

ROZHLEDY

matematicko
– fyzikální

1921 / 22

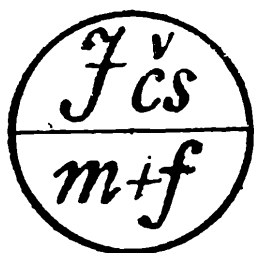
1981 / 82

* 60 let

ROČNÍK 60, 1981/82
ZÁŘÍ

(1)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY



ROZHLEDY matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Vladimír
Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr.
Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

E. Kraemer: Významné jubileum Rozhledů matematicko-fyzikálních	1
V. Malížek: Odmocnina z komplexního, surdického a smíšeného čísla	6
Z. Renc: O matematické logice	9
P. Brada: Ionizující záření v radioterapii	13
R. Hudec: Planeta tisíce prstenců	19
V. Repáš: Sté výročí narodenia Juru Hronca	22
D. Jedinák: Významný slovenský mate- matik	24
R. Rebstöck: Kouzelník z Menlo Parku	26
J. Nečas: Vzpomínka na Magdeburk	28
Pět úloh pro nejmladší čtenáře	30
J. Polák: Rybářský hlavolam	31
M. Simerský: Tranzistorové zesilovače ma- lých signálů	34
J. S.: Telegraficky o mezinárodní MO	43
Informace	44
Z nových knih	45
Pokyny pro autory článků do Rozhledů	48
K. Šindelář: Slovníček italsko-český	
3. str. obálky	

Významné jubileum Rozhledů matematicko-fyzikálních

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Prvním číslem Rozhledů, které vychází v září 1981, zahajuje náš časopis svůj šedesátý ročník. Je to vyjádřeno i jeho novou obálkou, uvádějící vedle školního roku 1921/22, kdy začaly Rozhledy vycházet, také letošní školní rok a číslo 60, které označuje právě zahájený ročník. Jednoduchým početním výkonem ($1981 - 1921 = 60$) však ihned zjistíme, že tu něco nehraje; šedesátý ročník by měl už končit a zatím teprve začíná. Abychom vysvětlili tuto nesrovnalost, připomeneme si poněkud podrobněji historii a dokonce i předhistorii našeho časopisu; poznáme tak, že Rozhledy vycházejí v podstatě už téměř 90 let.

Roku 1862 založila skupinka studentů filozofické fakulty pražské univerzity Spolek pro volné přednášky z matematiky a fyziky; jeho členy byli Češi i Němci. Avšak již od počátku školního roku 1863/64 byli všichni funkcionáři Spolku Češi a všechny zápisy o schůzích byly psány česky. V roce 1869 byly schváleny nové stanovy tohoto spolku, který se od té doby nazýval Jednota českých matematiků (JČM); jeho úkolem bylo pečovat o rozvoj matematiky i fyziky v českých zemích. Výstižnější název Jednota českých matematiků a fyziků (od r. 1921 Jednota československých matematiků a fyziků) byl však přijat až v roce 1912.

Z podnětu dr. Františka Josefa Studničky začala JČM vydávat v roce 1872 svůj členský časopis, jehož název zněl takto:

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky,
kterýž se zvláštním zřetelem k studujícím
rediguje Dr F. J. Studnička, professor matematiky
na c. k. universitě pražské, a vydává
Jednota českých matematiků.*

Tento časopis uveřejňoval vědecké práce mladých českých pracovníků z oboru matematiky a fyziky, informoval o vědeckém životě v těchto oborech středoškolské profesory matematiky a fyziky a zároveň popularizoval tyto vědy mezi studenty středních škol. Úkoly Časopisu byly tedy dost různorodé, takže nebylo snadné všechny stejnoměrně plnit. Po různých diskusích o poslání Časopisu bylo od školního roku 1892/93

jeho vydávání upraveno tak, že část určená středoškolským studentům se stala zvláštní složkou Časopisu a byla nazvána

Příloha k Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky.

Obsahovala odborné články elementárního rázu, životopisy významných přírodovědců, ukázky maturitních témat a úkoly z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky. Úspěšní řešitelé těchto úloh z řad středoškolských studentů byli odměňováni cenami. Tato Příloha, která vycházela až do konce školního roku 1920/21, plnila tedy v podstatě tytéž úkoly jako nynější Rozhledy matematicko-fyzikální. Je snad zajímavé připomenout, že v devadesátých letech minulého století měl Časopis asi 400 odběratelů, avšak Příloha měla již asi 1200 předplatitelů; při poměrně malém počtu českých studentů tehdejších vyšších středních škol to byl počet dost značný.

Po první světové válce začal rychle vzrůstat počet studentů českých a slovenských středních škol. Jednota československých matematiků a fyziků (JČSMF) se proto rozhodla vydávat pro tyto studenty samostatný časopis, který dostal název

Rozhledy matematicko-přírodovědecké.

Začal vycházet počátkem školního roku 1921/22 místo dosavadní Přílohy k Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky; převzal zároveň všechny úkoly, které dosud plnila Příloha. Proto se řadu let uvádělo na titulním listu každého ročníku Rozhledů, že je to zároveň X-tý ročník Přílohy. Naposledy nacházíme tento údaj na titulním listu 19. ročníku (1939/40) Rozhledů, kde se dočítáme, že jde o 47. ročník Přílohy. Podle toho by nynější šedesátý ročník Rozhledů byl 88. ročníkem této Přílohy. Rozhledy matematicko-přírodovědecké vydávala JČSMF až do konce školního roku 1950/51, tedy celkem 30 let. Ročně vycházelo 5 čísel, která měla dohromady 150 až 200 stran; za druhé světové války byl rozsah dvou ročníků menší než 150 stránek. V redigování těchto Rozhledů se postupně vystřídali tito pracovníci: *dr. Vladimír Ryšavý*, *dr. Jan Schuster*, *dr. Alois Wangler* (vesměs středoškolští profesori), *dr. František Vyčichlo*, *DrSc.*, *dr. Zdeněk Pírko*, *DrSc.*, *dr. Alois Urban* a *dr. Emil Kašpar*, *DrSc.* (vesměs vysokoškolští profesori). Náklad jednotlivých čísel Rozhledů kolísal v uvedených třiceti letech mezi jedním a dvěma tisíci výtisků.

V dalších letech se podnikl nepřilíš promyšlený pokus o změnu poslání Rozhledů; měly se stát časopisem, který by v nejširších vrstvách popularizoval matematiku, fyziku a chemii. Vedoucím redaktorem takto koncipovaného časopisu, který byl nazván

Matematicko-přírodovědecké rozhledy,

se stal chemik *dr. Milan Drátovský*; ročně vycházelo 6 čísel v celkovém rozsahu asi 200 stran. Vydávání převzalo nejdříve Přírodovědecké vydavatelství (roč. 31) a potom Nakladatelství Československé akademie

věd (ročníky 32 až 34); každý z těchto čtyř ročníků se kryl s kalendářním rokem (1952 až 1955). Avšak toto nové pojetí Rozhledů se neosvědčilo; počet odběratelů byl velmi malý. Nepomohlo ani zvětšení formátu časopisu, ani atraktivně upravené obálky jednotlivých čísel. Proto bylo po čtyřech letech vydávání Matematicko-přírodovědeckých rozhledů zastaveno.

Po přestávce, která trvala celý kalendářní rok 1956, začaly Rozhledy vycházet znovu; zároveň se vrátily ke svému tradičnímu a osvědčenému poslání. Od té doby, tj. od počátku roku 1957, je vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství s výstižnějším názvem

Rozhledy matematicko-fyzikální;

odborná péče o ně je svěřena JČSMF. Jejich rozsah byl podstatně zvětšen; ročně vychází 10 čísel po 48 stranách. První dva ročníky (35 a 36) obnovených Rozhledů se kryly s kalendářním rokem (1957 a 1958); další ročník vycházel jenom půl roku (6 čísel) a od 38. ročníku (1959/60) se každý ročník kryje opět se školním rokem.

Obnovit dobrou tradici Rozhledů nebylo nikterak snadné. Jestliže se to v poměrně krátké době podařilo, pak o to mají největší zásluhu vedoucí redaktor *doc. dr. Miroslav Menšík* s výkonným redaktorem *doc. Otou Setzerem*, kteří řídili Rozhledy v letech 1957 až 1968 (ročníky 35 až 47). Po smrti docenta Menšíka (v roce 1968) převzal vedení Rozhledů *doc. Setzer* s výkonným redaktorem *Stanislavem Horákem*; redigovali je až do konce školního roku 1971/72. Od 51. ročníku (1972/73) je vedoucím redaktorem autor tohoto článku, s nímž jako výkonný redaktor spolupracoval až do konce školního roku 1977/78 docent Setzer; od září 1978 je výkonným redaktorem *dr. Jiří Mída*. Odbornou sazečskou práci vykonává v posledních pěti letech *P. Zvěřina*. Po obtížných začátcích se poměrně brzy podařilo zvýšit i počet odběratelů Rozhledů; v posledních letech má každé číslo více než 8000 výtisků, tedy několikrát více než tomu bylo v letech 1921 až 1951.

Stručnou historii Rozhledů doplníme ještě neméně stručnou zmínkou o jejich obsahu. V prvních třiceti ročnících vyšlo mnoho speciálních článků z nejrůznějších oblastí školské matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky. Avšak kromě toho zde byly otištěny i články zásadnějšího charakteru, jako např. o řešení lineárních kongruencí, o základech aritmetiky, o počítacích strojích, o základech integrálního počtu, o speciálním principu relativity, o problému mezihvězdné dopravy (již ve školním roce 1925/26), o televizi (1928/29), o atomové energii, o praktickém významu geofyziky, o předpovídání počasí aj. Autory článků byli zpravidla středoškolští a vysokoškolští učitelé, z nichž mnozí patří k našim významným odborníkům (prof. Koutský, prof. Knichal, akademik Schwarz, prof. Pírko, prof. Klíma, prof. Havlíček, prof. Petržílka, prof. Košťál, akademik Zátopek, prof. Ilkovič aj.). Značná část článků kladla dost velké nároky na odborné znalosti čtenářů, takže jim asi málo středo-

školských studentů opravdu rozumělo. Potvrdil to *akademik Štefan Schwarz*, který v článku *Zamyslenie nad 50. ročníkom Rozhledov* (Rozhledy, roč. 50, č. 6) uvádí, že Rozhledy četl již jako student gymnázia; přitom píše:

„Články v Rozhledoch som sa samozrejme pokúšal čítať a porozumieť. Nemôžem povedať, že som ich všetky aj naozaj dočítal. Získal som skôr iba predstavu o tom, o čo ide. Zdáli sa mi často príliš učené. V tom smere sa mi zdá, že dnešné Rozhledy sú primeranejšie úrovni stredoškôľakov.“

Ve všech třiceti ročnících Rozhledů najdeme životopisy vynikajících přírodovědců a řadu různých drobných zajímavostí. Rovněž v každém ročníku byly uveřejňovány úlohy z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky; nejúspěšnější řešitelé těchto úloh byli vždy odměňováni cenami. Počet řešitelů se pohyboval kolem čtyřiceti, i když v některém ročníku bylo řešitelů velmi málo (15 až 20). Je ovšem nutno připomenout, že — zejména v prvních ročnících Rozhledů — vyžadovalo řešení některých úloh znalosti, které žák nemohl ve škole získat. Mezi úspěšnými řešiteli úloh najdeme jména mnohých pozdějších vysokoškolských profesorů nebo vědeckých pracovníků (Knichal, Vyčichlo, Hruša, Korous, Brejcha, Schwarz, Nádeník, Metelka, Apfelbeck, Kurzweil, Švec, Košťál, Kvasnica, Němejcová, Trlifaj, Fuka aj.).

Obnovené Rozhledy navázaly svým 35. ročníkem na tradici Rozhledů matematicko-přírodovědeckých. Jejich redakční rada se snažila o větší pestrost obsahu tím, že podstatně rozšířila počet článků věnovaných astronomii, zařazovala do textu různé matematické zábavy i fyzikální zajímavosti, otiskovala informace o matematických a fyzikálních olympiádách, obnovila tradiční soutěž Rozhledů v řešení úloh z matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie, informovala o knihách, které mohou s porozuměním číst studenti středních škol aj. Pokud jde o odborné články, usilovala redakční rada o to, aby byly přiměřené znalostem žáků středních škol. Výše citovaný úryvek článku akademika Schwarze ukazuje, že její úsilí nebylo bez výsledku.

Nové úkoly pro Rozhledy matematicko-fyzikální vznikly po publikování dokumentu *Další rozvoj československé výchovně vzdělávací soustavy*, který v roce 1976 schválilo předsednictvo ÚV KSČ, vláda ČSSR i vlády obou našich republik. Hlavním úkolem Rozhledů zůstává i nyní probouzet, rozvíjet a prohlubovat zájem žáků všech druhů středních škol o matematicko-fyzikální obory a jejich aplikace. Avšak je nutno usilovat o to, aby Rozhledy pronikly mnohem více než dosud do čtyřletých středních odborných škol a učilišť, na nichž studuje podstatně více žáků než na gymnáziích, k nimž se dosud Rozhledy převážně orientovaly. Náš časopis mohou také odbírat zájemci o matematiku a fyziku, kteří nejsou studenty středních škol. Je však nutno zdůraznit, že zájem o uvedené obory se může rozvíjet jenom na jejich určitých

znalostech. Jsou to aspoň takové vědomosti z matematiky a fyziky, které mají mít absolventi naší nynější základní školy. K porozumění některých článků bude ovšem někdy třeba vědomostí hlubších, neboť ke čtenářům Rozhledů patří také studující nejvyšších ročníků našich čtyřletých středních škol, kteří by sotva byli spokojeni, kdyby nacházeli v Rozhledech jenom články navazující bezprostředně na učivo základní školy.

Nad úkoly Rozhledů matematicko-fyzikálních, jež jsou v rozvinuté socialistické společnosti náročnější než kdykoliv dříve, se zamýšlela nejen redakční rada, ale také ústřední výbor JČSMF, které je svěřena odborná péče o náš časopis. Po zralé úvaze rozhodlo předsednictvo JČSMF zřídit z členů Jednoty odbornou skupinu, jejímž hlavním úkolem bude pomáhat redakční radě Rozhledů vybudovat široké autorské zázemí z řad pedagogů a odborníků různých matematicko-fyzikálních specializací i jejich mezních oborů. Seznam členů této skupiny, v níž převládají mladší pracovníci, otiskujeme v tomto čísle jubilejního ročníku Rozhledů.

V souvislosti se snahou o zlepšení a oživení obsahu Rozhledů upravila redakční rada už v předešlém ročníku jednotlivé oddíly každého čísla. Po případném úvodníku, který se zpravidla váže k některému významnému jubileu nebo mimořádné slavnostní příležitosti, následují tři hlavní oddíly, a to *Matematika*, *Fyzika*, *Z dějin exaktních věd*; měly by zpravidla tvořit asi 2/3 rozsahu každého čísla. Potom jsou zařazeny tyto tři další oddíly: *Přemýšlíme, řešíme,...*, *Informace*, *Z nových knih*. Nejvýznamnější je první z nich, neboť přináší různé problémy, úlohy, hlavolamy, hříčky apod.; jeho úkolem je probouzet aktivní přístup studujících k odborným poznatkům. Do oddílu *Informace* zařazuje redakční rada různá sdělení o vysokoškolském studiu matematicko-fyzikálních a technických oborů s ukázkami úloh dávaných u přijímacích zkoušek, zprávy o různých matematicko-fyzikálních soutěžích, zprávy o kongresech a sympoziích, upozornění na významná výročí apod. V některých číslech bude oddíl *Olympiády*, který je zcela věnován matematickým a fyzikálním olympiádám; konečně v některých číslech je oddíl *Naše soutěž*, obsahující texty nových úloh nebo řešení úloh zadaných v předešlém ročníku Rozhledů.

Úsilí redakční rady Rozhledů, podporované odbornou skupinou JČSMF, je ve shodě s duchem jednání i se závěry XVI. sjezdu KSČ, který položil mimořádný důraz na podstatné zvýšení kvality práce, ať je konána na kterémkoliv úseku života naší společnosti.

Odborná skupina

Členové JČSMF

František Barták (VÚOŠ Praha), PhDr. Milena Beranová (SPŠS Strakonice), RNDr. Leo Boček, CSc. (MFF UK Praha), RNDr. Emil Calda

(MFF UK Praha), RNDr. Marie Demlová, CSc. (FEL ČVUT Praha), Jaroslav Folta, CSc. (Ústav čsl. a svět. dějin ČSAV), RNDr. Bohumil Kolář (G Brno), RNDr. Jaromír Maláč (Brno), RNDr. Vladimír Malíšek, CSc. (UP Olomouc), RNDr. Josef Matoušek (PedF UJEP Brno), RNDr. Zdeněk Pulpán, CSc. (PedF Hradec Králové), RNDr. Zdeněk Renc (MFF Praha), Josef Svoboda (G Třebíč), RNDr. Miroslav Svoboda, CSc. (MFF Praha), RNDr. Vladimír Štefl (PřF UJEP Brno), Jan Voříšek (ZŠ Ústí n. L.), RNDr. Antonín Vrba, CSc. (MÚ ČSAV Praha), doc. Ing. Bohumil Vybíral, CSc. (PedF Hradec Králové), RNDr. Bohdan Zelinka, CSc. (VŠST Liberec)

Členové JSMF

RNDr. Tomáš Hecht, CSc. (MFF UK Bratislava), RNDr. Dušan Jedinák (G Topolčany), RNDr. Vladimír Jodas (G Bratislava), Nitra), RNDr. Anna Nogová, CSc. (FÚ SAV Bratislava), RNDr. Dušan Pelech (PedF Banská Bystrica), Pavol Škrinár (G Prievidza), RNDr. Marián Trenkler, CSc. (PrF UJPS Košice).

MATEMATIKA

Odmocnina z komplexního, surdického a smíšeného čísla

RNDr. VLADIMÍR MALÍŠEK, CSc., UP Olomouc

Každému je jistě dobře známo, že provádět „přímé“ a „obrácené“ početní výkony je zpravidla nestejně obtížné. Například k výpočtu mocniny $(5 + i)^2 = 24 + 10i$ není třeba žádné zvláštní „rutiny“, kdežto máme-li určit $\sqrt{24 + 10i}$, bez tužky a papíru se zpravidla neobejdeme. Že však i s těmito „mohutnými prostředky“ se můžeme někdy dostat do úzkých, ukazuje situace, již jsem byl nedávno svědkem: mladší kolegové, erudovaní fyzikové, „narazili“ náhodou na výraz $\sqrt{a + bi} = \sqrt{3 + 4i}$, který začali bez dlouhého přemýšlení upravovat podle *Moirreovy věty*, k tomu kompetentní, z níž vyplývá, že

$$\sqrt[r]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[r]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right). \quad (1)$$

Přitom ovšem $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; horší je to však s argumentem φ . Je známo, že pro každé komplexní číslo $a + bi$ lze určit argument ze vztahů

$$\sin \varphi = \frac{b}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Hledali tedy úhel φ , poté $\frac{\varphi}{2}$ a posléze $\cos \frac{\varphi}{2}$ a $\sin \frac{\varphi}{2}$, což všechno jsou ovšem podle tabulek čísla iracionální. Byl pro ně proto překvapením prostinký výsledek $\sqrt[4]{3 + 4i} = \pm(2 + i)$.

Vyvstala tedy otázka, jak vůbec počítat *odmocniny z komplexních čísel*. K potřebnému vzorci pro odmocninu z komplexního čísla lze snadno dospět, a to dokonce dvojím způsobem.

a) Opíráme-li se o větu (1), stačí si vzpomenout, že

$$\left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}, \quad \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}},$$

což dosazeno do (1) vede ihned k potřebnému vzorci, neboť $r \cos \varphi = a$. Platí tedy, že

$$\begin{aligned} \sqrt[r]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} &= \sqrt[r]{r} \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{r + r \cos \varphi}{2}} + i \sqrt{\frac{r - r \cos \varphi}{2}} = \sqrt{\frac{r + a}{2}} + i \sqrt{\frac{r - a}{2}} \end{aligned} \quad (2)$$

b) K témuž vztahu ovšem dospějeme i čistě algebraickou cestou, a to na základě předpokladu, že odmocnina z komplexního čísla $a + bi$ je rovněž komplexní číslo $(x + iy)$ a na základě definice rovnosti komplexních čísel. Můžeme tedy psát, že

$$\sqrt[a + bi]{} = x + iy;$$

nyní stačí obě strany rovnice umocnit dvěma a porovnat reálné a imaginární části na obou stranách vzniklé rovnosti, abychom opět dospěli k hledanému vztahu

$$\sqrt[a + bi]{} = \pm \left(\sqrt{\frac{r + a}{2}} + i \sqrt{\frac{r - a}{2}} \right). \quad (3)$$

Odmocninu z komplexně sdruženého čísla $a - bi$ dostaneme z (3) tak, že zaměníme i za $(-i)$, čili

$$\sqrt{a - bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} - i \sqrt{\frac{r-a}{2}} \right). \quad (4)$$

Komplexní čísla nabyla v matematice domovského práva asi před 150 lety, čili jsou v celém vývoji matematiky záležitostí poměrně nového data. Formální součty čísel různého druhu se však těšily pozornosti již velmi dávno; zejména součet čísla racionálního a iracionálního se jevil starým matematikům čímsi absurdním čili „surdickým“ (tj. doslova „blbým“). Dnes se pod pojmem *surdický výraz* chápe výraz typu $a + \sqrt{b}$; výraz k němu surdicky sdružený je $a - \sqrt{b}$. Je otázka, zda také odmocninu ze surdického výrazu je možno vyjádřit ve tvaru součtu dvou členů; skutečně to možné je, jak ukazuje identita

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \quad (5)$$

o jejíž správnosti se snadno přesvědčíme umocněním obou stran rovnosti a triviálními úpravami na pravé straně. S aplikací tohoto vzorce nejsou problémy, pokud a, b jsou čísla kladná, případně pokud se pod odmocninami neobjeví čísla záporná, což by vedlo k číslům komplexním. Vzorec (5) nejsnáze odvodíme na základě předpokladu, že odmocnina ze surdického výrazu $a + \sqrt{b}$ je rovna součtu surdicky sdružených výrazů téhož typu, čili

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x + \sqrt{y}} + \sqrt{x - \sqrt{y}}$$

Nyní stačí obě strany rovnice umocnit dvěma a porovnat racionální a iracionální části, abychom dospěli po několika elementárních krocích k hledanému vztahu.

Konečně i čísla daná součtem čísla celého a zlomku získala pozornost matematiků a dočkala se zvláštního názvu — *čísla smíšená*. Každé z nich lze ovšem nesčíslnými způsoby vyjádřit ve tvaru $a^2 + b$; v případě, že $a^2 > |b|$, lze velmi snadno a rychle odhadnout přibližnou hodnotu odmocniny z tohoto čísla. Platí totiž, že

$$\sqrt{a^2 + b} = a \left(1 + \frac{b}{a^2} \right)^{1/2}$$

podle binomické věty lze však rozvinout v řadu výraz

$$\left(1 + \frac{b}{a^2} \right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{b}{a^2} + \left(-\frac{1}{8} \right) \left(\frac{b}{a^2} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{b}{a^2} \right)^3 + \dots,$$

takže omezíme-li se na první dva členy rozvoje, dostaneme přibližný vzorec

$$\sqrt{a^2 + b} \doteq a + \frac{b}{2a}. \quad (6)$$

Tohoto postupu se skutečně užívá při odhadu odmocnin čísel. Máme-li třeba odhadnout hodnotu čísla $\sqrt[3]{102}$, pak ve shodě s (6) postupujeme takto:

$$\sqrt[3]{102} = \sqrt[3]{100\left(1 + \frac{2}{100}\right)} = 10\left(1 + \frac{2}{100}\right)^{1/3} \doteq 10\left(1 + \frac{1}{100}\right) = 10,1$$

Zmíněného postupu lze ovšem použít, pokud je hodnota $a^2 + b > 0$, přičemž přesnost aproximace je tím větší, čím je a^2 větší ve srovnání s b . Samozřejmě lze přesnost aproximace dále zvýšit použitím dalších členů binomického rozvoje.

Za zmínku stojí ještě další přibližný výraz pro výpočet odmocniny

$$\sqrt{a^2 + b} \doteq a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}. \quad (7)$$

Je možné, že jednou upotřebíte uvedených vzorců při výpočtech či jiných méně zajímavých situacích, jako jsou zkoušky apod. Úkolem článku bylo však jen upozornit čtenáře na pojmy komplexní číslo, surdický výraz a číslo smíšené jako na součty čísel různých kategorií a na vzorce (3) až (7), jež se sice netěší pozornosti žáků středních škol ani osnov, ale přesto bývají mnohdy velmi užitečné.

0 matematické logice

RNDr. ZDENĚK RENC, CSc., MFF UK Praha

Matematická logika je téma, které bylo poměrně nedávno zařazeno do výuky středoškolské matematiky. Je samozřejmé, že v rámci střední školy je možno zvládnout jenom velmi omezenou část celého vědního oboru, který je ve skutečnosti tímto názvem označován, a navíc je třeba si zvolit pouze jeden z možných pohledů na ni. Nebude proto snad na škodu pohovořit o matematické logice trochu obecněji a pokusit se zařadit vaše středoškolské znalosti do širších souvislostí.

Jedním z úkolů matematické logiky je vytváření a rozvíjení formálních systémů (říká se také axiomatických systémů nebo teorií) vhodných pro vyjádření a studium matematických úvah a postupů. Při vytváření takového systému je nejprve nutno pečlivě zvolit formální jazyk, ve kterém můžeme popsat základní pojmy zvolené oblasti matematiky a vyjádřit tvrzení o nich. Dále je zapotřebí formalizovat způ-

soby uvažování, kterými z jedněch tvrzení vyvozujeme jiná. Konečně je třeba věnovat se otázkám souvisejícím s určováním významů jednotlivých tvrzení, s jejich pravdivostí apod. Zastavme se nyní u každé z těchto věcí trochu podrobněji.

I. Jazyk

Představíte-li si nějaké matematické tvrzení nebo definici (například definici limity funkce v bodě) a uvědomíte-li si, jaké objekty a vztahy mezi nimi se v ní objevují, vidíte, že jazyk formální teorie, ve kterém budeme chtít takovou definici nebo tvrzení zapsat, musí obsahovat symboly několikerého druhu:

a) Jsou to především *symbolsy pro proměnné a konstanty*; obvykle si představujeme, že takovýchto symbolů máme k dispozici neomezeně mnoho a používáme pro ně písmena $x, y, z, \dots, x_1, y_1, z_1, \dots, a, b, c$ apod.

b) Další jsou *symbolsy, označující nějaké operace* (budeme jim říkat funkční symbolsy) nebo vztahy (budeme říkat predikátové symbolsy). S každým takovým symbolem je spojeno přirozené číslo, kterému říkáme četnost a které zhruba řečeno určuje počet objektů (například proměnných nebo konstant), které musíme k tomuto symbolu při jeho použití připojovat. Pro funkční symbolsy užíváme často písmen $f, g, h, \dots$ pro predikátové symbolsy pak $p, q, r, \dots$ apod. Některé operace nebo vztahy se vyskytují tak často, že již dostaly své pevné označení. Tak například operace, která přiřazuje dvěma číslům jejich součet, se obvykle značí symbolem $+$ (a tedy $+$ je funkční symbol četnosti dvě nebo jak také říkáme binární funkční symbol). Podobně pro vztah „být menší“ se vžil (opět binární) predikátový symbol $<$. Aby nevznikl mylný dojem, že všechny funkční a predikátové symbolsy jsou binární: predikátový symbol, označující vztah „být sudý“ je unární (tj. četnosti jedna), predikátový symbol označující vztah „ležet mezi“ je ternární (tj. četnosti tři); najděte si sami podobné příklady pro funkční symbolsy.

c) Třetím druhem užívaných symbolů jsou *symbolsy pro logické spojky*: $\neg$ (negace), $\&$ (konjunkce), $\vee$ (disjunkce), $\rightarrow$ (implikace), $\leftrightarrow$ (ekvivalence). Možná, že jste pro některé z těchto spojek užívali ve škole jiných symbolů či pojmenování; to však vůbec nevádí, je to pouze otázka úmluvy. Všimněte si, že i logickým spojkám lze připsat jakousi „četnost“: negace je unární spojka, ostatní jmenované spojky jsou binární.

d) Další v řadě jsou *symbolsy pro kvantifikátory*: $\forall$ (obecný, někdy se též říká velký kvantifikátor) a $\exists$ (existenční, někdy též malý kvantifikátor). Tyto symbolsy zastupují ve formálním jazyce slovní obraty „pro všechna“ a „existuje“.

e) Konečně je z praktických důvodů výhodné (i když věcně to není nutné) zařadit do jazyka některé *pomocné symbolsy*, jako závorky a čárku.

Některé z uvedených symbolů potřebujeme zařadit do jazyka vždy

bez ohledu na to, jakou matematickou disciplínu jimi chceme popisovat. Říkáme jim proto *logické symboly* a jsou to symboly pro proměnné, logické spojky, kvantifikátory a pomocné symboly (pokud jsme se nerozhodli obejít se bez nich); mezi logické symboly počítáme obvykle i binární predikátový symbol $=$ pro rovnost. Ostatní symboly, to jest konstanty, funkční a predikátové symboly (kromě $=$), nazýváme *speciálními symboly*. To, zda a které z nich do jazyka zařadíme, závisí totiž na konkrétní matematické teorii, kterou chceme formálně popisovat, na tom, jaké speciální operace a vztahy se v ní používají. Kdybychom chtěli vytvářet například jazyk pro popis aritmetiky, zařadili bychom do něj ze speciálních symbolů ještě konstantu 0, unární funkční symbol S pro operaci následníka, binární funkční symboly $+$ a $\cdot$ pro operace sčítání a násobení a binární predikátový symbol $<$ pro vztah „být menší“. Při tvorbě jazyka teorie množin bychom si vystačili s jediným speciálním symbolem, totiž binárním predikátovým symbolem $\in$ pro náležení.

Vidíme tedy, že zadat formální jazyk nějaké teorie znamená především říci, kterých konkrétních speciálních symbolů budeme používat (o logických symbolech to zvláště říkat ani nemusíme, ty jsou do libovolného jazyka zahrnuty automaticky). Tím však ještě nejsme s jazykem zdaleka hotovi. Zatím jsme totiž pouze řekli, jak má vypadat jeho „abeceda“. Dále musíme ještě zadat pravidla, pomocí nichž smíme z těchto symbolů tvořit složené výrazy. Předpokládáme samozřejmě, že výrazy jazyka vznikají tak, že jednotlivé symboly píšeme postupně zleva doprava vedle sebe. Nebudeme však ochotni připustit jako „správný výraz“ libovolnou konečnou posloupnost symbolů — stejně tak, jako nejsme ochotni uznat každou konečnou posloupnost písmen české abecedy za slovo českého jazyka. Budeme rozlišovat dva typy výrazů.

Prvním z nich jsou tzv. *termy*. Základní termy jsou symboly pro proměnné nebo konstanty (tj. jednočlenné výrazy, vzniklé napsáním symbolu pro proměnnou či konstantu). Všechny ostatní termy jsou nápisy tvaru $f(t_1, \dots, t_n)$, kde f je n -ární funkční symbol a $t_1, \dots, t_n$ nějaké termy (tj. výrazy, vzniklé z daného funkčního symbolu f a daných termů $t_1, \dots, t_n$, kterých je tolik, kolik je četnost symbolu f tak, že nejprve napíšeme symbol f a za něj postupně termy $t_1, \dots, t_n$ — pro lepší srozumitelnost v závorkách a odděleny čárkami). Termy jsou tedy vlastně (až na základní termy) jména různých operací, včetně složených (uvědomte si, že term tvaru $f(t_1, \dots, t_n)$ může obsahovat „uvnitř“ termů $t_1, \dots, t_n$ další funkční symboly). Termy jazyka aritmetiky jsou například nápisy 0 , x , $+$ (x, y) nebo $+$ ($x, (2, y)$). V aritmetice jsme zvyklí psát tyto termy trochu jiným způsobem; třetí z uvedených termů píšeme obvykle ve tvaru $(x + y)$ a čtvrtý jako $(x + 2 \cdot y)$. To ovšem nic nemění na uvedené obecné definici termu. Druhé tvary zápisu zachycují pouze konvenci, kterou jsme si právě pro aritmetiku mlčky osvojili již někde

na základní škole (aniž jsme tušili, že píšeme nějaké termy) a která využívá toho, že symboly $+$ a $.$ jsou binární. Jde vlastně o úmluvu, že napsaný binární symbol se „vztahuje“ na termy, napsané bezprostředně před a bezprostředně za ním. Je třeba uvážit, že obecná definice termu by měla tento pojem popisovat jednotně pro libovolný jazyk, ať už se v něm vyskytují libovolné funkční symboly libovolných četností.

Druhým typem výrazů, které budeme ze symbolů jazyka vytvářet, budou *formule*. Definujeme je opět induktivně podle rostoucí složitosti. Základními (většinou se říká atomickými) formulemi jsou všechny zápisy tvaru $p(t_1, \dots, t_n)$, kde p je nějaký predikátový symbol četnosti n a $t_1, \dots, t_n$ jsou termy. Další formule se z těchto atomických tvoří pomocí spojek a kvantifikátorů. Přesněji:

- jsou-li A a B nějaké formule, jsou i výrazy $\neg A$ a $A \rightarrow B$ formule
- je-li A formule a x proměnná, je i výraz $(\forall x) A$ formule.

Formule jsou tedy výrazy, symbolicky zachycující „smysluplná“ tvrzení. Atomickou formulí jazyka aritmetiky je například výraz $<(x, +(y, 1))$, kterými budeme patrně raději psát ve tvaru $(x < y + 1)$. Složenými formulemi jsou například výrazy (napíšeme je hned v obvykle užívaném tvaru) $((x < y) \rightarrow (x + 1 < y + 1))$ nebo $(\forall x)((x > 0) \rightarrow (x + 1 < x))$. Pokud vás náhodou posledně napsaný výraz zarazil, věřte, že není proč. Podle právě uvedených pravidel pro tvorbu formulí to skutečně formule je; o nic více nám zatím nejde.

Všimněme si závěrem ještě jedné věci. Pojem formule jsme definovali pouze pomocí spojek $\neg$ a $\rightarrow$ a kvantifikátoru $\forall$. To může být v některých souvislostech výhodné. Často totiž dokazujeme v matematické logice věty typu „Je-li A libovolná formule, pak...“. Takovéto věty dokazujeme obvykle indukcí podle složitosti formule A , vyjádřené počtem spojek a kvantifikátorů, které se v ní vyskytují. Při naší definici formule pak stačí dokázat, že věta platí pro všechny atomické formule, dále že platí-li pro libovolné formule B a C , platí i pro formule $\neg B$ a $B \rightarrow C$ a konečně platí-li pro libovolnou formuli B , platí i pro formuli $(\forall x) B$; více „druhů“ indukčního kroku už nemáme. Na druhé straně je obvyklé (a pohodlné) vyjadřovat matematické tvrzení i pomocí ostatních běžných spojek a existenčního kvantifikátoru, a proto bychom rádi i tyto symboly „propašovali“ do našich formulí. Protichůdnost obou uvedených záměrů se většinou řeší tak, že dovolíme vytvářet výrazy i pomocí symbolů $\&$, $\vee$, $\leftrightarrow$ a $\exists$, budeme s nimi zacházet jako s formulemi, ale v případě potřeby je budeme chápat jako zkratky za výrazy utvořené pouze pomocí $\neg$, $\rightarrow$ a $\forall$ (což jsou formule podle naší definice). Přitom pro libovolné formule A a B je

$A \& B$ zkratka za $\neg (A \rightarrow \neg B)$,

$A \vee B$ zkratka za $\neg A \rightarrow B$,

$A \leftrightarrow B$ zkratka za $(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$ a

$(\exists x) A$ zkratka za $\neg (\forall x)(\neg A)$.

Jestliže nám pak nějaký puritán vytkne, že pracujeme například s výrazem $(\exists x)(A \leftrightarrow B)$, který není formulí, omluvíme se a vysvětlíme, že ho chápeme jako zkratku za výraz

$\neg (\forall x)(\neg (A \leftrightarrow B))$, což je zkratka za výraz $\neg (\forall x)(\neg ((A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)))$, což je zkratka za výraz $\neg (\forall x)(\neg (\neg ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg (B \rightarrow A))))$, který je již formulí.

Že bude nyní zmíněný puritán tuto formuli patrně dosti pracně a dlouho dešifrovat (zatímco my jsme svoji zkratku pochopili snadno a rychle), je ovšem jeho věc.

FYZIKA

Ionizující záření v radioterapii

Ing. PAVEL BRADA, Krajská nemocnice Ústí nad Labem

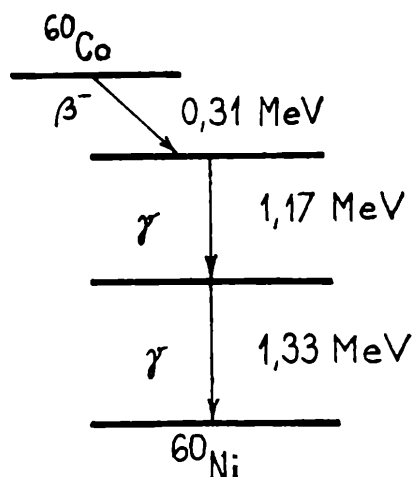
Léčba ionizujícím zářením se provádí již od začátku dvacátého století. Ozáří-li se zhoubný nádor, dojde k poškození jeho buněk a k zastavení jeho dalšího růstu. Při ozáření nádoru je však nutně zasažena i okolní zdravá tkáň. Naštěstí však dávka, která postačuje ke zničení některých druhů nádorů, nevyřadí ještě okolní tkáň z funkce. Všeobecně je snahou volit při ozařování takové parametry, aby okolní tkáň byla zasažena co možná nejméně. Léčení ionizujícím zářením se nazývá *radioterapie*.

Zpočátku se pro léčení zářením používal pouze rentgenový přístroj, v němž zdrojem záření je tzv. rentgenka. V rentgence dopadají urychlené elektrony na wolframový terčík, ve kterém vznikají fotony (rentgenové záření) o maximální energii rovnající se energii elektronů. Energie elektronů závisí na napětí, kterým jsou elektrony urychleny. Toto napětí činí v praxi řádově stovky kV.

Po druhé světové válce se začaly objevovat radionuklidové zdroje záření ¹⁾, jež lze získat z atomového reaktoru. Nejpoužívanější radionuklidy pro radioterapii jsou ⁶⁰Co a ¹³⁷Cs. Radionuklid ⁶⁰Co se samovolně

¹⁾ Radionuklidem označujeme soubor radioaktivních atomů se stejnými hmotnostními a atomovými čísly.

přeměňuje vyzářením částice beta a dvou kvant gama²⁾ na ^{60}Ni s poločasem přeměny 5,27 roku. ^{60}Ni nepodléhá další radioaktivní přeměně a je tedy stabilní. Schéma přeměny je nakresleno na obr. 1. Na tomto obrázku je vzdálenost vodorovných čar úměrná vyzářené energii. Obě kvanta gama jsou vyzářena bezprostředně po sobě a mají energii po řadě 1,17 a 1,32 MeV³⁾. Částice beta (elektron) se pohltí buď v samotném



Obr. 1

zářiči (samoabsorpcí), nebo v platinoiridiovém obalu zářiče. Kvanta gama unikají ze zdroje ven. Podobně je tomu v případě ^{137}Cs , kde dochází k vyzáření jedné částice beta a jednoho kvanta gama, které má energii 0,66 MeV. Oba tyto radionuklidy se vyrábějí ve tvaru válečku o průměru cca 20 mm a aktivitě řádově 10^2 TBq⁴⁾.

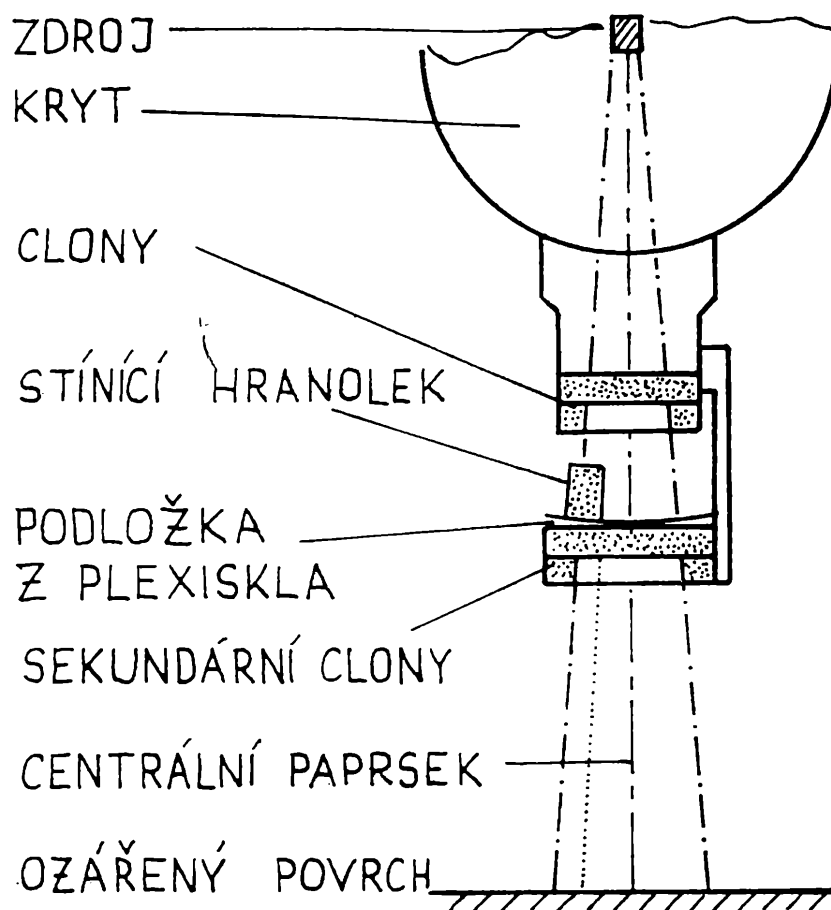
Obecně platí, že s rostoucím atomovým číslem hmoty roste absorpce záření gama ve hmotě, a tudíž i její stínící účinky. Pro vyclonění pole gama, kterým se ozáří pacient, se proto používá olova. Zdroj je umístěn v olověném krytu (viz. obr. 2) a velikost pole lze nastavit dvěma páry na sebe kolmých olověných clon. Stínícími hranolky, kterými lze pohybovat po plexisklové podložce, můžeme tvar pole ještě upravit. Plexisklem projde záření gama téměř beze ztrát, neboť plexisklo je tvořeno atomy o nízkém atomovém čísle. Sekundárními clonami se zaostřují hrany pole, které jsou vlivem nebodovosti zdroje poněkud „rozmazány“.

V současné době se v radioterapii používají stále více urychlovače částic, z nichž nejrozšířenější je *betatron*. V betatronu se urychlují elektrony na energii řádově desítky MeV. Kromě elektronového záření lze u betatronu využít ještě brzdného záření, které vznikne dopadem elektro-

²⁾ Záření gama se nešíří spojitě, ale je kvantováno podobně jako světlo.

³⁾ MeV je označení pro jeden megaelektronvolt. Jeden elektronvolt je energie, kterou získá elektron, projde-li potenciálovým rozdílem 1V ve vakuu.

⁴⁾ Při aktivitě jeden Bq (becquerel, čti bekerel) dochází v průměru k jedné radioaktivní přeměně za sekundu, tedy při aktivitě 10^2 TBq (10^2 terabecquerel) dochází k 10^{14} přeměnám za sekundu.



Obr. 2

nů na wolframový terčik. Brzdné záření betatronu má stejnou povahu jako rentgenové záření (v obou případech jde o elektromagnetické záření), má však mnohem vyšší energii. Maximální energie spektra brzdného záření se opět rovná energii urychlených elektronů.

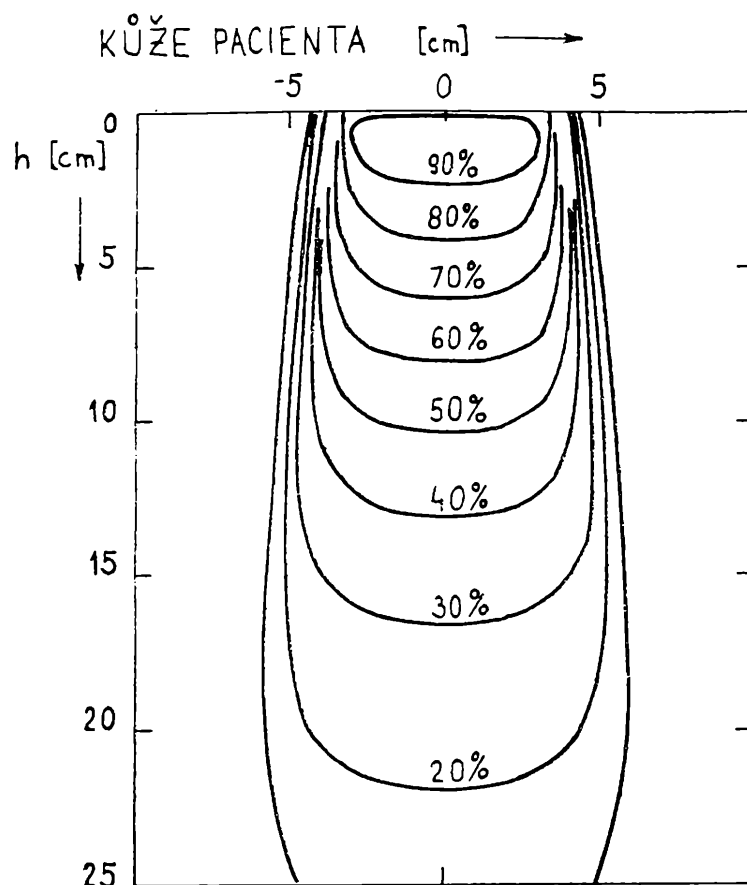
Při vniknutí jakéhokoli záření do tkáně dochází k interakci mezi tímto zářením a tkání, což má za následek, že s přibývající hloubkou ve tkáni se záření zeslabuje. Veličina, která popisuje množství pohlceného záření, se nazývá dávka. Dávka D je definována jako poměr střední energie ΔE ionizujícího záření) absorbované objemovým elementem látky a hmotnosti Δm látky v tomto objemovém elementu. Tedy

$$D = \frac{\Delta E}{\Delta m}.$$

Jednotkou dávky je 1 Gy (gray, čti grej). Platí, že $1 \text{ Gy} = 1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$. Dávková rychlost v určitém bodě je definována jako

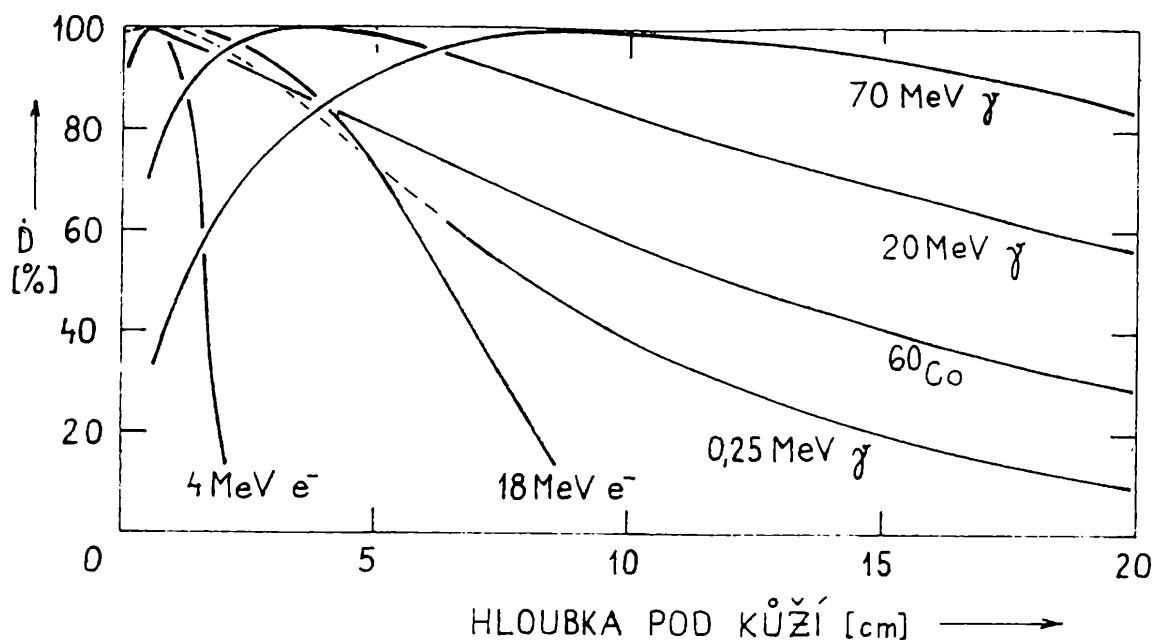
$$\dot{D} = \frac{\Delta D}{\Delta t},$$

kde ΔD je dávka obdržená v tomto bodě za časový interval Δt . Jednotkou dávkové rychlosti je $1 \text{ Gy} \cdot \text{s}^{-1}$.



Obr. 3

Rozložení dávkové rychlosti ve tkáni závisí na druhu záření, na energetickém spektru záření, na vzdálenosti povrchu těla pacienta od zdroje a na velikosti a tvaru pole záření. Dávkové rozložení lze měřit ionizační komůrkou ve vodním fantomu (nádobě naplněné vodou), neboť voda zachycuje záření téměř stejně jako lidská tkáň. Rozložení dávkové rychlosti ve tkáni je charakterizováno tzv. *izodózními plochami*, které spojují místa o stejné dávkové rychlosti. Průnikem izodózních ploch s rovinou proloženou centrálním paprskem (viz obr. 2) a kolmou k jednomu páru clon vzniknou izodózní křivky v této rovině. Na obr. 3 jsou nakresleny izodózní křivky pro záření gama z ^{60}Co pro vzdálenost zdroje od povrchu pacienta 60 cm a velikost pole v této vzdálenosti $8\text{ cm} \times 10\text{ cm}$. Na tomto obrázku přísluší maximální dávkové rychlosti 100 %. Zajímavé je, že místo, které obdrží maximální dávku, neleží na povrchu pacienta, ale v určité vzdálenosti pod povrchem. U ^{60}Co tato vzdálenost činí 5 mm. Tento jev souvisí se vznikem sekundárního záření ve tkáni. Sekundární záření je tvořeno jak fotony, tak elektrony, vzniklými srážkami primárního záření (ze zdroje) s elektronovým obalem atomů tkáně. Dávka absorbovaná ve větší hloubce pod povrchem obsahuje i příspěvek od sekundárního záření, které do daného místa přichází ze všech směrů. V povrchové vrstvě je však příliv sekundárního záření ze směru od zdroje ochuzen. Na povrchu, kde ze směru od zdroje

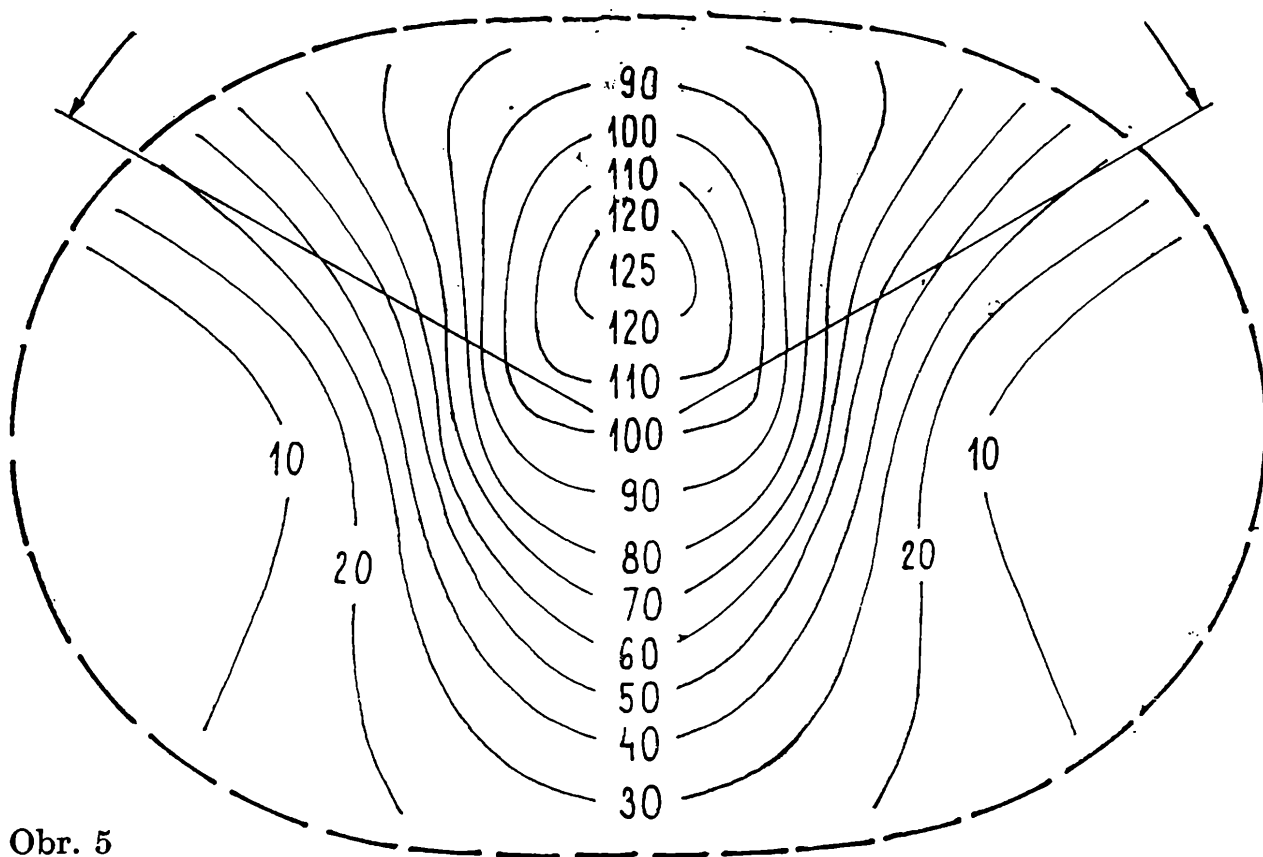


Obr. 4

nedopadá téměř žádné sekundární záření, bude dávka nejmenší, se zvětšující se hloubkou bude růst až do maxima, které je přibližně v té vzdálenosti od povrchu, jež se rovná maximálnímu doběhu sekundárních částic ve tkáni. Se vzrůstající energií primárních fotonů jednak vzrůstá pravděpodobnost, že sekundární elektrony se budou pohybovat ve stejném směru jako primární fotony, jednak vzrůstá energie sekundárních elektronů a tím i jejich doběh ve tkáni. To znamená, že se vzrůstající energií fotonového záření se vzdaluje maximum dávkové rychlosti od povrchu a zároveň zvyšuje poměr dávkové rychlosti v maximum k dávkové rychlosti na povrchu. Na obr. 4 je nakreslena závislost dávkové rychlosti na hloubce pod kůží pacienta pro různé energie primárních fotonů a elektronů.

Skutečnost, že maximum dávkové rychlosti je pro vyšší energie fotonů pod povrchem a ne na povrchu, je v praxi prospěšná, neboť nedochází k tak velkému ozáření kůže. Při ozařování se snažíme, aby se co nejvíce energie absorbovalo v nádoru a aby okolní zdravá tkáň byla ozářena co nejméně. Podle obr. 4 je tedy výhodné, jestliže pro hlouběji umístěné nádory použijeme vyšší energii. Pro záření elektronů z betatronu je situace obdobná s tím rozdílem, že po dosažení dávkového maxima klesá dávková rychlost prudce k nule, neboť elektrony nemají takovou pronikavost jako záření gama. Elektronové záření se proto hodí pro ozařování nádorů těsně pod kůží, neboť zdravá tkáň ve větší hloubce pod kůží není ozářena téměř vůbec.

Při ozařování nádorů ve větší hloubce můžeme použít i více polí gama z různých stran. Při tomto způsobu ozáření je sice zasažena větší plocha kůže, zato však s nižší dávkou. Za tímto účelem se používá i tzv. *kyvadlová terapie*, kdy zdroj, upevněný na otočném rameni, kýve nad pa-



Obr. 5

cientem, přičemž centrální paprsek míří vždy do jednoho bodu na ose rotace. Na obr. 5 jsou nakresleny izodózní křivky pro záření ^{60}Co , úhel kyvu 120°, vzdálenost zdroje od osy rotace 75 cm a velikost pole 8 cm $\times$ 8 cm. Přerušovanou čarou je vyznačen průřez pacientem, stoprocentní izodóza prochází osou rotace. Výhodou kyvadlové terapie je rovněž značný spád dávkové rychlosti v okolí nádoru, celková energie pohlcená tělem pacienta je však o něco vyšší než při statické terapii. K výpočtu izodózních křivek pro kyvadlovou terapii se využívá samočinného počítače. Všimněte si, že maximum dávkové rychlosti neleží v ose rotace, která na obr. 5 prochází středem průřezu kolmo na jeho rovinu.

Z jiných radionuklidů se používá ještě ^{226}Ra , které je vhodné pro přímé zavádění do dutin těla.

Závěrem je nutno říci, že ionizující záření našlo v lékařské praxi trvalé místo a v součinnosti s jinými druhy léčby pomáhá léčit zhoubné nádory, proti nimž dosud lidstvo nenašlo stoprocentní zbraň.

Planeta tisíce prstenců

RNDr. RENÉ HUDEC, Ondřejov

Dne 12. 11. 1980 prolétla ve vzdálenosti pouhých 77 200 km od vrchní vrstvy mračen planety Saturn automatická meziplanetární stanice *Voyager 1*. Podruhé tak dostal vzdálený Saturn návštěvu zemské sondy — a poprvé sonda při průletu kolem druhé největší planety naší sluneční soustavy provedla detailní výzkum zejména prstenců obklopujících planetu a také řady jejích měsíců. Sonda měla u Saturna za sebou již dlouhou vesmírnou pouť — ze Země startovala na podzim 1977 a na jaře 1979 prolétla kolem Jupitera. Po průletu kolem Saturna pozorovaly přístroje tuto planetu ještě až do 19. 12. 1980; dnes sonda pokračuje na své cestě pryč dále od Slunce a jednou opustí naši sluneční soustavu.

Podívejme se ve stručnosti alespoň na některé z nových zajímavých poznatků získaných sondou, které jsou výsledkem předběžného vyhodnocení dat. Snímky z *Voyageru 1* umožňují studovat v atmosféře Saturna detaily o rozměrech okolo 5 až 10 km, mnohem menší, než je možno pozorovat pozemními dalekohledy. Záběry prokázaly vysoké rychlosti v atmosféře planety — větry tam dosahují rychlostí okolo 1400 km za hodinu, tedy asi dvakrát více, než tomu je u Jupitera. Na některých snímcích jsou pozorovatelné hnědé nebo načervenalé oválné skvrny s typickým průměrem asi 10 000 km; teprve další výzkumy však ukáží, do jaké míry mohou být tyto struktury příbuzné s pověstnou rudou skvrnou na Jupiteru.

Největší překvapení přinesly detailní snímky Saturnových prstenců. Ještě krátce před přiblížením sondy k Saturnu většina vědců věřila, že planeta má několik málo širokých a výrazných prstenců, označených velkými písmeny abecedy C, B, A, F a E. Prstence viditelné nejvýrazněji ze Země jsou B a A; úzký vnější prstenec F byl objeven při průletu sondy *Pioneer 11* v roce 1979. Televizní kamery *Voyageru 1* však ukázaly, že tyto prstence ve skutečnosti nejsou ničím jiným než bohatým komplexem celé řady užších prstenců. Dokonce i temná dělení mezi jednotlivými prstenci zase obsahují další zcela tenké prstence. Dodnes bylo na snímcích z *Voyageru* identifikováno několik set prstenců a vědci odhadují jejich počet blízky 1000. Rozpětím zhruba 500 000 km zasahují prstence až do oblasti Saturnových měsíců, systém je však zcela tenký — tloušťka prstenců se pohybuje mezi 1 a 3 km. Velkou novinkou je objev, že ne všechny prstence mají kruhový tvar — možná se tu projevují negravitační síly, ale spíše jde o komplexní vliv poruch od Saturnových měsíců a interakcí jednotlivých prstenců. Zajímavý je rovněž vnější prstenec F, objevený v roce 1979, užší než asi 150 km. Ve skutečnosti ho tvoří dva úzké jasné prsteny na různých drahách; prostor mezi

nimi vyplňuje difuzní prstenec široký asi 35 km. V prstenci byly zpozorovány uzliny — zřejmě lokální nahromadění materiálu tvořícího prsteny. Vyskytl se však i názor, že může jít o mini-měsíčky planety. S velkou nedočkavostí čekali vědci na výsledky týkající se velikosti materiálu v prstencích. V případě platnosti hypotézy vysvětlující prstence rozpadem velkého tělesa, měsíce, musely by v prstencích být i velké úlomky o rozměrech řádově kilometrů. To však nebylo pozorováno — předběžné výsledky z Voyageru 1 nasvědčují existenci pevných částí a balvanů všech možných velikostí v mezích od několika mikronů až po zhruba deset metrů. Je to velká podpora hypotézy, podle níž jsou prstence pozůstatkem hmoty zbylé při vzniku Saturna.

Předběžné vyhodnocení dat z Voyageru 1 vedlo prozatím k objevu alespoň tří nových měsíků Saturna; jejich celkový počet tak již dosahuje čísla 15 a zřejmě i dále poroste, až budou vyhodnoceny všechny snímky. Zajímavá je dvojice měsíků S10 a S11 — oba jsou s průměrem asi 700 km téměř stejně velké a obíhají Saturn po téměř identických drahách ve vzdálenosti 149 400 km od středu planety. Bezesporu největší pozornost byla věnována největšímu Saturnovu měsíci Titanu, který s průměrem 6000 km donedávna platil za největší měsíc v celé naší planetární soustavě. Měření Voyageru však ukázalo, že průměr Titanu je jen 5200 km a že tedy průměr Jupiterova měsíce Ganymeda je o 400 km větší. Titan obíhá planetu ve vzdálenosti 1 200 000 km jednou za 16 dní a má vlastní atmosféru, která je mnohem hustší a teplejší, než se původně očekávalo. Tlak na povrchu Titanu je asi třikrát větší než na povrchu naší Země a teplota v nejteplejších oblastech jeho ovzduší dosahuje až 27 °C. Velmi prudce však klesá k teplotám okolo — 180 °C i nižším. Pozoruhodné je složení Titanovy atmosféry — skládá se z dusíku, jen s nepatrnou 1% příměsí metanu a uhlovodíkových sloučenin. Zatím není jasné, zda na povrchu existují oceány z kapalného dusíku, jak předpokládají někteří planetologové. Spíše však nepůjde o globální oceány, ale jen o lokální moře v polárních oblastech. O vlastním povrchu Titanu totiž dosud nevíme prakticky nic — je zcela zakryt hustou vrstvou načervenalých mračen, a tak teprve přistání sondy, ke kterému možná dojde v 90. letech, může přinést více informací. Prozatím jen víme, že severní polokoule měsíce je znatelně jasnější než jižní; rozmezí přitom prakticky sleduje rovník. K Titanu se váže i objev rozsáhlého vodíkového mračna, viditelného v ultrafialovém světle jako slabě zářící oblak mezi oběžnými drahami Titanu a dalšího Saturnova měsíce — Rhey, zhruba ve vzdálenosti 330 000 až 760 000 km od Saturnu. Velmi pravděpodobně to je vodík, uniklý z ovzduší Titanu.

Na závěr se alespoň ve stručnosti zastavme u dalších měsíců Saturna, které byly cílem pozorování Voyageru 1. Velmi blízko, až na vzdálenost 76 000 km, se sonda přiblížila k měsíci Rhea, který má průměr 1500 km a kolem planety obíhá jednou za 4,5 dne ve vzdálenosti 527 000 km.

Povrch měsíčku je pokryt nespočetnými krátery různých velikostí od 5 do 100 km, které jsou velmi staré a zřejmě vznikly již v rané fázi života naší planetární soustavy. Velké množství kráterů bylo objeveno i na povrchu měsíčku Mimas, kolem něhož proletěla stanice pouhou jednu hodinu po svém největším přiblížení k Saturnu. Mimas má průměr 350 km a kolem planety obíhá ve vzdálenosti 185 000 km jednou za 23,8 hodiny. Velmi výrazným jevem na povrchu Minase je obří kráter o průměru přes 100 km = je to zhruba třetina průměru měsíčku! Velký meteoroid, který svým dopadem kráter vytvořil, málem Mimas rozštěpil. S kráterem pravděpodobně souvisí dlouhá rýha o šířce 5 km táhnoucí se přes celou odvrácenou polokouli. I obraz Tethyse, kolem něhož proletěla sonda krátce před přiblížením k Saturnu ve vzdálenosti 416 000 km, ukazuje spoustu kráterů a také nápadné 750 km dlouhé a 60 km široké údolí, táhnoucí se přes celou polokouli. Tethys má průměr 1000 km a kolem Saturnu oběhne ve vzdálenosti 295 000 km jednou za 1,8 dne. Na vzdálenost 161 300 km se Voyager 1 přiblížil k Dione, měsíčku o průměru 1100 km ve vzdálenosti 377 400 km a s oběžnou dobou 2,74 dne. Hnědě zbarvený povrch tohoto měsíčku je rovněž poset krátery o průměru až 100 km a řadou dlouhých rýh. Zajímavé jsou paprsky pozorované u některých kráterů, pravděpodobně tvořené vyvrženou ledovou hmotou. Podobné paprsky známe i na našem Měsíci, tam jsou však tvořeny horninou, nikoliv ledem. Výjimkou mezi Saturnovými měsíčky zřejmě je Enceladus, těleso o průměru 520 km, obíhající ve vzdálenosti 238 000 km od Saturna s periodou 1,37 dne. Tento měsíček má totiž relativně hladký povrch jen s několika málo krátery. Povrch Enceladuse je pravděpodobně pokryt vrstvou ledu a není vyloučeno, že dochází k jeho pravidelnému zahřívání a tím i k mizení povrchových útvarů. Zahřívání by mohlo být způsobováno slapovými silami od většího a těžšího měsíce Diona.

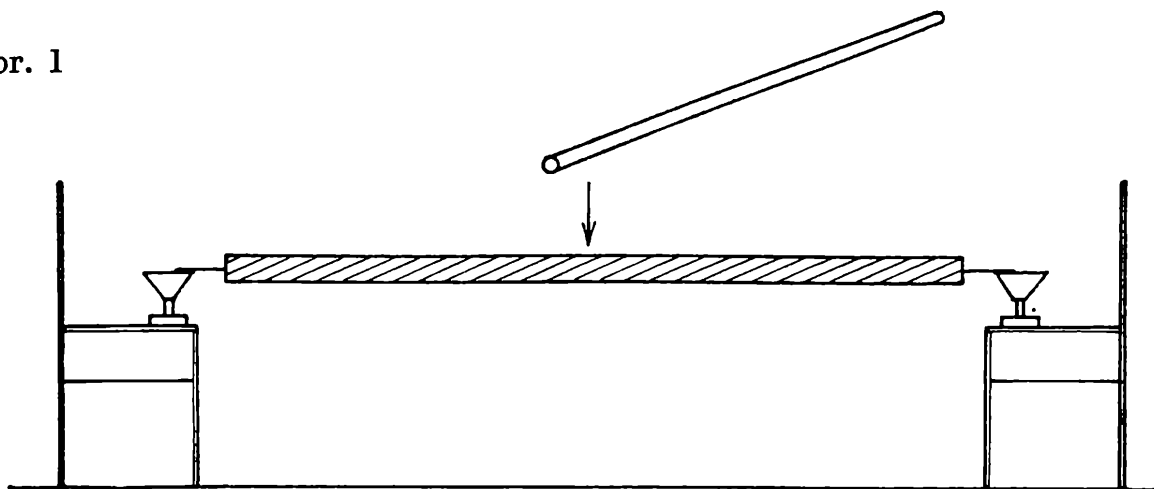
Výzkum Saturna a jeho soustavy měsíčku nekončí — v srpnu 1981 k němu dorazila další, v pořadí již třetí pozemská sonda — *Voyager 2*. Po průletu kolem Saturna bude tato stanice pokračovat dále k planetě Neptun, k níž dorazí v roce 1986, a poté opustí naši sluneční soustavu.

Efektní experimenty: Stoletý pokus

PETR HNILIČKA, Praha

Před sto lety byl s oblibou předváděn tento experiment: Na každý konec dřevěné tyče (např. násady od smetáku) se upevní jehla. Tyč se položí jehlami na dvě sklenice (tehdy punčové), které stojí na židlích

Obr. 1



(obr. 1). Dotyk se sklem smějí mít jen jehly. Jestliže silně udeříme na tuto tyč jinou pevnou tyčí, zlomí se tyč umístěná na sklenicích, sklenice však zůstanou celé. Experiment se daří o to lépe, oč energičtejší je úder.

Vysvětlení efektního experimentu: Stoletý pokus

Jev se vysvětluje setrvačným odporem tyče. Když úder dopadne náhle, nemá náraz čas, aby se rozšířil od přímo zasažených částic k dalším. Zasažené částice se oddělí dřív, než se pohyb přenese na sklenice, které sloužily jako podpora.

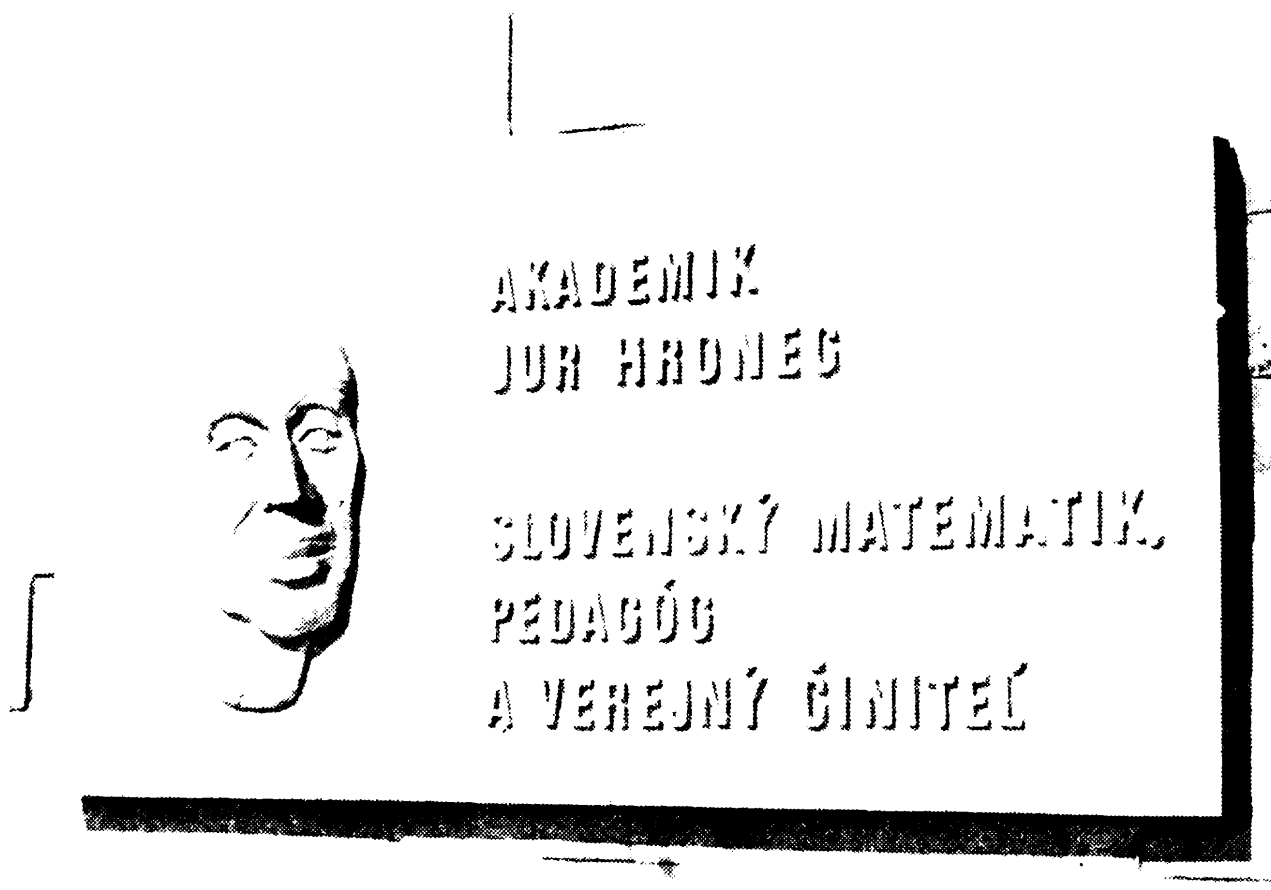
Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Sté výročie narodenia Jura Hronca (17. 5. 1881 — 1. 12. 1959)

Pri príležitosti stých narodenín Jura Hronca, ktoré si v tomto roku pripomíname, chceme priblížiť jeho osobnosť aj našej mládeži. S jeho menom je spätý rozvoj slovenského školstva, najmä vysokého, mnohých vedeckých a kultúrnych inštitúcií, a najmä rozvoj matematických vied na Slovensku.

Jur Hronec sa narodil 17. mája 1881 v rodine chudobného maľoroľníka v gemerskej dedinke Gočovo. V rodine boli okrem neho ešte dvaja starší bratia.

Pretože Jur Hronec bol telesne slabší, jeho otec sa rozhodol vyučiť ho za kožušníka. Jeho učňovské roky však prerušila otcova smrť, musel sa vrátiť domov a pomáhať bratom pri poľnohospodárskych prácach. Školu začal navštevovať v rodnej dedinke.



Učiteľ a miestny farár si všimli jeho nadanie a nahovorili matku, aby ho dala na štúdiá. Ako trinásťročný začal študovať na gymnáziu v Rožňave, kde rok po smrti matky (1901) s vyznamenaním zmaturoval. Univerzitu absolvoval v Kluži.

V roku 1906 nastúpil profesorské miesto na gymnáziu v Kežmarku, kde s prestávkami pôsobil až do roku 1922. V školskom roku 1923—24 pôsobil na Jiráskovom gymnáziu v Prahe. Roku 1923 sa habilitoval na Karlovej univerzite v Prahe. Roku 1924 sa stáva mimoriadnym a roku 1928 riadnym profesorom Vysokej školy technickej v Brne.

Túžil vrátiť sa na Slovensko, preto si vo zvýšenej miere všímal jeho školskú situáciu. Začiatkom tridsiatych rokov začal aktívnu činnosť a propagandu v spolupráci s ďalšími vysokoškolskými pracovníkmi pre zriadenie vysokej školy technickej na Slovensku. Túto akciu úspešne zavŕšili zriadením Vysokej školy technickej v Košiciach. Prvým jej rektorom sa stal Jur Hronec. V dôsledku politických udalostí sa vysoká škola technická sťahovala najprv do Prešova, neskôr do Martina a nakoniec do Bratislavy. Profesor Hronec bol roku 1946 zvolený po treť raz za jej rektora.

1. októbra 1940 bola zriadená Prírodovedecká fakulta v Bratislave a profesor Hronec sa stal jej bezplatným profesorom. V októbri 1944 vzniká Vysoká škola obchodná, ktorej prvým dekanom sa stáva práve

Jur Hronec. V roku 1950 prešiel na Prírodovedeckú fakultu Univerzity Komenského, kde zotrval až do smrti — do 1. decembra 1959.

Profesor Hronec napísal 24 pôvodných vedeckých prác, väčšinou z odboru diferenciálnych rovníc; jeho knihy (celkom 7) boli prvými matematickými knihami v slovenčine.

Už ako gymnaziálny profesor v Kežmarku a neskôr ako vysokoškolský profesor venoval mnoho času aj problémom pedagogickým. Zaslúžil sa o prestavbu školstva. Vychoval veľa technikov a profesorov stredných škôl. Väčšina z nich osobne poznala profesora Hronca z prednášok, školení a seminárov.

Profesor Hronec bol i pri začiatkoch matematickej olympiády, bol jej iniciátorom a bol aj v jej prvom ústrednom výbore. Zaoberal sa aj činnosťou kultúrnou a osvetovou. Po oslobodení bol predsedom Matice slovenskej. Veľa rokov bol jedným z vedúcich činiteľov Jednoty československých matematikov a fyzikov. Bol medzi prvými riadnymi členmi Slovenskej akadémie vied a zastával v nej významné funkcie.

Za túto všestrannú a neúnavnú činnosť bol poctený roku 1948 Národnou cenou, roku 1954 dostal Rad práce, 1959 bol zvolený za čestného člena Jednoty československých matematikov a fyzikov. Roku 1962 mu bola udelená Medaila Jána Amosa Komenského in memoriam.

Od roku 1968 s hrdosťou nesie jeho meno gymnázium na Novohradskej ulici v Bratislave. Roku 1969 pomenovali jeho menom internát SVŠT na Bernolákovej ulici v Bratislave.

Všetci si s úctou pripomíname sté výročie tohto významného slovenského matematika, bojovníka za založenie mnohých slovenských vysokých škôl, pedagogického pracovníka ako aj pracovníka kultúrneho a osvetového.

RNDr. Vítazoslav Repáš

Významný slovenský matematik

DUŠAN JEDINÁK, gymnázium Topoľčany

V oblasti matematickej kultúry a rozvoja vysokých škôl na Slovensku veľmi veľký kus práce vykonal matematik Jur Hronec. Z jeho života a diela si pripomeňme niekoľko základných údajov a podnetných myšlienok.

Zo života:

1881 — v gemerskej dedinke Gočovo sa 17. V. narodil J. Hronec

1894 — začal navštevovať gymnázium v Rožňave

- 1902 — zmaturoval, odchádza študovať matematiku do Kolozsaváru (Kluž-Rumunsko)
- 1906 — zakončil štúdiá a nastúpil na kežmarské gymnázium ako profesor matematiky a fyziky
- 1907 — zložil v Kluži písomnú skúšku z pedagogiky na tému: Matematika ako prostriedok výchovy charakteru
- 1908 — štúdium v Göttingene (do 1909)
- 1910 — pobyt na univerzite v Berlíne
- 1912 — získal doktorát filozofie v Giessene
- 1914 — cestuje po Švajčiarsku a Francúzsku (Paríž-Sorbonna)
- 1923 — habilitoval na Karlovej univerzite v Prahe, bol zástupcom Slovenska pre otázky školstva, vyučoval matematiku a fyziku na Jiráskovom gymnáziu v Prahe
- 1925 — nastúpil na miesto profesora na Vysokej škole technickej v Brne
- 1928/29 — bol dekanom stavebného odboru VŠT v Brne
- 1937 — preberá vedenie Vysokej školy technickej v Košiciach
- 1938 — je zvolený za prvého rektora VŠT v Košiciach
- 1940 — profesor matematiky na Prírodovedeckej fakulte Slovenskej univerzity v Bratislave
- 1953 — vymenovanie za akademika SAV
- 1954 — Rad práce za organizáciu vysokých škôl a za zásluhy o rozvoj matematiky a pedagogiky
- 1959 — 1. decembra po krátkej chorobe zomrel v Bratislave, pochovaný je v Gočove.

Profesor Hronec zdôrazňoval všestranný rozvoj ľudskej osobnosti a dôležitosť správnej výchovy. Pri štúdiu matematiky upozorňoval na nutnosť sústavného denného štúdia. Vedel, že ak človek, ktorý má matematické nadanie, nepracuje v matematike, tak svoje nadanie stratí. Bol však presvedčený o tom, že oduševnenou, usilovnou, systematickou prácou a štúdiom možno priemerné schopnosti rozvinúť a matematické vedomosti úspešne aplikovať a tvorivo rozvíjať. Chápal matematiku ako prostriedok vedeckého poznania i výchovy charakteru.

Z myšlienok:

Práca vám vyplní život, bez nej je život prázdny, obsah života trvalo nevyplní nijaká zábava. Pracujte, tvorte a pritom vydržte, dúfajte a buďte šťastní.

V každom žiakovi, v každom človeku má byť vychovávaná osobnosť ľudská, humanitná, t. j. taká, ktorá svoju silu, svoju energiu podľa možnosti čo najekonomickejšie venuje prospechu a dobru celého národa, celého ľudstva. Toto má byť konečný a veľkolepý cieľ každého vyučovania.

Necharakterný človek, čím je múdrejší a rozumnejší, tým viac škodí kolektívu a tým je škodlivejší štátu.

Keby som si mal znovu voliť povolanie, chcel by som byť len profesorom matematiky. Je to veda, ktorej zásady platili včera, platia dnes a budú platiť aj zajtra.

Ak sa chcete dozvedieť o živote a práci J. Hronca viac, prečítajte si knižky:

Žbirková, V.: Juraj Hronec — pedagóg. Bratislava, SPN 1975.

Švec, M.: Jur Hronec. Martin, Matica slovenská 1981.

Kouzelník z Menlo Parku

RADOVAN REBSTÖCK, Sušice

V říjnu 1981 uplyne padesát let od smrti Edisonovy, kterému vedle Leonarda da Vinci právem přísluší titul největšího vynálezce všech dob. Připomeňme si v krátkosti významné body jeho životní dráhy.

Thomas Alva Edison se narodil 11. února 1847 v městečku Milano na pobřeží Huronského jezera na severu Spojených států amerických v rodině obchodníka. Pokus o školní vzdělání dopadl katastrofálně. Prospíval i choval se tak, že po čtvrt roce musel školu opustit. Díky matce však nezůstal analfabetem. Poskytla mu nejen základy vzdělání, ale i dostatek sebedůvěry, probudila v něm zájem o knížky. S příchodem puberty nastal pak v jeho životě obrat. V otcově domě si zřizuje chemickou laboratoř. Aby měl dostatek prostředků na pokusy, začíná obchodovat. Na ulici a ve vlacích prodává nejprve ovoce a zeleninu, potom noviny. Později se z poštovního vagónu na železniční trati mezi Port Huronem a Detroitem stává jeho fyzikálně chemická laboratoř, sklad novin a zeleniny i redakce a tiskárna časopisu *Weekly Herald*.

Se svou vitalitou stačí na vše. Nešťastnou náhodou však jednoho dne poštovní vůz vyhoří a Edison je vlakvedoucím ze služby u dráhy propuštěn. Tato událost, která zanechala trvalé stopy na jeho sluchu, však zřejmě zachránila Edisona pro techniku. Uchytil se jako putující telegrafista, což byla v té době v rychle se industrializujícím státě žádaná profese. Začíná studovat vědecké časopisy, francouzštinu a španělštinu.

V následujících letech, strávených v Indianopolis, Cincinnati, Memphisu a Nashvillu, vniká do tajů telegrafu a počíná se vážněji zabývat elektřinou. První vlastní vynález, automatické vysílání časového signálu, však nenachází pochopení, stejně jako telegrafní translátor a je opět propuštěn z místa. Začíná znovu na jiné stanici a se stejným tvůrčím zápalem. Kupuje si všechna díla *Faradaye* a provádí téměř všechny jeho

pokusy. Faraday se mu stává nejmilejším učitelem. Vědecké vzdělání spojené s příslovečnou houževnatostí přináší první skutečné úspěchy. V elektrotechnické dílně Williamsově v Bostonu, kde o několik let později zkonstruoval *Graham Bell* svůj telefon, rodí se Edisonův první patent: sčítač volebních hlasů, registrovaný dne 1. června 1869 pod č. 90 646. Peníze za patent investuje Edison do nových pokusů a výzkumů, teď už ve funkci vrchního technického dozorce Lawsovy telegrafické společnosti v New Yorku. Zde zřizuje se dvěma společníky elektrotechnickou dílnu.

V krátké době získává několik dalších významných patentů. Z nich nejdůležitější byl univerzální zapisovací telegraf, velice jednoduchý a praktický, z něhož později vyvíjí dálkopis. Na pozvání britské vlády podniká první cestu do Evropy, aby zde svůj univerzální telegraf předvedl. Počátkem roku 1873 uvádí do praxe další vynález, tzv. duplexní spojení, které promýšlel více než deset let. Celou jeho práci provázejí neustálé finanční potíže, způsobené nedůvěrou tehdejší společnosti k novým a často převratným vynálezům, narušujícím staré a zaběhnuté systémy.

Na jaře roku 1876 zřizuje vlastní dílny a laboratoře v *Menlo Parku* a sdružuje početný kolektiv spolupracovníků pro výzkumnou práci. Zabývá se studiem elektromagnetického vlnění. Ve své práci na telefonu je předstížen už výše zmíněným Bellem, jehož přístroj však zdokonaluje mikrofonom. Ve stejnou dobu překvapuje veřejnost fonografem, prvním přístrojem, zapisujícím zvuk. Za něj se mu dostává uznání samotným prezidentem Spojených států amerických *R. B. Haysem*. Od svého vynálezu mikrofonu začíná být tiskem i veřejností nazýván Kouzelníkem z Menlo Parku.

Jeho další dílo plně potvrzuje oprávněnost tohoto titulu. Po roce neúnavné práce za září na podzim roku 1879 první Edisonova žárovka, dávající předpoklady ke všeobecnému rozšíření elektrického světla. Aby se však skutečně rozšířilo, je potřeba vykonat ještě mnoho práce. Edison spolu se svými pracovníky investuje téměř jeden milión dolarů na uskutečnění první elektrifikace na světě. Vítězí i v konkurenční válce s plynárnami a během dvouletého období dokáže téměř nemožné. Při dvacetihodinové denní pracovní době vyrobili nejen dostatek žárovek, ale i všech dalších důležitých prvků — objímek, spínačů, pojistek, zásuvek, kabelů, elektroměrů a konečně i zdroj elektrického proudu, obrovské dynamo *Jumbo*, které se proslavilo na Světové výstavě v Paříži 1881. Ve stejné době stačili jeho spolupracovníci z reklamních důvodů vybavit elektrickým osvětlením zaoceánský parník *Columbia*, postavit několik domácích elektráren a učinit několik dalších dílčích vynálezů. Dne 4. září 1882 realizuje velkolepý projekt a v bohaté newyorské čtvrti se rozsvěcují stovky žárovek. Uskutečnění projektu se však stává opět jen dílčím mezníkem v Edisonově životě.

Následovaly další objevy a vynálezy. Za svůj život jich patentoval téměř 1300. Psací stroj, akumulátor, dynamo, elektromobil, kinetoskop, ale také betonové stavby anebo prášky proti bolení hlavy. Jeho firma *Electric Light Comp.* provedla také první osvětlení žárovkami v českých zemích. Tímto místem bylo brněnské divadlo, kde původní instalace sloužila téměř devadesát let.

I přes světové uznání a pocty, kterých se Edisonovi dostalo ještě za života, nikdy nepodlehł typicky americkému chorobnému shonu za dollarem. Dovedl peníze vydělat, ale vždycky jen proto, aby je investoval do nových podniků, nových pokusů a k vývoji nových vynálezů, posunujících svět kupředu. Zemřel 18. října 1931 uprostřed práce nad nedokončeným dílem.



Vzpomínka na Magdeburk

RNDr. JIŘÍ NEČAS, Praha

Navštívíme-li Magdeburk, počtem obyvatel páté největší město Německé demokratické republiky, nemůže ujít naší pozornosti, jak velké úctě se zde těší jméno Otty von Guericka. Jmenuje se podle něho jedna z hlavních ulic a technická vysoká škola, v centru města stojí jeho

pomník atd. Tomu, kdo má blízký vztah k exaktním oborům, jistě imponuje, že osobnost významného fyzika a technika, který zde žil a pracoval, je tak připomínána místním občanům i návštěvníkům města.

Otto von Guericke se narodil r. 1602. Studoval práva a přírodní vědy a ve svých 25 letech se stal členem městské rady v Magdeburku. Svými technickými a organizačními schopnostmi se pak významně podílel na obnově města, třicetiletou válkou prakticky úplně zničeného. V letech 1646—1681 byl jedním ze čtyř magdeburských starostů. Roku 1686 umírá.

Na von Guerickově třídě v Magdeburku stojí budova kulturně histo-

rického muzea, jehož expozice potvrzují skutečnost, že v Německé demokratické republice je technika přijímána jako nedílná součást kultury. Na čelní stěně haly určené technickým sbírkám je umístěna kopie známé rytiny vyobrazující mohutný von Guerickův experiment, kterým byl r. 1654 demonstrován atmosférický tlak pomocí dvou k sobě přiléhajících dutých ocelových polokoulí a osmi párů zdatných koní, jimž se nepodařilo polokoule, z jejichž vnitřku byl vyčerpán vzduch, od sebe odtrhnout. Pod tímto obrazem mohou návštěvníci vidět kopie polokoulí.

Samu existenci atmosférického tlaku prokázal *Evangelista Torricelli* již v předcházejícím desetiletí. Experiment von Guerickův, provedený před veřejností, působil podstatně průkazněji a sloužil nejen k demonstraci atmosférického tlaku, nýbrž také ověřil vlastnosti významného von Guerickova vynálezu — vývěvy. Měl už určité rysy moderní výzkumné činnosti. Se zdatnými koňmi se sice dnes ve fyzikálních laboratořích nesetkáváme, ale používání nákladných zařízení, zhotovených speciálně kvůli experimentům, je v současnosti běžné. Von Guericke pravděpodobně byl (i díky svému společenskému postavení) prvním experimentátorem, který nezůstal u používání improvizovaných prostředků, a proto bývá někdy považován za zakladatele experimentální fyziky.

Na závěr dodejme, že Otto von Guericke se neomezil na pokusy, mající více méně kvalitativní charakter. Vykonával pravidelná měření atmosférického tlaku vodním barometrem; výsledky vyhodnocoval a později využíval k předpovídání počasí.

Z redakční pošty

Pod tímto názvem přinesly Rozhledy v 5. čísle minulého ročníku na str. 240 malou poznámku Petra Fabingera. Odpovídalo se v ní našemu čtenáři Vojtěchu Pospíšilovi z Plumlova na dotaz, zda každé přirozené číslo, jehož dekadický zápis končí číslicí 1 a na všech ostatních místech má trojky, je prvočíslo. Odpověď ve zmíněném článku byla záporná a P. Fabinger uvedl tři složená čísla citovaného tvaru (největší z nich jedenácticiferné).

Po uveřejnění se nám ozvala J. M. Stružková, studující IV. C, GPB Frýdek-Místek. Z jejího příspěvku vyjímáme další dvě složená čísla z uvedené třídy spolu s jejich rozkladem:

$$333\ 333\ 333\ 331 = 19.17\ 543\ 859\ 649,$$

$$33\ 333\ 333\ 333\ 331 = 607.1511.1997.18\ 199.$$

Redakce

Pět úloh pro nejmladší členáře

1. *Úloha o topinkách.* — Hospodyně chce připravit topinky. Na pánvičku může současně položit nejvýše dvě topinky; opečení jedné strany trvá minutu. Za kterou nejkratší dobu opeče hospodyně tři topinky?

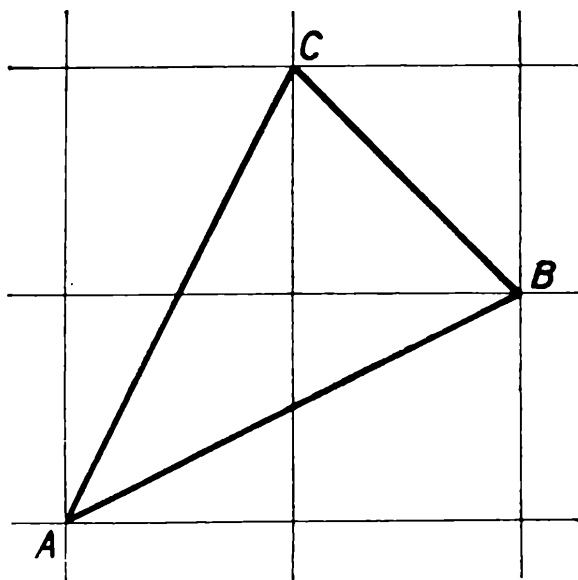
F. D.

2. *Úloha o životním jubileu.* — Za jubilejní rok života pokládáme rok, který je vyjádřen číslem, jehož poslední číslice je 0 nebo 5. Matematik slavící takové jubileum v r. 1981 řekl svým přátelům: „V datu mého narození $ab \cdot c \cdot defh$ ani v mém věku gk let se nevyskytují dvě stejné číslice ani čtyřka; přitom je

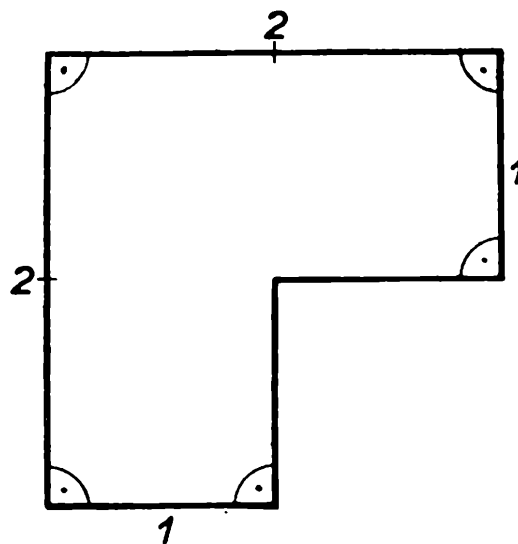
$$a^3 = c, a^2 + b = g.$$

Určete podle toho všech devět číslic $a, b, c, \dots, h, k$.

O. S.



Obr. 1



Obr. 2

3. *Úloha o trojúhelníku.* — Na zvětšeném obr. 1 je čtvercová síť, do níž je vepsán trojúhelník ABC ; strana čtverce má velikost 1 cm. Bez použití vzorců vypočtete obsah trojúhelníka ABC .

E. K.

4. *Úloha o rozdělení obrazce.* — Obrazec narýsovaný na obr. 2 rozdělte ve čtyři shodné obrazce, které mají týž tvar jako daný obrazec.

E. K.

5. *Úloha o čtverci.* — Narýsujte libovolný čtverec $ABCD$. Sestrojte střed S jeho strany CD a na prodloužení strany AB za bod B sestrojte bod E tak, aby úsečka AE byla dvakrát delší než strana čtverce $ABCD$. Dokažte, že přímky AS , DE jsou vzájemně kolmé.

Řešení těchto úloh naleznete na str. 32.

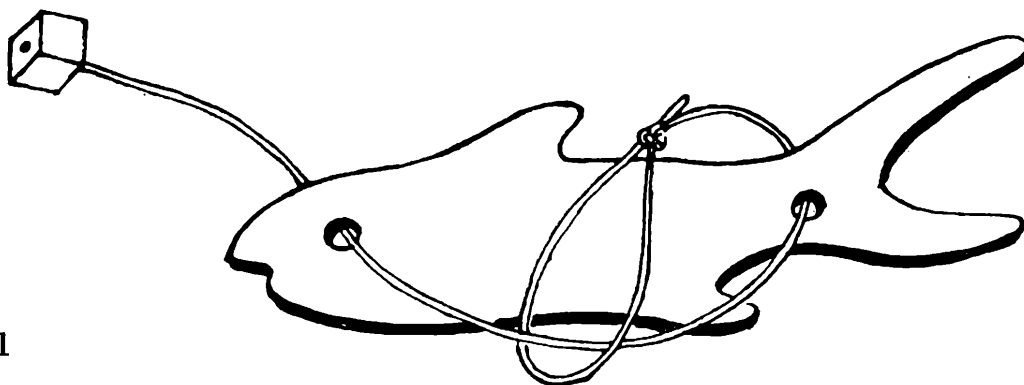
E. K.

Rybářský hlavolam

Matematika je tvrdá práce, ke které je třeba vysoce soustředěné pozornosti. Jedním z druhů aktivního odpočinku od této práce může být řešení i výroba hlavolamů.

Dnes se seznámíme s „Rybářským hlavolamem“, který rovněž patří k snadněji řešitelným. K jeho výrobě budeme potřebovat kousek překližky, plexiskla nebo umělé hmoty, krátký rybářský vlasce a opět skleněný nebo dřevěný korálek.

Z připravené destičky vyřízneme lupenkovou pilkou tvar ryby podle vlastní fantazie a opatříme dvěma otvory — jeden provrtáme místo oka a druhý v ocasní části. Otvory musí být tak velké, aby jimi prošel uzlík



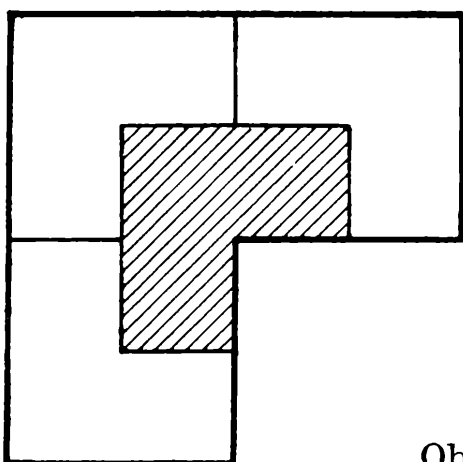
Obr. 1

a smyčka na vlasci, ale nikoliv korálek. Na jeden konec vlasce připevníme korálek a druhý konec provlékneme oběma otvory v rybě — nejdříve předním ze zadní strany, potom zadním z přední její strany — uděláme na něm smyčku tak, aby vlasce na přední straně ryby smyčkou procházel. Smyčku můžeme spojit (jak ukazuje obrázek 1) tenkým drátkem, později, až se naučíme hlavolam řešit, prostým uzlíkem. Tím je hlavolam připraven k řešení. Naším úkolem je zbavit „chycenou rybu“ vlasce a potom zase vrátit vlasce na původní místo. Řešení hlavolamu je na straně 33.

Jiří Polák, Třebíč.

Řešení pěti úloh pro nejmladší čtenáře

1. *Úloha o topinkách.* — Hospodyně začne na pánvičce současně opékat dvě topinky. Na začátku druhé minuty obrátí jednu topinku, druhou odloží a místo ní položí na pánvičku třetí topinku; na začátku třetí minuty odloží topinku opečenou na obou stranách, obrátí topinku zbývající na pánvičce a vedle ní položí topinku opečenou během první minuty jen na jedné straně. Tři minuty je tedy nejkratší doba, za kterou lze za daných podmínek tři topinky opéci, neboť dříve to zřejmě není možné, jak si sami rozmyslíte. — Pokuste se úlohu zobecnit, rádi otiskneme zdařilé podněty.



2. *Úloha o životním jubileu.* — Víme, že je $k = 0$ nebo $k = 5$. Kdyby však bylo $k = 0$, pak by bylo $h = 1$; avšak v letopočtu $defh$ je zřejmě $d = 1$. Je tedy $k = 5$. Protože číslo $c = a^3$ má být jednociferné, je $a = 2$, a tedy $c = 8$. Podle dané podmínky je

$$4 + b = g \leq 9; \quad (1)$$

Obr. 3 proto je $b \leq 5$. Avšak $d = 1$, $a = 2$, $k = 5$ a čtyřka je (podle předpokla-

du) vyloučena; je tedy $b = 0$ nebo $b = 3$. Avšak pro $b = 0$ by podle (1) bylo $g = 4$; je tedy $b = 3$. Podle (1) je potom $g = 7$, takže $gk = 75$; proto je $defh = 1981 - 75 = 1906$. Z toho plyne, že je $e = 9$, $f = 0$, $h = 6$. Hledané datum narození je tedy 23. 8. 1906.

3. *Úloha o trojúhelníku.* — Z obr. 1 je patrné, že obsah trojúhelníku $P = 4 - \left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 1\frac{1}{2}$; je tedy $P = 1,5 \text{ cm}^2$.

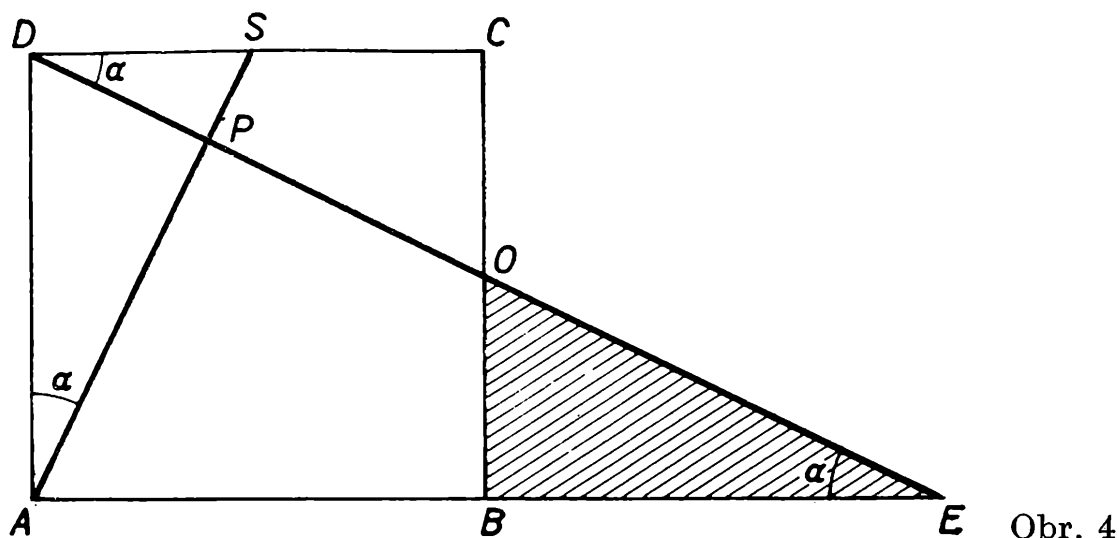
4. *Úloha o rozdělení obrazce.* — Výsledek vidíte na obr. 3.

5. *Úloha o čtverci.* — Přímka DE protne úsečku AS v jejím vnitřním bodu P a stranu BC čtverce v bodě O (obr. 4). Potom je

$$|\sphericalangle BOE| = |\sphericalangle COD| \dots \text{úhly vrcholové,}$$

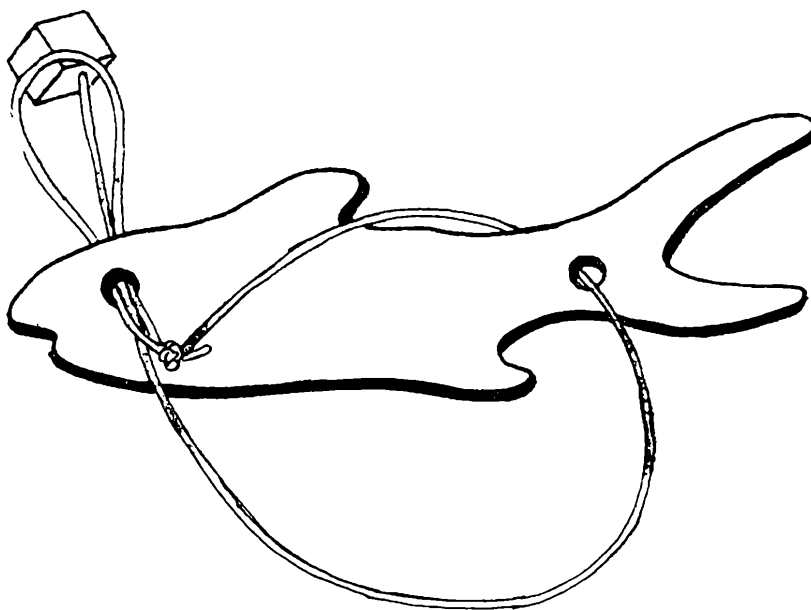
$$|\sphericalangle EBO| = |\sphericalangle DCO| = 90^\circ,$$

takže je též $|\sphericalangle BEO| = |\sphericalangle CDO| = \alpha$. Je tedy $\triangle EBO \cong \triangle DCO$ (usu), takže bod O je středem strany BC . Z toho plyne, že pravoúhlé



trojúhelníky EBO , ADS mají shodné odvěsny; proto jsou shodné. Je tedy $|\sphericalangle BEO| = |\sphericalangle DAS| = \alpha$. Protože $|\sphericalangle PAE| = 90^\circ - \alpha$, $|\sphericalangle PEA| = \alpha$, je $\sphericalangle APE$ pravý.

Řešení rybářského hlavolamu



Obr. 2

Řešení: Smyčku vlasce provlékneme okem ryby, prostrčíme smyčkou korálek a celý vlasec vytáhneme z obou otvorů v rybě. Opačným postupem jej navlékneme zpět. Obr. 2.

Tranzistorové zesilovače malých signálů

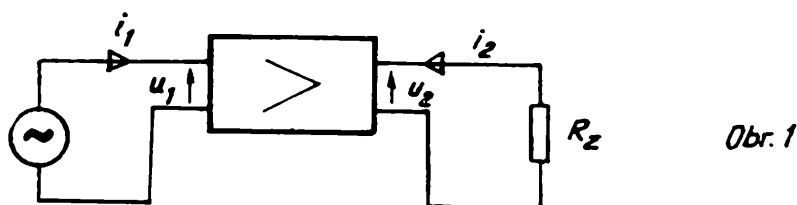
MOJMÍR SIMERSKÝ, Rožnov pod Radhoštěm

Studijní text pro kategorii A v XXIII. ročníku FO

Mezi mládeží je dnes rozšířena stavba jednoduchých elektronických zařízení. Jsou založena především na použití tranzistorů, což vzhledem k nízkému napětí vyhovuje i po stránce bezpečnosti. Zpravidla jsou však nuceni řídit se při stavbě jen návodem a schématem a mají jen mlhavou představu o fyzikální funkci stavěného zařízení. Chybějí jim k tomu teoretické znalosti zejména o funkci tranzistorů. Právě tento článek by měl podat přístupnou formou poznatky o tom, jak tranzistor pracuje.

1. Definice zesílení

Jako zesilovač můžeme obecně označit čtyřpól (soustavu, která má dvě svorky vstupní a dvě výstupní) podle obr. 1 s určitými vlastnostmi, které budou dále uvedeny. V obr. 1 značí u_1 , i_1 okamžité hodnoty har-



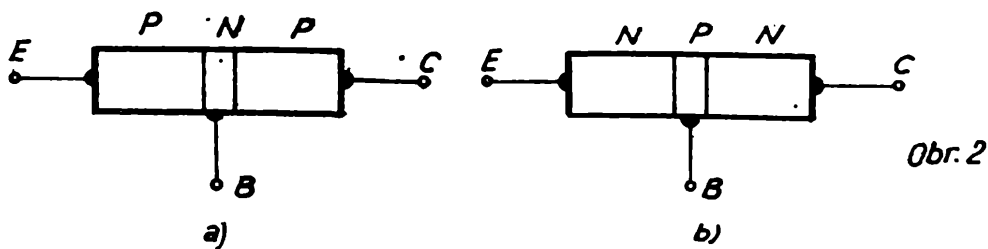
Obr. 1

monického střídavého napětí přivedeného ke vstupním svorkám, popř. proudu vtékajícího do těchto svorek; u_2 , i_2 značí okamžité hodnoty harmonického střídavého napětí na výstupních svorkách, popř. proudu protékajícího mezi těmito svorkami, které jsou (v nejjednodušším případě) spolu spojeny přes pracovní rezistor o odporu R_z . Šipka ve schematickém obrazu čtyřpólu na obr. 1 ukazuje směr od vstupu k výstupu a symbolicky znázorňuje funkci zesilovače.

Definujeme nyní

$$\text{napětové zesílení } A_u = \frac{u_2}{u_1} = \frac{U_{2m}}{U_{1m}} = \frac{U_2}{U_1},$$

$$\text{proudové zesílení } A_i = \frac{i_2}{i_1} = \frac{I_{2m}}{I_{1m}} = \frac{I_2}{I_1},$$



kde U_{1m} , U_{2m} , I_{1m} , I_{2m} jsou amplitudy střídavých napětí a proudů, U_1 , U_2 , I_1 , I_2 jejich efektivní hodnoty.

Příkon zesilovače je $U_1 I_1 \cos \varphi$, příkon pracovního rezistoru $U_2 I_2 \cos \varphi$. Za předpokladu, že účinník $\cos \varphi$ je v absolutní hodnotě stejný na vstupu i na výstupu, můžeme výkonové zesílení definovat takto:

$$A_P = \left| \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1} \right| = |A_u A_i|.$$

Absolutní hodnoty bereme proto, poněvadž zesílení A_u , A_i , jak později uvidíme, mohou být i čísla záporná (zcela obecně jsou to čísla komplexní, jestliže pracovní člen nemá charakter pouhé rezistance), kdežto výkony jsou veličiny kladné, máme-li na mysli výkony tzv. činné, což je vždy, když pracovním členem je rezistor.

Ke skutečnému, technicky použitelnému zesílení dochází jen tehdy, když $A_P > 1$. Nemůžeme tedy za zesilovač v uvedeném smyslu považovat např. transformátor, který sice může zesilovat napětově (při transformaci nahoru) nebo proudově (při transformaci dolů), ale nemůže zesílit výkon, poněvadž výkon v sekundárním obvodu je následkem nutných ztrát vždy menší než příkon v primárním obvodu.

K zesílení výkonu nepostačí ani pouhá elektronická aktivní součástka (tranzistor nebo elektronka), nýbrž je nutná její spolupráce se stejnosměrným elektrickým zdrojem, který do zesilovače trvale dodává nějaký příkon, jehož určitá část se přeměňuje v užitečný střídavý výkon předávaný pracovní impedanci, v našem případě tedy rezistoru o odporu R_z .

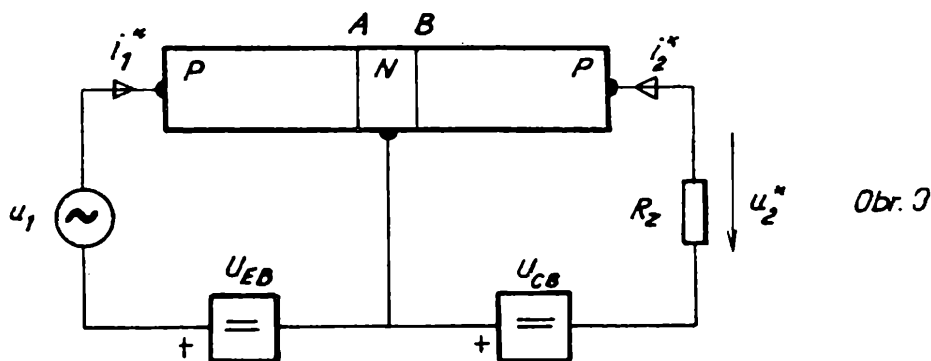
Naše úvahy se omezí na tzv. malé signály, v praxi takové, že amplitudy vstupního napětí nepřekročí řádově hodnoty $10^{-1}V$; v tomto případě můžeme při početních úvahách vycházet z lineárních rovnic, velmi krátké úseky charakteristik aktivní součástky aproximujeme úsečkami. Pro velké signály (zesilovače výkonu) to není možné — musíme pracovat se skutečnými, nelineárními charakteristikami aktivní součástky a postupovat grafickými metodami.

2. Zesilovací činnost tranzistoru

Tranzistor je polovodičová součástka se dvěma přechody PN, v jejíž struktuře jsou tři oblasti: oblast emitoru E, oblast báze B, oblast kolektoru C. V obr. 2a je schéma této struktury pro tranzistor typu PNP;

tranzistor typu NPN má strukturu podle obr. 2b. Bez újmy na obecnosti se můžeme zabývat jen strukturou PNP, neboť u struktury opačné jde jen o záměnu polaritý přiváděných stejnosměrných napětí.

Zesilovací činnost tranzistoru si vysvětlíme s použitím obr. 3. Jde sice o zapojení (se společnou bází) používané jen výjimečně, ale pro výklad nejvhodnější.



Přechod A mezi emitorem typu P a bází typu N je otevřen malým stejnosměrným napětím U_{EB} , takže klade vtékajícímu proudu i_1^* jen velmi malý odpor. Označme R_{EB} odpor tohoto přechodu a $u_1 = U_{1m} \cos \omega t$ svorkové napětí budicího zdroje. Potom

$$i_1^* = \frac{U_{EB}}{R_{EB}} + \frac{U_{1m}}{R_{EB}} \cos \omega t = I_0 + I_{1m} \cos \omega t$$

Báze (oblast mezi přechody A, B) je tak úzká, že jen velmi malá část nosičů (v našem případě děr), které sem přicházejí z emitru, zde zaniká rekombinací s elektrony a téměř celý proud i_1^* přejde přes přechod B do kolektoru. Přechod B je pro díry ve směru kolektor-báze uzavřen stejnosměrným napětím U_{CB} ($U_{CB} \gg U_{EB}$), ale otevřen ve směru opačném, takže díry, které přes přechod A přicházejí do báze, mohou přes přechod B volně procházet. Je tedy $i_2^* = i_1^*$, i když proud i_2^* je o něco menší než proud i_1^* .

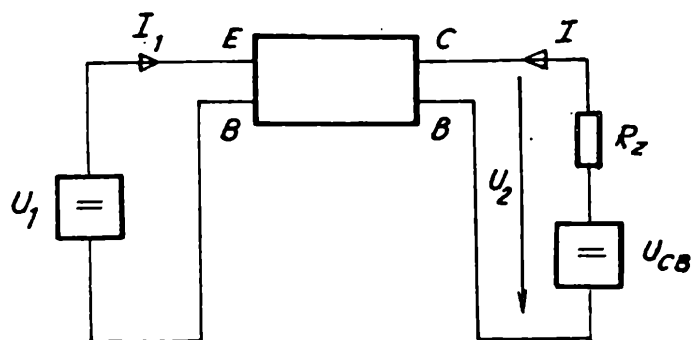
Pro napětí u^* pak platí

$$u^* = R_z I_0' + R_z I_{2m} \cos \omega t = U_0 + U_{2m} \cos \omega t,$$

přičemž $I_{2m} \doteq I_{1m}$, $I_1' \doteq I_0$. Vhodnou volbou odporu R_z lze dosáhnout toho, že $U_{2m} > U_{1m}$, takže dochází k napětovému zesílení. Proudové zesílení je vždy o něco málo menší než 1, neboť $I_{2m} < I_{1m}$, ale výkonové zesílení může být $A_P > 1$.

3. Parametry tranzistoru

Představíme si nyní tranzistor jako čtyřpól připojený pouze k stejnosměrným zdrojům (obr. 4). Vlastnosti takového čtyřpólu mohou být úplně charakterizovány implicitní funkcí $F(U_1, U_2, I_1, I_2) = 0$. Z této funkční rovnice bychom mohli formálně vyjádřit kteroukoli z uvede-



Obr. 4

ných veličin jako explicitní funkce ostatních tří, např. $I_2 = \Phi(U_1, U_2, I_1)$. Taková funkce se však nedá znázornit diagramem rovinným ani prostoro-
rovým.

Proto volíme způsob jiný: Dvě z uvedených veličin považujeme za nezávisle proměnné, ostatní dvě za jejich funkce. Možností je celkem 6, ale praktický význam mají jen tyto dvě:

$$U_1 = F_1(I_1, U_2), \quad I_2 = F_2(I_1, U_2), \quad (1)$$

$$I_1 = F_3(U_1, U_2), \quad I_2 = F_4(U_1, U_2). \quad (2)$$

Způsob (1) je nejčastější u nízkofrekvenčních tranzistorů a je založen na této úvaze: *Bipolární tranzistor* (tj. nikoli tranzistor řízený elektrickým polem) je řízen proudem, proto je vhodné považovat I_1 za nezávisle proměnnou. Napětí U_2 můžeme spojitě ovládat napětím kolektorového zdroje, takže je vhodné také U_2 považovat za nezávisle proměnnou veličinu.

Způsob (2) je v mnoha případech vhodný pro tranzistory pracující jako vysokofrekvenční zesilovače.

Funkce (1) mají úplné diferenciály

$$\begin{aligned} dU_1 &= \frac{\partial U_1}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial U_1}{\partial U_2} dU_2, \\ dI_2 &= \frac{\partial I_2}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial I_2}{\partial U_2} dU_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Jsou-li u_1, i_1, u_2, i_2 okamžité hodnoty velmi malých střídavých složek superponovaných napětím a proudem U_1, I_1, U_2, I_2 , můžeme je s dobrou přibližností považovat za diferenciály těchto napětí a proudů, takže místo (3) můžeme zapsat

$$u_1 = h_{11} i_1 + h_{12} u_2, \quad i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} u_2. \quad (4)$$

Význam znaků h_{11} až h_{22} vyplývá porovnáním (4) s (3). Jde o parciální derivaci

$$h_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial I_1} \quad \text{vstupní odpor s rozměrem } [\Omega],$$

$$h_{12} = \frac{\partial U_1}{\partial U_2} \dots \text{zpětnovazební činitel s rozměrem [1],}$$

$$h_{21} = \frac{\partial I_2}{\partial I_1} \dots \text{proudový zesilovací činitel s rozměrem [1],}$$

$$h_{22} = \frac{\partial I_2}{\partial U_2} \dots \text{výstupní vodivost s rozměrem [S].}$$

Veličiny h_{11} až h_{22} se označují jako *smíšené parametry tranzistoru hybridní*, „ h “.

Obdobně z úplných diferenciálů funkcí (2) dostaneme dvě lineární formy

$$\begin{aligned} i_1 &= y_{11} u_1 + y_{12} u_2, \\ i_2 &= y_{21} u_1 + y_{22} u_2, \end{aligned} \quad (5)$$

kde symboly y_{11} až y_{22} opět značí tzv. *parametry admitační*, poněvadž všechny mají rozměr vodivosti. Parametr y_{21} se často označuje jako *strmost tranzistoru*. Jde totiž o obdobu definice strmosti elektronky $S = \partial I_a / \partial U_g$, kde I_a je anodový proud, U_g mřížkové napětí; pro y_{21} platí zcela obdobně $y_{21} = \partial I_2 / \partial U_1$.

Parametry tranzistoru nejsou konstanty. Jejich hodnoty jsou závislé na volbě pracovního bodu, tj. na hodnotách stejnosměrných napětí mezi jednotlivými elektrodami tranzistoru. Postupnou volbou dvou veličin tranzistoru za závisle proměnné ze čtyř proměnných veličin U_1 , I_1 , U_2 , I_2 (kombinace druhé třídy ze čtyř prvků) dostaneme šest čtveřic parametrů, které jsou na sobě závislé.

Je-li dána jedna čtveřice parametrů, můžeme vyjádřit všech pět čtveřic ostatních. Jsou např. dány parametry smíšené a máme jimi vyjádřit parametry admitační. Jde o jednoduchou úlohu lineární algebry: ze (4) vyjádříme i_1 , i_2 a porovnáme s (5). Zavedeme označení D_h pro determinant smíšené matice

$$D_h = h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}$$

a ze (4) vyjádříme

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{h_{11}} u_1 - \frac{h_{12}}{h_{11}} u_2, \\ i_2 &= \frac{h_{21}}{h_{11}} u_1 + \frac{D_h}{h_{11}} u_2 \end{aligned}$$

a porovnáním s (5)

$$y_{11} = \frac{1}{h_{11}}; y_{12} = -\frac{h_{12}}{h_{11}}; y_{21} = \frac{h_{21}}{h_{11}}; y_{22} = \frac{D_h}{h_{11}}.$$

4. Výpočet zesílení

Výpočet zesílení malých signálů je jednoduchý. Jako příklad si uveďme výpočet pomocí smíšených parametrů, pro které platí rovnice (4). Jsou to dvě homogenní lineární rovnice o čtyřech neznámých. Platí však ještě rovnice další — obr. 4. Označíme U_{CB} napětí kolektorového zdroje, I_2 stejnosměrný proud protékající rezistorem R_z , U_2 výsledné napětí mezi kolektorem a bází. Potom

$$U_2 = U_{CB} - R_z I_2.$$

Derivováním dostaneme (U_{CB} je konstanta)

$$dU_2 = -R_z dI_2.$$

Považujeme-li diferenciály dU_2 , dI_2 opět za okamžité hodnoty malých superponovaných střídavých složek, získáme rovnici

$$u_2 = -R_z i_2. \quad (6)$$

Soustavu rovnic (4), (6) tvoří tři homogenní lineární rovnice o čtyřech neznámých, z nichž můžeme stanovit poměry

$$A_u = -\frac{h_{21}R_z}{h_{11} + D_h R_z}, \quad (7)$$

$$A_i = \frac{h_{21}}{1 + h_{22}R_z}. \quad (8)$$

Záporné znaménko v (7) znamená, že výstupní střídavé napětí má fázi opačnou vzhledem k signálu, jestliže $h_{21} > 0$, neboť $u_2 = A_u u_1$. Jestliže $h_{21} < 0$, má výstupní napětí fázi shodnou se signálem, ale výstupní proud $i_2 = A_i i_1$ má fázi opačnou vzhledem k signálovému proudu.

Odpor R_z může být jakýkoli, v intervalu $\langle 0; \infty \rangle$. Pro oba mezní případy nalezneme z (7) a (8) napěťové zesílení při výstupu nakrátko

$$(R_z = 0) : A_{uk} = 0;$$

$$\text{při výstupu naprázdno } R_z \rightarrow \infty : |A_{up}| = \left| \frac{h_{21}}{D_h} \right|;$$

$$\text{proudové zesílení při výstupu nakrátko: } |A_{ik}| = |h_{21}|;$$

$$\text{při výstupu naprázdno: } A_{ip} = 0.$$

Podle toho je funkce $|A_u| = f_1(R_z)$ monotónně rostoucí, funkce $|A_i| = f_2(R_z)$ monotónně klesající.

Pro výkonové zesílení platí podle definice

$$A_p = h_{21}^2 \frac{R_z}{(h_{11} + D_h R_z)(1 + H_{22} R_z)}. \quad (9)$$

Funkce $A_P = f_3(R_z)$ má lokální maximum pro určitou hodnotu $R_z = R_{z0}$, kterou nalezneme z (9) způsobem obvyklým v diferenciálním počtu:

$$R_{z0} = \sqrt{\frac{h_{11}}{D_h h_{22}}} \quad (10)$$

Dosazením $R_z = R_{z0}$ podle (10) do (9) určíme maximální dosažitelné výkonové zesílení

$$A_{P\max} = \left(\frac{h_{12}}{\sqrt{D_h} + \sqrt{h_{11}h_{22}}} \right). \quad (11)$$

Hodnoty (10) a (11) jsou dány jen parametry tranzistoru, takže jsou pro ten či onen tranzistor typické.

5. Vstupní a výstupní odpor tranzistoru

Vstupní odpor tranzistoru, který pracuje jako zesilovač malých signálů, je podle zákona Ohmova definován podílem

$$R_{\text{vst}} = \frac{u_1}{i_1},$$

když k výstupním svorkám je připojen odpor R_z . Je to odpor, který vstupní obvod tranzistoru klade vtékajícímu proudu.

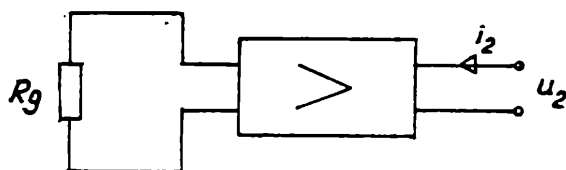
K jeho stanovení použijeme opět soustavu rovnic (4), (6), z níž vyjádříme

$$R_{\text{vst}} = \frac{h_{11} + D_h R_z}{1 + h_{22} R_z}. \quad (12)$$

Pro mezní případy $R_z = 0$ a $R_z \rightarrow \infty$ dostaneme z (12) vstupní odpor při výstupu nakrátko: $R_{\text{vstk}} = h_{11}$;

při výstupu naprázdno: $R_{\text{vstp}} = \frac{D_h}{h_{22}}$.

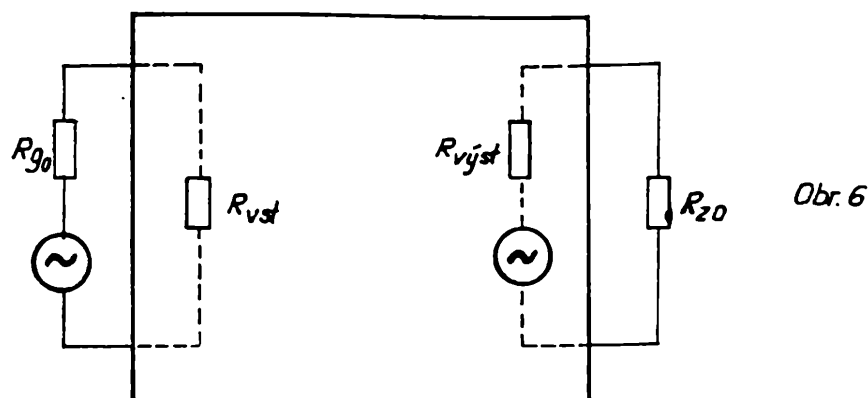
Kromě vstupního odporu má význam ještě odpor výstupní. Je to odpor (pro střídavý proud) mezi výstupními svorkami, jestliže ke vstupním svorkám je připojen odpor R_g — v praxi jde obvykle o vnitřní odpor zdroje, jímž je vstup tranzistoru buzen (obr. 5).



Obr. 5

Při výpočtu pomocí smíšených parametrů platí opět obě rovnice (4), ale místo (6) je musíme doplnit analogickou rovnicí

$$u_1 = -R_g i_1. \quad (13)$$



Ze soustavy rovnic (4), (13) vyjádříme výstupní odpor

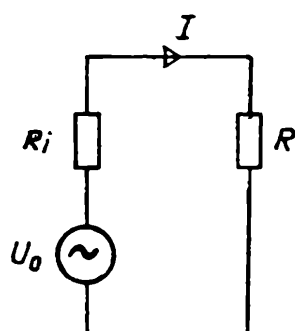
$$R_{\text{výst}} = \frac{u_2}{i_2} = \frac{h_{11} + R_g}{D_h + h_{22}R_g}. \quad (14)$$

Pro mezní případy $R_g = 0$, $R_g \rightarrow \infty$ dostaneme z (14) výstupní odpor při vstupu nakrátko: $R_{\text{výstk}} = \frac{h_{11}}{D_h}$;

při vstupu naprázdno: $R_{\text{výstp}} = \frac{1}{h_{22}}$.

6. Oboustranné výkonové přizpůsobení

Máme stanovit odpory R_{g0} a R_{z0} (obr. 6) tak, aby přenos výkonu ze vstupu do výstupu byl co nejlepší. Z hlediska budícího zdroje, jehož vnitřní odpor má být R_{g0} , se vstup tranzistoru chová jako spotřebič o odporu R_{vst} při R_{z0} . Z hlediska spotřebiče se tranzistor chová jako zdroj s vnitřním odporem $R_{\text{výst}}$ při $R_g = R_{g0}$.



Obecně platí (obr. 7), že spotřebič připojený ke zdroji s vnitřním odporem R_i dostává maximální příkon, když pro odpor spotřebiče platí $R = R_i$. Plyne to z jednoduché úvahy. Označme obecně P příkon, který dostává spotřebič:

$$P = RI^2 = R \left(\frac{U_0}{R + R_i} \right)^2$$

Jednoduchým výpočtem nalezneme, že funkce $P = F(R)$ má lokální maximum pro $R = R_0 = R_i$.

Při oboustranném výkonovém přizpůsobení musí proto být $R_{g0} = R_{vst}$ při $R_z = R_{z0}$, čímž je zajištěn optimální přenos výkonu ze zdroje do tranzistoru, a zároveň $R_{z0} = R_{výst}$ při $R_g = R_{g0}$, čímž je zajištěn optimální přenos výkonu z tranzistoru do spotřebiče.

Máme tedy zjistit veličiny R_{g0} a R_{z0} . K tomu poslouží vztahy (12) a (14), v nichž položíme $R_{vst} = R_{g0}$, $R_z = R_{z0}$, $R_{výst} = R_{z0}$, $R_{g0} = R_g$. Dostaneme tyto dvě rovnice:

$$\frac{h_{11} + D_h R_{z0}}{1 + h_{22} R_{z0}} = R_{g0}, \quad (15)$$

$$\frac{h_{11} + R_{g0}}{D_h + h_{22} R_{g0}} = R_{z0}. \quad (16)$$

Jde o dvě kvadratické rovnice, ale poněvadž máme zájem jenom o reálná kladná řešení, usnadníme si výpočet tím, že v (15) a (16) odstraníme zlomky, pak navzájem odečteme levé i pravé strany rovnic, čímž dostaneme pomocnou rovnici

$$R_{g0} = D_h R_{z0}. \quad (17)$$

Ze soustavy rovnic (17), (15) nebo (17), (16) určíme

$$R_{g0} = \frac{D_h h_{11}}{h_{22}}; \quad R_{z0} = \frac{h_{11}}{D_h h_{22}}.$$

Výsledek pro R_{z0} samozřejmě souhlasí s (10). Vidíme, že veličiny R_{g0} , R_{z0} jsou určeny jen parametry toho či onoho tranzistoru, takže jsou pro ten či onen tranzistor typické.

O trojím možném a pro praxi výhodném zapojení tranzistorů se zmíníme příště.

Na procvičení dvě úlohy.

1. Jsou dány admitační parametry y_{11} až y_{22} tranzistoru. Vyjádřete jimi parametry smíšené.
2. Vyjádřete veličiny A_u , A_{uk} , A_{up} , A_i , A_{ik} , A_{ip} , A_P , A_{Pmax} , R_{z0} , R_{vst} , R_{vstk} , R_{vstp} , $R_{výst}$, $R_{výstk}$, $R_{výstp}$, R_{g0} pomocí admitačních parametrů y_{11} až y_{22} ; vycházejte přitom z (5), přičemž vztahy (6) a (13) platí i nyní.

31. ročník M0 — změny v organizaci

Víte, že od letošního, 31. ročníku matematické olympiády nastávají ▼ její organizaci důležité změny?

1) Ruší se přípravné úlohy.

2) Soutěžní úlohy I. kola se v kategorii A odevzdávají již do 30. listopadu, v kategoriích B, C do 10. ledna 1982.

3) Pro kategorie A, B, C pokračuje I. kolo tzv. školní částí I. kola, která bude organizována obdobně jako II. kolo. Do školní části postoupí ti, kteří vyřešili dobře alespoň čtyři ze šesti úloh první části. Školní část se bude konat pro kategorii A 16. prosince 1981, pro kategorie B, C dne 10. února 1982 a její účastníci budou ve stanoveném čase řešit tři úlohy.

