

Školní příručky
»Dědictví Havlíčkova«.
Svazek 43.

ÚLOHY z deskriptivní geometrie.

DÍL II.

168 řešených příkladů a se 77 obrázky

Napsal

BOHUSLAV STAROSTA
profesor II, stát. reál. gymnasia v Brně.

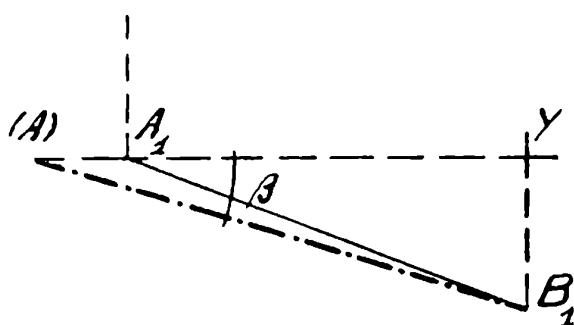
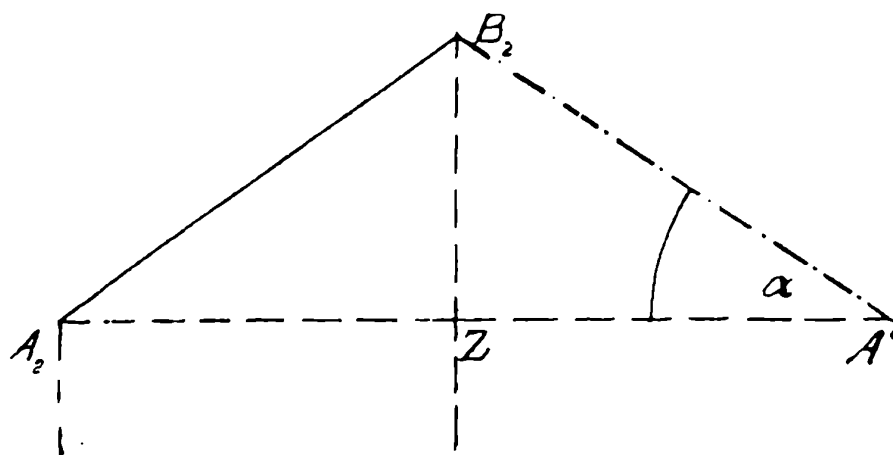


V Brně 1932.

Nákladem »Dědictví Havlíčkova« v Brně, Husova č. 5.
Tiskla »Novina« v Brně.

I. Několik úloh bez osy souřadné.

V technické praxi nežívá se v promítání na dvě průmětny osy $x_{1,2}$; jsou ovšem půdorys a nárys bodu (zpravidla) na svislé přímce — ordinále, takže směr osy $x_{1,2}$ zůstává



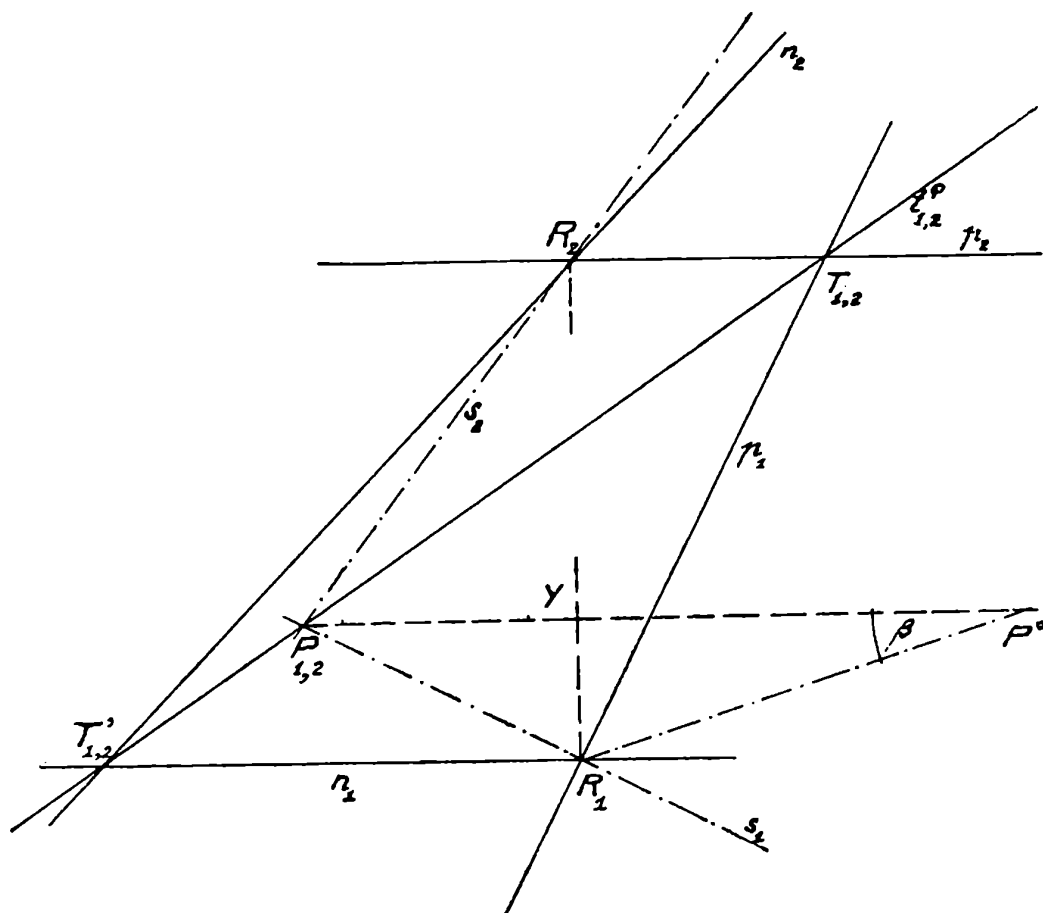
Obr. 1.

vodorovný. Poněvadž při vynechání osy $x_{1,2}$ neznáme velikosti souřadnic y a z , takže poloha útvaru vůči průmětnám není dostatečně určena, nemůžeme užívatí stopníků přímek a

stop rovin; místo nich užíváme průsečíků $T_{1,2}$ přímek a průsečnic $t_{1,2}$ rovin s rovinou totožnosti.

1. Jest určiti skutečnou velikost úsečky a její odchylky od průměten.

Podle úl. 28. díl I. této příručky*) sestrojí se skutečná délka a odchylka úsečky pomítacím trojúhelníkem prvním nebo druhým. Skutečná velikost úsečky jest přeponou promítacího trojúhelníku prvního (druhého), jehož odvěsnami jsou první



Obr. 2.

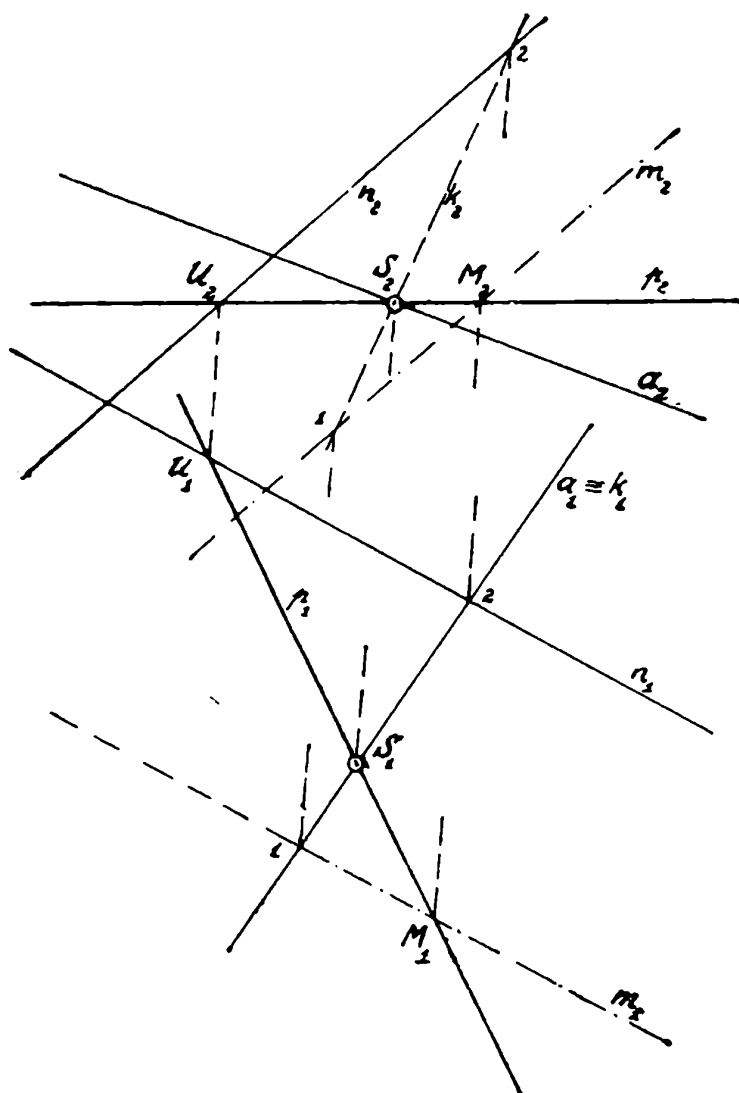
(druhý) průmět úsečky a rozdíl souřadnic z (y); proti tomuto jest odchylka α od půdorysny (β od nárysny). Rozdíl souřadnic obdržíme, vedeme-li koncovým bodem úsečky (který jest blíž průmětně, má menší souřadnici) kolmici na ordinálu. (Obr. 1.)

*) V dalším uvádíme při odvolávání se na zmíněnou příručku prostě (I., 28).

Má-li se hledati odchylka přímky, zvolíme na přímce dva body, a to průsečík její s rovinou totožnosti $P_{1,2} \equiv s_1 \times s_2$ (I., 39) a další libovolný bod R a určíme příslušný promítací trojúhelník úsečky RP . (Obr. 2.)

2. Jest určiti odchylky roviny $\varrho \equiv (p \times n)$ od obou průmětů. (Obr. 2.)

Určíme stopu $t_{1,2}^p$ roviny ϱ v rovině totožnosti, která spojuje průsečíky $T_{1,2} \equiv p_1 \times p_2$ a $T'_{1,2} \equiv n_1 \times n_2$ stoposměrných

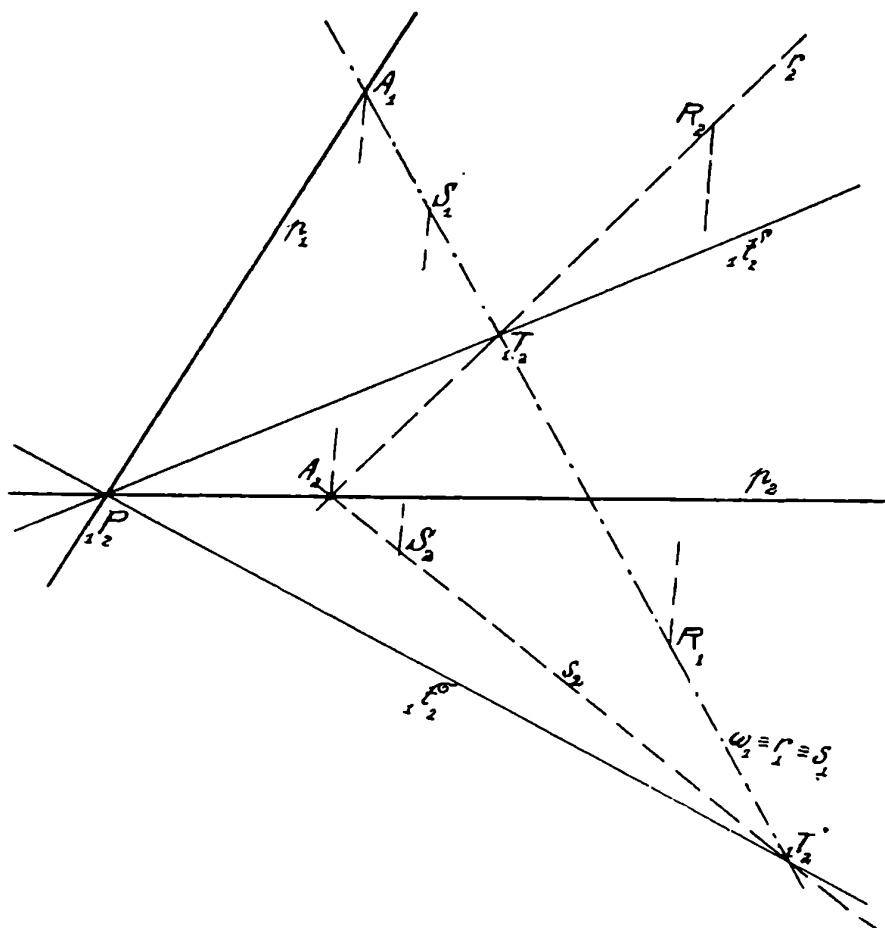


Obr. 3.

přímek s rovinou totožnosti. Na $t_{1,2}^p$ protínají se oba průměty všech přímek roviny ϱ . Odchylka roviny jest rovna příslušné odchylce její spádové přímky první nebo druhé (I., 5. nebo 63.). Vedeme bodem $R \equiv p \times n$, $s_1 \perp p_1$, $s_2 \equiv R_2 P_{1,2}$, kde

$P_{1,2} \equiv s_1 \times t_{1,2}$; vyhledáme α^s prvním promítacím trojúhelníkem úsečky $\overline{RP}$, $\alpha_1^0 = \alpha^s$. Podobně narýsuje bodem R_2 přímkou $s'_2 \perp n_2$, určíme $s'_1 \equiv R_1 N_{1,2}$, kde $N_{1,2} \equiv s'_2 \times t_{1,2}$, a v druhém promítacím trojúhelníku úsečky RN jest β^0 .

3. Průsečík přímky a s rovinou $\varrho \equiv (m \parallel n)$.
(Obr. 3.)



Obr. 4.

Promítací rovina prvá (aa_1) přímky a protne rovinu ϱ v krycí přímce k , $k_1 \equiv a_1$ (I., 82), $k_1 \times m_1 \equiv 1$, $k_1 \times n_1 \equiv 2$; určíme nárysy bodů 1, 2 na m_2 , n_2 a jejich spojením dostaneme k_2 ; $k_2 \times a_2 \equiv S_2$, S_1 na a_1 a na ordinále.

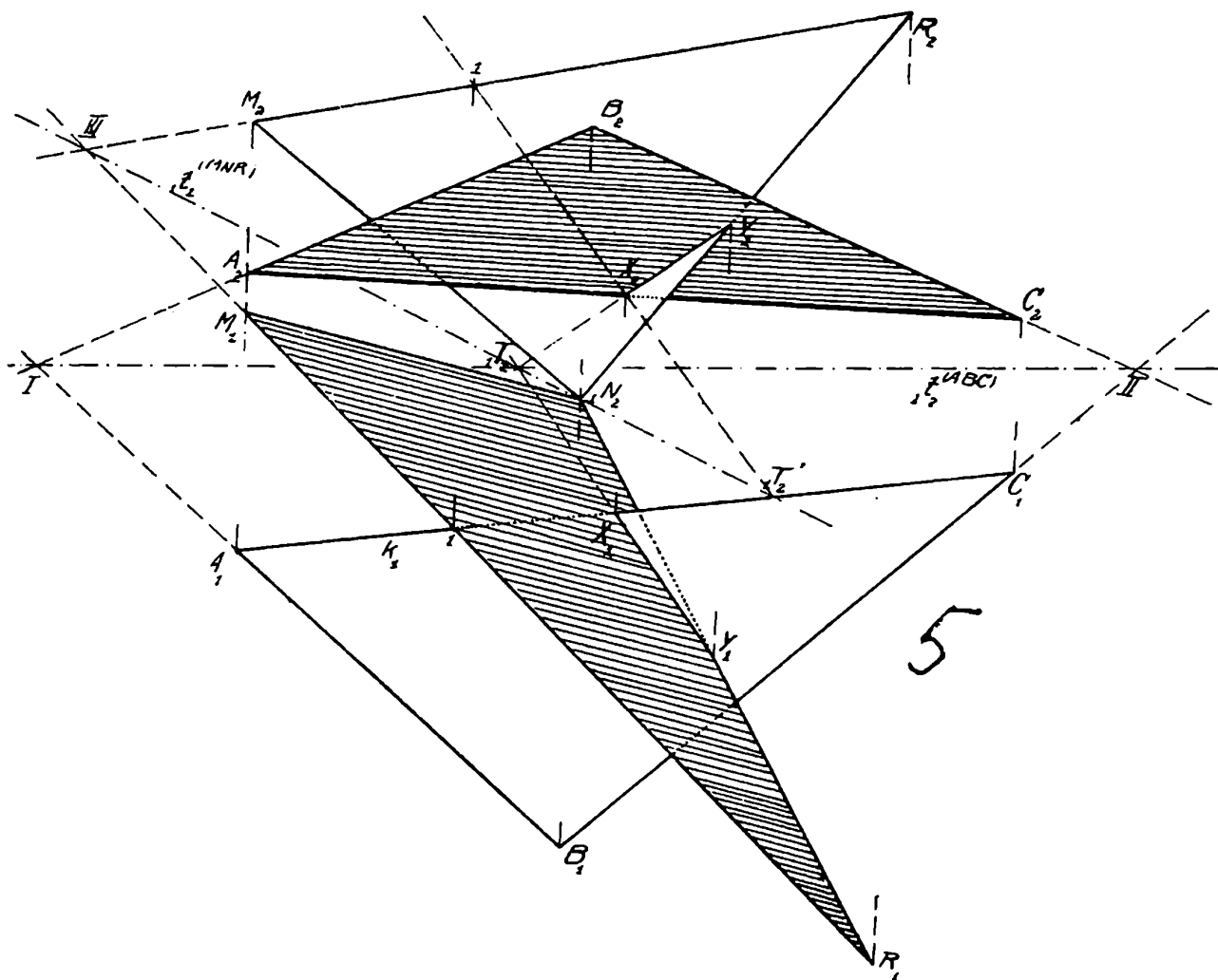
4. Příčka mimoběžek a , n bodem M

řešena v obr. 3 tak, že byl sestrojen průsečík S mimoběžky a s rovinou $\varrho \equiv (M, n) \equiv (m \parallel n)$ podle úlohy předchozí, a jeho spojnice s M jest hledaná příčka.

5. Průsečnice rovin $\varrho (R, t^{\rho})$ a $\sigma (S, t^{\sigma})$,

kde t^{ρ} a t^{σ} jsou stopy daných rovin v rovině totožnosti, jest řešena v obr. 4.

První promítací rovina ω proložená body R, S , $\omega_1 \equiv R_1 S_1$, protne dané roviny v přímkách $r \equiv \varrho \times \omega$, $s \equiv \sigma \times \omega$, $r_1 \equiv s_1 \equiv$

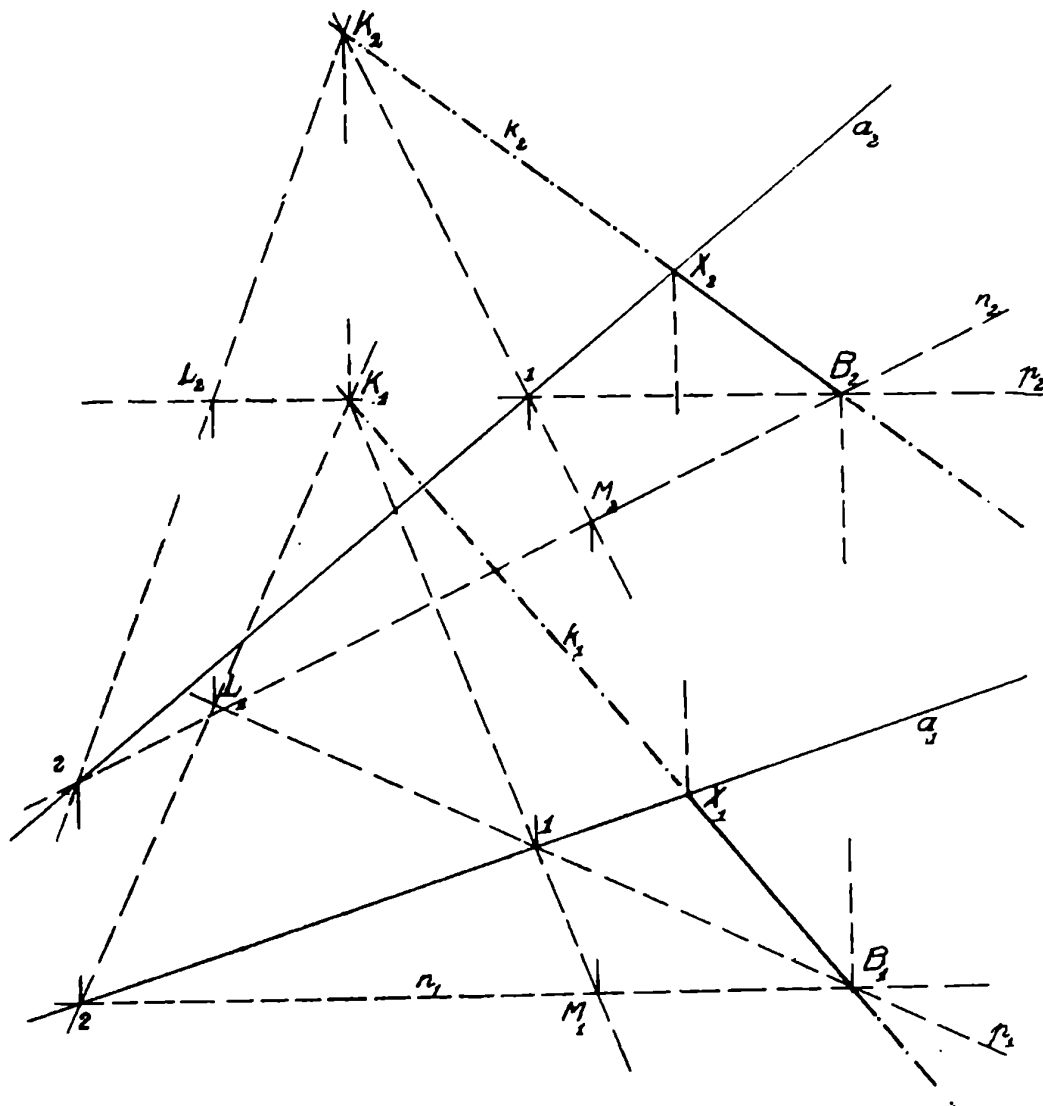


Obr. 5.

$\equiv \omega_1$, jejichž stopníky v rovině totožnosti jsou $T_{1,2} \equiv r_1 \times t_{1,2}^{\rho}$, $T'_{1,2} \equiv s_1 \times t_{1,2}^{\sigma}$; spojnice $T_{1,2} R_2 \equiv r_2$, $T'_{1,2} S_2 \equiv s_2$ jsou nárysy pomocných přímek, jejichž průsečík $A_2 \equiv r_2 \times s_2$, A_1 na ordinále a na ω_1 jest jeden bod hledané průsečnice. Druhý bod jest $P_{1,2} \equiv t_{1,2}^{\rho} \times t_{1,2}^{\sigma}$.

6. Jest vyšetřiti pronik $\triangle ABC$ s $\triangle MNR$. (Obr. 5.)

Bod $T_{1,2} \equiv t_{1,2}^{(ABC)} \times t_{1,2}^{(MNR)}$ jest jeden bod průsečnice rovin obou trojúhelníků. První promítací rovina strany AC protne rovinu (MNR) v krycí přímce k , $k_1 \equiv A_1 C_1$; jeden bod této jest $1 \equiv k_1 \times M_1 R_1$. Spojnice nárysu bodu 1 s $T'_{1,2} \equiv k_1 \times t_{1,2}^{(MNR)}$ jest k_2 , $k_2 \times A_2 C_2 \equiv X_2$, X_1 na $A_1 C_1$ a na ordinále, a jeho spojnice s bodem $T_{1,2} \equiv t^{(ABC)} \times t^{(MNR)}$ jest průsečnice rovin trojúhelníků. V její úsečce XY (Y na BC), pro-

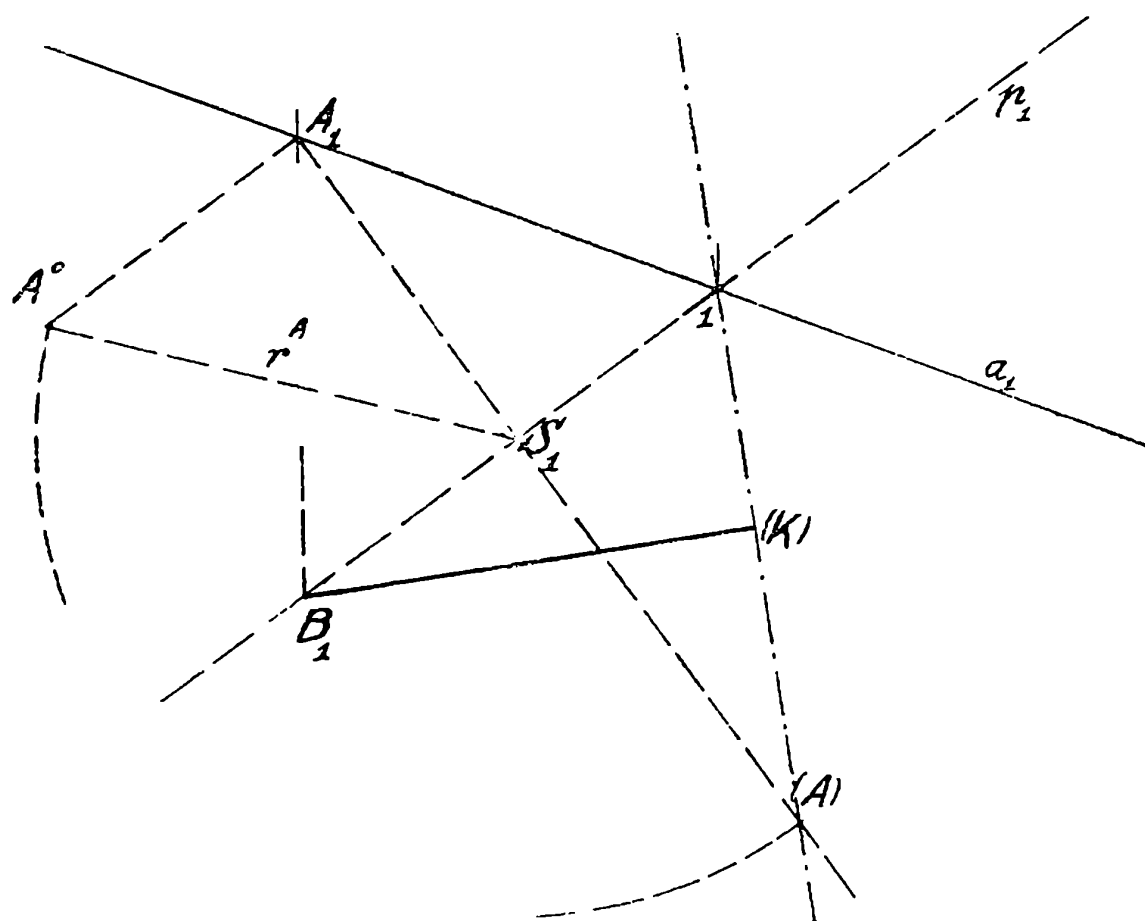
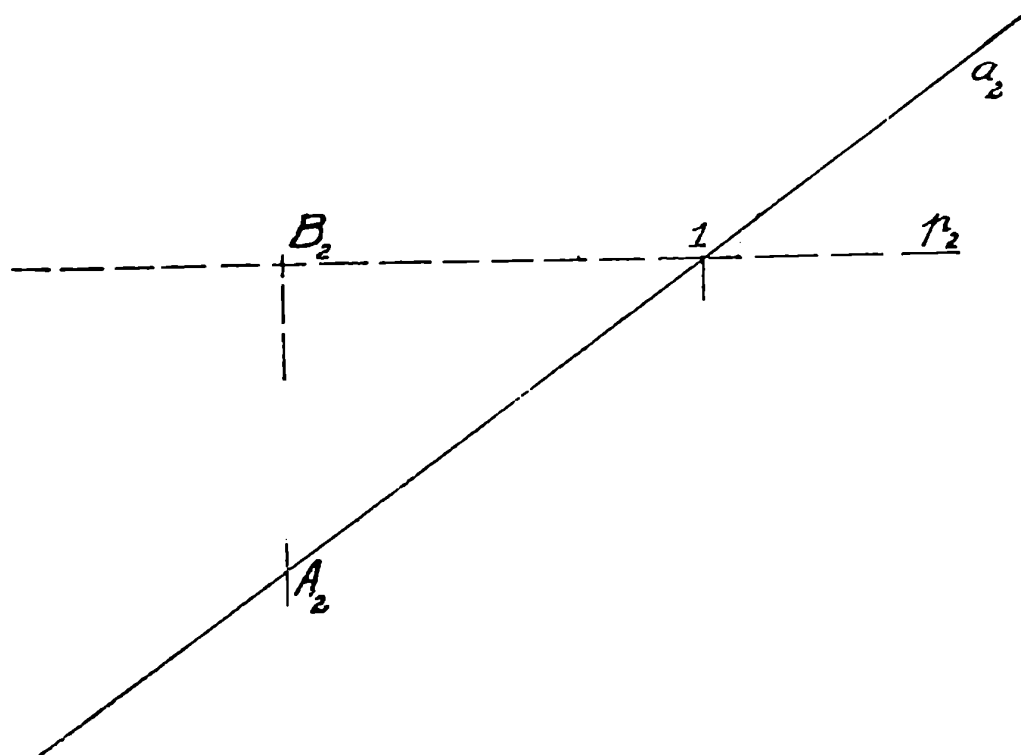


Obr. 6.

stupuje $\triangle ABC$ rovinu $\triangle MNR$. Viditelnost rozhodneme podle úlohy 10, díl I.

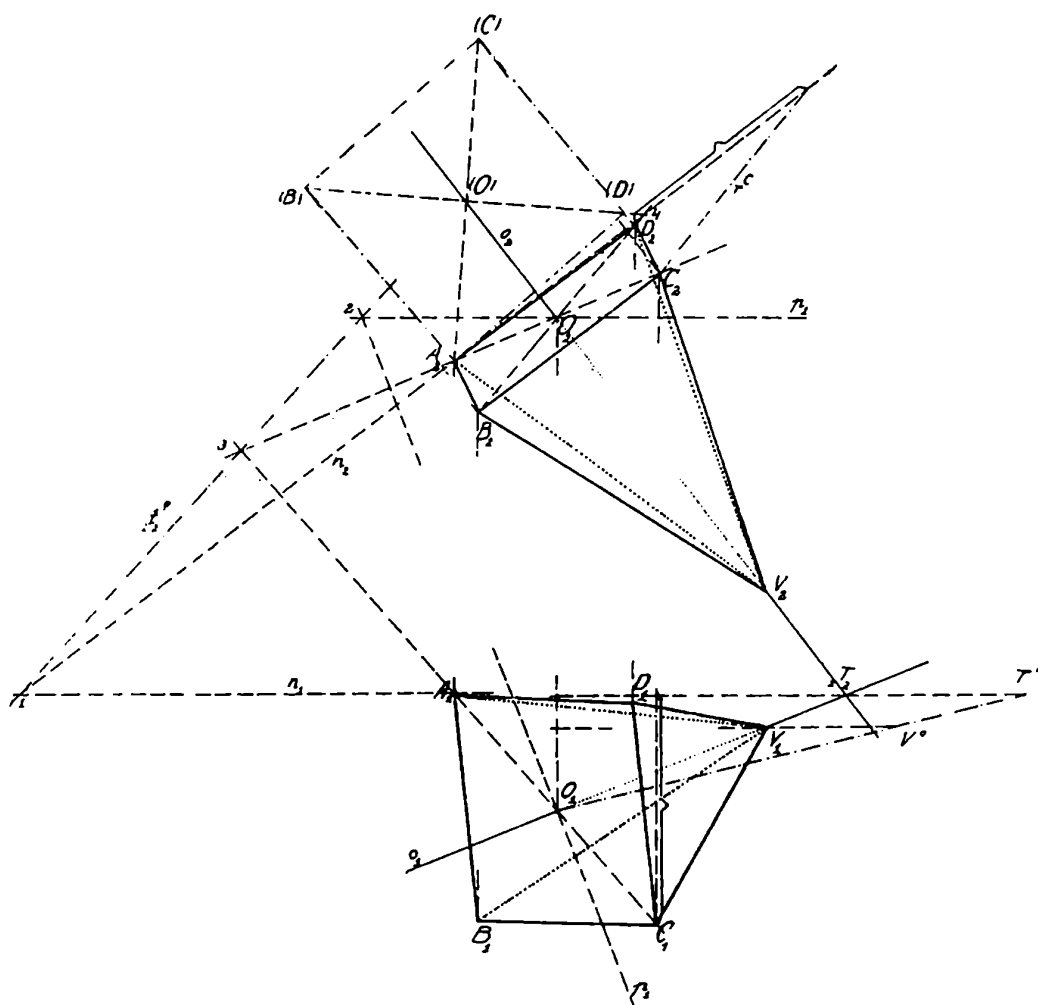
7. Vzdálenost bodu B od přímky a stanovíme:

a) pomocí roviny ϱ , kterou proložíme bodem B kolmo k a (I., 64),



Obr. 7.

b) pomocí vlastnosti, že výšky trojúhelníku $B12$ protínají se v témž bodě K (obr. 6). Strany $\triangle B12$ jsou daná přímkou a a stoposměrné přímky p, n roviny (B, a) . Výška z bodu 1 na n má nárys $1M_2 \perp n_2$, výška z bodu 2 na p má půdorys $2L_1 \perp p_1$; scházející průměty určíme, obdržíme bod výšek K , jehož spojnice s B je kolmice K na danou přímkou, kterou protne v bodě $X \equiv a \times k$. Skutečná délka úsečky BX jest hledaná vzdálenost bodu B od přímky a .



Obr. 8.

c) otočením roviny (a, B) kolem stoposměrné přímky do polohy rovnoběžné s dotyčnou průmětnou. V obr. 7 otočena rovina (a, B) do vodorovné roviny proložené první stoposměrnou přímkou p , kolem této. Při otáčení je bod $1 \equiv a \times p$ pevný, stačí tedy k otočení přímky a otočiti její jeden bod A , který zvolíme na ordinále $B_1 B_2$. Ro-

vina otáčení bodu A má půdorys $A_1(A) \perp p_1$, $(A) \dashv p_1 = r^A$, r^A jest přeponou pravoúhlého trojúhelníku, jehož jednou odvěsnou je půdorys této, $A_1 S_1$, druhou vzdálenost bodu A od roviny, do níž otáčíme, t. j. $A_2 B_2 = A_1 A^0$. $(A) I$ jest otočený obraz dané přímky a $B_1(K) = B_1 \dashv (a)$ jest skutečná velikost hledané vzdálenosti.

8. V rovině $\varrho \equiv (t^0, \overline{AC})$ jest zobraziti čtverec nad úhlopříčkou $\overline{AC}$.

Bodem A prochází stoposměrná přímka n druhé osnovy (obr. 8), a kolem ní byl otočen bod C do roviny průčelné, $(C) S_2 = r^C$, jenž jest přeponou pravoúhlého trojúhelníku, jehož jednou odvěsnou jest nárys poloměru $C_2 S_2$, druhou odvěsnou vzdálenost bodu C od roviny průčelné, t. j. $C_1 \dashv n_1$. Z otočeného obrazu $A_2(B)(C)(D)$ odvodíme nárys čtverce pomocí affinity, jejíž osou jest n_2 a z tohoto půdorys, který je s nárysem v affinitě, jejíž osou jest $t_{1,2}^0$.

9. Čtverec předcházející úlohy jest podstavou pravidelného jehlanu dané výšky v , jinými slovy, máme vztyčiti v bodě O dané roviny ϱ kolmici délky v .

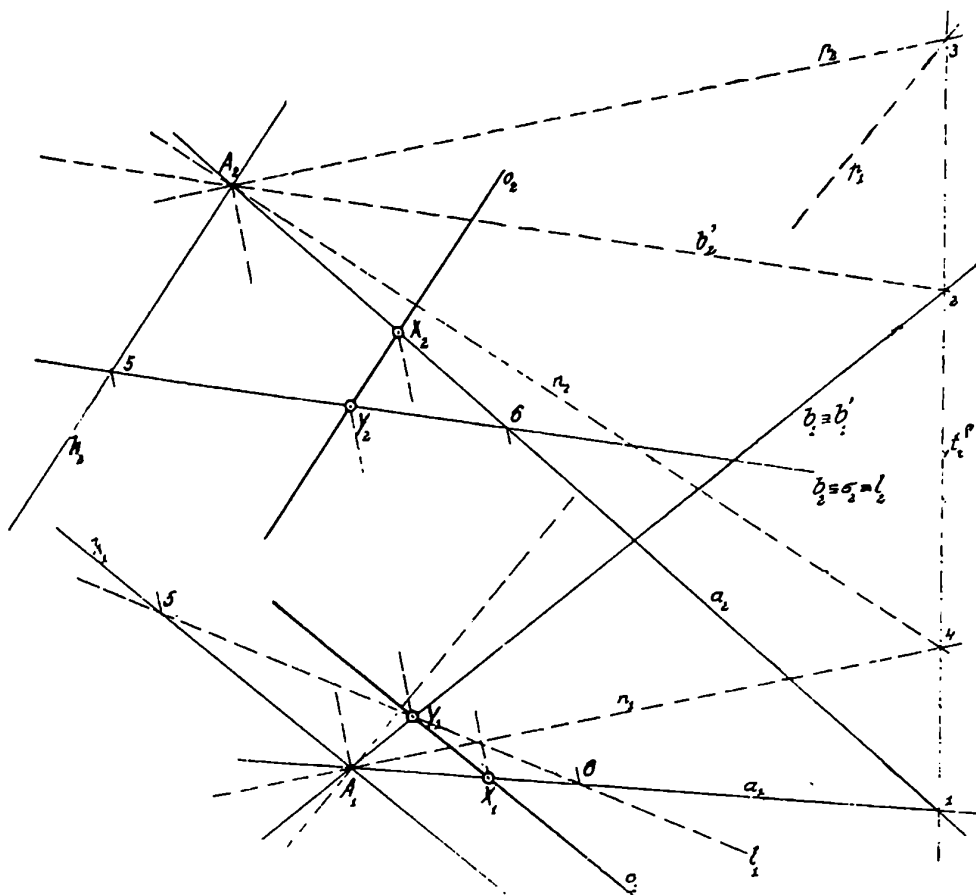
Výška jehlanu má průměty kolmé k příslušným průmětům dotyčných přímek stoposměrných $O_1 V_1 \perp p_1$, $O_2 V_2 \perp n_2$, a danou délku v na ni nanese pomocí skutečné velikosti úsečky $OT_{1,2}$, kde $T_{1,2} \equiv O_1 V_1 \times O_2 V_2$.

10. Jest sestrojiti osu mimoběžek a , b . (Obr. 9.)

Osa mimoběžek jest kolmá k oběma (I., 118), tedy také kolmá k rovině ϱ , již proložíme jednou mimoběžkou a rovnoběžně s mimoběžkou druhou b . Vztyčíme-li v libovolném bodě A přímky a kolmici $k \perp \varrho \equiv (ab')$, $b' \parallel b_1$, jest hledaná osa o v rovině (ak) a prochází průsečíkem této Y s mimoběžkou b .

Na přímce a zvolíme bod A , na př. aby $A_1 \equiv a_1 \times b_1$, jím

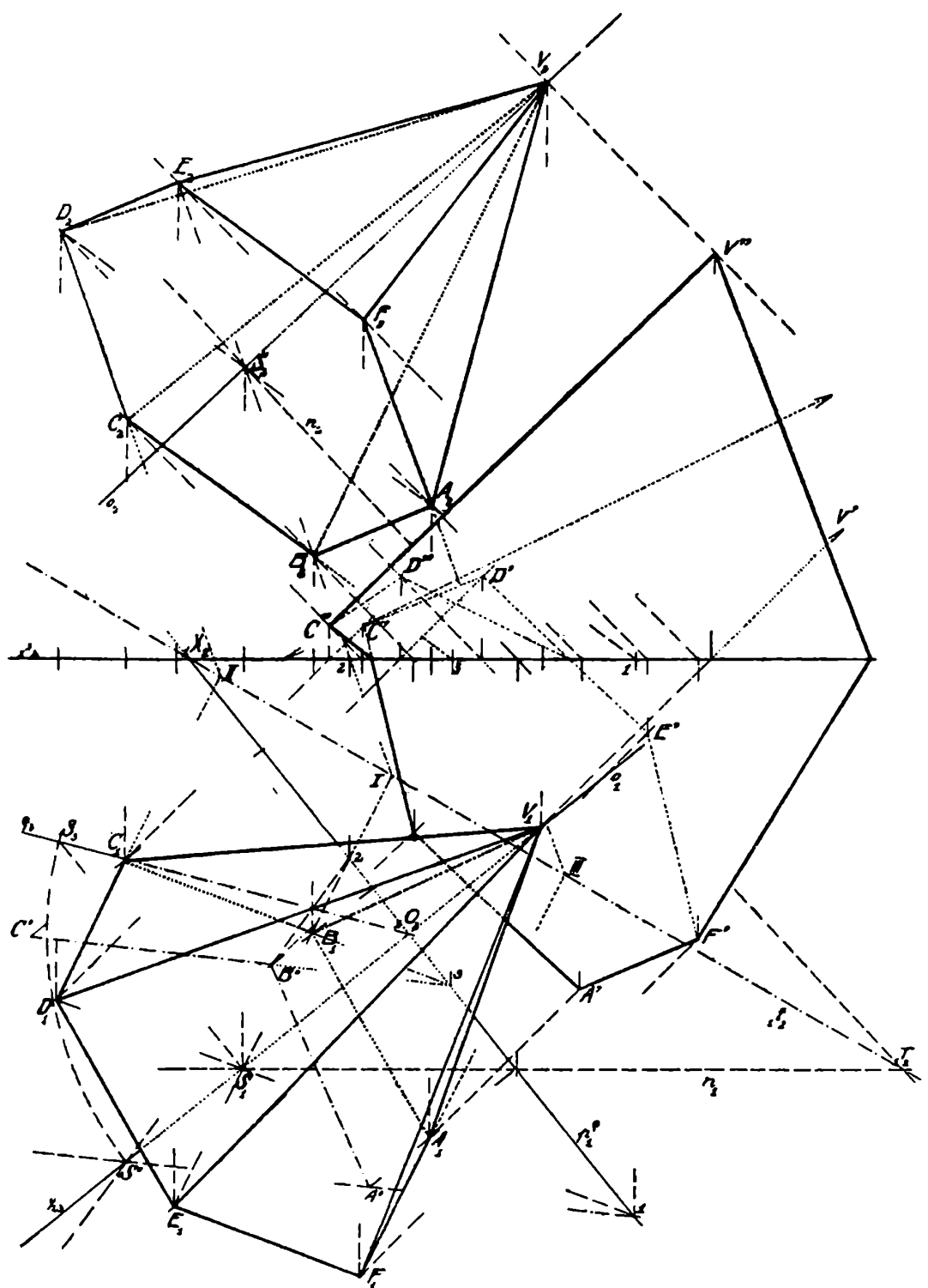
vedeme $b' \parallel b$, takže $b_1' \equiv b_1$, sestrojíme stopu $t_{1,2}^p$ roviny $\varrho \equiv (ab')$ do roviny totožnosti a v rovině ϱ zobrazíme stoposměrné přímky obou osnov p, n bodem A . Kolmice k k rovině ϱ v bodě A sestrojená má $k_1 \perp p_1$, $k_2 \perp n_2$. Vyšetříme průsečík Y mimoběžky b s rovinou (ak) pomocí krycí přímky osnovy druhé $l_2 \equiv b_2$, jím prochází osa $o \parallel k$.



Obr. 9.

II. Zobrazení průmětů jehlanu a hranolu.

11. Zobrazte průměty pravidelného šestibokého jehlanu, dán-li jeho vrchol V , střed podstavy S a poloměr kružnice opsané podstavnému šestiúhelníku r . Úhlopříčka podstavy AD svírá s půdorysnou stopou roviny podstavy úhel 45° , $y_A < y_D$. $V(5, 2.8, 9.6)$, $S(0, 6.8, 4.8)$, $r = 4$. (Obr. 10.)



Obr. 10.

Rovinu podstavy ϱ sestrojíme buď pomocí stoposměrné přímky ($n_2 \perp S_2 V_2$, $n_1 \parallel x_{1,2}$), anebo pomocí III. průmětny, za kterou zvolíme promítací rovinu osy jehlanu ($o_1 \equiv y_{1,3}$). Rovinu ϱ sklopíme kolem p_ϱ do $\pi_1(S_1 S^0 \perp p_1^p$, $S_1 S^0 \times p_1^p \equiv O_{1,3}$, $O_1 S^0 = O_3 S_3$), opíšeme kružnici kolem S^0 poloměrem $r = 4$, vedeme

v ní průměr $D^0 A^0$, aby $\nless D^0 A^0$, $p_1^0 = 45^\circ$ a sestrojíme sklopený obraz podstavného šestiúhelníku. Půdorys podstavy je v affinitě se sklopeným obrazem ($A^0 A_1 \perp p_d^1$, $A^0 S^0 \times A_1 S_1 \equiv l$ na p_1^0). Podobně ($A_2, B_2 \dots F_2$) aff. ($A_1 B_1 \dots F_1$), $A_1 A_2 \perp x_{1,2}$, osa affinity je $t_{1,2} \equiv o \times \tau$ (τ rovina totožnosti) a určí se body $X_{1,2} \equiv p_1^0 \times x_{1,2}$ a $T_{1,2} \equiv n_1 \times n_2$. Můžeme též užítí nárysů prvních stopníků 1, 2, 3.

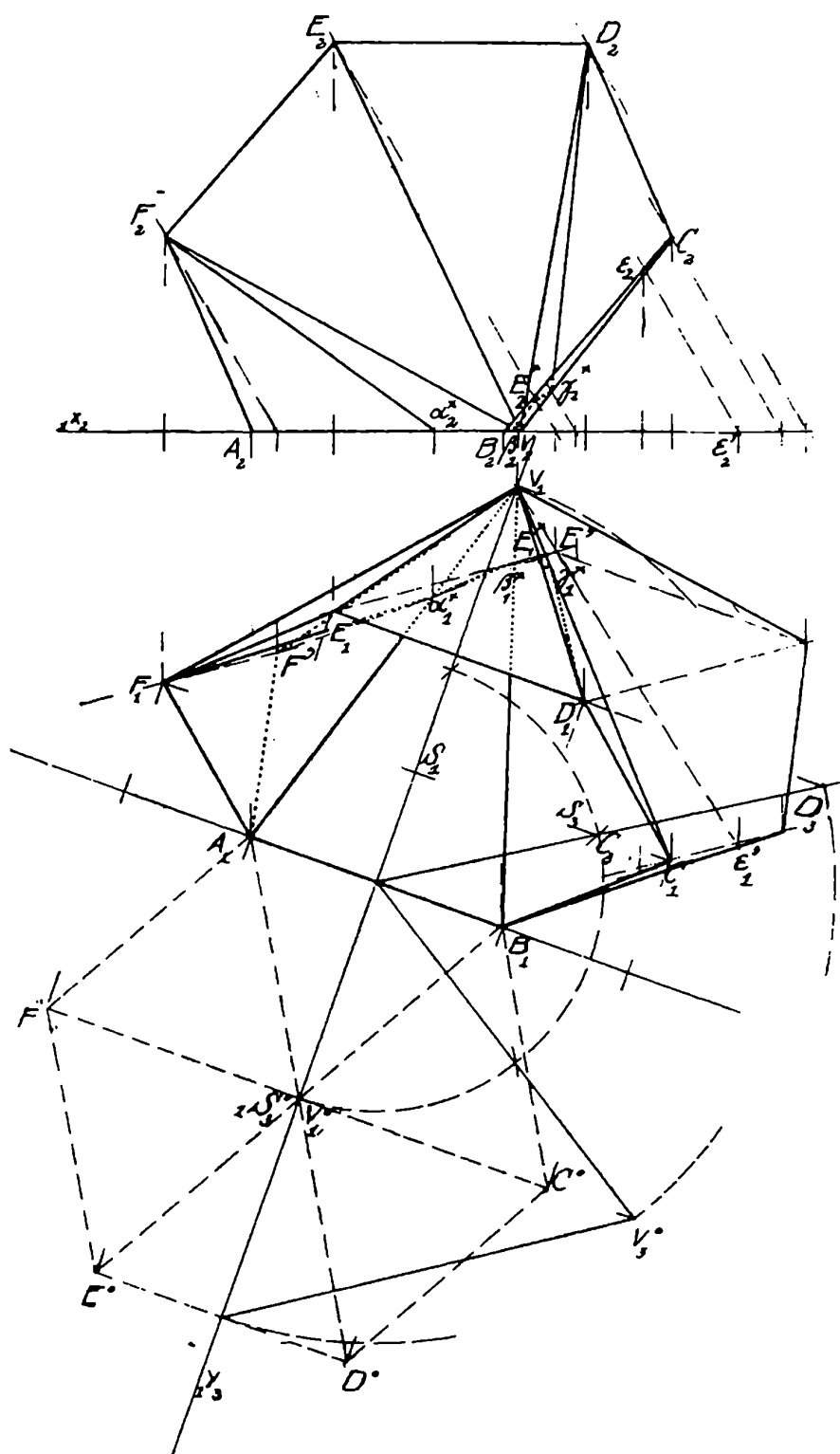
Pozn. O viditelnosti podstavy **pravidelného** jehlanu (i hranolu) rozhodujeme podle souřadnic středu podstavy a vrcholu (středů obou podstav): Je-li $z_S \gtrless z_V$, je půdorys podstavy $\frac{\text{viditelný,}}{\text{neviditelný.}}$ je-li $y_S \gtrless y_V$, je nárys podstavy $\frac{\text{viditelný.}}{\text{neviditelný.}}$

12. Zobrazení průměty pravidelného šestibokého jehlanu, jehož stěna (ABV) leží v π , dán-li střed podstavy S a vrchol její A . $S(0, 10.5, 7.5)$, $A(-3, 16.5, 0)$, $x_B < x_A$.

Podstavný 6úhelník sestrojíme podle úl. 200 (obr. 104, díl I.). Kolmice ve středu S na rovinu 6úhelníku jest osou jehlanu, a její půdorysný stopník jeho vrcholem. $o_1 \perp A_1 B_1$; $o_2 \perp n_2$, $D_1 \dots n_1 \parallel x_1$, $n_1 \times A_1 B_1 \equiv l$, l na $x_{1,2}$, $l D \equiv n_2$.

13. Zobrazení průměty pláště pravidelného 6bokého jehlanu, jehož stěna (ABV) jest v π , dána-li hrana AB a výška $v = 4$. $A(0, 4.5, 0)$, $B(2.8, 5.5, 0)$, $y_V < y_A$. (Obr. 11.)

Zobrazíme nejdříve daný jehlan tak, aby spočíval podstavou na π , a otočíme jej kolem AB , až stěna (ABV) padne do π . Otočení provedeme ve III. průmětně, $y_{1,3} \perp A_1 B_1$; bod V_3^0 opisuje kružnici kolem A_3^0 poloměru $A_3^0 V_3^0$. Bod S_3^0 opíše oblouk stejné velikosti a téhož smyslu jako bod V_3^0 . Z třetích průmětů odvodíme půdorysy na půdorysech kružnic otáčení,



Obr. 11.

které jsou kolmy k $A_1 B_1$, $V_1^0 V_1 \perp A_1 B_1$. Nárysy bodů odvodíme z půdorysů přenesením souřadnic z -ových, $E_2 \perp x_{1,2} = E_3 \perp y_{1,3}$.

14. Zobrazte průměty pravidelného 5-bokého jehlanu, jehož vrchol V jest na

ose x a hrana AB v nárysně. $A(0, 0, 4.8)$, $B(2.5, 0, 6.3)$.

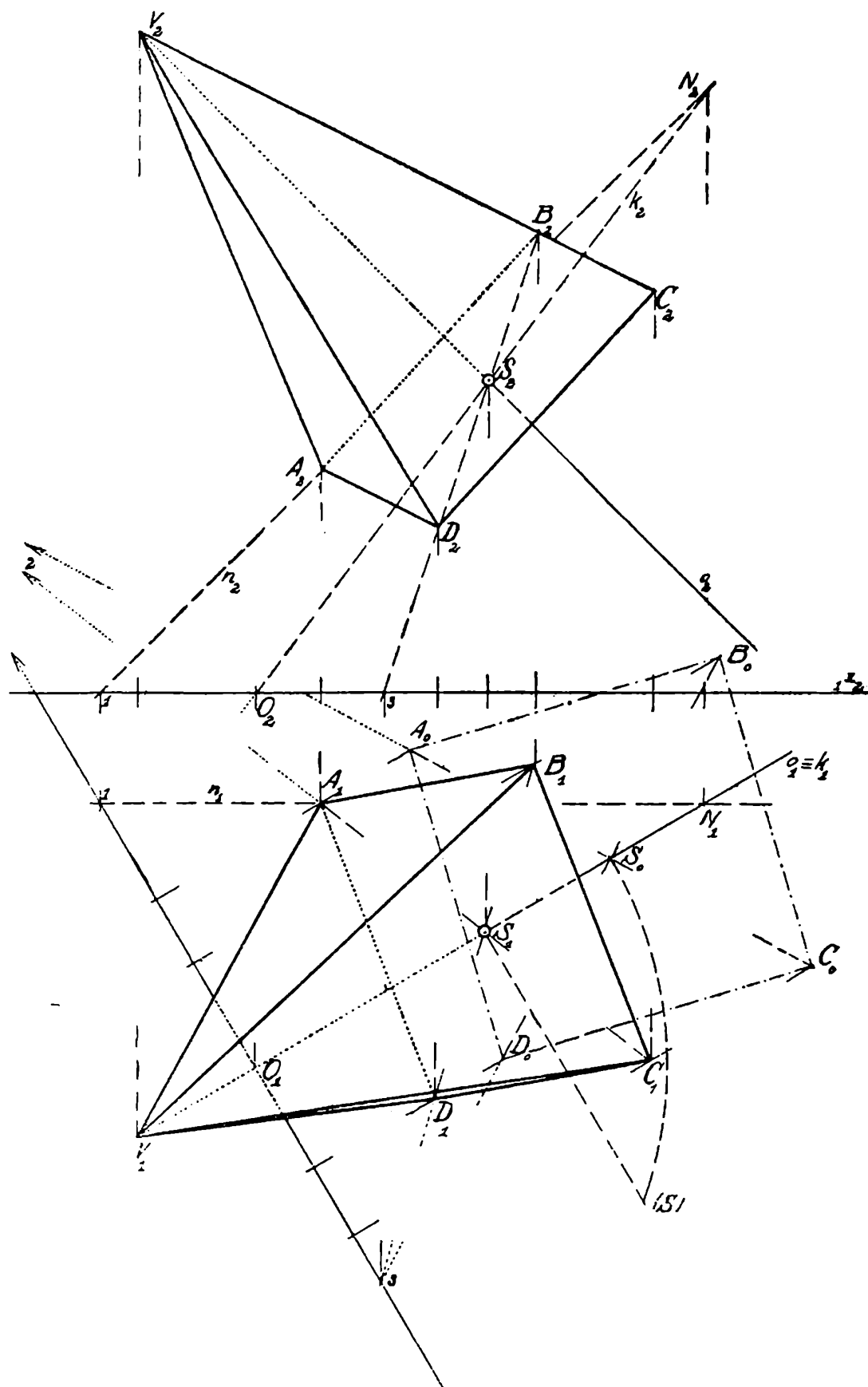
Bod V_2 jest průsečík symetrály strany $A_2 B_2$ s osou $x_{1,2}$. Zvolíme-li III. průmětnu $\perp A_2 B_2$, $z_{2,3} \perp A_2 B_2$, promítne se do ní $\triangle ABV$ jako úsečka $\overline{A_3 V_3}$ na $z_{2,3}$. V nárysně sestrojíme 5úhelník $A_2 B_2 C^0 D^0 E^0$ jako podstavu hledaného jehlanu v otočené poloze, $S^0 \equiv V_2^0$, sestrojíme 3. průmět tohoto jehlanu, $V_2^0 V_3^0 \perp z_{2,3}$, $\overline{V_3^0 A_3} = V_3 A_3$, a dál postupujeme jako v úl. předchozí.

