11 %, v kategorii C o 85 %). Počet úspěšných řešitelů se jeví v procentech přibližně na téže úrovni jako loni. Ze soutěžících bylo letos úspěšných řešitelů celkem 46 % (loni 49 %), z toho kategorie A 57 % (loni 61 %), v kategorii B 48 % (loni rovněž 48 %), v kategorii C 40 % (loni 43 %).

Zajímavý je letos výkyv u dívek v kategorii B, kde je málo úspěšných řešitelek. Celkem je z počtu dívek úspěšných 26 % řešitelek (loni 38 %), z toho v kategorii A 44 % (loni také 44 %), v kategorii B 25 % (loni 45 %), v kategorii C 31 % (loni též 31 %). Pokles je tedy jen v kategorii B, ale velmi nápadný.

Letos neuvádíme počet úloh, upravených učiteli ve školách (a znovu revidovaných členy KV FO). O obrovské práci svědčí, že počet úloh v kategorii A, B a C značně přesahuje 20 000!

B. Druhé kolo kategorie A, B, C

Druhé kolo kategorie A, B, C proběhlo současně ve všech krajích dne 1. dubna 1967.

Do druhého kola jsou zváni pokud možno všichni úspěšní řešitelé úloh prvního kola, tj. ti, kteří úspěšně vyřešili aspoň 6 z 9 úloh, přičemž museli řešit (i když neúspěšně) aspoň jednu úlohu experimentální.

S pořádáním druhého kola jsou spojeny značné obtíže. Má-li být druhé kolo pro celý kraj v jediném městě, jsou obtíže s ubytováním, protože žáci nemohou v jednom dni přijet na soutěž, soutěžit a opět se rozejt domů. Pro potíže s ubytováním soutěžících bylo nutno provést soutěž na více místech; v Severočeském kraji v Ústí n. L., v Liberci a v Mostě (všude kategorie A, B, C), v Severomoravském kraji v Ostravě (A, B), Olomouci (A, B), Opavě (C), Přerově (C), ve Středoslovenském kraji v Banské Bystrici a v Žilině (všude A, B, C).

Snahou MŠ i ÚV FO je, aby žáci ve všech krajích pracovali odpovědně a poctivě. K tomu je potřeba zajistit vhodné rozsazení soutěžících (aby vedle sebe neseděli žáci z téže školy ani z téže kategorie) a účinný dozor po celou dobu práce atd. MŠ letos pověřilo některé členy ÚV FO, aby provedli kontrolu práce v několika krajích.

Protože psaní soutěžních textů na tabuli (jen diktování se nedoporučuje) trvalo vždy poměrně dlouho a žáky zbytečně znervózňovalo, byly letos texty úloh pro druhé kolo kategorie A, B, C rozmnoženy

a krajům poslány v zapečetěné obálce v dostatečném počtu pro všechny soutěžící.

Letos opět nebyla do druhého kola zařazena experimentální úloha, protože v krajských městech, která nejsou sídlem vysokých škol (někdy i v městech, kde je jich i několik), je možno jen s velkými obtížemi opatřit dostatečný počet souprav pro měření, aby se všichni žáci mohli během půldne v měření vystřídat. Kromě toho provádění experimentální úlohy vyžaduje, aby se soutěž konala ve dvou dnech a aby se žákům opatřily noclehy.

Výsledky druhého kola jsou uvedeny v tabulce 3.

Z výsledků uvedených v tabulce 3 vyplývá, že pro kategorii A byly příklady velmi těžké. Vyřešilo je pouze 21 % žáků (loni 55 %). V kategorii B a C byly výsledky srovnatelné s loňskými: v kategorii B bylo 45 % úspěšných řešitelů (loni 49 %), v kategorii C 35 % (loni 31 %), celkem ve všech třech kategoriích 34 % (loni 46 %). V kategorii A žáky velmi zdržel první příklad, který byl časově hodně náročný; při něm se např. ukázalo, že žáci nedovedou řešit kvadratickou rovnici s velkými koeficienty. Letos bylo v kategorii A ve druhém kole o 158 úspěšných řešitelů méně než loni, ačkoli počet soutěžících byl o 73 řešitelů větší.

Z výsledků druhého kola je dále vidět, že je nutné kontrolovat klasifikaci žákovských prací po prvním kole. Klasifikace ve školách je mnohdy velmi mírná; práce bez slovního výkladu jsou někdy klasifikovány příznivě, v pracích někdy vůbec nejsou vyznačovány ani chyby.

Důsledkem je pak velký počet neúspěšných řešitelů v dalším kole.

Ve druhém kole kategorie A se pokusně hodnotily úlohy jak známkou v tříступňové klasifikační stupnici, tak i přísouzením určitého počtu bodů. Bodový systém vyžaduje další promyšlení. Použilo se ho letos jen v tom případě, v němž bylo nutné vybírat žáky pro třetí kolo z většího počtu řešitelů se stejnou klasifikací.

Nyní uvádíme pořadí prvních deseti úspěšných řešitelů 2. kola soutěže v kategorii A, B a C podle krajů. V kategorii A jsou kurzívou označeni žáci, kteří postoupili do třetího kola. Poněvadž z Prahy a z Jihomoravského kraje postoupilo do třetího kola více než 10 žáků, jsou uvedeni u těchto krajů všichni žáci, kteří postoupili do 3. kola. U žáků ze středních všeobecně vzdělávacích škol neuvádíme zkratku školy SVVŠ (u slovenských krajů SVŠ).

Praha:

A: *Radovan Gregor, Praha 2, W. Piecka; Miroslav Kubů, SPŠJT, Praha 4, Svatoslavova; Blanka Korečková, Praha 7, Nad školou;*

Tabulka 3

Počet žáků soutěžících v 2. kole

(S značí počet soutěžících, U počet úspěšných řešitelů, c. celkový počet žáků, d. z toho počet dívek)

Kraj	kategorie A				kategorie B				kategorie C				celkem			
	S		U		S		U		S		U		S		U	
	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.	c.	d.
Praha	116	17	46	8	65	5	44	3	102	21	64	9	283	43	154	20
Stč.	41	9	9	1	44	5	15	—	38	8	15	1	123	22	39	2
Jč.	31	1	6	1	27	2	15	—	27	6	8	2	85	9	29	3
Zč.	23	2	6	—	17	4	7	1	46	5	18	3	86	11	31	4
Sč.	52	13	4	—	40	3	11	—	71	16	15	1	163	32	30	1
Vč.	67	6	13	—	49	8	19	3	98	22	41	3	214	36	73	6
Jm.	77	4	18	—	62	7	23	2	130	19	35	2	269	30	76	4
Sm.	48	5	6	—	51	6	23	—	99	25	31	3	198	36	60	3
Zsl.	36	11	6	2	58	3	32	2	85	28	28	4	179	42	66	8
Stsl.	18	6	3	—	26	4	8	2	67	12	18	5	111	22	29	7
Vsl.	15	4	2	1	15	2	5	—	40	5	12	—	70	11	19	1
Celkem	524	78	119	13	454	49	202	13	803	167	285	33	1781	294	606	59
U v %			21	17			45	27			35	20			34	20
Loni	451	54	277	19	431	75	211	27	575	84	179	17	1457	213	667	63
U v %			55	35			47	36			31	20			45	30

Jaroslav Kozáčík a Jaroslav Krčil, oba SPŠJT, Praha 4, Svatoslavova; *Pavel Novák*, Praha 2, Štěpánská; *Marie Münzová*, Praha 7, Nad štolou; *Erich Zakopal*, Praha 2, Štěpánská; *Bohumil Čapek a Vojtěch Rödl*, oba Praha 2, W. Piecka; *Miroslav Hanák*, Praha 7, Nad štolou; *Marta Čiháková*, Praha 3, Na Pražačce; *Vladimíra Václavíková*, Praha 2, W. Piecka; *Olga Burešová*, Praha 2, W. Piecka; *Alena Havelková*, *Petr Novotný a Aleš Filinger*, všichni Praha 7, Nad štolou; *Štěpán Kotva*, Praha 2, W. Piecka; *Michal Rosický*, Praha 3, Na Pražačce; *Vladimír Tinák*, SPŠJT Praha 4, Svatoslavova; *Ivan Verner*, Praha 3, Na Pražačce; *Vladimír Haasz*, Praha 2, W. Piecka; *Daniel Brand*, Praha 8, U libeňského zámku; *Petr Doberský*, Praha 2, W. Piecka; *Karel Koskuba*, Praha 7, Nad štolou; *Jaromír Křepelka*, SPŠJT Praha 4, Svatoslavova; *Jan Macek*, Praha 3, Sladkovského nám.; *Karel Mašek a Václav Petříček*, oba SPŠCh Praha 1, Křemencová; *Ladislav Štěpánek*, SPŠJT Praha 4, Svatoslavova.

B: *Jiří Čenovský a Ladislav Jareš*, oba Praha 6, Velvarská; *Pavel Novák*, Praha 10, Přípotoční; *Ivan Dvořák a Jan Mašek*, oba Praha 2, W. Piecka; *Tomáš Krahulec*, Praha 6, Velvarská; *Vladimír Lát*, Praha 2, W. Piecka; *Ladislav Hlavatý*, Praha 5, Nad Torbovou; *Vladimír Větrovský*, Praha 7, Nad štolou; *Jiří Berger*, Praha 2, W. Piecka.

C: *Tomáš Mašek, Karel Procházka a Václav Moural*, všichni Praha 2, W. Piecka; *Jiří Rákosník*, Praha 9, Zeměměřičská; *Karel Bareš*, Praha 2, W. Piecka; *Václav Novotný*, SPŠJT Praha 4, Svatoslavova 4; *Jiří Pohl*, SPŠ dopr. Praha 1; *Jiří Vinárek*, Praha 2, W. Piecka; *Vladimír Štemberg*, Praha 4, Křesomyslova; *Vladimír Hora*, Praha 7, Nad štolou.

Středočeský kraj:

A: *Václav Kříž a Jarmila Lisá*, oba Beroun; *Vratislav Prejzek*, Sedlčany; *Michael Holan*, Kolín; *Milan Pračka*, Říčany; *Vojtěch Hrdina*, Brandýs n. L.; *Vladimír Malec*, Slaný; *Milan Číha*, Rakovník; *Karel Poživil*, Příbram.

B: *Václav Havlík*, Votice; *Vladimír Dražan*, Příbram; *Antonín Jančařík a Jaroslav Sedláček*, Říčany; *Vladislav Šimek*, Votice; *Pavel Čížek*, Radotín; *Jan Hammersack*, SPŠ Čelákovice; *Milan Chvojka*, Český Brod; *Jindřich Jirk*, Nymburk; *Zdeněk Klujber*, Nové Strašecí.

C: *Kamil Židek*, Brandýs n. L.; *Eva Dvořáková*, *Miloš Potměšil*, *Petr Rejnek*, *Petr Hlaváček*, všichni Kolín; *Pavel Janouš*, Dobříš; *Jiří Kratochvíl*, SPŠ Kutná Hora; *Bořivoj Shejbal*, Hořovice; *Alena Slavíková*, Uhlířské Janovice; *Petr Škarda*, Kolín.

Jihočeský kraj:

A: *Jiří Krtek, Václav Šmajcl a Ivana Novotná*, všichni České Budějovice; *Jan Kadlec*, Kamenice n. Lipou; *Petr Král*, Soběslav; *Bohumír Bednář*, České Budějovice.

B: *František Koktán*, Tábor; *Bohumil Vrhel a Jaroslav Zahradník*, Strakonice; *Ladislav Kváš*, Humpolec; *Petr Bruncvík*, Písek; *Jan Kahovec*, Strakonice; *Leoš Havlíček*, Písek; *Jiří Janovec*, Pelhřimov; *Vojtěch Bubník*, Písek; *Miroslav Moučka*, Pelhřimov.

C: *Zdeněk Drátovský*, Písek; *Pavel Hejda a Pavel Zeman*, Jindřichův Hradec; *Blanka Cimrhanzlová a Alena Čunátová*, Strakonice; *Jaromír Havel a Miroslav Švehla*, Jindřichův Hradec; *Michal Šimsa*, České Budějovice.

Západočeský kraj:

A: *František Pazdera, Jiří Bouzek, Jan Kastl*, František Dušek, Jan Slavík, všichni Plzeň, nám. Odborářů; *Viktor Korbel*, Klatovy.

B: *Karel Rusňák*, Klatovy; *Luděk Hrkál*, Planá; *Karel Baláš*, Cheb; *Milan Gütter*, Plzeň, nám. Odborářů; *Jana Tauberová*, Domažlice; *Milan Benedikt*, Plzeň, nám. Odborářů; *Karel Mařík*, Plzeň, ul. Pionýrů.

C: *Jan Dušek*, Plzeň, nám. Odborářů; *Jiří Pospíšil*, Ostrov n. O.; *Jiří Reif*, Plzeň, nám. Odborářů; *Petr Hrázský a Miroslav Březina*, Karlovy Vary; *Jaroslav Racek*, Plzeň, ul. Pionýrů; *Josef Schöbl*, Domažlice; *Jaromíra Valchová*, Plzeň, ul. Pionýrů; *Petr Jurajda*, Ostrov n. O.; *Karel Nejděl*, Plzeň, nám. Odborářů.

Severočeský kraj:

A: *Dušan Novotný*, Děčín; *Stanislav Hotmar*, Tanvald; *Jan Mühlstein*, Liberec; *Miroslav Kašpar*, Roudnice.

B: *Václav Hořejší*, Roudnice; *Pavel Hofman a Stanislav Hradský*, Teplice; *Jaroslav Vít*, Jablonec; *Vladimír Vydra*, Liberec; *Vladimír Kalina*, Jablonec; *Jan Novák*, Roudnice; *Ladislav Kastl*, Liberec; *Michal Brada*, Děčín; *Miloš Hrubý*, Teplice.

C: *Zdeněk Cais*, Litoměřice; *Zdeněk Březina*, SPŠ Chomutov; *Jiří Hořejší*, Roudnice; *Jaroslav Procházka*, Chomutov; *Miloš Zahradník*, Tanvald; *Antonín Kadlček*, Teplice; *Josef Moulis*, Chomutov; *Marie Onderková*, Litvínov; *Josef Pýcha*, Roudnice; *Jan Woller*, Ústí n. L.

Východočeský kraj:

A: *Miroslav Kolář*, SPŠE Pardubice; *Milan Fireš*, Hradec Králové; *Jan Červenka*, Havlíčkův Brod; *Jan Borek*, Moravská Třebová; *Jindřich Stárek*, Vysoké Mýto; *Zdeněk Lenoch*, *Jan Chlebný*, Bohuslav Škop, *Ilja Nykl*, všichni Hradec Králové; *Jan Rejlek*, Jičín.

B: Petr Janda, Vrchlabí; Květa Pilařová, Nová Paka; František Kopřiva, OU Synthesia Semtín; Jaroslav Lesák, Žamberk; Anna Kulhánková, Nová Paka; Jan Ježek, Hradec Králové; Jan Matouš, Pardubice; Jan Kerhart, Česká Třebová; Miroslav Andrlé, Vysoké Mýto; Michal Allan, Pardubice.

C: Jiří Kopřiva, Broumov; Petr Bradna, Pardubice; Jaroslav Bekr, Hořice; Martin Vojtíšek, Pardubice; Pavel Doubek, SPŠCh Pardubice; Antonín Mikeš, Rychnov; Karel Trejbal, Semily; František Hroch, Rychnov; Pavel Kraus, SPŠE Pardubice; Jiří Kačer, Česká Třebová.

Jihomoravský kraj:

A: Ladislav Obdržálek, Brno, Koněvova; Stanislav Slouka, SPŠE Brno, Leninova; František Klein, Brno, Elgartova; Pavel Polcar 2. r. SVVŠ Velké Meziříčí; Zdeněk Janáček, Valašské Klobouky; Jan Filipenský, SPŠE Brno, Leninova; Vlastimil Bartoš, Holešov; Zdeněk Slanina, SPŠCh Brno, Vranovská; Vladimír Kychler, Brno, Elgartova; Josef Niederle, Brno, Koněvova; Lumír Hedvábný, Veselí n. Mor.; Jaroslav Štoviček, Jihlava; Jiří Leicman, SPŠS Brno, Sokolská.

B: Vojtěch Oškera, Vizovice; Věra Trejbalová, Brno, Koněvova; Drahomír Běták, Kyjov; Libor Polák, Brno, Koněvova; Bohumila Vlachová, Brno, Křenová; Břetislav Krček, Prostějov; Vladimír Hájek, Brno, Koněvova; Miroslav Šilhavý, Třebíč; Vladimír Slouka a Vladimír Šoustal, oba Holešov.

C: Mojmír Šob, Velké Meziříčí; Stanislav Krist, SPŠS Břeclav; Jaroslav Kučera, SPŠE Brno, Leninova; Petr Klíč, Brno, Koněvova; Pavel Pokorný, Brno, Křenová; Ivo Albrecht, SPŠE Brno, Leninova; Jiří Houf a Anna Cagašová, Brno, Křenová; Jan Bůřil, Veselí n. Mor.; Bohumil Havel, Brno, Koněvova.

Severomoravský kraj:

A: Mojmír Simerský, SPŠv. e., Rožnov p. Radh; Roman Kotecký, Ostrava 1, Šmeralova; Vojtěch Ullmann, Litovel; Jaroslav Bolek, SPŠ Vítkovice; Josef Hlavica, Jeseník; Jaroslav Kavaliř, Krnov.

B: Jaroslav Sklenář, Haviřov; Drahomír Stanke a František Pohl, Ostrava 1; Vlastimil Kurek, Haviřov; František Blata a Petr Pachmann, Opava; Zdeněk Stuchlík SPŠS Ostrava; Petr Znišťal, Frýdek-Místek; Vladimír Berka, Opava; Jiří Demel, Val. Meziříčí.

C: Antonín Rozsypal, SPŠE Olomouc, Jungmannova; Petr Byczanski, Jablunkov; František Ledabyl, Opava; Miroslav Sedmík, Ostrava 4; Milan Varkoček, Haviřov; Jaroslav Richter, Šumperk; Václav Batko, Bílovec; Josef Bauer, SPŠS Ostrava Vítkovice; Antonín Burian, Olomouc Hejčín; Andrzej Kolorz, Český Těšín, Polská.

Západoslovenský kraj:

A: *Jozef Kolesár*, Bratislava, Vazovova 38; *Pavol Holíč*, Bratislava, Novohradská; *Emília Pridalová*, Bratislava, Vazovova 38; *František Hajnovič*, Bratislava, Novohradská; *Vít Bršlica*, Bratislava, Metodova; *Jana Výrobíková*, Bratislava, Novohradská.

B: *Jozef Prokeš*, Nitra, E. Gudernu; *Alexander Haulitzs*, SVŠ maď., Komárno; *Rudolf Balaj* a *Bohuš Prachár*, Bratislava, Novohradská; *Jozef Götz* a *František Koniar*, Nitra, E. Gudernu; *Jozef Baláž*, Bratislava, Vazovova 38; *František Ollé*, SVŠ maď., Komárno; *Rudolf Neméth* a *Ľubomír Pieružek*, Bratislava, Novohradská.

C: *Eduard Lifka*, Bratislava, Novohradská; *Karol Šafařík*, ZDŠ Bratislava, Košická; *Radko Mesiar*, Bratislava, Novohradská; *Imrich Czeglédý*, SVŠ maď., Šamorín; *Milan Filadelfi* a *Peter Zíka*, Bratislava, Novohradská; *Juraj Breza*, Bratislava, Vazovova 38; *Milan Tyšler*, Bratislava—Ružinov, Mlynské luhy; *Vladimír Mocko*, Trenčín; *Anna Mašejová*, Bratislava, Novohradská.

Středoslovenský kraj:

A: *Juraj Slabeycius*, Banská Bystrica; *Ľubor Adamec* a *Marian Fúrik*, Zvolen.

B: *Peter Nagy*, Banská Bystrica; *Juraj Gondžúr*, Ružomberok; *Mária Ruttkayová*, Prievidza; *Juraj Káloši*, Rimavská Sobota; *Juraj Černák*, Turč. Teplice; *Ľudmila Dutková*, Zdeněk Hochmuth a *Peter Podhoranský*, Ružomberok.

C: *Milan Grendel*, Banská Bystrica; *Pavol Magner*, Žilina; *Elena Hušťáková*, Ružomberok; *Eduard Hogn*, Zvolen; *Ján Elexa*, Turč. Teplice; *Peter Mach*, Ružomberok; *Peter Valtíny*, Zvolen; *Mária Kušková*, Prievidza; *Dušan Hrianka* a *Dušan Mandák*, Turč. Teplice.

Východoslovenský kraj:

A: *Juraj Majerčák*, Spišská Nová Ves; *Blanka Rosenauerová*, Košice, Šrobárova.

B: *Juraj Glosík*, Košice, Šrobárova; *Vladimír Bulla*, Košice, Kováčska; *Eugen Ružický*, Prešov, T. Ševčenku; *Jozef Špalek*, Košice, Kováčska; *Pavol Jasem*, Košice, Šrobárova.

C: *Stanislav Vokál*, Prešov, T. Ševčenku; *Daniel Záhorák*, Prešov, T. Ševčenku; *Stanislav Uličianský*, Košice, Šrobárova; *Juraj Podracký*, Košice, Revolučná; *Peter Stano*, Prešov, T. Ševčenku; *Jozef Pavlo*, Trebišov; *Ján Kováčik*, SPŠCh Svit, Poprad; *Jozef Pella*, Prešov, T. Ševčenku; *Róbert Gross*, Košice, Šrobárova; *Viktor Hronský*, Košice, Šrobárova.

C. Třetí kolo kategorie A

Třetí — celostátní — kolo kategorie A se konalo ve dnech 28. a 29. dubna 1967 v Brně. Jeho přípravou a organizací byl pověřen KV FO Jihomoravského kraje, jehož členy jsou i členové ÚV FO: předseda dr. Košťál, jednatel J. Konrád, dr. Vlach a ing. Vybíral. Tím byla zajištěna úzká spolupráce mezi KV FO a ÚV FO.

Teoretické úlohy pro třetí kolo kategorie A navrhli s. Náter, Říman, Simerský a Tesař. Experimentální úlohu navrhl s. Konrád. Úlohy vybrala užší komise (Náter, Říman, Tesař) a jejich znění bylo utajeno až do začátku soutěže třetího kola.

Soutěžící žáci pro třetí kolo byli vybráni na schůzi pléna ÚV FO, která se konala ve dnech 14. a 15. dubna 1967. Z úspěšných řešitelů druhého kola kat. A byli nejprve vybráni ti žáci, kteří měli nejvýše jednu úlohu nevyhovující a doplnění byli do počtu 80 ještě dalšími tak, aby každý kraj byl zastoupen aspoň dvěma účastníky. Z Prahy postoupilo do třetího kola 30 žáků, ze Středočeského a Jihočeského kraje po 6, ze Západočeského a Severočeského po 3, z Východočeského 7, z Jihomoravského 13, ze Severomoravského 3, ze Západoslovenského 5 a ze Středoslovenského a Východoslovenského po 2 účastnících.

Aby byl hladký průběh, byla věnována přípravě a organizaci třetího kola velká péče. Všem žákům byly poslány prostřednictvím ředitelství škol pozvánky a podrobné pokyny. Jeden žák z Brna se nemohl dostavit, protože v den soutěže měl maturitu z odborného předmětu. Ostatní se všichni dostavili během odpoledne 27. dubna 1967 do ubytovny a pak na slavnostní zahájení v 17 hodin ve velké aule Vojenské akademie Antonína Zápotockého v Brně.

Slavnostnímu zahájení byli přítomni kromě členů ÚV FO a KV FO zástupci KNV a KV ČSM. Jménem ÚV FO přivítal všechny přítomné předseda ÚV FO, za MŠ promluvil ústřední školní inspektor Josef Bartůněk a za KNV a OŠK KNV krajský školní inspektor Záboj Tauvinkl.

Překvapením pro všechny účastníky byl dopis, který právě v den zahájení třetího kola došel z Polska, jímž byla ČSSR pozvána k účasti na I. mezinárodní fyzikální olympiádu do Varšavy.

Dne 28. dubna 1967 v aule VAAZ řešili žáci čtyři teoretické úlohy. Témata členové komise rozmnožili a dovezli až na místo soutěže. Úlohy byly vloženy do složek, připravených na pracovních místech žáků. Všichni žáci byli rozsazeni tak, že žáci ze stejného kraje neseděli blízko sebe. Dozor zajistili členové ÚV FO a KV FO. Složka i všechny papíry byly označeny číslem žáka, všechny papíry měly vytištěno

záhlaví. Zlepšila se tím organizace (řazení a evidence prací) a působilo to velmi esteticky.

Odpoledne se žáci sešli v posluchárně fyziky na přírodovědecké fakultě University J. E. Purkyně, kde jim byly předvedeny pokusy o kmitěch a vlnění, a to v mechanice, akustice a optice, dále pokusy s elektromagnetickými vlnami o délce vlny 250 cm a 3 cm. Přednášel dr. Vladimír Prokeš, odborný asistent katedry elektroniky přírodovědecké fakulty UJEP, a použil nové soupravy s generátorem ($\lambda = 3$ cm) elektromagnetických vln, který zkonstruoval a jímž lze předvést šíření, lom, odraz, interferenci, ohyb, stojaté vlny, princip interferometru atd.

Poté absolvovali žáci kratší prohlídku Brna s odborným výkladem dr. Popeláře. Večer navštívili všichni žáci v novém Janáčkově divadle představení Mozartovy opery Figarova svatba.

V sobotu 29. dubna 1967 prováděli ve 4 skupinách po sobě laboratorní úlohu v laboratoři katedry fyziky VAAZ. Experimentální úlohu připravil na 21 soupravách odborný instruktor VAAZ s. Župka.

Všechny práce opravovali vždy dva členové ÚV FO a pro úsporu času se zasíláním byly opravy zadány těm krajům, z nichž jsou v ÚV FO aspoň dva členové, tj. krajům Praha, Západočeskému, Východočeskému a Západoslovenskému, a experimentální úlohu Jihomoravskému.

- Práce hodnotili:
1. příklad Náter a Zámečník z Bratislavy,
 2. příklad Tesař a Cimbůrek z Prahy,
 3. příklad Volf a Ungermann z Hradce Králové,
 4. příklad Rádl a Rabas z Plzně,
 5. př. experimentální Vybíral a Vlach z Brna.

Práce byly klasifikovány jednak dosavadním způsobem, jednak bodovým systémem. U experimentální úlohy se hodnotilo i zapojení a dílčí úkony.

Pořadí úspěšných řešitelů a prvních dvaceti vítězů stanovil ÚV FO na schůzi, která se konala 12. května 1967. Na této schůzi byly navrženy též knižní a věcné odměny vítězům v celkové částce 12 000 Kčs, kterou poskytlo MŠ.

Přehled výsledků třetího kola je podle krajů uveden v tabulce 4. Vítěze uvádí tabulka 5 a další úspěšné řešitele tabulka 6.

Nejllepších 20 řešitelů bylo podle organizačního řádu FO prohlášeno vítězi VIII. ročníku FO. Mezi 20 vítězi není žádná dívka, mezi úspěšnými řešiteli 3 dívky. Mezi vítězi je 7 žáků z průmyslových škol, mezi úspěšnými řešiteli celkem 11 žáků z průmyslových škol. Mezi vítězi je i žák z 2. ročníku SVVŠ (Pavel Polcar z Velkého Meziříčí), který jako jediný z nižšího ročníku soutěžil ve třetím kole kategorie A.

Tabulka 4

Počet žáků soutěžících v 3. kole

Kraj	Celkový počet soutěžících		úspěšní řešitelé			z nich vítězové			neúspěšní řešitelé		
		z toho dívek	počet	%	z toho dívek	počet	%	z toho dívek	počet	%	z toho dívek
Praha	30	6	19	63	2	9	30	—	11	37	4
Stč.	6	1	4	67	—	—	—	—	2	33	1
Jč.	6	1	4	67	—	—	—	—	2	33	1
Zč.	3	—	2	67	—	2	67	—	1	33	—
Sč.	3	—	1	33	—	1	33	—	2	67	—
Vč.	7	—	5	71	—	2	29	—	2	29	—
Jm.	12	—	12	100	—	4	33	—	—	—	—
Sm.	3	—	2	67	—	1	33	—	1	33	—
Zsl.	5	1	3	60	1	—	—	—	2	40	—
Stsl.	2	—	1	50	—	1	50	—	1	50	—
Vsl.	2	1	1	50	—	—	—	—	1	50	1
Celkem	79	10	54	68,4	3	20	25,2	—	25	31,6	7

Tabulka 5

Vítězní řešitelé 3. kola kat. A VIII. r. FO

(Při stejném pořadí jsou žáci seřazeni podle abecedy)

pořadí	jméno	tř.	škola	odměna Kčs	
				věc.	kniž.
1 – 3	Macek Jan	3d	SVVŠ Praha 3, Sladkovského n.	850	150
	Slabeycius Juraj	3a	SVŠ Banská Bystrica	850	150
	Slouka Stanislav	M4a	SPŠE Brno, Leninova	850	150
4 – 8	Gregor Radovan	3g	SVVŠ Praha 2, W. Piecka	650	150
	Kozáčík Jaroslav	4a	SPŠJT Praha 4, Svatoslavova	650	150
	Obdržálek Ladislav	3a	SVVŠ Brno, Koněvova	650	150
	Simerský Mojmír	3	SPŠ vak. el., Rožnov p. Radh.	650	150
9 – 11	Zakopal Erich	3c	SVVŠ Praha 1, Štěpánská	650	150
	Kastl Jan	3f	SVVŠ Plzeň, nám. Odborářů	500	100
	Klein František	3a	SVVŠ Brno, Elgartova	500	100
	Kolář Miroslav	4d	SPŠE, Pardubice, Smetan. nám.	500	100
12 – 13	Fireš Milan	3a	SVVŠ Hradec Králové	350	100
	Křepelka Jaromír	3c	SPŠJT Praha 4, Svatoslavova	350	100
14 15 – 17	Novotný Dušan	3d	SVVŠ Děčín, Komenského nám.	300	50
	Bouzek Jiří	3f	SVVŠ Plzeň, nám. Odborářů	300	50
	Krčil Jaroslav	4c	SPŠJT Praha 4, Svatoslavova	300	50
	Mašek Karel	4c	SPŠCh Praha 1, Křemencová	300	50
18 – 20	Brand Daniel	3e	SVVŠ Praha 8, U lib. zámku	250	50
	Čapek Bohumil	3g	SVVŠ Praha 2, W. Piecka	250	50
	Polcar Pavel	2b	SVVŠ Velké Meziříčí	250	50

Tabulka 6

Další úspěšní řešitelé 3. kola kat. A VIII. r. FO

pořadí	jméno	tř.	škola
21 – 26	Hajnovič František	3a	SVŠ Bratislava, Novohradská
	Havelková Alena	3c	SVVŠ Praha 7, Nad školou
	Kotva Štěpán	3g	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
	Leicman Jiří	K3b	SPŠS Brno, Sokolská
	Novák Pavel	3c	SVVŠ Praha 1, Štěpánská
	Štoviček Jaroslav	3a	SVVŠ Jihlava
27 – 32	Červenka Jan	3a	SVVŠ Havlíčkův Brod
	Hedvábný Lumír	3b	SVVŠ Veselí n. Mor.
	Chlebný Jan	3a	SVVŠ Hradec Králové
	Krtek Jiří	3a	SVVŠ České Budějovice
	Majerčák JuraJ	3a	SVŠ Spišská Nová Ves
	Niederle Josef	3b	SVVŠ Brno, Koněvova
33 – 35	Doberský Petr	3g	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
	Filipenský Jan	D3a	SPŠE Brno, Leninova
	Koskuba Karel	3b	SVVŠ Praha 7, Nad školou

pořadí	jméno	tř.	škola
36 – 37	Bartoš Vlastimil Pračka Milan	3b 3	SVVŠ Holešov SVVŠ Říčany
38 – 40	Holič Pavol Kychler Vladimír Pridalová Emília	3a 3a 3a	SVŠ Bratislava, Novohradská SVVŠ Brno, Elgartova SVŠ Bratislava, Vazovova 38
41 – 48	Čiháková Marta Janaček Zdeněk Kotecký Roman Král Petr Kříž Václav	3a 3a 3 3 3a	SVVŠ Praha 3, Na Pražače SVVŠ Valašské Klobouky SVVŠ Ostrava, Šmeralova SVVŠ Soběslav SVVŠ Beroun
49 – 54	Petříček Václav Šmajcl Václav Tinák Vladimír Bednář Bohumír Hanák Miroslav Holan Michael Lenoch Zdeněk Prejzek Vratislav Rosický Michal	4b 3a 3c 3a 3a 3a 3 3a 3 3a	SPŠCh Praha 1, Křemencová SVVŠ České Budějovice SPŠJT Praha 4, Svatoslavova České Budějovice SVVŠ SVVŠ Praha 7, Nad štolou SVVŠ Kolín SVVŠ Hradec Králové SVVŠ Sedlčany SVVŠ Praha 3, Na Pražače

Ve třetím kole bylo zastoupeno celkem 40 SVVŠ (SVŠ) a 6 SPŠ. Všichni vítězové dostali diplom, podepsaný vedoucím odboru ministerstva školství ing. Císařem a předsedou ÚV FO prof. dr. R. Košťálem. Mimoto dostali peněžitě částky na zakoupení knižních a věcných odměn, které byly odstupňovány od 1000 Kčs do 300 Kčs. Celková částka činila 12 000 Kčs. Všichni další úspěšní řešitelé třetího kola dostali čestná uznání, podepsaná rovněž ing. Císařem a prof. Košťálem.

Po překvapujícím loňském úspěchu žáků z Jihomoravského kraje se čekalo se zájmem, jak letos dopadnou účastníci z tohoto kraje. I když je jich letos méně mezi vítězi, je nesporně opět velkým úspěchem, že ze 12 žáků, kteří se soutěže účastnili, je všech 12 úspěšných řešitelů. Jihomoravský kraj měl za 8 let nejmenší počet neúspěšných řešitelů – 13,1 %; na druhém místě je Praha se 32,0 % neúspěšných řešitelů. Přehled o klasifikaci úloh třetího kola je v tabulce 7.

Tabulka 7

Klasifikace úloh ve 3. kole kategorie A

úloha	výborně	dobře	nevyhov.	prům. zn.	téma úlohy
1.	17	31	31	2,16	mechanika; pohyb po nakloněné rovině ve vodě
2.	13	38	28	2,19	optika; zobrazování dvěma spojnými čočkami
3.	27	17	35	2,10	elektřina; elektromagnetická indukce
4.	31	10	38	2,09	elektřina; pohyb elektronu v katodové trubici
5.	29	32	18	1,85	experimentální; měření teploty vlákna žárovky
celková průměrná známka				2,06	

Z nepatrného rozpětí průměrných známek u všech 4 teoretických úloh se dá soudit, že příklady byly vybrány vhodně. Z toho, že ze 79 soutěžících bylo 54 úspěšných řešitelů, lze vyvodit závěr, že příklady byly voleny úměrně schopnostem žáků. Ze srovnání s příklady druhého kola vyplývá, že byly voleny vhodněji než příklady pro druhé kolo.

Z teoretických příkladů hůře dopadly úlohy z mechaniky a z optiky, tedy z látky, která se probírala v dřívějších ročnících.

Protože MŠ dalo souhlas k účasti žáků z ČSSR na I. mezinárodní fyzikální olympiádě v Polsku, byli na schůzi hodnotící třetí kolo vybráni tři žáci jako soutěžící (a tři žáci jako náhradníci). Výběr byl velmi pečlivý; byl proveden nejen podle výsledků třetího kola kategorie A, ale i podle výsledků druhého kola a podle výsledků předcházejících ročníků FO, neboť podle přání členů ÚV FO bylo nutné najít nejspolehlivější soutěžící pro I. MFO. Výběr byl velmi závažný proto, že jsme zatím neznali úroveň znalostí z fyziky v ostatních státech, především v pořádající zemi — v Polsku, kde probíhá již 16. ročník FO.

Vybráni byli:

1. Stanislav Slouka, 4. r. SPŠE, Brno, Leninova,
2. Jaroslav Kozáček, 4. r. SPŠJT, Praha 4, Svatoslavova,
3. Ladislav Obdržálek, 3. r. SVVŠ Brno, Koněvova.

Náhradníci:

1. František Klein, 3. r. SVVŠ Brno, Elgartova,
2. Radovan Gregor, 3. r. SVVŠ Praha 2, W. Piecka,
3. Miroslav Kolář, 4. r. SPŠE Pardubice.

D. Závěr soutěže kategorií A, B, C

Na závěr soutěže v kategoriích A, B, C je nutno uvést srovnání dosažených výsledků z různých typů škol. Velmi dobrých výsledků dosahují žáci 4. ročníků středních průmyslových škol přesto, že fyziku mají jen v nejnižších ročnících. Souvisí to s tím, že jsou o rok starší než žáci poslední třídy SVVŠ a že mají možnost soutěžit v nejvyšším ročníku FO dva roky, takže jsou zkušenější a jistější.

Letos se dosti výrazně neprojevují výsledky z tzv. speciálních tříd pro nadané matematiky a fyziky. Poněvadž do těchto tříd by měli být vybíráni nejlepší žáci z celého kraje, měla by se projevit výrazněji jejich převaha.

Ze středních průmyslových škol je nejvíce soutěžících ze škol elektrotechnických a ze školy jaderné techniky (tyto školy mají nejlepší

výběr žáků), méně ze škol strojnických. Jen sporadicky se objevují školy jiných typů: odborná učiliště, střední zemědělsko technické školy, střední ekonomické školy, střední zdravotnické školy, a to zpravidla jen v kategorii C a bez větších úspěchů.

Jako velmi prospěšné pro řízení FO se ukazuje, aby mezi členy krajských výborů FO bylo co nejvíce učitelů vysokých škol a aby okresní výbory FO vedli učitelé škol 2. cyklu.

E. První a druhé kolo kategorie D

Soutěž v kategorii D probíhala v prvním kole do 31. března 1967. Úlohy pro první kolo byly uveřejněny v časopise Fyzika ve škole a kromě toho v letáku pro kategorii D, který vyšel v nákladu 10 000 výtisků a byl rozeslán na OV FO.

Na rozdíl od fyzikální olympiády kat. A, B a C, které se zúčastňuje převážná většina SVVŠ (SVŠ) a celá řada SPŠ, podařilo se zaktivizovat jen asi polovinu ZDŠ.

Relativně nejvíce škol se zúčastnilo v Praze (86 %), v Jihomoravském kraji (67 %) a ve Středoslovenském kraji (60 %). V ostatních krajích se zúčastnilo méně než 50 % ZDŠ, nejméně ve Středočeském kraji (32 %). Podrobné údaje o účasti škol jsou uvedeny v tabulce 8, údaje o počtu soutěžících a o výsledcích v prvním a druhém kole kategorie D jsou v tabulce 9.

Není žádoucí, aby se soutěž FO stala masovou záležitostí, je to soutěž výběrová, ale jistě také není správné, když v některém kraji se některý okres vůbec neúčastní, nepracuje OV FO a neaktivizuje učitele ZDŠ. Pak je nutno, aby KV FO zasáhl prostřednictvím školských orgánů příslušných KNV a ONV. Jako typický příklad uvádíme okres Žďár n. Sáz. (kraj Jm), který dlouho nebylo možno probudit k aktivitě (nedostatek aprobovaných učitelů apod.). Dnes tento okres patří k nejagilnějším v kraji.

V prvním kole kategorie D jsou značné rozdíly v poměrném počtu úspěšných řešitelů v jednotlivých krajích (Praha 83 %, Severočeský kraj 32 %). Soutěž má vést žáky k samostatné práci, ale v prvním kole se projevuje značná pomoc rodičů a kolektivní práce žáků (i opisování). Jindy zase opravující učitelé posuzují práce příliš blahovolně, uznávají i práce vysloveně opsané, nevytknou chyby apod.

Ve druhém kole rovněž nebývají vždy provedena taková opatření, aby zajistila naprosto samostatnou práci žáků (rozsazení žáků při práci, řádný dozor). Proto je žádoucí, aby se na průběh druhého kola

Tabulka 8

Počet ZDŠ, které se zapojily do FO

kraj	počet ZDŠ v kraji	1. kola se zúčast- nilo ZDŠ		2. kola se zúčast- nilo ZDŠ		počet okresů v kraji	kontrola práce ve 2. kole provedena v okresech
		počet	v %	počet	v %		
Praha	150	129	86	102	68	10	2
Stč.	330	107	29	96	29	12	3
Jč.	192	81	42	78	40	8	2
Zč.	222	107	47	70	32	10	1
Sč.	295	135	46	97	33	10	7
Vč.	314	156	49	124	40	11	2
Jm.	457	308	67	178	39	14	12
Sm.	442	208	47	163	37	10	5
Zsl.	544	230	42	139	26	12	5
Stsl.	379	226	60	122	32	12	1
Vsl.	340	160	47	111	33	9	3
celkem	3665	1847	51	1380	39	118	43
loni		1475	40	—	—	—	—

pokud možno do každého okresu zajel podívat člen KV FO a aby přitom prohlédl i úroveň oprav prací z prvního kola.

Právě zavedením těchto opatření a přísným hodnocením žákovských prací druhého kola lze vysvětlit nízké procento úspěšných řešitelů druhého kola kategorie D v Jihomoravském kraji (28 %) a v Západo-slovenském kraji (34 %). V ostatních krajích se pohybuje procento úspěšných řešitelů kolem 60 %. V posledním sloupci tabulky 8 je uvedeno, v kolika okresech byla provedena kontrola soutěže druhého kola členy KV FO.

Nejllepší řešitelé druhého kola kategorie D byli odměněni věcnými cenami a všichni úspěšní řešitelé dostali pochvalná uznání.

Tabulka 9

Počet soutěžících žáků v 1. a ve 2. kole kategorie D
(S je počet soutěžících, U je počet úspěšných řešitelů)

kraj	soutěžících v 1. kole					soutěžících ve 2. kole				
	S	U	úsp. v %	z toho dívek		S	U	úsp. v %	z toho dívek	
				S	U				S	U
Praha	1391	1168	83	368	319	550	361	66	141	74
Stč.	512	343	67	201	128	295	189	64	107	83
Jč.	639	318	50	269	113	305	176	58	109	54
Zč.	380	202	53	117	68	202	119	59	68	34
Sč.	1224	397	32	540	150	344	215	62	128	82
Vč.	1038	478	46	377	158	415	248	60	137	80
Jm.	1784	716	40	487	116	668	187	28	116	32
Sm.	1094	503	46	353	161	459	315	69	139	89
Zsl.	1805	913	51	792	378	766	258	34	291	88
Stsl.	1633	601	37	725	239	491	299	61	173	107
Vsl.	421	324	77	210	142	317	170	54	139	64
celkem	11921	4911	41	4439	1972	4812	2545	54	1648	787
loni	12773	5736	52	4455	2095	4851	3112	64	1712	1284

F₃ Třetí kolo kategorie D

V loňském roce provedl Jihomoravský kraj pokusně v kategorii D soutěž ve třetím kole — pro celý kraj. Zkušenosti s tímto třetím kolem byly velmi poučné, ukázalo se, že se dá takto srovnávat práce v jednotlivých okresech. Po těchto zkušenostech se rozhodly další kraje k uspořádání třetího kola — krajského — a to kraj Praha, kraj Východočeský a kraj Jihomoravský. Nepodařilo se provést soutěž v jednom dni, a proto byly dány rozličné příklady v jednotlivých krajích. Jistě by bylo zajímavé srovnat úroveň krajů, kdyby byly dány tytéž příklady. Výsledky třetího kola jsou v tabulce 10.

Tabulka 10

Počet soutěžících v kategorii D v krajském — pokusném třetím — kole.

kraj	počet ZDŠ ve 3. kole	soutěžících ve 3. kole				
		S	U	úsp. v %	z toho dívek	
					S	U
Praha	49	74	51	69	10	4
Východočeský	24	29	25	86	6	4
Jihomoravský	60	83	52	63	8	5
celkem	133	186	128	69	24	13

Mezi úspěšnými řešiteli třetího kola kategorie D byl v Jihomoravském kraji proveden nábor do 1. ročníku specializované třídy pro nadané matematiky a fyziky na SVVŠ Brno, Křenová (podobně jako v loňském roce).

Nejlepší řešitelé třetího kola kategorie D byli odměněni věcnými cenami z prostředků KNV a všichni úspěšní řešitelé dostali čestná uznání.

II. ČÁST: STUDIJNÍ TEXTY

a) Kategorie A

Milan Rádl, Plzeň

Potenciál v gravitačním a elektrickém poli

V tomto studijním textu porovnáme některé obdobné i odlišné vlastnosti gravitačního a elektrického pole.

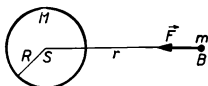
Kolem tělesa o hmotnosti M je gravitační pole. Každé jiné těleso o hmotnosti m podléhá v tomto poli jisté síle F .¹⁾ Při přemísťování tělesa v gravitačním poli mohou síly gravitačního pole konat práci A , a tudíž se může měnit potenciální energie gravitační W tělesa.

