Školní příručky
„Dědictví Havlíčkova".
Svazek 35.

ÚLOHY
z deskriptivní geometrie.

DÍL I.

240 řešených příkladů se 136 obrázky.

Napsal

BOHUSLAV STAROSTA,
profesor II. stát. reál. gymnasia v Brně.

V Brně 1930.

Nákladem „Dědictví Havlíčkova" v Brně, Pekařská 2.

Tiskem Rolnické tiskárny v Brně.

Úvod.

Sbírka tato má býti doplňkem středoškolských učebnic deskriptivní geometrie, podávajíc studentům jejich látku ve formě řešených příkladů. Může také pomáhati při soukromém studiu začátků deskriptivní geometrie, poněvadž v řešení jednotlivých úloh jest udán podrobný postup práce, a četné obrazce poskytují kontrolu, takže sledování jich může zabrániti chybám v konstrukcích. Konečně, poněvadž z obrazců, třeba zmenšených, dá se usuzovati na velikost při řešení úloh ve skutečném měřítku, může býti sbírky užito k výběru látky na rysy. Aby bylo znemožněno bezduché okopírování obrazců, rýsovány tyto v měřítku polovičním.

Ve sbírce se užívá těchto značek:

$\varrho \equiv (a \times b)$, rovina ϱ jest určena různoběžkami a, b.

$\sigma \equiv (c \parallel d)$, rovina σ jest určena rovnoběžkami c, d.

$\tau \equiv (A, m)$, rovina τ jest určena bodem A a přímkou m.

$P \equiv AB \times CD$, bod P jest průsečík různoběžek AB, CD nebo

$Q \equiv m \times p$, bod Q jest průsečík různoběžek m, p.

$m \times \varrho \equiv M$, $\tau \times \sigma \equiv s$ znamená průsečík přímky m s rovinou ϱ, resp. průsečnici s dvou rovin τ a σ.

$P \ldots . a \perp b$, bodem P vedeme přímku a kolmo k b.

$N \ldots . \overset{\varrho}{n}_2 \parallel \overset{\sigma}{n}_2$, bodem N vedeme přímku $\overset{\varrho}{n}_2$ rovnoběžně k $\overset{\sigma}{n}_2$.

$a \dashv b = d$, kolmá vzdálenost dvou rovnoběžek $a \parallel b$ jest d.

$A \dashv p = d$, kolmá vzdálenost bodu A od přímky p jest d.

$M \dashv \varrho = d$, kolmá vzdálenost bodu M od roviny ϱ jest d.

$\varrho\,(-3, 2, 5)$ značí rovinu, která má úseky na osách souřadných $\xi = -3$, $\eta = 2$, $\xi = 5$, která tedy prochází body X $(-3, 0, 0)$, $Y\,(0, 2, 0)$, $Z\,(0, 05)$.

σ (5, 60°, 135°) značí, že rovina jde bodem X (5, 0, 0) a má $\sphericalangle\, p_1^{\sigma}\, x_1 = 60^0$, $\sphericalangle\, n_2^{\sigma}\, x_2 = 135^0$.

Úhlem přímky s osou x míníme vždy úhel kladného směru přímky s kladným směrem osy x.

$'A_1$, čteme A_1 pod čarou nebo A_1 šikmé a znamená to šikmý půdorys bodu A, $'A$ šikmý obraz bodu A.

Souřadnice jsou udány v centimetrech, obrazce jsou rýsovány v měřítku polovičním.

Boh. Starosta.

I. Promítání na jednu průmětnu.

a) Bod, přímka, rovina.

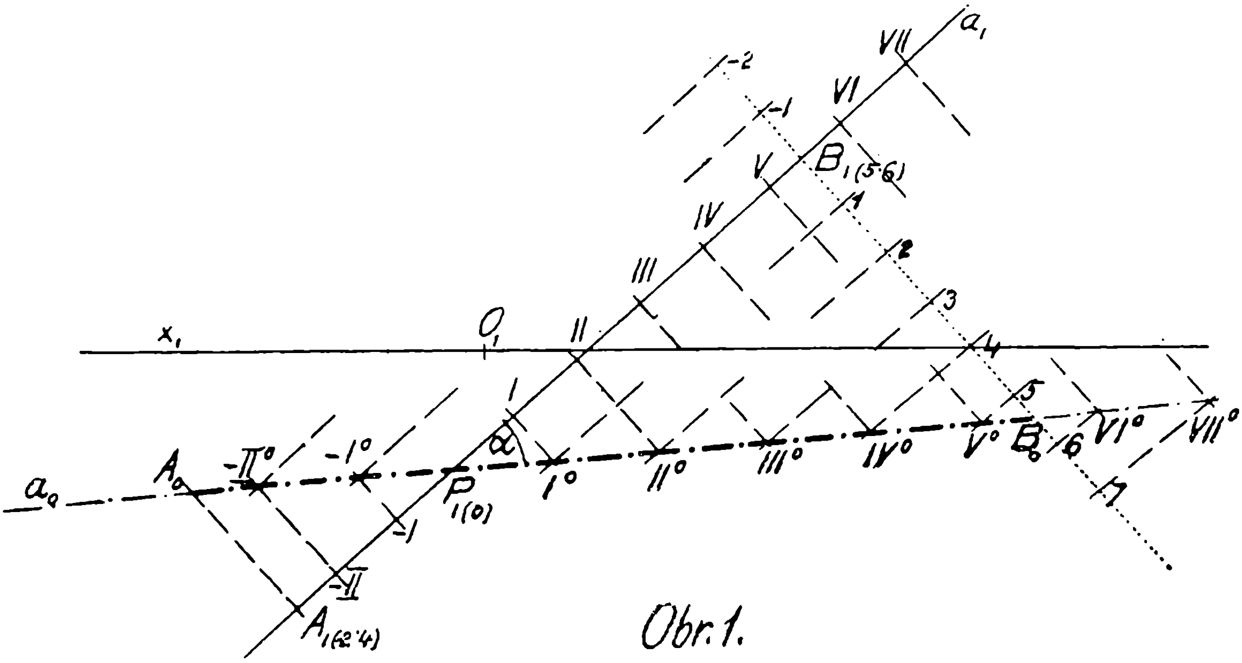
1. Jest sestrojiti skutečnou velikost úsečky $\overline{AB}$, její odchylku od půdorysny a stopník přímky: a) $a \equiv AB$*), $A\,(0, 2, 6)$, $B\,(-4, 4, 3)$, b) $C\,(2, -3, 1)$, $D\,(-3, 1, -2)$.

Skutečnou velikost úsečky sestrojíme sklopením jejího promítajícího lichoběžníku ($A_1 B_1 B A$) do půdorysny. V bodech A_1, B_1 vztyčíme kolmice na $A_1 B_1$, naneseme na ně příslušné souřadnice (koty) $z_A = 6$, $z_B = 3$, obdržíme sklopené obrazy A_0, B_0 bodů $\overline{A, B}$ a jejich spojnice $\overline{A_0 B_0}$ jest pravá velikost úsečky $\overline{AB}$. Odchylka přímky od π jest úhel, který svírá přímka se svým půdorysem a jest $\alpha = \sphericalangle a_0 a_1$. Vedeme-li bodem o menší kotě B úsečku $B_0 C_0 \parallel B_1 A_1$ oddělí z lichoběžníku $A_1 B_1 B_0 A_0$ promítající $\Delta\, A_0 C_0 B_0$, ve kterém $\sphericalangle B_0$ jest odchylka α. Stopník P přímky a jest průsečík přímky s půdorysnou a obdržíme jej v průsečíku sklopeného obrazu a půdorysu přímky $P \equiv A_1 B_1 A_0 B_0$. (Obr. 2.)

b) Poněvadž body C, D mají koty protivných znamének, jsou po různých stranách půdorysny, při sklápění lichoběžníku ($C_1 D_1 D C$) nanáší se z_C, z_D na různé strany od $\overline{C_1 D_1}$, sklopený obraz úsečky $C_0 D_0$ protne půdorys $\overline{C_1 D_1}$ mezi body $C_1 D_1$ půdorysy $I, II, \ldots VI$ bodů, které mají celistvé koty. (Obr. 1.)

$A_1 B_1 B_0 A_0$).

2. Jest stupňovati přímku $a \equiv AB$, t. j. nalézti na jejím půdoryse body, které mají koty vyjádřené celými čísly. A (—3, 4, 2·4), B (5, —3, 5·6). (Obr. 1.)



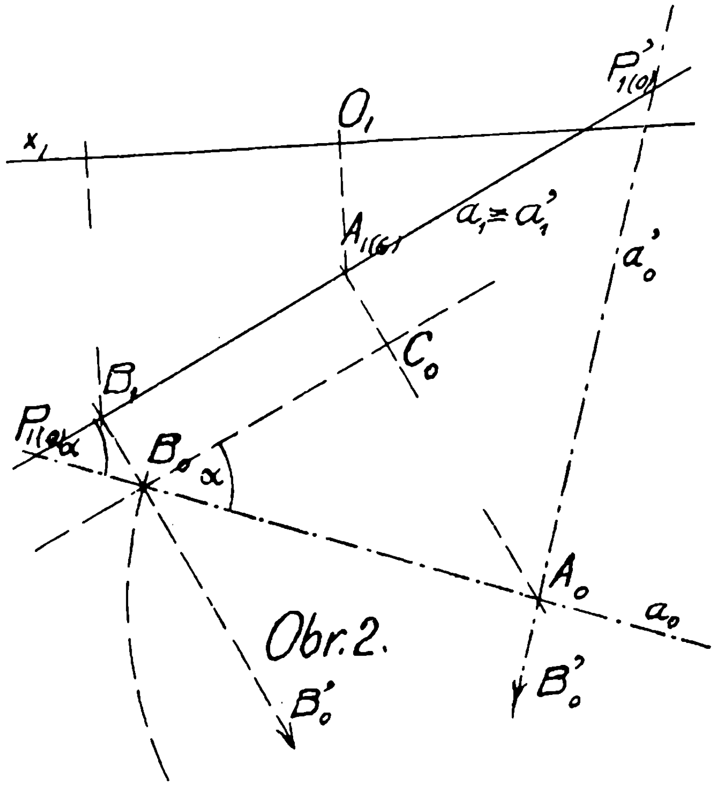
Obr. 1.

Sklopíme promítající lichoběžník $A_1 B_1 B A$ do půdorysny, na přímku $B_1 B_0$ naneseme od bodu B_1 jednotku délky (1 cm) a v obdržených bodech *1, 2, 3, 4. 5, 6* vedeme rovnoběžky s přímkou $A_1 B_1$. Rovnoběžky protnou sklopený obraz $A_0 B_0$ v bodech $I_0, II_0 \ldots VI_0$, a když z těchto spustíme kolmice k $A_1 B_1$ ($I_0 I$, $II_0 II, \ldots$ $VI_0 VI \perp A_1 B_1$), obdržíme na přímce $A_1 B_1$ půdorysy $I, II,. — VI$ bodů, které mají celistvé koty. (Obr. 1.)

3. Jest určiti z_B, je-li $\overline{AB} = 6.5$ cm, A (0, 2, 6), (B —4, 4, z). (Obr. 2.)

Pozn.: Mají-li body A, B souřadnice z vyjádřené celými čísly, provede se stupňování přímky AB tak, že se $\overline{A_1 B_1}$ rozdělí na $(z_B - z_A)$ stejných dílů; na př. A (—4, 2, 1), B (0, 1, 0, 5), rozdělíme $A_1 B_1$ na $5 - 1 = 4$ stejné díly. $\frac{A_1 B_1}{z_B - z_A} = i$ jest **interval přímky** AB. (Obr. 5.)

Půdorys úsečky $\overline{A_1 B_1}$ jest určen; narýsujeme $A_1 A_0 \perp A_1 B_1$, $\overline{A_1 A_0} = 6$, $B_1 B_0 \perp A_1 B_1$. Z bodu A_0 délkou $\overline{AB} = 6{\cdot}5$ opíšeme kružnici, která protne kolmici $B_1 B_0$ ve dvou bodech B_0, B'_0. $\overline{B_0 B_1}$ a $\overline{B'_0 B_1}$ jsou souřadnice z dvou bodů, které vyhovují úloze. Řešení jsou dvě (jedno, žádné) dle toho, je-li AB větší (rovno, menší) než $A_1 B_1$.



Obr. 2.

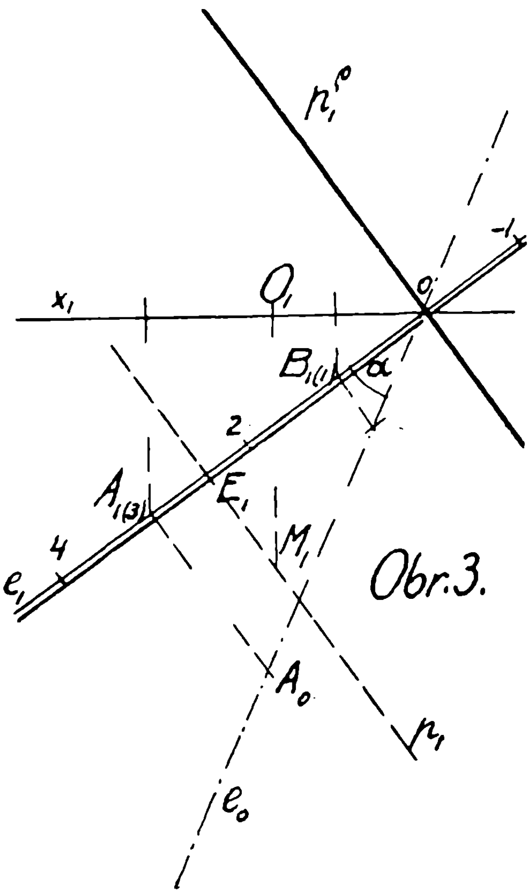
4. Jest určiti bod B na přímce a $[A_1\ (0, 2, 3),\ \sphericalangle a_1 x_1 = 30^0]$, je-li $\overline{AB} = 6$ cm, $z_B = -2$.

Narýsujeme $A_1 A_0 \perp a_1$, $\overline{A_1 A_0} = 3$, pak vedeme přímku $m \parallel a$, ve vzdálenosti $z_B = -2$ a protneme tuto kružnicí poloměru AB opsanou kolem bodu A_0 v bodech $B_0 B'_0$; z těchto spustíme kolmice na a_1, $B_0 B_1 \perp a_1$, $B'_0 B'_1 \perp a$, a obdržíme půdorysy hledaných bodů B.

Řešení jsou dvě (jedno, žádné) podle toho, je-li $\overline{AB}$ větší (rovno, menší) než $z_A - z_B$.

5. Jest sestrojiti stopu roviny $\varrho \equiv (a \times b)$ a její půdorysnou odchylku α. $a \equiv AB$, $b \equiv AC$; $A\,(-2, 3, -2)$, $B\,(3, 3, 3)$, $C\,(1, 1, 2)$.

Vyšetříme stopník P přímky $A\,B$ $[P_1 \quad A_1\,B_1 \times A_0\,B_0]$ a stopník Q přímky $A\,C$ $[Q_1 \equiv A_1\,C_1 \times A_0\,C_0]$; spojnice $P_1\,Q_1 \equiv$ $\equiv p_1^\varrho$. Odchylku roviny od půdorysny vyšetříme jako půdorysnou odchylku její **přímky spádové** e. Z bodu B_1 spustíme kolmici na stopu roviny $e_1 \perp p_1^\varrho$, pak $B_1\,B_0 \perp e_1$, $B_1\,B_0 = z_B = 3$, B spojíme s bodem $P'_{1(0)} \equiv p_1^\varrho \times e_1$, tak dostali jsme $P'_1\,B_0 \equiv$ $\equiv e_0$ a $\sphericalangle e_0\,e_1 = \alpha$. Trojúhelník $P_1\,B_1\,B_0$ nazýváme **trojúhelníkem roviny** ($\Delta\,A_0\,A_1\,O$ v obr. 3.)

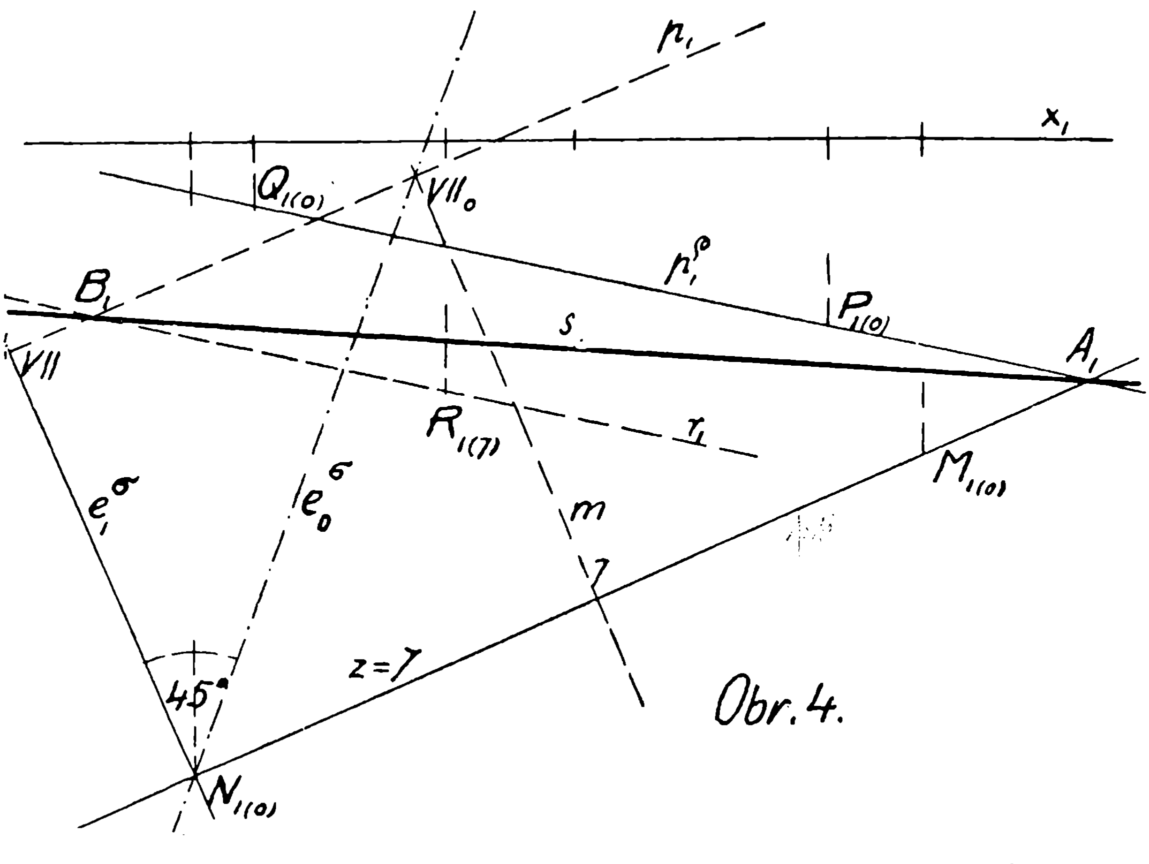


Obr. 3.

6. J e s t z o b r a z i t i s t o p u r o v i n y ϱ, j e j í o d c h y l k u o d p ů d o r y s n y α_ϱ a z_M b o d u M, k t e r ý j e v r o v i n ě. R o v i n a j e s t u r č e n a p ř í m k o u s p á d o v o u $e^\varrho \equiv A\,B$. $A\,(-2, 3, 3)$, $B\,(1, 1, 1)$, $M\,(0, 3, z)$. (Obr. 3.)

Spádovou přímku e^{ϱ} stupňujeme tak, že $\overline{A_1 B_1}$ rozdělíme na $z_A - z_B = 2$ díly stejné: takto sestrojený interval přímky $i = \frac{A_1 B_1}{z_A - z_B}$ přeneseme na e_1^{ϱ} od A_1 a B_1 a obdržíme body ..., $-1, 0, 1 \equiv B_1, 2, 3 \equiv A_1, 4,$ .. Bodem $\emptyset$... $p^{\varrho} \perp e^{\varrho}$ což jest stopa roviny ϱ. V bodě A_1 sestrojíme $A_1 A_0 \perp e_1$, $A_1 A_0 = 3$, $A_0 0 \equiv e_0^{\varrho}$ a $\sphericalangle e_1^{\varrho} e_0^{\varrho} = \alpha_0$. Bodem M_1 vedeme $p_1 \perp e_1^{\varrho}$, jež nám protne e_1^{ϱ} v bodě $E_1 \equiv e_1^{\varrho} \times p_1$ a jeho kota $z_E = z_M = 2.4$.

7. Jest vyšetřiti průsečnici rovin ϱ a σ. $\varrho\,[P\,(4, 3, 0),\ Q\,(-5, 1, 0),\ R\,(-2, 4, 7)]$; $\sigma\,[p^{\sigma} \equiv MN,$ $M\,(5{\cdot}5, 5{\cdot}5,),\ N\,(-6, 10, 0),\ \sphericalangle\,\sigma\pi = 45^0]$. (Obr. 4.)



Obr. 4.

Jeden bod průsečnice s jest průsečík stop $A \equiv (MN) \times \times (PQ)$; druhý bod B obdržíme v průsečíku stoposměrných přímek daných rovin, jež jsou v téže (libovolně zvolené) horizontální rovině. Vedeme bodem R_1 přímku $r_1 \parallel p_1^{\varrho}$ a vyhledáme v rovině σ stoposměrnou přímku, jež má kotu $7 = z_R$; v bodě N_1 narýsujeme $e_1^\sigma \perp p_1^\sigma$ a e_0^σ ($\sphericalangle e_1^\sigma e_0^\sigma = 45^0$), naneseme na p_1^σ od N_1 v témže směru, v jakém jsme sklopili přímku spádovou $z = 7$ do bodu 7 a jím vedeme pomocnou přímku $m \parallel e_1^\sigma$; $m \times e_1^\sigma \equiv VII_0$ jest sklopený obraz bodu VII přímky spádové e^σ, jenž má kotu 7, a jím vedená přímka $p_1 \parallel p_1^\sigma$ určí jeho půdorys VII_1 na e_1^σ a jest půdorysem stoposměrné přímky roviny σ. Přímky r a p jsou v téže rovině horizontálné, a jejich průsečík $r \times p \equiv B$ jest druhým bodem hledané průsečnice ($B_1 \equiv r_1 \times p_1$); konečně $s_1 \equiv A_1 B_1$.

8. Jest sestrojiti průsečnici rovin ϱ a σ, když $p^\varrho \parallel p^\sigma . p^\varrho \equiv AB$ [A (—5, 5, 0), B (—2, 0, 0)], $\alpha_\varrho = 45^0$; p^σ —| $p^\varrho = 5$, $\alpha_\sigma = 60^0$.

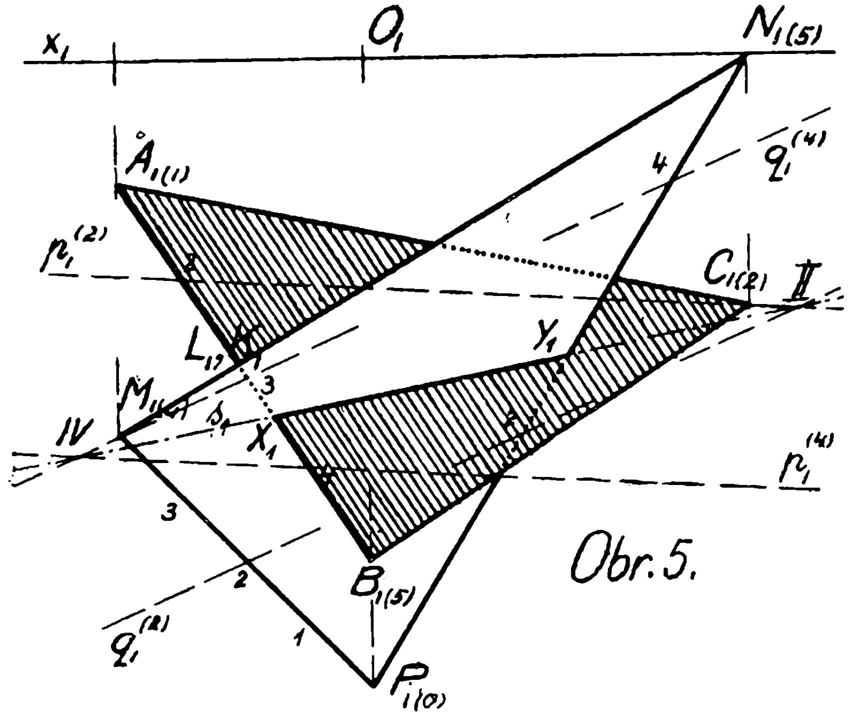
Obě roviny protneme rovinou $\tau \perp \varrho$, $\tau \perp \sigma$, (současně je $\tau \perp \pi$) v přímkách spádových $\tau \times \varrho \equiv r$, $\tau \times \sigma \equiv s$ ($\tau_1 \perp p_1^\varrho$, $r_1 \equiv s_1 \equiv \tau_1$); sklopíme rovinu τ a s ní přímky r, s ($\sphericalangle r_1 r_0 = 45^0$, $\sphericalangle s_1 s_0 = 60^0$), sklopené obrazy spádových přímek protnou se v bodě T hledané průsečnice ($T_0 \equiv r_0 \times s_0$). Z bodu T_0 spustíme kolmici na τ_1, kde obdržíme T_1 a jím vedeme $t_1 \parallel p_1^\varrho \parallel p_1^\sigma$, což jest půdorys hledané průsečnice. (Viz $E_1 F_1$ v obr. 13.)

Pozn. Jsou-li roviny dány svými **měřítky** (stupňovaná přímka spádová) $e^\varrho \equiv AB$, $e^\sigma \equiv CD$, vedeme v nich dva páry stoposměrných přímek, které jsou ve dvou rovinách horizontálných, a ty se protnou ve dvou bodech hledané průsečnice.

Je-li A (—3, 1, —2), B (2, 5, 4); C (—1, 1, 3), D (4, 3, —3), stupňujeme AB tak, že $A_1 B_1$ rozdělíme na $4 - (-2) = 4 + 2 = 6$ stejných dílů a dostaneme body, jejichž koty jsou —1, 0, 1, 2, 3. Body 1, 3 vedeme přímky $p_1 \perp e_1^\varrho$, $p_1' \perp e_1^\varrho$, což jsou stoposměrné přímky roviny ϱ: podobně rozdělíme $C_1 D_1$ na $3 - (-3) = 6$ dílů body 2, 1, 0, —1, —2 a body 1, 3 vedeme $q_1 \perp e_1^\sigma$, $q_1' \perp e_1^\sigma$, stoposměrné přímky roviny σ. Průsečíky

$p_1 \times q_1 \equiv M_1$, $p_1' \times q_1' \equiv N_1$ jsou půdorysy dvou bodů hledané průsečnice $s \equiv MN$ $(s_1 \equiv M_1 N_1)$.

9. Zobrazte pronik ΔABC a ΔMNP. $A(-2, 1, 1)$, $B(0, 4, 5)$, $C(3, 2, 2)$; $M(-2, 3, 4)$, $N(3, 0, 5)$, $P(0, 5, 0)$. (Obr. 5.)



Obr. 5.

Sestrojíme průsečnici s rovin obou trojúhelníků, a její část, obsažená v ploše společné průmětům obou obrazců, jest jejich průsek.

Stupňujeme přímku AB, její interval $i = \frac{A_1 B_1}{4}$; spojíme bod 2 s C a obdržíme stoposměrnou přímku $p^{(2)}$, se kterou vedeme rovnoběžku bodem 4, $p^{(4)} \parallel p^{(2)}$. Stupňujeme stranu MP, $i_1 = \frac{M_1 P_1}{4}$ a stranu NP, $i_2 = \frac{N_1 P_1}{5}$ spojíme body, které mají koty 2 a obdržíme stoposměrnou přímku $q^{(2)}$ a bodem $M_1 \ldots q_1^{(4)} \parallel q_1^{(2)}$. Stoposměrné přímky se protnou $p_1^{(2)} \times q_1^{(2)} \equiv \mathrm{II}$, $p_1^{(4)} \times q_1^{(4)} \equiv \mathrm{IV}$ a $\mathrm{II}\,\mathrm{IV} \equiv s_1$, jest půdorys průsečnice s. Úsečka XY, $X_1 \equiv s_1 \times A_1 B_1$, $Y_1 \equiv s_1 \times P_1 N_1$ jest hledaný průsek.

Abychom rozhodli **viditelnost obrazců**, uvažujme, že v průsečíku $A_1 B_1 \times M_1 N_1$ jsou půdorysy dvou bodů L, K. Bod K na přímce MN má $z_K \geq z_L$, proto je K viditelný a tedy též strana $M_1 N_1$ v tomto bodě viditelná. Strana $N_1 P_1$ jest viditelná v části $N_1 Y_1$ a pak mimo obrys $\Delta A_1 B_1 C_1$; strana $M_1 P_1$ jest viditelná celá. V $\Delta A_1 B_1 C_1$ jest celá viditelná strana $B_1 C_1$, $B_1 A_1$ v části $B_1 X_1$ a mimo obrys $\Delta M_1 N_1 P_1$, a strana $A_1 C_1$ jen v částech mimo $\Delta M_1 N_1 P_1$.

Tento případ proniku dvou rovinných obrazců jest **zásek**. (Koncové body proniku jsou na obvodech obou obrazců.)

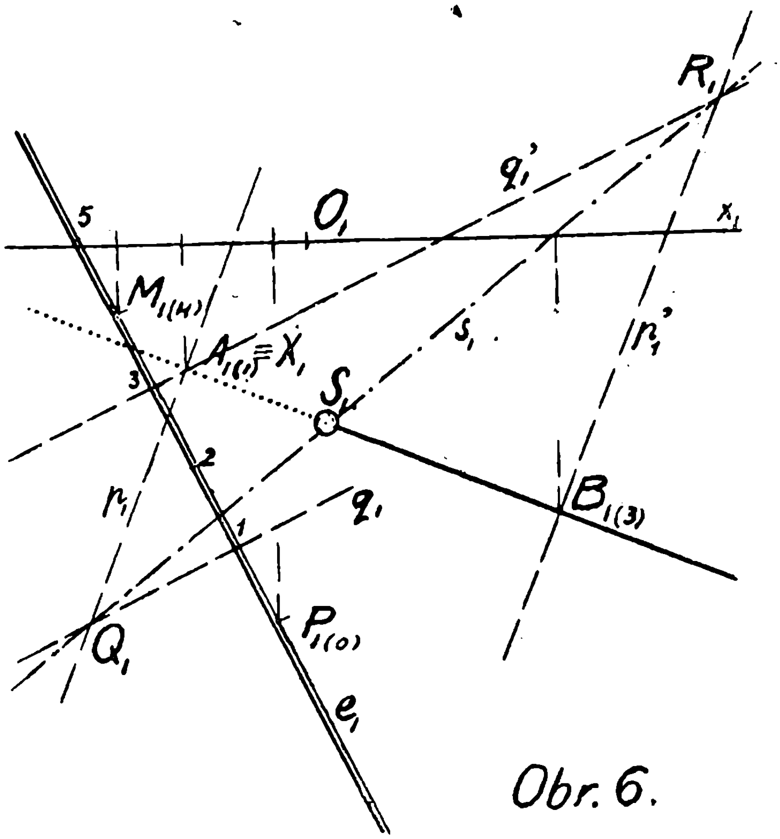
10. Jsou-li koncové body proniku na obvodě téhož mnohoúhelníka, máme **prostup (průsek)**, na př. $\Delta A(-4, 1, 5)$, $B(1, 0, 6)$, $C(3, 6, 2)$ a rovnoběžník $MNPQ$, $M(-2{\cdot}5, 5, 1{\cdot}5)$, $N(1, 0{\cdot}5, 5)$, $P(4, 1{\cdot}5, 5)$, Q.

11. Jest vyšetřiti průsečík přímky $a \equiv AB$ s rovinou ϱ, která je dána spádovou přímkou $e \equiv MP$. $A(-1, 1, 1)$, $B(2, 2{\cdot}3, 3)$; $M(-1{\cdot}5, 0{\cdot}5, 4)$, $P(-0{\cdot}5, 3, 0)$. (Obr. 6.)

Přímkou a proložíme pomocnou rovinu τ, vyhledáme její průsečnici s rovinou ϱ ($s \equiv \tau \times \varrho$) a průsečík této s danou přímkou jest bod hledaný ($S \equiv s \times a$).

Považujeme a za spádovou přímku pomocné roviny τ; uděláme-li v $A_1 \ldots p_1 \perp a_1$, v $B_1 \ldots p_1' \perp a_1$, jsou to stoposměrné přímky roviny τ. Stupňujme přímku e (rozdělíme $M_1 P_1$ na 4 stejné díly) a veďme body, jejichž koty jsou rovny kotám bodů A, B ($1 = z_A$, $3 = z_B$) přímky $q_1 \perp e_1$, $q_1' \perp e_1$. Průsečíky $p_1 \times q_1 \equiv Q_1$, $p_1' \times q_1' \equiv R_1$ jsou průměty bodů průsečnice $s \equiv \varrho \times \tau$; $s_1 \times a_1 \equiv S_1$.

Abychom rozhodli **viditelnost přímky** a, předpokládejme, že některý její bod má půdorys totožný s půdorysem bodu X v rovině ϱ, $X_1 \equiv A_1$. Určíme kotu bodu X tak, že vedeme bodem $X_1 \ldots q_1'' \perp e_1$, (zde $q_1'' \equiv q_1'$), která protne e_1 v bodě jisté koty $z_X \equiv 3$; je-li $z_X \gtreqless z_A$, je bod A pod (nad) rovinou ϱ, t. j. přímka v části SA neviditelná (viditelná).



Obr. 6.

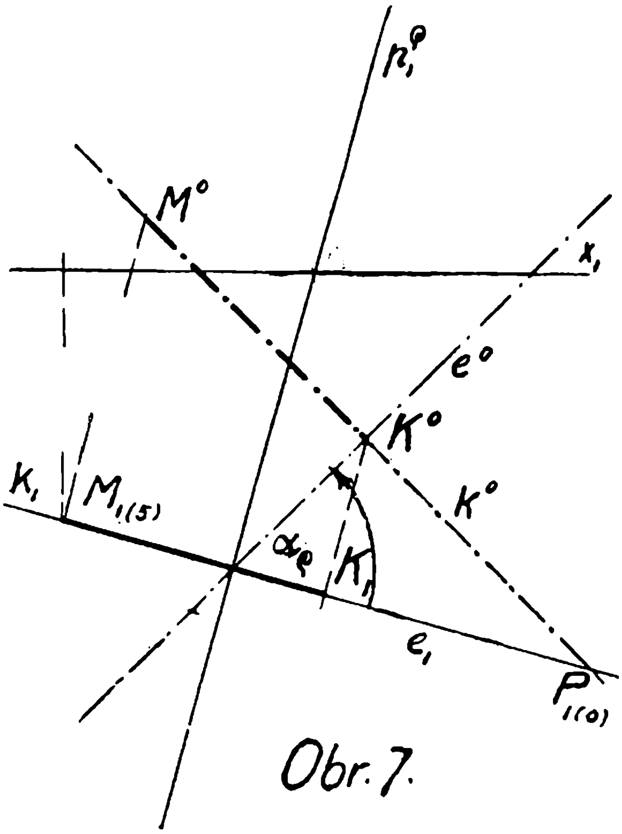
12. Jest určiti vzdálenost bodu M od roviny ϱ. M $(-4, 4, 5)$, ϱ $[O, \sphericalangle p^{\varrho}x = 105^\circ, \alpha_{\varrho} = 60^\circ]$.

Z bodu M spustíme $k \perp \varrho$, vyšetříme $K \equiv k \times \varrho$ a $\overline{MK} = M \dashv \varrho$.

Bodem M_1 vedeme $k_1 \perp p_1^{\varrho}$; promítací rovina přímky k protne rovinu ϱ v přímce spádové e; $k_1 \equiv e_1$. Sklopíme přímku e do e^0 ($\sphericalangle e^0 e_1 = 60^\circ$) a bod M do M^0 ($M^0 M_1 \perp k_1$, $M^0 M_1 = z_M = 5$), z $M^0 \ldots k^0 \perp e^0$ a $k^0 \times e^0 \equiv K^0$. $M^0 K^0 = M \dashv \varrho$. (Obr. 7.)

13. Jest sestrojiti bodem B rovinu $\varrho \parallel \sigma$. B $(2, 2, -1)$; σ $[e^{\sigma} \equiv AE$, A $(-2, 1, 3)$, E $(0, 3, 1)]$.

Bodem $B \ldots f^{\varrho} \parallel e^{\sigma}$, f^{ϱ} jest spádová přímka hledané roviny, která má tutéž odchylku od π jako e^{σ} a proto také stejný interval. Stupňujeme přímku e^{σ}, jejíž interval $i = \frac{\overline{A_1 E_1}}{z_A - z_E} = \frac{\overline{A_1 E_1}}{2}$ přeneseme na f_1^{ϱ} od bodu B_1. Obdržíme tak body 0, 1, 2, 3, ... a bodem 0 vedená přímka $p_1^{\varrho} \perp f_1^{\varrho}$ jest stopa roviny ϱ.

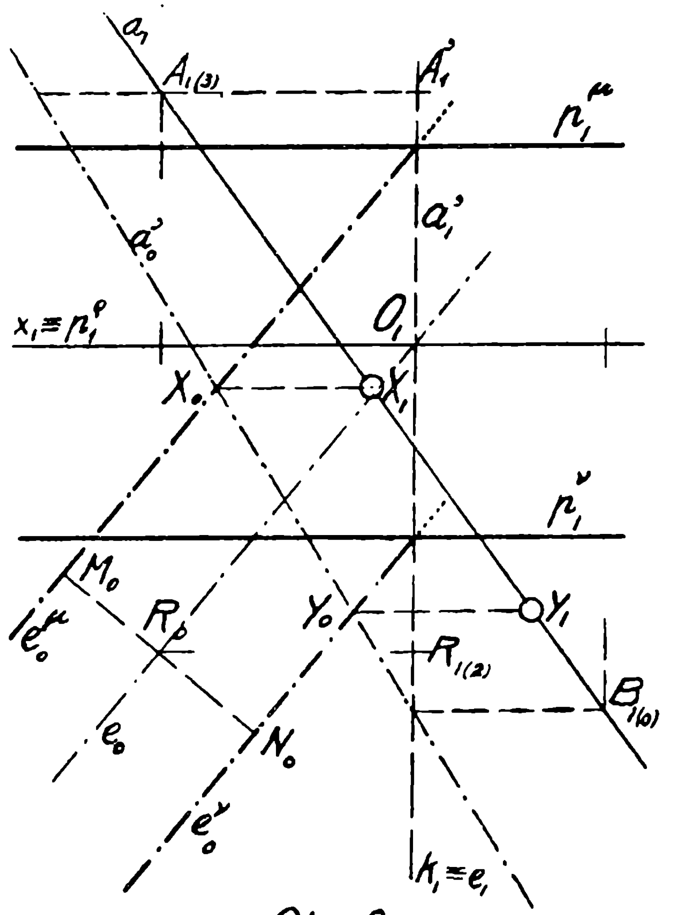


Obr. 7.

14. Na přímce $a \equiv AB$ *nalézti bod, který* má vzdálenost d od roviny ϱ. $A(-2, -2, 3)$, $B(1{\cdot}5, 3, 0)$; $\varrho\,[p^{\varrho} \equiv x,\ R(0, 2{\cdot}5, 2)]$, $d = 1$. (Obr. 8.)

V libovolném bodě R roviny ϱ vztyčíme kolmici k a naneseme na ni v obou směrech $\overline{RM} = \overline{RN} = d$. V bodech M a N sestrojíme roviny $\mu \parallel \nu \parallel \varrho$; sklopené obrazy jejich spádových přímek jsou $e_0^{\mu} \parallel e_0^{\nu} \parallel e_0$, a tyto protnou přímku a_0' v bodech X_0' a Y_0'; a' jest průmět přímky a do roviny (e, k). Body X, Y jsou na kolmicích $X'X \perp (e, k)$, $Y'Y \perp (e, k)$.

15. Přímkou $a \equiv MB$ jest sestrojiti rovinu σ kolmou k dané rovině ϱ. $M(2, 1, 2)$, $B(-1, 3{\cdot}5, -4)$; $\varrho\ (p^{\varrho} \perp x \ldots 0,\ \omega = 30^{0})$.



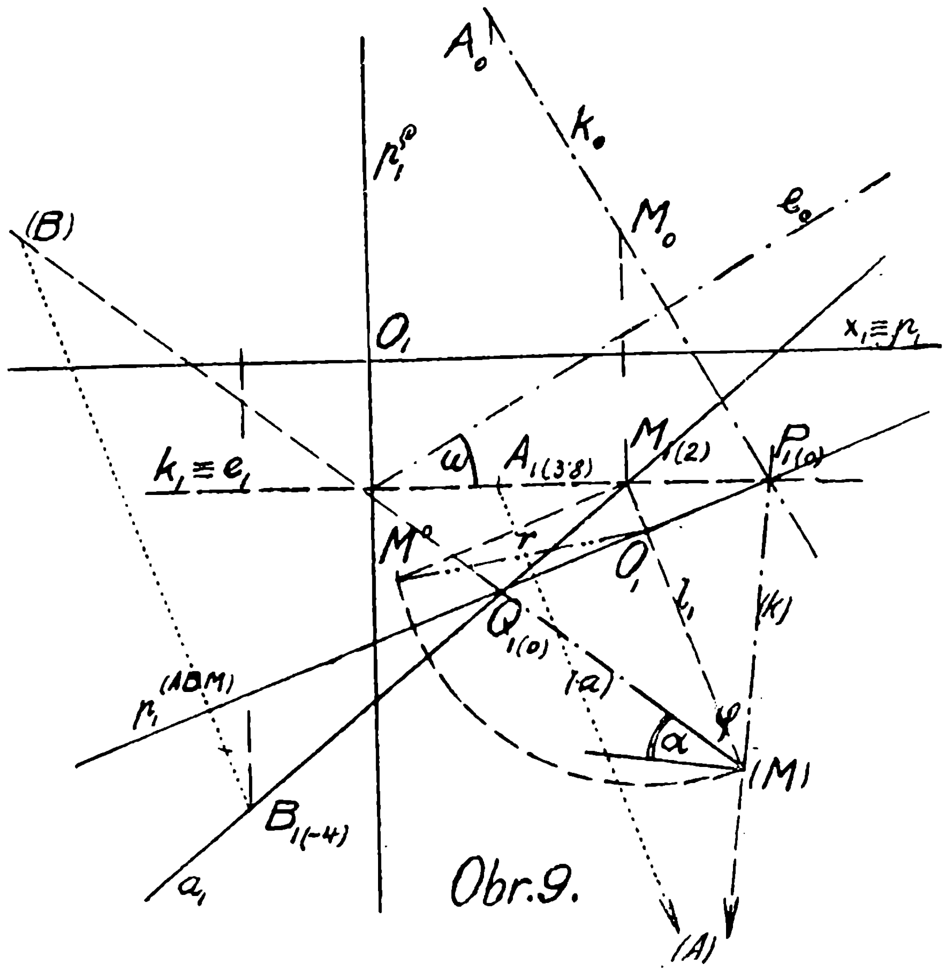
Obr. 8.

Ze zvoleného bodu M na přímce a spustíme kolmici $k \perp \varrho$; přímkami $a_1 k$ jest určena rovina $\sigma \equiv (a \times k)$. $M_1 \ldots k_1 \perp p_1^{\varrho}$, $k_1 \equiv e_1$, $M_0 \ldots k_0 \perp e_0$, $k_0 \times k_1 \equiv P_1$, $P_1 Q_1 \equiv p_1^{(ak)}$. (Viz v obr. 9.)

16. Jest určiti odchylku σ přímky $a \equiv MB$ od roviny ϱ. Souřadnice v úl. 15. (Obr. 9.)

Z bodu M spustíme $k \perp \varrho$; $\sphericalangle\, a k = \varphi$ jest doplněk k hledanému úhlu, $\alpha = R - \varphi$. Skutečnou velikost $\sphericalangle\, \varphi$ určíme, sklopíme-li rovinu $(a_1 k)$ kolem její stopy do půdorysny (viz úlohu 17.)

17. U r č i t i p r a v o u v e l i k o s t ú h l u φ d v o u r ů z n o b ě ž e k $a \equiv MA$, $b \equiv MB$. $M(1, 3, 2)$, A (3, 1, —1), B (—1, 2, —1). V obr. 9 $M(2, 1, 2)$, $A(1, 1, 3{\cdot}8)$, $B(—1, 3{\cdot}5, —4)$.



Obr. 9.

Vyšetříme stopu $p_1^{(ABM)}$ a kolem ní sklopíme bod M do půdorysny podle **pravidla o sklápění:** Sklopený obraz bodu (M) jest na kolmici l_1 z M_1 ku $p_1^{(ABM)}$ ve vzdálenosti poloměru otáčení od středu otáčení $O_1 \equiv p_1^{(ABM)} \times l_1$; p o l o m ě r o t á č e n í r j e s t p ř e p o n a t r o j ú h e l n í k a r o v i n y $O_1 M_1 M_0$, jehož jednou odvěsnou jest průmět poloměru $M_1 O_1$, druhou kota bodu M.

Stopa $p_1^{(ABM)}$ spojuje stopníky P_1, Q_1 přímek a, k. Z bodu $M_1 \ldots k_1 \perp p_1^{(ABM)}$, $l_1 \times p_1^{(ABM)} \equiv O_1$; v M_1 vztyčíme

$M_1 M^0 \perp M_1 O_1$, $M_1 M^0 = z_M$, pak $O_1 M^0 = r$ naneseme na l_1 od O_1, $O_1 (M) = O_1 M^0$ a (M) je sklopený obraz bodu M. Stopníky P_1, Q_1 jsou pevné, takže $(M) P_1 \equiv (k)$, $(M) Q_1 \equiv (a)$ a $\sphericalangle (a)\ (k) = \varphi$.

Affinita (příbuznost). Všechny body přímek a, k (v obr. 9) otáčejí se při sklápění roviny; sklopené obrazy bodů A, B *jsou* na $(a), (k)$ a na kolmicích z A_1, B_1 ke stopě roviny. Souvislost dvou rovinných obrazů $A_1 B_1 M_1$, $(A) (B) (M)$, při níž souhlasné body leží na rovnoběžných paprscích $A_1 (A) \parallel B_1 (B) \parallel \parallel M_1 (M) \parallel \ldots$ a souhlasné přímky se protínají v bodech pevné přímky $M_1 A_1 \times (M) (A) \equiv P_1$, $M_1 B_1 \times (M) (B) \equiv Q_1$, kde P_1, Q_1 jsou na $p_1^{(A\,B\,M)}$, nazývá se affinita čili příbuznost. Pevná přímka $p_1^{(A\,B\,M)}$ jest osa affinity, rovnoběžné spojnice souhlasných bodů $A_1 (A) \parallel B_1 (B) \ldots$ jsou paprsky affinity. Jsou-li paprsky kolmé k ose affinity, jest affinita orthogonální; jsou-li šikmé k ose, jest klinogonální affinita.

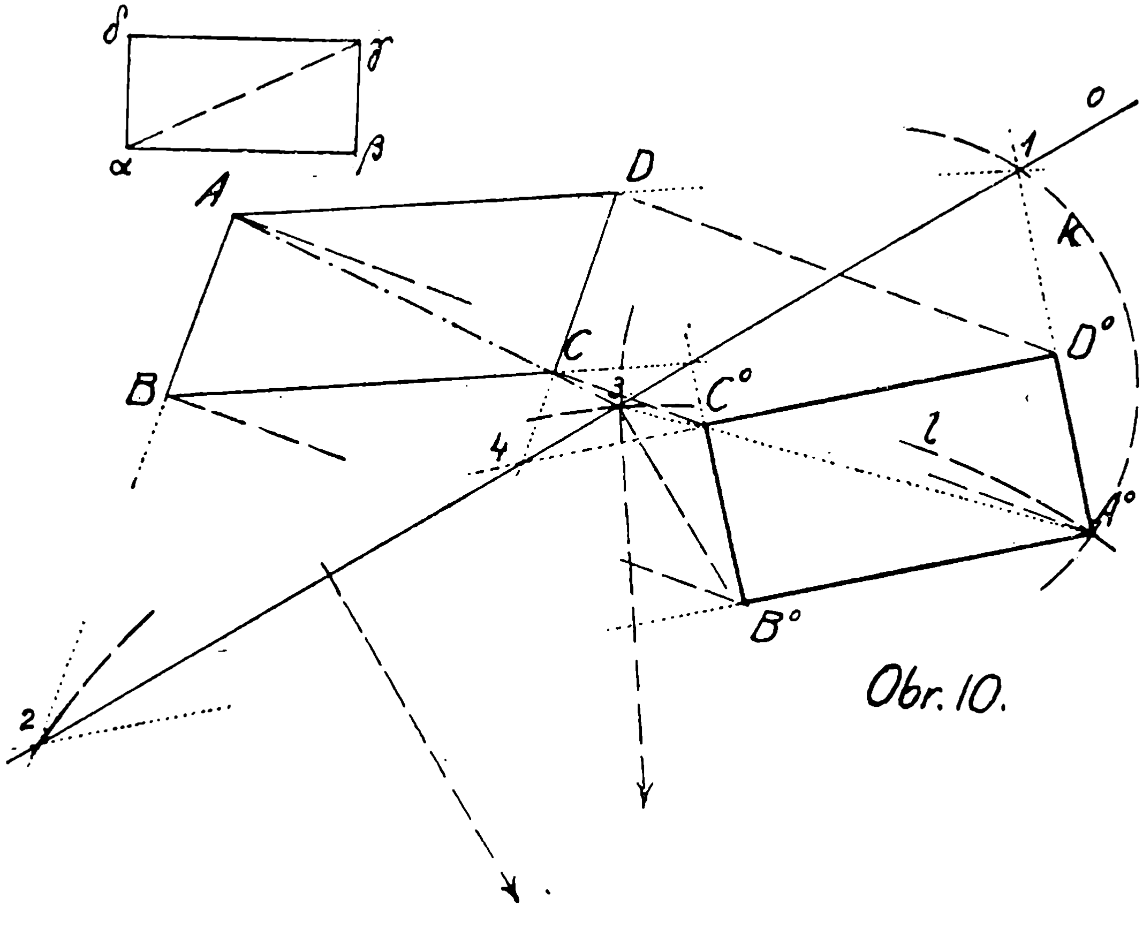
18. Jest určiti přidané ose affinity o směr paprsků affinity, aby trojúhelníku ABC odpovídal rovnostranný trojúhelník $A_0 B_0 C_0$. (Viz v obr. 121 $\triangle\, A_1 B_1 C_1$ a $\triangle\, A' B' C'$.)

Strany BA, BC protnou osu affinity v pevných bodech $1 \equiv BA \times o$, $2 \equiv BC \times o$; úhlu ABC odpovídá úhel 60^0, je tedy vrchol jeho (B) na oblouku kruhovém k, který prochází body 1, 2 a má obvodový úhel 60^0. Těžnice $\triangle ABC$ jest $B3$, kde $3 \equiv B3 \times o$, $B3$ půlí AC; $\sphericalangle 3B2$ odpovídá $\sphericalangle 30^0 = \sphericalangle 3 (B) 2$ a (B) je na oblouku kruhovém l, jenž prochází body $3, 2$ a má obvodový úhel 30^0. Oblouky k, l protnou se v (B), a $(B) B$ jest hledaný směr affinity.

19. Jest určiti směr paprsků affinních, pro který by danému rovnoběžníku $ABCD$ odpovídal obdélník, jehož strany mají daný poměr $\overline{AB} : \overline{AD} = (1 : 2)$. Osa affinity jest dána o.

Ve všech obdélnících, v nichž strany mají daný poměr, svírají úhlopříčky se souhlasnými stranami stejně velké úhly.

Prodloužené strany AB, AD protnou osu o v bodech $1, 2$; úhlu $1\dot{A}2$ přísluší $\sphericalangle 1 A_0 2 = R$. Úhlopříčka AC protne osu v bodě $3 \equiv AC \times o$, a $\sphericalangle BAC = \sphericalangle 2A3$ přísluší $\sphericalangle B^0 A^0 C^0 = \sphericalangle 2 A^0 3$, jehož velikost sestrojíme, když v libovolném obdélníku $\alpha\beta\gamma\delta$, v němž $\alpha\beta : \alpha\delta = 1 : 2$, vedeme úhlopříčku $\alpha\gamma$. $\sphericalangle \beta\alpha\gamma = \sphericalangle 2 A^0 3$. Bod A^0 obdržíme jednak na půlkružnici k opsané nad průměrem 12 (vrchol pravého úhlu nad prů-



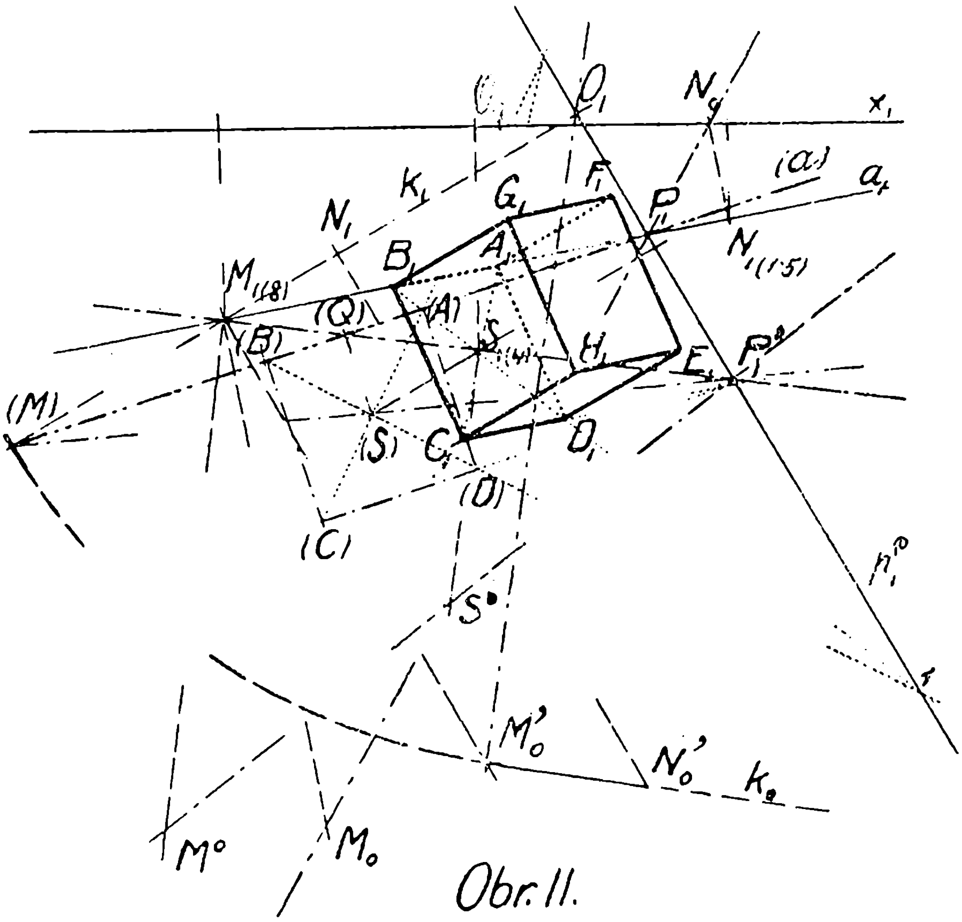
Obr. 10.

měrem), po druhé na kruhovém oblouku l, který prochází body $2, 3$ a jehož obvodový úhel jest $= \sphericalangle \beta\alpha\gamma$. $A^0 A$ jest hledaný paprsek affinity. (Obr. 10.)

20. V rovině $\varrho \equiv (MNS)$ sestrojte čtverec, jehož střed je S a strana $\overline{AB}$ v přímce

$a \equiv MN$. $S\,(0, 3{\cdot}5, 4)$, $M\,(4, 3, 8)$, $N\,(4, 1{\cdot}5, -1{\cdot}5)$.
(Obr. 11.)

Sestrojíme stopu roviny ϱ, kolem ní sklopíme dané útvary do půdorysny, tam sestrojí-



Obr. 11.

me čtverec o středu (S) a straně $\overline{(A)\,(B)}$ na (a); z něho pomocí affinity sestrojíme půdorys $A_1 B_1 C_1 D_1$. (Osou af. jest p_1^ϱ, paprsky af. jsou kolmy k ose $(A)\,A_1 \perp p_1^\varrho$).

Vyšetříme stopníky $P_1 \equiv M_1 N_1 \times M_0 N_0$ a $P_1' \equiv M_1 S_1 \times \times M^0 S^0$, jejichž spojnice jest $p_1^\varrho \equiv P_1 P_1'$; kolem p^ϱ sklopíme bod M, $M_1\,(M) \perp p_1^\varrho$, $M_1 M_0' \perp M_1\,(M)$ a $\overline{M_1 M_0'} = z_M$, $\overline{M_0' O_1} = r = O_1\,(M)$ kde $O_1 \equiv p_1^\varrho \times M_1\,(M)$. $(M)\,P_1 \equiv (a)$, $(S) \equiv \equiv (M)\,P_1' \times S_1\,(S)$, kde $S_1\,(S) \perp p_1^\varrho$. Vedeme $(S)\,(Q) \perp (a)$, uděláme $\overline{(Q)\,(A)} = \overline{(Q)\,(B)} = \overline{(Q)\,(S)}$ a dostaneme stranu čtverce ve skutečné velikosti $(A)(B)$; nad ní sestrojíme sklopený obraz čtverce (A) (B) (C) (D). Narýsujeme $(A)\ A_1 \perp$ $\perp p_1^\varrho$. $(B)\ B_1 \perp p_1^\varrho$ a dostaneme půdorysy vrcholů $A_1 \equiv (A)A_1 \times$ $\times\ a_1$, $B_1 \equiv (B)\ B_1 \times a_1$; D_1 sestrojíme, když prodloužíme $(D)(B)$ k ose affinity, $(D)(B) \times p_1^\varrho \equiv 1$, narýsujeme $1B_1$ a $D_1 \equiv 1B_1 \times (D)\ D_1$, $(D)\ D_1 \perp p_1^\varrho$.

21. N a d č t v e r c e m p ř e d e š l é ú l o h y s e s t r o j t e k r y c h l i. V e v r c h o l e c h č t v e r c e s e s t r o j í m e k o l m i c e k r o v i n ě ϱ, n a n e s e m e n a n ě d é l k u s t r a n y č t v e r c e $\overline{AB}$ a o b d r ž í m e h r a n y p o b o č n é AF, BG, CH, DE.

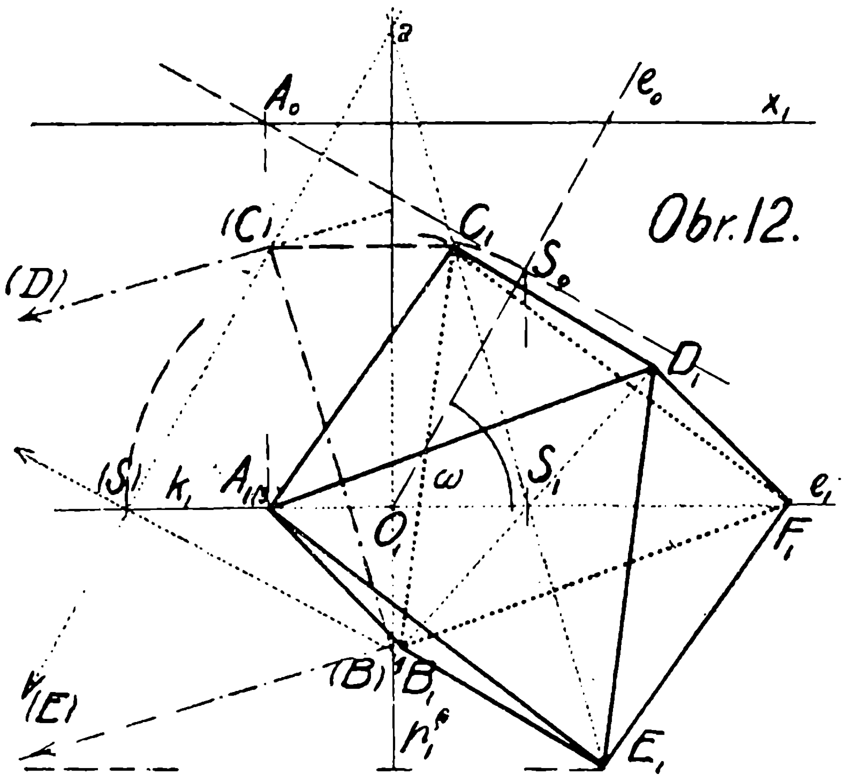
Průměty hran pobočných jsou kolmy ke stopě roviny ϱ, $A_1 F_1 \perp p_1^\varrho$. Délku $\overline{A_1 F_1}$ sestrojíme takto: Vztyčíme kolmici $k \perp \varrho$ v bodě M, $M_1 \ldots k_1 \perp p_1^\varrho$, $k_1 \equiv M_1(M)$; sklopíme promítací rovinu přímky k, dostaneme bodem $M_0' \ldots k_0 \perp O_1 M_0'$, přeneseme na k_0 délku $(A)(B) = M_0' N_0'$, $N_0' N_1 \perp M_1(M)$ a $\overline{M_1 N_1}$ jest průmět délky pobočné hrany krychle. Naneseme $\overline{A_1 F_1} = \overline{B_1 G_1} = \overline{C_1 H_1} = \overline{D_1 E_1} = \overline{M_1 N_1}$ a obdrželi jsme průmět hořejší podstavy krychle. Tato jest viditelná, když souřadnice z jejích vrcholů jsou větší než z—tové souřadnice příslušných vrcholů podstavy druhé.

22. Z o b r a z i t i p r ů m ě t p r a v i d e l n é h o o s m i s t ě n u, j e-l i d á n j e h o v r c h o l A, ú h l o p ř í č n ý ř e z $BCDE$ j e s t v r o v i n ě ϱ a j e h o ú h l o p ř í č k a BD s v í r á s p^ϱ ú h e l α. $A(1, 3, 3)$, $O \ldots p^\varrho \perp x$, $\omega = 60^\circ$, $\alpha = 60^\circ$.

S p u s t í m e k o l m i c i AF z b o d u A n a r o v i n u ϱ, $AF \times \varrho \equiv S$ j e s t s t ř e d o s m i s t ě n u; j í m v e d e m e BD, a b y $\sphericalangle BD, p^\varrho = \alpha$, n a n e s e m e $\overline{SB} = \overline{SD} = \overline{SF} = \overline{SA}$, p a k u d ě l á m e $CE \perp BD$, $\overline{CS} = \overline{SE} = \overline{SA}$. (Obr. 12.)

$A_1 \ldots k_1 \perp p_1^\varrho$, $k_1 \times p_1^\varrho \equiv O_1$; $A_1 A_0 \perp k_1$, $\overline{A_1 A_0} = z_A$, $k_1 \equiv$ $\equiv e_1$, $\sphericalangle e_0 e_1 = \omega$, $A_0 S_0 \perp e_0$, $\overline{O_1 S_0} = r = \overline{O_1 (S)}$, kde (S) jest sklopený obraz středu osmistěnu. Bodem (S) vedeme přímku

$(B)\,(D)$, aby $\sphericalangle (B)\,(D)$, $p_1^0 = \alpha$, $\overline{(B)\,(S)} = \overline{(D)\,(S)} = A_0 S_0$ potom $(C)\,(E) \perp\!\!\!\!= (B)\,(D)$. Pak spojíme $1 \equiv (B)\,(D) \times p_1^0$ s bodem $S_1 \equiv k_1 \times S_0 S_1$, $S_0 S_1 \perp k_1$ a $(B)\,B_1 \perp p_1^0$, $(D)\,D_1 \perp p_1^0$ obdržíme $B_1 \equiv (B)\,B_1 \times 1\,S_1$, $D_1 \equiv (D)\,D_1 \times 1\,S_1$. Podobně $2 \equiv \equiv (C)\,(E) \times p_1^0$, na $2\,S_1$, jsou $\underline{C_1, E_1, C_1} \equiv (C)\,C_1 \times 2\,S_1$, $E_1 \equiv \equiv (E)\,E_1 \times 2\,S_1$. Přeneseme $\overline{S_1 F_1} = \overline{S_1 A_1}$, máme průmět šestého vrcholu osmistěnu.

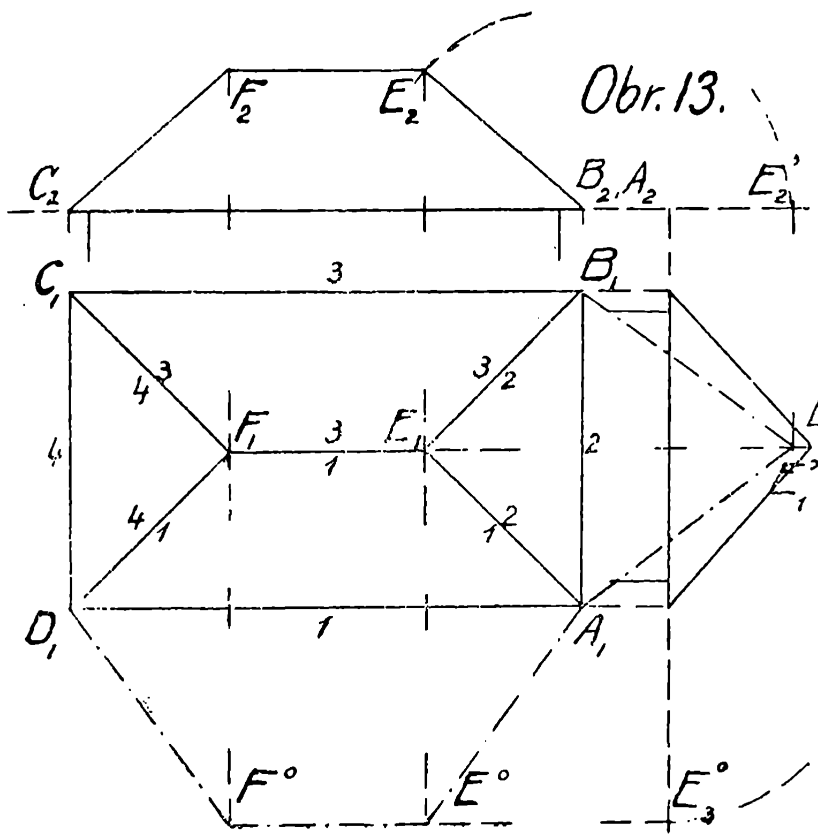


b) Vyšetřování okapu.

Okapem rozumíme spodní (vodorovný) okraj všech ploch střešních nad daným půdorysem budovy; jeho vyšetřování znamená sestrojiti průsečnice jednotlivých ploch střešních, určiti skutečné délky těchto průsečnic a pravé velikosti střešních ploch. V nejjednodušších případech, jež předpokládáme, kdy roviny střešní mají stejný sklon k půdorysně a celý okap je v půdorysně (půdorysnu myslíme si proloženu vodorovnými okraji rovin střešních), jest půdorysem průsečnice dvou střešních ploch symetrála úhlu jejich stop; v případě, že jsou stopy ty spolu rovnoběžny, jest půdorysem průsečnice osa pásu, tvořeného stopami. Roviny střešní a jejich stopy značíme arab. ciframi 1, 2 atd.; průsečnici dvou rovin značíme ciframi obou rovin, jež se v ní sekou, psanými po obou stranách průsečnice (viz obr. 13 až 18).

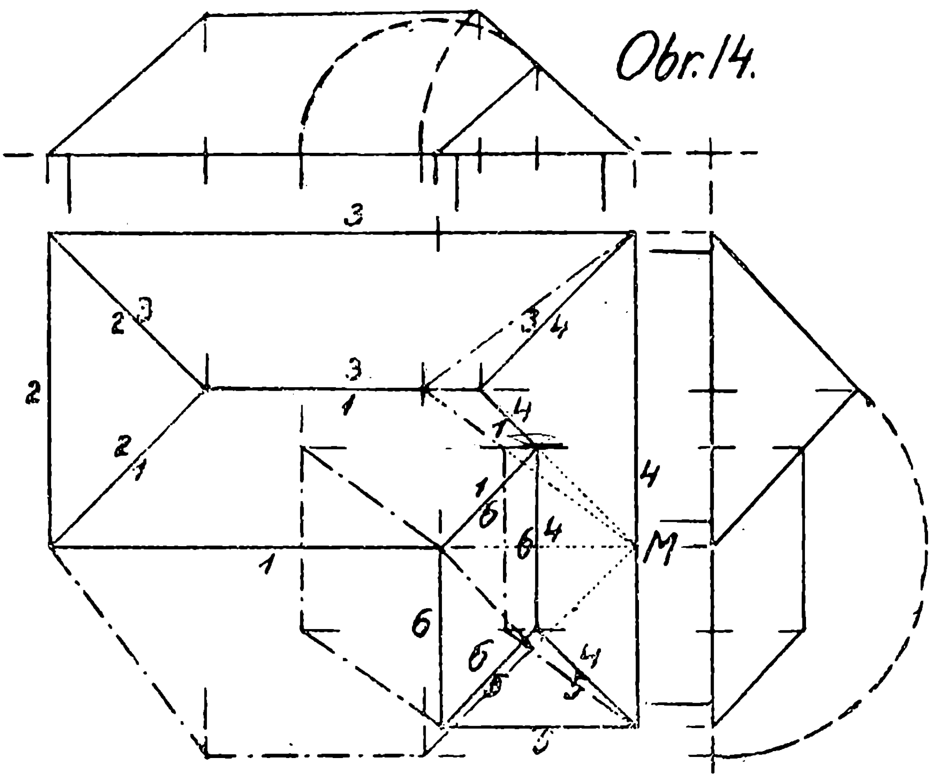
Průsečnice střešních rovin mají zvláštní jména. Vodorovná průsečnice jmenuje se *hřebenem,* je-li úhel střešních rovin tupý; *žlabem,* je-li tento úhel ostrý; průsečnice skloněná nazývá se *nároží,* je-li úhel rovin střešních tupý, *úboči* nebo *úžlabí,* je-li úhel rovin ostrý. Voda stéká po střešní ploše ve směru kolmém k okapu, t. j. ve směru přímky spádové, zůstávala by tedy státi ve žlabu (vodorovný klín), a poškozovala by krytinu, krov i stavbu; proto j e n u t n o v y h ý b a t i s e p ř i ř e š e n í o k a p ů ž l a b ů m.

Je-li okap na některých místech zastavěn nebo opatřen š t í t y (viz obr. 16, 17 a 18), jest nutno odvésti vodu buď od zastavěné části, nebo ve směru s ní rovnoběžném (|| se štítem). V tomto případě volí se pomocné střešní roviny kolmé



ke štítu a stejného sklonu jako mají ostatní roviny střešní; jejich stopy jsou kolmy k příslušné zastavěné části okapu. Tuto část vyznačujeme dvojitým vytažením.

23. Jest dán okap půdorysnými stopami a půdorysnou odchylkou α střešních rovin; jest vyšetřiti průsečnice těchto rovin a skutečné velikosti střešních ploch.

