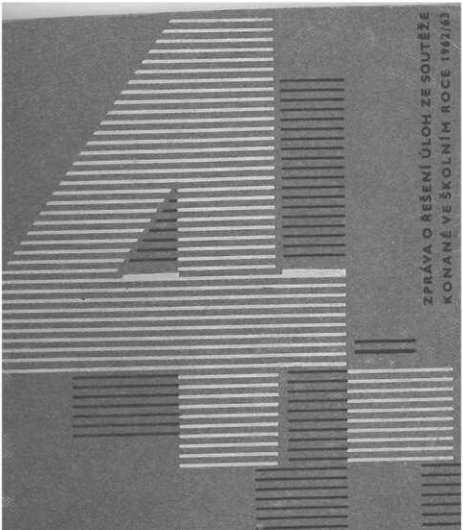




ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE
KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1962/63

4. ROČNÍK

FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY

Č T V R T Ý R O Č N Í K

FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY

ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE
KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1962/63

Státní pedagogické nakladatelství Praha 1964

Zpracovali Jan Tesař, Zbyněk Kubiček a Marie Čechová
Recenzovali Zdeněk Ungerman a Evžen Říman, CSc.
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1964

1. ÚVOD

Na XII. sjezdu Komunistické strany Československa, který se konal v prosinci 1962, byl ve zprávě prvního tajemníka strany a presidenta ČSSR soudruha Antonína Novotného i v diskusi delegátů zdůrazněn nesmírný význam vědy a techniky při dalším rozvoji naší socialistické společnosti. Jedině pokrok vědy a techniky zajistí podstatný a trvalý růst společenské produktivity práce. Z perspektivních plánů rozvoje našeho národního hospodářství vyplývá i stále rostoucí potřeba vědecky a technicky vzdělaných lidí pro obory vědy, průmyslu, zemědělství, dopravy apod.

O výběr a výchovu vědecky a technicky založených odborníků je nutno se starat již na středních školách, které jsou přípravou pro vysokoškolské studium. Jedním z prostředků, které mají za úkol vzbudit u žáků zvýšený zájem o fyziku a získat je pro hlubší studium fyziky a technických oborů, je i celostátní soutěž Fyzikální olympiáda (zkratka FO). Účast na této soutěži má vést žáky k samostatné práci při řešení fyzikálních problémů, a tím zvyšovat úroveň znalostí v tomto předmětu.

Ve školním roce 1962/63 probíhal již čtvrtý ročník FO. Soutěže se zúčastnili převážně žáci středních všeobecně vzdělávacích škol; účast žáků z výběrových škol odborných byla podstatně menší.

Soutěž se řídila organizačním řádem, který vydalo ministerstvo školství a kultury (MŠK) společně pro Matematickou olympiádu (MO) a Fyzikální olympiádu. Společné směrnice byly uveřejněny ve Věstníku MŠK, sešit 29—30 ze dne 31. října 1959.

Podle tohoto organizačního řádu jsou pořadateli Fyzikální olympiády MŠK spolu s Jednotou čs. matematiků a fyziků (JČMF) a Československým svazem mládeže.

Soutěž organizoval a řídil ústřední výbor Fyzikální olympiády (ÚV FO) spolu s krajskými výbory Fyzikální olympiády (KV FO). Složení ÚV FO je uvedeno na str. 5 a jmenný seznam předsedů KV FO je na str. 7.

O úspěšný průběh soutěže se zasloužili kromě členů ÚV FO a členů jednotlivých KV FO také ti učitelé fyziky a referenti FO, kteří soutěž organizovali a řídili na školách, zúčastnili se opravování úloh, zajišťovali pomůcky a potřeby pro experimentální práce apod., dále pak četní ředitelé škol a krajští inspektoři, kteří soutěž propagovali mezi žactvem. ÚV FO srdečně děkuje všem těmto obětavým pracovníkům za jejich velikou a nezištnou práci, bez které by nebylo možno zajistit zdárný průběh soutěže.

Jednota čs. matematiků a fyziků děkuje spolu s ústředním výborem FO touto cestou také všem, kteří se iniciativně a obětavě zúčastnili příprav i vedení soutěže. Zvláště pak děkuje za obětavou práci těm soudruhům z ÚV FO a z jednotlivých KV FO, kteří se dobrovolně a bez nároků na odměnu podíleli na vypracování úloh a vzorových řešení, na opravování řešených úloh, na přípravě laboratorních souprav pro experimentální práce, na dozoru při druhém a třetím kole soutěže a na vypracování studijních textů uvedených v čl. 9. Jsou to zejména tito soudruzi:

prof. dr. B. Havelka, prof. dr. R. Košťál, Vl. Rudolf, dr. M. Chytilová, J. Tesař, Z. Kubíček, dr. F. Lehar, J. Pospíšil, E. Říman, dr. L. Thern, dr. B. Vlach, dr. I. Náter, M. Čechová, E. Sokol, Fr. Fišer, J. Sušanka, dr. J. Feifer, K. Hofman, Z. Ungerman, Fr. Živný, A. Grega, I. Turek, J. Konrád, M. Ihnát, I. Baník, T. Marková, T. Holub, J. Divíšek, J. Lusk, E. Procházková, V. Strnad, dr. M. Bajer, Fr. Kuba, O. Tomeš, A. Lízalová, Fr. Ledabyl, S. Frölich, J. Pitner, J. Machalický, K. Fišer, J. Hřebačka, J. Vedra, J. Kessner, L. Vašek, M. Rádl, J. Honner, M. Horák, Fr. Šurán, D. Košťálová, Z. Kupka aj.

Ke zvládnutí organizační stránky soutěže přispěl ÚV JČMF, zvláště ústřední inspektor J. Bartůněk a krajské výbory poboček JČMF. Soudružky R. Valouchová a J. Matyášová z kanceláře ÚV JČMF obstarávaly rozesílání pozvánek a tak pomáhaly rovněž při organizování soutěže.

Do propagace soutěže se zapojil také ÚV ČSM a organizace ČSM na školách.

Ústřední výbor děkuje děkanátu přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci a zvláště pak jejímu děkanovi a vedoucímu katedry experimentální fyziky a metodiky fyziky prof. dr. J. Fukovi, že umožnili provést třetí kolo soutěže v budově přírodovědecké fakulty v Olomouci. Dále děkuje všem asistentům, odborným asistentům a posluchačům kateder fyziky, kteří přípravou experimentálních úloh pro soutěž, dozorem v průběhu soutěže a pomocí při organizaci přispěli k zdárnému průběhu třetího kola IV. ročníku soutěže FO.

Poděkování patří též řediteli Pedagogického institutu v Olomouci doc. dr. J. Justovi za pochopení a pomoc při zajišťování soutěže.

ÚV FO děkuje také redakci Rozhledů matematicko-fyzikálních za spolupráci.

2. SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY VE ŠKOLNÍM ROCE 1962/63

Soutěž je řízena celostátně ústředním výborem Fyzikální olympiády, jehož členy jmenovalo na návrh Jednoty československých matematiků a fyziků ministerstvo školství a kultury. Sídlo ústředního výboru Fyzikální olympiády je

v Praze 1 — Malá Strana, Maltézské náměstí 1 (JČMF)
a v Olomouci, Leninova 26 (katedra teoretické fyziky a
astronomie fakulty přírodních věd University Palackého).

Ve školním roce 1962/63 měl ústřední výbor Fyzikální
olympiády toto složení:

Předseda: RNDr. et Dr.Sc. Bedřich Havelka, profesor
přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci.

Místopředseda: RNDr. Marta Chytilová, pracovnice Vý-
zkumného ústavu pedagogického v Praze.

Jednatel: Vladimír Rudolf, docent přírodovědecké fakulty
University Palackého v Olomouci.

Od 2. května 1963, po smrti doc. Vl. Rudolfa, přejímá
funkci jednatele Jaroslav Pospíšil, odborný asistent příro-
dovědecké fakulty University Palackého v Olomouci.

Referent pro tisk: Zbyněk Kubíček, odborný asistent Peda-
gogického institutu v Olomouci.

Členové:

Josef Bartůňek, ústřední inspektor MŠK v Praze;

Miloš Jelínek, ústřední inspektor MŠK v Praze;

RNDr. Rostislav Košťál, profesor Vyššího vojenského
učiliště ve Vyškově;

RNDr. František Lehar, učitel SVVŠ v Praze;

RNDr. Ivan Náter, odborný asistent Slovenské vysoké
školy technické v Bratislavě;

Evžen Říman CSc., odborný asistent Českého vysokého
učení technického v Praze;

Emil Sokol, odborný asistent Pedagogického institutu
v Košicích;

Jan Tesař, učitel SVVŠ v Praze;

RNDr. Ladislav Thern, docent Vysoké školy lesnické
a dřevařské ve Zvolenu;

RNDr. Bohumil Vlach, odborný asistent přírodovědecké
fakulty University J. E. Purkyně v Brně.

3. PŘEDSEDOVÉ KRAJSKÝCH VÝBORŮ FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY VE ŠKOLNÍM ROCE 1962/63

Fyzikální olympiáda byla v jednotlivých krajích řízena a organizována krajskými výbory Fyzikální olympiády, jejichž členy jmenoval odbor školství a kultury rady KNV na návrh příslušné pobočky JČMF.

Předsedy krajských výborů Fyzikální olympiády byli za kraj:

Hl. město Praha — Evžen Říman CSc., odborný asistent Českého vysokého učení technického v Praze;

Středočeský — František Fišer, učitel SVVŠ v Českém Brodě, okres Kolín;

Severočeský — Josef Sušanka, učitel SVVŠ v Teplicích;

Západočeský — RNDr. Jaroslav Feifer, docent Vysoké školy strojní a elektrotechnické v Plzni;

Jihočeský — Konrád Hofman, odborný asistent Pedagogického institutu v Českých Budějovicích;

Východočeský — Zdeněk Ungerman, učitel SVVŠ v Hradci Králové;

Severomoravský — František Živný, ředitel SVVŠ v Novém Bohumíně;

Jihomoravský — RNDr. Rostislav Košťál, profesor Vyššího vojenského učiliště ve Vyškově;

Západoslovenský — RNDr. Ivan Náter, odborný asistent Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě;

Středoslovenský — RNDr. Ladislav Thern, docent Vysoké školy lesnické a dřevařské ve Zvolenu;

Východoslovenský — Emil Sokol, odborný asistent Pedagogického institutu v Košicích.

4. POKYNY K ÚPRAVĚ A POSTUPU ŘEŠENÍ A KLASIFIKAČNÍ ZÁSADY PRO OPRAVOVÁNÍ ÚLOH SOUTĚŽE

Pro informaci čtenářům uvádíme pokyny k úpravě a postupu při práci a zásady, podle kterých se řešení úloh Fyzikální olympiády hodnotí.

Účastníci vypracují řešení jednotlivých úloh na samostatné listy formátu A 4. Záhloví prvního listu řešení každé úlohy upraví řešitel podle následujícího vzoru:

Jméno a příjmení:

Třída:

Kategorie:

Škola:

Školní rok:

Místo:

Kolo:

Posudek:

Kraj:

Posuzovali:

Úloha č.

Text úlohy

Řešení úlohy

Na každý další list se uvede pouze jméno a příjmení, číslo úlohy a stránka.

Pomocné obrázky, náčrty nebo schémata k řešení úlohy se provádějí pomocí rýsovacích potřeb, pravítkem a tužkou.

Úlohy se řeší nejprve obecně a po obecném řešení následuje určení číselné hodnoty hledané fyzikální veličiny. V obecném řešení je třeba, aby řešitel vždy vysvětlil a zdůvodnil postup řešení a uvedl, o které fyzikální zákony a poznatky se při řešení opíral.

Při počítání se požaduje dosazovat do obecných vztahů číselné hodnoty i s jejich jednotkami a s jednotkami počítat až do konečného výsledku.

Do složitých obecných vztahů je možno dosazovat za známé veličiny jen číselné hodnoty; v takových případech je však nutné provést rozměrovou zkoušku.

Řešení úloh se klasifikuje takto:

1. výborně, jestliže je úloha rozřešena správně nebo řešení má nanejvýš formální chyby nebo jen menší odbornou závadu;

2. dobře, jestliže řešení vystihuje úkol, který měl řešitel podat, ale má přitom větší odborné nedostatky. Dobře je hodnoceno i správné řešení, vyskytují-li se v něm závažné formální nedostatky;

3. nevyhovující, jestliže nedostatky odborného rázu jsou závažné nebo podané řešení je z větší části neúplné. Řešení je také nevyhovující, když výklad chybí nebo je neúplný, takže z něho nelze soudit na myšlenkový postup řešení. Také nesamostatně vypracované úlohy jsou nevyhovující.

5. PRŮBĚH SOUTĚŽE VE ŠKOLNÍM ROCE 1962/63

Soutěž Fyzikální olympiáda proběhla celostátně ve třech kategoriích: v kategorii A soutěžili žáci 3. ročníků středních všeobecně vzdělávacích škol (SVVŠ, SVŠ), 3. a 4. ročníků středních odborných škol (SPŠ); v kategorii B žáci 2. ročníků a v kategorii C žáci 1. ročníků všech středních výběrových škol (školy 2. cyklu).

Účast v kategorii pro vyšší třídu mohl povolit žáku z nižší třídy vyučující učitel.

Soutěž v kategoriích B a C proběhla ve dvou kolech, v kategorii A ve třech kolech.

V Jihomoravském a Východočeském kraji byla uspořádána

soutěž Fyzikální olympiáda pro žáky 9. tříd ZDŠ (kategorie D). Soutěž v kategorii D byla řízena příslušnými KV FO ve spolupráci s OV FO a proběhla ve dvou kolech. Rozhodnutím ÚV FO z dubna 1963 bude v pátém ročníku soutěže (tj. ve školním roce 1963/64) probíhat soutěž FO v kategorii D v celostátním měřítku.

První kolo Fyzikální olympiády bylo zorganizováno na školách a skončilo 16. února 1963. Pro školy, které vzhledem k prodloužení pololetních prázdnin nemohly dodržet daný termín, byl termín k odevzdání posledních tří úloh prodloužen do konce měsíce února r. 1963. V průběhu prvního kola měli účastníci vyřešit 9 úloh a samostatně prostudovat jedno fyzikální téma. Za úspěšného řešitele v prvním kole byl považován ten účastník, který rozřešil úspěšně alespoň 6 úloh, řešil (i když neúspěšně) experimentální úlohu a prostudoval příslušné fyzikální téma.

Podrobné znění pokynů pro soutěžící a učitele spolu s úlohami prvního kola pro všechny kategorie bylo uveřejněno v Rozhledech matematicko-fyzikálních číslo 1, ročník 41 (1962—1963). Studijní texty pro jednotlivé soutěžní kategorie byly otištěny v 2., 3. a 4. čísle roč. 41 téhož časopisu.

Pro interní potřebu řešitelů a učitelů vydal ÚV FO leták nazvaný „**IV. ročník soutěže Fyzikální olympiáda**“. V letáku byla oznámena organizace soutěže, sděleny podmínky soutěže a pokyny pro soutěžící. V další části letáku byly uvedeny úlohy pro první kolo soutěže všech tří kategorií a témata k prostudování. Po vytištění v nákladu 5 000 výtisků byly letáky rozeslány na jednotlivé KV FO, které je pak doručily jednotlivým školám 2 cyklu.

Přípravy úloh prvního kola se zúčastnili **doc. Vl. Rudolf, prof. dr. R. Košťál, J. Tesař, J. Sušanka, doc. dr. J. Feifer, M. Rádl, J. Honner a M. Horák.**

Na textech témat k prostudování spolupracovali s autorem **prof. dr. R. Košťálem** členové jihomoravského KV FO **J. Konrád, Fr. Šuráň, dr. B. Vlach, D. Košťálová** a členové ÚV FO **prof. dr. Bedřich Havelka, dr. Marta Chytilová a doc. Vladimír Rudolf**.

Leták zpracovali a připravili pro tisk **doc. Vl. Rudolf a J. Pospíšil**.

Vybraní úspěšní řešitelé z prvního kola kategorií A, B a C postoupili do druhého (krajského) kola soutěže.

Úlohy pro druhé kolo soutěže navrhli členové ÚV FO **doc. Vl. Rudolf, J. Tesař, dr. M. Chytilová, Zb. Kubíček a dr. B. Vlach**. Na zasedání ÚV FO v únoru 1963 byly úlohy upraveny a schváleny. V každé kategorii byly schváleny tři teoretické úlohy a jedna úloha experimentální.

Začátkem měsíce března 1963 byly rozeslány jednotlivým KV FO pokyny pro organizování druhého kola soutěže. Texty úloh pro druhé kolo byly v polovině března 1963 v zapečetěných obálkách rozeslány na jednotlivé KV FO.

Druhé kolo IV. ročníku Fyzikální olympiády proběhlo v jednotlivých krajích ve dnech 30. a 31. března 1963. V místech určených KV FO se sešli pozvaní řešitelé z jednotlivých kategorií, aby v sobotu dne 30. března 1963 řešili experimentální úlohu a v neděli dne 31. března 1963 zbývající tři teoretické úlohy. Krajská kola proběhla úspěšně díky obětavé práci členů KV FO.

Úspěšnými řešiteli v 2. kole byli ti, kteří ze zadaných čtyř úloh vyřešili dobře alespoň dvě. KV FO pak z těchto úspěšných řešitelů určily vítěze krajských kol v jednotlivých kategoriích. Ti obdrželi pochvalná uznání a věcné odměny podle možností jednotlivých KV FO.

Třetí kolo soutěže Fyzikální olympiáda bylo připravováno již od října 1962.

Výběr účastníků pro třetí kolo FO byl proveden v Praze 18. dubna 1963 na schůzi pléna ÚV FO za přítomnosti

předsedů všech KV FO. Z úspěšných řešitelů kategorie A druhého kola FO bylo vybráno 81 žáků ze středních všeobecně vzdělávacích škol a průmyslových škol.

Plánovaný finanční rozpočet činil 14 700,— Kčs.

Úlohy pro třetí kolo IV. ročníku FO navrhli: prof. RNDr. B. Havelka, V. Rudolf, J. Tesař a Z. Kubíček.

Program třetího kola IV. ročníku Fyzikální olympiády byl tento: Pozvaní účastníci soutěže se sjeli v pátek 3. května 1963 a v plném počtu 81 žáků se shromáždili v aule University Palackého v Olomouci, kde se v 15.30 konalo zahájení třetího kola soutěže. Slavnostní program uvedlo kvarteto studentů přírodovědecké fakulty úspěšným přednesením několika skladeb.

Po uvítání všech soutěžících a hostů vzpomněli přítomní minutou ticha nedávno zesnulého jednatele ÚV FO a obětavého pracovníka doc. V. Rudolfa. Slavnostní projev přednesl v zastoupení předsedy ÚV FO soudruh Zdeněk Ungerman, předseda KV FO ve Východočeském kraji. Ve svém projevu podtrhl velký význam soutěže Fyzikální olympiády pro další rozvoj vědy a techniky v našem státě. Na závěr seznámil člen ÚV FO s. Zbyněk Kubíček soutěžící žáky s programem třetího kola soutěže a zodpověděl dotazy účastníků, týkající se organizace soutěže. Po zahájení přešli všichni žáci do budovy přírodovědecké fakulty, kde jim v laboratořích byly předvedeny některé složitější pokusy z fyziky.

Potom se soutěžící odebrali k večeři a do svých ubytoven, aby si odpočinuli a připravili se k řešení první části soutěže, která se konala příští den. V sobotu 4. května 1963 proběhla dopoledne od 7.45 do 11.45 hod. teoretická část soutěže, a to tak, že soutěžící byli rozděleni do 3 poslucháren přírodovědecké fakulty UP, kde řešili 3 teoretické úkoly za dozoru členů ÚV FO a jejich zástupců. Fotografický záběr z této části soutěže je na obr 1.



Obr. 1

Podle původního programu měli si soutěžící žáci po obědě prohlédnout město Olomouc a průvodci je měli seznámit s jeho historickými památkami. Avšak pro hustý vytrvalý déšť bylo nutno od tohoto programu upustit. Ze stejného důvodu se nekonal ani plánovaný autokarový zájezd do zoologické zahrady na Kopečku u Olomouce, který měl následovat po prohlídce města. Místo toho zhlédli účastníci soutěže několik krátkých filmů z astronomie a astronautiky, které jim byly promítnuty ve velké posluchárně přírodovědecké fakulty. Večer pak všichni navštívili představení *Lavrentěvova Přelomu* v Divadle Oldřicha Stibora.

Poslední den soutěže, v neděli 5. května, řešili účastníci soutěže experimentální úlohy z optiky. Ve třech fyzikálních laboratořích přírodovědecké fakulty byly připraveny optické

lavice s příslušenstvím, na nichž soutěžící žáci prováděli čtvrtou úlohu za dozoru asistentů kateder fyziky a členů výborů FO (obr. 2). Pro nedostatek optických lavic a místností byli soutěžící rozděleni na čtyři skupiny, které se střídaly v měření vždy po hodině. Protokol z naměřených hodnot a zjištěných výsledků vypracovávali pak žáci v místnosti zvlášť k tomu určené. Odpoledne se soutěžící rozjeli domů.



Obr. 2

Přes nepředvídanou překážku, kterou byla náhlá smrt doc. Vl. Rudolfa, jenž měl být hlavním organizátorem soutěže a zemřel několik dní před zahájením třetího kola, podařilo se zajistit všechno tak, že třetí kolo IV. ročníku soutěže Fyzikální olympiády proběhlo úspěšně.

6. VÝSLEDKY JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

A. První kolo soutěže

Přehled o počtu soutěžících v prvním kole soutěže v kategoriích A, B, C podává tabulka I, uspořádaná podle krajů.

V tabulce I značí S počet soutěžících a U počet úspěšných řešitelů.

Tabulka I

Kraj	Kategorie A		Kategorie B		Kategorie C		Celkem	
	S	U	S	U	S	U	S	U
Hl. město Praha	143	66	103	31	308	101	554	198
Středočeský	28	19	18	9	41	34	87	62
Severočeský	42	21	37	19	237	87	316	127
Západočeský	43	20	22	10	94	33	159	63
Jihočeský	13	13	13	13	53	48	79	74
Východočeský	91	24	143	41	342	106	576	171
Severomoravský	59	26	38	22	143	41	240	89
Jihomoravský	169	55	97	25	469	90	735	170
Západoslovenský	47	23	24	6	254	45	325	74
Středoslovenský	44	13	36	16	92	42	172	71
Východoslovenský	32	25	41	37	136	115	209	177
Celkem	711	305	572	229	2 169	742	3 452	1 276

Údaje uvedené v tabulce I doplňujeme ještě těmito sděleními:

V prvním kole FO soutěžili v kategorii A žáci ze 134 SVVŠ a 14 SPŠ, v kategorii B ze 109 SVVŠ a 11 SPŠ, v kategorii C ze 196 SVVŠ a 56 SPŠ.

Z celkového počtu soutěžících v prvním kole bylo dívek: v kategorii A 147 (tj. 20,72 %), v kategorii B 173 (tj.

30,24 %) a v kategorii C 681 (tj. 31,39 %). Prvního kola soutěže se tedy zúčastnilo 1 001 dívek ze 3 452 účastníků (tj. 29 %).

Úspěšných řešitelů v prvním kole bylo v kategorii A 42,9 %, v kategorii B 40,03 % a v kategorii C 34,2 %. Z nich bylo dívek: v kategorii A 52 (tj. 17,05 %), v kategorii B 59 (tj. 25,77 %) a v kategorii C 194 (tj. 26,16 %). Bylo tedy úspěšných 305 dívek z celkového počtu 1 276 úspěšných řešitelů (tj. 23,9 %).

V průběhu prvního kola bylo učiteli fyziky a referenty pro FO na školách opraveno:

v kategorii A 3 275 úloh, v kategorii B 2 710 úloh a v kategorii C 10 745 úloh; celkem tedy 16 730 úloh, z nichž bylo 12 009 úspěšných.

B. Druhé kolo soutěže

Přehled o počtu soutěžících v druhém kole soutěže v kategoriích A, B, C podává tabulka II, uspořádaná opět podle krajů.

V tabulce II značí S počet soutěžících a U počet úspěšných řešitelů.

Údaje v tabulce II doplňujeme dalšími sděleními:

Z údajů uvedených v tabulce II je vidět, že do druhého kola soutěže se dostalo 31,22 % z celkového počtu soutěžících v prvním kole.

V druhém kole FO soutěžili v kategorii A žáci z 92 SVVŠ a 11 SPŠ, v kategorii B z 71 SVVŠ a 8 SPŠ, v kategorii C ze 137 SVVŠ a 42 SPŠ.

Z celkového počtu soutěžících v druhém kole bylo dívek: v kategorii A 44 (tj. 16,36 %), v kategorii B 49 (tj. 24,14 %) a v kategorii C 148 (tj. 24,42 %). Druhého kola soutěže se tedy zúčastnilo 231 dívek z celkového počtu 1 078 účastníků (tj. 21,43 %).

Tabulka II

Kraj	Kategorie A		Kategorie B		Kategorie C		Celkem	
	S	U	S	U	S	U	S	U
Hl. město Praha	52	51	26	21	48	40	126	112
Středočeský	18	11	8	3	32	11	58	25
Severočeský	17	17	18	9	68	32	103	58
Západočeský	15	15	9	7	27	13	51	35
Jihočeský	13	13	10	7	41	13	64	33
Východočeský	22	20	38	26	87	33	147	79
Severomoravský	25	21	21	20	41	16	87	57
Jihomoravský	50	39	20	11	73	27	143	77
Západoslovenský	23	18	6	5	43	16	72	39
Středoslovenský	12	9	11	10	35	19	58	38
Východoslovenský	22	15	36	22	111	92	169	129
Celkem	269	229	203	141	606	312	1 078	682

Úspěšných řešitelů v druhém kole bylo v kategorii A 85,1 %, v kategorii B 69,45 % a v kategorii C 51,5 %.

Z nich bylo dívek:

v kategorii A 32 ze 229 úspěšných řešitelů (tj. 13,97 %),
v kategorii B 27 ze 149 úspěšných řešitelů (tj. 19,15 %)
a v kategorii C 59 ze 312 úspěšných řešitelů (tj. 18,91 %).
Bylo tedy úspěšných 118 dívek z celkového počtu 682 úspěšných řešitelů (tj. 17,3 %).

Členové KV FO opravili ve druhém kole soutěže v kategorii A 1 066 úloh, v kategorii B 803 úlohy a v kategorii C 2 316 úloh, tedy celkem 4 295 úloh, z nichž bylo 2 405 úspěšných.

Pořadí prvních deseti úspěšných řešitelů druhého kola v kategoriích A, B a C (podle kraje)

Jména řešitelů z kategorie A, kteří postoupili do třetího kola soutěže jsou tištěna polotučně.

Kraj hl. město Praha

- A. **Drchal Václav**, SVVŠ Praha 7, Dimitrovovo nám.; **Komárek Tomáš**, SVVŠ Praha 10, Přípotoční; **Daneš Josef**, SVVŠ Praha 9, Lidových milicí; **Exner Pavel**, SPŠJT Praha 2, Ječná; **Kocbach Ladislav**, SVVŠ Praha 7, Dimitrovovo nám.; **Rehák Pavol**, SPŠJT Praha 2, Ječná; **Ambrož Zdeněk**, SVVŠ Praha 7, Dimitrovovo nám.; **Dubský František**, SVVŠ Praha 5, Na Žvahově; **Hrubý Jaroslav**, SVVŠ Praha 6, Velvarská; **Kučera Antonín**, SVVŠ Praha 7, Dimitrovovo nám.

Do třetího kola postoupili také další soutěžící:

- Kučera Luděk**, SPŠJT Praha 2, Ječná; **Kryl Rudolf**, SVVŠ Praha 1, Štěpánská; **Kulháněk Pavel**, SVVŠ Praha 5, Na Zatlance; **Martinec Ondřej**, SVVŠ Praha 9, Lidových milicí; **Pelnář Tomáš**, SVVŠ Praha 10, Přípotoční; **Slanec Jaroslav**, SPŠS Praha 8, Karlínské náměstí; **Souček Vladimír**, SVVŠ Praha 5, Na Zatlance; **Syrový Václav**, SPŠS Praha 8, Karlínské náměstí; **Hořejší Jana**, SVVŠ Praha 10, Přípotoční; **Hrdlička František**, SPŠJT Praha 2, Ječná; **Kostelecký Jiří**, SVVŠ Praha 7, Dimitrovovo náměstí; **Kulhavý Miroslav**, SPŠS Praha 8, Karlínské náměstí; **Lipták Josef**, SPŠJT Praha 2, Ječná; **Pommer Ivan**, SVVŠ Praha 5, Na Zatlance; **Vít Zdeněk**, SVVŠ Praha 2, W. Piecka. Mezi účastníky třetího kola byl ÚV FO vybrán z kraje hl. město Praha s. **Zemánek Jaroslav**, žák 2. roč. SVVŠ Praha 5, Na Zatlance, úspěšný řešitel druhého kola soutěže v kategorii A.
- B. **Kroha Petr**, SPŠE Praha 2, Ječná; **Bakos Viktor**, SPŠCH Praha 1, Křemencova; **Rohlíková Václava**, SVVŠ Praha 6, Velvarská; **Stránský Albert**, SVVŠ Praha 5, Na Zatlance; **Šmilauer Bohdan**, SVVŠ Praha 6, Parlčrova; **Strach Josef**, SPŠCH Praha 1, Křemencova;

Kostohryzová Eva, SVVŠ Praha 7, Dimitrovovo náměstí; Keder Josef, SVVŠ Praha 8, Kollárova; Pícek Pavel, SVVŠ Praha 6, Velvarská; Homolka Václav, SPŠCH Praha 1, Křemencova.

- C. Cífků Jan, SVVŠ Praha 6, Dlouhý lán; Černá Dana, SVVŠ Praha 5, Na Zatlance; Hlídka Pavel, SVVŠ Praha 4, Budějovická; Olexa Jan, SVVŠ Praha 7, Dimitrovovo náměstí; Oliva Jan, SVVŠ Praha 7, Dimitrovovo náměstí; Kuželka Jiří, SVVŠ Praha 7, Dimitrovovo náměstí; Krucký Bedřich, SPŠE Praha 2, Ječná; Veselý Jan, SVVŠ Praha 6, Velvarská; Hájiček Jaroslav, SVVŠ Praha 4, Školní; Jiřík Miloš, SVVŠ Praha 6, Velvarská.

Středočeský kraj:

- A. **Gregora Ivan**, SVVŠ Slaný; **Kunc Pavel**, SVVŠ Kladno; **Spěváček Jiří**, SVVŠ Benešov; **Kačerovský Antonín**, SPŠ Kutná Hora; Mužík Josef SVVŠ Hořovice; Kobylka Jan, SVVŠ Hořovice; Marek Jindřich, SVVŠ Beroun; Tichý Jan, SVVŠ Dobříš; Kubeš Petr, SVVŠ Říčany; Bureš Jindřich, SVVŠ Hořovice, Lišková Marie, SVVŠ Říčany.
- B. Vančura Jan, SVVŠ Český Brod; Hep Jaroslav, SVVŠ Český Brod; Nešetřil Jaroslav, SVVŠ Rakovník.
- C. Loula Vladimír, SVVŠ Nové Strašecí; Žaloudek Miroslav, SPŠ Čáslav; Rott Jiří, SPŠ hutnická Kladno; Adámek Zdeněk, SVVŠ Benešov; Kmínková Milena, SVVŠ Příbram; Bednář Jan, SVVŠ Benešov; Rádl Ivan, SVVŠ Kolín; Červ Václav, SVVŠ Votice; Hradec Jaromír, SVVŠ Uhlířské Janovice; Hrdlička Jiří, SPŠ Čáslav, Koudelková Marie, SVVŠ Čáslav.

Severočeský kraj:

- A. **Görlich Petr**, SPŠS Ústí nad Labem; **Petráš Petr**, SVVŠ Teplice; **Kmoníčková Jana**, SVVŠ Ústí nad

- Labem, Jateční; **Kužel Karel**, SVVŠ Ústí nad Labem, Na skřivánku; **Marek Jan**, SVVŠ Liberec; Baudyš Miroslav, SVVŠ Lovosice; Nováková Jana, SVVŠ Ústí nad Labem, Jateční; Pokorný Bohuslav, SVVŠ Liberec; Osvald Jiří, SVVŠ Ústí nad Labem, Jateční; Rödling Roman, SVVŠ Ústí nad Labem, Jateční.
- B. Kouřimský Jan, SVVŠ Ústí nad Labem, Na skřivánku; Novák Václav, SVVŠ Varnsdorf; Dvorská Jitka, SVVŠ Ústí nad Labem, Jateční; Kernerová Jitka, SVVŠ Ústí nad Labem, Jateční; Hirsch Heinz, SVVŠ Ústí nad Labem, Na skřivánku; Jirsa Miloš, SVVŠ Ústí nad Labem, Jateční; Šimová Marie, SVVŠ Teplice; Drbohlav Jan, SVVŠ Děčín; Pták Václav, SVVŠ Ústí nad Labem, Jateční.
- C. Šidlichovský Miloš, SVVŠ Liberec; Hyka Josef, SPŠCH Ústí nad Labem; Mainzer Jan, SVVŠ Teplice; Šnorek Miroslav, SVVŠ Ústí nad Labem, Jateční; Štefek Pavel, SPŠ Chomutov; Sobolík Václav, SPŠS Ústí nad Labem; Čermák Karel, SVVŠ Teplice; Haase Lubomír, SVVŠ Ústí nad Labem, Jateční; Koucký Jiří, SVVŠ Jablonec; Vudmaska Jaroslav, SVVŠ Teplice.

Západočeský kraj:

- A. **Kadlec Jaroslav**, SVVŠ Karlovy Vary; **Boháček Ivan**, SVVŠ Stříbro; **Bartůňková Blažena**, SVVŠ Karlovy Vary; Šíp František, SVVŠ Cheb; Trneček Josef, SVVŠ Ostrov; Králík Vladimír, SVVŠ Mariánské Lázně; Jung Václav, SVVŠ Klatovy; Černožorská Božena, SVVŠ Karlovy Vary; Svoboda František, SVVŠ Blovice; Opatrný Jaroslav, SVVŠ Blovice.
- B. Verner Břetislav, SVVŠ Rokycany; Hlaváč Zdeněk, SVVŠ Rokycany; Plas Jaroslav, SVVŠ Ostrov nad Ohří; Gotthard Jaroslav, SVVŠ Karlovy Vary; Štěpáníková Jiřina, SVVŠ Horažďovice; Martinec Milan, SVVŠ Karlovy Vary; Slavíková Marie, SVVŠ Cheb.

- C. Steiner Václav, SVVŠ Stříbro; Sýkora Bedřich, SVVŠ Plzeň, náměstí Odborářů; Barčí Petr, SVVŠ Ostrov; Novotný Jiří, SVVŠ Plzeň, ulice Pionýrů; Breník Přemysl, SVVŠ Plzeň, ulice Pionýrů; Karásek Petr, SVVŠ Plzeň, ulice Pionýrů; Plommerová Jana, SVVŠ Karlovy Vary; Syka Jan, SVVŠ Blovice; Hotový Josef, SVVŠ Karlovy Vary; Bok Josef, SVVŠ Karlovy Vary.

Jihočeský kraj:

- A. **Pelišek Antonín**, SVVŠ Písek; **Hájek Karel**, SVVŠ Strakonice; **Matzner Jan**, SVVŠ České Budějovice; Hes Jan, SVVŠ Dačice; Plucar Jaroslav, SVVŠ Dačice; Fencel Pavel, SVVŠ České Budějovice; Havlík Lubomír, SVVŠ Dačice; Svoboda Karel, SVVŠ Dačice; Novotný Oldřich, SVVŠ Dačice; Svoboda Alois, SVVŠ Týn nad Vltavou.
- B. Kubeš Jaroslav, SVVŠ České Budějovice; Macek Bohumil, SVVŠ Strakonice; Pavlíček Pavel, SVVŠ České Budějovice; Milička Eduard, SVVŠ Strakonice; Štefl Bohumír, SVVŠ České Budějovice; Chyšková Helena, SVVŠ Strakonice; Jandíková Ludmila, SVVŠ České Budějovice.
- C. Vaníček Jiří, průmyslová škola pro pracující Sezimovo Ústí; Pilný Ladislav, SVVŠ Strakonice; Strachota Jiří, SVVŠ Kamenice nad Lipou; Pták Pavel, SVVŠ Písek; Kofroň Jan, SVVŠ Písek; Pištěk Václav, SVVŠ Pelhřimov; Poráková Milada, SVVŠ České Budějovice; Böhm Zdeněk, SVVŠ České Budějovice; Holek Jan, SVVŠ Tábor; Bašíková Dagmar, SVVŠ Písek.

Východočeský kraj:

- A. **Hartman Miroslav**, SVVŠ Hradec Králové; **Sandler Karel**, SVVŠ Česká Třebová; **Vosáhlo Jiří**, SVVŠ Jičín; **Semerád Václav**, SVVŠ Přelouč; **Jiráček Zdeněk**,

SVVŠ Hradec Králové; **Havel Miloslav**, SVVŠ Nová Paka; **Prchalová Milena**, SVVŠ Vysoké Mýto; Liteřová Pavla, SVVŠ Semily; Horáček Jiří, SVVŠ Nová Paka; Zedková Jitka, SVVŠ Hradec Králové.

B. Havel Miroslav, SVVŠ Pardubice, nám. Slov. povstání; Holoubek Vlastimil, SVVŠ Havlíčkův Brod; Fiedler Jaroslav, SVVŠ Ústí nad Orlicí; Mráz Jindřich, SVVŠ Hradec Králové; Václavík Ivan, SVVŠ Hradec Králové; Laštovka Jan, SVVŠ Pardubice, nám. Slov. povstání; Rychter Jiří, SVVŠ Hradec Králové; Vrabec Rudolf, SVVŠ Hradec Králové; Růžička Ivan, SVVŠ Pardubice, náměstí Slov. povstání; Rykrová Jaroslava, SVVŠ Hradec Králové.

C. Řezníček Miroslav, SVVŠ Hradec Králové; Holan Pavel, SVVŠ Hradec Králové; Friedberger Zdeněk, SVVŠ Hradec Králové; Nechvilová Zdenka, SVVŠ Pardubice; Vyskočil Adolf, SVVŠ Hradec Králové; Jánský Bohumil, SVVŠ Hradec Králové; Macháně Jaroslav, SVVŠ Hradec Králové; Židková Květoslava, SVVŠ Chrudim; Janoušek Petr, SVVŠ Hlinsko; Filippov Ivan, SVVŠ Hradec Králové.

Severomoravský kraj:

A. **Rýdl Miloslav**, SVVŠ Lipník nad Bečvou; **Němčíková Libuše**, SVVŠ Opava; **Lednický Richard**, SVVŠ Nový Bohumín; Vénos Drahomír, SVVŠ Zábřeh na Moravě; **Juránek Josef**, SVVŠ Olomouc — Hejčín; Velík Jaroslav, SVVŠ Rýmařov; Rozsypal František, SVVŠ Zábřeh na Moravě; Kolář Aleš, SVVŠ Hranice; Hobza Jaroslav, SVVŠ Olomouc — Hejčín; Obšel Jaroslav, SVVŠ Litovel.

B. Ženčáková Libuše, SVVŠ Olomouc, třída Jiřího z Poděbrad; Jánoš Petr, SVVŠ Ostrava 1; Čimbura Vilém, SVVŠ Ostrava 1; Směja Jaromír, SVVŠ Opava; Opravil

František, SVVŠ Havířov; Žárský Bohumil, SVVŠ Ostrava 1; Vrbenský Karel, SVVŠ Ostrava 1; Borek Aleš, SVVŠ Přerov; Doležalová Marta, SVVŠ Ostrava 1; Slaměník Jan, SVVŠ Havířov.

- C. Dvořáček Jaroslav, SVVŠ Přerov; Běták Emil, SVVŠ Ostrava 1; Chytil Josef, SVVŠ Litovel; Koplík Raimund, SVVŠ Přerov; Mareš Václav, SVVŠ Vsetín; Neumajer Václav, SVVŠ Olomouc, třída Jiřího z Poděbrad; Šantavý Jiří, SVVŠ Olomouc, třída Jiřího z Poděbrad; Kobělka Zdeněk, SVVŠ Ostrava 1; Stankuš Pavel, SVVŠ Opava; Hustý Jaroslav, SVVŠ Zábřeh na Moravě.

Jihomoravský kraj:

- A. **Ošmera Pavel**, SPŠE Brno, Leninova; **Vašek Lubomír**, SVVŠ Gottwaldov; **Berka Ivan**, SVVŠ Prostějov; **Hanzálek Petr**, SVVŠ Znojmo; **Pokorný Igor**, SVVŠ Brno, Elgart.; **Vrbík Jan**, SVVŠ Vyškov; **Dratva Alois**, SVVŠ Prostějov; **Skula Jan**, SVVŠ Uher. Hradiště; **Hloušek Frant.**, SVVŠ Brno, Elgart.; **Šimková Drah.**, SVVŠ Znojmo.