Obdobně kolem elektrického náboje Q je elektrické pole. Na každý jiný náboj q , nacházející se v tomto poli, působí pole silou F . I zde se při přemísťování náboje q obvykle koná práce A a náboj q může tudíž v různých bodech pole mít různou potenciální energii W .

Z výkladu je zřejmé, že pro popis obou polí nám mohou právě posloužit jejich silové účinky na těleso o hmotnosti m či na náboj q , popřípadě energetické změny při přemísťování tělesa nebo náboje v příslušném poli. Pomocí silových účinků pole definujeme intenzitu gravitačního nebo elektrického pole, pomocí energetických změn pak gravitační či elektrický potenciál v určitém bodě pole.

¹⁾ Pro označení vektorů se používá v textu půltučných písmen, v rýsovaných obrázcích písmen se šipkou. Označení $\vec{F}$ a F jsou tedy rovnocenná.

Uvažujme gravitační pole naší Země (obr. 1). Předpokládáme-li, že Země je homogenní koule o poloměru R a má hmotnost M , je gravitační pole Země na jejím povrchu a v jejím okolí takové, jaké by vzniklo kolem hmotného bodu o hmotnosti M , nacházejícího se ve středu Země. Přitažlivá síla působící na těleso o hmotnosti m , které je ve vzdálenosti $r \geq R$ od středu Země, je určena gravitačním zákonem



Obr. 1

$$F = \kappa \frac{M m}{r^2}, \quad (1)$$

kde $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ (gravitační konstanta).

Nyní již můžeme zavést intenzitu gravitačního pole E touto definicí:

$$E = \frac{F}{m}, \quad [E] = \text{N kg}^{-1} = \text{kg m s}^{-2} \text{ kg}^{-1} = \text{m s}^{-2}. \quad (2)$$

Intenzita gravitačního pole v daném bodě udává číselně sílu, která by v tomto bodě působila na hmotný bod o jednotkové hmotnosti.

Z definice a ze vztahu (1) ihned odvodíme, že velikost intenzity E ve vzdálenosti $r \geq R$ od středu Země je dána vztahem

$$E = \frac{\kappa M}{r^2} \quad (3)$$

a má směr do středu Země. Vzhledem k tomu, že síla $F = m a$, zjišťujeme ze vztahů (2) a (3), že nově zavedená veličina E je vlastně totožná s gravitačním zrychlením a

$$E = a = \kappa \frac{M}{r^2}, \quad (4)$$

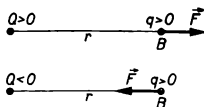
jak konečně vyplývá i z rozboru rozměrů ve vztahu (2). Dosadíme-li do vztahu (4) za $r = R = 6,37 \cdot 10^6$ m (poloměr Země) a $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg (hmotnost Země), dostáváme pro hodnotu intenzity gravitačního pole při povrchu Země

$$E = 9,81 \text{ N kg}^{-1} = 9,81 \text{ m s}^{-2}.$$

Je to přibližná hodnota normálního tíhového zrychlení g .

Obraťme nyní pozornost k elektrickému poli bodového náboje Q ve vakuu. Náboj Q může být jak kladný, tak i záporný. Na náboj q , který se dostal do bodu B ve vzdálenosti r od náboje Q , působí elektrické pole silou F , jejíž velikost je dána Coulombovým zákonem

$$F = k \frac{Qq}{r^2}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}. \quad (5)$$



Obr. 2

Dohodneme-li se, že vložený náboj q je kladný ($q > 0$), pak orientace této síly závisí pouze na znaménku náboje Q (obr. 2).

Veličinu

$$E = \frac{F}{q}, \quad [E] = \text{N C}^{-1} \quad (6)$$

nazýváme *intenzita elektrického pole v daném bodě B*. Udává číselně sílu, která by v daném bodě působila na kladný jednotkový náboj tam umístěný. Později ukážeme,

že její jednotku N C^{-1} je možno nahradit vhodnější jednotkou V m^{-1} . Z definice a ze vztahu (5) obdržíme pro velikost intenzity ve vzdálenosti r od bodového náboje Q vztah

$$E = k \frac{Q}{r^2}. \quad (7)$$

Vektor $\mathbf{E}$ je orientován buď od náboje Q , nebo k němu podle znaménka náboje Q . Na náboj q v poli působí pak podle (6) pole silou

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} q. \quad (8)$$

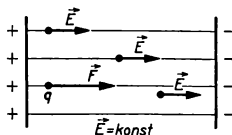
Pro $q > 0$, jak bylo dohodnuto, je síla $\mathbf{F}$ souhlasně orientována s intenzitou $\mathbf{E}$. Vzorec lze zřejmě použít i pro $q < 0$, síla $\mathbf{F}$ je pak opačně orientována, orientace intenzity se tím samozřejmě nezměnila.

Důležitými případy obou polí jsou tzv. *pole homogenní*. Jsou to taková pole, v jejichž každém bodě vektory $\mathbf{E}$ jsou konstantní. Zvolíme-li malou oblast zemského gravitačního pole (např. gravitační pole v prostoru třídy), jde o pole homogenní. Intenzita E je stejná co do velikosti i směru ve všech bodech třídy. Má v nich hodnotu

$$E = 9,81 \text{ N kg}^{-1} = 9,81 \text{ m s}^{-2}$$

a míří svisle dolů.

Homogenní elektrické pole (obr. 3) vzniká mezi dvěma rovnoběžnými, nesouhlasně nabitými vodivými deskami. Graficky se homogenní pole znázorňuje stejnou hustotou rovnoběžných elektrických siločar. V takovém



Obr. 3

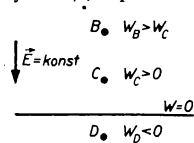
poli lze snadno vypočítat práci, kterou vykonají síly elektrického pole při přemístění náboje q po dráze s ve směru siločáry, neboť podle (8) síla $F = Eq$ zůstává konstantní. Je-li d vzdálenost desek, pak pro práci při přechodu náboje q z jedné desky na druhou dostáváme

$$A = Fd = Eqd. \quad (9)$$

Povšimněme si nyní energetických změn a práce při přemísťování tělesa o hmotnosti m v gravitačním poli.

Potenciální energie gravitační W hmotného bodu o hmotnosti m je určena prací, kterou je nutno vykonat, abychom jej dopravili z místa nulové potenciální energie

do daného bodu. Pro určení velikosti potenciální energie je tedy nutno nejprve dohodnout, ve kterých bodech bude mít libovolné těleso nulovou potenciální energii. Souhrn těchto bodů nazýváme *hladinou nulové potenciální energie* (hladinou nulového potenciálu). Podle volby této hladiny může potenciální



Obr. 4

energie nabývat hodnot kladných i záporných. Na obr. 4 je znázorněna nulová hladina ($W = 0$) a hmotný bod umístěný v bodech B , C , D homogenního gravitačního pole. Příslušné potenciální energie jsou W_B , W_C , W_D a zřejmě je při označeném směru a orientaci intenzity gravitačního pole

$$W_B > W_C > 0, W_D < 0.$$

Poměr

$$\varphi = \frac{W}{m}, [\varphi] = \text{J kg}^{-1} \quad (10)$$

nazýváme *potenciálem v určitém bodě gravitačního pole*.

Udává číselně potenciální energii, kterou má hmotný bod o jednotkové hmotnosti, umístěný v daném bodě a rovná se číselně zřejmě práci, kterou je nutno vykonat při přemístění hmotného bodu o jednotkové hmotnosti z hladiny nulového potenciálu do daného bodu. Souhrn bodů jednoho a téhož potenciálu nazýváme *hladinou* (*ekvipotenciální plochou*). V homogenním gravitačním poli jsou to vodorovné roviny.

Potenciály v bodech B a C jsou podle definice

$$\varphi_B = \frac{W_B}{m} = \frac{A_B}{m}, \quad \varphi_C = \frac{W_C}{m} = \frac{A_C}{m},$$

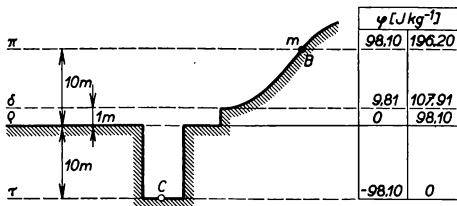
kde A_B znamená práci vykonanou při přenesení hmotného bodu o hmotnosti m z hladiny nulového potenciálu do bodu B a A_C práci vykonanou při přenesení téhož hmotného bodu z hladiny nulového potenciálu do bodu C . Přenášíme-li hmotný bod do bodu B z bodu C , pak potřebná práce A se rovná rozdílu obou prací

$$\begin{aligned} A &= A_B - A_C = m \varphi_B - m \varphi_C, \\ A &= m (\varphi_B - \varphi_C). \end{aligned} \quad (11)$$

Tutéž práci vykonají síly gravitačního pole, přemísťuje-li se jejich působením hmotný bod z bodu B do bodu C . Poněvadž potenciální rozdíl $\varphi_B - \varphi_C$ ve vztahu (11) nezávisí na volbě hladiny nulového potenciálu, můžeme vyslovit na základě vztahu (11) tuto poučku:

Volně pohyblivé těleso v gravitačním poli přechází působením pole z hladiny vyššího potenciálu do hladiny nižšího potenciálu. Při tom síly pole konají práci. Velikost vykonané práce závisí pouze na hmotnosti tělesa a na potenciálním rozdílu. Nezávisí na tvaru a délce dráhy a na volbě hladiny nulového potenciálu.

Obr. 5 představuje vodorovnou rovinu ϱ , výkop hloubky 10 m, vyvýšeninu výšky 1 m a kopec. Potenciály hladin jsou uvedeny vzhledem ke dvěma různým nulovým



Obr. 5

hladinám. Při přechodu tělesa o hmotnosti $m = 10 \text{ kg}$ z bodu B do bodu C bude vykonána silami pole práce

$$A = m(\varphi_B - \varphi_C) = 10 \text{ kg} \cdot 196,2 \text{ J kg}^{-1} = 1962 \text{ J}.$$

Definujme nyní obdobnou veličinu i pro pole elektrické — tzv. *elektrický potenciál* φ . Pro jednoduchost volme homogenní elektrické pole mezi dvěma vodivými deskami (obr. 6). Elektrický náboj q umístěný mezi deskami má v daném bodě pole jistou potenciální energii W , jejíž velikost podobně jako v gravitačním poli závisí na dohodnuté hladině nulové potenciální energie a kromě toho též na velikosti a znaménku náboje q . Zvolme náboj q kladný a definujme potenciál φ v daném bodě elektrického pole vztahem

$$\varphi = \frac{W}{q}, \quad [\varphi] = J C^{-1} = V. \quad (12)$$

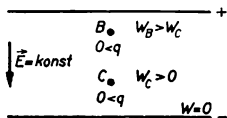
Elektrický potenciál tedy udává číselně potenciální energii, kterou v daném bodě má kladný jednotkový náboj tam umístěný.

Pro celkovou potenciální energii náboje q pak vyplývá vztah

$$W = \varphi q. \quad (13)$$

Záporný náboj q v témže místě elektrického pole má energii W opačného znaménka, zatímco znaménko potenciálu se samozřejmě nezměnilo. Elektrometrem lze ukázat, že vodič, na němž jsou elektrické náboje v klidu, je vždy ekvipotenciální hladinou.

Pro elektrické pole na obr. 6, v němž za hladinu nulového potenciálu byla zvolena deska se záporným nábojem, platí podle definice



Obr. 6

$$\varphi_B = \frac{W_B}{q} = \frac{A_B}{q}, \quad \varphi_C = \frac{W_C}{q} = \frac{A_C}{q},$$

kde A_B je práce vykonaná při přenosu bodového náboje q z hladiny nulového potenciálu do B a A_C je práce vykonaná při přenosu téhož náboje z hladiny nulového potenciálu do bodu C . Dále již stejnou úvahou jako v gravitačním poli obdržíme pro práci A vykonanou silami elektrického pole při přenosu kladného náboje q z bodu B do bodu C (tj. z místa vyššího potenciálu do místa nižšího potenciálu) vztah

$$A = q(\varphi_B - \varphi_C). \quad (14)$$

Potenciální rozdíl $\varphi_B - \varphi_C$ nazýváme *napětím* mezi body B a C a značíme je U_{BC} :

$$U_{BC} = \varphi_B - \varphi_C, \quad [U] = V = J C^{-1}. \quad (15)$$

Vztah (14) zapisujeme pak ve tvaru

$$A = q U. \quad (16)$$

Vztah platí zřejmě i pro záporný náboj q s tím rozdílem, že na náboje $q < 0$ působí síly elektrického pole silou opačně orientovanou, a tedy volně pohyblivý záporný náboj převádějí z místa nižšího potenciálu do míst vyššího potenciálu a konají při tom práci. Můžeme tedy vyslovit poučku zcela obdobnou poučce pro gravitační pole:

Volně pohyblivý kladný náboj q v elektrickém poli přechází působením pole z místa vyššího potenciálu do míst nižšího potenciálu (záporný obráceně). Při tom síly pole konají práci. Velikost vykonané práce závisí pouze na velikosti přeneseného náboje a na napětí. Nezávisí na tvaru a délce dráhy a na volbě hladiny nulového potenciálu.

Je-li mezi oběma deskami homogenního pole vzdálenost d a napětí U , pak práci vykonanou při přechodu náboje q z jedné desky na druhou vyjádříme dvěma různými vztahy:

Podle (16)

$$A = q U$$

a podle (9)

$$A = E q d.$$

Jejich porovnáním obdržíme pro homogenní pole důležité vztahy

$$U = E d, \quad E = \frac{U}{d}, \quad [E] = V m^{-1}. \quad (17)$$

Poměr $\frac{U}{d}$ udává napětí připadající na jednotku délky

dráhy ve směru intenzity elektrického pole a nazýváme jej *spád napětí*. Jednotka spádu napětí $V m^{-1}$ je tedy současně i jednotkou intenzity elektrického pole a ze vztahu (17) plyne, že je totožná s dříve již zavedenou jednotkou intenzity $N C^{-1}$.

Ověřte, že platí

$$V m^{-1} = N C^{-1}.$$

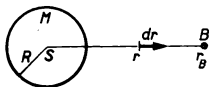
Zbývá nám vyšetřit průběh potenciálu v některých nehomogenních polích, a to v gravitačním poli Země a v elektrickém poli bodového náboje Q . K vyšetřování nám poslouží dříve odvozené vztahy pro intenzitu E ve vzdálenosti r

$$E = \kappa \frac{M}{r^2}, \quad E = k \frac{Q}{r^2}.$$

Gravitační potenciál v bodě B ve vzdálenosti r_B od středu Země určíme podle definice jako podíl

$$\varphi_B = \frac{W_B}{m} = \frac{A_B}{m},$$

kde W_B je potenciální energie hmotného bodu o hmotnosti m v bodu B , která se rovná práci A_B vykonané při přenosu hmotného bodu z hladiny nulové potenciální energie (zvolme povrch Země) do bodu B (obr. 7). Označme na úsečce SB ve vzdálenosti r od bodu S ($R \leq r \leq r_B$) tak malý úsek dr , že sílu, která posouvá hmotný bod po tomto úseku, lze považovat za stálou. Je to síla



Obr. 7

$$F = \kappa \frac{M m}{r^2} = E m,$$

neboť při posouvání hmotného bodu přemáháme gravitační sílu danou gravitačním zákonem. Na dráze dr vykonáme tedy elementární práci

$$dA = F dr = E m dr . \quad (18)$$

Tato síla působí ve směru dráhy a koná tedy práci, potenciální energie tělesa roste. Představíme-li si celou dráhu od povrchu Země až do bodu B rozdělenou na velký počet stejných elementů dr , bude práce při posouvání hmotného bodu po jednotlivých těchto elementech různá, neboť síla F postupně klesá se slábnoucí intenzitou pole.

$$\left(E = \kappa \frac{M}{r^2} \right) .$$

Celková práce A je dána součtem všech elementárních prací dA , a to od povrchu Země ($r = R$) až do daného bodu B ($r = r_B$).

Matematicky se tento součet vyjádří integrálem

$$W_B = A = \int_R^{r_B} F dr = \int_R^{r_B} E m dr \quad (19)$$

a potenciál v bodu B

$$\varphi_B = \frac{W_B}{m} = \int_R^{r_B} E dr . \quad (20)$$

Po dosazení za E dostáváme

$$\varphi_B = \int_R^{r_B} \frac{\kappa M}{r^2} dr = M \kappa \int_R^{r_B} \frac{dr}{r^2} . \quad (21)$$

V matematice si odvodíte, že hodnota tohoto integrálu je

$$\varphi_B = \frac{\kappa M}{R} - \frac{\kappa M}{r_B}.$$

Ve vzdálenosti $r \geq R$ je tedy potenciál

$$\varphi = \frac{\kappa M}{R} - \frac{\kappa M}{r}. \quad (21')$$

Ve shodě se zvolenou hladinou nulového potenciálu dostáváme pro $r = R$ hodnotu $\varphi = 0$. S rostoucí vzdáleností od Země potenciál (a tedy i potenciální energie tělesa) roste a maxima nabývá pro $r \rightarrow \infty$; pro jeho potenciál vychází

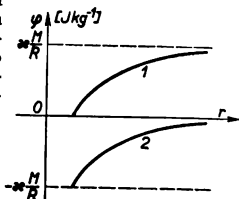
$$\varphi_\infty = \frac{\kappa M}{R} = 6,25 \cdot 10^7 \text{ J kg}^{-1}.$$

Průběh φ v závislosti na r ukazuje křivka 1 (obr. 8).

Pro zjednodušení vztahu (21) se někdy volí hladina nulového potenciálu v nekonečnu ($\varphi_\infty = 0$). Toho dosáhneme, snížíme-li všechny potenciály dané vztahem (21) o hodnotu $\kappa \frac{M}{R}$.

Při této volbě je pak potenciál dán vztahem

$$\varphi = - \frac{\kappa M}{r} \quad (22)$$



Obr. 8

a je ovšem v libovolném bodě pole záporný. Jeho průběh udává křivka 2 (obr. 8). Potenciální rozdíly mezi body pole se tím nezměnily.

Otázky k procvičení:

1. Jaké práce je zapotřebí ke zdvižení tělesa o hmotnosti $m = 1000$ kg do vzdálenosti $h = 1000$ km od povrchu Země?

$$\left[A = \kappa M m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right); r = 7,370 \cdot 10^6 \text{ m} \right]$$

2. Jakou potenciální energii má těleso o hmotnosti m v nekonečnu a jakou nejmenší rychlostí by tedy muselo být s povrchu Země vrženo, aby se již k Zemi nevrátilo? (Tzv. druhá kosmická rychlost.)

$$\left[v = \sqrt{\frac{2\kappa M}{R}} = \sqrt{2Rg} \quad \sqrt{\frac{\kappa M}{R^2}} = \sqrt{2Rg} \right]$$

3. Odvoďte, že pro přemístění tělesa o hmotnosti m ze vzdálenosti r_1 do vzdálenosti r_2 ($r_2 > r_1 \geq R$, měřeno od středu Země) je třeba vykonat práci

$$A = m \kappa M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

4. Označte hmotnost Slunce M_s a vzdálenost Země od Slunce a . Uvažte, že κ je univerzální konstanta platící pro všechna gravitační pole a určete na základě vztahu z otázky 3. nejmenší rychlost, kterou by muselo mít těleso, vzdálené od Slunce jako naše Země, aby se trvale od Slunce vzdalovalo.

$$\left[v = \sqrt{\frac{2\kappa M_s}{a}} = 42,1 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1} \text{ vzhledem ke Slunci} \right]$$

Vrháme-li těleso z naší Země a využijeme-li rychlosti jejího oběhu kolem Slunce, je možno uvedenou rychlost snížit vůči Zemi na hodnotu $16,5 \text{ km s}^{-1}$ (3. kosmická rychlost).

Dobré porozumění průběhu potenciálu v gravitačním poli nám poslouží i při studiu potenciálu v poli elektrickém. Aby analogie byla úplnější, studujme nejprve potenciál v elektrickém poli záporného bodového náboje Q ($Q < 0$).

Vzhledem k tomu, že potenciál udává číselně potenciální energii *kladného* jednotkového náboje, můžeme použít obr. 7 i vztahů z něho odvozených. Představme si v bodě S bodový náboj $Q < 0$ vytvářející elektrické pole a v bodě B pak zkušební náboj $q > 0$, který je silami elektrického

pole přitahován k náboji Q . Intenzitu gravitačního pole nahradíme intenzitou pole elektrického $E = k \frac{Q}{r^2}$, síla $F = E q$ a elektrický potenciál $\varphi = \frac{W}{q}$.

Poloměr R zde ztrácí smysl, a proto zvolíme hladinu nulového potenciálu v nekonečnu a ve shodě se vztahem (22) dostáváme pro potenciál ve vzdálenosti r od bodového náboje Q ve vakuu vztah

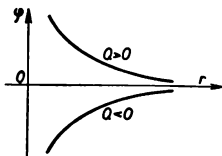
$$\varphi = k \frac{Q}{r}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}. \quad (23)$$

Znaménko minus ze vztahu (22) odpadá, neboť je obsaženo již ve znaménku náboje $Q < 0$. Vztah (23) však zřejmě platí i pro náboj $Q > 0$, neboť změnou znaménka náboje se změní pouze orientace sil, které v jednotlivých bodech pole působí na kladný náboj q , a nikoli jejich velikost.

Liší se tedy potenciály pole kladného nebo záporného náboje Q ve stejných vzdálenostech r pouze znaménkem. Průběh potenciálu v závislosti na vzdálenosti r od bodového náboje Q je znázorněn pro nulovou hladinu v nekonečnu na obr. 9.

Pro $Q < 0$ s klesající vzdáleností od náboje Q potenciál elektrického pole roste, pro $Q > 0$ klesá; v obou případech podle vztahu

$$\varphi = k \frac{Q}{r}.$$



Obr. 9

Otázky k procvičení:

1. Jaká síla F působí na α částici, která vnikla do homogenního elektrického pole mezi vodivými deskami, je-li vzdálenost desek d a napětí mezi nimi U ? Náboj částice je $q = 2e$ (kde e je velikost elementárního náboje).

$$\left[F = \frac{2eU}{d} \right]$$

2. Předpokládejte, že elektron obíhá kolem vodíkového jádra po kružnici o poloměru r_2 (dvoukvantová dráha) a přeskóčí na dráhu o poloměru r_1 (jednoukvantová dráha); $r_1 < r_2$. Náboj jádra je $+e$, elektronu $-e$ (elementární náboj), klidová hmotnost elektronu je m .

a) Určete změnu potenciální energie $\Delta W_p = W_{p_1} - W_{p_2}$ elektronu při tomto přeskoku.

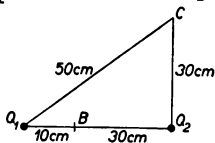
$$\left[W_p = -ke^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) < 0 \right]$$

b) Dostředivou silou při uvedených kruhových pohybech je zřejmě přitažlivá síla elektrického pole jádra. Z její velikosti a hmotnosti elektronu určete druhé mocniny rychlosti (v_1^2 , v_2^2), kterými se elektron pohyboval na uvedených drahách, a změnu kinetické energie $\Delta W_k = W_{k_1} - W_{k_2}$ při přeskoku.

$$\left[\Delta W_k = \frac{1}{2} ke^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) > 0 \right]$$

c) Sečtením obou změn stanovte celkovou změnu energie ΔW při přeskoku elektronu a rozhodněte, zda přitom atom energii uvolnil či přijal.

$$\left[\Delta W = \Delta W_p + \Delta W_k = -\frac{1}{2} ke^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) < 0; \text{atom energii uvolnil} \right]$$



Obr. 10

3. Dva bodové náboje ve vakuu $Q_1 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, $Q_2 = -10^{-6} \text{ C}$ jsou umístěny podle obr. 10. Určete v bodech B a C velikost intenzity výsledného elektrického pole. Jaké napětí je mezi body B a C a jakou práci vykonají síly elektrického pole, jestliže převedou α částici z bodu B do C. Náboj α částice je $q = 2e$.

$$\left[E_B = 23,5 \cdot 10^6 \text{ V m}^{-1}; E_C = 8,5 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1}; U_{BC} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ V}; A = 5,8 \cdot 10^{-13} \text{ J} \right]$$

b) Kategorie B

Doc. Dr. Miloš Doležel, Brno

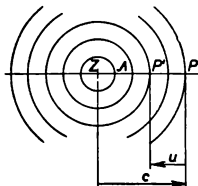
Dopplerův princip

Christian Doppler (1803—1853) působil jako profesor na technice v Praze a později na universitě ve Vídni. V roce 1842, v době svého působení na pražské technice, objevil důležitý zákon, který se nazývá Dopplerův princip. Tento zákon vysvětluje jevy, které nastávají při vzájemném pohybu zdroje vlnění a pozorovatele. Platí nejen pro vlny akustické, nýbrž pro všechny druhy vlnění (vlny světelné, vlny rozhlasové).

I. Dopplerův princip si vysvětlíme na vlnění zvukovém, a to nejprve na případě, že pohyb zdroje nebo pozorovatele se děje po spojnici zdroj-pozorovatel. Budeme rozlišovat tři případy:

1. *Pozorovatel je v klidu, zdroj zvuku se pohybuje.*

Pokud zdroj zvuku Z o kmitočtu (výšce tónu) f je v klidu, šíří se zvukové vlny o vlnové délce λ od zdroje rychlostí c (fázová rychlost vlnění) ve stejnorodém prostředí rovnoměrně na všechny strany v soustředných kulových vlnoplochách (obr. 11). Zdroj vyše za sekundu f vln a pozorovatel, který je v bodě P v klidu, přijme v každé sekundě f kmitů, slyší tedy tón, jehož výška se rovná výšce tónu vydávaného zdrojem. Délka vlny λ



Obr. 11

je vázána s kmitočtem f a fázovou rychlostí vlnění c známým vztahem

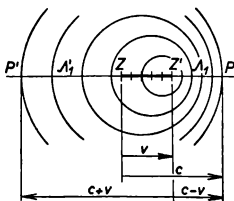
$$c = f\lambda,$$

který udává, že na dráze číselně rovné velikosti fázové rychlosti vlnění c se vytvoří f vln. Klidný pozorovatel zachytí tedy za sekundu tolik kmitů, kolik vln se vytvoří na délce číselně rovné c , tj.

$$f = \frac{c}{\lambda}.$$

V obr. 11 jsou vyznačeny vlnoplochy vyslané klidným zdrojem v časových intervalech rovných době kmitu T . Vzdálenost dvou sousedních vlnoploch pak udává délku vlny λ .

Pohybuje-li se zdroj zvuku k pozorovateli rychlostí v (nejprve předpokládáme $v < c$), pak každá následující vlna je vyslána k pozorovateli ze vzdálenosti kratší než vlna předcházející. Vlny vyslané pohybujícím se zdrojem se šíří tímž prostředím stejnou rychlostí jako při klidném zdroji, protože



Obr. 12

fázová rychlost vlnění závisí jen na vlastnostech prostředí, nikoli na druhu a vlastnostech zdroje. Pohybující se zdroj vyšle za sekundu stejný počet f vln jako zdroj klidný, protože však postoupil za sekundu o dráhu číselně rovnou v , je těchto f vln, vyslaných ve směru pohybu zdroje za sekundu, rozloženo na

dráze číselně rovné $c - v$. Délka vlny λ_1 ve směru pohybu zdroje je kratší (obr. 12, klidný pozorovatel se nachází v bodě P), neboť platí

$$\lambda_1 = \frac{c - v}{f}.$$

Protože při pohybujiícím se zdroji se fázová rychlost vlnění nezměnila, bude pozorovatel vnímat při přibližování zdroje zvuk o kmitočtu f_1 , pro který platí

$$c = f_1 \lambda_1.$$

Tón o kmitočtu f_1 zachycený pozorovatelem je určen počtem vln, které jsou rozloženy na dráze číselně rovné c . Pro tento kmitočet platí

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{c - v} f. \quad (1)$$

Vzdaluje-li se zdroj od pozorovatele rychlostí v , pak f vln je rozloženo na dráze číselně rovné $c + v$. Tím se délka vlny prodlouží (obr. 12, klidný pozorovatel se nachází v bodě P') na

$$\lambda'_1 = \frac{c + v}{f},$$

takže kmitočet zvuku zachyceného klidným pozorovatelem je

$$f'_1 = \frac{c}{\lambda'_1} = \frac{c}{c + v} f. \quad (1')$$

Docházíme k výsledku, že při přibližování zdroje zvuku ke klidnému pozorovateli vnímá pozorovatel tón o kmitočtu vyšším, při vzdalování zdroje vnímá pozorovatel tón o kmitočtu nižším, než je skutečný kmitočet zdroje.

Tento jev můžeme pozorovat u tónů vydávaných jezdoucími vozidly, jako je pískající lokomotiva, houkající automobil, zvonící tramvaj, nízko letící letadlo. V okamžiku, kdy nás pohybujiící se zdroj zvuku mívá, klesne zřetelně výška vnímaného tónu.

Změna kmitočtu tónu při pohybu zdroje je změna objektivní, neboť je způsobena objektivní změnou vlnové délky.

2. Zdroj zvuku je v klidu, pozorovatel se pohybuje.

Klidný zdroj zvuku o kmitočtu f vysílá zvukové vlny rychlostí c na všechny strany. Klidný pozorovatel by přijal za sekundu tolik kmitů, kolik vln se vytvoří na dráze číselně rovné velikosti c , tj.

$$f = \frac{c}{\lambda}.$$

Pohybuje-li se pozorovatel ke klidnému zdroji rychlostí $u < c$, pak vlny mají vůči pozorovateli relativní rychlost $c + u$, což je totéž, jako by vlnění postupovalo vzhledem ke klidnému pozorovateli rychlostí $c + u$. Pozorovatel zachytí tedy za sekundu tolik kmitů, kolik vln by se vytvořilo na dráze číselně rovné $c + u$. Vnímá tedy tón o kmitočtu

$$f_2 = \frac{c + u}{\lambda} = \frac{c + u}{c} f. \quad (2)$$

Vzdaluje-li se pozorovatel od zdroje zvuku touž rychlostí u , pak vlny mají vůči pozorovateli relativní rychlost $c - u$ a pozorovatel vnímá tón o kmitočtu

$$f'_2 = \frac{c - u}{\lambda} = \frac{c - u}{c} f. \quad (2')$$

Docházíme k podobnému výsledku jako v případě 1. Přibližuje-li se pozorovatel ke klidnému zdroji zvuku, vnímá tón o kmitočtu vyšším, při vzdalování vnímá tón o kmitočtu nižším, než je skutečný kmitočet zdroje.

V tomto případě se délka vlny nemění (obr. 11, zdroj klidný, pozorovatel se pohybuje rychlostí u směrem ke

zdroji), a proto změna kmitočtu tónu vnímaného pozorovatelem je změnou subjektivní.

Ze vztahů (1) a (2) plyne, že pozorovatel vnímá tón o vyšším kmitočtu, než je vlastní kmitočet zdroje, jestliže se přibližuje buď zdroj ke klidnému pozorovateli, nebo pozorovatel ke klidnému zdroji. Po úpravě uvedených vztahů obdržíme

$$f_1 = \frac{c}{c-v} f = \frac{1}{1-\frac{v}{c}} f = \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v^2}{c^2}} f,$$

$$f_2 = \frac{c+u}{c} f = \left(1 + \frac{u}{c}\right) f.$$

Ukazuje se, že pro zvýšení tónu není lhostejné, pohybuje-li se zdroj nebo pozorovatel. Frekvence f_1 tónu přijímaného klidným pozorovatelem při pohybu zdroje rychlostí v směrem k pozorovateli je vyšší než frekvence f_2 tónu, jež vnímá pozorovatel pohybující se rychlostí $u = v$ směrem ke klidnému zdroji, neboť

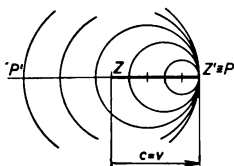
$$\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v^2}{c^2}} > 1 + \frac{v}{c}.$$

Jen tehdy, je-li rychlost $u = v$ velmi malá vzhledem k fázové rychlosti akustických vln ($v = u \ll c$), dávají oba výrazy prakticky stejné výsledky. Podobně bychom mohli porovnat vztahy (1') a (2').

Při větších rychlostech zdroje nebo pozorovatele se objevuje podstatný rozdíl mezi oběma případy. Jako příklad uvažujme, že

$$v = u = c.$$

Pohybuje-li se zdroj ke klidnému pozorovateli rychlostí v , kterou budeme postupně zvyšovat, pak se kmitočet tónu vnímaný pozorovatelem zvyšuje, jak plyne ze vztahu (1). Při určité rychlosti zdroje dosáhne kmitočet přijímaný pozorovatelem hranice slyšitelnosti (20 kHz). Při vyšších



Obr. 13

rychlostech nebude už pozorovatel vnímat zvuk. V mezním případě $v = c$ pozorovatel tedy nemůže slyšet zvuk, neboť jak plyne ze vztahu (1), je $f_1 = \infty$. V tomto případě se všechny vlnoplochy dotýkají v bodě P (obr. 13), procházejí tedy místem pozorovatele všechny sou-

časně. Pozorovatel uslyší zvuk až při vzdalování zdroje; ze vztahu (1') plyne pro kmitočet vnímaného tónu

$$f_1' = \frac{1}{2} f.$$

Kdyby se pozorovatel přibližoval ke zdroji rychlostí $u = c$, vnímal by tón o kmitočtu $f_2 = 2f$, jak plyne ze vztahu (2). Vzdaluje-li se pozorovatel od klidného zdroje rychlostí $u = c$, nevnímá zvuk, neboť podle vztahu (2') je $f_2' = 0$. Tento poznatek lze odvodit také přímo úvahou. Jestliže se totiž pozorovatel vzdaluje od zdroje vlnění stejnou rychlostí, jakou se vlnění šíří, je mezi pozorovatelem a čelem vlnění vysílaného klidným zdrojem stále stejná vzdálenost. Proto vlnění k pozorovateli nedospěje.

3. Zdroj zvuku i pozorovatel se pohybují

Z možných případů nejprve uvažujme, že zdroj i pozorovatel se pohybují týmž směrem, tj. zdroj se pohybuje

např. směrem k pozorovateli rychlostí v a pozorovatel směrem od zdroje rychlostí u . Kmitočet tónu přijímaného pozorovatelem je pak dán vztahem

$$f_3 = \frac{c}{c-v} f_2' = \frac{c}{c-v} \frac{c-u}{c} f = \frac{c-u}{c-v} f. \quad (3)$$

Je-li $c-u = c-v$,¹ je $u = v$ a $f_3 = f$. Docházíme tedy k zajímavému výsledku, že pozorovatel vnímá vlnění téže frekvence, kterou zdroj skutečně vysílá, jestliže se zdroj i pozorovatel pohybují stejným směrem a stejně velikou rychlostí vzhledem k prostředí. Z toho vyplývá, že frekvence se nemění ani v opačném případě, kdy se pohybuje prostředí vzhledem ke klidnému zdroji a klidnému pozorovateli, že tedy pohyb prostředí nemá vliv na frekvenci tónu. Proto např. větrem se nemění výška tónů klidných zdrojů zvuku, pokud je také pozorovatel v klidu.

Obdobně bychom odvodili vztah pro výšku tónu vnímaného pozorovatelem, kdyby se zdroj i pozorovatel pohybovali proti sobě (f_3') a kdyby se pohybovali od sebe (f_3''). Pak platí

$$f_3' = \frac{c+u}{c-v} f, \quad (4)$$

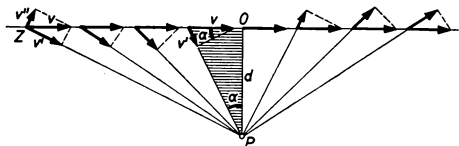
$$f_3'' = \frac{c-u}{c+v} f, \quad (5)$$

kde v je rychlost zdroje, u rychlost pozorovatele.

II. Zabývejme se nyní obecnějším případem, že zdroj zvuku se nepohybuje po spojnici zdroj-pozorovatel, nýbrž po přímce, od níž je klidný pozorovatel vzdálen o délku d .

Uvažujme nejprve, že zdroj se pohybuje kolem pozorovatele po kružnici o poloměru d . V tomto případě se relativní rychlost zdroje vůči pozorovateli nemění, a proto nedochází ke změně kmitočtu vnímaného tónu.

Pohybuje-li se zdroj zvuku po přímce, od níž má klidný pozorovatel vzdálenost d , můžeme vektor rychlosti v



Obr. 14

rozložit na dvě složky na sebe kolmé, na složku v' do směru spojnice zdroj-pozorovatel a na složku v'' k ní kolmou (obr. 14). Z předcházející úvahy vyplývá, že složka v'' nemá vliv na změnu výšky tónu vnímaného pozorovatelem, musíme tedy uvažovat jen vliv složky v' , což je relativní rychlost zdroje vůči pozorovateli. Pro výšku tónu přijímaného pozorovatelem platí opět vztahy (1) a (1'), v nichž však místo skutečné rychlosti zdroje je třeba dosadit relativní rychlost zdroje vůči pozorovateli

$$v' = v \sin \alpha,$$

kde

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}.$$

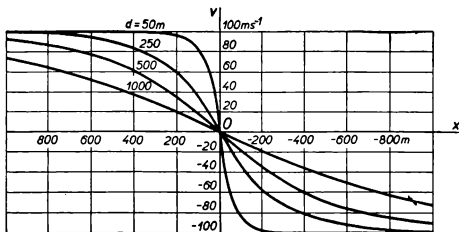
Při přibližování zdroje zvuku úhel α klesá od $\frac{\pi}{2}$ do 0, při vzdalování se mění od 0 do $-\frac{\pi}{2}$. Pro výšku tónu

přijímaného pozorovatelem při přibližování a vzdalování zdroje platí vztah

$$f_4 = \frac{c}{c - v'} f = \frac{c}{c - v \sin \alpha} f, \quad (6)$$

přitom rychlost v' při přibližování zdroje k pozorovateli označujeme kladně, při vzdalování zdroje od pozorovatele záporně.

Relativní rychlost zdroje vůči pozorovateli se plynule mění. Největší hodnoty nabývá pro $\alpha = \pm 90^\circ$, kdy $v' = \pm v$, nejmenší hodnoty nabývá pro $\alpha = 0^\circ$, kdy

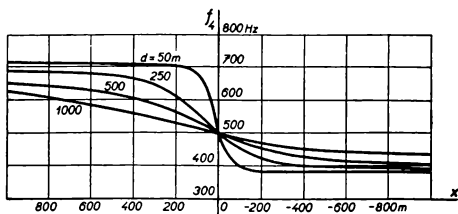


Obr. 15

$v' = 0$. To je patrné také z obr. 15, na němž je znázorněno, jak se mění relativní rychlost zdroje pro různé d ($d = 50 \text{ m}$, 250 m , 500 m , 1000 m , $f = 500 \text{ Hz}$, $v = 100 \text{ m s}^{-1}$).

V důsledku změny relativní rychlosti zdroje vůči pozorovateli klesá výška přijímaného tónu plynule

z hodnoty maximální (pro $\alpha = 90^\circ$ je $f_4 = f_1$) na hodnotu minimální (pro $\alpha = -90^\circ$ je $f_4 = f_1'$), jak plyne ze vztahu (6) a jak je patrné také z obr. 16. Prochází-li



Obr. 16

pohybující se zdroj zvuku bodem nejbližším pozorovateli ($\alpha = 0^\circ$, $v' = 0$), vnímá pozorovatel vlnění o kmitočtu, který je zdrojem skutečně vysílán.

Tento jev můžeme pozorovat, když např. letí nad námi letadlo ve velké výšce. Zvláště u tryskových letadel zřetelně slyšíme postupné snižování tónu vydávaného letadlem.

Nebudeme se zabývat opačným případem, kdyby se pozorovatel pohyboval a klidný zdroj by se nacházel ve velké vzdálenosti d od dráhy pozorovatele; tento případ by se těžko realizoval.

Souhrn

Dopplerův princip bývá zpravidla uváděn jen pro případ, kdy se pohybuje zdroj zvuku (vlnění) nebo pozo-

rovatel po přímce zdroj-pozorovatel. V tomto případě můžeme Dopplerův princip formulovat na základě dříve uvedeného takto:

Pohybuje-li se zdroj zvuku a pozorovatel relativně k sobě nebo od sebe, pak pozorovatel při vzájemném přibližování přijímá tón o vyšším kmitočtu a při vzájemném vzdalování přijímá tón o nižším kmitočtu, než je vlastní kmitočet zdroje.

Výška tónu vnímaného pozorovatelem závisí na rychlosti zdroje nebo pozorovatele. Pokud se zdroj nebo pozorovatel pohybují vůči sobě stálou rychlostí, vnímá pozorovatel tón o konstantní výšce, a to při vzájemném přibližování vyšší, při vzdalování nižší, než je skutečný kmitočet zdroje; ke změně výšky vnímaného tónu dochází jen v okamžiku, kdy pohybující se zdroj mívá klidného pozorovatele nebo pohybující se pozorovatel mívá klidný zdroj.

V obecném případě, kdy pozorovatel je v určité vzdálenosti od dráhy zdroje, se výška tónu vnímaného pozorovatelem snižuje plynule, poněvadž relativní rychlost zdroje vůči pozorovateli se plynule mění.

c) Kategorie C

Jan Tesař, Praha

Moment síly a momentová věta

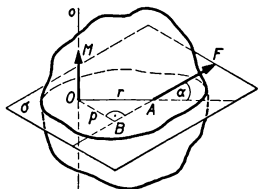
1. Moment síly

Dokonale tuhé těleso nemění působením vnější síly ani svůj tvar, ani objem. Vnější síla má na ně jen pohybové účinky. Koná-li těleso posuvný pohyb, mění se působením

vnější síly rychlost v jeho posuvného pohybu (síla mu uděluje zrychlení a), otáčí-li se těleso, mění se jeho úhlová rychlost ω (síla mu uděluje úhlové zrychlení ϵ). Závislost zrychlení na síle je v prvním případě vyjádřena zákonem síly $F = m a$, kde m značí hmotnost tělesa, konajícího posuvný pohyb.

V této stati se budeme zabývat otáčivými účinky vnější síly, působící na tuhé těleso.

Jestliže na klidné tuhé těleso, které má jeden pevný bod O , působí v určitém místě A síla F , jejíž vektorová přímka neprochází bodem O , uvede se těleso do otáčivého pohybu kolem osy o procházející bodem O kolmo k rovině σ , určené bodem O a vektorovou přímkou síly F (obr. 17). Orientovaná



Obr. 17

úsečka $OA = r$ určuje polohu A působíště síly F a nazývá se *polohový vektor* působíště síly F vzhledem k pevnému bodu O tuhého tělesa. Protože účinek síly na dokonale tuhé těleso se nemění, posuneme-li její působíště do kteréhokoli bodu tělesa ležícího na vektorové přímce síly F (Fyzika pro I. roč. SVVŠ, čl. 47), nezávisí otáčivý účinek síly F na poloze bodu A , pokud leží na vektorové přímce síly F . Proto můžeme posunout působíště síly F do bodu B , který je patou kolmice spuštěné z bodu O na vektorovou přímku síly F . Orientovaná úsečka $OB = p$ se nazývá *rameno síly F* .

Otáčivý účinek síly F na tuhé těleso závisí jednak na velikosti F síly F , jednak na velikosti p jejího ramene p .

Velikost tohoto pohybového účinku vyjadřuje fyzikální veličina M , jejíž velikost $M = p F$. Veličina M se nazývá *moment síly F vzhledem k bodu O* .

Z pravoúhlého trojúhelníku OAB (obr. 17) je patrné, že $p = r \sin \alpha$, kde α značí úhel, který svírá vektorová přímka síly F se směrem vektoru r . Proto je velikost momentu síly vzhledem k bodu O určena vztahem

$$M = p F = r F \sin \alpha. \quad (1)$$

Jednotkou momentu síly v soustavě SI je $[M] = 1 \text{ Nm}$. Tato veličina má stejný rozměr jako veličina práce. Protože však moment síly a práce jsou dva různé fyzikální pojmy, používá se pro jednotku práce název *joule* (J), pro jednotku momentu síly název *newtonmetr* (Nm).

Ze vztahu (1) je zřejmé, že velikost momentu síly vzhledem k bodu O je číselně rovna obsahu obdélníku, jehož strany mají stejnou velikost jako síla F a její rameno p .