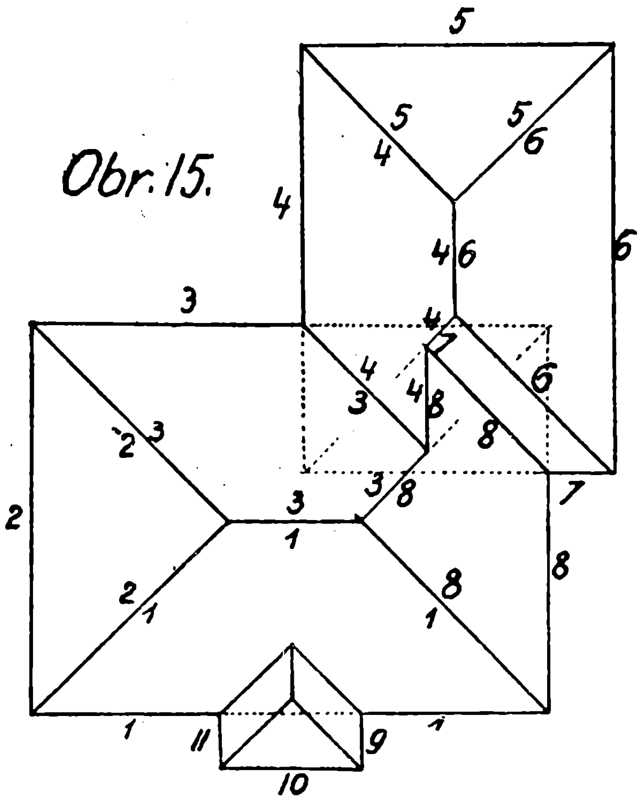


Strany okapu označíme postupně 1, 2; 3, 4 (viz obr. 13); to jsou půdorysné stopy rovin 1, 2, 3, 4. Půdorys průsečnice rovin 1, 2 půlí $\sphericalangle A_1$, podobně roviny 2, 3 protnou se v přímce, jejíž půdorys jest osou $\sphericalangle B_1$. Poněvadž tři roviny obecně položené sekou se v jednom bodě, vychází z průsečníku $E_1 \equiv \equiv (1, 2) \times (2, 3)$ průmět průsečnice rovin 1 a 3, který jest osou pásu 1, 3; z bodu C_1 vychází přímka (3, 4), která protne osu (1, 3) v bodě F_1 a spojnice $F_1 D_1 \equiv (4, 1)$ jest průmět průsečnice rovin 4 a 1.

Skutečné velikosti střešních ploch určíme sklopením jich do půdorysny, jež se provede buď v nárysně pro stěnu $(A\,B\,E)$ anebo pomocí III. průmětny hlavní (viz oddíl III.) pro střešní plochu $(A\,E\,F\,D)$.

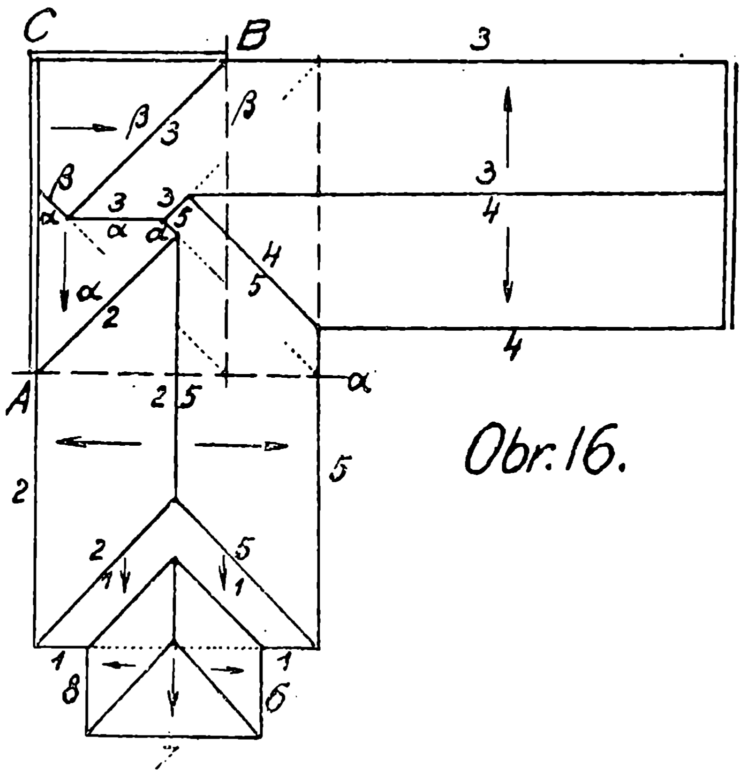
24. Podobně postupujeme v případech, kdy okap jest dán složitějším obrazem (obr. 14 a 15).

Obr. 15.



Abychom dokončili střešní plochu 1 v obr. 14 průsečnici (1, 4), musíme prodloužiti stopu 1 až k průsečíku se stopou 4. Střešní plocha jest vyšetřena, když strany jejího uzavřeného obrysu jsou uvnitř označeny touže cifrou, na př. 4. V obr. 15 bylo nutno prodloužiti strany okapu 3, 8 a 4, 7, abychom v jejich průsečících sestrojili stopníky příslušných nároží. Je-li na budově krytý výstupek (roviny 9, 10. 11 v obr. 15, 6, 7, 8 v obr. 16) postupujeme jako nahoře.

25. Vyšetřiti průsečnice střešních rovin, když je okap zastavěn v místech dvojitě vytažených. (Obr. 16.)



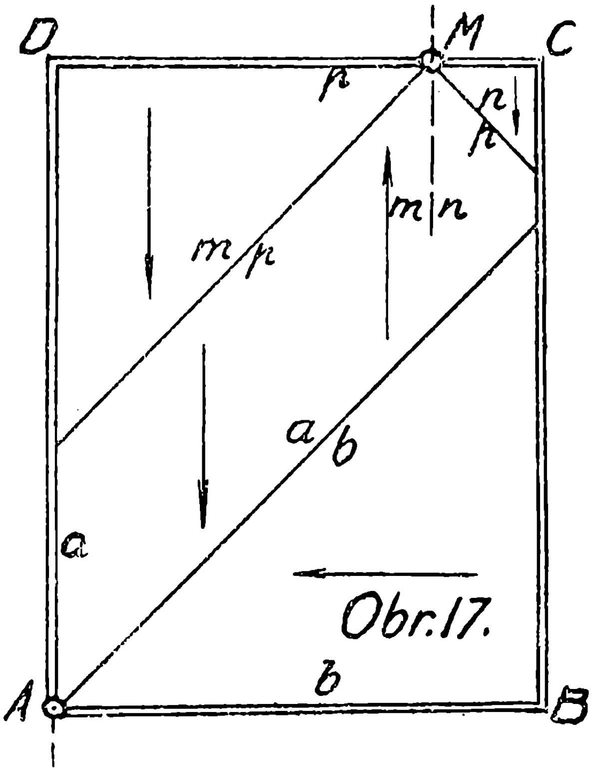
Obr. 16.

V krajních bodech AB zastavěných částí volíme střešní roviny kolmé ke zdem štítovým; jejich stopy jsou $\alpha \perp AC$, $\beta \perp BC$. Vyhledáme průsečnici $(2, \alpha)$, která uzavře střešní plochu (2); z bodu $(2, 5) \times (2, \alpha)$ vychází přímka $(\alpha, 5)$, jejíž stopník jest $\alpha \times 5$. Nároží $(\alpha, 5)$, $(3, 5)$ uzavrou střešní plochu (5), a z jejich průsečíků vychází hřeben $(\alpha, 3)$ atd.

26. Okap jest zastavěn po celém obvodu a voda smí odtékati okapní rourou v místě A.

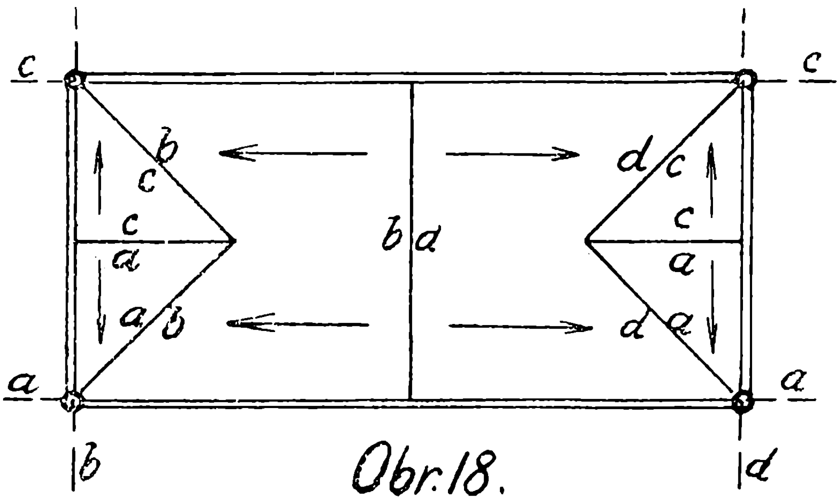
Bodem A položíme roviny a, b kolmo ke štítovým zdem $a \perp AB$, $b \perp AD$ (obr. 17). Roviny ty se protnou v úbočí (a, b), do něhož stéká voda po střešních plochách ve směru přímek spádových a úbočím teče do okapové roury.

Podobně v obr. 18 střešní roviny a, b protnou se v úbočí (a, b), roviny a, c dají hřeben (a, c) a roviny b, d určují hřeben (b, d).



Obr. 17.

27. Okapová roura jest umístěna na straně okapu v místě M; jest vyšetřiti průsečnice střešních rovin. (Obr. 18.)



Obr. 18.

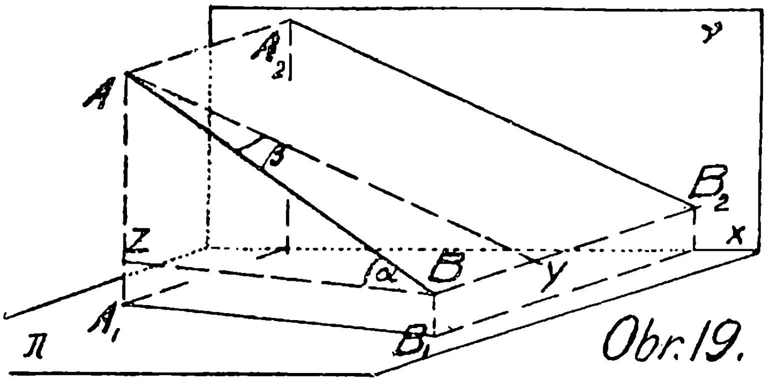
Bodem M proložíme dvě roviny m, n o stejných odchylkách od půdorysny, obě kolmé ke zdi CD; jejich průsečnice (m, n) byl by vodorovný žlab, který nutno odstraniti. K tomu cíli zavedeme ještě třetí rovinu střešní p, jejíž stopa jest CD, a ta protne rovinu m v úžlabí (m, p) a rovinu n v úžlabí (n, p), jimiž stéká voda šikmo k okapu M. Voda teče po střešních plochách ve směru šipek.

II. Promítání na dvě průmětny.

a) Základní úlohy o bodu, přímce a rovině.

28. Sestrojte skutečnou délku úsečky AB a její odchylku od průmětny: a) $A(0, 1, 5)$, $B(3, 4, 2)$; b) $A(-2, 3, 4)$, $B(3, -5, 1)$.

Skutečná délka úsečky se najde sklopením promítacího lichoběžníka prvého (druhého) $A_1 B_1 B A$ $(A_2 B_2 B A)$, který jest určen půdorysem úsečky $A_1 B_1$, dvěma pravými úhly $B_1 A_1 A$, $A_1 B_1 B$ a souřadnicemi z_A, z_B (nárysem $A_2 B_2$, pravými úhly $B_2 A_2 A$, $A_2 B_2 B$ a souřadnicemi y_A, y_B). Vedeme-li v tomto lichoběžníku bodem, který je blíž průmětně, rovnoběžku s $A_1 B_1$ $(A_2 B_2)$, utne

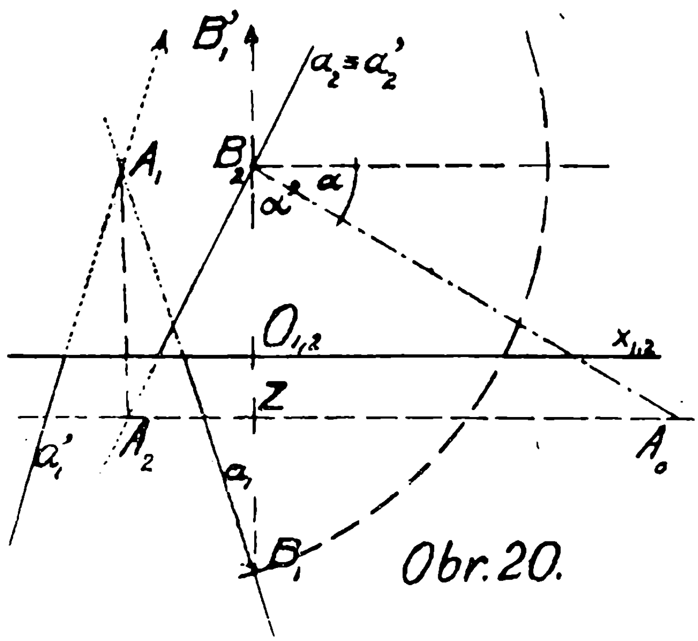


Obr. 19.

tato z lichoběžníku promítací trojúhelník BZA $(BZ \parallel A_1 B_1$, $AZ = z_A - z_B)$, po případě $\triangle AYB$ $(AY \parallel A_2 B_2$, $BY = y_B - y_A)$. V těchto trojúhelnících jsou proti rozdílu souřadnic z odchylka α od půdorysny (proti rozdílu souřadnic y odchylka β od nárysny). (Obr. 19.)

Poněvadž v případě b) jsou y_A, y_B různých znamének, musíme je při sklápění přenášet v protivných směrech, t. j. lichoběžník $A_2 B_2 B A$ jest druhořadý.

Úspornější jest konstrukce skutečné délky úsečky pomocí promítacího trojúhelníku: prvého (druhého), který jest určen rozdílem souřadnic z (y) koncových bodů a půdorysem (nárysem) úsečky, ježto v něm ostrý úhel proti rozdílu souřadnic jest odchylka od půdorysny (nárysny). (Viz v obr. 20 $\triangle A_0 Z B_2$.)



Obr. 20.

29. Jest nanésti na přímku AB od zvoleného bodu M délku $d = 3$. $A(-2, 2, 6)$, $B(3, 5, 2)$. Bod na přímce $a \equiv AB$ zvolíme, když zvolíme M_1 na a_1, M_2 na a_2 tak, aby $M_1 M_2 \perp x_{1,2}$.

Abychom nanesli na přímku a danou délku d, sestrojíme pomocí promítacího trojúhelníku na př. prvého $A\ Z M_0$ skutečnou velikost $A_2 M_0$ libovolné úsečky AM ($M_2 Z \perp A_2 A_1$, $Z M_0 = A_1 M_1$), na tuto přeneseme $M_0 R_0 = M_0 Q_0 = d = 3$, body R_0, Q_0 *vedeme* $R_0 R_2 \parallel Q_0 Q_2 \parallel M_0 M_2$ a na přímce a_2 obdržíme R_2, Q_2, z nich kolmicemi k $x_{1,2}$ na a_1, R_1, Q_1. (Viz v obr. 37 délku SV pomocí skutečné délky úsečky SK.)

30. Zobrazte průměty rovnoramenného trojúhelníku ABC, jehož druhé rameno jest na přímce CM. $A(-3, 5, 4)$, $C(0, 2, 1)$, $M(3, 6, 5)$.

Sestrojíme skutečnou délku úsečky $\overline{AC}$, od bodu C naneseme $\overline{AC}$ na CM a obdržíme body B, B'.

Vedeme bodem C_2 přímku $m \parallel x$, obdržíme $Z \equiv m \times A_1 A_2$, uděláme $ZC^0 = A_1 C_1$, $C^0 A_2$ jest skutečná délka úsečky AC; podobně $m \times M_1 M_2 \equiv U$, $U(C) = C_1 M_1$, $\overline{(C)(B)} = \overline{C^0 A_2}$, bodem (B) přímku $n \parallel x$, která určí na $C_2 M_2$ bod $B_2 \equiv n \times C_2 M_2$. Úloha dvojznačná.

31. Sestrojte vzdálenost počátku O od přímky $a \equiv AB$. $A(-3, 2, 5)$, $B(1, 3, 4)$.

Sestrojíme skutečné délky stran $\triangle ABO$, z nich skutečnou velikost trojúhelníku a v něm výška $\overline{OV}$ jest hledaná vzdálenost. Úsek $\overline{AV}$ přeneseme v příslušném směru na AB podle úlohy 29 a $\overline{O_1 V_1}$, $\overline{O_2 V_2}$ jsou průměty vzdálenosti.

32. Vyhledejte na ose x bod X, aby byl o $d = 5$ vzdálen od bodu $A(0, 3, -1)$.

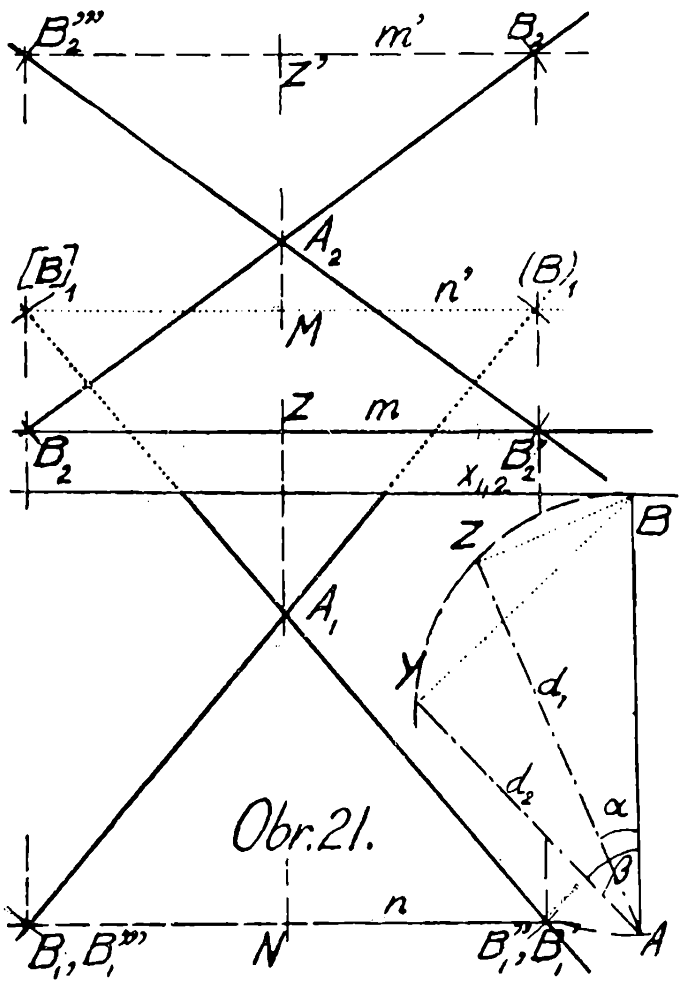
Souřadnice $y_A = y_A - y_x = 3 = A_1 Y$ jest odvěsnou druhého promítacího $\triangle A_1 Y X_0$, jehož přepona $\overline{A_1 X_0} = d$; druhá odvěsna $\overline{YX_0}$ jest rovna délce druhého průmětu úsečky $\overline{AX}$, $Y_2 X_0 = A_2 X_2$, opíšeme jí kružnici kolem A_2, která protne osu x ve dvou bodech (v jednom, žádném) podle toho, je-li $\overline{YX_0} \lesseqgtr z_A$. (Srovnej s obr. 22.)

33. Bodem A veďte přímku a, která v bodě B protíná přímku $b \parallel x$. $A(0, -3, 2)$, $AB = 7$, $(y_b = 1,\ z_b = -3)$. Řeší se jako úloha předchozí. Podobně úl. ·

34. Na přímce $p \parallel x$ vyhledejte body, které mají vzdálenost $d = 6$ od bodu $M(2, -1, 4)$. $(y_p = 3,\ z_p = 2)$. (Obr. 22.)

35. Zobrazte přímku $a \equiv AB$: a) $A\,(0, 2, -4)$, $B\,(?, -1, 2)$, $\overline{AB} = 8$; b) $A\,(2, 2, 4)$, $\overline{A_1 B_1} = 6{\cdot}5$, $\overline{A_2 B_2} = 5$, $\overline{AB} = 7$; c) $A\,(-3, -2, -3)$, $A_1 B_1 = 7$, $A_2 B_2 = 8{\cdot}5$.

a) Známe A_1, A_2; vedeme-li ve vzdálenosti $y_B = -1$ přímku $m \parallel x_{1,2}$, protne tato $A_1 A_2$ v bodě Y. Kolem A_1 opíšeme kružnici poloměrem $\overline{AB}$, ta protne m ve dvou bodech B^0, B'; pak vedeme ve vzdálenosti $z_B = 2$ přímku $n \parallel x_{1,2}$, již protne-



Obr. 21.

me z A_2 poloměrem $A_2 B_2 = Y B^0$ v bodech B_2, B_2'; z $B_2 \ldots k \perp x_{1,2}$ a $k \times m \equiv B_1$. Podobně z B dostaneme B_1'. $A_1 B_1 \equiv a$, $A_2 B_2 \equiv a_2$.

Úloha má dvě (jedno, žádné) řešení podle toho, je-li $y_A - y_B \lesseqgtr \overline{AB}$ a $z_A - z_B$ *musí býti* $< Y B^0$.

b) Nad $\overline{AB} = 7$ sestrojíme pravoúhlý trojúhelník promítací (obr. 21) první (druhý), jehož odvěsnou jest $A_1 B_1$ ($A_2 B_2$); pak druhá odvěsna jest $z_A - z_B$ ($y_A - y_B$).

Body $A_1 A_2$ známe. Na spojnici $A_1 A_2$ přeneseme od A_2 na obě strany $z_A - z_B$, obdržíme body Z, Z', jimi vedeme přímky $m \parallel m' \parallel x_{1,2}$ a protneme je kružnicí poloměru $A_2 B_2$ z bodu A_2 v bodech B_2, B_2', B_2'', B_2'''. Podobně naneseme od A_1 délku $y_A - y_B$, obdržíme body Y, Y'; jimi vedeme přímky $n \parallel n' \parallel x_{1,2}$, které protneme kružnicí poloměru $A_1 B_1$ opsanou kolem A_1 ve čtyřech bodech, které spojeny s A_1, dávají půdorysy 4 přímek hledaných.

36. Bodem A (2, 2, 3) veďte přímku a, jejíž odchylky jsou $\alpha = 60^0$, $\beta = 15^0$. (Obr. 21.)

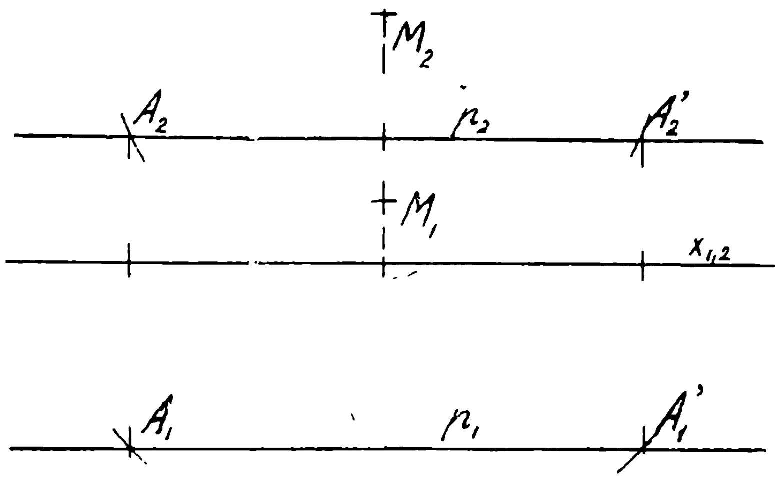
Úloha jest možná, když $\alpha + \beta \leqq 90^0$. Na hledané přímce zvolíme si úsečku libovolné délky AB a sestrojíme nad ní oba promítací trojúhelníky $\triangle ABY$, $\triangle ABZ$. V prvém jest jeden ostrý úhel α, odvěsna k němu přilehlá $AZ = A_1 B_1$, protější $BZ = z_A - z_B$; v druhém promítacím trojúhelníku jest úhel β, odvěsna přilehlá $AY = A_2 B_2$, protější $BY = y_A - y_B$. Souřadnice $y_B (z_B)$ jest o BY (BZ) větší, nebo menší než $y_A (z_A)$. Naneseme tedy BY (BZ) na $A_1 A_2$ na obě strany od bodu A_1 (A_2), v obdržených bodech vedeme rovnoběžky s osou x, jež protneme kružnicí poloměru AZ (AY) opsanou kolem bodu A_1 (A_2) ve čtyřech bodech. Tyto body spojeny s A_1 dávají 4 přímky hledané.

Přímky tyto můžeme považovati za 4 úhlopříčky pravoúhlého rovnoběžnostěnu, jehož střed jest v A a stěny rovnoběžny s průmětnami.

37. Zobrazte přímku $a \equiv AB$, je-li $A_1 B_1 = 5{\cdot}5$, $A_2 B_2 = 3$, $\beta_a = 60^0$, A (—2, 4, 2).

Sestrojíme II. promítací trojúhelník ABY úsečky $\overline{AB}$ z odvěsny $A_2 B_2$ a přilehlého k ní $\sphericalangle \beta$; odvěsna protější úhlu β jest rozdíl $y_A - y_B = r_y$. Naneseme r_y na $A_1 A_2$ od bodu A_1, obdržíme body $M_1 N_1$, jimiž vedeme $n \parallel n' \parallel$ x. Poloměrem $A_1 B_1$ opíšeme kružnici okolo bodu A_1, a její průsečíky s n, n' jsou body $B_1, B_1', (B)_1, [B]_1$; z nich spustíme kolmice k ose x, které protne kružnice okolo A_2 opsaná poloměrem $A_2 B_2$ v nárysech oněch bodů. (Viz obr. 21.)

38. Zobrazte přímku $a = AB$, která má půdorysnou odchylku $\alpha = 30^0$; $A(2, —3, —1)$, $B(0, ?, 3)$.



Obr. 22.

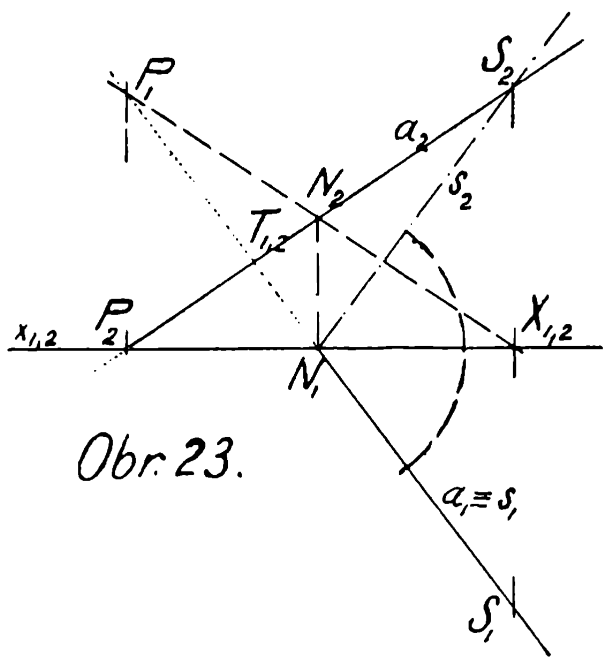
Nárys přímky známe, $a_2 \equiv A_2 B_2$. Sestrojíme prvý trojúhelník promítací $A_0 Z B_2$, $A_2 Z \parallel x_{1,2}$, u bodu B_2 narýsujeme $\sphericalangle \alpha' = R - \alpha$ a jeho rameno $B_2 A_0$ určí $A_0 \equiv B_2 A_0 \times A_2 Z$. $A_0 Z$ jest délka půdorysu úsečky $A_1 B_1$, jím opíšeme kružnici kolem A_1, a ta protne kolmici k ose x v bodě B_2 ve dvou bodech B_1, B_1'. (Obr. 20.)

39. Jest sestrojiti průsečíky T, S přímky $a = NP$ s rovinou totožnosti τ a souměrnosti σ. a) $N(0, 0, 2)$, $P(—3, —4, 0)$; b) $N(2, —2 —2)$, $P(—1, 3, 4)$.

Rovina τ (σ) půlí II. a IV. kvadrant (I. a III.) a útvary v ní obsažené mají oba obrazy totožny (souměrny podle osy x). Průměty průsečíku $T \equiv \equiv a \times \tau$ jsou tedy v průsečíku obou obrazů přímky, $T_{1,2} \equiv \equiv a_1 \times a_2$. (Obr. 23.)

Abychom sestrojili průměty bodu S, mysleme si v půdorysně promítací rovině přímky a $(a\,a_1)$ přímku s $(s_1 \equiv a_1)$, která leží současně v rovině souměrnosti σ. Oba obrazy přímky s musejí býti souměrny podle osy $x_{1,2}$, uděláme tedy $\sphericalangle s_2 x_2 = \sphericalangle s_1 x_1$ (oba úhly o společném vrcholu v bodě $x_1 \times a_1$) a průsečík $S_2 \equiv s_2 \times a_2$ jest nárys hledaného bodu. (Viz úl. 82, průsečík přímky s rovinou.)

II. řešení: Sestrojíme oba stopníky přímky a, spojíme P_1 s N_2, v bodě $X_{1,2} \equiv x_{1,2} \times P_1 N_2$ vztyčíme kolmici



Obr. 23.

$S_1 S_2 \perp x_{1,2}$, která protne a_1, a_2 v průmětech hledaného bodu. (Dokaž, že $S_1 X_1 = S_2 X_2$, na základě úměrnosti ve svazcích paprskových o středech P_2, N_1, P_1.)

Poznámka. Je-li $a_1 \parallel a_2$, jest bod $T_{1,2}$ v nekonečnu, přímka $a \parallel \tau$. Je-li $a_1 \equiv a_2$, jest přímka a v rovině τ. Když $\sphericalangle b_1 x_1 = \sphericalangle b_2 x_2$, je bod S v nekonečnu, přímka $a \parallel \sigma$. (Obr. 31.)

40. Jest zobraziti přímku $b \parallel x$ v rovině souměrnosti σ, která protíná danou přímku a.

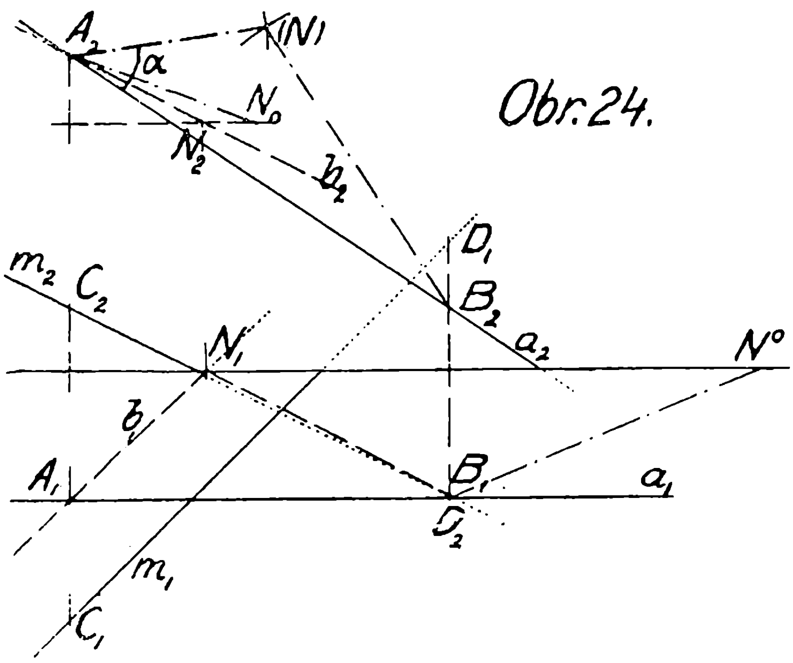
Podle předchozí úlohy vyšetříme bod $S \equiv a \times \varsigma$ a jím vedeme přímku $b \parallel x$.

41. Jest sestrojiti příčku mimoběžek $a = AB$, $b \perp \pi$ jdoucí bodem $M(0, 3, 3)$. $A(-3, 5. 0)$, $B(3, 3, 2)$, $b(-2, 1, 0)$.

Příčka mimoběžek jest přímka, která obě mimoběžky protíná.

Spojíme M s b, dostaneme promítací rovinu, která protne přímku a v bodě X; XM jest příčka hledaná. $X_1 \equiv a_1 \times M_1 Y_1$. $Y_1 \equiv b_1$.

42. Vyšetřte pravou velikost úhlu mimoběžek $a = AB$, $m = CD$. $A(-3, 2, 5)$, $B(3, 2, 1)$; $C(-3, 4, 1)$, $D(3, -2, -2)$. (Obr. 24.)



Bodem A vedeme $b \parallel m$; různoběžky $a \times b$ protneme libovolnou přímkou, na př. BN, kde N je druhý stopník přímky b. Určíme pravou velikost $\triangle ABN$, při čemž $AB = A_2 B_2$, ježto $AB \parallel \nu$ a $\sphericalangle \alpha$ tohoto trojúhelníku jest úhel mimoběžek daných.

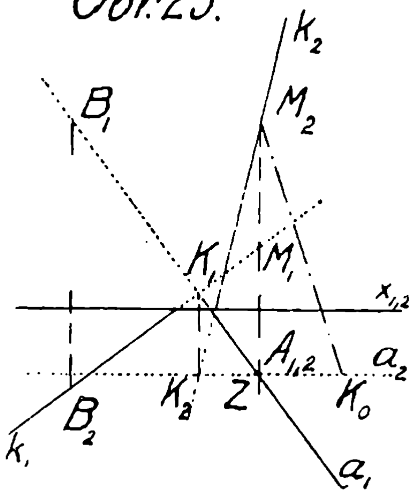
43. Jest vyhledati vzdálenost bodu M od přímky $a = AB$: a) $M(2, -3, 1)$; $A(2, 1, -1)$,

$B(-1, -3, -1)$; b) $M(-2, 1, 3)$; $A(0, -1, 0)$, $B(-2, -1, -3)$; c) $M(2, 3, 2)$, $a \equiv x$.

Vzdálenost bodu od přímky jest délka kolmé úsečky spuštěné z bodu na přímku $d = \overline{MK} \perp a$. Pravý úhel promítá se ve skutečné velikosti do oné průmětny, se kterou jest rovnoběžné jedno jeho rameno.

a) $AB \parallel \pi$, proto $M_1 \ldots k_1 \perp A_1 B_1$, $k_1 \times A_1 B_1 \equiv K_1$, K_2 na a_2; skutečnou délku úsečky $\overline{MK}$ určíme I. promítacím trojúhelníkem $M_2 Z K_0$. $Z \equiv M_1 M_2 \times a_2$, $\overline{ZK_0} = \overline{M_1 K_1}$. (Obr. 25.)

Obr. 25.



b) $AB \parallel Y$, proto $M_2 \ldots k_2 \perp A_2 B_2$ a dál jako v a).

c) $a \equiv x$, proto $k_1 \perp a_1$, $k_2 \perp a_2$, $k_1 \equiv k_2 \equiv M_1 M_2$, $K_{1,2} \equiv x_{1,2} \times M_1 M_2$.

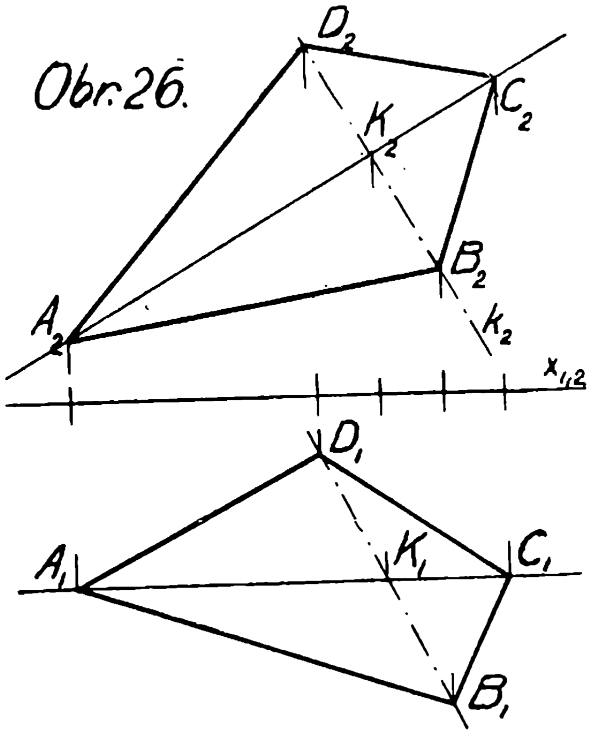
44. Jest vyšetřiti vzdálenost d dvou rovnoběžek $a \parallel b$. $a \equiv AB$ [$A(-2, 2, 2)$, $B(2, 4, 2)$], $b \ldots N(-2, 0, -1)$.

Zvolíme na přímce a bod A, spustíme z něho kolmici na přímku b $AK \perp b$, $\overline{AK} = d$.

Přímky jsou rovnoběžny s π, proto $A_1 K_1 \perp b_1$, $K_1 \equiv b_1 \times A_1 K_1$, K_2 na b_2.

45. Zobrazte deltoid $ABCD$, jehož osou j e s t ú h l o p ř í č k a AC. $A(-3, 3, 1)$, $C(4, 3, 5)$ $B(3, 5, 2)$.

Z bodu B spustíme kolmici k na AC; $B_2 \ldots k_2 \perp A_2C_2$, $k_2 \times A_2C_2 \equiv K_2$, K_1 na A_1C_1, uděláme $K_2D_2 = B_2K_2$ $(K_1D_1 = B_1K_1)$. (Obr. 26.)



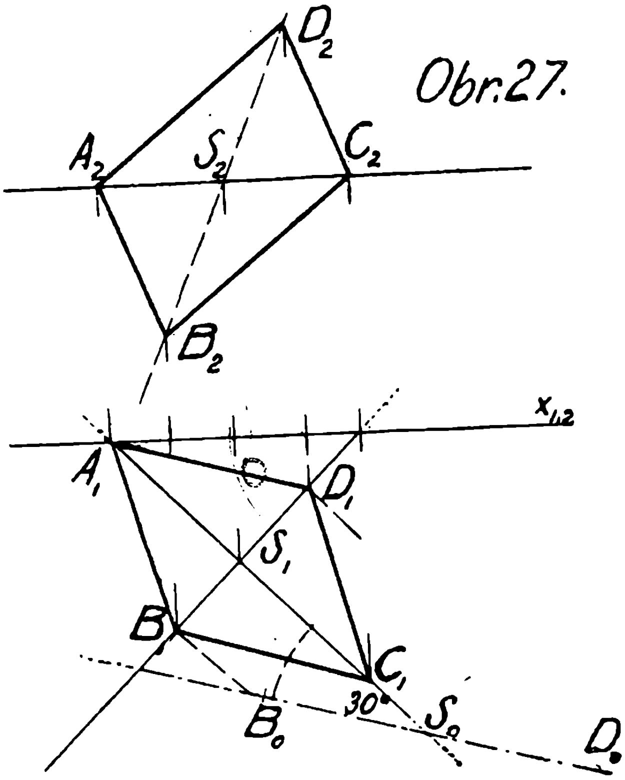
46. Z o b r a z t e č t v e r e c $ABCD$, j e h o ž ú h l o p ř í č k a BD m á o d c h y l k u $\alpha = 60^0$; $A(-2, 0, 3)$, $C(2, 4, 3)$.

Poněvadž $AC \parallel \pi$ jde $B_1D_1 \perp A_1C_1$ středem S_1 úsečky A_1C_1. *(Obr. 27.)*

Sklopíme promítací rovinu přímky BD; sklopeným obrazem S_0 vedeme přímku S_0P_1, aby $\sphericalangle S_1S_0P_1 = R - \alpha = 30^0$, naneseme na ni $S_0B_0 = S_0D_0 = \frac{1}{2}A_1C_1$ a pak $B_0B_1 \perp S_1S_1$, $D_0D_1 \perp S_1D_1$. $B_0B_1 = z_B$, $D_0D_1 = z_D$. Úloha jest dvojznačná.

47. B o d e m M p r o l o ž t e r o v i n u ϱ, a b y b y l a s t e j n ě v z d á l e n a o d b o d ů A, B, C. $M(2, 3, 3)$, $A(3, 2, 2)$, $B(0, 0, 3)$, $C(1, 2, 0)$. (Viz v obr. 47 rovinu $\alpha \parallel \varrho$.)

Rovina ϱ jest rovnoběžná s rovinou $(ABC) \equiv \equiv \sigma$. Stopa n_2^σ prochází bodem B_2, $n_2^\sigma \parallel A_2 C_2$, p_1^σ spojuje C_1 s $X_{1,2}$, $X_{1,2} \equiv n_2^\sigma \times x_{1,2}$. Narýsujeme bodem M_2 přímku $n_2 \parallel n_2^\sigma$, $M_1 \ldots n_1 \parallel x_{1,2}$, vyšetříme její půdorysný stopník $P_2 \equiv n_2 \times x_2$, P_1 na n_1, a $P_1 \ldots p_1^\varrho \parallel p_1^\sigma$; bodem $R_{1,2} \equiv x_{1,2} \times$



Obr. 27.

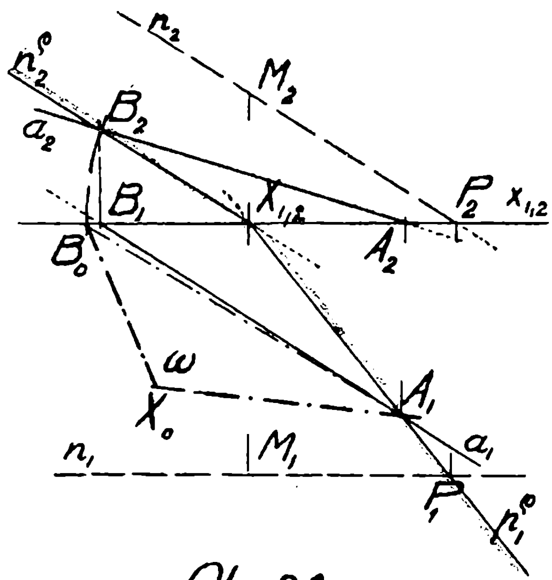
$\times p_1^\varrho \ldots n_2^\varrho \parallel n_2^\sigma$. Přímka $p \parallel p^\sigma$ ($n \parallel n^\sigma$, $n \equiv AC$, $n_1 \parallel x_1$, $n_2 \parallel n_2^\sigma$) zove se prvou (druhou) stoposměrnou (hlavní) přímkou roviny.

48. Jest narýsovati p^ϱ, je-li rovina ϱ dána $\sphericalangle n^\varrho x$, bodem M a jde počátkem. $M(0, 4, 2)$ $\sphericalangle n^\varrho x = 150°$. (Obr. 28.)

Bodem M prochází stoposměrná přímka 2. osnovy, $M_2 \ldots n_2 \parallel n_2^\varrho$, $M_1 \ldots n_1 \parallel x_1$, $n_2 \times x_2 \equiv P_2$, P_1 na n_1, $P_1 X_1 \equiv p_1^\varrho$. $X_{1,2} \equiv O_{1,2}$.

49. J e s t v y š e t ř i t i p r a v o u v e l i k o s t ú h l u s t o p r o v i n y ϱ z p ř í k l a d u p ř e d c h o z í h o. (Obr. 28.)

Protneme stopy libovolnou přímkou a v bodech $A = a \times p^\varrho$, $B \equiv a \times n^\varrho$, $A_1 \equiv a_1 \times p_1^\varrho$, A_2 na x_2, $B_1 \equiv a_1 \times x_1$, B_2 na n^ϱ, a vyšetříme pravou velikost $\triangle\ ABO$. Stačí vyhledati skutečnou velikost strany $\overline{AB}$, ježto $\overline{AO} = \overline{A_1 O_1}$, $\overline{BO} = \overline{B_2 O_2}$.



Obr. 28.

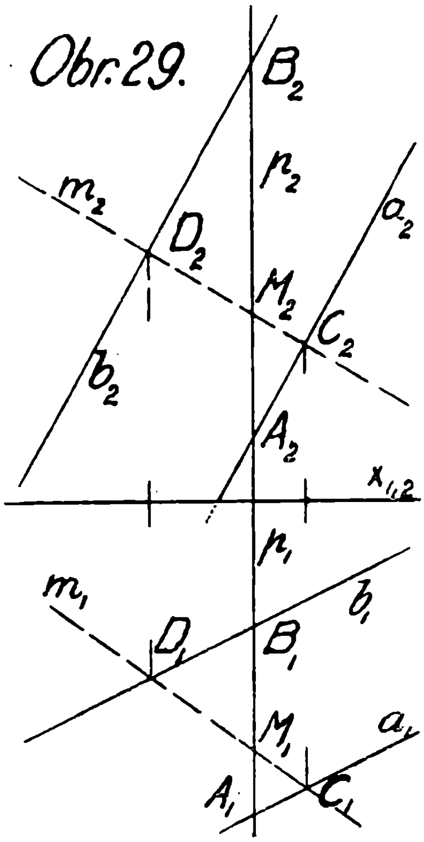
50. J e s t r o z h o d n o u t i, l e ž í-l i b o d M n a p ř í m c e $p = AB$. $M(2, 4, 3)$, $A(2, 5, 1)$, $B(2, 2, 7)$. (Obr. 29.)

B o d y A, B v e d e m e l i b o v o l n é r o v n o b ě ž k y $a \parallel b$ a v y š e t ř í m e, l e ž í-l i b o d M v r o v i n ě j i m i u r č e n é. $M_1 \ldots m_1$, $m_1 \times a_1 \equiv C_1$, z něho C_2 *na* a_2, $m_1 \times b_2 \equiv D_1$, z něho D_2 na a_2; prochází-li přímka $m_2 \equiv C_2 D_2$ *bodem* M_2, jest tento v průsečíku $p_2 \times m_2$, t. j. bod M leží na přímce $p \equiv AB$.

51. J e s t r o z h o d n o u t i, l e ž í-l i b o d y $A(1, 3, -1)$, $B(1, -2, 4)$, $C(1, 1, -3)$ na t é ž e p ř í m c e. Řeší se jako úloha 50.

52. Na přímce $p = AB$ vyšetřte body C, D. $A\,(0, 1, 2)$, $B\,(0, -5, -1)$; $C\,(0, y, 4)$, $D\,(0, -3, z)$.

Body A, B vedeme libovolným směrem rovnoběžky $a \parallel b$, $a_1 \parallel b_1$ jdou půdorysy A_1, B_1, $a_2 \parallel b_2$ jdou nárysy A_2, B_2. Bodem C_2 (D_1) vedeme různoběžku c_2 (d_1), ta určí body $M_2 \equiv a_2 \times c_2$, $N_2 \equiv b_2 \times c_2$ ($P_1 \equiv a_1 \times c_1$, $Q_1 \equiv b_1 \times c_1$), z nich odvodíme půdorysy (nárysy), a spojnice jejich $c_1 \equiv M_1 N_1$ ($d_2 = P_2 Q_2$) určí $C_1 \equiv c_1 \times p_1$ ($D_2 \equiv d_2 \times p_2$). (Srovnej obr. 29.)

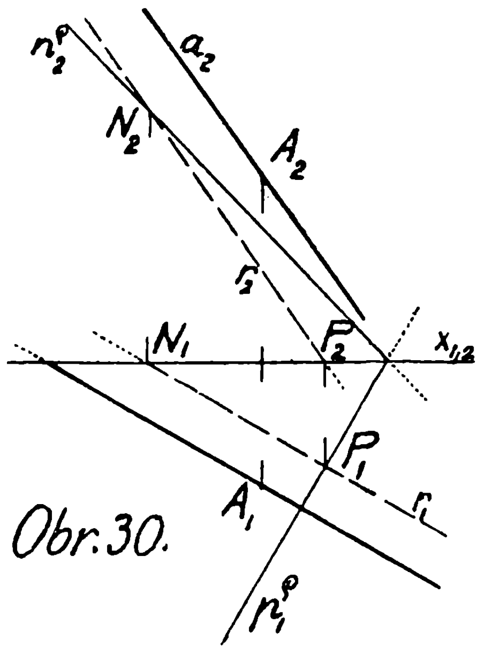


53. Vyšetřte, je-li přímka a AB v rovině ϱ $(0, 135^\circ, 30^\circ)$. $A\,(3, 3, 0)$, $B\,(-5, -1, 4)$.

Přímka jest v rovině, jsou-li její stopníky na souhlasných stopách roviny. (Viz přímku r v obr. 30.)

53a. Bodem A veďte přímku $a \parallel \varrho$, aby $\sphericalangle\, a_1 x_1 = 30^\circ$. $A\,(-2, 2, 3)$, $\varrho\,(0, 120^\circ, 135^\circ)$. (Obr. 30).

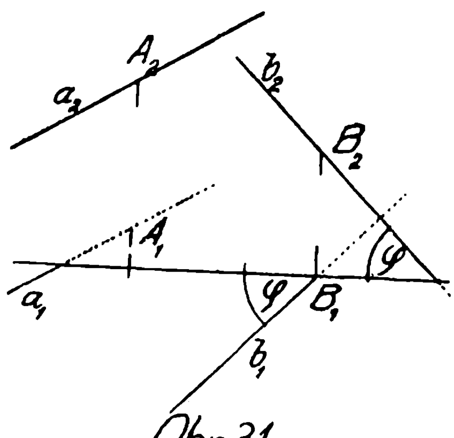
V rovině ϱ zvolíme přímku r tak, aby $\sphericalangle r_1 x_1 = \sphericalangle a_1 x_1$. Určíme r_2 jako spojnici druhých průmětů stopníků, a pak $A_2 \ldots a_2 \parallel r_2$.



Obr. 30.

54. Bodem A veďte přímku $a \parallel \pi$ a současně $a \parallel \varrho$. A (3, 3, —4), ϱ (0, 60°, 135°).

Přímka jest rovnoběžná se dvěma rovinami, je-li rovnoběžná s jejich průsečnicí $a \parallel p^\varrho$. $a_1 \parallel p_1^\varrho$, $a_2 \parallel x_2$.

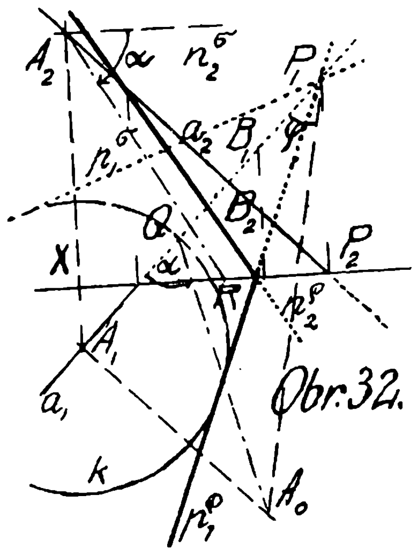


Obr. 31.

55. Bodem A veďte přímku $a \parallel \tau$, aby $\sphericalangle a_2 x_2 = 30°$, A (0, —0·5, 3); bodem B (3, 0, 2) přímk u $b \parallel \sigma$, a b y $\sphericalangle b_1 x_1 = 135$. ($\tau$ rovina totožnosti, σ rovina souměrnosti.) (Obr. 31.)

Viz pozn. k úl. 39. $a_1 \parallel a_2$; $\sphericalangle b_2 x_2 = \sphericalangle b_1 x_1$ ($\varphi = \varphi$).

56. B o d e m M s e s t r o j t e r o v i n u ϱ r o v n o b ě ž n o u s e d v ě m a m i m o b ě ž k a m i $a \equiv AP$, $b \equiv BC$. $M (0, 3, 4)$, $A (1, 4, 4)$, $P (4, 2, 0)$, $B (1, 5, 1)$, $C (-4, -1, -4)$.



Bodem M vedeme přímky $m \parallel a$, $n \parallel b$; $(m, n) \equiv \varrho$.

57. P ř í m k o u $a \equiv AB$ s e s t r o j t e r o v i n u $\varrho \parallel c \equiv CD$. a) $A (5, 1, 3{\cdot}5)$, $B (-1, 3, 2{\cdot}5)$; $C (0, 0, 4{\cdot}5)$, $D (-4{\cdot}5, 5{\cdot}5, 0)$; b) $A (-2, 0, 4)$, $B (2, 3, 0)$; $C (4, 4, 0)$, $D (1, 2, 3)$.

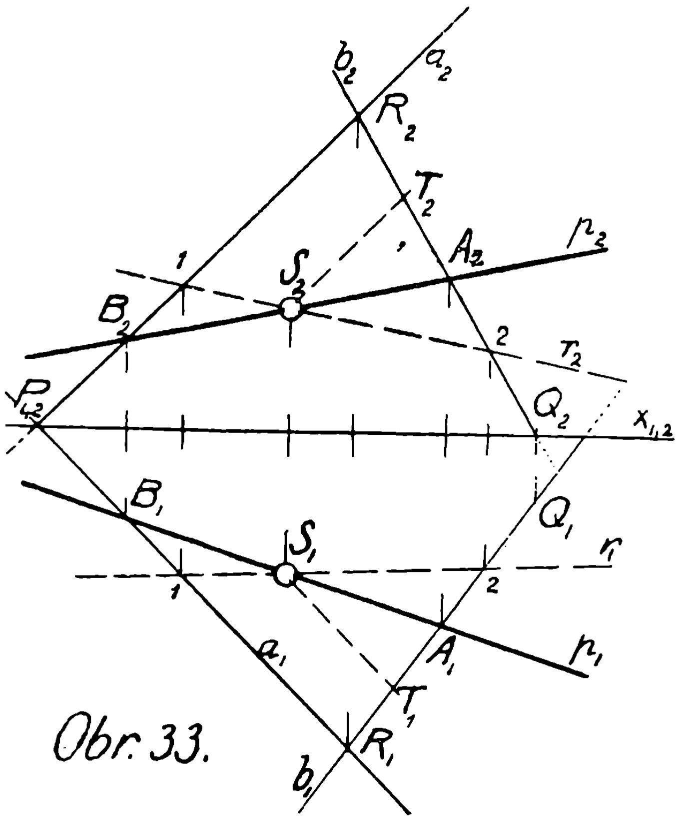
Bodem A vedeme $b \parallel c$; $\varrho \equiv (ab)$.

58. V r o v i n ě $\varrho \equiv (PQR)$ v e ď t e b o d e m S p ř í č k u r ů z n o b ě ž e k $a \equiv PR$, $b \equiv QR$, a b y j í m b y l a p ů l e n a. $P (-4, 0, 0)$, $Q (4, 1 0)$, $R (1, 5, 5)$; $S (0, y, 2)$. (Obr. 33.)

Půdorys S_1 určíme, když bodem S_2 vedeme nárys r_2 libovolné přímky roviny ϱ; $r_2 \times a_2 \equiv 1$, $r_2 \times b_2 \equiv 2$, najdeme půdorysy bodů $1, 2$ na a_1, b_1 a $1, 2 \equiv r_1$, na níž jest S_1.

Protíná-li hledaná příčka p dané přímky v bodech $A \equiv$ $\equiv b \times p$, $B \equiv a \times p$, jest bod S středem strany AB trojúhelníka ABR; vedeme-li jím střední příčku $ST \parallel BR$, jest $\overline{RT} =$ $= \overline{TA} = \frac{1}{2} AR$. $S_1 T_1 \parallel B_1 R_1$, $T_1 \equiv b_1 \times S_1 T_1$, $\overline{T_1 A_1} = \overline{T_1 R_1}$, $A_1 S_1 \equiv p_1$.

59. Bodem A sestrojte přímku $a \parallel \varrho \equiv$



Obr. 33.

$\equiv (RST)$ tak, aby $\sphericalangle a_2 x_2 = 30^\circ$. $A\,(1, 5, 2)$, $R\,(-4, 5, 0)$, $S\,(1, -2, 5)$, $T\,(3, 2, 3)$. (Viz úl. 53, obr. 30.)

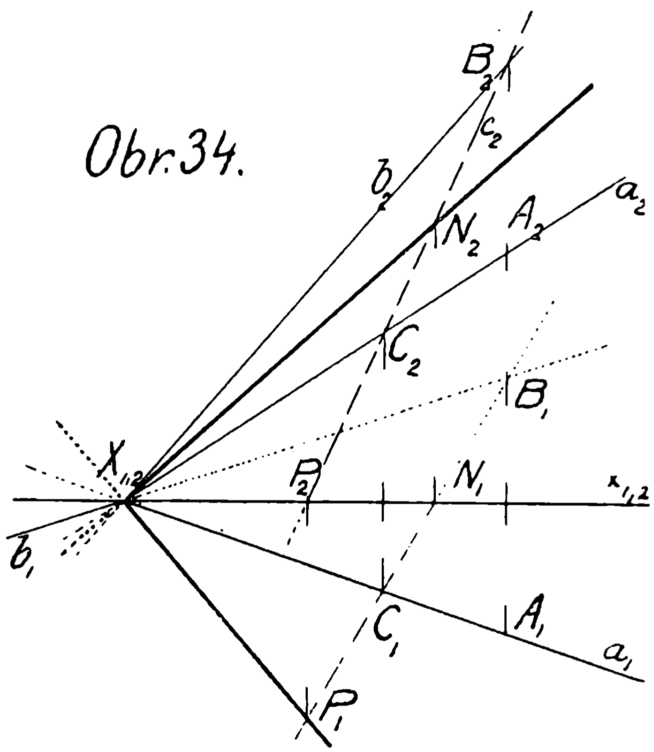
Bodem A_2 vedeme přímku a_2, $\sphericalangle a_2 x_2 = 30^\circ$. Promítací rovina $(a\, a_2)$ protne rovinu ϱ v přímce r, $r_2 \equiv a_2$, která protíná přímky SR, ST v bodech 1, 2, $1 \equiv r_2 \times S_2 R_2$, $2 \equiv r_2 \times$ $\times S_2 T_2$. Vyhledáme půdorysy bodů 1, 2, a_1 jde bodem A_1, $a_1 \parallel \overline{12}$.

60. Jest rozhodnouti, je-li přímka $a \equiv AB$ rovnoběžna s rovinou $\varrho\,(-3, 2, 3)$. $A\,(-3, 4, 1)$, $B\,(3, -1, 3)$. (Viz obr. 30.)

Promítací rovina přímky a protne rovinu ϱ v přímce r, $r_1 \equiv a_1$, najdeme $r_2 \equiv P_2 N_2$ a zkoumáme, zda $a_2 \parallel r_2$; pak je $a \parallel \varrho$.

61. Přímkou $a \equiv AB$ proložte rovinu ϱ, jejíž odchylka $\alpha = 60^0$. $A(3, 1, 4)$, $B(0, 3, 1)$. (Obr. 32.)

Roviny, které procházejí bodem A a mají danou odchyl-



ku α, obalí rotační kužel, jehož vrchol je A, osa z_A, podstava je kružnice k v půdorysně o středu A_1, a poloměr jest odvěsna pravoúhlého trojúhelníka $A A_1 R$, přilehlá danému úhlu α. Tento trojúhelník sestrojíme tak, že v bodě A_2 k z_A přirýsujeme doplněk $R - \alpha$ a na ose x obdržíme $r = XR$, $X \equiv x \times A_1 A_2$, $R \equiv x \times p$, kde p je druhé rameno úhlu $R - \alpha$. Ze stopníku P přímky a vedeme tečny ke kružnici k, a to jsou stopy rovin, jež vyhovují dané úloze.

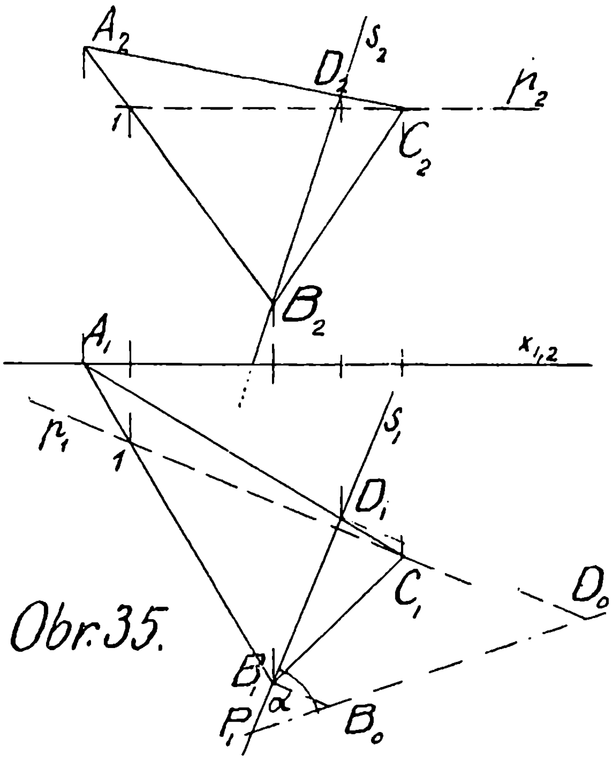
Pozn.: Trojúhelník $A A_1 R$ mohli jsme také sestrojiti sklopením promítací roviny přímky a; $A_1 A_0 \perp a_1$, $A_1 A_0 = z_A$, $\sphericalangle A_1 A_0 Q = 90^0 - \alpha$, $Q \equiv A_0 Q \times a_1$, $A_1 Q = r$. Spojíme-li A_0

s P_1, *jest* $\sphericalangle A_0 P_1 A_1$ odchylka φ přímky a od π. Úloha má dvojí (jedno, žádné) řešení podle toho, je-li $A_1 P_1$ větší (rovno, menší) než $A_1 Q$, t. j. je-li odchylka roviny α větší (rovna, menší) než odchylka přímky φ. Z toho plyne, že přímka v rovině má odchylku od průmětny menší, nanejvýš rovnu odchylce roviny; pak se jmenuje přímka spádová (odchylková).

62. Určete stopy roviny $\varrho \equiv (a \times b)$. $a\,[X\,(-4, 0, 0),\ A\,(2, 2, 4)],\ b\,[X_1\,B_1\,(2, -2, 7)]$. (Obr. 34.)

Stopy jdou bodem X; zvolíme pomocnou přímku c, která protíná dané přímky v bodech $C_1\,B_1$ a sestrojíme její stopníky, které spojíme s $X_{1,2}$.

63. Vyšetřte odchylky roviny od obou průměten. $\varrho \equiv (A\,B\,C)$, $A\,(-3, 0, 5)$, $B\,(0, 5, 1)$, $C\,(2, 3, 4)$. (Obr. 35.)



Obr. 35.

Odchylku roviny od průmětny π (ν) vyšetříme, sklopíme-li její spádovou přímku s (t) prvé (druhé) osnovy, která je kolmá k prvé (druhé) stopě nebo stoposměrné přímce.

Vedeme stoposměrnou přímku prvé osnovy bodem C, $C_2 \dots p_2 \parallel x_2$, $p_2 \times A_2 B_2 \equiv 1$, vyšetříme půdorys bodu 1 na $A_1 B_1$, $1 C_1 \equiv p_1$ a bodem $B_1 \dots s_1 \perp p_1$; $s_1 \times A_1 C_1 \equiv D_1$, D_2 na $A_2 C_2$ $B_2 D_2 \equiv s_2$. Ve sklopeném promítacím lichoběžníku prvém $B_1 D_1 D_0 B_0$ jest hledaná odchylka $\alpha = \sphericalangle D_1 P_1 D_0$, $P_1 \equiv \equiv D_1 B_1 \times D_0 B_0$.

Podobně se vyšetří odchylka β_ϱ sklopením druhého promítacího lichoběžníka $B_2 E_2 E_0 B_0$ druhé spádové přímky $B \dots t_2 \perp n_2$, $t_2 \times A_2 C_2 \equiv E_2$, E_1 na $A_1 C_1$.

Pozn. Je-li smysl obvodu obou průmětů mnohoúhelníka souhlasný (protivný), vidíme v půdoryse i náryse tutéž stranu jeho roviny (v obr. 35), (různé strany roviny rovnoběžníka $A B C D$ v obr. 37).

b) Přímka kolmá k rovině, rovina kolmá ku přímce.

64. Jest dána přímka $a \equiv A B$ a bod M v rovině totožnosti; vztyčte v bodě M kolmici $k \perp (a M)$. a) $A (3, 4, -3)$, $B (-1, -1, 5)$, $M (-2, y, 4)$.

$y_M = z_M = -4$, $M_1 \equiv M_2$. Přímka jest kolmá k rovině, je-li kolmá k jejím dvěma různoběžkám; za tyto můžeme zvoliti stopy roviny nebo stoposměrné přímky.

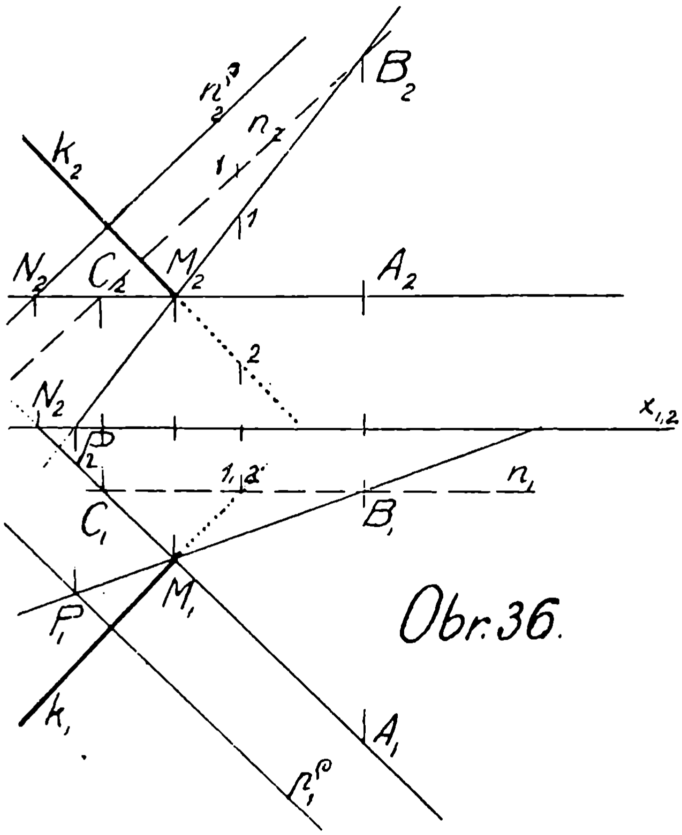
Bodem M vedeme stoposměrné přímky obou osnov; $M_1 \dots n_1 \parallel x_1$, $n_1 \times a_1 \equiv C_1$, C_2 na a_2, $M_2 C_2 \equiv n_2$, $M_2 \dots k_2 \perp n_2$; $M_2 \dots p_2 \parallel x_2$, $p_2 \times a_2 \equiv D_2$, D_1 na a_1, $M_1 D_1 \equiv p_1$, $M_1 \dots k_1 \perp p_1$.

b) $a \equiv A B$ jest v rovině totožnosti, $A (3, y, 2)$, $B (-2, y -4)$; $M (0, 2, 3)$.

c) $a \equiv A B$ bod M v rovině souměrnosti $A (0, 5, 2)$, $B (0, 1, 4)$, $M (-3, 2, z)$.

Úlohu poslední řešíme buď $\alpha)$ s použitím stop roviny $\varrho \equiv (A B M)$, anebo $\beta)$ beze stop. (Obr. 36.)

$\alpha)$ Sestrojíme půdorysný stopník přímky $M B$, $P_2 \equiv M_2 B_2 \times x_2$, P_1 na $M_1 B_1$ a bodem $P_1 \dots p_1^\varrho \parallel M_1 A_1$, ježto $M_2 A_2 \parallel x_2$, tedy $M A$ jest stoposměrná přímka roviny ϱ. Dále vyšetříme nárysný stopník přímky AM, $N_1 \equiv A_1 M_1 \times x_1$, N_2 na $A_2 M_2$, $N_2 X_{1,2} \equiv n_2^\varrho$, kde $X_{1,2} \equiv x_{1,2} \times p_1^\varrho$. Průměty kolmice na rovinu jsou kolmy k průmětům souhlasných stop roviny. $M_1 \ldots k_1 \perp p_1^\varrho$, $M_2 \ldots k_2 \perp n_2^\varrho$.

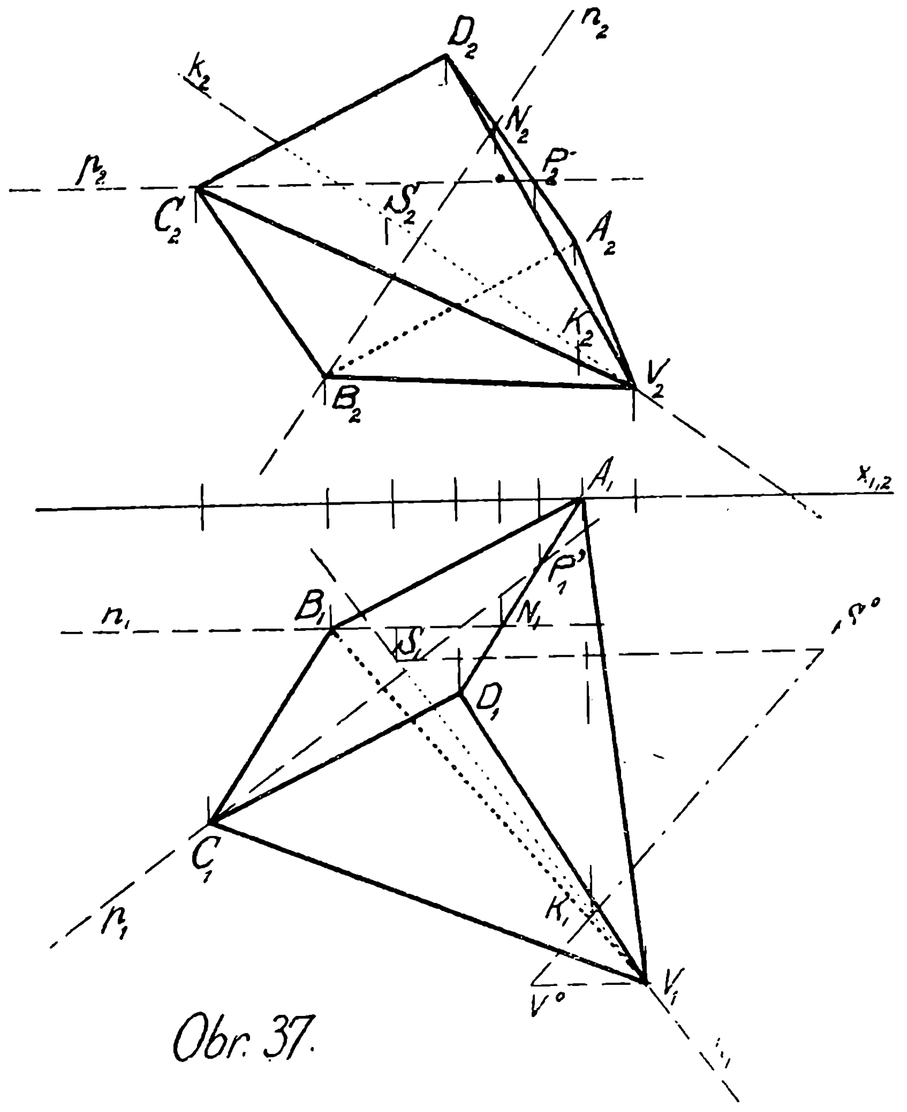


Obr. 36.

β) Ježto MA jest stoposměrná přímka roviny $(ABM) \equiv \varrho$, jest $k_1 \perp M_1 A_1$; vedeme $B_1 \ldots n_1 \parallel x_1$, $n_1 \times A_1 M_1 \equiv C_1$, C_2 na $A_2 M_2$, $C_2 B_2 \equiv n_2$, $k_2 \perp n_2$.