Do třetího kola postoupil ještě **Jiří Vocílka**, SVVŠ Znojmo.

- B. Klapka Lubomír, SVVŠ Brno, Elgart.; Opichal Mojmír, SPŠCh Brno, Vranov.; Šibrava Milan, SVVŠ N. Město na Mor.; Ovčář Miroslav, SVVŠ Gottwaldov; Handlíř Jiří, SPŠE Brno, Leninova; Zbořil Antonín, SVVŠ Vyškov; Drábek Vlad., SVVŠ Brno, Elgart.; Nečas František, SVVŠ Brno, Elgart.; Macenauer Jiří, SPŠE Brno, Leninova; Procházková Vladana, SVVŠ Gottwaldov; Trstěný Pavel, SVVŠ Vyškov.
- C. Brodský Jan, SVVŠ Brno, Lerch.; Handlíř Jiří, SPŠE Brno, Leninova; Madroň František, SPŠCh Brno, Vranov.; Trávníček Stanislav, SZTŠ Třebíč; Hebst

Eduard, SVVS Brno, Lerch.; Mareš Miroslav, SZTS Telč; Smrž Jan, SPŠ Jihlava; Ryšavý Miloš, SVVŠ Jihlava; Henc Karel, SVVŠ Brno, Koněvova; Černý Eduard, SPŠE Brno, Leninova.

Západoslovenský kraj:

- A. **Pohánka Vladimír**, SVŠ Bratislava, Novohradská ulica; **Kopál Oto**, SVŠ Partizánske; **Zajac Zdeno**, SVŠ Bratislava, Novohradská ulica; **Prešnajder Peter**, SVŠ Sereď; **Hudec Roman**, SVŠ Bratislava, Novohradská ulica; Pišútová Anna, SVŠ Bratislava, Vazovova ulica; Toth Štefan, SVŠ Trnava, Hollého ulica; Ďurman Vladimír, SVŠ Bratislava, Novohradská ulica; Mucha Vojtech, SVŠ Bratislava, Novohradská ulica; Šandrik Štefan, SVŠ J. Gudernu, Nitra.
- B. Hanuš Peter, SVŠ Bratislava, Metodova ulica; Števula Ervín, SVŠ Zlaté Moravce; Materák Milan, SVŠ Bratislava, Metodova ulica; Zvalová Júlia, SVŠ Bratislava, Metodova ulica; Tilajcsík Arpád, SVŠ Dunajská Streda.
- C. Merjavý Štefan, SVŠ Bratislava, Dubová ulica; Marcišová Tamara, SVŠ Bratislava, Novohradská ulica; Bezek Ján, SVŠ Bratislava, Vazovova ulica; Kováč Gustáv, SVŠ Trnava, Hollého ulica; Petruška Ján, SVŠ Bratislava, Vazovova ulica 6; Kováč Ivan, SVŠ Levice; Závodská Eva, SVŠ Bratislava, Dubová ulica; Horský Martin, SVŠ J. Gudernu, Nitra; Stein Juraj, SPŠCh Bratislava; Pivková Kristína, SVŠ Bratislava, Dubová ulica.

Stredoslovenský kraj:

- A. **Hrdina Milan**, SVŠ Žilina; **Škovránek Matej**, SVŠ Žilina; **Petrovič Pavol**, SVŠ Hnúšťa; Jamnický Igor, SVŠ Banská Bystrica; Kmeť Július, SVŠ Banská Bystrica; Štalmach Valdemar, SVŠ Žilina; Mihálik Peter, SVŠ

Žilina; Korous Jozef, SVŠ Žilina; Buková Mária, SVŠ Banská Bystrica.

- B. Mihálik Ľubomír, SVŠ Žilina; Pfliegel Miroslav, SVŠ Žilina; Bačkor Štefan, SVŠ Dolný Kubín; Králik Ján, SVŠ Zvolen; Štofko Stanislav, SVŠ Žilina; Ivantyšin Roman, SPŠCh Banská Štiavnica; Dányi Štefan, SVŠm Šafárikovo; Uhrinčať Vladimír, SPŠt Ružomberok; Sitár Branislav, SVŠ Banská Bystrica; Repiský Milan, SVŠ Zvolen.
- C. Jasenek Jozef, SVŠ Námestovo; Mráz Ivan, SVŠ Martin; Šcepko Pavol, SVŠ Banská Bystrica; Sahulová Edita, SVŠ Trstená; Čermák Bohuslav, SVŠ Martin; Žmijaková Jana, SVŠ Trstená; Fúrik František, SVŠ Dolný Kubín; Rác Milan, SPŠsp Banská Bystrica; Mydliar Ján, SVŠ Handlová; Kalinčák Daniel, SPŠ Martin.

Východoslovenský kraj:

- A. **Filka Štefan**, SVŠ Košice, Šrobárova; **Hornanský Ľudovít**, SVŠ Prešov, Svojdovcov 1; **Forgáč Ladislav**, SVŠ Prešov, Svojdovcov 1; **Hell Pavol**, SPŠE Košice, Komenského 42; **Bacur Milan**, SPŠE Košice, Komenského 42; **Gont Pavol**, SVŠ Prešov, Svojdovcov 1; **Kováč Milan**, SPŠE Košice, Komenského 42; **Hancín Štefan**, SPŠE Košice, Komenského 42; **Bariak Bohuslav**, SPŠE Košice, Komenského 42; Tkačík Milan, SVŠ Prešov, Svojdovcov 1.
- B. Paľovčík Anton, SVŠ Michalovce; Novotná Jarmila, SVŠ Trebišov; Cifráníčová Marta, SVŠ Trebišov; Sochor Ivan, SVŠ Trebišov; Košara Michal, SVŠ Trebišov; Rizmanová Elena, SVŠ Trebišov; Feňáková Katarína, SVŠ Trebišov; Sedlák Anton, SVŠ Prešov, Svojdovcov 1; Čemsáková Marta, SVŠ Humenné; Gecková Marta, SVŠ Michalovce.
- C. Výrostko Josef, SVŠ Košice, Kováčská 28; Benická

Viera, SVŠ Košice, Kováčska 28; Glatz Andrej, SVŠ Košice, Kováčska 28; Telgarský Bohdan, SVŠ Košice, Kováčska 28; Arató Andrej, SVŠ Košice, Kováčska 28; Bleichová Júlia, SVŠ Prešov, Svojdodomov 1; Vavreková Darina, SVŠ Prešov, Svojdodomov 1; Harničáková Erna, SVŠ Kežmarok; Ščerbová Jozefína, SVŠ Michalovce; Krotký Stanislav, SVŠ Sp. Nová Ves.

C. Třetí kolo soutěže

Z 229 úspěšných řešitelů druhého kola ve všech krajích bylo ÚV FO vybráno 81 žáků, kteří byli pozváni k účasti ve třetím kole soutěže. Celkový počet 81 tvořilo 65 žáků ze středních všeobecně vzdělávacích škol (SVVŠ, SVŠ) a 26 ze škol průmyslových. Ve 3. kole IV. ročníku FO splnilo celkem 70 soutěžících podmínky úspěšných řešitelů. Z nich prvních 20, kteří byli označeni za vítěze, byli odměněni věcnými cenami podle vlastního výběru.

V tabulce III je uveden přehled o účasti a umístění účastníků 3. kola podle jednotlivých krajů.

Tabulka IV podává přehled o klasifikaci řešení jednotlivých úloh třetího kola.

Vítězové třetího kola v kategorii A:

- | | | |
|-------|--------------------------|------------------------------------|
| 1. | <i>Skula Jan</i> | SVVŠ Uherské Hradiště; |
| 2.—3. | <i>Drchal Václav</i> | SVVŠ Praha 7, Dimitrovovo nám. 34; |
| 2.—3. | <i>Kučera Luděk</i> | SPŠJT Praha 2, Ječná 30; |
| 4. | <i>Berka Ivan</i> | SVVŠ Prostějov, Kollárova 3—4; |
| 5.—6. | <i>Kochbach Ladislav</i> | SVVŠ Praha 7, Dimitrovovo nám. 34; |

Tabulka III

Kraj:	Celkem účastníků			Vítězové (pořad. č. 20)			Další úspěšní řešitelé (pořad. č. 21 – 56)		
	Hoši	Dívky	Celkem	Hoši	Dívky	Celkem	Hoši	Dívky	Celkem
Hl. město Praha	26	1	27	12	—	12	12	—	12
Středočeský	4	—	4	1	—	1	2	—	2
Severočeský	4	1	5	—	—	—	3	—	3
Západočeský	2	1	3	—	—	—	2	1	3
Jihočeský	3	—	3	—	—	—	3	—	3
Východočeský	6	1	7	1	—	1	4	1	5
Severomoravský	3	1	4	—	—	—	3	1	4
Jihomoravský	10	1	11	5	—	5	5	1	6
Západoslovenský	5	—	5	1	—	1	4	—	4
Středoslovenský	3	—	3	—	—	—	1	—	1
Východoslovenský	9	—	9	—	—	—	7	—	7
Celkem	75	6	81	20	—	20	46	4	50

Tabulka IV

Známka		1 (výborně)	2 (dobře)	3 (nevýhovuje)	Průměr. známka	Úloha
1. příklad	počet	21	32	28	2,09	z mechaniky z hydrostatiky a mechaniky z elektřiny experimentální z geom. optiky
2. příklad	počet	47	14	20	1,67	
3. příklad	počet	10	12	59	2,60	
4. příklad	počet	20	59	2	1,78	
Celkem		98	117	109	2,03	

- | | | |
|---------|--------------------------|--|
| 5.—6. | <i>Zemánek Jaroslav</i> | SVVŠ Praha 5, Na Zatlace 11; |
| 7. | <i>Vašek Lubomír</i> | SVVŠ Gottwaldov, Nám. RA 1334; |
| 8. | <i>Pokorný Igor</i> | SVVŠ Brno, Elgartova 5; |
| 9. | <i>Rehák Pavel</i> | SPŠJT Praha 2, Ječná 30; |
| 10.—11. | <i>Exner Pavel</i> | SPŠJT Praha 2, Ječná 30; |
| 10.—11. | <i>Gregora Ivan</i> | SVVŠ Slaný; |
| 12. | <i>Kopál Oto</i> | SVŠ Partizánske; |
| 13.—14. | <i>Ambrož Zdeněk</i> | SVVŠ Praha 7, Dimitrovovo nám. 34; |
| 13.—14. | <i>Žirák Zdeněk</i> | SVVŠ Hradec Králové; |
| 15. | <i>Martinec Ondřej</i> | SVVŠ Praha 9, nám. Lidových milicí 19; |
| 16. | <i>Daneš Josef</i> | SVVŠ Praha 9, nám. Lidových milicí 19; |
| 17.—18. | <i>Hloušek František</i> | SVVŠ Brno, Elgartova 3; |
| 17.—18. | <i>Komárek Tomáš</i> | SVVŠ Praha 10, Přípotoční; |
| 19. | <i>Kostelecký Jiří</i> | SVVŠ Praha 7, Dimitrovovo nám. 34; |
| 20. | <i>Dubský František</i> | SVVŠ Praha 5, Pod Žvahovem; |

*Další úspěšní řešitelé třetího kola v kategorii A
(v pořadí podle klasifikace řešení):*

- | | | |
|---------|-------------------------|-------------------------------|
| 21. | <i>Vrbík Jan</i> | SVVŠ Vyškov; |
| 22.—23. | <i>Pohánka Vladimír</i> | SVŠ Bratislava, Novohradská; |
| 22.—23. | <i>Kováč Milan</i> | SPŠ Košice; |
| 24.—27. | <i>Hell Pavol</i> | SPŠ Košice; |
| 24.—27. | <i>Ošmera Pavel</i> | SPŠEL Brno, Leninova 40; |
| 24.—27. | <i>Sandler Karel</i> | SVVŠ Česká Třebová; |
| 24.—27. | <i>Vosáhlo Jiří</i> | SVVŠ Jičín; |
| 28.—29. | <i>Hanzálek Petr</i> | SVVŠ Znojmo, Komenského č. 4; |

- 28.—29. *Prešnajder Peter* SVŠ Sered;
 30. *Slanec Jaroslav* SPŠS Praha 8, Karlínské nám.
 č. 8;
 31. *Lednický Richard* SVVŠ Nový Bohumín;
 32.—35. *Boháček Ivan* SVVŠ Stříbro;
 32.—35. *Forgáč Ladislav* SVŠ Prešov;
 32.—35. *Lipták Josef* SPŠJT Praha, Ječná 30;
 32.—35. *Vocilka Jiří* SVVŠ Znojmo, Komenského
 č. 4;
 36.—39. *Hudec Roman* SVVŠ Bratislava, Novohrad-
 ská ul.;
 36.—39. *Kryl Rudolf* SVVŠ Praha 1, Štěpánská 22;
 36.—39. *Kučera Antonín* SVVŠ Praha 7, Dimitrovovo
 nám. 34;
 36.—39. *Spěváček Jiří* SVVŠ Benešov;
 40.—43. *Horňanský Ludovít* SVŠ Prešov;
 40.—43. *Juránek Josef* SVVŠ Olomouc-Hejčín;
 40.—43. *Kunc Pavel* SVVŠ Kladno, Švermovo nám.
 1573;
 40.—43. *Šimková Draho-
 míra* SVVŠ Znojmo, Komenského
 č. 4;
 44. *Havel Miloslav* SVVŠ Nová Paka;
 45. *Hrdina Milan* SVŠ Žilina;
 46. *Bariak Bohuslav* SPŠE Košice;
 47.—48. *Kulhavý Miroslav* SPŠS Praha 8, Karlínské nám.
 č. 8;
 47.—48. *Vít Zdeněk* SVVŠ Praha 2, Chodská 2;
 49.—50. *Hrdlička Frant.* SPŠJT Praha 2, Ječná 30;
 49.—50. *Prchalová Milena* SVVŠ Vysoké Mýto;
 51.—56. *Dratva Alois* SVVŠ Prostějov, Kollárova
 3—4;
 51.—56. *Kužel Karel* SVVŠ Ústín/L., Na Skřivánku;
 51.—56. *Matzner Jan* SVVŠ Čes. Budějovice, Zát-
 kova ul.;

51.—56. <i>Pelišek Antonín</i>	SVVŠ Písek;
51.—56. <i>Semerád Václav</i>	SVVŠ Přelouč;
51.—56. <i>Zajac Zdeno</i>	SVŠ Bratislava, Novohradská ul.;
57.—59. <i>Bacúr Milan</i>	SPŠE Košice;
57.—59. <i>Hájek Karel</i>	SVVŠ Strakonice;
57.—59. <i>Rýdl Miloslav</i>	SVVŠ Lipník n/B.;
60. <i>Pelnář Tomáš</i>	SVVŠ Praha 10, Přípotoční;
61.—62. <i>Bartůňková Blažena</i>	SVVŠ Karlovy Vary, nábr. Ant. Zápotockého 20;
61.—62. <i>Petráň Petr</i>	SVVŠ Teplice II, Čs. dobrovolců 2014;
63.—68. <i>Filka Štefan</i>	SVVŠ Košice;
63.—68. <i>Hrubý Jaroslav</i>	SVVŠ Praha 6, Velvarská 33;
63.—68. <i>Kulhánek Pavel</i>	SVVŠ Praha 5, Na Zatlance 11;
63.—68. <i>Němčíková Libuše</i>	SVVŠ Opava, Komenského 5;
63.—68. <i>Souček Vladimír</i>	SVVŠ Praha 5, Na Zatlance 11;
63.—68. <i>Vosátka Petr</i>	SVVŠ Praha 8, Kollárova 5;
69.—70. <i>Görlích Petr</i>	SPŠS Ústí n/L., Resslova 5;
69.—70. <i>Kadlec Jaroslav</i>	SVVŠ Karlovy Vary, nábr. Ant. Zápotockého 20.

7. SROVNÁNÍ ÚČASTI SOUTĚŽÍČÍCH V JEDNOTLIVÝCH ROČNÍCÍCH

V následujících tabulkách uvádíme pro srovnání počty soutěžících a úspěšných řešitelů v kategoriích A, B, C v I. až IV. ročníku.

Tabulky V, VI, VII

Vysvětlivky: S počet soutěžících
U počet úspěšných řešitelů

Přehled o počtu soutěžících v 1. kole:

Ročník	Kategorie A		Kategorie B		Kategorie C		Celkem	
	S	U	S	U	S	U	S	U
I.	1213	478	788	255	1202	348	3203	1081
II.	608	269	509	163	822	266	1939	698
III.	692	365	436	149	1112	357	2240	871
IV.	711	305	572	229	2169	742	3452	1276

Přehled o počtu soutěžících v 2. kole:

Ročník	Kategorie A		Kategorie B		Kategorie C		Celkem	
	S	U	S	U	S	U	S	U
I.	418	241	266	121	312	177	956	539
II.	249	138	147	103	240	155	636	396
III.	305	160	135	75	267	119	707	354
IV.	269	229	204	141	606	312	1079	682

Přehled o počtu soutěžících v 3. kole:

Ročník	Kategorie A	
	S	U
I.	80	27
II.	71	56
III.	80	50
IV.	81	70

8. ZÁVĚRY Z PRŮBĚHU ČTVRTÉHO ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY

Soutěž čtvrtého ročníku FO probíhala vcelku hladce a byla úspěšná. Na školách se FO užívá a žáci, učitelé a také rodiče žáků oceňují její význam a hodnotu mnohem více a příznivěji, než tomu bylo v prvních ročnících soutěže. Je to patrné i na závěrečných besedách pořádaných krajskými výbory FO po ukončení druhého kola soutěže. Těchto slavnostních besed se účastní rok od roku větší počet učitelů i rodičů soutěžících žáků. Také školské odbory KNV a ONV projevovaly průběhem letošního ročníku větší zájem o FO, než tomu bylo v předcházejících letech. Ochotně a často i iniciativně pomáhaly při organizaci soutěže. Největší zásluhu o hladký průběh soutěže však mají KV FO, učitelé fyziky a ředitelé škol, krajské ústavy pro další vzdělání učitelů při KNV a školní inspektoři.

Propagace FO je prováděna v krajských i celostátních časopisech a novinách. Jednota československých matematiků a fyziků propaguje soutěž v časopisech Rozhledy matematicko-fyzikální a Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Státní pedagogické nakladatelství uveřejnilo propagační článek o FO v bulletinu My a čtenáři a Československý rozhlas zařadil v březnu 1963 na stanici Praha do svého pořadu besedu s účastníky krajského kola soutěže.

Krajské výbory FO konají v některých krajích instruktáže k soutěži, a to jednak pro učitele, jednak pro žáky. Tyto instruktáže se zvláště osvědčily tam, kde se probírají a diskutují širší fyzikální problémy než ty, které se bezprostředně vztahují k soutěži. Na některých školách byly zřízeny a pravidelně se scházely kroužky FO, které byly hojně navštěvovány.

Největší účast v soutěži čtvrtého ročníku měl KV FO

hl. města Prahy. Je to patrné z tabulek I, II, a hlavně z tabulky III. Celostátního kola soutěže se účastnilo z celkového počtu 81 účastníků 27 žáků pražských škol a z těchto 27 žáků ukončilo soutěž třetího kola úspěšně 25 žáků. Mezi prvními dvaceti vítězi je 12 žáků, tj. 60 %, z Prahy. Je také zajímavé, že ústřední kolo soutěže absolvovalo úspěšně 70 žáků, mezi nimiž je však úspěšných řešitelů z venkovských měst s jednou střední všeobecně vzdělávací školou jen 19 (27 %). Zdá se tedy, že kulturní a průmyslové prostředí velkých měst je příznivé pro probuzení zájmu o fyziku a že poskytuje žákům větší možnosti k rozvíjení a rozšíření jejich vědomostí a schopností.

Ze zpráv z jednotlivých krajů je patrné, že nejúspěšnějšími v soutěži jsou žáci z těch škol a tříd, kde jsou dobře vedeni svými učiteli fyziky a matematiky. V takovýchto třídách se vyskytují i větší skupiny žáků se zájmem o fyziku; tito žáci jsou úspěšní ve všech kolech soutěže.

Celkově je možno říci, že kvalita řešení úloh je letos ve srovnání s minulými lety lepší. Velká většina úloh se řeší nejprve obecně, a to i v kategorii C, jednotlivé kroky při řešení úlohy jsou odůvodňovány, i když někdy ne zcela přesně a správně, a v numerickém řešení úloh je počítáno i s rozměry fyzikálních veličin. Tím byly z velké části odstraněny nejzávažnější chyby, které se v dřívějších letech vyskytovaly. Zlepšení kvality řešení úloh je jednou z hlavních příčin zvýšení počtu úspěšných řešitelů třetího kola soutěže v letošním školním roce, jak je nejlépe patrné z tabulky V, srovnáme-li v ní výsledky IV. ročníku FO s výsledky ročníků minulých.

Vedle teoretických úloh jsou ve všech kolech soutěže zařazeny i úlohy experimentální a polytechnické. Řešením experimentálních úloh se vychovávají žáci k přesnosti, neboť jen svědomitým a pečlivým provedením měření je možno dojít k vyhovujícím výsledkům. V experimentálních úlohách,

jež se obvykle vztahují k studijním textům, mají žáci ukázat, jak ovládají látku těchto textů, kterou měli během prvního kola soutěže samostatně nastudovat. Jsou tedy nuceni k samostatnému studiu, bez něhož by nemohli prospívat na vysokých školách. Žák, který svědomitě prostuduje příslušný studijní text, je vlastně připraven k řešení jedné úlohy druhého, popřípadě třetího kola. Tím má umožněno lepší umístění v druhém nebo třetím kole soutěže. Poněvadž však je tato možnost poskytována všem žákům stejně, nelze zařazení experimentální úlohy, vztahující se ke studijnímu textu, pokládat za vadu soutěže.

Vedle kladů je nutno upozornit i na některé nedostatky, jež se projeví během soutěže.

Zvětšením rozlohy krajů se značně rozšířily oblasti působnosti krajských výborů FO, což vedlo v minulých letech a také v letošním roce ke ztížení organizační činnosti KV FO. Krajské výbory FO mohou nyní provádět propagaci Fyzikální olympiády obtížněji a v menší míře, než tomu bylo dříve. Mnozí učitelé si dosud dobře neuvědomují význam soutěže FO, nevěnují se dostatečně její propagaci ve škole, a proto je na některých školách, někdy i v celých krajích, velmi málo účastníků soutěže. Důvodem nezájmu učitelů fyziky o soutěž FO bývá přílišné zatížení jinými činnostmi nebo funkcemi ve škole i mimo školu; jsou i takové případy, že učitelé málo propagují soutěž FO proto, že činnost v FO není ani řediteli škol, ani školskými úřady náležitě oceňována.

Velmi vážně brzdí rozšíření a zkvalitnění soutěže velký počet neaprobovaných učitelů, kteří vyučují fyzice; je to hlavně na venkovských školách. Žáci z takových škol se soutěže účastní jen výjimečně a kvalita jejich řešení je většinou podprůměrná.

Vážné narušení soutěže způsobilo prodloužení pololetních prázdnin. Na některých SVVŠ, zejména tam, kde

žáci druhých tříd odjeli hned po prodloužených pololetních prázdninách na výcvikový zájezd do hor, nebyla v době konání druhého kola soutěže ještě probrána akustika; do soutěže druhého kola FO byla však zařazena jedna úloha z této partie učiva.

Nedostatky a závady jsou také na straně žáků. I když se v podstatě kvalita řešení úloh zlepšila, je ještě mnoho žáků, kteří odkládají řešení úloh až na poslední chvíli a pak zpracují řešení nedbale nebo je neodevzdají včas. Učitelé většinou trpí odevzdávání vypracovaných úloh až po termínu, opravují je pak ve chvatu a následkem toho přehlíží častou i hrubé chyby v řešení. Tím se velmi ztěžuje činnost KV FO a zhoršuje kvalita soutěže.

9. STUDIJNÍ TEXTY PRO PRVNÍ KOLO ČTVRTÉHO ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY

TÉMA K PROSTUDOVÁNÍ PRO PRVNÍ KOLO SOUTĚŽE KATEGORIE A

Zobrazení soustavou centrovaných kulových ploch; hlavní roviny a uzlové body

(Zpracoval prof. dr. Rostislav Košťál s kolektivem spolupracovníků)

a) Geometrická optika je probírána za zjednodušujících podmínek, že zobrazovací paprsky jsou blízké optické ose; tyto paprsky nazýváme *paprsky nulové* nebo *paraxiální*. Prostor, na který se omezujeme, nazývá se *Gaussův prostor*. Na Gaussův prostor lze se omezit vhodnou volbou clon.

Pak můžeme ve vztahu Snelliově a dalších vztazích psát místo funkcí sinus a tangens přímo úhly měřené v obloukové míře.

Při zobrazování čočkami se pro zjednodušení vedle toho předpokládá, že čočky jsou nekonečně tenké; tento předpoklad však není nikdy splněn.

Nesplnění prvního předpokladu — omezení na prostor Gaussův — vede k odchýlkám, které označujeme jako vady čoček. Druhý předpoklad o čočkách vede k nepřesnostem při určování ohniskových vzdáleností. Ukážeme proto, jak musíme měřit veličiny vyskytující se v zobrazovacích rovnicích pro nekonečně tenké čočky, abychom jich mohli užít přesně i pro čočky konečné tloušťky. Tuto otázku budeme řešit nejdříve obecně.

Zavedeme pojem *soustavy centrovaných kulových ploch*. Jde o soustavu, u níž jsou středy křivosti všech kulových ploch na jedné přímce — tzv. *optické ose*. Jednotlivé plochy oddělují prostředí s různými indexy lomu a poslední prostředí může mít i jiný index lomu než prostředí první.

Při zobrazování si zvolíme chod paprsků zleva doprava, takže předmětový prostor je od zobrazovací soustavy vlevo. Nyní si zvolíme libovolný bod v předmětovém prostoru první lámavé plochy a vytvoříme jeho obraz první lámavou plochou. Tento obraz je předmětem pro druhou lámavou plochu; vytvoříme jeho obraz druhou lámavou plochou a postupujeme takto tak dlouho, až dostaneme obraz vytvořený poslední lámavou plochou. Tím dostaneme bod, který je obrazem daného bodu; těmto bodům říkáme body sdružené.

U každé lámavé plochy máme *ohnisko předmětové* a *obrazové*. Proto také celá soustava bude mít předmětové a obrazové ohnisko. Obrazové ohnisko celé soustavy dostaneme, když v prvním prostředí zvolíme na optické ose bod v nekonečnu, k němu sestrojíme obraz první lámavou plochou, pak k tomuto obrazu jako k předmětu obraz druhou lámavou

plochou, a tak postupujeme dále, až dostaneme obraz v posledním prostředí. Tento bod je obrazem bodu v nekonečnu v prvním prostředí, vytvořený všemi lámavými plochami; je proto obrazovým ohniskem celé soustavy kulových ploch.

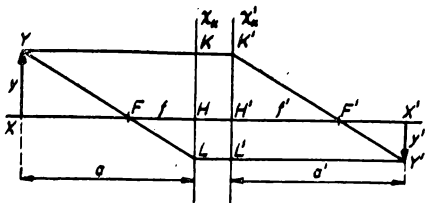
Potom zvolíme bod na optické ose v nekonečnu v posledním prostředí a hledáme předmět, jehož obrazem by byl tento zvolený bod. Najdeme nejprve předmět, jehož obraz vytvořený poslední lámavou plochou je zvolený bod v nekonečnu, pak k tomuto bodu jako k obrazu najdeme předmět vytvořený předposlední plochou a tak postupujeme dále, až dostaneme předmět v prvním prostředí, jehož obraz je v nekonečnu v posledním prostředí. Dostali jsme tak předmětové ohnisko celé soustavy kulových ploch. Roviny proložené ohnisky kolmo k optické ose jsou *ohniskové roviny*. Ohnisková rovina předmětová je sdružena k rovině obrazové v nekonečnu a ohnisková rovina obrazová je sdružena k rovině předmětové v nekonečnu.

Dále se dají najít dvě roviny kolmé k optické ose té vlastnosti, že předmět v jedné rovině se zobrazuje v druhé rovině přímý a stejně velký. Tyto roviny nazýváme *kladné hlavní roviny* centrované soustavy kulových ploch, a to rovinu, v níž je předmět, kladnou hlavní rovinou *předmětovou* a rovinu, v níž je obraz, kladnou hlavní rovinou *obrazovou*. Proto libovolný bod kladné hlavní roviny předmětové má obraz v kladné hlavní rovině obrazové stejně daleko od optické osy a na téže straně optické osy. Leží v rovině určené optickou osou a zvoleným bodem předmětové kladné hlavní roviny. Proto předmětový paprsek protínající kladnou hlavní rovinu předmětovou musí mít za obraz paprsek, který prochází sdruženým bodem v kladné hlavní rovině obrazové.

Při konstrukci obrazu použijeme vlastností ohniskových a hlavních rovin. Soustavu centrovaných ploch nahradíme ohniskem předmětovým F , ohniskem obrazovým F' , kladnou hlavní rovinou předmětovou χ_K a kladnou hlavní ro-

vinou obrazovou χ'_K . Záleží nyní na vzájemné poloze ohnisek F , F' a kladných hlavních rovin χ_K , χ'_K . Může nastat mnoho případů. Zobrazení provedeme na seskupení ohnisek a hlavních rovin zakresleném na obr. 3.

K danému bodu Y sestrojíme ve všech případech obraz užítím těchto dvou paprsků (obr. 3):



Obr. 3

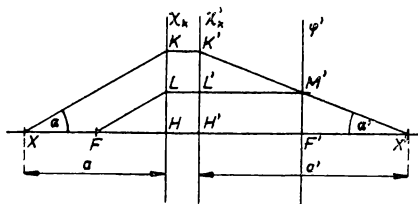
1. Bodem Y vedeme paprsek rovnoběžně s optickou osou. Optickou osu protne v nekonečnu a tomuto bodu přísluší jako obraz ohnisko F' . Kladnou hlavní rovinu předmětovou protne v bodě K , jehož obraz je K' . Proto obraz paprsku musí procházet bodem K' a F' .

2. Bodem Y vedeme paprsek jdoucí ohniskem předmětovým F ; tento paprsek protne kladnou hlavní rovinu předmětovou v bodě L . Bodu L přísluší obraz L' v kladné hlavní rovině obrazové a ohnisku F bod v nekonečnu na optické ose. Proto obrazem paprsku YF bude paprsek jdoucí bodem L' rovnoběžně s optickou osou.

Bod Y leží na obou uvedených paprscích. Proto v průsečíku obrazů obou paprsků je obraz bodu Y' . Každý paprsek jdoucí bodem Y musí mít obraz jdoucí bodem Y' .

Důležité je si pamatovat: Spojovat můžeme jen body buď prostoru předmětového (tedy i s body na předmětové hlavní rovině), nebo jen body prostoru obrazového. Nesmíme spojovat bod z prostoru předmětového s bodem prostoru obrazového.

K libovolnému bodu X na optické ose sestrojíme obraz X' takto: Bodem X (obr. 4) vedeme libovolný paprsek XK a



Obr. 4

bodem F k němu rovnoběžku. Tyto rovnoběžky mají společný bod v nekonečnu a jeho obraz je v ohniskové rovině φ' . Paprsek jdoucí ohniskem F jde po lomu rovnoběžně s optickou osou a protíná ohniskovou rovinu obrazovou v bodě M' , jenž je obrazem jejich společného bodu v nekonečnu. Paprsek XK protíná kladnou hlavní rovinu předmětovou v bodě K a jeho obraz K' je v kladné hlavní rovině obrazové. Spojnice bodu K' s bodem M' dává lomený paprsek a jeho průsečík s optickou osou je bod X' , který je tedy obrazem bodu X .

b) Z obr. 3 můžeme odvodit i algebraické vztahy. Při jedné lámavé ploše splývají obě kladné hlavní roviny ve vrcholu kulové plochy. U soustavy centrovaných kulových ploch

čili

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1, \quad (1)$$

což je zobrazovací rovnice ve tvaru Gaussově (vztažená na hlavní body).

Dá se odvodit (nebudeme to však provádět), že poměr ohniskových vzdáleností $\frac{f}{f'}$ je roven poměru indexů lomu prostoru předmětového a obrazového $\frac{N}{N'}$. Když $N = N'$, musí být $f = f'$.

Dosadíme-li do (1)

$$a = f + x, \quad a' = f' + x',$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{f}{f+x} + \frac{f'}{f'+x'} &= 1, \\ ff' + fx' + ff' + f'x' &= ff' + fx' + f'x + xx', \\ xx' &= ff', \end{aligned} \quad (2)$$

což je zobrazovací rovnice ve tvaru Newtonově (vztažená na ohniska).

Pro *příčné zvětšení* $\frac{y'}{y}$ pak vychází z podobných trojúhelníků $\triangle YXF$ a $\triangle FHL$ a trojúhelníků $\triangle K'H'F'$ a $\triangle F'X'Y'$

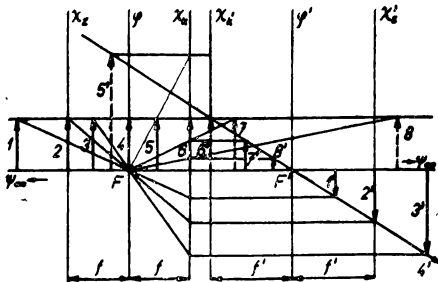
$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}. \quad (3)$$

Přísluší tedy bodu $Y(x, y)$ bod Y' o souřadnicích

$$x' = \frac{ff'}{x}, \quad y' = -\frac{f}{x}y.$$

Pro zobrazování musíme si především uvědomit toto:

Postupuje-li paprsek zleva doprava, pak prostor od kladné hlavní roviny předmětové vlevo je *prostor předmětový*, prostor od kladné hlavní roviny obrazové vpravo je *prostor obrazový*. Předmět v prostoru předmětovém je *předmět skutečný*, předmět mimo prostor předmětový je *předmět zdánlivý*. Jestliže dostaneme obraz v prostoru obrazovém, jde o *obraz skutečný*, vyjde-li mimo prostor obrazový, je *obraz zdánlivý*. Jestliže se paprsky v prostoru obrazovém obrátí (např. zrcadlem) a jdou znovu na zobrazovací soustavu, je po obrácení chodu paprsků vpravo prostor předmětový a vlevo prostor obrazový.



Obr. 5

Z rovnic uvedených na str. 41 vyplývá pro případ polohy ohnisek a hlavních rovin vyznačených v obr. 5, tj. pro $f > 0$ a $f' > 0$, přehled zobrazení (ψ_∞ značí rovinu v nekonečnu, χ_z předmětovou rovinu v dvojnásobné vzdálenosti ohniskové, χ'_z obrazovou rovinu v dvojnásobné vzdálenosti

Je-li $f > 0, f' > 0$, pak dostáváme (obr. 5) tento přehled zobrazení:

Předmět:

Obraz:

$V \psi_{\infty}$

- | | | |
|---|---|-------------------------------------|
| (1) mezi ψ_{∞} (zleva) a χ_z | ve φ' | skutečný, převrácený, zmenšený |
| (2) v χ_z | mezi ψ' a χ'_z | skutečný, převrácený, zmenšený |
| (3) mezi χ_z a φ | v χ'_z | skutečný, převrácený, stejně veliký |
| (4) ve φ | mezi χ'_z a ψ_{∞} (zprava) | skutečný, převrácený, zvětšený |
| (5) mezi φ a χ_k | v ψ_{∞} | skutečný, převrácený, zvětšený |
| (6) v χ_k | mezi ψ_{∞} (zleva) a χ'_k | zdánlivý, přímý, zvětšený |
| (7, 8) mezi χ_k a ψ_{∞} (zprava) | v χ'_k | zdánlivý, přímý, stejně velký |
| | mezi χ'_k a φ' | skutečný, přímý, zmenšený |

Je-li $f < 0, f' < 0$, pak dostáváme (obr. 6) tento přehled zobrazení:

Předmět:

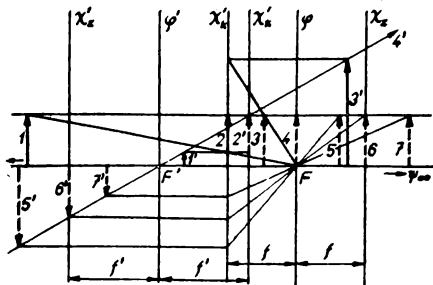
Obraz:

$v \psi_{\infty}$

- | | | |
|--|---|------------------------------------|
| (1) mezi ψ_{∞} (zleva) a χ_k | ve φ' | zdánlivý, přímý, zmenšený |
| (2) v χ_k | mezi φ' a χ'_k | zdánlivý, přímý, zmenšený |
| (3) mezi χ_k a φ | v χ'_k | zdánlivý, přímý, stejně veliký |
| (4) ve φ | mezi χ'_k a ψ_{∞} (zprava) | skutečný, přímý, zvětšený |
| (5) mezi φ a χ_z | v ψ_{∞} | skutečný, přímý, zvětšený |
| (6) v χ_z | mezi ψ_{∞} (zleva) a χ'_k | zdánlivý, převrácený, zvětšený |
| (7) mezi χ_z a ψ_{∞} (zprava) | v χ'_z | zdánlivý, převrácený, stejně velký |
| | mezi χ'_z a φ' | zdánlivý, převrácený, zmenšený |

ohniskové, χ_k , χ_k^* kladné hlavní roviny, φ , φ' ohniskové roviny) uvedený na str. 43.

Protože se při $f > 0$, $f' > 0$ po lomu svazek paprsků rovnoběžných s optickou osou soustředí do ohniska, mluvíme o soustavě spojné (zvláštním případem je spojka). Při $f < 0$, $f' < 0$ se svazek paprsků rovnoběžných s optickou osou láme tak, jako by vycházel z obrazového ohniska; mluvíme zde o soustavě rozptylné (zvláštním případem je rozptylka).



Obr. 6

Dává tedy spojná soustava ke skutečnému předmětu skutečný obraz, pokud není předmět mezi ohniskem a kladnou hlavní rovinou; v tomto případě je obraz zdánlivý (virtuální) a zvětšený. Rozptylná soustava dává ke skutečnému předmětu vždy jen zdánlivý obraz, a to zmenšený. Skutečný předmět má skutečný obraz vždy převrácený, zdánlivý obraz vždy přímý.

c) Zavedli jsme pojem kladných hlavních rovin jako rovin kolmých k optické ose, v nichž předmět i obraz je stejně velký a přímý. Můžeme najít i takové roviny, v nichž obraz i předmět je stejně velký, ale převrácený, jak jsme se zmínili v přehledech na str. 43; tyto roviny nazýváme *záporné hlavní roviny* (χ_z, χ'_z). Nejsou to roviny základní, jsou to jen důsledky zavedení ohnisek a kladných hlavních rovin. Z příčného zvětšení

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$$

dostáváme pro kladné hlavní roviny

$$-\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} = +1$$

čili

$$x = -f, \quad x' = -f'$$

a pro záporné hlavní roviny

$$-\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} = -1$$

čili

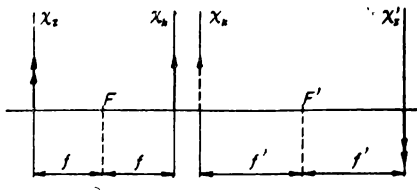
$$x = f, \quad x' = f'.$$

Jsou tedy hlavní roviny prostoru předmětového rozloženy kolem předmětového ohniska na obě strany ve vzdálenosti f (f může mít znaménko $+$ nebo $-$). Hlavní roviny prostoru obrazového jsou rozloženy kolem ohniska obrazového na obě strany ve vzdálenosti f' (f' může mít rovněž znaménko $+$ nebo $-$). Pro $f > 0$ a $f' > 0$ znázorňuje rozložení hlavních rovin obr. 7.

Průsečíky záporných hlavních rovin s optickou osou se nazývají záporné hlavní body (předmětový a obrazový).

Paprsku jdoucího záporným hlavním bodem můžeme rovněž použít k zobrazování předmětu.

Vedle příčného zvětšení $\frac{y'}{y}$ zavádíme ještě *úhlové zvětšení* $\frac{\alpha'}{\alpha}$, kde α je úhel, který svírá paprsek se zápornou osou x ,



Obr. 7

a α' úhel, který svírá paprsek se zápornou osou x' . Vztah pro toto zvětšení odvodíme takto:

Použijeme obrázku 4. Z něho plyne pro malé úhly α a α'

$$\alpha \doteq \operatorname{tg} \alpha = \frac{HK}{a}, \quad \alpha' \doteq \operatorname{tg} \alpha' = \frac{H'K'}{a'}.$$

Poněvadž $HK = H'K'$, je

$$a\alpha = a'\alpha',$$

a tedy úhlové zvětšení

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{a}{a'} = \frac{x+f}{x'+f'}.$$

Poněvadž

$$x' = \frac{ff'}{x},$$

je

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{x + f}{\frac{ff'}{x} + f'} = \frac{x}{f'} = \frac{f}{x'}.$$

Bude tedy úhlové zvětšení rovno 1 v bodech, pro něž bude splněna podmínka

$$\frac{x}{f'} = 1, \quad \frac{f}{x'} = 1,$$

tedy v bodech

$$x = f' \quad \text{a} \quad x' = f. \quad (4)$$

Body o těchto souřadnicích se nazývají *kladný uzlový bod předmětový* U_k a *kladný uzlový bod obrazový* U'_k . Jejich souřadnice jsou dány vztahy (4). Úhlové zvětšení bude rovno -1 tehdy, když

$$\frac{x}{f'} = -1, \quad \frac{f}{x'} = -1$$

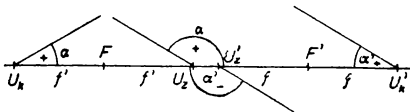
čili

$$x = -f', \quad x' = -f.$$

Prvý bod je *záporný uzlový bod předmětový* U_z , druhý bod je *záporný uzlový bod obrazový* U'_z (obr. 8).