4) Ti, kteří úspěšně absolvují obě části I. kola, postoupí do II. kola (krajského), které bude probíhat jako dosud. Rovněž tak celostátní kolo kategorie A bude beze změny.

5) V kategorii Z se rovněž ruší přípravné úlohy I. kola a počet soutěžních úloh se zvyšuje na šest. První tři se odevzdávají do 15. listopadu, druhé tři do 6. ledna 1982. V kategorii Z nebude školní část I. kola

Redakce

Telegraficky o mezinárodní M0

Konala se v USA ve Washingtonu ve dnech 8. až 20. července 1981 a byl to už dvaadvacátý ročník tohoto matematického soutěžení středoškolských studentů. Svými výkony v naší domácí matematické olympiádě si letenky za oceán vydobyli Jozef Bednárík, Petr Couf, Igor Kříž, Jan Nekovář a Jiří Sgall. Vedoucím našeho týmu byl *RNDr. František Zitek, CSc.*

Poprvé v historii mezinárodních matematických olympiád se sešli reprezentanti všech pěti kontinentů. Účast na 22. ročníku byla rekordní — 185 soutěžících, kteří zastupovali 27 zemí. Zde je seznam států, které vyslaly své olympioniky:

Austrálie, Belgie, Brazílie, Bulharsko, Československo, Finsko, Francie, Holandsko, Izrael, Jugoslávie, Kanada, Kolumbie, Kuba, Lucembursko, Maďarsko, Mexiko, NSR, Polsko, Rakousko, Rumunsko, Řecko, SSSR, Švédsko, Tunis, USA, Velká Británie a Venezuela.

Nejlepší z našich reprezentantů byl *Jan Nekovář*, který získal plný počet bodů a odnesl si jednu z prvních cen. *Josef Bednárík*, *Petr Couf* a *Igor Kříž* byli za svůj výkon odměněni každý jednou z druhých cen,

zatímco *Jiří Sgall* je držitelem ceny třetí. Pozoruhodné je, že Kříž a Sgall měli v době soutěže za sebou teprve dva ročníky gymnazijního studia.

Byl to tedy pro naše barvy úspěšný ročník MMO, jak se po návratu z USA vyjádřil vedoucí naší olympijské skupiny. Podrobnější zprávu o uplynulém ročníku MMO najdete jako obvykle v ročníkové brožuře matematické olympiády, která vyjde ve Státním pedagogickém nakladatelství. Blahopřejeme všem reprezentantům a těšíme se, že o těch mladších, kteří pokračují ve středoškolském studiu, ještě uslyšíme v příštím, třiatřicátém ročníku. Příště se má mezinárodně soutěžit v Maďarsku.

J. S.

INFORMACE

Koutek středoškolské odborné činnosti

Šachy s počítačem

„Mám dva velké koníčky — programování a šachy. SOČ mi umožnila oba tyto zájmy spojit a tím vznikla moje zatím největší práce“, řekl v úvodu obhajoby své práce student *Petr Sojka* z gymnázia v Brně, Koněvova ulice.

Šlo o jednu z vítězných prací krajského kola SOČ — obor matematika, které se v r. 1981 konalo na gymnáziu v Brně, tř. kpt. Jaroše. Porota posuzovala celkem 18 prací z Jihomoravského kraje, jež se většinou vyznačovaly velmi dobrou formou zpracování a originálními nápady. Vítězné práce dosahovaly podle názoru porotců (a to byli vesměs vysokoškolské učitelé) i úroveň diplomových prací absolventů vysokých škol.

Vraťme se k práci „Šachy s počítačem“, která má 70 stran a jako hlavní část obsahuje program, podle něhož počítač řeší šachové úlohy typu „*Mat n-tým tahem*“. Tyto úlohy, nazývané též „dvojtažky“, „trojtažky“ apod., nalézáme v rubrikách novin a samozřejmě v odborných šachových časopisech. Postavení figur bývá znázorněné na diagramu a pod ním je stručný text, například „*Mat druhým tahem*“; to znamená, že bílý začne a dá černému mat nejpozději druhým tahem. Přitom má být splněn předpoklad, že existuje jediný možný úvodní tah

bílého, který při libovolné odpovědi černého vede k matu černého krále druhým tahem bílého. Šachová úloha musí splňovat i řadu dalších podmínek, některé lze přesně (exaktně) formulovat, jiné jsou spíše estetické povahy.

Petr Sojka ve své práci citlivě omezil exaktní podmínky, formuloval je a včlenil je do programu. Počítač rychle ověřuje splnění exaktních předpokladů a v přijatelném čase — kolem 10 minut — řeší trojtažky nebo prokáže jejich neřešitelnost.

Aspoň tolik základních informací o jedné práci SOČ; čtenáři — středoškoláci mohou získat tip pro i poněkud odvážnější volbu tématu své vlastní práce.

RNDr Bohumil Kolář

Z NOVÝCH KNIH

Alfred Rényi: **DIALOGY O MATEMATICE**

Vydalo nakladatelství Mladá fronta, Praha 1980, 204 stran, váz. 20 Kčs.

Mimořádně nadaný maďarský matematik Alfred Rényi (1921 až 1970), který byl ředitelem Matematického ústavu Maďarské akademie věd a profesorem Eötvösovy univerzity v Budapešti, vynikl také jako popularizátor matematických poznatků a metod. Dokladem jeho velmi úspěšného popularizačního úsilí jsou jeho tři *Dialogy o matematice* a čtyři *Dopisy o pravděpodobnosti*; vyšly původně v maďarském znění, ale brzy byly přeloženy do několika jazyků. Nyní vyšly také v českém překladu, a to v jedné knize, která je uvedena předmluvou akademika B. V. Gnedenka, doplněna řadou historických poznámek, reprodukcí a kresbami V. Renčina.

Ve třech fiktivních dialozích o matematice, v nichž po řadě vystupují Sokrates, Archimedes a Galilei, se čtenář poutavou formou seznámí se základními otázkami matematiky a jejího užití. V prvním dialogu se hovoří o podstatě matematiky, o jejím předmětu a o jejím významu. Druhý dialog se zabývá otázkou, jak mohou být abstraktní výsledky matematiky užity v praxi; z jiného hlediska je týž problém objasňován ve třetím dialogu. Jde vesměs o otázky, které se staly v dnešní době mimořádně aktuálními. Čtyři fiktivní dopisy Blaise Pascala panu Pierre

Fermatovi objasňujú pojem pravdepodobnosti a niekoľik s tým spojených základných otázek.

Knihu môžu s porozumením čítať i tí, ktorí nemajú žiadne špeciálne matematické znalosti. Vrele ji doporučujeme všetkým našim čtenárom.

Emil Kraemer

Voroncov-Veljaminov, B. A.: ASTRONÓMIA

Vydalo Slovenské ústredie amatérskej astronómie, Hurbanovo, v roku 1980, 115 čiernobielych grafov, obrázkov a fotografií, 218 strán, brož. Kčs 15,—.

Ani v dobe kozmických letov nie je u nás veľa učebníc astronómie. Túto medzeru by dočasne mohol zaplniť uvádzaný preklad z ruštiny.

Kniha je rozdelená do šiestich kapitol a 34 článkov. Úvodná kapitola približuje predmet astronómie, astronomické pozorovania a ďalekohľady, súhvezdia, hviezdne mapy, svetové súradnice a čas. O štruktúre slnečnej sústavy, zákonitostiach pohybu planét a umelých kozmických telies, o určovaní vzdialeností telies slnečnej sústavy a základných údajoch o Zemi ako planéte sa dozvieme v druhej kapitole. Tretia kapitola je venovaná fyzikálnej povahe telies slnečnej sústavy (metódam skúmania a ich výsledkom). Vlastnosti hviezd, ich spektrá, teploty, svietivosť, hmotnosť a základné údaje o Slnku sú predmetom štvrtej kapitoly. O našej galaxii, hmlovinách, pohyboch hviezd a hviezdnych sústav hovorí piata kapitola „Zloženie vesmíru“. Vesmírom ako celkom sa zaoberá kozmológia. O problémoch vzniku, vývoja nebeských telies uvažuje kozmogónia. Vývoj hviezd, vznik galaxií, vznik planetárnych sústav je predmetom skúmania v záverečnej kapitole knižky.

Kniha Astronómia od B. A. Voroncov-Veljaminova môže dobre poslúžiť na prvé zoznámenie s predmetom výskumov v kozmickom priestore. Netreba však zabudnúť, že rozvoj astronomických disciplín je veľmi búrlivý a nové poznatky menia štruktúru poznania veľmi rýchlo a radikálne. Teda pre plnohodnotné, presnejšie a hlbšie pochopenie astronomických zákonitostí treba siahnuť po ďalších knižkách. A predtým sa naučiť veľa z matematiky a fyziky. Bez toho sa mnohé prekvapujúce poznatky astronomických disciplín budú ťažšie chápať.

Ak máte o uvedenú publikáciu záujem, napíšte na adresu:

Slovenské ústredie amatérskej astronómie
947 01 HURBANOVO

Dušan Jedinák

Bernard Bolzano:

VLASTNÍ ŽIVOTOPIS

Vydalo nakladatelství Odeon, Praha 1981, z němčiny přeložila, ediční poznámku a doslov napsala Marie Pavlíková, 168 stran, váz. 12,50 Kčs.

V letošním roce se o Bernardu Bolzanovi často hovoří a píše. 5. října uplyne 200 let od jeho narození. Do nedávna věděl u nás jen úzký okruh odborníků, že v roce svých čtyřicátých narozenin napsal svůj životopis. Stalo se tak na naléhání jeho přátel manželů Hoffmannových, u nichž na těchchobuzském velkostatku v jižních Čechách u Pacova trvale pobýval v letech 1831 až 1842. Zároveň tak splnil požadavek kladený na členy *Královské české společnosti nauk*, podle něhož měl každý její člen pro ni napsat svůj životopis.

Originální Bolzanův text byl v němčině. Tiskem bez jeho vědomí vyšel v roce 1836. V českém překladu bylo možno se s ním seznámit knižně až v roce 1913. Od té doby nevyšel.

Knižku vřele doporučujeme, neboť čtenář získá její četbou zcela novou představu o období Bolzanova působení na filozofické fakultě pražské univerzity ve funkci profesora náboženství. Jeho pohled na náboženství byl zcela originální, pojímal je racionálně, při jeho výkladu uplatňoval své svobodomyšlné názory a žádal sociální spravedlnost. Svými přednáškami ovlivnil vývoj českého myšlení v celém 19. století. Působil nejen na své žáky, ale nepřímo i na žáky svých žáků.

Knižka je doplněna méně známým Bolzanovým portrétem od Františka Horčíčky, jenž jej vytvořil v letech 1824 až 1825.

Jiří Mída

Arnošt Niederle:

Zajímavé dvojice trojúhelníků

Škola mladých matematiků, sv. 47. Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, Praha 1980, stran 272, obr. 133, cena brožovaného výtisku 16 Kčs

V této publikaci, která má podtitul Epizoda z planimetrie, sleduje autor dva cíle. Jednak poukazuje na některé geometrické vztahy, které se mu zdají zajímavé a hodné povšimnutí, jednak poskytuje čtenáři příležitost k vydatnému výcviku v přesném rýsování. Výklad se člení do čtyř kapitol a dodatku. S výjimkou kapitoly první vystačí čtenář se znalostí planimetrie na středoškolské úrovni. První kapitola předpokládá znalost některých pojmů z projektivní geometrie, ale toho se nemusíte příliš bát. Dodatek připojený v závěru publikace přináší totiž výběr pojmů a vztahů z projektivní geometrie, jichž se v textu používá (dělicí poměr, dvojpoměr, projektivní čtveřice bodů a přímek, věta Desarguesova o trojúhelnících apod.). Závěrečná čtvrtá kapitola si všímá velikostí stran v uvažovaných dvojicích a trojicích trojúhelníků a velikostí poloměrů kružnic jim opsaných.

Jiřina Sedláčková

Pokyny pro autory článků do Rozhledů

Rozhledy matematicko-fyzikální mohou otisknout jenom ty články, které byly zaslány redakci ve dvou exemplářích s úplným autorovým jménem, jeho akademickými a vědeckými tituly, s udáním pracoviště a bytové adresy autora. O otištění rozhoduje redakční rada nebo vedoucí redaktor po vyjádření recenzenta. *Nevyžádané rukopisy se nevracejí.*

Rozhledy matematicko-fyzikální jsou určeny především studentům středních škol a středních odborných učilišť s maturitou. Proto všechny uveřejňované články musí být psány srozumitelně a nemají být příliš dlouhé. Autoři se samozřejmě řídí pravidly českého nebo slovenského pravopisu, respektují přijaté názvy a značky a (ve fyzice) zákonem stanovené jednotky a označení.

V rukopisu článku je třeba uvést nejprve titul příspěvku, potom jméno a působiště autora. Text je nutno psát na stroji (nikoliv však perličkou), černou páskou, ob řádek, a to po jedné straně bílého papíru formátu A4. Na každé stránce má být nejvýše 30 řádek, z nichž každý obsahuje 60 úhozů. Nadpisy nebo zdůrazněná slova textu podtrhujte jenom obyčejnou (ne propisovací) tužkou. Poznámky pod čarou — pokud možno v minimálním počtu — je třeba v textu vyznačit postupně číslicemi v exponentu a psát je hned za řádek rukopisu, k němuž patří; od ostatního textu se oddělí vodorovnými čarami. *Obrázky se nekreslí do textu článků!*

Matematické výrazy a vzorce se píší vždy na zvláštní řádek a doplňují se ručně (velmi čitelně!) inkoustem, tuší nebo propisovací tužkou; zvláštní pozornost je třeba věnovat přepisování indexů a exponentů. Vzorce se číslují v oblých závorkách na pravé straně, a to jenom tehdy, jestliže se na ně odvoláváme v dalším textu.

V odkazech na literaturu uvádíme (a to střídmo) jenom publikace dostupné čtenářům Rozhledů, tj. především literaturu psanou v českém nebo slovenském jazyce; ze zahraniční literatury se uvádějí jenom publikace knižní. Odkazy je třeba v textu průběžně číslovat; číslice se píší do hranatých závorek. Odkaz obsahuje jméno autora, název knihy nebo článku (u časopisu ročník a stránku), vydavatele, místo a rok vydání.

Obrázky se rýsují tuší na pauzovací papír nebo na bílou čtvertku a popisují se normalizovaným písmem šablonou 5 mm; čáry musí být ostré a nerozpité. Očíslované texty k obrázkům se přikládají na konec rukopisu. Je třeba pamatovat na to, že se obrázky pro tisk zmenšují v poměru 1 : 2. Fotografie musí být ostré, kvalitní a zhotovené na lesklém bílém papíru. Autor může také zaslat redakci jenom obrázky narýsované tužkou; redakce dá takové obrázky pro tisk narýsovat. I v tomto případě je třeba dodat obrázky pečlivě narýsované a čitelně popsané.

Adresa redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních je tato:

M. D. Rettigové 4

116 39 Praha 1 — Nové Město

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

sufficiente
suono m
superconduttività ž
superficie ž
— a pendenza costante
— cilindrica
— conica
— di rotazione
— laterale
— caustica
superiore
supersonico
supplementare
supplemento m
supporre
supporto m
supposizione ž
supposto m
svilupabile
sviluppo m

postačující
zvuk, tón
supravodivost
plocha
— se stálým sklonem
— válcová
— kuželová
— rotační
plášť
plocha kaustická
vysoký; vyšší; horní
nadzvukový
doplňkový; dodatkový
doplňek; dodatek
předpokládati
podpěra; podstavec
předpoklad
domněnka
rozvinutelný
rozvoj

T

tachimetro m
tagliare
taglio m
tangente ž (funzione)
tangente ž (retta)
tangente m (piano)
metodo delle tangenti m

tara ž
tautologia ž
tavola ž
— di verifica

tachometr
řezati; protínati
řez
tangens
tečna
tečná rovina
Newtonova metoda aproximace
tečnami
tára, obal
tautologie
stůl; tabulka
tabulka pravdivostních hodnot

SPN vydává

Bartuška Karel: MOLEKULOVÁ FYZIKA A TERMIKA

Publikace je určena především studentům 2. ročníku gymnázií přírodovědné větve s rozšířeným vyučováním matematice a studentům všech středních škol, kteří se účastní soutěže fyzikální olympiáda. Zpracovává novým způsobem učební látku molekulové fyziky a termiky.

Brož. Kčs 16, —

Košťál Rostislav: OPTICKÉ SOUSTAVY

Publikace je určena žákům všech typů středních škol, kteří se zajímají o fyziku a účastní se soutěže fyzikální olympiáda. Obsah publikace tvoří 5 kapitol, z nichž první se zabývá základními pojmy geometrické optiky, druhá lomem jednou lámatvou plochou, třetí centrovanou soustavou kulových ploch, čtvrtá zobrazením odrazem; pátá kapitola tvoří jedno studijní téma, které je určeno účastníkům soutěže FO.

Brož. Kčs 5, —

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20, — Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2, — Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12 Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1981.

ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

1921/22

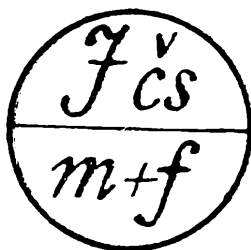
1981/82

*** 60 let**

**ROČNÍK 60, 1981/82
ŘÍJEN**

(2)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matemacko

- fyzikální

Nositel vyznamenání

Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Vladimír
Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr.
Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.

Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

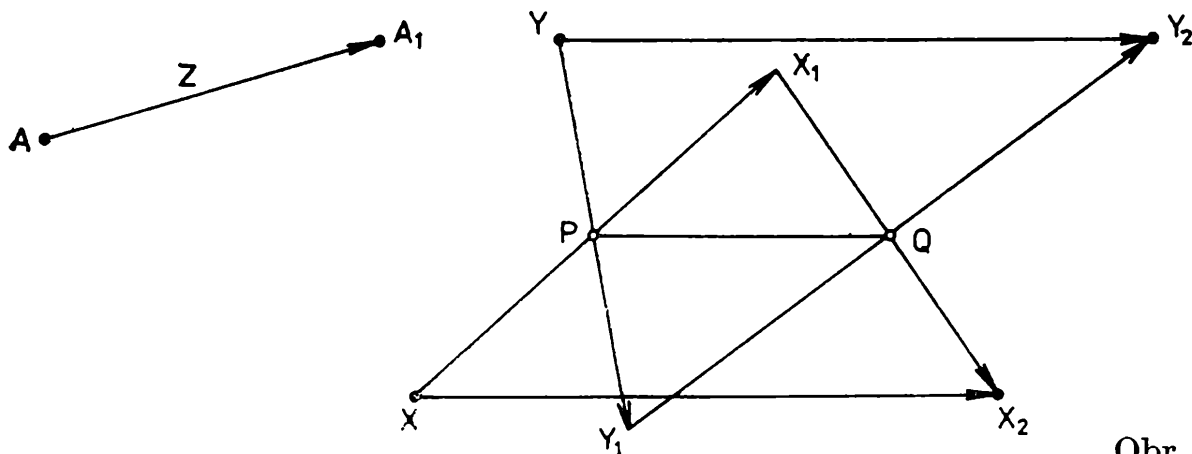
F. Kuřina: Shodná zobrazení roviny v jazyku šipek .	49
Š. Porubský: Kalendár tajov zbavený	56
L. Zachoval: Fyzik v průmyslové praxi - I. .	64
J. Šedivý: Odvážný myslitel Bernard Bolzano .	67
F. Neumann: Akademik Otakar Borůvka	71
S. Horák: Z časopisu Kvant	73
Výsledky loňské soutěže Rozhledů	76
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	78
Naše soutěž, ročník 1981—82 .	84
J. Sedláček: Ještě k minulému ročníku MO	87
J. Vyšín: Řešíte úlohy MO kategorie Z?	89
M. Simerský: Trojí zapojení tranzistorového zesilovače .	90
Z nových knih	95
K. Šindelář: Slovníček italsko-český	3. str. obálky

Shodná zobrazení roviny v jazyku šipek

RNDr. FRANTIŠEK KUŘINA, PF, Hradec Králové

Jak jistě dobře víte, je libovolné zobrazení, a tedy např. i shodné zobrazení roviny, jednoznačnou binární relací. Je-li A určitý bod roviny E^2 , A_1 jeho obraz v zobrazení Z , můžeme spojit bod A s bodem A_1 orientovanou úsečkou neboli šipkou tak, jak je to běžné při kreslení uzlových grafů binárních relací (obr. 1). Tento způsob nám umožní názorně ilustro-

Obr. 1



Obr. 2

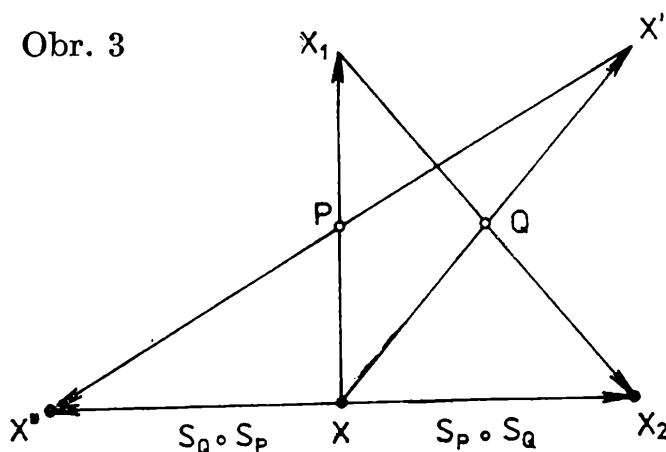
vat některé pojmy a výsledky, které jste studovali ve 2. ročníku gymnázií. Označení, symboliku a některé výsledky budeme přebírat z vaší učebnice *Hejný-Hanula-Dekrét: Matematika pro gymnázia 4*. Speciálně budeme označovat symbolem S_P středovou souměrnost se středem P , S_m osovou souměrnost s osou m , $Z = S_m \circ S_P$ zobrazení složené z osové souměrnosti S_m a středové souměrnosti S_P v uvedeném pořadí.

Příklad 1. Ověřte, že složením dvou středových souměrností S_P , S_Q s různými středy P , Q vznikne posunutí $T = S_P \circ S_Q$.

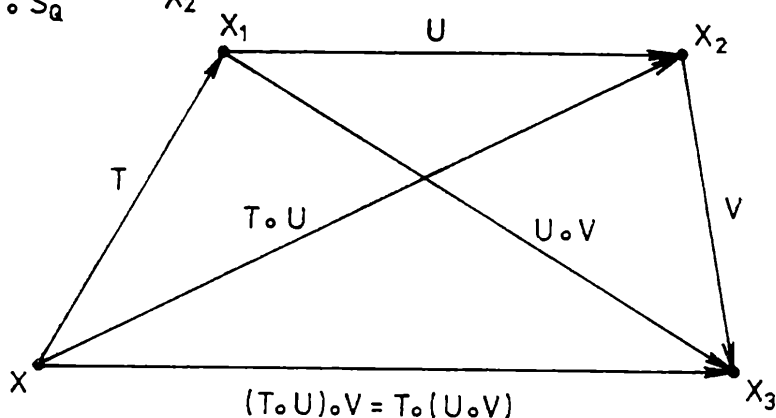
Ze znázornění podle obr. 2 je naše tvrzení zřejmé. Každý z trojúhelníků XX_1X_2 , $YY_1Y_2, \dots$ má touž střední příčku PQ . Proto jsou úsečky XX_2 , $YY_2, \dots$ navzájem rovnoběžné a shodné, což je charakteristická vlastnost posunutí.

Příklad 2. Ověřte, že skládání středových souměrností s různými středy P , Q není komutativní: $S_P \circ S_Q \neq S_Q \circ S_P$.

Obr. 3



Obr. 4



Tvrzení je zřejmé, neboť bod X má vobrazení $S_P \circ S_Q$ jiný obraz než vobrazení $S_Q \circ S_P$ (obr. 3).

Příklad 3. Ověřte, že skládání tří posunutí T, U, V roviny E^2 je asociativní: $(T \circ U) \circ V = T \circ (U \circ V)$.

Z obr. 4 je možné poznat ideu důkazu, že skládání libovolných tří zobrazování roviny E^2 je asociativní. Pokuste se formulovat tento důkaz.

Příklad 4. Ověřte, že pro libovolná tři posunutí T, U, V roviny E^2 platí $T \circ U \circ V = V \circ U \circ T$ (vzhledem k platnosti asociativního zákona pro skládání posunutí vynecháváme v zápisu závorky).

Protože pro libovolná dvě posunutí T_1, T_2 platí

$T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ (obr. 5 a), můžeme psát:

$$T \circ U \circ V = T \circ (U \circ V) = T \circ (V \circ U) = (T \circ V) \circ U = V \circ (T \circ U) = \\ = V \circ U \circ T.$$

Je-li X libovolný bod, Z libovolné zobrazování roviny E^2 , Z^{-1} zobrazování k němu inverzní, můžeme sestavit postupně úsečky:

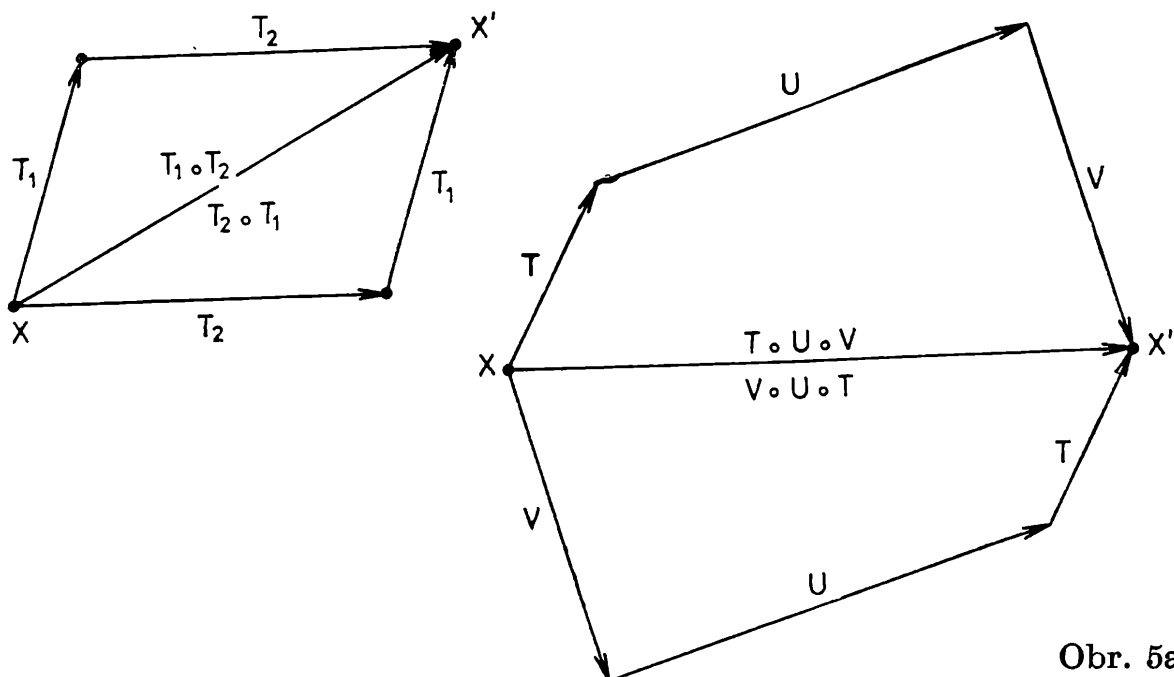
XX_1 , kde X_1 je obraz bodu X vobrazení Z ,

X_1X_2 , kde X_2 je obraz bodu X_1 vobrazení Z ,

X_2X_3 , kde X_3 je obraz bodu X_2 vobrazení Z ,

$X_{-1}X$, kde X_{-1} je obraz bodu X vobrazení Z^{-1}

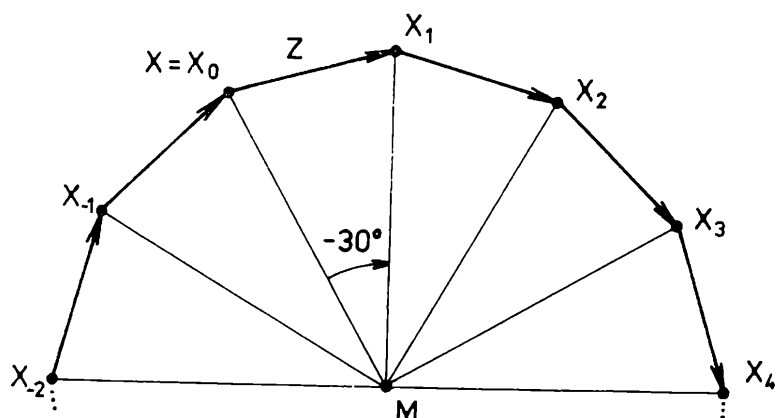
$X_{-2}X_{-1}$, kde X_{-2} je obraz bodu X_{-1} vobrazení Z^{-1} ,



Obr. 5a, b

Sjednocení všech úseček takto sestrojených nazveme dráhou bodu X vobrazení Z .

Je-li např. R rotace se středem v bodě M a úhlem rotace -30° , můžeme popsanou konstrukci ilustrovat obrázkem 6. Na obrázku je bod X



Obr. 6

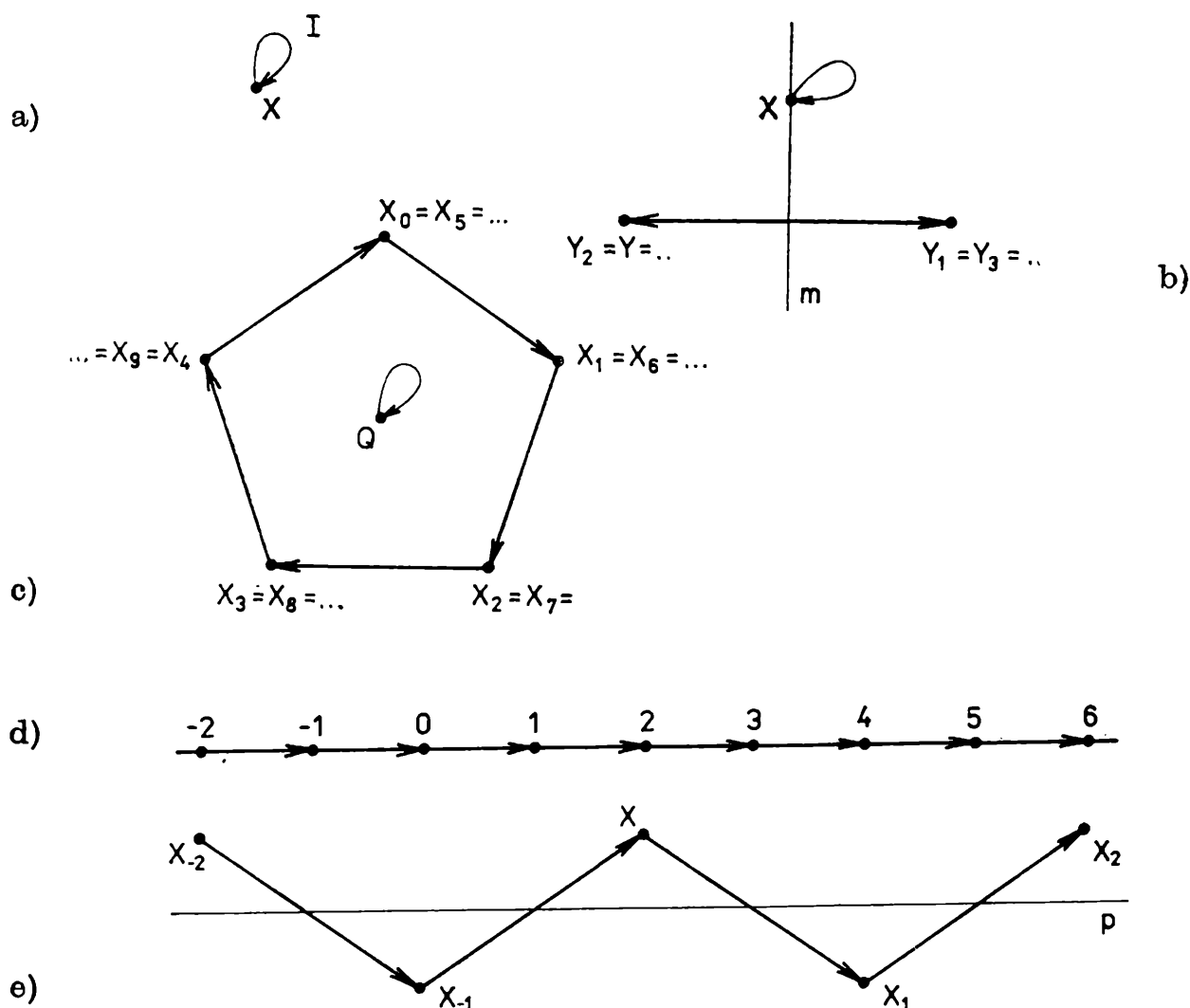
označen i symbolem X_0 , jímž chceme zdůraznit, že jsme na bod X „neaplikovali“ zobrazení Z ani jednou. X_n je obraz bodu X v n —krát opakovaném zobrazení Z .

Ukažme, že každé shodné zobrazení roviny E^2 lze charakterizovat pomocí dráhy bodu $X \in E^2$.

Z geometrie je známa věta (věta 8,6 z citované učebnice):

Existuje pouze pět shodných zobrazení roviny E^2 :

- identita,
- osová souměrnost,
- otočení,
- posunutí,
- posunutý zrcadlení (zobrazení složené z osové souměrnosti podle osy p a z posunutí, v němž je přímka p samodružná).



Obr. 7

Úloha 1. Určete všechny typy drah bodu v jednotlivých shodnostech roviny E^2 .

U všech úloh budeme uvádět pouze výsledky. Podrobná řešení přenecháváme čtenáři.

a) Dráha libovolného bodu X v identitě je „nulová úsečka“.

b) Je-li bod X bodem osy m osové souměrnosti, je jeho drahou opět nulová úsečka. Drahou bodu $Y \notin m$ je úsečka YY_1 (obr. 7b).

c) V rotaci se středem Q a úhlem rotace ω budeme opět rozlišovat dva případy. Jediný samodružný bod Q rotace má dráhu nulovou. Je-li

číslo $n = \frac{360}{\omega}$ (ω je velikost úhlu rotace ve stupních) číslem přirozeným,

je drahou libovolného bodu $X \neq Q$ hranice pravidelného n -úhelníka (tento výsledek je pro $n = 5$ nakreslen na obr. 7c), je-li n racionální, ale ne přirozené, je dráha bodu X uzavřená lomená čára, která není hranicí pravidelného mnohoúhelníka, je-li n iracionální, je dráha bodu X neuzavřená lomená čára.

d) Drahou bodu O v posunutí T je „celočíselná“ číselná osa (obr. 7d).

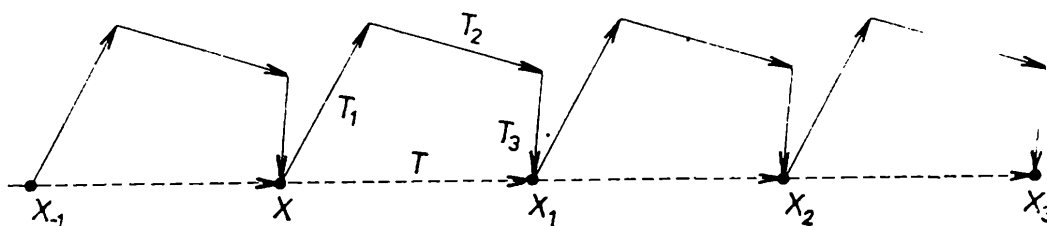
e) Je-li bod O bodem osy p , je jeho dráha stejná jako v posunutí. Dráha bodu $X \notin p$ má tvar nekonečné lomené čáry (obr. 7e).

Je-li zobrazení Z složeno ze zobrazení $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$, tj. platí-li

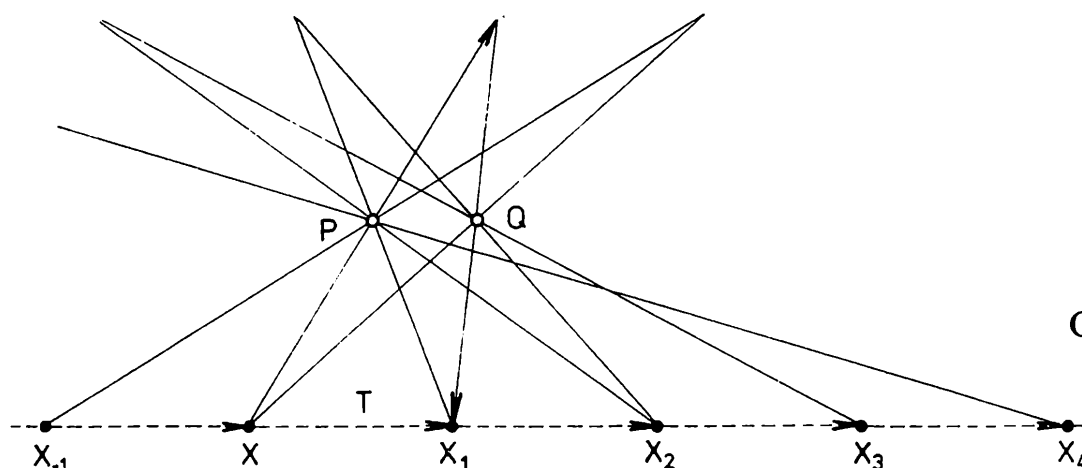
$$Z = Z_1 \circ Z_2 \circ \dots \circ Z_k,$$

můžeme kromě dráhy bodu X v zobrazení Z sestavit i dráhu bodu X „rozvinutou“ podle jeho složek $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$. Vysvětlíme tento pojem na příkladech.

$T = T_1 \circ T_2 \circ T_3$ je posunutí složené ze tří posunutí T_1, T_2, T_3 . Dráha bodu X v posunutí T je znázorněna čárkovanými úsečkami, rozvinutí této dráhy podle složek je nakresleno na obr. 8 plně.



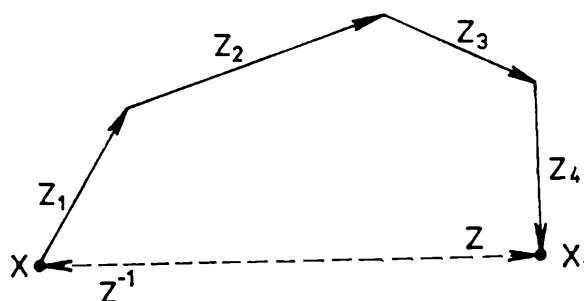
Obr. 8



Obr. 9

Na obr. 9 je rozvinuta dráha bodu X v posunutí $T = S_P \circ S_Q$ podle středových souměrností S_P, S_Q .

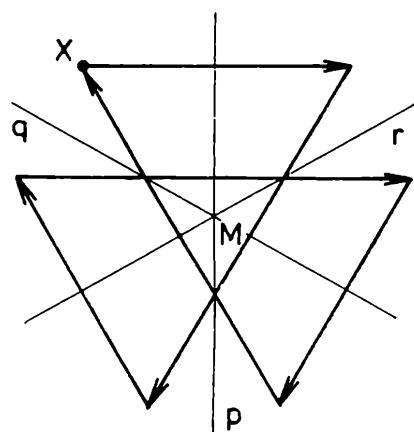
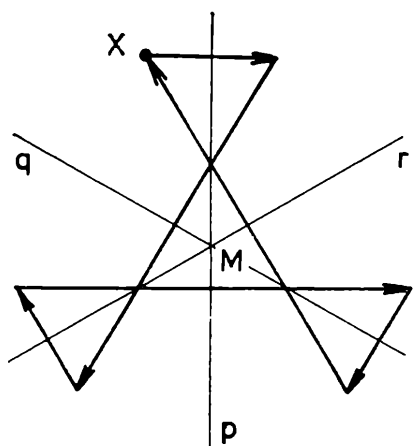
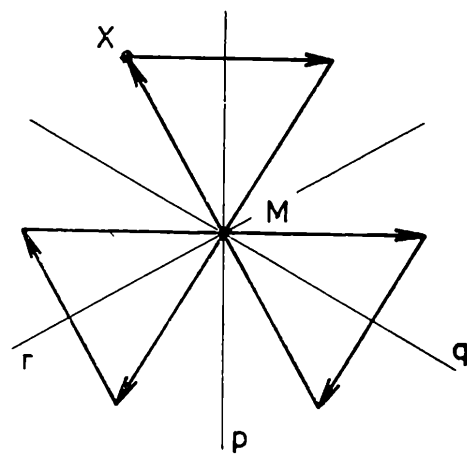
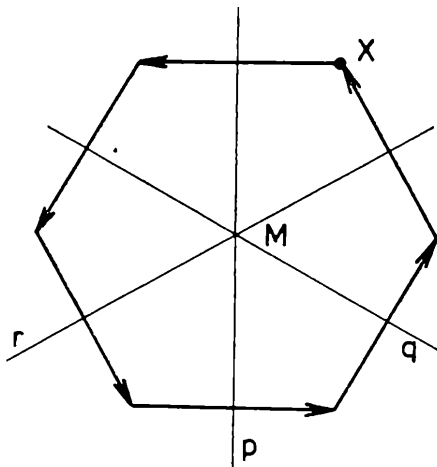
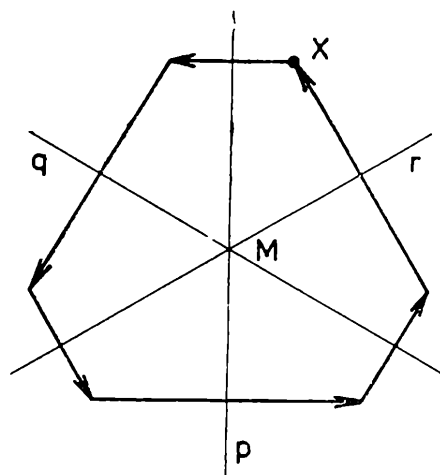
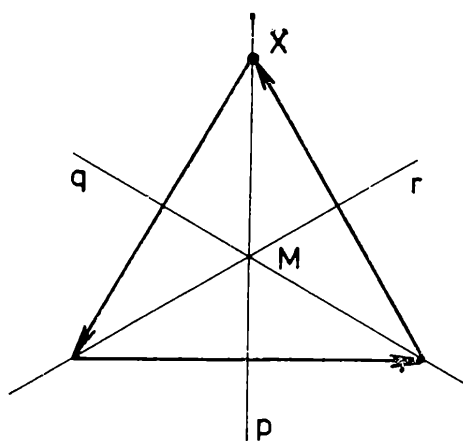
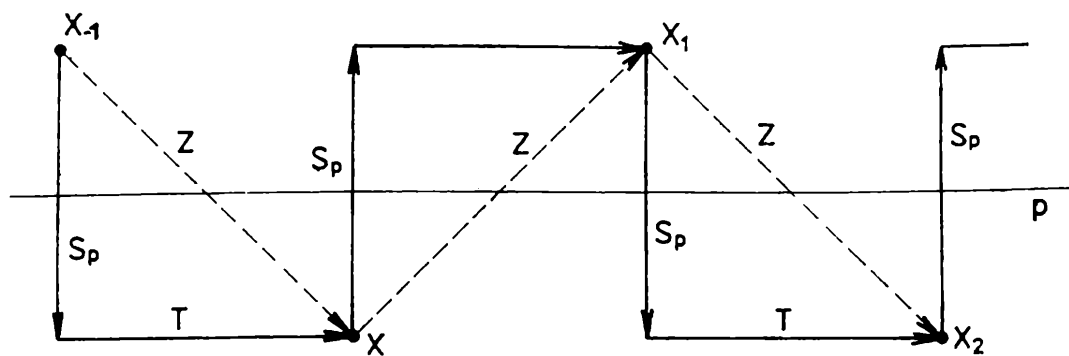
K tomu, abychom mohli sestavovat „záporné“ části dráhy bodu X je třeba si uvědomit, že zobrazení Z^{-1} inverzní k zobrazení $Z = Z_1 \circ Z_2 \circ \dots \circ Z_k$ můžeme vyjádřit ve tvaru $Z^{-1} = Z_k^{-1} \circ \dots \circ Z_2^{-1} \circ Z_1^{-1}$ (obr. 10).



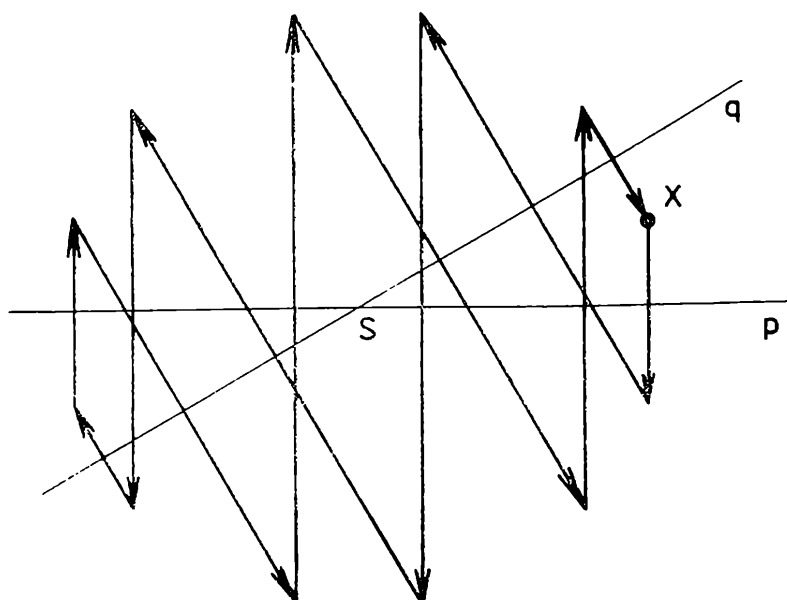
Obr. 10

Úloha 2. Posunuté zrcadlení Z je složeno z osové souměrnosti S_p a z posunutí T , jehož směr je rovnoběžný s přímkou p . Nakreslete dráhu bodu $X (X \notin p)$ rozvinutou podle složek S_p a T (obr. 11).

Obr. 11



Obr. 12



Obr. 13

Úloha 3. Jsou dány přímky p, q, r , které procházejí daným bodem M a dělí rovinu na šest shodných částí. Určete všechny typy drah bodu $X (X \neq M)$ v zobrazení $Z = S_p \cdot S_q \cdot S_r$.

První překvapující výsledek zjistíme rýsováním: drahou bodu X v zobrazení Z je úsečka XX_1 .

Problém 1. Zdůvodněte tento výsledek.

Studujeme-li dráhy bodu X rozvinuté podle osových souměrností S_p, S_q a S_r , dostaneme podle polohy bodu X vzhledem k osám p, q, r šest výsledků (obr. 12). Všechny získané dráhy jsou konečné, mají aspoň tři osy souměrnosti a můžeme je popsat podle geometrického útvaru, jehož hranici dráha tvoří, takto:

- rovnostranný trojúhelník
- „polopravidelný“ šestiúhelník,
- pravidelný šestiúhelník,
- sjednocení tří nepřekrývajících se rovnostranných trojúhelníků,
- sjednocení čtyř nepřekrývajících se rovnostranných trojúhelníků,
- sjednocení tří překrývajících se rovnostranných trojúhelníků.

Úloha 4. Přímky p, q svírají úhel 30° . Sestrojte dráhu bodu X v zobrazení $R = S_p \cdot S_q$ rozvinutou podle osových souměrností S_p, S_q . Bod X volte tak, aby neležel na žádné z přímek p, q a byl blíže k přímce q než k přímce p .

Řešení je nakresleno na obr. 13.

Problém 2. Zdůvodněte, proč je rozvinutá dráha libovolného bodu X v zobrazení R z úlohy 4 uzavřená lomená čára.

Problém 3. Přímký p, q, r, s procházejí bodem M a dělí rovinu na osm shodných částí. Narýsujte všechny typy drah bodu $X (X \neq M)$ v zobrazení $Z = S_p \cdot S_q \cdot S_r \cdot S_s$ rozvinuté podle osových souměrností S_p, S_q, S_r, S_s .

Řešení uvedených tří problémů zašlete redakci; jména řešitelů uveřejníme.

Kalendár tajov zbavený

ŠTEFAN PORUBSKÝ, MÚ SAV, Bratislava

Najjednoduchším orientačným bodom pri zostavovaní kalendára sú fázy Mesiace na oblohe. Na základe takýchto pozorovaní zostavený kalendár sa volá *lunárny*. Kalendár, ktorý sa opiera o pozorovanie periodicity v pohybe Slnka, sa nazýva *solárny*. Rok v lunárnom kalendári má obyčajne dvanásť mesiacov, ale v priemere len 354 dní. Každá lepšie organizovaná spoločnosť potrebuje (hoci pre potreby poľnohospodárstva) svoj chod prispôbiť ročnému obehu Zeme okolo Slnka, čo — ako vieme — trvá približne 365 dní. Z tohto dôvodu vznikol kalendár *lunisolárny*, ktorý je kombináciou obidvoch predchádzajúcich. Dĺžka roka je určená obhom Zeme okolo Slnka, ale jeho vnútorné členenie odráža najčastejšie z náboženských a kultových dôvodov pohyb Mesiaca na oblohe. Napríklad starogrécke, židovské a staroarabské kalendáre boli lunárne. Egypťania mali solárny a Číňania a Rimania mali lunisolárny kalendár.

Náš kalendár sa vyvinul zo starovekého rímskeho kalendára, čo platí aj o slove kalendár. Latinské *calendarium* označovalo v starom Ríme „knihu dlžníkov“, ktorí platili úroky z dlhov vždy prvého dňa príslušného mesiaca, a toto slovo má základ v slove *calare*, t. j. volať. Lebo v starom Ríme akonáhle pontifex minor*) spozoroval prvého každého mesiaca na nebi nový kosák Mesiaca, zvolal (okrem iných povinností) rímsky ľud ku kúrii Calabra a oznámil, koľko dní bude mať daný mesiac do tzv. nón. Totiž mesiac v starorímskom kalendári bol ináč členený než ten náš terajší. V každom mesiaci boli vyzdvihnuté tri dni, ktoré mali meno. Najprv to bol prvý deň v mesiaci, tzv. Kalendae. Ďalšie dva význačné dni boli pomenované Nonae a Idus. Ich poloha v mesiaci bola dvojaká. Niektoré mesiace (napr. január, február, apríl, atď.) mali nó-

*) člen najvyššieho kňazského zboru

ny 5. dňa a idy 13. dňa, kým v ostatných mesiacoch pripadli nóny na 7. a idy na 15. deň. Ostatné dni sa počítali od týchto dní menovaním naspäť, napr. náš 9. január sa označoval ako piaty deň pred idami (V. Idus Januarius). Ďalšia odlišnosť starorímskeho kalendára bola v tom, že rímsky rok sa začínal pôvodne 1. marca. Zvyšky tejto skutočnosti môžeme dnes dešifrovať v označení niektorých mesiacov, napr. september — siedmy mesiac, október — ôsmy, november — deviaty, december — desiaty mesiac.

Postupom času bol však tento starorímsky kalendár uvedený do zmätkov, nie však z nevedomosti, ale čiste z dôvodov politických a nábožensko-kultových, takže bolo potrebné previesť reformu kalendára. Po starostlivých prípravách za pomoci alexandrijského astronóma Sosigena Július Caesar v roku svojho tretieho konzulátu diktátorským ediktom ohlásil, že prebiehajúci rok *C. Julio Cesare III. M. Aemilio Lepido cos.* má mimoriadnym vsunutím 67 dní mať celkove 445 dní. Tento rok sa označuje aj ako *posledný rok zmätku* (annus confusionis ultimus) a bol to podľa Varronovho letopisu 708. rok od založenia Ríma, alebo v našom spôsobe zápisu od 13. 10. roku 47 pred n. l. do 31. 12. r. 46 pred n. l. Prvým dňom roku sa stal 1. január na počesť skutočnosti, že počínajúc rokom 153 pr. n. l. nastupovali rímski konzuli do svojho úradu v tento deň. Dni roku boli rozdelené do mesiacov presne tak, ako to poznáme dnes, len s tým rozdielom, že niektoré mesiace boli neskoršie premenované. Čo sa týka vnútorného rozdelenia mesiacov, ponechal Caesar nepohodlný starorímsky systém, ktorý sme pred chvíľou spomenuli. Dôležitou zmenou v tomto tzv. juliánskom kalendári bolo stanovenie dĺžky roka. Dĺžka roka bola stanovená na 365 dní s tým, že každý štvrtý rok mal 366 dní. To znamená, že dĺžka roka bola stanovená na 365 1/4 dňa. Rozdiel od „skutočného“ roku predstavoval takto niečo vyše 11 minút, čo znamenalo v priemere oneskorenie o jeden deň za 128 rokov. Táto nezrovnalosť sa postupne začala stále vypuklejšie prejavovať, najmä po prijatí tzv. kresťanského kalendára v 4. storočí. Tento kalendár ponechal všetky podstatné rysy juliánskeho kalendára, len mesiace boli rozdelené podľa židovského vzoru na týždne so siedmi dňami. Ďalej vniesol do juliánskeho kalendára svoje cirkevné sviatky. A pri určovaní niektorých týchto sviatkov (napríklad Veľká noc), ktoré záviseli ako od lunárneho, tak aj od solárneho kalendára, sa narážalo na problémy spôsobené posunutím kalendárneho roku. Preto roku 1582 urobil pápež *Gregor XIII.* reformu, podľa ktorej po 4. 10. 1582 nasledoval 15. 10. 1582. Navyše priestupné roky boli určené na základe takéhoto pravidla: každý štvrtý rok je priestupný, ale rok deliteľný 100 je priestupný len vtedy, ak je súčasne deliteľný aj číslom 400. Tak napríklad rok 1600 bol priestupný a rok 2000 bude tiež, kým roky 1700, 1800 a 1900 neboli priestupnými, lebo nie sú deliteľné 400. Dĺžka takto stanoveného roku je v priemere dlhšia od „skutočného“ len o 26 sekúnd.

To znamená, že ak sa bude ľudstvo riadiť týmto tzv. gregoriánskym kalendárom, potom bude treba až v 50. storočí kalendár upraviť, a to posunutím o púhy jeden deň.

Obráťme sa teraz k našej pôvodnej úlohe. Najprv poznamenajme, že sa obmedzíme len na zisťovanie závislosti medzi dňami a dátumami počínajúc 1. marcom 1600. Pozorný čitateľ bude schopný urobiť na základe predchádzajúcich historických faktov nevyhnutné zmeny v postupe tak, aby „prerobil“ túto súvislosť približne do 4. storočia, keď bol zavedený sedemdnňový týždeň.

Pretože v priestupných rokoch sa pridáva jeden deň v mesiaci február, bude pre nás výhodnejšie postupovať tak, ako keby sa rok začínal prvého marca. To znamená, že marec budeme považovať za prvý mesiac toho-ktorého roku, povedzme N , august za šiesty, atď., kým január a február roku N budeme považovať za jedenásty, respektíve dvanásty mesiac roku $N-1$ (t. j. predchádzajúceho roku).

Práca s kalendárom je veľmi dobrým pozadím k tomu, aby sme ukázali užitočnosť a dôležitosť pojmu *kongruencie*, ktorý bol zavedený v teórii čísiel ani nie dvadsaťročným Gaussom a ktorý sa odvtedy udomácnil temer v celej matematike vo viacerých obmenách.

V niektorých praktických činnostiach majú isté javy spoločné črty, ak sa líšia o „násobok iného javu“. Tak napríklad veta „dnes je streda“ je pravdivá v určitých dňoch, ktoré sa líšia o týždne (t. j. o násobky siedmich dní). Z určitých hľadísk je účelné „zhromaždiť“ takéto zhodné (t. j. kongruentné) javy do väčších celkov — množín navzájom kongruentných prvkov. Nás budú prirodzene zaujímať takéto závislosti medzi celými číslami. Existuje rozsiahla literatúra zaoberajúca sa teóriou kongruencií v teórii čísiel, uvedme len knižočku *Aloisa Apfelbecka, Kongruence*, ktorá vyšla r. 1968 ako zv. čís. 21 v edícii Škola mladých matematikov. Aby sme umožnili čítať nasledujúce riadky aj tým, ktorí sa s touto knižočkou nestretli, uvedieme niekoľko základných definícií a výsledkov. Tieto však v žiadnom prípade nemôžu nahradiť systematické štúdium.

Majme dané prirodzené číslo m (obyčajne > 1). Budeme hovoriť, že dve celé čísla b, c sú *kongruentné modulo m* (alebo podľa modulu m), ak ich rozdiel $b - c$ je deliteľný číslom m . Ak je to tak, zapisujeme to

$$b \equiv c \pmod{m}.$$

Pomerne ľahko sa dá dokázať, že dve celé čísla sú kongruentné, ak dávajú po delení číslom m ten istý zvyšok.

Ak by sme teraz očíslovali postupne všetky dni v roku číslami od 1 do 365 (resp. 366 ak ide o priestupný rok), tak sa ľahko môžeme presvedčiť, že dva dni očíslované číslami b, c padnú na ten istý deň v týždni vtedy a len vtedy, ak sú kongruentné modulo 7. Podľa tohoto to zna-

mená, že ak tieto dva dni odpovedajú tomu istému dňu v týždni (myslíme pondelku, utorok, atď), tak čísla b, c po vydelení číslom 7 dávajú za zvyšok to isté číslo spomedzi čísiel 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Podobne ľahko môžeme nahliadnuť, že rovnosť týchto zvyškov nielenže nezávisí odo dňa, od ktorého začneme toto očísľovanie, ale nezávisí ani od čísla, ktorým začneme. Tým myslíme, že napríklad môžeme číslo 1 priradiť dňu 1. 3. 1600 a postupne očísľovať dni do dnešného dňa, alebo môžeme začať trebárs 5. 10. minulého roku číslom 234. V oboch prípadoch čísla priradené prvému pondelku v mesiaci december minulého roku a pondelku v tomto týždni budú kongruentné mod 7. Oprávnenosť tohto posledného tvrdenia vyplýva z nasledujúceho pravdivého tvrdenia: ak $a \equiv b \pmod{m}$, tak pre každé celé číslo k platí $a + k \equiv b + k \pmod{m}$. (Dokážte toto tvrdenie a premyslite si uvedené súvislosti.)

Začnime naše odpočítavanie v týždni, ktorý obsahoval deň 1. 3. 1600 takým spôsobom, že nedeľu, ktorá bola tesne pred týmto týždňom očísľujeme číslom 0, pondelok týždňa obsahujúceho 1. 3. 1600 bude mať číslo 1, utorok číslo 2, streda číslo 3, štvrtok číslo 4, piatok číslo 5, sobota číslo 6, atď.

Z toho, čo sme predtým povedali, vyplýva, že nejaký deň padne na

- (i) nedeľu práve vtedy, ak jeho poradové číslo je kongruentné s 0 modulo 7,
- (ii) pondelok práve vtedy, ak jeho poradové číslo je kongruentné s 1 modulo 7,
- (iii) utorok práve vtedy, ak jeho poradové číslo je kongruentné s 2 modulo 7

atď.

Pretože naše označenie pre dni sme volili tak, že sú to čísla 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, tak uvedené tvrdenie sú ekvivalentné nasledujúcim:

- (j) nejaký deň padne na nedeľu, ak jeho poradové číslo po delení 7 dáva zvyšok 0 (t. j. je deliteľné 7),
- (jj) nejaký deň padne na pondelok, ak jeho poradové číslo po delení 7 dáva zvyšok 1,
- (jjj) nejaký deň padne na utorok, ak jeho poradové číslo po delení 7 dáva zvyšok 2

atď.

Napríklad 12 354 789 — ty deň pri takomto odpočítavaní padne na sobotu, lebo $12\,354\,789 \equiv 6 \pmod{7}$. Z tohoto dôvodu môžeme pre ľubovoľnú nedeľu používať označenie 0, pre pondelok 1, ..., sobotu 6. (Jedine, čo pritom stratíme, je prehľad o počte týždňov, ktoré medzičasom ubehli, ale tento nás vlastne ani nezaujíma.)

Naším prvým cieľom bude zistiť, na aký deň pripadol 1. 3. 1600. Predpokladajme, že to bol deň a , kde $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Medzi 1. 3. 1600 a 1. 3. 1601 prešlo 365 dní (ak ste pozorne čítali, tak iste viete,

prečo nie 366, veď rok 1600 bol priestupný!), čo je 52 plných týždňov a jeden deň. Preto, ak $a', a' \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, je deň, na ktorý pripadol 1. 3. 1601, tak

$$a' \equiv a + 365 \equiv a + 1 \pmod{7}.$$

Z podobných dôvodov 1. marec 1602 pripadne na deň

$$a'' \equiv a' + 365 \equiv a' + 1 \equiv a + 2 \pmod{7}$$

a 1. 3. 1603 na deň

$$a''' \equiv a + 3 \pmod{7}.$$

Lenže rok 1604 je priestupný, má 366 dní, t. j. 52 plných týždňov a dva dni, a preto roku 1604 pripadne 1. 3. na deň

$$a''' \equiv a + 5 \pmod{7},$$

atď. Použitím tohto postupu už nie je ťažké určiť deň, na ktorý pripadne 1. marec ľubovoľného roku po roku 1600, povedzme roku N . Tento deň, označme ho $a^{(N)}$, kde $a^{(N)} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, je očividne kongruentný so súčtom troch čísiel, čísla a , počtu rokov, ktoré uplynuli od roku 1600 po náš rok N ; plus počet priestupných rokov v tomto období.

Počet rokov medzi rokom 1600 (bez) a rokom N (včítane) je

$$N - 1600.$$

Počet priestupných rokov v tomto období určíme takto: Pretože priestupný rok je každý štvrtý, počínajúc rokom 1600, okrem tých, ktoré sú deliteľné číslom 100, ale nie číslom 400, potrebujeme najprv zistiť, koľko rokov od roku 1601 bolo deliteľných číslom 4. Týchto bolo zrejme toľko, koľko je celých čísiel v intervale

$$\left(\frac{1600}{4}, \frac{N}{4} \right).$$

Teraz nám bude užitočná ďalšia funkcia, ktorá sa hodne využíva nielen v teórii čísiel, tzv. „celá časť x “ a ktorá sa označuje $[x]$. Hodnota tejto funkcie v reálnom čísle x je definovaná ako najväčšie celé číslo $\leq x$. Tak napríklad

$$[-4,8] = -5, [\pi] = 3, [5] = 5.$$

Potom počet celých čísiel v intervale $\left(400, \frac{N}{4}\right)$ je

$$\left[\frac{N}{4} \right] - 400.$$

Počet rokov od roku 1600 do N , ktoré sú deliteľné 100 je na základe podobnej úvahy rovný číslu

$$\left[\frac{N}{100} \right] - 16.$$

Z týchto je však len

$$\left[\frac{N}{400} \right] - 4$$

deliteľných aj číslom 400. Preto počet priestupných rokov od roku 1600 (ale bez tohto roku, lebo počítame až od 1. 3. 1600) do roku N je rovný číslu

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{N}{4} \right] - 400 - \left(\left[\frac{N}{100} \right] - 16 \right) + \left[\frac{N}{400} \right] - 4 = \\ &= \left[\frac{N}{4} \right] - \left[\frac{N}{100} \right] + \left[\frac{N}{400} \right] - 388. \end{aligned}$$

Napríklad od roku 1601 do roku 1979 bolo celkove 91 priestupných rokov.

Ak 1. marec 1600 pripadol na deň a , tak 1. marec roku N pripadne na deň

$$a^{(N)} \equiv a + (N - 1600) + \left(\left[\frac{N}{4} \right] - \left[\frac{N}{100} \right] + \left[\frac{N}{400} \right] - 388 \right) \pmod{7} \quad (1)$$

Lenže roku 1979 pripadol 1. marec na štvrtok, t. j. $a^{(1979)} = 4$. Dosadíme túto známú skutočnosť do (1). Dostaneme

$$4 \equiv a + 379 + 91 = a + 470 \equiv a + 1 \pmod{7}.$$

Kongruencia $4 \equiv a + 1 \pmod{7}$ má jediné riešenie, ktoré je očividne $a = 3$, t. j. 1. marec roku 1600 pripadol na stredu.

Ak toto dosadíme do (1), dostaneme vzorec

$$a^{(N)} \equiv 3 + N + \left[\frac{N}{4} \right] - \left[\frac{N}{100} \right] + \left[\frac{N}{400} \right] \pmod{7}, \quad (2)$$

ktorý nám udáva, na ktorý deň v týždni pripadne 1. marec ľubovoľného roku po roku 1600.

Keď máme určený 1. marec roku N , tak v roku N je 1. apríl o 31 dní neskôršie, t. j. v roku N je deň, na ktorý pripadne 1. apríl, kongruentný s

$$6 + N + \left[\frac{N}{4} \right] - \left[\frac{N}{100} \right] + \left[\frac{N}{400} \right] \pmod{7}$$

Podobne

$$1. \text{ máj roku } N \equiv 1 + N + \left[\frac{N}{4} \right] - \left[\frac{N}{100} \right] + \left[\frac{N}{400} \right] \pmod{7},$$

$$1. \text{ jún roku } N \equiv 4 + N + \left[\frac{N}{4} \right] - \left[\frac{N}{100} \right] + \left[\frac{N}{400} \right] \pmod{7},$$

$$1. \text{ júl roku } N \equiv 6 + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{400} \right\rfloor \pmod{7},$$

$$1. \text{ august roku } N \equiv 2 + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{400} \right\rfloor \pmod{7},$$

$$1. \text{ september roku } N \equiv 5 + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{400} \right\rfloor \pmod{7},$$

$$1. \text{ október roku } N \equiv 0 + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{400} \right\rfloor \pmod{7},$$

$$1. \text{ november roku } N \equiv 3 + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{400} \right\rfloor \pmod{7},$$

$$1. \text{ december roku } N \equiv 5 + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{400} \right\rfloor \pmod{7},$$

$$1. \text{ január roku } N + 1 \equiv 1 + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{400} \right\rfloor \pmod{7},$$

$$1. \text{ február roku } N + 1 \equiv 4 + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{400} \right\rfloor \pmod{7}$$

Bolo by prirodzene veľmi komplikované zapamätať si všetky tieto údaje naspamäť. Existuje však východisko. Necháme čitateľovi na jeho úslovnosť, aby sa presvedčil, že keď m prebieha čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 a 12 (t. j. mesiac marec, apríl, máj, ..., december, január a február), tak výraz

$$1 + [2,6m - 0,2] + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{400} \right\rfloor$$

udáva — až na kongruenciu modulo 7 — deň v týždni, na ktorý prípadne prvý deň mesiaca marec až december roku N (t. j. $m = 1, 2, \dots, 10$) alebo mesiaca január a február roku $N + 1$ ($m = 11, 12$). Teraz prirodzene pre výpočet k -teho dňa príslušného mesiaca stačí nahradiť číslo 1 v poslednom výraze číslom k , t. j. k -ty deň v m -tom mesiaci padne na deň

$$k + [2,6m - 0,2] + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{400} \right\rfloor \pmod{7}. \quad (3)$$

Toto je hľadané riešenie, nezabudnite však na dohovor, že v (3) je potrebné dosadiť za mesiace také poradové čísla, ako keby sa rok začal marcom a končil februárom nasledujúceho kalendárneho roku.

Napríklad, na ktorý deň pripadol 30. 6. 1980? V tomto prípade $k = 30$, $m = 4$, $N = 1980$ sú hodnoty, ktoré je potrebné dosadiť do (3). Potom

$$30 + [2,6 \cdot 4 - 0,2] + 1980 + \left[\frac{1980}{4} \right] - \left[\frac{1980}{100} \right] + \left[\frac{1980}{400} \right] = \\ = 30 + 10 + 1980 + 495 - 19 + 4 = 2500 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Teda 30. 6. 1980 bol v pondelok.

Vzťah (3) môžeme trochu zjednodušiť, ak nás budú zaujímať len dátumy v jednom storočí. K tomu napíšeme rok N v tvare $N = 100C + D$. Potom (3) dostane po úprave tvar

$$k + [2,6m - 0,2] + D + \left[\frac{D}{4} \right] + \left[\frac{C}{4} \right] - 2C \pmod{7} \quad (4)$$

Tak pre súčasné storočie, t. j. pre roky 1901 až 1999, dostaneme tento jednoduchší výraz

$$1 + k + [2,6m - 0,2] + D + \left[\frac{D}{4} \right] \pmod{7}, \quad (5)$$

kde za D dosadíme posledné dvojčísle roku N (v zmysle prechádzajúceho dohovoru). Takto 29. 2. 1976 pripadol na nedeľu, lebo

$$1 + 29 + [2,6 \cdot 12 - 0,2] + 75 + \left[\frac{75}{4} \right] \equiv 0 \pmod{7}$$

Záverom nájdime, v ktorých rokoch nášho storočia pripadol alebo pripadne Silvester na nedeľu. V tomto prípade $k = 31$, $m = 10$ a vzťah (5) dáva nasledovný vzťah pre posledné dvojčísle D takéhoto roku:

$$0 \equiv 1 + D + \left[\frac{D}{4} \right] \pmod{7}$$

Aby sme sa zbavili znamienka funkcie celá časť, vyjadríme D v tvare

$$D = 4D' + d, \text{ kde } d = 0, 1, 2, 3.$$

Potom riešením poslednej kongruencie je zjednotenie všetkých riešení nasledovných štyroch kongruencií

$$\begin{aligned} 5D' &\equiv -1 \pmod{7}, \text{ ak } d = 0, \\ 5D' &\equiv -2 \pmod{7}, \text{ ak } d = 1, \\ 5D' &\equiv -3 \pmod{7}, \text{ ak } d = 2, \\ 5D' &\equiv -4 \pmod{7}, \text{ ak } d = 3. \end{aligned} \quad (6)$$

Nebudeme sa na tomto mieste púšťať do teórie súvisiacej s otázkou

riešiteľnosti lineárnych kongruencií uvedeného typu. Poznamenáme len, že kongruencia

$$ax \equiv b \pmod{c}$$

je riešiteľná vtedy a len vtedy, keď najväčší spoločný deliteľ (a, c) delí b . Ak je to tak, pak táto kongruencia má v intervale $\langle 0, c - 1 \rangle$ práve jedno riešenie, povedzme x_0 , a každé riešenie uvedenej kongruencie je $\equiv x_0 \pmod{c}$. Pretože uvedená podmienka riešiteľnosti je u nás splnená, tak postupným dosadzovaním ľahko nájdeme základné riešenie x_0 každej z uvedených štyroch kongruencií; sú to čísla 4, 1, 5, 2. Preto čísla

$$1 + 7k, 2 + 7k, 4 + 7k, 5 + 7k, k \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

vyčerpávajú všetky celé čísla, ktoré sú riešeniami aspoň jednej kongruencie v sústave (6). Ku konečnému určeniu D uvažme, že D je z intervalu $\langle 1, 99 \rangle$, a preto D' prebieha interval $\left\langle \frac{1-d}{4}, \frac{99-d}{4} \right\rangle \subseteq \langle 0, 25 \rangle$.

Takto nájdeme, že v 20. storočí pripadol posledný deň v roku na nedeľu práve štrnásťkrát, a to v rokoch

1916, 1944, 1972
1905, 1933, 1961, 1989,
1922, 1950, 1978,
1911, 1939, 1967, 1995.

FYZIKA

Fyzik v průmyslové praxi - I.

Prof. RNDr. LADISLAV ZACHOVAL, člen korespondent, ČSAV, Praha

Potřeba fyziků, kteří se zabývají aplikacemi fyziky, v celém světě roste. Znalci jsou přesvědčeni, že se aplikované fyzice otvírají velmi slibné možnosti dalšího rozvoje. A nejde jen o aplikace moderní fyziky, tj. relativistické a kvantové. Tzv. klasická fyzika je pro aplikace stále velmi užitečná, mnohdy užitečnější než fyzika moderní. Aplikovaná fyzika je — a vždy byla — velmi zajímavý obor, z něhož často vyšly závažné podněty pro rozvoj čisté fyziky.

Málokdy se bohužel mluví o tom, jak to vypadá s aplikovanou fyzikou v denním, všedním životě. Co dělá fyzik, který má aplikovat fyziku

v některé továrně? Jaké má pracovní možnosti, jaké druhy problémů řeší, jak vypadá jeho spolupráce s techniky a s dělníky?

Pracoval jsem před lety v průmyslu a rád bych napsal pár slov o zkušenostech svých kolegů i svých vlastních. Od té doby se jistě v průmyslu mnoho změnilo, je jiná organizace práce, užívá se i nových metod ve fyzice a technice, fyzik má asi i jiné pracovní možnosti. Ale podstata věci zůstává nezměněna a právě o tomto jádru zkušeností vás chci informovat. Udělám to na velmi jednoduchých případech, aby vyniklo to, co je podstatné. Doufám, že vám další fyzikové napíší o svých zkušenostech, které získali prací na složitějších problémech.

Tak především fyzik musí být připraven na to, že v praxi nebude ve většině případů dostávat úkoly formulované jako fyzikální problémy. Někdy ovšem také dostane úkol, který už bude vysloven jako fyzikální problém, ale to budou výjimky — podle mých zkušeností vzácné výjimky.

Většinou to dopadá tak, že k fyzikovi přijde technik a řekne: „Podívejte se na to. Nejde nám to. Nevěděl byste, proč? V čem to jen může být?“ Nebo řekne: „Tahle věc zlobí, a my nevíme, co se stalo. Nemohl byste s tím něco udělat, aby to dělalo dobrotu?“ A na fyzikovi je, aby v tom, co nejde nebo co zlobí, tu fyziku našel. Aby si promyslel fyzikální podstatu závady, aby odstranění závady formuloval jako fyzikální problém a aby našel jeho řešení. A aby to udělal s přesností, kterou technici potřebují, a tak rychle, jak to provoz vyžaduje.

Uvedu vám dva příklady. Jsou velmi jednoduché, ale i velmi poučné — aspoň podle mého názoru.

Mladý fyzik, pozdější profesor ČVUT *Ing. dr. J. B. Slavík*, byl postaven před úkol: „Tyhle mašiny strašně řinčí a my nemůžeme přijít na to, jak to odstranit. Udělejte s tím něco. Máte na to měsíc času.“ Ten mladý fyzik si objednal pytlík jemného písku, láhev benzinu a čistý hadr. Povrch stroje pečlivě vyčistil a otřel do sucha. Pak stroj posypal tím pískem. Když uvedl stroj do chodu, dostal na povrchu stroje tzv. Chladniho obrazce. To znamená, že se vytvořily obrazce tím, že písek zůstal v klidu na místech, která se nechvěla, a že se písek setřásl z míst, kde se stroj chvěl. Když fyzik přiložil prst na místo, kde se stroj chvěl, chvění hned přestalo — písek byl klidný. A tak už druhý den mohl říci technikovi, která místa stroje musí být zachycena, aby řinčení přestalo. To se skutečně stalo, řinčení stroje bylo odstraněno. A tak velice jednoduchá metoda umožnila rychle a lacino odstranit závadu, která stroj znehodnocovala pro užití v praxi.

Ale stejná metoda se osvědčila i jinak a zcela nepředvídaně. Bylo to asi osm let před dobou, kdy dr. Slavík užil Chladniho obrazců ve strojní výrobě. Tehdy se užívaly piezoelektrické destičky vyřiznuté z krystalu křemene, a to ke stabilizaci frekvence vysílaček elektromagnetických

vln — ať už v rozhlasových či jiných vysílačkách. Některé destičky stabilizovaly frekvenci spolehlivě, jiné nefungovaly bezpečně, buď nestabilizovaly vůbec, nebo se při jejich použití frekvence skokem měnila, nebo se očekávaná frekvence vůbec neobjevila, ale místo ní se objevovaly odlišné frekvence apod. Piezoelektrické křemenné destičky byly přitom velice drahé, proto také z těchto důvodů bylo třeba poznat, co je příčinou jejich chování.

Případu se ujal mladý fyzik *dr. V. Petržílka*, pozdější profesor Karlovy univerzity a člen korespondent ČSAV. Stabilizační účinek křemenných destiček souvisí s tím, že se křemenná piezoelektrická destička vloží mezi polepy kondenzátoru a v oscilačním obvodu se mechanicky rozkmitá v té frekvenci, v níž elektromagneticky kmitá oscilační obvod; ovšem pokud je frekvence jejích vlastních kmitů stejná jako frekvence elektromagnetických kmitů. A tak *dr. Petržílka* začal studovat mechanické kmity piezoelektrických křemenných destiček. Měl k tomu zpočátku velice malý generátor elektromagnetických kmitů, doslova „na koleně spíchnutou hračku“. Mezi polepy kondenzátoru oscilačního obvodu vložil zkoušenou destičku a získával také Chladniho obrazce, ovšem ne pomocí písku, ale plavuně, kterou destičku posypal. Když vzbudil elektromagnetické kmity v obvodu a destička se rozkmitala, ukázaly Chladniho obrazce, jak kmitá.

Tak byla vypracována jednoduchá, avšak zcela bezpečná a přesná metoda, která dovolovala předem určit, jak bude která destička kmitat a stabilizovat vysílanou frekvenci. Praxi bylo znamenitě pomoheno už tím, avšak *dr. Petržílka* se zabýval dál kmity destiček a později i tyčinek. K tomu ovšem už potřeboval složitější aparaturu. Získal velmi cenné výsledky, které umožňovaly vybrousit nebo vyříznout destičku z křemenného krystalu tak, aby frekvenční stabilita byla dokonalá a aby se současně co nejlépe využilo drahocenného materiálu, kterým křemenné krystaly byly a jsou. Jeho výsledky v chvění desek a tyčí mají však zároveň i trvalou vysokou cenu pro rozvoj akustiky jako vědy. Jsou proto citovány ve světové literatuře mezi významnými pracemi důležitými pro rozvoj fyziky.

Petržílkovi žáci pokračovali potom ještě dále ve směru, v němž on začal pracovat. A po více než 30 letech od doby, kdy *dr. Petržílka* začínal, byli tři jeho žáci vyznamenáni za své práce státní cenou Klementa Gottwalda, která jim byla udělena r. 1967 za „Využití vlastností piezoelektrických materiálů umožňující nejpřesnější časová měření“.

(Pokračování)

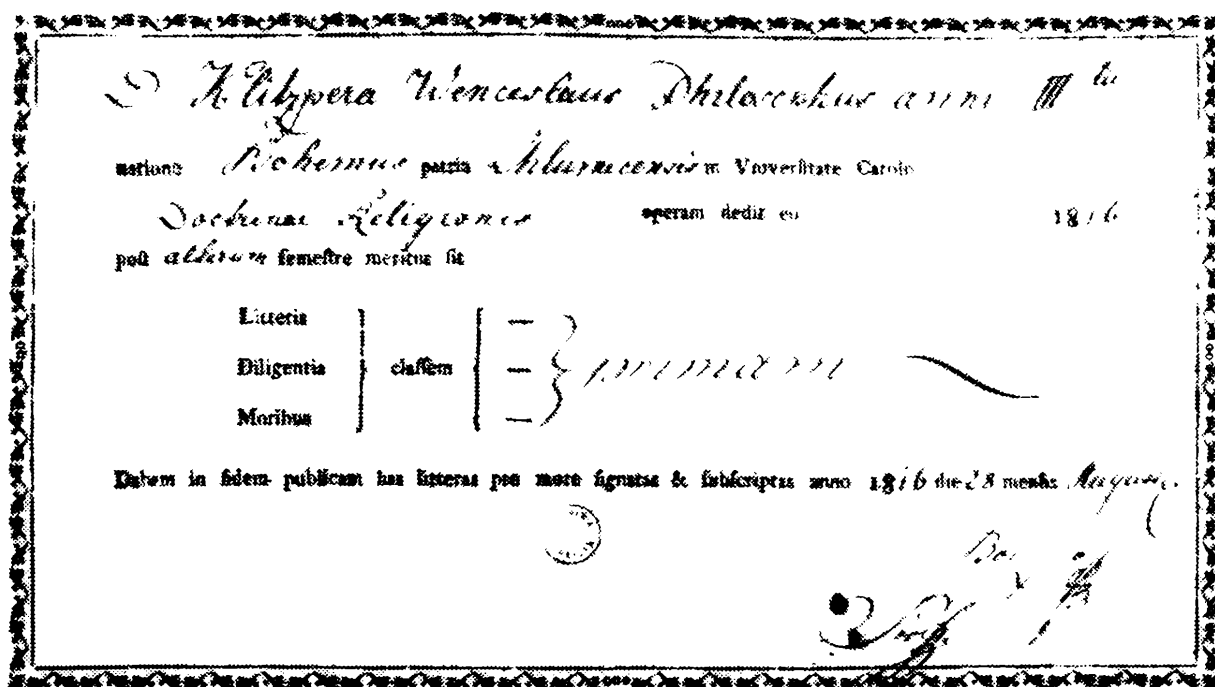


Odvážný myslitel Bernard Bolzano

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, CSc, MFF UK Praha

V letošním roce je zařazeno mezi jubilea UNESCO i dvousté výročí narození Bernarda Bolzana, učenice, který odvážně hlásal myšlenky předbíhající dobu, v níž žil. Připomeňme si některá fakta z jeho života a aspoň v náznaku i jeho ideje.*)

*) Základem většiny podaných informací je článek dr. J. Foly *Život a vědecké snahy Bernarda Bolzana*, který otiskuje časopis *Matematika a fyzika ve škole*, č. 2. Chcete-li poznat blíže dílo B. Bolzana, požádejte vyučujícího matematiky o zapůjčení zmíněného článku.



Vysvědčení o zkoušce, kterou konal u Bernarda Bolzana v roce 1816 student Václav Kliepera.

Bolzanův život je ohraničen dvěma letopočty, které pro naše země znamenaly významné události:

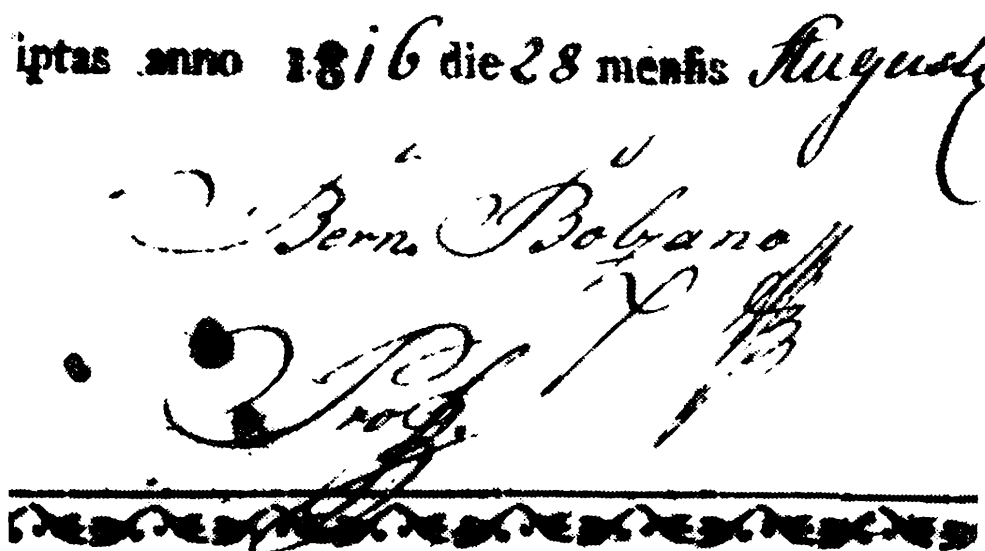
1781 — zrušení nevolnictví, uvolnění cenzury tisku, patent o svobodě náboženského vyznání,

1848 — zrušení roboty, svolání parlamentu, revoluční vystoupení národů.

Mezi těmito dvěma úsvity, které slibovaly lepší časy, však leží dlouhé období reakce, kdy se vládnoucí feudální vrstva snažila posledními silami ubránit své výsady. Tragédií Bolzanova života bylo to, že léta jeho aktivního působení spadala právě do takové společenské situace — nástupu zpátečnictví.

Bernard Bolzano se narodil 5. října 1781 v rodině italského obchodníka, který se usadil v Praze a oženil se s dívkou z německé rodiny. Při studiu na univerzitě, zahajovaném tzv. filozofií, navštěvoval Bernard Bolzano přednášky profesora *Stanislava Vydry* (čtenáři Jiráskových spisů ho znají z F. L. Věka). Napsal také v r. 1804 práci z geometrie, věnovanou problému rovnoběžek, v té době aktuálnímu. Po smrti profesora Vydry na sklonku roku 1804 se B. Bolzano málem stal jeho nástupcem, ale jako student teologie byl v r. 1805 jmenován prozatímním učitelem náboženství na nově zřizované katedře „náboženské vědy“. Jeho úkolem bylo přesvědčovat univerzitní studenty o správnosti náboženské víry a tak je ochraňovat před „nákazou“ z revoluční Francie.

iptas anno 1816 die 28 mensis Augusti
Bern. Bolzano
F. B.



Bolzanův podpis na vysvědčení Václava Klicpery

Bernard Bolzano byl však ovlivněn myšlenkovými směry druhé poloviny 18. století, zejména racionalismem doby osvícenství, který usiloval o rozumové zdůvodnění a systemizaci všeho vědění. Bolzano přenášel racionalistický přístup i do svých náboženských výkladů, nahrazoval věrouku úvahami o etice vztahu člověka k člověku, vládnoucí vrstvy k utlačené, jedné národnosti ke druhé apod. Nedržel se schválené učebnice náboženství, ve svých výkladech ke studentům kritizoval panující společenský systém; to mu získávalo přízeň studentstva (Bolzanovy promluvy se šířily opisováním po celé zemi), ale vyvolávalo nenávist církevní hierarchie.

Jeden z udavačů napsal doslova: „*Na pražské univerzitě přednáší náboženskou vědu jistý kněz jménem Bernardus Bolzano, jenž je pro svůj nový a neobvyklý způsob vyučování náboženství a sofistické pletichaření*) proslulý po celých Čechách... Příkladem jeho rouhačství je to, že odmítá spolehlivé a nevývratné katolické doktriny... Tento muž... má od prvopočátku bezpočet žáků a stoupenců, kteří jsou roztroušeni po celém kraji dál šíří mezi luzou zásady, jimiž byli nakaženi.*“ Bolzano byl zbaven profesury v r. 1819, bránil se polemickými spisy asi pět let, ale tím svou pozici zhoršoval. Před uzavřením v některém klášteře ho zachránila intervence Josefa Dobrovského; od r. 1825 žil Bolzano u svých přátel sice v klidu, ale pod policejním dohledem a v izolaci, jeho spisy vycházely buď v Německu nebo zůstaly nevydány a zapomenuty.

*) Tento hanlivý termín označuje Bolzanovu snahu o rozumové zdůvodňování všeho, co hlásal.

Bolzanův racionalistický přístup se uplatnil v matematice snahou vybudovat její základy; věnoval se zprvu problematice geometrie, pak studiu funkcí (otázkám spojitosti, limity, derivace funkcí) a nakonec základům teorie množin. V mnoha případech vyjádřil ve svých odborných pracích myšlenky, které byly odvážné, předbíhaly dobu o několik desetiletí. Je trpkou ironií osudu, že jeho přístupy nepochopili ani ti, kteří se s nimi mohli seznámit a dále je rozvinout (Bolzano nenašel žádného žáka, který by se věnoval matematice).

Podle vzoru matematiky promýšlel Bolzano dokonalejší způsob výstavby kterékoliv vědy; spis *Vědosloví* je největším dílem vydaným za jeho života (má úctyhodný rozsah téměř 2400 stran). Jde o práci, která razí mnohé zásady doceněné až ve 20. století po vzniku matematické logiky. Spis *Paradoxy nekonečna* byl vydán v r. 1851, tři roky po Bolzanově smrti, a znamenal důležitý krok k vytvoření teorie množin (její tvůrce G. Cantor uvedl Bolzanovu práci jako jeden z pramenů svých idejí).

Odvážný myslitel Bernard Bolzano měl křehké zdraví, trpěl chrlením krve v důsledku tuberkulózy plicních hrotů. Tím obdivuhodnější je jeho statečný postoj ke společenským problémům — hlásal rovnost lidí, odmítal šlechtické výsady, kritizoval příživnictví boháčů na úkor chudých, připouštěl dokonce i právo občanů na ozbrojený odpor. Své utopické představy o uspořádání společnosti vyložil ve spisku *O nejlepším státě* ze 30. let 19. století (vydán byl až v r. 1930). Bolzano zemřel 18. 12. 1848, tedy v době, kdy se někteří jeho spoluobčané skutečně odhodlali k ozbrojené revoltě, aby změnili svět, ve kterém on dotrpěl.

Bernard Bolzano psal německy, ale celý život prožil v Čechách a zastával se práv českého lidu na rozvoj národní kultury a vzdělanosti. Jeho odpor vůči absolutismu vyvolal sympatie především českých vrstev, které se odvolávaly na řadu jeho myšlenek při svém zápasu o sociální i národnostní zrovnoprávnění. V tomto ohledu působil aspoň bezprostředně, zatímco na poli vědy zůstal ve své době nepochopen nebo neznám, doceněn byl až několik desetiletí po své smrti.

Úloha o dvojčíferných číslech

Je-li dáno deset různých dvojčíferných čísel (v desítkové soustavě), pak z nich vždycky můžeme sestavit dvě neprázdné disjunktní množiny **A**, **B** tak, že součet všech čísel z množiny **A** se rovná součtu všech čísel z množiny **B**. Dokažte.

(Řešení najdete v tomto čísle na str. 75.)

J. S.

Akademik Otakar Borůvka

Doc. RNDr. FRANTIŠEK NEUMAN, Dr.Sc., Brno

Dne 10. května 1899 se narodil významný československý matematik akademik Otakar Borůvka.

Jako student se brzy zaměřil na přírodní vědy, zejména na matematiku. Po ukončení vysokoškolských studií se v roce 1921 stal asistentem matematiky na přírodovědecké fakultě v Brně, kde se v r. 1928 habilitoval. Pak studoval na Sorbonně u *profesora E. Cartana* a v Hamburku



u *prof. W. Blaschkeho*. Roku 1934 byl jmenován mimořádným a roku 1946 (s platností od r. 1940) řádným profesorem na univerzitě v Brně. V r. 1953 byl zvolen členem korespondentem a v r. 1965 řádným členem ČSAV. Dosáhl tím nejvyšší vědecké hodnosti — akademika.

Akademik Borůvka podstatně obohatil rozvoj matematického myšlení svými výsledky v analýze, moderní diferenciální geometrii, v algebře a teorii diferenciálních rovnic. Ve vědeckém díle O. Borůvky se zrcadlí historie vývoje československé i světové matematiky v několika oblastech. Světoznámá je jeho pionýrská práce z teorie grafů: „O jistém problému minimálním“ z r. 1926. Borůvka zde algoritmicky rozřešil z praxe vzniklý problém o minimalizaci elektrovodní sítě. Je to základní práce

z oboru dopravních problémů, který se intenzivněji začal rozvíjet o několik desetiletí později a dnes představuje jednu ze stěžejních kapitol teorie grafů. To vytvořil v době, kdy teorie grafů neexistovala. Jeho dílo obsahuje nejen významné objevy, které přes všechno úsilí zůstávaly stále nevyřešeny, ale můžeme v něm nalézt i hluboký smysl pro pečlivé zpracování látky. Ve všech jeho pracích vidíme koncepční přístup k problematice, kterou zpracovává v celé šíři do všech detailů. Využívá své znalosti z jiných oborů k vidění širokých souvislostí mezi různými směry matematického bádání. Borůvka si neklade za úkol řešit dílčí problémy, ale vytváří teorie, rozpracované do takové šíře a hloubky, že jsou často využívány matematiky po dlouhé období. Stejně tak nikdy zcela neopouští jeden matematický obor proto, že přechází na další. Jako v algebře využívá analýzy, tak v teorii diferenciálních rovnic v plné míře uplatňuje své znalosti metod a výsledků algebry a diferenciální geometrie. Ve svých nejvýznačnějších pojednáních z projektivní diferenciální geometrie poprvé studoval analytické korespondence mezi dvěma projektivními rovinami a odvodil jejich vlastnosti. Geometrická škola v Bologni navazuje v mnoha pracích na tyto studie, a tak se Borůvka nesmazatelně zapisuje do historie československé matematiky, která v diferenciální geometrii hraje světově uznávanou roli. V třicátých letech se Borůvka dal do studia algebry a topologie. Na množinovém základě vytvořil pojmový aparát obecné algebry. Vybu- doval teorii grupoidů, zavedl základní pojmy a přidáním axiomů grupy i hlavní věty teorie grup. Teorie grupoidů se tak stala důležitým vývo- jovým stupněm teorie obecných algeber. Při studiu grupoidů Borůvka zároveň objevil množinové jádro mnohých algebraických úvah a polo- žil základy k teorii vědeckých klasifikací. Tím vytvořil moderní alge- braickou školu v Brně, která je v současnosti známým světovým stře- diskem. Největší skupinu Borůvkových prací tvoří práce o diferenciál- ních rovnicích. V tomto oboru vystihl podstatu transformací, rozšířil a prohloubil řadu klasických pojmů, zavedl mnoho původních pojmů a odkryl nové a často překvapující souvislosti. Jeho celkové dílo zahrnu- je kolem jednoho sta vědeckých pojednání a několik knih.

Významné objevy s sebou přirozeně nesou mnohá pozvání k před- náškám na zahraničních univerzitách a řadu vyznamenání a poct (Medaile univerzit v Bruselu a Liège, St. cena K. Gottwalda, Řád práce, doktorát h. c. Univ. Komenského a další). Během svého téměř padesátiletého působení na univerzitě v Brně zastával mnoho významných funkcí. Po dobu více než 10 let poskytoval akad. O. Borůvka pomoc bratislavské univerzitě mimo rámec svých povinností v Brně. Má velkou zásluhu o založení Matematického ústavu ČSAV v Brně, v kterém stále aktivně vědecky pracuje, a nového matematického časopisu Archivum Mathe- maticum, který si v krátkém čase získal v zahraničí i doma velmi dobré jméno. Během své vědecké i učitelské činnosti vychoval akademik Bo-

růvka řadu vědecky aktivních českých i slovenských matematiků. Dovedl jim dávat podněty ze širokého okruhu problémů z mnoha oborů.

Při pojmu „významný matematik“ si nejčastěji představíme člověka uzavřeného do sebe. Borůvka by však tuto představu zcela vyvrátil. Mezi matematiky — nejen a mezi nimi — má plno přátel. Stal se jejich rádcem nejen v otázkách matematických, ale i v osobním životě. Představuje milého, skromného člověka, pomocníka v dobách úspěchů i neúspěchů svých přátel a všech, kdo se na něho obrátí. Dnes již dvaosmdesátiletý akademik Otakar Borůvka je vynikající osobností nejen v československé matematické historii, mající prvořadou zásluhu na tom, že naše matematika má pevné místo ve světě, ale i v současnosti svým životním optimismem a nadšením k práci.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Z časopisu Kvant

Příklady, které následují, jsou vybrány z různých čísel sovětského časopisu Kvant. Nejsou příliš náročné, a proto se o jejich řešení mohou pokusit i mladší čtenáři Rozhledů.

1. Dokažte, že v posloupnosti

$$31, 331, 3331, 33331, \dots$$

- a) existuje nekonečně mnoho čísel dělitelných číslem 31,
- b) neexistuje žádné číslo, které by bylo dělitelné číslem 13.

2. Ukažte, že v aritmetické posloupnosti

$$1, 14, 27, 40, \dots$$

existuje nekonečně mnoho členů napsaných samými dvojkami.

3. V mnohočlenu

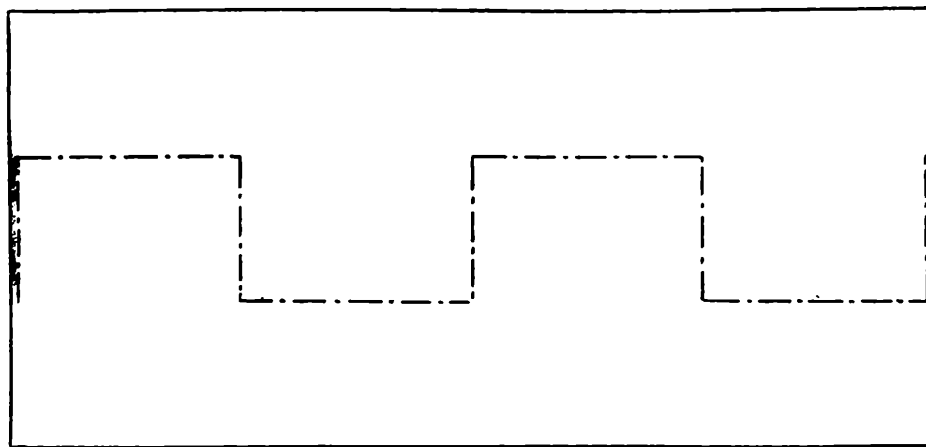
$$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$$

určete koeficienty a , b tak, aby

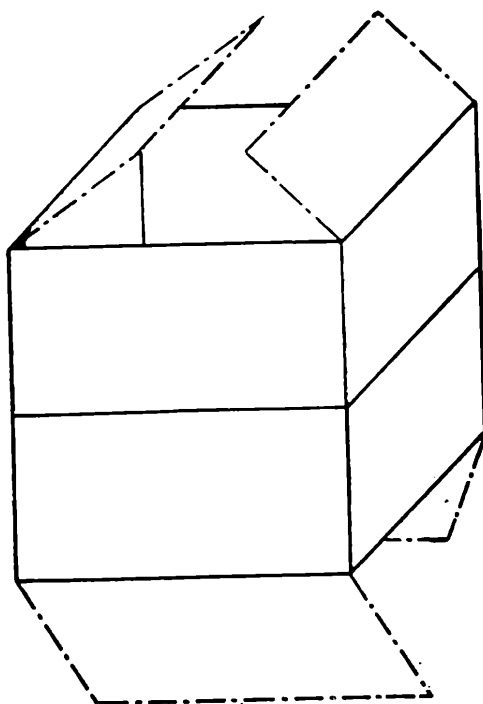
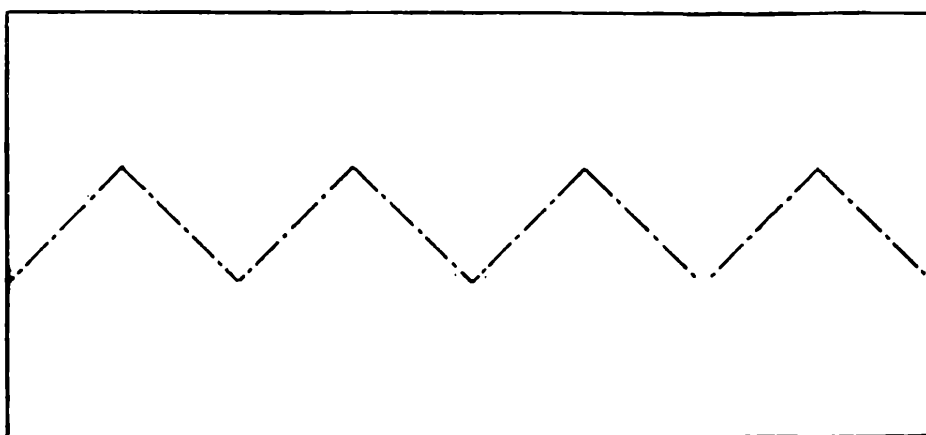
$$P(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^2$$

4. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC . Osa pravého úhlu ACB je i osou úhlu sevřeného výškou a těžnicí, které procházejí vrcholem C . — Dokažte.

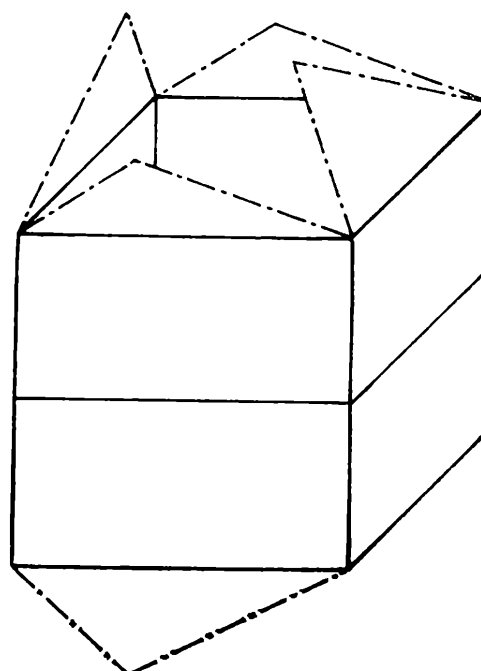
Оbr. 1



Оbr. 2



Оbr. 3



Оbr. 4

5. Do trojúhelníku je vepsán čtverec. (Jedna strana čtverce leží ve straně trojúhelníka a další dva vrcholy čtverce leží po jednom na druhých dvou stranách trojúhelníka.) — Ukažte, že obsah čtverce je nejvýše roven polovině obsahu trojúhelníka.

6. Čísla n, k jsou přirozená a platí o nich

- a) $(n + 1)$ je dělitelné číslem k ,
- b) $n = 2k + 5$,
- c) $(n + k)$ je dělitelné sedmi,
- d) $(n + 2k)$ je prvočíslo.

Existují taková čísla k, n ? (Tento příklad je proti originálnímu znění pozměněn.)

Nakonec jednu zajímavost.

7. Na obr. 1 a 2 je čerchovanou čarou vyznačeno, jak lze obdélník rozdělit na 2 shodné části tak, že se z nich potom dá slepit krabice (obr. 3, 4). Jestli se někdo z čtenářů pokusí slepit krabici podle obr. 1, zjistí, že chlopně se částečně překrývají. Dokážete z obr. 1 určit, o kolik?

Stanislav Horák

Řešení úlohy ze str. 70

Použijeme Dirichletova přihrádkového principu. Nechť M je nějaká množina složená z deseti dvojčíferných čísel. Množina M má $2^{10} - 1$ neprázdných podmnožin. Je-li N nějaká neprázdna část množiny M , pak sečtením všech prvků z N dostaneme maximálně číslo

$$99 + 98 + 97 + 96 + \dots + 90 = 945.$$

Protože

$$2^{10} - 1 = 1023 > 945,$$

musí existovat dvě neprázdne podmnožiny A, B množiny M se stejným součtem prvků. Jsou-li A, B disjunktní, jsme s důkazem hotovi. Nejsou-li disjunktní, pak

$$A - (A \cap B), \quad B - (A \cap B)$$

vyhovují podmínkám.

Co se stane, nahradíme-li v textu úlohy deset dvojčíferných čísel devíti čísly? Zamyslete se nad tím a máte-li zájem, napište nám, co jste zjistili. Redakce se těší na vaše dopisy.

J. S.

Efektní experimenty: Desetihalíř a talíř

PETR HNILIČKA, Praha

Na stůl postavte talíř, jehož okraj je asi 3cm nad deskou stolu. Ve vzdálenosti asi 10 cm od talíře položte desetihaléřovou minci. Jak dostanete minci do talíře, aniž byste se jí dotkli? Když na minci šikovně fouknete, skočí do talíře sama. Pokus se daří dobře, když fouknete krátce a silně, přibližně ve směru povrchu stolu. Pokus lze uspořádat jako soutěž o skok do výšky nebo do dálky, příp. použít těžších mincí.

Vysvětlení efektního experimentu: Desetihalíř a talíř

Vyfouknutý vzduch proudí nad mincí značnou rychlostí a tím nad ní vzniká podtlak proti atmosférickému tlaku vzduchu. Do míst podtlaku je mince nasávána. Je to princip létání těles těžších než vzduch.

NAŠE SOUTĚŽ

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Ve školním roce 1980/81 se účastnilo soutěže Rozhledů matematicko-fyzikálních celkem 37 jednotlivců a 19 kolektivů; všech řešitelů bylo 83. Proti loňsku je to značný vzestup počtu řešitelů. Úlohy z matematiky řešilo celkem 52 studujících, úlohy fyzikální celkem 31 studentů. Zajímavé je, že jenom jeden účastník soutěže řešil úlohy z matematiky i z fyziky, nedošlo žádné řešení úloh z konstrukční geometrie. Pozoruhodné je, že z 52 řešitelů matematických úloh bylo 21 Čechů, 11 Slováků a 20 Maďarů; přitom 7 řešitelů maďarské národnosti bylo z MLR. Úlohy z fyziky řešilo 25 Čechů, 6 Slováků a 1 Polák. Nejúspěšnějšími řešiteli byli tito studenti:

Matematika :

1. Martin Zemek, 3. C G M. Koperníka v Bílovci;
2. Petr Eisler, 3. C G v Havlíčkově Brodě;
3. Petr Tichavský, 3. C G M. Koperníka v Bílovci;

4. Libor Forst, 4. A G II v Českých Budějovicích;
5. Kolektiv 4. B G J. Hronca v Bratislavě (Dominik Filipp a Milan Hanoják).

Fyzika :

1. Kolektiv 4. B G v Příboře (Pavel Sobotík a Milan Šimek);
2. Miloš Vohradník, 4. A G v Holicích;
3. Janusz Stopa, 4. C G s polským jazykem vyučovacím v Českém Těšíně.

Nakonec připojujeme abecední seznamy všech řešitelů, nejprve úloh matematických, potom úloh fyzikálních. V obou seznamech je jediné *Martin Orel* z G v Jihlavě. Za jménem uvádíme ústav, na němž řešitel studoval; v každém seznamu uvádíme nejprve jednotlivce a potom řešitelské kolektivy.

Řešitelé úloh z matematiky

Ján Belan, G Topolčany, Miroslav Brzezina, G Bílovec, Ferenc Bukta, G Esztergom (MLR), Eva Čverčková, G Michalovce, Yveta Danešová, SPŠE Piešťany, Petr Eisler, G Havlíčkův Brod, József Faitli, G Esztergom (MLR), Csaba Fenyvesi, G Esztergom (MLR), Libor Forst, G II České Budějovice, Jiří Fridrich, G Ostrava-Poruba, János Gaczai, G Czolnok (MLR), Jan Hanousek, G Hlinsko, Pavel Hruška, G Bílovec, Gábor Ihász, G Tatabánya (MLR), Ivan Kalousek, G Bílovec, Vojtech Liszkay, SPŠS maď. Komárno, Martin Orel, G Jihlava, Jan Paseka, G Brno, Martin Sedláček, G Havířov, Petr Schiller, G Bílovec, Jiří Sobotka, SPŠS Brno, Ignác Tereščák, G Michalovce, Petr Tichavský, G Bílovec, Alexandr Tomášek, SPŠS Komárno, Martin Zemek, G Bílovec, Ladislav Zsilinsky, G Nové Zámky.

Naděžda Adámková a Eva Potyková, G Karviná, Vítězslav Doubrava, Jiří Erhart a Petr Střelec, G Bílovec, Dominik Filipp a Milan Hanoják, G J. Hronca Bratislava, Eva Gyenes, Magda Ďurenka a Albert Patkó, SPŠS maď. Komárno, Hana Lichardová, Róbert Osvald a Peter Borovanský, G J. Hronca Bratislava, Ervin Parádi a Róbert Weisz, G Esztergom (MLR), Zoltán Pinke, František Komjátny a Ján Pavelka, SPŠS maď. Komárno, Imrich Plichta, Zoltán Fekete a Tibor Sóos, SPŠS maď. Komárno, Péter Radványi, János Vetter a István Zsigmond, SPŠS maď. Komárno, Vít Šaněk a Jaroslav Frýdek, G Strážnice.

Řešitelé úloh z fyziky :

Jiří Erhart, G Bílovec, Radek Hanza, G Plasy, Vladimír Horský, G Bílovec, Vladimír Mužík, G Nitra, Martin Orel, G Jihlava, Ladislav

Palkoci, G Michalovce, Pavel Polach, G Plasy, Juraj Riška, G Skalice, Janusz Stopa, G s polským vyučovacím jazykem Český Těšín, Miloš Vohradník, G Holice, Ladislav Záhorský, G Levice, Martina Zachová, G Jihlava.

Yveta Bodnárova a Jana Spielmannová, G Poprad, Martin Brejník a Bohdan Kaprál, G Plasy, Bohumír Nový a Ivo Kornatovský, G Plasy, Jaromíra Rýdlová, Věra Machová a Helena Novotná, G Plasy, Pavel Sobotík a Milan Šimek, G Příbor, M. Šubertová a L. Evetová, G Plasy, Karel Tyrpekl, Jiří Kroupa a Petr Salfický, G Plasy, Vladimír Vašíček a Jiří Tišer, G Plasy, Věra Vladařová a Jana Čechová, G Plasy.

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních děkuje všem řešitelům za projevený zájem o řešení úloh, vítězům blahopřeje a nejúspěšnějším z nich zašle z prostředků Státního pedagogického nakladatelství a ministerstva školství ČSR věcné výhry.

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

1. Jsou dány rovnice

$$x^3 + (p + 1)x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$2x^3 + px^2 - x - 2 = 0,$$

v nichž x je neznámá a p je reálné číslo. Nalezněte to číslo (parametr) p , pro které mají obě dané rovnice též racionální kořen.

(Došlo 30 řešení)

Jan Fráňa

Řešení Vojtecha Liszkaye, 4. D SPŠS maďarské odd. Komárno :

Odečtením obou rovnic dostaneme rovnici

$$x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0 ; \tag{1}$$

společný kořen obou daných rovnic je také kořenem rovnice (1). Levá strana rovnice (1) se dá napsat v tomto tvaru:

$$\begin{aligned} (x^3 + x^2 - x) - (2x^2 + 2x - 2) &= x(x^2 + x - 1) - 2(x^2 + x - 1) = \\ &= (x - 2)(x^2 + x - 1) \end{aligned}$$

Rovnice

$$(x - 2)(x^2 + x - 1) = 0$$

má jediný racionální kořen $x_1 = 2$; dosazením do první nebo druhé dané rovnice zjistíme, že $p = -3$.

2. Nájďte 20 za sebou idících zložených prirodzených čísel menších než 10 000 000.

(Došlo 29 řešení)

Martin Gavalec

Riešenie autora :

Velká väčšina riešiteľov správne uviedla, že ak označíme

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 9\,699\,690,$$

potom čísla

$$a + 2, a + 3, \dots, a + 21$$

sú riešením úlohy. Na tomto mieste prirodzeného číselného radu sa však nachádza ďaleko väčší úsek zložených čísel.

Jiří Fridrich z Ostravy-Poruby pomocou vreckového kalkulátoru zistil, že číslo $a + 1$ je zložené (má deliteľa 347). Podobne možno určiť, že $a - 1$ má deliteľa 53, a teda všetka čísla

$$a - 22, a - 21, \dots, a + 22$$

sú zložené.

Petr Eisler z Havlíčkovho Brodu našiel riešenie pozostávajúce z menších čísel takto: Označme $n = 27\,720$, čo je najmenší spoločný násobok čísel 1, 2, 3, ..., 11. Lahko sa zistí, že čísla $n + 1$, $n - 1$ sú zložené (majú deliteľa 19, resp. 53). Pre čísla

$$n \pm k, k = 2, 3, 4, \dots, 11$$

máme rozklad $k \left(\frac{n}{k} \pm 1 \right)$, teda čísla $n - 11, n - 10, \dots, n + 11$ tvoria úsek 23 zložených čísel.

Pomocou tabuľky prvočísel možno nájsť ešte menšie riešenie úlohy. Najmenšie riešenie je 1130, ..., 1150, kde máme úsek 21 zložených čísel. Úsek pozostávajúci presne z 20 zložených čísel neexistuje (prečo?).

3. Pravoúhlý tečnový lichoběžník $ABCD$ má veľkosť základov a, c ($a > c$) a polomer vepsanej kružnice r ; dokažte, že platí:

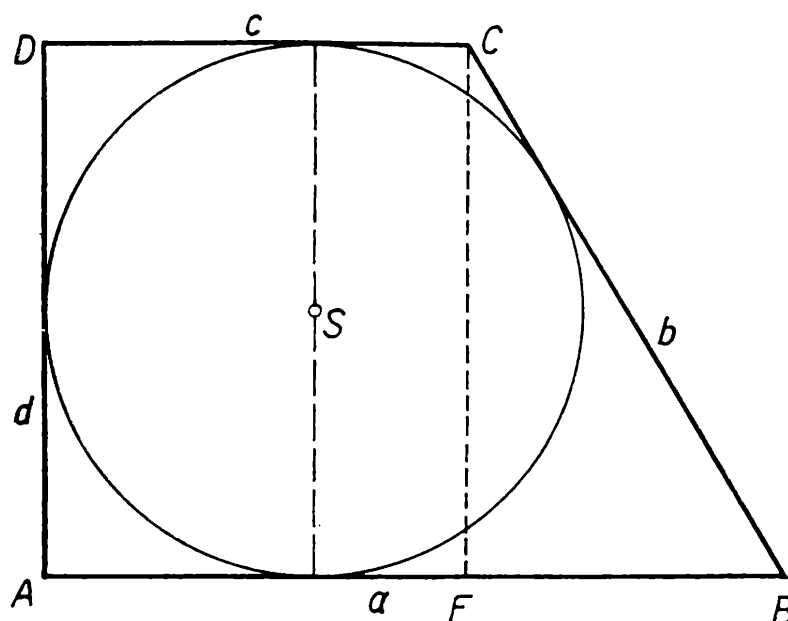
$$c \sqrt{\frac{c}{a}} < 2r < \sqrt{ac}$$

(Došlo 28 řešení)

Stanislav Horák

Řešil Martin Zemek, III. C G Mikuláše Koperníka Bílovec

V lichoběžníku si ještě označme $|BC| = b$, $|AD| = d = 2r$. Bez újmy na obecnosti můžeme psát $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA = 90^\circ$. (Obr. 1.)



Obr. 1

Ihned je patrné, že $r < c < 2r$. Z podmínky $a > c$ plyne (jde vesměs o kladná čísla)

$$\frac{c}{a} < 1, \text{ tj. } \sqrt{\frac{c}{a}} < 1,$$

a tudíž

$$c \sqrt{\frac{c}{a}} < c < 2r.$$

Tím je proveden důkaz nerovnosti nalevo.

Lichoběžník je tečnový, a proto o délkách jeho stran platí

$$a + c = b + d = b + 2r,$$

z čehož

$$b = a + c - 2r. \quad (1)$$

Patu kolmice spuštěné z vrcholu C na základnu AB označme E . Na pravoúhlý trojúhelník použijeme Pythagorovu větu ($BE = a - c$, $CE = 2r$)

$$b^2 = (a - c)^2 + 4r^2. \quad (2)$$

Za b dosadíme z (1) a po krátké úpravě dojdeme k rovnici

$$r = \frac{ac}{a + c}. \quad (3)$$

Mezi aritmetickým a geometrickým průměrem čísel a, c platí

$$\sqrt{ac} < \frac{a + c}{2}. \quad (4)$$

Vynásobením vztahů (3) a (4) dostaneme

$$r\sqrt{ac} < \frac{1}{2}ac,$$

což je ekvivalentní se vztahem $2r < \sqrt{ac}$

4. Nechť x, y, z jsou vesměs reálná čísla; dokažte, že potom platí:

a) je-li $x^2 + xy + y^2 = 0$, je $x = y = 0$;

b) je-li $x^2 - xy + y^2 = 0$, je $x = y = 0$;

c) je-li $x^3 + y^3 = 0$, je $x + y = 0$;

d) je-li $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, je buď $x + y + z = 0$ nebo $x = y = z$.

(Došlo 34 řešení)

Emil Kraemer

Řešení Bukty Ference, G Esztergom-Kertváros, MLR:

a) Daná rovnost platí právě tehdy, jestliže je

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2xy + 2y^2 &= 0 \\ (x + y)^2 + x^2 + y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Protože pro každé reálné číslo a je $a^2 \geq 0$, platí poslední rovnost právě tehdy, je-li $x + y = 0$, $x = 0$, $y = 0$, tj. je-li $x = y = 0$.

b) Řešení zcela obdobné.

c) Víme, že je

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Proto daná rovnost nastane právě tehdy, je-li buď $x + y = 0$ nebo druhý činitel rovný nule. Avšak podle b) je druhý činitel rovný nule právě tehdy, je-li $x = y = 0$, čili opět $x + y = 0$.

d) Snadno se přesvědčíme, že je

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = \\ &= (x + y + z) \frac{1}{2} [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \end{aligned}$$

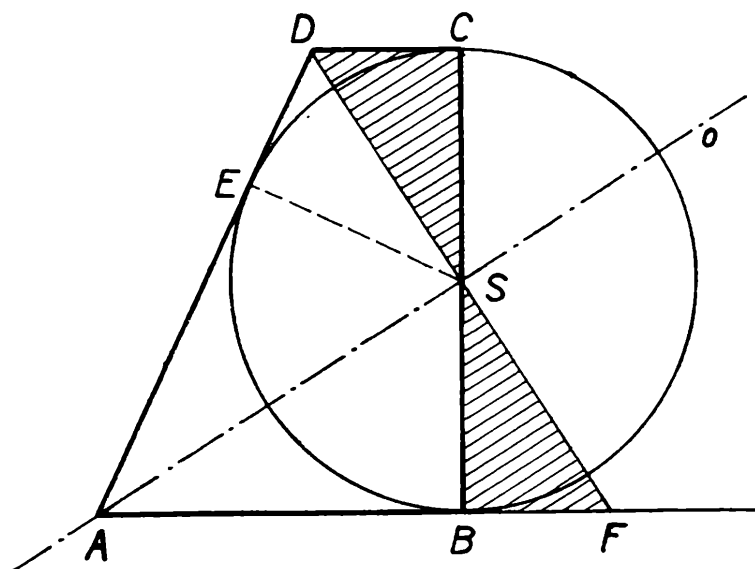
Z toho plyne, že daná rovnost platí právě tehdy, je-li $x + y + z = 0$, nebo je-li výraz v hranaté závorce rovný nule; tato druhá možnost nastane právě tehdy, je-li $x - y = 0$, $y - z = 0$, $z - x = 0$, čili je-li $x = y = z$.

5. Je dán lichoběžník $ABCD$, jehož rameno BC je kolmé k základnám AB, CD ; přitom je $|AB| + |CD| = |AD|$. Dokažte, že přímka AD je tečnou kružnice sestrojené nad průměrem BC .

(Došlo 19 řešení)

Emil Kraemer

Obr. 2



Upravené řešení Petra Eislera, 3. C G Havlíčkův Brod :

Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že je $AB > CD$. Podle dané podmínky existuje uvnitř strany AD bod E takový, že je

$$AE = AB, \quad ED = CD ;$$

středem kružnice s průměrem BC budiž bod S (obr. 2). Potom středová souměrnost se středem S , převádějící bod C do bodu B , převádí přímku CD do přímky $AB \parallel CD$ a bod D do bodu F , který leží na prodloužení úsečky AB za bod B . Úsečka BF je shodná s úsečkou CD , takže je

$$AF = AB + BF = AB + CD = AD ;$$

trojúhelník DFA je tedy rovnoramenný. Protože bod S je středem jeho základny DF , je přímka $o = AS$ jeho osou souměrnosti. V této osové souměrnosti je obrazem přímky AB přímka AD a obrazem bodu B je bod E ; proto je $SE = SB$. Protože je $SB \perp AB$, je také $SE \perp AD$; přímka AD je tedy tečnou kružnice opsané kolem bodu S poloměrem $r = |SB|$.

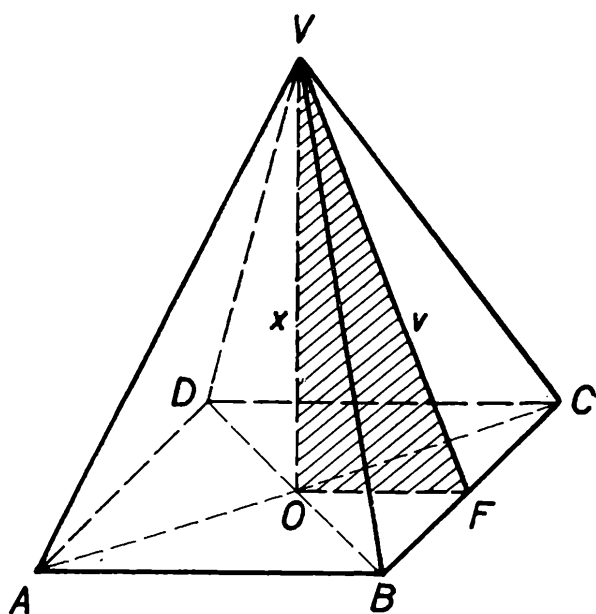
6. Je dána kulová plocha o poloměru r . Který pravidelný čtyřboký jehlan vepsaný do této plochy (všechny jeho vrcholy jsou na kulové ploše) má největší plášť ?

(Došlo 17 řešení)

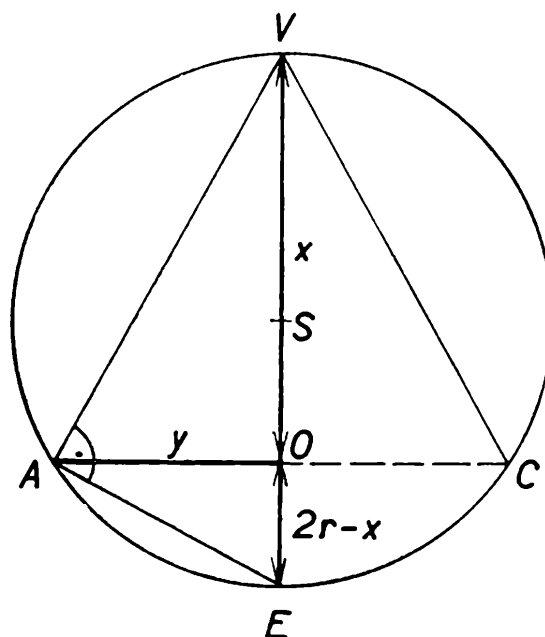
Emil Kraemer

Upravené řešení Libora Forsta, 4. A G II, České Budějovice :

Pravidelný čtyřboký jehlan vepsaný do dané kulové plochy má čtvercovou podstavu $ABCD$ a hlavní vrchol V (obr. 3); jeho plášť se skládá ze čtyř shodných rovnoramenných trojúhelníků. Tento plášť bude tedy největší právě tehdy, bude-li největší obsah trojúhelníku VBC .



Obr. 3



Obr. 4

Je-li v hlavní výška tohoto trojúhelníku, v němž je $|BC| = a$, je jeho obsah

$$P = \frac{1}{2}av. \quad (1)$$

Jehlan $VABCD$ bude určen, bude-li známa jeho výška x ; poloměr kulové plochy budiž r . Při hledání maximálního obsahu P musíme vyjádřit a , v pomocí r , x .

Střed S kulové plochy procházející body A , B , C , D je na přímce, která prochází středem O čtverce $ABCD$ kolmo k jeho rovině, tj. na přímce VO . Rovina proložená body A , C , V protíná kulovou plochu v hlavní kružnici, jejíž průměr VE prochází bodem O (obr. 4); přitom je $VE \perp AC$. Podle Thaletovy věty je trojúhelník VAE pravoúhlý s přeponou VE ; přitom je

$$|VO| = x, \quad |OE| = 2r - x.$$

Je-li $y = |OA| = \frac{1}{2}|AC|$, je podle Euklidovy věty o výšce

$$y^2 = x(2r - x). \quad (2)$$

Protože $2y$ je velikost úhlopříčky čtverce $ABCD$, jehož strana má velikost a , je $2y = a\sqrt{2}$, takže podle (2) je

$$a^2 = 2y^2 = 2x(2r - x). \quad (3)$$

Výška v rovnoramenného trojúhelníku VBC je přeponou pravoúhlého

trojúhelníku VOF , kde F je středem úsečky BC . Protože je $|VO| = x$, $|OF| = \frac{a}{2}$, je podle (3)

$$v^2 = x^2 + \frac{x(2r - x)}{2},$$

$$v^2 = \frac{x(2r + x)}{2}. \quad (4)$$

Obsah $P = \frac{1}{2}av$ bude největší právě tehdy, bude-li největší součin av ; protože je $a > 0$, $v > 0$, bude to právě tehdy, bude-li největší součin a^2v^2 , tj. podle (3) a (4) bude-li největší

$$z = x^2(4r^2 - x^2) = 4r^4 - (4r^4 - 4r^2x^2 + x^4) = 4r^4 - (2r^2 - x^2)^2$$

To však bude největší právě tehdy, bude-li

$$2r^2 - x^2 = 0,$$

tj. bude-li $x = r\sqrt{2}$. Největší plášť má tedy jehlan, jehož výška je $r\sqrt{2}$; snadno vypočteme, že tento největší plášť má obsah $4r^2$.

NAŠE SOUTĚŽ, ROČNÍK 1981 — 82

Také letos vypisuje redakce Rozhledů spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím v Praze soutěž o ceny v řešení úloh z matematiky, fyziky a konstrukční geometrie. Této soutěže se mohou účastnit i kolektivy z téže třídy, maximálně trojčlenné. Při případném umístění má ovšem kolektiv nárok na jedinou cenu.

Všeobecné pokyny řešitelům

Řešení každé úlohy pište čitelně (nejlépe strojem) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Nahoře vlevo na každém listu uveďte své celé jméno, třídu i školu, kde studujete, a nakonec svou bytovou adresu i se směrovacím číslem. Každý kolektiv uveďte tyto údaje pro každého svého člena.

Nejdříve napište text dané úlohy a potom pište přehledně její řešení. Toto řešení pište výstižně, stručně, ale jasně; neužívejte zbytečně různé symboly! Dbejte na platnou terminologii a symboliku. Připojujete-li k řešení některé úlohy obrázky, narýsujte je pečlivě a čitelně je popište.

Úlohy k řešení

Matematika

V tomto čísle otiskujeme 6 úloh z matematiky; zbývajících 6 úloh otiskneme v příštím čísle. Řešení všech šesti úloh zašlete nejpozději do 31. ledna 1982 na adresu redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla Rozhledů.

1. Trojúhelník T rozdělíme na tři trojúhelníky T_1, T_2, T_3 takým způsobem, že trojúhelník T rozpoltíme pozdĺž ťažnice na dve časti a jednu z častí opäť rozpoltíme pozdĺž jej ťažnice. Aký má byť trojúhelník T , aby jeden z trojúhelníkov T_1, T_2, T_3 bol rovnostranný so stranou dĺžky 1? Viete nájsť všetky možnosti?

Martin Gavalec

2. V trojúhelníku ABC , jehož strany mají velikosti $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, jsou sestrojeny osy jeho vnitřních úhlů. Průsečík E osy úhlu $\sphericalangle CAB$ se stranou BC a vrchol A omezují úsečku AE , jejíž velikost je w_a ; velikosti obdobně definovaných úseček BF , CG ležících po řadě na osách úhlů $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ jsou w_b, w_c . Výšky ke stranám BC, CA, AB mají velikosti v_a, v_b, v_c . Dokažte, že je

$$\frac{v_a}{bw_b} + \frac{v_b}{cw_c} + \frac{v_c}{aw_a} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c};$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, jestliže trojúhelník ABC je rovnostranný.

Stanislav Horák

3. Přirozené číslo má vlastnost T_z , jestliže jeho zápis v soustavě o základu $z > 1$ začíná a končí stejnou skupinou číslic. (Takové číslo můžeme schematicky zapsat ve tvaru ABA , kde B může být i prázdná skupina číslic; např. čísla 12 471, 2 340 123, 221 221 mají vlastnost T_{10}). Dokažte, že pro každé $z > 1$ existuje číslo, z něhož vznikne číslo s vlastností T_z , jestliže na konci jeho zápisu doplníme a) libovolnou číslici; b) libovolnou skupinu k číslic; c) libovolnou skupinu složenou nejvýše z k číslic.

Milan Koman

4. Nechť ABC je trojúhelník, jehož strany AC, BC nejsou shodné; kružnice k , která je tomuto trojúhelníku opsána, má v bodě C tečnu t . Nechť libovolná kružnice k' prochází body A, B , ale neprochází bodem C ; její společné body s přímkami AC, BC jsou body A', B' . Přitom $A' = A$ právě tehdy, jestliže přímka AC je tečnou kružnice k' a $B' = B$

- právě tehdy, jestliže přímka BC je tečnou kružnice k' . Dokažte, že platí:
- Tečna t protíná přímku AB v bodě V ležícím na prodloužení úsečky AB ; přitom osa úhlu $\sphericalangle AVC$ je kolmá k ose úhlu $\sphericalangle BCA$.
 - Přímka $A'B'$ je rovnoběžná s tečnou t .

Emil Kraemer

5. Je dána kružnice k o středu S a poloměru $r = 1$; uvnitř kruhu omezeného kružnicí k jsou dány dva různé body A, B souměrně sdružené podle středu S . Sestrojme trojúhelník BCD , jehož strana CD prochází bodem A a jehož vrcholy C, D jsou body kružnice k . Který z takto sestavených trojúhelníků má největší obsah? Pokuste se řešit úlohu nejprve bez použití diferenciálního počtu.

Emil Kraemer

6. Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$; označme p přímku, která prochází vrcholem A , protíná stěnovou úhlopříčku $B'C$ a je na ni kolmá. Zjistěte vzájemnou polohu přímky p a tělesové úhlopříčky BD' a určete jejich odchylku.

Jiří Mída

Fyzika

V tomto čísle otiskujeme 3 úlohy z fyziky; zbývající úlohy otiskneme v příštím čísle. Řešení všech tří úloh zašlete nejpozději do 31. ledna 1982 na adresu redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla Rozhledů.

1. Deskový kondenzátor je nabit na napětí U . Desky kondenzátoru jsou umístěny ve svislé poloze a jejich vzdálenost je d . Kondenzátor je v tíhovém poli Země ($g \doteq 9,81/\text{m.s}^{-2}$). Doprostřed mezi desky vložíme malé tělísko (kuličku) hmotnosti m , nabité nábojem Q a pustíme. Určete tvar dráhy tělíska a spočítejte, o kolik „spadne“ kulička (tj. jakou vzdálenost ve svislém směru urazí), než narazí na desku kondenzátoru. Pole uvnitř kondenzátoru předpokládejte jako homogenní a dále předpokládejte, že mezi deskami je vakuum. Řešte nejprve obecně a potom konkrétně za předpokladu, že tělískem je elektron, přičemž je $d = 1 \text{ m}$, $U = 1 \text{ V}$.