15. Zobraziti průměty pravidelného jehlanu 6bokého, který je opřen o π hranou AB a o v vrcholem V . $A(0.4, 0)$, $B(3, 4, 0)$, $v = 6$.

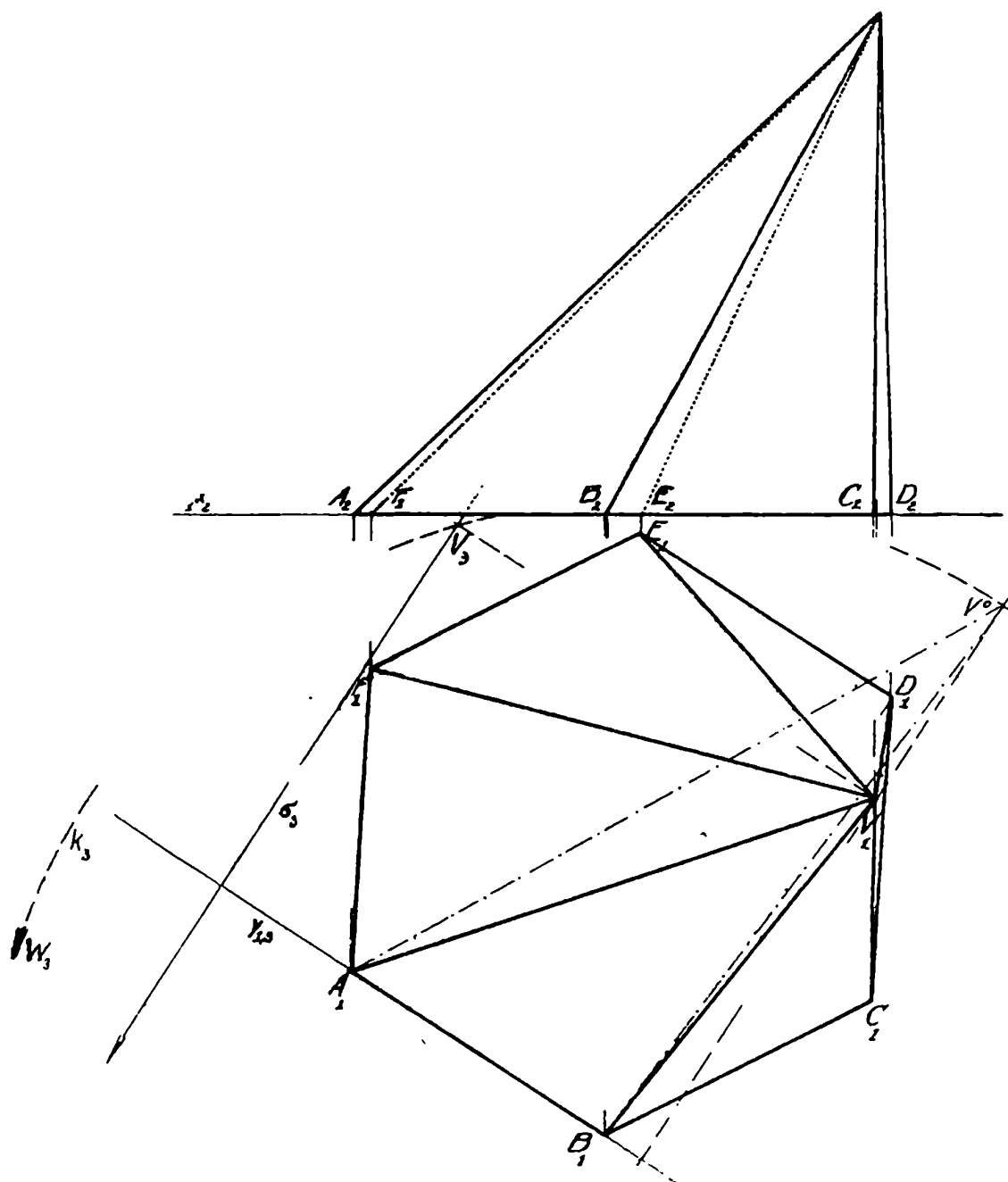
Zobrazíme půdorys a bokorys daného jehlanu s podstavou v π ($y_{1,3} \perp x_{1,2}$) a z této polohy otočíme jehlan tak, až jeho vrchol V padne do v . Třetí průmět kružnice otáčení bodu V (střed v A_3 , poloměr $A_3 V_3^0$) protne 3. průmět náryсны $v_3 \equiv z_3 \equiv x_{1,2}$ ve V_3 , a pak otočíme podstavu o $\sphericalangle D_3 A_3 D_3^0 = \sphericalangle V_3 A_3 V_3^0$.

16. Zobraziti průměty pravidelného 4bokého jehlanu, je-li dána pobočná hrana AV a směr osy o . $A(0, 1.5, 3)$, $V(-2.5, 6, 9)$, $\sphericalangle o_1 x_1 = 150^\circ$, $\sphericalangle o_2 x_2 = 135^\circ$. (Obr. 12.)

Bodem A sestrojíme rovinu podstavy $\varrho \perp o$ pomocí stop-směrné přímky ($A_2 \dots n_2 \perp o_2$, $A_1 \dots n_1 \parallel x_1$; její půdorysným stopníkem $1 \dots p_1^0 \perp o_1$) a sestrojíme $S \equiv o \times \varrho$ (pomocí přímky krycí k , $k_1 \equiv o_1$). Rovinu o sklopíme kolem p_1^0 do π ($S_1 S_0 \perp p_1^0$, $S_1 S_0 \times p_1^0 \equiv O_1$, $\overline{S_0 O_1} = \overline{O_1(S)}$, $\overline{S_1(S)} = z_S$, $S_1(S) \perp S_1 O_1$), sestrojíme skutečnou velikost čtverce $A_0 B_0 C_0 D_0$ ($A_1 A_0 \parallel S_1 S_0$, $A_1 S_1 \times p_1^0 \equiv I$, $A_0 \equiv A_1 A_0 \times I S_0$), z té odvodíme půdorys ($A_1 B_1 C_1 D_1$) aff. ($A_0 B_0 C_0 D_0$) a z půdorysu nárys.



Obr. 12.



Obr. 13.

17. Zobrazte šikmý jehlan, jehož podstavou jest pravidelný šestiúhelník v π , hrany pobočné mají délky $AV=9$, $BV=8$, výška jehlanu $v=6$. $A(-3, 2.5, 0)$, $B(0, 4.5, 0)$, $y_C > y^B$, $y_V < y$. (Obr. 13.)

Pobočnou stěnu ABV sestrojíme ve sklopeném obraze a bod V^0 otočíme kolem A_1B_1 zpět do prostoru, až jeho sou-

řadnice z bude rovna 6. Kružnice otáčení k jakož i souřadnice z jsou ve skutečné velikosti ve III. průmětně, $V^0 \dots y_{1,3} \perp A_1 B_1$, $y_{1,3} \times A_1 B_1 \equiv O_1$, $O_1 V^0 = r$ poloměr kružnice otáčení k ; $k_3 \times \sigma_3 \equiv V_3$, $z_\sigma = 6$, $\sigma_3 \parallel y_{1,3}$. Úloha má dvě (jedno, žádné) řešení, je-li $z \underset{\sigma}{\leq} r$.

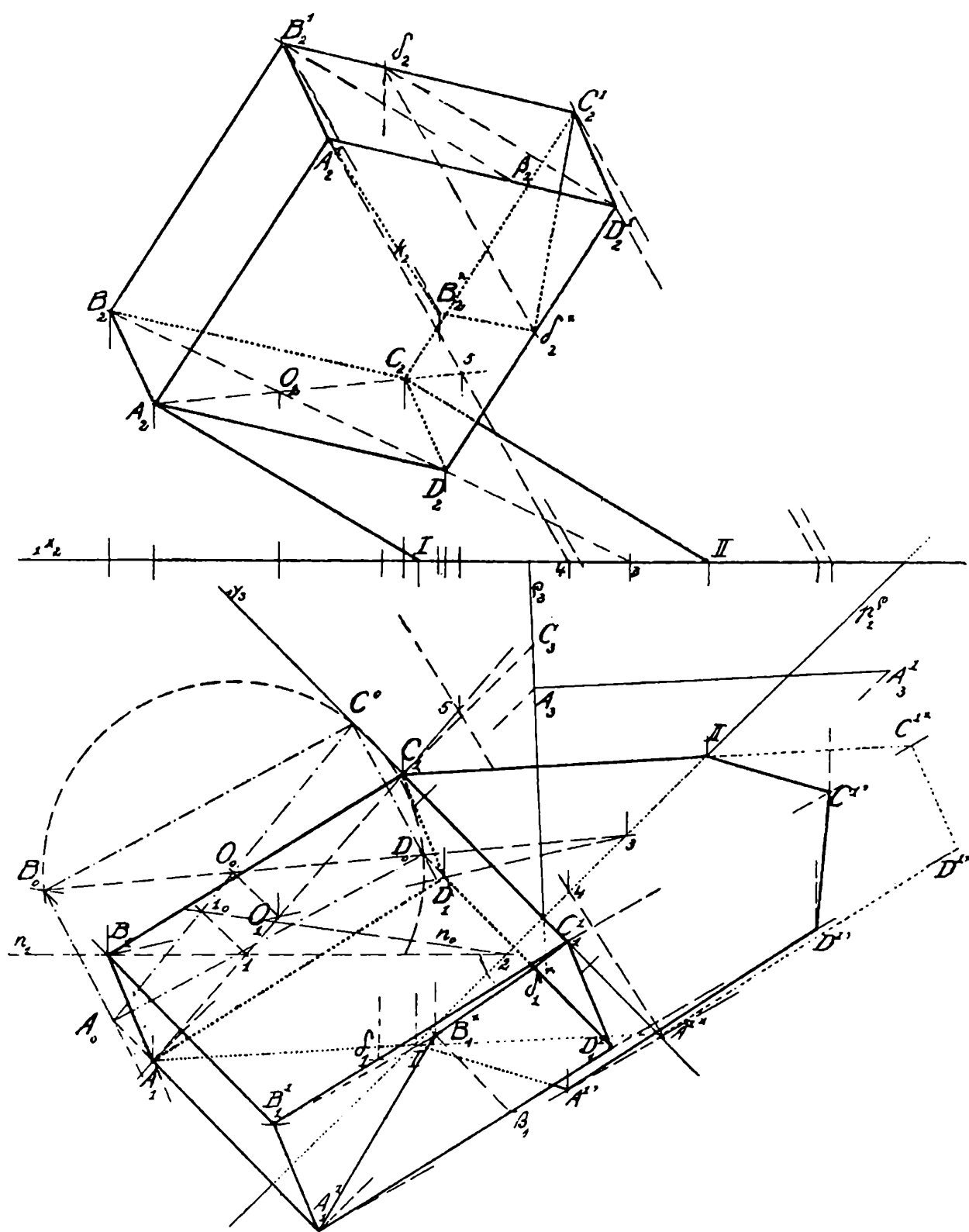
18. Zobrazení čtyřstěn, jehož podstava jest v ν a hrany pobočné dány. $A(4, 0, 2)$, $B(2, 0, 10)$, $C(-6, 0, 6)$, $\overline{AD} = 9$, $\overline{BD} = 8$, $\overline{CD} = 7$.

Sestrojíme trojúhelníky ABD^0 , BCD' ve sklopení do ν . Bod D je průsečík kružnic otáčení, $D_2 \equiv D^0 D_2 \times D' D_2$; jeho souřadnici $y = D_2 D_3$ najdeme ve III. průmětně, za kterou považujeme promítací rovinu jedné kružnice, $D_2 D' \equiv z_{2,3}$.

19. Kvád'r má obdélníkovou podstavu $ABCD$ v rovině ϱ a výšku v . Zobraďte jeho průměty. $C(0, 3, 2.5)$, $A(-3.5, 7, z)$, $\varrho(7, 7, \zeta)$, $v = 5$, $y_B = 5.5$, $x_B < 0$.

Pobočné hrany kvádru jsou kolmy k rovině podstavy, takže tato se promítá do promítací roviny hrany CC^1 jako přímka ϱ_3 . Rovinu ϱ sklopíme kolem p_1^0 do π (kružnice otáčení bodů A, C jeví se ve 3. průmětu ve skut. velikosti). Přímka n_1 vedená ve vzdálenosti y_B rovnoběžně s osou x protne $A_1 C_1$ v bodě 1, p_1^0 v bodě 2; spojnice $2 I_0 \equiv n_0$ protne kružnici nad průměrem $A_0 C_0$ v bodě B_0 . Obdélník $A_0 B_0 C_0 D_0$ otočíme zpět do roviny ϱ a nanese $A_3 A_3^1 = v$, $A_3 A_3^1 \perp \varrho_3$. Body $A_1^1 \dots D_1^1$ odvodíme kolmicemi $A_3^1 A_1^1 \perp y_{1,3}$ na půdorysech hran pobočných $A_1 A_1^1 \perp p_1^0$, jejich nárysy pomocí souřadnic z -ových $A_2^1 \dashv \dashv x_{1,2} = A_3^1 \dashv y_{1,3} = z_{A^1}$. (Obr. 14.)

20. Jest zobrazení pravidelný 6boký hranol dutý, jehož podstavy mají středy O, S , poloměry podstavy jsou r, ϱ , úhlopříč-



Obr. 14.

ka podstavy svírá s první stopou roviny podstavy $\sphericalangle AD, p^p = 45^\circ$. $O(0, 4.5, 4.5)$, $S(11, 8.5, 8)$, $r = 4.5$, $\varrho = 4$.

Rovina $\varrho \perp OS$ určí se pomocí stoposměrné přímky $(n_2 \perp O_2 S_2, n_1 \parallel x_1)$ a sklopí se kolem p^ϱ do π [$O_1(O) \perp p_1^\varrho$, $(O) \dashv p_1^\varrho = \overline{O_1 O^0}$, $\overline{1 O^0} = z_0$ na p_1^ϱ]. Pomocí affinity odvodíme ze sklopeného obrazu šestiúhelníků jejich půdorysy a z těchto nárysy pomocí prvních stopníků úhlopříček $A_1 D_1 \times p_1^\varrho \equiv I$; viditelnost podstav rozhodneme podle poznámky úl. 11, díl II.

21. Zobrazte průměty pravidelného hranolu pětibokého, je-li podstava v rovině $\varrho \parallel x$ dána středem S a vrcholem A , když výška hranolu jest $v = 6$. $\varrho(\infty, 4, 6)$, $A(-0.5, y, 5)$, $S(2, 2.5, z)$.

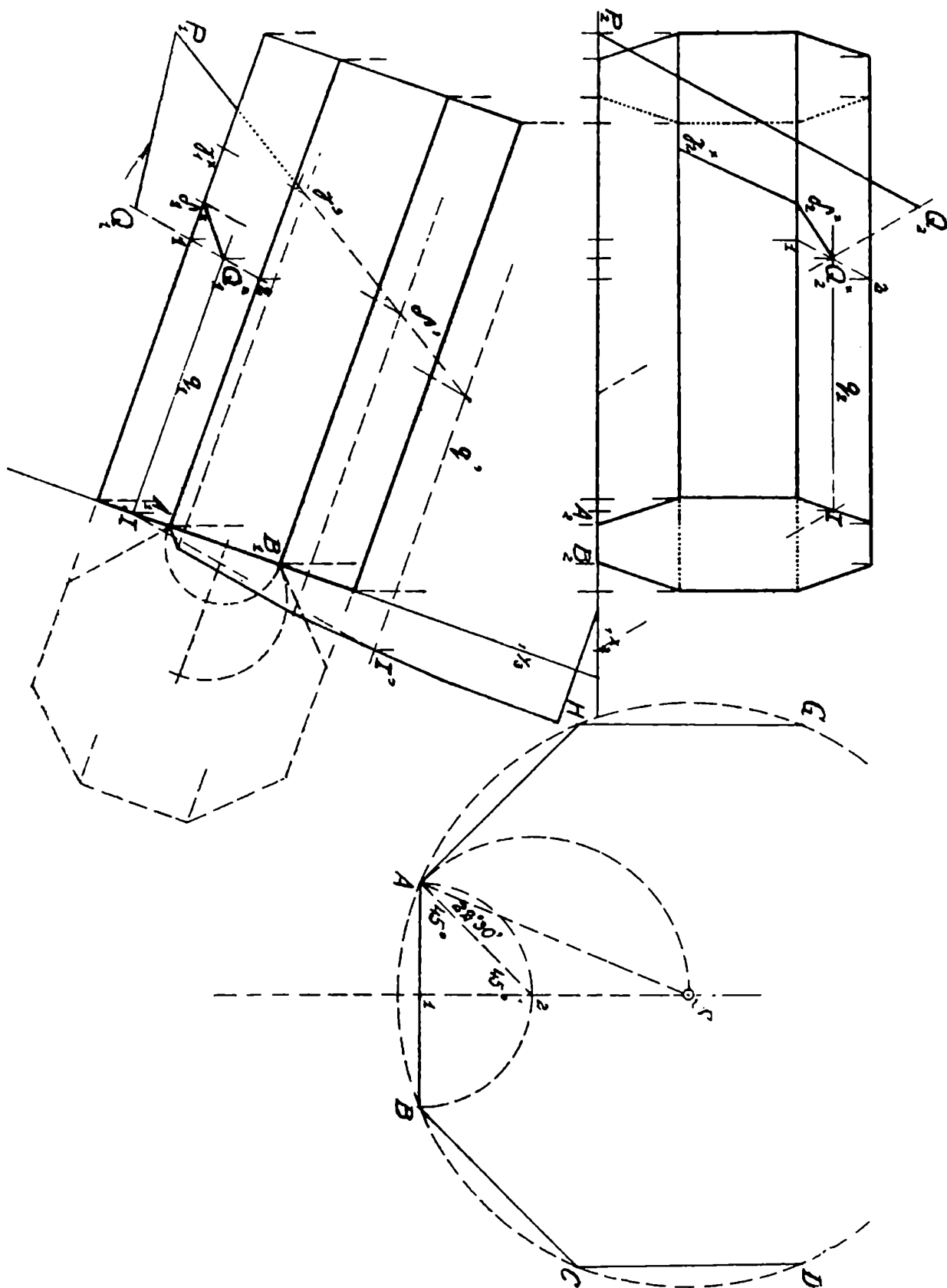
V třetí hlavní průmětně $z_{2,3} \perp x_{1,2}$ bude se jevití rovina ϱ jako přímka a výška hranolu ve skutečné velikosti. Pomocí 3. průmětů určíme neznámé souřadnice bodů A, S . Rovinu ϱ sklopíme do ν kolem n_2^ϱ , ve sklopení sestrojíme skutečnou velikost pětiúhelníku a pomocí affinity odvodíme z ní nárys (nebo zpětným otočením do ϱ) a z toho půdorys podstavy. Horní podstava jest ve výšce $v = A_3 A_3^1 \perp \varrho_3$ a její průměty jsou shodny se souhlasnými průměty podstavy spodní.

22. Zobrazte čtvercový kvádr, je-li dána pobočná hrana $\overline{A\alpha}$ a bod M na protější hraně $C\gamma$. $A(0, 5, 3)$, $\alpha(4.5, 1.5, 6.5)$, $M(4.5, 4, 2)$.

Rovnoběžka m bodem M ku přímce $A\alpha$ obsahuje hranu $\overline{C\gamma}$. Bodem A sestrojíme rovinu $\varrho \perp A\alpha$ ($A_1 \dots p_1 \perp A_1 \alpha_1$, $A_2 \dots p_2 \parallel x_2$, nárysným stopníkem přímky p jde $n_2^\varrho \perp A_2 \alpha_2$), a její průsečík s přímkou m jest vrchol $C \equiv m \times \varrho$. Rovinu ϱ sklopíme kolem p^ϱ do π ($A_1 \dots A_1 A_0 \perp p_1^\varrho$, $A_1 A_0 \times p_1^\varrho \equiv O_1$, na p_1^ϱ nanese $\overline{O_1 2} = z_A$, $\overline{A_1 2} = r = \overline{O_1 A_0}$), ve sklopení zobrazíme čtverec $A_0 B_0 C_0 D_0$ ($C_1 C_0 \parallel A_1 A_0$, $A_1 C_1 \times A_0 C_0 \equiv I$ na p_1^ϱ) a z něho pomocí affinity $A_1 B_1 C_1 D_1$, $(A_2 B_2 C_2 D_2)$ aff. ($A_1 B_1 C_1 D_1$), paprsky affinity jsou kolmice k ose $x_{1,2}$, osou

affinity jest $t_{1,2} \equiv Q \times \tau$ (τ rovina totožnosti, $p_1 \times p_2 \equiv T_{1,2}$, $T_{1,2} X_{1,2} \equiv t_{1,2}$, $X_{1,2} \equiv p_1^0 \times x_{1,2}$).

Obr. 15.



Obr. 15a.

23. Zobrazte pravidelný osmiboký hranol, jehož stěna pobočná $AB\beta\alpha$ leží v π . $A(4.5, 6, 0)$, $B(5, 4.5, 0)$, $A\alpha = 7$. (Obr. 15.)

Nejdříve sklopíme podstavu $AB\dots H$ kolem hrany AB do π , kde zobrazíme pravidelný osmiúhelník ve skutečné velikosti. (Středový úhel pravidelného 8-úhelníku jest 45° , dostaneme tedy střed kružnice opsané na symetrále strany A_1B_1 jako vrchol rovnoramenného $\triangle A_1B_1S_0$, který má při podstavě úhel $67^\circ 30'$; konstrukce je zřejma z obrazce 15a.) Půdorysem podstavy jest úsečka, souřadnice z -ové jednotlivých vrcholů jsou příslušné poloměry otáčení $z_C = C_0C_1$.

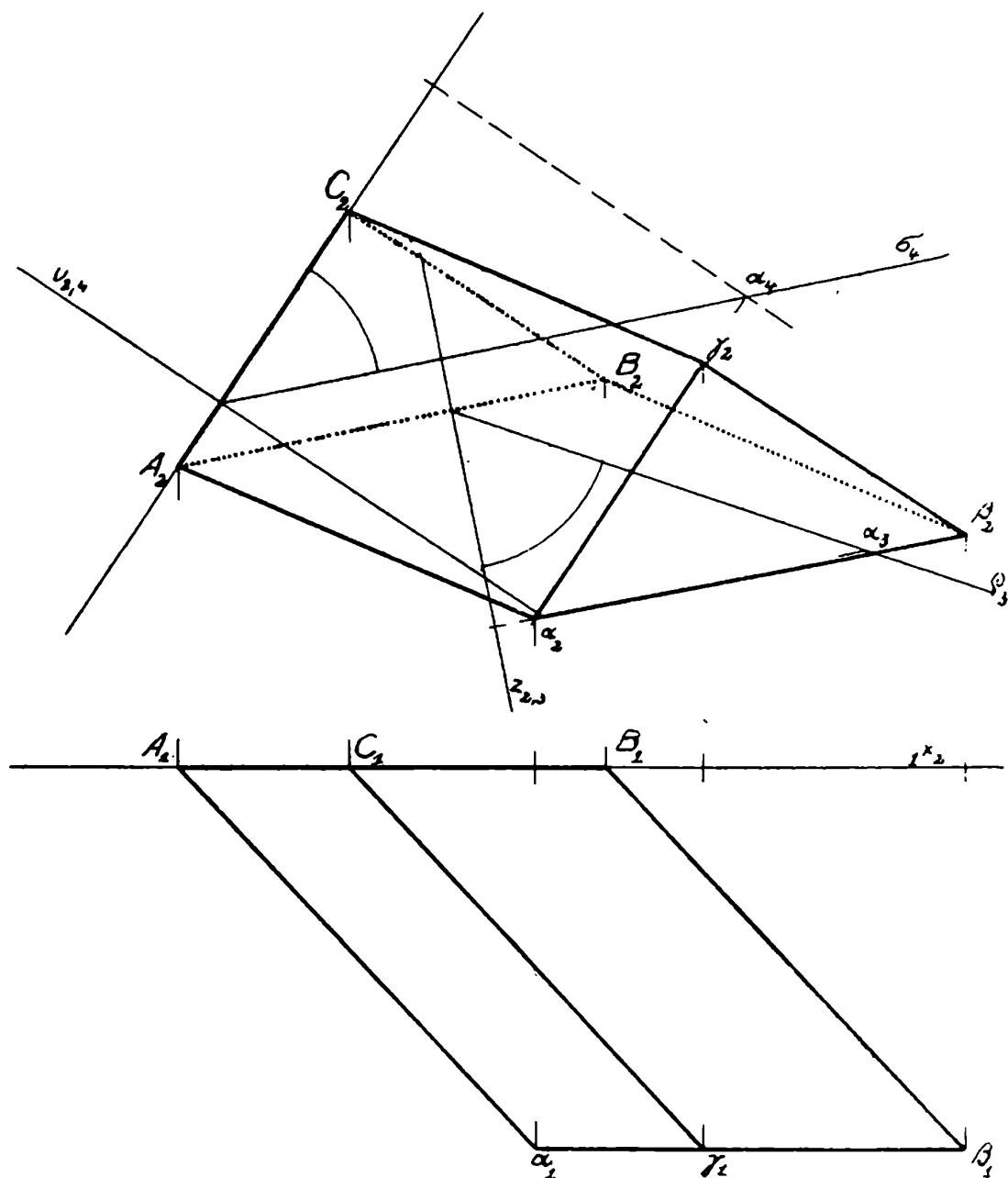
24. Zobrazte kosoúhlý rovnoběžnostěn s podstavou $ABCD$ v ν , jsou-li délky hran $AB = 6$, $AD = 4$, $AF = 7$, a úhly hranové $\sphericalangle BAD = 120^\circ$, $\sphericalangle BAF = 60^\circ$, $\sphericalangle DAF = 75^\circ$. $A(0, 0, 4)$, $AB \parallel x$.

Sklopíme stěnu (BAF) kolem stopy A_2B_2 do ν , přeneseme $\sphericalangle B_2A_2F^0 = 60^\circ$ a na jeho rameno nanese $A_2F^0 = 7$. Podobně sestrojíme (F) na rameni $\sphericalangle D_2A_2(F) = 75^\circ$, $A_2(F) = 7$. Po zpětném otočení rovin (BAF) , (DAF) splýnou úsečky AF^0 , $A(F)$ v hranu AF , bod F je průsečík kružnic otáčení $F_2 \equiv F^0F_2 \times (F)F_2$, $F^0F_2 \perp A_2B_2$, $(F)F_2 \perp A_2D_2$. Považujeme-li rovinu otáčení bodu F^0 za III. průmětnu, vidíme v ní kružnici otáčení ve skutečné velikosti a sestrojíme $y_F = F_3 \perp z_{2,3}$.

25. Zobrazte průměty trojbokého šikmého hranolu, jehož podstava ABC jest v ν . Jsou dány odchylky dvou stěn pobočných od ν . $\beta(BA\alpha) = 60^\circ$, $\beta(CA\alpha) = 45^\circ$ a výška hranolu $v = 4.5$. $A(0, 0, 3.5)$, $B(5, 0, 4.5)$, $C(2, 0, 6.5)$. (Obr. 16.)

Odchylka β jeví se ve skutečné velikosti ve III. průmětně kolmé na danou hranu. Zvolíme $z_{2,3} \perp A_2B_2$, narýsujeme

$\sphericalangle z_3 \rho_3 = 60^\circ$ a na ρ_3 ve výšce v vyhledáme bod α_3 ; kolmice z něho k $z_{2,3}$ obsahuje α_2 . Podobně zvolíme $u_{2,4} \perp A_2 C_2$, na-

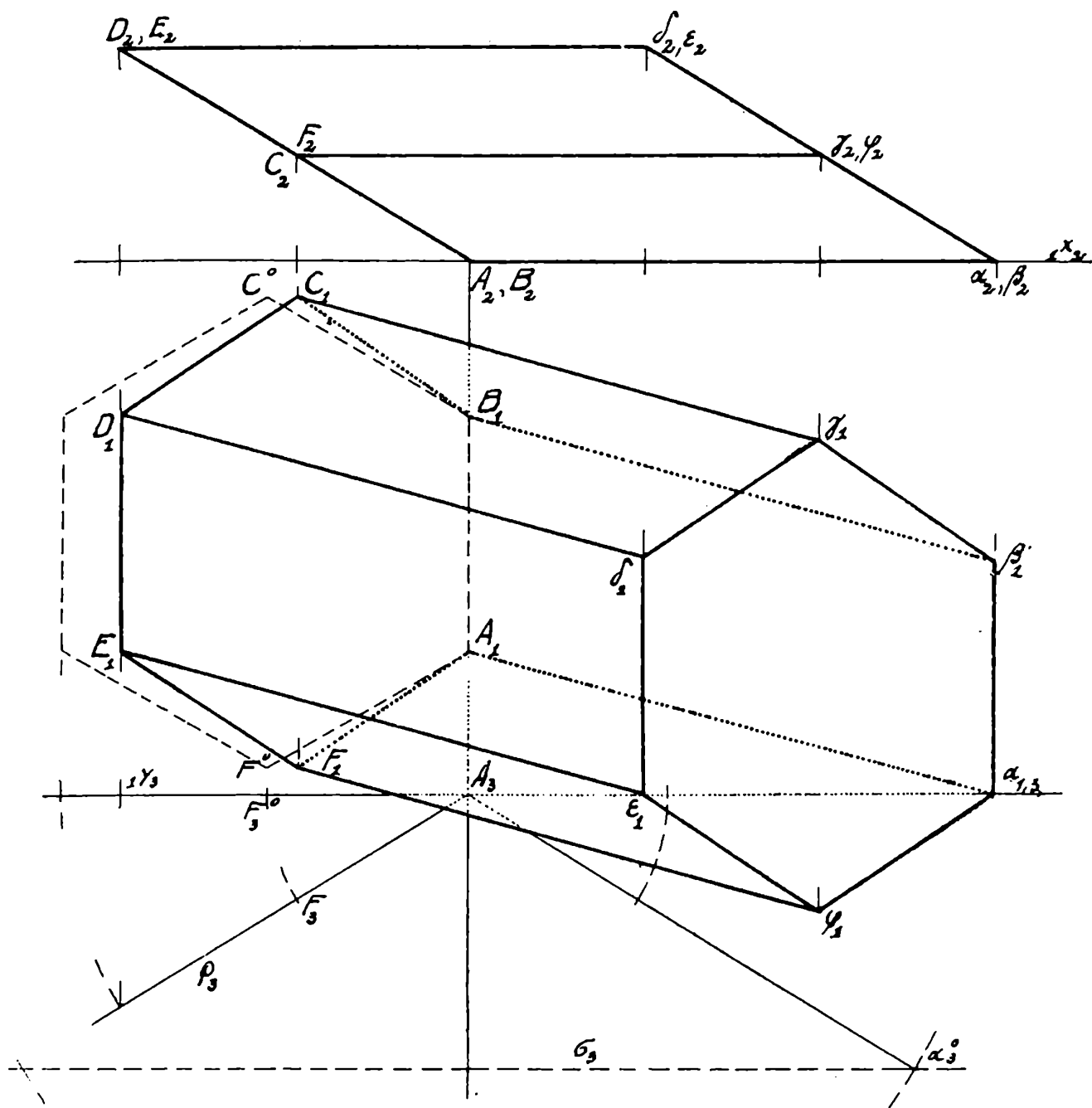


Obr. 16.

rýsujeme $\sigma_4 \equiv (C A \alpha)_4$ tak, aby $\sphericalangle u_4 \sigma_4 = 75^\circ$ na u_4 vyhledáme α_4 ve výšce v a na $\alpha_4 \alpha_2 \perp u_{2,4}$ jest bod $\alpha_2 \equiv \alpha_4 \alpha_2 \times \alpha_3 \alpha_2$.
 Půdorys α_1 jest ve vzdálenosti $y_\alpha = v = 6$.

26. Zobrazte průměty šikmého hranolu, jehož pobočná stěna $AB\beta\alpha$ leží v π . $A(2,$

5, 0), $B(2, 2, 0)$, $\sphericalangle B A \alpha = 105^\circ$, $\overline{A \alpha} = 7$, $v = 3.5$; podstava je pravidelný šestiúhelník. (Obr. 17.)



Obr. 17.

V půdorysně zobrazíme rovnoběžník $A B \beta \alpha$ a hledaný hranol otočíme kolem hrany $A B$ tak, až podstava padne do π . Rovinu kružnice otáčení bodu α považujeme za III. průmětnu. Bod α se otáčí až $\alpha_3^0 - |y_{1,3} = z_{\alpha 0} = v$. Tím jsme sestrojili úhel $\alpha_1 A_3 \alpha_3^0$, o který nutno otočiti hranol ze žádané polohy, aby

podstava přišla do π . Otočíme-li hranol o tento úhel ve smyslu protivném původnímu otáčení, t. j. uděláme $\sphericalangle F^0_3 A_3 F_3 = \sphericalangle \alpha_3^0 A_3 \alpha_3$ jest $F_3 A_3 \equiv \varrho_3$ třetí průmět roviny podstavy v žádané poloze, z něhož odvodíme snadno půdorys podstavy kolmicemi k $y_{1,3}$, na půdorysech kružnic otáčení $F_1 \equiv F_1^0 F_1 \times \times F_3 F_1$, $F^0 F_1 \perp A_1 B_1$, $F_3 F_1 \perp y_{1,3}$. Vzdálenost $F_3 \dashv y_{1,3} = z_F$.

27. Zobrazte průměty klence, jehož stěna $ABCD$ je v ν . $A(0, 0, 2)$, $B(4, 0, 4)$, $\sphericalangle BAD = 75^\circ$.

Všechny stěny klence jsou shodné kosočtverce, jsou tedy všechny tři hranové úhly u vrcholu A sobě rovny $\sphericalangle FAB = \sphericalangle FAD = \sphericalangle BAD$. Sklopíme stěny (FAB) a (FAD) do ν , nanese na ramena úhlů $\sphericalangle F^0 AB = \sphericalangle F' AD = \sphericalangle BAD$ délky $\overline{F^0 A} = \overline{F' A} = \overline{AB}$ a body F^0, F' otočíme zpět do prostoru; jejich kružnice otáčení mají nárysy $F^0 F_2 \perp A_2 B_2$, $F' F_2 \perp A_2 D_2$, a jejich průsečík jest $F_2 \equiv F^0 F_2 \times F' F_2$.

Podobně jako v úloze 18. stanovíme y_F .

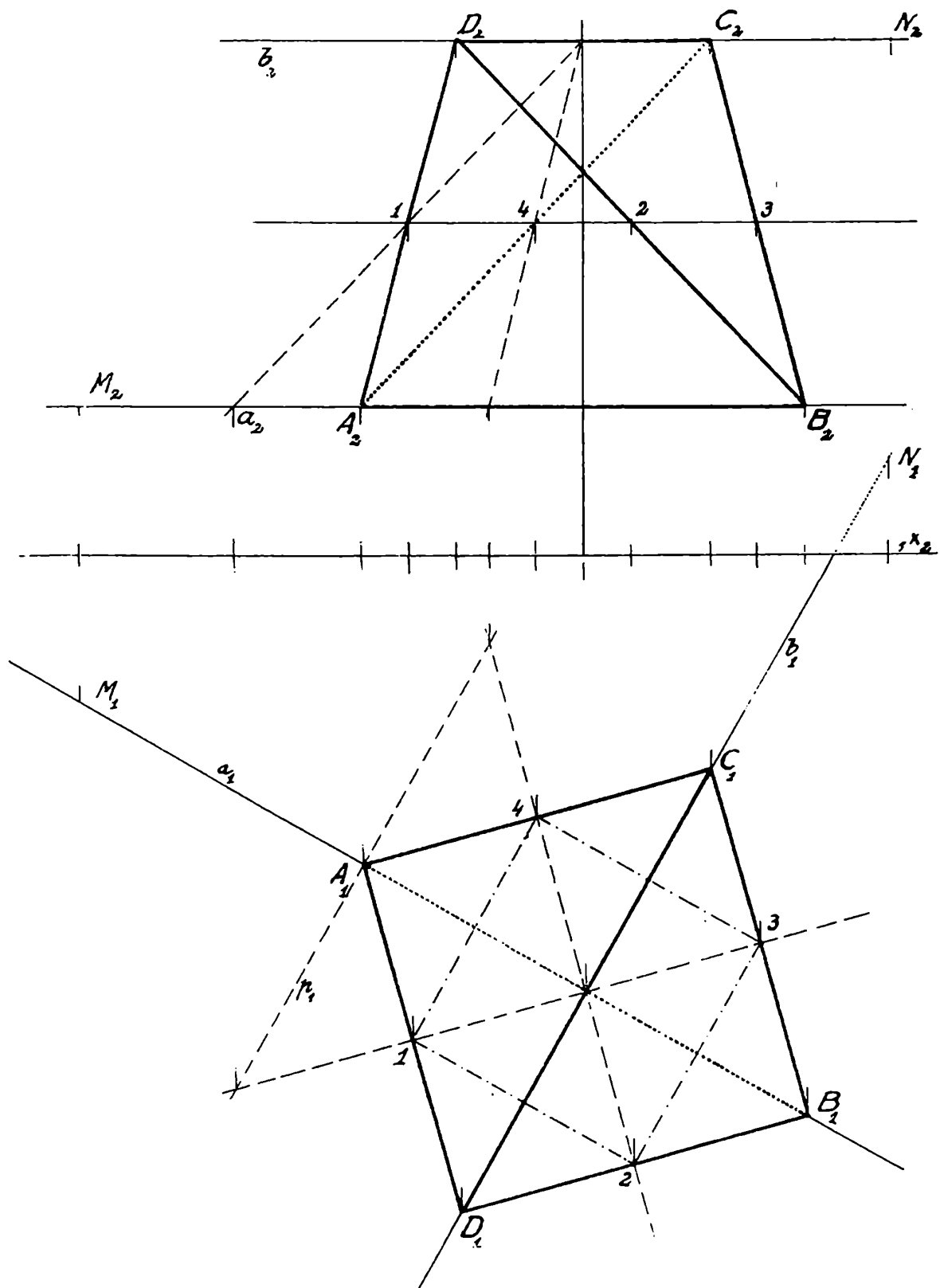
III. Pravidelné mnohostěny Pythagorovy.

a) Pravidelný čtyřstěn (tetraeder).

28. Zobrazte pravidelný čtyřstěn, jehož stěna ABC leží v rovině $\varrho \parallel x$. $A(-2, 0, 5)$, $B(0, 7, 0)$, $\xi_\varrho = 7$, $x_C < x_A$.

Podobně jako v úloze 18. stanovíme y_ν .

Sklopíme bod A do π , ve sklopení zobrazíme stejnostranný $\triangle A^0 B_1 C^0$, sestojíme výšku čtyřstěnu (z pravoúhlého trojúhelníku ASD , S střed stěny ABC , D čtvrtý vrchol čtyřstěnu; $S^0 D' \perp A^0 S^0$, $\overline{A^0 D'} = \overline{A^0 C^0}$, $S^0 D' = v$ výška čtyřstěnu), již nanese na kolmici k rovině ϱ v bodě S .



Obr. 18.

29. Zobrazte průměty pravidelného čtyřstěnu, jehož mimoběžné hrany jsou na přímkách $a \parallel \pi$, $b \parallel \pi$. $a \dots M$, $\beta_\alpha = 30^\circ$, $b \dots N$. $M(-5, 2, 2)$, $N(6, -1.3, 7)$. (Obr. 18.)

Protější hrany pravid. čtyřstěnu stojí na sobě kolmo, proto $N_1 \dots b_1 \perp a_1$, $b_2 \parallel x_2$. Osa 56 mimoběžek a , b jest osou čtyřstěnu II. řádu a současně osou (kterého řádu?) pravidelného osmistěnu, jehož 4 stěny ob jednu leží ve stěnách čtyřstěnu. Sestrojíme tento osmistěn; jeho půdorysem je čtverec (1, 2, 3, 4), který má úhlopříčku rovnou ose mimoběžek a strany s nimi rovnoběžny: $12 \parallel 34 \parallel a_1$, $14 \parallel 23 \parallel b_1$.

Stěna (145) leží ve stěně (ABD) čtyřstěnu hledaného, a její průsečík s přímkou a jest jeho vrchol A , $A_1 \equiv p_1 \times a_1$.

Hrany čtyřstěnu procházejí vrcholy osmistěnu, jež je půlí.

30. Zobrazte pravidelný čtyřstěn, jenž má jednu hranu na přímce $a \equiv MN$, druhou na přímce r jdoucí bodem R a vzdálené od přímky a o $d=6$. Zobrazte onen čtyřstěn, který neprotíná nárysny. $M(-5, 2, 2)$, $N(5, 8, 2)$, $R(0, 2, 10)$.

Přímku $r \perp a$ sestrojíme ve III. průmětně $\mu \perp a_1$, jako tečnu z bodu R_3 ke kružnici poloměru $d=6$, již opíšeme kolem a_3 ; osa mimoběžek a , r jest osou hledaného čtyřstěnu, $a_3 \dots o_3 \perp r_3$. Pravidelný osmistěn nad touto osou (jeho hrana $h_8 = \frac{o}{2} \sqrt{2}$) má třetím průmětem kosočtverec, jehož druhá úhlopříčka jest $= h_8$; jeho stěny, procházející přímkou a , protnou přímku r ve vrcholech čtyřstěnu C , D .

31. Pravidelný čtyřstěn má hranu AB v přímce a , střed protější hrany v bodě S .

Kolmice $o = ST \perp a$ určí střed T hrany $AB = h$ a jest osou pravidelného osmistěnu, jehož hrana $m = \frac{o}{2} \sqrt{2}$; hrana hledaného čtyřstěny $h = 2m = o\sqrt{2}$, a nanese-li m od bodu T na oba směry přímky a , obdržíme vrcholy A , B . Bodem S vedeme přímku $b \perp (a, S)$, nanese v obou směrech na b $SC = SD = m$ a obdržíme zbývající dva vrcholy čtyřstěnu.

Jiné řešení: Rovina (S, a) protne čtyřstěn v rovnoramenném $\triangle A B S$, jehož strana $\overline{A B} = h$, rameno $\overline{A S} = \frac{h}{2} \sqrt{3}$ (výška stejnostranného $\triangle A C D$); označíme-li v $\triangle A B S$ výšku $\overline{S T} = o$, platí $o^2 = \frac{h^2}{4} \cdot 3 - \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{2}$, čili $h = o \sqrt{2}$ jest úhlopříčkou čtverce o straně o .

32. Sestrojte pravidelný čtyřstěn tak, aby $\overline{A U}$ byla výškou stěny $A B C$ a hrana $B C$ měla oba průměty spolu rovnoběžny. $A(0, 1.5, 1.5)$, $U(3.5, 5, 3)$.

Hrana $B C$ leží v rovině $\rho \perp A U$, vedené bodem U , a jest rovnoběžná s průsečnicí roviny ρ s rovinou totožnosti; $h_1 \parallel h_2 \parallel t_{1, 2}$.

Stěna $A B C$ leží v rovině (A, h) , kterou sklopíme kolem její prvé stopy, u vrcholu A^0 přeneseme $30^\circ = \sphericalangle U^0 A^0 B^0$ a sestrojíme výšku tělesa $S^0 D'$ jako v úloze 29. Výšku přeneseme na kolmici v bodu S k rovině (A, h) , pomocí skutečné délky úsečky $\overline{S P}$. Viditelnost rozhodneme jako u pravidelného jehlanu.

b) Pravidelný osmistěn (oktaeder).

33. Zobrazte pravidelný osmistěn, je-li dána jeho úhlopříčka $\overline{A F}$, a je-li $B_1 D_1 \parallel B_2 D_2$ ($B D$ je druhá úhlopříčka). $A(0, 4, 5)$, $F(3, 1, 0)$.

Úhlopříčka $B D$ leží v rovině souměrnosti σ úsečky $A F$, jsouc rovnoběžná s průsečnicí této s rovinou totožnosti τ , $B D \parallel s \equiv \sigma \times \tau$. Řeší se jako úloha předchozí.

34. Zobrazte pravidelný osmistěn, jehož úhlopříčka $A F$ jest kolmá k mimoběžkám $m \equiv M N$, $r \equiv R P$ a úhlopříčka $B D$ svírá $\sphericalangle 60^\circ$ s půdorysnou stopou roviny $B C D E$. $M(3, 10, 0)$, $N(-8, 0, 7)$, $R(0, 10, 11)$, $P(7, 2, 0)$.

Vyšetříme osu mimoběžek AF (podle úlohy 121, obr. 63, díl I.), sestrojíme rovinu souměrnosti σ úsečky $\overline{AF}$, rovinu σ sklopíme do π , tam sestrojíme čtverce tak, aby $\sphericalangle p', BD := 60^\circ$, naneseme na úhlopříčky $S^0 B^0 = S^0 C^0 = S^0 D^0 = S^0 E^0 = \frac{1}{2} AF$ a převedeme čtverec zpět do roviny σ .

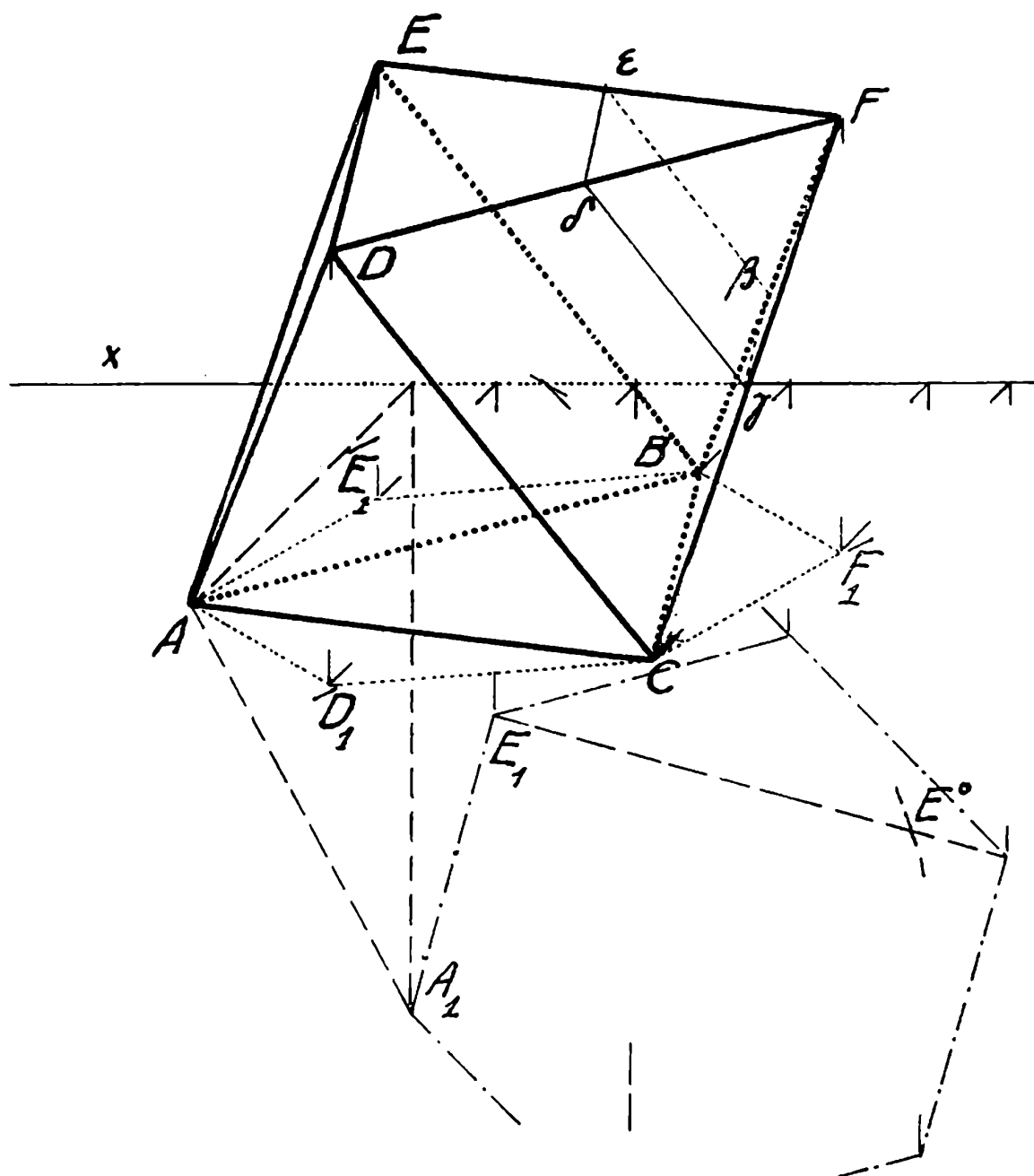
35. Zobrazte pravidelný osmistěn, jehož střed jest na přímce $s \equiv ST$, a protější dva vrcholy A, F na mimoběžkách $a \equiv MN$, $b \equiv RQ$. Hrana AB jest v π . $M(-3, 1, 0)$, $N(3, 5, 0)$, $R(-4, 4, 4)$, $Q(2, 1, 4)$, $S(-4, 5, 5)$, $T(4, 3, 1)$.

Podle úl. 123 (díl I.) sestrojíme příčku mimoběžek a, b, s tak, aby její úsek $\overline{AF}$ mezi a, b byl půlen přímkou s . V bodě $S \equiv AF \times s$ sestrojíme rovinu $\rho \perp AF$, sklopíme ji do π a kolem S^0 opišeme kružnici poloměrem $= \frac{1}{2} \overline{AF}$. Kružnice protne stopu roviny ve dvou (v jednom, v žádném) bodech, podle toho, je-li $S^0 - |p^\rho| \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \frac{1}{2} \overline{AF}$. Jeden z obdržených průsečíků (volte menší y souřadnici) jest vrcholem hledaného osmistěnu; ostatní vrcholy sestrojíme snadno.

36. Zobrazte pravidelný osmistěn, je-li dána jeho úhlopříčka $\overline{AF}$ a druhá úhlopříčka má odchylku $\alpha = 60^\circ$. $A(-3, 3, 3)$, $F(3, 7, 6)$.

Půlícím bodem S úhlopříčky $\overline{AF}$ sestrojíme rovinu k ní kolmou $\sigma \perp AF$ a kužel o vrcholu S , jehož osou jest z_S , podstava v π o středu S_1 a poloměru r , který jest odvěsnou trojúhelníku, v němž jest proti z_S odchylka α . Rovina σ protne kužel ve dvou (v jedné, v žádné) povrchových přímkách, podle toho, je-li $\alpha \begin{matrix} > \\ \geq \\ < \end{matrix} \alpha_\sigma$. Tím jsme vyšetřili směr a polohu druhé úhlopříčky; její délku, jakož i třetí úhlopříčku sestrojíme ve sklopeném obraze (σ do π).

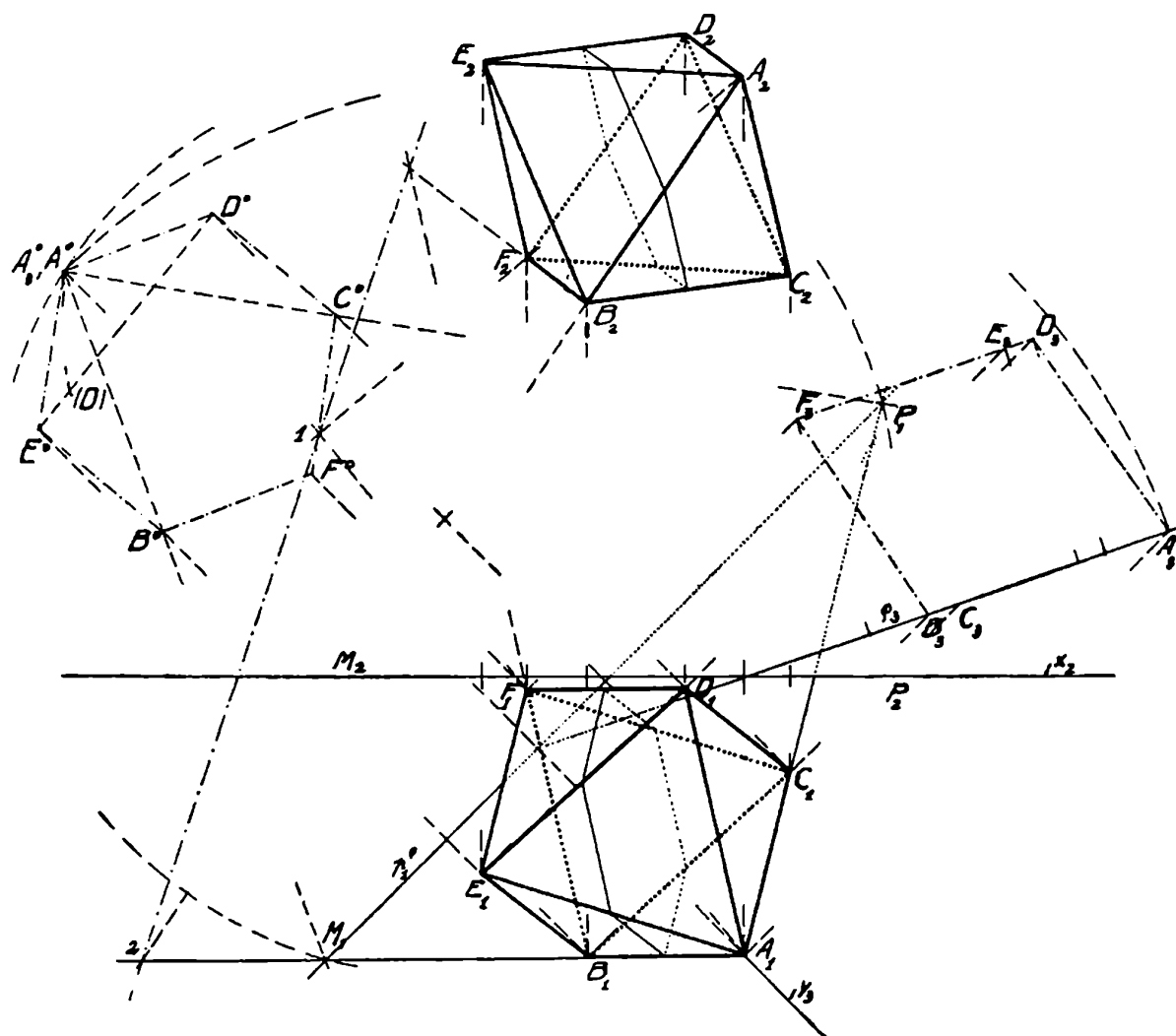
37. Zobraďte šikmý průmět ($135^\circ, \frac{1}{2}$) pravidelného osmistěnu, který má stěnu ABC v π . $A(0, 5, 0)$, $B(3, 2, 0)$, $y_C > y_B$. (Obr. 19.)