Abychom rozhodli viditelnost kolmice k, uvažujeme, že v průsečíku $B_1 C_1 \times k_1$ jsou půdorysy dvou bodů: prvého *1* na přímce CB, druhého *2* na přímce k; vyšetříme nárysy těchto bodů na nárysech příslušných přímek. Poněvadž bod přímky BC má větší souřadnici z než bod přímky k, jest nad ním, a tedy půdorys kolmice k v uvažovaném místě neviditelný.

65. Ve středu rovnoběžníka $ABCD$ vztyčte kolmici k jeho rovině, naneste na ni délku $v = SV = 7$ a zobrazte průměty jehlanu $V(ABCD)$. $A(3, 0, 4)$, $B(-1, 2, 2)$, $C(-3, 5, 5)$, D. (Obr. 37.)

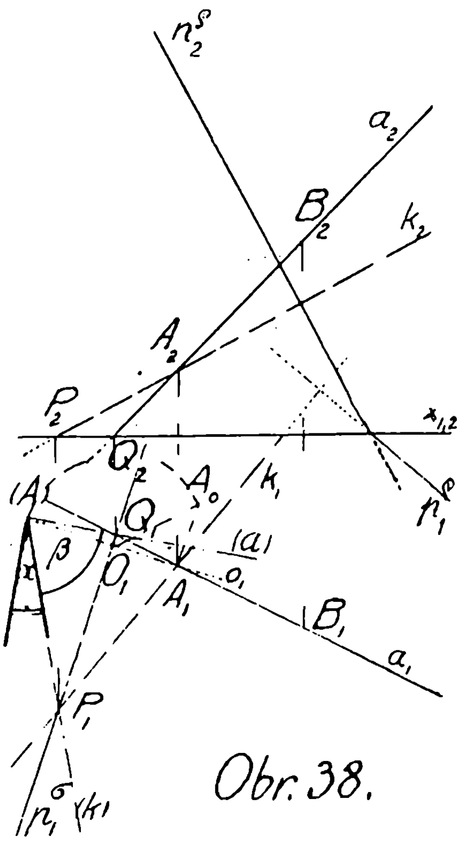


Obr. 37.

Doplníme oba průměty rovnoběžníku podle pravidla: průměty rovnoběžných přímek jsou rovnoběžny $A_1 D_1 \parallel B_1 C_1$, $C_1 D_1 \parallel A_1 B_1$; $A_2 D_2 \parallel B_2 C_2$, $C_2 D_2 \parallel A_2 B_2$. V průsečíku úhlopříček jest průmět středu $S_1 \equiv A_1 C_1 \times B_1 D_1$, $S_2 \equiv A_2 C_2 \times$ $\times B_2 D_2$, $S_1 S_2 \perp x_{1,2}$; $C_2 \ldots p_2 \parallel x_2$, $p_2 \times A_2 D_2 \equiv P_2'$, P_1' na $A_1 D_1$, $P_1' C_1 \equiv p_1$, $S_1 \ldots k_1 \perp p_1$; $B_1 \ldots n_1 \parallel x_1$, $n_1 \times A_1 D_1 \equiv$ $\equiv N_1$, N_2 na $A_2 D_2$, $B_2 N_2 \equiv n_2$, $S_2 \ldots k_2 \perp n_2$.

Na kolmici k naneseme výšku $v = \overline{SV}$ podle úlohy 29. Spojíme průměty vrcholu V s průměty vrcholů podstavných a dostaneme tak průměty pobočných hran jehlanu. Je-li jehlan přímý a $z_V \gtreqless z_S$ $(y_V \gtreqless y_S)$, jest půdorys (nárys) podstavy viditelný, / neviditelný, takže jsou všechny (obrysové) hrany půdorysu (nárysu) podstavy viditelny. / neviditelny.

66. B o d y A, B p r o l o ž t e r o v i n u $\sigma \perp \varrho\,(4, 3{\cdot}5, 4)$. $A\,(2{\cdot}5, 2{\cdot}5, 3)$, $B\,(-1, 0{\cdot}5, -2)$. (Obr. 38.)



Z jednoho bodu, na př. A, spustíme kolmici k na rovinu ϱ, $A_1 \ldots k_1 \perp p_1^\varrho$, $A_2 \ldots \perp n_2^\varrho$; pak $\sigma \equiv (k, AB)$ a její stopy jsou spojnice stopníků přímek k, $a \equiv AB$.

67. B o d e m A v e ď t e r o v i n u τ, a b y b y l a k o l m á k r o v i n á m $\varrho\,(-2, -4, 2)$, $\sigma\,(2, 1, 3)$; $A\,(0, 2, 1)$.

Spustíme z bodu A kolmice r a s k daným rovinám a ty určí rovinu hledanou $\tau \equiv (r\,s)$. $A_1 \ldots r_1 \perp p_1^{\varrho}$, $s_1 \perp p_1^{\sigma}$, $A_2 \ldots$ $r_2 \perp n_2^{\varrho}$, $s_2 \perp n_2^{\sigma}$, stanovíme stopníky přímek r, s a spojíme: obdržíme stopy roviny τ.

68. Sestrojte odchylku α přímky $a \equiv AB$ od roviny $\varrho\,(1, -1, 2)$, $A\,(-2, 2, 1)$, $B\,(0, 3, 3)$; $(5, 4, 3)$, $A\,(5, 3, 4)$, $B\,(-1, 3, 0{\cdot}5)$.

Odchylka přímky a od roviny ϱ jest úhel, který svírá přímka se svým pravoúhlým průmětem do roviny. K tomuto úhlu jest doplňkovým úhlem úhel β sevřený přímkou a a kolmicí k, kterou spustíme z libovolného bodu přímky na rovinu. $A_1 \ldots k_1 \perp p_1^{\varrho}$, $A_2 \ldots$ $k_2 \perp n_2^{\varrho}$; $k_2 \times x_2 \equiv P_2$, P_1 na k_1, $a_2 \times x_2 \equiv Q_2$, Q_1 na k_1. Kolem $P_1 Q_1 \equiv p_1^{\sigma}$ sklopíme rovinu $\sigma \equiv (a\,k)$ do π (viz úl. 17). $A_1 \ldots o_1 \perp p_1^{\sigma}$, $o_1 \times p_1^{\sigma} \equiv O_1$, $A_1 A_0 \perp o_1$, $A_1 A_0 = z_A$, $O_1 A_0 = r$ poloměr sklápěcí, $O_1 (A) = O_1 A_0$, $(A) P_1 \equiv (k)$, $(A) Q_1 \equiv (a)$ a $\sphericalangle (a)(k) = \beta = R - \alpha$. (Obr. 38.)

69. Bodem M veďte rovinu $\varrho \perp a \equiv AB$. $M\,(0, 2, 2{\cdot}5)$, $B\,(0, 4, 1)$.

Rovina jest kolmá ku přímce, obsahuje-li dvě různoběžky kolmé ku přímce; za tyto zvolíme přímky stoposměrné obou osnov, které vedeme bodem M.

$M_1 \ldots p_1 \perp a_1$, $M_2 \ldots p_2 \parallel x_2$; $M_2 \ldots n_2 \perp a_2$, $M_1 \ldots n_1 \parallel x_1$. $\varrho \equiv (p\,n)$.

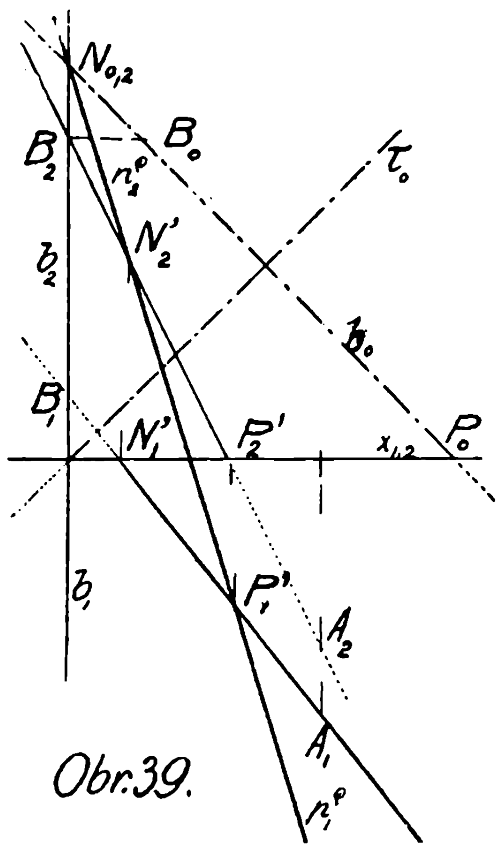
K sestrojení stop roviny ϱ stačí jedna přímka stoposměrná, na př. n; vyšetříme její půdorysný stopník P, $P_2 \equiv n_2 \times x_2$, P_1 na n_1, $P_1 \ldots p_1^{\varrho} \perp a_1$, $p_1^{\varrho} \times x_1 \equiv X_{1,2} \ldots n_2^{\varrho} \perp a_2$.

70. Jest proložiti bodem M rovinu ϱ, jejíž odchylky jsou $\alpha_{\varrho} = 30^0$, $\beta_{\varrho} = 75^0$. $M\,(-2, 6, 4)$.

Sestrojíme libovolnou přímku a, jejíž odchylky od průměten jsou doplňky odchylek roviny ϱ, $\alpha_a = R - \alpha_{\varrho} = 60^0$, $\beta_a = R - \beta_{\varrho} = 15^0$ (podle úlohy 36); bodem M vedeme rovinu $\varrho \perp a$ podle předchozí úlohy. Úloha jest čtyřznačná (dvojznačná, nemožná) podle toho, je-li $\alpha_{\varrho} + \beta_{\varrho} > (=, <)\, R$.

71. J e s t p r o l o ž i t i b o d y $A(3, 4, -3)$, $B(-1, -1, 5)$ rovinu ϱ, a b y $p_1^\varrho \equiv n_2^\varrho$. (Obr. 39.)

Rovina ϱ jest kolmá k rovině totožnosti, ježto přímka $b \perp \varrho$ má průměty $b_1 \parallel b_2$, tedy průsečík přímky b s rovinou totožnosti jest v nekonečnu. (Viz pozn. úl. 34.)



Obr. 39.

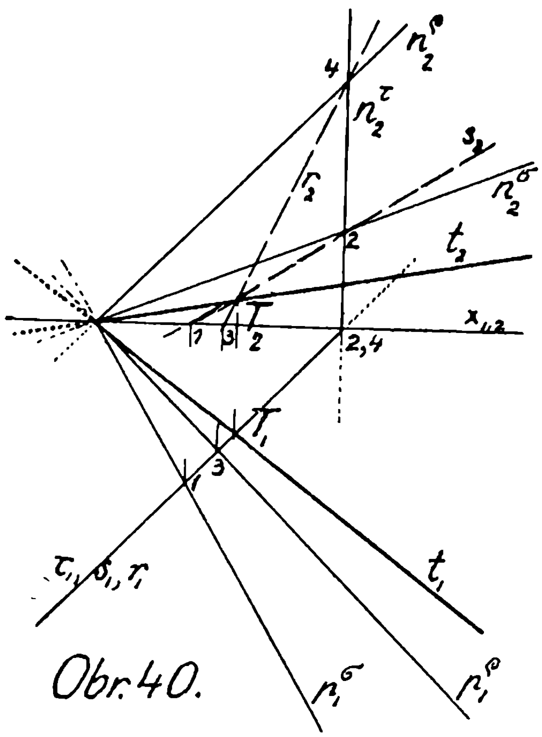
Bodem B vedeme přímku b kolmo k rovině totožnosti, $b_1 \equiv b_2 \perp x_{1,2}$. Vyšetříme stopníky přímky b; sklopíme její promítací rovinu do ν, $B_2 B_0 = y_B$. $B_0 \ldots b_0 \perp \tau_0$, kde τ_0 jest sklopený obraz průmětu roviny τ do zmíněné roviny promítací a půlí $\sphericalangle b_2 x_2$ (onen, do něhož padla záporná souřadnice y_B), $P_0 \equiv x_2 \times b_0$, $N_{0,2} \equiv b_2 \times b_0$. Vyšetříme-li stopníky přímky AB, P', N', prochází přímka $P_1' N_2'$ bodem N_2 a jest stopami hledané roviny $P_1' N_2' \equiv p_1^\varrho \equiv {}_2^\varrho$. Stačí tedy k řešení dané úlohy, když spojíme stopníky přímky AB.

c) Průsečnice dvou rovin.

72. Jest vyšetřiti přímku s společnou rovinám ϱ a σ: a) $\varrho\,(2, -1, 4)$, $\sigma\,(-2, -3, 2)$; b) $\sigma\,(8, 4, 3)$, $\tau\,(-2, \infty, 1)$. (Obr. 51.)

Přímka společná dvěma rovinám jest jejich průsečnicí; určíme ji, vyhledáme-li dva její body (viz úl. 7).

Jedním bodem průsečnice s jest průsečík $p^{\varrho} \times p^{\sigma} \equiv P$ prvních stop daných rovin, jenž jest její půdorysným stopníkem; průsečík druhých stop $N \equiv n^{\varrho} \times n^{\sigma}$ jest její nárysný stopník.



Obr. 40.

$P_1 \equiv p_1^{\varrho} \times p_1^{\sigma}$, P_2 na x_2, $N_2 \equiv n_2^{\varrho} \times n_2^{\sigma}$, N_1 na x_1, $P_1 N_1 \equiv$ $\equiv s_1$, $P_2 N_2 \equiv s_2$. (Obr. 52.)

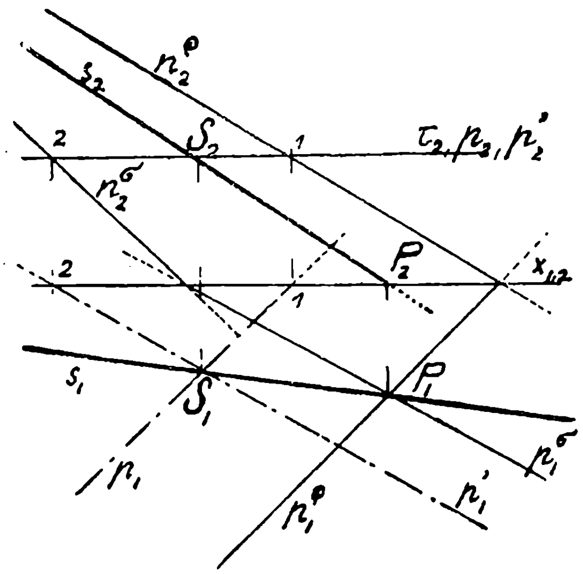
c) $n^{\varrho} \parallel n^{\sigma}$ v obr. 57 $\varrho\,(-7, 3, -7)$, $\sigma\,(-2, 2, -2)$, pak $s_2 \parallel n_2^{\varrho}$ $s_1 \parallel x_1$.

73. Jest vyšetřiti geometrické místo bodů, které leží v rovinách ϱ a σ. a) $\varrho\,(2, 3, 5)$,

$\sigma(-3, 5, 4)$; b) $\varrho(-4, 4, 4)$, $\sigma(-4, 60^0, 22^0 30')$ (obr. 40); c) $\varrho(3, 45^0, 150^0)$, $\sigma(-2, 30^0, 135^0)$. (Obr. 41.)

Hledané g. m. b. jest průsečnice daných rovin $s \equiv \varrho \times \sigma$ a určí se jako v příkladě předchozím.

74. Jest vyšetřiti jakého druhu jest pronik $\triangle ABC$ s $\triangle MNP$. $A(3{\cdot}5, 6, 1)$, $B(-1{\cdot}5, 9, 9)$,



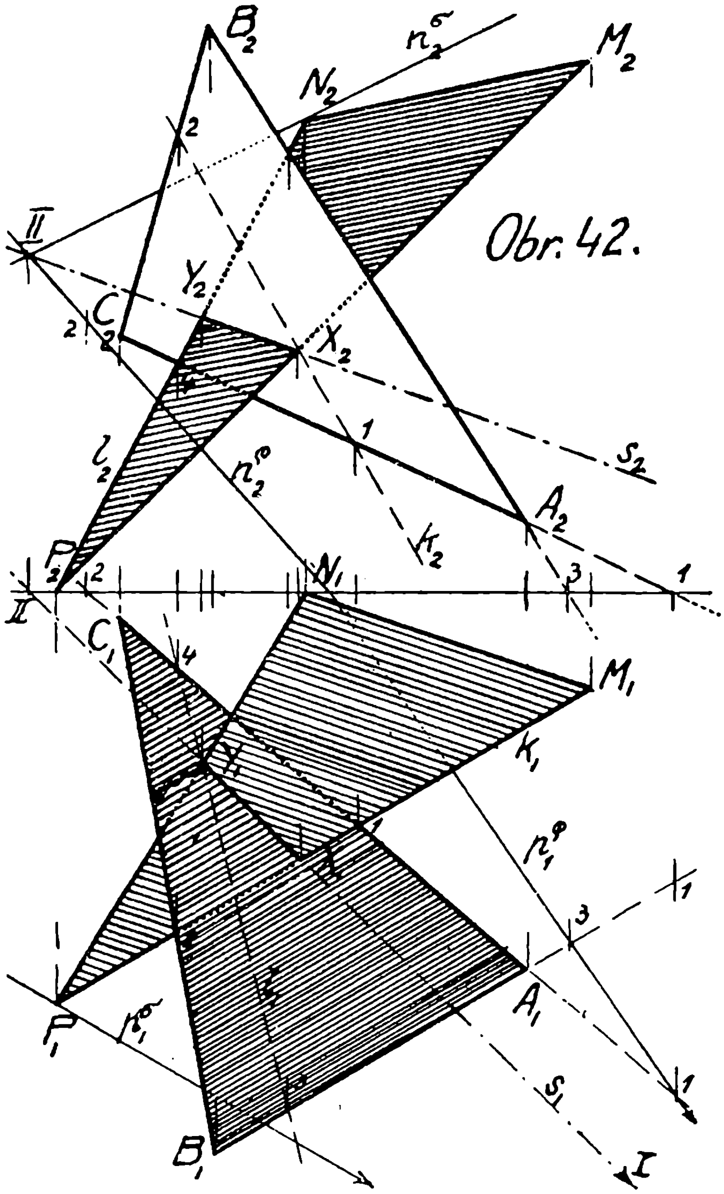
Obr. 41.

$C(-3, 0{\cdot}5, 4)$; $M(4{\cdot}5, 1{\cdot}5, 8{\cdot}5)$, $N(0, 0, 7{\cdot}5)$, $P(-4, 6{\cdot}5, 0)$. (Obr. 42.)

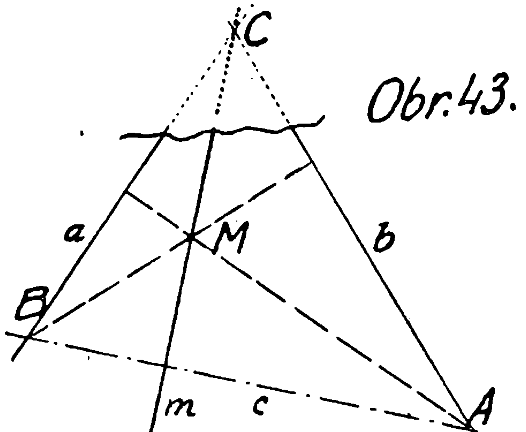
Určíme stopy roviny $\varrho \equiv (ABC)$ spojením stopníků přímek AB, AC; podobně stopy roviny $\sigma \equiv (MNP)$ (spojením stopníku N se stopníkem druhým přímky MP obdržíme n^σ, p^σ jde bodem P). Průsečnice rovin $\varrho \times \sigma \equiv s$ určí se jako v př. předchozím, a poněvadž koncové body úsečky proniku jsou na stranách $\triangle MNP$, jest pronik úplný, prostup (viz úl. 10).

Půdorys přímky s_1 spojuje stopník nárysný II s nepřístupným průsečíkem prvních stop. Řeší se podle úlohy 75.

75. Spojiti bod M s nepřístupným průsečíkem přímek a, b. (Obr. 43.)


B2
n2σ
M2
N2
2
II
Y2
C2
2
X2
1
l2
n2φ
s2
A2
P2
k2
N1
3
1
II
C1
4
M1
Y1
k1
n1φ
3
1
A1
P1
n1σ
s1
1
B1
I

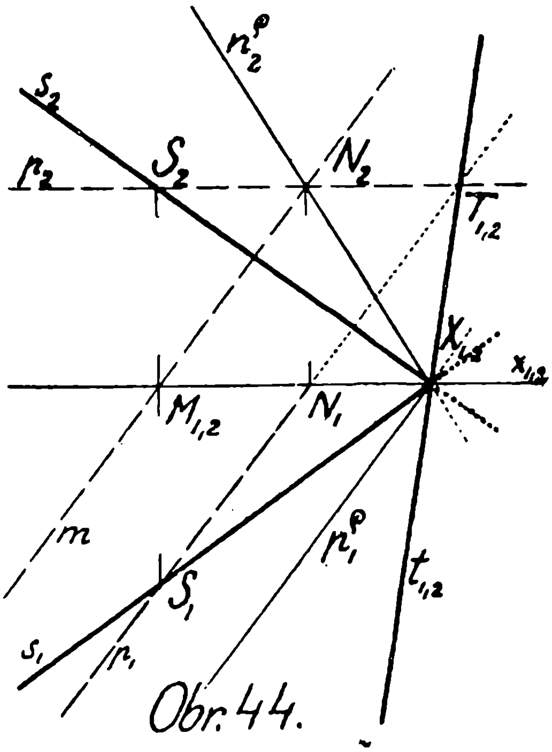
Obr. 42.


C
a
M
b
B
m
c
A

Obr. 43.

Považujeme bod M za průsečík výšek $\triangle ABC$, jehož strany AC, BC jsou na daných přímkách a vrchol C jest jejich nepřístupný průsečík. Vrcholy A, B obdržíme jako průsečíky výšek se stranami $A \equiv b \times MA$, $B \equiv a \times MB$; výška na stranu AB jest $MC \perp AB$, a to jest hledání spojnice.

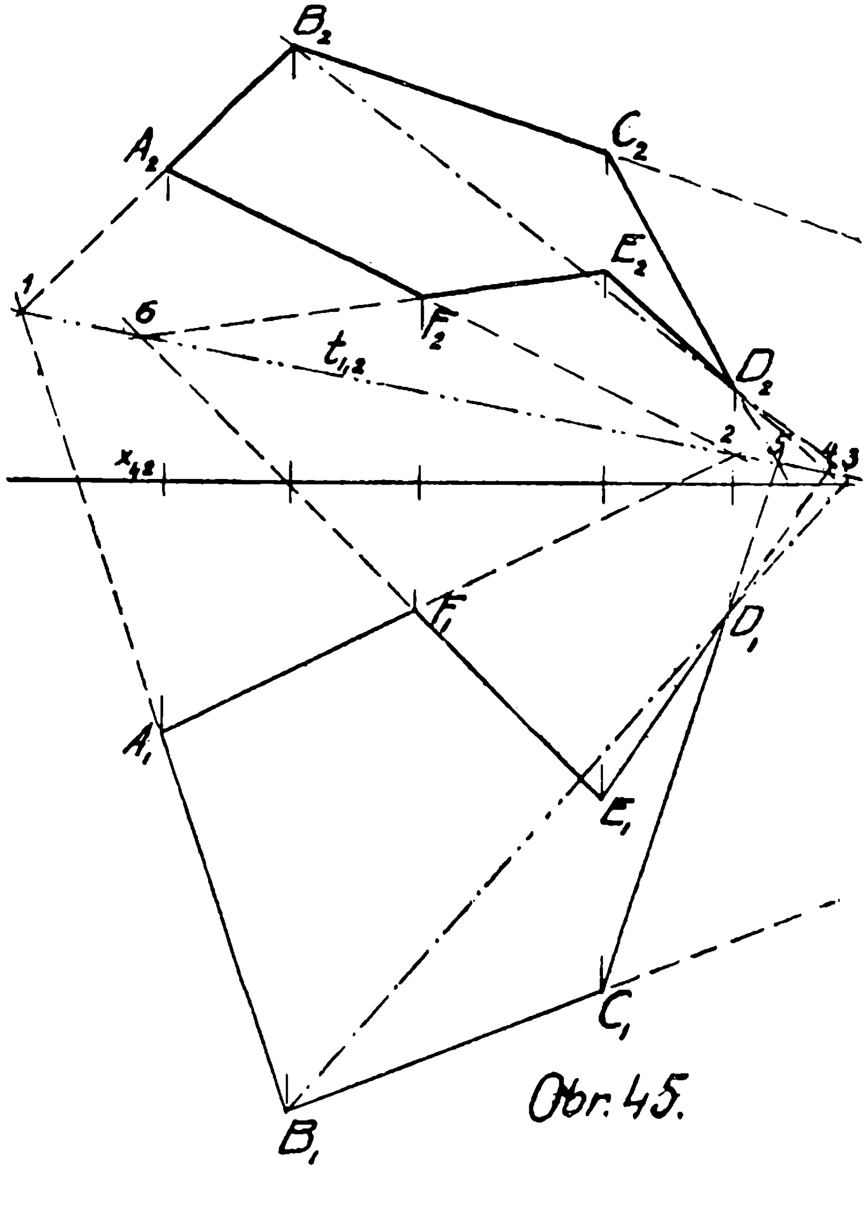
76. Jest vyšetřiti průsečnice roviny ϱ s rovinami: souměrnosti σ a totožnosti τ. $\varrho\,(3, 4, 5)$. (Obr. 44.)



Obr. 44.

Poněvadž roviny σ a τ obsahují osu x, jest jedním bodem hledaných průsečnic průsečík stop roviny ϱ, $X_{1,2} \equiv p_1^\varrho \times n_2^\varrho$. V rovině ϱ zvolíme libovolnou přímku, na př. přímku stoposměrnou p, $p_1 \parallel p_1^\varrho$, $p_1 \times x_1 \equiv N_1$, N_2 na n_2^ϱ, $N_2 \ldots p_2 \parallel x_2$ a vyšetříme její průsečík S s rovinou souměrnosti a T s rovinou totožnosti podle úl. 39. Bodem N_2 vedeme přímku $m \parallel p_1$, $m \times x_{1,2} \equiv M_{1,2}$, v $M_{1,2}$ vztyčíme $S_2 S_1 \perp x_{1,2}$ a obdržíme S_1, S_2 na p_1, p_2. $S_1 X_1 \equiv s_1$, $S_2 X_2 \equiv s_2$ jsou obrazy průmětů přímky $s \equiv \varrho \times \sigma$. $T_{1,2} \equiv p_1 \times p_2$, $T_{1,2} X_{1,2} \equiv t_{1,2}$ jest obraz průmětů průsečnice $t \equiv \varrho \times \tau$.

Na přímce t leží průsečíky všech přímek roviny ϱ s rovinou totožnosti, tedy na $t_{1,2}$ protíná se půdorys a nárys každé přímky roviny ϱ; ježto kromě toho jsou sdružené průměty bodů na paprscích kolmých k ose $x_{1,2}$, jest půdorys a ná-

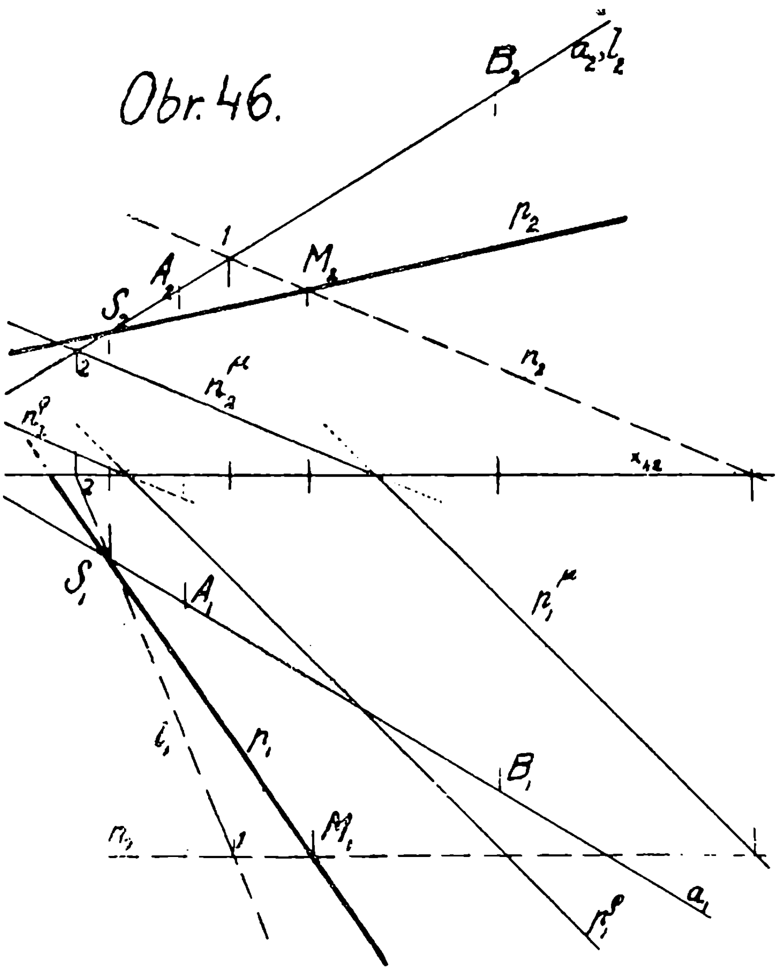


Obr. 45.

rys rovinného obrazce v affinitě. Paprsky affinity jsou kolmice k ose $x_{1,2}$, osou affinity jest průsečnice roviny daného obrazce s rovinou totožnosti.

77. Jest dán půdorys mnohoúhelníku $ABCDEF$ a nárysy tří jeho vrcholů; sestrojte nárys mnohoúhelníku. $A\,(-4, 4, 5)$, $B\,(-2, 10, 7)$, $C\,(3, 8, z)$, $D\,(5, 2, z)$, $E\,(3, 5, z)$, $F\,(0, 2, 3)$. (Obr. 45.)

Půdorys a nárys mnohoúhelníku jsou v affinitě, jejíž osou jest průsečnice roviny obrazce s rovinou totožnosti. Dva body



osy affinity jsou $1 \equiv A_1 B_1 \times A_2 B_2$, $2 \equiv A_1 F_1 \times A_2 F_2$; $1, 2 \equiv \equiv t_{1,2}$. Prodloužíme $B_1 D_1$ až k průsečíku s osou affinity $3 \equiv B_1 D_1 \times t_{1,2}$, bod 3 spojíme s B_2, přímka $3 B_2$ protne paprsek affinity bodu D_1 ($D_1 D_2 \perp x_{1,2}$) v bodu $D_2 \equiv 3 B_2 \times \times D_1 D_2$. Podobně vyhledáme ostatní body nárysu.

78. Jest vésti bodem M přímku $m \parallel \varrho$ tak, aby oba její obrazy byly navzájem rovnoběžny $m_1 \parallel m_2$. $M\,(0, 5, 3)$, $\varrho\,(4, 60^\circ, 45^\circ)$.

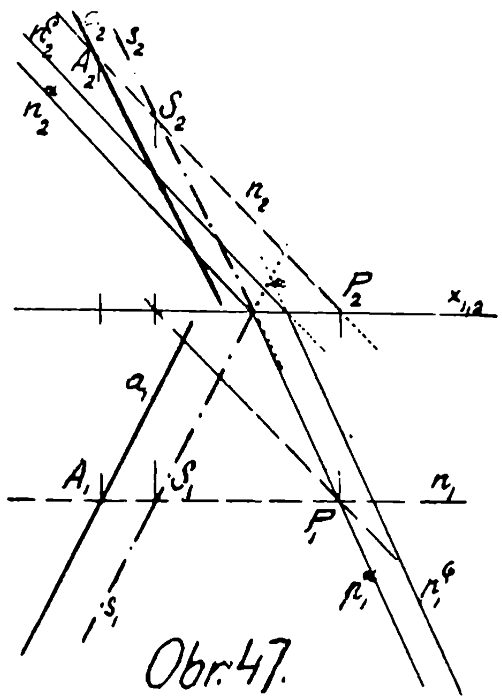
Přímka m musí býti rovnoběžná s rovinou totožnosti (viz pozn. úl. 39) a poněvadž má býti $m \parallel \varrho$, musí býti rovnoběžná s průsečnicí roviny ϱ s rovinou totožnosti, $m \parallel t$, $t \equiv \varrho \times \tau$. Přímku t sestrojíme podle úl. 76.

79. Jest vésti bodem M přímku $p \parallel \varrho$, aby protínala přímku $a \equiv AB$. $M(1, 6, 3)$, $\sigma(-2, 60^0, 150^0)$, $A(-1, 2, 3)$, $B(4, 5, 6)$.

Řešení 1.: Určíme rovinu $\sigma \equiv (Ma)$, vyšetříme její průsečnici s rovinou ϱ, $s \equiv \sigma \times \varrho$, a bodem M vedeme $p \parallel s$.

Řešení 2.: Vedeme bodem M rovinu $\mu \parallel \varrho$, vyšetříme $S \equiv \mu \times a$, $MS \equiv p$. (Obr. 46.) Průsečík přímky a s rovinou μ podle úl. 82.

80. Jest vésti bodem A přímku a, aby oba její obrazy byly od osy x stejně od-



chýleny a všechny její body stejně vzdáleny od roviny ϱ. $A(-2, 3, 4)$, $\varrho(1, -2, 1)$.

Řešení 1.: Přímka a musí býti $\parallel \varrho$, tedy rovnoběžna s průsečnicí této s rovinou souměrnosti (viz pozn. úl. 39). Sestrojíme přímku $s \equiv \varrho \times \sigma$ podle úl. 76, a pak bodem A vedeme $a \parallel s$.

Řešení 2.: Přímka a musí ležeti v rovině $\alpha \parallel \varrho$, kterou sestrojíme podle úl. 47; průsečnice roviny α s rovinou souměrnosti (podle úl. 76) jest přímka $s \equiv \alpha \times \sigma$, hledaná přímka $a \parallel s$. (Obr. 47.)

81. Jest proložiti přímkou $a \equiv AB$ rovinu α, aby protala roviny ϱ a σ v přímkách rovnoběžných. $A\,(-1{\cdot}5, 2{\cdot}5, 3{\cdot}5)$, $B\,(3, 5, 5)$, $\varrho\,(-7, 45^0, 60^0)$, $\sigma\,(7{\cdot}5, 135^0, 120^0)$.

Hledaná rovina α musí býti rovnoběžná s průsečnicí t daných rovin. Sestrojíme $t \equiv \varrho \times \sigma$, bodem B na přímce a vedeme přímku $b \parallel t$ a rovina $(a\,b) \equiv \alpha$ jest hledaná; její průsečnice s danými rovinami $r \equiv \varrho \times \alpha$, $s \equiv \sigma \times \alpha$ obdržíme spojením průsečíků souhlasných stop. Body, ve kterých protnou tyto přímky přímku a, jsou průsečíky přímky a s rovinami danými $R \equiv a \times \varrho \equiv a \times r$, $S \equiv a \times \sigma \equiv a \times s$.

d) Průsečík přímky s rovinou.

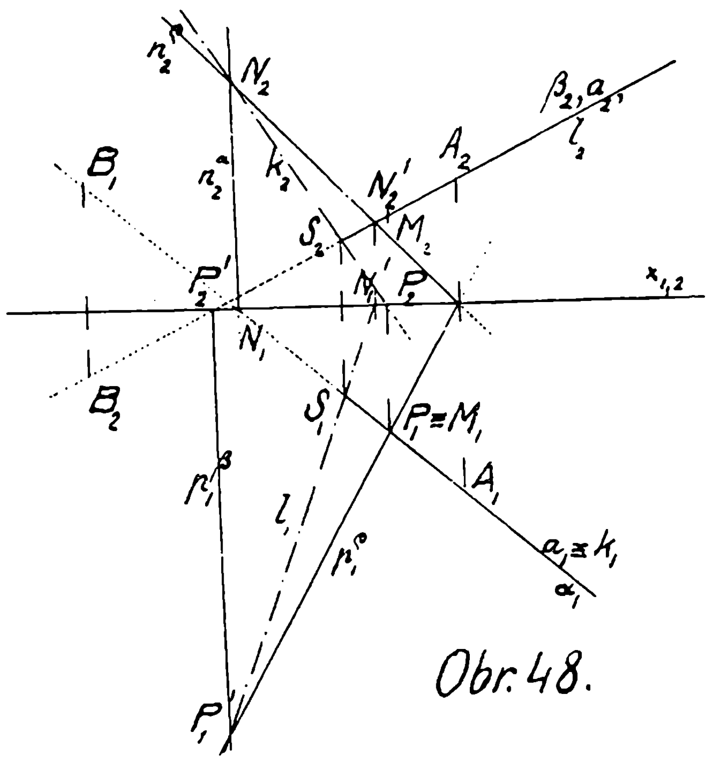
82. Jest vyhledati průsečík přímky $a \equiv AB$ s rovinou ϱ. a) $A\,(3, 3, 2)$, $B\,(-3, -2, -1)$; $\varrho\,(3, 120^0, 135^0)$. b) $A\,(-3, 2, 3)$, $B\,(3, -1, -5)$, $\varrho \equiv MNP$, $M\,(0, 3, 2)$, $N\,(-2, 0, 0)$, $P\,(3, 4, 2)$. c) $A\,(0, 4, 5)$, $B\,(0, -1, 2)$, $\varrho\,(5, 3, 4)$.

a) Přímkou a proložíme promítací rovinu prvou α (druhou β), $\alpha_1 \equiv a_1$, $n_2^{\alpha} \perp x_2$ ($\beta_2 \equiv a_2$, $p_1^{\beta} \perp x_1$), tato protne rovinu ϱ v přímce $k \equiv \alpha \times \varrho$ ($l \equiv \beta \times \varrho$), jejíž $k_1 \equiv a_1$ ($l_2 \equiv a_2$); $P_1 \equiv k_1 \times p_1^{\varrho}$, P_2 na $x_{1,2}$; $N_1 \equiv k_1 \times x_1$, N_2 na n_2^{ϱ} ($P_2' \equiv l_2 \times x_2$, P_1' na p_1^{ϱ}; $N_2' \equiv l_2 \times n_2^{\varrho}$, N_1' na x_1), $P_2 N_2 \equiv k_2$ ($P_1' N_1' \equiv l_1$) a $k_2 \times a_2 \equiv S_2$, ($l_1 \times a_1 \equiv S_1$). Poněvadž jeden průmět takto sestrojené průsečnice je ztotožněn s průmětem přímky dané $k_1 \equiv a_1$ ($l_2 \equiv a_2$), nazývá se tato průsečnice

přímka krycí prvá (druhá). (Obr. 48.) Přímka krycí leží 1. v promítací rovině dané přímky a; 2. v dané rovině ϱ.

Poněvadž bod M přímky a, jehož $M_1 \equiv P_1$, má $z_M > z_P$ jest a_1 v uvažovaném místě viditelná; podobně v nárysu.

b) Buďto sestrojíme stopy roviny $(M N P)$ a pokračujeme jako v případě a); nebo narýsujeme různoběžky $M N$, $M P$, jež protíná krycí přímka prvá k v bodech $K \equiv k \times M N$ $(K_1 \equiv k_1 \times$



Obr. 48.

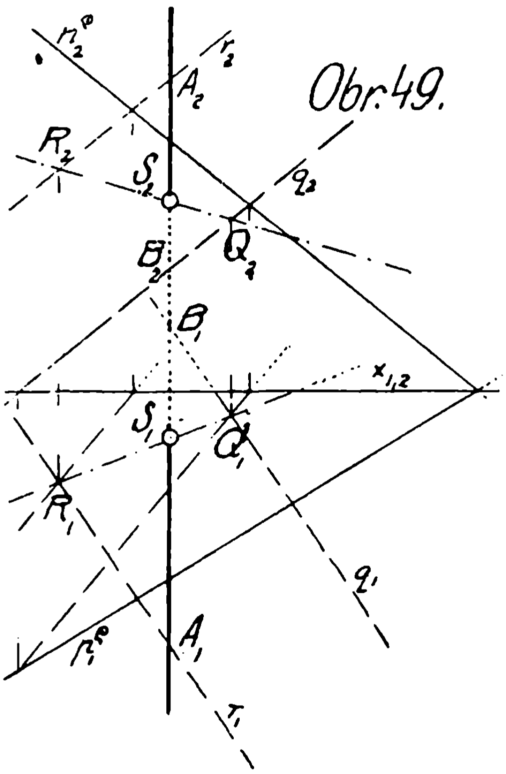
$\times M_1 N_1$, K_2 na $M_2 N_2)$, $L \equiv k \times M P$ $(L_1 \equiv k_1 \times M_1 P_1$, L_2 na $M_2 P_2)$. $K_2 L_2 \times a_2 \equiv S_2$, S_1 na a_1 jsou průměty hledaného průsečíku.

c) Přímka daná jest kolmá k ose x, jsou tedy obě promítací roviny i obě krycí přímky ztotožněny. Vedeme body A, B libovolným směrem rovnoběžné přímky $r \parallel q$, stanovíme jejich průsečíky R, Q s rovinou ϱ a $R Q \times a \equiv S$. (Obr. 49.)

83. V rovině ϱ sestrojte přímku, která protíná přímky $a \parallel b$. $\varrho\,(-4, 3, 4)$, $a\,[A\,(-3, 5, 2)$, $B\,(0, 2, 2)]$; $b\,[C\,(0, 4, 1)]$.

Sestrojíme průsečíky daných přímek s rovinou ϱ podle úlohy předchozí $a \times \varrho \equiv S$, $b \times \varrho \equiv T$, a jejich spojnice jest hledaná přímka $r \equiv S\,T$. (V obr. 49 přímka $R\,Q$.)

84. Vyšetřiti bod roviny ϱ, který je nejblíž bodu A (3, 5, 3); ϱ (5, 3, 3).



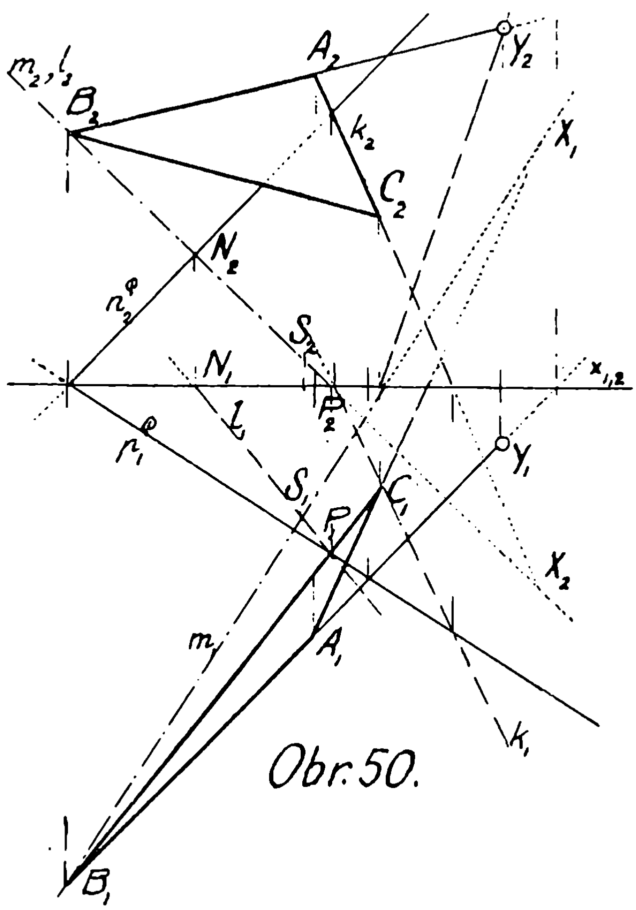
Spustíme z bodu A kolmici k na rovinu ϱ, $A_1 \ldots k_1 \perp p_1^\varrho$, $A_2 \ldots k_2 \perp n_2^\varrho$; vyšetříme průsečík kolmice s rovinou $S \equiv k \times \varrho$ (v obr. 50 $S \equiv m \times \varrho$) pomocí krycí přímky druhé l, $l_2 \equiv k_2$, $l_2 \times n_2^\varrho \equiv N_2$, N_1 na x_1, $l_2 \times x_2 \equiv P_2$, P_1 na p_1^ϱ, $P_1 N_1 \equiv l_1$, $l_1 \times k_1 \equiv S_1$, S_2 na k_2 jsou průměty hledaného bodu S.

85. Vyšetřiti bod X souměrný s bodem B podle roviny ϱ. B (2, 0, 1·5), ϱ (—3, 3, 4).

Spustíme z bodu B kolmici m na rovinu ϱ, vyšetříme její průsečík s rovinou $S \equiv m \times \varrho$ a vzdálenost $\overline{S\,B}$ přeneseme na druhou stranu kolmice $\overline{S\,X} = \overline{S\,B}$, $\overline{S_1 X_1} = \overline{S_1 B_1}$, $\overline{S_2 X_2} = \overline{S_2 B_2}$. (Viz obr. 50.)

86. V rovině ϱ vyšetřte bod X, aby součet jeho vzdáleností od bodů A, B byl minimální. $A\,(0, 4, 5)$, $B\,(-4, 8, 4)$, $\varrho\,(-4, 2{\cdot}5, 4)$. (Obr. 50.)

Podle předešlé úlohy vyhledáme bod X souměrný s bodem B podle roviny ϱ, sestrojíme průsečík přímky AX s rovinou ϱ, což je bod hledaný $C \equiv AX \times \varrho$.



Obr. 50.

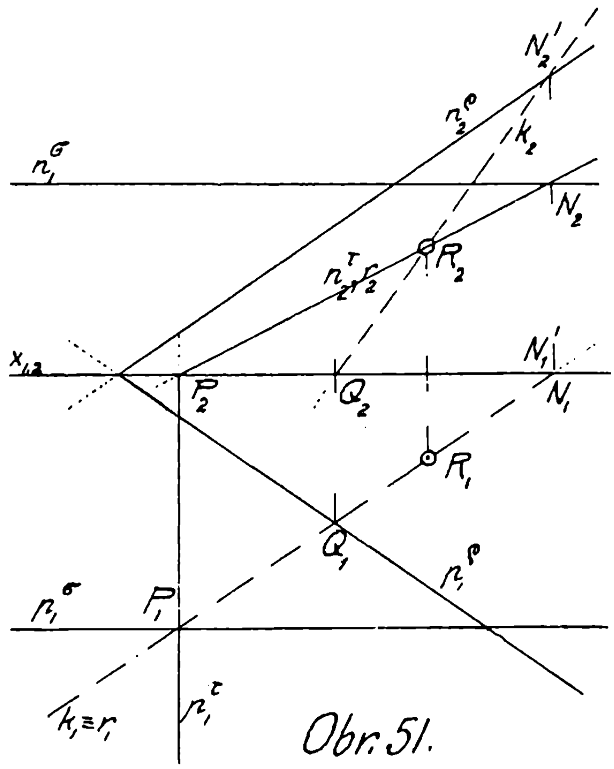
87. Nad danou základnou $\overline{AB}$ sestrojte $\triangle ABC$, aby jeho obvod byl minimální a vrchol C ležel v rovině ϱ.

Aby obvod $\triangle$ nad konstantní základnou $\overline{AB}$ byl minimální, musí býti součet $\overline{AC} + \overline{CB}$ min., řešíme tedy jako úlohu 86.

88. V rovině ϱ sestrojte bod Y, aby rozdíl jeho vzdáleností od bodů A, B byl maximální.

Hledaný bod jest průsečík spojnice AB s rovinou ϱ (obr. 50).

89. Sestrojte bod společný rovinám ϱ $(-3, 2, 2)$, σ $(\infty, 4, 3)$, τ $(-2, \infty, 1)$. (Obr. 51.)



Obr. 51.

Sestrojíme průsečnici r rovin σ a τ, $r_2 \equiv n_2^\tau$, $r_2 \times n_2^\sigma \equiv N_2$, N_1 na x_1, $r_2 \times x_2 \equiv P_2$, $P_1 \equiv p_1^\tau \times p_1^\sigma$, $P_1 N_1 \equiv r_1$ a vyhledáme průsečík přímky r s rovinou ϱ, $r \times \varrho \equiv R$ pomocí krycí přímky prvé $k_1 \equiv r_1$, $k_1 \times p_1^\varrho \equiv Q_1$, Q_2 na x_2, $k_1 \times x_1 \equiv N_1'$, N_2' na n_2^ϱ, $Q_2 N_2' \equiv k_2$, $k_2 \times r_2 \equiv R_2$, R_1 na r_1 jsou průměty bodu R společného daným třem rovinám.

90. V rovině ϱ sestrojte přímku $r \parallel \sigma$, aby protala přímku $a = AB$. ϱ $(4, 135^\circ, 120^\circ)$, σ $(-4, 60^\circ, 30^\circ)$, A $(4, 3, 5)$, B $(0, 0, 4)$.

Vyšetříme průsečík přímky a s rovinou ϱ, $R \equiv a \times \varrho$; vyhledáme průsečnici daných rovin $s \equiv \varrho \times \sigma$ a vedeme bodem R přímku $r \parallel s$.

91. Jsou dána dvě zrcadla rovinami ϱ a σ a body S, A. Určete světelný paprsek, který vychází z bodu S a po odrazech na obou zrcadlech projde bodem A. $\varrho\,(-3, \infty, 3)$, $\sigma\,(2, \infty, 3)$, $S\,(-1, 7, 8)$, $A\,(2, 9, 6)$.

Najdeme bod S' souměrný s bodem S podle roviny ϱ a bod A' souměrný s A podle σ; spojnice $A'S'$ protne roviny dané v bodech $R \equiv \varrho \times A'S'$, $Q \equiv \sigma \times A'S'$, SR jest hledaný paprsek, jehož další dráha jest RQA.

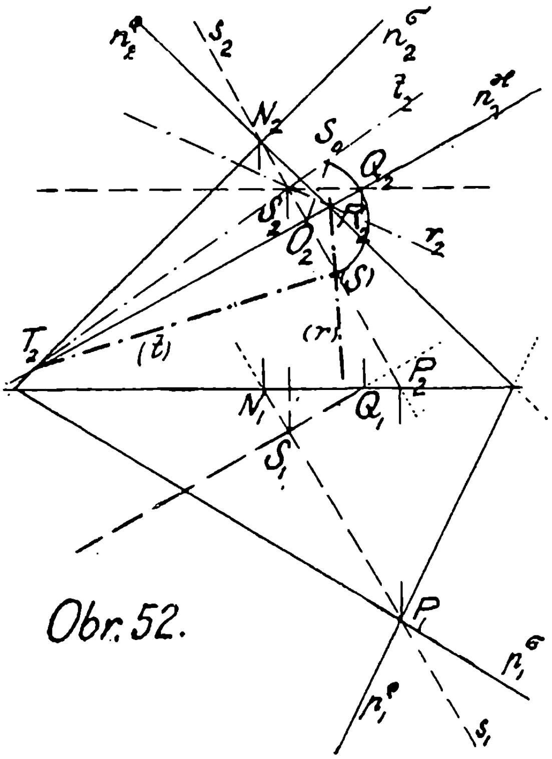
e) Úlohy složitější.

92. Jest vyšetřiti odchylku ω dvou rovin $\varrho\,(3, 6, 3)$, $\sigma\,(-5, 3, 5)$.

Ku průsečnici $s \equiv \varrho \times \sigma$ vztyčíme v libovolně zvoleném bodě S rovinu kolmou $\varkappa \perp s$, tato protne dané roviny v přímkách $r \equiv \varkappa \times \varrho$, $t \equiv \varkappa \times \sigma$ a $\sphericalangle rt = \omega$. $s \equiv PN$, $P_1 \equiv p_1^{\varrho} \times p_1^{\sigma}$, P_2 na x_2, $N_2 \equiv n_2^{\varrho} \times n_2^{\sigma}$, N_1 na x_1. Bodem S_1 zvoleným na s_1 vedeme půdorys stoposměrné přímky roviny $\varkappa$ $p_1 \perp s_1$, $S_2 \ldots p_2 \parallel x_2$, a její nárysným stopníkem $Q_2 \ldots n_2^{\varkappa} \perp s_2$. $n_2^{\varkappa} \times n_2^{\varrho} \equiv R_2$, $n_2^{\varkappa} \times n_2^{\sigma} \equiv T_2$ jsou nárysné stopníky zmíněných průsečnic $r_2 \equiv R_2 S_2$, $t_2 \equiv T_2 S_2$. Sklopíme rovinu $\varkappa \equiv (RST)$ kolem druhé stopy $RS \equiv n_2^{\varkappa}$; $S_2 \ldots s_2 \perp n_2^{\varkappa}$, $s_2 \times n_2^{\varkappa} \equiv O_2$, $S_2 S_0 \perp S_2 O_2$, $S_2 S_0 = y_S$, $S_0 O_2 =$ poloměr otáčení, $(S)\,O_2 = S_0 O_2$ přeneseme na s_2 a sklopený bod (S) spojíme s pevnými body $(S)\,R_2 \equiv (r)$, $(S)\,T_2 \equiv (t)$. Úhel $R_2\,(S)\,T_2 = \omega$. (Obr. 52.)

93. Jest zobraziti roviny ϱ a σ, jejichž odchylka jest dána $\sphericalangle ABC = \omega$. $A\,(4, 3, 0)$, $B\,(-1, 5, 5)$, $C\,(-5, 0, 3)$.

Vztyčíme kolmici k v bodě B na rovinu (ABC) a ta určuje s rameny úhlu hledané roviny $\varrho \equiv (k, AB)$, $\sigma \equiv (k, CB)$. (V obr. 52 určuje přímka s s rameny ST a SR roviny ϱ, σ.) $A_1 \dots n_1 \parallel x_1$, $n_1 \times C_1 B_1 = 1$, druhý průmět bodu 1 na $C_2 B_2$, $1 A_2 \equiv n_2$, $B_2 \dots k_2 \perp n_2$; $C_2 \dots p_2 \parallel x_2$, $p_2 \times A_2 B_2 \equiv 2$, první průmět bodu 2 na $A_1 B_1$ $2 C_1 \equiv p_1$, $B_1 \dots k_1 \perp p_1$.



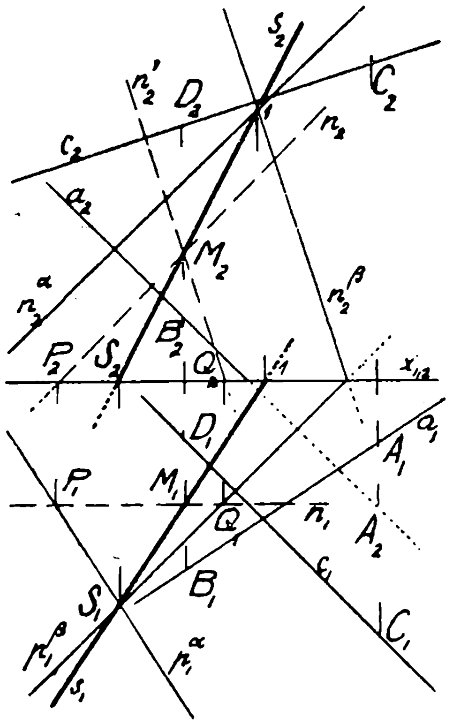
Obr. 52.

94. Jest vésti bodem M přímku, která jest kolmá k mimoběžkám $a \equiv AB$, $c \equiv CD$. $M(0, 2, 2)$, $A(3, 1, -2)$, $B(0, 3, 1)$; $C(3, 4, 5)$, $D(0, 1, 4)$. (Obr. 53.)

Sestrojíme bodem M roviny $\alpha \perp a$, $\beta \perp c$, Q jejich průsečnice jest hledaná přímka $s \equiv \alpha \times \beta$. $M_2 \dots n_2 \perp A_2 B_2$, $n_2 \times x_2 \equiv P_2$, P_1 na n_1, $M_1 \dots n_1 \parallel x_1$; $P_1 \dots p_1^{\alpha} \perp A_1 B_1$. $M_2 \dots n_2' \perp C_2 D_2$, $n_2' \times x_2 \equiv Q_2$, Q_1 na n_1', $n_1' \equiv n_1$; $Q_1 \dots p_1^{\beta} \perp C_1 D_1$. Potom $p_1^{\alpha} \times p_1^{\beta} \equiv S_1$, S_2 na x_2; $S_1 M_1 \equiv s_1$, $S_2 M_2 \equiv s_2$, jsou průměty hledané přímky.

95. Vyhledejte na přímce $a \equiv NP$ bod M, který je nejblíž bodu A. $P(0, 3, 0)$, $N(3, 0, -5)$, $A(0, 1, 3)$.

Bodem A vedeme rovinu $\varrho \perp a$, vyšetříme průsečík přímky a s rovinou ϱ, a to je bod hledaný $M \equiv a \times \varrho$. (Viz v obr. 56.) $A_2 \ldots n_2 \perp a_2$, $n_2 \times x_2 \equiv Q_2$,



Obr. 53.

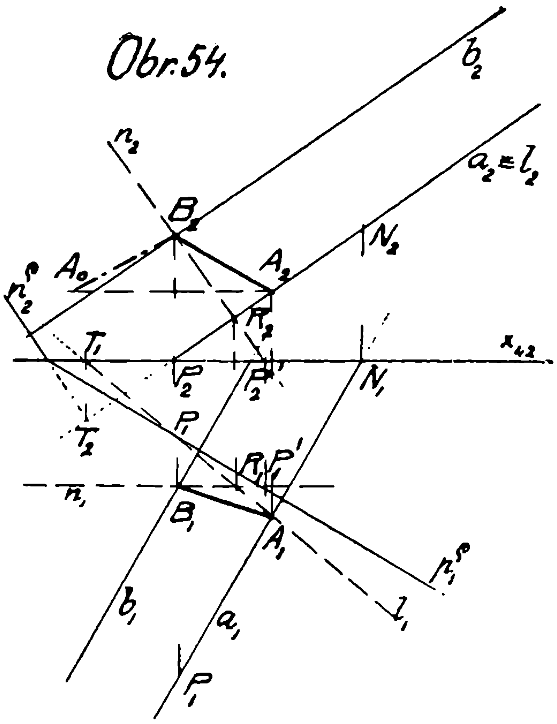
Q_1 na n_1, $A_1 \ldots n_1 \parallel x_1$; $Q_1 \ldots p_1^{\varrho} \perp a_1$, $n_2^{\varrho} \perp a_2$. $a_1 \equiv k_1$, $k_1 \times p_1^{\varrho} \equiv R_1$, R_2 na x_2, $k_1 \times x_1 \equiv T_1$, T_2 na n_2^{ϱ}, $R_2 T_2 \equiv k_2$, $k_2 \times a_2 \equiv M_2$, M_1 na a_1.

96. Vyšetřte vzdálenost d dvou rovnoběžek $a \equiv PN$, b jde bodem $B(0, 2, 2)$; $P(0, 5, 0)$, $N(3, 0, 2)$.

Bodem B vedeme rovinu $\varrho \perp a$, vyšetříme $A \equiv a \times \varrho$, $\overline{AB} = d$. (Obr. 54.)

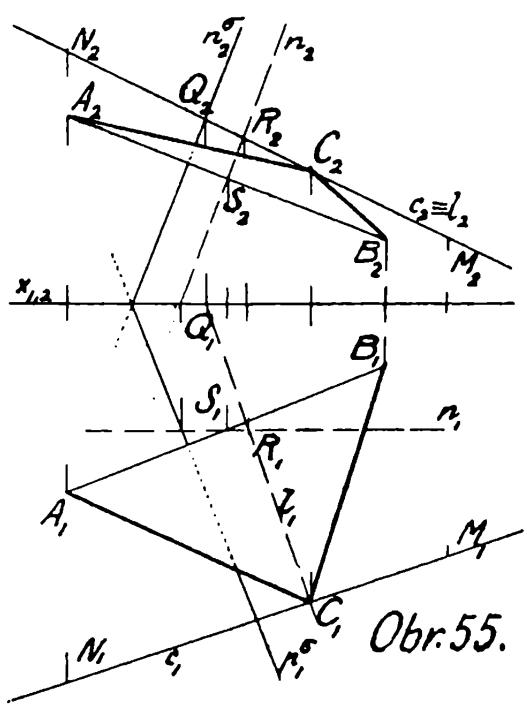
$B_2 \ldots n_2 \perp a_2$, $n_2 \times x_2 \equiv P_2'$, P_1' na $n_1 \parallel x_1$ bodem B_1; $P_1' \ldots p_1^{\varrho} \perp a_1$, $n_2^{\varrho} \perp a_2$. $l_2 \equiv a_2$, $l_2 \times n_2^{\varrho} \equiv T_2$, T_1 na x_1,

Obr. 54.



$l_2 \times n_2 \equiv R_2$, R_1 na n_1, $R_1 T_1 \equiv l_1$, $l_1 \times a_1 \equiv A_1$, A_2 na a_2. Sestrojíme skutečnou délku úsečky $\overline{AB}$ pomocí promítacího trojúhelníku.

97. Zobrazte rovnoramenný $\triangle ABC$ nad základnou AB, jehož vrchol C jest na



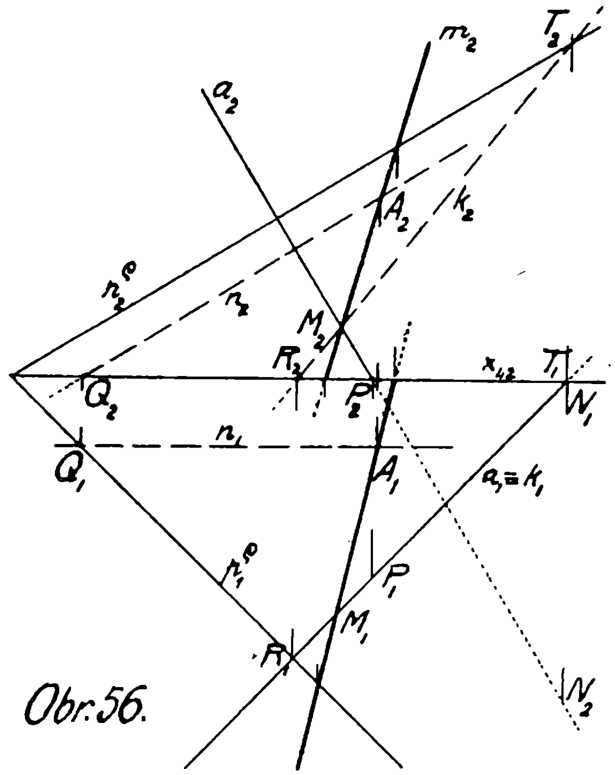
Obr. 55.

p ř í m c e $c \equiv MN$. $A(-3, 3, 3)$, $B(2, 1, 1)$; $M(3, 4, 1)$, $N(-3, 6, 4)$. (Obr. 55.)

S e s t r o j í m e r o v i n u s o u m ě r n o s t i σ ú s e č k y AB, k t e r á p r o t n e p ř í m k u MN v b o d ě C.

Rozpůlíme $\overline{AB}$ bodem S. $S_2 \ldots n_2 \perp A_2B_2$, $n_1 \parallel x_1$ bodem S_1. Půdorysným stopníkem přímky n jde $p_1^\sigma \perp A_1B_1$ $n_2^\sigma \perp A_2B_2$.

$l_2 \equiv c_2$, $l_2 \times n_2^\sigma \equiv Q_2$, Q_1 na x_1, $l_2 \times n_2 \equiv R_2$, R_1 na n_1; $Q_1R_1 \equiv l_1$, $l_1 \times c_1 \equiv C_1$, C_2 na c_2.



Obr. 56.

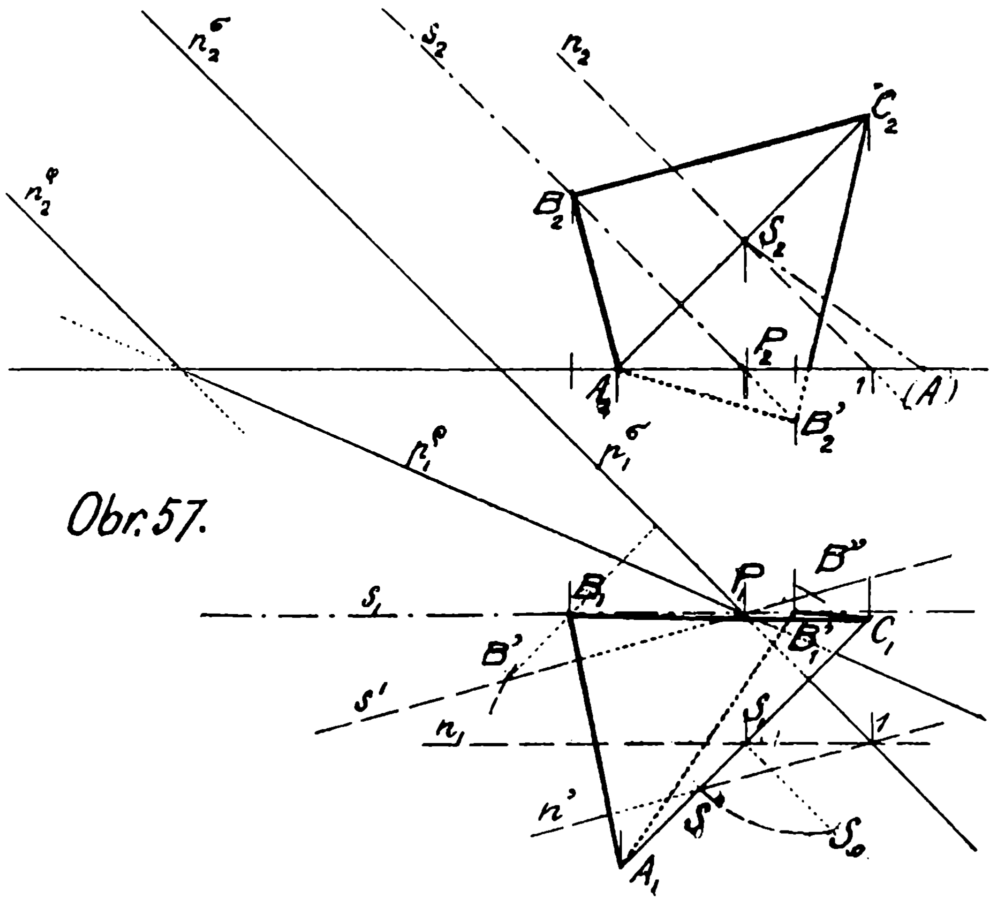
98. Z o b r a z t e r o v n o r a m e n n ý $\triangle ABC$ n a d z á k l a d n o u $\overline{AB}$, a b y $y_c = 7$, $z_c = 9$. $A(3, 3, 7)$, $B(-3, 5, 3)$.

Řešíme jako úlohu předchozí; při tom přímka $c \parallel x$.

99. J e s t n a l é z t i b o d M, k t e r ý l e ž í s o u č a s n ě v r o v i n á c h ϱ a σ a j e s t e j n ě v z d á l e n o d b o d ů A, B. $\varrho(2{\cdot}5, 4, 5)$, $\sigma(-1{\cdot}5, 1, -1)$; $A(4{\cdot}5, 2, 2)$, $B(-1, 5{\cdot}5, 5{\cdot}5)$.

Najdeme průsečnici $s \equiv \varrho$ a σ a pak postupujeme jako v úl. 97.

100. Bodem A proložte přímku m, jež protíná přímku $A \equiv PN$ v pravém úhlu. a) $A\ (0, 1, 3)$, $P\ (0, 3, 0)$, $N\ (3, 0, -5)$. (Obr. 56.) b) $A\ (-1, 1, 3)$, $P\ (-2, 4, 6)$, $N\ (4, 0, 2)$.



Obr. 57.

Bodem A vedeme rovinu $\varrho \perp a$, vyšetříme průsečík obou útvarů $a \times \varrho \equiv M$, spojnice $AM \equiv \equiv m$. (Viz úl. 95.)

Pozn. Stopníky přímky m jsou na stopách roviny ϱ.

101. Nad odvěsnou $\overline{AC}$ sestrojte $\triangle ABC$, jehož vrchol B (ostrého úhlu) jest na přímce $b \equiv PQ$. $A\ (0, 4, 5)$, $C\ (4, 1, 2)$; $P\ (-4, 0, 0)$, $Q\ (2, 4, 1)$.

Vrchol pravého úhlu jest v C; proto vztyčíme v něm rovinu $\varrho \perp AC$, a tato protne přímku b ve hledaném bodě $B \equiv b \times \varrho$.

$C_2 \ldots n_2 \perp a_2$ $(a \equiv AC)$, $n_1 \parallel x_1$; prvním stopníkem přímky n vedeme $p_1^\varrho \perp a_1$ $(n_2^\varrho \perp a_2)$ a vyšetříme B pomocí krycí přímky $k_1 \equiv b_1$, $k_1 \times p_1^\varrho \equiv 1$, druhý průmět na x_1, $k_1 \times n_1 \equiv 2$, nárys na n_2, $1, 2 \equiv k_2$ protne b_2 v B_2, jehož půdorys jest na b_1.

102. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník rovnoramenný nad přeponou AC, jehož vrchol jest v rovině ϱ. $A (0, 8, 0)$, $C (4, 4, 4)$, $\varrho (-7, 3, -7)$. (Obr. 57.)

Rovina souměrnosti σ úsečky AC protne rovinu ϱ v přímce s. Sklopíme rovinu σ do π, kolem S' opíšeme kružnici délkou $\overline{AS} = \overline{S_2 (A)}$, ta protne s' v bodech B', B'' a z nich zpětným otočením obdržíme B, B'.

Úloha má dvě řešení. $\triangle A_1 B_1 C_1$ zakrývá $\triangle A_1 B_1' C_1$.

103. Nad úsečkou $\overline{AB}$ sestrojte pravoúhelník, jehož střed S jest na přímce $s \parallel x$. $A (-2, 3, 3)$, $B (2, 1, 0)$, $y_s = 3$, $z_s = 2$.

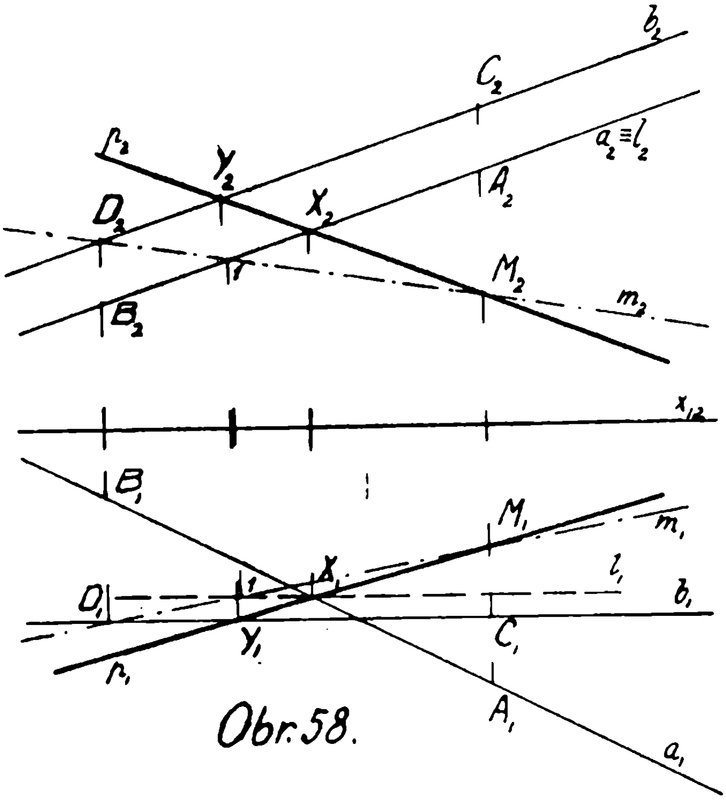
Poněvadž úhlopříčky pravoúhelníku jsou stejné a středem půleny, najdeme střed S jako průsečík přímky s s rovinou souměrnosti úsečky AB. (Viz úl. 97.) Spojnice BS jest úhlopříčka, jejíž druhý vrchol jest D, $DS = BS$.

