

7FO

ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE
KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1965—1966

SPN

7. ročník
fyzikální
olympiády

Zpracoval Jan Tesář

Recenzovali Zdeněk Ungermann a Evžen Říman, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1967

1. Úvod

Ve školním roce 1965/66 probíhal sedmý ročník soutěže fyzikální olympiáda (FO). Soutěž má spolu s matematickou olympiádou (MO) vzbudit v žácích zájem o fyziku a matematiku a získat je k hlubšímu studiu fyziky a technických oborů a zároveň jim dát příležitost, aby mohli ukázat, jaké jsou jejich vědomosti z fyziky a jak jich dovedou při řešení úloh v praxi používat. Cílem soutěže je vyhledávat pro naši socialistickou společnost budoucí odborníky ve fyzice a v technických vědách.

Soutěž FO je pořádána pro žáky středních všeobecně vzdělávacích škol (SVVŠ, na Slovensku SVŠ), středních odborných škol (SOŠ) a základních devítiletých škol (ZDŠ).

Soutěže matematická olympiáda a fyzikální olympiáda se řídí společným organizačním řádem, který je uveřejněn ve Věstníku ministerstva školství a kultury, ročník XIX, v sešitě 12, a byl vyhlášen výnosem ministerstva školství a kultury (MŠK) dne 14. března 1963, č. j. 2293/63-I/1. Citovaný organizační řád obsahuje řadu opatření, která mají sloužit ke zvýšení vědomostí a znalostí matematiky a fyziky a ke vzbuzení a udržování zájmu o tyto vědecké disciplíny, které jsou tak důležité pro techniku, národní hospodářství, dopravu, kulturu a všechny obory věd. Nejdůležitější z těchto opatření jsou uvedena v brožuře V. ročník fyzikální olympiády, vydané Státním pedagogickým nakladatelstvím v roce 1965.

Ve školním roce 1964/65 učinilo MŠK další krok k zvýšení úrovně vyučování matematice a fyzice, jež má vliv i na zvýšení úrovně soutěže FO. Podle výnosu ze dne 25. 3. 1965, č. j. 10262/65-II/1, adresovaného odborům školství a kultury všech KNV, se MŠK rozhodlo zřídit na přírodovědné větvi středních všeobecně vzdělávacích škol od 1. září 1965 speciální třídy pro žáky nadané v matematice a ve fyzice nejen v třetím ročníku, nýbrž již od prvního ročníku. MŠK doporučuje KNV, aby v každém kraji, a to v místě, kde je vysoká škola technického směru, byly zřízeny takové třídy při vybrané SVVŠ.

KNV mají zřídit tuto třídu na školách, které jsou velmi dobře vybaveny pro vyučování přírodovědným předmětům, zejména fyzice, a vyučováním v těchto třídách mají pověřit vynikající učitele, zvláště učitele matematiky a fyziky.

SEDMÝ
ROČNÍK
FYZIKÁLNÍ
OLYMPIÁDY

*Zpráva o řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1965/66*

• PRAHA 1967
STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Pořadatelé FO jsou podle organizačního řádu ministerstvo školství a kultury spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků (JČMF) a s Československým svazem mládeže (ČSM).

Řízením soutěže FO pověřilo MŠK na návrh ústředního výboru JČMF ústřední výbor fyzikální olympiády (ÚV FO).

2. Složení ústředního výboru fyzikální olympiády ve školním roce 1965/66

Ústřední výbor fyzikální olympiády (ÚV FO) se skládá ze zástupců pořádajících institucí, tedy ze zástupců MŠ, ze zástupce JČMF, ze zástupce ČSM a z učitelů fyziky, a to jak ze základních a středních škol, tak i z vysokých škol. Funkční období členů ÚV FO je tříleté.

Letošním ročníkem skončilo tříleté funkční období dosavadního ÚV FO. Na další funkční období jmenovalo MŠ nový ÚV FO, jehož předsedou je dr. Rostislav Košťál, profesor Vyššího vojenského učiliště ve Vyškově.

Ve školním roce 1965/66 měl ústřední výbor FO toto složení:

Předseda: RNDr. *Miloslav Valouch*, profesor matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze

Místopředseda: RNDr. *Marta Chytilová*, vědecká pracovnice Výzkumného ústavu pedagogického v Praze

Jednatel: *Jan Tesař*, učitel SVVŠ v. v. v Praze

Další členové (v abecedním pořadí):

Josef Bartůněk, ústřední inspektor MŠ v Praze

Hana Fischová, instruktorka oddělení studující mládeže ÚV ČSM v Praze

RNDr. *Rostislav Košťál*, profesor Vyššího vojenského učiliště ve Vyškově

Zbyněk Kubiček, odborný asistent pedagogické fakulty (PF) v Olomouci

RNDr. *Ivan Náter* zástupce docenta elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě

Jaroslav Pospíšil, odborný asistent přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci

Evžen Říman, CSc., docent Českého vysokého učení technického v Praze

Emil Sokol, odborný asistent PF v Košicích

RNDr. *Ladislav Thern*, docent Vysoké školy lesnické a dřevařské ve Zvolenu

RNDr. *Bohumil Vlach*, docent přírodovědecké fakulty J. E. Purkyně v Brně

Sídlo ÚV FO je Praha 1 - Malá Strana, Valdštejnské nám. 4.

3. Předsedové krajských výborů fyzikální olympiády ve školním roce 1965/66

Pro řízení soutěže v prvním kole a na provedení soutěže v druhém kole v kategoriích A, B, C se zřizují krajské výbory fyzikální olympiády (KV FO). Jejich předsedy a členy jmenuje odbor školství a kultury KNV na návrh poboček JČMF v kraji. Skládají se ze zástupců odboru školství a kultury, ze zástupců poboček JČMF působících v krajích, ze zástupců krajského výboru ČSM a z učitelů fyziky. V krajských výbo-rech jsou pokud možno zastoupeni též učitelé z vysokých škol.

Ve školním roce 1965/66 byli předsedy KV FO v jednotlivých kra-jích:

Hl. m. Praha — *František Černický*, odborný asistent matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze

Středočeský — *František Fišer*, učitel SVVŠ v. v. v Českém Brodě

Jihočeský — *Konrád Hofman*, odborný asistent PF v Českých Budějovicích

Západočeský — RNDr. *M. Rabas*, docent Vysoké školy strojní a elektrotechnické v Plzni

Severočeský — *Josef Sušanka*, učitel SVVŠ v Teplicích

Východočeský — *Zdeněk Ungermann*, odborný asistent PF v Hradci Králové

Severomoravský — *František Živný*, ředitel SVVŠ v Novém Bohumíně

Jihomoravský — RNDr. *Rostislav Košťál*, profesor Vyššího vojenského učiliště ve Vyškově

Západoslovenský — RNDr. *Ivan Náter*, zástupce docenta elektrotech-nické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě

Středoslovenský — *Rastislav Baník*, odborný asistent PF v Banskej Bystrici

Východoslovenský — *Josef Tuček*, CSc., docent přírodovědecké fa-kulty University P. J. Šafaříka v Košicích

4. Okresní výbory fyzikální olympiády

V kategorii D řídí soutěž prvního kola a provádějí soutěž druhého kola okresní výbory fyzikální olympiády (OV FO), zřízené v sídlech ONV. Okresní výbory FO se skládají ze zástupců odborů školství a kultury příslušného ONV, ze zástupců příslušné pobočky JČMF, ze zástupců okresního výboru ČSM a ze tří až pěti učitelů. Členy OV FO jmenuje odbor školství a kultury ONV.

Zřízení okresního výboru FO ohlásí jeho předseda příslušnému KV FO a ÚV FO.

5. Pokyny k úpravě, postupu řešení a klasifikační zásady pro opravování úloh soutěže

Účastníci soutěže vypracují ve stanovených termínech řešení každé úlohy samostatně, přehledně, čitelně a úpravně na zvláštním půlarchu formátu A4. Záhleví prvního listu každé řešené úlohy se upraví podle tohoto vzoru:

Jméno a příjmení:	Kategorie:	Posudek:
Třída:		
Škola:	Školní rok:	Posuzovali:
Místo:	Kolo:	
Kraj: (v kat. D okres)	Úloha čís.	

Text úlohy
Řešení úlohy

Na každém dalším listě se uvede jméno, škola, číslo úlohy, kategorie a stránka.

Pomocné obrázky, náčrty nebo schémata k řešení úlohy se provádějí tužkou pomocí pravítka a kružidla.

Úlohy se řeší nejprve obecně a teprve potom se provádí výpočet číselné hodnoty hledané fyzikální veličiny.

V obecném řešení je nutno vysvětlovat a odůvodňovat postup řešení. Řešení bez slovního výkladu se hodnotí jako nevyhovující.

Při výpočtu číselné hodnoty hledané veličiny z obecných vztahů se dosazují za obecné veličiny jejich číselné hodnoty i s jednotkami a s jednotkami se počítá až do konečného výsledku.

Do složitých obecných vztahů je možno dosazovat za dané veličiny jen jejich číselné hodnoty a k číselnému výsledku připsat příslušnou jednotku. V takovýchto případech je však nutno provést rozměrovou zkoušku.

Řešení úloh se klasifikuje takto:

a) výborně, jestliže je úloha řešena správně nebo řešení má nanejvýš jen formální chyby nebo jen malou odbornou závadu;

b) dobře, jestliže řešení vystihuje úkol, který měl řešitel podat, ale má přitom větší odborné nedostatky. Dobře je hodnoceno i správné řešení, vyskytují-li se v něm závažné formální nedostatky;

c) nevyhovující, jestliže nedostatky odborného rázu jsou závažné, nebo je podané řešení z větší části neúplné. Řešení je nevyhovující také tehdy, jestliže chybí výklad postupu nebo je neúplný, takže z něho nelze posoudit myšlenkový postup podaného řešení. Také nesamostatně vypracované úlohy jsou nevyhovující.

Při řešení úloh se mají žáci opírat především o učebnice fyziky. Učitel fyziky nebo referent FO jim poradí i jiné vhodné studijní pomůcky. Jednota československých matematiků a fyziků vydává pro žáky časopis Rozhledy matematicko-fyzikální, ve kterých najdou studijní texty a další zprávy o soutěži. Doporučujeme proto žákům, aby tento časopis odebírali.

6. Zpráva o průběhu soutěže FO ve školním roce 1965/66

Soutěž FO probíhala podle organizačního řádu ve čtyřech kategoriích. V kategorii A soutěžili žáci třetích ročníků středních všeobecně vzdělávacích škol a třetích a čtvrtých ročníků středních odborných škol, v kategorii B žáci druhých ročníků a v kategorii C žáci prvních ročníků všech středních výběrových škol. Soutěže v kategorii D se zúčastnili žáci devátých tříd základních devítiletých škol.

Účast v kategorii pro vyšší třídu mohl povolit žák z nižší třídy vyučující učitel spolu s referentem FO na škole.

Soutěž v kategoriích B, C, D se konala ve dvou kolech, v kategorii A ve třech kolech.

A. První kolo soutěže

První kolo soutěže probíhalo na školách v kategoriích A, B, C od září 1965 do 15. února 1966, v kategorii D od září 1965 do 31. března 1966.

V prvním kole všech čtyř kategorií měli soutěžící žáci za úkol vyřešit devět úloh. Kromě toho měli žáci soutěžící v kategoriích A, B, C prostudovat samostatně po jednom studijním tématu uveřejněném v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální*.

Úlohy pro první kolo soutěže navrhovali s. Tesař (1., 2., 3., 8., 9.), Hofman (4., 6.), Baník (5.), Hlad (7.) pro kategorii A, pro kategorii B s. dr. Chytilová (3., 4., 5., 7.), Tesař (2., 6., 9.), Živný (1., 8.), pro kategorii C s. Tesař (2., 4., 6., 7., 9.), dr. Chytilová (5., 8.), dr. Košťál (1.), Fišer (3.), pro kategorii D s. dr. Chytilová (2., 4., 5., 6., 7., 8.), Novotný (3., 9.), Ungerman (1.).

Úspěšnými řešiteli prvního kola byli ti žáci, kteří úspěšně (tj. s kvalifikací 1. nebo 2. stupně) řešili z daných devíti úloh aspoň šest. Ze dvou zadaných experimentálních úloh musil každý soutěžící žák řešit (i když neúspěšně) aspoň jednu, aby se mohl stát úspěšným řešitelem prvního kola soutěže.

Řešení prvních tří úloh odevzdali žáci soutěžící v kterékoli kategorii svému učiteli fyziky nejpozději do 30. listopadu 1965, úlohu čtvrtou až šestou do 10. ledna 1966 v kategoriích A, B, C a do 31. ledna 1966 v kategorii D, úlohu sedmou až devátou do 15. února 1966 v kategoriích A, B, C a do 31. března 1966 v kategorii D.

Texty úloh pro první kolo soutěže všech čtyř kategorií byly uveřejněny v časopise *Fyzika ve škole*, ročník IV, sešit 1. Kromě toho byly vydány ve Státním pedagogickém nakladatelství dva letáky s titulem VII. ročník soutěže fyzikální olympiády, jeden pro kategorii D, jeden pro kategorie A, B, C. Autorem obou letáků je jednatel ÚV FO.

Časopis *Rozhledy matematicko-fyzikální* obsahuje témata k prostudování pro první kolo šestého ročníku FO, a to pro kategorii A v sešitě 1, str. 38, pro kategorii B v sešitě 2 na straně 84, pro kategorii C v sešitě 3 na str. 131. Uvedená témata jsou otištěna také v této publikaci na str. 35 až 67.

Učitelé fyziky na školách vybrali ve stanovených termínech od soutěžících žáků řešené úlohy a opravili a zhodnotili je po dohodě s referenty pro FO na škole. Podle výsledné klasifikace úloh vybrali referenti pro FO spolu s ředitelem školy a s předmětovou komisí pro fyziku žáky, kteří ukončili úspěšně první kolo soutěže. Po skončení prvního kola soutěže odeslali referenti pro FO opravené úlohy všech řešitelů (i neúspěšných) spolu s návrhem na zařazení úspěšných řešitelů do druhého kola soutěže příslušnému KV FO (v kategoriích A, B, C) a OV

FO (v kategorii D). Po kontrole úloh rozhodl KV FO (v kategoriích A, B, C), popř. OV FO (v kategorii D) o definitivním zařazení úspěšných řešitelů do druhého kola soutěže. Počet žáků vybraných do druhého kola soutěže z téže školy nikde nepřestoupil kvótu 10 % celkového počtu žáků příslušného ročníku této školy.

Počet soutěžících žáků v prvním kole soutěže v jednotlivých kategoriích je uveden podle krajů v tabulce II na str. 14 a 15.

B. Druhé kolo soutěže

Druhé kolo soutěže se konalo v kategoriích A, B, C jako kolo krajské, v kategorii D jako kolo okresní.

Úlohy pro druhé kolo soutěže navrhli s. Tesař (3., 4.), Rádl (2.), Kváča (1.) pro kategorii A, s. Ungermaň (1.), Fišer (2.), Tesař (3.), Pivňička (4.) pro kategorii B, s. Tesař (1., 2., 4.), Rádl (3.) pro kategorii C, s. dr. Košťál (1., 3., 4.), Voráček (2.) pro kategorii D.

S. Valouchová, Matyášová a Březinová ze sekretariátu ÚV JČMF rozmnožily v lednu 1966 texty a autorská řešení úloh a zaslaly je k prostudování členům ÚV FO s. dr. Valouchovi, s. dr. Chytilové, s. Tesařovi, s. dr. Košťálovi, s. Fišerovi a s. Rádlovi. Na schůzi uvedených členů ÚV FO konané dne 4. března v Praze byly vybrány, upraveny a schváleny v definitivním znění úlohy pro druhé kolo soutěže, a to čtyři teoretické úlohy pro každou kategorii. Experimentální úlohy v sedmém ročníku soutěže FO nebyly.

Texty úloh pro druhé kolo kategorií A, B, C byly rozeslány v polovině března v zalepených obálkách KV FO. Jedna z úloh v každé kategorii je kontrolní; kontrolovala, zda žáci prostudovali předepsané studijní téma.

Druhé kolo kategorií A, B, C se konalo současně ve všech krajích ve dnech 27. března 1966. Konalo se zpravidla v krajském městě, jen v některých krajích pro každou kategorii v jiném městě.

Řešené úlohy opravili členové KV FO. Úspěšnými řešiteli byli ti žáci, kteří vyřešili úspěšně aspoň dvě úlohy. Nejlepší řešitelé druhého kola soutěže dostali od KV FO čestná uznání a knižní nebo věcné ceny, které jim byly předány buď na slavnostech uspořádaných KV FO po ukončení druhého kola soutěže, nebo prostřednictvím ředitelství škol, na nichž studují.

Přehled o počtu soutěžících žáků v druhém kole kategorií A, B, C je uveden v tab. IV. na str. 18 a 19.

Pro kategorii B a C bylo druhé kolo závěrečné. Nejlepší z úspěšných řešitelů druhého kola FO v kategorii A byli doporučeni KV FO do soutěže třetího kola, která je kolem celostátním.

Druhé kolo kategorie D bylo organizováno jako kolo okresní a konalo se v okresech současně v neděli dne 25. dubna 1966 dopoledne. Texty úloh pro kategorii D, schválené na schůzi ÚV FO dne 4. března 1966, byly zaslány okresním výborům FO v zalepených obálkách s upozorněním, že obálky mohou být otevřeny teprve těsně před zahájením soutěže za přítomnosti soutěžících žáků.

Vypracované úlohy opravili členové OV FO. Úspěšnými řešiteli v kategorii D byli, právě tak jako v kategorii B a C, ti žáci, kteří vyřešili úspěšně aspoň dvě ze zadaných úloh. Všechny úlohy druhého kola v kategorii D byly teoretické.

Okresní výbory FO sestavily seznamy a pořadí úspěšných řešitelů a poslaly KV FO zprávu o průběhu a výsledcích druhého kola soutěže v kategorii D.

Druhé kolo soutěže FO v kategorii D bylo zakončeno téměř ve všech okresech závěrečnou besedou, na které byla úspěšným řešitelům předána čestná uznání, popř. i knižní nebo věcné dary, jež poskytla sdružení rodičů a přátel školy. Nejlépe se osvědčily závěrečné slavnosti na těch okresech, kde konaly závěrečné besedy okresní výbory FO a MO společně.

C. Třetí kolo soutěže

Třetí celostátní kolo soutěže FO se konalo ve dnech 29. a 30. dubna 1966 v Košicích. Jeho přípravou a organizací byl pověřen KV FO Východoslovenského kraje.

Úlohy pro toto kolo (čtyři teoretické a jedna experimentální) navrhli s. Tesař (1., 3.), dr. Chytilová (4.), Pivnička (2.), Tuček (5.). Byly vybírány stejným způsobem jako úlohy pro druhé kolo soutěže a zároveň s nimi. V definitivním znění byly schváleny na schůzi ÚV FO dne 13. dubna 1966. Na této schůzi byl zároveň schválen program třetího kola.

Účastníci třetího kola byli určeni na schůzi ÚV FO, která se konala dne 13. dubna 1966. Účastnili se jí členové ÚV FO s. dr. Valouch, Bartůněk, Tesař a předsedové všech KV FO nebo jejich zástupci. Z návrhů podaných krajskými výbory FO bylo vybráno do třetího kola soutěže 79 úspěšných řešitelů úloh druhého kola soutěže, kteří měli v klasifikaci úloh druhého kola součet známek 4 až 7, a ti, jimž při klasifikaci těchto úloh vyšel součet 8, pokud vypracovali vyhovujícím způsobem všechny úlohy druhého kola. V Západočeském a Východoslovenském kraji byly tyto podmínky splněny jen u jednoho z žáků těchto krajů. Proto byl počet účastníků třetího kola doplněn v každém z těchto

krajů o jednoho žáka s horším prospěchem, aby každý kraj byl ve třetím kole zastoupen aspoň dvěma účastníky. Do třetího kola soutěže bylo tedy vybráno celkem 81 úspěšných řešitelů 2. kola.

Z hlavního města Prahy bylo do třetího kola pozváno 25 účastníků, ze Středočeského kraje 4, z Jihočeského kraje 5, ze Západočeského 2, ze Severočeského 6, z Východočeského 7, ze Severomoravského 9, z Jihomoravského 14, ze Západoslovenského 3, ze Středoslovenského 4 a z Východoslovenského 2.

Všichni pozvaní žáci se v plném počtu 81 sjeli do Košic ve čtvrtek 28. dubna v odpoledních a večerních hodinách. Následujícího dne se shromáždili v 7 hodin 45 minut ve velké posluchárně v budově přírodovědecké fakulty University P. J. Šafaříka na nám. Februárového vítězství 9.

Shromážděné žáky přivítal za KV FO Východoslovenského kraje s. Emanuel Síleš, jménem ÚV FO jim přál úspěch v soutěži s. Jan Tesař a za MŠK jim tlumočil pozdrav ústřední inspektor Josef Bartůněk. Potom dostali žáci pokyny, jak mají upravit písemné řešení úloh, a byly jim rozdány potřebné papíry a texty čtyř soutěžních teoretických úloh.

Dozor při řešení úloh konali členové ÚV FO s. Bartůněk, Konrád, Vlach, Rabas, Zámečník a Tesař, členové KV FO Západoslovenského kraje a odborní asistenti a asistenti přírodovědecké fakulty University P. J. Šafaříka v Košicích.

Odpoledne téhož dne uspořádal pro účastníky soutěže KV FO Východoslovenského kraje autokarový zájezd a exkurzi do Východoslovenských železár. Večer navštívili žáci divadelní představení ve Státním divadle v Košicích.

Dne 30. dubna se konala v laboratořích přírodovědecké fakulty University P. J. Šafaříka druhá část soutěže, experimentální úloha. Žáci byli rozděleni na čtyři skupiny, které postupně po hodině přicházely, aby dokončily poslední část soutěže. Dozor při měření v laboratořích měli s. prof. J. Daniel-Szabó, odborní asistenti a asistenti přírodovědecké fakulty University P. J. Šafaříka v Košicích a všichni členové ÚV FO, kteří se třetího kola zúčastnili. V odpoledních hodinách dne 30. dubna 1965 se žáci rozjížděli do svých domovů.

Třetí kolo soutěže proběhlo bez závad, neboť bylo velmi dobře připraveno. Experimentální úlohy byly připraveny tak, že 20 žáků mohlo samostatně pracovat, každý se samostatnou soupravou měřicích přístrojů. K defektu některého z přístrojů během měření nedošlo. Hlavní zásluhu o bezvadný průběh soutěže má s. prof. Szabó a asistenti přírodovědecké fakulty university v Košicích, kteří ochotně po oba dny věnovali svůj volný čas pracím spojeným s průběhem soutěže.

Každou úlohu třetího kola opravovali nezávisle na sobě dva recenzenti, kteří se pak dohodli na společné známce. Aspoň jeden z nich byl ve všech případech členem ÚV FO a ten ručil za správnost hodnocení opravené úlohy každého žáka. První úlohu opravovali s. Tesař a Říman, druhou s. Konrád a Vlach se členy KV FO Jihomoravského kraje, třetí s. doc. dr. Rabas a Rádl, čtvrtou s. Zámečník a Náter a pátou s. Tuček a Síleš.

Úspěšnými řešiteli třetího kola soutěže byli žáci, kteří uspokojivě vyřešili aspoň tři ze soutěžních úloh. Bylo jich 39.

Pořadí úspěšných řešitelů a prvních dvacet vítězů stanovil ÚV FO na schůzi, která se konala v Praze dne 18. května 1966. V této schůzi byly zároveň navrženy věcné i knižní odměny vítězům třetího kola v celkové částce 12 000 Kčs.

Přehled o výsledcích třetího kola soutěže je patrný z tabulek VI a VII.

7. Výsledky jednotlivých kol soutěže

A. Soutěž prvního kola v kategoriích A, B, C

Přehled o počtu soutěžících žáků v prvním kole soutěže FO podle jednotlivých krajů v kategoriích A, B, C podávají tabulky I, II a III.

Z tabulky I je patrné, že do prvního kola soutěže se zapojilo v kategorii A 186 škol, 173 SVVŠ a 13 středních odborných škol (SOŠ), v kategorii B 208 škol, 190 SVVŠ a 18 SOŠ, v kategorii C 265 škol, 209 SVVŠ a 56 SOŠ. Na většině těchto škol soutěžili žáci ve všech kategoriích. Celkový počet škol zapojených do VII. ročníku soutěže FO je 351, z toho 257 SVVŠ a 74 SOŠ.

Řešitelů prvního kola soutěže bylo podle tabulky II v kategorii A 767, v kategorii B 931, v kategorii C 1 439. Úspěšně vyřešilo úlohy I. kola v kategorii A 469 (61,1 %), v kategorii B 466 (50,1 %), v kategorii C 611 (42,5 %) žáků z celkového počtu soutěžících žáků v těchto kategoriích. Celkem soutěžilo v prvním kole 3 137 chlapců a dívek a s úspěchem absolvovalo toto kolo 1 546 (49,3 %) soutěžících chlapců a dívek.

Z celkového počtu soutěžících bylo v prvním kole v kategorii A dívek 135 (17,6 %), v kategorii B 210 (22,5 %) v kategorii C 317 (22,0 %) dívek, celkově 662 (21,1 %). V průměru se tedy účastnila prvního kola asi pětina dívek.

Přitom bylo z celkového počtu chlapců v každé kategorii úspěšných: v kategorii A 64,7 %, v kategorii B 51,6 %, v kategorii C 45,5 % chlapců; z celkového počtu dívek v jednotlivých kategoriích bylo v kategorii A úspěšných 44,4 %, v kategorii B 44,8 %, v kategorii C 31,2 % dívek. Ve všech kategoriích úhrnem (A, B, C) bylo úspěšných 52,5 % chlapců z celkového počtu chlapců a 38,3 % dívek z celkového počtu dívek.

Přehled o počtu úloh opravených v prvním kole učiteli fyziky a referenty FO na školách je uveden v tabulce III.

V průběhu prvního kola opravili učitelé fyziky a referenti FO na školách celkem 18 968 úloh. Z nich bylo klasifikováno známkou prvního stupně 8 736 (46,1 %), známkou druhého stupně 6 372 (33,6 %) úloh. Nevyhovujících úloh bylo 3 860 (20,3 %).

Tabulka I. Počet škol zapojených do soutěže

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C		
	SVVŠ	SOŠ	Celkem	SVVŠ	SOŠ	Celkem	SVVŠ	SOŠ	Celkem
Praha	19	3	22	17	3	20	18	9	27
Středočeský	15	—	15	16	1	17	13	2	15
Jihočeský	5	—	5	5	—	5	5	1	6
Západočeský	10	1	11	11	—	11	13	5	18
Severočeský	11	2	13	14	1	15	18	6	24
Východočeský	18	1	19	20	2	22	23	5	28
Severomoravský	22	3	25	24	3	27	28	6	34
Jihomoravský	32	2	34	31	6	37	34	12	46
Západoslovenský	10	—	10	14	—	14	15	2	17
Středoslovenský	21	—	21	27	1	28	30	6	36
Východoslovenský	10	1	11	11	1	12	12	2	14
Celkem	173	13	186	190	18	208	209	56	265

Tabulka II. Přehled o počtu sou-
Vysvětlivky: S — počet
Ú — počet

Kraj	Kategorie A				Katego-	
	S		Ú		S	
	cel- kem	z toho dívek	cel- kem	z toho dívek	cel- kem	z toho dívek
Hl. m. Praha	138	20	111	13	128	27
Středočeský	46	7	28	2	56	19
Jihočeský	15	—	15	—	19	2
Západočeský	46	10	23	2	37	8
Severočeský	57	21	33	7	81	31
Východočeský	66	17	54	12	120	13
Severomoravský	83	6	57	4	65	11
Jihomoravský	145	18	81	9	184	35
Západoslovenský	51	23	27	10	37	28
Středoslovenský	84	4	23	—	156	22
Východoslovenský	36	9	17	1	48	14
Celkem	767	135	469	60	931	210

B. Soutěž 2. kola v kategoriích A, B, C

Přehled o počtu soutěžících v druhém kole podle krajů je v tabulce IV.

Z tabulek II a IV je patrné, že do druhého kola postoupilo 94,5 % úspěšných řešitelů prvního kola soutěže, což je podstatně více než v minulých ročnících. Tento stav není ovšem ještě ideální, neboť některé KV FO neučinily opatření, aby se druhého kola soutěže mohli účastnit všichni úspěšní řešitelé prvního kola, což je základní podmínkou spravedlivosti v soutěži.

Celkem soutěžili v druhém kole soutěže FO žáci ze 198 SVVŠ a 46 SOŠ. Dívek se účastnilo druhého kola 213, tj. 14,6 % z celkového počtu soutěžících žáků. V jednotlivých kategoriích bylo dívek: v kate-

těžících v prvním kole soutěže
soutěžících
úspěšných řešitelů

rie B		Kategorie C				Celkem			
Ú		S		Ú		S		Ú	
cel- kem	z toho dívek	cel- kem	z toho dívek	cel- kem	z toho dívek	cel- kem	z toho dívek	cel- kem	z toho dívek
78	15	158	32	72	8	424	79	261	36
34	11	39	7	26	3	141	33	88	16
19	2	24	3	24	3	58	5	58	5
25	3	93	22	26	3	176	40	74	8
58	20	115	28	72	17	253	80	163	44
76	10	150	30	93	17	336	60	223	39
46	8	158	38	68	12	306	55	171	24
68	6	274	58	106	16	603	111	255	31
16	6	110	33	49	4	198	84	92	20
20	7	248	46	48	11	488	72	91	18
26	6	70	20	27	6	154	43	70	13
466	94	1 439	317	611	100	3 137	662	1 546	254

gorii A 54 (12,0 %), v kategorii B 75 (17,4 %) a 84 (14,6 %) v kategorii C. Procenta jsou počítána z celkového počtu soutěžících žáků v jednotlivých kategoriích.

Úspěšných řešitelů úloh druhého kola bylo 667, tj. 45,8 % z celkového počtu soutěžících žáků. V jednotlivých kategoriích byl tento stav: v kategorii A 277 (61,4 %), v kategorii B 211 (49,0 %), v kategorii C 179 (31,1 %). Z celkového počtu chlapců bylo úspěšných 48,5 %, z celkového počtu dívek 29,6 %. V jednotlivých kategoriích jsou tyto výsledky: v kategorii A 65,0 %, v kategorii B 51,7 %, v kategorii C 34,0 % chlapců z celkového počtu chlapců; v kategorii A 35,2 %, v kategorii B 36,0 % a v kategorii C 20,2 % dívek z celkového počtu dívek.

Přehled o počtu úloh opravených členy KV FO je uveden v tabulce V. Výborně bylo klasifikováno 21,1 % úloh, dobře 21,6 % úloh a nevyhovujících řešení bylo 57,3 %.

Tabulka III. Počet úloh prvního kola opravených učiteli na školách

Kategorie	A			B			C			Celkový počet opravených úloh		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Hl. m. Praha	797	367	112	459	336	132	431	370	265	1 687	1 073	509
Středočeský	151	146	51	192	181	80	120	153	39	463	480	170
Jihočeský	82	28	5	93	29	4	142	37	15	317	94	24
Západočeský	146	89	52	169	57	32	205	162	67	520	308	151
Severočeský	196	119	16	332	137	26	373	254	47	901	510	89
Východočeský	409	108	21	485	179	33	494	293	116	1 388	580	170
Severomoravský	294	186	65	228	192	36	387	440	146	909	818	247
Jihomoravský	394	370	170	381	417	316	526	689	559	1 301	1 476	1 045
Západoslovenský	150	192	162	161	159	138	408	238	381	719	589	681
Středoslovenský	44	22	4	64	17	6	86	36	84	194	75	94
Východoslovenský	89	102	133	109	95	228	139	172	319	337	369	680
Celkem	2 752	1 729	791	2 673	1 799	1 031	3 311	2 844	2 038	8 736	6 372	3 860

Dále uvádíme jmenný seznam nejlepších deseti řešitelů kategorií A, B, C. V kategorii A označujeme polotučně jména žáků, kteří postoupili do třetího kola soutěže. V Praze postoupilo do třetího kola 25 úspěšných řešitelů druhého kola soutěže, v Jihomoravském kraji 14.

Pořadí prvních deseti úspěšných řešitelů druhého kola soutěže v kategoriích A, B a C podle krajů

U žáků všeobecně vzdělávacích škol neuvádíme značku SVVŠ.

Praha

A: **Ludmila Kohoutová**, Praha 6, Na dlouhém lánu; **Zbyněk Šourek**, Praha 7, Nad štolou; **Petr Ludvík**, Praha 2, W. Piecka; **Jan Kořínek**, Praha 2, W. Piecka; **Petr Němec**, Praha 6, Na dlouhém lánu; **Jan Fährich**, Praha 7, Nad štolou; **Petr Orna**, Praha 6, Na dlouhém lánu; **Tomáš Ganz**, Praha 1, Štěpánská; **Jiří Novák**, Praha 5, Na Zatance; **Václav Hejma**, Praha 6, Velvarská; **Miroslav Kubů**, SPŠJT, Praha 4, Svatoslavova ul.; **Petr Hausner**, Praha 2, W. Piecka; **Václav Petříček**, SPŠCH, Praha 1, Křemencova; **Tomáš Vávra**, Praha 3, Sladkovského; **Jitka Zborníková**, Praha 6, Na dlouhém lánu; **Alexej Šimeček**, Praha 2, Botičská ul.; **Milan Honusek**, Praha 10, Voděradská; **Jozef Zieleniec**, SPŠJT, Praha 4, Svatoslavova; **Jan Bruthans**, Praha 6, Velvarská; **Pavel Jílek**, Praha 6, Velvarská; **Milan Lomský**, Praha 6, Velvarská; **Miroslav Vodslouň**, Praha 2, W. Piecka; **Jaroslav Krčil**, SPŠJT, Praha 4, Svatoslavova; **Jaroslav Merta**, Praha 7, Nad štolou; **Jaroslav Kozáček**, SPŠJT, Praha 4, Svatoslavova ul.

B: **Jaromír Durdík**, Praha 2, W. Piecka; **Radovan Gregor**, Praha 2, W. Piecka; **Miloslav Hanák**, Praha 7, Nad štolou; **Štěpán Kotva**, Praha 8, Kollárova; **Martin Šolc**, Praha 2, W. Piecka; **Jiří Němec**, Praha 6, Na dlouhém lánu; **Jan Čermák**, Praha 2, W. Piecka; **Petr Vančura**, Praha 2, W. Piecka; **Tomáš Zvěřina**, Praha 7, Nad štolou; **Alena Havelková**, Praha 7, Nad štolou.

C: **Tomáš Markvart**, Praha 6, Velvarská; **Jiří Popelka**, Praha 1, Hellichova; **Jiří Vejnar**, Praha 6, Velvarská; **Jiří Dvořák**, Praha 2, W. Piecka; **Vladimír Müller**, Praha 6, Na dlouhém lánu; **Pavel Novák**, Praha 10, Přípotoční; **Ivan Dvořák**, Praha 2, W. Piecka; **Petr Souček**, SPŠS, Praha 8, Karlínské nám.; **Ota Kramarz**, Praha 7, Nad štolou; **Jan Frouz**, SPŠE, Praha 2, Ječná.

Kraj Středočeský

A: **Jan Jágr**, Hořovice; **Jan Petrlík**, Kolín; **Jiří Pavlíček**, Rakovník; **Ladislav Továra**, Čáslav; **Milan Čiha**, Rakovník; **Petr**

Tabulka IV. Přehled o počtu sou-

Vysvětlivky: S – počet
 Ů – počet

Kraj	Kategorie A				Kate-	
	S		Ů		S	
	cel- kem	z toho dívek	cel- kem	z toho dívek	cel- kem	z toho dívek
Hl. m. Praha	106	11	94	9	69	8
Středočeský	26	2	11	—	32	12
Jihočeský	15	—	15	—	19	2
Západočeský	23	2	8	—	25	3
Severočeský	33	7	23	3	45	12
Východočeský	52	10	35	4	68	7
Severomoravský	54	4	33	1	42	7
Jihomoravský	79	8	32	1	64	6
Západoslovenský	33	9	15	1	21	5
Středoslovenský	13	—	6	—	20	7
Východoslovenský	17	1	5	—	26	6
Celkem	451	54	277	19	431	75

Bareš, Příbram; Ladislav Jandejsek, Kolín; Jaroslav Černý, Slaný; Bohumil Žák, Nové Strašecí; Jaroslav Novák, Český Brod.

B: Jiří Neustupa, Nové Strašecí; Jiří Houska, Čakovice; Václav Kříž, Beroun; Michael Holan, Kolín; Jiří Kreuzinger, SPČ, Čelákovice; Jaroslav Šedivý, Příbram; Milan Pračka, Říčany; Jana Rajsová, Čáslav; Vratislav Prejzek, Sedlčany; Jarmila Lisá, Beroun; Alena Klasová, Český Brod.

C: Jiří Herrmann, Beroun; Milan Chvojka, Český Brod; Václav Novotný, Dobříš; Zdeněk Urban, Rakovník; Lubomír Krejčí, Kolín; Josef Zicha, Příbram; Jan Hammersack, SPŠ, Čelákovice.

Kraj Jihočeský

A: Jiří Mls, Strakonice; Karel Hejduk, Strakonice; Petr Kříha, České Budějovice; Petr Bednář, Tábor; Pavel Petr, Strakonice;

těžících v druhém kole soutěže
soutěžících
úspěšných řešitelů

gorie B		Kategorie C				Celkem			
Ú		S		Ú		S		Ú	
cel- kem	z toho dívek	cel- kem	z toho dívek	cel- kem	z toho dívek	cel- kem	z toho dívek	cel- kem	z toho dívek
53	6	66	6	33	3	241	25	180	18
16	5	21	1	7	—	79	15	34	5
9	1	24	3	4	—	58	5	28	1
13	—	26	3	4	1	74	8	25	1
26	5	62	12	10	1	140	31	59	9
25	3	83	14	28	3	203	31	88	10
20	1	68	12	28	2	164	23	81	4
24	—	98	12	15	—	241	26	71	1
15	4	52	4	34	3	106	18	64	8
6	1	48	11	9	2	81	18	21	3
4	1	27	6	7	2	70	13	16	3
211	27	575	84	179	17	1 457	213	667	63

František Allmer, Strakonice; Pavel Vítek, Tábor; Tomáš Jech, Pelhřimov; Jaroslav Potměšil, Tábor; František Novotný, Soběslav.

B: František Mráz, Č. Budějovice; Václav Šmajcl, Č. Budějovice; Ivana Novotná, Č. Budějovice; Jiří Krtek, Č. Budějovice; Alois Bohůnek, Č. Budějovice; Josef Beran, Pelhřimov; Jan Zahradník, Č. Budějovice; Václav Nýdl, Č. Budějovice; Oldřich Hedáněk, Č. Budějovice.

C: Ladislav Kváš, Humpolec; Jiří Janovec, Pelhřimov; Vojtěch Bubník, Písek; Otomar Šimák, Strakonice.

Kraj Západočeský

A: Jiří Bílek, Rokycany; Jiří Sýkora, Karlovy Vary; František Diviš, Plzeň, nám. Odborářů; Jiří Icha, Rokycany; Jan Štěpáník, Sušice; Stanislav Strnad, Klatovy; Josef März, Karlovy Vary; Stanislav Kropš, Cheb.

Tabulka V. Přehled o počtu opravených úloh v druhém kole soutěže

Kategorie	A			B			C			Celkem			Celkový počet opr. úloh
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
Klasifikace													
Praha	139	151	86	84	70	62	59	36	142	282	257	290	829
Středočeský	17	22	35	27	23	42	15	9	41	59	54	118	231
Jihočeský	31	9	16	7	18	42	12	7	73	50	34	131	215
Západočeský	6	19	67	33	12	55	5	13	86	44	44	208	296
Severočeský	37	23	34	52	28	96	14	21	101	103	72	231	406
Východočeský	32	64	85	47	33	106	37	63	171	116	160	362	638
Severomoravský	45	51	120	20	42	106	39	47	186	104	140	412	656
Jihomoravský	58	59	127	40	46	96	24	39	262	122	144	485	751
Západoslovenský	21	24	87	21	20	43	56	38	114	98	82	244	424
Středoslovenský	7	15	25	11	7	33	10	18	69	28	40	127	195
Východoslovenský	7	13	52	4	14	86	21	8	71	32	35	209	276
Celkem	400	450	734	346	313	767	292	299	1 316	1 038	1 062	2 817	4 917

B: Jiří Vilímovský, Plzeň, nám. Odborářů; Jiří Bouzek, Plzeň, nám. Odborářů; Jan Kastl, Plzeň, nám. Odborářů; Jan Louda, Plzeň, nám. Odborářů; Jan Slavík, Plzeň, nám. Odborářů; František Pazdera, Plzeň, nám. Odborářů; Václav Fišer, Rokycany; Zdeněk Šlehofer, Klatovy; Jiří Hošek, Ostrov nad Ohří; František Ryska, Ostrov nad Ohří; Tomáš Maixner, Plzeň, nám. Odborářů; Jiří Kovář, Plzeň, ul. Pionýrů.

C: Karel Rusňák, Klatovy; Luděk Hrkal, Planá; Jana Tauberová, Domažlice; Vladimír Kotrba, Plzeň, ul. Pionýrů.

Kraj Severočeský

A: Jan Fibír, Teplice; Hana Grunclová, Most; Karel Snopek, Teplice; Jan Bayerle, Teplice; Oldřich Bílík, Teplice; Tomáš Lešner, Teplice; Jan Novák, Teplice; Marie Sachetová, Teplice; Jan Technik, Liberec; Libor Douša, Teplice.

B: Stanislav Cais, Zdenka Cmuntová, Miluše Matějková, Hana Rezlerová, Jan Mühlstein, Miloslav Novák, Eva Petrovská, Josef Fučík, Jiří Pejčoch, Tomáš Princ, Lubomír Synek, všichni Liberec.

C: Josef Bém, Liberec; Petr Pokorný, Liberec; Jiří Žid, SPŠS, Liberec; Josef Novák, Teplice; Michal Brada, Děčín; Václav Hořejší, Roudnice; Jaroslav Vít, Jablonec; Jana Bartošková, Litoměřice; Jan Novák, Roudnice; Jan Zadražil, Litoměřice.

Kraj Východočeský

A: Miroslav Kolář, SPŠE, Pardubice; Jan Klas, Česká Třebová; Radovan Čaněk, Hostinné; Jaroslav Zamastil, Vysoké Mýto; Petr Moravec, Hradec Králové; František Tesař, Pardubice; Radko Škaloud, Hradec Králové; Ladislav Siegl, Česká Třebová; Petr Janele, Hradec Králové; Josef Fiala, Hradec Králové; Pavel Křivka, Česká Třebová.

B: Milan Fireš, Hradec Králové; Vladislav Hýbl, Hradec Králové; Jan Červenka, Havlíčkův Brod; Bohuslav Vacek, Česká Třebová; Jan Sedláček, Hradec Králové; Bohuslav Škop, Hradec Králové; Jaroslav Petrásek, Hradec Králové; Pavel Fialka, Ledec n. Sáz.; Zdeněk Macháček, Svitavy; Marie Moudrá, Hradec Králové.

C: Michal Alan, Pardubice; Jiří Potůček, Dobruška; Václav Doležal, Nová Paka; Jan Kerhart, Česká Třebová; Jan Lochman, Dobruška; Miroslav Andrlé, Vysoké Mýto; Martin Huml, Dvůr Králové; Ladislav Krym, Hostinné; Jan Hofman, Vrchlabí; Květa Pilařová, Nová Paka; František Štancl, Česká Třebová; Bohuslav Parlousek, Chrudim.

Kraj Severomoravský

A: **Mojmír Simerský**, SPŠE, Rožnov p. Radh.; **Pavel Novotný**, Olomouc, Hejčín; **Miroslav Kavan**, Opava; **Jiří Nejedlý**, Hranice; **Milan Hutýra**, SPŠCH, Ostrava 1; **Vladislav Martynek**, SVVŠ pol., Č. Těšín; **Miroslav Liška**, Ostrava-Záběh; **František Tomášek**, Litovel; **Karel Janů**, Frenštát pod Radh.; Jiří Pešl, Valašské Meziříčí.

B: Zdeněk Kašlík, Jeseník; Vojtěch Ullmann, Litovel; Vladimír Josifko, Opava; Rudolf Kuzník, Havířov; Jaroslav Bolek, SPŠ Ostrava Vítkovice; Josef Straka, Litovel; Bedřich Sedlák, Litovel; Petr Varadinov, Bruntál; Jiří Enderle, Jeseník; Karel Turek, Jablunkov; Jarmila Holečková, Hranice.

C: Karel Zubík, Olomouc, tř. Jiřího z Poděbrad; Jaroslav Sklenář, Havířov; Pavel Kalášek, Ostrava 1, Šmeralova; Zdeněk Martinek, Přerov; Miroslav Kawalec, Havířov; Jiří Demel, Valašské Meziříčí; Milan Bednařík, Přerov; Jan Kunčar, Šumperk; Petr Znišťal, Frýdek-Místek; Vladimír Berka, Opava; František Blata, Opava.

Kraj Jiřomoravský

A: **Jiří Šmerk**, Kyjov; **Eduard Černý**, SPŠE, Brno, Leninova; **Eduard Jordán**, Vizovice; **Zdeněk Slanina**, SPŠCH, Brno, Vranovská; **Vladimír Handlíř**, SPŠCH, Brno, Vranovská; **Jiří Handlíř**, SPŠE, Brno, Leninova; **Zdeněk Benda**, Brno, Koněvova; **Stanislav Slouka**, SPŠE, Brno, Leninova; **Jana Štěpánková**, Brno, Královo Pole; **Jiří Obalil**, SPŠE, Brno, Leninova; **Miroslav Sedláček**, SPŠE, Brno, Leninova; **Jan Surovčíak**, Znojmo; **Petr Hříbek**, Znojmo; **Radovan Kundera**, Znojmo.

B: Jaroslav Kieffmann, Brno, Koněvova; Vlastimil Bartoš, Holešov; Ladislav Obdržálek, Brno, Koněvova; František Klein, Brno, Elgartová; Jan Filipenský, SPŠE, Brno, Leninova; Karel Engelsman, Brno, Koněvova; Vladimír Kychler, Brno, Elgartova; Jiří Leicman, SPŠS, Brno, Sokolská; Jaroslav Pokluda, Brno, Koněvova; Ivo Krča, Brno, Křenová.

C: Pavel Polcar, Vel. Meziříčí; Libor Polák, Brno, Koněvova; Jaromír Duda, Brno, Lerchova; Vojtěch Oškera, Vizovice; Zdeněk Nešpor, Holešov; Miroslav Kouřil, Brno, Elgartova; Tomáš Žák, Brno, Křenová; Vladimír Hájek, Brno, Koněvova; Jan Schwarz, Brno, Koněvova; Jaromír Plášek, Uherský Brod.

Kraj Západoslovenský

A: **Juraj Poledna**, Bratislava, Novohradská; **Vladimír Špilka**, Bratislava, Novohradská; **Peter Falath**, Zlaté Moravce; Jozef Hykš,

Bratislava, Vazova ul. 38; Ján Danč, Bratislava, Metodova ul.; Juraj Steiner, Bratislava, Novohradská; Rena Virsiková, Bratislava, Novohradská; Dušan Bjel, Bratislava, Vazova 38; Vratislav Palička, Bratislava, Vazova 6; Karol Moravec, Piešťany.

B: Fr. Hajnovič, Bratislava, Novohradská; Emilia Prídalová, Bratislava, Vazova 38; Pavel Holič, Bratislava, Novohradská; Viliam Krušpán, Trenčín; Michal Tvrdoň, Bratislava, Novohradská; Mária Šaušová, Bratislava, Vazova 38; Jozef Kolesár, Bratislava, Vazova 38; Branislav Vašíčka, Bratislava, Vazova 38; Terézia Burská, Bratislava, Vazova 38; Vlado Karvaš, Bratislava, Novohradská.

C: Ján Vandíš, Trenčín; Jaromír Novák, Pezinok; Mária Solčanská, Nitra, E. Gudernu; František Koniar, Nitra, E. Gudernu; Ivan Pavlovič, Bratislava, Novohradská; Juraj Sztuka, Bratislava, Novohradská; Jozef Prokeš, Nitra, E. Gudernu; Jozef Krištofik, Trnava; Miroslav Lenko, Bratislava, Metodova; Jaroslav Kilian, Bratislava, Metodova; Peter Kurdel, Bratislava, Metodova.

Kraj Stredoslovenský

A: Peter Mederly, Prievidza; Dušan Oktavec, Martin; Štefan Mišovic, Martin; Kristian Chovanec, Turč. Teplice; Lubomír Vlček, Brezno; Milan Jurečka, Turč. Teplice.

B: Erich Wiszt, Banská Bystrica; J. Slabejcius, Banská Bystrica; Marian Fúrik, Zvolen; Jozef Vallašek, Zvolen; Lubomír Kováčik, D. Kubín; Jana Bubelková, Ružomberok.