Obr. 19.

Zobrazíme nejdříve orthogonální půdorys osmistěnu, jímž jest pravidelný 6úhelník, a z -ovou souřadnici vrcholů horní podstavy. Tuto sestojíme jako odvěsnu $\triangle A_1 E_1 E^0$, jehož druhou odvěsnu jest $A_1 E_1$ a přeponou $A_1 E^0 = A_1 C_1$, E^0 na $F_1 E_1$; $E_1 E^0 = z_E$.

Pak zobrazíme šikmý půdorys osmistěnu tak, že poloviny y -ových souřadnic všech vrcholů přeneseme ve směru šikmého průmětu osy y , t. j. aby svíraly $\sphericalangle 135^\circ$ s $+x$ (viz úl. 237, obr. 130a, I.). Na kolmice k ose x v šikmých půdorysech vrcholů přeneseme jejich souřadnice z -ové a obdržíme tak šikmé obrazy vrcholů, jež patřičně spojíme.



Obr. 20.

38. Zobrazení pravidelný osmistěn, jehož hrany $AB = AC = 4$ leží na přímkách AM , AP , které jsou dány půdorysem. $A(0, 6, z)$, $M(-6, 4, 0)$, $P(2, -4, 0)$. (Obr. 20.)

Sklopený obraz vrcholu A jest na $A_1 A^0 \perp p_1^p$, $p_1^c \equiv M_1 P_1$ a na oblouku kruhovém nad tětivou $M_1 P_1$, jehož obvodový

úhel $A^0 = 60^\circ$. Na $A^0 M_1$, $A^0 N_1$ nanese $\overline{A^0 B^0} = \overline{A^0 C^0} = 4$ a sestrojíme pravidelný 6úhelník, který jest půdorysem otočeného osmistěnu. Osmistěn otočíme kolem p^0 zpět do prostoru, což provedeme ve III. průmětně ($y_{1,3} \equiv A_1 A^0$, $A_3^0 \equiv A^0$ na $y_{1,3}$, poloměrem $A_3^0 - |p_1^0$ opíšeme oblouk, který protne $A_1 A_3 \perp y_{1,3}$ v A_3 ; tím jest určena poloha roviny ϱ).

39. Zobrazte pravidelný osmistěn, je-li dán jeho vrchol E ; úhlopříčný řez $ABCD$ jest v rovině ϱ , a jeden jeho vrchol leží v ν . $\varrho (-3, 3, 3)$, $E (0, 4, 5)$. (Obr. 21.)

Kolmice $EF \perp \varrho$ protne rovinu ϱ ve středu osmistěnu $S \equiv EF \times \varrho$. Sklopíme rovinu ϱ do ν , kolem S^0 opíšeme kružnici poloměrem ES , která protne n_2^0 ve dvou (v jednom, v žádném) bodech, podle toho, je-li $\overline{ES} \gtrless S^0 - |n_2^0$. Průsečík osy EF s rovinou ϱ , jakož i sklopení roviny provedeme ve III. průmětu, $z_{2,3} \equiv E_2 S_2 \perp n^0$.

Podobně řešíme úlohu:

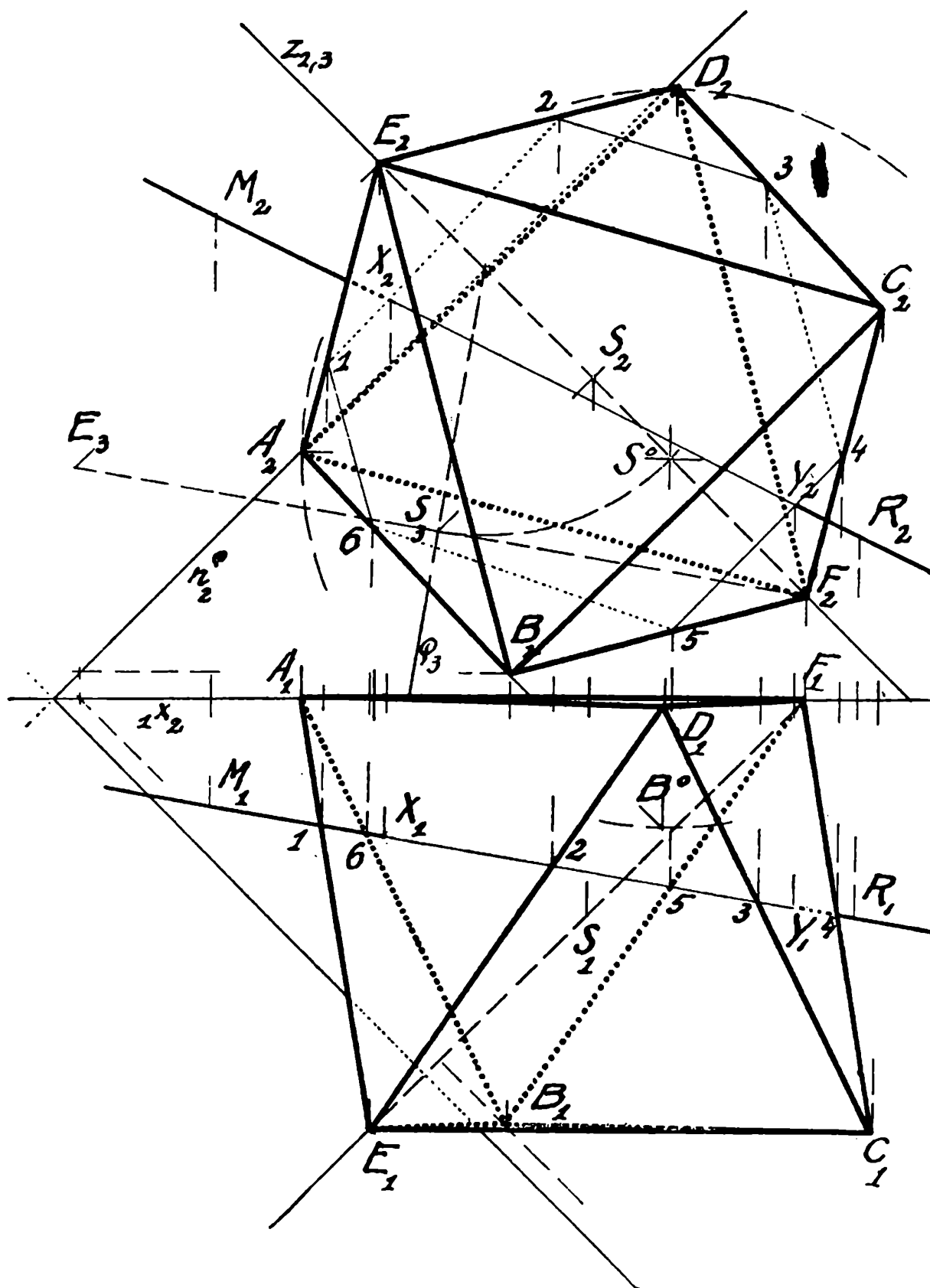
40. Zobraziť pravidelný osmistěn, jehož úhlopříčka jest $E (0, 7.5, 6)$, $F (-3, 0, 1.5)$ a vrchol A v π .

Vrchol A jest na stopě p^0 roviny souměrnosti úsečky $\overline{EF}$ a na kružnici opsané kolem středu této S její polovičkou. Konstrukci provedeme ve sklopeném obraze roviny ϱ .

c) Krychle (hexaeder, pravidelný šestistěn).

41. Zobrazte šikmý průmět krychle (135° , $\frac{1}{2}$), jejíž osa jest HA . $A (0, 4, 0)$, $H (0, 4, 7)$, $y^B = 3$, $x^B < 0$. (Obr. 22.)

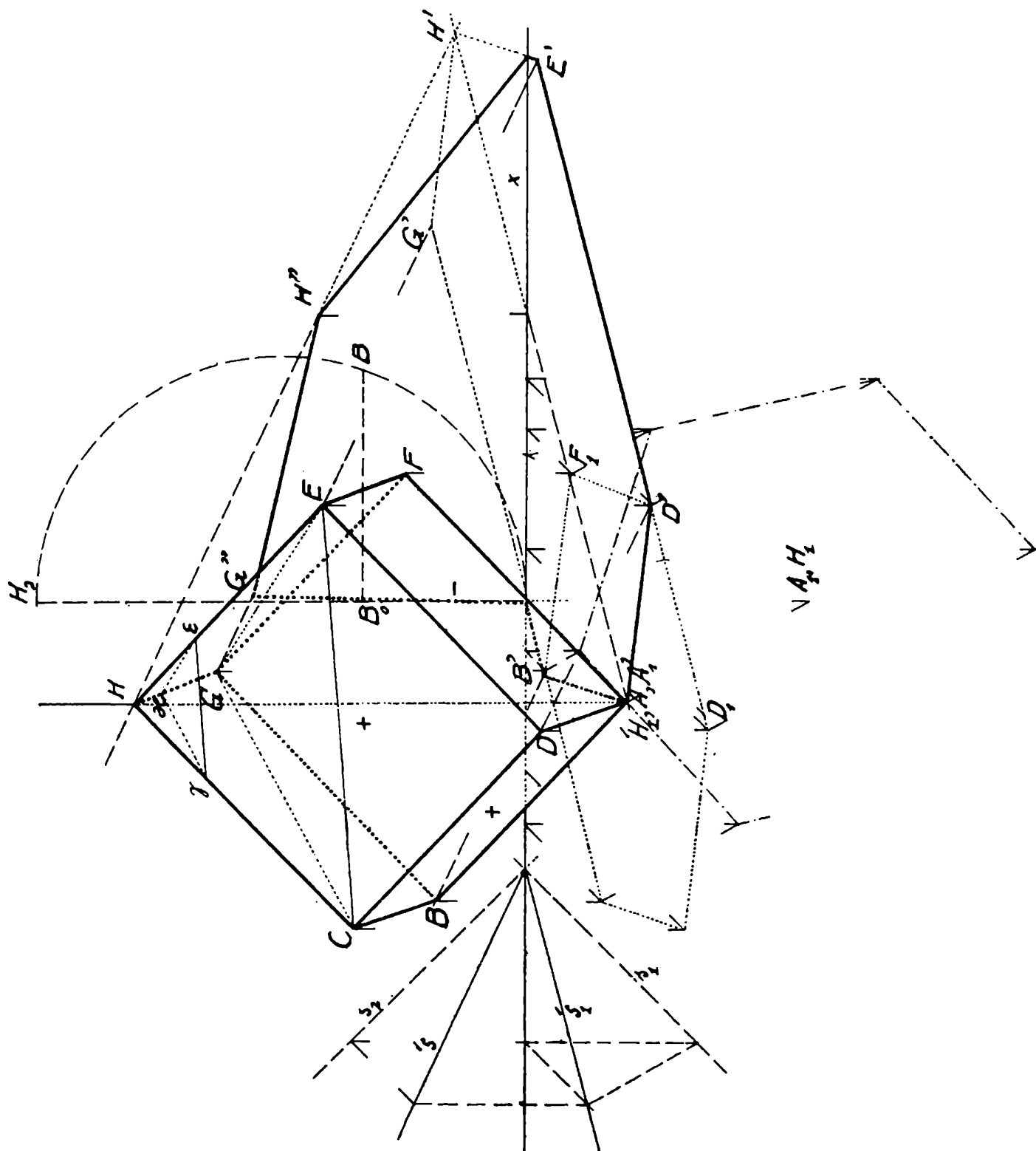
Všechny hrany krychle svírají s osou AH a tudíž také s π stejné úhly, proto jejich půdorysy jsou stejně dlouhé.



Obr. 21.

Také jejich průměty do osy AH jsou stejně dlouhé, takže tato jest jimi rozdělena na 3 stejné díly; čili 6 vrcholů tvoří 2 skupiny po třech, jež jsou ve dvou rovinách $\perp AH$ a dělí-

cích AH na třetiny. Zobražíme-li pravoúhlý $\triangle ABH$, jest $\overline{AB_0} = \frac{1}{3} \overline{AH}$ průmětem hrany AB na přeponu, tedy bod B



Obr. 22.

jest na kolmici $B_0B \perp AH$ a na půlkružnici nad průměrem AH . BB_0 jest průmět hrany AB do roviny horizontální, čili délka půdorysů hran krychle.

Obr. 23.

né, t. j. rovny 120° , tedy body $B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1$, jsou vrcholy pravidelného šestiúhelníku, opsaného kolem A_1 poloměrem BB_0 .

Z orthogonálního půdorysu sestrojíme půdorys šikmý a z tohoto šikmý obraz přenesením z-ových souřadnic AB_0 , $2AB_0$, AH .

42. Zobrazte průměty krychle, jejíž podstava jest v rovině ϱ a střed K ; úhlopříčka podstavy svírá s $p^0 \nless 30^\circ$. $\varrho(-3, 3, -1.5)$, $K(-1, 5, 5)$. (Obr. 23.)

Z bodu K spustíme kolmici $k \perp \varrho$, jejíž prvou promítací rovinu zvolíme za III. průmětnu, $k_1 \equiv y_{1,3}$; $k_3 \times \varrho_3 \equiv S_3$. Sklopíme ϱ do π , kolem S^0 opíšeme kružnici poloměrem $= \overline{K_3 R}$ ($K_3 R$ jest přepona pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka $K_3 S_3 R$) a bodem S^0 vedeme přímkou $S^0 1$, aby $\nless S^0 1$, $p_1^0 = 30^\circ$. Ze sklopeného obrazu $A^0 B^0 C^0 D^0$ odvodíme půdorys pomocí affinity a z toho nárysy vrcholů čtverce na přímkách $1 S_2$, $2 S_2$ ($1, 2$ jsou půdorysné stopníky úhlopříček AC , BD). Na kolmici k rovině ϱ ve vrcholech čtverce naneseme délku hrany $= 2 \overline{KS}$, $\overline{A_1 F_1} = 2 \overline{K_1 S_1}$, $\overline{A_2 F} = 2 \overline{K_2 S_2}$.

43. Zobrazte průměty krychle, jejíž hrana jest $\overline{AF}$, hrana $\overline{AD}$ má oba průměty skloněny stejně k ose x . $A(0, 4, 5)$, $F(4, 7, 7)$, $y_D > y_A$, $y_B > y_A$.

Sestrojíme průsečnici s roviny $\varrho \perp AF$ (ϱ jde bodem A) s rovinou souměrnosti (díl I., úl. 76); pak $AD \parallel s$. Rovinu ϱ sklopíme do π a sestrojíme skutečnou velikost čtverce $A^0 B^0 C^0 D^0$ ($A_1 A^0 \perp p_1^0$, $A^0 \dashv p_1^0 = A_1 2$, $1 \equiv p_1^0 \times A_1 A^0$, $\overline{12} = z_A$). Pomocí affinity sestrojíme $A_1 B_1 C_1 D_1$ a z půdorysu nárys $A_2 B_2 C_2 D_2$ rovněž pomocí affinity, jejíž osou jest $t_{1,2}$ průsečnice roviny ϱ s rovinou totožnosti a paprsky $\perp x_{1,2}$. Průměty hran pobočných jsou $\nless A_1 F_1$ (resp. $A_2 F_2$); podstava $ABCD$ má oba průměty neviditelné, ježto souřadnice jejího středu jsou menší než souřadnice středu podstavy $EFGH$.

44. Zobrazte krychli, jejíž osa III. řádu jest $\parallel x$, je-li dán její vrchol A a délka hrany $a = 4$. $A(0, 6, 5)$, $y_O = 1.5$, $z_B < z_A$.

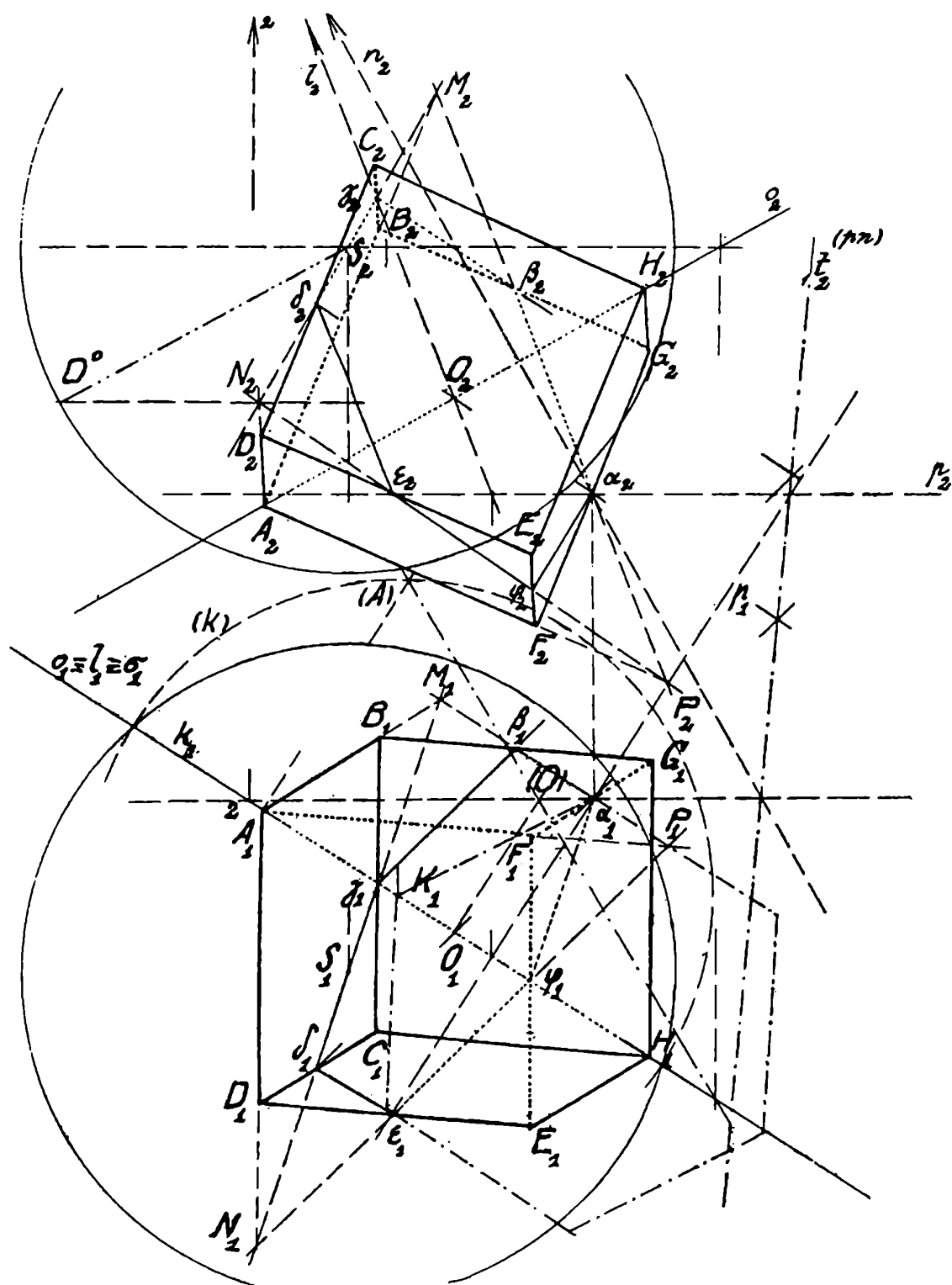
Podle úlohy 39 jest délka tělesné úhlopříčky krychle $\overline{AH}$ přeponou $\triangle ABH$, jehož jednou odvěsnou jest délka hrany $AB = 4$, druhou úhlopříčka stěny. Třetí průmět krychle do III. průmětny hlavní jest pravidelný 6úhelník, jehož strana = výšce $\triangle ABH$; výška rozdělí $\overline{AH}$ bodem B_0 v poměru $1:2$, a $\overline{AB_0} = \frac{1}{3} \overline{AH}$ jest výška vrstev, v něž krychli dělí roviny obsahující koncové body hran, vycházejících z vrcholů A , H .

45. Zobrazte krychli, leží-li úhlopříčky podstavy AC , BD na přímkách XS , NS . $X(-4, 0, 0)$, $N(4, 0, 8)$, $S(0, y, 6)$, $x_A = -2$.

Sklopíme rovinu $\varrho \equiv (XNS)$ kolem n^p do ν ; S^0 je na půlkružnici nad průměrem $\overline{XN}$ a na $S_2 S^0 \perp n_2^p$. Pokládáme-li promítací rovinu $(S S_2 S^0)$ za III. průmětnu, $z_{2,3} \equiv S_2 S^0$, objeví se v ní kružnice otáčení bodu S ve skutečné velikosti a protne $S_2 S_3 \perp z_{2,3}$ v S_3 ; tím jest určena $y_S = S_2 S_3$ a rovina ϱ . Na kolmici $S_3 O_3 \perp \varrho_3$ nanese me délku hrany krychle a odvodíme O_2 , O_1 a průměty ostatních vrcholů.

46. Sestrojte krychli, je-li dána její osa III. řádu o a střed α hrany CD s ní mimoběžné. (Obr. 24.)

Rovina ϱ vedená bodem α kolmo k ose o protne krychli v pravidelném šestiúhelníku $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi$, který jest určen bodem $O \equiv o \times \varrho$ a vrcholem α . Prodloužené strany šestiúhelníku protnou se ve vrcholech rovnostranného $\triangle MNP$, $M \equiv \alpha\beta \times \gamma\delta$, $N \equiv \gamma\delta \times \varepsilon\varphi$, $P \equiv \varepsilon\varphi \times \beta\alpha$, které leží na prodloužených hranách krychle, vycházejících z jejího vrcholu A na ose o . Vrchol A sestrojíme jako průsečík osy o s plochou



Obr. 24.

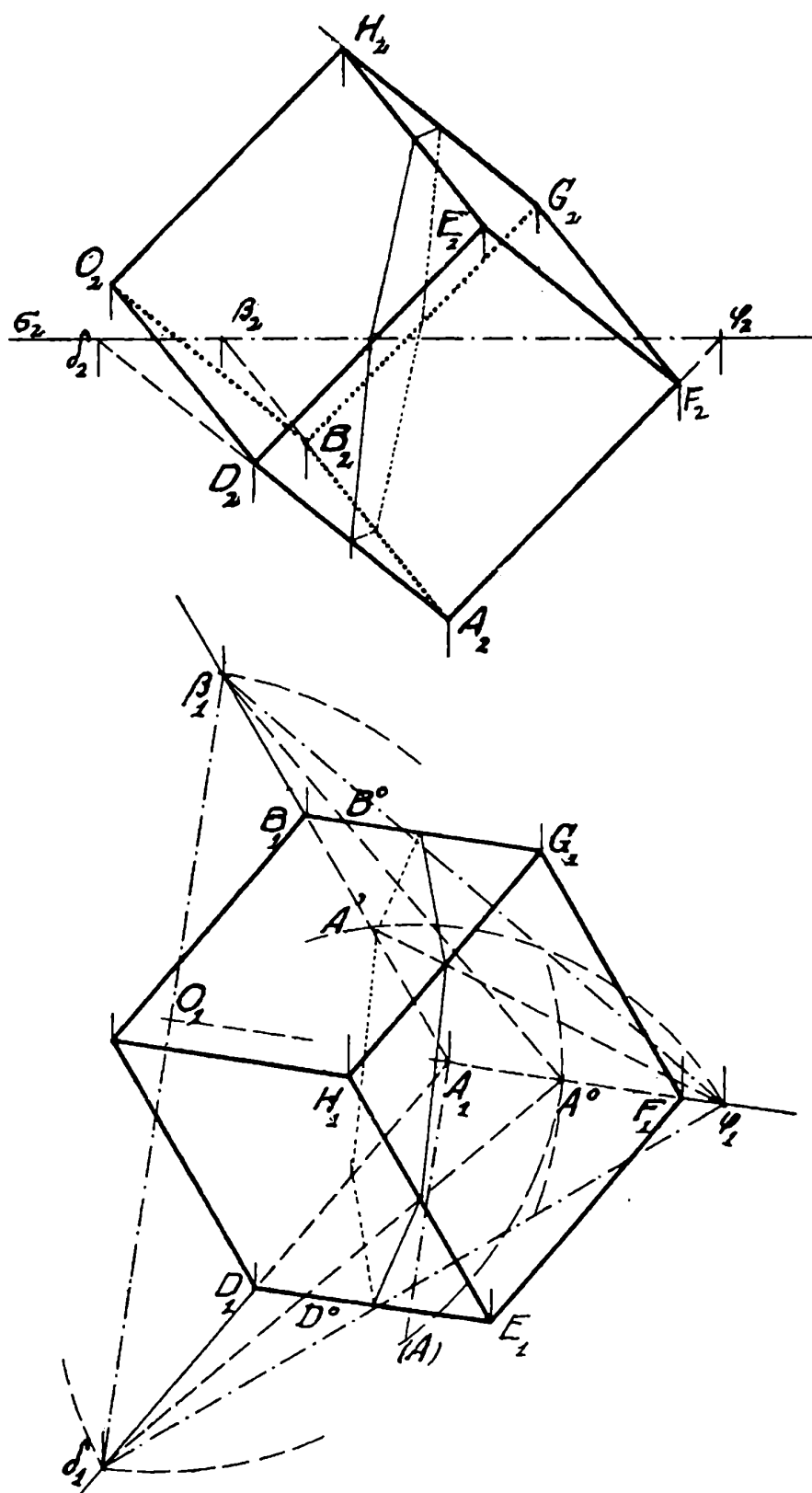
kulovou, která má průměr na př. $\overline{MN}$. (Geom. místo vrcholů pravých úhlů A , jejichž ramena procházejí body MN , jest plocha kulová opsaná nad $\overline{MN}$.) (Viz úlohu následující.)

47. Zobraďte krychli, je-li dán řez její $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi$, kolmý k ose III. řádu, procházející středem krychle. a) $\alpha(0, 1.5, 6)$, $O(-1.5, 4.5, 4.5)$, $\alpha\beta \parallel \nu$, $z_\beta < z_\alpha$; b) $\alpha(-1.6, 5.6, 2)$, $O(0, 4.2, 5)$, $y_\beta < y_o$, $\alpha\beta \parallel \pi$; c) $\alpha(1.5, 2, 6)$, $O(0, 5, 4.5)$, $y_\beta < y_o$, $\alpha\beta \parallel \nu$, $\alpha\beta \parallel \pi$.

Pravidelný 6úhelník $\alpha\beta\dots\varphi$ sestrojíme podle úl. 200 (díl I., obr. 104). Prodloužené strany $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\varepsilon\varphi$ protnou se v bodech M, N, P . Nad průměrem MN opišeme plochu kulovou; ve středu šestiúhelníku vztyčíme k jeho rovině kolmici k ($O_1\dots k_1 \perp p_1$, $O_2\dots k_2 \perp \alpha_2\beta_2$), která protne plochu kulovou ve vrcholu krychle A . Průsečík plochy kulové s přímkou k najdeme pomocí nárysně promítací roviny ($k k_2$); rovina ($k k_2$) protne plochu v hlavní kružnici l , $l_2 \equiv k_2$, tuto sklopíme kolem průměru rovnoběžného s nárysnou do roviny hlavního meridianu m , takže $l^0 \equiv m_2$. Sklopený obraz přímky k obdržíme spojením sklopených obrazů bodů S^0, K^0 , jež sestrojíme, uděláme-li $\overline{S_2 S^0} = \overline{S_1} \dashv m_1$. Z bodu $A^0 \equiv l^0 \times k^0$ odvodíme A_2 a přenesením $\overline{S_2 H_2} = \overline{A_2 S_2}$ protější vrchol H_2 . Spojíme A s body M, N, P , dostaneme směry tří hran krychle; s nimi vedeme rovnoběžky bodem H a příslušnými vrcholy 6úhelníku, a ty se protnou v dalších vrcholech krychle.

48. Zobraďte průměty krychle, jsou-li známy půdorysy směrů jejích hran, vrchol A a délka hran a ($= 4$). (Obr. 25.)

____ Přímky b_1, d_1, f_1 vycházející z A_1 obsahují půdorysy hran $AB = AD = AF = a$. Poněvadž stěna $(ABCD) \perp AF$ jest půdorysná stopa její $p_1^0 \perp A_1 F_1$, a rovněž stopa do kterékoliv roviny horizontálné $\beta_1 \delta_1 \perp A_1 F_1$; totéž platí o rovinách (ABF) , (ADF) , resp. jejich stopách do libovolné horizontálné roviny, t. j. $\beta_1 \varphi_1 \perp A_1 D_1$, $\delta_1 \varphi_1 \perp A_1 B_1$. Jsou tudíž $A_1 B_1, A_1 D_1, A_1 F$ výškami $\triangle \beta_1 \delta_1 \varphi_1$ (**trojúhelník stopní**), který je



Obr. 25.

tvořen stopami stěn krychle, jež tvoří trojhran s vrcholem A , do roviny horizontální σ , již jsme zvolili v libovolné výšce nad A . Sklopíme-li stěnu (ABD) kolem $\beta\delta$ do roviny σ , jest

$A_1 A^0 \perp \beta_1 \delta_1$, A^0 na kružnici o průměru $\beta_1 \delta_1$; můžeme nanésti délku hrany $a = 4 = A^0 B^0 = A^0 D^0$ na $A^0 \beta_1$, $A^0 \delta_1$ a zpětným otočením obdržíme $B_1, D_1, B_1 \equiv A_1 \beta_1 \times B^0 B_1$, kde $B^0 B_1 \perp \beta_1 \delta_1$. Potom snadno doplníme půdorys krychle. K sestrojení nárysu potřebujeme znáti výšku roviny σ nad bodem A . Sklopíme rovinu, v níž se otáčel bod A , kolem $A_1 A^0$ do roviny σ ; vzdálenost $A \perp \sigma$ jest odvěsnou $\triangle A_1 (A) O_1$, $O_1 \equiv A_1 A^0 \times \beta_1 \delta_1$, jehož přeponou jest poloměr otáčení $O_1 A^0$ a druhou odvěsnou jeho průmět $A_1 O_1$. V náryse σ_2 jest nárys stopního $\triangle \beta \delta \varphi$, takže nárysy B_2, D_2, F_2 obdržíme na ordinálách a na spojnících $A_2 \beta_2, A_2 \delta_2, A_2 \varphi_2$.

49. Zobrazte průměty krychle, dán-li její vrchol A a protější hrana CH leží na přímce $c \equiv PN$. $A(0, 2, 2)$, $P(4, 8, 0)$, $N(-6, 0, 8)$, krychle jest v I. kvadrantu.

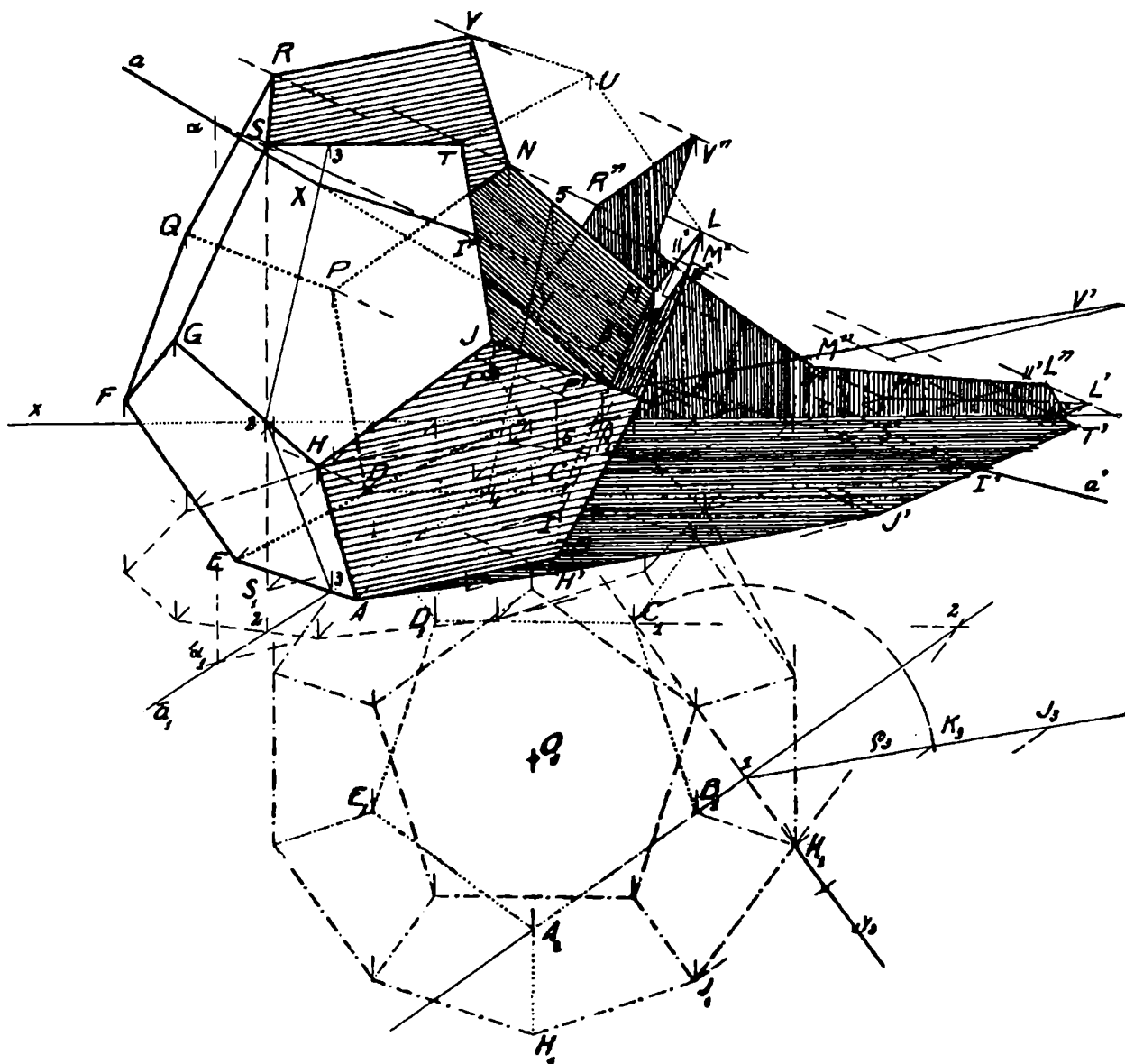
Bodem $A \dots \varrho \perp c$, $\varrho \times c \equiv C$ jest vrchol krychle protilehlý vrcholu A ; rovinu ϱ sklopíme do ν , tam zobrazíme čtverec $A^0 B^0 C^0 D^0$ daný úhlopříčkou $A^0 C^0$ a dostaneme tak délku hrany krychle $A^0 B^0$, kterou nanese do $C_3 H_3 \perp \varrho_3$, $z_{2,3} \equiv c_2$.

d) Pravidelný dvanáctistěn (dodekaeder).

50. Zobrazte šikmý průmět pravidelného dvanáctistěnu, jehož stěna $ABCDE$ leží v π . $O(0, 5, 0)$, $A(0, 7.5, 0)$; $q = \frac{1}{2}$, $\omega = 135^\circ$. (Obr. 26.)

Půdorys $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ jest pravidelný 5úhelník ve skutečné velikosti, rovněž tak půdorys protější stěny $R_1 S_1 T_1 U_1 V_1 \cong A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$, který je proti prvému otočen o 180° , takže body $A_1 \dots E_1, R_1 \dots V_1$ jsou vrcholy pravidelného 10úhelníku, vepsaného do kružnice poloměru $O_1 A_1$. Poněvadž hrany vycházející z vrcholů podstavných 5úhelníků svírají se sousedními hranami podstavnými stejné úhly $\underline{= 108^\circ}$, jest $\sphericalangle B_1 A_1 H_1 = \sphericalangle E_1 A_1 H_1$, t. j. půdorysy hran AH, JT ,

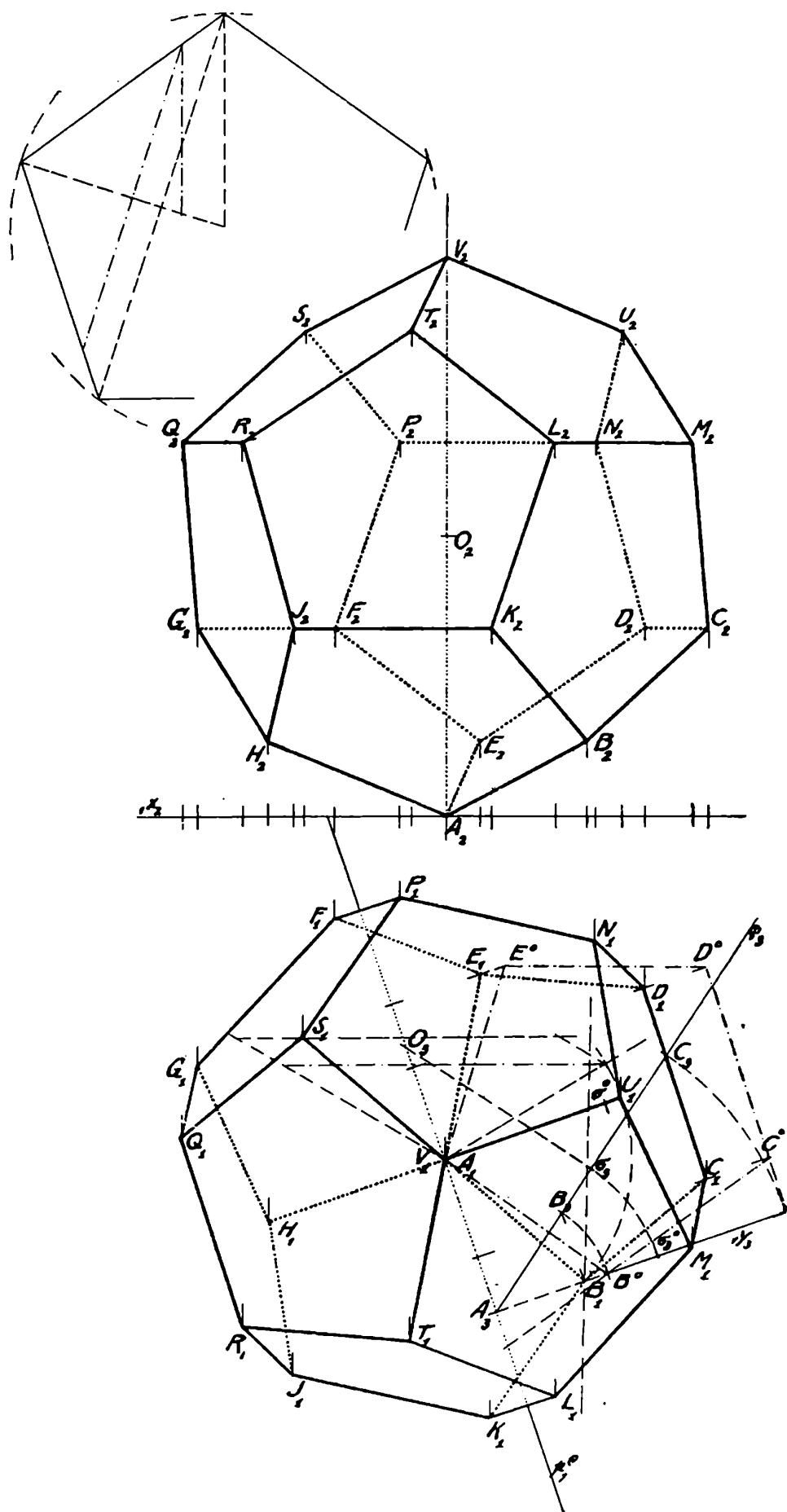
$\overline{BK} \dots \overline{RQ}$ směřují do bodu O_1 . Abychom vyšetřili délku těchto půdorysů, sklopíme stěnu $ABKJH$ kolem hrany AB do π , takže $A_1 B_1 K^0 J^0 H^0$ se ztotožní s $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$, kružnice otáčení mají půdorysy kolmé k $A_1 B_1$, tedy bod K_1 obdržíme na



Obr. 26.

$K^0 K_1 \perp A_1 B_1$, $K_1 \equiv K^0 K_1 \times O_1 B_1$; $\overline{O_1 K_1}$ jest poloměr kružnice, na níž leží půdorysy ostatních vrcholů dvanáctistěny, jako vrcholy pravidelného desetiúhelníku. Poněvadž $(A_1 B_1 K_1 J_1 H_1)$ aff. $(A_1 B_1 K^0 J^0 H^0)$ leží $K_1 J_1 \times K^0 J^0$ na $A_1 B_1$.

Vrcholy 12stěny leží po pěti ve čtyřech rovinách rovnoběžných s π , jimiž je těleso rozděleno na tři vrstvy; výšky obou krajních vrstev jsou stejné. Nárysy vrcholů jsou tudíž na



Obr. 27.

ose x a na třech rovnoběžkách s ní ve vzdálenostech příslušných souřadnic z -ových. Abychom tyto sestrojili, zvolme III. průmětnu $\perp AB$, do níž se promítne stěna $(ABKJH)$ jako úsečka $I J_3$, $I \equiv y_{1,3} \times A_1 B_1$, $I J_3 = J^0 \dashv A_1 B_1$, $I K_3 = I K^0$; $K_3 K_1 = z_K$, $J_3 \dashv y_{1,3} = z_3$. Výška poslední vrstvy $= z_K$.

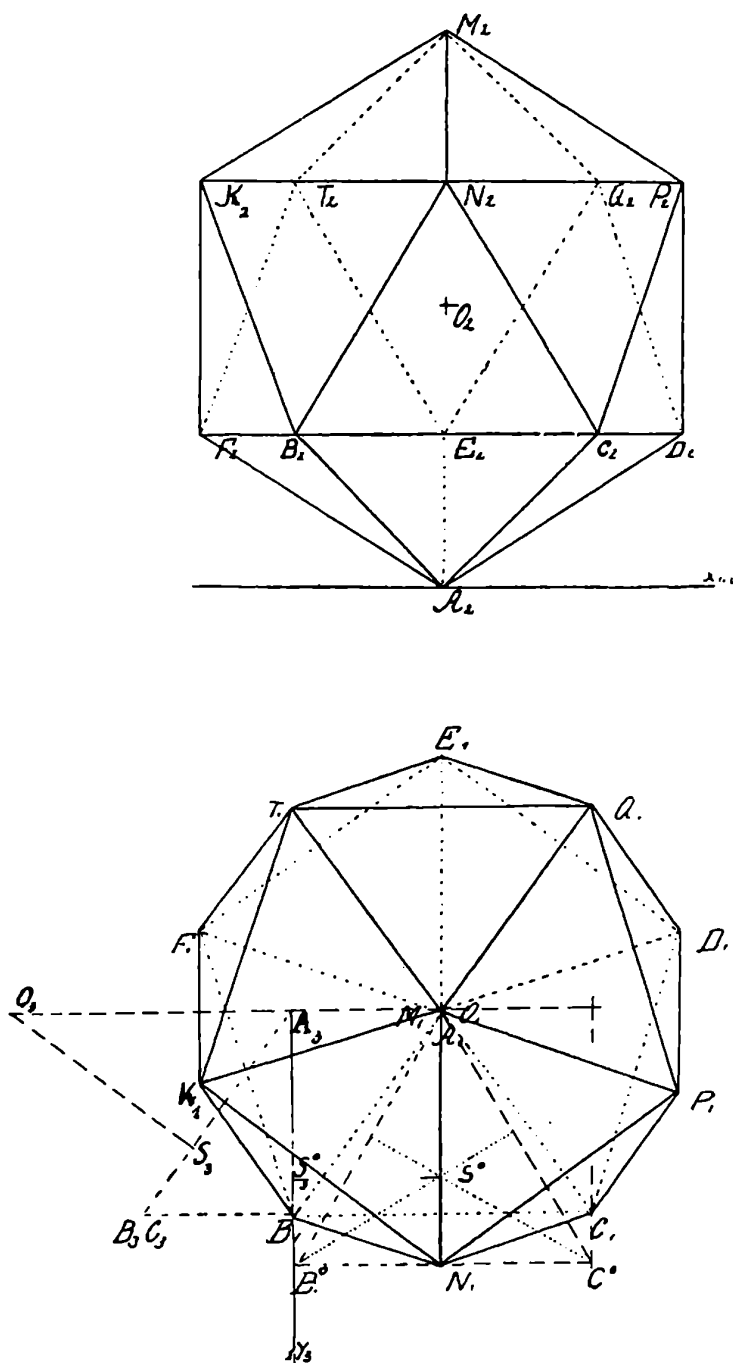
Naneseme-li z -ové souřadnice na kolmice, spuštěné k ose x ze šikmých půdorysů jednotlivých vrcholů, obdržíme šikmé průměty.

51. Zobrazení pravidelný dvanáctistěn, jehož osa $AV \perp \pi$, je-li hrana $a = 3.5$. $A(0, 6, 0)$, $x_B = 2.5$, $y_B > y_A$. (Obr. 27.)

Přímka AV jest osou pravidelného trojhranu $A(B, E, H)$, proto jsou hrany $AB = AE = AH$ odchýleny od π o stejné úhly, a poněvadž $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAH = \sphericalangle HAB = 108^\circ$ jest $A_1 B_1 = A_1 E_1 = A_1 H_1$ a úhly jimi sevřené 120° . Ježto jest $CD \parallel BE \parallel \pi$, jest půdorysná stopa roviny $(AB \dots E)$ $p_1^\rho \perp A_1 H_1$; kolem ní sklopíme 5úhelník do π a z polohy $(A_1 B^0 \dots E^0)$ převedeme zpět do prostoru. Bod B_1 leží na $B^0 B_1 \perp p_1^\rho$ a na $A_1 B_1$ (BE sestrojeno v pomocném obrazci); body $B_1, E_1, H_1, S_1, T_1, U_1$ jsou vrcholy pravidelného 6úhelníku, jehož strana $= A_1 B_1$. Zavedeme-li III. průmětnu $\perp p_1^\rho$, promítne se do ní stěna $(ABCDE)$ jako úsečka $A_3 C_3 = C^0 \dashv p_1^\rho$, a z C_3 odvodíme $C_1 D_1 \# C^0 D^0$. Poněvadž stěny, vycházející z koncových bodů osy A, V , jsou stejně skloněny k π , jsou půdorysy jejich souhlasných úhlopříčen stejně dlouhé; nalézají se tedy body $C_1, D_1, N_1, P_1, F_1, G_1, Q_1, R_1, J_1, K_1, L_1, M_1$ na kružnici poloměru $A_1 C_1$, tvořící vrcholy dvou pravidelných 6úhelníků o stranách $C_1 N_1$ a $D_1 P_1$. Prodloužené úsečky $B_1 C_1, B^0 C^0$ musí se protínati na p_1^ρ .

Vrcholy $B, \dots, T$ leží ve čtyřech rovinách $\perp AV$, které rozdělují těleso na 5 vrstev. Výšky dvou spodních vrstev udávají souřadnice $z_B = B_3 B_1$, $z_C = C_3 \dashv y_{1,3}$. Vrcholy horní poloviny dvanáctistěnu jsou středově souměrné s vrcholy polo-

viny spodní podle středu tělesa O , $z_o = \overline{O_3 A_3}$; O_3 sestrojíme na $A_3 V_3 \perp y_{1,3}$, když ve středu stěny σ_3 vztyčíme na tuto kolmici $\sigma_3 O_3 \perp A_3 C_3$, $\sigma_3 A_3 = \sigma^0 A_1$.



Obr. 28.

e) Pravidelný dvacetistěn (ikosaeder).

52. Zobrazte pravidelný dvacetistěn s osou $AM \perp \pi$, je-li hrana jeho $a = 4$, $BC \parallel \nu$, $A(6, 5, 0)$. (Obr. 28.)

Protější vrcholy pravidelného 20stěnu leží po dvou na šesti osách, jež se protínají ve středu tělesa O . Pět hran, vycházejících z vrcholu A , tvoří pravidelný pětihran, a koncové jejich body tvoří pravidelný 5úhelník $(BCDEF) \parallel \pi$, jehož strana $BC = 4^*$). Pětiúhelník $(KNPQT)$ je s prvním shodný, ale o 180° otočený, tvoří tedy půdorysy těchto 10 vrcholů pravidelný desetiúhelník. Rovinami obou pětiúhelníků jest rozděleno těleso na tři vrstvy, z nichž obě krajní mají stejné výšky. Tyto určíme pomocí III. průmětny $y_{1,3} \perp p_1^p$, $p_1^p \parallel B_1 C_1$; třetí průmět stěny ABC jest úsečka $A_3 B_3$, kterou sestrojíme, když $\triangle A_1 B^0 C^0$ převedeme ze sklopené polohy zpět do prostoru, $A_3 B_3 = A_3 B^0$. Pak $B_3 B_1 = z$ a současně = výšce horní vrstvy. Vyhledáme-li ještě S_3 , bokorys středu $S \triangle ABC$ a vztyčíme $S_3 O_3 \perp A_3 B_3$, $O_3 \equiv S_3 O_3 \times A_3 O_3$ jest $O_3 \dashv y_{1,3} = z_o$.

53. Zobrazte šikmý průmět pravidelného dvacetistěnu z úlohy předcházející, $q\frac{1}{2}$, $\omega = 150^\circ$. (Obr. 29.)

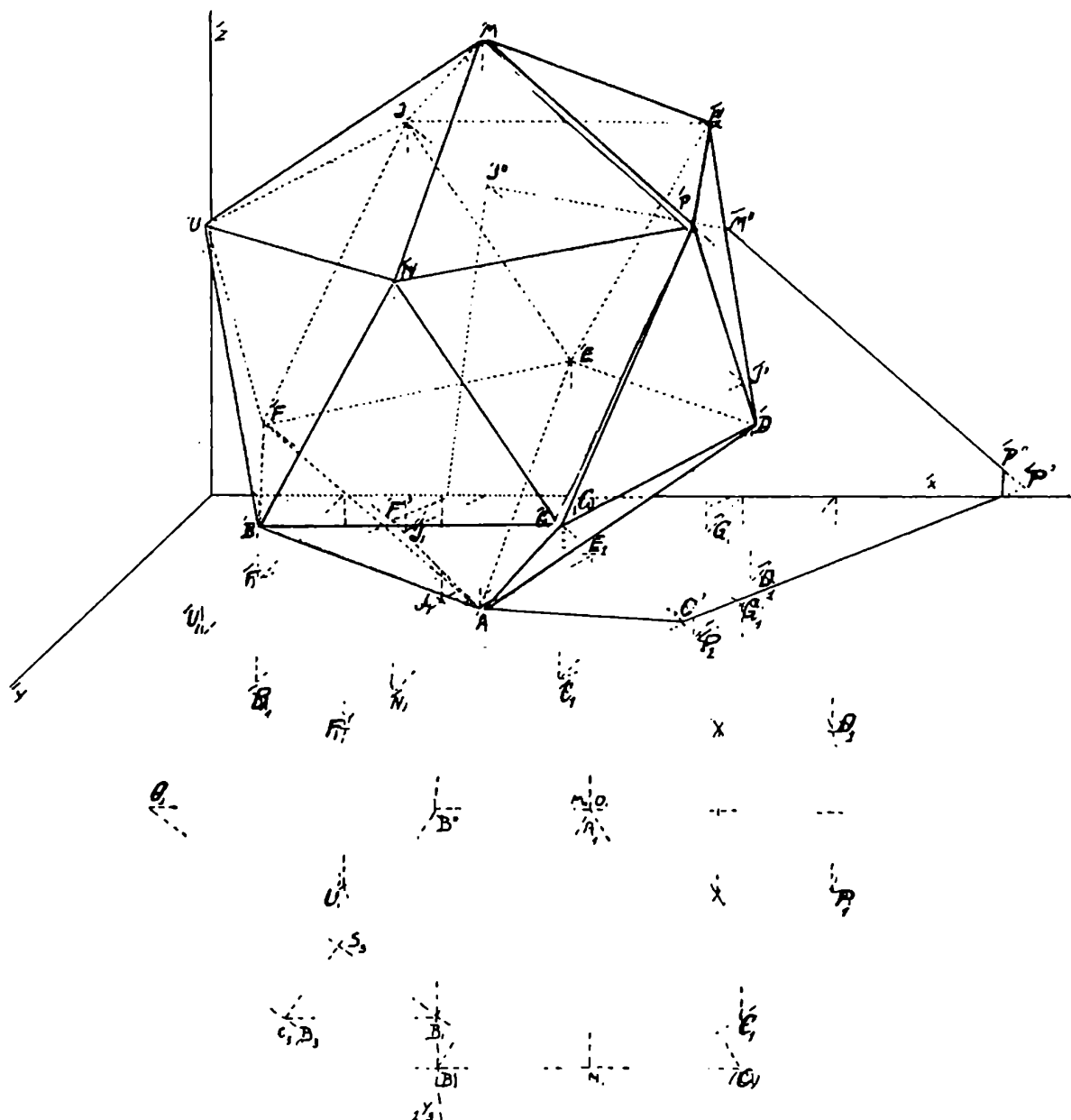
Sestrojíme šikmý půdorys tělesa a v jednotlivých vrcholech nanese příslušné souřadnice z -ové.

54. Zobrazte pravidelný dvacetistěn, jehož osa $AM \parallel x$. $A(0, 6, 6)$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{BC} \parallel v$.

Pomocí III. hlavní průmětny převedeme na úl. 52. Můžeme sklopiti pravidelný 5úhelník $(ABHJD)$ kol stopy $m_3^p \perp \perp A_3 C_3$ do III. průmětny a sestrojíme pak vzdálenosti všech vrcholů od III. průmětny: $B_4 B_3$, $H_4 \dashv u_{3,4}$, jde-li $u_{3,4}$ bodem $B_3 \perp m_3^p$.

55. Zobrazte průměty pravidelného dvacetistěnu, spočívajícího stěnou ABC na v . $A(0, 0, 9)$, $C(5, 0, 9)$, $z_B < z_A$.

*) Pětiúhelník $(B_1 C_1 D_1 E_1 F_1)$.



Obr. 29.

$(ACJKE) \cong (BCJMG)$ jsou podstavy dvou shodných pětihranů s vrcholy D, H proto $\sphericalangle ACJ = \sphericalangle BCJ = 108^\circ$ a tedy $C_2 J_2$ směřuje do O_2 . Sestrojíme $B_2 C_2 J^0 M^0 G^0$, pak J_2 jest na $J^0 J_2 \perp B_2 C_2$ a na $O_2 C_2$; H_2 obdržíme pomocí affinity $H^0 H_2 \perp B_2 C_2$, $J^0 H^0 \times J_2 H_2$ na $B_2 C_2$. Ovšem $O_2 J_2 = O_2 H_2$ proto jsou $D_2, J_2, H_2, G_2, F_2, E_2$ vrcholy pravidelného šestiúhelníku. Považujeme-li rovinu otáčení bodu J za III. průmětnou $J^0 J_2 \equiv z_{2,3} \perp B_2 C_2$, obdržíme v ní souřadnice $y_3 = J_3 J_2$, $y_H = H_3 \perp z_{2,3}$; $y_M = y_H + y_J$.

56. Zobrazte šikmý průmět pravidelného dvacetistěnu z úlohy předcházející.

Na kolmice k ose x v šikmých půdorysech jednotlivých vrcholů přeneseme příslušné souřadnice z .

IV. Průseky s tělesy hranatými.

a) Průsečíky přímek.