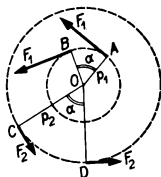
■ Otáčivý účinek síly není však zcela určen velikostí momentu síly, neboť tato velikost neurčuje rovinu, v níž leží vektor r , vektorová přímka síly F a také rovina kružnice, po které se pohybuje kolem pevného bodu O působistiště A síly F . Protože poloha roviny je jednoznačně určena směrem její normály (přímka kolmá k rovině), je účelné považovat moment M síly za vektor, který má počátek v bodě O , je kolmý k rovině σ určené bodem O , a vektorovou přímkou síly F a má velikost $M = p F = r F \sin \alpha$. *Vektorová přímka momentu síly určuje při této volbě zároveň osu, okolo které se těleso otáčí.*

Orientace vektoru M se určuje pravidlem pravé ruky (obr. 17): Položíme-li na těleso pravou ruku obrácenou dlaní k ose rotace tak, aby

ohnuté prsty ukazovaly orientaci otáčení tělesa, ukazuje vztyčený palec orientaci momentu síly vzhledem k bodu O . Moment síly je tedy kolmý k rovině určené vektory r a F a směřuje do poloprostoru, z něhož se otáčení tělesa pozoruje jako rotace ve smyslu kladném (proti smyslu otáčení hodinových ručiček).

Podle smyslu otáčení tělesa kolem osy o přiřazujeme velikosti momentu síly vzhledem k bodu O znaménko kladné nebo záporné. Díváme-li se na otáčející se těleso proti orientaci vektoru M (na obr. 17 na rovinu σ shora) a síla F uvede těleso z klidu do otáčivého pohybu v kladném smyslu, přiřadíme momentu síly znaménko kladné, v opačném případě záporné. Prochází-li vektorová přímka síly F bodem O , je $p = 0$, a proto má i moment síly vzhledem k bodu O hodnotu $M = 0$.

Působí-li na klidné dokonale tuhé těleso upevněné v bodě O po oblouku $\widehat{AB}$ se středovým úhlem α stálá síla F_1 , která při rotaci nemění vzhledem k tělesu svou polohu, vykoná práci A_1 (obr. 18). Rozdělme oblouk $\widehat{AB}$ na velký počet n velmi krátkých stejných úseků délky Δs tak malých, že je můžeme považovat za úsečky. Na každém z těchto úseků vykoná síla F_1 velmi malou práci $\Delta A = F_1 \Delta s$, neboť na každém z nich má síla směr dráhy. Celková práce A_1 vykonaná silou po oblouku $\widehat{AB}$ je rovna součtu všech těchto velmi malých prací ΔA . Platí tedy rovnice



Obr. 18

$$A_1 = F_1 n \Delta s = F_1 \widehat{AB} = F_1 p_1 \alpha = M_1 \alpha, \quad (2)$$

kde p_1 značí rameno síly F_1 a M_1 velikost jejího momentu vzhledem k bodu O . Rameno p_1 je zároveň poloměrem kruhové dráhy bodu A , ve kterém se vektorová přímka síly F_1 dotýká kružnice o středu O a o poloměru p_1 .

Tentýž účinek na těleso, jaký měla síla F_1 , má síla F_2 obdobných vlastností jako síla F_1 , která má působíště v určitém bodě C , ležícím v rovině σ proložené body O , A , B , jestliže otočí těleso o úhel $\alpha' = \alpha$. Síla F_2 přitom působí po oblouku $\widehat{CD}$ a vykoná práci $A_2 = A_1$. Práce $A_2 = F_2 p_2 \alpha = M_2 \alpha$, kde p_2 je rameno a M_2 moment síly F_2 .

Má-li tedy mít síla F_2 na těleso stejný otáčivý účinek jako síla F_1 , musí platit rovnice $F_1 p_1 \alpha = F_2 p_2 \alpha$, z níž vychází $F_1 p_1 = F_2 p_2$ a dále $M_1 = M_2$, neboť $F_1 p_1$ a $F_2 p_2$ určují velikosti momentů sil F_1 a F_2 vzhledem k bodu O . Vektorové přímky těchto momentů sil na obr. 18 jsou totožné, procházejí bodem O kolmo k nákrese a momenty jsou souhlasně orientovány do poloprostoru před nákresem.

Moment síly vzhledem k bodu je tedy mírou otáčivého účinku síly na těleso. Síly, jejichž momenty mají stejnou velikost, stejnou vektorovou přímku i orientaci, mají na těleso stejné otáčivé účinky.

Obdobně lze dokázat, že se ruší otáčivé účinky dvou sil, jejichž momenty mají společnou vektorovou přímku a stejnou velikost, jsou však opačně orientovány.

2. Skládání momentů sil a momentová věta

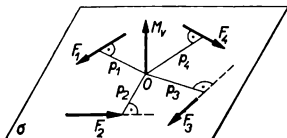
Působí-li na těleso více sil $F_1, F_2, \dots, F_n$, jejichž momenty vzhledem k témuž bodu O jsou po řadě $M_1,$

$M_2, \dots, M_n$, je celkový otáčivý účinek všech těchto sil vzhledem k bodu O určen momentem M_v , který je roven vektorovému součtu momentů sil $F_1, F_2, \dots, F_n$. Platí tedy vektorová rovnice

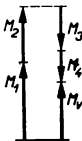
$$M_v = M_1 + M_2 + \dots + M_n. \quad (3)$$

Protože se momenty $M_1, M_2, \dots, M_n$ vztahují k bodu O , mají v bodě O počátek. Pak platí pro vektorové sčítání (skládání) momentů sil stejná pravidla jako pro skládání sil, které působí v jednom bodě (Fyzika pro 1. roč. SVVŠ, str. 42, čl. 16). V dalších úvahách se budeme zabývat jen vyšetřováním otáčivého účinku sil, jejichž vektorové přímky leží v jedné rovině.

Celkový otáčivý účinek sil F_1, F_2, F_3, F_4 , jejichž vektorové přímky leží v rovině σ (na obr. 19 vodorovné), je určen podle vztahu (3) momentem M_v . Z obr. 19 je patrné, že momenty všech těchto sil mají společný počá-



Obr. 19



Obr. 20

tek v bodě O a společnou vektorovou přímku kolmou k rovině σ . Momenty M_1 a M_2 jsou orientovány směrem vzhůru, momenty M_3 a M_4 směrem dolů. Na obr. 20 je naznačeno, jak se určí vektor M_v graficky.

Chceme-li určit velikost vektoru M_v algebraicky, použijeme místo vektorové rovnice (3) rovnice s algebraickým součtem momentů

$$M_v = M_1 + M_2 + \dots + M_n, \quad (4)$$

v níž momentům sil přiřadíme příslušná znaménka. Výsledný moment sil na obr. 19 a 20 má hodnotu

$$M_v = p_1 F_1 + p_2 F_2 - p_3 F_3 - p_4 F_4.$$

Úloha 1. Na přímý kruhový válec působí tři síly F_1, F_2, F_3 , jejichž vektorové přímky leží v rovině σ horní podstavy válce a mají od jejího pevného středu O po řadě vzdálenosti p_1, p_2, p_3 .

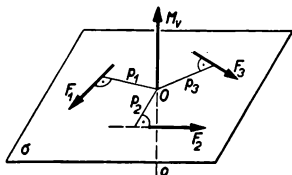
a) Jak velikou vzdálenost p_v od bodu O musí mít vektorová přímka síly F_v ležící v rovině σ , aby síla F_v měla na válec vzhledem k bodu O stejný otáčivý účinek jako síly F_1, F_2, F_3 ?

b) Jakou velikost by měla síla F_4 , jejíž vektorová přímka by ležela v rovině σ a měla by od bodu O vzdálenost p_4 , kdyby se jejím působením zrušil otáčivý účinek sil F_1, F_2, F_3 ?

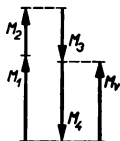
Velikosti sil a jejich ramen jsou $F_1 = 40 \text{ N}$, $F_2 = 30 \text{ N}$, $F_3 = 10 \text{ N}$, $F_v = 20 \text{ N}$, $p_1 = 0,1 \text{ m}$, $p_2 = 0,2 \text{ m}$, $p_3 = 0,4 \text{ m}$ a $p_4 = 0,6 \text{ m}$.

Řešení. a) Momenty M_1, M_2 a M_3 sil F_1, F_2 a F_3 (obráz. 21) mají společný počátek v bodě O a jejich společná vektorová přímka je svislá. Výsledný moment M_v má společnou vektorovou přímku s momenty M_1, M_2 a M_3 . Velikost M_v je graficky určena na obr. 22. Početně ji určíme podle rovnice (4)

$$M_v = F_1 p_1 + F_2 p_2 - F_3 p_3 = (4 + 6 - 4) \text{ Nm} = 6 \text{ Nm}.$$



Obr. 21



Obr. 22

Vektor $\mathbf{M}_v$ je tedy orientován svisle vzhůru. Protože $M_v = F_v p_v$, je

$$p_v = \frac{M_v}{F_v} = \frac{6}{20} \text{ m} = 0,3 \text{ m}.$$

Vektorová přímka síly F_v má od bodu O vzdálenost 0,3 m.

b) Má-li síla F_4 svým působením zrušit otáčivý účinek sil F_1, F_2, F_3 , musí mít její moment $\mathbf{M}_4$ stejnou velikost, ale opačnou orientaci než moment $\mathbf{M}_v$. Platí tedy vektorově $\mathbf{M}_4 = -\mathbf{M}_v$, pro velikost však platí $M_4 = M_v$, takže

$$F_4 = \frac{M_v}{p_4} = 10 \text{ N}.$$

Hledaná síla má velikost 10 N a působí otáčení válce v záporné orientaci.

Při řešení části b) úlohy 1 jsme poznali, že moment $\mathbf{M}_4$ ruší otáčivé účinky momentu $\mathbf{M}_v$ na těleso, a že tedy platí $\mathbf{M}_v = -\mathbf{M}_4$, což je dobře vidět na obr. 22. Z něho je také zřejmé, že platí rovnice $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_4 = 0$, jestliže otáčivé účinky sil F_1, F_2, F_3 a F_4 na těleso se ruší.

Z obr. 21 a 22 je dále patrné, že platnost rovnice $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_4 = 0$ lze rozšířit obecně pro libovolný počet n sil, jejichž vektorové přímky leží v téže rovině σ . Platí-li tedy vektorová rovnice

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_n = 0, \quad (5)$$

v níž značí $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n$ momenty sil $F_1, F_2, \dots, F_n$ vzhledem k bodu O , je těleso upevněné v bodě O buď v klidu, nebo se otáčí rovnoměrně kolem osy o procházející bodem O kolmo k rovině σ .

Rovnici (5) lze upravit také na tvar

$$M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n = 0, \quad (6)$$

v níž přiřadíme momentům sil $M_1, M_2, \dots, M_n$ příslušná znaménka.

Tato rovnice se nazývá *momentová věta*.

Úloha 2. Na vodorovné desce spočívá kvádr. Vodorovnou tyčinkou tlačíme kolmo na svislou stěnu kvádru na její svislé střední příčce. Jakou největší možnou vzdálenost d od vodorovné desky může mít tyčinka, aby se její tlakovou silou kvádr pouze posouval, nikoli však odklápěl?

Hrana kvádru rovnoběžná s tyčinkou je $a = 18$ cm, součinitel smykového tření mezi kvádrem a deskou je $f = 0,3$.

Označení veličin. Na obr. 23 značí obdélník $MNPQ$ řez kvádru rovinou vedenou svislými středními příčkami protilehlých bočních stěn kvádru, takže vektorová přímka této síly F leží v rovině $MNPQ$ a je kolmá k jeho straně MQ . Tíhová síla G působí rovněž v rovině středního řezu v těžišti T kvádru, třecí síla $F_t = f G$ v podstavě kvádru směrem naznačeným v obr. 23. Rameno síly F vzhledem k bodu N je $d' \leq d$, kde d je největší možná vzdálenost vektorové přímky síly F od podstavy kvádru.

Řešení. Má-li se kvádr po podložce posouvat, musí být síla F větší nebo rovna třecí síle, takže platí $F \geq F_t$, jestliže se však kvádr při posouvání nepřeklápí, nezvedá se jeho těžiště, a proto se nezvětšuje jeho potenciální energie tíhová. Síla F tedy vykonává při posouvání kvádru rovnoměrným pohybem po dráze s práci $A = F s$ potřebnou na překonání třecí síly. Proto platí $F s = F_t s$, takže $F = F_t = f G$.

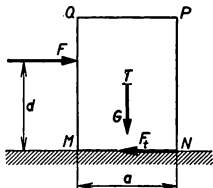
Při překlápění se kvádr otáčí kolem osy kolmé k rovině obdélníku $MNPQ$ a procházející bodem N . Proto uvažujeme momenty sil F , G , F_t vzhledem k bodu N

$$M_1 \leq F d,$$

$$M_2 = G \frac{a}{2} \text{ a } M_3 = 0,$$

kde d je největší možná vzdálenost, při které se kvádr ještě nepřeklápí.

Protože vektorové přímky sil F a G leží v jedné rovině, procházející bodem N , musí platit $M_1 \leq M_2$. Po dosazení vyjde



Obr. 23

$$G d' \leq G \frac{a}{2}$$

takže

$$d' \leq \frac{a}{2f}$$

Pro dané hodnoty je $d' \leq \frac{18}{2 \cdot 0,3} \text{ cm} = 30 \text{ cm}$.

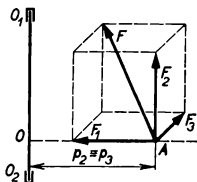
Vzdálenost tyčinky od vodorovné desky $d' \leq 30 \text{ cm}$.

3. Moment síly vzhledem k pevné ose

Těleso upevněné v jednom bodě koná účinkem síly otáčivý pohyb kolem osy, která je vektorovou přímkou momentu působící síly. Směr této osy je určen normálou roviny σ , proložené vektorem r a vektorovou přímkou síly F . Změna směru kteréhokoli z těchto vektorů má za

následek změnu polohy osy rotace. Osa rotace tělesa, které má jeden pevný bod, může mít tedy v prostoru jakýkoli směr.

Těleso upevněné ve dvou bodech O_1 a O_2 (obr 24) může konat otáčivý pohyb jen kolem osy o procházející body O_1 a O_2 . Tato osa nemůže měnit svou polohu a nazývá se *pevná osa*.



Obr. 24

Při řešení úloh na otáčení těles okolo pevné osy rozložíme sílu F působící v určitém bodě A tuhého tělesa na tři k sobě kolmé složky F_1 , F_2 , F_3 . Síla F_1 je k rotační ose kolmá a její vektorová přímka protíná osu v bodě O . Proto nemá síla F_1 na těleso otáčivé účinky, neboť její rameno je rovno nule. Druhá složka F_2 je rovnoběžná

s osou rotace. Také tato síla nemá na těleso otáčivé účinky, přestože má vzhledem k bodům O_1 , O_2 a O momenty různé od nuly. Otáčivý účinek této síly se ruší otáčivými účinky reakčních sil na těleso v bodech O_1 a O_2 . Otáčivé účinky má jen třetí složka F_3 , jejíž vektorová přímka leží v rovině σ proložené bodem A kolmo k ose rotace a je také kolmá k rovině τ , určené působišťem A síly F a osou rotace.

Velikost otáčivých účinků síly F vzhledem k pevné ose je určena veličinou nazvanou *moment síly vzhledem k ose*. Je to vektor, který má směr osy rotace. Jeho velikost je definována jako součin velikosti složky F_3 síly F a kolmé vzdálenosti p_3 vektorové přímky síly F_3 od osy rotace. Orientace momentu síly vzhledem k ose se určuje obdobně jako orientace momentu síly vzhledem k bodu. Platí tedy i zde vztah

$$M = p_3 F_3 ,$$

obdobný vztahu (1).

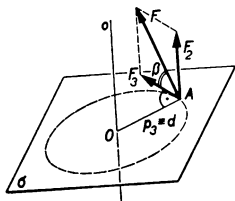
Úloha 3. Na dokonale tuhé těleso, jehož pevná osa o rotace je svislá, působí v bodě A síla o stálé velikosti F . Její vektorová přímka se otáčí spolu s tělesem, při rotaci nemění vzhledem k tělesu svou polohu,

svírá s vodorovnou rovinou úhel β a má od osy rotace (kolmo) vzdálenost d .

a) Jak velkým momentem vzhledem k ose o působí síla F na těleso?

b) Jak velká práce se vykoná při jednom otočení tělesa kolem osy? Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $F = 20 \text{ N}$, $\beta = 60^\circ$, $d = 0,4 \text{ m}$.

Označení veličin. Sílu F rozložíme na dvě složky F_2 a F_3 (obr. 25). Složka F_2 je rovnoběžná s osou rotace a nemá tedy na těleso otáčivé účinky.



Obr. 25

Totéž platí o tíhové síle G , která je také s osou rotace rovnoběžná. Otáčení tělesa působí jen složka F_3 . Jejím ramenem vzhledem k ose o je d .

Řešení. a) Otáčivý účinek síly F je určen momentem $M = F_3 d$. Proto platí $M = p_3 F_3 = d F \cos \beta = 20 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \text{ N m} = 4 \text{ Nm}$.

Síla F působí na těleso momentem 4 Nm .

b) Při otáčení tělesa kolem osy rotace koná práci jen složka F_3 . Hodnota této práce je $A = M\alpha = 2\pi M = 2\pi d F \cos \beta = 2 \cdot 3,14 \cdot 4 \text{ Nm} = 25,12 \text{ J}$.

4. Otáčení tělesa kolem pevné osy

Rotaci tělesa kolem pevné osy mohou působit podle čl. 3 jen síly F nebo složky těchto sil, jejichž vektorové přímky leží v rovinách σ kolmých k ose rotace, a to jen tehdy, pokud tuto osu neprotínají.

Označíme-li O průsečík osy o s rovinou σ , je kolmá vzdálenost p bodu O od vektorové přímky síly F ramenem této síly. Otáčí-li se těleso působením síly F kolem osy o , konají všechny hmotné body tělesa o hmotnostech $m_1, m_2, \dots, m_n$, jejichž vzdálenost od osy rotace označíme po řadě $r_1, r_2, \dots, r_n$, pohyby po kružnicích, jejichž středy leží na ose otáčení. Přitom působí na hmotné body $m_1, m_2, \dots, m_n$ po řadě síly $F_1, F_2, \dots, F_n$. Momenty všech těchto sil F_k i moment síly F mají stejný počátek a jsou souhlasně orientovány. Proto platí rovnice

$$F p = F_1 r_1 + F_2 r_2 + \dots + F_n r_n. \quad (7)$$

Každá ze sil F_k uděluje příslušnému hmotnému bodu m_k zrychlení a_k , které má v každém místě směr tečny (tečnové zrychlení) ke kruhové dráze pohybujícího se hmotného bodu. Protože body m_k mají od osy rotace různé vzdálenosti, nemají jejich tečnová zrychlení stejné velikosti, nejmenší hodnoty mají zrychlení hmotných bodů nejbližších k ose otáčení. Označíme-li ε zrychlení hmotných bodů nacházejících se v jednotkové vzdálenosti

od osy otáčení (úhlové zrychlení), platí pro tečnová zrychlení jednotlivých bodů vztah $a_k = r_k \varepsilon$ a podle zákona síly $F_k = m_k a_k = m_k r_k \varepsilon$. Po dosazení do rovnice (7) vyjde

$$M = p F = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2) \varepsilon = J \varepsilon, \quad (8)$$

kde výraz

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 \quad (9)$$

se nazývá *moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose o*.

Rovnice (8) $M = J \varepsilon$ má pro otáčivé pohyby tělesa stejný význam jako zákon síly $F = m a$ pro pohyby posuvné. Vektorové veličiny M a úhlové zrychlení ε mají pro otáčivý pohyb tělesa stejný význam jako vektor F síly a vektor a zrychlení při pohybech posuvných a skalární veličina moment setrvačnosti J při otáčivých pohybech odpovídá hmotnosti m při pohybech posuvných.

Je-li $\varepsilon = 0$, pak těleso buď koná rovnoměrný otáčivý pohyb s konstantní úhlovou rychlostí ω , nebo se neotáčí. Je-li $\varepsilon > 0$, otáčí se těleso zrychleně, je-li $\varepsilon < 0$, koná otáčivý pohyb zpomalený. Má-li ε konstantní hodnotu, otáčí se těleso rovnoměrně zrychleně nebo rovnoměrně zpomaleně, podle toho, zda je $\varepsilon > 0$, nebo $\varepsilon < 0$.

Úloha 4. V úloze 3 se těleso otáčí kolem pevné osy rotace s úhlovým zrychlením $\varepsilon = 0,5 \text{ rad s}^{-2}$. Jak veliký má moment setrvačnosti?

Řešení. Podle vztahu (8) je

$$J = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{d F \cos \beta}{\varepsilon} = \frac{20 \cdot 0,4 \cdot 0,5}{0,5} \text{ Nm s}^2 = 8 \text{ kg m}^2.$$

Moment setrvačnosti tělesa má hodnotu 8 kg m^2 .

5. Skládání rovnoběžných sil působících v různých bodech dokonale tuhého tělesa

Momentová věta má základní význam nejen pro vyšetřování otáčivých účinků sil působících na tuhé těleso,

uplatňuje se také při určování výslednice sil, které působí v různých bodech tuhého tělesa, tj. při skládání a rozkládání sil.

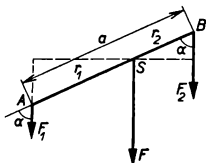
V učebnici Fyzika pro I. roč. SVVŠ na str. 112 je vysvětlen význam momentové věty pro skládání různoběžných sil působících v různých bodech tuhého tělesa. V tomto studijním textu vysvětlíme význam momentové věty při skládání rovnoběžných sil.

Máme-li složit více než dvě síly, najdeme nejprve výslednici libovolných dvou z nich. Potom složíme nalezenou výslednici s libovolnou silou třetí a vyjde nám výslednice tří sil, kterou složíme se silou čtvrtou. Pokračujeme-li tímto způsobem dále, najdeme nakonec výslednici všech sil působících na těleso. Stačí tedy nalézt způsob, jak se složí dvě rovnoběžné síly, tj. zjistit, jak se najde poloha působistě, velikost, směr a orientace výslednice dvou rovnoběžných sil.

Ze zkušenosti víme, že výslednice dvou rovnoběžných sil leží v rovině určené vektorovými přímkami obou daných sil a je s nimi rovnoběžná.

Nechť působí na volně pohyblivé těleso ve dvou různých bodech A , B , jejichž vzdálenost je a , dvě rovnoběžné síly

F_1 a F_2 (obr. 26). Jejich výslednice F musí mít na těleso stejné účinky posuvné i otáčivé jako síly F_1 a F_2 . Protože je možno posunout působistě síly do libovolného místa na její vektorové přímce, zvolíme za působistě výslednice bod S , ve kterém se protíná vektorová přímka výslednice



Obr. 26

s přímkou procházející body A , B . Vzdálenosti $SA = r_1$ a $SB = r_2$ jsou velikosti polohových vektorů sil F_1 a F_2 . Upevníme-li těleso v bodě S nebo umístíme-li v něm pevnou osu kolmou k AB , vyvolá síla F tlakovou sílu tělesa na osu; stejně velikou reakční silou F' tlačí osa na těleso, takže na těleso působí tři síly F_1 , F_2 a F' , jejichž momenty vzhledem k bodu S mají podle vztahu (1) hodnoty $M_1 = r_1 F_1 \sin \alpha$ a $M_2 = r_2 F_2 \sin \alpha$. Moment síly F' je roven nule, neboť její vektorová přímka prochází bodem S . Protože síla F' je reakcí síly F , musí být síly F_1 , F_2 a F' v rovnováze. Platí tedy podle momentové věty $M_1 + M_2 = 0$. Aby tato rovnice mohla být splněna, musí jedna ze sil F_1 a F_2 působit rotaci v kladném smyslu, druhá ve smyslu záporném. Proto se dá rovnice $M_1 + M_2 = 0$ psát ve tvaru $r_1 F_1 \sin \alpha - r_2 F_2 \sin \alpha = 0$, z níž vychází vztah

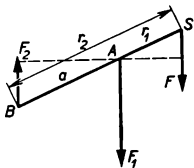
$$r_1 F_1 - r_2 F_2 = 0 \text{ a po úpravě } \frac{r_1}{r_2} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (10)$$

Jsou-li síly F_1 a F_2 souhlasně orientovány, musí bod S ležet podle vztahu (10) uvnitř úsečky AB , blíže k síle větší (obr. 26), jsou-li opačně orientovány, musí být bod S vně úsečky AB na straně větší síly (obr. 27).

Jsou-li síly F_1 a F_2 souhlasně orientovány, je podle obr. 26 $r_2 = a - r_1$. Po dosazení za r_2 do vztahu (10) vyjde $r_1 F_1 - a F_2 + r_1 F_2 = 0$, takže

$$r_1 = \frac{F_2}{F_1 + F_2} a \quad \text{a}$$

$$r_2 = \frac{F_1}{F_1 + F_2} a. \quad (11)$$



Obr. 27

Mají-li síly F_1 a F_2 opačnou orientaci, vypočítáme obdobným způsobem podle obr. 27

$$r_1 = \frac{F_2}{F_1 - F_2} a \quad \text{a} \quad r_2 = \frac{F_1}{F_1 - F_2} a. \quad (12)$$

Výslednice F musí nahradit síly F_1 a F_2 v každém případě, tedy i tehdy, upevníme-li těleso v bodě A . Pak se ruší pevností bodu A účinek síly F_1 a výslednice F musí nahradit jen účinky síly F_2 , takže platí

$$a F_2 = r_1 F \quad \text{a} \quad F = \frac{a}{r_1} F_2.$$

Po dosazení ze vztahu (11) za r_1 vyjde pro souhlasně orientované síly

$$F = a \frac{F_1 + F_2}{a F_2} F_2 = F_1 + F_2. \quad (13)$$

Obdobně určíme velikost výslednice rovnoběžných opačně orientovaných sil. Vyjde

$$F = F_1 - F_2. \quad (14)$$

Vztahy (13) a (14) můžeme vyjádřit jedinou vektorovou rovnicí

$$F = F_1 + F_2. \quad (15)$$

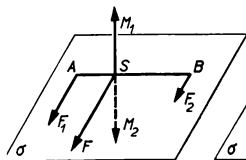
Velikost i orientaci dvou souhlasně i opačně orientovaných sil určuje rovnice (15) a polohu jejich působišť vztah (10).

Pravidla pro skládání rovnoběžných sil působících v různých bodech dokonale tuhého tělesa, vyjádřená rovnicí (15) a (10), můžeme vyjádřit slovně:

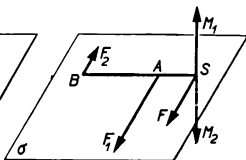
Výslednice dvou rovnoběžných sil souhlasně orientovaných se rovná jejich součtu a je s nimi souhlasně orientována. Její působíště dělí vzdálenost působišť obou sil v obráceném poměru jejich velikostí.

Výslednice dvou rovnoběžných nesouhlasně orientovaných sil se rovná jejich rozdílu a je souhlasně orientována se silou větší. Její působíště je na prodloužené spojnici působíšť obou sil na straně síly větší.

Vektorově je skládání sil souhlasně orientovaných naznačeno na obr. 28 a skládání sil nesouhlasně orientovaných na obr. 29.

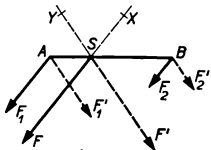


Obr. 28



Obr. 29

Poloha působíště S výslednice dvou rovnoběžných sil je podle vztahu (10) závislá jen na velikosti sil F_1 a F_2 a nikoli na jejich směru. Nahradíme-li tedy síly F_1 a F_2 jinými spolu rovnoběžnými silami F'_1 a F'_2 jakéhokoli směru, které mají velikosti $F'_1 = F_1$ a $F'_2 = F_2$ a stejná působíště jako síly F_1 a F_2 , má výslednice F' sil F'_1 a F'_2 působíště také v bodě S . Z obr. 30 je patrné, že za působíště výslednice F můžeme volit např. bod X , za působíště výslednice F' např. bod Y . Bod S je však jediným bodem, ve kterém působí vý-



Obr. 30

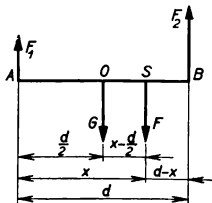
slednice všech rovnoběžných sil dané velikosti, ať mají jakýkoli směr. Proto se bod S nazývá střed rovnoběžných sil.

V úvahách o skládání rovnoběžných sil působících na klidné dokonale tuhé těleso jsme poznali, že platí-li vzhledem k určitému bodu tělesa momentová věta, těleso se neotáčí. Umístíme-li do tohoto bodu pevnou osu kolmou k rovině určené vektorovými přímkami daných sil, prochází vektorová přímka jejich výslednice touto osou a pevností osy se ruší. Těleso pak nekoná ani posuvný pohyb. Odstraníme-li osu, uveďte se těleso působením výslednice daných sil do posuvného pohybu, neotáčí se však.

Úloha 5. Stejnorodá tyč hmotnosti $m = 4$ kg, délky $d = 1$ m má ve všech místech stejný průřez. Je zavěšena na obou koncích na svislých nitích vedených přes kladky a zatížených závažími o hmotnostech $m_1 = 3$ kg a $m_2 = 5$ kg.

Určete velikost, směr, orientaci a působiště síly F , která by udržela v rovnováze soustavu sil působících na těleso.

Označení veličin a dané hodnoty. Na zavěšenou tyč působí na obou koncích napjaté nitě silami $F_1 = 3$ kp a $F_2 = 5$ kp, které jsou orientovány svisle vzhůru (obr. 31). Tíhová síla $G = 4$ kp je orientována svisle dolů. Vektorové přímky sil F_1 , F_2 a G jsou rovnoběžné. Výslednice F' těchto sil má působiště v jistém bodě S , který má od bodu A vzdálenost x . Síla $F = -F'$ působící v bodě S je se silami F_1 , F_2 , G v rovnováze. Označíme-li momenty sil F_1 , F_2 , G , F po řadě M_1 , M_2 , M_3 , M , určíme velikost i orientaci síly F z vektorové rovnice $F_1 + F_2 + G + F = 0$, polohu působiště z momentové věty $M_1 + M_2 + M_3 + M = 0$.



Obr. 31

Jestliže numerická hodnota síly F vyjde záporná, značí záporné znaménko jen její zápornou orientaci,

kteřou má také síla G . Protože však orientace síly se bere v úvahu v jejím momentu, dosazuje se při numerickém výpočtu jen její velikost bez ohledu na orientaci, právě tak jako u síly G .

Jsou-li síly F_1 , F_2 , G , F v rovnováze, můžeme kteroukoli z nich volit za sílu, jež je reakcí osy na výslednici zbývajících tří sil. Proto můžeme zvolit za vztažný bod libovolný z bodů A , B , S , O .

Řešení. Převedeme-li vektorovou rovnici vyjadřující podmínku rovnováhy sil do skalárního tvaru, vyjde $F = -F_1 - F_2 + G = -4$ kp.

Soustava sil F_1 , F_2 , G je udržována v rovnováze silou $F = 4$ kp, orientovanou svisle dolů.

Polohu bodu S určíme z momentové věty. Za vztažný bod volíme

a) bod A : Pak platí

$$F_1 \cdot 0 - G \frac{d}{2} - |F|x + F_2 d = 0,$$

odkud vyjde

$$x = \frac{2F_2 - G}{2|F|} d = \frac{2F_2 - G}{2(F_1 + F_2 - G)} d = \frac{10 - 4}{2(5 + 3 - 4)} \cdot 1 \text{ m} = 0,75 \text{ m}.$$

b) bod O :

$$-F_1 \frac{d}{2} - |F| \left(x - \frac{d}{2} \right) + F_2 \frac{d}{2} = 0,$$

odkud vyjde

$$x = \frac{-F_1 + F_2 + |F|}{2|F|} d = \frac{-F_1 + F_2 + F_1 + F_2 - G}{2(F_1 + F_2 - G)} d = \frac{2F_2 - G}{2(F_1 + F_2 - G)} d,$$

$$\text{c) bod } S: -F_1 x + G \left(x - \frac{d}{2} \right) + F_2 (d - x) = 0,$$

odkud vyjde

$$2(-F_1 + G - F_2)x = Gd - 2F_2 d,$$

takže

$$x = \frac{2F_2 - G}{2(F_1 + F_2 - G)} d,$$

$$\text{d) bod } B: -F_1 d + G \frac{d}{2} + |F|(d - x) = 0,$$

odkud vyjde

$$2|F|x = (-2F_1 + G + 2|F|)d,$$

takže

$$x = \frac{2 F_2 - G}{2 (F_1 + F_2 - G)} d.$$

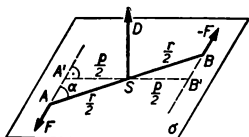
Působíště síly F je vzdáleno 0,75 m od levého konce tyče.

6. Dvojice sil

Soustava dvou stejně velikých rovnoběžných opačně orientovaných sil F a $-F$ se nazývá dvojice sil. Jejich výslednice $F + (-F) = 0$. Dvojice sil nepůsobí tedy posuvný pohyb tělesa, má však na ně otáčivý účinek. Velikost otáčivého účinku dvojice sil na těleso měříme jejím momentem D , který nazýváme moment dvojice sil. Vzhledem ke středu S úsečky AB , spojující působíště sil F a $-F$, který je také středem úsečky $A'B' = p$, kolmé k vektorovým přímkám těchto sil, má moment dvojice sil velikost $D = M_1 + M_2$, kde M_1 a M_2 značí momenty sil F a $-F$. Protože momenty M_1 a M_2 jsou souhlasně orientovány, je

$$D = \frac{p}{2} F + \frac{p}{2} F = p F = r F \sin \alpha. \quad (16)$$

Orientovaná úsečka $A'B' = p$, kolmá k vektorovým přímkám obou sil F a $-F$, se nazývá *rameno dvojice sil*.



Obr. 32

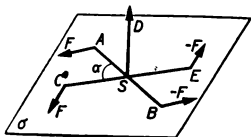
Moment dvojice sil je vektor, jehož počátek je ve středu úsečky spojující působíště sil F a $-F$ a má velikost rovnou součinu ramena dvojice sil a velikosti jedné ze sil.

Jeho vektorová přímka je kolmá k rovině σ proložené vektorovými přímkami těchto sil (obr. 32). Orientace vektoru momentu

dvojice sil se určí pravidlem pravé ruky obdobně jako orientace momentu síly vzhledem k bodu.

Vlastnosti momentu dvojice sil:

a) Otočíme-li danou dvojici sil kolem bodu S o libovolný úhel α , má stočená dvojice sil na tuhé těleso vzhledem k bodu S stejně veliký otáčivý účinek jako původní dvojice (obr. 33). Moment obou dvojic je totožný.



Obr. 33

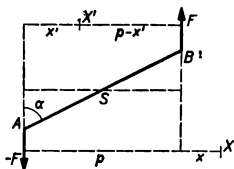
b) Moment D_x dvojice sil vzhledem k libovolnému bodu X nacházejícímu se v rovině σ určené silami F a $-F$ určíme užitím vztahu (3), podle něhož je $D_x = M_x + M'_x$, kde M_x a M'_x značí momenty sil F a $-F$ vzhledem k bodu X . Nachází-li se bod X mimo pás roviny σ mezi vektorovými přímkami sil F a $-F$, platí podle obr. 34 vztah

$$D = (x + p) F - x F = p F.$$

Moment dvojice sil vzhledem k libovolnému bodu X' nacházejícímu se uvnitř pásu roviny σ mezi vektorovými přímkami sil F a $-F$ má podle obr. 34 velikost

$$D = x' F + (p - x') F = p F,$$

tedy stejnou, jako má moment téže dvojice vzhledem k bodu X a k bodu S . Stejnou velikost má moment dvojice také vzhle-

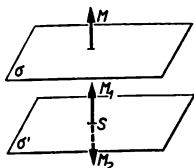


Obr. 34

dem ke všem bodům nacházejícím se na vektorových přímkách sil $\mathbf{F}$ a $-\mathbf{F}$.

Otáčivý účinek dvojice sil, ležících v rovině σ , na tuhé těleso se nemění, jestliže dvojice sil v rovině σ libovolně posuneme a stočíme. Počátek vektoru momentu dvojice sil se při tomto přemístění dvojice sil posune v rovině σ , aniž její moment změní směr a orientaci.

c) Necht' působí na těleso v rovině σ dvojice sil, jejíž moment je $\mathbf{M}$. Vedme tělesem rovinu σ' rovnoběžnou



Obr. 35

s rovinou σ (obr. 35). Dvě dvojice sil, působící v rovině σ' , jejichž opačně orientované momenty $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$ o stejné velikosti $M_1 = M_2 = M$ mají stejný počátek S , nepůsobí na těleso otáčivým účinkem. Posuneme-li je tak, že bod S se přemístí do průsečíku vektorové přímky momentu $\mathbf{M}$ s rovinou σ' , ruší se v tu-

hém tělese účinky stejně velikých momentů $\mathbf{M}_2$ a $\mathbf{M}$ a na těleso působí v rovině σ' moment $\mathbf{M}_1$, který nahradí otáčivé účinky momentu $\mathbf{M}$.

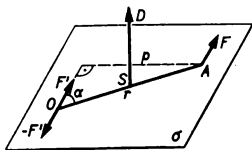
Účinek dvojice sil, ležící v rovině σ , na těleso se nemění, přemístíme-li ji do libovolného bodu kterékoli roviny σ' rovnoběžné s rovinou σ .

Dvě dvojice sil, ležící v rovnoběžných rovinách, které mají stejně velké momenty, působí na dokonale tuhé těleso otáčivými účinky, jež jsou stejné, mají-li momenty dvojic stejnou orientaci, a ruší se, jsou-li tyto momenty orientovány opačně.

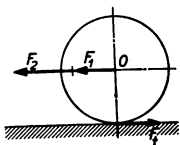
Působíště momentu dvojice sil lze tedy v dokonale tuhém tělese posunout do libovolného bodu. Otáčivý

účinek dvojice sil na těleso se tím nezmění. *Moment dvojice sil je volným vektorem.*

Avšak i sílu F působící v bodě A dokonale tuhého tělesa můžeme posunout v tělese do libovolného bodu O . Přiřadíme k ní v bodě O dvě stejně veliké protisměrné síly F' a $-F'$, které jsou v rovnováze a jsou stejně veliké jako síla F . Síla $-F'$ vytvoří se silou F dvojici sil o momentu $M = p F = r F \sin \alpha$, který se rovná momentu síly F vzhledem k bodu O (obr. 36). Dvojice sil $F, -F'$ se nazývá *doplňkovou dvojicí sil*. Síla F' je síla vzniklá přenesením síly F . Každé přenesení síly do libovolného



Obr. 36



Obr. 37

bodu dokonale tuhého tělesa je spojeno se vznikem doplňkové dvojice sil, která působí otáčení tělesa.

V dokonale tuhém tělese můžeme sílu posunout do libovolného bodu O , připojíme-li k ní doplňkovou dvojici sil. Moment doplňkové dvojice sil je stejně veliký a má stejnou orientaci jako moment původní síly vzhledem k novému působišti.

Dokonale tuhé těleso může být uvedeno v otáčivý pohyb jen působením dvojice sil, i když se zdá, že otáčení tělesa může působit jen jedna síla. Vysvětlíme to na otáčení kola valícího se po rovině. Síla F na obr. 37 je

tažná síla, která uvede kolo do pohybu. Vedle síly F působí na těleso ještě třecí síla F_t . Síla F se rozloží na dvě složky $F_1 = F_t$ a $F_2 = F - F_t$. Síla F_1 spolu se silou F_t vytvoří silovou dvojici o momentu $D = r F_t$, která působí otáčení kola, síla F_2 působí posuvný pohyb tělesa. Obdobně se vysvětlí i otáčení volantů auta, otáčeli-li jím řidič jednou rukou.

7. Hmotný střed (těžiště) tuhého tělesa

V prostoru, ve kterém působí na hmotné body nebo na tělesa síly, existuje silové pole. Silové pole je např. v okolí elektricky nabitých těles nebo kolem magnetů, silové pole je také v okolí Země, která k sobě přitahuje všechna tělesa nacházející se na jejím povrchu a nad jejím povrchem. Toto pole se nazývá tíhovým polem zemským. Jestliže silové pole uděluje všem tělesům, v něm se nacházejícím, ve všech místech stejně veliká zrychlení stejného směru a stejné orientace, nazýváme je polem stejnorodým (homogenním). Každé tuhé těleso si můžeme představit jako soustavu částic (hmotných bodů), jejichž vzájemná poloha se v tělese nemění. Jestliže těleso je ve stejnorodém silovém poli, působí na všechny jeho hmotné body, jejichž počet označíme n , síly, které budeme značit postupně $F_1, F_2, \dots, F_n$. Tyto síly udělují všem hmotným bodům tělesa stejně veliká zrychlení a , takže

$$F_1 = m_1 a, F_2 = m_2 a, \dots, F_n = m_n a,$$

kde $m_1, m_2, \dots, m_n$ značí hmotnosti jednotlivých bodů, z nichž se těleso skládá. Součet

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n, \quad (17)$$

značí hmotnost celého tělesa.

Síly $F_1, F_2, \dots, F_n$ jsou rovnoběžné a souhlasně orien-

tované. Velikost F jejich výslednice je určena rovnicí $F = F_1 + F_2 + \dots + F_n = (m_1 + m_2 + \dots + m_n) a = m a$. (18)

Její směr a orientace jsou stejné jako u sil $F_1, F_2, \dots, F_n$. Působíště S_m výslednice najdeme postupným skládáním sil $F_1, F_2, \dots, F_n$. Bod S_m je středem rovnoběžných sil $F_1, F_2, \dots, F_n$ a nazývá se *hmotný střed tělesa*, neboť podle vztahu (17) a (18) se působením rovnoběžných sil $F_1, F_2, \dots, F_n$ silového pole pohybuje hmotný střed tělesa tak, jako by v něm byla soustředěna hmotnost celé soustavy a jako by na něj působila výslednice všech vnějších sil, které působí na celou soustavu hmotných bodů. Posuvný pohyb tělesa je tedy určen pohybem jeho hmotného středu. Hmotný střed má tyto důležité vlastnosti:

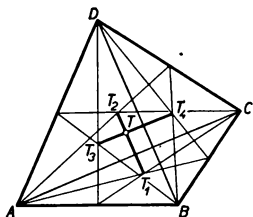
a) Hmotný střed tělesa je totožný se středem rovnoběžných sil, kterými působí silové pole na všechny hmotné body tělesa. Proto není jeho poloha závislá na směru, kterým síly homogenního pole působí, takže těleso má jen jeden hmotný střed, který je stejný, ať těleso zaujímá vzhledem k silám pole jakoukoli polohu.

b) Podle vztahu (17) a (18) *můžeme těleso v silovém poli nahradit jeho hmotným středem, ve kterém by byla soustředěna celková hmotnost tělesa*. Proto leží hmotný střed soustavy dvou těles na spojnici jejich hmotných středů a dělí ji na dvě části v obráceném poměru jejich hmotností.

V tíhovém poli zemském je hmotný střed tělesa totožný se středem tíhových sil působících na všechny hmotné body tělesa. Protože střed tíhových sil působících na těleso se nazývá *těžiště tělesa*, je *těžiště totožné s hmotným středem*.

Úloha 6. Najděte polohu těžiště desky z homogenního materiálu tvaru obecného čtyřúhelníku, která má tloušťku d .

Označení veličin. Těžiště T desky se nachází v rovině σ , která půlí hrany desky a je k nim kolmá. Řez této roviny s deskou je čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 38).



Obr. 38

úhlopříčkou DB kolmo k rovině σ na dvě trojúhelníkové desky DBA a DBC . Touto druhou těžnicí je přímka procházející těžišti T_3 a T_4 těchto trojúhelníkových desek.

V průsečíku těžnic $T_1 T_2$ a $T_3 T_4$ je těžiště T čtyřúhelníkové desky.

Řešení. Těžiště dvou těles leží na spojnici jejich těžišť. Rozdělíme tedy čtyřúhelníkovou desku řezem vedeným kolmo k rovině σ úhlopříčkou AC na dvě trojúhelníkové desky ABC a ADC a sestrojíme těžiště T_1 a T_2 těchto trojúhelníkových desek jako průsečíky jejich těžnic; těžiště celé desky leží na přímce $T_1 T_2$, která je jednou těžnicí čtyřúhelníkové desky.

Druhou těžnicí $T_3 T_4$ najdeme obdobně jako těžnici $T_1 T_2$, jestliže desku rozdělíme řezem vedeným

III. ČÁST: SOUTĚŽNÍ ÚLOHY

1. Úlohy kategorie A

Úlohy a řešení recenzoval Evžen Říman, CSc., a dr. Ivan Náter

a) První kolo soutěže

1. příklad (navrhl Jan Tesař)

Trám z homogenního materiálu ve tvaru kvádru o délce l , šířce b a výšce a je zavěšen na jeřábu lanem připoutaným k trámu v bodě O , ležícím ve vzdálenosti d od středu S horní stěny trámu na podélné ose této stěny o rozměrech l, b (na obrázku 39 je pohled shora).

a) Užitím momentové věty určete, jak veliký úhel α v intervalu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ bude svírat po zvednutí jeřábem podélná osa trámu s nosným lanem.



Obr. 39

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 0,1$ m, $a = 0,2$ m.

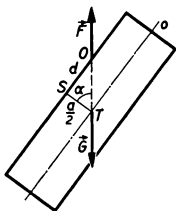
b) Jak se mění velikost úhlu α , má-li délka hrany a konstantní velikost a mění-li se d v mezích $0 \leq d \leq \frac{l}{2}$?