C: Peter Nagy, Banská Bystrica; Juraj Černák, Turč. Teplice; Jaroslav Nemeč, Martin; Naďa Staníková, Martin; Zdeněk Mařík, Žilina; Zora Gazíková, Žilina; Martin Štefko, Prievidza; Vlado Laššák, Hnúšťa; Igor Tungi, Hnúšťa.

Kraj Východoslovenský

A: Milan Stehlík, SPŠE, Košice, Komenského 44; Miroslav Germuška, Bardejov; Štefan Gašpar, Bardejov; František Čizmarík, Prešov; Ján Hudec, Kežmarok.

B: Stanislav Palúch, Prešov; Alica Pirická, Košice, Kováčska 28; Štefan Trenkler, Prešov; Juraj Majerčák, Sp. Nová Ves.

C: Ján Michlík, SPŠE, Košice, Komenského 44; Pavol Jasem, Michalovce; Katarína Pastorová, SPŠE, Košice, Komenského 44; Eugen Ružický, Prešov; Juraj Gerženy, Košice, Šrobárova 46; Jaroslava Mitková, Košice, Šrobárova 46; Štefan Bodnár, Košice, Šrobárova 46.

C. Soutěž prvního a druhého kola v kategorii D

Přehled o účasti žáků na soutěži FO v kategorii D v jednotlivých krajích podávají tabulky VI a VII. Statistické údaje v těchto tabulkách jsou však neúplné, neboť KV FO Středoslovenského kraje nedodal ÚV FO o průběhu soutěže v kategorii D zprávu a některé další KV FO nemají potřebné údaje ode všech OV FO.

Z tabulek VI a VII je patrné, že v prvním kole soutěže bylo úspěšných 44,7 % soutěžících chlapců a 47,0 % soutěžících dívek, celkově 44,9 % soutěžících. Druhé kolo absolvovalo úspěšně 66,7 % chlapců a 61,2 % dívek; celkem 64,2 % soutěžících. Z celkového počtu žáků, kteří se účastnili soutěže prvního kola, dokončilo soutěž druhého kola úspěšně 24,4 % žáků.

Nejvíce chyb dělali soutěžící žáci v jednotkách fyzikálních veličin a zaměňovali některé pojmy. Veliké potíže jim působí obecné řešení úloh, počítání s jednotkami fyzikálních veličin, chybí jim správný úsudek

Tabulka VI. Přehled o počtu soutěžících v prvním kole kategorie D

Kraj	Počet soutěžících		Počet úspěšných		Počet škol zapojených do soutěže	Počet úloh opravených učiteli na školách
	Celkem	Z toho dívek	Celkem	Z toho dívek		
Praha	1 388	427	599	188	122	6 918
Středočeský	1 274	586	528	216	149	6 152
Jihočeský	1 170	539	496	213	81	5 238
Západočeský	309	66	223	60	82	1 309
Severočeský	1 261	582	481	214	130	6 684
Východočeský	1 558	577	746	274	175	8 960
Severomoravský	1 294	445	688	229	181	8 962
Jihomoravský	2 351	237	759	172	323	13 645
Západoslovenský	1 721	773	939	402	232	10 543
Středoslovenský	—	—	—	—	—	—
Východoslovenský	447	223	277	127	—	1 899
Celkem	12 773	4 455	5 736	2 095	1 475	70 310

Tabulka VII. Přehled o počtu soutěžících v druhém kole kategorie D

Kraj	Počet soutěžících		Počet úspěšných		Počet škol zapojených do soutěže	Počet úloh opravených referenty FO
	Celkem	Z toho dívek	Celkem	Z toho dívek		
Praha	536	148	453	122	110	1 565
Středočeský	502	190	243	91	137	1 685
Jihočeský	398	182	221	96	50	1 085
Západočeský	219	59	159	38	70	876
Severočeský	417	184	289	122	105	1 365
Východočeský	602	222	456	145	144	1 824
Severomoravský	560	173	422	119	157	2 014
Jihomoravský	684	155	274	62	211	2 604
Západoslovenský	684	287	389	158	144	2 585
Středoslovenský	—	—	—	—	—	—
Východoslovenský	249	112	206	95	112	1 575
Celkem	4 851	1 712	3 112	1 048	1 240	17 178

a nedovedou dobře vysvětlovat postup při řešení úloh. Na úlohách prvního kola je velmi často patrna účast dospělých.

Stručný přehled o činnosti OV FO a o průběhu soutěže v kategorii D podává zpráva KV FO Jihomoravského kraje, kterou citujeme:

Fyzikální olympiáda v Jihomoravském kraji v r. 1965–66 Kategorie D

a) *Zpráva o průběhu 1. a 2. kola, návrhy na zlepšení úrovně a organizace*

Školy nedodržují termíny určené k odevzdávání úloh. Tím se jednak zdržuje zpracování výkazů a některé školy musí být i vyřazovány z další soutěže. Doba potřebná k organizaci 2. kola byla velmi krátká. Termín k odevzdání poslední trojice úloh byl 31. března (některé školy si termín prodloužily skoro do poloviny dubna) a 25. dubna bylo 2. kolo. Potíže též působí stanovení doby pro konání 2. kola. Některé okresy ne-

mohou konat soutěž v neděli pro ztíženou dopravu do okresního města. Jiné okresy nemohou opět ve všední dny získat volné místnosti. Malý počet místností pak neumožňuje všem soutěžícím samostatnou práci.

Na některých školách začínají soutěž FO jako masovou, soutěžící pak postupně odpadají a nakonec 1. kolo nedokončí.

Zájem o řešení fyzikálních úloh se nepatrně zvyšuje (Prostějov, Vyškov). Jsou-li některé úlohy, řešené na jedné škole, nápadně shodné, nelze je uznat, i když některý z žáků je skutečně sám řešil.

b) *Zpráva, jak se podařilo zainteresovat školy v kraji o soutěž*

Poněvadž jen asi pětina až čtvrtina úspěšných řešitelů 1. kola se stala úspěšnými řešiteli 2. kola, je zřejmé, že řada žáků nepracuje v 1. kole úkoly samostatně. Účast takových žáků je v soutěži zbytečná. Někdy je dokonce zjištěno téměř shodné řešení se vzorovým. To však není cesta jak pomoci žákům, ani jak zvýšit úroveň vyučování fyzice na ZDŠ. Měla by plátit zásada: raději méně žáků v soutěži, ale kvalitních. Učitelé ZDŠ považují mnohde soutěž FO za nežádoucí a orientují se více prakticky (výroba pomůcek, otázka zkoušecích strojů apod.).

Zvýšení zájmu o FO spočívá v dobrém kádrovém obsazení škol a náročné práci organizační i administrativní výborů FO.

c) *Zpráva o tom, jaká byla úroveň žák. prací v 1. kole a 2. kole, hlavní vady a chyby, které se v řešení úloh vyskytovaly*

Chyby vyplývají z malé zkušenosti v řešení úloh, ze špatných návyků a z nedodržování potřebných formalit při řešení úloh. U mnoha prací je patrný nedostatek výcviku v komentování postupu řešení. Formální stránka řešení bývá velmi nedbalá, objevují se hrubé pravopisné chyby. Největší těžkosti se ukazují při obecném řešení příkladů. Učitelé ZDŠ tvrdí, že je to nad síly žáků tohoto věku, nejsou prý ani matematicky na to připraveni, ani v učebnici fyziky nemají k tomu potřebný vzor. Dále se učitelé odvolávají na to, že ani žáci 2. cyklu to neumějí.

Okres Třebíč doporučuje vydat sbírku řešených příkladů z fyziky, ovšem z látky probrané na ZDŠ. Doporučuje se žádat v úlohách vyznačená schémata.

Žákům chybí základní úvaha, zda vypočítaná hodnota je vůbec možná a vyhovující (celkový výkon motoru je podle nich menší než užitečný výkon, převod ozubených kol se prý vůbec neprojeví při výpočtu rovnováhy apod.), nečiní rozdílu mezi poloměrem a průměrem, používají mechanicky vztahů, které našli v matematických a fyzikálních

tabulkách. Tyto „tabulky“ jsou současně přehledem vztahů a pouček, takže při soutěžích se jich nebude moci vůbec používat.

Jako nejtěžší příklad se ukázala kalorimetrická úloha. Žáci nechápou fyzikální jevy, jako je kondenzace a tání, a nedovedou je matematicky vyjádřit. Píší $c = 1$, z čehož vznikají hrubé rozměrové neshody. Také řešení příkladů z elektřiny mají hrubé nedostatky, ačkoli jde o učivo v poslední době probírané (v sériovém zapojení je proud v žárovkách různý). Hrubé chyby jsou i v terminologii.

Na školách existují dva extrémy: masová účast a naproti tomu naprostá neúčast. Soutěž FO je nutno považovat za jednu z akcí péče o talenty. Proto má své oprávnění na ZDŠ jako zvláštní výchova mladých nadaných žáků a probíhá úspěšně, je-li podporována řediteli škol a okresními školními inspektory.

d) *Zprávy o akcích, které KV FO organizuje pro zlepšení soutěže*

V Jihomoravském kraji se poprvé organizuje 3. kolo FO kategorie D. Je to první pokus v soutěži FO vůbec. Proběhne 29. května t. r.

e) *Další zprávy o výběru úloh, obtížnosti atd.*

Většina okresů uznává příklady za vhodné a přiměřené, jen výjimečně je označován příklad o kalorimetrii za příliš náročný. Je to však učivo 8. ročníku; vědomosti byly tedy zřejmě zapomenuty a pravděpodobně málo na příkladech procvičeny.

Některé okresy opět volají po zavedení experimentálních úloh do 1. i 2. kola.

D. Soutěž třetího kola

Soutěže třetího kola se v sedmém ročníku FO výjimečně účastnilo 81 úspěšných řešitelů druhého kola soutěže. Pořadí úspěšných řešitelů bylo stanoveno podle součtu známek, kterými byly klasifikovány všechny úlohy každého účastníka třetího kola, a se zřetelem k počtu úspěšně řešených úloh.

Přehled o účasti a o výsledcích třetího kola soutěže podává tabulka VIII.

Mezi účastníky třetího kola soutěže byly 4 dívky, dvě z Prahy a po jedné ze Severočeského a Jihomoravského kraje. Podle druhu škol se účastnilo třetího kola 65 žáků SVVŠ a 16 žáků SPŠ.

Třetí kolo dokončilo úspěšně 39 (48,1 %) žáků, neúspěšných bylo 42 (51,9 %) soutěžících. Dívky byly úspěšné dvě, jedna z Prahy a jedna

Tabulka VIII. Přehled o počtu soutěžících v třetím kole soutěže

Kraj	Účastníci			
	Celkový počet	Úspěšní 1–39	Z nich vítězové 1–20	Neúspěšní 40–81
Hl. m. Praha	25	12 (48 %)	5 (20 %)	13 (52 %)
Středočeský	4	2 (50 %)	1 (25 %)	2 (50 %)
Jihočeský	5	1 (20 %)	1 (20 %)	4 (80 %)
Západočeský	2	1 (50 %)	—	1 (50 %)
Severočeský	6	—	—	6 (100 %)
Východočeský	7	6 (85,7 %)	1 (14,3 %)	1 (14,3 %)
Severomoravský	9	4 (44,4 %)	2 (22,2 %)	5 (55,6 %)
Jihomoravský	14	11 (78,6 %)	10 (71,4 %)	3 (21,4 %)
Západoslovenský	3	2 (66,7 %)	—	1 (33,3 %)
Stredoslovenský	4	—	—	4 (100 %)
Východoslovenský	2	—	—	2 (100 %)
Celkem	81	39 (48,1 %)	20 (24,7 %)	42 (51,9 %)

z kraje Jihomoravského; ostatní dívky skončily mezi neúspěšnými řešiteli. Žáků průmyslových škol bylo úspěšných 11.

Celkově soutěžili v třetím kole žáci ze 44 SVVŠ a ze 7 SPŠ, úspěšní řešitelé jsou z 25 SVVŠ a z 5 SPŠ.

Nejlepších 20 řešitelů bylo podle organizačního řádu FO prohlášeno vítězi soutěže VII. ročníku fyzikální olympiády. Mezi dvaceti vítězi jsou dvě dívky, z žáků průmyslových škol je mezi vítězi osm chlapců.

Vítězové sedmého ročníku FO

Pořadí	Jméno	Škola	Odměna věcná knižní	
1.	Miroslav Sedláček	SPŠE Brno, Leninova 40	1 000	200
2.	Eduard Černý	SPŠE Brno, Leninova 40	1 000	200
3.	Jiří Handlíř	SPŠE Brno, Leninova 40	900	150
4.	Jiří Šmerk	SVVŠ Kyjov	850	150

5.	Zdeněk Slanina	SPŠCH Brno, Vranovská	650	100
6.	Jaroslav Zamastil	SVVŠ Vysoké Mýto	600	100
7.— 9.	Jaroslav Kozáčík	SPŠJT Praha 4, Svatoslavova 4	550	100
7.— 9.	Petr Němec	SVVŠ Praha 6, Na dlouhém lánu	550	100
7.— 9.	Pavel Novotný	SVVŠ Olomouc-Hejčín	550	100
10.— 12.	Eduard Jordán	SVVŠ Vizovice	400	100
10.— 12.	Petr Kříha	SVVŠ Čes. Budějovice	400	100
10.— 12.	Jan Petrlík	SVVŠ Kolín	400	100
13.— 14.	Tomáš Ganz	SVVŠ Praha 1, Štěpánská	350	50
13.— 14.	Lud. Kohoutová	SVVŠ Praha 6, Na dlouhém lánu	350	50
15.	Zdeněk Benda	SVVŠ Brno, Koněvova	300	50
16.— 20.	Vladimír Handlíř	SPŠCH Brno, Vranovská	250	50
16.— 20.	Petr Ludvík	SVVŠ Praha 2, W. Piecka	250	50
16.— 20.	Mojmír Simerský	SPŠVT Rožnov p. Radh.	250	50
16.— 20.	Stanislav Slouka	SPŠE Brno, Leninova 40	250	50
16.— 20.	Jana Štěpánková	SVVŠ Brno-Král. Pole, Slovanské nám.	250	50
			10 100	1 900
			1 900	
			<hr/>	
			12 000	

Každý z vítězů dostal čestný diplom, podepsaný náměstkem ministra školství a kultury dr. Františkem Kahudou a předsedou ústředního výboru FO prof. dr. Miloslavem Valouchem. Mimoto byly vítězům sedmého ročníku FO navrženy peněžité částky na nákup věcných odměn a studijní odborné literatury podle vlastního výběru. Odměny byly odstupňovány od 1 200,— Kčs do 300,— Kčs. Celková částka na ně činila 12 000 Kčs.

Další úspěšní řešitelé s pořadovými čísly 21—39 jsou tito žáci:

21.— 29.	Jiří Bílek	SVVŠ Rokycany
21.— 29.	Peter Falath	SVŠ Zlaté Moravce
21.— 29.	Jan Klas	SVVŠ Česká Třebová
21.— 29.	Miroslav Kolář	SPŠE Pardubice, Smetanovo nám.
21.— 29.	Jan Kořínek	SVVŠ Praha 2, ul. W. Piecka

21. – 29.	Jaroslav Krčil	SPŠJT Praha 4, Svatoslavova 4
21. – 29.	Juraj Poledna	SVŠ Bratislava, Novohradská
21. – 29.	František Tesař	SVVŠ Pardubice
21. – 29.	František Tomášek	SVVŠ Litovel
30. – 31.	Jan Fährnich	SVVŠ Praha 7, Nad štolou 1
30. – 31.	Jan Jágr	SVVŠ Hořovice
32.	Radovan Čaněk	SVVŠ Hostinné
33. – 36.	Milan Hutýra	SPŠCH Ostrava 1
33. – 36.	Jaroslav Merta	SVVŠ Praha 7, Nad štolou 1
33. – 36.	Jan Surovčíak	SVVŠ Znojmo
33. – 36.	Alexej Šimeček	SVVŠ Praha 2, Botičská
37.	Milan Honusek	SVVŠ Praha 10, Voděradská
38.	Tomáš Vávra	SVVŠ Praha 3, Sladkovského
39.	Radko Škaloud	SVVŠ Hradec Králové, Tylovo náměstí.

Všichni uvedení žáci dostali za úspěch v soutěži třetího kola pochvalná uznání.

Přehled o klasifikaci úloh třetího kola podává tabulka IX. na str. 31.

Z teoretických úloh dopadly nejlépe úlohy první a druhá, ačkoli nebyly tak lehké, jak by se dalo soudit podle jejich klasifikace. V první úloze bylo potřeba uvažovat nejen kapilární jev, nýbrž i podmínky tepelné rovnováhy. V druhé úloze bylo nutno zkoumat i energetické změny, které nastanou při ponořování tělesa do kapaliny. Velmi špatně dopadly úlohy třetí a čtvrtá. Ve třetí úloze se měla určit velikost magnetické indukce stejnorodého magnetického pole, ve kterém se pohybuje danou konstantní rychlostí vodič, jímž prochází elektrický proud. Bylo ovšem nutno brát v úvahu indukované napětí na vodiči a třetí sílu působící na vodič při jeho pohybu. Ve čtvrté úloze se měla zjistit poloha a vlastnosti druhého obrazu, který vznikne v soustavě dvou kulových zrcadel odrazem na dutém a potom na vypuklém zrcadle. Podle výsledku těchto dvou úloh je nutno soudit, že obě partie, nauka o magnetickém poli a geometrická optika, nejsou ve školách dostatečně procvičovány. Také výsledek páté (experimentální) úlohy je proti předcházejícím ročníkům soutěže FO špatný. Někteří žáci ani nedovedli nakreslit schéma obvodu, v němž měli měřit kapacitanci, řada žáků nepoznala, které z možných spojení je vhodnější k měření, ačkoli v prvním kole byly diskutovány oba způsoby, kterými je možno měřit odpor spotřebiče přímou metodou.

Celkově je výsledek třetího kola letošního ročníku FO slabý.

Tabulka IX. Přehled o klasifikaci úloh třetího kola
Čísla v 2. – 5. sloupci značí počty známek 1., 2. a 3. stupně

Známka	vý- borně	dobře	nevy- hovuje	průměrná známka	téma z oboru
1. úloha	28	29	24	1,95	povrchové napětí, tepelná rovnováha
2. úloha	48	11	22	1,68	plování těles, roztlačnost těles
3. úloha	6	2	73	2,83	magnet. indukce, indukované napětí, tření
4. úloha	9	8	64	2,68	kombinace dutého a vypuklého zrcadla
5. úloha	16	34	31	2,19	měření kapacity kondenzátorů

8. Hodnocení sedmého ročníku soutěže FO

Soutěže prvního kola sedmého ročníku FO se účastnilo v kategorii A 767 žáků, v kategorii B 931, v kategorii C 1 439 žáků. V šestém ročníku měla kategorie A 696, kategorie B 888, kategorie C 1 940 účastníků. Úspěšných řešitelů prvního kola bylo v letošním ročníku 469 v kategorii A, 466 v kategorii B, 611 v kategorii C, v loňském ročníku 377 v kategorii A, 332 v kategorii B a 719 v kategorii C. K obdobným výsledkům dojdeme i při porovnávání druhého kola soutěže v sedmém a šestém ročníku soutěže. V kategorii A soutěžilo v druhém kole sedmého ročníku 451, v druhém kole šestého ročníku 331 žáků, v kategorii B v sedmém ročníku 431, v šestém 298, v kategorii C v sedmém ročníku 575, v šestém 643.

Úspěšných řešitelů úloh druhého kola v kategorii A je v letošním ročníku 277, v loňském 139, v kategorii B v letošním ročníku 211, v loňském 91, v kategorii C letos 179, loni 149. Volíme-li tedy počet úspěšných řešitelů druhého kola šestého ročníku za 100 %, zvýšil se v sedmém ročníku počet úspěšných řešitelů druhého kola proti minulému

školnímu roku v kategorii A o 99 %, v kategorii B o 132 % a v kategorii C o 20 %. Z toho je patrné, že výsledky soutěže prvních dvou kol jsou v letošním ročníku soutěže v kategoriích A a B podstatně lepší než v loňském ročníku a že i kategorie C, která měla v tomto školním roce v prvním kole menší účast, než tomu bylo loni, má v druhém kole větší počet úspěšných řešitelů úloh FO než v minulém ročníku. Můžeme tedy pokládat sedmý ročník soutěže FO za úspěšný.

V kategorii D nelze porovnávat výsledky letošního ročníku soutěže FO s výsledky v loňském školním roce, neboť za minulý školní rok nemáme o soutěži FO v této kategorii úplná statistická data.

Porovnání výsledků sedmého ročníku FO s ročníky I.–V. není v této brožuře provedeno. Lze je však snadno doplnit, neboť v brožuře VI. ročník FO jsou na str. 44 až 50 porovnány výsledky I.–VI. ročníku soutěže.

V třetím kole letošního ročníku FO dosáhli vynikajícího úspěchu žáci z Jihomoravského kraje, neboť obsadili prvních pět míst v soutěži a mezi dvaceti vítězi je celkem 10 žáků z tohoto kraje. O toto výborné umístění v soutěži se zasloužili hlavně žáci SPŠE v Brně, Leninova 40, z nichž tři obsadili prvá tři místa v soutěži třetího kola. Mezi vítězi jsou z této školy čtyři žáci. Velkého úspěchu dosáhli také žáci z Východočeského kraje. Ve třetím kole jich soutěžilo celkem 7 a šest z nich dokončilo soutěž úspěšně.

Výsledky třetího kola letošního ročníku FO jsou velmi špatné, jak je patrné z tabulky X. Příčina je uvedena při přehledu o klasifikaci úloh třetího kola na str. 30.

Ke zkvalitnění soutěže přispívají všechna opatření a akce, které zavedlo organizačním řádem ministerstvo školství a kultury a které provádějí a zabezpečují pobočky JČMF, ÚV FO, KV FO, OV FO, školské odbory KNV a ONV, ředitelé a předmětové komise na školách, hlavně však učitelé vyučující fyzice. Nejdůležitější z těchto akcí jsou uvedeny v brožuře V. ročník fyzikální olympiády na str. 6 až 9. a v brožuře VI. ročník FO na str. 54.

Letošní ročník fyzikální olympiády proběhl organizačně bez závad. Letáky a studijní texty vyšly včas, autorská řešení úloh i texty úloh druhého kola byly krajským výborům FO včas zasilány a předsedové KV FO byli hned na začátku soutěže seznámeni s celkovým plánem soutěže i s termíny, kdy se budou konat schůze ÚV FO a kdy bude druhé a třetí kolo soutěže. Mnoho potíží odpadlo tím, že do druhého kola soutěže nebyly zařazeny experimentální úlohy.

Ze strany soutěžících žáků a někde i učitelů a ředitelství škol, jejichž žáci se zapojili do soutěže FO, se projevovaly během soutěže tytéž zá-

vady a nedostatky, jež se pravidelně opakují ve všech ročnících FO. Jsou uvedeny v brožuře VI. ročník FO na str. 51 a 52.

Tabulka X. Přehled o počtu soutěžících (S) a úspěšných řešitelů (Ú) třetího kola v dosavadních sedmi ročnících FO

Ročník	Kategorie A		
	S	Ú	Ú v %
I.	80	27	34
II.	71	56	79
III.	80	50	63
IV.	81	70	86
V.	76	52	68
VI.	77	46	60
VII.	81	39	48

9. Závěr sedmého ročníku fyzikální olympiády

Organizace a provedení soutěže sedmého ročníku FO si vyžádaly mnoho velké a odpovědné práce všech referentů a mnoha učitelů fyziky, kteří soutěž na školách propagovali, řídili a organizovali, podíleli se na opravách úloh, vedli řadu zájmových kroužků, měli s řešiteli úloh konzultace, přednášeli ve střediscích, předložili návrhy úloh pro soutěž a jejich řešení atd. Byla to veliká nehonoraná práce, vyžadující mnoho tisíc brigádnických hodin.

O úspěšný průběh soutěže FO mají zásluhu též četní ředitelé škol a okresní školní inspektoři, pokud soutěž mezi žáky propagovali. Výbornou propagaci FO provádějí také děkanáty mnoha vysokých škol technického směru, neboť promíjejí přijímací zkoušku z fyziky úspěšným řešitelům úloh druhého kola soutěže FO v kategorii A.

Jednota československých matematiků a fyziků spolu s ústředním výborem FO děkuje všem, kteří tuto práci bez nároku na jakoukoli odměnu obětavě konali.

Dále je nutno poděkovat těm členům ÚV FO, KV FO, OV FO a učitelům, kteří organizovali soutěž ústředně, v krajích a v okresech, podíleli se na vypracování úloh a autorských řešení, na opravách úloh druhého a třetího kola, na opatřování a přípravě souprav potřebných k provedení experimentálních úloh, kteří vypracovali studijní texty pro kategorie A, B, C, organizačně zajišťovali hladký průběh soutěže v druhém a třetím kole a konali při ní dozor. Jsou to zejména profesor dr. M. Valouch, dr. M. Chytilová, J. Tesař, ústřední inspektor MŠ J. Bartůněk, prof. dr. R. Košťál, F. Černický, F. Fišer, K. Hofman, dr. M. Rabas, J. Sušanka, Z. Ungermann, F. Živný, dr. I. Náter, R. Baník, dr. J. Tuček, E. Říman, J. Konrád, M. Rádl, dr. B. Vlach, E. Síleš, J. Zámečník, M. Doležel, O. Pivnička, J. Kessner, M. Voráček, Jar. Pitner, všichni jednatelé KV FO a předsedové a jednatelé OV FO a další.

Za obětavou práci při organizaci třetího kola soutěže je nutno poděkovat zejména s. dr. Tučkovi a s. Sílešovi a všem členům KV FO Východoslovenského kraje, děkanátu přírodovědecké fakulty university P. J. Šafaříka v Košicích za propůjčení učeben a laboratoří ke konání třetího kola soutěže, děkanu této fakulty prof. dr. Hajkovi za účinnou pomoc při organizování třetího kola soutěže, prof. J. Danielu-Szabóvi a všem odborným asistentům a asistentům této fakulty za vzornou přípravu pracoviště s přístroji a pomůckami pro experimentální úlohu, při které konali také dozor.

Z členů ÚV FO je nutno zvláště poděkovat prof. dr. Košťálovi a dr. Náterovi za sestavení programu přednášek a besed pro soustředění žáků v Banské Bystrici a za obstarání a obsazení těchto besed přednášejícími.

Na organizaci soutěže se podílely též krajské výbory JČMF, které zabezpečovaly po finanční stránce konání přednášek a seminářů pro účastníky prvního kola FO. Je též nutno ocenit organizační práci s. Valouchové, Matyášové a Březinové, které obstarávaly rozmnožování autorských řešení a návrhů úloh pro druhé a třetí kolo soutěže, rozesílaly letáky, blankety na pochvalná uznání, pozvánky na zasedání ÚV FO, rozmnožovaly zápisy ze schůzí ÚV FO apod.

Spolupráce ČSM při soutěži FO byla velmi slabá. Jedině v Brně prováděl ČSM propagaci soutěže, hlavně zásluhou zástupce KV ČSM a KV FO Jihomoravského kraje ing. Vybírala.

10. Studijní texty pro první kolo VII. ročníku FO

A. KATEGORIE A

Použití transfigurace odporového trojúhelníka na hvězdu při řešení elektrických obvodů

Milan Rádl, Plzeň

Řešením elektrického obvodu rozumíme obvykle úlohu určit z daných hodnot odporů a napětí v obvodu velikosti a směry proudů v jednotlivých větvích. Při řešení úlohy používáme Kirchhoffových zákonů (viz brožura **III. ročník fyzikální olympiády**, studijní text pro kat. A). U složitějších obvodů je výpočet někdy zdlouhavý, a proto bývá výhodné zjednodušit úlohu tím, že postupně nahrazujeme jisté části obvodu neobsahující zdroj útvary jednoduššími. Mezi takové úpravy patří např. náhrady sériově, či paralelně zapojených odporů odporem výsledným, při nichž používáme těchto známých pouček:

a) Dva sériově zapojené odpory R_1 , R_2 lze nahradit výsledným odporem

$$R = R_1 + R_2 \quad (1)$$

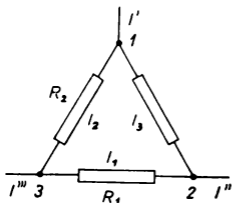
b) Dva paralelně zapojené odpory R_1 , R_2 nahradíme výsledným odporem

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2)$$

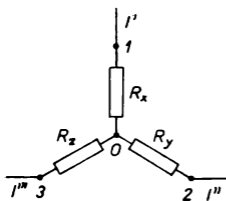
Poslední vztah vyplývá z poučky o sčítání vodivosti paralelně zapojených odporů, tj. z rovnice ε:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

K dalším zjednodušujícím úpravám patří nahrazení odporového trojúhelníka hvězdou. Úpravy používáme tam, kde skupina odporů tvoří trojúhelník, který nelze předchozími úpravami převést na jednodušší útvar. Problém ukazuje obr. 1.



Obr. 1



Obr. 2

Do uzlů 1, 2, 3 přitékají (případně odtékají) proudy I' , I'' , I''' , které se v uzlech větví tak, že v odporovém trojúhelníku tvořeném odpory R_1 , R_2 , R_3 tekou příslušnými větvemi proudy I_1 , I_2 , I_3 podle obrázku. (Je vhodné označit odpory a uzly tak, aby proti každému odporu ležel uzel označený stejným znakem jako index protilehlého odporu.)

Dejme si úkol nalézt takové odpory R_x , R_y , R_z , které spojeny na jedné straně do uzlu O a zbývajícími konci připojeny k původním uzlům 1, 2, 3, nahradí odpory R_1 , R_2 , R_3 . Odpory R_x , R_y , R_z jsou podle obr. 2 spojeny do hvězdy.

Slovem **nahradí** označujeme, že proudové a napěťové poměry v ostatních částech obvodu (kromě části přeměněné z Δ na λ) zůstanou nezměněny. To znamená, že

body 1, 2, 3 protékají stejné proudy I' , I'' , I''' jako dříve, a i napětí U_{12} , U_{23} , U_{31} mezi uzly zůstanou nezměněna. Všechny tyto podmínky budou splněny, nalezneme-li takové hodnoty odporů R_x , R_y , R_z , že výsledné odpory mezi body 12, 23, 31 (označíme je R_{12} , R_{23} , R_{31}) zůstanou po přeměně trojúhelníka na hvězdu nezměněny.

V zapojení do hvězdy jsou R_x a R_y spolu spojeny v sérii, a proto platí podle vztahu (1)

$$R_{12} = R_x + R_y$$

V původním zapojení byl mezi body 1 a 2 zařazen v jedné větvi odpor R_3 a v paralelní větvi ještě odpor $R_1 + R_2$. Výsledný odpor tedy podle vztahu (2) byl

$$R_{12} = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Z podmínky rovnosti odporů vychází

$$R_x + R_y = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3)$$

a analogicky

$$R_y + R_z = \frac{(R_2 + R_3) R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (4)$$

$$R_z + R_x = \frac{(R_3 + R_1) R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (5)$$

Sečteme-li levé i pravé strany rovnic (3), (4), (5) a výslednou rovnici dělíme 2, dostaneme po úpravě

$$R_x + R_y + R_z = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (6)$$

Dosadíme-li do rovnice (6) postupně hodnoty odporů $R_x + R_y$, $R_y + R_z$, $R_z + R_x$ ze vztahů (3), (4), (5) dostaneme po úpravě hledané hodnoty náhradních odporů

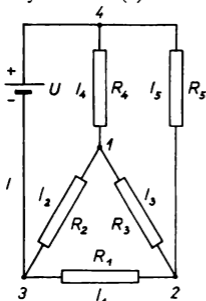
$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_y = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3},$$

$$R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (7)$$

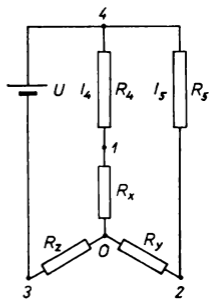
Ukážeme si užítí odvozených vztahů na úlohách:

1. V obvodu naznačeném na obr. 3 je svorkové napětí zdroje $U = 26 \text{ V}$ a jednotlivé odpory jsou $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $R_4 = 17\Omega$, $R_5 = 3\Omega$. Určíme velikosti a směry proudů tekoucích jednotlivými odpory, napětí na odporech a celkový proud I odebíraný ze zdroje. Řešení úlohy pomocí Kirchhoffových zákonů by vedlo k soustavě šesti rovnic o šesti neznámých. Vyřešíme úlohu postupným zjednodušováním obvodu.

Trojúhelník odporů R_1 , R_2 , R_3 , jehož vrcholy tvoří uzly 1, 2, 3, nahradíme hvězdou R_x , R_y , R_z podle obr. 4. Z odvozených vztahů (7) obdržíme



Obr. 3



Obr. 4

$$R_x = 3\Omega, \quad R_y = 2\Omega, \quad R_z = 1,2\Omega$$

Z obr. 4 je zřejmé, že lze provést další zjednodušení, a to podle obr. 5, přičemž náhradní odpory jsou

$$R_6 = R_x + R_4 = 20\Omega, \quad R_7 = R_y + R_5 = 5\Omega$$

Paralelně zapojené odpory R_6, R_7 můžeme nahradit podle vztahu (2) odporem $R_8 = 4\Omega$, který spolu s odporem R_z dá nakonec výsledný náhradní odpor celého obvodu $R = R_8 + R_z = 5,2\Omega$.

Proud I odebíraný ze zdroje je tedy $I = \frac{U}{R} = 5 \text{ A}$.

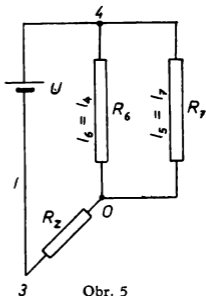
Nyní již snadno postupně získáme opakovaným použitím Ohmova zákona všechna napětí a proudy. Postupujeme opačně, tj. od schémat jednodušších zpět ke schématu původnímu.

Napětí U_z na odporu R_z je $U_z = R_z I = 6 \text{ V}$. Na paralelních odporech R_6, R_7 napětí $U_6 = U_7 = U - U_z = 20 \text{ V}$. Příslušné proudy jimi tekoucí jsou

$$I_6 = \frac{U_6}{R_6} = 1 \text{ A}, \quad I_7 = \frac{U_7}{R_7} = 4 \text{ A}$$

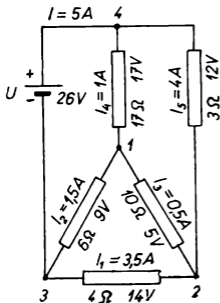
Tím jsme vypočítali i proudy I_4, I_x, I_5, I_y tekoucí odpory R_4, R_x, R_5, R_y .

Porovnáme-li obr. 4 a 5 dostáváme $I_4 = I_x = I_6 = 1 \text{ A}$, $I_5 = I_y = I_7 = 4 \text{ A}$. Napětí $U_4 = R_4 I_4 = 17 \text{ V}$, $U_5 = R_5 I_5 = 12 \text{ V}$.



Obr. 5

Použitím dvou posledních výpočtů zjistíme z obr. 3, že postoupíme-li z bodu 4 před odpor R_4 do bodu 1, klesne potenciál o 17 V, postoupíme-li z téhož bodu 4 přes odpor R_5 do bodu 2, klesne potenciál pouze o 12 V. Bod 2 má tedy o 5 V vyšší potenciál než bod 1 ($U_3 = 5 \text{ V}$) a odporem R_3 teče proud $I_3 =$



Obr. 6

$= \frac{U_3}{R_3} = 0,5 \text{ A}$ směrem od bodu 2 k bodu 1.

Podobnými úvahami určíme na odporu R_2 napětí $U_2 = 9 \text{ V}$ a na odporu R_1 napětí $U_1 = 14 \text{ V}$. Příslušné proudy jsou $I_2 = 1,5 \text{ A}$, $I_1 = 3,5 \text{ A}$.

Úplné řešení dává obr. 6.

Ukážeme ještě, jak by se úloha řešila užitím Kirchhoffových zákonů. Při označení proudů a jejich směrů

podle obr. 6 dostáváme soustavu rovnic

$$\left. \begin{array}{l} I_4 + I_3 - I_2 = 0 \\ I_5 - I_1 - I_3 = 0 \\ I_1 + I_2 - I = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} R_4 I_4 + R_2 I_2 = U \\ R_5 I_5 + R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0 \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (8)$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že vypočítané proudy této soustavy vyhovují.

K soustavě rovnic (8) je ještě nutno dodat, že směry proudů (označené šipkami), potřebné k sestavení rovnic (8), je možno volit libovolně. Volba směru má vliv na znaménka v soustavě rovnic. Vyjde-li při výpočtu pro ně-

který z proudů záporná hodnota, pak teče tento proud opačným směrem, než je označeno na obrázku.

2. Metodou transfigurace můžeme zjednodušovat i obvody střídavého proudu, v nichž kromě odporů jsou induktance a kapacitance. Výpočty bývají ovšem značně komplikovanější, neboť je nutno pracovat s komplexními čísly. Tato tzv. metoda symbolického počtu byla vyložena ve studijních textech pro kategorii A v šestém ročníku FO v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 43, 1964/65, čís. 2 a 3.

Při této symbolické metodě se odpory vyjadřují číslem reálným (např. $R = R = 4\Omega$), zatím co induktance X_L a kapacitance X_C čísly ryze imaginárními $X_L = L\omega j$,

$$X_C = \frac{1}{C\omega j} = -\frac{j}{C\omega}, \text{ kde } j \text{ značí imaginární jednotku,}$$

pro kterou platí $j^2 = -1$, L je vlastní indukčnost cívky, C kapacita kondenzátoru a ω je úhlový kmitočet střídavého proudu. S takto zavedenými odpory pracujeme podle dříve uvedených pravidel. Postup při řešení úlohy ukážeme opět na obvodu sestaveném podle obr. 3, v němž však budeme předpokládat zdroj střídavého napětí $U = 26 \text{ V}$. Místo odporu R_1 je zařazena induktance $X_L = 4 j \Omega$, místo odporu R_3 je kapacitance $X_C = -10 j \Omega$. Ostatní odpory jsou stejné jako v původní úloze. Je tedy celkem dáno

$$U = 26 \text{ V, } X_L = 4 j\Omega, R_2 = R_2 = 6 \Omega, X_C = -10 j\Omega,$$

$$R_4 = R_4 = 17 \Omega, R_5 = R_5 = 3 \Omega$$

Máme stanovit impedanci Z obvodu a proud I . Postupovat budeme stejně jako v úloze 1., tj. nahradíme trojúhelník X_L, R_2, X_C hvězdou Z_x, Z_y, Z_z .

$$\begin{aligned} Z_x &= \frac{R_2 X_C}{X_L + R_2 + X_C} = \frac{-60j}{6 - 6j} \Omega = -\frac{10j}{1 - j} \Omega = \\ &= \frac{10j(1 + j)}{2} \Omega = (5 - 5j) \Omega \end{aligned}$$

Obdobně obdržíme po úpravách

$$Z_y = \frac{X_L X_C}{X_L + X_C + R_2} = \left(\frac{10}{3} + \frac{10}{3}j \right) \Omega$$

Další náhradní odpory jsou

$$Z_z = \frac{X_L R_2}{X_L + R_2 + R_C} = (-2 + 2j) \Omega$$

$$\begin{aligned} Z_6 &= Z_x + R_4 = (22 - 5j) \Omega; \quad Z_7 = Z_y + R_5 = \\ &= \left(\frac{19}{3} + \frac{10}{3}j \right) \Omega; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_8 &= \frac{Z_6 Z_7}{Z_6 + Z_7} = \frac{(22 - 5j) \frac{1}{3}(19 + 10j)}{\frac{1}{3}(85 - 5j)} \Omega = \\ &= \frac{468 + 125j}{85 - 5j} \Omega = \frac{(468 + 125j)(85 + 5j)}{7\,225 + 25} \Omega \doteq \end{aligned}$$

$$\doteq (5,4 + 1,8j) \Omega;$$

$$Z = Z_8 + Z_z \doteq (3,4 + 3,8j) \Omega$$

Absolutní hodnota výsledného odporu udává velikost impedance obvodu, takže

$$Z = |Z| = \sqrt{3,4^2 + 3,8^2} \Omega \doteq 5,1 \Omega$$

Proud

$$I = \frac{U}{Z} \doteq \frac{26}{5,1} \text{ A} \doteq 5,1 \text{ A}$$

Fázový posun φ mezi proudem a napětím je dán vztahem $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3,8}{3,4} \doteq 1,1176$. Proud se opožďuje za napětím o $\varphi = 48^{\circ}10' = 0,84$ rad.

B. KATEGORIE B

Otáčivý pohyb

Jan Tesař, Praha

Koná-li hmotný bod pohyb po jakékoli křivce (obr. 7), má vektor \mathbf{v} jeho rychlosti v kterémkoli místě (např. N) směr tečny k dráze pohybujícího se bodu v uvažovaném místě.

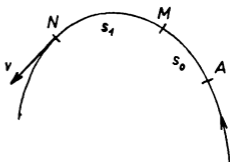
Má-li \mathbf{v} stálou hodnotu

$v = |\mathbf{v}| = \text{konst.}$, nazýváme pohyb hmotného bodu pohybem rovnoměrným. V tomto případě platí pro délku dráhy $\widehat{MN} = s_1$ hmotného bodu vztah $s_1 = v t$. Veličinu v nazýváme **rychlostí hmotného bodu** pohybujícího se rovnoměrně po uvažované křivce.

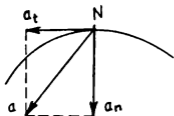
Měříme-li (po oblouku křivky) vzdálenost hmotného bodu nacházejícího se v místě N od určité základní polohy A , a označíme ji s , pak platí $s = s_1 + s_0$, kde $s = \widehat{AN}$ a $s_0 = \widehat{AM}$, takže

$$s = s_0 + v t \quad \text{a} \quad v = \text{konst.} \quad (1)$$

Působí-li na pohybující se hmotný bod v místě N jeho dráhy síla F , uděluje mu zrychlení a ve směru své vektorové přímky, která nemá obecně směr tečny (obr. 8).



Obr. 7



Obr. 8

Rozložíme-li je na složky a_t ve směru tečny (**tečné zrychlení**) a a_n ve směru normály (**normálové** neboli **dostředivé zrychlení**), platí pro velikost $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

Vektor dostředivého zrychlení určuje časovou změnu směru vektoru rychlosti, vektor tečného zrychlení zvětšuje nebo

zmenšuje hodnotu v rychlosti hmotného bodu podle toho, zda je orientován souhlasně ($a_t > 0$) s vektorem v nebo nesouhlasně ($a_t < 0$).

Má-li zrychlení a_t konstantní velikost, mění se rychlost pohybujícího se bodu rovnoměrně s časem a bod koná pohyb rovnoměrně zrychlený nebo rovnoměrně zpomalený.

Proto platí pro rychlost a dráhu rovnoměrně zrychleného a rovnoměrně zpomaleného pohybu bodu po jakékoli křivce vztahy $v = a_t t$ a $s = \frac{1}{2} a_t t^2$, jestliže měříme čas od okamžiku, kdy byl pohybující se bod uveden z klidu do rovnoměrně zrychleného pohybu.

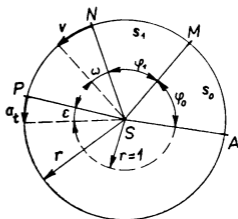
Jestliže však začneme měřit čas v okamžiku, kdy hmotný bod prochází místem M , kde již má rychlost v_0 a označíme-li délku oblouku $\widehat{AM} = s_0$, pak platí pro pohybový stav hmotného bodu v místě N rovnice

$$a_t = \text{konst.}, \quad v = v_0 + a_t t, \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2 \quad (2)$$

Je-li $a_t > 0$, pohybuje se hmotný bod rovnoměrně zrychleně, je-li $a_t < 0$, je tento pohyb rovnoměrně zpomalený.

Vztah (1) platí obecně pro rovnoměrný pohyb a vztahy (2) pro rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpomalený

pohyb hmotného bodu po jakékoliv křivce, tedy i pro pohyby přímočaré a pohyby po kružnici. Protože však je postupný pohyb tělesa úplně vyšetřen, známe-li zákony pro pohyb jednoho z jeho bodů (obvykle hmotného středu), platí vztahy (1) také pro rovnoměrný a vztahy (2) pro rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpomalený postupný pohyb tělesa.



Obr. 9

Jestliže uvažovanou křivkou, po které se hmotný bod pohybuje, je kružnice, pak můžeme pohyb hmotného bodu po kružnici popsat také zavedením úhlového zrychlení ε , úhlové rychlosti ω a úhlové dráhy φ (obr. 9).

Z obr. 9 je patrné, že $s_0 = \widehat{AM} = r\varphi_0$, $s_1 = \widehat{MN} = r\varphi_1$, $s = \widehat{AN} = r\varphi$, $v = r\omega$, $a_t = r\varepsilon$. Dosadíme-li za tyto hodnoty do vztahů (1) a (2), označíme úhlovou rychlost v bodě M písmenem ω_0 a vzniklou rovnici vynásobíme výrazem $\frac{1}{r}$, dostaneme pro rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici vztahy

$$\omega = \text{konst.}, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (1a)$$

pro rovnoměrně zrychlený pohyb hmotného bodu po kružnici vztahy $\varepsilon = \text{konst.}$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ a $\varphi = \varphi_0 + \omega t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$. (2a)

Při rovnoměrném pohybu hmotného bodu po kružnici je $\varepsilon = 0$. Velikost úhlů měříme v radiánech (rad). Protože

úhel je veličinou bezrozměrnou, je rozměr úhlové dráhy $[\varphi] = 1$, úhlová rychlost má jednotku rad s^{-1} a rozměr $[\omega] = \text{s}^{-1}$, úhlové zrychlení má jednotku rad s^{-2} a rozměr $[\varepsilon] = \text{s}^{-2}$.

2. Otáčení dokonale tuhého tělesa kolem pevné osy

Vedeme-li v dokonale tuhém tělese přímkou o dvěma zvolenými pevnými body, mohou konat všechny hmotné body tělesa kromě těch, které se nacházejí na přímce o , jen pohyby po kružnicích, jejichž středy se nacházejí na ose o (osa rotace). Roviny těchto drah jsou spolu rovnoběžné a kolmé k ose otáčení. Tento pohyb celého tělesa nazýváme **rotací dokonale tuhého tělesa kolem pevné osy**.

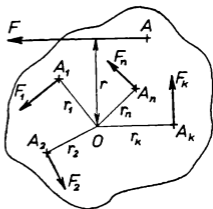
Tečné zrychlení, rychlost a dráha jednotlivých hmotných bodů tvořících těleso jsou různé, protože se hmotné body pohybují po kružnicích různých poloměrů. Otáčí-li se těleso rovnoměrně kolem osy o , platí pro pohyb každého hmotného bodu rovnice (1) a (1a), odvozené v předcházejícím odstavci tohoto článku, koná-li těleso otáčivý pohyb rovnoměrně zrychlený nebo rovnoměrně zpomalený kolem osy o , platí pro pohyb každého hmotného bodu rovnice (2) a (2a). Protože ve vztazích (1a) a (2a) se nevyskytují vzdálenosti hmotných bodů, pohybujících se po kružnicích se středy na ose otáčení, od této osy, mají všechny hmotné body při rotaci tělesa stejně veliká úhlová zrychlení ε , v daném okamžiku mají stejné úhlové rychlosti ω a za stejnou dobu vykonají stejně veliké úhlové dráhy φ .

Proto je rovnoměrný otáčivý pohyb tělesa úplně popsán rovnicemi (1a), rovnoměrně zrychlený nebo zpomalený rovnicemi (2a). Veličiny úhlové zrychlení, úhlová rychlost a úhlová dráha jsou charakteristické pro otáčivé

pohyby tělesa a odpovídají tečnému zrychlení, rychlosti a dráze při postupném pohybu tělesa, jak je patrné ze srovnání vztahů (1a) se vztahy (1) a vztahů (2a) se vztahy (2).

Rotaci tělesa okolo pevné osy může způsobit jen taková síla F , nebo složka síly, nebo složka výslednice vnějších sil, jejíž vektorová přímka leží v rovině kolmé k ose rotace, tuto osu neprotíná a nemění vzhledem k rotujícímu tělesu ani svou polohu, ani orientaci.

Na obr. 10 je naznačen řez tělesa rovinou kolmou k ose rotace, která prochází bodem O kolmo k nákresně. Hmotné body o hmotnostech $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_n$, ležící v řezu, označíme $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n$. Vektorová přímka síly F je od bodu O vzdálena r a její otáčivý účinek je určen velikostí M jejího momentu. Pohyb jednotlivých bodů $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n$ způsobují síly $F_1, F_2, \dots, F_k, \dots, F_n$. Protože tyto síly udělují



Obr. 10

jednotlivým bodům na jejich drahách tečná zrychlení, mají směr tečen ke kruhovým drahám pohybujících se hmotných bodů, jak je naznačeno na obr. 10, a nemění vzhledem k rotujícímu tělesu ani polohu, ani orientaci.