Průsečíky přímky a s tělesem jsou body společné přímce a povrchu tělesa; hledáme je tak, že přímkou proložíme libovolnou rovinu, vyšetříme její průsek s tělesem, a průsečíky přímky s obvodem tohoto průseku jsou body hledané. Řešení zjednodušíme: 1. buď použitím promítací roviny dané přímky ($a a_1$) nebo ($a a_2$), nebo 2. pomocí roviny vrcholové, která obsahuje danou přímku a vrchol tělesa ($a V$).

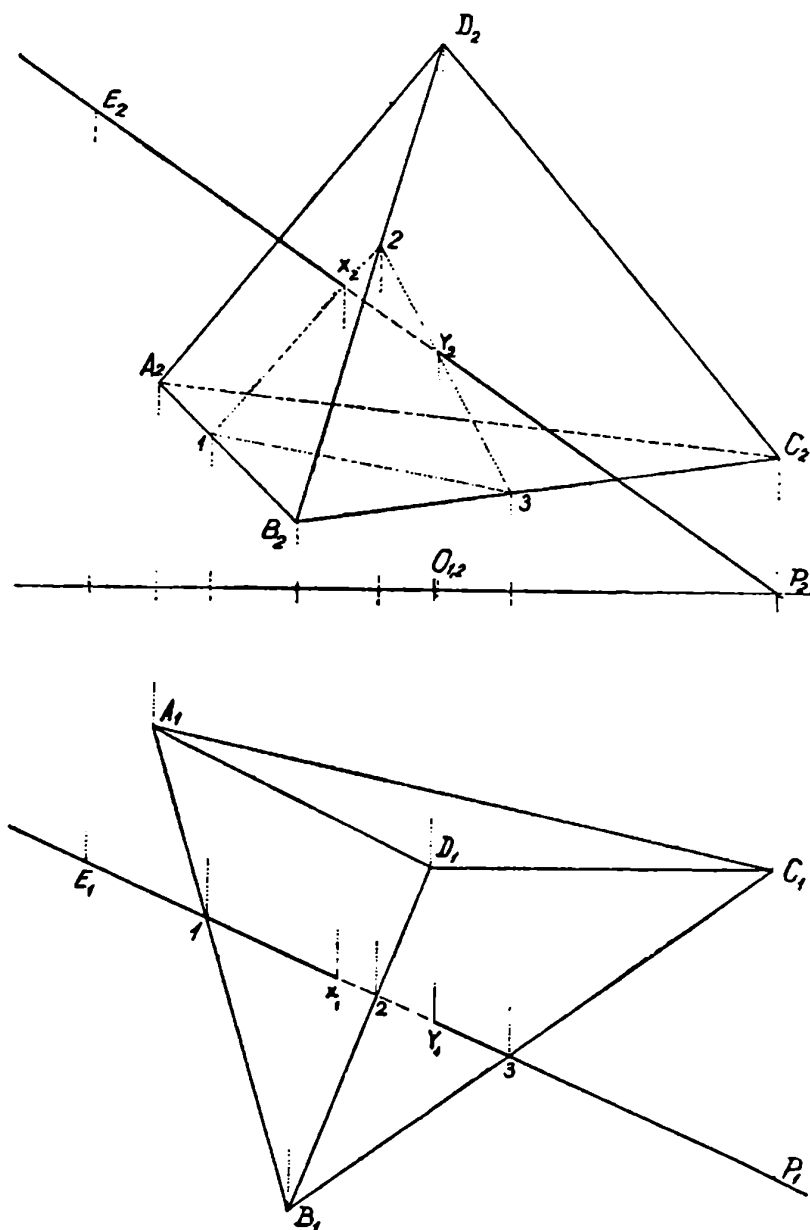
57. Vyšetřte průsečky přímky $a \equiv EP$ se čtyřstěnem $ABCD$. $A(-4, 2, 3)$, $B(-2, 9, 1)$, $C(5, 4, 2)$, $D(0, 4, 8)$; $E(-5, 4, 7)$, $P(5, 8.5, 0)$. (Obr. 30.)

Promítací rovina přímky a , ($a a_1$) protne čtyřstěn ve $\triangle 123$, jehož vrcholy jsou průsečíky hran čtyřstěnu s rovinou ($a a_1$). Vyšetříme nárysy bodů 1, 2, 3 na nárysech příslušných hran; a_2 protne obvod $\triangle 123$ v bodech X_2, Y_2 , z nich odvodíme X_1, Y_1 na a_1 . Průměty obou bodů jsou viditelné, ježto stěny, na nichž leží, jsou viditelné.

58. Vyšetřte průsečky přímky $a \equiv RQ$ s hranolem úlohy 22. $R(0, 0.5, 5.5)$, $Q(4.5, 3, 3)$.

Nárysně promítací rovina přímky a , ($a a_2$) protne hranol ve čtyřúhelníku, jehož vrcholy jsou průsečíky hran s rovinou; půdorysy vrcholů 1, 2, 3, 4 jsou na půdorysech příslušných hran. Přímka a_1 protne obvod půdorysu čtyřúhelníku v bodech X_1, Y_1 .

59. V šikmé projekci ($135^\circ, \frac{1}{2}$) zobrazte průsečíky přímky $a \equiv MP$ s pravidelným šestibokým jehlanem, jehož podstava v π



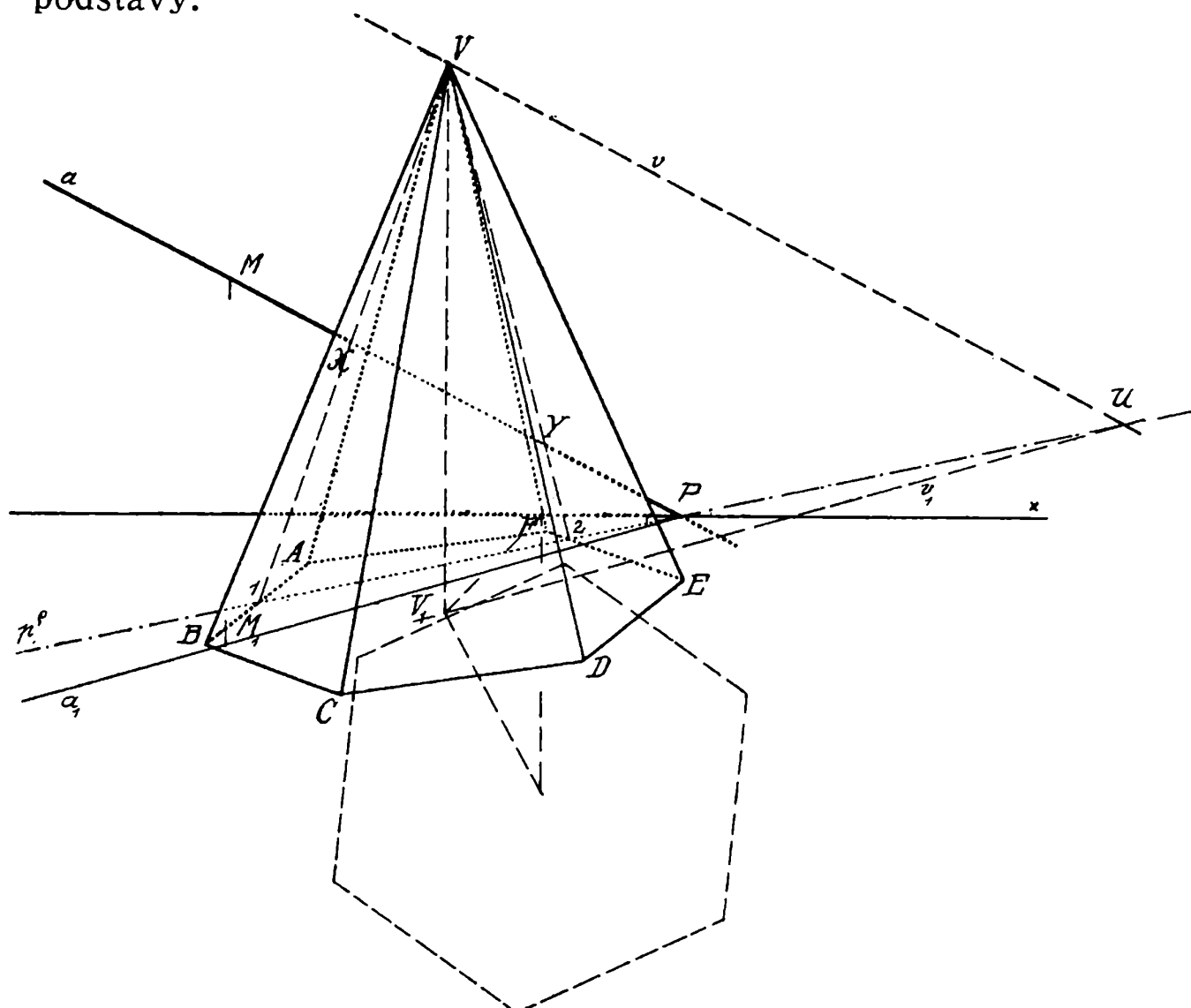
Obr. 30.

má vrchol A ; vrchol jehlanu jest V . $A(-2, 1.5, 0)$, $V(0, 3, 6)$; $M(-2, 4, 4)$, $P(1.5, 0, 0)$. (Obr. 31.)

K vyhledání průsečíků přímky s jehlanem nebo hranolem užijeme s výhodou **roviny vrcholové**, zvláště pokud těleso stojí na některé průmětně. Rovina vrcholová jest určena danou přímkou a a vrcholem tělesa V . (Vrchol hranolu jest v neko-

nečnu, tedy vrcholová rovina jest rovnoběžná s jeho pobočnými hranami.)

Vrcholová rovina $q \equiv (a, V)$ protne jehlan v trojúhelníku (hranol v rovnoběžníku), jehož jedna strana jest na p^p , druhé dvě jsou površky vycházející z průsečíků stopy p^p s obvodem podstavy.



Obr. 31.

Vrchol jehlanu spojíme s libovolným bodem přímky a , na př. s bodem úběžným, t. j. vedeme vrcholovou přímku $v \parallel a$. Vyšetříme stopníky obou přímek a, v do roviny podstavy P, U ; spojnice $PU \equiv p^p$ protne obvod podstavy ($ABCD$) v bodech 1, 2 a površky $1V, 2V$ protnou přímku a v hledaných průsečících X, Y .

60. Na přímce $a \equiv PR$ zobrazte body, jež se z bodu S promítají na obvod čtverce v π o středu O a vrcholu A . $P(1, 0.5, 0)$, $R(-2.5, 4, 2.5)$; $S(-1, 1.7, 3)$, $O(-1, 1.7, 0)$, $A(-2.5, 1, 0)$.

Vyšetříme podle předchozí úlohy průsečíky přímky a s jehlanem, který má vrchol S a podstavu $(ABCD)$.

61. Zobrazte průsečky přímky $a \equiv MN$ s pravidelným šestibokým hranolem, jehož podstava jest v ν ; výška hranolu $v = 8$. $[S(-4, 0, 5.5), A(-7, 0, 4.5)]$, $M(-8, 6, 12)$, $N(2, 0, 4)$.

Vrcholová rovina ρ proložená přímkou a jest nárysně promítací; její stopa $n_2^? \equiv a_2$ protne šestiúhelník $(A_2, B_2 \dots F_2)$ v bodech $1, 2$ a površky těmito vedené protnou přímkou v bodech X, Y .

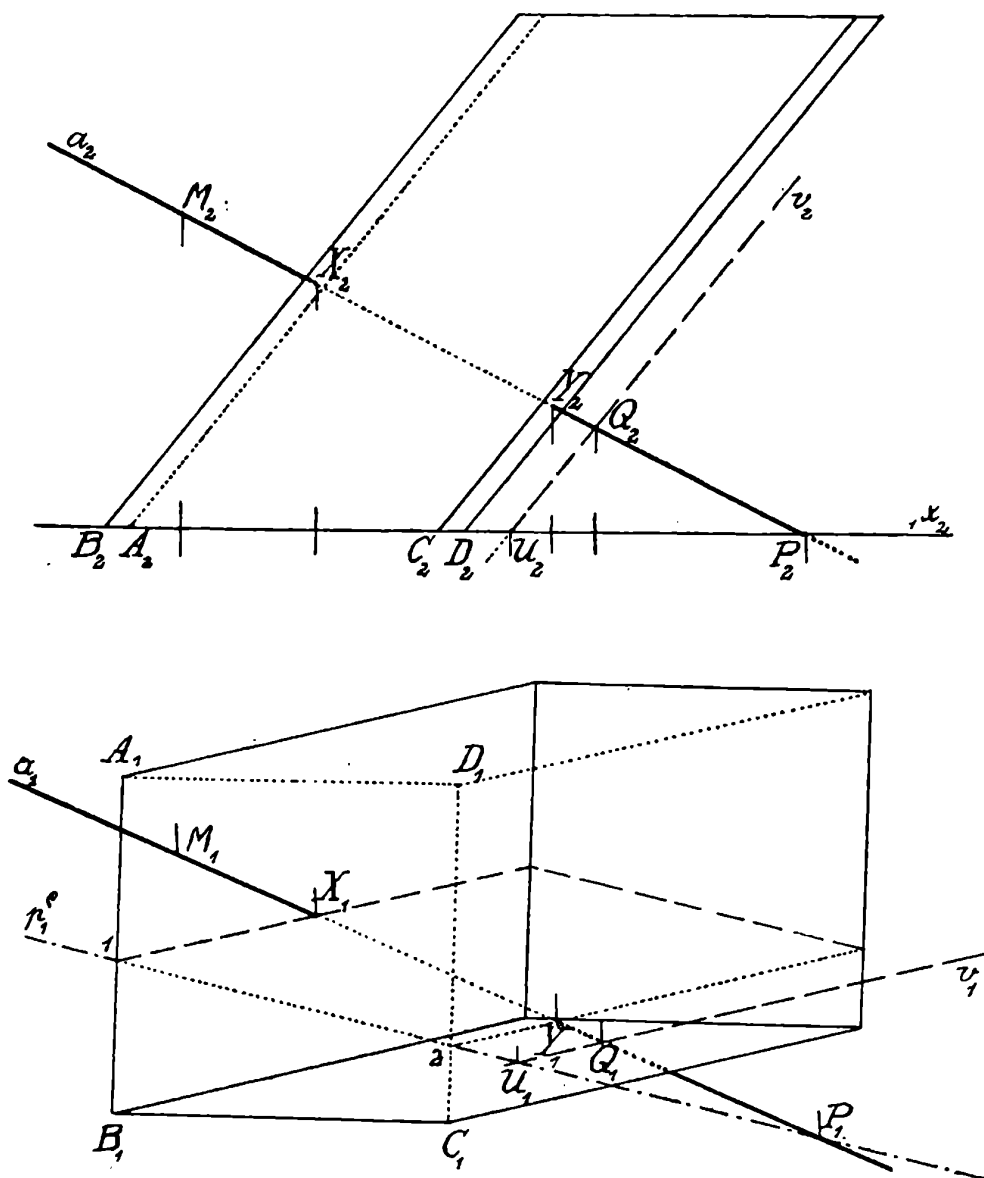
✓ **62.** Zobrazte průsečíky přímky $a \equiv MQ$ se šikmým, čtyřbokým hranolem o pravidelné podstavě v π , je-li A jeden její vrchol, OS osa hranolu. $[A(-3, 4.5, 0), O(0, 8, 0), S(8, 6.5, 10)]$, $M(-2, 6, 6)$, $Q(6, 10, 2)$. (Obr. 32.)

Libovolným bodem přímky a , na př. bodem Q vedeme přímkou $v \parallel OS$. Vyšetříme stopník její U a stopník P přímky a . Spojnice $UP \equiv p^p$ jest stopa vrcholové roviny. Jejimi průsečíky s obvodem podstavy $1, 2$ vedeme površky, jež protnou přímkou a v bodech X, Y .

63. V šikmé projekci $(135^\circ, \frac{1}{2})$ vyhledejte průsečíky přímky $a \parallel \nu$, jdoucí bodem N , se šikmým hranolem, s pravidelnou 5-bokou postavou v π v poloze průčelné. $N(8, 6, 0)$, $\alpha_a = 45^\circ$; $S(0, 6, 0)$, $A(0, 1, 0)$, $Q(7, 8, 8)$.

Zobrazíme šikmé průměty daných útvarů ($\angle a_1'a = 45^\circ$),

na přímce a zvolíme libovolný bod M , jímž vedeme vrcholovou přímku $v \parallel SO$; její stopník Q spojíme se stopníkem N přímky a , přímka NQ (stopa roviny vrcholové $[a, v]$) protne podstavu hranolu v bodech $1, 2$, jejichž povrchy určí na přímce a hledané body X, Y .



Obr. 32.

64. Zobrazte průsečíky přímky $a \equiv MR$ s osmistěnem úlohy 39. (Obr. 21.) $M(-1.5, 1, 4.5)$, $R(4.5, 2, 1.5)$.

Promítací rovina $(a a_1)$ protne osmistěn v mnohoúhelníku, jehož půdorysem jest úsečka 14; vyšetříme nárys průseku, jenž je prozat nárysem přímky v bodech X_2, Y_2 .

65. Zobrazte průsečíky přímky $a \equiv MR$ s krychlí úl. 42. (Obr. 23.) $M(-6, 2, 8)$, $R(5, 2, 1)$.

Řešíme jako úlohu předcházející pomocí roviny promítací.

66. Zobrazte průsečíky přímky $a \equiv PM$ s krychlí, jejíž osa jest AH . a) $P(4, 6, 0)$, $M(-2, 0, 6)$; $A(0, 4, 0)$, $H(0, 4, 8)$; b) $P(3, 3, 0)$, $M(-4, 4, 4)$; $A(0, 4, 0)$, $a = 4$.

Promítací rovina přímky a protne stěny krychle ve stranách mnohoúhelníka, jehož obvod protne přímka v bodech hledaných.

67. Zobrazte průsečíky přímky $a \equiv \alpha\beta$ s pravidelným dvanáctistěnem úl. 50. $\alpha(-1, 10, 8)$, $\beta(1, 0, 1)$. (Obr. 26.)

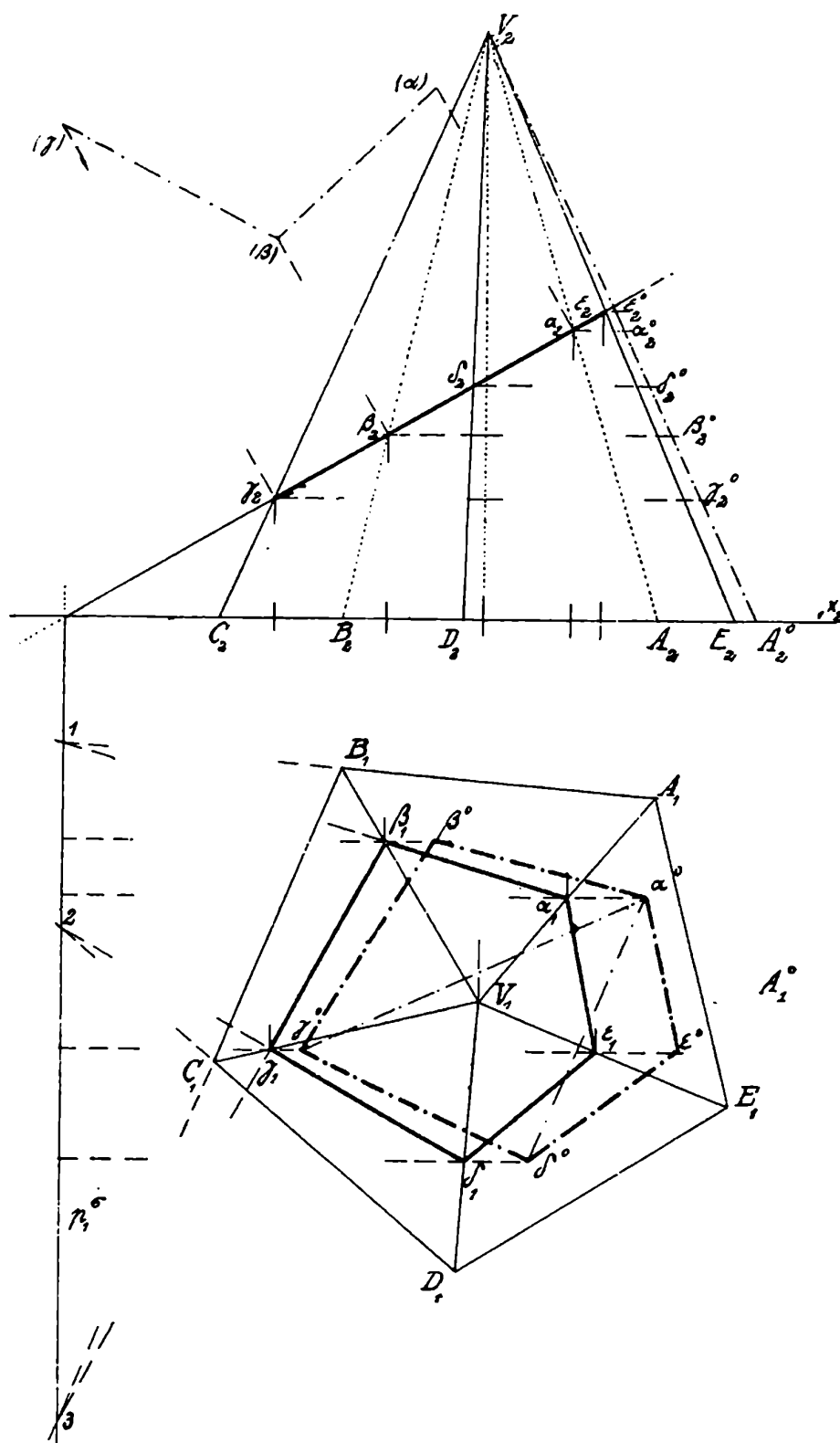
Průsečníky najdeme pomocí prvé promítací roviny ($a a_1$) přímky a , jejíž stopa a_1 protne šikmé půdorysy hran v půdorysech vrcholů mnohoúhelníka. Šikmé průměty těchto vrcholů najdeme na kolmicích a na šikmých průmětech příslušných hran tělesa. Šikmý průmět přímky a protne obvod mnohoúhelníka v šikmých obrazech hledaných bodů. (Viz obr. 55. Úloha 135.)

b) Průseky (řezy) rovin s tělesy. Sítě.

68. Zobrazte průsek pravidelného pětibokého jehlanu s podstavem v půdorysně a roviny σ . $A(2, 2, 0)$, $V(0, 4.5, 7)$, $\sigma(-5, 90^\circ, 30^\circ)$. (Obr. 33.)

Průsek (řez) roviny σ s tělesem jest obrazec, jehož vrcholy jsou průsečníky roviny s hranami tělesa, a strany jsou průsečnice stěn tělesa s rovinou. Nárysem průseku jest úsečka na σ_2 , obsažená v mezích nárysu tělesa; nárysy jednotlivých vrcholů průseku jsou v průsečících nárysů hran se σ_2 , $a_2 \equiv A_2 V_2 \times \sigma_2$. Z nárysu odvodíme půdorys kolmicemi k ose $1x_2$.

Řez jehlanu a podstava jsou v **perspektivní kollineaci**, t. j. sdružené vrcholy podstavy a řezu jsou na paprscích svazku V ,



Obr. 33.

a sdružené strany podstavy a řezu (prodlouženy) protínají se na p^σ (Body A, α ; B, β ; — leží na hranách $AV, BV, \dots$;

$AB \times \alpha\beta \equiv I$ na p^σ , ježto tři roviny protínají se obecně v jednom bodě $\pi \times \sigma \equiv p^\sigma$, $\pi \times (ABV) \equiv AB$, $\sigma \times (ABV) \equiv \alpha\beta$, $p^\sigma \times AB \times \alpha\beta \equiv I$). Nazýváme přímky, na nichž leží sdružené body, AV , BV , $CV \dots$ **paprsky kollineace**, bod V , v němž se paprsky sbíhají, **střed kollineace**, a pevnou přímku p^σ , na které se protínají sdružené strany daného obrazce, (*original*) $(ABCDE)$ a útvaru odvozeného $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$ **osa kollineace**. Jak vidno, je tato vlastnost podobná affinitě (I., str. 17).

Dva rovinné útvary jsou v perspektivní kollineaci, leží-li jejich sdružené vrcholy na paprscích svazku, a protínají-li se jejich sdružené strany (prodlouženy) v bodech pevné přímky.

Poněvadž podmínky, při jejichž splnění jsou dva rovinné obrazce v perspektivní kollineaci v prostoru, se nemění promítáním, patří kollineace mezi **vlastnosti projektivní**, t. j. také průměty podstavy jehlanu a libovolného řezu na něm jsou v **perspektivní kollineaci** nebo kratčeji v **kollineaci**, jejíž střed jest průmět vrcholu V , paprsky jsou průměty pobočných hran a osou jest p_1^σ . Z toho patrno, známe-li V_1 , p^σ a originál, stačí k sestrojení odvozeného útvaru $(\alpha_1, \beta_1 \dots \varepsilon_1)$ jeden jeho bod α_1 . V obrazci byl pomocí kollineace sestrojen bod δ_1 .

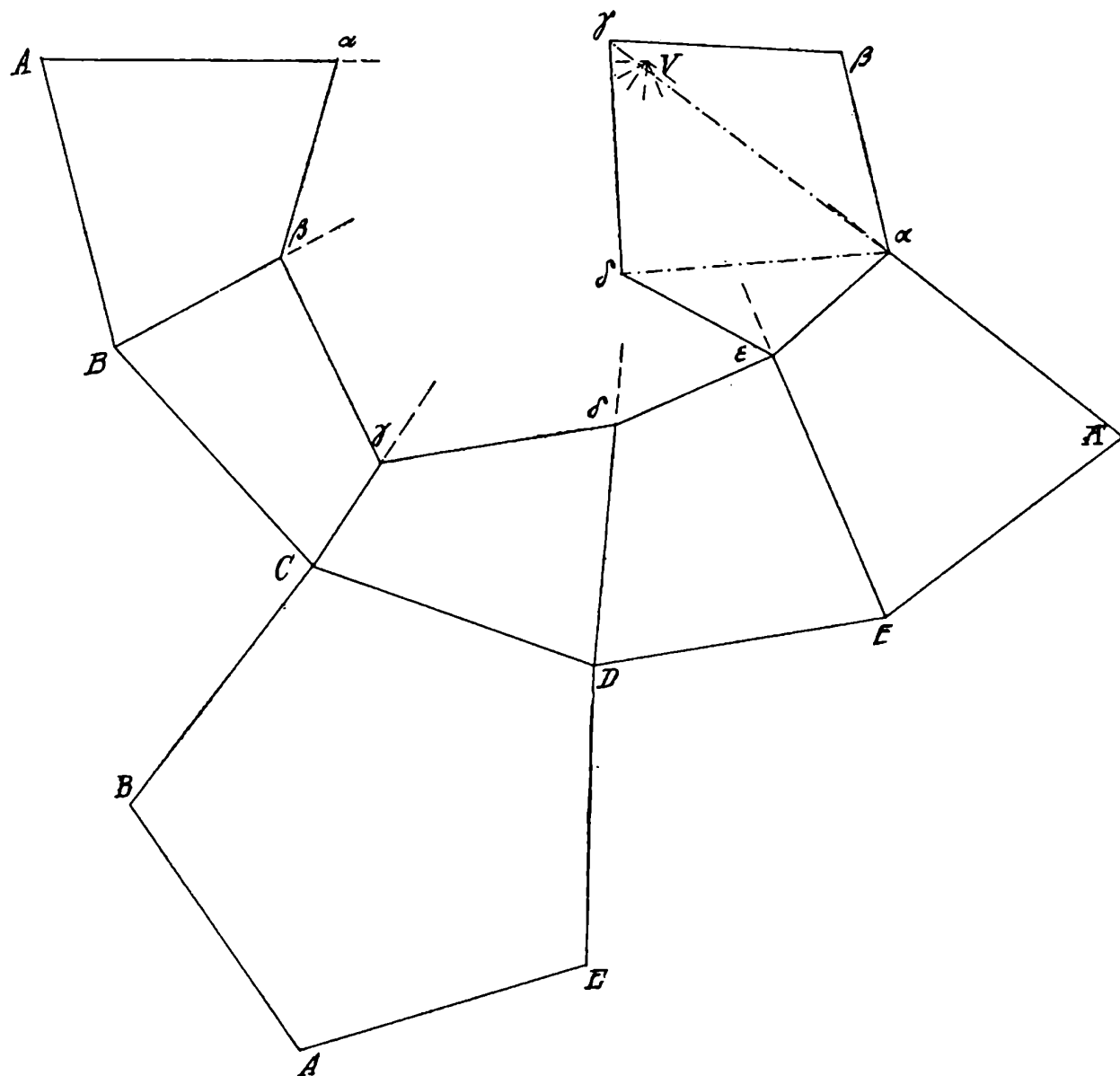
Kollineace jest určena, známe-li originál, osu a střed kollineace a jeden bod útvaru odvozeného.

Pozn.: Přejde-li střed kollineace V do nekonečna (jehlan přešel v hranol, $A\alpha \parallel B\beta \parallel \dots$), přechází kollineace v affinitu. (Viz úl. 89.) Přejde-li osa kollineace p^σ do nekonečna (roviny obou obrazců jsou rovnoběžny, $\pi = \sigma$) jsou si originál a odvozený obraz podobny. Je-li V i p^σ v nekonečnu, máme shodnost (dva rovnoběžné řezy na hranolu).

Platí věta: **Dva řezy na jehlanu (podstava a průsek s rovinou σ) — i jejich průměty — jsou v perspektivní kollineaci, jejíž osou jest průsečnice rovin obou řezů ($\pi \times \sigma \equiv p^\sigma$, resp. její průmět p_1^σ), a středem jest vrchol jehlanu (V , resp. jeho průmět V_1).**

69. Vyšetřte skutečnou velikost průseku z úl. předcházející a síť jehlanu.

Skutečnou velikost řezu ($\alpha \dots \varepsilon$) sestrojíme, sklopíme-li rovinu σ do některé průmětny. Při sklopení do ν jsou sklopené obrazy (α), ... (ε) na kolmicích k ose otáčení $n_2^\sigma \equiv \sigma_2$ ve vzdálenostech příslušných souřadnic y -ových, $\overline{\alpha_2(\alpha)} = \alpha_1 \perp \perp x_1 = y_\alpha$; v obr. 33. sklopen řez do π kolem p_1^σ , při čemž nárysy kružnic otáčení jsou ve skutečné velikosti.



Obr. 34.

Sít jehlanu (obr. 35) skládá se z podstavy, jejíž skutečnou velikost máme v půdoryse, a z pláště. Tento je složen z pěti shodných, rovnoramenných trojúhelníků; délku ramene AV sestrojíme, otočením úsečky AV kolem z -ové souřadnice bodu V do polohy rovnoběžné s nárysnou, $\overline{V_1 A_1^0} \parallel x_2$. Součas-

ně opíše bod α kruhový oblouk, jehož nárys jest $\alpha_2 \alpha_2^0 \parallel 1x_2$, a máme na $V_2 A_2^0$ skutečnou velikost úseku $A\alpha = A_2^0 \alpha_2^0$, vytvořeného na ni rovinou σ . Délkou $V_2 A_2^0$ opíšeme kruhový oblouk, který pětkrát protne tětivou délky AB ; obdržíme rozvinutý plášť, k jehož jedné straně připojíme podstavný 5úhelník.

Jedná-li se o **sít jehlanu zkomoleného**, odejmeme od pláště celého jehlanu plášť horní části jehlanu a připojíme ke zbytku pravou velikost průseku $(\alpha)(\beta)\dots(\varepsilon)$, který rozdělíme úhlopříčkami vycházejícími z jednoho vrcholu na $(n-2)$ trojúhelníky.

70. Zobrazte průsek pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou v ν a roviny σ , jež ortogonálně půlí hranu AV , a sestrojte pravou velikost průseku. $A(6, 0, 6)$, $C(0, 0, 3)$.

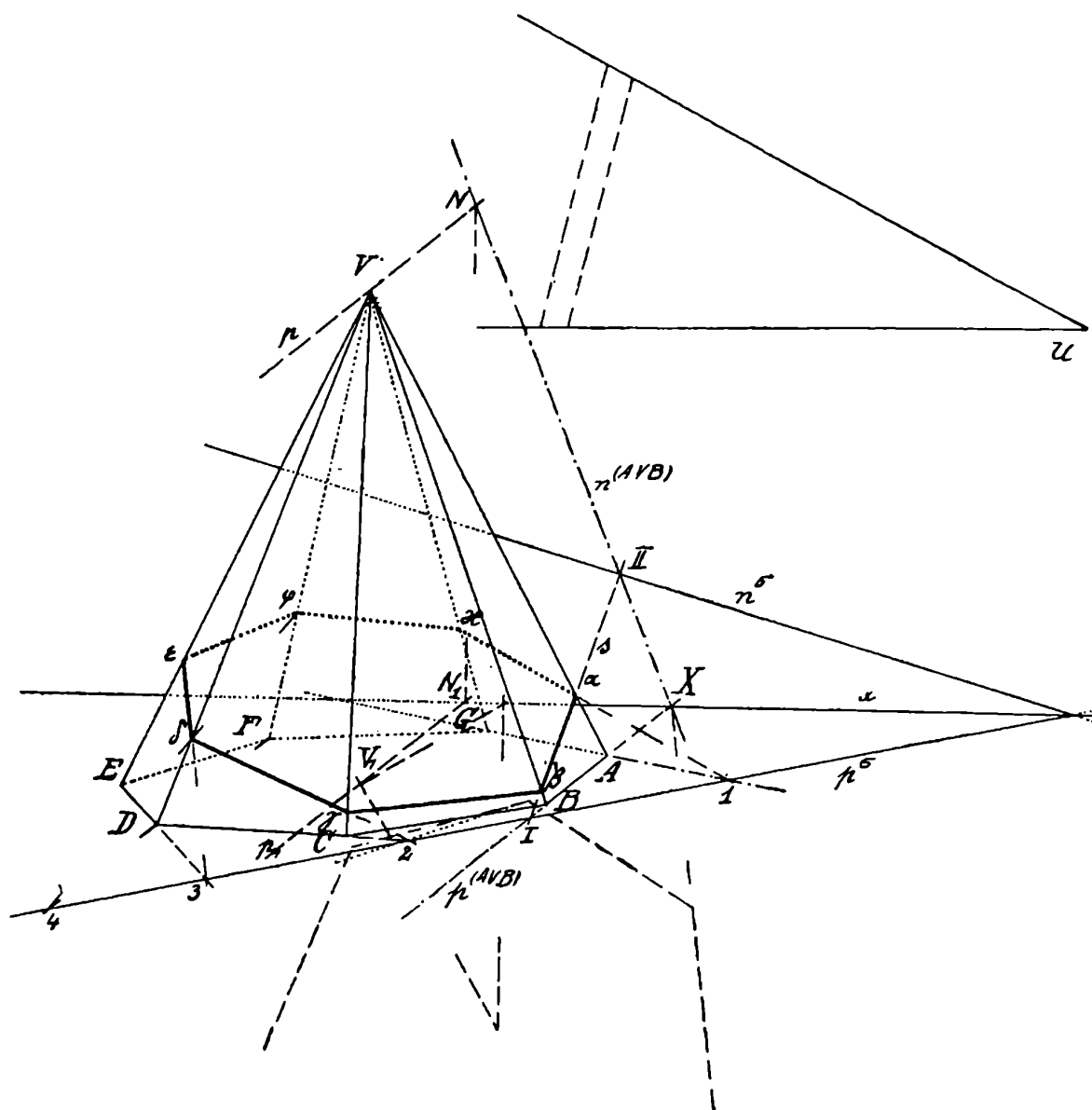
Půlícím bodem α hrany AV sestrojíme rovinu $\sigma \perp AV$; její nárysná stopa jest osou kollineace mezi $A_2 B_2 C_2 D_2$ a nárysem řezu $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2$, jež jest určena, ježto známe n_2^σ , V_2 , α_2 . Prodloužíme $A_2 B_2$ k ose kollineace a průsečík $I \equiv A_2 B_2 \times n_2^\sigma$ spojíme s α_2 ; pak $I \alpha_2 \times B_2 V_2 \equiv \beta_2$.

Abychom sestrojili skutečnou velikost řezu, sklopíme jeden jeho vrchol, na př. α_2 , kolem n_2^σ do $\nu(\alpha_2 \alpha^0 \perp n_2^\sigma, \alpha^0 \dashv n_2^\sigma = r_\alpha)$; ostatní vrcholy sklopeného obrazu odvodíme pomocí affinity, jejíž osou jest n^σ , a paprsky k ní kolmé (I, úl. 20).

71. Vyhledejte rovinu, která seče pravidelný čtyřboký jehlan s podstavou v π v lichoběžníku $\alpha\beta\gamma\delta$, jehož $\alpha\beta \parallel \gamma\delta \parallel AB$, $\alpha\beta = 3$, $\sphericalangle \delta\alpha\beta = \sphericalangle \gamma\beta\alpha = 75^\circ$, $A(0, 6, 0)$, $V(1, 3.5, 6)$.

Průmět $\overline{\alpha_1 \beta_1} = \overline{\alpha\beta} = 3$ vneseme do $\triangle A_1 B_1 V_1$ tak, aby $\alpha_1 \beta_1 \parallel AB$, narýsujeme skutečnou velikost $\triangle \alpha_1 \beta_1 \omega^0$ s úhly $\alpha_1 = \beta_1 = 75^\circ$ ve sklopení do roviny $\parallel \pi$, která prochází stranou $\alpha_1 \beta_1$, a tento trojúhelník otočíme zpět do prostoru kolem $\alpha_1 \beta_1$, až jeho vrchol ω padne na průsečnici rovin (ADV) , (BCV) .

72. Zobraďte šikmý průmět ($150^\circ, \frac{1}{2}$) průseku pravidelného sedmibokého jehlanu s podstavou v π a roviny $\sigma(7, 9, 2)$. $F(-2, 2, 0)$, $S(0, 4, 0)$, $\nu = 6$. (Obr. 35.)



Obr. 35.

Vyšetříme průsečnici $\alpha\beta$ roviny σ se stěnou (ABV) ; první stopa této jest AB . K sestrojení stopy druhé užijeme prvé stoposměrné přímky ($V_1 \dots p_1 \parallel AB$, $V \dots p \parallel AB$, $p_1 \times x \equiv N_1$, N na p , $NX \equiv n^{(AVB)}$, kde $X \equiv AB \times x$). Průsečnice $s \equiv \alpha\beta$ spojuje body $I \equiv AB \times p^\sigma$, $II \equiv NX \times n^\sigma$. Ostatní

vrcholy průseku najdeme pomocí kollineace, jejíž osou jest p^σ a středem V . (Prodloužíme AG až k bodu $I \equiv AG \times p^\sigma$, $I \alpha \times VG \equiv \kappa$.)

73. Najděte na pravidelném šestibokém jehlanu s podstavou v π geom. místo bodů, jež jsou stejně vzdáleny od podstavy a od stěny (AVB) . $A(2, 2, 0)$, $V(0, 5, 7)$.

Hledané body jsou v rovině σ , která pólí půdorysnou odchylku stěny (AVB) . Průsek této roviny s jehlanem sestrojíme pomocí III. průmětny $\perp AB$. Do ní promítá se průsek $(\alpha\beta \dots \varphi)$ jako úsečka $\beta_3 \varphi_3$ na σ_3 . Ze III. průmětu odvodíme půdorys kolmicemi k $y_{1,3}$ a odtud nárys. Skutečnou velikost průseku najdeme sklopením roviny σ do π ; kružnice otáčení jednotlivých bodů jeví se v bokoryse ve skutečné velikosti.

74. Vyšetřte centrálný průmět pravidelného šestiúhelníku v ν ze středu promítání S do roviny $\sigma(6, 135^\circ, 120^\circ)$. $A(-2, 0, 2)$, $O(0, 0, 5)$.

Pomocí III. průmětny $\mu \perp n_2^\sigma$ zobrazíme průsek roviny σ se šikmým jehlanem $S(AB \dots F)$.

75. Nepravidelný čtyřboký jehlan protněte v lichoběžníku rovinou, která a) prochází hranou AD , b) obsahuje přímku $m \equiv MR$. $A(0, 2, 0)$, $B(2, 6, 0)$, $C(6, 4, 0)$, $D(3, 2, 0)$, $V(6, 7, 6)$; $M(8, 4, 0)$, $R(0, 4, 4)$.

a) Mají-li býti dvě protější strany hledaného průseku rovnoběžny, $\alpha\beta \parallel \gamma\delta$, musí býti rovina průseku rovnoběžna s průsečnicí stěn, v nichž tyto leží, $(\alpha\beta\gamma\delta) \parallel VP$, kde $P \equiv AB \times CD$. Body A, D vedeme $\alpha\beta \parallel \delta\gamma \parallel VP$.

b) Podobně, má-li rovina $(\alpha\beta\gamma\delta)$ obsahovati přímku m , a při tom $\alpha\delta \parallel \beta\gamma$, musí býti $(\alpha\beta\gamma\delta) \parallel VQ$, kde $Q \equiv AD \times BC$.

Bodem R vedeme $r \parallel VQ$. Rovina $(m, r) \equiv \varrho$ protne jehlan v lichoběžníku. Úloha je dvojznačná.

76. Protněte čtyřboký jehlan v rovnoběžníku, který má s podstavou společný vrchol C . $A(-1, 8, 0)$, $B(6, 6, 0)$, $C(6, 3, 0)$, $D(3, 2, 0)$, $V(0, 11, 3)$.

Řeší se jako úl. 233. (I., obr. 126.)

77. Protněte šikmý čtyřboký jehlan v rovnoběžníku rovinou σ , jdoucí bodem M . $A(-4, 5, 0)$, $B(-2, 11, 0)$, $C(2, 6, 0)$, $D(0, 4, 0)$, $V(3, 10, 7)$; $M(-1, 7, 3)$.

Rovina σ jest rovnoběžná s průsečnicemi rovin $(ABV) \times (CDV) \equiv V1$ a $(ADV) \times (BCV) \equiv V2$, kde $1 \equiv AB \times CD$, $2 \equiv AD \times BC$.

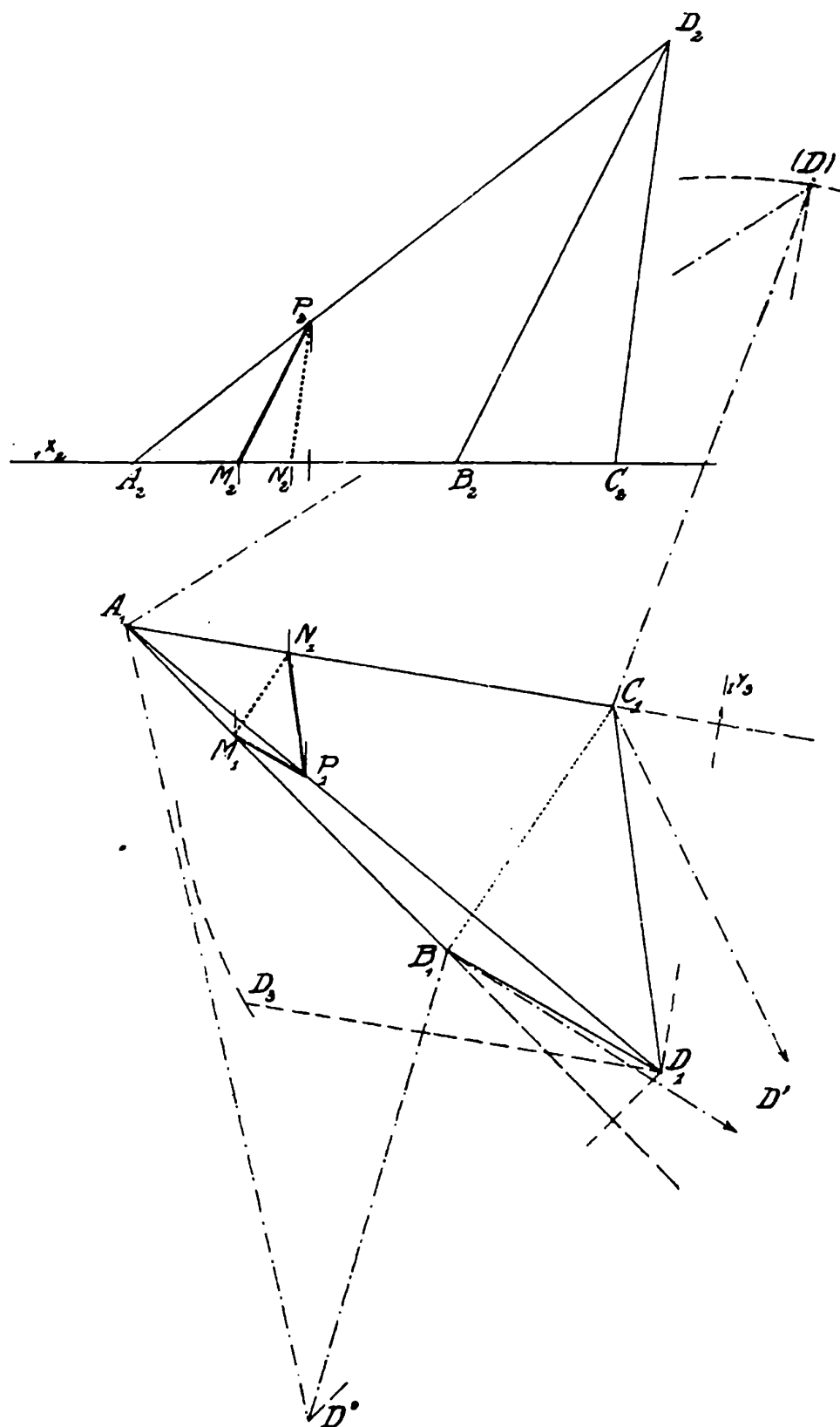
Zavedeme III. průmětnu $\lambda \perp \overline{12}$ [$\overline{12}$ stopa roviny $(1V2)$], do níž se promítá rovina $(1V2)$ jako přímka V_3Y_3 , $Y_3 \equiv \overline{12} \times y_{1,3}$, a $\sigma_3 \parallel V_3Y_3$ jde bodem M_3 .

78. Na pravidelném čtyřstěnu, a) úlohy 29., b) úlohy 30., c) jehož výška $v = AO$, vyznačte čtvercové řezy. $A(-3, 4, 2)$, $O(0, 2, 3)$, $x_B = -1$.

Na tetraedru jsou 3 čtvercové řezy, jejichž vrcholy půlí strany tří prostorových čtyřúhelníků. Ty jsou tvořeny hranami, spojujícími koncové body dvou mimoběžných hran tělesa. (Vrcholy těchto tří čtverců určují pravidelný osmistěn, vepsaný do čtyřstěnu, viz úl. 29, obr. 18.)

c) Stěna (BCD) čtyřstěnu je v rovině $\varrho \perp AO$, a poloměr kružnice jí opsané $r = \frac{v}{2}\sqrt{2}$. (Dokažte!) Rovina $\sigma \perp x$ ($x_\sigma = x_B = -1$) protne rovinu ϱ v přímce NP , jejíž sklopený obraz N_2P^0 protne kružnici poloměru r opsanou kolem S^0

v bodě B^0 . Půdorysy vrcholů $\triangle B C D$ obdržíme buď pomocí stoposměrných přímků nebo pomocí affinity. Spojíme-li středy



Obr. 36.

hran čtyřstěnu, obdržíme vepsaný osmistěn, jehož úhlopříčné řezy jsou hledané čtvercové průřezy čtyřstěnu.

79. Na nepravidelném čtyřstěnu $ABCD$ sestrojte $\triangle MNP \sim \triangle BCD$, aby se jeho plošný obsah rovnal $\frac{1}{9}$ obsahu stěny BCD . $A(-4, 2, 0)$, $B(0, 6, 0)$, $C(2, 3, 0)$, $AD = 10$, $BD = 6$, $CD = 7$. (Obr. 36.)

Stěny (ABD) , (BCD) , (CAD) zobrazíme nejdříve ve skutečné velikosti v půdorysně a otočíme je do prostoru, až hrany BD^0 , BD' splynou. Považujeme-li promítací rovinu jedné kružnice otáčení, na př. $[(D)DD_1]$ za III. průmětnu, obdržíme zD . Aby řez (MNP) byl podobný stěně (BCD) a $= \frac{1}{9}$ její, musí býti veden v $\frac{1}{3}$ hrany AB (od vrcholu A počítáno). Máme zde příklad **prostorové homothetie** při poměru podobnosti $q = \frac{1}{3}$.

80. Sít nepravidelného jehlanu sestrojíme, buď

a) sklopením jednotlivých stěn pobočných (ABV) , (BCV) ... kolem podstavných hran AB , BC ,... do roviny podstavy $(ABC...)$ (viz úl. 79, obr. 34), anebo

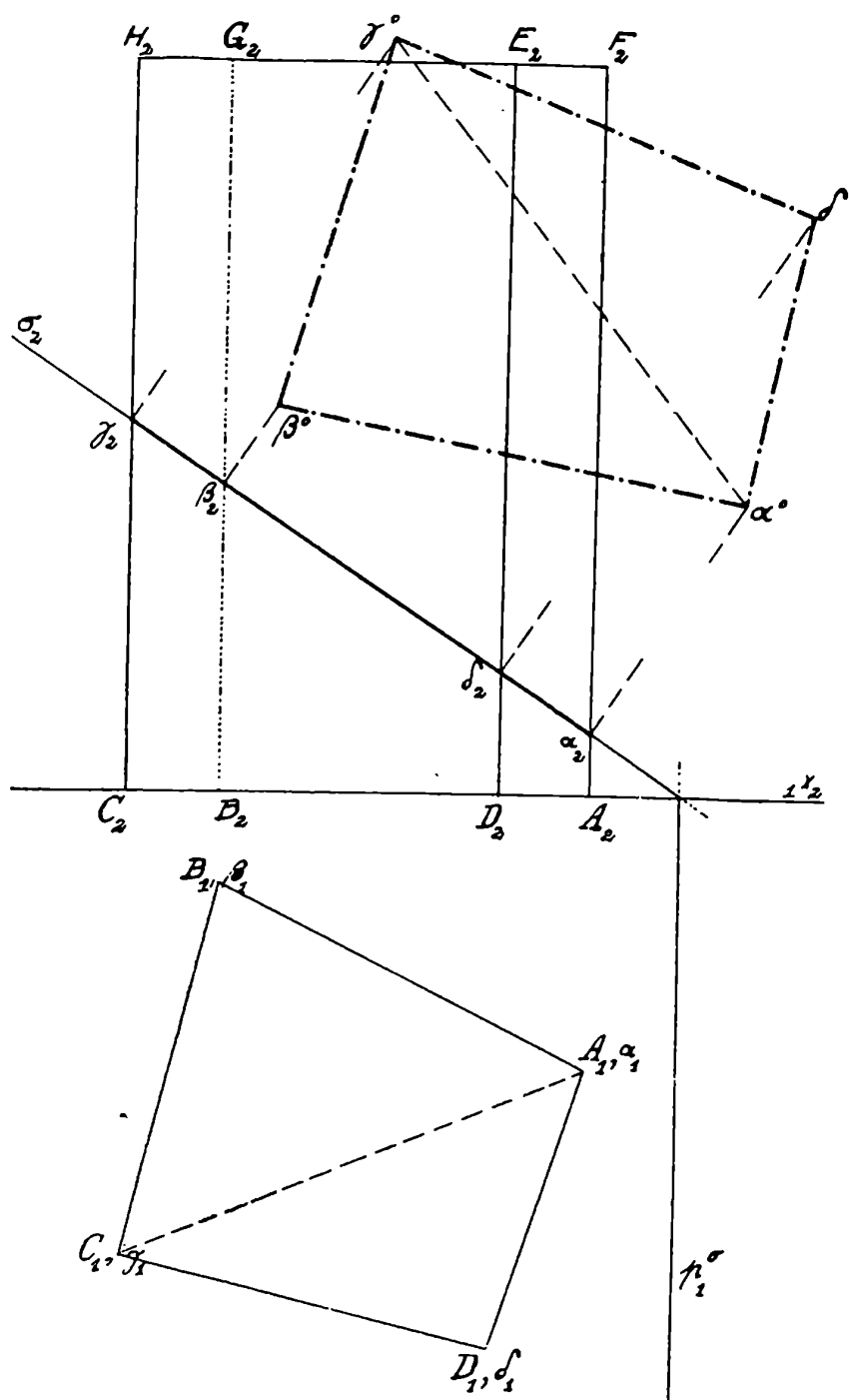
b) sestrojíme skutečné délky pobočných hran jehlanu a z těch a ze hran podstavných sestrojíme vedle sebe skutečné velikosti jednotlivých pobočných trojúhelníků, k nimž připojíme skutečnou velikost podstavy.

81. V šikmé projekci (libovolné) zobrazte pravidelný osmistěn v poloze průčelné, jehož osa jest AF , a jehož rohy byly odejmuty řezy, půlícími hrany. $A(0, 5, 0)$, $F(0, 5, 8)$.

Vznikne těleso omezené osmi shodnými stejnostrannými trojúhelníky a šesti shodnými čtverci (viz v obr. 19 čtverec $\beta\gamma\delta\varepsilon$).

82. Na osmistěnu úlohy předchozí zobrazte pravidelné šestiúhelníky. (Viz obr. 20.)

83. Sestrojte průsek přímého hranolu o podstavě $ABCD$ a výšce $v=8$ s rovinou $\sigma \perp v$, která pólí hranu CH , a jeho skuteč-



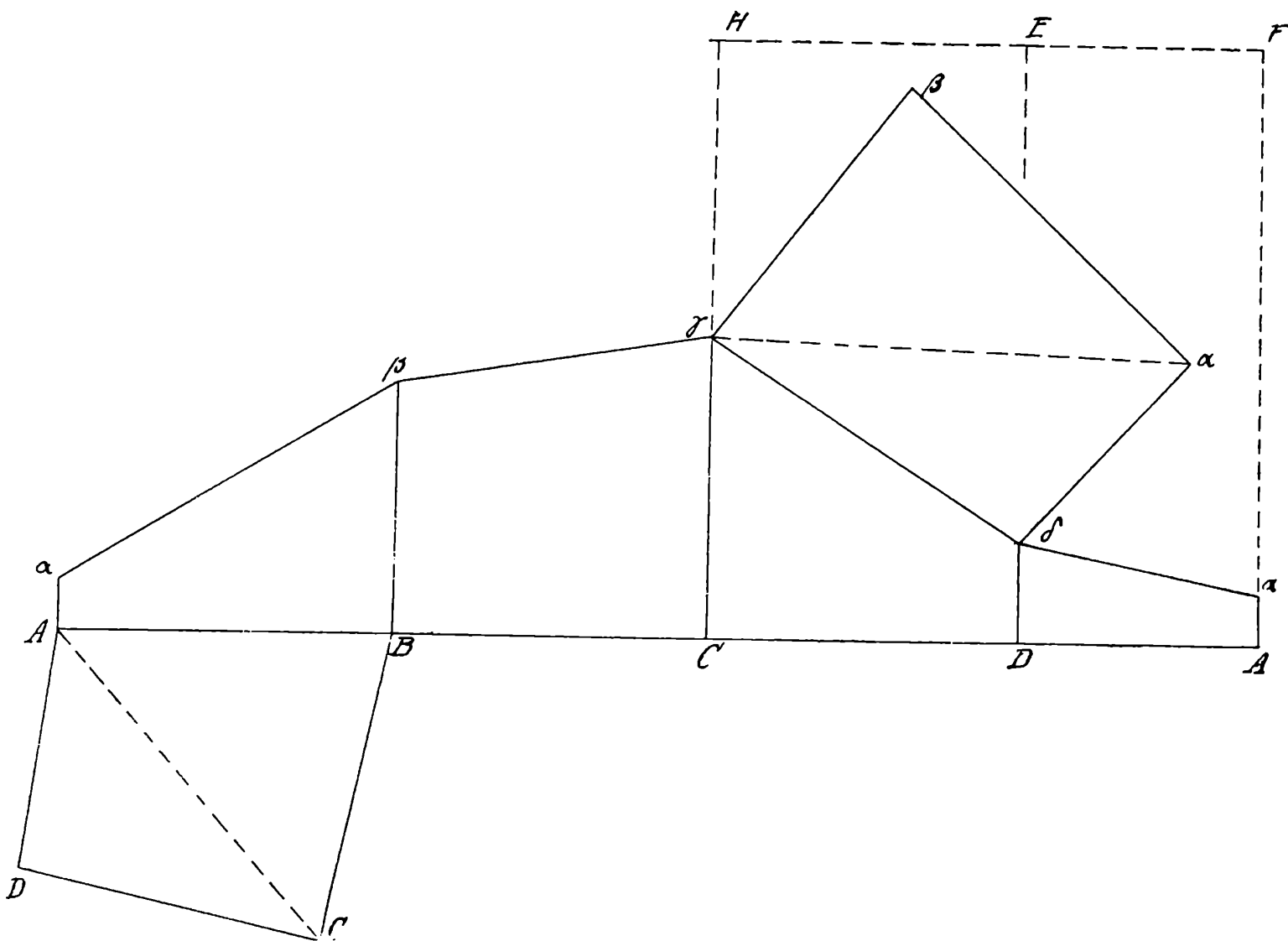
Obr. 37.

nou velikost. $A(3, 3, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(-2, 5, 0)$, $D(2, 6, 0)$, $\xi \sigma = 4$. (Obr. 37.)