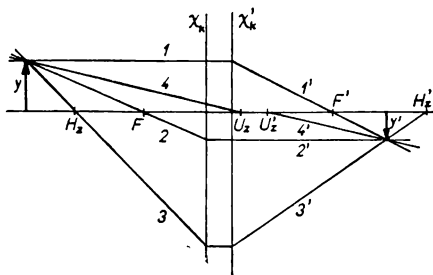
Vychází:

Paprsek jdoucí do záporného uzlového bodu U_z vychází



Obr. 8

rovnoběžně posunut z uzlového bodu U'_z . Uzlové body jsou v prostoru předmětovém ve vzdálenosti f' od ohniska F na obě strany, v prostoru obrazovém jsou ve vzdálenosti f od ohniska F' na obě strany.



Obr. 9

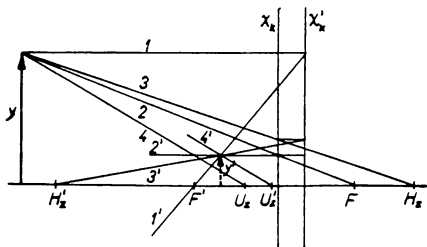
Paprsku jdoucího záporným uzlovým bodem můžeme opět s výhodou užít při zobrazování. Je proto možné užít k zobrazování těchto čtyř paprsků:

1. paprsku rovnoběžného s optickou osou,
2. paprsku jdoucího ohniskem,
3. paprsku jdoucího záporným hlavním bodem H_z a
4. paprsku jdoucího záporným uzlovým bodem U_z .

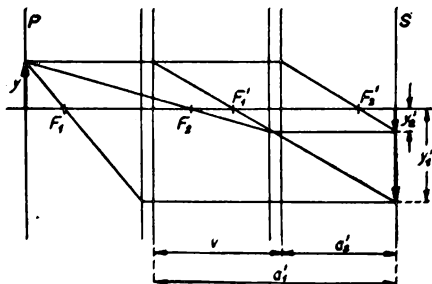
Chod těchto paprsků pro $f > 0, f' > 0$ — pro soustavu spojnou — ukazuje obr. 9, pro $f < 0, f' < 0$ — pro soustavu rozptylnou — obr. 10.

d) K měření ohniskových vzdáleností tlustých čoček užíjeme dvou metod. Prostor před čočkou a za čočkou bude mít při měření týž index lomu. Proto ve vztazích (1), (2) a (3) píšeme $f' = f$.

1. Zvolíme si pevně polohu předmětu P i stínítka S tak, abychom na stínítku mohli vytvořit čočkou obraz předmětu (obr. 11).



Obr. 10



Obr. 11

Obraz na stínítku vznikne ve dvou různých polohách čočky. Označme si vzdálenost obrazu od kladné hlavní roviny obrazové, jejíž polohu neznáme, v prvním případě a'_1 a v druhém případě a'_2 , a velikosti obrazu v prvním případě y'_1 , v druhém případě y'_2 . Pak musí platit podle (3) pro poměr velikosti obrazu a předmětu ($f' = f$)

$$\frac{y'_1}{y} = - \frac{a'_1 - f}{f}, \quad \frac{y'_2}{y} = - \frac{a'_2 - f}{f}.$$

Odečtením druhé rovnice od první dostáváme

$$\frac{y'_1 - y'_2}{y} = \frac{a'_2 - a'_1}{f}$$

čili

$$f = \frac{a'_2 - a'_1}{y'_1 - y'_2} y = \frac{v}{y'_1 - y'_2} y, \quad (5)$$

kde $v = a'_2 - a'_1$. Naměříme-li vzdálenost v , o níž musíme posunout čočku z první polohy do druhé, dále velikost předmětu y a velikost obrazů v obou polohách y'_1, y'_2 , pak můžeme f vypočíst podle vztahu (5). Tento vztah byl odvozen bez předpokladu o tloušťce čočky, a proto jej lze použít i v obecném případě.

Při měření provedeme nastavení pro pět různých vzdáleností předmětu a stínítka a vypočteme střední hodnotu z vypočtených f a příslušnou chybu výsledku.

2. Najdeme polohu obrazu nekonečně vzdáleného předmětu; pak pro jiný předmět najdeme obraz, který je převrácený a stejně veliký jako předmět. V prvním případě najdeme tedy polohu obrazového ohniska a v druhém případě polohu záporné hlavní roviny obrazové. Vzdálenost ohniska od této roviny udává ohniskovou vzdálenost. Tato metoda je opět přesná i pro tlustou čočku.

Měření opakujeme desetkrát a určíme střední hodnotu a příslušnou chybu výsledku.

TÉMA K PROSTUDOVÁNÍ PRO PRVNÍ KOLO SOUTĚŽE KATEGORIE B

Pohyb složené soustavy těles spojených vláknem

(Zpracoval prof. dr. Rostislav Košťál s kolektivem spolupracovníků)

V článku Pohyb jednoduché soustavy těles spojených vláknem¹⁾ jsme ukázali způsob, jak lze tyto soustavy řešit. Pro složené soustavy není tento způsob vhodný, a proto ukážeme v části a) druhý způsob řešení. Tento způsob aplikujeme v části b) nejdříve na oba příklady uvedené v minulém článku a pak jej aplikujeme na dva složitější příklady.

a) Druhý způsob řešení

Z daného systému vybereme si určité těleso a vyznačíme si všechny síly, které na ně působí, tedy např. váhu tělesa a sílu, která se přenáší na těleso vláknem. Pak napíšeme, že výsledná síla působící na toto těleso se musí rovnat součinu jeho setrvačné hmoty a jeho zrychlení. Stejnou úvahu provedeme postupně pro všechna další tělesa systému. Tento způsob je vhodný i pro případy, kdy se tělesa v dané soustavě pohybují s různým zrychlením.

b) Příklady

Příklad 1. Těleso o hmotě m_1 je uváděno do pohybu po vodorovné rovině tělesem o hmotě m_2 , které je k němu připojeno vláknem vedeným přes kladku (obr. 12). Vypočtete zrychlení soustavy a sílu napínající vlákno.

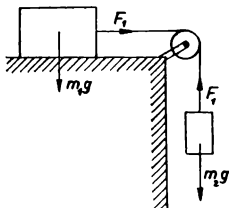
Na těleso o hmotě m_2 působí síla m_2g směrem dolů a vlákno silou F_1 směrem vzhůru; vlivem těchto sil nabude toto těleso zrychlení a . Proto platí

$$m_2g - F_1 = m_2a. \quad (1)$$

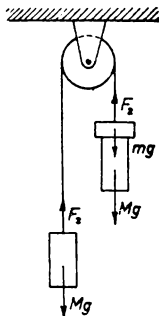
¹⁾ Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 40, 1961–62, seš. 4, str. 187 až 191; III. ročník Fyzikální olympiády, leták, 1961, str. 26–30.

Na těleso o hmotě m_1 působí vlákno silou F_1 (váha tělesa se ruší tlakovou silou podložky na těleso) a uvádí je do pohybu se zrychlením a . Proto platí

$$F_1 = m_1 a. \quad (2)$$



Obr. 12



Obr. 13

Do rovnice (1) dosadíme za F_1 z rovnice (2)

$$m_2 g - m_1 a = m_2 a$$

a z toho

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g,$$

$$F_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Výsledky souhlasí s výsledky vypočtenými prvou metodou.

Příklad 2. Na koncích vlákna vedeného přes pevnou kladku jsou zavěšena stejná tělesa o hmotě M a na jednom z nich leží ještě přivažek o hmotě m (obr. 13).

Určete zrychlení pohybu, tlakovou sílu přivažku na těleso o hmotě M , sílu napínající vlákno a tlakovou sílu na osu kladky.

Tlakovou sílu přivažku na závaží označme F_1 , sílu napínající vlákno F_2 , zrychlení a kladně směrem dolů na pravé straně. Na těleso vlevo působí váha Mg směrem dolů a vlákno silou F_2 směrem vzhůru. Vlivem těchto sil nabude těleso zrychlení a směrem vzhůru. Proto platí

$$Mg - F_2 = -Ma. \quad (3)$$

Na pravé straně působí na těleso o hmotě M a na přivažek o hmotě m směrem dolů síla $(M + m)g$ a směrem nahoru vlákno silou F_2 . Vlivem těchto sil nabudou tato tělesa zrychlení a směrem dolů; proto pro ně platí

$$(M + m)g - F_2 = (M + m)a. \quad (4)$$

Z rovnice (3) plyne

$$F_2 = Mg + Ma \quad (5)$$

a po dosazení do (4) dostáváme pro a

$$a = \frac{m}{2M + m} g. \quad (6)$$

Po dosazení do (5) dostáváme pro F_2

$$F_2 = Mg + \frac{Mm}{2M + m} g = \frac{2M(M + m)}{2M + m} g. \quad (7)$$

Osa kladky podléhá síle

$$F_4 = 2F_2 = \frac{4M(M + m)}{2M + m} g.$$

Zbývá ještě určit tlakovou sílu přivažku na těleso hmoty M , jež musí být podle zákona akce a reakce táž, jako tlaková síla tělesa hmoty M na přivažek. Určíme si ji oběma způsoby.

Na těleso o hmotě M na pravé straně působí směrem dolů jeho váha Mg , pak přívažek silou F_1 a vlákno silou F_2 směrem vzhůru. Vlivem těchto sil nabývá těleso o hmotě M zrychlení a ; tedy

$$Mg + F_1 - F_2 = Ma.$$

Odtud

$$F_1 = F_2 + Ma - Mg.$$

Za F_2 dosadíme ze (7), za a z (6) a dostaneme

$$F_1 = \frac{2M(M+m)}{2M+m}g + \frac{Mm}{2M+m}g - Mg = \frac{2mM}{2M+m}g. \quad (8)$$

Na těleso o hmotě m působí jeho váha mg směrem dolů a těleso o hmotě M tlakovou silou F_1 směrem vzhůru; tím nabude těleso o hmotě m zrychlení a směrem dolů. Proto

$$mg - F_1 = ma$$

čili

$$F_1 = m(g - a)$$

a po dosazení za a z (6) dostaneme opět

$$F_1 = mg \left(1 - \frac{m}{2M+m} \right) = \frac{2mM}{2M+m}g.$$

Všechny výsledky jsou v souhlase s výsledky v dřívějším článku.

Příklad 3. Vlákno nesoucí volnou kladku je na jednom konci upevněno a na druhém konci, vedeném přes kladku pevnou, zatíženo tělesem o hmotě m_1 . Na volné kladce je zavěšeno těleso o hmotě m_2 (obr. 14). Určete zrychlení obou těles a sílu napínající vlákno. (Hmotu kladek a vláken zanedbáváme.)

Tento příklad vypočteme jednak způsobem uvedeným v prvním článku (¹) pod a), jednak způsobem uvedeným zde (pod b).

a) Váha m_2g se rozkládá na složku $\frac{m_2g}{2}$, která se ruší

pevností závěsu, a na druhou, stejně velkou složku, která působí přes kladku I na těleso o hmotě m_1 . Označme zrychlení tělesa o hmotě m_1 písmenem a a počítejme je kladně směrem dolů. Poněvadž při pohybu vykoná těleso o hmotě m_2 dráhu rovnou polovině dráhy tělesa o hmotě m_1 , bude jeho zrychlení $\frac{a}{2}$ a bude mít opačný směr než u tělesa o hmotě m_1 . Protože váha m_2g a tažné síly obou vláken u volné kladky udělují zrychlení $\frac{a}{2}$ hmotě m_2 , uděluje tažná síla jednoho vlákna hmotě m_2 zrychlení $\frac{a}{4}$. Proto síla způsobující pohyb je

$$F = \left(m_1 - \frac{m_2}{2}\right) g.$$

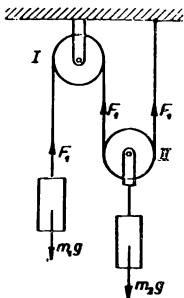
Obr. 14

Jestliže $F > 0$, působí na m_1 síla směrem dolů, jestliže $F < 0$, působí na m_1 síla směrem nahoru. Tato síla uvádí do pohybu hmotu m_1 se zrychlením a a hmotu m_2 se zrychlením $\frac{a}{4}$. Proto musí platit

$$m_1 a + m_2 \frac{a}{4} = \left(m_1 - \frac{m_2}{2}\right) g.$$

Z toho vychází, že těleso o hmotě m_1 se pohybuje se zrychlením

$$a = \frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2} g.$$



Jestliže $a > 0$, pak se pohybuje těleso o hmotě m_1 směrem dolů. Těleso o hmotě m_2 se pohybuje se zrychlením $\frac{a}{2}$.

Sílu napínající vlákno vypočteme z pohybu tělesa o hmotě m_1 ;

$$\begin{aligned} F_1 = m_1(g - a) &= m_1 \frac{4m_1 + m_2 - 4m_1 + 2m_2}{4m_1 + m_2} g = \\ &= \frac{3m_1m_2}{4m_1 + m_2} g. \end{aligned}$$

Sílu napínající vlákno můžeme též vypočíst z pohybu druhého tělesa; poněvadž těleso o hmotě m_2 napíná dvě vlákna, je

$$\begin{aligned} F_1 = \frac{1}{2} m_2 \left(g + \frac{a}{2} \right) &= \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} \right) g = \\ &= \frac{3m_1m_2}{4m_1 + m_2} g. \end{aligned}$$

b) Na těleso o hmotě m_1 působí síla m_1g směrem dolů, vlákno silou F_1 směrem nahoru a těleso se pohybuje se zrychlením a , pro něž platí

$$m_1g - F_1 = m_1a; \quad (9)$$

přitom a bereme kladně směrem dolů.

Na těleso o hmotě m_2 působí síla m_2g směrem dolů a dvě vlákna silou $2F_1$ směrem vzhůru. Poněvadž při pohybu vykoná těleso o hmotě m_2 dráhu rovnou polovině dráhy tělesa o hmotě m_1 , bude jeho zrychlení $\frac{a}{2}$ a bude mít opačný směr než u tělesa o hmotě m_1 . Proto bude platit

$$m_2g - 2F_1 = -m_2 \frac{a}{2}. \quad (10)$$

Vyloučením F_1 z rovnice (9) a (10) dostaneme

$$(2m_1 - m_2)g = (4m_1 + m_2) \frac{a}{2}$$

a z toho

$$a = \frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2} g.$$

Pak síla napínající vlákno z rovnice (9)

$$F_1 = m_1(g - a) = \frac{3m_1m_2}{4m_1 + m_2} g.$$

Příklad 4. Určete, s jakým zrychlením se pohybují tělesa při spojení vyznačeném na obr. 15. Přitom k hmotám kladek a vláken ani zde nepřihlížíme.

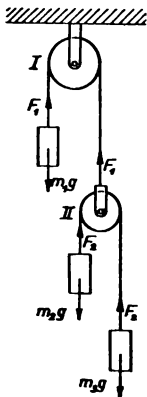
Každé z uvedených tří těles udílí zrychlení všem tělesům. Každé z těchto těles bude se pohybovat s jiným zrychlením. Proto je výhodnější řešit tuto úlohu druhým způsobem, na který se zde omezíme.

Na těleso hmoty m_1 působí váha m_1g směrem dolů a prvé vlákno silou F_1 směrem nahoru. Vlivem těchto sil pohybuje se toto těleso se zrychlením a_1 , které označíme kladně směrem dolů; pro ně platí

$$m_1g - F_1 = m_1a_1. \quad (11)$$

Na těleso hmoty m_2 působí váha m_2g směrem dolů a druhé vlákno silou F_2 směrem vzhůru. Vlivem těchto sil pohybuje se těleso se zrychlením a_2 , které označíme kladně směrem dolů; pro ně platí

$$m_2g - F_2 = m_2a_2. \quad (12)$$



Obr. 15

Na těleso hmoty m_3 působí váha m_3g směrem dolů a vlákno silou F_2 směrem vzhůru. Vlivem těchto sil pohybuje se těleso se zrychlením a_3 , které označíme kladně směrem dolů. Pro ně platí

$$m_3g - F_2 = m_3a_3. \quad (13)$$

Na osu kladky II působí směrem vzhůru síla F_1 a směrem dolů síly $F_2 + F_2$ stejně od osy vzdálené. Proto musí platit

$$F_1 = 2F_2. \quad (14)$$

Označíme-li zrychlení tělesa o hmotě m_2 vzhledem ke kladce II písmenem a (kladně směrem dolů), bude se těleso o hmotě m_3 pohybovat vzhledem ke kladce II se zrychlením $-a$. Proto musí platit

$$a - a_1 = a_2, \quad -a_1 - a = a_3,$$

a tedy

$$a = a_1 + a_2 = -a_1 - a_3$$

čili

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0. \quad (15)$$

Máme zde pět rovnic (11), (12), (13), (14) a (15) pro pět neznámých a_1 , a_2 , a_3 , F_1 a F_2 .

Jejich řešením dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{m_1m_2 + m_1m_3 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g, \\ a_2 &= \frac{m_1m_2 - 3m_1m_3 + 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g, \\ a_3 &= \frac{-3m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g, \\ F_1 &= \frac{8m_1m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g, \\ F_2 &= \frac{4m_1m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g. \end{aligned}$$

Vyjde-li zrychlení kladně, znamená to, že směřuje dolů.

TÉMA K PROSTUDOVÁNÍ PRO PRVNÍ KOLO SOUTĚŽE KATEGORIE C

Určování hustoty látek pevných a kapalných

(Zpracoval prof. dr. Rostislav Košťál s kolektivem spolupracovníků)

Hustota ρ je hmota látky v jednotkovém objemu. Proto ji určíme z hmoty m a příslušného objemu V podle vztahu

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Jednotka hustoty v soustavě SI je kg/m^3 .

Pro určování hustoty látek máme mnoho metod. Poněvadž některé metody vyžadují znalosti z hydromechaniky, probereme v první části hydrostatický tlak, Archimédův zákon a plování těles, a teprve v dalších částech přejdeme k vlastnímu tématu.

I. část

1. Hydrostatický tlak

Když kapalina podléhá jen své váze, pak tlak kapaliny připadající na jednotku plošnou se nazývá hydrostatický tlak.

Abychom určili velikost hydrostatického tlaku, zvolíme v kapalině vodorovnou jednotkovou plochu a určíme sílu, kterou působí kapalina shora na tuto plochu, tj. určíme váhu kapaliny nad touto plochou. Váha této kapaliny je dána součinem objemu kapaliny V , její hustoty ρ a tíhového zrychlení g . Objem kapaliny — tvaru přímého válce — je dán součinem plošného obsahu podstavy S a výšky kapaliny h nad podstavou: $V = S \cdot h$ (obr. 16). Je tedy hydrostatický tlak p jako podíl tlakové síly F působící na plochu S

a velikosti této plochy vyjádřen vztahem

$$p = \frac{F}{S} = \frac{V_{eg}}{S} = h_{eg}.$$

Jednotkou hydrostatického tlaku v soustavě SI je tedy $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ a v soustavě technické $\frac{\text{kp}}{\text{m}^2}$.

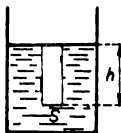
Poněvadž zvolená ploška v určité vzdálenosti pod povrchem kapaliny podléhá tlakové síle směrem dolů a přitom se nepohybuje, musí na ni působit stejně velká síla směrem vzhůru — tzv. vztlačová síla —, která bude táž jako tlaková síla směrem dolů. Poněvadž tlak uvnitř kapaliny působí všemi směry, bude hydrostatický tlak v určité hloubce pod povrchem stálý, ať je poloha plochy jakákoliv.

2. Archimédův zákon

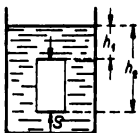
V nádobě s kapalinou je válec (obr. 17). Kapalina působí na něj tlakem shora, zdola i ze stran. Poněvadž tlaky ze stran jsou vždy ve stejné hloubce pod povrchem kapaliny stejné, ruší se. Je-li horní podstava válce ve vzdálenosti h_1 pod hladinou a dolní podstava ve vzdálenosti h_2 pod hladinou, pak směrem vzhůru působí na válec tlaková síla $S \cdot h_2 \rho g$ a směrem dolů tlaková síla $S \cdot h_1 \rho g$, kde S je plocha podstavy a ρ hustota kapaliny. Poněvadž $h_2 > h_1$, působí na válec výsledná tlaková síla směrem vzhůru velikosti $S(h_2 - h_1)\rho g$. Poněvadž $S(h_2 - h_1)$ je objem válce, je $S(h_2 - h_1)\rho$ hmota kapaliny tělesem vytlačené a $S(h_2 - h_1)\rho g$ váha kapaliny tělesem vytlačené. Je tedy válec nadlehčován silou, která se rovná váze kapaliny tělesem vytlačené. Tím jsme odvodili Archimédův zákon pro válec.

K odvození Archimédova zákona pro libovolné těleso provedme důkaz Stevinův. Představme si, že se část kapaliny přemění ve skupenství pevné, aniž by přitom změnila

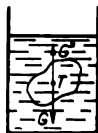
svou hustotu (obr. 18). V těžišti tohoto tělesa bude působit jeho váha G směrem dolů. Poněvadž se těleso neuvede do pohybu, musí stejně velká síla G' působit v těžišti směrem svislým vzhůru. Tato síla může souviset jen s takovými silami, kterými kapalina působí na těleso, poněvadž jiné další



Obr. 16



Obr. 17



Obr. 18

síly na těleso nepůsobí. Je tedy výslednice těchto tlakových sil rovna váze tělesa a působí opačným směrem než váha tělesa. Nyní místo uvedeného tělesa dejme do kapaliny těleso stejného tvaru a objemu, ale větší hustoty, než je hustota kapaliny. Pak tlakové síly působící na toto těleso musí být stejné jako dříve, poněvadž souvisí s kapalinou. Je tedy toto těleso nadlehčováno silou, která se rovná váze kapaliny tělesem vytlačené. Poněvadž tvar tělesa jsme mohli volit zcela libovolně, platí tento zákon, který nazýváme zákonem Archimédovým, obecně: Těleso je v kapalině nadlehčováno silou, která se rovná váze kapaliny tělesem vytlačené.

Označme hmotu tělesa m , jeho objem V a jeho hustotu ρ ; jeho váha je $G = mg$ a síla, kterou je toto těleso nadlehčováno, je rovna součinu z jeho objemu $V = \frac{m}{\rho}$, hustoty kapaliny ρ_1 a tíhového zrychlení, tedy silou $F_1 = \frac{m}{\rho} \rho_1 g$.

Proto celková síla působící na těleso ponořené v kapalině je

$$F = G - F_1 = mg - \frac{m}{\varrho} \varrho_1 g = m \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho} \right) \cdot g.$$

3. Plování těles

Těleso v kapalině podléhá jednak své váze působící v těžišti, jednak vztlakové síle působící v těžišti kapaliny tělesem vytlačené. Jestliže je hustota tělesa ϱ větší než hustota kapaliny ϱ_1 , pak těleso podléhá výsledné síle $V(\varrho - \varrho_1)g$ směrem dolů, kde V je objem tělesa. Těleso vlivem této síly klesá ke dnu.

Když $\varrho = \varrho_1$, pak se obě síly navzájem ruší a těleso nepodléhá silovému působení. Proto, je-li jednou uvedeno do klidu v určité poloze, zůstává v ní. Říkáme, že se vznáší v kapalině.

Když $\varrho_1 > \varrho$, pak na úplně ponořené těleso působí směrem vzhůru výsledná síla $V(\varrho_1 - \varrho)g$, těleso se pohybuje směrem vzhůru a začne se vynořovat z kapaliny. Při vynořování zmenšuje se objem vytlačené kapaliny; aby těleso zůstalo v klidu, musí se objem vytlačené kapaliny zmenšit na takovou hodnotu V_1 , aby obě síly byly stejně velké, tj. aby $V_1 \varrho_1 g = V \varrho g$ čili $\frac{V_1}{V} = \frac{\varrho}{\varrho_1}$. Pak říkáme, že těleso plove na kapalině. Je tedy váha plovoucího tělesa vždy rovna váze kapaliny vytlačené ponořenou částí tělesa.

II. část

Určování hustoty látek pevných

Z metod pro určování hustoty pevných látek si uvedeme následující čtyři metody.

1. Měření rozměrů a vážením

Jde-li o určení hustoty tělesa, jehož objem dovedeme z rozměrů vypočít, změříme jeho rozměry a vypočteme objem V . Vážením určíme jeho hmotu m . Pak hustota

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Tato metoda se nazývá přímá.

2. Měření objemu a vážením

Objem pravidelného i nepravidelného tělesa (vhodných rozměrů) můžeme přímo měřit kalibrovanou nádobou. Poněvadž měření kalibrovanou nádobou je málo přesné, není ani toto určování hustoty dostatečně přesné.

3. Pyknometrem

Pyknometr je skleněná nádobka se zabroušenou zátkou (obr. 19) opatřenou kapilárou; při určité teplotě vejde se do něho vždy přesně stejný objem kapaliny (kapalinu, která vyteče kapilárou, vysajeme pipavým papírem tak, aby kapilára byla kapalinou naplněna). Pyknometru použijeme k tomu, abychom hmotu drobných tělísek srovnávali s hmotou kapaliny stejného objemu. Tím vyloučíme měření objemu.



Obr. 19

Při určování hustoty touto metodou budeme postupovat takto:

1. Nejdříve určíme hmotu m drobných tělísek, pro niž platí

$$m = V \cdot \rho, \quad (1)$$

kde V je jejich objem a ρ hustota.

2. Zvážíme pyknometr naplněný kapalinou známé hustoty ϱ_1 , jeho hmotu označme m_1 .

3. Potom do pyknometru s kapalinou nasypeme drobná tělíska; tím by se zvětšila jeho hmota na $m_1 + m$, ale část kapaliny objemu V z pyknometru vyteče; tato kapalina bude mít hmotu $V \cdot \varrho_1$. Proto bude mít pyknometr s kapalinou a tělísky hmotu

$$m_2 = m_1 + m - V \cdot \varrho_1$$

Neznámé V nahradíme ze vztahu (1)

$$V = \frac{m}{\varrho}$$

a dostaneme

$$m_2 = m_1 + m - m \frac{\varrho_1}{\varrho}$$

a z toho

$$m_1 + m - m_2 = m \frac{\varrho_1}{\varrho},$$

a tedy

$$\varrho = \frac{m}{m_1 + m - m_2} \varrho_1.$$

Určování objemu, které je nepřesné, nahradili jsme zde vážením, které je mnohem přesnější.

4. Dvojím vážením

Při této metodě určíme hmotu tělesa vážením a objem z nadlehčení tělesa v kapalině známé hustoty. Postupujeme takto:

1. Nejdříve určíme hmotu tělesa m . Platí opět

$$m = V \cdot \varrho.$$

2. Potom těleso zavěšené na misce tenkým drátkem po-

noříme do kapaliny známé hustoty ϱ_1 . Podle Archimédova zákona je těleso nadlehčováno silou rovnou váze kapaliny tělesem vytlačené. Bude se tedy těleso na vahách chovat tak, jako by jeho hmota byla menší o hmotu vytlačené kapaliny. Poněvadž vytlačený objem kapaliny je roven objemu tělesa, nastane na vahách rovnováha při vyvážení závažím hmoty m_2 , pro něž platí

$$m_2 = m - V \cdot \varrho_1,$$

$$m_2 = m - m \frac{\varrho_1}{\varrho}.$$

Odtud dostáváme

$$m \frac{\varrho_1}{\varrho} = m - m_2$$

čili

$$\varrho = \frac{m}{m - m_2} \varrho_1.$$

Při přesném měření přihlížíme i k hmotě drátku, kterým těleso při vážení připevňujeme, i k nadlehčení jeho ponořené části v kapalině.

III. část

Určování hustoty kapalin

Z metod pro určování hustoty kapalin uvedeme si sedm metod.

1. Měřením objemu a vážením

Objem kapaliny určíme kalibrovanou nádobou a hmotu vážením; pak

$$\varrho = \frac{m}{V}.$$

Určování objemu kalibrovanou nádobou je značně nepřesné, a proto je i výsledek nepřesný.

2. Pyknometrem

Měření objemu zde vyloučíme tím, že srovnáme hmoty stejného objemu kapaliny o neznámé hustotě ϱ a kapaliny o známé hustotě ϱ_1 . Postupujeme takto:

1. Nejprve určíme hmotu m prázdného pyknometru.

2. Pak naplníme pyknometr kapalinou o neznámé hustotě ϱ a určíme jeho hmotu m_1 . Pro hmotu kapaliny pak platí

$$m_1 - m = V \cdot \varrho,$$

kde V je objem pyknometru.

3. Po vyčištění pyknometru naplníme pyknometr kapalinou o známé hustotě ϱ_1 a určíme jeho hmotu m_2 . Pro hmotu této kapaliny platí

$$m_2 - m = V \cdot \varrho_1.$$

Vydělením obou rovnic vyloučíme V a dostaneme

$$\varrho = \frac{m_1 - m}{m_2 - m} \varrho_1.$$

3. Užitím zákona Archimédova

Při této metodě srovnáváme nadlehčení nějakého pomocného tělesa v kapalině, jejíž hustotu určujeme, s nadlehčením v kapalině, jejíž hustotu známe. Tím odpadne opět určování objemu. Postupujeme takto:

1. Určíme hmotu pomocného tělesa, zavěšeného tenkým drátkem na misce vah, na vzduchu; označíme ji m .

2. Potom zvážíme pomocné těleso ponořené do kapaliny, jejíž hustotu určujeme, když nádoba s kapalinou bude spočívat na pevné podložce; rovnováha nastane při hmotě závaží m_1 . Pak podle Archimédova zákona je rozdíl hmot

závaží při prvním a druhém vážení roven hmotě kapaliny vytlačené pomocným tělesem; tedy

$$m - m_1 = V \cdot \varrho.$$

3. Provedeme totéž ještě jednou, jen užijeme kapaliny o známé hustotě ϱ_1 ; hmotu označme m_2 . Pak

$$m - m_2 = V \cdot \varrho_1.$$

Vydělením obou rovnic vyloučíme objem V a dostaneme

$$\varrho = \frac{m - m_1}{m - m_2} \varrho_1.$$

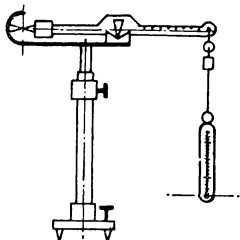
Při přesném vážení je třeba přihlídnout k hmotě drátu, kterým je těleso připevněno, případně i k jeho nadlehčení v kapalinách.

4. Mohrovými vážkami

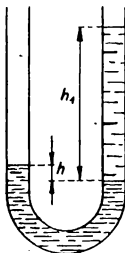
Abychom nemuseli provádět vždy vážení pomocného tělesa na vzduchu a ve dvou kapalinách, jsou k měření vhodně upraveny vážky zvané Mohrovy (obr. 20).

Jsou to nerovnoramenné váhy, které na delším konci nesou tělísko; bývá jím teploměr, aby se mohla hned určit i teplota kapaliny. Když je teploměr zavěšen, jsou váhy v rovnováze. Rameno od teploměru k ose je rozděleno na deset dílků. Ponoří-li se teploměr do destilované vody teploty 4°C , vyrovná se nadlehčení teploměru největším závažím daným k vážkám, zavěšeným nad teploměr. Je tedy hmota největšího závaží rovna hmotě destilované vody teploty 4°C vytlačené teploměrem. Poněvadž hustota destilované vody při 4°C je $1\,000,0\text{ kg m}^{-3}$, považujeme toto závaží za 1 000 jednotek. Jestliže při vyvažování teploměru ponořeného do jiné kapaliny musíme zavěsit závaží — jezdce — do n -tého dílku na rameni, je hustota kapaliny přímo $\frac{n}{10} 10^3\text{ kg m}^{-3}$. Abychom nemuseli dávat jezdce mezi dílky

na stupnici, užíváme vedle základního jezdce ještě dalších jezdců, 10krát, 100krát a 1000krát lehčích, kterými postupně najdeme rovnováhu na vahách a určíme přímo hustotu kapaliny v kg m^{-3} .



Obr. 20



Obr. 21

5. Spojitými nádobami

U kapalin, které se nemísí, můžeme použít k měření hustoty U-trubice.

Jestliže se nádoba skládá ze dvou ramen (třeba různé šířky), pak se ustálí obě kapaliny v rovnováze tak, že na plochu postavenou dole v nádobě působí z obou stran stejně velké tlakové síly, a tedy i stejně velké hydrostatické tlaky (obr. 21). Označíme-li hustoty kapalin ϱ a ϱ_1 , výšky nad společným rozhraním h a h_1 , musí platit

$$h\varrho g = h_1\varrho_1 g,$$

čili

$$h : h_1 = \varrho_1 : \varrho,$$

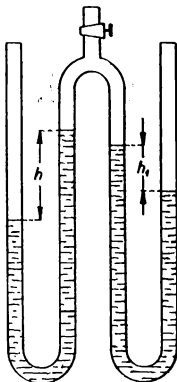
tj. výšky nad společným rozhraním jsou v nepřímém poměru k hustotám kapalin.

Známe-li hustotu jedné kapaliny a naměříme výšky h a h_1 nad společným rozhraním, můžeme určit hustotu druhé kapaliny.

Jestliže se kapaliny mísí, použijeme dvou U-trubic (obr. 22). Je samozřejmé, že jich lze použít i tehdy, když se kapaliny nemísí. Do jedné z U-trubic nalejeme kapalinu, jejíž hustotu máme určit, do druhé U-trubice nalejeme kapalinu, jejíž hustotu známe. Pak kohoutem mezi oběma U-trubicemi buď vysajeme něco vzduchu, nebo vzduch tam zhuštíme. Přetlak mezi vzduchem vnějším a zředěným, popř. zhuštěným, se projeví v rozdílu hladin kapalin. Hydrostatický tlak každé kapaliny mezi oběma jejími povrchy musí být roven přetlaku vzduchu, a tedy musí platit

$$h\rho = h_1\rho_1,$$

kde h a h_1 jsou příslušné rozdíly hladin. Z naměřených výšek h a h_1 a ze známé hustoty ρ_1 určíme hustotu ρ .



Obr. 22

6. Plovoucím tělesem

Určování hustoty je založeno na úkazu, že váha tělesa plovoucího na kapalině se rovná váze kapaliny tělesem vytlačené. Proto v kapalině o větší hustotě se ponoří méně než v kapalině o hustotě menší. K měření použijeme válcovité skleněné trubice — zkumavky — dole zatížené a opatřené

stupnicí s počátkem u dna trubice. Ponoří-li se tato zkumavka nejprve v kapalině o neznámé hustotě ϱ do výšky h a v kapalině o známé hustotě ϱ_1 do výšky h_1 , musí platit

$$Sh\varrho g = Sh_1\varrho_1g = mg,$$

přičemž S je průřez zkumavky a m její hmota. Z toho

$$\varrho = \frac{h_1\varrho_1}{h}.$$

7. Hustoměry

Aby nebylo třeba při určování hustoty kapaliny pomocí plovoucího tělesa měřit h_1 v kapalině o známé hustotě a aby se nemusela z údajů na plovoucím tělese hustota počítat, jsou sestaveny přístroje — hustoměry, které ukazují přímo hustotu kapaliny. Jsou to trubice dole zatížené a opatřené stupnicí, která platí pro určitou teplotu; stupnice je nerovnoměrná. Měří-li se za jiné teploty, je třeba údaj opravit nebo zahřát kapalinu na teplotu udanou na hustoměru. Aby byl hustoměr hodně citlivý, hotoví se trubice nesoucí stupnici velmi úzké. Aby nebyl hustoměr příliš dlouhý, hotoví se hustoměr zvláště pro kapaliny hustší než voda s 1 000 (u starších 1,000) nahoře a zvláště pro kapaliny řidší než voda s 1 000 (u starších 1,000) dole.

10. ÚLOHY KATEGORIE A A JEJICH ŘEŠENÍ

ŘEŠENÍ ÚLOH PRVNÍHO KOLA

1. Skleněná koule se vzduchem byla zvážena při 15 °C. Potom byla při otevřeném kohoutku zahřáta na 80 °C a kohoutek pak byl uzavřen. Nato byla koule znovu zvážena

a zjištěn úbytek hmoty 0,250 g. Jaký je objem koule, lze-li roztažnost nádoby zanedbat? Hustota vzduchu při 0 °C je $\varrho_0 = 1,293 \text{ g/dm}^3$.

Označení veličin a dané hodnoty: Označme V objem dané skleněné koule, v níž je při teplotě $T_1 = 288 \text{ °K} = 2,88 \cdot 10^2 \text{ °K}$ množství vzduchu hmoty m . Při zahřívání se vzduch v nádobě rozpíná a poněvadž je kohoutek otevřený, uniká z nádoby, takže při druhém vážení za teploty $T_2 = 3,53 \cdot 10^2 \text{ °K}$ se zjistí úbytek hmoty $\Delta m = 0,250 \text{ g} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$. Hustota vzduchu při teplotě 0 °C je $\varrho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$. Teplotu 0 °C $\triangleq 273 \text{ °K}$ označíme T_0 .

Řešení: Při teplotě 0 °C $\triangleq 273 \text{ °K}$ zaujímá vzduch hmoty m objem $V_0 = \frac{m}{\varrho_0}$ a při teplotě T_1 objem $V = \frac{m}{\varrho_1}$, takže $\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{V_0}{V}$; (1)
 ϱ_1 značí hustotu vzduchu při teplotě T_1 .

Podle stavové rovnice pro izobarický děj platí

$$\frac{V}{T_1} = \frac{V_0}{T_0},$$

a proto je po dosazení do vztahu (1)

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{T_0}{T_1}. \quad (2)$$

Obdobnou úvahou zjistíme, že hustota vzduchu při teplotě T_2 je

$$\varrho_2 = \frac{T_0}{T_2} \varrho_0. \quad (3)$$

Z textu úlohy vyplývá, že $m = V\varrho_1$ a $(m - \Delta m) = V\varrho_2$,

takže

$$V_{\varrho_2} = V_{\varrho_1} - \Delta m \quad \text{a} \quad V = \frac{\Delta m}{\varrho_1 - \varrho_2} =$$

$$= \frac{\Delta m}{\varrho_0 \left(\frac{T_0}{T_1} - \frac{T_0}{T_2} \right)}.$$

Po úpravě vyjde

$$V = \frac{T_1 T_2 \Delta m}{\varrho_0 T_0 (T_2 - T_1)}. \quad (4)$$

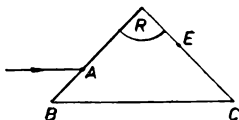
Číselně:

$$V = \frac{2,88 \cdot 3,53 \cdot 2,5 \text{ kg deg}^2}{1,293 \cdot 6,5 \cdot 2,73 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \text{ deg}^2}.$$

Logaritmicky určíme $V = 1,108 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

Objem koule je obecně určen vztahem (4), číselně je přibližně $1,108 \text{ dm}^3$.

2. Paprsek dopadá na skleněný pravoúhlý hranol rovno-ramenný rovnoběžně s přeponou $BC = 8 \text{ cm}$ (obr. 23),

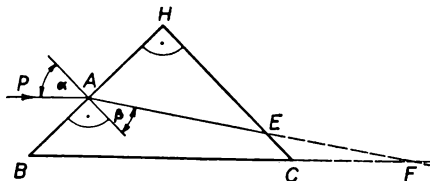


Obr. 23

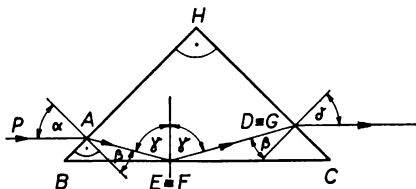
a to v bodě A , pro který $BA = 1 \text{ cm}$. V kterém bodě D a v jakém směru opustí paprsek hranol? Index lomu skla $n = 1,6$.

Označení veličin a dané hodnoty: $BC = 8 \text{ cm} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, $BA = 1 \text{ cm} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Označení veličin je patrné z obrázků 24 a 25.