Označíme-li $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_n$ vzdálenosti vektorových přímek těchto sil od osy rotace a jejich momenty $M_1, M_2, \dots, M_k, M_n$ platí podle momentové věty

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_k + \dots + M_n$$

a po úpravě

$$M = F_1 r_1 + F_2 r_2 + \dots + F_k r_k + \dots + F_n r_n$$

Protože všechny síly F_k působí rotaci hmotných bodů A_k v souhlasném smyslu, přisuzujeme momentům M_k stejná znaménka, souhlasící se znaménkem momentu M síly F , jejíž otáčivý účinek nahrazují.

Jednotkou momentu síly je N m.

Síly $F_1, F_2, \dots, F_k, \dots, F_n$ udělují jednotlivým bodům tečná zrychlení $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n$, takže platí

$$M = m_1 a_1 r_1 + m_2 a_2 r_2 + \dots + m_k a_k r_k + \dots + m_n a_n r_n$$

Protože kruhové pohyby všech hmotných bodů mají v témže okamžiku stejná úhlová zrychlení, můžeme po použití vzorce $a_k = r_k \varepsilon$ upravit poslední rovnici na tvar

$$M = \varepsilon (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_k r_k^2 + \dots + m_n r_n^2) \quad (3)$$

Uvedená rovnice byla odvozena obecně pro všechny hmotné body ležící v libovolném řezu tělesa rovinou kolmou k ose rotace tělesa. Proto platí obecně pro všechny hmotné body tělesa, a tedy pro celé těleso. Výraz

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_k r_k^2 + \dots + m_n r_n^2 \quad (4)$$

se nazývá **moment setrvačnosti rotujícího tělesa vzhledem k ose** o .

Moment setrvačnosti má jednotku i rozměr m^2kg .

$$\text{Rovnice} \quad M = J\varepsilon \quad (5)$$

platí pro rotaci tělesa kolem pevné osy. Upomíná na analogickou rovnici $F = ma$ platnou při pohybech hmotných bodů, nebo při postupných pohybech tělesa. Moment síly M a moment setrvačnosti J jsou tedy veličiny charakteristické pro otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy a jsou analogické síle F a hmotnosti m tělesa, popisujeme-li jeho postupný pohyb.

Rotuje-li tuhé těleso kolem pevné osy, je jeho kinetická energie W_k rovna součtu kinetických energií všech hmotných bodů tělesa. Je tedy

$$W_k = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \dots + m_k v_k^2 + \dots + m_n v_n^2)$$

Protože úhlová rychlost ω všech hmotných bodů je v daném okamžiku stejná, platí po užití vztahu $v_k = r_k \omega$

$$W_k = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_k r_k^2 + \dots + m_n r_n^2) = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (6)$$

Obdobný vzorec $W_k = \frac{1}{2} m v^2$ určuje velikost kinetické energie tělesa konajícího postupný pohyb rychlostí v . I z tohoto vztahu je patrné, že moment setrvačnosti tělesa má při rotačním pohybu tentýž význam jako hmotnost při pohybu postupném.

3. Úlohy

1. Setrvačné kolo o poloměru r , jehož moment setrvačnosti je J , je roztáčeno z klidu otáčivým momentem M síly.

a) Jakou hodnotu bude mít úhlové zrychlení ε , úhlová rychlost ω_1 a úhlová dráha φ_1 na konci doby t_1 ?

b) Jak veliký počet n otáček vykoná kolo za dobu t_1 a jakou frekvenci f bude mít na konci doby t_1 ?

c) Jak velkou dráhu s_1 vykoná za dobu t_1 bod A na obvodu kola a jak velká je jeho rychlost v_1 v tomto okamžiku?

d) Určete velikost tečného a odstředivého zrychlení bodu A .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $J = 9 \text{ m}^2\text{kg}$, $M = 125,6 \text{ N m}$, $r = 0,3 \text{ m}$, $t_1 = 5 \text{ s}$.

Označení veličin. Tečné zrychlení označíme a_t , odstředivé a_n .

Řešení. a) Ze vztahu $M = J\varepsilon$ určíme

$$\varepsilon = \frac{M}{J} \quad (1)$$

Protože ε má konstantní hodnotu, otáčí se kolo rovnoměrně zrychleně.

Úhlová rychlost a úhlová dráha mají hodnotu

$$\omega_1 = \varepsilon t_1 = \frac{M}{J} t_1 \quad \text{a} \quad \varphi_1 = \frac{1}{2} \varepsilon t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{J} t_1^2 \quad (2)$$

$$\text{Číselně } \varepsilon = \frac{125,6}{9} \frac{\text{kg m s}^{-2}\text{m}}{\text{m}^2\text{kg}} \doteq 13,96 \text{ s}^{-2},$$

$$\omega_1 = 5 \cdot 13,96 \text{ s}^{-2}\text{s} \doteq 69,8 \text{ s}^{-1},$$

$$\varphi_1 = 25 \cdot 0,5 \cdot 13,96 \text{ s}^{-2} \text{ s}^2 \doteq 174$$

Úhlové zrychlení, úhlová rychlost a úhlová dráha na konci doby t_1 jsou obecně určeny vztahy (1) a (2), číselně je $\varepsilon \doteq 13,96 \text{ rad s}^{-2}$, $\omega_1 \doteq 69,8 \text{ rad s}^{-1}$ a $\varphi_1 \doteq 174 \text{ rad}$.

b) Počet otočení n a frekvence f se určí ze vztahů

$$n = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{Mt_1^2}{4\pi J} \quad \text{a} \quad f = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{Mt_1}{2\pi J} \quad (3)$$

Číselně

$$n = \frac{174}{2 \cdot 3,14} \doteq 27,7, \quad f = \frac{69,8}{2 \cdot 3,14} \text{ s}^{-1} \doteq 11,1 \text{ s}^{-1}$$

Počet otočení, které setrvačné kolo vykoná za dobu t_1 a frekvenci na konci doby t_1 určují obecně vztahy (3). Jejich hodnoty jsou $n = 27,7$, $f = 11,1 \text{ s}^{-1}$.

c) Bod A vykoná za dobu t_1 dráhu

$$s_1 = r\varphi_1 = \frac{Mrt_1^2}{2J} \quad (4)$$

a na konci této doby má rychlost

$$v_1 = r\omega_1 = \frac{Mrt_1}{J} \quad (5)$$

Číselně

$$s_1 = 0,3 \cdot 174 \text{ m} = 52,2 \text{ m}, \quad v_1 = 0,3 \cdot 69,8 \text{ m s}^{-1} \doteq 20,94 \text{ m s}^{-1}$$

Dráhu vykonanou bodem A za čas t_1 určuje vztah (4) a rychlost tohoto bodu na konci doby t_1 vztah (5). Číselně je $s_1 = 52,2 \text{ m}$ a $v_1 = 20,94 \text{ ms}^{-1}$.

d) Hodnoty tečného zrychlení a_t a normálového zrychlení a_n určí výrazy

$$a_t = r\varepsilon = \frac{rM}{J} \quad \text{a} \quad a_n = \frac{v_1^2}{r} = \frac{M^2 t_1^2 r}{J^2} \quad (6)$$

Číselně

$$\begin{aligned} a_t &= 0,3 \cdot 13,96 \text{ m s}^{-2} \doteq 4,2 \text{ m s}^{-2}, \quad a_n = \\ &= \frac{20,94^2}{0,3} \text{ m s}^{-2} \doteq 1\,460 \text{ m s}^{-2} \end{aligned}$$

Hodnoty tečného a dostředivého zrychlení udávají vztahy (6).

Číselné hodnoty těchto veličin jsou $a_t = 4,2 \text{ m s}^{-2}$, $a_n = 1\,460 \text{ m s}^{-2}$.

2. Po vypnutí proudu se otáčela kotva elektromotoru rovnoměrně zpomaleně. V čase t_1 měla vykonáno n_1 otáček. Po vykonání n_2 otáček se zastavila v čase t_2 . Čas měříme od okamžiku ($t_0 = 0$), kdy byl vypnut proud.

Určete

a) úhlové zrychlení tohoto zpomaleného pohybu a úhlovou rychlost ω_0 , kterou měla kotva při vypnutí proudu;

b) okamžité rychlosti v_0 a v_1 , které měl v časech t_0 a t_1 bod A na obvodu kotvy, vzdálený od osy otáčení o r a velikost jeho tečného zrychlení a_t při zpomaleném pohybu;

c) jak změnil vektor rychlosti bodu A svou velikost a směr v časovém intervalu t_1 až t_2 ?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $t_1 = 9 \text{ s}$, $t_2 = 15 \text{ s}$, $n_1 = 11$, $n_2 = 13$, $r = 0,3 \text{ m}$.

Označení veličin. Úhel otočení v okamžiku vypnutí proudu označíme φ_0 . V čase t_1 je úhlová rychlost ω_1 a úhlová dráha φ_1 . V čase t_2 označíme tyto veličiny ω_2 a φ_2 . Úhlovou rychlost v proměnném čase budeme značit ω .

Řešení. a) Při zastavení kotvy je $\omega_2 = 0$, takže platí $\omega_0 + \varepsilon t_2 = 0$ a $\omega_0 = -\varepsilon t_2$. (1)

V čase t_1 je úhlová dráha $\varphi_1 = \varphi_0 + \omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \varepsilon t_1^2$,

v čase t_2 $\varphi_2 = \varphi_0 + \omega_0 t_2 + \frac{1}{2} \varepsilon t_2^2$

Násobíme-li první z těchto rovnic číslem -1 a levé a pravé strany rovnic sečteme, dostaneme $\varphi_2 - \varphi_1 = = \omega_0 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \varepsilon (t_2^2 - t_1^2)$. Dosadíme-li za ω_0 ze vztahu (1), získáme po úpravě

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= -\varepsilon(t_2 - t_1)[t_2 - \frac{1}{2}(t_2 + t_1)] = \\ &= -\frac{1}{2}(t_2 - t_1)^2 \cdot \varepsilon, \end{aligned} \quad (2)$$

ze které určíme velikost konstantního úhlového zrychlení

$$\varepsilon = -\frac{2(\varphi_2 - \varphi_1)}{(t_2 - t_1)^2} = -\frac{4\pi(n_2 - n_1)}{(t_2 - t_1)^2} \quad (3)$$

Záporná hodnota úhlového zrychlení vyjadřuje, že uvažovaný pohyb je zpomalený. Ze vztahu (1) vychází

$$\omega_0 = \frac{4\pi t_2(n_2 - n_1)}{(t_2 - t_1)^2} \quad (4)$$

Číselně

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{4\pi(13 - 11)}{(15 - 9)^2} \text{ s}^{-2} = -\frac{2\pi}{9} \text{ s}^{-2}, \quad \omega_0 = -\varepsilon t_2 = \\ &= \frac{10\pi}{3} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Úhlová rychlost kotvy při vypnutí proudu a úhlové zrychlení rovnoměrně zpóźděného pohybu kotvy jsou určeny vztahy (4) a (3). Hodnoty těchto veličin jsou

$$\omega_0 = \frac{10\pi}{3} \text{ s}^{-1} \quad \text{a} \quad \varepsilon = -\frac{2\pi}{9} \text{ s}^{-2}.$$

b) Úhlová rychlost v čase t_1 má hodnotu

$$\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon t_1 = \frac{4\pi(n_2 - n_1)}{(t_2 - t_1)^2} (t_2 - t_1) = \frac{4\pi(n_2 - n_1)}{t_2 - t_1},$$

takže

$$v_1 = r\omega_1 = \frac{4\pi(n_2 - n_1)r}{t_2 - t_1} \quad \text{a} \quad v_0 = r\omega_0 = \frac{4\pi t_2 r(n_2 - n_1)}{(t_2 - t_1)^2} \quad (5)$$

$$a_t = r\varepsilon = -\frac{4\pi r(n_2 - n_1)}{(t_2 - t_1)^2} \quad (6)$$

Číselně

$$v_0 = r\omega_0 = 0,3 \cdot \frac{10\pi}{3} \text{ m s}^{-1} = \pi \text{ m s}^{-1}$$

$$v_1 = \frac{4\pi \cdot 0,3 \cdot 2}{6} \text{ m s}^{-1} = 0,4 \pi \text{ m s}^{-1}$$

$$a_t = r\varepsilon = -0,3 \frac{2\pi}{9} \text{ m s}^{-2} = -\frac{\pi}{15} \text{ m s}^{-2}$$

Rychlosti bodu A v časech $t_0 = 0 \text{ s}$ a $t_1 = 9 \text{ s}$ jsou obecně určeny vztahy (5), tečné zrychlení při zpožděném pohybu vyjadřuje výraz (6).

Číselně je $v_0 = \pi \text{ m s}^{-1}$, $v_1 = 0,4 \pi \text{ m s}^{-1}$,

$$a_t = -\frac{\pi}{15} \text{ m s}^{-2}$$

c) Vektory rychlostí v_1 a v_2 svírají spolu stejně veliký úhel α jako poloměry spojující střed S kruhové dráhy s bodem A v časech t_2 a t_1 . Proto platí podle vztahu (2)

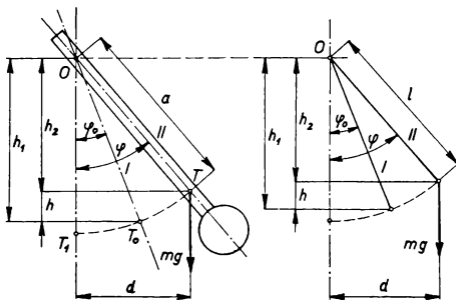
$$\alpha = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon (t_2 - t_1)^2 = 2\pi (n_2 - n_1) \quad (7)$$

Číselně $\alpha = 2\pi(13 - 11) \text{ rad} = 4\pi \text{ rad}$.

Vektor rychlosti změnil v časovém intervalu od t_1 do t_2 svou velikost z hodnoty $v_1 = 0,4 \pi \text{ m s}^{-1}$, určené obecně vztahem (5), na nulu. Směry obou rychlostí svírají spolu úhel $4\pi \text{ rad}$, který je obecně vyjádřen výrazem (7).

3. Určete dobu kyvu fyzického kyvadla.

Na obr. 11 je zobrazeno fyzické kyvadlo, otáčivé kolem osy o procházející bodem O kolmo k nákresně. Jeho těžiště T je od osy rotace vzdáleno $OT = a$. Vychylujeme-li kyvadlo z rovnovážné polohy, roste jeho potenciální



Obr. 11

energie tíhová, protože se zvyšuje poloha jeho těžiště. Při přechodu z polohy I , otočené od rovnovážné polohy o φ_0 , do krajní polohy II , svírající s rovnovážnou polohou úhel φ , se zvětší potenciální energie tíhová kyvadla o

$$\Delta W_p = mgh = mg(h_1 - h_2) = mga \cos \varphi_0 - mga \cos \varphi = mga (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$$

Po uvolnění koná kyvadlo zrychlený otáčivý pohyb a v poloze I nabude kinetickou energii $W_k = \frac{1}{2}J\omega^2$, kde J

značí moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose o a ω jeho úhlovou rychlost v poloze I .

Podle zákona zachování energie platí

$$mga(\cos \varphi_0 - \cos \varphi) = \frac{1}{2} J \omega^2$$

a

$$\omega^2 = \frac{2 mga (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}{J} \quad (1)$$

Vychylujeme-li při napnuté niti z rovnovážné polohy kuličku matematického kyvadla o délce l , zvětší se potenciální energie tíhová tohoto kyvadla. Při přechodu z polohy I , odchýlené o úhel φ_0 z rovnovážné polohy, do krajní polohy II , která je odchýlena od rovnovážné polohy o úhel φ , vzroste potenciální energie tíhová kyvadla o hodnotu $\Delta W'_p = mgl(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$. Při průchodu polohou I má kulička kyvadla kinetickou energii $W'_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\omega'^2$, kde m značí hmotnost kuličky a ω' její úhlovou rychlost v poloze I .

Ze zákona zachování energie plyne $\Delta W'_p = W'_k$. Z této rovnice po úpravě vychází

$$\omega'^2 = \frac{2g (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}{l} \quad (2)$$

Má-li mít uvažované matematické kyvadlo stejnou dobu kyvu jako uvažované kyvadlo fyzické, vypočítáme z rovnice $\omega'^2 = \omega^2$ pro délku matematického kyvadla výraz

$$l = \frac{J}{ma} \quad (3)$$

Výraz (3) má rozměr délky a udává délku matematického kyvadla, které má s uvažovaným fyzickým kyvadlem stejnou dobu kyvu. Značíme ho l^x .

Doba kyvu fyzického kyvadla se dá tedy vypočítat ze vzorce

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l^{\times}}{g}} = \pi \sqrt{\frac{J}{mga}} \quad (4)$$

Pohyb kývajícího kyvadla je obdobný harmonickému pohybu. Dokážeme, že ze vzorce pro dobu kmitu harmonického pohybu vychází vztah (4), jestliže ve vztahu $T = 2\pi \sqrt{\left| \frac{mu}{F} \right|}$ (kde T značí dobu kmitu harmonického pohybu, m hmotnost kmitajícího bodu, u elongaci a F sílu příslušnou této elongaci) nahradíme odpovídajícími veličinami charakteristickými pro otáčivé pohyby veličiny m , u , F , kterými jsou charakterizovány pohyby hmotných bodů, nebo postupné pohyby tělesa. Hmotnosti odpovídá při otáčivých pohybech tělesa moment setrvačnosti J , elongaci u úhlová dráha φ a síle F moment síly M .

Vzorci pro dobu kmitu harmonického pohybu odpovídá pro dobu kmitu fyzického kyvadla vztah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J\varphi}{M}} = 2\pi \sqrt{\frac{J\varphi}{Fd}} = 2\pi \sqrt{\frac{J\varphi}{m g a \sin \varphi}}$$

Pro malé úhly je $\sin \varphi \doteq \varphi$, takže

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J\varphi}{m g a \varphi}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m g a}},$$

což souhlasí se vztahem (4).

Vzorec (4) platí jen pro malé úhly φ .

C. KATEGORIE C

Pohyb družice v gravitačním poli

Ivo Volf — Dr. Marta Chytilová, Hradec Králové — Praha

Na umělou družici ve vzdálenosti r od středu Země působí Země gravitační silou

$$F = \kappa \frac{mM}{r^2}, \quad (1)$$

kde κ je Newtonova gravitační konstanta, $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, m je hmotnost družice a $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ je hmotnost Země.

Tato síla je pro pohyb umělé družice po kružnici dostředivou silou, pro kterou platí

$$F = mr\omega^2 = 4\pi^2 f^2 r m = \frac{4\pi^2}{T^2} r m = m \frac{v^2}{r}, \quad (2)$$

kde ω je úhlová rychlost, v je dráhová rychlost, T je oběžná doba a f je frekvence pohybu družice.

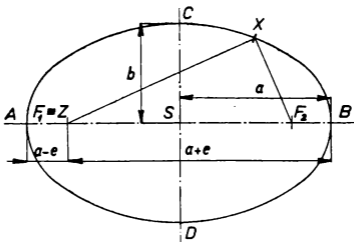
Ve skutečnosti se družice nepohybují po kružnicích, ale po elipsách. Elipsa je rovinná křivka; je to geometrické místo bodů, pro které je součet vzdáleností od dvou daných bodů F_1, F_2 konstantní. Pro libovolný bod elipsy X platí

$$F_1X + F_2X = 2a;$$

body F_1, F_2 jsou ohniska elipsy, $AB = 2a$ je délka hlavní osy, $CD = 2b$ je délka vedlejší osy elipsy; S je střed elipsy (obr. 12); $F_1S = F_2S = e$ je výstřednost elipsy. Platí

$$a^2 = e^2 + b^2$$

Střed Země je v ohnisku eliptické dráhy družice. Vzdálenost r družice od středu Země se mění v mezích



Obr. 12

$$a - e \leq r \leq a + e ; \quad (3)$$

pro $r = a - e$ je družice v perigeu, pro $r = a + e$ je družice v apogeu.

Naším úkolem je stanovit velikost rychlosti družice v libovolném bodě její eliptické dráhy.

Vydeme ze zákona zachování mechanické energie při pohybu družice v gravitačním poli Země.

$$W_k + W_p = \text{konst.}$$

W_k je velikost kinetické energie, W_p je potenciální energie gravitační družice vzhledem k Zemi.

Velikost kinetické energie družice vzhledem k Zemi je

$$W_k = \frac{mv^2}{2}$$

Potenciální energie tělesa v homogenním gravitačním poli Země ve vzdálenosti h od povrchu Země je

$$W_p = mgh$$

Umělá družice se však pohybuje v nehomogenním gravitačním poli. Abychom mohli určit její potenciální energii gravitační, rozdělíme vzdálenost h na n stejných dílů $\Delta r = \frac{h}{n}$ tak, abychom mohli pokládat velikost gravitační síly na úseku Δr přibližně za konstantní. Označme F_0 velikost gravitační síly při povrchu Země a F_1 velikost gravitační síly ve vzdálenosti $r_1 = R + \Delta r$ od středu Země; pak platí

$$F_0 = \kappa \frac{mM}{R^2}, \quad F_1 = \kappa \frac{mM}{r_1^2}$$

Jako konstantní hodnotu gravitační síly v prvním úseku Δr volíme aritmetický průměr \bar{F}_1 velikostí sil F_0 a F_1 . Tato hodnota je jen přibližná, protože gravitační síla se nemění podle lineární funkce se vzdáleností od středu Země.

Tak nahradíme skutečné gravitační pole Země, ve kterém se gravitační síla působící na družici mění se vzdáleností od povrchu Země spojitě, jistým modelem, ve kterém se tato síla mění skokem.

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= \frac{1}{2} (F_0 + F_1) = \frac{1}{2} \kappa mM \left[\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r_1^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \kappa mM \cdot \frac{r_1^2 + R^2}{R^2 r_1^2} = \\ &= \frac{1}{2} \kappa mM \frac{R^2 + 2R \Delta r + (\Delta r)^2 + R^2}{R^2 (R + \Delta r)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \kappa mM \frac{2R^2 + 2R \Delta r + (\Delta r)^2}{R^2 (R + \Delta r)^2} \end{aligned}$$

Protože $(\Delta r)^2 \ll R^2$, můžeme $(\Delta r)^2$ zanedbat vzhledem k R^2

$$\begin{aligned}\bar{F}_1 &= \kappa m M \frac{R^2 + R\Delta r}{R^2(R + \Delta r)^2} = \kappa m M \frac{(R + \Delta r) R}{(R + \Delta r)^2 R^2} = \\ &= \frac{\kappa m M}{R(R + \Delta r)} = \frac{\kappa m M}{Rr_1}\end{aligned}$$

Analogicky platí pro další úseky

$$\bar{F}_2 = \frac{\kappa m M}{r_1 r_2}, \bar{F}_3 = \frac{\kappa m M}{r_2 r_3}, \dots, \bar{F}_n = \frac{\kappa m M}{r_{n-1} r_n},$$

kde $r_n = r$.

Určíme velikost práce vykonané při zvedání tělesa hmotnosti m rovnoměrným pohybem v jednotlivých úsecích Δr

$$A_1 = \bar{F}_1 \Delta r = \frac{\kappa m M}{Rr_1} (r_1 - R) = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$A_2 = \kappa m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$A_3 = \kappa m M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right)$$

⋮

$$A_n = \kappa m M \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n} \right)$$

Celková práce

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \dots + A_n$$

$$A = \kappa m M \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} \right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n} \right) \right]$$

$$A = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_n} \right)$$

závisí pouze na počáteční a koncové poloze tělesa. Celková práce je tedy

$$A = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

Z důvodů, které budou patrné později, upravíme poslední vztah na

$$A = - \frac{\kappa m M}{r} + \frac{\kappa m M}{R}$$

Vykonáním této práce při působení vnější síly na těleso získá těleso potenciální energii gravitační

$$\Delta W_p = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \quad (4)$$

Stejným postupem určíme změnu potenciální energie gravitační tělesa o hmotnosti m při přenesení ze vzdálenosti r_0 od středu Země do vzdálenosti r

$$\Delta W_p = - \kappa m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (5)$$

Kdy vede vztah (4) k dříve uvedenému vyjádření potenciální energie gravitační pro homogenní pole?

Rovnici (4) upravíme takto

$$\begin{aligned} \Delta W_p &= \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) = \frac{\kappa m M (r - R)}{rR} = \\ &= \frac{\kappa m M h}{R(R + h)} = \frac{\kappa m M h}{R^2 \left(1 + \frac{h}{R} \right)} \end{aligned}$$

Protože $\frac{\kappa M}{R^2} \doteq g$ je tíhové zrychlení na povrchu Země, platí

$$\Delta W_p = \frac{mgh}{1 + \frac{h}{R}}$$

Pro $h \ll R$, tj. pro výšku h malou vzhledem k poloměru R Země, je

$$\Delta W_p = mgh$$

Již tento vztah udává, že velikost potenciální energie tíhové je nutno uvažovat vzhledem ke zvolené hladině nulové potenciální energie, která může být buďto na povrchu Země, nebo v některé výšce nad ním.

V rovnici (5) však můžeme též volit

$$\frac{\kappa mM}{r_0} = 0,$$

což je možno obecně splnit za předpokladu, že $r_0 \rightarrow \infty$. Potom těleso o hmotnosti m nacházející se ve vzdálenosti r od středu Země má potenciální energii gravitační vzhledem k nulové hladině umístěné v nekonečnu

$$W_p = - \frac{\kappa mM}{r} \quad (6)$$

Zákon zachování mechanické energie pro družici ve vzdálenosti r od středu Země lze pak psát

$$W_k + W_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{\kappa mM}{r} = \text{konst.} \quad (7)$$

Tento vztah platí v libovolném bodě dráhy družice, tedy i v perigeu a v apogeu

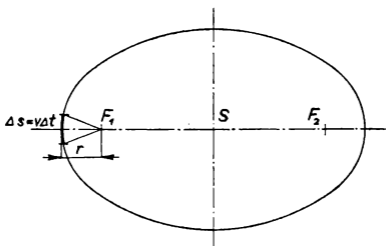
$$\frac{mv_a^2}{2} - \frac{\kappa mM}{a+e} = \frac{mv_p^2}{2} - \frac{\kappa mM}{a-e} \quad (8a)$$

$$\frac{mv_a^2}{2} - \frac{\kappa mM}{a+e} = \frac{mv^2}{2} - \frac{\kappa mM}{r}, \quad (8b)$$

kde v_a je rychlost družice v apogeu, v_p rychlost v perigeu, v rychlost v libovolné vzdálenosti r od středu Země, v mezích daných vztahem (3).

Podle druhého Keplerova zákona jsou plochy opsané průvodičem za stejný čas stejné.

Velikost plochy opsané za velmi krátký časový interval Δt vypočítáme přibližně jako obsah trojúhelníka $S = \frac{1}{2} v \Delta t \cdot r$ (obr. 13).



Obr. 13

Pro družici v apogeu a v perigeu tedy platí

$$\frac{1}{2} v_a \Delta t (a + e) = \frac{1}{2} v_p \Delta t (a - e),$$

$$\text{takže } v_p = v_a \frac{a + e}{a - e} \quad (9)$$

Dosadíme za v_p do vztahu (8a), vyjde

$$\frac{mv_a^2}{2} - \frac{\kappa mM}{a + e} = \frac{mv_a^2}{2} \cdot \frac{(a + e)^2}{(a - e)^2} - \frac{\kappa mM}{a - e}$$

Po úpravě rovnice dostaneme

$$v_a^2 \left[1 - \left(\frac{a+e}{a-e} \right)^2 \right] = 2\kappa M \left(\frac{1}{a+e} - \frac{1}{a-e} \right) \quad (10)$$

Výsledný vztah nezávisí na hmotnosti družice. Podmínka omezující platnost Keplerových zákonů $m \ll M$ však zůstává v platnosti.

Ze vztahu (10) vypočítáme

$$v_a^2 = \frac{\kappa M (a-e)}{a(a+e)}$$

a dosadíme do rovnice (8b)

$$\frac{\kappa M}{2a} \cdot \frac{a-e}{a+e} - \frac{\kappa M}{a+e} = \frac{v^2}{2} - \frac{\kappa M}{r}$$

$$v = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (11)$$

Diskuse rovnice (11):

a) Pro $a = b = r$ koná družice rovnoměrný pohyb po kružnici s rychlostí

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa M}{r}}; \quad (12)$$

b) Pro $a \neq b$ je dráha elipsa a rychlost v libovolné vzdálenosti r v mezích daných vztahem (3), je vyjádřena rovnicí (11).

c) Jestliže $a \rightarrow \infty$, pak $\frac{1}{a} \rightarrow 0$; družice se po parabole trvale vzdaluje od Země, její rychlost v libovolné vzdálenosti r od středu Země je

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa M}{r}} \quad (13)$$

d) Pro $a < 0$ je dráha družice hyperbola a rychlost ve vzdálenosti r od středu Země je

$$v = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{|a|} \right)}$$

Grafické vyjádření tvarů těchto drah je v učebnici Fyzika pro 1. roč. SVVŠ (SPN, Praha 1964), str. 149, obr. 159.

Aby se těleso dostalo z povrchu Země do výšky h , musí mu být při startu udělena taková rychlost v_0 , aby jeho kinetická energie $W_k = \frac{mv_0^2}{2}$ se rovnala potenciální energii gravitační W_p ve výšce $h = r - R$. Podle vztahu (4) tedy platí za předpokladu, že nenastanou jiné přeměny energie,

$$\frac{mv_0^2}{2} = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right),$$

odtud určíme

$$v_0 = \sqrt{2\kappa M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)} \quad (14)$$

Velikost rychlosti pro kruhovou dráhu družice při povrchu Země, tj. pro $r = R$, je podle vztahu (12)

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa M}{R}} \doteq 7,9 \text{ km/s}$$

a nazývá se *první kosmická rychlost*.

Velikost rychlosti únikové pro parabolickou dráhu při povrchu Země, tj. pro $r = R$, je podle vztahu (13)

$$v_u = \sqrt{\frac{2\kappa M}{R}} \doteq 11,2 \text{ km/s}$$

a nazývá se *druhá kosmická rychlost*.

Úlohy

1. Raketa startuje vertikálně rychlostí $v_0 = 3$ km/s. Do jaké maximální výšky nad povrch Země se dostane? Odpor prostředí zanedbejte.

Řešení. Podle vztahu (14) určíme

$$r_{\max} = \frac{2\kappa MR}{2\kappa M - Rv_0^2} = \frac{R}{1 - \frac{Rv_0^2}{2\kappa M}}$$

Dosadíme $R = 6,38 \cdot 10^6$ m, $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²,

$$M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$r_{\max} = 6,88 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$h_{\max} = r_{\max} - R \doteq 500 \text{ km}$$

2. Jak velkou rychlostí se pohybovala v apogeu a perigeu na své eliptické dráze jedna z prvních sovětských družic Sputnik II, u níž jsme v tabulkách našli $h_a = 1\,671$ km, $h_p = 225$ km?

Řešení. Stanovíme nejprve příslušné vzdálenosti a i r , potom dosadíme do (11).

$$a = R + \frac{h_a + h_p}{2} = \left(6\,378 + \frac{1\,896}{2}\right) \text{ km} = 7\,326 \text{ km}$$

$$a \doteq 7,33 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$r_a = a + e = R + h_a = (6\,378 + 1\,671) \text{ km} = 8\,049 \text{ km}$$

$$r_a \doteq 8,05 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$r_p = a - e = R + h_p = (6\,378 + 225) \text{ km} = 6\,603 \text{ km}$$

$$r_p \doteq 6,60 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$v_a = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} \doteq 6,73 \text{ km/s}$$

$$v_p = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} \doteq 8,16 \text{ km/s}$$

Kdyby se družice pohybovala rovnoměrným pohybem po kružnici, byla by její rychlost

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa M}{r}} \doteq 7,36 \text{ km/s}$$

3. Určete velikost dodané energie na 1 kg užitečné hmotnosti, byla-li družice uvažovaná v úloze 2. dopravena z povrchu Země do perigea a srovnejte s energií v apogeu.

Řešení

$$W = W_p + W_k$$

1. V perigeu:

$$m = 1 \text{ kg}, v = 8,16 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \doteq 33,4 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$W_p = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_p} \right) = \kappa m M \cdot \frac{r_p - R}{R \cdot r_p} \doteq 2,44 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$W = W_p + W_k \doteq 35,8 \text{ MJ}$$

2. V apogeu:

$$m = 1 \text{ kg}, v = 6,73 \text{ km/s}$$

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \doteq 22,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$W_p = \kappa m M \frac{r_a - R}{R \cdot r_a} \doteq 13,2 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$W \doteq 35,8 \text{ MJ}$$

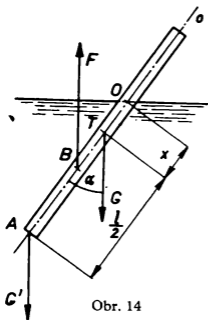
11. Řešení úloh kategorie A

PRVNÍ KOLO SOUTĚŽE

1. Tenká stejnorodá tyč délky l , všude stejného průřezu S ($S \rightarrow 0$), o tíze G , je na jednom konci zatížena závažím tíhy $G' = G$ a plove v šikmé poloze ve vodě hustoty ρ_0 .

Objem závaží je tak malý, že jeho nadlehčení ve vodě můžeme zanedbat vzhledem k vztlakové síle F působící na plovoucí tyč.

- Jakou částí své délky je tyč ponořena ve vodě?
- Jakou hustotu má materiál tyče?
- Platí výsledek odvozený v části a) také v tom případě, že podélná osa tyče je kolmá k povrchu vody?



Označení veličin: Plove-li tyč ve vodě, je ponořena až po určitý bod O na její podélné ose o , jehož vzdálenost od těžiště T tyče označíme x (obr. 14). Fyzikálně je uvažovaná plovoucí tyč pákou otáčivou kolem pevné vodorovné osy o' , procházející bodem O kolmo k ose o . Osa o svírá se svislým směrem úhel α . Protože tyč je z homogenního materiálu, nachází se její těžiště T v jejím středu. Na plovoucí tyč působí tři síly, její tíha G v těžišti, tíha závaží G' v bodě A na spodním konci osy o

a vztlaková síla F , která působí v bodě B ležícím na ose o ve středu úsečky AO . Síla F má podle Archimédova zákona hodnotu

$$F = G + G' = 2G \quad (1)$$

a je orientována svisle vzhůru. Síly G a G' směřují svisle dolů. Hustotu materiálu tyče označíme ρ , hustotu vody $\rho_0 = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, g značí tíhové zrychlení.

Řešení: a) Podle momentové věty je tyč v rovnováze, jestliže platí

$$G' \left(x + \frac{l}{2} \right) \sin \alpha + G x \sin \alpha - F \frac{x + \frac{l}{2}}{2} \sin \alpha = 0$$

Vzhledem k podmínce $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ je $\sin \alpha \neq 0$. Proto lze obě strany poslední rovnice násobit výrazem $\frac{4}{\sin \alpha}$, takže vyjde

$$2G'(2x + l) + 4Gx - F(2x + l) = 0 \quad (2)$$

Dosadíme-li do této rovnice $G' = G$ a podle vztahu (1) $F = 2G$, vyjde po úpravě $4Gx = 0$. Protože $G \neq 0$, je

$$x = 0 \quad (3)$$

Tyč je ponořena ve vodě polovinou své délky.

b) Je-li plovoucí tyč ponořena ve vodě polovinou své délky, je spolu se závažím G' nadlehčována silou $F = \frac{1}{2} Sl_{\rho_0}g$. Tíha závaží spolu s tíhou tyče má hodnotu $G + G' = 2 Sl_{\rho_0}g$. (4)

Dosadíme-li tyto hodnoty do vztahu (1), vyjde $\frac{1}{2} Sl_{\rho_0}g = 2 Sl_{\rho}g$, takže

$$\rho = \frac{\rho_0}{4} \quad (5)$$

a po dosazení za ρ_0 je $\rho = 2,5 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-3}$.

Hustota materiálu tyče je $2,5 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-3}$. Obecně je určena vztahem (5).

c) Hodnota (3) byla určena z Archimédova zákona za předpokladu, že $\alpha \neq 0$. Mají-li tedy výsledky části a) úlohy platit i tehdy, je-li podélná osa tyče kolmá k povrchu vody, musíme dokázat, že při hodnotách (3) a (5) platí Archimédův zákon ve tvaru vyjádřeném rovnicí (1) i pro tyč, která plove v poloze kolmé k povrchu vody.

Důkaz: Podle vztahu (4) je $F = \frac{1}{2}Sl\rho_0g$. Dosadíme-li do tohoto výrazu za $\rho_0 = 4\rho$ podle vztahu (5), vyjde

$$F = \frac{1}{2}Sl \cdot 4\rho g = 2Sl\rho g = G + G',$$

což mělo být dokázáno.

Plovoucí tyč je ponořena ve vodě polovinou své délky i v tom případě, že její podélná osa je kolmá k povrchu vody.

2. Baterie se skládá z n za sebou spojených zdrojů o elektromotorickém napětí \mathcal{E} , jež mají stejný vnitřní odpor r .

- a) Při jaké hodnotě proudu je užitečný výkon baterie P' ?
 b) Jaký je maximální užitečný výkon této baterie?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $n = 5$, $\mathcal{E} = 1,4 \text{ V}$, $r = 0,3 \Omega$, $P = 8 \text{ W}$.

Označení veličin: Proud procházející obvodem označíme I , výkon proudu obecně P' , maximální výkon obvodu P_{\max} . Svorkové napětí baterie je

$$U = n(\mathcal{E} - rI) \quad (1)$$

Řešení: a) Dosadíme-li do vztahu pro výkon proudu za U hodnotu ze vztahu (1), dostaneme vztah $P' = UI = n(\mathcal{E} - rI)I = n\mathcal{E}I - nrI^2$ a z něho po úpravě rovnici $nrI^2 - n\mathcal{E}I + P' = 0$. Kořeny této rovnice jsou

$$I_{1,2} = \frac{n\mathcal{E} \pm \sqrt{n^2\mathcal{E}^2 - 4nrP'}}{2nr} \quad (2)$$

Jestliže diskriminant rovnice (2) $D = n^2\mathcal{E}^2 - 4nrP' = n(n\mathcal{E}^2 - 4rP') \geq 0$, jsou oba kořeny reálné. Protože $n > 0$, lze podmínku pro reálnost kořenů rovnice (2) vyjádřit ve tvaru $n\mathcal{E}^2 - 4rP' \geq 0$, odkud vyjde

$$P' \leq \frac{n\mathcal{E}^2}{4r} \quad (3)$$

Pro dané hodnoty vyjde $P' \leq \frac{5 \cdot 1,4^2}{4 \cdot 0,3} \text{ W} = 8,17 \text{ W}$.

Při velikosti výkonu $P = 8 \text{ W}$ daného textem úlohy je nerovnost (3) splněna. Proto má rovnice (2) pro dané hodnoty dva reálné kořeny. Protože $n\mathcal{E} > \sqrt{n^2\mathcal{E}^2 - 4nrP}$, jsou oba kořeny kladné a obě hodnoty I_1 a I_2 jsou reálným řešením úlohy v části a).

Dosadíme-li do vztahu (2) dané hodnoty, vychází

$$I_{1,2} = \frac{5 \cdot 1,4 \pm \sqrt{5^2 \cdot 1,4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0,3 \cdot 8}}{2 \cdot 5 \cdot 0,3} \frac{\text{V}}{\Omega} = \\ = \frac{7 \pm 1}{3} \text{ A}, \text{ takže } I_1 = \frac{8}{3} \text{ A} = 2\frac{2}{3} \text{ A} \text{ a } I_2 = 2 \text{ A}.$$

Baterie má užitečný výkon $P = 8 \text{ W}$, protéká-li obvodem proud $2\frac{2}{3} \text{ A}$ nebo 2 A . Obě hodnoty jsou obecně určeny vztahem (2).

b) Ze vztahu (3) je patrné, že maximální užitečný výkon baterie je obecně určen výrazem $P_{\max} = \frac{n\mathcal{E}^2}{4r}$, který má pro dané hodnoty velikost $8,17 \text{ W}$.

3. Změřte odpor spotřebiče metodou přímou.

Pomůcky: Spotřebič neznámého odporu R , zdroj stejnosměrného napětí, avomet A jako ampérmetr, avomet V jako voltmetr, ohmmetr, spojovací lanka.

Návod: Přímou metodou určíme neznámý odpor R spotřebiče tak, že připojíme ke zdroji stejnosměrného napětí obvod obsahující spotřebič a ampérmetr zařazené v sérii. Voltmetr můžeme připojit buď a) ke svorkám spotřebiče, nebo b) ke vstupní svorce spotřebiče a výstupní svorce ampérmetru. Z hodnot napětí U_1 a proudu I_1

naměřených voltmetrem v případě a) a z hodnot U_2 a I_2 získaných měření v případě b) můžeme pro odpor R získat dvě různé hodnoty

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} \text{ a } R_2 = \frac{U_2}{I_2}$$

Žádná z těchto hodnot není správná. Správná hodnota se vypočítá při měření metodou a) podle vztahu

$$R = \frac{U_1 R_V}{I_1 R_V - U_1}, \quad (1)$$

při měření metodou b) podle vztahu

$$R = \frac{U_2}{I_2} - R_A \quad (2)$$

Písmenem R_V je označen odpor voltmetru, písmenem R_A odpor ampérmetru.

Úkol: 1. Načrtněte schéma obvodu pro oba uvedené způsoby měření.

2. Vysvětlete, proč žádná z hodnot $R_1 = \frac{U_1}{I_1}$ a

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} \text{ není správná.}$$

3. Dokažte správnost vztahů (1) a (2).

4. Proveďte měření takto:

A. Zapojte obvod nejprve podle prvního z načrtnutých schémat, změřte příslušné hodnoty U_1 a I_1 a zaznamenejte je do tabulky I. Zdroj připojíte k obvodu až po schválení dozírajícího učitele.

B. Připojte voltmetr k obvodu podle druhého schématu a změřte U_2 a I_2 a naměřené hodnoty zaznamenejte do tabulky II.

C. Měření A. a B. opakujte za stejných podmínek pět-krát, vypočítejte pro každé měření příslušnou hodnotu R_1 , resp. R_2 a najděte jejich aritmetické průměry.

D. Změřte ohmmetrem R_A a R_V pro příslušné rozsahy avometů.

5. Vypočítejte R podle vztahů (1) a (2). Jakou hodnotu má rozdíl $R - R_1$ (v %) ve srovnání s R , jestliže R značí hodnotu vypočítanou podle vztahu (1), a rozdíl $R - R_2$ (v %) ve srovnání s R , je-li R určeno ze vztahu (2).

6. V kterém případě by vyjadřoval správně velikost odporu R odpor R_1 , v kterém případě R_2 ?

7. Jak velké odpory ve srovnání s odporem R spotřebiče musí mít voltmetr, resp. ampérmetr, aby odpor spotřebiče byl vyjádřen s dostatečnou přesností hodnotami určenými vztahy

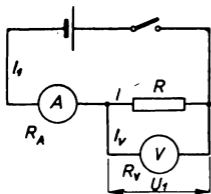
$$R_1 = \frac{U_1}{I_1}, \quad \text{resp.} \quad R_2 = \frac{U_2}{I_2} ?$$

Řešení: 1. Metodou přímou lze měřit odpor R spotřebiče při dvou různých způsobech zapojení voltmetru do obvodu.

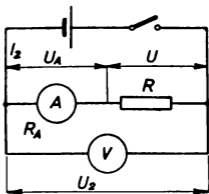
a) Voltmetr se zapojí přímo ke svorkám spotřebiče (obr. 15a);

b) napětí se změří na části obvodu s ampérmetrem a spotřebičem (obr. 15b).

Při prvním způsobu měření je naměřené napětí U_1 , naměřený proud I_1 , při druhém způsobu má naměřené napětí hodnotu U_2 , proud I_2 . Podle Ohmova zákona vyjdou pro odpor spotřebiče dvě různé hodnoty, $R_1 = \frac{U_1}{I_1}$ při měření podle zapojení a) a $R_2 = \frac{U_2}{I_2}$ při měření



Obr. 15a



Obr. 15b

v obvodu označeném b). Žádná z těchto hodnot není správná.

2. V obvodu sestaveném podle schématu 15a neprochází odporem R proud I_1 , nýbrž proud I , který má velikost $I = I_1 - I_V$, kde I_V značí proud procházející voltmetrem. Proto je $R = \frac{U_1}{I} = \frac{U_1}{I_1 - I_V}$. Protože $I_1 > I$, je $R_1 < R$.

V obvodu sestaveném podle obr. 15b není na odporu R napětí U_2 , nýbrž $U = U_2 - U_A$, kde U_A značí napětí na ampérmetru. Skutečný odpor má tedy hodnotu $R = \frac{U}{I_2} = \frac{U_2 - U_A}{I_2}$. Protože $U < U_2$, je $R < R_2$.

3. Z obou hodnot R_1 a R_2 můžeme vypočítat správnou hodnotu R odporu, známe-li odpory R_V voltmetru a R_A ampérmetru.

Ze vztahu $R = \frac{U_1}{I}$ vyjde po úpravách

$$R = \frac{U_1}{I} = \frac{U_1}{I_1 - I_V} = \frac{U_1}{I_1 - \frac{U_1}{R_V}} = \frac{U_1 R_V}{I_1 R_V - U_1} \quad (1)$$

a ze vztahu $R = \frac{U}{I_2}$ se určí

$$R = \frac{U_2 - U_A}{I_2} = \frac{U_2 - R_A I_2}{I_2} = \frac{U_2}{I_2} - R_A \quad (2)$$

4. Zapojíme obvod nejprve podle obr. 15a a potom podle schématu 15b a změříme při každém způsobu zapojení za stejných podmínek pětkrát příslušné hodnoty proudu a napětí. Naměřené hodnoty zapíšeme do tabulek I a II.

Pro každé měření vypočítáme příslušnou hodnotu R_1 , resp. R_2 , najdeme aritmetické průměry hodnot R_1 a R_2 a zaznamenané je v tabulkách (viz str. 76).

Ohmmetrem jsme naměřili odpor voltmetru $R_V = 6\,000\ \Omega$, odpor ampérmetru $R_A = 146\ \Omega$.

5. Dosadíme-li do vztahů (1) a (2) za U_1 , U_2 , I_1 , I_2 jejich průměrné hodnoty uvedené v tabulkách I a II a za R_V a R_A hodnoty naměřené ohmmetrem, vyjde z měření prováděných při zapojení obvodu podle obr. 15a $R = 148,56\ \Omega$ a při měřeních v obvodu sestaveném podle obr. 15b $R = 149,8\ \Omega$.

Velikost poměru $p_1 = \frac{R - R_1}{R}$ je při měření prvním způsobem rovna $p_1 = 0,15\ \%$, při měření druhým způsobem $p_2 = \frac{R_2 - R}{R} = 97,2\ \%$.

Tabulka I

Tabulka II

Měření č.	schéma podle obr. 15a			schéma podle obr. 15b		
	U_1 [V]	I_1 [A]	R_1 [Ω]	U_2 [V]	I_2 [A]	R_2 [Ω]
1	4,48	0,031	144,5	4,50	0,016	281
2	4,50	0,032	140,7	4,49	0,015	299
3	4,47	0,030	148,9	4,49	0,014	320
4	4,46	0,029	153,8	4,50	0,016	281
5	4,46	0,029	153,8	4,50	0,015	300
aritm. průměr	4,474	0,0302	148,34	4,496	0,0152	296,2

6. Aby byl odpor $R = R_1$, musila by platit rovnice $\frac{U_1}{I} = \frac{U_1}{I_1}$. Z ní vychází, že odporem v obvodu podle obr. 15a by musel procházet stejný proud jako ampérmetrem, takže by $I_V = 0$. Tento případ může nastat, jestliže $R_V \rightarrow \infty$, tj. při užití statického voltmetru. Odpor R by se podle vztahu (2) rovnal odporu R_2 , kdyby $R_A = 0$, tj. kdyby odpor ampérmetru byl nulový.

7. Má-li odpor R_1 vyjadřovat s dostatečnou přesností skutečnou velikost odporu R spotřebiče, musí být podle části úlohy 6 a podle obr. 15a odpor spotřebiče zanedbatelně malý vzhledem k odporu voltmetru ($R \ll R_V$).

Je-li odpor ampérmetru mnohem menší než odpor spotřebiče ($R_A \ll R$), pak vyjadřuje velikost odporu R s dostatečnou přesností hodnota R_2 .

4. Zapojíme-li n galvanických článků o elektromotorickém napětí \mathcal{E} a o vnitřním odporu r za sebou, prochází

vnějším odporem R proud I_1 . Zapojíme-li je vedle sebe, jde vnějším odporem proud I_2 .

a) Jakou velikost musí mít vnější odpor R , aby $I_1 = I_2$?

b) Při kterém z uvažovaných dvou zapojení je proud ve vnější části obvodu větší, je-li $R > r$?

c) Při kterém z těchto dvou zapojení je proud ve vnější části obvodu větší, je-li $R < r$?

d) Jaké podmínce musí vyhovovat vnější odpor R_1 při zapojení sériovém a vnější odpor R_2 ($R_2 \neq R_1$) při zapojení paralelním, aby byl výkon ve vnější části obvodů v obou případech stejný?

e) Jaké podmínce musí vyhovovat R , aby byl výkon ve vnější části obvodů v obou případech stejný, jestliže $R_1 = R_2 = R$?