104. Zobrazte průměty kosočtverce, je-li dán jeho vrchol A a délka úhlopříčky $\overline{BD} = u$, která leží na přímce $m \equiv PM$. $A (0, 2, 2{\cdot}5)$, $P (3, 0, 0)$, $Q (1{\cdot}5, 5, 5)$, $u = 6$ cm.

Úhlopříčky kosočtverce stojí na sobě kolmo, proto proložíme bodem A rovinu $\varrho \perp m$; vyšetříme bod $S \equiv m \times \varrho$ a od něho přeneseme na oba směry přímky m délku $\frac{u}{2} = 3$ (viz úl. 29). Dostaneme tak body B, D; bod C sestrojíme, když uděláme $\overline{SC} = \overline{SA}$.

f) Příčka mimoběžek.

105. Sestrojte příčku p mimoběžek $a \equiv AB$, $b \equiv CD$, aby procházela bodem M. $A(3, 4, 4)$, $B(-3, -1, 2)$; $C(3, 3, 5)$, $D(-3, 3, 3)$; $M(3, 2, 2)$. (Obr. 58.)



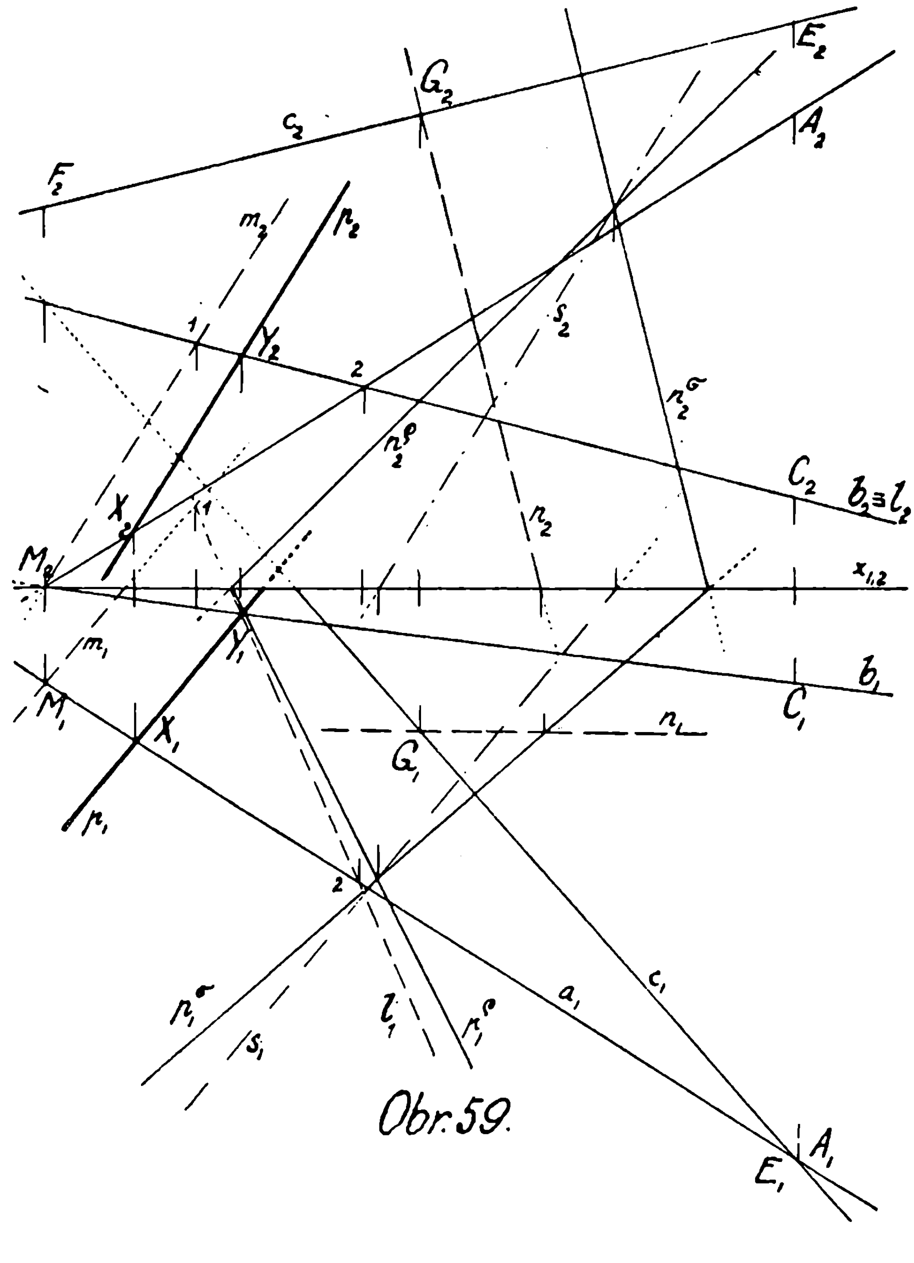
Obr. 58.

Příčka musí ležet v rovinách $\varrho \equiv (a, M)$ a $\sigma \equiv (b, M)$, jest tedy $p \equiv \varrho \times \sigma$. Řešení zjednodušíme tak, že vyšetříme průsečík X přímky a s rovinou $\varrho \equiv (b, M)$ a ten spojíme s M; XM protne přímku b v bodě Y.

$M_1 D_1 \equiv m_1$, $M_2 D_2 \equiv m_2$, $(b, M) \equiv (b \times m)$; $l_2 \equiv a_2$, $l_2 \times m_2 \equiv 1$, půdorys bodu 1 na m_1, $l_2 \times b_2 \equiv F_2$, F_1 na b_1; v našem případě $l_2 \parallel b_2$ proto F_2 v nekonečnu a $1 F_1 \equiv l_1 \parallel b_1$. $l_1 \times a_1 \equiv X_1$, X_2 na a_2, $X_1 M_1 \equiv p_1$, $X_2 M_2 \equiv p_2$ jsou průměty hledané příčky.

Abychom se přesvědčili o přesnosti konstrukce, zkusíme, zda $Y_1 Y_2 \perp x_{1,2}$, kde $Y_1 \equiv p_1 \times b_1$, $Y_2 \equiv p_2 \times b_2$.

106. K mimoběžkám $a \equiv AM$, $b \equiv BC$ sestrojte příčku $p \parallel s = DE$. a) $A(3, 0, 1)$, $M(-3, 3, 4)$; $B(3, 3, 3)$, $C(-3, 4, 0)$; $D(3, 5, 0)$, $E(-3, 1, 6)$;



Obr. 59.

$A(4{\cdot}5, 0, 1{\cdot}5)$, $M(-3, 8, 7{\cdot}5)$; $B(4{\cdot}5, 7{\cdot}5, 2)$, $C(-3, 3, 3)$; $D(-3, 7{\cdot}5, 4{\cdot}5)$, $E(4{\cdot}5, 4{\cdot}5, 7{\cdot}5)$.

Příčka p jest průsečnice rovin ϱ a σ, jež obsahují dané přímky a, b a jsou rovnoběžny se s m ě r e m s; p prochází bodem $y \equiv b \times \varrho$, ϱ jde přímkou a rovnoběžně ke směru s.

$M \ldots m \parallel s$, $(am) \equiv \varrho$, $(am) \times b \equiv Y$. $Y \ldots p \parallel m$. $M_1 \ldots m_1 \parallel s_1$, $M_2 \ldots m_2 \parallel s_2$; $l_2 \equiv b_2$, $l_2 \times m_2 \equiv 1$, $l_2 \times a_2 \equiv 2$, spojnice půdorysů bodů $1, 2$ jest $l_1 \equiv 1, 2$; $l_1 \times b_1 \equiv Y_1$, Y_2 na b_2. $Y_2 X_2 \parallel s_2$, $Y_1 X_1 \parallel s_1$. (Viz v obr. 59.)

107. K m i m o b ě ž k á m $a \equiv AM$, $b \equiv BC$ s e s t r o j t e p ř í č k u $p \parallel \varrho$, $p \parallel \sigma$. $\varrho(-4, 1, 4)$, $\sigma(5, 4, 3)$. $A(-4, 0, 1)$, $M(-10, 3, 4)$; $B(-4, 3, 3)$, $C(-10, 4, 0)$.

Sestrojíme $s \equiv \varrho \times \sigma$ a hledaná příčka jest $\parallel s$. Řešení jako v úloze 106.

108. S e s t r o j t e p ř í č k u p m i m o b ě ž e k $a \equiv AM$, $b \equiv CD$, a b y $p \parallel \varrho$ a $p \perp c \equiv EF$. $A(6, 9, 7{\cdot}5)$, $M(-6, 1{\cdot}5, 0)$; $C(6, 1{\cdot}5, 1{\cdot}5)$, $D(-6, 0, 4{\cdot}5)$; $E(6, 9, 9)$, $F(-6, -4{\cdot}5, 6)$; $\varrho(-3, 6, 3)$.

Sestrojíme rovinu $\sigma \perp c$, vyhledáme $s \equiv \sigma \times \varrho$ a sestrojíme příčku $p \parallel s$. (Obr. 59.)

109. K m i m o b ě ž k á m $a \equiv AN$, $b \equiv BQ$ s e s t r o j t e p ř í č k u k o l m o u k r o v i n ě s o u m ě r n o s t i. $A(-3, 8, 7{\cdot}5)$, $N(4{\cdot}5, 0, 2{\cdot}5)$; $B(4{\cdot}5, 7{\cdot}5, 3)$, $C(-3, 3, 3)$. (Obr. 60.)

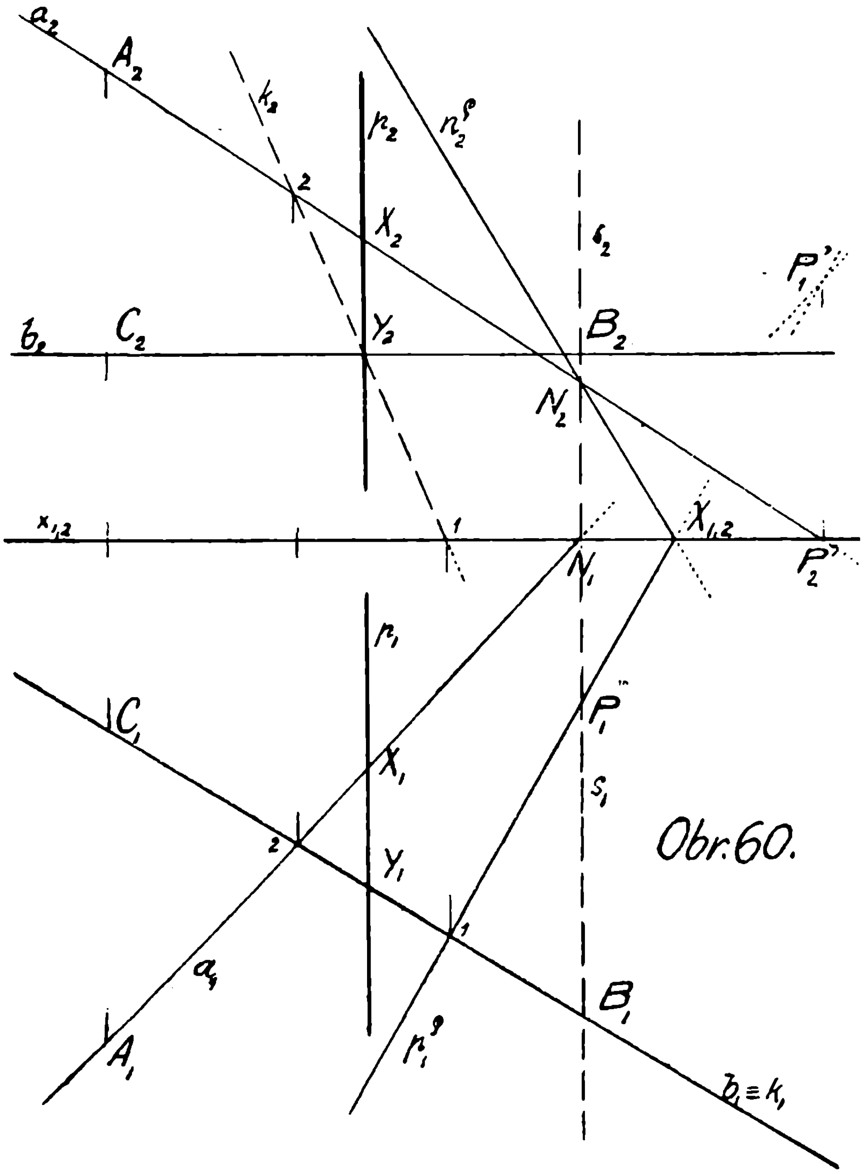
Sestrojíme libovolnou kolmici s k dané rovině a příčku $p \parallel s$ podle úl. 106.

Stopníkem přímky a vedeme kolmici k rovině souměrnosti; $N_1 \ldots s_1 \perp x_1$, $N_2 \ldots s_2 \perp x_2$, její půdorysný stopník je od osy x stejně daleko jako stopník nárysný, tedy $\overline{P_2 P_1} = \overline{N_1 N_2}$. Určíme stopy roviny $(as) \equiv \varrho$; $P_1 P_1' \equiv p_1^{\varrho}$, $X_2 N_2 \equiv p_2^{\varrho}$, $X_2 \equiv x_2 \times p_1^{\varrho}$. Vyšetříme bod $Y \equiv b \times \varrho$ a jím jde $p \parallel s$.

110. S e s t r o j t e p ř í č k u p m i m o b ě ž e k $a \equiv AN$, $b \equiv BC$, a b y $p \parallel \varrho$ a $p_1 \parallel p_2$. $A(-3, 8, 7{\cdot}5)$, $N(4{\cdot}5, 0, 2{\cdot}5)$; $B(4{\cdot}5, 7{\cdot}5, 3)$, $C(-3, 3, 3)$, $\varrho(6, 120^0, 120^0)$.

Vyšetříme průsečnici s roviny ϱ s rovinou souměrnosti a pak $p \parallel s$.

111. Sestrojte příčku přímek $a \parallel b$, c; $a \equiv AB$, b jde bodem C, $c \equiv DE$, aby byla rovnoběžna s rovinou ϱ. A (—4·5, 12, —1·5), B (9, 1·5,



Obr. 60.

9); C (4·5, 0, 10·5); D (—9, 9, 10·5), E (0, —1·5, 7·5); ϱ (—4·5, 4·5, 7·5).

Vyšetříme průsečnici roviny ϱ s rovinou (a, b), $s \equiv \varrho \times \times (a\,b)$; pak vyhledáme průsečík přímky c s rovinou $(a\,b)$, $S \equiv c \times (a\,b)$ a jím vedeme příčku $p \parallel s$.

112. Jest sestrojiti příčku různoběžek a, b a c, d. $a\,[A\,(-2, 2, 2),\ B\,(0, 6, 6)]$, $b\,[B, M\,(4, 4, 10)]$, $c\,[C\,(0, 4, 6),\ D\,(-4, 4, 5)]$, $d\,[D, P\,(4, 2, 0)]$.

Příčka p spojuje průsečíky různoběžek $p \equiv BD$, kde $B \equiv a \times b$, $D \equiv c \times d$. Druhá příčka $q \equiv \varrho \times \sigma$, kde $\varrho \equiv (a, b)$, $\sigma \equiv (c, d)$.

113. Jest sestrojiti příčku přímek $a \equiv AB$, $b \equiv BP$, $c \equiv CM$, $d \parallel c$, d jde bodem D. $A\,(2, 4, 2)$, $B\,(-2, 2, 5)$, $P\,(0, 6, 0)$; $C\,(2, 7, 6)$, $M\,(-4, 5, -2)$, $D\,(4, 6, 3)$.

Sestrojíme průsečnici q rovin (a, b) a (c, d); druhá příčka p jde bodem $B \equiv a \times b$ rovnoběžně k c, $p \parallel c$.

114. Jest sestrojiti příčku dvou párů rovnoběžek $a \parallel b$, $c \parallel d$. $a\,[A\,(4, 4, 3),\ M\,(0, 8, 6)]$, $b\,[B\,(0, 4, 4)]$, $c\,[C\,(4, 8, 4),\ P\,(-2, 4, 0)]$, $d\,[D\,(4, 3, 2)]$.

Jedna příčka p spojuje nekonečně vzdálené průsečíky rovnoběžek $p \equiv U_\infty T_\infty$, $U_\infty \equiv a \times b$, $T_\infty \equiv c \times d$, jest tedy celá v nekonečnu. Druhá příčka $q \equiv \varrho \times \sigma$, kde $\varrho \equiv (a, b)$, $\sigma \equiv (c, d)$, spojuje průsečíky přímek a, b s rovinou (c, d).

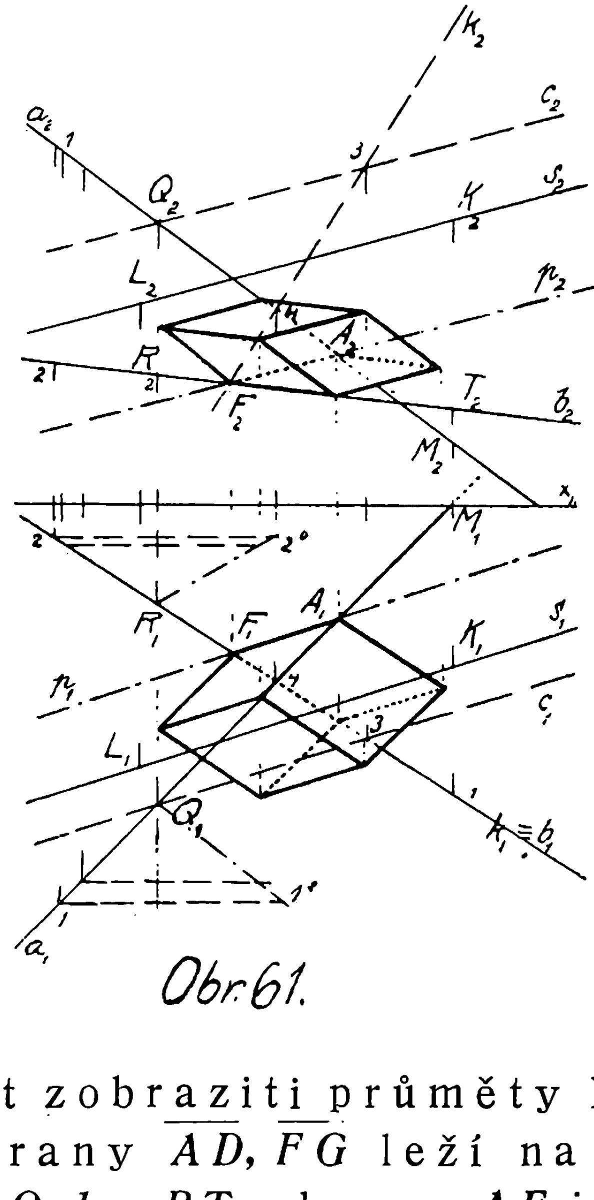
115. Jsou dány různoběžky $a \equiv AM$, $b \equiv BM$ a mimoběžky $c \equiv CQ$, $d \equiv DR$. Jest sestrojiti příčku přímek daných. $A\,(3, 0, 0)$, $B\,(3, 3, 2)$, $M\,(3, 2, 2)$, $C\,(3, 4, 4)$, $Q\,(-3, -2, -1)$, $D\,(3, 7, 5)$, $R\,(-3, 3, 3)$.

Vyhledáme průsečíky mimoběžek s rovinou různoběžek, $X \equiv c \times (ab)$, $Y \equiv d \times (ab)$; jejich spojnice je jedna příčka $p \equiv XY$. Druhá příčka q prochází průsečíkem různoběžek $M \equiv a \times b$, a sestrojí se podle úl. 105.

116. Jsou dány rovnoběžky $a \parallel b$ a mimoběžky c, d; jest sestrojiti jejich příčku. a) $a\,[A\,(-0{\cdot}5, 5, 0),\ M\,(3, 0, 6)]$, $b\,[B\,(4, 4, 0)]$; $c\,[C\,(-6, 1{\cdot}5, 0),\ Q\,(6, 9, 7{\cdot}5)]$; $d\,[D\,(6, 1{\cdot}5, 1{\cdot}5),\ N\,(-6, 0, 4{\cdot}5)]$.

b) $A\,(-4, 5, 1)$, $M\,(-7, 0, 0)$, $B\,(-2, 0, 0)$, $C\,(-4, 2, 8)$, $Q\,(4, 7, 3{\cdot}5)$, $D\,(-4, 5, 0)$, $N\,(4, 0, 7)$.

Vyhledáme průsečíky mimoběžek s rovinou rovnoběžek, $X \equiv c \times (a\,b)$, $Y \equiv d \times (a\,b)$, a spojnice jejich jest příčka $p \equiv X\,Y$. Příčka q jest rovnoběžna s přímkami a, b (protíná je v nekonečnu), a sestrojíme ji podle úl. 106.



Obr. 61.

117. Jest zobraziti průměty klence, jehož dvě hrany $\overline{AD}$, $\overline{FG}$ leží na mimoběžkách $a \equiv M\,Q$, $b \equiv R\,T$ a hrana $A\,F$ jest rovnoběžná s přímkou $s \equiv K\,L$. $M\,(3, 0, 1)$, $Q\,(-1{\cdot}8, 5, 4{\cdot}3)$, $R\,(-1{\cdot}8, 1{\cdot}6, 2)$, $T\,(3, 4{\cdot}6, 1{\cdot}5)$; $K\,(3, 2{\cdot}5, 4{\cdot}5)$, $L\,(-2, 4, 3{\cdot}2)$. (Obr. 61.)

Sestrojíme příčku mimoběžek $p \parallel s$ (podle úl. 106), která určí $A \equiv a \times p$, $F \equiv b \times p$; délku $\overline{AF}$ přeneseme na a od bodu A a na b od bodu F (viz úl. 29), obdržíme $\overline{AD} = \overline{AF}$, $\overline{FG} = \overline{AF}$. Body A, D vedeme $\overline{AB} \# \overline{DC} \# \overline{FG}$ a podobně body F, G úsečky $\overline{FE} \# \overline{GH} \# \overline{AD}$ a tím sestrojíme ostatní vrcholy klence. Úloha jest čtyřznačná. (V obrazci voleny malé rozměry, proto nepopsán.)

118. Jest sestrojiti příčku o mimoběžek $a \equiv AM$, $b \equiv BQ$ kolmou k půdorysně. $A\,(0, 2, 2)$, $M\,(6, 5, 2)$; $B\,(0, 6, 6)$, $Q\,(6, 3, 6)$.

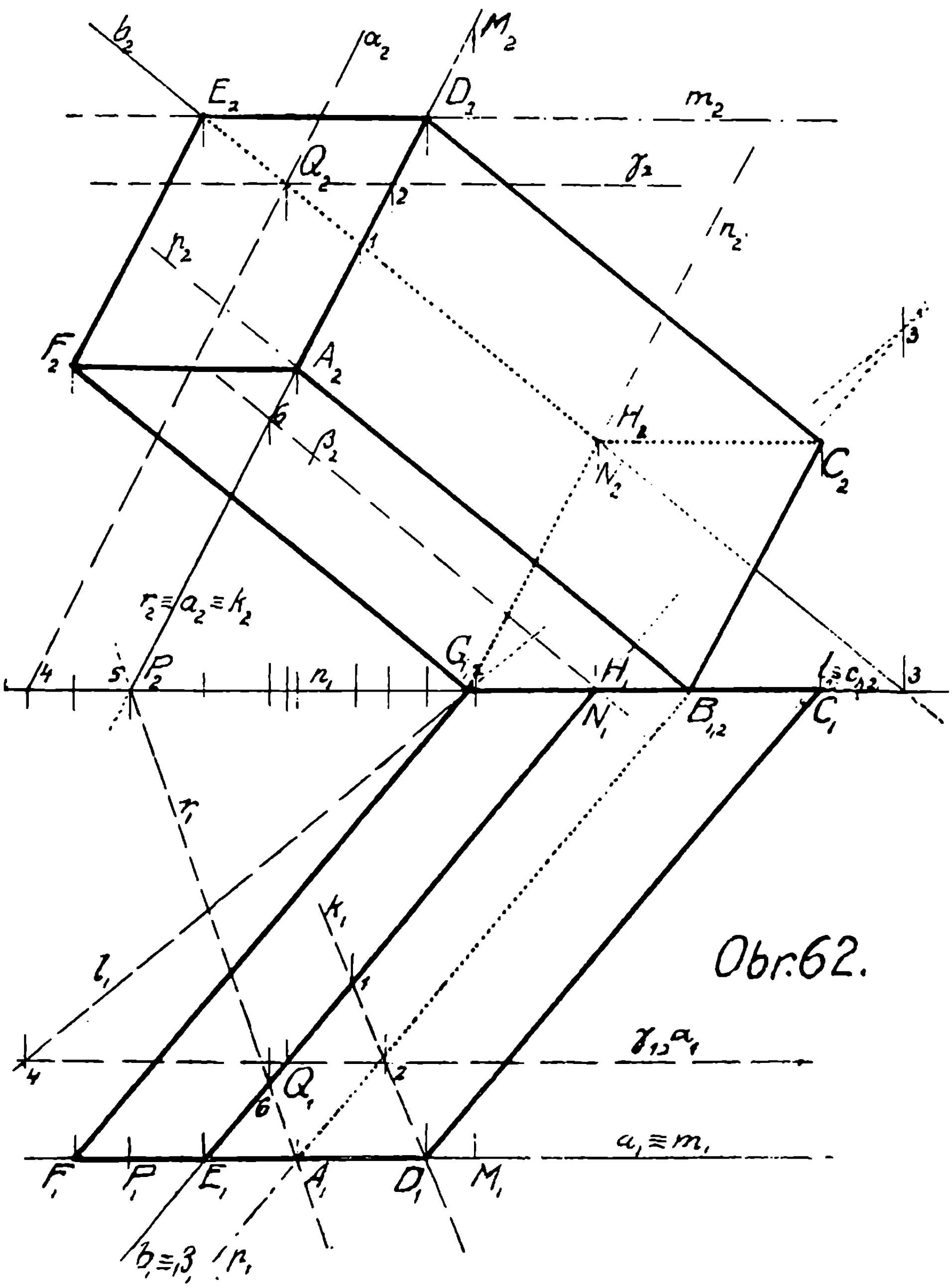
Půdorys příčky o jest bod, proto $o_1 \equiv a_1 \times b_1$, $o_2 \perp x_2$. Je-li $X \equiv a \times o$, $Y \equiv b \times o$, jest $\overline{X_2 Y_2} = \overline{XY}$ skutečná délka příčky mezi mimoběžkami. $\overline{XY}$ jest nejkratší z úseček, jejichž koncové body jsou na daných mimoběžkách; skutečná délka každé takové úsečky $\overline{UV}$ jest přeponou promítacího trojúhelníku prvého, jehož jedna odvěsna jest rozdíl souřadnic z krajních bodů, tedy konstantní $z_U - z_V = \overline{X_2 Y_2}$, druhá odvěsna jest $\overline{U_1 V_1}$. Jest tedy skutečná délka $\overline{UV}$ odvislá od $\overline{U_1 V_1}$, proto nejmenší, když $\overline{U_1 V_1}$ jest nejmenší. V daném případě jest $\overline{X_1 Y_1} = 0$, proto $\overline{XY} = \overline{X_2 Y_2}$ minimální.

Příčka o jest **osa mimoběžek**, a z hořejšího plynou její vlastnosti:

1. Jest nejkratší příčkou mimoběžek.
2. Jest kolmá k oběma mimoběžkám.
3. Promítá se do roviny s nimi rovnoběžné jako bod.

119. Jest zobraziti rovnoběžnostěn, jehož 3 hrany leží na mimoběžkách $a \equiv MP$, $b \equiv QN$, $c \equiv x$. $M\,(1, 7{\cdot}5, 10{\cdot}5)$, $P\,(-4{\cdot}5, 7{\cdot}5, 0)$; $Q\,(-2, 6, 8)$, $N\,(3, 0, 4)$. (Obr. 62.)

Sestrojíme příčku m mimoběžek a, b rovnoběžnou s c; obdržíme vrcholy DE. Pak sestrojíme příčku mimoběžek b, c, t. j. $n \equiv HG \parallel a$, a konečně příčku $p \equiv AB \parallel b$ mimoběžek a, c. Body E, B vedeme rovnoběžky $EF, BC \parallel a$, body A, H vedeme $AF, HC \parallel c$, obdržíme vrcholy F, C, jimiž vedeme hrany FG a $CD \parallel b$, a tím je rovnoběžnostěn sestrojen.



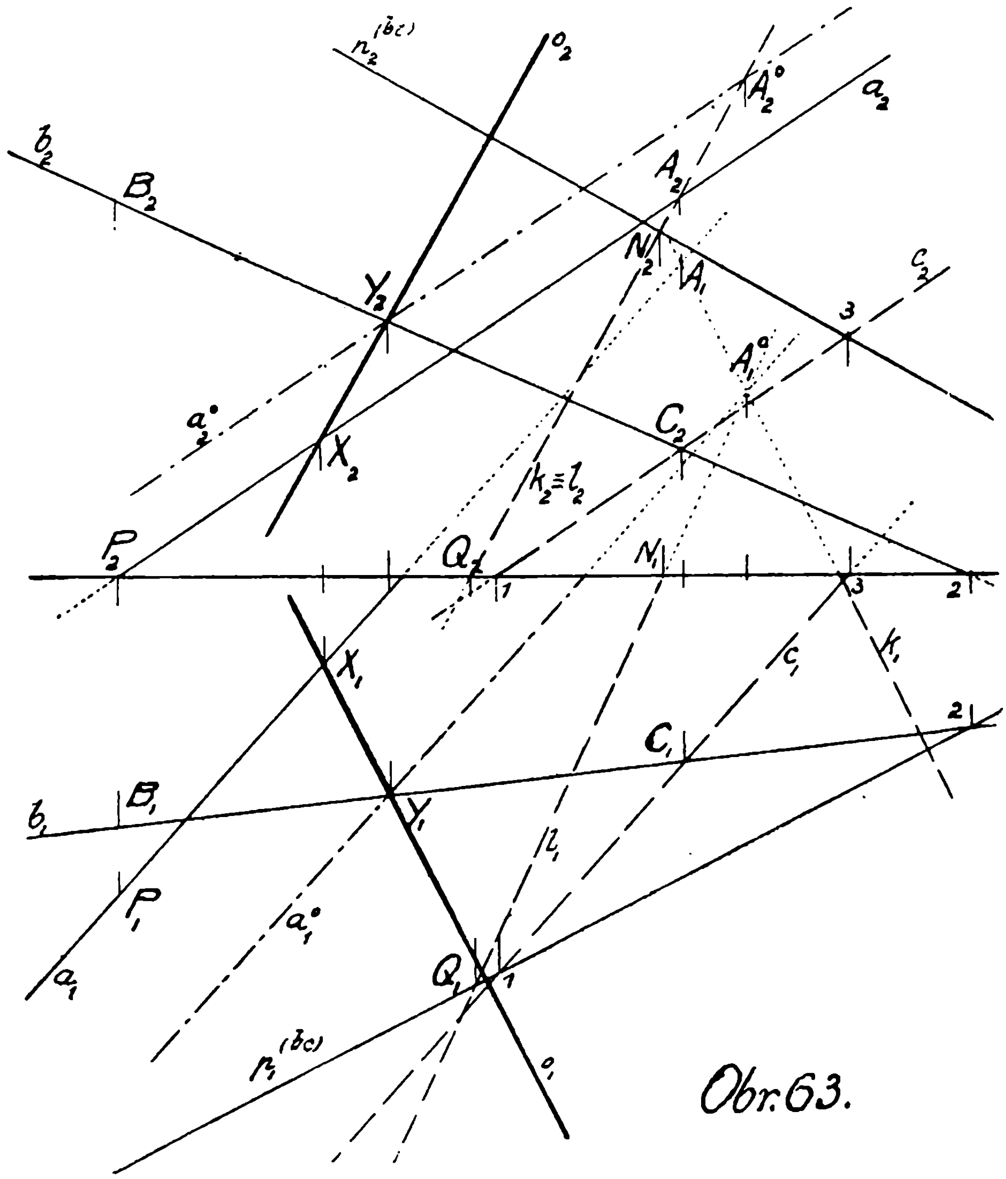
Obr. 62.

120. Jest sestrojiti osu *o* mimoběžek $a \perp \pi$, $b \equiv BM$; $a\,[A\,(2, 2, 6)]$, $B\,(0, 6, 6)$, $M\,(6, 3, 2)$.

Ježto jedno rameno pravého úhlu, který svírá osa s mimoběžkou b, jest rovnoběžno s půdorysnou $o \parallel \pi$, jest $\sphericalangle b_1 o_1 = R$, proto vedeme bodem $a_1 \dots o_1 \perp b_1$; $o_1 \times b_1 \equiv Y_1$, Y_2 na

b_2, $Y_2 \ldots o_2 \parallel x_2$ a $o_2 \times a_2 \equiv X_2$, $X_1 \equiv A_1 \equiv a_1$. $\overline{X_1 Y_1}$ jest skutečná délka osy. (Viz v obr. 85 $X Y$.)

121. Jest sestrojiti osu mimoběžek v poloze obecné; $a \equiv AP$, $b \equiv BC$. $A\,(4, -5, 6)$, $P\,(-5, 5, 0)$, $B\,(-5, 4, 6)$, $C\,(4, 3, 2)$. (Obr. 63.)



Obr. 63.

Mimoběžkou b proložíme rovinu $(bc) \parallel a$. Do roviny (bc) promítneme pravoúhle mimoběžku a do přímky $a^0 \parallel a$. V průsečíku $Y \equiv b \times a^0$ vztyčíme kolmici na rovinu $o \perp (bc)$ a to je hledaná osa.

Na přímce b zvolíme bod C; $C_1 \dots c_1 \parallel a_1$, $C_2 \dots c_2 \parallel a_2$ a vyšetříme stopy roviny $(b\,c)$. Z bodu A na mimoběžce a spustíme kolmici $k \perp (b\,c)$, $A_1 \dots k_1 \perp p_1^{(bc)}$, $A_2 \dots k_2 \perp n_2^{(bc)}$, a sestrojíme průsečík kolmice k s rovinou $k \times (b\,c) \equiv A^0$, t. j. pravoúhlý průmět bodu A do roviny: $k_2 \equiv l_2$, $k_2 \times x_2 \equiv Q_2$, Q_1 na $p_1^{(bc)}$, $l_2 \times n_2^{(bc)} \equiv N_2$, N_1 na x_1, $Q_1 N_1 \equiv l_1$, $l_1 \times k_1 \equiv A_1^0$, A_2^0 na k_2. Vedeme bodem A^0 přímku $a^0 \parallel a$, t. j. pravoúhlý průmět přímky a do roviny $(b\,c)$, $A^0 \dots a_1^0 \parallel a_1$, $A_2^0 \dots a_2^0 \parallel a_2$. Průsečíkem $Y \equiv b \times a^0$ vedeme osu $o \perp (b\,c)$, $Y_1 \dots o_1 \perp p_1^{(bc)}$, $Y_2 \dots o_2 \perp n_2^{(bc)}$. Délka osy jest $X Y$, kde $X_1 \equiv \equiv o_1 \times a_1$, $X_2 \equiv o_2 \times a_2$.

122. Sestrojte rovinu $\varrho \parallel a$, $\varrho \parallel b$, aby byla od obou mimoběžek stejně vzdálena, $a \equiv \equiv A B$, $b \equiv C D$. $A\,(3, 0, 7{\cdot}5)$, $B\,(-6, 7{\cdot}5, -3)$; $C\,(3, 7{\cdot}5, 9)$, $D\,(-3, 3, 4{\cdot}5)$.

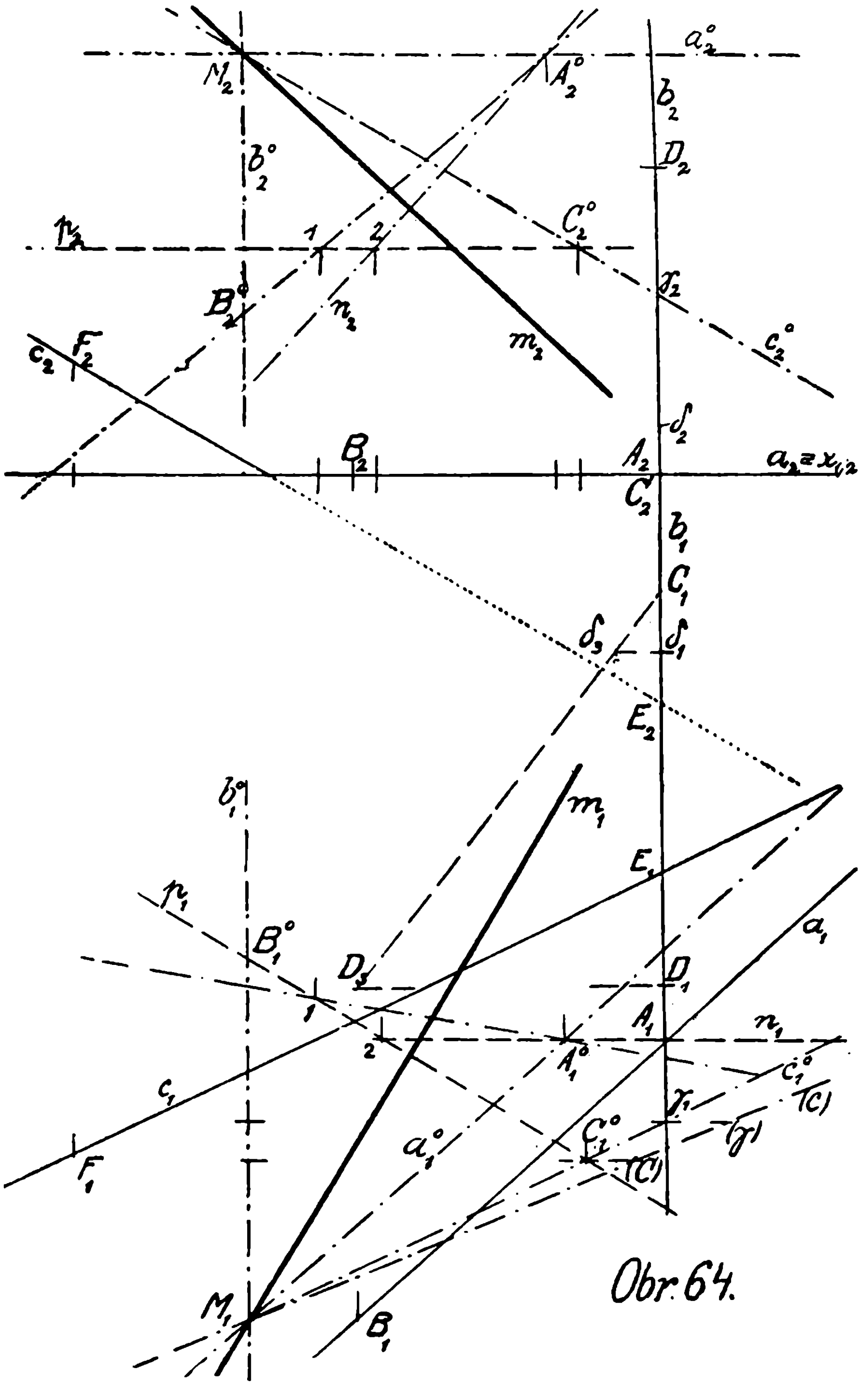
Najdeme osu mimoběžek o, její úsek mezi mimoběžkami rozpůlíme bodem O, $\overline{O X} = \overline{O Y}$, $X \equiv o \times a$, $Y \equiv o \times b$; bodem O vedeme rovinu $\varrho \perp o$.

123. Sestrojte přímku, která protíná mimoběžky $a \equiv A B$, $b \equiv C D$, $c \equiv E F$, takže její úsek mezi a, b jest půlen průsečíkem jejím s mimoběžkou c; a) $A\,(4{\cdot}5, 0, 1{\cdot}5)$, $B\,(-4{\cdot}5, 0, 7{\cdot}5)$; $C\,(6, 6, 6)$, $D\,(-3, 6, 1{\cdot}5)$, $E\,(6, 7{\cdot}5, 7{\cdot}5)$, $F\,(-6, 1{\cdot}5, 4{\cdot}5)$. b) $A\,(-5, 4, 2)$, $B\,(2, -1, 6)$; $C\,(-5, 5{\cdot}5, 6)$, $D\,(3, 2, 2)$; $E\,(-2, 1{\cdot}5, 1)$, $F\,(4, 4, 3)$.

Sestrojíme-li symetrální rovinu osy dvou mimoběžek a, b, jest jí půlena každá příčka mimoběžek daných.

Mimoběžky a, b jsou rovnoběžny s nárysnou, jest tedy jejich osa kolmá k nárysně, proto $o_2 \equiv a_2 \times b_2$ a $o_1 \perp x_{1,2}$. Skutečná délka osy jest v půdoryse $= \overline{X_1 Y_1}$, $X_1 \equiv a_1 \times o_1$, $Y_1 \equiv b_1 \times o_1$. Rovina souměrnosti osy jest $\sigma \parallel \nu$, tedy $\sigma_1 \parallel x_1$ půlícím bodem úsečky $\overline{X_1 Y_1}$. Bodem $Z \equiv \sigma \times c$, $Z_1 \equiv \sigma_1 \times c_1$, Z_2 na c_2 vedeme příčku mimoběžek a, b podle úl. 106.

124. Bodem M jest vésti rovinu, která svírá s mimoběžkami $a \equiv AB$, $b \equiv CD$, $c \equiv EF$ stejné úhly. $A(0, 10, 0)$, $B(-5{\cdot}5, 15, 0)$, $C(0, 2, 0)$,



Obr. 64.

D (0, 9, 5·5), E (0, 7, —4), F (—10·5, 12, 2), M (—7·5, 15, 7·5). (Obr. 64.)

Bodem M vedeme rovnoběžky s danými přímkami $a^0 \parallel a$, $b^0 \parallel b$, $c^0 \parallel c$ a považujeme je za površky rotačního kužele. Rovina, která s těmito různoběžkami svírá stejné úhly, utíná na nich stejné úseky; přeneseme tedy na přímky a^0, b^0, c^0 úsečky $\overline{MA^0} = \overline{MB^0} = \overline{MC^0}$ a bodem M vedeme rovinu $\varrho \parallel (A^0 B^0 C^0)$. Rovina ϱ jest hledaná. Poněvadž úsečky $\overline{MA^0}$, $\overline{MB^0}$, $\overline{MC^0}$ možno přenésti ve dvojím směru, dostaneme také body A', B', C' a úloha má 8 řešení.

125. Veďte bodem M přímku m, aby s mimoběžkami $a \equiv AB$, $b \equiv CD$, $c \equiv EF$ svírala stejné úhly. A (0, 15, 12), B (3·5, 8, 6·5), C (0, 7·5, 6), D (3·5, 10·5, 9·5), E (0, 5, 2), F (3, 0, 7·5), M (—3, 9·5, 4·5).

Přímka m jest kolmá k rovině úlohy předešlé. (Obr. 64.)

III. Užití třetí průmětny.

a) Třetí hlavní průmětna.

126. Jest sestrojiti vzdálenost bodu M od přímky $a \equiv AB$. a) A (0, —2, —2), B (0, 4, 2), M (3, 2, 3); b) A (2, 1, 4), B (2, 5, 1), M (—2, 1, 3). (Obr. 65.)

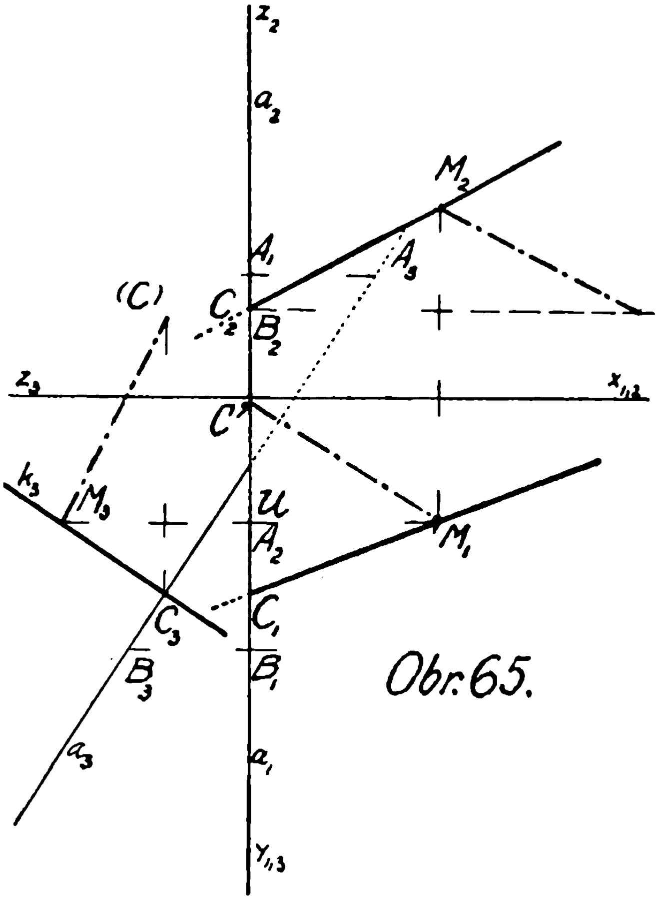
Považujeme promítací rovinu přímky a za třetí hlavní průmětnu; třetí průmět kolmice k z bodu M na přímku a jest $k_3 \perp a_3$ bodem M_3, $k_3 \times a_3 \equiv C_3$, najdeme C_1 a C_2 na a_1, a_2 a pak skutečnou délku úsečky $\overline{MC}$ promítacím trojúhelníkem prvním, druhým nebo třetím $\overline{C'U}$ M_1. Tento je určen třetím průmětem úsečky $\overline{UC'} = \overline{M_3 C_3}$ a rozdílem vzdáleností jejich koncových bodů od III. průmětny $M_1 U$.

127. Jest určiti vzdálenost bodu B od přímky $m \parallel x$. B (—2, 3, 5), m .... M (—3, 4, 1).

Z bodu B spustíme kolmici $k \perp m$, vyšetříme průsečík $K \equiv k \times m$, $B_1 \dots k_1 \perp m_1$, $B_2 \dots k_2 \perp m_2$, $k_1 \times m_1 \equiv K_1$, $k_2 \times$

$\times\, m_2 \equiv K_2$. Promítací rovinu přímky k považujeme za III. průmětnu hlavní, kterou sdružíme s nárysnou; $K_3 B_3 \equiv B \quad m$.

128. B o d e m $A\,(0, 3, 2)$ v e ď t e p ř í m k u $a \perp x$, j e-l i a) $\alpha_a = 45^0$; b) $\beta_a = 30^0$. (Obr. 66.)

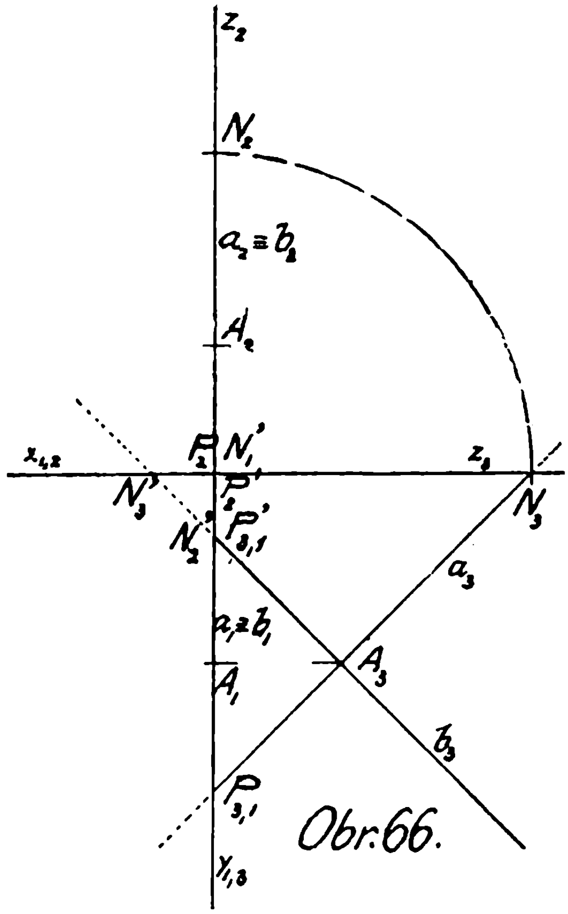


Obr. 65.

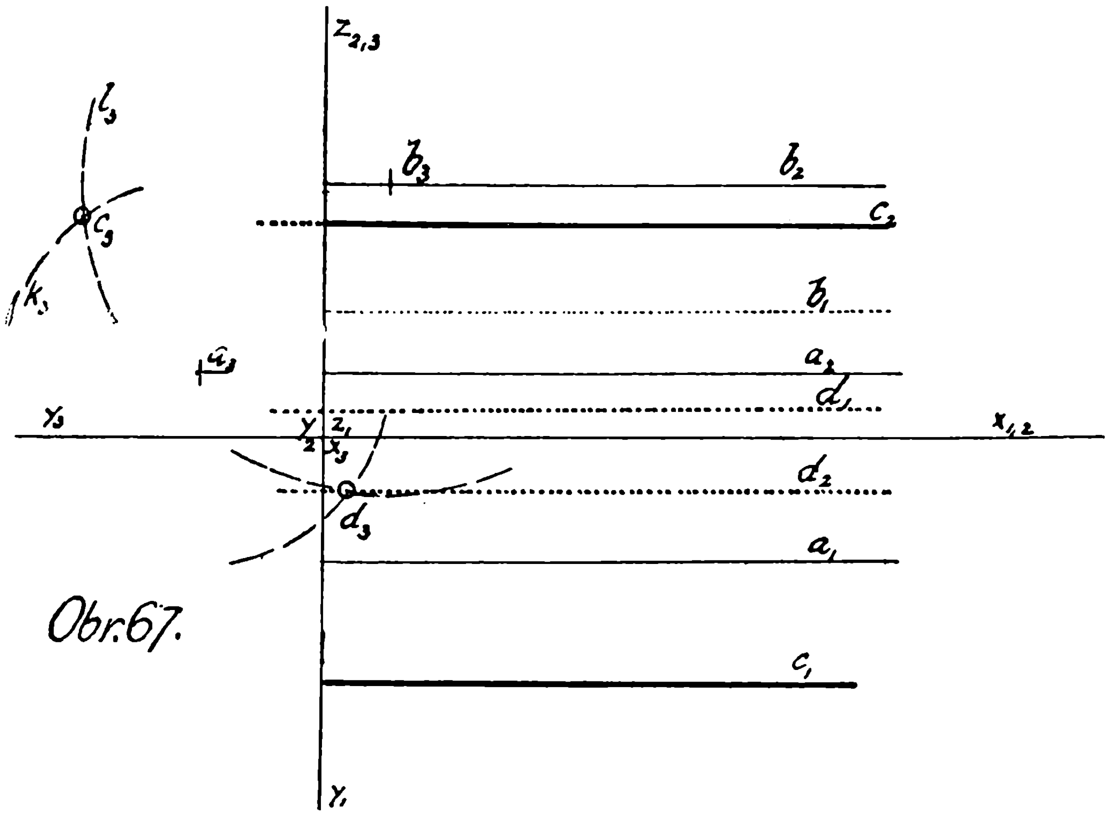
Bodem A vedeme III. hlavní průmětnu $\mu \perp x_{1,2}$, již sdružíme s průmětnou první. $A_1 A_3 \perp y_{1,3}$, $A_3 \dashv y_{1,3} = z_A$. Bodem A_3 proložíme přímku a_3, aby: a) $\sphericalangle\, a_3 y_3 = \alpha_a = 45^0$, b) $\sphericalangle\, a_3 z_3 = \beta_a = 30^0$. $a_3 \times y_3 \equiv P_{3,1}$, P_2 na x_2, $a_3 \times z_3 \equiv N_3$, N_1 na a_1, $N_2 \top x_2 = N_3 \dashv z_3$.

129. J s o u d á n y p ř í m k y $a \parallel b \parallel x$; j e s t s e s t r o j i t i p ř í m k u $c \parallel x$, a b y b y l a v z d á l e n a o d p ř í m e k d a n ý c h o d é l k y $r_1 = 3$, $r_2 = 5$. $y_a = 2$, $z_a = 1$; $y_b = 2$, $z_b = 4$.

Užijeme III. průmětny hlavní sdružené s II., do níž se


z_2
N_2
$a_2 \equiv b_2$
A_2
$x_{1,2}$
P_2
N_1'
z_3
N_3'
P_2'
$P_{3,1}'$
N_2'
N_3
a_3
$a_1 \equiv b_1$
A_3
A_1
b_3
$P_{3,1}$
$y_{1,3}$

Obr. 66.


$z_{2,3}$
l_3
c_3
k_3
b_3
b_2
c_2
b_1
a_3
a_2
d_1
y_3
y_2
z_1
x_3
$x_{1,2}$
d_2
d_3
a_1
c_1
y_1

Obr. 67.

promítají dané přímky jako body; kolem bodů a_3, b_3 opíšeme kružnice k, l poloměrem $r_1 = 3$, $r_2 = 5$; průsečíky kružnic k, l jsou 3 průměty hledaných přímek c, které jsou dvě (jedna, žádná) podle toho, je-li $\overline{a_3 b_3} \lesseqgtr r_1 + r_2$. Kolmice z c_3 na $z_{2,3}$ jest c_2, c_1 je $\parallel x_1$ ve vzdálenosti $y_c = c_3 \dashv z_{2,3}$. (Obr. 67.)

130. Sestrojte vzdálenost bodu M od roviny ϱ. $M(0, 6, -4)$, $\varrho(\infty, 1, 4)$. (Viz obr. 68.)

Z bodu M spustíme kolmici na rovinu $k \perp \varrho$, $k_1 \equiv k_2 \perp x_{1,2}$. Promítací rovinu kolmice k považujeme za III. hlavní průmětnu, kterou sdružíme s ν, $k_3 \perp \varrho_3$, $k_3 \times \varrho_3 \equiv K_3$, $\overline{M_3 K_3} = M \dashv \varrho$.

131. Bodem $A(3, 2, 4)$ proložte rovinu $\varrho \parallel x$, aby: a) $\alpha_\varrho = 60^\circ$, b) $\beta_\varrho = \alpha_\varrho$. (Obr. 68.)

Rovinu proloženou bodem A kolmo k ose x považujeme za III. průmětnu hlavní, kterou sdružíme s půdorysnou; do ní se promítá rovina ϱ jako přímka ϱ_3, jdoucí bodem A_3, $A_3 A_1 \perp \perp y_{1,3}$, $A_3 \dashv y_{1,3} = z_A$, $\sphericalangle \varrho_3 y_{1,3} = \alpha_\varrho$. První stopa roviny ϱ jde bodem $\varrho_3 \times y_{1,3}$, $p_1^\varrho \parallel x_{1,2}$, $n_2^\varrho \parallel x_{1,2}$ ve vzdálenosti bodu $1 \equiv \varrho_3 \times z_3$ od $y_{1,3}$.

b) Podle úl. 70 musí býti $\alpha_\varrho + \beta_\varrho \geqq R$; v našem případě $\alpha_\varrho = \beta_\varrho = 45^\circ$.

132. Bodem $A(3, 3, 4)$ proložte rovinu $\varrho \parallel x$, aby měla od ní vzdálenost $d = 2$.

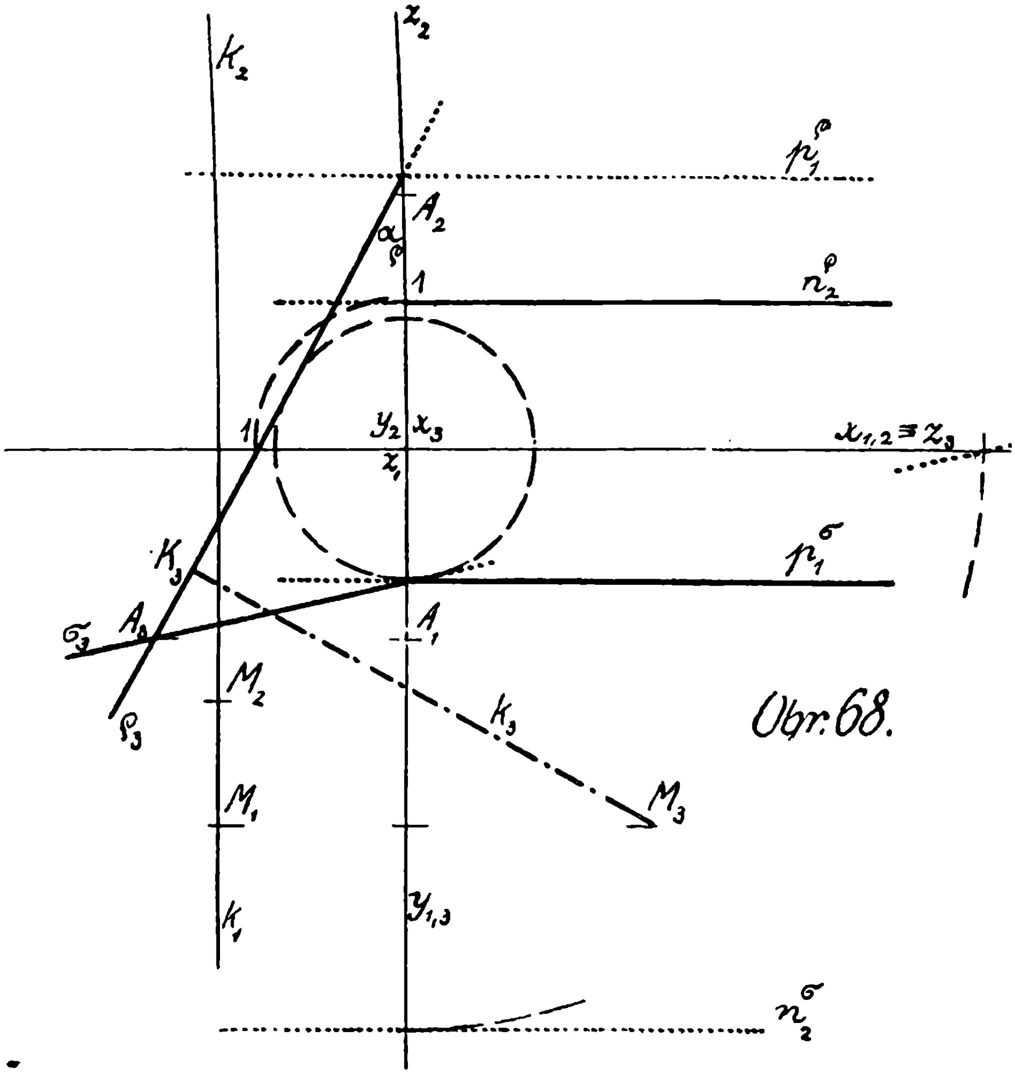
Bodem A vedeme III. hlavní průmětnu, do níž se promítne osa x jako bod x_3, a rovina ϱ jako tečna z bodu A_3 ke kružnici opsané kolem x_3 poloměrem $d = 2$. Úloha má dvě (jedno, žádné) řešení, podle toho, je-li $d \lesseqgtr A_3 x_3$. (Obr. 68.)

133. Sestrojte příčku p mimoběžek $a \equiv AB$, $b \equiv MR$, $c \parallel x$, aby byla rovnoběžna s rovinou souměrnosti (totožnosti). $A(0, 5, 1)$, $B(3, 2, 2)$; $M(3, 3, 1)$, $R(0, 2, 3)$, $y_c = 1$, $z_c = 3$.

Přímkou c proložíme rovinu ϱ rovnoběžnou s rovinou souměrnosti (totožnosti), vyšetříme průsečíky mimoběžek a, b

s rovinou ϱ, $a \times \varrho \equiv X$, $b \times \varrho \equiv Y$ a spojnice $XY \equiv p$ jest příčka hledaná.

Úlohu provedeme ve III. hlavní průmětně; třetí průmět roviny souměrnosti (totožnosti) půlí úhel $+y_3$ a $+z_3$ ($-y_3$, $+z_3$) a ϱ_3 jest rovnoběžka s touto symetrálou.



Obr. 68.

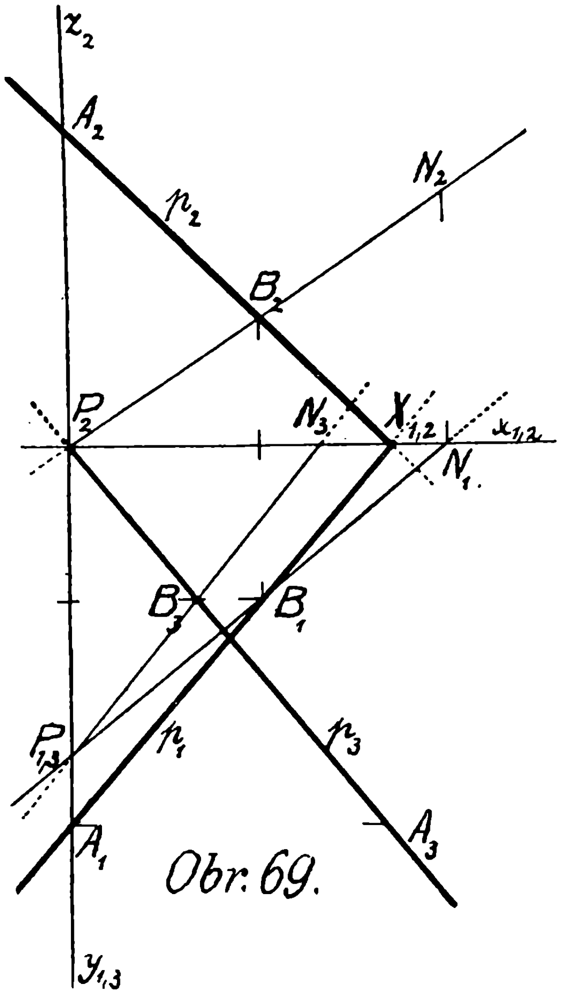
134. B o d e m $A\,(-2, 6, 5)$ s e s t r o j t e p ř í č k u p k o s e x a p ř í m c e $m \equiv PN$. $P\,(-2, 5, 0)$, $N\,(4, 0, 4)$.

Sestrojíme třetí průmět bodu A (III. hlavní průmětna jde bodem A kolmo k x) a spojnice $A_3 x_3 \equiv p_3$. (Obr. 69.)

135. B o d e m $M\,(2, 5, 6)$ s e s t r o j t e r ů z n oběžku ku přímce $m \equiv PN$, aby se protínaly oba její obrazy na ose x. P (—4, 4, 0), N (2, 0, 5).

Řeší se jako úloha předcházející.

136. Sestrojte osu mimoběžek $a \equiv AM$, $b \equiv BC$. A (0, 3, 1), M (0, 6, 5); B (3, 5, 2), C (3, 1, 6).



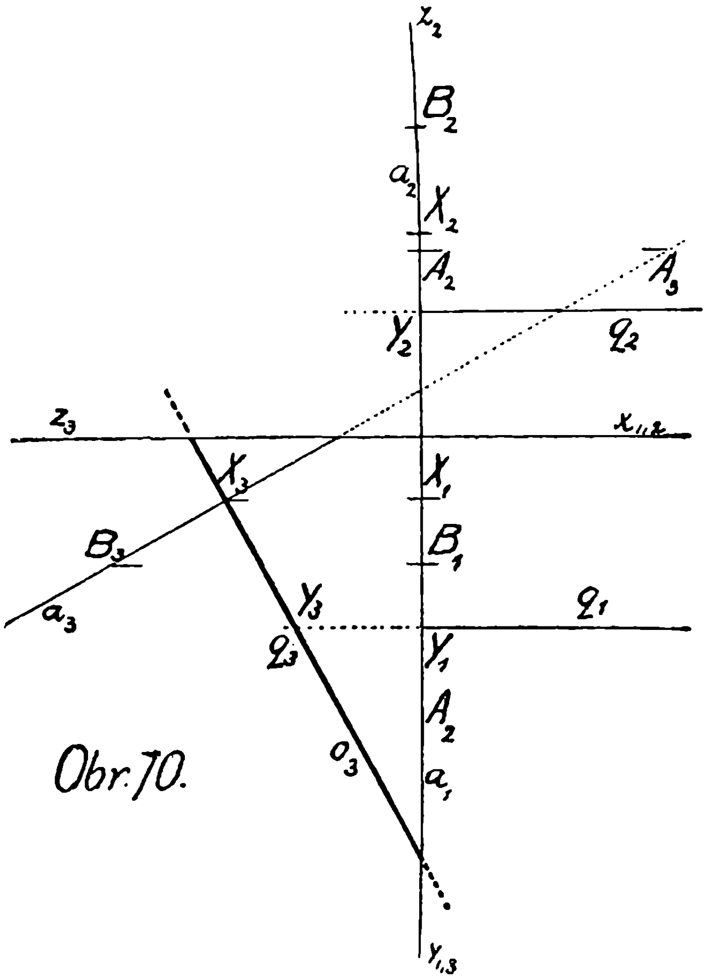
Obr. 69.

Osa o mimoběžek promítá se do III. hlavní průmětny jako bod $o_3 \equiv a_3 \times b_3$.

137. Jakou vzájemnou polohu mají přímky $a \equiv AM$, $b \equiv BQ$? A (2, —3, —2), M (2, 6, 4); B (2, 4, 3), Q (2, 5, —3).

Obě přímky leží v téže promítací rovině kolmé k ose x, mohou býti tudíž buď různoběžné nebo rovnoběžné; to poznáme v třetím průmětu, při čemž za třetí hlavní průmětnu volíme promítací rovinu daných přímek. Přímky jsou různoběžny.

138. J a k o u v z á j e m n o u p o l o h u m a j í p ř í m k y $a \equiv AB$, $q \parallel x$? $A(0, -3, -4)$, $B(0, 2, 5)$, $y_q = 3$, $z_q = 2$.



Obr. 70.

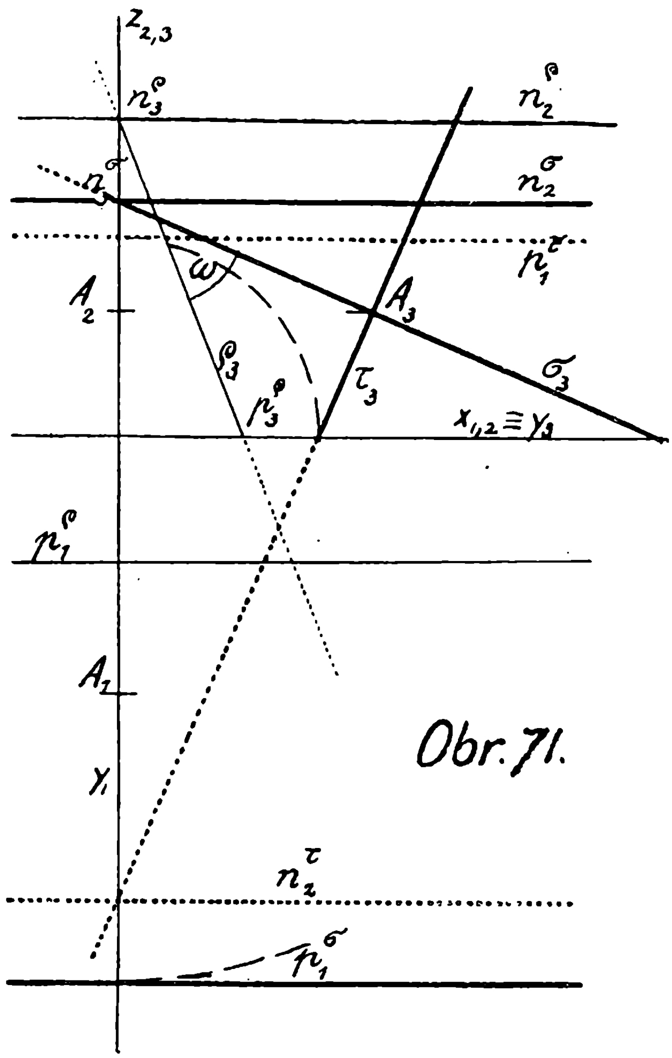
Zobrazíme 3 průměty daných přímek v III. hlavní průmětně μ; q_3 jest bod, který jest mimo $a_3 \equiv A_3 B_3$, proto přímky a, q jsou mimoběžny. (Obr. 70.)

139. S e s t r o j t e o s u m i m o b ě ž e k a, q, z p ř e d c h o z í h o p ř í k l a d u. (Obr. 70.)

Osa o je kolmá k oběma přímkám a, ježto $q \perp \mu$, jest

$o \parallel \mu$; promítá se tedy o_3 jako kolmice z bodu q_3 na a_3, $o_3 \equiv \overline{X_3 Y_3}$ jest skutečná délka osy, $X_3 \equiv a_3 \times o_3$, $Y_3 \equiv q_3$. Z třetího průmětu vyšetříme snadno půdorys a nárys bodu X a pak $o_1 \perp x_1$, $o_2 \perp x_2$.

140. Sestrojte průsečnici a úhel rovin $\varrho \parallel x$, $\sigma \parallel x$. $\varrho(\infty, 5, 2)$, $\sigma(\infty, 3, 4)$.



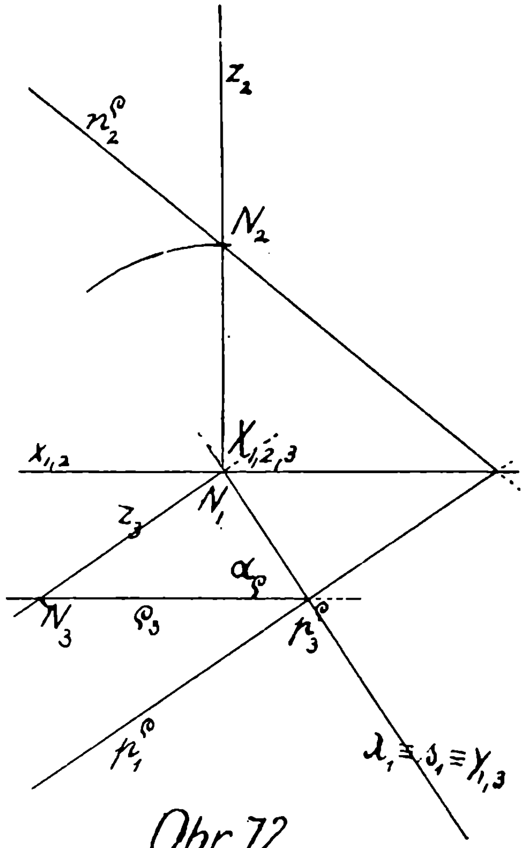
Obr. 71.

K třetí hlavní průmětně jsou obě roviny, a tudíž i jejich průsečnice kolmo, a její třetí průmět jest bod $s_3 \equiv \varrho_3 \times \sigma_3$. Úhel obou třetích průmětů $\varphi = \sphericalangle \varrho_3 \sigma_3$ jest skutečná velikost hledaného úhlu. (Obr. 71.)