Nárys průseku jest na σ_2 uvnitř nárysného obrysu hranolu, půdorysy vrcholů průseku jsou v půdorysech vrcholů pod-

stavy, $\alpha_1 \equiv A_1$. Skutečnou velikost průseku odvodíme, sklopíme-li rovinu σ do ν , při čemž $\alpha_2 \alpha^0 \perp \sigma_2$, $\alpha_2 \alpha^0 = \alpha_1 \dashv x_1 = y_\alpha$.

84. Zobrazte síť hranolu z úlohy předcházející. (Obr. 38.)



Obr. 38.

Poněvadž hrany pobočné svírají s podstavnými $\nless 90^\circ$, přejdou tyto po rozvinutí v úsečku, jejíž délka se rovná součtu jich skutečných velikostí, které odměříme z půdorysu. Nanese-me-li na kolmice k úsečce $\underline{AA^0}$ v bodech $A, B, \dots A^0$ délky po-bočných hran z nárysu ($\underline{AF} = \underline{A_2F_2}$) a obdržené body spojí-me, sestrojili jsme síť pláště hranolu. Vneseme-li na po-bočné hrany úseky, jež vytvořila na nich rovina sečná, $\underline{A\alpha} =$

$= \overline{A_2 \alpha_2}$, atd., obdržíme v síti pláště vrcholy řezu. Rozdělíme mnohoúhelníky $A_1 B_1 C_1 D_1$, $\alpha^0 \beta^0 \gamma^0 \delta^0$ úhlopříčkami $A_1 C_1$, $\alpha^0 \gamma^0$ na trojúhelníky, které přeneseme v příslušném pořadí k síti pláště a obdržíme síť zkomoleného jehlanu.

85. Pravidelný hranol sedmiboký s podstavou v ν protněte rovinou σ . $S(0, 0, 5)$, $A(-3, 0, 1)$, $\nu = 10$; $\sigma(8, 120^\circ, 135^\circ)$.

Nárys řezu jest v nárysu podstavy ($\alpha_2 \equiv A_2$, $\beta_2 \equiv B_2$, atd.); půdorysy vrcholů řezu odvodíme buď a) pomocí přímek stoposměrných ($A_2 \dots n_2 \parallel n_2^\sigma$, $n_2 \times x_2 \equiv 1$; bodem 1 na p_1^σ vedeme $n_1 \parallel x_1$, $n_1 \times A_1 \alpha_1 \equiv \alpha_1$), nebo b) pomocí druhých stopníků stran řezu ($\alpha_2 \beta_2 \times n_2^\sigma \equiv 2$, jeho půdorys na x_1 , $\alpha_1 2 \times B_1 \beta_1 \equiv \beta_1$).

86. Čtvercový kvádr stojící na π protněte rovinou, která prochází bodem M a osou x . $A(-4, 5, 0)$, $C(2, 2, 0)$, $\nu = 8$; $M(4, 3, 4)$.

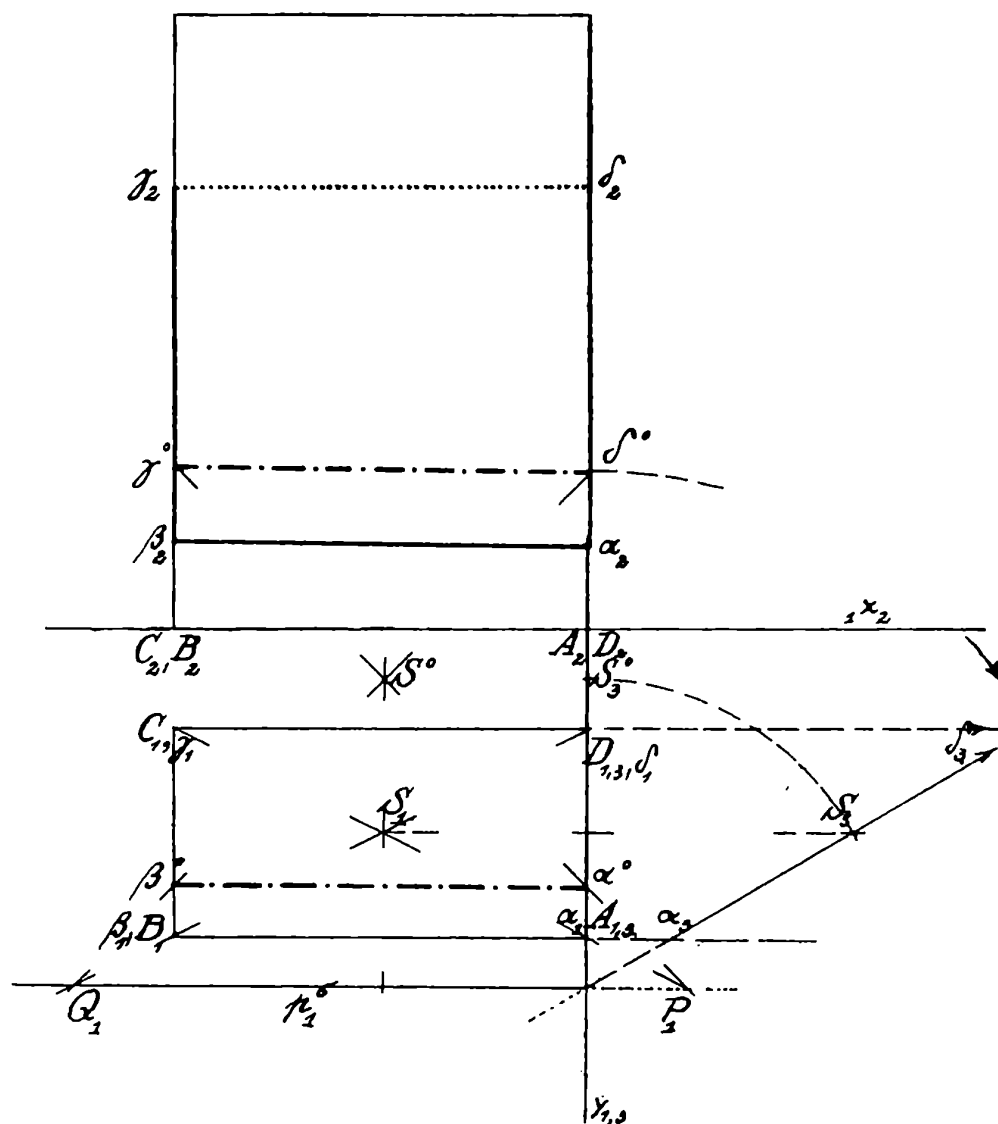
Bodem M proložíme III. hlavní průmětnu, již sdružíme s π . Do ní promítne se rovina (M, x) jako přímka $x_3 M_3$, a řez jako úsečka. Půdorys řezu jest ve čtverci $A_1 \dots D_1$, nárys jeho vrcholů obdržíme přenesením příslušných z -ových souřadnic.

87. Vyšetřte na pravoúhlém rovnoběžnostěnu (kvádru) rozměrů 2, 4, 6, stojícím v poloze průčelné nejmenší stěnou v π , řez čtvercový. (Obr. 39.)

Půdorys $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$ hledaného čtverce jest obdélník $A_1 B_1 C_1 D_1$, ve kterém $\sphericalangle \alpha_1 S_1 \beta_1$ jest průmětem úhlu pravého. Stopa sečné roviny $p_1^\sigma \parallel A_1 B_1$ (zvolená libovolně) jest osou affinity mezi $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$ a jeho sklopeným obrazem $\alpha^0 \beta^0 \gamma^0 \delta^0$, jehož střed S^0 odvodíme na $S_1 S^0 \perp p_1^\sigma$ a na půlkružnici nad průměrem $P_1 Q_1$, kde $P_1 \equiv A_1 C_1 \times p_1^\sigma$, $Q_1 \equiv B_1 D_1 \times p_1^\sigma$.

Otočíme-li $\alpha^0 \beta^0 \gamma^0 \delta^0$ zpět do prostoru, až vrcholy čtverce padnou na příslušné hrany kvádru, obdržíme polohu roviny σ . Otočení provedeme ve III. průmětně hlavní.

Jinak řešíme tuto úlohu v úkolu



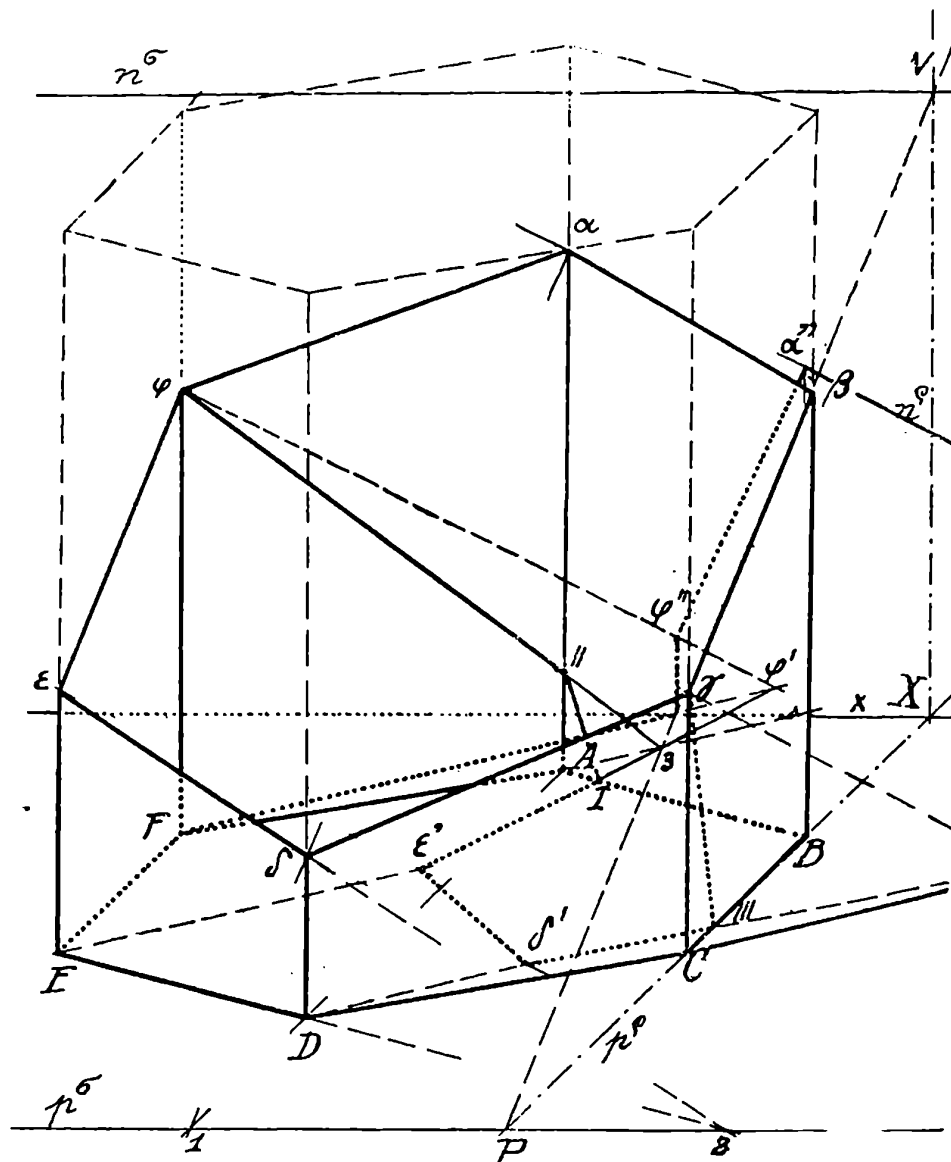
Obr. 39.

88. Kvádr s podstavou v π protněte ve čtverci rovinou σ , která jde bodem M . $A(-4, 3, 0)$, $B(0, 5, 0)$, $\overline{AD} = 2$, $v = 7$; $M(2, 2, 6)$.

Rovnoběžné řezy na kvádru (hranolu) jsou shodny.

Promítneme-li čtvercový řez, vedený hranou AB do III. průmětny, za kterou považujeme stěnu AD a δ , obdržíme

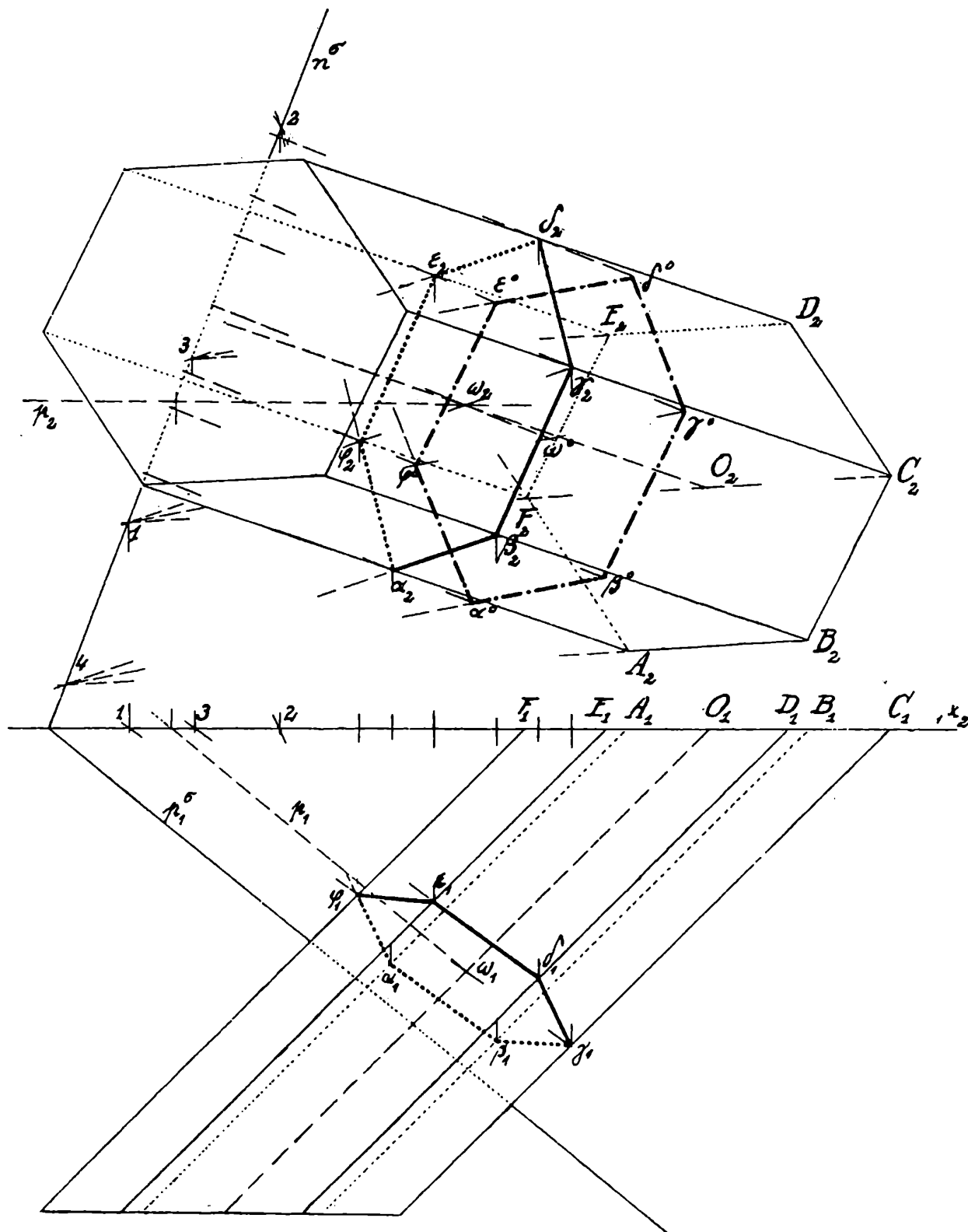
úsečku $B_3 \delta_3 = \overline{A_1 B_1}$. (Obr. 39. $\alpha_3 \delta_3 = A_1 B_1$.) Bodem M_2 vedeme $\sigma_3 \parallel B_3 \delta_3$. Poněvadž oblouk poloměru $A_1 B_1$ protne přímku $C_3 H_3$ dvakrát, obdržíme dva směry $B_3 \delta_3$, $B_3 \delta'_3$, čili na kvádru jsou dva systémy čtvercových řezů.



Obr. 40.

89. V šikmé projekci ($135^\circ, \frac{1}{2}$) zobrazte řez roviny $\sigma \parallel x$ s pláštěm pravidelného šestibokého hranolu s podstavou v π . a) $\sigma(\infty, 12, 8)$, $S(0, 5, 0)$, $a_6 = 4, v = 9$, hranol v poloze nárožné; b) $\sigma(\infty, 8, 6)$, $S(0, 5, 0)$, $a_6 = 3.5$, $v = 7$, hranol v poloze průčelné. (Obr. 40.)

Sestrojíme průsečnici roviny stěny $(BC...) \equiv \sigma$ s rovinou σ ; $p^\rho \equiv BC$, n^ρ jest kolmice k ose x v bodě $X \equiv x \times BC$. Spojíme-li stopníky $P \equiv BC \times p^\sigma$ a $N \equiv n^\rho \times n^\sigma$, určí průsečnice PN dva vrcholy průseku β, γ . Další vrchol δ obdržíme na



Obr. 41.

průsečnici $l \gamma \equiv \sigma \times (C D)$, kde $l \equiv C D \times p^\sigma$, atd. Poněvadž stejnohlé vrcholy řezu a podstavy jsou na rovnoběžných paprscích $A \alpha \parallel B \beta \parallel \dots$, a stejnohlé strany obou obrazců se protínají na pevné přímce $p^\sigma \equiv \sigma \times \pi$ ($B C \times \beta \gamma \equiv P$, $C D \times \gamma \delta \equiv l$), jest řez a podstava hranolu v **perspektivní affinitě**, jak bylo již zmíněno v poznámce k úl. 68.

Platí tedy: **Dva rovinné průseky hranolu jsou v affinitě, jejíž osou jest průsečnice rovin obou průseků, a paprsky jsou pobočné hrany hranolu.** Totéž platí o průmětech obou průseků.

K určení průseku roviny s hranolem stačí, známe-li stopu roviny sečné do roviny podstavy tělesa a jeden vrchol průseku.

90. Sestrojte průsek šikmého hranolu pětibokého o pravidelné podstavě v ν a roviny σ , která půlí jeho osu. Zobraďte skutečnou velikost průseku. $O(2, 0, 3)$, $A(1, 0, 1)$, $S(-4, 6, 5)$; $\sigma(-6, 2, 5, \zeta)$. (Obr. 41.)

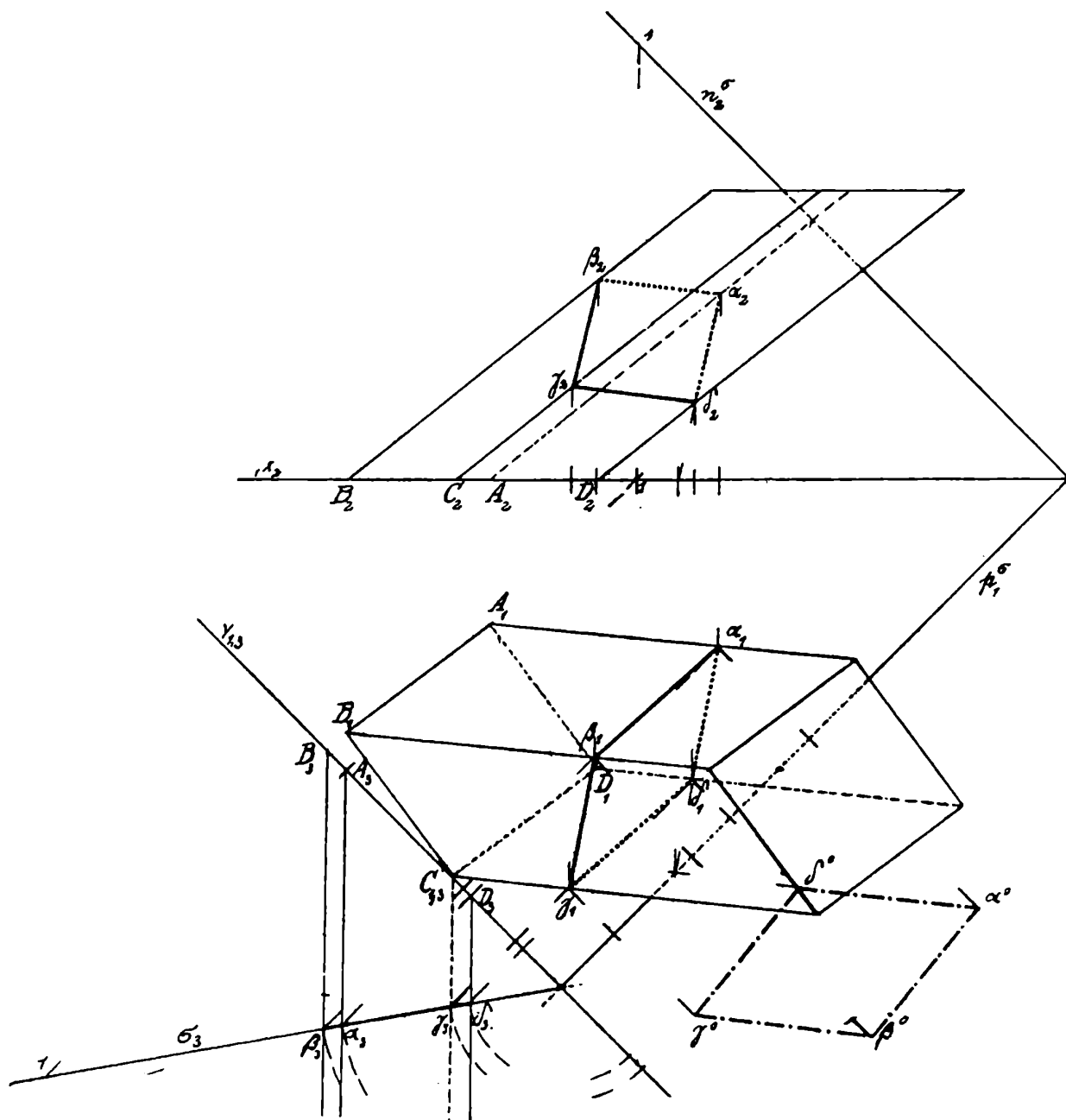
Zobrazíme n^σ pomocí první stoposměrné přímky $p \parallel p^\sigma$, jdoucí středem ω osy $\overline{OS}$, a tato jest osou affinity mezi $(A_2 \dots E_2)$ a $(\alpha_2 \dots \varepsilon_2)$; paprsky affinity mají směr $O_2 S_2$ (**aff. klinogonální.**) Prodloužená úhlopříčka $C_2 O_2$ protne osu affinity v bodě 1, a spojnice $l \omega$ protne průmět hrany $C_2 \gamma_2$ v bodě γ_2 . Půdorysy odvodíme ordinálami na příslušných půdorysech hran pobočných. Skutečnou velikost průseku odvodíme sklopením roviny σ do ν .

91. Šikmý hranol o čtvercové podstavě v π a pobočných hranách směru AF protněte rovinou σ . $B(-4, 3, 5, 0)$, $A(-2, 2, 0)$, $y_C > y_B$, $F(1, 4, 4)$; $\sigma(6, 6, 6)$. (Obr. 42.)

Položíme-li vrcholem C III. průmětnu $\mu \perp p^\sigma$, promítne se do ní rovina σ jako přímka, a řez co úsečka $\beta_3 \delta_3$. Ze třetích průmětů odvodíme první kolmicemi k $y_{1,3}$ a z těchto průměty

druhé. Sklopíme-li rovinu σ do π , což se provede ve III. průmětně, anebo pomocí affinity, obdržíme skutečnou velikost řezu.

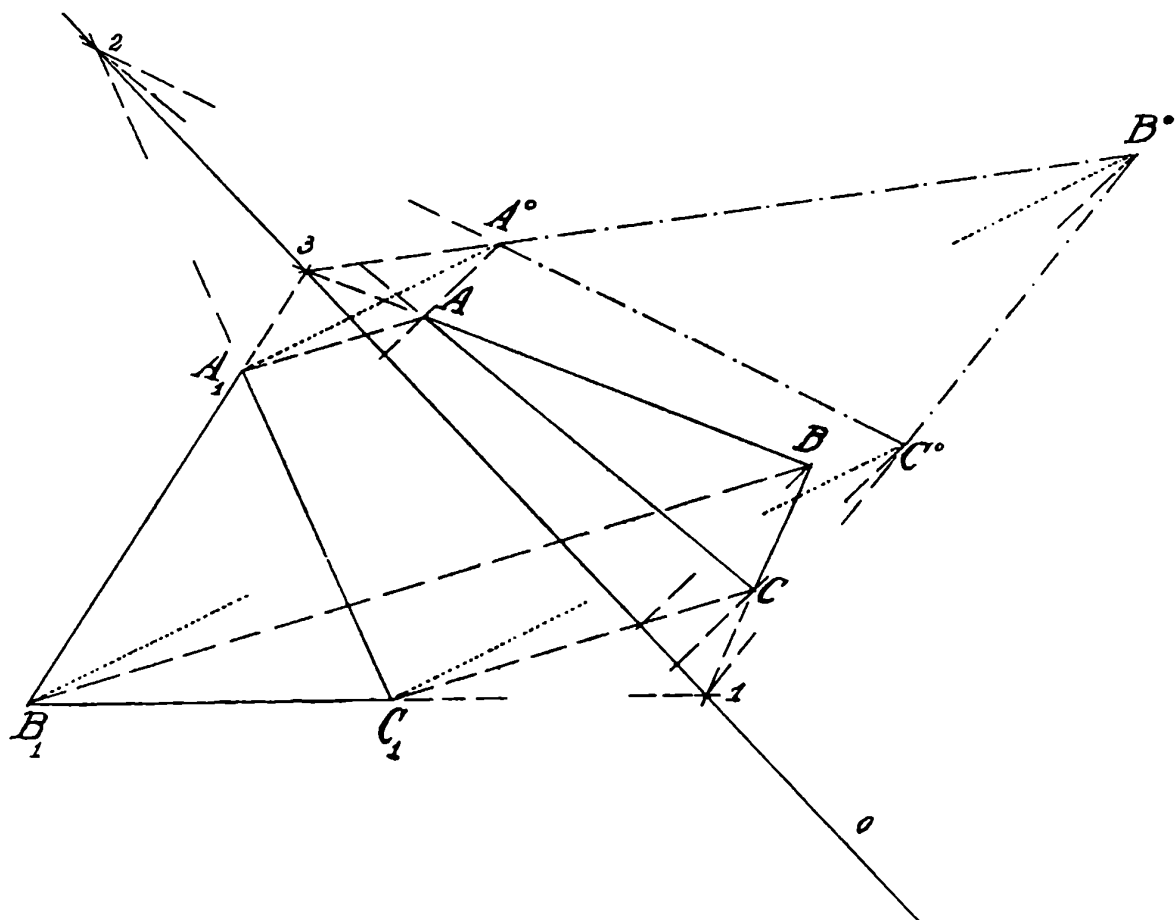
Víme, že půdorys mnohoúhelníku a jeho sklopený obraz jsou v affinním vztahu; rovněž půdorysy řezu a podstavy hra-



Obr. 42.

nolu jsou v affinitě, jejíž osa jest p^σ , táž jako v případě předchozím. Též podstava a sklopený obraz řezu jsou v affinitě, při ose p^σ .

Předpokládejme (obr. 43), že $\triangle ABC$ aff. $\triangle A_1 B_1 C_1$, dále že $\triangle ABC$ aff. $\triangle A^0 B^0 C^0$ při téže ose aff. o , pak také $\triangle A_1 B_1 C_1$ aff. $\triangle A^0 B^0 C^0$. Poněvadž sdružené strany obou obrazců se protínají v bodech osy o , stačí dokázat, že jsou



Obr. 43.

rovnoběžny paprsky $A_1 A^0 \parallel B_1 B^0 \parallel C_1 C^0$. Je-li $\triangle ABC$ aff. $\triangle A_1 B_1 C_1$ jest $AA_1 \parallel BB_1$, tedy

$$3 A_1 : 3 B_1 = 3 A : 3 B;$$

poněvadž $\triangle ABC$ aff. $\triangle A^0 B^0 C^0$, t. j. $AA^0 \parallel BB^0$ jest

$$3 A^0 : 3 B^0 = 3 A : 3 B.$$

Z toho plyne $3 A_1 : 3 B_1 = 3 A^0 : 3 B^0$, tedy

$$A_1 A^0 \parallel B_1 B^0.$$

Podobně dokážeme $A_1 A^0 \parallel C_1 C^0$, $B_1 B^0 \parallel C_1 C^0$ atd., tedy podstava hranolu a sklopený obraz řezu jsou ve vztahu affinním.

Považujeme-li čtverec $ABCD$ za šikmý průmět rovnoběžníku $\alpha\beta\gamma\delta$, jehož otočený obraz jest $\alpha^0\beta^0\gamma^0\delta^0$, platí věta:

Průmět (šikmý) rovinného útvaru a jeho obraz otočený do téže průmětny jsou ve vztahu affinním, který nazýváme rovinou affinitou. (Viz I., 19, 226, 227.)

92. Na šikmém hranolu o pravidelné 6-úhelníkové podstavě v ν najděte geom. místo bodů, jejichž spojnice s bodem M protíná přímku $n \equiv XN$. $A(1, 0, 0)$, $S(2, 0, 3)$, $H(-4, 6, 1)$, AH jest hrana pobočná; $M(0, 4, 0)$, $X(-4, 0, 0)$, $N(0, 0, 8)$.

Body X, M, N jest určena rovina σ , jejíž průsek s hranolem jest hledané geom. místo bodů. Průsek najdeme pomocí III. průmětny $\lambda \perp XN$.

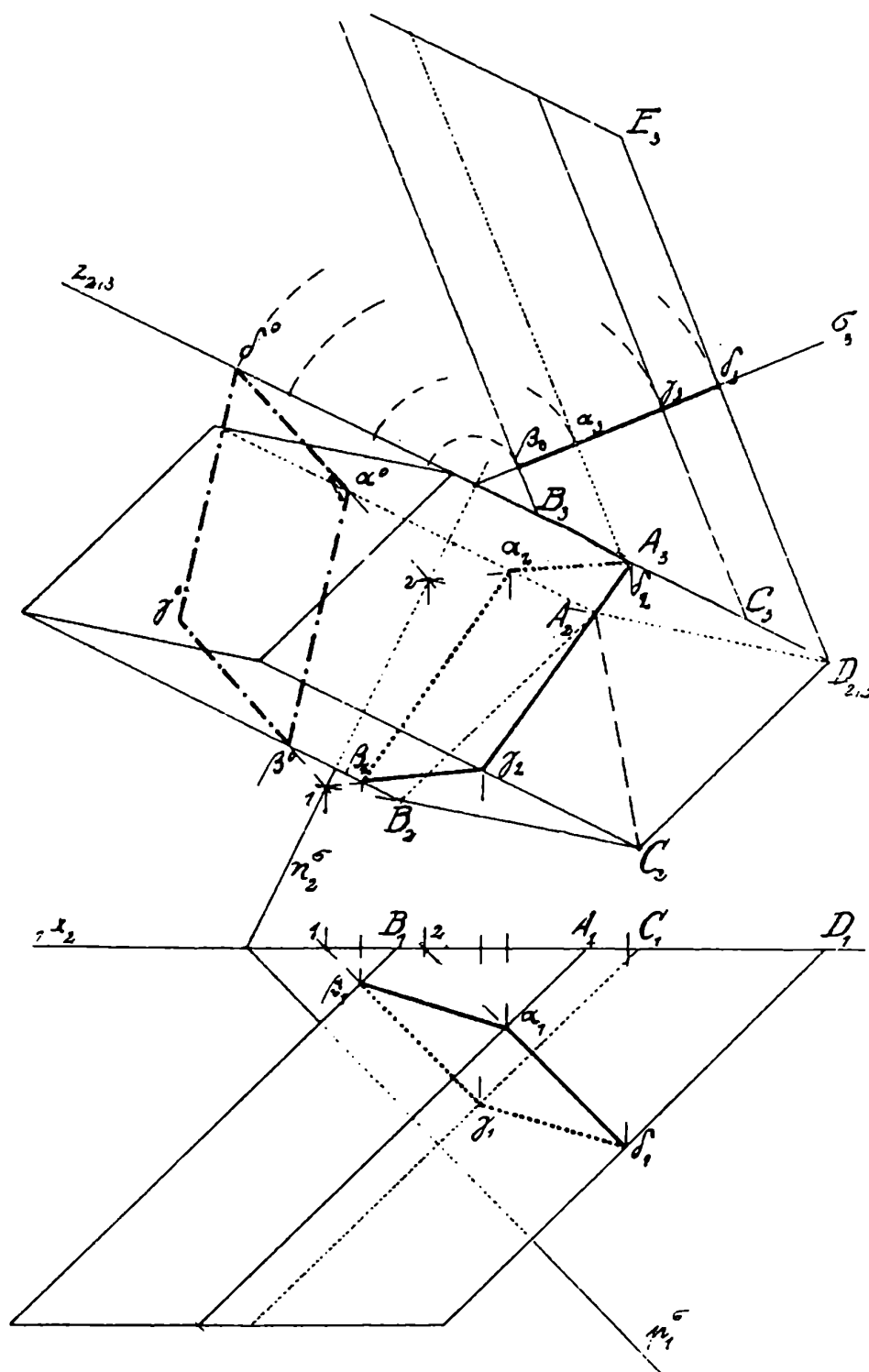
93. Na šikmém hranolu pětibokém, jehož pravidelná podstava jest v π , a bod α na hraně AG , najděte body, jejichž spojnice s bodem α protínají osu x . Sestrojte skutečnou velikost geom. místa. $O(0, 6, 0)$, $S(7, 4, 7)$, $\alpha(5, 7, 3)$.

Bodem α vedeme přímku $AG \parallel OS$; její půdorysný stopník jest vrchol A pětiúhelníka podstavného. Hledané body jsou na obvodu řezu hranolu s rovinou $\sigma \equiv (\alpha, x)$. Řez jest v affinitě s podstavou; osou affinity jest osa x , paprsky affinity jsou pobočné hrany hranolu. Nárys řezu jest v affinitě s půdorysem, při ose affinity x a paprscích $\perp x$.

94. Na šikmém hranolu šestibokém s pravidelnou podstavou v π , v poloze nárožné, který jest vrcholem H opřen o ν , najděte geom. místo bodů, jež jsou stejně vzdáleny od π a ϱ . $S(0, 7, 0)$, $O(5, 3, 7)$, $\varrho(3, 60^\circ, 120^\circ)$.

Poloměr kružnice opsané šestiúhelníku určíme z podmínky $OH = y_o = 3$. Body stejně vzdálené ode dvou rovin ϱ a π jsou

v rovině σ , která pŕlÍ jejich odchylku. Tato, jakoŕ i řez roviny σ stanovíme pomocí III. prŕmětny $\lambda \perp p^{\sigma_1}$, kde $p^{\sigma_1} \equiv p^{\sigma_1}$.



Obr. 44.

95. Sestrojte síť šikmého hranolu, jehoŕ podstavou jest rovnoběžník $ABCD$ v ν , a hrany pobočné mají směr DE . $A(2.5, 0, 3.5)$, $B(0.5, 0, 1.5)$, $C, D(5, 0, 3)$; $E(1, 4, 5)$. (Obr. 44).

Sít šikmého hranolu (rovnoběžnostěnu) **sestrojí se pomocí normálního řezu**, t. j. řezu rovinou σ kolmou k pobočným hranám hranolu. Tímto řezem rozdělíme hranol šikmý na dva hranoly přímé o společné základně $\alpha \beta \gamma \delta$, jejíž obvod při rozvinutí pláště přejde v přímku; k té jsou jednotlivé pobočné hrany kolmy.

Zvolíme-li libovolnou rovinu $\sigma \perp AF$ (napřed stopu do roviny podstavy, zde tedy $n^\sigma_2!$), sestrojíme třetí průmět řezu do III. průmětny $\lambda \equiv (E D E_2)$ a odvodíme skutečnou velikost řezu sklopením do ν . Na libovolnou přímku nanese skutečné délky stran průseku (obr. 45) a na kolmice v koncových bodech jednotlivých úsečků délky úseků, které vytvořila rovina σ na pobočných hranách; tyto jsou ve skutečné velikosti ve III. průmětu, $\alpha A = \alpha_3 A_3$, $AF = A_3 F_3$. Podstavy hranolu, po případě řez jako podstavu zkomoleného tělesa, připojíme, rozdělením jejich skutečné velikosti na trojúhelníky úhlopříčkami, jež vycházejí z téhož vrcholu.

96. Sestrojte sít trobokého hranolu s pravidelnou podstavou v π , jehož hranové úhly při vrcholu A jsou dány. $A(2, 4, 0)$, $B(0, 7, 0)$, $y_C > y_A$, $\sphericalangle EAB = 120^\circ$, $\sphericalangle EAC = 75^\circ$, $\overline{AE} = 8$.

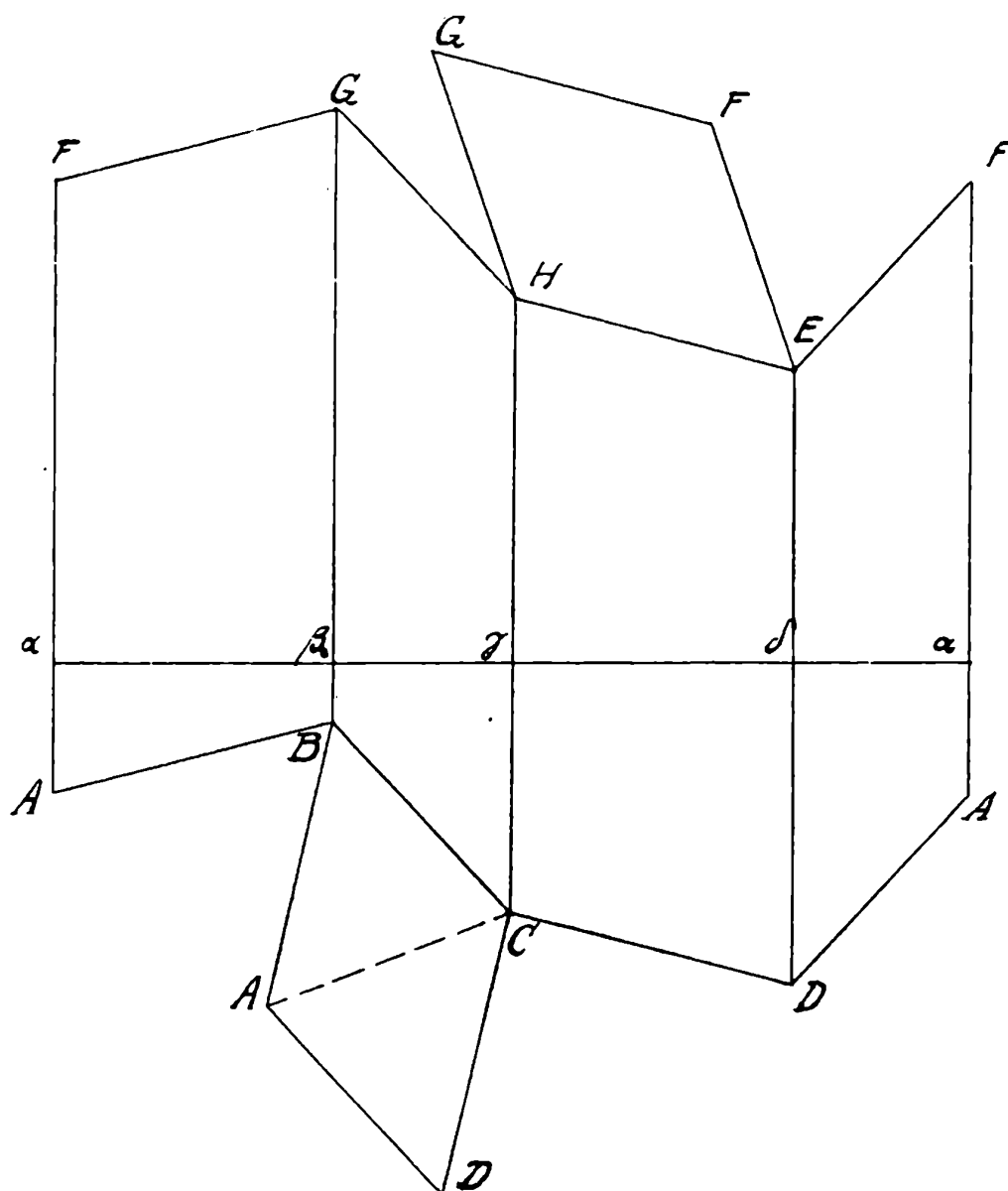
Hranol sestrojíme podle úl. 25, vyšetříme na něm normální průsek a postupujeme jako v úloze předchozí.

97. Sestrojte sít šikmého hranolu, jehož pravidelná podstava jest v ν . $O(0, 0, 3.5)$, $A(-2, 0, 2)$, $S(5, 5, 6.5)$.

Řešíme pomocí normálního řezu, vedeného na př. vrcholem D , který se ve III. průmětně $(GF G_1)$ jeví jako úsečka.

98. Trojúhelník $\alpha \beta \gamma$ jest průsek roviny s hranolem, jehož podstavou jest rovnostranný $\triangle ABC$: a) v π , $\alpha(-5.5, 4, 4.5)$, $\beta(-6, 7,$

8·5), γ (—1, 8, 2·5); b) v ν , α (3, 2, 7), β (5, 4, 2), γ (—5, 8, 5); c) v π , α (—2·5, 3·5, 3), β (0, 8·5, 1·5), γ (2, 4·5, 6·5); d) v π , α (0, 4, 1·5), β (4·5, 5·5, 3), γ (2, 0, 7). V ý š k u hranolu volte libovolně.



Obr. 45.

a) Vyhledáme $p^{(\alpha \beta \gamma)}$ spojením prvních stopníků P, Q přímkou $\beta \alpha$, $\beta \gamma$; stopa tato je osou affinního vztahu mezi $\triangle \alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ a $\triangle A_1 B_1 C_1$, kde paprsky affinity jsou pobočné hrany hledaného hranolu. V této affinitě odpovídá $\sphericalangle \alpha \beta \gamma$ úhel 60° při vrcholu B_1 , který jest na oblouku kruhovém nad $\overline{PQ}$ s úhlem středo-

vým 120° . Je-li $\beta_1 \tau_1$ těžnice $\triangle \alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, přísluší $\sphericalangle \tau_1 \beta_1 \gamma_1$ úhel $30^\circ = \sphericalangle T_1 B_1 C_1$, takže B_1 jest také na oblouku kruhovém, jehož tětiva na $p^{(\alpha \beta \gamma)}$ jest $P_1 R_1$ (R_1 jest stopník těžnice $\beta \tau$) a příslušný středový úhel $= 60^\circ$. Průsečník obou kruhových oblouků jest bod B_1 a $\beta_1 B_1$ směr půdorysu hran. (Viz I., úl. 226, obr. 121.)

99. Sestrojiti šikmý hranol se čtvercovou podstavou v π , je-li dán rovnoběžník $\alpha \beta \gamma \delta$ na jeho plášti: a) $\alpha (-1, 10, 9)$, $\beta, \gamma (-2, 6, 2)$, $\delta (-4, 7, 4)$; b) $\alpha (-2, 6, 2)$, $\beta (3, 8, 4)$, $\gamma, \delta (-4, 7, 4)$.

Řeší se podobně jako úloha předchozí (ostatně viz I., 227, obr. 122).

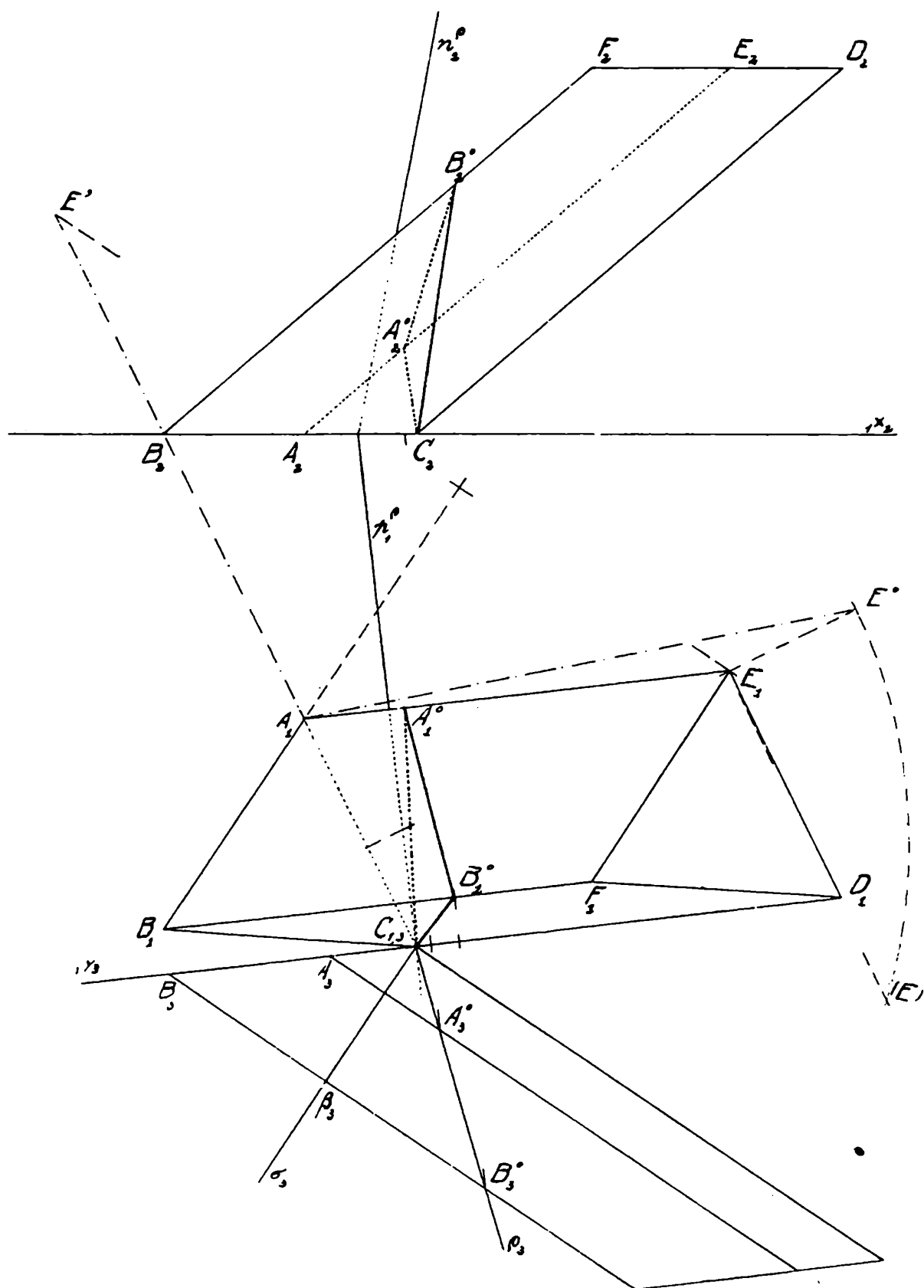
100. Na hranolu úlohy 96. najděte stejnostranný trojúhelník, který má s podstavou společný vrchol C. (Obr. 46.)

Vedle průseků rovnoběžných s podstavou jest na hranolu šikmém druhý systém průseků s podstavou shodných, avšak k ní nakloněných, tak zv. **řezy antiparalelní**.

Rovina antiparalelního řezu svírá s rovinou řezu normálního též úhel jak tato s podstavou, jenže smyslu protivného, jinými slovy: řez antiparalelní je odchýlen od podstavy o úhel, který se rovná dvojnásobku odchylky řezu normálního od roviny podstavy. Jsou tedy podstava hranolu a libovolný antiparalelní řez na něm položený symetricky podle roviny řezu normálního, který jest veden jejich průsečnicí.

V dané úloze jde stopa normálního řezu bodem C_1 , ve III. průmětu obdržíme její odchylku od roviny podstavy v $\sphericalangle B_3 C_3 \beta_3$, tento úhel přeneseme ještě jednou, čili nanese $\overline{\beta_3 B^0_3} = \overline{\beta_3 B_3}$ a $B^0_3 C_3 \equiv \varphi_3$ jest 3. průmět roviny φ , která seče hranol v hledaném trojúhelníku, shodném s podstavou.

101. Protněte hranol šikmý, jehož podstavou jest pravidelný pětiúhelník v π ,



Obr. 46.

rovinou σ v pravidelném pětiúhelníku. $A(-6, 3.5, 0)$, $S(-3, 4, 0)$, střed horní podstavu $O(7, 7.5, 8)$; $\xi_\sigma = 2$.

Bodem $X(2, 0, 0)$ vedeme rovinu $\rho \perp SO$, vyšetříme její odchylku α_ρ pomocí III. průmětny $(HBH_1) \perp \pi$, a rovina hledaného řezu má odchylku $\alpha_\sigma = 2\alpha_\rho$.

102. Na šikmém hranolu, jehož podstavou jest pravidelný šestiúhelník v π , najděte pravidelný šestiúhelník, jehož rovina protíná osu x ve vzdálenosti 5 od počátku souřadnic, a sestrojte skutečnou velikost průseku. $A(-2, 2, 0)$, $S(-3, 4.5, 0)$, $H(2, 5, 7)$, AH jest hrana pobočná.

Řešíme jako úlohu předcházející a sestrojením skutečné velikosti průseku se přesvědčíme, že týž je shodný s podstavou.

103. Pravidelný šestiúhelník, jehož strana AB jest v π , jest antiparalelním řezem šikmého hranolu s podstavou v π . Sestrojte hranol, je-li hrana horní podstavu ED a) $S(0, 4.2, 3)$, $A(-1.6, 5.6, 0)$, $y_B < y_S$; b) podstava a hrana AB jsou v ν , $S(0, 5, 7)$, $A(2, 0, 11)$, $x_B > x_A$.

Pravidelný šestiúhelník sestrojíme podle I. (200, obr. 104). Pobočné hrany hranolu jsou kolmé na rovinu, která pólí odchylku roviny šestiúhelníka a) od půdorysny, b) od nárysny. Úloha je dvojznačná.

104. Protněte trojboký hranol rovinou σ v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku. $A(4, 7, 0)$, $B(6.5, 3.5, 0)$, $C(8, 5, 0)$, $\alpha(-4, 4.5, 4)$, $\sigma(9, 135^\circ, ?)$.

Hledaný řez a jeho sklopený obraz jsou v affinitě s podstavou hranolu, jejíž osou jest p_1^σ . Má-li býti ve vrcholu β^0 sklopeného obrazce pravý úhel, musí ležeti β^0 na půlkružnici nad průměrem $\overline{I II}$, kde $I \equiv A_1 B_1 \times p_1^\sigma$, $II \equiv B_1 C_1 \times p_1^\sigma$; má-li býti $\triangle \alpha^0 \beta^0 \gamma^0$ rovnoramenný, musí těžnice jeho t půliti $\sphericalangle 90^\circ$, tedy β^0 bude na kruhovém oblouku, jehož středový úhel je 90° , a tětivou $\overline{II IV}$, kde $IV \equiv p_1^\sigma \times B_1 T_1$, $\overline{A_1 T_1} = \overline{T_1 C_1}$. Spojnice $B_1 \beta^0$ jest směr rovinné affinity mezi $A_1 B_1 C_1$ a $\alpha^0 \beta^0 \gamma^0$; ze sklopeného obrazu obdržíme půdorys řezu zpětným otočením.

105. Pravidelný osmistěn úlohy 35. protněte ve čtverci, jehož obsah $= \frac{a^2}{4}$, když a jest délka hrany osmistěnu.

Čtverců takových jest šest, vždy po dvou jsou rovnoběžny s úhlopříčným řezem osmistěnu a půlí hrany, vycházející z vrcholu protějšího tomuto (viz v obr. 19 čtverec $\beta \gamma \delta \varepsilon$).

106. Pravidelný osmistěn úlohy 36. protněte v pravidelném šestiúhelníku.

Na pravidelném osmistěnu jsou čtyři páry stěn, jež leží v rovnoběžných rovinách. Každý pár stěn obsahuje šest hran tělesa, a zbývajících šest hran tvoří prostorový šestiúhelník. Rovina, která hrany tohoto prostorového šestiúhelníka půlí, protíná osmistěn v pravidelném šestiúhelníku. (Obr. 20.)

107. Na krychli úlohy 46. zobrazte pravidelný šestiúhelník.

Podle úlohy 44. každá rovina, vedená středem krychle kolmo k její ose III. řádu, protíná těleso v pravidelném šestiúhelníku. Řezy takové jsou tedy čtyři, a v obr. 25. jest zobrazen řez kolmý k ose CF .

108. Protněte krychli z úlohy 41. rovinou $\parallel \pi$ ve stejnostranném trojúhelníku, jehož obsah jest $= \frac{2\sqrt{3}}{9}$ stěny krychle.

Rovina, která spojuje koncové body hran z téhož vrcholu H vycházejících, protíná krychli v $\triangle CEG$ stejnostranném, jehož obsah jest $= \frac{a^2}{2} \sqrt{3}$, když a jest délka hrany krychle. Vedeme-li rovinu $\sigma \parallel (CEG)$, aby $\overline{C\gamma} = \frac{2}{3} \overline{CH}$, protne tato krychli v trojúhelníku $\gamma\epsilon\delta$ stejnostranném, žádaného obsahu. (Obr. 22.)