Proveďte zkoušku správnosti.

Označení veličin: Proudové veličiny (elektromotorické napětí \mathcal{E} baterie, její svorkové napětí U , vnější odpor R obvodu, vnitřní odpor baterie r , proud I v obvodu, výkon P vnější části obvodu) budeme značit při sériovém zařazení článků indexem 1, při paralelním zařazení článků indexem 2.

Při sériovém zařazení článků je vnitřní odpor baterie $r_1 = nr$, elektromotorické napětí $\mathcal{E}_1 = n\mathcal{E}$, při paralelním zařazení článků je elektromotorické napětí baterie $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ a pro vnitřní odpor vychází ze vztahu

$$\frac{1}{r_2} = \frac{n}{r} \quad \text{hodnota } r_2 = \frac{r}{n}$$

Řešení: a) Podle Ohmova zákona je

$$I_1 = \frac{n\mathcal{E}}{R_1 + nr} \quad \text{a} \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + \frac{r}{n}} = \frac{n\mathcal{E}}{nR_2 + r} \quad (1)$$

Má-li být $I_1 = I_2$, pak platí rovnost

$$\frac{n\mathcal{E}}{R_1 + nr} = \frac{n\mathcal{E}}{nR_2 + r},$$

z níž při rovnosti $R_1 = R_2 = R$ vychází

$$R = r$$

Má-li obvodem procházet stejně veliký proud při obou uvažovaných způsobech zařazení článků v baterii, musí být při rovnosti $R_1 = R_2 = R$ vnější odpor obvodu roven vnitřnímu odporu jednoho článku.

b) Je-li $R_1 = R_2 = R > r$, pak je $R_1 = R_2 = R = r + r'$, kde $r' > 0$.

Potom platí po dosazení do vztahů (1)

$$I_1 = \frac{n\mathcal{E}}{(n+1)r + r'} \quad \text{a} \quad I_2 = \frac{n\mathcal{E}}{(n+1)r + nr'}$$

Protože $nr' > r'$, je $I_2 < I_1$.

Je-li vnější odpor obvodu větší než odpor jednoho článku, prochází obvodem při rovnosti $R_1 = R_2 = R$ větší proud při sériovém než při paralelním zařazení článků do obvodu.

c) Je-li $R_1 = R_2 = R < r$, pak je $R = r - r'$, kde $r' > 0$. Potom po dosazení do vztahů (1) vychází

$$I_1 = \frac{n\mathcal{E}}{(n+1)r - r'} \quad \text{a} \quad I_2 = \frac{n\mathcal{E}}{(n+1)r - nr'}$$

Protože $n r' > r'$, je

$$I_1 < I_2$$

Je-li vnější odpor obvodu menší než odpor jednoho článku, prochází obvodem při rovnosti $R_1 = R_2 = R$ větší proud při paralelním než při sériovém zařazení článků v baterii.

d) Výkon proudu určíme ze vztahu $P = UI = RI^2$, takže podle vztahů (1) je

$$P_1 = R_1 I_1^2 = R_1 \frac{n^2 \mathcal{E}^2}{(R_1 + n r)^2} \quad \text{a} \quad P_2 = R_2 I_2^2 = \\ = R_2 \frac{n^2 \mathcal{E}^2}{(n R_2 + r)^2}$$

Z rovnosti $P_1 = P_2$ plyne

$$R_1(n R_2 + r)^2 = R_2(R_1 + n r)^2,$$

odkud po úpravách vyjde $(n^2 R_2 - R_1)(R_1 R_2 - r^2) = 0$. Tato rovnost je splněna za těchto podmínek

$$R_1 = n^2 R_2 \quad (2)$$

$$r = \sqrt{R_1 R_2} \quad (3)$$

Obvod má při obou uvažovaných způsobech zařazení článků v baterii stejný výkon, jestliže platí jedna z podmínek (2) a (3).

e) Podmínka $n = 1$ vycházející ze vztahu (2) při rovnosti $R_1 = R_2$ nemá fyzikálně význam, neboť při řešení úlohy je nutno předpokládat, že $n > 1$.

Ze vztahu (3) vychází při rovnosti $R_1 = R_2 = R$ podmínka

$$R = R_1 = R_2 = r$$

Tato podmínka vyplývá také přímo z výsledku části a) úlohy.

Dva obvody majú pri rovnako veľkých odporoch rovnaký výkon, keďže $I_1 = I_2$, t.j. je-li $R_1 = R_2 = r$.

Má-li byť výkon vo vnější časti obvodu v oboch uvažovaných prípadoch rovnaký za rovnosti vnějších odporů, musí byť vnější odpor obvodu roven odporu jedného článku zařazeného do baterie.

5. Z trubice vodostreku, ktorej ústie je vo vodorovnej rovine podložky, strieka voda pod uhlom α . Prúd vody dosahuje maximálnej výšky h vzhľadom na vodorovnú rovinu σ . Nad touto trubicou sa nachádza vo výške h druhá trubica, ktorej os je vodorovná a leží spolu s osou prvej trubice v jednej zvislej rovine. Ústia oboch trubíc sú zvisle nad sebou. Výtoková rýchlosť vody v oboch trubicách je v_0 .

1. Určite všetky možné polohy, v ktorých je možno postaviť na podložku zvisle dosku výšky l tak, aby nebola zasiahnutá prúdom vody. Dosku umiestňujeme na vodorovnú podložku.

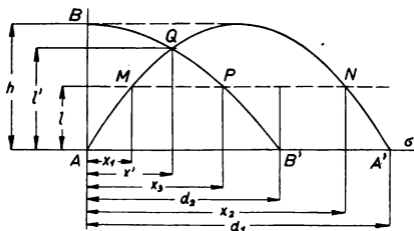
2. Vypočítajte, akú maximálnu výšku môže mať doska a kde ju treba umiestniť, aby nebola zasiahnutá vodou?

Predpokladajte, že z trubice striekajú veľmi tenké prúdy vody. Odpor vzduchu neuvažujte.

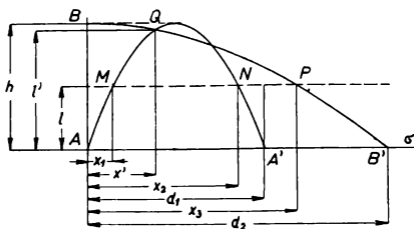
Počítajte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $\alpha = 60^\circ$, $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$, $l = \frac{h}{2}$, $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$.

Označenie veličín:

Každá častica vody vystrekujúca z prvej trubice v mieste A (obr. 16 a, b, c) pod elevačným uhlom α koná pohyb zvaný šikmý vrh; častice vody vystrekujúce v mieste B z druhej trubice konajú vrh vodorovný.



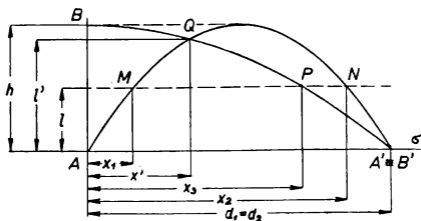
Obr. 16a



Obr. 16b

Vodorovné vzdialenosti uvažovaných častíc od priamky AB (os y) značne obecné x , zvislé vzdialenosti častíc od roviny σ označíme obecné písmenom y .

Na vodorovnú rovinu σ dopadnú častice z prvej trubice v mieste A' vo vzdialenosti $AA' = d_1$; častice z druhej



Obr. 16c

trubice dopadnú v mieste B' vo vzdialenosti $AB' = d_2$. Najväčšiu výšku h dosiahne častica konajúca šikmý vrh vo vzdialenosti $\frac{d_1}{2}$ od osi y . Výšku l nad rovinou σ dosiahne častica konajúca šikmý vrh v miestach $M(x_1, l)$ a $N(x_2, l)$, častica pohybujúca sa vodorovným vrhom v mieste $P(x_3, l)$.

Rovinu určenú osami obidvoch trubíc značme τ .

Ak doska výšky l , stojaca kolmo na rovine σ , nemá byť zasiahnutá ani časticami vody, ktoré konajú šikmý vrh, ani časticami vody, ktoré konajú vrh vodorovný, tak musí byť postavená v takých vzdialenostiach x od y -ovej osi, že platí

- $x_1 < x < x_3$ alebo $d_2 < x < x_2$ v prípade, ak $d_1 > d_2$ (obr. a);
- $x_1 < x < x_2$ alebo $d_1 < x < x_3$ v prípade, ak $d_1 < d_2$ (obr. b);
- $x_1 < x < x_3$ v prípade, ak $d_1 = d_2$ (obr. c).

Vo všetkých týchto prípadoch vyhovujú tiež všetky polohy dosky, pre ktoré je $x > d_1$ a zároveň $x > d_2$.

Predpokladáme, že doska je veľmi tenká, že rovina dosky neleží v rovine τ určenej osami oboch trubíc a že najvyšší bod dosky sa nachádza v rovine τ .

Postup riešenia: Úlohu budeme riešiť najprv všeobecne pre uhly $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ a pre $0 < l < h$.

1. Pre častice, ktoré konajú šikmý vrh, platia všeobecné vzťahy

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Ak vypočítame z prvého vzťahu $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ a dosadíme do druhého, vyjde

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (1)$$

Funkčná rovnica (1) je pre interval $0 \leq x \leq d_1$ graficky zobrazená parabolou, ktorá znázorňuje trajektóriu (= dráhovú krivku) vodnej častice, konajúcej šikmý vrh, a je rovnicou tejto trajektórie.

Ak sa vodná častica nachodí v rovine σ , vtedy jej súradnica $y = 0$, čiže pre $x = d_1$ dá vzťah (1) rovnicu

$$d_1 \operatorname{tg} \alpha - g \frac{d_1^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0$$

Jej prvý koreň $d_1 = 0$ prislúcha miestu A , v ktorom pohyb častice začal; druhý koreň

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{2 v_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{g} = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \\ &= \frac{v_0^2 \sin 2 \alpha}{g} \end{aligned} \quad (2)$$

značí vzdialenosť miesta dopadu častice od ústia prvej trubice.

Najväčšiu výšku h dosiahne každá častica vo vzdialenosti $\frac{d_1}{2} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$ od miesta A . Výška h sa preto

rovná y -ovej súradnici vzťahu (1) pre $x = \frac{d_1}{2}$ t. j.

$$h = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}{2g} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{v_0^4 \sin^2 2\alpha}{4g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (3)$$

Súradnice x_1 , resp. x_2 pre bod M , resp. N dostaneme riešením rovnice (1) po dosadení $y = l$. Po úpravě vyjde kvadratická rovnica

$$gx^2 - 2v_0^2 x \sin \alpha \cos \alpha + 2v_0^2 l \cos^2 \alpha = 0 \quad (4)$$

Korene tejto rovnice sú (označenie $x_{2,1}$ zvolíme preto, že $x_1 < x_2$)

$$x_{2,1} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha \pm \sqrt{4v_0^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 8gv_0^2 l \cos^2 \alpha}}{2g} = \frac{v_0 \cos \alpha (v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gl})}{g} \quad (5)$$

Akže $l < h$, tak následkom vzťahu (3) platí

$$2gh = v_0^2 \sin^2 \alpha > 2gl,$$

čiže výraz $\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gl} < v_0 \sin \alpha$. Preto má rovnica (4) dva reálne, kladné a nerovnaké korene; pritom x_1 je súradnica bodu M , x_2 je súradnica bodu N .

Hodnoty d_2 a x_3 určíme obdobnou metódou, akou boli vypočítané hodnoty d_1 a $x_{2,1}$.

2. Pre vodné častice, konajúce vodorovný vrh, platia vzťahy

$$x = v_0 t; \quad y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

Ak eliminujeme z týchto rovníc premenlivý parameter t tým, že hodnotu $t = \frac{x}{v_0}$, vypočítanú z prvého vzťahu, dosadíme do druhého, dostaneme funkčnú rovnicu

$$y = h - \frac{g x^2}{2 v_0^2}, \quad (6)$$

ktorá je v intervale $0 \leq x \leq d_2$ graficky zobrazená oblúkom paraboly, ktorý znázorňuje dráhovú krivku vodných častíc, pohybujúcich sa vodorovným vrhom.

Ak dosadíme do (6) podmienku $y = l$ a užijeme vzťahu (3) pre h , vyjde pre x_3 hodnota

$$x_3 = v_0 \sqrt{\frac{2(h-l)}{g}} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gl} \quad (7)$$

Diskusia koreňov $x_{2,1}$ vo vzťahu (5) ukázala, že výraz $v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gl > 0$. Preto má x_3 reálnu (a samozrejme) kladnú hodnotu.

Súradnica x vo vzťahu (6) nadobudne hodnotu d_2 pre $y = 0$. Je teda $h - \frac{g d_2^2}{2 v_0^2} = 0$, z čoho

$$d_2 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g} \quad (8)$$

Rovnice (5) a (7) môžeme zjednodušiť, ak v nich dosadíme podľa textu úlohy $l = \frac{h}{2}$, kde h je hodnota určená vzťahom (3). Potom vyjdú pre $l = \frac{h}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{4g}$ hodnoty

$$\begin{aligned}
 x_{2,1} &= \frac{v_0 \cos \alpha (v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - \frac{2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{4}})}{g} = \\
 &= \frac{v_0 \cos \alpha (2 v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{2 v_0^2 \sin^2 \alpha})}{2 g} = \\
 &= \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha (2 \pm \sqrt{2})}{2 g} = \frac{v_0^2 (2 \pm \sqrt{2}) \sin 2 \alpha}{4 g} \quad (5a)
 \end{aligned}$$

a ďalej

$$x_3 = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - \frac{2 g v_0^2 \sin^2 \alpha}{4 g}} = \frac{v_0^2 \sqrt{2} \sin \alpha}{2 g} \quad (7a)$$

3. Treba ešte určiť, pre ktoré hodnoty uhla α nastanú prípady a), b), c).

Ak je $d_1 = d_2$, nastane prípad c). Vtedy platí následkom (2) a (8), že $\frac{2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g}$, čiže $2 \cos \alpha = 1$ a $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Z ostrých uhlov α má túto hodnotu $\alpha = 60^\circ$.

Prípad c) nastane pre $\alpha = 60^\circ$.

Ak je $d_1 > d_2$, nastane prípad a). Z nerovnosti

$$\frac{2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} > \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g} \text{ vychodí } 2 \cos \alpha > 1, \text{ čiže } \cos \alpha > \frac{1}{2}.$$

Prípad a) nastáva, ak $0^\circ < \alpha < 60^\circ$.

Obdobne sa dokáže, že pre uhly $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ nastane prípad b).

Všetky možné polohy dosky, ktorá nemá byť zasiahnutá ani prvým, ani druhým prúdom vody, sú stanovené takými vzdialenosťami x od osi y , pre ktoré platí

- a) pre uhly $0^\circ < \alpha < 60^\circ$: $x_1 < x < x_3$ alebo $d_2 < x < x_2$ alebo $x > d_1$;
 b) pre uhly $60^\circ < \alpha < 90^\circ$: $x_1 < x < x_2$ alebo $d_1 < x < x_3$ alebo $x > d_2$;
 c) pre uhol $\alpha = 60^\circ$: $x_1 < x < x_3$ alebo $x > d_1 = d_2$.

Hodnoty x_1, x_2, x_3, d_1, d_2 sú všeobecne určené výrazmi (5), (7), (2) a (8).

4. Ak — podľa textu úlohy — volíme $l = \frac{h}{2}$, vyjdú pre x_1, x_2 a x_3 zjednodušené vzťahy (5a) a (7a) a vtedy pre hľadané polohy vyjde dosadením týchto vzťahov:

$$\begin{aligned} \text{a) pre uhly } 0^\circ < \alpha < 60^\circ : & \frac{v_0^2 (2 - \sqrt{2}) \sin 2\alpha}{4g} < x < \\ & < \frac{v_0^2 \sqrt{2} \sin \alpha}{2g} \text{ alebo } \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g} < x < \frac{v_0^2 (2 + \sqrt{2}) \sin 2\alpha}{4g} \\ \text{alebo } x > & \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \text{b) pre uhly } 60^\circ < \alpha < 90^\circ : & \frac{v_0^2 (2 - \sqrt{2}) \sin 2\alpha}{4g} < x < \\ & < \frac{v_0^2 (2 + \sqrt{2}) \sin 2\alpha}{4g} \text{ alebo } \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} < x < \\ & < \frac{v_0^2 \sqrt{2} \sin \alpha}{2g} \text{ alebo } x > \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g} \end{aligned} \quad (9b)$$

$$c) \text{ pre uhol } \alpha = 60^\circ: \frac{v_0^2 (2 - \sqrt{2}) \sin 2\alpha}{4g} < x < \\ < \frac{v_0^2 \sqrt{2} \sin \alpha}{2g} \text{ alebo } x > \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g} \quad (9c)$$

Ak dosadíme predpísané hodnoty do (5a), (7a), (2) a (8), vyjde

$$x_1 = \frac{100 (2 - \sqrt{2}) \sqrt{3}}{2 \cdot 4 \cdot 10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ m}^{-1} \text{ s}^2 = \frac{10,15}{8} \text{ m} = 1,27 \text{ m}$$

$$x_2 = \frac{100 (2 + \sqrt{2}) \sqrt{3}}{2 \cdot 4 \cdot 10} \text{ m} = \frac{59,13}{8} \text{ m} = 7,39 \text{ m}$$

$$x_3 = \frac{100 \sqrt{3} \sqrt{2}}{2 \cdot 2 \cdot 10} \text{ m} = 6,12 \text{ m}$$

$$d_1 = \frac{100 \sqrt{3}}{2 \cdot 10} \text{ m} = 8,66 \text{ m}$$

$$d_2 = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 10} \text{ m} = 8,66 \text{ m}$$

Ak uvažovaná doska, postavená kolmo na rovinu σ , nemá byť zasiahnutá ani prúdom z prvej trubice vystrekujúcim pod uhlom $\alpha = 60^\circ$, ani prúdom z druhej trubice, musí byť umiestnená vo vzdialenosti x , ktorá splňuje nerovnosti (9c).

Po dosadení predpísaných hodnôt vyjdú pre x intervaly
 $1,27 \text{ m} < x < 6,12 \text{ m}$ alebo $x > 8,66 \text{ m}$

Doska umiestnená vo vzdialenostiach splňujúcich nerovnosti $x > d_1$ a $x > d_2$, nebude vodnými prúdmi zasiahnutá, nech je akokoľvek vysoká.

5. Maximálna výška dosky, ktorej umiestenie splňuje podmienky $x < d_1$ a $x < d_2$, môže v prípade c) sa blížiť

hodnote l' , ak je postavená kolmo na rovinu σ , a to tak, že bod $Q(x', l')$, v ktorom sa obidve dráhové krivky vodných prúdov pretínajú, je nad doskou. Bod Q leží na oboch dráhových krivkách, preto jeho súradnice musia spĺňať aj rovnicu (1) aj rovnicu (6), v ktorej za h dosadíme hodnotu dľa (3). Platí teda rovnica

$$x' \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x'^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 g} - \frac{g x'^2}{2 v_0^2}$$

a po úprave (za predpokladu, že $v_0 \neq 0$, $\cos \alpha \neq 0$) ekvivalentná rovnica

$$g^2 x'^2 \sin^2 \alpha - 2 g v_0^2 x' \sin \alpha \cos \alpha + v_0^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 0,$$

ktorej korene sú

$$x'_{1,2} = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{cotg} \alpha (1 \pm \cos \alpha)$$

Koreň x'_1 sa pre daný uhol $\alpha = 60^\circ$ rovná veličinám $d_1 = d_2$ (viď obr. 16 c), je to teda x -ová súradnica onoho priesečníka Q' oboch trajektórií, ktorý je v rovine σ ; bod Q má teda súradnicu

$$x'_2 = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{cotg} \alpha (1 - \cos \alpha) \quad (10)$$

Ak dosadíme do (6) miesto x hodnotu x'_2 , nadobudne súradnica y hodnotu l' , čiže

$$\begin{aligned} l' &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 g} - \frac{g}{2 v_0^2} \frac{v_0^4}{g^2} \operatorname{cotg}^2 \alpha (1 - \cos \alpha)^2 = \\ &= \frac{v_0^2}{2 g} [\sin^2 \alpha - \operatorname{cotg}^2 \alpha (1 - \cos \alpha)^2] \quad (11) \end{aligned}$$

Predpísané hodnoty dávajú

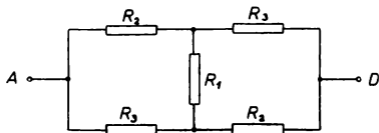
$$x' = \frac{100}{10\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ m}^{-1} \text{ s}^2 \doteq 2,89 \text{ m}$$

$$l' = \frac{100}{20} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) \text{ m} = 3,3 \text{ m}$$

Ak má byť doska o najväčšej možnej výške postavená zvisle na rovinu σ v takej vzdialenosti x' , ktorá spĺňa podmienky $x' < d_1$ a zároveň $x' < d_2$, a ak nemá byť zasiahnutá vodou vystrekujúcou z oboch trubíc, musí byť umiestená vo vzdialenosti 2,89 m od bodu A a smie mať maximálnu výšku 3,33 m.

Všeobecne sú tieto hodnoty určené výrazmi (10) a (11).

6. Obrázek 17 znázorňuje prvek elektrického obvodu, ktorý neobsahuje žiadny zdroj. Stanovte výsledný odpor medzi body A , D , jestliže $R_1 = 2r$, $R_2 = 3r$ a $R_3 = 5r$.

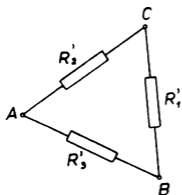


Obr. 17

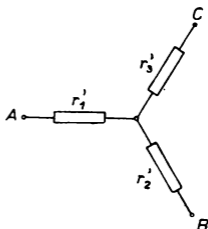
Návod: Dokažte najprve, že prvek obsahujúci tri odpory R'_1 , R'_2 , R'_3 , zařazené podle obr. 18 (zařazené do trojúhelníku), lze nahradit jiným prvkom, znázorněným na obr. 19 (zařazení do hvězdy), jestliže

$$r'_1 = \frac{R'_2 R'_3}{R'_1 + R'_2 + R'_3}, \quad r'_2 = \frac{R'_1 R'_3}{R'_1 + R'_2 + R'_3}$$

$$\text{a } r'_3 = \frac{R'_1 R'_2}{R'_1 + R'_2 + R'_3}$$



Obr. 18



Obr. 19

Označení veličin: Celkový odpor mezi body A , B označíme R_{AB} . Obdobně bude značit R_{AC} a R_{BC} po řadě celkové odpory mezi dvojicemi bodů A , C a B , C . Označení ostatních veličin je patrné z obr. 17, 18 a 19.

Má-li být zapojení odporů R'_1 , R'_2 a R'_3 do trojúhelníku ekvivalentní se zapojením odporů r'_1 , r'_2 a r'_3 do hvězdy (obr. 18 a 19), musí být odpory mezi dvojicemi bodů A , B ; A , C ; B , C stejné při obou způsobech zařazení odporů.

Mezi body A , B při zařazení odporů R'_1 , R'_2 a R'_3 do trojúhelníku prochází proud jednak větví AB přes odpor R'_3 , jednak paralelní větví ACB přes odpory R'_2 a R'_1 zařazené spolu v sérii. Proto platí

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R'_3} + \frac{1}{R'_1 + R'_2} = \frac{R'_1 + R'_2 + R'_3}{R'_3(R'_1 + R'_2)}, \text{ takže}$$

$$R_{AB} = \frac{R'_1 R'_3 + R'_2 R'_3}{R'_1 + R'_2 + R'_3}$$

Je-li zapojení odporů r'_1 , r'_2 , r'_3 do hvězdy ekvivalentní se zařazením odporů R'_1 , R'_2 , R'_3 do trojúhelníku,

musí být při obou způsobech zapojení mezi body A, B stejně velké odpory. Je tedy $R_{AB} = r'_1 + r'_2 =$
 $= \frac{R'_1 R'_3 + R'_2 R'_3}{R'_1 + R'_2 + R'_3}$. Obdobně platí $r'_2 + r'_3 =$
 $= \frac{R'_2 R'_1 + R'_3 R'_1}{R'_1 + R'_2 + R'_3}$ a $r'_3 + r'_1 = \frac{R'_3 R'_2 + R'_1 R'_2}{R'_1 + R'_2 + R'_3}$

Sečteme-li levé a pravé strany těchto tří rovnic a výslednou rovnici násobíme $\frac{1}{2}$, dostaneme rovnici

$$r'_1 + r'_2 + r'_3 = \frac{R'_1 R'_2 + R'_2 R'_3 + R'_1 R'_3}{R'_1 + R'_2 + R'_3}$$

Odečítáme-li od levé a pravé strany této rovnice postupně levé a pravé strany předcházejících tří rovnic, dostaneme vztahy

$$r'_3 = \frac{R'_1 R'_2}{R'_1 + R'_2 + R'_3}, \quad r'_1 = \frac{R'_2 R'_3}{R'_1 + R'_2 + R'_3},$$

$$r'_2 = \frac{R'_1 R'_3}{R'_1 + R'_2 + R'_3}, \quad (1)$$

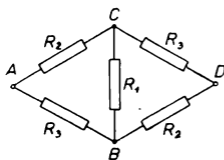
kteří jsme měli dokázat podle pokynu vysloveného v návodu v textu úlohy.

Řešení: Elektrický prvek zobrazený schematicky na obr. 17 můžeme schematicky načrtnout poněkud opravným obrazem (obr. 20). Naznačené zapojení však můžeme dále transfigurovat, jak je vyznačeno na obr. 21.

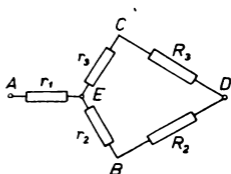
Podle upravených vztahů (1) platí

$$r_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{15 r^2}{10 r} = \frac{3}{2} r,$$

$$r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = r \quad r_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{3}{5} r$$



Obr. 20



Obr. 21

Odpor R_{ED} mezi body E, D je určen podle Kirchhoffova zákona rovnicí

$$\frac{1}{R_{ED}} = \frac{1}{r_3 + R_3} + \frac{1}{r_2 + R_2} = \frac{1}{\frac{3}{5}r + 5r} +$$

$$+ \frac{1}{r + 3r} = \frac{3}{7r}, \text{ takže } R_{ED} = \frac{7}{3}r.$$

$$\text{Výsledný odpor } R_{AD} = r_1 + R_{ED} = \frac{3}{2}r + \frac{7}{3}r =$$

$$= \frac{23}{6}r.$$

7. Nad Neapolí letí dne 4. VI. 1965 ve 23 h 05 min středoevropského času (SEČ) ve výšce d nad Zemí družice.

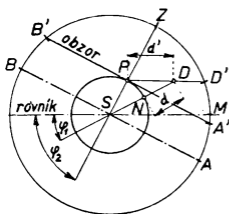
Družice se pohybuje po kruhové dráze, v jejíž rovině leží oba zemské póly.

Určete a) azimut A , výšku h , deklinaci δ a rektascenzi α této družice při pozorování z Prahy ve 23 h 05 min SEČ;

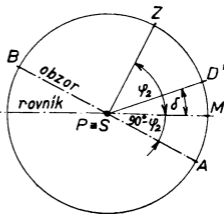
b) v kolik hodin SEČ bude družice v Praze v zenitu. Vliv zemské rotace zanedbejte.

Zeměpisná šířka Neapole je $\varphi_1 = 40^\circ 51'$, Prahy $\varphi_2 = 50^\circ 05'$, zeměpisná délka Neapole i Prahy je stejná $\lambda = 14^\circ, 24'$. Výška $d = 1\,650$ km. Předpokládáme, že Země je koule o poloměru $r = 6\,378$ km.

Označení veličin: Sluneční čas budeme značit t , hvězdný čas θ . Na obr. 22 a 23 značí menší kružnice řez roviny místního poledníku pozorovacího místa v Praze se zemskou koulí, větší kružnice řez téhož poledníku s hvěz-



Obr. 22



Obr. 23

nou sférou, N polohu Neapole, P polohu pozorovacího místa, D polohu družice dne 4. 6. 1965 ve 23 h 05 min SEČ (středoevropského času). Úsečka $PD = d'$ je vzdálenost družice od pozorovatele, který vidí družici na obloze v bodě D' . Body P, N, D, D' a S leží v rovině místního poledníku pozorovacího místa. Oběžnou dobu družice budeme značit T , rychlost družice v . Hmotnost družice označíme m_D , hmotnost Země $m = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg. Newtonovu gravitační konstantu $\kappa = 6 \cdot 67 \cdot 10^{-11}$ $\text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}$.

Řešení: a) Protože se družice pohybuje po kruhové dráze nad místním poledníkem pozorovacího místa, je rovina její výškové kružnice shodná s rovinou místního poledníku pozorovacího místa. Proto je azimut

$$A = 0^\circ \quad (1)$$

Výšku h družice nad obzorem vypočítáme z trojúhelníku $\triangle SPD$ (obr. 22). Užitím kosinové věty určíme

$$\begin{aligned} PD = d' &= \sqrt{SD^2 + SP^2 - 2 \cdot SD \cdot SP \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \\ &= \sqrt{(r + d)^2 + r^2 - 2(r + d)r \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \end{aligned}$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$PD = \sqrt{8028^2 + 6378^2 - 2 \cdot 8028 \cdot 6378 \cos 9^\circ 14'} \text{ km} = 2012 \text{ km.}$$

Užitím sinové věty vypočítáme

$$\begin{aligned} \sin \sphericalangle SPD &= \frac{SD}{PD} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \\ &= \frac{(r + d) \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sqrt{(r + d)^2 + r^2 - 2(r + d)r \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}} \quad (2) \end{aligned}$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $\sin \sphericalangle SPD = \frac{8028}{2012} \sin 9^\circ 14'$. Této hodnotě odpovídají dva různé

úhly, jeden ostrý, druhý tupý. Ze vztahů mezi stranami a úhly trojúhelníku je patrné, že úloze vyhovuje tupý úhel. Pomocí logaritmických tabulek určíme jeho velikost $\sphericalangle SPD = 140^\circ 11'$.

Výška družice nad obzorem je úhel, který svírá spojnice družice a pozorovacího místa s rovinou obzoru. Je to úhel $\sphericalangle D'PA'$, takže

$$h = \sphericalangle D'PA' = \sphericalangle D'PS - \sphericalangle A'PS = \sphericalangle SPD - 90^\circ, \quad (3)$$

kde $\sphericalangle SPD$ je určen vztahem (2).

Po dosazení daných hodnot vyjde $h = 140^{\circ}11' - 90^{\circ} = 50^{\circ}11'$.

Protože poloměr zemský je vzhledem k poloměru hvězdné sféry zanedbatelně malý, splyne prakticky bod P se středem S Země, bod A' s bodem A a řez roviny místního poledníku s rovinou obzoru, označený na obr. 22 úsečkou $A'B'$, se stane řezem roviny místního poledníku s rovinou astronomického obzoru, jež je na obr. 22 zobrazen úsečkou AB .

Je tedy (obr. 23)

$$h = \sphericalangle D'SA$$

Deklinace δ družice je úhel, který svírá spojnice bodu D' a pozorovacího místa P ($P \equiv S$) s rovinou rovníku. Z obr. 23 je patrné, že

$\delta = \sphericalangle D'SA - \sphericalangle MSA = \sphericalangle D'SA - (90^{\circ} - \varphi_2)$, neboť $\sphericalangle MSA$ je úhel, který svírá rovina světového rovníku s rovinou obzoru. Proto je

$$\delta = h - 90^{\circ} + \varphi_2 = \sphericalangle SPD - 90^{\circ} - 90^{\circ} + \varphi_2 = \sphericalangle SPD + \varphi_2 - 180^{\circ}, \text{ kde } \sphericalangle SPD \text{ je určen výrazem (2).}$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $\delta = 140^{\circ}11' + 50^{\circ}05' - 180^{\circ} = 10^{\circ}16'$.

Kdyby se dne 21. 3. 1965 Slunce nacházelo v 0 h 0 min 0 s SČ (světového času) v jarním bodě, měla by v tom okamžiku všechna místa na greenwichském poledníku 12 hodin hvězdného času. Protože Slunce vykoná za jeden tropický rok po ekliptice vzhledem ke hvězdám jeden vlastní oběh směrem proti dennímu pohybu oblohy, připadá na tropický rok o jeden sluneční den méně slunečních dnů než dnů hvězdných. Tropický rok má 365,24 slunečních dnů, takže 365,24 slunečních dnů odpovídá 366,24 dnům hvězdným. Proto je délka středního sluneční-

ho dne rovna $\frac{366,24}{365,24}$ hvězdného dne, tj. 1,0027 hvězdného dne. Střední sluneční den je tedy asi o 3 m 56 s delší než hvězdný den.

Na dobu od půlnoci dne 21. 3. 1965 do půlnoci dne 4. 6. 1965 připadá $t_1 = 75$ stř. slun. dnů, tj. $75 \cdot 1,0027$ hvězdných dnů = 75 hv. dnů 4 hv. h 52 hv. min. Hvězdné hodiny by tedy ukazovaly na greenwickském poledníku 12 hv. h + 4 hv. h 52 hv. min, kdyby 21. 3. 1965 nastala rovnodennost o půlnoci. Protože se však Slunce nenacházelo toho dne v jarním bodě právě o půlnoci, je vypočítaná hodnota 16 hv. h 52 hv. min nepřesná. Podle hvězdářských tabulek byl dne 21. 3. 1965 na greenwickském poledníku v 0 h 0 min 0 s SČ hvězdný čas $\Theta_1 = 16$ hv. h 49 hv. min.

Ve 23 h 05 min SEČ je $t_2 = 22$ h 05 min SČ, což odpovídá hvězdnému času $\Theta_2 = 22$ hv. h 09 hv. min.

Protože se hvězdná sféra otočí okolo světové osy za 24 hv. h o 360° , odpovídá 15° jedné hvězdné hodině a $14^\circ 24'$ odpovídá čas $\Theta_3 = 58$ hv. min.

Na poledníku $14^\circ 24'$ v. d. byl tedy dne 4. 6. 1965 ve 23 h 05 min SEČ hvězdný čas

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 = 16 \text{ hv. h. } 49 \text{ hv. min.} + \\ + 22 \text{ hv. h. } 09 \text{ hv. min.} + 58 \text{ hv. min.} = 39 \text{ hv. h. } 56 \text{ hv. min.}$$

Hvězdné hodiny proto ukazují v uvedeném místě v danou dobu čas 15 hv. h 56 hv. min.

Součet rektascenze α a hodinového úhlu t je roven hvězdnému času Θ .

Protože se družice pohybuje v rovině poledníku $14^\circ 24'$ v. d., která je také rovinou poledníku pozorovacího místa, je hodinový úhel družice roven 0 a její rektascenze se rovná místnímu hvězdnému času pozorovacího místa.

Platí tudíž

$$\alpha = \Theta = 15 \text{ hv. h } 56 \text{ hv. min} \quad (5)$$

Při pozorování družice z Prahy je ve 23 h 05 min SEČ její azimut $A = 0$, výška $h = 50^{\circ}11'$, deklinace $\delta = 10^{\circ}16'$ a rektascenze $\alpha = 15 \text{ hv. h } 56 \text{ hv. min}$. Obecně jsou tyto hodnoty určeny vztahy (1), (3) a (5).

b) Má-li se družice nacházející se nad Neapolí přemístit nad Prahu, musí proletět na své kruhové dráze oblouk o středovém úhlu $\varphi_2 - \varphi_1$. Tuto dráhu vykoná za čas t , pro nějž platí $\frac{t}{T} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{360^{\circ}}$, takže

$$t = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{360^{\circ}} T \quad (6)$$

Přitažlivá síla, kterou působí na družici zemské gravitační pole, je pro družici dostředivou silou. Proto platí podle Newtonova gravitačního zákona

$$\frac{m_D v^2}{r + d} = \kappa \frac{m_D \cdot m}{(r + d)^2}, \text{ takže } v = \sqrt{\frac{\kappa m}{r + d}}$$

Za dobu T vykoná družice jeden oběh okolo Země na dráze o poloměru $r + d$ rychlostí v . Je tedy

$$T = \frac{2\pi (r + d)}{v} = \frac{2\pi (r + d) \sqrt{r + d}}{\sqrt{\kappa m}} \quad (7)$$

Dosadíme-li do vztahu (6) za T hodnotu ze vztahu (7), dostaneme

$$t = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{360^{\circ}} \cdot \frac{2\pi (r + d) \sqrt{r + d}}{\sqrt{\kappa m}} \quad (8)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$t = \frac{554'}{21\,600'} \cdot \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 8,028 \cdot 10^6 \sqrt{8,028 \cdot 10^6}}{\sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}} \text{ s}$$

Rozměrová zkouška

$$[t] = m \sqrt{m \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ s}^2 \text{ m}^{-2} \text{ kg}^2 \text{ kg}^{-1}} = \text{s}$$

Užitím logaritmických tabulek určíme $t = 184 \text{ s} \doteq 3 \text{ minuty}$.

Družice bude v Praze v zenitu ve 23 h 08 min SEČ. Doba, za kterou vykoná dráhu z Neapole do Prahy, je obecně určena vztahem (8).

8. Předmět o výšce y je umístěn mezi rovinným zrcadlem a předměťovým ohniskem tenké spojné čočky. Vzdálenost spojky od zrcadla je v , její ohnisková vzdálenost je f .

a) Proč se za spojkou vytvoří dva skutečné obrazy?

b) Jak velikou vzdálenost x od čočky musí mít předmět výšky y , aby větší z obrazů měl trojnásobnou velikost než menší z nich?

Správnost výsledku ověřte výpočtem poměru velikostí obou obrazů a konstrukcí.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v = 16 \text{ cm}$, $f = 6 \text{ cm}$ a $y = 5,5 \text{ cm}$.

Označení veličin: Velikost prvního obrazu vytvořeného čočkou označíme y_1 a jeho vzdálenost od čočky b_1 . Zdánlivý obraz předmětu v rovinném zrcadle má výšku $y' = y$ a zobrazí se čočkou jako druhý obraz výšky y_2 ve vzdálenosti b_2 od čočky.

Řešení: a) Mají-li se spojkou vytvořit dva skutečné obrazy, musíme předpokládat, že $x > f$. Má-li být také splněna podmínka, že předmět je umístěn mezi rovinným zrcadlem a předměťovým ohniskem čočky, musí platit ještě nerovnost $v > x$, takže je

$$f < x < v \tag{1}$$

Světelné paprsky dopadající z předmětu na čočku vytvoří po lomu čočkou první obraz výšky y , ve vzdálenosti

b_1 za čočkou. Paprsky, které dopadají z předmětu na rovinné zrcadlo, se odrážejí od zrcadla tak, jako by vycházely ze zdánlivého obrazu výšky $y' = y$, nacházejícího se ve vzdálenosti $v - x$ za zrcadlem. Tento zdánlivý obraz je předmětem pro čočku, která ho zobrazí ve vzdálenosti b_2 za čočkou. Vznikají tedy za čočkou dva obrazy předmětu umístěného mezi zrcadlem a čočkou. Oba obrazy jsou skutečné, neboť vzdálenost x předmětu od čočky a také vzdálenost $2v - x$ zdánlivého obrazu v zrcadle jsou větší než f .

b) Z obecného vztahu $Z = -\frac{b}{a}$ pro lineární zvětšení obrazu vycházejí pro výšku y_1 prvního obrazu a velikost y_2 druhého obrazu vztahy

$$\frac{y_1}{y} = -\frac{b_1}{x} \text{ a } \frac{y_2}{y'} = \frac{y_2}{y} = -\frac{b_2}{2v-x}, \text{ z nichž vychází}$$

$$y_1 = -\frac{b_1}{x} y \text{ a } y_2 = -\frac{b_2}{2v-x} y \quad (2)$$

Výška prvního obrazu je větší než výška druhého obrazu, neboť předmět je k čočce blíže než jeho zdánlivý obraz v zrcadle. Proto platí

$$y_1 = 3y_2 \quad (3)$$

Dosadíme-li do výrazu (3) za y_1 a y_2 hodnoty ze vztahů (2), dostaneme rovnici $-\frac{b_1}{x} y = -3 \frac{b_2}{2v-x} y$, z níž vyjde po úpravě rovnice

$$b_1(2v-x) = 3b_2x \quad (4)$$

za předpokladu, že $y \neq 0$, $x \neq 0$ a $x \neq 2v$. Tyto předpoklady jsou podle vztahu (1) splněny.

Z obecné čočkové rovnice $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ vyjde pro vzdálenost b obrazu od čočky rovnice $ba - bf = af$, takže $b = \frac{af}{a - f}$. Dosadíme-li za a v tomto výrazu postupně hodnoty x a $2v - x$, jsou určeny vzdálenosti obou obrazů od čočky výrazy

$$b_1 = \frac{fx}{x - f} \quad \text{a} \quad b_2 = \frac{f(2v - x)}{2v - x - f} \quad (5)$$

Po dosazení hodnot b_1 a b_2 do rovnice (4) vyjde rovnice

$$\frac{fx}{x - f} (2v - x) = \frac{3fx(2v - x)}{2v - x - f}$$

Vzhledem k tomu, že $x \neq 0$ a $x \neq 2v$, můžeme tuto rovnici upravit na tvar

$$\frac{1}{x - f} = \frac{3}{2v - x - f} \quad (6)$$

Protože $x < v$ a také $f < v$, je $2v - x - f > 0$, a poněvadž také $x - f > 0$, lze rovnici (6) upravit na tvar $2v - x - f = 3x - 3f$, takže

$$x = \frac{v + f}{2} \quad (7)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $x = 11$ cm.

Má-li mít větší z obrazů trojnásobnou velikost než menší z nich, musí mít předmět od čočky vzdálenost 11 cm. Tato vzdálenost je obecně určena vztahem (7).

jako ampérmetr, avomet V jako voltmetr, cívka C (1 200 závitů) z rozkladného transformátoru, otevřené jádro k cívce, uzavřené jádro k cívce, spojovací vodiče.

Návod: Připojíme-li cívku o odporu R ke zdroji stejnosměrného napětí, prochází cívkou proud; změříme-li napětí U_R na svorkách cívky a proud I , který cívkou prochází, určíme z Ohmova zákona

$$R = \frac{U_R}{I} \quad (1)$$

Prochází-li cívkou střídavý proud, klade cívka tomuto proudu nejen odpor R , nýbrž ještě induktivní odpor $X_L = L\omega$, kde L značí vlastní indukčnost cívky, $\omega = 2\pi f$ úhlovou frekvenci střídavého proudu a f jeho frekvenci. Efektivní hodnotu napětí označíme U , efektivní hodnotu proudu I . Poměr

$$Z = \frac{U}{I} \quad (2)$$

určuje impedanci cívky.

Napětí U_L , vytvořené na svorkách cívky její vlastní indukčností, je fázově posunuto o $+\frac{\pi}{2}$ vzhledem k proudu I , napětí U_R je s proudem ve stejné fázi. Velikost napětí U se určí graficky:

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} \quad (3)$$

(viz Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 43, sešit 2, str. 93 a sešit 3, str. 123).

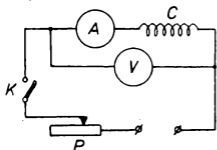
Ze vztahů (2) a (3) určíme

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}, \quad (4)$$

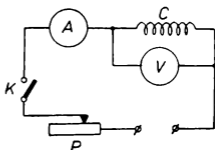
takže

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f} \quad (5)$$

Pro určení odporu R a impedance Z použijte obvodu podle výhodnějšího ze schémat naznačených na obr. 25a nebo 25b (viz úloha 3 v 1. kole kat. A tohoto ročníku FO).



Obr. 25a



Obr. 25b

Úkol: 1. Odvoďte vztahy (3), (4) a (5).

2. Měření proveďte takto:

a) Určení odporu R cívky

Obvod sestavený podle výhodnějšího z uvedených schémat připojte ke zdroji stejnosměrného napětí. Reostatem P měňte proud. Proveďte pět měření proudu I_k a příslušných hodnot napětí U_k ; podle vztahu (1) určete pro každou dvojici U_k a I_k odpor R_k . Naměřené i vypočítané hodnoty zaznamenejte do tabulky. Za odpor R pokládejte aritmetický průměr všech hodnot R_k .

Odpor vodiče závisí na jeho teplotě. Podle tabulky sestrojte graf $U_k = f(I_k)$ a posuďte, zda se tato změna při měření projeví.

b) Určení impedance Z cívky (bez jádra)

Jaké změny musíte provést v sestaveném obvodu, abyste měření U_k a I_k mohli určit Z ?

Velikost impedance určíte obdobně, jako jste určili R .

Poznámky: Reostatem měňte proud I_k přibližně ve stejném rozsahu jako při měření odporu R . Vysvětlete, proč je to nutné.

Při měření impedance předpokládejte, že vlastní indukčnost ampérmetru je malá ve srovnání s indukčností cívky. Proč to můžeme předpokládat?

c) Určení frekvence f proudu:

U proudu odebíraného ze sítě má frekvence přibližnou hodnotu $f = 50$ Hz. Máte-li možnost, změřte ji přesně kmitoměrem, a to několikrát během měření. Hodnotu f určete jako aritmetický průměr všech naměřených hodnot.

d) Vypočítejte L_1 .

3. Měření 2 opakujte ještě dvakrát, a to pro cívku s otevřeným jádrem (L_2) a s uzavřeným jádrem (L_3).

4. Porovnejte velikosti L_1 , L_2 a L_3 a vysvětlete příčinu změn indukčnosti, které nastávají při vložení jádra do dutiny cívky.

Řešení: 1. Je-li cívka o odporu R připojena na stejnosměrné napětí U_R , protéká jí proud I . Velikost R je určena podle Ohmova zákona vztahem

$$R = \frac{U_R}{I} \quad (1)$$

Prochází-li cívkou střídavý proud o efektivní hodnotě I , pak se na svorkách cívky kromě napětí $U_R = RI$ vytvoří vlastní indukčností L cívky ještě napětí $U_L = X_L I$, kde $X_L = L\omega$. Napětí U_R je s proudem ve stejné fázi, napětí U_L je fázově posunuto o $+\frac{\pi}{2}$ vzhledem k proudu. Symbo-

lickým počtem lze tedy vyjádřit napětí na svorkách cívky komplexní veličinou $\mathbf{U} = U_R + jU_L$. Velikost tohoto napětí je

$$U = |\mathbf{U}| = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = I \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad (3)$$

Impedance $Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ a po dosazení za X_L

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} \quad (4)$$

Dosadíme-li za $\omega = 2\pi f$, kde f značí frekvenci střídavého proudu, vyjde po úpravě

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f} \quad (5)$$

2a) Měření odporu cívky provedeme podle obr. 25b, neboť odpor R cívky je mnohem menší než odpor užitého voltmetru, který má odpor $1\,000\ \Omega$ na $1\ \text{V}$. Obvod připojíme ke zdroji stejnosměrného napětí a odporem P regulujeme v něm proud. Odpor R cívky C určíme z pěti různých odpovídajících si dvojic I_k a U_k , naměřených na ampérmetru a voltmetru pro měření stejnosměrných proudů. Protože odpor závisí na teplotě vodiče, je nutno měření provádět s proudy, jejichž hodnoty se od sebe liší jen poměrně málo. Naměřené hodnoty proudů a napětí a vypočítané hodnoty odporu R jsou zaznamenány v tabulce I.

Pokládáme-li za hodnotu odporu aritmetický průměr všech hodnot R_k , je odpor cívky $R = (12,4 \pm 0,2)\ \Omega$, neboť pravděpodobná chyba měření je $\vartheta = \frac{5 \sum \Delta_+}{2n\sqrt{n-1}} = 0,2\ \Omega$.

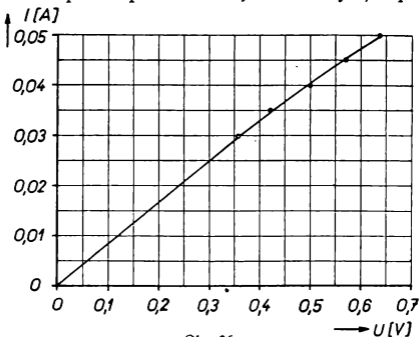
Tabulka I

Měření č.	I_k [A]	U_k [V]	R_k [Ω]
1	0,030	0,36	12,1
2	0,035	0,42	12,0
3	0,040	0,50	12,5
4	0,045	0,57	12,7
5	0,050	0,64	12,8
aritm. průměr	—	—	12,4

Tabulka II

Měření č.	I_k [A]	U_k [V]	Z_k [Ω]
1	0,050	0,77	15,4
2	0,060	0,88	14,7
3	0,070	0,99	14,1
4	0,080	1,10	13,8
5	0,090	1,21	13,4
aritm. průměr	—	—	14,3

Z tabulky I a z obr. 26 je patrné, že odpor cívky při zvětšování proudu poněkud roste, neboť se zvyšuje teplota



Obr. 26

závitů cívky. Změny jsou však celkem malé a při měření se téměř neprojeví.