Jak se mění velikost úhlu α , mění-li se při stálém d délka hrany a v mezích $(0, \infty)$?

c) Jak veliký je úhel α , je-li $a = 2d$?

d) Z výsledků získaných v části a) dokažte, že těžiště zavěšeného trámu musí ležet na svislé přímce určené napjatým lanem.

Řešení: a) Trám zavěšený v bodě O je v rovnovážné poloze stálé. Přitom na něj působí dvě stejně velké síly opačného směru, a to tažná síla lana F , působící v bodě O směrem vzhůru, a tíha trámu G , působící v těžišti T směrem dolů. Jde tedy o dvojici sil, jejíž výsledný moment



je podle momentové věty při rovnovážném stavu roven nule. Je tedy nulové i rameno dvojice sil, tj. vzdálenost jejich vektorových přímk. Těžiště trámu T tedy leží na svislici vedené bodem závěsu O .

Obr. 40 znázorňuje řez zavěšeným trámem, a to svislou rovinou procházející bodem závěsu O a podélnou osou trámu o . Z obr. 40 je patrné, že úhel α mezi touto osou a směrem lana je dán vztahem

Obr. 40

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2d}. \quad (1)$$

Numericky pro $a = 0,2 \text{ m}$, $d = 0,1 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$.

b) Z odvozeného vztahu je patrné, že při konstantní velikosti hran a je funkce $\operatorname{tg} \alpha$ nepřímo úměrná proměnlivé hodnotě d . Grafem této závislosti je větev hyperboly ležící v prvním kvadrantu. Roste-li d od nuly do $\frac{l}{2}$, mění se hodnota $\operatorname{tg} \alpha$ v mezích

$$\infty > \operatorname{tg} \alpha \geq \frac{a}{l}.$$

Jestliže je trám upoután k lanu ve středu S hořejší stěny ($d = 0$), svírá podélná osa trámu s lanem úhel 90° .

Ze vztahu (1) je také patrné, že při konstantní hodnotě d je hodnota $\operatorname{tg} \alpha$ přímo úměrná délce hrany a . Grafem této závislosti je polopřímka procházející počátkem pravoúhlého souřadnicového systému a ležící v prvním kvadrantu. Zvětšuje-li se tedy výška trámu při konstantní hodnotě d v mezích $(0, \infty)$, zvětšuje se $\operatorname{tg} \alpha$ z hodnoty 0 na hodnotu ∞ a úhel α roste z hodnoty 0° na hodnotu 90° .

c) Dosadíme-li do vztahu (1) za $a = 2d$, pak je

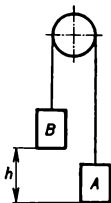
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2d}{2d} = 1 \text{ a } \alpha = 45^\circ.$$

Je-li výška trámu rovna dvojnásobku vzdálenosti bodu upevnění od středu hořejší stěny trámu, svírá lano s podélnou osou trámu úhel 45° .

d) Tíhová síla trámu G působí svisle dolů v těžišti T , stejně velká tažná síla lana F svisle vzhůru v bodě O . Tyto dvě síly tvoří dvojici sil. Má-li být trám v rovnováze, tedy nemá-li se otáčet, musí být moment této dvojice nulový. Poněvadž $G \neq 0$, $F \neq 0$, musí být nulové rameno dvojice, tzn. obě svislé vektorové přímky splynou.

2. příklad (navrhl Stanislav Ondrejka)

Dve kabíny A a B o hmotnostech m_A a m_B ($m_A < m_B$), spojené dlhým lanom, sú zvislo prevesené cez pevnú kladku tak, že dolný okraj kabíny B je vo výške h nad dolným okrajom kabíny A (viď obr. 41). V obidvoch kabínach sú umiestené rovnaké kyvadlové hodiny.



Obr. 41

Kým je sústava v pokoji, hodiny ukazujú rovnaký čas a ich kyvadlá kmitajú s periódou T v rovnakej fáze.

Ak prestane pôsobiť sila udržiavajúca kabíny v pokoji, sústava sa začne pohybovať vplyvom gravitácie.

a) Určete, ako sa zmenia periódy kmitov hodín v oboch kabínach pri pohybe.

b) Aké musia byť redukované dĺžky kyvadiel, aby periódy ich kmitov počas pohybu sústavy boli rovné T ?

Zanedbajte odpor vzduchu, trenie, hmotnosť lana aj kladky.

Úlohu riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty $m_B = 3 m_A$, $T = 0,5$ s, $g \doteq 10$ m s⁻².

Riešenie: Ak označíme redukované dĺžky kyvadiel l , potom pre periódy ich kmitov, pokiaľ je sústava v pokoji, platí

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1)$$

Ak prestane pôsobiť sila, udržiavajúca kabíny v pokoji, sústava sa začne pohybovať zrýchleným pohybom so zrýchlením a , ktoré určíme z týchto vzťahov:

$$(m_A + m_B) a = m_A g - m_B g = (m_A - m_B) g, \\ a = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} g. \quad (2)$$

a₁) V kabíne A , ktorá sa pohybuje zvislo nahor so zrýchlením a , pôsobí na kyvadlo jednak jeho tiaž $G = m_0 g$ (m_0 je hmotnosť kyvadla), jednak sila zotrvačná $f_A = m_0 a$, ktorá smeruje proti pohybu, tj. zvislo nadol. Celková sila pôsobiaca na kyvadlo v kabíne A je

$$F_A = m_0 g + m_0 a = m_0 (g + a). \quad (3)$$

Účinkom pozmenenej sily, danej vzťahom (3), sa perióda kmitov kyvadla v kabíne A zmení na T_A :

$$T_A = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g + a}}. \quad (4)$$

Dosadením (2) do (4) dostaneme pre T_A hodnotu

$$\begin{aligned} T_A &= 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A} g}} = \\ &= 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sqrt{\frac{m_A + m_B}{2 m_B}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Súčiniteľ $2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ vo vzťahu (5) je perióda kmitov kyvadla T v prípade, že sústava bola v pokoji. Preto vzťah (5) možno písať

$$T_A = T \sqrt{\frac{m_A + m_B}{2 m_B}}.$$

Podľa predpokladu $m_A < m_B$, je

$$\frac{m_A + m_B}{2 m_B} < 1, \quad (6)$$

preto podľa (6) je $T_A < T$. To znamená, že pri pohybe sa perióda kyvadla v kabíne A skráti, a hodiny sa budú „predbiehať“.

a_2) Kabína B sa pohybuje zvislo nadol so zrýchlením a . Na kyvadlo v tejto kabíne pôsobí okrem tiaže sila zotrvačná, ktorá smeruje zvislo nahor, teda proti tiaži. Celková sila pôsobiaca na kyvadlo je teda

$$F_B = m_0 g - m_0 a = m_0 (g - a). \quad (7)$$

Periódá kmitov tohto kyvadla sa zmení na hodnotu

$$T_B = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-a}}. \quad (8)$$

Dosadením (2) do (8) a po úprave analogickej ako v odst. a₁) dostávame

$$T_B = T \sqrt{\frac{m_A + m_B}{2m_A}}. \quad (9)$$

Pretože $m_A < m_B$, je

$$\frac{m_A + m_B}{2m_A} > 1, \text{ a } T_B > T.$$

Hodiny v kabíne B sa počas pohybu sústavy budú „oneskorovať“.

Numericky: $T_A = 0,5 \text{ s} \sqrt{\frac{2}{3}} \doteq 0,41 \text{ s}$, $T_B = 0,5 \text{ s} \sqrt{2} \doteq 0,71 \text{ s}$.

b) Aby počas pohybu sústavy ukazovali hodiny v kabíne A aj v kabíne B správny čas, musia byť splnené podmienky

1. v kabíne A:

$$T_A = T = 2\pi \sqrt{\frac{l'_A}{g} \cdot \frac{m_A + m_B}{2m_B}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (10)$$

kde l'_A je opravená redukovaná dĺžka kyvadla v kabíne A. Po úprave vzťahu (10) vychádza pre l'_A

$$l'_A = \frac{2m_B}{m_A + m_B} l. \quad (11)$$

2. V kabíne B analogicky ako v kabíne A z podmienky $T_B = T$ dostaneme vzťah

$$l'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} l, \quad (12)$$

kde l'_B je opravená redukovaná délka kyvadla v kabíne B .

Pro redukované délky l'_A a l'_B zo vztahov (11) a (12) dostaneme

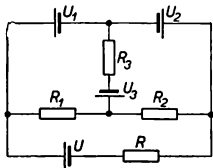
$$l'_A = \frac{2 \cdot 3 m_A}{(1 + 3) m_A} l = \frac{6}{4} l = 1,5 l,$$

$$l'_B = \frac{2 m_A}{(1 + 3) m_A} l = \frac{2}{4} l = 0,5 l.$$

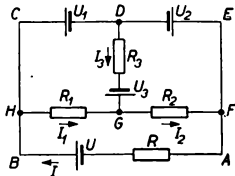
Pôvodnú redukovanú dĺžku kyvadla v kabíne A treba predĺžiť o $0,5 l$, v kabíne B skrátiť o $0,5 l$.

3. príklad (navrhl Milan Rádl)

Určete směr a velikost proudů procházejících jednotlivými odpory sítě sestavené podle obrázku 42 a vypočítejte napětí na těchto odporech.



Obr. 42



Obr. 43

☐ Soustavu rovnic sestavte obecně a pak numericky řešte pro hodnoty

$$R_1 = 5 \, \Omega, \quad R_2 = 10 \, \Omega, \quad R_3 = 6 \, \Omega, \quad R = 20 \, \Omega, \\ U_1 = 47 \, \text{V}, \quad U_2 = 12 \, \text{V}, \quad U_3 = 40 \, \text{V}, \quad U = 35 \, \text{V}.$$

Řešení: Ve schématu označíme šipkami předpokládané směry proudů v každém obvodu (obr. 43). Podle I.

a II. Kirchhoffovy věty sestavíme potřebný počet rovnic na sobě nezávislých pro uzly a pro uzavřené obvody. Při zvoleném směru postupu po obvodu musíme dbát na znaménka pro elektromotorická napětí na zdrojích napětí a pro úbytky napětí na odporech.

Soustavu získaných rovnic řešíme. Vyjde-li některý z proudů záporný, znamená to, že jeho skutečný směr (konvenční) je opačný proti směru zvolenému.

Sestavení rovnic:

$$\begin{array}{ll} \text{Obvod } BHCDEFAB & RI - U + U_1 - U_2 = 0, \\ & HGDCH \quad R_1 I_1 + U_3 - R_3 I_3 - U_1 = 0, \\ & DGFED \quad R_3 I_3 - U_3 + R_2 I_2 + U_2 = 0. \\ \text{Uzel } G & I_1 - I_2 + I_3 = 0. \end{array}$$

Z poslední rovnice vyjádříme $I_2 = I_1 + I_3$ a dosadíme do předposlední rovnice, takže dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{l} RI = U + U_2 - U_1, \\ R_1 I_1 - R_3 I_3 = U_1 - U_3, \\ R_2 I_1 + (R_2 + R_3) I_3 = U_3 - U_2. \end{array}$$

Dosazením zadaných veličin do této soustavy obdržíme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{l} 20 \, \Omega \, I = 35 \, \text{V} + 12 \, \text{V} - 47 \, \text{V} = 0, \\ \text{odtud ihned } I = 0, \\ 5 \, \Omega \, I_1 - 6 \, \Omega \, I_3 = 7 \, \text{V}, \\ 10 \, \Omega \, I_1 + 16 \, \Omega \, I_3 = 28 \, \text{V}. \end{array}$$

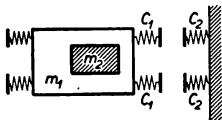
Řešením dostáváme

$$\begin{array}{l} I_1 = 2 \, \text{A}, \\ I_2 = 2,5 \, \text{A}, \\ I_3 = 0,5 \, \text{A}, \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 I &= 0, \\
 U_{R_1} &= 10 \text{ V}, \\
 U_{R_2} &= 25 \text{ V}, \\
 U_{R_3} &= 3 \text{ V}.
 \end{aligned}$$

4. príklad (navrhl Rastislav Baník)

Na plošine vagóna hmotnosti m_1 je postavená debna hmotnosti m_2 . Súčiniteľ trenia medzi debnou a plošinou je f . Vagón má na každom konci dva nárazníky s pružinami tuhosti C_1 a blíži sa po vodorovnej trati ku zarážadlu, ktoré je opatrené dvomi pružinovými nárazníkmi tuhosti C_2 (obr. 44).



Obr. 44

a) Akou najväčšou rýchlosťou v_m môže byť vagón pustený k zarážadlu, aby sa debna pri náraze neposunula?

b) Akú dobu trvá stlačovanie pružín?

c) O koľko cm sa stlačia jednotlivé pružiny pri zastavovaní vagóna, ak mal pred nárazom rýchlosť práve v_m ?

Pri výpočte zanedbáme odpor vzduchu, trenie kolies vagóna a predpokladáme, že pružiny sú ideálne. Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $m_1 = 18 \cdot 10^3 \text{ kg}$, $m_2 = 6 \cdot 10^3 \text{ kg}$, $f = 0,6$, $C_1 = 3 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-1}$, $C_2 = 2,1 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-1}$.

Riešenie: Označenie veličín: m_1 je hmotnosť vagóna, m_2 hmotnosť debny, v_m maximálna rýchlosť, akou môže vagón naraziť na zarážadlo, aby sa debna nepošmykla, a je zrýchlenie, a_m maximálne zrýchlenie (pri nárazovej rýchlosti v_m), x_m je maximálne stlačenie pružín pri nára-

zovej rýchlosti v_m vagóna, x_{m_1} je maximálne stlačenie pružín tuhosti C'_1 , x_{m_2} je maximálne stlačenie pružín tuhosti C'_2 (tj. pružín zarážadla), C_1 je tuhosť pružiny nárazníka, C_2 je tuhosť pružina zarážadla, C'_1 je výsledná tuhosť obidvoch pružín nárazníka, C'_2 je výsledná tuhosť obidvoch pružín zarážadla, C je výsledná tuhosť sústavy všetkých pružín, f je koeficient vlečného trenia, t je doba stlačovania pružín.

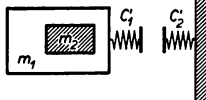
Určíme najprv výslednú tuhosť C pomocou C_1 a C_2 :

1. Tuhosť pružiny (rozmer $N\ m^{-1}$) sa číselne rovná sile potrebnej na to, aby sa pružina skrátila o 1 m; platí teda

$$C = \frac{F}{\Delta l}, \text{ čiže } F = C \Delta l. \quad (1)$$

Na konci vagóna sú však dve takéto pružiny, a to znamená, že na stlačenie obidvoch spružín o 1 m by bola treba dvojnásobná sila; ináč povedané, tieto dve pružiny možno nahradiť jednou o tuhosti

$$C'_1 = 2 C_1. \quad (2a)$$



Obr. 45

Podobne i dve pružiny zarážadla sú paralelné, tedy ich tuhosť

$$C'_2 = 2 C_2. \quad (2b)$$

Tým je problém zčasti zjednodušený na prípad podľa obr. 45. Po náraze vagóna sú pružiny spojené v sérii (analógiou je sériové spojenie kondenzátorov). Pôsobiaci sila (1) stlačí prvú sústavu pružín o dĺžku $x_1 = \Delta l_1 = \frac{F}{C'_1}$, druhú sústavu pružín (zarážadla) o dĺž-

ku $x_2 = \Delta l_2 = \frac{F}{C'_2}$, takže výsledné stlačenie (celkové posunutie vagóna) je

$$x = \Delta l = x_1 + x_2, \text{ čiže } \frac{F}{C} = \frac{F}{C'_1} + \frac{F}{C'_2}, \text{ z čoho}$$

$$C = \frac{C'_1 C'_2}{C'_1 + C'_2} = \frac{2 C_1 \cdot 2 C_2}{2 (C_1 + C_2)} = \frac{2 C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (2)$$

2. Od okamihu nárazu až do zastavenia je pohyb vagóna (aj debny a pravdaže aj pružín) štvrtinou cyklu harmonického pohybu, pri ktorom práca potrebná na posunutie sústavy o dĺžku x je

$$A = \frac{1}{2} C x^2. \quad (3)$$

Táto práca A je podľa zákona o zachovaní energie rovnaká ako úbytok kinetickej energie vagóna. Ak sa vagón zastaví, je teda $A = W_k$, kde

$$W_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_m^2, \quad (4)$$

v_m značí maximálnu nárazovú rýchlosť vagóna (aby sa debna nepošmykla).

Z rovníc (3) a (4) určíme

$$v_m = \sqrt{\frac{C x_m^2}{m_1 + m_2}}. \quad (5)$$

Maximálnou silou F_m pôsobia pružiny vtedy, keď ich stlačenie je najväčšie, tj. $\Delta l = x_m$, čo dosadené do (1) dá $F_m = C x_m$. (6)

Podľa zákona sily ($F = m a$), bude teda maximálne zrýchlenie a_m určené vzťahom

$$a_m = \frac{F_m}{m} = \frac{C}{m_1 + m_2} x_m. \quad (7)$$

3. Aby sa debna nepošmykla, musí byť sila ju urychľujúca

$$F_u = m_2 a_m \quad (8a)$$

menšia (alebo rovnaká) ako sila trenia $F_t = f G = f m_2 g$,
(8b)

tj. musí platiť $F_u \leq F_t$, čiže $m_2 a_m \leq f m_2 g$, odkiaľ $a_m \leq f g$. Pre jednoduchosť predpokladajme hraničný prípad (maximálne stlačenie)

$$a_m = f g. \quad (8c)$$

Dosadením (8c) do (7) dostaneme

$$f g = \frac{C x_m}{m_1 + m_2},$$

z čoho

$$x_m = \frac{(m_1 + m_2) f g}{C}. \quad (9)$$

Podobne bude

$$x_{m_1} = \frac{(m_1 + m_2) f g}{C'_1}, \quad (9a)$$

$$x_{m_2} = \frac{(m_1 + m_2) f g}{C'_2}, \quad (9b)$$

(9) dosadené do (5) dá maximálne prípustnú nárazovú rýchlosť vagóna, aby sa debna nepošmykla, tj.

$$\begin{aligned} v_m &= \sqrt{\frac{C x_m^2}{m_1 + m_2}} = f g \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{C}} = \\ &= f g \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) (C_1 + C_2)}{2 C_1 C_2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

4. Perióda T harmonického pohybu telesa hmotnosti m na pružine tuhosti C je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}};$$

hľadaná doba stlačovania pružín t je štvrtina periódy, teda

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{4} T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{C}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{C}} = \\ &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)(C_1 + C_2)}{2 C_1 C_2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Všetky naše úvahy sa vzťahujú na prípad ideálnych pružín, tj. hmoty pružín sú zanedbateľné a medza pružnosti nebola prekročená.

5. Číselné výsledky (pri $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$). Dimenzionálna správnosť získaných vzťahov bola kontrolovaná pri dosadzovaní hodnôt pre dané veličiny do (2), (10), (11), (9):

$$C = 2,5 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-1}, v_m \doteq 0,59 \text{ m s}^{-1}, t \doteq 0,15 \text{ s};$$

$$x_m \doteq 5,8 \text{ cm}, x_{m_1} = 2,4 \text{ cm}, x_{m_2} = 3,4 \text{ cm}.$$

5. príklad (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

Mezi dvěma olovenými koulemi dojde k přímému středovému dokonale nepružnému rázu. Koule se pohybují proti sobě stejně velkou rychlostí v a mají stejnou teplotu t . Jejich hmotnosti jsou v poměru $p = \frac{m_1}{m_2}$.

Jaká musí být rychlost koulí před rázem, má-li při rázu roztát n -tá část látky?

Předpokládáme, že při rázu nedojde k ztrátám tepla do okolí.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $p = 2$, $t = 18,0^\circ\text{C}$, $n = \frac{1}{3}$. Teplota tání olova je $t' = 327,3^\circ\text{C}$,

měrné teplo olova $c \doteq 1,30 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$, měrné skupenské teplo tání olova $l_t \doteq 2,48 \cdot 10^4 \text{ J kg}^{-1}$.

Řešení: Označení veličin: v je původní rychlost koule první, její hmotnost $m_1 = p m$, rychlost druhé koule je $-v$, její hmotnost $m_2 = m$, v' je výsledná rychlost každé koule po rázu.

Označíme-li hmotnost druhé koule $m_2 = m$, bude podle daného poměru $p = \frac{m_1}{m_2}$ hmotnost první koule $m_1 = p m_2 = p m$, takže hmotnost obou je

$$m_1 + m_2 = m(p + 1).$$

Součet hybností obou těles se při rázu nemění, tj.

$$m_1 v - m_2 v = m_1 v' + m_2 v',$$

z čehož

$$v' = \frac{(m_1 - m_2) v}{m_1 + m_2} = \frac{p - 1}{p + 1} v. \quad (1)$$

Kinetická energie obou koulí před rázem byla

$$W = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} v^2 (p + 1) m; \quad (2a)$$

Po rázu byla kinetická energie obou koulí

$$W' = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 = \frac{1}{2} \frac{m (p - 1)^2 v^2}{p + 1}. \quad (2b)$$

Rozdíl obou energií je tedy

$$\begin{aligned} W - W' &= \frac{1}{2} (p + 1) m v^2 - \frac{1}{2} \frac{(p - 1)^2}{p + 1} m v^2 = \\ &= m v^2 \frac{2p}{p + 1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Rozdíl energií se podle zadání celý mění v teplo Q , a to jednak na zvýšení teploty obou koulí (z původní teploty t až na teplotu tání t' olova, čili o $t' - t$ stupňů), jednak na roztavení n -násobku celkové hmoty obou koulí; platí tedy $W - W' = Q$, kde

$$Q = (m_1 + m_2) c (t' - t) + n (m_1 + m_2) l_t = m (p + 1) \cdot [c(t' - t) + n l_t]. \quad (4)$$

Dosazením (4) do (3) dostáváme

$$m v^2 \cdot \frac{2p}{p+1} = m (p+1) [c(t' - t) + n l_t],$$

z čehož

$$v = (p+1) \sqrt{\frac{1}{2p} [c(t' - t) + n l_t]}. \quad (5)$$

Pro $p = 2$, $n = \frac{1}{3}$ obdržíme dosazením do (5) vztah

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{9 c (t' - t) + 3 l_t} \quad (5a)$$

a pro zadané hodnoty veličin c , l_t , t' , t , p , n vyjde
 $v \doteq 330,2 \text{ m s}^{-1}$.

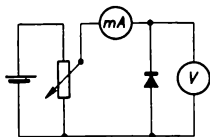
6. úloha experimentální (navrhl Karel Bartuška)

Určení charakteristiky hrotové diody

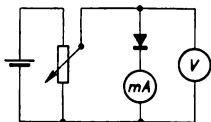
Pomůcky: miliampérmetr, voltmetr, posuvný reostat, germaniová dioda 2NN41, spojovací lanka.

Úkol: Určete charakteristiku germaniové diody 2NN41. Charakteristika diody udává závislost proudu I , který diodou protéká, na napětí U na svorkách diody.

Provedení: a) Sestavte podle schématu (obr. 46a) zapojení pro měření charakteristiky hrotové diody. Diodu zapojte nejprve v propustném směru, tj. katodu (je označena barevným proužkem) připojte k zápornému pólu zdroje napětí.



Obr. 46 a



Obr. 46 b

Přiveďte na diodu z potenciometru proměnné napětí a příslušné hodnoty napětí a proudu (asi 10 hodnot) zapisujte do tabulky. Maximální proud, který smí procházet diodou v propustném směru, je 50 mA.

b) Sestavte podle schématu (obr. 46b) zapojení pro měření charakteristiky hrotové diody v nepropustném směru. Proveďte opět asi 10 měření a příslušné hodnoty napětí a proudu zapisujte do tabulky. Závěrné napětí diody 2 NN 41 je 50 V.

c) Užitím hodnot, uvedených v obou tabulkách, sestojte charakteristiku diody. Pro znázornění napětí a proudu v nepropustném směru použijte většího měřítka. Zdůvodněte, proč bylo při měření charakteristiky v propustném a v nepropustném směru použito různých zapojení.

Poznámka: Místo hrotové diody 2 NN 41 lze použít k měření charakteristiky také jakékoli jiné hrotové nebo plošné diody.

Provedení:

Měření bylo provedeno na plošné diodě 6 NP 70.

Pomůcky: dva avometry, posuvný reostat do $80\ \Omega$, germaniová dioda 6 NP 70, spojovací lanka, zdroje napětí: akumulátor a usměrňovač.

a) *Měření proudu v propustném směru.* Podle katalogu je maximální přípustný proud v propustném směru u diody 6 NP 70 asi 300 mA. Měření bylo provedeno pro 15 různých hodnot proudu (při zapojení podle schématu na obr. 46a).

$U\ [V]$	0,22	0,29	0,32	0,35	0,38	0,40	0,41	0,43	0,45	0,46	0,47	0,48
$I\ [mA]$	6	16	29	43	59	71	91	114	132	152	178	192

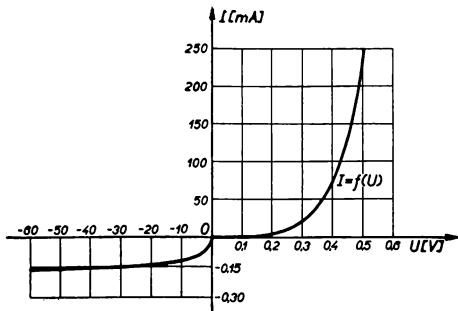
$U\ [V]$	0,49	0,50	0,51
$I\ [mA]$	209	237	261

b) *Měření proudu v nepropustném směru.* Závěrné napětí diody 6 NP 70 je podle katalogu 250 V. Výsledky měření jsou v tabulce:

$U\ [V]$	0	0,12	0,20	0,59	1,68	4,05	12,2	20,9	29,2	39,4	48,2	54,4
$I\ [\mu A]$	0	18	26	52	80	102	124	138	147	155	162	168

c) Z hodnot měření a) a b) byl sestaven graf. Pro nepropustný směr je voleno pro proud měřítko stokrát větší, pro napětí stokrát menší než pro propustný směr (obr. 47).

Protože odpor diody v propustném směru je zanedbatelně malý proti odporu voltmetru, prochází voltmetrem proud zanedbatelně malý proti proudu, který prochází diodou, takže ampérmetrem jde proud, který se jen



Obr. 47

nepatrně liší od hodnoty proudu, procházejícího diodou. Proto je voltmetr zapojen paralelně s diodou. Kdyby byl zapojen podle schématu b), pak by na ampérmetru byl velký úbytek napětí, který by značně změnil údaje voltmetru o napětí na diodě.

Při zapojení diody v nepropustném směru prochází voltmetrem proud řádově stejný jako diodou, a proto je nutno ampérmetr zapojit do větve s diodou, neboť jinak by (při spojení podle schématu v obr. 46a) udával ampérmetr součet proudů jdoucích diodou a voltmetrem. Úbytek napětí na ampérmetru je nyní velmi malý (řádově 10^{-3} V), a je tedy zanedbatelný proti závěrnému napětí na diodě, které činí řádově $10 - 10^2$ V.

7. příklad (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

Dlouhá válcová cívka má n závitů na délce l . Uvnitř této cívky je uzavřena kruhová cívka poloměru r s N závity drátu, jehož materiál má hustotu d a měrný odpor ϱ . Průřez drátu této kruhové cívky je S , rovina kruhové cívky je kolmá na směr indukčních čar.

a) Určete, jak se změní teplota kruhové cívky, jestliže se proud ve válcové cívce změní rovnoměrně za dobu Δt o ΔI .

b) Dokažte, že tato změna teploty nezáleží na počtu a průřezu závitů kruhové cívky.

Změnu odporu kruhové cívky při rostoucí teplotě a její vlastní indukčnosti zanedbáme. Řešte jen obecně.

Řešení: a) Kruhová cívka o poloměru r a o N závitěch má délku drátu $l_k = 2\pi r N$; průřez jejího drátu je S , hustota d a měrné teplo c ; magnetická permeabilita prostředí je μ .

Hmotnost kruhové cívky bude tedy $m_k = S l_k d = 2\pi r N S d$. (1)

Odpor této cívky bude

$$R = \varrho \frac{l_k}{S} = \frac{2\pi r N \varrho}{S}. \quad (2)$$

Plošný obsah průřezu kruhové cívky je $S_1 = \pi r^2$.

Ve válcové cívce délky l o n závitěch vzniká proudem I magnetická indukce

$$B = \mu I \frac{n}{l}.$$

Celkový magnetický indukční tok kruhovou cívkou bude pro N závitů dán vztahem

$$\Phi = B N S_1 = B N \pi r^2 = \mu I \frac{n}{l} N \pi r^2 = \pi r^2 n N \mu \frac{I}{l}.$$

Podle Faradayova zákona o elektromagnetické indukci vzniká změnou magnetického toku $\Delta\Phi$ za čas Δt indukované elektromotorické napětí

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = - \frac{\pi r^2 n N \mu \Delta I}{l \Delta t}. \quad (3)$$

Jouleovo teplo, vyvolané indukovaným proudem $Q = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \Delta t$ způsobí zvýšení teploty o $\Delta\vartheta$, pro něž platí

$$m_k c \Delta\vartheta = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \Delta t, \quad (4)$$

z čehož po dosazení (1), (2) a (3) plyne

$$\Delta\vartheta = \frac{\mathcal{E}^2 \Delta t}{R m_k c} = \frac{\mu^2 n^2 r^2 (\Delta I)^2}{4 l^2 \varrho c d \Delta t}. \quad (5)$$

b) Ve vztahu (5) se nevyskytuje ani N , ani S , tedy na nich nezáleží.

8. příklad (navrhl Jan Tesař)

Dvě kulová zrcadla, vypuklé a duté, mající stejně veliký poloměr křivosti r , jsou umístěna na společné optické ose ve vzdálenosti $3r$ od sebe a jsou obrácena zrcadlícími plochami proti sobě.

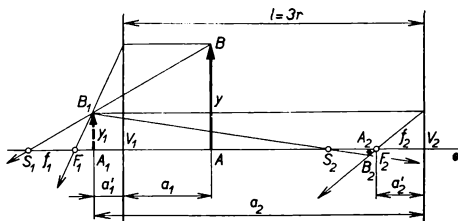
a) Do kterého místa na společné optické ose je nutno umístit malý svítící předmět, např. malou úsečku kolmou k optické ose, má-li se jeho obraz ve vypuklém zrcadle zobrazit dutým zrcadlem v témž místě, ve kterém je předmět?

b) Je výsledný obraz skutečný nebo jen zdánlivý? Jakou polohu a velikost má vzhledem k předmětu?

c) Jak veliké je příčné zvětšení tohoto obrazu vzhledem k předmětu?

Řešte obecně.

Řešení: V obr. 48 jsou kresleny vrcholové roviny místo zrcadlicích ploch.



Obr. 48

Zrcadlo vypuklé postavme vlevo a veličiny, které se ho týkají, značme indexem 1, pro zrcadlo duté, postavené vpravo ve vzdálenosti $l = 3r$, užíjme indexu 2. Ohnisková vzdálenost zrcadla vypuklého je $f_1 = -\frac{r}{2}$, dutého

$f_2 = +\frac{r}{2}$. Za počátek souřadnic O volme vrchol vypuklého zrcadla.

a) Svítící předmět $AB = y$, jenž je ve vzdálenosti $a_1 = x$ od počátku (viz obr. 48), zobrazíme nejprve vypuklým zrcadlem a obraz $A_1B_1 = y_1$ jím vytvořený zobrazíme znovu zrcadlem dutým, takže vznikne obraz $A_2B_2 = y_2$, který se podle zadání musí nacházet v téže vzdálenosti od zrcadel jako svítící předmět.

Z vrcholové rovnice vypuklého zrcadla plyne (pro zdánlivý obraz A_1B_1)

$$\frac{1}{a'_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{a_1} = -\frac{2}{r} - \frac{1}{x} = -\frac{2x+r}{rx}, \text{ takže}$$

$$a'_1 = -\frac{rx}{2x+r}. \quad (1)$$

Zdánlivý obraz A_1B_1 je pro duté zrcadlo předmětem, jehož vzdálenost od vrcholu dutého zrcadla je

$$a_2 = l + |a'_1| = 3r + \frac{rx}{2x+r} = \frac{r(7x+3r)}{2x+r}. \quad (2)$$

Vrcholová rovnice dutého zrcadla dá pro vzdálenost a'_2 dalšího obrazu $A_2B_2 = y_2$ vztah

$$\frac{1}{a'_2} = \frac{1}{f_2'} - \frac{1}{a_2} = +\frac{2}{r} - \frac{2x+r}{r(7x+3r)} =$$

$$= \frac{12x+5r}{r(7x+3r)}, \quad (3)$$

z něhož

$$a'_2 = \frac{r(7x+3r)}{12x+5r}. \quad (4)$$

Má-li být splněna podmínka zadání, že $A_2 \equiv A$, musí být

$$a'_2 = 3r - x. \quad (5)$$

Z rovnosti vztahů (4) a (5) dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici $x^2 - 2rx - r^2 = 0$, (6)

jejíž kořeny jsou $x_{12} = r(1 \pm \sqrt{2})$. (7)

Záporný kořen nemá fyzikální význam, neboť předmět by se ocitl v místě nepřístupném zobrazení. Předmět tedy musí být od vypuklého zrcadla vzdálen o délku $x = r(1 + \sqrt{2}) \doteq 1,618r$.

b) Obraz A_2B_2 je skutečný, převrácený a zmenšený. Platí totiž:

Pro zvětšení vypuklým zrcadlem

$$\frac{y_1}{y} = -\frac{a'_1}{a_1} = +\frac{r}{2x+r} = 3 - \sqrt{8}. \quad (8)$$

Velikost prvního obrazu je tedy

$$y_1 = (3 - \sqrt{8}) y.$$

Pro zvětšení obrazu dutým zrcadlem dostáváme:

$$\frac{y_2}{y_1} = -\frac{a'_2}{a_2} = -\frac{2x+r}{12x+5r} = -(3 - \sqrt{8}). \quad (9)$$

Proto velikost druhého obrazu je

$$y_2 = -(3 - \sqrt{8}) y_1 = -(3 - \sqrt{8})^2 y.$$

c) Poměr velikosti druhého obrazu y_2 k velikosti předmětu je

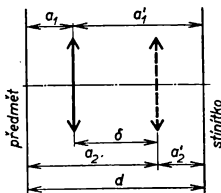
$$y_2 : y = -(3 - \sqrt{8})^2 : 1.$$

9. úloha experimentální (navrhl František Cimbůrek)

Určete ohniskovou vzdálenost tenké spojky metodou Besselovou.

Pomůcky: optická lavice se spojnou čočkou, žárovkou a stínítkem, milimetrové měřítko.

Úvod. Měření ohniskové vzdálenosti spojně čočky Besselovou metodou se provádí tak, že předmět a stínítko umístíme na koncích optické lavice a vyhledáme dvě souměrné polohy spojky (viz obr. 49), kdy je ostře zo-



Obr. 49

brazen předmět na stínítku (jednou zvětšený, podruhé zmenšený). Měříme vzdálenost d stínítka od předmětu a vzdálenost δ obou poloh čočky, což opakujeme několikrát. Ohniskovou vzdálenost vypočteme dosazením do rovnice:

$$f = \frac{d^2 - \delta^2}{4d}.$$

Úkoly: a) Odvoďte rovnici $f = \frac{d^2 - \delta^2}{4d}$ pro ohniskovou vzdálenost spojky.

b) Určete ohniskovou vzdálenost tenké spojky podle této rovnice.

Řešení: a) Z principu záměnnosti směru chodu paprsků vyplývá, že vzhledem k poloze čočky lze zaměnit předmět a obraz. Proto pro hodnoty vzdáleností v obr. 49 vyplývá

$$a'_1 = a_2, \quad a'_2 = a_1,$$

a tedy pro vzdálenosti d a δ platí

$$d = a'_1 + a_1,$$

$$\delta = a'_1 - a_1,$$

a odtud

$$a'_1 = \frac{d + \delta}{2},$$

$$a_1 = \frac{d - \delta}{2}.$$

Dosadíme-li tyto výrazy do čočkové rovnice

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a'_1} = \frac{1}{f},$$

dostaneme

$$\frac{1}{\frac{d + \delta}{2}} + \frac{1}{\frac{d - \delta}{2}} = \frac{1}{f}$$

a po úpravě

$$f = \frac{d^2 - \delta^2}{4d} \quad (1)$$

b) *Pomůcky*: optická lavice s milimetrovým měřítkem, bodový zdroj světla s clonkou (clonka tvaru mezikruží), spojná čočka, stínítko.

Měření ohniskové dálky touto metodou je výhodné proto, že vzdálenosti a a a' od čočky se dají měřit nesnadno, kdežto vzdálenosti d a δ ve vztahu (1) můžeme změřit mnohem přesněji.

Měření bylo prováděno odčítáním polohy clonky, čočky a stínítka s přesností na 1 mm. V tabulce jsou uvedeny hodnoty na měřítku pro polohu clonky P , pro polohu stínítka S , C_1 a C_2 pro obě polohy čočky, kdy dávaly ostrý obraz clonky na stínítku. Všechny údaje v tabulce jsou v milimetrech:

n	P	S	d	C_1	C_2	δ	f	Δ_+
1	158	956	798	274	839	565	99,6	0,3
2	153	935	762	293	815	522	100,3	
3	182	914	732	301	795	494	99,5	0,4
4	207	883	676	328	762	434	99,4	0,5
5	220	860	640	345	735	390	100,6	
6	248	846	598	374	719	345	99,7	0,2
7	253	818	565	383	687	304	100,4	
8	272	778	506	408	642	234	99,6	0,3
9	288	772	434	442	567	125	99,5	0,4
10	297	712	415	468	541	73	100,4	

$$\bar{f} = 99,90 \text{ mm}$$

$$f = \bar{f} \pm \bar{\delta}, \text{ kde } \bar{\delta} = \frac{5}{2n} \frac{\Sigma \Delta_+}{\sqrt{n-1}}, \quad \Sigma \Delta_+ = 2,1 \text{ mm},$$

$$\text{tedy } \bar{\delta} = \frac{\Sigma \Delta_+}{12} = \frac{2,1}{12} \text{ mm} = 0,2 \text{ mm}.$$

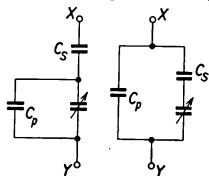
$$f = (99,9 \pm 0,2) \text{ mm}.$$

Ohnisková vzdálenost dané tenké spojky je $f = (99,9 \pm 0,2) \text{ mm} \doteq 10 \text{ cm}$, a tedy její optická mohutnost $D = \frac{1}{f}$ je $D = 10$ dioptrií.

b) Druhé kolo soutěže

1. příklad (navrhl Mojmir Simerský)

K otočnému kondenzátoru, jehož minimální a maximální kapacita je 20 pF a 500 pF, má být připojen sériově kondenzátor kapacity C_s a paralelně kondenzátor kapacity C_p , jejichž kapacity mají být takové, aby kapacita celé soustavy mezi svorkami X a Y (viz obr. 50a, b) se měnila od 50 pF od 250 pF.



Obr. 50 ab

a) Určete velikosti kapacit C_p a C_s pro oba naznačené způsoby spojení (výsledky zaokrouhlete na celé pF).

b) Jestliže u otočného kondenzátoru závisí kapacita lineárně na otočení rotoru (od 0° do 180°), vyjádřete graficky, jak na úhlu otočení (po 20°) závisí

- α) kapacita otočného kondenzátoru,
- β) kapacita soustavy podle a),
- γ) kapacita soustavy podle b).

Řešení: Označme kapacitu otočného kondenzátoru C_0 .

a) Pro kapacitu C_1 dvou kondenzátorů C_p a C_0 spojených vedle sebe platí

$$C_1 = C_p + C_0.$$

Pro kapacitu C dvou kapacit C_1 a C_s spojených za sebou je

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_s} + \frac{1}{C_1}$$

a po úpravě a dosazení

$$C = \frac{C_s (C_p + C_0)}{C_p + C_0 + C_s}.$$

Po dosazení daných veličin a pro hodnoty požadované pro velikost výsledné kapacity C platí pro číselné hodnoty kapacit vyjádřené v pF

$$50 = \frac{C_s (C_p + 20)}{C_s + C_p + 20}, \quad (1)$$

$$250 = \frac{C_s (C_p + 500)}{C_s + C_p + 500}. \quad (2)$$

Z (2) po úpravě dostaneme

$$C_s = \frac{250 C_p + 125\,000}{C_p + 250}, \quad (3)$$

a po dosazení (3) do (1) obdržíme kvadratickou rovnici pro C_p

$$C_p^2 + 520 C_p - 20\,000 = 0, \quad (4)$$

která má kladný kořen (záporný kořen nemá fyzikální význam)

$$C_p = 36 \text{ pF},$$

a tedy

$$C_s = 469 \text{ pF}.$$

b) Ve druhém zapojení je kapacita C_2 kondenzátorů C_s a C_0

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_s} + \frac{1}{C_0},$$

$$C_2 = \frac{C_s C_0}{C_s + C_0}$$

a výsledná kapacita C při paralelním zapojení kapacit C_p a C_2

$$C = C_p + C_2$$

čili

$$C = C_p + \frac{C_0 C_s}{C_0 + C_s}.$$

Po dosazení daných veličin platí pro číselné hodnoty kapacit v pF

$$50 = C_p + \frac{20 C_s}{20 + C_s}, \quad (5)$$

$$250 = C_p + \frac{500 C_s}{500 + C_s}. \quad (6)$$

Odečtením obou rovnic a dělením 20 dostaneme

$$10 = \frac{25 C_s}{500 + C_s} - \frac{C_s}{20 + C_s},$$

a odtud po úpravě

$$7 C_s^2 - 2\,600 C_s - 50\,000 = 0 \quad (7)$$

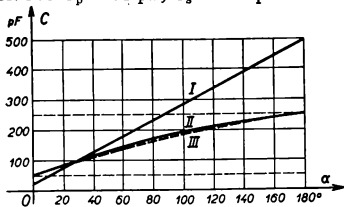
s jediným kladným kořenem

$$C_s = 390 \text{ pF}$$

a po dosazení do (5) a po úpravě

$$C_p = 31 \text{ pF}.$$

Závěr: Při zapojení podle obr. 50 musí být voleny hodnoty kapacit $C_p = 36 \text{ pF}$, $C_s = 469 \text{ pF}$, při spojení podle obr. 50b $C_p = 31 \text{ pF}$, $C_s = 390 \text{ pF}$.

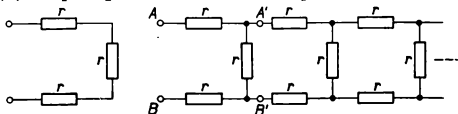


Obr. 51

c) V obr. 51 je čára *I* grafem závislosti kapacity otočného kondenzátoru na úhlu otočení (závislost je podle předpokladu lineární), křivka *II* grafem závislosti výsledné kapacity soustavy podle zapojení a), křivka *III* grafem závislosti výsledné kapacity soustavy podle zapojení b), v obou případech na úhlu otočení kondenzátoru C_0 .

2. příklad (navrhl dr. Ivan Náter)

Tri rovnaké odpory r sú spojené za sebou. Neobmedzený (nekonečně velký) počet takýchto prvkov pripojujeme postupne do elektrickej siete podľa obr. 52.



Obr. 52

Vypočítajte, aký prúd dodáva do siete batéria, ktorá má elektromotorické napätie $\mathcal{E}$ a vnútorný odpor R_1 , ak ju pripojíme k bodom A a B .

(Uvážte, že v prípade nekonečne veľkého počtu rovnakých prvkoch zapojených do siete sa pomery v sieti nezmenia, ak zo siete odpojíme konečný počet prvkov.)

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $\mathcal{E} = 4,50 \text{ V}$, $R_1 = 2,50 \Omega$, $r = 6,00 \Omega$ s presnosťou na 3 platné miesta.

Riešenie: Musíme vypočítať celkový odpor R medzi bodmi A a B . Vychádzame z podmienky, že odpor medzi bodmi A' a B' po odpojení prvého stavebného prvku zo siete musí byť taký istý ako odpor pôvodnej siete medzi bodmi A a B .

Musí teda platiť

$$R = 2r + \frac{Rr}{R + r}.$$

Po úprave dostaneme kvadratickú rovnicu pre R

$$R^2 - 2Rr - 2r^2 = 0.$$

Jej riešenie je

$$R = r(1 \pm \sqrt{3}).$$

Našej úlohe zodpovedá len kladný koreň. Je teda

$$R = r(1 + \sqrt{3}).$$

Prúd I dodávaný z batérie do siete je

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r(1 + \sqrt{3})}.$$

Číselne

$$I = 0,239 \text{ A}.$$

3. příklad (navrhl Evžen Říman, CSc.)

Solenoidem, jenž má délku $l = 33,3$ cm, příčný průřez obsahu $S = 10,6$ cm² a celkový počet závitů $N_1 = 360$, protéká proud $I_1 = 4$ A. Na solenoidu je navléknuta cívka stejného průřezu, mající $N_2 = 60$ závitů, která je spojena s balistickým galvanoměrem odporu $R = 1200$ Ω.