Řešení: Lomený i odražený paprsek leží vždy v rovině dopadu. Pravoúhlý trojúhelník BCH na obr. 24 a 25 značí tedy



Obr. 24



Obr. 25

řez hranolu rovinou ϱ , proloženou dopadajícím paprskem kolmo k té stěně hranolu, která leží proti lámavému úhlu $\varphi = 90^\circ$. V této rovině leží lomený nebo odražený paprsek, ať se láme nebo odráží na kterémkoli místě na obvodu troj-

úhelníku BCH . Uvažovaný paprsek PA dopadá na daný hranol v bodě A pod úhlem α rovnoběžně s přeponou BC . Poněvadž trojúhelník BCH je rovnoramenný a pravouhlý a protože přímky PA a BC jsou rovnoběžné, je úhel $\sphericalangle CBH$ roven úhlu $\sphericalangle PAB$ (střídavé úhly). Proto má úhel dopadu paprsku PA na úsečku BH velikost $\alpha = 45^\circ$. Paprsek PA se láme ke kolmici pod úhlem β . Podle Snelliova zákona lomu platí

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad (1)$$

takže

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{\sin 45^\circ}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 1,6} = \frac{\sqrt{2} \cdot 5}{2 \cdot 8} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{16}.$$

Úhel β má hodnotu $\beta \doteq 26^\circ 14'$. (2)

Lomený paprsek postupuje hranolem a dopadá na obvod trojúhelníku BCH v jistém bodě E , který se může nacházet buď na úsečce BC (obr. 25), nebo na úsečce CH (obr. 24). Polopřímka AE protíná polopřímku BC v bodě F . Nachází-li se bod F uvnitř úsečky BC , je $F \equiv E$, jinak je $F \neq E$. Bod F je vnitřním bodem úsečky BC jen tehdy, jestliže $BF < BC$. Vypočítáme tedy délku BF . V trojúhelníku BFA je $\sphericalangle BAF = 90^\circ + \beta$. Poněvadž $\sphericalangle FBA = 45^\circ$, je $\sphericalangle BFA = 45^\circ - \beta$; úsečka $BA = 10^{-2}$ m. Podle sinové věty platí

$$\frac{BF}{BA} = \frac{\sin (90^\circ + \beta)}{\sin (45^\circ - \beta)}.$$

Po úpravě vychází

$$BF = BA \frac{\cos \beta}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \beta - \sin \beta)} = BA \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \beta}.$$

Po dosazení za BA a za $\operatorname{tg} \beta$ vychází $BF = 2,8 \cdot 10^{-2}$ m. Proto leží bod F uvnitř úsečky BC a platí $F \equiv E$.

Úhel dopadu paprsku AE na přepónu BC označíme γ . Z obrázku 25 je patrné, že

$$\gamma = 90^\circ - \sphericalangle BEA = 90^\circ - (45^\circ - \beta) = 45^\circ + \beta = 71^\circ 14'. \quad (4)$$

Paprsek AE se může po odrazu na BC v bodě E buď lámat do vzduchu (pak by vystoupil z hranolu v bodě E), nebo může nastat úplný odraz. Proto vypočítáme mezní úhel pro sklo. Pro velikost mezního úhlu platí vztah

$$\sin \varepsilon = \frac{1}{n} = \frac{1}{1,6} = \frac{5}{8} = 0,625 \text{ a } \varepsilon \doteq 38^\circ 40'. \quad (5)$$

Je tedy $\varepsilon < \gamma$ a v bodě E nastane úplný odraz.

Paprsek odražený v bodě E dopadá na obvod trojúhelníku BCH v jistém bodě G , který může ležet buď na úsečce CH , nebo na úsečce HB . Poněvadž $\sphericalangle GEC = 90^\circ - \gamma < 45^\circ$ a zároveň $45^\circ = \sphericalangle HBC < \sphericalangle HEC$, platí $\sphericalangle GEC < \sphericalangle HEC$. Proto padne bod G dovnitř úsečky CH .

Z podobnosti $\triangle BEA$ a $\triangle GEC$ je patrné, že úhel dopadu paprsku EG na odvěsnu CH je β . Poněvadž však vzhledem ke vztahům (2) a (5) je $\beta < \varepsilon$, nenastane v bodě G úplný odraz a paprsek se láme pod úhlem δ a vystupuje z hranolu. Proto $G \equiv D$.

Podle Snelliova zákona je $\sin \delta = n \cdot \sin \beta$ a vzhledem ke vztahu (1) je $\sin \delta = \sin \alpha$. Protože oba úhly α i δ jsou ostré, platí

$$\delta = \alpha = 45^\circ. \quad (6)$$

Paprsek tedy opouští hranol ve směru rovnoběžném s dopadajícím paprskem PA . Z podobnosti $\triangle BEA$ a $\triangle CED$ plyne $\frac{CD}{EC} = \frac{BA}{BE}$. Po úpravě platí

$$CD = BA \frac{EC}{BE} = BA \frac{BC - BE}{BE} = BA \left(\frac{BC}{BE} - 1 \right).$$

Po dosazení za $BA = 10^{-2} \text{ m}$ a $BC = 8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ a za $BE = 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ podle vztahu (3) vyjde číselně $CD \doteq \doteq \left(\frac{8}{2,8} - 1\right) \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1,85 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

Obecně: Dosadíme-li za $BE = BF$, pak vychází

$$\begin{aligned} CD &= BA \left[\frac{BC(1 - \operatorname{tg} \beta)}{BA\sqrt{2}} - 1 \right] = \frac{BC\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right) - \\ &- BA = \frac{BC\sqrt{2} [\sqrt{1 - \sin^2 \beta} - \sin \beta]}{2\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} - \\ &- BA = \frac{BC \sqrt{2} (1 - \sin^2 \beta - \sin \beta \sqrt{1 - \sin^2 \beta})}{2(1 - \sin^2 \beta)} - BA \end{aligned}$$

a podle vztahu (1)

$$CD = \frac{BC\sqrt{2}(n^2 - \sin^2 \alpha - \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha})}{2(n^2 - \sin^2 \alpha)} - BA. \quad (7)$$

Paprsek opustí hranol v bodě D ležícím uvnitř úsečky CH rovnoběžně s dopadajícím paprskem. Vzdálenost bodu D od bodu C je obecně určena vztahem (7) a má přibližnou hodnotu 1,9 cm.

3. Rozptylná soustava odděluje prostředí předmětové o indexu lomu $N_1 = 1,00$ a prostředí obrazové o indexu lomu $N_2 = 1,33$. Vzdálenost obou ohnisek je 9,5 cm a ohnisková vzdálenost $f = 4,5 \text{ cm}$.

a) Sestrojte obraz zdánlivého předmětu výšky 2,0 cm, který je ve vzdálenosti 2,5 cm od kladné hlavní roviny předmětové užitím paprsku: 1. rovnoběžného s optickou osou; 2. jdoucího ohniskem; 3. jdoucího záporným hlavním bodem; 4. jdoucího záporným uzlovým bodem. Jaký je obraz? Napište postup a vysvětlete konstrukci.

b) Vypočtěte polohu a velikost obrazu.

Označení veličin a dané hodnoty: Absolutní indexy lomu prostředí předmětového a obrazového jsou po řadě $N_1 = 1$, $N_2 = 1,33$. Vzdálenost ohnisek $FF' = l = 9,5 \cdot 10^{-2}$ m. Ohnisková vzdálenost předmětová je $f = -4,5 \cdot 10^{-2}$ m, obrazová je f' . Vzdálenost předmětu od předmětového ohniska je $x = 2 \cdot 10^{-2}$ m, vzdálenost obrazu od obrazového ohniska je x' . Velikost předmětu $y = 2 \cdot 10^{-2}$ m, velikost obrazu je y' .

Řešení: a) Předmětový prostor je vlevo od dané soustavy a obrazový je vpravo od ní. Kladnou hlavní rovinu předmětovou označíme χ_k , kladný hlavní bod předmětový H_k . Poněvadž daná soustava je rozptylná, leží její předmětové ohnisko F na optické ose napravo od roviny χ_k a je od ní vzdáleno $|f| = 4,5 \cdot 10^{-2}$ m. Obrazové ohnisko F' leží nalevo od ohniska F a je od něho vzdáleno $l = 9,5 \cdot 10^{-2}$ m. Označíme-li f' ohniskovou vzdálenost obrazovou, pak platí

$$\frac{f}{f'} = \frac{N_1}{N_2}, \text{ a proto } f' = f \cdot \frac{N_2}{N_1} = (-4,5) \frac{1,33}{1,00} \cdot 10^{-2} \text{ m} = -5,985 \cdot 10^{-2} \text{ m} \doteq -6 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Kladná hlavní rovina obrazová χ'_k leží od obrazového ohniska napravo a je od něho vzdálena f' . Její průsečík H'_k s optickou osou je kladný hlavní bod obrazový.

Záporný hlavní bod předmětový H_z leží na optické ose na opačné straně od ohniska F než bod H_k , ve vzdálenosti $FH_z = f$. Záporný hlavní bod obrazový H'_z leží na optické ose na opačné straně od ohniska F' než bod H'_k a $F'H'_z = f'$.

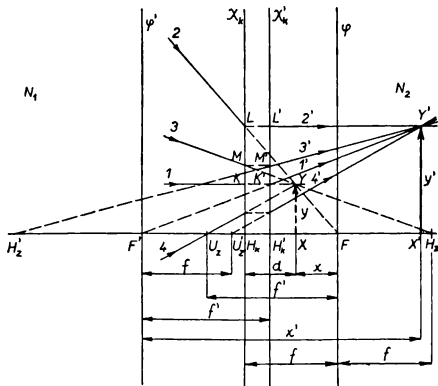
Záporný uzlový bod předmětový U_z leží nalevo od ohniska F a je od něho vzdálen $FU_z = f'$ a záporný uzlový bod obrazový U'_z je napravo od ohniska F' a je od něho vzdálen $F'U'_z = f$.

Daný předmět XY je zdánlivý, a proto leží na pravé straně od roviny χ_k , je s ní rovnoběžný a je od ní vzdálen $d =$

$= 2,5 \cdot 10^{-2}$ m. Výška předmětu XY je $y = 2 \cdot 10^{-2}$ m. Obrázek $X'Y'$ má výšku y' .

Konstrukce obrazu (obr. 26):

1. Průsečíkem optické osy a paprsku (1) vedeného bodem Y rovnoběžně s optickou osou je úběžný bod, jehož



Obr. 26

obrazem je ohnisko F' . Tento paprsek protíná rovinu χ_k v bodě K , jemuž přísluší v rovině χ'_k obraz K' , který leží na stejné straně optické osy jako bod K a má od optické osy stejnou vzdálenost jako bod K . Paprsek pokračuje od bodu K' tak, jako by vycházel z ohniska F' (1').

2. Paprsek (2) směřující k bodu Y a k předměťovému ohnisku F protíná rovinu χ_k v bodě L , jehož obrazem je bod L' , ležící v rovině χ'_k na téže straně optické osy a ve stejné vzdálenosti od ní jako bod L . Paprsek (2) pokračuje za bodem L' ve směru rovnoběžném s optickou osou (2').

3. Paprsek (3) směřující k bodu Y a k zápornému hlavnímu bodu obrazovému H_z protíná rovinu χ_k v bodě M , jehož obrazem je v rovině χ'_k bod M' , ležící stejně daleko od optické osy a na téže straně od ní jako bod M . Paprsek (3) pokračuje za bodem M' tak, jako by vycházel z bodu H'_z (3').

4. Paprsek (4) procházející záporným uzlovým bodem U_z a mířící k bodu Y pokračuje za rovinou χ_k tak, jako by vycházel z bodu U'_z rovnoběžně s paprskem (4) (4'). Všechny čtyři uvedené paprsky 1', 2', 3', 4' procházejí bodem Y' , který je obrazem bodu Y .

Bod X se zobrazí na optické ose a je patou kolmice vedené k optické ose bodem Y' .

Obraz $X'Y'$ předmětu XY je skutečný, přímý a zvětšený.

b) Vzdálenost předmětu od ohniska F označíme písmenem x , vzdálenost obrazu od ohniska F' písmenem x' . Podle Newtonovy zobrazovací rovnice platí $x \cdot x' = f \cdot f'$. Dosadíme-li za $x = 2 \cdot 10^{-2}$ m a za $f = -4,5 \cdot 10^{-2}$ m a za $f' = -6 \cdot 10^{-2}$ m, vyjde

$$x' = \frac{f \cdot f'}{x} = \frac{6 \cdot 4,5 \cdot 10^{-2}}{2} \text{ m} = 1,35 \cdot 10^{-1} \text{ m}. \quad (1)$$

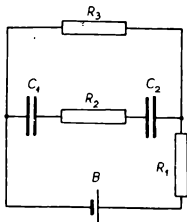
Velikost příčného zvětšení určíme ze stejnoolehých trojúhelníků $\triangle FXY$ a $\triangle FH_kL$. Pro ně platí $\frac{H_k L}{XY} = \frac{FH_k}{FX}$ a po úpravě $\frac{y'}{y} = -\frac{f}{x}$, z čehož plyne $y' = -y \frac{f}{x}$. (2)

Číselně: $y = \frac{2 \cdot 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2} = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$

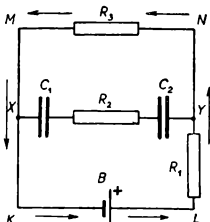
Vzdálenost obrazu od obrazového ohniska je dána vzorcem (1) a má hodnotu 13,5 cm. Velikost obrazu je určena vzorcem (2) a číselně se rovná 4,5 cm. Obraz leží napravo od obrazového ohniska.

4. Na jaké napětí se nabijí kondenzátory C_1 a C_2 , připojíme-li je ke zdroji B (obr. 27)?

Je dáno: $\mathcal{E} = 2,2 \text{ V}$; $R_1 = 0,4 \Omega$; $R_1 = 3 \Omega$; $R_2 = 1 \Omega$; $R_3 = 5 \Omega$; $C_1 = 2 \mu\text{F}$; $C_2 = 3 \mu\text{F}$.



Obr. 27



Obr. 28

Označení veličin: $\mathcal{E}$ a R_1 značí elektromotorické napětí a vnitřní odpor zdroje B ; R_1 , R_2 , R_3 jsou hodnoty odporů zařazených v obvodu, C_1 a C_2 jsou kapacity kondenzátorů. Napětí na odporu R_3 je U_3 ; U_1 a U_2 jsou napětí na kondenzátorech. I značí proud ve smyčce $KLMN$.

Řešení: Protože větví s kondenzátory stejnosměrný proud neprochází, platí pro smyčku $KLMN$ (obr. 28) podle Kirchhoffova zákona

$$-\mathcal{E} + R_1 I + R_1 I + R_3 I = 0,$$

z čehož plyne

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_1 + R_3}. \quad (1)$$

Na odporu R_3 je napětí $U_3 = R_3 I = \frac{R_3 \mathcal{E}}{R_1 + R_1 + R_3}. \quad (2)$

Stejně veliké napětí je i mezi koncovými body Y a X větve s kondenzátory. V této větvi jsou zařazeny kondenzátory C_1 a C_2 sériově, a proto mají oba stejný náboj Q . Pro napětí U_1 a U_2 na těchto kondenzátorech platí

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}. \quad (3)$$

Dále platí pro napětí mezi body X a Y vztah $U_3 = U_1 + U_2 = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$, který upravíme na $U_3 = Q \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2}$, takže

$$Q = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} U_3. \quad (4)$$

Dosadíme-li do rovnice (3) za Q a U_3 hodnoty ze vztahů (4) a (2), vyjde

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \frac{R_3}{R_1 + R_1 + R_3} \mathcal{E}, \quad (5)$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{R_3}{R_1 + R_1 + R_3} \mathcal{E}. \quad (6)$$

Číselně: $U_1 = \frac{3}{5} \frac{5}{8,4} \cdot 2,2 \text{ V} = \frac{11}{14} \text{ V} = 7,86 \cdot 10^{-1} \text{ V}.$

$$U_2 = \frac{2}{5} \frac{5}{8,4} \cdot 2,2 \text{ V} = \frac{11}{21} \text{ V} = 5,24 \cdot 10^{-1} \text{ V}.$$

Na velikosti odporu R_2 jsou hodnoty U_1 a U_2 nezávislé.

Kondenzátory C_1 a C_2 se nabijí na napětí, daná vztahy (5) a (6); číselné hodnoty těchto napětí jsou $U_1 \doteq 0,79 \text{ V}$ a $U_2 \doteq 0,5 \text{ V}$.

5. Čtyři žárovky, z nichž při zapojení na 110 V svítí normálně dvě při spotřebě 40 W a dvě při spotřebě 60 W, jsou připojeny na napětí 220 V podle připojeného schématu obr. 29. Jaký výkon má každá žárovka v tomto zapojení a jaké napětí je mezi body A a B? Odpor žárovek považujte za nezávislý na teplotě.

Označení veličin a dané hodnoty: Při napětí $U_1 = 1,10 \cdot 10^2 \text{ V}$ mají žárovky $\check{Z}_1$ a $\check{Z}_3$ výkon $P_1 = 60 \text{ W}$ a žárovky $\check{Z}_2$ a $\check{Z}_4$ výkon $P_2 = 40 \text{ W}$. Při napětí $U = 2,20 \cdot 10^2 \text{ V}$ a při zařazení podle obr. 29 budou mít žárovky $\check{Z}_1$ a $\check{Z}_3$ výkon P'_1 , žárovky $\check{Z}_2$ a $\check{Z}_4$ výkon P'_2 . Odpor žárovek $\check{Z}_1$ a $\check{Z}_3$ je $R_1 = R_3$, žárovky $\check{Z}_2$ a $\check{Z}_4$ mají odpor $R_2 = R_4$.

Řešení: Protože při napětí U_1 mají žárovky $\check{Z}_1$ a $\check{Z}_3$ stejný výkon P_1 a žárovky $\check{Z}_2$ a $\check{Z}_4$ výkon P_2 , je odpor žárovek $\check{Z}_1$ a $\check{Z}_3$

$$R_1 = \frac{U_1^2}{P_1}, \quad (1)$$

odpor žárovek $\check{Z}_2$ a $\check{Z}_4$ je

$$R_2 = \frac{U_1^2}{P_2}. \quad (2)$$

Zdroj má sice podle obr. 29 střídavé napětí, avšak v obvodu nejsou zařazené ani cívky, ani kondenzátory, a proto platí pro efektivní hodnoty napětí U a proudu I Ohmův zákon i zákony Kirchhoffovy. Uvažujme okamžik, kdy proud prochází ve směru vyznačeném na obr. 30. V bodech C a D se proud větví. Poněvadž v obou větvích jsou zařazené stejně velké odpory, prochází jimi stejně veliký proud I , nerozvětvenou částí obvodu protéká proud $2I$. Užijeme-li Kirchhoffova zákona pro smyčku $CZDAC$, platí $-U + R_2 I +$

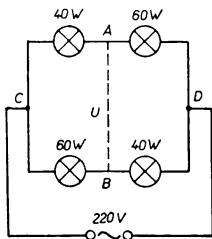
$+ R_1 I = 0$, odkud vychází pro proud I hodnota

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}. \quad (3)$$

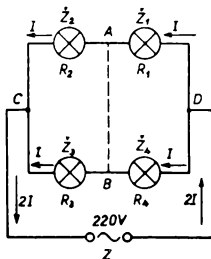
Pro smyčku $DABD$ platí $R_1 I - R_2 I + U_{AB} = 0$, kde U_{AB} je napětí mezi body A a B . Po úpravě a po dosazení ze vztahu (3) dostaneme

$$U_{AB} = I(R_2 - R_1) = U \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}.$$

Za R_1 a R_2 dosadíme hodnoty z rovnic (1) a (2).



Obr. 29



Obr. 30

Po úpravě dostaneme $U_{AB} = U \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}. \quad (4)$

Číselně vychází $U_{AB} = 2,2 \cdot 20 \text{ V} = 44 \text{ V}$.

Napětí mezi body A a B je 44 V; obecně je jeho hodnota vyjádřena vztahem (4).

Výkony žárovek $\dot{Z}_1$ a $\dot{Z}_3$ v zapojení vyznačeném na obr. 30

označíme P'_1 a výkony žárovek $\check{Z}_2$ a $\check{Z}_4$ písmenem P'_2 . Pro P'_1 platí

$$P'_1 = R_1 I^2 = R_1 \frac{U^2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{U_1^2}{P_1} \frac{U^2}{\left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}\right)^2} U_1^4$$

$$P'_1 = \frac{U^2}{U_1^2} \frac{P_1^2 P_2^2}{P_1(P_1 + P_2)^2} = \left(\frac{U}{U_1}\right)^2 \frac{P_1 P_2^2}{(P_1 + P_2)^2} \cdot \quad (5)$$

$$\text{Obdobně se vypočítá } P'_2 = \left(\frac{U}{U_1}\right)^2 \frac{P_2 P_1^2}{(P_1 + P_2)^2} \cdot \quad (6)$$

Číselné hodnoty jsou:

$$P'_1 = 2^2 \frac{40 \cdot 60}{10^4} \cdot 40 \text{ W} = 96 \cdot 10^{-2} \cdot 40 \text{ W} = 38,4 \text{ W}.$$

$$P'_2 = 2^2 \frac{40 \cdot 60}{10^4} \cdot 60 \text{ W} = 96 \cdot 10^{-2} \cdot 60 \text{ W} = 57,6 \text{ W}.$$

Při zapojení vyznačeném na obr. 29 mají žárovky 60 W příkon určený obecně vztahem (5), číselně 38,4 W a žárovky 40 W mají podle vztahu (6) příkon P'_2 , číselně 57,6 W. První jsou podžhaveny, druhé přezhaveny.

6. Baterie galvanických článků ($\mathcal{E} = 0,9 \text{ V}$; $r_i = 0,6 \Omega$) se skládá ze 30 článků spojených ve 3 stejné paralelní skupiny. Kolik mědi se vyloučí při zapojení baterie za 5 minut z roztoku a) CuCl , b) CuSO_4 ? Vnější odpor je 205Ω . Uvažte, na kolik platných číslic má smysl hmotu mědi vypočítat (obr. 31).

Označení veličin a dané hodnoty: Počet paralelně spojených skupin galvanických článků o elektromotorickém napětí $\mathcal{E}$ je $p = 3$, v každé skupině je $s = 10$ článků o vnitřním odporu r_i sériově spojených. Vnitřní odpor každé skupiny článků je $r_1 = s \cdot r_i$, celkový odpor p paralelně zařazených

skupin článků je $r = \frac{s}{p} \cdot r_1$. Výsledné elektromotorické napětí $\mathcal{E}'$ baterie je stejné jako napětí jedné skupiny článků. Platí tedy $\mathcal{E}' = s\mathcal{E}$. Celkový odpor obvodu $R = R_e + r$, kde $R_e = 2,05 \cdot 10^2 \Omega$ je vnější odpor obvodu. Proud prochází obvodem po dobu $t = 5 \text{ min} = 3 \cdot 10^2 \text{ s}$; F je Faradayův náboj, α je poměrná atomová hmotnost mědi.

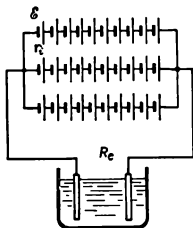
Řešení: Hmotnost m látky, která se vyloučí při zapojení baterie proudem I za dobu t , se vypočítá z Faradayova zákona $m = AIt$, kde $A = \frac{1}{F} \cdot \frac{M_k}{v}$. Číslo A se nazývá elektrochemický ekvivalent vyloučené látky a jeho

jednotkou je kg C^{-1} ; $\frac{M_k}{v}$ je poměr kilomolové hmoty M_k vyloučené látky a její valence v . Číslo $F = 9,6522 \cdot 10^7 \text{ C kmol}^{-1}$ je Faradayův náboj.

$$\text{Je tedy} \quad m = \frac{1}{F} \cdot \frac{M_k}{v} It = \frac{1}{F} \cdot \frac{M_k}{v} \cdot \frac{s\mathcal{E}}{R_e + \frac{s \cdot r_1}{p}} \cdot t \quad (1),$$

což je obecný vztah pro výpočet hmoty vyloučené mědi, jejíž poměrná atomová hmotnost $\alpha = 63,57$.

Pro roztok CuCl , kde měď je jednomocná, je $\frac{M_k}{v} = 63,57 \text{ kg kmol}^{-1}$ pro roztok CuSO_4 , kde měď je dvojmocná, je $\frac{M_k}{v} = 31,785 \text{ kg kmol}^{-1}$.



Obr. 31

$$a) \quad m_1 = \frac{1}{9,652 \cdot 10^7} \cdot 6,357 \cdot 10 \cdot \frac{9 \cdot 3 \cdot 10^2}{205 \cdot \frac{10 \cdot 0,6}{3}} \frac{\text{kg V s}}{\text{C } \Omega}$$

$$m_1 = \frac{6,357 \cdot 2,7 \cdot 10^{-6}}{9,652 \cdot 2 \cdot 2,07} \text{ kg.}$$

Logaritmičsky se určí

$$m_1 \doteq 8,6 \cdot 10^{-6} \text{ kg.}$$

b) Protože $\frac{\alpha}{v}$ mědi má v roztoku CuSO_4 poloviční hodnotu než v roztoku CuCl , je $m_2 = \frac{1}{2} m_1$, $m_2 \doteq 4,3 \cdot 10^{-6} \text{ kg.}$

Množství mědi vyloučené proudem při zapojení dané baterie je určeno obecně vztahem (1); za 5 minut se vyloučí 8,6 mg mědi z roztoku CuCl a 4,3 mg mědi z roztoku skalice modré.

Protože ve vypočtené hodnotě m_1 a m_2 je poslední místo již nepřesné, nemá smysl počítat hmotu vyloučené mědi na více než dvě platné číslice.

7. Kolejnice železniční trati z Břeclavi do Přerova mají v úseku před vjezdem do nádraží v Přerově směr magnetického poledníku a jsou vodorovné. Kolejnice jsou izolovány od země i mezi sebou a jsou od sebe vzdáleny 1,435 m. Po kolejnicích jede vlak rychlostí 60 km/h. Vysvětlete, proč milivoltmetr zapojený v libovolném místě (nablízku jedoucího vlaku) mezi kolejnicemi ukáže napětí a stanovte velikost tohoto napětí. Ostatní potřebné údaje si sami opatřte z příslušných tabulek.

Stanovte dále,

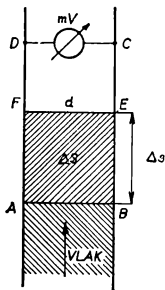
a) zda záleží na tom, je-li měřicí přístroj zapojen před vlakem nebo za ním, tj. zda se údaj po přejezdu vlaku nějak změní;

b) na kterou kolejnici musíme připojit vstupní svorku (+) přístroje, jede-li vlak k Přerovu nebo jede-li od Přerova.

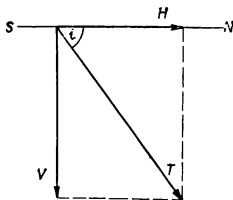
Označení veličin a dané hodnoty: Vzdálenost kolejnic

$d = 1,435 \text{ m}$; rychlost vlaku $v = 60 \text{ km/h} = \frac{50}{3} \text{ m s}^{-1}$;

horizontální složka intenzity magnetického pole zemského $H = 16 \text{ A m}^{-1}$; zeměpisná šířka Přerova $\varphi = 49^\circ 27' \text{ s. š.}$; zeměpisná délka Přerova $\lambda = 17^\circ 27' \text{ v. d.}$, magnetická inklinace Přerova $i = 64^\circ 30'$.



Obr. 32



Obr. 33

Řešení (obr. 32 a 33): Při pohybu vlaku v zemském magnetickém poli protínají osy kol jedoucího vlaku magnetické indukční čáry zemského magnetického pole a mezi kolejnicemi vzniká indukované elektromotorické napětí $\mathcal{E} = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, kde $\Delta\Phi$ značí velikost změny magnetického in-

dukčního toku a Δt dobu, za kterou k této změně toku došlo. Urazí-li vlak rovnoměrným pohybem za dobu Δt dráhu Δs , je $\Delta s = v \cdot \Delta t$. Pro velikost změny magnetického toku platí $\Delta \Phi = B \Delta S$, kde B značí složku magnetické indukce ve svislém směru a ΔS velikost plochy, kterou opíše osa kol délky d za dobu Δt . Je tedy $\Delta S = d \cdot v \cdot \Delta t$ a $\Delta \Phi = B \cdot d \cdot v \cdot \Delta t$, takže $\mathcal{E} = - B \cdot d \cdot v$. (1)

Složka magnetické indukce má velikost $B = \mu_0 \mu_r V$, neboť osy kol vlaku jsou kolmé k vektoru vertikální složky V zemského magnetického pole. Velikost této složky je V . Protože relativní permeabilita vzduchu $\mu_r \doteq 1$, je $B = \mu_0 V = \mu_0 H \cdot \operatorname{tg} i$, kde $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1}$ značí permeabilitu vakua.

Dosadíme-li do vztahu (1), platí $|\mathcal{E}| = \mu_0 H \cdot d \cdot v \operatorname{tg} i$ (2), což je obecný vztah pro výpočet velikostí vzniklého indukovaného napětí.

Číselně:

$$|\mathcal{E}| = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,6 \cdot 10 \cdot 1,435 \cdot \frac{5 \cdot 10}{3} \cdot \operatorname{tg} 64^\circ 30' \frac{\text{VsA m}^2}{\text{A m}^2 \text{s}}$$

Logaritmicky určíme

$$|\mathcal{E}| = 1,008 \cdot 10^{-3} \text{ V}.$$

Mezi kolejnicemi vznikne napětí určené obecně rovnicí (2), číselnou hodnotu má 1,008 mV.

a) Naměřená hodnota je stejná, je-li měřicí přístroj zapojen před vlakem nebo za ním, neboť osy kol v obou případech protnou stejný počet magnetických indukčních čar za 1 s.

b) Podle Flemingova pravidla pravé ruky musíme připojit vstupní svorku měřicího přístroje na levou (západní) kolejnici v případě, že vlak jede k severu (k Přerovu) a na pravou (východní) kolejnici, jede-li k jihu (k Břeclavi).

8. Na anodě elektronky se vlivem kinetické energie dopadajících elektronů vyvine 3,9 cal tepla za 20 minut. Jaká je rychlost dopadajících elektronů, je-li proud $I = 0,006 \text{ A}$?

Označení veličin a dané hodnoty: Za dobu $t = 20 \text{ min} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ s}$ se vyvine na anodě teplo $W = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ kcal} = 3,9 \cdot 4,185 \text{ J}$, neboť $\text{kcal} = 4,185 \cdot 10^3 \text{ J}$; náboj elektronu $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$; proud $I = 6 \cdot 10^{-3} \text{ A}$; hmota elektronu $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Řešení: Označíme-li x počet elektronů dopadajících za dobu t na anodu elektronky, pak dopadne na anodu za dobu t celkový náboj $Q = x \cdot e$, odkud určíme $x = \frac{Q}{e} =$

$= \frac{I \cdot t}{|e|}$. Protože každý elektron při dopadu odevzdá anodě energii $W_1 = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, vyvine se na anodě vlivem dopada-

jících elektronů celková tepelná energie $W = \frac{1}{2} x \cdot m \cdot v^2 =$
 $= \frac{1}{2} \frac{I \cdot t}{|e|} \cdot m \cdot v^2$. Odtud vypočítáme $v = \sqrt{\frac{2 |e| W}{m I t}}$ (1),

což je obecný vzorec pro výpočet hledané rychlosti.

Číselně:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 4,185 \cdot 3,9}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2 \cdot 10^3}} \sqrt{\frac{\text{As J}}{\text{kg As}}} =$$

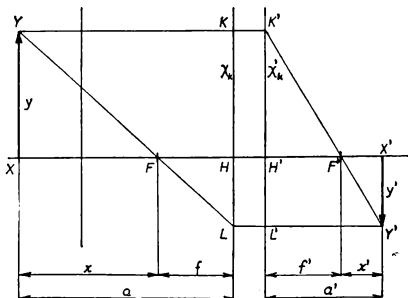
$$= \sqrt{\frac{3,2 \cdot 4,2 \cdot 3,9 \cdot 10^{12}}{9,1 \cdot 6 \cdot 1,2}} \text{ m s}^{-1}.$$

Pomocí logaritmu vypočítáme $v = 8,929 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}$.

Elektrony dopadají na anodu rychlostí danou vzorcem (1), číselně 892,9 km s⁻¹.

9. Určete ohniskovou vzdálenost dané spojky první metodou, uvedenou v tématu k prostudování odd. d 1.

Potřeby: Optická lavice, spojná čočka v objímce na posuvném jezdcí, clona s vyříznutou úsečkou, stínítko na posuvném jezdcí, světelný zdroj na posuvném jezdcí, zdroj proudu, milimetrové měřítko.



Obr. 34

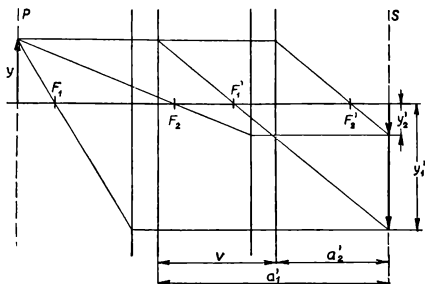
Označení charakteristických parametrů čočky a vztahy mezi nimi (obr. 34): Předmětové a obrazové ohnisko čočky označíme po řadě F, F' , kladnou hlavní rovinu předmětovou a obrazovou χ_k a χ'_k , předmětovou a obrazovou ohniskovou vzdálenost čočky f a f' . Velikost předmětu XY označíme y ; $X'Y' = y'$ je velikost obrazu. Z podobných trojúhelníků $\triangle XYF$ a $\triangle LHF$ a z podobnosti trojúhelníků $\triangle H'K'F'$ a $\triangle X'Y'F'$ plyne

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}, \text{ kde } x = FX, \quad x' = F'X', \quad y = HK = H'K, \quad y' = L'H' = LH. \text{ Záporné znaménko v těchto rov-}$$

nicích značí, že obraz je obrácený. Označíme-li a vzdálenost předmětu od kladné hlavní roviny předmětové, a' vzdálenost obrazu od kladné hlavní roviny obrazové, je $x = a - f$, $x' = a' - f'$. Proto platí

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{a-f} \text{ a } \frac{y'}{y} = -\frac{a'-f'}{f'}.$$

Prostor před čočkou i za ní má týž index lomu. Proto mají předmětová i ohnisková vzdálenost stejnou velikost, takže platí $f' = f$.



Obr. 35

Postup měření:

1. Zvolíme si pevně polohu P předmětu (vyříznutá úsečka ve cloně) i polohu stínítka S tak, abychom mohli vytvořit na stínítku obraz předmětu danou čočkou (obr. 35). Obraz na stínítku vznikne ve dvou různých polohách čočky. Vzdá-

lenost obrazu od kladné hlavní roviny obrazové, jejíž polohu neznáme, označíme v prvním případě a'_1 a v druhém případě a'_2 . Velikost obrazu označíme v prvním případě y'_1 , v druhém případě y'_2 . Pro poměr velikosti obrazu a předmětu platí

$$\frac{y'_1}{y} = - \frac{a'_1 - f}{f} \text{ a } \frac{y'_2}{y} = - \frac{a'_2 - f}{f}, \text{ odkud plyne}$$

$$\frac{y'_1 - y'_2}{y} = \frac{a'_2 - a'_1}{f}, \text{ z čehož určíme } f = \frac{v}{y'_1 - y'_2} y, \quad (1),$$

kde $v = |a'_1 - a'_2|$.

Hodnota v značí tedy délku, o kterou musíme posunout čočku z první polohy do druhé.

Z naměřených hodnot y'_1, y'_2, y, v vypočítáme f podle vztahu

Tabulka VIII

Měření	y [mm]	y'_1 [mm]	y'_2 [mm]	v [mm]	f [mm]
1	40	52	31	61	115
2	40	71	29	126	120
3	40	82	27	168	122
4	40	85	24	182	119
5	40	98	22	231	122
Σ					599
$\frac{\Sigma}{n}$					119,8

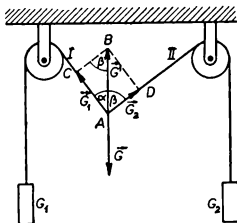
(1). Tento vztah je odvozen obecně bez předpokladu o tloušťce čočky a platí tedy pro čočky tenké i tlusté.

2. Měření provedeme pro pět různých poloh předmětu a stínítka a naměřené hodnoty zaznamenáme do tabulky. (Viz tabulka VIII.)

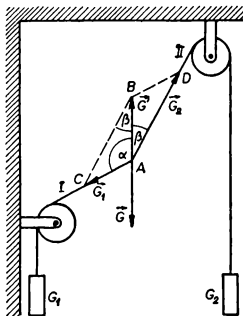
3. Za nejpravděpodobnější hodnotu ohniskové vzdálenosti pokládáme aritmetický průměr f_r všech pěti hodnot, vypočítaných z naměřených hodnot.

Výpočet se provede podle vztahu (1).

Měřením předepsanou metodou byla zjištěna přibližná ohnisková délka čočky 120 mm. Obecně je určena vzorcem (1).



Obr. 36



Obr. 37

ŘEŠENÍ ÚLOH DRUHÉHO KOLA

1. Těleso váhy $G = 25 \text{ kp}$ je zavěšeno na dvou provazech (obr. 36 a 37) I a II vedených přes kladky. Na koncích provazů jsou zavěšena závaží o váhách G_1 , G_2 , která udržují

těleso v rovnováze. Závaží $G_1 = 20$ kp je zavěšeno na provaze I, svírajícím se svislým směrem úhel α , pro který platí $\sin \alpha = 0,6$. Určete váhu G_2 a úhel β , který svírá se svislým směrem provaz II. Váhu provazu a tření na kladkách zanedbejte.

Řešení: Vektory vah závaží G_1 a G_2 přeneseme do společného působíště A . Jejich výslednice G' je v rovnováze s váhou G tělesa zavěšeného v bodě A ; proto platí $G' = G$; G' a G jsou velikosti vektorů G' a G .*)

Z trojúhelníku $\triangle ABC$ určíme podle kosinové věty velikost závaží G_2 .

$$G_2 = \sqrt{G_1^2 + G^2 - 2 G \cdot G_1 \cdot \cos \alpha}, \text{ což lze psát ve tvaru}$$

$$G_2 = \sqrt{G_1^2 + G^2 - 2 G G_1 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \quad (1)$$

$$\text{vzhledem k tomu, že } |\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (2)$$

Výraz (1) udává obecnou hodnotu váhy závaží G_2 .

Úhel $\beta = \sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC$ — střídavé úhly mezi rovnoběžkami AD a CD — lze vypočítat použitím sinové věty z trojúhelníku $\triangle ABD$;

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{G_1}{G_2}; \quad (3)$$

odtud určíme

$$\sin \beta = \frac{G_1 \sin \alpha}{\sqrt{G_1^2 + G^2 - 2 G G_1 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}}. \quad (4)$$

Velikost úhlu α je dána rovnicí $\sin \alpha = 0,6$. Z ní vycházejí dvě hodnoty pro úhel α , a to $\alpha_1 < 90^\circ$ a $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 > 90^\circ$. Podle vzorce (2) je hodnota kosinů těchto úhlů $\cos \alpha_1 = \sqrt{1 - (0,6)^2} = 0,8$ a $\cos \alpha_2 = -0,8$.

Úloha je tedy dvojznačná.

*) Pro značení vektorů bylo užito v textu publikace půltučného gillu, kdežto v rýsovaných obrázcích ponecháno označení šipkami.

a) Je-li $\alpha_1 < 90^\circ$, má $\cos \alpha_1$ hodnotu $\cos \alpha_1 = 0,8$. Pak podle vzorce (1) je

$G_2 = \sqrt{400 + 625 - 2 \cdot 20 \cdot 25 \sqrt{1 - 0,36}} \text{ kp} = 15 \text{ kp}$
a podle vzorce (3)

$$\sin \beta_1 = \frac{20}{15} \cdot 0,6 = 0,8.$$

Pak $\beta_1 = 53^\circ 08'$. Vzhledem k tomu, že $\sin \beta_1 = \cos \alpha_1$, je $\beta_1 = 90^\circ - \alpha_1$ a $\angle DAC = 90^\circ$. Proto je trojúhelník $\triangle ACB$ pravoúhlý a velikosti sil G_1 , G_2 a G jsou zobrazeny stranami pythagorejského trojúhelníku. Skutečně platí $G_1 : G_2 : G = 20 : 15 : 25 = 4 : 3 : 5$.

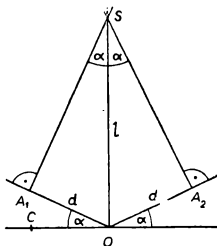
b) Je-li $\alpha_2 > 90^\circ$, je $\cos \alpha_2 = -0,8$. Pak podle (1) je $G_2 = \sqrt{400 + 625 + 2 \cdot 20 \cdot 25 \sqrt{1 - 0,36}} \text{ kp} = \sqrt{1825} \text{ kp} \doteq 42,72 \text{ kp}$ a podle (3) $\sin \beta_2 = \frac{20}{42,72} \cdot 0,6 = 0,2809$;

odtud určíme pomocí tabulek hodnotu $\beta_2 \doteq 16^\circ 20'$.

Obecně jsou velikosti váhy G_2 a úhlu β určeny vztahy (1) a (4). Úloha je dvojznačná. Váha G_2 má buď hodnotu 15 kp a pak svírá provaz II se svislým směrem úhel $53^\circ 08'$, nebo se rovná 42,72 kp a provaz II svírá se svislým směrem úhel $16^\circ 20'$.