Leoš Dvořák

2. Na vrcholu dokonale hladké koule o poloměru R leží malé těleso (hmotný bod). Těleso začne klouzat dolů pod účinkem gravitační síly (předpokládejme homogenní gravitační pole o gravitačním zrychlení g). V určité výšce a nad spodním okrajem koule se těleso oddělí od povrchu koule (a bude dále volně padat podle zákonů šikmého vrhu). Vypočítejte výšku a .

Leoš Dvořák

3. Střela z minometu má počáteční rychlost $v_0 = 100$ m/s. Řešte tyto dvě úlohy (odpor vzduchu neuvažujte):

a) Nalezněte dva elevační úhly, pod kterými je nutno vystřelit granát z minometu tak, aby se zasáhl cíl ležící ve vzdálenosti $L = 866$ m na stejné úrovni jako minomet.

b) Nalezněte maximální výšku každé dráhy a dobu letu.

Zdeněk Janout

OLYMPIÁDY

Ještě k minulému ročníku MO

Byl jubilejní, protože uzavíral tři desetiletí naší soutěže. Matematická olympiáda vznikla r. 1951 z podnětu akademika *Eduarda Čecha* (1893—1960) a už po tři desítky let mnoha mladým lidem usnadňuje jejich rozhodování o budoucím povolání. Rozhledy pravidelně propůjčují své stránky k tomu, aby informovaly, co se v matematické olympiádě děje, a tato naše zpráva se tedy opět obrací hlavně k řešitelům minulého ročníku.

Jubileum MO připomněla veřejnosti brožura s názvem *Matematická olympiáda 1951—1981*, kterou sestavili *prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc.*, a *RNDr. Antonín Vrba, CSc.*, z příspěvků řady autorů. Knížku vydala jako zájmový náklad r. 1981 Jednota čs. matematiků a fyziků spolu s ústředním výborem matematické olympiády a Rozhledy o ní podrobně referují na jiném místě. Vydání této publikace bylo vhodně načasováno tak, že při celostátním třetím kole kategorie A byly už její svazky k dispozici pro všechny zájemce. Celostátní kolo se konalo v Praze od 14. do 17. května 1981 a vzhledem k zaokrouhlenému výročí soustředilo na sebe pozornost školské a mimoškolské veřejnosti.

Zahájení ve staroslavném Karolinu Univerzity Karlovy, přijetí na Staroměstské radnici, divadelní představení v Laterně magie, přednáška na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy univerzity a večerní výlet parníkem — to byly akce, jež celostátní kolo rámovaly. Všechno klapalo znamenitě díky krajskému výboru MO v Praze, jehož předsedou je *prof. RNDr. Karel Drbohlav, DrSc.* Není pochyb, že příprava tak různorodých bodů programu si vyžádala dlouhého času a úsilí mnoha pracovníků. Současně s celostátním kolem zasedal totiž v Praze i ústřední výbor matematické olympiády, který tentokrát hodnotil nejen uplynulý

ročník soutěže, ale ohlížel se zpět na tři desetiletí. Zasedání ústředního výboru řídil jeho předseda prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc.

Do celostátního kola v Praze se proboujalo osmdesát středoškolských studentů z celé republiky, z toho šest dívek. Páteční a sobotní dopoledne věnovali řešitelé soutěžním příkladům. Měli za úkol rozřešit celkem šest úloh, tři v pátek a tři v sobotu. Zvláštností tohoto jubilejního ročníku bylo, že vítězové a úspěšní řešitelé byli vyhlášeni hned v neděli 17. května, a mohli si tedy z Prahy domů odvézt už své diplomy. Příslušný tým opravovatelů musel ovšem nastoupit hned v pátek po odevzdání první trojice rozřešených příkladů, pracovalo se i ve večerních a nočních hodinách a pořadí vítězů a ostatních řešitelů sestavil počítač.

Na prvním místě mezi vítězi se bezpečně a bez bodové ztráty umístil *Jiří Sgall*, studující 2. ročníku gymnázia v Praze 2, ul. W. Piecka. Z dívek byla nejlepší *Martina Šimůnková* ze 4. ročníku téhož gymnázia, která si svým výkonem zajistila místo mezi patnácti vítězi celostátního kola. Dalších šestnáct úspěšných řešitelů může být rovněž spokojeno s dosaženým výsledkem, vždyť už pouhou účast ve třetím kole kategorie A hodnotíme jako chvályhodný čin. Děkujeme všem za jejich houževnatost a píli a přejeme jim mnoho zdaru v dalším studiu.

J. S.

Výsledky 3. kola M0 1981

Vítězové

1 —	1 Jiří SGALL	Praha 2	2. r. GWP
2 —	3 Igor KŘÍŽ	Praha 2	2. r. GWP
2 —	3 Petr COUF	Praha 2	3. r. GWP
4 —	4 Jan NEKOVÁŘ	Praha 2	4. r. GWP
5 —	5 Miroslav ENGLIŠ	Praha 2	3. r. GWP
6 —	6 Jiří MATOUŠEK	Praha 10	4. r. G, Voděradská
7 —	8 Jozef BEDNÁRIK	Bratislava	4. r. GAMČA
7 —	8 Bořivoj TYDLITÁT	Praha 2	4. r. GWP
9 —	9 Pavel JŮZA	Praha 2	3. r. GWP
10 —	10 Ladislav PECEN	Havlíčkův Brod	4. r. G
11 —	12 Vladimír LIEBERZEIT	Praha 2	3. r. GWP
11 —	12 Ondrej VIRDZEK	Žilina	4. r. G, Vel. okružná
13 —	15 Peter SPIŠIAK	Košice	3. r. G, Šmeralova
13 —	15 Vladimír HUDEC	Košice	4. r. G, Šmeralova
13 —	15 Martina ŠIMŮNKOVÁ	Praha 2	4. r. GWP

Řešíte úlohy matematické olympiády kategorie Z? Přečtěte si následující článek

Milí přátelé,

časopis Rozhledy je určen hlavně studentům středních škol, ale tentokrát se obrací k žákům nejvyšších ročníků základních škol. Proč — to vám napovědí dvě slova — matematická olympiáda. Jak víte, byla dřívější základní devítiletá škola zkrácena na osm let; pochopitelně žáci posledního osmého ročníku umějí z matematiky méně a hlavně mají menší zkušenosti než žáci dřívějšího devátého ročníku. Cítíme, že i když se snížila obtížnost úloh kategorie Z, není to ta pravá pomoc. Při řešení soutěžních úloh nezáleží tak na množství matematických vědomostí, které máte, ale spíše na dovednosti, jak s nimi umíte zacházet. Je to tak jako např. při práci instalatéra: důležité je nejen, kolik má v brašně náradí, ale také, jak s ním umí pracovat. A to druhé je skoro ještě důležitější. V matematice se tomu říká znalost pracovních metod nebo postupů.

Mnoho moudrých lidí se už zabývalo otázkou, jak najít vhodný postup pro řešení dané úlohy a jak jej uplatnit. Americký matematik *G. Polya* o tom napsal několik knížek. A tu jsme u jádra věci. Chceme pomoci těm nejmladším z vás ne tím, že bychom jim prozradili řešení úlohy, ale tím, že jim budeme napovídat postupy.

JAK NA TO?

Tato věčně opakovaná otázka má neomezený počet různých odpovědí, které najdeme často pomocí pokusů; na vyšší úrovni je odůvodňujeme úsudkem. Pokusíme se ukázat, jak se to dělá.

Osvědčí-li se tento postup pro kategorii Z, rozšíříme jej i na kategorii C a na tematiku co největšího počtu soutěžních úloh. Snad tím zároveň i vyhovíme volání po tom, aby předmětem MO nebylo jen řešení soutěžních úloh, ale i studium matematických textů. Protože víme, že Rozhledy mají jen málo čtenářů mezi žáky ZŠ, pokusíme se přenést tohoto „pomocníka“ do jiných časopisů.

Najdete jej však vždy pod značkou

JAK NA TO?

Napište redakci Rozhledů (M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1) nebo Ústřednímu výboru MO (Žitná 25, 115 67 Praha 1), zda vám naše články pomáhají.

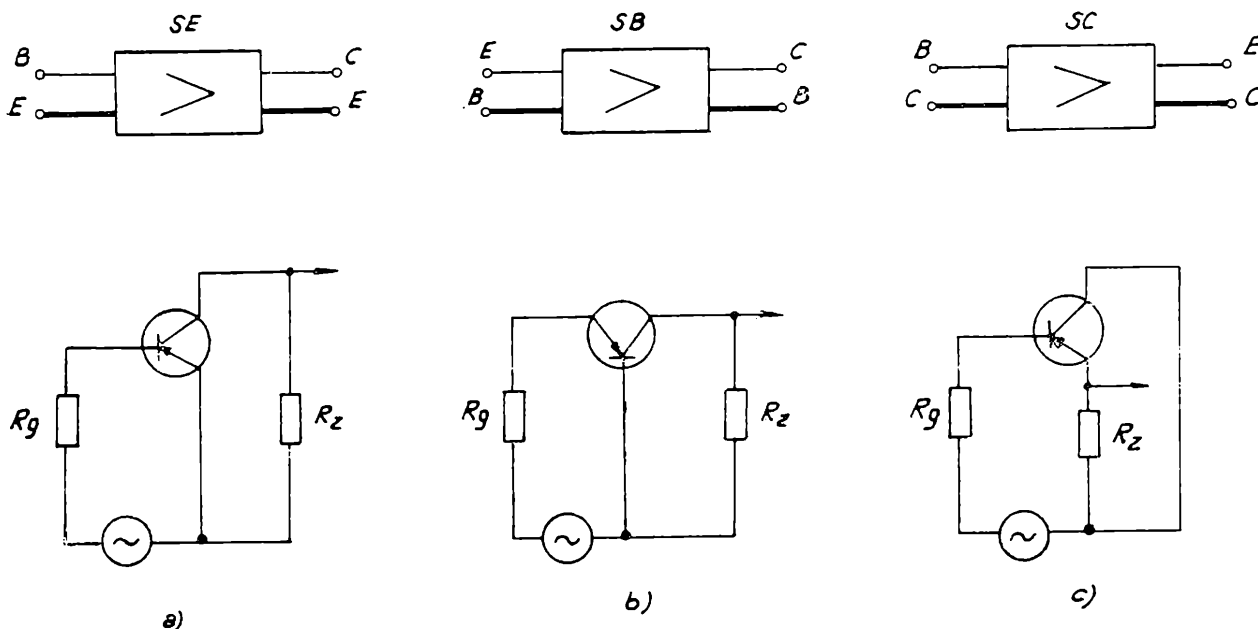
doc. Jan Vyšín, CSc.

Trojí zapojení tranzistorového zesilovače

MOJMÍR SIMERSKÝ, Rožnov pod Radhoštěm

1. Trojí zapojení tranzistoru

V předchozím článku [1] jsme tranzistor považovali za aktivní čtyřpól, tj. čtyřpól, který má k dispozici zdroj elektrické energie. Tranzistor má však jenom tři elektrody, z čehož je zřejmé, že jedna z nich musí být společná pro vstup i pro výstup. Jsou tři možnosti znázorněné na obr. 1, a to jednak schémata čtyřpólů, jednak s použitím schematického znaku tranzistoru.



Obr. 1

Jde o tranzistory typu PNP v zapojení se společným emitorem (nejběžnější, značíme SE), se společnou bází (SB) a se společným kolektorem (SC).

Všechny početní úvahy z článku [1] mají obecnou platnost, tj. platí pro kterékoli z uvedených zapojení. Rozdíly jsou jen v hodnotách parametrů.

Omezíme se zde na parametry smíšené a ukážeme si, jak z hodnot parametrů pro to či ono zapojení se dají vypočítat hodnoty parametrů pro obě zapojení ostatní.

Pro zajímavost poznamenáváme: Tranzistor, jak jsme shledali, má šest soustav parametrů, z nichž ovšem, jak bylo uvedeno, mají význam jenom dvě; celkem však 24 parametrů. Poněvadž jsou tři možná zapojení,

je číselných hodnot parametrů celkem 72. Známe-li však jednu čtveřici téhož druhu vztahující se k témuž zapojení, můžeme hodnoty ostatních 68 parametrů vypočítat.

Jako ukázkou jednoduchého postupu si ukážeme výpočet smíšených parametrů pro zapojení SB, jsou-li dány parametry pro zapojení SE. Musíme zavést poněkud složitější symboliku: parametry platné pro SE budeme označovat dodatečným indexem „e“, parametry pro SB dodatečným indexem „b“. Stejnými dodatečnými indexy budeme značit obě napětí a oba proudy.

Rovnice (4) z článku [1] vyjádřené pro SE popř. SB budou tedy tyto:

$$\begin{aligned} u_{1e} &= h_{11e}i_{1e} + h_{12e}u_{2e}, \\ i_{2e} &= h_{21e}i_{1e} + h_{22e}u_{2e}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_{1b} &= h_{11b}i_{1b} + h_{12b}u_{2b}, \\ i_{1b} &= h_{21b}i_{1b} + h_{22b}u_{2b}. \end{aligned} \quad (2)$$

Jsou dány parametry h_{11e} až h_{22e} a máme jimi vyjádřit parametry h_{11b} až h_{22b} . Použijeme postup poněkud zdlouhavý, ale jednoduchý na úvahy a názorný. Přímým porovnáním obou zapojení vyjádříme veličiny u_{1e} , i_{1e} , u_{2e} , i_{2e} pomocí veličin u_{1b} , i_{1b} , u_{2b} , i_{2b} ; dosadíme do (1). Tím dostaneme dvě rovnice, které budou obsahovat u_{1b} , i_{1b} , u_{2b} , i_{2b} a parametry h_{11e} až h_{22e} . Z těchto rovnic vyjádříme u_{1b} , i_{2b} a výsledky porovnáme s (2).

Vstupní a výstupní veličiny v zapojeních SE a SB můžeme s použitím obr. (1) zapsat takto:

$$\begin{aligned} u_{1e} &= u_{BE}; i_{1e} = i_{BE} + i_{BC}; u_{2e} = u_{CE}; i_{2e} = i_{CE} + i_{CB}; u_{1b} = u_{EB}; \\ i_{1b} &= i_{EB} + i_{EC}; u_{2b} = U_{CB}; i_{2b} = i_{CB} + i_{CE}. \end{aligned}$$

Např. u_{EB} značí, že jde o napětí báze vzhledem k emitoru, $i_{EB} + i_{EC}$ značí, že jde o součet dvou proudů, z nichž první vtéká z emitoru do báze, druhý z emitoru do kolektoru.

Použijeme formální vztahy, jejichž platnost je evidentní (znaky M, N, P značí libovolné elektrody):

$$u_{MN} = -u_{NM}; i_{MN} = -i_{NM}; u_{MN} = u_{MP} + u_{PN}$$

Potom bude

$$\begin{aligned} u_{1e} &= u_{BE} = -u_{EB} = -u_{1b}, \\ i_{1e} &= i_{BE} + i_{BC} = -i_{EB} - i_{CB} = -(i_{EB} + i_{EC}) - (i_{CB} + i_{CE}) = -i_{1b} - i_{2b}, \\ u_{2e} &= u_{CE} = u_{CB} + u_{BE} = u_{2b} - u_{1b}, \\ i_{2e} &= i_{CE} + i_{CB} = i_{2b}. \end{aligned}$$

Dosadíme do (1), dostaneme dvě rovnice

$$\begin{aligned} -u_{1b} &= h_{11e}(-i_{1b} - i_{2b}) + h_{12e}(u_{2b} - u_{1b}), \\ i_{2b} &= h_{21e}(-i_{1b} - i_{2b}) + h_{22e}(u_{2b} - u_{1b}), \end{aligned}$$

z nichž vyjádříme

$$u_{1b} = \frac{h_{21e}}{A} i_{1b} + \frac{D_{he} - h_{12e}}{A} u_{2b},$$

$$i_{2b} = -\frac{h_{21e} + D_{he}}{A} i_{1b} + \frac{h_{22e}}{A} u_{2b},$$

kde $A = l - h_{12e} + h_{21e} + D_{he}$, $D_{he} = h_{11e} h_{22e} - h_{12e} h_{21e}$.

Z posledních dvou rovnic vyplývají vztahy pro určení parametrů h v zapojení SB pomocí parametrů v zapojení SE:

$$h_{11b} = \frac{h_{11e}}{A}, \quad h_{12b} = \frac{D_{he} - h_{12e}}{A}$$

$$h_{21b} = -\frac{h_{21e} + D_{he}}{A}, \quad h_{22b} = \frac{h_{22e}}{A}.$$

Poněvadž obvykle $D_{he} \ll h_{21e}$, $h_{12e} \ll h_{21e}$, můžeme v nalezených vztazích místo veličiny A s dobrou přibližností položit $h_{21e} + 1$ a v čitateli vztahu pro h_{21b} zanedbat D_{he} proti h_{21e} .

Parametr h_{21e} se ve výrobě tranzistorů kusově měří a často se označuje jako β .

Typické vlastnosti jednotlivých zapojení jsou tyto:

V zapojení SE zesiluje tranzistor napětově i proudově a jeho výkonové zesílení je ze všech tří zapojení výrazně největší. Proto je toto zapojení nejžádanější.

V zapojení SB zesiluje tranzistor jen napětově, a to přibližně stejně jako v zapojení SE. Výhodnou vlastností je výrazně vyšší mezní kmitočet, při němž tranzistor ještě dobře zesiluje. V zapojení SC zesiluje tranzistor jen proudově, a to přibližně stejně jako v zapojení SE. Výhodnou vlastností je velký vstupní a malý výstupní odpor, takže budící odpor a také budící zdroj je zatížen jen malým proudem a napětí na výstupních svorkách je málo závislé na odebíraném proudu.

2. Mezní kmitočet tranzistoru

Základní hodnoty parametrů, které se uvádějí v publikačních datech tranzistorů, platí jen pro nízké kmitočty. Zesilovací činnost tranzistoru se při vyšších kmitočtech zhoršuje, poněvadž se nepříznivě uplatňují kapacity mezi elektrodami, „konečná“ (tj. nikoli nekonečně krátká) doba průchodu nosičů náboje oblastí báze a navíc ještě úbytek napětí na bázi.

Mezní kmitočet f_b , platný pro zapojení SB, je přímo úměrný pohyblivosti menšinových nosičů náboje v oblasti báze a nepřímo úměrný druhé odmocnině šířky báze. Proto se u vysokofrekvenčních tranzistorů požaduje, aby báze byla co nejúžší (řádově 10^{-6} m a méně). Poněvadž elek-

trony jsou obecně pohyblivější než díry, mají tranzistory NPN mezní kmitočty obecně vyšší než tranzistory typu opačného, poněvadž u tranzistorů NPN jsou menšinovými nosiči náboje v bázi elektrony. Z podobného důvodu jsou tranzistory germaniové při vyšších kmitočtech výhodnější než křemíkové — nosiče náboje mají v germaniu pohyblivost větší než v křemíku.

K doplnění předchozího si musíme uvést definici pohyblivosti. Budeme uvažovat polovodičový vzorek, v němž působí elektrické pole o intenzitě $\mathbf{E}$. Vlivem tohoto pole konají nosiče náboje uspořádaný pohyb ve směru vektoru $\mathbf{E}$, a to průměrnou rychlostí $\mathbf{v}_p$, která má velikost $v_p = \mu E$, kde činitel μ s jednotkou $[\text{m}^2 \text{ V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}]$ je právě pohyblivost nosiče náboje.

Abychom mohli posoudit, při jak vysokých kmitočtech může ten či onen tranzistor ještě dobře pracovat, uvádí se tzv. *mezní kmitočet*. Jeho definice jsou samozřejmě zcela konvenční a nejednotné. Jedna z definic navazuje na definici mezního kmitočtu paralelního obvodu sestaveného z rezistoru a kondenzátoru. Podle toho se jako mezní kmitočet označuje ten, při němž parametr h_{21} klesne na hodnotu $h_{210}/\sqrt{2}$, kde h_{210} je jeho hodnota platná pro velmi nízké kmitočty.

V zapojení SE je mezní kmitočet, který označíme f_e , podstatně menší než f_b . Přibližný početní vztah můžeme nalézt jednoduchou úvahou. Pro zjednodušení zápisů budeme parametr h_{21b} značit α a jeho základní hodnotu pro velmi nízké kmitočty α_0 . Podobně zavedeme označení β a β_0 pro h_{21e} .

Při vyšších kmitočtech má parametr α reálnou a imaginární část, tj. je to komplexní číslo $\bar{\alpha}$ a pro mezní kmitočet f_b platí:

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_0}{1 + j \frac{f}{f_b}}, \quad (3)$$

kde f je uvažovaný kmitočet, při němž tranzistor pracuje, a $j^2 = -1$. Pak skutečně při mezním kmitočtu je $\alpha = \alpha_0/\sqrt{2}$. Podobně pro zapojení SE

$$\bar{\beta} = \frac{\beta_0}{1 + j \frac{f}{f_e}}. \quad (4)$$

Podle zjednodušeného vztahu mezi parametry h_{21b} a h_{21e} platí bez ohledu na znaménko

$$\bar{\beta} = \frac{\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}}, \quad \beta_0 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0}. \quad (5)$$

Do prvního vztahu (5) dosadíme $\bar{\alpha}$ podle (3). Pak je po úpravě

$$\bar{\beta} = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0 + j \frac{f}{f_b}}. \quad (6)$$

Když do (4) dosadíme za β_0 podle druhého ze vztahů (5), dostaneme po úpravě

$$\bar{\beta} = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0 + j \frac{f}{f_e} (1 - \alpha_0)}. \quad (7)$$

Porovnáním (6) a (7) dostaneme

$$\frac{f}{f_b} = \frac{f}{f_e} (1 - \alpha_0),$$

neboli

$$f_e = f_b (1 - \alpha_0) = f_b \frac{1}{1 + \beta_0}.$$

Z toho je zřejmé, že $f_b > f_e$, jak jsme si uvedli v závěru předchozího článku.

Na procvičení uvedeme několik úloh.

1. Vyjádřete smíšené parametry h_{11c} až h_{22c} platné pro zapojení SC pomocí parametrů h_{11e} až h_{22e} platných pro zapojení SE.
2. Předpokládejte, že parametry h_{11e} až h_{22e} jsou vesměs kladné. Na základě výsledků předchozí úlohy a výsledků odvozených pro h_{11b} až h_{22b} rozhodněte pomocí vztahů pro A_u , A_i , jaké jsou fázové poměry mezi vstupním a výstupním napětím, vstupním a výstupním proudem pro zapojení SE, SB, SC.
3. Tranzistor typu OC 75 má parametry $h_{11e} = 1,3 \cdot 10^3 \Omega$, $h_{12e} = 8,0 \cdot 10^{-4}$, $h_{21e} = 90$, $h_{22e} = 1,25 \cdot 10^{-4} S$.
 - a) Stanovte hodnoty jeho parametrů platné pro zapojení SB, SC.
 - b) Stanovte hodnoty jeho admitančních parametrů platné pro zapojení SE.
4. Tranzistor má mezní kmitočet f_e v zapojení SE, pro nízké kmitočty má parametr h_{21e} hodnotu β_0 . Stanovte kmitočet f_0 , při němž $|h_{21e}| = 1$, tj. takový, při němž tranzistor právě již nezesiluje. Jde o jinou konvenční definici mezního kmitočtu.
 Řešte nejprve obecně, potom pro $h_{21e0} = 90$, $f_e = 1,6 \text{ kHz}$, kde h_{21e0} je hodnota parametru h_{21e} platná pro velmi nízké kmitočty.

Literatura :

- [1] Simerský M.: Tranzistorové zesilovače malých signálů, Rozhledy mat. fyz., roč. 60, č. 1, str. 34

Z NOVÝCH KNIH

*Josef Eliaš — Ján Horváth —
Juraj Kajan — Robert Šulka:*

ZBIERKA ÚLOH Z VYŠŠEJ MATEMATIKY, 4. časť

Alfa — Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava 1979 (3. vydání, Edícia teoretickej literatúry). 288 stran, 92 obrázky, 2 tabulky, cena váz. výtisku 28 Kčs.

Kniha obsahuje celkom 1804 príkladů a úloh z matematickej analýzy. Je rozdelená do šiesti kapitol: nekonečné rady, základy integrálného počtu funkcií viacerých premenných, parametrické integrály, krivkové integrály, plošné integrály, základy teórie funkcie komplexnej premennej. Každá z kapitol je ďalej členená na podkapitoly podľa štruktúry procvičovanej látky. Podkapitola je vždy uvedená stručným shrnutím základných pojmov a vät z daného tématu. Nasledujú príklady riešené autormi. Sú volené tak, aby sa čtenár mohol seznámiť s typickými metódami riešenia úloh z daného tématu. V závere každej podkapitoly je uvedená rada úloh k samostatnému riešeniu. Výsledky riešenia sú obsiahnuté v samostatnej kapitole na konci knihy.

Spolu s 3. časťou Zbierky úloh z vyššej matematiky (vydalo nakladateľstvo Alfa v roku 1980, autori: Jozef Eliaš, Ján Horváth, Juraj Kajan) shrnuje tak táto

knihy základný príkladový materiál z diferenciálneho a integrálneho počtu funkcií viacerých premenných, základů vektorovej analýzy a diferenciálnej geometrie, diferenciálnych rovníc a základů teórie funkcií komplexnej premennej.

Sbírka je vhodnou učebnou pomôckou predovšetkým pre študentov vysokých škôl technického smeru, úlohy k procvičovaniu v nej určite nájdu aj študenti matematiky na univerzitách.

Marie Kubínová

Müller, B.:

ZÁKLADY ASTRONÓMIE

Vydala ALFA, Bratislava 1980, preklad z nemčiny, 240 strán, 116 obr., viaz. Kčs 16,—.

Autor uvádza čitateľa k pochopeniu základných meracích metód v astronómii, vysvetľuje jednoduché matematické prostriedky, ktoré pri výklade potrebuje. Zaoberá sa mechanikou slnečnej sústavy, vysvetľuje merania niektorých charakteristík, popisuje spôsoby určenia vzdialeností, pohybu, hmotnosti, teploty, jasnosti hviezd, zdôvodňuje závislosti stavových veličín, stavbu i vývoj hviezd. V piatej kapitole sa zaoberá klasifikáciou galaxií, medzihviezdnou hmotou a uvádza malú čiernobielu foto-

grafickou přílohu (10 obr.) z největšího Schmidtovho zrkadlového ďalekohľadu na observatóriu v Tautenbergu.

Základy astronómie spolu s knižkou *L. Lindnera „Hvězdná obloha“* (Horizont, Praha 1979), môžu byť podnetným motivačným impulzom v práci astronomických krúžkov na základných i stredných školách. Vážnym záujemcom so širším matematickým a fyzikálnym zázemím možno doporučiť knihu *V. Vanýska „Základy astronómie a astrofyziky“* (Academia, Praha 1980).

Dušan Jedinák

J. Moravčík — A. Vrba

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

1951 — 1981

Vydala Jednota československých matematiků a fyziků a Ústřední výbor matematické olympiády, Praha 1981, stran 149, obr. 22, neprodejný výtisk.

Touto recenzí se ještě vracíme k minulému školnímu roku, ve kterém matematická olympiáda prožívala svůj jubilejní, třicátý ročník. Knižka, kterou máme nyní před sebou, vyšla jako zájmový náklad v počtu 1500 výtisků. Není sice ve volném prodeji, ale dostali ji všichni účastníci celostátního kola MO, které se konalo v květnu 1981 v Praze, dále

organizátoři soutěže v krajích, různé knihovny a další zájemci.

V knížce se dočtete o mezinárodních matematických olympiádách, o korespondenčních seminářích, o celostátním kole MO, které se před několika roky konalo ve Strakoniciích, a o mnohém dalším. Jeden z bývalých olympioniků, který nyní působí na vysoké škole, se žertem označuje za „vrstevníka“ matematické olympiády, protože se narodil právě v roce, kdy soutěž vznikla. Když listujete dalšími stránkami, na nichž bývalí vítězové a úspěšní řešitelé MO vzpomínají na své učitele a na to, jak soutěž ovlivnila jejich rozhodování při volbě dalšího studia a budoucího povolání, uvědomíte si, kolik dnes významných lidí začínalo svou kariéru právě v matematické olympiádě.

Řešitelům dalších celostátních kol kategorie A přijde jistě vhod, že se v brožuře najde také znění všech úloh třetího kola této kategorie — a to od ročníku prvního až po devětadvacátý. K úlohám označeným hvězdičkou jsou na konci připojena stručná řešení. Tím se jubilejní knížka stává tak trochu i sbírkou příkladů a může sloužit též jako studijní materiál.

Kromě obou hlavních autorů na rukopise spolupracovali *L. Boček, M. Gavalec, T. Marcisová, L. Vaňatová, J. Vinárek, J. Vyšín, B. Zelinka a F. Zítek* delšími příspěvky a pak ještě řada známých matematiků, kteří napsali třeba jen několikařádkovou vzpomínku.

Jiří Sedláček

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

telescopio m	dalekohled
temperatura ž	teplota
— assoluta	— absolutní
— — termodinamica	— — termodynamická
— critica	— kritická
tempo m	čas
— solare medio, — civile	— střední sluneční
— siderale	— hvězdný
— solare apparente	— pravý sluneční
— locale	— místní
temporale m	bouře
tendere	mířiti, směřovati, konvergovati
tenere	držeti, obsahovati
tensione ž	napětí
— superficiale	— povrchové
tensore m	tenzor
teorema ž	věta, poučka
teoria ž	teorie
termica ž	termika
termocoppia ž	termočlánek
termometro m	teploměr
terre rare ž	vzácné zeminy
terza ž	tercie
terzo	třetí
terzo m	třetina
tetraedro m	čtyřstěn
tilde m	vlnovka (nad písmenem)
timbro m	barvitost (zvuku)
tirare	táhnouti; vrhnouti (kostky)
tiro m	vrh (kostek)
tono m	tón, hlas
toro m	anuloid kruhový
torre ž	věž
torsione ž	torze, druhá křivost
tortuoso	křivolaký, točitý

SPN vydává

V. Čech: PROČ DĚLÁME DŮKAZY V MATEMATICE

Knížka je určena žákům posledních ročníků základní školy a přístupnou formou je seznamuje se základy logiky v matematice. Na příkladech si mladí čtenáři osvojí základní pojmy a získané poznatky si procvičí na vhodně volených úlohách. Pro kontrolu správných řešení jsou na konci knížky uvedeny výsledky. Knížka je vhodným úvodem ke studiu matematiky na školách II. cyklu.

Brož. Kčs 5,50

M. Mačát: ČÍSELNÉ SOUSTAVY

Publikace přináší stručné poučení o vlastnostech číselných soustav, tzv. pozičních soustav o základě 10, ale i jiných. Knížka byla napsána pro žáky nejvyšších ročníků základní školy a prvního ročníku gymnázií. Mohou ji však použít všichni zájemci o tuto problematiku.

Brož. Kčs 5,50

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12 Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřichská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1981.

ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

1921/22

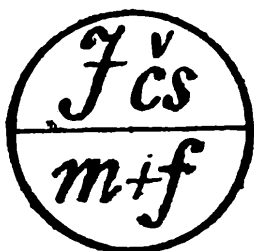
1981/82

*** 60 let**

(3)

**ROČNÍK 60, 1981/82
LISTOPAD**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Vladimír
Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr.
Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

J. Chloupek: Světová prvenství Sov. svazu v kosmickém výzkumu I	97
B. Zelinka: Jak pluje loď	100
J. Hájek: Geometrie pomáhá řešit algebraické úlohy	101
E. Calda: Profesor Y na Velké kunratické	103
S. Trávníček: Rytmičké etudy	105
L. Zachoval: Fyzik v průmyslové praxi II	117
J. Kotyk: České ornitoptéry	119
J. Hrivňák: K pobytu A. Einsteina v Praze	121
J. Sedláček: Prof. dr. Karel Hruša	122
M. Hejný: Pséfoforia a iracionalita $\sqrt{2}$	123
Naše soutěž	127
J. Vyšín: Jak na to?	138
Z nových knih	143
K. Šindelář: Slovníček italsko-český	3. str. obálky

Světová prvenství Sovětského svazu v kosmickém výzkumu - I.

JAROSLAV CHLOUPEK, Střední odborné učiliště, Letovice

Sovětský svaz jako technická a vědecká velmoc patří mezi nejvýznamnější státy na světě. Od svého vzniku v r. 1922 jako přední socialistická velmoc věnuje vědě a technice mimořádnou pozornost. Výsledky této péče jsou patrné nejen v průmyslu a zemědělství, kde se v široké míře zavádějí pokrokové vědeckotechnické metody, nýbrž především v takových oblastech aplikace vědecko-technických poznatků, jakou je kosmonautika, výzkum sluneční soustavy i vzdálenějších oblastí vesmíru. V této oblasti dosáhl Sovětský svaz řady světových prvenství, která zůstanou trvale zapsána v historii kosmonautiky a výzkumu vesmíru. Byli to sovětské vědci a technici, kteří se stali průkopníky ve vysílání raket, družic a kosmických sond, a sovětské kosmonauty, kteří zásluhou své vytrvalosti a odvahy při výcviku a kosmických letech ukázali cestu do vesmíru celým lidským generacím. Je třeba si tyto významné skutečnosti připomenout v letošním roce, v roce 20. výročí startu prvního kosmonauta světa, sovětského občana.

V důsledku vyslání první umělé družice na oběžnou dráhu Země ze sovětského kosmodromu se *SSSR stal průkopníkem v kosmickém výzkumu*. Družice s označením 1957 α byla odstartována 4. října 1957 a toto datum je všeobecně považováno za začátek kosmické éry lidských dějin. Uvedme některé parametry dnes již zapomenuté: Družice měla tvar koule s průměrem 0,58 m. Na povrchu koule byly umístěny čtyři antény určené k radiovému spojení se Zemí. Uvnitř družice byly přístroje k určení teploty a tlaku vzduchu (plynu). Oběžná doba družice byla 96,2 min., výška v apogeu 947 km a v perigeu 225 km, hmotnost 83,6 kg. Družice zanikla 4. 1. 1958.

Prvním živým tvorem vyslaným na oběžnou dráhu kolem Země byl pes Lajka, umístěný ve zvláštní kabině na palubě *Sputniku 2*. Družice byla vypuštěna 3. listopadu 1957 s hmotností 508,3 kg. Během letu byly snímány životní funkce psa Lajky — krevní tlak, tep, dýchání a EKG, které byly měřeny po dobu jednoho týdne. Potom pes zahynul.

První umělou oběžnicí Slunce se stal *Lunik 1 (Mečta)* — měsíční raketa, vyslaná směrem k Měsíci 2. ledna 1959. Proletěla v blízkosti Měsíce

a byla uvedena na eliptickou dráhu kolem Slunce. Její počáteční oběžná doba kolem Slunce byla 447 dní, sklon k ekliptice asi 1° , perihelium $146 \cdot 10^6$ km a affelium $197,2 \cdot 10^6$ km. Během letu rakety byl vypuštěn umělý sodíkový oblak pozorovatelný ze Země. Celková hmotnost rakety byla 1472 kg. Hmotnost kabiny s přístroji 361,3 kg.

Prvním umělým tělesem, které dopadlo na povrch Měsíce, byl *Lunik 2* — sovětská měsíční raketa, odstartovaná 12. září 1959. Dopad se uskutečnil 13. 9. 1959 ve 22^h 02^m 24^s našeho času. Vlastní sonda o hmotnosti 390,2 kg byla vybavena zařízením na vytvoření umělého sodíkového mraku, radarem pro měření výšky nad povrchem Země nebo Měsíce, přístroji pro zjišťování těžkých jader primárního kosmického záření, vlastností meziplanetárního plynu, magnetického pole, mikrometeorů aj.

Velmi významnou sovětskou měsíční raketou byl *Lunik 3*, který byl vyslán k Měsíci přesně za dva roky po startu první umělé družice Země. Její význam spočíval v tom, že sonda obletěla Měsíc, poprvé v historii lidstva ofotografovala odvrácenou stranu Měsíce a snímek vyslala do přijímací stanice na Zemi. Sonda o hmotnosti 435 kg byla vybavena složitým zařízením k televiznímu snímání povrchu Měsíce, zařízením k přenášení snímků na Zemi a řadou dalších přístrojů. Vrátila se k Zemi a stala se její umělou družicí s dobou oběhu 15,9 dne. Zanikla v dubnu 1960. Unikátní snímek odvrácené strany Měsíce byl nazván „Snímek století“ a stal se jedním z podkladů pro zhotovení měsíční mapy a měsíčního glóbu.

První těžkou kosmickou lodí, kterou sovětští vědci a technici uvedli dne 15. května 1960 na oběžnou dráhu kolem Země, byl *Sputnik 4* o hmotnosti 4540 kg. V kosmické lodi byla umístěna vzduchotěsná kabina o hmotnosti 2540 kg, která byla napodobeninou budoucí kabiny pro kosmonauta. Dne 19. 5. 1960 byl uskutečněn nezdařený pokus o odpoutání kabiny od družice. Parametry dráhy *Sputniku 4*: doba oběhu 91,2 min., perigeum 312 km, apogeum 369 km.

První návrat živých tvorů z oběžné dráhy kolem Země se uskutečnil s kosmickou lodí *Sputnik 5*. Tato loď o hmotnosti 4600 kg byla vyslána na oběžnou dráhu 19. srpna 1960 s perigeem 306 km a apogeem 340 km. V kabině lodi byli umístěni pokusní psi Bělka a Strelka. Na zemském povrchu přistáli po 18 obletech Země blízko vypočteného místa.

V šedesátých letech dvacátého století se postupně začalo s výzkumem planet sluneční soustavy. Dne 12. února 1961 sovětští vědci poprvé použili umělou družici *Sputnik 8* jako základnu pro vyslání meziplanetární stanice k Venuši, která se stala další umělou oběžnicí Slunce.

Sputnik 9 (kosmická loď č. 4) byl vyslán na oběžnou dráhu kolem Země 9. března 1961. Byla to první kosmická loď s úplným zařízením pro výzkum letu a přistání člověka. Na její palubě letěl pes Černuška.

a další živé organismy. Chování tvorů bylo během letu sledováno prostřednictvím televizního zařízení. Na daný povel se kosmická loď vrátila na Zemi a úspěšně přistála. Doba letu trvala 1^h 46^m.

Kromě vyslání první umělé družice Země připravovali sovětští vědci a technici v historii lidstva první kosmický let s lidskou posádkou. Je všeobecně známo, že tento let uskutečnil první kosmonaut světa, sovětský občan letec kosmonaut *Jurij Alexejevič Gagarin*, hrdina Sovětského svazu, nositel medaile Ciolkovského, věk 27 let. Startoval v kosmické lodi *Vostok 1* (1961 μ) o hmotnosti 4725 kg ze sovětského kosmodromu Bajkonur v 7^h 07^m středoevropského času na oběžnou dráhu Země. Doba letu trvala 1^h 48^m. Kosmická loď s kosmonautem úspěšně přistála po jednom obletu Země u obce Smělovka v Saratovské oblasti. Parametry dráhy letu: výška perigea 181 km, apogea 327 km, sklon dráhy k rovníku 65°. Tento hrdinský čin sovětského občana zůstane trvale zapsán do historie kosmonautiky. J. A. Gagarin dnes již nežije. Zahynul tragicky 27. 3. 1968 spolu s velitelem jednoho oddílu kosmonautů Vladimírem Serjoginem při havárii vojenského letadla u Novosjolska ve Vladimírské oblasti.

První dlouhodobý let kosmické lodi s kosmonautem se uskutečnil 6. srpna 1961. V kosmické lodi *Vostok 2* startoval kosmonaut *G. Š. Titov*. Zemi obletěl 17krát a přistál u obce Krasnyj Kut nedaleko Saratova. Vzdálenost, kterou kosmická loď urazila, byla 703 143 km. Při letu se zkoumal stav beztlíže na lidský organismus a lidské pracovní schopnosti.

11. srpna 1962 startovala kosmická loď *Vostok 3* s kosmonautem *S. G. Nikolajevem* a 12. srpna 1962 kosmická loď *Vostok 4* s kosmonautem *P. R. Popovičem*. Oba kosmonauté vykonali v kosmických lodích první společný skupinový let, když se *Vostok 4* přiblížil k *Vostoku 3*. Úkolem letu lodí byl výzkum vlivu dlouhodobého stavu beztlíže na organismus kosmonautů a vzájemné rádiové spojení mezi kosmickými loděmi. *Vostok 3* vykonal 64 oběhů a urazil dráhu $2,6 \cdot 10^6$ km a *Vostok 4* se 46 oběhy urazil dráhu $2 \cdot 10^6$ km.

První meziplanetární stanici vyslanou k Marsu byla sovětská sonda Mars 1. Měla hmotnost 893,5 kg a odstartovala dne 1. listopadu 1962. Provedla cenná měření v části meziplanetárního prostoru.

V kosmické lodi *Vostok 6* byla na oběžnou dráhu kolem Země vyslána první žena světa, 26letá sovětská občanka *Valentina Vladimirovna Těreškovová*, která doposud drží svým originálním letem prvenství, protože další žena do kosmu zatím vyslána nebyla. Start lodi se uskutečnil 16. června 1963. Zemi kosmonautka obletěla 48krát a ve vesmíru pobyla 70^h 50^m. Později se V. V. Těreškovová provdala za kosmonauta Nikolajeva. Její historický let byl posledním v sérii kosmických lodí typu *Vostok*.

(Pokračování)

Jak pluje loď

RNDr. BOHDAN ZELINKA, CSc., Liberec

Na moři jsou dva body A a B . Oba leží na téže rovnoběžce. Všude kolem je volné moře bez ostrovů, skalisek a jiných překážek. Loď je v bodě A a má se dostat do bodu B . Jak popluje?

Leckdo by asi odpověděl: „Samozřejmě tou nejkratší cestou — po rovnoběžce!“ Tato odpověď je jen napůl pravdivá — loď skutečně popluje po rovnoběžce, ale nejkratší cesta to nebude. Jaká je tedy nejkratší cesta a proč po ní loď nepopluje?

Mluvíme-li o rovnoběžkách a polednících, znamená to, že Zemi pokládáme pro zjednodušení za kouli, a tedy její povrch (ovšem včetně hladiny moře) za kulovou plochu. Nejkratší spojnici dvou bodů na kulové ploše je oblouk hlavní kružnice, který tyto body spojuje.

Hlavní kružnicí kulové plochy nazýváme kružnici, která na této ploše leží a jejíž střed splývá se středem této kulové plochy. Jinými slovy, je to průsečnice kulové plochy s rovinou procházející jejím středem.

Střed kulové plochy označme S . Jestliže její body A , B nejsou protilehlými body kulové plochy, pak body A , B , S neleží v přímce, tudíž určují právě jednu rovinu. Průsečnice této roviny s kulovou plochou je hlavní kružnice procházející body A , B . Tyto body rozdělují kružnici na dva oblouky nestejně délky. Ten kratší z nich je hledanou nejkratší spojnici bodů A a B na dané kulové ploše. Jsou-li A , B protilehlé body kulové plochy, pak body A , B , S leží v přímce. Pak průsečnice kulové plochy s libovolnou rovinou procházející přímkou AB je hlavní kružnicí kulové plochy a body A , B rozdělují tuto kružnici na dvě polokružnice. Je tedy nekonečně mnoho nejkratších cest z A do B . Například nejkratší cestou ze severního pólu Země na její jižní pól může být libovolný poledník.

Kdyby tedy loď měla plout nejkratší cestou, plula by po takovémto oblouku hlavní kružnice; v takovém případě říkáme, že pluje po *orthodromě*.

Příkladem hlavní kružnice na povrchu Země je kružnice tvořená libovolnou dvojicí protilehlých poledníků (například nultým a stoosmdesátým) nebo rovník. Rovník je také jedinou rovnoběžkou, která je současně hlavní kružnicí. Ostatní rovnoběžky mají středy na zemské ose (tj. na přímce spojující zemské póly), ale tyto středy nesplývají se stře-

dem Země. Leží-li tedy body A a B na téže rovnoběžce, pak cesta z A do B po rovnoběžce je nejkratší pouze tehdy, je-li zmíněnou rovnoběžkou rovník. Jde-li o rovnoběžku na severní polokouli, pak nejkratší cesta je na sever od ní; pokud je na jižní polokouli, je nejkratší cesta na jih od ní.

Proč tedy loď nepluje po orthodromě, tedy po hlavní kružnici? Jsou k tomu praktické důvody. Pro navigaci lodi je velmi důležitá velikost úhlu, který svírá její dráha s poledníkem, na němž loď právě je. (Úhel dvou křivek v jejich společném bodě P je úhel, který svírají jejich tečny v bodě P .) Tato velikost úhlu se nazývá *kurs lodi*; toto slovo jistě znáte z dobrodružných knih o námořnících. Pokud hlavní kružnice na povrchu Země není zrovna rovník nebo kružnice tvořená dvojicí protilehlých poledníků, svírá s různými poledníky úhly různých velikostí. Kdyby měla loď plout po takové kružnici, její kurs by se musel stále měnit.

Praktičtější je tedy plout po takové spojnici bodů A a B , která sice není nejkratší, ale zato má tu vlastnost, že velikost úhlu, který svírá s poledníkem, je ve všech jejích bodech konstantní. Loď má tedy stálý kurs a říkáme, že pluje po *loxodromě*.

Pokud body A a B leží na téže rovnoběžce, je cesta po loxodromě cestou po oblouku této rovnoběžky; podobně je tomu tehdy, leží-li body A a B na témže poledníku. V jiných případech však loď nepluje po oblouku kružnice, ale po oblouku křivky, kterou si můžeme představit tak, že jaksi hadovitě ovíjí zeměkouli.

Ukázali jsme si jednu zajímavost z odvětví geometrie, které zkoumá útvary ležící na kulové ploše. Toto odvětví se nazývá sférická geometrie. Má velký význam pro astronomii, námořní plavbu a letectví.

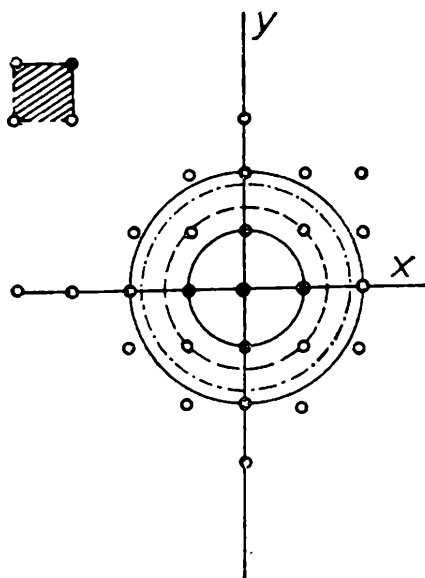
Geometrie pomáhá řešit algebraické úlohy

JAROSLAV HÁJEK, student MFF UK Praha

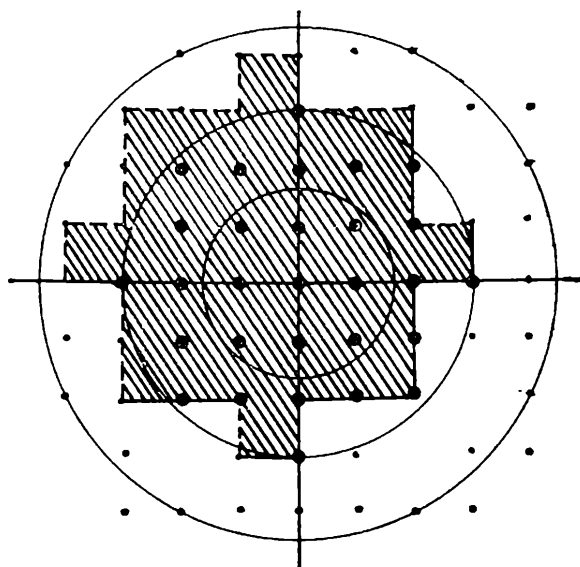
Všimněme si, jak geometrie pomáhá řešit tuto úlohu:

Určete počet všech řešení nerovnice $x^2 + y^2 \leq n$ v oboru celých čísel, jestliže n je přirozené číslo.

Představíme-li si grafické znázornění dvojic x, y celých čísel, napadne nás, že počet řešení nerovnice $x^2 + y^2 \leq n$ udává počet bodů s celočíselnými souřadnicemi, tzv. *mřížových bodů*, v kruhu o poloměru $\sqrt{n}$ a o středu v počátku kartézské soustavy souřadnic (obr. 1).



Obr. 1



Obr. 2

Označíme-li $F(n)$ počet řešení dané nerovnice, získáme z obr. 1 hodnoty $F(1) = 5$, $F(2) = 9$ atd. Pokusme se nejprve o odhad $F(n)$ na základě geometrické představy o „hustotě“ mřížových bodů; ty jsou v rovině rovnoměrně rozloženy; každému můžeme přiřadit jeden jednotkový čtverec bez jeho dvou stran. (V obr. 1 je vyšrafován vnitřek čtverce, který je přiřazen mřížovému bodu vyznačenému plným kroužkem.) To znamená, že na jednotku obsahu připadá průměrně jeden mřížový bod, odhadneme tedy, že $F(n) \doteq \pi n$.

Pokusme se tento odhad ozřejmit jinak; představme si v rovině s kartézskou soustavou souřadnic tři soustředné kruhy o poloměrech

$$\sqrt{n} - \sqrt{2}, \sqrt{n}, \sqrt{n} + \sqrt{2}$$

Na obr. 2 jsou vyznačeny tyto kruhy pro $n = 9$, dále jsou vyšrafovány všechny čtverce, přiřazené mřížovým bodům, které leží v kruhu o poloměru $\sqrt{n}$. Sjednocením těchto $F(n)$ čtverců je obrazec, který leží v kruhu o poloměru $\sqrt{n} + \sqrt{2}$; třetí kruh s poloměrem $\sqrt{n} - \sqrt{2}$ je naopak obsažen v tomto obrazci. Pro obsahy porovnávaných útvarů zřejmě platí

$$\pi(\sqrt{n} - \sqrt{2})^2 < F(n) < \pi(\sqrt{n} + \sqrt{2})^2;$$

po několika úpravách získáme nerovnosti

$$\begin{aligned} \pi(n + 2 - 2\sqrt{2n}) &< F(n) < \pi(n + 2 + 2\sqrt{2n}), \\ \pi n - 2\pi(\sqrt{2n} + 1) &< F(n) < \pi n + 2\pi(\sqrt{2n} + 1), \\ |F(n) - \pi n| &< 2\pi(\sqrt{2n} + 1). \end{aligned}$$

Tato poslední nerovnost není přesným výsledkem; neuvádí přesnou hodnotu $F(n)$, ale odhad.

Pokud znáte už pojem limity posloupnosti, můžete vyjádřit z předposledního řádku podíly

$$\frac{\pi n - 2\pi(\sqrt{2n} + 1)}{n} < \frac{F(n)}{n} < \frac{\pi n + 2\pi(\sqrt{2n} + 1)}{n}$$

a vypočítat limity krajních zlomků; první výpočet

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi n - 2\pi(\sqrt{2n} + 1)}{n} &= \pi - \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right) = \\ &= \pi - 2\pi(0 + 0) = \pi \end{aligned}$$

ukazuje, že i zlomek napsaný zcela napravo má stejnou limitu. Můžeme tedy vyvodit závěr, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n)}{n} = \pi, \quad F(n) \doteq \pi n \text{ pro velká } n.$$

Cvičení

1. Určete přesný počet celočíselných řešení nerovnice $x^2 + y^2 \leq 100$ a porovnejte ho s odvozeným odhadem.
2. Určete přibližné počty celočíselných řešení nerovnic při velkých n ,
c: a) $x^2 + y^2 + z^2 \leq n$, b) $ax^2 + by^2 \leq c$.

Profesor Ypsilon na Velké kunratické

RNDr. EMIL CALDA, UK Praha

Matematik X.Ypsilon,¹ známý přívrženec a² aktivní provozovatel běhu pro kondici a pro zdraví, se v místě startu 47. ročníku Velké kunratické, konaného v neděli 9. listopadu 1980, rozvíčoval poněkud zachmuřeně. Příčinou jeho chmur nebyl blížící se start a očekávání běhu členitým terénem v délce přes tři kilometry, ale obavy, zda jeho studenti vyřeší matematickou úlohu, která ho při pozorování předstartovního hemžení závodníků se startovními čísly na prsou napadla:

Kolik cifer potřebovali organizátoři k napsání startovních čísel pro všechny účastníky kategorie mužů a veteránů?

Víme-li, že v uvedeném ročníku startovalo v této kategorii 2212 běžců, pak počet cifer potřebných k napsání všech startovních čísel pro

ně určíme snadno: startovních čísel jednociferných je právě 9, dvouciferných 90, trojčiferných 900 a čtyřčiferných $2212 - 999 = 1213$, takže cifer je zapotřebí

$$9 + 2.90 + 3.900 + 4.1213 = 7741.$$

Vyřešíme však tento příklad i v obecném případě n startujících? Pokusme se o to!

Určíme nejprve počet cifer potřebných k zápisu přirozeného čísla n , a to takto: víme, že existuje jediné přirozené číslo k takové, že

$$10^k \leq n < 10^{k+1};$$

počet cifer čísla n je pak zřejmě roven $k + 1$. (Pokročilejší z vás si mohou zdůvodnit, že počet cifer čísla n je roven charakteristice dekadického logaritmu čísla n zvětšené o jednu, tj. $1 + [\log n]$, kde hranatá závorka znamená celou část čísla $\log n$.)

Vypočteme dále počet všech přirozených čísel nejvýše rovných n , která obsahují též počet $k + 1$ cifer jako číslo n ; tento počet je roven rozdílu

$$n - \underbrace{99 \dots 9}_k = n - (10^k - 1).$$

Pro zápis všech přirozených čísel nejvýše rovných n , jež mají též počet cifer jako $(k + 1)$ — ciferné číslo n , je tedy celkový počet cifer roven

$$(n + 1 - 10^k)(k + 1).$$

Počet cifer potřebných k zápisu všech přirozených čísel, která mají nejvýše k cifer, tj. která mají méně cifer než číslo n , je roven součtu

$$s = 1.9 + 2.90 + 3.900 + \dots + (k - 1) \cdot 9 \cdot 10^{k-2} + \\ + k \cdot 9 \cdot 10^{k-1}.$$

Vynásobíme-li tuto rovnost deseti, dostaneme

$$10s = 1.90 + 2.900 + 3.9000 + \dots + (k - 1) \cdot 9 \cdot 10^{k-1} + k \cdot 9 \cdot 10^k$$

a jejím odečtením od rovnosti původní máme

$$-9s = 1.9 + 1.90 + 1.900 + \dots + 1 \cdot 9 \cdot 10^{k-2} + 1 \cdot 9 \cdot 10^{k-1} - \\ - k \cdot 9 \cdot 10^k.$$

Sečtením prvních k členů součtu na pravé straně poslední rovnosti a po jednoduché úpravě je

$$s = k \cdot 10^k - \frac{1}{9}(10^k - 1).$$

Pro počet cifer potřebných k zapsání všech startovních čísel tak dostáváme

$$k \cdot 10^k - \frac{1}{9}(10^k - 1) + (n + 1 - 10^k)(k + 1),$$

což ještě upravíme na výsledný tvar

$$(n + 1)(k + 1) - \frac{1}{9} (10^{k+1} - 1) .$$

Provedeme-li kontrolu pro $n = 2212$, dostaneme souhlas s výsledkem předchozím:

$$(2212 + 1)(3 + 1) - \frac{1}{9} (10^{3+1} - 1) = 8852 - 1111 = 7741 .$$

Nejenže jsme rozptýlili obavy profesora Ypsilonu, ale přesvědčili jsme se vyřešením jeho příkladu o své dobré matematické kondici. Jak je to ale s kondicí fyzickou? Nepotřebovala by prověřit druhou listopadovou neděli letošního roku na 48. ročníku Velké kunratické? Vhodná trať je připravena nejen pro profesora Ypsilonu, ale i pro vás!

Rytmické etudy

RNDr. STANISLAV TRÁVNÍČEK, CSc., OLOMOUČ

V tomto článku se vydáme na malý matematický výlet do světa hudby. Každý, kdo hraje nebo se učí hrát na nějaký hudební nástroj, zná *etudy* — zpravidla jako více či méně pracná a méně či více zábavná cvičení hry různých posloupností tónů (posloupnosti složitější uvažovat nebudeme). Význam těchto cvičení je nesporný pro zlepšování techniky hry a pro automatizaci herních činností při získávání schopnosti „hraní z listu“

Když jsem sledoval hudební cvičení svých dětí, mladých (i když zdaleka už ne malých) muzikantů, pozoroval jsem, že rytmické změny zvládají mnohem obtížněji než změny melodické. Zvládnout hladce rytmickou nestabilitu, kdy několik taktů po sobě je rytmicky zcela odlišných, je zřejmě též věcí cvičení a návyků, ostatně pro moderní hudbu patrně velmi potřebných. Odsud není daleko k myšlence *rytmických etud*, tj. cvičení, v nichž by se záměrně procvičovaly různé „rytmické typy“ taktů, jdoucích po sobě bez vzájemné logické souvislosti. Melodické obraty a cvičení jsou tu už v jistém smyslu navíc a může jich být využito jako melodických etud nebo k melodickému zpříjemnění rytmických etud. Na obr. 1 je příklad krátké dvojhlase rytmičky „Znělka“.

Z matematického hlediska je tu hned několik problémů:



(a) Zavést vhodné zjednodušující předpoklady.

(b) V množině všech taktů vhodně definovat ekvivalenci taktů „rytmická shodnost“ a tím definovat i „rytmický typ taktu“ jako třídu ekvivalence — rytmické shodnosti.

(c) Nalézt vhodný a názorný způsob záznamu rytmických typů taktů.

(d) Zjistit počet všech možných rytmických typů taktů pro předepsaný takt (ve Znělce je to takt 3/4) a pro zadaný rozsah délky tónů.

Nazveme nyní *rytmická etuda* tu skladbu, v níž se záměrně střídají různé rytmické typy taktů, *úplná rytmická etuda* skladbu, v níž jsou za daných předpokladů zastoupeny všechny rytmické typy taktů, *minimální úplná rytmická etuda* je pak úplná rytmická etuda, v níž je každý rytmický typ taktu zastoupen právě jednou. Problém (d) tedy klade otázku, jaká je délka (počet taktů) minimální úplné rytmické etudy. V našem článku zaměříme svou pozornost zejména na řešení problému (d), který nám odpoví na otázku, nakolik je reálné požadovat, aby rytmické etudy byly úplné.

Další problém je rázu organizačního:

(e) Nalézt vhodný způsob, jak zjistit (a vypsat) všechny možné rytmické typy taktů, což by potřeboval skladatel úplných rytmických etud.

Poslední problém už raději nepovažujeme za matematický:

(f) Složit (úplné) rytmické etudy — za daných předpokladů, pro daný nástroj atd.

Nejprve se věnujme problémům (a) — (c). Zavedeme tyto zjednodušující předpoklady:

1. Budeme pracovat jen se skladbami s konstantním předepsaným taktem (např. C, 3/4, 2/4).

2. Za jednotku délky skladby považujeme takt (např. Znělka má 8 taktů). Neuvažujeme spojení posledního tónu taktu s prvním tónem taktu následujícího (legato ani ligaturou), tóny spojené legato uvnitř taktů však připouštíme a považujeme je za rytmicky odlišné od tónů nespojených.

3. Neuvažujeme dynamiku (sílu tónů), barvu tónů, staccato, melodické ozdoby atd., všechny tóny se berou v základní zapsané délce.

Jak víme, není hudební notace jednoznačná v tom smyslu, že různé zapsané takty mohou dát tentýž hudební výsledek. Proto předpokládáme standardizaci zápisu tak, že:

4. Všechny na sebe navazující pauzy v rámci jednoho taktu považujeme za pauzu jedinou, její délka je rovna součtu délek původních pauz.

5. Jestliže v rámci jednoho taktu jsou po sobě jdoucí tóny stejné výšky spojeny ligaturou, považujeme je za tón jediný a jeho délka je rovna součtu délek původních tónů.

Nyní si vytvoříme matematické prostředky pro rytmickou analýzu hudebních skladeb, tj. definujeme rytmické typy taktů a zvolíme vhodný zápis.

U každé skladby volíme za jednotku délky tónu délku tónu ve skladbě nejkratšího; zapíšeme ji číslem 1. Délky všech tónů lze pak vyjádřit přirozeným číslem, které udává násobek délky jednotkového tónu. Součet n délek všech tónů a pauz v taktu je tedy pro všechny takty skladby konstantní a udává, kolik může být v taktu jednotkových tónů a také, kolik jednotek má nejdelší možný tón; číslo n nazveme *relativní délka taktu*. Má-li např. skladba předepsán rytmus 3/4 a nejkratším tónem je tón osminový (jako ve Znělce), je $n = 6$ (maximální počet osminových tónů v 3/4 taktu). Je-li m počet tónů a pauz v taktu, je tedy $1 \leq m \leq n$.

Každý takt nyní zobrazíme jako m -tici čísel s oddělovacími znaky a s dále popsanou úpravou:

- tónu o délce p jednotek přiřadíme číslo p ($1 \leq p \leq n$);
- pauze o délce p jednotek přiřadíme symbol p' ;

— tato čísla zapíšeme v pořadí příslušných tónů;
 — jsou-li dva tóny spojeny legato, napíšeme mezi příslušná čísla pomlku, jinak čárku; čárkou oddělíme tóny od pauz;
 — takto zapsanou a upravenou m -tici čísel zapíšeme do závorek a nazveme *rytmický typ* (zobrazovaného) *taktu*.

Dva takty s týmž rytmickým typem nazveme *rytmicky shodné*. Vidíme, že rytmická shodnost je ekvivalence (při níž se abstrahuje od výšky tónů), třídou ekvivalence je množina všech taktů s týmž rytmickým typem.

Příklad. V symbolice, kterou jsme právě zavedli, zapíšeme píseň „Na tý louce zelený“, jež je v $3/4$ taktu, přičemž nejkratší tón je čtvrtový. Proto $n = 3$ a celá píseň je zobrazena takto:

(2, 1) (2, 1) (2, 1) (1, 2')
 (2, 1) (2, 1) (2, 1) (1, 2')
 (2, 1) (1—1, 1) (2, 1) (2, 1)
 (2, 1) (2, 1) (1, 1, 1) (1, 1, 1)
 (2, 1) (1—1, 1) (2, 1) (2, 1)
 (2, 1) (2, 1) (2, 1) (1, 2').

Uvedené posloupnosti rytmických typů skladby řekněme např. *rytmické schéma skladby*. Vidíme, že v rytmickém schématu této písně se vyskytují tyto rytmické typy taktů: (2, 1) (1, 2'), (1—1, 1), (1, 1, 1). Kolik je všech možných rytmických typů taktů pro $n = 3$? Zkuste je všechny nalézt a vypsát.

Jsou to: (3), (3'), (2, 1), (2—1), (2, 1'), (2', 1), (1, 2), (1—2), (1, 2'), (1', 2), (1, 1, 1), (1, 1—1), (1—1, 1), (1—1—1), (1, 1, 1'), (1—1, 1'), (1, 1', 1), (1', 1, 1), (1', 1—1), (1', 1, 1'), celkem 20 rytmických typů (přezpívejte si je na jednom až dvou tónech!). Zápisy (1—1', 1), (1', 1', 1) apod. by ovšem nedávaly žádný smysl, proč?

Jestliže změníme jednotku, např. zkrátíme na polovinu, změní se i relativní délka taktu (v tomto případě na dvojnásobek) a mění se i zápis rytmických typů.

Jestliže bychom v uvedeném příkladě zvolili za jednotku tón osminový, bylo by $n = 6$ a zápis písně by začínal: (4, 2), (4, 2), (4, 2), (2, 4'), atd. Všech možných rytmických typů taktů pro $n = 6$ už ovšem není 20, ale sortiment je mnohem bohatší. Např. píseň „Na tom našem dvoře“ začíná: (2, 1—1, 1—1), (3, 1, 2), (2, 2, 2), (3, 1, 2), (2, 1—1, 1—1), (2, 4'),...

Cvičení. Vypište rytmické schéma 1. i 2. hlasu Znělky; 1. takt 1. hlasu je (2, 2, 1—1), pokračujte. Všimněte si, že ve Znělce nejsou žádné dva takty rytmicky shodné.

Poznání rytmického schématu skladby má i praktický hudební význam: má-li hudebník nacvičit rytmicky obtížnější úsek skladby, je

vhodné, provede-li nejprve analýzu a nácvik rytmického schématu tohoto úseku skladby.

Rytmické schéma skladby se získá zobrazením taktů skladby, při němž se ztrácí melodický rozměr skladby. Proto nelze podle rytmického schématu rekonstruovat neznámou skladbu. U známých skladeb je to jiné. Některé mají tak charakteristické rytmické schéma, že se nám podaří skladbu podle rytmického schématu více či méně lehce uhodnout. Na tom je založena i jedna společenská hra, v níž se podle vytleskaného nebo monotónně vyzpívaného rytmického schématu písně hádá, o jakou píseň jde. Ověřte si, zda v dále vypsaném rytmickém schématu objevíte známou koledu:

(2, 1—1, 1—1) (2, 1—1, 1—1) (2, 1—1, 1—1) (2, 4')
 (2, 1—1, 1—1) (2, 1—1, 1—1) (2, 1—1, 1—1) (2, 4')
 (2, 1, 1, 1, 1) (2, 1, 1, 1, 1) (2, 1, 1, 1, 1) (2, 1, 1, 1, 1)
 (2, 1—1, 1—1) (2, 4').

Problémy (a) — (c) máme tedy nyní již v podstatě vyřešeny, takže můžeme přistoupit k řešení stěžejního problému (d).

Označme σ_n počet všech možných rytmických typů taktů pro relativní délku taktu n a dále pro $1 \leq m \leq n$ označme $\sigma_n(m)$ počet všech možných rytmických typů taktů, v nichž je právě m tónů nebo pauz při relativní délce taktu n .

Pro $n = 3$ jsme zjistili $\sigma_3(1) = 2$, $\sigma_3(2) = 8$, $\sigma_3(3) = 10$, $\sigma_3 = 20$, a to tak, že jsme všech 20 možných rytmických typů taktů vypsalí.

Zřejmě platí

$$\sigma_n = \sum_{m=1}^n \sigma_n(m). \quad (1)$$

Tím jsme problém výpočtu σ_n redukovali na problém výpočtu čísel $\sigma_n(m)$, který však rovněž není zcela jednoduchý. Navíc pro velká n , m je i experimentální zjišťování čísla $\sigma_n(m)$ velmi pracné a mimořádně náročné na systematickosti a pozornost.

Na množině $\mathbf{M}$ všech rytmických typů taktů definujme nyní ekvivalenci $\mathbf{E}$, při níž abstrahujeme od délky tónů a pauz. Dostaneme třídy rytmických typů taktů, jež budeme označovat symboly v hranatých závorkách, přičemž

- místo čísel udávajících délku tónu v rytmickém typu taktu budeme v zápisu tříd psát jedničky,
- místo symbolů s čárkou (pauz) v rytmickém typu taktu budeme v zápisu tříd psát nuly,
- pomlky a čárky zachováme.

Ekvivalenci $\mathbf{E}$ ilustrujeme na příkladě, který bude v tomto případě názornější, než kdybychom podali přesnou slovní definici. Uvažujme znovu případ $n = 3$, v němž má množina $\mathbf{M}$ 20 prvků.

Pro $m = 1$ jsou v množině $\mathbf{M}$ dva prvky: (3) , $(3')$, v ekvivalenci $\mathbf{E}$ jim odpovídají dvě třídy ekvivalence: $[1]$, $[0]$.

Pro $m = 2$ je v množině $\mathbf{M}$ 8 prvků, z nichž vzniknou dvouprvkové třídy ekvivalence: $[1, 1] = \{(2, 1), (1, 2)\}$, $[1-1] = \{(2-1), (1-2)\}$, $[1, 0] = \{(2, 1'), (1, 2')\}$, $[0, 1] = \{(2', 1), (1', 2)\}$.

Pro $m = 3$ dostáváme 10 jednoprvkových tříd: $[1, 1, 1]$, $[1, 1-1]$, $[1-1, 1]$, $[1-1-1]$, $[1, 1, 0]$, $[1-1, 0]$, $[1, 0, 1]$, $[0, 1, 1]$, $[0, 1-1]$, $[0, 1, 0]$.

Význačnou vlastností tříd rytmických typů taktů je jejich nezávislost na n , tj. nezávislost jejich počtu i jejich formálního zápisu. Pro každé $n \geq 3$ existuje např. třída $[1, 1, 0]$. Počet prvků této třídy už ovšem na n závisí. Pro $n = 3$ je uvedená třída $[1, 1, 0] = \{(1, 1, 1')\}$ jednoprvková, pro $n = 4$ obsahuje 3 prvky příslušné množiny $\mathbf{M}$, takže je $[1, 1, 0] = \{(2, 1, 1'), (1, 2, 1'), (1, 1, 2')\}$; pro $n = 6$ obsahuje již 10 prvků příslušné množiny $\mathbf{M}$ a to: $(4, 1, 1')$, $(1, 4, 1')$, $(1, 1, 4')$, $(3, 2, 1')$, $(3, 1, 2')$, $(2, 3, 1')$, $(2, 1, 3')$, $(1, 3, 2')$, $(1, 2, 3')$, $(2, 2, 2')$. K tomuto problému se ještě vrátíme.

Budeme se nyní zabývat třídami [...] rytmických typů taktů. Pro dané m označme: $\mathbf{S}_m$ — množinu všech tříd rytmických typů taktů, $\mathbf{P}_m \subset \mathbf{S}_m$ množinu všech tříd, v jejichž zápise je na posledním místě 0, $\mathbf{R}_m \subset \mathbf{S}_m$ množinu všech tříd, v jejichž zápise je na posledním místě 1. Dále označme $s(m)$, $p(m)$, $r(m)$ počty prvků množin $\mathbf{S}_m$, $\mathbf{P}_m$, $\mathbf{R}_m$. Zřejmě platí $\mathbf{P}_m \cap \mathbf{R}_m = \emptyset$, $\mathbf{P}_m \cup \mathbf{R}_m = \mathbf{S}_m$, takže

$$s(m) = p(m) + r(m) \quad (2)$$

Ověřte podle předchozích příkladů, že

$$p(1) = 1, r(1) = 1, \quad (3)$$

tedy $s(1) = 2$, podobně $p(2) = 1$, $r(2) = 3$, $s(2) = 4$, $p(3) = 3$, $r(3) = 7$, $s(3) = 10$.

Ukážeme si nyní způsob, jak lze pomocí množin $\mathbf{P}_m$, $\mathbf{R}_m$ získat množiny $\mathbf{P}_{m+1}$, $\mathbf{R}_{m+1}$, tedy i $\mathbf{S}_{m+1}$. Tuto konstrukci použijeme jednak při řešení problému (d), neboť nám umožní postupný výpočet čísel $p(m)$, $r(m)$, $s(m)$, jednak nám umožní řešit problém (e), jak ještě připomeneme.

Platí $\mathbf{P}_1 = \{[0]\}$, $\mathbf{R}_1 = \{[1]\}$. Mějme nyní množinu $\mathbf{S}_m$. Z každého prvku $[...] \in \mathbf{S}_m$ vytvoříme připojením 0 nebo 1 prvky množiny $\mathbf{S}_{m+1}$ takto:

- 1) Z prvků $[..., 0]$ množiny $\mathbf{P}_m$ vytvoříme připojením čísla 1 prvky $[..., 0, 1] \in \mathbf{R}_{m+1}$
- 2) Z prvků $[... 1]$ množiny $\mathbf{R}_m$ vytvoříme připojením
 - 0 prvky $[... 1, 0] \in \mathbf{P}_{m+1}$,
 - 1 prvky $[... 1, 1] \in \mathbf{R}_{m+1}$ a
 - 1 prvky $[... 1-1] \in \mathbf{R}_{m+1}$.

Přitom z různých prvků S_m jsou vytvořeny různé prvky množiny S_{m+1} a dostaneme tak všechny prvky množiny S_{m+1} . Proto lze z popsané konstrukce učinit tyto závěry o počtech prvků:

$$p(m+1) = r(m), \quad (4)$$

$$r(m+1) = p(m) + 2 \cdot r(m). \quad (5)$$

Rekurentní formule (4), (5) spolu s (3) nám již umožňují postupný výpočet $p(m)$, $r(m)$. Ještě však provedeme tyto úpravy: V rovnici (4) zvětšíme m o 1, takže $p(m+2) = r(m+1)$ a dosadíme za $r(m+1)$ z rovnice (5): $p(m+2) = p(m) + 2 \cdot r(m)$. Dosadíme-li sem za $r(m)$ z rovnice (4), máme

$$p(m+2) = 2 \cdot p(m+1) + p(m). \quad (6)$$

Jestliže nyní v (5) zvětšíme m o 1 a dosadíme za $p(m+1)$ ze (4), máme

$$r(m+2) = 2 \cdot r(m+1) + r(m). \quad (7)$$

Pro $m = 1, 2, 3, \dots$ tak tvoří hodnoty $p(m)$, $r(m)$ posloupnosti, kde každý člen lze vypočítat ze dvou členů předchozích; ze (3), (4), (5) lehce vypočteme počáteční hodnoty $p(1) = p(2) = 1$, $r(1) = 1$, $r(2) = 3$, které spolu s rekurentními formulami (6), (7) stačí k výpočtu členů obou posloupností:

$$\begin{aligned} \{p(m)\} &= 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, \dots \\ \{r(m)\} &= 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, \dots \end{aligned}$$

Hodnoty $s(m)$ lze nyní získat z předchozích hodnot sečtením podle vzorce (2) nebo i přímo: po sečtení (6) a (7) a po úpravě je

$$s(m+2) = 2 \cdot s(m+1) + s(m), \quad (8)$$

což spolu s počátečními hodnotami $s(1) = 2$, $s(2) = 4$ dává možnost přímého výpočtu:

$$\{s(m)\} = 2, 4, 10, 24, 58, 140, 338, 816, \dots$$

Výpočet $s(m)$ bychom nyní mohli již sice opustit, neboť jsme pro něj získali prakticky vhodnou metodu, ale ještě u tohoto problému chvíli setrváme, protože celá záležitost začíná být zajímavá po stránce matematické.

Vidíme, že všechny tři posloupnosti $\{p(m)\}$, $\{r(m)\}$, $\{s(m)\}$ mají společnou vlastnost:

$$x(m+2) = 2 \cdot x(m+1) + x(m). \quad (9)$$

Je zřejmé, že volbou počátečních hodnot $x(1)$, $x(2)$ jsou všechny členy posloupnosti $\{x(m)\}$ už dány jednoznačně. Množinu všech posloupností $\{x(m)\}$, které vyhovují rekurentní formuli (9), označme L ; je tedy $\{p(m)\} \in L$, $\{r(m)\} \in L$, $\{s(m)\} \in L$. Z (9) plyne: je-li $\{u(m)\} \in L$ libovolná posloupnost, pak pro libovolnou konstantu c je též $\{c \cdot u(m)\} \in L$ a dále: jsou-li $\{u(m)\} \in L$, $\{v(m)\} \in L$ libovolné posloupnosti, pak $\{u(m) + v(m)\} \in L$. Podle těchto vlastností říkáme, že L tvoří *lineární prostor*.

Zajímejme se o to, obsahuje-li L také nějakou geometrickou posloupnost tvaru $\{q^m\}$, kde kvocient $q \neq 0$ je vhodné reálné číslo. Pokud ano, pak z (9) plyne: $q^{m+2} = 2 q^{m+1} + q^m$, tj. $q^2 - 2q - 1 = 0$. Pro q tak dostáváme kvadratickou rovnici s kořeny $q_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Lehce se přesvědčíme, že geometrické posloupnosti $\{(1 + \sqrt{2})^m\}$, $\{(1 - \sqrt{2})^m\}$ vyhovují rovnici (9), a jsou tedy skutečně prvky množiny L .

Z teorie lineárních prostorů plyne, že L je prostor dvojrozměrný, tedy že každý jeho prvek lze vyjádřit jako lineární kombinaci dvou lineárně nezávislých prvků, přičemž získané geometrické posloupnosti jsou takovými lineárně nezávislými prvky. (Čtenář, který se s lineárními prostory dosud nesetkal, se bez nich v tomto článku již obejde.) Hledejme tedy čísla c_1, c_2 tak, aby platilo

$$s(m) = c_1 (1 + \sqrt{2})^m + c_2 (1 - \sqrt{2})^m \quad (10)$$

Pro $m = 1$ a $m = 2$ máme z (10)

$$\begin{aligned} 2 &= c_1 (1 + \sqrt{2}) + c_2 (1 - \sqrt{2}), \\ 4 &= c_1 (3 + 2\sqrt{2}) + c_2 (3 - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Řešením této soustavy s neznámými c_1 a c_2 dostaneme $c_1 = 1/\sqrt{2}$, $c_2 = -1/\sqrt{2}$ a podle (10)

$$s(m) = \frac{(1 + \sqrt{2})^m - (1 - \sqrt{2})^m}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Tento vzorec je velmi zajímavý a dostali jsme se jím již velmi daleko od původní hudební tematiky. Všimněme si, že výpočet $s(m)$ podle vzorce (11) již není vázán na znalosti předchozích členů posloupnosti $\{s(m)\}$. Po praktické stránce však vzorec (11) není nejvhodnější, ještě jej upravíme. Podle binomické věty je

$$(1 \pm \sqrt{2})^m = 1 \pm \binom{m}{1}\sqrt{2} + \binom{m}{2}2 \pm \binom{m}{3}2\sqrt{2} + \binom{m}{4}2^2 \pm$$

(dopíšte sami). Dosadíme-li do (11), pak se v čitateli pravé strany (11) ruší všechny liché členy (jež neobsahují $\sqrt{2}$) a zdvojnásobují se členy sudé (obsahující $\sqrt{2}$). Po zkrácení s $\sqrt{2}$ ve jmenovateli máme

$$s(m) = 2\binom{m}{1} + 2^2\binom{m}{3} + 2^3\binom{m}{5} + 2^4\binom{m}{7} + \dots + 2^k\binom{m}{2k-1} + \quad (12)$$

přičemž se samozřejmě pro výpočet $s(m)$ berou všechny ty členy součtu (12), kde $2k - 1 \leq m$, tj. $k \leq (m + 1)/2$. Označme K největší možné k pro dané m . Z předchozí nerovnosti plyne, že $K = [(m + 1)/2]$, kde hranaté závorky označují celou část čísla $(m + 1)/2$. Tak lze zapsat zkráceně:

$$s(m) = \sum_{k=1}^K 2^k \binom{m}{2k-1}. \quad (13)$$

Ověřme vzorec výpočtem např. pro $m = 6$: $s(6) = 2 \cdot \binom{6}{1} + 2^2 \cdot \binom{6}{3} + 2^3 \cdot \binom{6}{5} = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 20 + 8 \cdot 6 = 140$, výsledek souhlasí s předchozím výpočtem $s(6)$. Čtenář má nyní pro výpočet $p(m)$, $r(m)$, $s(m)$ řadu možností.

V tabulce 1 jsou výsledky pro $m = 1$ až $m = 16$.

tabulka 1

m	$p(m)$	$r(m)$	$s(m)$
1	1	1	2
2	1	3	4
3	3	7	10
4	7	17	24
5	17	41	58
6	41	99	140
7	99	239	338
8	239	577	816
9	577	1 393	1 970
10	1 393	3 363	4 756
11	3 363	8 119	11 482
12	8 119	19 601	27 720
13	19 601	47 321	66 922
14	47 321	114 243	161 564
15	114 243	275 807	390 050
16	275 807	665 857	941 664

Každý prvek $[\dots] \in S_m$ jako třída ekvivalence E na množině M obsahuje pro dané m určitý počet $t_{n,m}$ prvků množiny M (rytmických typů taktů), týž pro všechny prvky z S_m . Chceme nyní určit číslo $t_{n,m}$.

Uvažujme např. $n = 8$, $m = 4$ a třídu $(1, 1-1, 0]$. Všechny rytmické typy taktů z této třídy jsou zapsány pomocí čtyř přirozených čísel, jejichž součet je 8; např. máme: $(5, 1-1, 1')$, $(4, 2-1, 1')$, $(4, 1-2, 1')$, $(4, 1-1, 2')$, $(3, 3-1, 1')$, $(3, 2-2, 1')$, $(3, 2-1, 2')$, atd. Jde tedy o nalezení všech způsobů vyjádření čísla 8 jako součtu čtyř přirozených čísel.

Číslo $t_{n,m}$ tedy udává, kolika způsoby lze vyjádřit číslo n jako součet m přirozených sčítanců. Určení čísla $t_{n,m}$ je posledním vážnějším matematickým problémem tohoto článku.

Abychom nezatěžovali výklad příliš mnoha písmeny ve vzorcích při obecném postupu, což by zde bylo spíše jen překážkou srozumitelnosti, ukážeme postup výpočtu nejprve na příkladě (opět $n = 8$, $m = 4$). Každému součtu $8 = 5 + 1 + 1 + 1$, $4 + 2 + 1 + 1$, $4 + 1 + 2 + 1$, $4 + 1 + 1 + 2$, $3 + 3 + 1 + 1$, $3 + 2 + 2 + 1$, $3 + 2 + 1 + 2$, atd. (umíte vypsat všechny možnosti?) odpovídá čtveřice částečných součtů, které zapíšeme např. takto: $\langle 5, 6, 7, 8 \rangle$, $\langle 4, 6, 7, 8 \rangle$, $\langle 4, 5, 7, 8 \rangle$, $\langle 4, 5, 6, 8 \rangle$, $\langle 3, 6, 7, 8 \rangle$, $\langle 3, 5, 7, 8 \rangle$, $\langle 3, 5, 6, 8 \rangle$, atd. Vlastnosti těchto čtveřic: na 4. místě je vždy číslo 8, na prvních třech místech je trojice různých prvků množiny $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Je zřejmé, že každému rozkladu čísla 8 na součet čtyř přirozených sčítanců odpovídá právě jedna tříprvková podmnožina množiny N_7 a také naopak, každé tříprvkové podmnožině množiny N_7 odpovídá právě jeden rozklad čísla 8 na součet čtyř sčítanců. Např. podmnožině $\{6, 1, 4\}$ ($= \{1, 4, 6\}$) odpovídá čtveřice částečných součtů $\langle 1, 4, 6, 8 \rangle$, a tedy rozklad $8 = 1 + 3 + 2 + 2$. Číslo $t_{8,4}$ tak udává, kolik tříprvkových podmnožin lze vytvořit ze sedmiprvkové množiny N_7 . Počet těchto podmnožin, jak známe ze školy z kombinatoriky, je $\binom{7}{3} = 35$.

V obecném případě vyjadřuje číslo $t_{n,m}$ počet všech $(m-1)$ -prvkových podmnožin $(n-1)$ -prvkové množiny $N_{n-1} = \{1, 2, \dots, n-1\}$ (provedte podrobněji!). Proto

$$t_{n,m} = \binom{n-1}{m-1}. \quad (14)$$

Nyní lze vypočítat číslo $\sigma_n(m)$ jako počet prvků v $s(m)$ třídách, z nichž každá má $t_{n,m}$ prvků, tj. $\sigma_n(m) = t_{n,m} \cdot s(m)$, takže podle (13), (14) máme

$$\sigma_n(m) = \binom{n-1}{m-1} \sum_{k=1}^K 2^k \binom{m}{2k-1}. \quad (15)$$

Z (1) a (15) pak dostáváme závěrečný vzorec

$$\sigma_n = \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} \sum_{k=1}^K 2^k \binom{m}{2k-1}, \quad (16)$$

kde n je relativní délka taktu a K je celá část čísla $\frac{m+2}{1}$. Vzorec (16), který udává počet všech rytmických typů taktů pro dané n , řeší problém (d). V tabulce 2 je ukázka výpočtu čísel σ_6 a σ_8 .

Úplná minimální rytmická etuda s nejkratší notou osminovou by tedy měla v $3/4$ rytmu celkem 792 taktů, v rytmu $4/4$ pak 9232 taktů. Pro představu: kdybychom je hráli rychlostí půltón/sekundu (tj. animato), hráli bychom $3/4$ etudu 19 minut a 48 sekund, $4/4$ etudu již 5 hodin 7 mi-

tabulka 2

m	$s(m)$	$t_{6,m}$	$\sigma_6(m)$	$t_{8,m}$	$\sigma_8(m)$
1	2	1	2	1	2
2	4	5	20	7	28
3	10	10	100	21	210
4	24	10	240	35	840
5	58	5	290	35	2030
6	140	1	140	21	2940
7	338			7	2366
8	816			1	816
			$\sigma_6=792$	$\sigma_8 = 9232$	

tabulka 3

n	<i>rytmus</i>	σ_n	<i>čas přehrávky</i>
2	2/4	6	6 s
3	3/4	20	30 s
4	C	68	2 min 16 s
6	3/4	792	19 min 48 s
8	C	9 232	5 hod 7 min 44 s
12	3/4	1 254 464	21 dní 18 hod 41 min 36 s
16	C	170 459 392	téměř 10 let a 10 měsíců

nut a 44 sekund. V tabulce 3 uvádíme pro zajímavost i další případy (nejkratší nota je pro $n = 2, 3, 4$ čtvrtová, pro $n = 6, 8$ osminová, pro $n = 12, 16$ šestnáctinová).

Vidíme, že pro menší n je vytvoření úplných rytmických etud možné, zatím co pro větší n je složení i používání úplných rytmických etud prakticky vyloučeno. Nám však v podstatě nešlo o jejich přímou realizaci, ale jen o získání potřebných stavebních kamenů, z nichž hudební pedagog může užitečné rytmické etudy vystavět.

K tomu je třeba vyřešit problém (e), který však již dále rozebírat nebudeme, neboť jak jsme již upozorňovali, je metoda výpisu všech možných rytmických typů taktů obsažena již v postupu použitém při odvozování vzorce (16). Jen připomeňme, že je založena na dvou krocích: 1. Výpis tříd rytmických typů taktů pro $m = 1$ až n .

2. Z každé třídy se vytvoří $\binom{n-1}{m-1}$ rytmických typů taktů metodou vyjádření čísla n jako součtu m přirozených čísel.

Tyto výpočty by bylo možno svěřit i počítači, dokonce i kompozici rytmických etud, ale tím se nyní nezabývejme.

Problém (f) řešit nebudeme. Na obr. 1 je rytmická etuda Znělka jen malou ukázkou pro $n = 6$, ovšem zdaleka nejde o úplnou rytmickou etudu. Ta by musela mít nejméně 792 taktů, zatímco Znělka jich z toho má asi jen 2 %.

Čísla σ_n naznačují nesmírné rytmické možnosti při vytváření hudebních děl. Uvažujme např. $n = 8$, skladbu s taktem 4/4 s nejkratším tónem osminovým. Pro první takt je $\sigma_8 = 9232$ možností volby rytmického typu, pro druhý takt rovněž, takže u skladby se dvěma takty je to již $9232^2 = 85$ miliónů možností. Přitom řadu dalších jsme svými zjednodušujícími předpoklady zanedbali. Uvedme příklad. Pripusťme např. spojování legato not různých taktů. Použijeme-li při výpočtech počtu rytmických typů taktů hodnoty $r(m)$ místo $s(m)$, zjistíme, že celkem 6528 rytmických typů taktů končí tónem (zbývajících 2704 končí pauzou) a podobně 6528 rytmických typů taktů začíná tónem. Při možnosti legata mezi posledním tónem 1. taktu a 1. tónem 2. taktu tak přibývá dalších $6528^2 \doteq 43$ miliónů možností. Pro více taktů dostáváme přímo astronomická čísla, např. (stále pro $n = 8$) pro skladbu se 16 takty (již bez legata mezi takty) je to $9232^{16} \doteq 2,8 \cdot 10^{63}$ případů. Představy o bohatosti možností hudební kompozice bývají obvykle spojovány s možnostmi melodickými. Vidíme však, že i po rytmické stránce, při abstrahování melodie, jsou teoretické možnosti nepředstavitelně veliké. Ovšem prakticky, pokud nejde zrovna o rytmické etudy, je hudební skladatel vázán ještě pravidly hudební kompozice, hudebním slohem, zvyklostmi, záměrem atd. (a to necháváme stranou vlastní estetickou a emocionální stránku hudební tvorby), kdy třeba opakování rytmických typů taktů je významnou složkou účinku hudebního díla. Na druhé straně však má skladatel k dispozici i další rytmické prostředky, které jsme pro zjednodušení výpočtů v našich úvahách nepřipouštěli.

Na závěr děkuji hudebnímu pedagogu a skladateli doc. dr. Ladislavu Danielovi, CSc., za zájem, s jakým si přečetl můj rukopis, a za cenné rady, jimiž přispěl ke zlepšení textu. Potvrdil, že výběr rytmických typů taktů pro vytvoření rytmické etudy musí spočívat na znalostech, zkušenostech a mistrovství hudebního pedagoga — tvůrce etudy, který přitom přihlíží k frekvenci jednotlivých rytmických typů taktů v živé hudbě (vynechání neobvyklých typů, vícenásobné použití častých a rytmicky obtížných typů), k různým způsobům notace i k dalším okolnostem, od nichž jsme v našich úvahách abstrahovali. Přes tento vysoce odborný hudební dohled najde zasvěcený čtenář v textu několik nepřesností v hudební terminologii, které však byly ponechány úmyslně pro zachování zvolené volnosti ve vyjadřování a srozumitelnosti i pro čtenáře jen s povšechnou hudební průpravou.

Naše malá lekce z anatomie hudby končí. Matematických problémů kolem hudby je velmi mnoho, některé byly naznačeny i v tomto článku, mnoho dalších napadlo jistě i pozorného čtenáře. Jistě jste poznali, že nám nešlo jen o rytmické etudy, ohlášené v názvu článku, ale že to byla též příležitost k hlubšímu poznání rytmické stránky hudby matematickými metodami i k hlubšímu poznání, jak se uplatňují matematické metody při studiu reálného světa. Zároveň jsme podpořili názor, že matematika a hudba se docela dobře snášejí.

FYZIKA

Fyzik v průmyslové praxi - II.

Prof. RNDr. LADISLAV ZACHOVAL, člen korespondent ČSAV, Praha

Život fyzika v praxi se neskládá jen z takových operací, při nichž fyzik vytahuje technikům trny z paty. Denní fyzikův život spočívá většinou v práci ve zkušební laboratoři, kde se fyzikálními nebo technickými metodami zkoušejí a proměřují vlastnosti zhotovených výrobků, jakož i materiálů pro výrobu, případně vlastnosti nových cizích výrobků pro porovnání s vlastními výrobky atd. Ve většině případů se to dělá metodami, které jsou pro dané odvětví předepsány normou.

Někdy se ovšem hledají i nové nebo přesnější metody. A to bývá pro fyzika velmi zajímavé a podnětné. Fyzik v praxi musí také sledovat literaturu, a to nejen knižní a časopiseckou, ale i patentovou v daném oboru. K fyzikově práci patří i účast na vyřizování reklamací a zlepšovacích návrhů, i tam bývá pro fyzika mnoho podnětů k zamyšlení.

Při všech uvedených pracích se ukazuje, jak velký význam pro praxi má klasická fyzika. Není to doplňková nebo okrajová disciplína; ve velmi mnoha průmyslových odvětvích je dokonce klasická fyzika víc platná než moderní kvantová či relativistická.

Denní fyzikovy práce, leckdy zdánlivě jednotvárné, mu dávají dobré podněty k hlubšímu studiu jak metod, tak i látek a k další vědecké práci. K té je však čas teprve tehdy, když jsou splněny požadavky techniků, ale čas na ni je.

K dvěma příkladům z praxe, které jsem uvedl v první části článku, bych rád dodal pár slov. Jsou dvě velká nebezpečí, která vždy hrozí fyzikům v praxi. To první spočívá v tom, že někteří pracovníci v závodě mají neomezenou, i když neodůvodnitelnou, *důvěru* ve fyzikovu schop-

nost v yřešit vše, na co technik nestačí. A to druhé nebezpečí je v tom, že někteří pracovníci v témž závodě mají naprostou, i když neodůvodnitelnou, *nedůvěru* k fyzikovi, a jsou přesvědčeni, že nedovede vyřešit nic. Obojí je pro fyzika překážkou v práci a obojí vede k situacím nepříjemným a leckdy snad i komickým.

Tak například vypukl poplach v továrně na výrobu fotografických desek a filmů. Zákazníci totiž začali vracet zakoupené fotografické desky od určitého emulsního čísla s odůvodněním, že tyto desky jsou na okrajích méně citlivé než uprostřed své plochy. Pozdější reklamace tvrdily, že na okrajích jsou desky úplně necitlivé.

Fyzikální sensitometrické zkoušky *) i praktické zkoušky (snímky v ateliéru) provedené před odesláním reklamovaných desek z továrny ukazovaly, že desky jsou dobré jakosti a bez závad. A tak to začalo. „Doktore, musíte s tím něco udělat. Vždyť dobře víte, že jedna várka (tj. desky s týmž emulsním číslem) stojí závod pěkných pár desítek tisíc korun!“ Začaly tedy zkoušky fyzikální (sensitometrické), emulsní (fyzikální a fyzikálněchemické) a chemické podle fyzikova přání a s jeho spoluprací při interpretaci výsledků. Ale tyto zkoušky nevedly zdánlivě k ničemu. Nezbylo, než aby se fyzik změnil v detektiva a začal se na případ dívat i jinak než jako laboratorní pracovník. Přitom zjistil, že jediný rozdíl mezi staršími dobrými a novějšími vadnými deskami byl v tom, že ty vadné byly baleny do novějších krabiček. A dále, že ty novější krabice se od starších liší jedine tím, že při jejich výrobě bylo použito jiného lepidla. A to novější lepidlo se lišilo od staršího jen tím, že v něm bylo více formalinu než ve starším lepidle. To vedlo k závěru, že jde o vliv formalinu.

Avšak zde bylo cosi divného, protože formalinu se užívalo při výrobě fotografických materiálů odedávna a nikdy to nevedlo k potížím. Musely se tedy dělat další zkoušky, a nakonec se ukázalo, že příčinou znehodnocování desek je skutečně formalin použitý ve větším množství. Prokázalo se totiž, že reklamované desky nejsou u okrajů méně citlivé, ale že jsou přetvrzené vlivem výparů formalinu; proto na ně nemohla vývojka působit dosti rychle a později už vůbec ne. Desky nebyly u krajů dostatečně „provolány“, což budilo dojem, že jsou tam méně citlivé než uprostřed své plochy.

Nové krabičky byly vyměněny za starší a potíže přestaly. Problém byl vyřešen a fyzik splnil svůj úkol. Měl přitom velké štěstí v tom, že příčinou nesnází byl *jediný* činitel ze všech těch, které mohly při výrobě a uskladnění na desky působit. Fyzika měla v jeho práci velký význam

*) Sensitometrická měření se zakládají na tom, že se optickými metodami měří citlivost desek nebo filmů, jejich závoj, gradace, maximální zčernání, citlivost ke světlům různých vlnových délek, změny způsobené stárnutím desek, průběh vyvolávání, chování v ustalovači apod.

od sensitometrických měření až po závěrečný pokus, jímž bylo dokázáno, že citlivá emulsní vrstva měla u reklamovaných výrobků jiné mechanické vlastnosti u okrajů desek než uprostřed jejich plochy.

A teď už je, myslím, čas položit si otázku: *Jak to udělat, aby fyzik dovedl v technické nesnázi nebo v technickém problému najít jeho fyzikální jádro?*

Na to je jednoduchá odpověď: *Fyzik musí fyziku umět dobře.* Ale jak se jí může naučit do té míry, aby mu tak sloužila? To je už jiná otázka, kterou se pokusím zodpovědět v dalším článku.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

České ornitoptéry

JOSEF KOTYK, Pardubice

Pohled na létající ptáky vedl člověka k domněnce, že problém vzduchoplavby vyřeší prakticky jen letadlo, jehož technické vybavení bude věrnou kopií ptačího těla. Dějiny svědčí, jak těžkým úkolem však bylo sestrojení podobného mechanismu; zabývalo se jím mnoho lidí. Z dochovaných zpráv o okřídlených strojích zaslouží pozornosti zejména tvrzení anglického filosofa *Rogera Bacona* (asi 1214 až 1294), slovného „doctora mirabilis“, matematika a přírodovědce, autora řady objevů v mechanice a v optice, že mohou být sestrojena instrumenta volandi, létací stroje, v nichž člověk uprostřed sedící může otáčením jistého zařízení a prostřednictvím jakýchsi převodů způsobiti pohyb uměle sestavených křídel; ta budou prorážet vzduch jako letící pták...

Ne tedy prosté mávání pažemi, opatřenými umělými perutěmi, jak líčí např. v řecké mytologii půvabné vyprávění o Daidalovi a jeho synu Ikarovi¹⁾, nýbrž létací stroje s mávajícími křídly, *ornitoptéry*. Tato myšlenka zapalovala po staletí fantazii nadšených konstruktérů, průkopníků aviatiky. V minulém století zapálila také českého vynálezce *VÁCLAVA KADEŘÁVKA* (1835—1881), osobního přítele Nerudova a Hálkova. Zasněný do svých vidin rád po léta pozoroval z pražských

¹⁾ Viz např. knihu *Imre Trencsényiho-Waldapfela* „Mytologie“ (vyd. Odeon, Praha 1967), str. 110 a 111.

mostů a věží pohyby křídel za letu racků a holubů — od roku 1865 je dokonce také fotografoval — a pustil se do konstrukce maličkého modelu umělého opeřence hmotnosti pouhých 5,6 g se skutečnými vlaštovčími křídly, jimiž probíhaly vlasové ocelové drátky, spojující model s elektrickou baterií. Mechanický ptáček třepetal křídly, vznesl se a létal. Povzbuzen tímto úspěchem, Kadeřávek uveřejnil dne 18. ledna 1866 v Nerudových „Květech“ podrobný popis svého „českého samoletu“, v podstatě asi stokrát zvětšeného dřívějšího modelu s ptačími křídly. Dvě zkoušky vykonané na veřejnosti skončily však zklamáním: „Samolet“ se zmítal jako raněný pták, ale nelétal. Ze složitého a nákladného stroje nezachovala se pak ani jediná součástka; snad jej nešťastný vynálezce sám zničil...²⁾

Václav Kadeřávek, chudý kamnář, zemřel vyčerpan bídou před 100 lety dne 2. února 1881 v Praze. V éře balónů byly však jeho experimenty cenným myšlenkovým přínosem.

* * *

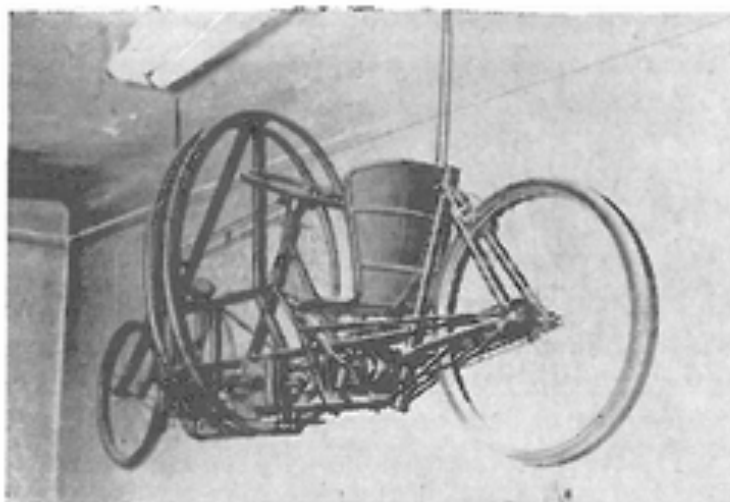
Dávná tužba člověka volně se vznést do výše a létat jako ptáci doprovází lidstvo také dějinami 20. století.

V roce 1979 uveřejnil denní tisk³⁾ senzační zprávu, že americký pilot *B. Allen* přeletěl na palubě tzv. svalomotorového letounu (tj. letadla poháněného vlastními svaly) kanál La Manche. Kříženec kluzáku a bicyklu o rozpětí křídel 30 m a hmotnosti 25 kg odstartoval za příznivých povětrnostních podmínek z anglického Folkestonu a asi po dvou hodinách letu přistál u francouzského přístavu Calais. Cestu dlouhou 35 km vykonal ve výšce 10 až 20 m. Tato událost zaujala zejména obyvatele Pardubicka, neboť si připomínali mnohé pokusy, jež na podobné ornitoptéry vlastní konstrukce konal do nedávna na hřišti „Na dolíčku“ v Jesničánkách pardubický občan *JOSEF JIRÁSEK*, zaměstnanec n. p. Tesla, později Kovopodniku v Pardubicích. Jeho letoun (upravený bicykl) měl být za rozjezdu před vzlétnutím poháněn speciálním zařízením tak, že obě nohy pilota tlačily dva pedály současně směrem vpřed. Rozjížděcí zařízení mělo tři rychlosti, které byly řízeny rychlostní skříní; při dosažení třetí (tj. největší) rychlosti byla speciálními klouby uváděna do pohybu křídla potažená peřím a mávala. Letoun měl pak být poháněn jen svaly pilota. Na dohotovení jeho konstrukce pracoval Jirásek mnoho let a snad jen onemocnění a časné úmrtí mu zabránilo dílo úspěšně dokončit.

Josef Jirásek zemřel dne 3. října 1978 ve věku 59 let. Kloubové zaří-

²⁾ Obrázek Kadeřávkova „českého samoletu“ přináší kniha *Ludvíka Součka* „Blázniví vynálezci“ (Kapitoly z dějin nesmyslů), vyd. nakl. Albatros, Praha 1974, str. 109.

³⁾ Cituji např. Rudé právo ze dne 13. června 1979.



zení, sloužící k pohybu křídel jeho ornitoptéry, bylo však patentováno a je i dnes používáno k vybavení rozmanitých strojů.

Na rozdíl od Kadeřávkova „samoletu“ podařilo se Jiráskovo dílo zachránit. Péčí Klubu přátel Pardubicka byla Jiráskova ornitoptéra uskladněna v opravně Kovopodniku v Pardubicích, Labská ul. č. 30. Připojený obrázek (snímek p. Josefa Schlettera z Pardubic) ukazuje v celkovém pohledu, jak bez křídel je upoutána ke stropu místnosti; je vidět pedály i rychlostní skříň. Nedokončena byla darována Vojenskému muzeu v Praze.

* * *

Do nenávratna uplynuly doby, kdy baron *ARTUR KRAUS*, rázovitá postava pardubického veřejného života, konal různá posilovací cvičení a v závěsu za kočárem taženém koňmi trénoval běh, aby byl fyzicky dostatečně připraven zvládnout svůj svalomotorový letoun. Za let člověka v pravém slova smyslu považoval totiž pouze let pomocí lidských svalů; o letcích na motorových letadlech prohlašoval, že „se jenom vozí“. Se svou ornitoptérou — dochovaly se jen její fotografie — se však marně pokoušel létat.

K pobytu Alberta Einsteina v Praze

JIŘÍ HRIVŇÁK, Libčice nad Vltavou

V časopisu *Matematika a fyzika ve škole* (roč. 11, 1981, č. 6, str. 410 až 414) vyšel pod výše uvedeným titulem výstižný a zajímavý článek *Rudolfa Kolomého*, k jehož závěru pokládám za vhodné připojit informaci o spolupráci Alberta Einsteina s dr. Ivanem Pulujem, který byl profesorem elektroniky na německé technice v Praze.

Einstein přijel do Prahy v dubnu r. 1911, aby nastoupil na místo řádného profesora teoretické fyziky na pražské německé univerzitě. Brzy po svém příjezdu do Prahy navštívil profesora *Puluje* (1845—1918), jehož vědecké práce znal z publikací vídeňské akademie věd. Oba vědci se záhy spřátelili. Puluj nabídl Einsteinovy pro jeho experimenty fyzikální laboratoř, kterou vybudoval v prostorách německé techniky v Praze 1, Husova 5. Tato laboratoř se svým vybavením řadila hned za obdobnou laboratoř techniky ve Vídni, která byla reprezentační vysokou technickou školou Rakousko-Uherska. O přátelství obou vědců se zmiňuje ve svých člancích syn profesora Puluje ing. Alexandr Puluj, který nyní žije v NSR; připomíná, že Einstein si s Pulujem dopisoval až do vypuknutí první světové války v roce 1914.

Poznámka. O profesoru Pulujovi, který pocházel ze Západní Ukrajiny, jsem psal v článku „80 let od zrodu elektráren v českých zemích“ otištěném v *Rozhledech matematicko-fyzikálních* (roč. 56, 1977/78, č. 6, str. 283—285).

Prof. RNDr. Karel Hruša (1905—1971)

Setkal jsem se s jeho jménem poprvé jako středoškolák za druhé světové války v *Rozhledech*, kam psával články a úlohy. Kupodivu byly to tehdy příspěvky převážně geometrické, i když je dnes spíše znám v souvislosti s algebrou, teorií čísel a matematickou analýzou. Po létech jsem se s ním osobně seznámil a měl jsem i tu čest a potěšení, že jsem s ním mohl spolupracovat na několika člancích a na dvou knížkách. Prof. Hruša byl dlouholetým vedoucím katedry matematiky na pedagogické fakultě Karlovy univerzity v Praze, vedl kabinet pro modernizaci vyučování při Matematickém ústavu ČSAV, byl členem ústředního výboru matematické olympiády, pracoval v redakční radě *Pokroků matematiky, fyziky a astronomie* a měl ještě řadu akademických i jiných funkcí. Z jeho knih jsou snad nejznámější dvě: *Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu* (1952) a *Elementární aritmetika* (1953).

Letos 16. listopadu uplývá už deset let od jeho skonu. Je pohřben v Mnichově Hradišti, kde za svého života rád přebýval a kde napsal i velkou část svého díla.

Jiří Sedláček

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

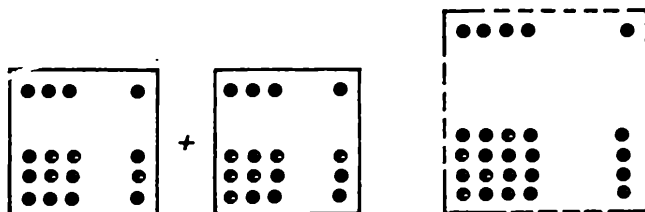
Pséfoforia a iracionalita $\sqrt{2}$

Doc. dr. MILAN HEJNÝ, CSc., MFF Bratislava

Grécke slovo pséfós značí ploský kamienok, obliak, po česky oblázek. Starí Gréci používali obliaky pri volení. Do volebnej urny hodil každý voľič jeden pséfós — čierny alebo biely — a tak vyjadril svoj názor. Pri spočítavaní výsledkov hlasovania vysypala volebná sčítacia komisia obsah urny na hromadu a páry pséfós „čierny-biely“ kládla do dvojstupu. Po chvíli urovnávania kamienkov sa jedna farba minula a druhá, čo prevyšovala, zvíťazila. Opísaný spôsob voľby sa volal pséfoforia. Slovo nadobudlo i prenesený význam — *počítanie pomocou kamienkov*.

Ukážeme, ako je možné pomocou pséfoforie dokázať iracionalitu čísla $\sqrt{2}$. Objav iracionálnych čísel náleží pytagorejcom a spadá do šiesteho storočia pred našim letopočtom. Žiaľ história nedochovala ani to, ktoré prvé iracionálne číslo bolo objavené, ani spôsob, ako sa to stalo. Môžbyť, že objav išiel práve tak, ako uvedeme v nasledujúcom. Osou dôkazu je jedna skutočnosť z teórie štvorcových čísel. Pojem najprv zadefinujeme.

Číslo (= hromada pséfós) voláme *štvorcové*, ak je možné všetky pséfós usporiadať do štvorca tak, že žiaden kus neprevyšuje ani nechýba (obr. 1).



Obr. 1

Obr. 2

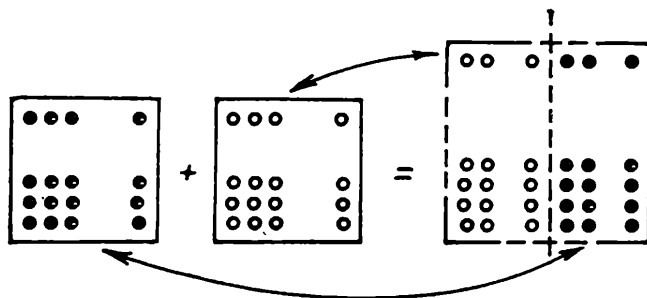
Na obrázku 1. sú nakreslené prvé 4 štvorcové čísla: 1, 4, 9, 16. Čísla 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14 a 15 nie sú štvorcové. Pokúsme sa teraz metódou pséfoforie vyriešiť túto úlohu:

Úloha 1. Nájdite štvorcové číslo, ktorého dvojnásobok je opäť číslo štvorcové. Inak povedané, nájdite tri štvorce tak, aby platila rovnosť nakreslená na obr. 2.

Pytagorejci dlho hľadali riešenie úlohy. Skúšali tak i onak, stále bez úspechu. Neraz sa stalo, že riešenie už-už bolo, ale nakoniec sa

zistilo, že jeden jediný pséfus prevyšuje alebo chýba. Vzniklo podozrenie, že úloha je neriešiteľná, že také štvorce nájsť nemožno. Ako ale dokázať neriešiteľnosť úlohy?

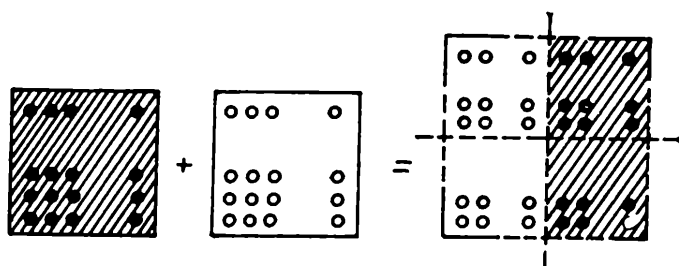
Predpokladajme, že by sa nám predsa len dáke riešenie podarilo nájsť. Pretože na ľavej strane rovnosti obrázku 2. sú dve rovnaké čísla, musí sa dať aj pravá strana rovnosti rozdeliť na dve rovnaké časti: nech sú to pravá a ľavá strana veľkého štvorca (obr. 3).



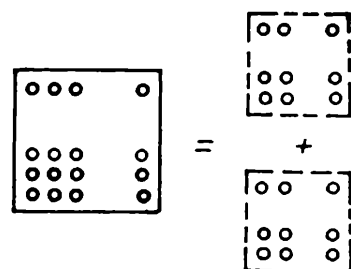
Obr. 3

Teraz vidíme, že v prvom štvorci ľavej strany je práve toľko pséfus ako v pravej polovici veľkého štvorca a v druhom štvorci ľavej strany je práve toľko pséfus ako v ľavej polovici veľkého štvorca. Na obr. 3 je to naznačené šípkami.

Rovnako ako sme veľký štvorec rozdelili na polovice pravú a ľavú, možno tento štvorec rozdeliť aj na polovice hornú a dolnú. Tým sa veľký štvorec rozpadne na štyri malé rovnaké štvorce. Keď teraz z každej strany rovnosti odoberieme rovnaký počet pséfus, rovnosť ostane zachovaná. Z ľavej strany odoberieme prvý štvorec a z pravej strany odoberieme pravú polovicu veľkého štvorca; na obrázku 4 sú odobraté časti



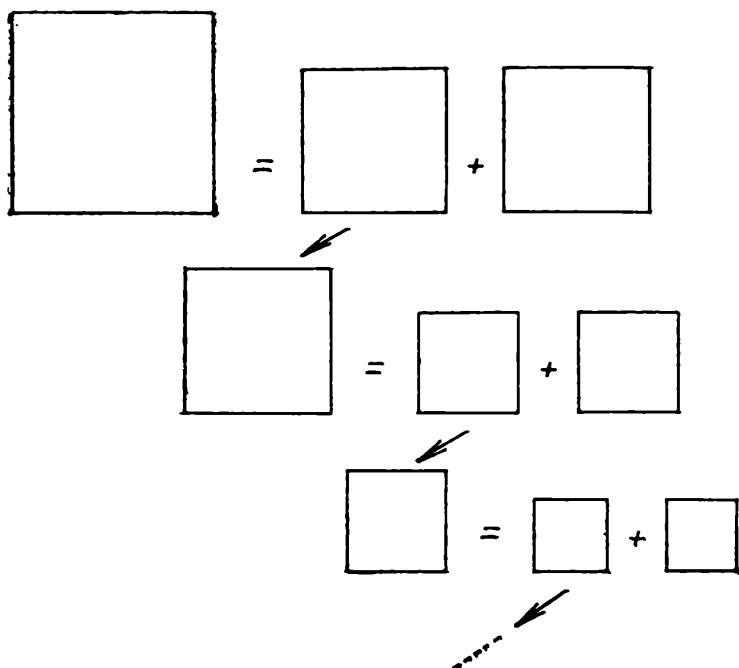
Obr. 4



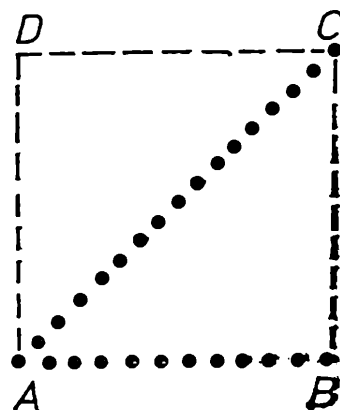
Obr. 5

značené šrafovaním. Získali sme teraz novú rovnosť, ktorá je vlastne iba zmenšením pôvodnej (obr. 5): Štvorec je rovný súčtu dvoch malých štvorcov. V zmenšovaní môžeme pokračovať. Podobným spôsobom vyjadríme malý štvorec ako súčet dvoch rovnakých ešte menších štvorcov. Ďalej tento ešte menší štvorec vyjadríme ako súčet dvoch ešte-ešte menších štvorcov atď. Na obrázku to bude vyzeráť takto (obr. 6):

Svojou podstatou je tento proces nekonečný, lenže v pôvodnom veľkom štvorci bol iba konečný počet pséfus. Preto nekonečné zmenšovanie



Obr. 6



Obr. 7

toho počtu je nemysliteľné. Teda: obrázok 2 bol zlý, falošný. Úloha 2 je neriešiteľná.

Úloha 1 bola „rozriešená“. Ale reči okolo nekonečného odoberania neboli dosť presvedčivé, bolo v nich čosi tajuplné, možnože aj nepresné. Nezaškodilo by, keby sa nám podarilo háklivé miesto nekonečného procesu obísť. A ono sa to skutočne dá.

Predpokladajme, že rovnosť z obrázku 2 sa dá riešiť. Možno, že má iba jedno riešenie, možno má viac riešení, možno dokonca nekonečne veľa. Bez ohľadu na to, koľko riešení má, môžeme z nich vždy nájsť to najmenšie. Nech teda na obrázku 2 je nakreslené toto najmenšie zo všetkých riešení. Potom riešenie na obrázku 5 je nemožné, lebo je ešte menšie. Ale my sme existenciu takého riešenia dokázali. Preto obrázok 2 je nemožný, falošný.

Teraz už veríme, že úloha 1 je neriešiteľná; pristúpme k úlohe 2.

Úloha 2. Nájdite spoločnú mieru pre stranu a uhlopriečku štvorca. Inak povedané: daný je štvorec $ABCD$. Nájdite úsečku x , ktorou by bolo možné bez zvyšku odmerať aj stranu AB , aj uhlopriečku AC .

Keby sme sa o riešenie úlohy pokúsili presným rysovaním, našli by sme povedzme hodnotu $x = \frac{1}{12} AB$, t. j. $AB = 12x$, $AC = 17x$. Ešte

presnejšie rysovanie by vyvrátilo túto hypotézu, ale našlo by novú, presnejšiu: $AB = 29x$, $AC = 41x$. Ešte presnejšie rysovanie by vyvrátilo aj tento dohad a našlo by ešte lepší, ale istotu by sme metódou experimentu nenadobudli. Každý, sebe presnejší pokus by sa pri ešte presnejšom rysovaní ukázal chybným. Vzniká otázka, či možno vôbec úlohu 2 riešiť. Čo ak je to s ňou ako s úlohou 1? A táto hypotéza je veľmi

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

7. V rovině je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník KLM s přeponou KM . Řešte tyto dvě úlohy:

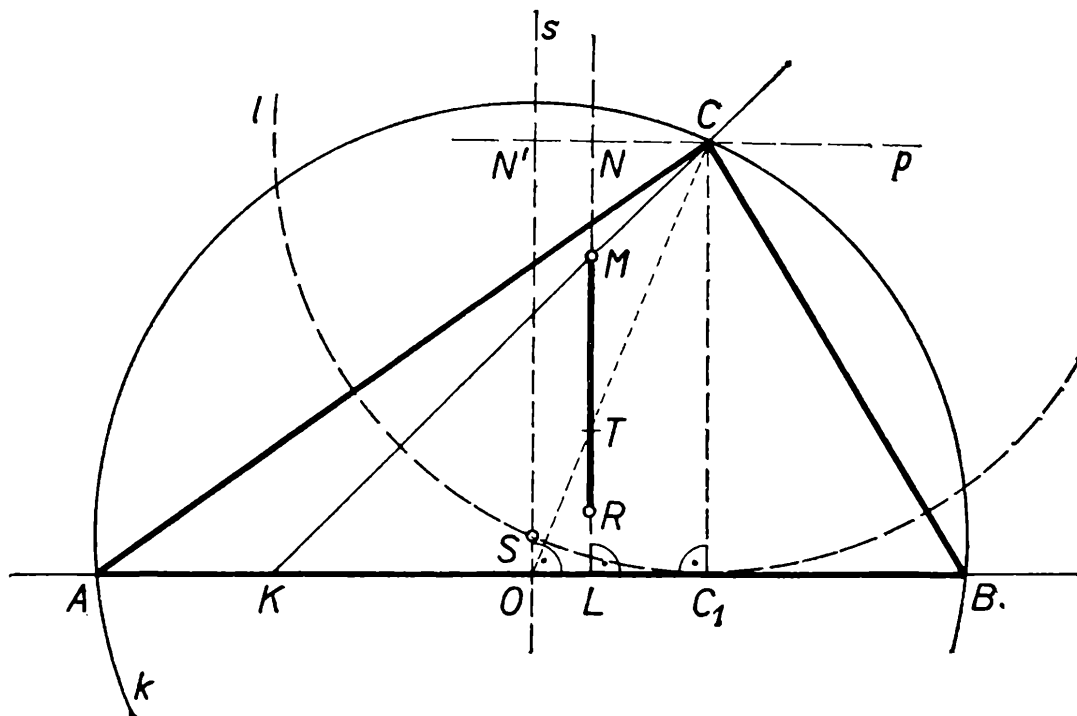
- a) Na odvěsně LM zvolte bod T a sestrojte trojúhelník ABC , jenž má tyto čtyři vlastnosti: 1. Body A, B leží na přímce KL ; 2. bod C je bodem přímky KM ; 3. bod T je těžištěm trojúhelníku ABC ; 4. poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC je $r = 3 \cdot |LT|$.
- b) Nalezněte množinu všech bodů T , pro něž má úloha a) řešení.

(Došlo 18 řešení)

Jiří Mída

Autorovo řešení:

a) Řešení úlohy se zakládá na vlastnostech těžiště a středu kružnice opsané trojúhelníku; protože rozbor je jednoduchý, uvádíme hned konstrukci (obr. 1):



Obr. 1

Položme $|LT| = t$. Na polopřímce LM sestrojíme bod N tak, aby bylo $|LN| = 3t$. Bodem N vedeme přímku $p \parallel KL$ a její průsečík s přímkou KM označíme C .

V průsečíku O přímek CT a KL vedeme kolmici s k přímce KL . Pak sestrojíme kružnici $l = (C, 3t)$. Nechť S je její společný bod s přímkou s . Sestrojíme kružnici $k = (S, 3t)$ a její průsečíky s přímkou KL označíme A, B . Body A, B, C jsou vrcholy hledaného trojúhelníku.

O tom, že sestrojený trojúhelník ABC má požadované vlastnosti, se snadno přesvědčíme. Body A, B leží na přímce KL a bod C na přímce KM . Bod O je středem úsečky AB , a proto úsečka CO je těžnicí trojúhelníku ABC ke straně AB . Body C a T leží v téže polorovině určené přímkou KL , takže bod T je vnitřním bodem úsečky CO . Platí $|NT| : |TL| = 2 : 1$, a proto z podobnosti trojúhelníků OLT a CNT plyne, že $|CT| : |TO| = 2 : 1$, tj. bod T je těžištěm trojúhelníku ABC . Kružnice l a k mají též poloměr $3t$, takže bod C leží na kružnici k , jež má poloměr $3t$ a je kružnicí opsanou trojúhelníku ABC .

b) Označme C_1, N' po řadě paty kolmic z bodu C na přímky KL a s . V dalších úvahách rozlišíme pro volbu bodu T pět možností.

1. Jestliže zvolíme $T = L$, pak zřejmě řešení neexistuje.

2. K řešení nevede také případ $T = M$. Pak totiž $O = K$ a $S = N'$, takže $A = B = K$.

3. Další zvláštní případ je pro $t = \frac{1}{3}|ML|$. Pak je $M = N = C$ a $O = L = S$. Řešením je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC .

4. Nechť T je takový bod odvěsny LM , že platí

$$\frac{1}{3}|LM| < t < |LM|.$$

Bod N pak leží (obr. 1) na prodloužení úsečky LM za bod M a bod C je na prodloužení úsečky KM za od M . Bod O je vnitřním bodem úsečky KC_1 , jejíž velikost je rovna $|CC_1| = 3t$. Tedy $|CN'| < 3t$, neboť $|CN'| = |C_1O|$. Dále je $|CO| > |CC_1| = 3t$. Kružnice l má s přímkou s dva různé společné body. K řešení však vede pouze ten průsečík, jenž je bodem úsečky $N'O$. Úloha má tedy v tomto případě jediné řešení.

5. Nechť T je takový bod odvěsny LM , že platí

$$0 < t < \frac{1}{3}|LM|.$$

Potom (obr. 2) je bod N vnitřním bodem úsečky LM , bod C je vnitřním bodem úsečky KM a bod O leží na prodloužení úsečky KL za bod L . Trojúhelník KC_1C je pravoúhlý rovnoramenný s přeponou KC , takže $|KC_1| = |C_1C| = |LN| = 3t$. Tedy

$$|C_1L| = |KL| - 3t = |LM| - 3t. \quad (1)$$

Z podobnosti trojúhelníků LOT a C_1OC vyplývá, že $|LO| = \frac{1}{3}|C_1O|$.

8. Nalezněte všechny uspořádané dvojice přirozených čísel (k, n) , pro které má soustava dvou rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= 1, \\ x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k &= 1\end{aligned}$$

konečný počet reálných řešení $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Pro každou takovou dvojici (k, n) určete všechna reálná řešení soustavy.

(Došlo 16 řešení)

Jaroslav Morávek

Řešil Martin Zemek, III. C Mikuláše Koperníka, Bílovec:

A) Budiž $k = 1$.

a) Je-li také $n = 1$, dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}x_1^2 &= 1, \\ x_1 &= 1\end{aligned}$$

s jediným řešením $x_1 = 1$.

b) Je-li $n = 2$, dostáváme soustavu

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 = 1. \quad (2)$$

Obě čísla x_1, x_2 jsou nezáporná; kdyby bylo jedno záporné, bylo by druhé větší než 1, takže součet druhých mocnin těchto čísel by byl větší než 1. Je tedy

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1,$$

takže

$$x_1 \geq x_1^2, \quad x_2 \geq x_2^2;$$

z toho plyne, že je

$$x_1 - x_1^2 \geq 0, \quad x_2 - x_2^2 \geq 0. \quad (3)$$

Odečtením (1) od (2) dostáváme

$$(x_1 - x_1^2) + (x_2 - x_2^2) = 0;$$

z toho podle (3) plyne, že je $x_1 = x_1^2, x_2 = x_2^2$. Tomu vyhovují tato dvě řešení: $(1, 0), (0, 1)$.

c) Je-li $n = 3$, dostáváme soustavu

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Vyjádríme z druhé rovnice x_1 a výsledek dosadíme do první rovnice; po úpravě dostaneme rovnici

$$x_2^2 + (x_3 - 1)x_2 + (x_3^2 - x_3) = 0$$

s kořeny

$$x_2 = \frac{1 - x_3 \pm \sqrt{D}}{2}, \quad D = -3x_3^2 + 2x_3 + 1.$$

Přitom je $D \geq 0$ pro x_3 z intervalu $\left\langle -\frac{1}{3}, 1 \right\rangle$. Ke každému x_3 z tohoto

intervalu lze nalézt x_2 a potom x_1 tak, aby čísla x_1, x_2, x_3 vyhovovala daným rovnicím. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení.

d) Je-li $n \geq 4$, potom má daná soustava nekonečně mnoho řešení, např. x_1, x_2, x_3 z případu c) a $x_4 = x_5 = \dots = x_n = 0$.

B) Budiž $k = 2$. Potom:

pro $n = 1$ dostáváme rovnici $x_1^2 = 1$, která má řešení $x_1 = 1, x_1 = -1$;
pro $n = 2$ dostáváme rovnici $x_1^2 + x_2^2 = 1$, která má nekonečně mnoho řešení tvaru $(x_1; \pm \sqrt{1 - x_1^2})$ pro $|x_1| \leq 1$;

pro $n \geq 3$ má soustava nekonečně mnoho řešení, např. tvaru $(x_1; \sqrt{1 - x_1^2}; 0; 0; \dots; 0)$.

C) Budiž $k \geq 3$; potom jde o soustavu

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^k = 1. \quad (5)$$

Pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ je $x_i^2 \leq 1$, čili $|x_i| \leq 1$, takže je $x_i^2 \geq x_i^k$, čili $x_i^2 - x_i^k \geq 0$. (6)

Odečtením (5) od (4) dostaneme $\sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_i^k) = 0$.

Protože však pro $i = 1, 2, \dots, n$ platí (6), je $x_i^2 = x_i^k$, a tedy pro $x_i \neq 0$ je $x_i^{k-2} = 1$.

Tomu vyhovuje $x_i = 1$ a pro k sudé též $x_i = -1$. Každé z čísel x_i nabývá jedné z hodnot 0, 1 a pro sudé k též -1 . Pro jediné $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $|x_j| = 1$; zbývající jsou $x_1 = \dots = x_{j-1} = x_{j+1} = \dots = x_n = 0$.

Závěr: Daná soustava má konečný počet reálných řešení pro $(k = 1, n = 1)$, $(k = 1, n = 2)$, $(k = 2, n = 1)$ a pro $k \geq 3$. Jsou to tato řešení:

k	n	řešení $(x_1, x_2, \dots, x_n)$	počet řešení
1	1	(1)	1
1	2	(0, 1), (1, 0)	2
2	1	(1), (-1)	2
≥ 3 liché		(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1)	n
> 3 sudé		(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1) (-1, 0, ..., 0), (0, -1, ..., 0), ..., (0, 0, ..., -1)	$2n$

9. Rozhodněte, zda existuje trojúhelník s vnitřním úhlem o velikosti 120° , jehož všechny strany mají velikosti vyjádřené celými čísly. Nahradte 120° hodnotou 45° a zodpovězte též danou otázku.

(Došlo 13 řešení)

Jiří Sedláček

Řešili Vítězslav Doubrava, Jiří Erhart a Petr Střelec, II. C, gymnázium M. Koperníka, Bílovec :

Označme velikost stran trojúhelníka a, b, c ; přitom strana a leží proti úhlu o velikosti 120° . Podle kosinové věty je

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 120^\circ$$

čili

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc.$$

Snadno zjistíme, že této rovnici vyhovuje např. trojice čísel

$$a = 7, b = 3, c = 5.$$

Trojúhelník, jehož strany mají velikosti 3, 5 a 7, skutečně existuje.

Nahradme 120° hodnotou 45° a označení ponechme; strana o velikosti a leží tedy proti úhlu velikosti 45° . Podle kosinové věty je

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 45^\circ,$$

$$bc\sqrt{2} = b^2 + c^2 - a^2.$$

Protože a, b, c mají být celá čísla, nemá poslední rovnice žádné řešení. Pro celá kladná a, b, c je totiž na pravé straně celé číslo, ale na levé straně je číslo iracionální. Hledaný trojúhelník s vnitřním úhlem velikosti 45° tedy neexistuje.

Redakční poznámka. Kromě trojúhelníku s velikostmi stran 3, 5 a 7 uvádějí někteří řešitelé ještě další trojúhelníky, které vyhovují první části otázky (Petr Schiller a Petr Tichavský, oba III. C gymnázia M. Koperníka v Bílovci). Jde samozřejmě o takovou množinu trojúhelníků, že žádné dva z nich nejsou podobné. Vojtech Liskay, IV. D, SPŠS s maďarským vyučovacím jazykem v Komárně a Ladislav Zsilinszky, IV. D gymnázium Nové Zámky, dokonce uvádějí, že tato množina je nekonečná.

Fyzika

1. V zahradním bazénu se svislými stěnami a s obdélníkovým dnem o rozměrech $5 \text{ m} \times 1,3 \text{ m}$ plave pramice o hmotnosti $m_p = 70 \text{ kg}$, naložená železným šrotem o hmotnosti $m = 300 \text{ kg}$. Zjistěte, jak se změní výška hladiny vody v bazénu, jestliže železo naházíme z pramice na dno bazénu. Předpokládejte, že hladina vody je tak hluboko pod okrajem bazénu, že voda z něho nevyteče.

(Došlo 15 řešení)

Ivan Šantavý

Řešení Pavla Sobotíka a Milana Šimka, 4. B G Příbor :

Výška hladiny vody v bazénu se zmenší; hladina klesne o $4 \cdot 10^{-2}$ m.

Důkaz:

1. Vytáhneme naloženou pramici z bazénu; přitom se výška hladiny vody změní o

$$h_1 = \frac{m + m_p}{S \cdot \rho_1},$$

kde S je obsah dna bazénu a ρ_1 hustota vody.

2. Naházíme železo do bazénu; výška hladiny se změní o

$$h_2 = \frac{m}{S \cdot \rho_2},$$

kde ρ_2 je hustota železa.