Při přerušení proudu I_1 solenoidu ukázal galvanoměr výchylku $\beta = 24$ dílků.

Určete hodnotu tzv. balistické konstanty (v jednotkách C/dílek) za předpokladu, že odpor cívky (N_2) je zanedbatelný vůči odporu galvanoměru. Řešte obecně, proveďte rozměrovou zkoušku výsledného vztahu a nakonec dosadte zadané hodnoty.

(Pokyn: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ V²s A⁻¹m⁻¹; množství elektrického náboje, prošlého balistickým galvanoměrem, je úměrné výchylce ukazovatele, tedy $Q = b\beta$, kde β je výchylka ukazovatele (měří se v dílcích dané škály), b je tzv. balistická konstanta galvanoměru.)

Řešení: Proud I_1 vytvoří v solenoidu (pro $\mu_r = 1$) magnetické pole o indukci

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}.$$

Indukční tok cívkou, mající N_2 závitů, bude $\Phi = N_2 B_1 S$

Přerušení proudu I_1 způsobí změnu toku $\Delta\Phi = N_2 B_1 S$, která vyvolá v cívce elektromotorické napětí velikosti

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

a v galvanoměru proud $I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R}.$

Celkový elektrický náboj Q prošlý galvanoměrem v době Δt je tedy

$$Q = I_2 \Delta t.$$

Balistická konstanta b je definována jako podíl prošlého náboje Q a výchylky β , tj.

$$b = \frac{Q}{\beta}.$$

Postupným dosazováním hořejších vztahů dostaneme

$$\begin{aligned} b &= \frac{Q}{\beta} = \frac{1}{\beta} I_2 \Delta t = \frac{1}{\beta} \frac{\mathcal{E}_2}{R} \Delta t = \frac{1}{\beta R} \frac{\Delta \Phi \Delta t}{\Delta t} = \\ &= \frac{1}{\beta R} N_2 B_1 S = \frac{N_2 S}{\beta R} \mu_0 N_1 I_1 \frac{1}{l} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1 S}{\beta R l}. \end{aligned}$$

Rozměrová zkouška posledního vztahu:

Dosazujeme rozměry veličin:

$[\mu_0] = \text{Vs A}^{-1} \text{m}^{-1}$; $[I_1] = \text{A}$; $[S] = \text{m}^2$; $[\beta] = \text{dílek}$;

$[R] = \text{ohm} = \text{V A}^{-1}$; $[l] = \text{m}$; N_1, N_2 jsou bezrozměrné.

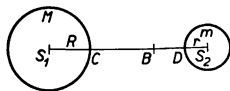
Bude tedy rozměr veličiny b dané výsledným vztahem

$$b = \frac{\text{Vs A}^{-1} \text{m}^{-1} \text{A m}^2}{\text{dílek} \cdot \text{V A}^{-1} \text{m}} = \frac{\text{A s}}{\text{dílek}}.$$

Po dosazení daných hodnot dostaneme pro b hodnotu

$$b = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ A s / dílek} = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ C / dílek}.$$

4. příklad (navrhl Milan Rádl)



Obr. 53

Na obr. 53 jsou znázorněny Země (hmotnost M , poloměr R) a Měsíc (hmotnost m , poloměr r) jako dvě koule, jejichž vzdálenost středů $S_1 S_2$ je a .

Na spojnici S_1S_2 je označen bod B , v němž intenzity E_1 , E_2 gravitačních polí Země a Měsíce jsou stejně veliké, opačného směru a tedy výsledná intenzita je nulová.

Poměr hmotností obou těles je $\frac{M}{m} = 81$.

a) Zvolte místem nulového potenciálu gravitačního právě bod B a za počátek souřadné soustavy volte bod S_1 , při čemž přímka S_1S_2 je souřadnou osou.

Napište vztah pro průběh gravitačního potenciálu φ_1 pole Země pro libovolný bod o souřadnici x na polopřímce CS_2 (tj. pro $x \geq R$) a vztah pro průběh potenciálu φ_2 Měsíce pro body x ležící na polopřímce DS_1 (tj. pro $x \leq \leq a - r$). V nalezených rovnicích dosaďte za $b = S_1B$ jeho vyjádření pomocí vzdálenosti $S_1S_2 = a$.

b) Pomocí odvozených vztahů vyjádřete potenciál φ výsledného pole obou těles pro body x úsečky CD ($R \leq \leq x \leq a - r$).

c) Určete, jak velké práce A by bylo zapotřebí k vynešení družice o hmotnosti m_d z bodu D na povrchu Měsíce do bodu B , přihlédneme-li

α) pouze ke gravitačnímu poli Měsíce,

β) k působení obou gravitačních polí.

Rotační pohyby ani vzájemné pohyby obou těles neuvažujeme.

$$\begin{aligned} \text{Řešení: a) Z rovnosti } |E_1| &= |E_2| \text{ plyne } \frac{\kappa M}{b^2} = \\ &= \frac{\kappa m}{(a - b)^2}. \end{aligned}$$

Vzhledem k podmínce $b < a$ obdržíme po odmocnění a úpravě

$$b = \frac{a \sqrt{\frac{M}{m}}}{1 + \sqrt{\frac{M}{m}}} = \frac{9}{10} a. \quad (1)$$

Při volbě nulového potenciálu v nekonečnu platí pro potenciál gravitačního pole Země v bodě o souřadnici x známý vztah

$$\varphi' = - \frac{\kappa M}{x},$$

a tedy v bodě B

$$\varphi'_{1B} = - \frac{\kappa M}{b}.$$

Má-li však φ_{1B} být rovno nule, je nutno od těchto hodnot odečíst φ'_{1B} a hledaný vztah je

$$\varphi_1 = - \frac{\kappa M}{x} + \frac{\kappa M}{b} = \kappa M \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{x} \right).$$

Podobný vztah bude platit i pro potenciál φ_2 pole Měsíce. Ve jmenovatelích zlomků budou nyní vzdálenosti od středu Měsíce, tj. pro bod B vzdálenost $(a - b)$ a pro bod o souřadnici x vzdálenost $(a - x)$, takže

$$\varphi_2 = \kappa m \left(\frac{1}{a - b} - \frac{1}{a - x} \right).$$

Použijeme-li výsledku (1), máme

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \kappa M \left(\frac{10}{9a} - \frac{1}{x} \right), \\ \varphi_2 &= \kappa m \left(\frac{10}{a} - \frac{1}{a - x} \right). \end{aligned}$$

b) Potenciál je skalárni veličina, a proto výsledný potenciál je dán algebraickým součtem dílčích potenciálů

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \kappa \left(\frac{10 M}{9 a} - \frac{M}{x} + \frac{10 m}{a} - \frac{m}{a - x} \right).$$

c) Pro bod D platí $x = a - r$.

Práce k vynesení družice jsou

$$\alpha) A_2 = m_d (\varphi_{2B} - \varphi_{2D}) = m_d \kappa m \left(\frac{1}{r} - \frac{10}{a} \right),$$

$$\beta) A = m_d (\varphi_B - \varphi_D) = m_d \kappa \left(\frac{M}{a - r} - \frac{10 M}{a} + \frac{m}{r} - \frac{10 m}{a} \right).$$

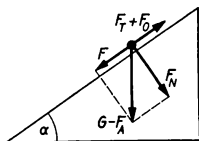
c) Třetí kolo soutěže

1. příklad (navrhl dr. Ivan Náter)

V kvapalině hustoty ρ je naklonená rovina s uhlom sklonu α . Po nej sa účinkom tiaže pohybuje teleso hmotnosti m a objemu V , pričom súčiniteľ trenia má hodnotu f . Proti pohybujúcemu sa telesu pôsobí kvapalina silou, ktorá je priamo úmerná rýchlosti v telesa. Akú maximálnu rýchlosť $v_{\max}$ dosiahne teleso pri svojom pohybe?

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty: $\rho = 800 \text{ kg m}^{-3}$, $f = 0,18$; $\alpha = 45^\circ$, $m = 2,0 \text{ kg}$, $V = 25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$, ak viete, že pri rýchlosti $v_1 = 0,10 \text{ m s}^{-1}$ je odporová sila kvapaliny $F_{01} = 1,5 \text{ N}$.

Riešenie: Na uvažované teleso pôsobia pri pohybe rýchlosťou v tieto sily (viď obr. 54): tiaž $G = mg$, vztlak (podľa Archimédovho zákona) $F_A = V \rho g$, trecia sila $F_T = f F_N$ a odpor kvapaliny $F_0 = k v$, kde $g =$



Obr. 54

= zrýchlenie voľne padajúceho telesa, F_N normálová tlaková sila, ktorou teleso pôsobí na naklonenú rovinu, k je konštanta úmernosti medzi odporovou silou a rýchlosťou telesa.

Podľa obr. 54 je

$$F_N = (G - F_A) \cos \alpha$$

a výsledná hnacia sila

$$F = (G - F_A) \sin \alpha - f (G - F_A) \cos \alpha - k v,$$

teda

$$F = g (m - V \rho) (\sin \alpha - f \cos \alpha) - k v.$$

V tomto vyjadrení hnacej sily je prvý člen konštantný (nezávisí od rýchlosti telesa), druhý člen však s narastajúcou rýchlosťou rastie. Preto sa hnacia sila s narastajúcou rýchlosťou znižuje. Maximálnu rýchlosť $v_{\max}$ dosiahne teleso vtedy, keď $F = 0$, z čoho dostaneme

$$0 = g (m - V \rho) (\sin \alpha - f \cos \alpha) - k v_{\max}$$

a odtiaľ

$$v_{\max} = \frac{g (m - V \rho) (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{k}.$$

Pre numerické riešenie musíme vypočítať hodnotu konštanty k :

$$k = \frac{F_0}{v} = \frac{F_{01}}{v_1} = \frac{1,5 \text{ kg m s}^{-2}}{0,1 \text{ m s}^{-1}} = 15 \text{ kg s}^{-1}.$$

Potom po dosadení numerických hodnôt

$$v_{\max} = 0,68 \text{ m s}^{-1}.$$

2. příklad (navrhl Jan Tesař)

Dvě tenké spojné čočky o ohniskových vzdálenostech f_1 a f_2 mají společnou optickou osu. V předmětovém prostoru první čočky (o ohniskové vzdálenosti f_1) je ve vzdálenosti a od jejího středu malá úsečka délky y kolmá k optické ose. Její obraz vytvořený první čočkou (první obraz) je skutečný, má velikost y_1 a nachází se mezi první a druhou čočkou. Obraz y_2 úsečky y_1 vytvořený druhou čočkou (druhý obraz) je zdánlivý a má velikost $y_2 = k y$ (kde $k > 0$).

α) Vypočítejte vzdálenost d obou čoček nejprve obecně, potom pro hodnoty $a = 50$ cm, $f_1 = 30$ cm, $f_2 = 40$ cm, $k = 4$.

β) Jaké hodnoty mohou mít veličiny a a k při daných neproměnných hodnotách obou ohniskových vzdáleností, jestliže úloha má být možná?

γ) Konstrukcí se přesvědčte, že hodnota vypočítaná pro d je správná.

Označení veličin: Příčné zvětšení prvního obrazu y_1 vzhledem k předmětu (úsečka y) označíme z_1 ; příčné zvětšení druhého obrazu y_2 vzhledem k prvnímu je z_2 ; příčné zvětšení obrazu y_2 vzhledem k předmětu je z . Protože

$$z_1 z_2 = \frac{y_1}{y} \frac{y_2}{y_1} = \frac{y_2}{y} = z, \quad \text{je} \quad z_2 = \frac{z}{z_1} = - \frac{k}{z_1}, \quad (1)$$

neboť první (skutečný) obraz je vzhledem k předmětu převrácený ($z_1 < 0$), zdánlivý obraz y_2 je vzhledem k prvnímu obrazu vzpřímený ($z_2 > 0$) a vzhledem k předmětu y je převrácený ($z < 0$). Vzdálenost prvního obrazu od středu první čočky označíme b , od středu druhé čočky je a_1 . Proto je $a_1 = d - b \geq 0$. (2)

Řešení: $\alpha)$ Z čočkové rovnice pro první čočku vychází

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{a} = \frac{a - f_1}{a f_1}, \text{ takže } b = \frac{a f_1}{a - f_1}. \quad (3)$$

Protože prvý obraz je skutečný, je $b > 0$ a $a > f_1$. (3a)

Podle upraveného vztahu (3) vypočítáme vzdálenost

$$b_1 = \frac{a_1 f_2}{a_1 - f_2} = \frac{(d - b) f_2}{d - b - f_2}. \quad (4)$$

Protože zdánlivý obraz y_2 se vytvoří v předmětovém prostoru druhé čočky, je $b_1 < 0$. Vzhledem ke vztahu (4) a (2) je proto

$$d - b - f_2 < 0. \quad (4a)$$

Ze vztahů

$$\begin{aligned} z_1 = \frac{y_1}{y} = -\frac{b}{a}, \quad z_2 = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{b_1}{a_1} \text{ vypočítáme} \\ z_1 = -\frac{f_1}{a - f_1} \text{ a } z_2 = -\frac{(d - b) f_2}{(d - b - f_2)(d - b)} = \\ = -\frac{f_2}{d - b - f_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Porovnáme-li vztahy (1) a druhý ze vztahů (5), dostaneme po úpravě rovnici $d - b - f_2 = f_2 \frac{z_1}{k}$, ze které vyjde po dosazení z prvního ze vztahů (5)

$$d - b - f_2 = -\frac{f_1 f_2}{k(a - f_1)} \quad (6)$$

a dále

$$d - b = f_2 \left(1 - \frac{f_1}{k(a - f_1)} \right). \quad (6a)$$

Po dosazení za b ze vztahu (3) dostaneme

$$d = f_2 \left(1 - \frac{\frac{f_1}{k}}{a - f_1} \right) + \frac{a f_1}{a - f_1} = f_2 + f_1 \frac{a - \frac{f_2}{k}}{a - f_1}. \quad (7)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $d = 40 \text{ cm} + 30 \cdot \frac{50 - 10}{50 - 30} \text{ cm} = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$.

Vzdálenost čoček je obecně vyjádřena vztahem (7) a má pro zadané veličiny hodnotu 1 m.

β) Podle vztahu (2) je $d - b \geq 0$. Proto musí být v rovnici (6a) výraz $\frac{f_1}{k(a - f_1)} \leq 1$, takže $f_1 \leq k(a - f_1)$ a

$$k \geq \frac{f_1}{a - f_1} = \frac{30}{20} = 1,5. \quad (8)$$

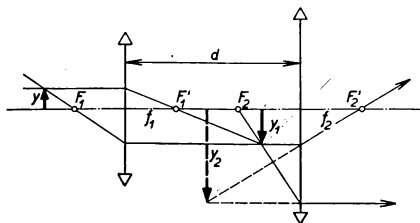
Podle vztahu (4a) je $d - b - f_2 < 0$. Proto je vzhledem ke vztahu (6) výraz

$$- \frac{f_1 f_2}{k(a - f_1)} < 0.$$

Platí tedy $a > f_1$, což souhlasí se vztahem (3a).

Má-li být úloha při daných hodnotách f_1 a f_2 reálná, musí mít a hodnotu $a > 30 \text{ cm}$ a $k \geq 1,5$. Tyto hodnoty jsou obecně určeny vztahy (3a) a (8).

γ) Ve vhodně zvoleném měřítku (např. $10 \text{ cm} \hat{=} \hat{=} 1 \text{ cm}$) zobrazíme obě čočky vzdálené od sebe $d = 100$



Obr. 55

cm a úsečku y ve vzdálenosti $a = 50$ cm nalevo od levé čočky. Potom sestrojíme obrazy y_1 a y_2 a přesvědčíme se, že $y_2 = 4y$ (obr. 55).

3. příklad (navrhl Evžen Říman, CSc.)

Dlouhým solenoidem se vzduchovým jádrem, který má N_1 závitů na délce l_1 , protéká proud I_1 . Uprostřed solenoidu je umístěna kruhová cívka mající N_2 závitů o poloměru r , z drátu, jehož průřez je S_2 a měrný odpor ϱ . Osa této cívky svírá se směrem indukčních čar solenoidu úhel α .

Jak velký náboj Q proteče cívkou po přerušení proudu I_1 v solenoidu?

Řešte nejprve obecně, proveďte dimenzionální zkoušku získaného obecného vztahu a potom dosadte hodnoty: $N_1 = 2500$, $l_1 = 2$ m, $I_1 = 32$ A, $N_2 = 200$, $r = 2$ cm, $S_2 = 10^{-2}$ mm², $\varrho = 1,78 \cdot 10^{-2}$ Ω mm² m⁻¹, $\alpha = 30^\circ$.

Řešení: Proud I_1 tekoucí solenoidem vytvoří uvnitř solenoidu magnetické pole o indukci

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1}. \quad (1)$$

Kruhová cívka, jejíž průřez má plošný obsah $S = \pi r^2$,
(2)

má N_2 kruhových závitů, z nichž každý má délku $2 \pi r$ a celková délka drátu cívky je tedy $l_2 = 2 \pi r N_2$. (3)

Ježto průřez drátu je S_2 a měrný odpor ϱ , je celkový odpor cívky

$$R = \varrho \frac{l_2}{S_2} = \frac{2 \pi \varrho r N_2}{S_2}. \quad (4)$$

Magnetický indukční tok cívkou o N_2 závitěch průřezu S , jejíž osa svírá s indukčními čarami úhel α , je v poli o indukci B dán vztahem $\Phi_m = B N_2 S \cos \alpha$. (5a)

Zánikem magnetického pole po přerušení proudu I_1 solenoidu vzniká úbytek magnetického indukčního toku $\Delta \Phi = - \Phi_m = - B N_2 S \cos \alpha$, (5)

takže se v cívce indukuje elektromotorické napětí

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{B N_2 S \cos \alpha}{\Delta t}, \quad (6)$$

elektrický proud $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ (7), tekoucí po dobu Δt , dá hledaný náboj

$$\begin{aligned} Q = I \Delta t &= \frac{\mathcal{E}}{R} \Delta t = \frac{B N_2 S \cos \alpha}{R \Delta t} \Delta t = \\ &= \frac{B N_2 S \cos \alpha}{R}, \end{aligned}$$

kterýžto vztah upravíme dosazením ze vztahů (1), (2) a (4) na

$$Q = \frac{\mu_0 N_1 I_1 N_2 \pi r^2 \cos \alpha}{l_1} \cdot \frac{S_2}{2 \pi \varrho r N_2} =$$

$$= \frac{\mu_0 N_1 I_1 r S_2 \cos \alpha}{2 l_1 \varrho} \quad (8)$$

b) Dimenzionální zkoušku provedeme dosazením jednotek do (8) místo veličin obecných, přičemž klademe $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1}$, $\text{V A}^{-1} = \Omega$:

$$\left[\frac{\mu_0 N_1 I_1 r S_2 \cos \alpha}{2 l_1 \varrho} \right] = \frac{\text{V s A m mm}^2}{\text{A m m } \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}} =$$

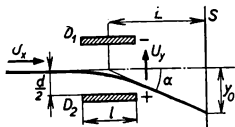
$$= \frac{\text{V s}}{\Omega} = \frac{\text{V s}}{\text{V A}^{-1}} = \text{A s} = \text{C}.$$

Výpočet:

$$Q = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 25 \cdot 10^2 \cdot 32 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot 1,78 \cdot 10^{-2} \cdot 2} \text{ C} =$$

$$= \frac{4,353 \cdot 10^{-4}}{1,78} \text{ C} = 2,45 \cdot 10^{-4} \text{ C}.$$

4. příklad (navrhl Mojmir Simerský)



Obr. 56

Elektron urychlený napětím U_x ve vodorovném směru vletá po ose souměrnosti do vychylovací soustavy obrazovky (viz obr. 56), tvořené deskami D_1, D_2 , jejichž vodorovná délka je l a vzdálenost d ; mezi deskami je napětí U_y .

Určete:

- a) úhel α , o který se dráha elektronu vychýlí,
- b) vychýlení stopy y_0 dráhy na stínítku S , jehož vzdálenost od středu vychylovací soustavy je L ,
- c) rychlost elektronu po výstupu z vychylovací soustavy,
- d) podmínku, kterou musí splňovat vychylovací napětí U_y , aby elektron skutečně ze soustavy vystoupil (tj. aby nedopadl na kladnou desku).

Elektrostatické pole mezi vychylovacími deskami považujte za homogenní. Předpokládejte, že elektron se mezi deskami pohybuje po křivočaré dráze a potom po její tečně, která zpětně prodloužená protíná osu souměrnosti ve středu soustavy (viz obr. 56) a svírá s původním směrem dráhy úhel α .

Řešte jen obecně.

Řešení: a) Značí-li e náboj elektronu a m jeho hmotnost, platí podle zákona o zachování energie vztah $W_k = W_p$ čili $\frac{1}{2} m v_x^2 = e U_x$, kde v_x značí rychlost, kterou vlétl elektron do vychylovací soustavy a pro niž platí

$$v_x = \sqrt{\frac{2e}{m} U_x}. \quad (1)$$

Homogenní elektrostatické pole mezi deskami má intenzitu $E = \frac{U_y}{d}$ (2) a působí na elektron svislou silou $F = e E = \frac{e U_y}{d}$ (2a), která mu ve svislém směru udělí konstantní zrychlení

$$a = \frac{F}{m} = \frac{e U_y}{m d}. \quad (2b)$$

V době t , kterou elektron potřebuje na průchod vychylovací soustavou, vzroste rychlost elektronu (pohybujícího se rovnoměrně zrychleně) ve svislém směru na hodnotu

$$v_y = a t. \quad (3)$$

Protože se elektron pohybuje ve vodorovném směru stálou rychlostí v_x , je doba průchodu mezi deskami

$$t = \frac{l}{v_x}. \quad (4)$$

Ze vztahu (3) pak dostaneme pomocí (2b) a (4)

$$v_y = \frac{e U_y l}{m d v_x}. \quad (5)$$

Rychlosti v_x , v_y jsou navzájem kolmé, takže pro úhel vychýlení platí

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{v_x} \cdot \frac{e U_y l}{m d v_x} = \frac{e U_y l}{m d v_x^2} = \\ &= \frac{e U_y l}{m d \frac{2 e}{m} U_x} = \frac{l U_y}{2 d U_x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Prvý výsledek: Veličiny e , m se ve vzorci nevyskytují. Tzn., že o úhel α se vychýlí každá záporná částice, urychlená napětím U_x a vychýlená danou soustavou desek napětím U_y .

b) Odchylku y_0 lze považovat za odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku, jehož druhá odvěsna je L a protilehlý úhel

$$\alpha. \text{ Je tedy } y_0 = L \operatorname{tg} \alpha = \frac{L l U_y}{2 d U_x}. \quad (7)$$

c) Rychlost elektronu opouštějícího vychylovací soustavu je určena vektorovým součtem složek v_x a v_y , takže podle (1a) a (5) platí

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{e}{m} \cdot \frac{4d^2 U_x^2 + l^2 U_y^2}{2 d^2 U_x}}. \quad (8)$$

d) Dráha, o kterou elektron postoupí ve vychylovací soustavě ve svislém směru, nesmí být větší než $0,5 d$,

$$\text{tj. } \frac{1}{2} a t^2 \leq \frac{d}{2}. \quad (9a)$$

Dosadíme-li sem podle (3) a (4), obdržíme

$$d \geq \frac{e U_y l^2}{m d v_x^2} = \frac{l^2 U_y}{2 d U_x}, \quad (9b)$$

z čehož

$$U_y \leq \frac{2 d^2 U_x}{l^2}. \quad (9)$$

Maximální možné napětí vychylovací soustavy, nemá-li elektron být zachycen kladnou deskou, je tedy

$$U_{y \max} = \frac{2 d^2 U_x}{l^2}.$$

5. úloha experimentální (navrhl Josef Konrád)

Zjistěte teplotu wolframového vlákna žárovky při napětí uvedeném na žárovce.

a) Odpor žárovky při teplotě místnosti t_1 změřte metodou Wheatstoneova mostu.

b) Z hodnot uvedených na žárovce vypočtete odpor vlákna (teploty t_2) pro uvedené napětí.

c) Ze vztahu pro závislost odporu na teplotě vypočtete teplotu t_2 vlákna. Teplotní součinitel odporu pro wolfram je $\alpha = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ deg}^{-1}$.

Potřeby: Žárovka s wolframovým vláknem, alkalický akumulátor, mostový drát (odporu asi $10\ \Omega$), válcový odpor (potenciometr o odporu asi $200\ \Omega$), klíč, normál odporu (odporová dekáda), galvanometr, miliampérmetr, spojovací dráty.

Galvanometrem smí procházet proud $I = 3 \cdot 10^{-5}\text{ A}$ a má vnitřní odpor $R_1 = 40\ \Omega$. Upravte potenciometrem napětí na mostovém drátě tak, aby mostem protékal tak malý proud, aby galvanometr nebyl poškozen ani za nejnepríznivějších podmínek, tzn. kdyby odpor dekády nebo odpor žárovky byl nulový (napětí na galvanometru by při krajní poloze jezdce na mostě bylo stejné jako napětí na mostovém drátě).

Postupně zvyšujte napětí na mostovém drátě tak, aby měření bylo přesnější (citlivější).

Výsledný odpor žárovky zjistíte tím, že nejprve nastavíte jezdce na mostě tak, aby galvanometrem neprocházel proud, pak necháte žárovku asi 5 minut vychladnout. Klíčem zapojíte proud na velmi krátkou dobu. Ukáže-li galvanometr nyní nějakou výchylku, je nutno polohu jezdce znovu opravit a znovu čekat na vychladnutí žárovky.

Řešení: Měřena žárovka Tesla 110 V, 25 W.

Použité přístroje: A deprézský ampérmetr Metra, třída přesnosti 0,5, stupnice 120 dílků, R_2 odporová sada Metra, 6 dekád od $0,1 \times$ do $10\,000 \times$, G deprézský galvanometr nulový, 1 dílek $\sim 1\ \mu\text{A}$, vnitřní odpor $R_1 = 40\ \Omega$, stupnice ± 30 dílků, $R_3 + R_4$ odporový drát konstantanový o odporu asi $10\ \Omega$, klíč, regulační odpor Metra $2\ \text{A}/245\ \Omega$, akumulátor 1 článek $U \doteq 1,5\text{ V}$.

Rozbor úlohy: Při rovnováze na Wheatstoneově mostě, tj. neprocházel-li galvanometrem G proud, platí (obr.

57a) $R_z I_1 = R_3 I_2$, $R_2 I_1 = R_4 I_1$. Dělením obou rovnic dostaneme

$$\frac{R_z}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{k l_3}{k l_4} = \frac{l_3}{l_4},$$

poněvadž odpor mostového drátu je úměrný délce drátu l . Tedy

$$R_z = R_2 \frac{l_3}{l_4}. \quad (1)$$

Pro odpor žárovky platí, označíme-li R_0 odpor žárovky při teplotě 0°C , R_{t_1} odpor žárovky při teplotě místnosti,

R_{t_2} odpor žárovky svítící, t_1 teplotu vlákna, „za studena“, tj. přibližně teplotu místnosti, t_2 teplotu žhavého vlákna:

$$R_{t_1} = R_0 (1 + \alpha t_1),$$

$$R_{t_2} = R_0 (1 + \alpha t_2).$$

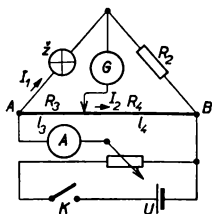
Dělením obou rovnic dostaneme

$$\frac{R_{t_1}}{R_{t_2}} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}, \quad \text{a odtud}$$

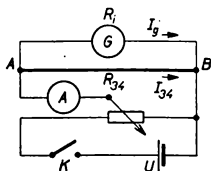
$$t_2 = \frac{R_{t_2} - R_{t_1} - \alpha R_{t_2} t_1}{\alpha R_{t_1}}. \quad (2)$$

R_{t_1} změříme mostem, R_{t_2} vypočteme z jmenovitých hodnot napětí U a výkonu P žárovky

$$R_{t_2} = \frac{U^2}{P}. \quad (3)$$



Obr. 57 a



Obr. 57 b

Postup měření podle zadání: a) Pro začátek měření je třeba určit napětí na potenciometru, a tedy proud jdoucí ampérmetrem při krajních nepříznivých podmínkách, aniž se poškodí mikroampérmetr G .

Pro tento případ nakreslíme náhradní schéma (obr. 57b). Platí zřejmě

$$\frac{I_g}{I_{34}} = \frac{R_{34}}{R_1}, \text{ z čehož } I_{34} = I_g \frac{R_1}{R_{34}}.$$

Maximální přípustný proud jdoucí ampérmetrem A bude tedy

$$I_{\max} = I_g + I_g \frac{R_1}{R_{34}} = I_g \left(1 + \frac{R_1}{R_{34}} \right). \quad (4)$$

Měření a jeho zpracování: 1. Určíme z jmenovitých hodnot na žárovce podle (3) odpor jejího svítícího vlákna

$$R_{t_2} = \frac{U^2}{P} = \frac{110^2}{25} \text{ V}^2 \text{ V}^{-1} \text{ A}^{-1} = 484 \, \Omega.$$

2. Ze vztahu (4) vypočítáme $I_{\max}$:

$$I_{\max} = 3 \cdot 10^{-5} \left(1 + \frac{40}{10} \right) \text{ A} = 0,15 \text{ mA}.$$

Tomuto proudu odpovídají na ampérmetru 3 dílky, neboť jeho celý rozsah stupnice je pro rozsah měření do 0,006 A 120 dílků.

3. Vlastní měření (10 hodnot pro nastavení kontaktu na mostovém drátě za dodržování podmínek zadání úkolu, tj. aby se drát žárovky vždy nechal vychladnout).

l_3 [cm]	31,5	31,4	31,2	31,8	31,6	31,0	31,1	31,0	31,7	31,8
Δ_+ [cm]	—	—	—	0,29	0,09	—	—	—	0,19	0,29

Střední hodnota $\bar{l}_3 = 31,51$ cm, $\Sigma \Delta_+ = 0,86$ cm.
Střední chyba

$$\bar{\delta} = \frac{5}{2n} \cdot \frac{\Sigma \Delta_+}{\sqrt{n-1}}, \text{ pro 10 měření}$$

$$\bar{\delta} = \frac{0,86}{12} \text{ cm} \doteq 0,07 \text{ cm.}$$

Pro úseky mostového drátu tedy dostáváme

$$\bar{l}_3 = (31,51 \pm 0,07) \text{ cm,}$$

$$\bar{l}_4 = (68,49 \pm 0,07) \text{ cm.}$$

4. Podle (1) určíme odpor za teploty místnosti

$$R_{t_1} = R_2 \frac{l_3}{l_4} = 100 \cdot \frac{31,51}{68,49} \Omega \doteq 46 \Omega.$$

Teplota místnosti byla 20 °C.

5. Podle (2) vypočteme teplotu svítícího vlákna:

$$t_2 = \frac{484 - 46 - 4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 484}{4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 46} \text{ °C} = 2190 \text{ °C.}$$

Hodnocení výsledků: Teplota 2190 °C odpovídá obvyklým údajům pro teplotu wolframového vlákna žárovek při plném napětí. Při měření se nepřihlíželo k odporům přívodních drátů a k přechodovým odporům na svorkách, což však je chyba zanedbatelná ve srovnání s chybou, již se dopouštíme tím, že předpokládáme u vlákna lineární závislost odporu na teplotě.

Měření nebylo sice (pro $R_2 = 100 \Omega$) prováděno uprostřed mostového drátu, nýbrž asi v jeho třetině, což však znamená opět jen zanedbatelnou nepřesnost proti předešlému nesprávnému předpokladu.

Výpočet chyby při měření na mostě se ukázal jako zbytečný, protože jmenovité údaje na žárovce jsou daleko méně přesné a odpor neroste lineárně s teplotou.

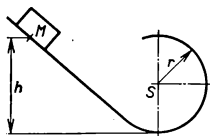
2. Úlohy kategorie B

Úlohy a řešení recenzovala dr. Marta Chytilová a dr. Ivan Náter.

a) První kolo soutěže

1. příklad (navrhl Jan Tesař)

Malé těleso klouže z místa M po nakloněné rovině, jež přechází ve válcovou plochu o poloměru r (viz obr. 58).



Obr. 58

a) Do jaké výšky těleso vystoupí, jestliže klouže z výšky h ?

b) Jakou velikost musí mít výška h , aby těleso vykonalo celou otáčku a nespadlo?

Tření a ostatní překážky pohybu zanedbejte.

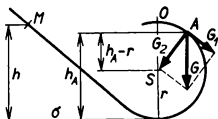
Řešení: Označení veličin:

m = hmotnost tělesa, V_A = rychlost tělesa v bodě odpadnutí, $G = mg$ = tíha tělesa, r = poloměr smyčky (válcové plochy), v_0 = rychlost tělesa v bodě O , σ = vodorovná rovina vedená nejnižším bodem dráhy, h = výška výchozí polohy tělesa na nakloněné rovině nad rovinou σ , h_A = výška místa na válcové ploše nad rovinou σ .

Tak jako na nakloněné rovině můžeme i na válcové ploše rozložit tíhovou sílu ve dvě složky, z nichž jedna G_1 má směr tečny a druhá G_2 směr normály k dráze (obr. 59).

a) Těleso odpadne z válcové plochy v místě, ve kterém se síla G_2 právě rovná odstředivé síle.

V tomto bodě pak těleso nepůsobí na válcovou plochu žádnou tlakovou silou:



Obr. 59

$$G_2 = \frac{m v_A^2}{r}.$$

Z podobnosti trojúhelníků platí vztah

$$\frac{G_2}{G} = \frac{h_A - r}{r}, \text{ po dosazení } \frac{m v_A^2}{r m g} = \frac{h_A - r}{r}, \text{ a tedy}$$

$$v_A^2 = (h_A - r) g. \quad (1)$$

Ze zákona zachování mechanické energie v bodě M a v bodě A v soustavě Země-těleso platí

$$m g h = m g h_A + \frac{1}{2} m v_A^2 \text{ a odtud}$$

$$v_A^2 = 2 (h - h_A) g. \quad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) dostaneme

$$h_A = \frac{2 h + r}{3}.$$

Těleso odpadne z válcové plochy, jakmile dosáhne výšky $h_A = \frac{2 h + r}{3}$.

b) Těleso opíše celou smyčku, jestliže v bodě O dosáhne minimální rychlosti v_0 , pro kterou platí

$$m g = \frac{m v_0^2}{r} \quad \text{čili} \quad v_0^2 = g r. \quad (3)$$

Celá tíhová síla je vyrovnána silou odstředivou.

Ze zákona zachování mechanické energie v bodě M ve výšce h nad rovinou σ a v bodě O ve výšce $2r$ nad rovinou σ pak platí v soustavě Země-těleso:

$$m g h = m g \cdot 2 r + \frac{1}{2} m v_0^2,$$

$$v_0^2 = \frac{2 m g (h - 2 r)}{m} = 2 g (h - 2 r). \quad (4)$$

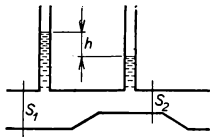
Z rovnic (3) a (4) dostaneme

$$h = \frac{5}{2} r.$$

Těleso musí být spuštěno po nakloněné rovině aspoň z výšky $h = \frac{5}{2} r$, aby opsalo celou smyčku na válcové ploše o poloměru r .

2. příklad (navrhl Jan Tesař)

Ve vodorovném potrubí o průřezu S_1 je v jednom místě průřez zúžen na S_2 . V širším místě potrubí vystoupí voda v manometrické trubici o h výše než v manometrické trubici umístěné v užším průřezu potrubí (obr. 60).



Obr. 60

Jak velký objem vody protече potrubím za dobu t při stálém proudění?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $S_1 = 27 \text{ cm}^2$, $S_2 = 3 \text{ cm}^2$, $h = 8 \text{ cm}$, $t = 1 \text{ minuta}$.

Řešení: Označení veličin: p_1 = tlak proudící vody v průřezu S_1 , v_1 = rychlost proudící vody v průřezu S_1 , p_2 = tlak proudící vody v průřezu S_2 , v_2 = rychlost proudící vody v průřezu S_2 , t = doba, za kterou proteče každým průřezem voda o objemu V , ρ = hustota vody (předpokládáme, že voda je dokonalá kapalina), $S_1 > S_2$.

Podle obrázku 60 se přetlak v širší trubici $\Delta p = p_1 - p_2$ rovná hydrostatickému tlaku vody v hloubce h

$$\Delta p = p_1 - p_2 = h \rho g .$$

Z Bernoulliovy rovnice pro ustálené proudění dokonalé kapaliny ve vodorovné trubici dostaneme

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 ,$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) ,$$

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = h g . \quad (1)$$

Z rovnice spojitosti toku dostaneme

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_2}{v_1} . \quad (2)$$

Úpravou úměry

$$\frac{S_1 + S_2}{S_2} = \frac{v_2 + v_1}{v_1} \Rightarrow v_2 + v_1 = \frac{v_1 (S_1 + S_2)}{S_2} ,$$

$$\frac{S_1 - S_2}{S_2} = \frac{v_2 - v_1}{v_1} \Rightarrow v_2 - v_1 = \frac{v_1 (S_1 - S_2)}{S_2} .$$

Dosadíme do rovnice (1)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{v_1}{S_2} \right)^2 (S_1^2 - S_2^2) = h g ,$$

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2 h g}{S_1^2 - S_2^2}} .$$

Objem V určíme ze vztahu

$$V = v_1 S_1 t = S_1 S_2 t \sqrt{\frac{2 h g}{S_1^2 - S_2^2}} =$$

$$= S_1 S_2 t \sqrt{\frac{2 h g}{(S_1 - S_2) (S_1 + S_2)}} .$$

Numerické řešení:

$$V = 27 \cdot 3 \cdot 60 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 981}{24 \cdot 30}} \text{ cm}^3 \doteq 23 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 .$$

Zkouška rozměrová:

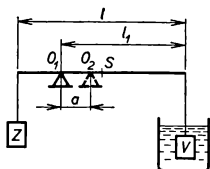
$$[V] = \text{cm}^2 \cdot \text{cm}^2 \text{ s} \sqrt{\frac{\text{cm cm}}{\text{s}^2 \text{ cm}^4}} = \text{cm}^3 .$$

3. příklad (navrhl Milan Rádl)

Váleček z homogenní látky o objemu V je zavěšen na jednom konci dvojzvrtné páky délky l a je podložen nádobkou s vodou o hustotě ρ' tak, že je celý ponořen. Rovnováha je udržována závažím hmotnosti z , zavěšeným na druhém konci páky. Páka je homogenní tyč všude stejného průřezu a má hmotnost m' . Osa otáčení je ve vzdálenosti $l_1 > \frac{l}{2}$ od závěsu válečku. Posuneme-li osu otáčení o délku a $\left(a < l_1 - \frac{l}{2} \right)$ směrem k válečku,

obnoví se rovnováha při vynoření poloviny válečku z vody. (Viz obr. 61.)

Určete hustotu ϱ válečku a hmotnost závaží z .



Obr. 61

K tíze páky přihlížíme. Tloušťka páky a její prohnutí při zatížení jsou zanedbatelné.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $V = 10^{-4} \text{ m}^3$, $l = 1 \text{ m}$, $l_1 = 0,6 \text{ m}$, $a = 0,01 \text{ m}$, $\varrho' = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $m' = 0,5 \text{ kg}$.

Řešení: Označení veličin: V = objem ponořeného válečku, l = délka celého vahadla, l_1 = délka ramene vahadla, na jehož konci je zavěšený váleček, a = délka o kterou posuneme osu otáčení, m' = hmotnost vahadla, ϱ' = hustota vody, ϱ = hustota válečku, z = hmotnost závaží, T = těžiště vahadla.

Při úplném ponoření válečku musí být splněna podmínka rovnováhy

$$z(l - l_1)g = \varrho V l_1 g - \varrho' V l_1 g + \frac{m'}{2}(2l_1 - l)g. \quad (1)$$

Podobně musí být splněna podmínka rovnováhy i po posunutí osy otáčení o délku a :

$$z(l - l_1 + a)g = \varrho V(l_1 - a)g - \frac{V}{2}\varrho'(l_1 - a)g + \frac{m'}{2}(2l_1 - l - 2a)g.$$

Řešením rovnic (1) a (2) dostaneme

$$\varrho = \frac{lV\varrho' a + l l_1 V\varrho' + l_1 V\varrho' a - l_1^2 V\varrho' - m' l a}{2 V l a}, \quad (3)$$

$$z = \frac{V \varrho' l_1^2 - V \varrho' l_1 a - m' a l}{2 l a}. \quad (4)$$

Rovnice (3) a (4) jsou obecné rovnice, které určují hledané veličiny.

Po dosazení daných hodnot do (3) a (4) dostaneme

$$\varrho = 10\,300 \text{ kg m}^{-3} \doteq 10^4 \text{ kg m}^{-3},$$

$$z = 1,52 \text{ kg} \doteq 1,5 \text{ kg}.$$

Rozměrová zkouška:

$$[\varrho] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{m}^3 \text{ m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad [z] = \frac{\text{kg m}^3}{\text{m}^3} = \text{kg}.$$

4. příklad (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

Vzdušnice do míče byla naplněna vzduchem o objemu V a o teplotě t_1 . Barometrický tlak byl b , přetlak vzduchu ve vzdušnici vůči barometrickému tlaku byl Δp . Jaký bude objem vzduchu ve vzdušnici ponořené do hloubky h pod povrchem vody, jejíž teplota je t_2 a hustota ϱ ?

Předpokládáme, že teplota vzduchu v ponořené vzdušnici je rovna teplotě vody.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $t_1 = 27^\circ\text{C}$, $t_2 = 15^\circ\text{C}$, $V = 5 \text{ l}$, $b = 750 \text{ torrů}$, $\Delta p = 90 \text{ torrů}$, $h = 5 \text{ m}$; $\varrho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení: Označení veličin: V_1 = objem vzduchu ve vzdušnici při teplotě t_1 a tlaku p_1 , b = barometrický tlak, Δp = přetlak vzduchu ve vzdušnici vzhledem k barometrickému tlaku, $p_1 = b + \Delta p$, h = hloubka vody,

do níž je ponořen míč, t_2 = teplota vody, ρ hustota vody, T_1 , T_2 odpovídající absolutní teploty, p_2 tlak vzduchu ve vzdušnici ponořené do vody v hloubce h pod povrchem.

Za předpokladu, že vzduch ve vzdušnici je dokonalý plyn, platí ze stavové rovnice

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

$$V_2 = \frac{p_1 V_1 T_2}{p_2 T_1},$$

kde $p_1 = b + \Delta p$, $p_2 = b + \Delta p + h \rho g$.

h je průměrná hloubka míče pod povrchem vody, odpovídající středu míče. Předpokládáme, že $h \gg r$; ρ , g jsou konstanty.

Numerické řešení:

$T_1 = 300^\circ\text{K}$, $T_2 = 288^\circ\text{K}$, $V_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$; $h = 5 \text{ m}$, $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$. $p_1 = 804 \text{ torr} = 1,12 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$, $p_2 = 1,12 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2} + 5 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \text{ N m}^{-2} = 1,61 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$. (Podmínka pro $h \gg r$: r je řádově 0,1 m, $h = 5 \text{ m}$.)

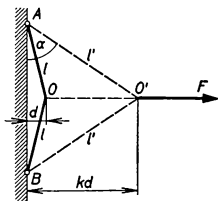
$$V_2 = \frac{1,12 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 288}{3 \cdot 10^2 \cdot 1,61 \cdot 10^5} \text{ m}^3 \doteq 3,34 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Rozměrová zkouška:

$$[V] = \frac{\text{N m}^{-2} \text{ m}^3 \text{ deg}}{\text{deg N m}^{-2}} = \text{m}^3.$$

5. příklad (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

Ocelový drát (obr. 62a) délky 2 l leží na vodorovné podložce tak, že svými konci je upevněn v bodech A, B.



Obr. 62 a

Střed O drátu je vzdálen od přímky AB o malou vzdálenost d . Části drátu AO , BO jsou přímé.

Jak velká vodorovná síla působí na drát v bodě O kolmo ke směru AB , má-li se vzdálenost středu O drátu od přímky AB zvětšit k -krát?

Modul pružnosti v tahu je E , průřez drátu je S .

Předpokládáme, že deformace je pružná.

Řešte jen obecně.

Řešení: $AO = BO = l$, $AO' = BO' = l'$, d je vzdálenost O od AB , F je síla napínající drát v bodě O' , F' je její složka do směru AO' , resp. BO' , vzdálenost O' od AB je kd , S je průřez drátu, E je modul pružnosti drátu v tahu, $\sphericalangle BAO' = \alpha$.