2. Dvě nakloněné roviny, které mají též úhel sklonu α , jsou postaveny proti sobě tak, že se dotýkají v bodě O (obr. 38). Nechť se z bodu A_1 pohybuje (bez tření) kulička do bodu O

a odtud po druhé nakloněné rovině až do bodu A_2 , ležícího v téže výšce jako bod A_1 . Z bodu A_2 se kulička vrací



Obr. 38

do A_1 , odtud opět do A_2 atd.; koná tedy pohyb podobný jednoduchému kmitavému (harmonickému) pohybu.

a) Určete periodu kmitání kuličky.

b) Veďte v bodě A_1 kolmici; ta vytne na svislé přímce vedené bodem O úsečku $OS = l$. Porovnejte délku l_1 matematického kyvadla, které má stejnou periodu kmitání jako kulička, s délkou $l = OS$. Kladte $\pi^2 = 10$.

Označení veličin: Periodu kmitání kuličky označíme T . Označení dalších veličin je patrné z textu úlohy a z obrázku č. 38.

Řešení:

a) Uvažovaná kulička koná po dráze $d = A_1O$ pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením $a = g \cdot \sin \alpha$, neboť jde o pohyb na nakloněné rovině s úhlem α ; g značí tíhové zrychlení. Dráhy $A_1O = d$ a $A_2O = d$ proběhne kulička v obou směrech za stejnou dobu t . Perioda T pohybu kuličky je doba, za kterou vykoná kulička pohyb z A_1 do O , z O do A_2 , z A_2 do O a z O do A_1 . Je tedy $T = 4t$. Hodnotu t vypočítáme z rovnice $d = \frac{1}{2} at^2$, z níž plyne $t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2d}{g \sin \alpha}}$.

Proto je

$$T = 4 \sqrt{\frac{2d}{g \cdot \sin \alpha}}, \quad (1)$$

což je řešení úlohy a), jestliže pokládáme velikost úsečky d za známou hodnotu.

b) Vztah (1) lze zjednodušit, vyjádříme-li T pomocí délky l . Protože úhly $\sphericalangle COA_1$ a $\sphericalangle OSA_1$ jsou tvořeny rameny k sobě kolmými, je $\sphericalangle OSA_1 = \sphericalangle COA_1 = \alpha$, a proto je $d = l \sin \alpha$. Dosazením do rovnice (1) získáme vztah $T = 4 \cdot \sqrt{\frac{2l}{g}}$. Tuto hodnotu máme porovnat s periodou T'

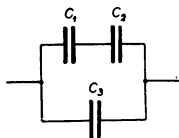
matematického kyvadla délky l_1 , která má velikost $T' = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$. Poměr $\frac{T'}{T} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l_1}{2l}} = \sqrt{\frac{\pi^2 l_1}{8l}}$. Mohou tedy nastat tyto tři možnosti:

1. Je-li $\frac{\pi^2 l_1}{8l} > 1$, pak $T' > T$. Tento případ nastane, jestliže $\frac{l_1}{l} > \frac{8}{\pi^2}$, tj. $l_1 > 0,8 l$, dosadíme-li za $\pi^2 = 10$.
2. Je-li $\frac{\pi^2 l_1}{8l} = 1$, je $T' = T$. Tento případ nastane, jestliže $l_1 = 0,8 l$. (2)
3. Je-li $\frac{\pi^2 l_1}{8l} < 1$, je $T' < T$. Tento případ nastane, jestliže $l_1 < 0,8 l$.

Jestliže délka l_1 matematického kyvadla je rovna osmi desetinám délky OS , pak perioda kmitání matematického kyvadla je rovna periodě kmitání kuličky, pohybující se po obou nakloněných rovinách; v případě, že délka matematického kyvadla je menší (větší) než osm desetin délky OS , je perioda kmitů kyvadla menší (větší) než perioda kmitání kuličky.

Zvláštní případ $l_1 = 0,8 l$ nastane, jestliže úhel $\alpha = \alpha_0 = 36^\circ 52'$, který vyhovuje vztahům $\alpha_0 < 90^\circ$ a $\cos \alpha_0 = \frac{8}{\pi^2} \doteq 0,8$. Jak je patrné z obrázku 38, je potom $\cos \alpha_0 = \frac{A_1 S}{OS}$, takže $A_1 S = l \cos \alpha_0 = \frac{8}{\pi^2} l = 0,8 l$. Srovnáme-li tento výraz s podmínkou (2), je zřejmé, že v tomto případě je $A_1 S = l_1$. Jestliže úhel α vyhovuje podmínkám $\alpha < 90^\circ$ a $\cos \alpha = \frac{8}{\pi^2}$, pak matematické kyvadlo délky $A_1 S$ kmitá se stejnou periodou jako kulička pohybující se bez

tření po obou nakloněných rovinách mezi body A_1A_2 . Číselně má úhel α velikost $\alpha = 36^\circ 52'$.



Obr. 39

3. Úhrnná kapacita C při spojení tří kondenzátorů podle schématu (obr. 39) je $C = 5,2 \mu\text{F}$. Probije-li se kondenzátor C_2 , stoupne úhrnná kapacita C na $C' = 6 \mu\text{F}$. Probije-li se však kondenzátor C_1 (příčemž kondenzátor C_2 zůstane nepoškozen), pak je úhrnná kapacita $C'' = 7 \mu\text{F}$. Určete kapacity C_1 , C_2 , C_3 .

Označení veličin a dané hodnoty:

$C = 5,2 \cdot 10^{-6}\text{F}$, $C' = 6 \cdot 10^{-6}\text{F}$, $C'' = 7 \cdot 10^{-6}\text{F}$ jsou dané kapacity skupin kondenzátorů. Neznámé kapacity jednotlivých kondenzátorů mají podle obr. 39 velikosti C_1 , C_2 , C_3 .

Řešení: Kondenzátory C_1 a C_2 jsou spojeny za sebou. Jsou tedy nabity stejně velkým nábojem Q_1 a jejich celkové napětí $U = U_1 + U_2$, kde U_1 a U_2 jsou napětí na kondenzátorech C_1 a C_2 . Proto platí

$$\frac{Q_1}{C_4} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_1}{C_2}, \text{ kde } C_4 \text{ je kapacita větve s kondenzátory}$$

C_1 a C_2 . Po úpravě poslední rovnice dostaneme

$$\frac{1}{C_4} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \text{ z čehož plyne vztah } C_4 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (1)$$

Větev s kondenzátory C_1 , C_2 a větev s kondenzátorem C_3 jsou spojeny vedle sebe. Napětí na obou větvích je tedy stejné a náboj celé baterie je $Q = Q_1 + Q_2$, kde Q_2 je náboj na kondenzátoru C_3 . Proto platí

$$CU = C_3 U + C_4 U \text{ a odtud } C = C_3 + C_4 = C_3 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (2)$$

Obdobně platí po probití kondenzátoru C_2 vztah

$$C' = C_3 + C_1 \quad (3)$$

a po probití kondenzátoru C_1 rovnice

$$C'' = C_3 + C_2. \quad (4)$$

Vztahy (2), (3), (4) jsou soustavou tří rovnic, z nichž určíme neznámé kapacity C_1 , C_2 a C_3 . Všechny tyto rovnice jsou rozměrově správné.

Upravíme nejprve rovnici (2): $(C - C_3)(C_1 + C_2) = C_1 C_2$ a do ní dosadíme z rovnic (3) a (4) za C_1 a za C_2 .

$$\text{Vyjde } (C - C_3)(C' + C'' - 2C_3) = C'C'' - C_3 C'' - C_3 C' + C_3^2$$

$$\text{a } C_3^2 - 2CC_3 + (CC' + CC'' - C'C'') = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou

$$C_3 = C \pm \sqrt{C^2 - (CC' + CC'' - C'C')}$$

Z rovnice (2) vychází

$$C_3 = C - \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \text{ takže } C_3 < C, \text{ neboť } C_1 > 0 \text{ a } C_2 > 0$$

Protože $C_3 < C$, nemůže kořen

$$C_3 = C + \sqrt{C^2 - (CC' + CC'' - C'C')}$$

vyhovovat daným podmínkám.

Kapacita kondenzátoru C_3 má tedy obecnou hodnotu

$$C_3 = C - \sqrt{C^2 - (CC' + CC'' - C'C')}. \quad (5)$$

Po dosazení do rovnic (3), (4) dostaneme

$$C_1 = (C' - C) + \sqrt{C^2 - (CC' + CC'' - C'C')}; \quad (6)$$

$$C_2 = (C'' - C) + \sqrt{C^2 - (CC' + CC'' - C'C')}. \quad (7)$$

Výrazy (5), (6), (7) udávají obecně velikost kapacit C_1 , C_2 , C_3 za předpokladu, že diskriminant $D = C^2 - (CC' + CC'' - C'C') \geq 0$

Číselně:

$$D = [5,2^2 \cdot 10^{-12} - (5,2 \cdot 6 + 5,2 \cdot 7 - 6 \cdot 7) \cdot 10^{-12} \text{ F}^2 = \\ = (27,04 - 25,6) \cdot 10^{-12} \text{ F}^2 = 1,44 \cdot 10^{-12} \text{ F}^2$$

$$\sqrt{D} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$C_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F} \quad C_2 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ F} \quad C_3 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ F}.$$

Kapacity daných kondenzátorů mají hodnoty určené vzorci (5), (6), (7), číselně $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 3 \mu\text{F}$, $C_3 = 4 \mu\text{F}$.

4. Stanovte vnitřní odpor galvanického (suchého) článku pomocí voltmetru a ampérmetru.

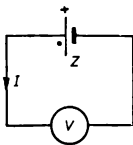
Potřeby: Galvanický (suchý) článek, voltmetr a ampérmetr na stejnosměrný proud, regulační reostat, spojovací dráty, spínač.

Postup práce: Voltmetrem o velmi značném odporu ve srovnání s vnitřním odporem r_i článku změřte napětí na pólech článku; naměříte tak přibližně elektromotorické napětí $\mathcal{E}$ článku. Pak spojte do obvodu článek, regulační reostat a ampérmetr; ke svorkám článku připojte paralelně voltmetr. Ampérmetrem změřte proud I a voltmetrem svorkové napětí U . Zdůvodněte, proč se U liší od $\mathcal{E}$. Odvoďte příslušné vztahy a vypočítejte vnitřní odpor r_i článku.

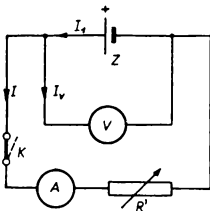
Měření proveďte aspoň pětkrát při různé velikosti odporu nastavené na regulačním reostatu. Před každým měřením zjistěte hodnotu $\mathcal{E}$. Vnitřní odpor r_i určete jako aritmetický průměr nalezených hodnot. Měřením nebo dotazem zjistěte R_v voltmetru. Určete poměr $R_v : r_i$. Domníváte se, že pro zjištěnou hodnotu poměru byla splněna podmínka v textu úlohy? Má odpor použitého ampérmetru vliv na velikost stanovené hodnoty r_i ?

Řešení: Připojíme-li podle obr. 40a ke svorkám nepracujícího zdroje Z , tj. takového zdroje, který nedodává proud do vnějšího obvodu, elektrostatický voltmetr V , jímž neprochází proud, naměříme voltmetrem hodnotu elektromoto-

rického napětí $\mathcal{E}$. Užijeme-li však voltmetru, jímž prochází proud, pak dodává zdroj proud I' do obvodu s voltmetrem a napětí poklesne na hodnotu $U' < \mathcal{E}$, které říkáme svorkové napětí zdroje. V našem případě je to napětí na obvodu s voltmetrem. Podle Ohmova zákona platí $U' = R_v I'$ (1a) a $\mathcal{E} = (R_v + r_t) I'$ (1b), neboť proud I' prochází nejen obvo-



Obr. 40 a



Obr. 40 b

dem s voltmetrem, nýbrž i zdrojem. Je tedy $\mathcal{E} - U' = r_t I'$ úbytkem napětí na odporu r_t . Dosadíme-li do rovnice (1b) za I' hodnotu $I' = \frac{U'}{R_v}$ z rovnice (1a), dostaneme $\mathcal{E} =$

$$= (R_v + r_t) \frac{U'}{R_v} = U' + U' \frac{r_t}{R_v}, \text{ takže } \mathcal{E} - U' = U' \cdot \frac{r_t}{R_v}. \quad (2)$$

Je-li hodnota odporu R_v ve srovnání s velikostí odporu r_t velmi značná, blíží se hodnota $\frac{r_t}{R_v}$ k nule a pak je $\mathcal{E} \doteq U'$.

U suchého článku, jehož elektromotorické napětí má přibližnou hodnotu 4 V a jehož vnitřní odpor je přibližně 3 Ω , má výraz $U' \cdot \frac{r_t}{R_v}$ hodnotu řádu 10^{-2} V až 10^{-3} V, neboť odpor

avometu, jehož budeme užívat jako voltmetru, je $6\,000\ \Omega$ ($1\,000\ \Omega$ na $1\ \text{V}$) při užití rozsahu pro napětí do $6\ \text{V}$. Liší se tedy U' od $\mathcal{E}$ jen v setinách nebo tisícinách voltu. Tento rozdíl je tak malý, že ho není možno na stupnici voltmetru naměřit.

Protože voltmetr, jehož budeme při měření používat, má značný odpor ve srovnání s vnitřním odporem článku, můžeme svorkové napětí U' článku považovat za jeho elektromotorické napětí $\mathcal{E}$, nebude-li k článku zařazen kromě voltmetru žádný jiný vnější obvod.

Připojíme-li ke článku vnější obvod, do něhož je zařazen přes spínač K ampérmetr A a regulační reostat o odporu R' , dodává zdroj Z proud I do obvodu s regulačním odporem a ampérmetrem a proud I_v do větve s voltmetrem, takže platí $I_1 = I + I_v$, kde I_1 je proud v nerozvětvené části obvodu. Ampérmetrem měříme proud I (obr. 40b).

Podle Ohmova zákona platí $U = RI$ (3), kde U značí svorkové napětí zdroje se zařazeným vnějším obvodem a R celkový odpor větve s ampérmetrem a s regulačním reostatem, takže $R = R' + R_A$, kde R_A je odpor ampérmetru. Zároveň platí $\mathcal{E} = RI + r_i I = U + r_i I$, zanedbáme-li velmi malý proud tekoucí větví s voltmetrem, tj. předpokládáme-li, že odpor voltmetru je veliký ve srovnání s odporem R vnějšího obvodu. Z poslední rovnice určíme

$$r_i = \frac{\mathcal{E} - U}{I}; \quad (4)$$

r_i značí vnitřní odpor zdroje vypočítaný za předpokladu, že voltmetrem protéká jen zanedbatelně malý proud I_v .

Vztah (4) udává obecně velikost vnitřního odporu zdroje za předpokladu, že odpor voltmetru je značně veliký ve srovnání s vnitřním odporem zdroje a také ve srovnání s vnějším odporem R . Přesnější hodnota vnitřního odporu

zdroje je

$$r_i = \frac{\mathcal{E} - U}{I_1}, \quad (5)$$

neboť obvodem prochází proud $I_1 = I + I_v$. Z rovnice (5) plyne

$$r_i = \frac{\mathcal{E} - U}{I + I_v} = \frac{\mathcal{E} - U}{I + \frac{U}{R_v}}. \quad (6)$$

Hodnota r_i určená vztahem (6) vyjadřuje přesněji hodnotu vnitřního odporu zdroje než hodnota určená vztahem (4), neboť je odvozena jen za jediného předpokladu, že vnitřní odpor zdroje je mnohem menší než odpor užitého voltmetru. Změní-li se velikost vnějšího odporu R , změní se velikost proudu I_1 na $I_2 = kI_1$, kde k je určité kladné reálné číslo. Zároveň se však změní i hodnota $\mathcal{E} - U = r_i I_1$ na hodnotu $\mathcal{E} - U_2 = r_i I_2 = k r_i I_1$, takže

$$\frac{\mathcal{E} - U_2}{I_2} = \frac{k \cdot r_i I_1}{k \cdot I_1} = \frac{\mathcal{E} - U}{I_1} = r_i.$$

Proto nemá ani odpor použitého ampérmetru, ani změna velikosti odporu na regulačním reostatu vliv na velikost vypočítané hodnoty r_i . Poměr $\frac{\mathcal{E} - U}{I_1} = r_i$ je na těchto změnách nezávislý. Ze vzorců (4), (6) je patrné, že při výpočtu velikosti vnitřního odporu zdroje není potřeba znát ani odpor R' regulačního reostatu, ani odpor užitého ampérmetru.

Postup měření:

1. Sestavíme obvod podle obr. 40b. Zdrojem napětí je suchý článek do kapesní svítilny, voltmetrem avomet s vhodně nastaveným předřadným odporem a ampér-

metrem také avomet s vhodně nastaveným bočníkem; spínačem je telegrafní klíč, regulační odpor má největší hodnotu $10^2 \Omega$. Zdroj k obvodu zatím nepřipojujeme.

2. Zkontrolujeme správnost zapojení obvodu a zařadíme zdroj. Při otevřeném obvodu změříme elektromotorické napětí $\mathcal{E}$ zdroje a po uzavření obvodu spínačem odečteme na voltmetru svorkové napětí U a na ampérmetru proud I . Měření provedeme pětikrát, pokaždé při jiné velikosti odporu R' . Naměřené hodnoty $\mathcal{E}$, U , I zaznamenáme do tabulky. (Viz tabulka IX.)

3. Pro každé měření vypočítáme podle vztahů (4) a (6) hodnoty r'_i a r_i . Odpor voltmetru má při užitém rozsahu do 6 V hodnotu $R_v = 6 \cdot 10^3 \Omega$.

Tabulka IX

Měření čis.	R_v [Ω]	$\mathcal{E}$ [V]	U [V]	$\mathcal{E} - U$ [V]	$I_v = \frac{U}{R_v}$ [A]	I [A]	$I = I + I_v$ [A]	r'_i [Ω]	r_i [Ω]
1	$6 \cdot 10^3$	4,1	3,9	$2 \cdot 10^{-1}$	$6,5 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$7,065 \cdot 10^{-3}$	2,86	2,83
2	$6 \cdot 10^3$	4,1	3,8	$3 \cdot 10^{-1}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$	$1,07 \cdot 10^{-1}$	$1,076 \cdot 10^{-1}$	2,80	2,79
3	$6 \cdot 10^3$	4,1	3,67	$4,3 \cdot 10^{-1}$	$6,1 \cdot 10^{-4}$	$1,51 \cdot 10^{-1}$	$1,516 \cdot 10^{-1}$	2,84	2,83
4	$6 \cdot 10^3$	4,1	3,5	$6 \cdot 10^{-1}$	$5,8 \cdot 10^{-4}$	$2,11 \cdot 10^{-1}$	$2,116 \cdot 10^{-1}$	2,84	2,84
5	$6 \cdot 10^3$	4,1	3,15	$9,5 \cdot 10^{-1}$	$5,25 \cdot 10^{-4}$	$3,31 \cdot 10^{-1}$	$3,315 \cdot 10^{-1}$	2,87	2,86

4. Určíme r'_i a r_i jako aritmetické průměry všech pěti hodnot v posledních dvou sloupcích tabulky. Vychází $r'_i = 2,84 \Omega$ a $r_i = 2,83 \Omega$. Měřením byla určena hodnota vnitřního odporu suchého článku $2,83 \Omega$.

Závěr:

1. Poměr $R_v : r_i = 2120$ je dostatečně velký, takže můžeme pokládat odpor voltmetru za značný ve srovnání s vnitřním odporem zdroje. Správnost této domněnky

ověříme výpočtem. Protože $U' < \mathcal{E}$, má výraz

$$U' \frac{r_i}{R_v}$$

ze vztahu (2) hodnotu

$$U' \frac{r_i}{R_v} < \frac{4,1}{2 \cdot 120} \text{ V} < \frac{4,2}{2,1 \cdot 1\,000} \text{ V} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ V}.$$

Liší se tedy U' , jež jsme pokládali za $\mathcal{E}$, od $\mathcal{E}$ o hodnotu menší než 2 mV, která se na voltmetru se stupnicí do 6 V nedá zjistit.

2. Protože hodnoty r_i vypočítané podle vztahu (6) se liší jen nepatrně od hodnot r'_i určených podle vztahu (4), má proud I_v , protékající voltmetrem, jen velmi malou hodnotu ve srovnání s velikostí I proudu tekoucího větvi s ampérmetrem a regulačním reostatem. Je tedy odpor R_v voltmetru mnohem větší než odpor $R = R' + R_A$ vnějšího obvodu.

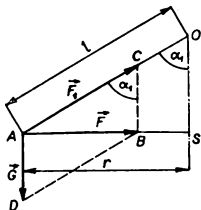
ŘEŠENÍ ÚLOH TŘETÍHO KOLA

1. Dvě koule o stejně velikých hmotách $m = 1 \text{ kg}$ jsou upevněny na koncích dvou stejně dlouhých tyčí délky $l = 20 \text{ cm}$, kterými jsou kloubovitě připojeny k svislé ose, kolem níž se otáčejí rovnoměrným pohybem. Soustava vykoná 180 otáček za minutu. Určete úhel, který spolu svírají tyče při daném počtu otáček a kinetickou energii jedné koule. Jak se změní úhel mezi tyčemi, vzroste-li počet otáček na 200 za minutu? Hmoty tyčí je zanedbatelná ve srovnání s hmotou koulí. Uveďte obdobu popsaného zařízení v praxi. (Položte $\pi^2 = 9,81$.)

Označení veličin a dané hodnoty: Hmoty jedné koule $m = 1 \text{ kg}$; koule je upevněna na tyči délky $l = 2 \cdot 10^{-1} \text{ m}$, původní frekvence otáčení soustavy $f_1 = \frac{180}{60} \text{ s}^{-1} = 3 \text{ Hz}$,

nová frekvence $f_2 = \frac{200}{60} \text{ s}^{-1} = \frac{10}{3} \text{ Hz}$. Při frekvenci f_1 svírá tyč se svislou osou úhel α_1 , při frekvenci f_2 úhel α_2 . Váha koule $G = mg$, kde g značí tíhové zrychlení.

Řešení: Při otáčení soustavy s frekvencí f_1 se každá koule odchýlí od svislé osy o úhel α_1 a obě koule se pohybují po stejné kruhové dráze o poloměru $r = l \sin \alpha_1$



Obr. 41

stejnou rychlostí. Pohyb každé koule po kružnici je udržován dostředivou silou F velikosti $F = 4\pi^2 f_1^2 r m = 4\pi^2 f_1^2 \cdot m l \sin \alpha_1$ (obr. 41). (1) Tato dostředivá síla je výslednicí dvou sil, váhy koule G a síly F_1 . Silou F_1 je koule tažena prostřednictvím tyče k bodu O na kloubu, jímž je tyč spojena se svislou osou. Protože úsečky CB a OS jsou rovnoběžné, je $\angle ACB = \angle AOS = \alpha_1$. Úsečka CB je stejně dlouhá jako úsečka

AD , která znázorňuje velikost $G = mg$ síly G . V pravoúhlém trojúhelníku $\triangle ABC$ platí

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{F}{G} = \frac{4\pi^2 f_1^2 l m \cdot \sin \alpha_1}{mg}.$$

Protože

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} \quad \text{a} \quad \sin \alpha_1 \neq 0, \quad \text{je} \quad \cos \alpha_1 = \frac{g}{4\pi^2 f_1^2 l}. \quad (2)$$

Tato rovnice určuje obecně velikost úhlu α_1 , který svírá se svislou osou tyč, na níž je koule upevněna. Úhel, který spolu svírají obě tyče, je dvojnásobný a má velikost $\varphi_1 = 2\alpha_1$.

$$\text{Číselně: } \cos \alpha_1 = \frac{9,81 \cdot 10}{4 \cdot 9,81 \cdot 9 \cdot 2} \frac{\text{m s}^2}{\text{m s}^2},$$

dosadíme-li za $\pi^2 = 9,81$.

Po úpravě dostaneme $\cos \alpha_1 = \frac{10}{72} = 0,13889$ a $\alpha_1 = 82^\circ 01'$. Tyče spolu svírají při otáčení s frekvencí f_1 úhel $2\alpha_1$, kde α_1 je určeno vztahem (2); číselně je $2\alpha_1 = 164^\circ 02'$. Kinetickou energii jedné koule vypočítáme ze vztahu $W = \frac{1}{2}mv^2$ (W značí hledanou kinetickou energii). Dosadíme-li za $v = 2\pi r f_1$, dostaneme $W = \frac{1}{2} 4\pi^2 f_1^2 r^2 m = 2\pi^2 f_1^2 l^2 m \sin^2 \alpha_1 = 2\pi^2 f_1^2 l^2 m (1 - \cos^2 \alpha_1)$.

Dosadíme-li do posledního výrazu za $\cos \alpha_1$ ze vztahu (2), vychází

$$W = 2\pi^2 f_1^2 m l^2 \left(1 - \frac{g^2}{16\pi^4 f_1^4 l^2} \right) = \frac{2\pi^2 f_1^2 m l^2 (16\pi^4 f_1^4 l^2 - g^2)}{16\pi^4 f_1^4 l^2}$$

$$W = \frac{m \cdot (16\pi^4 f_1^4 l^2 - g^2)}{8\pi^2 f_1^2}, \quad (3)$$

což je obecný vzorec pro výpočet kinetické energie jedné rotující koule.

$$\text{Číselně: } W = \frac{16 \cdot 9,81^2 \cdot 3^4 \cdot 4 \cdot 10^{-2} - 9,81^2}{8 \cdot 9,81 \cdot 3^2} \frac{\text{kg m}^2 \text{s}^{-4}}{\text{s}^{-2}} =$$

$$= \frac{9,81 \cdot (64 \cdot 81 \cdot 10^{-2} - 1)}{72} \text{ J} = \frac{1,09 \cdot 50,84}{8} \text{ J} = 6,93 \text{ J}.$$

Kinetická energie jedné koule rotující s frekvencí f_1 je dána vzorcem (3) a při frekvenci 3 Hz je její přibližná hodnota 6,93 J.

Koná-li koule při otáčení 200 otáček za minutu, má frekvenci $f_2 = \frac{10}{3}$ Hz. Při této frekvenci se odchýlí tyč

od svislé osy o úhel α_2 , pro který platí podle upraveného vztahu (2)

$$\cos \alpha_2 = \frac{g}{4\pi^2 f_2^2 l} \quad (4)$$

Poměr $\frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} = \frac{f_1^2}{f_2^2}$, takže $\cos \alpha_2 = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \cdot \cos \alpha_1$.

Číselně: $\cos \alpha_2 = 0,9^2 \cdot \cos \alpha_1 = 0,81 \cdot 0,138\,89 = 0,112\,50$
 $\alpha_2 = 83^\circ 32'$.

Při frekvenci f_2 svírají spolu obě tyče úhel $2\alpha_2$, jehož velikost je obecně určena vztahem (4); číselně se rovná $167^\circ 04'$. Obdobou uvažovaného zařízení je v praxi Wattův odstředivý regulátor, kterého se užívá k regulaci přívodu páry z parního kotle do parní komory.

2. Na vodorovném stole je nádoba, v jejíž svislé stěně je několik otvorů svisle nad sebou. Nádoba je naplněna kapalinou, která vytryskuje z otvorů v nádobě. Povrch kapaliny udržujeme stále na stejné výši. Dokažte, že

a) kapalina dopadá ze všech otvorů na stůl stejnou rychlostí;

b) kapalina dopadá na totéž místo stolu ze dvou různých otvorů, jestliže vzdálenost jednoho otvoru od povrchu kapaliny v nádobě je stejná jako vzdálenost druhého otvoru od roviny stolu.

c) Ve kterém místě nádoby musí být otvor, aby proud kapaliny z něho tryskající dopadal na rovinu stolu nejdále od nádoby?

Odpor prostředí zanedbejte.

Označení veličin a dané hodnoty: Hustota kapaliny je ρ , tíhové zrychlení g . Povrch kapaliny je ve výšce h_0 nade dnem nádoby. Jeden otvor ve stěně je nade dnem ve výšce h , druhý ve výšce $h' = h_0 - h$.

Řešení :

a) Uvažujme výtok kapaliny z otvoru O nacházejícího se ve výšce h nad deskou stolu (obr. 42c). Povrch kapaliny v nádobě má výšku h_0 . Na kapalinu nacházející se ve vodorovné rovině σ , která prochází otvorem O , působí hydrostatický tlak $p = (h_0 - h)\rho g$, kde ρ značí hustotu kapaliny a g velikost tíhového zrychlení. Hydrostatický tlak je však číselně roven potenciální energii jednotkového objemu kapaliny, nacházející se v téže rovině σ . Podle zákona zachování energie platí $(h_0 - h)\rho g = \frac{1}{2}\rho v_0^2$, kde výraz $\frac{1}{2}\rho v_0^2$ značí kinetickou energii jednotkového objemu kapaliny vytryskující otvorem O ve vodorovném směru rychlostí v_0 . Z této rovnice vypočítáme

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot (h_0 - h)g}. \quad (1)$$

Zanedbáme-li odpor vzduchu, koná každá částice kapaliny po opuštění nádoby dva pohyby, rovnoměrný přímočarý rychlostí v_0 ve směru vodorovném a volný pád. Výsledný pohyb je parabolický. Částička kapaliny dopadne na stůl v bodě A za čas t , který určíme z rovnice

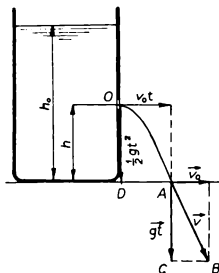
$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad \text{takže} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (2)$$

Rychlost v této částice v bodě A je výslednicí dvou rychlostí, v_0 ve vodorovném směru a rychlosti v_1 volného pádu, která má velikost $v_1 = gt$. Dosadíme-li za t z rovnice (2), vychází $v_1 = \sqrt{2hg}$. Velikost v rychlosti v vypočítáme podle Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku $\triangle ABC$

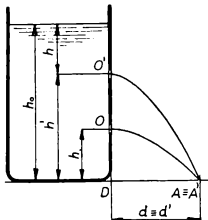
$$v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \sqrt{2 \cdot (h_0 - h)g + 2hg} = \sqrt{2h_0g}. \quad (3)$$

Ze vztahu (3) je patrné, že velikost rychlosti, s kterou dopadají na stůl částičky kapaliny, tryskající ve vodorovném směru z otvoru O , je nezávislá na výšce h . Kapalina tedy dopadá na stůl ze všech otvorů stejnou rychlostí. Velmi

jednoduše můžeme dokázat tento poznatek také jinak. Celková energie W jednotkového objemu kapaliny v rovině σ je rovna součtu energie potenciální a kinetické. Platí tedy

$$W = (h_0 - h)eg + \frac{1}{2}ev_0^2; \text{ na povrchu kapaliny má jednot-}$$


Obr. 42a



Obr. 42b

kový objem jen potenciální energii $W_p = h_0 eg$ a v místě dopadu jen energii kinetickou $W_k = \frac{1}{2}ev^2$. Podle zákona o zachování energie platí $W = W_p = W_k$, takže $h_0 eg = \frac{1}{2}ev^2$, odkud vychází $v = \sqrt{2h_0 g}$, což je vztah (3).

b) Částice kapaliny tryskající vodorovným směrem z otvoru O , který se nachází ve výšce h nad deskou stolu, opouští otvor rychlostí v_0 , která má podle vztahu (1) hodnotu $v_0 = \sqrt{2(h_0 - h)g}$. Na stůl dopadá částice ve vzdálenosti DA

za dobu t , určenou rovnicí (2). Za tuto dobu vykoná ve vodorovném směru dráhu $d = v_0 t$. Z obr. 42a je patrné, že $DA = d$. Platí tedy $d = DA = v_0 t = \sqrt{2(h_0 - h)g} \frac{2h}{g} = \sqrt{4(h_0 - h)h} = 2\sqrt{(h_0 - h)h}$ (4).

Kapalina tryskající otvorem O' , jehož výška je $h' = h_0 - h$ (obr. 42b), dopadá na stůl ve vzdálenosti $DA' = d'$. Protože podmínky pro výtok kapaliny z otvoru O' jsou stejné jako podmínky pro otvor O , platí podle upraveného vztahu (4)

$$\begin{aligned} d' &= 2\sqrt{(h_0 - h')h'} = 2\sqrt{(h_0 - h_0 + h)(h_0 - h)} = \\ &= 2\sqrt{h(h_0 - h)} = d. \end{aligned}$$

Kapalina vytékající ze dvou otvorů nádoby dopadá na totéž místo stolu, jestliže otvory leží na svislé přímce a jestliže vzdálenost jednoho otvoru od povrchu kapaliny je stejná jako vzdálenost druhého otvoru od roviny stolu. Platí to ovšem za předpokladu, že můžeme zanedbat odpor vzduchu a tloušťku dna nádoby.

c) Má-li dopadat kapalina, vytékající z otvoru O na stůl, nejdále od nádoby, pak musí mít vzdálenost d , určená vztahem (4), největší hodnotu. Tato podmínka je splněna tehdy, jestliže $\sqrt{h(h_0 - h)} = \sqrt{h \cdot h'}$ bude mít největší hodnotu. Pro čísla h a h' platí podmínky $h > 0$ a $h' > 0$. Vyjděme z nerovnosti $(h - h')^2 \geq 0$, která je správná. Znaménko rovnosti platí pro $h = h' = \frac{h_0}{2}$. Provedeme-li umocnění obou stran nerovnosti na druhou a připočítáme na obě strany hodnotu $4hh'$, dostaneme nerovnost $(h + h')^2 \geq 4hh'$. Na obou stranách nerovnosti jsou nezáporná čísla. Proto platí $h + h' \geq 2\sqrt{hh'}$. Je tedy $\sqrt{hh'} \leq \frac{h + h'}{2}$. Výraz $\sqrt{hh'}$ má tedy největší hodnotu $\frac{h + h'}{2}$ v případě, že platí znaménko rovnosti, tj., jestliže $h =$

$= h' = \frac{h_0}{2}$. Proud kapaliny tryskající z otvoru ve stěně nádoby dopadá na stůl nejdále od nádoby tehdy, je-li otvor v polovině vzdálenosti mezi rovinou stolu a povrchem kapaliny v nádobě.

3. V homogenním magnetickém poli o magnetické indukci $B = 1 \text{ Wb/m}^2$ se nachází cívka se $Z = 100$ obdélníkovými závity rozměrů $a = 0,1 \text{ m}$, $b = 0,15 \text{ m}$. Cívka je otáčivá kolem podélné osy, která je kolmá k indukčním čárám magnetického pole, a roviny závitů svírají s indukčními čárami úhel α . Cívkou protéká stejnosměrný proud $I = 10 \text{ A}$, a to ve vodičích I směrem za nákresnu, ve vodičích II směrem před nákresnu. Vypočítejte obecně velikost momentu síly, kterou působí magnetické pole na jeden závit cívky a na celou cívku.

a) Jakým směrem se bude cívka otáčet?

b) Ve kterých polohách působí na cívku největší a nejmenší moment síly a jak veliký indukční tok je v cívce v těchto polohách? Řešte i číselně.

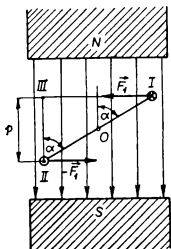
c) Změnila by se velikost momentu síly, kdybychom velikosti a , b rozměrů závitů změnili na a' , b' , avšak tak, že by se nezměnila velikost plochy vymezené závitěm?

d) Jmenujte některá zařízení, ve kterých se tento moment síly uplatňuje.

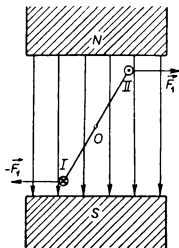
Označení veličin a dané hodnoty: Dané hodnoty a označení veličin jsou uvedeny v textu úlohy a na obr. 43a, b.

Řešení: Podélná osa cívky je rovnoběžná s vodiči b obdélníkových závitů. Úsečka II I na obr. 43a je průmětem obou rovnoběžných vodičů rámce, které mají délku a ; jeden z nich je před nákresnou, druhý za nákresnou. Vodičem a ležícím před nákresnou protéká proud směrem od II k I, vodičem a za nákresnou směrem od I k II. Na

části závitů délky a působí sice síly magnetického pole, mají však podle Flemingova pravidla levé ruky směr kolmý k nákresně. Na vodiče nacházející se před nákresnou působí síly směrem za nákresnu a na vodiče za nákresnou působí síly směrem před nákresnu. Tyto síly jsou stejně veliké, mají opačnou orientaci a jejich vektorové přímky jsou totožné; proto nemají otáčivý účinek a ruší se pevností osy.



Obr. 43 a



Obr. 43 b

Poněvadž podélné vodiče b jsou v každé poloze rámce kolmé k indukčním čarám magnetického pole, působí na každý z nich stálá síla velikosti $F_1 = B I b$. Protože ve vodičích II teče proud opačným směrem než ve vodičích I, jsou tyto síly opačně orientovány. Na každý závit působí tedy magnetické pole dvojicí sil velikosti F_1 , jejíž rameno p má velikost $p = a \cdot \cos \alpha$, jak je patrné z pravoúhlého trojúhelníku I, II, III na obr. 43a. Tato dvojice sil působí otáčení cívky.

Otáčivý moment této dvojice má velikost $M_1 = F_1 p =$

$= B l b a \cos \alpha = B I S \cos \alpha$ (1), kde $ab = S$ značí obsah plochy jednoho závitu cívky. Na celou cívku působí tedy magnetické pole momentem $M = Z B I S \cos \alpha$ (2).

a) Podle Flemingova pravidla levé ruky podléhají vodiče I a II magnetickým silám $F_1 = B l b$, které působí za situace naznačené na obr. 43a a na obr. 43b na vodiče I ustavičně doleva a na vodiče II ustavičně doprava. Proto se bude cívka otáčet v kladném smyslu, pokud vodiče I jsou blíže k severnímu než k jižnímu pólu magnetu (obr. 43a). Přejde-li cívka do polohy označené na obr. 43b, kdy vodiče I jsou blíže k jižnímu pólu magnetu než k severnímu, uvede se cívka do otáčivého pohybu ve smyslu záporném. Jsou-li roviny závitů cívky kolmé k indukčním čárám magnetického pole a vodiče I jsou nalevo od vodičů II, pak vektorové přímky stejně velikých, avšak opačně orientovaných sil, působících na závity cívky, jsou totožné, a proto se síly ruší. V této poloze má cívka rovnovážnou polohu stálou, neboť se do ní po každém vychýlení vrátí. Kdyby však roviny závitů cívky byly kolmé k indukčním čárám magnetického pole, avšak vodiče I by se nacházely napravo od vodičů II, měla by cívka rovnovážnou polohu vratkou, ze které by po sebemenším vychýlení přešla do rovnovážné polohy stálé.

b) Velikost momentu dvojice sil, kterým působí magnetické pole na cívku, je určena vztahem (2). Je největší, je-li $|\cos \alpha| = 1$, tj. pro úhly $\alpha_1 = k\pi$, kde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, a má hodnotu

$$\begin{aligned} M_{\max} &= Z B I S = 10^2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Wb A m}^2}{\text{m}^2} = \\ &= 1,5 \cdot 10 \text{ VA s} \\ M_{\max} &= 15 \text{ N m} . \end{aligned}$$

V tomto případě jsou roviny závitů rovnoběžné s indukčními čarami magnetického pole, které cívku neprostupují, takže magnetický indukční tok v cívce je v této poloze nejmenší; je roven 0.

Je-li cívka v takové poloze, že roviny jejích závitů jsou rovnoběžné s indukčními čarami magnetického pole, prostupuje cívku nejmenší (nulový) magnetický indukční tok, pole však působí na cívku největším otáčivým momentem velikosti 15 N m. Jsou-li roviny závitů cívky kolmé k indukčním čarám magnetického pole, má úhel α velikost $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} +$

$+ 2k\pi$ nebo $\alpha_3 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, kde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$;

pak je $\cos \alpha = 0$ a moment dvojice sil, kterým působí magnetické pole na cívku, má nejmenší hodnotu rovnou nule. V této poloze je však v cívce největší magnetický indukční tok

$\Phi_{\max} = ZBS = 10^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Wb m}}{\text{m}^2} = 1,5 \text{ Wb}$. Maximální tok jedním závitem cívky je

$$\Phi'_{\max} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}.$$

c) Kdyby se změnily rozměry a, b závitů na a', b' tak, že by plocha zůstala stejná ($S = a \cdot b = a' \cdot b'$), nezměnila by se podle vztahu (2) velikost momentu dvojice sil, kterým působí magnetické pole na cívku.

d) Moment silové dvojice a moment síly, kterými působí magnetické pole na cívku nebo na vodič s proudem nebo na pohybující se elektricky nabitou částici, se uplatňuje v četných zařízeních. Nejdůležitější z nich jsou měřicí přístroje s pohyblivou cívku (ampérmetry, voltmetry, wattmetry, reproduktory), elektromotory a mnohá zařízení, hlavně v atomistice, jimiž se urychlují nebo třídí elektricky nabitě částice (elektrony, protony, ionty izotopů aj.) tím, že se na jejich pohyb působí magnetickým polem.