2b) V sestaveném obvodu zaměníme zdroj stejnosměrného napětí zdrojem střídavého napětí a ampérmetr a voltmetr pro měření střídavého proudu měřicími přístroji pro střídavý proud. Při měření impedance Z postupujeme obdobně jako při měření odporu. Aby při měření impedance měly závity drátu cívky stejnou teplotu jako při měření odporu, budeme reostatem měnit proudy I_k přibližně ve stejném rozsahu jako při měření odporu.

Vlastní indukčnost cívky je určena vztahem,

$$L = \mu \frac{S n^2}{l}, \quad (6)$$

kde n značí počet závitů cívky, S průřez cívky, μ permeabilitu prostředí vloženého do dutiny cívky a l délku cívky. Roste tedy vlastní indukčnost cívky s druhou mocninou počtu jejích závitů. Protože cívka, jejíž indukčnost určíme, má mnohem více závitů než cívka ampérmetru, můžeme indukčnost ampérmetru vzhledem k indukčnosti cívky zanedbat.

Naměřené hodnoty proudů I_k a napětí U_k a vypočítané hodnoty impedance Z_k pro cívku bez jádra jsou uvedeny v tabulce II. Z nich vyjde pro impedanci cívky bez jádra po dosazení do vztahu (4) hodnota $Z = 14,3 \Omega$.

2c) Měření se provádělo střídavým proudem transformovaným ze sítě. Proto budeme považovat za frekvenci užitého proudu hodnotu $f = 50 \text{ Hz}$.

2d) Velikost vlastní indukčnosti cívky bez jádra vypočítáme ze vztahu (5)

$$L_1 = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2 \pi f} = \frac{\sqrt{14,3^2 - 12,4^2}}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} \Omega \text{s} =$$

$$= \frac{7,12}{314} \frac{\text{V s}}{\text{A}} = 0,023 \text{ H}$$

3. Zcela stejně jako jsme postupovali při určování impedance cívky bez jádra budeme určovat indukčnost L_2 cívky s otevřeným jádrem a indukčnost L_3 cívky s jádrem uzavřeným.

Naměřené hodnoty proudů I_k a napětí U_k zaznamenejme do tabulek a vypočítáme impedance Z_2 a Z_3 cívky s otevřeným a uzavřeným jádrem. Ze vztahu (5) určíme potom L_2 a L_3 .

Tabulka III

Měření čís.	$I_k[\text{A}]$	$U_k[\text{V}]$	$Z_2[\Omega]$
1	0,050	2,65	53,0
2	0,060	3,15	52,5
3	0,070	3,55	50,7
4	0,080	4,10	51,3
5	0,090	4,70	52,4
aritm. průměr	—	—	52,0

Tabulka IV

Měření čís.	$I_k[\text{A}]$	$U_k[\text{V}]$	$Z_3[\Omega]$
1	0,010	3,90	390
2	0,011	4,46	406
3	0,012	4,75	396
4	0,013	5,30	407
5	0,014	5,65	404
aritm. průměr	—	—	400,6

$$L_2 = \frac{\sqrt{52^2 - 12,4^2}}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} \text{ H} = \frac{50,5}{314} \text{ H} = 0,16 \text{ H}$$

$$L_3 = \frac{\sqrt{400,6^2 - 12,4^2}}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} \text{ H} = \frac{400,4}{314} \text{ H} = 1,28 \text{ H}$$

4. Vlastní indukčnost cívky se určí ze vztahu $L = \frac{\Phi}{I}$, kde Φ značí magnetický indukční tok v dutině

cívky. Dosadíme-li za $\Phi = BSn$, kde $B = \mu H$ značí magnetickou indukci v cívce, n počet jejích závitů, S průřez cívky a $H = \frac{nI}{l}$ intenzitu magnetického pole v cívce délky l , vychází pro L vztahy

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu \frac{S n^2}{l} \quad (6a)$$

Podle vztahu (6) je vlastní indukčnost cívky přímo úměrná permeabilitě μ jádra cívky. Protože permeabilita ocelového jádra je mnohem větší než permeabilita vzduchu, je $L_1 < L_2$. Je-li jádro otevřené, rozptylují se magnetické indukční čáry do okolí cívky, takže je magnetický indukční tok v jádru mnohem menší než při uzavřeném jádru. Proto je podle vztahu (6a) $L_2 < L_3$, jestliže cívkou s otevřeným jádrem protéká přibližně stejný proud jako touž cívkou s uzavřeným jádrem.

DRUHÉ KOLO SOUTĚŽE

1. Do balistického kyvadla o hmotnosti m_2 , zavěšeného na drátech délky l , byl vstřelen projektil o hmotnosti m_1 vodorovným směrem. Kyvadlo se vychýlilo ve vodorovném směru o délku d .

a) Určete rychlost střely.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 4,7 \text{ g}$, $m_2 = 6,3 \text{ kg}$, $l = 2,45 \text{ m}$, $d = 10,5 \text{ cm}$.

b) Odůvodněte, proč nelze při řešení užít zákona zachování energie.

Označení veličin: Při rázu dopadla střela na balistické kyvadlo rychlostí v_1 a uzavřená soustava těles, ky-

vadlo a střela, získala přitom společnou počáteční rychlost v . Nárazovou silou se po vniknutí střely do kyvadla soustava vychýlila do výšky h .

Řešení: a) Pro uzavřenou soustavu těles (kyvadlo a střela) platí zákon zachování hybnosti. Protože kyvadlo bylo před rázem v klidu, platí rovnice

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v, \text{ takže}$$

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v \quad (1)$$

Vzhledem k daným číselným hodnotám hmotností m_1 a m_2 je $v \ll v_1$, neboť $m_1 \ll m_1 + m_2$.

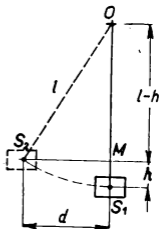
Soustava těles vystoupí po rázu do výšky h . Podle zákona zachování energie platí rovnice $(m_1 + m_2)gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$, takže $v = \sqrt{2gh}$ a $h = \frac{v^2}{2g}$. Po dosazení do rovnice (1) vyjde

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh} \quad (2)$$

Z pravoúhlého trojúhelníku S_2MO (obr. 27) získáme užitím Pythagorovy věty rovnici $l^2 = (l-h)^2 + d^2$, která má po úpravě tvar

$$h^2 - 2lh + d^2 = 0 \quad (3)$$

Protože po rázu je rychlost v zanedbatelně malá vzhledem k rychlosti v_1 , vystoupí soustava podle vztahu $h = \frac{v^2}{2g}$ do výšky h velmi malé ($h \rightarrow 0$) vzhle-



Obr. 27

dem k délce d a l . Proto lze v rovnici (3) zanedbat druhou mocninu této velmi malé veličiny h . Z rovnice (3) pak vyjde $h = \frac{d^2}{2l}$.

Rychlost v_1 má tedy podle vztahu (2) hodnotu

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2g \frac{d^2}{2l}} = d \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

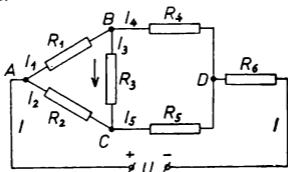
$$v_1 = 0,105 \frac{0,0047 + 6,3}{0,0047} \sqrt{\frac{9,81}{2,45}} \text{ m } \sqrt{\frac{\text{m s}^{-2}}{\text{m}}} = \\ = 281,8 \text{ m s}^{-1} \doteq 282 \text{ m s}^{-1}.$$

Střela dopadla na kyvadlo rychlostí určenou obecně vztahem (4). Pro dané hodnoty má tato rychlost velikost 282 m s^{-1} .

b) Při vnikání do kyvadla se část kinetické energie střely při dopadu na kyvadlo mění v teplo a část koná mechanickou práci, neboť střela při vnikání do kyvadla překonává odpor prostředí. Proto je celková mechanická energie W soustavy po rázu menší než kinetická energie W_1 střely při dopadu na kyvadlo. Rozdíl kinetických

$$\begin{aligned} \text{energií } \Delta W &= W_1 - W_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 d^2 \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1^2} \frac{g}{l} - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) 2g \frac{d^2}{2l} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{d^2 g}{l} (m_1 + m_2 - m_1) = \\ &= \frac{m_2 (m_1 + m_2) d^2 g}{2 m_1 l} \end{aligned}$$

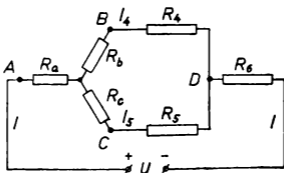
2. Řešte obvod znázorněný na obr. 28, tj. určete všechny proudy v obvodu se vyskytující a napětí na jednotlivých odporech. Obecně řešte jen pokud to považujete za vhodné.



Obr. 28

Odpory zařazené do obvodu mají tyto hodnoty: $R_1 = 2,0 \Omega$, $R_2 = 6,0 \Omega$, $R_3 = 4,0 \Omega$, $R_4 = 2\frac{1}{3} \Omega$, $R_5 = 4,0 \Omega$, $R_6 = 5,0 \Omega$. Napětí zdroje $U = 4,0 \text{ V}$.

Řešení: Nejprve nahradíme odpory R_1 , R_2 , R_3 , zařazené do obvodu zobrazeného na obr. 28 (zařazení do trojúhelníku), odpory R_a , R_b , R_c zařazenými do obvodu podle obr. 29 (zařazení do hvězdy). Podle upraveného vztahu (1)



Obr. 29

z úlohy šesté prvního kola kategorie A tohoto ročníku FO mají odpory R_a , R_b a R_c hodnoty

$$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{12}{12} \Omega = 1 \Omega,$$

$$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{8}{12} \Omega = \frac{2}{3} \Omega,$$

$$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{24}{12} \Omega = 2 \Omega$$

Odpory R_b a R_4 (obr. 29) jsou spojeny sériově, a můžeme je proto nahradit jediným odporem

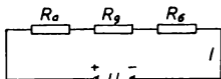
$$R_7 = R_b + R_4 = \frac{2}{3} \Omega + 2\frac{1}{3} \Omega = 3 \Omega$$

Obdobně nahradí sériově zařazené odpory R_c a R_5 (obr. 29) odpor

$$R_8 = R_c + R_5 = 2\Omega + 4\Omega = 6\Omega$$

Odpory R_7 a R_8 tvoří paralelní obvodový prvek. Jeho odpor R_9 vypočítáme z rovnice

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_9} &= \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} = \frac{R_7 + R_8}{R_7 R_8}, \text{ takže } R_9 = \frac{R_7 R_8}{R_7 + R_8} = \\ &= \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} \Omega = 2 \Omega \end{aligned}$$



Obr. 30

Náhradní odpory R_a a R_9 a odpor R_6 jsou v obvodě zařazené sériově, jak je naznačeno na obr. 30. Je tedy celkový odpor obvodu

$R = R_a + R_9 + R_6 = 1 \Omega + 2 \Omega + 5 \Omega = 8 \Omega$ a výsledný proud $I = \frac{U}{R} = \frac{4}{8} \text{ A} = 0,5 \text{ A}$.

Napětí na odporech R_a , R_9 a R_6 (obr. 30) jsou
 $U_a = R_a I = 1 \cdot 0,5 \text{ V} = 0,5 \text{ V}$, $U_9 = R_9 I = 2 \cdot 0,5 \text{ V} = 1 \text{ V}$,

$$U_6 = R_6 I = 5 \cdot 0,5 \text{ V} = 2,5 \text{ V}$$

Proudy I_4 a I_5 v paralelních větvích mají hodnoty (obr. 29)

$$I_4 = \frac{U_9}{R_7} = \frac{1}{3} \text{ A} = 0,33 \text{ A}, \quad I_5 = \frac{U_9}{R_8} = \frac{1}{6} \text{ A} = 0,165 \text{ A}.$$

Nyní můžeme určit napětí U_4 a U_5 na odporech R_4 a R_5 (obr. 28):

$$U_4 = R_4 I_4 = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3} \text{ V} = \frac{7}{9} \text{ V} = 0,78 \text{ V}$$

$$\text{a } U_5 = R_5 I_5 = 4 \cdot \frac{1}{6} \text{ V} = \frac{2}{3} \text{ V} = 0,67 \text{ V}$$

Napětí mezi body B a D (obr. 28) je U_4 , na části CD obvodu je napětí U_5 . Protože $U_4 > U_5$, má bod B větší potenciál než bod C a elektrina proudí odporem R_3 směrem od bodu B k bodu C . Napětí U_3 na odporu R_3 je

$$U_3 = U_4 - U_5 = 0,78 \text{ V} - 0,67 \text{ V} = 0,11 \text{ V}$$

$$\text{a proud } I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{0,11}{4} \text{ A} = 0,027 \text{ A}.$$

Napětí U_1 a U_2 na odporech R_1 a R_2 jsou

$$U_1 = U - (U_4 + U_6) = 4 \text{ V} - (0,78 + 2,5) \text{ V} = 0,72 \text{ V},$$

$$U_2 = U - (U_5 + U_6) = 4 \text{ V} - (0,67 + 2,5) \text{ V} = 0,83 \text{ V}$$

Příslušné proudy mají hodnoty

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{0,72}{2} \text{ A} = 0,36 \text{ A} \text{ a } I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{0,83}{6} \text{ A} = 0,14 \text{ A}$$

3. Vodíkové jádro (proton), urychlené v elektrickém poli potenciálovým rozdílem U , vniklo do homogenního magnetického pole kolmo k indukčním čárám magnetického pole rychlostí v a koná v magnetickém poli rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru r .

a) Jak velká je rychlost v ?

b) Jakou hodnotu má indukce B magnetického pole?

c) Jak velká síla F působí v magnetickém poli na jádro?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $U = 150 \cdot 10^3 \text{ V}$, $r = 0,6 \text{ m}$. Hmotnost protonu je $m = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ a náboj $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A s}$.

Označení veličin: Vodíkové jádro je proton, jehož hmotnost $m = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ a náboj $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A s}$. Indukci magnetického pole označíme B , rychlost vodíkového jádra na kruhové dráze v , F sílu, která na jádro v magnetickém poli působí.

Řešení: Elektrické pole o potenciálovém rozdílu U vykoná při urychlování vodíkového jádra práci $A = Ue$, která se mění v kinetickou energii $W = \frac{1}{2} m v^2$. Z rovnice $Ue = \frac{1}{2} m v^2$ vypočítáme rychlost jádra

vstupujícího do magnetického pole. Stejnou rychlostí koná jádro i rovnoměrný pohyb po kružnici. Vychází

$$v = \sqrt{\frac{2 U e}{m}} \quad (1)$$

Magnetické pole o indukci B působí na částici, která nese náboj Q a pohybuje se rychlostí v kolmo k indukčním čárám silou $F = BQv$. Působí tedy magnetické pole na pohybující se jádro silou

$$F = Bev = Be \sqrt{\frac{2 U e}{m}} \quad (2)$$

Tato síla má směr kolmý k indukčním čárám magnetického pole i ke směru okamžité rychlosti pohybujícího se jádra; je tedy pro pohybující se jádro silou dostředivou. Protože má konstantní velikost, pohybuje se jádro po kružnici rovnoměrným pohybem. Proto platí rovnice $Bev = \frac{mv^2}{r}$, z níž vyjde

$$B = \frac{mv}{re} = \frac{m}{re} \sqrt{\frac{2 U e}{m}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2 U m}{e}} \quad (3)$$

Dosadíme-li do vztahu (2) za B hodnotu ze vztahu (3), vyjde

$$F = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2 U m}{e}} e \sqrt{\frac{2 U e}{m}} = \frac{2 U e}{r} \quad (4)$$

Po dosazení daných hodnot do vztahů (3), (1) a (4) vypočítáme pomocí logaritmu b) $B = 9,32 \cdot 10^{-2} \text{ T}$, a) $v = 5,36 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$, c) $F = 8,01 \cdot 10^{-14} \text{ N}$.

Rozměrové zkoušky:

$$[v] = \sqrt{\text{V A s kg}^{-1}} = \sqrt{\text{N m kg}^{-1}} = \sqrt{\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}} = \text{m s}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 [B] &= \text{m}^{-1} \sqrt[3]{\text{V kg A}^{-1} \text{s}^{-1}} = \text{m}^{-1} \sqrt[3]{\text{V}^2 \text{kg J}^{-1}} = \\
 &= \text{V m}^{-1} \sqrt[3]{\text{kg N}^{-1} \text{m}^{-1}} = \\
 &= \text{V m}^{-1} \sqrt[3]{\text{kg kg}^{-1} \text{m}^{-1} \text{s}^2 \text{m}^{-1}} = \text{V s m}^{-2} = \text{T} \\
 [F] &= \text{V A s m}^{-1} = \text{J m}^{-1} = \text{N}
 \end{aligned}$$

Vodíkové jádro se pohybuje v homogenním magnetickém poli o indukci $9,32 \cdot 10^{-2} \text{ T}$ po kruhové dráze rychlostí $5,36 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$ a působí na ně síla $8,01 \cdot 10^{-14} \text{ N}$. Uvedené hodnoty jsou obecně určeny vztahy (3), (1) a (4).

4. Potápěč je ponořen v čisté vodě a dívá se vzhůru. Jeho oči jsou v hloubce h pod povrchem vody.

- Jak se jeví potápěči prostor nad povrchem vody?
- Jak velká část vodního prostoru je pro něj průhledná? Index lomu oka je přibližně stejný jako index lomu vody.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnotu $h = 1,5 \text{ m}$.

Index lomu vody je $n = \frac{4}{3}$.

Označení veličin: Úhel dopadu světelného paprsku dopadajícího na klidný povrch vody označíme α , úhel lomu β . Vodorovnou rovinu proloženou povrchem vody budeme značit σ .

Řešení: a) Z každého předmětu nacházejícího se nad rovinou σ , pokud není zakryt jinými předměty, dopadají na vodní povrch světelné paprsky různými směry a lámou se při přechodu ze vzduchu do vody. Některé z těchto paprsků postupují vodou po lomu směrem k potápěčovu oku a při přechodu z vody do oka se již nelámou, neboť index lomu oka je stejný jako index lomu vody. Úhel dopadu každého z těchto paprsků směřujících do potá-

pěčova oka (např. paprsku 3, který se láme pod úhlem β) se dá určit ze Snelliova zákona lomu (obr. 31).

Úhly dopadu paprsků vycházejících z různých předmětů nacházejících se nad vodou a dopadajících po lomu na oční sítnici potápěče mohou nabývat všech hodnot v intervalu $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$, takže světelné paprsky mohou přicházet do potápěčova oka nejvýše pod úhlem β_0 , pro který platí

$$\sin \beta_0 = \frac{\sin 90^\circ}{n} = \frac{1}{n} \quad (1)$$

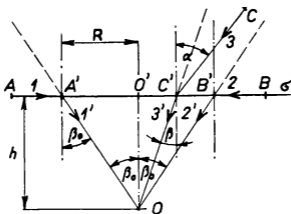
Po dosazení dané hodnoty za n vychází $\sin \beta_0 = 0,75$ a $\beta_0 = 48^\circ 35'$.

Potápěčovo oko však nevidí předmět, z něhož světelný paprsek vyšel, v tom směru, ve kterém tento paprsek dopadl na povrch vody, ale ve směru, kterým po lomu vnikl do oka. Například předmět C nevidí oko ve směru $C'C$, nýbrž ve směru paprsku OC' prodlouženém za bod C' .

Proto oko potápěčovo vidí všechny předměty nacházející se nad vodním povrchem uvnitř rotačního kužele K , jehož vrchol O leží na sítnici potápěčova oka, má osu kolmou k povrchu vody a jehož osovým řezem jdou polopřímky OA' a OB' , které spolu svírají úhel $\psi = 2\beta_0$ (viz obr. 31). Tento úhel je obecně určen vztahem (1) a má velikost $97^\circ 10'$.

b) Do oka potápěčova vnikají jen ty světelné paprsky dopadající na vodní povrch, jež po lomu prostupují vodou od vnitřních bodů kruhu k , ve kterém protíná rovina σ kužel K , k vrcholu tohoto kužele.

Světelné paprsky, dopadající z předmětů nacházejících se nad rovinou σ na vodní povrch v bodech ležících mimo



Obr. 31

kruh k , neproniknou po lomu k potápěčovu oku. Proto je pro potápěče neprůhledná ta část vodního povrchu, která leží mimo kruh k .

Poloměr R kruhu k vypočítáme z pravoúhlého trojúhelníku $OO'A'$. Z obr. 31 je patrné, že

$$R = h \operatorname{tg} \beta_0 = h \frac{\sin \beta_0}{\cos \beta_0} = h \frac{\sin \beta_0}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta_0}}$$

Po dosazení za $\sin \beta_0$ ze vztahu (1) dostaneme

$$R = h \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = h \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (2)$$

Dosadíme-li do výrazu (2) dané hodnoty, vyjde

$$R = 1,5 \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{9} - 1}} \text{ m} = 1,5 \frac{3}{\sqrt{7}} \text{ m} = 1,70 \text{ m}$$

Průhlednou částí vodního povrchu je pro potápěče kruh o poloměru $R = 1,70$ m, jehož středem je na vodním povrchu bod O' , nacházející se svisle nad středem úsečky spojující obě potápěčovy oči. Poloměr R je obecně určen výrazem (2).

TŘETÍ KOLO SOUTĚŽE

1. Skleněná kapilára o vnitřním průměru d a délce l je na jednom konci zatavena. Druhým koncem je ponořena do vody tak, že její podélná osa je svislá a povrchy vody vně i uvnitř kapiláry jsou ve stejné výši. Přitom je pod vodou část kapiláry délky h (obr. 32).

Jak veliké je povrchové napětí vody vůči vzduchu?

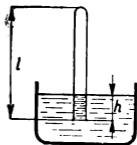
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $l = 2 \cdot 10^{-1}$ m, $h = 2,9 \cdot 10^{-3}$ m. Barometrický tlak je $b = 10^5$ N m⁻².

Označení veličin: Objem kapiláry označíme V_0 , tlak uvnitř kapiláry po jejím ponoření do vody p , objem neponořené části V , povrchové napětí vody vůči vzduchu σ .

Řešení: Součin objemu a tlaku vzduchu v kapiláře před jejím ponořením do vody je

$$b V_0 = \pi r^2 l b = \frac{\pi d^2 l b}{4} \quad (1)$$

Po ponoření kapiláry do vody je síla povrchového napětí v rovnováze s tlakovou silou, způsobenou přetlakem vzduchu, uzavřeného v trubici, vzhledem k atmosférickému tlaku. Proto platí rovnice



Obr. 32

$$\pi d \sigma = \frac{\pi d^2 (p - b)}{4},$$

z níž vypočítáme p . Po úpravě této rovnice vyjde

$$4 \sigma = d(p - b) \text{ a po další úpravě}$$

$$p = \frac{db + 4 \sigma}{d} \quad (2)$$

Součin objemu a tlaku vzduchu uvnitř kapilární trubice má tedy hodnotu

$$p V = \frac{db + 4 \sigma}{4 d} \cdot \pi d^2 (l - h) = \frac{\pi d (l - h) (db + 4 \sigma)}{4}$$

Protože teplota vzduchu v kapiláře zůstává stejná jako před ponořením kapiláry do vody, dostaneme po srovnání poslední rovnice a rovnice (1) vztah

$$\frac{\pi d^2 l b}{4} = \frac{\pi d (l - h) (db + 4 \sigma)}{4}, \text{ z něhož po úpravách}$$

vyjde

$$4 \sigma (l - h) = d h b \text{ a } \sigma = \frac{d h b}{4 (l - h)} \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 2,9 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}{4(0,2 - 2,9 \cdot 10^{-3})} \frac{\text{m m N m}^{-2}}{\text{m}} = \\ &= \frac{1,45 \cdot 10^{-2}}{0,197} \text{ N m}^{-1} \end{aligned}$$

Užitím logaritmických tabulek určíme

$$\sigma = 7,356 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1} = 73,56 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$$

Kapilární konstanta vody je obecně určena vztahem (3) a má hodnotu $73,6 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$.

2. Na kapalině plove těleso tak, že je nad hladinou p % objemu tělesa.

O kolik stupňů je třeba změnit teplotu soustavy, aby plovoucí těleso kleslo ke dnu?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\beta = 3 \cdot 10^{-4} \text{ deg}^{-1}$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$, $p = 1$. Písmeno β značí součinitele teplotní objemové roztažnosti kapaliny, α součinitele teplotní délkové roztažnosti tělesa. Pro závislost hustoty kapaliny na teplotě užitě vztahu $\varrho_2 = \varrho_1 \frac{1}{1 + \beta \Delta t}$, kde ϱ_2 značí hustotu kapaliny po změně teploty, ϱ_1 před změnou teploty, Δt označuje změnu teploty.

Označení veličin: Objem plovoucího tělesa označíme V_1 při původní teplotě t_1 , V_2 při změněné teplotě $t_2 = t_1 + \Delta t$, tíha tělesa je G .

Řešení: Při teplotě t_1 je ponořena pod povrchem kapaliny část objemu tělesa o velikosti $\left(1 - \frac{p}{100}\right) V_1$. Podle zákona o plování těles je

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right) V_1 g \varrho_1 = G \quad (1)$$

Jestliže těleso při teplotě t_2 klesne ke dnu, musí platit nerovnost $V_2 \varrho_2 g < G$. (2)

Dosadíme-li za $V_2 = V_1(1 + 3\alpha\Delta t)$, za $\varrho_2 = \frac{\varrho_1}{1 + \beta\Delta t}$ a za G hodnotu ze vztahu (1) do výrazu (2), dostaneme nerovnost $\frac{V_1(1 + 3\alpha\Delta t)\varrho_1 g}{1 + \beta\Delta t} < \frac{100 - p}{100} V_1 \varrho_1 g$; po úpravě vyjde

$$\frac{1 + 3 \alpha \Delta t}{1 + \beta \Delta t} < \frac{100 - p}{100}$$

a dále $p < \Delta t(100 \beta - 300 \alpha - p\beta)$, neboť $1 + \beta \Delta t > 0$.

Pro dané hodnoty má výraz $(100 \beta - 300 \alpha - p\beta) = (100 \cdot 3 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 100 \cdot 12 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 10^{-4}) \text{ deg}^{-1} = 261 \cdot 10^{-4} \text{ deg}^{-1}$ kladnou hodnotu.

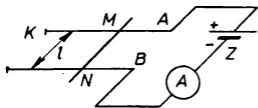
Proto je

$$\Delta t > \frac{p}{100 \beta - 300 \alpha - p \beta} \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $\Delta t > \frac{1}{261 \cdot 10^{-4}} \text{ } ^\circ\text{C} = 38,3 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Má-li plovoucí těleso klesnout ke dnu, musí se teplota soustavy zvýšit podle vztahu (3), tj. teplota musí vzrůst o více než $38,3 \text{ } ^\circ\text{C}$.

3. Na vodorovné nevodivé desce jsou umístěny dvě vodivé rovnoběžné kolejnice K , jejichž vzdálenost je l (obr. 33).



Obr. 33

(obr. 33). Na kolejnice je položen kolmo k jejich délce přímý vodivý neizolovaný drát o odporu R všude stejného kruhového průřezu. Připojíme-li konce A , B kolejnic přes ampérmetr ke zdroji stejnosměrného napětí, prochází obvodem proud I .

Vytvoříme-li v okolí vodiče $AMNB$ homogenní magnetické pole tak, aby vektor jeho indukce měl svislý směr, uvede se drát do pohybu a pohybuje se rovnoměrným

pohybem rychlostí v . Pohyb drátu po kolejnicích považujte za posuvný. Odpor kolejnic a přívodních drátů zanedbejte.

a) Jak závisí směr pohybu drátu na orientaci vektoru indukce?

b) Jak velká je indukce B magnetického pole? Proveďte diskusi.

c) Jakou velikost má indukovaný proud?

d) Jak velký proud prochází drátem a jaký má směr?

V částech b), c), d) úlohy uvažujte dva případy:

α) při pohybu drátu po kolejnicích působí třecí síla F_t ,

β) třecí sílu lze zanedbat.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $l = 0,4$ m, $v = 0,25$ m s⁻¹, $I = 1$ A. Odpor části drátu mezi body M a N je $R = 0,8$ Ω , $F_t = 0,8$ N.

Označení veličin: Napětí, vyvolané na vodiči MN proudem I ze zdroje, označíme U ; I' a U' značí velikosti indukovaného proudu a indukovaného napětí na tomto vodiči, pohybujícím se rychlostí v kolmo k indukčním čárám magnetického pole o indukci B . Protože indukovaný proud I' má opačný směr než proud I ze zdroje, protéká vodičem za jeho pohybu proud

$$I_1 = I - I' \quad (1)$$

Řešení: a) Protože podle obr. 33 teče proud pohybujícím se drátem směrem od bodu M k bodu N , uvede se drát do pohybu podle pravidla levé ruky směrem doleva, je-li vektor indukce orientován svisle vzhůru, a doprava, má-li vektor indukce orientaci svisle dolů.

b) Při pohybu vodiče se změní za dobu Δt magnetický tok o $\Delta\Phi = Blv\Delta t$, takže velikosti indukovaného napětí a indukovaného proudu mají hodnoty

$$U' = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = |B| l v \quad \text{a} \quad I' = \frac{|B| l v}{R} \quad (2)$$

Napětí i indukovaný proud mají opačný směr než stejné veličiny proudu indukujícího.

Na vodič nacházející se v magnetickém poli, jímž prochází proud $I_1 = I - I'$, působí kolmo k indukčním čárám síla $F = B(I - I')l$. Protože vodič MN se pohybuje pohybem rovnoměrným rychlostí v , je síla F v rovnováze s třecí silou.

Platí tedy rovnice

$$B(I - I')l = F_t \quad (3)$$

b-α) Dosadíme-li do rovnice (3) za I' hodnotu ze vztahu (2), vyjde rovnice $B \left(I - \frac{Blv}{R} \right) l = F_t$, kterou upravíme na tvar $B^2 l^2 v - BlIR + RF_t = 0$. Kořeny této rovnice jsou

$$\begin{aligned} B_{1,2} &= \frac{l R I \pm \sqrt{l^2 R^2 I^2 - 4 l^2 v R F_t}}{2 l^2 v} = \\ &= \frac{R I \pm \sqrt{R(R I^2 - 4 v F_t)}}{2 l v} \end{aligned} \quad (4)$$

Je-li $RI^2 - 4vF_t < 0$, tj. má-li rychlost daná v úloze pro dané hodnoty R , I , F_t velikost $v > \frac{RI^2}{4F_t}$, nemá úloha řešení. Jestliže $v = \frac{RI^2}{4F_t}$, má úloha jedno fyzikálně

možné řešení a v případě, že $v < \frac{RI^2}{4F_t}$, má úloha dvě

fyzikálně možná řešení, neboť oba kořeny rovnice (4) jsou kladné ($RI > \sqrt{R(R I^2 - 4 v F)}$).

$$\text{Výraz } \frac{R I^2}{4 F_t} = \frac{0,8 \cdot 1}{4 \cdot 0,8} \frac{\text{W}}{\text{N}} = \frac{1}{4} \frac{\text{N m s}^{-1}}{\text{N}} = 0,25 \text{ ms}^{-1}$$

se rovná dané hodnotě v . Proto má indukce pro dané hodnoty v části α) jen jednu možnou hodnotu

$$B = \frac{0,8 \cdot 1 \pm \sqrt{0,8(0,8 \cdot 1 - 4 \cdot 0,25 \cdot 0,8)}}{2 \cdot 0,4 \cdot 0,25} \frac{\Omega \text{ A}}{\text{m}^2 \text{ s}^{-1}} =$$

$$= \frac{0,8}{0,2} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 4 \text{ T}$$

Nezanedbáme-li třecí sílu, má magnetické pole indukci 4 T. Obecně je indukce určena vztahem (4).

b- β) Zanedbáme-li třecí sílu, vyjde ze vztahu (4)

$$B' = \frac{R I \pm \sqrt{R^2 I^2}}{2 l v} = \frac{R I \pm R I}{2 l v}, \quad (5)$$

$$\text{takže } B'_1 = \frac{R I}{l v} = \frac{0,8 \cdot 1}{0,4 \cdot 0,25} \frac{\Omega \text{ A}}{\text{m}^2 \text{ s}^{-1}} = 8 \text{ T}, \quad B'_2 = 0$$

Oba kořeny jsou fyzikálně možné. Jestliže je $B'_2 = 0$, není v prostoru, ve kterém se vodič pohybuje, magnetické pole. Na vodič proto nepůsobí žádná síla, a proto se může pohybovat setrvačností jakoukoli rychlostí, tedy i rychlostí $v = 0,25 \text{ m s}^{-1}$.

Zanedbáme-li třecí sílu, má magnetická indukce buď hodnotu $B'_1 = 8 \text{ T}$, nebo $B'_2 = 0$. Obě hodnoty jsou určeny vztahem (5).

c- α) Velikost indukovaného proudu určíme ze vztahu (2), dosadíme-li do něho za B hodnotu ze vztahu (4). Je tedy

$$I' = \frac{lv}{R} \cdot \frac{RI \pm \sqrt{R(RI^2 - 4vF_t)}}{2lv} =$$

$$= \frac{RI \pm \sqrt{(RI^2 - 4vF_t)R}}{2R} \quad (6)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $I' = \frac{0,8 \cdot 1 \text{ } \Omega \text{ A}}{2 \cdot 0,8 \text{ } \Omega} = 0,5 \text{ A}$.

Indukovaný proud má velikost 0,5 A. Obecně je tato velikost určena vztahem (6).

c-β) Zanedbáme-li třecí sílu, je

$$I' = \frac{RI \pm RI}{2R} = \frac{I \pm I}{2} \quad (7)$$

Zanedbáme-li třecí sílu, má indukovaný proud ve vodiči pohybujícím se v magnetickém poli o indukci 8 T, hodnotu 1 A jako proud I ; pohybuje-li se vodič v prostoru, kde magnetické pole není ($B = 0$), je indukovaný proud roven nule.

d-α) Dosadíme-li do vztahu (1) za I' hodnotu ze vztahu (6), dostaneme

$$I_1 = I - I' = I - \frac{RI \pm \sqrt{R(RI^2 - 4vF_t)}}{2R} =$$

$$= \frac{RI \mp \sqrt{R(RI^2 - 4vF_t)}}{2R} \quad (8)$$

Po dosazení daných hodnot do vztahu (8) vyjde $I_1 = 0,5 \text{ A}$. Proud I_1 protéká vodičem MN ve směru od bodu M k bodu N .

d-β) Zanedbáme-li třecí sílu, je

$$I_1 = \frac{RI \mp RI}{2R} = \frac{I \mp I}{2R} \quad (9)$$

Jestliže zanedbáme třecí sílu, pak podle vztahu (9) neprochází proud vodičem pohybujícím se v magnetickém poli o indukci 8 T; v prostoru, kde magnetické pole není, protéká vodičem proud 1 A směrem od bodu M k bodu N .

4. Kulové zrcadlo duté o poloměru křivosti r_1 a kulové zrcadlo vypuklé o poloměru křivosti r_2 jsou k sobě obrácena zrcadlícími plochami a mají společnou optickou osu. Vzdálenost jejich vrcholů je d . Předmět (malá úsečka kolmá k optické ose) je umístěn mezi zrcadly ve vzdálenosti l od vypuklého zrcadla.

a) Určete polohu, příčné zvětšení a vlastnosti obrazu vytvořeného odrazem paprsků postupně od dutého a pak od vypuklého zrcadla.

b) Narýsujte zobrazení ve vhodném měřítku.

c) Ukažte graficky, zda vzniká také druhý obraz, vytvořený odrazem paprsků postupně od vypuklého a pak od dutého zrcadla.

Je dáno: $r_1 = 30$ cm, $r_2 = 20$ cm, $d = 45$ cm, $l = 25$ cm.

Označení veličin a dané hodnoty: Ohnisková vzdálenost dutého zrcadla je $f_1 = 15$ cm, vypuklého $f_2 = -10$ cm. Výšku předmětu označíme y . V části a) úlohy je vzdálenost předmětu od vrcholu dutého zrcadla $a_1 = d - l = 20$ cm. Velikost prvního obrazu označíme y_1 , velikost druhého obrazu y_2 . Vzdálenost prvního obrazu od vrcholu dutého zrcadla je b_1 , jeho vzdálenost od vypuklého zrcadla je a_2 . Vzdálenost druhého obrazu od vypuklého zrcadla je b_2 .

Při řešení úlohy budeme užívat obecných vztahů pro příčné zvětšení

$$z = \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}, \quad (1)$$

kde y značí velikost předmětu, y' velikost obrazu, a vzdálenost předmětu a b vzdálenost obrazu od vrcholu zrcadla.

Ze zrcadlové rovnice vypočítáme $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} =$
 $= \frac{a - f}{af}$, takže

$$b = \frac{af}{a - f}, \quad (2)$$

kde f značí vzdálenost ohniska od vrcholu kulového zrcadla.

Řešení: a) Z upravených vztahů (2) a (1) určíme

$$b_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} = \frac{20 \cdot 15}{20 - 15} \text{ cm} = 60 \text{ cm} \quad \text{a} \quad z_1 =$$

$$= \frac{y_1}{y} = - \frac{b_1}{a_1} = - \frac{60}{20} = - 3$$

Kdyby nebylo vypuklého zrcadla, vznikl by v dutém zrcadle obraz skutečný ($b_1 > 0$), převrácený ($y_1 < 0$), zvětšený ($|z_1| > 1$) ve vzdálenosti $b_1 = 60$ cm od vrcholu dutého zrcadla.

Dříve než se může tento obraz vytvořit, dopadají paprsky, vycházející z předmětu a odražené na dutém zrcadle, na vypuklé zrcadlo. Proto je obraz y_1 neskutečným předmětem pro vypuklé zrcadlo. Vzdálenost tohoto zdánlivého obrazu od vypuklého zrcadla je $a_2 =$
 $= - (b_1 - d) = - 15$ cm.

Z upravených vztahů (2) a (1) určíme

$$b_2 = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2} = - \frac{150}{5} \text{ cm} = - 30 \text{ cm},$$

$$z_2 = \frac{y_2}{y_1} = - \frac{b_2}{a_2} = -2$$

Druhý obraz, vytvořený vypuklým zrcadlem, je zdánlivý ($b_2 < 0$), vzhledem k prvnímu obrazu převrácený ($z_2 < 0$) a dvakrát zvětšený ($|z_2| = 2$).

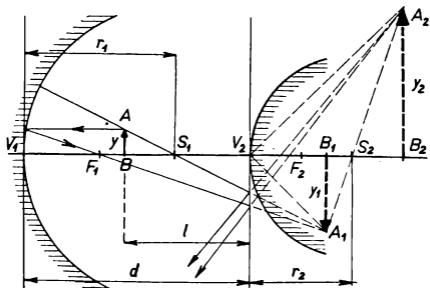
Příčné zvětšení druhého obrazu vzhledem k předmětu je

$$z = \frac{y_2}{y} = \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_1}{y} = z_1 \cdot z_2 = 6$$

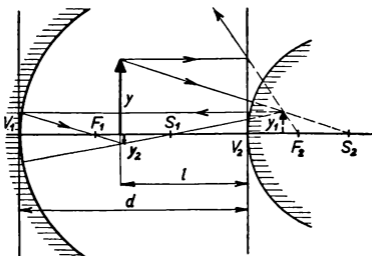
Vzhledem k předmětu je druhý obraz přímý ($z > 0$), šestkrát zvětšený ($z = 6$) a nachází se ve vzdálenosti 30 cm za vrcholem vypuklého zrcadla ($b_2 < 0$).

b) Grafické řešení úlohy je na obr. 34a.

c) Z obr. 34b je patrné, že první obraz y_1 , vytvořený vypuklým zrcadlem, leží za tímto zrcadlem blízko jeho



Obr. 34a



Obr. 34b

vrcholu. Je zdánlivý, přímý a zmenšený. Obraz y_1 je skutečným předmětem pro duté zrcadlo. Protože leží za středem křivosti dutého zrcadla, je druhý obraz y_2 , vytvořený dutým zrcadlem, mezi ohniskem a středem křivosti dutého zrcadla, je skutečný, vzhledem k prvnímu obrazu převrácený a znovu zmenšený. Je tak malý, že se jeho přesná konstrukce nedá sestavit.

5. Meranie kapacity kondenzátorov a kondenzátorových batérií striedavým prúdom.

Na prevedenie tejto úlohy máte k dispozícii zdroj striedavého napätia, dva avometry, regulačný reostat, kmitomer a dva kondenzátory.

1. Vysvetlite, ako ich použijete na určenie kapacity kondenzátorov. Má sa nakresliť schéma obvodu a napísať príslušný vzťah pre výpočet kapacity. Ktoré zjednodušujúce predpoklady pritom urobíte?

2. Zostavte obvod postupne a) pre kondenzátor C_1 , b) pre kondenzátor C_2 , c) pre batériu dvoch kondenzátorov spojených za sebou, d) pre batériu dvoch kondenzátorov spojených vedľa seba.

Pri vhodnej voľbe rozsahu stupníc ampérmetra nastavte prúd tak, aby ampérmetr ukázal najväčšiu výchylku. Urobte zakaždým trojaké meranie tak, že prúd postupne znižujete. Behom merania niekoľkokrát kmitomerom zmerajte kmitočet striedavého prúdu. Pre výpočet použite aritmetický priemer nameraných kmitočtov.

Namerané hodnoty zaznamenávajújte do tabuľky.

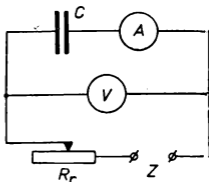
3. Pre každé meranie treba určiť príslušnú hodnotu kapacity. Pre každý trojčlenný rad vyrátajte aritmetický priemer veľkosti kapacity.

4. Z výsledkov získaných meraním a) a b) vyrátajte hodnotu kapacity batérie kondenzátorov spojených za sebou a vedľa seba a porovnajte vyrátané hodnoty s hodnotami, ktoré ste dostali z meraní c) a d).

Riešenie: Meranie kapacít urobíme v obvode zostavenom podľa schémy zapojenia, zobrazenej na obr. 35, kde značia: Z zdroj striedavého prúdu, A ampérmetr (avomet) odporu R , V voltmeter (avomet), R_r regulačný reostat, C kondenzátor, ktorého kapacitu meriame.

Pri určovaní neznámej kapacity urobíme tieto zjednodušujúce predpoklady:

1. Odpor kondenzátora $R_C \rightarrow \infty$.



Obr. 35

2. Odpor voltmetra má takú hodnotu, že prúd I , tečúci voltmetrom, možno zanedbať vzhľadom k prúdu idúcemu kondenzátorom.

3. Vlastná indukčnosť cievky ampérmetra $L = 0$.

4. Striedavý prúd má presne sínusový priebeh (ináč by nebolo možné použiť komplexného počtu).

Ďalej zanedbáme odpor prírodných vodičov.

Keďže sme nemali poruke kmitomer a užívali prúd transformovaný z osvetľovacej siete, volíme frekvenciu prúdu $f = 50$ Hz.

Do obvodu zostaveného podľa schémy zapojíme postupne a) kondenzátor C_1 , b) kondenzátor C_2 , c) batériu kondenzátorov C_1 a C_2 spojených za sebou, d) batériu kondenzátorov C_1 a C_2 spojených vedľa seba. Voltmetrom budeme merať pre rozličné veľkosti prúdov príslušné hodnoty napätia U na vetvi s ampérmetrom a kondenzátorom, ampérmetrom prúd I idúci kondenzátorom.

Podiel $Z = \frac{U}{I}$ je zdanlivý odpor obvodu a skladá sa z kapacitného odporu X_C kondenzátora a odporu R ampérmetra.

Pretože kondenzátor a ampérmeter sú spojené za sebou a prúd je sínusový, možno zdanlivý odpor vyjadriť komplexným číslom $Z = R - \frac{j}{\omega C}$, ktorého absolútna

hodnota $|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{U}{I}$, kde ω značí uhlovú frekvenciu $\omega = 2\pi f$ striedavého prúdu. Z tejto rovnice vypočítame

$$C = \frac{1}{\omega \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2}} = \frac{1}{2\pi f \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2}} \quad (1)$$

Namerané a podľa pokynov uvedených v návode vyrátané hodnoty zapíšeme do tabuľky.

Z nameraných hodnôt kapacít C_1 a C_2 vychádza pre kapacity kondenzátorovej batérie

c) pri zapojení oboch kondenzátorov za sebou vzťah

$$\frac{1}{C'_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \text{ z čoho } C'_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (2)$$

d) pri zapojení kondenzátorov vedľa seba vzťah

$$C'_p = C_1 + C_2 \quad (3)$$

Aby sme mohli posúdiť súhlas nameraných a vypočítaných hodnôt ad c) a ad d), určíme

absolútnu odchýlku t. j. rozdiel hodnôt nameranej (C) a hodnôt podľa vzťahov (2) resp. (3) vyrátanej (C') kapacity čiže

$$\delta = C - C'$$

a z nej relatívnu odchýlku, t. j. pomer absolútnej odchýlky δ a hodnoty C získanej meraním, čiže

$$\frac{\delta}{C} = \frac{C - C'}{C}, \quad (4)$$

pričom indexom s alebo p vyznačíme, či ide o sériové alebo paralelné zapojenie:

$$\frac{\delta_s}{C_s} = \frac{C_s - C'_s}{C_s} \quad \text{alebo} \quad \frac{\delta_p}{C_p} = \frac{C_p - C'_p}{C_p} \quad (4a, b)$$

Výsledky:

Zapojenie	Číslo mera- nia	$U[V]$	$I[mA]$	$R_A[\Omega]$	$\frac{U}{I} [\Omega]$	$C[\mu F]$	Priemer $C [\mu F]$
C_1	1.	0,875	0,4	1 440	2 186	1,94	1,933
	2.	1,10	0,5	1 440	2 200	1,93	
	3.	1,32	0,6	1 440	2 200	1,93	
C_2	1.	1,22	0,4	1 440	3 050	1,185	1,168
	2.	1,55	0,5	1 440	3 100	1,160	
	3.	1,86	0,6	1 440	3 100	1,160	
C_1, C_2 v sérii	1.	1,90	0,4	1 440	4 750	0,705	0,704
	2.	2,38	0,5	1 440	4 760	0,701	
	3.	2,85	0,6	1 440	4 750	0,705	
C_1, C_2 paralelne	1.	0,69	0,4	1 440	1 715	3,415	3,255
	2.	0,87	0,5	1 440	1 740	3,200	
	3.	1,05	0,6	1 440	1 750	3,150	

Vypočítané hodnoty kapacít batérie a súhlas namera-
ných hodnôt s nimi:

c) Batéria kondenzátorov C_1, C_2 vzniklá sériovým spo-
jením má mať podľa (2) kapacitu

$$C'_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1,933 \cdot 1,168}{3,101} \mu F = 0,727 \mu F$$

Relatívna odchýlka nameranej hodnoty od vypočítanej je
podľa (4a)

$$\begin{aligned} \frac{\delta_s}{C_s} &= \frac{C_s - C'_s}{C_s} = \frac{0,727 - 0,704}{0,724} = \frac{0,023}{0,724} = \\ &= \frac{23}{724} \doteq 3,2 \% \end{aligned}$$

d) Batéria kondenzátorov C_1 , C_2 vzniklá paralelným spojením má mať podľa (2) kapacitu

$$C'_p = C_1 + C_2 = 3,101 \mu\text{F}$$

Relativna odchýlka nameranej hodnoty od vypočítanej je dľa (4b)

$$\frac{\delta_p}{C_p} = \frac{C_p - C'_p}{C_p} = \frac{3,255 - 3,101}{3,255} = \frac{0,154}{3,255} \doteq 4,7 \%$$

vypočítanej hodnoty.

12. Řešení úloh kategorie B

PRVNÍ KOLO SOUTĚŽE

1. Ocelový nosník hmotnosti m visí ve vodorovné poloze na třech lanech stejné délky. Krajní lana jsou ocelová a mají stejný průřez S_1 . Uprostřed mezi nimi je měděné lano o průřezu S_2 , připevněné v těžišti nosníku. Jak velké jsou tažné síly v lanech?

Modul pružnosti oceli je $E_1 = 2 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$, mědi $E_2 = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 1,6 \cdot 10^3 \text{ kg}$ a $S_2 = 2 S_1$. Tíhové zrychlení $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$.

Označení veličin: Tíhu nosníku označíme $G = mg$, délku lan l , tažné síly napínající ocelová lana F_1 , tažnou sílu napínající měděné lano F_2 , prodloužení lan Δl (všechna lana se prodlouží o stejnou délku).

Řešení: Podle Hookeova zákona se prodlouží ocelová lana o délku $\Delta l = \frac{1}{E_1} \frac{F_1}{S_1} l$ a měděné o stejnou délku $\Delta l = \frac{1}{E_2} \frac{F_2}{S_2} l$.