V pravoúhlém trojúhelníku o stranách $\frac{AB}{2}$, l , d platí

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = l^2 - d^2.$$

V pravoúhlém trojúhelníku o stranách $\frac{AB}{2}$, l' , kd platí

$$l'^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + k^2 d^2.$$

Odtud

$$l'^2 = l^2 - d^2 + k^2 d^2,$$

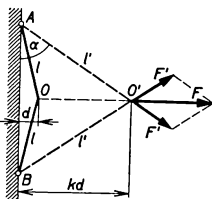
$$l' = \sqrt{l^2 + (k^2 - 1) d^2}.$$

Sílu F rozložíme podle obr. 62b a pro sílu F' pak platí:

$$F' = \frac{F}{2 \sin \alpha} = \frac{F}{2} \frac{l'}{k d}.$$

Prodloužení drátu $\Delta l = l' - l$ vyvolané silou F' je podle Hookova zákona

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{1}{E} \frac{F'}{S} l = \\ &= \frac{1}{E} \frac{F}{2} \frac{l'}{k d} \frac{l}{S}. \end{aligned}$$



Obr. 62 b

Odtud

$$F = \frac{2 E (l' - l) k d S}{l l'}$$

a po dosazení za l'

$$F = \frac{(\sqrt{l^2 + (k^2 - 1) d^2} - l) \cdot 2 E S k d}{l \sqrt{l^2 + (k^2 - 1) d^2}}.$$

6. úloha experimentální (navrhl František Cimbůrek)

Určení měrného tepla oleje elektrickým kalorimetrem.

Pomůcky: elektrický kalorimetr, teploměr, laboratorní váhy do 200 g, sada závaží, stopky, avomet, olej, spojovací lanka.

Úvod. Elektrický kalorimetr se skládá z dvojité nádoby, naplněné měřenou kapalinou, do které je ponořena cívka z odporového drátu. Teplo, které vzniká v cívce při průchodu elektrického proudu, se spotřebuje na zahřátí oleje a kalorimetru. Platí rovnice:

$$U I t = m c (\vartheta_2 - \vartheta_1) + K (\vartheta_2 - \vartheta_1). \quad (1)$$

Změříme-li všechny potřebné veličiny, lze z rovnice vypočítat měrné teplo c .

Tepelnou kapacitu K kalorimetru lze určit také z rovnice (1), jestliže použijeme kapalinu o známém měrném teple (např. vodu).

Úkoly: a) Určete tepelnou kapacitu K kalorimetru.

b) Určete měrné teplo c oleje.

c) Které soustavné a nahodilé chyby mohou mít vliv na výsledek úlohy? Které z měřených veličin ovlivňují nejvíce výsledek měření?

Literatura: Horák, Praktická fyzika, SNTL 1958, str. 372, 377.

Provedení: a) Tepelnou kapacitu určujeme z rovnice (1). Za kapalinu o známém měrném teple použijeme vodu. Pro tepelnou kapacitu K vyjde z (1) vztah:

$$K = \frac{U I t}{\vartheta_2 - \vartheta_1} - m c,$$

kde $U I t$ je práce elektrického proudu spotřebovaná na zahřátí vody a kalorimetru, m hmotnost kapaliny o měrném teple c a $\vartheta_2 - \vartheta_1$ je rozdíl teplot před zahříváním a po zahřívání. Všechny tyto hodnoty změříme:

$U = 28,5$ V, $I = 4,91$ A, $t = 100,0$ s, $m = 300,0$ g, počáteční teplota $\vartheta_1 = 15,1$ °C, konečná teplota $\vartheta_2 = 25,2$ °C, $c = 4,18$ J g⁻¹ deg⁻¹. Po dosazení dostaneme

$$K = \frac{28,5 \cdot 4,91 \cdot 100}{10,1} - 300 \cdot 4,18 = 131 \text{ J deg}^{-1}.$$

Rozměrová zkouška:

$$[K] = \frac{\text{J}}{\text{deg}}.$$

b) Pro určení měrného tepla c_1 oleje použijeme opět vztahu (1):

$$c_1 = \frac{U I t}{m (\vartheta_2 - \vartheta_1)} - \frac{K}{m}.$$

Všechny veličiny opět změříme:

$U = 13,60 \text{ V}$, $I = 1,908 \text{ A}$, $t = 200,0 \text{ s}$, $m = 200,0 \text{ g}$,
 $\vartheta_1 = 15,3^\circ\text{C}$, $\vartheta_2 = 25,7^\circ\text{C}$, $K = 131 \text{ J deg}^{-1}$.

Po dosazení vychází:

$$c = \left(\frac{13,6 \cdot 1,908 \cdot 200}{200 \cdot 10,4} - \frac{131}{200} \right) \text{ J g}^{-1} \text{ deg}^{-1},$$

$$c = 1,84 \text{ J g}^{-1} \text{ deg}^{-1}.$$

Rozměrová zkouška:

$$[c] = \frac{\text{J}}{\text{g deg}}.$$

Nahodilé chyby mohou vzniknout při málo přesném odečítání teploty (chyba při měření hmotnosti na vahách je obvykle velmi malá), při čtení na elektrických měřicích přístrojích a při měření času stopkami (chyba osobní).

Soustavné chyby jsou dány přesností avometu (1% pro stejnosměrný proud, 1,5 % pro střídavý proud), nesprávným údajem stopek (tato chyba se dá vyloučit kontrolou stopek), ale největší soustavnou chybou může být údaj naměřené teploty, protože v úloze se nepočítá s výměnou tepla mezi kalorimetrem a okolím během měření. Tuto chybu lze zmenšit tím, že začátek měření provádíme s vodou teploty $(\vartheta - \Delta\vartheta)^\circ\text{C}$ a ukončíme při teplotě $(\vartheta + \Delta\vartheta)^\circ\text{C}$, kde ϑ je teplota okolního vzduchu.

7. příklad (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

Do olověné koule o hmotnosti m_1 , která je v klidu, narazí jiná olověná koule o hmotnosti m_2 , pohybující se

rychlostí v . Jak se změní hustota obou koulí, jestliže obě koule měly před rázem hustotu ϱ_0 ?

Předpokládáme, že ráz obou koulí je dokonale nepružný, že celkovým teplem vzniklým při rázu se stejnoměrně zvýší teplota obou koulí a že ztráty tepla do okolí jsou zanedbatelné.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 1,0$ kg, $m_2 = 2,0$ kg, $v = 300$ m s⁻¹. Součinitel teplotní délkové roztažnosti olova je $\alpha = 2,8 \cdot 10^{-5}$ deg⁻¹, měrné teplo olova $c = 1,3 \cdot 10^2$ J kg⁻¹ deg⁻¹, hustota olova $\varrho_0 = 11,4 \cdot 10^3$ kg m⁻³.

Řešení: Označení veličin: m_1 je hmotnost první olověné koule, její rychlost $v_1 = 0$, hmotnost druhé koule je m_2 , její rychlost $v_2 = v$, ϱ_0 je hustota koulí před rázem, ϱ hustota koulí po rázu, V_0 je celkový objem obou koulí před rázem, V je objem obou koulí po rázu, t_1 je teplota koulí před rázem, t_2 teplota koulí po rázu, zvýšení teploty při rázu $\Delta t = t_2 - t_1$, α teplotní součinitel délkové roztažnosti olova, $\beta = 3\alpha$ teplotní součinitel objemové roztažnosti olova, c je měrné teplo olova, v' je rychlost tělesa, vzniklého spojením obou koulí.

Předpokládáme, že při změně teploty jsou β a c konstantní. Pro úhrnný objem obou koulí před rázem a po rázu platí

$$V_0 = \frac{m_1 + m_2}{\varrho_0}, \quad V = \frac{m_1 + m_2}{\varrho}$$

a odtud pro hustoty

$$\varrho_0 = \frac{m_1 + m_2}{V_0}, \quad \varrho = \frac{m_1 + m_2}{V}.$$

Objem po ohřátí o Δt jest

$$V = V_0(1 + \beta\Delta t),$$

tedy hustota

$$\varrho = \frac{m_1 + m_2}{V_0(1 + \beta \Delta t)}.$$

Změna hustoty ($\varrho < \varrho_0$)

$$\Delta \varrho = \varrho_0 - \varrho,$$

$$\Delta \varrho = \frac{m_1 + m_2}{V_0} \left(1 - \frac{1}{1 + \beta \Delta t} \right) = \varrho_0 \frac{\beta \Delta t}{1 + \beta \Delta t}.$$

Rozšíříme-li zlomek výrazem $(1 - \beta \Delta t)$, dostaneme

$$\Delta \varrho = \varrho_0 \beta \Delta t \frac{1 - \beta \Delta t}{1 - \beta^2 (\Delta t)^2} = \varrho_0 \frac{\beta \Delta t - \beta^2 (\Delta t)^2}{1 - \beta^2 (\Delta t)^2}.$$

Členy s druhou mocninou β lze zanedbat, protože β je velmi malé a dostáváme

$$\Delta \varrho = \varrho_0 \beta \Delta t. \quad (1)$$

Ze zákona zachování hybnosti při nepružném rázu platí

$$m_2 v = (m_1 + m_2) v',$$

odtud

$$v' = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}. \quad (2)$$

Při nepružném rázu se kinetická energie zmenší. Část kinetické energie se spotřebuje na deformaci a pro změnu kinetické energie dostáváme

$$\Delta W = \frac{1}{2} m_2 v^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2.$$

Dosazením za v' ze vztahu (2) a po úpravě dostaneme

$$\Delta W = \frac{m_1 m_2 v^2}{2 (m_1 + m_2)}. \quad (3)$$

Předpokládáme, že tato část kinetické energie se přeměnila na zvýšení vnitřní energie a teplota obou koulí se zvýší o Δt :

$$\Delta W = (m_1 + m_2) c \Delta t,$$

$$\Delta t = \frac{\Delta W}{(m_1 + m_2) c}$$

a dosazením z (3)

$$\Delta t = \frac{m_1 m_2 v^2}{2 (m_1 + m_2)^2 \cdot c}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do (1), dostaneme konečně

$$\Delta \varrho = \frac{\varrho_0 \beta m_1 m_2 v^2}{2 (m_1 + m_2)^2 c}. \quad (4)$$

Numerické řešení:

$$\Delta \varrho = \frac{11,4 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 2,8 \cdot 10^{-5} \cdot 1,0 \cdot 2,0 \cdot 300^2}{2 \cdot 3,0^2 \cdot 1,3 \cdot 10^2} \text{ kg m}^{-3},$$

$$\Delta \varrho = 0,07 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}.$$

Výsledná hustota koulí po rázu jest tedy

$$\varrho = \varrho_0 - \Delta \varrho = 11,4 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} - 0,07 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

$$\varrho = 11,33 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}.$$

Rozměrová zkouška vztahu (4):

$$[\Delta \varrho] = \frac{\text{kg m}^{-3} \text{ deg}^{-1} \text{ kg kg m}^2 \text{ s}^{-2}}{\text{kg}^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ deg}^{-1}} = \text{kg m}^{-3}.$$

8. příklad (navrhl dr. Oldřich Pivnička)

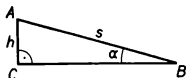
Vlak o celkové hmotnosti m se rozjíždí na trati klesající se spádem $p^\circ/_{00}$ a dosáhl po projetí dráhy s rychlosti v .

Kolik paliva o výhřevnosti H k tomu spotřeboval? Účinnost stroje je η .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $p = 3 \text{ ‰} = 0,003$, $m = 6,0 \cdot 10^5 \text{ kg}$, $v = 36 \text{ km h}^{-1}$, $s = 500 \text{ m}$, $H = 2,0 \cdot 10^7 \text{ J kg}^{-1}$, $\eta = 0,1$, součinitel tření $f = 0,006$, tíhové zrychlení $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení: Označení veličin: m_1 je hmotnost paliva, m_0 hmotnost vlaku, α je úhel trati s vodorovnou rovinou (obr. 63), s je délka trati, h zvýšení trati na délce s , H je výhřevnost paliva, η účinnost stroje, ΔW_1 je změna mechanické energie vlaku na dráze s , ΔW_2 je změna mechanické energie třením v teplo, f je úhrnný součinitel tření, ΔW_3 je užitečná energie, získaná spálením paliva o hmotnosti m_1 a výhřevnosti H při účinnosti stroje η .

$v = 36 \text{ km h}^{-1} = 10 \text{ m s}^{-1}$ je rychlost vlaku po projetí dráhy s . Podle obr. 63 je



Obr. 63

$$\sin \alpha = \frac{h}{s} = p \text{ ‰},$$

$$h = s p \cdot 10^{-3}.$$

Zmenšení polohové energie při snížení polohy vlaku o výšku h a zvětšení kinetické energie při zvýšení rychlosti z 0 na v dává změnu mechanické energie vlaku na dráze s :

$$\Delta W_1 = \frac{1}{2} m_0 v^2 - m_0 g h = \frac{1}{2} m_0 v^2 - m_0 g s p \cdot 10^{-3}.$$

Síla tření působí proti směru pohybu a je úměrná kolmému tlaku na nakloněnou rovinu

$T = f N = f m_0 g \cos \alpha$. Protože úhel α je velmi malý, lze psát

$$T \doteq f m_0 g.$$

Ztráta energie třením je tedy

$$\Delta W_2 = m_0 g f s.$$

Celkem se tedy spotřebuje práce na změnu energie $\Delta W_1 + \Delta W_2$ a tu musíme dodat spaláním m_1 kg paliva:

$$\Delta W_3 = m_1 H \eta.$$

Ze zákona zachování energie v soustavě lokomotiva, vlak, Země, kolejnice, palivo plyne tedy

$$\Delta W_3 = \Delta W_1 + \Delta W_2$$

čili

$$m_1 = \frac{m_0 (v^2 - 2 g s p \cdot 10^{-3}) + 2 g s f}{2 H \eta}. \quad (1)$$

Rozměrová zkouška vztahu (1):

$$[v^2] = m^2 s^{-2}, [g s p] = m s^{-2} m, [g s f] = m s^{-2} m,$$

$$[H] = kg m^2 s^{-2} kg^{-1} = m^2 s^{-2},$$

$$[m_1] = \frac{kg m^2 s^{-2}}{m^2 s^{-2}} = kg.$$

Numerické řešení:

$$m_1 = \frac{6,0 \cdot 10^5 (10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + \frac{+ 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 10^{-1}})}{2 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 10^{-1}} \text{ kg}$$

$$m_1 \doteq 20 \text{ kg}.$$

9. úloha experimentální (navrhl Karel Bartuška)

Dynamické určení hmotnosti kmitajícího tělesa.

Pomůcky: pružina, stojan na upevnění pružiny, stopky, těleso o neznámé hmotnosti, laboratorní váhy, sada závaží.

Úvod: K dynamickému určení setrvačné hmotnosti tělesa uijeme vztahu pro periodu harmonického pohybu. Na spodní konec pružiny zavěšené na stojanu upevníme nejprve závaží o známé hmotnosti m_1 . Závaží vychýlíme směrem dolů a pak je uvolníme, takže začne vykonávat kmity o periodě

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}},$$

kde k je tuhost pružiny. Zaměníme-li závaží tělesem o neznámé hmotnosti m_2 , vzniknou kmity s periodou

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k}}. \text{ Po porovnání obou rovnic vyjde vztah}$$

$$m_2 = \frac{T_2^2}{T_1^2} m_1.$$

Hmotnost pružiny je zanedbatelná vzhledem k hmotnostem obou závaží.

Úkoly: a) Určete dynamicky setrvačnou hmotnost tělesa kmitajícího na pružině.

b) Určete hmotnost tělesa také vážením na laboratorních vahách a porovnejte obě hodnoty.

c) Určete relativní chybu při dynamickém měření setrvačné hmotnosti kmitajícího tělesa. Odhadněte také velikost relativní chyby při určování hmotnosti téhož tělesa vážením na laboratorních vahách a porovnejte přesnost obou použitých metod.

Provedení: a) Změříme periodu kmitů pružiny, na niž zavěsíme závaží o známé hmotnosti $m_1 = 400$ g. Předpokládáme, že hmotnost závaží je udána přesně (závaží cejchované s vyraženou hvězdičkou). Je změřena doba 100 kmitů a měření provedeno pětkrát. Pak bylo zavěšeno

na spirálu těleso neznámé hmotnosti m_2 a opět pětkrát měřena doba 100 kmitů.

n	100 T_1 [s]	T_1 [s]	$\Delta_+ \cdot 10^3$	100 T_2 [s]	T_2 [s]	$\Delta_+ \cdot 10^3$
1	73,2	0,732	1,8	63,6	0,636	0,4
2	73,4	0,734		63,4	0,634	
3	73,0	0,730		63,7	0,637	1,4
4	73,2	0,732		63,8	0,638	2,4
5	73,3	0,733	0,8	63,3	0,633	

$$\overline{T}_1 = 0,7322 \text{ s}, \Sigma \Delta_+ = 0,0026 \text{ s}, \overline{T}_2 = 0,6356 \text{ s}, \Sigma \Delta_+ = 0,0042 \text{ s}$$

$$\text{Střední chyba prvního měření } \overline{\delta} = \frac{5}{2n} \cdot \frac{\Sigma \Delta_+}{\sqrt{n-1}} = \frac{0,0026}{4} \text{ s},$$

$$\overline{\delta} = 0,0007 \text{ s},$$

$$\text{střední chyba druhého měření } \overline{\delta}' = \frac{0,0042}{4} \text{ s} = 0,0011 \text{ s}.$$

Periody kmitů jsou tedy

$$\overline{T}_1 = (0,7322 \pm 0,0007) \text{ s},$$

$$\overline{T}_2 = (0,6356 \pm 0,0011) \text{ s}.$$

Do vztahu $m_2 = \frac{T_2^2}{T_1^2} m_1$ dosadíme naměřené hodnoty

$$m_2 = \left(\frac{0,6356 \pm 0,0011}{0,7322 \pm 0,0007} \right)^2 \cdot 400 \text{ g} = (301,4 \pm 0,6) \text{ g}.$$

b) Zjištění hmotnosti tělesa m_2 vážením.

Vážení bylo provedeno metodou kyvů:

nulová poloha $n_1 = 2,75$ dílku,

$Z_1 = 309,60$ g, rovnovážná poloha $r_1 = 2,1$ dílku,

$Z_2 = 309,61$ g, rovnovážná poloha $r_2 = 3,2$ dílku,

nulová poloha $n_2 = 2,45$ dílku,

střední nulová poloha $n_0 = 2,6$ dílku.

Hmotnost $m_2 = (309,605 \pm 0,0005)$ g

$$m_2 \doteq 309,61 \text{ g.}$$

c) Střední chyba při měření doby jedné periody je $3 \cdot 10^{-4}$ s při prvním, $5 \cdot 10^{-4}$ s při druhém měření, tedy

relativní chyba je $\frac{1}{20} \%$, resp. $\frac{1}{12} \%$.

Relativní chyba při vážení je asi $0,002 \%$, tedy proti měření a) zanedbatelná.

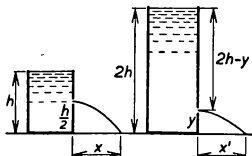
Rozdíl v hmotnosti naměřené metodou kyvů a v hmotnosti zjištěné vážením tedy není ani v a), ani v b) zaviněn nepřesností měření. Příčinu značné odchylky obou naměřených hmotností $2,4 \%$ je nutno hledat tedy jinde, a to v předpokladu, že hmota spirály je zanedbatelná. Spirála kmitá společně se zavěšeným tělesem, a proto je nutno znát její hmotnost a v obou případech jistou její část připočítávat k hmotnostem m_1 a m_2 .

b) Druhé kolo soutěže

1. příklad (navrhli Bednařík a Šíroká)

Na vodorovné podložce stojí dvě válcové nádoby, z nichž jedna má výšku h a druhá výšku $2h$. Obě jsou naplněné po okraj vodou. Prvá nádoba má ve stěně ve výšce $\frac{h}{2}$ nad dnem malý otvor. V jaké výšce nad dnem

druhé nádoby musí být ve stěně otvor, aby vodní paprsek vytékající z otvoru dopadal na vodorovnou podložku do stejné vzdálenosti od stěny nádoby jako paprsek vytékající z první nádoby?



Obr. 64 a

Obr. 64 b

Při vytékání vody předpokládáme, že výška sloupců vody v obou nádobách se nemění. Odpor vzduchu, vnitřní tření vody a tření u výtokového otvoru neuvažujeme.

Řešení: Určíme vzdálenost x od stěny nádoby, do níž dopadá vodní paprsek na vodorovnou rovinu z první nádoby (viz obr. 64a). Voda tryská z otvoru, který je v hloubce $\frac{h}{2}$ pod hladinou, rychlostí

$$v = \sqrt{2g \frac{h}{2}} = \sqrt{gh}.$$

Poněvadž jde v podstatě o vodorovný vrh z výšky $\frac{h}{2}$, platí rovnice

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2} g t^2,$$

kde t je čas, za který částice vody urazí dráhu od otvoru k místu dopadu na podložku: $t = \sqrt{\frac{h}{g}}$.

Pro vzdálenost x pak platí

$$x = v t = \sqrt{gh} \sqrt{\frac{h}{g}} = h.$$

U druhé nádoby je umístěn postranní otvor ve výši y nad dnem, tj. v hloubce $2h - y$ pod hladinou (viz obr. 64b). Rychlost vytékající vody je pak

$$v' = \sqrt{2g(2h - y)}.$$

Doba t' , za kterou částice vody urazí dráhu od otvoru k místu dopadu na podložku, je v tomto případě

$$t' = \sqrt{\frac{2y}{g}}.$$

Pro vzdálenost x' platí

$$x' = v' t' = 2\sqrt{y(2h - y)}.$$

Poněvadž $x = x'$, platí

$$h = 2\sqrt{y(2h - y)}.$$

Po úpravě obdržíme kvadratickou rovnici pro y :

$$y^2 - 2hy + \frac{h^2}{4} = 0.$$

Rovnice má dvě reálná řešení

$$y_{1,2} = h \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Z výsledku vidíme, že existují celkem dva otvory, z nichž tryská vodní paprsek do vzdálenosti $x' = h$.

První otvor je ve výši $y_1 = h \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \doteq 1,866 h$, druhý otvor ve výši $y_2 = h \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \doteq 0,134 h$.

2. příklad (navrhla dr. Marta Chytilová)

Kovová nádoba má při teplotě t_1 vnitřní objem V_1 a součinitel teplotní roztažnosti materiálu α . Do nádoby nalejeme kapalinu při teplotě t_1 ; součinitel teplotní

objemové roztažnosti kapaliny je β . Určete objem kapaliny tak, aby nepřetekla, zahřejeme-li nádobu z teploty t_1 na teplotu varu kapaliny. Změna vnitřního objemu nádoby při změně teploty je stejná, jako by byla změna stejného objemu tělesa zhotoveného z materiálu nádoby.

Řešte nejprve obecně a ve zvláštním případě pro hliníkovou nádobu a glycerín. $t_1 = 20,0^\circ\text{C}$, $V_1 = 1000$ ml.

Řešení: Při teplotě t_1 je objem vnitřní nádoby V_1 , objem kapaliny V_{1k} , při teplotě varu t_2 je vnitřní objem nádoby V_2 , objem kapaliny V_{2k} . Označme α koeficient délkové teplotní roztažnosti hliníku a β koeficient objemové teplotní roztažnosti glycerínu.

Podmínka v úloze je $V_2 \geq V_{2k}$; máme určit V_{1k} .

$$V_2 = V_1 [1 + 3 \alpha (t_2 - t_1)],$$

$$V_{2k} = V_{1k} [1 + \beta (t_2 - t_1)].$$

$$V_1 [1 + 3 \alpha (t_2 - t_1)] \geq V_{1k} [1 + \beta (t_2 - t_1)],$$

$$V_{1k} \leq V_1 \frac{1 + 3 \alpha (t_2 - t_1)}{1 + \beta (t_2 - t_1)}.$$

Numerické řešení: $V_1 = 1000$ ml, $\alpha = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ deg}^{-1}$, $t_1 = 20,0^\circ\text{C}$, $t_2 = 290,0^\circ\text{C}$, $\beta = 5 \cdot 10^{-4} \text{ deg}^{-1}$.

$$V_{1k} \leq 1000 \cdot \frac{1 + 7,2 \cdot 10^{-5} \cdot 270}{1 + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 270} \text{ ml} =$$

$$= 1000 \cdot \frac{1,0194}{1,135} \text{ ml},$$

$$V_{1k} \leq 898 \text{ ml}.$$

3. příklad (navrhl Konrád Hofman)

Po dvou rovnoběžných kolejích jedou dvě lokomotivy. Píšťaly obou lokomotiv vydávají stejný tón frekvence f .

Pozorovatel na první lokomotivě zjistí rázy o frekvenci a , pozorovatel na druhé lokomotivě zjistí rovněž rázy o jiné frekvenci b . Rychlost šíření zvuku je c . Vypočítejte rychlost první lokomotivy u a druhé v vzhledem ke vzduchu, o němž předpokládáme, že je v klidu vzhledem k povrchu Země.

Řešte úlohu nejprve obecně, potom pro hodnoty: $f = 330 \text{ Hz}$, $a = 11 \text{ Hz}$, $b = 10 \text{ Hz}$, $c = 336 \text{ m s}^{-1}$.

Poznámka: Rázy vznikají interferencí dvou vlnění o malém rozdílu frekvencí. Amplituda výchylky výsledného vlnění se mění periodicky s časem, a to s frekvencí, která se rovná rozdílu frekvencí obou vlnění, v našem případě rozdílu frekvencí tónů obou píšťal vnímaných pozorovatelem.

Řešení podle Dopplerova principu: a) Zdánlivá frekvence zdroje blížícího se rychlostí v k pozorovateli, který je v klidu, je $f' = f \frac{c}{c - v}$, kde f je frekvence zdroje, c je rychlost zvuku.

b) Bliží-li se pozorovatel ke zdroji, který je v klidu, rychlostí u , je zdánlivá frekvence $f'' = f \frac{c + u}{c}$.

Odvodíme nyní další vztahy:

c) Pohybuje-li se zdroj směrem k pozorovateli rychlostí v a současně se pohybuje pozorovatel směrem ke zdroji rychlostí u , je zdánlivá frekvence

$$f_1 = f' \frac{c + u}{c} = f \frac{c}{c - v} \cdot \frac{c + u}{c} = f \frac{c + u}{c - v}.$$

d) Pohybuje-li se zdroj rychlostí v a současně pozorovatel rychlostí $u = -v$, čili zdroj a pozorovatel se pohybují stejnou rychlostí týmž směrem, je

$$f_2 = f \frac{c - v}{c - v} = f,$$

čili zdánlivá frekvence se rovná frekvenci zdroje.

Ve všech případech jsou rychlosti měřeny vůči prostředí, kterým se zvuk šíří, v našem případě vzduchu, o němž předpokládáme, že je vůči Zemi v klidu.

Je-li rychlost první lokomotivy v , rychlost druhé u , potom pozorovatel na druhé lokomotivě podle c) a d) zjistí rázy frekvence

$$f_{r_2} = f \frac{c + u}{c - v} - f = f \frac{u + v}{c - v} = b. \quad (1)$$

Podobně pozorovatel na první lokomotivě zjistí rázy frekvence

$$f_{r_1} = f \frac{c + v}{c - u} - f = f \frac{u + v}{c - u} = a. \quad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) získáme

$$u = \frac{a b + (a - b) f}{a b + (a + b) f} c,$$

$$v = \frac{a b + (b - a) f}{a b + (a + b) f} c.$$

Dosadíme-li sem dané hodnoty, je $u = 21 \text{ m s}^{-1}$, $v = -10,5 \text{ m s}^{-1}$. Obě lokomotivy jedou tedy stejným směrem, druhá se k první přibližuje.

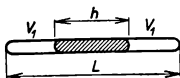
4. příklad (navrhla dr. Marta Chytilová)

Skleněná válcová trubice má délku L a je na obou koncích zatavena. V trubici je vzduch a sloupek rtuti délky h . Sloupek je uprostřed trubice, je-li trubice položena ve vodorovné poloze. Postavíme-li trubici do

svislé polohy, posune se sloupek rtuti o délku l . Určete tlak vzduchu p_1 v trubici ve vodorovné poloze (obr. 65).

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $L = 1000$ mm, $h = 200$ mm, $l = 100$ mm, hustota rtuti $\varrho = 13,6 \cdot 10^3$ kg m^{-3} .

Řešení: V_1 je objem vzduchu v každé z obou stejných částí trubice ve vodorovné poloze, S je průřez trubice, p_1 je tlak vzduchu v obou částech trubice ve vodorovné poloze.



Obr. 65

$$V_1 = \frac{L - h}{2} S. \quad (1)$$

Postavíme-li trubici svisle, je objem vzduchu v horní části trubice V_2 a tlak vzduchu v této části p_2 :

$$V_2 = \left(\frac{L - h}{2} + l \right) s, \quad (2)$$

v dolní části je objem V_3 a tlak vzduchu p_3 :

$$V_3 = \left(\frac{L - h}{2} - l \right) s. \quad (3)$$

Na vzduch v dolní části trubice působí tlak vzduchu v horní části trubice, zvětšený o tlak sloupce rtuti, tedy

$$p_3 = p_2 + h \varrho g.$$

Podle Boyleova zákona platí (předpokládáme, že teplota je stálá a že vzduch je dokonalý plyn):

$$p_1 V_1 = p_2 V_2,$$

$$p_1 V_1 = p_3 V_3.$$

Po dosazení hodnot pro objemy ze vztahů (1), (2) a (3) dostaneme

$$p_1 \frac{L-h}{2} S = \left(\frac{L-h}{2} + l \right) S p_2, \quad (4)$$

$$p_1 \frac{L-h}{2} S = \left(\frac{L-h}{2} - l \right) S (p_2 + \varrho h g). \quad (4')$$

Porovnáním pravých stran rovnic (4) a (4') vyjde

$$\left(\frac{L-h}{2} + l \right) p_2 = \left(\frac{L-h}{2} - l \right) (p_2 + \varrho h g),$$

a odtud

$$p_2 = \frac{(L-h-2l) \varrho h g}{4l}.$$

Dosadíme-li do (4), dostaneme

$$p_1 (L-h) = (L-h-2l) \cdot \left[\frac{L-h-2l}{4l} + 1 \right] \varrho h g,$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{(L-h-2l)^2 + 4l(L-h-2l) \varrho h g}{4l(L-h)} = \\ &= \frac{hg \varrho (L-h)^2 - 4l^2}{4l(L-h)}. \end{aligned}$$

Rozměrová zkouška:

$$p_1 = \frac{\text{m} \cdot \text{m s}^{-2} \cdot \text{kg m}^{-3} \cdot \text{m}^2}{\text{m} \cdot \text{m}} = \frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{m}^2} = \text{N m}^{-2}.$$

Dosadíme-li číselné hodnoty:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,2 (1,000 - 0,200)^2 - 4 \cdot 0,1^2}{4 \cdot 0,1 \cdot (1,000 - 0,200)} \text{N m}^{-2} = \\ &= 5,00 \cdot 10^4 \text{N m}^{-2}. \end{aligned}$$

3. Úlohy kategorie C

Úlohy a řešení recenzovali Jan Tesař a dr. Ivan Náter

a) První kolo soutěže

1. příklad (navrhl Jan Tesař)

Vaříč připojený ke zdroji napětí U_1 má příkon P_1 .

a) Jakým způsobem přiřadíme k vaříči odpor a jakou velikost R musí mít tento odpor, má-li vaříč mít stejný příkon a nepoškodit se, jestliže ho připojíme ke zdroji napětí U_2 ($U_2 > U_1$)?

b) Jakou hodnotu má příkon odporu R ?

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $U_1 = 120$ V, $U_2 = 220$ V, $P_1 = 480$ W.

Odpor přívodních drátů zanedbejte.

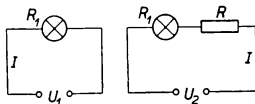
Řešení: Označení veličin a dané hodnoty: $P_1 = 480$ W je příkon vaříče, R_1 = odpor vaříče, R = odpor zařazený do série s vaříčem, P = příkon tohoto odporu, $U_1 = 120$ V —

původní napětí, $U_2 = 220$ V — nové napětí (obr. 66).

a) Má-li být příkon vaříče v obou zapojeních stejný, musí vaříčem v obou případech protékat stejný proud a napětí na vaříči musí být v obou případech rovněž stejné. Označíme-li odpor vaříče R_1 , platí

$$P_1 = U_1 I = R_1 I^2, \text{ odtud}$$

$$I = \frac{P_1}{U_1}. \quad (1)$$



Obr. 66

Odpor R musíme zařadit do vedení sériově s vaříčem, neboť napětí na vodičích spojených za sebou se rozdělí na vodiče v poměru jejich odporů. Bude-li na vaříči v druhém případě opět napětí U_1 , bude na odporu R napětí $U_2 - U_1$. Bude platit:

$$R_1 I + R I = U_2 ,$$

po dosazení z (1)

$$\frac{P_1}{U_1} R_1 + \frac{P_1}{U_1} R = U_2 ,$$

čili

$$U_2 U_1 = P_1 R_1 + P_1 R ,$$

a odtud

$$R = \frac{U_2 U_1}{P_1} - R_1 . \quad (2)$$

Číselně:

$$I = \frac{P_1}{U_1} = \frac{480 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 4 \text{ A} ,$$

$$R_1 = \frac{U_1}{I} = \frac{120 \text{ V}}{4 \text{ A}} = 30 \Omega ,$$

$$R = \frac{220 \text{ V} \cdot 120 \text{ V}}{480 \text{ W}} - 30 \Omega = 55 \Omega - 30 \Omega = 25 \Omega .$$

Abychom mohli vaříč připojit na napětí 220 V a aby jeho příkon zůstal stejný, musíme s ním do série zapojit odpor $R = 25 \Omega$.

b) Příkon odporu bude dán vztahem $P = R I^2$, číselně

$$P = 25 \Omega (4 \text{ A})^2 = 400 \text{ W} .$$

Příkon odporu (znamenaající neužitečnou ztrátu elektrické energie) bude $P = 400 \text{ W}$.

2. příklad (navrhl Jan Tesař)

Dva hmotné body M a N se pohybují po přímce. Závislost délky jejich drah na čase je graficky znázorněna na obr. 67.

a) Jakého druhu jsou pohyby obou hmotných bodů v časovém intervalu $0 < t \leq 8 \text{ s}$?

b) Jak jsou oba body od sebe vzdáleny v okamžiku, kdy se začíná měřit čas (v čase $t = 0$)?

c) Kdy a ve kterých místech se oba body setkají?

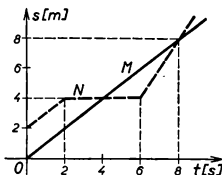
d) Jak velké jsou rychlosti obou bodů v jednotlivých fázích pohybu?

e) Jak velká je rychlost bodu M vzhledem k bodu N v místech, kde se setkají?

f) Jak velká je průměrná rychlost jejich pohybu v prvních 8 s?

g) Sestrojte grafy, znázorňující závislost rychlosti každého z obou bodů na čase.

Řešení: a) Bod M se pohybuje rovnoměrně (graf dráhy v závislosti na čase má stálý sklon) stálou rychlostí 1 m s^{-1} . Jeho dráha vzroste za 8 s z 0 m na 8 m. Bod N se pohybuje rovnoměrně po dobu prvních dvou sekund z místa vzdáleného od počátku o 2 m tímž směrem stálou rychlostí 1 m s^{-1} , pak je 4 sekundy v klidu, konečně od začátku sedmé sekundy se pohybuje stejným směrem



Obr. 67

rovnoměrně stálou rychlostí 2 m s^{-1} (za dobu 2 s urazí dráhu 4 m).

Vztah pro pohyb bodu M : $s_1 = 1 t$, ($0 \leq t \leq 8 \text{ s}$), (1)

vztahy pro pohyb bodu N : $s_2 = 2 + 1 t$, ($0 \leq t \leq 2 \text{ s}$), (2)

$s_3 = 4$, ($2 \text{ s} \leq t \leq 6 \text{ s}$), (3)

$s_4 = 4 + 2(t - 6)$, ($6 \text{ s} \leq t \leq 8 \text{ s}$). (4)

b) Dráha obou bodů v čase $t_0 = 0$ bude pro bod M : $s_{10} = 0$, pro bod N : $s_{20} = 2 \text{ m}$. Jejich vzdálenost v čase $t_0 = 0$ bude

$$s_{20} - s_{10} = 2 \text{ m}.$$

c) V bodě setkání mají oba body stejnou souřadnici dráhy s . Musíme tedy řešit soustavy rovnic (1) a (2), (1) a (3), (1) a (4):

α) $s_1 = s_2$, $1 t = 2 + 1 t$; nemá řešení, na tomto úseku dráhy se body M a N nesetkají.

β) $s_1 = s_3$, $1 t = 4$, $t = 4 \text{ s}$, $s = 4 \text{ m}$, body se setkají po 4 s ve vzdálenosti 4 m od počátku.

γ) $s_1 = s_4$, $1 t = 4 + 2(t - 6)$, $t = 8 \text{ s}$, $s = 8 \text{ m}$. Body se setkají podruhé po 8 s ve vzdálenosti 8 m od počátku.

d) Zodpovězeno v a).

e) Při prvním setkání je bod N v klidu, bod M má rychlost 1 m s^{-1} , tedy vzhledem ke klidnému bodu má rychlost 1 m s^{-1} .

Při druhém setkání má bod M rychlost $v_1 = 1 \text{ m s}^{-1}$, bod N má rychlost $v_2 = 2 \text{ m s}^{-1}$, tedy rychlost bodu M vzhledem k bodu N je

$$v_1 - v_2 = -1 \text{ m s}^{-1}.$$

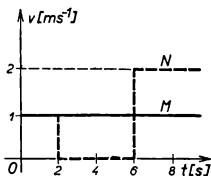
f) Průměrná rychlost bodů je dána poměrem dráhy a času (za prvních 8 sekund). Bod M se pohybuje kon-

stantní rychlostí, tedy je to zároveň i rychlost průměrná:

$$v_M = \frac{8 \text{ m}}{8 \text{ s}} = 1 \text{ m s}^{-1}.$$

Bod N se pohyboval od $s_0 = 2 \text{ m}$ do $s = 8 \text{ m}$ za celkovou dobu 8 s , tedy jeho rychlost

$$\begin{aligned} v_N &= \frac{s - s_0}{t} = \\ &= \frac{6 \text{ m}}{8 \text{ s}} = 0,75 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$



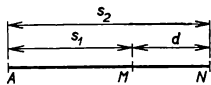
Obr. 68

g) Graf rychlosti obou pohybů je na obr. 68.

3. příklad (navrhl Jan Tesař)

Auto vyjíždí z místa A a rozjíždí se rovnoměrně zrychleným pohybem po přímé silnici. V místě M své dráhy má rychlost v_1 , v místě N , které má o délku d větší vzdálenost od bodu A než bod M , má rychlost v_2 (obr. 69).

a) Jak veliké zrychlení má auto?



Obr. 69

b) Jak velká je vzdálenost AM a za jak dlouhou dobu ji auto projelo?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_1 = 40 \text{ km h}^{-1}$, $v_2 = 60 \text{ km h}^{-1}$, $d = 100 \text{ m}$.

Řešení: Označení veličin: v_0 — počáteční rychlost (nulová), $d = AN - AM = s_2 - s_1$, v_1 — rychlost v bodě M , a — zrychlení pohybu, v_2 — rychlost v bodě N ,

t_1 — doba jízdy z A do M , $s_1 = AM$, t_2 — doba jízdy z A do N , $s_2 = AN$, $t_2 - t_1$ doba jízdy z M do N .

a) Pro dráhu AN platí

$$s_2 = \frac{a}{2} t_2^2,$$

pro dráhu AM

$$s_1 = \frac{a}{2} t_1^2.$$

Pro dráhu $MN = d$ platí

$$d = \frac{a}{2} (t_2^2 - t_1^2). \quad (1)$$

Pro rychlost v bodě N

$$v_2 = a t_2, \quad (2)$$

pro rychlost v bodě M

$$v_1 = a t_1. \quad (3)$$

Sečtením (2) a (3) a jejich odečtením dostaneme

$$v_2 + v_1 = a (t_2 + t_1), \quad (4)$$

$$v_2 - v_1 = a (t_2 - t_1), \quad (5)$$

Znásobením rovnic (4) a (5) dostaneme dále

$$v_2^2 - v_1^2 = a (t_2^2 - t_1^2). \quad (6)$$

Dosazením z (6) do (1) vychází

$$d = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 a},$$

čili

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 d}.$$

Rozměrová zkouška:

$$[a] = \frac{m^2 s^{-2}}{m} = m s^{-2}.$$

Číselně:

$$v_1 = 40 \text{ km h}^{-1} = \frac{4 \cdot 10^4}{3,6 \cdot 10^3} \text{ m s}^{-1} = \frac{100}{9} \text{ m s}^{-1} \doteq \\ \doteq 11 \text{ m s}^{-1},$$

$$v_2 = 60 \text{ km h}^{-1} = \frac{6 \cdot 10^4}{3,6 \cdot 10^3} \text{ m s}^{-1} = \frac{100}{6} \text{ m s}^{-1} \doteq \\ \doteq 17 \text{ m s}^{-1}.$$

$$a = \frac{\left(\frac{100}{6}\right)^2 - \left(\frac{100}{9}\right)^2}{200} \text{ m s}^{-2} = \frac{300^2 - 200^2}{200 \cdot 18^2} \text{ m s}^{-2} = \\ = \frac{500}{648} \text{ m s}^{-2}, \\ a \doteq 0,77 \text{ m s}^{-2}.$$

b) Ze vztahu pro rychlost v bodě M vypočteme dobu jízdy t_1 na dráze AM :

$$t_1 = \frac{v_1}{a};$$

dosazením ze (7) vyjde

$$t_1 = \frac{v_1 \cdot 2d}{v_2^2 - v_1^2}. \quad (8)$$

Rozměrová zkouška:

$$[t_1] = \frac{m s^{-1} \cdot m}{m^2 s^{-2}} = s.$$

Číselně:

$$t_1 = \frac{100}{9} \cdot \frac{200}{\left(\frac{100}{6}\right)^2 - \left(\frac{100}{9}\right)^2} \text{ s} = 14,4 \text{ s}.$$

Do vztahu pro dráhu pohybu rovnoměrně zrychleného

$s_1 = \frac{a}{2} t_1^2$ dosadíme za veličiny a a t_1 jejich vyjádření, nalezené podle a)

$$s_1 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{4d} \cdot \frac{v_1^2 \cdot 4d^2}{(v_2^2 - v_1^2)^2} = \frac{v_1^2 d}{v_2^2 - v_1^2}.$$

Rozměrová zkouška:

$$[s_1] = \frac{\text{m}^2 \text{s}^{-2} \cdot \text{m}}{\text{m}^2 \text{s}^{-2}} = \text{m}.$$

Číselně:

$$s_1 = \frac{\left(\frac{100}{9}\right)^2 \cdot 100}{\left(\frac{100}{6}\right)^2 - \left(\frac{100}{9}\right)^2} \text{ m} = \frac{100^2 \cdot 100 \cdot 18^2}{9^2(300^2 - 200^2)} \text{ m} = 80 \text{ m}.$$

4. příklad (navrhl Milan Rádl)

Zasněžený svah svírá s vodorovnou rovinou úhel α . Sáňky s jezdce celkové hmotnosti m sjíždějí na svahu z klidové polohy dráhu s_1 . Pohyb sáněk pokračuje po vodorovné rovině. Součinitel smykového tření po celé dráze je f .

a) Jak dlouhou dráhu s_2 urazily sáně po vodorovné rovině, než se zastavily?

b) Jak dlouho trval pohyb saní po svahu na dráze s_1 a jak dlouho se pohybovaly po vodorovné rovině na dráze s_2 ?

c) Jakou rychlost měly sáně v okamžiku, kdy přecházely ze svahu na vodorovnou rovinu?

Odpor vzduchu zanedbáváme.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\alpha = 45^\circ$, $s_1 = 11,3 \text{ m}$, $f = 0,2$.

Za tíhové zrychlení dosazujte hodnotu $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení: Označení veličin: Tíhová síla je $G = mg$. Pohybovou složku síly G budeme značit F_1 , tlakovou F_2 a sílu tření F_t na dráze s_1 a F'_t na dráze s_2 . Po dráze s_1 se sáně pohybují po dobu t_1 , po dráze s_2 po dobu t_2 . Rychlost sáněk v okamžiku, kdy přecházejí ze svahu na vodorovnou rovinu, označíme v_1 .

Sáně jsou na svahu uvedeny do pohybu a udržovány v něm stálou silou $F = F_1 - F_t = mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha$, takže na dráze s_1 konají rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením $a = g (\sin \alpha - f \cos \alpha)$. Čas t_1 určíme ze vztahu $s_1 = \frac{1}{2} a t_1^2$, takže

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}} = \sqrt{\frac{2s_1}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}}. \quad (1)$$

Při přechodu ze svahu na vodorovnou rovinu mají sáně rychlost

$$v_1 = a t_1 = \sqrt{2 s_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha)}. \quad (2)$$

(Předpokládáme, že sánky přejdou z jízdy po svahu do jízdy po vodorovné rovině plynule a na tak krátké dráze, že změnu síly tření na této krátké dráze lze zanedbat.)