4. Určete ohniskovou vzdálenost tlusté spojné čočky.

Potřeby: Optická lavice, spojná čočka v objímce na posuvném jezdci, plechová clona s vyříznutou číslicí,

světelný zdroj na posuvném jezdcí, stínítko na posuvném jezdcí, milimetrové měřítko.

Postup práce:

a) Najděte polohu obrazu nějakého předmětu, který lze považovat za nekonečně vzdálený.

b) Pro jiný předmět najděte obraz, který je převrácený a stejně veliký jako předmět.

Uvažte, které důležité roviny čočky v těchto dvou případech stanovíte a jak se z jejich vzájemné polohy dá určit hledaná ohnisková vzdálenost čočky. Měření opakujte aspoň pětkrát. Určete ohniskovou vzdálenost jako aritmetický průměr z naměřených hodnot.

Řešení: Máme-li určit ohniskovou vzdálenost čočky pomocí daného příčného zvětšení z , vyjdeme ze vztahu

$$z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'},$$

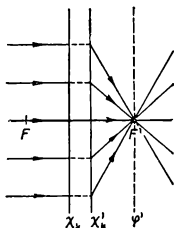
kde f značí ohniskovou vzdálenost předmětovou, f' ohniskovou vzdálenost obrazovou, y' velikost obrazu, y velikost předmětu, x vzdálenost předmětu od předmětového ohniska, x' vzdálenost obrazu od obrazového ohniska. Protože prostředí před čočkou a za čočkou je stejné a má stejný index lomu, je $f' = f$.

Určíme-li tedy měřením pro určitou známou hodnotu z příčného zvětšení příslušnou hodnotu x' , pak podle předcházející rovnice je $f' = -\frac{x'}{z} = f$ (1), což je vzorec, který obecně určuje ohniskovou vzdálenost čočky, jestliže známe z a k němu příslušné x' .

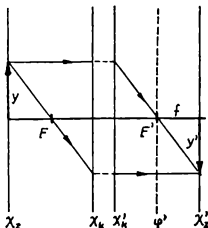
Je-li obraz předmětu převrácený a stejně veliký jako předmět, je $y' = -y$, takže $z = -1$. Potom však platí $f' = -f = x'$ (2).

Postup měření (obr. 44a, b):

1. a) Abychom zjistili ohniskovou vzdálenost f' , je potřeba nalézt polohu obrazového ohniska F' . V něm se protínají po průchodu čočkou nulové paprsky rovnoběžné s optickou osou. Tyto paprsky získáme pomocí světelného



Obr. 44 a



Obr. 44 b

zdroje s bodovou žárovkou. Žárovka je umístěna ve válcovité trubici, která je na otevřeném konci ukončena objektivem. Umístíme-li svítící bodové vlákno žárovky do ohniska objektivu, vystupují z objektivu paprsky rovnoběžně s optickou osou objektivu. Jestliže clonkou propustíme jen nulové paprsky a necháme je dopadat na čočku, jejíž ohniskovou vzdálenost máme určit, najdeme pomocí posunovatelného stínítka v obrazovém prostoru čočky polohu jejího obrazového ohniska F' . Rovina stínítka je ohniskovou rovinou obrazovou φ' . Změříme vzdálenost této roviny od jednoho konce optické lavice na měřítku kalibrovaném v milimetrech a zaznamenejme ji do tabulky. Obecně budeme tuto vzdálenost značit m .

Soustava objektiv a čočka musí mít společnou optickou osu.

b) Když jsme určili polohu ohniskové roviny φ' čočky, pak čočkou již nepohybujeme. Osvětlíme zdrojem jakýkoli předmět (v našem případě je to číslice velikosti y vyřiznutá v plechové cloně) a vytvoříme na stínítku převrácený ostrý obraz předmětu. Polohu předmětu i stínítka měníme tak dlouho, až milimetrovým měřítkem zjistíme, že obrácený obraz má stejnou velikost y' jako předmět, takže $y' = -y$. Rovina stínítka je v této poloze totožná s hlavní zápornou rovinou obrazovou χ'_z . Její polohu odečteme na měřítku optické lavice, označíme ji n a zaznamenáme do tabulky. Podle vztahu (2) je

$$f = f' = x' = n - m.$$

2. Měření popsaná v odst. 1a) a 1b) provedeme ještě čtyřikrát pro jinou polohu čočky, jejíž ohniskovou vzdálenost hledáme. Naměřené hodnoty zaznamenáme do tabulky. (Viz tabulka X.)

3. Z každého měření určíme f_k a vypočítáme f jako aritmetický průměr všech hodnot f_k .

Tabulka X

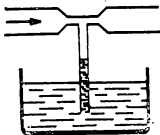
Měření k	Poloha záp. hl. rov. χ'_z n [mm]	Poloha ohn. rov. φ' m [mm]	$f_k = n - m$ [mm]
1	751	646	105
2	775	669	106
3	789	683	106
4	811	704	107
5	829	723	106

Aritmetický průměr hodnot f_k je $f = 106 \text{ mm} = 10,6 \text{ cm}$. Měřením byla zjištěna ohnisková vzdálenost dané spojky 10,6 cm. Chyba naměřené hodnoty nebyla zjišťována vzhledem k malému počtu měření.

11. ÚLOHY KATEGORIE B A JEJICH ŘEŠENÍ

I. ŘEŠENÍ ÚLOH PRVNÍHO KOLA

1. Vodorovnou trubicí (obr. 45) s širším průřezem 5 cm^2 a užším průřezem 1 cm^2 protéká voda. V širším průřezu je rychlost vody 5 cm/s . Svislou trubicí délky 20 cm a průřezu 2 cm^2 se má nasávat voda z dolní nádoby.



Obr. 45

a) Jakou rychlostí proudí voda v zúženém místě?

b) Jaká je podmínka pro to, aby voda z nádoby vystoupila až k užšímu průřezu trubice?

c) Jaký bude tlak v širším průřezu trubice, nastane-li tento případ?

Označení veličin a dané hodnoty: Širší průřez trubice $S_1 = 5 \text{ cm}^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$; užší průřez trubice $S_2 = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$; rychlost vody v širším průřezu $v_1 = 5 \text{ cm s}^{-1} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$; délka svislé trubice $h = 20 \text{ cm} = 2 \cdot 10^{-1} \text{ m}$; průřez svislé trubice $S_3 = 2 \text{ cm}^2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. V zúženém místě proudí voda rychlostí v_2 ; barometrický tlak má hodnotu $b = 10^5 \text{ N m}^{-2}$; hustota vody $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

Řešení:

a) Jestliže ve vodorovné trubicí různými průřezy S_1 , S_2 protéká rychlostmi v_1 , v_2 ustálený proud, pak platí rovnice kontinuity

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (1)$$

Odtud určíme

$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}. \quad (1a)$$

Číselně:

$$v_2 = \frac{5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1}}{10^{-4} \text{ m}^2} = 2,5 \cdot 10^{-1} \text{ m s}^{-1}.$$

V užší části trubice proudí voda rychlostí v_2 určenou obecně vzorcem (1a). Číselně je $v_2 = 25 \text{ cm s}^{-1}$.

b) Má-li voda ve svislé trubici vystoupit až k užšímu průřezu vodorovné trubice, musí tlak p_2 uvnitř kapaliny, proudící v úzké části vodorovné trubice, spolu s tlakem p vodního sloupce výšky h dávat hodnotu barometrického tlaku b . Podmínku můžeme zapsat takto:

$$p_2 + p = b. \quad (2)$$

c) Tlak vody v širší části trubice označíme p_1 . Poněvadž tlak v určitém místě uvnitř kapaliny je číselně roven potenciální energii jednotkového objemu kapaliny v témže místě, můžeme snadno odvodit vztah

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2, \quad (3)$$

kde ρ je hustota vody a hodnoty $\frac{1}{2} \rho v_1^2$ a $\frac{1}{2} \rho v_2^2$ udávají velikosti kinetických energií jednotkového objemu kapaliny v širším a užším průřezu trubice.

Dosadíme-li do rovnice (3) za v_2 a p_2 hodnoty ze vztahů (1) a (2), nabude rovnice (3) tvar

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 v_1^2 + b - p.$$

Z ní vyjádříme tlak v širší rubici

$$p_1 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right] + b - p. \quad (4)$$

Číselně:

Hodnota barometrického tlaku je $b = 10^5 \text{ N m}^{-2}$; hustota

vody je $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. Tlak p sloupce vody výšky $h = 0,2 \text{ m}$ má hodnotu $p = h\rho g = 2 \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 10 \text{ m s}^{-2} = 2 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-2}$.

Proto

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \left[\left(\frac{5 \cdot 10^{-4}}{10^{-4}} \right)^2 - 1 \right] \text{ kg m}^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} + \\ + 10^5 \text{ N m}^{-2} = 2 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-2} = \\ = 9,803 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-2}.$$

Jestliže ve svislé části trubice voda vystoupí až k užšímu průřezu vodorovné trubice, pak má tlak v širší části vodorovné trubice obecnou hodnotu danou vzorcem (4), číselnou $9,803 \text{ N m}^{-2}$.

2. Na ocelovém laně o průřezu 50 mm^2 je do moře spuštěna olovnice do hloubky $1\,200 \text{ m}$. Olověné závaží na konci lana má hmotu 50 kg .

a) Stanovte prodloužení lana.

b) Určete relativní prodloužení a posuďte, zda protažení lze za daných podmínek považovat za pružné. Hustotu $\rho = 1\,025 \text{ kg m}^{-3}$ mořské vody považujte za konstantní.

Označení veličin a dané hodnoty: Průřez lana $S = 50 \text{ mm}^2 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$; délka lana $l = 1\,200 \text{ m} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ m}$; hmotu olověného závaží $m_1 = 50 \text{ kg}$; hustota vody $\rho = 1\,025 \text{ kg m}^{-3} = 1,025 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; hustota olova $\rho_1 = 11,34 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; hustota oceli $\rho_2 = 7,86 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; modul pružnosti oceli v tahu $E = 1,962 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$; mez pružnosti v tahu ocelového lana je $\sigma_{\max} = 33 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-2}$. Olověné závaží má váhu G_1 a objem V_1 .

Řešení:

a) Prodloužení lana je způsobeno jednak tažnou silou, kterou působí na lano olověné závaží, jednak vlastní vahou lana (obr. 46).

Olověné závaží má hmotu m_1 , váhu $G_1 = m_1 g$ a objem

$V_1 = \frac{m_1}{\varrho_1}$. Je však nadlehčováno v mořské vodě vztlakovou silou, která má podle Archimédova zákona hodnotu

$$F_1 = V_1 \varrho g = \frac{m_1}{\varrho_1} \varrho g.$$

Proto působí olověné závaží na lano tažnou silou

$$F' = G_1 - F_1 = m_1 g - \frac{m_1}{\varrho_1} \varrho g = m_1 g \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right).$$

Prodloužení lana způsobené olověným závažím má podle Hookeova zákona hodnotu

$$\Delta_1 l = \frac{1}{E} m_1 g \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right) \frac{l}{S}. \quad (1)$$

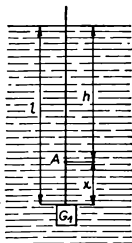
V místě u hladiny moře, kde lano protíná vodní povrch, má na prodloužení lana vliv celá vlastní váha lana. Protože lano má objem $V_2 = Sl$ a hmotu $m_2 = Sl\varrho_2$, váží $G_2 = Sl\varrho_2 g$. Podle Archimédova zákona je nadlehčováno silou $F_2 = V_2 \varrho g = Sl\varrho g$, takže u povrchu vody působí na lano tažná síla

$$F'' = G_2 - F_2 = Slg(\varrho_2 - \varrho). \quad (2)$$

V místě A, které se nachází v hloubce h pod povrchem vody, má na prodloužení lana vliv jen váha části lana délky $x = l - h$, takže ubývá tažné síly, kterou působí prodloužení lana vlastní jeho váha. V místě A má tato síla podle upraveného vztahu (2) hodnotu

$$y = Sg(\varrho_2 - \varrho)x. \quad (3)$$

U dolního konce lana, kde je k lanu připevněno olověné závaží, je $x = x_1 = 0$, a proto je také $y_1 = F''' = 0$. Tažná



Obr. 46

síla y , kterou působí prodloužení lana jeho vlastní váha, je podle vztahu (3) funkcí x a má u povrchu moře největší hodnotu $y_2 = F''$, danou vztahem (2), a nejmenší hodnotu $y_1 = F'''$ u dolního konce lana, kde je rovna nule. Protože y je lineární funkcí x , působí vlastní váha lana prodloužení $\Delta_2 l$ průměrnou tažnou silou, rovnou aritmetickému průměru největší a nejmenší hodnoty y , tj. aritmetickému průměru $F_p = \frac{F'' + F'''}{2}$ hodnot F'' a F''' . Proto je

$$\Delta_2 l = \frac{1}{2} \frac{1}{E} \text{Sig}(\varrho_2 - \varrho) \frac{l}{S}. \quad (4)$$

Celkové prodloužení Δl lana je

$$\Delta l = \Delta_1 l + \Delta_2 l;$$

takže

$$\Delta l = \frac{1}{2E} \cdot \frac{2m_1 \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right) + lS(\varrho_2 - \varrho)}{S} gl. \quad (5)$$

Rozměrová zkouška:

$$[\Delta l] = \frac{1}{\text{Nm}^{-2}} \frac{\text{kg} \frac{\text{kg m}^{-3}}{\text{kg m}^{-3}} + \text{m} \cdot \text{m}^2 \text{kg m}^{-3}}{\text{m}^2} \cdot \text{m s}^{-2} \text{m} = \text{m}.$$

Číselně:

$$\Delta l = \frac{9,81 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 1,962 \cdot 10^{11}} \cdot$$

$$\cdot \frac{2,50 \left(1 - \frac{1,025 \cdot 10^3}{11,34 \cdot 10^3}\right) + 1,2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-5} (7,86 - 1,025) \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-5}} \text{ m}$$

$$\Delta l = 0,30 \text{ m}.$$

Prodloužení ocelového lana ponořeného v mořské vodě a zatíženého olověným závažím je určeno obecně vzorcem (5) a má číselnou hodnotu 30 cm.

Největší napětí lana je u povrchu vody

$$\sigma' = \frac{F' + F''}{S} = \frac{m_1 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right) + lS(\rho_2 - \rho)}{S} g. \quad (6)$$

Podle velikosti tohoto napětí σ' se posoudí, zda lze prodloužení považovat za pružné. Ze vztahu (6) plyne přímo, že rozměr napětí je N m^{-2} .

Číselně:

$$\begin{aligned} \sigma' &= \\ &= \frac{50 \left(1 - \frac{1,025 \cdot 10^3}{11,34 \cdot 10^3}\right) + 1,2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-5} (7,86 \cdot 10^3 - 1,025 \cdot 10^3)}{5 \cdot 10^5} \cdot \\ &\quad \cdot 9,81 \text{ N m}^{-2} = 8,94 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-2}. \end{aligned}$$

Prodloužení ocelového lana zatíženého závažím hmoty $m_1 = 50 \text{ kg}$ a ponořeného do mořské vody je pružné, neboť největší napětí lana $\sigma' = 8,94 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-2}$ je menší než mez pružnosti $\sigma_{\max} = 33 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-2}$.

3. Ve válcové kalorimetrické nádobě poloměru 5 cm je 500 g vody, ve které plave 5 g ledu. Do nádoby ponoříme měděný váleček hmoty 100 g zahřátý na 50°C . Jaká bude výsledná teplota vody? O jakou výšku stoupne její hladina a) ponořením válečku, b) roztáním ledu?

Zanedbejte tepelné ztráty a nepřihlížejte k závislosti hustoty a měrného tepla na teplotě.

Označení veličin a dané hodnoty: Poloměr nádoby $r = 5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; hmota vody $m_1 = 500 \text{ g} = 5 \cdot 10^{-1} \text{ kg}$; teplota válečku $t_3 = 50^\circ\text{C}$; skupenské teplo

tání ledu $l = 80 \text{ cal g}^{-1} = 80 \text{ kcal kg}^{-1}$; měrné teplo mědi $c_3 = 0,091 \text{ cal g}^{-1}\text{deg}^{-1} = 0,091 \text{ kcal kg}^{-1}\text{deg}^{-1}$; hustota mědi $\rho = 8,9 \text{ g cm}^{-3} = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; měrné teplo vody $c_1 = 1 \text{ kcal kg}^{-1}\text{deg}^{-1}$. Váleček vydá teplo Q_3 , voda přijme teplo Q_1 a led Q_2 ; výsledná teplota vody je t .

Řešení:

Podle zákona o zachování energie (tepla) je množství tepla Q_3 , které předá váleček vodě a ledu, rovno množství tepla, které přijme voda Q_1 a led Q_2 (zanedbáme-li tepelné ztráty vzniklé ohřátím kalorimetru a vyzářením). Proto platí rovnice

$$Q_3 = Q_1 + Q_2. \quad (1)$$

Označíme-li výslednou teplotu t , potom teplo, které váleček vydá při ochlazení, je

$$Q_3 = m_3 c_3 (t_3 - t).$$

Teplo, které spotřebuje voda, aby se ohřála na teplotu t , je

$$Q_1 = c_1 m_1 t,$$

neboť voda, v níž plave led, má teplotu 0°C (není-li ledu příliš mnoho). Teplo, které přijme led, se spotřebuje jednak na roztání ledu, jednak na ohřátí vody vzniklé táním ledu z 0°C na výslednou teplotu t ; proto

$$Q_2 = m_2 l + c_1 m_2 t.$$

Dosazením za Q_1 , Q_2 , Q_3 do rovnice (1) získáváme kalorimetrickou rovnici

$$m_3 c_3 (t_3 - t) = m_2 l + c_1 (m_1 + m_2) t,$$

z níž určíme neznámou

$$t = \frac{m_3 c_3 t_3 - m_2 l}{(m_1 + m_2) c_1 + m_3 c_3}. \quad (2)$$

Rozměrová zkouška:

$$[t] = \frac{\text{kg kcal kg}^{-1}}{\text{kg kcal kg}^{-1}\text{deg}^{-1}} = \text{deg}$$

Číselně:

$$t = \frac{0,1 \cdot 0,091 \cdot 50 - 0,005 \cdot 80}{(0,5 + 0,005)1 + 0,1 \cdot 0,091} ^\circ\text{C} = 0,107 ^\circ\text{C}.$$

Výsledná teplota vody bude $0,107 ^\circ\text{C}$. Obecně je vyjádřena vzorcem (2).

a) Hladina vody v kalorimetru stoupne o objem vody vytlačené válečkem. Objem měděného válečku je

$$V = \frac{m_3}{\rho}. \quad (3)$$

Vytlačená voda zaujme podle nádoby tvar válce, jehož výška je h , takže

$$V = \pi r^2 h. \quad (4)$$

Porovnáním (3) a (4) dostáváme pro h rovnici

$$\frac{m_3}{\rho} = \pi r^2 h;$$

odtud

$$h = \frac{m_3}{\pi r^2 \rho}. \quad (5)$$

Číselně:

$$h = \frac{10^{-1} \text{ kg}}{3,14 \cdot 0,05^2 \cdot 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}} = 0,0014 \text{ m}.$$

Ponořením válečku do vody stoupne hladina o $0,14 \text{ cm}$. Obecně je toto zvýšení povrchu vody v kalorimetru určeno vzorcem (5).

b) Z rozpuštěného ledu vznikne v kalorimetrické nádobě voda objemu V'_2 . Před svým rozpuštěním vytlačil led plovoucí na vodě množství vody objemu V . Jestliže $V'_2 > V$, hladina vody v kalorimetru stoupne; je-li $V'_2 = V$, výška hladiny vody se nezmění; v případě, že $V'_2 < V$, hladina vody v kalorimetrické nádobě klesne.

Objem ledu označme V_2 , hustotu ledu ϱ_1 , hustotu vody ϱ_2 ; pak objem V'_2 určíme z rovnosti hmot vody a ledu, z něhož voda vznikla

$$V'_2 \varrho_2 = V_2 \varrho_1,$$

tedy

$$V'_2 = \frac{V_2 \varrho_1}{\varrho_2}.$$

Objem V určíme pomocí Archimédova zákona z rovnice

$$V_2 \varrho_1 g = V \varrho_2 g,$$

pak

$$V = \frac{V_2 \varrho_1}{\varrho_2}.$$

Z rovnosti objemů V'_2 a V plyne, že výška vodní hladiny v kalorimetru se táním ledu nezmění.

4. Ve válci Dieselova motoru (stejnotlakého) je na konci komprese vzduch stlačen na 50 at a má teplotu 700°C . Pracovní válec má průměr 15 cm a píst je v horní krajní poloze vzdálen od hlavy válce o $l = 3$ cm. Při vstřikování paliva za expanze urazí píst dráhu $l_1 = 1,5$ cm; musí se vstříknout tolik paliva, aby tlak plynů při hoření byl stálý. Výhřevnost paliva je $8\,500$ kcal/kg.

a) Určete hmotu stlačeného vzduchu.

b) Určete teplotu vzduchu v okamžiku, kdy píst má od hlavy válce vzdálenost $l + l_1$.

c) Kolik tepla se uvolní spálením paliva při pohybu pístu po dráze l_1 ?

d) Kolik paliva se vstříklo do válce?

Označení veličin a dané hodnoty: Tlak vzduchu na konci komprese $p = 5 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-2}$; teplota vzduchu na konci komprese $T = 700^\circ\text{C} \triangleq 973^\circ\text{K}$; průměr válce $d =$

$= 15 \text{ cm} = 1,5 \cdot 10^{-1} \text{ m}$; vzdálenost pístu od hlavy válce $l = 3 \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; dráha pístu při expanzi $l_1 = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; výhřevnost paliva $H = 8\,500 \text{ kcal kg}^{-1}$. Hustota vzduchu při teplotě $T_0 = 273 \text{ °K} \triangleq 0 \text{ °C}$ a při tlaku $p_0 = 1 \text{ at} = 10^5 \text{ N m}^{-2}$ je podle tabulek $\rho_0 = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$.

Řešení:

a) Na konci komprese je ve válci objem stlačeného vzduchu za tlaku p a teploty T dán výrazem

$$V = \frac{1}{4} \pi d^2 l. \quad (1)$$

Toto množství stlačeného vzduchu hmoty m by mělo při tlaku jedné atmosféry a při teplotě $T_0 = 273 \text{ °K}$ objem V_0 . Užitím stavové rovnice

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p V}{T} \text{ určíme}$$

$$V_0 = \frac{p T_0}{p_0 T} V.$$

Dosadíme-li za V ze vztahu (1), dostaneme

$$V_0 = \frac{p T_0}{p_0 T} \cdot \frac{\pi d^2 l}{4}.$$

Hmota m vzduchu je dána vztahem

$$m = V_0 \rho_0 = \frac{p T_0}{p_0 T} \frac{\pi d^2 l}{4} \rho_0, \quad (2)$$

dosadíme-li za V_0 předchozí výraz.

Rozměrová zkouška:

$$[m] = \frac{\text{N m}^{-2} \text{deg}^{-1}}{\text{N m}^{-2} \text{deg}^{-1}} \text{ m}^2 \text{ m kg m}^{-3} = \text{kg}.$$

Číselně:

$$m = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 273}{10^5 \cdot 973} \cdot \frac{3,14 \cdot (1,5 \cdot 10^{-1})^2 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{4} 1,293 \text{ kg} = \\ = 9,62 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

Hmotu vzduchu ve válci na konci komprese má hodnotu určenou obecně vzorcem (2) a číselně $9,62 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$.

b) Protože jde o motor stejnotlaký, probíhá při expanzi ve válci děj izobarický, pro který platí zákon Gay-Lussacův

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V}{T},$$

kde V , T je tlak a teplota na začátku a V_1 , T_1 na konci expanze. Určíme teplotu T_1

$$T_1 = \frac{V_1}{V} T. \quad (3)$$

Objem vzduchu na začátku expanze je určen vztahem (1); na konci expanze, během níž se píst posune o délku l_1 , bude objem

$$V_1 = \frac{1}{4} \pi d^2 (l + l_1). \quad (4)$$

Výrazy (1) a (4) dosadíme do vztahu (3) a obdržíme

$$T_1 = \frac{l + l_1}{l} T, \quad (5)$$

čímž je určena teplota T_1 .

Číselně:

$$T_1 = \frac{3 \cdot 10^{-2} \text{ m} + 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{3 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \cdot 973 \text{ °K} = 1\,459,5 \text{ °K},$$

$$T_1 = 1\,459,5 \text{ °K}.$$

V okamžiku, kdy píst má od hlavy válce vzdálenost l_1 , je teplota vzduchu ve válci dána vztahem (5) číselně má hodnotu $1\,459,5\text{ }^\circ\text{K}$.

c) Jestliže stlačený vzduch má na počátku izobarické expanze teplotu T a na konci T_1 , pak teplo Q spotřebované k ohřátí vzduchu je

$$Q = c_p m (T_1 - T) = c_p (T_1 - T) \frac{p T_0}{p_0 T} \frac{\pi d^2 l}{4} \varrho_0, \quad (6)$$

kde m je hmota vzduchu ve válci, c_p je měrné teplo vzduchu při konstantním tlaku.

Číselně:

Z tabulek zjistíme $c_p = 0,24\text{ kcal kg}^{-1}\text{ deg}^{-1}$, hmotu m stlačeného vzduchu jsme určili v části a); je tedy

$$Q = 0,24\text{ kcal kg}^{-1}\text{ deg}^{-1} \cdot$$

$$\cdot 9,62 \cdot 10^{-3}\text{ kg } (1\,459,5\text{ }^\circ\text{K} - 973\text{ }^\circ\text{K}) \doteq 1,13\text{ kcal}.$$

Výraz (6) obecně udává, kolik tepla se uvolní spálením paliva při pohybu pístu po dráze l_1 ; číselná hodnota uvolněného tepla je $1,13\text{ kcal}$.

d) Výhřevnost H paliva je číselně rovna onomu množství tepla, které získáme dokonalým spálením jednoho kilogramu paliva Proto platí

$$H = \frac{Q}{m'},$$

kde m' je spotřebované množství paliva.

Odtud

$$m' = \frac{Q}{H} = \frac{c_p}{H} (T_1 - T) \frac{p T_0}{p_0 T} \frac{\pi d^2 l}{4} \varrho_0. \quad (7)$$

Číselně:

$$m' = \frac{1,1\text{ kcal}}{8\,500\text{ kcal kg}^{-1}} = 1,33 \cdot 10^{-4}\text{ kg}.$$

Ve válci se spotřebovalo 0,13 g paliva; obecně je množství spotřebovaného paliva určeno vzorcem (7).

5. Na pružině je zavěšena miska, jejíž hmota je zanedbatelná. Pružina se prodlouží závažím hmoty 1 kg o 10 cm. Tahem ve svislém směru prodloužíme zatíženou pružinu o 5 cm. Určete:

a) jak se mění tlaková síla, kterou působí závaží na misku (obecně);

b) nejmenší a největší tlakovou sílu, kterou působí závaží na misku a v kterých je to polohách;

c) kdy se tlaková síla rovná právě váze závaží a v které je to poloze?

Označení veličin a dané hodnoty: Hmota závaží $m = 1$ kg; prodloužení pružiny váhou $G = mg$ je $y_1 = 10$ cm $= 10^{-1}$ m; amplituda kmitů $A = 5$ cm $= 5 \cdot 10^{-2}$ m. Tuhost pružiny označíme K .

Řešení:

Pokud není překročena mez pružnosti, je podle Hookeova zákona prodloužení y pružiny přímo úměrné velikosti F_1 deformující síly, takže $y \sim F_1$, což můžeme vyjádřit rovnicí $F_1 = Ky$. Konstanta K se nazývá tuhost pružiny. Je číselně rovna velikosti síly, která způsobí prodloužení pružiny o jednotkovou délku. Reakcí deformující síly je síla, jež se snaží zkrátit pružinu na původní délku. Tato síla $F = -F_1 = -Ky$ vyvolává harmonický pohyb pružiny, zanikne-li deformující síla.

Harmonický pohyb je tedy způsoben proměnnou silou F , která je v každém okamžiku přímo úměrná okamžité výchylce y z rovnovážné polohy a má opačný směr než tato výchylka. Protože váha $G = mg$ závaží hmoty m způsobí prodloužení uvažované pružiny o známou délku y_1 , platí $G = Ky_1$, takže

$$K = \frac{G}{y_1} = \frac{mg}{y_1}. \quad (1)$$

Pro periodu T harmonického pohybu pružiny platí známý vzorec $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$. Po dosazení za K vyjde

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot y_1}{mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{y_1}{g}}. \quad (2)$$

Číselná hodnota

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{10^{-1} \text{ m}}{10 \text{ m s}^{-2}}} = 2\pi 10^{-1} \text{ s} \doteq 0,63 \text{ s}.$$

Prodloužíme-li pružinu trvale zatíženou závažím hmoty m z rovnovážné polohy tahem o délku A , načež tah přerušíme, začne pružina konat harmonický pohyb s amplitudou A a dobou kmitu T danou vztahem (2). Miska jako součást pružiny bude působit na závaží hmoty m proměnnou silou $F = -Ky$. Podle třetího Newtonova pohybového zákona bude závaží působit na misku stejně velkou silou $-F$ opačného směru. Kromě toho závaží tlačí na misku ještě svou vahou $G = mg$.

Celková síla F' , kterou působí závaží na misku, je tedy rovna součtu obou sil

$$F' = G - F = G + Ky = mg + \frac{mg}{y_1} y,$$

dosadíme-li za K výraz ze vztahu (1). Po úpravě dostaneme

$$F' = mg \left(1 + \frac{y}{y_1} \right). \quad (3)$$

Pro okamžitou výchylku y platí vztah $y = A \sin \frac{2\pi}{T} t$, po-

čítáme-li čas t od okamžiku, kdy závaží probíhá rovnovážnou polohou směrem dolů, takže po užití vztahů (3) a (2) vyjde

$$F' = mg \left(1 + \frac{A}{y_1} \sin t \sqrt{\frac{g}{y_1}} \right). \quad (4)$$

Tlaková síla, kterou působí závaží na miskou, se mění podle vztahu (4).

b) Protože veličiny m , g , y_1 , A jsou stálé, mění se ve vzorci (4) pouze $\sin t \sqrt{\frac{g}{y_1}}$. Tlaková síla bude mít nejmenší hodnotu tehdy, když $\sin t \sqrt{\frac{g}{y_1}}$ bude nejmenší, tedy pro $\sin t_1 \sqrt{\frac{g}{y_1}} = -1$, tj. pro $t_1 \sqrt{\frac{g}{y_1}} = \left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi$, kde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Dosadíme-li podle vztahu (2) za $\sqrt{\frac{y_1}{g}} = \frac{T}{2\pi}$, je $t_1 = \left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi \frac{T}{2\pi} = \left(\frac{3}{4} + k\right)T$, kde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. V těchto polohách má tlaková síla F' hodnotu $F'_{\min} = mg \left(1 - \frac{A}{y_1}\right)$. (5)

Číselně:

$$F'_{\min} = 9,81 \text{ kg m s}^{-2} \left(1 - \frac{5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{10 \text{ m}}\right) = 4,9 \text{ N}.$$

Nejmenší tlaková síla $F'_{\min}$, kterou působí závaží na miskou, je v horní krajní poloze, kde má tlaková síla hodnotu $F'_{\min} = 4,9 \text{ N}$. Obecně je velikost této síly určena vzorcem (5).

Největší hodnoty nabývá výraz (4) pro $\sin t_2 \sqrt{\frac{g}{y_1}} = 1$, tj. pro $t_2 \sqrt{\frac{g}{y_1}} = \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi$, kde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, tedy v okamžiku

$$t_2 = \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi \frac{T}{2\pi} = \left(\frac{1}{4} + k\right)T, \text{ kde } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

V těchto polohách má tlaková síla F' hodnotu $F'_{\max} = mg \left(1 + \frac{A}{y_1}\right)$. (6)

Číselně:

$$F'_{\max} = 9,81 \text{ kg m s}^{-2} \left(1 + \frac{5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{10^{-1} \text{ m}}\right) \doteq 14,7 \text{ N}.$$

Největší tlakovou silou $F'_{\max} = 14,7 \text{ N}$ působí závaží na misku v dolní krajní poloze. Obecně je velikost této síly určena vzorcem (6)

c) Tlaková síla se podle vztahu (4) právě rovná váze závaží v případě, že $\sin t_3 \sqrt{\frac{g}{y_1}} = 0$, neboť $m \neq 0$, $g \neq 0$, $A \neq 0$.

Tato podmínka je splněna, jestliže $t_3 \sqrt{\frac{g}{y_1}} = k\pi$, kde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Pak $t_3 = k\pi \frac{T}{2} = k \frac{T}{2}$, kde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Síla působící při kmitání na misku se rovná právě váze závaží v okamžiku, kdy miska prochází rovnovážnou polohou.

6. Betonový sloupek válcového tvaru s ocelovým jádrem téhož tvaru je sevřen v rovnoběžných čelistích zkušební lisu a namáhán silou 10 000 kp. Změny průřezu sloupku při zkoušce neuvažujte. Vypočtete zkrácení sloupku a normálové napětí betonu a oceli, je-li průměr sloupku 23 cm, délka 60 cm, průměr ocelového jádra 3 cm, modul pružnosti v tahu pro beton $2 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$, pro ocel $2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$.

Označení veličin a dané hodnoty: Tlaková síla $F = 10\,000 \text{ kp} \doteq 10^5 \text{ N}$; délka sloupku $l = 60 \text{ cm} = 6 \cdot 10^{-1} \text{ m}$; průměr sloupku $d_1 = 23 \text{ cm} = 2,3 \cdot 10^{-1} \text{ m}$; průměr jádra $d_2 = 3 \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; modul pružnosti betonu $E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2 \doteq 2 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$; modul pruž-

nosti oceli $E_2 = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$. Zkrácení sloupku označíme Δl a σ_1 a σ_2 napětí, která způsobuje síla F v betonové a ocelové části sloupku.

Řešení:

Protože na podstavy válcového sloupku působí rovinné rovnoběžné čelisti, musí být zkrácení Δl betonové části i ocelového jádra stejné. Podle Hookerova zákona platí pro betonový sloupek

$$\Delta l = \frac{1}{E_1} \cdot \frac{F_1}{S_1} l, \quad (1)$$

kde F_1 je síla působící na betonový sloupek a S_1 je jeho průřez.

Podobný vztah platí pro ocelové jádro

$$\Delta l = \frac{1}{E_2} \cdot \frac{F_2}{S_2}, \quad (2)$$

kde F_2 je síla působící na ocelové jádro a S_2 průřez jádra.

Porovnáním vztahů (1) a (2) dostáváme

$$\frac{1}{E_1} \cdot \frac{F_1}{S_1} = \frac{1}{E_2} \cdot \frac{F_2}{S_2}.$$

Jestliže označíme normálové napětí betonové části $\sigma_1 = \frac{F_1}{S_1}$ a

ocelového jádra $\sigma_2 = \frac{F_2}{S_2}$, můžeme psát

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}. \quad (3)$$

Součet sil F_1 a F_2 působících na betonovou a ocelovou část válce dává celkovou sílu F , kterou působí čelisti na válec, takže

$$F = F_1 + F_2,$$

což vyjádřeno pomocí napětí σ_1 a σ_2 dává

$$F = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2. \quad (4)$$

Průřez S_2 jádra je kruh průměru d_2 , takže

$$S_2 = \frac{1}{4} \pi d_2^2$$

a průřez S_1 betonového sloupku je obsah mezikruží průměrů d_1, d_2 . Proto je $S_1 = \frac{1}{4} \pi (d_1^2 - d_2^2)$.

Dosadíme-li za S_1 a za S_2 do rovnice (4), nabude výraz pro F po úpravě tvar

$$F = \frac{\pi}{4} [\sigma_1 (d_1^2 - d_2^2) + \sigma_2 d_2^2]. \quad (5)$$

Získali jsme tedy dvě rovnice (3) a (5), jejichž řešením najdeme hodnoty napětí σ_1, σ_2 . Při řešení postupujeme tak, že z rovnice (3) vyjádříme

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{E_1} \sigma_1 \quad (6)$$

a dosadíme do vztahu (5). Vyjde

$$F = \frac{\pi}{4} \left[\sigma_1 (d_1^2 - d_2^2) + \frac{E_2}{E_1} \sigma_1 d_2^2 \right]$$

a odtud

$$\sigma_1 = \frac{4}{\pi} \frac{E_1 F}{E_1 (d_1^2 - d_2^2) + E_2 d_2^2}. \quad (7)$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do vztahu (6), určíme

$$\sigma_2 = \frac{4}{\pi} \frac{E_2 F}{E_1 (d_1^2 - d_2^2) + E_2 d_2^2}. \quad (8)$$

Rozměrová zkouška:

$$[\sigma] = \frac{\text{N m}^{-2} \text{ N}}{\text{N m}^{-2} \text{ m}^2} = \text{N m}^{-2}.$$

Číselně:

$$\sigma_1 = \frac{4}{3,14} \cdot \frac{2 \cdot 10^{10} \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{10} [(2,3 \cdot 10^{-1})^2 - (3 \cdot 10^{-2})^2] + 2,1 \cdot 10^{11} \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2} \text{ N m}^{-2} = 2,07 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-2}.$$

σ_2 určíme ze vzorce (6);

$$\sigma_2 = \frac{2,1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}}{2 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}} \cdot 2,07 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-2} = 2,17 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-2}.$$

Normální napětí na betonové části sloupku je $2,07 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-2}$ a na ocelovém jádře $2,17 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-2}$. Obecně jsou velikosti těchto napětí určeny vztahy (7) a (8).

Zkrácení sloupku můžeme vypočítat přímo ze vztahu (1), kde dosadíme $\frac{F_1}{S_1} = \sigma_1$. Vyjde

$$\Delta l = \frac{\sigma_1}{E_1} l = \frac{4}{\pi} \frac{Fl}{E_1(d_1^2 - d_2^2) + E_2 d_2^2}. \quad (9)$$

Číselně:

$$\Delta l = \frac{2,07 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-2}}{2 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}} \cdot 6 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 6,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

Zkrácení sloupku je $6,2 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$; obecně je určeno vztahem (9).

7. Na podlaze nákladního auta pobité plechem leží podélně dřevěná bedna se zbožím, dlouhá 2 m a široká 1,6 m. Těžiště nákladu leží ve výši 0,6 m nad středem podstavy. Předpokládejte, že podlaha auta je stále v téže vodorovné rovině.

a) Auto dosáhne za 30 vteřin od okamžiku rozjezdu rychlosti 60 km/h.

Je nutno zajistit bednu proti posunutí, je-li rozjíždění rovnoměrné? Součinitel vlečného tření je 0,15.

b) V jaké nejmenší vzdálenosti od železničního přejezdu musí auto jedoucí rychlostí 60 km/h začít brzdit, smí-li přejíždět koleje rychlostí 30 km/h a nemá-li se bedna posunout?

c) Může projíždět auto zatáčkou poloměru 100 m rychlostí 60 km/h bez nebezpečí, že se bedna převrhne?

Označení veličin a dané hodnoty: Délka bedny $a = 2 \text{ m}$; šířka bedny $b = 1,6 \text{ m}$; výška těžiště $h = 0,6 \text{ m} = 6 \cdot 10^{-1} \text{ m}$; čas $t = 30 \text{ s}$; rychlost auta v době t je $v_1 = 60 \text{ km/h} = 16,66 \text{ m s}^{-1}$; součinitel tření $f = 0,15$; rychlost auta při přejíždění kolejí $v_2 = 30 \text{ km/h} = 8,33 \text{ m s}^{-1}$; poloměr zatáčky $r = 100 \text{ m} = 10^2 \text{ m}$, hmota bedny je m , třecí sílu označíme T .

Řešení:

a) Setrvačnost bedny se při rozjíždění auta projevuje jako síla velikosti $F = -ma$, jež působí na bednu v opačném směru než se auto rozjíždí; směr pohybu auta považujeme za kladný; m značí hmotu bedny a a zrychlení, s jakým se auto rozjíždí. Proti této síle působí třecí síla T , která je přímo úměrná váze $G = mg$ bedny. Konstanta úměrnosti je součinitel f vlečného tření. Platí tedy

$$T = fmg.$$

Bednu nebude nutno zajistit proti posunutí při rozjíždění auta, jestliže $T \geq |F|$, tj. je-li

$$a \leq fg. \quad (1)$$

Zda tato nerovnost platí, lze rozhodnout jen číselně.

Protože auto koná při rozjíždění pohyb rovnoměrně zrychlený a dosáhne za dobu $t = 30 \text{ s}$ rychlosti $v_1 = 16,66 \text{ m s}^{-1}$ je

$$a = \frac{v_1}{t} = 0,56 \text{ m s}^{-2}.$$

Součin fg má hodnotu

$$fg = 0,15 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} = 1,47 \text{ m s}^{-2}.$$

Poněvadž podmínka (1) je splněna, není nutno zajišťovat bednu proti posunutí při rozjíždění auta.

b) Odvozená nerovnost (1) platí i při brzdění auta, jestliže a budeme nyní chápat jako zpoždění. Nemá-li se bedna posunout, musí platit vztah (1).