Porovnáme-li oba výrazy, dostaneme

$$S_2 F_1 E_2 = F_2 E_1 S_1 \quad (1)$$

Protože součet sil napínajících lana se musí rovnat tíze nosníku, platí

$$2F_1 + F_2 = G = mg \quad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) určíme

$$F_1 = \frac{E_1 S_1}{2 S_1 E_1 + E_2 S_2} mg \quad \text{a} \quad F_2 = \frac{E_2 S_2}{2 E_1 S_1 + E_2 S_2} mg \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$F_1 = \frac{2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot (2 \cdot 10^{11} + 1,2 \cdot 10^{11})} \cdot 1,6 \cdot 10^3 \cdot 10 \text{ N m}^{-2} \text{ N}^{-1} \text{ m}^2 \text{ kg m s}^{-2} = \frac{1,6 \cdot 10^4}{3,2} \text{ N} = 5 \cdot 10^3 \text{ N} \quad \text{a}$$

$$F_2 = \frac{1,2 \cdot 10^{11}}{3,2 \cdot 10^{11}} \cdot 1,6 \cdot 10^3 \cdot 10 \text{ N} = 6 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Ocelová lana budou napínána stejnými silami 5 000 N, měděné silou 6 000 N. Obecně jsou tyto síly určeny vztahy (3).

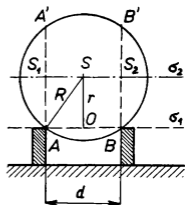
2. Jak velkou rychlostí se pohybuje střed koule o poloměru R , valí-li se koule rovnoměrně bez klouzání úhlovou rychlostí ω po dvou rovnoběžných kolejnicích, mezi kterými je vzdálenost $d < 2R$ (obr. 36a)?

Sestrojte graf vyjadřující závislost rychlosti v na vzdálenosti kolejnic z několika hodnot v mezích $0 < d < 2R$.

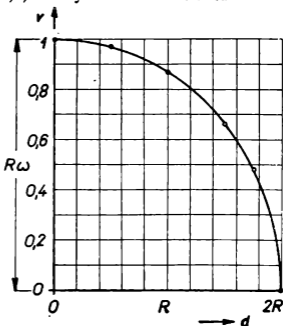
Jak velká by byla tato rychlost, kdyby a) $d = 2R$, b) koule se valila po přímé dráze po vodorovné rovině?

Označení veličin: Střed koule je S , poloměr R . Rovinu proloženou vnitřními hranami kolejnic označíme σ_1 , rovina s ní rovnoběžná a procházející středem koule je σ_2 ; vzdálenost rovin σ_1 a σ_2 je r .

Valí-li se koule po kolejnicích, pohybují se všechny její body stejnou úhlovou rychlostí ω po kružnicích, jejichž roviny jsou kolmé k rovině σ_2 . Periodu těchto kruhových pohybů označíme T . Středů všech těchto kružnic se nacházejí na ose (ležící v rovině σ_2), která je kolmá k směru kolejnic, prochází středem koule a posouvá se rychlostí v v rovině σ_2 tak, že je stále kolmá ke směru kolejnic.



Obr. 36a



Obr. 36b

Řešení: Po vnitřních hranách kolejnic se pohybují body ležící na dvou kružnicích, jejichž roviny jsou vzdáleny od středu koule o $\frac{d}{2}$. Na obr. 36a jsou tyto kružnice

znázorněny úsečkami AA' a BB' , kde A, B značí body na kružnicích, jež se právě dotýkají vnitřních hran obou kolejnic. Středů těchto kružnic jsou body S_1 a S_2 , ležící na ose otáčení, a jejich poloměry jsou $S_1A = S_2B = r$. \square

Při jedné periodě otáčivého pohybu vykoná každý bod na kružnicích o středech S_1 a S_2 a o poloměrech r kruhovou dráhu $s = 2\pi r$. O tuto délku se posune osa S_1S_2 otáčení, a tedy i střed koule v rovině σ_2 rychlostí v . Proto platí $vT = 2\pi r$, takže

$$v = \frac{2\pi r}{T} = r\omega \quad (1)$$

Délku poloměru r určíme užitím Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku SAO , kde O je střed úsečky AB ; je

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} = \frac{\sqrt{4R^2 - d^2}}{2}$$

Po dosazení do rovnice (1) vychází

$$v = \frac{\omega}{2} \sqrt{4R^2 - d^2} \quad (2)$$

Střed koule se pohybuje rychlostí určenou vztahem (2).

Závislost rychlosti v na vzdálenosti d je v mezích $0 \leq d \leq 2R$ zobrazena grafem 36b, sestrojeným podle tabulky:

d	0	$\frac{R}{2}$	R	$\frac{3R}{2}$	$\frac{7R}{2}$	$2R$
v	$R\omega$	$0,97 R\omega$	$0,87 R\omega$	$0,66 R\omega$	$0,48 R\omega$	0

a) Dosadíme-li do výrazu (2) $d = 2R$, vychází $v = 0$.

b) Kdyby se koule pohybovala po rovině, pak by platilo $d = 0$ a $v = R\omega$. Oba výsledky odpovídají skutečnosti.

3. Co je těžší, 1 kg olova nebo 1 kg korku? Velmi známá otázka.

Položíme-li na jednu misku citlivých rovnoramenných vah olověné těleso o hmotnosti 1 kg, na druhou misku korkové těleso o hmotnosti 1 kg, jsou váhy v rovnováze jen tehdy, jsou-li tělesa umístěna pod recipientem vývěvy, z něhož byl vyčerpán vzduch.

Vpustíme-li pod recipient vzduch tak, že tlak vzduchu uvnitř recipientu se vyrovná atmosférickému tlaku p , klesne miska s olověným předmětem.

a) Vysvětlete, proč miska klesne.

b) Určete, oč je olověný předmět hmotnosti 1 kg ve vzduchu těžší než korkový předmět téže hmotnosti, jestliže teplota vzduchu je t a tlak p .

Řešte nejprve obecně, potom pro $t = 17^\circ\text{C}$, $p = 760$ torrů. Za těchto podmínek je kilomolová hmotnost vzduchu $M_k = 29 \text{ kg kmol}^{-1}$, hustota olova $\rho_1 = 1,13 \cdot 10^4 \text{ kg m}^{-3}$, korku $\rho_2 = 2,0 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-3}$, univerzální plynová konstanta $R = 8,32 \cdot 10^3 \text{ J kmol}^{-1} \text{ deg}^{-1}$, tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Označení veličin: Obě tělesa, olověné i korkové, mají stejnou hmotnost $m = 1 \text{ kg}$. Objemy V_1 olověného předmětu a V_2 korkového předmětu jsou určeny výrazy

$$V_1 = \frac{m}{\rho_1} \text{ a } V_2 = \frac{m}{\rho_2} \quad (1)$$

Teplotě $t = 17^\circ\text{C}$ odpovídá absolutní teplota $T = 290^\circ\text{K}$, tlak $p = 1 \text{ torr} = 133,322 \text{ N m}^{-2}$. Olověný předmět vytlačí za dané teploty T a tlaku p množství

vzduchu, jehož hmotnost označíme m_1 . Obdobně bude m_2 značit hmotnost vzduchu vytlačeného za stejných podmínek korkovým tělesem.

Pro množství vzduchu objemu V o absolutní teplotě T platí při tlaku p stavová rovnice $pV = BT$, pokládáme-li vzduch za dokonalý plyn. Velikost konstanty B závisí jen na uvažované hmotnosti vzduchu, jestliže teplota a tlak vzduchu mají dané hodnoty. Má-li kilomol vzduchu kilomolový objem V_k a kilomolovou hmotnost M_k , má konstanta B hodnotu R . Pro jeden kilogram vzduchu má tedy konstanta B hodnotu $\frac{R}{M_k}$ a pro objem V vzduchu hmot-

nosti m hodnotu $\frac{R m}{M_k}$. Proto platí pro množství vzduchu o hmotnosti m (objemu V) stavová rovnice $pV = \frac{m}{M_k} R T$, z níž po úpravě vyjde

$$m = \frac{p V M_k}{R T} \quad (2)$$

Řešení: a) Protože olověný předmět i korkový předmět mají stejnou hmotnost $m = 1$ kg, mají pod recipientem, z něhož byl úplně vyčerpán vzduch, také stejnou tíhu. Leží-li tedy každý z nich na jedné misce správných a citlivých vah, jsou váhy v rovnováze. Vpustíme-li pod recipient vzduch, jsou obě tělesa nadlehčována. Protože korkový předmět má větší objem než předmět olověný, je nadlehčován větší silou než olověný předmět. Proto miska s olověným předmětem klesne.

b) Olověný předmět vytlačí množství vzduchu o objemu V_1 . Hmotnost m_1 tohoto vytlačeného vzduchu určíme z upravené rovnice (2)

$$m_1 = \frac{p M_k}{R T} V_1$$

Obdobně určíme hmotnost vzduchu vytlačeného korkovým tělesem

$$m_2 = \frac{p M_k}{R T} V_2$$

Olověný předmět je ve vzduchu nadlehčován podle Archimédova zákona silou $F_1 = m_1 g$, korkový silou $F_2 = m_2 g$.

Olověný předmět je tedy za daných podmínek těžší o

$F = m_2 g - m_1 g = \frac{p M_k}{R T} g (V_2 - V_1)$ a po dosazení ze vztahů (1)

$$F = \frac{p M_k m}{R T} g \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \quad (3)$$

Rozměrová zkouška:

$$[F] = \frac{\text{N m}^{-2} \text{ kg kmol}^{-1} \text{ kg m s}^{-2}}{\text{N m kmol}^{-1} \text{ deg}^{-1} \text{ deg kg m}^{-3}} = \text{m kg s}^{-2} = \text{N}$$

Dosadíme-li do vztahu (3) dané hodnoty, dostaneme

$$F = \frac{760 \cdot 133,322 \cdot 29 \cdot 9,81}{8,32 \cdot 10^3 \cdot 290} \left(\frac{1}{2 \cdot 10^2} - \frac{1}{1,13 \cdot 10^4} \right) \text{ N} =$$

$$= \frac{760 \cdot 133,322 \cdot 29 \cdot 9,81 \cdot 111}{8,32 \cdot 290 \cdot 2 \cdot 1,13 \cdot 10^7} \text{ N}$$

Pomocí logaritmických tabulek vypočítáme $F = 0,05868 \text{ N}$.

Olověný předmět hmotnosti $m = 1 \text{ kg}$ je za daných podmínek o $0,059 \text{ N}$ těžší než korkový předmět téže hmotnosti. Obecně je velikost této síly určena vztahem (3).

4. Kus ledu o hmotnosti m_1 o teplotě t_1 se vhodí do roztaveného olova o hmotnosti m_2 a teplotě t_2 .

Určete výsledný stav směsi za předpokladu, že nenastanou ztráty tepla do okolí.

Příslušné konstanty vyhledejte v tabulkách.

Řešte nejprve pokud možno obecně, potom pro hodnoty $t_1 = -20\text{ }^\circ\text{C}$, $t_2 = 400\text{ }^\circ\text{C}$, $m_1 = 0,4\text{ kg}$, $m_2 = 1\text{ kg}$.

Označení veličin a jejich hodnoty: Teploty vyskytující se při řešení úlohy označíme takto: $t_1 = -20\text{ }^\circ\text{C}$ je počáteční teplota ledu, jeho teplota tání je $t_0 = 0\text{ }^\circ\text{C}$, teplota varu vody je $t_3 = 100\text{ }^\circ\text{C}$, teplota tání olova $t_4 = 328\text{ }^\circ\text{C}$; $t_2 = 400\text{ }^\circ\text{C}$ je počáteční teplota roztaveného olova.

Měrné teplo ledu $c_1 = 0,5\text{ kcal kg}^{-1}\text{ deg}^{-1}$, měrné teplo vody $c_2 = 1\text{ kcal kg}^{-1}\text{ deg}^{-1}$, měrné teplo tekutého olova je $c_3 = 0,004\text{ kcal kg}^{-1}\text{ deg}^{-1}$, měrné teplo tuhého olova je $c_4 = 0,003\text{ kcal kg}^{-1}\text{ deg}^{-1}$. Skupenské teplo tání ledu $l_1 = 80\text{ kcal kg}^{-1}$, skupenské teplo tání olova $l_2 = 5,4\text{ kcal kg}^{-1}$, výparné teplo při varu vody je $l_3 = 548\text{ kcal kg}^{-1}$.

Řešení: Abychom mohli určit výsledný stav směsi, musíme nejprve zjistit změny stavu, které nastanou u olova a ledu při jednotlivých dějích.

Olovo vydá při ochlazení z teploty t_2 na teplotu t_4 (tuhnutí olova) teplo Q_1 , při ztuhnutí teplo Q_2 , při ochlazení z teploty t_4 na teplotu t_3 (varu vody) teplo Q_3 a při ochlazení z teploty t_3 na teplotu t_0 (tání ledu) teplo Q_4 . Hodnoty těchto veličin jsou:

$$Q_1 = c_3 m_2 (t_2 - t_4) = 0,04 \cdot 1 \cdot (400 - 328)\text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1} \text{ kg deg} = 2,88\text{ kcal},$$

$$Q_2 = m_2 l_2 = 1 \cdot 5,4\text{ kg kcal kg}^{-1} = 5,4\text{ kcal},$$

$$Q_3 = c_4 m_2 (t_4 - t_3) = 0,03 \cdot 1 \cdot (328 - 100) \text{ kcal} = 6,84 \text{ kcal}$$

$$Q_4 = c_4 m_2 (t_3 - t_0) = 0,03 \cdot 1 \cdot 100 \text{ kcal} = 3 \text{ kcal}$$

Led spotřebuje k zahřátí z teploty t_1 na teplotu t_0 (tání ledu) teplo Q_1' , k přeměně na vodu teplo Q_2' , při zahřátí vody z teploty t_0 na teplotu t_3 (varu vody) teplo Q_3' , při přeměně vody v páru při teplotě t_3 teplo Q_4' . Hodnoty těchto veličin jsou:

$$Q_1' = c_1 m_1 (t_0 - t_1) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 20 \text{ kcal} = 4 \text{ kcal},$$

$$Q_2' = m_1 l_1 = 0,4 \cdot 80 \text{ kcal} = 32 \text{ kcal}.$$

Protože při daných hodnotách je $Q_1' + Q_2' > Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$, stačí sice teplo $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$ (vydané při změně stavu olova ze skupenství kapalného o teplotě t_2 do skupenství tuhého o teplotě tání ledu) k zahřátí ledu na jeho teplotu tání a k přeměně části ledu na vodu, část ledu však zůstane ve skupenství tuhém. Není tedy nutno počítat další veličiny Q_3' a Q_4' .

Označíme-li písmenem m hmotnost ledu, který roztál, platí kalorimetrická rovnice

$$c_1 m_1 (t_0 - t_1) + m l_1 = c_3 m_2 (t_2 - t_4) + m_2 l_2 + c_4 m_2 (t_4 - t_0),$$

takže

$$m = \frac{c_3 m_2 (t_2 - t_4) + m_2 l_2 + c_4 m_2 (t_4 - t_0) - c_1 m_1 (t_0 - t_1)}{l_1} \quad (1)$$

Dosadíme-li do výrazu (1) dané hodnoty, vyjde

$$m = \frac{2,88 + 5,4 + 9,84 - 4}{80} \text{ kcal kcal}^{-1} \text{ kg} = 0,1765 \text{ kg}.$$

Při teplotě tání ledu nastane rovnovážný stav. Směs bude obsahovat 1 kg tuhého olova, 176,5 g vody a 223,5 g ledu. Obecně je hmotnost vody určena vztahem (1).

5. Dvě skleněné kapilární trubice o průměrech d_1, d_2 ($d_1 > d_2$) jsou částečně ponořeny svisle do kapaliny o hustotě ρ a o povrchovém napětí σ .

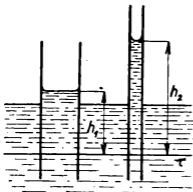
Určete vzdálenost povrchů obou kapalin v trubicích:

- pro vodu teploty t ,
- rtuť téže teploty t .

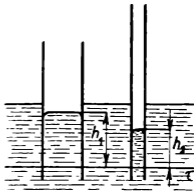
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d_1 = 2$ mm, $d_2 = 0,6$ mm a $t = 18^\circ\text{C}$. Hodnoty povrchových napětí a hustoty vody a rtuti při dané teplotě vyhledejte v tabulkách.

Označení veličin a jejich hodnoty: Obecně značíme povrchové napětí kapaliny σ , hustotu kapaliny ρ . Při teplotě 18°C má voda povrchové napětí $\sigma_1 = 72,97 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$, rtuť téže teploty $\sigma_2 = 491 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$. Hustota vody při teplotě 18°C je $\rho_1 = 998,62 \text{ kg m}^{-3}$, rtuti $\rho_2 = 13,551 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

Působením stykového napětí na rozhraní kapaliny a stěny kapilární trubice nastává u kapalin smáčejících stěny trubice kapilární elevace (obr. 37), u kapalin, které nescháčejí stěny trubice, kapilární deprese (obr. 38).



Obr. 37



Obr. 38

Vedeme-li v libovolné hloubce pod povrchy kapaliny v obou kapilárních trubicích vodorovnou rovinu τ a označíme-li výšky povrchů kapaliny nad rovinou τ v širší kapilární trubici h_1 , v užší h_2 , je rozdíl vzdáleností povrchů kapaliny v těchto trubicích $\Delta h = h_2 - h_1$ u kapalin smáčejších stěny trubice a $\Delta h = h_1 - h_2$ u kapalin nesmáčejších stěny trubice.

Tlaky kapaliny v širší trubici v hloubce h_1 označíme písmenem p_1 , v užší trubici v hloubce h_2 písmenem p_2 . Barometrický tlak označíme b , tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení: Označíme-li písmenem S průřez trubice válcového tvaru o průměru d , má tlaková síla v kapalině hustoty ρ , která smáčí stěny trubice, v hloubce h pod povrchem kapaliny v trubici hodnotu

$$F = S(b + h\rho g) - \pi d\sigma,$$

jak je patrné z obr. 37. Působí tedy v rovině τ , nacházející se v hloubce h pod povrchem kapaliny smáčejších stěny trubice, tlak

$$p = b + h\rho g - \frac{4\sigma}{d} \quad (1)$$

U kapalin stěny nesmáčejších platí za stejných okolností podle obr. 38 vztah

$$p' = b + h\rho g + \frac{4\sigma}{d} \quad (2)$$

Platí tedy u kapalin smáčejších stěny trubice

$$p_1 = b + h_1\rho g - \frac{4\sigma}{d_1} \text{ a obdobně } p_2 = b + h_2\rho g - \frac{4\sigma}{d_2}$$

Protože v trubicích je rovnováha, je $p_1 = p_2$, takže platí

$$b + h_1 \rho g - \frac{4 \sigma}{d_1} = b + h_2 \rho g - \frac{4 \sigma}{d_2},$$

odkud vypočítáme

$$h_2 - h_1 = \Delta h = \frac{4 \sigma}{\rho g} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \quad (3)$$

U kapalin nesmáčejících stěny trubice je

$$p_1 + b + h_1 \rho g + \frac{4 \sigma}{d_1} \text{ a obdobně } p_2 = b + h_2 \rho g + \frac{4 \sigma}{d_2},$$

takže

$$b + h_1 \rho g + \frac{4 \sigma}{d_1} = b + h_2 \rho g + \frac{4 \sigma}{d_2},$$

odkud vypočítáme

$$h_1 - h_2 = \Delta h = \frac{4 \sigma}{\rho g} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)$$

jako v případě (1).

Dosadíme-li do (1) dané hodnoty, vyjde pro vodu

$$\Delta h = \frac{4 \cdot 72,97 \cdot 10^{-3}}{9,81 \cdot 998,62} \left(\frac{1}{6 \cdot 10^{-4}} - \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \right) \text{ kg m s}^{-2} \\ \text{m}^{-1} \text{m}^{-1} \text{s}^2 \text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{m}^{-1} =$$

$$= \frac{4 \cdot 72,97 \cdot 10^{-3} \cdot 7 \cdot 10^3}{9,81 \cdot 998,62 \cdot 6} \text{ m. Pomocí logaritmů vypo-}$$

$$\text{čítáme} \quad \Delta h = 0,035 \text{ m}$$

Pro rtuť vychází

$$\Delta h = \frac{4 \cdot 491 \cdot 10^{-3}}{9,81 \cdot 13,551 \cdot 10^3} \cdot \frac{7 \cdot 10^3}{6} \text{ m. Užitím logarit-}$$

$$\text{mů určíme} \quad \Delta h = 0,019 \text{ m}$$

Rozdíl povrchů kapalin v obou kapilárních trubicích je za daných podmínek u vody 3,5 cm, u rtuti 1,9 cm. Obecně je hodnota tohoto rozdílu určena vztahem (3).

6. Určete tíhové zrychlení g užitím matematického kyvadla a vypočítejte absolutní a relativní chybu měření.

Pomůcky: Olověná, mosazná nebo ocelová kulička o průměru 1 až 2 cm, stojan na zavěšení kyvadla, pevná a nepružná nit, stopky, délkové měřítko s milimetrovou stupnicí, stojan na upevnění měřítka.

Návod: Označíme-li l vzdálenost bodu závěsu od středu kuličky při napjaté niti, dá se vypočítat velikost tíhového zrychlení ze vztahu $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, kde t značí dobu kyvu matematického kyvadla při malém rozkyvu a g tíhové zrychlení. Protože se l nedá změřit s dostatečnou přesností, měříme doby kyvu t_1 a t_2 při dvou různých délkách l_1 a l_2 kyvadla. Vyjádříte-li doby kyvu obou kyvadel uvedeným vzorem, dostanete po úpravách vztah

$$g = \frac{\pi^2(l_1 - l_2)}{(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)} \quad (1)$$

Rozdíl délek $d = l_1 - l_2$ se dá s dostatečnou přesností určit pomocí svisle postaveného měřítka s posuvným jezdce tak, že měřítkem určíte polohy n_1 a n_2 libovolného (označeného) bodu A na niti kyvadla poblíž kuličky při obou délkách l_1 a l_2 kyvadla.

Měření každé z poloh n_1 a n_2 proveďte dvakrát, před začátkem a po ukončení doby kyvu. Za hodnoty n_1 a n_2 pokládejte aritmetický průměr obou měření.

Doby kyvu t_1 a t_2 určete z padesáti kyvů. Délku l_1 zvolte asi 1 m, l_2 asi 75 až 80 cm.

Relativní chybu tíhového zrychlení určíte podle známých pravidel o počítání s relativními chybami:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta(l_1 - l_2)}{l_1 - l_2} + \frac{\Delta(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2} + \frac{\Delta(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} + \frac{\Delta\pi^2}{\pi^2}, \quad (2)$$

kde se písmenem Δ značí absolutní chyba příslušné veličiny.

Úkol: A. a) Vypočítejte vztah (1), b) udejte, které délce se rovná $n_1 - n_2$, c) jakou velikost má absolutní chyba Δt doby jednoho kyvu, určujete-li ji z k kyvů stopkami se stupnicí, jejíž nejmenší dílek odpovídá 0,1 s, d) jaká je absolutní chyba rozdílu $\Delta(t_1 - t_2)$ a součtu $\Delta(t_1 + t_2)$, e) jakou velikost má absolutní chyba při měření délky, je-li nejmenším dílkem na stupnici mm. Odpovědi odůvodněte.

B. Navrhněte postup řešení dané úlohy, proveďte příslušná měření, určete g a relativní i absolutní chybu měření.

Úkol A. a) Doba kyvu matematického kyvadla délky l_1 je určena vztahem $t_1 = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$, kyvadlo o délce l_2 má dobu kyvu $t_2 = \pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}$. Odečteme-li od sebe dvojmoči dob kyvů t_1 a t_2 , dojdeme k rovnici $t_1^2 - t_2^2 = \frac{\pi^2}{g}(l_1 - l_2)$, takže

$$g = \pi^2 \frac{l_1 - l_2}{(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)} \quad (1)$$

b) Označíme-li polohu libovolného bodu na závěsné niti kyvadla délky l_1 a zkrátíme-li potom závěs na délku l_2 ,

zmenší se délka kyvadla o $\Delta l = l_1 - l_2$. O tutéž hodnotu se zvýší poloha označeného bodu. Jestliže tedy změříme svisle postaveným měřítkem s posuvným jezdceř polohu n_1 označeného bodu při délce l_1 a n_2 při délce l_2 , je $n_2 - n_1 = l_1 - l_2$.

c) Měříme dobu k kyvů stopkami se stupnicí, jejíž nejmenší dílek odpovídá 0,1 s, můžeme po odečtení doby, kdy končí k -tý kyv, udělat chybu nejvýše 0,05 s. Na dobu jednoho kyvu tedy připadá chyba $\Delta t \leq \frac{0,05}{k}$ s.

d) Protože při odečtení doby $T_1 = kt_1$ i doby $T_2 = kt_2$ jsme se mohli dopustit stejné chyby nejvýše 0,05 s, může mít chyba součtu ($T_1 + T_2$) i rozdílu ($T_1 - T_2$) hodnotu nejvýše 1 s, takže na každou z dob ($t_1 + t_2$) a ($t_1 - t_2$) připadá absolutní chyba nejvýše $\frac{0,1}{k}$ s.

e) Je-li nejmenším dílkem stupnice délkového měřítka 1 mm, můžeme při odečtení polohy koncového bodu měřené délky udělat chybu nejvýše 0,5 mm. Absolutní chyba naměřené délky je tedy zatížena nejvýše chybou $\Delta l = 0,5$ mm.

B. Při řešení úlohy postupujeme takto:

Na závěsu kyvadla délky l_1 označíme uzlíkem polohu určitého bodu. Umístíme svislé měřítko s jezdceř, které má stupnici v mm, u kyvadla tak, abychom během měření nemusili jeho polohu měnit a určíme jím polohu n'_1 uzlíku. Potom změříme dobu padesáti kyvů stopkami se stupnicí, jejíž 1 dílek odpovídá době 0,1 s. Nakonec určíme svislým měřítkem znovu polohu n''_1 .

Zcela obdobným způsobem budeme vyšetřovat polohy uzlíku n'_2 a n''_2 a doby padesáti kyvů kyvadla zkráceného na délku l_2 .

Při měření dob kyvu a poloh n_1 a n_2 se řídíme pokyny uvedenými v návodu. Naměřené hodnoty zaznamenáme do tabulek.

Průměrná absolutní chyba měření je aritmetický průměr absolutních hodnot odchylek naměřených hodnot od aritmetického průměru.

Tabulky hodnot získaných při měření doby kyvů

Kyvadlo délky l_1			Kyvadlo délky l_2		
Měření čís.	Doba padesáti kyvů T_1 [s]	ΔT_1 [s]	Měření čís.	Doba padesáti kyvů T_2 [s]	ΔT_2 [s]
1	54,60	—	1	48,80	-0,05
2	54,70	-0,1	2	48,80	-0,05
3	54,60	—	3	48,65	0,10
4	54,50	+0,1	4	48,80	-0,05
5	54,60	—	5	48,70	+0,05
Součet	273,00	—	Součet	243,75	—
aritm. průměr \bar{T}_1	54,60		aritm. průměr \bar{T}_2	48,75	
doba kyvu \bar{t}_1	1,092		doba kyvu \bar{t}_2	0,975	

Je tedy absolutní chyba ΔT_1 padesáti kyvů kyvadla délky l_1 rovna $\Delta T_1 = \frac{0,2}{5} \text{ s} = 0,04 \text{ s}$. Obdobně $\Delta T_2 = \frac{0,3}{5} \text{ s} = 0,06 \text{ s}$, $\Delta n_2 = \frac{1}{2} \text{ mm}$ a $\Delta n_1 = 0,5 \text{ mm}$. Na

Tabulky naměřených vzdáleností n_1 a n_2

Měření čis.	n_1 [mm]	Δn_1 [mm]	Měření čis.	n_2 [mm]	Δn_2 [mm]
1	120	0,5	1	361	0,5
2	121	-0,5	2	362	-0,5
Součet	241	-	Součet	723	-
aritm. průměr \bar{n}_1	120,5		aritm. průměr \bar{n}_2	361,5	

dobu jednoho kyvu kyvadla o délce l_1 připadá proto absolutní chyba $\Delta t_1 = \frac{\Delta T_1}{50} = 0,000\ 8$ s, doba jednoho kyvu kyvadla délky l_2 je zatížena chybou $\Delta t_2 = \frac{\Delta T_2}{50} = \frac{0,06}{50} = 0,001\ 2$ s.

Délku dob kyvů obou kyvadel můžeme tedy vyjádřit $t_1 = \bar{t}_1 + \Delta t_1 = (1,092 \pm 0,000\ 8)$ s, $t_2 = (0,975 \pm \pm 0,001\ 2)$ s a $n_1 = (0,120\ 5 \pm 0,000\ 5)$ m, $n_2 = (0,361\ 5 \pm \pm 0,000\ 5)$ m.

Relativní chyba součtu $(t_1 + t_2)$ je $\frac{\Delta(t_1 + t_2)}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2} = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2} = \frac{0,002}{2,067} \doteq 0,001$, relativní chyba rozdílu

$t_1 - t_2$ má velikost $\frac{\Delta(t_1 - t_2)}{(\bar{t}_1 - \bar{t}_2)} = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{(\bar{t}_1 - \bar{t}_2)} = \frac{0,002}{0,117} \doteq \doteq 0,02$. Protože $l_1 - l_2 = n_2 - n_1$, je relativní chyba $(l_1 - l_2)$ rovna relativní chybě rozdílu $(n_2 - n_1)$. Proto

$$\text{je } \frac{\Delta(l_1 - l_2)}{\bar{l}_1 - \bar{l}_2} = \frac{\Delta(n_2 - n_1)}{n_2 - n_1} = \frac{\Delta n_2 + \Delta n_1}{n_2 - n_1} = \frac{0,001}{0,241} \doteq \doteq 0,005.$$

Ludolfovo číslo $\pi = 3,141\,592\,6\dots$ je iracionální číslo. Zaokrouhlíme-li je na $\pi = 3,14$, uděláme absolutní chybu menší než 0,002, relativní chyba hodnoty 3,14 je tedy $\frac{0,002}{3,14} \doteq 0,007$, takže relativní chyba π^2 je $\frac{\Delta \pi^2}{\pi^2} = 2 \frac{\Delta \pi}{\pi} = 0,014$.

Relativní chyba

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta \pi^2}{\pi^2} + \frac{\Delta(l_1 - l_2)}{\bar{l}_1 - \bar{l}_2} + \frac{\Delta(t_1 + t_2)}{\bar{t}_1 - \bar{t}_2} + \frac{\Delta(t_1 - t_2)}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2} \quad (2)$$

Po dosazení vypočítaných hodnot vyjde

$$\frac{\Delta g}{g} = 0,014 + 0,005 + 0,001 + 0,020 = 0,040 = 4 \% \quad (3)$$

Dosazením do vztahu (1) určíme

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \frac{3,14^2(0,361\,5 - 0,120\,5)}{(1,092 + 0,975)(1,092 - 0,975)} \text{ m s}^{-2} = \\ &= \frac{3,14^2 \cdot 0,241}{2,067 \cdot 0,117} \text{ m s}^{-2} \end{aligned}$$

Pomocí logaritmických tabulek vypočítáme $\bar{g} = 9,836 \text{ m s}^{-2}$.

Absolutní chyba měření je $\Delta g = \frac{\Delta g}{\bar{g}} \cdot \bar{g} = 0,04 \bar{g} = 0,393 \text{ m s}^{-2}$, takže

$$g = (9,836 \pm 0,393) \text{ m s}^{-2} \quad (4)$$

7. Zavěsíme-li na lehkou pružinu závaží o hmotnosti m , prodlouží se pružina o délku d . Vychýlíme-li závaží z této rovnovážné polohy směrem svisle dolů o délku y_0 a pak je uvolníme, začne závaží kmitat kolem rovnovážné polohy harmonickým pohybem. Při prodloužení pružiny o délku y_0 vykonáme práci A . Určete

- periodu T pohybu závaží,
- amplitudu y_0 výchylky,
- okamžitou výchylku y .

Hmotnost pružiny vzhledem k hmotnosti závaží zanedbejte.

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $m = 0,05$ kg, $d = 0,1$ m, $A = 0,1$ J.

Označení veličin: Tuhost pružiny označíme k a její potenciální energii pružnosti W_p . Kinetickou energii kmitajícího závaží budeme značit W_k , čas t .

Řešení: a) Pružina zatížená závažím hmotnosti m se prodlouží působením tíhové síly tohoto závaží o délku d a ustálí se v rovnovážné poloze. Podle Hookeova zákona platí $mg = kd$, kde k značí tuhost pružiny. Z této rovnice určíme $k = \frac{mg}{d}$.

Periodu kmitavého harmonického pohybu závaží vypočítáme ze vztahu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}} \quad (1)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$T = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{0,1}{10}} \sqrt{m \cdot m^{-1} s^2} = 0,628 \text{ s} \doteq 0,6 \text{ s}$$

Perioda kmitů je obecně určena výrazem (1) a má hodnotu 0,6 s.

b) Vychýlíme-li závaží zavěšené na pružině z jeho rovnovážné polohy směrem svisle dolů o délku y_0 , získá pružina přeměnou z práce, vykonané vnější proměnlivou silou při prodlužování pružiny, potenciální energii elastickou $A = W_p = \frac{1}{2} F y_0$, kde F značí tažnou sílu, kterou

napjatá pružina působí na závaží hmotnosti m při elongaci y_0 . Tato síla má podle Hookeova zákona velikost $F = = k y_0 = \frac{m g}{d} y_0$, takže

$$W_p = \frac{1}{2} \frac{m g}{d} y_0^2 \quad (2)$$

Jestliže výchylku závaží dále nezvětšujeme, je y_0 amplituda výchylky. Uvolněné závaží začne kmitat kolem rovnovážné polohy. Při pohybu se ustavičně mění elastická energie pružiny v kinetickou energii kmitajícího závaží nebo naopak. Přitom je podle zákona zachování energie součet kinetické energie závaží a elastické energie pružiny stále stejný a je roven A . V krajních polohách má závaží kinetickou energii $W_k = 0$, takže při amplitudě výchylky platí $A = W_p = \frac{1}{2} \frac{m g}{d} y_0^2$. Z této rovnice vypočítáme

$$y_0 = \sqrt{\frac{2 d A}{m g}} \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$\begin{aligned} y_0 &= \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1 \cdot 0,1}{0,05 \cdot 10}} \sqrt{\frac{\text{N m m s}^2}{\text{kg m}}} = \\ &= 0,1 \sqrt{\frac{20}{5}} \sqrt{\frac{\text{kg m m s}^2}{\text{s}^2 \text{kg}}} = 0,2 \text{ m} \end{aligned}$$

Amplituda výchylky je obecně určena vztahem (3); hodnotu má 0,2 m.

c) Počítáme-li čas od okamžiku, kdy závaží prochází rovnovážnou polohou, je okamžitá výchylka z rovnovážné polohy určena vzorcem $y = y_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$. Dosaďme-li do této rovnice za y_0 a T hodnoty ze vztahů (3) a (1), je

$$y = \sqrt{\frac{2dA}{mg}} \sin \sqrt{\frac{g}{d}} \cdot t \quad (4)$$

Dosaďme-li do tohoto výrazu dané hodnoty, vyjde

$$y = 0,2 \sin \sqrt{\frac{10}{0,1}} t = 0,2 \sin 10 t$$

Rozměrová zkouška: Rozměr veličiny $[y_0]$ je m ; byl odvozen v části b) úlohy.

$$\left[\sqrt{\frac{g}{d}} \cdot t \right] = \sqrt{\frac{m}{m s^2}} s = 1$$

Okamžitá výchylka je obecně určena výrazem (4), hodnotu má $y = 0,2 \sin 10 t$.

8. Vychylovací tyčinku elektrometru spojenou se sběrnou kuličkou označíme K a jeho obal, zvnitřku dobře izolovaný, označíme O . Elektrometr postavíme na parafínovou desku a postupně s ním provedeme tyto úkony:

(1) Kladně zelektrovanou tyčí se dotkneme O a tyč vzdálíme.

(2) Spojíme K na okamžik se zemí (dotkneme se prstem).

(3) Přeneseme malý záporný náboj na K .

(4) Znovu se dotkneme K prstem.

(5) Spojíme O vodivě se zemí.

(6) Spojíme vodivě K s O .

a) Udejte, jak se bude chovat vychylovací tyčinka po jednotlivých úkonech, a odůvodněte svá tvrzení.

b) Svá tvrzení ověřte pokusem.

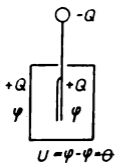
c) Nakreslete jednotlivé fáze popsaného pokusu.

Řešení: Kdyby celý elektrometr, tj. sběrná kulička i vychylovací tyčinka, byl umístěn v dutině zcela obklopené zeлектроvaným vodivým obalem O , vychylovací tyčinka by se vůbec nemohla vychylovat z rovnovážné polohy, neboť v dutině zcela uzavřené vodivým zeлектроvaným obalem se nevytvoří elektrické pole. Protože však sběrná kulička je mimo dutinu obalu O , indukuje v ní určitá část $+Q$ náboje obalu nesouhlasný náboj $-Q$ a souhlasný indukovaný náboj $+Q$ „přejde“ na vychylovací tyčinku, takže tyčinka se může za určitých okolností vychýlit z rovnovážné polohy.

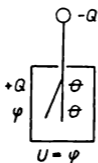
Protože ta část náboje obalu, která nepůsobí ve sběrné kuličce indukci, je při uvažovaných dějích neúčinná, budeme dále uvažovat jen tu část $+Q$ náboje obalu, která působí v elektrometru indukci.

(1) Dotkneme-li se kladně zeлектроvanou tyčí obalu O elektrometru, nabije se obal kladně nábojem $+Q$. Za předpokladu, že celý obal je vodivý a že má stejnou kapacitu jako sběrná kulička s vychylovací tyčinkou, indukuje se ve sběrné kuličce vázaný náboj $-Q$ a na vychylovací tyčinku se přemístí volný náboj $+Q$. Obal elektrometru a vychylovací tyčinka mají tedy stejně velký náboj $+Q$ a stejný potenciál φ . Protože elektrometr ukazuje napětí

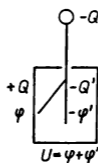
mezi obalem O a tyčinkou K , zůstává vychylovací tyčinka v rovnovážné poloze (obr. 39a).



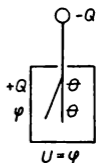
Obr. 39a



Obr. 39b

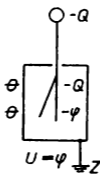


Obr. 39c

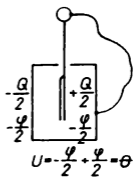


Obr. 39d

(2) Dotkneme-li se sběrné kuličky prstem, přejdou na tyčinku ze zemského povrchu elektrony v takovém množství, že neutralizují kladný náboj tyčinky. Vychylovací tyčinka má pak náboj $+Q - Q = 0$, je tedy neelektrická, obal elektrometru je kladně elektrický. Má



Obr. 39e



Obr. 39f

tedy obal kladný potenciál φ , vychylovací tyčinka nulový potenciál. Mezi obalem O a vychylovací tyčinkou K je napětí $U = \varphi$. Proto se tyčinka vychýlí (obr. 39b).

(3) Přeneseme-li na sběrnou kuličku záporný náboj, přejde část $-Q'$ na vychylovací tyčinku elektrometru, tyčinka získá záporný potenciál $-\varphi'$, obal má potenciál φ . Napětí mezi obalem a vychylovací tyčinkou vzroste na

$U' = \varphi + \varphi'$. Proto se zvětší výchylka vychylovací tyčinky (obr. 39c).

(4) Dotkneme-li se sběrné kuličky prstem, získá tyčinka K nulový potenciál, jako má země, náboj $-Q'$ se odvede do země a tyčinka K je znovu bez náboje. Napětí mezi obalem a tyčinkou je $U = \varphi$ jako v případě (2). Proto se výchylka tyčinky poněkud zmenší (obr. 39d).

(5) Spojíme-li obal O vodivě se zemí, přejde na obal ze zemského povrchu záporný náboj $-Q$, který neutralizuje jeho dosavadní náboj $+Q$. Potenciál obalu má tedy hodnotu 0. Záporný náboj $-Q$ na sběrné kuličce přestane být vázaným a rozdělí se na sběrnou kuličku i vychylovací tyčinku, takže vychylovací tyčinka se sběrnou kuličkou mají záporný potenciál $-\varphi$. Napětí mezi obalem a tyčinkou je $U = \varphi$. Tyčinka zůstane vychýlena (obr. 39e).

(6) Spojíme-li vodivě obal elektrometru s vychylovací tyčinkou, odpudí se část elektronů z tyčinky na obal a tyčinka i obal mají stejný potenciál $-\frac{\varphi}{2}$, neboť jsou spolu vodivě spojeny. Proto tyčinka úplně klesne (obr. 39f).

9. Určete moment setrvačnosti J tyče.

Pomůcky: Tyč hranolovitého tvaru, opatřená osou kolmou k stěnám největšího obsahu; stojan s ložiskem pro osu tyče; měřítko kalibrované v mm, úhломěr k měření odchylky tyče od svislého směru; stopky; délkové měřítko s milimetrovou stupnicí, váhy a závaží.

Návod: Při otáčivém pohybu tělesa okolo pevné osy platí obdobné zákony jako pro přímočaré pohyby, nahradíme-li v rovnicích platných u přímočarých pohybů veličiny charakterizující pohyby přímočaré analogickými veličinami charakteristickými pro pohyby otáčivé.

Pohyb kyvadla je analogický harmonickému pohybu. Síla působící na hmotný bod má velikost $F = m\omega^2 |u|$ kde u značí okamžitou elongaci hmotného bodu, $\omega = 2\pi f$ kruhovou frekvenci, f frekvenci a m jeho hmotnost. Pro kyvadlový pohyb fyzického kyvadla platí obdobný vztah

$$M = J\omega^2|\varphi|, \quad (1)$$

kde M značí moment síly působící v těžišti fyzického kyvadla při jeho výchylce o úhel φ z rovnovážné polohy. J je moment setrvačnosti fyzického kyvadla vzhledem k ose otáčení. Úpravou vztahu (1) určíme dobu kyvu t fyzického kyvadla

$$t = \pi \sqrt{\frac{J \varphi}{m g h \sin \varphi}}, \quad (2)$$

kde h značí vzdálenost těžiště fyzického kyvadla od osy otáčení.

Protože pro malé úhly ($\varphi < 5^\circ$) je $\sin \varphi \doteq \varphi$, platí pro tyto „nulové“ úhly

$$t_0 = \pi \sqrt{\frac{J}{m g h}} = \pi \sqrt{\frac{l'}{g}}, \quad (3)$$

kde $l' = \frac{J}{m h}$ je tzv. redukovaná délka fyzického kyvadla.

Vzorce (3) platí jen pro malé rozkvy. Chceme-li však měřit dobu kyvu, musíme dát kyvadlu aspoň takovou počáteční výchylku, abychom mohli pozorovat dosti veliký počet kyvů. Početně se dá odvodit vztah

$$t_0 = t_\varphi \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) = t_\varphi (1 - k) \quad (4)$$

Konstanta k je závislá na úhlu φ , jak je patrné z tabulky

φ [o]	0	10	15	20	25	30	
k	0	0,000 48	0,001 07	0,001 90	0,002 97	0,004 28	

	35	40
	0,005 83	0,007 61

Z rovnic (3) a (4) vypočítáme

$$J = \frac{m g h}{\pi^2} t_{\varphi}^2 (1 - k)^2 \quad (5)$$

Úkoly: a) Ze vztahu (1) odvoďte vztah (2).

b) Ze vztahů (3) a (4) vypočítejte vztah (5).

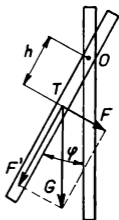
c) Navrhněte postup řešení dané úlohy. Měření doby kyvu fyzického kyvadla opakujte pětikrát pro různé hodnoty φ . Při každém φ měřte dobu kyvu průměrem z padesáti kyvů.

d) Vypočítejte hodnotu momentu setrvačnosti pro každé z pěti provedených měření.

e) Za nejpravděpodobnější hodnotu J pokládejte aritmetický průměr všech pěti měření.

Označení veličin: Jako fyzické kyvadlo byla užita tyč hranolovitého tvaru opatřená pevnou osou kolmou k stěnám největšího obsahu. Vzdálenost těžiště tyče od osy označíme h . Je-li tyč vychýlena z rovnovážné polohy o úhel φ (obr. 40), působí na ni v těžišti tíhová síla G , která se rozloží na dvě složky, sílu F' působící ve směru tyče a sílu F k ní kolmou. Vektorová přímka síly F' prochází osou a její pevností se ruší, síla $F = mg \sin \varphi$ působí

kývání tyče. Pro kyvadlový pohyb platí obdobný vztah jako pro harmonický pohyb, nahradíme-li v něm veličiny charakterizující posuvný pohyb analogickými veličinami charakteristickými pro pohyb otáčivý. Síle F , hmotnosti m , elongaci u a rychlosti v při pohybech posuvných odpovídají při otáčivých pohybech moment síly M , moment setrvačnosti J , úhel otočení φ a úhlová frekvence $\omega = 2\pi f$, kde f značí frekvenci kyvadlového pohybu, $T = \frac{1}{f}$ je doba



Obr. 40

kmitu a $t = \frac{T}{2}$ dobu kyvu kyvadla.

Řešení: a) Vztahu $F = m\omega^2|u|$ pro pohyb harmonický odpovídá při pohybu kyvadla obdobný vzorec

$$M = J\omega^2|\varphi| = 4\pi^2 f^2 J|\varphi| = \frac{4\pi^2}{T^2} J|\varphi| = \frac{\pi^2}{t^2} J|\varphi| \quad (1)$$

Moment síly má podle obr. 40 velikost $M = Fh = mgh \sin \varphi$. Proto platí

$$mgh \sin \varphi = \frac{\pi^2}{t^2} J \varphi,$$

odkud určíme

$$t = \pi \sqrt{\frac{J \varphi}{mgh \sin \varphi}} \quad (2)$$

b) Pro malé úhly ($\varphi < 5^\circ$) je $\sin \varphi \doteq \varphi$, takže pro dobu kyvu t_0 těchto malých úhlů platí jednodušší vzorec (3). Pro úhly $\varphi > 5^\circ$ vychází z měření jiná doba kyvu, t_φ , která závisí na velikosti úhlu φ . Platí pro ni vztah (4).

Dosadíme-li do vztahu (3) za t_0 hodnotu ze vztahu (4), vyjde $t_\varphi = \frac{\pi}{1-k} \sqrt{\frac{J}{mgh}}$. Odtud vypočítáme

$$J = \frac{mgh}{\pi^2} t_\varphi^2 (1-k)^2 \quad (5)$$

c) Velikost momentu setrvačnosti určíme ze vztahu (5). Hmotnost kyvadla zjistíme vážením na rovnoramenných vahách a délku h délkovým měřítkem. U tyče, které jsme užili jako kyvadla, měly hmotnost a vzdálenost těžiště od osy hodnoty

$$m = 0,3025 \text{ kg} \quad \text{a} \quad h = 0,252 \text{ m} \quad (6)$$

φ	Doba padesáti kyvů		Průměr doby jednoho kyvu	$1 - k$	Hodnoty momentu setrvačnosti	
	$50t_\varphi$ [s]	$50\bar{t}_\varphi$ [s]	\bar{t}_φ [s]		\bar{J} [kg m ²]	\bar{J} [kg m ²]
25°	29,7 29,8 29,8	29,77	0,595 4	0,997 02	0,026 78	
20°	29,7 29,7 29,8	29,71	0,594 2	0,998 10	0,026 63	
15°	29,6 29,8 29,7	29,70	0,594 0	0,998 93	0,026 68	0,026 67
10°	29,8 29,6 29,6	29,67	0,593 4	0,999 52	0,026 66	
5°	29,7 29,5 29,7	29,63	0,592 6	1	0,026 60	

Měření doby kyvu kyvadla bylo provedeno celkem při pěti úhlech 25° , 20° , 15° , 10° a 5° a pro každý z těchto úhlů byla doba kyvu měřena třikrát průměrem z padesáti kyvů. Výpočty byly provedeny pomocí logaritmických tabulek. Výsledky měření i výpočtů požadovaných v části d) a e) úlohy jsou zaznamenány v tabulce.

Moment setrvačnosti má hodnotu $0,026\ 67\ \text{kg m}^2$.

DRUHÉ KOLO SOUTĚŽE

1. Kus korku o hmotnosti m_1 je při barometrickém tlaku b ve vzduchu o teplotě t vyvážen na rovnoramenných vahách závažím o hmotnosti m_2 . Kolik váží ve vakuu a jaká je jeho hmotnost? Hustota korku je ρ_1 , hustota závaží použitého při vážení ρ_2 , kilomolová hmotnost vzduchu je M_k .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\rho_1 = 0,20\ \text{kg dm}^{-3}$, $\rho_2 = 8,00\ \text{kg dm}^{-3}$, $t = 17^\circ\text{C}$, $b = 750\ \text{torr} = 10^5\ \text{N m}^{-2}$, $m_2 = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{kg}$, $M_k = 29\ \text{kg kmol}^{-1}$. Univerzální plynová konstanta má pro 1 kilomol dokonalého plynu hodnotu $R = 8,3 \cdot 10^3\ \text{J deg}^{-1}\ \text{kmol}^{-1}$.