V. Osvětlení tělesa; stín přímky na těleso a osvětlení skupin.

109. Zobrazte osvětlení*) pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou v π a přímky $a \equiv MN$. $A(1, 2, 0)$, $S(3.5, 3, 0)$, $v = 7$; $M(-2, 2, 3.5)$, $N(2, 6, 4)$. (Obr. 47.)

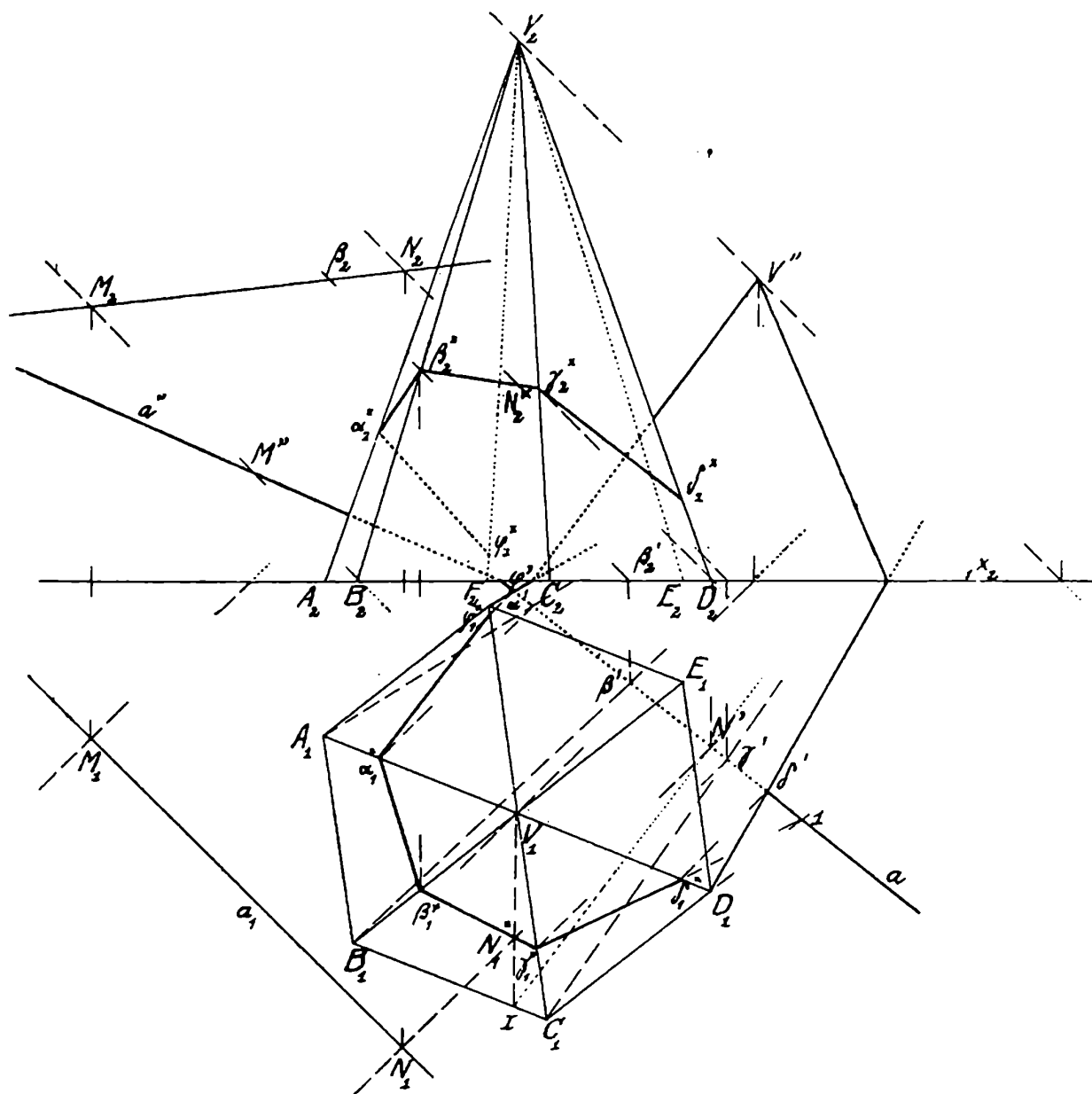
Sestrojíme stín vrcholu jehlanu a z něho vedeme styčné paprsky ke stínu podstavu (zde přímo k podstavě, ježto její stín je s ní ztotožněn). Tím jsme sestrojili vržený stín jehlanu na π , jehož mez se skládá z úseček $V'A'$, $V'C'$ na styčných paprscích od V' k příslušným vrcholům stínu podstavu a z vnějšího obvodu tohoto stínu. Ze stínu vrženého usuzujeme, že mezí stínu vlastního na plášti jehlanu jsou hrany AV , CV . Ježto bod V' padl do záporné části půdorysny, nutno vyšetřiti stín V'' vrcholu V na nárysnu; ten spojíme s průsečníky osy x s paprsky styčnými $V'A'$, $V'C'$.

Vržený stín přímky a na těleso jest část mnohoúhelníka (na osvětlených stěnách), **v němž povrch tělesa jest prozatím světelnou rovinou (aa')**, která jde danou přímkou rovnoběžně se světelným paprskem. Jednotlivé vrcholy tohoto stínu na hranách tělesa vyhledáváme **zpětnými paprsky** z průsečníků vržených stínů těchto hran s vrženým stínem přímky (I., 217, 218).

*) Není-li jinak udáno, předpokládá se osvětlení paralelní paprsky obvyklého směru $s : \sphericalangle s_1 x_1 = \sphericalangle s_2 x_2 = 135^\circ$.

Poněvadž sestavení bodu $\beta_1^\times$ je nepřesné, odvodíme napřed $\beta_2^\times$ nárysem zpětného paprsku $\beta_2' \beta_2^\times$. Podobně $\gamma_2^\times$ a $\varphi_2^\times$.

Vržený stín přímky na jehlan jest v kollineaci s podstavou,



Obr. 47.

která nám pomůže zobraziti přesně na př. stranu $\gamma_1^\times \delta_1^\times$, nebo $\alpha_2^\times \beta_2^\times$ vrženého stínu. Vržený stín $N^\times$ obdržíme jako průsečník světelného paprsku NN' s površkou νV , jejíž stín $\nu V'$ prochází bodem N' .

Poznámka: **Styčnými paprsky** nazýváme přímky, které

s obvodem mnohoúhelníka mají společný pouze jeden bod (vrchol).

110. Zobrazte osvětlení pravidelného šestibokého jehlanu, jehož vrchol jest v π , a základna s π rovnoběžná, a přímky $a \equiv AX$. $A(-2, 7, 7)$, $C(5, 4.5, 7)$, $X(-6, 0, 0)$.

Vržený stín podstavy je šestiúhelník s ní shodný (I., 220), stín vrcholu $V' \equiv V_1$. Stín přímky $a' \equiv XA'$. Z průsečíků vržených stínů hran a přímky sestrojíme stíny na hranách paprsky zpětnými.

111. Sestrojte osvětlení jehlanu z úlohy 11. (Obr. 10.)

Vyšetříme půdorysné, a pokud toho třeba, nárysné stopníky světelných paprsků jednotlivých vrcholů jehlanu, jež příslušně spojíme. Z obrysu vrženého stínu usuzujeme na mez stínu vlastního podle věty:

Mez vrženého stínu je vrženým stínem meze stínu vlastního.

112. V šikmé projekci sestrojte osvětlení skupiny z úlohy 110.

113. V šikmém promítání ($135^\circ, \frac{1}{2}$) sestrojte vržený stín úsečky $\overline{MN}$ na pravidelný šestiboký jehlan s hvězdovitou podstavou v π . $A(3, 2, 0)$, $S(3, 5.5, 0)$, $v = 7$; $M(-3, 3, 3)$, $N(-6.5, 9.5, 6)$.

Řešíme jako úlohu předchozí, jenže musíme dbáti toho, že některé hrany tělesa vrchají stíny na osvětlené stěny jeho.

114. V šikmé projekci ($150^\circ, \frac{1}{2}$) zobrazte stín přímky $a \equiv MN$ na pravidelný šestiboký jehlan s podstavou v π . a) $A(-0.5, 7.5,$

0), $D(0.5, 2, 0)$, $v = 8$; $M(2.5, 13, 7)$, $N(-5, 3, 3)$; b) $A(-1, 6.5, 0)$, $V(0, 3.5, 6.5)$; $M(1.5, 10, 6.5)$, $N(-5.5, 2, 3)$.

115. V šikmé projekci (135° , $\frac{1}{2}$) zobrazte vržený stín přímky $a \equiv RQ$ na pravidelný pětiboký jehlan s hvězdovitou podstavou v π . $A(4, 9, 0)$, $V(4, 5, 8)$; $R(5.5, 14, 7)$, $Q(-2.5, 2.5, 2.5)$.

116. Zobrazte osvětlení jehlanu z úl. 15.

117. Zobrazte centrálné osvětlení šikmého jehlanu z úlohy 17. $S(0, 0, 9)$.

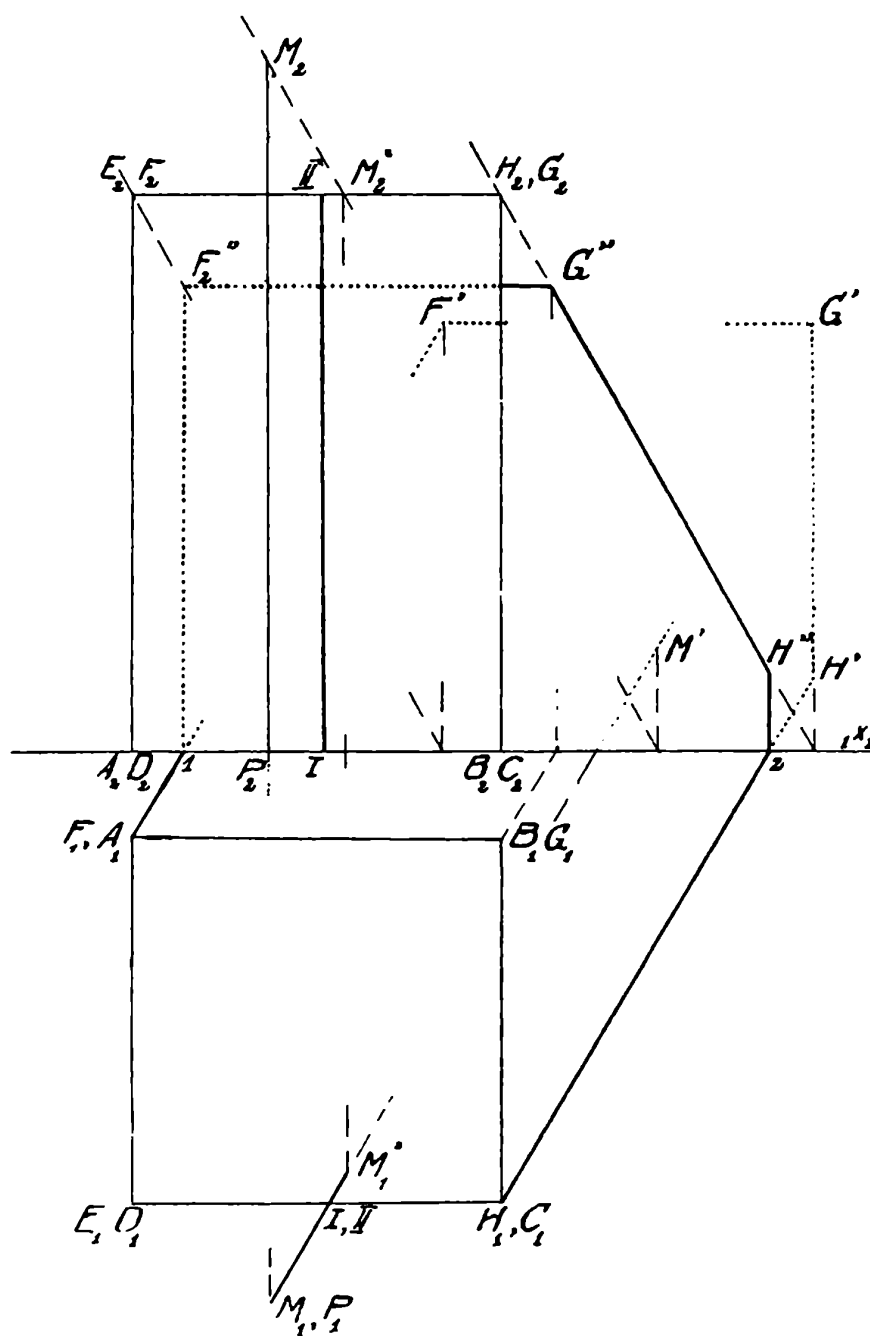
Vrcholový paprsek SV protne rovinu podstavy π v bodě V' , a styčné paprsky, vedené z něho k podstavě, určí mez vrženého stínu na π .

118. Zobrazte osvětlení úsečky $MP \perp \pi$ a kvádru, který stojí na π v poloze průčelné, dán-li jeho vrchol A , délka strany čtverce podstavného $\overline{AB} = 4$, výška $v = 6$; směr paprsků s. $A(0, 1, 0)$, $M(1.5, 6, 7.5)$, $\sphericalangle s_1 x_1 = 120^\circ$, $\sphericalangle s_2 x_2 = 120^\circ$. (Obr. 48.)

Vyšetříme stíny obou podstav, $A'B'C'D' \equiv A_1B_1C_1D_1$, $E'F'G'H' \cong E_1F_1G_1H_1$ a k nim vedeme vnější paprsky styčné A_1F' , C_1H' , které omezují spolu s vnějšími stranami vržených stínů podstav vržený stín kvádru na π . Pak vyšetříme druhé vržené stíny F'' , G'' oněch vrcholů, jejichž vržené stíny prvé F' , G' padly do $-\pi$; tyto spojíme navzájem a s průsečníky osy x s obrysem vrženého stínu na π , t. j. $1 \equiv A_1F' \times x$, $2 \equiv C_1H' \times x$. Obrysem stínu vlastního na tělese je prostorový mnohoúhelník $ADCHGF A$.

Stín úsečky MP jde od bodu P po půdorysně po hranu CD , v bodu I^* se láme a jde svisle po stěně $CDEH$, v bodu II^* se láme, jde po horní podstavě a končí v M^* .

Na této úloze možno si zopakovati věty, odvozené pro šikmé promítání (I., str. 157, bod 1. až 5.), píšeme-li místo: šikmý průmět — stín vržený.



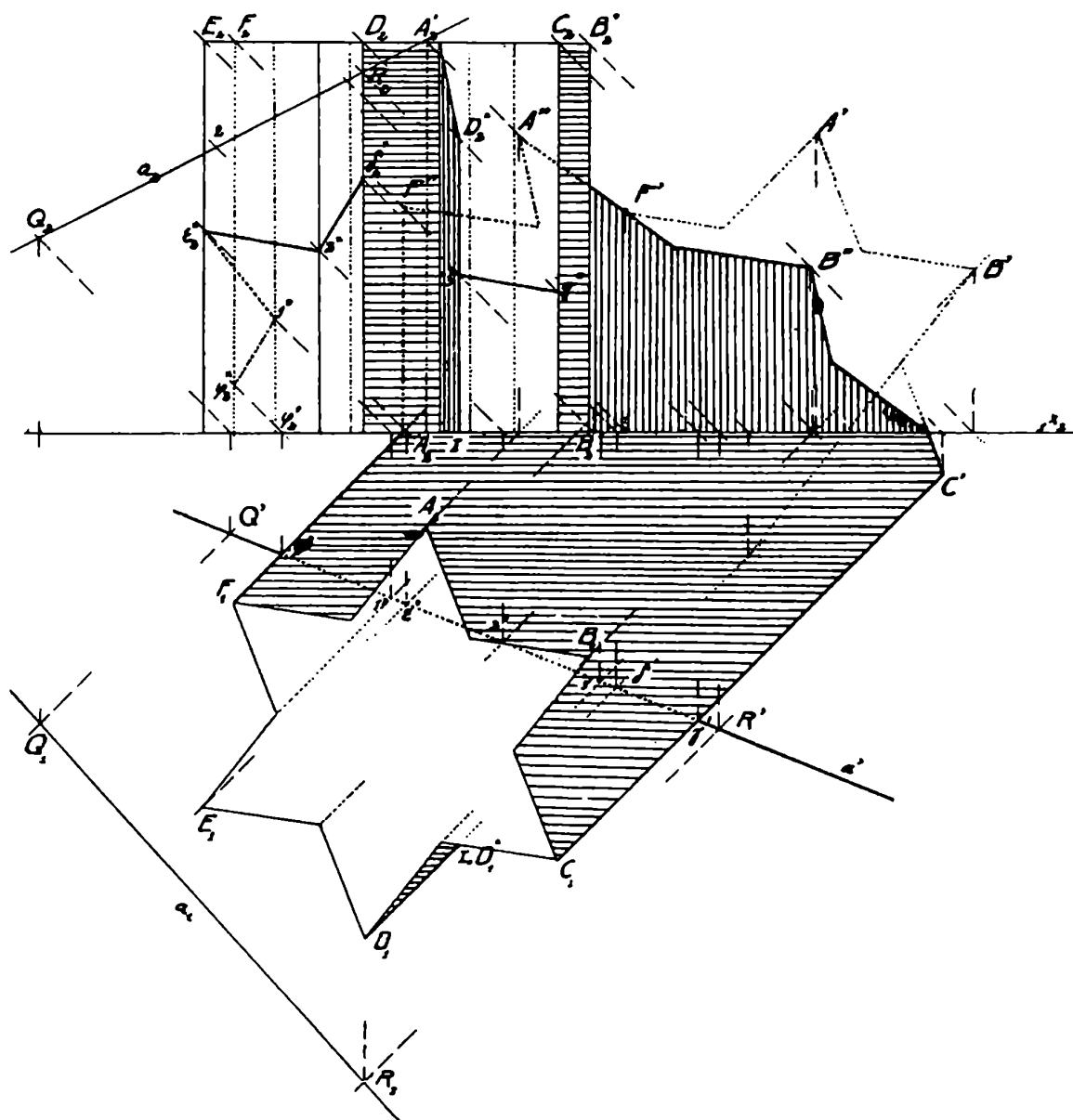
Obr. 48.

119. Zobraďte osvětlení trojbokého šikmého hranolu z úlohy 25.

Vyšetříme stín horní podstavy na ν , vedeme vnější styčné paprsky k němu a k podstavě spodní.

120. Zobrazte osvětlení šikmého hranolu z úlohy 26.

Vyšetříme vržený stín stěny $CD\delta\gamma$ a vnější styčné paprsky k němu a ke stěně $AB\beta\alpha$. (Obr. 17.)



Obr. 49.

121. Zobrazte osvětlení klence z úlohy 27.

122. Zobrazte osvětlení kváдру z úlohy 19. $s : \sphericalangle s_1 x_1 = 150^\circ, \sphericalangle s_2 x_2 = 120^\circ$.

Vržený stín kvádrů skládá se z vrženého stínu na rovinu ϱ a ze stínu vrženého na π . Vržený stín na rovinu podstavu ϱ vyšetříme, když najdeme stín vrcholu horní podstavu A^1 na ϱ jako průsečík světelného paprsku bodu A^1 s rovinou ϱ , $A^{1x} \equiv s^{A^1} \times \varrho$. Stín hrany AA^1 pro rovinu ϱ jest AA^{1x} a láme se na stopě p_1^σ do bodu $A^{1'}$, který jest stínem bodu A^1 na π .

123. Zobrazte vržený stín přímky $a = QR$ na přímý hranol s pravidelnou hvězdovitou podstavou šestiúhelníkovou v π . $Q(-4, 4.5, 3)$, $R(1, 10, 5.5)$; $A(2, 1.5, 0)$, $B(4.5, 3.5, 0)$. (Obr. 49.)

Sestrojíme vržený stín horní podstavu hranolu na π (po případě na ν), vedeme vnější styčné paprsky k němu a ke stínu spodní podstavu, který jest s ní totožný a určíme stíny hran, jež jsou částí meze vlastního stínu, na osvětlené stěny hranolu. Potom vyšetříme vržený stín přímky a , $a' \equiv Q'R'$ a z průsečíků vržených stínů hran pobočných s přímkou a' vedeme zpětné paprsky k dotýčným hranám; tak obdržíme vrcholy vrženého stínu přímky na hranol. Vržený stín přímky na hranol jest část mnohoúhelníka, v němž světelná rovina přímky (a, a') protne hranol (viz úl. 109).

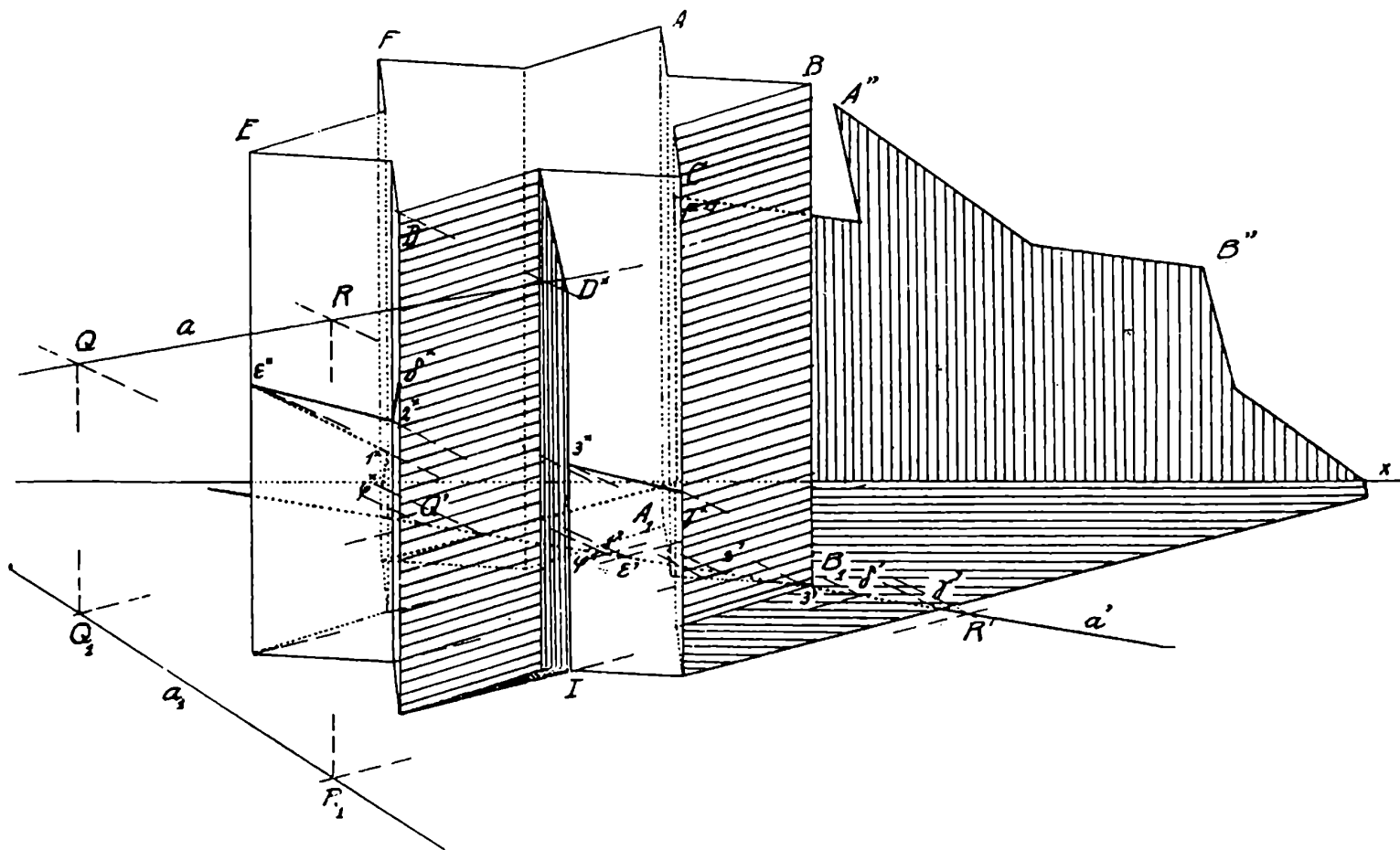
124. Úlohu předešlou zobrazte v šikmém promítání pro $\omega = 135^\circ$, $q = \frac{1}{2}$. (Obr. 50.)

Jak z obrazce zřejmo, můžeme vržený stín přímky na hranol sestrojiti jako mnohoúhelník affinní s podstavou; osou affinity jest a' , paprsky jsou pobočné hrany hranolu.

125. Zobrazte osvětlení hranolu z úlohy 23. a stín úsečky PQ při směru paprsků s. $P(-2.5, 6, 0)$, $Q(0, 6.5, 4.5)$, $\sphericalangle s_1 x_1 = \sphericalangle s_2 x_2 = 120^\circ$. (Obr. 15.)

Vržené stíny úsečky na hrany, jdoucí body H , G , odvodíme zpětnými paprsky z průsečíků vržených stínů těchto hran

a stínu úsečky. Vržený stín bodu Q padne dovnitř vrženého stínu tělesa, to znamená, že bod Q vrhá stín Q^x na některou z osvětlených stěn hranolu. Bod Q' vyšetříme buď jako průsečík paprsku $Q Q'$ se stěnou pomocí krycí přímky $k \equiv (12)$, anebo tak, že narýsujeme vržený stín povrchy hranolu, jež prochází bodem Q^x , t. j. přímka q' ; tato přímka protne vržený



Obr. 50.

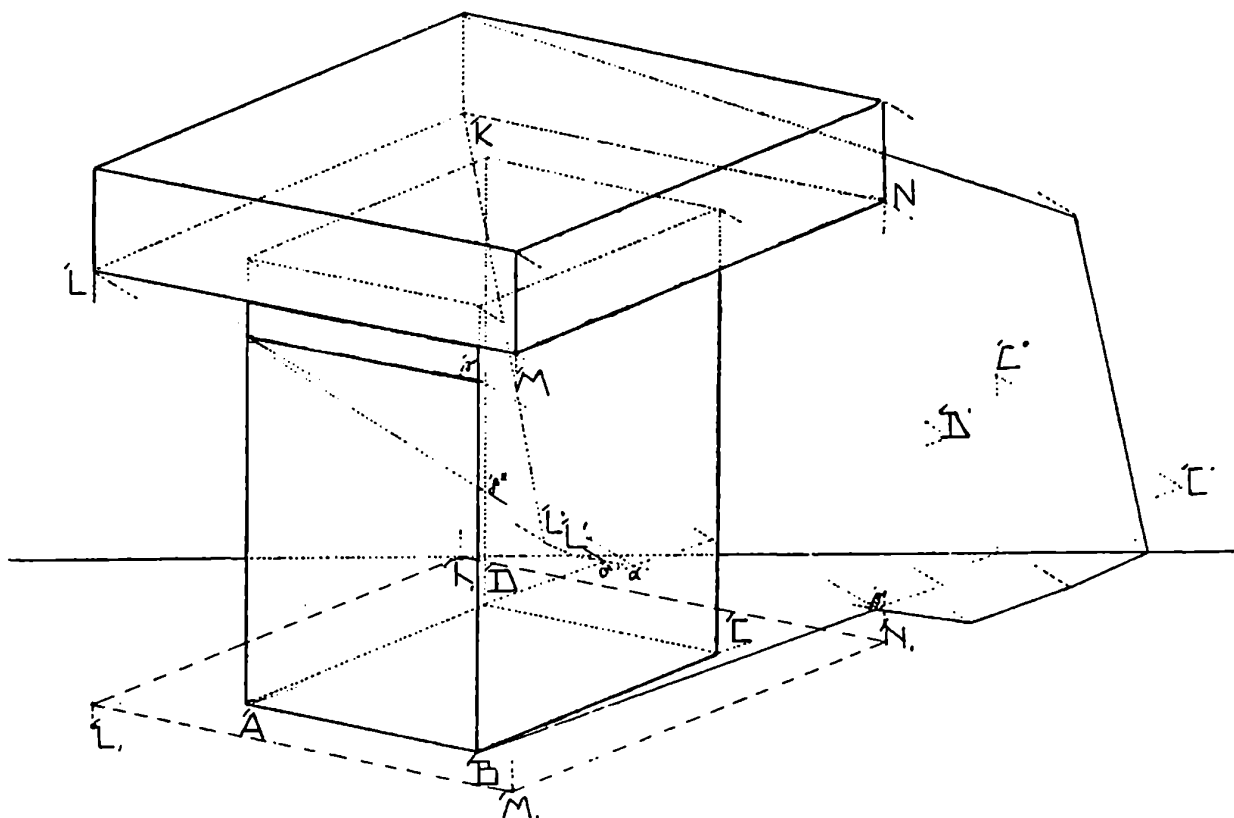
stín podstavy v bodě I' , vyšetříme jeho půdorys I , kterým vedeme $q_1 \parallel$ s pobočnými hranami hranolu. Bod $Q^x \equiv q_1 \times Q_1 Q^x$.

126. Osvětlete krychli úlohy 42. paprsky tak volenými, aby stín podstavy na π byl ve skutečné velikosti. (Obr. 21.)

Světelné paprsky musí býti kolmy na rovinu σ , která půlí půdorysnou odchylku roviny φ . Paprsek zobrazíme ve III. průřezu $S_3 S' \perp \sigma_3$.

127. Zobraďte osvětlení krychle z úlohy 41.; směr paprsků světelných jest obvyklý. (Obr. 22.)

Sestrojíme nejdřív šikmý půdorys a šikmý obraz světelného paprsku, který protíná osu x , že zvolíme na paprsku libovolný bod a jeho šikmý půdorys a obraz spojíme s průsečíkem na x . Stíny bodů na π mají svoje půdorysy v průseku šikmého půdorysu a šikmého obrazu paprsku světelného.

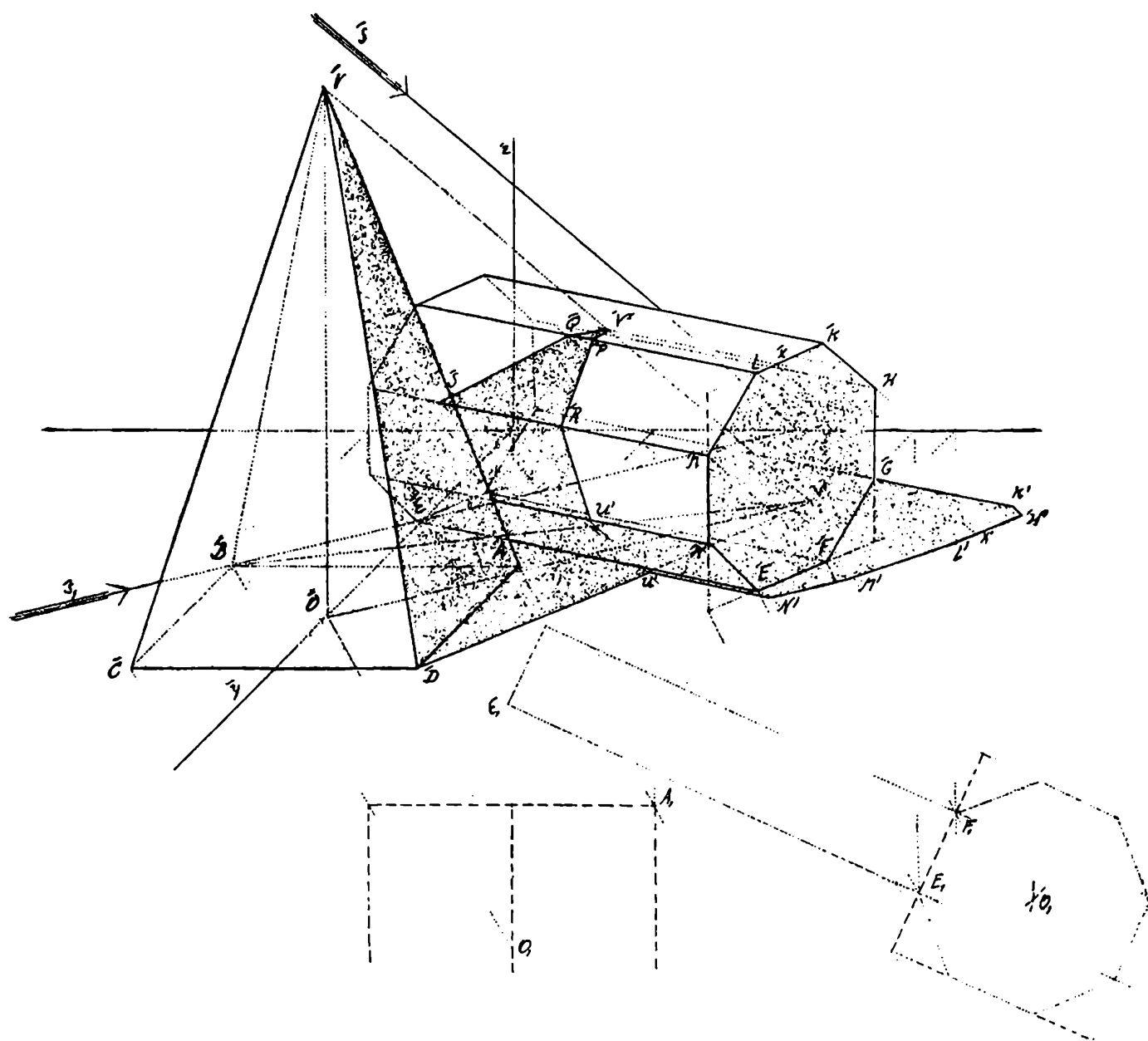


Obr. 51.

128. V ortogonální i šikmé projekci (135° , $\frac{1}{2}$) zobraďte osvětlení kváдру, jehož podstava $ABCD$ jest v π , na jehož horní podstavě leží souosá čtvercová deska hrany $a=9$, výšky $v_1=1.5$. $A(0, 6, 0)$, $B(4, 8, 0)$, $v=6.7$. (Obr. 51.)

Stín desky zakrývá částečně vržený stín hranolu na π ; z toho soudíme, že deska vrhá stín na osvětlené stěny hranolu.

Vrcholy tohoto stínu odvodíme zpětnými paprsky z průsečíků vržených stínů pobočných hran hranolu a desky. Ježto jest hrana LM rovnoběžná se stěnou hranolu, jest její vržený stín na tuto $\parallel LM$.



Obr. 52.

129. Před pravidelným osmibokým hranolem stojí pravidelný čtyřboký jehlan s podstavou $ABCD$ v π , výšky v ; pobočná stěna hranolu $EF \varepsilon \varphi$ jest v π . Osvětlete skupinu paprsky směru s a zobrazte v or-

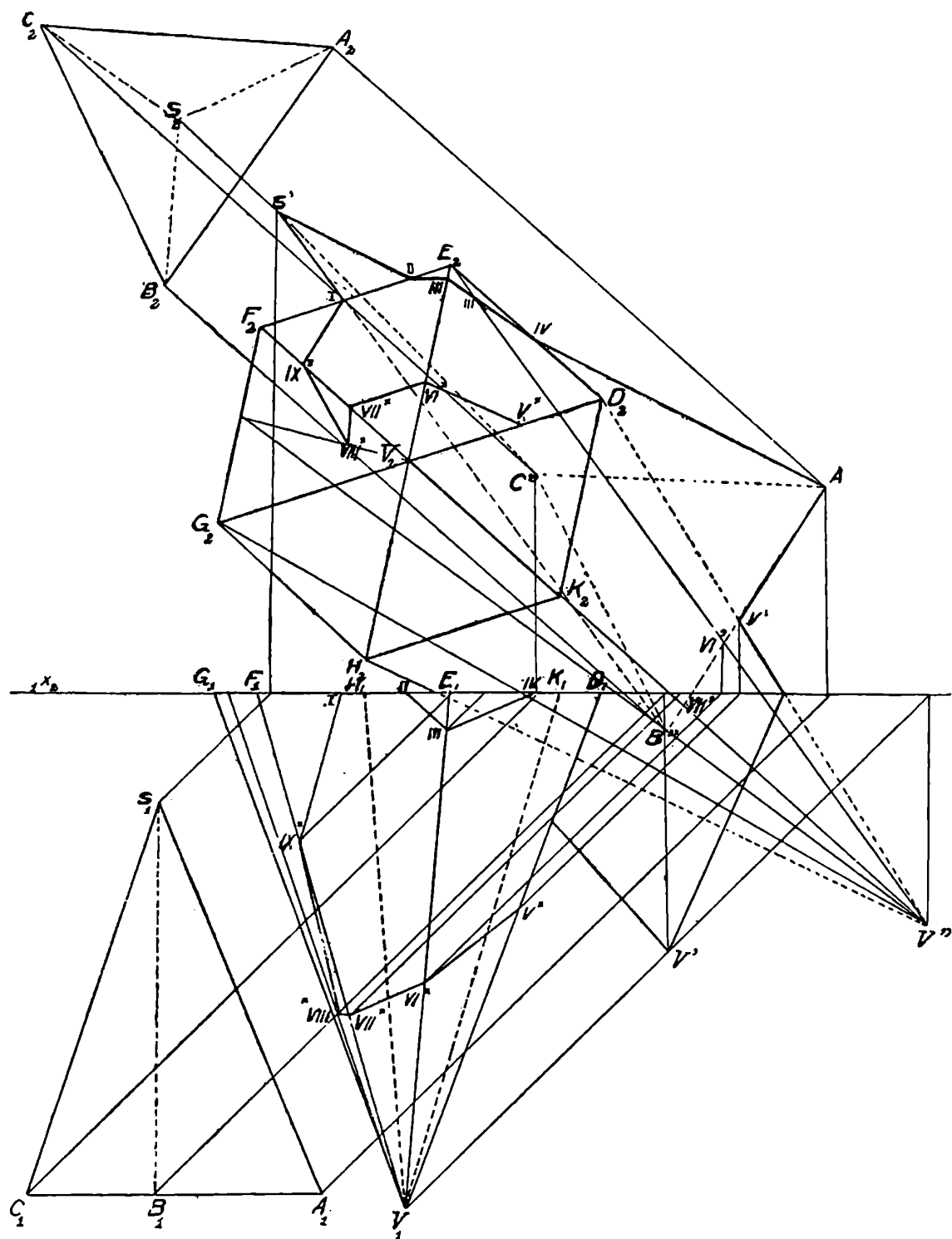
to gonální i šikmé projekci. $A(0, 6.5, 0)$, $B(-5, 6.5, 0)$, $y_c > y_B$, $v = 9$; $E(4.5, 8, 0)$, $F(5.2, 6.6, 0)$, $E\varepsilon = 8$, $(135^\circ, \frac{1}{2})$. $s = VV'$, $V'(4, 3.5, 0)$. (Obr. 52.)

Hrany jehlanu BV , DV vrhají stíny na hranol, jejichž vrcholy určíme zpětnými paprsky. Stín V^x vrcholu jehlanu na stěnu hranolu vyšetříme tak, že bodem V' narýsujeme vržený stín površky hranolu VX , zpětným paprskem odvodíme z bodu X' jeho obraz X na hraně KL , a površka bodem X jdoucí protne paprsek VV' v hledaném bodě V^x .

130. Šestiboký pravidelný jehlan a) kolmý, b) plný, s podstavou v π v poloze a) průčelné, b) obecné, stojí před pravidelným šestibokým hranolem, který leží na π . Zobrazte osvětlení skupiny v šikmé projekci $(150^\circ, \frac{1}{2})$ a) $V(0, 8, 12)$, $a_6 = 3$, $a'_6 = 1$; $A(7, 6.8, 0)$, $B(8, 5, 0)$ jsou vrcholy podstavy hranolu, jehož výška $v = 6.5$. b) $V(0, 9, 7)$, $J(-2, 6, 0)$; $A(-2, 1.5, 0)$, $B(-2, 4.5, 0)$, $v = 7$.

131. V ortogonální projekci zobrazte osvětlení skupiny dvou jehlanů pravidelných. První trojboký má podstavu $\parallel \nu$ danu hranou AB , výšku $v = 6.5$; druhý šestiboký má podstavu $DEFGHK$ v ν a vrchol V . $A(-1.4, 8.5, 11)$, $B(-4.2, 8.5, 7)$, $z_c > z^B$; $V(0, 9, 4)$, $D(-2.5, 0, 6.5)$, $\sphericalangle s_1 x_1 = \sphericalangle s_2 x_2 = 135^\circ$. (Obr. 53.)

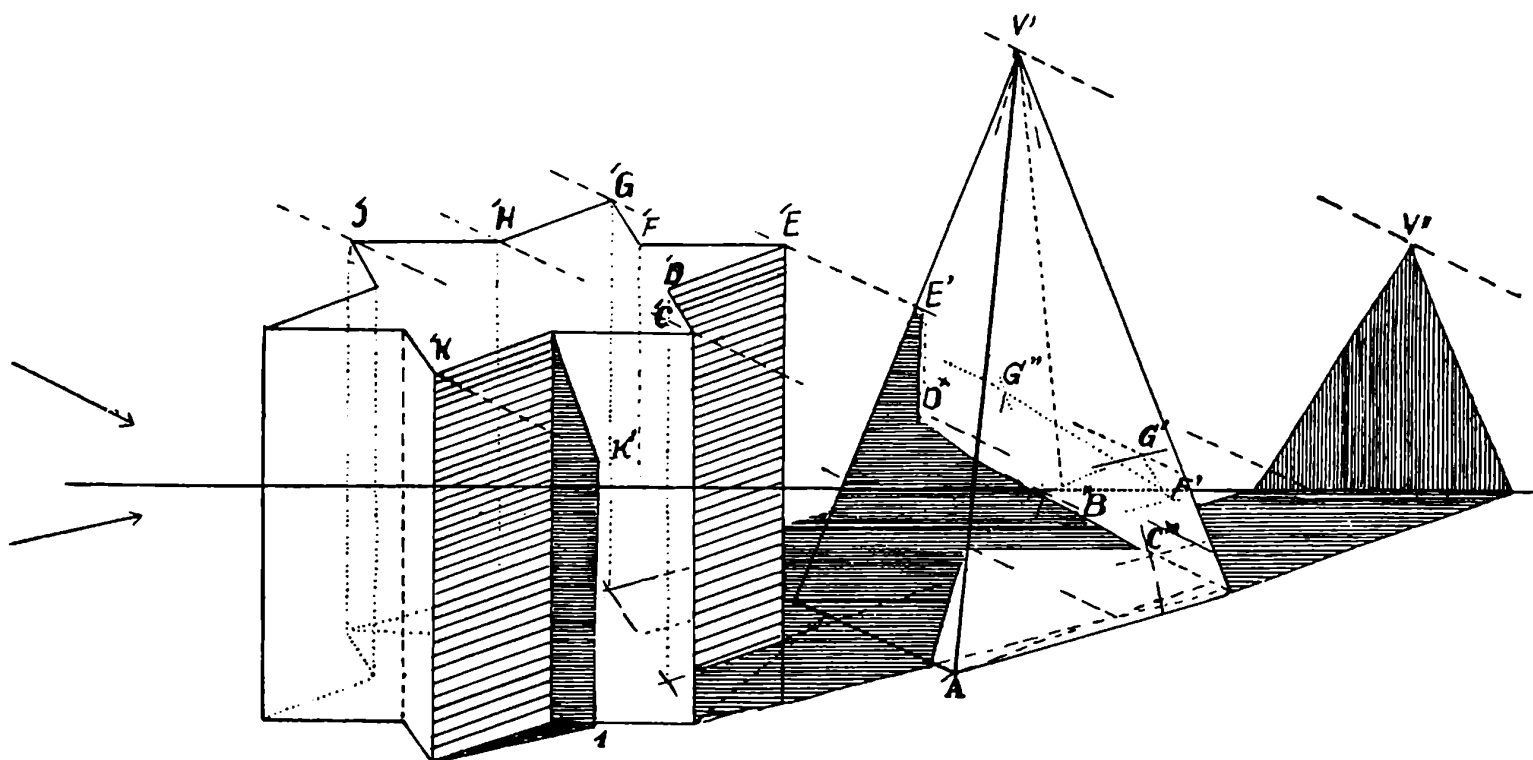
132. V šikmé projekci $(135^\circ, \frac{1}{2})$ zobrazte osvětlení skupiny. Šestiboký přímý hranol s hvězdovitou podstavou (S, K) v π má výšku $v = 5.5$; pravidelný čtyřboký jehlan



s podstavou $(A B C D)$ v π má výšku $v = 7.8$.
Směr paprsků obvyklý. $S(0, 7.5, 0)$, $K(0, 11, 0)$;
 $A(6.2, 7.5, 0)$, $C(5.5, 1.5, 0)$. (Obr. 54.)

Známým způsobem sestrojíme vržené i vlastní stíny obou těles; pobočná hrana KK_1 hranolu vrhá stín na π a na sousední stěnu hranolu. Vržený stín bodu K jest $K^\times \equiv KK^\times \times l K^\times$.

Vržený stín hranolu na jehlanu má vrcholy: jednak na hranách jehlanu, jež sestrojíme zpětnými paprsky z průsečíků vržených stínů hran obou těles; za druhé na osvětlených stěnách jehlanu $C^\times, D^\times, E^\times$. Bod $C^\times$ najdeme, když bod C' spojíme



Obr. 54.

s V' ; sestrojili jsme tak stín površky jehlanu VP , na níž jest $C^\times \equiv VP \times CC'$.

133. V ortogonální i v šikmé projekci ($150^\circ, \frac{1}{2}$) zobrazte osvětlení pravidelného šestibokého jehlanu s podstavou v π a trojúhelníku MNO , který jehlan protíná. $E(0, 4.5, 0)$, $B(6.5, 7, 0)$, $v = 8.8$; $M(4.5, 11, 0.2)$, $N(7, 3.7, 2.3)$, $O(-1.3, 8.9, 6.7)$. Směr paprsků obvyklý.

134. Zobrazte osvětlení skupiny pravidelného šestibokého jehlanu (V, A) s podstavou v π a šikmého hranolu $(MNPQ, M^1)$ paprsky směru obvyklého. $V(4, 8, 10)$, $A(3, 4, 0)$, $M(7.5, 5.5, 0)$, $N(8.5, 9, 0)$, $P(11.5, 7, 0)$, $Q(10, 4, 0)$, $M^1(3, 3, 8)$.

135. V šikmé projekci $(135^\circ, \frac{1}{2})$ zobrazte osvětlení pravidelného dvanáctistěnu se stěnou $ABCDE$ v π a trojúhelníka MNP , jehož vrchol P jest ve vrcholu pravidelného jehlanu, vzniklého prodloužením stěn dvanáctistěnu, které procházejí hranami horní základny daného tělesa. $A(10.5, 3, 0)$, $S(10.5, 6.5, 0)$; $M(2.5, 1, 0)$, $N(17.2, 18.5, 0)$.

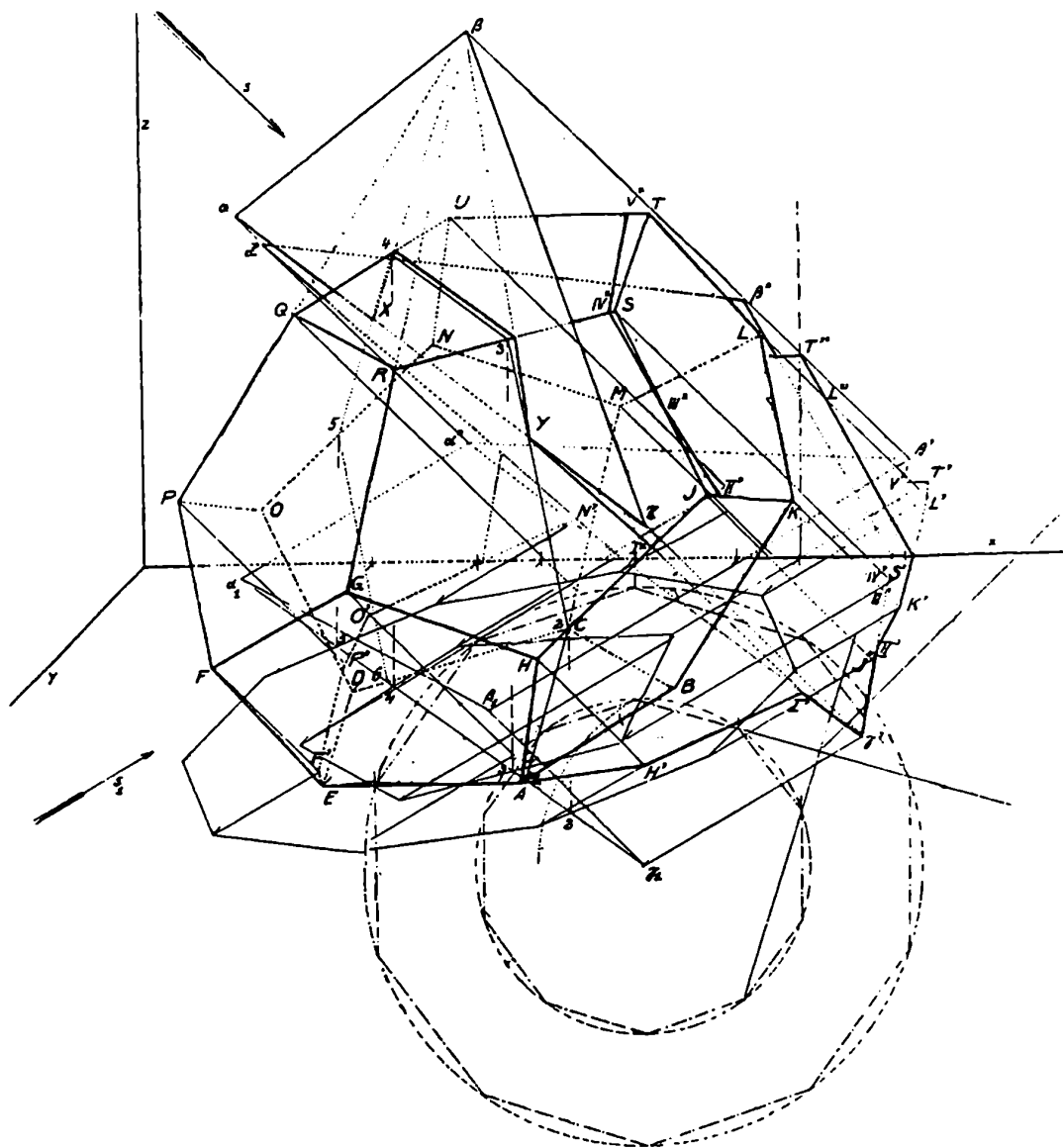
Vyhledáme vržené stíny stran trojúhelníku MNP na hrany tělesa zpětnými paprsky z průsečíků vržených stínů na π . (Obr. 55.)

VI. Vzájemné proniky mnohostěnů.

Mají-li dva mnohostěny zaujmouti současně totéž místo v prostoru, nastává **pronik** jejich. Hrany prvního tělesa vnikají do stěn tělesa druhého a naopak, čímž vznikají vrcholy **mnohoúhelníku proniku**, který leží současně na površích obou těles, a jeho strany jsou strany jsou části průsečnic stěn obou mnohostěnů. Mnohoúhelník proniku jest prostorový a buď 1) má jediný, nepřerušovaný obvod, nebo 2) jest složen ze dvou od sebe oddělených obrazců. V prvním případě nastává **zásek** (pronik částečný), ve druhém **prostup** (pronik úplný); přechodem mezi oběma druhy proniku je případ, kdy vznikají sice dvě části proniku, které však mají buď jeden nebo dva vrcholy společné, takže z těchto vychází čtyři strany mnohoúhelníku proniku. Případ tento nastane, mají-li daná tělesa jednu nebo dvě spc-

lečné **styčné roviny***). Část prostoru, společná oběma mnohostěnům, nazývá se **jádro proniku**.

Obecné body proniku bychom vyšetřili tak, že bychom prořali daná tělesa **T**, **U** libovolnou rovinou σ v mnohoúhelnících t , u , jejichž průsečíky jsou body na obvodu proniku.



Obr. 55.

Zpravidla vyšetřujeme vrcholy proniku; vyhledáme průsečíky hran tělesa **T** se stěnami tělesa **U** a naopak, a to, jedná-li se o jehlany a hranoly, pomocí rovin vrcholových. Strana

Styčná rovina jest ta, jež má s tělesem společnou jedinou hranu, takže její stopa do roviny podstavy jest styčnou přímkou podstavného mnohoúhelníku (viz Pozn. úl. 109).

mnohoúhelníka proniku spojuje průsečné body dvou hran buď do téhož tělesa T , takže tyto jsou na téže stěně jeho a obě protínají tutéž mnohostěnu U ; nebo každá hrana náleží jinému tělesu, pak jedna protíná stěnu, která je druhou omezena a naopak. Mnohoúhelník proniku může se vyšetřiti také tak, že vyhledáme jeho strany, sestrojením průsečnic stěn jednoho tělesa se stěnami tělesa druhého.

Strana mnohoúhelníku proniku je viditelná jen tehdy, když obě stěny, jichž průsekem vznikla, jsou viditelné, rozhodujeme-li o viditelnosti tělesa jednoho bez zřetele na druhé.

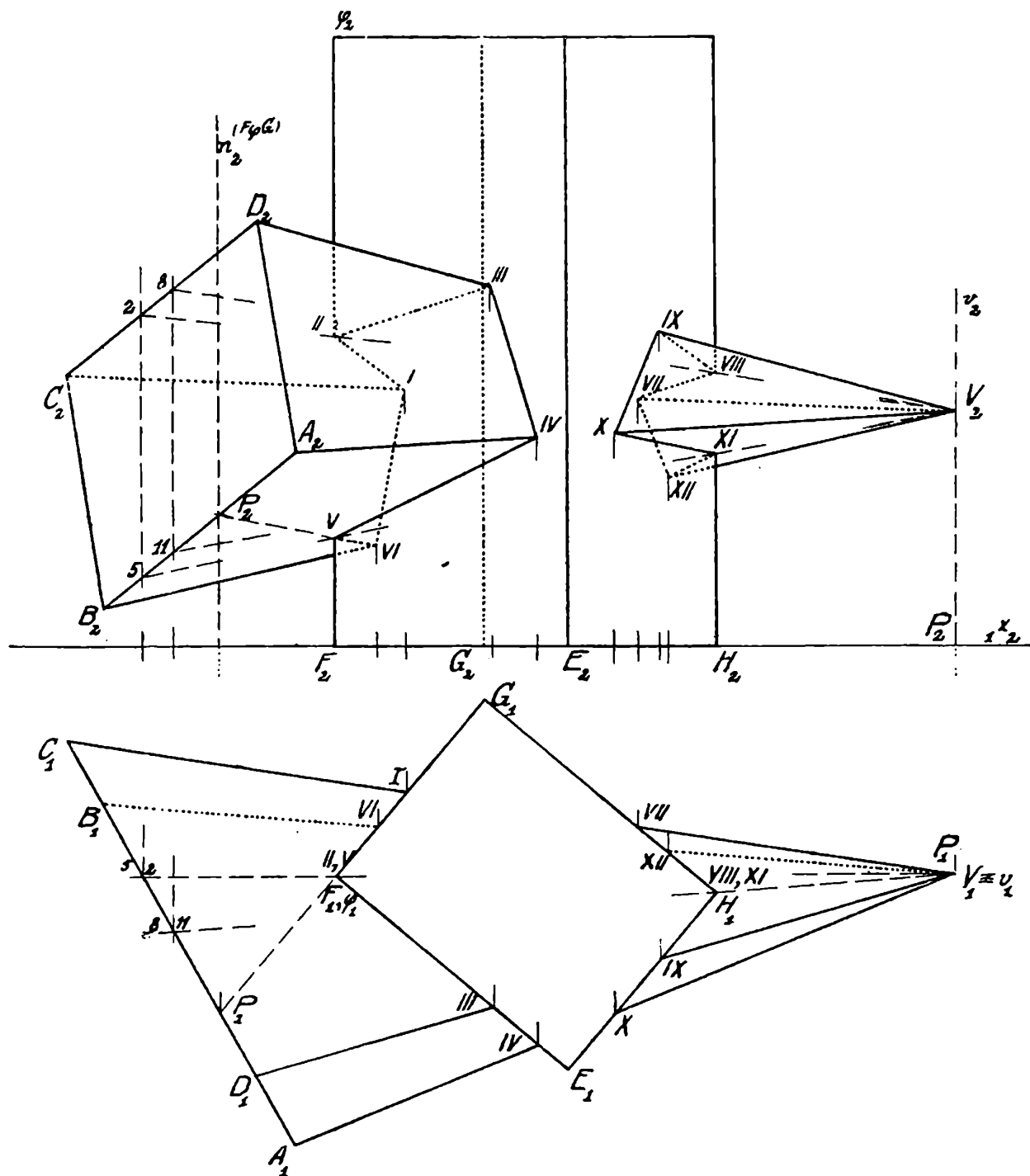
a) Pronik s hranolem kolmým ku průmětně.