Zmenšení rychlosti auta z hodnoty v_1 na hodnotu v_2 se dosáhne, bude-li auto brzděno stálou silou po dobu Δt na dráze s . Auto bude po dobu brzdění konat pohyb rovnoměrně zpožděný. Protože u rovnoměrně zpožděného pohybu ubývá rychlosti rovnoměrně, je možno nahradit pohyb rovnoměrně zpožděný pohybem rovnoměrným, jehož průměrná rychlost v_p je rovna aritmetickému průměru největší a nejmenší rychlosti. Platí tedy

$$v_p = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad \text{a} \quad s = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t. \quad (2)$$

Zpoždění a je podle definice

$$a = \frac{v_1 - v_2}{\Delta t},$$

odkud určíme

$$\Delta t = \frac{v_1 - v_2}{a}.$$

Dosazením do vztahu (2) dostáváme pro dráhu

$$s = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \frac{v_1 - v_2}{a} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2a}.$$

Odtud vyjádříme zpoždění

$$a = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2s}.$$

Dosadíme tuto hodnotu do nerovnosti (1) Vyjde

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2s} \leq fg.$$

Z této nerovnosti určíme, kterou podmínku musí splňovat hledaná dráha s , aby se bedna neposunula. Nemá-li se bedna při přejíždění železničního přejezdu posunout, musí být splněna nerovnost

$$s \geq \frac{v_1^2 - v_2^2}{2fg}. \quad (3)$$

Číselně:

$$s \geq \frac{(16,66 \text{ m s}^{-1})^2 - (8,33 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \cdot 0,15 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}} = 70,8 \text{ m.}$$

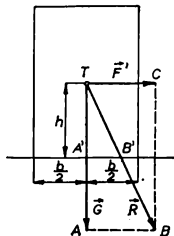
Auto musí být brzděno před železničním přejezdem ve vzdálenosti větší než 70,8 m, má-li se jeho rychlost zmenšit na hodnotu menší než 30 km h⁻¹. Pak nehrozí nebezpečí, že se bedna ve voze posune. Obecně platí vztah (3).

c) Pohyb auta v zatáčce o poloměru $r = 10^2$ m působí dostředivá síla směřující k vnitřnímu okraji silnice. Setrvačnost bedny se projevuje jako odstředivá síla velikosti $F' = m \frac{v^2}{r}$, mířící k vnějšímu okraji silnice; v značí rychlost

auta v zatáčce a m hmotu bedny (obr. 47).

Kromě této síly působí na bednu ještě vlastní váha $G = mg$ bedny směrem svislým dolů.

Můžeme předpokládat, že obě tyto síly mají působíště v těžišti T bedny. Vektorové přímky sil $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ a jejich výslednice $\mathbf{R}$ leží v jedné rovině. Na obr. 47 jsou velikosti těchto sil zobrazeny úsečkami TC , TA , TB . Vektorové přímky sil $\mathbf{G}$ a $\mathbf{R}$ protínají rovinu podstavu v bodech A' , B' .



Obz. 47

Z podobnosti trojúhelníků $\triangle TAB$ a $\triangle TA'B'$ určíme velikost úsečky

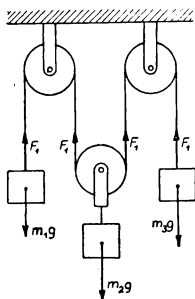
$$A'B' = h \frac{F'}{G} = h \frac{m v^2}{rmg} = \frac{hv^2}{rg}. \quad (4)$$

Nemá-li se bedna překlopit, musí vektorová přímka výslednice R protínat podstavu bedny, takže musí platit $A'B' \leq \frac{b}{2}$. Dosadíme-li za $A'B'$ hodnotu ze vztahu (4), dostaneme nerovnost

$$\frac{hv^2}{rg} \leq \frac{b}{2},$$

z níž dostáváme podmínku, kterou musí splňovat rychlost auta v zatáčce, aby se bedna nepřeklopila. Je dána nerovností

$$v \leq \sqrt{\frac{b r g}{2 h}}. \quad (5)$$



Obr. 48

Zda tato podmínka je splněna, určíme číselně

$$v \leq \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^2 \cdot 9,81 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}}{1,2 \text{ m}}} = 36,2 \text{ m s}^{-1}.$$

Protože rychlost $v_1 = 60 \text{ km/h} = 16,66 \text{ m/s}$ splňuje podmínku (5), může auto projíždět zatáčku o poloměru $r = 100 \text{ m}$ bez nebezpečí, že se bedna převrhne.

8. Vlákno je vedeno přes dvě stejné kladky a nese mezi nimi volnou kladku, na níž je zavěšeno těleso hmoty m_2 . Na koncích vlákna jsou tělesa o hmotách m_1 a m_3 . Části vlákna mezi kladkami jsou svislé. Určete zrychlení jednotlivých

vých těles a napětí vlákna. Tření a hmotu kladek zanedbávejte. Vlákno je dokonale ohebné a neproměnné délky.

Označení veličin: Hmoty závaží m_1, m_2, m_3 ; tíhové zrychlení g . Napětí vlákna označíme F_1 (obr. 48).

Řešení:

Vlákno je napínáno závažími hmot m_1, m_2, m_3 ve všech místech po celé své délce stejně velikou silou F_1 . Reakcí $-F_1$ této síly působí vlákno na všechna závaží. Předpokládáme, že tělesa hmot m_1 a m_3 se pohybují dolů, těleso hmoty m_2 nahoru. Na těleso hmoty m_1 působí jednak jeho váha m_1g směrem dolů, jednak napětí vlákna silou $-F_1$ směrem nahoru, pokládáme-li u vektorů sil a zrychlení za kladný směr směr svislý dolů. Těleso hmoty m_1 se pohybuje se zrychlením a_1 , pro které platí pohybová rovnice

$$m_1g - F_1 = m_1a_1. \quad (1)$$

Na těleso hmoty m_2 působí směrem dolů síla m_2g a vlákno na obou stranách volné kladky stejně velikými silami F_1 směrem vzhůru, takže zrychlení tělesa hmoty m_2 je dáno rovnicí

$$m_2g - 2F_1 = m_2a_2. \quad (2)$$

Obdobně získáme pohybovou rovnici pro třetí těleso hmoty m_3 , na které působí směrem dolů váha m_3g a směrem vzhůru síla F_1 . Tato rovnice zní

$$m_3g - F_1 = m_3a_3. \quad (3)$$

Těleso hmoty m_2 se pohybuje opačným směrem než tělesa hmot m_1 a m_3 a délka jeho dráhy je rovna aritmetickému průměru velikostí drah těles m_1 a m_3 . Proto platí $-s_2 = \frac{s_1 + s_3}{2}$. Pohyby všech tří těles jsou rovnoměrně zrych-

lené a trvají stejnou dobu. Délky jejich drah jsou tedy přímo úměrné velikostem zrychlení a pro zrychlení platí obdobný

vztah jako pro dráhy. Proto je

$$-a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}, \text{ takže}$$

$$a_1 + 2a_2 + a_3 = 0. \quad (4)$$

Z rovnic (1), (2), (3), (4) vypočítáme čtyři hledané neznámé veličiny a_1 , a_2 , a_3 , F_1 . Postupujeme tak, že z rovnic (1), (2), (3) vyjádříme a_1 , a_2 , a_3

$$a_1 = g - \frac{F_1}{m_1}; \quad a_2 = g - \frac{2F_1}{m_2}; \quad a_3 = g - \frac{F_1}{m_3} \quad (5)$$

a dosadíme do vztahu (4). Z takto získané rovnice vypočítáme velikost síly F_1 napínající vlákno

$$F_1 = \frac{4 m_1 m_2 m_3}{m_1 m_2 + 4 m_1 m_3 + m_2 m_3} g. \quad (6)$$

Protože $g > 0$, $m_1 > 0$, $m_2 > 0$ a $m_3 > 0$, je také $F_1 > 0$. Vlákno je tedy napínáno všemi závažími směrem dolů a reakcí působí na všechna tři závaží směrem nahoru. Dosa-díme-li za F_1 do rovnic (5), dostáváme po úpravě tyto výrazy pro jednotlivá zrychlení:

$$a_1 = \frac{m_1 m_2 + 4 m_1 m_3 - 3 m_2 m_3}{m_1 m_2 + 4 m_1 m_3 + m_2 m_3} g; \quad (7)$$

$$a_2 = \frac{m_1 m_2 - 4 m_1 m_3 + m_2 m_3}{m_1 m_2 + 4 m_1 m_3 + m_2 m_3} g; \quad (8)$$

$$a_3 = \frac{-3 m_1 m_2 + 4 m_1 m_3 + m_2 m_3}{m_1 m_2 + 4 m_1 m_3 + m_2 m_3} g. \quad (9)$$

Z posledních čtyř rovnic je zřejmé, že rozměr síly F_1 je stejný jako rozměr součinu mg a rozměry zrychlení a_1 , a_2 , a_3 jsou shodné s rozměry g . Jsou tedy všechny čtyři rovnice rozměrově správné. Která ze hmot m_1 , m_2 , m_3 se bude pohybovat dolů a která nahoru bychom poznali po dosažení jejich

číselných hodnot do obecných vztahů pro a_1, a_2, a_3 . Dolů se budou pohybovat ty hmoty, pro které vychází kladné zrychlení a nahoru ty, jejichž zrychlení budou mít hodnotu zápornou.

Napětí vlákna a zrychlení jednotlivých těles jsou určena obecnými vztahy (6), (7), (8), (9).

9. Stanovte povrchové napětí lihu. K dispozici máte Bunsenův stojan, přímou kapilární trubici opatřenou kohoutkem nebo nastavenou gumovou hadičkou se šroubovou tlačkou, kádinku a laboratorní váhy se sadou závaží. Víte, že povrchové napětí vody je $7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$.

Označení veličin a dané hodnoty: Povrchové napětí vody je $\sigma_2 = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$, lihu σ_1 , poloměr kapiláry r , tíhové zrychlení g .

Řešení: Vytéká-li kapalina pomalu ze svisle postavené kapilární trubice o poloměru r , zůstávají částice kapaliny lpět na spodním okraji trubice jako kapky, které se odtrhnou teprve tehdy, když jejich váha $m \cdot g$ překoná kapilární síly $F = 2\pi r \sigma$, které udržují kapku při obvodu trubice. Veličina m značí hmotu kapky, g tíhové zrychlení, r vnější poloměr kapiláry a σ povrchové napětí kapaliny. Platí tedy rovnice

$$m \cdot g = 2\pi r \sigma, \quad (1)$$

ze které se dá určit σ , jestliže změříme m a r .

Hmotu kapky lze však přesně určit jen obtížně. Při odkapávání se totiž neodtrhne od trubice celá hmota kapky, část její hmoty zůstane lpět na trubici, takže ta část kapky, která se od trubice skutečně odtrhne, má hmotu $m' < m$. Pokusy se však zjistilo, že téměř u všech kapalin zůstává lpět na trubici stejně veliká poměrná část odtržené kapky, takže platí;

$$m'_1 : m'_2 = m_1 : m_2. \quad (2)$$

Indexem 1 označujeme hmotu u jedné kapaliny, indexem 2 hmotu u druhé kapaliny.

Necháme-li odkapávat z téže kapilární trubice po sobě dvě kapaliny různých kapilárních konstant σ_1 a σ_2 , pak platí podle rovnice (1)

$$m_1 g = 2\pi r \sigma_1 \text{ a } m_2 g = 2\pi r \sigma_2.$$

Dělením těchto rovnic dostáváme vztah

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{m_1}{m_2}, \text{ a užijeme-li vztahu (2), pak vyjde}$$

$$\sigma_1 = \frac{m'_1}{m'_2} \sigma_2. \quad (3)$$

Necháme-li odkapat z kapilární trubice n kapek kapaliny o kapilární konstantě σ_1 , odkape z ní množství kapaliny hmoty $m_3 = n \cdot m'_1$. Stejný počet kapek druhé kapaliny, jež odkapávají z téže kapilární trubice, má hmotu $m_4 = n \cdot m'_2$.

Poměr $\frac{m'_1}{m'_2} = \frac{m_3}{m_4}$, takže lze rovnici (3) upravit na tvar

$$\sigma_1 = \frac{m_3}{m_4} \sigma_2. \quad (4)$$

Pomocí rovnice (4) lze určit σ_1 , známe-li σ_2 .

Postup měření:

1. Zvážíme prázdnou suchou kádinku. Její hmota $m_5 = 2,034 \cdot 10^{-2}$ kg.

2. Do kádinky necháme odkapat $n = 200$ kapek destilované vody z kapilární trubice opatřené tlačkou. Hmota kádinky s vodou je $m'_4 = 2,202 \cdot 10^{-2}$ kg, takže $m_4 = m'_4 - m_5 = 1,68 \cdot 10^{-3}$ kg.

3. Kádinku i kapiláru dobře vysušíme a necháme do kádinky odkapat $n = 200$ kapek lihu z téže kapilární trubice, ze které odkapávala před tím voda. Kádinka s lihem má hmotu $m'_3 = 2,09 \cdot 10^{-2}$ kg, takže $m_3 = m'_3 - m_5 = 5,6 \cdot 10^{-4}$ kg.

4. Vážení hmot m_5 , m'_3 , m'_4 provádíme na laboratorních vahách interpolací. Nulové a rovnovážné polohy určujeme metodou tří kyvů.

5. Velikost kapilární konstanty lihu vypočítáme z naměřených hodnot podle vztahu (4). Vychází:

$$\sigma_1 = \frac{m_3}{m_4} \sigma_2 = \frac{m'_3 - m_5}{m'_4 - m_5} \sigma_2. \quad (5)$$

Číselně:

$$\sigma_1 = \frac{5,6 \cdot 10^{-4}}{1,68 \cdot 10^{-3}} \cdot 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

Logaritmicky určíme

$$\sigma_1 = 2,433 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1}.$$

Třetí platná číslice je zatížena chybou, neboť vážení hmot m_5 , m'_3 a m'_4 bylo uskutečněno laboratorními a nikoli analytickými vahami. Hodnota kapilární konstanty σ_2 vody je rovněž udána jen na dvě platné číslice.

Z měření vychází pro kapilární konstantu lihu hodnota $2,4 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$. Obecně je určena vzorcem (5).

ŘEŠENÍ ÚLOH DRUHÉHO KOLA

1. V nádobě, ze které se rychle vyčerpává vzduch, je malé množství vody při teplotě 0°C . Následkem intenzivního vypařování dochází k postupnému zamrznání vody. Jaká část původní hmoty vody může takovým způsobem zmraznout? Změny teploty vzduchu zanedbejte. Skupenské teplo tuhnutí vody je $79,5 \text{ kcal/kg}$, skupenské teplo výparné vody při teplotě 0°C je 599 kcal/kg .

Označení veličin a dané hodnoty: Skupenské teplo tuhnutí vody $l_t = 79,5 \text{ kcal/kg} = 7,95 \cdot 10 \text{ kcal kg}^{-1}$, sku-

penkové teplo výparné vody při $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ je $l_v = 599\text{ kcal/kg} = 5,99 \cdot 10^2\text{ kcal kg}^{-1}$. Hmotu vody teploty $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, nacházející se v nádobě, označíme m . Při rychlém odpařování se z této hmoty část m_1 vypaří a zbývající část $m_2 = m - m_1$ (1) ztuhne.

Řešení: Množství m_1 vody spotřebuje k vypaření při teplotě $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ teplo

$$Q = m_1 l_v. \quad (2)$$

Toto množství tepla se odebere zbývající vodě, která ochlazením ztuhne. Množství m_2 vody vydá při tuhnutí teplo

$$Q_2 = m_2 l_t = (m - m_1) l_t. \quad (3)$$

Jestliže soustava led-voda neztrácí, ani nepřibírá teplo ze svého okolí, pak platí podle zákona o zachování energie rovnice $Q_1 = Q_2$, takže

$$m_1 l_v = (m - m_1) l_t. \quad (4)$$

Z rovnice (4) vypočítáme

$$m_1 = \frac{l_t}{l_t + l_v} m. \quad (5)$$

Dosadíme-li do rovnice (1) za m_1 hodnotu vypočítanou vztahem (5), vyjde

$$m_2 = \frac{l_v}{l_t + l_v} m. \quad (6)$$

Číselně:

$$m_2 = \frac{5,99 \cdot 10^2\text{ kcal kg}^{-1}}{5,99 \cdot 10^2\text{ kcal kg}^{-1} + 7,95 \cdot 10\text{ kcal kg}^{-1}} m = 0,88 m.$$

Část m_1 určíme z rovnice (1), $m_1 \doteq 0,12 m$.

Při rychlém odpařování mrzne v nádobě 88 % a vypaří se 12 % vody. Množství vody, které v nádobě zmrzne, je obecně určeno vztahem (6); vztah (5) udává, kolik vody se vypaří.

2. Dvě skleněné koule, z nichž každá má objem 1 litr, jsou naplněny vzduchem a spojeny přímou skleněnou trubicí délky 1 m a průřezu $0,1 \text{ cm}^2$. Trubice je vzduchotěsně přepažena malou kapkou rtuti. Má-li vzduch v obou koulích stejnou teplotu, je rtuť uprostřed trubice.

a) Teplota vzduchu v jedné kouli zůstává stálá, rovna 0°C . Určete nejvyšší a nejnižší teplotu vzduchu v druhé kouli, při níž rtuť zůstane ještě v trubici.

b) Jak se změní rozdíl teplot vzduchu v obou koulích, posune-li se kapka rtuti o 1 cm?

Objem kapky rtuti, teplotní roztažnost a tepelnou vodivost skla a rtuti zanedbejte.

Označení veličin a dané hodnoty: Objem každé koule $V = 1 \text{ litr} = 10^{-3} \text{ m}^3$, délka spojovací trubice $l = 1 \text{ m}$, průřez spojovací trubice $S = 0,1 \text{ cm}^2 = 10^{-5} \text{ m}^2$, posunutí rtuti $\Delta l = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$. Teplota vzduchu v pravé kouli (obr. 49a, 49b) zůstává stejná $T_0 = 273^\circ \text{K}$, počáteční tlak vzduchu v obou koulích označíme p_0 .

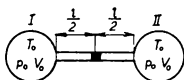
Řešení: Za základní budeme považovat ten stav vzduchu, kdy v obou koulích, které mají objem V , je teplota $T_0 = 0^\circ \text{C} \triangleq 273^\circ \text{K}$ a rtuťová kapka je uprostřed spojovací trubice (obr. 49a). Pokládáme-li objem rtuťové kapky za zanedbatelný, je objem vzduchu v prostoru I, tj. v levé kouli a v levé polovině spojovací trubice až po rtuťovou kapku stejný jako v prostoru II, tj. v pravé kouli a v pravé části trubice. Označíme ho

$$V_0 = V + \frac{1}{2} Sl. \quad (1)$$

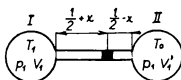
Poněvadž kapka rtuti je v rovnováze, je také tlak p_0 po obou stranách kapky stejně veliký. Teplota vzduchu v prostorech I a II je rovna T_0 .

Má-li se index rtuti posunout ve spojovací trubicí o délku x a teplota vzduchu se má udržet v prostoru II na stálé hodnotě T_0 , bude se měnit stav plynu v prostoru I a II. V pro-

storu II bude změna stavu izotermická, v prostoru I obecná. Označme V_1 objem vzduchu v prostoru I a V'_1 objem vzduchu v prostoru II (obr. 49b).



Obr. 49 a



Obr. 49 b

Pak platí

$$V_1 = V + S\left(\frac{l}{2} + x\right) \quad (2)$$

a

$$V'_1 = V + S\left(\frac{l}{2} - x\right). \quad (3)$$

V prostoru I i II bude stejný tlak p_1 . Teplota bude mít v prostoru I hodnotu T_1 , v prostoru II hodnotu T_0 .

Pro děj v prostoru I platí stavová rovnice

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \quad (4)$$

a pro izotermický děj v prostoru II

$$p_1 V'_1 = p_0 V_0. \quad (5)$$

Dosadíme za $p_0 V_0$ hodnotu ze vztahu (5) do rovnice (4) a dělíme obě její strany veličinou p_1 . Vyjde

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V'_1}{T_0},$$

odtud určíme

$$T_1 = \frac{V_1}{V'_1} T_0. \quad (6)$$

a) Nejvyšší teplota vzduchu v prostoru I bude v případě, že kapka rtuti bude až na pravém konci spojovací trubice, pak bude $V_1 = V + Sl$ a $V'_1 = V$, takže

$$T_1 = \frac{V + Sl}{V} T_0.$$

Číselně:

$$T_1 = \frac{10^{-3} + 10^{-5}}{10^{-3}} 273 \text{ °K} = 275,73 \text{ °K} \triangleq 2,73 \text{ °C}.$$

Nejnižší teplota T'_1 vzduchu v prostoru I bude při poloze rtuťové kapky na levém konci spojovací trubice. Pak bude $V_1 = V$ a $V'_1 = V + Sl$, takže

$$T'_1 = \frac{V}{V + Sl} T_0.$$

Číselně:

$$T'_1 = \frac{10^{-3}}{10^{-3} + 10^{-5}} 273 \text{ °K} = 270,3 \text{ °K} \triangleq -2,7 \text{ °C}.$$

Nemá-li rtuť vytéci ze spojovací trubice a v prostoru II je stálá teplota 0 °C , může se teplota T v prostoru I měnit v intervalu $T'_1 \leq T \leq T_1$, číselně $-2,7 \text{ °C} \leq t \leq 2,73 \text{ °C}$. Hodnoty T_1 a T'_1 jsou obecně určeny vzorci (7) a (8).

b) Poněvadž objem spojovací trubice je malý proti objemu koulí, dopustíme se zanedbatelně malé chyby, jestliže budeme předpokládat, že posunutí kapky rtuti z levého konce spojovací trubice na její pravý konec, tedy posun o délku l , odpovídá teplotnímu rozdílu $T_1 - T'_1$, jež byly vypočítány v odd. a) této úlohy. Pak posun o jednotkovou délku odpovídá teplotnímu rozdílu $\Delta T_0 = \frac{T_1 - T'_1}{l}$ a posun o délku $x = 10^{-2} \text{ m}$ odpovídá teplotnímu rozdílu

$$\Delta T = x \Delta T_0 = \frac{x}{l} (T_1 - T'_1). \quad (9)$$

Číselně:

$$\Delta T = \frac{10^{-2} \text{ m}}{1 \text{ m}} (275,73 \text{ }^{\circ}\text{K} - 270,3 \text{ }^{\circ}\text{K}) \triangleq 5,43 \cdot 10^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Posune-li se kapka rtuti ve spojovací trubici o 1 cm, vznikne v obou koulích rozdíl teplot určený vztahem (9), číselně 0,054 °C. Veličiny T_1 a T_1' jsou určeny vzorce (7) a (8), veličina $x = 10^{-2} \text{ m}$.

3. Siréna má 34 otvory; jak rychle se musí otáčet, aby vydávala tón stejné výšky jako krytá píšťala délky $l = 50 \text{ cm}$? Vzduch v píšťale se může rozechvít i složitějším způsobem, takže píšťala vydává kromě tónu základního současně i vyšší tóny (harmonické). Vyjádřete kmitočty nejbližších dvou vyšších tónů pomocí kmitočtu tónu základního a určete, jak je nutno změnit rychlost otáčení sirény, aby vydávala postupně tyto dva vyšší tóny. Jaký vliv na souzvuk (totožnost) tónu píšťaly a sirény by měla změna teploty vzduchu?

Označení veličin a dané hodnoty: Počet otvorů sirény $z = 34$; délka píšťaly $l = 50 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-1} \text{ m}$; rychlost zvuku ve vzduchu je $v = 340 \text{ m s}^{-1}$; počet otáček sirény za 1 s označíme n , vlnovou délku základního tónu píšťaly λ a jeho frekvenci f .

Řešení:

a) V kryté píšťale vzniká na uzavřeném konci uzel podélného chvění a na otevřeném konci kmitna (obr. 50a). Vznikne tedy na délce l čtvrtina vlny základního tónu píšťaly, takže

$$\frac{\lambda}{4} = l,$$

kde λ je vlnová délka a l délka píšťaly; tedy

$$\lambda = 4 l.$$

Vlnová délka je dána vztahem

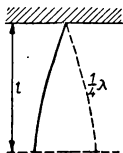
$$\lambda = \frac{v}{f},$$

kde v je rychlost šíření zvuku ve vzduchu a f je kmitočet základního tónu píšťaly, takže pro kmitočet základního tónu kryté píšťaly platí

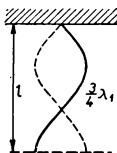
$$f = \frac{v}{4l}. \quad (1)$$

Koná-li siréna n otáček za 1 sekundu, pak kmitočet f' jejího tónu je dán vztahem

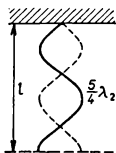
$$f' = z \cdot n. \quad (2)$$



Obr. 50 a



Obr. 50 b



Obr. 50 c

Aby siréna vydávala tón stejné výšky jako krytá píšťala, musí platit

$$f = f'$$

a podle (1) a (2)

$$\frac{v}{4l} = z \cdot n.$$

Odtud dostáváme pro rychlost otáčení sirény podmínku.

$$n = \frac{v}{4zl}. \quad (3)$$

Číselně:

Z tabulek najdeme $v = 340 \text{ m s}^{-1}$; pak

$$n = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{4 \cdot 34 \cdot 5 \cdot 10^{-1} \text{ m}} = 5 \text{ s}^{-1}.$$

Aby uvažovaná siréna vydávala tón stejné výšky, jakou má základní tón dané kryté píšťaly, musí konat 5 otáček za sekundu. Obecně je počet otáček sirény určen vzorcem (3).

b) I při složitějším chvění je na krytém konci píšťaly uzel a na druhém kmitna. Na obr. 50b a 50c jsou schematicky naznačeny další dvě možnosti kmitání v kryté píšťale. V prvním případě na délce l jsou $3/4$ vlnové délky λ_1 a v druhém případě $5/4$ vlnové délky λ_2 , tedy

$$l = \frac{3}{4} \lambda_1; \quad l = \frac{5}{4} \lambda_2.$$

Pro frekvenci kmitů kryté píšťaly vyznačených na obr. 50b a 50c platí

$$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = \frac{4}{3} l \quad \text{a} \quad \lambda_2 = \frac{v}{f_2} = \frac{4}{5} l;$$

Odtud určíme

$$f_1 = 3 \frac{v}{4l} \quad \text{a} \quad f_2 = 5 \frac{v}{4l}. \quad (4)$$

Porovnáním rovnice (1) s rovnicemi (4) dostáváme vztahy

$$f_1 = 3f \quad \text{a} \quad f_2 = 5f, \quad \text{takže} \quad f_1 = \frac{3v}{4l} \quad \text{a} \quad f_2 = \frac{5v}{4l}. \quad (5)$$

Nejbližší dva vyšší harmonické tóny kryté píšťaly mají kmitočty třikrát a pětkrát vyšší než základní tón.

Poněvadž frekvence tónu sirény je přímo úměrná počtu jejích otáček, platí také $n_1 = 3n$ a $n_2 = 5n$; tj.

$$n_1 \frac{3v}{4zl} \quad \text{a} \quad n_2 = \frac{5v}{4zl}. \quad (6)$$

Číselně:

$$n_1 = 15 \text{ s}^{-1} \quad \text{a} \quad n_2 = 25 \text{ s}^{-1}.$$

Má-li siréna vydávat tóny stejné frekvence s prvním nebo

s druhým svrchním tónem kryté píšťaly, musí konat podle obecných vztahů (6) 15 nebo 25 otáček za vteřinu. Frekvence těchto vyšších harmonických tónů je obecně určena vzorci (5).

Změní-li se teplota vzduchu, výška tónu $f' = zn$ sirény se nezmění, neboť ani počet otvorů sirény, ani rychlost jejího otáčení na teplotě nezávisí. Délka λ vlny základního tónu píšťaly zůstane při změně teploty také nezměněna, jak je patrné z obr. 50a. Kmitočet $f = \frac{v}{\lambda}$ tónu píšťaly se však změní, neboť rychlost šíření zvuku je na teplotě prostředí závislá.

Vydávají-li siréna a krytá píšťala za určité teploty tón stejné frekvence (jsou v souzvuku), pak se tento souzvuk při změně teploty poruší. Absolutní výška tónu sirény zůstává stejná i při změně teploty, avšak výška tónu píšťaly se změní.

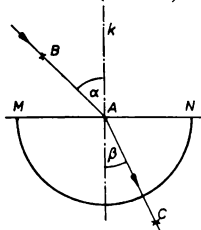
4. Stanovte index lomu skla metodou vytyčování paprsku pomocí jehel.

Potřeby: Skleněná poloválcová deska, rýsovací prkno, list kreslicího papíru, napínáčky, ostrá tužka, pravítko, úhloměr, jehly (špendlíky).

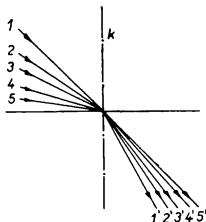
Postup práce: Položte skleněnou poloválcovou desku (obráz. 51a) na papír napjatý na rýsovacím prkně a proveďte ostrou tužkou její obrys. Do středu A úsečky MN zabodněte svisle jehlu. Do bodu B , pokud možno daleko od bodu A , zabodněte svisle druhou jehlu tak, aby spojnice AB byla šikmá k úsečce MN . Další jehlu zabodněte do bodu C tak, aby se oku hledícímu proti válcové stěně ve směru CA jevily všechny tři jehly A, B, C v téže svislé rovině. Pro zpřesnění použijte stejným způsobem ještě čtvrté jehly v bodě D . Pak odstraňte poloválcovou desku i jehly a narýsujte kolmici dopadu v bodě A a spojnice AB a AC (CD). Úhloměrem změřte úhel dopadu a úhel lomu a vypočtěte index lomu skla.

Měření opakujte aspoň pětkrát pro různé úhly dopadu.

Určete index lomu jako aritmetický průměr vypočítaných hodnot. Z určené velikosti indexu lomu vypočítejte velikost mezního úhlu (obrázky 51b).



Obr. 51 a



Obr. 51 b

Řešení: Postupem uvedeným v návodu k řešení úlohy sestojíme k pěti různým úhlům dopadu α příslušné úhly lomu β . Pak vypočítáme pět hodnot pro hledaný index lomu.

Naměřené a vypočítané hodnoty zaznamenáme do tabulky. (Viz tabulka XI.)

Hledaný index lomu je aritmetický průměr všech pěti hodnot posledního sloupce $n = \frac{7,525}{5} = 1,5056$.

Pro index lomu skla vyšla měřením hodnota 1,5056. Mezní úhel ε je ten úhel dopadu, při kterém je úhel lomu 90° , jestliže světlo přechází z prostředí opticky hustšího do prostředí opticky řidšího. Protože index lomu n' při přechodu z hustšího do řidšího prostředí má hodnotu $n' = \frac{1}{n}$, platí $\frac{\sin \varepsilon}{\sin 90^\circ} = n'$, takže vychází $\sin \varepsilon = \frac{1}{n}$ (1).

Číselně vychází $\varepsilon = 41^\circ 37' 13''$. Mezní úhel skla je podle vztahu (1) $41^\circ 37' 13''$.

Tabulka XI

Měření čís.	$\angle \alpha$	$\angle \beta$	$\log \sin \alpha$ + 10	$\log \sin \beta$ + 10	$\log n$	n
1.	45°	28°	9,849 49	9,671 61	0,177 88	1,506
2.	54°	32°30'	9,907 96	9,730 22	0,177 74	1,506
3.	62°30'	36°	9,947 93	9,769 22	0,178 71	1,509
4.	73°	39°30'	9,980 60	9,803 51	0,177 19	1,504
5.	80°30'	41°	9,994 00	9,816 94	0,177 06	1,503
						7,528

12. ÚLOHY KATEGORIE C A JEJICH ŘEŠENÍ

ŘEŠENÍ ÚLOH PRVNÍHO KOLA

1. Traktor přejíždí přes pole jedním směrem rychlostí $v_1 = 9 \text{ km h}^{-1}$, opačným směrem rychlostí $v_2 = 5 \text{ km h}^{-1}$. Stanovte průměrnou rychlost jízdy. Řešte nejprve obecně.

Označení veličin a dané hodnoty: Rychlost traktoru jedním směrem $v_1 = 9 \text{ km/h} = 2,5 \text{ m/s}$, rychlost traktoru opačným směrem $v_2 = 5 \text{ km/h} = 1,39 \text{ m/s}$; průměrnou rychlost označíme v , délku pole s .

Řešení: Průměrnou rychlost v určíme jako podíl proběhnuté dráhy s a příslušného času t . Označíme-li délku

pole s , je celková dráha vykonaná traktorem $2s$. Dobu, po kterou traktor přejíždí pole rychlostí v_1 jedním směrem, označíme t_1 a t_2 dobu, po kterou traktor jede rychlostí v_2 opačným směrem. Celková doba t , potřebná k proběhnutí dráhy $2s$, je tedy dána součtem $t = t_1 + t_2$.

Průměrnou rychlost jízdy traktoru vyjádříme potom vztahem:

$$v = \frac{2s}{t_1 + t_2}. \quad (1)$$

Pro dráhu s v jednom směru platí: $s = v_1 \cdot t_1$, (2a)

v druhém směru platí: $s = v_2 \cdot t_2$. (2b)

Ze vztahů (2a), (2b) vyjádříme příslušné časy

$$t_1 = \frac{s}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s}{v_2} \quad \text{a dosadíme do (1).}$$

Vyjde

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2s}{\frac{s(v_1 + v_2)}{v_1 v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}. \quad (3)$$

Číselně:

$$v = \frac{2 \cdot 2,5 \cdot 1,39}{3,89} \frac{\text{m}^2\text{s}}{\text{m s}^2} \doteq 1,79 \text{ m/s} = 6,43 \text{ km/h.}$$

Průměrná rychlost traktoru je podle vzorce (3) 6,43 km/h.

2. Hmotný bod se pohybuje přímočaře rovnoměrně zrychleně. Je známo, že po uplynutí t sekund od okamžiku, kdy se bod začal pohybovat, urazil za dalších $\tau = 10$ s dráhu $s = 30$ m. Během těchto τ sekund se rychlost bodu zvětšila $n = 5$ krát. Určete zrychlení pohybu. Řešte nejprve obecně.

Označení veličin a dané hodnoty: Přírůstek času $\tau = 10$ s se měří od uplynutí doby t po začátku pohybu;

přírůstek dráhy $s = 30$ m; číslo udávající, kolikrát se zvětšila rychlost $n = 5$; zrychlení pohybu označíme a .

Řešení: Dráha s , kterou hmotný bod urazí za τ sekund, je vyjádřena vztahem:

$$s = s_1 - s_2 = \frac{1}{2}a(t + \tau)^2 - \frac{1}{2}at^2,$$

kde a je zrychlení pohybu, s_1 je dráha vykonaná hmotným bodem za čas $(t + \tau)$ a s_2 dráha uběhnutá za čas t . Je tedy

$$s = \frac{1}{2}a[(t + \tau)^2 - t^2] = \frac{1}{2}a(t^2 + 2\tau t + \tau^2 - t^2)$$

a po úpravě

$$s = \frac{1}{2}a(2\tau t + \tau^2). \quad (1)$$

Pro hledané zrychlení dostáváme:

$$a = \frac{2s}{2\tau t + \tau^2}. \quad (2)$$

Rychlost hmotného bodu po $t + \tau$ sekundách má hodnotu:

$$v_1 = n \cdot v_2, \quad (3)$$

kde v_2 je rychlost hmotného bodu v čase t a v_1 jeho rychlost v čase $(t + \tau)$.

Dosadíme-li za v_1 a v_2 do vztahu (3), dostaneme

$$a(t + \tau) = n \cdot a \cdot t$$

a odtud

$$t = \frac{\tau}{n - 1}. \quad (4)$$

Po dosazení vztahu (4) do (2) dostáváme pro zrychlení:

$$a = \frac{2s}{\frac{2\tau^2}{n - 1} + \tau^2}$$

a po úpravě

$$a = \frac{2s}{\tau^2} \cdot \frac{n-1}{n+1}. \quad (5)$$

Číselně:

$$a = \frac{2 \cdot 30}{10^2} \cdot \frac{4}{6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,4 \text{ m/s}^2.$$

Zrychlení pohybu hmotného bodu v uvažovaném případě má podle vzorce (5) velikost $0,4 \text{ m/s}^2$.

3. Letadlo letí ve výšce $h = 5\,000 \text{ m}$ nad zemí rychlostí (ve vodorovném směru) $v = 600 \text{ km h}^{-1}$. V jaké vodorovné vzdálenosti d od místa A je nutno volně pustit z letadla libovolné těleso, aby dopadlo do místa A , zanedbáme-li odpor vzduchu?

Označení veličin a dané hodnoty: Výška letadla $h = 5 \cdot 10^3 \text{ m}$, rychlost letadla $v = 600 \text{ km/h} = 166,7 \text{ m/s}$, tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m/s}^2$. Těleso má hmotu m a je volně puštěno z místa O ; na zem dopadne za dobu t_0 ve vzdálenosti d .

Řešení: Uvolní-li letadlo letící vodorovným směrem ve výšce h v určitém místě O těleso hmoty m , koná těleso po svém uvolnění dva pohyby. Vlivem setrvačnosti se pohybuje pohybem rovnoměrným přímočarým rychlostí v vodorovným směrem, který mělo letadlo v místě O . Kromě toho padá volným pádem k zemi. Výslednou polohu určíme vektorovým složením drah obou pohybů. Za dobu t vykoná těleso ve vodorovném směru dráhu $x = v \cdot t$ a ve směru svislém dráhu $y = \frac{1}{2}gt^2$. Podle pravidla o vektorovém sčítání drah se bude těleso nacházet v okamžiku t v bodě M , jak je patrné z obr. 52.

Dopadne-li těleso na zem v bodě A za dobu t_0 , je patrné, že

$$d = v \cdot t_0, \quad (1a)$$

$$h = \frac{1}{2} g t_0^2. \quad (1b)$$

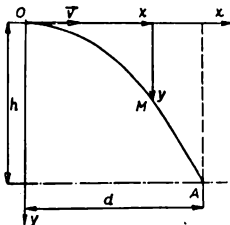
Z rovnice (1b) vypočítáme

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

a dosadíme do rovnice (1a). Vyjde

$$d = v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (2)$$

což je obecný vztah určující hledanou vzdálenost.



Obr. 52

Číselně:

$$d = 166,7 \text{ m/s} \cdot \sqrt{\frac{10^4 \text{ m s}^2}{10 \text{ m}}} = 1,667 \cdot 10^2 \text{ m/s} \cdot \sqrt{1\,000 \text{ s}^2};$$

$$d = 5,271 \cdot 10^3 \text{ m}.$$

Letadlo letící rychlostí $v = 600 \text{ km/h}$ vodorovným směrem ve výšce $h = 5 \cdot 10^3 \text{ m}$ musí vypustit těleso ve vzdálenosti $d = 5,271 \text{ km}$ před cílem, na který má těleso dopadnout. Vzdálenost d je obecně určena vzorcem (2).

4. Výtah, který má s naloženým materiálem celkovou váhu $G = 1\,000 \text{ kp}$, se zvedá se stálým zrychlením $a = 2 \text{ m s}^{-2}$. Jak velká práce se vykoná za prvních 2,5 sekund zdvihu?

Označení veličin a dané hodnoty: Váha materiálu s výtahem $G = 10^3 \text{ kp}$, výtah má zrychlení $a = 2 \text{ m/s}^2$, práce se koná po dobu $t = 2,5 \text{ s}$, tíhové zrychlení je g .

Práce A se koná po dráze s , hmotu materiálu a výtahu označíme $m = 10^3 \text{ kg}$.

Řešení: Velikosti vektorů sil a zrychlení, jež se v řešení vyskytnou, budeme značit kladně, jsou-li orientovány směrem svisle nahoru a znaménkem záporným, jestliže směřují svisle dolů.

Pohybuje-li se výtah s materiálem celkové váhy G se stálým zrychlením svisle vzhůru, působí tento pohyb stálá síla velikosti $F' = m \cdot a$ směřující svisle vzhůru; m je hmota výtahu s materiálem. Na výtah však působí ještě gravitační pole zemské silou $G = -m \cdot g$ směrem svisle dolů. Zařízení, kterým je výtah uváděn a udržován v činnosti, přemáhá váhu naloženého výtahu silou $F'' = -G = m \cdot g$ a kromě toho mu uděluje zrychlení a . Působí tedy na výtah silou $F = F'' + F'$, takže

$$F = m \cdot g + m \cdot a = m(g + a). \quad (1)$$

Vektorové přímky síly F a dráhy s jsou rovnoběžné a jsou orientovány souhlasným směrem. Proto můžeme k výpočtu velikosti práce, kterou koná motor výtahu, užít vztahu

$$A = F \cdot s = m \cdot (g + a) \cdot s, \quad (2)$$

dosadíme-li do něj ze vztahu (1) za velikost síly F výraz $m(g + a)$; s značí velikost dráhy, kterou vykoná výtah za dobu t . Poněvadž pohyb výtahu je rovnoměrně zrychlený,

platí $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$. Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice (2), dostaneme vztah

$$A = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (g + a) \cdot a \cdot t^2, \quad (3)$$

který udává obecně velikost hledané práce.