ϱ_3 spojuje průsečíky stop s třetí hlavní průmětnou $\varrho \equiv \equiv p_3^\varrho n_3^\varrho$; $r_3^\varrho \equiv p_1^\varrho \times y_3$, $n_3^\varrho \equiv n_2^\varrho \times z_3$.

141. Bodem $A(0,4,2)$ veďte rovinu $\sigma \parallel x$, aby s rovinou $\varrho(\infty, 2, 5)$ svírala $\sphericalangle 45^0$. (Obr. 71.)
Řešíme pomocí III. hlavní průmětny jako úlohu předcházející.

142. Sestrojte geometrické místo bodů, které jsou stejně vzdáleny od π, ν a roviny $\varrho(\infty, 2, 5)$.



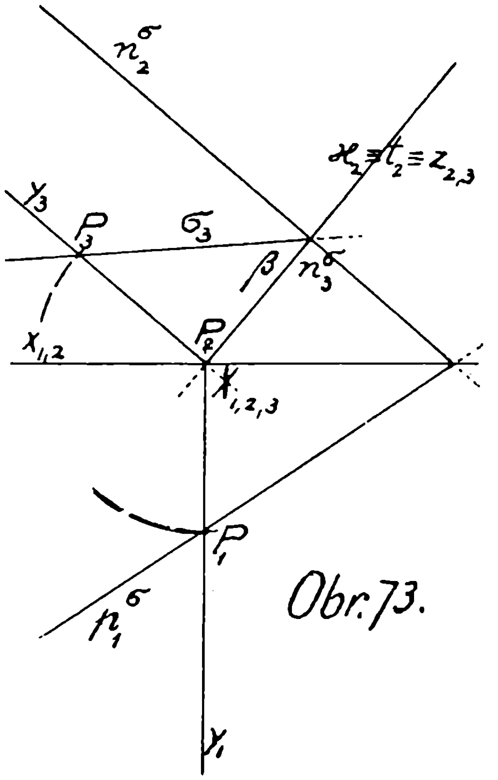
Obr 72.

Body stejně vzdálené od π a ν jsou v rovinách souměrnosti a totožnosti; body stejně vzdálené od π a ϱ jsou v rovinách, jež půlí půdorysnou odchylku α_ϱ a její výplněk; body stejně vzdálené od ν a ϱ jsou v rovinách, jež půlí β_ϱ a její výplněk. Všechny tyto roviny (3 páry) protínají se ve čtyřech přímkách $\parallel$ x; III. průměty oněch rovin jsou osy úhlů tvořených přímkami $y_3 \equiv \pi_3$, $z_3 \equiv \nu_3$, ϱ_3 a III. průměty hledaných přímek jsou střed kružnice vepsané do $\triangle\, p_3^\varrho\, O_3\, n_3^\varrho$ a tří kružnic připsaných.

b) Třetí průmětna vedlejší.

143. V y h l e d e j t e o d c h y l k y r o v i n y $\varrho\,(2, 3, 2{\cdot}5)$ o d p ů d o r y s n y α_ϱ, o d n á r y s n y β_ϱ.

Odchylky žádané jsme sestrojili v úloze 63 sklopením příslušných přímek spádových. Považujeme-li prvou promítací

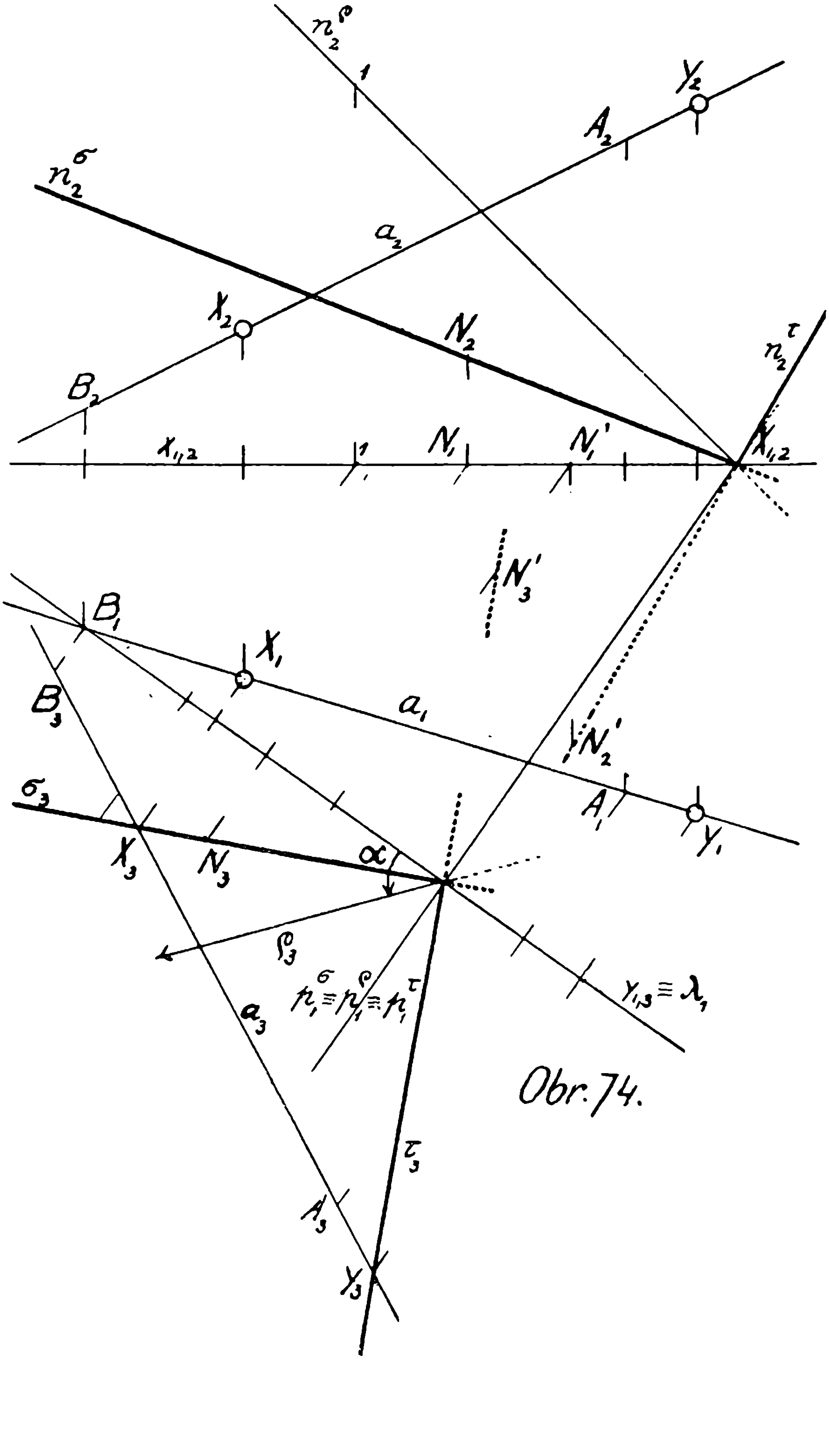


Obr. 73.

rovinu prvé přímky spádové s za třetí průmětnu vedlejší $(s\,s_1) \equiv \lambda$, jest $s_1 \equiv y_{1,3}$, $z_2 \perp x_2$ v bodě $y_{1,3} \times x_{1,2} \equiv X_{1,2,3}$, $z_3 \perp y_{1,3}$ v bodě $X_{1,2,3}$, jest třetím průmětem roviny ϱ přímka $\varrho_3 \equiv p_3^\varrho N_3$, $p_3^\varrho \equiv p_1^\varrho \times y_{1,3}$, $\overline{N_3 N_1} = \overline{N_2 N_1}$, $N_2 \equiv z_2 \times n^\varrho$; $\sphericalangle\, \varrho_3\, y_3 = \alpha^\varrho$. (Obr. 72.)

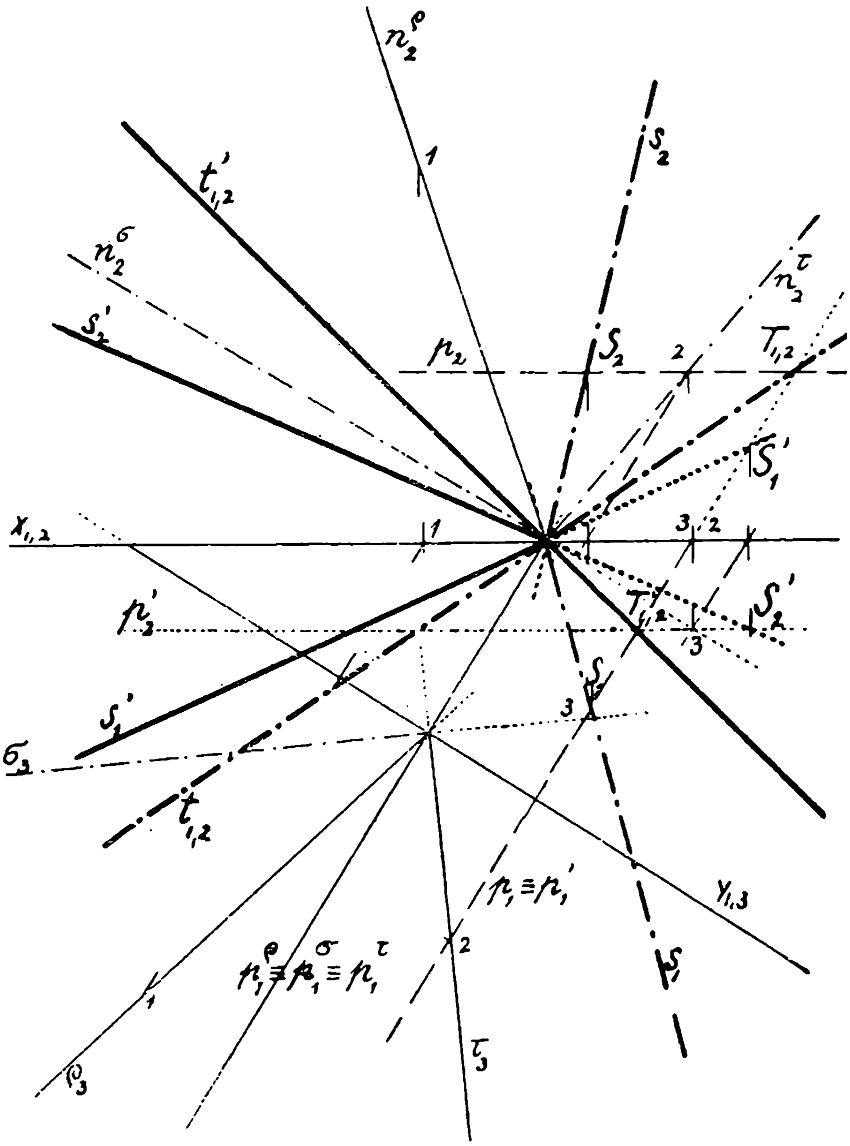
Podobně považujeme druhou promítací rovinu druhé spádové přímky t za třetí průmětnu $\chi \equiv (t\,t_2)$; $t_2 \equiv z_{2,3}$, $y_1 \perp x_1$ v bodě $X_{1,2,3} \equiv x_{1,2} \times z_{2,3}$, $y_3 \perp z_{2,3}$ v bodě X_3. Třetím průmětem roviny jest přímka $\sigma_3 \equiv n_3^\sigma P_3$, $n_3^\sigma \equiv n_2^\sigma \times z_{2,3}$, $\overline{P_3 X_3} = \overline{X_1 P_1}$, $P_1 \equiv p_1^\sigma \times y_1$. Potom $\sphericalangle\, \sigma_3\, z_3 = \beta_\sigma$. (Obr. 73.)

144. Jest určiti druhou stopu roviny σ, když je dána stopa prvá a odchylka α. $\sigma\,(-1, 2, \zeta)$, $\alpha_\sigma = 60^0$.



Obr. 74.

Odchylka α_σ jeví se ve skutečné velikosti v III. průmětně $\lambda \perp p_1^\sigma$; narýsujeme $y_{1,3} \perp p_1^\sigma$, $\sphericalangle \alpha = 60^0 = \sphericalangle y_3 \sigma_3$, na σ_3 zvolíme bod N_3, aby ležel na druhé stopě roviny. Potom N_1 jest



Obr. 75.

na x_1, $N_3 N_1 \perp y_{1,3}$, $\overline{N_1 N_2} = z_N = N_3 \dashv y_{1,3}$; $N_2 X_{1,2} \equiv n_2^\sigma$, kde $X_{1,2} \equiv p_1^\sigma \times x_1$. (Rovina ϱ v obr. 74.)

Podobně určíme prvou stopu roviny σ, je-li dána stopa druhá a odchylka β_σ. $\sigma(2, \eta, 3)$, $\beta_\sigma = 45^0$.

Zvolíme III. průmětnu $\chi \perp n_2^{\sigma}$, $z_{2,3} \perp n_2^{\sigma}$, narýsujeme $\sphericalangle z_{2,3}\sigma_3 = \beta_\sigma = 45^0$ s vrcholem $n_3^{\sigma} \equiv z_{2,3} \times n_2^{\sigma}$, zvolíme na σ_3 bod P_3 s podmínkou, že jest bodem stopy p_σ; P_2 jest na x_2, $P_2 \equiv P_3 P_2 \times x_2$, $P_3 P_2 \perp z_{2,3}$, $P_2 P_1 = y_p = P_3 \dashv z_{2,3}$. $p^{\sigma} \equiv \equiv P_1 X_1$, $X_{1,2} \equiv n_2^{\sigma} \times x_2$. (Viz obr. 73.)

145. Na přímce $a \equiv AB$ vyhledejte bod stejně vzdálený a) od půdorysny a roviny ϱ; b) od nárysny a roviny ϱ. $A(5,6,6)$, $B(-4, 3, 1)$, $\varrho(7, 10, 7)$. (Obr. 74.)

Body stejně vzdálené ode dvou rovin jsou ve dvou rovinách na sebe kolmých, které půlí odchylku daných rovin a její výplněk. Sestrojíme tedy půdorysnou (nárysnou) odchylku roviny ϱ podle úl. 143 ve III. průmětně $\lambda \perp p^{\sigma}$ $(\chi \perp n^{\sigma})$, tuto a její výplněk rozpůlíme rovinami σ, τ, jichž průměty σ_3, τ_3 jsou osy odchylky α a jejího výplňku (po případě odchylky β). Body $\sigma_3 \times a_3 \equiv X_3$, $\tau_3 \times a_3 \equiv Y_3$ jsou třetí průměty hledaných bodů. Úloha má dvojí řešení.

Jedná-li se o stopy rovin σ a τ, jest $p_1^{\sigma} \equiv p_1^{\tau} \equiv p_1^{\sigma}$ $(n_2^{\sigma} \equiv \equiv n_2^{\tau} \equiv n_2^{\sigma})$, druhé (prvé stopy) vyhledáme podle úl. 144.

146. Vyhledejte geometrické místo bodů, které jsou stejně vzdáleny od π, ν a roviny $\varrho(2,3,6)$.

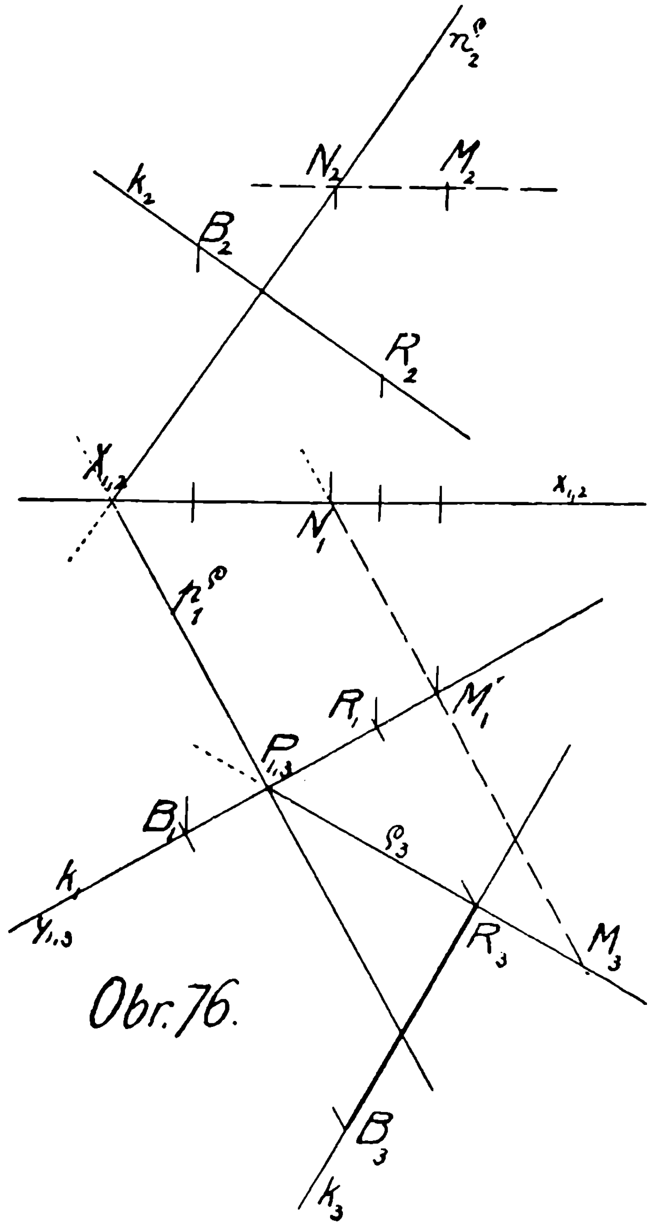
Jest to průsečnice roviny σ, která půlí půdorysnou odchylku roviny ϱ, s rovinou ω, která půlí její odchylku nárysnou (průsečnice ty leží v rovině souměrnosti nebo totožnosti).

Úloze vyhovují 4 přímky, jež jsou $p^1 \equiv \sigma \times \omega$, $p^2 \equiv \varrho \times \omega'$, $p^3 \equiv \sigma' \times \omega$, $p^4 \equiv \sigma' \times \omega'$. Roviny $\sigma, \sigma', \omega, \omega'$ najdeme jako v úloze předešlé. Stačí ovšem vyhledati symetrálné roviny odchylky α a jejího výplňku a určiti jejich průsečnice s rovinou souměrnosti a totožnosti.

147. Vyhledejte v rovině τ bod, který jest stejně vzdálen od π, ν a ϱ.

Jest to průsečík geometrického místa bodů z předešlé úlohy s rovinou τ. Úloha má 4 řešení.

148. Bodem M proložte rovinu ϱ, aby $\sphericalangle p_1^\rho x_1 = 60^\circ$, $\alpha_\rho = 60^\circ$; $M(4, 3, 5)$. (Obr. 76.)



Obr. 76.

Bodem M vedeme stoposměrnou přímku roviny ϱ osnovy prvé, $M_1 \dots p_1$, $\sphericalangle p_1 x_1 = 60^\circ$, $M_2 \dots p_2$, $p_2 \parallel x_2$; $M_1 \dots y_{1,3} \perp$ $\perp p_1$, $M_3 \dots \varrho_3$, $\sphericalangle \varrho_3 y_{1,3} = 60^\circ$. $P_{1,3} \equiv \varrho_3 \times y_{1,3}$, $P_1 \dots p_1^\rho \perp$ $\perp y_{1,3}$, stopa n_1^ρ jde druhým stopníkem přímky p a bodem $X_{1,2} \equiv p_1^\rho \times x_{1,2}$. Dvě řešení.

149. Proložte rovinu ϱ přímkou $n \equiv AB$, aby její odchylka $\beta_\varrho = 60^0$. $A(-4, 3{\cdot}5, 3)$, $B(0, 3{\cdot}5, 1)$.

Přímka n jest druhou stoposměrnou přímkou hledané roviny ϱ. Zvolíme III. vedlejší průmětnu $\chi \perp n_2$, n_3 jest bod $n_3 \dashv z_{2,3} \equiv y_n$, bodem n_3 vedeme ϱ_3, $\sphericalangle \varrho_3 z_{2,3} = 60^0$, $\varrho_3 \times z_{2,3} = n_3^\varrho \ldots n_2^\varrho \perp z_{2,3}$, stopa první p_1^ϱ prochází prvním stopníkem přímky n.

150. Sestrojte vzdálenost d bodu A od roviny ϱ. $A(0, -2, -3)$, $\varrho(-4, 3, 2)$.

Spustíme kolmici k z bodu A na rovinu ϱ, její promítací rovinu $k k_1$ považujeme za III. vedlejší průmětnu $y_{1,3} \equiv k_1$, zobrazíme ϱ_3, A_3 a pak $A_3 \dashv \varrho_3 = d$. (V obr. 76 zobrazena vzdálenost bodu B $(0, 5{\cdot}4, 4)$ od roviny ϱ úlohy předešlé.)

151. Na přímce $a \equiv AB$ najdete bod X, který jest vzdálen o a) $d = 3$ od roviny $\varrho(7, 5, 8)$. $A(0, 2, 4)$, $B(8, 4, 2)$; b) $d = 2$, $\varrho(2, 1, -2)$, $A(3, 4, 2)$, $B(-2, 1, 2)$. (Obr. 77.)

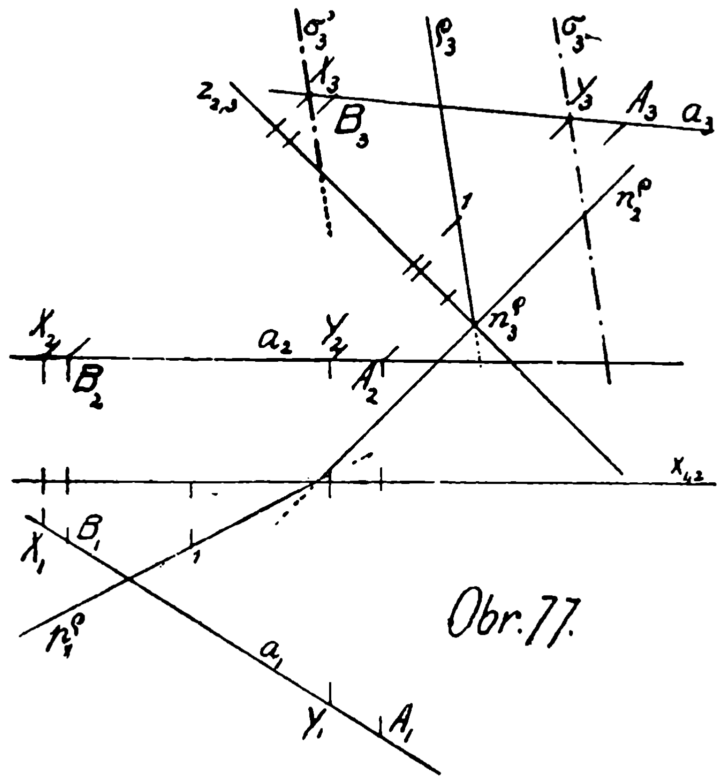
Body, jež jsou vzdáleny od roviny ϱ o délku d, jsou ve dvou rovinách $\sigma \parallel \sigma' \parallel \varrho$, které jsou vedeny v dané vzdálenosti. Zvolíme $z_{2,3} \perp n_2^\varrho$, zobrazíme $\varrho_3 \equiv 1\, n_3^\varrho$, $n_3^\varrho \equiv n_2^\varrho \times z_{2,3}$; na ϱ_3 vztyčíme kolmici, na ni naneseme danou délku d a v obdržených bodech vedeme $\sigma_3 \parallel \sigma_3' \parallel \varrho_3$. Sestrojíme průsečíky přímky a s rovinami σ a σ', nejlépe v třetím průmětu $X_3 \equiv a_3 \times \sigma_3$, $Y_3 \equiv a_3 \times \sigma_3'$.

152. Sestrojte vzdálenost dvou rovnoběžných rovin $\varrho(3, 4, -2)$, $\sigma(-1, \eta, \zeta)$.

Stopy roviny σ jdou bodem na ose $x_{1,2}$ ve vzdálenosti -1 a jsou rovnoběžny se stopami roviny ϱ.

Vzdálenost daných rovin sestrojíme pomocí III. vedlejší průmětny, $y_{1,3} \perp p_1^\varrho$; třetí průměty rovin jsou $\varrho_3 \parallel \sigma_3$ a kolmá úsečka mezi nimi jest 3. průmět a současně skutečná velikost hledané vzdálenosti. (Srovnej s obr. 77, kde III. průmětna $\perp n_2^{\rho}$.)

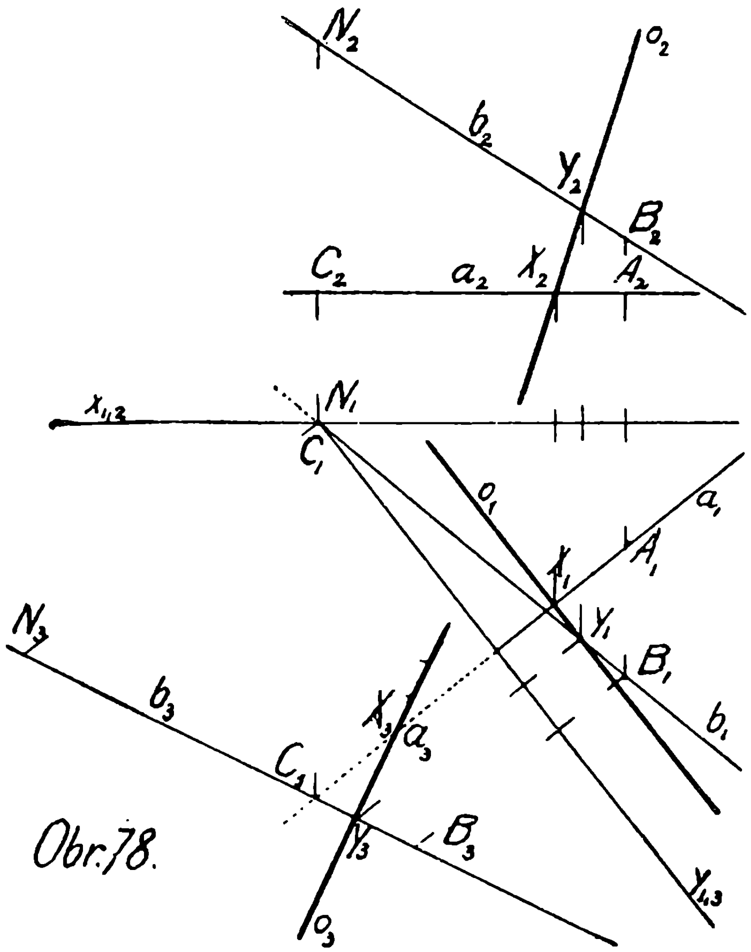
153. Najděte geometrické místo bodů, jež jsou vzdáleny od roviny $\varrho(4, 60^0, 45^0)$ o délku $d = 3\,\mathrm{cm}$ a od roviny $\sigma(-3, 120^0, 45^0)$ o délku $d_1 = 2\,\mathrm{cm}$.



Obr. 77

Užijeme III. průmětny vedlejší $\chi \perp n_2^{\rho} \parallel n_2^{\sigma}$, $z_{2,3} \perp n_2^{\rho}$ a sestrojíme 3. průměty ϱ_3 a σ_3. Podle úl. 151 (obr. 77) sestrojíme dvě roviny $\parallel \varrho$ v dané vzdálenosti $d = 3$, $\tau_3 \parallel \omega_3 \parallel \varrho_3$; podobně nalezneme $\varepsilon_3 \parallel \varphi_3 \parallel \sigma_3$ ve vzdálenosti $d_1 = 2$. Tyto čtyři roviny protnou se ve čtyřech přímkách, jejichž třetí průměty jsou body $a_3 \equiv \tau_3 \times \varepsilon_3$, $b_3 \equiv \tau_3 \times \varphi_3$, $c_3 \equiv \omega_3 \times \varepsilon_3$, $d_3 \equiv \omega_3 \times \varphi_3$; nárysy těchto přímek jsou kolmy k $z_{2,3}$, půdorysy jsou rovnoběžny s $x_{1,2}$ ve vzdálenostech souřadnic y, na př. $y_a = a_3 \dashv z_{2,3}$.

154. Vyšetřte osu dvou mimoběžek $a \equiv AC$, $b \equiv BN$. $A\,(2, 2, 2)$, $C\,(-3, 6, 2)$, $B\,(2, 4, 3)$, $N\,(-3, 0, 6)$. (Obr. 78.)



Obr. 78.

Přímka $a \parallel \pi$, proto $o \parallel \lambda$, volíme-li třetí průmětnu $\lambda \perp a$, $y_{1,3} \perp a_1$. Sestrojíme a_3, bod ve vzdálenosti $z = 2$ od $y_{1,3}$, pak $a_3 \ldots o_3 \perp b_3$, $o_3 \times b_3 \equiv Y_3$, $Y_3 Y_1 \perp y_{1,3}$, $Y_1 \equiv Y_3 Y_1 \times b_1$, $Y_1 \ldots o_1 \perp a_1$, $a_1 \times o_1 \equiv X_1$, X_2 na a_2, Y_2 na b_2, $X_2 Y_2 \equiv o_2$. Skutečná délka osy jest ve třetím průmětě $\overline{X_3 Y_3}$, $X_3 \equiv a_3$.

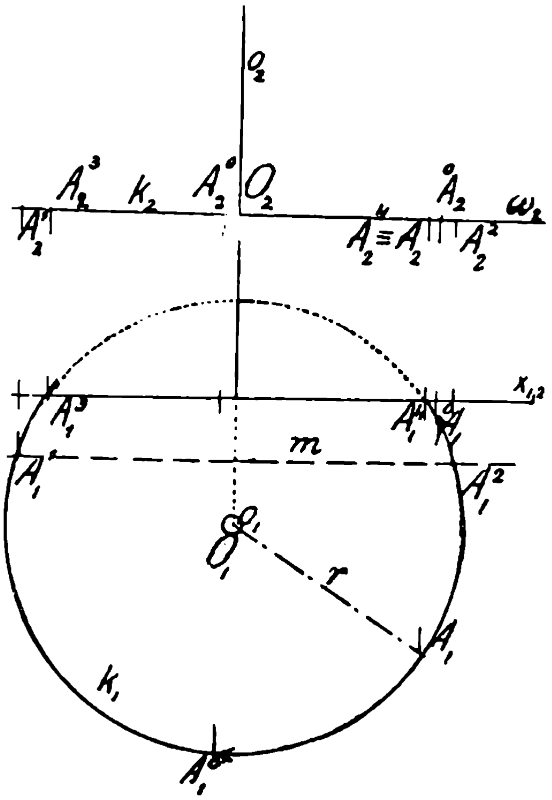
155. Sestrojte osu mimoběžek $a = AN$, $b \equiv BC$. $A\,(-4, 6, 2)$, $N\,(0, 0, 4)$, $B\,(-4, 10, 5)$, $C\,(0, 4, 4)$.

Poněvadž $a_1 \parallel b_1$, zvolíme první promítací rovinu přímky b za III. průmětnu vedlejší $(b\,b_1) \equiv \lambda$, $b_1 \equiv y_{1,3}$, a třetí průmět osy $o_3 \equiv a_3 \times b_3$; $o_1 \perp y_{1,3}$, $o_1 \times a_1 \equiv X_1$, $o_1 \times b_1 \equiv Y_1$, X_2 na a_2, Y_2 na b_2, $X_2 Y_2 \equiv o_2$. $\overline{X_1 Y_1}$ jest skutečná délka osy.

IV. Otáčení.

a) Osa kolmá ku půdorysně nebo k nárysně.

156. Otočte bod A kolem osy o kolmé k průmětně o daný úhel α, do polohy, ve které má danou vzdálenost od průmětny, do průmětny. a) $A\,(3, 4, 3)$, $o \perp \pi$, $o_1\,(0, 2, 0)$,



Obr. 79.

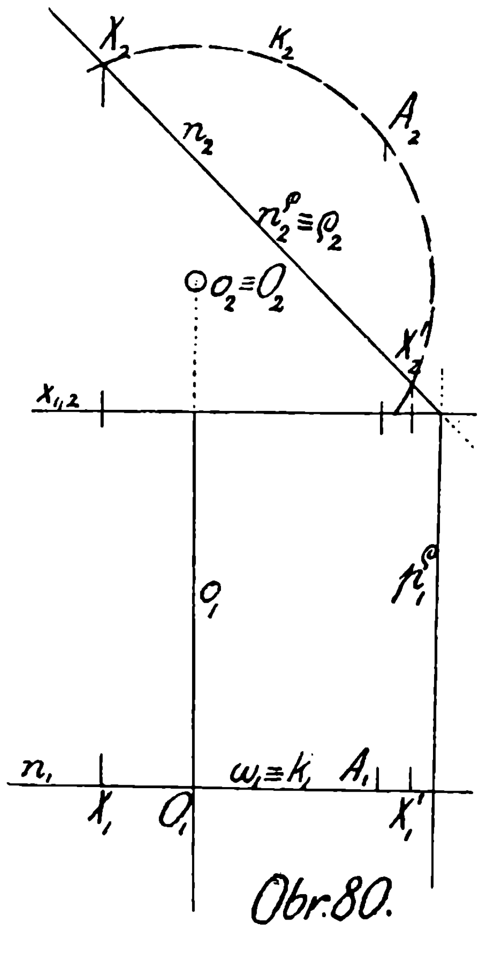
$\alpha = 60^0$, $y = 1$, do ν; b) $A\,(-3, 7, 5)$, $o \perp \nu$, $o_2\,(0, 0, 1)$, $\alpha = 30^0$, $z = 1$, do π.

Bod opisuje kružnici k v **rovině otáčení,** která je kolmá na **osu otáčení,** $\omega \perp o$; průsečík obou je **střed otáčení** $\omega \times o \equiv \equiv O$, jeho vzdálenost od daného bodu jest **poloměr otáčení** $\overline{OA} = r$.

Poněvadž osa je kolmá k průmětně $o \perp \pi$ $(o \perp \nu)$, jest rovina $\omega \parallel \pi$ $(\parallel \nu)$, $\omega_2 \parallel x_2$ $(\omega_1 \parallel x_1)$ bodem A_2 (A_1), $\omega_2 \times o_2$

$(\omega_1 \times o_1) \equiv O_2\,(O_1)$, $O_1 \equiv o_1\,(O_2 \equiv o_2)$, $O_1 A_1\,(O_2 A_2) = r$ skutečná velikost poloměru. (Obr. 79.)

Půdorys k_1 (nárys k_2) kružnice otáčení jest ve skutečné velikosti, na něm vyšetříme bod $A_1^0\,(A_2^0)$, aby $\sphericalangle A_1^0 O_1 A_1 = 60^0$ ($\sphericalangle A_2^0 O_2 A_2 = 30^0$) a z něho odvodíme scházející průmět na ω_2 (ω_1). Body takové jsou dva, ježto úhlu α možno dáti



Obr. 80.

dvojí smysl. Pak narýsujeme $m \parallel x_{1,2}$ ve vzdálenosti $y = 1$ ($z = 1$), která protne kružnici $k_1\,(k_2)$ v bodech A_1^1, A_1^2 (A_2^1, A_2^2). Kružnice $k_1\,(k_2)$ protne osu $x_{1,2}$ v bodech A_1^3, A_1^4 (A_2^3, A_2^4), což jsou půdorysy (nárysy) bodu otočeného do nárysny (půdorysny).

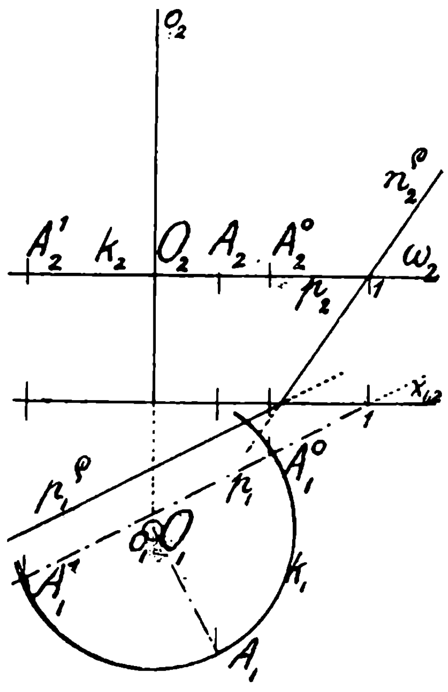
157. Otočiti bod A kolem osy o do roviny ϱ. a) A (4·5, 6, 4·5), o_2 (0, 0, 2), ϱ (4, 90°, 135°); b) A (3, 6, 4), o_1 (0, 1·5, 0), ϱ (0, 30°, 90°).

Rovina otáčení bodu A jest $\omega \perp o$, $A_1 \ldots \omega_1 \perp o_1$; rovina ω protne rovinu ϱ v přímce n, $n_1 \equiv \omega_1$, $n_2 \equiv n_2^\varrho$, a tato seče kružnici otáčení k ve dvou (jednom, žádném) bodech hledaných, podle toho, je-li $o_2 A_2 \gtreqless o_2 \dashv \varrho_2$. (Obr. 80.)

$X_2 \equiv n_2^\varrho \times k_2$, X_1 na k_1. Podobné řešení je v případě b).

158. O t o č t e b o d A k o l e m o s y o d o r o v i n y ϱ. a) $A\,(1, 4, 2)$, $o_1\,(0, 2, 0)$, $\varrho\,(2, 1, -3)$; b) $A\,(-1{\cdot}5, 3, 6)$, $o_2\,(0, 0, 3)$, $\varrho\,(-3, -4{\cdot}5, 1{\cdot}5)$.

$A \ldots \omega \perp o$, $A_2 \ldots \omega_2 \perp o_2$, $\omega_2 \times o_2 \equiv O_2$; rovina ω protne ϱ ve stoposměrné přímce, $\omega \times \varrho \equiv p$, $p_2 \equiv \omega_2$, $p_2 \times n_2^\varrho \equiv 1$, jeho

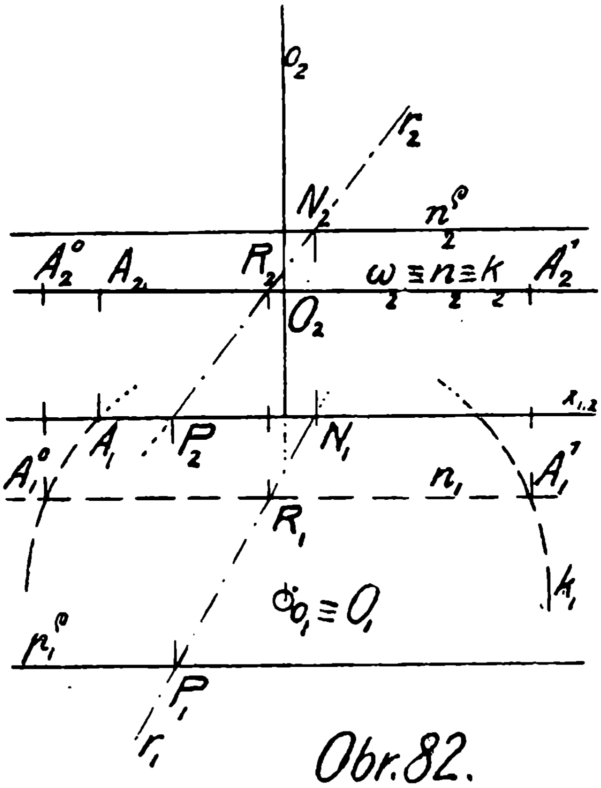


Obr. 81.

půdorys na $x_{1,2}$, a jím $p_1 \parallel p_1^\varrho$. Poloměrem $\overline{O_1 A_1} = r$, $O_1 \equiv o_1$, opíšeme půdorys kružnice otáčení k_1, $k_1 \times p_1$ jsou A_1^0, A_1^1 půdorysy bodů hledaných; jejich nárysy jsou na $k_2 \equiv n_2 \equiv \omega_2$. (Obr. 81.)

159. O t o č t e b o d A k o l e m o s y $o \perp \pi$ d o r o v i n y $\varrho \parallel x$. $A\,(0, 0, 2)$, $o_1\,(3, 3, 0)$, $\varrho\,(\infty, 4, 3)$. (Obr. 82.)

Rovina otáčení ω protne danou rovinu v přímce $n \parallel x$, $n_2 \equiv \omega_2$; $n_1 \parallel x_{1,2}$ určíme, když protneme přímku n libovolnou přímkou roviny r v bodě $R \equiv r \times n$, $R_2 \equiv r_2 \times n_2$, $r_2 \times x_{1,2} \equiv$ $\equiv P_2$, P_1 na p_1^ρ, $r_2 \times n_2^\rho \equiv N_2$, N_1 na $x_{1,2}$, $P_1 N_1 \equiv r_1$, na r_1 jest $R_1 \ldots n_1 \parallel x_1$. n_1 protne k v půdorysech hledaných bodů. Kružnice k_1 se opíše kolem $O_1 \equiv o_1$ poloměrem $\overline{O_1 A_1}$.



Obr. 82.

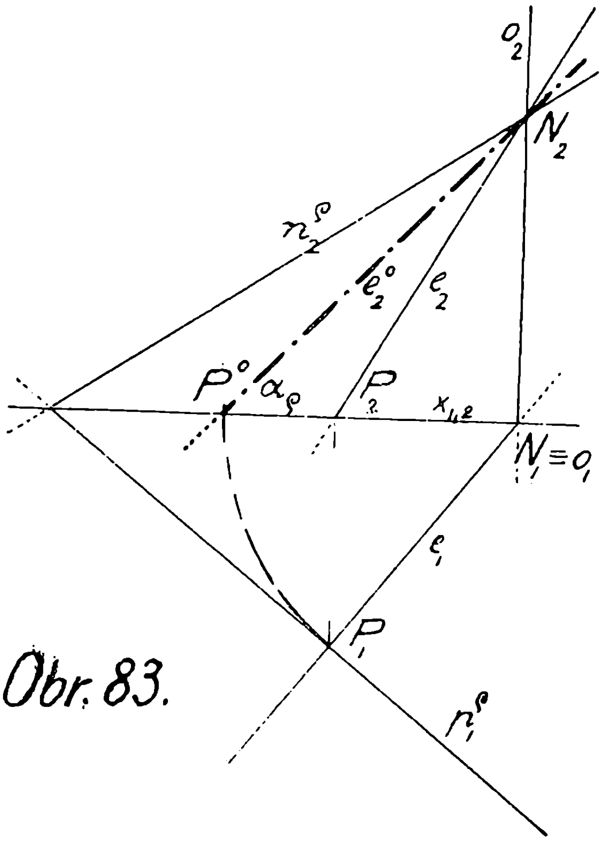
160. Sestrojte skutečnou délku úsečky $\overline{AB}$, otočením úsečky kolem z-ové (y-ové) souřadnice jednoho z krajních bodů. A (0, 3, 5), B (3, 1, 1); A (0, 5, 1), B (—3, 1, 3).

Úsečku otočíme do polohy rovnoběžné s nárysnou (půdorysnou).

První paprsek promítací bodu A považujeme za osu otáčení, $o_1 \equiv A_1$, $o_2 \equiv z_A$; vedeme bodem B rovinu $\omega \perp o$, $B_2 \ldots \omega_2 \perp o_2$, $\omega_2 \times o_2 \equiv O_2$, $O_1 \equiv A_1$; $\overline{O_1 B_1} = r$ poloměr otáčení, kterým opíšeme kružnici k_1 a v ní narýsujeme poloměr

$O_1 B_1^0 \parallel x_{1,2}$. Potom B_2^0 na ω_2 a $\overline{A_2 B_2^0}$ jest hledaná skutečná délka úsečky. (V obr. 83 úsečka PN.)

161. Otočením příslušné přímky spádové do průmětny sestrojte odchylku roviny ϱ (—7·5, 6, 5).



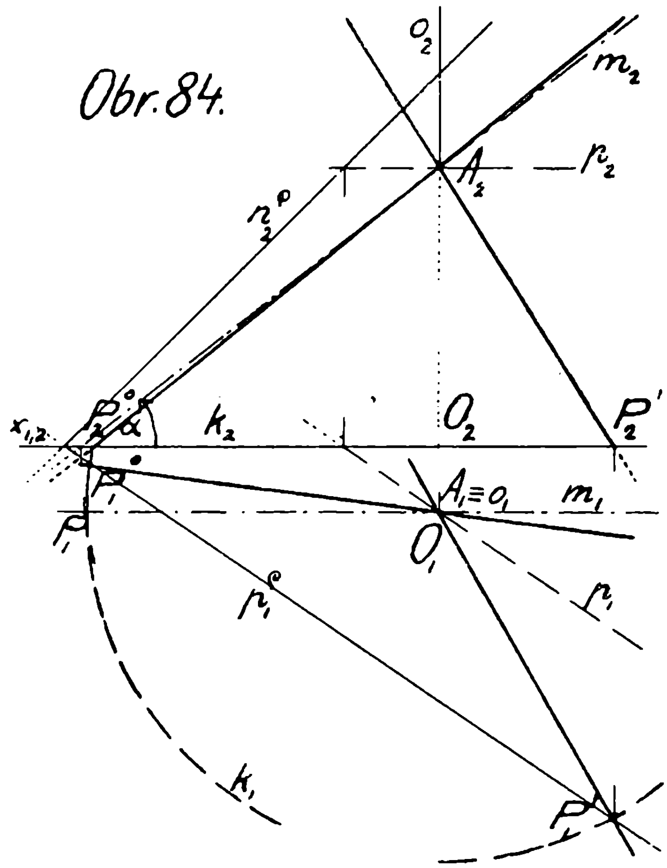
Obr. 83.

Zvolíme si libovolnou přímku spádovou prvé osnovy $e \perp \perp p_1^\rho$, $e_1 \perp p_1^\rho$, $e_1 \times p_1^\rho \equiv P_1$, P_2 na $x_{1,2}$, $e_1 \times x_{1,2} \equiv N_1$, N_2 na n_2^ρ, $P_2 N_2 \equiv e_2$. Kolem z_N otočíme přímku e do nárysny podle úlohy předchozí, $N_1 P^0 = N_1 P_1$, P^0 na $x_{1,2}$, pak $N_2 P^0$ je skutečná délka úsečky PN, a $\sphericalangle N_2 P^0 N_1 = \alpha$. Podobně vyšetříme odchylku β_ρ.

162. Bodem A v rovině ϱ veďte přímku a, jejíž $\alpha_a = 52·5^0$ ($\beta_a = 45^0$). A (0, 1, z), ϱ_a;—6, 4, 6).

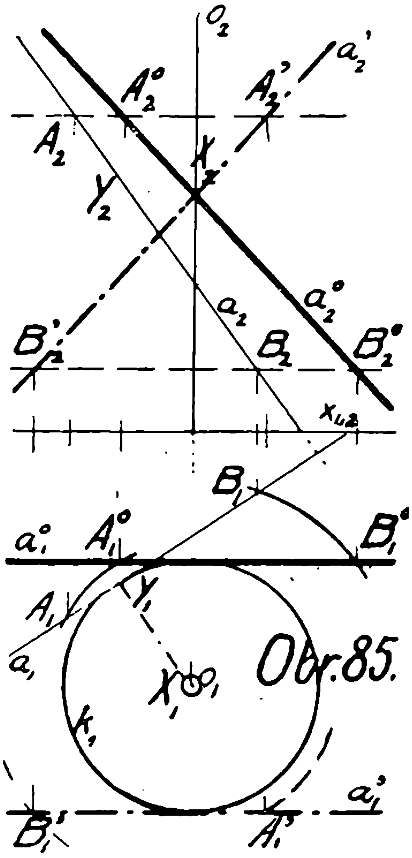
Bodem A vedeme přímku $m \parallel \nu$, aby $\alpha_m = 52·5^0$, $A_1 \ldots m_1 \parallel x_{1,2}$, $\sphericalangle A_2 P_2, x_{1,2} = \alpha$, $A_2 P_2 \equiv m_2$ a tuto přímku otočíme

kolem $o \equiv z_A$ do roviny ϱ. K tomu cíli stačí otočiti jeden bod přímky m do ϱ, na př. bod P; střed otáčení má $O_1 \equiv A_1$, $\overline{O_1 P_1}$ jest poloměr otáčení, půdorys kružnice otáčení k_1 jest ve skutečné velikosti, $k_1 \times p_1^\varrho \equiv P_1'$, $A_1 P_1' \equiv a_1$, P_2' na $x_{1,2}$, $A_2 P_2' \equiv$
$\equiv a_2$. Úloha má dvě (jedno, žádné) řešení podle toho, je-li $O_1 P_1 \gtreqless O_1 \dashv p_1^\varrho$. (Obr. 84.)



163. Otočte přímku $a \equiv AB$ kolem osy $o \perp \pi$ s ní mimoběžné do polohy $A^0 B^0 \parallel \nu$. a) $A(-2, 3, 5)$, $B(1, 1, 1)$, $o_1(0, 4, 0)$. b) $A(-1, 1, 3)$, $B(2, 5, 1)$, $o_2(0, 0, 5)$, $A^0 B^0 \parallel \pi$. (Obr. 85.)

Každý bod přímky a opisuje při rotaci kolem osy kružnici, z nichž nejmenší k má poloměr = ose mimoběžek a, o (viz úl. 120). Kružnice k_1 dotýkají se půdorysy všech poloh přímky a, vedeme tedy k ní tečny $a_1^0 \parallel a_1' \parallel x_{1,2}$, do těchto přímek otočíme dva body přímky a, na př. body A, B do A_1^0, B_1^0, A_1', B_1', zobrazíme jejich nárysy na nárysech kružnic otáčení těchto bodů a spojením jich máme a_2^0, a_2'. Při otáčení bodů A, B musíme dbáti, aby otáčení se dálo v témž smyslu a o týž úhel, o jaký jsme otočili bod Y přímky dané, nejbližší ose o.

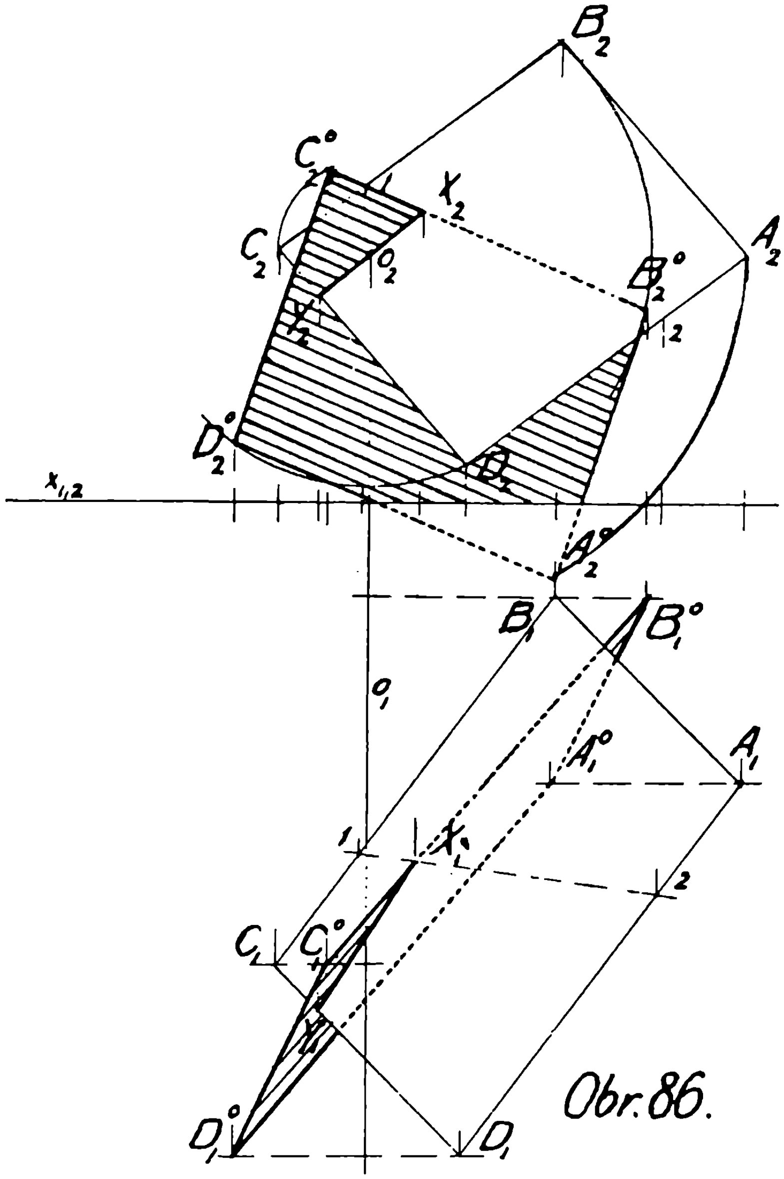


Obr. 85.

164. Otočte přímku $a \equiv AB$ kolem o do roviny ϱ. a) $A\,(2, 4, 4)$, $B\,(0, 2, 1)$, $\varrho\,(3, 5, 4)$, $o \perp \pi$; b) $A\,(-3, 6, 6)$, $B\,(0, 1{\cdot}5, 3)$, $\varrho\,(-3{\cdot}5, 6, 7{\cdot}5)$, $o \perp \nu$.

Vyhledáme průsečík S přímky a s rovinou ϱ pomocí krycí přímky druhé, a kolem z-ové souřadnice bodu S otočíme půdorysný stopník přímky a do p_1^ϱ; obdržíme dva (jeden, žádný) body P_1^0, P_1^1 podle toho, je-li $S_1 \dashv p_1^\varrho \substack{<\\=\\>} S_1P_1$, a ty spojíme s bodem S_1, $S_1P_1^0 \equiv a_1^0$, $S_1P_1' \equiv a_1'$. Nárysy bodů P^0, P' na $x_{1,2}$. (Viz přímku m v obr. 84.)

165. Otočte rovnoběžník $ABCD$ kol $o \perp \nu$ o $\sphericalangle 60^0$. A (4·5, 4·5, 3), B (1·5, 1·5, 7·5), C (—3, 7·5, 1·5); o_2 (—1·5, 0, 6). (Obr. 86.)

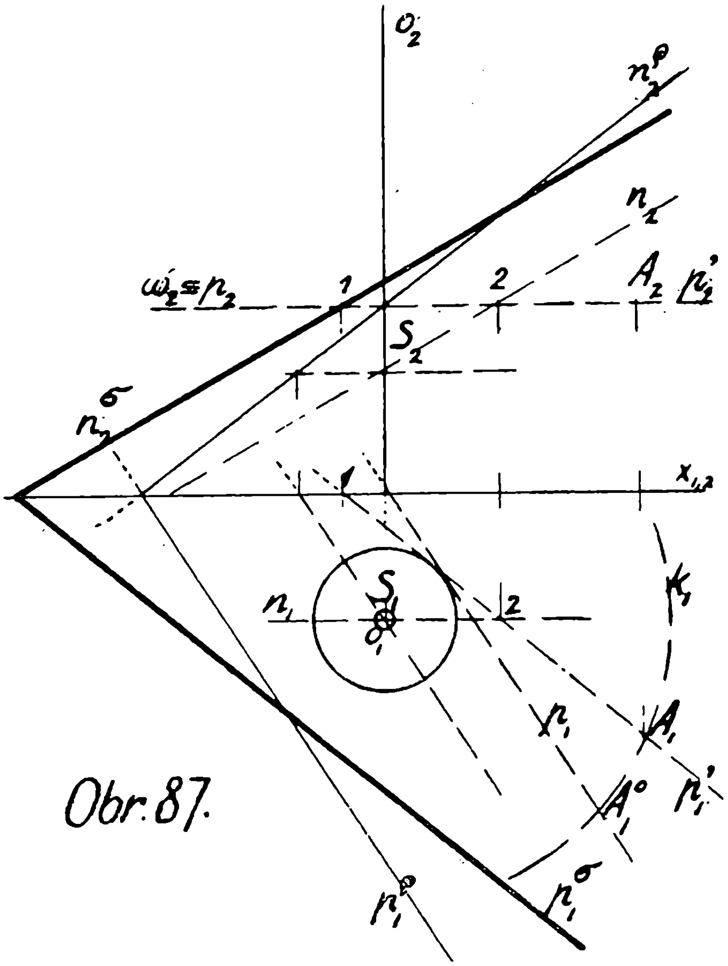


Obr. 86.

Všechny vrcholy rovnoběžníku opisují kružnice, jejichž nárysy jsou kružnice opsané kol $O_2 \equiv o_2$ poloměry $\overline{O_2 A_2}, \ldots \overline{O_2 D_2}$ a půdorysy rovnoběžky s osou $x_{1,2}$ body $A_1, \ldots D_1$; každý bod opíše oblouk 60^0 $\sphericalangle A_2^0 O_2 A_2 = \ldots \sphericalangle D_2^0 O_2 D_2 = 60^0$ a z nárysů odvodíme půdorysy. Otáčení může se státi dvěma směry.

166. Otočte $\triangle ABC$ kol osy $o \perp \pi$ do polohy $\parallel x$. $A(-4\cdot5, 1\cdot5, 7)$, $B(0, 7\cdot5, 1\cdot5)$, $C(6, 4\cdot5, 9)$, $o_1 \equiv B_1$.

Rovina jest rovnoběžná s přímkou, obsahuje-li jednu přímku s danou přímkou rovnoběžnou.



Obr. 87.

Bodem A vedeme stoposměrnou přímku p, $A_2 \ldots p_2 \parallel x_{1,2}$, $p_2 \times B_2 C_2 \equiv 1$, najdeme jeho půdorys na $B_1 C_1$, $1 A_1 \equiv p_1$, a přímku p otočíme do polohy $\parallel x$ podle úl. 163. Spustíme $o_1 P_1 \perp p_1$, opíšeme kružnici poloměrem $o_1 P_1$, k ní vedeme tečnu $p_1^0 \parallel x_{1,2}$, její dotyčný bod P_1^0 jest otočený obraz bodu P; ostatní body otočíme v témž smyslu o $\sphericalangle P_1 o_1 P_1^0$.

167. Rovinu $\varrho(-4, 6, 3)$ otočte okolo osy

$o \perp \pi$ tak, aby procházela bodem $A(4,4,3)$. $o_1(0,2,0)$. (Obr. 87.)

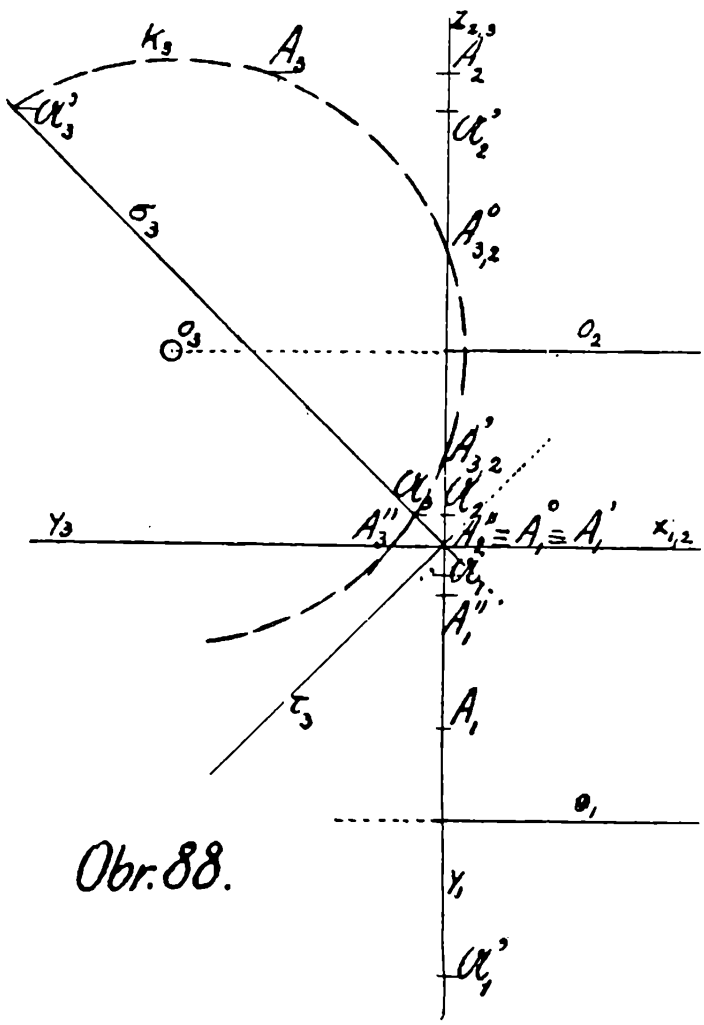
Rovina otáčení ω bodu A protne rovinu ϱ ve stoposměrné přímce p, $A_2 \ldots \omega_2 \perp o_2$, $p_2 \equiv \omega_2$. Kružnice otáčení bodu A protne přímku p v bodě A^0, $A_1{}^0 \equiv p_1 \times k_1$, který při žádaném otáčení roviny ϱ musí splynouti s bodem A. Opíšeme-li kolem o_1 nejmenší kružnici k, kterou opisuje bod přímky p nejblíže položený ose o, musí se této kružnice dotýkati otočená poloha přímky p, t. j. p', p_1' je tečna k půdorysu k_1 z bodu A_1, a tato je stoposměrnou přímkou otočené roviny ϱ. Průsečík osy s rovinou $o \times \varrho \equiv S$ je při tomto otáčení pevný, vedeme jím stoposměrnou přímku n, $n_1 \equiv S_1 2$, 2 na p_1', a s nárysem je rovnoběžná druhá stopa n^{σ} otočené roviny, jež prochází nárysným stopníkem přímky p_1'.

168. Kvádr s podstavou v π, jejíž vrcholy jsou ABD, výška v otočte do obecné polohy. $A(0, 4{\cdot}5, 0)$, $B(4, 4{\cdot}5, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $v = 4{\cdot}5$. (Obr. 89.)

Otočíme kvádr nejdřív kolem osy $o \equiv BC$ o -45^0 a tento otočený obraz pošineme vpravo o 3·5 cm, pak otočíme kol osy $u \perp \pi$, o $+30^0$ a otočený obraz pošineme o 6·5 cm vpravo. Otočením kolem $o \perp \nu$ nemění nárys kvádru tvar a velikost, stačí tedy otočiti kolem $o_2 \equiv B_2$ bod A_2 o -45^0 do polohy $(A)_2$, a tento obraz pošinouti ve směru osy $x_{1,2}$ o 3·5 cm do A'_2, v kteréžto nové poloze sestrojíme obraz shodný s původním nárysem. Půdorysy kružnic otáčení jsou rovnoběžky s $x_{1,2}$, a na nich leží půdorysy otočených bodů.

Otočíme-li útvar kolem osy $u \perp \pi$, nemění se půdorys útvaru; stačí tedy otočiti bod A_1' o $+30^0$ do polohy (A_1') kolem u_1, pošinouti bod (A_1') ve směru kladné osy $x_{1,2}$ o 6·5 cm do polohy $A_1{}^0$ a zde sestrojiti útvar $A_1{}^0 B_1{}^0 \ldots H_1{}^0$ shodný s $A_1' B_1' \ldots H_1'$. Nárysy $A_2{}^0, B_2{}^0 \ldots H_2{}^0$ budou na příslušných rovnoběžkách s osou $x_{1,2}$ body $A_1', B_1' \ldots H_1'$.

169. Podobně otočte do obecné polohy pravidelný 4boký jehlan s podstavou $ABCD$ v π výšky v, jednou kol osy $o \perp \nu$, $o_2 \equiv C_2\, o$ —30° (pošiňte otočený obraz o 5 cm ve směru $+x_{1,2}$) a podruhé kolem osy $u \perp \pi$, $u_1 \equiv C_1\, o$ +60° (pošiňte o 5 cm). $A\,(0, 4, 0)$, $C\,(5, 2{\cdot}5, 0)$, $v = 5{\cdot}5$ cm.

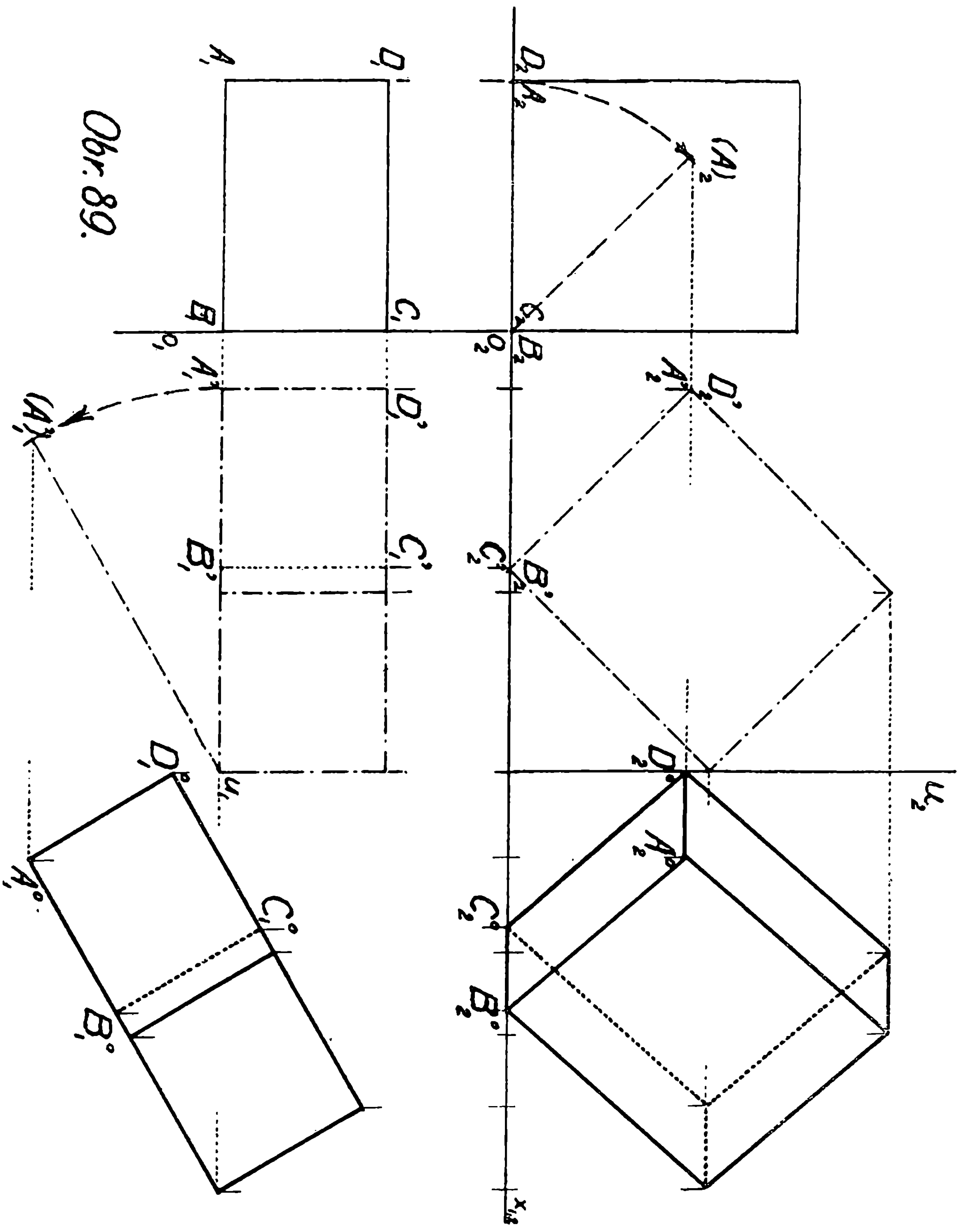


Obr. 88.

b) Osa rovnoběžná s průmětnou.

170. Otočte bod A kolem osy $o \parallel x$ do obou průměten a do roviny souměrnosti a totožnosti. $A\,(3, 3, 7{\cdot}5)$, $y_0 = 4{\cdot}5$, $z_0 = 3$. (Obr. 88.)

Rovinu otáčení bodu A považujeme za III. průmětnu hlav-



Obr. 89.

ní; třetí průměty otočených poloh jsou v průsečících 3. průmětu kružnice otáčení k_3 (opsána kolem o_3 poloměrem $o_3 A_3$) s třetími průměty daných rovin, t. j. y_3, z_3, σ_3 a τ_3, a z nich odvodíme průměty ostatní. V dané úloze nelze bod A otočiti do roviny totožnosti, ježto poloměr otáčení jest menší než vzdálenost osy od roviny τ.

171. Otočte bod A kolem $o \equiv n^\rho$ do roviny $\varrho\,(\infty, 4, 2)$; $A\,(0, 3, 3)$.

Řešíme pomocí III. hlavní průmětny, za kterou považujeme rovinu otáčení bodu A, $\omega \perp n^\rho$. $A_2 \ldots z_{2,3} \perp n_2^\rho$, $\varrho_3 \equiv n_3^\rho p_3^\rho$, kolem $o_3 \equiv n_3^\rho$ opíšeme k_3 poloměrem $A_3 o_3$ a máme $A_3{}^0 \equiv \equiv k_3 \times \varrho_3$.

172. Otočte bod A do roviny ϱ kolem osy $o \parallel x$. $A\,(3, 6, 7{\cdot}5)$, $\varrho\,(-7{\cdot}5, 6, 4{\cdot}5)$, $n_0 = 2$, $z_0 = 4$.

Rovinu otáčení bodu A považujeme za III. hlavní průmětnu, $A_2 \ldots z_{2,3} \perp o_2$. Ta protne rovinu ϱ v její 3. stopě m^ρ, $m_3^\rho \equiv n_3^\rho p_3^\rho$, průsečíky kružnice otáčení s m^ρ jsou body hledané X, Y; $X_3 \equiv k_3 \times m_3^\rho$, k_3 je opsána kolem o_3 poloměrem $o_3 A_3$. (Viz bod B v obr. 90.)

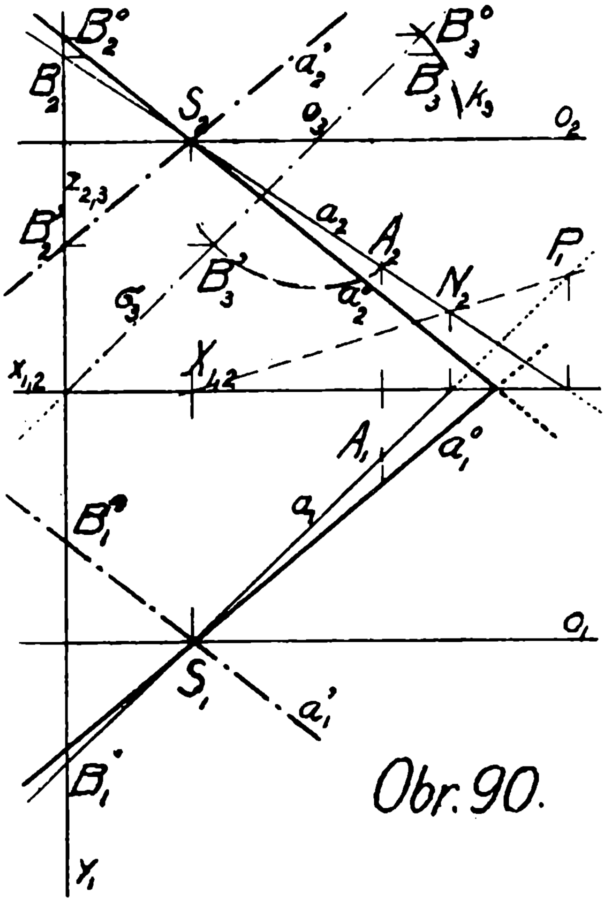
173. Otočte přímku $a \equiv AB$ kolem osy $o \equiv x$ do roviny souměrnosti a totožnosti. $A\,(-3, 0, 0)$, $B\,(2, 6, 4)$. (Srovnej s obr. 90.)