3. Vratíme do bazénu prázdnou pramici; výška hladiny se změní o

$$h_3 = \frac{m_p}{S \cdot \rho_1}.$$

Celková změna hladiny vzhledem k původnímu stavu je

$$h = -h_1 + h_2 + h_3 = \frac{1}{S} \left(-\frac{m + m_p}{\rho_1} + \frac{m}{\rho_2} + \frac{m_p}{\rho_1} \right) = \frac{m}{S} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right).$$

Protože je $\rho_2 > \rho_1$, je rozdíl v poslední závorce záporný, takže hladina klesne; $h = -4,04 \cdot 10^{-2}$ m.

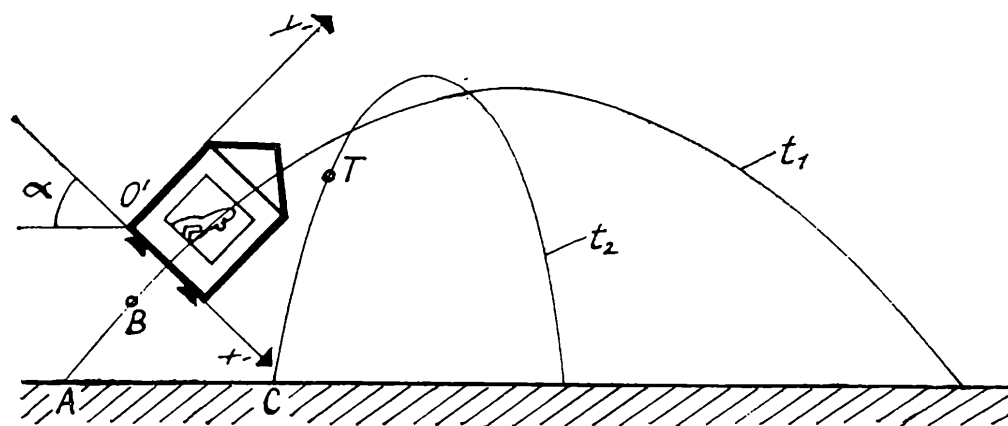
Komentář :

1. Úkol byl poměrně jednoduchý, pokles hladiny lze předpovědět i bez podrobného číselného výpočtu. Když je totiž železo v pramici, musí voda kompenzovat vztlakovou silou celou tíhu železa, zatímco když železo leží na dně bazénu, působí na ně dno směrem vzhůru a voda je nadlehčuje silou o menší velikosti, než je velikost jeho tíhy. Objem vytlačené vody je tedy v druhém případě menší.

2. Názvu „železo“ se v odborné terminologii užívá pouze pro prvek. To, co se v hovorové řeči nazývá „železo“, jsou slitiny železa. Jejich hustoty mají hodnoty, které leží v mezích $(7,6 \text{ až } 8,1) \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. V zadání nebyla hustota železného šrotu uvedena proto, abyste nebyli navedeni na způsob řešení.

2. Pokusná kabina byla urychlena raketovým motorem na úseku AB (obr. 3) a dále se volně pohybovala v tíhovém poli Země po trajektorii t_1 . Její pohyb byl translační; podlaha svírala s vodorovnou rovinou stálý úhel o velikosti α . Během pohybu kabiny bylo v bodě C vymrštěno šikmo vzhůru těleso T a pohybovalo se po trajektorii t_2 . Považujte vztažnou soustavu spojenou s povrchem Země za inerciální, zemské tíhové pole

Obr. 3



za homogenní ($g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) a odpor vzduchu zanedbejte. Určete tvar trajektorie tělesa T ve vztažné soustavě $O'x'y'$ pevně spojené s kabinou.

(Došlo 9 řešení)

Ivan Šantavý

Autorovo řešení:

Trajektorie tělesa T v soustavě $O'x'y'$ je přímka.

Důkaz: Souřadnicová soustava $O'x'y'$ spojená s kabinou koná vzhledem k inerciální soustavě spojené se zemským povrchem posuvný pohyb se zrychlením $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Je to tedy neinerciální vztažná soustava. V neinerciálních vztažných soustavách působí na tělesa kromě jiných sil síly setrvačné. V uvažované soustavě $O'x'y'$ je setrvačná síla $\mathbf{F}_s$ působící na těleso hmotnosti m rovna $\mathbf{F}_s = -m\mathbf{a}$.

Na těleso T , jehož hmotnost označíme m , tedy v soustavě $O'x'y'$ působí za předpokladů uvedených v zadání dvě síly: tíhová síla $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ a setrvačná síla $\mathbf{F}_s = -m\mathbf{a}$, kde $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Výslednice těchto sil je

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{G} + \mathbf{F}_s = m\mathbf{g} + (-m\mathbf{a}) = m\mathbf{g} + (-m\mathbf{g}) = \mathbf{0}$$

Těleso T je v soustavě $O'x'y'$ v beztlížném stavu, síla tíhová a síla setrvačná se ruší. Jeho zrychlení v této soustavě je tedy nulové.

Existují pouze dva pohybové stavy, při nichž má těleso nulové zrychlení: klid a rovnoměrný pohyb po přímce. Ježto těleso T není (v obecném případě) v soustavě $O'x'y'$ v klidu, koná rovnoměrný pohyb po přímce.

Trajektorie tělesa T v soustavě $O'x'y'$ je tedy přímka. Pilot kabiny je překvapen.

Komentář

1. Hlavním cílem tohoto úkolu bylo, abyste si uvědomili, jak vzniká beztlížný stav a že k jeho vytvoření není třeba družic. Nadto je vidět, že trajektorie je pojem relativní, že tvar trajektorie velmi podstatně závisí na vztažné soustavě.

2. Důkaz lze provést i jinak, než jak je zde uvedeno, např. takto:

Kabina koná vzhledem k Zemi posuvný pohyb se zrychlením $\mathbf{a}_1 = \mathbf{g}$.

Těleso T se pohybuje vzhledem k Zemi se zrychlením $\mathbf{a}_2 = \mathbf{g}$, tj. se stejným zrychlením. Jeho zrychlení $\mathbf{a}'$ vzhledem ke kabině je dáno vztahem $\mathbf{a}' = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \mathbf{g} - \mathbf{g} = \mathbf{0}$, tj. je nulové.

Není-li tedy těleso T vzhledem ke kabině v klidu, pohybuje se vzhledem k ní rovnoměrně přímočaře.

NAŠE SOUTĚŽ

V tomto čísle otiskujeme zbývajících úloh z matematiky a fyziky, jakož i úlohy z konstrukční geometrie; první část úloh byla uveřejněna v čísle 2. Soutěže se mohou účastnit jednotlivci i kolektivy z téže třídy, maximálně však trojčlenné; při případném umístění má ovšem kolektiv nárok na jedinou cenu.

Řešení každé úlohy pište čitelně (nejlépe na stroji) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Nahoře vlevo na každém listu uveďte své čitelně psané celé jméno, třídu i školu, kde studujete, a nakonec svou bytovou adresu i se směrovacím číslem. Každý kolektiv uvede tyto údaje pro každého svého člena.

Nejdříve napište text dané úlohy a potom pište přehledně její řešení. Pište je výstižně, stručně, ale jasně; neužívejte zbytečně různé symboly! Dbejte na platnou terminologii a symboliku. Obrázky, které připojíte k řešení některé úlohy, narýsujte pečlivě a čitelně je popište.

Řešení všech úloh zašlete nejpozději do 31. března 1982 na adresu redakce Rozhledů, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla.

Úlohy k řešení

Matematika

7. Je dána rovnice

$$x^6 - 14x^4 + 49x^2 + p = 0,$$

kde x je neznámá a p parametr. Nalezněte číslo p , které má tuto vlastnost: Ze šesti kořenů dané rovnice je možno vybrat tři tak, aby jeden z nich byl aritmetickým průměrem ostatních dvou; přitom ve vybrané trojici může být totéž číslo dvakrát (třikrát), jen je-li aspoň dvojnásobným (trojnásobným) kořenem dané rovnice.

Jiří Mída

8. Necht $\mathbb{Q}$ je množina všech uspořádaných čtveřic reálných čísel (x_1, x_2, x_3, x_4) ; přitom je $x_i \neq x_j$ právě tehdy, je-li $i \neq j$. Množinu S některých podmnožin $S' \subset \mathbb{Q}$ nazveme přípustnou, jestliže splňuje tyto podmínky:

1. $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q} | x_i < x_j\} \in S$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
 2. Jestliže je $S_1 \in S$ a $S_2 \in S$, pak $S_1 \cup S_2 \in S$.
 3. Jestliže je $S_1 \in S$ a $S_2 \in S$, pak $S_1 \cap S_2 \in S$.
- a) Ukažte, že existují nekonečné i konečné přípustné množiny.
b) Určete nejmenší možný počet prvků přípustné množiny.

Poznámky: V inkluzi množin „ $\subset$ “ připouštíme i případ rovnosti.
Dejte pozor na to, že prvky množiny S jsou též jisté množiny.

Jaroslav Morávek

9. Necht n je celé číslo větší než 2. Rozhodněte, zda existuje n navzájem různých celých kladných čísel s touto vlastností: Každé z těchto čísel dělí beze zbytku součet všech zbývajících $n-1$ čísel.

Jiří Sedláček

10. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, jestliže jsou dány úsečky, které jsou shodné s jeho těžnicemi příslušnými k odvěsnám.

Ota Setzer

11. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1; K, L budtež po řadě vnitřními body jeho stran AB, BC . Určete množinu všech průsečíků úhlopříček všech čtyřúhelníků $KLMN$, jejichž vrcholy M, N jsou po řadě vnitřními body stran CD, AD , a které mají tu vlastnost, že obsah každého z nich je $\frac{1}{2}$.

Jaroslav Švrček

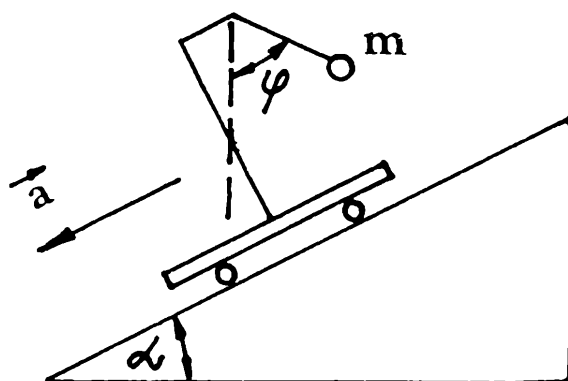
12. Je dána posloupnost čtverců $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$; dokažte, že průnikem těchto čtverců je bod nebo čtverec.

Jaroslav Zemánek

Fyzika

4. Kyvadlo o hmotnosti m je zavěšeno na stojanu, který je upevněn na vozíku. Určete:

- a) směr vlákna kyvadla zadaný úhlem (o velikosti φ), který udává odchylku vlákna od svislého směru;
 - b) namáhání vlákna T ,
- a to v těchto pěti případech:
1. Vozík se pohybuje rovnoměrně přímočaře po vodorovné rovině;
 2. vozík se pohybuje přímočaře se zrychlením a po vodorovné rovině;



Obr. 1

3. vozík volně sjíždí po nakloněné rovině;
4. vozík stoupá se zrychlením a po nakloněné rovině;
5. vozík se zrychlením a sjíždí po nakloněné rovině (obr. 1).

Zdeněk Janout

5. Napětí a proud v obvodu střídavého proudu jsou dány pomocí komplexních čísel, a to $U = (110 + 190j)$ V, $I = (1,73 + j)$ A, kde j je imaginární jednotka. Určete vztahy pro okamžité hodnoty napětí proudu.

Josef Novák

Konstrukční geometrie

Uvedené tři úlohy jsou skutečně z konstrukční geometrie, nikoli z geometrie deskriptivní; proto je může řešit i ten, kdo se vůbec neučil deskriptivní geometrii.

1. Dvě dané roviny ρ , σ s průsečnicí p rozdělují prostor ve čtyři části zvané *klíny*; ke každému z nich patří příslušná polorovina roviny ρ a příslušná polorovina roviny σ s hraniční přímkou p . Kromě toho je dán bod R . Sestrojte krychli $ABCDEFGH$ tak, aby ležela v jednom z uvedených klínů a aby přitom a) stěna $ABCD$ byla částí roviny ρ , b) hrany BC , FG ($BC \parallel FG$) byly rovnoběžné s přímkou p , c) bod R byl bodem přímky, která prochází středy stěn $ABCD$, $EFGH$.

Stanislav Horák

2. Je dána krychle $ABCDEFGH$; přitom je $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$.
Řešte tyto úlohy:

- a) ve volném rovnoběžném promítání zobrazte řez krychle s rovinou, která prochází středem S krychle kolmo k její tělesové úhlopříčce;
- b) dokažte, že tento řez je pravidelný šestiúhelník $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$;
- c) udejte konstrukci krychle, jestliže je dán tento řez $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$.

Emil Kraemer

3. Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Řešte tyto úlohy:
- dokažte, že každé dvě hrany tohoto čtyřstěnu ležící na mimoběžných přímkách jsou prostorově kolmé;
 - sestrojte pravidelný čtyřstěn $ABCD$, jestliže je dána přímka p , jejíž částí je hrana AB , a je-li dán střed S hrany CD .

Emil Kraemer

OLYMPIÁDY

Jak na to?

doc. JAN VYŠÍN, CSc., MÚ ČSAV Praha

Pohrajeme si dnes s obrazci vepsanými a opsanými. Obrazcem budeme přitom rozumět konvexní mnohoúhelník. Co je konvexní mnohoúhelník? Je to mnohoúhelník této vlastnosti: zvolíme-li dva body, z nichž každý náleží vnitřku mnohoúhelníka nebo jeho hranici, pak celá spojnice těchto dvou bodů náleží mnohoúhelníku (na obr. 1 jde o dvojice X, Y a Y, Z , kde X, Y, Z jsou body sedmiúhelníka $ABCDEFG$).

Na obr. 2 jsou dva sedmiúhelníky: vnější $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ a vnitřní $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$. Všechny vrcholy vnitřního leží na hranici vnějšího. V takovém případě říkáme, že sedmiúhelník (B) je vepsán sedmiúhelníku (A) a sedmiúhelník (A) je opsán sedmiúhelníku (B).

Co soudíte o jejich obvodech? Že je obvod (délka hranice) vnitřního sedmiúhelníka (B) menší než obvod vnějšího sedmiúhelníka (A)? To vám napovídá názor. Ale mohli byste si to ověřit pomocí obr. 2, v tomto případě mocnou geometrickou větou, která se jmenuje

TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST

a kterou asi znáte. Vyslovte ji pomocí obr. 3. Použijte ji dále pro vyšrafovaný trojúhelník $B_6A_7B_7$ z obr. 2. Použijte ji ještě pro šest dalších trojúhelníků a z toho odvodte nerovnost obvod sedmiúhelníka (B) < obvod sedmiúhelníka (A). Ověřte nerovnosti (obr. 3)

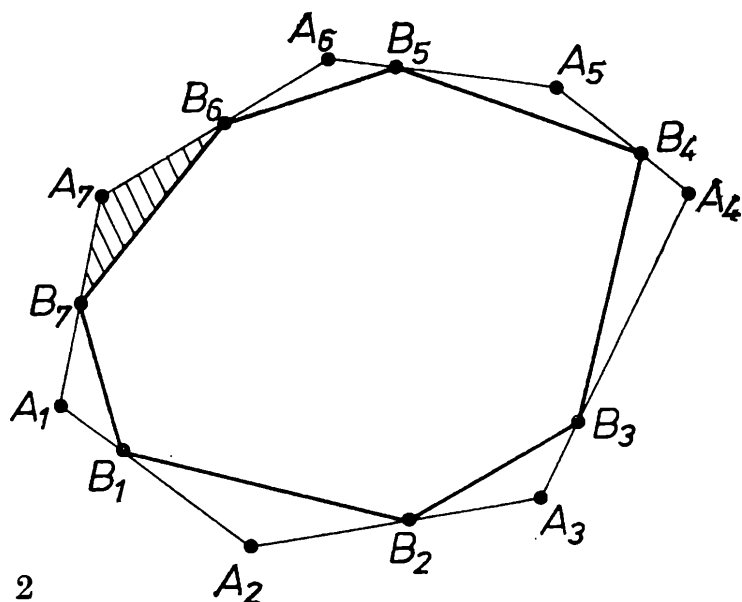
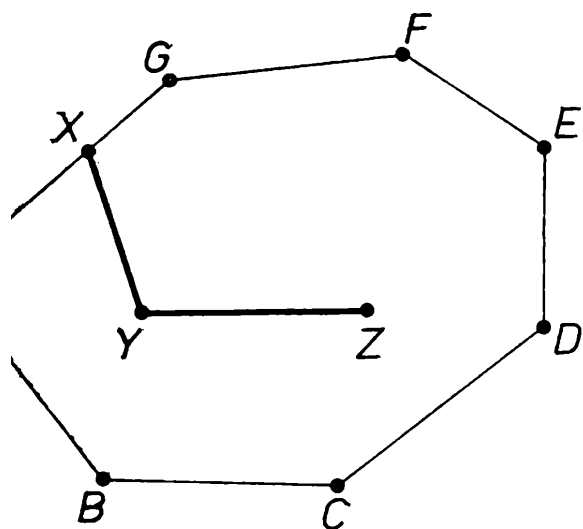
$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b$$

grafickým sčítáním úseček.

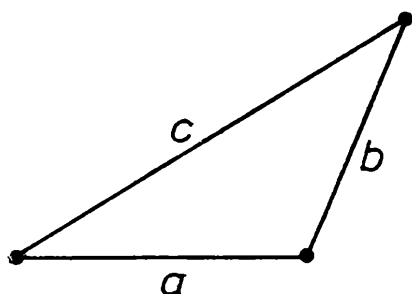
Názor nám někdy pomáhá, někdy nás zavádí.

Na všech třech obrázcích 4 a) b) c) je

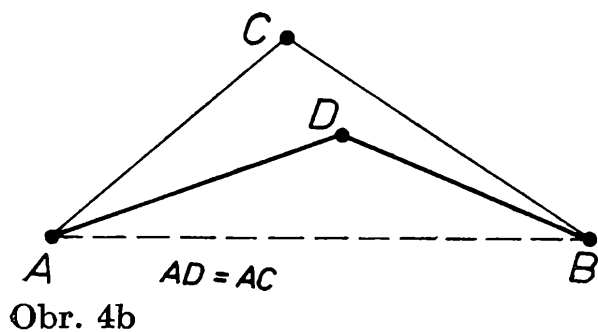
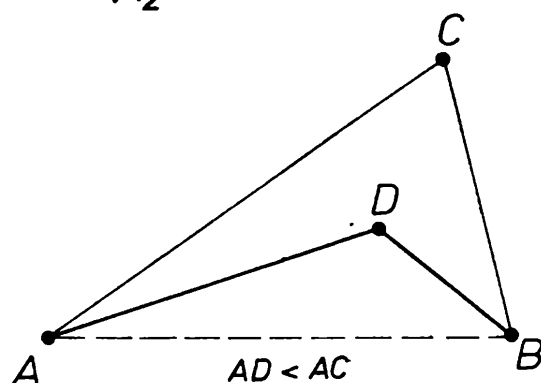
(x) $AD + BD < AC + BC,$



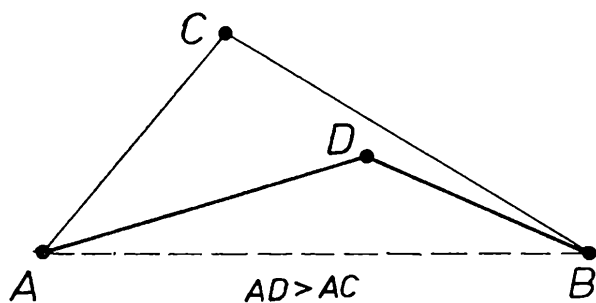
Obr. 2



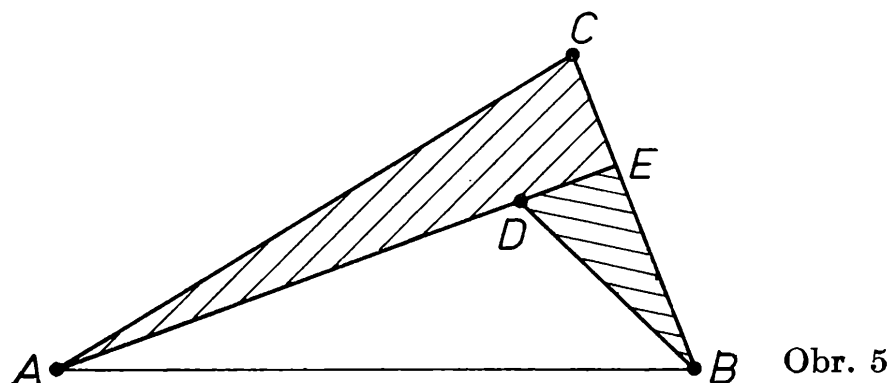
Obr. 3 Obr. 4a



Obr. 4b

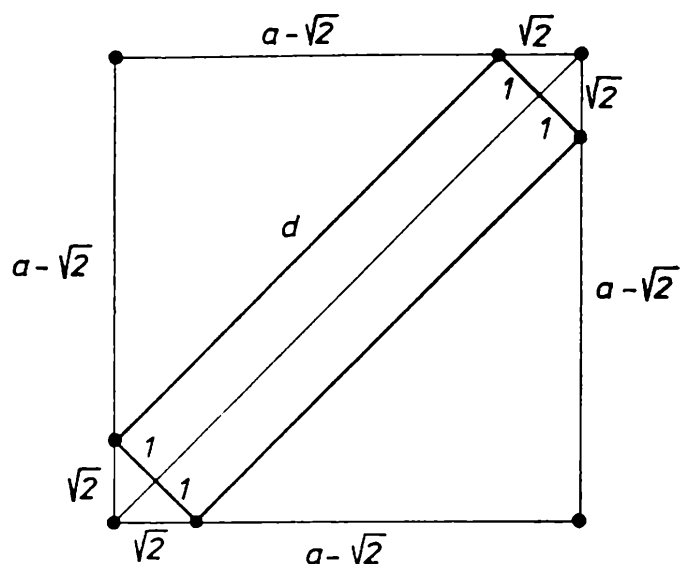


Obr. 4c

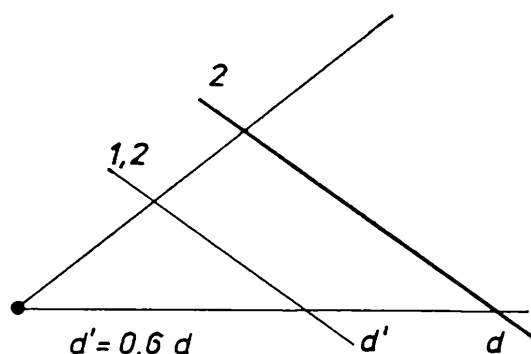


Obr. 5

ale na obr. 4 a) je $AD < AC$, na obr. 4 b) je $AD = AC$, na obr. 4 c) je $AD > AC$. Proto bychom se marně pokoušeli dokázat nerovnost $AD < AC$. Správný důkaz nerovnosti (x) můžeme dostat sečtením vhodných nerovností z trojúhelníků ACE a BDE z obr. 5. Zde se kombinuje přemýšlení s cílevědomým experimentováním.



Obr. 6



Obr. 7

Je dán čtverec o straně délky a . Jemu se má vepsat obdélník šířky 2 podle obr. 6, jehož osou souměrnosti je úhlopříčka čtverce. Máme vyjádřit délku d obdélníka pomocí parametru a . Tato úloha je matematizace reálného problému položit koberec na čtvercovou podlahu místnosti „z rohu do protějšího rohu“. Pro výpočet délky d vyjádřete obsah čtverce a^2 jako součet obsahů čtyř rohových trojúhelníků a obdélníka o obsahu $2d$. Je-li šířka běhounu např. 120 cm, zmenšíme obrazec v příslušném poměru, jako se to dělá např. na mapách (obr. 7):

$$d' = \frac{1,2}{2} \cdot d,$$

$$d' = 0,6 d.$$

Úlohu můžeme zobecnit např. tak, že podlaha místnosti je obdélník a rázem se komplikuje na rovnici 4. stupně. Zkuste to! Početní výsledek původní úlohy je

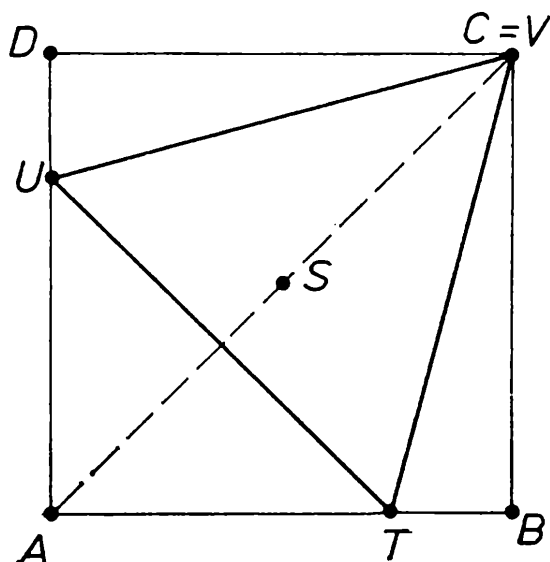
$$d = a\sqrt{2} - 2.$$

Na obr. 8 jsou vepsány dvěma čtvercům o straně a rovnostranný trojúhelník a čtverec. Vyjádřete jejich délky stran pomocí parametru a . Který z vepsaných čtverců je nejmenší? Narýsujte obr. 8 a) b).

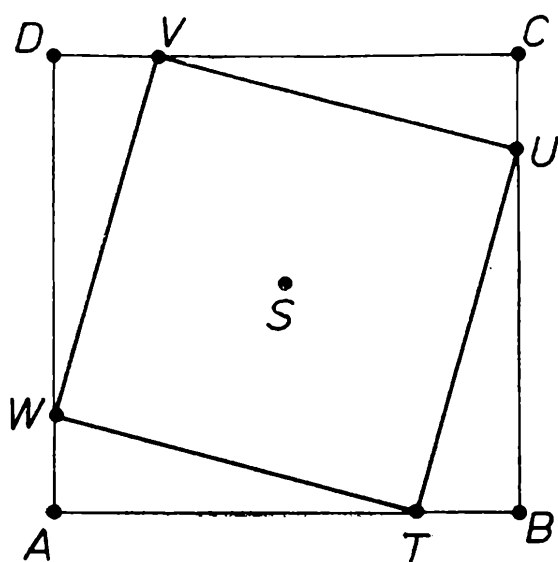
Na obr. 8a) je $\angle ACU = 30^\circ$, $\angle ACT = 30^\circ$ a na obr. 8b) je $|AT| = |BU| = |CV| = |DW| = x$.

Narýsování trojúhelníka CUT z obr. 8 a) je lehké, právě tak narýsování čtverce $TUVW$ z obr. 8 b). Výpočet délky s strany čtverce $TUVW$ z obr. 8 b) provedete pomocí Pythagorovy věty pro $\triangle ATW$;

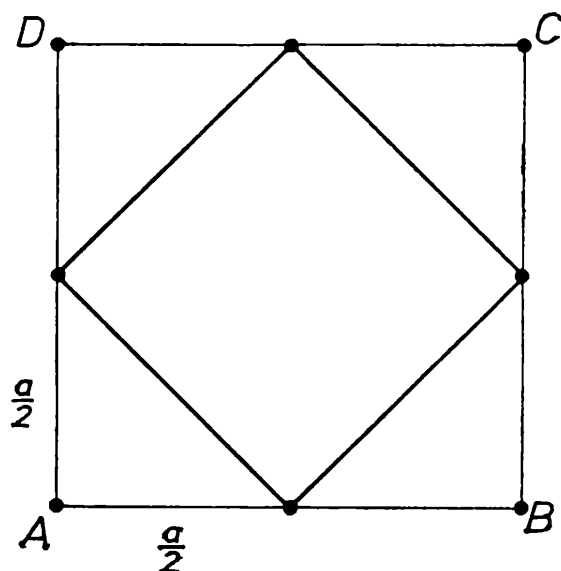
$$s^2 = x^2 + (a - x)^2,$$



Obr. 8a



Obr. 8b



Obr. 9

čili

$$s^2 = 2x^2 - 2ax + a^2.$$

Provedeme úpravu, kterou vám doporučujeme k zapamatování:

$$2s^2 = \underbrace{4x^2 - 4ax + 2a^2},$$

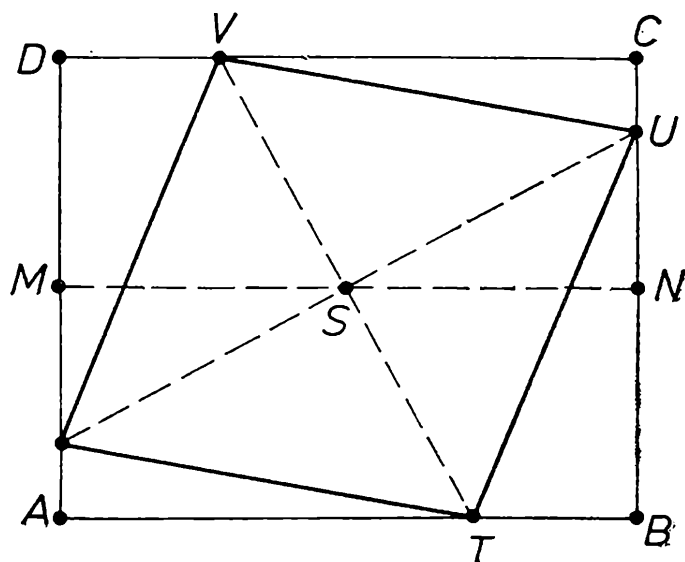
čili

(xx)

$$2s^2 = (2x - a)^2 + a^2.$$

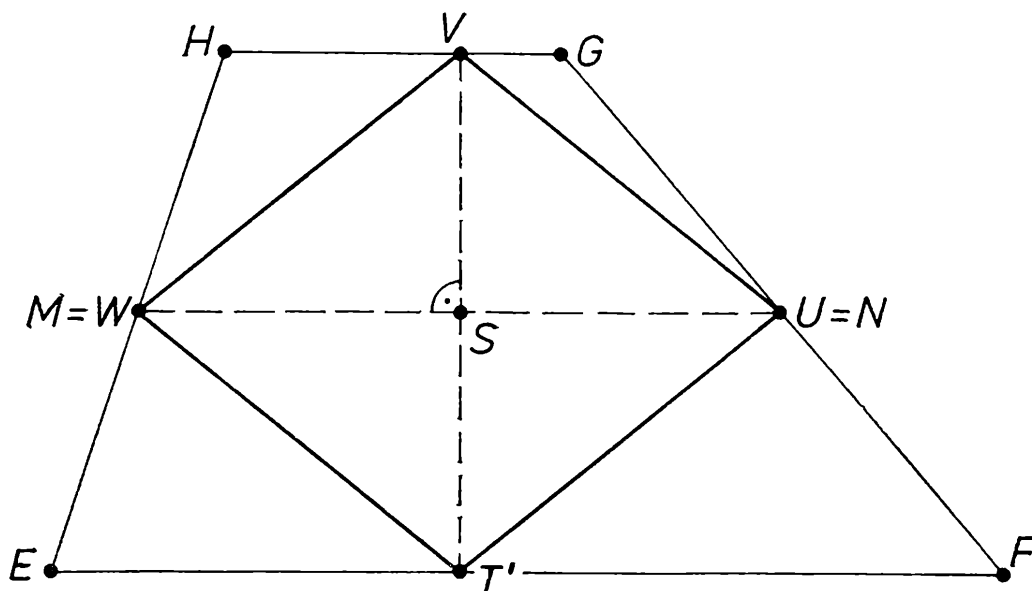
Cílem úpravy bylo sdružit členy s proměnnou x tak, aby se dostaly do druhé mocniny jediného lineárního dvojčlenu $2x - a$. Přezkoušejte si správnost úpravy.

Člen s^2 bude co nejmenší, budou-li minimální členy $2s^2$, $(2x - a)^2$, tj. bude-li minimální $2x - a$ (neboť člen a^2 je stálý). Člen $2x - a$ bude minimální, bude-li $2x - a = 0$, tj. pro $x = \frac{1}{2}a$. Příslušný minimální čtverec je na obr. 9. Obr. 10 a) b) ukazují čtyřúhelníky vepsané do jiného



Obr. 10a

Obr. 10b



čtyřúhelníka, a to tak, že každý vrchol vnitřního čtyřúhelníka leží uvnitř jiné strany vnějšího čtyřúhelníka. Kosočtverce z obr. 10 můžeme vytvořit také tak, že bodem S ležícím na střední příčce MN daného čtyřúhelníka položíme ramena kříže tak, aby každé jeho rameno prošlo jinou jeho stranu; tak dostaneme body T, U, V, W .

Na obr. 10 a) b) jsou nakresleny obdélník $ABCD$ a lichoběžník $EFGH$; MN , jsou jejich střední příčky. Každému čtyřúhelníku $ABCD$, $EFGH$ je vepsán kosočtverec $TUVW$.

a) Sestrojte tyto kosočtverce.

b) Může být kosočtverec z obr. 10 a) čtverec?

c) Je úloha z obr. 10 řešitelná pro každý obdélník $ABCD$ i pro každý lichoběžník $EFGH$? Nakreslete aspoň jeden obrazec, pro který řešitelná není.

d) Vyložte, jaké experimenty provedete.

Zemřel akademik Vladimír Kořínek

Ve věku 82 let zemřel 2. června 1981 po dlouhé a těžké nemoci náš vynikající matematik akademik Vladimír Kořínek, nositel Řádu práce, profesor matematicko-fyzikální fakulty Karlovy univerzity v Praze. Studentské veřejnosti je znám zvláště svou knihou *Základy algebry*, která poprvé vyšla roku 1953. Akademik V. Kořínek byl hojně činný i v Jednotě čs. matematiků a fyziků, v poslední době zejména v její české terminologické komisi pro matematiku.

Redakce

Z NOVÝCH KNIH

Feynman, R. P. — Leighton, R. B.
— Sands, M.:

FEYNMANOVE PREDNÁŠKY Z FYZIKY I

Vydala ALFA, Bratislava 1980,
preklad z angličtiny, 456 strán,
148 obr., 19 tab., viaz. Kčs 30,—.

Spôsob, akým sa podáva výklad vednej disciplíny, nie je len vecou predmetu a odboru, o ktorom sa má hovoriť. O tom sme sa presvedčovali už v školských laviciach. Tam sme videli, že vyučovanie vyžaduje nielen vedecké argumenty a ľudské postoje, ale aj cieľavedomý výraz záujmu vyučujúcej osobnosti.

Nositeľ Nobelovej ceny za fyziku v roku 1965 Richard Philips Feynman sa podujal na zaujímavý experiment. Vo svojich prednáškach pre vysokoškolákov chce plne zaujať moderne zmýšľajúceho

mladého človeka 20. storočia fyzikálnou problematikou. „Chcel som, aby väčšina z vás mohla oceniť krásu nášho krásneho sveta a zároveň získať o ňom fyzikálnu predstavu. Myslím, že tento fyzikálny obraz sveta predstavuje dnes hlavnú časť skutočnej kultúry našej epochy“ (Feynman).

Do prvého z piatich dielov „Prednášok“ sú zaradené tieto oblasti: atómy v pohybe, základy fyziky, zachovanie energie, čas a vzdialenosť, teória gravitácie, Newtonove zákony dynamiky, zachovanie hybnosti, charakteristiky sily, práca a potenciálna energia, špeciálna teória relativity, priestoročas, rotácie v priestore, harmonický oscilátor, rezonancia. Osobitné kapitoly sú venované matematickej problematike: základná

číselná algebra, pravdepodobnosť, vektorová algebra.

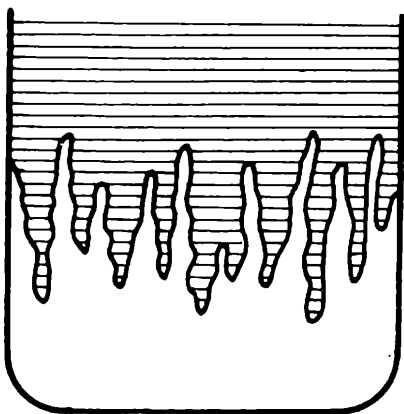
Feynmanove prednášky nie sú prehľadným kurzom s uhladeným usporiadaním materiálu. Sú snahou pre pochopenie základných črt s neustálym poukazovaním na to, ako rovnice a myšlienky zapadajú do fyzikálnej schémy. Nové súvislosti, originálne výkladové postupy, závažné veci s minimom matematiky, komplikované javy presne a jednoducho vysvetlené, to sú podstatné devízy diela. Šarmantné sú krásne a hlboké prirovnania, šírenie „ducha fyziky i fyzikov“, netušené súvislosti fyziky s ostatnými disciplínami na pozadí ľudskej túžby po poznaní.

V knihe sa veľa hovorí, kladú sa otázky, podnecuje sa premýšľanie, odpovedá sa argumentami jednoducho a presvedčivo. Jazyk a forma sú podriadené cieľu pochopenia podstatných súvislostí. Feynmanove prednášky treba čítať a prežívať. Už v posledných ročníkoch stredných škôl budú potešením a poučením pre žiakov i učiteľov. Richard Feynman dokázal, že vyučovanie fyziky je vec hodná pozornosti. Práve jeho prednášky sú prijateľnou náhradou za nenahraditeľný priamy, osobný vzťah medzi študentom a dobrým učiteľom. Presvedčte sa o tom.

Dušan Jedinák

Efektní experimenty: Slané prsty

Naplňte velkou skleněnou nádobu studenou vodou. Pak do nádoby opatrně nalijte teplý obarvený roztok soli ve vodě tak, aby se obě kapaliny nesmísily. Barva při tom slouží pouze jako indikátor. Okamžitě začnou z horního slaného roztoku pronikat do spodní vrstvy vody malé



proudy, podobné prstům (obr. 1). Přechodové pásmo mění při tom svoji světelnou propustnost. Podobné „prsty“ můžete získat i bez teplotního rozdílu, když na slaný roztok nalijete obarvený roztok cukerný.

Petr Hnilička

Obr. 1

Vysvětlení tohoto experimentu bude v č. 4 na str. 175.

SLOVNÍČEK

ITALSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

totale	celkový, totální
traccia ž	stopa; stopník
tracciare (una linea)	vésti (čáru)
tradurre	překládati
traiettoria ž	trajektorie
transfinito	transfinitní
transitivo	tranzitivní
proprietà transitiva ž	tranzitivnost
transizione nucleare ž	nukleární přeměna
trapezio m	lichoběžník
trascendente	transcendentní
trascurabile	zanedbatelný
trascurare	zanedbat, opomenouti
trasformare	transformovati
trasformatore m	transformátor
trasformazione ž	transformace
— adiabatica	děj adiabatický
— isobara	— isobarický
— isocora	— isochorický
— isoterma	— isothermický
— reversibile	— vratný, reversibilní
— irreversibile	— nevratný, irreversibilní
traslazione ž	translace
trasmissione ž	přenos, převod
trasparente	průhledný
trasportare	dopravovati
trasposizione ž	transposice, přemístění
trasversale, traversale	příčný
retta trasversale ž	příčka
tratteggiatura ž	vyšrafování
tratto m	šrafa
triade ž	trojice
triangolazione ž	triangulace
triangolo m	trojúhelník
— acutangolo	— ostroúhlý

Ve Státním nakladatelství technické literatury vyšly v Polytechnické knižnici tyto knihy

Havlíček: Integrální počet pro začátečníky	19,— Kčs
Jarník - Šisler: Jak řešit rovnice a jejich soustavy .	19,— Kčs
Šindelář: Analytická geometrie pro začátečníky	23,— Kčs
Šrejder: Binární relace	28,— Kčs
Štěpánský: Nomogramy .	22,— Kčs
Vilenkin: Kombinatorika	34,— Kčs
Zelina: Středoškolská geometrie — Úvod do studia	28,— Kčs

SNTL - NAKLADATELSTVÍ TECHNICKÉ LITERATURY
113 02 Praha 1, Spálená 51

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12 Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p.
v Praze 1981.

ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

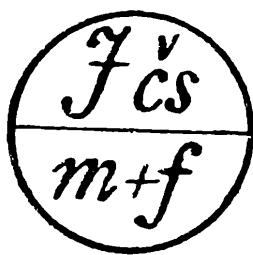
**1921/22
1981/82**

*** 60 let**

**ROČNÍK 60, 1981/82
PROSINEC**

(4)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Vladimír
Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr.
Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

J. Chloupek: Světová prvenství Sov. svazu v kosmickém výzkumu II	145
J. Gerža: Neurčité diofantické rovnice	149
E. Calda: Profesor Y nad tiketem sportky	151
J. Troják: Hlavo!am s mosty — cesta do teorie grafů	153
F. Golab, J. Procházka: Meteorologické veličiny a organizace jejich měření v ČSSR	157
M. Ohera: Interakce jaderného záření s hmotou .	161
J. Mída: Druhý velký matematik z Brunšviku .	169
V. Dragounová: Kdy začne jaro?	171
E. Kraemer: Dvacet úloh z Bulharska pro nejmladší čtenáře	176
Naše soutěž	180
J. Vyšín: Jak na to?	187
L. Boček: Několik vzpomínek na MO	190
Z nových knih	191
K. Šindelář: Slovníček italsko-český	3. str. obálky

Světová prvenství Sovětského svazu v kosmickém výzkumu - II.

JAROSLAV CHLOUPEK, Střední odborné učiliště, Letovice

Dne 12. října 1964 byla na oběžnou dráhu kolem Země vyslána kosmická loď *Voschod 1* o hmotnosti 5320 kg a větší vzdálenosti od Země (perigeum 178 km, apogeum 408 km). Poprvé v historii kosmonautiky startovala tříčlenná posádka kosmonautů — vědeckých pracovníků, a to *V. M. Komarov, K. P. Feoktistov* a *B. B. Jedorov*.

Významný byl také let kosmické lodi *Voschod 2* s kosmonauty *P. I. Beljaževem* a *A. A. Leonovem*, která odstartovala dne 18. března 1965. Při tomto letu se poprvé v historii kosmonautiky podařilo Leonovi vystoupit z lodi do volného kosmického prostoru, kde pobyl 12 minut, a přitom se od lodi vzdálil na 5,35 m. Z kabiny kosmické lodi byly pořízeny snímky kosmonauta Leonova ve volném kosmickém prostoru.

Světové prvenství ve spojení kosmických lodí během letu patří také sovětským kosmonautům. Uskutečnilo se při letu kosmických lodí *Sojuz 4* ($m = 6400$ kg) s kosmonautem *A. V. Šatalovem* a kosmickou lodí *Sojuz 5* ($m = 6525$ kg) s kosmonauty *B. V. Volynovem*, *J. V. Chrunovem* a *A. S. Jelisejevem*. *Sojuz 4* odstartoval 14. ledna 1969, *Sojuz 5* dne 15. ledna 1969. Spojení lodí probíhalo nejprve automaticky po dobu asi 43 minut. Poslední fázi spojení řídil ručně kosmonaut Šatalov. Spojení obou lodí se uskutečnilo 16. ledna 1969 v 8^h 20^m SEČ a trvalo více než 4 hodiny. Během styku obou lodí přestoupili kosmonauti Chrunov a Jelisejev do *Sojuzu 4*. Byl to první krok pro pozdější lety orbitálních stanic a jejich spojení s kosmickými loděmi.

První největší skupinový let se uskutečnil se třemi kosmickými loděmi: *Sojuzem 6* (start 11. října 1969) s kosmonauty *G. Š. Šoninem* a *V. V. Kubasovem*, *Sojuzem 7* (start 12. října 1969), kde posádku tvořili kosmonauté *A. V. Filipčenko*, *N. V. Volkov* a *V. V. Gorbatko* a *Sojuzem 7* (start 13. října 1969) s kosmonauty *A. V. Šatalovem* a *A. S. Jelisejevem*. Při tomto společném letu bylo vyzkoušeno vzájemné manévrování kosmických lodí (provedeno přes 30 manévrů) a prověřeno řízení skupinového letu. Na palubě *Sojuzu 6* byl uskutečněn první pokus o svařování ve vzduchoprázdnu a ve stavu beztíže pomocí zařízení Vulkan.

V historii kosmonautiky se poprvé uskutečnila vzájemná spolupráce socialistických států, což bylo vykonáno prostřednictvím družice *Interkosmos 1*, která odstartovala na oběžnou dráhu dne 14. října 1969. Družice o hmotnosti 300 kg obíhala Zemi ve vzdálenostech 254 km až 626 km od jejího povrchu. Šlo o první družici mezinárodní organizace Interkosmos, jejíž činnost je zaměřena na výzkum kosmického prostoru v rámci států socialistického společenství. Družice Interkosmos 1 byla vybavena aparaturou vyrobenou v ČSSR (optický a rentgenový fotometr), NDR a Sovětského svazu. Přístroje prováděly výzkum ultrafialového a rentgenového záření Slunce a jeho vliv na vysokou atmosféru.

Úspěšný byl také let sovětské měsíční sondy *Luna 16*. Světové prvenství si získala tím, že vykonala automatický odběr měsíční horniny, s níž se vrátila zpět na Zemi. Z kosmodromu Bajkonur odstartovala 12. září 1970 a dne 17. září byla uvedena na dráhu kolem Měsíce ve vzdálenosti 110 km od jeho povrchu. 20. září 1970 sonda přistála v Moři hojnosti západně od kráteru Webb. Jejím úkolem bylo pořídit snímky povrchu Měsíce, změřit jeho teplotu a především odebrat vzorek měsíční horniny. Vrták sondy pronikl měsíčním povrchem do hloubky 35 cm, čímž byl získán vzorek měsíční horniny o hmotnosti 101 g. Start z Měsíce se uskutečnil 21. 9. Luna 16 s měsíční horninou přistála na povrchu Země 80 km jihovýchodně od kazašského města Džezkazganu.

V témže roce zaznamenali sovětští vědci další prvenství v kosmonautice v souvislosti s výzkumem Měsíce. Start *Luny 17* dne 10. listopadu 1970 znamenal další let sondy k Měsíci. 15. listopadu byla Luna 17 navedena na kruhovou dráhu ve vzdálenosti 85 km od povrchu Měsíce. Měkké přistání sondy na povrch Měsíce se uskutečnilo 17. listopadu v severozápadní části Moře dešťů. Ještě téhož dne bylo z nitra sondy na povrch Měsíce spuštěno automatické vozidlo Lunochod 1 o hmotnosti 756 kg a půdorysných rozměrech 2×2 m. Lunochod 1 po dlouhou dobu prováděl průzkum měsíčního terénu, pořizoval televizní snímky, měřil mechanické vlastnosti a chemické složení měsíční horniny a také vliv kosmického a rentgenového záření na povrch Měsíce. Na palubě Lunochodu bylo umístěno laserové zařízení pro přesné určení vzdálenosti Měsíce od Země s přesností na $\pm 1,5$ cm. Lunochod 1 byl vynikajícím průzkumným vozidlem, které v mnohém nahradilo nákladný a často nebezpečný let kosmonautů k Měsíci.

První orbitální vědecká stanice *Saljut 1* byla vyslána na oběžnou dráhu kolem Země dne 19. dubna 1971. Stanice o hmotnosti 18 600 kg, délce 12,5 m a maximálního průměru 4 m sloužila k provádění široké škály vědeckotechnických, biologických a lékařských měření. Na povel z řídicího centra dne 11. října 1971 byla stanice navedena na sestupnou dráhu a zanikla v hustých vrstvách atmosféry.

Meziplanetární sondy *Mars 2* a *Mars 3* zaznamenaly prvenství v tom, že při letu k Marsu se od stanice Mars 2 oddělilo pouzdro o hmotnosti 1100 kg a dne 27. listopadu 1971 jako první dopadlo na povrch planety. Prvním tělesem, které měkce přistálo na povrchu Marsu (2. 12. 1971), bylo pouzdro oddělené od sovětské sondy Mars 3 a o hmotnosti 1100 kg.

Sovětská kosmická loď *Sojuz 15*, která odstartovala 26. srpna 1974, patřila do série lodí typu Sojuz, které plnily významné kosmonautické úkoly. Na palubě Sojuzu 15 letěli kosmonauté *G. V. Sevast'janov* a *L. Š. Domin*. Tito kosmonauté přispěli k prvenství Sovětského svazu v kosmonautice tím, že jako první přistáli na zemském povrchu v noci. Kosmonaut Domin, 48letý, letěl jako první dědeček po orbitální dráze kolem Země. Jeho předností byla velká vytrvalost, houževnatost a pílě. I když měl značné zdravotní potíže, díky svým uvedeným vlastnostem a soustavnému cvičení se nakonec ve vyšším věku stal kosmonautem.

8. června 1975 byla odstartována sovětská meziplanetární sonda nového typu *Veněra 9*. K Venuši dospěla 22. října 1975. Dva dny před tímto datem se oddělil přistávací modul, který pomocí padáků a aerodynamického brzdění přistál asi uprostřed osvětlené polokoule planety. Přistávací manévř trval 75 minut. Družicová část sondy byla téhož dne navedena na oběžnou dráhu kolem Venuše. Tak se družicová část *Veněry 9* s oběžnou dobou 48^h 18^m a vzdálenostmi 1510 km a 112 200 km stala první umělou družicí planety Venuše. Úkolem družice je provádět komplexní výzkum oblačné pokrývky, výzkum vysoké atmosféry a působení slunečního větru na planetu.

Mimořádné prvenství, které patří Sovětskému svazu a současně Spojeným státům severoamerickým, je společný let sovětských a amerických kosmonautů zvaný Sojuz — Apollo. Prvenství je třeba vidět v navázání a výsledcích spolupráce obou kosmonautických velmocí a právem je třeba posuzovat tento let za historický.

Sojuz 19 odstartoval 15. července 1975 s kosmonauty *A. A. Leonovem* a *V. N. Kubasovem*. Další den letu přešel na kruhovou dráhu kolem Země s parametry 223 km a 225 km. 16. července 1975 startovala americká kosmická loď *Apollo 18* s kosmonauty *T. P. Staffordem*, *V. Brandem* a *D. K. Slaytonem*. Spojení obou lodí se uskutečnilo dne 17. července, kdy také proběhlo setkání obou posádek.

Na palubě obou kosmických lodí bylo uskutečněno více než 30 vědeckých a technologických experimentů z větší části společných. Kosmonauté vykonali také astronomická pozorování. Zajímavý byl experiment s umělým zatměním Slunce. Kosmická loď *Apollo 18* zamířila ke Slunci na vzdálenost 220 m od Sojuzu 19. Pro posádku Sojuzu, kosmonauty Leonova a Kubasova, nastalo zatmění Slunce, které kosmo-

nauté zachytili na filmový pás. Celý experiment trval několik minut. Tak se uskutečnilo první umělé zatmění Slunce na orbitální dráze kolem Země.

V r. 1977 zaznamenal významný úspěch let kosmonautů *J. V. Romaněnka* a *G. M. Grečka* v kosmické lodi *Sojuz 26*. Start lodi se uskutečnil 10. prosince a další den se uskutečnilo spojení s orbitální stanicí *Saljut 6*. Kosmonauti prožili dlouhodobý úspěšný pracovní pobyt na orbitální stanici po dobu 96 dní. Tak dosáhli nového světového rekordu v délce pobytu v kosmickém prostoru v roce 1978.

Během jejich letu se uskutečnila návštěva dalších dvou posádek: 11. ledna 1978 se *Sojuzem 27 V. Džanibekov* a *O. Makarov* a 3. března 1978 se *Sojuzem 28*, která byla první mezinárodní posádkou. Tvořili ji kosmonauté *A. Gubarev* a *V. Remek*, první československý kosmonaut. Posádka *Sojuzu 27* poprvé zaměnila v kosmickém prostoru původní kosmickou loď za jinou a vrátila se na Zemi 16. ledna 1978 v kosmické lodi *Sojuz 26*.

20. ledna 1978 byla odstartována první nákladní loď *Progres 1*. Šlo o bezpilotní kosmickou loď určenou k doplnění paliva a zásob pro *Saljut 6*. *Progres 1* dopravil na orbitální stanici také speciální elektrickou pec *Splav 1*, v níž později kosmonauté prováděli experiment *Morava*. Loď typu *Progres* nebyla zařízena pro přistání na Zemi. Proto po splnění daného úkolu se od orbitální stanice odpojila a zanikla v hustých vrstvách atmosféry nad Tichým oceánem.

V rámci zahájení nové etapy programu *Interkosmos*, která je zaměřena na pilotované lety, startovala první mezinárodní posádka na palubě kosmické lodi *Sojuz 28*, sovětský kosmonaut *A. Gubarev* a první československý kosmonaut *V. Remek*. Datum startu bylo určeno na den 2. března 1978. Kosmická loď měla hmotnost 6570 kg, její počáteční oběžná doba byla 91,4 min. a obíhala ve vzdálenostech od povrchu Země 334 km a 353 km. Po spojení s orbitální stanicí *Saljut 6* se mezinárodní posádka setkala s obyvateli *Saljutu 6*, kosmonauty *J. V. Romaněnkem* a *G. M. Grečkem*. Návrat kosmonautů *Gubareva* a *Remka* se uskutečnil 10. března 1978. Na palubě *Saljutu 6* tedy pracovali čtyři kosmonauti, kteří se při společném orbitálním letu zaměřili na několik experimentů: Pokus *Chlorella 1* — růst řas v beztláčeném stavu, pokus *Morava* — *Splav* (růst krystalů), dále měření kyslíkového režimu v tkáních, tepelná výměna mezi tělem kosmonauta a okolím, zkoušky psychického stavu kosmonautů a další. Československo se tímto historickým letem stalo třetí zemí na světě, která měla svého kosmonauta. Kosmický let první mezinárodní posádky v rámci programu *Interkosmos* otevřel sérii pilotovaných kosmických letů s mezinárodními posádkami.

Neurčité diofantické rovnice

IVAN GERŽA, Bratislava

V 3. storočí n. l. v Alexandrii žijúci grécky matematik *Diofantos* napísal hlavné dielo *Aritmetika*. Z 13 kníh sa dodnes zachovalo prvých šiest. Diofantos v nich pojednáva o problémoch teórie čísiel. Zachovala sa tiež drobná práca *Peri polygónón arithmón* (O polygonálnych číslach).

Diofantos ako prvý čistý matematik riešil úlohy, napr. lineárne a kvadratické rovnice, pomocou matematických symbolov. Jednu skupinu rovníc nazývame na pamiatku veľkého gréckeho matematika — *diofantické*.

Neurčitou (diofantickou) rovnicou nazývame jednu rovnicu o niekoľkých neznámých, ak tieto neznáme môžu reprezentovať len celé čísla.

Úloha 1. List máme oznámkovať známami v celkovej hodnote 1,60 Kčs. Koľkými spôsobmi to môžeme urobiť, keď máme k dispozícii len 40 hal. a 60 hal. známky?

Riešenie: Nech x je počet 40 hal. známok, y počet 60 hal. známok. Zostavíme rovnicu

$$\begin{aligned} 40x + 60y &= 160 \\ 2x + 3y &= 8 \end{aligned} \quad (1)$$

Táto rovnica je neurčitá rovnica s neznámymi x, y . Riešme túto rovnicu úvahou: Čísla $2x$ a 8 sú párne čísla. Z toho vyplýva, že aj $3y$ je párne číslo, a teda aj y je párne číslo. Teda

$$y = 0, y = 2.$$

Potom môžu nastať tieto prípady:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x + 3y &= 8 & y &= 0 \\ & & x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2x + 3y &= 8 & y &= 2 \\ 2x + 6 &= 8 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

List možno oznámkovať 40 a 60 hal. známami takto:

a) 4 známky 40 hal. b) 2 známky 60 a 1 známka 40 hal.

Úloha 2. Keď sa skupina cvičencov postavila do osemstupu, chýbal v poslednom rade jeden cvičenec; keď sa postavili do deväťstupov,

chýbali dvaja cvičenci. Cvičencov bolo menej ako 100. Koľko ich bolo presne?

Riešenie: Označme x počet 8-stupov, y počet 9-stupov. Potom je počet cvičencov $8x - 1$, $9y - 2$; je teda

$$8x - 1 = 9y - 2 \quad (1)$$

$$x = \frac{9y - 1}{8}$$

$$x = y + \frac{y - 1}{8}. \quad (2)$$

Z (2) je jasné, že aby x bolo prirodzené číslo, musí byť aj $\frac{y - 1}{8}$ tiež prirodzené číslo.

Položme:

$$\frac{y - 1}{8} = u \quad (3)$$

$$y = 8u + 1. \quad (4)$$

Z rovníc (3) a (4) dosadíme do rovnice (2):

$$x = 9u + 1. \quad (5)$$

Podľa podmienky úlohy musí platiť:

$$8x - 1 < 100$$

$$8(9u + 1) - 1 < 100$$

$$72u + 8 - 1 < 100$$

$$72u < 93.$$

Z prirodzených čísel vyhovuje tejto nerovnosti iba $u = 1$. Pre $u = 1$ je podľa (5) a (4)

$$x = 10, \quad y = 9$$

Je tedy počet cvičencov

$$8x - 1 = 79 \quad \text{alebo} \quad 9y - 2 = 79.$$

Úloha 3. Jedna odvesna pravouhlého trojuholníka má veľkosť 5 cm. Vypočítajte veľkosť druhej odvesny a prepony c , keď veľkosť týchto strán v cm je vyjadrená prirodzenými číslami.

Riešenie: Podľa Pytagorovej vety je

$$c^2 - b^2 = 25, \quad (1)$$

$$(c + b)(c - b) = 25.$$

Aby sme túto neurčitú kvadratickú rovnicu vyriešili, prešetríme činiteľov na ľavej strane rovnice. Obidva činitele sú prirodzené čísla.

Číslo 25 je možné ako súčin prirodzených čísiel napísať takto:

a) $25 = 25 \cdot 1$

b) $25 = 1 \cdot 25$

c) $25 = 5 \cdot 5$

Riešime jednotlivé prípady:

a)
$$\begin{aligned} c + b &= 25 \\ c - b &= 1 \end{aligned}$$

To je sústava dvoch lineárnych rovníc s riešením $c = 13$, $b = 12$

b)
$$\begin{aligned} c + b &= 1 \\ c - b &= 25 \end{aligned}$$

Riešenie je $c = 13$, $b = -12$. Výsledok našej úlohy nevyhovuje, riešenie nie je prirodzené číslo.

c)
$$\begin{aligned} c + b &= 5 \\ c - b &= 5 \end{aligned}$$

Ani tento prípad našej úlohy nevyhovuje.

Danej úlohe vyhovuje trojuholník so stranami 5 cm, 12 cm, 13 cm.

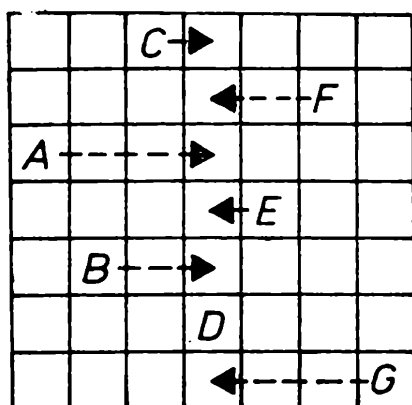
Profesor Ypsilon nad tiketem sportky

RNDr. EMIL CALDA, UK Praha

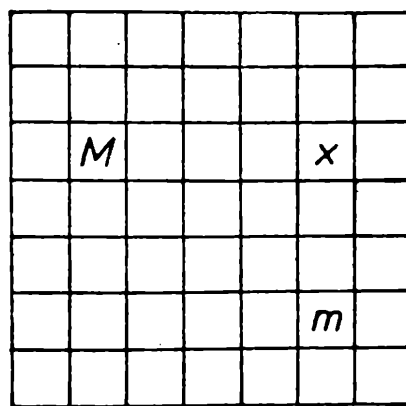
Profesor X. Ypsilon chce privést k pravidelnému provozování sportu své žáky, kteří stále jen leží v matematických knihách a i svůj volný čas tráví studiem vědecké literatury tuzemské i zahraniční. Dnes to zkouší úlohami inspirovanými tiketem sportky v naději, že si studenti všimnou seznamu 49 sportů na zadní straně a pro jeden z nich zahoří. Zkusme jeho úlohy řešit také; nepřivedou-li nás k pravidelné sportovní činnosti, alespoň se pocvičíme v matematických úvahách a výpočtech. Připomeňme si, že na tiketu sportky jsou otištěna čísla 1, 2, ..., 49 v sedmi řádcích a sedmi sloupcích; takovou tabulku si snadno napíšete.

Úloha 1. Na tiketu sportky zvolíme sedm čísel tak, aby v každém řádku i sloupci bylo právě jedno. Ukážeme, že součty kterýchkoli sedmi čísel s touto vlastností jsou si rovny.

Označme zvolená čísla písmeny A, B, C, D, E, F, G a necht jsou v tomto pořadí umístěna i v jednotlivých sloupcích (A je v prvním sloupci, B ve druhém atd.) — viz obr. 1. Místo čísel A, B, C, D, E, F, G



Obr. 1



Obr. 2

vezměme po řadě čísla $A + 3$, $B + 2$, $C + 1$, D , $E - 1$, $F - 2$, $G - 3$, což jsou čísla vyplňující prostřední sloupec, kam míří šipky. Protože $\{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46\} = \{A + 3, B + 2, C + 1, D, E - 1, F - 2, G - 3\}$,

platí:

$$A + B + C + D + E + F + G = (A + 3) + (B + 2) + (C + 1) + D + (E - 1) + (F - 2) + (G - 3) = 4 + 11 + 18 + 25 + 32 + 39 + 46 = 175.$$

Součet sedmi zvolených čísel je tedy roven součtu čísel v prostředním sloupci, takže nezávisí na tom, jak čísla byla zvolena. Lze ukázat — a to už jistě provedete sami — že součet zvolených čísel je též roven součtu čísel ležících na diagonále tiketu, tj. součtu $1 + 9 + 17 + 25 + 33 + 41 + 49$. Tento výsledek je do jisté míry obecnější, neboť ho lze aplikovat i na čtvercové sítě, v nichž prostřední sloupec neexistuje, např. pro čtvercovou síť s čísly $1, 2, \dots, 64$.

Úloha 2. V každém ze sedmi řádků tiketu najdeme nejmenší číslo, vybereme z nich největší a označíme je M ; dále najdeme největší číslo v každém sloupci, vybereme z nich nejmenší a označíme je m . Snadno zjistíte, že $M = m = 43$. Jaký je vztah mezi M a m v obecném případě, tj. při libovolném rozmístění čísel $1, 2, \dots, 49$ v nějaké tabulce typu 7×7

Nechť jsou čísla $1, 2, \dots, 49$ umístěna libovolným způsobem a nechť je $M \neq m$. Potom pro číslo x , které leží v průniku řádku, v němž je M , a sloupce, v němž je m (obr. 2), platí jednak $x > M$, neboť M je nejmenší číslo ve svém řádku, jednak $x < m$, neboť m je největší číslo ve svém sloupci. Ze vztahu $M < x < m$ vyplývá $M < m$. Protože jsme však viděli, že může nastat i případ $M = m$, platí pro čísla m , M obecně $M \leq m$. Je tedy číslo M , které je největší z nejmenších čísel každého řádku, nejvýše rovno číslu m , které je nejmenší z největších čísel každého sloupce. Pokuste se určit možné hodnoty čísel M , m v různých tabulkách, o kterých uvažujeme.

Úloha 3. Sestavme z druhých mocnin „sportkových čísel“ součet

$$s = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 47^2 - 48^2 + 49^2$$

a pokusme se jej co nejvýhodněji určit.

Víme-li, že výraz $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ udává součet druhých mocnin prvních n přirozených čísel, můžeme postupovat takto:

$$\begin{aligned} & 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + 47^2 + 49^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{25} (2k-1)^2 = 4 \sum_{k=1}^{25} k^2 - 4 \sum_{k=1}^{25} k + 25 = 20\,825 : \end{aligned}$$

podobným způsobem vypočteme

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 46^2 + 48^2 = \sum_{k=1}^{24} (2k)^2 = 4 \sum_{k=1}^{24} k^2 = 19\,600 .$$

Pro hledaný součet s tak máme

$$s = 20\,825 - 19\,600 = 1225.$$

Mnohem elegantnější je však následující postup, v němž vystačíme pouze se vzorcem pro rozdíl druhých mocnin:

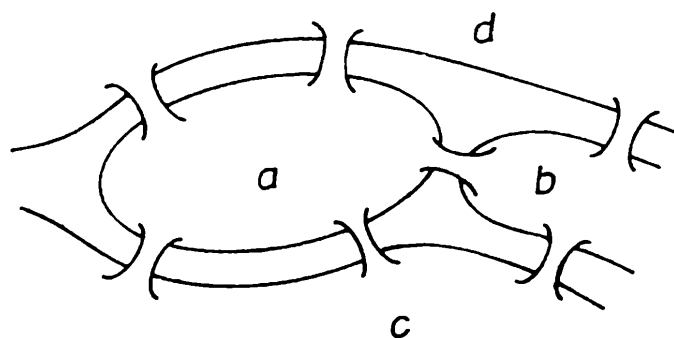
$$\begin{aligned} s &= (49^2 - 48^2) + (47^2 - 46^2) + \dots + (3^2 - 2^2) + 1^2 = (49 - 48)(49 + \\ &+ 48) + (47 - 46)(47 + 46) + \dots + (3 - 2)(3 + 2) + 1 = 49 + 48 + \\ &+ 47 + 46 + \dots + 3 + 2 + 1 = 1225. \end{aligned}$$

Dobrych výsledků lze často dosáhnout jednoduchými prostředky; pravidelným běháním dosáhneme více než pravidelnými návštěvami toho nejlepšího lékaře!

Hlavlám s mosty — cesta do teorie grafů

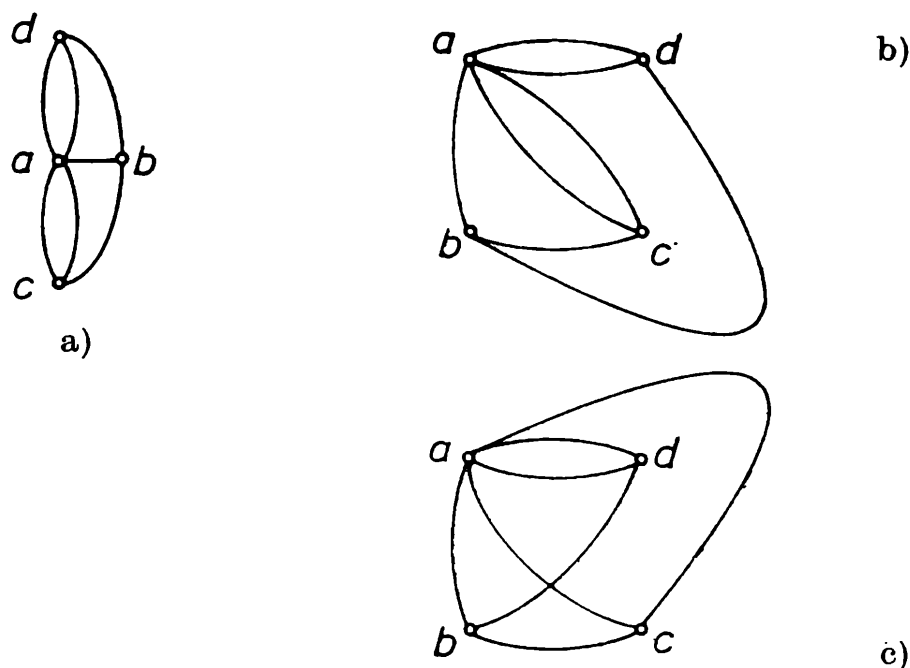
RNDr. JAN TROJÁK, UK Praha

První úloha řešená užitím grafů patřila mezi problémy dnes odborně nazývané „dopravní“ nebo „transportní“. Byla vlastně hlavlámem v 18. století, kdy město Königsberg (česky též Královec, nynější Kaliningrad na baltském pobřeží Sovětského svazu) mělo sedm mostů přes řeku Pregel rozmístěných tak, jak ukazuje obr. 1. Řeka rozdělila město na oblasti, z nichž čtyři jsou zobrazeny na obrázku a označeny písmeny a, b, c, d . Hlavlám spočíval v úkolu najít takovou cestu z jednoho ze čtyř území a, b, c, d , která by procházela po každém mostě právě jednou a která by končila opět ve výchozím území.



Obr. 1

Obr. 2



Matematik *L. Euler* vyřešil tento problém v roce 1736 za svého pobytu v Petrohradě. Zaměnil obr. 1 „geometrickou“ interpretací situace, ve které nahradil oblasti *a, b, c, d* body *a, b, c, d* v rovině a mosty spojující příslušné oblasti nahradil čarami spojujícími stejně označené body. Výsledkem této interpretace mohl být obr. 2a, pro který dnes užíváme názvu *graf*.

V obr. 2a si Euler všiml, že kdyby existoval bod požadovaný úlohou, musil by být spojen s ostatními sudým počtem čar, neboť na počátku cesty by chodec po jedné z nich vyšel a na konci by se po jiné čáře vrátil. Jestliže by během svého putování prošel tímto bodem *k*-krát, pokaždé by přišel po některé jiné čáře a pokaždé by musil po další „nepoužité“ čáře z tohoto bodu zase odejít. Z bodu, o kterém Euler uvažoval, vychází tedy $1 + 1 + 2k$ čar a to je sudý počet. Graf z obr. 2a však takový bod nemá, hlavolam *königsbergských* mostů je tedy už proto neřešitelný. Euler kromě toho ukázal, že existence jednoho bodu spojeného s ostatními sudým počtem čar by nestačila k tomu, aby úloha řešení měla. Každý z ostatních bodů by musil mít stejnou vlastnost jako bod výchozí,

protože každým ze zbývajících bodů po cestě jen procházíme, tj. po jedné čáře do bodu přijdeme a po jiné odcházíme, čímž vyčerpáme vždy právě dvě čáry.

Interpretace königsberského problému (Euler ji nazval „geometrickou“) spočívala v tom, že oblasti a, b, c, d byly nahrazeny body a, b, c, d a mosty čarami spojujícími ty z bodů a, b, c, d , které reprezentují oblasti spojené mosty; to je pro teorii grafů charakteristický způsob abstrakce. Všimněme si ještě, že i obr. 2b a 2c zobrazují grafy, které „geometricky“ interpretují týž plánec mostů města K . z obr. 1. Z uvedených obrázků lze vypožorovat, že obrázek je interpretací königsberského problému (nebo prostě jeho grafem) právě tehdy, když

- a) existuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi oblastmi a, b, c, d města a body a, b, c, d obrázku;
- b) existuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi mosty města a čarami spojujícími dvojice bodů obrázku;
- c) dva body na obrázku jsou spojeny čarou právě tehdy, když mezi oblastmi města reprezentovanými těmito body vede most.

Není zřejmě důležité, jak jsou rozloženy body a, b, c, d v rovině ani jaká je vzájemná poloha čar, které je spojují. Není na závadu, že se spojnice bd a ac v obr. 2c protínají, i když jim odpovídající mosty se samozřejmě neprotínají. Průsečík spojnic bd a ac není bodem grafu (geometrické interpretace), neboť není obrazem žádné z uvažovaných oblastí.

Uvedeme nyní několik pojmů z teorie grafů, potřebných pro další putování po grafech. Jistě jste se již smířili se skutečností, že grafy z obr. 2 a 3 se velice málo podobají tomu, co pod tímto pojmem zatím znáte, tj. grafům funkcí v souřadnicovém systému.

Grafem $G(U, H)$ (nebo jen G) budeme rozumět neprázdnou množinu U libovolně rozložených bodů v rovině spolu s množinou H čar, spojujících některé dvojice těchto bodů. Body budeme nazývat *uzly* grafu G a označovat je malými písmeny latinské abecedy, čarám (úsečkám, obloukům) budeme říkat *hrany* grafu G . Hranu, která začíná i končí ve stejném uzlu, nazýváme *smyčkou*. Počet prvků množiny U , tj. počet uzlů grafu $G(U, H)$ budeme značit $|U|$ a podobně počet hran grafu $G(U, H)$ budeme značit $|H|$. Ve všech svých úvahách budeme předpokládat, že $|U|$ a $|H|$ jsou přirozená čísla (množinu přirozených čísel budeme značit N , $0 \in N$). Jestliže hrana h spojuje uzly u a v , říkáme, že hrana h *inciduje* s uzly u a v a také, že uzly u a v *incidují* s hranou h . Součet počtu všech hran incidujících s uzlem u a dvojnásobku počtu smyček incidujících s u v grafu G budeme značit $d(u)$ a nazývat *stupněm uzlu* u v grafu G .

K cestování po grafech budeme potřebovat *pojem sledu* v grafu $G(U, H)$. Budeme jím rozumět konečnou posloupnost

$$u_0, h_{01}, u_1, h_{12}, \dots, u_{n-1}, h_{n-1, n}, u_n,$$

Má graf G na obrázku 2a uzavřený eulerovský tah? Odpověď už známe; je negativní.

Co se však dá říci o existenci uzavřeného či otevřeného eulerovského tahu v libovolném grafu G? Jestliže graf G eulerovský tah má, jak ho najdeme? Hledat odpověď na tyto otázky se vydáme v příštím článku nazvaném „Grafy jedním tahem“

Cvičení:

1. Užitím jazyka teorie grafů zformulujte nutnou podmínku pro existenci uzavřeného eulerovského tahu v libovolném grafu G! Užijte úvahy o grafu z obr. 2a.
2. Obsahuje graf G z obr. 3 eulerovský tah?
3. Nakreslete graf, který obsahuje otevřený eulerovský tah! Obsahuje tento graf také uzavřený eulerovský tah? Je možné sestavit graf, který by obsahoval otevřený i uzavřený eulerovský tah?

FYZIKA

Meteorologické veličiny a organizace jejich měření v ČSSR

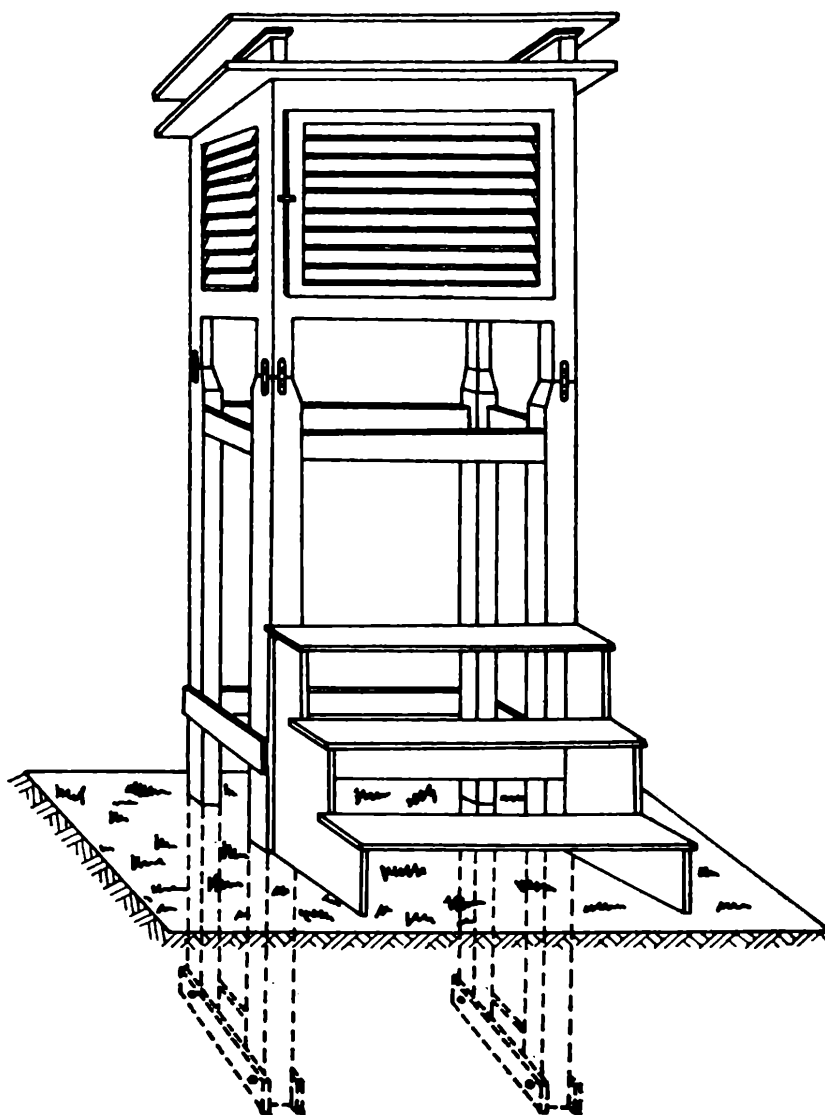
PhDr. FRANTIŠEK GOLAB, PhDr. JOSEF PROCHÁZKA,
Pedagogická fakulta v Ostravě

Úvod

Prakticky všechny meteorologické jevy probíhají v troposféře. Troposféra současně s celou zemskou atmosférou vykonává dvojí periodický pohyb — obíhá kolem Slunce a rotuje kolem zemské osy. Kromě těchto pohybů vykonává velmi složité pohyby vzhledem k zemskému povrchu. Vlivem vzájemného působení atmosféry a zemského povrchu, slunečního záření a vnitřních atmosférických procesů se mění fyzikální vlastnosti atmosféry jako celku a nejvýrazněji se projevují v troposféře.

Atmosférické jevy a meteorologické veličiny

V meteorologii je hojně rozšířen pojem atmosférický jev (nebo jen jednoduše jev), čímž rozumíme určitý fyzikální proces doprovázející náhlé (kvalitativní) změny stavu atmosféry. K atmosférickým jevům řádíme např. mlhy, bouřky, námrazy, prachové (písečné) bouře, větrné



Obr. 1

smrště, vánice, jinovatku, rosu, jíní, oblevy, srážky, oblaka, polární záře a jiné.

Abychom kvantitativně charakterizovali fyzikální stav atmosféry nebo atmosférický jev, zavádíme pojem meteorologická veličina (meteorologický prvek). Jsou to především:

- teplota vzduchu,
- atmosférický tlak,
- hustota vzduchu,
- vlhkost vzduchu,
- druh, množství a intenzita srážek,
- rychlost a směr větru,
- oblačnost, tj. množství, výška a tloušťka oblaků,
- vodnost (vodní obsah) mlh, oblaků a tuhých srážek,
- toky zářivé energie a tepla atd.

Neustálé změny stavu atmosféry v čase a prostoru způsobují, že atmosférické jevy a meteorologické veličiny podléhají místním a časo-

vým změnám. Fyzikální stav atmosféry v určitý časový okamžik nebo kratší časový úsek, charakterizovaný souborem meteorologických veličin a atmosférických jevů, se nazývá počasí. Přitom lze hovořit o počasí v určitém bodu prostoru, o počasí v některé oblasti (např. kraje, státu), o počasí podél trasy (např. letadla).

V závislosti na praktické činnosti člověka se pro charakterizování počasí používají různé soubory meteorologických veličin a jevů. Tak například pro meteorologické zabezpečení letecké dopravy je nutno znát viditelnost, výšku oblaků, bouřky, výskyt námrazy, vítr a teplotu v různých výškách. Pro zemědělství je nezbytné znát údaje o teplotě a vlhkosti půdy i přízemní vrstvy atmosféry, o srážkách, o sluneční radiaci, mrazících apod.

Organizace meteorologické služby v ČSSR

Měření meteorologických veličin a sledování atmosférických jevů je náplní práce meteorologické staniční sítě, která je centrálně řízena Hydrometeorologickým ústavem ČSR se sídlem v Praze na území ČSR a Hydrometeorologickým ústavem SSR se sídlem v Bratislavě na území SSR a na celém území ČSSR pracuje s použitím jednotné metodiky odpovídající doporučením Světové meteorologické organizace (WMO).

Meteorologické stanice v ČSSR se podle obsahu a rozsahu prací dělí na několik kategorií:

Synoptické stanice, na nichž se provádějí pravidelná a nepřetržitá měření; výsledky jsou okamžitě a v daných termínech předávány do centrálních středisek povětrnostní služby, v nichž jsou využívány pro synoptickou analýzu a prognózu.

Klimatologické stanice provádějí měření v klimatických termínech a plní základní úlohy studia klimatických podmínek dané oblasti.

Letecké meteorologické stanice jsou umístěny na letištích a zajišťují bezpečnost leteckého provozu po stránce meteorologické.

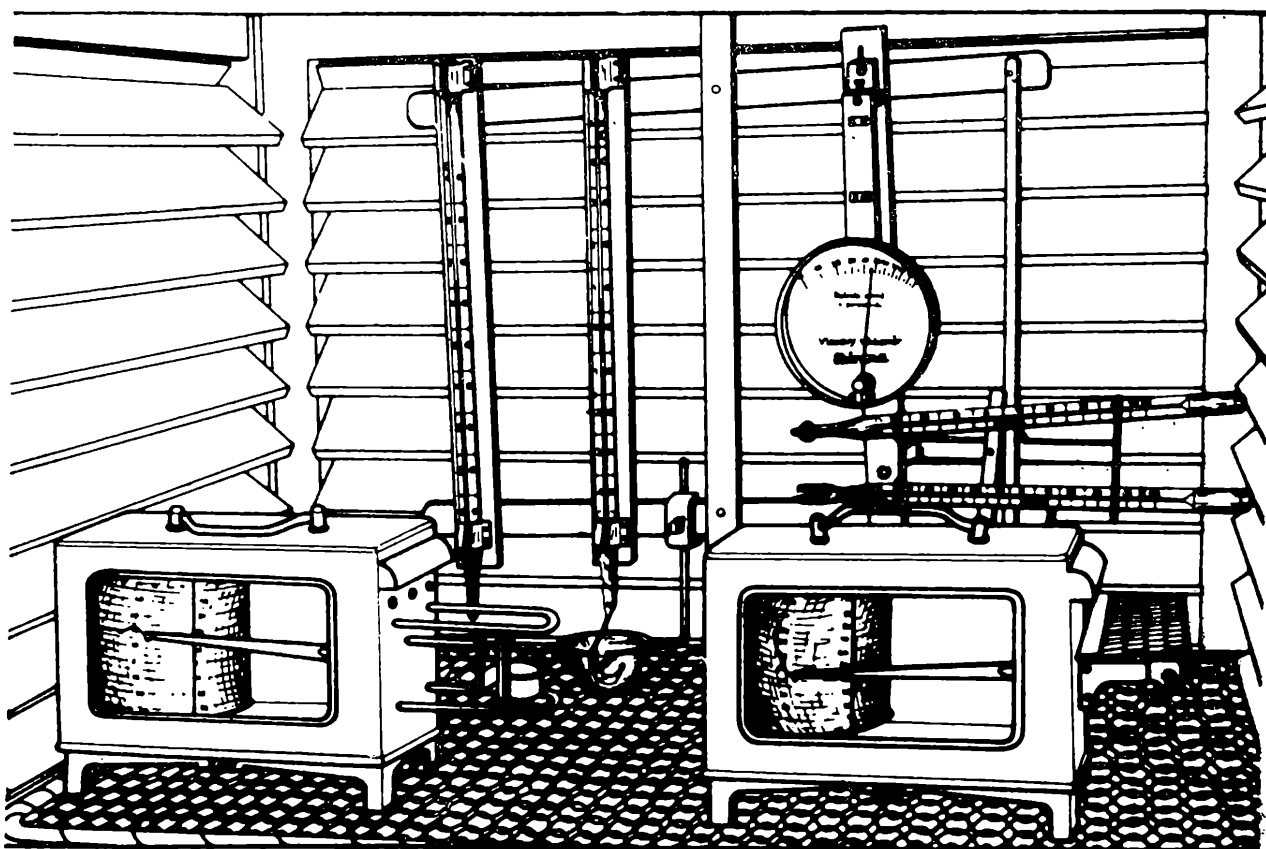
Speciální meteorologické stanice plní jen některé speciální úkoly.

Jedna stanice může být zařazena do jedné, několika nebo dokonce i do všech kategorií (např. profesionální stanice HMÚ).

Klimatologické stanice, řízené HMÚ ČSR a SSR, se podle rozsahu a zaměření činnosti dělí na:

a) Základní klimatologické stanice,

kteří jsou vybaveny měřicími přístroji a několikrát denně (nejméně třikrát) provádějí měření všech základních meteorologických veličin. Výsledky hlásí v určených časech HMÚ. Tyto stanice mohou být pověřovány i některými speciálními úkoly. Bývají vybaveny celou řadou přístrojů, z nichž teploměrné a vlhkoměrné se umísťují do tzv. meteorologické budky (obr. 1). Pohled na vnitřní vybavení budky je na obr. 2. Přístroje jsou zde 2 m nad zemským povrchem a jsou to: 2 sta-



Obr. 2

niční teploměry (tzv. suchý a vlhký), teploměr maximální, teploměr minimální, termograf, hygrogaf, vlasový vlhkoměr.

Kromě toho je základní klimatologická stanice vybavena těmito přístroji: anemoindikátor, srážkoměrná souprava, ombrograf, slunoměr, tlakoměr staniční (rtuťový), mikrobarograf, aspirační psychometr, anemograf.

Podle potřeby mohou mít ve svém vybavení destilační pyranometr, výparoměr, půdní teploměry, přístroj k registraci blesků aj.

b) *Doplňkové stanice*

podobně jako základní měří třikrát denně všechny základní meteorologické prvky. Jejich vybavení je však méně rozsáhlé a obsahuje jen některé registrační přístroje. Základním vybavením doplňkových stanic je meteorologická budka a některé srážkoměrné a větroměrné přístroje. Doplňkové stanice se umísťují v takových místech, aby doplňovaly údaje sítě základních stanic.

c) *Srážkoměrné stanice,*

jak již plyne z jejich názvu, měří množství spadlých srážek ve všech formách (déšť, sníh, kroupy atd.). Svými údaji doplňují síť základních a doplňkových stanic. Síť srážkoměrných stanic je poměrně hustá a často je obsluhována dobrovolnými pracovníky. Někdy jsou tyto stanice zřizovány u škol.

d) Stanice se speciálním zaměřením

plní speciální úkoly, které nejsou obvyklé pro ostatní stanice, jako je např. měření slunečního záření, dlouhodobý úhrn srážek, počet blesků a jiné speciální meteorologické prvky.

Kromě toho mohou být podle potřeby zřizovány tzv. účelové stanice, které pracují jen časově omezenou dobu.

Výsledky měření a pozorování na těchto stanicích se shromažďují k určeným hodinám (7, 14 a 21 h místního středního slunečního času) na HMÚ v Praze a v Bratislavě. Zde se z těchto údajů sestavují přehledné mapy počasí (synoptické mapy), jež slouží k sestavování krátkodobých předpovědí počasí.

Závěr

Meteorologická hlášení jsou ve stále větší míře vyžadována různými odvětvími národního hospodářství k zajišťování maximální ekonomické efektivity. Je však i celá řada úkolů, jež přesahují rámec jedné země, a proto i meteorologové přikročili již před více než 100 lety k vzájemné výměně meteorologických informací. Tato výměna umožňuje neustálé zpřesňování předpovědí počasí a vydávání dlouhodobých předpovědí, které mají pro mnohé obory lidské činnosti (zemědělství, vodní hospodářství, stavebnictví aj.) veliký význam.

Interakce jaderného záření s hmotou

RNDr. MARCEL OHERA, Brno

Od objevu Roentgenova záření a radioaktivity byla snaha najít vhodné veličiny k popisu ionizujícího záření. Téměř vždy při tvoření veličin a jednotek se vycházelo z interakce záření s hmotou. Na tomto principu jsou definovány veličiny a jednotky dnes užívané v dozimetrii jaderného záření a jsou přesně definovanými fyzikálními veličinami, které se dají převést na základní fyzikální jednotky soustavy SI.

Absorbovaná dávka je energie ionizujícího záření absorbovaná v jednotce hmotnosti v určitém místě ozařované látky

$$D = \frac{\Delta E}{\Delta m},$$

kde ΔE je střední energie ionizujícího záření absorbovaná v elementu látky o hmotnosti Δm . Jednotkou absorbované dávky je $1 \text{ gray} = 1 \text{ Gy}$

(rozměr v soustavě SI je joule na kilogram, $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$). Dříve užívanou jednotkou byl 1 rad ($1 \text{ rad} = 0,01 \text{ Gy}$)

Dávková rychlost (dávkový příkon) je definován jako střední přírůstek dávky za jednotku času

$$W = \frac{\Delta D}{\Delta t},$$

jednotkou je $\text{Gy} \cdot \text{s}^{-1}$, neboli $\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Expozice je mírou schopnosti elektromagnetického záření ionizovat vzduch a je dána středním součtem elektrických nábojů všech iontů jednoho znaménka vzniklých ve vzduchu hmotnosti Δm , když všechny elektrony uvolněné fotony v objemovém elementu vzduchu jsou zcela zabrzděny;

$$X = \frac{\Delta Q}{\Delta m},$$

jednotkou v soustavě SI je coulomb na kilogram $\text{C} \cdot \text{kg}^{-1}$. Dřívější jednotkou ještě velmi často užívanou je rentgen R

$$1 \text{ R} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

V literatuře se můžeme setkat s tím, že rentgen je expozice, při které v $0,001293 \text{ g}$ vzduchu za normálních podmínek vznikne $2,082 \cdot 10^9$ párů iontů. Tato definice je ekvivalentní se vztahem uvedeným výše. Jestliže na vznik jednoho páru iontů ve vzduchu je třeba energie $5,44 \cdot 10^{-18} \text{ J}$, pak lehce stanovíme, že vzduch obdrží expozici $2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$ (1 R), absorbuje-li se v něm dávka $0,00877 \text{ Gy}$. Z definice expozice je zřejmé, že tato veličina platí pouze pro vzduch, zatímco absorbovaná dávka platí pro libovolné prostředí. Veličina expozice je rovněž platná pouze pro Roentgenové nebo gama záření s energií v intervalu od $3,2 \cdot 10^{-15} \text{ J}$ do $4,8 \cdot 10^{-13} \text{ J}$. V případě, kde se používá zdroje záření s jinými hodnotami energie, lze použít pouze absorbovanou dávku. Užití veličiny expozice je do jisté míry omezeno.

Expoziční příkon je podíl ΔX a Δt , kde ΔX je přírůstek expozice za časový interval Δt

$$P = \frac{\Delta X}{\Delta t},$$

jednotka v soustavě SI je $\text{C} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ (dříve R/min, R/h) V tabulce jsou uvedeny hodnoty expozičních příkonů v různých případech.

Jednotlivé druhy jaderného záření mohou různě interagovat s prostředím. Podívejme se, *co se děje v hmotě, do které se dostanou alfa částice**).

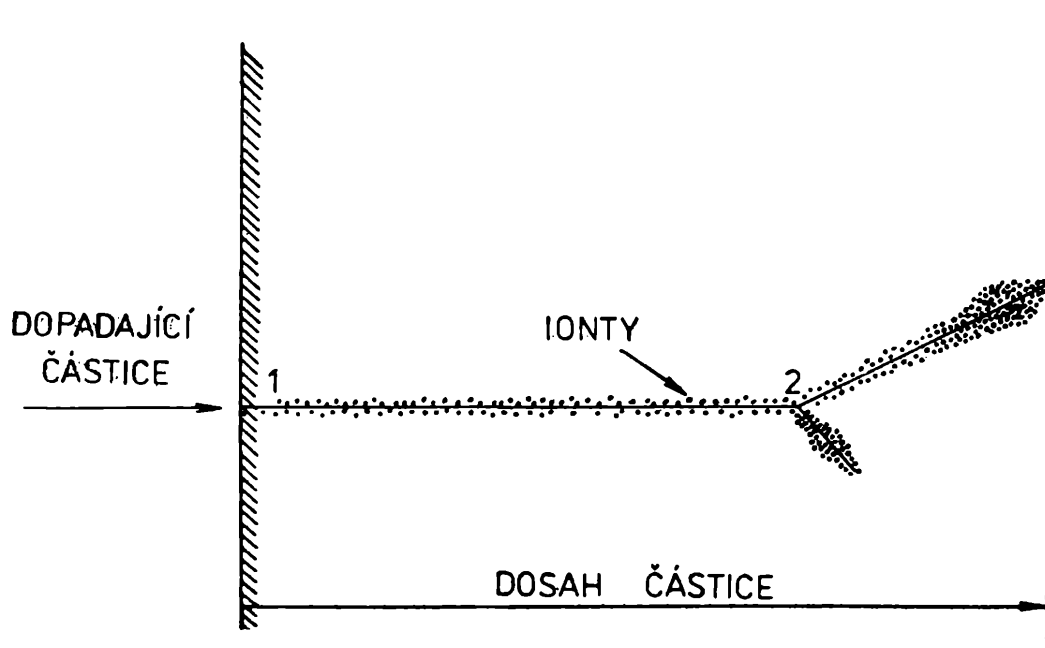
*) Stejně interagují s prostředím částice nukleonových hmotností, tj. deutrony, tritony a protony.

TABULKA

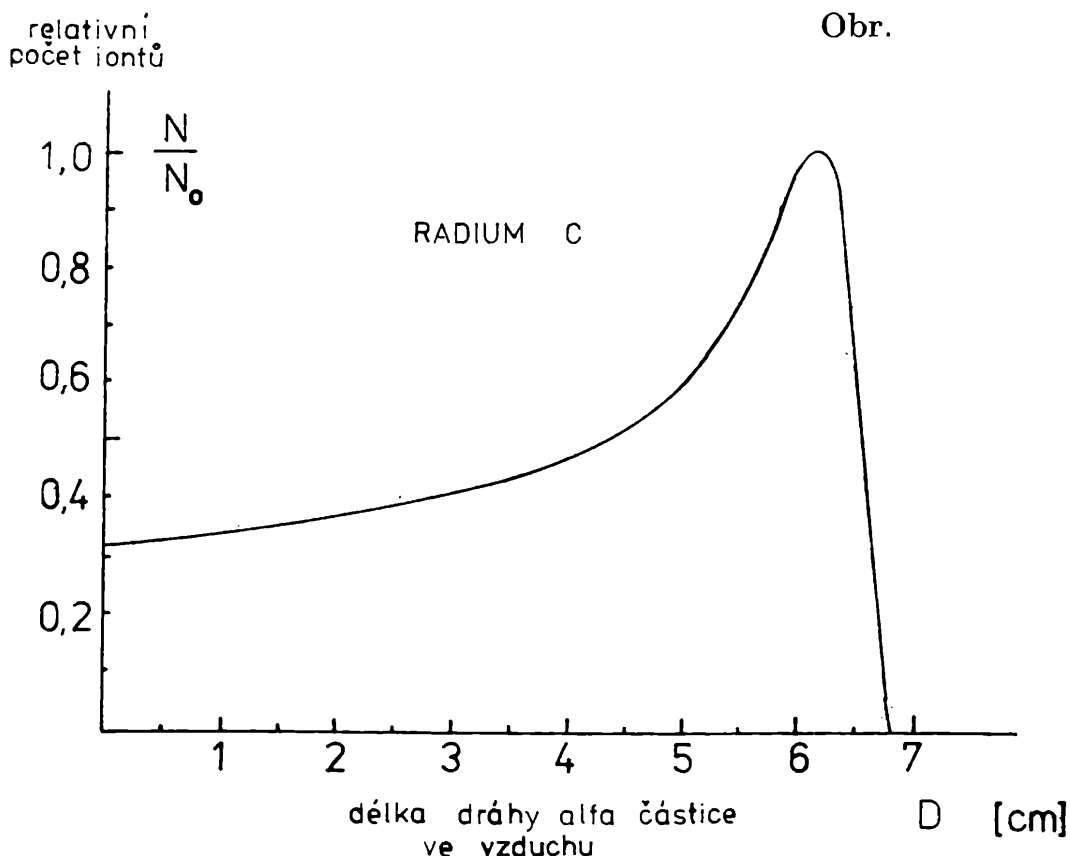
Druh zářiče	Expoziční příkon $C \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$	Expoziční příkon $R \cdot \text{h}^{-1}$
Výbuch atomové bomby 300—500 m od středu výbuchu	$7,16 \cdot 10^{-4}$	10^4
Výbuch atomové bomby 800—1500 m od středu výbuchu	$7,16 \cdot 10^{-6}$	10^2
1 mg zářiče Co 60 (izotop kobaltu) ve vzdálenosti 1 m	$1,00 \cdot 10^{-7}$	1,40
1 mg zářiče Cs 137 (izotop cesia) ve vzdálenosti 1 m	$2,00 \cdot 10^{-9}$	$2,80 \cdot 10^{-2}$
Přirozené pozadí od kosmického záření a radioizotopů Absazených v přírodě	$7,16 \cdot 10^{-14}$	10^{-6}

lfa záření je tvořeno jádry ${}^4_2\text{He}$, jejichž hmotnost je $6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Částice tvořená dvěma protony a dvěma neutrony je velmi těžká a pohybuje se v prostředí přímočaře (obr. č. 1, úsek 12). Jestliže se částice na své dráze setká s jádrem atomu daného prostředí, projeví se při přiblížení α částice k jádru coulombovské síly. Alfa částice nesoucí náboj $2 \times 1,602 \cdot$

DOSAHI α ČÁSTICE V PROSTŘEDÍ



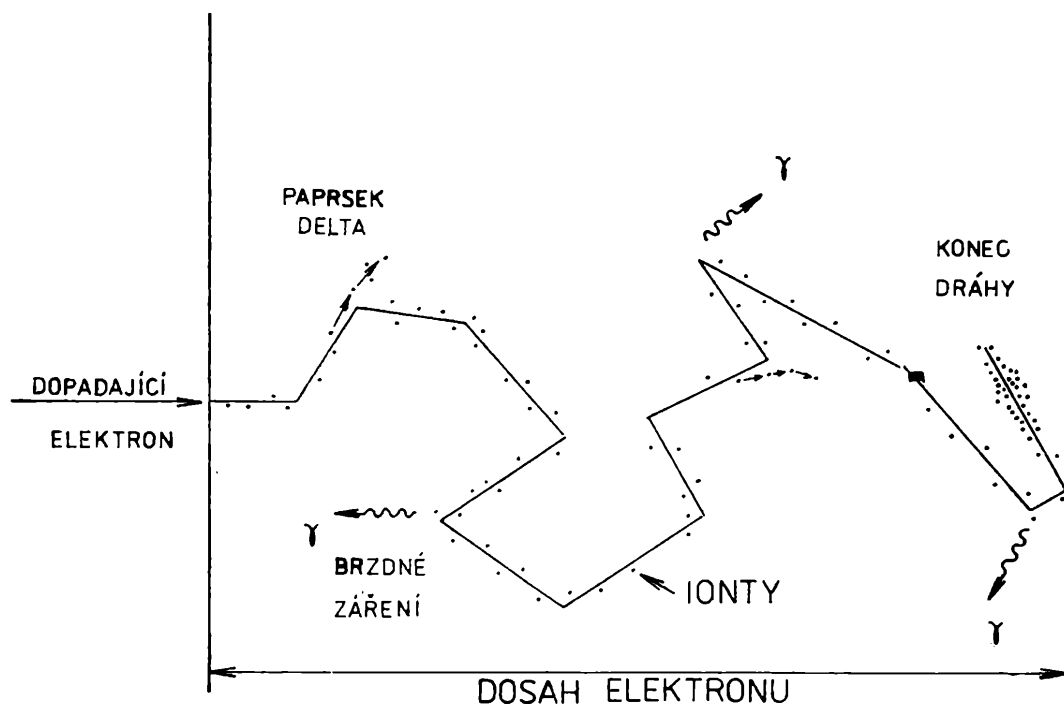
Obr. 1



10^{-19} C se odpuzuje s kladně nabitým jádrem atomu prostředí a dochází tak k zakřivení dráhy (obr. č. 1, bod 2). Vzhledem k tomu, že poloměr jádra má řádově hodnotu 10^{-15} m a vzdálenost atomů ve sloučeninách jsou cca 10^{-10} m až 10^{-9} m, je velmi malá pravděpodobnost zásahu jádra a téměř všechny alfa částice projdou bez interakce s jádry prostředí. Velikost atomů nasvědčuje tomu (10^{-10} m), že jádra helia procházejí atomovým obalem. Jádro helia, asi 7200 krát těžší než elektron, interaguje poměrně snadno s elektrony obalu a dojde k ionizaci. Tím alfa částice předává svou energii okolnímu prostředí, na své dráze zanechává kladně nabitě ionty a volné elektrony jako důsledek její interakce s látkou. Z obr. č. 2 je zřejmé, že nejvíce iontových párů tvoří alfa částice na konci své dráhy, kdy sama už má dost malou kinetickou energii. Ionizační schopnost alfa částice roste k maximum těsně před koncem její dráhy, v této oblasti vytváří nejvíce iontů. Střední dosah alfa částice vznikající při samovolných rozpadech, jejichž energie se pohybuje v rozmezí $6,4 \cdot 10^{-13}$ J až $1,3 \cdot 10^{-12}$ J, činí pouhých několik μ m ve tkáni a několik cm ve vzduchu.

Průchod elektronů — β záření, hmotnost je $9,108 \cdot 10^{-31}$ kg, má odlišný charakter (obr. č. 3). Vzhledem k tomu, že elektrony jsou podstatně lehčí než alfa částice a mají menší náboj opačného znaménka, se rozptylují na atomech a molekulách prostředí daleko více a podstatně méně ionizují prostředí. Při průchodu elektronů může vzniknout paprsek δ , což

DRÁHA ČÁSTICE BETA V PROSTŘEDÍ



Obr. 3

jsou sekundární elektrony*). Vznikají ionizací atomů prostředí při srážkách letícího elektronu s vysokou energií s prostředím.

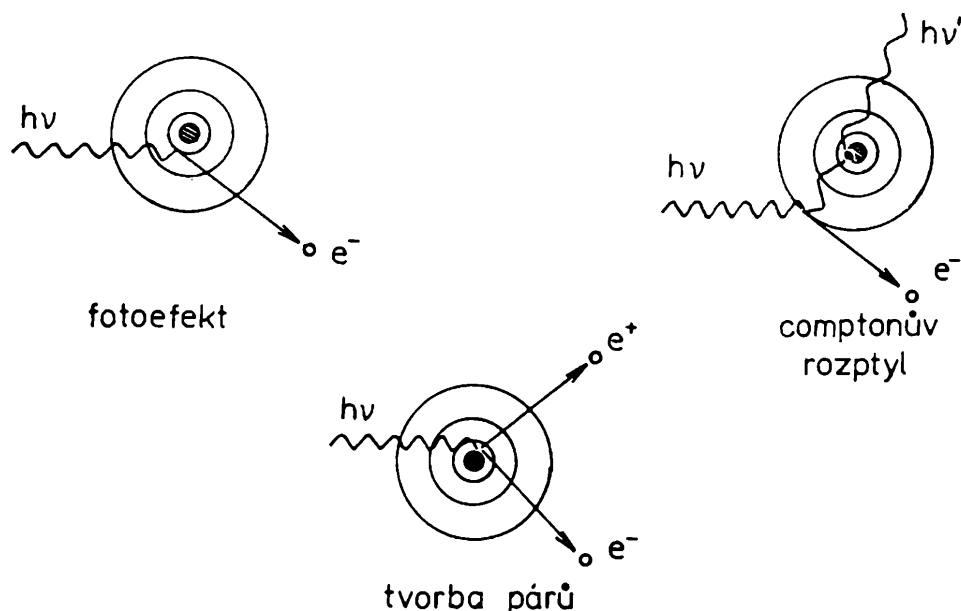
Elektron letící blízko jádra je vychylován elektrickým nábojem a jeho dráha je zakřivována, tedy elektronu je dáno určité zrychlení a podle elektromagnetické teorie elektron musí vyzařovat. Takto vzniklé záření se nazývá brzdné a má povahu gama záření.

Interakce záření gama s prostředím je velmi odlišná od předchozích interakcí záření α a β , a to ze dvou důvodů. Foton nemá elektrický náboj a nepůsobí na něj coulombovské síly. Má nulovou klidovou hmotnost a pohybuje se rychlostí světla, a tedy fotony se nemohou zbrzdovat v prostředí. Mohou být buď plně absorbovány (např. fotoefekt), nebo pružně rozptýleny (např. Comptonův rozptyl). U fotonu neexistují pojmy dosahu a lineární brzdné schopnosti jako u záření α a β .

První způsob interakce fotonu s prostředím je *fotoefekt* (obr. č. 4). Foton předá veškerou svoji energii elektronu z vnitřní slupky atomového obalu. Tento elektron opustí atom a na své dráze ionizuje okolní atomy a molekuly. Fotoefekt je doprovázen vyzářením fotonu rentgenového charakteristického záření nebo Augerova elektronu. Fotoelektron se uvolňuje s energií E , která je rozdílem energie fotonu $h \cdot \nu$ a vazebné energie elektronu v atomu Φ .

$$E = h \cdot \nu - \Phi.$$

*) Sekundární elektrony vznikají i při průchodu α částic prostředím.



Obr. 4

Např. ionizační energie K slupky kryptonu je $2,30 \cdot 10^{-15} \text{ J}$. Při ozáření zářením se vhodnou vlnovou délkou se uvolní fotoelektron s energií $7,36 \cdot 10^{-16} \text{ J}$. Pokud energie fotonu je menší než vazebná energie elektronu v atomu, pak k fotoefektu nedojde.

Druhý základní proces je *Comptonův rozptyl*. Foton dopadne na atom prostředí a zanikne. Foton interaguje s valenčním elektronem, který je vázán v atomu podstatně slaběji než elektron uvnitř atomového obalu (řádově 10^{-18} J). Vznikne nový foton a volný elektron s nenulovou hybností. Nový foton má větší vlnovou délku a pohybuje se jiným směrem než dopadající foton. Tento proces se jeví jako pružný rozptyl částic. Vyražený elektron prochází prostředím a ionizuje stejným způsobem jako fotoelektron. Při Comptonově rozptylu platí zákon zachování energie a zákon zachování impulsu

$$h \cdot \nu = h \cdot \nu' + E_e,$$

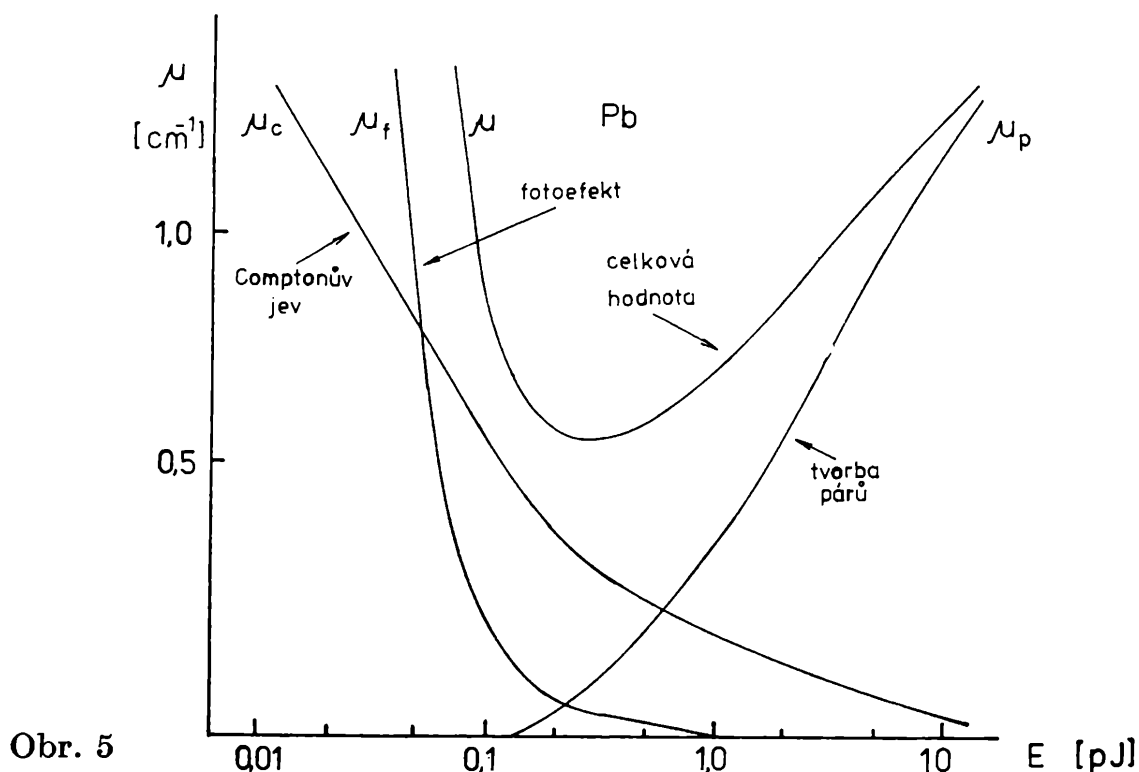
$$\vec{p}_\nu = \vec{p}_{\nu'} + \vec{p}_e.$$

Energie dopadajícího fotonu je $h \cdot \nu$. Po srážce s valenčním elektronem má nově vzniklý foton energii $h \cdot \nu'$ a elektron energii E_e . Frekvence nového (rozptýleného) fotonu ν' je menší než frekvence původního fotonu ν , a proto vlnová délka odraženého fotonu se zvětší. Pro impuls fotonu používáme vztahu

$$|\vec{p}_\nu| = \frac{h \cdot \nu}{c}.$$

Význam jednotlivých symbolů je zřejmý, h Planckova konstanta, ν , ν' , frekvence dopadajícího a rozptýleného fotonu, c rychlost světla.

Třetím způsobem interakce je tvoření elektron – pozitronového páru. Má-li foton energii větší než $1,63 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ (což odpovídá energii $2m_e c^2$,



Obr. 5

tedy dvojnásobku klidové energie elektronu) může se v elektrickém poli jádra přeměnit na dvě částice — elektron a pozitron (má stejnou hmotnost jako elektron, ale opačný náboj $+1,602 \cdot 10^{-19}$ C). Podmínka pro energii fotonu je nutná proto, aby nebyl při vzniku dvou částic porušen zákon zachování energie. Energie potřebná ke vzniku dvou částic — elektronu a pozitronu — je právě jejich klidová energie $2m_e c^2$. Pokud má foton větší energii, pak rozdíl celkové energie fotonu a klidové energie $2m_e c^2$ přechází na kinetickou energii částic.

Pravděpodobnost absorpce záření některým z uvedených způsobů závisí na jeho energii a atomovém čísle absorbátoru. Fotoefekt převládá při nízkých energiích a v těžkých kovech (např. olovo). Comptonův rozptyl nastává při vyšších energiích a v lehkých kovech a látkách. Pro oblast energií vyšších než $3,2 \cdot 10^{-15}$ J se např. v lidské tkáni, tvořené hlavně lehkými prvky vodíkem, uhlíkem aj., nejvíce uplatňuje Comptonův rozptyl. Pro energie nižší než $3,2 \cdot 10^{-15}$ J se záření v lidské tkáni absorbuje fotoefektem.

Dopadá-li záření gama na absorbátor tloušťky dx , pak hustota toku fotonů (celková energie záření dopadající na jednotku plochy za jednotku času) se zeslabí z původní hodnoty I_0 o hodnotu — dI

$$-dI = \mu \cdot I_0 \cdot dx, \quad (1)$$

kde μ je lineární součinitel zeslabení a skládá se ze tří částí

$$\mu = \mu_f + \mu_c + \mu_p,$$

lineárních součinitelů pro fotoefekt, Comptonův rozptyl a tvorbu párů. Závislost na energii dopadajícího záření je uvedena v obr. č. 5 pro jed-

notlivé složky v olovu. Větší zastoupení jednoho z tří efektů se projevuje vyšší hodnotou příslušného lineárního součinitele zeslabení μ_f , μ_c nebo μ_p . Tato závislost v obr. č. 5 ukazuje to, co bylo zmíněno již dříve, tedy závislost jednotlivých efektů na energii záření gama. Úpravou rovnice (1) a její integrací od počáteční hodnoty I_0 do konečné hodnoty I přes celou délku absorbátoru, za předpokladu, že se jedná o monoenergetické záření

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = - \int_0^x \mu dx,$$

dostaneme výraz pro hustotu toku fotonů v libovolném místě absorbátoru x pro danou energii

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu x}$$

kde $e = 2,7182\dots$ je základ přirozených logaritmů.

Neutrony nemají elektrický náboj a při průchodu hmotou neionizují prostředí a samy nejsou odpuzovány jádrem atomů. Snadno pronikají do blízkosti jádra, mohou do něj vniknout nebo se odrazit. Neutron reaguje s atomovými jádry

- 1) pružným rozptylem,
- 2) nepružným rozptylem,
- 3) jadernými reakcemi,
- 4) záchytem.

Pružný rozptyl je nejpravděpodobnější způsob interakce rychlých neutronů (s energií od $1,602 \cdot 10^{-14}$ J do $2,24 \cdot 10^{-12}$ J, jejichž rychlost je od $4 \cdot 10^6$ do $1 \cdot 10^7$ ms⁻¹) při jejich průchodu hmotou. Pružný rozptyl si můžeme představit jako srážku, při níž letící částice narazí na jádro a předá mu část své energie a hybnosti. Neutron předává nejvíce energie lehkým jádrům (vodík, helium), což vyplývá ze zákona zachování hybnosti

$$m_n \vec{v}_n = m_j \vec{v}_j + m_n \vec{v}_n'.$$

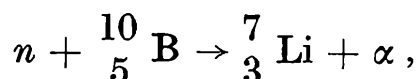
Pokud dojde ke srážce neutronu s jádrem vodíku, pak platí $m_j \doteq m_n$ a rychlost jádra vodíku po srážce je přibližně stejná jako rychlost odraženého neutronu. Pro těžká jádra je po srážce rychlost odražených jader podstatně menší, tedy neutron předává malou energii jádru. Proto jsou neutrony nejvíce zpomalovány látkami obsahujícími lehké prvky (vodík, uhlík, kyslík), což je právě biologická tkáň.

Neutron s energií $1,602 \cdot 10^{-13}$ J ztratí prakticky svou energii po 18 srážkách s jádry vodíku, zatímco v případě jader kyslíku je potřeba 145 srážek. Při interakci neutronu s biologickou tkání dochází k poměrně velké absorpci energie neutronů, způsobené složením tkáně z lehkých prvků. Energie takových neutronů se zmenší po několika srážkách na hodnotu $4 \cdot 10^{-21}$ J; tyto neutrony pak nazýváme tepelnými. Název

vznikl z toho, že se pohybují rychlostí 2000 m s^{-1} , což je rychlost odpovídající tepelnému pohybu molekul.

Tepelné neutrony se *záchytem* pohlcují v jádrech atomů prostředí, kterým se pohybují. Jádro po záchytu neutronu vyzáří gama foton.

Jestliže jakýkoliv neutron je pohlcen jádrem a nové jádro se přeměňuje tak, že vyšle α částici, p (proton), n (neutron) ap., hovoříme o *jaderné reakci*:



Tato jaderná reakce se uskutečňuje s pomalými neutrony s energií $4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$. Po srážce neutronu s borem dojde ke vzniku jádra litia a alfa částice, která má kinetickou energii $4 \cdot 10^{-13} \text{ J}$. Alfa částice lze detekovat počítači a tak můžeme stanovit tepelné neutrony v prostředí.

Při *nep pružném rozptylu* předá opět neutron energii jádru, které se nabudí a přebytečnou energii vyzáří jako gama foton. Tato část energie, kterou předá neutron jádru, se však neprojeví v jeho pohybu, ale ve změně jeho vnitřní energie, kterou jádro ztrácí při vyzáření fotonu gama.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Druhý velký matematik z Brunšviku

RNDr. JIŘÍ MÍDA, UK Praha

Brunšvik, německy Braunschweig, leží v Dolním Sasku. Od roku 1742 je městem univerzitním. Slavným brunšvickým rodákem je *Karl Friedrich Gauss* (1777–1855), jehož dílo vytvořilo přechod od matematiky 18. století k matematice 19. století. Vynikl též ve fyzice, geofyzice a v astronomii.

Před 150 lety dne 6. října 1831 se v Brunšviku narodil další významný matematik *Richard Julius Wilhelm Dedekind*. Vysokoškolské vzdělání získal na známé univerzitě v Göttingenu. Zde jej učil také K. F. Gauss a R. Dedekind byl vlastně jeho posledním slavným žákem. V jedenadvaceti letech získal doktorát a roku 1854 se stal docentem göttingenské univerzity. Zde přednášel do roku 1857. Potom byl profesorem techniky v Curychu. V roce 1862 se vrátil do svého rodného města, kde učil na

střední škole technického zaměření. Dožil se mimořádného věku 84 let; zemřel 12. února 1916.

Svou vědeckou prací obdobně jako Gauss přispěl k tvorbě matematiky dalšího století, nyní to však bylo už století dvacáté. Za své zásluhy se stal členem francouzské, italské a německé akademie věd.

Dosud jsme se nezmínili, do kterého oboru matematiky Dedekind významně zasáhl. Svou prací vyjasnil problém iracionálních čísel. Stalo se tak ve dvou útlých knížkách *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Spojitost a iracionální čísla) a *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Co jsou a co mají být čísla?), vydaných postupně v letech 1872 a 1882. Objevil novou exaktní metodu pro studium iracionálních čísel a použil ji k vybudování jejich přesné teorie. Stručně naznačíme její základní myšlenku. Budeme však přitom užívat jazyka současné školské matematiky.

Nechť Q je množina všech racionálních čísel. Zvolme si libovolnou podmnožinu $A_1 \subset Q$. Dále označme A_2 její doplněk v množině Q , tj. $A_2 = Q \setminus A_1$. Představme si, že jsme vytvořili množinu všech takových uspořádaných dvojic (A_1, A_2) . Mezi nimi zřejmě budou takové, které splňují zároveň tyto dvě podmínky:

- (a) $A_1 \neq \emptyset$ a $A_2 \neq \emptyset$,
- (b) pro každá dvě čísla $a_1, a_2 \in Q$ platí: Je-li $a_1 \in A_1$ a $a_2 \in A_2$, pak $a_1 < a_2$.

Tyto dvojice nazýváme *řezy* v množině Q .

Nechť (A_1, A_2) je řez v množině Q . Každou z množin A_1, A_2 uspořádáme podle velikosti. Pak jsou myslitelné celkem čtyři možnosti:

1. A_1 má poslední prvek a A_2 má první prvek.
2. A_1 má poslední prvek a A_2 nemá první prvek.
3. A_1 nemá poslední prvek a A_2 má první prvek.
4. A_1 nemá poslední prvek a A_2 nemá první prvek.

První možnost nemůže nastat. Je-li totiž r poslední prvek množiny A_1 a s první prvek množiny A_2 , pak $r < s$ a číslo $p = \frac{1}{2}(r + s) > r$.

Podle výše uvedené podmínky (b) pro řez je tedy $p \in A_2$. Zároveň je $p < s$, takže $p \notin A_2$. Tak jsme došli ke sporu, tj. dokázali jsme, že první případ nenastává.

Snadno lze zkonstruovat řezy, které jsou 2. nebo 3. druhu. Existují i řezy, které představují čtvrtou možnost. Takovým řezem je např. dvojice (B_1, B_2) , kde

$$B_1 = \{x \in Q; x \leq 0 \vee (x > 0 \wedge x^2 \leq 2)\}.$$

Kladné racionální číslo a , pro něž by platilo $a^2 = 2$, neexistuje. Na základě toho lze dokázat, že B_1 nemá poslední prvek a B_2 první prvek.

V případě čtvrtém nazýváme příslušný řez *mezerou*. Řez (A_1, A_2) , který není mezerou, je jednoznačně určen racionálním číslem, jež je

posledním prvkem množiny A_1 nebo prvním prvkem množiny A_2 . Příklad mezery, který jsme výše uvedli, naznačuje, že mezerám odpovídají iracionální čísla.

Richarda Dedekinda potkalo dvanáct let před smrtí neuvěřitelné překvapení. „Černé na bílém“ totiž bylo v *Kalendáři pro matematiky*, vydaném dodnes v Lipsku existujícím Teubnerovým nakladatelstvím, že zemřel 4. září 1899. Možná, že ještě více užasli u Teubnerů, když nikoli ze záhrobí, ale z tohoto světa dostali dopis, v němž R. Dedekind oznamoval, že datum 4. září je možná správné, avšak v letopočtu že je rozhodně chyba.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Kdy začne jaro?

VLASTA DRAGONOVÁ, UK Praha

V únorovém čísle 58. ročníku *Rozhledů* byly uveřejněny v článku „Kdy začne jaro?“ dvě úlohy.

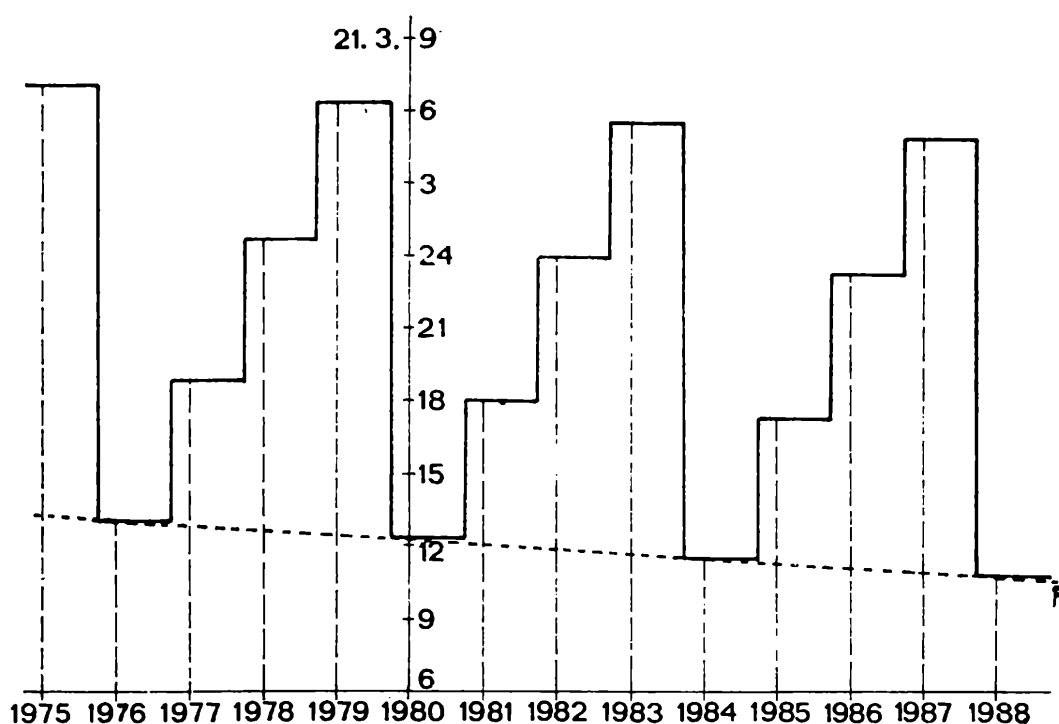
Úloha 1. Který den a v kolik hodin začne jaro v roce 1981 a podobně, kdy začalo jaro v roce 1979?

Úloha 2. Ve kterém roce v období let 1900 až 2100 bude nebo byl začátek jara nejdříve a nejpozději?

Čtenářům, kteří nečetli článek „Kdy začne jaro?“ připomeňme na vysvětlenou. Otázka se netýká jen prvního jarního dne, kterým je zpravidla 21. březen, ale přesného astronomického údaje, který se uvádí například v astronomických ročenkách. Jde o určení přesné hodiny, kdy Slunce stojí nad zemským rovníkem.

Abychom mohli úlohy řešit, musíme si předem připomenout některé důležité údaje:

- podle astronomických údajů začalo jaro v roce 1980 dne 20. 3. ve 12 hod 11 min;
- nepřestupný kalendářní rok trvá 365 dnů, přestupný rok trvá 366 dnů;
- tropický rok (tj. doba jednoho oběhu Země kolem Slunce) trvá 365 dnů 5 hod 48,75 min;



Obr. 1

— od zavedení našeho kalendáře v roce 1582 platí pro střídání přestupných roků dvě pravidla:

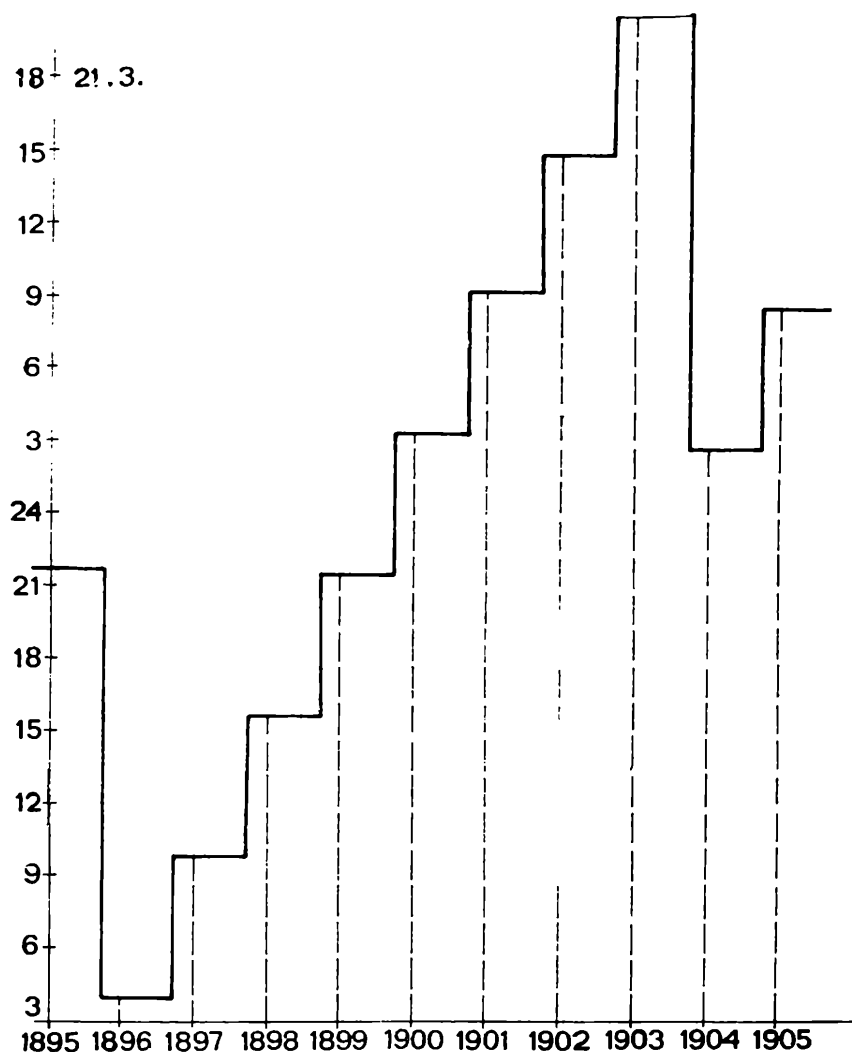
1. kalendářní rok, jehož letopočet nekončí dvěma a více nulami, tj. není násobkem sta, je přestupný, právě když je tento letopočet násobkem čtyř,
2. kalendářní rok, jehož letopočet končí dvěma a více nulami, tj. je násobkem sta, je přestupný, právě když je tento letopočet násobkem čtyř set.

Z uvedených údajů plynou některé důsledky:

- (1) Kalendářní rok je kratší než rok tropický. Rozdíl délek tropického a kalendářního roku je

$$d = 365 \text{ d } 5 \text{ h } 48,75 \text{ min} - 365 \text{ d} = 5 \text{ h } 48,75 \text{ min}.$$
- (2) Přestupný rok je delší než rok tropický. Rozdíl délek přestupného a tropického roku je

$$D = 366 \text{ d} - 365 \text{ d } 5 \text{ h } 48,75 \text{ min} = 18 \text{ h } 11,25 \text{ min}.$$
- (3) V nepřestupném kalendářním roce nastane jaro o časový úsek d později než v předešlém roce (bez ohledu, zda předešlý rok je nebo není přestupný).
- (4) V přestupném roce nastane jaro o časový úsek D dříve než v předešlém kalendářním roce.
- (5) Roky 1900 a 2100 nejsou přestupné. Rok 2000 bude přestupný. Rok 1980 byl přestupný.
- (6) V období let 1901—2099 se za každé čtyři roky předejde začátek jara o časový údaj



$$D - 3d = 18 \text{ h } 11,25 \text{ min} - 3 \cdot (5 \text{ h } 48,75 \text{ min}) = 45 \text{ min}$$

(viz přímka p , obr. 1).

Nyní přistoupíme k vlastnímu řešení úloh 1. a 2.

Řešení úlohy 1.:

V roce 1980 začalo jaro dne 20. 3. ve 12 h 11 min. Začátek jara v roce 1981 vypočítáme podle (3):

$$20. 3. 12 \text{ h } 11 \text{ min} + d = 20. 3. 17 \text{ h } 59,75 \text{ min}.$$

V roce 1981 začalo jaro dne 20. 3. v 17 h 59,75 min.