Číselně:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 12 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ m/s}^2 \cdot 6,25 \text{ s}^2;$$

$$A = 7,5 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Motor, uvádějící do rovnoměrně zrychleného pohybu se zrychlením 2 m/s^2 výtah celkové váhy 10^3 kp směrem vzhůru, vykoná podle vzorce (3) za dobu prvních $2,5 \text{ s}$ práci $7,5 \cdot 10^4 \text{ J}$.

5. Vůz váhy $G = 500 \text{ kp}$ se rozjíždí rovnoměrně zrychleně a po ujetí dráhy $s = 30 \text{ m}$ od počátku pohybu nabude kinetické energie $W_k = 630 \text{ kpm}$. Stanovte:

- rychlost v vozu na konci dráhy s ,
- zrychlení a vozu,
- sílu F působící na vůz podél dráhy s .

Označení veličin a dané hodnoty: Váha vozu $G = 5 \cdot 10^2 \text{ kp}$, hmota $m = \frac{G}{g} = 5 \cdot 10^2 \text{ kg}$, dráha vozu $s = 30 \text{ m}$, kinetická energie vozu na konci dráhy s je $W_k = 6,3 \cdot 10^2 \text{ kpm} = 6,3 \cdot 10^3 \text{ J}$, tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Řešení:

a) Na konci dráhy s má vůz hmoty m , pohybující se rychlostí v , kinetickou energii $W_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$. Odtud dostáváme pro rychlost vozu na konci dráhy s hodnotu

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}} = \sqrt{\frac{2W_k \cdot g}{G}}. \quad (1)$$

Číselně:

$$v = \sqrt{\frac{12,6 \cdot 10^2 \cdot 10 \frac{\text{kp m}}{\text{s}^2 \text{ kp}}}{5 \cdot 10^2}};$$

$$v = \sqrt{25,2} \text{ m/s} \doteq 5 \text{ m/s}.$$

Na konci dráhy $s = 30 \text{ m}$ se vůz pohybuje rychlostí danou vzorcem (1); číselná hodnota rychlosti je 5 m/s .

b) Protože vůz se rozjíždí rovnoměrně zrychleně, můžeme

zrychlení a jeho pohybu určit pomocí rovnic $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ a $v = a \cdot t$, kde t značí čas, za který vůz dosáhne rychlosti v a vykoná dráhu s . Vypočítáme-li z druhé z těchto rovnic dobu $t = \frac{v}{a}$ a dosadíme do první, dostaneme

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{v^2}{a^2},$$

odkud pro hledané zrychlení plyne:

$$a = \frac{v^2}{2s}. \quad (2a)$$

Po dosazení za rychlost ze vztahu (1) nabývá rovnice pro hledané zrychlení tvaru:

$$a = \frac{W_k \cdot g}{G \cdot s}. \quad (2b)$$

Číselně:

$$a = \frac{6,3 \cdot 10^2 \cdot 10}{5 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10} \frac{\text{kp m}^2}{\text{s}^2 \text{ kp m}} = \frac{6,3}{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = 0,42 \text{ m/s}^2.$$

Vůz se rozjíždí se zrychlením, které má podle vzorce (2b) hodnotu $0,42 \text{ m/s}^2$.

c) Protože vůz má při rozjíždění stálé zrychlení a , působí na něj stálá síla

$$F = m \cdot a = \frac{G}{g} \cdot \frac{W_k g}{G s} = \frac{W_k}{s}, \quad (3)$$

dosadíme-li za a ze vztahu (2b).

Číselně:

$$F = \frac{6,3 \cdot 10^2}{30} \text{ kp} = 21 \text{ kp} = 2,1 \cdot 10^2 \text{ N}.$$

Při rozjíždění působí na vůz po dráze 30 m stálá síla $2,1 \cdot 10^2 \text{ N}$, jejíž velikost je obecně určena vztahem (3).

6. Určete hustotu drobných tělísek (např. broků) pyknometrem. Jako teoretického základu k určení postupu při práci uijeme studijního textu určeného pro kategorii C: „**Určování hustoty látek pevných a kapalných**“ (viz str. 59).

Potřeby: Váhy a závaží, pyknometr, kapalina známé hustoty ϱ_1 (voda hustoty $\varrho_1 = 10^3 \text{ kg/m}^3$), broky.

Postup práce:

1. Určíme hmotu m drobných tělísek (broků) vážením;

$$m = V\varrho, \quad (1)$$

kde V značí objem tělísek a ϱ jejich hustotu.

2. Zvážíme pyknometr naplněný kapalinou známé hustoty ϱ_1 ; jeho hmotu označíme m_1 .

3. Do pyknometru naplněného kapalinou známé hustoty ϱ_1 nasypeme drobná tělíska, osušíme pyknometr a zvážíme. Hmotu pyknometru naplněného kapalinou známé hustoty a drobnými tělisky označíme m_2 . Po nasypání tělísek do pyknometru vyteče část kapaliny objemu V hmoty $V\varrho_1$. Proto je $m_2 = m_1 + m - V\varrho_1$. Do této rovnice dosadíme podle vztahu (1) za $V = \frac{m}{\varrho}$ a dostaneme $m_2 = m_1 +$

$+ m - m \frac{\varrho_1}{\varrho}$ a odtud $m \frac{\varrho_1}{\varrho} = m_1 + m - m_2$, takže

$$\varrho = \frac{m}{m_1 + m - m_2} \cdot \varrho_1. \quad (2)$$

Měření provedeme dvakrát a naměřené hodnoty zaznamenáme do tabulky. (Viz tabulka XII.)

4. Do vzorce (2) dosadíme naměřené hodnoty a vypočítáme ϱ . Vypočítané hodnoty zaznamenáme do tabulky.

Tabulka XII

Č. m.	m [g]	m_1 [g]	m_2 [g]	ρ_1 [g/cm ³]	ρ [g/cm ³]
1.	31,47	42,39	71,10	1,0	11,4
2.	19,78	42,39	60,43	1,0	11,37

Výpočty:

1. měření:

$$\rho = \frac{31,47}{42,39 + 31,47 - 71,10} \cdot 1,0 \text{ g/cm}^3;$$

$$\rho = 11,4 \text{ g/cm}^3 = 11,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3;$$

2. měření:

$$\rho = \frac{19,78}{42,39 + 19,78 - 60,43} \cdot 1,0 \text{ g/cm}^3;$$

$$\rho = 11,37 \text{ g/cm}^3 = 11,37 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

5. Aritmetický průměr obou měření je $\rho = 11,385 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

6. Porovnání s tabulkami: V tabulce 14 na straně 43 „Matematických a fyzikálních tabulek pro 9.—11. postupný ročník“ najdeme nejbližší hodnotu hustoty k vypočtené u olova ($\rho_{\text{Pb}} = 11,34 \text{ g/cm}^3$). Měřená tělíska (broky) jsou tedy pravděpodobně z olova.

Hustota drobných tělísek je určena obecně vzorcem (2). Číselně vychází z měření hodnota $11,38 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

7. Těleso bylo vrženo svisle vzhůru rychlostí v_1 a současně z výše, které může ještě toto těleso dosáhnout, bylo vrženo druhé těleso dolů rychlostí v_2 . Kde a s jakou rychlostí se obě tělesa setkají? Ověřte si, zda výsledky jsou rozměrově správné.

Označení veličin a dané hodnoty: Rychlost tělesa vrženého svisle vzhůru je v_1 ; výška výstupu prvního tělesa je h ; rychlost tělesa vrženého svisle dolů je v_2 . Vzájemnou rychlost těles při setkání označíme v , dobu setkání t_0 . Tělesa se setkají ve výšce y_0 nad zemským povrchem.

Řešení: První z obou těles koná při stoupání pohyb rovnoměrně zpožděný a jeho dráha s_1 a okamžitá rychlost v' jsou vyjádřeny rovnicemi:

$$s_1 = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (1a)$$

$$v' = v_1 - g t, \quad (1b)$$

v nichž t značí proměnlivý čas a g tíhové zrychlení. V nejvyšším bodě dráhy má rychlost v' tělesa hodnotu nulovou, takže těleso dosáhne nejvyšší výšky $s_1 = h$ za čas $\tau = \frac{v_1}{g}$.

Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice (1a), dostaneme,

$$h = \frac{v_1^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{g}, \quad \text{takže} \quad h = \frac{v_1^2}{2g}. \quad (2)$$

Druhé těleso se pohybuje pohybem rovnoměrně zrychleným, jeho dráha a rychlost jsou dány rovnicemi:

$$s_2 = v_2 t + \frac{1}{2} g t^2, \quad (3a)$$

$$v'' = v_2 + g t, \quad (3b)$$

takže se druhé těleso nachází v čase t ve výšce $y = h - s_2$, jak je patrné z obrázku 53. Obě tělesa se setkají po t_0 sekundách ve výšce y_0 , takže platí

$$y_0 = \frac{v_1^2}{2g} - s_2,$$

po dosazení za s_2

$$y_0 = \frac{v_1^2}{2g} - v_2 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2. \quad (4)$$

Zároveň však platí vzhledem ke vztahu (1a)

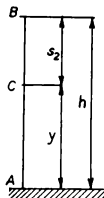
$$y_0 = v_1 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2. \quad (5)$$

Po porovnání vztahů (4) a (5) dostáváme pro t_0 rovnici:

$$v_1 t_0 = \frac{v_1^2}{2g} - v_2 t_0,$$

odtud vychází pro t_0 :

$$t_0 = \frac{v_1^2}{2g(v_1 + v_2)}. \quad (6)$$



Obr. 53

Po dosazení za t_0 do výrazu (4) dostaneme pro výšku y_0 :

$$y_0 = \frac{v_1^2}{2g} - v_2 \cdot \frac{v_1^2}{2g(v_1 + v_2)} - \frac{1}{2} g \frac{v_1^4}{4g^2(v_1 + v_2)^2},$$

jež dá po úpravě:

$$y_0 = \frac{v_1^3}{8g(v_1 + v_2)^2} \cdot (3v_1 + 4v_2), \quad (7)$$

což je obecný výraz pro hodnotu výšky, ve které se obě tělesa setkají. Při setkání bude mít první těleso podle vztahu (1b) rychlost

$$v'_0 = v_1 - g t_0 = v_1 - \frac{v_1^2}{2(v_1 + v_2)}, \quad (8)$$

druhé podle (3b)

$$v''_0 = v_2 + g t_0 = v_2 + \frac{v_1^2}{2(v_1 + v_2)}. \quad (9)$$

Obě tělesa se setkají ve výši y_0 a jejich vzájemná rychlost při setkání je vyjádřena součtem v'_0 a v''_0 . Platí tedy:

$$v = v'_0 + v''_0 = v_1 + v_2. \quad (10)$$

Ověření rozměrové správnosti vztahů (6), (7):

$$[t_0] = \frac{\text{m}^2 \text{s}^2 \text{s}}{\text{s}^2 \text{m m}} = \text{s},$$

$$[y_0] = \frac{\text{m}^3 \text{s}^2 \text{s}^2 \text{m}}{\text{s}^3 \text{m m}^2 \text{s}} = \text{m}.$$

Rozměrová správnost vztahů (8), (9) a (10) je zřejmá. Obě tělesa se setkají ve výšce y_0 nad povrchem zemským se vzájemnou rychlostí v . Hodnoty těchto veličin jsou určeny vzorci (7) a (10).

8. Umělá družice hmoty m je vynesena druhým stupněm rakety do výšky $h = 500 \text{ km}$ nad zemský povrch, kde její rychlost má již vodorovný směr a velikost $v_1 = 3\,100 \text{ m s}^{-1}$.

a) Jakou rychlost v_2 ve vodorovném směru musí družici udělit poslední stupeň rakety, má-li se družice pohybovat po kruhové dráze kolem Země?

b) Jak velkou průměrnou tažnou silou musí působit motor posledního stupně na umělou družici, aby této rychlosti dosáhla, shoří-li palivo za dobu $t = 1 \text{ minuta}$? Zemský poloměr je $R = 6\,378 \text{ km}$. Gravitační zrychlení g považujte za stálé a rovné 10 m s^{-2} .

Označení veličin a dané hodnoty: Výška družice nad povrchem zemským $h = 500 \text{ km} = 5 \cdot 10^5 \text{ m}$; rychlost družice udělená jí druhým stupněm rakety $v_1 = 3,1 \cdot 10^3 \text{ m/s}$; poloměr Země $R = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$; tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m/s}^2$, Newtonova gravitační konstanta κ ; palivo hoří dobu $t = 60 \text{ s}$. Hmotu Země označíme m_z , hmotu družice m , průměrnou tažnou sílu motoru F_p .

Řešení:

a) Umělá družice je ve výšce h nad zemským povrchem přitahována ke středu Země silou F , která má podle New-

tonova gravitačního zákona velikost

$$F = \kappa \frac{m_z m}{(R + h)^2}, \quad (1)$$

kde m_z značí hmotu Země a m hmotu družice. Síla F je dostředivou silou, která udržuje umělou družici v rovnoměrném pohybu po kružnici rychlostí v . Je tedy $F = m \cdot \frac{v^2}{R + h}$. Porovnáme-li tuto hodnotu s výrazem (1), dostaneme rovnici

$$\frac{mv^2}{R + h} = \kappa \cdot \frac{m_z m}{(R + h)^2}. \quad (2)$$

Odtud plyne pro rychlost v planety vzorec

$$v = \sqrt{\kappa \cdot \frac{m_z}{R + h}}. \quad (3)$$

Kdyby se planeta nacházela na zemském povrchu, působila by na ni podle Newtonova gravitačního zákona síla $F' = \kappa \cdot \frac{m_z m}{R^2}$, která se rovná váze planety $G = m \cdot g$, takže $g = \kappa \frac{m_z}{R^2}$. Odtud lze určit hmotu Země

$$m_z = \frac{gR^2}{\kappa} \quad (4)$$

a po dosazení získaného vztahu pro m_z do výrazu pro rychlost, určíme

$$v = R \sqrt{\frac{g}{R + h}}. \quad (5)$$

Protože však družice měla ve výšce h již rychlost v_1 ve vodorovném směru, tedy ve směru tečny ke kruhové dráze, udělí jí třetí stupeň rakety rychlost $v_2 = v - v_1$, takže po

dosazení za rychlost v dostáváme pro rychlost v_2 :

$$v_2 = R \sqrt{\frac{g}{R+h}} - v_1. \quad (6)$$

Číselně:

$$v_2 = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m} \sqrt{\frac{10}{6,878 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2 \text{ m}}} - 3,1 \cdot 10^3 \text{ m/s},$$

$$v_2 = 4,553 \text{ 6} \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

Třetí stupeň rakety udělí družici podle vztahů (6) rychlost $v_2 = 4,553 \text{ 6 km/s}$.

b) Podle druhého pohybového zákona Newtonova platí:

$F_p = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$, takže $F_p \Delta t = m \cdot \Delta v$, kde $\Delta v = v - v_1 = v_2$, F_p je průměrná tažná síla posledního stupně rakety a $\Delta t = t$ je doba, po kterou hoří palivo v posledním stupni rakety. Pro hledanou průměrnou tažnou sílu plyne:

$$F_p = m \cdot \frac{v_2}{t} = \frac{m}{t} \left[R \sqrt{\frac{g}{R+h}} - v_1 \right]. \quad (7)$$

Číselně:

$$F_p = \frac{4,553 \text{ 6} \cdot 10^3}{60} \text{ m} \quad [\text{N}],$$

$$F_p = 7,59 \cdot 10 \text{ m} \quad [\text{N}].$$

V těchto výrazech je nutno dosadit za hmotu m jen číselnou hodnotu hmoty družice v kilogramech. Motor třetího stupně rakety musí působit na družici průměrnou tažnou silou $F_p = 75,9 \cdot m$ [N], kde za m je nutno dosadit číselnou hmotu družice v kilogramech. Obecně je síla F_p určena vztahem (7).

9. Stanovte závislost síly F na prodloužení x pružiny tak, že pružinu upevníte svisle a napínáte ji závažím.

a) Proveďte 10 měření, zhotovte tabulku i graf závislosti síly F [p] na prodloužení x [cm].

b) Pro každé měření sestavte podíl $\frac{F}{x} \left[\frac{\text{p}}{\text{cm}} \right]$. Určete

tuhost pružiny $k = \frac{F}{x}$, tj. sílu potřebnou k prodloužení pružiny o jednotkovou délku (jako aritmetický průměr vypočtených hodnot).

c) Pomocí grafu určete váhu předmětu zavěšeného na pružině a výsledek ověřte zvážením předmětu na laboratorních vahách.

d) Určete z grafu potenciální energii pružiny prodloužené o délku $x = 6$ cm.

e) Odvoďte obecný vzorec pro energii natažené pružiny, v němž bude energie vyjádřena pomocí prodloužení x a tuhosti pružiny k .

Potřeby: Pružina s miskou zavěšená na stojanu; závaží, milimetrové měřítko, laboratorní váhy, těleso.

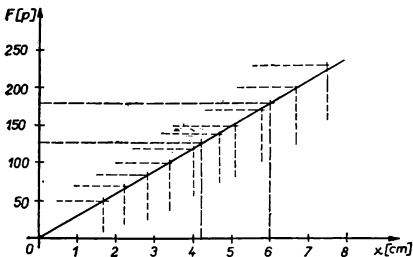
Postup měření: a) Na misku připevněnou na pružině položíme takové závaží, aby se pružina narovнала a změříme její délku. Potom postupně přidáváme závaží a milimetrovým měřítkem zjistíme, oč se pružina prodloužila. Velikost x prodloužení pružiny a velikost F síly, která prodloužení způsobila, zaznamenáme do tabulky a sestojíme graf.

Tabulka XIII

Číslo měření	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
F [p]	50	70	85	100	120	140	150	170	200	230
x [cm]	1,7	2,25	2,85	3,4	4,0	4,7	5,1	5,8	6,7	7,5
F/x [p/cm]	29,4	31,05	29,1	29,4	30,0	29,9	29,4	29,3	29,9	30,6

b) Určení tuhosti pružiny:

Z naměřených hodnot F a x vypočítáme tuhost pružiny k pro každé měření. Výsledky zaznamenáme do tabulky.



Graf 1

Tuhost pružiny je dána aritmetickým průměrem a má hodnotu $k = 29,8 \text{ p/cm}$.

c) Určení váhy předmětu zavěšeného na pružině; ověření výsledku vážením tělesa na laboratorních vahách:

Těleso neznámé váhy jsme zavěsili na pružinu; vlastní vahou prodloužilo pružinu o 4,2 cm. Z grafu závislosti $F \sim x$ je možno zjistit, že tomuto prodloužení odpovídá zatížení pružiny 125 p.

Pro kontrolu výsledku bylo těleso zváženo. Na laboratorních vahách byla ujištěna váha 125,17 p.

d) Určení potenciální energie pružiny prodloužené o délku $x = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$:

Síla působící prodlužování pružiny je proměnlivá. Nejmenší hodnotu má $F_0 = 0$ a největší F při protažení pružiny

o délku x . Síla F má při protažení pružiny o délku 6 cm hodnotu $F = 180 \text{ p} \doteq 1,80 \text{ N}$, jak je patrné z grafu.

Průměrná síla působící při protahování pružiny o délku x je tedy $F_p = \frac{F_0 + F}{2} = \frac{1}{2} F$, takže práce vykonaná při

prodloužení pružiny o délku x je $A = F_p \cdot x = \frac{1}{2} F \cdot x$.

O tuto hodnotu vzroste potenciální energie pružiny. Proto platí

$$W_p = \frac{1}{2} F \cdot x. \quad (1)$$

Číselně: $W_p = \frac{1}{2} 1,80 \cdot 0,06 \text{ N m} = 0,054 \text{ J}$. Pružina prodloužená o 6 cm má podle vzorce (1) potenciální energii 0,054 J.

e) Odvození obecného vzorce pro energii napjaté pružiny.

Tuhost pružiny je určena vzorcem $k = \frac{F}{x}$, takže $F = k \cdot x$. Dosadíme-li tuto hodnotu za F do vztahu (1), vyjde pro výpočet potenciální energie natažené pružiny vztah

$$W_p = \frac{1}{2} k \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} kx^2.$$

Potenciální energie pružiny prodloužené o délku x má velikost $W_p = \frac{1}{2} kx^2$, kde k značí tuhost pružiny.

ŘEŠENÍ ÚLOH DRUHÉHO KOLA

1. Těleso vrhneme svisle vzhůru s počáteční rychlostí $v_0 = 30 \text{ m/s}$. Dvě vteřiny nato vrhneme svisle vzhůru druhé těleso s toutéž počáteční rychlostí. Kdy, kde a s jakými

rychlostmi se obě tělesa setkají? Odpor vzduchu zanedbejte, tíhové zrychlení položte rovno $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Označení veličin a dané hodnoty: Počáteční rychlost obou těles $v_0 = 30 \text{ m/s}$; druhé těleso se začne pohybovat o dobu $\tau = 2\text{s}$ později; tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m/s}^2$. Tělesa se setkají ve výšce h nad zemským povrchem s rychlostmi v_1 a v_2 za dobu t_0 po vypuštění prvního tělesa.

Řešení:

Vektory drah, rychlostí a zrychlení označíme kladným znaménkem ve směru svislém vzhůru a záporným znaménkem v opačném směru. Dráha prvního z obou těles je dána vztahem

$$s_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (1)$$

kde t značí proměnlivý čas.

Závislost dráhy druhého tělesa na čase lze vyjádřit podobnou rovnicí

$$s_2 = v_0 t' - \frac{1}{2} g t'^2, \quad (2)$$

kde $t' = t - \tau$. Výraz (2) nabývá potom tvaru:

$$s_2 = v_0(t - \tau) - \frac{1}{2} g(t - \tau)^2.$$

K setkání obou těles dojde v bodě C , jehož vzdálenost od Země je h ; pro hodnotu h platí: $h = s_1 = s_2$. Z této podmínky lze vyjádřit čas t_0 , za který se obě tělesa setkají. Platí

$$v_0(t_0 - \tau) - \frac{1}{2} g(t_0 - \tau)^2 = v_0 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2.$$

Ekvivalentními úpravami získáme další rovnice

$$v_0 t_0 - v_0 \tau - \frac{1}{2} g t_0^2 + g t_0 \tau - \frac{1}{2} g \tau^2 = v_0 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2$$

$$gt_0\tau = v_0\tau + \frac{1}{2}g\tau^2 \quad t_0 = \frac{\left(v_0 + \frac{1}{2}g\tau\right)}{g}$$

$$t_0 = \frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2}. \quad (3)$$

Polohu bodu, ve kterém se obě tělesa na dráze setkají, je možno určit ze vztahu (1), jestliže za čas t dosadíme ze vztahu (3).

$$h = v_0 \left(\frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2} \right)^2$$

$$h = \frac{v_0^2}{g} + \frac{v_0\tau}{2} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0\tau}{2} - \frac{\tau^2g}{8}$$

$$h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} - \frac{\tau^2g}{8} = \frac{g}{2} \left(\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{\tau^2}{4} \right). \quad (4)$$

Rychlosti v okamžiku setkání u jednotlivých těles jsou určeny vztahy:

$$v_1 = v_0 - gt_0 = v_0 - g \left(\frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2} \right) = -\frac{1}{2}g\tau; \quad (5)$$

$$v_2 = v_0 - gt'_0 = v_0 - g(t_0 - \tau) = v_0 - g \left(\frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2} \right) + g\tau =$$

$$= \frac{1}{2}g\tau. \quad (6)$$

Veličina t'_0 značí dobu mezi vypuštěním druhého tělesa a okamžikem, kdy se obě tělesa setkají.

Číselně:

$$t_0 = \frac{30 \text{ m s}^2}{10 \text{ s m}} + 1 \text{ s} = 4 \text{ s}$$

$$h = \frac{10}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left(\frac{9 \cdot 10^2}{10^2} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{s}^4}{\text{m}^2} - \frac{4}{4} \text{s}^2 \right) = 40 \text{ m}$$

$$v_1 = 30 \text{ m/s} - 10 \cdot 4 \frac{\text{m s}}{\text{s}^2} = -10 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 30 \text{ m/s} - 10 \cdot 2 \cdot \frac{\text{m s}}{\text{s}^2} = 10 \text{ m/s}.$$

Obě tělesa se setkají ve výšce 40 m nad zemí za 4 sekundy od okamžiku vypuštění prvního tělesa. Okamžité rychlosti v místě setkání obou těles jsou stejné velikosti 10 m/s; zatímco první těleso už padá volným pádem, druhé těleso ještě stoupá. Obecně jsou rychlosti obou těles při setkání a jejich vzdálenost od zemského povrchu určeny vztahy (5), (6) a (4). Vztah (3) určuje dobu setkání obou těles.

2. Nezatížená pružina, jejíž váhu zanedbáme, má délku 16 cm. Zatížíme-li ji tělesem hmoty m , prodlouží se o 1 cm. Uvedené těleso, připevněné na jednom konci pružiny, uvedeme do kruhového pohybu tak, že druhý konec pružiny je na ose otáčení, přičemž osa pružiny svírá se svislou osou otáčení úhel 60° . Pro zjednodušení považujeme těleso za hmotný bod.

Určete: a) prodloužení pružiny při otáčení,

b) oběžnou dobu tělesa.

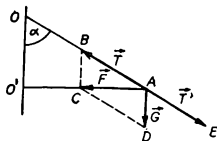
Položte $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\pi^2 = 9,81$.

Označení veličin a dané hodnoty: Délka pružiny $l = 16 \text{ cm} = 0,16 \text{ m}$; prodloužení pružiny vahou hmoty m je $\Delta l = 1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$; úhel pružiny se svislou osou otáčení $\alpha = 60^\circ$; tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $\pi^2 = 9,81$. Prodloužení pružiny při otáčení označíme $\Delta' l$ a oběžnou dobu tělesa T .

Řešení:

a) Na pohybující se těleso působí dvě síly: váha tělesa $\mathbf{G}$

a síla T , kterou napjatá pružina přitahuje pohybující se těleso k bodu O . Protože těleso působením těchto sil je udržováno v rovnoměrném pohybu po kružnici okolo svislé osy, musí být výslednicí těchto dvou sil neproměnná dostředivá síla F mající vodorovný směr. Z obrázku 54 je



Obr. 54

zřejmé, že složky T a G spolu s výslednicí F tvoří strany pravoúhlého trojúhelníku s úhlem $\alpha = 60^\circ$. Pravoúhlý trojúhelník s úhly 30° , 60° a 90° je polovinou rovnostranného trojúhelníku. V našem případě je strana $BC = AD$ zobrazující vektor G polovinou strany rovnostranného trojúhelníku, strana AB zobrazující vektor T

stranou rovnostranného trojúhelníku a úsečka AC zobrazující vektor F je výškou rovnostranného trojúhelníku. Proto platí

$$T = 2G = 2mg, \quad (1)$$

$$F = G\sqrt{3} = mg\sqrt{3}. \quad (2)$$

Při otáčení tělesa tedy působí na pružinu síla T' , která je reakcí síly T , a proto je dvakrát větší než síla G , která napíná pružinu v případě, když těleso visí v klidu. Protože prodloužení pružiny je přímo úměrné velikosti působící síly, bude mít prodloužení pružiny při otáčení hodnotu $\Delta' l = 2\Delta l = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}$. Otáčející se pružina bude mít tedy délku $l' = l + \Delta' l = l + 2\Delta l = 18 \text{ cm} = 0,18 \text{ m}$. Pružina se při otáčení prodlouží obecně o délku $\Delta' l = 2\Delta l$, rovnou číselně 2 cm.

b) Hmotný bod se pohybuje po kruhové dráze, jejíž poloměr r lze určit jako výšku rovnostranného trojúhelníku

se stranou l' , tj. $r = l' \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pro určení oběžné doby uijeme vztahu pro výpočet dostředivé síly $F = \frac{mv^2}{r}$. (3) Dráhovou rychlost tohoto pohybu můžeme vyjádřit u rovnoměrného pohybu po kružnici vztahem $v = \frac{2\pi r}{T}$. Po dosazení do výrazu (3) dostáváme pro výpočet oběžné doby rovnice:

$$F = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r,$$

$$mg\sqrt{3} = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot l' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l'}{2g},$$

odtud

$$T = \pi \sqrt{\frac{2l'}{g}} = \pi \sqrt{\frac{2(l + 2\Delta l)}{g}} \quad (4)$$

nebo

$$T = \sqrt{\frac{2\pi^2(l + 2\Delta l)}{g}}. \quad (4')$$

Číselně:

Ze vztahu (4') plyne

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,18}{9,81} \frac{\text{m s}^2}{\text{m}}} = \sqrt{0,36} \text{ s} = 0,6 \text{ s}.$$

Hmotný bod upevněný na konci spirály koná rovnoměrný pohyb kruhový s oběžnou dobou 0,6 sekundy. Obecně je hodnota periody vyjádřena vzorcem (4).

3. Automobil o hmotě 1 t je uváděn do pohybu po vodorovné silnici působením stálé síly motoru; za 25 s nabude rychlosti 72 km/h. Síly tření a odporu vzduchu považujeme po dobu pohybu za stálé a rovné celkem 30 kp. Určete:

- kinetickou energii, kterou auto nabude;
- práci motoru po dobu rozjíždění a velikost jeho průměrného výkonu;
- výkon motoru potřebný k udržení rychlosti 72 km/h; porovnejte tento výkon s výkonem po dobu rozběhu;
- dráhu, kterou vykoná auto, když se vypne jeho motor. Tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Označení veličin a dané hodnoty: Hmoty auta $m = 1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$; čas $t = 25 \text{ s}$; rychlost auta $v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$; síla tření a odporu vzduchu $R = 30 \text{ kp} = 3 \cdot 10^2 \text{ N}$. Průměrný výkon motoru při rozjíždění označíme P_p , výkon při rovnoměrném pohybu P' , dráhu auta po vypnutí motoru s .

Řešení:

- Získá-li automobil hmoty m působením stálé síly motoru rychlost v , pak jeho pohybový stav je dán velikostí kinetické energie

$$W_k = \frac{1}{2} mv^2. \quad (1)$$

Číselně:

$$W_k = \frac{1}{2} 10^3 \cdot 400 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 2 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Auto nabude při rozjíždění za 25 s kinetickou energii $2 \cdot 10^5 \text{ J}$. Obecně je velikost této energie dána vztahem (1).

- Na automobil působí při rozjíždění stálá síla; proto koná auto pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením

$a = \frac{v}{t}$. Zrychlení udílí automobilu síla stálé velikosti $F - R$, kde F je tažná síla motoru automobilu ve směru jeho pohybu a R je odpor proti pohybu. Váha vozu G se ruší pevností vozovky. Podle 2. Newtonova zákona lze tedy psát $F - R = m \cdot a$ a odtud plyne pro tažnou sílu automobilu

$$F = m \cdot a + R. \quad (2)$$

Poněvadž vektorové přímky síly, která působí při pohybu auta, a dráhy auta jsou totožné, lze pro výpočet práce A užít vztahu $A = F \cdot s$, takže

$$A = (m \cdot a + R) \cdot \frac{1}{2} at^2$$

a po dosazení za $a = \frac{v}{t}$

$$A = \frac{1}{2} \left(m \cdot \frac{v}{t} + R \right) \cdot v \cdot t. \quad (3)$$

Průměrný výkon P_p je číselně určen prací vykonanou za jednotku času, v našem případě:

$$P_p = \frac{1}{2} v \left(m \frac{v}{t} + R \right). \quad (4)$$

Číselně:

$$A = \frac{1}{2} \left(10^3 \cdot \frac{20}{25} + 3 \cdot 10^2 \right) \cdot 20 \cdot 25 \frac{\text{kg m m s}}{\text{s}^2 \text{ s}}$$

$$A = 2,75 \cdot 10^5 \text{ J}$$

$$P_p = \frac{2,75 \cdot 10^5 \text{ J}}{25} \frac{1}{\text{s}} = 1,1 \cdot 10^4 \text{ W.}$$

Motor automobilu vykoná při rozjíždění práci $2,75 \cdot 10^5 \text{ J}$ při průměrném výkonu 11 kW. Velikost práce motoru

a jeho výkon při rozjíždění jsou určeny vzorci (3) a (4).

c) Při rovnoměrném pohybu automobilu překonává tažná síla automobilového motoru jen síly tření a odpor vzduchu. Motor auta pracuje tedy silou $F' = R$ po dráze s . Jeho výkon je proto určen vztahem $P' = R \frac{s}{t}$. Po úpravě vyjde

$$P' = R \cdot v. \quad (5)$$

Číselně:

$$\begin{aligned} P' &= 3 \cdot 10^2 \cdot 20 \frac{\text{N m}}{\text{s}} \\ P' &= 6 \cdot 10^3 \text{ W} \\ \frac{P_p}{P'} &= \frac{\frac{1}{2} v \left(m \frac{v}{t} + R \right)}{Rv} = \frac{mv + Rt}{2Rt}, \end{aligned} \quad (6)$$

odtud

$$P' = \frac{2Rt}{mv + Rt} P_p.$$

Číselně:

$$\begin{aligned} P' &= \frac{6 \cdot 10^3}{1,1 \cdot 10^4} P_p, \\ P' &= 0,54 P_p. \end{aligned}$$

Má-li motor automobilu udržovat rychlost 72 km/hod, pracuje s výkonem 6 kW, který je asi polovinou průměrného výkonu motoru při rozjíždění. Obecně má hledaný výkon hodnotu danou vzorcem (5). Poměr výkonu motoru auta při rozjíždění k výkonu téhož motoru při rovnoměrném pohybu auta je určen vztahem (6).

d) Vypne-li se motor auta, bude se auto pohybovat dále pohybem rovnoměrně zpomaleným, neboť se jeho kine-

tická energie W_k spotřebovává na práci potřebnou k překonání odporu R po dráze s . Zastaví se v okamžiku, kdy síly tření a odpor vzduchu spotřebují veškerou kinetickou energii automobilu. Platí tedy:

$$R \cdot s = W_k, \quad s = \frac{W_k}{R} = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{R}. \quad (7)$$

Číselně:

$$s = \frac{2 \cdot 10^5 \text{ J}}{3 \cdot 10^2 \text{ N}} = 6,67 \cdot 10^2 \text{ m}.$$

Po vypnutí motoru se podle vztahu (7) auto pohybuje ještě po dráze 667 m.

4. Určete velikost síly smykového tření.

Potřeby: Dřevěný kvádr, nakloněná rovina, stopky, délkové měřítko, laboratorní váhy a závaží.

Postup práce: Sestavte nakloněnou rovinu, změřte její délku a výšku. Stanovte zrychlení pohybu kvádrů na nakloněné rovině z velikosti dráhy a času, potřebného k jejímu proběhnutí. Vypočítejte zrychlení, které by měl kvádr při stejném sklonu roviny, kdyby nebylo tření. Z naměřených hodnot vypočítejte velikost síly smykového tření jako aritmetický průměr zjištěných hodnot.

Řešení: Nachází-li se kvádr hmoty m na nakloněné rovině délky d a výšky h , působí na něj gravitační pole zemské silou $G = m \cdot g$, kde $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ značí tíhové zrychlení. Tato síla se rozkládá na dvě složky, pohybovou F_1 a tlakovou F_2 . Velikost složky F_1 je zobrazena na obr. 55 úsečkou $A'D' = C'B' = F_1$, velikost složky F_2 úsečkou $A'C' = F_2$. Úhly při vrcholech A a A' jsou shodné, neboť jejich ramena jsou navzájem kolmá. Trojúhelníky $\triangle ABC$

a $\triangle A'B'C'$ jsou tedy podobné podle věty úú. Proto platí

$$\frac{B'C'}{A'B'} = \frac{CB}{AB}, \quad \text{takže} \quad \frac{F_1}{G} = \frac{h}{d} \quad \text{a}$$

$$F_1 = \frac{h}{d} \cdot G = \frac{h}{d} \cdot m \cdot g. \quad (1)$$

Kdyby se kvádr pohyboval na nakloněné rovině bez tření, měl by zrychlení

$$a' = \frac{F_1}{m} = \frac{h}{d} \cdot g. \quad (1a)$$

Složka F_1 uvede kvádr do pohybu po nakloněné rovině směrem dolů. Tento pohyb je brzděn silou tření T působící proti směru pohybu, takže se kvádr pohybuje po nakloněné rovině působením síly, která má velikost

$$F = F_1 - T. \quad (2)$$

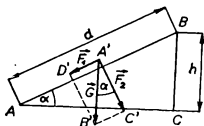
Protože síly F_1 a T jsou konstantní, je síla F stálá a pohyb kvádrů je rovnoměrně zrychlený a má zrychlení a . Síla F je podle druhého Newtonova zákona velká

$$F = ma. \quad (3)$$

Dosadíme-li do vztahu (2) hodnoty F_1 a F ze vztahů (1) a (3), vypočítáme velikost síly tření

$$T = F_1 - F = m \left(\frac{h}{d} \cdot g - a \right) = m(a' - a). \quad (4)$$

Ze vzorce $s = \frac{1}{2} a t^2$ pro výpočet dráhy pohybu rovnoměrně zrychleného určíme velikost zrychlení pohybu na nakloněné rovině $a = \frac{2s}{t^2}$ a po dosazení do vztahu (4)



Obr. 55

dostaneme

$$T = m(a' - a) = m\left(\frac{h}{d} \cdot g - \frac{2s}{t^2}\right), \quad (5)$$

což je vztah určující velikost síly smykového tření kvádru na nakloněné rovině. Rovnice je rozměrově správná, neboť výraz v závorce má rozměr zrychlení.

Měření:

1. Interpolační metodou zjistíme na laboratorních váhách hmotu kvádru $m = 0,1578 \text{ kg}$, délkovým měřítkem výšku nakloněné roviny $h = 0,4 \text{ m}$, její délku $d = 1,6 \text{ m}$ a dráhu kvádru po nakloněné rovině $s = 1 \text{ m}$.

2. Dobu, po kterou se kvádr pohybuje na nakloněné rovině, zjistíme stopkami. Měření provedeme pětkrát. Naměřené hodnoty zapíšeme do tabulky.

3. Výpočtem zjistíme velikost zrychlení $a = \frac{2s}{t^2}$, se kterým se kvádr pohybuje po nakloněné rovině, a zrychlení $a' = \frac{h}{d} \cdot g$, které by měl při stejném sklonu roviny, kdyby nebylo tření. Dále určíme T ze vztahu (5) pro každou naměřenou hodnotu t .

4. Velikost síly smykového tření je aritmetický průměr všech pěti vypočítaných hodnot.

Vypočtené hodnoty zaznamenáme také v tabulce. (Viz tabulku IV.)

Aritmetický průměr všech hodnot posledního řádku je $T = 0,142 \text{ N}$. Velikost síly smykového tření je $0,142 \text{ N}$. Obecně je určena vzorcem (5).

Tabulka XIV

Měření čís.	1	2	3	4	5
t [s]	1,12	1,14	1,10	1,12	1,11
$a' = \frac{h}{d} \cdot g$ [m/s ²]	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
$a = \frac{2s}{t^2}$ [m/s ²]	1,594	1,539	1,653	1,594	1,623
$a' - a$ [m/s ²]	0,906	0,961	0,847	0,906	0,877
T [N]	0,143	0,152	0,134	0,143	0,138

OBSAH

1. Úvod	3
2. Složení ÚV FO	5
3. Předsedové KV FO	7
4. Pokyny k úpravě, postupu řešení a klasifikační zásady pro opravování úloh soutěže	8
5. Průběh soutěže ve školním roce 1962/63	9
6. Výsledky jednotlivých kol soutěže	15
7. Srovnání účasti soutěžících v I. až IV. ročníku soutěže	30
8. Závěry k IV. ročníku FO	32
9. Studijní texty pro první kolo IV. ročníku FO	35
10. Úlohy kategorie A a jejich řešení	70
11. Úlohy kategorie B a jejich řešení	119
12. Úlohy kategorie C a jejich řešení	156

Jan Tesař, Zbyněk Kubíček a Marie Čechová

ČTVRTÝ ROČNÍK FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY

Obálku navrhl Bohumil Stíbal — Obrázky rýsoval inž. Jan Ibl — Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou publikaci č. 45-0-28 — Odpovědná redaktorka: Jiřina Cívínová — Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk — Technická redaktorka: Soňa Valoušková — Z nové sazby písmem Plantin vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p., závod 4, Ostrovní 30, Praha 1, — Formát papíru 70 × 100 cm — AA 7,57 — VA 7,90 — D-06*40339 — Náklad 3 150 výtisků — Tematická skupina a podskupina 02/57 — Vydání 1. — Cena brožovaného výtisku Kčs 5,—

63/II-13

14-910-64 Kčs 5,—