Bod A jest v rovině souměrnosti, otočíme tedy do ní pouze bod B podle úl. 170 a otočenou polohu B^0 spojíme s A.

174. Otočte přímku $a \equiv AB$ kolem osy $o \parallel x$ do kladné části roviny souměrnosti a totožnosti. a) $A\,(3, 1, 2)$, $B\,(-2, 6, 5{\cdot}5)$, b) $A\,(3, 4, 4)$, $B\,(-2, 0, 2)$. (Obr. 90.)

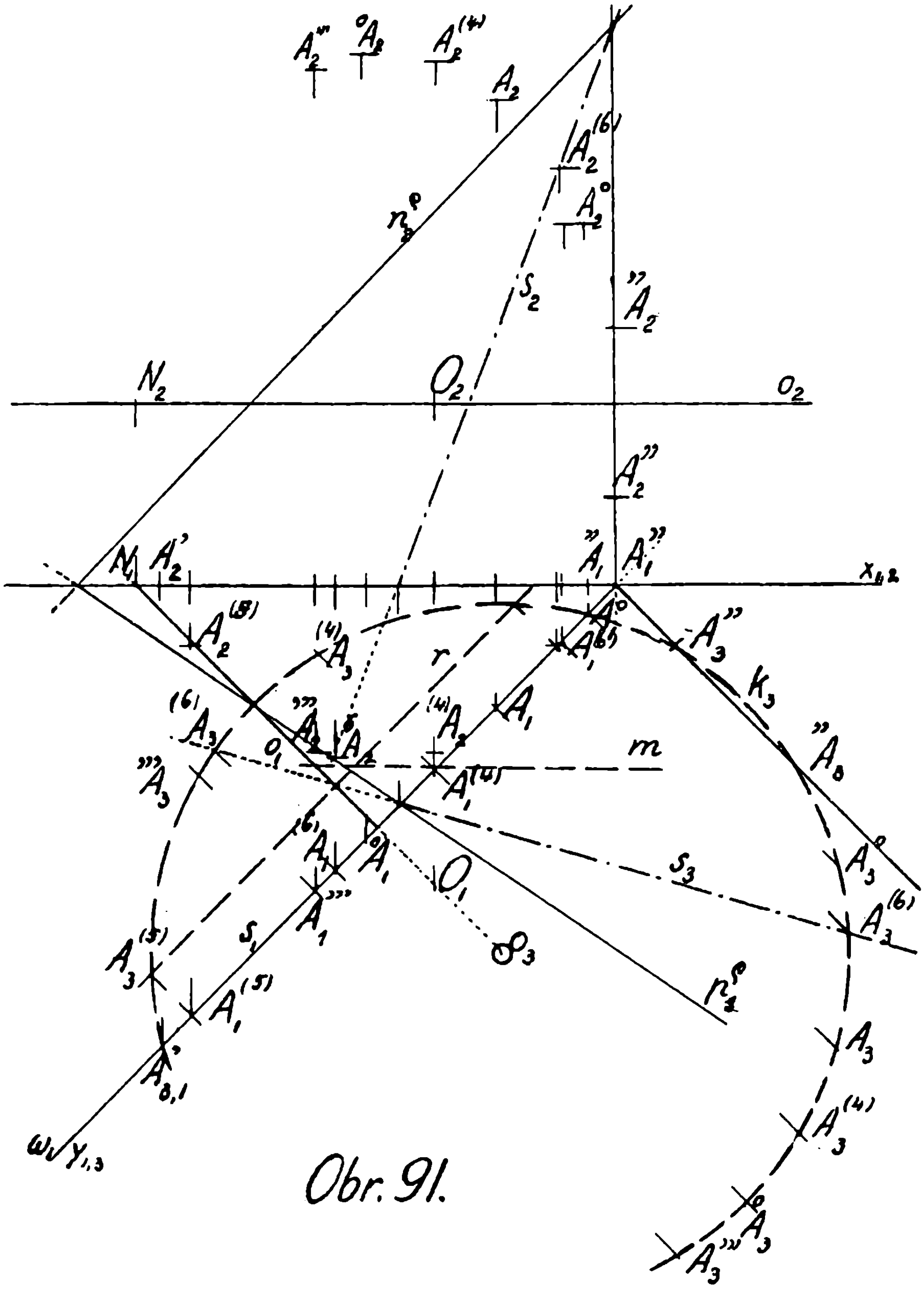
Průsečíkem přímky a s rovinou souměrnosti (podle úl. 39) vedeme osu $o \parallel x$ a kolem ní otočíme bod B do roviny souměrnosti. Spojnice bodu B^0 s pevným bodem S jest přímka hledaná.

174a. B o d A o t o č t e k o l e m o s y $o \equiv ON$: a) o ú h e l $\alpha = 30^0$; b) d o o b o u p r ů m ě t e n; c) d o p o l o h d a n ý c h s o u ř a d n i c e m i $x = 1$, $y = 3$, $z = 1$; d) d o r o v i n y $\varrho\,(-3, 2, 3)$; $A\,(4, 2, 8)$; $O\,(3, 5, 3)$, $N\,(-2, 0, 3)$. (Obr. 91.)



Obr. 90.

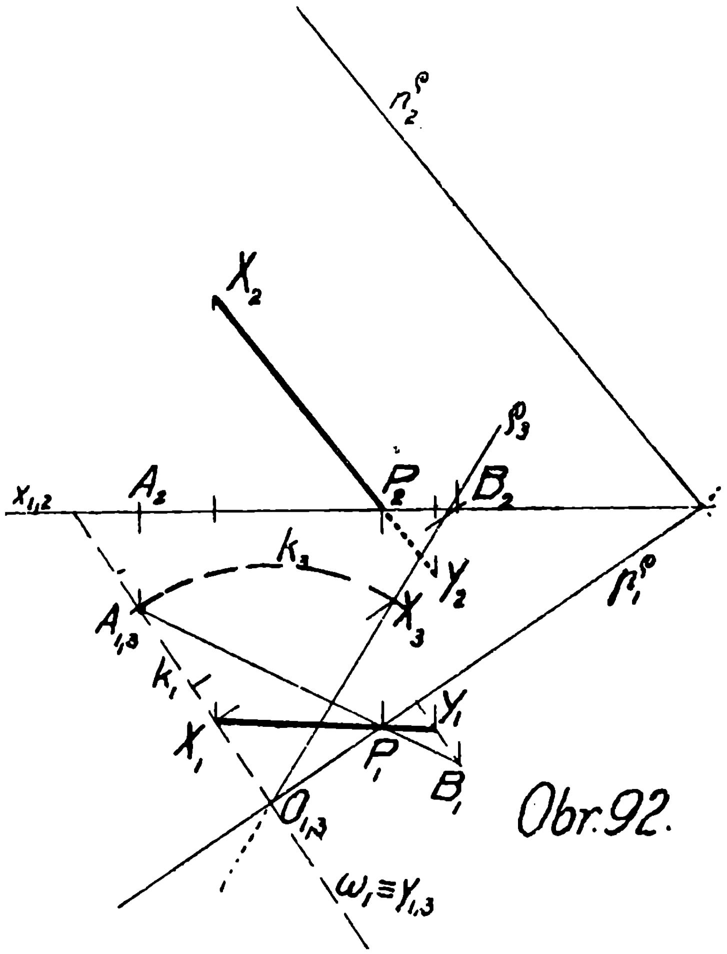
Osa o jest $\parallel \pi$, proto rovina otáčení bodu $A \ldots \omega \perp \pi$ má půdorys přímku, $A_1 \ldots \omega_1 \perp o_1$. Rovinu ω považujeme za III. průmětnu vedlejší, $\omega_1 \equiv y_{1,3}$, pak výjev otáčení jeví se ve skutečné podobě ve 3. průmětu. Kolem $O_3 \equiv o_3$ opíšeme kružnici k_3 poloměrem $\overline{O_3 A_3}$, a) uděláme na k_3 oblouk $\widehat{A_3 A_3^0} = 30^0$, $A_3^0 A_1^0 \perp y_{1,3}$, A_1^0 na $y_{1,3}$, $A^0_2 \dashv x_{1,2} = A_3^0 A_1^0$; b) k_3 protne y_3 v bodě A_3', z_3 v A_3''; c) kolmice k $x_{1,2}$ ve vzdálenosti 1 od počátku protne $k_1 \equiv y_{1,3}$ v bodě A_1''', $A_1''' A_3''' \perp y_{1,3}$, A_3''' na k_3, $A_1''' A_3''' = z_{A'''}$; podobně vedeme $m \parallel x_{1,2}$ ve vzdálenosti $y = +3$, $m \times k_1 \equiv A_1^{(4)}$; narýsujeme $r \parallel y_{1,3}$ ve vzdálenosti $z = -1$, $r \times k_3 \equiv A_3^{(5)}$. d) $\omega \times \varrho \equiv s$, $k_3 \times s_3$ jest třetí průmět bodu $A^{(6)}$ otočeného do ϱ.



Obr. 91.

175. Která úsečka roviny ϱ dá se převésti rotací kol p^ϱ *do úsečky* $\overline{AB}$ v π. ϱ (6, 4, 7·5), A (—3, 1·5, 0), B (2, 4, 0). (Obr. 92.)

Hledanou úsečku XY nalezneme, když danou úsečku $\overline{AB}$ otočíme do roviny ϱ kolem p_1^{ϱ}. Rovinu otáčení bodu A považujme za III. vedlejší průmětnu, $A_1 \dots \omega_1 \equiv y_{1,3} \perp p_1^{\varrho}$, zobrazíme 3. průmět roviny ϱ, $\varrho_3 \times k_3 \equiv X_3$, kde k_3 je oblouk kruhový opsaný kolem $O_{1,3} \equiv p_3^{o}$, $p_3^{\varrho} \equiv p_1^{\varrho} \times y_{1,3}$, poloměrem $A_3 O_3$,



Obr. 92.

$A_3 \equiv A_1$. Z bodu X_3 odvodíme X_1, $X_3 X_1 \perp y_{1,3}$, $X_3 X_1 \times y_{1,3} \equiv$ $\equiv X_1$, a z toho X_2. Bod $P_1 \equiv A_1 B_1 \times p_1^{\varrho}$ je při otáčení pevný, proto spojíme $X_1 P_1$ a na $B_1 Y_1 \perp p_1^{\varrho}$ obdržíme $Y_1 \equiv X_1 P_1 \times$ $\times B_1 Y_1$.

176. Otočením kolem $o \equiv OP$ vyhledejte skutečnou délku úsečky AB. P (—6, 3, 0), O (0, 3, 6); A (6, 2, 4·5), B (—6, 9, 3).

Úsečku $A B$ otočíme do polohy rovnoběžné s ν, a to tak, že vedeme tečnu k nejmenší kružnici, kterou opisuje bod úsečky nejbližší ose o (viz úl. 163). To provedeme ve III. průmětně vedlejší $\varkappa \perp o_2$, $A_2 \ldots \varkappa_2 \equiv z_{2,3} \perp o_2$. Z třetího průmětu osy spustíme kolmici $o_3 M_3 \perp A_3 B_3$, a to je poloměr nejmenší kružnice; k ní vedeme tečnu v bodu $M_3{}^0$ nejvzdálenějším (nejbližším) od nárysny a do ní otočíme body A_3, B_3 do $A_3{}^0, B_3{}^0$. $A_2{}^0 \equiv A_3{}^0 A_2{}^0 \times \underline{A_2 A_2{}^0}$, $A_3{}^0 A_2{}^0 \perp z_{2,3}$, $\underline{A_2 A_2{}^0 \equiv z_{2,3}}$, podobně najdeme $B_2{}^0$ a $\overline{A_2{}^0 B_2{}^0}$ jest skutečná délka úsečky $\overline{A B}$.

177. Otočením kolem prvé stoposměrné přímky stanovte skutečnou velikost rovnoběžníku $A B C D$. A (3, 9, 6), B (—1·5, 4·5, 1·5), C (7·5, 1·5, 3), D. (Obr. 93.)

Otočení provedeme ve III. průmětně vedlejší, kterou proložíme na př. bodem B kolmo k p. $A_2 \ldots p_2 \parallel x_{1,2}$, $p_2 \times$ $\times\, C_2 D_2 \equiv 1$ najdeme půdorys na $C_1 D_1$, $1 A_1 \equiv p_1$, $B_1 \ldots y_{1,3} \perp$ $\perp p_1$. Rovnoběžník má třetím průmětem úsečku, která prochází bodem p_3 a tuto otočíme kolem p_3 do polohy $B_3{}^0 D_3{}^0 \parallel y_{1,3}$. Do úsečky $B_3{}^0 D^0{}_3$ otočíme body A_3, C_3 a z třetích průmětů otočených bodů odvodíme půdorysy $B_3{}^0 B_1{}^0 \perp y_{1,3}$, $B_1{}^0 \equiv$ $\equiv B_3{}^0 B_1{}^0 \times B_1 B_1{}^0$, kde $B_1 B_1{}^0 \perp p_1$.

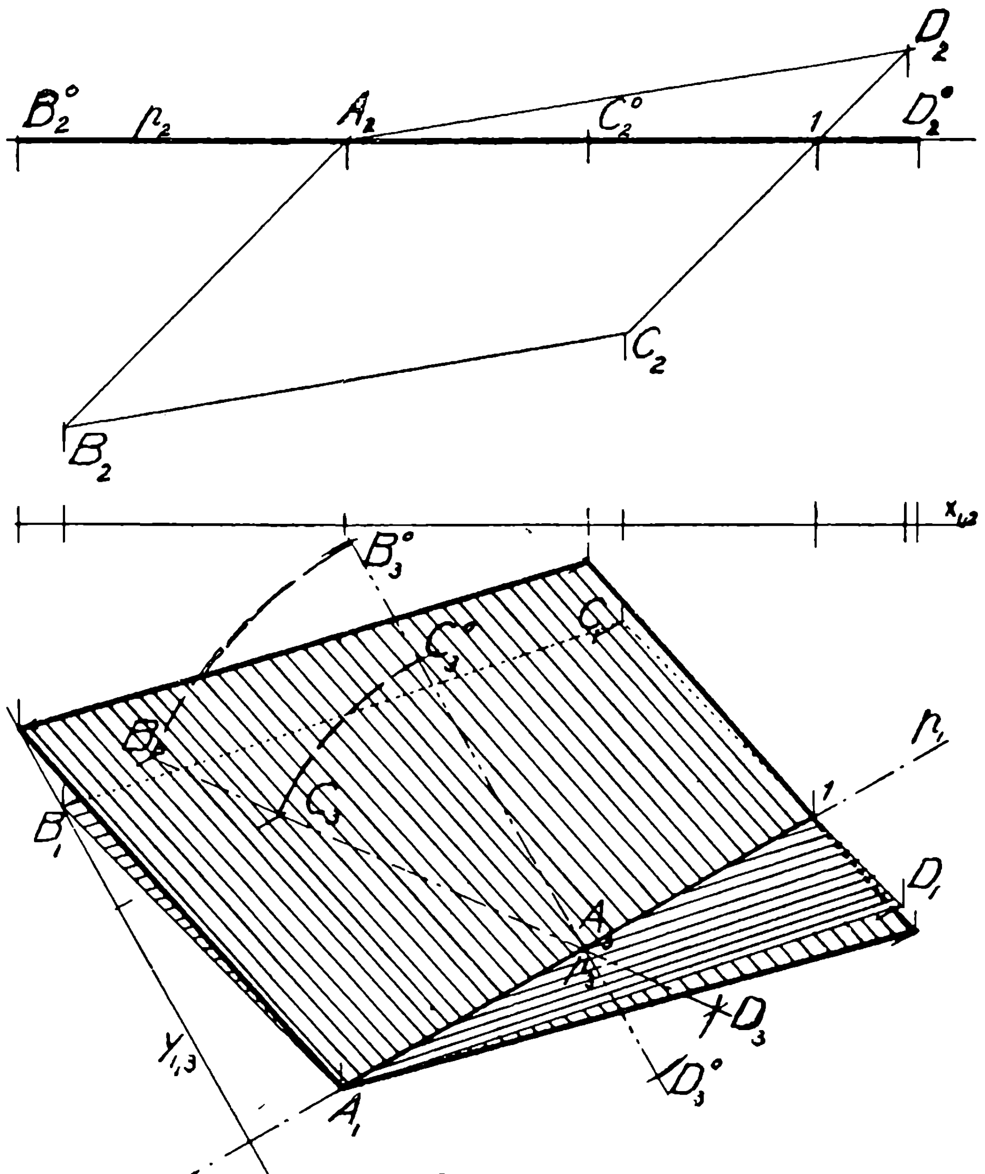
178. Otočte přímku $a \equiv A B$ do roviny ϱ kolem osy o. a) ϱ (—4, 3, 4), A (3, —3, 2), B (—2, 4, 5), $o \equiv n$; b) A (1·5, 6, 6), B (—3, 3, 1·5), ϱ (7·5, 7·5, 6), $o \equiv p$.

Přímka a protne rovinu ϱ v bodě R; bodem R vedeme stoposměrnou přímku osnovy druhé (prvé) $n\,(p) \equiv o$.

Kolem osy o otočíme jeden bod přímky a, na př. A.

Otočení se provede ve III. průmětné vedlejší $\lambda \perp o$, $A_2 \ldots . z_{2,3} \perp o_2$, $\varrho_3 \equiv o_3\, n^{\varrho}_3$, $n^{\varrho}_3 \equiv n^{\varrho}_2 \times z_{2,3}$, $o_3 A_3 =$ poloměr otáčení, jímž se opíše kružnice kolem o_3 až protne ϱ_3 v $A_3{}^0$, z něho odvodíme $A_2{}^0$ na $z_{2,3}$ a pomocí y_{A^0} sestrojíme $A_1{}^0$. $A_1{}^0 R_1 \equiv a_1{}^0$, $A_2{}^0 R_2 \equiv a_2{}^0$.

179. Otočte rovnoběžník $ABCD$ kol $o \parallel \pi$ o takový úhel α, až jeho půdorysem bude pravoúhelník. $A(2, 8, 4)$, $B(3, 3, 6)$, $C(-2, 4, 4)$, D.

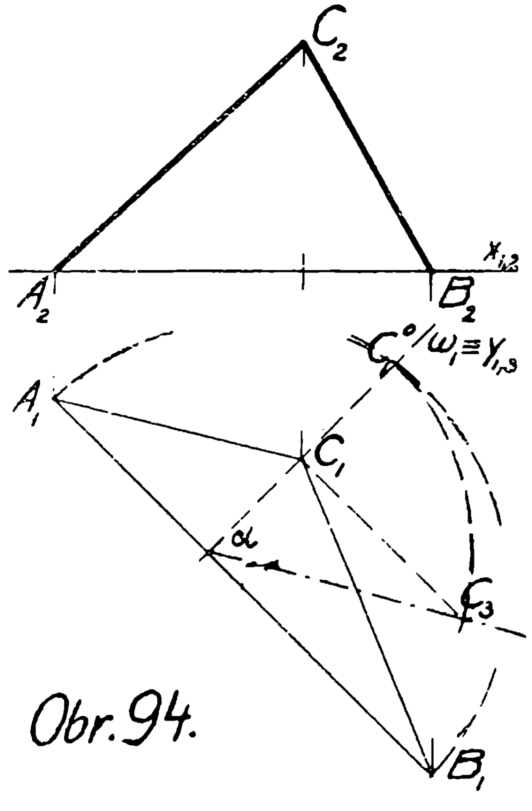


Obr. 93.

Za osu otáčení zvolíme $o \equiv AC$; vrchol B se otáčí v rovině $\omega \perp o$, $\omega_1 \perp o_1$. B_1^0 je na kružnici, jejíž průměrem jest $A_1 C_1$. Považujeme-li ω za III. vedlejší průmětnu, $\omega_1 \equiv y_{1,3}$, obdržíme B_3^0 v průsečíku 3. průmětu kružnice otáčení a paprsku $B_1^0 B_3^0 \perp y_{1,3}$; $B_1^0 B_3^0$ jest z-tová souřadnice bodu B^0 a

$\sphericalangle B_3 o_3 B_3^0$ jest úhel, o který musíme daný rovnoběžník otočiti do nové polohy.

180. Jest dán půdorys pravoúhlého trojúhelníku *ABC*, jest sestrojiti jeho nárys. $A(0, 2, 0)$, $B(6, 8, 0)$, $C(4, 3, z)$. (Obr. 94.)



Obr. 94.

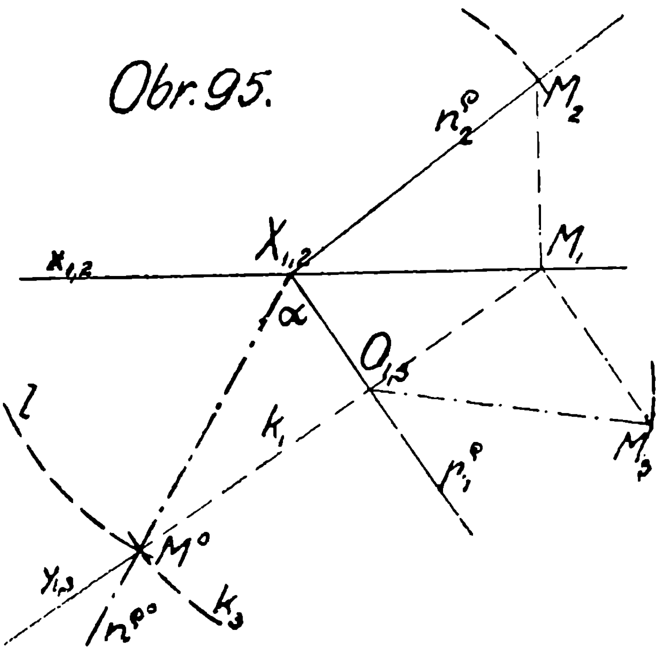
Otočíme trojúhelník kolem strany AB do π. C_1^0 jako vrchol pravého úhlu jest na kružnici průměru $A_1 B_1$ a na $C_1^0 C_1 \perp A_1 B_1$. Sklopíme-li rovinu otáčení ω, $\omega_1 \equiv C_1^0 C_1$, obdržíme $z_C = C_1 C_3$ a úhel α, o který nutno otočiti $\triangle ABC^0$.

181. Vyhledejte osu o, kolem které možno otočiti úsečku $\overline{AB}$ do stejně dlouhé $\overline{CD}$. $A(0, 2, 0)$, $B(6, 10, 0)$; $C(2, 6, 4)$, $D(6, 3, z)$.

z_D určíme z promítacího trojúhelníku I., v němž známe $\overline{C_1 D_1}$ a $\overline{CD} = \overline{A_1 B_1}$.

Bod A se otočí do C kolem osy o, která je v rovině symetrálné σ úsečky $\overline{AC}$; podobně sestrojíme rovinu souměrnosti ϱ bodů B, D a průsečnice obou rovin jest osa o.

182. Určete úhel stop roviny $\varrho\,(-4, 6, 3)$, $\alpha = \sphericalangle\, p^{\varrho}\, n^{\varrho}$. (Obr. 95.)



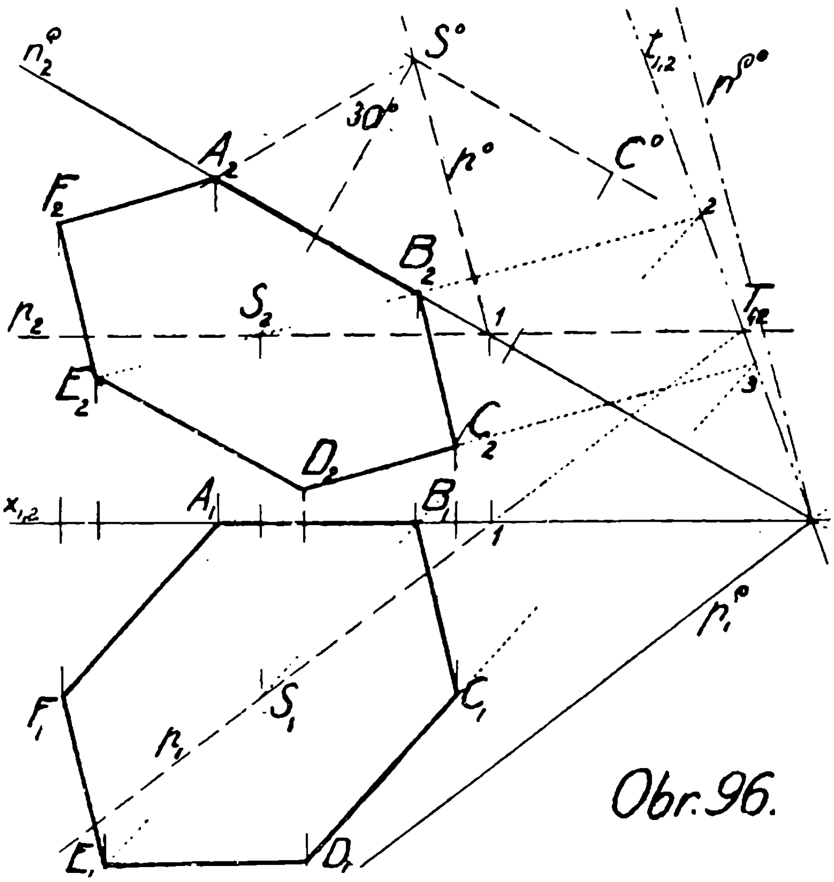
Sklopíme rovinu ϱ kolem stopy prvé (druhé) do $\pi\,(\nu)$. Zvolíme na stopě druhé (prvé) bod M, který otočíme do $\pi\,(\nu)$; $M_1 \ldots k_1 \perp p_1^{\varrho}$ $(M_2 \ldots k_2 \perp n_2^{\varrho})$, M^0 je ve vzdálenosti poloměru otáčení r od p_1^{ϱ} (n_2^{ϱ}), $r = \overline{O_1 M^0}$ $(= \overline{O_2 M^0})$, kde $O_1 \equiv p_1^{\varrho} \times k_1$, $(O_2 \equiv n_2^{\varrho} \times k_2)$. Poloměr r jest přepona trojúhelníku roviny: $r = O_1 M_3$, $M_1 M_3 \perp M_1 O_1$, $M_1 M_3 = z_M$ $(r = O_2 M_3$, $M_2 M_3 \perp M_2 O_2$, $M_2 M_3 = y_M)$. $M^0 X_{1,2} \equiv n^{\varrho^0}$ $(\equiv p^{\varrho^0})$. Úhel $p_1^{\varrho}\, n^{\varrho^0} = \alpha$.

Kratčeji provedeme úlohu sklopení roviny dané stopami, když spustíme $M_1 M^0 \perp p_1^{\varrho}$, kolem $X_{1,2}$ opíšeme kružnici l poloměrem $\overline{X_{1,2} M_2}$; $M_1 M^0 \times l \equiv M^0$.

183. Rovina ϱ je dána jednou stopou a úhlem obou stop α; jest sestrojiti stopu scházející. $\varrho\,(-4, 6, \zeta)$, $\alpha = 60^0$.

Zvolíme na n^{ρ^0} bod M^0, spustíme $M^0 M_1 \perp p_1^\rho$, M_1 na $x_{1,2}$, $M_1 M_2 \perp x_{1,2}$, opíšeme kružnici l kolem $X_{1,2}$ poloměrem $\overline{X_{1,2} M^0}$ a $M_2 \equiv M_1 M_2 \times l$. $M_2 X_{1,2} \equiv n_2^\rho$. (Viz obr. 95.)

184. Zobrazte pravidelný šestiúhelník v rovině ϱ, je-li jeho střed S a strana AB v nárysně. $\varrho\,(8, 6, 4{\cdot}5)$, $S\,(-1, y, 3)$. (Obr. 96.)



Obr. 96.

Sklopíme ϱ podle úlohy 182. do ν kolem n_2^ρ; v bodě S^0 přeneseme $\sphericalangle S_2 S^0 A_2 = 30^0$, $A_2 \equiv S^0 A_2 \times n_2^\rho$, $S^0 A_2$ jest strana hledaného šestiúhelníku, jehož nárys určíme ze sklopeného obrazu pomocí affinity; osou affinity jest n_2^ρ, paprsky affinity jsou $\perp n_2^\rho$.

Sestrojíme-li průsečnici dané roviny ϱ s rovinou totožnosti, jest tato osou affinity mezi nárysem a půdorysem šestiúhelníku; paprsky affinity jsou kolmice k $x_{1,2}$.

185. Zobrazte v rovině ϱ rovnoběžník, jehož dvě sousední strany jsou na stopách a střed je v S (—1·5, y, 1·5), ϱ (7·5, 7·5, 4·5).

Rovinu ϱ sklopíme do π kolem p_1^ϱ. Bodem S^0 vedeme $\overline{B_1 D^0}$, B_1 na p_1^ϱ, D^0 na $n^{\varrho''}$ tak, aby $\overline{B_1 S^0} = \overline{S^0 D^0}$; $S^0 \ldots$ $n^0 \parallel n^{\varrho 0}$, $n^0 \times p_1^\varrho \equiv 1$, $\overline{1 B_1} = \overline{1 A_1}$, $A_1 \equiv X_{1,2}$, $\overline{B_1 S^0} = \overline{S^0 D^0}$.

Ze sklopeného obrazu odvodíme pomocí affinity půdorys, z něho nárys.

186. V π a ν zobrazte geom. místo bodů, stejně vzdálených od přímek AC, BC. A (0, —3, 0), B (4·5, 0, 9), C (—3, 3, 7·5). (Obr. 97.)

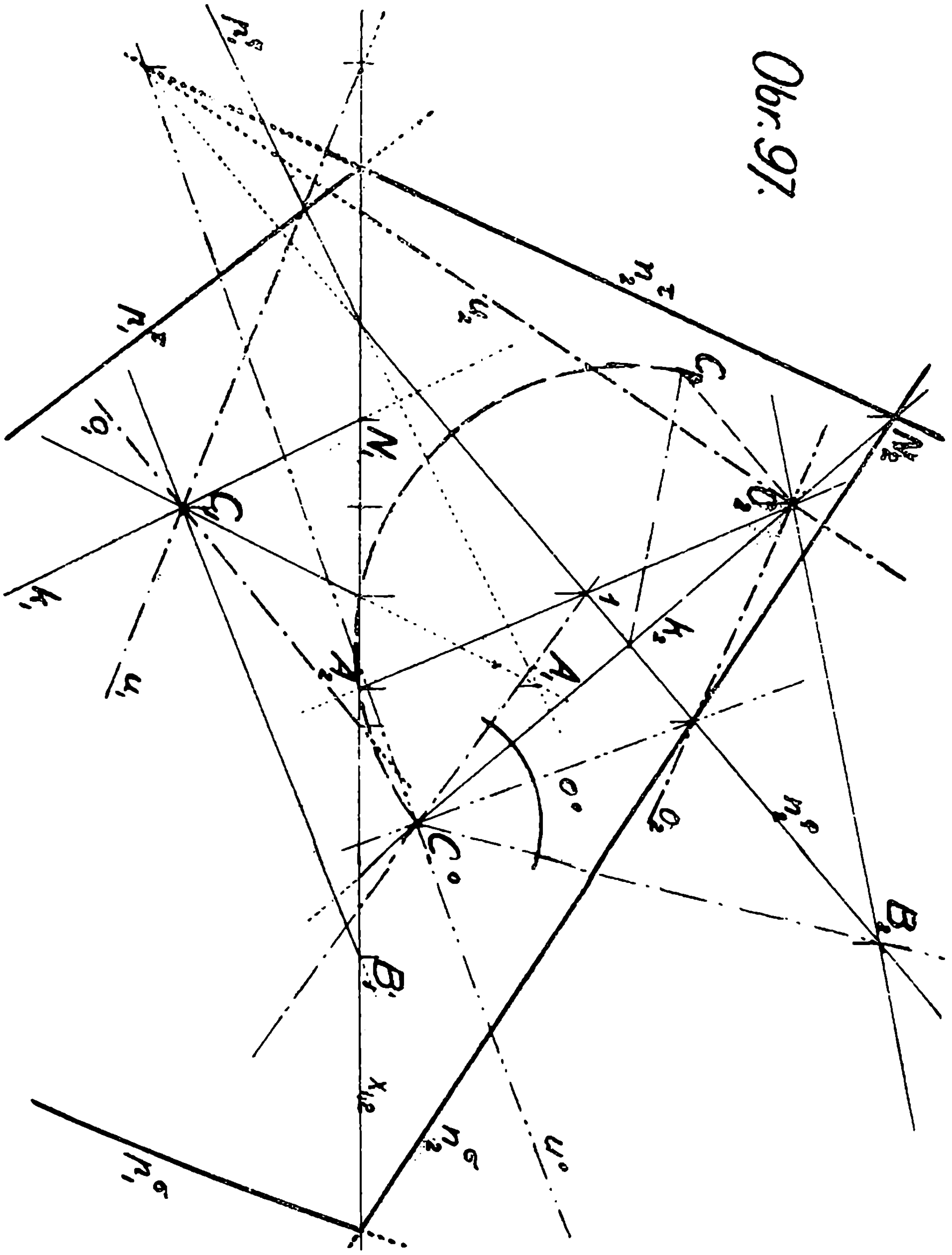
Hledaným geometrickým místem jsou stopy rovin, které půlí oba úhly přímek AC, BC.

Sklopíme bod C kolem n^ϱ, $\varrho \equiv (ABC)$, do ν, sestrojíme osy o, u $\sphericalangle A^0 C^0 B^0 = \sphericalangle 1\, C^0 B_2$ a úhlu vedlejšího, v bodě C vztyčíme $k \perp (ABC)$ a stopy rovin (o, k), (u, k) jsou hledané přímky.

187. V rovině $\varrho \equiv (A, B, C)$ sestrojte přímky, jež jsou vzdáleny od bodu B 6 cm, od C 3 cm. A (—3, 4·5, 1·5), B (—4, 7·5, 3), C (4·5, 1·5, 8).

Rovinu ϱ sklopíme kolem stopy p_1^ϱ, určené stopníky přímek AB, BC; $B^0 B_1 \perp p_1^\varrho$, $B^0 O_1 = O_1 B_3$, $O_1 \equiv p_1^\varrho \times B^0 B_1$, $B_1 B_3 = z_B$; $C_1 C^0 \perp p_1^\varrho$, $C^0 \equiv C_1 C^0 \times B^0 P_1$, kde P_1 je stopník přímky BC. Kolem B^0 opíšeme kružnici k poloměrem 6, kolem C_1 kružnici l poloměrem 3, sestrojíme společné tečny kružnic k, l a převedeme rovinu ϱ do původní polohy. Označíme-li průsečík tečen vnitřních V^0, vnějších U^0, najdeme V_1, U_1 na $B_1 C_1$ a spojíme V_1, U_1 s průsečíky tečen se stopou p^ϱ.

188. V rovině $\varrho \equiv (a \parallel b)$ jest dán střed S kosočtverce $ABCD$, jehož dvě strany jsou

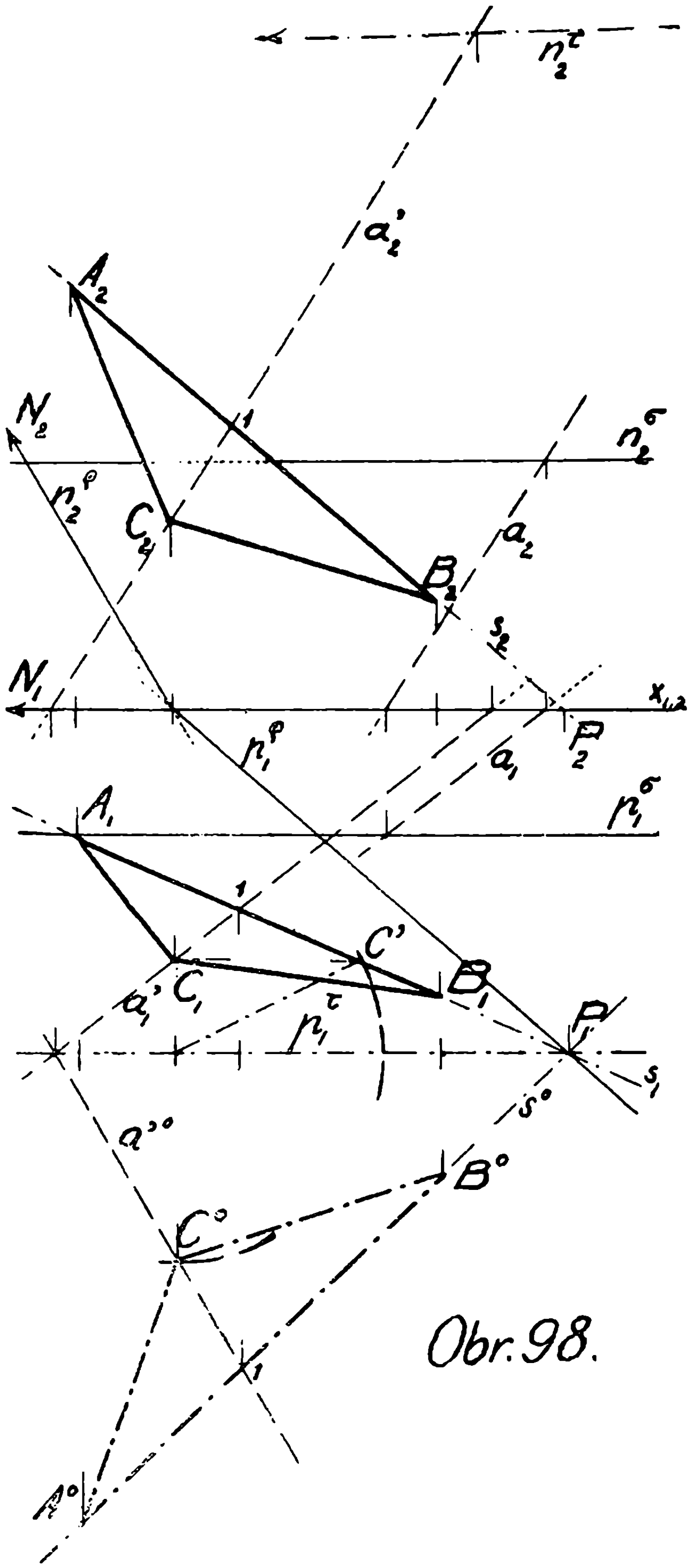


Obr. 97.

n a a, b a úhlopříčka $\overline{AC} = 6$. $a\,[M\,(3, 3, 4),\ R\,(-4, 6, -4)]$, $b\,[Q\,(3, 0, 7)]$, $S\,(0, y, z)$.

Bod S jest na ose pásu $(a \parallel b)$; z toho sestrojíme jeho souřadnice.

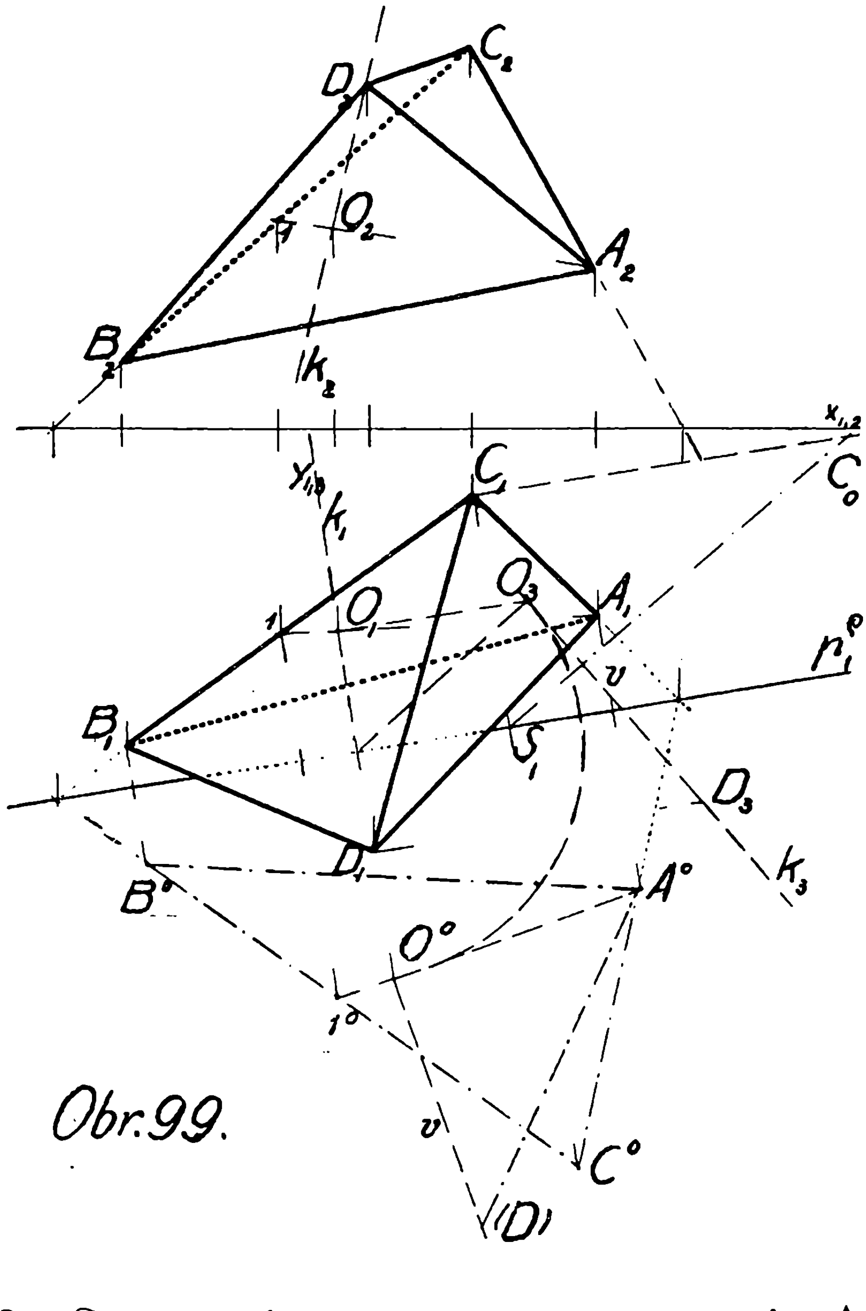
Kolem p^ρ sklopíme rovinu, bod S a přímky a, b do π; kolem S^0 opíšeme poloměrem $r = 3$ kružnici, která protne přím-



n_2^τ
a_2'
A_2
N_2
n_2^σ
n_2^ρ
C_2
a_2
B_2
s_2
N_1
$x_{1,2}$
P_2
p_1^ρ
a_1
A_1
p_1^σ
C'
C_1
B_1
a_1'
p_1^τ
P_1
s_1
s°
a'°
B°
C°
A°

Obr. 98.

ky a^0, b^0 v bodech A^0, C^0 a $(A), (C)$. Úhlopříčka $B^0 D^0 \perp A^0 C^0$ $[(B)(D) \perp (A)(C)]$. Ze sklopených obrazů odvodíme půdorysy A_1, B_1, C_1, D_1 na a, b_1 kolmicemi k p_1^ρ, $A^0 A_1 \perp p_1^\rho$, $A_1 \equiv$ $\equiv A^0 A_1 \times a_1$.



Obr. 99.

189. Sestrojte rovnoramenný $\triangle ABC$, dán-li jeho vrchol C, půdice AB má ležeti v ϱ, a rovina $(ABC) \parallel \sigma$. $C(-3{\cdot}5, 4, 3)$, $\overline{AC} = \overline{BC} =$ $= 4{\cdot}5$, $\varrho(-3{\cdot}5, 3, -6)$, $\sigma(\infty, 2, 4)$. (Obr. 98.)

Bodem C sestrojíme rovinu $(A\,B\,C) \equiv \tau \parallel \sigma$; vyšetříme průsečnici $s \equiv \tau \times \varrho$, na níž leží strana $A\,B$. Sklopíme rovinu τ do π kolem p_1^{τ}, okolo C^0 opíšeme oblouk poloměrem 4·5 a ten protne přímku s^0 v bodech A^0, B^0.

190. Jest dán $\triangle A\,B\,C$; zobrazte přímý jehlan o pobočné hraně $A\,D = 6$ cm. $A\,(3{\cdot}5, 3, 2{\cdot}5)$, $B\,(-4, 5, 1)$, $C\,(1{\cdot}5, 1, 6)$. (Obr. 99.)

Sestrojíme osu trojúhelníku, t. j. kolmici $k \perp (A\,B\,C)$ ve středu O kružnice trojúhelníku opsané. Sklopíme rovinu $(k\,A)$ do půdorysny a protneme k^0 kružnicí poloměru $A^0\,(D) = 6$ kolem A^0 opsanou. z_D stanovíme pomocí III. průmětny.

191. K mimoběžkám $a \equiv P\,N$, $b \equiv B\,Q$ sestrojte příčku $p \parallel \nu$, aby $\sphericalangle ap = \sphericalangle bp$. $P\,(-4{\cdot}5, 7{\cdot}5, 0)$, $N\,(3, 0, 6)$, $B\,(9, 9, 9)$, $Q\,(-7{\cdot}5, 0, 4{\cdot}5)$.

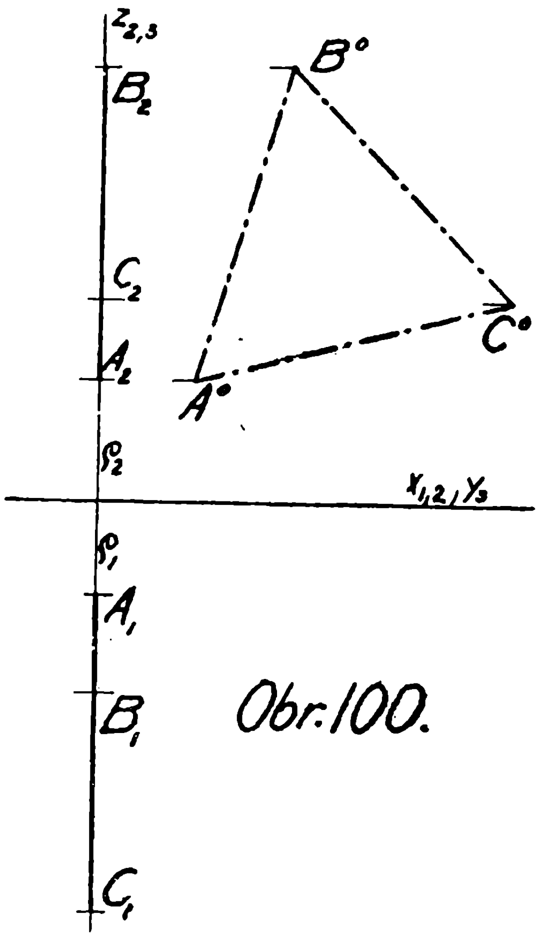
Na přímce a zvolíme bod A, na př. $A_1 \equiv a_1 \times b_1$, jím vedeme přímku $c \parallel b$, rovinu $(a\,c)$ sklopíme do ν kolem $n_2^{(ac)}$, ve sklopení sestrojíme osy o, u obou úhlů přímek a^0, c^0 a odvodíme jejich nárysy a půdorysy. Osami o, u vedeme roviny $\varrho, \sigma \perp (a\,c)$ (viz úl. 186, obr. 97) a vyšetříme jejich stoposměrné přímky druhých osnov n, n'. K daným mimoběžkám sestrojíme příčky rovnoběžné se směrem n, n'.

V. Zobrazování průmětů mnohoúhelníků.

192. V rovině $\varrho \perp x$ sestrojte trojúhelník stejnostranný nad stranou $\overline{A\,B}$. $A\,(0, 1{\cdot}5, 2)$, $B\,(0, 3, 7)$.

Průměty roviny jsou totožny se stopami $\varrho_1 \equiv p_1^{\varrho} \equiv A_1\,B_1$, $\varrho_2 \equiv n_2^{\varrho} \equiv A_2\,B_2$. Považujeme ϱ za III. hlavní průmětnu; 3. průmět $\triangle A\,B\,C$ jest ve skutečné velikosti, a z něho odvodíme nárys a půdorys. (Obr. 100.)

193. Sestrojte průměty čtverce $ABCD$, jehož osou (kolmice ve středu na rovinu obrazce) jest přímka $o \equiv PM$. A (1·5, 7·5, 8), P (—4·5, 4, 0), M (7·5, 4, 10·5). (Obr. 101.)



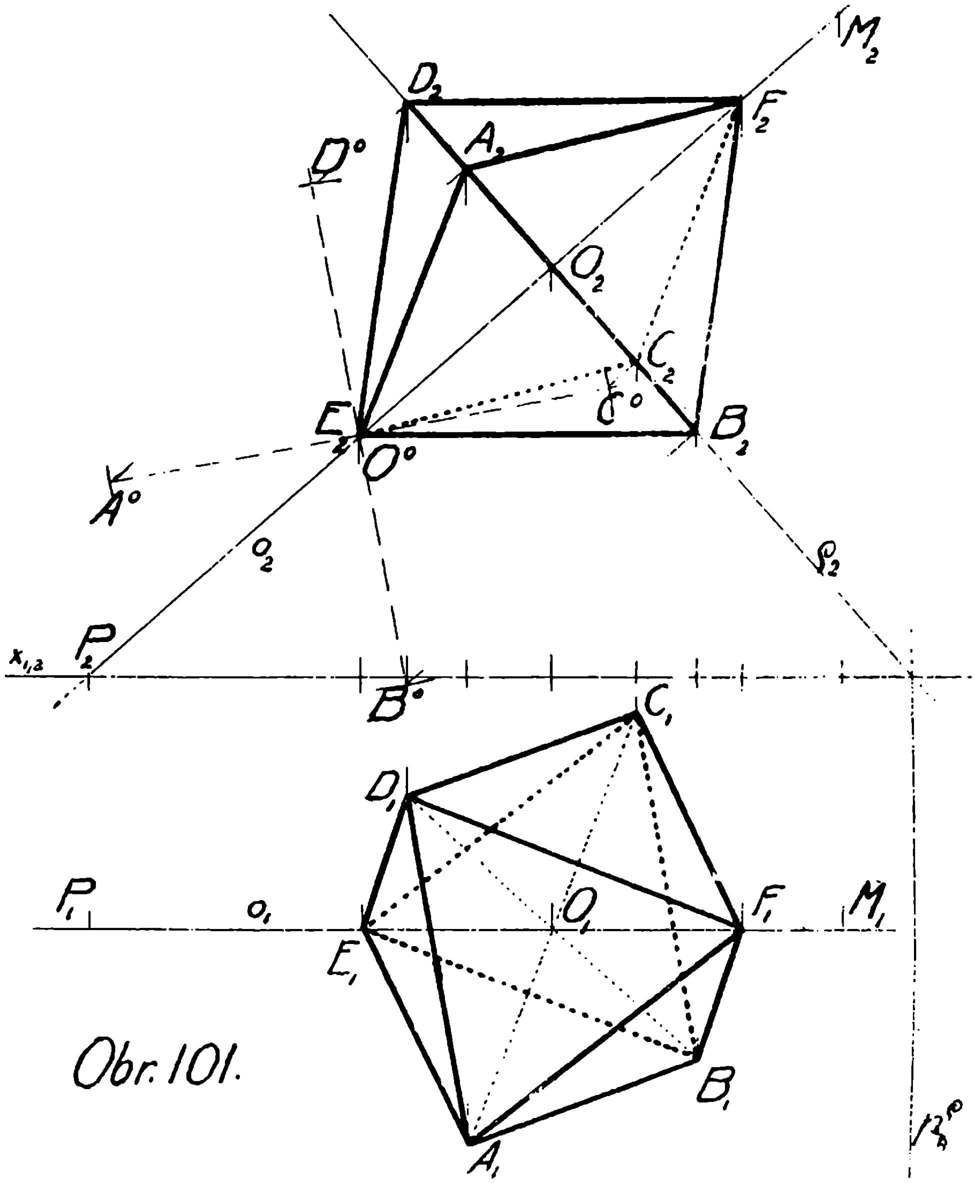
Obr. 100.

Bodem A proložíme rovinu $\varrho \perp o$, $A_2 \ldots \varrho_2 \perp o_2$; $\varrho_2 \times \times o_2 \equiv O_2$ jest nárys středu čtverce, sklopíme rovinu ϱ do ν (považujeme ϱ za III. vedlejší průmětnu), ve sklopení zobrazíme skutečnou velikost čtverce, jehož střed O^0 a vrchol A^0 známe a odtud odvodíme nárys čtverce na ϱ_2, $B^0 B_2 \perp \varrho_2$, a půdorys pomocí y souřadnic, $B_0 B_2 = y_B = B_1 \dashv x_{1,2}$.

194. Nad čtvercem úlohy předchozí zobrazte pravidelný osmistěn. (Obr. 101.)

Osa čtverce MP jest osou osmistěnu; naneseme na ni od středu O polovici úhlopříčky čtverce $\overline{O_2 E_2} = \overline{O_2 F_2} = \overline{O^0 A^0}$ a sestrojíme tak další dva vrcholy osmistěnu.

195. V rovině $\varrho\,(\infty, 4{\cdot}5, 7{\cdot}5)$ zobrazte pravidelný 6-úhelník, jehož dvě protější strany

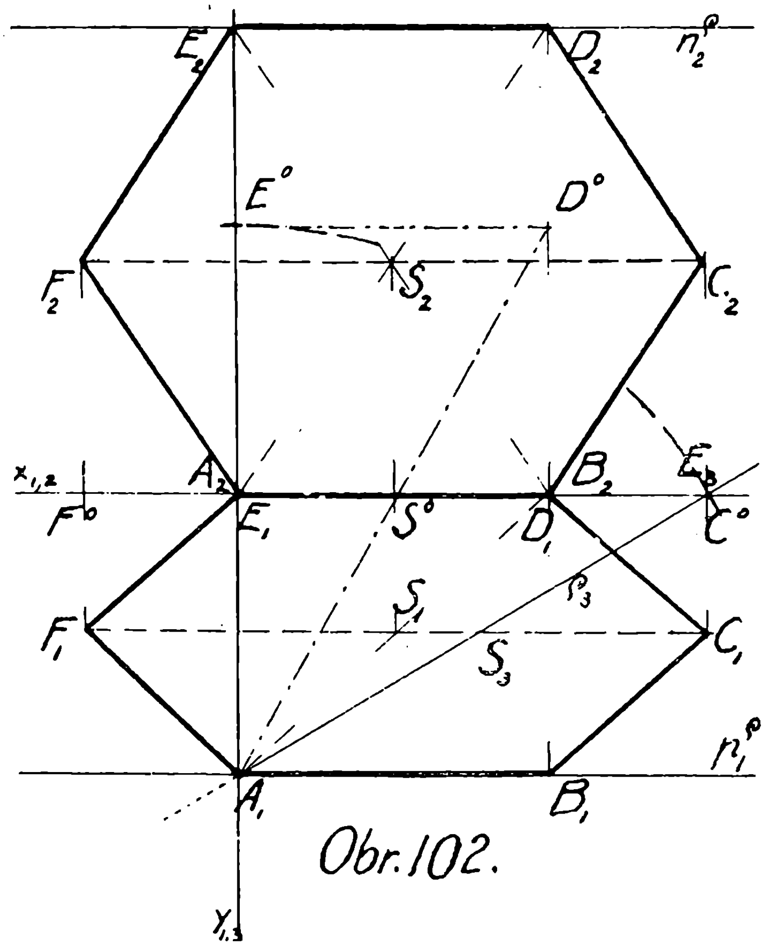


jsou ve stopách roviny ϱ a jeden vrchol jest $A\,(0, 4{\cdot}5, 0)$, $x_B > x_A$. (Obr. 102.)

Rovinu ϱ sklopíme do π, $A_1 E^0 \perp p_1^{\varrho}$, $A_1 E^0 = A_1 E_3$, $y_{1,3} \equiv$ $\equiv A_1 A_2$, kde E je vrchol šestiúhelníku na úhlopříčce $AE \perp AB$ (E je v ν, proto $E_3 \equiv \varrho_3 \times z_3$). V A_1 narýsujeme $\sphericalangle 60^0 =$

$= B_1 A_1 D^0$, B_1 neznámý vrchol na p_1^ϱ, D^0 na n^{ϱ^0}; $A_1 D^0$ rozpůlíme, obdržíme S^0 a sestrojíme sklopený obraz $A_1 B_1 \ldots F^0$, když kolem S^0 opíšeme kružnici poloměrem $A_1 S^0$.

196. Zobrazte stejnostranný $\triangle ABC$ o straně AB v ose x. $C\,(2, 4\cdot5, 3)$.



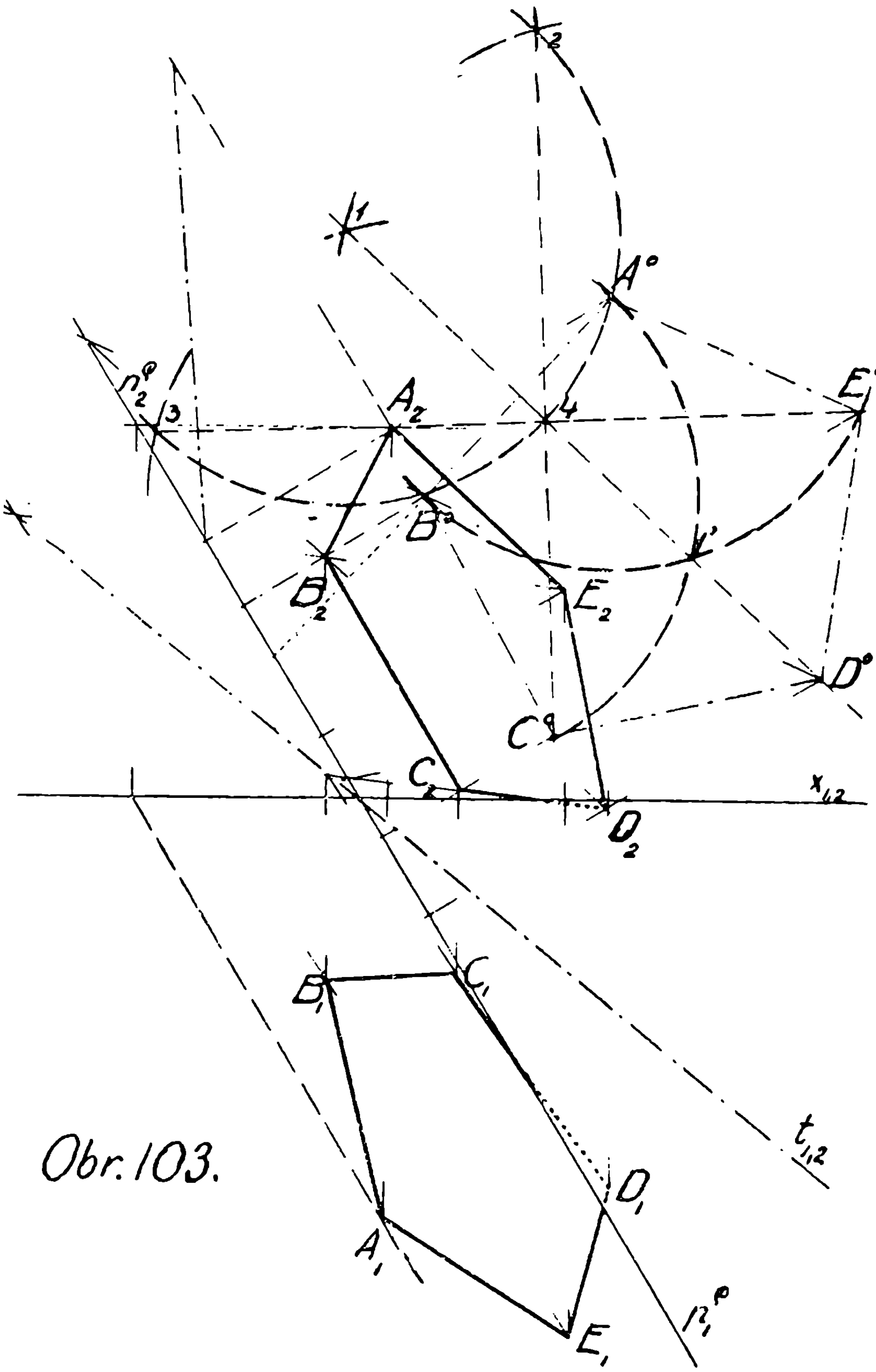
Obr. 102.

Sklopíme rovinu $(C_1\,x)$ kolem x do nárysny, $C_2 C^0 \perp x_{1,2}$, $O_2 C^0 \times x_{1,2} \equiv O_{1,2}$, $O_2 C^0 = O_2 C_3$, $C_2 C_3 \perp C_2 C_1$, $C_2 C_3 = y_C$. Narýsujeme $\sphericalangle A_2 C^0 O_2 = 30^0$, $C^0 A_2 \times x_{1,2} \equiv A_2$ a tím je $\triangle ABC$ určen.

197. V rovině ϱ zobrazte čtverec o úhlopříčce AC. $\varrho\,(-4\cdot5, 3, 7\cdot5)$, $A\,(-6, y, 7\cdot5)$, $C\,(2, 3, z)$.

Sklopíme rovinu ϱ do π; $A_1 A^0 \perp p_1^\varrho$, $A_1 A^0 \times p_1^\varrho \equiv O_1$, $A_1 A_3 \perp A_1 A^0$, $A_1 A_3 = z_A$, $A_3 O_1 = r = O_1 A^0$. Ve sklopení sestrojíme nad $A^0 C^0$ čtverec, $A^0 C^0 \times A_1 C_1 \equiv 1$ na p_1^ϱ, pak

$B^0 B_1 \perp p_1^\varrho$, $D^0 D_1 \perp p_1^\varrho$, $B^0 D^0 \times B_1 D_1 \equiv 2$ na p_1^ϱ, $B^0 D^0 \times$ $\times A^0 C^0 \equiv S^0$, $B_1 D_1 \times A_1 C_1 \equiv S_1$, $S^0 S_1 \perp p_1^\varrho$. Nárys čtverce je v affinitě s půdorysem, paprsky jsou kolmy k $x_{1,2}$, osou affinity jest průsečnice roviny ϱ s rovinou totožnosti; $t_{1,2} \equiv$ $\equiv T_{1,2} X_{1,2}$, $T_{1,2} \equiv p_1 \times p_2$, kde p jest stoposměrná přímka roviny ϱ jdoucí bodem A, $X_{1,2} \equiv p_1^\varrho \times n_2^\varrho$.



Obr. 103.

198. V rovině ϱ, kolmé k rovině totožnosti, zobrazte pravidelný 5-úhelník nad stranou AB. $\varrho\,(4{\cdot}5, -7{\cdot}5, \zeta)$, $A\,(6{\cdot}5, y, 6)$, $B\,(4, 3, z)$. (Obr. 103.)

Rovina kolmá k rovině totožnosti má $n_2^{\rho} \equiv p_1^{\rho}$. Rovinu ϱ sklopíme kolem n_1^{ρ} do ν a tam sestrojíme pravidelný pětiúhelník nad stranou $A^0 B^0$. Opíšeme kolem A^0, B^0 poloměrem $\overline{A^0 B^0}$ kružnice, jež se protnou v bodech 1, 1'; okolo 1 opíšeme týmž poloměrem další kružnici, která protne kružnice narýsované v bodech 2, 3 a symetrálu strany $A^0 B^0$, t. j. $\overline{11'}$, v bodě 4. Spojnice $\overline{24}$, $\overline{34}$ protnou první kružnice ve vrcholech pětiúhelníku C^0, E^0; vrchol D^0 je na $\overline{11'}$, $C^0 D^0 = E^0 D^0 = A^0 B^0$.

199. Zobrazte pravidelný 6-úhelník, jehož vrchol jest A a úhlopříčka CE v přímce $u \equiv PN$. $A\,(1{\cdot}5, 14, 7{\cdot}5)$, $P\,(4{\cdot}5, 11, 0)$, $N\,(-7{\cdot}5, 5, 10{\cdot}5)$.

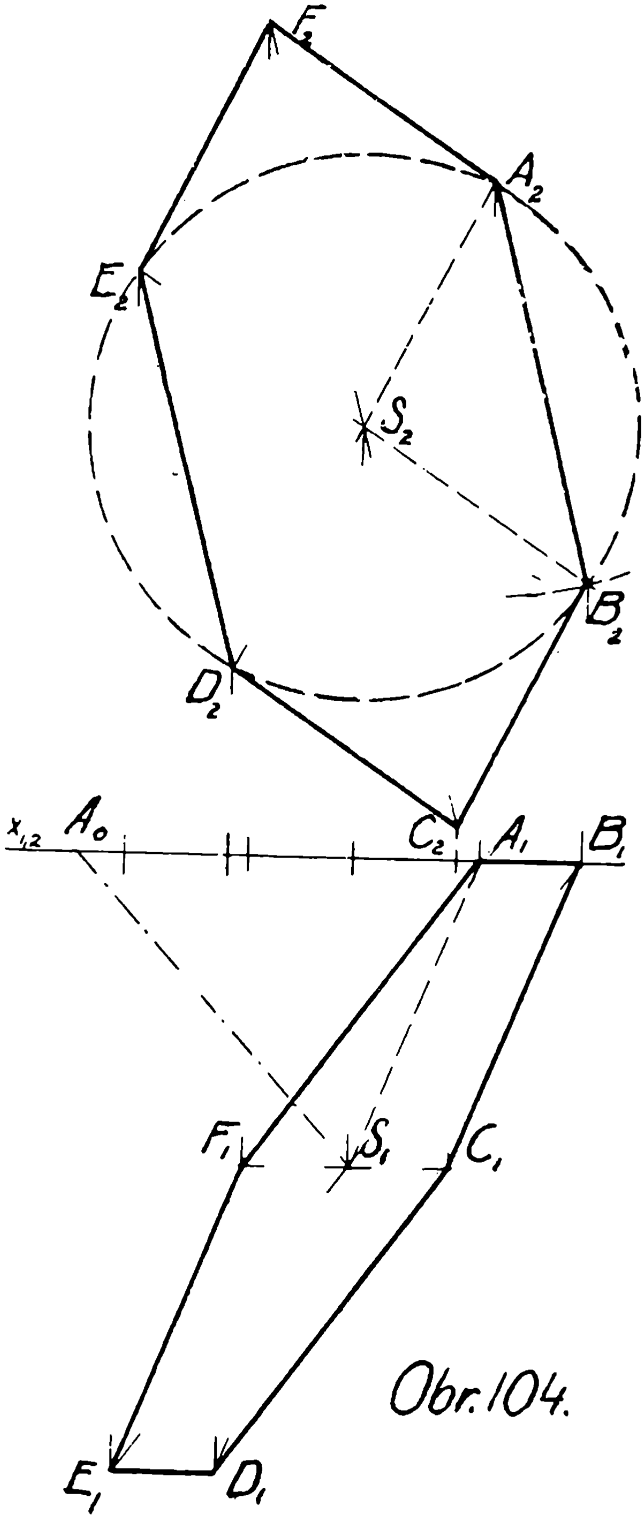
Bodem A vedeme přímku $m \parallel u$, rovinu $(m\,u) = \varrho$ sklopíme kolem p^{ρ} do π; $A_1 A^0 \perp p_1^{\rho}$, $A_1 A^0 \times p_1^{\rho} \equiv O_1$, $O_1 A^0 = O_1 A_3$, $A_1 A_3 = z_A$, $A_1 A_3 \perp O_1 A_1$. $m^0 \equiv A^0 Q_1$, kde Q jest stopník přímky m, $u^0 \parallel m^0$ bodem P_1.

Narýsujeme $\sphericalangle\, m^0, A^0 S^0 = 60^0$, $S^0 \equiv A^0 S^0 \times u^0$, S^0 jest střed sklopeného obrazu šestiúhelníku, který snadno narýsujeme a z něho odvodíme půdorys pomocí affinity.

200. Sestrojte pravidelný 6-úhelník, který má stranu AB v ν a střed $S\,(0, 5, 7)$; $A\,(2, 0, 11)$, $x_B > x_A$. (Obr. 104.)

Bod B_2 jest na kružnici opsané kolem S_2 poloměrem $\overline{S_2 A_2}$, $\overline{A_2 B_2} = \overline{AB} = \overline{S_1 A_0}$; úhlopříčka $CF \parallel \nu$ má nárys $C_2 F_2 \parallel A_2 B_2$, $\overline{C_2 F_2} = 2\, A_2 B_2$, vrcholy D_2, E_2 jsou souměrné s A_2, B_2 podle S_2. $C_1 F_1 \parallel x_{1,2}$, D_1, E_1 jsou souměrny s A_1, B_1 podle S_1.

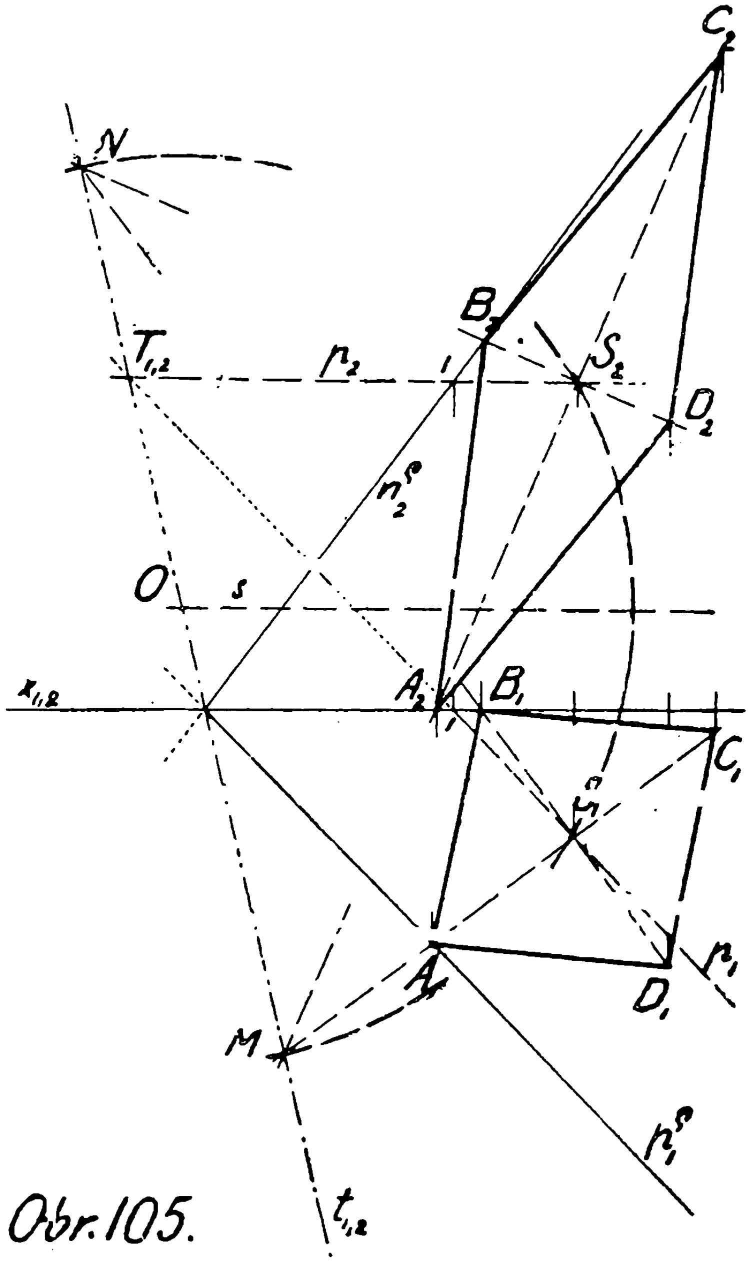
201. V rovině ϱ jest dán střed S rovnoběžníku, jehož oba průměty jsou kosočtverce; dva sousední vrcholy rovno-



Obr. 104.

běžníku jsou v průmětnách. ϱ (—6, 6, 8), S (0, 2, z).