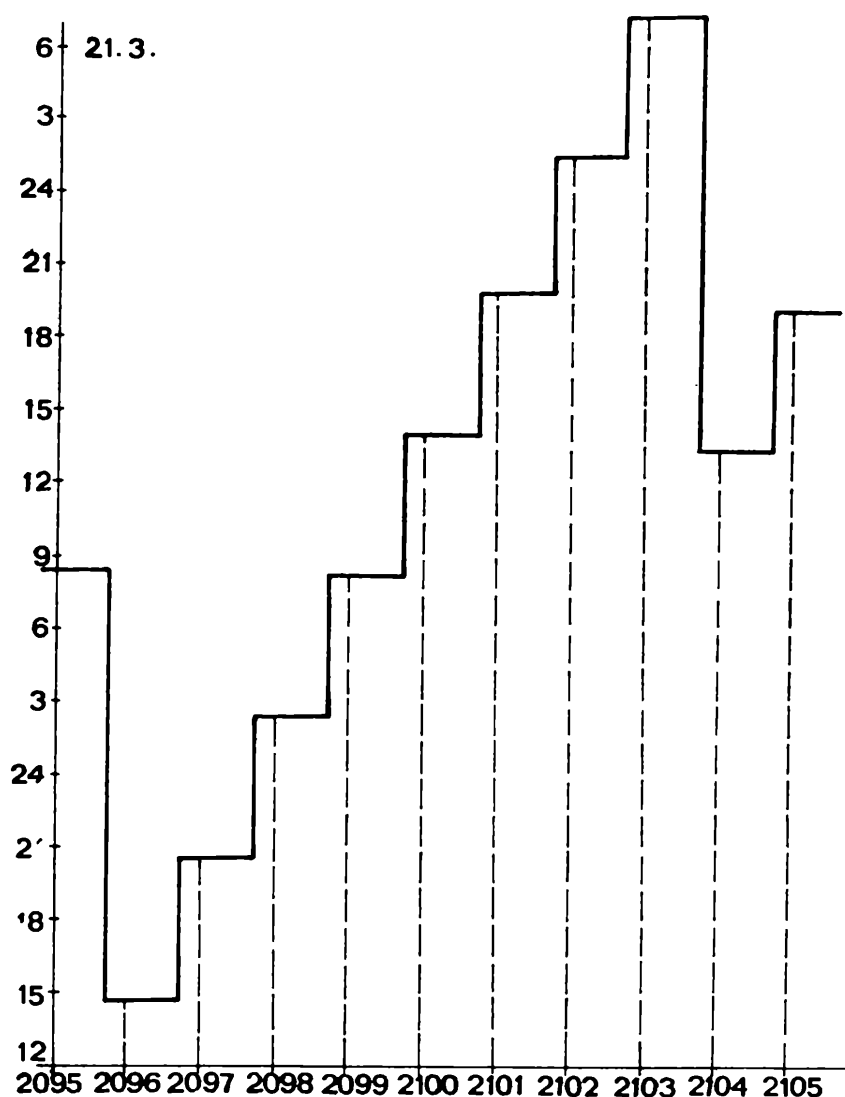
Začátek jara v roce 1979 vypočítáme podle (4):

$$20. 3. 12 \text{ h } 11 \text{ min} + D = 21. 3. 6 \text{ h } 22,25 \text{ min}.$$

V roce 1979 začalo jaro dne 21. 3. v 6 h 22,25 min.

Než přistoupíme k řešení úlohy 2., všimněme si, že pojem „nejdřívejší začátek jara“ a podobně „nejpozdější začátek jara“ můžeme chápat dvojím způsobem:

- (a) kolikátý je to den v měsíci březnu;
- (b) kolikátý je to den od počátku roku.



Rozdíl obou úloh (a), (b) lépe vynikne, když si to ukážeme na příkladu let 1979, 1980 a 1981. Začátky jara byly v těchto letech:

1979: 21. 3. 6 h 22,25 min, tj. 80. den v roce 1979.

1980: 20. 3. 12 h 11 min, tj. 80. den v roce 1980.

1981: 20. 3. 17 h 59,75 min, tj. 79. den v roce 1981.

V letech 1979—1981 začínalo jaro podle varianty (a) nejdříve v roce 1980, ale podle varianty (b) v roce 1981.

Řešení úlohy 2.:

Ve čtyřletém období, které končí přestupným rokem, začíná jaro nejdříve podle varianty (a) v přestupném roce; podle varianty (b) v prvním kalendářním roce. Nejpozději začíná jaro při variantě (a) v kalendářním roce, který je hned před rokem přestupným; při variantě (b) v přestupném roce. Dále z bodu (6) plyne, že v období let 1900 až 2100 bude začátek jara nejdříve podle varianty (a) v posledním přestupném roce, tj. v roce 2096; podle varianty (b) v kalendářním roce, který bude následovat hned po posledním přestupném roce, tj. v roce 2097; začátek

jara byl nejpozději při variantě (a) v kalendářním roce, který byl hned před prvním přestupným rokem, tj. v roce 1903; při variantě (b) v prvním přestupném roce, tj. v roce 1904 (obr. 2, 3).

Podrobnějším výpočtem můžete z daných údajů zjistit výsledky uvedené v tabulce:

v obd. let 1900 — 2100	začátek jara	
	nejdříve	nejpozději
varianta (a)	19. 3. 14 h 26 min 2096	21. 3. 20 h 37,25 min 1903
varianta (b)	77. den v roce 2097 19. 3. 20 h 14,75 min	81. den v roce 1904 21. 3. 2 h 26 min

Závěrem ještě nutno podotknout, že v zadání úloh byla upravena délka trvání tropického roku z 365 dnů 5 hod 48 min 45,71 s (viz: *Mikulčák J. a kol.*: Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, Praha 1970, vydání 4., doplněné.) na 365 dnů 5 hod 48,75 min. Výpočty jsou tedy nepřesné, ovšem ne natolik, aby ovlivnily výsledek, tj. ve kterém roce v období let 1900 až 2100 bude nebo byl začátek jara nejdříve a nejpozději.

Poznámka: Gregoriánská úprava kalendáře z roku 1582, kterou byla stanovena pravidla pro střídání přestupných roků, přestává v moderní době plně kosmických letů plně uspokojovat. Proto od roku 1972 se (též v závislosti na změnách rychlosti otáčení Země) upravuje kalendář přidáním 1 sekundy ke kalendářnímu roku, který tak trvá 365 dnů (tj. $365 \cdot 24 = 8660$ h) a 1 sekunda. Výjimku tvořil rok 1980, který byl prvním přestupným rokem bez přestupné sekundy.

Vysvětlení efektního experimentu: „Slané prsty” z čísla 3.

Drobné poruchy nebo malé vlnění na rozhraní kapalin způsobí, že v některých místech vnikne trochu teplé obarvené kapaliny do spodní vrstvy studené vody. Teplý roztok se bude ochlazovat a klesat. Okolní studená voda se ohřeje, její hustota bude menší než hustota okolního roztoku, do něhož bude neobarvená voda stoupat.

Dvacet úloh z Bulharska pro nejmladší čtenáře

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Ve všech evropských socialistických státech vycházejí časopisy, které mají obdobné poslání jako naše *Rozhledy* matematicko-fyzikální. Připomeňme jen, že *Rozhledy* mají ze všech těchto časopisů nejdelší historii (viz úvodník v prvním čísle letošního ročníku našeho časopisu). V Bulharsku vycházející časopis má název *Matematika*; obsahuje vedle obtížnějších soutěžních úloh také řadu úloh, které jsou zřejmě určeny průměrným žákům. V tomto čísle z nich uveřejňujeme ty, jejichž řešení by nemělo činit potíže žádnému průměrnému žáku prvního ročníku našeho gymnázia nebo čtyřleté střední odborné školy.

Při řešení úlohy 7 použijeme známé nerovnosti platné pro nezáporná reálná čísla x, y , tj. nerovnosti

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2};$$

o její správnosti se snadno přesvědčíme, vyjdeme-li ze správné nerovnosti $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$. K řešení úloh 9 až 11 je třeba znát definici absolutní hodnoty reálného čísla a uvědomit si, že je $\sqrt{a^2} = |a|$. Při řešení úlohy 12 se použije vlastností kořenů kvadratické rovnice. K řešení většiny geometrických úloh stačí znalosti geometrie, probírané na naší základní škole. Úlohu 17 snadno vyřešíme, víme-li, že protější úhly čtyřúhelníku vepsaného do kružnice jsou výplňkové (jejich součet je úhel přímý). Řešení úloh 18 a 19 se opírá o podobnost trojúhelníků.

Po přečtení právě uvedených poznámek zkuste všechny úlohy ihned vyřešit.

1. Dokažte, že

$$A = \frac{a-b}{2a+1} \left(\frac{2a+1}{a+b} - \frac{b(2a+1)}{b^2-a^2} \right) + \frac{b}{a+b},$$

kde a, b jsou reálná čísla, $a \neq -\frac{1}{2}$, $a \neq b$, $a \neq -b$, nezávisí na číslech a, b . [$A = 1$]

2. Dokažte, že pro $x \neq 0$, $x \neq 4$ platí tato rovnost:

$$\left(\frac{x-4}{4x} + \frac{x-12}{4x-16} - \frac{x+4}{4x-x^2} \right) : \frac{1}{2x} = x-4.$$

3. Zjednodušte výraz

$$B = \frac{by + 1}{b} - y(b + 1) + \frac{y(b^2 - 1) + b}{b},$$

v němž jde vesměs o reálná čísla, jestliže je

$$y = \frac{1}{1-b}, \quad b \neq 0, \quad b \neq 1$$

$$\left[B = \frac{b}{b-1} \right]$$

4. Dokažte, že platí tato rovnost:

$$\begin{aligned} 5 \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right)^2 - 6 \left(-\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \right) \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right) - 2 \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right)^2 = \\ = 141 + 140\sqrt{6} \end{aligned}$$

5. Pro které reálné číslo $a \neq 0$ je zlomek

$$\frac{(a^n + a^{n-1})^2}{a^{2n-1}}, \quad n \leq 1 \text{ celé},$$

rovný číslu $a + 1$?

$$[a = -1]$$

6. Nechť pro reálná čísla a, b, c, x platí rovnice

$$ax^3 + 2bx + c = 0;$$

dokažte, že potom je $acx \leq b^2$.

Pokyn: Danou rovnici znásobte číslem ax a potom k oběma stranám rovnice přičtěte b^2 .

7. Součet kladných čísel x, y je 10. Najděte minimum součtu

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \quad \left[\frac{2}{5} \right]$$

8. Je dána soustava dvou rovnic

$$\frac{mx - 1}{2} - \frac{y + 1}{3} = 1,$$

$$5x - 2y = n - \frac{9y + x}{4},$$

v níž x, y jsou neznámé a parametry m, n jsou reálná čísla. Pro která m, n tato soustava a) nemá řešení; b) má nekonečně mnoho řešení?

$$\left[\text{a) } m = -14, n \neq -\frac{11}{8}; \quad \text{b) } m = -14, n = -\frac{11}{8} \right]$$

9. Která reálná čísla x, y jsou kořeny rovnice

$$x^2 + 9y^2 - 4xy = 2xy - |x - 1|?$$

$$\left[x = 1, y = \frac{1}{3} \right]$$

10. Řešte rovnici

$$|x - 1| + |x - 2| = 1.$$

$$[1 \leq x \leq 2].$$

11. Pro která reálná čísla x platí;

a) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 2x + 1 = x + 4;$

b) $3|4x + 3| + \sqrt{16x^2 + 24x + 9} - 5 = 16x + 7?$

$$\left[\text{a) } x \leq 3 \quad \text{b) } x \geq -\frac{3}{4} \right]$$

12. Pro která reálná čísla $a \neq -1$ má rovnice

$$(a + 1)x^2 + 2ax + a + 3 = 0$$

dva různé kladné kořeny?

$$\left[-1 < a < -\frac{3}{4} \right]$$

13. Jsou dány čtyři navzájem různé body A, B, C, D položené tak, že přímky AD, BC a přímky AB, CD jsou navzájem kolmé. Dokažte, že také přímky AC a BD jsou vzájemně kolmé.

14. a) Dokažte, že středy M, N, P, Q stran konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou vrcholy rovnoběžníku.

b) Je dán rovnoběžník $MNPQ$ a bod S ležící uvnitř tohoto rovnoběžníku. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky se protínají v bodě S a jehož strany mají středy v bodech M, N, P, Q .

15. Narýsujte ostroúhlý trojúhelník ABC . Potom sestrojte čtverec $BCDE$ ležící v opačné polorovině s hranicí BC než bod A a čtverec $ACFG$ ležící v opačné polorovině s hranicí AC než bod B . Střed strany AB označte M , středy čtverců označte O, S . Dokažte, že úsečky AD a BF jsou shodné, že úsečky MO, MS jsou shodné a že přímky AD, BF i přímky MO, MS jsou vzájemně kolmé.

Pokyn: Všimněte si, že je možno trojúhelník BCF otočením kolem bodu C ztotožnit s trojúhelníkem DCA .

16. Čtyřúhelník $ABCD$ má tu vlastnost, že mu lze vepsat kružnici; její střed označme O . Dokažte, že úhly $\sphericalangle AOB, \sphericalangle COD$ jsou výplňkové.

17. Osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC protínají jeho strany $BC,$

CA, AB po řadě v bodech A_1, B_1, C_1 ; průsečík těchto os je bod Q . Necht' úhel $\sphericalangle ABC$ je třikrát větší než úhel $\sphericalangle BAC$ a body A_1, B_1, C_1, Q leží na téže kružnici. Dokažte, že potom velikosti úhlů $\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC, \sphericalangle ACB$ jsou po řadě $30^\circ, 90^\circ, 60^\circ$.

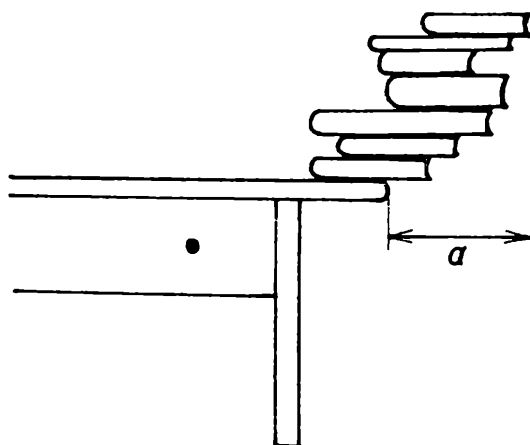
18. Uvnitř strany AB daného trojúhelníku ABC zvolte bod C_1 , body A, B vedte rovnoběžky s přímkou CC_1 a sestrojte jejich průsečíky A_1, B_1 s přímkami BC, AC ; velikosti úseček AA_1, BB_1 buďtež p, q . Dokažte, že velikost úsečky CC_1 je

$$\frac{pq}{p+q}.$$

19. Dané kružnici $k = (S, r)$ je opsán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB . Dotykové body ramen trojúhelníku ABC s kružnicí k jsou body E, F ; přitom úsečka CE je shodná se základnou AB trojúhelníku ABC . Výška CD tohoto trojúhelníku protíná kružnici k ještě v bodě $V \neq D$. Dokažte, že je $|AV| : |AB| = \sqrt{3} : 2$.

20. Uvnitř stran AB, BC daného trojúhelníku ABC sestrojte po řadě body M, N tak, aby bylo $AM = 2 \cdot BM, BN = 2 \cdot CN$; středy stran AB, BC označte E, F . Dokažte, že úsečka EF protíná úsečku MN v jejím středu S .

Efektní experimenty: Šikmá věž z knih



Obr. 1

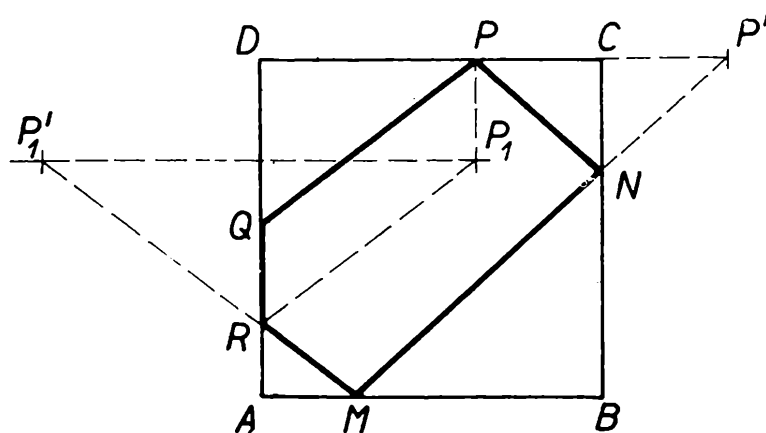
Postavte hodně šikmý sloupec z knih tak, aby se nezřítíl (obr. 1). Jak postupovat, si můžete zkontrolovat na str. 189.

Petr Hnilička

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

10. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má velikost a . Pevně zvolené body M , P nechť jsou po řadě vnitřními body stran AB , CD a $d < a$ budiž kladné číslo. Sestrojte pětúhelník $MNPQR$ o nejmenším obvodu



Obr. 1

tak, aby bod N byl vnitřním bodem strany BC a body Q , R byly takovými vnitřními body strany AD , pro něž je $|QR| = d$ (obráz. 1).

(Došlo 14 řešení)

Jaroslav Švrček

Upravené řešení Petra Eislera, III. C G Havlíčkův Brod:

Obvod hledaného pětúhelníku $MNPQR$, jehož strana QR má danou délku d , bude nejmenší, bude-li nejmenší a) součet $|MN| + |NP|$ i b) součet $|PQ| + |RM|$.

a) Pevně zvolené body M , P leží uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou BC . Sestrojíme-li bod P' souměrně sdružený k bodu P podle přímky BC , bude $|NP'| = |NP|$; máme tedy určit bod N tak, aby součet $|MN| + |NP'|$ byl nejmenší. To však nastane právě tehdy, budou-li body M , N , P' v téže přímce. Protože body M , P' leží v opačných polorovinách se společnou hraniční přímkou BC , protíná úsečka MP' přímku BC ve svém vnitřním bodu N . Protože úsečka MP' leží v pásu omezeném rovnoběžkami AB , CD , je bod N vnitřním bodem úsečky BC .

b) Posuneme-li přímku PQ tak, aby bod Q přešel do bodu R , přejde bod P do bodu P_1 ležícího uvnitř čtverce $ABCD$; obrazec QPP_1R je potom rovnoběžníkem, takže $|P_1R| = |PQ|$. Proto je

$$|PQ| + |RM| = |P_1R| + |RM|.$$

Máme tedy sestrojít lomenou čáru P_1RM tak, aby součet $|P_1R| + |RM|$ byl minimální; přitom bod R má být bodem přímky DA . Jde tedy o úlohu řešenou v a). Sestrojíme bod P'_1 souměrně sdružený k bodu P_1 podle přímky DA , přímku P'_1M a její průsečík R s přímkou DA .

11. Nalezněte všechny ostroúhlé trojúhelníky, pro jejichž vnitřní úhly o velikostech α, β, γ platí:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 9. \quad (1)$$

(Došlo 13 řešení)

Jaroslav Štěpánek

Upravené řešení Petra Schillera, II. C G M. Koperníka, Bílovec :

Zřejmě platí

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta), \quad \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta),$$

a proto lze rovnici (1) přepsat na tvar

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 9.$$

Po úpravě pomocí součtového vzorce pro $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ dostáváme

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \beta - (8 \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg} \beta + (\operatorname{tg}^2 \alpha + 9) = 0. \quad (2)$$

Protože $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \neq 0$, lze rovnost (2) považovat za kvadratickou rovnici pro neznámou $x = \operatorname{tg} \beta$, v níž $\operatorname{tg} \alpha$ je parametr. Tato rovnice bude mít pro neznámou x reálné řešení, právě když bude

$$D = (8 \operatorname{tg} \alpha)^2 - 4(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) (\operatorname{tg}^2 \alpha + 9) \geq 0,$$

tj.

$$(\operatorname{tg}^2 \alpha - 3)^2 \leq 0.$$

Tato nerovnost platí jen pro

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - 3 = 0.$$

Hledaný trojúhelník je ostroúhlý, a proto je $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, takže

$$\alpha = 60^\circ.$$

Dosadíme-li $\alpha = 60^\circ$ do rovnice (2), dostaneme

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{3},$$

takže také

$$\beta = 60^\circ$$

Podmínku (1) mohou tedy splňovat jen vnitřní úhly rovnostranných trojúhelníků. O tom, že ji skutečně splňují, se snadno přesvědčíme dosazením $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

12. Máme n zamčených schránek na dopisy a od každé právě jeden klíček. Každým klíčkem se dá otevřít jen jedna schránka. Do každé schránky vhodíme po jednom klíčku. Jaká je pravděpodobnost, že se po-

daří otevřít všechny schránky, je-li dovoleno nanejvýš dvě schránky otevřít násilím?

(Došlo 11 řešení)

Antonín Vrba

Úspěšní řešitelé úlohy při svých úvahách pravděpodobnostních (*Petr Tichavský a Martin Zemek*, III. C G Koperníka v Bílovci) i kombinatorických (*Libor Forst*, IV. A G v Českých Budějovicích) kroužili vlastně kolem tohoto kombinatorického principu, na němž je založeno velmi názorné řešení úlohy:

Víme, že permutace P na množině M je vzájemně jednoznačné zobrazení této množiny na sebe. Každý prvek množiny M je tedy v zobrazení P obrazem jediného prvku množiny M i vzorem jediného prvku množiny M .

Každá permutace P na konečné množině M se skládá z cyklů. Co to znamená? Vyjděme od nějakého prvku $a \in M$ a sestrojme jeho obraz $P(a)$. Pokud je $P(a) \neq a$, sestrojme obraz prvku $P(a)$, tj. prvek $P(P(a))$. Tak pokračujeme, až dojdeme zase k prvku a . Protože jde o konečnou množinu, nemůžeme dostávat stále nové prvky; z toho, že každý prvek je obrazem jediného prvku, vidíme, že prvním „opakujícím se“ prvkem bude prvek a . Dostali jsme cyklus. Pokud jsme v něm nevyčerpali všechny prvky množiny M , zvolíme nějaký prvek, který v něm není obsažen, sestrojíme další cyklus (zřejmě jsou disjunktní) a tak pokračujeme, dokud nevyčerpáme všechny prvky množiny M .

Vraťme se k naší úloze. Rozmístění klíčků do schránek (můžeme je očíslovat od 1 do n) odpovídají permutacím na množině $\{1, 2, \dots, n\}$. Všechny permutací je $n!$. Podstatné je určit počet rozmístění klíčků, které vyhovují podmínce úlohy. Zřejmě jim odpovídají právě ty permutace, které se skládají nejvýše ze dvou cyklů. Snadno zjistíme, že permutací skládajících se z jediného cyklu je $(n-1)!$ a permutací, které se skládají z právě dvou cyklů, je

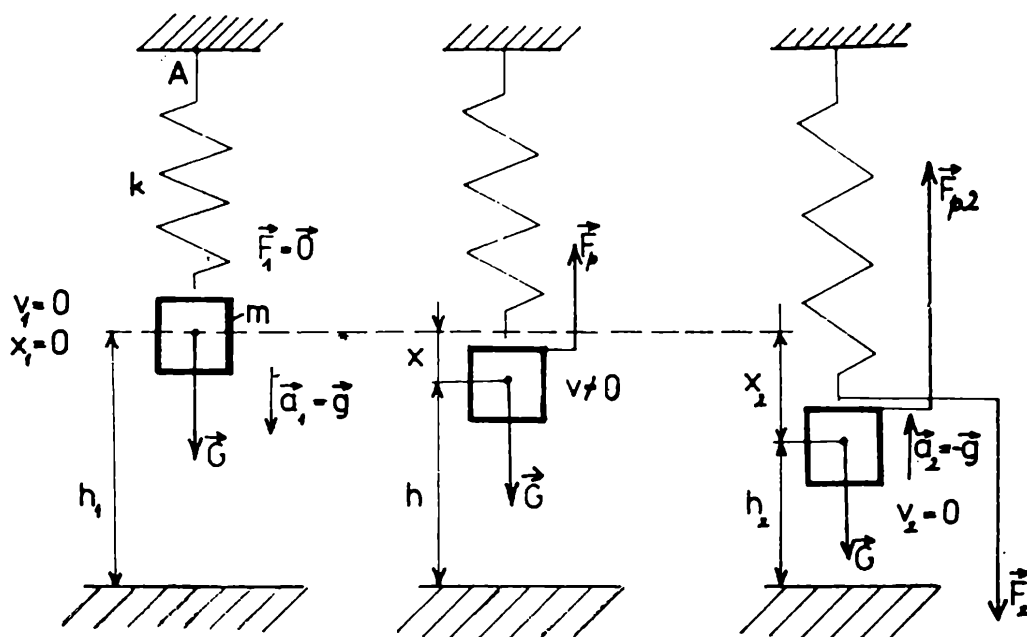
$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}.$$

Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$\frac{(n-1)! + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}}{n!} = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right).$$

Fyzika

3. Na pružinu o tuhosti $k = 200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ se zanedbatelnou hmotností, která visí na pevném stojanu, zavěsíme v okamžiku $t_0 = 0$ s těleso o hmot-



Obr. 1

a

b

c

nosti $m = 0,8 \text{ kg}$ a pustíme s nulovou počáteční rychlostí, takže začne volně kmitat ve svislém směru. Předpokládejte, že protažení pružiny je v mezích platnosti Hookova zákona, že lze zanedbat vnitřní tření pružiny a odpor prostředí a že tíhové zrychlení má velikost $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Určete:

1. Sílu $\mathbf{F}_1$, kterou bude těleso působit na pružinu bezprostředně po zavěšení, tj. na začátku pohybu.
2. Sílu $\mathbf{F}_2$, kterou bude těleso působit na pružinu v dolní krajní poloze.
3. Zrychlení $\mathbf{a}_1$ tělesa v horní krajní poloze.
4. Zrychlení $\mathbf{a}_2$ tělesa v dolní krajní poloze.

(Došlo 7 řešení)

Ivan Šantavý

Autorovo řešení:

1. Síla $\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$;
2. Síla $\mathbf{F}_2$ je orientována svisle dolů a má velikost $F_2 = 2G = 16 \text{ N}$;
3. Zrychlení $\mathbf{a}_1$ je orientováno svisle dolů a má velikost $a_1 = g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
4. Zrychlení $\mathbf{a}_2$ je orientováno svisle vzhůru a má velikost $a_2 = g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Důkaz

1. Těleso zavěšené na pružině bude kmitat mezi horní krajní polohou (obr. 1a), v níž je protažení pružiny $x_1 = 0$ a dolní krajní polohou (obr. 1c), v níž protažení pružiny označíme x_2 . Působí-li na pružinu síla o velikosti F , protáhne se o délku x danou vztahem $x = F/k$, a to nezávisle na tom, jak a čím pružinu protahujeme. Naopak je zřejmé, že je-li

pružina v některém okamžiku protažena o délku x (obr. 1b), působí na ni na každém jejím konci výsledná síla o velikosti $F = kx$. Při kmitání tělesa se prodloužení pružiny mění, takže těleso na ni působí proměnnou silou o velikosti $F = kx$. V horní krajní poloze je $x = x_1 = 0$, takže platí

$$F_1 = kx_1 = 0.$$

2. Síla F_2 , kterou působí těleso na pružinu v dolní krajní poloze, je orientována svisle dolů a má velikost $F_2 = kx_2$. Maximální protažení pružiny x_2 určíme ze zákona zachování energie pro soustavu „pružina-těleso“. Na tuto soustavu působí kromě tíhové síly jen síla od závěsu v bodě A (viz obr. 1a), která nekoná práci. Síly tření v pružině a síla odporu vzduchu jsou podle předpokladu zanedbatelné. Celková mechanická energie soustavy je tedy nezávislá na čase, tj. platí $W = \text{konst.}$. Platí tedy

$$(W =) W_k + W_t + W_p = \text{konst.} \quad (1)$$

Zde je

1. $W_k = mv^2/2$ — kinetická energie tělesa (pružina má podle předpokladu zanedbatelnou hmotnost, $m_p = 0$),
2. $W_t = mgh$ — tíhová energie tělesa ($m_p = 0$),
3. $W_p = kx^2/2$ — elastická energie pružiny.

Význam užitých symbolů je zřejmý z náčrtku. Poznamenejme, že veličiny W_k , W_t , W_p se při kmitání mění. V krajních polohách platí:

horní poloha ($h = h_1$, $x_1 = 0$, $v_1 = 0$)... $W_1 = mgh_1$

dolní poloha ($h = h_2$, $x_2 = h_1 - h_2$, $v_2 = 0$)... $W_2 = mgh_2 + \frac{1}{2} kx_2^2$.

Ze vztahu (1) plyne $W_1 = W_2$, tj.

$$mgh_1 = mgh_2 + \frac{1}{2} kx_2^2.$$

Z této rovnice a ze vztahu $x_2 = h_1 - h_2$ dostaneme

$$x_2 = \frac{2mg}{k}.$$

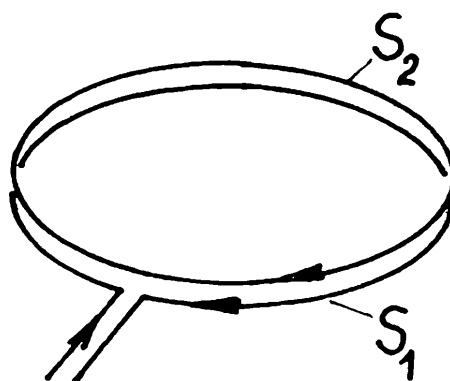
Velikost síly F_2 je dána vztahem

$$\begin{aligned} F_2 &= kx_2 = 2mg = 2G \\ \mathbf{F}_2 &= 2\mathbf{G} \end{aligned} \quad (2)$$

Po dosazení dostaneme $F_2 = 16 \text{ N}$.

3. K určení zrychlení tělesa použijeme druhého pohybového zákona. Označíme-li $\mathbf{a}$ zrychlení tělesa na pružině a $\mathbf{F}_v$ výslednici sil, které na ně působí, platí

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_v. \quad (3)$$



Obr. 2

Na těleso působí tíhová síla $\mathbf{G}$ a síla od pružiny $\mathbf{F}_p$ (ostatní síly jsou, podle předpokladu, zanedbatelné), takže platí

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{G} + \mathbf{F}_p. \quad (4)$$

Přitom síla $\mathbf{F}_p$, kterou působí pružina na těleso, je podle třetího pohybového zákona stejně velká a opačně orientovaná než síla, kterou působí těleso na pružinu. Na začátku pohybu, tj. v horní krajní poloze tedy platí $\mathbf{F}_{p1} = -\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$. Z tohoto vztahu a ze vztahu (4) plyne

$$\mathbf{F}_{v1} = \mathbf{G} + \mathbf{F}_{p1} = \mathbf{G}.$$

Odtud a ze vztahu $m\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{v1}$, plynoucího ze vztahu (3), vychází

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{G}}{m} = \mathbf{g}.$$

4. Zrychlení v dolní krajní poloze určíme opět s užitím vztahu (3). V této poloze platí $\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_{v2} = \mathbf{G} + \mathbf{F}_{p2}$, kde $\mathbf{F}_{p2}$ je síla, kterou na těleso působí pružina.

Z třetího pohybového zákona plyne $\mathbf{F}_{p2} = -\mathbf{F}_2$, kde $\mathbf{F}_2$ je dána vztahem (2). Dosazením do vztahu (3) dostaneme

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}_{v2}}{m} = \frac{\mathbf{G} + \mathbf{F}_{p2}}{m} = \frac{\mathbf{G} - 5\mathbf{G}}{m} = -\frac{\mathbf{G}}{m} = -\mathbf{g}.$$

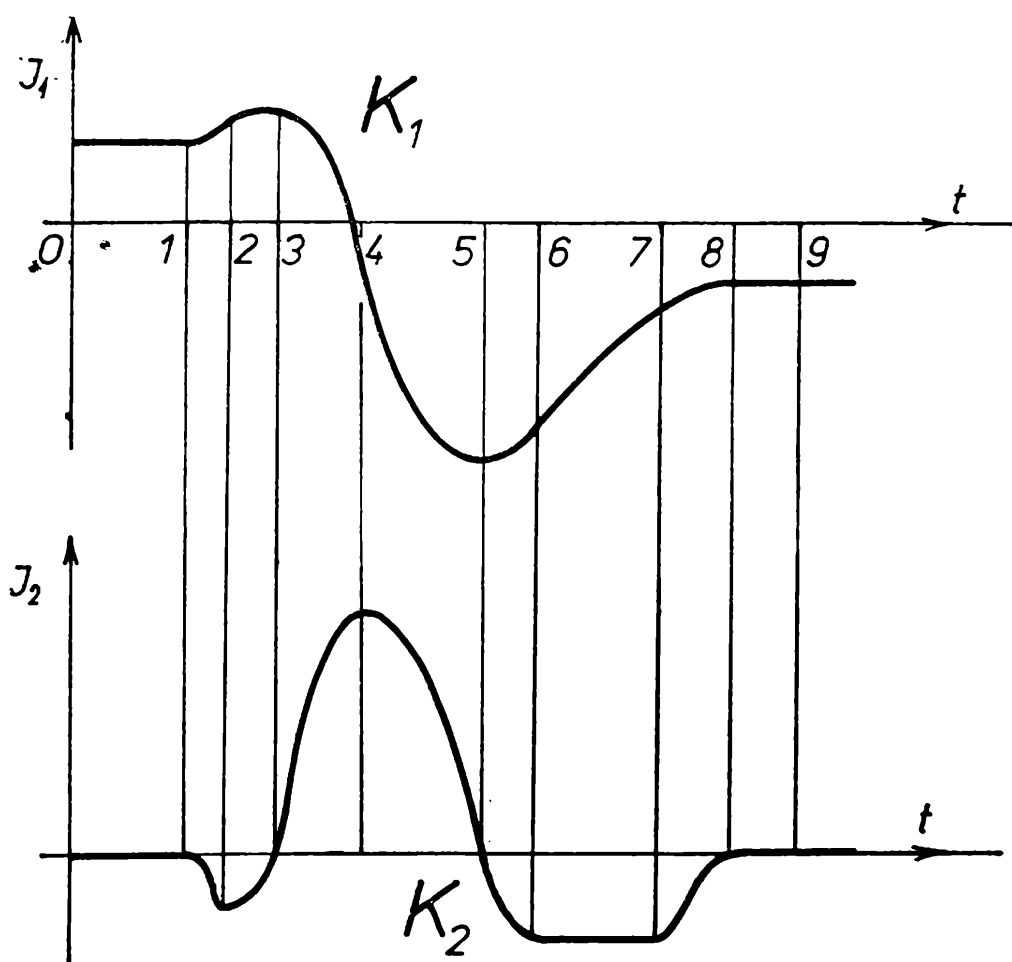
Zrychlení $\mathbf{a}_2$ tedy míří svisle vzhůru a má velikost g .

Komentář:

Hlavním cílem tohoto úkolu bylo ukázat, že těleso, které kmitá na pružině v tíhovém poli Země, nepůsobí na pružinu silou rovnou tíze tělesa, nýbrž jinou, a to proměnnou silou.

Pokud se vám zdá tento výsledek divný, nic si z toho nedělejte, zdál se podezřelý některým fyzikům. Výsledek $F_1 = 0$ pokládali dokonce za chybný. Je však správný.

4. Vodivou smyčkou S_1 , orientovanou podle obr. 2, která je připojena ke zdroji proměnného elektromotorického napětí, prochází elektrický proud I_1 , jehož časový průběh je znázorněn křivkou K_1 v obr. 3. Blízko smyčky S_1 je uzavřená vodivá smyčka S_2 . Její odpor je velký, takže



Obr. 3

indukovaný proud I_2 , který jí prochází, je tak malý, že jev vlastní indukce je zanedbatelný.

Překreslete graf proudu I_1 a pod něj zakreslete přibližný graf proudu I_2 tak, aby bylo zřejmé, které části křivek K_1 , K_2 , znázorňujících oba proudy, si odpovídají.

(Došlo 6 řešení)

Ivan Šantavý

Autorovo řešení :

Časový průběh proudu I_2 indukovaného ve smyčce S_2 je vyjádřen křivkou K_2 na obr. 3.

Komentář

1. Hlavním cílem úkolu bylo, abyste si uvědomili význam a důsledky zákonů elektromagnetické indukce, které se v jevu uplatňují, a to:

a) *Okamžitá velikost indukovaného proudu* je úměrná rychlosti změny magnetického indukčního toku plochou uvažovaného uzavřeného vodiče (v našem případě smyčky S_2), tj. velikosti rychlosti změny proudu I_1 . Matematicky vyjádřeno:

$$|I_2| \sim \frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

Tam, kde křivka K_1 , vyjadřující proud I_1 jako funkci času, je strmá, má $|I_2|$ relativně velkou hodnotu. Tam, kde K_1 stoupá nebo klesá mírně, je $|I_2|$ relativně malé. V okamžicích, v nichž tečna ke křivce K_1 je rovnoběžná s osou t , proud I_1 se nemění a I_2 je rovno nule.

b) *Směr indukovaného proudu* je takový, že magnetický indukční tok jím vytvořeného magnetického pole částečně kompenzuje změnu magnetického indukčního toku, vytvořeného proudem I_1 . Tam, kde křivka K_1 klesá, je $I_2 > 0$, tam, kde stoupá, je $I_2 < 0$.

OLYMPIÁDY

Jak na to?

Doc. JAN VYŠÍN, CSc., Praha

V letošním ročníku MO kategorie Z se opět objevily úlohy o posloupnostech čísel a jejich vlastnostech. Jsou to vlastně hříčky, na kterých si však můžete vyzkoušet, jak dovedete úsporně pracovat. Víte, že se o ekonomické práci hovoří a píše teď všude: v novinách, v rozhlase, v televizi a že na úsporné práci záleží, jak dobře se nám povede. Ta ekonomická práce záleží v tom, že s malým počtem pracovníků s vhodnými přístroji v co nejkratším čase vykonáme co nejvíce užitečné práce. Podívejme se na to v jednoduché úloze z matematiky. Budeme tvořit posloupnost čísl tak, že bez jakéhokoli oddělování budeme psát vedle sebe přirozená čísla v přirozeném uspořádání; tedy

$$1234567891011121314\dots \quad (1)$$

A ptáme se, která cifra stojí na čtyřicátém místě. Tuto úlohu můžeme rozřešit celkem snadno bez přemýšlení tím, že napíšeme dostatečně dlouhý úsek posloupnosti (1)

$$1234567891011121314151617181920212223242526\dots$$

$$\begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ 10. \text{ místo} & 20. \text{ místo} & 30. \text{ místo} & 40. \text{ místo} \end{array}$$

Na čtyřicátém místě stojí tedy číslice 2.

Obecně zní úloha takto:

KTERÁ ČÍSLICE STOJÍ NA n -TÉM MÍSTĚ POSLOUPNOSTI (1)?

Rozřešili jsme velmi snadno tuto úlohu pro $n = 40$. Kdyby bylo $n = 1000$, váhali bychom asi řešit úlohu rozepsáním posloupnosti (1)

a ohlíželi bychom se po nějakém úspornějším způsobu řešení. Mohlo by to být třeba i použití počítače; nebo se nám nabízí též myšlenka „roztrhat“ posloupnost (1) na části s jednocifernými, dvojcifernými, trojcifernými, ... čísly. Tedy:

$$\underbrace{123456789}_{9 \text{ cifer}} \quad \underbrace{101112\dots 9899}_{2.90 \text{ cifer}} \quad \underbrace{100101102\dots 999}_{3.900 \text{ cifer}} \quad \underbrace{100001001\dots 9999}_{4.9000 \text{ cifer}} \text{ atd.}$$

Čísla 1 až 9 spotřebují 9 míst, čísla 1 až 99 spotřebují $9 + 2.90 = 189$ míst, čísla 1 až 999 spotřebují $9 + 2.90 + 3.900 = 2889$ míst atd. Z toho je vidět, že tisící číslice bude náležet některému trojcifernému číslu. Jednociferná a dvojciferná čísla spotřebují — jak víme — 189 míst. Pro trojciferná čísla zbývá tedy $1000 - 189 = 811$ míst. Protože $811 = 3.270 + 1$, je třeba do posloupnosti (1) zařadit 270 trojciferných čísel. Počet jednociferných a dvojciferných čísel je 99, trojciferných 270; celkem $99 + 270 = 369$. Poslední „úplný“ člen posloupnosti (1) — tj. úplné trojciferné číslo — je 369. Na tisícím místě je první cifra následujícího členu 370, tj. 3. Zkouška pro počet míst

$$1.9 + 2.90 + 3.270 = 189 + 810 = 999.$$

Vymyslete obratnější způsob řešení, třeba pomocí tabulek nebo grafu (osy číselné) apod.

Uvedeme ještě jednu úlohu velmi blízkou soutěžní úloze matematické olympiády. V soutěžní úloze se vyskytuje posloupnost jedniček a nul

$$1101001000100001000001\dots \quad (2)$$

Má se předně „uhodnout“ výtvarný zákon posloupnosti (2) a pak se má zjistit, zda na n -tém místě posloupnosti (2) stojí 0 nebo 1.

Uvedeme opět návod pro autorské řešení této úlohy, které je úmyslně neúplné, primitivní a nemotorné; předpokládáme, že řešitelé rozřeší soutěžní úlohu mnohem lépe.

Pro konstrukci posloupnosti cifer užijeme myšlenky o rozkladu, která nám pomohla při předcházející úloze. Posloupnost (2) se dá sestavit z těchto skupin cifer:

$$1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, \dots$$

zkrátka dvě sousední jedničky v posloupnosti (2) jsou odděleny k nulami, kde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Např. v pěti skupinách je 5 jedniček, $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ nul a $5 + 10 = 15$ cifer. Kdo znáte trochu algebry, usoudíte snadno, že v n skupinách je n jedniček a $0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1)$ nul.

Slavný matematik *C. F. Gauss*, který žil a působil v 19. století (zemřel 1855), jako malý školák sečetl celá čísla od 0 do $n-1$ tak, jak ukazuje pro $n = 5$ následující schéma:

$$\begin{array}{r} 0 + 1 + 2 + 3 + 4 \\ 4 + 3 + 2 + 1 + 0 \\ \hline 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20 \end{array}$$

Protože každé číslo se vyskytuje dvakrát, je

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 = (4 + 4 + 4 + 4 + 4) : 2 = 10$$

Obecně pro n

$$\begin{array}{r} 0 + 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) \\ (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 + 0 \\ \hline (n-1) + (n-1) + (n-1) + \dots + (n-1) + (n-1) = n \cdot (n-1), \end{array}$$

tedy

$$0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2} n(n-1).$$

Ačkoliv $\frac{1}{2} n(n-1)$ je svým tvarem zlomek, je to číslo celé, protože právě jedno z čísel n , $(n-1)$ je sudé.

Počet číslic v n skupinách je

$$n + \frac{1}{2} n(n-1) = \frac{1}{2} (2n + n^2 - n) = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Přezkoušejte si tento výsledek např. pro $n = 5$, $n = 8$

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15, \quad \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 = 36$$

Zjistíme zkoušením, v které skupině je dané číslo a z toho zjistíme, zda je to 0 nebo 1.

Je vidět, že pro zařazení daného čísla do skupiny je výhodné vypočítat hraniční čísla ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$).

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, ...

Je-li dané číslo např. 126, určíme pak snadno, která z číslic 0, 1 stojí na 126. místě a obecněji, kde jsou nejbližší jedničky.

Vysvětlení efektního experimentu ze str. 179.

Věž se nezřítí jen tehdy, jestliže svislá těžnice soustavy všech knih protne desku stolu.

Několik vzpomínek na matematickou olympiádu

RNDr. LEO BOČEK, CSc., UK Praha

S matematickou olympiádou jsem se seznámil v roce 1953 na začátku jejího třetího roku života. Důsledkem různých školních reforem jsem tehdy přišel do 10. třídy právě vzniklé jedenáctileté střední školy a na rozdíl od svých nových spolužáků, kteří absolvovali I. ročník gymnázia, jsem nedovedl řešit kvadratickou rovnici. Přečetl jsem si leták MO a dal se do řešení úloh. Nepamatuji si již, zda jsem vyřešil všechny, ale ve stanoveném termínu jsem o přestávce zašel za svým profesorem matematiky, abych mu odevzdal vyřešené úlohy. Naším matikářem byl profesor *Jaroslav Malý*, kterému se však neříkalo jinak než „Jarda Malej“ nebo jen „Jarda“ a který byl pro svou přísnost a náročnost postrachem nejen studentů Litoměřic, ale často i jejich rodičů. I já jsem tehdy s obavami očekával jeho reakci na mou troufalost. Prohlédl si odevzdané úlohy a dost se rozzlobil. Jak to, že mu odevzdávám úlohy napsané jednu za druhou, když v pokynech pro MO je jasně řečeno, že každá úloha musí být vypracována na samostatném listě formátu A4? Tak jsem úlohy do druhého dne přepsal a dál jsme již spolu vycházeli dobře. Knižnice Škola mladých matematiků ještě neexistovala, ale Jarda mi půjčil několik brožurek edice Brána k vědění a pár dalších matematických knížek ze školní knihovny.

V dalším školním roce jsem soutěžil v kategorii A. Druhé kolo se konalo v Teplicích. Šel jsem ráno na vlak, ale nějak jsem si špatně vypočetl z dráhy a rychlosti čas a vlak mi ujel. Vzdát jsem se nechtěl, vždyť se jednalo také o účast v celostátním kole. Vrátil jsem se tedy honem domů pro kolo a šlapal kolem Milešovky do Teplic. Dojel jsem ještě včas, ale úplně zmrzlý. Tehdejší předseda KV MO profesor *J. Porcal* mi někde obstaral horký čaj a vše dobře dopadlo, odpoledne jsem se na kole vrátil do Litoměřic. Na celostátní kolo MO do Prahy jsem pro jistotu jel autobusem a při závěrečné besedě po III. kole jsem poznal osobně nejen pracovníky MO, ale i některé své budoucí učitele, *akademika Čecha*, který nám olympionikům vysvětlil velmi vtipně pojem topologického prostoru, dále *akademika Jarníka* a *akademika Kořínka*. Matematická olympiáda byla totiž příčinou toho, že jsem nešel studovat na techniku, jak jsem měl původně v úmyslu, nýbrž že jsem šel studovat matematiku na matematicko-fyzikální fakultu.

Během svého studia na MFF jsem se matematickou olympiádou zabýval jen amatérsky, řešil a pomáhal řešit úlohy a občas jsem se jel podívat do svého kraje na druhé kolo. Po absolvování fakulty jsem sice měl nějaké přednášky pro olympioniky, ale ne pravidelně. Až po tom, co se na MFF zavedla pro studující učitelství matematika-deskriptivní geometrie

přemíra diferenciální geometrie, vypsal jsem a konal od roku 1973/74 výběrový seminář elementární geometrie, na kterém jsem se studenty rozebíral úlohy matematické olympiády. Domnívám se, že to bylo pro účastníky semináře docela užitečné. Vždyť dnes jsou učitelé a středoškolskými profesory matematiky, na kterých spočívá těžiště práce v matematické olympiádě.

Mezi knížkami, které jsem dostal za svou účast v matematické olympiádě, byla i knížka docenta *E. Kraemra* „Analytická geometrie lineárních útvarů“. A byl to právě profesor *Kraemer*, který byl po jistou dobu vedoucím katedry, na které působím, a který mě v roce 1977 požádal, zda bych nepřevzal funkci jednatele ústředního výboru MO. Neodmítl jsem. S funkcí jednatele ÚV MO je hodně práce. Ale vracím se k matematické olympiádě, považuji ji za nesmírně užitečnou akci a svou práci v MO vyjadřuji i úctou a dík profesoru Jaroslavu Malému, dlouholetému členu KV MO v Ústí n. L., který už bohužel není mezi námi.

Z NOVÝCH KNIH

Š. Veis:

MAGNETOHYDRODYNAMICKÉ GENERÁTORY

Knižnica Encyklopédia modernej fyziky (EMF). Vydala ALFA, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava 1980, 272 stran, 84 otázok. 8 tabulek, náklad 1500 výtisků, cena 22 Kčs.

Kniha profesora Štefana Veise pojednává o magnetohydrodynamickém (MHD) způsobu výroby elektrické energie. Jedná se o nekonvenční způsob, který poskytuje širší možnosti efektivnější přeměny tepelné energie na elektrickou v porovnání se současnými tepelnými elektrárnami. Kromě toho elektrárny s MHD generátory budou značně méně znečišťovat svoje okolí než současné elektrárny, čímž se zlepší životní prostředí zejména v okolí elektráren.

Z tohoto hlediska se kniha zabývá nejperspektivnější oblastí přímé přeměny energie.

Kniha je rozdělena na sedm částí. V první části jsou uvedeny základní energetické zdroje na výrobu elektrické energie, dále způsoby výroby elektrické energie. V závěru je popsán princip činnosti MHD generátoru. Druhá část je věnována základním přeměnám tepelné energie na jiné formy. Zde jsou uvedeny základní pojmy a zákony termodynamiky, jsou popsány tepelné stroje a jejich cykly. Třetí část je věnována problematice plazmy. Jsou popsány způsoby ionizace atomů a molekul v plynu, pojednáno o vlastnostech plazmy v magnetickém poli, o elektrické vodivosti plazmy, Ohmově zákonu a Hallově efektu. Čtvrtá část je věnována magnetohydrodynamickému proudění e-

lektricky vodivé tekutiny v kolmém magnetickém poli. Pátá část je zaměřena na MHD generátory s otevřeným cyklem. Tyto MHD generátory nejdále pokročily ve svém vývoji a mají v současné době největší perspektivu využití v energetice. Proto je zřejmě těmto MHD generátorům věnována více než třetina knihy. Šestá část je zaměřena na MHD generátory s uzavřeným cyklem a poslední sedmá část na MHD generátory s tekutými kovy. Kniha je doplněna rozsáhlým seznamem literatury (108 citací).

Kniha je určena posluchačům vysokých škol technického a univerzitního zaměření, aspirantům, vědeckým pracovníkům, ale i učitelům středních škol, kteří chtějí seznámit studenty s novým, perspektivním způsobem výroby elektrické energie.

Zdeněk Janout

Tibor Šalát

METRICKÉ PRIESTORY

Alfa — vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava 1981. Str. 220, obr. 13, Kčs 11,50.

Ačkoliv se jedná o publikaci určenou především studentům vysokých škol (hlavně matematicko-fyzikálních, přírodovědeckých a pedagogických fakult), mohou ji číst i studenti gymnázií, pokud mají vyhraněný zájem o matematiku. Seznámí se nejen se základními vlastnostmi metrických prostorů, nýbrž poznají i prostory se spočetnou bází, separabilní a kompaktní prostory. Knížka končí

krátkým výkladem lineárních normovaných prostorů. Kdo ze středoškoláků knížku prostuduje, bude mít solidní znalosti základních topologických pojmů.

L. Boček

A. W. Chatters — C. R. Hajar-navis:

RINGS WITH CHAIN CONDITIONS

(Okruhy s řetězcovými
podmínkami)

Pitman Publishing, Boston-London-Melbourn 1980, 44. svazek edice Research Notes in Mathematics, 198 stran.

V edici Research Notes in Mathematics vycházejí práce, které seznamují zájemce z řad studentů i absolventů vysokých škol se současným stavem výzkumu v různých starších i nově vznikajících matematických disciplínách a v jejich aplikacích. Je to úkol velmi důležitý, neboť včasná informovanost o nových poznatcích je při nynějším rychlém tempu rozvoje vědy stále významnějším a zároveň stále obtížnějším úkolem.

Výše uvedená kniha se zabývá abstraktní algebrou. Pojednává o nekomutativních okruzích, jako jsou například okruhy čtvercových matic, které splňují podmínky konečnosti nerostoucích nebo neklesajících řetězců. Vedle nově zaváděných pojmů se v knize studují i mnohé, které znají i čtenáři Rozhledů ze střední školy, jako např. vektorový prostor a jeho dimenze, řád grupy apod.

Milan Koman

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

triangolo aritmetico, di

Tartaglia

— equilatero

— fondamentale

— isoscele

— ottusangolo

— rettangolo

— scaleno

— sferico

triedro

triedro m

trilatero

trinomio m

triplice

triplo m

trisezione ž

triviale

tronco m

— di cono

— di piramide

tropico m

— del Cancro

— del Capricorno

tubo m

— a raggi catodici

— vuoto

tutto m

tutto o niente

trojúhelník Pascalův

— rovnostranný

— axonometrický

— rovnoramenný

— tupoúhlý

— pravoúhlý

— obecný

— sférický

trohranný

trojhran; triedr

trojboký

trojčlen, trinom

trojnásobný

trojnásobek

trisekce, rozdělení na třetiny

triviální

kmen, trup; torzo

komolý kužel

— jehlan

obratník

— Raka

— Kozoroha

roura, trubice

— s katodovým zářením

— vakuová

celek

zcela nebo nic (regulace on — off)

U

udire

uguaglianza ž (eguaglianza)

ultimo

ultrasuono m

slyšeti

rovnost, rovnice; shodnost

poslední

ultrazvuk

Bratislavské nakladatelství technické a ekonomické literatury ALFA vydává knižnici EPSILON, jež je určena studentům a učitelům matematiky všech druhů středních škol i širší veřejnosti zajímající se o matematiku. Zvláštní pozornost se věnuje aplikacím matematiky v přírodních, technických a společenských vědách. Vydávané knížky popularizují novější výsledky matematického výzkumu.

V knižnici Epsilon dosud vyšlo:

- J. Bosák: Grafy a ich aplikácie
- J. B. Dynkin a kol.: Matematické hlavolamy
- J. M. Gelfant a kol.: Súradnicová sústava
- L. Kosmák: Kombinatorická teória pravdepodobnosti
- L. Kosmák: Množinová algebra
- A. Legén: O grupách a okruhoch
- A. Rényi: Dialógy o matematike
- Š. Znam: Teória čísel
- T. Šalát: Metrické priestory
- J. Černý: Entropia a informácia v kybernetike
- Připravují se svazky:**
- T. Šalát: Reálna čísla
- I. Vajda: O informácii a štatistike

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12 Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1981.

ROZHLEDY

**matematicko
–fyzikální**

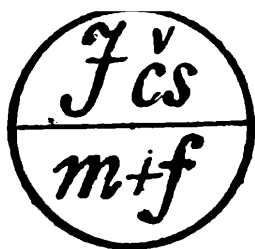
**1921/22
1981/82**

*** 60 let**

**ROČNÍK 60, 1981/82
LEDEN**

(5)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Vladimír
Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr.
Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

J. Chloupek: Světové prvenství Sovětské- ho svazu v kosmickém výzkumu III	193
J. Troják: Grafy jedním tahem .	196
P. Pěnička: Archeologie v novém světle	201
E. Tokáriková: Najjednoduchšie zložené pohyby z matematického hľadiska .	204
J. Kús: Metoda náhradného zdroje .	212
V. Maližek: Fyzika před 10, 100 a 1000 roky	217
F. Barták: O jednom využití harmonické- ho průměru ve fyzice	219
Š. J.: Druhy útvarů, které mají každé dva prvky podobné .	221
J. Šedivý: Pohled do třicátého ročníku Rozhledů .	223
J. Mída: Návod na jedno kouzlo s hra- cí kostkou	225
Naše soutěž	226
A. Hnáth: Poznámka k dvom úlohám XXIX. ročníku MO	237
Informace	239
Z nových knih .	240
K. Šindelář: Slovníček italsko-český .	
	. 3. str. obálky

Světové prvenství Sovětského svazu v kosmickém výzkumu III

JAROSLAV CHLOUPEK, Střední odborné učiliště, Letovice

Dalším světovým rekordem v pobytu lidí v kosmickém prostoru se stal let *Sojuzu 29*. Na jeho palubě byli kosmonauté *V Kovaljonok* a *A. Ivančenko*, kteří zaznamenali rekordní pracovní pobyt v délce 140 dní převážně na palubě vědecké orbitální stanice *Saljut 6*. Během jejich letu navštívili *Saljut 6* dvě mezinárodní posádky: v *Sojuzu 30* kosmonauté *Klimuk* a *Hermaszewski* a v *Sojuzu 31* kosmonauté *Bykovskij* a *Jähn*, dále tři nákladní lodi *Progres* (*Progres 2, 3 a 4*). Kromě mnoha pokusů a pozorování byly provedeny technologické experimenty a získáno 49 nových látek a jejich modifikací.

Unikátní prvenství zaslouží přiznat také vědecké orbitální stanici *Saljut 6*, která byla uvedena na oběžnou dráhu Země dne 29. srpna 1977. Žádná z předchozích orbitálních stanic nebyla tak dokonale využita k vědeckým účelům a tolikrát obydlena jako právě *Saljut 6*. Za dobu celého letu hostila na své palubě celkem 25 kosmonautů ze 14 posádek vždy dvoučlenných — kromě kosmické lodi *Sojuz T 3*, na jejíž palubě letěli 3 kosmonauté. Z uvedeného počtu bylo 6 posádek mezinárodních (ČSSR, PLR, NDR, MLR, Kuba a Vietnam). K *Saljutu 6* bylo také připojeno 12 nákladních lodí typu *Progres*. (Stav je uveden ke konci března 1981.)

Dlouhodobý let *Sojuzu 29* s posádkou kosmonautů *Kovaljonka* a *Ivančenko* byl překonán v r. 1979 kosmonauty *V Ljachovem* a *V Rjuminem*. Při letu na palubě orbitálního komplexu *Saljut 6* — *Sojuz 34* dosáhli rekordního pobytu v kosmickém prostoru po dobu 175 dnů. Kosmonauté dosáhli rekordu nejen v délce pobytu v kosmickém prostoru, ale také v objemu prací, které na palubě komplexu vykonali. Během jejich letu byl s kosmickou lodí *Sojuz 34* proveden zajímavý manévř. Tato loď se odpojila od *Saljutu 6*, vzdálila se od něj na vzdálenost 100 m. Na závěr manévru se *Sojuz 34* opět spojil s orbitální stanicí, avšak z druhé strany. Cílem manévru bylo uvolnit spojovací uzel na straně hnacího zařízení *Saljutu 6*, kam se připojují nákladní kosmické lodi *Progres*.

Rok 1980 znamenal pro sovětskou kosmonautiku další světové prvenství a dosud nepřekonaný rekord v délce pobytu v kosmickém prostoru. Hvězdný maratón absolvovala posádka vědeckého orbitálního komplexu *Saljut 6* — *Sojuz 35*, kosmonauté *L. Popov* a *V. Rjumin*. Nejdelší let v dějinách kosmonautiky trval 185 dní. Start se uskutečnil 9. dubna 1980 s kosmickou lodí *Sojuz 35*, její návrat 11. října téhož roku. Během letu přivítali na palubě *Saljutu 6* tři posádky s mezinárodní účastí (maďarskou — Kubasov, Farkas, vietnamskou — Gorbatko, Pham Tuan a kubánskou — Romaněnko, Tamayo). Jejich let byl skutečně letem historickým, trvajícím přes půl roku.

Na palubě orbitální stanice *Saljut 6* uskutečnili kosmonauté *Popov* a *Rjumin* mnoho experimentů s materiály v kosmickém prostoru, prováděli astrofyzikální, technické a lékařsko-biologické pokusy. Mimo jiné bylo získáno mnoho informací v rámci programu výzkumu přírodních zdrojů Země a výzkumu jejího okolí. Během tohoto letu se uskutečnily úspěšné zkoušky zdokonalené pilotované lodi *Sojuz T 2*.

Světové prvenství v počtu startů kosmických raket a družic patří také Sovětskému svazu. Porovnáme-li počet startů v letech 1975—1978, zjistíme, že sovětští vědci a technici vyslali do vesmíru o 282 umělých kosmických těles více než USA. Přehled podává tabulka:

Rok:	SSSR:	USA:
1975	85	23
1976	97	21
1977	97	14
1978	85	24
Celkem	364	82

Sovětští vědci a technici věrni své tradici a v souladu s vědeckotechnickým rozvojem pokračují ve výzkumu a jeho aplikacích v oblasti kosmonautiky. Vzhledem k uvedeným úspěchům lze očekávat, že budou následovat další prvenství Sovětského svazu. Mezi úkoly přijatými na XXVI. sjezdu KSSS patří také úkol rozvoje kosmického výzkumu pro potřeby vědy, techniky a národního hospodářství. Je to významný úkol, který bude mít přímý vliv na využívání kosmických prostředků při řešení národohospodářských úkolů, zvláště v rozvoji spojů a v geografickém výzkumu ke zjišťování nových surovinových zdrojů. Neza-

pomíná se ani na rozvoj spolupráce ve vědě a technice mezi Sovětským svazem a zeměmi socialistického společenství.

Je tedy patrna úzká spojitost průkopnické práce sovětských vědců a techniků s praktickým zaměřením výsledků kosmického výzkumu. Přitom je třeba si uvědomit, že tyto průkopnické činy v oblasti kosmonautiky, náročné výzkumy a výsledky aplikací v kosmickém výzkumu sovětští vědci nepodnikají sami, ale v úzké spolupráci především se státy socialistického společenství, ale také s jinými státy, např. s Francií a rozvojovými zeměmi. Tato významná spolupráce se prakticky uplatňuje v programu *Interkosmos*, který se rozvíjí třemi směry:

- a) poznávání samotného vesmíru,
- b) využívání kosmických prostředků a techniky pro potřeby národního hospodářství,
- c) rozvoj pilotovaných kosmických letů.

Plnění těchto úkolů je založeno na konkrétních krocích, uskutečněných v minulých letech. Pro ilustraci uvedme, že v rámci programu *Interkosmos* bylo vypuštěno již 21 umělých družic, 8 geofyzikálních raket Vertikal a další meteorologické rakety a sondy. Prostřednictvím těchto kosmických těles byla a bude věnována pozornost výzkumu Země a vesmíru, rozvoji kosmických spojů, zkvalitňování předpovědí počasí, využití výsledků kosmické biologie a lékařství ve zdravotnictví, technologickým experimentům uskutečněným ve vesmíru, aby se získaly nové materiály pro potřeby vědy a průmyslu.

Mezi sovětská prvenství v oblasti kosmonautiky patří tedy bezesporu také prvenství v mírovém využívání kosmických výzkumů a v úzké spolupráci Sovětského svazu se spřátelenými státy. Vždyť tato plodná činnost je velkolepým příspěvkem k posílení tolik potřebného světového míru.

Literatura :

- [1] Kleczek, J. — Švestka, Z.: *Astronomický a astronautický slovník*, Orbis, Praha 1963.
- [2] *Hvězdářská ročenka 1969—1980*, Academia, Praha.
- [3] *Rudé právo*, deník ÚV KSČ, ročníky 1979—1981, Praha.

5

Grafy jedním tahem

RNDr. JAN TROJÁK, MFF UK

V předchozím článku nazvaném „Hlavolam s mosty — cesta do teorie grafů“ jsme si ukázali, jak jazyk teorie grafů usnadňuje přesně formulovat problém z jiné oblasti lidské činnosti, která často postrádá přesně definované pojmy. V závěru článku jsme si slíbili, že se budeme zabývat otázkou, kterou jsme v jazyce teorie grafů formulovali takto: *Jaké podmínky musí splňovat graf $G(U, H)$, aby obsahoval uzavřený (nebo otevřený) eulerovský tah?*

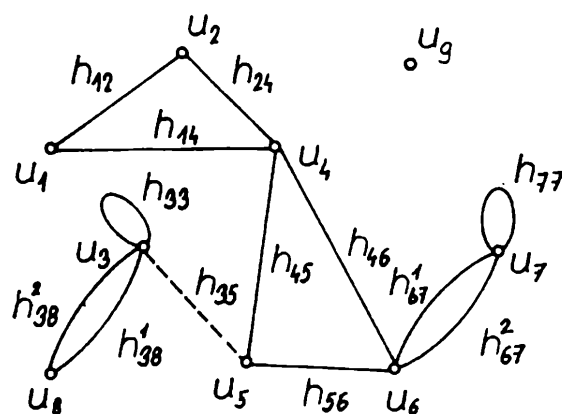
Pozornému čtenáři předchozího článku se jistě podařilo zformulovat nutnou podmínku, kterou musí graf G splňovat, aby v něm existoval uzavřený eulerovský tah: *každý uzel grafu G musí mít sudý stupeň.*

Graf $G_1(U_1, H_1)$ z obr. 1 však tuto podmínku splňuje, a přece neobsahuje eulerovský tah. V grafu G_1 nenajdeme dokonce ani žádný sled, který by obsahoval všechny uzly grafu G_1 , neboť například uzel u_3 není v žádném sledu obsahujícím uzel u_9 . Je zřejmé, že další nutnou podmínkou pro existenci eulerovského tahu v grafu G je, aby každá dvojice uzlů grafu G byla spojena sledem. Graf G splňující tuto podmínku nazýváme *souvislým grafem*.

$G_1(U_1, H_1)$ na obr. 1 je nesouvislý graf, ale graf $G_2(U_2, H_2)$, kde $U_2 = \{u_3, u_8\}$, $H_2 = \{h_{38}^1, h_{38}^2, h_{33}\}$ je souvislý a takové jsou i grafy $G_3(U_3, H_3)$, kde $U_3 = \{u_9\}$, $H_3 = \emptyset$ a $G_4(U_4, H_4)$, ve kterém je $U_4 = \{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ a $H_4 = \{h_{12}, h_{24}, h_{14}, h_{45}, h_{46}, h_{67}^1, h_{67}^2, h_{77}\}$. Doplníme-li v grafu G_1 hranu h_{35} , získáme graf $G_5(U_5, H_5)$ s $U_5 = U_1$ a $H_5 = H_1 \cup \{h_{35}\}$, ve kterém vznikl nový souvislý graf $G_6(U_6, H_6)$ pro $U_6 = U_2 \cup U_4$ a $H_6 = H_2 \cup H_4 \cup \{h_{35}\}$.

Uvedme ještě několik pojmů, vážících se k popsanému problému souvislosti grafu. Grafy G_2, G_3, G_4 nazýváme *podgrafy* grafu G_1 , stejně jako každý graf $G'(U', H')$, pro který platí $U' \subset U$ a $H' \subset H$, nazýváme *podgrafem* grafu $G(U, H)$. Jestliže je H' vlastní podmnožinou množiny H , říkáme, že G' je *vlastní podgraf* grafu G .

Souvislý podgraf grafu G , pro který platí, že není vlastním podgrafem žádného souvislého podgrafu grafu G , nazýváme *souvislou komponentou* (často jen *komponentou*) grafu G . Grafy G_2, G_3, G_4 jsou souvislé komponenty grafu G_1 z obrázku 1. Graf G_1 žádné další komponenty nemá. Grafy G_3 a G_6 jsou jediné souvislé komponenty grafu G_5 .



Obr. 1

Hrana h_{35} má v grafu G_5 výjimečné postavení. Zrušením této hrany se souvislá komponenta G_6 grafu G_1 stane nesouvislým grafem, složeným ze dvou komponent G_2 a G_4 . Zrušením (říkáme také „odebráním“) hrany h_{35} z grafu $G_5 = G_1 + h_{35}$ o dvou komponentách vznikne graf $G_1 = G_5 - h_{35}$ se třemi komponentami. Hraně, jejíž odebrání z grafu G zvýší počet komponent grafu G o jednu, říkáme *most*. Hrana h_{35} je mostem grafu G_5 a rovněž grafu G_6 .

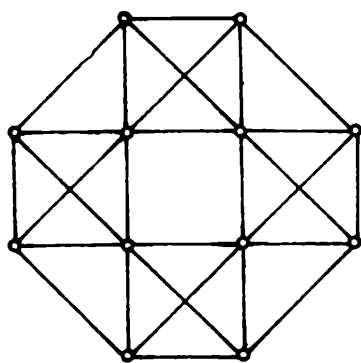
Poučení o některých otázkách souvislosti grafů vyslovme následující tvrzení:

- (E) *V grafu G existuje uzavřený eulerovský tah právě tehdy, když platí současně:*
- (i) *G je souvislý graf,*
 - (ii) *všechny uzly grafu G mají sudý stupeň.*

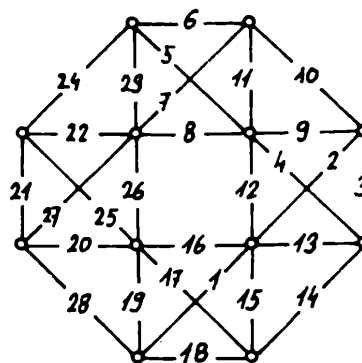
Uvedené tvrzení říká, že konjunkce námi odvozených nutných podmínek (i) a (ii) pro existenci uzavřeného eulerovského tahu v grafu G je podmínkou *postupující*. Důkaz uvedeného tvrzení najde zvědavý čtenář ve všech publikacích uvedených na konci článku i v mnoha jiných knížkách o teorii grafů.

O matematické větě toho druhu, jako je naše tvrzení (E), říkáme, že je *větou existenční*. To znamená, že tato věta formuluje podmínky, kdy hledaný objekt existuje. Existenční věty mají prvořadou důležitost pro praxi zejména v těch případech, kdy prokáží, že řešení neexistuje. Tím nám ušetří zbytečnou námahu, kterou bychom jinak vynaložili na hledání (neexistujícího) objektu. Existenční věta nám dává odpověď na otázku, zda má smysl řešení hledat. Tím však její význam končí; neříká nám nic o počtu řešení ani o tom, jak je najít.

Může se nám stát, že je dán graf G splňující podmínky tvrzení (E), existence uzavřeného eulerovského tahu je tedy v G zaručena, a přece není snadné tento tah najít a popsat. Pokuste se například najít některý z eulerovských uzavřených tahů v grafu G^+ na obr. 2. Graf G^+ má jen uzly stupně 4 a uzly stupně 6. Podaří se vám v něm najít eulerovský tah hned na první pokus? Pokud ano, věřte, že lze navrhnout složitější grafy splňující podmínky (i) a (ii), ve kterých by bylo obtížnější najít



Obr. 2



Obr. 3

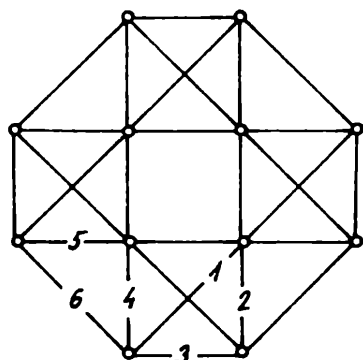
uzavřený eulerovský tah. Až po větších zkušenostech bychom zformulovali postup, jak vybírat uzly a hrany grafu G tak, aby výsledným sledem byl uzavřený eulerovský tah v grafu G . Mohli bychom postupovat např. tak, jako v následujícím algoritmu (T):

- T1. V grafu $G(U, H)$ splňujícím podmínky (i) a (ii) zvolme libovolný uzel za počáteční a koncový uzel uzavřeného eulerovského tahu. Označme jej u_1 .
- T2. Ze zvoleného počátečního uzlu projdeme po libovolné hraně do druhého uzlu u_2 a označme tuto hranu číslicí 1.
- T3. Z k -tého uzlu u_k vystupme po libovolné dosud neoznačené hraně a označme ji číslicí k . Nepoužijme přitom mostu grafu $G - \{1, 2, \dots, k - 1\}$, pokud máme jinou možnost.
- T4. Krok T3 opakujeme, dokud nejsou všechny hrany grafu G označeny a tím zařazeny do tahu. Výsledkem je uzavřený eulerovský tah $u_1, 1, u_2, \dots, |H|, u_1$.

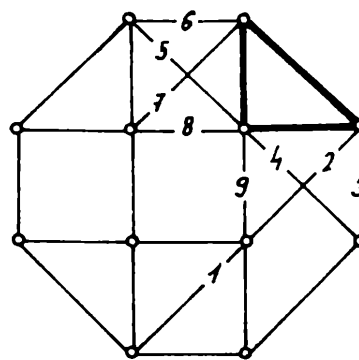
Seznamme se s algoritmem podrobněji. Předpokládejme, že G je souvislý graf, jehož všechny uzly mají sudý stupeň. Libovolný z těchto uzlů můžeme zvolit za počáteční (a tím i koncový) uzel hledaného uzavřeného eulerovského tahu. Označme u_1 počáteční uzel. Představme si, že graf G „procházíme“ tak, že posloupnost „prošlých“ uzlů a hran tvoří hledaný tah. Představme si dále, že každá hrana grafu G „zmizí“ z grafu G , jakmile ji projdeme. Z počátečního uzlu u_1 odejdeme po hraně 1 do druhého uzlu u_2 tahu a zanecháme za sebou graf $G_1 = G - \{1\}$, ve kterém mají uzly u_1 a u_2 lichý stupeň a všechny ostatní uzly stupeň sudý. Přechodem přes další hranu označenou 2 do třetího uzlu u_3 jsme vytvořili graf $G_2 = G - \{1, 2\}$, ve kterém u_1 a u_3 jsou jediné dva uzly lichého stupně. Doplňme svou představu sledováním uvažovaných kroků na obr. 3.

Buď u_j uzel, do kterého jsme došli přechodem po hraně „ $j - 1$ “. Pak nastává právě jedna ze dvou možností:

1. Stupeň $d(u_j)$ uzlu u_j v grafu $G_{j-1} = G - \{1, 2, \dots, j - 1\}$ je liché číslo $d(u_j) \geq 1$ a s uzlem u_j inciduje alespoň jedna neoznačená hrana, po které můžeme uzel u_j opustit.



Obr. 5



Obr. 4

2. Stupeň $d(u_j)$ uzlu u_j v grafu G_{j-1} je sudé číslo. Potom $u_j = u_1$ a nastává opět právě jedna ze dvou možností:

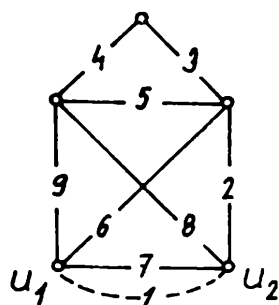
- (a) $d(u_j) \geq 2$; pak existuje alespoň jedna neoznačená hrana incidující s uzlem u_j , po které můžeme z uzlu u_j odejít;
- (b) $d(u_j) = 0$; pak hrana „ $j - 1$ “ byla mostem a my jsme dokončili uzavřený tah $S: u_1, 1, u_2, 2, \dots, j - 1, u_1$.

Jestliže $j - 1 = |H|$, pak nastává případ (2b) a S je eulerovský tah, který jsme hledali. Graf G_{j-1} neobsahuje již žádnou hranu.

Je-li v případě (2b) $j - 1 \leq |H|$, je tah S již uzavřený a graf G_{j-1} obsahuje ještě neoznačené hrany, které s uzly, s nimiž incidují, tvoří komponenty grafu G_{j-1} . Uzly těchto komponent mají nenulové sudé stupně. Ostatní uzly grafu G_{j-1} , tj. ty, které neincidují se zbylými hranami, mají stupeň nulový, každý z nich tvoří samostatnou komponentu a nazývají se *izolovanými uzly*. Buď G° jedna z komponent grafu G_{j-1} , která není izolovaným uzlem. Protože G byl souvislý graf, byla v něm komponenta G° připojena hranami k některým z ostatních uzlů grafu G . Během našeho algoritmu byly tyto hrany očíslovány a vypuštěny. Ta z nich, která byla vypuštěna poslední, se mezi nimi pozná podle toho, že má ze všech těchto hran přiřazeno největší přirozené číslo; označme je p . Hrana „ p “ byla mostem v grafu G_{p-1} a přecházeli jsme po ní z uzlu $u_p \in G^\circ$ do uzlu $u_{p+1} \notin G^\circ$. Z uzlu u_p však vedly kromě hrany „ p “ ještě jiné hrany, které teď patří komponentě G° a kterým podle bodu T3 algoritmu měla být dána přednost před mostem „ p “.

Tak např. v obr. 4 byl požadavek *nepoužít* mostu, není-li to nutné, porušen tím, že bylo použito hrany „6“, která je mostem v grafu $G_5^+ = G^+ - \{1, 2, 3, 4, 5\}$. V obr. 5 byl též požadavek porušen použitím hrany označené číslem 9, která je mostem grafu $G_8^+ = G^+ - \{1, 2, \dots, 8\}$. Tah měl pokračovat např. tak, jak ukazuje obrázek 3.

Za předpokladu, že je dodržen bod T3 algoritmu, nemůže graf G_{j-1} v případě (2b) obsahovat žádnou komponentu různou od izolovaného bodu a S je vždy uzavřeným eulerovským tahem.



Obr. 6

Důkaz správnosti našeho algoritmu je rovněž důkazem, že k existenci uzavřeného eulerovského tahu v grafu G stačí, aby G byl souvislý a aby každý jeho uzel měl sudý stupeň (důkaz algoritmu najde čtenář např. v [4]). Existence uzavřeného eulerovského tahu v grafu G je v tomto případě dokázána tím, že je takový tah v G sestaven daným algoritmem pro libovolný graf G splňující podmínky (i) a (ii).

Nabízí se ještě otázka, co je nutnou a postačující podmínkou pro existenci otevřeného eulerovského tahu v grafu G . Pozorný čtenář by mi teď už jistě rád napověděl: graf G musí být souvislý a musí obsahovat právě dva uzly lichého stupně.

Snadno bychom také našli algoritmus pro vyhledání otevřeného eulerovského tahu v grafu G . Je ukryt v algoritmu pro uzavřený eulerovský tah. Najdeme jej!

Buď $\bar{G}$ souvislý graf, ve kterém právě dva uzly mají lichý stupeň. Označme tyto uzly u_1 a u_2 a doplňme graf $\bar{G}$ o hranu h_{12} , která je spojí. Potom $G = \bar{G} + h_{12}$ je souvislý graf, jehož všechny uzly mají sudý stupeň a užitím algoritmu (T) v něm můžeme najít uzavřený eulerovský tah S s počátečním i koncovým uzlem u_1 a hranou h_{12} označenou číslicí 1. Otevřený eulerovský tah $\bar{S}$ v $\bar{G}$ vznikne z S odebráním uzlu u_1 a hrany h_{12} . $\bar{S}$ začíná v uzlu u_2 a končí v uzlu u_1 . Všimněme si, že graf $\bar{G}$ je totožný s grafem $G_1 = G - \{1\}$ z algoritmu (T). Jednoduchý obrázek 6 názorně ilustruje tento postup.

Cvičení :

1. Vyzkoušejte si sami algoritmus (T) na složitějším grafu, než je G^+ z obr. 3.
2. Ukažte, že graf, ve kterém existuje uzavřený eulerovský tah, nemá most.
3. Kolik mostů může mít graf, ve kterém existuje otevřený eulerovský tah?
4. Kolik různých otevřených eulerovských tahů obsahuje graf z obr. 6?

Literatura :

- [1] J. Sedláček, Kombinatorika v teorii a praxi, 1964
- [2] O. Ore, Graphs and their uses, 1963, ruský překlad 1965
- [3] F. Harary, Graph theory, 1969, ruský překlad

Archeologie v novém světle

PETR PĚNIČKA, MÚ ČSAV Praha

V posledních dvaceti letech matematika proniká téměř do všech oborů lidské činnosti. Tento rozvoj aplikací matematiky je z velké části způsoben samočinnými počítači, které umožňují použití matematiky i v takových čistě humanitních vědách, jako je historie, lingvistika, archeologie atd. V časopise Vesmír byl nedávno publikován zajímavý článek o využití počítačů v archeologii. Ve zmíněném článku jsou popsány možnosti grafického znázornění naměřených dat (reliéfu terénu, mapy apod.) pomocí počítače. Na tomto místě bych se chtěl zmínit o jiném použití matematiky v archeologii. Jedná se o řešení tohoto problému:

Při archeologickém výzkumu bylo nalezeno množství předmětů téhož druhu, které patří do stejného časového období. Může se jednat o určité pracovní nástroje, keramické nádoby apod., nebo se může jednat o starověké pohřebiště, kde pak za předměty považujeme jednotlivé hroby. Cílem je určit relativní stáří předmětů vůči sobě, tj. nalézt uspořádání od nejstaršího předmětu k nejmladšímu. Této úloze se často říká *časová seriace*. Vzhledem k tomu, že předměty pocházejí ze stejného období, není možné určit jejich vzájemné stáří pomocí absolutních metod datování (např. radiokarbonové metody). Je známo, že tyto metody nejsou zcela přesné a navíc v uvedené úloze nejde o absolutní datování předmětů, nýbrž o jejich seřazení do posloupnosti. V tomto případě může však pomoci archeologům matematika.

Na všech předmětech jsou zjištěny číselné hodnoty jejich vlastností; předpokládejme, že je dáno n předmětů a m vlastností, které jsou zkoumány. Používá se následující maticový zápis:

Vlastnosti

		1	2		m
Předměty	1				
	2				
	n				

Nadále budou vždy řádky matice odpovídat předmětům a sloupce vlastnostem. Budeme rozlišovat vlastnosti dvojího typu podle jejich hodnot:

Typ (I): předmět danou vlastnost má nebo nemá (pak příslušný prvek matice bude jednička nebo nula).

Typ (II): vlastnosti vyjádřené kvantitativně.

(Příklad: předměty jsou hroby na starověkém pohřebišti, vlastnosti jsou druhy keramiky nalezené v těchto hrobech, j -tý řádek matice vyjadřuje procentuální zastoupení jednotlivých druhů keramiky v j -tém hrobu.)

Při řešení úlohy se vychází ze základního předpokladu, že vlastnosti předmětů se mění postupně. U vlastností typu (I) to znamená, že existuje období, ve kterém předměty tuto vlastnost mají a před a po tomto období nemají. U vlastností typu (II) se bude číselná hodnota u jednotlivých předmětů měnit postupně s časem, většinou bude růst k maximu a od tohoto maxima klesat.

Nyní tedy už můžeme formulovat problém matematicky: Je dána matice A typu $n \times m$ (která obvykle obsahuje data jen jednoho z uvedených typů). Úkolem je permutovat řádky matice A tak, aby u typu (I): v každém sloupci se jedničky vyskytovaly v jediné souvislé skupině,

u typu (II): v každém sloupci prvky rostly až k maximu a pak klesaly (nerovnosti mezi prvky nemusí být ostré, některé sousední prvky ve sloupci si mohou být rovny; maximální prvek se může nacházet na kterékoliv pozici ve sloupci).

Příklady: 1. Matice

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obsahuje data typu (I) pro 5 předmětů a 5 vlastností (čísla v závorce označují předměty). Tuto matici můžeme permutací řádků upravit na tvar

$$\begin{array}{l} (4) \\ (2) \\ (1) \\ (5) \\ (3) \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Pro matici s daty typu (II)

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 60 & 0 & 15 & 15 & 10 \\ 30 & 0 & 50 & 10 & 10 \\ 40 & 20 & 10 & 30 & 0 \\ 30 & 0 & 45 & 10 & 15 \\ 40 & 10 & 10 & 30 & 10 \end{array} \right]$$

je hledaná matice

$$\begin{array}{l} (4) \\ (2) \\ (1) \\ (5) \\ (3) \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 30 & 0 & 45 & 10 & 15 \\ 30 & 0 & 50 & 10 & 10 \\ 60 & 0 & 15 & 15 & 10 \\ 40 & 10 & 10 & 30 & 10 \\ 40 & 20 & 10 & 30 & 0 \end{array} \right]$$

Z nalezených matic můžeme určit chronologické pořadí předmětů, které je v obou případech 4—2—1—5—3 (nebo může být opačné 3—5—1—2—4).

Zdá se, že řešení problému je velmi jednoduché, stačí přece vyzkoušet všechny možné permutace řádků a zjistit, která z těchto permutací úlohu řeší. Když navíc použijeme počítače, mělo by být řešení velmi rychlé. Ale není tomu tak. Stačí si uvědomit, že počet permutací řádků je $n!$ a hned je jasné, že když počet zkoumaných předmětů je několik desítek, nelze takto úlohu řešit. Z tohoto důvodu bylo vyvinuto mnoho seriačních metod, které vesměs vyžadují využití moderní výpočetní techniky. Samy o sobě tyto metody často nejsou jednoduchou záležitostí a využívají takového matematického aparátu, jako je teorie grafů, teorie matic, tzv. mnohorozměrná statistická analýza atd., není tedy možno je zde popisovat.

Situace je dále komplikována interpretací výsledků; někdy může být řešení více a je tedy nutné, aby výsledky z počítače zpracovali společně archeolog a matematik. Dále se musí určit, které ze dvou možných uspořádání je to správné. Navíc výsledné uspořádání nelze brát v praxi za absolutně správné, ale mohou v něm být drobné nepřesnosti. To vše je třeba uvážit.

Je tedy vidět, že ze zdánlivě jednoduché úlohy se stává úloha značně obtížná, která vyžaduje rozsáhlé matematické znalosti a spolupráci dvou odborníků — archeologa a matematika. V poslední době se objevuje mnoho odborných článků a publikací, které se těmito problémy zabývají. Nejznámější metoda pochází od prof. *D. G. Kendalla* z Cambridge, ale seriační metody se rozvíjejí např. i v Rumunsku a ani našim archeologům nejsou neznámé (viz *J. Malina: Archeologie: jak a proč?*, vydalo Regionální muzeum v Mikulově, 1975). Je tedy zřejmé, že matematika a počítače pronikají i do humanitních věd stále více a více.

Najjednoduchšie zložené pohyby z matematického hľadiska

EVA TOKÁRIKOVÁ, gymnázium, Bilíkova 24, Bratislava

Pri preberaní učiva o zložených pohyboch sa žiaci nemajú možnosť venovať týmto problémom úplne, pretože sa boja zložitého matematického aparátu, s ktorým sa na základnej škole nestretávali. Pozrime sa na túto problematiku pekne po poriadku.

Čo považujeme vo fyzike za *zložený pohyb telesa*? Je to taký pohyb, pri ktorom vykonáva teleso súčasne viac pohybov. Najčastejšie sa uvažujú prípady:

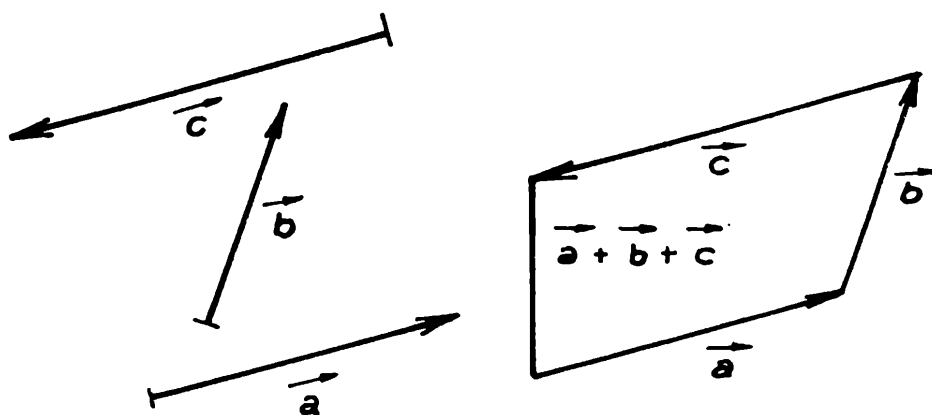
- a) dvoch pohybov priamočiarych rovnomerných, alebo
- b) pohybu rovnomerného priamočiareho a voľného pádu.

Prípád a) nastáva napr. vtedy, keď je loďka, ktorá má vlastnú rýchlosť od svojho motora, unášaná po rieke rýchlosťou vody. Teda takáto loďka má súčasne dve rýchlosti: svoju, označme si ju $\mathbf{v}_l$, a rýchlosť toku rieky $\mathbf{v}_r$. Pre jednoduchosť sa zvykne predpokladať, že obidve tieto rýchlosti sú stále nepremennivé.

Prípád b) nastáva pri akomkoľvek vrhnutí telesa v gravitačnom poli. Takýto pohyb koná napr. kolmo hore vystrelená raketa alebo v Niagarských vodopádoch vrhnutá voda, či guľa, hodená Fibingerovou. Tu má pohybujúce sa teleso tiež súčasne dve rýchlosti: jednu stálu, to je tá, ktorou sme ho vrhli, a druhú, získanú vplyvom Zeme — rýchlosť voľného pádu, ktorá sa stále zväčšuje.

Čo sa v týchto prípadoch deje s oboma rýchlosťami? To isté, ako so silami, keď na teleso pôsobia súčasne dve — zložia sa a vytvoria jedinu výslednú. Vieme, že sily aj rýchlosti sú vektorové veličiny, a preto povieme, že tieto vektory sa sčítavajú.

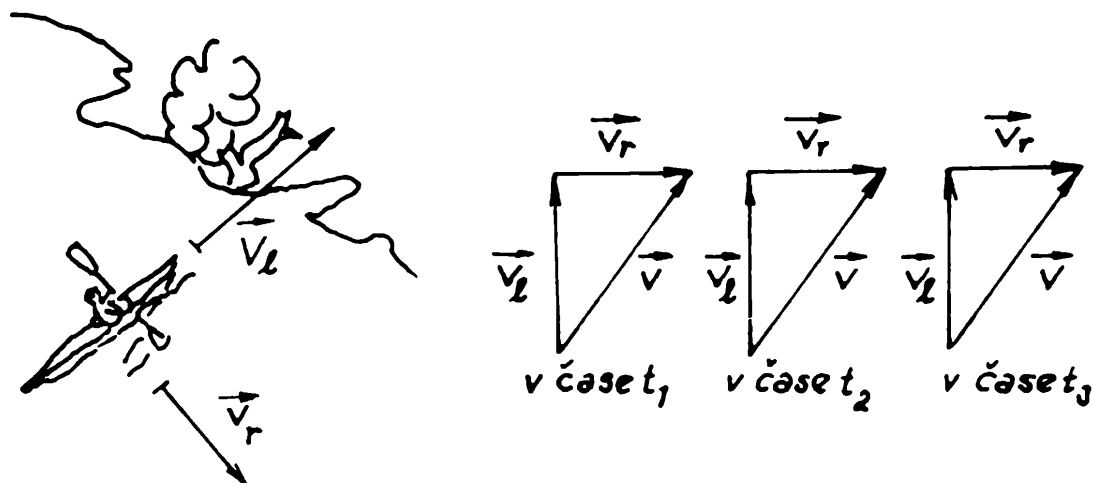
Pripomeňme si pravidlo sčítavania vektorov — skladania vektorov. Vektory sa sčítavajú tak, že sa ku koncovému bodu prvého vektora pridáva druhý vektor, ku koncovému bodu druhého vektora tretí atď. (Sčítavanie vektorov je komutatívne, a preto môžeme poradie pridávaných vektorov voliť ľubovoľné.) Výsledkom je vektor, ktorý má počiatočný bod totožný s počiatočným bodom vektora, ktorý sme vzali pri sčítavaní ako prvý, a koncový bod má v koncovom bode posledného zo sčítavaných vektorov (obr. 1).



Obr. 1

Predstavme si teraz konkrétne skladanie rýchlostí v prípade loďky, pohybujúcej sa kolmo na prúd rieky (prípád A), rakety (B), vody v Niagarských vodopádoch (C) a gule, vrhnutej Fibingerovou (D). Zložme si rýchlosti, ktoré vystupujú pri týchto pohyboch aspoň v troch časových okamihoch: t_1 , t_2 , t_3 .

A) Ani jedna z rýchlostí loďky na rieke sa nemení, a preto sa nemení ani rýchlosť výsledná. Má stále rovnaký smer aj veľkosť. Jej veľkosť v prí-



Obr. 2

pade, že sa loďka pohybuje kolmo na prúd, vypočítame podľa Pytagorovej vety (obr. 2)

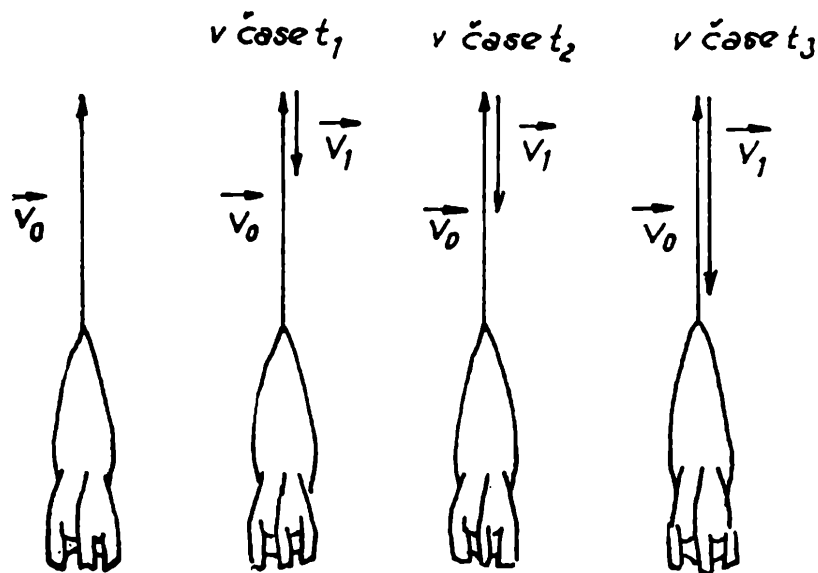
$$v = \sqrt{v_l^2 + v_r^2}.$$

B) Označme rýchlosť, ktorú má raketa od svojich motorov $\mathbf{v}_0$. Považujme ju za stálu. Rýchlosť, ktorú má raketa od gravitačného poľa Zeme, označme $\mathbf{v}_1$. Je to rýchlosť voľného pádu, pre ktorú platí

$$|\mathbf{v}_1| = gt,$$

kde g je gravitačné zrýchlenie, t čas. Rýchlosť $\mathbf{v}_1$ sa s časom zväčšuje (obr. 3).

‡ Ako sme už hovorili, zvolili sme taký prípad, že sa rýchlosť $\mathbf{v}_0$ nemení, keďže však $\mathbf{v}_1$ s časom narastá, není sa aj výsledná rýchlosť $\mathbf{v}$. Ak letí



Obr. 3

raketa kolmo nahor, teda proti silám gravitačného poľa, rýchlosť $\mathbf{v}$ sa znižuje, až klesne na nulu. Vtedy už raketa ďalej nestúpa, zastane. Potom už padá k Zemi voľným pádom. Veľkosť výslednej rýchlosti pri výstupe sa rovná rozdielu veľkostí oboch rýchlostí. Znižuje sa síce, ale svoj smer nemení:

$$v = v_0 - v_1,$$

$$v = v_0 - gt.$$

C) *Rýchlosť čistočky vody na vrchole Niagarského vodopádu* označme ako $\mathbf{v}_0$. Táto rýchlosť čistočky vody ostáva. Pri odtrhnutí čistočky vody od vrcholu vodopádu nadobúda táto aj rýchlosť od pôsobenia Zeme — rýchlosť voľného pádu, ktorá opäť stále narastá, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{gt}$. Aká bude výsledná rýchlosť čistočky vody, ktorú sme si vybrali na sledovanie?

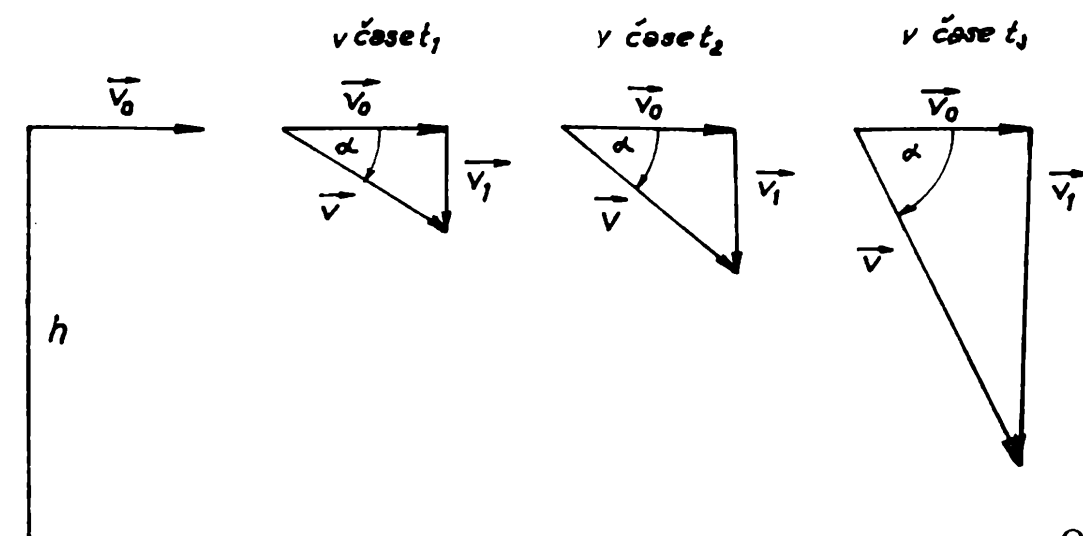
Z obr. 4 vidíme, že výsledná rýchlosť čistočky vody sa stále zväčšuje a skláňa voči vodorovnému smeru. Jej veľkosť vypočítame podľa Pytagorovej vety

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2}.$$

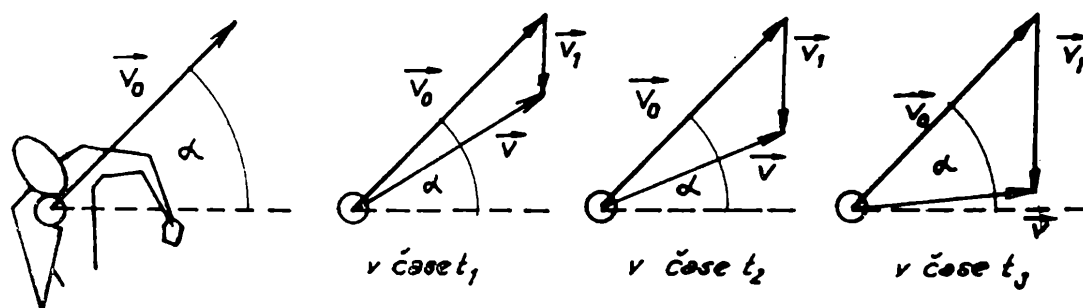
Sklon voči vodorovnej rovine môžeme vypočítať pomocou goniometrickej funkcie tangens, ktorá je v pravouhlom trojuholníku definovaná pre jeho ostré uhly ako pomer protilahlej odvesny k danému uhlu ku prilahlej odvesne k danému uhlu. Z obr. 4 teda je $\tan \alpha = \frac{v_1}{v_0}$, z čoho

nájde veľkosť α — sklonu výslednej rýchlosti voči vodorovnému smeru v čase t .

D) *Rýchlosť gule, ktorú jej udelila Fibingerová*, označíme $\mathbf{v}_0$ a rýchlosť, ktorú získava guľa od gravitačného poľa Zeme, rýchlosť voľného pádu, ako $\mathbf{v}_1 = \mathbf{gt}$. Určíme opäť výslednú rýchlosť v časových intervaloch t_1, t_2, t_3 (obr. 5).



Obr. 4



Obr. 5

Čo sa deje s výslednou rýchlosťou $\mathbf{v}$ gule? Opäť sa skláňa k Zemi. O veľkosti vektora rýchlosti $\mathbf{v}$ nevieme vysloviť jednoznačný úsudok. Ako v tomto prípade vypočítame veľkosť výslednej rýchlosti v ?

Trojuholník je (obr. 5) všeobecný, a preto na výpočet jeho strany nemôžeme použiť Pytagorovu vetu ako v predchádzajúcich prípadoch pre trojuholník pravouhlý. Pre trojuholník všeobecný ale platí veta kosínusová, ktorá hovorí

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

a podľa nej sa dá vyjadriť veľkosť vektora $\mathbf{v}$ ako (obr. 6)

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + v_1^2 - 2v_0v_1 \cos \beta \\ v^2 &= v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0gt \cos(90^\circ - \alpha), \end{aligned}$$

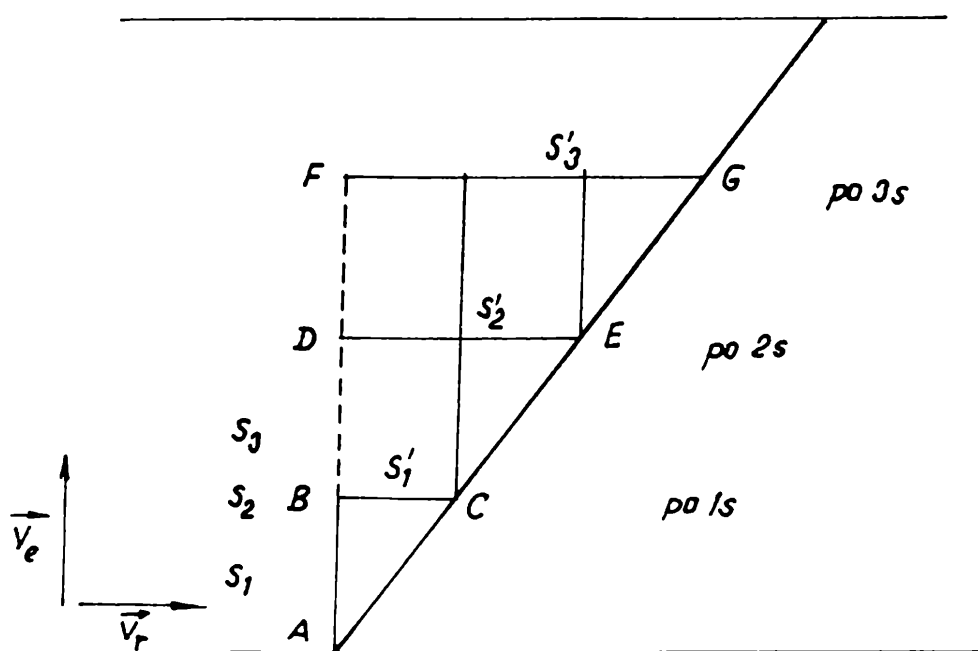
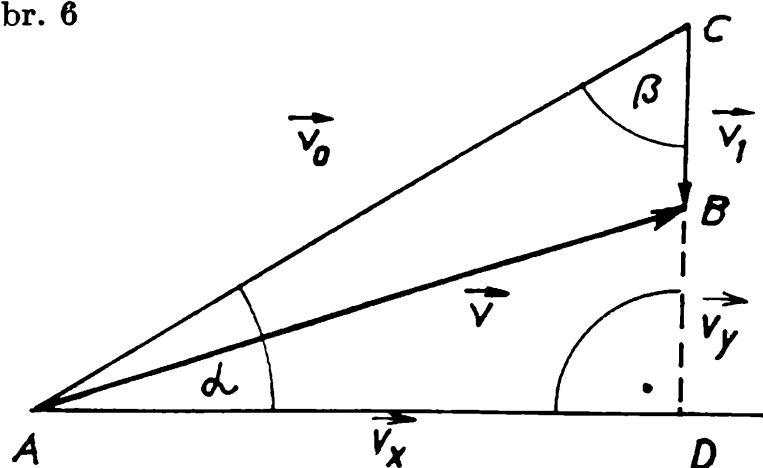
čo je výsledná rýchlosť v čase t .

Na obr. 6 sa ešte zvykne vyjadrovať úsečky AD a BD ako zložky vektora $\mathbf{v}$, získané jeho rozkladom do vodorovného a zvislého smeru

$$AD = \mathbf{v}_x, BD = \mathbf{v}_y.$$

Na určenie týchto dvoch zložiek potrebujeme ďalšie goniometrické funk-

Obr. 6



Obr. 7

cie ostrého uhla v pravouhlom trojuholníku — funkciu sinus a kosinus. Dostaneme

$$\sin \alpha = \frac{gt + v_y}{v_0}, \quad \cos \alpha = \frac{v_x}{v_0},$$

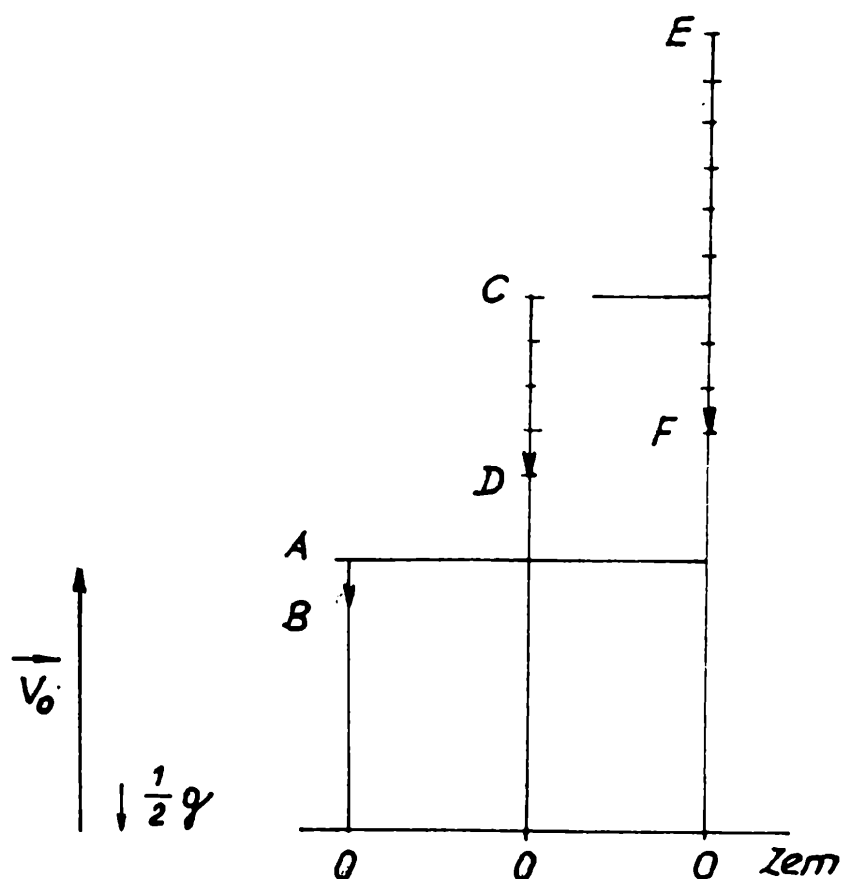
z čoho vyjadríme v_x a v_y ako

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha, \\ v_y &= v_0 \sin \alpha - gt. \end{aligned}$$

Aj na dráhu sa pozerať aspoň v troch okamihoch, v čase t_1 , t_2 a t_3 . Preberme všetky predchádzajúce prípady.

A) *Prípad loďky* (obr. 7).

V okamihu t_1 prešla loďka smerom ku druhému brehu dráhu $s_1 = v_l \cdot t_1$. Keď je A východiskový bod loďky, loďka prejde za čas t_1



Obr. 8

do bodu B . Zároveň však prejde vo smere prúdu dráhu $s'_1 = v_r \cdot t_1$, ako keby prešla z bodu B do bodu C . Loďka však nejde po myslenej dráhe ABC , ale po skutočnej dráhe AC . V čase t_2 prejde smerom ku druhému brehu dráhu $s_2 = v_l \cdot t_2$ do bodu D a smerom po prúde $s'_2 = v_r \cdot t_2$ do bodu E . V čase t_3 prejde loďka smerom ku druhému brehu dráhu $s_3 = v_l \cdot t_3$ do bodu F a po prúde dráhu $s'_3 = v_r \cdot t_3$ do bodu G .

V skutočnosti teda loďka vykoná dráhu $ACEG$ — úsečku, ktorej dĺžku ľahko vypočítame podľa Pytagorovej vety:

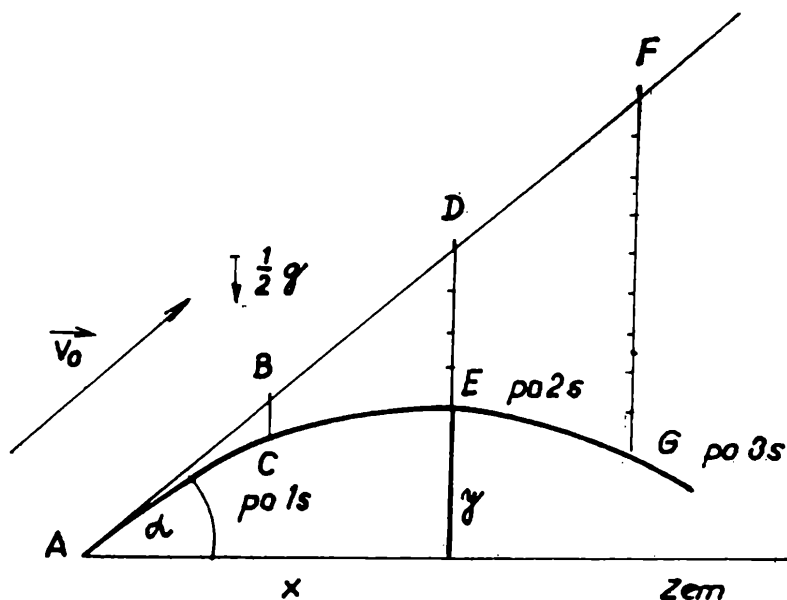
$$|AG| = \sqrt{s_3'^2 + s_3^2} = \sqrt{v_l^2 \cdot t_3^2 + v_r^2 \cdot t_3^2} = t_3 \sqrt{v_l^2 + v_r^2}.$$

B) *Prípad rakety* (obr. 8):

Rýchlosť, ktorú získala raketa od svojho motora, je stála a smeruje kolmo nahor. Označili sme ju $\mathbf{v}_0$.

Rýchlosť od gravitačného poľa Zeme — rýchlosť voľného pádu $\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}t$ — smeruje kolmo dole.

V čase t_1 prejde raketa smerom hore dráhu $s_1 = v_0 \cdot t_1$, dostane sa do bodu A (obr. 8). Zároveň ale padne dolu o dĺžku $s'_1 = \frac{1}{2}gt_1^2$, takže sa dostane do bodu B . V skutočnosti teda prejde raketa za čas t_1 len dráhu OB . V čase t_2 prejde raketa smerom nahor dráhu $s_2 = v_0 \cdot t_2$, čím by sa dostala do bodu C , ale súčasne padne o dĺžku $s'_2 = \frac{1}{2}gt_2^2$ do bodu D .



Obr. 10

keďže je to dĺžka časti krivky nazvanej parabola. Vieme si ale určiť polohu čiastočky po jednotlivých časových úsekoch voči Zemi a voči východiskovému bodu. Napr. po 2 s bude $x = v_0 t$ a $y = h - \frac{g}{2} t^2$, kde h je výška vodopádu.

D) Prípad gule (obr. 10)

Počiatočnú rýchlosť, ktorou bola guľa vrhnutá, považujeme za nemennú a označme ju v_0 ; v_1 bude rýchlosť od voľného pádu $v_1 = gt$.

Z bodu A prejde v čase t_1 guľa šikmo pod uhlom α dráhu $s_1 = v_0 t_1$ a dostane sa do bodu B. Zároveň však padne o $s'_1 = \frac{g}{2} t_1^2$ z bodu B do C.

V čase t_2 sa teda dostala do bodu C. V čase t_2 prejde šikmým smerom dráhu $s_2 = v_0 t_2$ do bodu D a padne z D do E a $s'_2 = \frac{g}{2} t_2^2$. V čase t_3 prejde

šikmým smerom dráhu $s_3 = v_0 t_3$ do bodu F a padne o $s'_3 = \frac{g}{2} t_3^2$ do bodu G.

Guľa pôjde v skutočnosti po dráhe ACEG, ktorej dĺžku pri našich vedomostiach opäť nemôžeme určiť. Vieme určiť len polohu gule v jednotlivých okamihoch voči miestu A ako dĺžku x a voči Zemi ako dĺžku y .

Na určenie úsečiek x a y použijeme opäť goniometrické funkcie sínus a kosínus uhla α . Bude platiť

$$\cos \alpha = \frac{x}{v_0 t},$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{1}{2} g t^2 + y}{v_0 t},$$

$$\text{odtiaľ } x = v_0 t \cos \alpha,$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2}.$$

Ako ste si určite všimli, vo všetkých prípadoch sme určovali rýchlosti pohybov bez toho, že by sme uvažovali ich zmenšovanie vplyvom trenia. V praxi sa však často trenie uvažovať musí (napr. delostrelci). Zohľadnenie trenia celé výpočty komplikuje. Jednotlivé prípady, o ktorých sme hovorili, už potom nie sú zložením dvoch pohybov, ale obidva tieto pohyby treba zložiť s myslenným pohybom, vyvolaným silami trenia.

Metoda náhradního zdroje

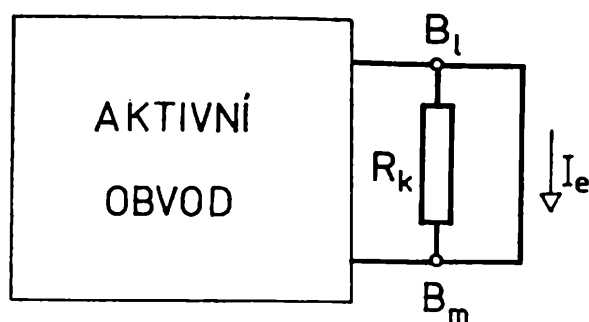
Ing. JOSEF KŮS, Vysoká škola strojní a elektrotechnická, Plzeň

Při řešení elektrických obvodů někdy postačuje vypočíst proud a napětí v jeho jediné větvi. Použití metod úplné analýzy (metody byly připomenuty v článku [1]) je v takovém případě neefektivní. S výhodou však lze užít metodu náhradního zdroje¹⁾, jejíž princip a použití nyní popíšeme. Pro jednoduchost budeme všechna tvrzení ilustrovat na lineárních stejnosměrných elektrických obvodech.

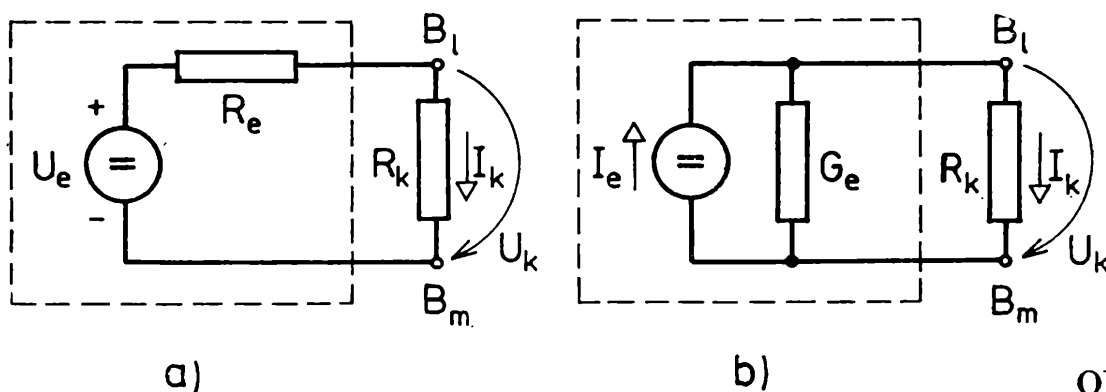
Uvažujme elektrický obvod, v němž působí alespoň jeden zdroj (aktivní obvod). Je třeba vypočíst proud I_k a napětí U_k ve větvi obvodu s odporem R_k . Větev je zapojena mezi uzly B_1 a B_m . Zapojení je znázorněno na obr. 1, přičemž obvod (bez větve s odporem R_k) je pro jednoduchost vyznačen obdélníkem.

Metoda náhradního zdroje je založena na následující úvaze: Větvi obvodu s odporem R_k protéká jistý proud, jehož velikost zřejmě závisí na hodnotě R_k . Obvod vyznačený obdélníkem se tedy vůči větvi s odporem R_k chová buď jako zdroj napětí U_e s jistým (nenulovým) vnitřním odporem R_e (obr. 2a) nebo jako zdroj proudu I_e s jistou (nenulovou) vnitřní vodivostí G_e (obr. 2b).

¹⁾ Metoda náhradního zdroje se často uvádí pod názvem Théveninova věta a Nortonova věta.



Obr. 1



Obr. 2

Analýza složitého obvodu na obr. 1 se tím převádí na řešení jednoho ze dvou elementárních náhradních obvodů (obr. 2a, 2b). Pro obvod na obr. 2a snadno dostaneme

$$I_k = \frac{U_e}{R_e + R_k}, \quad U_k = R_k I_k. \quad (1)$$

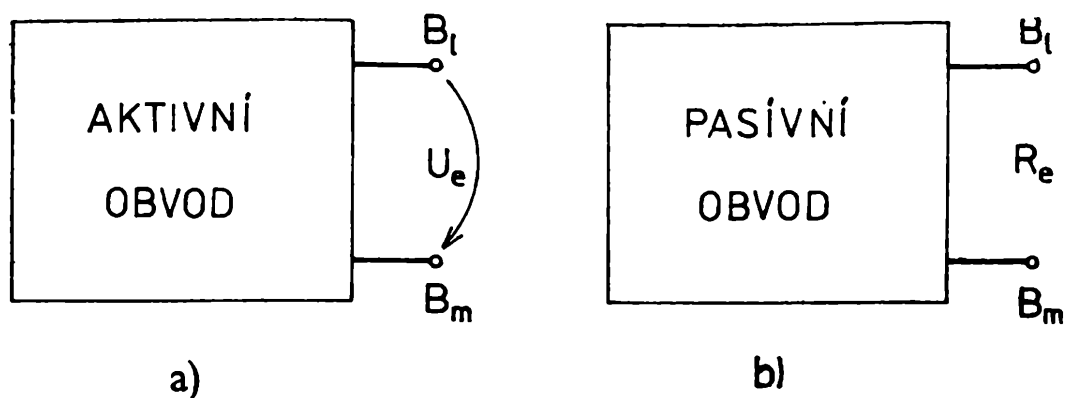
Řešení obvodu na obr. 2b je stejně jednoduché

$$U_k = \frac{I_e}{G_e + G_k}, \quad I_k = G_k U_k, \quad G_k = \frac{1}{R_k}. \quad (2)$$

Výpočet se tak redukuje na určení parametrů náhradního zdroje.

Parametry náhradního zdroje napětí (tzv. Théveninova ekvivalentního zdroje, obr. 2a) se určí takto: U_e jako napětí mezi uzly B_l a B_m řešeného obvodu na obr. 1 při odpojené větvi s odporem R_k (obr. 3a); R_e jako odpor mezi uzly B_l a B_m v pasívním obvodu (bez zdrojů), který vznikne z řešeného obvodu na obr. 1 odpojením větve s odporem R_k a náhradou všech zdrojů jejich vnitřními odpory či vodivostmi, obr. 3b.

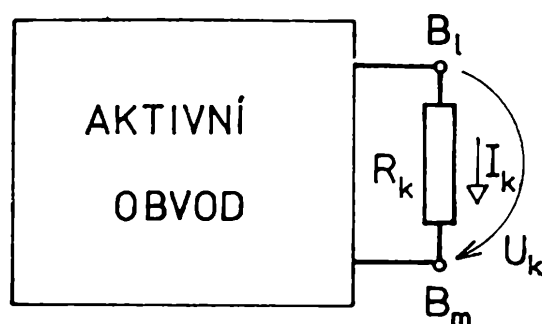
Na tomto místě připomeňme, že technický zdroj napětí je ve schématu obvodu obvykle zakreslen jako sériové spojení ideálního zdroje napětí a vnitřního odporu, technický zdroj proudu pak jako paralelní spojení ideálního zdroje proudu a vnitřní vodivosti. Ideální zdroj napětí má nulový vnitřní odpor, ideální zdroj proudu nulovou vnitřní vodivost. Náhrada zdrojů vnitřními odpory resp. vodivostmi tedy spočívá formálně v náhradě schematické značky ideálního zdroje napětí vodivým



Obr. 3

spojením (zkratem), resp. v přerušení větve se schematickou značkou ideálního zdroje proudu.

Parametry náhradního zdroje proudu (tzv. Nortonova ekvivalentního zdroje, obr. 2b) se určí takto: I_e jako proud tekoucí zkratem vytvořeným v řešeném obvodu na obr. 1 mezi uzly B_l a B_m (obr. 4); $G_e = 1/R_e$, přičemž R_e se stanoví stejně jako u Théveninova ekvivalentního zdroje, obr. 3b.



Obr. 4

Použití metody náhradního zdroje ukážeme na příkladech.

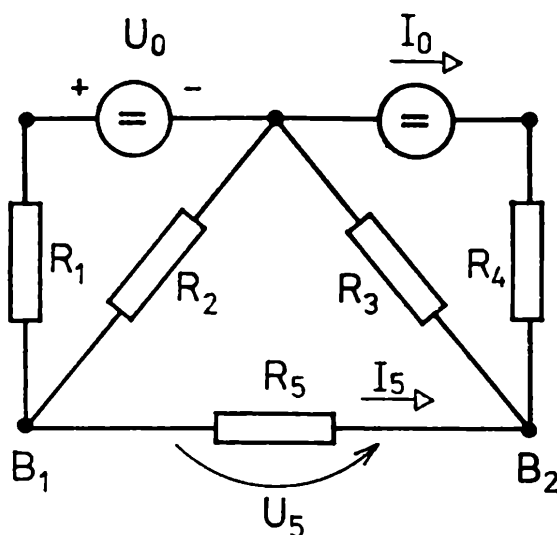
Příklad 1. Metodou náhradního zdroje vypočteme proud I_5 a napětí U_5 v obvodu nakresleném na obr. 5; ($R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $R_5 = 5 \Omega$, $U_0 = 24 \text{ V}$, $I_0 = 2 \text{ A}$).

Schémata odpovídající obr. 3a, 3b pro určení parametrů Théveninova ekvivalentního zdroje jsou na obr. 6a, 6b (po získání zkušeností je samozřejmě není třeba kreslit). V zapojení na obr. 6a je napětí mezi uzly B_1 a B_2

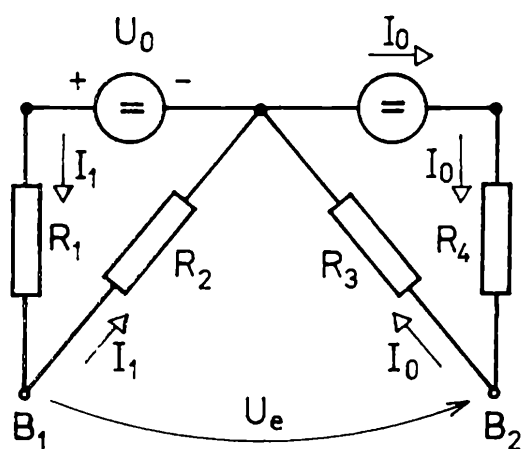
$$U_e = R_2 I_1 - R_3 I_0 = R_2 \frac{U_0}{R_1 + R_2} - R_3 I_0 = 10 \text{ V}$$

Odpor mezi uzly B_1 a B_2 pro obvod na obr. 6b je

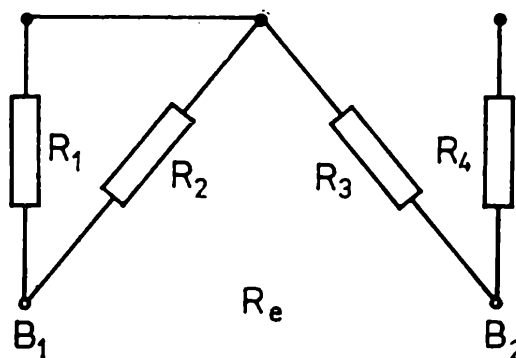
$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{11}{3} \Omega$$



Obr. 5



a)



b)

Obr. 6

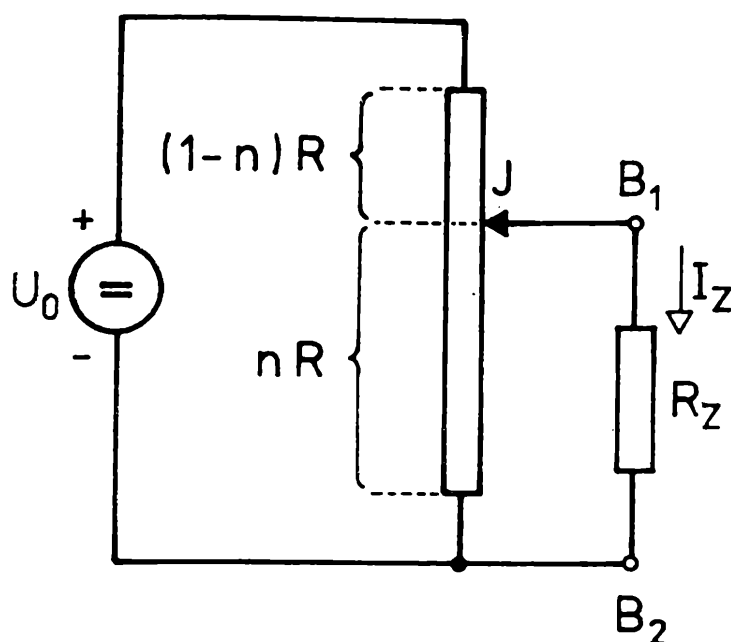
Vypočítané parametry U_e a R_e dosadíme do vztahů (1) a dostaneme hledaný proud a napětí

$$I_5 = \frac{10}{\frac{11}{3} + 5} = \frac{15}{13} \doteq 1,154 \text{ A}; \quad U_5 = 5 \left(\frac{15}{13} \right) = \frac{75}{13} \doteq 5,769 \text{ V}.$$

Řešení téže úlohy s užitím Nortonova ekvivalentního zdroje je méně výhodné (výpočet ponecháme čtenáři).

Příklad 2. S užitím Nortonova ekvivalentního zdroje stanovme závislost proudu v zátěži I_z na poloze jezdce potenciometru (obr. 7).

Jezdec J dělí odpor R potenciometru na dvě části o odporech nR a $(1 - n) \cdot R$. Poloha jezdce je tudíž jednoznačně udána číslem n , které se mění v intervalu $0 \leq n \leq 1$.



Obr. 7

Proud Nortonova ekvivalentního zdroje (tj. proud tekoucí zkratem mezi uzly B_1 a B_2 v obr. 7) je

$$I_e = \frac{U_0}{(1-n)R}.$$

ekvivalentní admitance (odpor R_z odpojen, zdroj napětí nahrazen zkratem)

$$G_e = \frac{1}{R_e} = \frac{1}{(1-n)R} + \frac{1}{nR} = \frac{1}{nR(1-n)}.$$

Po dosazení do vztahů (2) a úpravě dostaneme

$$I_z = \frac{n U_0}{nR(1-n) + R_z} = \frac{n}{n(1-n) \frac{R}{R_z} + 1} \times \frac{U_0}{R_z}.$$

Rozborem posledního vztahu zjistíme, že regulace proudu I_z změnou polohy jezdce je téměř lineární pro $R/R_z \ll 1$.

Řešení metodou Théveninova ekvivalentního zdroje ponecháme čtenáři, aby postupně nabyl jistých praktických zkušeností a poznal výhody, které metoda náhradního zdroje poskytuje.

Literatura :

- [1] Kůs J., Myslík J.: Zobecněný proudový Kirchhoffův zákon a jeho použití. Rozhledy matematicko-fyzikální roč. 58 (1979–1980), č. 1, str. 14–22.

Fyzika před 10, 100 a 1000 roky

RNDr. VLADIMÍR MALÍŠEK, CSc., UP Olomouc

V roce 1972 byl pozorován nový optický jev — násobení frekvence záření. Jde o jeden z nelineárních optických jevů. Nelineární optika chápe běžné optické jevy jako důsledek lineární aproximace tzv. materiálových vztahů mezi elektromagnetickými veličinami v látce; vezmou-li se však v úvahu další členy, vyplynou z teorie nové jevy včetně jejich kvantitativního popisu.

V roce 1962 odvodili *Gell-Mann* a *Okubo* vztah mezi elektrickým nábojem Q , izotopickým spinem I_3 , baryonovým nábojem B a podivností S elementárních částic; později přistoupil k těmto veličinám ještě šarm Ch . Podle zmíněného vztahu, který patří k málu elementárně vyjadřitelných vztahů moderní fyziky, není elektrický náboj snad čímsi primárním a nerozložitelným, ale „složeným“, ve shodě s relací $Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S) + \frac{2}{3}Ch$; výraz v závorce se nazývá hypernáboj Y . *Gell-Mann* však také vypracoval složitou metodu algebry proudů a předpověděl existenci nových hyperonů. *Ledermann* a *Schwartz* dokázali existenci dvou typů neutrin. Také v optice bylo dosaženo významných pokroků: v USA byl sestrojen polovodičový laser a laser s modulovanou jakostí, v SSSR *Denisjuk* vytvořil metodu holografického záznamu na tlustou fotografickou desku. Cestu k řešení energetických problémů lidstva naznačil tokamak 3 spuštěný téhož roku v SSSR.

V roce 1952 byly učiněny významné objevy v mikrosvětě i megasvětě: byly nalezeny rezonance (krátkodobé hadronové stavy), *Baade* a *Minikowski* objevili kvazary. *Glaser* vynalezl bublinovou komoru; na ostrůvcích Bikini byl uskutečněn výbuch vodíkové pumy, přičemž v radioaktivních zbytcích bylo nalezeno einsteinium.

Roku 1942 (dne 2. prosince) uskutečnili *Fermi*, *Anderson* a *Zinn* v Chicagu štěpení jader uranu 235; *Allen* dokázal existenci neutrina a *L. Bragg* vypracoval metodu zjišťování krystalové struktury pomocí rentgenového záření. Byla rovněž zjištěna existence kosmického záření a radiovln vycházejících ze Slunce. *Maksutov* zdokonalil meniskové soustavy hvězdářských dalekohledů.

V roce 1932 dělala fyzika elementárních částic první kroky: *Anderson* objevil pozitron, *Chadwick* neutron; v nukleární fyzice vyslovil *Heisen-*

berg a *Ivaněnko* hypotézu o proton-neutronovém složení jader a byla rovněž uskutečněna jaderná reakce vyvolaná neutrony (*Feather*, *Meitnerová*, *Harkins*). *Cocroft* a *Walton* sestrojili kaskádní urychlovač protonů a pomocí něho uskutečnili transmutaci lithia, *Lawrence* a *Livingston* rozštěpili atomová jádra částicemi urychlenými cyklotronem. *Heisenberg* zjistil výměnný charakter jaderných sil a jejich nasycení, zavedl pojem izospinu a *Dirac* vytvořil nový formalismus kvantové mechaniky a elektrodynamiky. Byl sestrojen elektronový mikroskop.

Idea elektronového mikroskopu pochází od *Busche*, který ji vyslovil r. 1922. Téhož roku objevil náš *Heyrovský* princip polarografie, *Stern* a *Gerlach* dokázali existenci prostorového kvantování a *Lilienfeld* objevil studenou emisi elektronů z kovu čili uvolňování elektronů silným elektrickým polem, což později (1928) objasnili *Fawler* a *Nordheim* jako důsledek tunelového jevu. *Fridman* našel nestacionární řešení Einsteinových rovnic gravitačního pole a předpověděl možnost rozšiřování Vesmíru, což se r. 1930 potvrdilo, když byl naměřen rudý posuv ve spektrech galaxií.

Z roku 1912 máme *Debyeovu* teorii měrného tepla pevných látek, teorii vibrací krystalové mřížky a *Einsteinův* fotochemický zákon.

V roce 1902 formuloval *Rutherford* a *Soddy* zákon radioaktivních přeměn prvků, *Lenard*, rodák z Bratislavy, objevil sekundární elektronovou emisi a *Heaviside* vyslovil hypotézu o existenci ionizované vrstvy ▼ atmosféře odrážející radiové vlny.