136. Jest sestrojiti pronik jehlanu $V(ABCD)$ s obdélníkovým kvádrem kolmým k π , jehož podstava jest $EFGH$. $V(5, 3, 3)$, $A(-3.5, 6.5, 2.5)$, $B(-6, 2, 0.5)$, $C(-6.5, y, 3.5)$, $D(-4, y, 5.5)$, $(ABCD) \perp \pi$; $E(0, 5.5, 0)$, $F(-3, 3, 0)$, $FG = 3$, $y_G < y_F$ $v = 8$. (Obr. 56.)

Půdorys mnohoúhelníku proniku jest obsažen v půdorysu kvádrů. Promítací rovina hrany VC jest styčnou rovinou jehlanu a utíná část pláště hranolu, jejíž žádná površka nevniká do jehlanu. Tato část hranolu, jakož i příslušná část podstavy ($\triangle 1G7$) jest **volná** nebo **lichá**. Promítací rovina (VAA_1) utne podobně část volnou ($\triangle 4E10$). Všechny hrany, jež se nalézají v úhlu styčných rovin (VCC_1), (VAA_1) protínají druhé těleso, takže soudíme z toho, že obrazec proniku jest dvanáctiúhelník rozpadající se ve dva prostorové šestiúhelníky; máme zde případ prostupu.

Vrcholy mnohoúhelníku, jež vznikly jako průsečíky hran jehlanu se stěnami hranolu, mají půdorysy na obvodu čtyřúhelníku $EFGH$; označíme je ciframi I, VI, III, IV a VII, XII, IX, X . Hrany hranolu F, H protínají jehlan v bodech II, V a $VIII, XI$; nárysy jejich sestrojíme tak, že hranou F proložíme vrcholovou rovinu (FVV_1), ta protne rovinu podstavy jehlanu

$(A B C D)$ v přímce $(5, 2) \perp \pi$, její průsečíky 2, 5 se stranami čtyřúhelníku $(A B C D)$ spojíme s vrcholem V a obdržíme $2 V \times \times F \varphi \equiv \Pi$, $5 V \times \times F \varphi \equiv V$.



Obr. 56.

Je-li spojnice dvou bodů $(V VI)$ příliš krátká, nebo nepřesná, sestrojíme další bod, jako průsečík stop příslušných stěn $P \equiv B A \times n(F \varphi G)$.

Při číslování mnohoúhelníku proniku musíme dbáti toho, abychom postupovali po jeho obvodu (v obrazci jdeme nejdříve po horní části pláště jehlanu!).

137. Zobrazte pronik šestibokého pravidelného hranolu s podstavou v π (S, A, V) s pravidelným čtyřbokým jehlanem $V(MNPQ)$, jehož podstava jest v rovině ϱ . $S(0, 5, 0)$, $A(-1, 2, 0)$, $v=8$, $V(2, 9, 4)$, $M(-3, y, 1)$, $\varrho(-2, 135^\circ, 90^\circ)$. Též v šikmé projekci.

138. Jest sestrojiti pronik jehlanu $V(EFG)$ s přímým hranolem, jehož podstava $ABCD$ jest v π , a osvětlení skupiny paprsky obvyklého směru. $A(0, 5, 0)$, $B(3.2, 6, 0)$, $C(4.5, 3, 0)$, $D(1.2, 1.3, 0)$, $v=6$; $E(-2, 0.8, 1.3)$, $F(-3, y, 4.9)$, $G(-4.2, 5.6, 2.8)$, $(EFG) \perp \pi$, $V(6, 5.7, 3.8)$. (Obr. 57.)

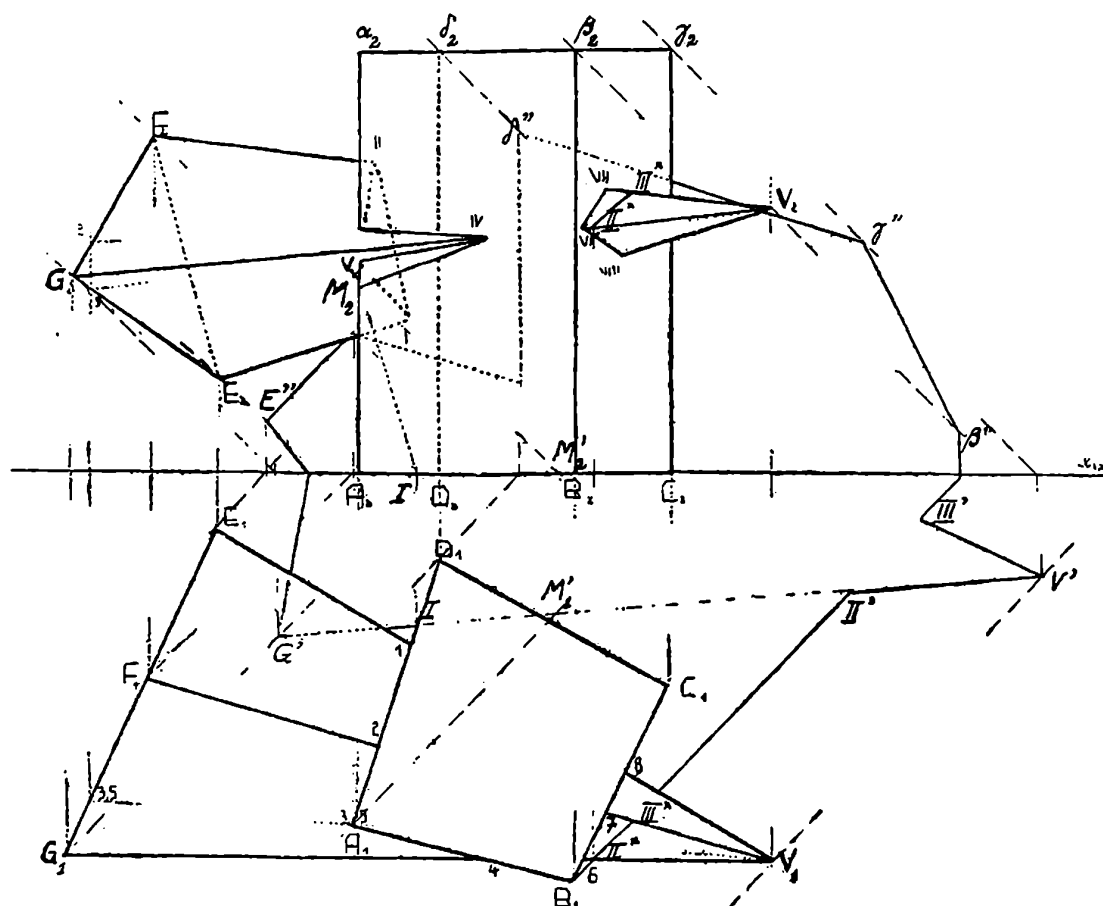
Styčné roviny jehlanu (EE_1V) , (GG_1V) utínají obě části liché na hranolu, proto jest pronik úplný. V úhlu styčných rovin jsou čtyři hrany, bude tedy mnohoúhelník proniku osmiúhelník; průsečíky hran jehlanu mají půdorysy na půdorysném obrysu hranolu $l \equiv E_1V_1 \times A_1D_1$. Průsečíky hrany $A\alpha$ sestrojíme pomocí vrcholové roviny (AVV_1) , jejíž stopa do roviny (EFG) protne podstavu jehlanu v bodech 3, 5; površky $3V$, $5V$ protnou hranu $A\alpha$ v bodech III, V.

Osvětlení skupiny sestrojíme známým způsobem. Hrana $B\beta$ vrhá stín na stěnu (GFV) , jehož půdorys jest ve stínu $B\beta'$. Stín hrany GV na hranu $A\alpha$ určíme pomocí zpětného paprsku $M'M^x$, jehož nárys M'_2M^x určí bod M^x .

139. Sestrojte pronik krychle, jejíž osa $SH \perp \pi$ a jeden její vrchol A s pravidelným trojbokým hranolem s podstavou MNP v π .

$S(0, 5.5, 0)$, $H(0, 5.5, 8)$, $A(-2.5, y < y^s, z)$, $M(-2.4, 5.2, 0)$, $N(1.3, 3.7, 0)$, $y_P > y_M$.

Pronik jest úplný, složený ze dvou prostorových šestiúhelníků; jeho půdorys jest v půdorysném obrysu hranolu, kde vidíme přímo půdorysy průsečíků hran krychle se stěnami hra-



Obr. 57.

nolu. Nárysy vrcholů proniku na hranách hranolu odvodíme tak, že sestrojíme průsečnici příslušných stěn obou těles; na př. stěna $(M1P)$ protne stěnu $(ABHF)$ v úsečce $2I$ a $2I \times \times MM^1 \equiv I$.

140. Sestrojte pronik dvou přímých hranolů, z nichž první je nárysně promítací o podstavě $MNPR$, druhý má podstavu v rovině $(ABC) \perp v$. $M(0, 0, 3.6)$, $N(1.9, 0, 2.5)$, $P(5.4, 0, 6)$, $R(2.5, 0, 8)$, $v = 8$; $A(-2.8, 6, 4)$, $B(-1, 4.8, 1.2)$, $C(-2, 2.1, z)$.

Pronik jest úplný, složený ze dvou prostorových pětiúhelníků; půdorysy jeho vrcholů na hranách hranolu (ABC) určíme přímo z nárysu. K určení průsečíků hran MM^1 , PP^1 vedeme těmito vrcholové roviny rovnoběžné s hranami druhého hranolu.

141. Sestrojte pronik pravidelného jehlanu s podstavou $(ABCD)$ v π , s trojbokým hranolem, jehož pobočné hrany jsou rovnoběžny s osou x a podstava (MNP) . $V(0, 3.5, 7)$, $A(-1.5, 5, 0)$; $M(3, 1, 0.5)$, $N(3, 2, 4.5)$, $P(3, 4, 2)$.

Pomocí III. hlavní průmětny převedeme na případy předchozí.

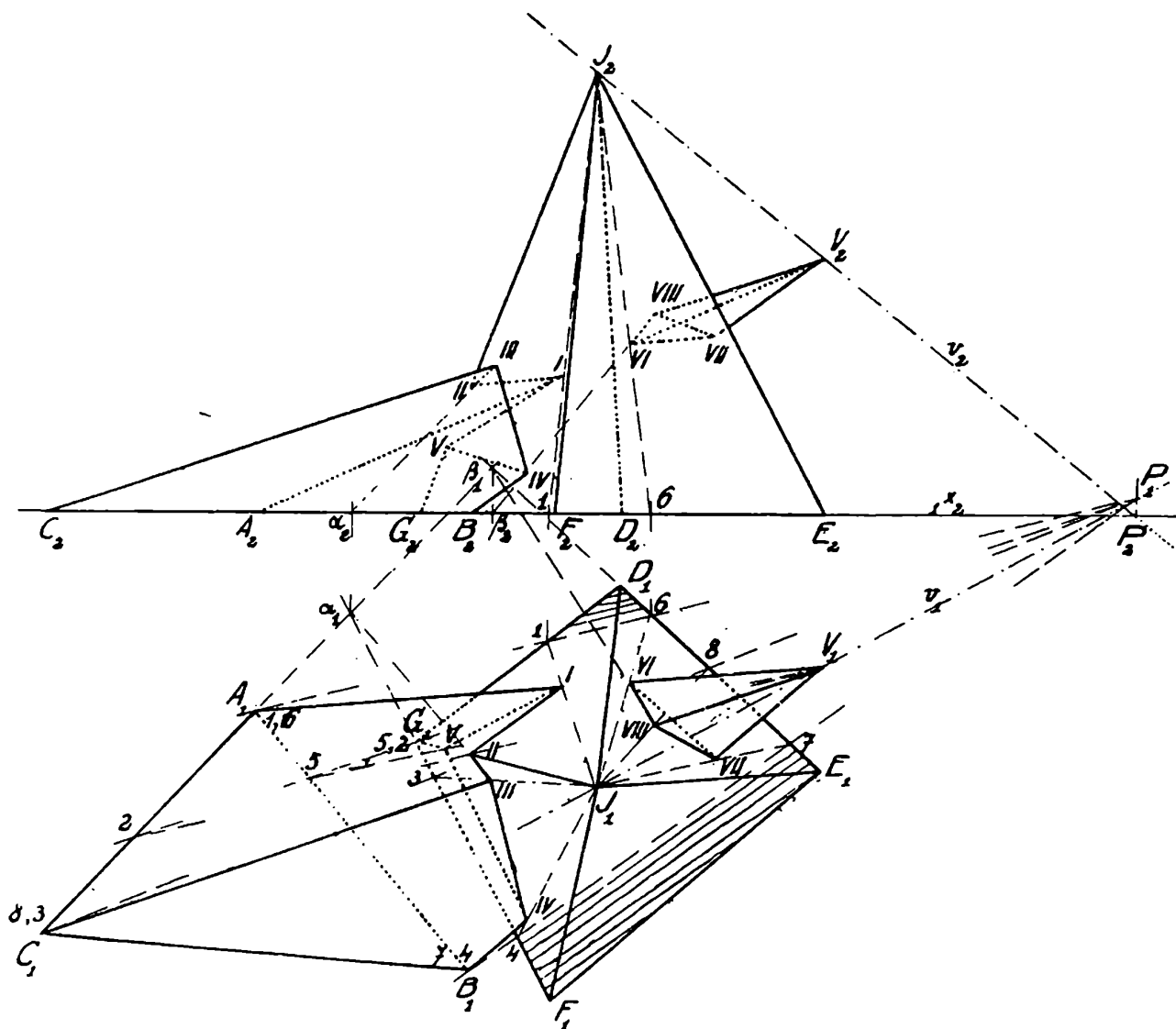
b) Podstavy obou těles jsou v téže rovině.

142. Sestrojte pronik jehlanu $V(ABC)$ s jehlanem $J(DEFG)$. $A(0, 2.4, 0)$, $B(2.5, 5.4, 0)$, $C(-2.5, 5, 0)$, $V(6.7, 1.8, 3)$; $D(4.3, 0.8, 0)$, $E(6.7, 3, 0)$, $F(3.5, 5.7, 0)$, $G(1.9, 2.7, 0)$, $J(4, 3.2, 5.2)$. (Obr. 58.)

Vrcholové roviny obou jehlanů tvoří svazek rovin, jehož osou jest spojnice vrcholů JV ; stopy rovin do společné roviny podstavné π tvoří svazek paprsků, jehož středem jest půdorysný stopník P přímky JV . Styčné paprsky PA , PB ku podstavě ABC utínají z podstavy $DEFG$ dvě části liché, takže pronik jest úplný. Vrcholy mnohoúhelníka prostupu jsou na hranách AV , BV , CV a GI ; pronik jest osmiúhelník. Vede-li bodem P paprsky PA , PB , PC , PG (tak, že nevyznačíme druhého průsečíku paprsku s obvodem podstavy, z jejíhož vrcholu paprsek vyšel), protnou tyto obvod podstavy druhé vždy ve dvou bodech. Ke každému z nich přísluší površka, která protne dotyčnou hranu prvního tělesa ve vrcholu proniku. Abychom se vyvarovali omylu, číslujeme průsečíky a vrcholy podstav stejnými ciframi arabskými a vrchol proniku cifrou řím-

skou, která odpovídá cifře arabské, připojené ke stopníkům dotyčné hrany a površky.

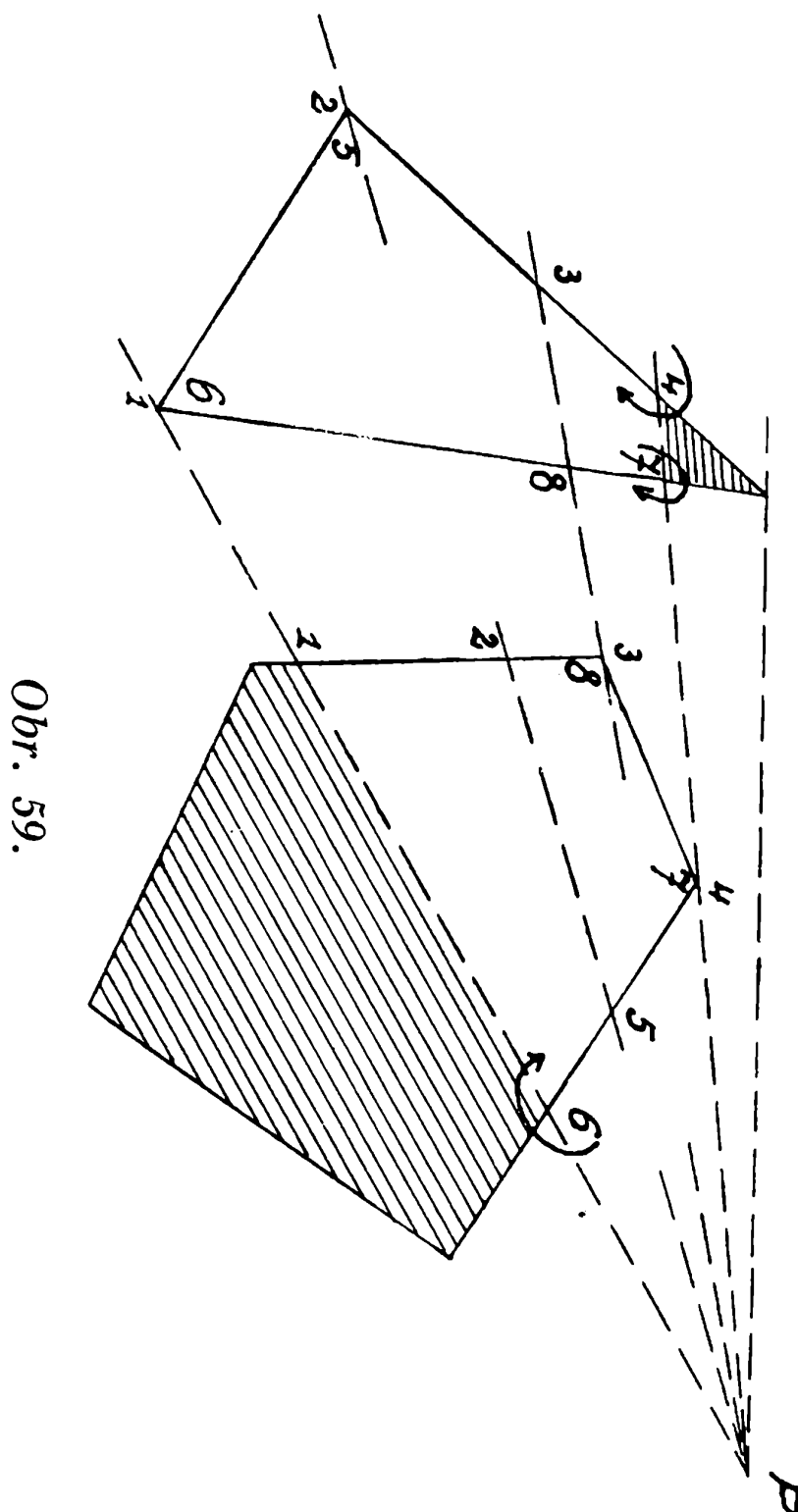
Číslovati začneme na části liché. Označíme půdorys vrcholu A cifrou 1 a současně na podstavě druhé $1 \equiv D_1 G_1 \times A_1 P_1$; odtud postupujeme ve stejném smyslu po obvodech obou pod-



Obr. 58.

stav a označíme 2 nejbližší vrchol (zde G_1) podstavy — bez ohledu na to, které — a bod na paprsku jím procházejícím a na obvodu podstavy druhé, $G_1 P_1 \times A_1 C_1 \equiv 2$ atd., až přijdeme v bodu $4 \equiv F_1 G_1 \times P_1 B_1$ znovu k části liché. U bodu 4 podstavy $D_1 E_1 F_1 G_1$ zaměníme smysl číslování, kdežto na $\triangle A_1 B_1 C_1$ postupujeme v původním smyslu dál k bodu $5 \equiv G_1$, $5 \equiv G_1 P_1 \times A_1 B_1$ atd., až přijdeme k bodu 1 , od něhož jsme

vyšli. Zrovna tak očíslovme 6, 7, 8 průsečíky paprsků $P_1 A_1$, $P_1 B_1$, $P_1 C_1$ s druhou částí podstavy $D_1 E_1 F_1 G_1$, spojíme body



označené ciframi s příslušnými průměty vrcholů a v průseku přímek stejnými ciframi opatřených je vrchol proniku, $I \equiv 1 V \times 1 I$, $II \equiv 2 V \times 2 J$ atd.

143. Sestrojte pronik (zásek) dvou jehlanů s pravidelnými podstavami v v . $V(ABCDEF)$, $U(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi)$. $V(12, 11\cdot5, 8\cdot9)$, $A(-3, 0, 7\cdot5)$, $D(3, 0, 1\cdot5)$; $U(1, 6, 11)$, $\alpha(6, 0, 1)$, $\beta(3\cdot5, 0, 4\cdot5)$.

Řeší se jako úloha předchozí. Poněvadž části liché vzniknou po jedné na podstavě obou těles, jest pronik částečný — zásek.

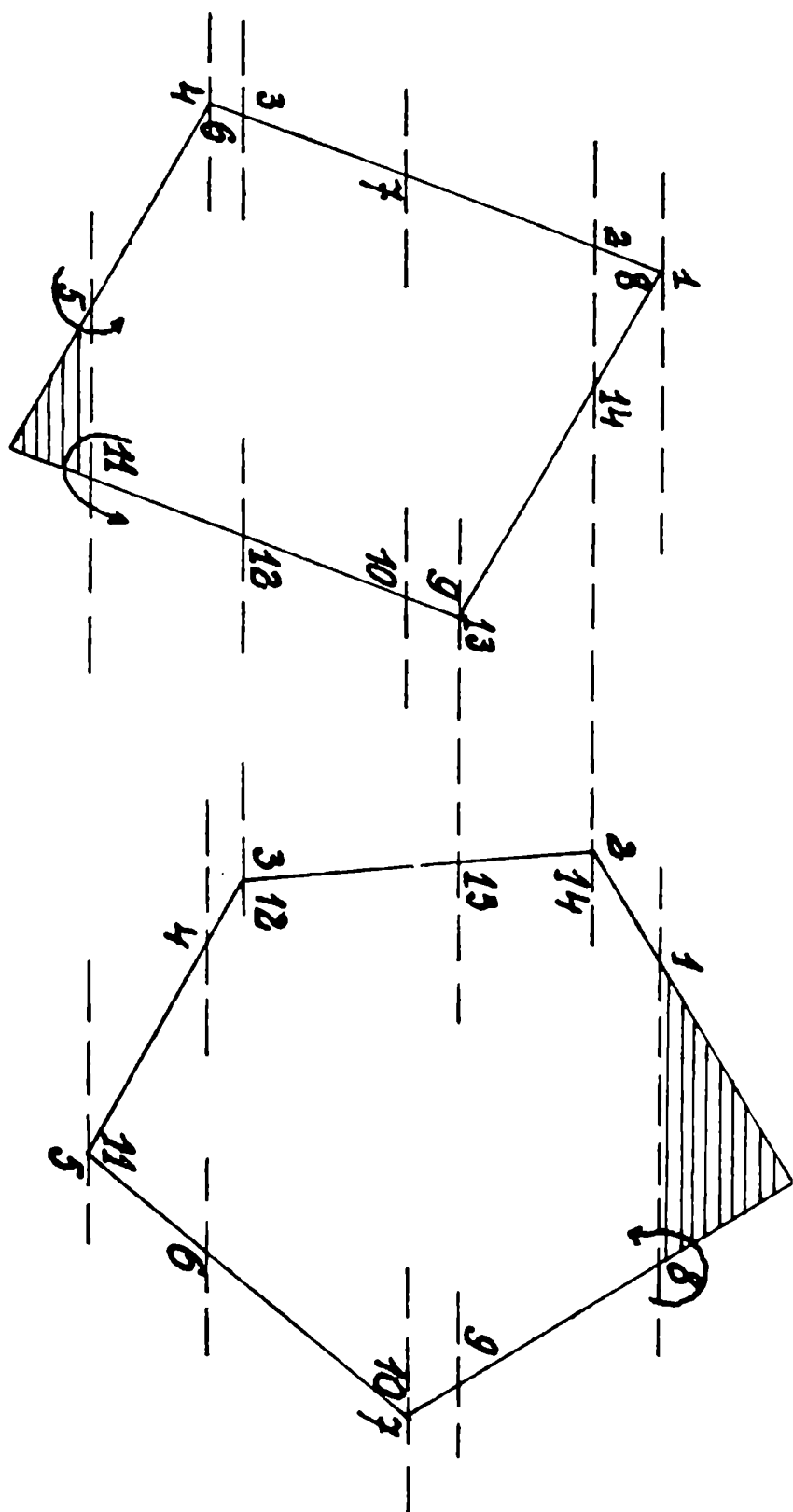
V obr. 59, 60, 61, 62 jest znázorněn systematický postup číslování půsečíků stop rovin vrcholových s obvody podstav daných těles.

V obr. 59 máme dány podstavy buď dvou jehlanů nebo jehlanu a hranolu ve společné rovině. Stopník spojnice vrcholů obou těles (v případě proniku jehlanu s hranolem jde tato vrcholem jehlanu rovnoběžně s hranami hranolu) jest bod P . Z bodu P vedeme styčné paprsky k mnohoúhelníkům podstavným; poněvadž část lichá vznikne na každé podstavě, je pronik částečný — zásek. Postup číslování jest zřejmý z obrazce; šipky ukazují, jak na části liché musíme změnit smysl postupu.

V obr. 60, 61, 62 máme podstavy dvou hranolů. Roviny vrcholové jsou rovnoběžny s pobočnými hranami obou těles, jejich stopy v půdorysně tvoří osnovu rovnoběžných paprsků.

V obr. 61 vzniknou obě části liché na podstavě hranolu pětibokého, pronik jest úplný — prostup, mnohoúhelník proniku se skládá ze dvou od sebe oddělených, prostorových šestiúhelníků.

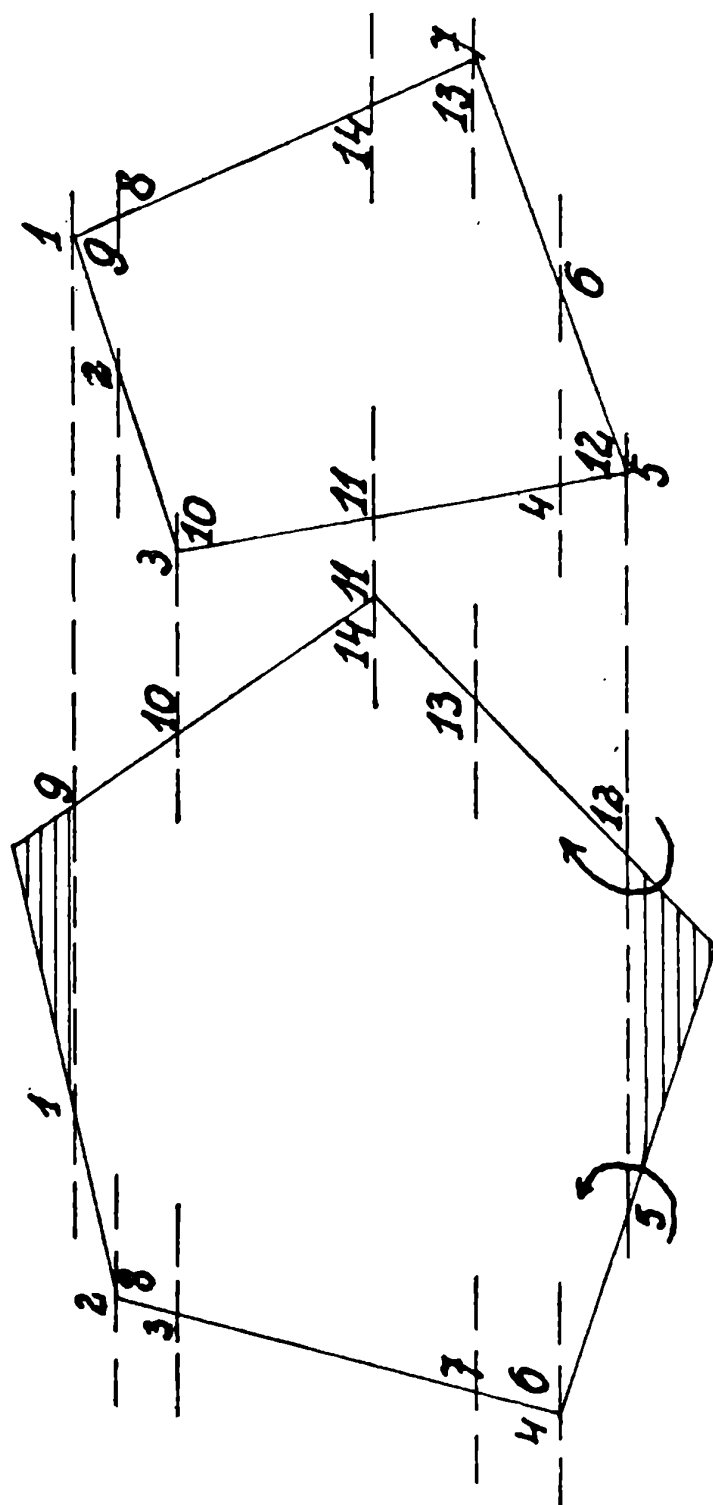
V obr. 62 mají obě podstavy společný styčný paprsek, jedna část lichá má velikost nula, to znamená, že obě tělesa mají společnou rovinu vrcholovou, takže hrany, které tato obsahuje, se protínají ve dvojném bodě proniku, kterým projdeme po obvodě proniku dvakrát. Z toho vycházejí čtyři strany prostorového mnohoúhelníku, který je devítiúhelník, ježto kromě uvedených dvou hran zúčastní se proniku ještě čtyři další hrany, jež dají po dvou vrcholech mnohoúhelníku hledaného. Je to přechod od záseku k prostupu.



Obr. 60.

Jsou-li obě liché části velikosti nulové, mají obě tělesa dvě společné styčné roviny a pronik dva dvojné body. (Viz obr. 71.)

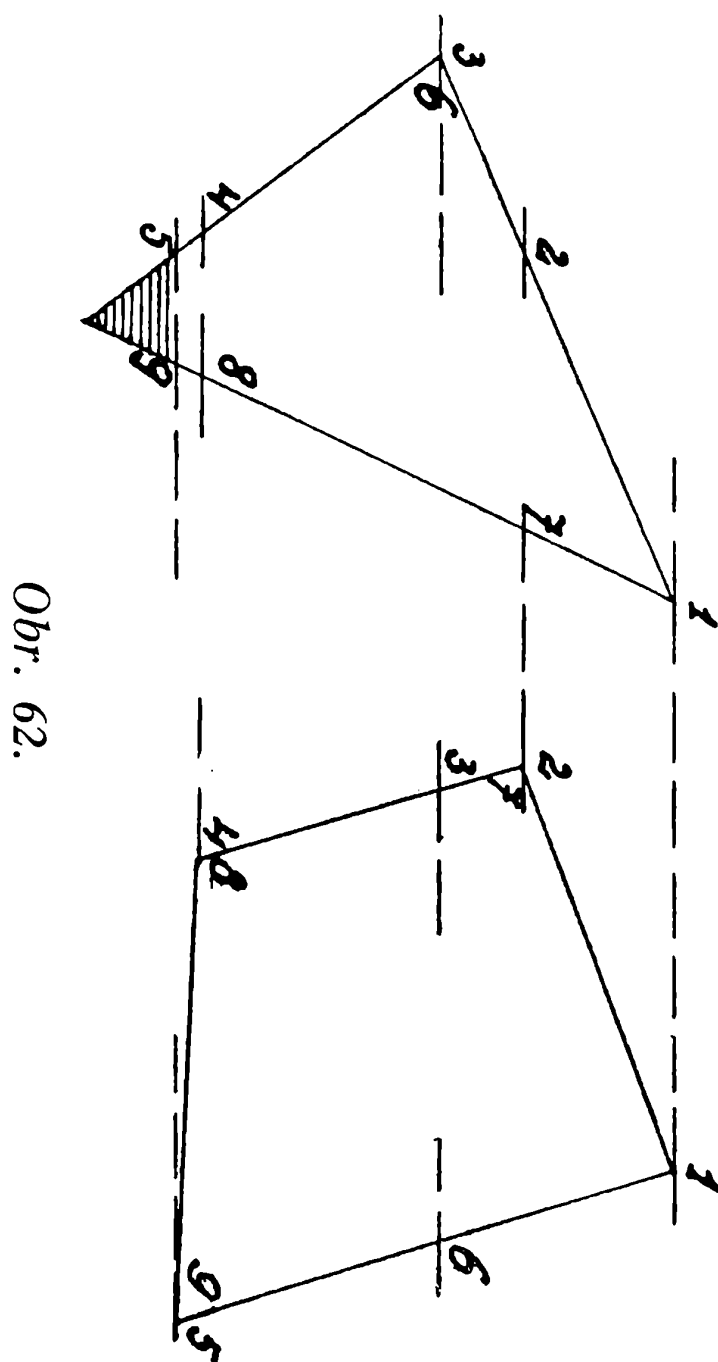
144. Jest vyšetřiti pronik jehlanu $V(ABCD)$ s hranolem $(EFGH, \varepsilon$ na $E\varepsilon)$. $A(-11,$



Obr. 61.

$8.6, 0)$, $B(-9.2, 10.4, 0)$, $C(-2.6, 11.4, 0)$, $D(-4.8, 8.2, 0)$, $V(-1.2, 1.2, 8.8)$; $E(0, 10.8, 0)$, $F(1.8, 7.7, 0)$, $G(0.3, 5.8, 0)$, $H(-2.3, 8, 0)$, $\varepsilon(-9.2, 6.5, 8.8)$. (Obr. 63.)

Vrcholem jehlanu vedeme rovnoběžku s hranami hranolu $VP \parallel E \epsilon$, jež jest osou svazku vrcholových rovin obou těles. Její stopníkem P vedeme styčné paprsky k podstavě jehlanu a

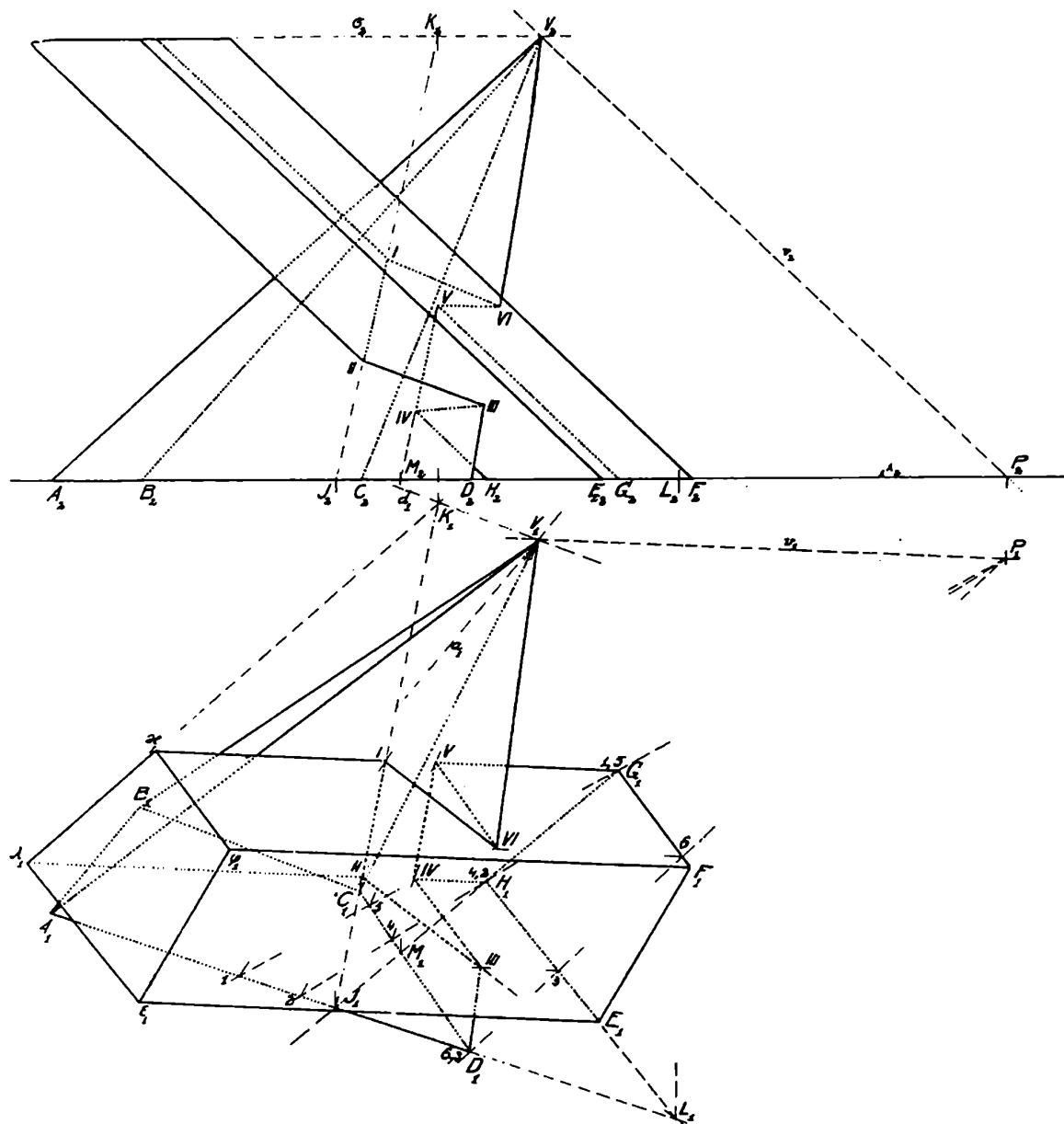


Obr. 62.

hranolu, jež vyznačí na každé podstavě jednu část lichou, takže pronik jest částečný. Proniku se zúčastní hrany C, H, G , je tedy pronikem prostorový šestiúhelník.

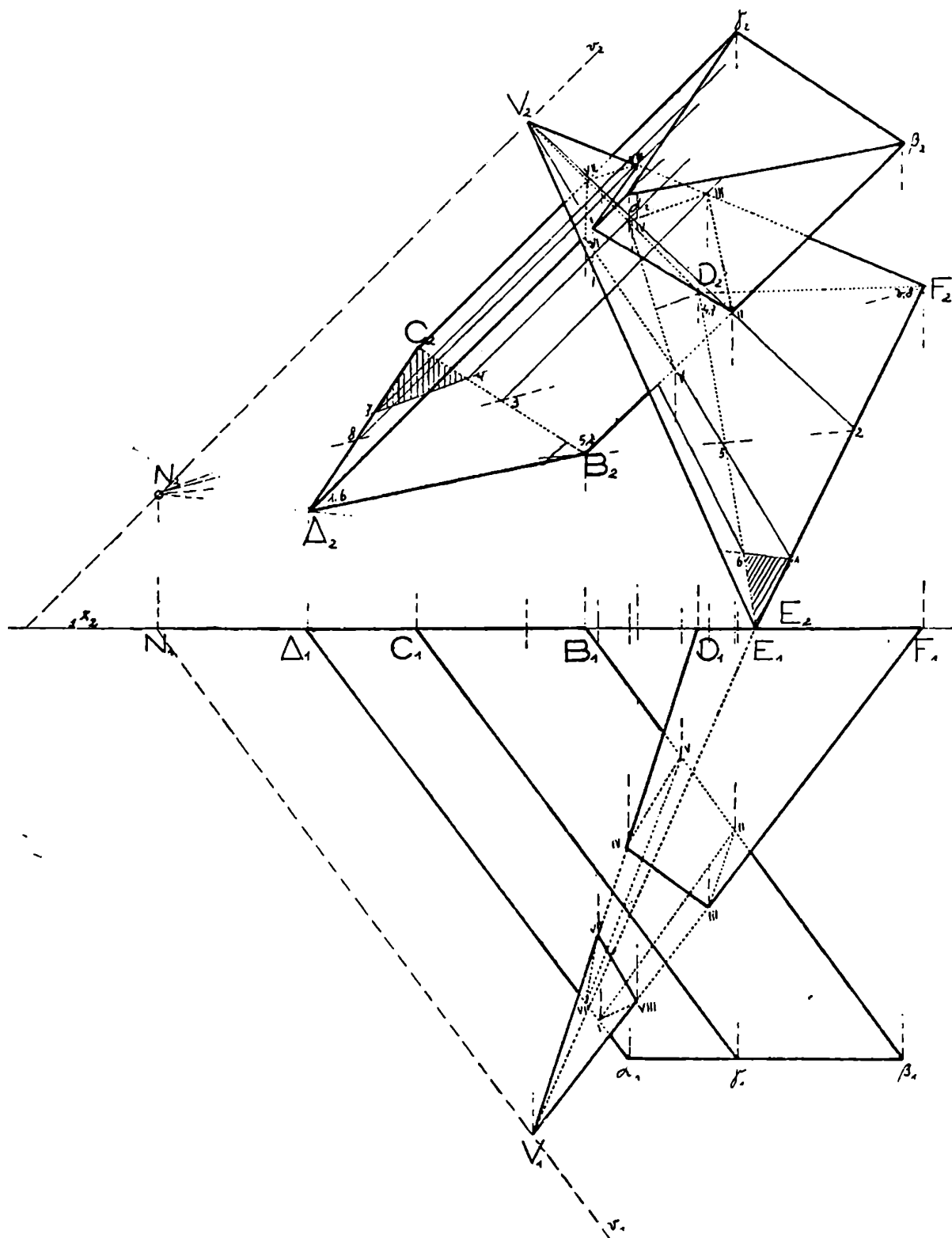
Pronik můžeme snadno sestrojiti — v případě, že daná tělesa stojí na téže rovině — též druhou metodou, t. j. vyšetře-

ním stran mnohoúhelníka proniku. Vrcholem V jehlanu položíme rovinu $\sigma \parallel \pi$ (v níž leží podstavy těles) a určíme v ní stopy rovin jednotlivých stěn obou těles. Stopy stěn hranolu tvoří mnohoúhelník $\varepsilon \varphi \kappa \lambda \cong EFGH$, stopy pobočných stěn jehlanu



Obr. 63.

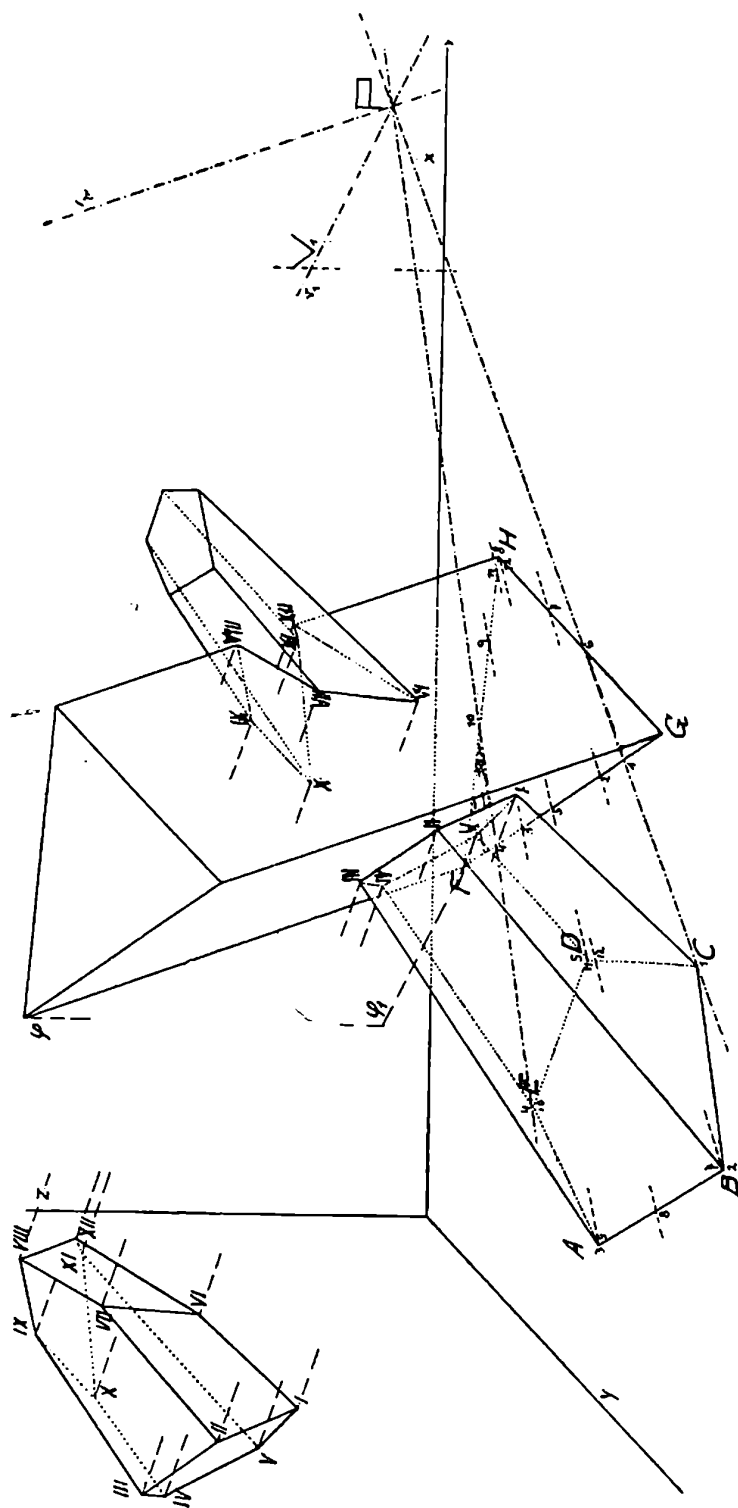
procházejí vrcholem V rovnoběžně s hranami podstavy $a \parallel AB$, $b \parallel BC$, atd. Spojíme-li průsečíky stop pobočných stěn jehlanu a hranolu, obdržíme průsečnici jejich IK , $I \equiv AD \times HG$, $K \equiv d \times \lambda$, a její část IK uvnitř obrysu, společného oběma pronikajícím se stěnám, jest strana proniku.



Obr. 64.

Podobně postupujeme, jsou-li podstavy těles v nárysně, v úloze následující.

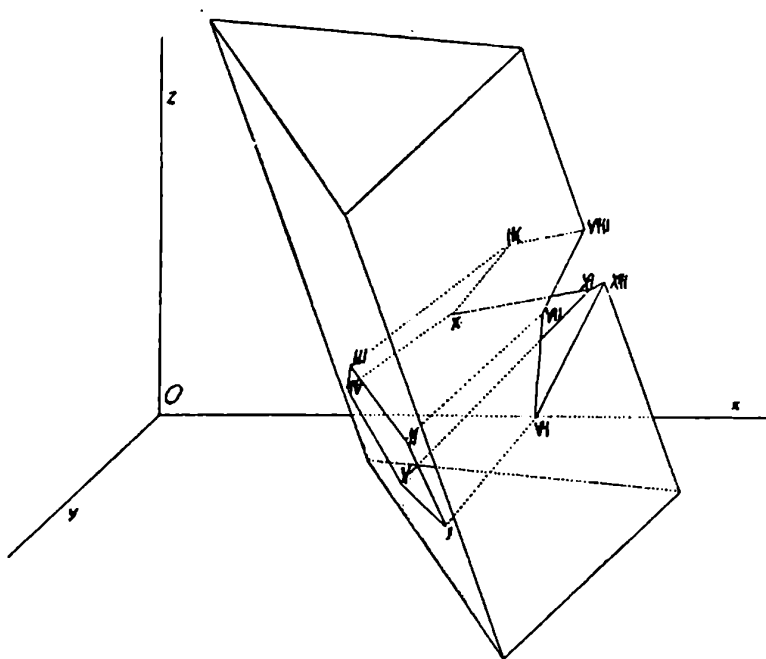
145. Jest vyšetřiti pronik jehlanu $V(ABC)$ s hranolem $(DEF)s$, kde s jest směr



Obr. 65.

pobočných hran. a) $A(4, 0, 2)$, $B(0, 0, 0.5)$, $C(1.5, 0, 4)$, $V(2.5, 3.5, 4)$; $D(-0.5, 0, 1)$, $E(-3, 0, 3)$, $F(-4, 0, 0)$, $\sphericalangle s_1 x_1 = \sphericalangle s_2 x_2 = 135^\circ$. Zobrazte jádro průniku. b) $A(7, 0, 6)$, $B(8, 0, 0)$, $C(11, 0, 6.2)$, $V(4, 9, 9)$; $D(0, 0, 2)$, $E(5, 0, 3)$, $F(2, 0, 5)$, $\delta(5.8, 7.7, 7.8)$. (Obr. 64.)

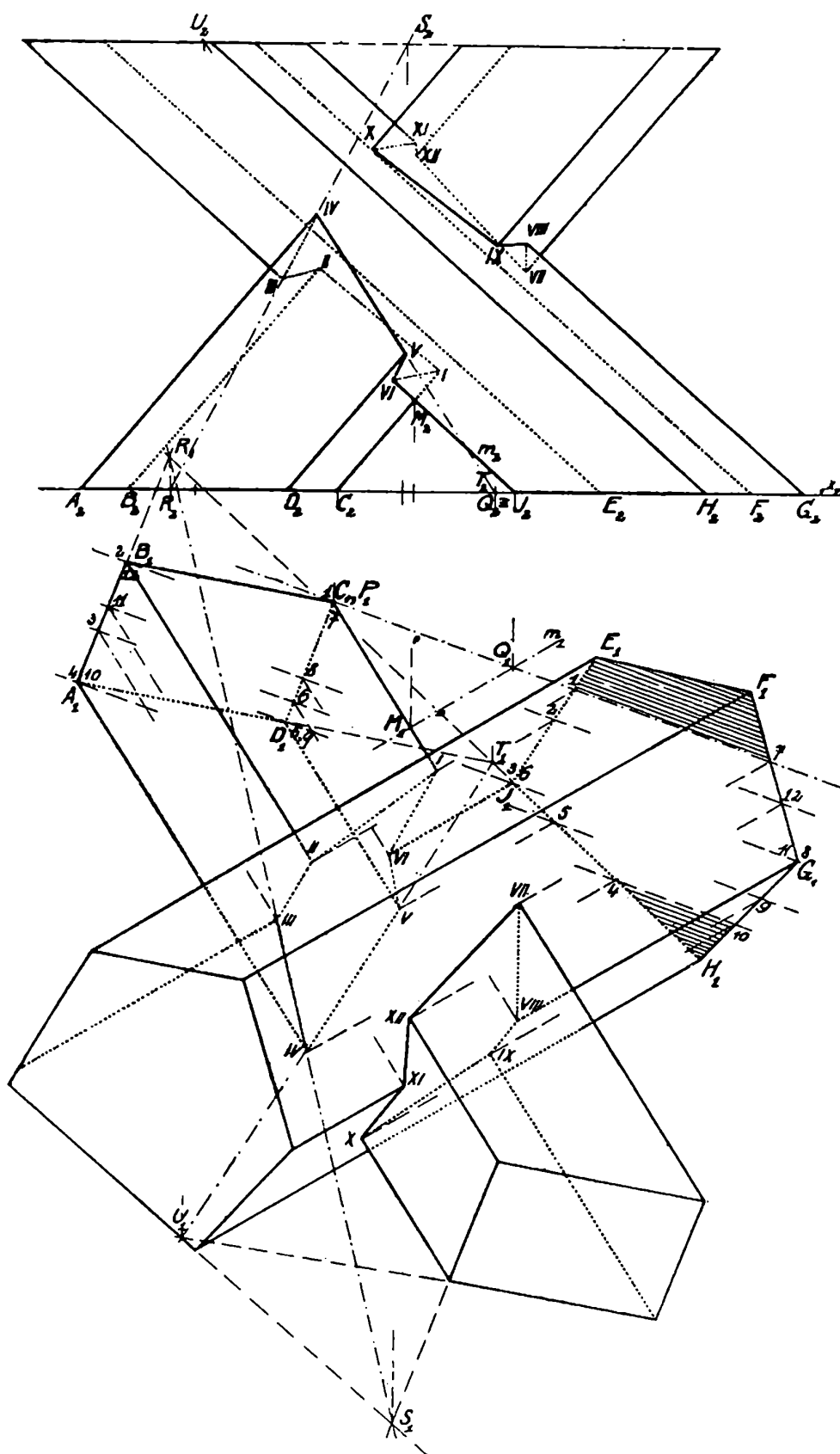
146. Zobrazte v šikmé projekci ($q = \frac{1}{2}$, $\omega = 135^\circ$) pronik jehlanu komolého ($ABCDE$) s hranolem ($F GH$) φ , jádro proniku a hranol po odstranění jehlanu. (Obr. 66.) $A(2.2, 7.2, 0)$, $B(5.2, 12.4, 0)$, $C(7.7, 11.2, 0)$, $D(6.1, 6.5, 0)$, $E(3.2, 4.4, 0)$, $V(11.6, -5.6, 5.2)$, $z_\varepsilon = 3.5$; $F(5.5, 1.4, 0)$, $G(10.5, 9.5, 0)$, $H(10.5, 2.5, 0)$, $\varphi(2, -2, 5.2)$. (Obr. 65.)



Obr. 66.