Na sáně pohybující se po vodorovné rovině působí stálá třecí síla $F'_t = -f mg$, která má opačnou orientaci než vektor rychlosti sáněk. Proto se sánky pohybují po dráze s_2 pohybem rovnoměrně zpomaleným se zrychlením $a' = -f g$ rychlostí určenou obecně vztahem

$v = v_1 + a' t$ a zastaví se za čas t_2 , který určíme z podmínky $v = 0$, tj. z rovnice $v_1 + a' t_2 = 0$, z níž vyjde

$$t_2 = -\frac{v_1}{a'} = \frac{1}{f \cdot g} \sqrt{2 s_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha)}. \quad (3)$$

Dráhu s_2 vypočítáme ze vztahu

$$s_2 = v_1 t_2 + \frac{1}{2} a' t_2^2,$$

$$s_2 = -\frac{v_1^2}{a'} + \frac{1}{2} a' \frac{v_1^2}{a'^2} = \frac{1}{2 f g} v_1^2 = \frac{s_1}{f} (\sin \alpha - f \cos \alpha). \quad (4)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 11,3}{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - 0,2)}} \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{m s}^{-2}}} \doteq 2 \text{ s};$$

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 11,3 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - 0,2)} \sqrt{\text{m m s}^{-2}} \doteq \\ \doteq 11,3 \text{ m s}^{-1};$$

$$t_2 = \frac{v_1}{f g} \doteq \frac{11,3}{0,2 \cdot 10} \frac{\text{m s}^{-1}}{\text{m s}^{-2}} = 5,65 \text{ s};$$

$$s_2 = \frac{11,3 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,4}{0,2} \text{ m} \doteq 32 \text{ m}.$$

a) Po vodorovné rovině urazily sáně dráhu 32 m, určenou obecně vztahem (4).

b) Sáně se pohybovaly po svahu podle vztahu (1) po dobu 2 s a podle vztahu (3) jely 5,6 s po vodorovné rovině.

c) Rychlost saní při přechodu ze svahu na vodorovnou rovinu je obecně určena vztahem (2) a má hodnotu $11,3 \text{ m s}^{-1}$.

5. příklad (navrhl Jan Tesař)

Spád přímé silnice je p . Jede-li po ní auto hmotnosti m s vypnutým motorem dolů, pohybuje se rovnoměrně rychlostí v .

Jaký by byl užitečný výkon P motoru, kdyby auto stoupalo do téhož kopce rovnoměrným pohybem stejnou rychlostí v ?

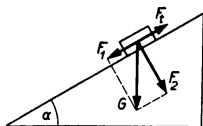
Spád silnice $p = \sin \alpha$, kde α je úhel, který svírá povrch silnice s vodorovnou rovinou.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 1,5 \cdot 10^3$ kg, $p = 0,05$, $v = 60$ km h⁻¹, $g = 10$ m s⁻².

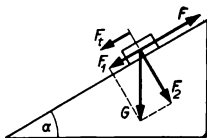
Řešení: Označení veličin: Součinitele tření označíme f , velikost třecí síly F_t . Tíhu automobilu budeme značit G , pohybovou složku této síly F_1 a tlakovou složku F_2 , tažnou sílu motoru automobilu F . Rychlost v má v jednotkách soustavy SI velikost $v = \frac{50}{3}$ m s⁻¹, $p = \sin \alpha$.

Tlaková složka tíhy automobilu $F_2 = mg \cos \alpha$. Pohybuje-li se automobil po silnici dolů pohybem rovnoměrným, je pohybová složka $F_1 = mg \sin \alpha$ tíhy automobilu v rovnováze s třecí silou F_t (obr. 70a). Proto platí rovnice

$$mg \sin \alpha = f mg \cos \alpha, \text{ takže}$$



Obr. 70 a



Obr. 70 b

$$f = \operatorname{tg} \alpha . \quad (1)$$

Při rovnoměrném pohybu po silnici vzhůru (obr. 70b) je tažná síla motoru automobilu v rovnováze s výslednicí dvou spolu souhlasně orientovaných sil, pohybové složky F_1 a třecí síly F_t . Proto platí rovnice $\bar{F} = m g \sin \alpha + + f m g \cos \alpha = m g (\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha) = 2 m g \sin \alpha$.

Užitečný výkon motoru automobilu při jízdě vzhůru po silnici je

$$P = F v = 2 m g v \sin \alpha = 2 p m g v . \quad (2)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot 0,05 \cdot 1,5 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot \frac{50}{3} \text{ kg m s}^{-2} \text{ m s}^{-1} = \\ &= 10^4 \cdot 0,05 \cdot 50 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} = 25 \cdot 10^3 \text{ W.} \end{aligned}$$

Motor automobilu má při jízdě po silnici směrem vzhůru užitečný výkon 25 kW. Obecně je tento výkon určen vztahem (2).

6. úloha experimentální (navrhl František Cimbůrek)

Určení hustoty kapaliny různými způsoby.

Hustotu kapaliny lze určit různými způsoby:

- a) použitím pyknometru,
- b) použitím ponorného tělíska,
- c) použitím Mohrových vážek,
- d) použitím hustoměru,
- e) použitím spojených nádob.

Úkoly: 1. Určete hustotu denaturovaného lihu aspoň třemi libovolně zvolenými způsoby.

2. Určete nebo aspoň odhadněte relativní chyby naměřených hustot a porovnejte přesnosti jednotlivých měření.
Literatura: Horák, Praktická fyzika, SNTL 1958, str. 261;

Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 41,
seš. 4, str. 183 nebo Šoller a kol., Labora-
torní práce ve fyzice, SPN 1956.

1. a) Určení hustoty denaturovaného lihu pyknome-
trem.

Provedení: Označení veličin: m — hmotnost prázd-
ného pyknometru, m_1 — hmotnost pyknometru na-
plněného lihem hustoty ρ_1 , m_2 — hmotnost pykno-
metru naplněného vodou hustoty ρ_2 , V — objem pykno-
metru.

$$\text{Hmotnost lihu} \quad m_1 - m = V \rho_1,$$

$$\text{hmotnost vody} \quad m_2 - m = V \rho_2.$$

Dělením obou rovnic vyloučíme V a dostaneme

$$\rho_1 = \frac{m_1 - m}{m_2 - m} \rho_2.$$

Měření je prováděno při teplotě místnosti $t = 16^\circ\text{C}$,
kapaliny měly přibližně tutéž teplotu.

Vážením prázdného pyknometru naměřeno

$$m = 47,98 \text{ g},$$

$$\text{pyknometr s lihem} \quad m_1 = 130,75 \text{ g},$$

$$\text{pyknometr s vodou} \quad m_2 = 147,59 \text{ g},$$

hustota vody ρ_2 při 16°C

$$\rho_2 = 0,9989 \text{ g cm}^{-3}.$$

$$\rho_1 = \frac{130,75 - 47,98}{147,59 - 47,98} \cdot 0,9989 \text{ g cm}^{-3} =$$

$$= \frac{82,77}{99,61} \cdot 0,9989 \text{ g cm}^{-3} = 0,8302 \text{ g cm}^{-3} \doteq$$

$$\doteq 0,83 \text{ g cm}^{-3}.$$

b) Určení hustoty denaturovaného lihu ponorným
tělískem.

Za ponorné tělísko bylo zvoleno 100g závaží, zavěšené na tenkém měděném drátku. Závaží bylo upevněno drátkem za krček a ponořeno jen málo pod povrch vody nebo lihu, takže nadlehčení drátku bylo možno zanedbat. Hmotnost drátku byla na vahách vyvážena tárou.

Hmotnost závaží

$$m = 100 \text{ g,}$$

těleso ponořené v lihu vyváženo závažím

$$z_1 = 88,38 \text{ g,}$$

těleso ponořené ve vodě vyváženo závažím

$$z_2 = 86,00 \text{ g,}$$

hustota vody (při 16 °C)

$$\varrho_2 = 0,9989 \text{ g cm}^{-3}.$$

Těleso hmotnosti m a hustoty ϱ_0 má objem $V = \frac{m}{\varrho_0}$.

Ve vodě hustoty ϱ_0 je těleso nadlehčeno silou

$$F_2 = V \varrho_2 g = \frac{m}{\varrho_0} \varrho_2 g = (m - z_2) g,$$

v lihu

$$F_1 = V \varrho_1 g = \frac{m}{\varrho_0} \varrho_1 g = (m - z_1) g.$$

Dělením obou rovnic dostaneme

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{m - z_1}{m - z_2}, \quad \varrho_1 = \frac{m - z_1}{m - z_2} \varrho_2.$$

Po dosazení naměřených hodnot dostaneme

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{100 - 88,38}{100 - 86,00} \cdot 0,9989 \text{ g cm}^{-3} = \\ &= \frac{11,62}{14,00} \cdot 0,9989 \text{ g cm}^{-3} = \\ &= 0,8292 \text{ g cm}^{-3} \doteq 0,83 \text{ g cm}^{-3}. \end{aligned}$$

c) Měření hustoty denaturovaného lihu Mohrovými vážkami.

Metoda je stejná jako v b), ale zjednodušená tím, že tělísko v podobě teploměru je dole obroušeno tak, že má objem přesně 5 cm^3 . Vážení se provádí na nerovnoramenných vahách, kde rameno vahadla s tělískem je děleno zářezy na 10 dílků. V kapalině hustoty $\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$ je tělísko nadlehčeno silou 5 p a vyvažuje se jezdcem hmotnosti 5 g, zavěšeným do 10. dílku. Další jezdce mají hmotnosti $10\times$, $100\times$ menší a zavěšují se do zářezů tak, až nastane rovnováha.

Při měření v lihu byl	5 g jezdec	v 8. dílku
	0,5 g jezdec	v 3. dílku
	0,05 g jezdec	v 1. nebo
		v 2. dílku

Je tedy hustota $\rho_1 = 0,8315 \text{ g cm}^{-3}$, možná chyba je $0,0005 \text{ g cm}^{-3}$, takže

$$\rho_1 = (0,8315 \pm 0,0005) \text{ g cm}^{-3}.$$

d) Měření hustoty denaturovaného lihu hustoměrem.

Zvolíme hustoměr s jedničkou dole (pro kapaliny řidší než voda). Je nutno měřit ve speciálním válci nahoře rozšířeném, aby hustoměr nelnul ke stěně válce.

Spolehlivě lze odečíst 2 číslice (povrchové napětí stahuje hustoměr poněkud pod povrch kapaliny, takže třetí číslice není zaručená):

$$\rho_1 = 0,83 \text{ g cm}^{-3},$$

(možná chyba čtení $0,005 \text{ g cm}^{-3}$, tedy

$$\rho_1 = (0,830 \pm 0,005) \text{ g cm}^{-3}.$$

e) Měření hustoty denaturovaného lihu plovoucím tělesem (improvizovaným objemoměrem — areometrem).

K měření byla použita úzká zkumavka zatížená broky a měřeny (ode dna zkumavky) délky ponořené části l_1 v lihu a l_2 ve vodě. Předpokládáme, že zkumavka je přesně válcovitá a má průřez S .

Je-li hmotnost zkumavky se zátěží m , je vztlaková síla ponořené části rovna váze zkumavky

$$\text{v lihu} \quad S l_1 \varrho_1 g = m g,$$

$$\text{ve vodě} \quad S l_2 \varrho_2 g = m g$$

a dělením

$$\varrho_1 = \frac{l_2}{l_1} \varrho_2.$$

Naměřené délky $l_1 = 10,5 \text{ cm}$,
 $l_2 = 8,6 \text{ cm}$,

$$\varrho_1 = \frac{8,6}{10,5} \cdot 0,999 \text{ g cm}^{-3} =$$

$$= 0,818 \text{ g cm}^{-3} \doteq 0,82 \text{ g cm}^{-3}.$$

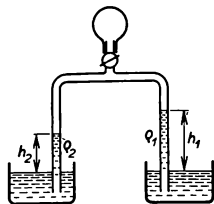
f) Měření hustoty spojenými nádobami.

Protože nebyla po ruce dvojité U trubice, bylo použito U trubice s balónkem podle obr. 71.

Při rovnováze platí pro tlaky sloupců kapalin

$$h_2 \varrho_2 g = h_1 \varrho_1 g, \text{ a tedy}$$

$$\varrho_1 = \frac{h_2}{h_1} \varrho_2.$$



Obr. 71

voda h_2 [cm]	12,0	10,6	8,4	7,2	6,0
líh h_1 [cm]	14,6	12,6	10,0	8,6	7,2
$\frac{h_2}{h_1}$	0,822	0,842	0,840	0,838	0,835

Střední hodnota $\frac{h_2}{h_1} = 0,835$.

$$\rho_1 = \frac{h_2}{h_1} \rho_2 = 0,835 \text{ g cm}^{-3}.$$

2. Zjištění relativní chyby u různých metod měření.

a) Při vážení s přesností na 1 cg je možná chyba $\pm 0,5$ cg, tedy relativní chyba vážení je asi $\frac{5 \cdot 10^{-3}}{10^2} = 5 \cdot 10^{-5}$, tj. 0,005 %.

Při výpočtu hustoty je tedy dvojnásobná (relativní chyba je dána součtem relativních chyb čitatele a jmenovatele), tedy 0,01 %. Měření je velmi přesné.

b) Vážení tělíska ve vodě a v lihu je stejně přesné jako v předešlém případě. Chyba může vzniknout zanedbáním nadlehčení ponořené části drátku.

c) Mohrovými vážkami se zjišťuje hustota rovněž velmi přesně, s relativní chybou asi 0,05 %.

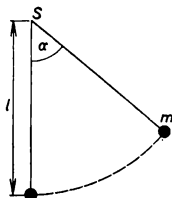
d) Při měření hustoměrem je možná chyba asi 0,5 %.

e) Chyba při měření plovoucím tělesem je způsobena (kromě nesnadného čtení ponořené délky tělesa) tím, že dno zkumavky je zaobleno, není válcové. Relativní chyba je zde asi 1 %.

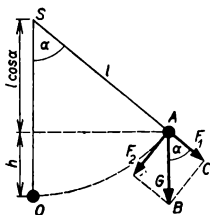
f) Čtení délky sloupců může mít chybu asi 1 mm, tj. 1 %, takže při dělení dvou délek sloupců je chyba dvojnásobná, tedy asi 2 %.

7. příklad (navrhl Jan Tesař)

Závaží hmotnosti m je zavěšeno na nepružné niti délky l a kývá. Při největší výchylce závaží z rovnovážné polohy svírá závěsná nit se svislou přímkou procházející závěsným bodem úhel α (obr. 72a).



Obr. 72 a



Obr. 72 b

a) Jak velká síla F_1 napíná nit při největší výchylce závaží z rovnovážné polohy?

b) Jak velká síla F_2 napíná nit v okamžiku, kdy závaží prochází rovnovážnou polohou?

c) Jakou velikost by měl úhel α , kdyby nit byla v rovnovážné poloze napínána silou dvakrát větší, než je tíha závaží?

Řešení: Označení veličin: Při největší výchylce z rovnovážné polohy má závaží vzhledem k vodorovné rovině σ procházející těžištěm závaží v rovnovážné poloze potenciální energii W_p , v rovnovážné poloze se závaží pohybuje rychlostí v a má kinetickou energii W_k . Tíhové zrychlení označíme g .

a) Při největší výchylce závaží z rovnovážné polohy rozložíme jeho tíhu $G = mg$ na dvě složky, na sílu F_1 , která působí ve směru nitě a napíná ji, a sílu F_2 , k ní kolmou, jež uvádí závaží do pohybu po kruhovém oblouku $\widehat{AO}$. Z pravoúhlého trojúhelníku ABC na obr. 72b je patrné, že

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{F_1}{G}, \text{ takže } F_1 = G \cos \alpha = m g \cos \alpha. \quad (1)$$

Při největší výchylce z rovnovážné polohy je nit napínána silou určenou vztahem (1).

b) V rovnovážné poloze působí na závaží dvě souhlasně orientované síly, tíha závaží $G = m g$ a odstředivá síla $F_3 = \frac{m}{l} v^2$, která působí na těleso při jeho pohybu po kruhovém oblouku $\widehat{AO}$ v bodě O . Je tedy

$$F_2 = G + F_3 = m g + m \frac{v^2}{l} = m \left(g + \frac{v^2}{l} \right). \quad (2)$$

Rychlost v určíme ze zákona přeměny a zachování energie. Při největší výchylce z rovnovážné polohy má závaží kinetickou energii rovnou nule a potenciální energii tíhovou vzhledem k rovině σ

$$W_p = m g h = m g (l - l \cos \alpha) = m g l (1 - \cos \alpha). \quad (3)$$

V rovnovážné poloze je tíhová potenciální energie závaží vzhledem k rovině σ rovna nule a kinetická má hodnotu $W_k = \frac{1}{2} m v^2$. Platí tedy $W_k = W_p$, čili $\frac{1}{2} m v^2 = m g l (1 - \cos \alpha)$, takže

$$v = \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha)}. \quad (4)$$

Dosadíme-li hodnotu určenou výrazem (4) do vztahu (2), dostaneme $F_2 = m \left(g + \frac{2 g l (1 - \cos \alpha)}{l} \right) = m g (1 + 2 - 2 \cos \alpha) = m g (3 - 2 \cos \alpha)$. (5)

V rovnovážné poloze je nit napínána silou, určenou vztahem (5).

c) Má-li být nit v rovnovážné poloze napínána silou rovnou dvojnásobku tíhy závaží, musí platit rovnice

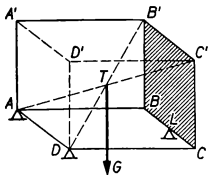
$$m g (3 - 2 \cos \alpha) = 2 m g, \text{ odkud}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \text{ a } \alpha = 60^\circ.$$

Vychýlíme-li závaží o úhel $\alpha = 60^\circ$ z rovnovážné polohy, bude nit při průchodu touto polohou napínána dvakrát větší silou, než je tíha závaží.

8. příklad (navrhl Jan Tesař)

Kvádr z homogenního materiálu má tíhu G a délky hran a , b , c . Je opřen ve dvou rozích těže podstavné hrany a ve středu L protilehlé hrany těže podstavy (viz obr. 73a). Podstava je ve vodorovné poloze.



Obr. 73 a

a) Jak velikými silami F_1 , F_2 , F_3 působí kvádr na opory?

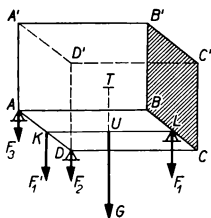
b) Jsou hodnoty tlakových sil vypočítané v části a) úlohy správné i tehdy, není-li podstava vodorovná? Odůvodněte.

c) Změnily by se velikosti sil F_1 , F_2 , F_3 , kdyby byla za podstavu zvolena jiná z jeho stěn?

Řešení: Označení veličin: Těžiště kvádrů označíme T , střed spodní podstavy U . Kvádr je opřen v bodech A , D , L . Síly působící na opory v bodech A a D označíme F_3 a F_2 , sílu působící na oporu v bodě L označíme F_1 .

a) Tíha $G = mg$ kvádrů působí v těžišti svisle dolů. Její vektorová přímka protíná spodní podstavu kvádrů

v bodě U (obr. 73b). Můžeme tedy působíště tíhy G přemístit po její vektorové přímce do bodu U . Takto přemístěnou sílu G nahradíme dvěma navzájem a se silou G rovnoběžnými silami F_1 a F'_1 . Síla F'_1 má působíště v bodě K , který je středem hrany AD , síla F_1 působí v bodě L . Síly F_1 a F'_1 mají vzhledem k bodu U stejně dlouhá ramena. Proto platí



Obr. 73 b

$$F_1 = F'_1 = \frac{G}{2}. \quad (1)$$

Sílu F'_1 rozložíme nyní na dvě síly F_3 a F_2 působící v bodech A a D rovnoběžně se silou F'_1 . Síly F_2 a F_3 mají vzhledem k působíšti síly F'_1 stejně dlouhá ramena. Proto

$$F_2 = F_3 = \frac{F'_1}{2} = \frac{G}{4}. \quad (2)$$

Velikosti sil, jimiž kvádr tlačí na opory v bodech A , D a L jsou určeny výrazy (1) a (2).

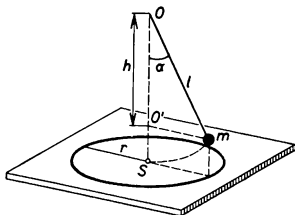
b) Není-li podstava kváдру vodorovná, pak hodnoty (1) a (2) neplatí, neboť vektorová přímka tíhy tělesa neprotíná podstavu v bodě U . Tíhu G nemůžeme pak nahradit silami F_1 a F'_1 , které jsme uvažovali v případě a).

c) Protože jsme v části a) úlohy nečinili žádné předpoklady o délkách hran AB , AD a AA' , jsou velikosti sil F_1 , F_2 , F_3 , vyjádřené vztahy (1) a (2), správné vždy, je-li ovšem podstava kváдру vodorovná. Nezáleží tedy na tom, kterou ze stěn volíme za podstavu.

9. úloha experimentální (navrhl Karel Bartuška)

Ověření vztahu pro výpočet periody pohybu kuželového kyvadla.

Pomůcky: stojan na zavěšení kuželového kyvadla, dvě kuličky o různých hmotnostech, rýsovací deska, rýsovací papír, stopky, metrové měřítko dělené na milimetry, nit.



Obr. 74

Úvod: Kuželové kyvadlo o délce l a hmotnosti m je zavěšeno v bodě O (viz obr. 74). Kulička kuželového kyvadla se pohybuje ve vodorovné rovině nad kružnicí o poloměru r , narýsované na rýsovacím papíru. Kuličku lze uvést do tohoto pohybu udělením vhodného impulsu v tečném směru k narýsované kružnici nebo nepatrným krouživým pohybem horního konce nitě. Vzdálenost bodu O od roviny dráhy kuličky označme h .

Úkoly: a) Dokažte, že perioda otáčivého pohybu kuželového kyvadla T je určena vztahem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

b) Jestliže kuželové kyvadlo rotuje při malých výchylkách α , lze položit přibližně $h \doteq l$ (viz obr. 74) a vztah pro periodu T lze pak napsat ve tvaru

$$T \doteq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

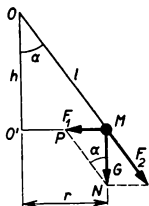
Přesvědčte se pokusem, že při malých výchylkách α (asi do 10°), perioda T na výchylce α nezávisí. Jak se změní perioda T , jestliže kuželové kyvadlo bude rotovat při takové výchylce α , pro kterou již nelze položit $h \doteq l$? Přesvědčte se o tom pokusem a výsledek zdůvodněte.

c) Závisí perioda kuželového kyvadla na hmotnosti kuličky? Ověřte pokusem a výsledek opět zdůvodněte.

d) Ověřte vztah $T \sim \sqrt{l}$, vyjadřující závislost periody kuželového kyvadla T na jeho délce při malých výchylkách α . Proveďte aspoň 5 měření pro různé délky l kyvadla a výsledky запиšte do tabulky.

e) Vypočtete délku kuželového kyvadla, které se otáčí s periodou $T = 2$ s. Výpočet ověřte praktickou zkouškou. Literatura: Učebnice fyziky pro I. roč. SVVŠ (SPN 1964), str. 106.

Provedení: K úkolu a) Je-li záves kuželového kyvadla vychýlen z rovnovážné polohy o úhel α , rozložíme tíhu kuličky $G = mg$ ve dvě složky F_1 a F_2 (obr. 75). Složka F_2 napíná nepružnou nit a ruší se stejně velikou opačně orientovanou tažnou silou, která má působiště v bodě O (akce a reakce). Složka F_1 je kolmá k svislé přímce procházející bodem O a má působiště v těžišti kuličky. Z po-



Obr. 75

dobnosti trojúhelníků $OO'M$ a NMP je patrné, že

$$\frac{F_1}{G} = \frac{r}{h}, \text{ takže } F_1 = \frac{r}{h} G.$$

Síla F_1 je pro kuličku kyvadla dostředivou silou a udržuje kuličku v rovnoměrném pohybu po kružnici poloměru r se středem O' . Proto platí

$$\frac{r}{h} m g = \frac{4 \pi^2}{T^2} r m,$$

odkud vypočítáme

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{h}{g}}. \quad (1)$$

b) Nelze-li položit $h \doteq l$, pak se perioda T kuželového kyvadla zmenší, jestliže se zvětší úhel α , neboť v tomto případě se délka h zmenšuje, roste-li velikost úhlu α .

c) Podle vztahu (1) je perioda kuželového kyvadla nezávislá na hmotnosti kuličky.

d) Z obrázku je patrné, že $h = l \cos \alpha$. Dosadíme-li tuto hodnotu do vztahu (1), vyjde po úpravě

$$\frac{T^2 g}{4 \pi^2 \cos \alpha} = l. \quad (2)$$

Při malých výchylkách α ($\alpha \rightarrow 0$), má $\cos \alpha$ přibližně hodnotu 1, takže je $l \doteq \frac{g T^2}{4 \pi^2}$.

e) Pro $T = 2 \text{ s}$ je $l \doteq \frac{10 \cdot 4}{4 \pi^2} \text{ m s}^{-2} \text{ s}^2 \doteq 1 \text{ m}$,
neboť $\pi^2 \doteq 10$.

Měření:

b) Je zvolena délka kuželového kyvadla $l = 30,0$ cm, poloměr kruhové dráhy vypočten pro úhly uvedené v tabulce a k nim naměřena doba T z deseti oběhů:

úhel	poloměr r [cm]	doba obě- hu T [s]
4°	2,1	1,10
7°	3,7	1,10
10°	5,2	1,10

Při malých výchylkách nezávisí perioda T na výchylce.

c) Ve vztahu pro periodu pohybu kuželového kyvadla není hmotnost tělesa, proto nemá perioda záviset na hmotnosti kuličky.

Byla zvolena tělesa hodně rozdílných hmotností $m_1 = 101,7$ g, $m_2 = 435,5$ g a provedena měření při 5 různých hodnotách úhlu α a vždy při stejném úhlu pro obě tělesa.

	T [s]				
m_1	1,14	1,18	1,17	1,14	1,17
m_2	1,15	1,18	1,17	1,14	1,18

Z tabulky je vidět, že perioda pohybu nezávisí na hmotnosti kyvadla.

d) Ověření vztahu $T \sim \sqrt{l}$. V tabulce je T střed ze 2 měření, vždy 10 oběhů.

l [m]	0,35	0,44	0,54	0,78	0,95
T [s]	1,18	1,46	1,62	1,77	1,95
$\frac{l}{T} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$	0,501	0,455	0,455	0,495	0,500

e) Pro malé úhly a $T = 2$ s platí

$$l = \frac{g T^2}{4 \pi^2} = 0,995 \text{ m} \doteq 1 \text{ m}.$$

Naměřeno

T [s]	2,01	1,99	2,00	1,99	2,00
---------	------	------	------	------	------

Střední hodnota

$$\bar{T} = 1,995 \text{ s}.$$

b) Druhé kolo soutěže

1. příklad (navrhl Bohuslav Vilím)

Elektrický spotřebič na napětí U , který má příkon P , je nouzově připojen na síť o napětí U' ($U' > U$).

a) Jak veliký je odpor R a jakým způsobem je k spotřebiči připojen, pracuje-li spotřebič s plným výkonem a nepoškozuje se? Nakreslete schéma zapojení.

b) Jak veliký příkon P' má odpor R ? Porovnejte příkony odporu R a spotřebiče.

c) K jak velkým ztrátám na proudové energii dochází za dobu t pracovních hodin spotřebiče tím, že není zapojen na správné napětí?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $U = 120 \text{ V}$, $U' = 220 \text{ V}$, $P = 600 \text{ W}$, $t = 10 \text{ hodin}$. Odpory pří-
vodních vodičů zanedbejte.

Řešení: Má-li spotřebič pracovat s plným výkonem a nepoškozo-
vat se, musí jím procházet při napětí U proud I , jehož velikost určíme ze vztahu pro příkon
 $P = UI$, takže $I = \frac{P}{U}$. Kdyby bylo na svorkách

spotřebiče vyšší napětí než U , poškozoval by se. Je-li
tedy spotřebič připojen k síti o napětí U' , musí k němu
být přiřazen v sérii odpor R , na jehož svorkách je napětí
 $U' - U$. Spotřebičem i odporem R protéká pak proud I ,
takže podle Ohmova zákona vychází pro odpor R hodnota

$$R = \frac{U' - U}{I} = \frac{(U' - U) U}{P}. \quad (1)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

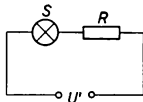
$$R = \frac{(220 - 120) \cdot 120}{600} \frac{\text{V}^2}{\text{VA}} = 20 \Omega.$$

Odpor R je zařazen v obvodu sériově se spotřebičem,
jeho velikost je obecně určena vztahem (1) a pro dané
hodnoty má velikost 20Ω (obr. 76).

b) Odpor R má příkon

$$P' = (U' - U) I = \frac{(U' - U) P}{U}.$$

(2)



Obr. 76

Pro dané hodnoty vychází

$$R = \frac{100 \cdot 600}{120} \frac{\text{V W}}{\text{V}} = 500 \text{ W}.$$

$$\text{Poměr } \frac{P'}{P} = \frac{U' - U}{U} = \frac{100}{120} \frac{\text{V}}{\text{V}} = \frac{5}{6}. \quad (3)$$

Příkon P' odporu R je 500 W. Obecně je určen vztahem (2). Vztah (3) udává velikost poměru příkonu odporu R k odporu spotřebiče.

c) Odpor R spotřebuje za dobu t energii

$$W = P' t = \frac{(U' - U) P t}{U}. \quad (4)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$W = \frac{100 \cdot 600 \cdot 10}{120} \frac{\text{V W h}}{\text{V}} = 5 \text{ kWh}.$$

Za 10 pracovních hodin dojde na odporu R ke ztrátě 5 kWh proudové energie. Obecně je tato hodnota určena vztahem (4).

2. příklad (navrhl Stanislav Ondrejka)

Projektíl hmotnosti m vletí rychlostí v_0 kolmo do zvislej pevnej steny, ktorá pôsobí na prenikajúci projektíl priemernou brzdiacou silou F .

a) Aká musí byť hrúbka steny, aby projektíl vyletel z nej rýchlosťou $v = \frac{v_0}{n}$?

b) Aký čas Δt sa pritom bude projektíl v stene pohybovať?

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $m = 20 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, $v_0 = 500 \text{ m s}^{-1}$, $F = 8 \cdot 10^3 \text{ N}$, $n = 3$.

Riešenie: Kinetickú energiu projektílu vnikajúceho do steny budeme značiť W_1 , vystupujúceho zo steny W_2 .

a) Pretože polohová energia tiažová projektílu je pri

vstupe do steny a pri výstupe z nej rovnaká, je celkový rozdiel mechanických energií projektilu pri vstupe a pri výstupe zo steny

$$W_1 - W_2 = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 - \frac{v_0^2}{n^2} \right) = \frac{m v_0^2 (n^2 - 1)}{2n^2}.$$

Podľa zákona premeny a zachovania mechanickej energie rovná sa tento rozdiel práci $A = F \cdot d$, ktorú vykoná projektil pri prenikaní stenou. Platí teda rovnica

$$F d = \frac{m v_0^2 (n^2 - 1)}{2 n^2}, \text{ z ktorej vypočítame}$$

$$d = \frac{m v_0^2 (n^2 - 1)}{2 n^2 F}. \quad (1)$$

Pre dané hodnoty výjde

$$d = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 25 \cdot 10^4 (9 - 1)}{2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 10^3} \cdot \frac{\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2}}{\text{kg m s}^{-2}} = \frac{5}{18} \text{ m} =$$

$$= 0,278 \text{ m}.$$

Stena má hrúbku $d = 0,278 \text{ m}$, ktorá je všeobecne určená vzťahom (1).

b) Pretože v stene pôsobí na projektil konštantná priemerná brzdiaca sila, môžeme pohyb projektilu považovať za pohyb rovnomerně spomalený, ktorý je podľa predpokladu priamočiary. Jeho zrýchlenie má hodnotu

$$a = \frac{v - v_0}{\Delta t} = \frac{v_0 (1 - n)}{n \Delta t}. \quad (2)$$

Pretože brzdiaca sila F , ktorú kladie stena prenikajúcemu projektilu, má opačnú orientáciu ako vektor rýchlosti projektilu, platí podľa druhého Newtonovho zákona $F = - m a$ a teda podľa vzťahu (2) výjde

$$-\frac{F}{m} = \frac{v_0(1-n)}{n \Delta t} \text{ a odtiaľ}$$

$$\Delta t = \frac{m v_0 (n-1)}{n F}. \quad (3)$$

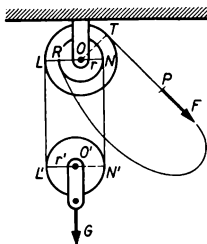
Po dosadení zadanych hodnôt dostaneme

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot (3-1)}{3 \cdot 8 \cdot 10^3} \frac{\text{kg m s}^{-1}}{\text{kg m s}^{-2}} = \frac{5}{6} \cdot 10^{-3} \text{ s} = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ s}.$$

Projektíl sa bude v stene pohybovať za čas, ktorý je určený všeobecne vzťahom (3). Jeho hodnota je $\Delta t = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

3. príklad (navrhl František Černický)

Diferenciální kladkostroj (viz obr. 77) má dvě sousedě pevně spolu spojené kladky pevné o poloměru R a r ($R > r$) a volnou kladku o poloměru $r' = \frac{R+r}{2}$.



Obr. 77

Žlábký obou pevných kladek mají zařízení, zabraňující klouzání řetězu. Příslušný řetěz je do sebe uzavřen. Je veden vrchem z bodu P , nacházejícího se na řetězu napjatém ve směru tečny k poloměru OT , přes větší kladku pevnou na volnou kladku, přes ni na menší kladku pevnou a od ní volnou smyčkou zpět k bodu P , působí síla F , která má směr tečny k poloměru OT a odvíjí

řetěz z větší kladky pevné. Těleso o tíze G je zavěšeno na vidlici kladky volné.

a) Odvoďte podmínku rovnováhy za předpokladu, že tíhu kladky volné i řetězu lze zanedbat.

b) Za předpokladů uvedených v části a) úlohy určete vztah mezi prací A vykonanou silou F při jedné otočce pevných kladek a změnou ΔW tíhové potenciální energie zdvihaného tělesa, nepřihižíme-li ke tření a k otáčivému pohybu kladek.

c) Jak velikou silou F' působíme na řetěz při zvedání tělesa rovnoměrným pohybem, je-li účinnost kladko-stroje η ?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $G = 180$ kp, $R = 0,2$ m, $r = 0,18$ m, $\eta = 60$ %.

Řešení: Soustava dvou pevných spolu spojených kladek je otáčivá okolo pevné vodorovné osy o , procházející bodem O kolmo ke kruhovým stěnám obou pevných kladek. Na obr. 77 je osa o kolmá k nákresně. Protože

$r' = \frac{R + r}{2}$, jsou obě části řetězu, na kterých visí volná

kladka, spolu rovnoběžné (svislé). Proto napíná těleso o tíze G , zavěšené na volné kladce, obě části LL' a NN' řetězu stejně velikými silami $F_1 = F_2 = \frac{G}{2}$, jejichž

působíště jsou v bodech L a N . Rovnováha systému pevných kladek je udržována silou F , působící v bodě P . Vzhledem k ose o mají momenty těchto sil hodnoty $M_1 = F_1 R = \frac{G}{2} R$, $M_2 = -F_2 r = -\frac{G}{2} r$, $M = -FR$.

a) Podle momentové věty je podmínka rovnováhy sil F_1 , F_2 a F vyjádřena rovnicí

$$\frac{G}{2} (R - r) - F R = 0, \text{ z níž určíme}$$

$$F = \frac{G}{2} \frac{R - r}{R}.$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$F = \frac{180}{2} \cdot \frac{0,2 - 0,18}{0,2} \text{ kp} = 90 \cdot \frac{1}{10} \text{ kp} = 9 \text{ kp}.$$

Podmínku rovnováhy na diferenciálním kladkostroji určuje vztah (1). Pro dané hodnoty má síla udržující rovnováhu velikost 9 kp.

b) Při jedné otočce pevných kladek vykoná síla F práci

$$A = 2 \pi R F = 2 \pi R \frac{G}{2} \frac{R - r}{R} = \pi G (R - r). \quad (2)$$

Těleso při tom zvýší svou polohu o h , neboť se obě části řetězu mezi pevnými kladkami a volnou kladkou zkrátí. Na větší pevnou kladku se navine část řetězu délky $l = 2 \pi R$, z menší pevné kladky se odvine část řetězu délky $l' = 2 \pi r$, takže každá z částí LL' a NN' řetězu se zkrátí o $\frac{l - l'}{2} = \pi (R - r)$. O stejnou délku $h = \frac{l - l'}{2}$ se zvýší poloha tělesa o tíze G . Tíhová potenciální energie tělesa vzroste tedy při jedné otáčce pevných kladek o

$$\Delta W = G \frac{l - l'}{2} = \pi G (R - r). \quad (3)$$

Porovnáme-li vztahy (2) a (3), je patrné, že na ideálním diferenciálním kladkostroji je splněn zákon přeměny a zachování mechanické energie.

c) Jestliže diferenciální kladkostroj má účinnost η , pak se využije z celkové práce A' vykonané kladkostrojem při jedné otočce pevných kladek jen její část $A = \eta A'$ ke zvednutí břemene o výšku h . Platí tedy vztah

$$A' = \frac{A}{\eta} = \frac{2 \pi R F}{\eta} = 2 \pi R F', \text{ z něhož vyjde}$$

$$F' = \frac{F}{\eta} = \frac{G}{2 \eta} \cdot \frac{R - r}{R}. \quad (4)$$

Dosadíme-li do vztahu (4) dané hodnoty, dostaneme

$$F' = \frac{100 F}{\eta} = 15 \text{ kp.}$$

Má-li na diferenciálním kladkostroji těleso stoupat rovnoměrným pohybem, musí mít působící síla velikost, jež je určena vztahem (4), tj. 15 kp.

4. příklad (navrhl František Smutný)

V současné době se používá pro přenos rozhlasových a televizních zpráv tzv. stacionárních družic Země. Jsou to družice, které nemění vzhledem k rotující Zemi svou polohu.

a) Po jaké dráze a jak velkou úhlovou rychlostí obíhá stacionární družice Země kolem zemského středu?

b) Jakou vzdálenost od zemského středu má stacionární družice Země a jak velkou má rychlost?

Země se otočí kolem své osy za hvězdný den, tj. za dobu $T = 23 \text{ h } 56 \text{ m } 04 \text{ s} = 86\,164 \text{ s}$. Rovníkový poloměr zemský $R = 6\,378 \text{ km}$.

Řešte nejprve obecně.

Řešení: Označení veličin: Newtonovu gravitační konstantu označíme κ , hmotnost Země m_Z . Stacionární družice má hmotnost m , úhlovou rychlost ω , rychlost v , dostředivé zrychlení a a vzdálenost od zemského středu r .

a) Těleso, které nemá měnit svou polohu vzhledem k Zemi, musí konat rovnoměrný pohyb po kružnici, která má střed na zemské ose a rovinu kolmou k této ose. Perioda kruhového pohybu tohoto tělesa musí být stejná jako perioda T rotující Země.

Protože družice Země obíhají kolem zemského středu, leží střed kruhové dráhy stacionární družice v zemském středu a rovinou této dráhy je rovina zemského rovníku. Označíme-li poloměr kruhové dráhy stacionární družice r , je její úhlová rychlost

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi r}{rT} = \frac{v}{r}. \quad (1)$$

Po dosazení vyjde

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164} \text{ rad s}^{-1} = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}.$$

Stacionární družice Země se pohybuje kolem zemského středu rovnoměrným pohybem po kružnici ležící v rovině zemského rovníku úhlovou rychlostí $\omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$, určenou obecně vztahem (1).

b) Vzdálenost r stacionární družice od zemského středu je rovna poloměru její kruhové dráhy, a je tedy konstantní. Dostředivé zrychlení družice má hodnotu

$$a = r \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r. \quad (2)$$

Dostředivou silou, působící rovnoměrný pohyb družice po kružnici, je síla

$F = \kappa \frac{m_z m}{r^2}$, kterou je družice podle Newtonova gravitačního zákona přitahována k zemskému středu. Platí tedy rovnice

$$m a = \kappa \frac{m_z m}{r^2}, \text{ odkud určíme}$$

$$a = \kappa \frac{m_z}{r^2} = \kappa \frac{m_z}{R^2} \frac{R^2}{r^2} = g \frac{R^2}{r^2}, \quad (3)$$

neboť
$$\kappa \frac{m_z}{R^2} = g.$$

Porovnáme-li vztah (3) se vztahem (2), dostaneme rovnici

$$\frac{4 \pi^2}{T^2} r = g \frac{R^2}{r^2}, \text{ z níž vypočítáme}$$

$$r^3 = \frac{g R^2 T^2}{4 \pi^2}, \text{ takže}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{g R^2 T^2}{4 \pi^2}}. \quad (4)$$

Rozměrová zkouška: $[r] = \sqrt[3]{\text{m s}^{-2} \text{m}^2 \text{s}^2} = \text{m}.$

Ze vztahu (1) určíme rychlost stacionární družice. Platí

$$v = r\omega = \sqrt[3]{\frac{g R^2 T^2}{4 \pi^2}} \frac{2 \pi}{T} = \sqrt[3]{\frac{2 \pi g R^2}{T}}, \quad (5)$$

dosadíme-li za r a ω hodnoty ze vztahů (4) a (1).

Rozměrová zkouška:

$$[v] = \sqrt[3]{\frac{\text{m s}^{-2} \text{ m}^2}{\text{s}}} = \text{m s}^{-1}.$$

Vzdálenost stacionární družice od zemského středu je obecně určena vztahem (4), její rychlost vztahem (5). Výpočtem dostaneme pro tyto veličiny hodnoty

$$r = 4,218 \cdot 10^7 \text{ m}, \quad v = 3,076 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

4. Úlohy kategorie D

Úlohy a řešení recenzovali dr. Bohumil Vlach a dr. Ivan Náter

a) První kolo soutěže

1. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

Dvě síly mají součet velikostí 180 kp. Působí svisle na koncích dvojzvrtné páky, která je v rovnováze ve vodorovné poloze. Jak velké jsou obě síly, je-li poměr ramen 2 : 7?

Řešení: Síly F_1 a F_2 působí na páce, jsou rovnoběžné, proto platí $F_1 + F_2 = 180 \text{ kp}$. Rámeno síly F_1 označme a , rameno síly F_2 označme b . Poněvadž $a : b = 2 : 7$, můžeme délku páky rozdělit na $2 + 7$ stejných dílků o délce d .

Zadání: $F_1 + F_2 = 180 \text{ kp}$,

$$a = 2d, \quad b = 7d. \quad (1)$$

Fyzikální vztah, který řeší problém: momentová věta pro rovnováhu na páce.

$$a F_1 = b F_2, \quad (2)$$

$$2d F_1 = 7d F_2. \quad (2')$$

Rovnici (2') dělíme veličinou d a dostaneme $2 F_1 = 7 F_2$.
(3)

Početní řešení: příklad řešíme buď soustavou rovnic (1) a (3), nebo úsudkem.

$$F_1 + F_2 = 180 \text{ kp}$$

$$2 F_1 = 7 F_2$$

$$F_1 = 180 \text{ kp} - F_2 \text{ a dosadíme do druhé rovnice}$$

$$360 \text{ kp} - 2 F_2 = 7 F_2$$

$$9 F_2 = 360 \text{ kp}$$

$$F_2 = 40 \text{ kp}$$

$$F_1 = 140 \text{ kp.}$$

Na kratším rameni působí síla 140 kp, na delším rameni síla 40 kp. Diskuse:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{7}; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{140}{40}, \quad F_1 : F_2 = 7 : 2.$$

Za rovnováhy na páce je velikost působících sil v obráceném poměru k délce ramen. Za rovnováhy působí na obou ramenech stejné momenty; v našem případě

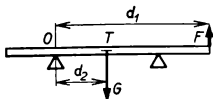
$$M_1 = M_2 = 280 \text{ kpm.}$$

2. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

Ocelový nosník 6 m dlouhý o tíze 2,7 Mp spočívá na trámech umístěných 1,5 m od konců nosníku (obr. 78a).

a) Jakou silou lze zdvihnout jeden konec nosníku?

b) O kolik cm se zdvihne těžiště nosníku, zdvihne-li se jeho konec o 18 cm?



Obr. 78 a

c) Jakou práci vykonal jeřáb, který nosník zvedl podle otázky b)?

d) Podaří se jeden konec nosníku zdvihnout do výše 30 cm, aniž se druhý konec nosníku dotkne vodorovného povrchu země, je-li výška každého ze dvou trámů, na nichž nosník spočívá, 12 cm?

Řešení: $G = 2,7 \text{ Mp} = 2700 \text{ kp}$,

$d_2 = 1,5 \text{ m}$, $d_1 = 4,5 \text{ m}$.

Tíha nosníku má působíště v těžišti T .

Proto moment tíhy nosníku M_1 $M_1 = G d_2$

a moment zdvihající síly M_2 $M_2 = F d_1$.