V minulých staletích se k letům končícím dvojčíslem 82 vztahují objevy nejrůznějších přístrojů, metod a fyzikálních zákonů. Např. v r. 1882 *Rowland* sestrojil nerovinnou ohybovou mřížku, *Gaulard* a *Gibbs* sestrojili transformátor jako řadu induktorů (transformátor s uzavřeným jádrem pochází teprve z r. 1885 od *Zipernowského* a *Dériho*). Téhož roku *Edison* uvedl do chodu první elektrárnu a *Helmholtz* zavedl důležitý pojem volné energie.

V roce 1782 připadl *Watt* na myšlenku stavět parní stroj se setrvačnickem, *Lavoisier* a *Laplace* pracují na zdokonalení kalorimetru. Poslední významná událost, pojící se s letopočtem končícím 82, je reforma kalendáře, vyhlášená r. 1582. Rok juliánský totiž byl delší než rok sluneční, takže koncem 16. století se jarní rovnodennost přesunula z 21. 3. již na 11. 3. Na základě návrhu vypracovaného bratry *Liliovými* se odhodlal záležitost vyřešit papež *Řehoř XIII.* v roce 1582 tak, že se jednou provždy vypustilo 10 dnů, tj. po 5. říjnu následoval hned 15. říjen. Dále se stanovilo, že přestupné nebudou všechny roky, jejichž letopočet je dělitelný čtyřmi, ale ze sekulárních let (tj. let končících dvěma nulami) budou přestupné jen ty, jež jsou dělitelné 400. Za několik tisíciletí bude opět nutno vynechat ještě jeden den „mimo pořadí“, jak je to stanoveno v bule „*Inter gravissimas pastoralis officii nostri curas*“. Samozřejmě, že v oblastech, kde vládlo pravoslaví či protestantismus,

se dlouho nový kalendář nepřijal; proto např. Říjnová revoluce proběhla fakticky 7. listopadu a nový kalendář byl přijat teprve za vlády Sovětů. Jeho nevýhodou ovšem je to, že velikonoce nejsou fixní, měsíce jsou nestejně dlouhé apod. V OSN leží sice několik návrhů, jež by tyto „vady“ odstranily a navíc by umožnily, aby s určitým datem byl spojen vždy jen jediný den v týdnu (např. 11. 2. by bylo vždy úterý apod.); není však dosti jednoty a odvahy k jejich provedení. Kdysi prý se lidé zlobili, že jim bylo „ukradeno“ deset dní života, dnes by patrně zaměstnanci s měsíčním platem byli podobnou reformou potěšeni; nic takového však není na obzoru a patrně ani nebude, snad jen to, že bychom ušetřili na kalendářích, neboť by stačil jediný na celý život. Zda to ještě stihneme ve 20. století, zůstává ovšem otázkou.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

0 jednom využití harmonického průměru ve fyzice

FRANTIŠEK BARTÁK, Výzkumný ústav odborného školství, Praha

Zkuste někomu ze svých přátel předložit k řešení tuto jednoduchou úlohu: Cyklista se na dráze od úpatí kopce až na jeho vrchol pohybuje rovnoměrně rychlostí $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. V opačném směru urazí stejně velkou dráhu (od vrcholu k úpatí) rovnoměrně rychlostí $15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jak velká je průměrná rychlost jeho pohybu na celé dráze od úpatí na vrchol a zpět?

Budete překvapeni, jak často dostanete odpověď, že je to $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Řešitelé totiž uvádějí jako výsledek aritmetický průměr zadaných rychlostí. Toto řešení však není správné; v našem příkladu je jím harmonický průměr obou rychlostí.

Jaké je tedy správné řešení? Předvedte je těm, kteří odpověděli chybně. (Nebude to překvapující řešení dokonce i pro některé z Vás, kteří jste úlohu trochu podcenili?)

Označme vzdálenost mezi úpatím a vrcholem kopce s , velikost rychlosti rovnoměrného pohybu nahoru v_1 a velikost rovnoměrného pohybu dolů v_2 . Potom doba pohybu cyklisty nahoru $t_1 = \frac{s}{v_1}$ a podobně doba pohybu cyklisty dolů $t_2 = \frac{s}{v_2}$. Celý pohyb nahoru a dolů vykoná cyklista

za dobu $t = t_1 + t_2$. Po dosazení upravíme do tvaru

$$t = \frac{s(v_1 + v_2)}{v_1 \cdot v_2}$$

Nyní využijeme známé definice průměrné rychlosti nerovnoměrného pohybu a pro její velikost označenou $\bar{v}$ dostáváme

$$\bar{v} = \frac{s + s}{t_1 + t_2}.$$

Po elementárních úpravách upravíme do vhodného tvaru

$$\bar{v} = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Numerické řešení naší úlohy je potom jednoduché — průměrná rychlost pohybu cyklisty nahoru a dolů má velikost $7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Uvedený vzorec pro výpočet průměrné rychlosti je vyjádřením harmonického průměru rychlostí v_1 a v_2 . Obecně je harmonický průměr kladných čísel $x_1, x_2, \dots, x_N$ definován jako

$$\bar{x}_H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_N}}.$$

Presvědčte se sami, že konečný vzorec pro výpočet našeho příkladu je jeho úpravou pro $x_1 = v_1$ a $x_2 = v_2$.

Fyzikální závěr vyplývající z tohoto řešení je velmi jednoduchý a velmi důležitý: *Průměrná rychlost tělesa, které se pohybuje rovnoměrně na stejně velkých úsecích své dráhy, je dána jako harmonický průměr těchto rychlostí.*

Pokud jste dobře porozuměli řešení příkladu, stačí uvést pouze jádro důkazu předcházejícího obecného závěru, v němž je použito analogické symboliky

$$\bar{v} = \frac{N \cdot s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} + \dots + \frac{s}{v_N}}.$$

Náměty pro samostatnou činnost:

1. Uvědomte si, že při přesném vyjadřování nelze uvést pouze konstatování, že udáváte průměr veličin, ale musíte charakterizovat, o jaký průměr se jedná. Podrobnější informace o aritmetickém, harmonickém a geometrickém průměru naleznete např. v článku *Průměr kladných čísel* od prof. E. Kraemeru (Rozhledy roč. 59, č. 3, str. 101–105).
2. Odvoďte vzorec pro výpočet průměrné rychlosti tělesa, které se po-

hybuje na třech stejně dlouhých úsecích své dráhy rovnoměrně rychlostmi v_1 , v_2 a v_3 . Vzorec zní:

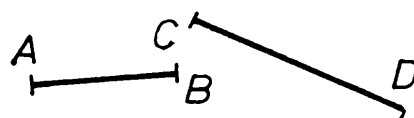
$$\bar{v} = \frac{3 v_1 v_2 v_3}{v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3}$$

3. Odůvodněte, kdy lze pro výpočet průměrné rychlosti tělesa použít aritmetického průměru rychlostí? (Jestliže se těleso pohybuje rovnoměrně v úsecích své dráhy, které urazí za stejnou dobu.)

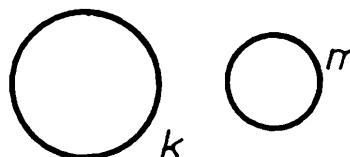
Druhy útvarů, které mají každé dva prvky podobné

Směle můžete jmenovat všechny druhy útvarů uvedené při shodnosti (shodnost je přece podobností s koeficientem $k = 1$), přidáme však rychle další:

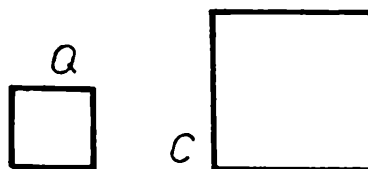
Každé dvě úsečky jsou podobné.



Každé dvě kružnice jsou podobné.



Každé dva čtverce jsou podobné.



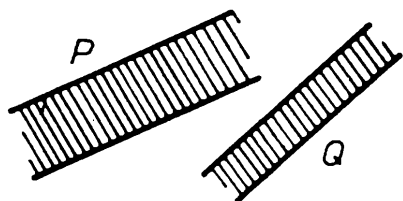
Každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou podobné.



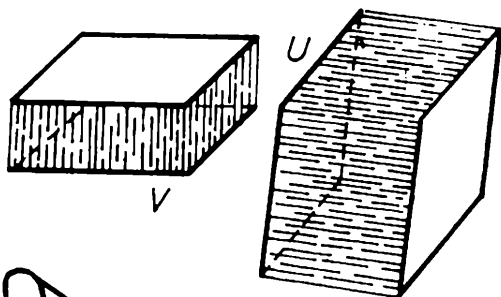
Opět není náhodou, že druhy útvarů uvedené po úsečkách jsou definovány tak, že je lze sestavit, jakmile udáme jednu jejich úsečku (kružnici na základě daného poloměru, čtverec na základě dané strany apod.). Jistě snadno přidáte kruhy, pravidelné mnohoúhelníky, krychle, pravidelné čtyřstěny, rovnostranné válce (jejich osovým řezem je čtverec), rovnostranné kužele (osovým řezem je rovnostranný trojúhelník).

Správně tušíte, že podobné jsou i pláště či celé povrchy uvedených druhů těles, obvody už jmenovaných obrazců. Existuje tedy mnoho

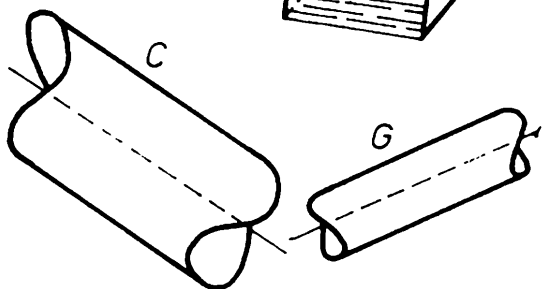
druhů útvarů v rovině a v prostoru, které mají každé dva své prvky podobné. Ale pozor! Nenechte svou fantazii spoutat tím, že jsme dosud uváděli jen omezené útvary! Podívejte se na další stránku.



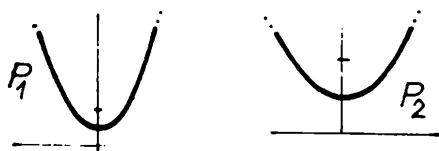
Každé dva rovinné pásy jsou podobné:



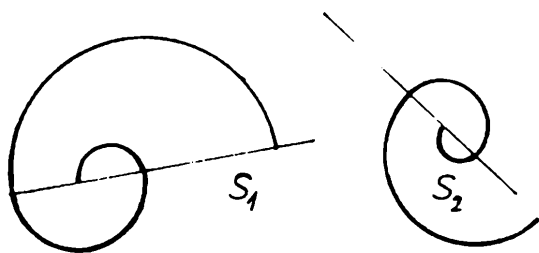
Každé dvě prostorové vrstvy jsou podobné.



Každé dvě rotační válcové plochy jsou podobné.



Každé dvě paraboly jsou podobné.



Každé dvě půlkružnicové spirály jsou podobné.

Kdo neví, jak jsou definovány poslední dva druhy útvarů, přečte si vysvětlení: Parabola je množinou všech bodů, které mají od dané přímky stejnou vzdálenost jako od daného bodu. Půlkružnicová spirála je sjednocením půlkružnic, které mají středy i krajní body na jedné přímce (další popis konstrukce už zvládnete sami).

Zamyslete se, zda i zde popsané útvary lze sestavit, jakmile je dána určitá úsečka. Šikulky i šikulové v mých třídách měli v tomto ohledu vždycky úspěch.

Š. J.

Pohled do třicátého ročníku Rozhledů

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, CSc., UK Praha

V úvodníku prvního čísla letošního šedesátého ročníku Rozhledů uvedl profesor Kraemer stručnou historii našeho jubilujícího časopisu. Pohlédneme nyní do čísel „prostředního“ ročníku, řekneme si o něm několik slov a podrobněji si všimneme zajímavých úloh a informací.

Třicátý ročník (1950/51) Rozhledů byl posledním ročníkem, který vydávala přímo Jednota československých matematiků a fyziků, a to pod původním názvem Rozhledy matematicko-přírodovědecké. Jeho redaktory byli dr. Zdeněk Pírko a dr. Alois Urban; ročník měl 5 čísel v celkovém rozsahu 156 stran sešitového formátu. Všimněte si, že každý ročník nynějších Rozhledů má 10 čísel a 480 stran (někdy i více). Na titulní stránce každého čísla 30. ročníku byl uveden obsah čísla a na ostatních stránkách obálky byly názvy doporučených knih a brožur. V celém 30. ročníku najdeme jen 24 článků, ale poměrně rozsáhlé rubriky *Koutek pro mladé fyziky a počítaře*, *Mosaika*, *Několik řádek pro zábavu*, *Úlohy o ceny* (v 1. a 2. čísle) a *Řešení úloh* (ve 4. a 5. čísle). Ukažme si průřez těmito rubrikami 30. ročníku.

Koutek pro mladé fyziky a počítaře :

Všimněte si orosených listů, Kde se rosa drží? Na povrchu nebo vespod listů? Proč? Jaký to má fyzikální důvod?

Češeme-li si suché vlasy ebonitovým hřebenem, vzniká v něm elektrický náboj. Přiblížíme se takto nabitým hřebenem k proudu vody, která tryská z malého skleněného vodotrysku... kapky se nerozstříkují a voda odtéká souvislejším proudem. Tenký pramének vody, která vytéká třeba z vodovodu, vychýlí se ze svého směru, jestliže k němu přiblížíme elektricky nabitý předmět.

Tři přátelé byli v hostinci na obědě. Každý zaplatil 10 Kčs. Když odešli, poslal hostinký za nimi číšníka, aby jim vrátil 5 Kčs. Číšník však vrátil každému jen 1 Kčs, ponechal si 2 Kčs. Počítejme nyní: Hostinský si ponechal 25 Kčs, hosté 3 Kčs, dohromady je to 28 Kčs. Za oběd po 9 Kčs měli zaplatit 27 Kčs. Proč výsledky nesouhlasí?

Několik řádek pro zábavu :

Bušení kovářským perlíkem do prsou. Jsi-li dost silný, abys unesl na prsou kovářskou kovadlinu, lehni si na zem, vezmi kovadlinu na prsa a nech na ni bušit i nejtěžšími kovářskými perlíky. — Co myslíte, vydrželo by lidské tělo „bušení na prsa“ perlíkem v této úpravě? A proč?

Průvan: Přirazí-li průvan dveře nebo okno, stává se to zpravidla mocným přibouchnutím, i když van průvanu není příliš silný. Přemýšleli

jste již někdy, proč to přibouchnutí bývá tak mocné? Zkuste to vysvětlit fyzikálně.

Úloha o penízech: Je známo, že ze 40 penízů má 39 stejnou váhu. O zbývajícím penízu se neví, zda je lehčí či těžší než ostatní peníze. Najděte jej čtyřmi váženími na správných vahách bez závaží!

O plování na dvou kapalinách: Položíme-li železný kvádr na rtuť, plave. Nalejeme-li potom na rtuť vodu, tu — jak je známo — tlak na kvádr od vody nepůsobí vztlakem na kvádr, protože působí jen na svislé bočné stěny kvádru. Plave-li tedy kvádr na rtuti, nemělo by mít na jeho plavání vliv přilévání vody na rtuť, dokud se voda nepřeleje přes vrchní podstavu kvádru. — A přece se při přilévání vody kvádr stále více vynořuje ze rtuti. Dovedete to vysvětlit?

Mosaika :

Tato rubrika přinášela především dobové zpravodajství, zprávy o publikacích, jubileích, nekrology dlouholetých přispěvatelů Rozhledů apod. Občas se v ní publikovala zlepšená řešení úloh, která zaslali čtenáři jako odezvu na dříve otištěné příspěvky.

Úlohy o ceny v 30. ročníku Rozhledů :

V 1. a 2. čísle tehdejšího ročníku bylo otištěno celkem 20 úloh z matematiky, 10 úloh z fyziky a 5 z deskriptivní geometrie. Řešení úloh z 1. čísla bylo třeba odeslat do konce roku 1950, tedy do tří měsíců; ostatní do konce dubna 1951; jako ceny byly přislíbeny knižní publikace vydané nakladem Jednoty. Zde jsou ukázky několika úloh:

Které čtyřciferné číslo zmenšené o jednu dává číslo dělitelné devíti a jedenácti, zmenšené o dvě dává číslo dělitelné sedmi, zmenšené o pět dává číslo dělitelné třinácti?

Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány dvě výšky a poloměr vepsané kružnice.

Určete geometrické místo středů rovnostranných trojúhelníků, z nichž každý má vrcholy na třech daných různých přímkách.

Vyjádřete obsah pravoúhlého trojúhelníku pomocí přepony a poloměru kružnice vepsané.

Jaká je pravděpodobnost, že dané n -ciferné číslo je dělitelné jedenácti?

Sečtěte $1 \cdot 2 + \quad + 1 \cdot n + 2 \cdot 3 + \quad + 2 \cdot n + 3 \cdot 4 + \quad +$
 $+ 3 \cdot n + \quad + (n - 2)(n - 1) + (n - 2)n + (n - 1)n.$

Sestrojte pravidelný čtyřstěn, jehož jeden vrchol je dán, druhý leží na dané přímce a zbývajících dva vrcholy leží v dané rovině.

Za jakou dobu sjede valící se koule s hřebene nakloněné roviny k její patě? (Bez ohledu na tření.)

Žebřík stojící na vodorovné podlaze se opírá o svislou zeď. Ze známých koeficientů tření na podlaze a na zdi určete nejmenší úhel, při kterém se udrží v šikmé poloze. Stačilo by samotné tření na zdi?

Jak třeba rozvětvit proud, aby tepelné ztráty byly nejmenší?

Šofér automobilu spatří náhle před sebou stěnu. Co je pro něho lepší: brzdit nebo stočit vůz?

Jak jste se přesvědčili, poskytovaly Rozhledy i před 30 lety svým mladým čtenářům dosti námětů k zamyšlení nad taji matematiky a fyziky. Najdete odpovědi na otázky, vyřešíte citované úlohy? Pokuste se o to; v některém čísle tohoto ročníku uveřejníme jejich řešení.

Návod na jedno kouzlo s hrací kostkou

Až budete někdy hrát hru, v níž se užívá hrací kostky, a spoluhráči budou unaveni, pokuste se rozptýlit je kouzlem, které nyní popíšeme.

Nejprve řekneme, že čísla 10 a 9 jsou magická, neboť umožňují uhádnout, jaké číslo je na hrací kostce vržené tak, aby na ni hádající neviděl. Stačí k tomu jenmalá spolupráce a početní dovednost toho, kdo bude kostkou házet. Potom si sedneme zády ke stolu, zavřeme oči a požádáme, aby někdo kostkou hodil a aby si počet ok, který se na ní ukázal, dobře zapamatoval. Dále ho poprosíme, aby toto číslo znásobil deseti a přičetl k němu číslo devět. Pak se hluboce zamyslíme a řekneme, že ještě potřebujeme, aby hod kostkou opakoval a aby číslo, které mu padne, sečetl s předchozím výsledkem. V okamžiku, v němž uslyšíme dopad kostky, oznámíme, že nám stačí, aby řekl poslední výsledek a že do tří sekund ohlásíme, které číslo bylo na kostce při prvním hodě.

Vysvětlení. Odečteme-li od počtu desítek posledního výsledku číslo jedna, dostaneme počet ok na kostce po prvním hodě. Pokuste se toto tvrzení dokázat. Dále též zjistěte, jak by bylo možno určit, kolik ok padlo na kostce při druhém hodě.

Poznámka. Při opakování popsaného triku nepropadněte stereotypu. Např. nejprve požadujte znásobení deseti, pak druhý hod a potom přičtení devíti. Varianty mohou být i velmi volné. Zkuste případ, v němž se k počtu ok po prvním hodě přičte devět a pak se přičte devítinásobek počtu ok z druhého hodu. [Počet ok z prvního hodu je zbytek při dělení devíti. (K určení tohoto zbytku lze užít ciferného součtu. Např. při dělení čísla 38 devíti je zbytek 2, neboť $3 + 8 = 11$ a $1 + 1 = 2$.)]

Jiří Mída

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Fyzika

5. Míč v podobě koule o poloměru $r = 200$ mm je naplněn heliem o hmotnosti $m = 6$ g a o teplotě $t = 20$ °C. Určete:

- sílu $\mathbf{F}_1$, kterou helium působí na malou, přibližně kruhovou plošku P_1 pláště míče, je-li její plošný obsah $S = 5$ mm²;
- sílu $\mathbf{F}_2$, kterou působí plyn na jednu polokouli míče.

Ivan Šantavý

(Došlo 6 řešení)

Autorovo řešení :

1. Síla $\mathbf{F}_1$ je kolmá na plošku P_1 , kterou lze považovat přibližně za rovinou. Je orientována ven z míče. Její velikost je $F_1 = 0,545$ N.

2. Síla $\mathbf{F}_2$ má směr osy souměrnosti uvažované polokoule. Je orientována ven z míče. Její velikost je $F_2 = 1,37 \cdot 10^4$ N.

Důkaz :

1. Síla, kterou působí na stěnu plyn, který je vzhledem k ní v klidu, je na stěnu kolmá. Síla $\mathbf{F}_1$ je tedy kolmá na plošku P_1 .

Velikost síly $\mathbf{F}_1$ je dána vztahem $F_1 = pS_1$, kde p je tlak plynu. Tlak p určíme takto: Helium se za běžných teplot a tlaků chová jako ideální plyn, takže jeho stavové veličiny p , V , T splňují stavovou rovnici ideálního plynu

$$pV = nR_mT, \quad (1)$$

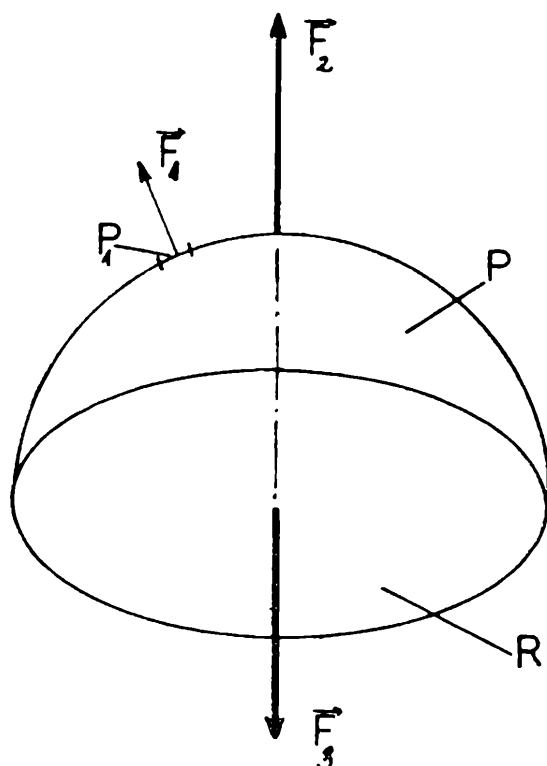
kde n je látkové množství helia a R_m je molární plynová konstanta. V uvažovaném případě je

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi 0,2^3 \text{ m}^3 = 0,0335 \text{ m}^3,$$

$$n = \frac{m}{M_m} = \frac{6 \text{ g}}{4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 1,5 \text{ mol},$$

kde M_m je molární hmotnost helia. Dosazením do vztahu (1) dostaneme

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{1,5 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 293,15 \text{ K}}{0,0335 \text{ m}^3} = 1,09 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$



Obr. 1

Síla F_1 má velikost

$$F_1 = pS_1 = 1,09 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 0,545 \text{ N}.$$

2. Síla F_2 je vektorový součet sil ΔF , jimiž působí helium na jednotlivé malé plošné elementy uvažované polokoule, tj. platí

$$F_2 = \Sigma \Delta F. \quad (2)$$

Síly ΔF mají v různých místech polokoule různý směr.

Výpočet síly F_2 na základě vztahu (2) však s pouhým užitím středoškolské matematiky nelze provést, je k tomu zapotřebí integrálního počtu. Sílu F_2 lze však určit velmi jednoduše takto: Uvažovanou polokouli, kterou označíme P , uzavřeme (i s plynem) rovinnou kruhovou plochou R (viz obr. 1). Výsledná síla, kterou působí helium na obě plochy P , R , je rovna nule. Jinak by se totiž polokoule pohybovala, v případě že by na ni nepůsobily vnější síly, v inerciální soustavě se zrychlením a to by bylo ve sporu se zákony mechaniky.

Označíme-li symbolem F_3 sílu, kterou působí helium na plochu R , platí

$$F_2 + F_3 = \mathbf{0}, \text{ tj. } F_2 = -F_3. \quad (3)$$

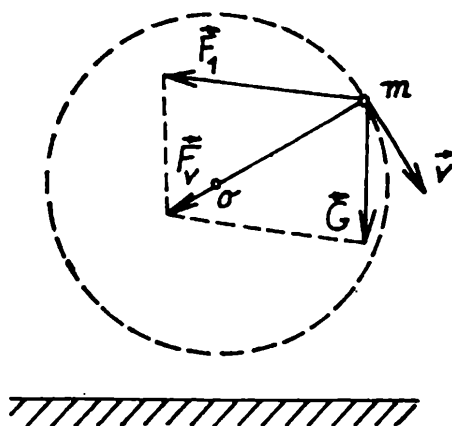
Přitom

$$F_3 = p \cdot \pi \cdot r^2 = 1,09 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \pi \cdot 0,2^2 \text{ m}^2 = 1,37 \cdot 10^4 \text{ N},$$

takže

$$F_2 = 1,37 \cdot 10^4 \text{ N}. \quad (4)$$

Síla F_3 má směr osy souměrnosti polokoule P a je orientována ven z polokoule.



Obr. 2

Ze vztahu (3) plyne, že síla F_2 má rovněž směr osy polokoule P a je z ní orientována ven. Její velikost je dána vztahem (4).

Komentář:

Hlavním cílem tohoto úkolu bylo, abyste si uvědomili, že tlakové síly působící na křivou plochu je nutno počítat vektorově, i když tlak je skalární veličina. Tlaková síla je vektor, nikoliv skalár. Pokud někdo počítal sílu F_2 tak, že násobil tlakem plošný obsah polokoule P , bylo to chybné.

6. Na jednom konci tuhé tyče délky b , která se v zemském tíhovém poli rovnoměrně otáčí ve svislé rovině kolem vodorovné osy, jdoucí jejím druhým koncem, je připevněno malé těleso o hmotnosti m (obr. 2). Směr od tělesa k ose otáčení o je s , směr opačný s' a velikost rychlosti je v . Považujte těleso za hmotný bod, zanedbejte odpor vzduchu a pohyb vyšetřujte ve vztažné soustavě S pevně spojené se zemským povrchem.

Ze šesti dále uvedených odpovědí vyberte správnou odpověď (nebo je-li jich více, správné odpovědi) na otázku „které síly působí na těleso a jaký mají směr“?

1. Tíhová síla G a síla od tyče ve směru s .
2. Síla G , síla od tyče ve směru s a síla odstředivá ve směru s .
3. Síla G , síla od tyče ve směru s a síla odstředivá ve směru s' .
4. Síla G , síla odstředivá a síla od tyče, která má jiný směr než s .
5. Síla G a síla od tyče, která má takový směr, že výslednice obou má směr s a velikost mv^2/b .
6. Síla G , síla od tyče, která má obecný směr, a síla odstředivá ve směru s' .

Ivan Šantavý

(Došlo 8 řešení)

Autorovo řešení:

Správná odpověď je jenom odpověď č. 5.

Důkaz :

Celková charakteristika pohybu: Těleso koná v inerciální vztažné soustavě pevně spojené se zemí rovnoměrný pohyb po kružnici působením dvou sil — síly tíhové $\mathbf{G}$ a síly, kterou na ně působí tyč a kterou označíme $\mathbf{F}_1$ (obr. 2).

Rychlost tělesa v se při pohybu mění — její velikost je sice stálá, neboť pohyb po kružnici je rovnoměrný, mění se však její směr, takže vektor $\mathbf{v}$ se mění.

Z (přibližné) definice zrychlení $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t},$$

kde Δt a $|\Delta \mathbf{v}|$ jsou velmi malé veličiny, nebo z přesné definice

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

plyne: a) tečná složka zrychlení tělesa je nulová, takže zrychlení míří do středu kružnice, b) velikost tohoto zrychlení, které se nazývá dostředivé, je dána vztahem

$$a = \frac{v^2}{b}.$$

Důkaz: viz učebnice Fyzika I pro gymnázia, str. 103, nebo experimentální učebnice Fyzika pro I. ročník gymnázia, str. 43 a 53.

Z druhého pohybového zákona pro hmotný bod

$$\mathbf{F}_v = m\mathbf{a},$$

kde $\mathbf{F}_v$ je vektorový součet všech sil působících na hmotný bod a $\mathbf{a}$ jeho zrychlení, plyne pro uvažované těleso: Výslednice $\mathbf{F}_v$ sil, které na těleso působí, míří do středu kružnice a má velikost

$$F_v = m \frac{v^2}{b}.$$

Síla $\mathbf{F}_v$ je tedy součet všech sil působících na těleso. Které síly to jsou? Jsou to pouze dvě síly, a to 1. tíha tělesa, $\mathbf{G}$, orientovaná svisle dolů a 2. síla od tyče, $\mathbf{F}_1$. Žádná jiná síla ve vztažné soustavě spojené se zemí na těleso nepůsobí (odpor vzduchu je, podle předpokladu, zanedbatelný). Síla $\mathbf{F}_v$ se nazývá síla dostředivá.

Platí tedy

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{G} + \mathbf{F}_1.$$

Síla $\mathbf{F}_1$ musí mít tedy v každém okamžiku takový směr a velikost, aby společně se silou $\mathbf{G}$ daly právě sílu $\mathbf{F}_v$.

Situace je znázorněna v náčrtku pro obecnou polohu tělesa. Během pohybu se směr a velikost síly $\mathbf{F}_1$ mění.

Správná je tedy pouze odpověď č. 5, všechny ostatní odpovědi jsou chybné.

Komentář :

1. Hlavním cílem tohoto úkolu bylo, abyste si zopakovali dva důležité poznatky:

a) Dostředivá síla je normálová složka výslednice všech sil, které působí na těleso při pohybu po kružnici (nebo po jakékoliv křivce);

b) Dostředivá síla je orientována vždy do středu kružnice, po níž se těleso pohybuje (nebo do středu kružnice, jíž lze trajektorii v uvažovaném bodě nejlépe nahradit). Má vždy velikost mv^2/R , kde m je hmotnost tělesa, v velikost jeho okamžité rychlosti a R poloměr kružnice.

Poznamenejme, že při rovnoměrném pohybu po kružnici (nebo křivce) je výslednice sil silou dostředivou.

2. Důležité je vědět, že normálová složka výslednice všech sil působících na těleso při pohybu po kružnici je orientována do středu kružnice a že má velikost mv^2/R . To, že se tato složka nazývá síla dostředivá, není pro řešení konkrétních úkolů již tak podstatné.

3. Dalším cílem úkolu bylo, abyste si uvědomili, že síla dostředivá není síla, která působí „navíc“, že je to jen normálová složka výslednice sil, jimiž na těleso působí konkrétní tělesa a fyzikální pole. Dále jste si jistě všimli, že síla odstředivá se v našich úvahách vůbec neobjevila.

Konstrukční geometrie

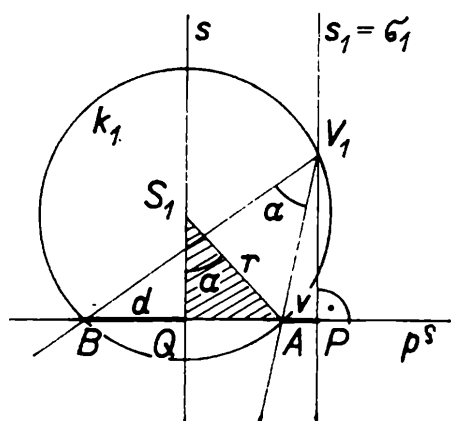
1. Je dána rovina ρ , která není rovnoběžná s rovinou totožnosti; v této rovině ρ jsou dány dva různé body A , C . Sestrojte v rovině ρ takový rovnoběžník $ABCD$, jehož půdorysem i nárysem je obdélník.

Stanislav Horák

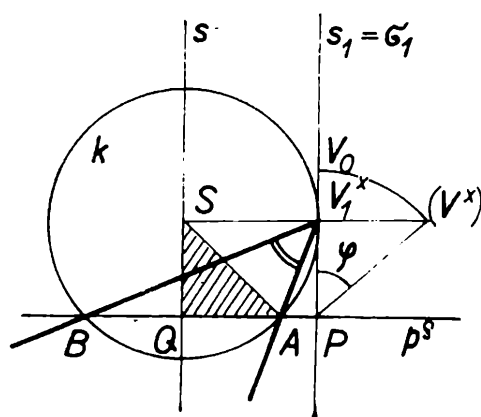
Autorovo řešení :

Jestliže rovina ρ protíná rovinu totožnosti v přímce t , potom (po sdružení průměten) je nárys každého útvaru ležícího v rovině ρ obrazem jeho půdorysu v osové afinitě, jejíž osou je přímka $t_1 = t_2$ (která je půdorysem i nárysem přímky t). Sestrojíme proto přímku $t_1 = t_2$; jejím bodem je např. průsečík přímk A_1C_1 , A_2C_2 (pokud existuje) nebo průsečík půdorysu a nárysu kterékoli hlavní přímky roviny ρ (pokud není $\rho \parallel x_{1,2}$). Tím je úloha převedena na tuto úlohu:

V osové afinitě, která je dána osou $o = t_1 = t_2$ a počáteční dvojicí bodů A_1 , A_2 , najděte takový pravý úhel $B_1A_1D_1$, aby jeho obrazem v této afinitě byl pravý úhel $B_2A_2D_2$. Přitom předpokládáme, že žádný z bodů A_1 , A_2 není bodem přímky o . Způsob a počet řešení závisí na poloze bodů A_1 , A_2 vzhledem k ose afinity o . Rozlišíme tyto tři případy: a) rovina ρ



Obr. 2



Obr. 3

obdélníky jsou proto souměrně sdruženy podle osy o . Úloha má nekonečně mnoho řešení, neboť existuje nekonečně mnoho obdélníků, které mají úhlopříčku v úsečce A_1C_1 .

c) Jestliže je $\rho \parallel x_{1,2}$, ale rovina ρ není rovnoběžná s rovinou souměrnosti σ , pak je opět $o = t_1 = t_2 \parallel x_{1,2}$, ale osová afinita mezi půdorysy a nárysy bodů roviny ρ není osovou souměrností; je to však afinita pravoúhlá ($A_1A_2 \perp o$). V této afinitě je obrazem pravého úhlu $B_1A_1D_1$ pravý úhel $B_2A_2D_2$ právě tehdy, je-li jedno jeho rameno rovnoběžné s osou o , tj. s osou $x_{1,2}$. Jestliže přímky A_1C_1 , A_2C_2 se protínají na ose afinity o , má úloha právě jedno řešení; přitom je $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel o$, $C_1D_1 \parallel C_2D_2 \parallel o$. Jestliže přímky A_1C_1 , A_2C_2 jsou rovnoběžné s osou afinity, nemá úloha žádné řešení.

2. V průmětně π jsou dány dvě vzájemně kolmé přímky p^e , s_1 s průsečíkem P ; na přímce s_1 je dán bod $V_0 \neq P$ a na přímce p^e jsou dány dva různé body A , B ležící uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou s_1 . Otočí-li se rovina π kolem přímky p^e tak, že splyne s rovinou ρ o stopě p^e , přejde bod V_0 do bodu V , jehož pravoúhlý průmět na průmětnu π označíme V_1 . Při které poloze roviny ρ je konvexní úhel $\sphericalangle AV_1B$ co největší?

Emil Kraemer

Autorovo řešení:

Při otáčení roviny ρ kolem její stopy p^e opisuje bod V kružnici, která leží v rovině $\sigma \perp p^e$ procházející bodem V_0 . Pravoúhlým průmětem roviny σ do průmětny π je přímka, která prochází bodem V_0 kolmo k přímce p^e ; je to tedy přímka s_1 . Bod V_1 je proto při každé poloze roviny ρ bodem přímky s_1 ; body A , B jsou na poloze roviny ρ nezávislé. Tím je úloha v podstatě převedena na tuto planimetrickou úlohu:

Na přímce $s_1 \perp p^e$ najděte bod V_1^x , pro který je úhel $\sphericalangle AV_1^xB$ větší než úhel $\sphericalangle AV_1B$, kde $V_1 \neq V_1^x$ je libovolný bod přímky s_1 .

Budiž

$$|AB| = 2d, \quad |PA| = v \quad (1)$$

a $V_1 \neq P$ budiž libovolným bodem přímky s_1 . Potom existuje právě jedna kružnice k_1 , která prochází body A, B, V_1 ; její střed budiž S_1 , její poloměr budiž r (obr. 2). Bod S_1 je bodem osy úsečky AB , tj. bodem přímky $s \parallel s_1$ procházející středem Q úsečky AB ; přímka s tedy nezávisí na volbě bodu V_1 . Podle věty o obvodovém a k němu patřícím úhlu středovém je $|\sphericalangle AS_1B| = 2|\sphericalangle AV_1B| = 2\alpha$; proto je $|\sphericalangle AS_1Q| = \alpha$. Z pravoúhlého trojúhelníku AQS_1 podle (1) plyne, že je

$$\sin \alpha = \frac{|AQ|}{|S_1A|} = \frac{d}{r}. \quad (2)$$

Protože je $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ a $d > 0$ je pevně dáno, je podle (2) číslo α největší právě tehdy, je-li r nejmenší. To však nastane právě tehdy, je-li přímka s_1 tečnou kružnice procházející body A, B (obr. 3). Takové kružnice jsou právě dvě a jsou souměrně sdruženy podle přímky p^e . Jednu z nich, jejíž střed S leží uvnitř poloroviny p^e V_0 , označme k ; její bod dotyku s přímkou s_1 je jedním ze dvou existujících bodů V_1^x (obr. 3). Poloměr kružnice k je $|SV_1^x| = |SA|$; z obdélníku $SQPV_1^x$ podle (1) plyne, že je

$$|SA| = |SV_1^x| = |QA| + |AP| = d + v. \quad (3)$$

Protože je $|PV_1^x| = |QS|$, je podle Pythagorovy věty a podle (3) $|PV_1^x|^2 = |QS|^2 = |SA|^2 - |AQ|^2 = (d + v)^2 - d^2 = v(v + 2d)$; je tedy

$$|PV_1^x|^2 = |PA| \cdot |PB|. \quad (4)$$

K těmto výsledku dospějeme rychleji podle věty o mocnosti bodu P vzhledem ke kružnici k . Ze (4) plyne, že úsečku PV_1^x můžeme sestrojit z úseček PA, PB podle Eukleidovy věty o odvěsně.

Vraťme se nyní k dané prostorové úloze. Průmětem kružnice, kterou opisuje daný bod V_0 při otáčení roviny ϱ kolem přímky p^e , je úsečka ležící na přímce s_1 tak, že má střed v bodě P a jeden krajní bod v bodě V_0 . Z toho plyne, že bod V_1 je bodem této úsečky. Tak dospíváme k tomuto výsledku:

a) Leží-li sestrojený bod V_1^x uvnitř úsečky PV_0 (obr. 3), je průmětem bodu V^x roviny ϱ ležícího mimo průmětnu π . Sklopíme-li rovinu otáčení σ bodu V^x kolem její stopy s_1 do průmětny π , přejde bod V^x do bodu (V^x) , který leží na kružnici opsané kolem bodu P poloměrem $|PV_0|$ a na kolmici k přímce s_1 vedené bodem V^x . Velikost φ úhlu $\sphericalangle (V^x) PV_0$ je odchylkou roviny ϱ od průmětny π . Řešením úlohy jsou v tomto případě dvě různé roviny ϱ , které jsou souměrně sdruženy podle průmětny π ; odchylka φ každé z nich od průmětny je udána vzorcem

$$\cos \varphi = \frac{|PV_1^x|}{|P(V^x)|} = \frac{|PV_1^x|}{|PV_0|}$$

b) Jestliže sestrojený bod V_1^x splývá s daným bodem V_0 nebo leží na prodloužení úsečky PV_0 za bod V_0 , pak řešením naší úlohy je rovina ϱ

splývající s průmětnou π . Pohybuje-li se totiž bod V_1 po přímce s_1 od bodu V_1^* k bodu P , pak se poloměr kružnice k zvětšuje, a tedy podle (2) se úhel $\sphericalangle AV_1B$ stále zmenšuje.

3. V prostoru je dán konvexní úhel $\sphericalangle AVB$ s vrcholem V tak, že jeho první i druhý průmět (v pravoúhlém promítání na dvě vzájemně kolmé průmětny) je úhel pravý. V jakých mezích je velikost úhlu $\sphericalangle AVB$?

Emil Kraemer

Autorovo řešení :

Z textu úlohy plyne, že žádná z přímek VA , VB není kolmá k žádné z obou průměten a rovněž rovina ρ úhlu AVB není k žádné průmětně kolmá. Dále víme, že platí tato věta o pravoúhlém průmětu pravého úhlu :

Pravoúhlým průmětem pravého úhlu je úhel pravý právě tehdy, je-li aspoň jedno jeho rameno rovnoběžné s průmětnou a druhé není k průmětně kolmé.

a) Předpokládejme nejprve, že úhel $\sphericalangle AVB$ je pravý. Protože jeho půdorys $\sphericalangle A_1V_1B_1$ je rovněž úhel pravý, je (podle předešlé věty) aspoň jedno z jeho ramen VA , VB rovnoběžné s první průmětnou. Obdobně je aspoň jedno z těchto ramen rovnoběžné s druhou průmětnou. Jednoduchou úvahou (nepřímo) dokážeme, že obojí zároveň nastane právě tehdy, je-li jedno z ramen VA , VB rovnoběžné s průsečnicí (osou) $x_{1,2}$ obou průměten π , ν .

Závěr k a) :

Daný úhel $\sphericalangle AVB$ je pravý právě tehdy, je-li jedno jeho rameno rovnoběžné s osou $x_{1,2}$.

b) Nechť úhel $\sphericalangle AVB$ není pravý. Potom podle předešlého závěru není žádné jeho rameno rovnoběžné s osou $x_{1,2}$. Avšak žádné jeho rameno není rovnoběžné ani s první ani s druhou průmětnou. Kdyby bylo např. $VA \parallel \pi$, pak z toho, že úhel $\sphericalangle A_1V_1B_1$ je pravý, by plynulo (podle věty o průmětu pravého úhlu), že také úhel $\sphericalangle AVB$ je pravý (spor s předpokladem). Každá z přímek VA , VB tedy protíná první i druhou průmětnu, a tedy protíná i každou rovinu, která je s některou průmětnou rovnoběžná.

Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že vrchol V daného úhlu leží na ose $x_{1,2}$ a že tento úhel je částí prvního ze čtyř kvadrantů určených průmětnami π , ν . Protože žádné rameno úhlu $\sphericalangle AVB$ není rovnoběžné s osou $x_{1,2}$, nesplývá žádná z přímek V_1A_1 , V_1B_1 , V_2A_2 , V_2B_2 s touto osou (obr. 4).

Zvolme ortonormální soustavu souřadnic tak, že jejím počátkem je bod $V = V_{1,2}$, osa x splývá s osou $x_{1,2}$ a osa y leží v první průmětně; potom osa z leží ve druhé průmětně. Orientaci os volme obvyklým způ-

Ze (4), (5) a (6) plyne, že je

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \left(a^2 + b^2 + 1\right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1\right),$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{a^2}{b^2} + a^2 + \frac{b^2}{a^2} + 1 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 3 + \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

Protože pro $x > 0$ je

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

jak plyne z triviální nerovnosti $(x - 1)^2 \geq 0$, je

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \geq 9 \text{ čili } \cos^2 \alpha \leq \frac{1}{9},$$

takže je

$$|\cos \alpha| \leq \frac{1}{3}$$

Odvození posledního vzorce bylo provedeno za předpokladu, že je $\alpha \neq 90^\circ$, avšak podle a) může být také $\alpha = 90^\circ$. Je tedy

$$\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2,$$

kde α_1 je ostrý úhel, jehož $\cos \alpha_1 = \frac{1}{3}$ a α_2 je tupý úhel, jehož $\cos \alpha_2 = -\frac{1}{3}$

Pocta známému matematikovi

Znáte knihu *S. Mac Lanea* a *G. Birkhoffa* s názvem *Algebra*? Vyšla ve slovenském překladu roku 1973 v bratislavském nakladatelství Alfa a měla výbornou odezvu i mezi českými čtenáři. Nuže, roku 1980 otiskl časopis *Journal of Pure and Applied Algebra* (Amsterdam) k počtě sedmdesátých narozenin prvního z autorů, prof. Saunderse Mac Lanea, sbírku básní. Je vidět, že mezi matematiky zájem o slovesné umění nemizí.

J. S.

Poznámka k dvom úlohám XXIX. ročníku MO

ANTON HNÁTH, gymnázium Michalovce

Uvedme text 6. úlohy z celoštátneho kola v BÍLOVCI :

Nech $\mathbf{M}$ je množina 5 bodov v priestore, z ktorých žiadne 4 neležia v rovine. Nech ďalej $\mathbf{R}$ je množina 7 rovín takých, že a) každá rovina z $\mathbf{R}$ obsahuje aspoň jeden bod z $\mathbf{M}$, b) žiaden z bodov z $\mathbf{M}$ neleží v piatich rovinách z $\mathbf{R}$. Dokážte, že existujú také dva rôzne body P, Q , z $\mathbf{M}$, že priamka PQ nie je priesečnicou žiadnych dvoch rovín z $\mathbf{R}$.

Podľa mojich vedomostí používa autorské riešenie princíp zapojenia a vypojenia. V našom riešení uvedený princíp nepoužijeme:

Nech je každá priamka určená dvojicou bodov z $\mathbf{M}$ priesečnicou dvoch rovín z $\mathbf{R}$. Označme

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= \alpha_1 \cap \alpha_2, \\ A_1A_3 &= \alpha_3 \cap \alpha_4, \\ A_1A_4 &= \alpha_5 \cap \alpha_6, \\ A_1A_5 &= \alpha_7 \cap \alpha_8, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\} = \mathbf{M}$ a $\alpha_i \in \mathbf{R}$, pre $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$. Na pravých stranách rovností (1) nemôžu byť viac ako 4 rôzne roviny (v opačnom prípade by bod A_1 ležal v aspoň 5 rovinách z $\mathbf{R}$, čo je spor s podmienkou b), ale ani menej ako 4 (potom by v niektorej z nich ležali 4 rôzne body z $\mathbf{M}$, čo je opäť spor).

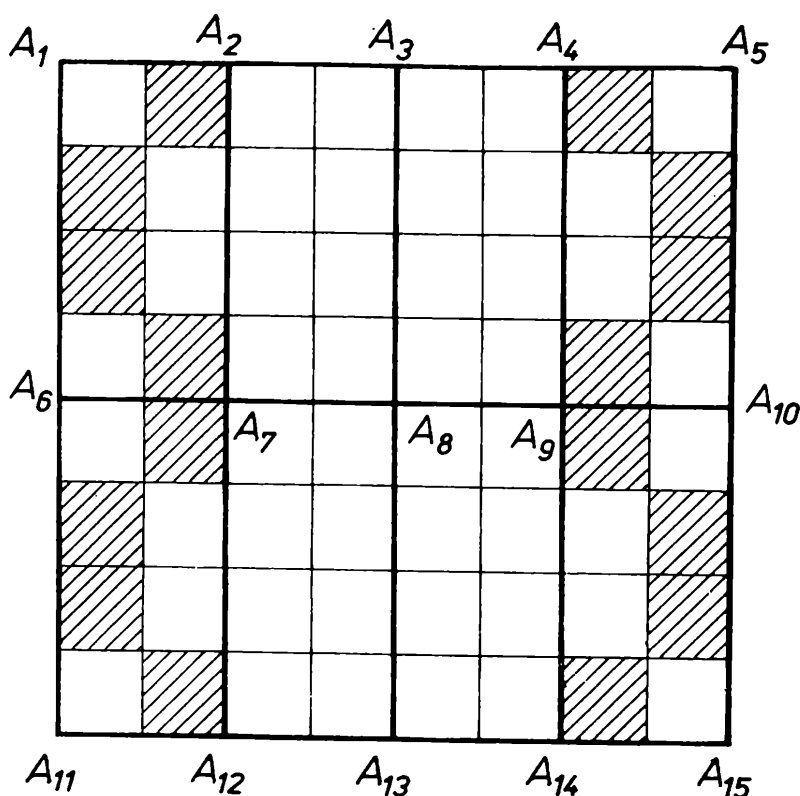
Bez ujmy na všeobecnosti položíme

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= \alpha_1 \cap \alpha_2, \\ A_1A_3 &= \alpha_2 \cap \alpha_3, \\ A_1A_4 &= \alpha_1 \cap \alpha_4, \\ A_1A_5 &= \alpha_3 \cap \alpha_4, \end{aligned}$$

a uvažujme ešte priamky A_2A_5 a A_3A_4 . Žiadna z priamok A_2A_5, A_3A_4 nie je incidentná so žiadnou z rovín α_i , kde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Keby platil opak, potom by v niektorej z rovín $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ležali štyri rôzne body z $\mathbf{M}$.

Nech (bez ujmy na všeobecnosti platí)

$$\begin{aligned} A_2A_5 &= \alpha_5 \cap \alpha_6, \\ A_3A_4 &= \alpha_5 \cap \alpha_7. \end{aligned}$$



Obr. 1

Potom však body A_2, A_3, A_4, A_5 ležia v rovine α_5 , čo je znova spor.

Poznámka: Podmienku a) úlohy sme v dôkaze nepotrebovali.

Uvedme teraz text úlohy 3 a) z II. kola kategórie B:

Na šachovnici 8×8 leží 42 figúriek. Dokážte, že existuje šachovnica 4×4 , na ktorej diagonálnych poliach ležia aspoň 4 figúrky.

Riešenie: Uvažujme na danej šachovnici 8×8 šesť štvorcov: $A_1A_3A_8A_6, A_2A_4A_9A_7, A_3A_5A_{10}A_8, A_6A_8A_{13}A_{11}, A_7A_9A_{14}A_{12}, A_8A_{10}A_{15}A_{13}$ (pozri obr. 1). Označme po rade množiny ich diagonálnych polí obsadených figúrkou $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ (16 nediagonálnych polí je na obrázku vyšrafovaných). Platí $D_i \cap D_j = \emptyset$, pre $i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Množina $D = \bigcup_{i=1}^6 D_i$ má minimálne $42 - 16 = 26$ prvkov.

Vzhľadom na disjunktnosť množín $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ musí (podľa Dirichletovho princípu) existovať množina D_i , ktorá obsahuje aspoň 5 prvkov. To znamená, že jeden z uvedených šiestich štvorcov má na diagonálnych poliach aspoň 5 figúriek. Dokázali sme viac, než požadovala úloha.

Uvedenú myšlienku použil pri riešení žiak našej školy *Lubomír Šoltés*.

O teorii grafů

Za necelá čtyři desetiletí vyšlo z teorie grafů asi 9600 vědeckých prací. Ovšem na celém světě. Zjistil to *W. G. Brown*, když zpracoval všechny referáty, které vyšly o vědeckých pracích z teorie grafů v referujícím časopise *Mathematical Reviews* od roku 1940, kdy tento časopis začal vycházet, až do roku 1978. Obsáhl tedy 39 let, a to právě těch, v nichž se grafová teorie nejvíce rozvíjela. Všechny referáty shrnul do čtyřsvazkového díla, které má celkem 2100 stran a bude jistě v knihovnách dobrou pomůckou pro všechny, kdo se vědecky zabývají touto matematickou disciplínou.

Říká se, že se základy teorie grafů dají vystopovat až do 18. století (*L. Euler*), ale pravý rozvoj této části matematiky nastal až po roku 1936, kdy vyšla o grafech první monografie. Napsal ji maďarský matematik *D. König* a vytvořil v ní i první ucelenou terminologii tohoto matematického oboru. Kniha vyšla německy v Lipsku a podnítila mnohé mladé lidi, aby svůj vědecký zájem obrátili tímto směrem. Brownův výzkum je tedy načasován na nejpłodnější období po vyjití Königovy knihy.

V naší republice vznikaly vědecké práce z teorie grafů ojediněle už před druhou světovou válkou (*O. Borůvka*, *V. Jarník*, *M. Kőssler*), ale soustavně se u nás grafy studují až v době poválečné. Uspořádali jsme dosud dvě mezinárodní symposia o teorii grafů (ve Smolenicích 1963 a v Praze 1974) a třetí se chystá na srpen 1982. Do matematiky středoškolské se grafy u nás dostaly v rámci modernizačních snah poměrně nedávno.

Dovedete si představit, že by někdo prostudoval všech 9600 prací, které vznikly podle *W. G. Browna* ve čtyřicátých až sedmdesátých letech? Sotva. Jen malá část z toho množství je v silách jednotlivce a trochu větší porci může zpracovat vědecký tým. Přitom je teorie grafů jen poměrně úzkou matematickou disciplínou, která se zpravidla řazuje do širšího rámce kombinatorické analýzy. *J. S.*

Vysvětlení efektního experimentu: Hra s míčky

Když se velký míček odrazí od země, srazí se s malým míčkem a předá mu svou hybnost a energii. Proto může menší míček dosáhnout větší výšky než byla původní. Čím větší je rozdíl hmotností obou míčků, tím větší je zisk na výšce.

Z NOVÝCH KNIH

Stanislav Michal: HODINY (OD GNÓMONU K ATOMOVÝM HODINÁM)

SNTL, Praha 1980, Polytechnická knižnice 116. svazek řady Věda a technika populárně, 256 stran, 213 obrázků, 28,— Kčs.

Knihu jistě přivítali zájemci o dějiny chronometrie a sběratelé i milovníci starých hodin. V pěti kapitolách se čtenář seznámí s historickými i novodobými metodami měření času a s vývojem časoměrných přístrojů od nejstaršího gnómonu až po moderní atomové hodiny.

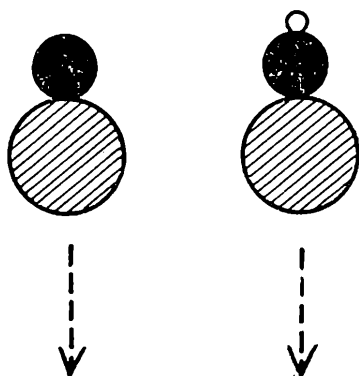
První kapitola je věnována vývoji představ člověka o čase a vzniku i vývoji kalendářních soustav. Druhá kapitola pojedná-

vá o slunečních, vodních, ohňových a pískových hodinách. Třetí kapitola se zabývá jedním z nejpozoruhodnějších vynálezů středověku — mechanickými hodinami. Ve čtvrté kapitole se dozvíme o novodobé historii i o současnosti elektrických a elektronických hodin. Poslední kapitola obsahuje průřez technologickým i uměleckým vývojem různých druhů věžních, interiérových a přenosných hodin. Dostatek místa je věnováno vývoji hodinářství u nás i v zahraničí.

Za zmínku stojí velmi pěkná grafická úprava knihy tištěné na křídovém papíru, množství reprodukcí, plátěná vazba a cena pouhých 28,— Kčs.

Milan Koman

Efektní experimenty: Hra s míčky



Spustíme-li současně na zem jeden větší a jeden menší elastický míček (obr. 1), vyskočí po dopadu menší zpět do vzduchu, zatímco větší zůstane klidně ležet. Při určitých hmotnostech míčků může menší míček dosáhnout až devítinásobku původní výšky.

Spusťte na dvou elastických míčcích ještě míček pingpongový. Při

určitém poměru hmotností dvou spodních míčků může pingpongový míček dosáhnout až padesátinásobku původní výšky.

Nejvhodnější k pokusu jsou tzv. superbaly, velice elastické plné míčky z pěnové gumy.

Petr Hnilička

SLOVNÍČEK

ITALSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

umido
umidità ž
uniforme
uniformità ž
unico
unione m
— d'insiemi
unità ž
unitario
universale
univocamente
univocità ž
univoco
urto m
uscire
uscita ž

vacuo
vacuo m
valenza ž
valore m
valutare
valvola ž
vapore m
variabile ž
— dipendente
— indipendente
variabilità ž
varianza ž
variare
variazione ž
vaso m
vedere
velocità ž

vlhký
vlhkost
stejnoměrný, rovnoměrný
stejnoměrnost
jediný
spojení, sjednocení
sjednocení množin
jednotka
jednotkový, unitární
všeobecný, univerzální
jednoznačně
jednoznačnost
jednoznačný
ráz, náraz, srážka
vycházeti
východ; východisko

V

prázdný
vakuum, vzduchoprázdný prostor
valence, mocenství
hodnota
ohodnotiti
lampa, elektronka
pára
proměnná
— závisle
— nezávisle
proměnnost; obor proměnnosti
volnost; stupeň volnosti
měniti
variace
nádoba, váza
viděti
rychlost

Bratislavské vydavatelství technické a ekonomické literatury ALFA vydalo již po deváté

MINILEXIKON MATEMATIKY,

který pro studující středních škol a začínající vysokoškoláky sestavil František Latka. Knížka v překladu vyšla v Bulharsku a Maďarsku. Příručka byla při 6. vydání doplněna o kapitoly věnované matematické logice a základním množinovým poznatkům. V 9. vydání je nová kapitola o maticovém počtu.

Knížka má praktický kapesní formát, její rozsah je 158 stran a její cena je 5 Kčs.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12 Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1981.

ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

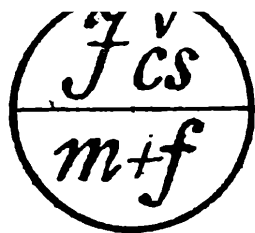
**1921 / 22
1981 / 82**

*** 60 let**

(6)

**ROČNÍK 60, 1981/82
ÚNOR**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko

- fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Vladimír
Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr.
Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

V. Mráz: Měření libelou	241
Z. Renc: O matematické logice II	246
J. Veselý: Bolzanova funkce	251
M. Ohera: Využití teorie relativity při rozpadech atomového jádra	254
F. Jáchim: Josef Božek - český technik a vynálezce	260
J. Maláč: Ludolfovo číslo	263
P. Simon: Kterak kroutit kostkou ku kýže- né konfiguraci	266
E. Calda: Námořní bitva a úlohy o po- krývání	271
Naše soutěž	274
I. Šantavý: Souhrnný komentář k výsled- ku fyzikální soutěže Rozhledů v r. 1980/81	276
Olympiády	281
Informace	286
Z nových knih	287

Měření libelou

Doc. Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

Jedním z měřidel, které se používá k usazování a měření rovinných ploch nebo hran do vodorovné polohy, je *libela*, často nazývaná vodováha. Na principu libely jsou založeny některé měřicí přístroje, např. v geodézii nivelační stroj, teodolit, sklonoměr, v dělostřelectví miřidla. Z praktických úloh, vyžadujících užití libely, uveďme usazení kulečnickového stolu nebo lože obráběcích strojů do stabilní vodorovné polohy. Také velmi mírné sklony, třeba sklon kolejnic vlakové trati, ať ve směru podélném nebo příčném (v zatáčkách), můžeme kontrolovat libelou. Je-li libela opatřena dalším zařízením, můžeme její pomocí měřit i větší sklony, popř. i svislost roviny; tu však měříme raději olovnicí. K pochopení přesnosti dosažitelné při měření libelou budeme potřebovat trochu školské geometrie a jistou osobní zkušenost čtenáře spočívající v tom, že si někdy prohlédl třeba zednickou libelu.

Délku oblouku kružnice o daném poloměru můžeme stanovit, když známe příslušný středový úhel. Poměr (podíl) délky oblouku kružnice a jejího poloměru je pro daný středový úhel jisté reálné číslo — konstanta, kterou označujeme $\text{arc } \alpha$ a čteme arkus alfa. Na obr. 1 je označen S střed kružnic o poloměrech r_1 , r_2 a oblouky AB , CD se středovým úhlem α jsou označeny po řadě a_1 , a_2 . Pak platí:

$$\frac{a_1}{r_1} = \text{arc } \alpha, \quad \frac{a_2}{r_2} = \text{arc } \alpha. \quad (1)$$

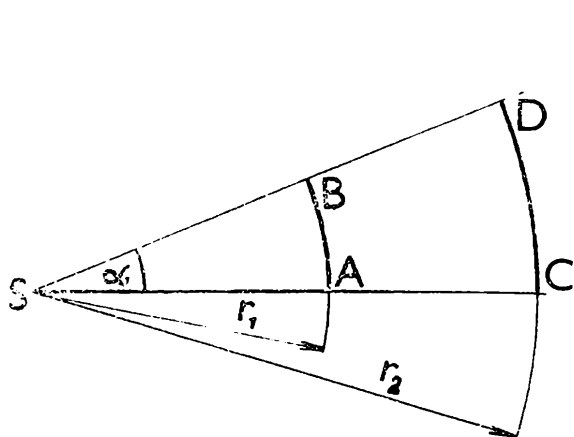
Arkus daného úhlu si můžeme představit jako délku oblouku jednotkové kružnice, který je příslušný tomuto úhlu. Ze vztahu (1) plyne, že délka oblouku je součinem poloměru kružnice a arku příslušného středového úhlu, tedy

$$a_1 = r_1 \cdot \text{arc } \alpha, \quad a_2 = r_2 \cdot \text{arc } \alpha, \quad (2)$$

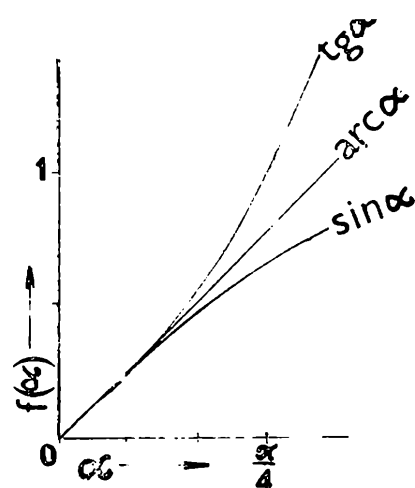
a také rovnost (3):

$$\frac{a_1}{r_1} = \frac{a_2}{r_2} \quad (3)$$

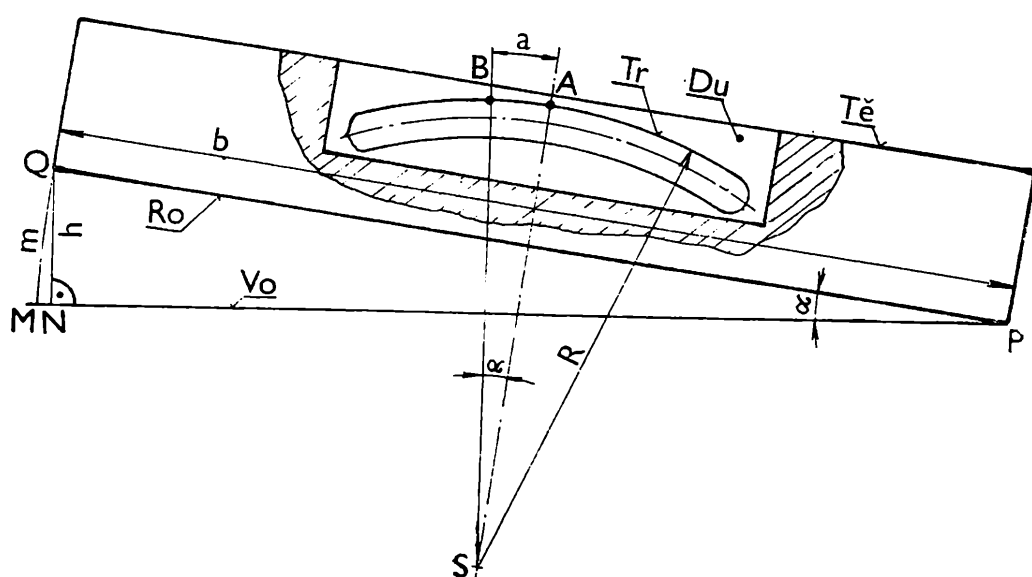
Číselné hodnoty $\text{arc } \alpha$ jsou pro různé velikosti úhlu α uvedeny v ma-



Obr. 1



Obr. 2

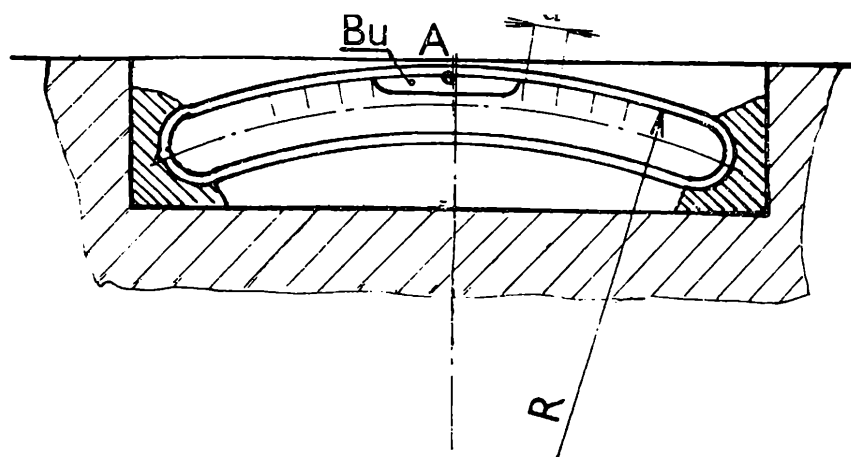


Obr. 3

tematických tabulkách podobně jako hodnoty goniometrických funkcí $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$.¹⁾

Shora uvedených vztahů (1), (2) a (3) použijeme při měření libelou, již přibližuje schematický obr. 3, který stručně popíšeme. V dutině Du tělesa libely $Tě$ je pevně uložena (zasádrována) průhledná skleněná zaoblená trubička Tr , která je naplněna vodou a na obou koncích je zatavena. Při naklonění libely se vychýlí ve skleněné trubičce vzduchová bublina Bu , kterou ukazuje obr. 4. Když je rovina Ro libely ve vodorov-

¹⁾ Na rozdíl od hodnot goniometrických funkcí jsou hodnoty arku přímo úměrné velikosti tohoto úhlu (viz obr. 2), takže je snadno vypočteme. Víme-li, že $\operatorname{arc} 360^\circ = 2\pi \doteq 6,28318$, a tedy $\operatorname{arc} 180^\circ = \pi \doteq 3,14159$, $\operatorname{arc} 1^\circ = \pi / 180 = 0,01745329\dots$, $\operatorname{arc} 1' \doteq 0,017453 / 60 \doteq 0,0002909$, $\operatorname{arc} 1'' = \operatorname{arc} 1' : 60 \doteq 0,0000048$. Např. $\operatorname{arc} 3^\circ 17' 2'' \doteq 3 \cdot 0,017453 + 17 \cdot 0,0002909 + 2 \cdot 0,0000048 \doteq 0,057319$. Protože hodnoty $\operatorname{arc} \alpha$ jsou reálná čísla, je třeba se spokojit s konečným počtem desetinných míst, jak bývají uvedena v tabulkách.



Obr. 4

né poloze V_0 , pak vzduchová bublina je v bodě A , přesněji řečeno v tomto bodě A leží střed bubliny. Při vychýlení libely o úhel α se bublina přemístí z bodu A do bodu B (obr. 3). Protože zaoblení skleněné trubičky má poloměr R , je velikost úhlu QPM shodná s velikostí úhlu ASB (obr. 3), a tedy platí (podle (3))

$$\frac{a}{R} = \frac{m}{b}, \quad (4)$$

kde a je délka oblouku AB , m je délka oblouku MQ a b je délka libely.

Na skleněné trubičce libely jsou alespoň dvě rysky, které omezují krajní vzdálenosti nejzazších konců bubliny při základní poloze libely, tj. když spodní rovina R_0 libely je ve vodorovné poloze (obr. 4). Na některých libelách jsou na skleněné trubičce ještě další rysky, vymezující stanovenou úhlovou odchylku libelou kontrolované roviny; mluvíme pak o citlivosti (přesnosti) libely. Citlivost závisí na tvaru základního měřicího elementu libely, jímž je poloměrem R zaoblená skleněná trubička. Ze vztahu (2) $a_1 = r_1 \text{ arc } \alpha$ plyne, že délka oblouku a_1 je tím větší, čím je větší jednak poloměr r_1 , jednak úhel α , resp. hodnota $\text{arc } \alpha$. Poněvadž libelou chceme registrovat zejména malé odchylky od vodorovné polohy, požadujeme, aby i malým hodnotám α (resp. $\text{arc } \alpha$) odpovídal dostatečně velký dílek mezi sousedními ryskami na libele, který je na obr. 3 opatřen kótou a . Přesnějšímu měření vyhoví libela s větším poloměrem R skleněné trubičky.

Úloha 1. Lože dlouhého egalizačního soustruhu nemá přesáhnout úhlovou toleranci $\alpha = 25'$. Jak velký musí být poloměr R zakřivení trubičky libely, aby maximální předepsané toleranci odpovídala délka dílku na libele $a = 1 \text{ mm}$?

Řešení: Ze vztahu (1) $\frac{a}{R} = \text{arc } \alpha$ plyne $R = \frac{a}{\text{arc } \alpha}$. Po dosazení daných hodnot je $R = \frac{1}{\text{arc } 25'} = \frac{1}{0,00727} \doteq 138 \text{ (mm)}$. Máme-li k dispozici libelu s poloměrem $R = 350 \text{ mm}$, pak se žádaná úhlová tolerance na

trubičce libely projeví jako dílek $a = R \cdot \text{arc } 25' = 350 \cdot 0,0072722 \doteq \doteq 2,55 \text{ (mm)}$.

Problém je tedy v tom, zjistit pro užitou libelu poloměr R ; to nám přiblíží následující úloha.

Úloha 2, podle níž si čtenář může zjistit parametry libely, kterou má k dispozici. Mějme tedy zjistit poloměr R zakřivení trubičky, když libela má délku $b = 300 \text{ mm}$ a rysky na trubičce libely mají vzdálenost $a = 2,35 \text{ mm}$ (obr. 3 a obr. 4). Jde o libelu se čtyřmi ryskami. Dále stanovíme úhel naklonění libely z vodorovné polohy, odpovídající vychýlení vzduchové bubliny o dílek a na libele.

Řešení: Podle zkoumané libely vyrovnáme podložku (stůl) do vodorovné polohy. Nyní pod jeden konec libely podložíme předmět takové tloušťky $NQ = h$ (obr. 3), až se bublina vychýlí právě o dílek $a = 2,35 \text{ mm}$. Experimentálně zjistíme, že $h = 2,76 \text{ mm}^2$.) Dříve než přistoupíme k výpočtu poloměru R ze vztahu (4), podle něhož platí

$$R = \frac{ab}{m}, \quad (4')$$

a aniž se dopustíme chyby ovlivňující výsledek výpočtu, můžeme nahradit délku oblouku $MQ = m$ změřenou hodnotou $h = 2,76 \text{ mm}$ (obr. 3). Po této úpravě nabude vzorec (4') tvaru

$$R \doteq \frac{ab}{h}. \quad (4'')$$

Po dosazení číselných hodnot do (4'') dostaneme

$$R \doteq \frac{2,4 \cdot 300}{2,76} \doteq 260,87$$

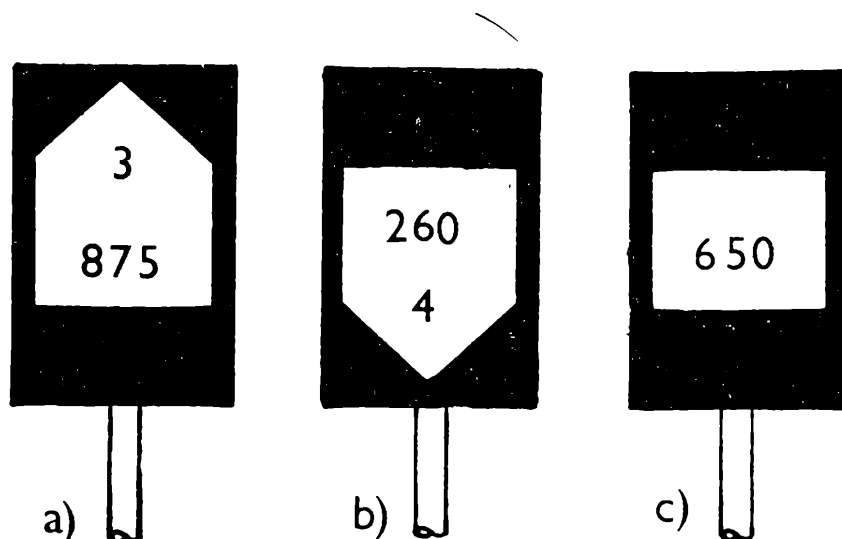
a po zaokrouhlení stanovíme zaoblení skleněné trubičky libely poloměrem $R = 261 \text{ mm}$. — Úhel α odpovídající vychýlení bubliny libely o jeden dílek vypočteme podle obr. 3, kde opět místo m užijeme h . Platí

$$\text{arc } \alpha = \frac{m}{b} \doteq \frac{h}{b} = \frac{2,76}{300} = 0,0092,$$

čemuž odpovídá úhel $\alpha \doteq 32'$. Libela, kterou jsme měli k dispozici, dovoluje měřit v toleranci přibližně půl stupně.

Užitím míry h místo m jsme vlastně nahradili hodnotu $\text{arc } \alpha = \frac{m}{b}$

²⁾ Tloušťku $h = 2,76 \text{ mm}$ získáme třeba podkládáním i několikrát přeložených proužků papírů známé tloušťky; v konkrétním případě to byla tloušťka papíru $0,12 \text{ mm}$. Přeložili jsme první proužek papíru čtyřikrát, druhý dvakrát, třetí jednou a čtvrtý jsme nepřekládali. Skutečně $h = 2,76 \text{ mm}$ ($= 1,92 + 0,48 + 0,24 + 0,12$).



Obr. 5

hodnotou $\sin \alpha = \frac{h}{b}$, která se zanedbatelně liší od hodnoty $\operatorname{tg} \alpha$, jak se čtenář může v matematických tabulkách přesvědčit. Pro malé úhly α můžeme místo nerovnosti

$$\sin \alpha < \operatorname{arc} \alpha < \operatorname{tg} \alpha \quad (5)$$

psát rovnost

$$\sin \alpha = \operatorname{arc} \alpha = \operatorname{tg} \alpha, \quad (6)$$

jak vyplývá z n -místných tabulek těchto funkcí. Nahlédneme-li do dostatečně podrobných n -místných tabulek, je rovnost (6) splňována až do velikosti úhlu α , jak jsme uvedli v následující tabulce. Pro větší hodnoty úhlu α se tabulkové hodnoty $\sin \alpha$ a $\operatorname{tg} \alpha$ v n -místných tabulkách již definitivně rozcházejí.³⁾

n -místné tabulky	úhel α	$\sin \alpha = \operatorname{arc} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$
pětimístné	1°30'	0,02618
čtyřmístné	3°9'	0,0550
trojmístné	6°59'	0,122

Úloha 3. Při jízdě vlakem můžeme podél trati vidět plechové tabulky, uvádějící podélný sklon trati v promilech (červené číslice) na uvedené

³⁾ Zaokrouhlování např. v pětimístných tabulkách způsobuje překvapení (ovšem vysvětlitelné). Zatímco $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ pro α z intervalu $< 0^\circ; 28' >$ je $\sin 29' = 0,00843$ a $\operatorname{tg} 29' = 0,00844$; pro α od $30'$ do $39'$ je opět $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$; dále je $\sin 40' = 0,01163 \neq \operatorname{tg} 40' = 0,01164$. Pro $\alpha = 41'$ je opět $\sin 41' = \operatorname{tg} 41'$ atd. Od hodnoty $1^\circ 31'$ výše se hodnoty $\sin \alpha$ s hodnotami $\operatorname{tg} \alpha$ již definitivně rozcházejí.

délce trati (černá číslice). Jde-li o stoupání trati, pak bílé pole tabulky je ve tvaru vzhůru směřující šipky, při klesání trati směřuje šipka dolů. Vodorovná trať nemá šipku ani vzhůru ani dolů. Na obr. 5 jsou takové tabulky znázorněny; obr. 5 a) označuje, že trať stoupá $3^\circ/\infty$ v délce 875 m, obr. 5 b) označuje klesání trati $4^\circ/\infty$ v délce 260 m a konečně obr. 5 c) představuje tabulku na vodorovné části trati, jež má délku 650 m. Naším úkolem je na libele z předchozí úlohy vyznačit ryskou na skleněné trubičce pro kontrolu stoupání a klesání trati. — K dispozici máme libelu se zakřivením $R = 261$ mm.

Řešení: Stoupání trati α_s vypočteme z údajů traťové tabulky 5 a)

$$\operatorname{tg} \alpha_s = \frac{3}{1000} = 0,003, \text{ takže } \alpha_s = 10'19''$$

Protože $\operatorname{tg} \alpha_s \doteq \operatorname{arc} \alpha_s$, můžeme ze vztahu (1) s přihlédnutím k obr. 3 stanovit pro neznámou a

$$\operatorname{tg} \alpha_s \doteq \frac{a}{R} \text{ čili } 0,003 = \frac{a}{261},$$

z čehož vyplývá, že dílek na libele bude mít délku $a = 0,003 \cdot 261 \doteq 0,783$ (mm). Velikost úhlu stoupání $\alpha_s = 10'19''$

Aby naše měření bylo přesnější a pohodlnější, zvolíme k měření libelu, jejíž $R = 800$ mm. Dílek na této libele bude mít délku $a = 2,4$ mm, jak si za cvičení čtenář vypočte sám.

Pro klesání trati platí, že délka dílku na přesnější libele je $a = 3,2$ mm; příslušná velikost úhlu klesání $\alpha_k = 13'45,5''$

0 matematické logice II

RNDr. ZDENĚK RENC, CSc., MFF UK Praha

V našem minulém výkladu o matematické logice (č. 1, str. 9) jsme řekli, že jedním z jejích úkolů je vytváření formálních systémů (teorií), vhodných pro studium matematických úvah. Ještě však nevíme, co to vlastně formální systém je, ze kterých částí se skládá. Zatím jsme mluvili pouze o jedné jeho složce, totiž o jazyku (včetně definice termů a formulí). O dalších dvou věcech, které musíme při popisu nějakého formálního systému zadat, si povíme dnes. Jsou to jednak axiomy, jednak odvozo-
vací pravidla.

II. Axiómy

Axiómy jsou jisté formule jazyka vytvářeného formálního systému, které jsme vybrali a přijímáme je jako základní tvrzení. Tyto formule vyjadřují základní fakta o vlastnostech symbolů jazyka a jejich nejjednodušších vztazích. Obvykle je dělíme do dvou skupin. Prvním se říká logické axiomy, protože jsou to formule, ve kterých se vyskytují pouze logické symboly jazyka (proměnné, logické spojky, kvantifikátory a případně i rovnost). Logické axiomy jsou tedy součástí každé formální teorie bez ohledu na to, jakou část matematiky chce tato teorie popisovat.

Druhou skupinu axiomů tvoří tzv. speciální axiomy. To jsou axiomy týkající se speciálních symbolů jazyka (funkčních symbolů a predikátových symbolů kromě rovnosti), a jsou tedy charakteristické pro tu matematickou disciplínu, kterou vytvářeným systémem formalizujeme. Tak např. jedním z axiomů aritmetiky (jak víme, jazyk pro popis této teorie obsahuje mimo jiné binární funkční symboly „+“ a „ $\cdot$ “ pro sčítání a násobení a unární funkční symbol S označující operaci následníka) je formule

$$x + S(y) = S(x + y),$$

vyjadřující vzájemnou souvislost mezi operací následníka a sčítáním: přičteme-li k přirozenému číslu x následníka přirozeného čísla y , dostaneme totéž číslo, jako když nejprve sečteme x a y a pak k tomuto součtu utvoříme následníka. Vztah operace následníka k násobení vyjadřuje jiný axiom, totiž formule

$$x \cdot S(y) = x \cdot y + x.$$

Příkladem speciálního axiomu teorie množin (její jazyk obsahuje jediný speciální symbol, totiž binární predikátový symbol $\in$ pro náležení) je formule

$$(\forall x) (\forall y) (\exists z) (\forall u) (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y);$$

tato formule říká, že ke každým dvěma množinám x a y existuje další množina z , jejímiž prvky jsou právě x a y (množině z , jejíž existenci tento axiom zaručuje, se říká neuspořádaná dvojice množin x a y a užívá se pro ni zápisu $z = x, y$).

Vraťme se nyní k logickým axiomům. Formální systém, který má za axiomy pouze takovéto formule (nemá tedy žádné speciální axiomy), se nazývá *predikátová logika*. Ta tvoří formální rámec, v němž obecně zkoumáme matematické úvahy, ať již se týkají jakýchkoliv speciálních objektů. Vy jste se na střední škole převážně zabývali její částí, která se soustřeďuje pouze na studium vlastností logických spojek a které se říká *výroková logika*. Výroková logika je něco jako „teorie souvětí“, která zkoumá způsoby odvozování souvětí a jejich vlastnosti v závislosti na vlastnostech „holých vět“. Tyto holé věty (asi jste zvyklí

říkat „výroky“) již dále nerozebíráme (nestaráme se o to, z čeho a jak jsou ony samy vytvořeny, jinými slovy odhlížíme od speciálních symbolů, kvantifikátorů a symbolu pro rovnost), jsou to pro nás nedělitelné celky a můžeme je chápat jako (výrokové) proměnné. Jazyk výrokové logiky je tedy velmi jednoduchý: kromě výrokových proměnných jsou v něm pouze logické spojky a pomocné symboly — závorky. Jednoduchá je v tomto případě i definice formule:

- každá výroková proměnná je formule (atomická),
- jsou-li A a B libovolné formule, jsou i $\neg A$ a $A \rightarrow B$ formule.

To je vše, každá formule výrokové logiky se dostane z výrokových proměnných konečným počtem aplikací logických spojek podle uvedeného pravidla (připomeňme si, co jsme v první části našeho výkladu říkali o možnosti používání spojek $\&$, $\vee$ a $\leftrightarrow$ ve formulích).

Formální systém pro výrokovou logiku má nekonečně mnoho axiomů. Můžeme je však snadno popsat, protože jsou pouze tří různých druhů. Říkáme, že je můžeme vyjádřit pomocí schémat axiomů (každé schéma zastupuje nekonečně mnoho konkrétních případů), která se dají formulovat takto:

Pro libovolné formule A, B, C je každá formule některého z následujících tvarů axiomem výrokové logiky:

- (A1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (A2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (A3) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Tedy například: vezměte si libovolnou formuli a napište ji do schématu (A1) na místa obou výskytů symbolu A , vezměte si další formuli (je jedno, zda jinou nebo stejnou, jako byla předchozí) a napište ji tam na místo výskytu symbolu B . Tím dostanete formuli, která je axiomem výrokové logiky (někdy se říká, že je instancí schématu (A1)).

Na tomto příkladu axiomů výrokové logiky vidíme, že za axiomy se berou formule, vyjadřující takové vlastnosti symbolů jazyka, které jsme ochotni vzít zcela samozřejmě za základ našich úvah. Rozmyslíte-li si např., co říká schéma (A1), zjistíte, že ho můžete vyjádřit slovy:

„když A , pak z jakékoli formule plyne A “

Takováto vlastnost implikace je jistě rozumná a přirozená. Podobně asi budete souhlasit s další vlastností implikace, vyjádřenou ve schématu (A2) a se vztahem implikace a negace, popsaným v (A3).

III. Odvozovací pravidla

Typickou matematickou činností je dokazování. Pod tímto slovem si představujeme postup, při kterém vycházíme z jistých základních faktů a z nich pouze rozumovými („logickými“) úvahami odvozujeme jiná tvrzení. Ve formálním systému můžeme tuto intuitivní představu snadno precizovat. Tvrzení jsou vyjádřena formulami zvoleného jazyka, „základní fakta“ jsou reprezentována axiomy. Zbývá tedy jen formali-

zovat pojem „logického úsudku“. K tomu nám slouží odvozovací (nebo také dedukční) pravidla. To jsou pravidla, která říkají, že z určitého počtu formulí určitého tvaru vyplývá další (odvozená) formule. Při formulaci každého dedukčního pravidla je tedy řečeno, z kolika formulí a jakého tvaru se odvozuje a jak vypadá výsledná formule tímto pravidlem odvozená. Příkladem odvozovacího pravidla je pravidlo s latinským názvem *modus ponens* (česky se mu říká *pravidlo o odloučení*): „z formulí A a $A \rightarrow B$ odvoď formuli B “

Vidíme, že zde máme popsán „elementární“ úsudkový krok. Jestliže jsme ve své předchozí úvaze již dospěli ke dvěma formulím, z nichž jednu označíme A a druhá má tvar $A \rightarrow B$, můžeme v úvaze pokračovat formulí B . Takovéto odvozovací pravidlo budeme jistě ochotni přijmout a úsudek, provedený s jeho pomocí, považovat za korektní. Např.: vidíme-li z okna, že prší, a víme-li, že kdykoli prší, jsou ulice mokré, víme též (a to aniž bychom se dívali z okna dolů na zem, pouze na základě úsudku), že ulice je mokrá.

Tím jsme ukončili popis jednotlivých částí formálního systému. Zopakujme, že k tomu, abychom zadali nějaký formální systém, musíme určit jeho *jazyk*, *axiómy* a *odvozovací pravidla*. Pomocí těchto věcí můžeme též vyslovit formální definici důkazu: je to posloupnost formulí, z nichž každá je buď axióm, nebo je odvozena z některých předcházejících podle některého odvozovacího pravidla. Formule je dokazatelná, je-li posledním členem nějakého důkazu. Vraťme se ještě jednou k výrokové logice. O jejím jazyce a axiómech jsme mluvili, jediným jejím odvozovacím pravidlem je *modus ponens*. (*Poznámka na okraj*: pro predikátovou logiku bychom potřebovali ještě další dvě schémata axiómů, popisující chování kvantifikátorů a jedno odvozovací pravidlo.) Abychom si udělali představu, jak může vypadat důkaz ve výrokové logice, přesvědčme se, že pro libovolnou formuli A je dokazatelná formule $A \rightarrow A$. Pokud se vám zdálo zbytečné něco tak zřejmého dokazovat, zastavte se a přečtěte si znovu pozorně předchozí řádky. Nezapomeňte, že nyní pracujeme ve formálním systému výrokové logiky, a tedy jediné, co máme k dispozici, jsou schémata axiómů (A1) — (A3) a odvozovací pravidlo *modus ponens*. Neexistuje nic takového, jako názor, nemá smysl říkat, že „to je zřejmé“ Chceme-li se opravdu přesvědčit, že formule $A \rightarrow A$ je dokazatelná, nezbyvá, než si pozorně prohlédnout následující posloupnost formulí:

- (1) $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$
- (2) $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$
- (3) $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$
- (4) $A \rightarrow (A \rightarrow A)$
- (5) $A \rightarrow A$

Především vidíme, že jejím posledním členem je právě naše zvolená formule. Když pak budeme probírat postupně jednotlivé formule v posloup-

nosti, zjistíme, že (1) je instancí (A1), kde jsme za A dosadili A a za B dosadili $A \rightarrow A$; (2) je instancí (A2), kde jsme za A i C dosadili A a za B dosadili opět $A \rightarrow A$; (3) vznikla užitím pravidla modus ponens na formule (1) a (2); (4) je instancí (A1), ale jinou než prve: zde jsme za A i B dosadili A; konečně (5) vznikla užitím pravidla modus ponens na formule (3) a (4). Napsaná posloupnost formulí (1) — (5) je tedy skutečně důkazem (v zavedeném formálním smyslu) formule $A \rightarrow A$ ve výrokové logice.

Tento příklad zde samozřejmě není uveden proto, aby se někdo napsaný důkaz učil zpaměti. Poučení, které poskytuje, je jiné a týká se samotné definice důkazu. Ta nám totiž umožňuje překontrolovat, zda nějaká napsaná posloupnost formulí je či není důkazem, ale nedává sama žádný přímý návod, jak bychom měli pro namátkově zvolenou formuli její důkaz hledat. Navíc se zdá, že pro složitější formule mohou délky jejich důkazů nepříjemně narůstat. Je proto zapotřebí hledat způsoby, které by umožňovaly přecházet od důkazu jedné formule k důkazu jiné (třeba složitější) formule, aniž bychom ho potřebovali celý konstruovat. Takovéto prostředky (věty) skutečně v logice jsou k dispozici a napomáhají jí k tomu, aby mohla dobře vystihovat (a je-li třeba i usměrňovat) celý košatý strom matematických úvah. My se jimi však zabývat nebudeme, neboť tento článek chce přispět především k vyjasnění těch zcela základních pojmů a souvislostí. Tím spíše, že již na této úrovni se objevují některé závažné otázky. Například taková, jak vlastně při vytváření formální teorie volíme její axiomy a odvozovací pravidla. Příklady, které jsme si uváděli, vám patrně připadaly přirozené a uznávali jste, že by takové formule a vztahy mezi nimi měly platit (mimo chodem, co to znamená „platit“, když mluvíme o formuli — to by také bylo třeba vyjasnit). Jistě bychom však našli i jiné, stejně „hodnověrné“ formule. Proč jsme tedy přijali za axiomy ty první a ne ty druhé? Volbou axiomů a odvozovacích pravidel můžeme jistě ovlivnit třídu formulí, které jsou v příslušném formálním systému dokazatelné. Můžeme nějak charakterizovat soubor formulí, které jsme schopni v něm dokázat? Podle čeho můžeme usuzovat na správnost naší volby? Tyto otázky jsou velmi důležité a pokusíme se k nim něco říci v našem příštím (a posledním) pokračování článku o matematické logice.

Bolzanova funkce

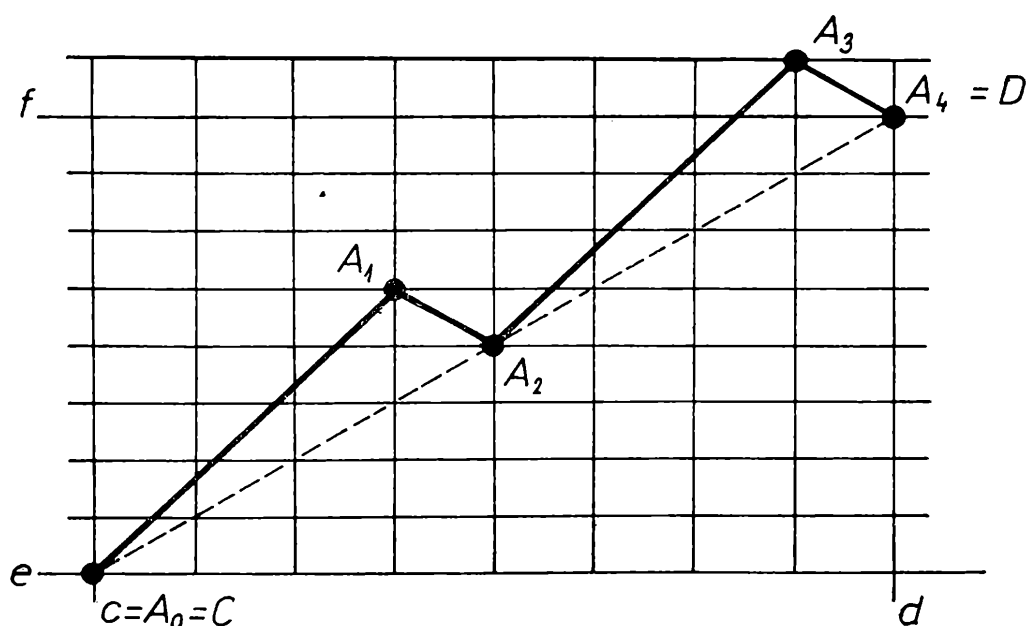
RNDr. JIŘÍ VESELÝ, CSc., UK Praha

Na sklonku první světové války prohlížel *M. Jašek*, profesor gymnázia v Plzni, matematické rukopisy *Bernarda Bolzana* uložené v archívu vídeňské knihovny. V rukopise knihy „Functionenlehre“, která měla být podle Bolzanových záměrů částí obsáhlého matematického díla, zaujala *M. Jaška* zejména konstrukce speciální spojité funkce, kterou dnes nazýváme funkce Bolzanova.

V první části knihy v § 75 konstruuje Bolzano funkci f spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$, která není monotónní na žádném intervalu $(c, d) \subset \subset \langle a, b \rangle$. Ve druhé části knihy v § 19 Bolzano dokazuje, že ať zvolíme interval $(c, d) \subset \subset \langle a, b \rangle$ jakkoli, existuje v něm takový bod, ve kterém f nemá vlastní derivaci (tj. f nemá vlastní derivaci na husté podmnožině intervalu $\langle a, b \rangle$).

Je obdivuhodné, že v době, kdy Bolzano tuto část „Functionenlehre“ psal (bylo to pravděpodobně v r. 1834), nejenže v existenci takové funkce věřil, ale byl schopen dokonce i takovou funkci sestavit. Popišme si konstrukci *Bolzanovy funkce* pro případ $\langle a, b \rangle = \langle 0, 1 \rangle$.

Funkce f je definována jako limita posloupnosti po částech lineárních funkcí f_n , tj. funkcí, jejichž grafy jsou složeny z konečně mnoha „na sebe navazujících“ úseček. Funkce f_n jsou definovány rekurentně, přičemž $f_1(x) = x, x \in \langle 0, 1 \rangle$. Při konstrukci f_{n+1} z f_n — zhruba řečeno, — každou úsečku z grafu funkce f_n „zlomíme šikovně načtyřikrát“; tím se na intervalu, na němž je grafem f_n uvažovaná úsečka, šikovně poruší



Obr. 1

monotonie. Popíšeme krok „lámání úsečky“ obecně: jsou-li $C = [c, e]$, $D = [d, f]$ koncové body uvažované úsečky z grafu funkce f_n (tj. na $\langle c, d \rangle$ je f_n lineární), sestrojíme body (obr. 1)

$$A_0 = [c, e] = C,$$

$$A_1 = \left[c + \frac{3}{8} (d - c), e + \frac{5}{8} (f - e) \right],$$

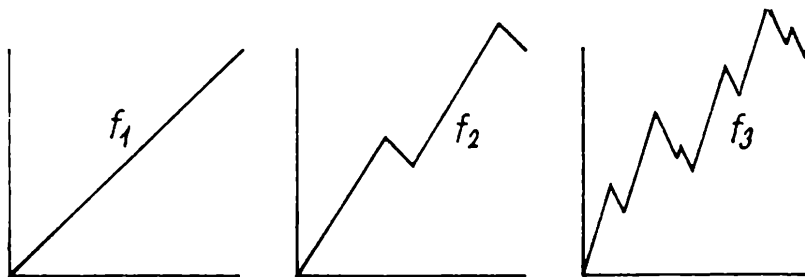
$$A_2 = \left[c + \frac{1}{2} (d - c), e + \frac{1}{2} (f - e) \right] = \left[\frac{1}{2} (c + d), \frac{1}{2} (e + f) \right]$$

$$A_3 = \left[c + \frac{7}{8} (d - c), e + \frac{9}{8} (f - e) \right],$$

$$A_4 = [d, f] = D,$$

přičemž v grafu funkce f_{n+1} nahradíme úsečku CD lomenou čarou složenou z úseček A_0A_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 ; všimněte si, že jsme při přechodu k f_{n+1} porušili monotonii na $\langle c, d \rangle$, tato funkce již na $\langle c, d \rangle$ monotónní není.

Následující obr. 2 ilustruje proces „zlomení úsečky CD “ a znázorňuje grafy funkcí f_1, f_2, f_3 složené z jedné, čtyř a šestnácti úseček (tedy f_{n+1} má graf složený ze 4^n úseček).



Obr. 2

Z konstrukce je patrné, že bodů „zlomu“ neustále přibývá; jsou-li A_0, A_{4^n} dělicí body grafu funkce f_n (krajní body uvažovaných úseček), leží tyto body již na všech grafech funkcí $f_{n+1}, f_{n+2}, \dots$. Snadno si tedy rozmyslíte, že pokud existuje limitní funkce $f = \lim f_n$, nemůže být monotónní v žádném intervalu $(c, d) \subset \langle 0, 1 \rangle$, neboť od jistého indexu n mají funkce $f_{n+1}, f_{n+2}, \dots$ v (c, d) ostré lokální maximum nebo minimum.

Jak jsme viděli, je konstrukce Bolzanovy funkce velmi názorná (pozor, názor nenahrazuje důkaz!). I Bolzano se však v důkazu spojitosti f dopustil chyby — domníval se, že limita posloupnosti spojitých funkcí musí být (pokud existuje) spojitá funkce; zaměnil tedy tzv. bodovou a stejnoměrnou konvergenci funkcí f_n . Analogické chyby se však v té době dopouštěli i jiní velcí matematikové. Důležité je, že funkce f_n opravdu konvergují ke spojité funkci f .

Objev Bolzanovy funkce vzbudil velikou pozornost zejména v souvislosti s jejími diferenciálními vlastnostmi (zásluhu na jejím podrobném

vyšetření měli mj. *K. Rychlík* a *V. Jarník*). *Funkce f totiž nemá vlastní derivaci v žádném bodě $x \in (0,1)$* . První taková funkce byla jinou metodou sestrojena *Weierstrassem* nejméně o 25 let později. Protože jde o zajímavou část historie matematiky, všimněme si jí trochu blíže.

Ještě na počátku minulého století převládal názor, že spojitá funkce musí mít derivaci všude až na konečnou, resp. izolovanou množinu bodů; podrobněji řečeno to znamená, že pokud by taková funkce neměla derivaci v bodě x , existovalo by takové $\delta > 0$, že ve všech ostatních bodech intervalu $(x - \delta, x + \delta)$ kromě x by již derivace existovala. Toto tvrzení je spojováno s *Ampérem*, který je dokazoval r. 1806. Nebylo tehdy nesprávné, uvážíme-li tehdejší úzké pojetí funkcí. Později se názor na definici funkce změnil a dosud nejasně chápané pojmy spojitosti funkce, derivace apod. dostávají zvolna svoji nynější podobu [*Bolzano* (1817), *Cauchy* (1821)]. Horší je, že s tímto zpřesňováním jde ruku v ruce přebírání „*Ampérových vět*“, která samozřejmě díky obecnějšímu pojetí funkcí ztratila platnost; *Darboux* však uvádí v r. 1875, že pouze v jediné práci se do té doby objevila pochybnost o platnosti tohoto tvrzení.

Bolzanova funkce zůstala matematikům 19. století neznáma. Spojitá funkce, která nemá derivaci na husté podmnožině intervalu, se objevuje u *Riemanna* v habilitační práci (1854). Tento příklad byl však publikován až v roce 1868. Rovněž příklad švýcarského matematika *Cellériera* pocházející z doby kolem r. 1860, byl publikován až v roce 1890. Tato funkce již neměla — stejně jako Bolzanova funkce — derivaci v žádném bodě intervalu. Je známo, že již *Riemann* ve svých přednáškách uváděl příklad funkce stejných vlastností; teprve však na začátku 20. století se podařilo tuto funkci částečně vyšetřit a ukázat, že se *Riemann* mýlil — funkce jím sestrojená má derivaci dokonce v nekonečně mnoha bodech tvořících hustou podmnožinu intervalu.

Při zkoumání *Riemannova* příkladu sestrojil první spojitou funkci, která nemá derivaci v žádném bodě intervalu, *Weierstrass*. Uváděl ji ve svých přednáškách již v r. 1861 (*Schwarz*); jeho příklad publikoval r. 1875 *Du Bois-Reymond*. Objev funkcí popsaného typu byl pro tehdejší matematiky šokující a byl srovnáván se zničením „matematického ráje“. Často bývá citován *Hermitův* výrok z dopisu *Stieltjesovi*: „S hrůzou se odvracím od tohoto monstra...“

Později se ukázalo, že toto „patologické“ chování je pro spojitou funkci typické — lze říci, že v jistém smyslu většina spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$ nemá vlastní derivaci v žádném bodě. Ukazuje se dokonce, že v mnoha směrech je chování těchto funkcí velmi „pravidelné“, a tedy nijak patologické, to je však už jiná záležitost.

Snad uvedený výsek z historie ukázal, proč *Jaškova* zpráva o objevu *Bolzanovy* funkce vzbudila takovou pozornost. Nám poskytla tato funkce příležitost připomenout zlomek z díla *Bernarda Bolzana*, patrně

ve světě nejznámějšího našeho matematika. Dnes lze stěží odhadnout, jak by se vyvíjela matematika, kdyby Bolzano nežil v „matematické izolaci“. Měl by mnoho následovníků, založil by skvělou matematickou školu nebo by zůstal současníky nepochopen? To nevíme. Jako matematik je, bohužel, naší širší veřejnosti neznám dodnes — a to je škoda.

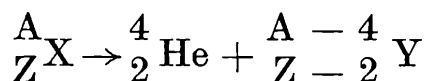
FYZIKA

Využití teorie relativity při rozpadech atomového jádra

RNDr. MARCEL OHERA, Brno

V poslední době, kdy se velmi rychle rozvíjí jaderná energetika, se často setkáváme s pojmem radioaktivního záření. Fyzikové jej znají od konce minulého století, kdy *Becquerel* objevil radioaktivitu uranu (1896) a dva roky později manželé *Curieovi* zjistili radioaktivitu polonia a radia. Atomové jádro se stává od té doby středem pozornosti řady fyziků a využití vlastností atomového jádra a jeho přeměn zasáhlo nesmazatelně do lidského života během osmdesáti let od objevu radioaktivity. Neméně významným krokem na začátku 20. století bylo ucelení teorie relativity, které zpřesnilo klasickou Newtonovu mechaniku při pohybech těles blížících se rychlosti světla. S užitím znalostí některých vztahů z teorie relativity se můžeme setkat při výpočtech energií beta částic a energií gama záření při samovolných přeměnách jader.

Samovolná přeměna α je charakterizovaná



Jádro X s atomovým číslem Z a hmotnostním číslem A emituje částici ${}^4_2\text{He}$ a vznikne jádro ${}^{A-4}_{Z-2}Y$. Např. alfa přeměna izotopu thoria

${}^{226}_{90}\text{Th}$ se děje tak, že vzniklé částice mají energii buď 6,33 MeV, 6,23 MeV, 6,10 MeV nebo 6,03 MeV ($1\text{eV} \doteq 1,602 \cdot 10^{-19}\text{J}$, jednotka energie užívaná v jaderné fyzice), tedy jádra se mohou přeměňovat čtyřmi různými způsoby. Platí:



Rozpad jádra thoria je klasický případ zachování energie a hybnosti. Energie před rozpadem je nulová (předpokládáme, že jádro se nepohybuje), a tedy i hybnost je nulová. Po přeměně je celková energie soustavy jádra radia, alfa částice a fotonu rovna E_c a je získána při jaderné přeměně. Výsledná hodnota hybnosti je opět nula. Platí

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{M \cdot V^2}{2} + E_\gamma, \quad (1)$$

$$m \cdot \mathbf{v} + M \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

$m, \mathbf{v}$	hmotnost a rychlost alfa částice
$M, \mathbf{V}$	hmotnost a rychlost nově vzniklého jádra
E_c	celková energie soustavy Ra, alfa částice a fotonu
E_γ	energie γ fotonu

Hmotnost α částice je $m = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, hmotnost izotopu $^{222}_{80}\text{Ra}$ $M = 3,68 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$. Uvažujme, že thorium se přeměňuje tak, že energie vylétující částice je 6,33 MeV. Jádro $^{222}_{80}\text{Ra}$ je po přeměně na základní hladině a dále nevyzařuje γ fotony. Pro tento případ se redukuje rovnice (1) na tvar

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{M \cdot V^2}{2} \quad (3)$$

Celková energie E_c je rozložena na kinetickou energii jádra Ra a α částice. Ze znalosti kinetické energie α částice určíme její rychlost

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot T_\alpha}{m}} = 1,74 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4)$$

a rychlost zpětného rázu jádra radia podle (2)

$$V = 3,144 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

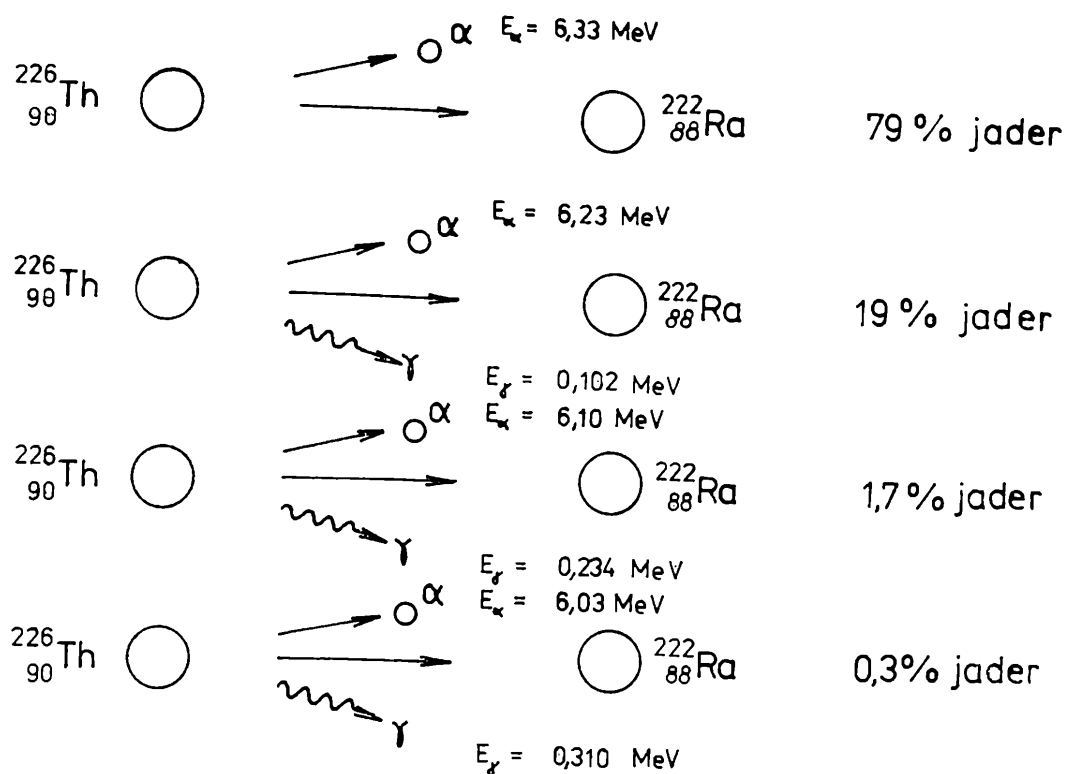
což umožňuje určit energii jádra Ra:

$$\frac{M \cdot V^2}{2} = 1,819 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 0,113 \text{ MeV}$$

Celková energie soustavy je podle (3) rovna součtu kinetických energií jednotlivých částic, tj.

$$E_c = 6,33 \text{ MeV} + 0,113 \text{ MeV} = 6,443 \text{ MeV}$$

Při přeměně thoria je v jádře uvolněna energie 6,443 MeV a ta je předána oběma částicím podle zákona zachování energie a hybnosti ve formě kinetické energie. Hodnota celkové energie vznikající při přeměně jádra je stejná i v druhém případě, kdy kinetická energie α částice je



Obr. 1

6,23 MeV Při výpočtu postupujeme stejným způsobem jako v předchozím případě. Vypočtenou kinetickou energii zpětného rázu jádra $^{222}_{88}\text{Ra}$ a kinetickou energii α částice dosazujeme do (1)

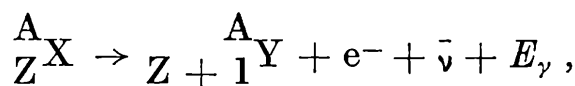
$$6,443 \text{ MeV} = 6,23 \text{ MeV} + 0,111 \text{ MeV} + E_\gamma,$$

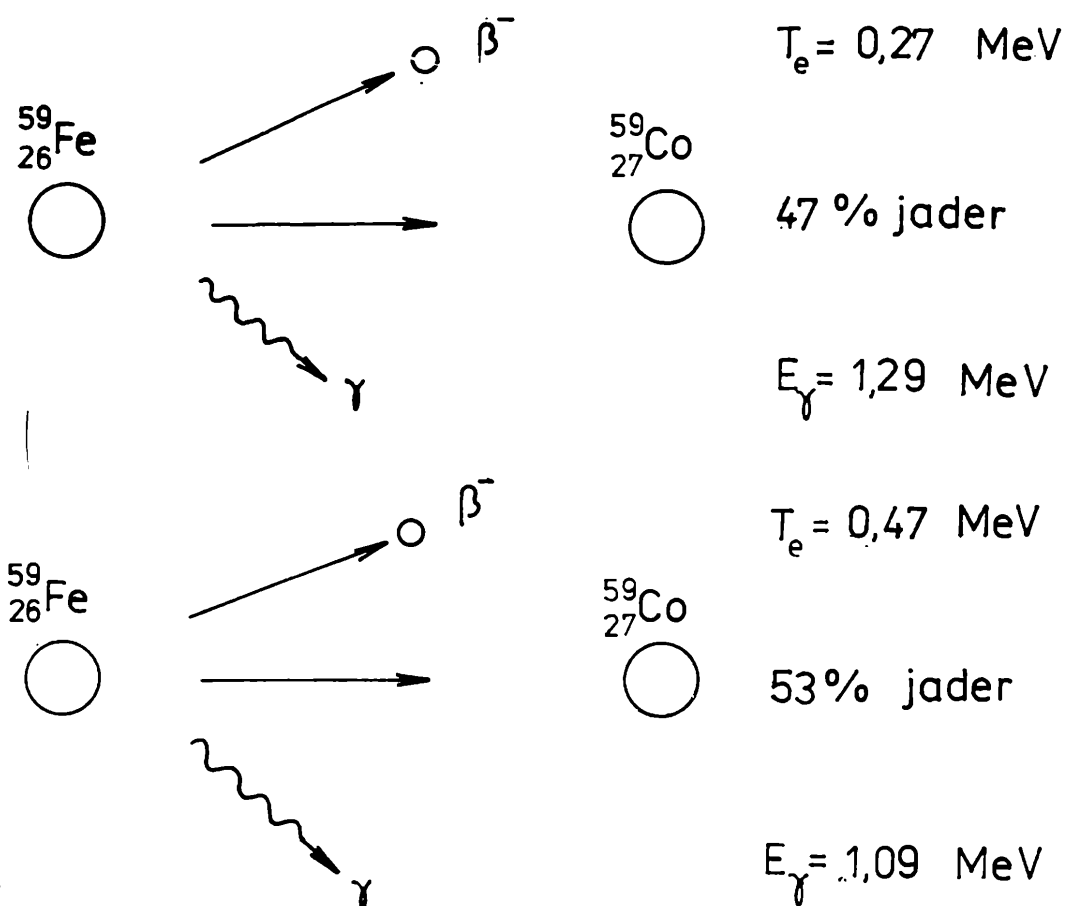
odtud vyplývá, že energie γ fotonu je $E_\gamma = 0,102 \text{ MeV}$. Jádro thoria při jaderné přeměně vyšle α částici s energií 6,23 MeV. Jádro nepřejde hned do základního stavu, ale setrvá velmi krátkou dobu v nestabilním stavu za okamžitého vyzáření γ kvanta o energii 0,102 MeV.

Stejně postupujeme při určení energií γ fotonů pro další dvě hodnoty energií 6,10 MeV a 6,03 MeV. Schema přeměny, hodnoty energií vyzářovaných γ fotonů a počet jader (v %) připadající na jednotlivé druhy přeměn jsou uvedeny v obr. č. 1.

Protože při měření energií α částic rozpadu thoria jsou vždy naměřeny pouze výše uvedené hodnoty energií, je zřejmé, že nestabilní stavy jádra $^{222}_{88}\text{Ra}$ nemohou být libovolné, ale vždy mají hodnoty 0 MeV (základní — stabilní stav), 0,102 MeV, 0,234 MeV a 0,310 MeV. Energie nestabilního stavu jádra odpovídá energii vyzářeného γ fotonu. Hodnoty stavů jádra jsou tedy kvantovány.

Podívejme se na samovolnou přeměnu β . Beta přeměna je charakterizována

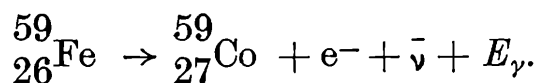




Obr. 2

kde jádro X s atomovým číslem Z a hmotnostním číslem A emituje elektron a antineutrino. Tento rozpad může být rovněž doprovázen vyzářením fotonu gama s energií E_γ . Celková energie vzniklá při rozpadu se rozdělí podle zákona zachování energie a hybnosti na tři vzniklé částice. Elektron bude mít maximální energii a hybnost, jestliže hybnost antineutrina položíme rovnu nule. Na tento zjednodušený případ se omezíme v našich dalších úvahách.

Na obr. č. 2 je samovolná přeměna izotopu $^{59}_{26}\text{Fe}$. Jádro se rozpadá β přeměnou



Jsou tedy možné dva přechody izotopu železa na kobalt, který již zůstává stabilní a nepřeměňuje se. Z celkového množství jader se 53 % přeměňuje tak, že emituje elektron s maximální kinetickou energií 0.47 MeV. Nově vzniklé jádro kobaltu je v nestabilním stavu a vyzáří γ foton o energii E_γ . Zbývajících 47 % jader se rozpadá tak, že emitují elektrony s maximální kinetickou energií 0,27 MeV. Tato jádra jsou v jiném nestabilním stavu a emitují fotony s energií $E_{2\gamma}$.^{+) Hmotnost izotopu $^{59}_{27}\text{Co}$ je $m_{0j} = 9,785443 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ a izotopu $^{59}_{26}\text{Fe}$ $m_0 = 9,785722 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Stanovíme nyní energie fotonů $E_{1\gamma}$, $E_{2\gamma}$, které odpovídají}

^{+) Rozpad je ve skutečnosti poněkud složitější.}

hodnotami energií stavů nestabilních jader kobaltu. Užitím rovnic (1), (2) a (4) stanovíme rychlost emitovaného elektronu

$$v = 4,02 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

tedy rychlost elektronu je větší než rychlost světla ve vakuu a to je v rozporu s tvrzením, že částice se pohybují s rychlostí menší, než je rychlost světla. Elektron při rozpadu se pohybuje rychlostí natolik blízkou rychlosti světla, že nelze užít zákonů zachování energie a hybnosti podle klasické mechaniky, ale musíme užít relativistických vztahů pro energii a hybnost.

Celková energie relativistické částice je

$$E = mc^2 = m_0c^2 + T \quad (5)$$

$$\text{Hybnost relativistické částice } \mathbf{p} = \frac{m_0 \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6)$$

kde E je celková energie částice, c rychlost světla, m_0 klidová hmotnost částice, v rychlost, m hmotnost částice při rychlosti v , p hybnost částice, T kinetická energie. Dále tyto vztahy budeme používat s indexem „e“ pro elektron a indexem „j“ pro nově vzniklé jádro. Celková energie jádra železa, které je v klidu před rozpadem, je

$$W = m_0 \cdot c^2. \quad (7)$$

Energie nově vzniklého jádra kobaltu

$$E_j = m_jc^2 + E_\gamma = m_{0j}c^2 + T_j + E_\gamma. \quad (8)$$

Energie elektronu vzniklého při přeměně

$$E_e = m_e c^2 = m_{0e} c^2 + T_e, \quad (9)$$

kde m_0c^2 je klidová energie příslušné částice a T kinetická energie. Energie antineutrína vzniklého při přeměně je

$$T_{\bar{\nu}} = p_{\bar{\nu}} \cdot c,$$

kde $p_{\bar{\nu}}$ je hybnost antineutrína, c rychlost světla.

Při přeměně se změní klidová hmotnost zbylého jádra kobaltu vzhledem k původnímu jádru izotopu železa, a změní se tedy i klidové energie jader. Rozdíl klidové energie původního jádra izotopu $^{59}_{26}\text{Fe}$ a nově vzniklého jádra $^{59}_{27}\text{Co}$ je uvolněná energie při samovolné přeměně. Ta přejde v kinetickou energii elektronu, jádra kobaltu, antineutrína a energii nestabilního stavu, která se vyzáří jako γ foton. Obdobou rovnice (1) v relativistickém případě je rovnice

$$E_c = m_0c^2 - m_{0j}c^2 = T_e + T_j + T_{\bar{\nu}} + E_\gamma \quad (10)$$

a zákon zachování hybnosti má tvar

$$\mathbf{p}_j + \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\gamma = 0. \quad (11)$$

Nyní máme vše připraveno k tomu, abychom stanovili z rovnic (10) a (11) energii gama fotonu, když známe maximální energii beta částice T_e . V rovnici (10) můžeme položit $T_\gamma = 0$, neboť elektron má maximální kinetickou energii, a tedy hybnost a energie antineutrína je nulová. Dále musíme stanovit kinetickou energii zpětného rázu T_j jádra kobaltu. Určíme ji se zákona zachování hybnosti (11). Nejprve z rovnice (9) stanovíme přírůstek hmotnosti elektronu

$$m_e - m_{0e} = \frac{T_e}{c^2}. \quad (12)$$

Po dosazení získáme hodnotu $m_e - m_{0e} = 4,8664 \cdot 10^{-31}$ kg. Ze změny hmotnosti elektronu stanovíme jeho rychlost podle vztahu

$$m_e = \frac{m_{0e}}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}. \quad (13)$$

Po vyjádření veličiny v_e a dosazení hodnot obdržíme velikost rychlosti $v_e = 2,273 \cdot 10^8$ m . s⁻¹. Vypočtená hodnota rychlosti je menší než rychlost světla ve vakuu, což nebylo splněno při užití vztahů klasické mechaniky. Velikost hybnosti elektronu je

$$\begin{aligned} p_e = m_e \cdot v_e &= 1,3975 \cdot 10^{-30} \cdot 2,273 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \\ &= 3,177 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Ze zákona zachování hybnosti za předpokladu $\mathbf{p}_\gamma = 0$ vyplývá

$$|\mathbf{p}_j| = |\mathbf{p}_e|$$

a z tohoto vztahu můžeme stanovit rychlost zpětného rázu jádra $v_j =$

$$= 3,24 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ a kinetickou energii jádra } T_j = \frac{1}{2} m_j \cdot v_j^2 = 5,1267.$$

$\cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,2 \text{ eV}$. Energie zpětného rázu jádra je řádově 10^5 krát menší než energie elektronu. Nově vzniklé jádro se po rozpadu pohybuje velmi malou rychlostí a jeho kinetická energie je zanedbatelná v rovnici (10) vzhledem k energii elektronu. Dosadíme číselné hodnoty do rovnice (10)

$$1,56 \text{ MeV} = 0,27 \text{ MeV} + 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ MeV} + E_{2\gamma}$$

a získáme hodnotu $E_{2\gamma} = 1,29 \text{ MeV}$. V druhém případě, kdy 53 % přeměn nastává tak, že elektron vyletuje z jádra s maximální energií 0,47 MeV, stejným postupem určíme kinetickou energii jádra a energii gama záření $E_{1\gamma} = 1,09 \text{ MeV}$.

Závěrem můžeme konstatovat, že při přeměnách α vyletují z jádra

částice α s rychlostí 2 až 5 % rychlosti světla, jádro se pohybuje řádově stokrát menší rychlostí, podle hmotnosti nově vzniklého jádra. Nestabilní stavy určitého jádra mají diskrétní, vždy stejné hodnoty, a tedy stavy jádra jsou kvantovány. Pro výpočty lze užít s výhodou vztahy klasické mechaniky. Při β přeměně vyletuje z jádra elektron mající hmotnost 7200krát menší než heliové jádro. Podle zákona zachování hybnosti je zřejmé, že se musí pohybovat rychlostí podstatně vyšší, blížíci se rychlosti světla ve vakuu, zatímco jádro se pohybuje s velmi malou rychlostí. Při výpočtech energií a rychlostí částic a gama fotonů je nutné přejít od klasické mechaniky k relativistické mechanice.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Josef Božek — český technik a vynálezce

FRANTIŠEK JÁCHIM, základní škola, Volyně

V roce 1982 uplyne 200 let od narození Josefa Božka, českého technika a vynálezce, s jehož jménem je spojeno zavádění parního stroje v našich zemích.

Josef Božek — syn mlynáře — se narodil 28. února 1782 v Bírově (Bierech) v Beskydech. Od 11 let dochází denně do městyse Bialy, kde usedá do lavic triviální školy. Mnohem příjemněji než ve škole je mu při cestě domů, kdy pozoruje okolní přírodu a dlouhé hodiny vydrží pozorovat proud vody v potoce a obdivovat jeho sílu. Doma staví svůj první stroj — model rodného mlýna. Od svého otce se dovídá o starých mlynářských praktikách, které umožňují využití energie vody k pohonu mlýna. Ve třinácti letech je poslán rodiči ke strýci do Těšína, aby navštěvoval těšínskou normální školu, ve strýcově hodinářské dílně mu pomáhá nejen s opravou starých hodin, ale také při konstrukci nových.

Podle přání otce začíná Josef studovat na těšínském gymnáziu. V čele gymnázia stojí prefekt *Leopold Scherschnik*, přítel *Steplinga*, *Tesánka*, *Vydry* a *Pelcla*. Mladého Josefa zná z hodinářské dílny jeho strýce. I když se výuka na gymnáziu opírala především o němčinu, latinu a náboženství, učí Scherschnik své žáky také poznatkům z mechaniky. Avšak Josef hledá i v latině a historii inspiraci pro práci konstruktéra. Sestrojuje modely římských katapultů a praků. Roku 1802 staví žák gymnázia model olomouckého orloje a roku 1803 může Scher-

schnik na výstavě v sále těšínské knihovny ukázat již na čtyřicet Božkových modelů. Ještě téhož roku se stěhuje Božek do Brna a na brněnské protestantské škole poslouchá přednášky profesora *Andréa* o technické matematice a mechanice. Na rozhraní jara a léta roku 1804 se vydává pěšky s modelem postřihovacího stroje na zádech do Prahy. Chce studovat na univerzitě filozofii a fyziku a dosáhnout profesury. Cítil také potřebu stále hlouběji pronikat do tajů mechaniky. S doporučením Scherschnika má vyhledat pomoc u profesora *Vydry*. Slepotou postižený matematik však před vánocemi 1804 umírá, Božek se tedy nějaký čas živí opravováním hodin. S přímlovou *Josefa Dobrovského* je přijat na místo vychovatele v domě hraběte Clam-Martinice. Častým hostem hraběte je ředitel nové pražské technické školy profesor *František Josef Gerstner*. Když se dovídá o talentovaném mladíkovi a jeho plánech, ihned mu nabízí místo stavovského mechanika na nové vysoké škole. Božek nabídku přijímá a pracuje na konstrukci různých přístrojů pro školu. Má roční plat 300 zlatých. Po několik měsíců se zdokonaluje v hodinářské praxi u mistra *Heinricha*. Jelikož Božek nepatřil k cechu hodinářů, brzy pociťuje jejich nepřátelství. Gerstner však nenechá na svého mechanika dopustit. A Božek pracuje nejen pro školu. Jedny jeho hodiny zakoupí pražská hvězdárna a umísťuje je do věže Klementina. Pro hraběte Kounice zhotovuje hodinky, které se natahují pohybem těla při chůzi. Podstatně také zdokonaluje přesnost hodin užitím tzv. Grahamova háku.

Roku 1809 se Božek ožení s dcerou pražského sládka Josefínou Langovou. V manželství se narodí dva synové — František a Romuald, kteří později pokračují v díle svého otce.

V době napoleonských válek vyniká Božek jako tvůrce protéz. Knížeti Ypsilantimu, který přichází roku 1813 v bitvě u Drážďan o ruku, zhotovil kvalitní protézu. Důstojníku ruského dělostřelectva Danilowskému zhotovil protézy nohou takové, že podle pražských novin z 21. května 1814 mohl voják „bez hole nejen po rovině chodit, nýbrž i po schodech nahoru vystoupiti a sestoupiti a dokonce bez cizí pomoci vyšvihnouti se na koně a tryskem na něm odcválati“ [1].

Do budoucna má však Božek jiné plány. Vzpomíná na svůj pobyt u hraběte Martinice. Poznal tam *Josefa Emanuela Hübla*, jenž po návratu z Anglie hovořil o anglických mechanicích a jejich strojích. Božka zejména zaujala myšlenka využít páru k pohonu strojů. Měl i zcela konkrétní představu — parovůz. Nevěděl však nic o tom, že již roku 1803 plula po Seině parou poháněná loď, neznal ani pokusy Cugnotovy s parní tříkolkou z roku 1769. Velkolepé dílo pozemní dopravy začíná Božek zcela sám.

Parní stroj přiváží do českých zemí roku 1810 hrabě *Bugoy*. Přiváží vlastně několik beden součástí, z nichž lze stroj složit. Sestavení stroje se ujme pražská technika a Gerstner pověřuje tímto úkolem stavovského

mechanika. Božek se ochotně ujímá náročné práce a dovede ji ke zdárnému konci. Stroj, který měl mít výkon asi 10 kW, má však pro tento výkon malý kotel a pracuje asi čtvrt hodiny. Božek staví vlastní model o výkonu asi 300 W, na kterém odhaluje všechny problémy parního stroje určeného k pohonu strojů. K tomuto modelu připojuje také funkční modely strojů z dřívější doby a pozoruje, jak je možno řešit přenos síly na více strojů. Úspěšně také řeší přechod mrtvého bodu při pohybu pístu. Rozjezd vozu v kterékoli poloze pístu umožňují dva na sebe kolmé válce. Nejdůležitější součásti pro svůj stroj si vyrábí sám, ostatní objednává. Pod Gerstnerovým dohledem dokončuje parovůz a 22. srpna 1815 předkládá supliku zemského presidiu, v níž žádá o povolení veřejné produkce. Prager Zeitung z 15. září 1815 již uvádí: „V neděli 17. září dostane se nám v tak zvané Stromovce potěšení prohlížet v rakouské monarchii tou dobou jedinečné podívané. V našem listu již dříve chvalně zmíněný vlastenecký umělec Josef Božek, hodinář a mechanik technického, pány stavy českými založeného učiliště, předvede totiž toho dne svůj mechanický vůz poháněný silou parního stroje“ [1].

Stavovský mechanik s obrovským úspěchem nejen parovůz předvádí, nýbrž nabízí svezení přihlížejícím. Prvními cestujícími jsou hrabě Nostic, Kounic a Kolowrat. Nejezdí ovšem na nějakém monstře. Božek totiž věnoval péči i celkovému vzhledu vozu. Nad čtyři kola umístil na pérách vypolštářovanou korbu a kozlík. Pod korbou byl parní kotel, válce byly rovněž napolo zakryté. A toto vozidlo jezdilo v Bubenči „úžasnou rychlostí běžícího muže“ [1]. Dne 26. září 1815 píše Prager Zeitung: „Božkova jízda byla první jízda parovozu na evropské pevnině po památných pokusech Cugnotových... Početné shromáždění přátel vědy a umění se zúčastnilo této produkce. Zájem je ještě zvyšován tím, že talent a čilá snaživost pana Božka zaručuje nám, že podnikne vše, aby pokusy přivedl svůj vynález k nejvyšší dokonalosti.“

A mechanik opravdu nezhálí. Již následujícího roku staví model parní lodi 1,5 m dlouhý, který zkouší na jezírku v zahradě Valdštejnského paláce. Na jaře 1817 si pronajme 13 metrů dlouhou loď, namontuje na ni dvě lopatková kola a chystá se předvést tuto loď s parním pohonem veřejnosti. Produkce je ohlášena na 1. června 1817. Týden předtím se objevují v ulicích Prahy plakáty, jejichž text začíná: „S vysokým povolením bude dne 1. června 1817 podepsaný ve Stromovce v Bubenči míti čest, vysoké šlechtě a ctěnému obecenstvu veřejně předvésti sedm sáhů dlouhou a devět stop širokou loď parní na rameni vltavském, při mlýně císařském a svůj umělý parní vůz na Rybničné hrázi...“ [1]. Podepsán Josef Božek mechanikus.

Vynálezce má však pouze jeden parní stroj a počítá s jeho přenesením z vozu na loď v průběhu produkce. Těsně před zahájením se však snesla nad Prahu velká bouřka a publikum prchající před deštěm vytvořilo kulisu zlodějům, kteří odnesli obsah pokladny se vstupným. I když

lod ještě téhož dne po Vltavě plula, Božkovi nastávají krušné chvíle. Nemůže zaplatit dluhy za výrobu součástek ani za pronájem pozemků. Údajně v návalu zoufalství parní stroj ničí a nikdy se již k němu nevrací. Ve chvílích nejtěžších dostává podporu 300 zlatých od pražských svobodných zednářů. V dílně technického učiliště potom staví stroje do továren, hydraulické lisy a věžní hodiny.

Rok 1825 zasahuje do Božkova života novou velkou událostí — *František Antonín Gerstner* začíná uskutečňovat velkou myšlenku svého otce: železniční spojení povodí Vltavy a Dunaje. Stavba, jejíž návrh ještě roku 1808 zarážel pány české hydrologické komise, začíná. Mladý Gerstner se na Božka obrací s požadavkem konstrukce železničních vozů. Božek dodává nákladní vozy pro stavbu dráhy Č. Budějovice — Linec a později i vozy pro dopravu osobní. Zajímavé je, že konstruuje vozy jako šlapací. Tak se vynálezce opět vrací k rozvoji dopravy. Práce na železničních vozech je jeho poslední prací v dopravě. Na samém sklonku života staví ještě několik vodních čerpadel.

Dne 23. února roku 1835 Josef Božek umírá. Pohřben byl na Olšanských hřbitovech.