Označení veličin a dané hodnoty: Objem korku označíme V_1 , objem závaží, které vyvažuje korek, V_2 . Hustotu vzduchu za tlaku b a při teplotě t označíme σ . V soustavě SI je hustota korku $\rho_1 = 2 \cdot 10^2\ \text{kg m}^{-3}$, hustota závaží $\rho_2 = 8 \cdot 10^3\ \text{kg m}^{-3}$, teplotě $t = 17^\circ\text{C}$ odpovídá absolutní teplota $T = 290^\circ\text{K}$.

Řešení: Je-li objem korku V_1 a objem závaží V_2 , zní podmínka pro rovnováhu na rovnoramenných vahách

$$m_1 - V_1\sigma = m_2 - V_2\sigma \quad (1)$$

Dosadíme-li za V_1 a V_2 hodnoty $V_1 = \frac{m_1}{\rho_1}$ a $V_2 = \frac{m_2}{\rho_2}$ do rovnice (1), vyjde po úpravě

$$m_1 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho_1}\right) = m_2 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho_2}\right), \text{ takže}$$

$$m_1 = m_2 \frac{1 - \frac{\sigma}{\rho_2}}{1 - \frac{\sigma}{\rho_1}} = m_2 \frac{\rho_1 (\rho_2 - \sigma)}{\rho_2 (\rho_1 - \sigma)} \quad (2)$$

Hustotu vzduchu vypočítáme pro 1 kmol dokonalého plynu ze stavové rovnice $\frac{b V_k}{T} = R$. Dosadíme-li za $V_k = \frac{M_k}{\sigma}$, vyjde $\frac{b M_k}{\sigma T} = R$, takže

$$\sigma = \frac{b M_k}{R T} \quad (3)$$

Po dosazení hodnoty σ do vztahu (2) dostaneme

$$m_1 = m_2 \frac{\rho_1 \left(\rho_2 - \frac{b M_k}{R T}\right)}{\rho_2 \left(\rho_1 - \frac{b M_k}{R T}\right)} = m_2 \frac{\rho_1 (\rho_2 R T - b M_k)}{\rho_2 (\rho_1 R T - b M_k)} \quad (4)$$

Rozměrová zkouška: Jestliže $[\rho R T] = [b M_k]$, je zlomek na pravé straně výrazu (4) bezrozměrné číslo, jak je zřejmé z rovnice (4).

$$[\rho R T] = \text{kg m}^{-3} \text{ J deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1} \text{ deg} =$$

$$= \text{kg m}^{-3} \text{ N m kmol}^{-1} = \text{kg m}^{-2} \text{ N kmol}^{-1}$$

$$[b M_k] = \text{N m}^{-2} \text{ kg kmol}^{-1} = [\rho R T], \text{ což se mělo dokázat.}$$

Po dosazení daných hodnot do výrazu (4) vyjde

$$\begin{aligned}m_1 &= 5 \cdot 10^{-2} \frac{2 \cdot 10^2 (8 \cdot 10^3 \cdot 8,3 \cdot 10^3 \cdot 290 - 10^5 \cdot 29)}{8 \cdot 10^3 (2 \cdot 10^2 \cdot 8,3 \cdot 10^3 \cdot 290 - 10^5 \cdot 29)} \text{ kg} = \\&= 5 \cdot 10^{-2} \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 29 (6\,640 - 1)}{8 \cdot 10^8 \cdot 29 (166 - 1)} \text{ kg} = \\&= 10^{-2} \frac{6\,639}{1\,320} \text{ kg} = 5,03 \cdot 10^{-2} \text{ kg}\end{aligned}$$

Korek má hmotnost $5,03 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$ a váží ve vakuu $5,03 \cdot 10^{-2} \text{ kp}$. Obecně jsou tyto hodnoty určeny vztahem (4).

2. Válcová nádoba, která je naplněna vodou do výšky h , má ve stěně v hloubce h' pod povrchem malý otvor, z něhož vystřikuje voda na vodorovnou podložku nádoby do vzdálenosti d od dolního okraje nádoby. Výšku h vody v nádobě udržujeme stálou.

a) Jak hluboko pod povrchem vody je otvor?

b) Jak hluboko pod povrchem vody by musel být otvor, aby vodní paprsek dopadal na podložku co nejdále?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $h = 50 \text{ cm}$, $d = 30 \text{ cm}$.

Označení veličin: Rychlost částic vody, když opouštějí otvor, označíme v , největší vodorovnou vzdálenost, kam až může voda dopadat, d' .

Řešení: a) Podle zákona přeměny a zachování energie platí pro částici vody o hmotnosti m v okamžiku, kdy opouští otvor, rovnice $\frac{1}{2} m v^2 = m g h'$, z níž vypočítáme

$$v = \sqrt{2 g h'} \quad (1)$$

Zanedbáme-li odpor vzduchů, koná každá částice vody, tryskající z otvoru, vodorovný vrh a dopadne na podložku ve vzdálenosti $d = vt$ od dolního okraje nádoby za dobu

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{\sqrt{2gh'}} \quad (2)$$

Za čas t určený výrazem (2) vykoná však každá částice ve svislém směru volným pádem dráhu $h - h' = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g \frac{d^2}{2gh'}$, takže $h - h' = \frac{d^2}{4h'}$. Tuto rovnici upravíme na tvar

$$4h'^2 - 4hh' + d^2 = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$h'_{1,2} = \frac{4h \pm \sqrt{16h^2 - 16d^2}}{8} = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - d^2}}{2} \quad (3)$$

Z výrazu (3) je patrné, že úloha je fyzikálně možná jen v případech, že $d \leq h$. Tato podmínka je pro hodnoty d a h dané úlohou splněna. Úloha má tedy dvě řešení. Proto existují dvě polohy otvorů umístěné souměrně podle středu výšky h , z nichž voda vystřikuje do dané vzdálenosti d . Pro dané hodnoty vyjde $h'_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 - 30^2}}{2}$ cm, takže $h'_1 = 45$ cm, $h'_2 = 5$ cm.

Do vzdálenosti $d = 30$ cm vystřikuje voda z otvorů, nacházejících se 45 cm nebo 5 cm pod povrchem vody. Obecně jsou tyto hodnoty určeny výrazem (3).

Z podmínky $d \leq h$ plyne, že největší možná vzdále-

nost, ve které může voda dopadat na podložku, je $d' = h = 50$ cm. Pak je $h' = \frac{h}{2} = 25$ cm.

Do největší vzdálenosti $d' = h = 50$ cm může voda vystříkovat z otvorů, které jsou v hloubce $\frac{h}{2} = 25$ cm pod povrchem kapaliny.

3. Stavební materiál o hmotnosti m byl zvedán rumpálem, jehož hřídel má poloměr r , a kladkou. V okamžiku, kdy břemeno dosáhlo výšky h nad zemským povrchem, se zlomila klika rumpálu, břemeno začalo klesat, při pádu roztáčelo kladku i rumpál a dopadlo na zem za dobu t_1 po zlomení kliky.

a) Jak velký byl moment setrvačnosti J rumpálu?

b) Jak velká byla v čase t_1 úhlová rychlost ω a dráhová rychlost v bodů na povrchu hřídele rumpálu?

Vliv otáčení kladky zanedbejte.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 160$ kg, $r = 0,05$ m, $h = 10$ m, $t_1 = 5$ s.

Označení veličin: Tíha materiálu je $G = mg$, kde tíhové zrychlení $g = 10$ m s⁻². Zrychlení padajícího břemene označíme a , úhlové zrychlení otáčivého pohybu rumpálu ε . Při dopadu na zemský povrch má břemeno rychlost v a otáčivý pohyb rumpálu úhlovou rychlost ω .

Řešení: a) Po zlomení kliky rumpálu padalo břemeno z výšky h rovnoměrně zrychleným pohybem, pro který platí vztah $h = \frac{1}{2} a t_1^2$, z něhož určíme zrychlení $a = \frac{2h}{t_1^2}$ posuvného pohybu břemene. Při dopadu na zemský po-

vrch mělo břemeno rychlost $v = at_1 = \frac{2h}{t_1}$. Ze vztahů

$a = r\varepsilon$ a $v = r\omega$ vypočítáme úhlové zrychlení ε a úhlovou rychlost ω otáčivého pohybu rumpálu při dopadu břemene na zem. Pro posuvný pohyb břemene a otáčivý pohyb rumpálu platí tedy vztahy

$$a = \frac{2h}{t_1^2}, \quad v = \frac{2h}{t_1}, \quad \varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2h}{r t_1^2}, \quad \omega = \frac{v}{r} = \frac{2h}{r t_1} \quad (1)$$

Potenciální energie tíhová břemene měla v okamžiku, kdy došlo ke zlomení kliky rumpálu, hodnotu $W_p = mgh$. Během pádu břemene se tato energie měnila v kinetickou energii W_k posuvného pohybu břemene a otáčivého pohybu rumpálu a nabyla při dopadu břemene na zem hodnoty $W_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$. Podle zákona zachování energie platí rovnice

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = mgh,$$

z níž vypočítáme $J = \frac{m}{\omega^2} (2gh - v^2)$, a po dosazení za ω a v ze vztahu (1)

$$J = \frac{2mghr^2t_1^2}{4h^2} - m r^2 = \frac{m r^2}{2h} (g t_1^2 - 2h) \quad (2)$$

Pro dané hodnoty vychází

$$J = \frac{160 \cdot 25 \cdot (10 \cdot 25 - 2 \cdot 10) \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10} \text{ kg m}^2 = 4,6 \text{ kg m}^2$$

Moment setrvačnosti rumpálu byl $4,6 \text{ kg m}^2$. Obecně je určen vztahem (2).

b) Velikost úhlové rychlosti otáčivého pohybu rumpálu a obvodové rychlosti bodů na povrchu hřídele rumpálu jsou určeny vztahy (1). Z nich vycházejí hodnoty: $\omega = \frac{2 \cdot 10}{0,05 \cdot 5} \text{ m m}^{-1} \text{ s}^{-1} = 80 \text{ s}^{-1}$, $v = \frac{2 \cdot 10}{5} \text{ m s}^{-1} = 4 \text{ m s}^{-1}$.

4. Přímoý drát ležící na vodorovné podložce byl upevněn mezi dvě pevné svorky při teplotě drátu t_1 . Teplota prostředí byla t_2 . Pevnost drátu v tahu je σ_p , jeho modul pružnosti v tahu je E a součinitel teplotní délkové roztažnosti α .

a) Přetrhne se drát, než vychladne?

b) Při jaké nejvyšší teplotě smí být drát napjat mezi svorky, aby se nepřetrhl?

Předpokládáme, že zákon pružné deformace platí až do meze pevnosti.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $t_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, $t_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $\sigma_p = 50 \text{ kp mm}^{-2}$, $E = 2,0 \cdot 10^4 \text{ kp mm}^{-2}$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$.

Označení veličin: Délku drátu označíme l , průřez S . Nejvyšší přípustný teplotní rozdíl, při kterém se drát ještě nepřetrhne, budeme značit Δt a nejvyšší teplotu, při které ještě nedojde k přetržení drátu, t_3 .

Řešení: Při chladnutí by se měl drát podle zákona o délkové roztažnosti tuhých těles zkracovat. Relativní zkrácení je určeno vztahem

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha (t_1 - t_2) \quad (1)$$

Protože však je drát upevněn mezi pevné svorky, nemůže dojít k změně jeho délky. Proto se drát současně se

zkracováním, způsobeným jeho chladnutím, prodlužuje o stejnou délku Δl tažnou silou F , způsobenou napínáním drátu při jeho zkracování. Podle Hookeova zákona má relativní prodloužení hodnotu

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} = \frac{1}{E} \sigma \quad (2)$$

Porovnáme-li rovnici (1) s rovnicí (2), vyjde $\frac{1}{E} \sigma = \alpha(t_1 - t_2)$, z které vypočítáme

$$\sigma = \alpha E (t_1 - t_2) \quad (3)$$

a) K přetržení drátu nedojde, jestliže $\sigma \leq \sigma_p$.

Po dosazení daných hodnot do vztahu (3) vyjde $\sigma = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 80 \text{ deg}^{-1} \text{ kp mm}^{-2} \text{ deg} = 1920 \cdot 10^{-2} \text{ kp mm}^2 = 19,2 \text{ kp mm}^2 < 50 \text{ kp mm}^2 = \sigma_p$.

Protože $\sigma < \sigma_p$, drát se při ochlazení z teploty 100°C na 20°C nepřetrhne.

b) Má-li se zvýšit teplota t_1 na takovou teplotu t_3 , aby se při ní drát ještě nepřetrhl, musí platit podle upraveného vztahu (3) rovnice

$$\Delta t = t_3 - t_2 = \frac{\sigma_p}{\alpha E} \quad (4)$$

Dosadíme-li do vztahu (4) dané hodnoty, dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{50}{2 \cdot 10^4 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{kp mm}^2}{\text{deg}^{-1} \text{ kp mm}^2} = \\ &= \frac{50}{24} \cdot 10^2 \text{ }^\circ\text{C} = 208 \text{ }^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Teplotní rozdíl, při kterém ještě nedojde k přetržení drátu, je 208°C . Obecně je určen vztahem (4).

c) Podle vztahu (4) je $t_3 = t_2 + \Delta t = 20\text{ }^\circ\text{C} + 208\text{ }^\circ\text{C} = 228\text{ }^\circ\text{C}$.

Nejvyšší teplota, na kterou smí být ohřát drát, aby se při chladnutí na $20\text{ }^\circ\text{C}$ ještě nepřetrhl, je $228\text{ }^\circ\text{C}$.

13. Řešení úloh kategorie C

PRVNÍ KOLO SOUTĚŽE

1. Protilehlé boční stěny vagónu byly proraženy střelou letící k nim kolmo. K prostřelení došlo za jízdy, při které měl vagón rychlost v . Otvory po střele ve stěnách jsou vzhledem k sobě posunuty o d ve vodorovném směru. Jaká byla rychlost střely uvnitř vagónu

- vzhledem k zemi?
- vzhledem k vagónu?
- Jak dlouho se střela ve vagónu pohybovala?

Šířka vagónu je a .

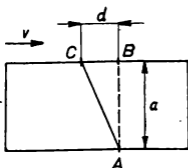
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty

$$v = 40\text{ km h}^{-1}, \quad d = 0,08\text{ m}, \quad a = 2,7\text{ m}.$$

Označení veličin: Dobu, po kterou se střela pohybuje uvnitř vagónu, označíme t , rychlost střely vzhledem k zemi v_1 , vzhledem k vagónu v_2 . Rychlost vagónu je v soustavě

$$\begin{aligned} \text{SI dána hodnotou } v &= 40\text{ km h}^{-1} = \frac{40\,000}{3\,600}\text{ m s}^{-1} = \\ &= \frac{100}{9}\text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

Řešení: Střela dopadla kolmo na přední boční stěnu vagónu a vnikla do vozu v místě A . Kdyby byl vagón



Obr. 41

v klidu, pohybovala by se uvnitř vagónu po dráze $AB = a$ a po době t by opustila vagón v místě B (obr. 41). Protože se však vagón pohybuje rychlostí v ve směru označeném šipkou, posune se do bodu B bod C , který se při dopadu střely na přední boční stěnu nacházel na zadní boční stěně vagónu ve vodorovné vzdálenosti $BC = d$ od bodu B (proti směru jízdy).

Vzdálenost $CB = d$ ujede vagón za dobu t rychlostí v . Platí tedy

$$t = \frac{d}{v} \quad (1)$$

Kdyby se vagón nepohyboval, vykonala by střela dráhu $AB = a$ za dobu t rychlostí v_1 . Rychlost střely vzhledem k zemi má tedy hodnotu

$$v_1 = \frac{a}{t} = \frac{av}{d} \quad (2)$$

Protože se střela pohybuje velikou rychlostí, proniká přední stěnou vagónu jen velmi krátký okamžik. Proto můžeme považovat silové působení přední stěny vagónu na střelu pronikající za pohybu vagónu touto stěnou za zanedbatelně malé.

Za tohoto předpokladu se střela pohybuje vzhledem k vagónu přímočaře od otvoru v bodě A k otvoru v bodě C , tedy po dráze $AC = \sqrt{a^2 + d^2}$, po dobu t rychlostí v_2 . Platí tedy

$$v_2 = \frac{\sqrt{a^2 + d^2}}{t} = \frac{v \sqrt{a^2 + d^2}}{d} \quad (3)$$

Dosadíme-li do vztahů (1), (2) a (3) dané hodnoty, vyjde a) $v_1 = \frac{2,7 \cdot 100}{9 \cdot 0,08} \frac{\text{m m s}^{-1}}{\text{m}} = 375,00 \text{ m s}^{-1}$

Střela se pohybuje vzhledem k zemi rychlostí 375 m s^{-1} . Tato rychlost je obecně určena výrazem (2).

$$\begin{aligned} \text{b) } v_2 &= \frac{100 \cdot \sqrt{2,7^2 + 0,08^2}}{9 \cdot 0,08} \frac{\text{m s}^{-1} \text{ m}}{\text{m}} = \\ &= \frac{100 \cdot 2,701}{0,72} \text{ m s}^{-1} = 375,14 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

Rychlost střely vzhledem k vagónu je obecně určena vztahem (3) a má hodnotu $375,14 \text{ m s}^{-1}$.

$$\text{c) } t = 0,08 \cdot \frac{9}{100} \frac{\text{m s}}{\text{m}} = 0,0072 \text{ s}$$

Střela se ve vagónu pohybovala $0,0072 \text{ s}$. Obecně udává tuto dobu vztah (1).

2. V řece, kde proudí voda po celé šířce stálou rychlostí v , jsou současně uvedeny do pohybu z místa A dva čluny. První se pohybuje ve směru proudu průměrnou rychlostí v_1 vzhledem k proudící vodě po dráze $AB = d$ a pak zpět touž cestou do místa A . Druhý má po přímé dráze doplout do místa C , které je od místa A vzdáleno $AC = AB = d$ ($AC \perp AB$), a touž cestou do místa A . Průměrnou rychlost druhého člunu vzhledem k proudící vodě označíme v_2 . Rychlosti v a v_1 jsou dány.

a) Dokažte, že rychlost v_1 i rychlost v_2 musí být větší než rychlost v , má-li být úloha reálná.

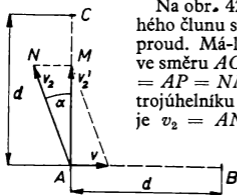
b) Jak velkou průměrnou rychlostí v_2 vzhledem k proudící vodě a jakým směrem se pohybuje druhý člun, vrátí-li se oba do místa A současně?

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $v_1 = 2 \text{ m s}^{-1}$ a $v = 1 \text{ m s}^{-1}$.

c) Dokažte, že rychlost v_1 je vždy větší než v_2 . Při které rychlosti proudu by platilo $v_1 = v_2$?

Označení veličin: Má-li se druhý člun pohybovat po dráze AC , musí konat vlastní pohyb, odchýlený od AC o úhel α směrem proti proudu. Dobu, za kterou vykonají oba čluny předepsanou dráhu, označíme t a výslednou rychlost druhého člunu v_2 .

Řešení: a) Kdyby byla rychlost v stejně veliká jako v_1 , pak by člun doplul do místa B , ale při zpáteční cestě by byl unášen proudem stejnou rychlostí, jakou se pohybuje opačným směrem vlastní rychlostí. Proto by zůstal stát v místě B . Byla-li by rychlost proudu dokonce větší než v_1 , vzdaloval by se člun z místa B ve směru proudu i při zpětné plavbě. Má-li tedy být předepsaná plavba prvního člunu možná, musí platit $v_1 > v$.



Obr. 42

Na obr. 42 je složena rychlost v_2 druhého člunu s rychlostí v , kterou ho unáší proud. Má-li se druhý člun pohybovat ve směru AC , pak rychlost proudu $v = AP = NM$ je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku AMN , jehož přeponou je $v_2 = AN$. Protože přepona pravoúhlého trojúhelníku je větší než odvěsna, musí platit $v_2 > v$.

b) Podle zákonů o skládání dvou stejnosměrných vektorů se pohybuje první člun ve směru AB výslednou rychlostí $v_1 + v$, ve směru BA výslednou rychlostí $v_1 - v$. Celou předepsanou dráhu vykoná tedy za čas

$$t = \frac{d}{v_1 + v} + \frac{d}{v_1 - v} = \frac{2 d v_1}{v_1^2 - v^2}$$

Druhý člun vykoná dráhu AC i dráhu CA za stejnou dobu. Jeho výsledná rychlost má podle Pythagorovy věty velikost $v'_2 = \sqrt{v_2^2 - v^2}$, takže vykoná celou předepsanou dráhu za čas

$$t = \frac{2 d}{v'_2} = \frac{2 d}{\sqrt{v_2^2 - v^2}}$$

Oba čluny vykonají své dráhy za stejný čas. Proto platí

$$\frac{2 d v_1}{v_1^2 - v^2} = \frac{2 d}{\sqrt{v_2^2 - v^2}}$$

Z této rovnice vychází

$$\sqrt{v_2^2 - v^2} = \frac{v_1^2 - v^2}{v_1},$$

takže

$$v_2 = \sqrt{v^2 + \left(v_1 - \frac{v^2}{v_1}\right)^2} \quad (1)$$

Velikost úhlu α určíme z pravoúhlého trojúhelníku AMN , ve kterém platí

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_2} = \frac{v}{\sqrt{v^2 + \left(v_1 - \frac{v^2}{v_1}\right)^2}} \quad (2)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{1 + (2 - 0,5)^2} \text{ m s}^{-1} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} \text{ m s}^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{13} \text{ m s}^{-1} \doteq 1,8 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{1,8} = 0,555 6, \text{ takže } \alpha = 33^\circ 45'$$

Vlastní průměrná rychlost $1,8 \text{ m s}^{-1}$ druhého člunu je odchýlena od směru AC o úhel $33^\circ 45'$ ve směru proti proudu. Obecně jsou tyto hodnoty určeny výrazy (1) a (2).

$$\begin{aligned} \text{c) Vztah (1) lze upravit: } v_2 &= \sqrt{v^2 + v_1^2 - 2v^2 + \frac{v^4}{v_1^2}} = \\ &= \sqrt{v_1^2 - v^2 \left(1 - \frac{v^2}{v_1^2}\right)} \end{aligned}$$

Protože je $v < v_1$, je $\frac{v}{v_1} < 1$ a výraz $v^2 \left(1 - \frac{v^2}{v_1^2}\right)$ je kladný a menší než v_1^2 . Proto je $v_2 < v_1$.

Má-li platit rovnost $v_2 = v_1$, pak má podle vztahu (1) rychlost proudu hodnotu $v = 0$ a podle vztahu (2) je $\alpha = 0^\circ$.

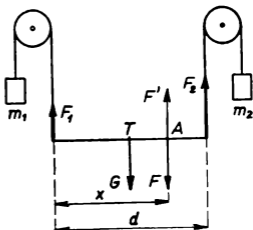
Oba čluny mohou projet svou dráhu stejnou rychlostí za stejnou dobu jen tehdy, jestliže poplují v klidné vodě bez proudu.

3. Stejnorodá tyč o hmotnosti m , délky d , která má na všech místech stejný průřez, je na obou koncích zavěšena na svislých nitích vedených přes kladky a zatížených závažími o hmotnostech m_1 a m_2 . Určete velikost, směr, orientaci a působíště síly, která by udržela v rovnováze soustavu sil působících na tyč.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 1 \text{ m}$, $m = 4 \text{ kg}$, $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$.

Označení veličin: Na tyč zavěšenou na svislých nitích vedených přes pevné kladky působí napjatá vlákna silami $F_1 = m_1 g$ a $F_2 = m_2 g$ na koncích tyče a tíha tyče $G = mg$ ve středu tyče. Vektorové přímky těchto tří sil jsou rovnoběžné, síly F_1 a F_2 jsou orientovány svisle vzhůru (kladně), síla G svisle dolů (záporně). Výslednice

F' sil F_1 , F_2 a G má působiště v jistém bodě A , který má od levého konce tyče (obr. 43) vzdálenost x . Bodem A musí procházet ve svislém směru vektorová přímka síly F , která soustavu sil udrží v rovnováze. Tíhové zrychlení $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$.



Obr. 43

Řešení: Výslednice F' rovnoběžných sil F_1 , F_2 a G je se svými složkami rovnoběžná. Proto musí být se silami F_1 , F_2 a G rovnoběžná i síla $F = -F'$, která udržuje soustavu v rovnováze. Podmínku pro silovou rovnováhu všech uvažovaných sil lze vyjádřit rovnicí

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{G} + \mathbf{F} = 0, \text{ ze které určíme}$$

$$F = -(F_1 + F_2 - G) = -g(m_1 + m_2 - m), \quad (1)$$

neboť síla G má zápornou orientaci.

Dosadíme-li do vztahu (1) dané hodnoty, vyjde

$$F = -(3 + 5 - 4) 10 \text{ kg m s}^{-2} = -40 \text{ N}$$

Bod A , kterým prochází vektorová přímka síly F , musí být působištěm výslednice sil F_1 , F_2 , G . Jeho polohu určíme užitím momentové věty. Volíme-li za vztažný bod A , pak platí

$$-F_1 x + G \left(x - \frac{d}{2} \right) + F_2 (d - x) = 0$$

Z této rovnice určíme

$$x = d \frac{2F_2 - G}{2(F_1 + F_2 - G)} = d \frac{2m_2 - m}{2(m_1 + m_2 - m)} \quad (2)$$

Po dosazení daných hodnot do výrazu (2) vyjde

$$x = \frac{1 \cdot (2 \cdot 5 - 4)}{2 \cdot (3 + 5 - 4)} \frac{\text{m kg}}{\text{kg}} = \frac{3}{4} \text{ m} = 0,75 \text{ m}$$

Síla, která by udržovala danou soustavu sil F_1 , F_2 a G v rovnováze, má velikost 40 N, je orientována svisle dolů ($F < 0$) a působí v bodě A , který je vzdálen 0,75 m od levého konce tyče.

Obecně jsou velikost a orientace této síly určeny vztahem (1), poloha působišť výrazem (2).

4. Automobil, který jel průměrnou rychlostí v_1 , snížil na vodorovném úseku s dráhy rovnoměrně svou rychlost na v_2 .

a) Jak velké bylo zrychlení a automobilu?

b) Jak velká byla brzdicí síla F , jestliže hmotnost automobilu je m ?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_1 = 80 \text{ km h}^{-1}$, $v_2 = 50 \text{ km h}^{-1}$, $s = 100 \text{ m}$, $m = 900 \text{ kg}$.

Označení veličin a dané hodnoty: Průměrnou rychlost automobilu na dráze s označíme v , dobu, za kterou automobil projel dráhu s , označíme Δt . Za tuto dobu se změnila rychlost automobilu z hodnoty v_1 na hodnotu v_2 . Rychlosti v_1 a v_2 mají v soustavě SI hodnoty

$$v_1 = \frac{80 \cdot 10^3}{3\,600} \text{ m s}^{-1} = \frac{200}{9} \text{ m s}^{-1} \text{ a } v_2 = \\ = \frac{50 \cdot 10^3}{3\,600} \text{ m s}^{-1} = \frac{125}{9} \text{ m s}^{-1}$$

Řešení: a) Protože rychlost automobilu se při brzdění zmenšovala rovnoměrně, byl jeho pohyb po dráze s rovnoměrně zpomalený a průměrná rychlost měla hodnotu $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$; proto trval pohyb automobilu dobu

$$\Delta t = \frac{s}{v} = \frac{2s}{v_1 + v_2}$$

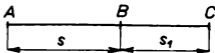
Zrychlení vypočítáme ze vztahu

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = - \frac{(v_1 - v_2)(v_1 + v_2)}{2s} \quad (1)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$a = - \frac{75 \cdot 325}{81 \cdot 2 \cdot 100} \text{ m s}^{-2} = - 1,5 \text{ m s}^{-2}$$

Zrychlení automobilu na dráze s můžeme určit ještě jiným způsobem. Automobil se pohybuje (obr. 44) v místě A rychlostí v_1 , v místě B rychlostí v_2 . Předpokládejme, že by se pohyboval po projetí dráhy $AB = s$ dále pohybem rovnoměrně zpomaleným, až by se po projetí dráhy s_1 zastavil za dobu t_1 v místě C , které je od místa B



Obr. 44

vzdáleno $BC = s_1$. Kdybychom tento pohyb nafilmovali a film promítali od jeho konce k počátku stejnou rychlostí, jak byl snímán, jevil by se nám nafilmovaný pohyb automobilu jako pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychle-

ním a' . Pro tento rovnoměrně zrychlený pohyb by platily vztahy $v_2 = a' t_1$ a $v_1 = a'(t_1 + \Delta t)$, z nichž vychází

$$t_1 = \frac{v_2}{a'} \text{ a } t_1 + \Delta t = \frac{v_1}{a'}. \text{ Zároveň by platilo}$$

$$s_1 = \frac{a'}{2} t_1^2 \text{ a } s_1 + s = \frac{a'}{2} (t_1 + \Delta t)^2$$

Z posledních dvou rovnic vyjde po dosazení za t_1 a $(t_1 + \Delta t)$

$$s = \frac{a'}{2} \left(\frac{v_1^2}{a'^2} - \frac{v_2^2}{a'^2} \right) = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2a'} \text{ a } a' = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2s}$$

Zrychlení a' má orientaci souhlasnou se směrem rychlosti, kterým se na zpětně promítaném filmu pohybuje obrázek auta, při skutečném pohybu auta je zrychlení a orientováno proti vektoru rychlosti auta. Proto je

$$a = -a' = -\frac{v_1^2 - v_2^2}{2s},$$

což souhlasí se vztahem (1).

Automobil se pohyboval rovnoměrně zpomaleným pohybem se zrychlením $-1,5 \text{ m s}^{-2}$. Obecně je toto zrychlení určeno vztahem (1).

b) Velikost brzdicí síly F určíme ze vztahu $F = m|a|$, takže

$$F = \frac{m}{2s} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{m}{2s} (v_1 + v_2) (v_1 - v_2) \quad (2)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$F = \frac{900}{2 \cdot 100} \frac{75}{9} \cdot \frac{325}{9} \text{ kg m}^{-1} \text{ m s}^{-1} \text{ m s}^{-1} \doteq 1\,354 \text{ N}$$

Velikost brzdicí síly je určena vztahem (2). Za daných podmínek vyjde $1\,354 \text{ N}$.

5. Cyklista projede kolem stojícího automobilu rychlostí v_1 . Když je od auta vzdálen o délku d , rozjede se automobil za cyklistou se zrychlením a .

a) Za jakou dobu dohoní automobil cyklistu?

b) Jak dlouhou dráhu automobil projede, než cyklistu dohoní?

c) Jak velkou rychlost má automobil, když předjíždí cyklistu?

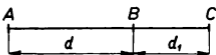
d) Určete kinetickou energii cyklisty vzhledem k automobilu v okamžiku prvního i druhého setkání, je-li hmotnost cyklisty i s kolem m .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_1 = 10,8 \text{ km h}^{-1}$, $d = 108 \text{ m}$, $a = 2 \text{ m s}^{-2}$, $m = 80 \text{ kg}$.

Označení veličin a dané hodnoty: Automobil dohoní cyklistu za dobu t_1 od okamžiku, kdy se automobil začal rozjíždět. Za tuto dobu vykoná cyklista dráhu $d_1^c = v_1 t_1$, automobil dráhu $s = d + d_1 = d + v_1 t_1$. Rychlost automobilu označíme obecně v' . V okamžiku, kdy cyklista předjíždí automobil, je $v'_1 = 0$, při dosažení cyklisty je $v'_2 = at_1$. Kinetická energie cyklisty vzhledem k automobilu má hodnotu W v okamžiku, kdy cyklista předjíždí automobil, a W' v okamžiku, kdy automobil předjíždí cyklistu. V soustavě SI má rychlost v_1 hodnotu

$$v_1 = \frac{10,8 \cdot 10^3}{3\,600} \text{ m s}^{-1} = 3 \text{ m s}^{-1}$$

Řešení: a) Cyklista se pohybuje pohybem rovnoměrným rychlostí v_1 . Za dobu t_1 vykoná dráhu $BC = v_1 t_1$ (obr. 45), takže v okamžiku, kdy ho předhání automobil, je vzdálen od místa A , kde předháněl stojící auto, o



Obr. 45

$$s = AC = d + d_1 = d + v_1 t_1 \quad (1)$$

Auto koná rovnoměrně zrychlený pohyb a urazí dráhu $AC = d + d_1$ za dobu t_1 . Proto platí

$$s = d + d_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 \quad (2)$$

Porovnáme-li rovnice (1) a (2), vyjde po úpravě kvadratická rovnice

$$\frac{1}{2} a t_1^2 - v_1 t_1 - d = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$t_{1,2} = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2ad}}{a}$$

Protože $\sqrt{v_1^2 + 2ad} > v_1$, není kořen $t_2 < 0$ fyzikálně možný. Úloze vyhovuje jen kořen

$$t_1 = \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2ad}}{a} \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$t_1 = \frac{3 + \sqrt{9 + 2 \cdot 2 \cdot 108}}{2} \text{ m s}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ s}^2 = 12 \text{ s}$$

Automobil dohoní cyklistu za 12 s. Tato doba je obecně určena vztahem (3).

b) Než automobil dohoní cyklistu, projede dráhu určenou vztahem (1) nebo vztahem (2). Po dosazení daných hodnot vyjde $s = 144 \text{ m}$.

c) V okamžiku, kdy automobil předjíždí cyklistu, má rychlost

$$v' = at_1 = v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2ad} = 24 \text{ m s}^{-1}$$

d) Vzájemná rychlost cyklisty vzhledem k automobilu je určena rovnicí $v = v_1 - v'$, kde v' značí obecně rych-

lost automobilu. V místě A je $v' = 0$, a proto $v = v_1$, v místě C je $v' = at_1$ a $v = v_1 - at_1 = -\sqrt{v_1^2 + 2ad}$.

Kinetická energie cyklisty vzhledem k automobilu má tedy v místě A hodnotu

$$W = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_1^2, \quad (4)$$

a v místě C

$$W' = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (-\sqrt{v_1^2 + 2ad})^2,$$

takže

$$W' = \frac{1}{2} m v_1^2 + m a d = m \left(\frac{1}{2} v_1^2 + a d \right) \quad (5)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$W = \frac{1}{2} 80 \cdot 9 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 360 \text{ J},$$

$$W' = 360 \text{ J} + 80 \cdot 2 \cdot 108 \text{ kg m s}^{-2} \text{ m} = 17\,640 \text{ J}$$

Kinetická energie cyklisty vzhledem k automobilu je v okamžiku prvního setkání obecně určena vztahem (4) a má pro dané veličiny hodnotu 360 J, v okamžiku druhého setkání má hodnotu 17 640 J a je obecně určena vztahem (5).

6. Určete závislost dráhy pohybu po nakloněné rovině na čase.

Pomůcky: Nakloněná rovina asi 2 m dlouhá, hladká kovová kulička, záložka na zastavení kuličky, stopky, podložka nebo stojan na upevnění nakloněné roviny.

Návod: Ze vzorce pro dráhu s pohybu rovnoměrně zrychleného $s = \frac{1}{2} a t^2$ určíme zrychlení

$$a = \frac{2s}{t^2}, \quad (1)$$

kde t značí čas, za který těleso vykoná dráhu s .

Jestliže tedy zjistíme měřením, že pro dráhu kuličky na nakloněné rovině platí vztah (1), je tento pohyb rovnoměrně zrychlený.

Měření: 1. Výšku nakloněné roviny volte tak, aby kulička vykonala dráhu po celé délce nakloněné roviny asi za 5 s.

2. Nastavujte na nakloněné rovině zarážku postupně ve vzdálenostech $s = 10$ cm, 40 cm, 90 cm a 160 cm a měřte vždy čas, který kulička potřebuje k vykonání zvolené dráhy. Každé měření opakujte čtyřikrát a vypočítejte průměrné hodnoty naměřených časů.

Výsledky měření a výpočtů запиšte do tabulky.

3. Porovnejte hodnoty ve sloupci 5 se vztahem (1) a určete velikost zrychlení a pohybu po nakloněné rovině jako aritmetický průměr všech hodnot ze sloupce 5 tabulky.

Je pohyb po nakloněné rovině pohybem rovnoměrně zrychleným? Odůvodněte.

4. Sestrojte na milimetrovém papíře graf závislosti dráhy (s) na druhé mocnině času (t^2) použitím sloupců 1 a 4 tabulky a ověřte, zda graf vyjadřuje přímou úměrnost těchto veličin.

5. Sestrojte na milimetrovém papíře graf závislosti dráhy s na čase s použitím sloupců 1 a 3 tabulky.

6. Vypočítejte dráhu, kterou vykoná kulička za 3 s. Výsledek výpočtu ověřte z grafu i pokusem.

7. Určete z grafu přibližně čas, za který kulička vykoná po nakloněné rovině dráhu $s = 1,2$ m. Výsledek ověřte pokusem i výpočtem.

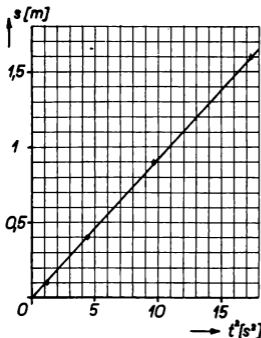
Řešení: 1. a 2. Příslušná měření jsme provedli podle pokynů v návodu a jejich výsledky i výsledky výpočtů jsou zaznamenány v tabulce:

Sloupec: 1	2				3	4	5
Dráha s [m]	Čas t [s]				Aritmetický průměr t [s]	t^2 [s ²]	$\frac{2s}{t^2}$ [m s ⁻²]
	1	2	3	4			
0,10	1,1	1,0	0,9	1,2	1,05	1,10	0,182
0,40	2,2	2,0	2,2	2,1	2,12	4,49	0,178
0,90	3,0	3,3	3,2	3,1	3,15	9,73	0,185
1,60	4,2	4,2	4,1	4,2	4,17	17,39	0,184

3. Z hodnot v pátém sloupci tabulky vychází průměrná hodnota zrychlení $a = 0,182$ m s⁻². Největší absolutní odchylku 0,004 m s⁻² od aritmetického průměru má naměřená hodnota v druhém řádku tabulky. Relativní odchylka příslušná této největší absolutní odchylce je $\frac{0,004}{0,182} = 0,022$, tj. 2,2 %. Proto můžeme pokládat zrychlení a za konstantní.

Měřením bylo tedy dokázáno, že pohyb po nakloněné rovině je rovnoměrně zrychlený.

4. Závislost dráhy na druhé mocnině času s použitím hodnot ze sloupců 1 a 4 tabulky zobrazuje graf (obr. 46).



Obr. 46

Z jeho průběhu je patrné, že dráha pohybu po nakloněné rovině je přímo úměrná druhé mocnině času.

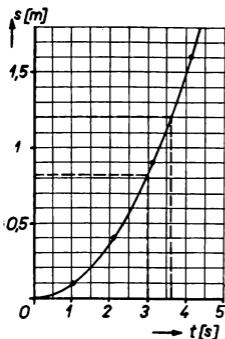
5. Graf ukazující závislost dráhy na čase sestavený s použitím hodnot ze sloupců 1 a 3 je na obr. 47.

6. Podle vzorce $s = \frac{1}{2} a t^2$ vykoná kulička

na nakloněné rovině za dobu $t = 3$ s dráhu $s = 0,091 \cdot 9 \text{ m} \doteq 0,82 \text{ m}$. Pokus i graf ověřuje, že tato hodnota je správná.

7. Z grafu vychází, že kulička vykoná na nakloněné rovině dráhu $s = 1,2 \text{ m}$ přibližně za dobu $t = 3,6$ s. Výpočtem vychází pro dobu t hodnota $t = 3,63$ s.

7. Hranol o hmotnosti m sklouzne po nakloněné rovině délky d a výšky h za dobu t .

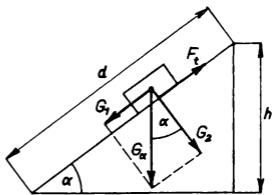


Obr. 47

- a) Určete velikost součinitele f smykového tření.
 b) Jak velká je potenciální energie tíhová tělesa v nejvyšším místě nakloněné roviny vzhledem k základně?
 c) Jak velká je kinetická energie tělesa při přechodu tělesa na vodorovnou rovinu?
 d) Jak velká práce se vykoná působením třecí síly na hranol po délce d ?
 e) Vysvětlete, proč při uvažovaném pohybu tělesa neplatí zákon zachování mechanické energie.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 0,5$ kg, $d = 2,5$ m, $h = 1,5$ m, $t = 2,0$ s.

Označení veličin: Úhel nakloněné roviny označíme α , zrychlení pohybu po nakloněné rovině a , tíhové zrychlení $g \doteq 10$ m s⁻², tíhu G , složku tíhy ve směru nakloněné roviny G_1 , složku tíhy kolmou k nakloněné rovině G_2 , sílu působící pohyb po nakloněné rovině F , třecí sílu F_t a A práci, kterou hranol vykoná při pádu po nakloněné rovině (obr. 48).



Obr. 48

Řešení: a) Síla F působící pohyb po nakloněné rovině je výslednicí složky G_1 tíhy hranolu a třecí síly F_t . Tyto dvě síly mají při pohybu hranolu po nakloněné rovině dolů stejný směr, ale opačnou orientaci. Proto platí

$$F = m g \sin \alpha - f m g \cos \alpha = \frac{m g h}{d} - f m g \frac{\sqrt{d^2 - h^2}}{d} =$$

$$= \frac{mg}{d} (h - f \sqrt{d^2 - h^2}) \text{ a}$$

$$a = \frac{g}{d} (h - f \sqrt{d^2 - h^2}) \quad (1)$$

Ze vztahu (1) je patrné, že zrychlení a má konstantní hodnotu. Hranol se tedy pohybuje po nakloněné rovině pohybem rovnoměrně zrychleným. Z rovnice $d = \frac{1}{2} a t^2$ určíme jeho zrychlení $a = \frac{2d}{t^2}$, takže síla $F = \frac{2md}{t^2}$.

Po porovnání této rovnice s rovnicí (1) dostaneme $\frac{2d}{t^2} =$

$$= \frac{g}{d} (h - f \sqrt{d^2 - h^2}) \text{ a}$$

$$f = \frac{\left(\frac{gh}{d} - \frac{2d}{t^2}\right) d}{g \sqrt{d^2 - h^2}} = \frac{gh - \frac{2d^2}{t^2}}{g \sqrt{d^2 - h^2}} =$$

$$= \frac{gh t^2 - 2d^2}{g t^2 \sqrt{d^2 - h^2}} \quad (2)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$f = \frac{10 \cdot 1,5 \cdot 4 - 2 \cdot 6,25}{10 \cdot 4 \sqrt{6,25 - 2,25}} = \frac{m^2}{m \sqrt{m^2}} = \frac{19}{32}$$

Součinitel smykového tření hranolu na nakloněné rovině má hodnotu $\frac{19}{32}$, obecně je určen vztahem (2).

b) Potenciální energie tíhová v nejvyšší poloze hranolu vzhledem k základně je určena výrazem

$$W_p = mgh \quad (3)$$

Pro dané hodnoty je $W_p = 0,5 \cdot 10 \cdot 1,5 \text{ kg m s}^{-2} \text{ m} = 7,5 \text{ J}$.

c) Kinetická energie hranolu má při dopadu hranolu na vodorovnou rovinu hodnotu

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m a^2 t^2 = m a d = \frac{2 m d^2}{t^2} \quad (4)$$

Pro dané hodnoty je $W_k = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 6,25}{4} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = 1,56 \text{ J}$

Hledané energie jsou určeny vztahy (3) a (4), hodnota potenciální energie tíhové hranolu v nejvyšší poloze je 7,5 J, kinetická při dopadu na vodorovnou rovinu 1,56 J.

d) Při pohybu po nakloněné rovině koná hranol práci, neboť překonává po dráze d třecí sílu $F_t = fmg \cos \alpha$. Dosadíme-li za $\cos \alpha = \frac{\sqrt{d^2 - h^2}}{d}$ a za f z výrazu (2), vyjde

$$F_t = \frac{g h t^2 - 2 d^2}{g t^2 \sqrt{d^2 - h^2}} m g \frac{\sqrt{d^2 - h^2}}{d} = m \frac{g h t^2 - 2 d^2}{d t^2}$$

Práce má velikost

$$A = F_t d = m \left(g h - \frac{2 d^2}{t^2} \right) \quad (5)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$A = 0,5 \left(10 \cdot 1,5 - \frac{2 \cdot 6,25}{4} \right) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 5,94 \text{ J}$$

e) Potenciální energie tíhová se při pohybu hranolu změnila z hodnoty W_p na nulu, kinetická vzrostla z nuly na W_k . Rozdíl těchto energií se změnil v rovnomocnou práci A , kterou vykonal hranol při překonávání třecí síly,

takže musí platit rovnost $W_p - W_k = A$, má-li být řešení úlohy v částech b), c), d) a e) správné.

$$W_p - W_k = m g h - \frac{2 m d^2}{t^2} = m \left(g h - \frac{2 d^2}{t^2} \right) = A,$$

což se mělo dokázat.

8. a) Výtah stoupá se zrychlením a . Jakou tlakovou silou působí na podlahu výtahu (tj. kolik „váží“) člověk, jehož hmotnost je m_1 ?

b) Kolik „váží“ člověk, klesá-li výtah se zrychlením a ?

c) Kolik „váží“ člověk, stoupá-li výtah stálou rychlostí v ?

d) Kolik by „vážil“ člověk, kdyby výtah padal volným pádem?

e) Raketa s kosmickou lodí o hmotnosti m_2 stoupá svisle vzhůru. Tažná síla motorů je F . Jak velké je zrychlení rakety?

f) Kolik „váží“ kosmonaut v lodi za podmínek uvedených v e), je-li jeho hmotnost m_1 ?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $a = 5 \text{ m s}^{-2}$, $m_1 = 60 \text{ kg}$, $v = 10 \text{ m s}^{-1}$, $m_2 = 10^6 \text{ kg}$, $F = 3 \cdot 10^7 \text{ N}$. Tíhové zrychlení $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$.

Označení veličin: Složky síly působící pohyb těles vyznačíme F , hledané velikosti sil v částech a), b), c), d), e) a f) úlohy budeme značit po řadě $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$. Zrychlení rakety v části e) úlohy označíme a_1 .

Řešení: Působí-li na tyč (nebo na jiné těleso) ve směru její podélné osy dvě opačně orientované síly F_1 a F_2 ($F_1 > F_2$), pak obě tyto síly buď tyč prodlužují, nebo ji zkracují; obě mají tedy deformační účinky stejného druhu. Proto je tyč jejich působením napínána celkovou silou

$F_1 + F_2$. Výslednice F' obou těchto sil je však rovna jejich rozdílu, takže tyči uděluje zrychlení síla $F' = F_1 - F_2$.

Jsou-li obě síly souhlasně orientovány, pak mají deformační účinky různého druhu, neboť jedna z nich tyč prodlužuje, druhá zkracuje. Proto je tyč napínána celkovou silou $F_1 - F_2$. Pohybový účinek na tyč má však výslednice obou těchto sil; proto tyči uděluje zrychlení síla $F' = F_1 + F_2$.

a) Rovnoměrně zrychlený pohyb člověka o hmotnosti m_1 ve výtahu stoupajícím se zrychlením a působí síla $F = m_1 a$. Zároveň se silou F působí však na člověka jeho vlastní tíha $m_1 g$ opačně orientovaná než síla F . Proto má celková tlaková síla, kterou působí podlaha výtahu na člověka, velikost

$$F_1 = m_1 g + m_1 a = m_1 (g + a) = 60(10 + 5) \text{ kg m s}^{-2} = 900 \text{ N} \quad (1)$$

b) Klesá-li výtah se zrychlením a , má síla $F = m_1 a$ stejnou orientaci s tíhou $m_1 g$ člověka. Proto tlačí člověk na podlahu výtahu silou

$$F_2 = m_1 (g - a) = 60(10 - 5) \text{ N} = 300 \text{ N} \quad (2)$$

c) Stoupá-li výtah stálou rychlostí v , je zrychlení pohybu výtahu $a = 0$, takže síla působící zrychlení je $F = 0$. Proto člověk tlačí na podlahu výtahu silou

$$F_3 = m_1 g = 60 \cdot 10 = 600 \text{ N} \quad (3)$$

d) Pohybuje-li se člověk ve výtahu volným pádem, je případ obdobný úloze v části b). Síla působící volný pád člověka $F = m_1 g$, takže

$$F_4 = m_1 g - m_1 g = 0, \quad (4)$$

což je zřejmé přímo z názoru.

e) Tažná síla F motorů rakety udržuje rovnováhu s tíhovou silou $m_2 g$ rakety a kosmické lodi a zároveň silou F_5

uděluje raketě zrychlení a_1 . Proto platí $F_5 = F - m_2 g$. Síla F_5 má velikost $F_5 = m_2 a_1$. Je tedy

$$a_1 = \frac{F - m_2 g}{m_2} = \frac{3 \cdot 10^7 - 10^6 \cdot 10}{10^6} \text{ kg m s}^{-2} \text{ kg}^{-1} = \\ = \frac{2 \cdot 10^7}{10^6} \text{ m s}^{-2} = 20 \text{ m s}^{-2} \quad (5)$$

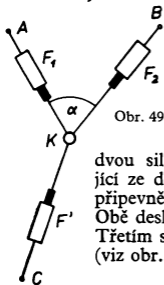
f) Obdobně jako v části a) úlohy vypočítáme tlakovou sílu F_6 , kterou kosmonaut působí na stěny lodi.

$$F_6 = m_1(g + a_1) = 60(10 + 20) \text{ kg m s}^{-2} = 1\,800 \text{ N} \quad (6)$$

Hledané velikosti sil v částech a), b), c), d), e) a f) úlohy jsou určeny výrazy (1), (2), (3), (4) a (6), zrychlení rakety v odst. e) úlohy vztahem (5).