Oba průměty rovnoběžníku jsou v affinitě, jejíž osou jest průsečnice roviny ϱ s rovinou totožnosti.

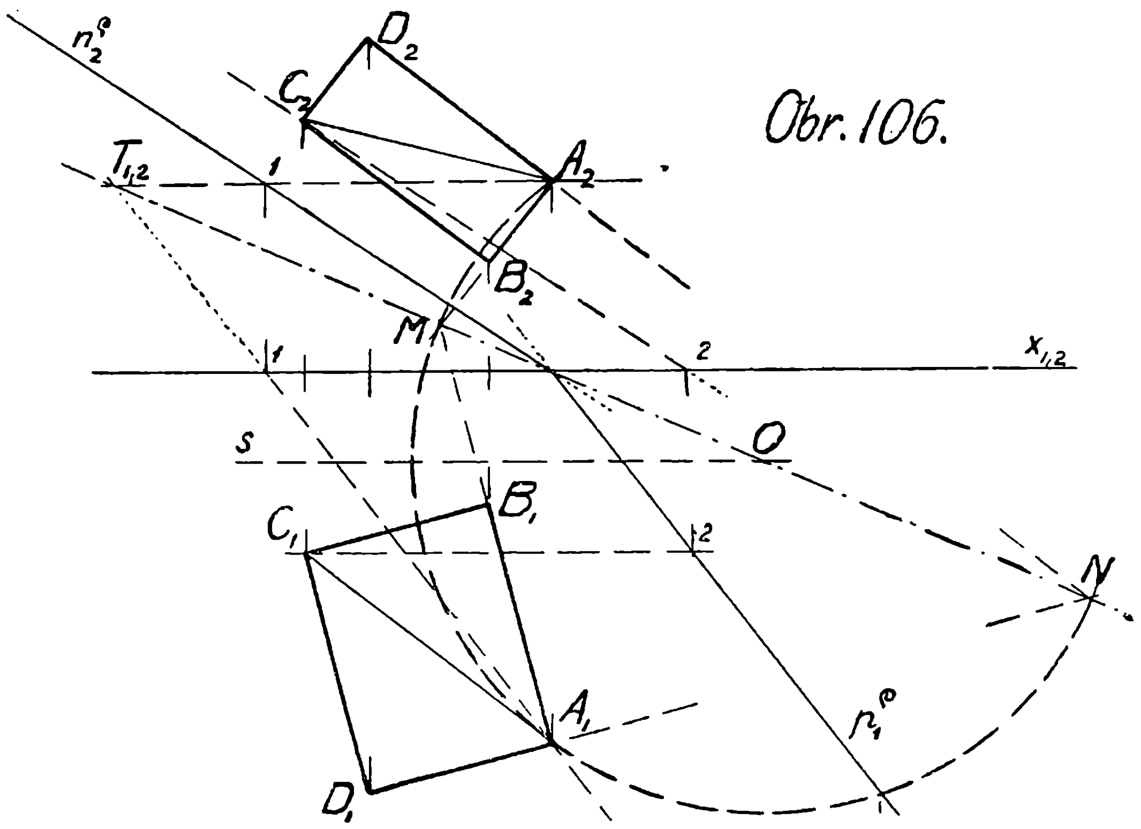


Obr. 105.

Bodem $S_1 \ldots p_1 \parallel p_1^\varrho$, $p_1 \times x_1 =$ 1, druhý průmět bodu 1 na n_2^ϱ, a jím prochází $p_2 \parallel x_{1,2}$; $p_1 \times p_2 \equiv T_{1,2}$, $T_{1,2} X_{1,2} \equiv t_{1,2}$ jest osa affinity. Sestrojíme symetrálu s úsečky $\overline{S_1 S_2}$, $\overline{s \times} \times t_{1,2} \equiv O$, kružnice opsaná kolem O poloměrem $\overline{O S_1} = \overline{O S_2}$

protne $t_{1,2}$ v bodech M, N. Na spojnicích $M S_1 \perp N S_1$, $M S_2 \perp$ $\perp N S_2$ jsou úhlopříčky hledaného rovnoběžníku; stopník přímky $M S_1$ jest $A_1 \equiv M S_1 \times p_1^{\varrho}$, podobně $B_2 \equiv N S_2 \times n_2^{\varrho}$.

202. V rovině ϱ jest dána úhlopříčka AC rovnoběžníku $ABCD$, jehož oba průměty jsou pravoúhelníky. $\varrho (6, -8, 4)$, $A (6, 6, z)$, $C (2, y, 4)$. (Obr. 106.)

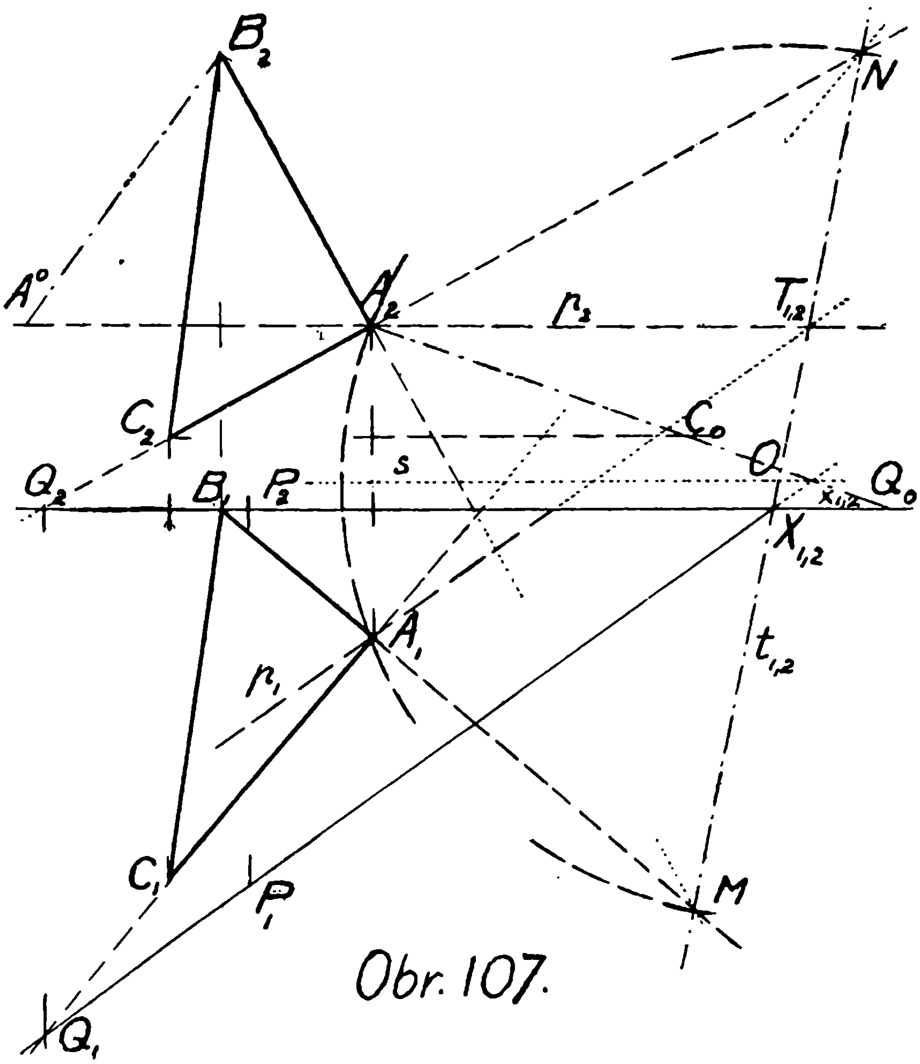


Vyšetříme osu affinity $t_{1,2} \equiv \varrho \times \tau$, již protne symetrála s úsečky $A_1 A_2$ v bodě $O \equiv s \times t_{1,2}$; kolem O opíšeme kružnici poloměrem $\overline{O A_1} = \overline{O A_2}$, která protne $t_{1,2}$ v bodech M, N. Spojnice $M A_1 \perp N A_1$, $M A_2 \perp N A_2$ jsou směry stran průmětů hledaného rovnoběžníku.

203. V rovině $\varrho \equiv (P X A)$ jest sestrojiti rovnoramenný $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$; průměty jeho ramen svírají pravé úhly a vrchol B

jest v nárysně, $x_B < x_A$, $y_C < y_A$. $P\,(0, 6, 0)$, $x\,(8{\cdot}5, 0, 0)$, $A\,(2, 2, 3)$. (Obr. 107.)

Vyšetříme osu affinity mezi prvním a druhým průmětem, $t_{1,2} \equiv \varrho \times \tau$; symetrála s bodů A_1, A_2 protne osu v bodě $O \equiv s \times t_{1,2}$. Opíšeme kružnici kolem O poloměrem $\overline{OA_1} =$

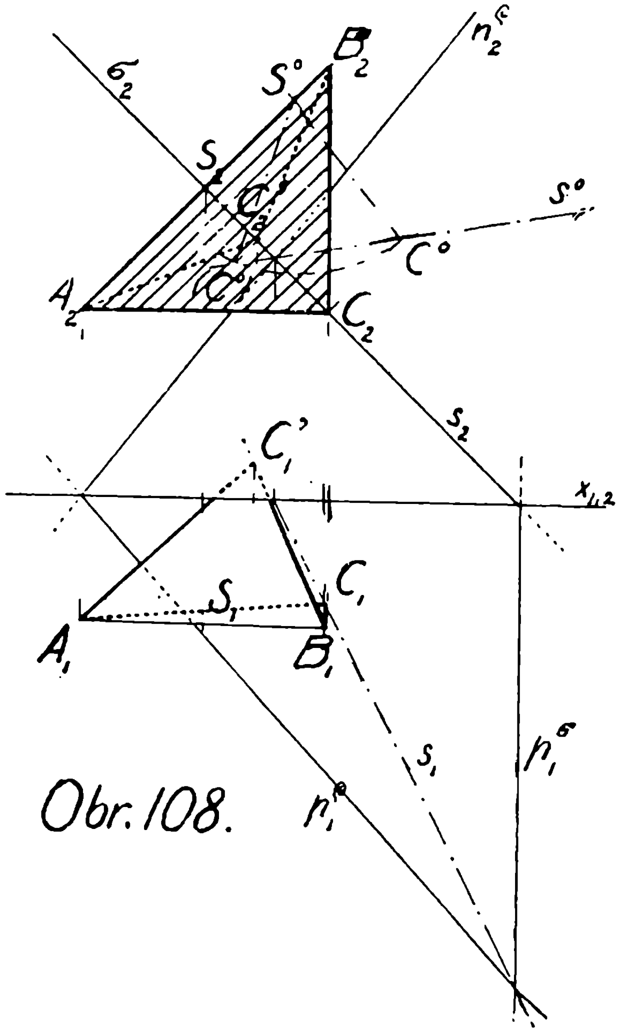


Obr. 107.

$= \overline{OA_2}$, ta protne osu affinity v bodech M, N a jejich spojnice s A_1, A_2 obsahují průměty ramen $\triangle ABC$. Vrchol B jest nárysný stopník přímky MA, délku AB naneseme od bodu A na přímku AN podle úlohy 29.

204. Zobrazte pravoúhlý rovnoramenný $\triangle ABC$ s vrcholem pravého úhlu C v rovině $\varrho\,(-4, 4{\cdot}5, 5)$, $A\,(-4, 2, 3)$, $B\,(0, 2, 7)$. (Obr. 108.)

Půlícím bodem S přepony AB vedeme rovinu $\sigma \perp AB$, vyšetříme $s \equiv \sigma \times \varrho$, sklopíme rovinu σ, opíšeme kružnici kolem S^0 poloměrem $\overline{SA}$ a ta protne s^0 ve dvou (v jednom, žádném) bodech $C^0, (C)^0$ podle toho, je-li $\overline{SA} \gtreqless S \dashv s^0$. ($\overline{S_2 A_2}$ ve skutečné velikosti.)



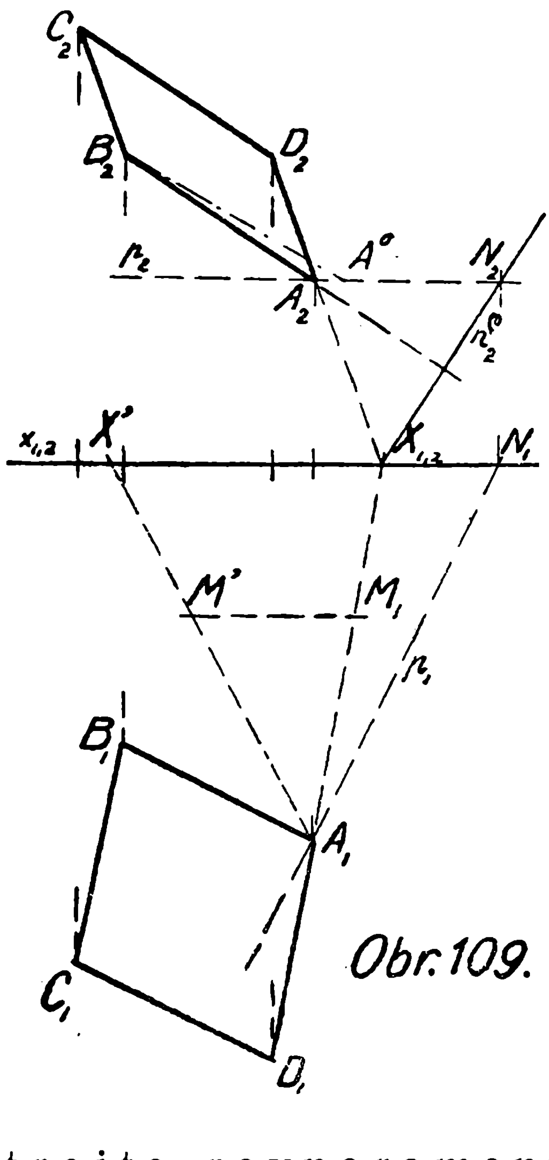
Obr. 108.

205. Sestrojte rovnoramenný pravoúhlý $\triangle$ ABC, je-li dána odvěsna AC, C vrchol pravého úhlu, a vrchol B má ležeti v rovině ϱ. $A\,(2, 0, 8)$, $C\,(-2, 4, 4)$, $\varrho\,(9, 45^0, 150^0)$.

Bodem C proložíme rovinu $\sigma \perp CA$, vyšetříme $s \equiv \sigma \times \varrho$, sklopíme rovinu σ kol p_1^σ do π, okolo C^0 opíšeme kružnici poloměrem $\overline{AC}$, která protne s^0 v $B^0, (B)^0$. (Omezení!)

206. Zobrazte čtverec, jehož strana AD prodloužena, protíná osu x. A (—1, 6, 3), B (—4, 4·5, 5).

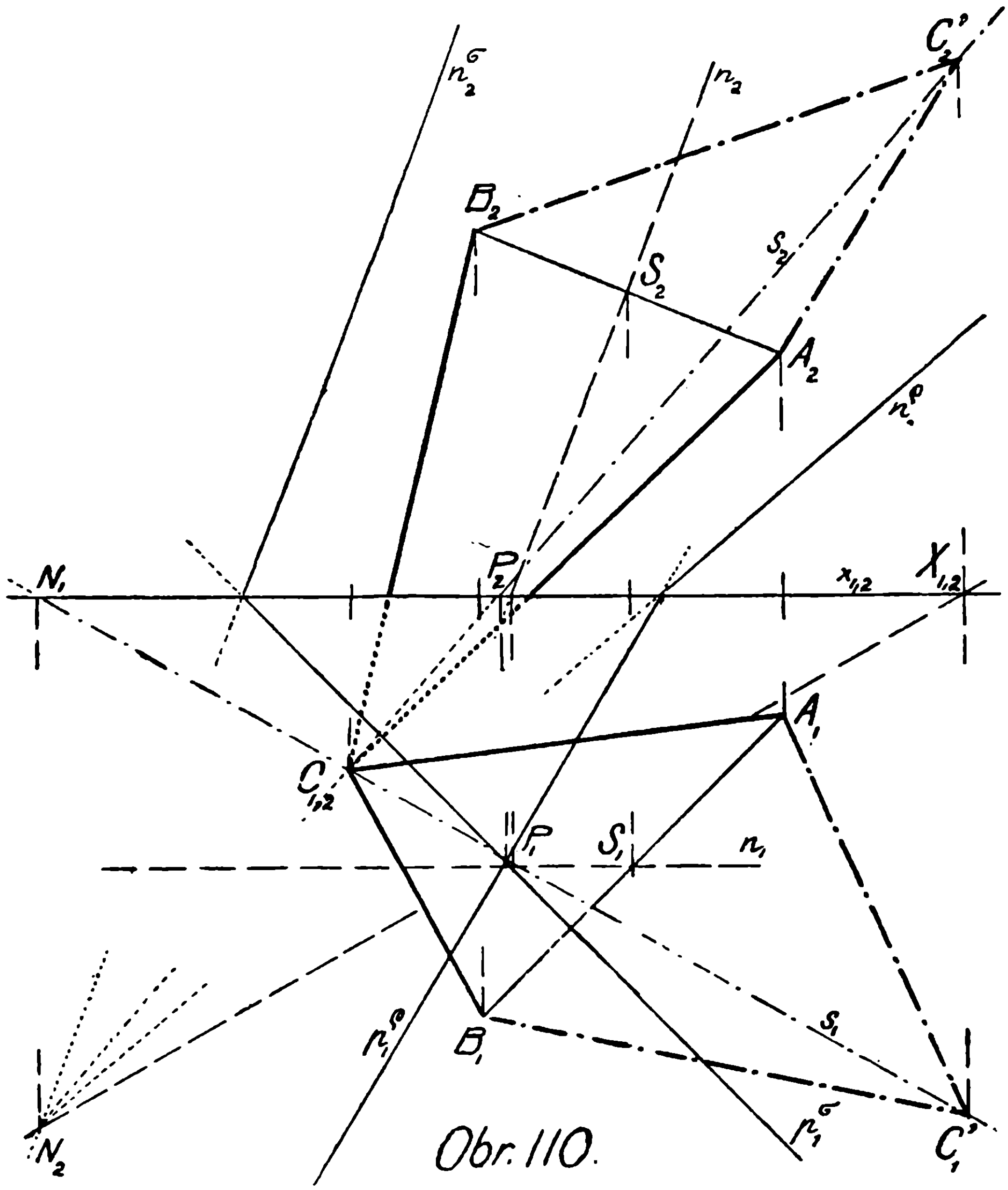
V bodě A sestrojíme rovinu $\varrho \perp AB$, vyšetříme její průsečík s osou x, $X \equiv \varrho \times x$, a na přímku AX naneseme od bodu A délku AB. (Obr. 109.) ($\overline{A_1 M'} = \overline{B_2 A^0} = \overline{AB}$, $\overline{A_1 D_1} = \overline{A_1 M_1}$.)



Obr. 109.

207. Sestrojte rovnoramenný $\triangle$ ABC nad základnou AB tak, aby vrchol C byl v rovině ϱ a $y_C = z_C$. A (5, 2, 4), B (0, 7, 6), ϱ (3, 5, —2·5). (Obr. 110.)

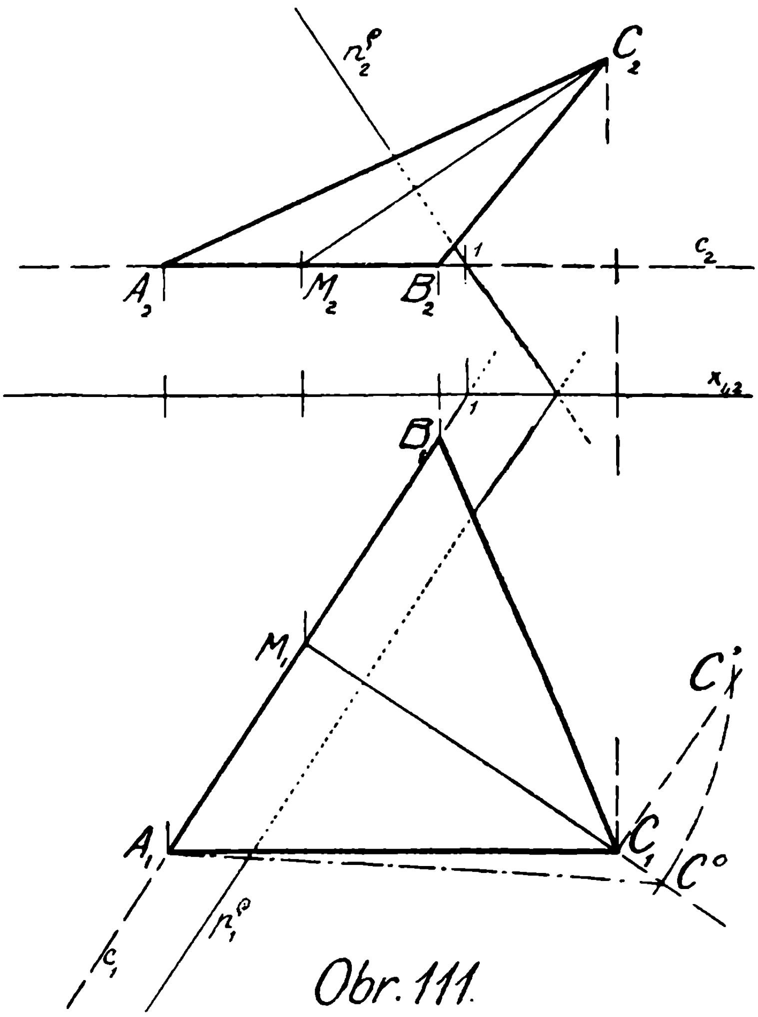
Sestrojíme rovinu souměrnosti σ úsečky AB a její průsečnici s rovinou ϱ, $s \equiv \sigma \times \varrho$. Průsečíky přímky s s rovinami souměrnosti a totožnosti jsou body, které vyhovují úloze.



Obr. 110.

208. Jest dána výška CM $\triangle$ ABC stejnostranného, jehož základna AB jest rovnoběžná s půdorysnou. C (5, 7·5, 5·5), M (0, 4, 2). (Obr. 111.)

Bodem $M \ldots \varrho \perp CM$. Strana AB jest rovnoběžná s p^{ρ}; vedeme bodem $M \ldots c \parallel p^{\rho}$. Rovinu $\sigma \equiv (c, MC)$ sklopíme do roviny $\parallel \pi$ proložené přímkou c, $\overline{C_1 C'} \perp \overline{M_1 C_1}$, $C_1 C' = C_2 \dashv c_2$, a sestrojíme pravou velikost stejnostranného $\triangle ABC$; ve vrcholu C^0 narýsujeme $\sphericalangle A^0 C^0 M^0 = 30^0$ a odvodíme průměty.



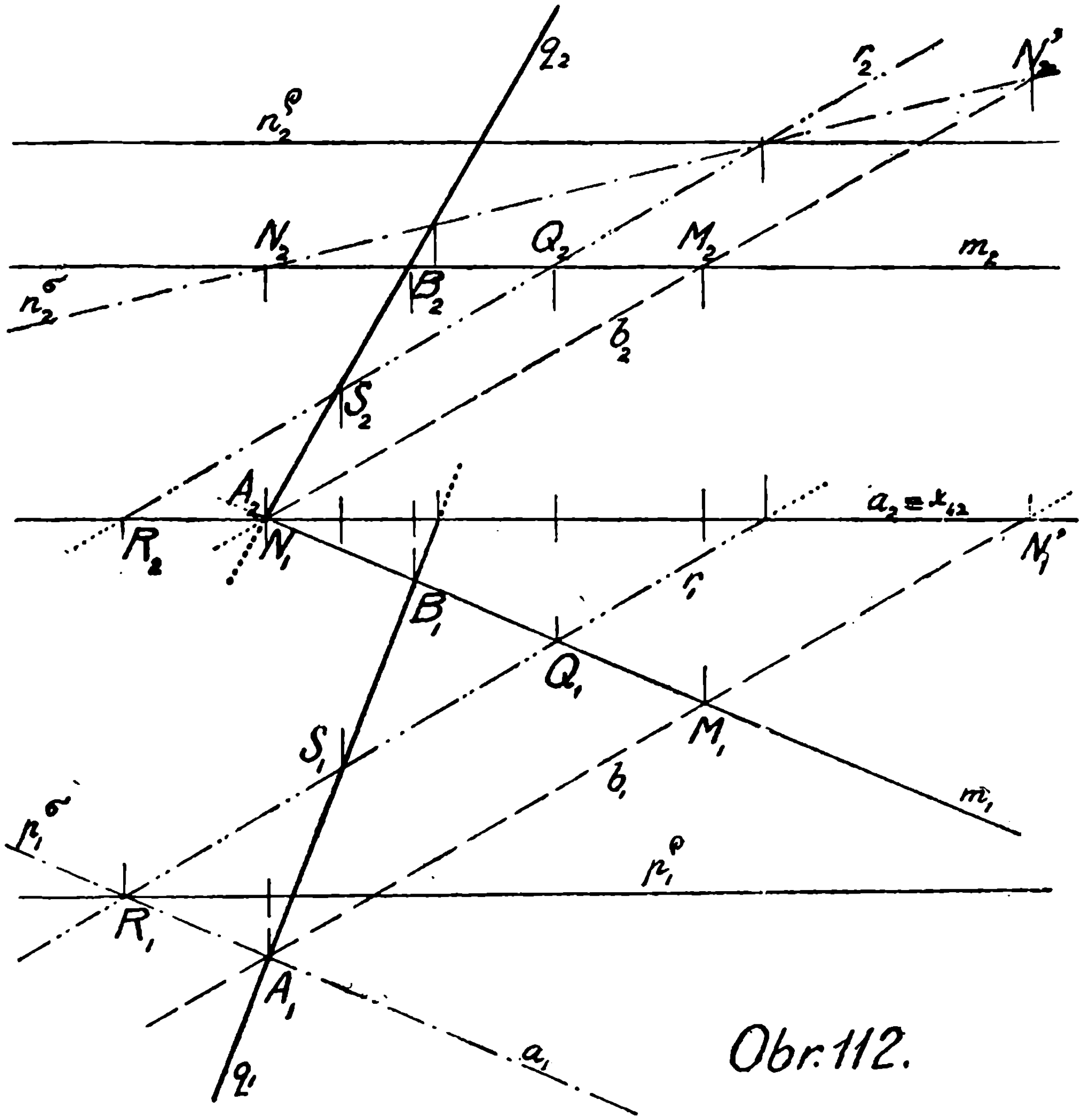
Obr. 111

209. Sestrojte čtverec, jehož úhlopříčka jest $\overline{AC}$ a druhá $\overline{BC} \parallel \nu$. $A\ (4, 7, 8{\cdot}5)$, $C\ (-1, 3, 5)$.

Středem S úhlopříčky $\overline{AC}$ vedeme rovinu $\varrho \perp AC$; $BC \parallel n^{\rho}$ a $= AC$.

210. Jest vésti bodem A různoběžku q k přímce $m \equiv NM$ tak, aby úsek její mezi bodem A a přímkou m byl rozpůlen rovinou ϱ. A $(0, 7, 0)$, M $(7, 3, 4)$, N $(0, 0, 4)$, ϱ $(\infty, 6, 6)$. (Obr. 112.)

Sestrojíme $r \equiv \varrho \times \sigma$, $(A, m) \equiv \sigma$, vedeme bodem $A \ldots$ $a \parallel m$ (v dané úloze $a \equiv p^{\sigma}$), $a \times r \equiv R$, $m \times r \equiv Q$, rozpůlíme RQ bodem S a $AS \equiv q$.

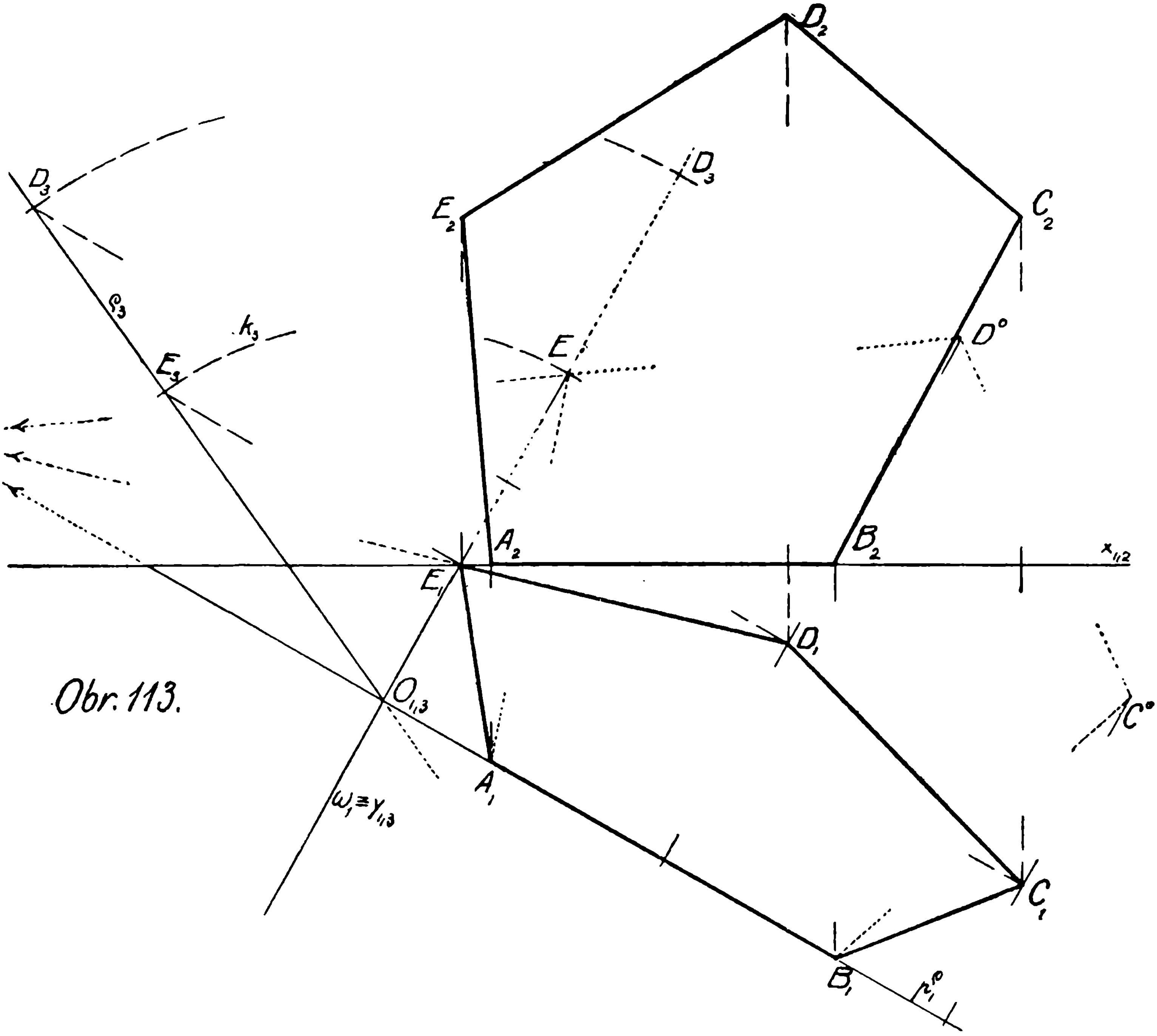


Obr. 112.

211. Sestrojte rovnoběžník $AQBR$, je-li dán jeho vrchol A, strana QB má ležeti v dané přímce m a úhlopříčka QR v dané rovině ϱ. (Obr. 112.)

Bodem A vedeme přímku $a \parallel m$, $(a\,m) \equiv \sigma$, vyšetříme

$r \equiv \varrho \times \sigma$, což jest žádaná úhlopříčka v rovině ϱ, $a \times r \equiv R$, $m \times r = Q$ jsou další dva vrcholy rovnoběžníka, jehož čtvrtý vrchol B vyhledáme snadno.



Obr. 113.

212. Jest dána strana AB pravidelného pětiúhelníka, který jest opřen jedním vrcholem o nárysnu. A (5, 4, 0), B (12, 8, 0). (Obr. 113.)

Nad úsečkou AB sestrojíme pravidelný pětiúhelník $ABC^0D^0E^0$ v π (viz úl. 198) a otočíme jej kolem AB tak, až přijde vrchol E do nárysny. Bodem $E^0 \ldots \omega_1 \perp A_1B_1$, $\omega_1 \times x_{1,2} \equiv E_1$; považujeme-li ω za III. vedlejší průmětnu, jest 3. průmět kružnice otáčení k ve skutečné velikosti (střed její $O_{1,3} \equiv \omega_1 \times A_1B_1$, poloměr O_1E^0). $k_3 \times z_3 \equiv E_3$, $z_3 \perp \omega_3$ v bodě E_1, $E_3E_1 = z_E$, $z_C = z_E$, $z_D = D_3 \dashv y_{1,3}$.

213. Sestrojte čtverec, jehož úhlopříčka $\overline{AC}$ leží na přímce $SM \equiv a$, vrchol B jest na přímce $b \parallel x$; S jest střed čtverce. S (0, 3·5, 3·5), M (—3·5, 7, 1·5), $y_b = 6·5$, $z_b = 6$.

V bodě S sestrojíme rovinu $\varrho \perp a$, vyšetříme její průsečík s přímkou b, což je vrchol $B \equiv b \times \varrho$; délku BS naneseme od S na prodloužení BS a na přímku a; tím jest čtverec určen.

VI. Vyšetřování vrženého stínu.

a) Osvětlení geometrální (paralelní).

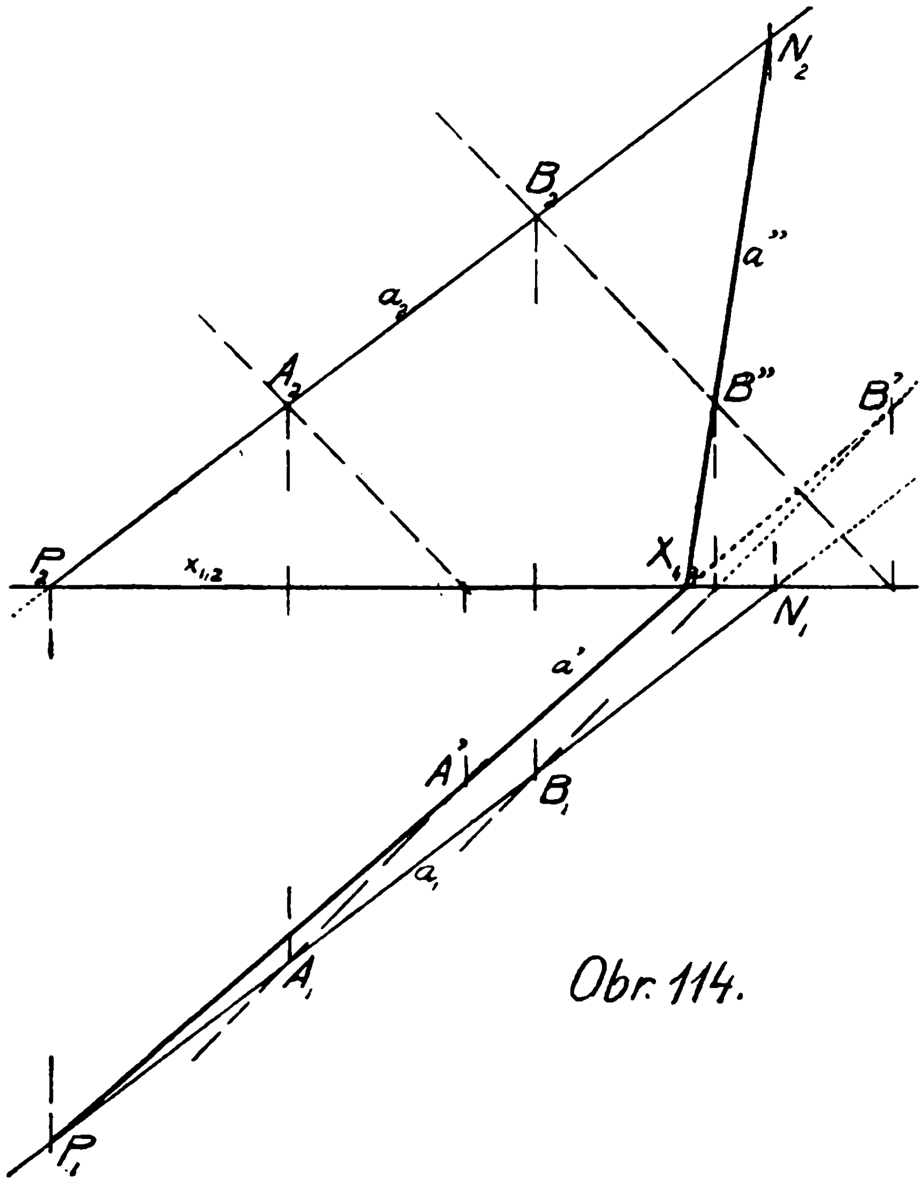
214. Vržený stín bodu A (0, 6, 3), B (4, -3, 6) na π (ν) jest půdorysný A' (nárysný B'') stopník světelného paprsku, který bodem A (B) prochází. (Obr. 114.)

Vržený stín úsečky $\overline{AB}$ jest úsečka $\overline{A'B'}$ spojující stíny koncových bodů na π; ježto B' jest nad osou $x_{1,2}$, t. j. v záporné části půdorysny, nevrhá bod B stín na tuto, nýbrž na nárysnu do bodu B'', a stín úsečky na π jde od A' po osu $x_{1,2}$, tam se lomí v bodě $X_{1,2} \equiv A'B' \times x_{1,2}$ a odtud pokračuje ve směru X_2B'' do B'', kde končí.

Podobně jako stín úsečky vyšetří se stín přímky $a \equiv AB$; stín a' na π vychází z půdorysného stopníku přímky a, v bodě $X_{1,2}$ se lomí, jde do B'' a končí ve stopníku nárysném N.

Stíny úsečky a přímky jsou části stop světelné roviny (aa'), která jest proložena přímkou a rovnoběžně se směrem světelných paprsků.

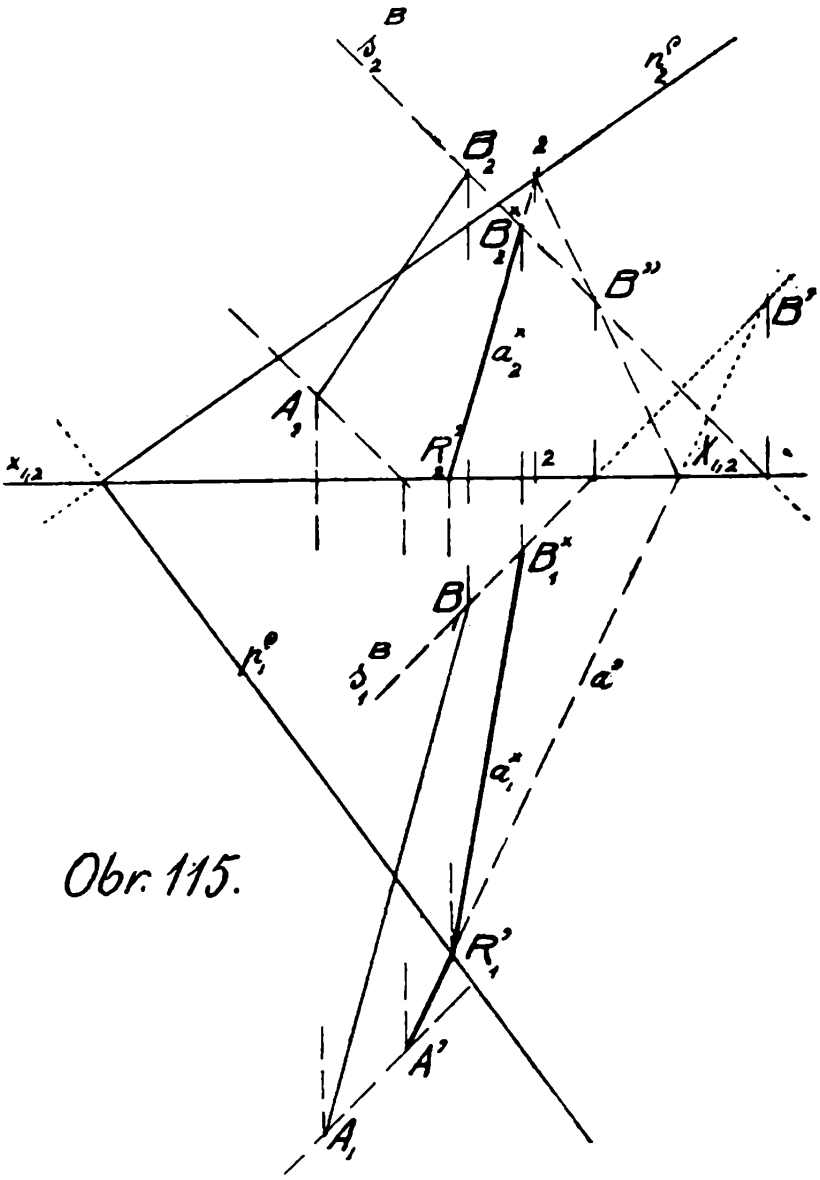
Směrem paprsků rozumíme, není-li jinak udán, směr úhlopříčný s: $\sphericalangle s_1 x_1 = \sphericalangle s_2 x_2 = 135^0$, kde s je úhlopříčka krychle, jejíž hrany jsou v osách souřadných.



Obr. 114.

215. Sestrojiti vržené stíny úsečky $\overline{PN}$ na obě průmětny a na rovinu $\varrho\,(\infty, 2{\cdot}5, 2{\cdot}5)$, P $(-1{\cdot}5, 3{\cdot}5, 0)$, N $(0{\cdot}5, 0, 3{\cdot}5)$.

Vyšetříme stín N', $P' \equiv P_1$, $P'N'$ je stín na π, který se láme v $X_{1,2}$ na ose $x_{1,2}$ a odtud jde do $N'' \equiv N_2$, kde končí. Stín úsečky na rovinu ϱ jest část průsečnice $\varrho \times (P_1 N_1 P')$; $\overline{P'N'} \times$ $\times\, p_1^\rho \equiv R_1$, R_2 na $x_{1,2}$, $X_{1,2} N'' \times n_2^\rho \equiv Q_2$, Q_1 na $x_{1,2}$, $\overline{R_1 Q_1} \equiv$ $\equiv a_1^x$, $\overline{R_2 Q_2} = a_2^x$, označíme-li a^x stín úsečky na ϱ. (Viz v obr. 115 úsečku $\overline{AB}$.)

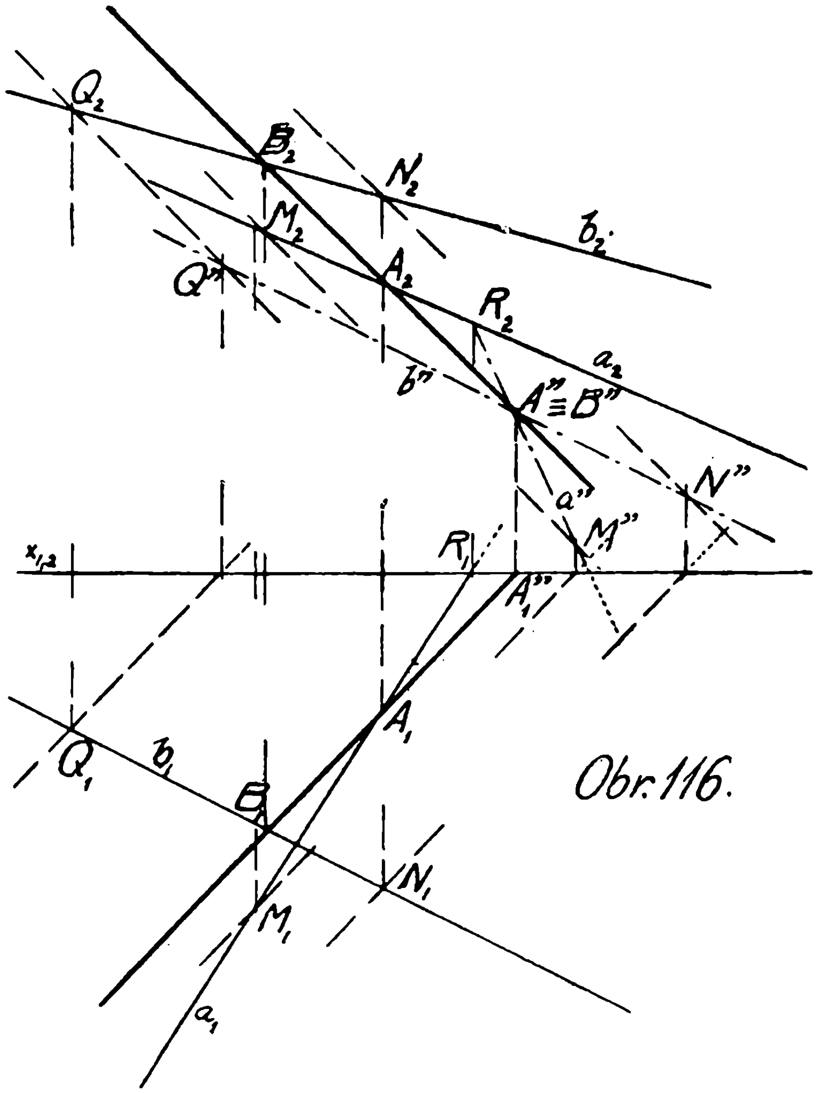


Obr. 115.

216. S e s t r o j i t i s t í n y v r ž e n é ú s e č k o u $\overline{AB}$ n a p r ů m ě t n y a n a r o v i n u ϱ (—3, 4, 2), A (0·5, 10·5, 1·5), B (3, 2, 5). (Obr. 115.)

Sestrojíme vržené stíny obou koncových bodů na π, $\overline{A'B'} \times p_1^\rho \equiv R_1'$, vyšetříme stín bodu B na rovinu ϱ, jako průsečík roviny s paprskem bodu B, $B^{x} \equiv s^{B} \times \varrho$, B^{x} R' jest stín úsečky na ϱ; $R_1' B_1^{x} \equiv a_1^{x}$, $R_2' B_2^{x} \equiv a_2^{x}$.

217. Vyšetřiti, který bod přímky $a \equiv QM$ vrhá stín na přímku $b \equiv PN$. Q (—9, 0, 4·5), M



Obr. 116.

(0, 10·5, 9); P (—6, 10·5, 0), N (0, 0, 10·5). (Stín přímky a na přímku b.)

Vyhledáme stíny vržené přímkami a, b na obě průmětny; v průsečíku $a' \times b'$ jsou stíny $A' \equiv B'$ bodu A přímky a a bodu B přímky b. Veďme bodem A' rovnoběžku se směrem světelných paprsků, t. zv. **paprsek zpětný**, který protne dané přímky v bodech B, A. Bod A, jenž je blíž zdroji světla, vrhá stín na přímku b do bodu B. (V obr. 116 vrhá bod B stín na bod A.)

218. Sestrojte příčku p mimoběžek $a \equiv \equiv RM$, $b \equiv NQ$, aby průměty její svíraly s osou x úhly 45^0. R (4, 0, 4), M (0·5, 5·5, 5·5); N (2·5, 5, 6), Q (—1·5, 2·5, 7·5). (Obr. 116.)

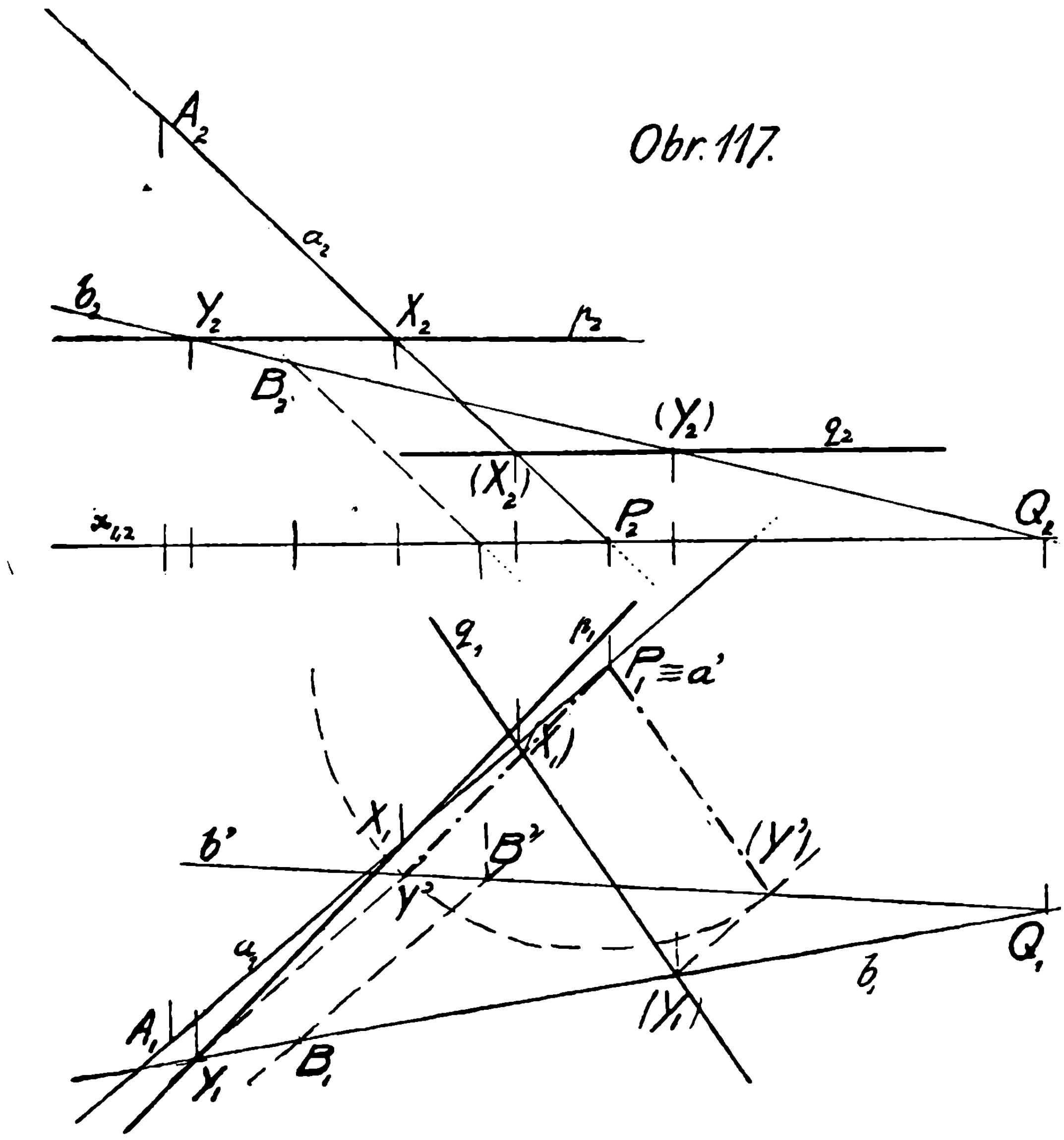
Směr s ($\sphericalangle s_1 x_1 = \sphericalangle s_2 x_2 = 45^0$) považujeme za směr paprsků světelných a sestrojíme vržené stíny obou přímek $a'' \equiv M'' R_2$, $b'' \equiv Q'' N''$; $a'' \times b'' \equiv A''$ (B''), a vedeme-li zpětný paprsek bodem $A'' \ldots p_2 \parallel s_2$, $A_1'' \ldots p_1 \parallel s_1$, A_1'' na $x_{1,2}$, máme průměty hledané příčky.

219. Sestrojte příčku mimoběžek $a \equiv AP$, $b \equiv BQ$, aby byla rovnoběžna s π a její úsek mezi mimoběžkami měl danou délku $XY = 4{\cdot}5$; a) A (—7, 8, 7), P (0, 2, 0); B (—5, 8, 3), Q (7, 6, 0); b) A (6, 0, 3), P (—5, 5, 0); B (—2, 0, 8), Q (4, 6, 0), $\overline{XY} = 4$, $\overline{XY} \parallel \nu$.

Považujme přímku a za směr světelných paprsků, pak její stín jest bod $a' \equiv P_1$, a stín hledané příčky jest poloměr kružnice $= \overline{XY}$ opsané kolem středu P_1. Kružnice ta protne $b' \equiv B' Q_1$ v bodě Y', a vedeme-li tímto zpětný paprsek $Y' Y \parallel a_1$, obdržíme $Y_1 \equiv b_1 \times Y' Y_1$; $p_1 \equiv X_1 Y_1 \parallel X' Y'$, kde $X' \equiv P_1$, $p_2 \parallel x_{1,2}$. Úloha jest dvojznačná. (Obr. 117.)

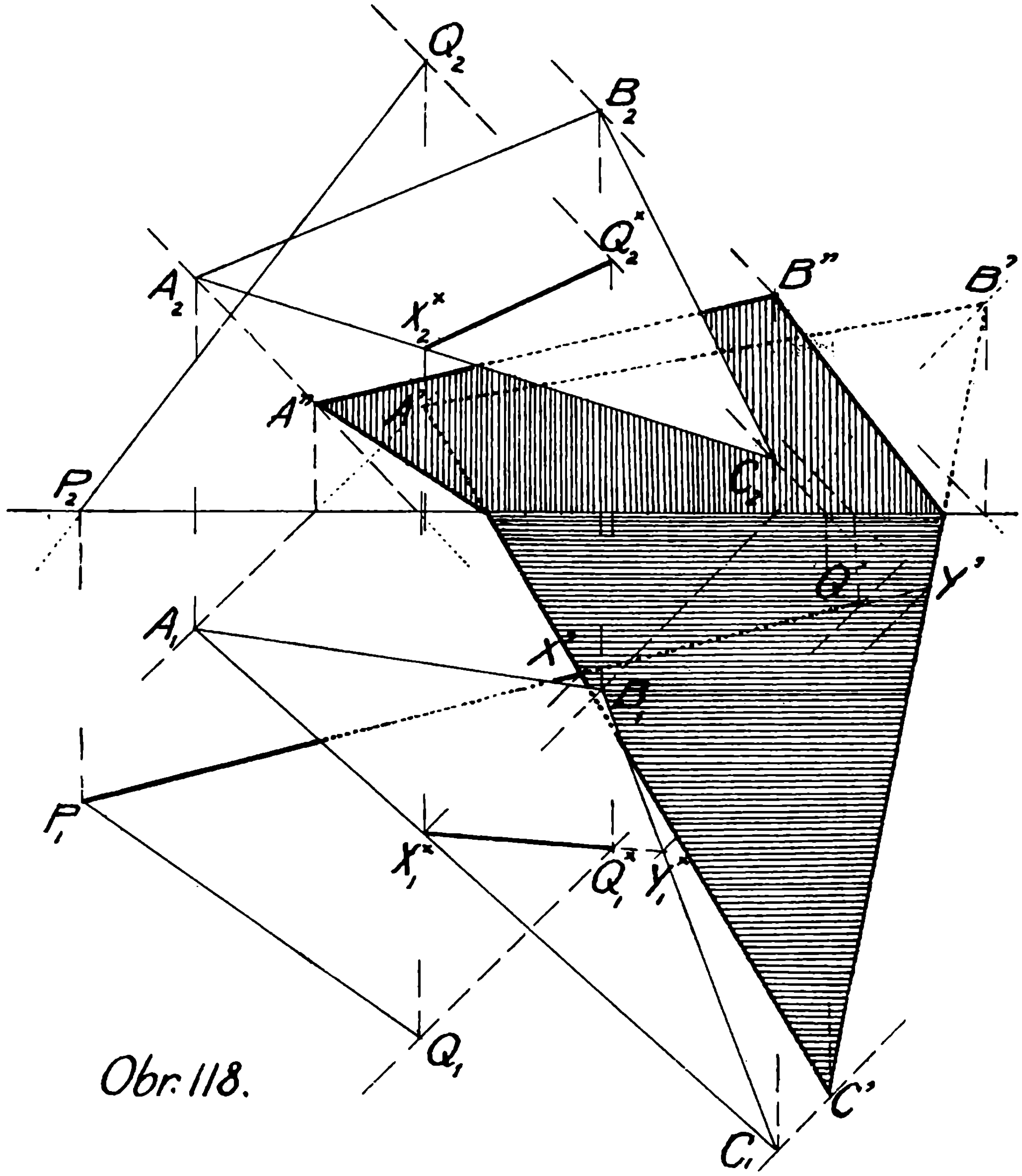
220. Zobraziti stíny pravidelného osmiúhelníka, jehož rovina $\varrho \parallel \pi$, střed S, jedna strana $\overline{AB}$ v Y a úsečky NP. S (0, 4, 3), N (4, 0, 7), P (2, 9, 0).

Vržený stín osmiúhelníka na π jest obrazec s daným shodný, stačí tedy vyšetřiti stín středu a osmiúhelník $A' B' \ldots G' H' \cong AB \ldots GH$ a podobně položený. Poněvadž obvod stínu má týž smysl jako obvod půdorysu, vidíme v půdorysu stranu osvětlenou. (Viz obr. 118.) Jsou-li obvody vrženého stínu a průmětu smyslů protivných, vidíme v příslušném průmětu stranu ve stínu vlastním. ($\triangle A_1 B_1 C_1$ v obr. 119.) Stín na nárysnu vychází z $A'' \equiv A_2$, jde k H'' a odtud k průsečíku na $x_{1,2}$; podobně z B'' k C'' a k průsečíku na $x_{1,2}$.



Stín úsečky PN na π jest $P_1 N'$, protne strany osmiúhelníka $A' B' \ldots G' H'$ v bodech X', Y', jejich zpětné paprsky určí X_1^x na $E_1 F_1$ a Y_1^x na $C_1 D_1$; spojnice $X_1^x Y_1^x$ jest vržený stín úsečky na rovinu ϱ osmiúhelníka. $X_1^x Y_1^x \times P_1 N_1 \equiv O_1$ jest půdorys průsečíku úsečky s rovinou osmiúhelníka, $O_2 \equiv \equiv P_2 N_2 \times \varrho_2$, a stín $X^x O$ před tímto bodem jest pomyslný.

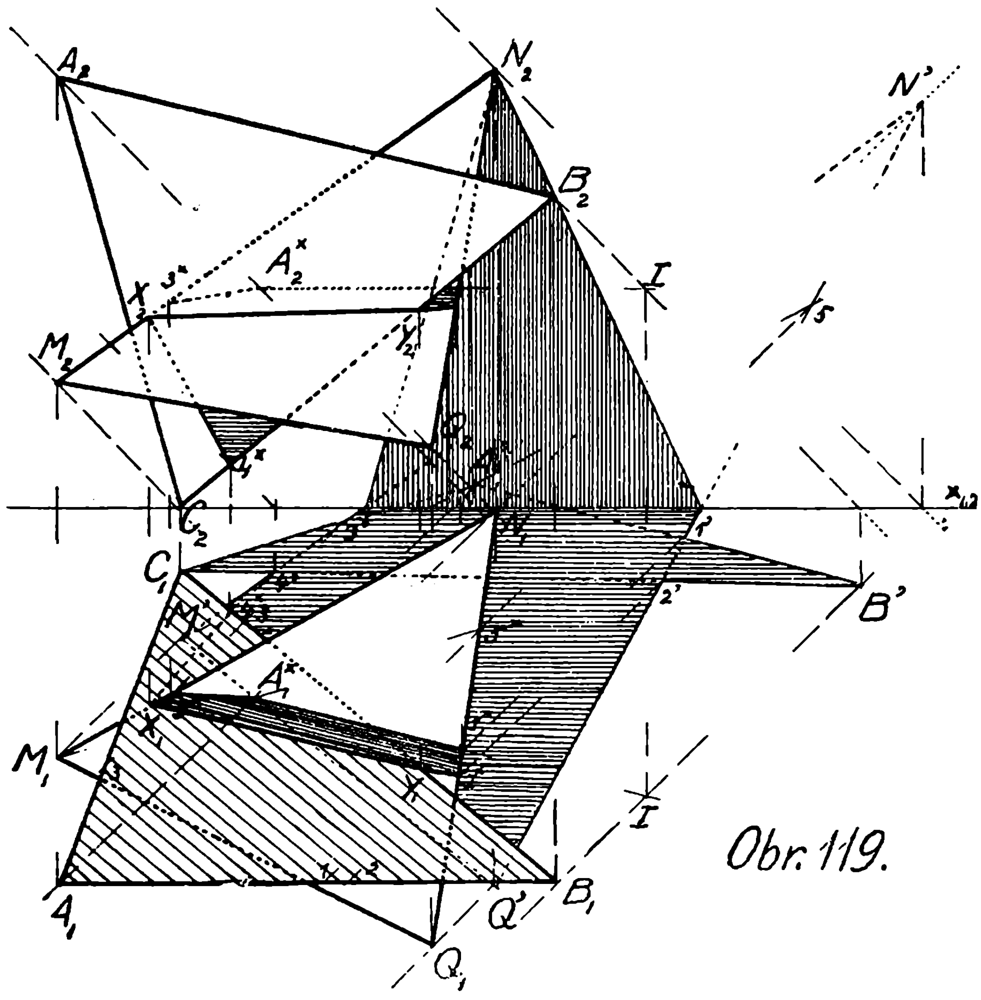
221. Zobraziti stíny $\triangle ABC$ a úsečky PQ. A $(-4, 2, 4)$, B $(3, 3, 7)$, C $(6, 11, 1)$; P $(-6, 5, 0)$, Q $(0, 9, 8)$. (Obr. 118.)



Obr. 118.

Vržený stín $P_1 Q'_1$ protne stín $A' C'$ v bodě X'; jeho zpětný paprsek $X' X_1^x$ protne $A_1 C_1$ v X_1^x. Bod Q' padl do vrženého stínu $A' B' C'$, vrhá tedy bod Q stín na trojúhelník do Q^x. Tento bod sestrojíme buď jako průsečík paprsku $Q Q'$ s rovinou (ABC), anebo prodloužíme stín $P_1 Q'$ až ku průsečíku se stranou $B'C' \times P_1 Q' \equiv Y'$, odvodíme zpětným paprskem $Y' Y_1^x$ bod Y_1^x *na* $B_1 C_1$, *a* $X_1^x Y_1^x \times Q_1 Q' \equiv O_1^x$.

222. Podobně sestrojí se stíny $\triangle\ ABC$ a rovnoběžníka $MNQR$. $A\ (-6, 4, 5)$, $B\ (-1, 7, 9)$, $C\ (3, 3, 5)$; $M\ (-4, 2, 1)$, $N\ (5, 0, 2)$, $Q\ (-2, 7, 6)$, R.



Obr. 119.

223. Osvětlení záseku $\triangle\ ABC$ a $\triangle\ MNQ$. $A\ (-6, 6, 7)$, $B\ (2, 6, 5)$, $C\ (-4, 1, 0)$; $N\ (1, 0, 7)$, $M\ (-6, 4, 2)$, $Q\ (0, 7, 1)$. (Obr. 119.)

Pronik obou obrazců vyšetříme podle úlohy 74. Sestrojíme vržené stíny trojúhelníků a rozhodneme, zda ukazují v průmětech strany osvětlené či ve stínu vlastním, podle toho shoduje-li se obvod průmětu s obvodem vrženého stínu ($A M N Q$), anebo je smyslu protivného ($\triangle A B C$). Pak přikročíme k vyšetření vrženého stínu jednoho obrazce na druhý. Stín strany $M N$ na $\triangle A B C$ vychází z průsečíku $X \equiv M N \times (A B C)$ a končí v bodě $4^{\times}$, na $C B$, který odvodíme zpětným paprskem z bodu $4' \equiv M' N' \times B' C'$. Podobně stín strany $B C$ na $\triangle M N Q$ vychází z bodu $Y \equiv B C \times (M N Q)$ a končí v bodě $2^{\times}$ na straně $N Q$, který odvodíme zpětným paprskem $2' 2^{\times}$ z bodu $2' \equiv \equiv B' C' \times N' Q'$. Strany $A B, A C$ vrhají stíny $A^{\times} 1^{\times}$, $A^{\times} 3^{\times}$; body $1^{\times}$, $3^{\times}$ sestrojíme zpětnými paprsky z bodů $1' \equiv A' B' \times \times Q' N'$, $3' \equiv A' C' \times M' N'$. Bod $A^{\times}$ najdeme pomocí $\overline{M 5^{\times}}$, jejíž stín $\overline{M' 5'}$ prochází bodem A'; $5' \equiv M' A' \times Q' N'$.

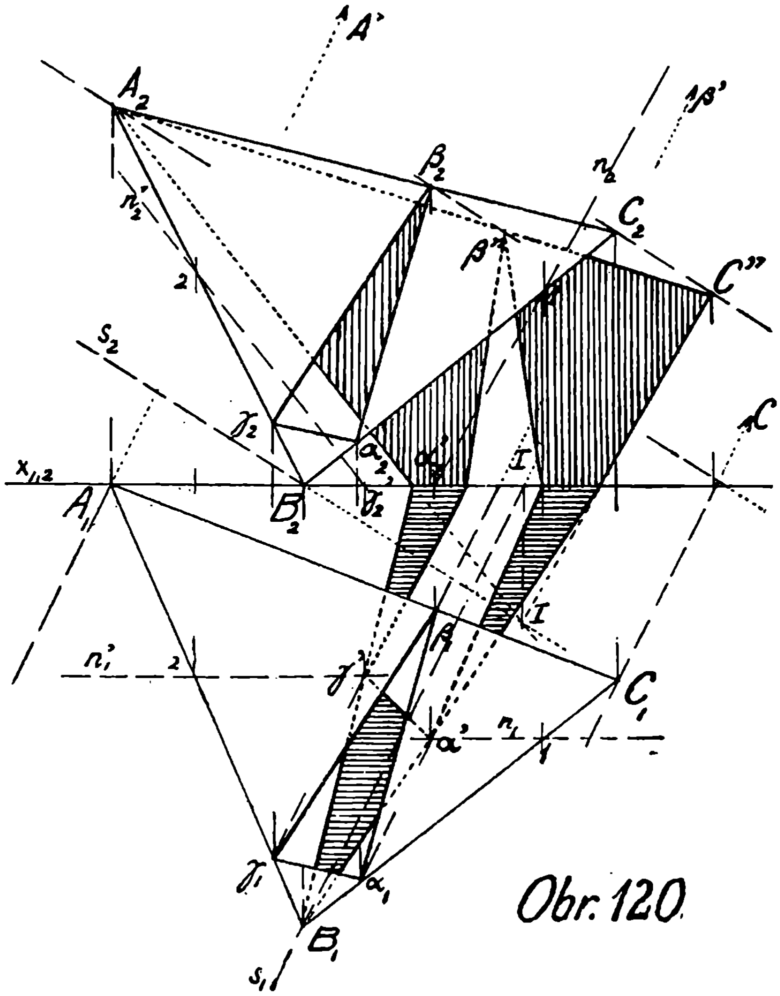
224. Jest dán $\triangle$ $A B C$ a stín $\alpha' \beta' \gamma'$ trojúhelníkového výřezu v něm (α na $B C$, β na $C A$, γ na $A B$). Zobrazte $\triangle$ $\alpha \beta \gamma$ a stín $\triangle$ $A B C$; a) A (—3, 4, 4), B (0, 0, 6), C (2, 6, 2); α' (2·5, y, 0), β' (0, 4, 0), γ' (—3, 0, 0); b) A (—2, 3, 2), B (0, 7, 0), C (4, 0, 4); α' (2, 2, 0), β' (x, —4, 0), γ' (—1, 2, 0); c) A (—3, 0, 6), B (0, 7, 0), C (5, 3, 4); α' (2, 4, 0), β'' (x, 0, 4), γ' (1, 3, 0). (Obr. 120.)

Průsečnice $s \equiv (A B, \gamma') \times (B C, \alpha')$ jest směr paprsků světelných a její druhý stopník l jest stín bodu B; vyšetříme stíny ostatních vrcholů daného trojúhelníka a zpětnými paprsky na jeho stranách body α, β, γ. Stíny stran $B A$, $B C$ na π jsou přímky $B_1 \gamma'$, $B_1 \alpha'$; druhá stopa roviny ($A B \gamma'$) vyšetří se pomocí stoposměrné přímky $n' \equiv \gamma' 2$. Podobně druhá stopa roviny ($B C \alpha'$) pomocí stoposměrné přímky $\alpha_1 1 \equiv n$; pak $A_2 l \times C'' l \equiv l$, $l B \equiv s$.

225. Jest dán $\triangle$ $A B C$; vyšetřte směr paprsků, pro který jest $\triangle A'' B'' C'' \cong \triangle A B C$. A (—3, 7, 2), B (—5, 2, 4), C (5, 5, 8).

Paprsky světelné jsou kolmy na rovinu, která půlí odchylku roviny $\triangle$ $A B C$ od nárysny.

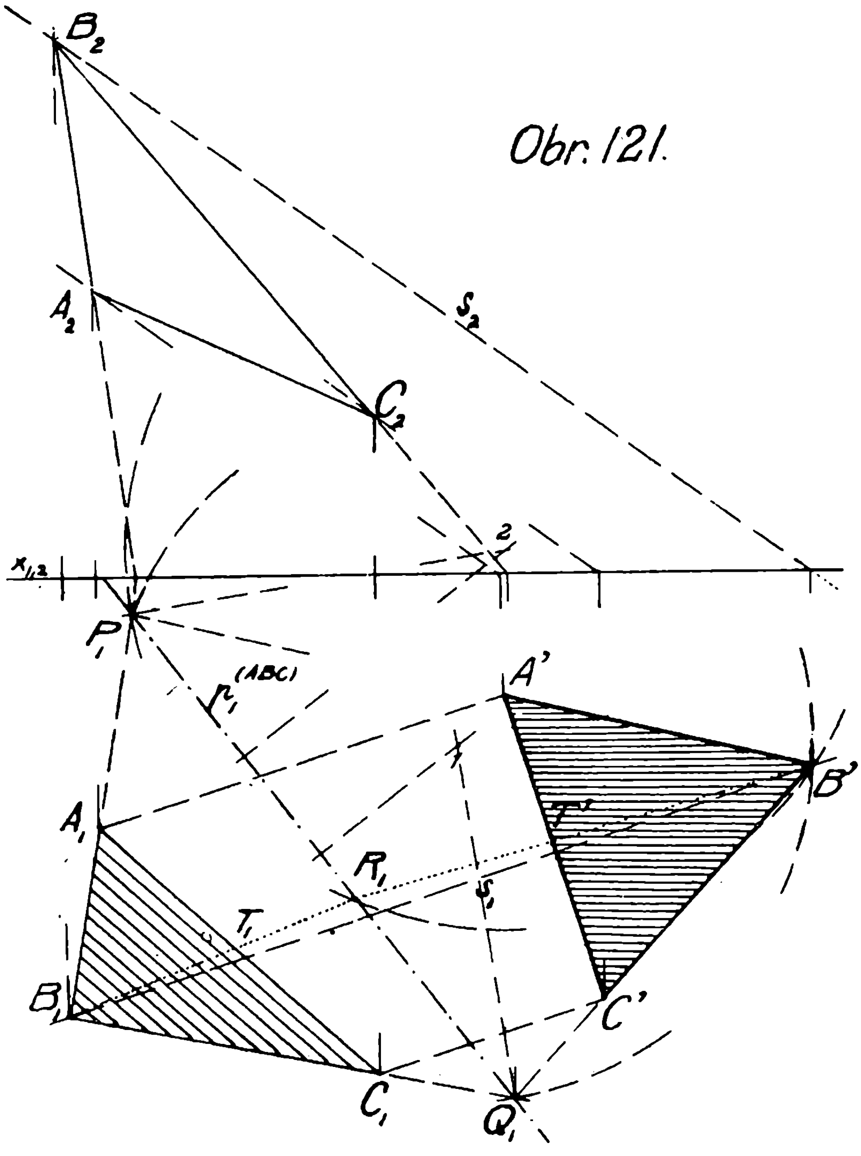
226. Vyšetřte směr paprsků, při kterém vržený stín $\triangle ABC$ na průmětnu jest trojúhelník rovnostranný: a) A (3, 2, 7), B (5, 4, 2), C (—5, 8, 5), stín na ν; b) A (—5·5, 4, 4·5), B (—6, 7, 8·5), C (—1, 8, 2·5), stín na π.