Literatura :

[1] Streit, J.: Božkové — osudy rodiny vynálezců, Praha 1946

[2] Heinz, V. — Klement, V.: Z dějin automobilu, Praha 1931

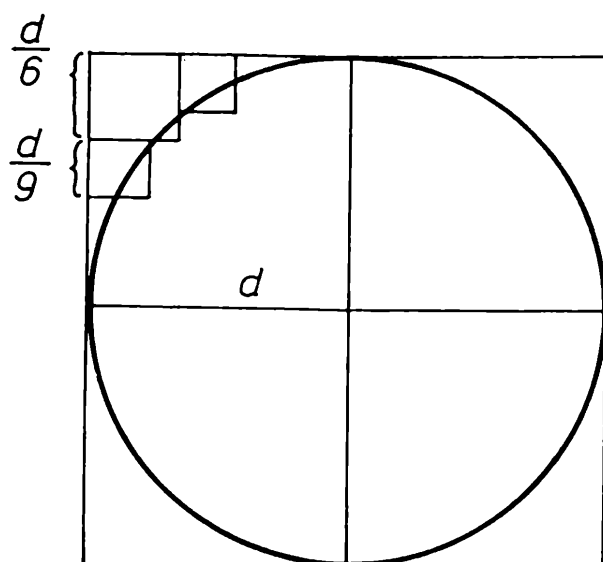
[3] Veselý, J.: Ze světa technických vynálezů, Praha 1927

Ludolfovo číslo

RNDr. JAROMÍR MALÁČ, Brno

Již nejstarší matematické písemné památky dosvědčují, že lidé záhy objevili konstantní poměr mezi průměry a obvody kruhů, mezi obsahem kruhu a obsahem čtverce nad jeho poloměrem. Až v 18. století n. l. byla konstanta označena písmenem π a nazvána *Ludolfovým číslem*. V průběhu věků se ji lidé snažili vyjádřit podíly, odmocninami apod., jak si ukážeme.

Ve 48. úloze *Ahmesova papyru* z 18. stol. před n. l. je porovnáván obsah kruhu s obsahem čtverce opsaného tomu kruhu. Má-li čtverec stranu o velikosti d , je obsah kruhu vyjádřen číslem $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$. Soudí se,



Obr. 1

že k tomuto výsledku Egypťané došli úvahou podle obr. 1, kde je obsah kruhu odvozován pomocí obsahů čtverců:

$$d^2 - 4 \left(\frac{d}{6} \right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{d}{9} \right)^2 = \frac{64}{81} d^2 = \left(\frac{8}{9} d \right)^2$$

Snadno zjistíme, že tomuto koeficientu odpovídá konstanta $256 : 81 \doteq 3,16$ pro poměr obsahu kruhu a čtverce nad jeho poloměrem.

Babyloňané a další obyvatelé Přední Asie používali buď jen konstanty 3 nebo ji v šedesátkové soustavě vyjadřovali přesněji

$$3^\circ 7' 30'' = 3 + \frac{7}{60} + \frac{30}{3600} \doteq 3,125.$$

Řecký matematik *Ptolemaios* opravil tento údaj (ve 2. stol. n. l.) na $3^\circ 8' 30'' = 3,141\overline{6}$, tedy na daleko přesnější hodnotu. A do třetice si uvedme „šedesátkové vyjádření“ čísla π , které v 15. století odvodil Džamšíd al-Káší:

$$3^\circ 8' 29'' 40''' 0^{\text{IV}} 47^{\text{V}} 25^{\text{VI}} 53^{\text{VII}} 7^{\text{VIII}} 25^{\text{IX}},$$

kde římské číslice označují exponenty čísla 60 ve jmenovatelích zlomků, tedy

$$25^{\text{VI}} = 25 : 60^6, 25^{\text{IX}} = 25 : 60^9 \text{ apod.}$$

Hodnota, kterou *al-Káší* takto zapsal, odpovídá v desítkovém zápisu číslu

$$3,141\,592\,653\,589\,793\,24\dots,$$

kde 17 zapsaných desetinných míst je naprosto přesných.

Vraťme se však do antického Řecka. Vzorem vědecké metody při určování konstanty π byl klasický *výpočet Archimédův* (3. stol. př. n. l.), který využíval obvodů pravidelných mnohoúhelníků vepsaných a opsaných kruhu. Archimédův výsledek můžeme zapsat složenou nerovností:

$$3 \frac{10}{71} < 3 \frac{284 \frac{1}{4}}{2018 \frac{7}{40}} < 3 \frac{284 \frac{1}{4}}{2017 \frac{7}{40}} < \pi < 3 \frac{667 \frac{1}{2}}{4673 \frac{1}{2}} < 3 \frac{667 \frac{1}{2}}{4672 \frac{1}{2}} < \\ < 3 \frac{10}{70}.$$

(Běžně se až donedávna užívala hodnota $\pi \doteq 22 : 7$ získaná z největšího uvedeného zlomku.)

Archimédův výsledek překonal všestranně vzdělaný *Hérón Alexandrijský* v 1. stol. př. n. l. nerovností:

$$\frac{211\,875}{67\,441} < \pi < \frac{197\,888}{62\,251}$$

Na asijském kontinentě se v matematice báдалo zejména v Číně a Indii. Ve 2. století n. l. *Čang Cheng* uvádí $\pi = \sqrt{10}$; k této vcelku dobré aproximaci $\pi \doteq 3,162$ dospěl z odhadu, že poměr druhé mocniny délky kružnice a druhé mocniny obvodu jí opsaného čtverce je 5 : 8:

$$(\pi d)^2 : (4d)^2 = 5 : 8, \text{ tedy } \pi = \sqrt{10}.$$

Tuto hodnotu π používal též indický matematik *Brahmagupta* v 7. století a tadžický matematik *al-Chwárizmí* v 9. století n. l. Přibližné racionální vyjádření konstanty podal ve 3. století *Wang Fan* zlomkem $142 : 41 \doteq 3,155$, v 5. století *Cu Čchung* pak podílem $355 : 113 \doteq 3,141\,592\,9\dots$, tedy na šest správných desetinných míst. *Áryabhata* udal přibližně v téže době hodnotu $3927 : 1250 \doteq 3,141\,59\dots$; v 16. století byl vydán v Indii „Vědecký sborník“, v němž je číslo vyjádřeno podílem

$$104\,348 : 33\,215 \doteq 3,141\,592\,653\,9.$$

(Porovnejte tento výsledek s *al-Káším* z 15. století.)

Ve středověké Evropě začal výpočty konstanty π italský matematik *Leonardo Pisánský (Fibonacci)*, ve své práci „*Practica geometriae*“ z r. 1220 uvedl nerovnosti

$$\frac{1440}{458 \frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458 \frac{1}{5}}$$

a pomocí průměru jmenovatelů, tj. čísla $458 \frac{29}{90}$, nahrazeného pohodlněj-

ším zlomkem zapsal

$$\pi = \frac{1440}{458 \frac{1}{3}} = \frac{864}{275} \doteq 3,141\ 8.$$

Proč je hodnota π spojována se jménem holandského matematika *Ludolfa van Ceulena*? L. Euler navrhl název Ludolfovo číslo jako ocenění celoživotního úsilí tohoto počtáře, který vypočítal konstantu π nejdříve na 20 desetinných míst (pomocí $60 \cdot 2^{29}$ — úhelníků) a později na 35 míst pomocí 1 073 741 248 — úhelníků. Jeho práce byla publikována v r. 1615.

V pozdějším období velkých numerických výpočtů (17.—19. století) dosáhl počet známých desetinných míst čísla π i několika set; *Vega* (140), *Dase* (200), *Ruthenford* (440), *Shanks* (707), ale od 528. místa s chybou, *Ferguson* a *Wrench* (808) v r. 1878.

Seznam učenců, které jsme poznali v souvislosti s výpočty čísla π , zdaleka není úplný. Nasazením počítačů na tuto práci lze dnes získávat statisíce desetinných míst čísla π ; už v r. 1961 určil jeden elektronkový počítač Ludolfovo číslo na 100 625 míst. Honba za větším počtem míst nemá praktický význam.

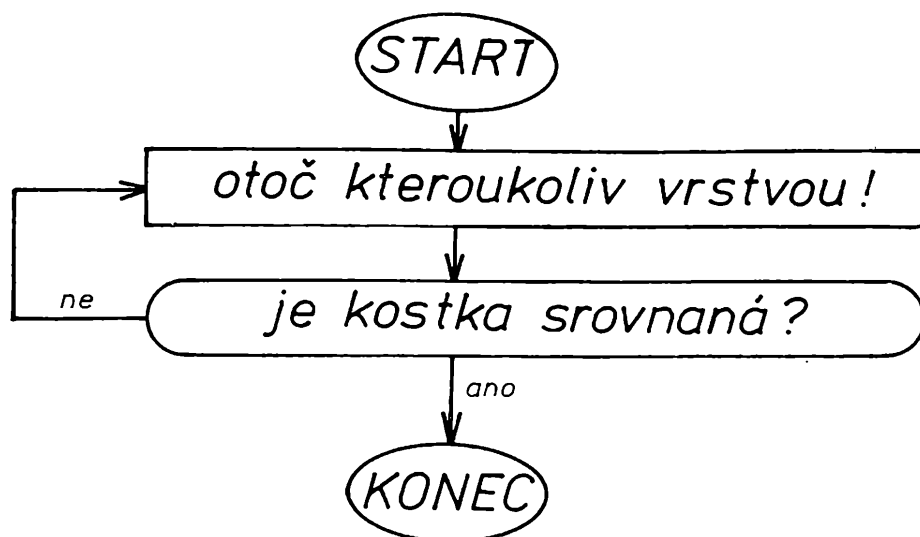
PŘEMÝŠLÍME ŘEŠÍME...

Kterak kroutit kostkou ku kýžené konfiguraci

RNDr. PETR SIMON, CSc., Matematický ústav UK, Praha

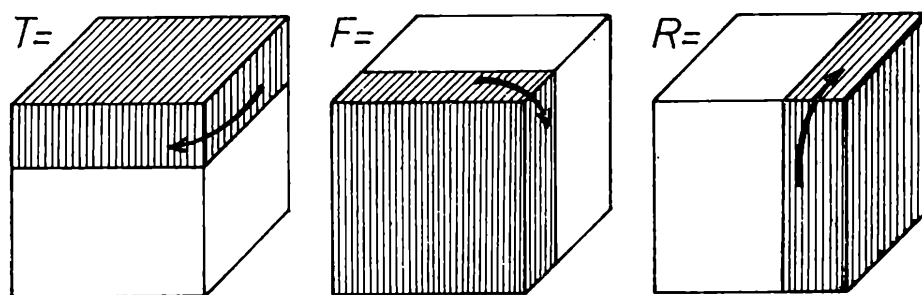
Redakce mě požádala, abych na stránkách *Rozhledů* popsal postup, kterým lze dosáhnout toho, aby alespoň pět stěn maďarské kostky bylo jednobarevných. Plním toto přání s jistými rozpaky. Šťastný majitel kostky obvykle používá algoritmu, který je znázorněn na obr. 1 a radost z hračky mu nevyprchává. Jako každý hlavolam, i kostka ztratí část svého kouzla, budeme-li ji umět vyřešit. Ztráta bude bolestnější, když na řešení nepřijdeme sami. A proto

prosím všechny čtenáře, kteří se dosud nevzdali naděje, že kostku srovnají vlastní pílí, aby v tomto okamžiku zanechali čtení. Ostatní pak ujišťuji, že postup, který bude následovat, je tak vzdálen od řešení optimálního, že každému ponechá ještě mnoho prostoru k vlastnímu samostatnému výzkumu.

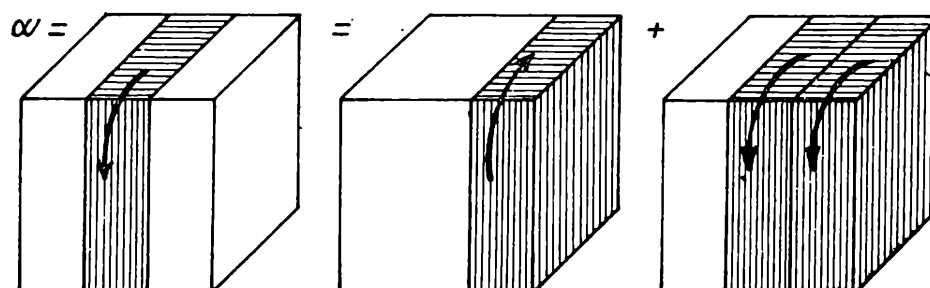


Obr. 1

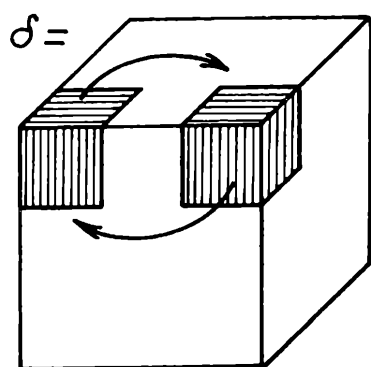
Vezměme kostku do ruky. Každá stěna se skládá z devíti čtverců, z nichž prostřední určuje, jakou barvu má celá stěna mít — je to barva *stěny*, a nazýváme tuto stěnu dejme tomu červenou bez ohledu na to, že jinak vypadá spíše jako papoušek nebo duha. Toto označení si stěna nese s sebou nezávisle na umístění kostky v prostoru, zatímco fakt, že některá stěna je přední, jiná dolní, další pak pravá, levá, horní a zadní už záleží na tom, jak jsme kostku situovali. Zapomeňme na chvíli na barvy. Elementární pohyby jedinou vrstvou o 90° ve směru hodinových ručiček pak vypadají a označují se tak, jak ukazuje obr. 2. Písmena jsou zvolena z anglických slov Top, Front, Right; pohyby inverzní (proti směru ručiček) budou T^{-1} , F^{-1} , R^{-1} . Konečně pak pohyb prostřední vrstvou směrem shora dolů označme α ; na obr. 3 je znázorněno i jeho složení při manipulaci s kostkou.



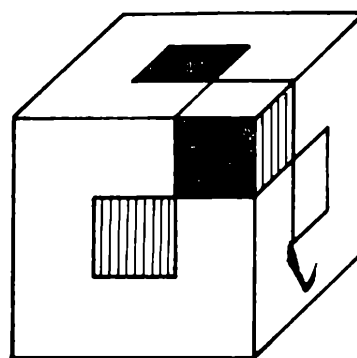
Obr. 2



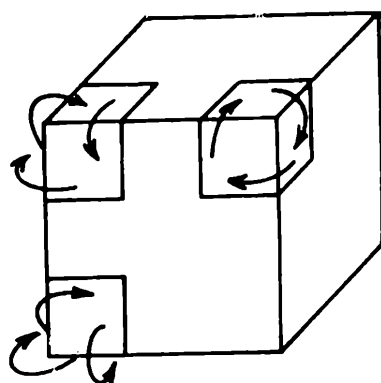
Obr. 3



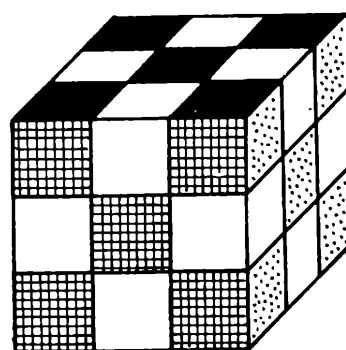
Obr. 4a



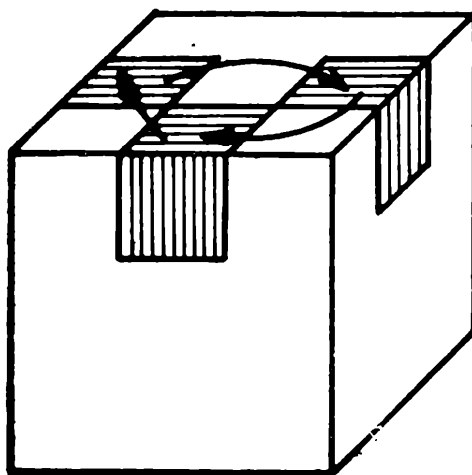
Obr. 4b



Obr. 5a



Obr. 5b

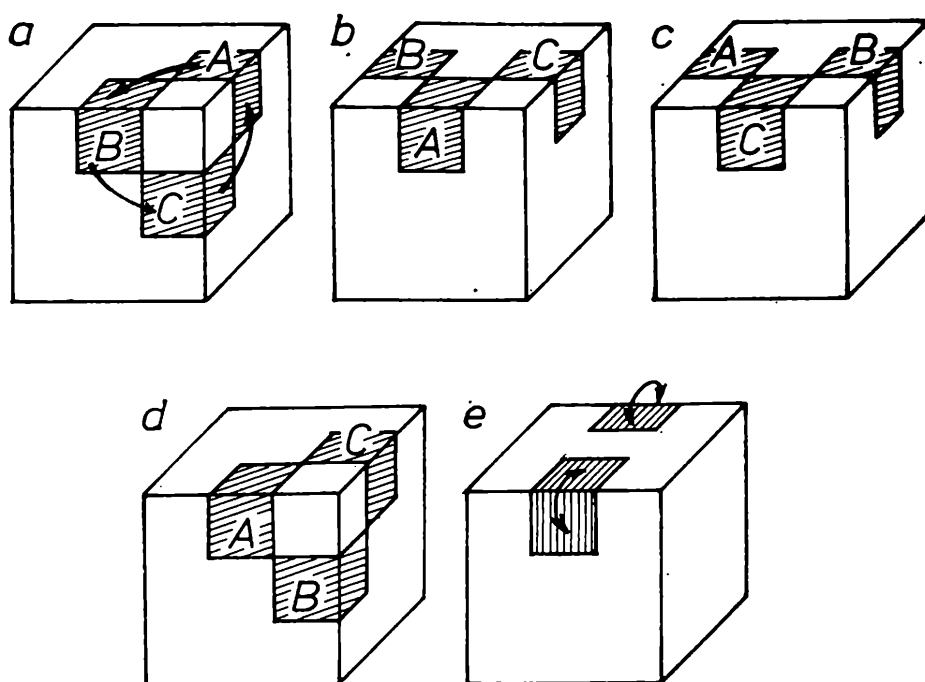


Obr. 6

Popíšeme si tři podprogramy, které operují na kostce podle následujícího schématu:

Zvolíme-li při startu určitou polohu kostky v prostoru, bude na konci poloha kostky v prostoru táž. Tedy například, nastavíme-li zelenou stěnu nahoru, bude po ukončení horní stěna opět zelená. Proběhnutím programu dojde k jistému předem známému pohybu rohových a hrnových krychliček. Polohu kostky volíme samozřejmě tak, aby po ukončení sekvence byla kostka trochu méně chaotická.

Celý proces rozdělíme do čtyř podúloh:



Obr. 7

- a) *umístit rohové krychličky na správné místo,*
- b) *zorientovat rohové krychličky,*
- c) *umístit hranové krychličky na správné místo,*
- d) *zorientovat hranové krychličky.*

Zkusme pro začátek provést postupně těchto sedm pohybů: T, F, T^{-1} , F^{-1} , R^{-1} , F^{-1} , R. Získali jsme operaci δ , která vyměňuje rohové krychličky na horní přední hraně, dělá tedy to, co ukazuje obr. 4a.

Vzhledem k tomu, že kteroukoliv z hran můžeme při troše dobré vůle po právu nazývat přední horní, je jasné, že opakovaným prováděním dostaneme dříve či později i tu červeno-žluto-bílou krychličku do kouta určeného červenou, žlutou a bílou stěnou. Že se přitom nějak hýbají i hranové krychličky, nás zatím neznepokojuje. Však na ně taky dojde.

Bohužel, máme-li všechny rohy na místě, nemusíme mít ještě vyhráno. Roh může vypadat tak, jak ukazuje obr. 4 b, neboli není zorientován.

Pomůže operace δ^2 , dvojnásobné provedení δ . Ta už nechává rohy stát na místě, pouze třemi na přední stěně pootočí ve směru hodinových ručiček, jak ukazuje obr. 5a. Po chvíli trpělivosti získá kostka charakteristický vzhled, který je patrný z obr. 5b.

Náš strategický plán předpokládá, že nyní dokážeme přemístit hranové krychličky, aniž bychom sebeméně pohnuli kostičkami v rozích. Conwayova sekvence $\gamma = \alpha T \alpha^{-1} T T \alpha T \alpha^{-1}$ je přesně to, co potřebujeme. Tato posloupnost provede cyklickou záměnu tří „hran“ na horní vrstvě, aniž by cokoli změnila na zbývajících třiatvaceti kostičkách (obr. 6).

Zprvu to jde snadno: Zaměříme se na modrobílou hranovou kostku a opakovaným prováděním γ ji přestěhujeme až tam, kde má „bydlet“.

Jak přibývá hran správně uložených, začíná drobná obtíž v tom, že se dávají do pohybu i hrany, které by se již hýbat neměly. Nevadí. Vždy totiž můžeme nějakou přípravnou operací O dostat do pozice požadované pro aplikaci γ právě ty krychličky, které se mají pohnout. Pak provedeme γ a posléze zlikvidujeme napáchané škody inverzní operací O^{-1} . Na příkladu se to osvětlí nejsnáze:

Potřebujeme docílit záměny naznačené na obr. 7a. Přípravná operace je v tomto případě TR . Vznikne pozice na obr. 7b, následuje γ (s výsledkem na obr. 7c) a pak inverze k přípravě, což znamená $R^{-1} T^{-1}$. A máme, co jsme chtěli (obr. 7d).

Zbývá zorientovat „hrany“. Orientaci hran provádí posloupnost

$$\omega = \alpha T \alpha T \alpha T T \alpha^{-1} T \alpha^{-1} T \alpha^{-1} T T,$$

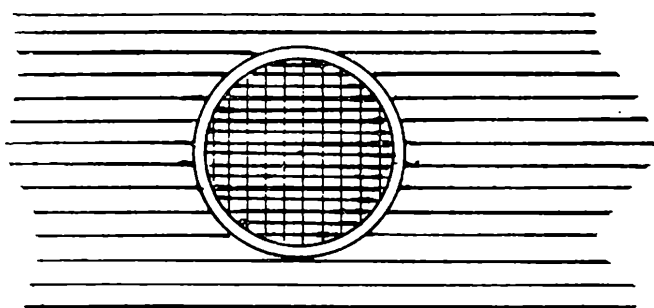
která nechává všechny krychličky stát na místě, pouze obrátí orientaci dvou protilehlých hran v horní vrstvě (obr. 7e).

Není už třeba podotýkat, že i při provádění orientace je občas nutné postupovat s přípravou, tj. $O\omega O^{-1}$.

Povedlo se?

Efektní experimenty: Mýdlová bublina ve vodě

Mýdlová bublina, kterou všichni znají, je vytvořena vrstvou mýdlového roztoku, která obklopuje vzduch. Zkuste udělat obrácenou bublinu, kde vrstva vzduchu obklopuje mýdlový roztok. Lejte opatrně mýdlový



Obr. 1

roztok z výšky několika milimetrů do skleněné nádoby s čistou vodou. Když lijete pomalu, vznikají mýdlové bubliny a pěna na povrchu vody. Zvýšíte-li trochu rychlost, může se stát, že jedna kapka roztoku vnikne do vody a tam, obklopena vzduchovou vrstvou, zůstane (obr. 1).

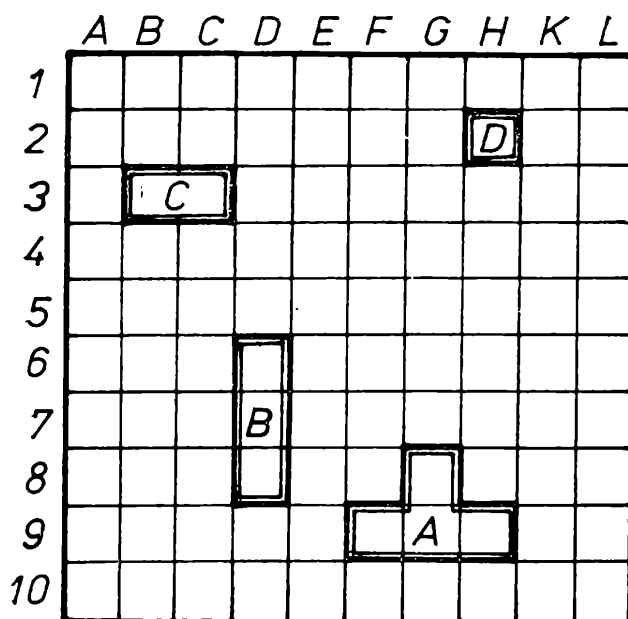
Vysvětlení naleznete na str. 280.

Petr Hnilička

Námořní bitva a úlohy o pokrývání

RNDr. EMIL CALDA, FMF UK

Profesor Ypsilon pozoruje se vzrůstající nelibostí, že žáci Slavík a Pěnkava hrají během zkoušení spolužáka jakousi námořní bitvu. Tato hra spočívá v tom, že každý z nich má před zraky protivníka pečlivě ukrytou čtvercovou síť 10×10 , do níž si zakreslil čtyři lodě různých typů A , B , C , D (obr. 1). Slavík hlásí souřadnice políčka, do něhož jeho



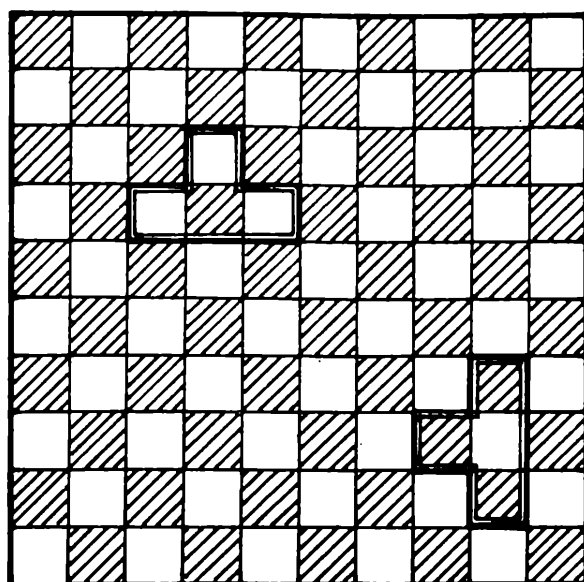
Obr. 1

„flotila“ právě „vystřelila“, Pěnkava sděluje, zda tato salva některou z jeho lodí zasáhla. Pak si role vymění; „vystřelí“ Pěnkava a výsledek hlásí Slavík. Takto střídavě pokračují; prohrává ten, kdo má dříve potopeny všechny lodě, tj. ten, kdo má dříve zasaženo všech deset čtverečků, z nichž se jeho „lodstvo“ skládá.

Co udělá profesor Ypsilon s neposedy Pěnkavou a Slavíkem? Umlčí je jejich vlastními zbraněmi, tím, že jim zadá několik úloh, k nimž ho jejich hra inspirovala. Můžete si je vyřešit také:

Zjistěte, zda je možné danou čtvercovou síť 10×10 pokrýt pětadvaceti obrázky typu A , tj. umístit do dané sítě 25 lodí typu A tak, aby každé její políčko bylo zakryto právě jedním čtverečkem některé lodě.

Nutná podmínka pro pokrytí je zřejmě splněna, neboť 25 lodí typu A se skládá z téhož počtu čtverečků jako daná čtvercová síť. Pokud se při řešení úlohy rozhodnete experimentovat, tj. vystříhnout z tvrdšího papíru 25 příslušných obrázků a umísťovat je do dané čtvercové sítě, zjistíte po jisté době, že „věc se nějak nedaří“. Zákonitě se vás zmocní



Obr. 2

podezření, že není možné pokrýt čtvercovou síť danými obrazci. Jak to však dokázat?

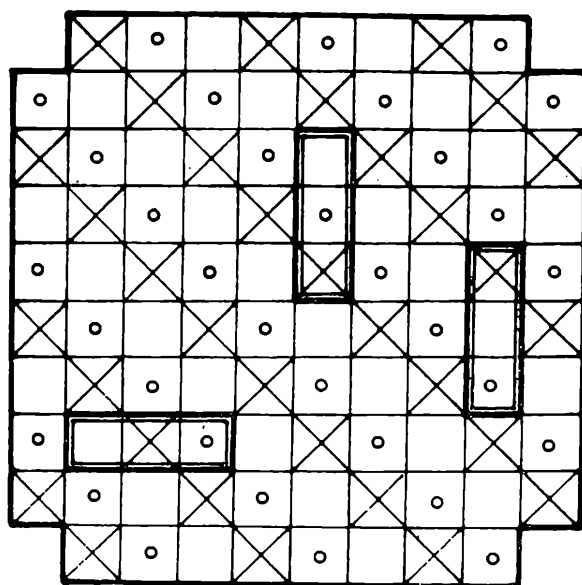
Představme si, že daná čtvercová síť je obarvena dvěma barvami jako šachovnice (obr. 2), je v ní 50 bílých a 50 černých políček. Předpokládejme, že je pokryta pětadvaceti obrazci typu *A* (dvě z možných poloh obrazců jsou zakresleny). Každý obrazec typu *A* zakrývá při svém umístění na vybarvené čtvercové síti lichý počet černých políček — buď jedině nebo právě tři; pětadvacet těchto obrazců tedy zakrývá lichý počet černých políček (součet lichého počtu lichých čísel je liché číslo). To je však spor, neboť síť má černých políček padesát, tj. sudý počet. Danou síť tedy nelze pokrýt 25 obrazci typu *A*.

Všimněte si, že nápad obarvit danou čtvercovou síť učinil řešení úlohy velmi jednoduchým, zřejmým téměř na první pohled. Nemusíme však vždy vystačit pouze s vybarvením dvěma barvami, jak ukazuje následující úloha.

*Ze čtvercové sítě 10×10 si odmysleme rohová políčka (obr. 3). Je možné na takto vzniklý útvar umístit 32 lodí typu *B*?*

I zde je splněna podmínka, aby 32 lodí typu *B* mělo též počet 96 čtverečků jako pokrývaný útvar. Budeme nyní postupovat tak, že každý čtvereček původní sítě obarvíme jednou ze *tří* různých barev; v obr. 3 jsou znázorněny bílé, kroužkem a křížkem z úhlopříček. Uvažovaná síť má 30 bílých políček, 33 políček s kroužkem a 33 s křížkem. Předpokládejme, že je pokryta 32 obrazci typu *B*. Každý z nich zakrývá vždy jedno políčko s kroužkem, jedno s úhlopříčkami a jedno bílé; to je ale spor, neboť bílých políček je méně než 32. Danou síť tedy nelze 32 loděmi typu *B* pokrýt.

Povšimněte si ještě, že tento výsledek lze formulovat i takto: čtvercovou síť 10×10 , z níž jsou vynechány rohové čtverečky, nelze „rozstří-



Obr. 3

hat“ na obdélníkové pásy skládající se ze tří políček sítě. Podobným způsobem lze interpretovat i závěr první úlohy.

Úlohu týkající se lodí typu C už jistě zvládnete sami; vystačíte přitom s vybarvením dvěma barvami. Ze čtvercové sítě na obr. 1 si odmyslete políčka A10 a L1 a dokažte, že vzniklý útvar nelze pokrýt 49 loděmi typu C.

Poněkud jiného charakteru je úloha pro poslední lodní typ. Představme si, že loď typu D je ponorka, která se ve čtvercové síti 10×10 pohybuje takto: po ponoření se může vynořit pouze v takovém políčku, z něhož se lze do původního dostat tahem jezdců podle šachových pravidel. (Např. po ponoření v D1 na obr. 1 se může vynořit pouze v jednom z políček B2, C3, E3, F2.

Umístěme naši ponorku na políčko A1 a dokažme, že není možné, aby se postupně vynořila v každém zbývajícím políčku dané sítě právě jednou a skončila vynořením ve čtverečku L10.

Předpokládejme, že tato cesta ponorky danou sítí je možná, takže můžeme jednotlivá políčka sítě označit čísly 1, 2, ..., 99, 100 podle toho, v jakém pořadí se v nich při své cestě vynořovala; políčko A1 přitom označíme číslem 1 a poslední políčko, v němž se ponorka vynoří — tj. políčko L10 — bude označeno číslem 100. Představíme-li si nyní čtvercovou síť jako šachovnici na obr. 2, jsou obě políčka A1 a L10 černá a vzhledem k tomu, že ponorka se vynoří vždy v políčku opačné barvy, než se ponořila, musí být na bílých políčkách sudá čísla a na černých lichá. Tím jsme však odvodili spor, neboť černé políčko L10 je označeno číslem 100, tj. číslem sudým.

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Fyzika

7. Tělesa T_1 a T_2 o hmotnostech $m_1 = 1,5 \text{ kg}$, $m_2 = 0,5 \text{ kg}$ jsou spojena dokonale ohebným vláknem vedeným přes kladku (jako na obr. 1. na str. 279). Hmotnost kladky a vlákna je zanedbatelná, zanedbatelné je i tření na podložce a v ložiskách kladky. Předpokládejte, že děj probíhá na zemském pólu, kde tíhové zrychlení má velikost $g = 9,83 \text{ m s}^{-2}$. Podložka, na které se pohybuje těleso T_1 , je vodorovná.

a) Vyslovte třetí pohybový zákon, tj. zákon akce a reakce.

b) Vyjmenujte všechny síly, které působí na těleso T_1 a uveďte, která tělesa nebo která pole tyto síly vyvozují. Dále uveďte jejich působiště, směr a velikost. Každou z těchto sil považujte za akci a uveďte k ní příslušnou reakci. Pro tyto reakce uveďte působiště, směr a velikost.

Ivan Šantavý

(Došlo 6 řešení)

Autorovo řešení:

a) Třetí pohybový zákon (tj. zákon akce a reakce) zní: Dvě tělesa na sebe působí silami stejně velkými opačně orientovanými.

b) Na těleso T_1 působí:

1. Síla $\mathbf{F}_1 = \mathbf{G}$, kterou vyvozuje gravitační pole Země. Působí na všechny části tělesa T_1 , tj. v celém jeho objemu. Je orientována svisle dolů a má velikost $F_1 = m_1 \cdot g = 14,7 \text{ N}$.

Reakcí k této síle je síla $\mathbf{F}'_1$, kterou působí gravitační pole tělesa T_1 na Zemi. Působí na všechny části Země, tj. v celém jejím objemu. Je orientována svisle vzhůru a má velikost $F'_1 = F_1 = 14,7 \text{ N}$.

2. Síla $\mathbf{F}_2$, kterou vyvozuje podložka. Působí na dolní plochu tělesa, je orientována svisle vzhůru a má velikost $F_2 = F_1 = 14,7 \text{ N}$.

Reakcí k této síle je síla $\mathbf{F}'_2$, kterou působí těleso T_1 na podložku v místě styku. Je orientována svisle dolů a má velikost $F'_2 = F_2 = 14,7 \text{ N}$.

3. Síla $\mathbf{F}_3$, kterou vyvozuje vlákno v bodě A (tělesa T_1), v němž je připevněno k tělesu T_1 . Je orientována vodorovně doprava a má velikost $F_3 = m_1 \cdot m_2 \cdot g / (m_1 + m_2) = 3,69 \text{ N}$.

Reakcí k této síle je síla $\mathbf{F}'_3$, kterou působí těleso T_1 na vlákno v bodě B (vlákna), který je ve styku s bodem A . Je orientována vodorovně doleva a má velikost $F'_3 = F_3 = 3,69 \text{ N}$.

Komentář

Tento úkol byl pro většinu z vás velmi snadný, nevyžadoval zvláštního důvtipu, jen dobrou znalost pohybového zákona. Zařadili jsme jej mezi úkoly naší soutěže proto, abyste si dobře uvědomili fyzikální obsah třetího pohybového zákona, zejména že

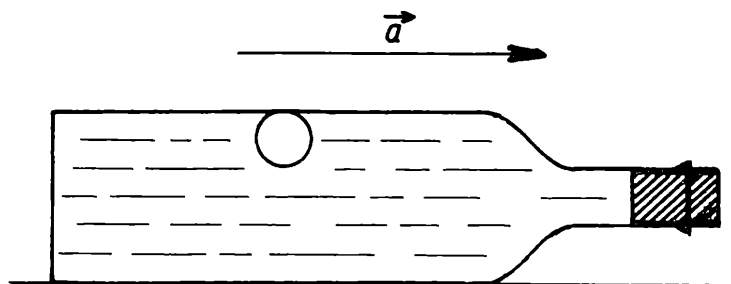
1. akci a reakci nazýváme dvě síly, kterými na sebe navzájem působí dvě tělesa. Kteroukoliv z těchto sil lze nazvat akcí. Zbývající je pak reakce. Obvykle nazveme akci tu sílu, ke které dojdeme v úvahách dříve,

2. akce a reakce působí v různých místech (bodech, plochách nebo objemech),

3. označíme-li akci $\mathbf{F}_1$ a příslušnou reakci $\mathbf{F}_2$, platí $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$.

Třetí pohybový zákon se někdy ilustruje dvěma lidmi nebo dvěma tělesy, která na sebe působí „prostřednictvím“ vlákna. To je velmi problematické, neboť a) je-li vlákno vedeno přes kladku tak jako v našem případě, je jasné, že na těleso T_1 působí vlákno vodorovnou silou, zatímco na těleso T_2 silou svislou, takže přirozeně nejde o akci a reakci, b) není-li hmotnost kladky zanedbatelná, pak pro síly $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, jimiž „na sebe“ působí dvě tělesa „prostřednictvím“ vlákna, obecně neplatí $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ ani tehdy, je-li vlákno přímé a natažené a není ve styku se žádným dalším tělesem.

8. Do láhve s dostatečně širokým hrdlem vložíme pingpongový míček, naplníme ji vodou, zazátkujeme tak, aby v ní nezůstaly vzduchové bubliny a nakonec položíme na klidnou vodorovnou podložku tak, aby míček byl asi v polovině láhve (obr. 1). Pak láhev náhle posuneme smě-



Obr. 1

rem k zátce, takže nabude zrychlení $\mathbf{a}$ orientované na obr. doprava. Z následujících odpovědí vyberte správnou: Míček se vzhledem k láhvi
1. pohne doprava, tj. přiblíží k zátce,
2. pohne doleva, tj. přiblíží se ke dnu,
3. nepohne, tj. zůstane vzhledem k láhvi v klidu.
Zdůvodněte!

(Došlo 6 řešení)

Ivan Šantavý

Autorovo řešení :

Správná je odpověď č. 1, tj. míček se pohne doprava, tj. přiblíží se k zátce. Zdůvodnění:

Uvažujme o pohybu míčku a láhve [ve vztažné soustavě S' pevně spojené s láhví. Tato vztažná soustava je neinerciální, neboť koná vzhledem k inerciální soustavě S , spojené s podložkou, posuvný pohyb se zrychlením $\mathbf{a}$. V soustavě S' působí na každé těleso, kromě sil od ostatních těles a polí, navíc setrvačná síla $\mathbf{F}_s = -m \cdot \mathbf{a}$, kde m je hmotnost uvažovaného tělesa.

Všechny děje v soustavě S' tedy probíhají tak, jako kdyby v ní existovalo kromě gravitačního pole Země další gravitační pole, jež uděluje všem tělesům stejné zrychlení $\mathbf{g}' = -\mathbf{a}$, jež má vodorovný směr a je orientováno doleva.

Na pingpongový míček ponořený do kapaliny působí v tomto dodatkovém gravitačním poli vodorovná „vztlačková“ síla $\mathbf{F}_{vz}$. orientovaná doprava, daná vztahem $\mathbf{F}_{vz} = -m \cdot \mathbf{g}' = m \cdot \mathbf{a}$, kde m je hmotnost vody, zaujímající objem míčku. Míček se tedy bude pohybovat vzhledem k vodě směrem k zátce. Síla $\mathbf{F}_{vz}$ je zcela analogická vztlačkové síle, která působí na tělesa ponořená v kapalině v zemském gravitačním resp. tíhovém poli a jež je dána vztahem $\mathbf{F} = -m \cdot \mathbf{g}$, kde m je hmotnost kapaliny zaujímající objem ponořeného tělesa a $\mathbf{g}$ je zemské tíhové zrychlení.

Komentář.

Velmi důležitý výsledek, uvedený ve zdůvodnění, je to, že setrvačná síla, která působí na tělesa v neinerciální soustavě vykonávající vzhledem k inerciální soustavě posuvný pohyb, je ekvivalentní gravitační síle jistého homogenního gravitačního pole. Tohoto faktu se využívá k vytváření „umělého gravitačního pole“ v kosmických lodích.

Fyzikální podstata vytvoření „umělého gravitačního pole“ je stejná jako vytvoření beztlížného stavu, tj. „zrušení“ existujícího gravitačního pole.

Souhrnný komentář k výsledku fyzikální soutěže Rozhledů v r. 1980/81

Doc. RNDr. IVAN ŠANTAVÝ, CSc., VUT Brno

V minulém ročníku jsme se snažili připravit pro fyzikální soutěž Rozhledů úlohy, které by byly zajímavé a tak jednoduché, aby je mohl vyřešit co největší počet studentů. Zároveň jsme chtěli, aby byly instruktivní v tom smyslu, že by si jejich řešitelé při práci na nich uvědomili nebo ujasnili některé z těch stránek teorie, kterým někdy nebývá věnována dostatečná pozornost.

Všechny úlohy byly zadány tak, aby je bylo možno řešit bez zdlouhavých a náročných výpočtů a bez užití diferenciálního a integrálního počtu. Chtěli jsme procvičit fyziku, nikoliv matematiku. Jestliže však někteří řešitelé užili vyšší matematiky, nebylo to samozřejmě na závadu.

Obecně se ukázalo, že mnozí řešitelé ovládají lépe matematiku než fyziku, v níž dělali mnoho chyb, a to i v základních úvahách. V řešeních se vyskytovaly i gramatické chyby, dokonce i tak roztomilé jako „Archymedes“ s ypsilonem.

Při stanovení pořadí těch řešení, která byla věcně správná, byla považována za nejlepší řešení přesná a úplná a přitom stručná a elegantní v obsahu i formě. Komentář, uvádějící případná možná zobecnění nebo vymezující podmínky platnosti řešení atd., byl přičten k dobru.

Správná řešení jednotlivých úloh i s komentářem byla uvedena v *Rozhledech*, ročník 1981/82, č. 3 až 6. Postup užitý v těchto řešeních je samozřejmě jen jedním z možných postupů, které vedou k cíli. Pro jednoznačnost budeme zde tato řešení nazývat „naše řešení, NŘ“).

Komentář k výsledkům jednotlivých úloh:

Úloha 1 — loďka v bazénu

Tato úloha byla relativně nejsnadnější a byl o ni největší zájem — mezi došlými řešeními bylo dvanáct správných.

Úloha 2 — kabina v beztlížném stavu

Z došlých řešení bylo šest správných. Z nich v pěti bylo řešení provedeno metodou odvození rovnic trajektorie v uvažovaných vztažných soustavách s užitím transformace souřadnic. Tato metoda je věcně správná a většina řešitelů se v ní projevila jako hbití matematici, kteří dovedou nejen počítat, nýbrž i přehledně uspořádat zápis.

Nejjednodušší a nejelegantnější řešení zaslala dvojice *P. Sobotík* a *M. Šimek* z gymnázia v Příboře. Vyšli z vektorových vztahů pro rychlosti kabiny a vrženého tělesa ve vztažné soustavě spojené s povrchem Země a jejich odečtením získali vztah pro rychlost tělesa vzhledem ke kabině. Tato rychlost vyšla konstantní, tedy trajektorie je bod nebo přímka.

J. Vohradník z gymnázia v Holicích zaslal správné řešení doplněné pěkným rozбором počátečních podmínek.

Z našeho řešení je zřejmé, že k cíli vede bez komplikovaných výpočtů přímé užití obecných fyzikálních zákonitostí.

Úloha 3 — těleso na pružině

Z došlých řešení byla správná jen dvě, ostatní obsahovala vážné chyby, jako je např.

a) záměna tíhové síly, kterou působí tíhové pole na těleso, a síly,

kterou působí těleso na své okolí, v uvažovaném případě na pružinu,

b) nesprávné užití vztahu $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, kde $\mathbf{F}$ je výslednice všech sil.

Všichni řešitelé, i ti nejlepší, se dopouštěli v této úloze i v jiných úlohách terminologických a věcných chyb při úvahách o vektorových veličinách. V této úloze zaměňovali a) sílu $\mathbf{F}$, tj. vektorovou veličinu, b) velikost síly $\mathbf{F}$, tj. skalární veličinu $F (F \geq 0)$, c) průmět síly $\mathbf{F}$ do osy Ox , v níž síla leží, tj. skalární veličinu $F_x (F_x \geq 0)$. Psali např. „... tíhová síla $F_t = mg$ “, nebo „... síla od pružiny $F_p = -kx = -2\,mg$ “.

Úloha 4 — vodivá smyčka s indukovaným proudem

Toto byla úloha základního typu; k jejímu řešení stačilo pouze dobré porozumění zákonitostem elektromagnetické indukce. Proto je velmi překvapující, že došlo jen šest řešení a z nich pouze jedno bylo správné (*P. Sobotík — M. Šimek*) a jedno téměř správné (*J. Vohradník*).

I když bylo úkolem zakreslit graf indukovaného proudu, věnovali někteří autoři nesrovnatelně více místa i času výkladu obecné teorie. Graf však potom ukázal lépe než dlouhý obecný výklad nejen průběh proudu v uvažovaném konkrétním případě, nýbrž i to, zda autor věci opravdu rozumí. Zdá se, že jen málo studentů rozumí základním zákonům elektromagnetické indukce tak, aby je dovedlo bezpečně použít.

Úloha 5 — tlaková síla na míč

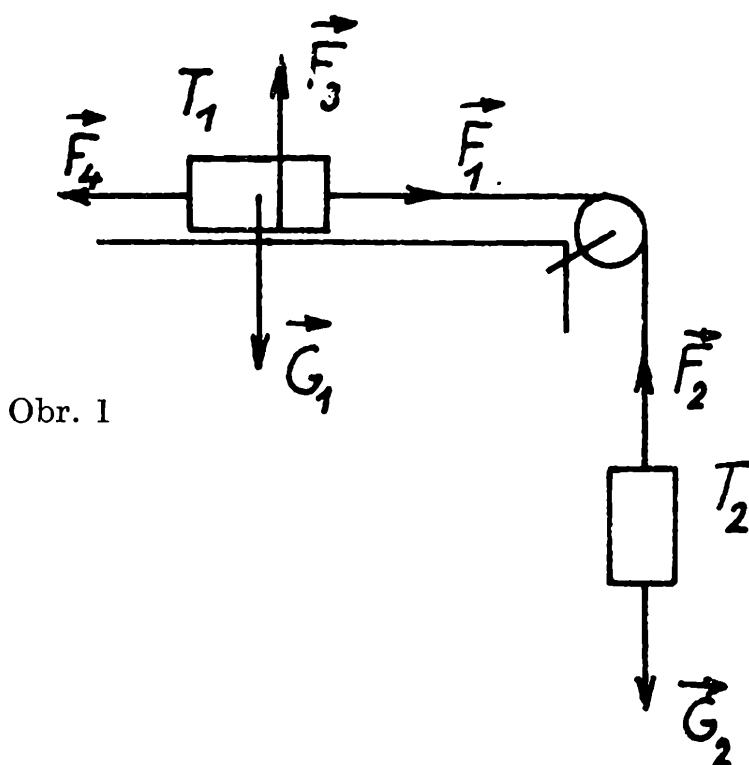
Z došlých řešení byla pouze tři správná nebo měla jen menší nedostatky. Všichni úspěšní řešitelé užili buď explicitně nebo implicitně integrace tlakových sil po kulové ploše, nikdo nedospěl k výsledku jednoduchou úvahou uvedenou v NŘ. Autoři nesprávných řešení udělali většinou chybu v tom, že místo tlakových sil, tj. vektorů, sčítali jejich velikosti.

Úloha 6 — síla působící na těleso na rotující tyči

Tato úloha dopadla velmi špatně; správné řešení zaslala pouze dvojice *P. Sobotík a M. Šimek*.

Na úloze ztroskotali i studenti, o jejichž schopnostech a fyzikální erudici nelze pochybovat, neboť jiné úlohy řešili velmi pěkně. Přitom úloha byla prostá; k jejímu řešení nebylo zapotřebí ani nějakého zvláštního obratu, ani si všimnout nějaké skryté souvislosti, nýbrž jen bezpečně vědět, co je síla dostředivá a jaké má vlastnosti. Domnívám se, že výklad dostředivé síly by měl být na střední škole proveden tak, aby úlohu tohoto typu byla schopna řešit většina studentů.

Zájemci o dostředivou sílu nechť si znovu přečtou NŘ. Budou-li mít i pak nejasnosti, nechť napíší do Rozhledů, které v případě většího zájmu uveřejní obsírnější výklad.



Obr. 1

Úloha 7 — akce a reakce

Tato úloha dopadla přímo katastrofálně. Došlo jen šest řešení a z nich nebylo jako celek správné ani jedno, všechna obsahovala vážné chyby. A přitom jsme se při sestavování této úlohy domnívali, že je jednoduchá a že v ní půjde jen o upevnění znalostí o tom, co je akce a reakce.

Ukázalo se, že naši studenti mají o akci a reakci, tj. o silách vzájemného působení, nejasné a mlhavé představy. Hlavní chyby byly:

- a) Tvrzení, že síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ na obr. 1 jsou ve vztahu akce a reakce.

Komentář: Jak to mohou být akce a reakce, když jedna je vodorovná a druhá svislá? Akce a reakce musí ležet v jedné přímce.

- b) Tvrzení, že sílu $\vec{F}_1$ na obr. 1 vyvozuje tíha tělesa T_2 a že síla $\vec{F}_1$ má tedy velikost $F_1 = m_2 g$.

Komentář: Tíha tělesa T_2 působí na těleso T_2 , je orientována svisle dolů a má velikost $G_2 = m_2 g$. Sílu $\vec{F}_1$ vyvozuje vlákno, je vodorovná a má (při zanedbatelné hmotnosti kladky a vlákna a při zanedbatelném tření) velikost danou vztahem $F_1 = m_1 m_2 g / (m_1 + m_2)$.

- c) Tvrzení, že síly $\vec{G}_1$ a $\vec{F}_3$ na obr. 1 jsou ve vztahu akce a reakce.

Komentář: Jak mohou být, když obě působí na stejné těleso?

- d) Tvrzení, že na těleso T_1 působí setrvačná síla $\vec{F}_4$ (obr. 1).

Komentář: V inerciální vztažné soustavě spojené se zemí setrvačné síly nepůsobí.

Úloha 8 — urychlená láhev s míčkem

Úloha dopadla výborně; přišlo šest řešení, z nichž pět bylo dobrých a šesté obsahovalo správnou odpověď s nesprávným zdůvodněním.

Tento výsledek je příjemným překvapením, neboť úlohu jsme nepovažovali za snadnou.

Příjemné překvapení, i když samozřejmě ne neočekávané, zažili jistě všichni ti, kdo si pokus s míčkem v láhvi provedli a zjistili, jak krásně v souladu s teorií se míček v urychlené láhvi chová.

Závěr

Úlohy fyzikální soutěže Rozhledů v minulém ročníku byly zaměřeny především na užití základních poznatků a zákonitostí. Nevyžadovaly speciální obraty nebo složité výpočty, nýbrž především bezpečné porozumění základním dějům a jejich zákonitostem. Ukázalo se i zde, podobně jak se to ukazuje i ve fyzice na vysokých školách, že právě tato věc činí studentům největší potíže.

Studium některých došlých řešení bylo pro nás potěšením. Je radost vidět, kolik schopných a bystrých studentů je na našich středních školách. Těšíme se, že se s nimi shledáme na vysokých školách.

Všichni, kdo zaslali řešení, ať už výborné, nebo jen dobré, nebo i nesprávné, zaslouží uznání a blahopřejeme jim. Aktivním řešením problémů vykonali pro to, aby dobře rozuměli fyzice, víc než pasivním studiem mnoha stran fyzikálních textů. Snad se při tom i pobavili.

Oprava

Ve 3. čísle Rozhledů došlo k nemilé chybě. Na str. 136 si laskavě opravte začátek textu 8. úlohy. Má znít takto:

Nechť Q je množina všech uspořádaných čtveřic reálných čísel (x_1, x_2, x_3, x_4) splňujících podmínku

$$x_i \neq x_j, \text{ jestliže } i \neq j.$$

(Další pokračování textu už souhlasí s formulací autora.)

Čtenářům a autorovi se redakce omlouvá.

Vysvětlení efektního experimentu Mýdlová bublina ve vodě ze str. 270

Povrchové napětí mýdlového roztoku způsobí, že se kapka tohoto roztoku vniklá do vody zformuje do koule, přičemž zůstane od vody oddělena tenkou vrstvou vzduchu. Povrchové napětí také zabrání smísení roztoku a vody.

Celostátní kolo 22. ročníku fyzikální olympiády

Třetí kolo 22. ročníku fyzikální olympiády v kategorii A proběhlo ve dnech 26.—29. dubna 1981 v Hradci Králové. V soutěži dostalo 82 řešitelů dne 27. dubna k řešení 4 úlohy teoretické (termika, optika, mechanika, elektřina), dne 28. dubna praktickou úlohu (tentokrát zvláštní varianta černé skříňky: čtyřstěn vyrobený z rezistorů a úkol stanovit, který z rezistorů je odlišný od ostatních). Opravující z řad členů ÚVFO řešení úloh ohodnotili a na závěrečném zasedání byly vyhlášeny výsledky celostátního kola; vítězové obdrželi ceny od ministerstva školství ČSR. Dvacet řešitelů bylo prohlášeno vítězi, dalších 39 účastníků bylo úspěšnými řešiteli a 23 účastníků celostátního kola neuspělo. K hodnocení bylo použito kritérií známých z mezinárodních fyzikálních olympiád: Nejlepší řešitel III. kola dosáhl hodnocení 50 bodů ze 60 bodů možných, takže za úspěšné byli prohlášeni všichni účastníci, kteří dosáhli 25 a více bodů.

Vítězi celostátního kola 22. ročníku FO byli vyhlášeni: *Bořivoj Tydlitát* (gymnázium W Piecka Praha), *Zdeněk Havránek* (gymnázium Kadaň), *Milan Hanajík* (gymnázium Novohradská Bratislava), *Petr Plecháč* (gymnázium W Piecka Praha), *Jan Němec* (gymnázium Praha, Nad štolou), *Petr Laciga* (gymnázium J. Fučíka Plzeň), *Antonín Fejfar* (gymnázium Koněvova Brno), *Vladimír Hudec* (gymnázium Košice, Šmeralova), *Pavel Matoušek* (gymnázium J. K. Tyla Hradec Králové), *Petr Pavlík* (SPŠS Přerov), *Petr Navrátil* (gymnázium Kolín), *Jozef Bednárík* (gymnázium A. Markuša Bratislava), *Jiří Matoušek* (gymnázium Praha, Voděradská), *Jaroslav Resler* (gymnázium Lanškroun), *František Slanina* (gymnázium Bílovec), *Jan Nekovář* (gymnázium W Piecka Praha), *Petr Šimek* (gymnázium Praha, Arabská), *Jaroslav Vodička* (gymnázium J. K. Tyla Hradec Králové), *Miloslav Mysík* (gymnázium Rumburk), *Petr Opočenský* (gymnázium Frýdlant v Č.).

Všem vítězům blahopřejeme a přejeme mnoho úspěchů při jejich vysokoškolském studiu.

RNDr. Ivo Volf

Dvanáctá mezinárodní fyzikální olympiáda

Po dvou letech, jež uplynuly od 11. MFO v Moskvě, sešla se družstva 14 států na 12. mezinárodní fyzikální olympiádě ve Varně. Vyznačovala se vysokou organizační úrovní a mimořádným pohostinstvím pořádajících bulharských organizátorů. Soutěže se zúčastnila družstva: BLR, ČSSR, Finska, Francie, Jugoslávie, MLR, NDR, NSR, PLR, RSR, Švédsko, Itálie, Vietnamu, SSSR.

Československé družstvo bylo vytvořeno z vítězů celostátního kola FO v kategorii A; 14 účastníků bylo pozváno na soustředění širšího výběru. Na základě prověřkových testů byli vybráni do reprezentačního družstva Bořivoj Tydlitát (Praha), Milan Hanajík (Bratislava), Petr Pavlík (Přerov), Petr Plecháč (Praha), Jiří Matoušek (Praha). Jako náhradníci byli určeni Pavel Matoušek (Hradec Králové), Petr Laciga (Plzeň). Do BLR odletělo 1. července 1981 5 řádných členů družstva pod vedením doc. dr. ing. Daniela Kluvance, CSc. a dr. Ivo Volfa.

Soutěžící řešili 3. července tři náročné teoretické úlohy (termika + mechanika, elektřina, optika), 5. července úlohu praktickou (Hookův zákon). Odevzdaná řešení byla xeroxována a dána k dispozici vedoucím a řešitelům, takže vyhodnocení výsledků bylo velmi korektní. Z 50 možných bodů získal *A. Gutin* ze SSSR celkem 47 bodů a tak vytvořil hranice pro stanovení cen. Naši soutěžící získali: *M. Hanajík* 41 bodů a II. cenu ($8 + 6 + 8 + 19$), *Petr Pavlík* 41 bodů a II. cenu ($8 + 8 + 5 + 20$), oba na hranici k I. ceně (bylo třeba dosáhnout 42 bodů), *J. Matoušek* 38 bodů a II. cenu ($6 + 8 + 8 + 16$), *B. Tydlitát* 36 bodů a II. cenu ($6 + 5 + 6 + 19$), *P. Plecháč* 26 bodů a pochvalné uznání ($5 + 5 + 2 + 14$).

Československé družstvo získalo nejlepší výsledky v experimentální úloze. I když je MFO soutěží jednotlivců, pokaždé se určuje pořadí družstev jednotlivých států. V neoficiálním hodnocení států zvítězilo družstvo Sovětského svazu s 202 body, dále se umístila družstva NSR — 199 bodů, RSR — 190 bodů, PLR — 188 bodů. Československé družstvo bylo na 5. místě se 180 body, což je pouze o 10 % méně, než dosáhlo družstvo vítězů.

Na této mezinárodní fyzikální olympiádě získalo 7 účastníků I. cenu, 19 účastníků II. cenu, 18 účastníků III. cenu a 16 účastníků pochvalné uznání. Pouze 10 účastníků bylo neúspěšných.

Účastníci dvanácté MFO měli velmi bohatý kulturní, sportovní, turistický a poznávací program. Vedoucí se zúčastnili semináře o úloze fyzikálních olympiád při rozvíjení zájmu a tvůrčích schopností žáků, který uspořádalo ministerstvo školství BLR pod patronací UNESCO.

Na závěrečném zasedání tlumočili vedoucí některých delegací předběžná pozvání na další MFO: 13. MFO do NSR, 14. MFO do RSR, 15. MFO — do Švédska, 16. MFO v r. 1985 — do NDR.

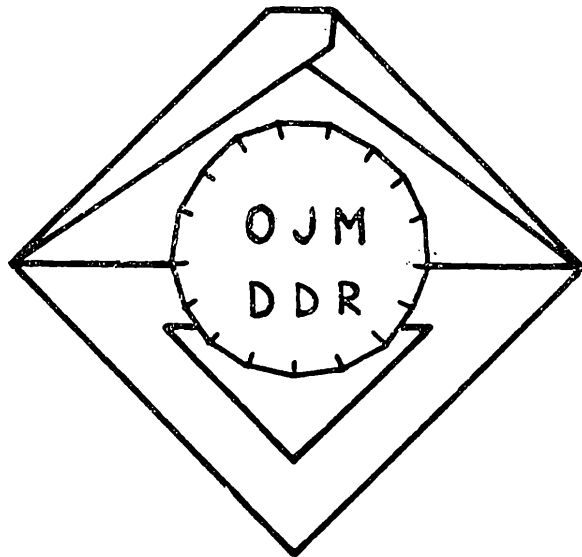
Přejeme všem čtenářům Rozhledů, kteří se ve velké většině účastní naší fyzikální olympiády, aby byli úspěšnými řešiteli a mohli se těšit na některou z budoucích mezinárodních fyzikálních olympiád.

Dr. Ivo Volf

Olympiáda mladých matematiků v NDR

RNDr. LEO BOČEK, CSc., fakulta matematicko-fyzikální UK, Praha

V loňském školním roce proběhl v naší republice již 30. ročník matematické olympiády. Podobné soutěže se dnes konají snad ve všech evropských státech. V Německé demokratické republice probíhá matematická soutěž pro středoškoláky i žáky základních škol pod názvem „*Olympiade junger Mathematiker*“, tedy Olympiáda mladých matematiků, ve zkratce OJM. Ve školním roce 1981/82 se koná již 21. ročník.



Obr. 1

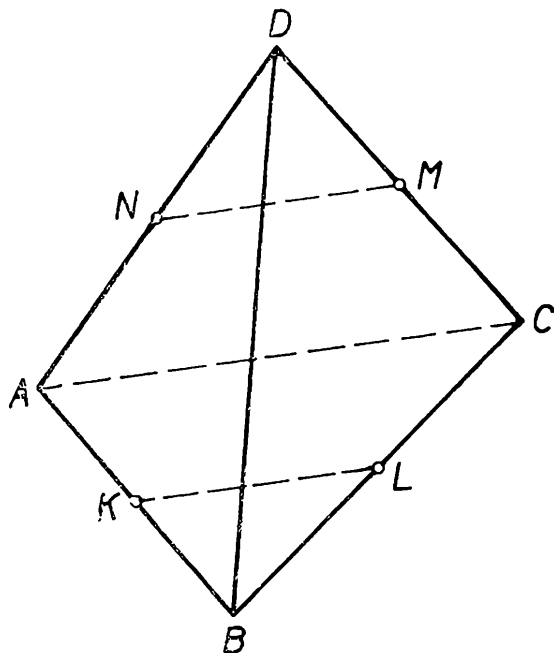
Na obr. 1 je znak této soutěže, který zdobí všechny diplomy a čestná uznání pro její nejúspěšnější účastníky. Skládá se z trojúhelníku, kružítka a pravidelného sedmnáctiúhelníku, v němž jsou zkratky OJM a DDR. Olympiáda mladých matematiků je pořádána pro žáky 5. až 12. tříd. Žáci každé třídy soutěží v samostatné kategorii, pouze žáci 11. a 12. tříd řeší tytéž úlohy, poradí se však určuje zvlášť pro žáky 11. tříd a zvlášť pro žáky 12. tříd. Soutěž probíhá obdobně jako u nás v několika

kolech. Všichni soutěží v kole školním a okresním, žáci 7. a vyšších tříd soutěží i v kole krajském a pro žáky 10., 11. a 12. tříd se koná i kolo celostátní, a to téměř vždy na stejném místě nedaleko Berlína. Krajské kolo je dvoudenní, celostátní kolo je třídní, poslední den je vždy věnován slavnostnímu vyhlášení výsledků a předání diplomů a knižních odměn těm nejúspěšnějším.

Ukážeme si teď tři geometrické úlohy z krajského kola 20. ročníku OJM:

1. Pro deváté třídy byla určena úloha: Ukažte, že rovinným řezem pravidelného čtyřstěnu může být čtverec.

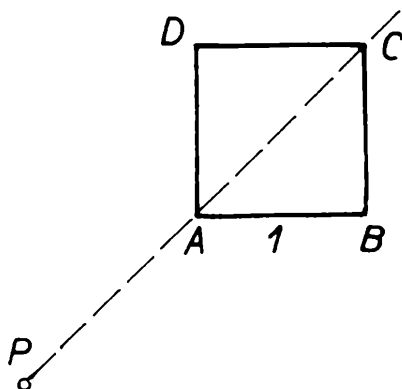
Řešení: Označme vrcholy čtyřstěnu A, B, C, D (obr. 2) a označme dále po řadě K, L, M, N středy úseček AB, BC, CD, DA . Pak je úsečka KL střední příčkou trojúhelníku ABC a MN střední příčkou trojúhelní-



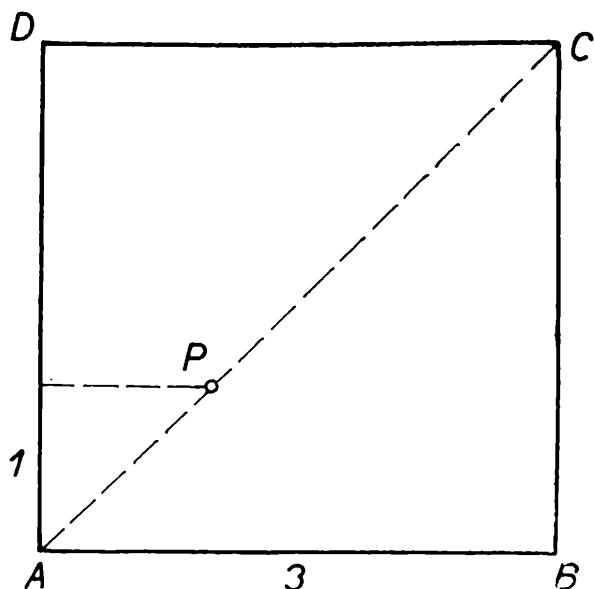
Obr. 2

ku ACD , $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$. Tudíž $KL \parallel MN$ a $|KL| = |MN| = |AC|/2$. Je proto $KLMN$ rovnoběžník, neboť dvě jeho strany jsou spolu rovnoběžné a stejně dlouhé. Víme dokonce, že je to kosočtverec, protože $|KN| = |BD|/2 = |AC|/2 = |KL|$. Dále víme, že $|AM| = |BM|$, je tedy KM výška v trojúhelníku ABM . Stejně tak je NL výška v trojúhelníku BCN . Trojúhelníky ABM a BCN jsou shodné, tudíž $|KM| = |NL|$. Kosočtverec se stejně dlouhými úhlopříčkami je však nutně čtverec. Tím je dokázáno, že rovina KLM protíná čtyřstěn $ABCD$ ve čtverci.

2. Žáci 10. tříd řešili úlohu: V rovině je dán bod P . Existuje v této rovině čtverec $ABCD$ tak, že $|PA| = \sqrt[3]{2}$, $|PB| = \sqrt[3]{5}$, $|PC| = \sqrt[3]{8}$? Jestliže ano, jak velká je strana čtverce $ABCD$?



Obr. 3a



Obr. 3b

Řešení: Předpokládejme, že takový čtverec existuje. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby platilo $A = [0; 0]$, $B = [a; 0]$, $C = [a; a]$, $P = [x; y]$. Podle předpokladu má pro x , y a velikost a strany hledaného čtverce platit

$$x^2 + y^2 = 2, (x - a)^2 + y^2 = 5, (x - a)^2 + (y - a)^2 = 8.$$

Odečtením první rovnice od druhé, případně třetí dostaneme

$$2ax = a^2 - 3, 2ay = a^2 - 3.$$

Zřejmě musí být $a \neq 0$, dosazením za x , y do první rovnice dostaneme pro a^2 rovnici $a^4 - 10a^2 + 9 = 0$, proto $a^2 = 1$ nebo $a^2 = 9$. Protože $a > 0$, je $a = 1$ nebo $a = 3$. Polohy čtverce $ABCD$ a bodu P jsou znázorněny pro oba kořeny na obr. 3a, 3b. Zkouškou se přesvědčíme, že oba obdržené čtverce jsou skutečně řešením úlohy.

3. Pro žáky nejvyšších tříd (11. a 12.) byla mezi jinými úloha: Dokažte, že nemůžeme zvolit kartézskou soustavu souřadnic tak, aby všechny vrcholy pravidelného $3n$ -úhelníku měly obě souřadnice racionální.

Řešení: Mezi vrcholy pravidelného $3n$ -úhelníku můžeme vybrat tři, které tvoří rovnostranný trojúhelník, označme je A , C , E a nechť v libovolně zvolené soustavě souřadnic kartézské platí $A = [a; b]$, $C = [c; d]$, $E = [e; f]$. Můžeme předpokládat, že žádná ze stran AC , AE není rovnoběžná s osou y soustavy souřadnic, v opačném případě bychom ji nahradili třetí stranou trojúhelníku. Směrnice přímky AC je $k = (d - b)/(c - a)$, směrnice přímky AE je $k' = (f - b)/(e - a)$. Protože svírají tyto dvě přímky úhel 60° , je $\sqrt{3} = \tan 60^\circ = (k - k')/(1 + kk')$. Kdyby byla všechna čísla a, b, c, d, e, f racionální, byla by racionální i čísla k, k' , a tedy také $\sqrt{3}$, což by byl spor.

Líbily se vám úlohy z Olympiády mladých matematiků NDR? Jestliže ano a jestliže se zároveň učíte německy, můžeme vám doporučit časopis „Alpha“, který vychází v NDR, je k dostání i u nás a má podobné poslání jako naše Rozhledy matematicko-fyzikální, přináší hodně úloh a informuje také o OJM.

INFORMACE

Karlovy Vary 1981

Stalo se už tradicí, že Jednota československých matematiků a fyziků (JČSMF) a Jednota slovenských matematiků a fyziků (JSMF) pořádají své sjezdy ve stejném termínu a na stejném místě. Tak se ve dnech 11. až 14. října 1981 sjeli představitelé obou Jednot do Karlových Var, aby tam zhodnotili tři roky, které uplynuly od minulého sjezdu v Popradu a aby zvolili své nové ústřední výbory. Sjezdy JČSMF a JSMF se konaly v hotelu Moskva a byly předznamenány blížícím se 120. výročím vzniku Spolku pro volné přednášky z matematiky a fyziky, od něhož obě Jednoty odvozují svou existenci. Toto výročí připadá, jak známo, na rok 1982. Náš časopis vychází za odborné péče JČSMF, a proto bychom rádi stručně informovali o sjezdovém jednání v Karlových Varech.

Po volbách byl do čela JČSMF na příští tři roky postaven *prof. RNDr. Ivan Úlehla, DrSc.*, a předsedou JSMF se stal *člen korespondent ČSAV Július Krempaský*. Už před příchodem do Karlových Var dostali všichni delegáti a pozvaní hosté Sjezdový sborník 1981, v němž JČSMF a JSMF shrnují svou činnost za poslední období. Je v něm také úvodník k uctění památky Bernarda Bolzana, od jehož narození uplynulo právě v říjnu 1981 dvě stě let.

Naši čtenářskou obec může zajímat, že se v Karlových Varech jednalo také o Rozhledech matematicko-fyzikálních. V besedě přednesl vedoucí redaktor našeho časopisu *prof. Emil Kraemer* zprávu o současném stavu a připomněl, že pocítujeme zejména nedostatek vhodných příspěvků fyzikálních. V diskusi promluvil o Rozhledech také *RNDr. Jaroslav Šedivý, CSc.*, který na toto téma napsal rovněž příspěvek do Sjezdového sborníku 1981. Všichni bychom si jistě přáli, aby se úroveň Rozhledů stále zlepšovala a aby byl vždycky dostatek vhodných článků a úloh — matematických i fyzikálních.

Při zprávě o současném stavu členstva JČSMF se zjišťovalo, že mladá a nejmladší generace našich matematiků a fyziků stojí trochu stranou. Je to výzva také do řad našich čtenářů, vždyť už zakladatelé našeho

hnutí před 120 léty byli studenti, mnozí z nás starších pracují v Jednotě už od svých středoškolských let a Jednota i dnes ráda vychází vstříc mladé generaci. Středoškolští profesori matematiky a fyziky tvořili kdysi podstatnou složku členstva JČSMF, dnes se však situace zhoršila v neprospěch této vrstvy. JSMF je na tom v tomto ohledu lépe a pedagogové ze středních a odborných škol v dostatečné míře doplňují její členskou základnu.

Na svých sjezdech zvolily obě Jednoty také své nové čestné a zasloužilé členy. Nás potěšilo, že za čestného člena JČSMF byl rovněž vybrán *Stanislav Horák*, dlouholetý člen naší redakce, který byl v minulých letech po určité období i výkonným redaktorem *Rozhledů*. Blahopřejeme našemu milému spolupracovníkovi k této poctě a ať se s jeho jménem ještě dlouho setkáváme na těchto stránkách!

Podle údajů z roku 1981 měla JČSMF 3123 členů, JSMF celkem 2916 členů a členská základna se stále mírně rozrůstá. Bližší údaje o obou vědeckých společnostech přináší členský časopis *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, kde se také najdou podrobnější informace o obou sjezdech v Karlových Varech.

Jiří Sedláček

Z NOVÝCH KNIH

J. Moravčík, L. Boček, L. Bukovský, A. Vrba, J. Vyšín, F. Zítek:

Dvacátý osmý ročník matematické olympiády.

Státní pedagogické nakladatelství v Praze, 1981, edice Pomocné knihy pro žáky, stran 175, obr. 39, cena brožovaného výtisku Kčs 8,—

Je to další člen ve známé posloupnosti ročenek matematické olympiády. Osmadvacátý ročník MO se konal ve školním roce 1978—79. V kategoriích A, B, a C se soutěže účastnilo celkem 4273 středoškoláků a v kategorii Z bylo 16 022 soutěžících. Připomeňme si, že absolutním vítězem třetího kola kategorie A, které se konalo v Trnavě, se stal Josef Tkadlec z gymnázia v Bílovci.

Knížka obsahuje také zprávu o XXI. ročníku mezinárodní matematické olympiády, který se konal od 28. června do 9. července 1979 ve Velké Británii. Z osmičlenného československého družstva tam podal nejlepší výkon jeho nejmladší člen Jan Nekovář, který v soutěži neztratil ani bod a získal tak jednu z prvních cen. Třetí ceny si z Velké Británie odvezli Miroslav Chlebík, Jozef Jirásek, Radan Kučera a Josef Tkadlec.

Nová brožura ovšem obsahuje jako obvykle řešení všech úloh z naší i z mezinárodní MO a poslouží proto v budoucnu dalším olympionikům jako studijní materiál.

Jiřina Sedláčková

Č. ŠIMÁNĚ: FRÉDÉRIC JOLIOT-CURIE

Medailóny edice nakladatelství Horizont, Praha 1980, 147 stran, 7 obrázků, náklad 5000 výtisků, cena 9 Kčs.

Medailón je věnovaný jedné z nejvýznamnějších postav světové vědy našeho století, jadernému fyzikovi a veřejnému činiteli F. Joliot-Curiemu. Medailón vyšel k jeho nedožitým osmdesátinám. Autor knihy, profesor fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT, osobně znal F. Joliot-Curieho, jeho manželku Irenu (dceru Marie a Pierra Curieových) i řadu jejich spolupracovníků. Seznámil se s nimi v letech 1947–49, kdy déle než rok pracoval v Paříži v laboratořích Joliot-Curieho. Kniha obsahuje řadu osobních vzpomínek na setkání se Joliotem-Curiem. Autor v historickém sledu popisuje životní kariéru Joliot-Curieho, zmiňuje se o jeho mládí, o vědecko-výzkumné práci, občanských postojích, boji za zákaz použití jaderných zbraní a o jeho snahách o mírové využití jaderné energie. Kniha není pouhým strohým životopisem Joliot-Curieho. Čtenář se v ní dovídá i mnoho zajímavostí o pionýrských výzkumech v jaderné fyzice, o experimentálních metodách používaných v té době i o způsobu práce v tehdejší laboratoři světové úrovně. Autor zajímavým způsobem přibližuje čtenáři pracovní ovzduší, které existovalo v laboratoři Joliot-Curieho. Citujme jako příklad úryvek ze strany 24.

„Přístup k cyklotronu byl možný i za jeho provozu. Byl sice obklopen stíněním, které bylo považováno za dostatečné, ve skutečnosti však tomu tak nebylo. Nesmíme zapomenout, že se psal rok 1947, kdy se ochrana před zářením v laboratořích teprve začínala brát vážně, kdy se však radioaktivní roztoky stále ještě často pipetovaly přímo ústy. U cyklotronu se někdy pil čaj v místech, odkud bylo vidět na svazek vystupujících deutronů, který se jevil v důsledku ionizace vzduchu jako plochý fialový vějíř. Jeho průřez bylo možno zachytit na parafínové destičce, do níž svou stopu vytavil. Jednomu pracovníkovi narostla jednou na hřbetě ruky velká bradavice. Zafixovali jsme mu ruku tak, aby svazek dopadal právě na bradavici. Po nějaké době skutečně spálená bradavice odpadla, ale místo ní narostla ještě větší. Dnes by se nikdo neodvážil takto hazardovat se zdravím. Tenkrát jsme byli ještě mladí a nezkušení;.....“

V závěru knihy jsou uvedena životopisná data Joliot-Curieho a seznam významných událostí politického a vědeckého života, které se udály v době, kdy žil Joliot-Curie.

Knihu lze doporučit všem těm, kteří se chtějí seznámit s životem Frédérica Joliot-Curieho, se způsobem experimentování před padesáti léty a s historií fyzikálního bádání, které přivedlo lidstvo k uvolňování jaderné energie.

Zdeněk Janout

SLOVNÍČEK

ITALSKO-ČESKÝ (DOKONČENÍ)

vento m
verifica, verifica^{zione} ž
verità ž
verniero m
vero
verso
verso m
vertice m
vettore m
vibrazioni ž
viceversa
vicino
vigore m
vincolo m
virgola ž
virtuale
virtù ž
in virtù di
visibile
visione ž
vita ž
— media
vite ž
vizioso
circolo vizioso
volume
volumetro
voluta
vuoto

zero m
zona ž
— sferica

vítr
verifikace, ověření
pravda
nonius
pravdivý
proti
směr, smysl; rub
vrchol
vektor
kmity, kmitání
naopak, opačně, obráceně
sousední, blízký; blízko
platnost
pouto, upoutání
čárka
virtuální, neskutečný, myšlený
ctnost; síla, působivost
podle, vzhledem k platnosti
viditelný
vidění
život
poločas (rozpadu)
šroub
chybný, vadný
bludný kruh
objem
hustoměr
spirála
prázdný

Z

nula, nulový bod
pás; pásmo
kulový pás

HORIZONT, nakladatelství Socialistické akademie ČSSR,
vydalo v edici **MEDAILONY**, která je věnována významným osobnostem, též tyto
svazky:

J. Haubelt: Mikuláš Koperník
Č. Šimáně: Frédéric Joliot-Curie
J. Koryta: Jaroslav Heyrovský
K. Berka: Bernard Bolzano

Vydává ministerstvo školství ve Státním
pedagogickém nakladatelství v Praze za
odborné péče Jednoty čs. matematiků
a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné
20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého
čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody,
nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12
Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služ-
ba. Informace o předplatném podá a objed-
návky přijímá každá administrace PNS, pošta
a doručovatel. Objednávky do zahraničí
vyřizuje PNS — ústřední expedice a do-
voz tisku Praha, závod 01, administrace vý-
vozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Ja-
zyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n.ř.p.
v Praze 1982.

ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

1921/22

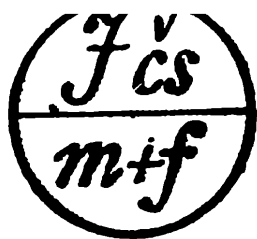
1981/82

*** 60 let**

**ROČNÍK 60, 1981/82
BŘEZEN**

(7)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc,
doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava,
Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha,
doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha,
doc. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra,
ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

E. Calda: Matematika v horních systé- mech sportovních soutěží	297
L. Beček: Podobnost	298
I. Drbehlarová: Obousměrná zelená vlna	299
Z. Renc: O matematické logice III.	302
L. Zachoval: Jak na ní vyzrát, na tu fyziku?	306
V. Malíšek: Znáte stavovou rovnici plynů?	311
J. Tolar: Uvidíme kontrakci dělek?	312
R. Kolomý: Pražský pobyt Jana Keplera	317
V. Malíšek: Kdo byl Archimédes ze Syrakus	320
K. Koman: Mnohobarevné krychle	323
J. Srobeda: Hlavolet kotva	326
Olympiády	329
Informace	330
Z nových knih	336
Pohledy do dějin	3. str. obálky

Matematika v herních systémech sportovních soutěží

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

Připravujete přebor třídy ve stolním tenisu, přebor školy v odbíjené nebo nohejbalový turnaj při zemědělské brigádě? Potřebujete vědět, kolik utkání bude nutno sehrát? Pokračujte i nadále v četbě tohoto článku — odvodíme v něm vzorce pro celkový počet utkání jakékoliv soutěže, pokud je založena na některém z následujících herních systémů:

system každý s každým,
system na jednu porážku (tzv. k. o. system),
system na dvě porážky.

Tyto herní systémy patří mezi nejpoužívanější; kterého z nich pro danou soutěž použijete, závisí na počtu účastníků, počtu hřišť a době, kterou máte pro soutěž k dispozici.

V systému každý s každým je počet všech utkání roven počtu všech neuspořádaných dvojic, jež lze utvořit z n účastníků soutěže. Některým z vás už je známo, že jde o počet všech dvouprvkových kombinací z n prvků a že tento počet je dán kombinačním číslem

$$\binom{n}{2} = \frac{n}{2} (n - 1)$$

Ostatní si mohou tento vzorec snadno odvodit třeba takto: představíme si účastníky soutěže ve vrcholech konvexního n -úhelníka; každou spojnicí dvou vrcholů lze pak chápat jako utkání účastníků v těchto vrcholech umístěných a také obráceně — každé utkání dvou účastníků lze reprezentovat příslušnou spojnici. Počet všech utkání je tedy roven počtu všech těchto spojnic, tj. celkovému počtu stran a úhlopříček konvexního n -úhelníka. Protože z každého z n jeho vrcholů vychází $n-1$ stran a úhlopříček, je v součinu $n(n-1)$ každá strana i úhlopříčka počítána dvakrát, takže celkový počet stran a úhlopříček konvexního n -úhelníka je poloviční.

Pro počet p všech utkání soutěže o n účastnících hrané systémem každý s každým tedy platí:

$$p = \frac{n}{2}(n - 1)$$

Počet všech utkání soutěže hrané *systém na jednu porážku* odvodíme nejprve za předpokladu, že počet n účastníků je roven mocnině čísla dvě, tj. $n = 2^m$, kde m je přirozené. Pro $n = 8$ je situace znázorněna na obr. 1. Zobecněním dostaneme tabulku 1, z níž vyplývá, že celkový

Tab. 1

kolo	počet účastníků	počet utkání
1.	2^m	2^{m-1}
2.	2^{m-1}	2^{m-2}
3.	2^{m-2}	2^{m-3}
$(m - 1)$ -ní	4	2
m -té	2	1

počet utkání, tj. součet všech utkání v jednotlivých kolech, je roven

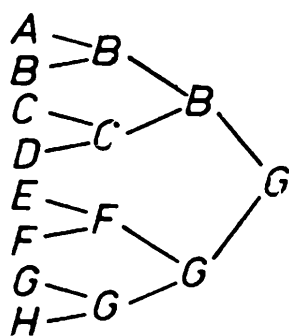
$$2^{m-1} + 2^{m-2} + 2^{m-3} + \dots + 2 + 1 = 2^m - 1.$$

Užitím předpokladu pro počet účastníků $n = 2^m$ dostáváme, že je nutno sehrát celkem $2^m - 1 = n - 1$ utkání.

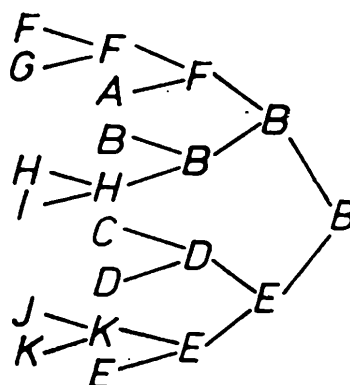
V případě, že počet n účastníků není mocninou čísla dvě, nelze podle obr. 1 postupovat. Vyjádříme proto číslo n jako součet nejvyšší mocniny čísla dvě, která je menší než n , a přirozeného čísla k , tj. ve tvaru

$$n = 2^m + k.$$

Potom vybereme $2k$ účastníků soutěže a zařadíme je do předkola. Tím dosáhneme toho, že v 1. kole bude opět 2^m účastníků; bude v něm



Obr. 1



Obr. 2

totiž jednak $n - 2k$ přímých účastníků, jednak k účastníků, kteří zvítězili v předkole, což je

$$(n - 2k) + k = n - k = 2^m.$$

Pro $n = 11$ je situace znázorněna na obr. 2; zobecněním dostaneme tabulku 2, v níž je předkolo označeno jako kolo nulté.

Tab. 2

kolo	počet účastníků	počet utkání
0.	$2k$	k
1.	2^m	2^{m-1}
2.	2^{m-1}	2^{m-2}
3.	2^{m-2}	2^{m-3}
m -té	2	1

Počet všech utkání — s ohledem na předpoklad $n = 2^m + k$ — je roven
 $k + 2^{m-1} + 2^{m-2} + 2^{m-3} + \dots + 1 = k + (2^m - 1) = (k + 2^m) - 1 = n - 1.$

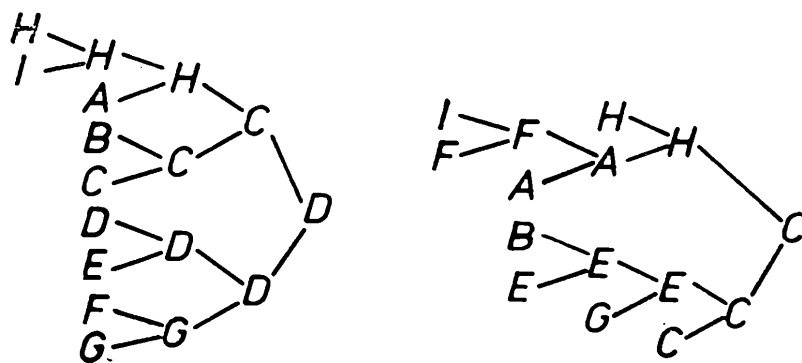
Počet utkání je tedy v obou případech týž nezávisle na tom, zda počet účastníků soutěže je či není mocninou čísla dvě.

Pro celkový počet p utkání soutěže o n účastnících hrané systémem na jednu porážku platí:

$$p = n - 1.$$

V systému na dvě porážky postupují vítězové stejným způsobem jako u systému předchozího, poražení vytvářejí skupinu další; soutěžící je vyřazen teprve po dvou porážkách. Pro $n = 9$ je situace znázorněna na obr. 3; na levém obrázku je skupina vítězů, na pravém skupina pora-

Obr. 3



žených. Celkový počet utkání dostaneme snadno, uvědomíme-li si, že ve skupině vítězů i ve skupině poražených se hraje na jednu porážku. Ve skupině vítězů s n účastníky tedy jde o $n-1$ utkání, ve skupině poražených, která má $n-1$ účastníků (dostane se do ní každý účastník skupiny vítězů s výjimkou jejího vítěze), jde o $n-2$ utkání; počet všech utkání je

$$(n - 1) + (n - 2) = 2n - 3.$$

Pro počet p všech utkání soutěže o n účastnících hrané systémem na dvě porážky platí:

$$p = 2n - 3.$$

Uvedené systémy je možno různým způsobem kombinovat. Účastníky lze např. rozdělit do skupin, v nichž se bude hrát systémem každý s každým, a jejich vítězové, respektive první dva se pak mohou utkat vylučovacím způsobem apod. Jde o to, aby systém, který si vyberete, co nejlépe vyhovoval podmínkám, jež pro uskutečnění soutěže máte k dispozici.

Na závěr zbývá už jen popřát vám hodně zdaru nejen v organizaci různých sportovních soutěží, ale i v účasti na nich.

DŮLEŽITÉ UPOZORNĚNÍ

Při vyúčtování autorských honorářů musí redakce uvádět rodná čísla. Žádáme tedy všechny autory, aby při zaslání svých příspěvků do Rozhledů mimo své adresy uváděli také svá rodná čísla.

Podobnost

RNDr. LEO BOČEK, CSc., MFF UK Praha

Jistě každý z vás byl někdy na pěším výletě a možná, že jste dokonce měli s sebou mapu a sledovali na ní trasu svého pochodu. Podle mapy jste poznali, kolem jakých zajímavostí vaše cesta povede, a již napřed jste se mohli těšit, že brzy přijdete k zajímavé kulturní památce, k rozhledně nebo k rybníku. A také jste z mapy vyčetli, jakou část cesty jste již ušli a kolik vám ještě zbývá do cíle. To proto, že víte, co je mapa. Je to obraz malé části povrchu zemského, kterou uvažujeme jako část roviny (zatím neuvažujeme výškové rozdíly, ty vyčteme z mapy pomocí tzv. vrstevnic). Přitom vzdálenost dvou bodů A, B na mapě se samozřejmě nerovná vzdálenosti těch bodů A', B' ve skutečnosti, které body A, B znázorňují. To by musela být mapa tak velká jako území, které zobrazuje. Víme však, že existuje kladné číslo k tak, že pro každé dva body A, B na mapě a odpovídající body A', B' v zobrazovaném území platí

$$(1) \quad |A'B'| = k|AB|.$$

Poměr $1/k$ se nazývá *měřítko mapy*, u turistických map je to zpravidla $1/100\,000$, a je-li $|AB| = 1$ cm, je $|A'B'| = 100\,000$ cm $= 1000$ m $= 1$ km. Stručně říkáme, že 1 cm na mapě je ve skutečnosti 1 km.

Zobrazení roviny nebo její části do roviny, ke kterému existuje kladné číslo k tak, že pro vzdálenost $|AB|$ libovolných dvou bodů A, B a vzdálenost $|A'B'|$ jejich obrazů A', B' platí vztah (1), se nazývá podobnost, číslo k je koeficientem této podobnosti. Koeficient podobnosti udává, kolikrát je vzdálenost obrazů dvou bodů větší než vzdálenost vzorů. Slovo „větší“ není tady zcela správné, protože v případě $k < 1$ je vzdálenost obrazů vlastně menší než vzdálenost vzorů.

Je-li C bodem úsečky AB , je $|AC| + |CB| = |AB|$ a tedy $|A'C'| + |C'B'| = |A'B'|$, kde A', B', C' jsou obrazy bodů A, B, C v podobnosti. Z poslední rovnice plyne, že bod C' je bodem úsečky $A'B'$. Tím jsme dokázali, že podobnost zobrazuje tři body ležící v jedné přímce opět v body na přímce.

Jak je to s odchylkou dvou přímek, také se při podobnosti k -krát zvětší? Nezvětší, všichni víte, že azimuty změřené na mapě se rovnají azimutům odpovídajících směrů ve skutečnosti. Tak je tomu při každé podobnosti. Tvoří-li body A, B, C trojúhelník, tvoří trojúhelník i body A', B', C' a platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|$. Stručně říkáme, že se při podobnosti velikosti úhlů zachovávají.

Podívejme se teď na obsahy odpovídajících si útvarů. Zobrazíme-li v podobnosti s koeficientem k trojúhelník ABC , dostaneme trojúhelník $A'B'C'$, jehož úhly jsou stejně velké jako odpovídající úhly v trojúhelníku

ABC a jehož strany jsou k -krát větší než odpovídající strany v trojúhelníku ABC . Takové dva trojúhelníky se nazývají podobné. Stručně se říká, že trojúhelník $A'B'C'$ je k -krát větší než trojúhelník ABC , ale pozor. To neznamena, že je také obsah trojúhelníku $A'B'C'$ k -krát větší než obsah trojúhelníku ABC . Označíme-li totiž v velikost výšky příslušné k straně AB v trojúhelníku ABC a P jeho obsah a podobně v' výšku k straně $A'B'$ v trojúhelníku $A'B'C'$ a P' jeho obsah, platí

$$2P' = |A'B'| \quad v' = k|AB| \quad k v = 2 k^2 \cdot P.$$

Vidíme, že při podobnosti s koeficientem k se obsah trojúhelníku zvětší k^2 -krát, přesněji řečeno platí $P' = k^2 P$.

Rozdělme stranu AB trojúhelníku ABC bodem F v poměru $p : q$ a vedme bodem F přímkou rovnoběžnou s BC . Tím rozdělíme trojúhelník ABC na trojúhelník AFG a lichoběžník $BCGF$. Jaký je poměr jejich obsahů? Trojúhelníky AFG a ABC jsou podobné, koeficient podobnosti je

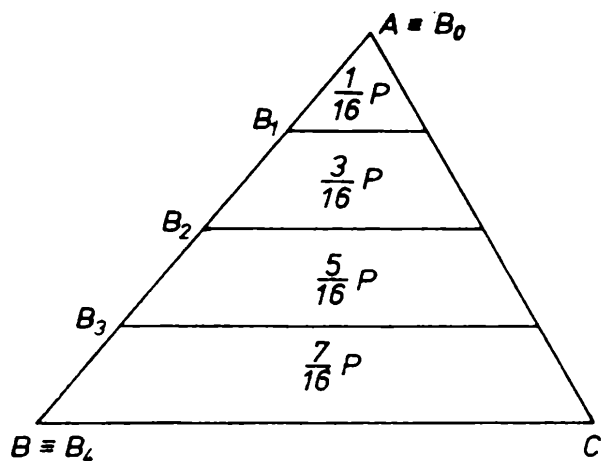
$$\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{p + q}{p},$$

proto je obsah P trojúhelníku ABC $\left(\frac{p + q}{p}\right)^2$ - krát větší než obsah P_1 trojúhelníku AFG . Obsah P_2 lichoběžníku $BCGF$ je roven rozdílu obsahů obou trojúhelníků, je tedy

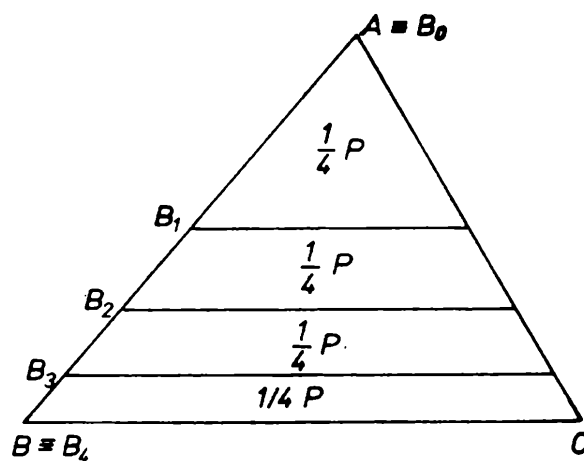
$$P_2 = P - P_1 = \left[\left(\frac{p + q}{p} \right)^2 - 1 \right] P_1 = \frac{2pq + q^2}{p^2} P_1$$

Je-li F středem úsečky AB , je $p = q$, $P = 4P_1$, $P_2 = 3P_1$.

Rozdělíme-li stranu AB body $A = B_0, B_1, \dots, B_n = B$ na n stejných dílů (obr. 1) a vedeme-li těmito body rovnoběžky s přímkou BC , rozdělíme tím trojúhelník ABC na trojúhelník a $n - 1$ lichoběžníků. Označíme-li P obsah trojúhelníku ABC , jsou obsahy malého trojúhelníku a lichoběžníků rovny $P/n^2, 3P/n^2, 5P/n^2, \dots, (2n - 1) P/n^2$. To bychom dokázali stejně, jako jsme odvodili výsledek předcházejícího odstavce. Můžeme si teď položit otázku, jak bychom museli zvolit body $B_1, \dots, B_{n-1}$, aby rovnoběžky vedené těmito body rovnoběžně s přímkou BC rozdělily trojúhelník ABC na n částí stejného obsahu. Označme opět P obsah trojúhelníku ABC a P_k obsah trojúhelníku, který od trojúhelníku ABC odděluje rovnoběžka s BC vedená bodem B_k . Podle podmínky úlohy je $P_k = kP/n$, zároveň je $P_k = (|AB_k|/|AB|)^2 P$, odkud plyne $|AB_k| = (\sqrt{k}/\sqrt{n}) |AB|$ pro $k = 1, 2, \dots, n - 1$. A to jsou nejen nutné, ale i postačující podmínky pro to, aby odpovídající rozdělení trojúhelníku ABC bylo jeho rozdělením na n částí stejného obsahu. Odvozené podmínky můžeme psát ve tvaru



Obr. 1



Obr. 2

$$|AB_1| \quad |AB_2| \quad \dots \quad |AB_{n-1}| \quad |AB| = 1 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{n-1} \quad \sqrt{n}$$

nebo

$$\frac{|AB_1|}{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2})} \frac{|B_1B_2|}{(\sqrt{n-2} - \sqrt{n-3})} \dots \frac{|B_{n-2}B_{n-1}|}{(\sqrt{2} - 1)} \frac{|B_{n-1}B|}{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})} = 1 \quad (\sqrt{2} - 1)$$

Vidíme, že při rovnoměrném rozdělení úsečky AB nedělí rovnoběžky se stranou BC vedené dělicími body trojúhelník ABC na obsahově stejně velké části a obráceně — při rozdělení trojúhelníku ABC na části stejného obsahu pomocí rovnoběžek s jednou stranou nedělí tyto rovnoběžky další stranu trojúhelníku rovnoměrně (obr. 2).

Obousměrná zelená vlna

IVANA DRBOHLAVOVÁ, Praha

V prvním článku (Rozhledy m. f., č. 1, roč. 59) jsme se zabývali matematizací dopravního problému „sestavování zelené vlny“ na trase s posloupností křižovatek řízených světelnými semaforey. Naše úvahy se týkaly především zelené vlny v jednom směru jízdy. Nyní soustředíme pozornost na obousměrnou zelenou vlnu, která má v dopravě větší význam. Pro zjednodušení zápisu budeme dále psát jen „zelená vlna“, rozumí se tím zelená vlna v obou směrech jízdy. Zopakujme si definici základního pojmu, kterou si měl čtenář sám vytvořit při čtení první části analogicky s uvedenou definicí jednosměrné zelené vlny.

Definice 1: Nechť jsou na dané trase po řadě křižovatky $k_0, k_1, \dots, k_n$ s automatickými světelnými signalizacemi $s_0, s_1, \dots, s_n$. Řekneme, že signalizace tvoří zelenou vlnu $Z(k_0 \leftrightarrow k_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow k_n)$, právě když:

Každé vozidlo jedoucí od k_i do k_n rychlostí 60 km/h, které projede křižovatkou $k_i (i < n)$ na zelené světlo, projede bez čekání i křižovatkou k_j , kde $j = i, i + 1, \dots, n$, a též obráceně.

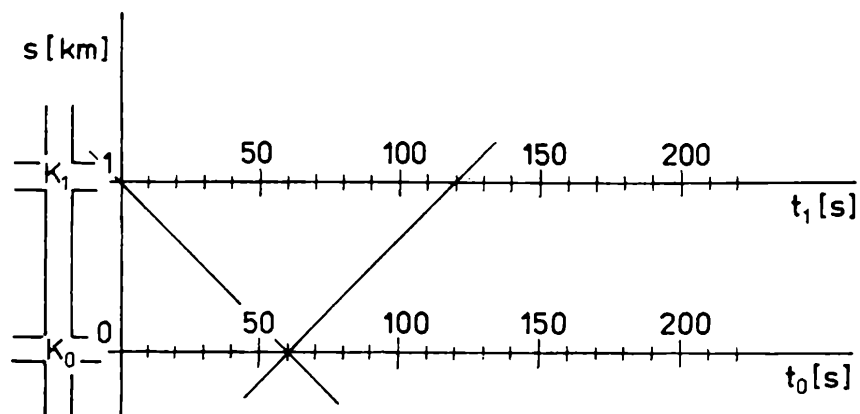
Připomeneme si výsledek úvah z minulého článku o délkách červeného a zeleného světla, ze kterých lze sestavit obousměrnou zelenou vlnu. Zjistili jsme, že délky zelených světel musí být na všech křižovatkách dané trasy stejně dlouhé. Obdobný požadavek platí i pro délky červeného světla.

Nyní se budeme zabývat řešením problému, jak sestavit zelenou vlnu na trase se dvěma křižovatkami.

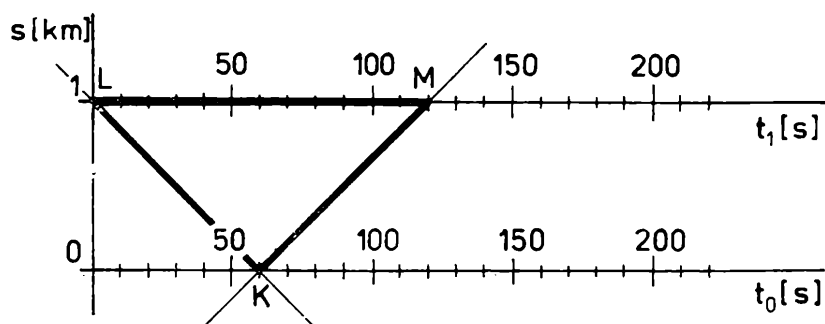
Příklad 1: Dvě křižovatky k_0, k_1 s automatickou světelnou signalizací jsou ve vzdálenosti 1 km. Máme určit délky světel a vzájemné seřízení semaforů na obou křižovatkách tak, aby signalizace tvořily zelenou vlnu $Z(k_0 \leftrightarrow k_1)$.

Úlohu budeme řešit graficky. Na vodorovné ose grafu (viz obr. 1) budeme vyznačovat čas v sekundách, na svislé ose dráhu v kilometrech. Světelnou signalizaci $s_0(z, c)$ na křižovatce k_0 budeme znázorňovat na časovou osu. Interval, kdy svítí zelené světlo, vyznačíme tlustou čarou, červené světlo tenkou čarou, oranžové světlo považujeme za součást červeného světla. Situaci na křižovatce k_1 zaznamenejme na druhou časovou osu. Křižovatky k_0, k_1 jsou ve vzdálenosti 1 km, druhou časovou osu proto narýsujeme tak, aby protínala svislou osu v bodě $(0; 1)$. K řešení úlohy uijeme jízdy dvou protijedoucích automobilů, o nichž budeme předpokládat, že projely křižovatkami právě v okamžiku, kdy se na semaforu rozsvítlo zelené světlo. Automobily se míjely na křižovatce k_0 . Jízdy jsou graficky znázorněny v obrázku 1. Grafy jízd vytínají na časových osách t_0, t_1 body, které podle našeho předpokladu znázorňují začátky zeleného světla. Tyto tři body určují charakteristický trojúhelník, obrázek 2. V okamžiku označeném na časové ose t_1 bodem L se rozsvítí zelené světlo, po jeho skončení následuje červené světlo, cyklus se dále opakuje. Podmínkou pro délku cyklu je, že v okamžiku označeném bodem M musí cyklus skončit a rozsvícením zeleného světla začít cyklus další. Mezi dvěma začátky cyklů označenými na ose t_1 body L, M může proběhnout jeden, ale i více světelných cyklů. Délka cyklu se určí podle velikosti provozu na křižovatkách. Z grafu (obrázek 2) přečteme délku doby mezi začátky cyklů označenými body L, M , ta je 120 sekund. Některá z řešení zelené vlny uvedeme v tabulce 1, v níž jsou časové údaje v sekundách.

Z nejvhodnějších délek světel pro konkrétní situaci pak sestavíme graficky zelenou vlnu. Nesmíme zapomenout na podmínku, že zelené světlo začíná svítit v okamžicích označených body K, L a M . Zvolme



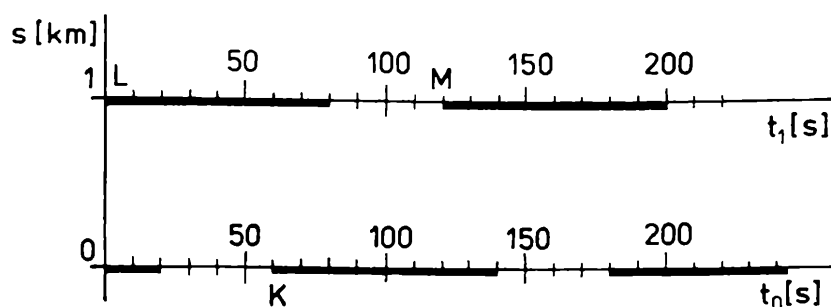
Obr.



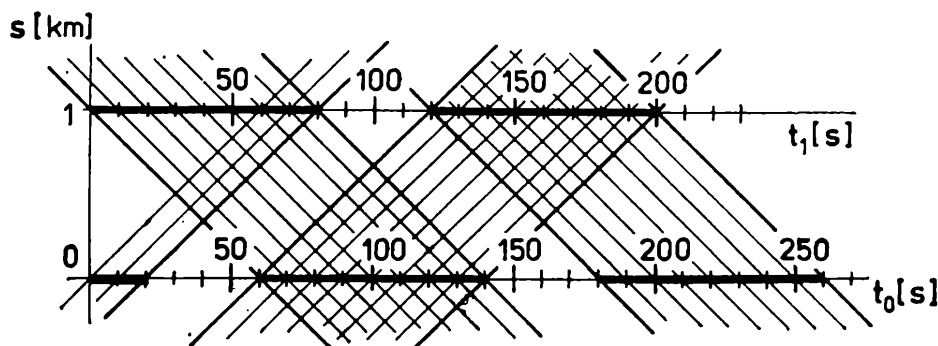
Obr. 2

Tabulka 1

počet cyklů n	d	příklady $\frac{z}{c}$			
1	120	$\frac{60}{60}$	$\frac{80}{40}$	$\frac{50}{70}$	$\frac{55}{65}$
2	60	$\frac{30}{30}$	$\frac{40}{20}$	$\frac{25}{35}$	$\frac{20}{40}$
3	40	$\frac{20}{20}$	$\frac{25}{15}$	$\frac{15}{25}$	$\frac{18}{22}$
4	30	$\frac{15}{15}$	$\frac{20}{10}$	$\frac{18}{12}$	$\frac{10}{20}$
5	24	Délky světelných cyklů jsou pro reálnou situaci příliš krátké.			



Obr. 3



Obr. 4

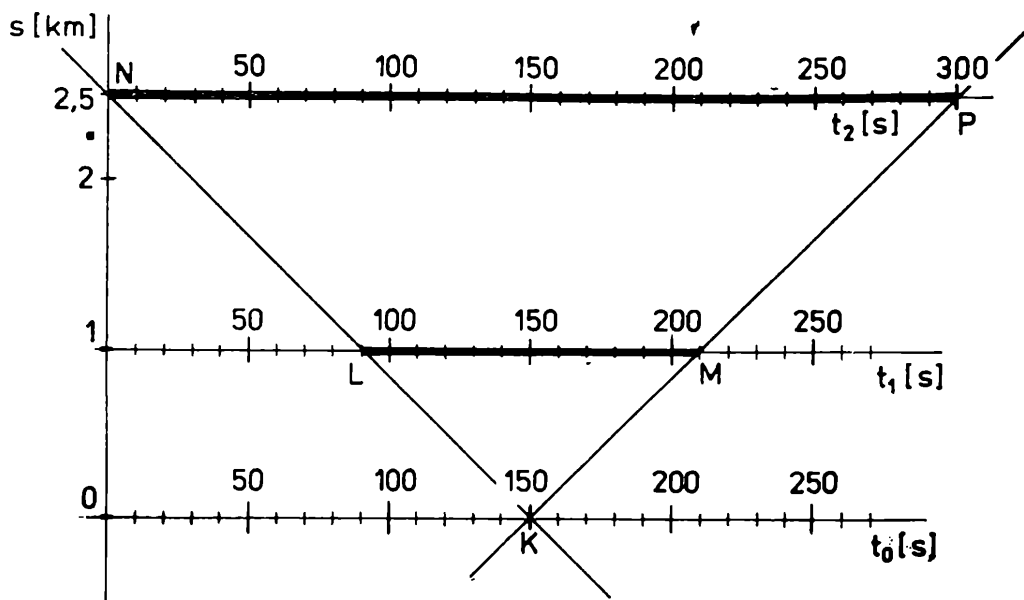
například cyklus $d = 120$ s, kde délka zeleného světla je $z = 80$ s a délka červeného světla $c = 40$ s, obrázek 3.

Ověřme si graficky, zda se skutečně jedná o zelenou vlnu, obr. 4. Teoreticky bychom mohli uvedeným postupem sestavit zelenou vlnu pro dvě křižovatky v libovolné vzdálenosti. Prakticky tomu tak vždy není. Neboť čím je vzdálenost mezi křižovatkami kratší, tím je i kratší doba mezi začátky cyklů označenými body L , M z charakteristického trojúhelníka. Pro představu si uvedeme konkrétní situaci. Jsou-li například dvě křižovatky ve vzdálenosti 200 metrů, trvá jízda z jedné křižovatky na druhou při rychlosti 60 km/h 12 sekund. Délka cyklu by tudíž mohla být maximálně 24 sekund ($n = 1$). A to je samozřejmě krátká doba. Zelenou vlnu je možné řešit v podobných případech doporučením nižší rychlosti jízdy mezi křižovatkami. Například při doporučené rychlosti 30 km/h se doba jízdy zdvojnásobí, délka cyklu by pak mohla být již 48 s.

Nyní naše úvahy o sestavování zelené vlny na dvou křižovatkách k_0 , k_1 zobecníme. Časový interval označený na ose t_1 body L , M (viz obr. 2) označíme T_{01} . Vyjádříme si dobu T_{01} pomocí vzdálenosti křižovatek l udanou v metrech a předpokládané rychlosti jízdy 60 km/h. Až dosud jsme udávali délky světla a cyklů v sekundách, bude proto třeba vyjádřit rychlost v metrech za sekundu:

$$v = 60 \text{ km/h} = \frac{60\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \frac{100}{6} \text{ m/s} = \frac{50}{3} \text{ m/s}.$$

T_{01} je dvojnásobkem jízdní doby mezi křižovatkami k_0 a k_1 . Vyjádření doby T_{01} :



Obr. 5

$$T_{01} = 2 \frac{l}{\frac{50}{3}} \text{ s} = \frac{3l}{25} \text{ s}.$$

Výsledek předcházejících úvah zobecníme a vyslovíme větou.

Věta 1: Sousední křižovatky k_0, k_1 s automatickými světelnými semaforey jsou ve vzdálenosti l metrů. Nechť T_{01} je dvojnásobkem jízdní doby mezi křižovatkami k_0, k_1 při rychlosti 60 km/h a d délka světelného cyklu na obou křižovatkách. Nutnou a postačující podmínkou pro sestavení zelené vlny s délkou světelného cyklu d je: existuje přirozené číslo n tak, že platí

$$n \cdot d = T_{01}.$$

Přitom n je počet cyklů, které proběhnou za dobu T_{01} .

Poznámka: V praxi vyplývá další podmínka, aby délka cyklu d dosáhla alespoň požadované minimální délky, která ještě umožňuje průjezdnost křižovatek. Podrobně jsme se touto otázkou již zabývali.

Situace bude ještě složitější, budeme-li řešit zelenou vlnu pro tři a více křižovatek.

Příklad 2: Křižovatky k_0, k_1, k_2 s automatickou světelnou signalizací jsou ve vzdálenosti: $k_0 k_1 = 1$ km, $k_1 k_2 = 1,5$ km. Máme sestavit zelenou vlnu $Z(k_0 \leftrightarrow k_1 \leftrightarrow k_2)$.

Úlohu budeme řešit obdobně jako příklad 1. To znamená, že si nejprve sestavíme charakteristické trojúhelníky dané situace, obrázek 5. Vrcholy obou trojúhelníků $\triangle KLM, \triangle KNP$ opět představují začátky zeleného světla. Za dobu znázorněnou na ose t_1 úsečkou LM musí proběhnout n cyklů a za dobu znázorněnou na ose t_2 úsečkou NP m cyklů, kde n i m jsou přirozená čísla. Naším cílem je určit zatím neznámý počet cyklů

n a m . Délky cyklů d musí být na všech třech křižovatkách stejně dlouhé. Označíme-li doby mezi začátky cyklů T_{LM} a T_{NP} , můžeme je vyjádřit pomocí počtu cyklů n , m a délky cyklu d :

$$T_{LM} = n \cdot d,$$

$$T_{NP} = m \cdot d.$$

Vyjádříme-li délku cyklu d z jedné rovnice a dosadíme do druhé, dostaneme

$$T_{LM} \cdot m = T_{NP} \cdot n \quad (1)$$

Hodnoty T_{LM} a T_{NP} přečteme z grafu (obr. 5) a dosadíme do vztahu (1), dostaneme

$$120 \cdot m = 300 \cdot n.$$

Získali jsme tak diofantovskou rovnici, kterou upravíme na tvar

$$2m - 5n = 0.$$

Jedním z řešení diofantovské rovnice je $m_0 = 5$ a $n_0 = 2$. Další řešení získáme dosazováním celých čísel za t do rovnic

$$n = 2 + 2t,$$

$$m = 5 + 5t.$$

Podrobněji o řešení diofantovských rovnic si může čtenář přečíst například v knize: *Znám — Davydov: „Teória čísel a zbierka úloh“*. Řešení naší diofantovské rovnice s příslušnými hodnotami délek cyklů uvedeme v tabulce 2; časové údaje jsou v sekundách.

Výsledek úvah zobecníme a budeme opět formulovat jako větu. Použijeme stejného označení, které jsme zavedli ve větě 1. Dvojnásobek jízdní doby mezi křižovatkami k_0 , k_1 označený T_{01} odpovídá době T_{LM} a dvojnásobek jízdní doby mezi křižovatkami k_0 , k_2 označený T_{02} odpovídá době T_{NP} (obr. 5).

Věta 2: Trojice po sobě následujících křižovatek k_0 , k_1 , k_2 s automatickými světelnými semaforey jsou vzdálené: $k_0k_1 = l_1$ a $k_1k_2 = l_2$ metrů. Nechť T_{01} je dvojnásobkem jízdní doby mezi křižovatkami k_0 , k_1 a T_{02} dvojnásobkem jízdní doby mezi křižovatkami k_0 , k_2 při rychlosti 60 km/h a nechť d je délka cyklu na všech třech křižovatkách.

Nutnou a postačující podmínkou pro sestavení zelené vlny s délkou cyklu d je: Existují přirozená čísla n a m tak, že platí

$$n \cdot d = T_{01},$$

$$m \cdot d = T_{02},$$

neboli T_{01} , T_{02} musí být přirozené násobky téhož d . Přitom n je počet cyklů, které proběhnou za dobu T_{01} a m za dobu T_{02} .

Tabulka 2

t	n	m	d	příklady $\frac{z}{c}$		
0	2	5	60	$\frac{40}{20}$	$\frac{30}{30}$	$\frac{45}{15}$
1	4	10	30	$\frac{15}{15}$	$\frac{20}{10}$	$\frac{17}{13}$
2	6	15	20	Délka cyklu nevyhovuje reálné situaci.		
-1	0	0	0	Pro $t < 0$ řešení diofantovské rovnice nevyhovuje podmínkám úlohy.		
-2	-2	-5				

Uvedený postup řešení zelené vlny je však možno použít pouze pro „vhodné“ vzdálenosti křižovatek. Pro určité vzdálenosti křižovatek totiž daným podmínkám vyhovuje délka cyklu tak krátká, že ji pro reálnou situaci nelze použít. V takových případech je potom třeba zelenou vlnu řešit pomocí doporučených rychlostí obdobně, jako jsme si ukázali při řešení zelené vlny pro dvě křižovatky. Náhradním řešením může být i jednosměrná zelená vlna, kterou jsme se zabývali v minulém článku.

0 matematické logice III.

RNDr. ZDENĚK RENC, CSc., MFF UK Praha

Předchozí pokračování našeho článku o matematické logice jsme zakončili několika otázkami. Šlo o to, jaká jsou kritéria na volbu axiomů a odvozovacích pravidel formálního systému. V této souvislosti nás především zajímá predikátová logika, neboť ta je formálním rámcem pro dokazování (tedy pro „logické“ vyvozování nových faktů z daných) v matematice. Proč se tedy volí axiomy a odvozovací pravidla predikátové logiky tak, jak se volí — a jak jsme to alespoň pro výrokovou logiku ukázali v minulém článku? Odkud pramení naše přesvědčení, že tato volba je rozumná? Predikátová logika řeší tyto otázky odkazem na svoji sémantiku — tedy na nauku, zkoumající způsoby, jakými je možno formálním objektům přiřazovat hodnoty, a studující pojmy pravdivosti a splňování formulí. Osvětleme si tedy nejprve tyto pojmy.

IV Pravdivost formulí

V první řadě si uvědomte, že napíšeme-li nějakou formuli — například formuli $x + 1 < 2$ y — nemá dost dobrý smysl se bez dalšího ptát, zda je pravdivá. Stejně tak dobře byste se totiž mohli ptát, zda je dobrá či zlá, hořká či sladká. Není nic z toho, je to prostě jen formální výraz, konečná posloupnost symbolů zvoleného jazyka, správně utvořená podle našich pravidel pro vytváření formulí. Otázka, zda je či není pravdivá, dostane smysl až tehdy, dáme-li všem symbolům, které se v ní vyskytují, nějaký význam; jinými slovy, zvolíme-li nějakou *interpretaci jazyka*, ve kterém je tato formule vyjádřena.

Interpretaci (často též říkáme realizaci) I jazyka určíme tak, že

- a) zvolíme nějakou neprázdnou množinu M_I , které se říká univerzum interpretace I (a jejím prvkům individua); univerzum M_I chápeme jako množinu možných hodnot proměnných v interpretaci I , konstanty interpretujeme jako nějaká pevně zvolená individua.
- b) každému funkčnímu symbolu f jazyka přiřadíme nějakou funkci f_I na množině M_I stejné četnosti, jako měl funkční symbol f ; to znamená, že byl-li funkční symbol f například binární, přiřadíme mu funkci f_I , která každé dvojici prvků z M_I přiřazuje opět prvek z M_I (symbol f chápeme jako jméno funkce f_I)
- c) každému predikátovému symbolu p jazyka přiřadíme nějakou relaci (vztah) p_I v množině M_I opět stejné četnosti, jako měl p (predikátové symboly chápeme jako jména relací).

Jestliže zvolíme konkrétně nějakou interpretaci jazyka — tedy řekneme, jaké univerzum mohou probíhat proměnné, která individua jsou označena symboly pro konstanty a jak budeme chápat funkční

a predikátové symboly — můžeme nějak ohodnotit proměnné, vystupující ve zvolené formuli, tedy přiřadit jim nějaká konkrétní individua (formálně je ohodnocení libovolné zobrazení množiny proměnných do množiny M_I). A v této situaci dostává teprve smysl otázka po pravdivosti zkoumané formule. Nyní se teprve můžeme ptát, zda při *dané* interpretaci a *daném* ohodnocení proměnných je tato formule pravdivá. Vidíme, že *pravdivost nějaké formule nezávisí pouze na ní samé, ale též na interpretaci jazyka, v němž je formule napsána, a na ohodnocení jejích proměnných v rámci této interpretace.*

Vraťme se k naší jednoduché formuli $x + 1 < 2 \ y$. Zvolme interpretaci, která má za univerzum množinu všech přirozených čísel a jednotlivé symboly ve formuli chápe „obvyklým“ způsobem: symbolu 1 přiřadíme přirozené číslo jedna, symbol 2 budeme interpretovat přirozeným číslem dvě, dále symboly „+“ a „<“ budou označovat operace sčítání a násobení (formálně: binárnímu funkčnímu symbolu „+“ přiřadíme funkci, která každé dvojici přirozených čísel přiřadí jejich součet, podobně pro „<“ a násobení) a konečně symbol < bude označením (jménem) relace „menší než“. Jestliže nyní ohodnotíme nějak proměnné x a y (tj. zvolíme-li za ně nějaká přirozená čísla), můžeme také ohodnotit termy $x + 1$ a $2 \ y$. Hodnotou například termu $x + 1$ je zřejmě přirozené číslo, které dostaneme jako součet přirozeného čísla přiřazeného proměnné x a čísla jedna. Srovnáme-li ho co do velikosti s přirozeným číslem, které je hodnotou termu $2 \ y$, vidíme snadno, zda napsaná formule je pravdivá nebo ne. Z tohoto příkladu je vidět, že pravdivost formule skutečně závisí na zvoleném ohodnocení. Zvolíme-li ho tak, že proměnné x přiřadíme trojku a proměnné y pětku, je naše formule pravdivá; naopak při ohodnocení, které x přiřazuje desítku a y pětku, je nepravdivá.

Zvláštní skupinu tvoří formule, které jsou ve zvolené interpretaci pravdivé při libovolném ohodnocení proměnných. O takových formulích říkáme, že jsou v této interpretaci splněny. *Fakt, že formule je splněna, závisí tedy pouze na interpretaci jako celku* (tedy na dohodě o tom, jak chápeme symboly ve formuli obsažené), *nikoli už na konkrétním ohodnocení proměnných v rámci této interpretace.* Jako příklad nám poslouží formule $x \leq x^3$ a interpretace, jejíž univerzum je množina všech celých kladných čísel, symbol 3 (tj. unární funkční symbol, který píšeme jako horní index u nějakého termu — v našem případě u proměnné) označuje třetí mocninu čísla, které je hodnotou tohoto termu, a symbol $\leq$ označuje vztah „menší nebo rovno než“. Je okamžitě vidět, že formule $x \leq x^3$ je v popsané interpretaci splněna. Všimněte si, že kdybychom zvolili interpretaci, která se od naší liší pouze tím, že za univerzum má množinu všech celých čísel, není to již pravda.

Poslední stupeň v naznačené hierarchii tvoří *formule, které se často nazývají logicky platné.* To jsou *formule pravdivé v každé interpretaci*

a při každém ohodnocení proměnných. Jsou to tedy jakési „věčné pravdy“, pravdivé nezávisle na tom, jak budeme chápat jednotlivé symboly a jaké hodnoty přiřadíme proměnným. Jejich pravdivost je dána již samotnou formální (chcete-li logickou) strukturou, je „univerzální“.

Ještě než půjdeme dále, rád bych pro úplnost připojil jednu poznámku. Formule, které jsme použili při vysvětlování pojmů pravdivosti a splňování, byly jednoduché v tom smyslu, že neobsahovaly kvantifikátory. Kdybychom měli rozhodovat o pravdivosti nějaké formule s kvantifikátory, vztahovali bychom tuto otázku opět k nějaké určité interpretaci jazyka a k nějakému ohodnocení, ale nyní pouze těch proměnných, na které nekladou kvantifikátory žádné podmínky (které jsou takzvaně „volné“). Hodnoty ostatních, „vázaných“ proměnných, nemůžeme volit libovolně. Pro ně totiž formule předepisuje, zda termy, které je obsahují, mají být v příslušných relacích (pojmenovaných predikátovými symboly) pro všechny hodnoty těchto proměnných nebo alespoň pro jednu hodnotu. My můžeme pouze konstatovat, zda tomu tak je nebo není. Například ve formuli $(\forall y) (x \leq y)$ je proměnná x volná (kvantifikátor se na ni nevztahuje) zatímco y je vázaná (žádá se, aby vztah $x \leq y$ platil pro všechny hodnoty y). V interpretaci, kde univerzum je množina všech celých kladných čísel a $\leq$ značí relaci „menší nebo rovno než“, je napsaná formule pravdivá pouze při ohodnocení, které proměnné x přiřazuje číslo jedna (neboť pouze pro číslo jedna je pravda, že je menší nebo rovno než libovolné celé kladné číslo).

Podívejme se nyní, jak je to s pravdivostí ve výrokovém počtu nebo lépe řečeno, jak vám známé záležitosti kolem počítání pravdivostních hodnot výrokových formulí souvisí s právě zavedenými pojmy. Jazyk výrokové logiky je velmi jednoduchý (výrokové proměnné a logické spojky), jednoduše se tvoří i formule. V klasické výrokové logice (o níž se v celém našem článku mluví) se používá jediné pevné interpretace, jejíž univerzum je dvouprvková množina $\{0,1\}$. Tím je řečeno vše, neboť žádné funkční ani predikátové symboly v jazyce výrokové logiky nejsou, a tedy není co dále interpretovat. Individua 0 a 1 se zde nechápou jako čísla, ale jako tak zvané *pravdivostní hodnoty* (někdy se též k jejich označení užívá písmen F — z anglického false a T — true). Sémantika logických spojek — tj. předpis, jak se z pravdivostních hodnot formulí A a B spočítá pravdivostní hodnota formulí $\neg A, A \& B, A \vee B, A \rightarrow B$ a $A \leftrightarrow B$ — je také pevná (a vám jistě dobře známá). Jestliže tedy vezme libovolnou formuli výrokového počtu a zvolíme nějaké ohodnocení jejích (výrokových) proměnných, to jest přiřadíme každé proměnné jednu z pravdivostních hodnot 0 nebo 1, můžeme spočítat pravdivostní hodnotu této formule a tak rozhodnout, zda je při zvoleném ohodnocení pravdivá (výsledná pravdivostní hodnota je 1) nebo nepravdivá (vyšla pravdivostní hodnota 0). Formule, které jsou pravdivé při každém

ohodnocení výrokových proměnných (a tedy podle před chvílí zavedené terminologie jsou v popsané interpretaci splněny) mají ve výrokové logice vyhrazen zvláštní název. Jak víte, říká se jim tautologie. Protože však máme jedinou interpretaci jazyka, hrají tautologie roli oněch „věčných pravd“ ve světě výrokové logiky.

V Vlastnosti axiomů a odvozovacích pravidel

Nyní, když jsme se seznámili s pojmem pravdivosti a dalšími pojmy z něho odvozenými, můžeme se vrátit na začátek tohoto článku a konečně říci, podle jakých hledisek se volí axiomy a odvozovací pravidla predikátové (a tedy i výrokové) logiky. Axiomy volíme tak, aby byly logicky platné, tedy „univerzálně“ pravdivé. Tento požadavek vyjadřuje naši intuitivní představu, že axiomy vyjadřují „všeobecně přijatelná“ či „nepochybná“ základní fakta. Od odvozovacích pravidel pak požadujeme, aby tuto vlastnost formulí zachovávala. Tedy: vznikne-li nějaká formule použitím odvozovacího pravidla z univerzálně pravdivých formulí, bude sama také univerzálně pravdivá. Splňuje-li odvozovací pravidlo tuto podmínku, říkáme, že je *korektní*. Můžete se snadno přesvědčit, že ve výrokové logice splňují axiomy i dedukční pravidlo modus ponens (obojí známe z předchozích pokračování článku) uvedené požadavky. Stačí ověřit, že axiomy $A1 - A3$ jsou tautologie (to jistě zvládnete sami) a že pravidlo modus ponens tautologičnost formulí zachovává (kdyby totiž formule B , která je podle něho odvozena z tautologií A a $A \rightarrow B$, nebyla tautologií, musela by pro některé ohodnocení nabývat hodnoty 0; pro toto ohodnocení však A jakožto tautologie nabývá hodnoty 1, a tedy pro formuli $A \rightarrow B$ vychází pravdivostní hodnota 0 — což je spor s předpokladem, že $A \rightarrow B$ je tautologie). Také axiomy predikátové logiky (řekli jsme, že kromě axiomů pro logické spojky jsou to ještě další dvě schémata axiomů pro velký kvantifikátor) jsou zvoleny tak, aby byly logicky platné a obě její odvozovací pravidla (kromě modus ponens ještě tak zvané pravidlo generalizace, odvozující formule s kvantifikátory) jsou korektní.

Již minule jsme si uvědomili, že volba axiomů a odvozovacích pravidel formálního systému podstatně ovlivňuje třídu formulí, které jsou v něm dokazatelné. Vzpomeneme-li si dobře, jak jsme formálně popsali pojem důkazu, pak vidíme, že z uvedených vlastností axiomů a odvozovacích pravidel plyne následující důležitý fakt. Je-li v predikátové (výrokové) logice nějaká formule dokazatelná, pak je tam logicky platná (je tautologie). To je jistě dobře, ale naše ctižádost při vytváření formálního systému logiky je větší. Chtěli bychom, aby nejen vše, co v něm umíme dokázat, bylo univerzálně pravdivé, ale také naopak aby každá univerzálně pravdivá formule byla v tomto systému dokazatelná. Formální systém, který tuto vlastnost má, se nazývá *úplný*. Slovo „úplný“ zde naznačuje, že axiomy a dedukční pravidla jsme zvolili tak, že

s jejich pomocí (tedy prostřednictvím dokazatelnosti) umíme popsat právě všechna univerzálně platná tvrzení.

Výroková logika je úplná. Dá se totiž dokázat tzv. Postova věta, která říká, že *formule výrokové logiky je tautologie, právě když je dokazatelná.* Také formální systém predikátové logiky je úplný. Jsou v něm dokazatelné právě ty formule, které jsou logicky platné. Toto tvrzení je obsahem jedné ze základních vět predikátové logiky, známé jako Gödelova věta o úplnosti, jejíž důkaz je již poměrně obtížný a dlouhý. Pro nás má Gödelova věta ten význam, že ukazuje, že predikátová logika opravdu poskytuje matematikům dobré formální zázemí pro jejich činnost — ne-li pro všechno, tedy alespoň pro tu její část, která spočívá v hledání a odvozování obecně platných zákonitostí ve světě matematiky.

FYZIKA

Jak na ni vyžrát, na tu fyziku?

Prof. Dr. LADISLAV ZACHOVAL, člen korespondent ČSAV, Praha

Staré studentské pořekadlo říká, že „fyzika je věda, která se našprtát nedá“. A to je pravda, našprtát se opravdu nedá, ale lze ji chápat, lze se jí naučit a lze ji dobře užívat. To platí i pro toho, kdo není pro fyziku jednostranně nadán. Nelze šprtát, když jde o ovládnutí fyziky. Jak tedy na ni vyžrajete?

Musíte začít *pozorným* čtením textu učebnice nebo poznámek a *přemýšlením* o tom, co jste četli. A pak si zapamatovat a procvičit věci *hlavní a podstatné*. K tomu vám povím něco více.

I. Fyzika je skutečně obtížná nauka, k jejímu ovládnutí nestačí jen paměť, je potřeba i pečlivě a soustavně myslet. Proto je užitečné, aby ten, kdo se fyziku učí, využíval při učení všech zkušeností, kterých nabyl při takové činnosti ti, kdo si fyziku se zdarem osvojili. Jsou to ostatně zkušenosti, které se osvědčují i při učení se jiným vědám.

Co znamená umět některý oddíl fyziky a dovést ho používat? Především je to *velmi důkladná znalost nevelkého počtu základních představ, definic a pouček*, které tvoří podstatu toho oddílu fyziky. Těch základních pouček a představ není mnoho, ale musí se jim věnovat *velká pozornost* a je nutno jim *dokonale* rozumět.

A zde se už dostáváme k jednomu ze způsobů, jak si začít osvojovat fyziku. Co jsou to ty základní poučky a představy? Jsou základní jen

proto, že jsou typem tisku odlišeny od ostatních pouček toho oddílu fyziky? Když si promyslíte, *jak s těmito základními poučkami souvisejí ostatní poučky*, po případě když si dovedete z oněch základních odvodit aspoň některé z těch nezakladních, tak proniknete do fyziky a budete jí rozumět lépe, než kdybyste fyziku šprtali až do roztřepení rtů i jazyka. Získáte tak nejen bezpečnou znalost pouček, o něž jde. Poznáváte tak současně také, co je obsahem fyziky a jaká je její struktura.

Napadlo vás někdy např. promyslet si, které všechny věty přímo souvisí s druhým (pohybovým) zákonem Newtonovým? Nebo zamysleli jste se nad tím, co všechno vyplývá z vět o hybnosti?

Je také důležité *povšimnout si toho, která veličina v základní poučce je a která v ní není*. Zamysleli jste se např. nad tím, že v tom druhém pohybovém zákonu Newtonově není rychlost?