9. Skládání různoběžných sil

Pomůcky: Tři siloměry do 100 p, tři dřevěné destičky s vyčnívajícím hřebíkem, tři svěráky k upevnění destiček, těžké závaží k upevnění destičky, malý pevný kovový kroužek K , tmavá nit, úhломěr, listy čistého papíru.



Úkol: 1. Určete pokusem i graficky výslednici dvou různoběžných sil $F_1 = 40 \text{ p}$ a $F_2 = 30 \text{ p}$.

2. Zjistěte, jak závisí velikost F výslednice sil F_1 a F_2 na úhlu α , který tyto síly svírají.

Provedení: a) Kroužky A , B dvou siloměrů nasadte na hřebíky vyčnívající ze dvou destiček a druhé konce siloměrů připevněte nitěmi ke kovovému kroužku K . Obě desky upevněte svěráky k okraji stolu. Třetím siloměrem připojeným ke kroužku K (viz obr. 49) napínejte nitě tak, aby první dva

siloměry stále ukazovaly síly $F_1 = 40$ p a $F_2 = 30$ p. Při vhodné poloze třetího siloměru nasadte jeho kroužek na hřebík třetí destičky, kterou buď upevníte třetím svěrákem ke stolu, nebo ji zatížíte závažím tak, aby se po stole neposouvala. Na stupnici třetího siloměru odečtete sílu F' napínající jeho pružinu. Síly F_1 , F_2 a F' mají společné působíště ve středu kroužku K . Je síla F' výslednicí sil F_1 a F_2 ?

Položte na stůl pod nitě list čistého papíru a vyznačte na něm tužkou dvěma body směry sil F_1 , F_2 a F' . Ve vyznačených směrech tyto síly narýsujte v měřítku $1 \text{ cm} \hat{=} 10 \text{ p}$.

Sestrojte graficky výslednici F sil F_1 a F_2 a změřte úhel α , který svírají vektorové přímky sil F_1 a F_2 . Z grafu určete velikost výslednice.

Naměřené hodnoty α , F' a F zaznamenejte do tabulky.

V jakém vztahu jsou velikosti a směry sil F' a F ?

b) Měření popsané v části a) proveďte pro 10 různých úhlů v intervalu $0^\circ < \alpha \leq 180^\circ$.

c) Z hodnot zaznamenaných v tabulce sestrojte na milimetrovém papíře graf udávající závislost výslednice F sil F_1 a F_2 na velikosti úhlu α .

d) Z grafu znázorňujícího závislost síly F na velikosti úhlu α určete, jak veliký úhel svírají síly F_1 a F_2 , má-li výslednice velikost $F = 60$ p. Správnost ověřte sestrojením rovnoběžníku sil.

e) Z grafu udávajícího závislost síly F na úhlu α určete, jak velká je výslednice F , svírají-li směry sil F_1 a F_2 úhel $\alpha = 90^\circ$. Správnost ověřte sestrojením rovnoběžníku sil i výpočtem.

Řešení: 1. a 2a), 2b): Při řešení úlohy bylo postupováno podle návodu uvedeného v textu úlohy. Síla F' je

síla, která je v rovnováze se silami F_1 a F_2 . Má tedy stejnou vektorovou přímku a stejnou velikost jako výslednice F sil F_1 a F_2 , je však opačně orientována. Proto k ní budeme přisuzovat znaménko minus.

Velikost síly F' byla měřena pro 10 úhlů v intervalu $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Výsledky měření jsou zaznamenány v tabulce, která byla ještě doplněna hodnotami F' příslušným úhlům $\alpha = 0^\circ$ a $\alpha = 180^\circ$.

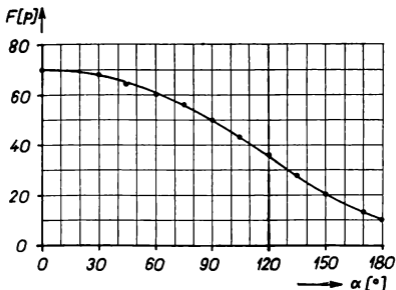
Tabulka

$\alpha[^\circ]$	0	30	45	60	75	90	105	120	135	150	170	180
$F'[\text{p}]$	-70	-68	-64	-60	-56	-50	-43	-36	-28	-20	-13	-10
$F[\text{p}]$	70	68	64	60	56	50	43	36	28	20	13	10

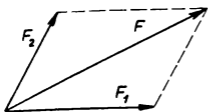
c) Graf zobrazující závislost velikosti výslednice F sil F_1 a F_2 na velikosti úhlu, který spolu svírají jejich vektorové přímky, je na obr. 50. Byl sestaven s použitím hodnot uvedených v tabulce.

d) Má-li výslednice sil F_1 a F_2 velikost $F = 60$ p, svírají spolu podle grafu 50 i podle tabulky vektory sil F_1 a F_2 úhel $\alpha = 60^\circ$. Potvrdí to také konstrukce rovnoběžníku sil (obr. 51).

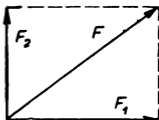
e) Z grafu (obr. 50) je patrné, že výslednice sil $F_1 = 40$ p a $F_2 = 30$ p, které spolu svírají úhel $\alpha = 90^\circ$, má velikost $F = 50$ p. Stejná hodnota vychází také z rovnoběžníku sil (obr. 52). Potvrdí to také výpočet, neboť podle Pythagorovy věty je $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{1600 + 900}$ p = 50 p.



Obr. 50



Obr. 51



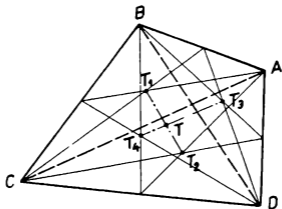
Obr. 52

DRUHÉ KOLO SOUTĚŽE

1. Najděte polohu těžiště desky z homogenního materiálu, tvaru obecného čtyřúhelníku, která má tloušťku d .

Označení veličin: Těžiště T desky se nachází v rovině σ , která půlí hrany d desky a je k nim kolmá. Řez této roviny s deskou je čtyřúhelník $ABCD$.

Řešení: Rozdělíme čtyřúhelníkovou desku řezem vedeným kolmo k rovině σ úhlopříčkou AC na dvě trojúhelníkové desky ABC a ADC a sestrojíme těžiště T_1 a T_2 těchto trojúhelníkových desek jako průsečíky jejich těžnic (obr. 53).



Obr. 53

Protože těžiště soustavy dvou těles leží na přímce procházející těžišti těchto těles, leží těžiště čtyřúhelníkové desky na přímce T_1, T_2 , která je její těžnicí.

Druhou těžnici čtyřúhelníkové desky najdeme obdobně jako těžnici T_1, T_2 , jestliže desku rozdělíme řezem vedeným kolmo k rovině σ úhlopříčkou DB na dvě trojúhelníkové desky DBA a DBC . Je jí přímka procházející těžišti T_3 a T_4 těchto trojúhelníkových desek.

V průsečíku těžnic T_1T_2 a T_3T_4 je těžiště T čtyřúhelníkové desky.

2. Závaží připevněné k svislé ose otáčení nití délky l se otáčí ve vodorovné rovině na odstředivém stroji. Při frekvenci f se nit přetrhne.

S jakým zrychlením je nutno zvedat totéž závaží zavěšené na niti téhož druhu svisle vzhůru, aby se nit přetrhla?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $l = 0,25 \text{ m}$,
 $f = \frac{14}{11} \text{ s}^{-1}$, $\pi \doteq \frac{22}{7}$.

Označení veličin: Hmotnost tělesa označíme m , sílu napínající nit v okamžiku přetržení niti F , hledané zrychlení a , tíhové zrychlení $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení: Při otáčení závaží na odstředivém stroji je nit napínána odstředivou silou, kterou působí rotující závaží na osu otáčení. V okamžiku, kdy se nit přetrhne, má tato síla velikost

$$F = 4\pi^2 f^2 l m \quad (1)$$

Zvedáme-li závaží svisle vzhůru v tíhovém poli zemském, je nit napínána jednak tíhou závaží, jednak silou, která uděluje závaží zrychlení a ve směru svislém vzhůru. V okamžiku přetržení nitě má celková síla napínající nit velikost

$$F = mg + ma = m(g + a) \quad (2)$$

Porovnáme-li vztahy (1) a (2), dostaneme rovnici $g + a = 4\pi^2 f^2 l$, takže

$$a = 4\pi^2 f^2 l - g \quad (3)$$

Dosadíme-li do vztahu (3) dané hodnoty, vyjde

$$a = 4 \left(\frac{22}{7} \cdot \frac{14}{11} \right)^2 \cdot 0,25 \text{ m s}^{-2} - 10 \text{ m s}^{-2} = 6 \text{ m s}^{-2}$$

Má-li se při zvedání závaží přetrhnout nit, musí se závaží zvedat svisle vzhůru se zrychlením 6 m s^{-2} . Obecně je toto zrychlení určeno výrazem (3).

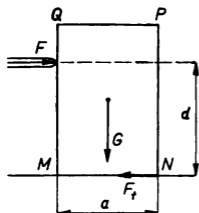
3. Na vodorovné desce spočívá kvádr. Vodorovnou tyčinkou tlačíme kolmo na svislou stěnu kvádru v její svislé střední příčce.

Jakou největší možnou vzdálenost d od vodorovné desky smí mít tyčinka, má-li se jejím tlakem kvádr pouze posouvat, nikoli však odklápět?

Hrana kvádru rovnoběžná s tyčinkou je a , součinitel smykového tření mezi kvádrem a deskou je f .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $a = 18$ cm, $f = 0,3$.

Označení veličin: Na obr. 54 značí obdélník MNPQ řez, kolmý ke svislé stěně kvádru, vedený její svislou



Obr. 54

střední příčkou, v němž tlačíme na boční stěnu kvádru silou F . Vektorová přímka této síly leží v rovině středního řezu a je kolmá k jeho hraně MQ . Tíhová síla G působí v těžišti T svisle dolů, třecí síla F_t v podstatě kvádru směrem naznačeným na obr. 54. Má-li se kvádr po podložce posouvat, musí být síla F větší nebo rovna síle F_t . Platí tedy nerovnost $F \geq F_t$.

Řešení: Nemá-li se kvádr při posouvání po vodorovné desce odklápět, nesmí se jeho těžiště zvedat, a proto je jeho potenciální energie tíhová během pohybu stálá. Síla F vykonává tedy při posouvání kvádru po dráze s práci $A = Fs$, které je potřeba na překonání třecí síly. Proto platí $Fs = F_t s$, takže

$$F = F_t = fG \quad (1)$$

Při odklápění by se kvádr otáčel okolo osy o procházející bodem N kolmo k nákresně. Přitom na něj působí jednak síla $F = fG$, která má vzhledem k ose o moment $M_1 = -Fd = -fGd$, jednak tíha G kvádrů momentem $M_2 = \frac{Ga}{2}$. Moment třecí síly vzhledem k ose o je $M_3 = 0$.

Nemá-li se kvádr odklápět, musí platit $M_2 \geq |M_1|$, tj. $\frac{Ga}{2} \geq fGd$, takže

$$d \leq \frac{a}{2f} = \frac{18}{2 \cdot 0,3} \text{ cm} = 30 \text{ cm} \quad (2)$$

Tyčinka nesmí překročit vzdálenost určenou vztahem (2).

4. Sovětská družice Sputnik III měla hmotnost m_s . Pohybovala se po eliptické dráze, jejíž velká poloosa měla hodnotu a a výstřednost hodnotu e .

a) Jak vysoko se nacházel Sputnik III nad povrchem zemským v perigeu a v apogeu?

b) Určete poměr jeho největší a nejmenší rychlosti.

c) Dokažte, že vzhledem k zemskému povrchu má mechanická energie družice ve všech bodech dráhy konstantní hodnotu $W = \kappa m m_s \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2a} \right)$, kde κ značí

Newtonovu gravitační konstantu, m hmotnost země a R její poloměr. Určete velikost této energie.

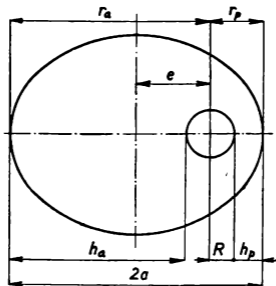
d) Změnila by se velikost této energie, kdyby se při konstantní velikosti velké poloosy změnila výstřednost eliptické dráhy družice?

e) Jakou vzdálenost nad zemským povrchem by měl Sputnik III, kdyby se pohyboval rovnoměrným pohybem

po kružnici? Jakou rychlostí by se po kruhové dráze pohyboval a jakou by měl při tomto pohybu celkovou mechanickou energii?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $a = 7\,431,5$ km, $e = 827,5$ km, $m_s = 1\,327$ kg.

Označení veličin a dané hodnoty: Výšku družice nad zemským povrchem označíme v perigeu h_p , v apogeu h_a , její vzdálenost od zemského středu budeme značit obecně r , v perigeu r_p a v apogeu r_a . Rychlost družice označíme obecně v , v perigeu v_p , v apogeu v_a , při rovnoměrném pohybu po kružnici v_k . Poloměr zemský $R = 6\,378$ km, $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $m = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg.



Obr. 55

Řešení: a) Z obrázku 55 je patrné, že $h_p + R = a - e = r_p$; $h_a + R = a + e = r_a$, takže

$$h_p = a - e - R, \quad h_a = a + e - R \quad (1)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$h_p = 226 \text{ km}, \quad h_a = 1\,881 \text{ km}$$

Výška Sputniku III nad zemským povrchem je obecně určena v perigeu a apogeu vztahem (1). Hodnoty těchto výšek jsou v perigeu 226 km, v apogeu 1 881 km.

b) Podle vztahu

$$v = \sqrt{\kappa m \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}, \quad (2)$$

který je odvozen ve studijním textu pro kategorii C jako vztah (11), má rychlost družice v perigeu hodnotu

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\kappa m \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} = \\ &= \sqrt{\kappa m \left(\frac{2}{a-e} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\kappa m \frac{a+e}{a(a-e)}} \end{aligned}$$

Obdobně určíme rychlost v apogeu $v_a =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\kappa m \frac{a-e}{a(a+e)}}. \text{ Poměr } \frac{v_p}{v_a} \text{ je} \\ \frac{v_p}{v_a} &= \sqrt{\frac{a+e}{a-e}} \end{aligned} \quad (3)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde $\frac{v_p}{v_a} = \sqrt{\frac{8\,259}{6\,604}} \doteq \doteq \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1,118$.

Poměr $\frac{v_p}{v_a}$ je obecně určen vztahem (3); má hodnotu 1,118.

c) Kinetická energie oběžnice má hodnotu $W_k = \frac{1}{2} m_s v^2 = \frac{1}{2} \kappa m m_s \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = \kappa m m_s \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)$, potenciální energie gravitační v témže místě vzhledem k zemskému povrchu $W_p = \kappa m m_s \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$. Celková mechanická energie družice je tedy

$$\begin{aligned} W &= W_k + W_p = \kappa m m_s \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2a} \right) = \\ &= \kappa m m_s \frac{2a - R}{2aR}, \end{aligned} \quad (4)$$

což se mělo dokázat.

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$\begin{aligned} W &= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 1,327 \cdot 10^3 \cdot \\ &\cdot \frac{8,485 \cdot 10^6}{14,863 \cdot 6,378 \cdot 10^{12}} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \text{ kg}^2 \text{ m m}^{-2} = \\ &= \frac{6,67 \cdot 5,98 \cdot 1,327 \cdot 8,485 \cdot 10^{10}}{14,863 \cdot 6,378} \text{ J} \end{aligned}$$

Logaritmicky určíme $W = 4,736 \cdot 10^{10} \text{ J}$.

Velikost mechanické energie družice je určena vztahem (4): pro Sputnika III má hodnotu $4,736 \cdot 10^{10} \text{ J}$.

d) Protože ve výrazu (4), určujícím velikost mechanické energie družice, se nevyskytuje ani výstřednost, ani malá poloosa eliptické dráhy družice, byla by celková mechanická energie družice stejně veliká, kdyby se výstřednost její dráhy při stálé hodnotě velké poloosy změnila.

e) Kdyby se družice pohybovala po kruhové dráze kolem Země, bylo by $e = 0$ a $a = r$, takže

$$h_a = h_p = a - R \quad (5)$$

Ze vztahu (2) vychází pro rychlost rovnoměrného pohybu družice po kruhové dráze vztah

$$v_k = \sqrt{\kappa \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r} \right) m} = \sqrt{\frac{\kappa m}{r}} = \sqrt{\frac{\kappa m}{a}} \quad (6)$$

a pro energii platí vztah (4).

Pro dané hodnoty vychází $h_a = h_p = (7\,431,5 - 6\,378)$ km = 1 053,5 km;

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa m}{a}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{7,431\,5 \cdot 10^6}}$$

$$\sqrt{\text{kg m s}^{-2} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-2} \text{ kg m}^{-1}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 5,98 \cdot 10^7}{7,431\,5}} \text{ m s}^{-1}$$

Pomocí logaritmu vypočítáme

$$v_k = 7\,326 \text{ m s}^{-1} = 7,326 \text{ km s}^{-1}$$

Hledaná vzdálenost je určena vztahem (5), hledaná rychlost vztahem (6), energii vyjadřuje vztah (4). Pro dané hodnoty vyjde $h = 1\,053,5$ km, $v_k = 7,326 \text{ km s}^{-1}$ a $W = 4,736 \cdot 10^{10}$ J.

14. Řešení úloh kategorie D

PRVNÍ KOLO SOUTĚŽE

1. Závodník Závodu míru ujel na kole trať dlouhou $s = 210$ km za dobu $t = 5$ hodin.

a) Vypočítejte průměrnou rychlost závodníka.

b) Kolikrát se na dráze s otočí pedály kola, jehož průměr je $d = 70$ cm a převod $p = \frac{42}{22}$?

c) Jak velkou práci vykoná závodník, jestliže start i cíl mají stejnou nadmořskou výšku ?

Závodník s kolem má tíhu $G = 80$ kp a na tření a překonání odporu vzduchu se spotřebuje síla rovnající se 5% tíhy závodníka s kolem.

Označení veličin a dané hodnoty: Na dráze $s = 210$ km = 210 000 m vykonají pedály kola k otáček, kolo bicyklu $n = pk$ otáček. Při jízdě překonává cyklista po vodorovné silnici třecí sílu a ostatní překážky pohybu silou, která se rovná $\eta = 5$ %, tj. $0,05 G$ tíhy cyklisty s kolem. Je tedy

$$F = \frac{\eta G}{100} \quad (1)$$

Závodník urazil dráhu s průměrnou rychlostí v za dobu $t = 5$ h = 18 000 s.

V soustavě kilopondové je $d = 0,7$ m. Číslo $\pi \doteq \frac{22}{7}$.

Řešení: a) Průměrnou rychlost závodníka určíme ze známého vztahu

$$v = \frac{s}{t} = \frac{210\,000}{18\,000} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{35}{3} \text{ m s}^{-1} \quad (2)$$

Závodník se pohyboval na trati průměrnou rychlostí $11\frac{2}{3}$ m s⁻¹, určenou obecně vztahem (2).

b) Vykonají-li pedály kola k otáček na dráze s , vykoná kolo bicyklu na této dráze při převodu p celkem $n = kp$

otáček. Protože se při jedné otáčce kola posune osa kola o délku πd , vykoná bicykl při n otáčkách kola celkovou dráhu $s = n\pi d = kp\pi d$. Z této rovnice vypočítáme

$$k = \frac{s}{p\pi d} \quad (3)$$

Dosadíme-li do výrazu (3) dané hodnoty, vyjde

$$k = 210\,000 \frac{7}{22} \frac{22}{42} \frac{1}{0,7} \frac{\text{m}}{\text{m}} = 50\,000$$

Pedály kola vykonají na dráze 210 km 50 000 otáček.

c) Podle vztahu (1) překonává závodník při jízdě třecí sílu a odpor vzduchu stálou silou F . Vykoná tedy na dráze s práci

$$\begin{aligned} A = Fs &= \frac{\eta G}{100} s = \frac{5 \cdot 80 \cdot 210\,000}{100} \text{ kp m} = \\ &= 840\,000 \text{ kp m} \end{aligned} \quad (4)$$

Závodník vykoná na dráze s práci 840 000 kp m. Tato práce je určena vztahem (4).

2. Automobil jede na přímé silnici po dráze $s_1 = 10$ km rychlostí $v_1 = 60 \text{ km h}^{-1}$ a další úsek dráhy $s_2 = s_1 = 10$ km rychlostí $v_2 = 80 \text{ km h}^{-1}$.

Jaká je průměrná rychlost automobilu?

Označení veličin: Průměrnou rychlost automobilu na dráze $s = s_1 + s_2 = 2s_1$ označíme v . Označíme-li písmeny t_1 a t_2 doby, za které ujede automobil dráhu s_1 rychlostí v_1 a dráhu s_2 rychlostí v_2 , pak vykoná automobil za dobu $t = t_1 + t_2$ celkovou dráhu $s = 2s_1$.

Řešení: Protože $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$ a $t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1}{v_2}$, je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_1}{v_2} = s_1 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) = \\ = s_1 \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}$$

Průměrná rychlost automobilu na dráze $s = 2s_1$ je určena výrazem

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2s_1}{s_1 \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} \quad (1)$$

Dosadíme-li do výrazu (1) dané hodnoty, vypočítáme

$$v = \frac{2 \cdot 60 \cdot 80}{60 + 80} \frac{\text{km}^2 \text{h}}{\text{h}^2 \text{km}} \doteq 68,6 \text{ km h}^{-1}$$

Automobil se pohyboval po dráze s průměrnou rychlostí $68,6 \text{ km h}^{-1}$. Tato rychlost je obecně určena výrazem (1).

3. Nádoba tvaru krychle má hranu $a = 25,0 \text{ cm}$. Ve středu horní stěny je připájena trubice o průřezu $S = 4 \text{ cm}^2$, kterou se nádoba plní.

a) Nádobu naplníme vodou až k spodnímu otvoru trubice. Jaký je tlak vody u dna nádoby?

b) Do trubice přilijeme tolik vody, že sahá v trubici do výšky $h = 1,50 \text{ m}$. Jaký je tlak vody u dna nádoby?

c) Kolikrát větší síla působí na dno nádoby v případě b) než v případě a)?

d) Kolikrát větší je hmotnost vody v nádobě v případě b) než v případě a)?

Označení veličin: Obecně budeme značit výšku vody nade dnem nádoby h' , tlak vody na dno nádoby p , tlakovou sílu na dno F a tíhu vody v nádobě s trubicí G . Výšku vody v trubici v případě b) označíme h . Měrná tíha vody je $\gamma = 1 \text{ p cm}^{-3}$. Tlak vody na dno vypočítáme podle

vzorce $p = h'\gamma$, tlakovou sílu na dno udává výraz $F = pS = h'S\gamma$ a tíha vody má hodnotu $G = V\gamma$, kde V značí objem vody v nádobě s trubicí.

Řešení: a) Naplníme-li nádobu vodou až ke spodnímu otvoru trubice, sahá voda do výšky $h' = a$ nade dnem nádoby. Tlak vody na dno nádoby je tedy určen vztahem

$$p_1 = a\gamma = 25 \cdot 1 \frac{\text{cm p}}{\text{cm}^3} = 25 \text{ p cm}^{-2} \quad (1)$$

Tlak vody na dno nádoby je určen vztahem (1). Má velikost 25 p cm^{-2} .

b) Přilijeme-li do trubice připájené k nádobě zcela naplněné vodou ještě tolik vody, že sahá v trubicí do výšky $h = 1,5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$, dosáhne voda výšky $h'_2 = a + h = 175 \text{ cm}$ nad dnem nádoby. Proto má tlak vody na dno nádoby velikost

$$p_2 = h'_2 \gamma = (a + h) \gamma = 175 \cdot 1 \text{ cm} \frac{\text{p}}{\text{cm}^3} = 175 \text{ p cm}^{-2} \quad (2)$$

Tlak na dno nádoby je určen vztahem (2) a má velikost 175 p cm^{-2} .

c) V případě b) působí na dno tlaková síla $F_2 = p_2 S = (a + h)\gamma S$, v případě a) tlaková síla $F_1 = p_1 S = a\gamma S$. Jejich poměr má hodnotu

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{(a + h) \gamma S}{a \gamma S} = \frac{a + h}{a} = \frac{175}{25} = 7 \quad (3)$$

Tlaková síla na dno je v případě b) sedmkrát větší než v případě a). Obecně je poměr těchto tlakových sil určen výrazem (3).

d) Tíha vody má v případě a) velikost $G_1 = a^3 \gamma$, v případě b) $G_2 = (a^3 + S h) \gamma$. Poměr jejich velikostí je

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{(a^3 + S h) \gamma}{a^3 \gamma} = 1 + \frac{S h}{a^3} = 1 + \frac{150 \cdot 4}{25^3} =$$

$$= 1 + \frac{24}{635} \doteq 1,04 \quad (4)$$

Celková tíha vody v nádobě s trubicí je v případě b) jen asi 1,04krát větší než v případě a). Obecně je poměr tíhových sil určen vztahem (4).

4. Těleso o hmotnosti $m = 10$ kg se zvedá po nakloněné rovině o výšce $h = 0,5$ m a délce $d = 3$ m rovnoměrným pohybem.

a) Jak velká práce se vykoná, jestliže se těleso pohybuje bez tření?

b) Jak velká práce se vykoná, působí-li na těleso třecí síla $F_t = 0,5$ kp?

Označení veličin: Těleso o hmotnosti $m = 10$ kg má tíhu $G = 10$ kp.

Řešení: a) Těleso nacházející se v nejvyšším místě nakloněné roviny, tedy ve výšce h nad základnou nakloněné roviny, má vzhledem k této základně potenciální energii tíhovou $W_p = Gh$. Jestliže při zvedání tělesa po nakloněné rovině zanedbáme působení třecí síly, je vykonaná práce

$$A_1 = G h = 10 \cdot 0,5 \text{ kp m} = 5 \text{ kp m} \quad (1)$$

Pohybuje-li se těleso po uvažované nakloněné rovině bez tření, vykoná se při jeho zvednutí po nakloněné rovině práce 5 kp m. Obecně je tato práce určena vztahem (1).

b) Působí-li na těleso při jeho zvedání třecí síla, vykoná se kromě práce A_1 ještě práce A_2 , kterou se překonává třecí síla F_t po dráze d , takže celková vykonaná práce A má hodnotu

$$A = A_1 + A_2 = Gh + F_t d = 5 \text{ kp m} + 0,5 \cdot 3 \text{ kp m} = 6,5 \text{ kp m.} \quad (2)$$

Působí-li při pohybu tělesa po nakloněné rovině třecí síla, vykoná se po zvednutí tělesa do nejvyšší polohy práce 6,5 kp m. Obecně je tato práce určena vztahem (2).

5. Ke kousku parafínu o hmotnosti $m_1 = 60 \text{ g}$ je připevněn kousek olova o hmotnosti $m_2 = 95,7 \text{ g}$. Obě těliska jsou zavěšena na siloměr a ponořena do vody. Siloměr ukazuje, že je napínán silou $F = 76,5 \text{ p}$.

Určete měrnou tíhu parafínu.

Měrná tíha olova je $\gamma_0 = 11,3 \text{ p cm}^{-3}$.

Označení veličin: Tíha parafínu o hmotnosti $m_1 = 60 \text{ g}$ je $G_1 = 60 \text{ p}$, olovo hmotnosti $m_2 = 95,7 \text{ g}$ má tíhu $G_2 = 95,7 \text{ p}$. Tíha tělesa z parafínu a olova je $G = G_1 + G_2 = 155,7 \text{ p}$. Měrnou tíhu parafínu označíme γ_1 , tíhu vytlačené vody G_3 , její objem V_3 , objem parafínu V_1 , objem olova V_2 .

Řešení: Je-li celé těleso, zavěšené na siloměru, ponořeno ve vodě, napíná siloměr silou F . Podle Archimédova zákona má vytlačená voda tíhu $G_3 = G - F = G_1 + G_2 - F$. Protože měrná tíha vody je $\gamma_3 = 1 \text{ p cm}^{-3}$, je objem vytlačené vody, a tedy také objem tělesa $V_3 = \frac{G_1 + G_2 - F}{\gamma_3}$.

Objem olova $V_2 = \frac{G_2}{\gamma_0}$. Parafín má tedy objem $V_1 =$

$$\begin{aligned}
 &= V_3 - V_2 = \frac{G_1 + G_2 - F}{\gamma_3} - \frac{G_2}{\gamma_0} = \\
 &= \frac{\gamma_0 (G_1 + G_2 - F) - G_2 \gamma_3}{\gamma_0 \gamma_3}
 \end{aligned}$$

Měrnou tíhu parafínu vypočítáme ze vztahu

$$\gamma_1 = \frac{G_1}{V_1} = \frac{G_1 \gamma_0 \gamma_3}{\gamma_0 (G_1 + G_2 - F) - G_2 \gamma_3} \quad (1)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{60 \cdot 11,3 \cdot 1}{11,3 (60 + 97,5 - 76,5) - 97,5 \cdot 1} \frac{\text{p p p cm}^3}{\text{cm}^3 \text{cm}^3 \text{p p}} = \\
 &= \frac{678}{915,3 - 97,5} \text{p cm}^{-3} = \frac{678}{817,8} \text{p cm}^{-3} = 0,83 \text{p cm}^{-3}
 \end{aligned}$$

Úlohu lze také řešit rovnicí:

Objem tělesa z olova a parafínu je $V_3 = V_1 + V_2$ a po úpravě

$$V_3 = \frac{G_1}{\gamma_1} + \frac{G_2}{\gamma_0}$$

Obě strany rovnice násobíme $\gamma_1 \gamma_0$. Dostaneme rovnici

$$V_3 \gamma_1 \gamma_0 = G_1 \gamma_0 + G_2 \gamma_1$$

K oběma stranám rovnice připočítáme $-G_2 \gamma_1$ a na levé straně vytkneme γ_1 . Pak vyjde

$$\begin{aligned}
 &\gamma_1 (V_3 \gamma_0 - G_2) = G_1 \gamma_0, \\
 \text{takže } \gamma_1 &= \frac{G_1 \gamma_0}{V_3 \gamma_0 - G_2} = \frac{G_1 \gamma_0 \gamma_3}{V_3 \gamma_0 \gamma_3 - G_2 \gamma_3}
 \end{aligned}$$

Dosadíme-li za $V_3 = \frac{G_1 + G_2 - F}{\gamma_3}$, vyjde

$$\gamma_1 = \frac{G_1 \gamma_0 \gamma_3}{\gamma_0 (G_1 + G_2 - F) - G_2 \gamma_3}, \text{ což je vztah (1).}$$

Měrná tíha parafínu je $0,83 \text{ p cm}^{-3}$. Obecně je určena vztahem (1).

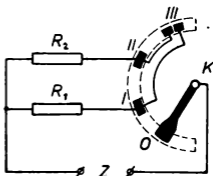
6. V elektrickém vaříči jsou dvě ocelové spirály o odporech $R_1 = 120 \Omega$ a $R_2 = 40 \Omega$.

a) Jak jsou spirály připojeny k přepínači, má-li při jeho přepínání z polohy I do polohy II a potom do polohy III výkon vaříče stále stoupat?

b) Vaříč je připojen na síť o napětí $U = 120 \text{ V}$. Vypočítejte jeho výkon, je-li přepínač v polohách I, II, III.

Řešení: Protože odporové spirály o odporech R_1 a R_2 jsou konstruovány pro určité neměnné napětí, mají-li mít plný výkon, nelze spirály řadit do obvodu sériově.

a) Má-li při přepínání z polohy I do polohy II a potom do polohy III výkon vaříče stále stoupat, musí přepínač v poloze I přiřadit ke zdroji jen spirálu s větším odporem R_1 , v poloze II jen spirálu o odporu R_2 , v poloze III obě spirály zařazené do obvodu paralelně. Schematický obr. 56 ukazuje jednoduchý způsob takového zapojení. Kontakt III se skládá ze dvou od sebe izolovaných částí, z nichž jedna je spojena s kontaktem II, druhá s kontaktem I.



Obr. 56

b) Výkon vaříče je obecně určen vztahem $P = UI$. Dosadíme-li do tohoto výrazu podle Ohmova zákona $I = \frac{U}{R}$, získáme vzorec

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (1)$$

Při paralelním zařazení obou spirál do obvodu platí podle Kirchhoffova zákona pro celkový odpor R_3 rovnice

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}, \text{ takže } R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \\ = \frac{120 \cdot 40}{120 + 40} \Omega = 30 \Omega.$$

Dosadíme-li do vztahu (1) hodnoty příslušných odporů, vypočítáme výkony P_1, P_2, P_3 při všech uvažovaných způsobech zařazení spirál vařiče do obvodu.

Při přepínání přepínače do polohy I, z ní do polohy II a potom do polohy III se mění výkon vařiče postupně z hodnoty $P_1 = \frac{U^2}{R_1}$ na hodnotu $P_2 = \frac{U^2}{R_2}$ a potom na

$$\text{hodnotu } P_3 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} U^2. \quad (2)$$

$$\text{Po dosazení daných hodnot vyjde } P_1 = \frac{120^2}{120} \frac{\text{V}^2}{\Omega} = \\ = 120 \text{ W}, P_2 = \frac{120^2}{40} \text{ W} = 360 \text{ W} \text{ a } P_3 = \frac{120^2}{30} \text{ W} = \\ = 480 \text{ W}.$$

Výkony vařiče v polohách I, II, III přepínače jsou určeny obecně výrazy (2). Jejich hodnoty jsou 120 W, 360 W a 480 W.

7. Na kolik stejných částí je třeba rozřezat drát, jehož odpor je $R = 192 \Omega$, abychom při spojení těchto částí vedle sebe dostali odpor $R' = 3 \Omega$?

Drát je z homogenního materiálu a má na všech místech stejný průřez.

Označení veličin: Drát rozřežeme na n stejných částí. Odpor každé z těchto částí je $R_1 = \frac{R}{n}$.

Řešení: Při spojení odporů vedle sebe je převrácená hodnota celkového odporu rovna součtu převrácených hodnot jednotlivých odporů. Proto platí rovnice

$$\frac{1}{R'} = n \frac{1}{R_1} = n \frac{n}{R} = \frac{n^2}{R}, \text{ ze které vypočítáme}$$

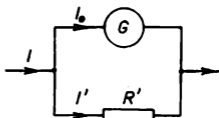
$$n = \sqrt{\frac{R}{R'}} = \sqrt{\frac{192}{3}} = \sqrt{64} = 8$$

Drát je nutno rozdělit na 8 stejných částí. Obecně vychází $n = \sqrt{\frac{R}{R'}}$.

8. Stupnice galvanometru má $n = 100$ dílků. Výchylku jeho ukazovatele o jeden dílek způsobí proud $I_1 = 10$ mikroampérů. Odpor přístroje je $R = 50 \Omega$.

Jaký bočník musíme k přístroji připojit, abychom jím mohli měřit proud do $I = 500$ miliampérů?

Označení veličin: Odpor bočníku označíme R' , proud protékající bočníkem I' , maximální proud, který smí procházet galvanometrem, I_0 .



Obr. 57

Řešení: Přístrojem smí protékat maximální proud $I_0 = nI_1 = 100 \cdot 10 \mu\text{A} = 1 \text{ m A}$. Protože se rozsah přístroje má rozšířit z I_0 na I , bude bočníkem procházet proud $I' = I - I_0 = 500 \text{ m A} - 1 \text{ m A} = 499 \text{ m A}$ (obr. 57).

Protože bočník je ke galvanometru přičleněn paralelně, platí $R' : R = I_0 : I'$, takže

$$R' = R \frac{I_0}{I'} = \frac{n I_1}{I - I_0} R = \frac{n I_1}{I - n I_1} R \quad (1)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$R' = \frac{1 \text{ mA}}{499 \text{ mA}} \cdot 50 \Omega = \frac{50}{499} \Omega = 0,1 \Omega$$

Odpor připojeného bočníku musí mít hodnotu $0,1 \Omega$. Obecně je určen výrazem (1).

9. Na dvou žárovkách jsou tyto údaje: 110 V , 25 W ; 110 V , 60 W .

a) Určete příkon každé z nich, jestliže je spojíme za sebou a připojíme je k napětí 220 V .

Rozhodněte, je-li toto spojení možné.

b) Rozhodněte, zda je možno spojit za sebou dvě žárovky označené 110 V , 25 W a připojit je k napětí $U' = 220 \text{ V}$.

Označení veličin: Obě žárovky svítí plným výkonem při napětí $U = 110 \text{ V}$. První má příkon $P_1 = 25 \text{ W}$, druhá $P_2 = 60 \text{ W}$. Odpor první žárovky budeme značit R_1 , druhé R_2 . Příkony žárovek při spojení za sebou a při připojení k napětí $U' = 220 \text{ V}$ označíme P'_1 a P'_2 .

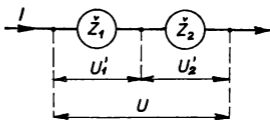
Řešení: Připojíme-li první žárovku k napětí U , prochází jí proud $I_1 = \frac{P_1}{U}$. Její odpor je

$$R_1 = \frac{U}{I_1} = U \frac{U}{P_1} = \frac{U^2}{P_1} = \frac{110^2}{25} \Omega = \frac{12\,100}{25} \Omega = 484 \Omega$$

Odpor R_2 druhé žárovky vypočítáme obdobně jako odpor první žárovky ze vztahu

$$R_2 = \frac{U^2}{P_2} = \frac{12\,100}{60} \, \Omega = 202 \, \Omega$$

a) Kdybychom žárovky připojili za sebou k napětí $U' = 220 \text{ V}$ (obr. 58), vytvořilo by se na první žárovce napětí U'_1 , na druhé U'_2 . Velikosti těchto napětí jsou přímo úměrné odporům žárovek a jejich součet se rovná U' . Proto platí dvě rovnice



Obr. 58

$$U'_1 : U'_2 = R_1 : R_2 = \frac{U^2}{P_1} : \frac{U^2}{P_2} = \frac{U^2}{P_1} \cdot \frac{P_2}{U^2} = P_2 : P_1 \text{ a}$$

$$U'_1 + U'_2 = U'$$

Z první z těchto rovnic vypočítáme $U'_2 = \frac{P_1}{P_2} U'_1$ a dosadíme do druhé. Pak dostaneme rovnici $U'_1 + \frac{P_1}{P_2} U'_1 = U'$. Obě strany této rovnice násobíme P_2 a na levé straně vytkneme U'_1 . Vyjde $U'_1(P_1 + P_2) = U'P_2$, takže

$$U'_1 = \frac{P_2}{P_1 + P_2} U' = \frac{60}{25 + 60} \cdot 220 \text{ V} = \frac{60}{85} \cdot 220 \text{ V} =$$

$$= 155 \frac{5}{17} \text{ V} \doteq 155 \text{ V} \text{ a } U'_2 = U' - U'_1 = 220 \text{ V} - 155 \text{ V} =$$

$$= 65 \text{ V}.$$

Příkon první žárovky při tomto spojení by byl

$$P'_1 = U'_1 I = \frac{U'^2_1}{R_1} = \frac{155^2}{484} \doteq 50 \text{ W}$$

Obdobně vyjde

$$P'_2 = \frac{U'^2_2}{R_2} = \frac{65^2}{202} \text{ W} = 20,9 \text{ W} \doteq 21 \text{ W}$$

Při tomto spojení by měla první žárovka příkon 50 W, druhá 21 W. První žárovka by tedy měla příkon dvakrát větší, než je předepsaný příkon 25 W, a přepálila by se. Druhá žárovka by byla silně podžhavana, neboť by měla příkon téměř třikrát menší než předepsaný příkon 60 W.

b) Kdybychom spojili za sebou dvě stejné žárovky označené 110 V, 25 W a připojili je k napětí 220 V, vzniklo by na svorkách každé žárovky stejné napětí 110 V, jež je pro ně předepsáno. Obě žárovky by svítily s plným výkonem.

DRUHÉ KOLO SOUTĚŽE

1. Letadlo má hmotnost m . Užitečný výkon P potřebný k výstupu letadla je p % výkonu motoru letadla.

Vypočítejte výkon motoru letadla, jestliže letadlo vystoupilo do výšky h za dobu t .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 2,5 \text{ t}$, $p = 35 \%$, $h = 1\,200 \text{ m}$, $t = 5 \text{ minut}$.

Řešení: Označíme-li tíhu letadla G a výšku výstupu h , vykoná letadlo při výstupu práci

$$A = G h$$

Protože letadlo vykoná tuto práci za dobu t , je jeho výkon

$$P = \frac{G h}{t}$$

Je-li tento výkon p % výkonu P' motoru, je

$$P' = \frac{100 P}{p} = \frac{100 G h}{p t}$$

Dosadíme-li za $G = 2\,500$ kp, $h = 1\,200$ m, $t = 300$ s, $p = 35$ %, dostáváme

$$P' = \frac{100 \cdot 2\,500 \cdot 1\,200}{35 \cdot 300} \frac{\text{kp m}}{\text{s}} = 28\,600 \text{ kp m s}^{-1}$$

Výkon motoru je $28\,600 \text{ kp m s}^{-1}$.

2. Lano, na kterém je rumpálem zdvihán trám o tíze G , se navíjí na hřídel o průměru d , na který je nasazeno ozubené kolo s n_1 zuby. Do zubů tohoto kola zapadají zuby menšího kola, které má n_2 zubů a je opatřeno klikou délky l .

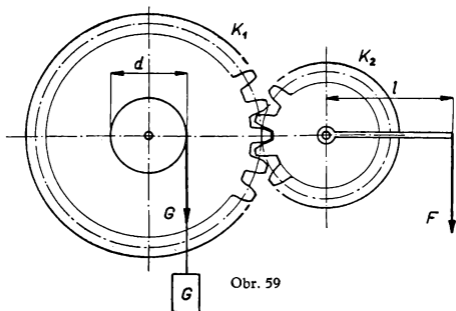
Jakou silou F udržíme v rovnováze trám na tomto rumpále?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $G = 500$ kp, $d = 18$ cm, $n_1 = 96$, $n_2 = 24$, $l = 6$ dm.

Řešení: Vykoná-li menší kolo K_2 , opatřené klikou (obr. 59), na kterou působí stálá síla F ve směru kolmém k délce kliky, n_1 otáček, otočí se o $n_1 \cdot n_2$ zubů, neboť má na obvodě n_2 zubů. Síla F vykoná při tom práci

$$A_1 = 2 \pi l n_1 F \quad (1)$$

Zároveň s kolem K_2 se otáčí i větší kolo K_1 , na jehož hřídeli je na laně zavěšeno břemeno o tíze G . Kolo K_1 se otočí o stejný počet $n_1 n_2$ zubů jako kolo K_2 . Protože má na obvodě n_1 zubů, vykoná n_2 otáček za dobu, za kterou



se kolo K_2 otočilo n_1 -krát. Otáčející se hřídel vykoná při tom práci

$$A_2 = 2 \pi \frac{d}{2} n_2 G = d \pi n_2 G \quad (2)$$

Jsou-li síly F a G v rovnováze, pak jsou obě práce stejně veliké, zanedbáme-li tření. Platí tedy $2\pi l n_1 F = \pi d n_2 G$, takže

$$F = \frac{d n_2}{2 l n_1} G = \frac{0,18 \cdot 24}{2 \cdot 0,6 \cdot 96} 500 \text{ kp} = 18,75 \text{ kp} \quad (3)$$

Trám se udrží v rovnováze silou 18,75 kp. Obecně je tato hodnota určena výrazem (3).

3. Ve vodní lázni je množství vody hmotnosti m_1 o teplotě t_1 .

Jak veliké množství m_2 páry o teplotě t_2 musí kondenzovat v této lázni, aby výsledná teplota vody dosáhla hodnoty t ?

Skupenské teplo kondenzační vodní páry při teplotě t_2 je l_k .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 5 \text{ kg}$, $t_1 = 4 \text{ }^\circ\text{C}$, $t_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, $t = 48 \text{ }^\circ\text{C}$, $l_k = 359 \text{ kcal kg}^{-1}$.

Označení veličin: Měrné teplo vody $c = 1 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$. Voda o hmotnosti m_1 se ohřeje z teploty t_1 na teplotu t teplem $Q_1 = m_1 c (t - t_1)$. Pára hmotnosti m_2 o teplotě t_2 vydá při kondenzaci teplo $Q_2 = m_2 l_k$ a při ochlazení z teploty t_2 na teplotu t teplo $Q_3 = m_2 c (t_2 - t)$.

Řešení: Předpokládáme-li, že vodní lázeň s párou je dokonale tepelně izolována, pak platí $Q_2 + Q_3 = Q_1$, takže

$$m_2 l_k + m_2 c (t_2 - t) = m_1 c (t - t_1)$$

Z této rovnice vypočítáme $m_2 [l_k + c (t_2 - t)] = m_1 c (t - t_1)$ a dále

$$m_2 = \frac{m_1 c (t - t_1)}{l_k + c (t_2 - t)} \quad (1)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$m_2 = \frac{5 \cdot 1 \cdot (48 - 4)}{359 + (100 - 48)} \frac{\text{kg kcal deg kg}}{\text{kg deg kcal}} = \frac{220}{591} \text{ kg} = 0,372 \text{ kg}.$$

Ve vodní lázni musí kondenzovat 372 g vodní páry.

4. Na vánočním stromku je n žárovek, každá o příkonu P_1 , spojených za sebou. Žárovky jsou připojeny na napětí U .

a) Jak velký proud protéká všemi žárovkami a jak veliký proud protéká jednou žárovkou?

b) Jak veliký je odpor celého vedení a jaký odpor klade proudu jedna žárovka?

Odpor přívodních vodičů zanedbáváme.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $n = 16$, $P_1 = 5 \text{ W}$, $U = 220 \text{ V}$.

Označení veličin: Celkový příkon žárovek spojených za sebou označíme P , proud protékající obvodem I , proud protékající jednou žárovkou I_1 , celkový odpor obvodu R a odpor jedné žárovky R_1 .

Řešení: Je-li spojeno n žárovek o příkonu P_1 , je celkový příkon v obvodu $P = nP_1 = 80 \text{ W}$.

a) Je-li na soustavě všech sériově zapojených žárovek napětí U , protéká obvodem proud

$$I = \frac{P}{U} = \frac{n P_1}{U} = \frac{80 \text{ W}}{220 \text{ V}} = \frac{4}{11} \text{ A}, \quad (1)$$

a protože jsou žárovky zařazeny za sebou, je proud procházející každou žárovkou stejný jako proud v obvodě.

Každou žárovkou i celým obvodem protéká proud určený vztahem (1).

b) Odpor obvodu je podle Ohmova zákona

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{n P_1} = \frac{220 \cdot 11 \text{ V}}{4 \text{ A}} = 605 \Omega \quad (2)$$

Protože jsou žárovky spojeny za sebou, má každá žárovka odpor

$$R_1 = \frac{R}{n} = \frac{U^2}{n^2 P_1} = \frac{605}{16} = 37,8 \Omega \quad (3)$$

Odpor obvodu je určen vztahem (2), každá žárovka klade proudu odpor vyjádřený vztahem (3).

O B S A H

1. Úvod	3
2. Složení ÚV FO	4
3. Předsedové KV FO	5
4. Okresní výbory FO	6
5. Pokyny k úpravě, postupu řešení a klasifikační zásady pro opravování úloh soutěže	6
6. Zpráva o průběhu soutěže ve školním roce 1965/66	7
7. Výsledky jednotlivých kol soutěže	12
8. Hodnocení VII. ročníku soutěže	31
9. Závěr sedmého ročníku FO	33
10. Studijní texty pro první kolo VII. ročníku FO	35
11. Řešení úloh kategorie A	67
12. Řešení úloh kategorie B	137
13. Řešení úloh kategorie C	173
14. Řešení úloh kategorie D	205

Edice: Pomocné knihy pro žáky

JAN TESAŘ

**S E D M Ý
R O Č N Í K
F Y Z I K Á L N Í
O L Y M P I Á D Y**

Obálku navrhl Jan Pírko

Obrázky rýsoval ing. Jan Ibl

Vydání 1. — Praha 1967 — Počet stran 224

Odpovědná redaktorka: Jiřina Cívínová

Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk

Technický redaktor: Pavel Leden

Z nové sazby písmem Plantin vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p.,
závod 4, Ostrovní 30, Praha 1 — AA 9,70 — VA 10,10 — D-13*70330

Tematická skupina a podskupina 03/5

Náklad 3700 výtisků

Cena brožovaného výtisku Kčs 9,00

505/21, 852

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou
publikaci č. 75-0-28

15-131-67 Kčs 9,00