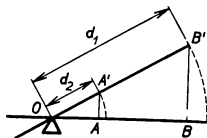
Momenty se při rovnováze sobě rovnají $M_1 = M_2$,
 $G d_2 = F d_1$.

Neznámou je síla F :

$$F = \frac{G d_2}{d_1} = \frac{2700 \text{ kp} \cdot 1,5 \text{ m}}{4,5 \text{ m}} = 900 \text{ kp}.$$

Na zdvižení jednoho konce nosníku je potřeba minimálně síla 900 kp.

Pozn.: Úlohu je možno řešit i tak, že uvažujeme samostatně moment tíhy pravé části nosníku (od osy O) a samostatně moment tíhy levé části nosníku.



Obr. 78 b

b) Trojúhelníky OAA' a OBB' jsou podobné (obr. 78b; úhel AOA' je společný oběma trojúhelníkům, úhly OAA' OBB' jsou pravé). Platí

$OA' : OB' = AA' : BB'$,
 z čehož

$$AA' = \frac{OA' \cdot BB'}{OB'} = \frac{150 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm}}{450 \text{ cm}} = 6 \text{ cm}.$$

Těžiště nosníku se zvedne o 6 cm.

c) Práci A lze vypočítat ze známé tíhy nosníku a ze zvýšení těžiště ve svislém směru, protože tato práce je rovna zvětšení polohové energie nosníku.

$$G = 2,7 \text{ Mp} = 2\,700 \text{ kp},$$

$$s = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m},$$

$$A = G s = 2\,700 \text{ kp} \cdot$$

$$0,06 \text{ m} = 162 \text{ kpm}.$$

Jeřáb vykonal zvednutím nosníku práci 162 kpm.

d) Viz obr. 78c:

$$OC = 150 \text{ cm},$$

$$OB = 450 \text{ cm},$$

$$BB' = 30 \text{ cm}.$$

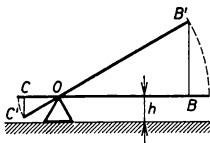
Trojúhelníky OBB' a OCC' jsou podobné, platí tedy $OC' : OB' = CC' : BB'$

$$CC' = \frac{OC' \cdot BB'}{OB'} = \frac{150 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm}}{450 \text{ cm}} = 10 \text{ cm}.$$

Po zvednutí jednoho konce nosníku o 30 cm se druhý konec nedotkne země, protože podložený trám je 12 cm vysoký.

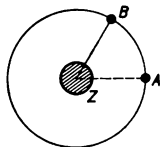
3. příklad (navrhla dr. Marta Chytilová)

Automatická sonda vyslaná k Měsíci se pohybovala na jistém úseku své dráhy průměrnou rychlostí 10 000 km/h, přitom se vzdálila od Země z 250 000 km na 290 000 km. Jakou dráhu urazil zatím Měsíc na svém oběhu kolem Země, víme-li, že průměrná rychlost pohybu Měsíce po



Obr. 78 c

oběžné dráze kolem Země je 3 680 km/h? Let sondy ze Země na Měsíc trval celkem 63,5 hodiny. Jakou dráhu urazil zatím Měsíc na svém oběhu kolem Země?



Obr. 79

Řešení: Situace: Sonda S letí ze Země na Měsíc, obíhající kolem Země (obr. 79). V okamžiku, kdy je sonda vystřelena, je Měsíc v místě A . Zatímco sonda letí na Měsíc, přemístí se Měsíc po dráze AB . Střetnutí — dopad sondy na Měsíc — nastane v místě B . Délku dráhy AB máme vypočítat.

Zadání: Rychlost Měsíce $v_1 = 2680$ km/h, rychlost sondy $v_2 = 10\,000$ km/h, doba letu sondy na Měsíc $t = 63,5$ h ($t = 2,65$ dnů), částečná dráha sondy $\Delta s = 290\,000$ km — $250\,000$ km = $40\,000$ km.

a) Jakou dráhu urazil Měsíc za dobu t_1 , za kterou sonda urazila část dráhy $\Delta s = 40\,000$ km?

$$t_1 = \frac{\Delta s}{v} = \frac{40\,000 \text{ km}}{10\,000 \text{ km/h}} = 4 \text{ h.}$$

Dráha Měsíce za 4 hodiny je $s_1 = 3680$ km/h $\cdot$ 4 h = $14\,720$ km.

Za dobu, v níž sonda uletěla dráhu $40\,000$ km, urazil Měsíc dráhu $14\,720$ km.

b) Za dobu t , za kterou sonda doletěla ze Země na Měsíc, vykonal Měsíc dráhu $s_2 = v_1 t$.

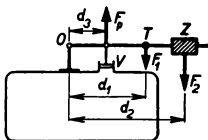
$$s_2 = 2680 \text{ km/h} \cdot 63,5 \text{ h} = 233\,680 \text{ km.}$$

Za dobu, po kterou sonda letěla ze Země na Měsíc, proběhl Měsíc dráhu $s_2 = 233\,680$ km.

4. příklad (navrhl Milan Rádl)

V parním kotli, ve kterém smí být maximální tlak páry 10 at, je pojistný ventil o obsahu 4 cm^2 . Ventil je přitlačován k otvoru jednozvratnou pákou se závažím. Páka působí na ventil ve vzdálenosti 6 cm od osy otáčení. Tíha páky je 2 kp, tíha závaží 5 kp, těžiště páky je vzdáleno 20 cm od osy otáčení. Do jaké vzdálenosti od osy otáčení je nutno na páce upevnit závaží?

Řešení (obr. 80): Na páce je rovnováha, když součet momentů sil, otáčejících pákou v jednom smyslu, se rovná součtu momentů sil, otáčejících pákou v opačném smyslu. Síla $F_1 = 2 \text{ kp}$ působí na rameni $d_1 = 0,2 \text{ m}$. Síla $F_2 = 5 \text{ kp}$ působí na rameni $d_2 = x$. Síla F_p působí na rameni $d_3 = 0,06 \text{ m}$.



Obr. 80

Sílu F_p určíme podle zadání. Tlak páry v kotli je 10 kp/cm^2 . Pára působí na plochu 4 cm^2 pojistného ventilu směrem vzhůru. Proto tlaková síla F_p je

$$F_p = 4 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ kp/cm}^2,$$

$$F_p = 40 \text{ kp}.$$

Rovnice rovnováhy na páce je v našem případě

$$5 \text{ kp} \cdot x + 2 \text{ kp} \cdot 0,2 \text{ m} = 40 \text{ kp} \cdot 0,06 \text{ m}$$

$$x = \frac{2}{5} \text{ m} = 0,40 \text{ m}.$$

Zkouška (dosazením do rovnice):

$$2 \text{ kpm} + 0,4 \text{ kpm} = 2,4 \text{ kpm}.$$

Závaží je třeba umístit ve vzdálenosti 40 cm od osy O.

5. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

V kalorimetru bylo 1500 g vody o teplotě $6,0\text{ }^{\circ}\text{C}$, do které bylo dáno 120 g ledu neznámé teploty. Po vyrovnání teplot byl z vody kalorimetru led vyňat a vážením bylo zjištěno, že se jeho hmota zvětšila na 132 g.

a) Jaká byla teplota směsi v kalorimetru po vyrovnání teplot?

b) Jaká byla původní teplota ledu?

Řešení: a) Po vyrovnání teplot bude v kalorimetru současně voda i led. Poměr jejich množství se již nebude měnit. Proto teplota vody i ledu musí být $0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

b) Vyrovnáním teplot se voda v kalorimetru ochladila z teploty $t_1 = 6,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ na teplotu $t_0 = 0,0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Voda při tom vydala množství tepla Q_1 . Toto teplo však nestačilo na ohřátí ledu, který měl teplotu t (nižší než $t_0 = 0,0\text{ }^{\circ}\text{C}$), na teplotu t_0 . Proto 0,012 kg vody, ochlazené na teplotu t_0 , se přeměnilo na led teploty t_0 . Přitom se uvolnilo skupenské teplo tuhnutí vody Q_2 . Obě množství tepla přijal led a ohřál se na teplotu t_0 . Teplo přijaté ledem označíme Q . Protože nepočítáme se ztrátami tepla v kalorimetru, platí

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

Výpočet Q_1 : Množství vody je $m_1 = 1,50\text{ kg}$, měrné teplo vody je $c_1 = 1\text{ kcal/kg }^{\circ}\text{C}$ (tab. F 9), rozdíl teplot $\Delta t_1 = t_1 - t_2 = 6,0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

$$Q_1 = m_1 c_1 \Delta t_1, \quad Q_1 = 9,00\text{ kcal.}$$

Výpočet Q_2 : Množství vody $0,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ teplé, která se přeměnila v led teploty $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, je $m_2 = 0,012\text{ kg}$. Měrné skupenské teplo tuhnutí vody $l = 80\text{ kcal/kg}$ (Tab. F 9).

$$Q_2 = m_2 l, \quad Q_2 = 0,96\text{ kcal.}$$

Výpočet Q : Množství ledu je $m_2 = 0,120$ kg, měrné teplo ledu je $c_2 = 0,5$ kcal/kg °C (Tab. F 9), teplotní rozdíl $\Delta t_2 = -t - t_0 = -t$.

$$Q = -m_2 c_2 t, \quad Q = -0,060 \text{ kcal } ^\circ\text{C} \cdot t.$$

Platí tedy

$$\begin{aligned} -m_2 c_2 t &= m_1 c_1 \Delta t_1 + m_2 l \\ -0,060 \text{ kcal } ^\circ\text{C} \cdot t &= 9,00 \text{ kcal} + 0,96 \text{ kcal}, \end{aligned}$$

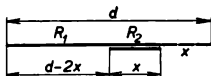
$$t = \frac{-9,96}{0,06} ^\circ\text{C}, \quad t = -166 ^\circ\text{C}.$$

Původní teplota ledu byla $t = -166 ^\circ\text{C}$.

6. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

Od odporového drátu délky d a odporu R byl odštípnut kus délky x a tato odštípnutá část byla přiložena těsně podél zbylé části odporového drátu. Výsledný odpor zbylého drátu spolu s těsně přiloženým odštípnutým kusem téhož drátu byl $\frac{R}{2}$. Jak dlouhá část x drátu byla odštípnuta?

Řešení: Situaci ukazuje obr. 81a. Měrný odpor drátu značíme ρ , odštípnutou délku drátu x , jeho průřez S . Pro jednoduchost si představíme, že odštípnutý kus drátu přiložíme ke zbytku drátu tak, aby jeden konec obou drátů byl společný.



Obr. 81 a

Odpor celého drátu $R = \rho \frac{d}{S}$. Obrázek ukazuje, že máme vlastně v sérii zapojeny dva odpory, jeden tvořený jednoduchým drátem délky $d - 2x$, druhý zdvojený

délky x , jejich odpory jsou R_1 a R_2 a platí pro výsledný odpor

$$R_3 = R_1 + R_2.$$

1. způsob: Vodič o délce $d - 2x$ má odpor R_1 a průřez S , vodič délky x má průřez $2S$ a jeho odpor označme R_2 .

$$R_1 = \varrho \frac{d - 2x}{S}, \quad R_2 = \varrho \frac{x}{2S}, \quad R_3 = \frac{R}{2} = \frac{1}{2} \varrho \frac{d}{S},$$

$$\frac{1}{2} \varrho \frac{d}{S} = \varrho \frac{d - 2x}{S} + \varrho \frac{x}{2S}, \quad \left| \frac{2S}{\varrho} \right.$$

$$d = 2d - 4x + x,$$

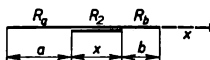
$$x = \frac{d}{3}.$$

Aby výsledný odpor vodiče byl poloviční, musíme odštvpnout třetinu délky vodiče a přiložit podél zbývající části.

2. způsob: Odpor R_2 je výsledný odpor dvou stejných vodičů o délce x a o průřezu S , spojených vedle sebe. Převrácenou hodnotu výsledného odporu R_2 najdeme jako součet převrácených hodnot obou odporů:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{S}{\varrho x} + \frac{S}{\varrho x}, \quad R_2 = \frac{\varrho x}{2S}.$$

Další výpočet stejný jako u 1. způsobu.



Obr. 81 b

Je nutno ještě dokázat, že odštvpnutou část můžeme přiložit kdekoli ke zbývajícimu vodiči (obr. 81b). Máme spojeny 3 vodiče za sebou: jednoduchý vodič délky a ,

zdvojený délky x a jednoduchý délky b .

Celkový odpor tedy bude $R_a + R_2 + R_b = \frac{R}{2}$.

Při sečítání však můžeme nejprve sečítat odpory $R_a + R_b$, což však je odpor vodiče celkové délky $(d - 2x)$, jako v případě 1. Nezáleží tedy na tom, kam odštipnutou část přiložíme.

7. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

Tři odpory $R_1 = 3,00 \Omega$, $R_2 = 6,00 \Omega$, $R_3 = 12,00 \Omega$ lze spolu spojit mnoha způsoby. Načrtněte schematicky všechna možná spojení, u každého z nich určete vztah pro výpočet výsledného odporu a vypočítejte tento odpor.

Řešení: Vodiče, tj. odpory, můžeme spojovat za sebou (do série) nebo paralelně (vedle sebe). Výsledný odpor vodičů spojených za sebou vypočteme tak, že sečteme odpory jednotlivých vodičů. Převrácenou hodnotu odporu vodičů spojených vedle sebe vypočteme tak, že sečteme převrácené hodnoty odporů jednotlivých vodičů.

Výsledný odpor dvou vodičů o odporech R_a , R_b spojených vedle sebe určíme takto: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b}$,

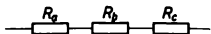
$$R = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b}. \quad (1)$$

Stejným způsobem určíme výsledný odpor R tří vodičů o odporech R_a , R_b , R_c , spojených vedle sebe

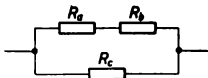
$$R = \frac{R_a R_b R_c}{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}. \quad (2)$$

Tři dané odpory můžeme spojit takto (viz obr. 82a, b, c, d):

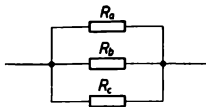
- a) všechny tři odpory do série,
 b) všechny tři odpory paralelně,
 c) dva libovolné odpory paralelně a třetí s touto dvojicí sériově,



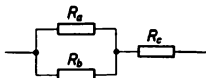
Obr. 82 a



Obr. 82 c



Obr. 82 b



Obr. 82 d

- d) dva libovolné vodiče do série a třetí k této dvojici paralelně.

Řešení: a) $R = R_1 + R_2 + R_3$, $R = 21,00 \Omega$.

b) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$, dosazením dostaneme

$R = 1,71 \Omega$.

c): c₁) Výsledný odpor R_p paralelně spojených vodičů R_1 a R_2 určíme ze vztahu (1). Výsledný odpor R všech tří vodičů pak je

$$R = R_p + R_3, \quad R = 14,00 \Omega.$$

c₂) Obdobně, když jsou paralelně spojeny odpory R_1 a R_3 , je $R = 8,40 \Omega$.

c₃) Když jsou paralelně spojeny odpory R_2 a R_3 , je $R = 7,00 \Omega$.

d) Spojíme dva vodiče za sebou a třetí s touto dvojicí paralelně:

$$d_1) R_s = R_1 + R_2, \quad R_s = 3,00 \Omega + 6,00 \Omega = 9,00 \Omega.$$

Celkový odpor počítáme ze vztahu:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_3}, \quad R = \frac{R_s \cdot R_3}{R_s + R_3}, \quad R = 5,14 \Omega.$$

d₂) Obdobně, když jsou za sebou spojeny odpory R_1 a R_3 , je $R_s = 15,00 \Omega$, $R = 4,28 \Omega$.

d₃) Když jsou za sebou spojeny odpory R_2 a R_3 je $R_s = 18,00 \Omega$, $R = 2,57 \Omega$.

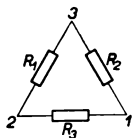
Diskuse:

1. Našli jsme celkem 4 možné způsoby spojení tří odporů. Celkem je to osm různých spojení. Udělejme si přehled výsledných odporů pro jednotlivá spojení:

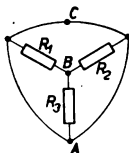
a)	c)	d)
$R = 21,00 \Omega$	c ₁) $R = 14,00 \Omega$	d ₁) $R = 5,14 \Omega$
b)	c ₂) $R = 8,40 \Omega$	d ₂) $R = 4,28 \Omega$
$R = 1,71 \Omega$	c ₃) $R = 7,00 \Omega$	d ₃) $R = 2,57 \Omega$

Z přehledu je vidět, že největší výsledný odpor dostaneme, když spojíme všechny 3 odpory za sebou, nejmenší odpor dostaneme, když spojíme všechny 3 odpory vedle sebe. Výsledné odpory ve zbývajících 6 spojeních jsou obsaženy v intervalu určeném odpory v případě a) a b).

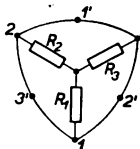
2. Spojení odporů, která jsme provedli, jsou správná. Vyskytuje se otázka, nejsou-li možná ještě jiná spojení. Tři odpory je totiž možno spojit ještě způsoby, které ukazují obr. 83a, b, c.



Obr. 83 a



Obr. 83 b



Obr. 83 c

Při spojení podle obr. 83a můžeme přivést napětí do uzlů 1 a 2, potom je to případ d_1), v uzlech 1 a 3 — případ d_2), v uzlech 2 a 3 — případ d_3).

Při spojení podle obr. 83b můžeme přivést napětí do bodů A a B , pak je to případ b). Do bodů A a C podle obr. 83b (libovolných dvou bodů na vnějších spojích odporů) nelze napětí přivádět, nastal by zkrat. Při spojení podle obr. 83c přivedeme napětí do bodů 1 a 1', pak je to případ c_3), nebo 2 a 2' = případ c_2), 3 a 3' = případ c_1). Samozřejmě ostatní (vnější) spoje musí být přerušeny, jinak by opět nastal zkrat.

Nalezli jsme tedy všechny možné způsoby řešení.

8. příklad (navrhl J. Novotný)

Tři žárovky na napětí 110 V mají příkony 50 W, 50 W, 100 W.

a) Jak velký proud prochází každou žárovkou, svítí-li plným světlem? Jaký je odpor každé žárovky?

b) Žárovky chceme použít pro napětí 220 V. Jak je připojíme, aby se nespálily a svítily všechny současně plným světlem? Nakreslete schéma spojení.

c) Jaký je výsledný odpor soustavy? Jaký výsledný proud prochází obvodem?

Řešení: Příkon P každého elektrického spotřebiče je určen součinem proudu I , který spotřebičem prochází, a napětí U , které je na spotřebiči:

$$P = U I. \quad (1)$$

Známe-li napětí U na spotřebiči a proud I , vypočteme odpor spotřebiče z Ohmova zákona: $R = \frac{U}{I}$. (2)

Dále budeme veličiny, týkající se 50W žárovek označovat indexem 1, veličiny týkající se 100W žárovky indexem 2.

a) $P_1 = 50 \text{ W}$, $P_2 = 100 \text{ W}$, $U_1 = U_2 = 110 \text{ V}$.
Podle rovnice (1) je

$$I_1 = \frac{50 \text{ W}}{110 \text{ V}}, \quad I_1 \doteq 0,45 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{100 \text{ W}}{110 \text{ V}}, \quad I_2 \doteq 0,91 \text{ A}.$$

Podle rovnice (2) je

$$R_1 = \frac{110 \text{ V}}{0,45 \text{ A}}, \quad R_1 \doteq 240 \Omega.$$

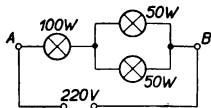
$$R_2 = \frac{110 \text{ V}}{0,91 \text{ A}} \doteq 120 \Omega.$$

b) Kdybychom všechny tři žárovky spojili za sebou, byl by výsledný odpor této soustavy spotřebičů (viz úlohu 7)

$R = 240 \Omega + 240 \Omega + 120 \Omega$, $R = 600 \Omega$.
Pak by každou žárovkou procházel proud

$$I = \frac{220 \text{ V}}{600 \Omega}, \quad I \doteq 0,36 \text{ A}.$$

Srovnáme-li I s hodnotami I_1 a I_2 z případu a), vidíme, že v tomto případě by žárovky nesvítily plným světlem. Musíme vyhledat takové spojení, aby se odpor žárovek zmenšil. Užijeme spojení podle schématu c) z příkladu 7 (obr. 84):



Obr. 84

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} = 2 \cdot \frac{1}{R_1}, \quad R_p = 120 \, \Omega.$$

Výsledný odpor soustavy všech tří žárovek, spojených podle obr. 84, jest

$$R = R_p + R_2, \quad R = 240 \, \Omega.$$

Poněvadž na soustavě žárovek (mezi body A a B) je nyní napětí 220 V, prochází soustavou proud

$$I = \frac{220 \, \text{V}}{240 \, \Omega}, \quad I \doteq 0,91 \, \text{A}.$$

Poněvadž $I = I_2$ a poněvadž napětí na 100W žárovce je $0,91 \, \text{A} \cdot 120 \, \Omega \doteq 110 \, \text{V}$, svítí žárovka 100W plným světlem a nespálí se.

Prochází-li obvodem proud $I = 0,91 \, \text{A}$, pak každou z 50W žárovek prochází proud

$$\frac{I}{2} = 0,45 \, \text{A}.$$

Na každé žárovce je napětí (mezi body C a B)

$$U = 0,45 \, \text{A} \cdot 240 \, \Omega \doteq 110 \, \text{V}.$$

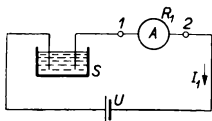
Proto i 50W žárovky nyní svítí plným světlem a nespálí se.

9. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

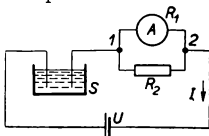
Stupnice ampérmetru se obvykle kontroluje tak, že proud protékající ampérmetrem se vede roztokem stříbrné soli. Je totiž přesně zjištěno, že proud 1 A vyloučí za 1 s z roztoku 1,118 mg stříbra.

Při kontrole ampérmetru se při plné výchylce ručky měřidla o vnitřním odporu $4,8\ \Omega$ vyloučilo za 15 minut 0,4926 g stříbra. Jak velký odpor musí mít bočník, připojený k ampérmetru, aby plná výchylka měřidla odpovídala proudu 1 A?

Řešení: Na obr. 85a je S vanička s roztokem stříbrné soli, A je ampérmetr o odporu R_1 .



Obr. 85 a



Obr. 85 b

Ve spojení podle obr. 85a procházel obvodem proud I_1 , jehož hodnotu vypočteme podle zadání:

Čas 15 minut = 900 s.

Množství stříbra m vyloučené z roztoku za 1 s vypočteme z úměry

$$498,6\text{ mg} : m = 900\text{ s} : 1\text{ s},$$

tedy

$$m = \frac{498,6\text{ mg} \cdot 1\text{ s}}{900\text{ s}} = 0,554\text{ mg}.$$

Proudem 1 A by se vyloučilo 1,118 mg stříbra za 1 s, tedy proud, procházející vaničkou, je určen úměrou

$$0,554 \text{ mg} : 1,118 \text{ mg} = I_1 : 1 \text{ A},$$

tedy

$$I_1 = \frac{0,554 \text{ mg} \cdot 1 \text{ A}}{1,118 \text{ mg}} \doteq 0,5 \text{ A (přesněji } 0,47 \text{ A)}.$$

Ručka ampérmetru má tedy plnou výchylku, protéká-li ampérmetrem proud $I_1 = 0,5 \text{ A}$. Jestliže v zapojení podle obr. 85b má v hlavní větvi procházet proud $I = 1 \text{ A}$, ampérmetr má mít při tom plnou výchylku, musí bočnickem protékat rovněž proud 0,5 A. Na svorkách 1 a 2 ampérmetru musí být v obou případech stejné napětí U . Totéž napětí je v druhém případě i na bočniku. Podle Ohmova zákona je odpor bočniku

$$R_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{U}{I_1} = R_1,$$

protože

$$I_2 = I_1.$$

Je tedy

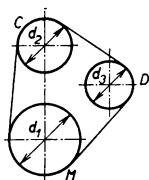
$$R_2 = R_1 = 4,8 \Omega.$$

b) Druhé kolo soutěže

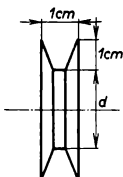
1. příklad (navrhl Vladimír Strnad)

Čerpadlo vody a dynamo v automobilu jsou poháněny společným klínovým řemenem, jak ukazuje obr. 86. V obrázku je řemenička M , která je poháněna motorem a má stejný počet otáček jako motor. Její průměr je d_1 . C a D jsou řemeničky čerpadla a dynama. Jejich průměry jsou d_2, d_3 .

a) Určete poměr průměrů řemeniček $d_1 : d_2 : d_3$ tak,



Obr. 86. Řemenička:



Řez klínovým řemenem



aby při n otáčkách motoru za minutu mělo čerpadlo $\frac{3}{2} n$ a dynamo $2 n$ otáček za minutu. Je-li známa délka průměru d_1 , určete i délku průměrů d_2 a d_3 .

b) Vypočítejte, jakou rychlostí se bude pohybovat značka na vnější (širší) straně klínového řemene, koná-li motor n otáček za minutu.

Řešte nejprve obecně a potom číselně pro $n = 4\,000$ ot./min, $d_1 = 8$ cm.

Řešení: a) Pro poměr řemeniček M, C platí:

$$d_1 : d_2 = \frac{3}{2} n : n = 3 : 2 = 6 : 4, \quad (1)$$

podobně pro poměr řemeniček M, D

$$d_1 : d_3 = 2 n : n = 2 : 1. \quad (2)$$

Z (1) určíme d_2

$$d_2 = \frac{2 d_1}{3}, \quad \text{z (2)} \quad d_3 = \frac{d_1}{2} \text{ a poměr}$$

řemeniček C, D je

$$d_2 : d_3 = 4 : 3.$$

Pro poměr průměrů řemeniček M , C , D pak dostaneme

$$d_1 : d_2 : d_3 = 6 : 4 : 3 .$$

b) Rychlost v značky na vnější straně řemene je rovna obvodové rychlosti řemeničky M , kde vnější průměr nyní bude

$$d'_1 = d_1 + 2 \text{ cm} ,$$

obvod řemeničky M je

$$O = \pi d'_1$$

a při n otáčkách motoru za minutu proběhne značka za čas t dráhu

$$s = n \pi d'_1 t .$$

Pro rychlost v pak máme

$$v = \frac{s}{t} = n \pi d'_1 .$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme

$$v = 4000 \text{ min}^{-1} \cdot \pi \cdot 10 \text{ cm} = 125\,600 \text{ cm/min} \quad \text{nebo}$$

$$v = 125\,600 \cdot \frac{60}{10^5} \text{ km/h} = 75,36 \text{ km/h} .$$

2. příklad (navrhl Jozef Zámečník)

Délka horskej pozemnej lanovej dráhy je $l = 3,2 \text{ km}$, výškový rozdiel $h = 645 \text{ m}$. Vozeň o celkovej tiaži $G = 2\,600 \text{ kp}$ i s cestujúcimi je ťahaný elektromotorom z dolnej stanice na hornú. Ťažné lano sa navíja na bubon o polomere $R = 0,7 \text{ m}$, s ktorým je pevne spojené hnané ozubené koleso o polomere $r = 1 \text{ m}$, na ktorom je $z_1 = 280$ zubov. Hnacie koleso elektromotora má $z_2 = 8$ zubov. Priemerná cestovná rýchlosť vozňa je $v = 3,14 \text{ m/s}$.

- a) Za aký čas prejde vozeň celú dráhu?
 b) Akú prácu vykoná elektromotor, ak vozeň prejde celú dráhu?
 c) Aký je priemerný počet otáčiek elektromotora za minútu?
 d) Akou silou pôsobí motor na obvode hnacieho kolesa na koleso hnané?

Trenie a hrúbku lana zanedbajte.

Riešenie: Označenie veličín: l = dĺžka dráhy (naklonenej roviny), h = výška naklonenej roviny, G tiaž vozňa i s cestujúcimi, r polomer navijacieho bubna, R polomer hnaného kolesa, z_1 počet zubov hnaného kolesa, z_2 počet zubov hnacieho kola, v je rýchlosť vozňa.

- a) Vozeň koná pohyb rovnomerný rýchlosťou v , preto

$$l = v t,$$

kde t je čas, za ktorý prejde vozeň celú dráhu. Potom

$$t = \frac{l}{v} = \frac{3\,200\text{ m}}{3,14 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1\,019\text{ s}.$$

- b) Pohyb vozňa považujeme za pohyb po naklonenej rovine o dĺžke l a výške h . Potom pre prácu A platí

$$A = G h = 2\,600\text{ kp} \cdot 465\text{ m} = 1\,187\,000\text{ kpm}.$$

- c) Bubon, na ktorý sa navíja lano, sa otočí celkom $\frac{l}{2\pi r}$ krát.

Za jednotku času vykoná n_1 otáčok. Teda

$$n_1 = \frac{\frac{l}{2\pi r}}{t} = \frac{v}{2\pi r}.$$

Pre prevod medzi kolom hnaným a hnacím platí vzťah

$$z_1 n_1 = z_2 n_2 ,$$

kde počet n_2 je počet otáčok hnacieho kola za jednotku času. Pre otáčky elektromotora teda platí

$$n = \frac{z_1 n_1}{z_2} = \frac{z_1 v}{z_2 \cdot 2\pi r} = \frac{280 \cdot 3,14 \text{ m/s}}{8 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 0,7 \text{ m}} = 25 \cdot \frac{1}{\text{s}}.$$

d) Navijací valec s hnaným kolesom je vlastne kolesom na hriadeli. Silu F , pôsobiacu na hnané koleso vypočítame z podmienky rovnováhy pre koleso na hriadeli:

$$F r = f R ,$$

kde f je sila, ktorou je ťahaný vozeň a pre ktorú platí

$$f = G \sin \alpha = \frac{G h}{l} .$$

Potom

$$F = \frac{f R}{r} = \frac{G h R}{l r} = \frac{2\,600 \text{ kp} \cdot 645 \text{ m} \cdot 0,7 \text{ m}}{3\,200 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}} = 367 \text{ kp}.$$

3. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

Jsou k dispozici dva ponorné vařiče o příkonu po 750 W a o účinnosti $\eta = 90 \%$. Jaká doba je třeba k ohřátí 1,0 kg vody z 20,0 °C do varu, použijeme-li

- jeden vařič,
- oba vařiče paralelně zapojené,
- oba vařiče sériově zapojené.

Řešení: Označení veličin: $m = 1,0 \text{ kg}$, $c = 1,0 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}$, $t_2 = 100^\circ\text{C}$, $t_1 = 20,0^\circ\text{C}$, Q množství tepla, potřebné k uvedení vody do varu.

$$Q = m c (t_2 - t_1) = 1,0 \cdot 1,0 (100 - 20) \text{ kcal} = 80 \text{ kcal}.$$

K uvedení vody do varu je třeba 80 kcal tepelné energie.

a) Při použití jednoho vaříče je použitý výkon 750 W.

$$Q = 0,000\ 24\ \text{kcal} \cdot \text{J}^{-1} P t_a \eta,$$

kde t_a je doba k ohřátí vody do varu jedním vaříčem.

$$\begin{aligned} t_a &= \frac{Q}{0,000\ 24\ \text{kcal} \cdot \text{J}^{-1} \cdot P \cdot \eta} = \\ &= \frac{80\ \text{kcal}}{0,000\ 24\ \text{kcal J}^{-1} \cdot 750\ \text{J s}^{-1} \cdot 0,90} = 490\ \text{s} \doteq 8\ \text{min}. \end{aligned}$$

K uvedení vody do varu jedním vaříčem je třeba asi 8 minut.

b) Potřebná doba bude poloviční, použijeme-li oba vaříče paralelně, neboť každý vaříč bude pracovat s jmenovitým výkonem a ve vodě se bude za časovou jednotku uvolňovat dvojnásobné množství tepelné energie ve srovnání s případem a).

K uvedení vody do varu dvěma paralelně zapojenými vaříči je třeba asi 4 minut.

c) Zapojíme-li dva vaříče za sebou, jejich odpory se sčítají, přitom na každém vaříči bude poloviční napětí, protože plné jmenovité napětí bude jen na krajních svorkách obou vaříčů sériově spojených. Přitom vaříč bude protékat poloviční proud ve srovnání s případem a).

Výkon dvou sériově zapojených vaříčů bude tedy poloviční proti případu a).

K uvedení vody do varu dvěma sériově zapojenými vaříči je třeba doby asi 16 minut.

4. příklad (navrhl Miroslav Voráček)

Na kolik stejných částí je třeba rozřezat drát, jehož odpor je 484 Ω , abychom při spojení těchto částí vedle

sebe dostali odpor $4\ \Omega$? Drát je z homogenního materiálu a má na všech místech stejný průřez.

Řešení: Označme odpor původního drátu R . Drát o odporu R rozřežeme na n stejných částí. Odpor R_n jedné části je

$$R_n = \frac{R}{n}.$$

Převrácená hodnota $\frac{1}{R_v}$ výsledného odporu je dána součtem převrácených hodnot odporů R_n . Je to v našem případě n sčítanců výrazu $\frac{1}{R_n}$, tedy

$$\frac{1}{R_v} = n \cdot \frac{1}{R_n}.$$

Za R_n dosadíme $\frac{R}{n}$: $\frac{1}{R_v} = n \frac{n}{R}$,

$$n^2 = \frac{R}{R_v},$$

$$n = \sqrt{\frac{R}{R_v}} = \sqrt{\frac{484}{4}} = \sqrt{121} = 11.$$

Drát je nutno rozdělit na 11 stejně dlouhých částí.

IV. ČÁST: PRVNÍ MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V POLSKU

Ve dnech 25. června až 4. července 1967 byla uspořádána ve Varšavě I. mezinárodní fyzikální olympiáda (I. MFO). Bylo to z iniciativy Polska, které pozvalo Sovětský svaz, Německou demokratickou republiku, Československo, Maďarsko, Rumunsko, Bulharsko a Jugoslávii. Olympiády se zúčastnilo jen pět států: Polsko, Československo, Maďarsko, Bulharsko a Rumunsko. Z každého státu byli pozváni tři studenti středních škol s jedním vedoucím. Vedením československé delegace byl ministerstvem školství pověřen předseda ÚV FO prof. dr. Rostislav Košťál.

Ze žáků, vybraných na schůzi ÚV FO dne 12. května 1967, se nemohl zúčastnit Stanislav Slouka a místo něho nastoupil náhradník, takže členy našeho družstva byli:

Jaroslav Kozáčík, SPŠ jaderné techniky v Praze,
Ladislav Obdržálek, SVVŠ Brno, Koněvova,
František Klein, SVVŠ Brno, Elgartova.

Soutěž byla zahájena 25. června v přijímacím sále Turistického hotelu ve Varšavě. Schůzi řídil prof. dr. Szczepan Szczeniowski, předseda hlavního komitétu fyzikální olympiády v Polsku. O organizačních věcech referoval prof. dr. Czesław Ścisłowski, vedoucí polské fyzikální olympiády. Potom promluvil vedoucí československé delegace a po něm ostatní vedoucí delegací.

Soutěžilo celkem 15 žáků (z toho 2 dívky — z Bulharska a z Rumunska).

Na poradě vedoucích delegací s polským hlavním komitétem fyzikální olympiády bylo oznámeno, že příklady připravil polský výbor a že budou dány vedoucím delegací půl hodiny před zahájením soutěže k překladu. Klasifikace se bude provádět podle polského systému bodování:

klasifikace	1+	1	1-	2+	2	2-	3+	3	3-	4+	4 (nedostatečně)
body	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

K řešení byly dány tři teoretické příklady, z nichž jeden byl problémový, a jedna experimentální úloha. Poněvadž bylo pravděpodobné, že všichni účastníci neprobrali ve škole látku všech úloh, byl dán jeden náhradní teoretický příklad, který se však hodnotil nejvýše 6 body. Do součtu se braly tři příklady s nejvyšším počtem bodů.

Na poradě předložil vedoucí československé delegace návrh statutu MFO (vypracovaný polsky, rusky, německy, francouzsky a anglicky) a byl pověřen, aby podle připomínek jednotlivých států vypracoval návrh definitivního statutu MFO. Na závěrečné schůzi dne 4. července byl k přípravě příští mezinárodní olympiády zvolen tříčlenný výbor, v němž mimo vedoucího delegace ČSSR jsou členy vedoucí polské a maďarské delegace.

Dne 26. června byly ve velké posluchárně ústavu experimentální fyziky varšavské university zadány žákům tyto teoretické příklady:

1. Na svislém sloupu výšky h leží koule o hmotnosti M . Střela o hmotnosti m letí horizontálně rychlostí v_0 a prorazí kouli středem. V jaké vzdálenosti od sloupu

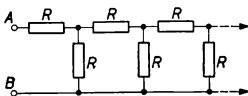
dopadne střela, jestliže prostřelená koule dopadne do vzdálenosti S od sloupu?

Jaká část kinetické energie střely se přeměnila na teplo při průstřelu koule? Odpor vzduchu při tom zanedbejte.

Výpočet proveďte pro tyto hodnoty: $h = 5$ m, $M = 200$ g, $m = 10$ g, $v_0 = 500$ m s⁻¹, $S = 20$ m.

2. Nekonečný systém stejných odporů je spojen tak, jak ukazuje obr. 87. Vypočtete odpor mezi body A a B .

3. Dvěma stejným koulím o stejné teplotě, z nichž jedna visí na niti a druhá leží na vodorovné rovině, jsou přivedena stejná množství tepla. Oteplení koulí je tak rychlé, že nejsou při dodání tepla žádné tepelné ztráty.



Obr. 87

Budou teploty koulí po jejich ohřátí stejné nebo rozdílné, a proč?

4. Náhradní příklad: V zásobníku objemu $V = 10$ l je suchý vzduch za normálních podmínek (0 °C a 760 torrů). Do zásobníku byly přivedeny 3 g vody a zásobník byl ohřát na 100 °C.

Jak velký je tlak v zásobníku po ohřátí? Roztažnost zásobníku zanedbejte.

Na řešení těchto úloh byla dána doba 4 hodiny. Všechny 4 úlohy řešilo jen pět soutěžících, a to všichni tři z Československa, jeden z Polska a jeden z Maďarska.

Následující den se pracovala **laboratorní úloha**. Na její vypracování bylo dáno 5 hodin. Znění úlohy:

Jsou k dispozici: váhy, kalorimetr, teploměr, elektrický zdroj, vypínač, spojovací lanka, kádinky, voda, petrolej, kousky olova k vytárování a stopky.

Určete měrné teplo petroleje. Tepelná kapacita kalorimetru se přitom zanedbává. Měrné teplo vody je $1 \text{ cal g}^{-1} \text{ deg}^{-1}$.

Uveďte zdroje chyb.

Jak se určí měrné teplo petroleje, když se přihlédne k tepelné kapacitě kalorimetru za jinak nezměněných podmínek? Měrné teplo kalorimetru je $0,009 \text{ cal g}^{-1} \text{ deg}^{-1}$.

V tomto příkladě šlo v podstatě o běžné měření. Bylo zde však třeba uvážit, že nebyla např. k dispozici sádka závaží a nebylo možné měřit napětí a proud. Soutěžící si proto museli udělat rozbor úlohy, a pak teprve měřit. Aby soutěžící nemohli navzájem odpozorovat způsob provedení, pracoval každý účastník sám v laboratoři, kterou měl celou k dispozici.

Další den odevzdali vedoucí opravené a ohodnocené úlohy vedoucímu polské FO. Po návratu z cesty po Polsku byli 4. července na slavnostní schůzi ministerstva osvěty a vysokých škol účastníci seznámeni s výsledky.

Úspěšnými řešiteli byli žáci, kteří dosáhli více než 50 % dosažitelných bodů:

žák	země	počet bodů
1. Szalay	M	39
2. Kozáčik	Č	38
3. Cichocki	P	37
4. Mihály	M	35
5.—7. Klein	Č	34
Libuszewski	P	34
Giorgijev	B	34
8.—9. Marossy	M	33
Skarbek	P	33
10. Obdržálek	Č	31
11. Predeasa	R	25

Neúspěšní řešitelé:

12.	B	20
13.	B	14
14.	R	11
15.	R	7

Výsledky podle jednotlivých států :

1. Maďarsko	107 bodů
2. Polsko	104 body
3. Československo	103 body
4. Bulharsko	68 bodů
5. Rumunsko	43 body

Z výsledků jednotlivců je vidět, že jsou zde vlastně 2 skupiny: skupina silnějších do č. 10, jejichž výsledky mohly být nahodile ovlivněny, a od č. 11 skupina, mezi nimiž jsou nápadné rozdíly.

Výsledky členů prvních tří států se liší méně než o 4 %; chyba v bodování jednoho příkladu je velmi snadná při desetistupňové klasifikaci. Proto nelze mezi těmito státy dělat pořadí — jde zde o 1. až 3. místo. Podstatný je rozdíl u skupiny Bulharska a pak za ním jdoucího Rumunska.

Z výsledků můžeme soudit, že u tří vedoucích států, Maďarska, Polska a ČSSR, byla asi stejná úroveň. Tento výsledek můžeme považovat pro nás za velmi uspokojivý.

Polsko, jako hostitelský stát, bylo skutečně velkorysé. Neomezilo se jen na olympiádu, ale umožnilo ze svých prostředků poznat jednotlivým delegacím pamětihodnosti Polska.

Po příjezdu do Varšavy prováděl účastníky starou Varšavou sám prof. dr. Ścisłowski. V neděli dopoledne se uskutečnila prohlídka královského zámku Łazienek,

pak účastníci navštívili koncert v parku u Chopinova pomníku a večer operu Strašný dvůr ve Velkém divadle.

V pondělí odpoledne byla prohlídka Varšavy, technického muzea a kulturního domu, ve středu prohlídka reaktoru ve Świerku a odjezd do Krakova. Ve čtvrtek navštívili účastníci starou Jagelonskou universitu a Wawel, v pátek solné doly ve Věličce a odletěli do Gdańska. Tam byla v sobotu prohlídka města a jeho staré čtvrti.

V neděli dopoledne byl uspořádán výlet parníkem na poloostrov Hell, odpoledne do mořských lázní Sopot a večer návštěva divadla v přírodě, kde byla na programu Moniuszkova opera Halka. V pondělí byl návrat do Varšavy.

V úterý 4. července odpoledne bylo ve Varšavě slavnostní shromáždění na ministerstvu osvěty a vysokých škol, kde za přítomnosti náměstka ministra byly vyhlášeny výsledky a úspěšným řešitelům byly předány hodnotné dary.

Stálým průvodcem delegací byl univ. asistent dr. Piotr Decowski.

Chování a společenské vystupování našich účastníků bylo vzorné.

Je nutno velmi kladně hodnotit iniciativu polského komitétu fyzikální olympiády, že provedl první MFO. Jim patří dík za pěkné ubytování, dobré stravování a za vzornou péči jak při soutěži samé, tak při poznávání krás a pamětihodností hostitelského státu.

Obsah :

I. část: Zpráva o průběhu soutěže	3
1. Organizace soutěže	3
2. Složení ústředního výboru FO ve šk. r. 1966/67	4
3. Krajské výbory FO ve šk. r. 1966/67 a jejich předsedové	5
4. Okresní výbory FO	6
5. Klasifikační zásady	7
6. Průběh soutěže ve šk. r. 1966/67	8
A. První kolo soutěže, kat. A, B, C	8
B. Druhé kolo kat. A, B, C	11
C. Třetí kolo kategorie A	18
D. Závěr soutěže kategorií A, B, C	25
E. První a druhé kolo kategorie D	26
F. Třetí kolo kategorie D	28
II. část: Studijní texty	30
a) Kategorie A	30
b) Kategorie B	45
c) Kategorie C	55
III. část: Soutěžní úlohy	81
1. Úlohy kategorie A	81
a) První kolo soutěže	81
b) Druhé kolo soutěže	106
c) Třetí kolo soutěže	115
2. Úlohy kategorie B	130
a) První kolo soutěže	130
b) Druhé kolo soutěže	149

3. Úlohy kategorie C	157
a) První kolo soutěže	157
b) Druhé kolo soutěže	182
4. Úlohy kategorie D	192
a) První kolo soutěže	192
b) Druhé kolo soutěže	208

IV. část: První mezinárodní fyzikální olympiáda v Polsku 215

Edice: Pomocné knihy pro žáky

Josef Konrád a prof. dr. Rostislav Košťál

Osmý ročník fyzikální olympiády

Obálku navrhl Josef Prchal. Obrázky rýsoval ing. Jan Volejník. Vydání 1. — Praha 1968 — Počet stran 224. Odpovědná redaktorka: Jiřina Cívínová. Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk. Technická redaktorka: Zdeňka Jandáková. Z nové sazby písmen Plantin vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p., závod 4, Ostrovní 30, Praha 1. AA 9,22 — VA 9,66. Tematická skupina a podskupina 03/5. Náklad 3 000 výtisků. Cena brožovaného výtisku Kčs 10,00. 505/21, 852 Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou publikaci č. 85-0-28