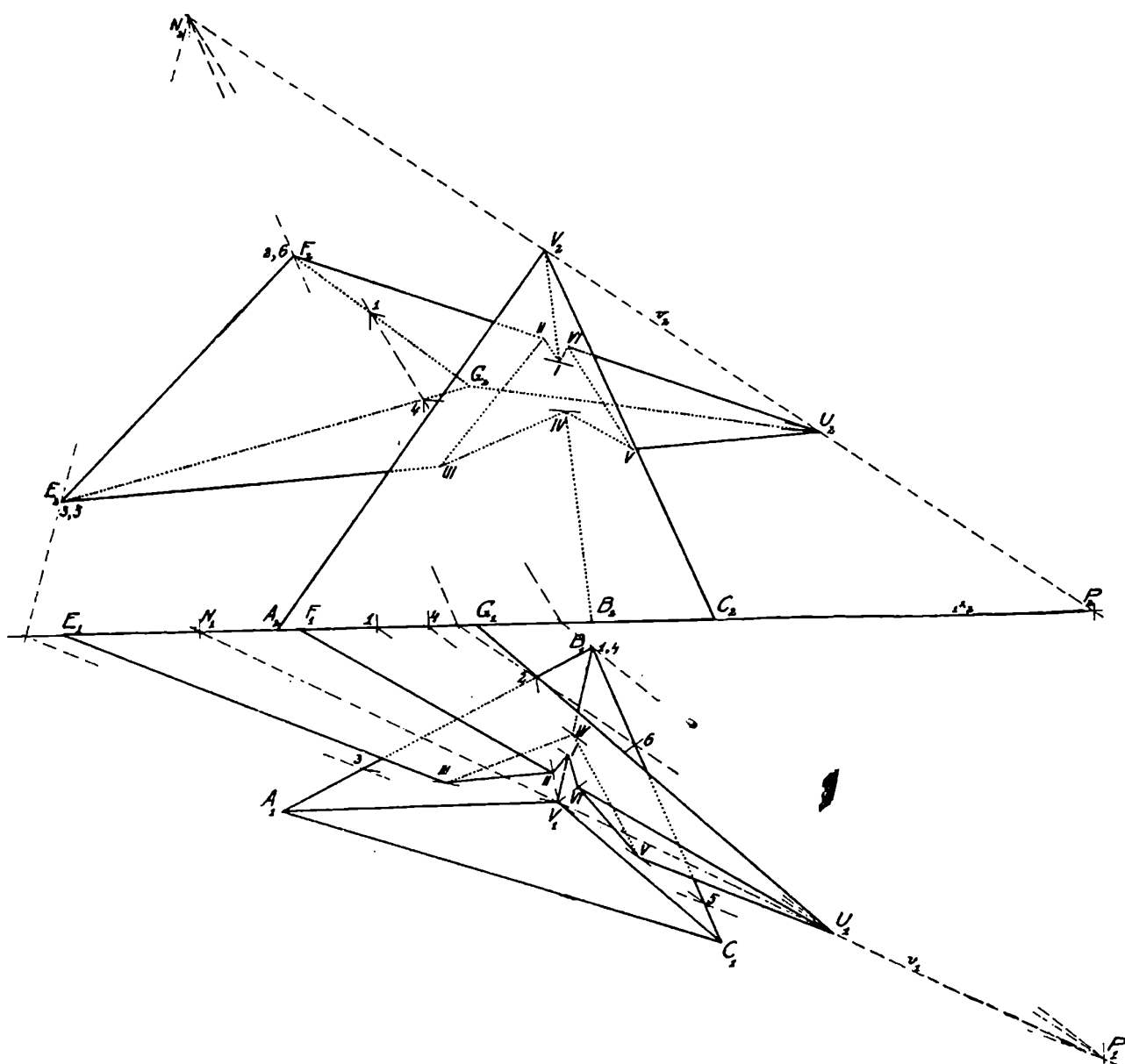
147. Vyšetřte pronik dvou hranolů ($ABCD$) A^1 , ($EFGHK$) E^1 . $A(-6.3, 3.2, 0)$, $B(-5.5, 1.2, 0)$, $C(-2, 1.8, 0)$, $D(-2.8, 3.8, 0)$, $A^1(0, 13, 7.4)$; $E(2.4, 2.7, 0)$, $F(4.9, 3.2, 0)$, $G(5.8, 6, 0)$, $H(4.2, 7.8, 0)$, $J(1, 4.8, 0)$, $E^1(-6, 7.6, 7.4)$.

Libovolně zvoleným bodem M vedeme rovnoběžky s pobočnými hranami hranolu $MP \parallel AA^1$, $MQ \parallel EE^1$, vyhledáme jejich stopníky P, Q , jejichž spojnice PQ jest směr stop vrcholových rovin pro oba hranoly. Styčné paprsky k podstavě $ABCD$ rovnoběžné s PQ určí na podstavě druhého hranolu dvě části liché, takže pronik jest úplný. Na proniku jsou zúčastněny vše-



Obr. 67.

chny pobočné hrany hranolu čtyřbokého a hrany GG_1, II^1 hranolu pětibokého, je tedy mnohoúhelník proniku prostorový dvacítiúhelník, rozpadající se ve dva šestiúhelníky.



Obr. 68.

Mohli bychom sestrojiti strany proniku, jež jsou na průsečnicích stěn jednoho hranolu, s příslušnou (-ými) stěnou hranolu druhého. Tyto průsečnice obdržíme, sestrojíme-li stopy stěn do roviny π a do roviny $\sigma \parallel \pi$, v níž jsou podstavy horní, spojením průsečíků těchto stop, na příklad $AB \times HI \equiv R$, $A^1 B^1 \times H^1 I^1 \equiv S$; na RS jsou vrcholy *III.*, *IV.* proniku. (Obr. 67.)

148. Zobraďte pronik hranolů z předchozí úlohy v šikmé projekci a jádro proniku.

c) Podstavy obou těles jsou v různých rovinách.

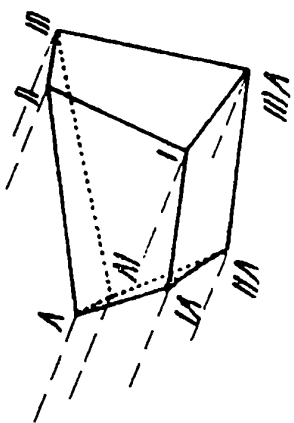
149. Jest zobraziti pronik jehlanu $(ABC)V$ s podstavou v π s jehlanem $(EFG)U$. $A(0, 3.8, 0)$, $B(6.6, 0.5, 0)$, $C(9.2, 6.8, 0)$, $V(5.8, 3.8, 7.8)$; $E(-4.5, 0, 2.8)$, $F(0.5, 0, 7.8)$, $G(4.2, 0, 5)$, $U(11.5, 6.6, 3.9)$. (Obr. 68.)

Najdeme stopníky P, N přímky VU , spojující vrcholy obou jehlanů, do obou průmětů; ty jsou středy svazků stop rovin vrcholových. Nárysná stopa roviny vrcholové (UEV) pro hranu UE jest NE , protne průsečnici rovin obou podstav x v bodě ε , εP jest stopa roviny (UEV) do roviny podstavy jehlanu V , na níž určí část lichou. Poněvadž druhá styčná rovina (VBU) vymezení část lichou na podstavě jehlanu U , jest pronik částečný — zásek. Číslování provedeme jak v předchozích případech.

150. V šikmé projekci zobraďte pronik dvou jehlanů $V(ABCD)$, $U(EFG)$. $V(7.5, 1, 1.5)$, $A(0, 3.5, 3.5)$, $B(0, 3, 1)$, $D(0, 0.5, 4)$, $AD \# BC$; $U(3, 1.5, 5.5)$, $E(2, 2, 0)$, $F(7, 4.5, 0)$, $G(5, 1, 0)$. $q = \frac{1}{2}$, $\omega = 135^\circ$. (Obr. 69.)

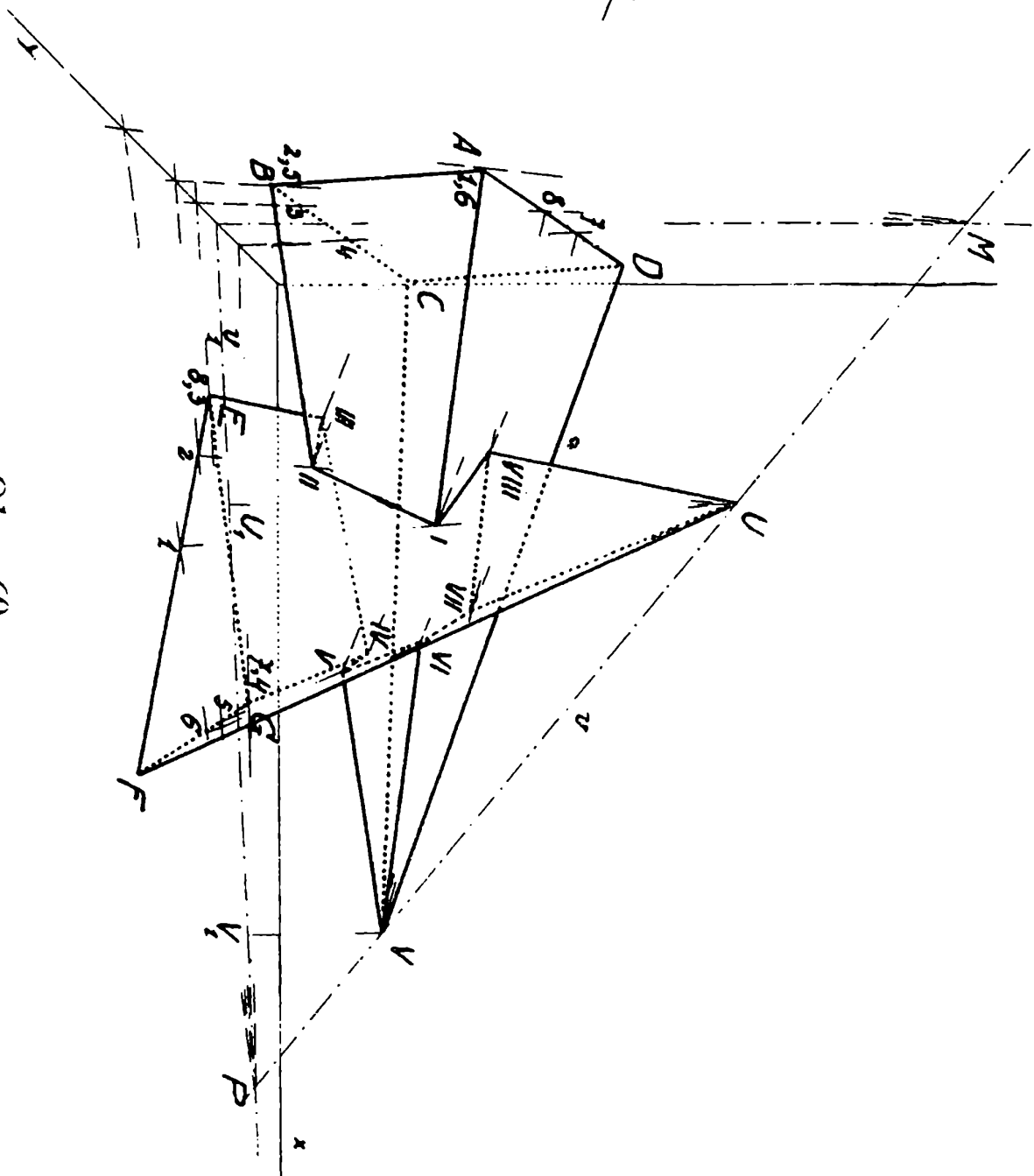
Základna jehlanu V jest v bokorysně, jehlanu U v π ; na jejich průsečnici Y protínají se stopy první a třetí vrcholových rovin obou těles, které tvoří svazky paprskové o středech ve stopnících P a M (stopník třetí). Vrcholové roviny styčné (VAU) , (UGV) určí části liché na obou podstavách, máme tedy zásek. Vedle zobrazeno jádro proniku. (Obr. 69a.)

151. Zobraďte pronik jehlanu $(ABCD)V$ s hranolem (EFG) , $E \varepsilon \parallel \pi$ má odchylku $\beta = 30^\circ$,



Obzr. 69a.

Obzr. 69.



$\overline{E} \varepsilon = 12$. $A (1.4, 6, 0)$, $B (8.4, 7.6, 0)$, $C (11.4, 2.8, 0)$, $D (4, 1, 0)$, $V (5.8, 4.4, 11)$; $E (-8, 0, 4.6)$, $F (0, 0, 1.6)$, $G (-4, 0, 7)$.

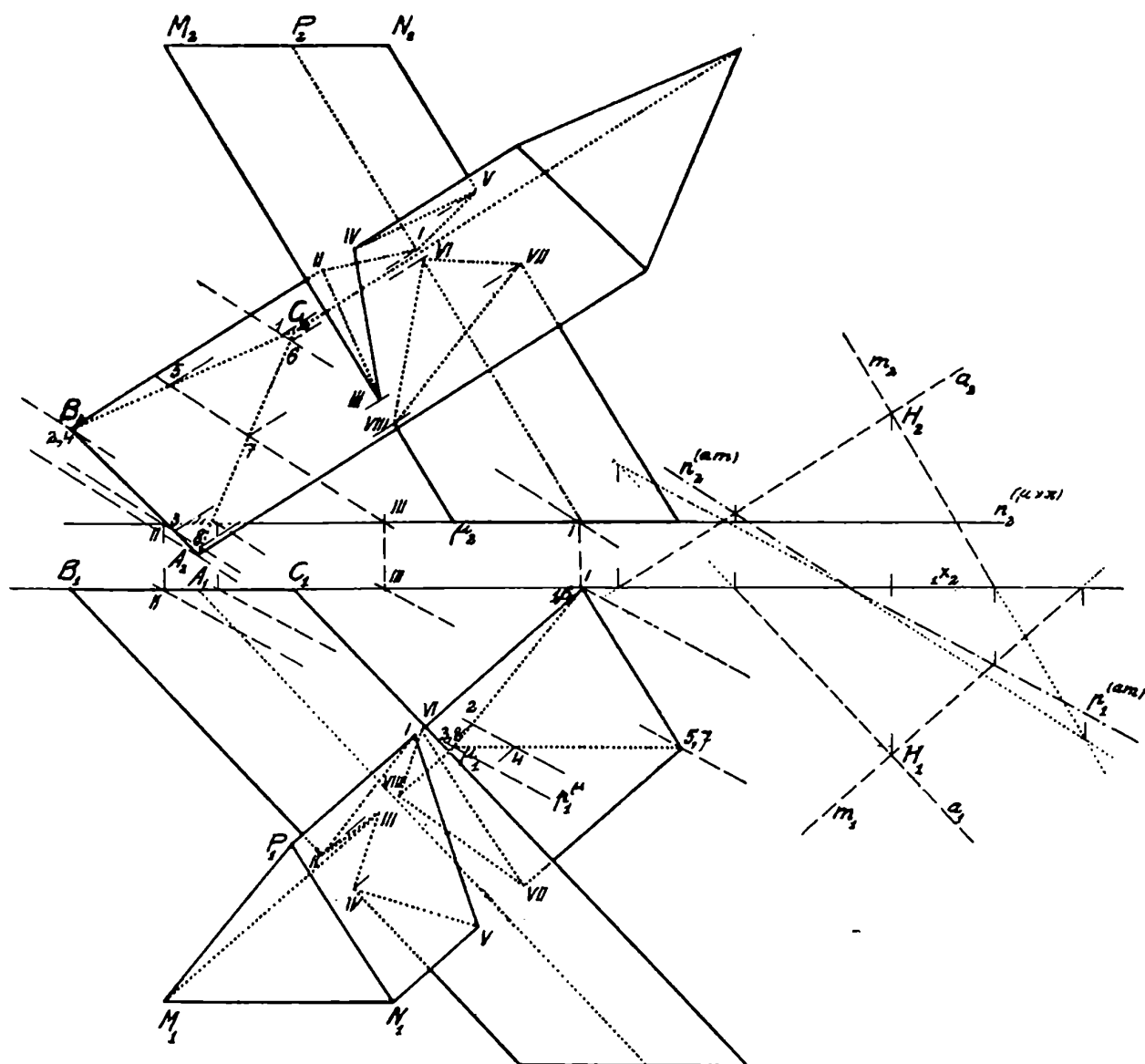
Vrcholem jehlanu vedeme přímku $V N \parallel E \varepsilon$ a určíme její stopníky P^∞, N do podstavných rovin. Nárysné stopy rovin vrcholových pro obě tělesa tvoří svazek paprsků o středu N , stopy půdorysné tvoří osnovu paprsků, ježto P^∞ jest úběžný bod přímky $V N$; $A_1 \alpha \parallel E_1 \varepsilon_1$. Pronik jest opět částečný.

152. V kavalierní perspektivě zobrazte pronik jehlanu s pláštěm pravidelného, šestibokého hranolu. Čtvercová podstava jehlanu jest v rovině ϱ , dané úhlopříčkou MP ; hranol jest půdorysně promítací v poloze průčelné (S, a, v) . $\varrho (0, 135^\circ, 90^\circ)$, $M (3, y, 1)$, $P (-2, y, 7)$, $V (10, 9, 4)$; $S (2, 5, 0)$, $a = 3.5$, $v = 7$.

Vrcholová přímka $V V_1 \parallel S S^1$ jest osou svazku rovin vrcholových; její stopníkem V_1 prochází svazek stop těchto rovin do roviny podstavy hranolu. Stopy vrcholových rovin v podstavné rovině jehlanu tvoří osnovu paprsků $\parallel S S_1$. Obě liché části vzniknou na podstavě hranolu, takže máme prostup. Stopy vrcholové roviny protínají se na průsečnici rovin obou podstav, t. j. na p^2 .

153. Zobrazte pronik hranolů $(ABC) \alpha$, $(MNP) \mu$. $A (-5, 0, 0.5)$, $B (-7, 0, 2.5)$, $C (-3.5, 0, 4)$, $\alpha (2, 7.5, 5)$; $M (-5.5, 6.5, 8.5)$, $N (-2, 6.5, 8.5)$, $P (-3.5, 4, 8.5)$, $\mu (-1, 2.5, 1)$. (Obr. 70.)

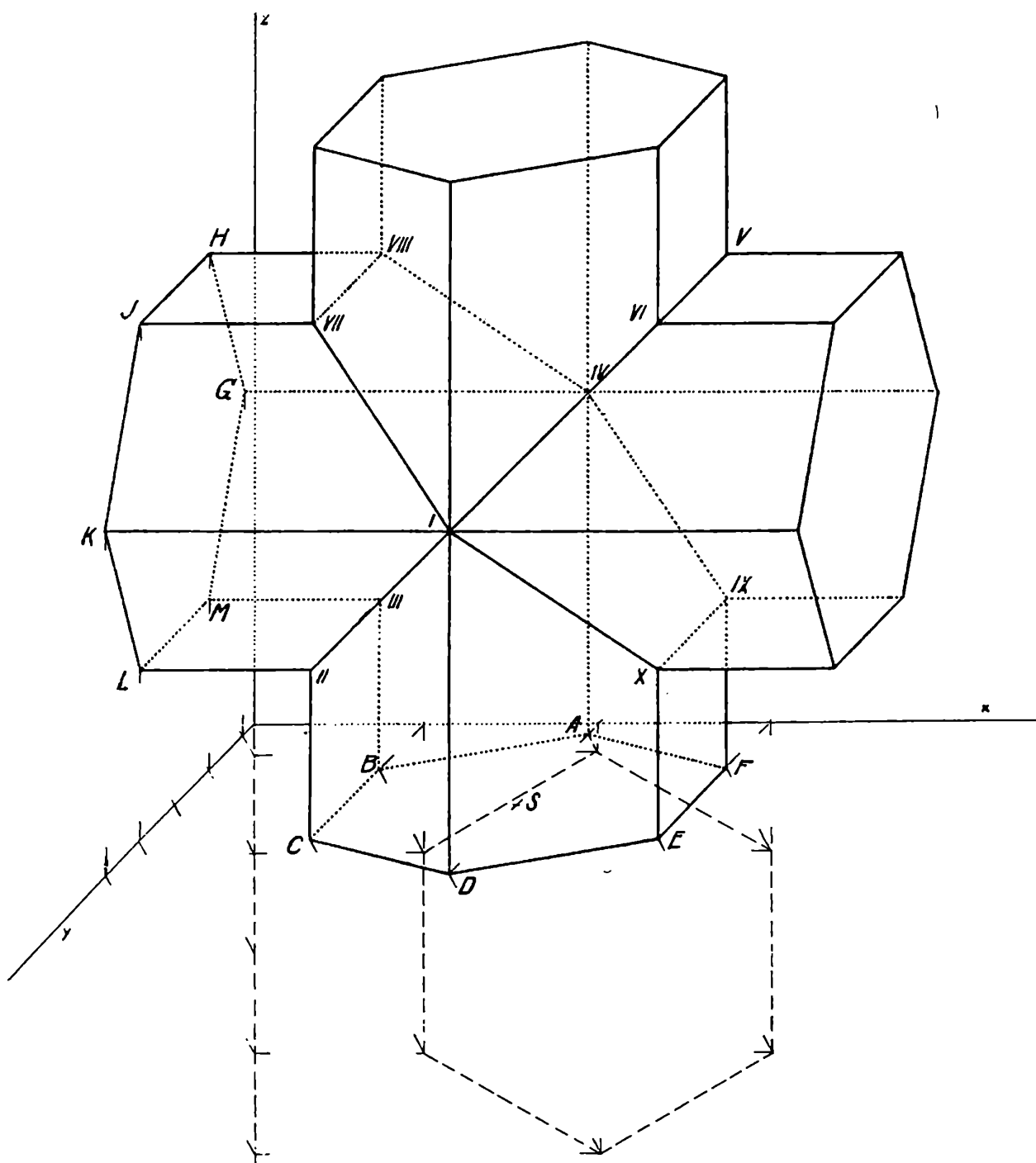
Libovolným bodem H vedeme rovnoběžky s pobočnými hranami obou hranolů $a \parallel A \alpha$, $m \parallel M \mu$. Vyšetříme stopy roviny vrcholové (a, m) . K podstavě ABC vedeme styčné paprsky $\parallel n^{(am)}$, vyšetříme bod $I \equiv n^c \times n^{\mu v \pi}$, a jeho půdorysem na



Obr. 70.

ose ${}_1x_2$ vedeme $p^c \parallel p^{(am)}$; stopa p^c vyznačí (nevyznačí!) na podstavě $\mu \nu \pi$ část lichou. Podobně stopa p^μ vrcholové roviny hrany M_μ do roviny $(\mu \nu \pi)$, protne nárysnu v bodu $II \equiv p_1^\mu \times \times x_{1,2}$, jehož nárysem vedeme stopu n_2^μ , která určí část lichou 38 A_2 . Stopy každé vrcholové roviny protínají se na průsečnici rovin obou podstav, kterou je druhá stopa $n^{(\mu \nu \pi)}$ roviny $(\mu \nu \pi)$.

154. Zobraďte v šikmé projekci $(\frac{1}{2}, 135^\circ)$ pronik pravidelného hranolu se šestúhel-



Obr. 71.

níkovou podstavou v π (S, r , v položená rožné, v) a pravidelného hranolu čtyřbokého s podstavou $MNPQ$ v μ (N, P, v_1). $S(4.5, 5, 0)$, $r = 3$, $v = 10$; $N(0, 10, 5.5)$, $P(0, 7, 8)$, $v_1 = 12$.

Stopy vrcholových rovin jsou rovnoběžny s hranami obou hranolů a protínají se na ose Y . Pronik jest částečný.

155. V ortogonální i šikmé projekci $(135^\circ, \frac{1}{2})$, zobrazte pronik dvou shodných, pravidelných hranolů šestibokých, z nichž jeden je půdorysně promítací, druhý má pobočné hrany rovnoběžné s osou x . Prvý hranol je v poloze nárožné (S, r, v) . Pronik má dva dvojné body v půlících bodech hrany nejbližší a nejvzdálenější od v . $S(6, 4, 0)$, $r = 3.5$, $v = 12$. (Obr. 71.)

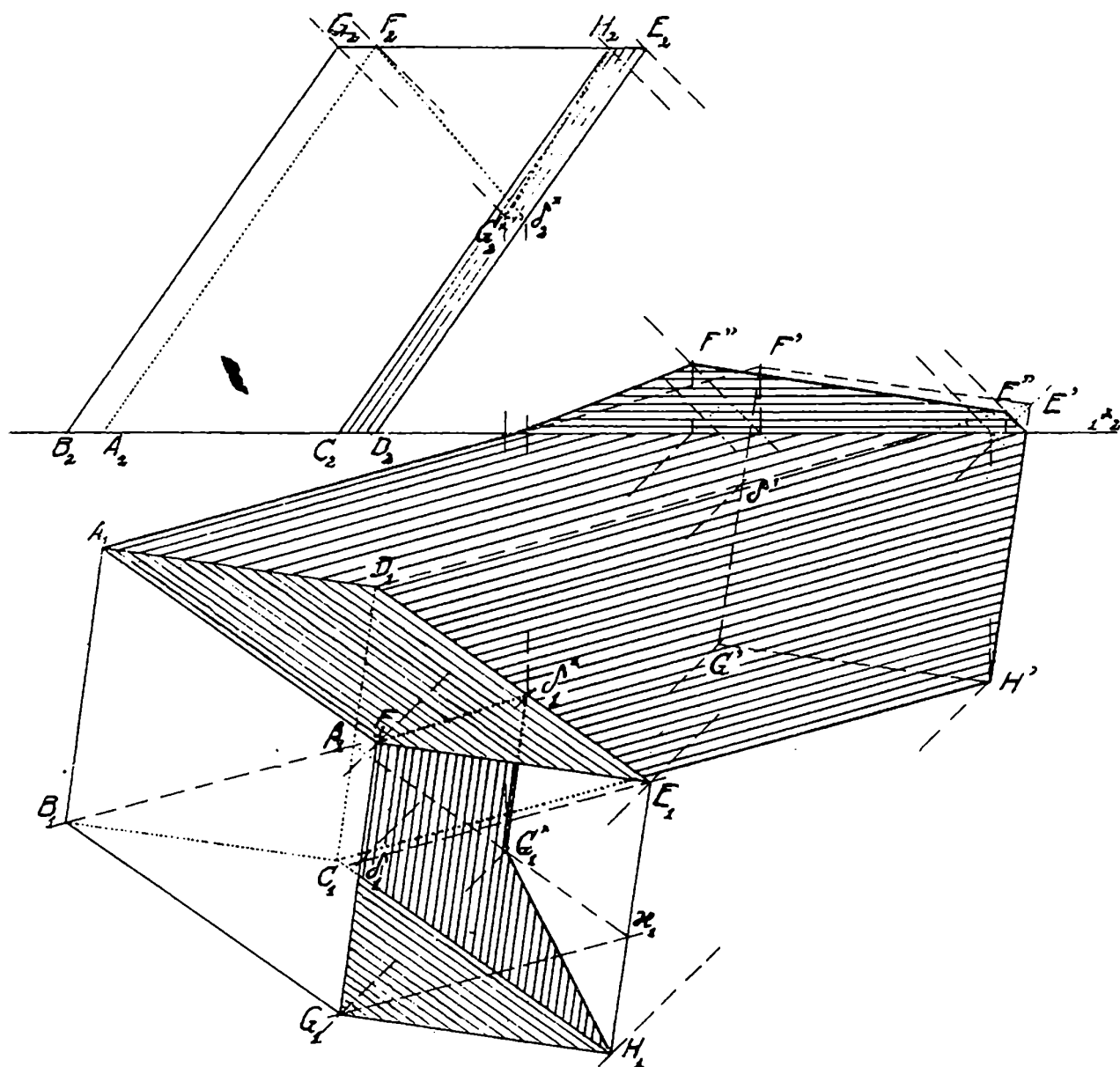
Osy obou hranolů se kolmo púlí; rovina jednoho úhlopříčného řezu vodorovného hranolu jest rovnoběžná s π . Pronik se skládá ze dvou šestiúhelníků, které mají společné vrcholy ve středech hran AA_1 , DD_1 hranolu svislého.

156. Zobrazte pronik pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou v π a trojbokého hranolu s podstavou v v , jehož pobočné hrany mají směr PR . $A(-2, 1.5, 0)$, $S(0, 5, 0)$, $v = 10$; $M(5.5, 0, 1)$, $N(4, 0, 5)$, $P(10, 0, 4)$, $R(4, 5.5, 4)$.

VII. Osvětlení dutin.

Jedná-li se o sestrojení výjevu osvětlení na tělese dutém, musíme vyšetřiti vedle stínu vlastního a vrženého na průmětny ještě **stín vržený do dutiny**. Stěny tělesa na vnějším povrchu osvětlené vrhají stín dovnitř, a mez tohoto vrženého stínu jest průsek stěn osvětlených na vnitřním povrchu se světelným hranolem, jehož površky, rovnoběžné se světelnými paprsky, procházejí body hran podstavy, jež jsou na osvětlených stěnách povrchu vnějšího.

Jest tedy mez vrženého stínu dovnitř částí proniku daného mnohostěnu s pláštěm světelného hranolu, jehož řídícím mnohoúhelníkem jest obvod osvětlené základny.

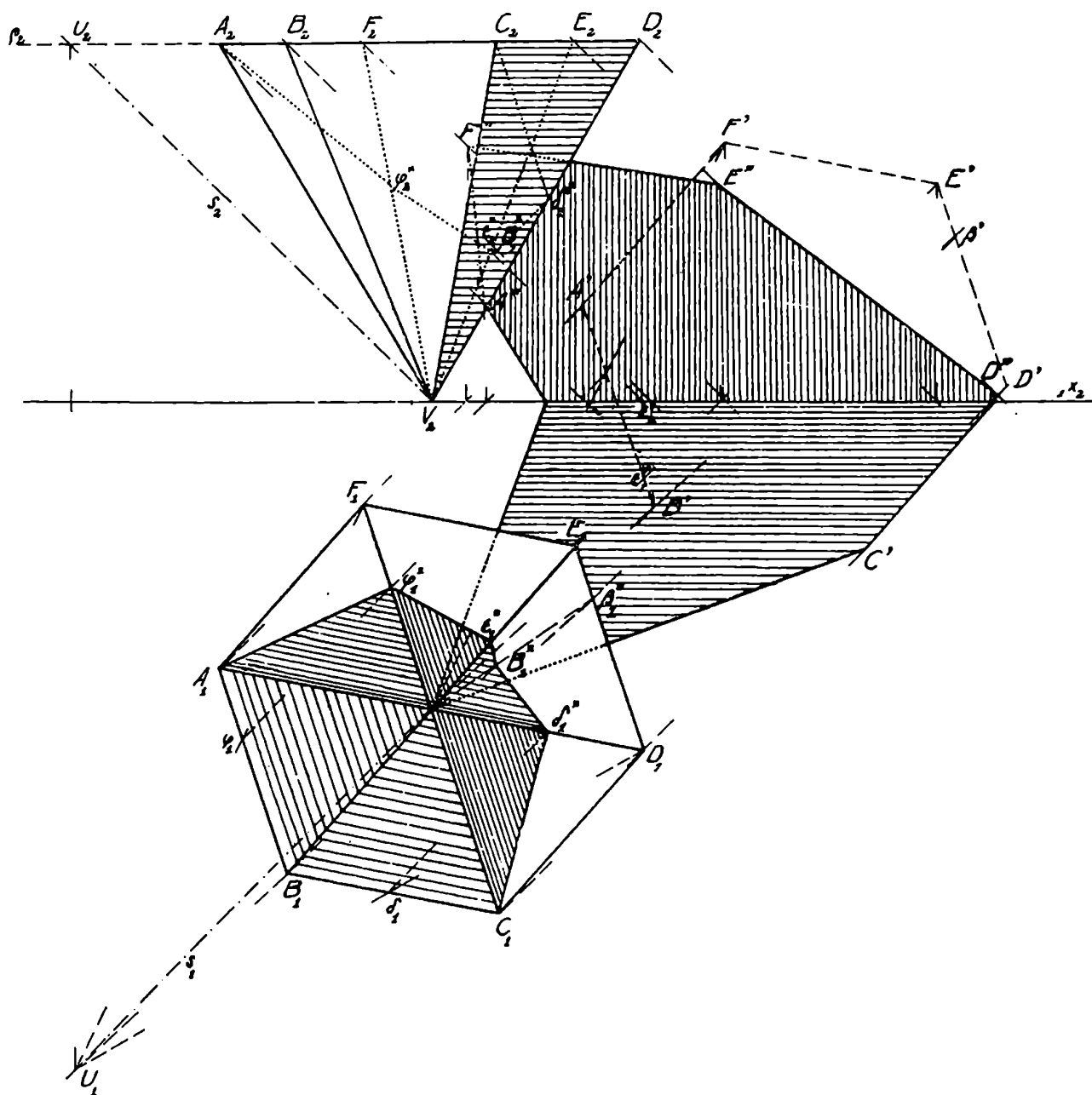


Obr. 72.

Kdybychom měli osvětlení centrální, přejde světelný hranol v jehlan.

157. Jest sestrojiti osvětlení pláště šikmého hranolu s čtvercovou základnou v $\pi(S, A)$, je-li směr hran pobočných AF . $S(-1, 3.5, 0)$, $A(-2.5, 1.5, 0)$, $F(1, 4, 5)$. (Obr. 72.)

Mez vlastního stínu na vnějším povrchu pláště jest $ABCH EFA$; k ní přistupují hrany AF , CH , FG , GH povrchu vnitřního, jež tvoří mez vlastního stínu uvnitř pláště.



Obr. 73.

Hrany FG , GH mají vržený stín $F'G'$, $G'H'$ na půdorysně uvnitř vrženého stínu tělesa, pročez vrhají stín na stěny $ADEF$, $DCH E$. Jedná se tedy o vržený stín G^* vrcholu G na stěnu $CDEH$ a o stín δ^* jistého bodu δ hrany FG na hranu DE .

Hledané body můžeme vyšetřiti:

a) **zpětným paprskem** $\delta' \delta^* \times DE \equiv \delta^*$, kde $\delta' \equiv DE' \times F'G'$,

b) jako **průsečíky světelných paprsků s pláštěm tělesa**.

Hranou BG proložíme rovinu rovnoběžnou se směrem světla, jejíž stopa do roviny horní podstavy hranolu jest $G\kappa \parallel CH'$. Rovina $(BG\kappa)$ protne plášť hranolu v povrchce $\kappa\beta$ a průsečík $G^* \equiv \beta\kappa \times GG^*$ jest hledaný vržený stín bodu G dovnitř. GG^* jest světelný paprsek bodu G .

Podobně světelná rovina hrany DE má stopu $E\delta \parallel G\kappa$ v rovině $(EFGH)$, ta určí bod $\delta \equiv E\delta \times FG$, jehož vržený stín dovnitř jest na hraně DE , $\delta^* \equiv \delta\delta^* \times DE$, kde $\delta\delta^* \parallel s$.

158. Zobrazte osvětlení pláště pravidelného šestibokého jehlanu, jehož podstava jest v rovině $\varrho \parallel \pi$ a vrchol V v půdorysně. $S(0, 5.3, 6.2)$, $A(-3.6, 4.5, z)$. (Obr. 73.)

Znáмым způsobem vyšetříme vržený a vlastní stín jehlanu. Na vnějším povrchu jsou osvětleny stěny (AVB) , (BVC) , jež vrhají stín na vnitřní osvětlené stěny (AVF) , (FVE) , (EVD) a (DVC) . Mez vrženého stínu v dutině jehlanu jest vrženým stínem hran AB , BC ; její vrcholy budou jednak vržené stíny jmenovaných hran na pobočné hrany VF , VE , VD , jednak to jest vržený stín vrcholu B . Stíny φ^* , ε^* , δ^* na hranách můžeme odvoditi zpětnými paprsky z průsečíků vržených stínů na půdorysně ($\varphi' \equiv V'F' \times A'B'$), vržený stín B^* bodu B padne na povrchku $V\beta$, jejíž vržený stín $V'\beta' \equiv V'B'$; odtud B^* zpětným paprskem $B'B^* \parallel s$, $B^* \equiv V\beta \times B'B$.

Vrcholy vrženého stínu dovnitř můžeme sestrojiti nezávisle od vrženého stínu na půdorysně, uvážíme-li, že jsou to průsečíky pláště jehlanu se světelnými paprsky bodů φ , ε , B , δ na hranách AB , BC . Vrcholové roviny (úl. 59) světelných paprsků jmenovaných bodů tvoří svazek rovin, jehož osou jest paprsek XU , jdoucí vrcholem V ; stopy rovin tvoří svazek paprsků, jehož středem jest bod $U \equiv VU \times \varrho$.

Spojíme-li UB , obdržíme stopu vrcholové roviny pro paprsek BB^* (a současně pro hranu VB), která protne obvod podstavy v bodě $\beta \equiv UB \times ED$, a βV jest druhá površka, v níž rovina (UVB) protíná plášť jehlanu, a na níž leží bod

$B^* \equiv B B^* \times V \beta$. Abychom sestrojili bod φ , který vrhá stín na hranu VF , spojíme FU [stopa vrcholové roviny $(F V U)$], obdržíme $\varphi \equiv F U \times A B$ a pak $q^* \equiv \varphi q^* \times V F$, kde $\varphi q^* \parallel s$.

Ježto bod ε_1^* nebylo možno sestrojiti přesně ani prvou, ani druhou metodou, byl nejdříve nalezen průmět druhý pomocí nárysu zpětného paprsku $\varepsilon_2' \varepsilon_2^* \parallel s_2$.

159. V šikmé projekci ($\frac{1}{2}$, 135°) sestrojte osvětlení pláště jehlanu $(A \dots G) V$, jehož podstava jest v π a vrchol pod půdorysnou, je-li paprsek světla VU . $A(-3.8, 10.5, 0)$, $B(0.3, 15.2, 0)$, $C(3.3, 14.2, 0)$, $D(4.2, 10, 0)$, $E(1.4, 3.8, 0)$, $F(-1.8, 2.2, 0)$, $G(-4, 3.6, 0)$, $V(0, 9, 10)$; $U(-10.2, 9.6, 0)$.

Vrcholový paprsek s protne rovinu podstavy v bodě $U \equiv s \times s_1$; z něho vedeme styčné paprsky k podstavě UB , UG a vyšetříme tak mez vlastního stínu na vnější i vnitřní ploše pláště BV , GV , BA , AG . Vržený stín vrcholu A dovnitř vyšetříme jako průsečík světelného paprsku AA^* s pláštěm jehlanu, pomocí vrcholové roviny (AVU) ; stopa její do roviny podstavy UA protne obrys podstavy ještě v bodě α , rovina (AVU) protne plášť jehlanu v hraně AV a povrchce αV , a vržený stín $A^* \equiv \alpha V \times AA^*$. Vrcholy stínu na hranách FV , EV , DV a CV obdržíme rovněž užitím rovin vrcholových, jejichž stopy do roviny podstavy tvoří svazek paprsků o středu U .

160. Zobrazte osvětlení pláště jehlanu z úlohy 13., obr. 11. s: $\sphericalangle s_1 x_1 = 165^\circ$, $\sphericalangle s_2 x_2 = 120^\circ$.

Bod E vrhá stín do dutiny, ježto stín E' padl dovnitř stínu jehlanu. Bod E^* odvodíme pomocí stínu $V\varepsilon'$ površky $V\varepsilon$; poněvadž půdorys ε_1 nedá se odvoditi přesně ze stínu ε' , vyšetříme nárys ε_2 pomocí bodu ε'_2 . Vržený stín dovnitř vychází z bodu F , jde do bodu $\alpha \equiv VA \times F'E'$, jde do E^* a přes bod γ^* do D .

161. Zobrazte osvětlení kvádru z úlohy 19., obr. 14.

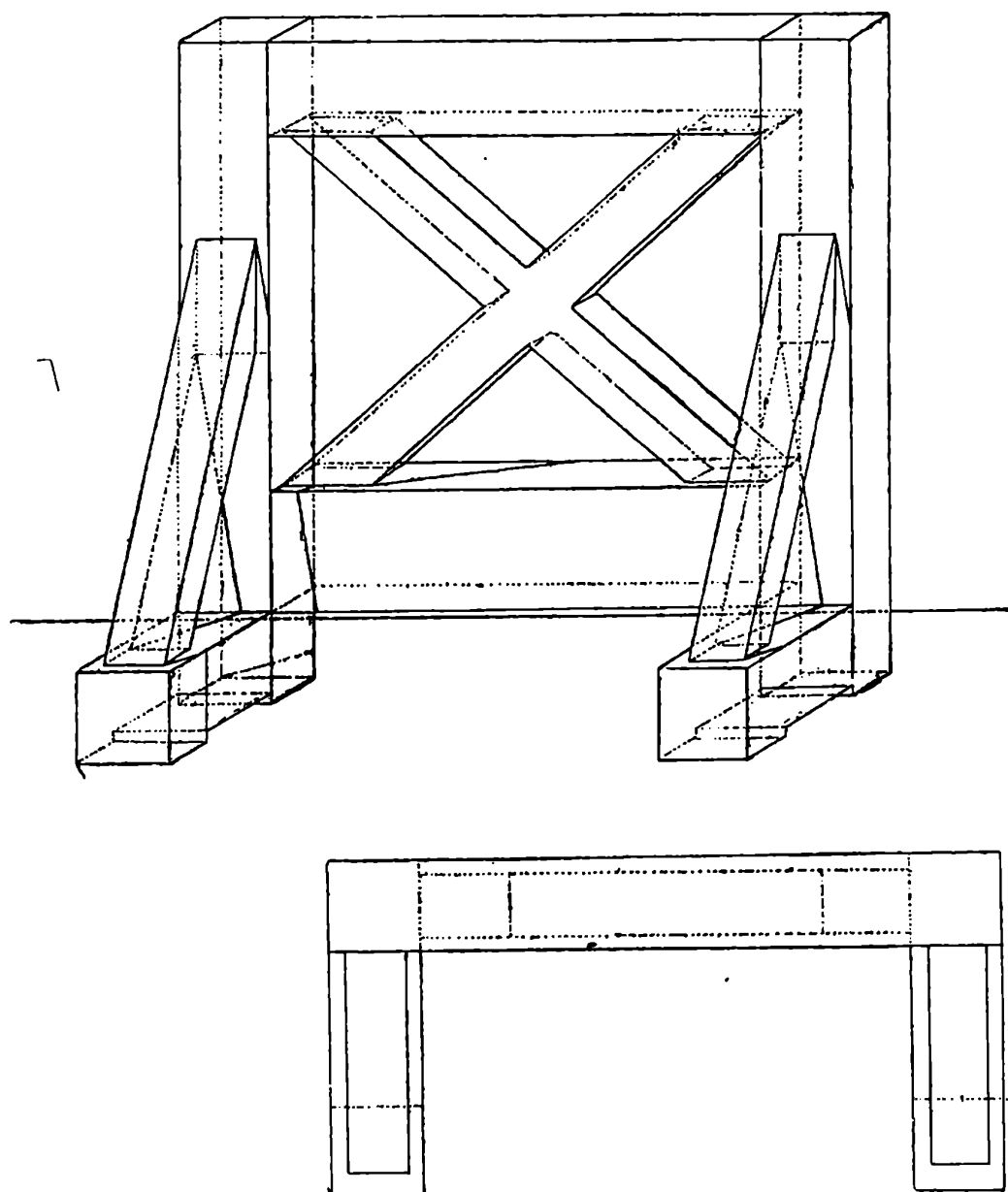
Vyšetříme vržený stín bodu B do dutiny, jako průsečík světelného paprsku BB^* s pláštěm kvádru; stopa vrcholové roviny do roviny horní podstavy jest $B^1\beta \parallel AI$. Stopa určí bod $\beta \equiv A^1D^1 \times B\beta$ a na povrchu bodu β obdržíme bod $B^* \equiv \beta B^* \times BB^*$. Mez vrženého stínu vychází z vrcholu A , jde přes B^* do δ^* na hraně DD^1 , odkud pokračuje do bodu C^1 , kde končí.

162. Osvětlete dutinu pravidelného dvanáctistěnu z úlohy 50., obr. 26., z něhož byl odejmut trojhran s vrcholem U .

Mez vlastního stínu na vnějším povrchu jest tvořena prostorovým mnohoúhelníkem $AHJTSRVN \cdot PDEA$. Zbývající čtyři stěny $(ABCDE)$, $(ABKJH)$, $(BCMLK)$, $(CDPNM)$ vnitřního povrchu jsou ve vrženém stínu, jehož mez je $III^*S^*IV^*$. Bod S^* vyhledáme jako průsečík paprsku SS' se stěnou $(BCMLK)$; kdybychom si mysleli z tělesa pouze stěnu $(BCMLK)$ a vrchol S s jeho z -ovou souřadnicí, vrhá tato na π stín S_1S' , který se láme na hraně BC v bodu I a jde po stěně jmenované do bodu II^* , který obdržíme zpětným paprskem z bodu $II' \equiv S^1S' \times L'M'$. Bod S^* je potom v průsečíku paprsku SS' a přímky II^* ; zpětnými paprsky sestrojíme body III^* , IV^* .

163. Zobrazte osvětlení pláště pravidelného šestibokého hranolu, který byl sříznut rovinou $s \parallel x$. (Obr. 40.)

Vržené stíny bodů δ , ε padnou na základnu, takže $\delta^* \equiv \delta'$, $\varepsilon^* \equiv \varepsilon'$. Vržený stín úsečky $\varepsilon\varphi$ jde po půdorysně po hranu AB , kde se láme v bodu I do II ; tento obdržíme, když si myslíme stěnu $AF\varphi a$ prodlouženu. Potom stín hrany $\varepsilon\varphi$ postupuje po půdorysně až k bodu $3 \equiv \varepsilon'\varphi' \times FA$, kde se láme do úsečky



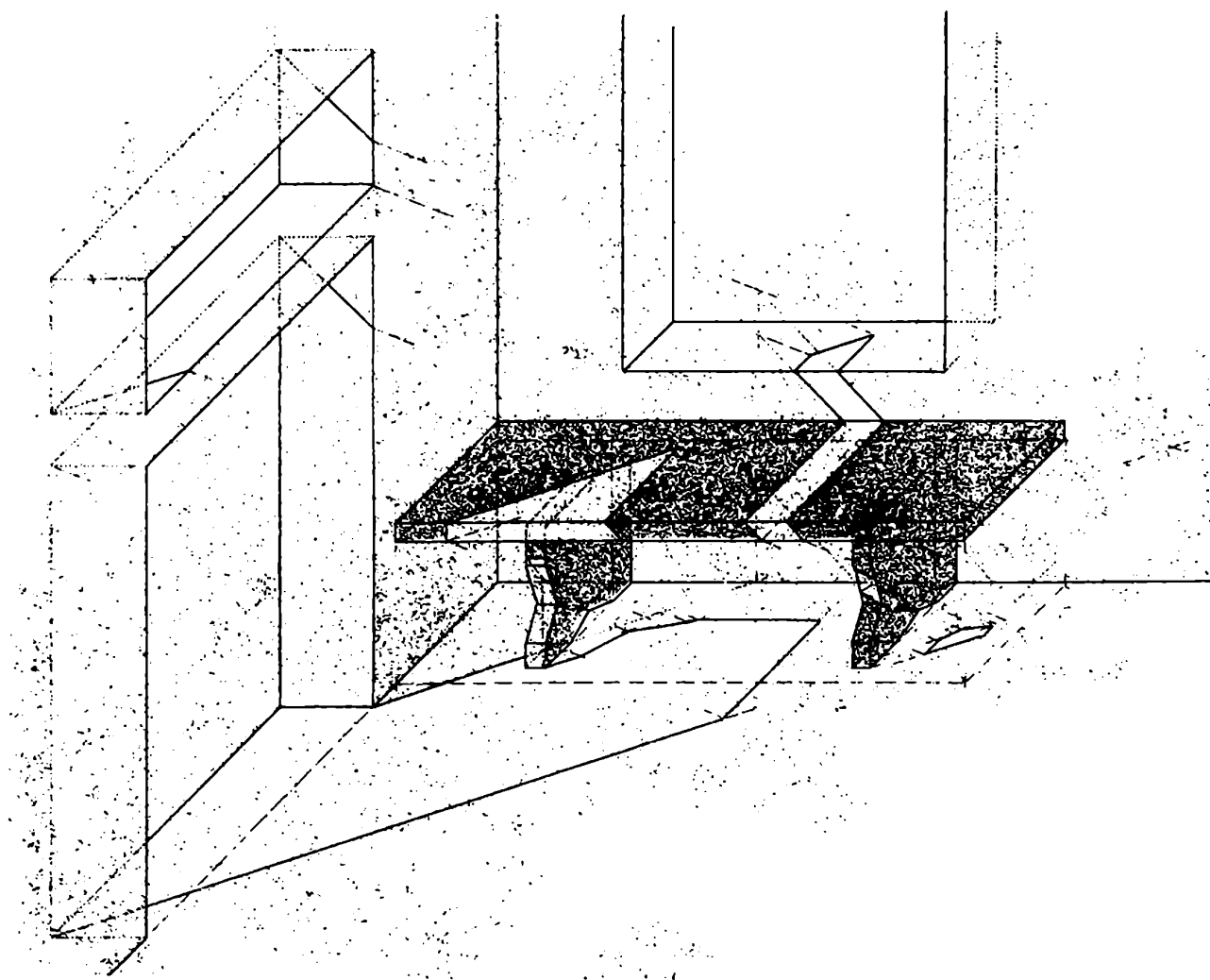
Obr. 75.

Mez vrženého stínu dovnitř skládá se z vrženého stínu hran JA , AB , BC , CD na vnitřní osvětlené plochy stěn dvanáctistěnu, dál ze stínu těchto hran na osvětlené stěny jehlanu a konečně z vrženého stínu jehlanu na stěny dvanáctistěnu.

Abychom vyšetřili bod A^* sestrojíme průsečnici 12 promítací roviny AA_1A' se stěnou JIH dvanáctistěnu, pak $A^* \equiv A A' \times 12$.

Podobně vyšetříme body B^* , C^* a V^* ; body α^* , β^* , δ^* , $\varkappa^*$ vyhledáme zpětnými paprsky z průsečíků vržených stínů hran na π .

*) Stěna $D_1 E_1 F_1$ má býti celé tečkováno.



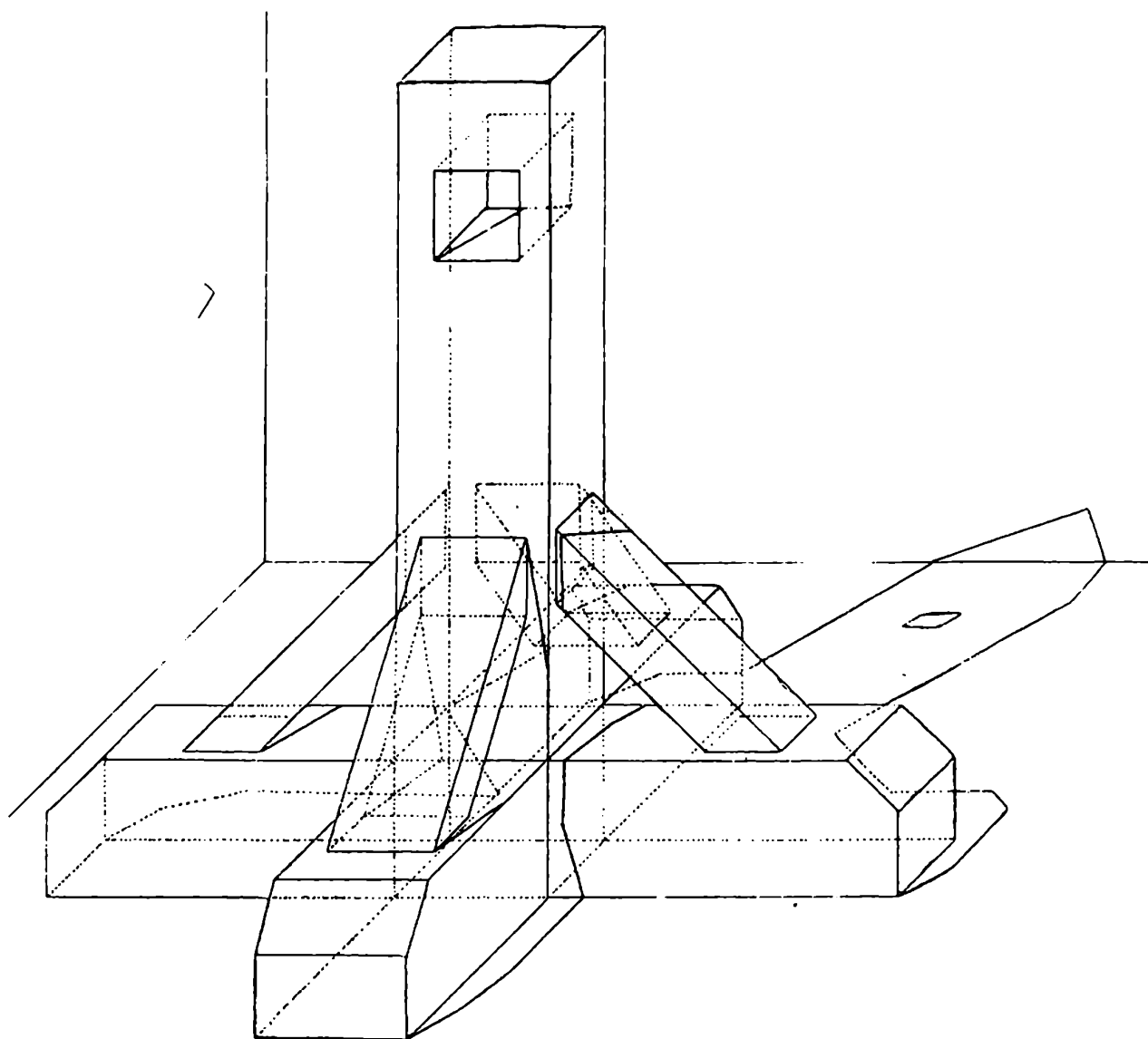
Obr. 76.

165. V obrazci 75 jest provedeno osvětlení detailu dřevěného zábradlí mostu v šikmé projekci. Rozměry se odečtou snadno z obrazce.

166. V obrazci 76 jest v šikmé projekci provedeno osvětlení koutu v předsíni.

167. V obrazci 77 jest zobrazen šikmý průmět vazby trámů a osvětlení.

168. Zobrazte osvětlení dutého jehlanu šestibokého, pravidelného, jehož stěna



Obr. 77.

ABV jest v π , vrchol V na ose x , je-li odchylka stěn pobočných od podstavy $\alpha = 60^\circ$; tloušťka stěn $t = 0.5$. $A(0, 7.3, 0)$, $B(3.3, 5, 0)$.

Podstavný šestiúhelník zobrazíme nejdřív ve sklopení; potom jej otočíme tak, aby jeho rovina svírala s půdorysnou $\angle \alpha = 60^\circ$.

Z vrženého stínu jehlanu na π odvodíme mez vlastního stínu a zpětnými paprsky vržený stín do dutiny.

O B S A H.

	Strana
I. Několik úloh bez osy souřadné	3
II. Zobrazení průmětů jehlanu a hranolu	12
III. Pravidelné mnohostěny Pythagorovy:	26
a) Pravidelný čtyřstěn (tetraeder)	26
b) Pravidelný osmistěn (oktaeder)	29
c) Pravidelný šestistěn (hexaeder, krychle)	33
d) Pravidelný dvanáctistěn (dodekaeder)	42
e) Pravidelný dvacetistěn (ikosaeder)	46
IV. Průseky s tělesy hranatými:	49
a) Průsečíky přímek	49
b) Průseky (řezy) rovin s tělesy. Sít jehlanu a hranolu	54
V. Osvětlení tělesa: stín přímky na těleso a osvětlení skupin	81
VI. Vzájemné proniky mnohostěnů	94
a) Pronik s hranolem kolmým ku průmětně	96
b) Podstavy obou těles jsou v téže rovině	100
c) Podstavy obou těles jsou v různých rovinách	113
VII. Osvětlení dutin	118