Obr. 120

a) Vyhledáme $n^{(ABC)}$ spojením druhých stopníků N, Q přímek AB, AC; $\triangle A'' B'' C''$ jest v affinitě s $\triangle A_2 B_2 C_2$, osou affinity jest $n^{(ABC)}$, paprsky affinity jsou paprsky světla. $\sphericalangle BAC$ odpovídá $\sphericalangle 60^0$ (viz úl. 18), jest tedy vrchol jeho A'' na kruhovém oblouku, jehož tětivou jest $N_2 Q_2$ a příslušný úhel středový $= 120^0$. Je-li $A_2 T_2$ těžnice $\triangle A_2 B_2 C_2$ a $R_2 \equiv A_2 T_2 \times N_2 Q_2$ její nárysný stopník, odpovídá $\sphericalangle R_2 A_2 N_2$

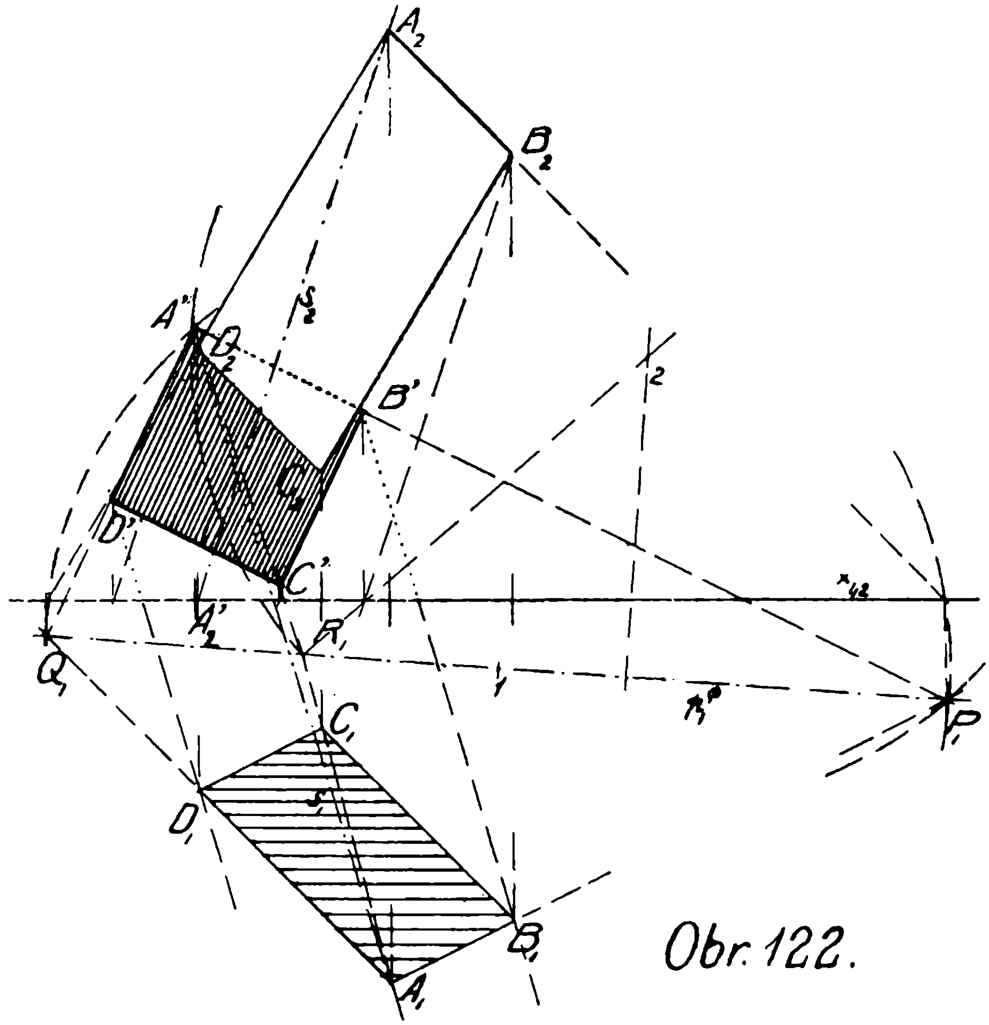
úhel 30^0, jehož vrchol A'' jest na kruhovém oblouku, který má tětivu $A_2 N_2$ a středový úhel 60^0. Průsečík obou kruhových oblouků jest A'' a $A_2 A'' \equiv s_2$, $A_1 A_1'' \equiv s_1$ průměty hledaného směru paprsků světelných. (V obr. 121 řešena úl. 226b.)



Obr. 121.

227. Jest dán rovnoběžník $ABCD$; vyšetřte takový směr paprsků světelných, aby půdorysný stín $A'B'C'D'$ byl čtverec. A (—2, 2, 2), B (3, 4, 4), C, D (—4, 3, 4).

Řeší se jako úloha předchozí. Stíny stran AB, AD vycházejí z půdorysných stopníků a svírají úhel 90°; stínem úhlopříčky $A C$ jest úhlopříčka stínu, a úhel $B' A' C' = 45°$. V obr. 122 provedeno pro souřadnice A (—1, 6, 9), B, C (—2, 2, 2), D (—4, 3, 4).



Obr. 122.

b) Osvětlení centrálné.

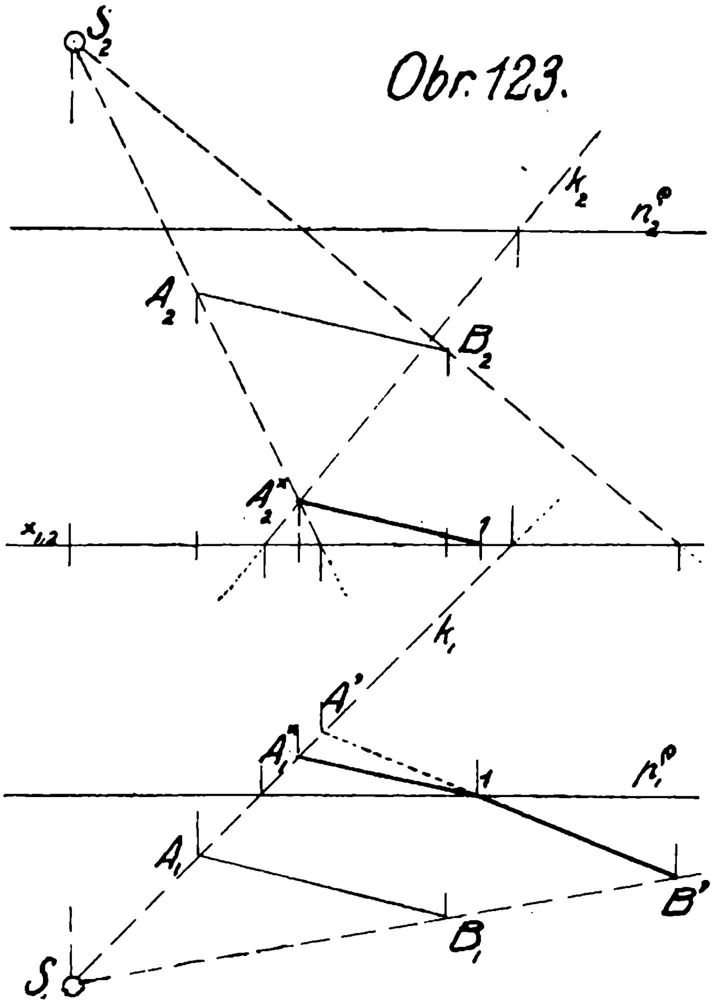
228. S e s t r o j t e s t í n y ú s e č k y AB, j e - l i s v í t í c í b o d S. A (—8, 3, 0), B (—2, 5, 4), S (—6, 7, 8).

Vyšetříme stopníky paprsků SA, SB a tyto spojíme. $A' \equiv A_1$.

229. S e s t r o j t e s t í n y ú s e č k y $\overline{AB}$ n a p r ů m ě t n y a n a r o v i n u ϱ p r o s t ř e d s v ě t l a S. A (—4, 5, 4), B (0, 6, 3), ϱ (∞, 4, 5), S (—6, 7, 8). (Obr. 123.)

Prvý stopník paprsku SA jest pod rovinou ϱ, takže stín A' na π nevznikne; vyšetříme průsečík paprsku s ϱ: $SA \times \times \varrho \equiv \overset{x}{A}$, $\overset{x}{A}\, 1$ jest stín úsečky na rovinu ϱ.

230. S e s t r o j t e v r ž e n ý s t í n p ř í m k y $a \equiv AB$

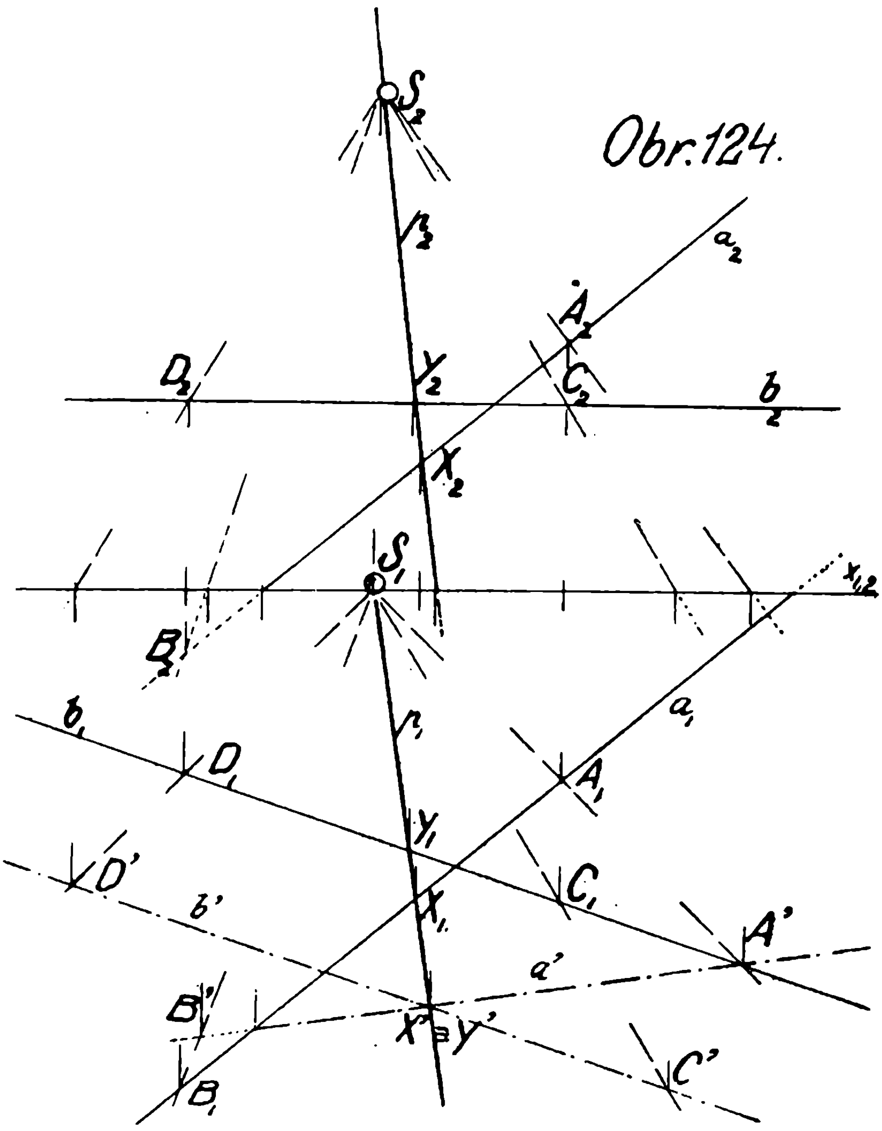


n a p ř í m k u $b \equiv CN$. $A\,(2, 4, 5)$, $B\,(5, 0, 2)$, $C\,(3, 7, 1)$, $N\,(-2, 0, 6)$. $S\,(0, 5, 9)$.

Z průsečíku vržených stínů obou přímek $X' \equiv a' \times b'$ vedeme zpětný paprsek $X'S$, který protne přímku a v bodě X, b v $\overset{x}{X}$. $\overset{x}{X}$ je vrženým stínem bodu X. (Viz bod X v obr. 124.)

231. J s o u d á n y m i m o b ě ž k y $a \equiv AB$, $b \equiv CD$ a b o d S; s e s t r o j i t i p ř í č k u m i m o b ě ž e k p r ocházející bodem S. A (3, 3, 4), B (—3, 8, —1); C (3, 5, 3), D (—3, 3, 3); S (0, 0, 8). (Obr. 124.)

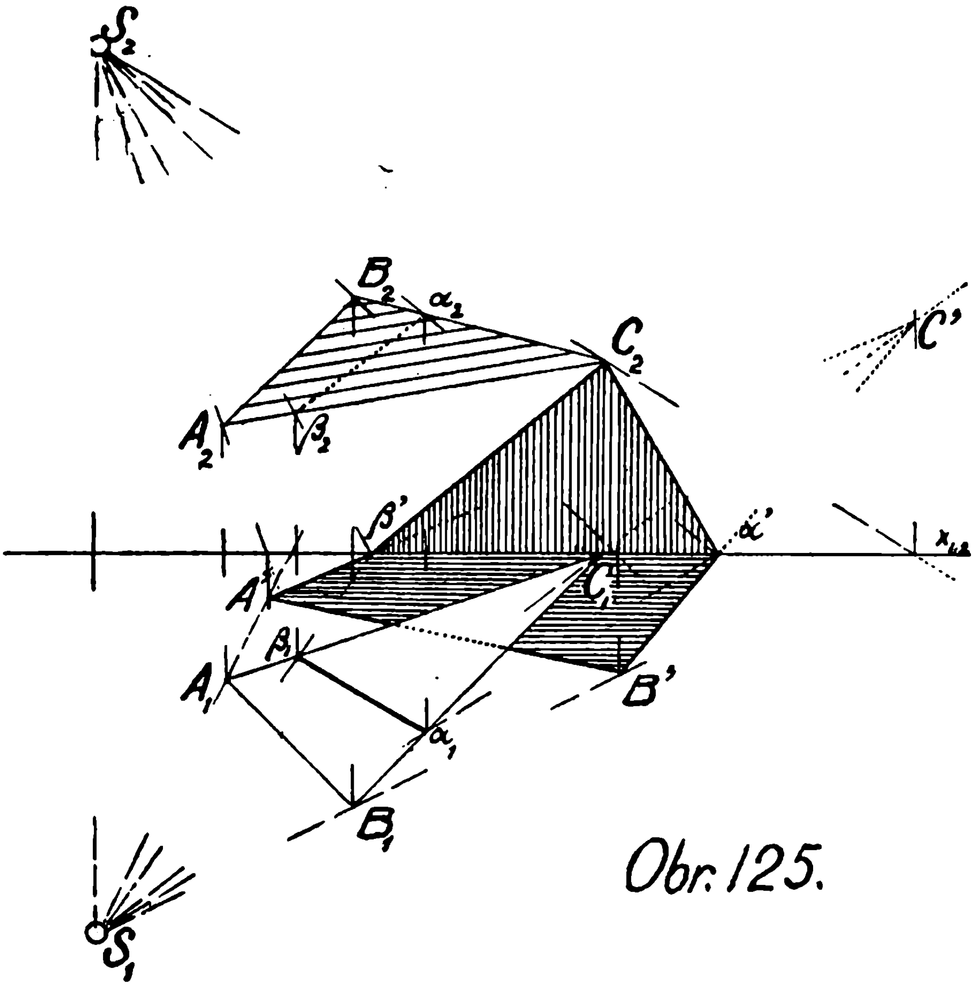
Považujeme bod S za střed světla, vyšetříme vržené stíny obou mimoběžek na π a z bodu $X' \equiv Y' \equiv a' \times b'$ vedeme zpětný paprsek $X' S$, který jest hledanou příčkou.



232. Jest vyšetřiti příčku $\triangle ABC$, která vrhá stín na osu x při osvětlení z bodu S. A (2, 2, 2), B (4, 4, 4), C (8, 0, 3); S (0, 6, 8). (Obr. 125.)

Sestrojíme vržený stín trojúhelníka na π; strany protnou osu $x_{1,2}$ v bodech $\beta' \equiv A'C' \times x_{1,2}$, $\alpha' \equiv B'C' \times x_{1,2}$ a zpětné paprsky těchto bodů protnou strany daného trojúhelníka v bodech $\alpha \equiv S\alpha' \times BC$, $\beta \equiv S\beta' \times AC$. $\alpha\beta$ jest hledaná příčka.

233. Různoběžník $A'B'C'D'$ jest stínem rovnoběžníka $ABCD$ osvětleného z bodu

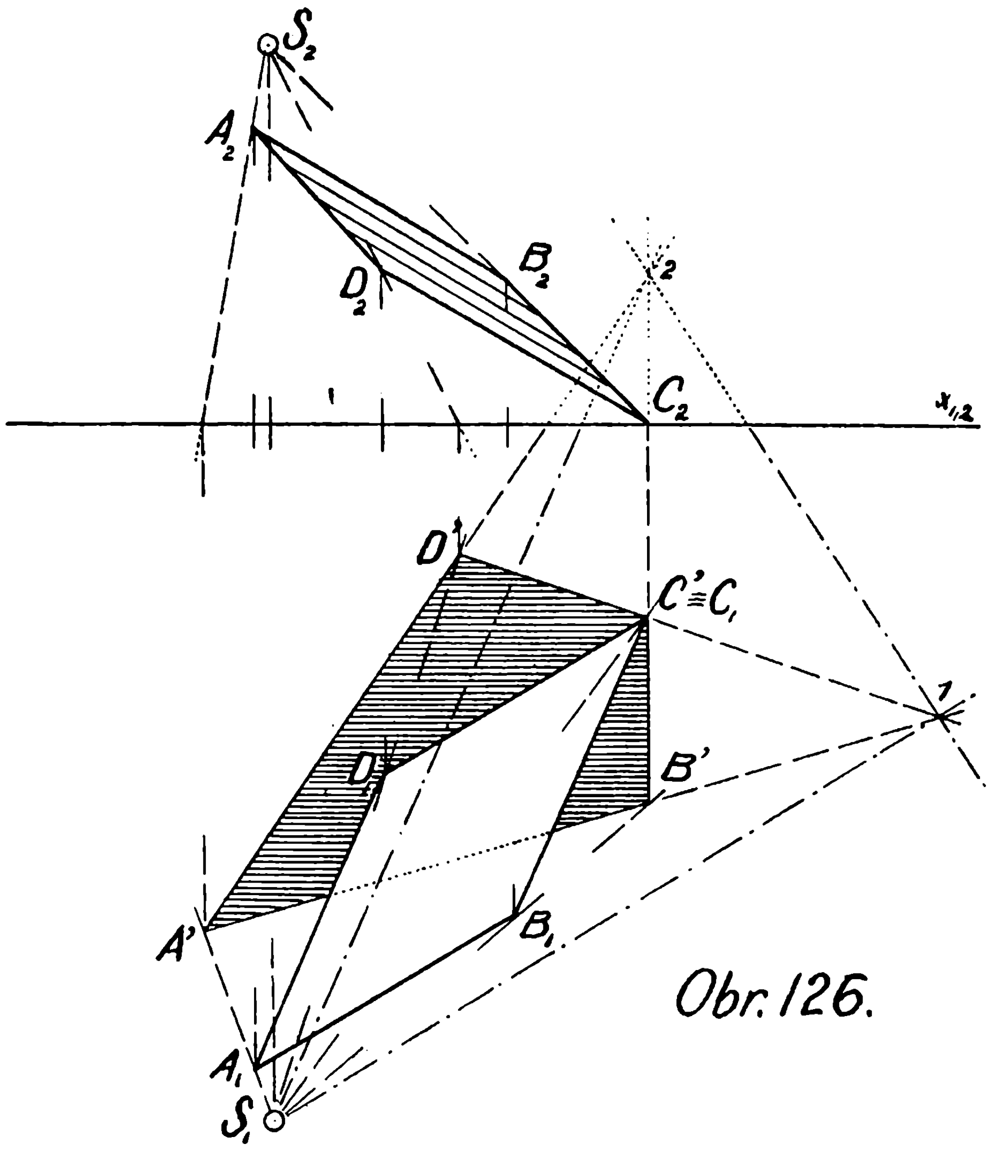


Obr. 125.

S. Jest vyhledati tento rovnoběžník, když $C \equiv C'$. $A'(-1, 8, 0)$, $B'(6, 6, 0)$, $C'(6, 3, 0)$, $D'(3, 2, 0)$, $S(0, 11, 3)$. (Obr. 126.)

Vrcholy hledaného obrazce leží na paprscích $SA', \ldots SD'$. Má-li býti $AB \parallel CD$, musí býti obě úsečky rovnoběžny s průsečnicí $1S$ rovin $(A'B'S)$, $(C'D'S)$, kde $1 \equiv A'B' \times C'D'$; podobně vyšetříme $2 \equiv A'D' \times B'C'$ a $AD \parallel BC \parallel S2$. Bodem

$C_1 \equiv C'$ vedeme $C_1 D_1 \parallel S_1 1$ a $C_1 B_1 \parallel S_1 2$, *na paprscích* $S_1 D'$, $S_1 B'$ obdržíme průměty D_1, B_1, pak snadno doplníme půdorys $A_1 B_1 C_1 D_1$ a z něho odvodíme nárys.

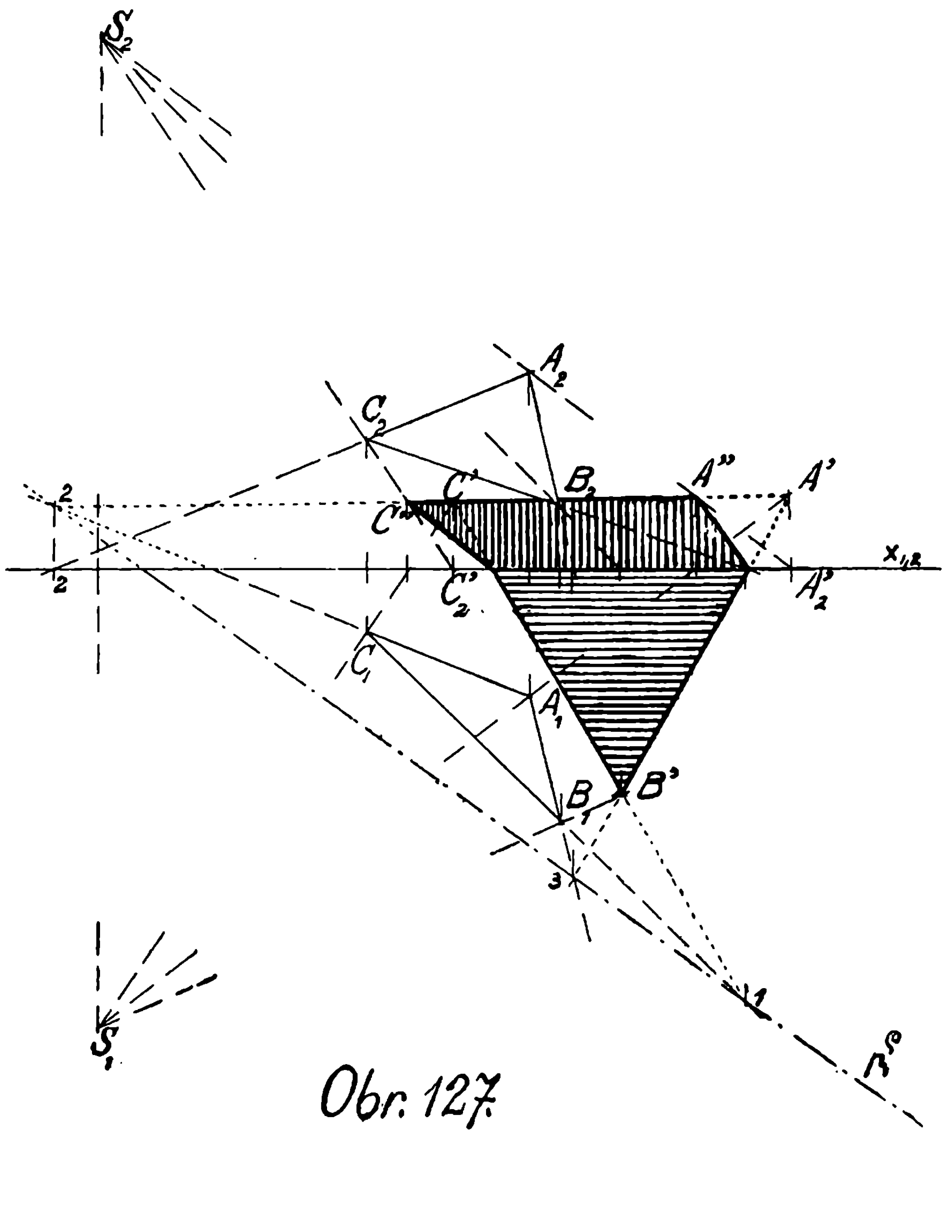


Obr. 126.

234. Vyhledejte svítící bod S, aby stín $\triangle ABC$ na π byl trojúhelník stejnostranný, jehož strana $A'B'$ svírá s osou $x \sphericalangle 120^\circ$. $A\,(1, 2, 3)$, $B\,(1{\cdot}5, 4, 1)$, $C\,(-1{\cdot}5, 1, 2)$. (Obr. 127.)

Svítící bod S jest průsečík paprsků $A'A$, $B'B$, $C'C$. Stíny přímek, na nichž leží strany daného trojúhelníka, vycházejí z jejich půdorysných stopníků *1*, *2*, *3*. Stopníkem přímky AB

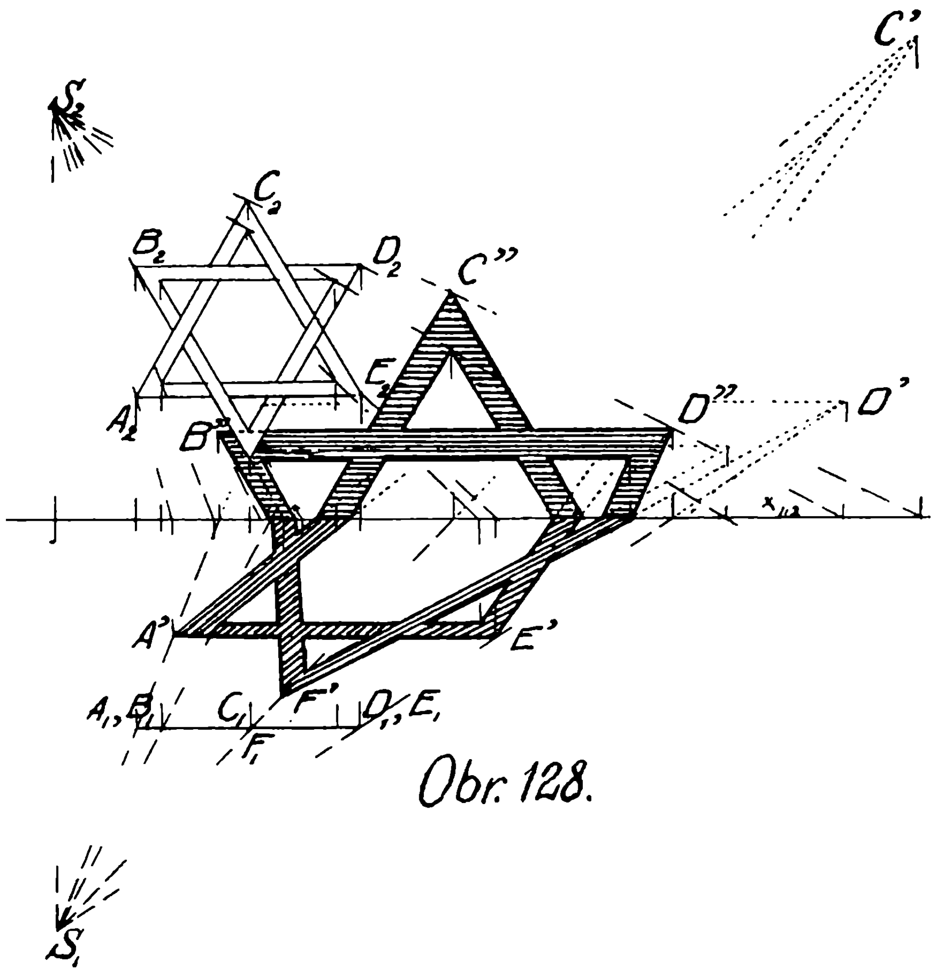
vedeme přímku $3\,A'$, aby $\sphericalangle\, 3\,A', x = 120^0$ a stopníky 1, 2 narýsujeme přímky $1\,C'$, $2\,A'$ tak, aby svíraly úhly 60^0 s přímkou $3\,A'$. Přímky ty se protnou ve vrcholech trojúhelníka rovnostranného, který je stínem daného.



Obr. 127.

235. Zobrazte centrálné osvětlení pravid. šestiúhelníkového pásu hvězdovitého, který leží v rovině rovnoběžné s ν, jehož vrcholy jsou $A\,(1, 2{\cdot}5, 1{\cdot}5)$, $B\,(1, 2{\cdot}5, 3)$, $x_C > x_A$; šířka pásu jest $0{\cdot}3$ cm. $S\,(0, 5, 5)$. (Obr. 128.)

Vyšetříme stopníky světelných paprsků všech vrcholů, které příslušně spojíme, dbajíce toho, aby vržený stín obrazce na nárysnu byl obrazec danému podobný.



Obr. 128.

VII. Šikmé promítání.

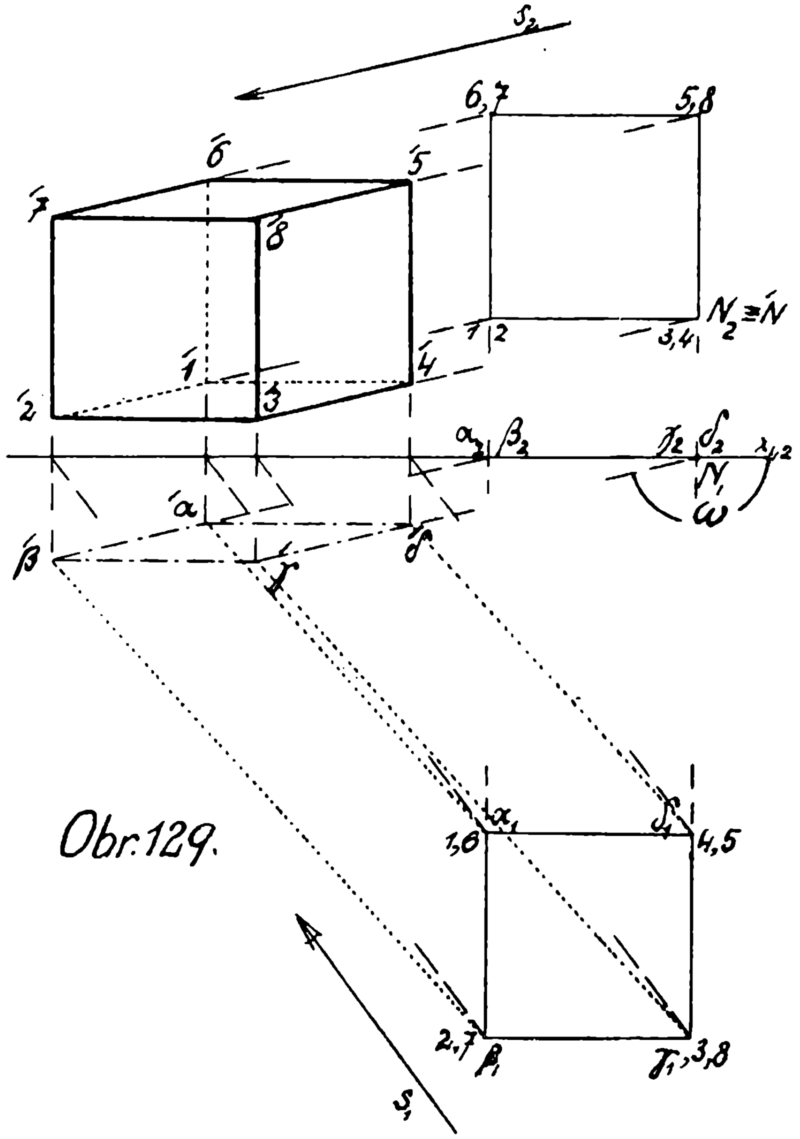
236. J e s t z o b r a z i t i š i k m ý p r ů m ě t k r y c h l e, k t e r á j e s t v p o l o z e p r ů č e l n é. (Obr. 129.)

Považujeme-li směr *s*, pod kterým dané těleso promítáme šikmo (k l i n o g o n á l n ě) do nárysny, za směr světelných paprsků, jest šikmým průmětem tělesa jeho stín na nárysnu, jejž sestrojíme, když spojíme nárysné stopníky paprsků vedených všemi vrcholy.

Z obrazce vyčteme některé vlastnosti, důležité pro klinogonální projekci:

1. Body (obrazce) v nárysně mají šikmé průměty totožné se svým nárysem ($'N \equiv N_2$).

2. Šikmý průmět (obraz) přímky vychází ze šikmého průmětu jejího stopníku ($'3'4$ z $'N$, $'4'5$ z $'\delta$).



Obr. 129.

3. Šikmý obraz přímky kolmé k nárysně jest rovnoběžný s nárysem paprsku promítacího ($'1'2 \parallel '3'4 \parallel \ldots \parallel s_2$).

4. Obrazy úseček rovnoběžných navzájem a stejně dlouhých jsou rovnoběžné a stejně dlouhé ($\overline{'1'2} \parallel \overline{'3'4} \parallel \overline{'6'7}$).

5. Obrazec v rovině rovnoběžné s nárysnou má šikmý průmět shodný s nárysem ($'2'3'8'7 \cong 2387$).

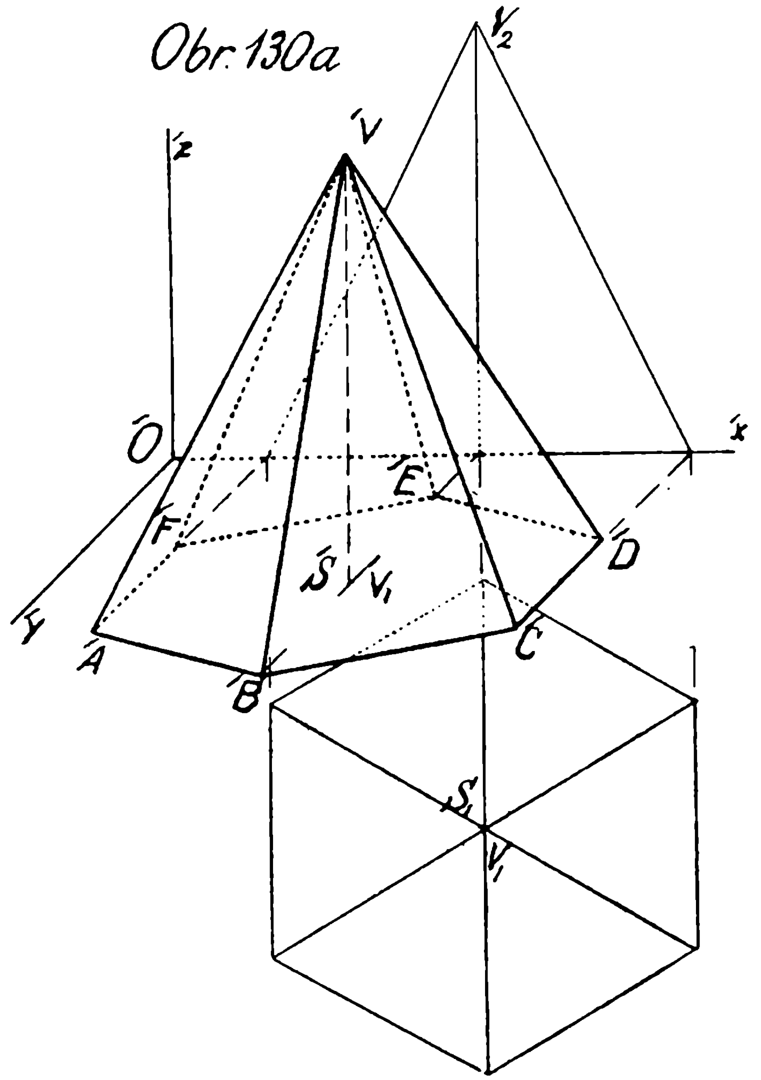
6. Úsečky na osách x a z nebo na přímkách s nimi rovnoběžných promítají se ve skutečné velikosti ($\overline{'1'4} = \overline{14}$, $\overline{'1'6} = \overline{16}$).

7. Úsečky ve směru osy y promítají se zkráceny v poměru $q = \frac{\overline{'1'2}}{\overline{12}}$, který závisí na směru šikmo promítacího paprsku a nazývá se **poměr zkrácení** (poněvadž $\triangle\, \delta_2{}'\delta\,\delta_1 \sim \triangle\, \gamma_2{}'\gamma\,\gamma_1 \sim \ldots$ jest $q = \frac{\overline{\delta_2{}'\delta}}{\overline{\delta_2\,\delta_1}} = \frac{\overline{\gamma_2{}'\gamma}}{\overline{\gamma_2\,\gamma}} = \ldots$).

Označíme-li půdorys dané krychle $\alpha\beta\gamma\delta$ a považujeme jej za daný obrazec v π, jehož šikmý obraz jest $'\alpha'\beta'\gamma'\delta$, můžeme vysloviti pravidlo o zobrazení šikmého průmětu takto: Vyšetříme šikmý obraz půdorysu daného útvaru **(šikmý půdorys)** $'\alpha'\beta'\gamma'\delta$, s jeho vrcholů spustíme kolmice k ose x, naneseme na ně z-ové souřadnice příslušných vrcholů a obdržíme šikmé obrazy. Šikmý půdorys sestrojíme, když počátečnými body souřadnic y-ových vedeme rovnoběžky s nárysem promítacího paprsku ($\alpha_2{}'\alpha \parallel s_2$) a naneseme na tyto souřadnice y-ové zkrácené v daném poměru q. Jest tedy šikmý průmět dostatečně určen, známe-li $\sphericalangle\, '\delta\,\delta_2$, $x = \omega$ a poměr zkrácení $q = \frac{\overline{'\delta\,\delta_2}}{\overline{\delta_2\,\delta_1}}$.

Poněvadž orthogonálný a šikmý půdorys přímky se protínají na ose x ($'\gamma'\delta \times \gamma_1\,\delta_1 \equiv N_1$) a spojnice souhlasných bodů obou půdorysů jsou spolu rovnoběžny $'\gamma\,\gamma_1 \parallel {}'\delta\,\delta_1 \parallel \ldots$ jest šikmý půdorys v affinitě s půdorysem orthogonálným; osou affinity jest osa x, paprsky affinity jsou spojnice orth. a šikmého půdorysu daného bodu.

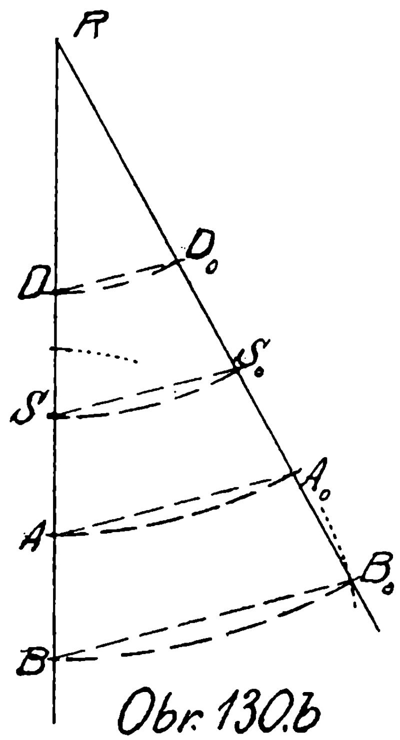
237. Zobraziti šikmý průmět pravidelného šestibokého jehlanu, který stojí na π v poloze nárožné. $V(5, 6, 7)$, $a_6 = 4$, $(\omega = 135^0$, $q = {}^1/_2)$.



K rychlému zkrácení y-ových souřadnic užíváme **redukčního úhlu** (viz obr. 130b), na jehož rameno naneseme skutečnou délku souřadnice $y_B = \overline{RB}$ a oblouk touto opsaný protneme zkrácenou její velikostí, v našem případě $\overline{BB_0} = \frac{1}{2}\overline{RB}$.

Kdybychom chtěli, aby byla podstava jehlanu viditelná, museli bychom zvoliti $\sphericalangle\, \omega$ vypuklý (srovnej obr. 136b).

Šikmého promítání užíváme k sestrojení názorných obrazců (ve stereometrii, krystalografii, ve fysice, chemii a pod.).



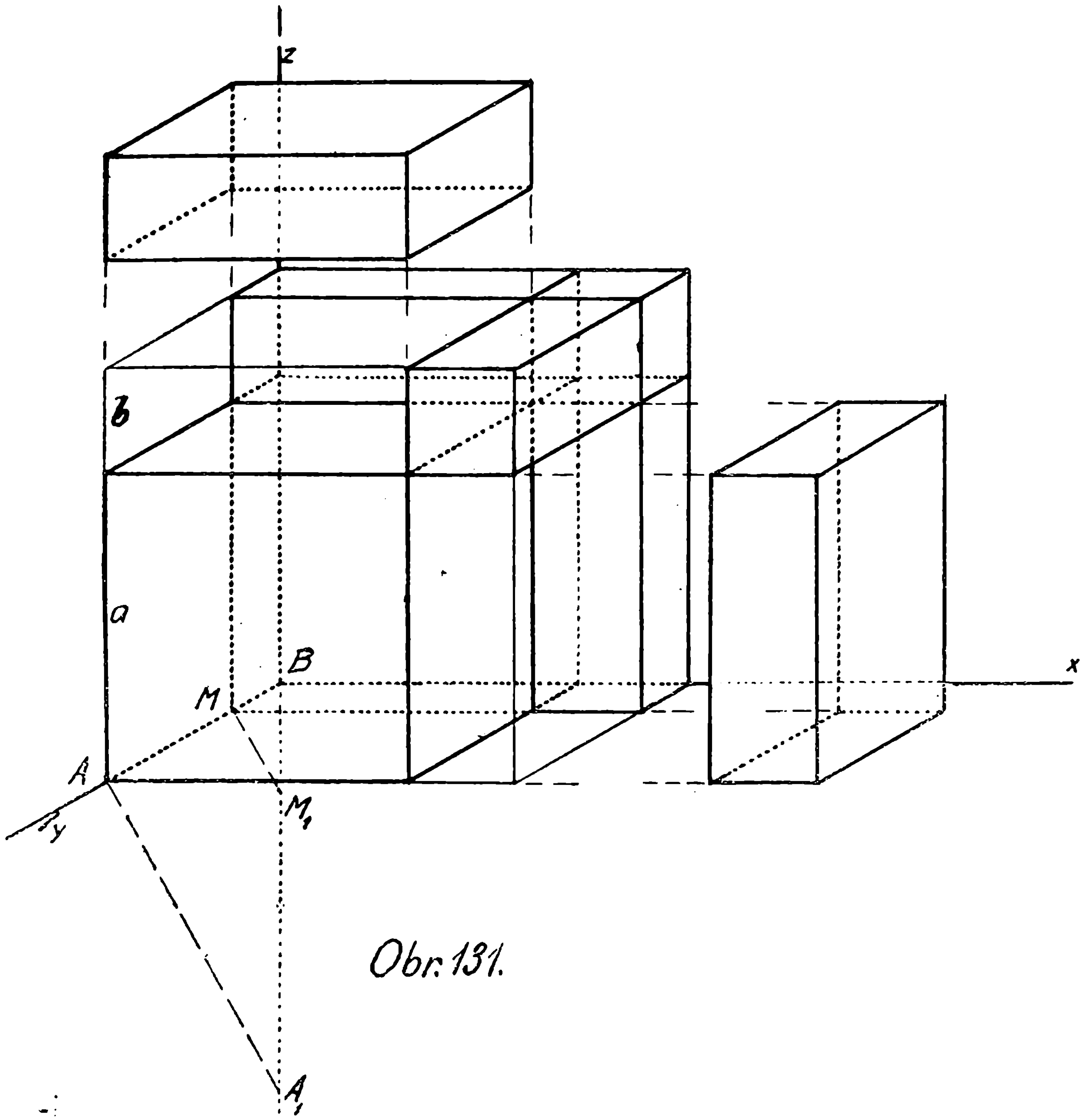
Obr. 130.b

Jako příklady zobrazeny v úloze:

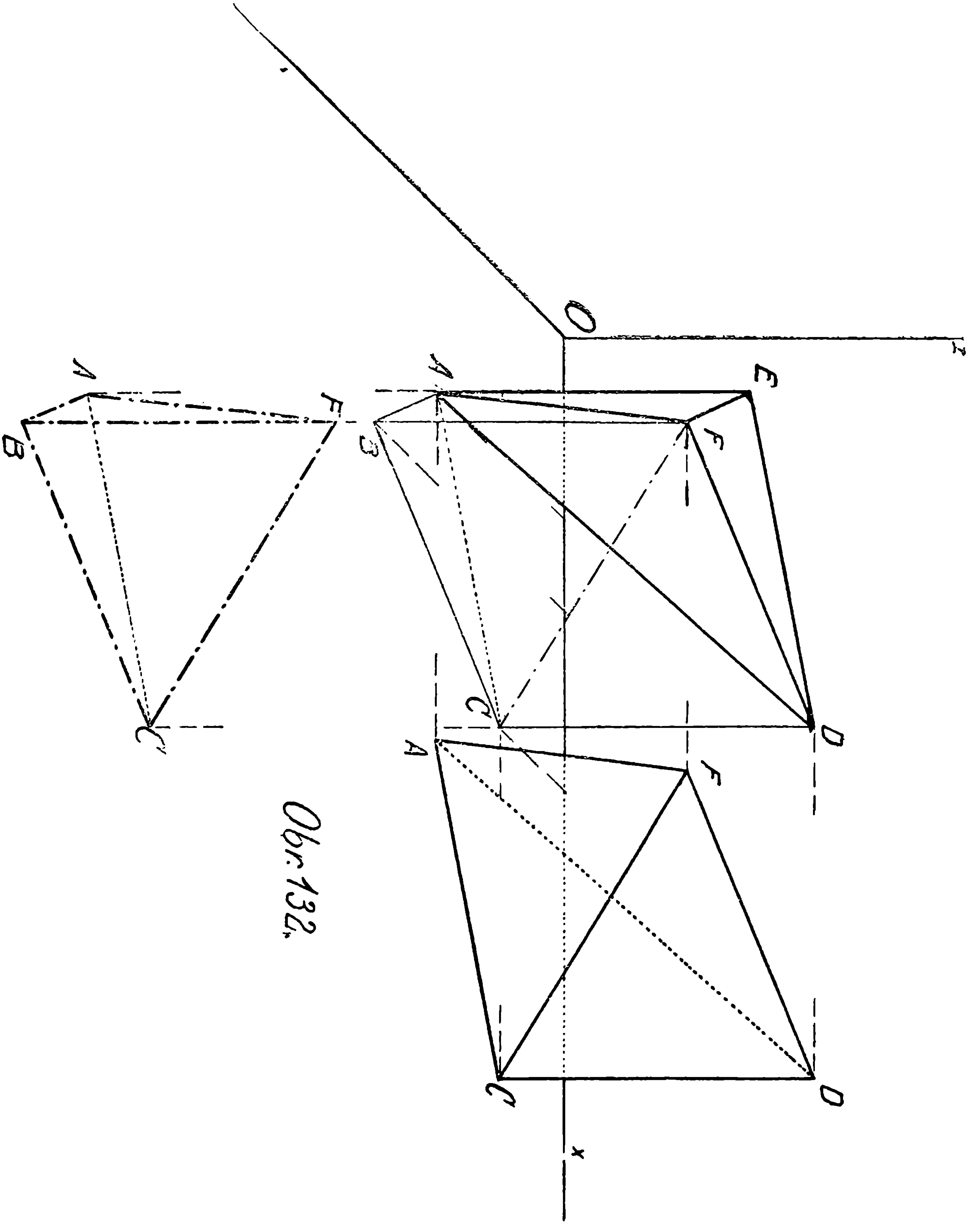
238. Šikmý průmět známé formule matematické $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $(a=6, b=2)$ pro $\omega = 150^0$, $q = {}^1/_2$. (Obr. 131.)

Tato volba paprsku šikmo promítacího je výhodná proto, že polovici souřadnic y-ových sestrojíme, spustíme-li s půdorysů bodů kolmice na $'y$ $(A_1 A \perp 'y,\ \overline{BA} = \frac{1}{2} \overline{BA_1})$. Aby obrazec byl názornější, pošinuty byly dva kvádry objemu $a^2 b$ jednak ve směru osy x, po druhé ve směru osy z.

239. Šikmý průmět stereometrické věty: Trojboký přímý hranol rozpadne se dvěma řezy ve tři jehlany trojboké, rovné sobě objemem. $A\,(4, 4, 0)$, $B\,(6, 6, 0)$, $C\,(10, 2, 0)$, $v = 7$.



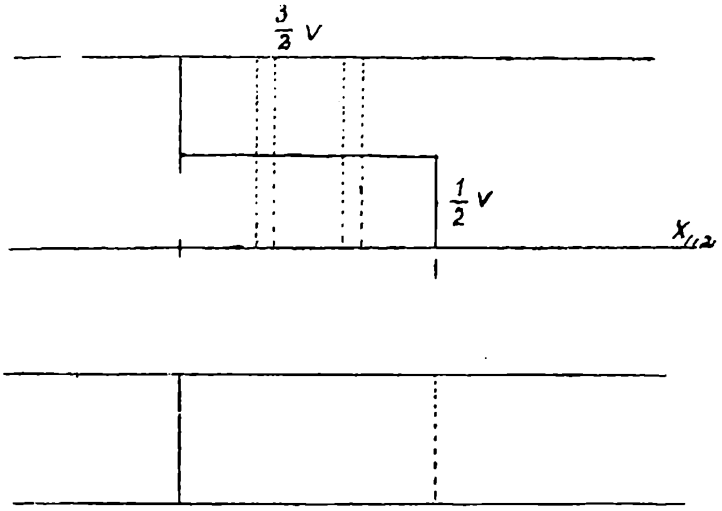
Obr. 131.



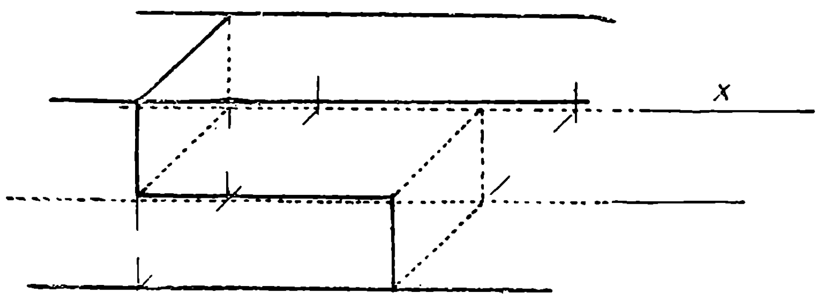
Obr. 132.

Jehlan $(ABC)F$ byl pošinut pod půdorysnu ve směru osy $-z$, jehlan $(CDF)A$ ve směru $+x$. Věta byla zobrazena v **kavalierní perspektivě** (při volbě $\omega = 135^0$, $q = 1$).

240. V obr. 133 až 136 zobrazena **spojení trámů** v orthogonálné i klinogonálné projekci.



Obr. 133a

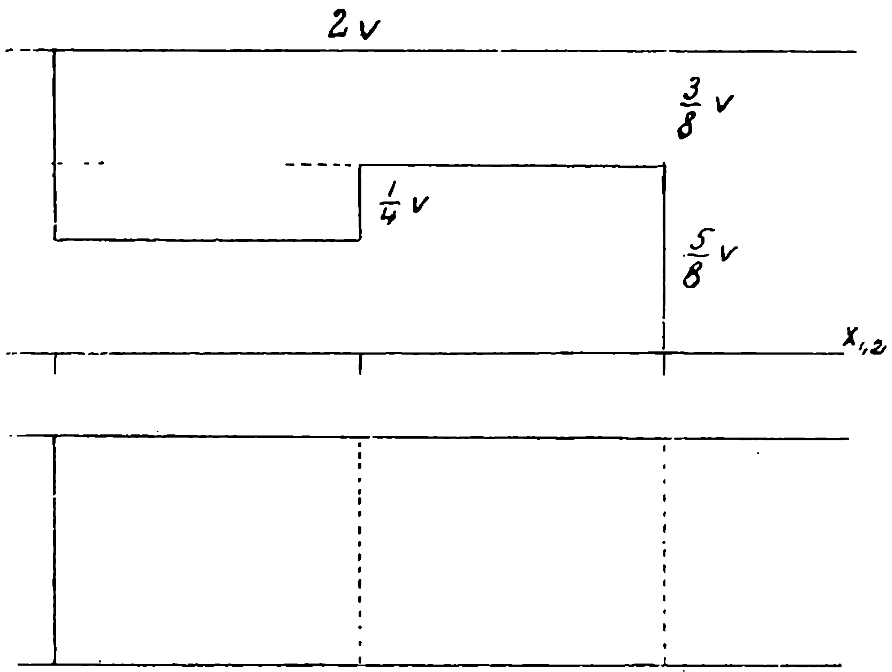


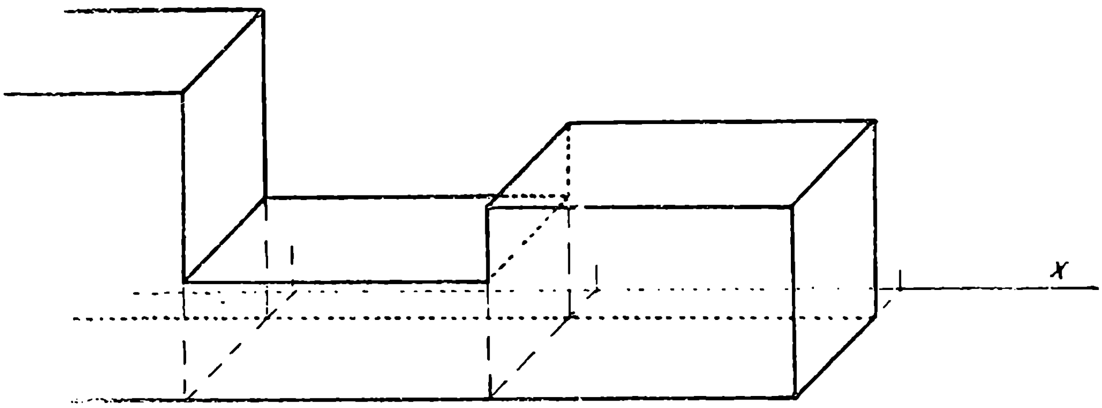
Obr. 133b

Spojení v obr. 133 ($\omega = 135^0$, $q = 1$) se nazývá **přeplátování kolmé** a slouží ku prodloužení trámu.

V obr. 134 jest **přeplátování kolmé s ozubem,** jímž se dosahuje pevnějšího spojení dvou trámů. Ke zvýšení názoru byl v šikmé projekci ($\omega = 135^0$, $q = \frac{1}{2}$) (obr. 134b) zobrazen pouze pohled na levý trám.

Obr. 134a



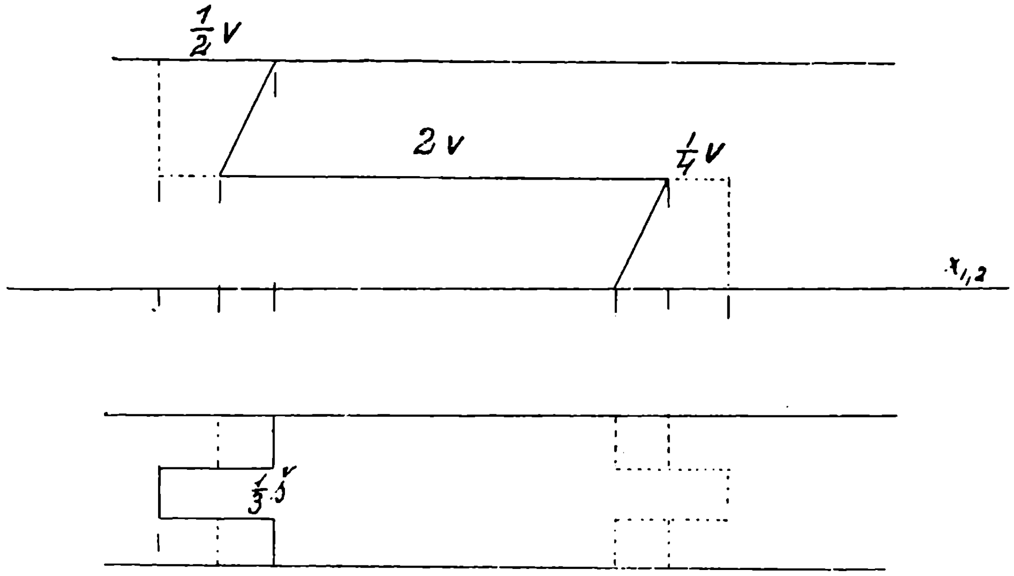


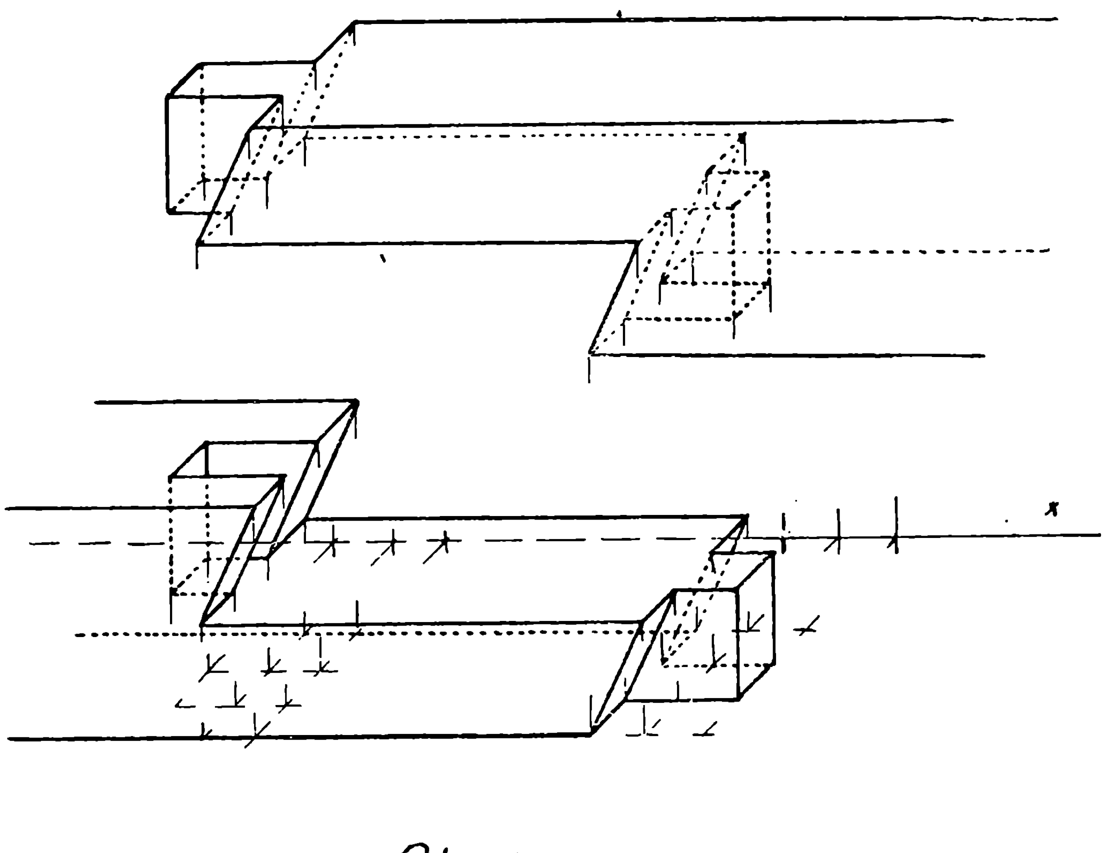
Obr. 134b

V obr. 135 máme **přeplátování šikmé s čepem.** V klinogonálním obraze tohoto spojení dvou trámů (obr. 135b) (135°, 1) pošinut byl trám pravý ve směru osy **z.**

V obr. 136 jest jeden trám zapuštěn do druhého kolmo na jeho délku, t. zv. **rybina střední** a v klinogonální projekci (obr. 136b) byl zadní trám s rybinou zobrazen v pohledu zespodu ($\omega = 210°$, $q = 1$).

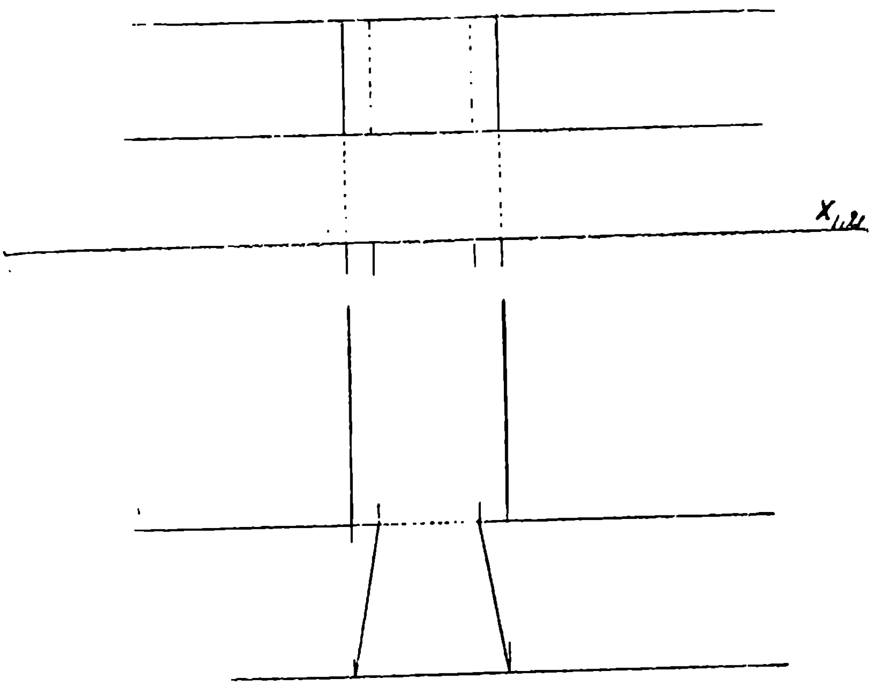
Obr. 135a



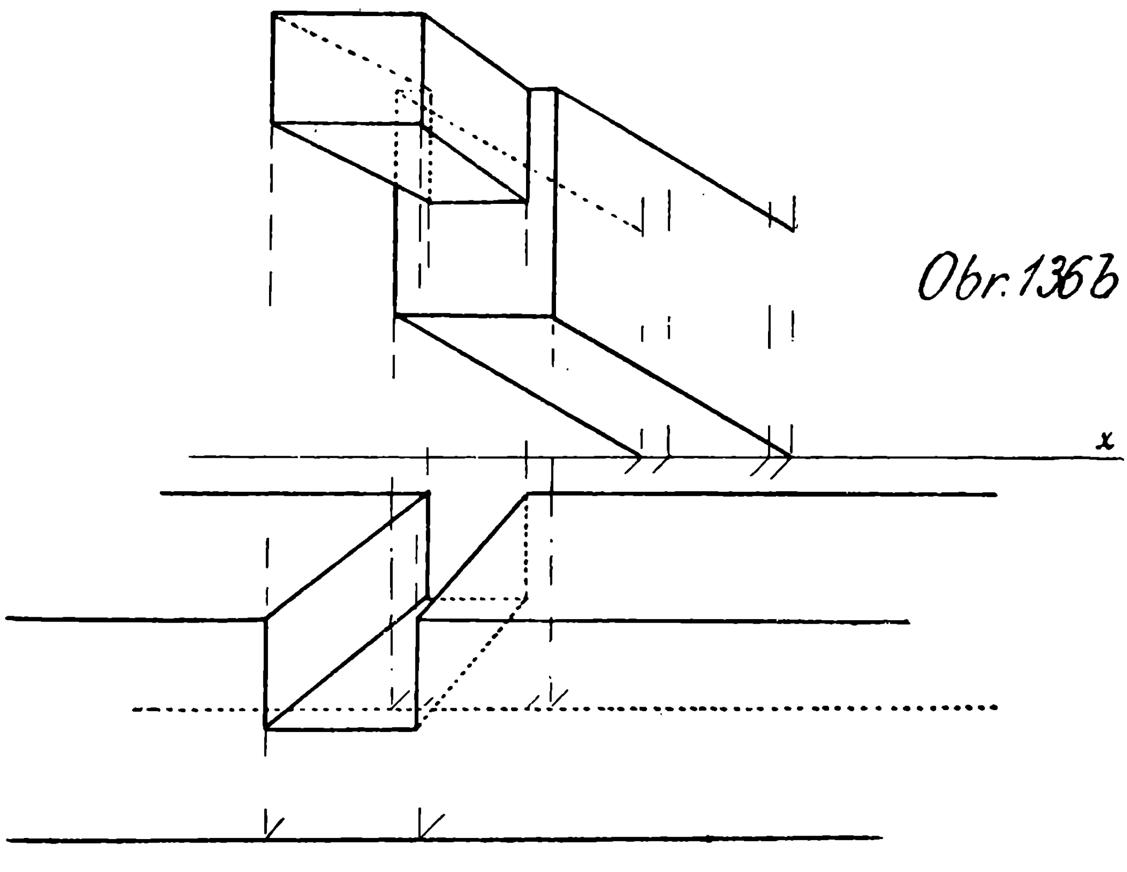


Obr. 135b

Obr. 136a



Obr. 136b



Obsah.

Opravy.

V obr. 8 str. 15 má býti X_0', Y_0' *místo* X_0, Y_0.
« 21 » 30 má býti B_2'' místo B_2.
» 27 » 37 vynecháno $P_1 \equiv B_1 D_1 \times B_0 D_0$.
» 28 » 38 vynecháno $O_{1,2} \equiv X_{1,2}$.
» 50 » 61 má býti stopa p_1^0 v obrysu $\triangle A_1 B_1 C_1$ tečkována.
» 52 » 64 schází označení $p_1 \equiv S_1 Q_1$, a $p_2 \equiv S_2 Q_2$.
» 59 » 71 schází označení $a_2 \equiv A_2 M_2$.
» 60 » 73 schází označení $P_2 \equiv N_1$.
» 69 » 86 schází označení $x_3 \equiv P_2$, $m_1 \equiv P_1 N_1$, $m_2 \equiv P_2 N_2$, $m_3 \equiv P_3 N_3$.
» 76 » 94 označ. $M_1 N_1 \equiv p_1$, $M_2 N_2 \equiv p_2$.
» 86 » 105 schází $O_2 \equiv o_2$.
» 93 » 115 vypadlo písmeno B_1^0, $B_1^0 \equiv B_3^0 B_1^0 \times y_{1,3}$.
» 102 » 126 označiti jest $D^0 B^0 \equiv n^0$.
» 116 » 142 má býti označeno $A_1 B_1 \equiv p_1$, $A_2 B_2 \equiv p_2$.
» 132 « 162 jest označiti osu y.

16. Caha: **»Zeměpisný přehled všech států na zeměkouli«** (24 tabulek velkého form.); čtvrté vydání. Cena Kč 5.—

17. Maška: **»Přehled matematiky« I.** (Aritmetika a algebra), příručka pro žactvo středních a odbor. škol; třetí vydání. 80 stran (biblový papír). Cena Kč 7.—.

18. Caha: **»Evropa«**, zeměpisný přehled. Druhé vydání. 40 stran (8 obrázků). Cena Kč 2.—.

19. Maška: **»Přehled matematiky« II.** (geometrie), příručka pro žactvo střed. a odb. škol. 160 stran (biblový papír); třetí vydání. Cena Kč 12.—.

20. Caha: **»Stručný přehled mluvnice a pravopisu«** (16 tabulek velkého formátu) v rozsahu učiva I.—IV. třídy občan. školy; třetí vydání. Cena Kč 3.50.

21. Maška: **»Přehled fysiky« I.** (Mechanika, astronomie a thermika.) Příručka pro střední a odbor. školy. 88 stran (biblový papír). Druhé vydání. Cena Kč 7.—.

22. Maška: **»Přehled fysiky« II.** (Nauka o vlnění, akustika, optika, magnetismus, elektřina.) 112 stran (biblový papír). Třetí vydání. Cena Kč 9.—.

23. Dr. Nikolau: **Mapa Čech.** Cena 2 Kč.

24. Pulec—Dr. Sahánek—Dr. Staněk: **»Obsahy z literárních děl novočeských«.** Pro potřebu středních škol i veřejných knihoven. Čtvrté vydání, opravené a doplněné, 320 stran. Cena Kč 18.—.

25. Maška: **»Matematika v úlohách«**, díl I. (Aritmetika a algebra.) Výborná příručka pro středoškolské studentstvo i soukromé studium. Druhé vydání. Cena Kč 18.—. 534 vypracovaných příkladů.

26. Šebor: **»Početní zábavky«.** (10 barevných tabulí zvířat, aeroplánů atd. k vystřihování.) Cena Kč 13.—.

27. Pulec: **»Novočeské písemnictví v přehledných otázkách k maturitě«.** Nepostradatelná příručka pro středoškolské studentstvo. 176 stran. Třetí vydání. Cena Kč 12.—.

28. Maška: **»Matematika v úlohách«**, díl II. (Geometrie.) Druhé vydání. Cena 22 Kč.

29. Pulec: **»Mluvme a pišme správně česky!«** Velmi praktický jazykový rádce, vhodný pro studující všech škol. 176 str. Páté vydání. Cena 10 Kč.

30. Smeykal: **»Přehled chemie«**, díl I. (Chemie fysikální a anorganická.) 128 stran. Cena 8 Kč.

31. Smeykal: **»Přehled chemie«**, díl II. (Chemie organická.) 112 stran. Cena 7 Kč.

32. Pulec: **»Německo-český slovník«.** Váz. 13 Kč.

33. Bednář: **»Přehled franc. mluvnice«.** Cena Kč 6.—, Druhé vydání.

34. Maška: **»Matematika v úlohách«**, díl. III. (Planimetrie), 364 vyřešených příkladů. — Cena 16 Kč.

35. Starosta: **Úlohy z deskriptivní geometrie.** Díl I. — Cena 12 Kč.

Ve vydávání »Školních příruček« se pokračuje.

„Dědictví Havlíčkovo",
Brno, Pekařská 2.

Nákladem „Dědictví Havlíčkova", Brno, Pekařská ul., č. 2.
Tiskem Rolnické tiskárny v Brně.