A tak bychom mohli pokračovat dál celou fyzikou — a možná, že byste byli překvapeni, co všechno vám ukáže přemýšlení o věcech a poučkách, které se našprtát nedají.

.Dále je třeba naučit se zacházet s učebnicí, v níž jsou výklady nutné pro pochopení těch základních vět a zároveň popis základních pokusů a měření do té míry podrobný, aby si čtenář podle něho mohl udělat představu o tom, jak popisovaný pokus nebo měření ve skutečnosti probíhá. Umět s knihou zacházet a umět jí využívat znamená přesně rozumět textu, vědět, co kde v knize najdu, a mít dobře promyšlenou souvislost jednotlivých odstavců i jejich logickou stavbu. To však také znamená mít dobře prostudované obrázky a grafy. Je potřeba umět z nich vyčíst, co v nich je obsaženo. Bývá tam toho mnohem víc, než je na první pohled patrné. Leckdy teprve po prostudování grafu nebo obrázku čtenář pochopí text v plném rozsahu.

Čtení z obrázků a grafů je další velmi dobrá a účinná cesta k porozumění fyzice. Z obrázků a z grafů — především z grafů a jejich popisu — se čtenář naučí vidět do podrobností experimentálního uspořádání a pozná, co všechno je pro pochopení fyzikálního děje důležité. A nadto začne chápat význam použitých jednotek a poměr velikostí veličin, kterých se graf týká.

Naučí-li se čtenář s knihou pracovat, bude mu kniha velmi užitečná nejen při opakování, popř. při procvičování studované látky, ale i při úvahách a přemýšlení o námětech, které vyvolá četba nebo rozhlas a televize.

Znát bezpečně základní představy a poučky ovšem nestačí, je třeba se naučit jich užívat. Toho lze dosáhnout jen praxí a cvikem, častým řešením úloh, počítáním příkladů a řešením i drobných problémů. Proto je třeba, aby počítání příkladů, práce na úlohách nebo na řešení drobných problémů měla při práci žáka nebo studenta stejnou váhu a důležitost jako studium textu. Cvik a zkušenost získaná takovou praxí má rozhodující význam pro schopnost využít fyzikální poznatky.

Fyziku nelze dělat vždy jen u psacího stolu. *Je třeba pracovat i v laboratoři, a* proto je také při studiu fyziky nutné seznámit se s fyzikálními přístroji a naučit se s nimi pracovat. To je část studia fyziky, ke které je potřeba přístupu do fyzikální laboratoře a možnost seznámit se podrobně s fyzikálními přístroji, což vyžaduje dosti času. Proto je nutno takových příležitostí ve škole vždy důkladně využívat.

Některé fyzikální jednoduché pokusy lze uskutečnit i jednoduchými pomůckami. *Pokusy, které nejsou určeny k měření, lze dělat doma nebo v zájmovém kroužku.* Takových pokusů není ovšem mnoho, ale jsou velmi poučné právě pro svou jednoduchost. Jsou to např. některé pokusy z mechaniky, z nauky o kapalinách a o teple, z elektrostatiky, z optiky nebo z akustiky. *Samostatná příprava takového pokusu* — a už i jeho výběr! — a promýšlení pokusů i velmi jednoduchých vede vždy k mnohem hlubšímu porozumění fyzice, než může dát četba o takových pokusech, a to i tehdy, když jde jen o opakování pokusu, který student viděl v provedení s lepším přístrojovým zařízením.

Má-li být vaše práce v laboratoři úspěšná, musíte mít pokus nebo měření předem dobře promyšlené a pokud možno máte mít náčrtek uspořádání, jak si je představujete. Když pak přijdete do laboratoře nebo vidíte provedení pokusu, srovnajte si skutečné uspořádání pokusu nebo měření s tím, jak jste si to sami představovali, promysleli, popř. načrtli. Je to velmi poučné.

II. Když se dříve mladý člověk učil řemeslu nebo jakékoli jiné práci, začínal *pěkně od začátku*. Napřed se musel naučit zametat podlahu, čistit a ukládat nástroje, udržovat v pořádku nejen pracovní stůl, nýbrž i zásobní materiály. A zároveň se musel učit, jak se při práci berou nástroje do ruky, jak se s nimi při práci zachází, co je s nimi možno dělat, co jim škodí atd. Zdá se to možná malicherné, ale i Faraday, jeden z největších fyziků a současně vynikající chemik, začínal tím, že myl lahve v laboratoři svého učitele, slavného Davyho.

A když se chce někdo pořádně naučit fyziku, musí také *začít od těch zdánlivě všedních a jakoby malicherných věcí*. Na některé z nich zde upozorním. Nesmí se ovšem u těchto začátků ustrnout!

Osvědčuje se, když si žák stanoví dobu, kdy se bude fyziku učit, a tuto dobu ať dodržuje. Nemusí to být zvlášť dlouhá doba, ale raději tuto dobu mít stanovenou na víc dní v týdnu. To už závisí na možnostech a povaze žáka.

K tomu by si měl — pokud je to možné — žák najít nějaké místo nebo koutek, kde by byl při učení co nejméně rušen a mohl se na učení fyzice plně soustředit. Při učení by měl mít žák při ruce tužku a papír. Čím častěji při učení fyzice žák píše poznámky nebo výpočty a čím častěji si kreslí to, o čem se učí, tím lépe věci porozumí a tím lépe si studovanou látku zapamatuje. Říkávalo se právem, že *jednou opsat vydá víc než třikrát pozorně přečíst*.

Žák si má vymezit odstavec nebo kapitolu, kterou se chce ten den naučit, a co nejlépe se soustředit na tuto vymezenou látku. Přitom je potřeba věnovat zvlášť pozornost grafům a jejich popisu. To dá žákovi velmi mnoho pro hlubší porozumění studované látce a velmi to usnadní zapamatování toho, co studoval.

Když si žák prostuduje graf, pokusí se *vlastními slovy srozumitelně a urovnaně vyložit* obsah grafu a podstatu toho, co znázorňuje. Je nutno dobře si všimnout, která proměnná veličina v grafu je nezávislá a které proměnné veličiny v grafu jsou závislé i které veličiny v grafu zůstávají konstantní.

A když si budete myslet, že jste už svůj úkol splnili a rozumíte dobře studované látce, *přezkoušejte se!* Můžete to udělat např. písemně heslovitými poznámkami, které zachycují hlavní body probrané látky v logickém pořádku. Pak se pokuste sami sobě vyložit v tiché samomluvě, co jsou hlavní myšlenky části fyziky, které jste se právě učili. Pokuste se v samomluvě celý obsah prostudovaného textu vyprávět a vysvětlit tak, jako byste to vyprávěli a snažili se to vysvětlit tomu, kdo slyší poprvé o odstavci z fyziky, který jste se právě naučili. Uvidíte, že takový postup vám nepomůže jen porozumět a zapamatovat si tu část fyziky, nýbrž že se současně naučíte také dobře si srovnat myšlenky a srozumitelně je sdělovat druhým. A to je užitečné — nejen pro fyziku!

Možná, že se vám zdá popsáný postup velmi zdoluhavý a náročný na čas. Ale po nedlouhém cviku budete i písemné poznámky i opakování samomluvou provádět velmi rychle. Čas, který si vyžádají tyto práce, bude vždy kratší než čas, který by si vyžádalo ovládnutí studované látky pouhým odříkáváním nazpaměť. A vždy tím popsáním způsobem ovládnete látku do větší hloubky a pevněji si ji zachytíte do paměti než sebedelším „šprtáním“

A nakonec ještě jednu radu: *hodně o fyzice, zvlášť o tom, čemu se z ní právě učíte, povídejte kamarádům i známým*, kteří se zajímají o přírodní vědy a technické vědy nebo technickou praxi. I když nebudete všechno říkat zcela správně a přesně, získáte takovými rozhovory velmi mnoho!

III. Rád bych řekl *ještě pár slov o zkouškách*. Při nich máte prokázat, jak umíte fyziku. Ale zkouška je zároveň cvičením v tom, abyste uměli své myšlenky sdělit srozumitelně a bez zbytečných průtahů tomu, s kým jednáte. Takové schopnosti jasného a stručného sdělování svým partnerům budete potřebovat při každé příležitosti, ať už děláte cokoli. Proto je rozumné vidět zkoušku z fyziky i z této stránky.

Když máte stručně a jasně někomu něco sdělit, musíte dodržovat určitá pravidla. Ukážu, jak se tato pravidla uplatňují při zkoušce z fyziky.

Tak především *musíte si přesně ujasnit, na co se vás zkoušející ptá a co je podstatné v jeho otázce* — ať už ústní či písemné. Na to podstatné

musíte soustředit své myšlenky a rychle si v mysli uvědomit, co asi o věci víte.

Pak si musíte ujasnit, kolik asi máte času na odpověď. Odpovídejte nejprve stručně, ale úplně (aby nevznikly zbytečné nejasnosti) na to, co je podstatné. A pak teprve dodatečně svou odpověď doplňujte podrobnostmi. Ale nevěnujte se podrobnostem, které nejsou otázkou vyžadovány.

Při odpovědi mluvte klidně, neopakujte se, odpověď si promyslete tak, abyste odpovídali v určitém logickém pořádku.

Doporučuje se napřed několika větami říci podstatu toho, nač jste tázáni, a způsob nebo pořadí, v jakém chcete odpovídat, a pak teprve stručně, jasně a uspořádaně vyložit důležité věci bez zbytečných odboček a bez zbytečných podrobností. Ty můžete — zbude-li vám čas — ještě vždycky doplnit.

Pokud je to jen poněkud možné, *doplňujte svou odpověď náčrtý grafů nebo schémat*. Nezapomínejte na označení grafů (označení veličin, jednotek atd.). Náčrtek řekne často víc než mnoho slov.

Při písemné zkoušce, při níž máte řešit nějaký problém, postupujte v myšlenkách obdobně. Je dobré v tom případě vyslovit si stručně základní myšlenku, ze které při řešení budete vycházet. Někdy na to stačí jedna rovnice.

Nezapomeňte však na základní věc: *pečlivě si rozmyslete, co má být vypočítáno!*

Výpočty si pište přehledně, abyste se v nich lehce vyznali a mohli snadno najít chybu, kdyby k ní došlo. A jasně si vyznačte veličiny, s nimiž počítáte, a jednotky, jichž používáte.

Výsledky vyslovte celou větou.

Než výpočet uzavřete a budete formulovat výsledek, překontrolujte si ještě jednou, zda jste pro hledané veličiny dostali rozumné, tj. fyzikálně přiměřené hodnoty. Kdybyste zjistili, že tomu tak není a že nedovedete nalézt chybu, tak na tuto okolnost v konečné odpovědi upozorněte.

A konečně pamatujte na to, že první podmínkou dorozumění s lidmi je, abyste svou mateřskou řeč dobře ovládali!

Vysvětlení efektního experimentu: Tanec vajec

Syrové vejce je nesymetrické a není stabilní. Proto se nemůže vzpřímit. Při krátkém zabrzdění se tekutina uvnitř syrového vejce otáčí déle a přivede vejce opět do rotace. Vařené vejce je stabilní setrvačnick. Při jeho roztočení způsobí tření v bodě dotyku otáčivý moment, který setrvačnick vzpřímí.

Znáte stavovou rovnici plynů?

RNDr. VLADIMÍR MALÍŠEK, CSc., Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Na uvedenou otázku odpoví každý student, který absolvoval několik hodin výkladů o termice, pravděpodobně kladně a snad také uvede *Clapeyronovu stavovou rovnici* ideálního plynu

$$pV = RT,$$

případně *van der Waalsovou rovnici* reálného plynu

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT;$$

přitom p je tlak plynu, V jeho objem, R univerzální plynová konstanta, T Kelvinova teplota, a , b jsou konstanty pro daný plyn specifické a související s kritickým tlakem a teplotou relacemi

$$a = \frac{27 R^2 T_k^2}{64 p_k}, \quad b = \frac{RT_k}{8p_k}$$

Fyzik profesionál by však asi odpověděl na tutéž otázku s mnohem menším sebevědomím; snad by odvodil uvedené vztahy, dodal by však, že skutečný plyn je složitý systém, který popisují uvedené rovnice jen přibližně, uvedl by některé rovnice obecnější, nicméně žádné „definitivní“, zcela obecné stavové rovnice bychom se od něho asi nedočkali a to prostě proto, že známa není.

Cílem naší úvahy ovšem není nějak „napravit“ tento stav ve fyzice, ale pouze upozornit na to, že obě uvedené dobře známé rovnice se týkají jen jednoho molu plynu; vyvstává tedy otázka, jak je třeba je upravit, aby popisovaly stav plynu o hmotnosti m a molární hmotnosti μ . Teprve pomocí takto upravené stavové rovnice lze řešit např. úlohy typu „jaký objem má 1 kg dusíku při teplotě 300 K a tlaku 1 MPa?“.

Zmíněná úprava se skládá ze dvou kroků: 1. je třeba si uvědomit, že plyn o hmotnosti m a molární hmotnosti μ představuje n molů

plynu, přičemž $n = \frac{m}{\mu}$.

2. Je třeba si všimnout, že ve stavové rovnici vystupují veličiny trojího druhu — a) konstanty R , a , b , jejichž hodnoty jsou stejné pro daný plyn a s jeho množstvím se nemění, b) veličiny intenzivní, jež jsou stejné jak pro každou část, tak pro celkové množství plynu; tohoto druhu je teplota T a tlak p , c) veličiny extenzivní čili aditivní, v našem případě objem V . Objem celkového množství plynu je skutečně roven součtu objemů jeho částí, čili $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

Abychom dostali z Clapeyronovy resp. van der Waalsovy rovnice pro jeden mol správnou rovnici pro množství n molů, je třeba extenzivní veličiny dělit počtem molů n ; v našem případě tedy místo objemu V je třeba psát objem V/n , čili $V\mu/m$. Stavové rovnice tedy mají tvar

$$p \cdot \frac{V\mu}{m} = RT, \text{ resp.}$$

$$\left(p + \frac{am^2}{V\mu^2}\right)\left(\frac{V\mu}{m} - b\right) = RT$$

Z posledních dvou rovnic již snadno vypočítáme každou z veličin, jež nás v konkrétním případě zajímá.

Uvidíme kontrakci délek?

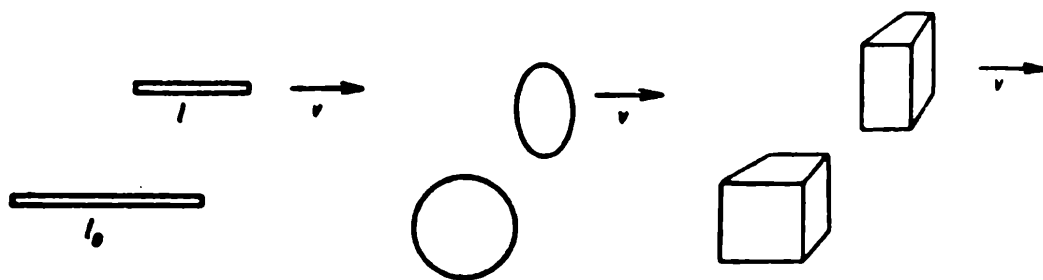
Doc. Ing. JIŘÍ TOLAR, CSc., FJFI ČVUT Praha

V dnešní době lze speciální teorii relativity považovat za dobře ověřenou nejen mnoha přesnými testy, ale také nepřímo, prostřednictvím relativistické kinematiky, která pronikla jako základ popisu do mnoha fyzikálních odvětví.

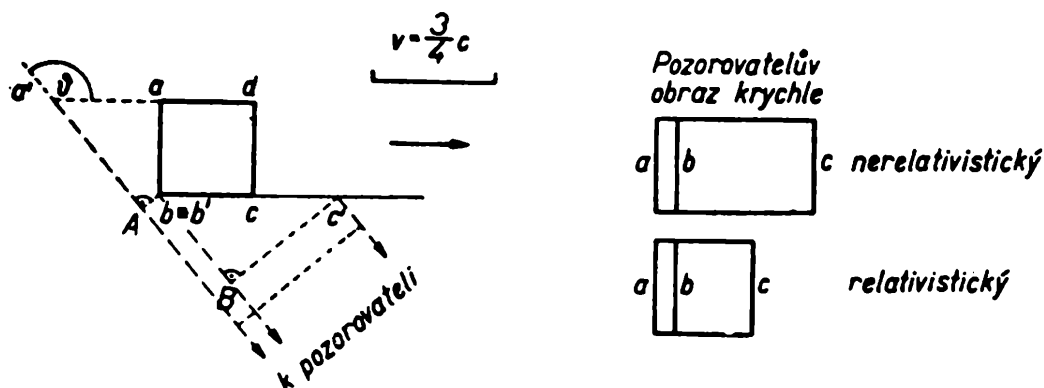
Speciální teorie relativity je teorií takových fyzikálních procesů, při nichž nelze považovat rychlost světla c za nekonečně velkou veličinu: popisuje např. mechanický pohyb s rychlostí srovnatelnou s c , nestacionární elektromagnetické pole, srážky elementárních částic apod. Nejvýraznějšími logickými důsledky Einsteinových postulátů jsou: dilatace času, *kontrakce délek*, zákon současného zachování energie a hybnosti a závislost hmotnosti na rychlosti. Vyplývají jednoduchým způsobem z Lorentzových transformací mezi inerciálními soustavami [1], [2].

Nepovšimnuta zůstala až do roku 1959 zajímavá otázka, zda můžeme *Fitzgeraldovu-Lorentzovu kontrakci*, tj. zkrácení délky ¹⁾ rychle se pohybujícího tělesa ve směru jeho pohybu pozorovat zrakem nebo fotograficky (obr. 1). Uvidí nebo vyfotografují tedy budoucí mezihvězdní cestovatelé z oken svých raket kouli, která se vzhledem k nim rychle pohybuje, opravdu jako elipsoid, či krychli jako kvádr apod.?

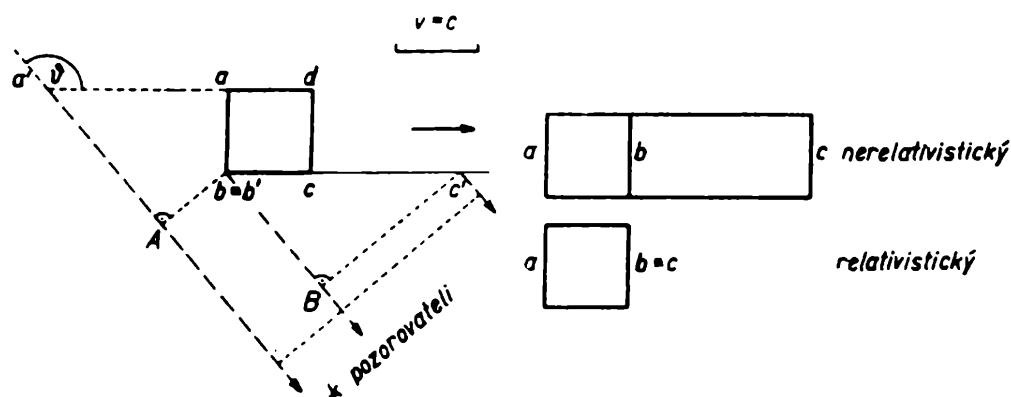
¹⁾ Délka l tyče, která se vzhledem k pozorovateli pohybuje ve směru své osy rovnoměrně přímočaře rychlostí v , je dána vztahem $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, kde l_0 je vlastní délka tyče, tj. délka tyče vzhledem k systému, v němž je v klidu.



Obr. 1 Uvidí relativistický pozorovatel kouli jako elipsoid a krychli jako kvádr?



Obr. 2a Konstrukce pozorovatelova obrazu krychle (nerelativistická a relativistická) pro rychlost $v = \frac{3}{4} c$.



Obr. 2b Konstrukce pozorovatelova obrazu krychle (nerelativistická a relativistická) pro rychlost $v \approx c$.

Podle prací J. Terrella a R. Penrose z roku 1959 je odpověď na tuto otázku záporná; o tom viz též [3] a [4]. Rychle se pohybující tělesa nevidíme zploštělá ve směru pohybu, jak jsme si dosud představovali; naopak, tato tělesa se nám budou jevit tak, jak bychom je mohli vidět v klidu, avšak pootočená o jistý úhel. Ukazuje se, že tento úhel závisí jednak na rychlosti tělesa vzhledem k pozorovateli, jednak na pozorovacím úhlu, tj. úhlu mezi spojnici pozorovatel — těleso a směrem pohybu tělesa.

Abychom kvalitativně pochopili tento na první pohled paradoxní výsledek, stačí si uvědomit, že obraz tělesa vzniká tím, že pozorovatel v určitém okamžiku zaregistruje všechny paprsky přicházející do oka od pozorovaného tělesa a že všechny tyto paprsky se šíří konečnou rychlostí. Protože však tyto paprsky vznikají v místech tělesa různě vzdálených od pozorovatele, musely být tělesem vyslány v různé okamžiky. Krátce řečeno, oko či fotografický aparát zaregistruje elektromagnetické vlny, které byly vyzářeny různými body tělesa v různých okamžicích.

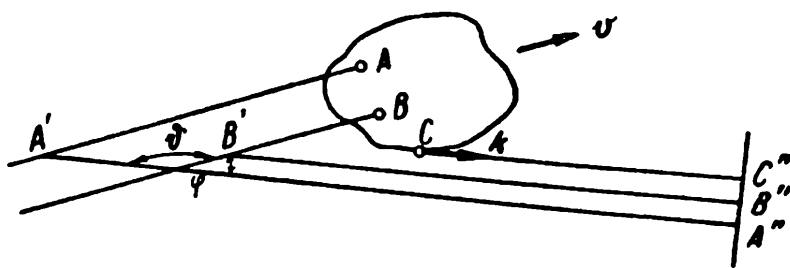
Pro názornost si nejprve provedeme konstrukci obrazu pohybující se krychle v nerelativistickém případě, tj. bez kontrakce délek, ale s paprsky šířícími se konečnou rychlostí c . Na obr. 2 jsou zvoleny rychlosti $v = \frac{3}{4}c$ a $v = c$ při pozorovacím úhlu ϑ . Pak se vrátíme k relativistické situaci.

Krychle je na obr. 2 zachycena v půdorysu, takže každá její svislá hrana a , b , c , d splývá v bod; pozorovatel se na ni dívá z boku. Při konstrukci vycházíme ještě z dodatečného předpokladu, že pozorovatel je od krychle hodně vzdálen, takže ji vidí pod velmi malým prostorovým úhlem, tj. paprsky k pozorovateli jsou prakticky rovnoběžné. Protože se světlo šíří konečnou rychlostí c , musely všechny paprsky, které přicházejí současně do oka od hran a , b a c , tedy z míst od pozorovatele různě vzdálených, být emitovány v této časové posloupnosti: nejdříve paprsky od hrany a , pak od b a nakonec od c . Proto musí být na obr. 2a poměr vzdáleností $a'a : a'A = c'c : b'B = 3 : 4$ a analogicky na obr. 2b v poměru 1 : 1. Vidíme, že když nebereme v úvahu relativistickou kontrakci délek, obraz krychle bude deformovaný, vzdálenost mezi hranami b a c se protáhne.

V relativistickém případě je konstrukce analogická. Je třeba pouze vzít v úvahu skutečnost, že krychle je nyní ve směru pohybu zkrácena kontrakčním faktorem pro příslušnou rychlost (v mezním případě $v = c$ krychle přechází ve „čtverec“). Exaktním výpočtem vzdáleností se dá ukázat, že nerelativistické prodloužení ve směru pohybu, které zkresluje obraz, relativistická kontrakce právě kompenzuje, a tedy těleso se bude jevit stejně, jako kdyby bylo v klidu. Ukažme si ještě, že se bude jevit jako pootočené o jistý úhel.

Nechť pozorovatel (fotografická deska) je v klidu v jisté inerciální soustavě S . Předpokládejme, že se těleso a s ním pevně spojený inerciální systém S' pohybují podle obr. 3 rychlostí $\mathbf{v}$ směrem k pozorovateli, a že paprsky přicházející k pozorovateli ve směru $\mathbf{k}$ jsou prakticky rovnoběžné.

V relativistickém případě je třeba vzít v úvahu, že směry šíření $\mathbf{k}$ a $\mathbf{k}'$ téhož paprsku v soustavách S a S' se budou obecně lišit. Pro úhly φ



Obr. 3 Konstrukce pozorovatelova obrazu tělesa v relativistickém případě. Paprsky vyslané z bodů A a B povrchu tělesa v okamžicích, kdy tyto body byly v místech A' a B', dorazí k pozorovateli (do bodů A'' a B'') ve stejný okamžik jako paprsek z bodu C (do bodu C'').

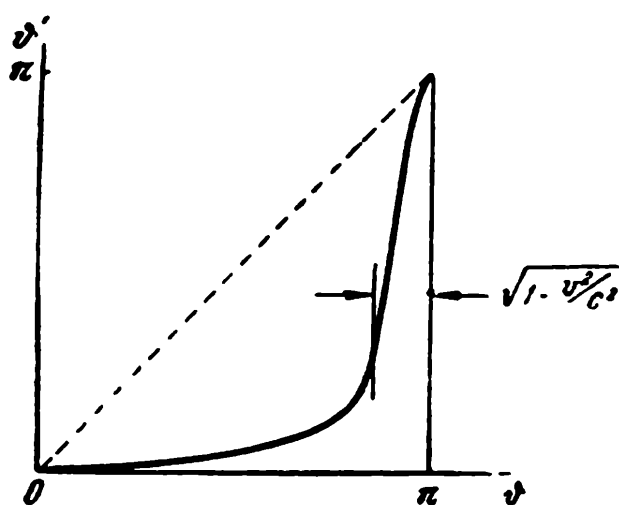
resp. φ' mezi $\mathbf{k}$ resp. $\mathbf{k}'$ a rychlostí tělesa $\mathbf{v}$ platí relativistický transformační vztah

$$\sin \varphi' = \sin \varphi \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}, \quad (1)$$

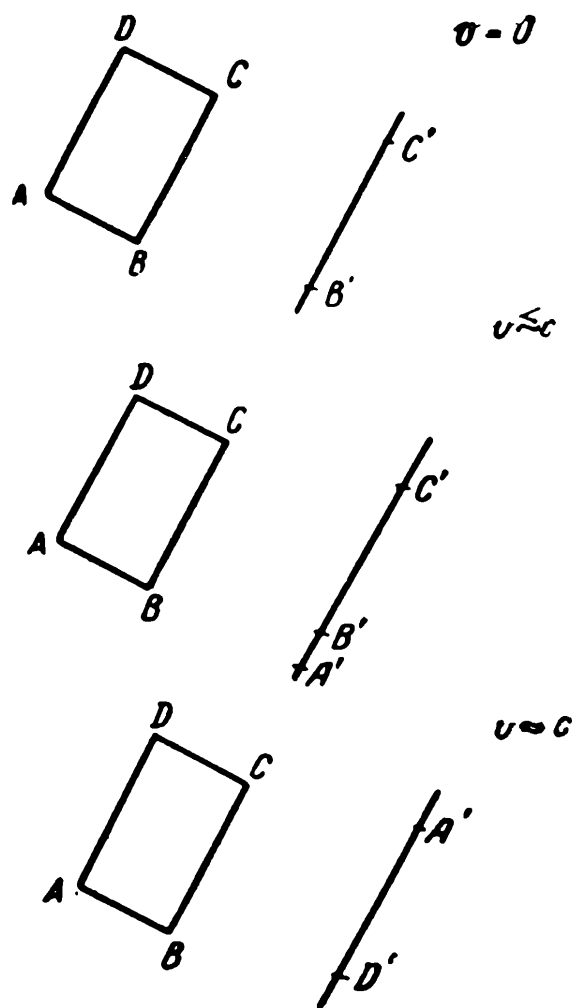
který vyjadřuje relativistickou aberaci světla [1]. V našem případě $\varphi = \pi - \vartheta$ a $\varphi' = \pi - \vartheta'$, kde ϑ a ϑ' jsou pozorovací úhly v soustavách S a S', takže ze vztahu (1) plyne

$$\sin \vartheta' = \sin \vartheta \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta}. \quad (2)$$

Tato závislost $\vartheta' = f(\vartheta)$ je graficky znázorněna na obr. 4.



Obr. 4 Graf závislosti $\vartheta' = f(\vartheta)$ podle rovnice (2). Čárkovaná úsečka odpovídá případu nulové rychlosti tělesa, $v = 0$, tedy $\vartheta' = \vartheta$.



Obr. 5 Schematické znázornění obrazu kváдру při rychlostech $v = 0$, $v < c$ a $v \approx c$. Bodům kváдру A, B, C, D odpovídají body A', B', C', D' obrazu.

Zkoumejme nejprve případ $\vartheta = \pi$, kdy těleso se pohybuje přímo k pozorovateli. V tomto případě $\vartheta' = \pi$, tj. na fotografické desce bude obraz přední strany tělesa. Nechť nyní úhel ϑ je menší než $\pi - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Na obr. 4 vidíme, že při rychlosti v blízké k rychlosti světla c bude pozorovací úhel ϑ' blízký nule, neboli úhel vyzáření φ' blízký π . To však znamená, že při rychlostech $v \approx c$ přicházejí k pozorovateli paprsky vyslané ze zadní strany tělesa!

Souhrnně lze tedy říci, že těleso, které se pohybuje v systému S rychlostí v a je pozorováno či fotografováno pod úhlem ϑ , se bude jevit úplně stejně, jako kdyby bylo vůči pozorovateli v klidu, avšak pootočené o aberační úhel $\vartheta - \vartheta'$ (viz obr. 5; pro $v \approx c$ je $\vartheta' \approx 0$ a $\vartheta - \vartheta' \approx \vartheta$).

Přesněji řečeno, takto se budou zobrazovat jen tělesa, která pozorovatel vidí pod velmi malým prostorovým úhlem, takže paprsky od něho

přicházejí k pozorovateli prakticky rovnoběžně. Je-li prostorový úhel tělesa větší, úloha se komplikuje. Je nutno sledovat zobrazení malých úseků povrchu takového tělesa: každý z nich má svůj pozorovací úhel, jemuž odpovídá příslušné otočení. V práci R. Penrose z r. 1959 bylo ukázáno, že i v tomto případě se koule zobrazuje vždy s kruhovým obrysem.

Rozhodně však získané výsledky nesmíme interpretovat v tom smyslu, že relativistická kontrakce neexistuje. Právě naopak. Relativistickou kontrakcí je přesně kompenzováno prodloužení obrazu způsobené konečnou rychlostí světla, takže těleso se jeví nedeformované.

Poznámka: Obrázky 1 až 5 jsou převzaty z publikací [3] a [4].

Literatura :

- [1] V Votruba: Základy speciální teorie relativity, Academia, Praha 1969.
- [2] L. Dvořák: Teorie relativity, Rozhledy mat.-fyz. 57 (1978—9), 396—405.
- [3] J. Niederle: Speciální teorie relativity — její použití a ověření, str. 42—54 in: O moderní fyzice, sborník, Čs. společnost pro šíření polit. a věd. znalostí, Praha 1964.
- [4] V G. Levič: Kurs teoretické fyziky I, Nauka, Moskva 1969, § II.22.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Pražský pobyt Jana Keplera

RUDOLF KOLOMÝ, Střední zemědělská technická škola, Moravská Třebová

Dne 27. prosince 1981 uplynulo 410 let od narození Jana Keplera, jedné z nejvýznamnějších osobností v dějinách světové vědy, který v Praze prožil 12 nejplodnějších let a dospěl zde k významným objevům, které značnou měrou obohatily světovou vědu.

Jan Kepler se narodil 27. prosince 1571 v zchudlé šlechtické rodině v městě Weil der Stadt nedaleko Stuttgartu. Své mládí prožil u své starší sestry provdané za protestantského pastora. Studoval teologii v Tübingen, kde ho pokrokový profesor matematiky a astronomie *M. Mästlin* seznámil s Koperníkovou naukou, k níž se veřejně hlásit bylo tehdy nebezpečné. Kepler se nemínil věnovat duchovnímu povolání; přijal proto místo profesora matematiky na evangelickém gymnáziu ve Štýrském Hradci, odkud však musil brzy jako protestant (v době protireformace) i s rodinou odejít. Proto byl rád, že obdržel pozvání dánského šlechtice *Tychona Brahe*, matematika a astronoma císaře Rudolfa II., k návštěvě

a pobytu v Praze. Tycho Brahe sám zakusil osud exulanta, když musil pro nepřízeň dánského dvora opustit dobře vybudovanou a organizovanou astronomickou observatoř Uraniborg na ostrově Hvenu v Dánsku. Proto se tak rád ujal J. Keplera, jehož si velice vážil pro jeho první knihu „*Mysterium cosmographicum*“ (1596), vycházející z Koperníkových představ. Dne 19. října 1600 Kepler přibyl definitivně ze Štýrského Hradce do Prahy.

Praha se na přelomu 16. a 17. století stává prvořadým evropským kulturně vědeckým centrem, podporovaným snahami císaře *Rudolfa II.*, který byl příznivcem věd a umění. Významné rudolfinské období není jen výsledkem činnosti cizích vědců, ale je také vyvrcholením domácí tradice, představované zejména pracemi všestranného vědce a osobního lékaře Rudolfa II. *Tadeáše Hájka z Hájku*. Brahe přišel do Prahy rok před Keplerem jako astronom proslavený na celém světě. V Čechách zamýšlel zřídit ještě větší observatoř, než jakou měl v Dánsku. Prováděl s Keplerem pozorování planet, zejména Marsu, nejprve na zámku barona *Hoffmanna* v Benátkách nad Jizerou a potom ve své observatoři v Praze v domě *Jakuba Kurze*. Slibně se rozvíjející práci astronomického střediska však vážně ohrozila náhlá smrt Brahova dne 24. října 1601. Brahovým nástupcem s hodností císařského matematika a astronoma se stal Kepler. Byl mu ovšem vyměřen podstatně menší plat, než měl jeho předchůdce, a ještě mu byl vyplácen značně nepravidelně. Za svého pobytu v Praze v letech 1600 až 1612 vytvořil Kepler převážnou většinu svých prací. Věnoval se řadě vědeckých oblastí; nejvíce ho však proslavilo studium planetárních drah. Zpracoval mnohaletá, obsáhlá a přesná pozorování pohybu tehdy známých planet, uskutečněná Tychonem Brahe, a sám šest let studoval dráhu planety Marsu. Výsledkem této obtížné práce byla formulace tří zákonů, nazvaných později po Keplerovi. První dva zákony pohybu planet — zákon drah a zákon ploch — formuloval v Praze kolem r. 1605 a rovněž v Praze je publikoval ve spise „*Astronomia nova*“, vydaném v r. 1609. Třetí zákon — zákon dob — vyslovil až po 10 letech ve spisu „*Harmonices mundi*“; to již nebyl řadu let v Praze. Keplerův spis „*Astronomia nova*“ je pro vývoj astronomie přinejmenším stejně významný jako slavný *Koperníkův spis* „*De revolutionibus orbium caelestium*“ (O obězích nebeských těles). Keplerovy zákony pohybu planet pomohly o 70 let později *I. Newtonovi* formulovat zákon všeobecné gravitace.

Astronomická problematika přivedla Keplera i k bližšímu studiu optických jevů. V době pražského pobytu se zabývá např. lomem světelných paprsků, zatměním Slunce a Měsíce, pojednává o složení oka na základě podobnosti s temnou komorou, podává svou teorii vidění a vysvětluje příčiny krátkozrakosti a dalekozrakosti oka. Ve spise „*Dioptrica*“ (1611) studuje vlastnosti čoček a teoreticky zdůvodňuje konstrukci dalekohledu.

Zajímavý je Keplerův vztah k astrologii. Popíral sice možnost astrologických předpovědí v tradičním smyslu, avšak hájil význam astrologie proti těm, kdo ji absolutně odmítali. O astrologii hovoří jako o bláznivé dcerce, která nejednou musí živit rozumnou matku astronomii, aby nezhylnula hladem. Astrologickými předpověďmi se zabýval nerad a převážně jen z hmotného donucení. Pro Albrechta z Valdštejna vypracoval dvakrát horoskop, který byl pro neobyčejnou výstižnost později často diskutován a obdivován.

Kepler nebyl vědec, který by se věnoval jenom vědeckým zájmům. Pěstoval čilé společenské styky s přáteli na císařském dvoře, s významnými představiteli pražské univerzity, české šlechty a s některými pražskými měšťany. Z pražské univerzity udržoval velmi přátelské styky s významným chirurgem a anatomem *Janem Jesseniem*, od něhož převzal některé názory na stavbu lidského oka; Keplerovy optické jevy byly zase užitečné pro Jesseniovu anatomickou práci. Velmi těsné přátelství poutalo Keplera k dlouholetému rektorovi a jedné z nejvýznamnějších postav pražské předbělohorské univerzity *Martinu Bacháčkovi z Neuměřic*. Z české šlechty patřili mezi Keplerovy přátele např. *Václav Budovec z Budova*, patrně nejvzdělanější osobnost protestantského tábora a pozdější vůdce povstání českých stavů proti Habsburkům, i *Petr Vok z Rožmberka*, mocný pán jižních Čech.

Po smrti císaře Rudolfa II. Kepler z Prahy odešel a přijal místo na gymnáziu v Linci, kde žil 14 let. Prošel zde mnohé strasti, neboť to byla doba čarodějnických procesů. Svou matku zachránil před tímto strašným procesem jen svým vědeckým věhlasem a vlivnou obhajobou. Po kratším pobytu v Ulmu, kde dohlížel na tisk „Rudolfinských planetárních tabulek“ (1627), které na mnoho let dopředu určovaly polohy planet, navštívil ještě v r. 1627 nakrátko pobělohorskou Prahu.

Kepler byl u nás prvním a zároveň nejvýznamnějším a nejdůležitějším zastáncem heliocentrického názoru. Řada dalších vědců té doby u nás žijících, např. Tycho Brahe, Tadeáš Hájek z Hájku, Jan Jessenius aj., přijali jen některé prvky Koperníkova učení.

Keplerovy osobnosti a jeho přínosu vědě si neobyčejně vážil jeden z největších fyziků všech dob, *Albert Einstein*. Četl např. i jeho dopisy, které na něho učinily nemenší dojem než jeho klasické práce. Napsal: „... z Keplerových dopisů poznáváme duši neobyčejně citlivou a dychtivou. Tato dychtivost je zaměřena na vyhledání nejhlubších zákonitostí jevů v přírodě. Kepler byl člověk, který si vytkl vyšší cíl a navzdory vnějším i vnitřním těžkostem tohoto cíle dosáhl.“

Literatura :

- [1] Horský Z.: Kepler v Praze. Mladá fronta, edice Kolumbus. Praha 1980.
- [2] Nový L. a kol.: Dějiny exaktních věd v českých zemích. NČSAV Praha 1961.

K článku pražský pobyt Jana Keplera

Pro pobyt Jana Keplera v Praze je pamětihodná Karlova ulice. Tato křivolaká úzká ulička začíná na Malém náměstí, šikmo křižuje Husovu třídu a končí na Křižovnickém náměstí u Karlova mostu. Kepler touto ulicí jistě chodíval na Hradčany. Od roku 1604 totiž bydlel na Ovocném trhu ve Václavově koleji Karlovy univerzity. V letech 1607 až 1612 v Karlově ulici bydlel v domě číslo 4/188, který je dnes označen pamětní deskou na průčelí a v jehož průjezdu jsou vitriny s informacemi o Keplerovi. Na protější straně ulice jsou dva kostely, které patří do souboru budov Klementina. Mezi nimi je tzv. Vlašská kaple, která byla dokončena v 90. letech 16. století. V ní se scházeli Italové žijící v Praze. Půdorys této kaple je elipsa, což tehdy byla v architektuře na sever od Alp novinka. V knize *Kepler v Praze* uvádí dr. Zdeněk Horský, CSc., domněnku, že možná půdorys Vlašské kaple přivedl Keplera na myšlenku počítat, zda dráha planety Mars není eliptická.

jm

Kdo byl Archimédes ze Syrakus

RNDr. VLADIMÍR MALÍŠEK, CSc., UP Olomouc

Newton starověku, Archimédes ze Syrakus (287—212), působil právě před dvěma a čtvrt tisíciletím ve svém rodném městě, čili 2000 let před Newtonem. Žil v době, kdy jeho řečtí krajané byli nositeli vzdělanosti a udávali tón také v exaktních vědách a kdy vrcholil mocenský zápas mezi Římem a Kartágem o nadvládu ve Středomoří. Tato okolnost byla nakonec osudná jak Syrakusům, tak Archimédovi. O jeho životě je však známo jen málo.

Střediskem řecké vzdělanosti byla tehdy Alexandrie, v níž však prý pobyl Archimédes na studiích jen málo, takže všechny své objevy matematické, fyzikální, technické a astronomické (včetně asi 40 vynálezů) učinil v rodném městě, které se jako spojenec Kartága dostalo do války s Římem. Právě díky Archimédovým vynálezům se sicilské Syrakusy bránily po dva roky římské přesile pozemní a námořní, až nakonec padly a jejich největší občan byl zabit římským vojákem při řešení nějakého teoretického problému, doprovázeného rýsováním kružnic do písku, jak to bylo v té době zvykem; to snad vzbudilo strach pověřivého Římana, který se domníval, že „slavný mág“ před ním čaru-

je. Sami Syrakusané na Archiméda záhy zapomněli a mnohem více si ho vážili nepřátelští Římané, jejichž velitel přikázal zmocnit se ho živého a u nichž budil svými stroji příslovečnou hrůzu; také jeho hrob musel jim po 137 letech ukázat římský kvestor *Cicero*. Poznal prý ho podle kamene, na němž byl vyryt válec, do něj vepsána polokoule a do ní kužel (se stejnou kruhovou základnou), o nichž Archimédes dokázal, že poměr jejich objemů je roven $3 : 2 : 1$.

Ač patřil Archimédes k největším technikům starověku, vážil si především problémů a objevů teoretických, považuje technické vynálezy za záležitost nicotnou, k níž byl přiveden jen okolnostmi — válkou s Římany, jež z něho učinila prvního fyzika zabývajícího se vojenskou problematikou.

Přibližný obraz o jeho vědeckém díle skýtá deset zachovaných děl, jejichž názvy naznačují jeho celkové zaměření: 1. O kouli a válci, 2. O měření kruhu, 3. O konoidech a sféroidech, 4. O spirálách, 5. O rovnováze, 6. O kvadratuře paraboly, 7. O počtu písečných zrn, 8. O plovoucích tělesech, 9. *Lemmata* (tj. kniha o pomocných větách) a na sklonku 19. století nalezená kniha 10. *Efodion*. Pro fyziku jsou významné práce 5., 7., 8. a 10. Charakteristické pro ně je, že neobsahují — na rozdíl od prací většiny jeho současníků — žádné přírodně filozofické spekulace. V mechanice se stal Archimédes zakladatelem statiky pevných těles a hydrostatiky. Zavedl řadu potřebných pojmů a také je správně definoval, zejména podal definici těžiště tělesa, statického momentu síly (třebas jej tak nejmenoval) a odvodil podmínku rovnováhy na páce a jednoduchých strojích převeditelných na páku (na kladce a kladkostrojích a kole na hřídeli); podal správnou definici kapaliny a prohlásil, že povrch volné kapaliny musí mít kulový tvar. Na základě toho také předpokládal, že Země má tvar koule a vypočítal její objem. Pochopil význam pojmu hustota, objevil možnost měřit objem těles na základě objemu vytlačené kapaliny ponořeným tělesem, formuloval zákon pro nadlehčování těles ponořených v kapalině, nesoucí jeho jméno, a objevil metodu měření hustoty těles vážením na vzduchu a v kapalině. Motivem k těmto výzkumům byla úloha zadaná mu jeho příbuzným, syrakuským králem *Hieronem* — dokázat, zda mu do zlaté koruny nepřidal zlatník místo zlata stříbro a kolik. Na možnost přesného řešení prý Archimédes připadl v lázních a rozradostněn běžel rychle přes město nahý, volaje heuréka! (tj. našel jsem!), což se stalo příslovečným. Prozkoumal teoreticky i experimentálně nejen všechny jednoduché stroje, ale vymyslel jako další tzv. Archimédův kladkostroj a uchvácen možností získat s jejich pomocí libovolně velkou sílu, vyslovil další, neméně okřídlené rčení týkající se páky — „dejte mi pevný bod a pohnu Zemí“ Vynalezl dále tangenciální čili Archimédův šroub a šroubovité čerpadlo vody. Ve spise O počtu písečných zrn dokonce anticipoval objev integrálního počtu — a aby podal důkaz, že počet písečných zrn, která by

zaplnila veškerý prostor, je konečný, předpokládal, že tento prostor je vymezen dráhou Země, jež podle Aristarcha obíhá kolem Slunce. Patřil tedy k stoupencům heliocentrismu již ve starověku. Určil dále poměr vzdáleností a velikostí Země, Měsíce a Slunce; rovněž délku roku prý určil na $365 \frac{1}{4}$ dne, takže juliánský kalendář byl ztělesněním také jeho ideje (vedle idejí egyptských hvězdářů).

Žádným jiným ze svých vynálezů se prý však u svých současníků neproslavil tak jako glóblem znázorňujícím pohyby nebeských těles, který si po pádu Syrakus odnesl jako trofej římský vojevůdce. Neuvěřitelné legendy kolují o jeho vynálezech vojenských: pomocí obrovských mechanismů prý dovedl zvedat celé římské lodi a házet jimi, vrhat spousty balvanů na římské legie, pálit lodi zrcadly na dálku apod. Některé pokusy byly mnohokrát rekonstruovány (např. spalování zrcadly na dálku) a ukázalo se, že nejsou nemožné. Byť bychom soudili o těchto zprávách jakkoli kriticky, faktem zůstává, že Archimédes byl pravděpodobně největším technikem starověku. V optice prý zkoumal také odraz a lom světla; k formulaci obecného zákona však v této oblasti nedospěl. Zjistil však, že ohnisko dutého zrcadla leží mezi jeho středem a vrcholem. A jeho planetárium prý viděl ještě Cicero, který — ač strážlivý filozof — dospěl k závěru, že Archimédes byl géniem na úrovni téměř neslučitelné s lidskou přirozeností. Je zajímavé, že také na náhrobku Newtonově ve Westminsterském opatství je nápis podobného obsahu (Zde leží *Sir Isaac Newton*, který předčil lidský rod).

Pro Archiméda, stejně jako pro další přední antické matematiky (fyzikové de jure tehdy neexistovali), platí, že jejich práce se vyznačovaly neobyčejnou formální přesností a vytříbeností, jejímž vrcholem byla axiomatická metoda — což však je, jak známo, metoda svrchovaně agenetická. V tomto směru totiž měla dominantní vliv celá ideologie antické společnosti vyjádřená nanejvýš skeptickou filozofií. Přitom matematikové si byli vědomi, že všechny pozitivní vědecké teorie i fakta by skeptikové podrobili okamžitě a ze zásady nejzhoubnější kritice, kdyby svoje dílo již předem nezaštítili touto formální dokonalostí. Od těch dob se datuje chápání matematiky jako čehosi exaktního, dokonalého, mimo veškerou kritiku a pochybnost. Archimédes užívá ve svém díle Efodion metod blízkých našemu integrování, výsledky i své postupy však nakonec převádí do tradiční syntetické geometrické formy — podobně jako za dva tisíce let Newton — neboť nebezpečí útoků ze strany skeptických filozofů se mu jevilo mimořádně aktuální. Archimédes tedy vždy vychází z daných postulátů a axiomů, jež se však nesnaží ani v nejmenším nějak geneticky objasnit — a z těchto výchozích bodů pak již deduktivně, tj. čistě matematicky a bezchybně, dochází k novým, často překvapivým důsledkům, a to při naprostém nedostatku empirických podnětů či jejich dodatečné kontroly pokusem.

Jeho obtížná cesta se proto nakonec musela stát, jako celá starověká „fyzikální matematika“ podle jeho vzoru budovaná, cestou sterilní. Tím a naprostou agenetičností jeho postupu se dá také vysvětlit, proč tento génius nezaložil žádnou vědeckou školu a proč i později nacházelo jeho dílo jen velmi málo pokračovatelů. Značně k tomu ovšem přispíval i názor na jeho dílo a metodu, vyjádřený slovy *Pluterchovými*: „V celé geometrii nelze najít vět, které by byly obtížnější a hlubší než ty, které podává Archimédes, byť nejprostším a srozumitelným způsobem.“ Tuto „jasnost a srozumitelnost“ pak připisují někteří jeho genialitě, jiní úmorné píli a práci, jejímž výsledkem je právě to, že i nejobtížnější věci se stávají lehkými. „Zdá se, že ani pro jednu Archimédovu poučku není možno vymyslet objasnění a zdůvodnění; přečteš-li si však jeho řešení, zdá se ti, že není nic snadnějšího a prostšího.“ Okolnost, že skrýval cestu, po níž dospěl ke svým základním postulátům, jakož i matematická virtuozita a genialita způsobily nakonec, že v očích starých (myslitelů) byl jakýmsi polobožstvem, které uznávali a kterému se takřka klaněli, ale po jehož stopách se jít neodvažovali. Je zajímavé, že i přední novověký myslitel *G. W. Leibniz* byl podobného názoru. Tvůrčí kroky v exaktních vědách jsou dodnes vyhrazeny jen skutečným génium, v jejichž řadě stojí na začátku Archimédes. K některým problémům spojeným s jeho nejznámějším zákonem se ještě vrátíme.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

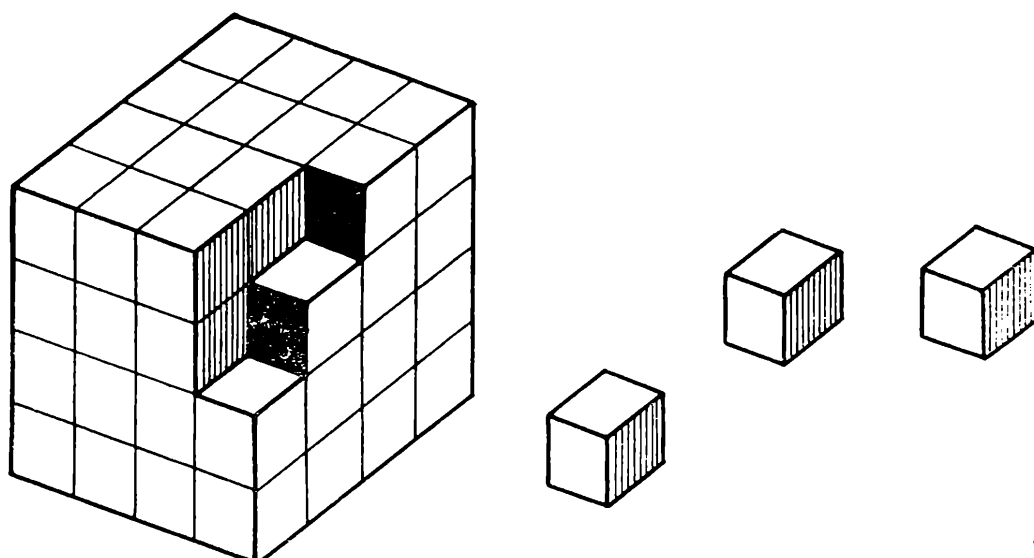
Mnohobarevné krychle

RNDr. MILAN KOMAN, CSc., UK Praha

Krychle a krychlová stavebnice je pro matematiky zdrojem mnoha zajímavých a přitom různě obtížných úloh. Mezi ně patří i naše úloha o mnohobarevných krychlích.

Máme dáno n^3 ($n \geq 2$) shodných jednotkových krychliček. Jejich stěny máme obarvit n různými barvami tak, aby z těchto krychliček bylo možno postupně sestavit n velkých krychlí $n \times n \times n$, které mají vždy celý povrch obarven právě jednou z daných barev.

Předně si všimněte, že počet barev nelze zvětšit. Sestavená velká krychle má povrch $6n^2$. Součet povrchů jednotlivých krychliček je $6n^3$, což je právě n -krát více než povrch velké krychle. Důsledkem toho je,



Obr. 1

že každá stěna kterékoliv jednotkové krychličky se musí na povrchu správně sestavené velké krychle objevit aspoň jednou.

Jestliže celý povrch velké krychle má barvu x , potom pro výskyt této barvy na jednotkových krychličkách platí:

Barva x se vyskytuje na 3 stěnách u 8 krychliček, na dvou stěnách u $12(n - 2)$ krychliček a na 1 stěně u $6(n - 2)^2$ krychliček. Na zbylých $(n - 2)^3$ krychličkách se barva x nevyskytne vůbec.

Jako první si uvedeme řešení pro případ $n = 4$, z něhož bude zároveň patrný i způsob popisu řešení, použitelný i v ostatních případech. Jedno z možných řešení udává tabulka 1.

Tabulka 1

$n = 4$	1	2	3	4
8	3	3		
8			3	3
24	2	2	1	1
24	1	1	2	2

První řádek tabulky znamená, že osm jednotkových krychliček má tři stěny obarveny barvou číslo 1, tři stěny barvou číslo 2 a žádnou stěnu barvou číslo 3 a 4. Podobný význam mají ostatní řádky tabulky. Všimněte si, že v každém řádku tlustě vytažené části tabulky je součet čísel roven číslu 6. (Proč?)

Tabulka 2

4 4 4	3 3 3 3 3 3
4 4	3 3 3
$4(n - 2)$ $4(n - 2)$ $4(n - 2)$	2 2 2 2 2 2 2 2 2
$4(n - 2)$ $4(n - 2)$	2 2 2 2 2 2
$(n - 2)^2$ $(n - 2)^2$	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$(n - 2)^2$ $(n - 2)^2$ $(n - 2)^2$ $(n - 2)^2$ $(n - 2)^2$ $(n - 2)^2$	1 1

Jako další si uvedeme řešení zahrnující všechny případy $n \geq 7$, (viz. tabulku 2).

Pro kontrolu se podle tabulky 2 snadno přesvědčíme, že počet krychlíček, které nemají žádnou stěnu se zvolenou barvou (např. barvou číslo 1) je roven

$$4(n - 2) + 4(n - 2)(n - 3) + (n - 2)^2(n - 6) = (n - 2)^3.$$

Řešení uvedené v tabulce 2 má jednu vlastnost, která v původní úloze nebyla požadována. Každá jednotková krychlička má v požadované sestavě vždy právě jednu z poloh A, B, C:

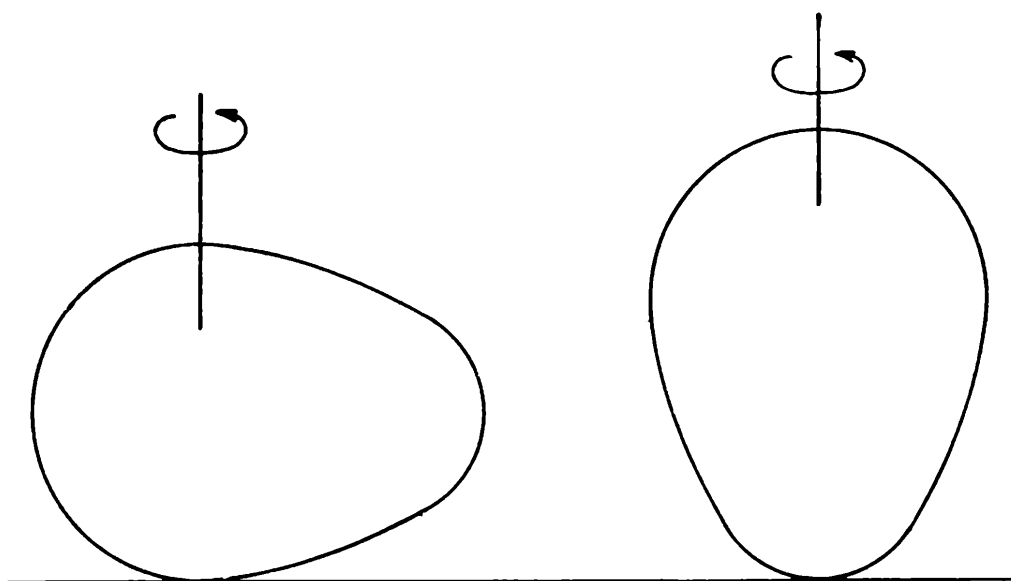
- A: „rohová“ nebo „vnitřní“,
 B: „hranová“ nebo „vnitřní“,
 C: „stěnová“ nebo „vnitřní“.

Přitom každá krychlička je v každé sestavě aspoň jednou „vnitřní“
 Tuto vlastnost pochopitelně nemohou mít řešení pro případy $n < 7$.
 Řešení úlohy pro $n = 2, 3, 5$ a 6 přenecháváme čtenářům.

Efektivní experimenty: Tanec vajec

Jak poznáte, které vejce je vařené a které syrové? Obě vejce položte třeba na linoleum a roztočte. Vařené vejce se vzpřími na špičku, syrové

Obr. 1

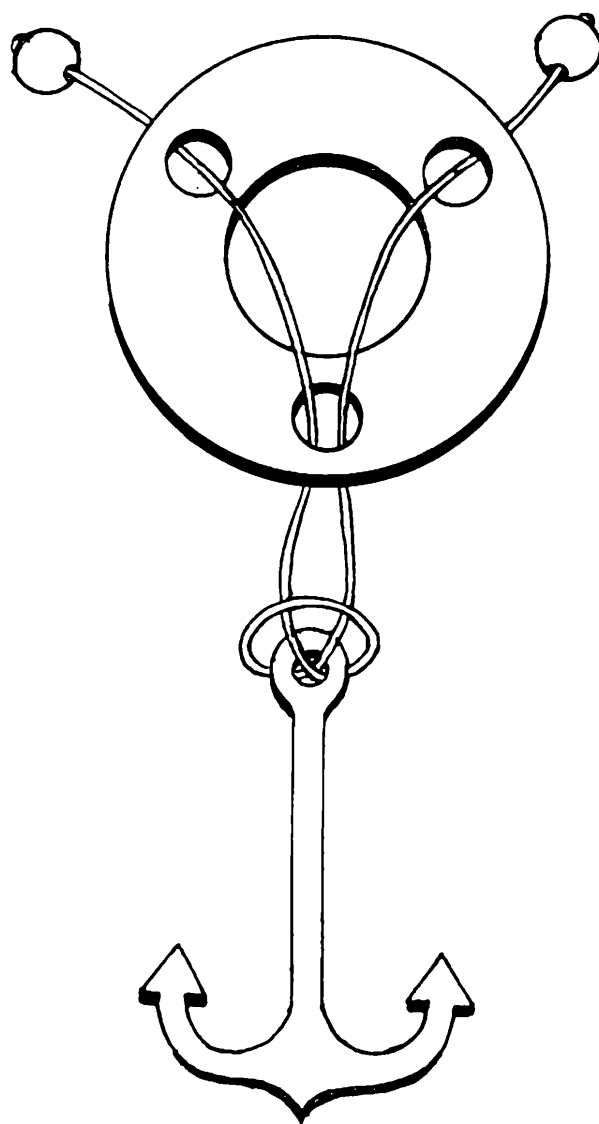


ne (obr. 1). Pokus se daří dobře při rychlém roztočení. Jiná možnost; roztočených vajec se lehce dočtete. Vařené se okamžitě zastaví, syrové bude pokračovat v pohybu. (Vysvětlení experimentu je na str. 310.)

Petr Hnilička

Hlavlám kotva

Chceme-li se naučit řešit určitý typ rovnic, jistě nepostačí vyřešit několik základních příkladů, nýbrž se snažíme rovnici poznat ve všech jejích obměnách — přijít na kloub všem jejím „základnostem“ Podobně je tomu i při řešení hlavlámů. Opakování zůstává i nadále matkou moudrých. Proto dnes přicházíme s hlavlámem, který jsme nazvali



Obr. 1

„Kotva“, jehož princip řešení jsme již poznali dříve. Zkušenost nás však učí, že malá změna na hlavolamu stačí, aby méně zběhlému řešiteli připadal stejně obtížný, jako když ho měl v ruce poprvé. Konečně i svým zajímavým zjevem tento hlavolam stojí za to, abychom se s ním seznámili (obr. 1). *Uvolníte kotvu?*

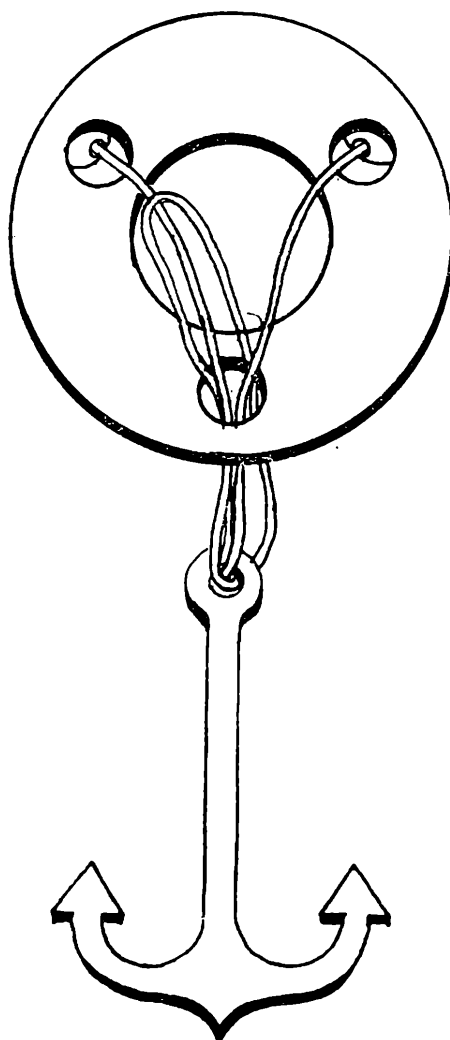
Materiál k jeho výrobě je obdobný jako u předešlých hlavolamů: umělá hmota, plexisklo nebo překližka k výrobě kotouče a kotvy, bužírka a dvě kuličky, jejichž průměr musí být větší, než je průměr tří kruhových otvorů v kotouči. Při sestavování hlavolamu opět nejdříve protáhneme bužírku oběma konci ouškem kotvy a všemi otvory v kotouči podle nákresu a teprve potom připevníme kuličky tak, aby je nebylo možno z bužírky stáhnout.

Průměr kotouče musí být přibližně takový, jaká je délka kotvy. Šířka kotvy se rovná zhruba dvěma třetinám její délky. Délka bužírky i s kuličkami smí být nejvýše o 2 až 3 cm delší, než jsou tři délky kotvy.

Josef Svoboda

ŘEŠENÍ

Smyčku bužírky (její ohnutý konec) protáhneme nejdříve spodním otvorem, potom levým horním otvorem v kotouči a kuličku provlékneme smyčkou (obr. 2). Tím jsme se dostali na opačnou stranu jejího vlák-



Obr. 2

na. Týmž způsobem obejdeme i druhou kuličku, smyčku vyvlékne-
me z obou zbývajících otvorů v kotouči a pohodlně i z ouška kotvy. Opač-
ným postupem dáme hlavolam dohromady.

OPRAVA

V obrazové části článku „Metoda náhradního zdroje“ (RMF č. 5, roč. 60, 1981-82) došlo ke vzájemné záměně obr. 1 a obr. 4. Prosíme čtenáře, aby omluvili toto nedopatření.

Redakce

Výzva čtenářům ke spolupráci

V letošním školním roce jsme zahájili 23. ročník fyzikální olympiády. Za tuto dobu získali organizátoři řadu zkušeností s průběhem soutěže a bylo zorganizováno mnoho forem pomoci řešitelům. Hlavní složkou práce účastníků FO je však řešení úloh. To představuje připravit v průběhu každého roku celkem 64 vhodných fyzikálních úloh (dostatečně náročných, dostatečně zajímavých a přitom přístupných řešitelům každé kategorie). ÚVFO vypsal již několikrát veřejný konkurs, v němž se sešlo mnoho fyzikálních úloh, jež byly do soutěže zařazeny; autory úloh byli většinou vyučující fyziky na základních, středních i vysokých školách.

Domníváme se, že řada čtenářů Rozhledů patří mezi dlouholeté účastníky fyzikální olympiády, že získali dosti zkušeností z řešení úloh. Vyzýváme proto zájemce, aby se zúčastnili *konkursu na výběr úloh pro fyzikální olympiádu, a to ve všech kategoriích*. Máme zato, že starší řešitelé (z kategorií A, B) by mohli zadat úlohy pro své mladší spolužáky, kteří se účastní fyzikální olympiády v kategoriích C, D, E. Navrženou úlohu je třeba napsat na stroji nebo alespoň čitelně rukou, originál spolu s kopií zaslat na sekretariát ÚVFO. Po dobu výběru až do případného zařazení do soutěže je nutno uchovat úlohu v tajnosti. Přijatá úloha je honorována částkou 50 Kčs. Máte-li zájem nám pomoci, zašlete své návrhy buď na sekretariát ÚVFO v Hradci Králové (Dr. Ivo Volf, ped. fakulta, 501 91 Hradec Králové) nebo na sekretariát do Bratislavy (Dr. Viktor Bezák, CSc., MFF Univerzity Komenského, 816 31 Bratislava). Nezapomeňte udat svou domácí adresu.

Dr. Ivo Volf, ÚVFO

Jak pokračují

Není pochyb, že nás zajímá, jak pokračují ve svém studiu ti, jejichž jména jsme před rokem, dvěma či třemi slyšeli v souvislosti s matematickou olympiádou, i ti, kteří řešili naši soutěž v Rozhledech a četli náš časopis. S nimi jsme se znovu setkali v matematické soutěži vysokoškolačů, jejíž první ročník se konal v dubnu 1981 v Harrachově. Organizovala jej matematicko-fyzikální fakulta UK v Praze ve spolupráci s matematickou vědeckou sekci Jednoty čs. matematiků a fyziků a byl součástí oslav dvoustého výročí narození Bernarda Bolzana, které při-

padlo na loňský rok. Soutěžili studenti ze šesti vysokých škol a vedle univerzit byla zastoupena i fakulta jaderného a fyzikálního inženýrství ČVUT. Z tohoto zápolení vysokoškoláků vznikla jako zájmový náklad i brožura s názvem Matematická soutěž vysokoškoláků (1. ročník), kterou sestavili *doc. Dr. I. Netuka, CSc. a Dr. J. Veselý, CSc.*

V kategorii družstev se v Harrachově na první místo dostali Jaroslav Hančl, Jiří Navrátil a Pavol Quittner, v jednotlivcích byl první Petr Savický. Blahopřejeme.

J. S.

INFORMACE

Třetí celostátní přehlídka středoškolské odborné činnosti

BOHUMIL KOLÁČNÝ, G Brno, tř. kpt. Jaroše

Ve dnech 18. až 21. června 1981 se ve Znojmě konala III. celostátní přehlídka SOČ. V rámci této přehlídky se uskutečnila vedle celostátního kola Malé společenské aktivity a přehlídky zájmové umělecké činnosti také přehlídka středoškolské odborné činnosti. Patřily do ní obhajoby samostatných prací v 17 oborech z oblasti techniky, přírodovědy a společenských věd. Odborné poroty přitom posoudily více než 390 prací, které postoupily do celostátní přehlídky z krajských kol obou našich republik. Tradičně vysokou úroveň měla přehlídka prací z oborů matematika a fyzika. V každém z těchto oborů posuzovala práce odborná porota složená z pracovníků vysokých škol, vědeckých ústavů i středních škol.

Výsledné umístění soutěžních prací z matematiky:

1. Jan Nekovář, Petr Plecháč, gymnázium W. Piecka, Praha: Racionální body na eliptických křivkách. 2. Michal Brandejs, gymnázium Koněvova, Brno: DOS/RTE SORTING. 3. Peter Borovanský, gymnázium J. Hronca, Bratislava: Systémový příkaz REN na číslicovém počítači ADT 4316. 4. V Dzurenda, L. Galovič, S. Schlossárová, L. Guniš, M. Hričovský, R. Klein, J. Karellová, gymnázium Prievidza: Kompilá-

tor FIP. 5. J. Janovský, M. Prokop, M. Remiš, M. Svoboda, gymnázium Štěpánská, Praha: Překladač BASIC pro počítač EC 1021. 6. Petr Sojka, gymnázium Koněvova, Brno: Šachy s počítačem. 7. Anna Mikolášová, gymnázium J. Hronca, Bratislava: Najväčšie prvočísla. 8. Yveta Danešová, SPŠ elektrotechnická, Piešťany: Hľadanie minima formy $x^4 + y^4 = z^4$. 9. Ján Murín, gymnázium Zvolen: Geometria rovnobežníka. 10. Daniel Jenne, gymnázium Jirovcova, České Budějovice: Grafické výstupy.

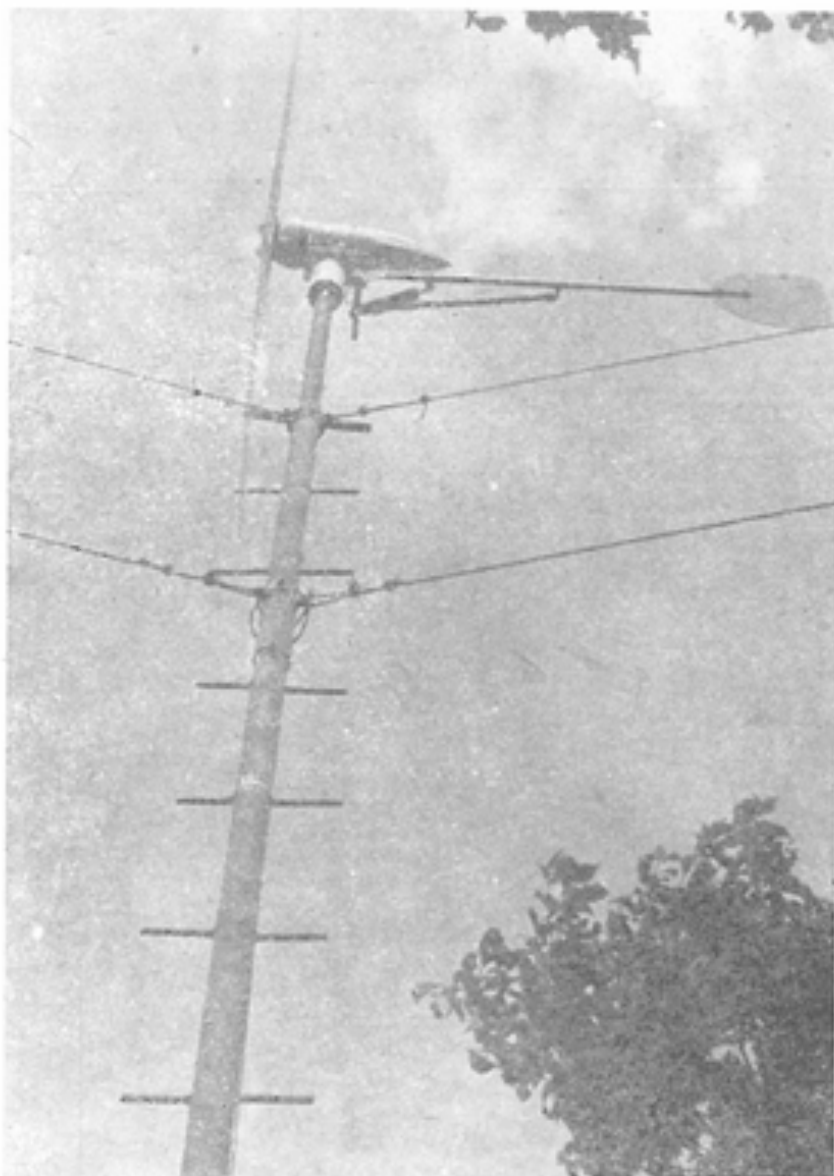
Výsledné umístění soutěžních prací z fyziky :

1. L. Juha, M. Sviták, L. Šmíd, V. Veselý, gymnázium Vlašim: Měření světelného výkonu dusíkového laseru roztokovým chemickým aktinometrem. 2. Tomáš Chýlek, gymnázium Praha 10: Distanční senzitometr pro měření Schwarzschildova jevu černobílých fotografických emulzí. 3. Eva Búšová, gymnázium Bratislava: Súbor čiernych skrinek. 4. Jaromír Musil, gymnázium Blansko: Magnetometrické měření a jeho aplikace pro zjišťování podzemních prostor v krasových oblastech. 5. R. Šelongová, A. Urbancová, J. Vykydal, gymnázium Ostrava: Zásah Slunce do života člověka. 6. Slavomír Kupčok, SPŠ strojní, Brezno: Fotoelasticimetrické zisťovanie napätí. 7. Peter Glevitzký, Peter Link, gymnázium Košice: Metódy merania osciloskopom. 8. A. Lieskovský, M. Thér, gymnázium Praha 7: Zařízení pro automatickou regulaci rychlosti elektrických lokomotiv. 9. Miroslav Adámy, gymnázium Žiar nad Hronom: Sabatierov efekt. 10. Martin Orlita, gymnázium Košice: Fyzikálne princípy lietania.

Využití větrné energie — práce odměněná v rámci SOČ

Ing. MILAN ŠAFRÁNEK, CSc., Brno

Ve dnech 18. až 20. června 1981 se konala ve Znojmě III. celostátní přehlídka Středoškolské odborné činnosti (SOČ). Zúčastnil jsem se jí jako člen odborné poroty v oboru „Úspora energie a využití nekonvenčních zdrojů“. K posouzení bylo této porotě zasláno celkem 24 prací. Většinou to byly práce velmi zajímavé, prokazovaly velký zájem středoškolských studentů a tuto problematiku a dokazovaly i poměrně velké znalosti autorů. V několika případech značně převyšovaly předpokládané znalosti studentů středních škol a dosahovaly již úrovně vysokoškolských znalostí. Obhajoby prací před porotou doložily, že se jedná



o samostané práce, autoři byli schopni dobře odpovídat na podrobnější odborné otázky.

Jednou z odměněných prací byla práce studenta gymnázia v Brně (na tř. kpt. Jaroše) *Dušana Rašína* „*Větrné elektrárny, využití energie větru*“. Přestože se v ČSSR problematice větrných elektráren a využití energie větru v posledních létech nevěnuje téměř žádná pozornost a je k dispozici i minimum údajů v dostupné odborné literatuře (v porovnání s využitím sluneční energie apod.), předložená práce Dušana Rašína dokázala nejen jeho *odborné teoretické znalosti* v oboru využití energie větru (kinetická energie vzduchu, vyšetření funkce vrtule a aerodynamika rychloběžné vrtule apod.), ale i *praktické poznatky*, jako je způsob natáčení vrtule do směru větru a zabezpečení větrné elektrárny proti vichřici. Po teoretickém úvodu je v práci podrobně popsána vlastní konstrukce a zkušenosti z provozu větrné elektrárny postavené vlastními silami. Popis je doplněn vhodnými fotografiemi; jedna z nich je zařazena i zde.

Dušan Rašín vyšel z teoretických principů, navrhl, zhotovil a i v praxi ověřil větrnou elektrárnu, která patří do kategorie menších zařízení o výkonu do jednoho kilowattu. Tyto větrné elektrárničky jsou však nejvhodnější pro krytí energetických potřeb horských usedlostí, chat, rekreačních objektů, ale i mnoha zemědělských objektů podle jejich specifických potřeb, např. pro ohřev vody, čerpání vody, zajištění osvětlení, resp. hlídání zvířat na dlouhodobých pastvách atd.

Pro výrobu elektrického proudu D. Rašín použil dynamo o výkonu 0,5 kW a napětí 12 V. Použití alternátoru by bylo, jak uvádí autor, bezesporu modernější, ale žádný z běžných alternátorů by nebylo možné upravit na poměrně nízké otáčky vrtule. Významné úpravy provedl autor v elektrickém zapojení regulátoru nabíjení; polovodičovou automatickou zabráňuje přebíjení akumulátoru. Snížil přitom vlastní spotřebu regulátoru z 300 mA na 50 mA.

Dušan Rašín navrhl a zhotovil i potřebný stožár pro větrnou elektrárnu. Jeho výška je 12 m, je zhotoven z ocelové trubky o průměru 120 mm a sestává ze dvou oddělitelných dílů. Je ukotven šesti kotevními lany ve výšce kolem 7 a 10 m, vrcholy okolních stromů převyšuje asi o 5 m. Všechna lana jsou opatřena napínáky, kterými lze přesně nastavit kolmost a přímost stožáru. Vrchol stožáru je tvořen trubicí o průměru 80 mm zakončenou nábojem pro kuličková ložiska. Pata stožáru je tvořena kulovým čepem, který je zapuštěn do betonového bloku a umožňuje sklápění stožáru. Stožár je jako nejvyšší bod v dané oblasti uzeměn pro svedení případných bleskových výbojů.

Zkušenosti z praktického provozu předčily všechna očekávání, neboť skutečný výkon elektrárny přesahuje výkon projektovaný. Praktický výkon vrtule je asi 0,6 kW. Vzhledem k velmi pečlivému vyvážení a aerodynamickému zpracování má vrtule velice klidný a příjemný chod.

Postavená větrná elektrárna zásobuje elektrickou energií rekreační objekt o pěti místnostech se sedmi osvětlovacími tělesy. Navíc je do sítě zapojen televizor, případně i jiné spotřebiče, při větrném počasí lze připojit i elektrický ohřívač vody.

I když v našich podmínkách nedosáhnou větrné elektrárny výrazného podílu na celkové energetické bilanci státu, přesto jsou perspektivní pro zásobování zemědělských, rekreačních a jiných objektů v místech, kdy připojení na síť by bylo vzhledem ke vzdálenosti a terénu problematické. Právě pro tyto případy použití jsou vhodné větrné elektrárny o výkonu od stovek wattů do desítek kilowattů. Ve své práci Dušan Rašín prokázal, že tato zařízení lze s úspěchem realizovat.

Předložená práce byla v krajském kole SOČ v Jihomoravském kraji vyhodnocena na 1. místě a v celostátním kole byla vyhodnocena jako třetí nejlepší práce v daném oboru „Úspory energie a využití nekonvenčních zdrojů“

Práce členů poroty byla sice náročná — prostudovat v krátké době 24 předložených prací a vyslechnout během jednoho a půl dne 24 obhajob, ale všechny nás v porotě vzrušoval ten živelný zájem účastníků celostátního kola SOČ co nejlépe obhájit svou práci a svou prací co nejvíce přispět k řešení energetické situace v našem státě. Naskytá se otázka, co dál s tím nadáním a elánem našich středoškolských studentů. Většina z nich půjde studovat na vysoké školy, zejména technického směru. Byla by však škoda, aby talenty nalezené díky Středoškolské odborné činnosti zapadly. Vysoké školy budou jistě věnovat těmto talentům individuální péči, poskytnou jim vhodné konzultanty, případně je již během studia zapojí do práce výzkumných ústavů a vědeckých pracovišť. Jsem přesvědčen, že tato specifická péče o studenty se naší socialistické společnosti vyplatí a umožní zajistit co nejlepší výběr pracovníků do vědeckých a výzkumných pracovišť.

Ukázky příkladov z matematiky na prijímacie pohovory na matematicko-fyzikálnu fakultu UK v Bratislave

Na ukážku uvádzame dve päťice príkladov na prijímacie pohovory z minulých rokov. Písomná skúška z matematiky trvá 60 minút.

1. varianta

1. Riešte nasledujúce sústavy rovníc v obore reálnych čísel:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2x + 3y = 5 & \text{b) } \log_{10}(4xy) = 2 & \text{c) } \sin(x + y) = 1 \\ 7x - 2y = -20 & \log_{10}(x + y) = 1 & \sin x + \sin y = 3 \end{array}$$

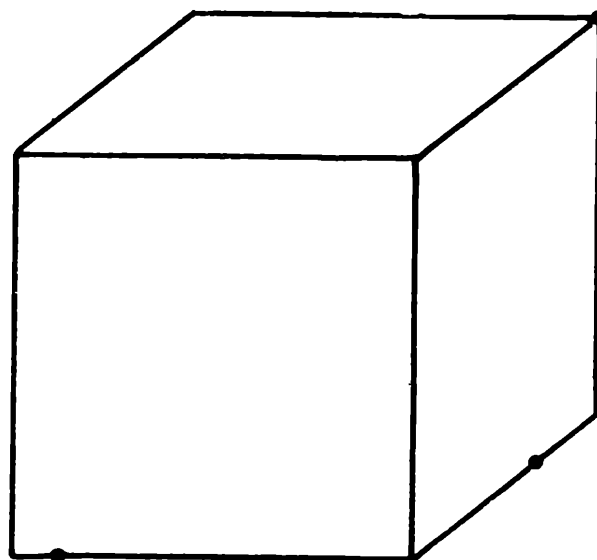
2. Na trati autobusu miestnej dopravy je 16 zástavok včítane východzej a konečnej zastávky. Dopravný podnik rozhodol, že v záujme zrýchlenia dopravy 8 zástavok zruší.

- a) Koľkými spôsobmi to môže urobiť, ak východzia a konečná zástavka zostanú nezmenené?
- b) Koľkými spôsobmi to môže urobiť, ak navyše ešte požadujeme, aby spomedzi ľubovoľných dvoch susedných zástavok aspoň jedna bola zrušená?

3. Rozhodnite, či sú pravdivé nasledujúce výroky. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

a) $3^{400} > 4^{300}$

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}: |a| = |b| \Rightarrow |a + 1| = |b + 1|$



Obr. 1

c) $\exists x, y \in \mathbb{R}: x < y \wedge 2^x \geq 2^y$

4. Daný je pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ so stranou $AB = 1$.
Vypočítajte obsah trojuholníka BCH , kde $H = \vec{AB} \cap \vec{CE}$.
5. Napíšte rovnicu kružnice $k = (S, r)$, ktorá sa dotýka oboch súradných osí a prechádza bodom $M = [2, 1]$.

2. varianta

1. Zistite počty prvkov nasledujúcich množín, keď viete, že množina $\mathbf{A}$ má 5 prvkov, $\mathbf{B}$ má 7 prvkov a $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ má 1 prvok.
- množiny $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$
 - množiny $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
 - množiny $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \times \mathbf{A})$.
2. Riešte nasledujúce rovnice v obore reálnych čísel:
- $\frac{3x + 8}{2} - \frac{x + 6}{2} = x + 1$
 - $\sqrt{x + 1} + \sqrt{4x + 4} + \sqrt{9x + 9} = 6$
 - $\sin x + 2 \sin^2 x = 1$.
3. Koľko rôznych zástav s tromi vodorovnými pruhmi existuje, keď jednotlivé pruhy sú alebo biele, alebo červené, alebo modré, alebo žlté, alebo zelené a
- zástava musí byť trojfarebná,
 - zástava je trojfarebná alebo dvojfarebná, ale susedné pruhy sú rôznej farby.
4. Daný je pravidelný osemuholník $ABCDEFGH$ so stranou $AB = 1$.
Označme $R = \vec{AB} \cap \vec{DE}$. Vypočítajte RC .

5. Danými třemi body (tučné bodky) je určená rovina (obr. 1). Narysujte rez kocky rovinou a číslujte poradie, ako rez tvoríte.

H. Bereková, I. Hecht, MFF UK Bratislava

Z NOVÝCH KNIH

Karel Rektorys a spolupracovníci:

PŘEHLED UŽITÉ MATEMATIKY

Vydalo SNTL — Nakladatelství technické literatury, vydání čtvrté, nezměněné, Praha 1981, 1140 stran, 405 obrázků, váz. 99 Kčs.

Knihy mají různé osudy. Některé vyjdou v jediném vydání a dalšího se nedočkají. Některé si koupíme, přineseme domů, přečteme nebo jen prolistujeme, uložíme do knihovny a nikdy se k nim již nevrátíme. Takovou knihou rozhodně není „Přehled užité matematiky“, který se svými spolupracovníky zpracoval prof. RNDr. Karel Rektorys, DrSc.

Po prvním vydání v roce 1963 celkem rychle následovala další, takže v roce 1981 byla kniha vydána již po čtvrté. To se u knih tohoto druhu nestává často.

Kniha vznikla z popudu České matice technické a velmi mnoho organizačního a odborného úsilí věnoval jejímu vzniku *prof. RNDr. František Vyčichlo, DrSc.*, nositel Řádu práce. Jeho památce je též kniha věnována.

Z toho, že kniha vyšla již ve

čtvrtém vydání, je zřejmé, že při její přípravě se podařilo vybrat partie matematiky, jež jsou nejdůležitější a nejpotřebnější pro pracovníky s technickým zaměřením (techniky, inženýry, výzkumné pracovníky, posluchače i učitele vysokých škol) a pro teoretické pracovníky v oborech blízkých aplikované matematice (fyziky, geodety atd.). Na úspěchu knihy má též zásluhu její pečlivé a přístupné zpracování. Mnohé partie může pochopit i student nebo absolvent střední školy.

Látka je rovržena do 35 kapitol, v nichž se probírají vedle vysokoškolské algebry a geometrie, diferenciálního a integrálního počtu i modernější disciplíny jako variační počet, počet pravděpodobnosti, matematická statistika apod.

Kniha podává přehled základních pojmů, výsledků, metod a vzorců. Důkazy nejsou uváděny. Čtenář však nalezne mnoho vysvětlujících poznámek a příkladů, které mají význam pro praxi.

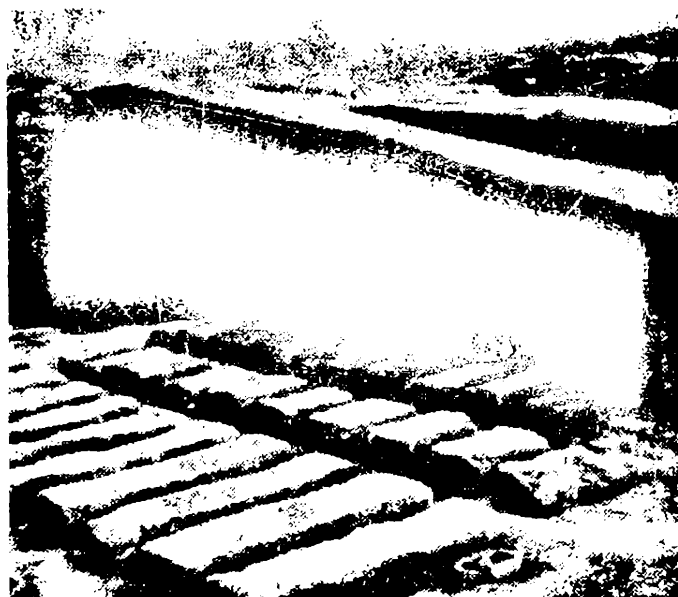
Orientaci v knize ulehčuje podrobný obsah, jenž je na 14 stránkách, a rejstřík, který má rozsah 38 stran.

Jiří Mída

POHLEDY DO DĚJIN

Domy tabulek

Pro nás trochu neobvyklý název „dům tabulek“ patřil nejstarším školám, o kterých historie něco ví. Vynález písma ve starodávném Sumeru ve 3. tisíciletí před n. l. je doložen hliněnými tabulkami s obrázkovým písmem, ze kterého se vyvinulo tzv. klínové písmo. Tabulky byly různých rozměrů, největší známá obdélníková tabulka měří 30 cm a 46



cm; sušily se na slunci nebo vypalovaly v pecích, uchovávaly se v hliněných nádobách. Archeologové našli celé archivy tabulek, a to jednak v královských palácích, jednak v písařských školách.

Z jedné takové školy je náš obrázek; díváte se do školní místnosti s lavicemi, která byla odkryta v rozvalinách města Mari zničeného babylónskými vojsky kolem r. 1700 před n. l. Vyučovalo se nejen psaní a čtení, ale řešily se i praktické početní příklady, vedení účtů apod. Vše bylo napsáno na tabulkách, žáci si přinášeli svoje malé tabulky do dlaně (s rozměry 4 cm × 4 cm), na které psali při výuce. Název „dům tabulek“ byl proto výstižný; „otec domu tabulek“ byl ředitel školy, „syn domu tabulek“ každý žák. Ředitel měl „pověřence“ pro jednotlivé druhy zaměstnání; nad docházkou a kázní bděli „pověřenci s bičem“. Matematiku a astronomii vyučovali „moudří písaři číslic“, ale do jejich znalostí nahlédneme až příště.

Snímek i základní údaje jsou převzaty z knihy J. Klíma: *Společnost a kultura starověké Mezopotámie*, NČSAV 1962.

J. Šedivý

Ústřední výbor **MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY** vydává v nakladatelství **MLADÁ FRONTA** edici **ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ**. První svazky této knižnice vyšly před dvaceti lety v roce 1961.

V plánu na rok 1982 jsou svazky:

- A. Płocki: Náhoda a pravděpodobnost
- A. Kufner: Symetrické funkce
- F. Veselý: O nerovnostech (2. vydání)

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12 Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačková 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n.ř.p. v Praze 1982.

ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

1921/22

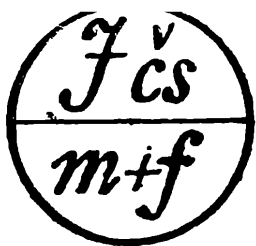
1981/82

*** 60 let**

(8)

**ROČNÍK 60, 1981/82
DUBEN**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc,
doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava,
Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha,
doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha,
doc. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra,
ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

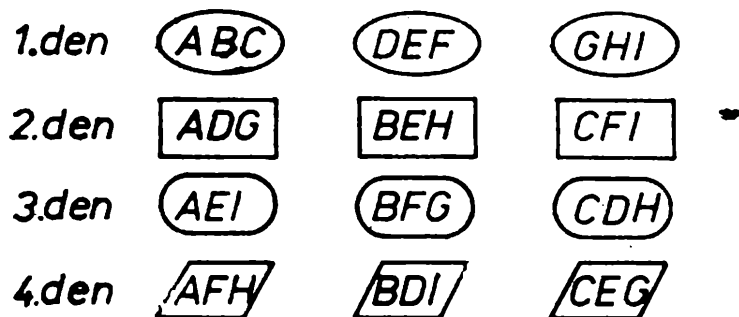
OBSAH

J. Kadleček: Modelování jednoho typu slovních úloh .	337
E. Martinovičová: Zaujímavé obsahy	340
E. Calda: Zajímavá množina bodů .	345
V. Mráz: Sinusové a tangentové pravítko	348
J. S.: Ještě o prvočíslech	352
S. Horák: Objem čtyřstěnu	353
V. Malíšek: Archimédův zákon a některé jeho „neobvyklé“ důsledky .	354
J. Kotyk: Seebeckova sířena .	356
I. Volf: Mládež a kosmonautika .	358
R. Hudec: Neutrinová astronomie	362
J. Šedivý: Wacław Sierpiński – významný vědec 20. století	364
J. Mída: O cestě k Newtonovým pohybovým zákonům .	366
Š. Schwabik: Babylónská věž	371
S. Horák: Nejmladším čtenářům	372
J. Voříšek: Sedm zajímavých úloh	373
Informace	375
Z nových knih .	383
Pohledy do dějin .	. 3. str. obálky

Modelování jednoho typu slovních úloh

RNDr. JIŘÍ KADLEČEK, CSc., MFF UK Praha

V malé vísce požádal národní výbor občany o pomoc při ochraně úrody před požáry. Přihlásilo se devět místních sportovců a byla jim přidělena tři místa, která je třeba po čtyři neděle sledovat: pole podél trati, stohy u kravína a okolí silnice. Hned bylo jasné, že je třeba pro každý ze čtyř dnů vytvořit tři skupiny, ale jak? Chlapci nebyli s to sladit svá protichůdná přání, až došli k závěru, že spravedlivé řešení bude takové, když utvoří každý den tři trojčlenné skupiny a v průběhu čtyř dnů je budou měnit tak, aby hlídal každý s každým nejvýš jednou. Při jejich dohadování zpozorněla Zuzana, která poslouchala, o čem chlapci hovoří; místo kreslení princezny pro mladší sourozence se chvíli zabývala kreslením kroužků, šíšek a čtverečků s písmeny a za několik minut jim podala obrázek (obr. 1).



Obr. 1

Aleš, Bořek, Cyril, David, Emil, Franta, Gustík, Hynek a Igor nebyli žádní nedovtipové. Jen se na okamžik zahleděli na písmena, zajuchali radostí tak, jak se juchá jen v té malé vísce, poděkovali a rozloučili se. Jen Emil, pozorný a galantní, po chvíli podal Zuzaně oknem tři kopretiny a polárku.

— * —

Popřejme Zuzaně dobrou chuť a podívejme se, jaký problém vlastně řešila neboli sledujme její způsob *matematizace reálné situace a vytváření matematického modelu*, ve kterém úlohu vyřešila. Označení členů hlídek písmeny jí umožnilo přehledný zápis, jehož základem je devítiprvková množina $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$.

Vytvoření tří hlídek pro jeden den pak znamená vytvoření tří trojprvkových podmnožin takových, že žádné dvě neobsahují společný prvek (tj. jsou navzájem disjunktní). Jedna možnost volby pro první den je:

$$\{A, B, C\}, \quad \{D, E, F\}, \quad \{G, H, I\}.$$

V zájmu spravedlivého rozdělení bude třeba pro každý z dalších tří dnů vytvářet tři analogické trojprvkové podmnožiny, ale tak, aby se každá dvojice prvků vyskytla nejvýše v jedné ze dvanácti podmnožin. I zkusmým hledáním se nám po chvíli podaří najít třeba Zuzanin výsledek, jehož interpretace do reálné situace je zřejmá.

Uvedený způsob modelování dané slovní úlohy není přirozeně jediný možný, ukažme si další způsob, tzv. *incidenční tabulku*. Označme chlapce opět počátečními písmeny a jednotlivé hlídky dvojčíslími (např. 23 bude znamenat druhý den, třetí hlídka). Nechť symbol 1 v průsečíku řádku a sloupce značí příslušnost chlapce do uvedené hlídky; symbol 0 pak znamená, že chlapec do hlídky nepatří.

	11	12	13	21	22	23	31	32	33	41	42	43
A	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
B	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
C	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
D	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
E	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
F	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
G	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
H	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
I	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0

(Počet jedniček ve sloupci značí počet členů hlídky; počet jedniček v řádku počet hlídek, kterých je příslušný chlapec postupně členem.)

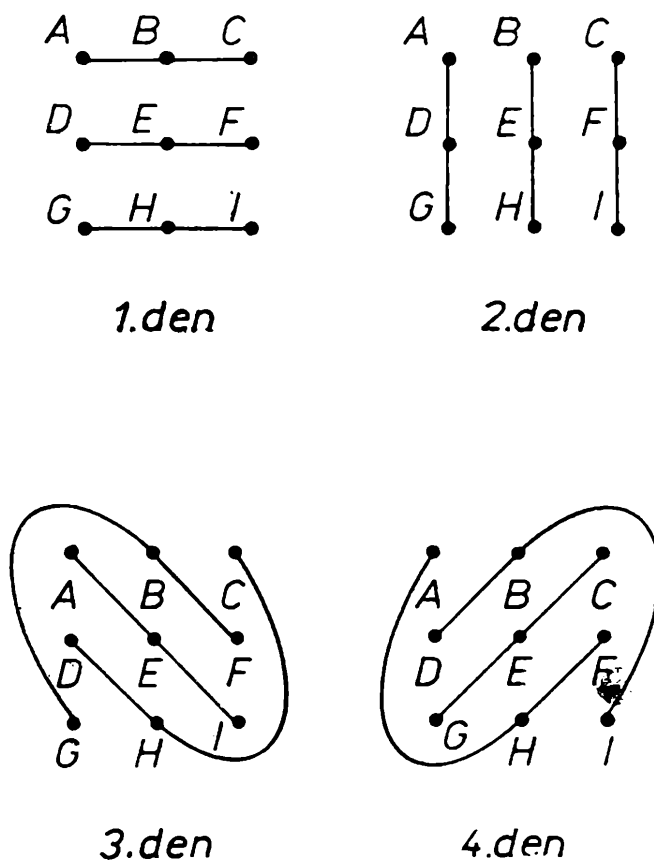
Incidenční tabulka umožňuje využít určité geometrické pravidelnosti v rozmístění jedniček nejen k nalezení výsledku, ale i ke snadné kontrole; nepřipustná by byla například situace

$$1 \dots \dots \dots .1$$

$$1 \dots \dots \dots \dots \dots 1$$

která by znamenala, že se dva chlapci setkají ve dvou různých hlídkách.

Tutéž slovní úlohu lze matematizovat také tak, že vytvoříme *geometrický model*. Skupina chlapců bude znázorněna množinou bodů (které označíme opět počátečními písmeny křestních jmen chlapců), příslušnost k jedné hlídce naznačíme spojením příslušných bodů čarou. Pro přehlednost nakresleme pro každý den samostatný obrázek v rámci obr. 2.



Obr. 2

Jak se projeví původní požadavky v geometrické interpretaci? Je zřejmé, že vytvoření tří hlídek pro každý den vyžaduje zakreslení tří čar v každém obrázku tak, že na každé z nich leží tři body. Pokud by některý bod náležel dvěma čarám v jednom obrázku, znamenalo by to, že odpovídající chlapec má být toho dne na dvou různých místech zároveň — tedy chybu. Pozor na to, že nemá smysl uvažovat o tvaru těchto čar či o jejich společných bodech (průsečících). Ve skupině devíti bodů zakreslujeme tedy čtyři systémy tří čar tak, aby každé dva body náležely nejvýš jedné ze 12 čar.

— * —

Úloha: Zkuste všemi uvedenými způsoby řešit naši úlohu pro n hlídek, n^2 sportovců a $n + 1$ dní, jestliže $n = 2$ či $n = 4$.

Upozornění: Je známo, že pro některé hodnoty n řešení neexistuje (např. pro $n = 6$). Existence řešení úzce souvisí s existencí konečné roviny řádu n ; o tom srozumitelně a poutavě vykládá kapitola *Konečné geometrie* v knize K. Havlíček a kolektiv: *Cesty moderní matematiky*, MME, Horizont Praha 1976, str. 195—217.

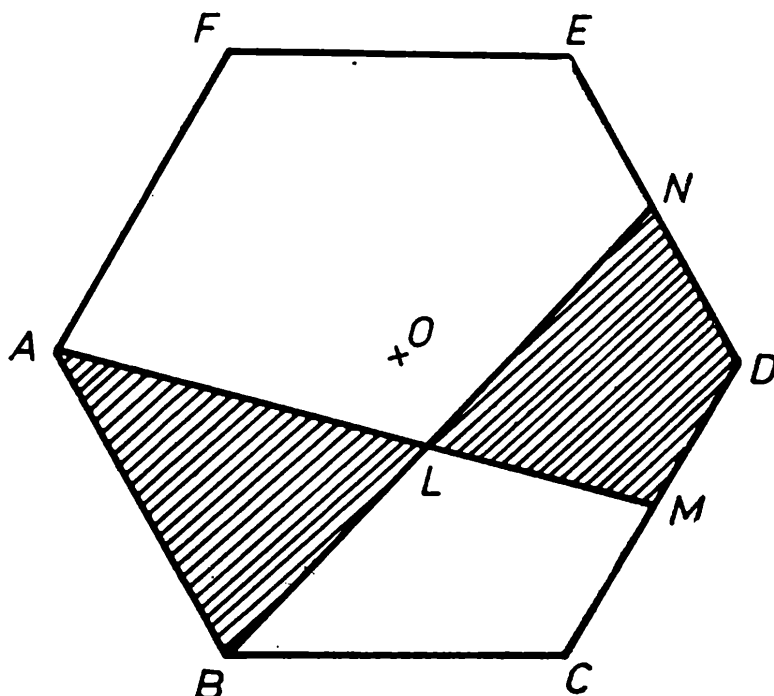
Zaujímavé obsahy

EVA MARTINOVIČOVÁ, Gymnázium Makarenkova, Bratislava

V časopise Kvant 9, 1980, str. 34 v rubrike „Zadačník Kvanta“ je uvedená úloha M 641:

Daný je pravidelný šestiuholník $ABCDEF$ so stredom O , body M , N sú stredy strán CD , DE . Priamky AM a BN sa pretínajú v bode L . Dokážte:

- a) trojuholník ABL a štvoruholník $DMLN$ sú rovnoploché (obr. 1),
- b) $|\angle ALO| = |\angle OLN| = 60^\circ$,
- c) $|\angle OLD| = 90^\circ$.



Obr. 1

Je zaujímavé, ako jednoducho možno riešiť časť a) uvedenej úlohy. Stačí dokresliť ďalšie 4 priamky (CP , DR , ES , FT), ktoré z priamky AM či BN získame otáčaním okolo O o 60° , 120° , 180° a 240° . Šestiuholník sa takto rozpadne na 19 častí (obr. 2), ktoré sú 4 druhov;

6 z nich sú zhodné trojuholníky; obsah jedného označíme a ,

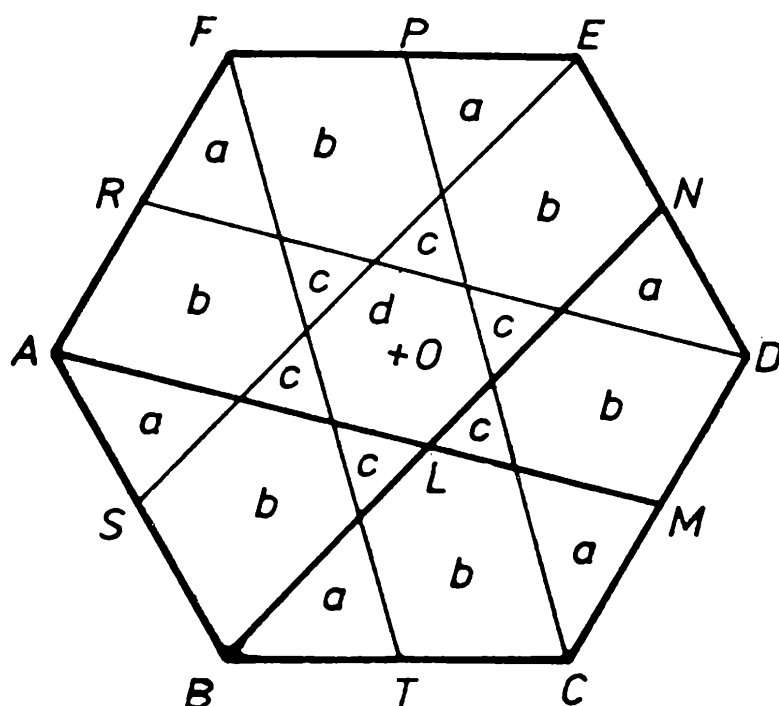
6 z nich sú zhodné rovnostranné trojuholníky; obsah jedného označíme c ,

6 z nich sú zhodné 5-uholníky; obsah jedného označíme b ,

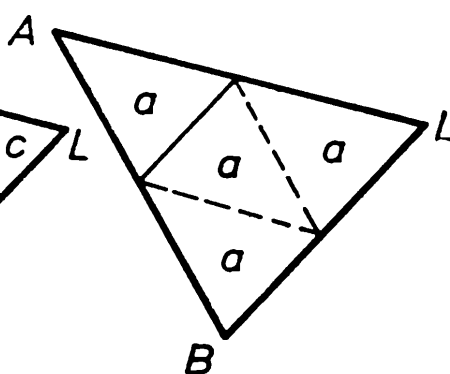
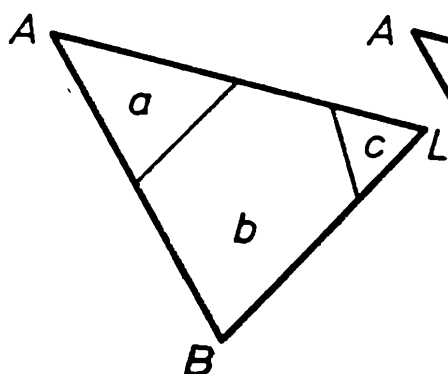
a jedna časť je pravidelný 6-uholník s obsahom d .

Priamo z 2. obrázka vidieť, že obsah trojuholníka ABL je $a + b + c$ rovnako ako obsah štvoruholníka $DMLN$. Tým je časť a) úlohy z Kvantu vyriešená.

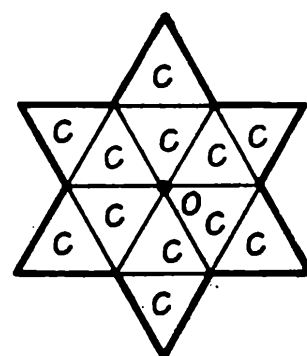
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



Skúsme teraz vyšetriť situáciu podrobnejšie: zistíme vzájomný pomer čísel a , b , c , d . Zvoľme jednotku obsahu tak, aby obsah 6-uholníka $ABCDEF$ bol 1.

K zisteniu čísel a , b , c , d zostavíme štyri rovnice:

$$b + c = 3a \text{ (pozri obr. 3)} \quad (1)$$

$$d = 6c \text{ (pozri obr. 4)} \quad (2)$$

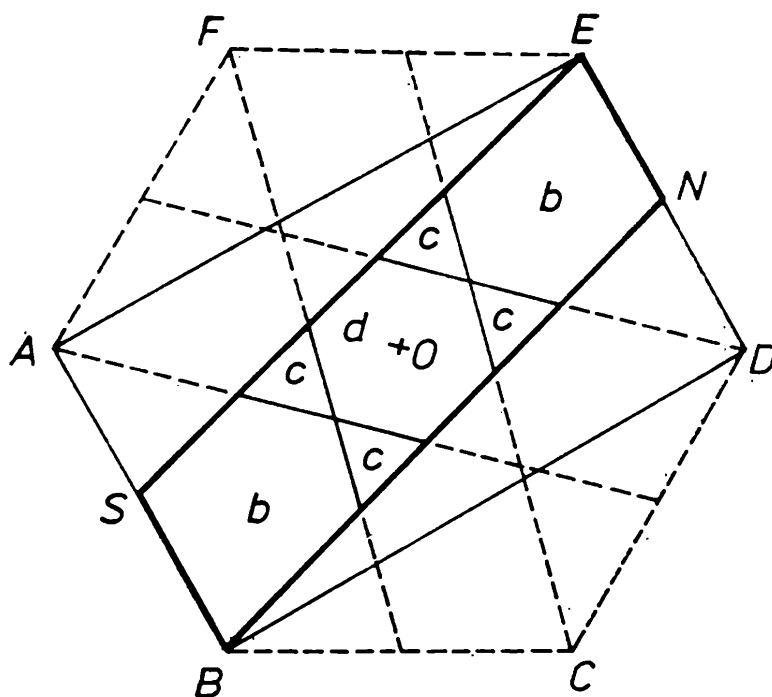
$$2b + 4c + d = \frac{1}{3} \text{ (pozri obr. 5)} \quad (3)$$

$$6(a + b + c) + d = 1 \quad (4)$$

Z (1) vypočítame b a dosadíme do (3), z (2) dosadíme d do (4); po úprave získame sústavu

$$6a + 8c = \frac{1}{3}$$

$$24a + 6c = 1,$$



Obr. 5

odkiaľ už ľahko zistíme $c = \frac{1}{78}$, $a = \frac{1}{26}$, z (1) a (2) potom $b = \frac{4}{39}$, $d = \frac{1}{13}$.

Teda $a = \frac{1}{26}$, $b = \frac{4}{39}$, $c = \frac{1}{78}$, $d = \frac{1}{13}$,

$$a : b : c : d = 3 : 8 : 1 : 6.$$

Podobnou technikou sa čitateľ môže pokúsiť vyriešiť tieto úlohy:

Úloha 1. Daný je štvorec $ABCD$ so stredom O a obsahom 1. Na jeho stranách body $M \in BC$, $N \in CD$, $P \in DA$, $R \in AB$ tak, že $|BM| = |CN| = |DP| = |AR| = x$, kde $x \in (0,1)$. Priamky AM , BN , CP , DR rozdelia štvorec na 9 častí. Vypočítajte obsah každej z nich v prípade

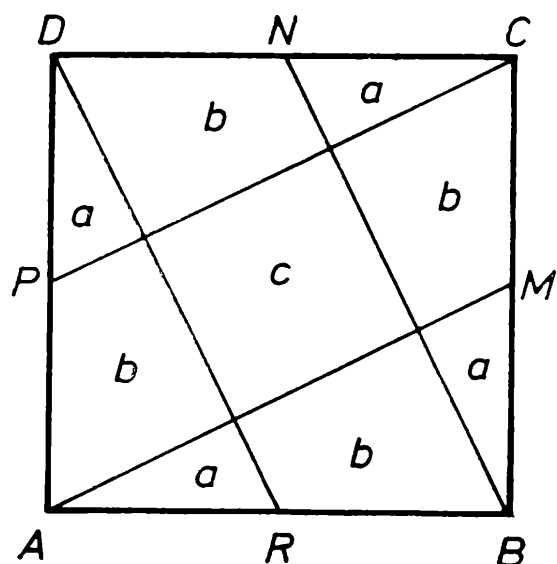
a) $x = \frac{1}{2}$ (obr. 6),

b) $x = \frac{1}{3}$ (obr. 7)

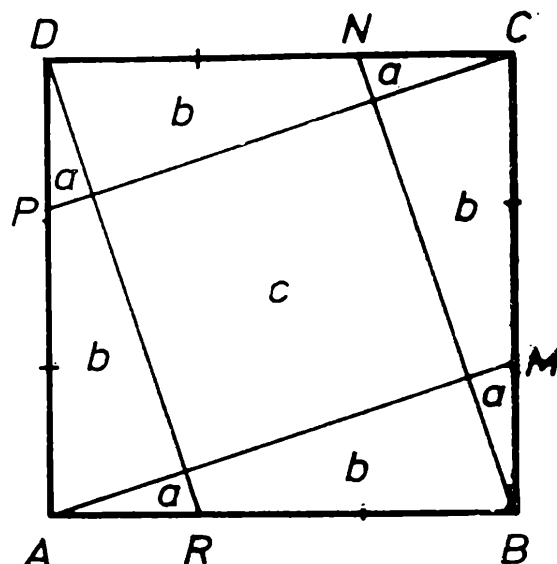
c) všeobecné x (obr. 8).

Úloha 2. Ako treba v úlohe 1c voľiť x , aby vnútorný vyšrafovaný štvorec mal obsah $\frac{1}{2}$?

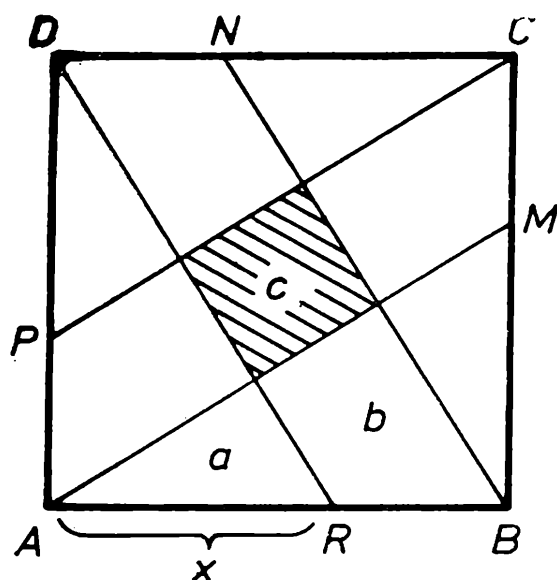
Úloha 3. Situácia je rovnaká ako na obrázku 2., iba body M , N , P , R ,



Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8

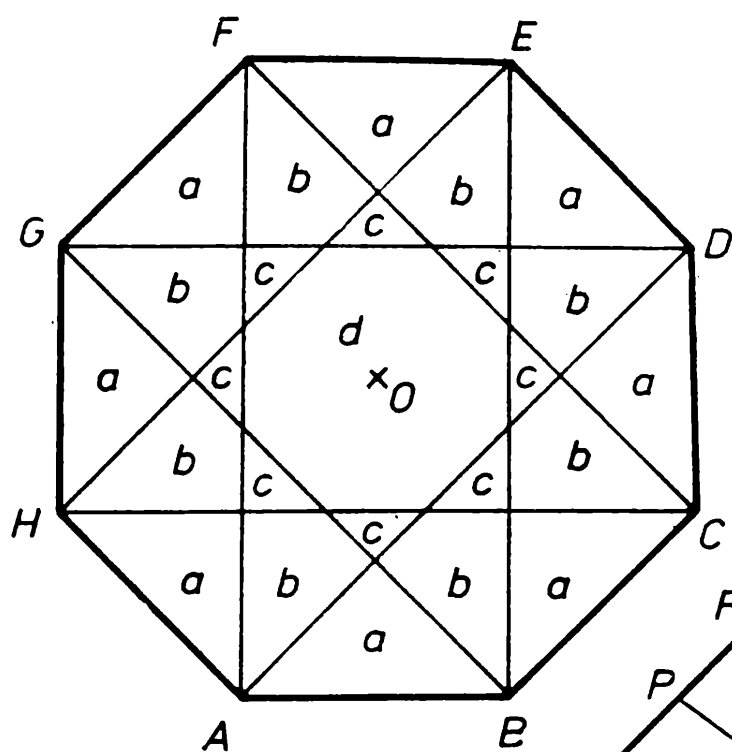
S, T (tvoriace vrcholy pravidelného 6-uholníka) neležia v strede príslušných strán, ale delia tieto v pomere $1 : 2$ ($|CM| : |MD| = 1 : 2$, atď.). Vypočítajte a, b, c, d .

Úloha 4. Situácia je rovnaká ako na obrázku 2., len body $M, N, P, \dots$ delia príslušné strany v rovnakom pomere x ; ($|CM| : |CD| = x$, atď.). Vypočítajte a, b, c, d ako funkciu parametra $x \in (0, 1)$.

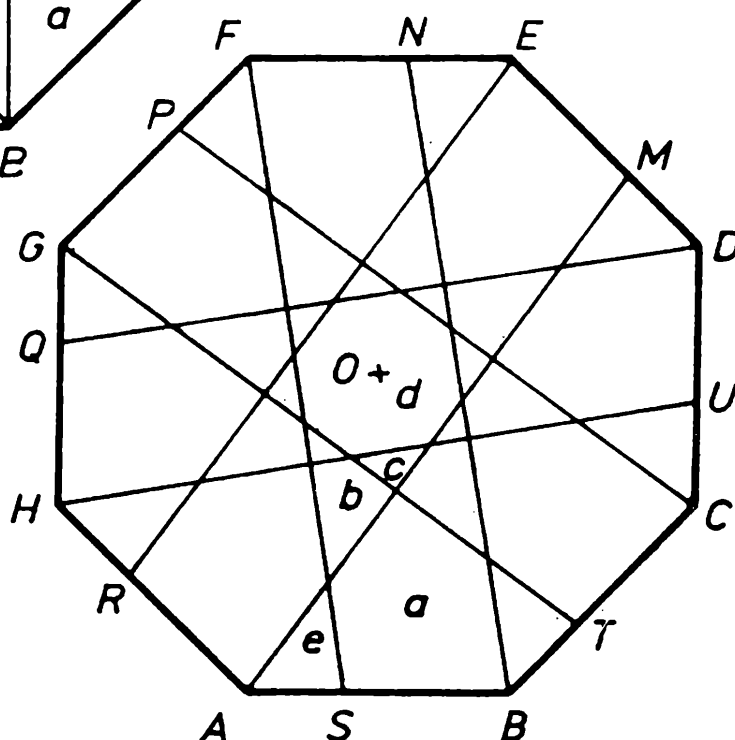
Výpočty, ktoré sme urobili pre pravidelný 4-uholník a 6-uholník, možno urobiť aj pre 8-uholník, 10-uholník, ... Je pochopiteľné, že situácia je čoraz náročnejšia; zväčšuje sa počet neznámych oblastí a komplikujú sa vzťahy, ktorými sú tieto oblasti navzájom viazané.

Situácia pre 8-uholník je nakreslená na obrázku č. 9 (špeciálny prípad) a obrázku č. 10 (všeobecný prípad).

Úloha 5. Daný je pravidelný 8-uholník s obsahom 1. Priamky AD ,



Obr. 9



Obr. 10

BE , CF , DG ,... rozdeľia tento 8-uholník na 25 častí (obr. 9). Vypočítajte ich obsahy.

Úloha 6. Daný je pravidelný 8-uholník s obsahom 1. Body M , N , P ,... (tvoriace vrcholy pravidelného 8-uholníka) delia príslušné strany v rovnakom pomere x . ($|DM| : |DE| = x$, atď.). Priamky AM , BN , CP ,... rozdeľia 8-uholník na 33 častí. Vypočítajte ich obsahy. (obr. 10). Ako vyzerá odpoveď pre 10-uholník či 12-uholník?

Výsledky k článku E. Martinovičovej „Zaujímavé obsahy“

1. a) $a = 1 : 20$, $b = 3 : 20$, $c = 1 : 5$;
b) $a = 1 : 60$, $b = 2 : 15$, $c = 2 : 5$;

$$\text{c) } a = x^3 : 2(x^2 + 1), b = x(1 - x^2) : 2(x^2 + 1), \\ c = (1 - x)^2 : (x^2 + 1).$$

$$2. x = 2 - \sqrt[3]{3}.$$

$$3. a = 1 : 63, b = 13 : 126, c = 1 : 42, d = 1 : 7.$$

$$4. a = x^2(1 + x) : 3(x^2 + 3), b = (1 - x)(2x^2 + 5x + 1) : 6(x^2 + 3), \\ c = (1 - x)^2 : 6(x^2 + 3), d = (1 - x)^2 : (x^2 + 3).$$

$$5. a = t : 8, b = t^2 : 4, c = t^3 : 8, d = t^2, \text{ kde } t = \sqrt[3]{2} - 1.$$

$$6. a = [s(2\sqrt{2}x + 1) - x^2(2x + 3s)] : 8(x^2 + s^2), \\ b = (1 - x)^2 : 4(x^2 + s^2), c = (1 - x)^2 : 8s(x^2 + s^2), \\ d = (1 - x)^2 : (x^2 + s^2), e = x^2(x + s) : 4(x^2 + s^2), \text{ kde } \\ s = 1 + \sqrt[3]{2}.$$

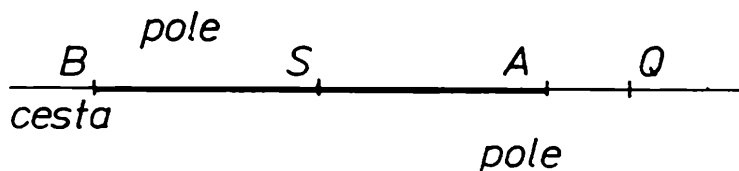
Zajímavá množina bodů

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK

Profesor Ypsilon směřuje se svou třídou do cíle známého turistického pochodu Praha — Prčice a vymýšlením různých úloh se snaží odvést pozornost netrénovaných žáků od puchýřů a bolavých chodidel. K jedné z nich ho inspiroval pohled na přímou polní cestu vedoucí zoraným polem:

Jaký geometrický útvar U vytvoří množina všech bodů, do nichž se lze z daného bodu S polní cestou dostat chůzí za dobu $t_0 \leq 1$ h, je-li rychlost v_1 chůze po této cestě $6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a rychlost v_2 chůze polem $3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

Určíme nejprve všechny body polní cesty, které splňují uvedenou podmínku. Je celkem zřejmé, že to jsou právě ty body cesty, které tvoří úsečku AB dlouhou 12 km, jejímž středem je bod S (obr. 1). Je

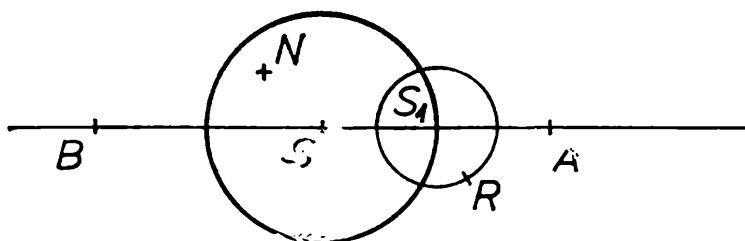


Obr. 1

zřejmé, že do každého bodu úsečky AB se lze z bodu S dostat nejpozději za jednu hodinu chůze. Žádné další body cesty tuto vlastnost nemají; do libovolného bodu Q cesty, který neleží na úsečce AB , se za hodinu chůze nemůžeme z bodu S dostat (jdouce jen po cestě dospějeme nejvýše

do bodu A nebo B a ani odbočení z cesty do pole nelze využít k tomu, abychom se nejdéle za hodinu do bodu Q dostali, neboť je $v_2 < v_1$).

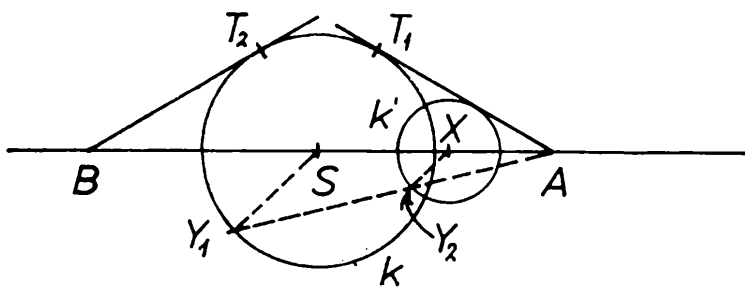
Poněkud obtížnější je určit všechny body pole, do nichž je možno z bodu S dojít nejpozději za hodinu chůze. Úsudek, že to jsou právě všechny body pole patřící kruhu se středem S a poloměrem 3 km (viz obr. 2), nese známky ukvapenosti. Je sice pravda, že do libovolného bodu



Obr. 2

N ležícího v tomto kruhu lze dojít nejpozději za hodinu chůze, avšak takovéto body pole existují i mimo uvedený kruh. Je to např. každý bod pole ležící v kruhu o poloměru 1,5 km se středem S_1 ve středu úsečky SA . Do libovolného bodu R tohoto kruhu se dostaneme tak, že dojdeme nejprve po cestě za půl hodiny z bodu S do bodu S_1 a z něj potom nejpozději za další půlhodinu chůze polem přímo do bodu R .

Z cesty však můžeme odbočit do pole v libovolném bodě úsečky AB , a nikoli jen v bodě S_1 ; musíme proto sestrojit kruhy ve všech bodech této úsečky, a to podobným způsobem, jako byl sestrojen kruh se středem S_1 . Poloměr $x = XY_2$ kruhu v libovolném bodě X úsečky AB (viz obr. 3)



Obr. 3

závisí na době t , kterou potřebujeme k tomu, abychom došli po cestě z bodu S do bodu X ; protože polem jdeme rychlostí v_2 nanejvýš po dobu, která zbývá do uplynutí jedné hodiny, tj. do uplynutí doby t_0 , platí

$$x \leq v_2(t_0 - t).$$

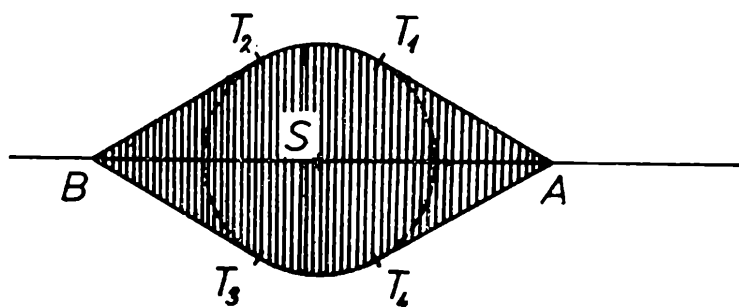
Všimněme si, že pro $t = 0$ dostáváme kruh se středem S o poloměru 3 km (obr. 2), pro $t = \frac{1}{2}$ dostáváme kruh se středem S_1 o poloměru 1,5 km rovněž na obr. 2 a pro $t = t_0$ dostáváme bod A (nebo B). Ještě důležitější však je, abychom si uvědomili, že tečna vedená z bodu A ke kružnici k (obr. 3) je i tečnou ke kružnici k' . Sestrojíme-li totiž v obou kružnicích rovnoběžné poloměry SY_1 a SY_2 , platí

$$\frac{|SY_1|}{|XY_2|} = \frac{v_2 t_0}{v_2(t_0 - t)} = \frac{t_0}{t_0 - t},$$

$$\frac{|SA|}{|XA|} = \frac{v_1 t_0}{v_1 t_0 - v_1 t} = \frac{t_0}{t_0 - t}.$$

Obě kružnice k, k' jsou tedy stejnolehle se středem stejnolehlosti v bodě A , takže přímka AT_1 je jejich společnou tečnou. A vzhledem k tomu, že uvedené vztahy platí pro každou kružnici se středem uvnitř úsečky SA konstruovanou výše uvedeným způsobem, je přímka AT_1 společnou tečnou všech těchto kružnic. Je jistě zřejmé, že tytéž úvahy platí i pro soustavu kružnic se středem uvnitř úsečky SB ; jejich společnou tečnou je přímka BT_2 .

Všechny body pole, do nichž lze z bodu S dojít nejpozději za hodinu chůze, jsou tedy právě ty body pole, které patří do sjednocení všech kruhů uvedených poloměrů se středem na úsečce AB ; je přitom jasné, že do žádného bodu pole ležícího mimo toto sjednocení se za hodinu chůze nelze z bodu S dostat. Sjednotíme-li získaný útvar ještě s úsečkou AB , tj. se všemi body cesty, které mají danou vlastnost, dostáváme hledaný geometrický útvar U (viz obr. 4). Jak vyplývá z předchozího,



Obr. 4

je tento útvar ohraničen jednak úsečkami AT_1, AT_4, BT_2, BT_3 , kde T_1, T_2, T_3, T_4 jsou dotykové body tečen vedených ke kružnici se středem S a s poloměrem 3 km z bodu A , resp. z bodu B , jednak oblouky T_1T_2 a T_3T_4 této kružnice.

Některým z vás jistě neunikla souvislost této úlohy s fyzikální problematikou týkající se šíření vlnění v homogenním izotropním prostředí. Pokud jste si však této souvislosti nepovšimli, zkuste si představit, že z bodu S pluje rovnoměrně přímočaře rychlostí v_1 loď a užitím Huygensova principu určete polohu vlnoplochy v okamžiku, kdy loď plouvá bodem A , za předpokladu, že vlnění na vodní hladině postupuje rychlostí $v_2 < v_1$; výsledek porovnejte s geometrickým útvarem na obr. 4.

Původní úlohu je možno dále doplnit a obměnit: lze zjišťovat, jak se útvar U změní v případě $v_1 < v_2$, bod S lze umístit mimo cestu, lze doplnit ještě další cestu procházející (nebo neprocházející) bodem S , na níž

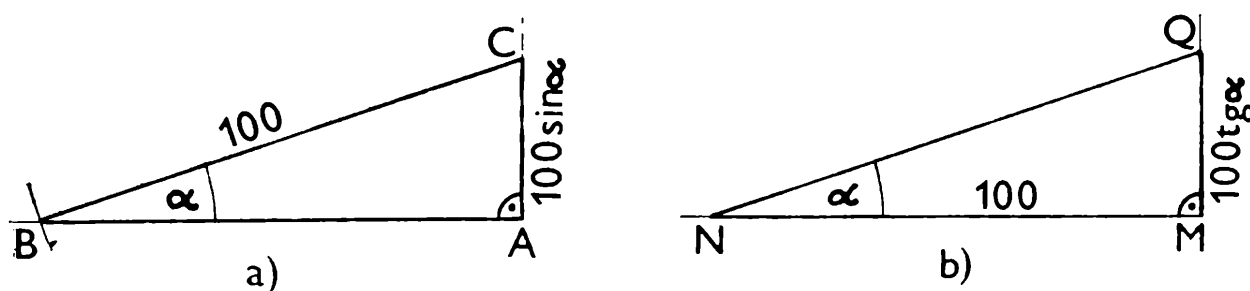
je rychlost chůze rovna v_3 , atd. Řešení těchto — a případně i dalších — variant už ponecháváme čtenáři s přáním, aby třetí květnovou sobotu při pochodu do Prčice nemusel takovýchto prostředků k zapomenutí na dolní končetiny používat.

Sinusové a tangentové pravítko

Doc. Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

Ke kontrole rozměrů strojních součástí nebo při jejich výrobě se používá různých technických měřidel. Uvedme dvě z nich: sinusové pravítko a tangentové pravítko. Obě tato měřidla slouží k přesnému změření velikosti úhlu sevřeného dvěma rovinnými plochami. Dříve než přistoupíme k popisu obou pravítek a k vyložení jejich funkce, uvedeme dva způsoby rýsování úhlů. Tuto úlohu pak využijeme.

Mějme narýsovat úhel např. $18^\circ 27'$. Když máme k dispozici jen malý, a tedy málo přesný úhломěr, můžeme použít tabulek goniometrických funkcí. Na obr. 1 je řešení úlohy pomocí těchto tabulek znázorněno. V části a) tohoto obrázku je užito funkce sinus, v části b) funkce tangens.*)



Obr. 1

a) Sestrojíme pravý úhel s vrcholem A . Na jedno jeho (svislé) rameno od bodu A nanese úsečku o velikosti rovné stonásobku hodnoty $\sin 18^\circ 27' \doteq 0,31648$, tedy $|AC| = 31,648$ mm. Z bodu C jakožto středu opíšeme oblouk kružnice o poloměru 100 mm, který protne druhé rameno úhlu v bodě B . Úhel $ABC = \alpha$ je roven $18^\circ 27'$

Zdůvodnění konstrukce: Z pravoúhlého trojúhelníka ABC s pravým

*) Připomeňme, že na obr. 1 stejně jako na dalších obrázcích nebo na technických výkresech platí číselné hodnoty kót i přesto, že obrázek je zmenšen.

úhlem při vrcholu A plyne $\sin \alpha = \frac{|AC|}{|BC|}$, a proto platí

$$|AC| = |BC| \cdot \sin \alpha. \quad (S')$$

Je-li $|BC| = 100$ mm, pak rovnost (S') má tvar

$$|AC| = 100 \cdot \sin \alpha \quad (S)$$

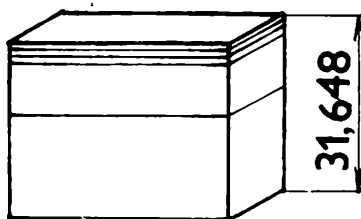
a pro $\alpha = 18^\circ 27'$ dostáváme $100 \cdot 0,31648$, tedy $|AC| = 31,648$ mm.

b) Sestrojíme pravý úhel s vrcholem M , jak znázorňuje obr. 1 b). Na jedno jeho rameno (svislé) od bodu M nanese úsečku o velikosti rovné stonásobku hodnoty $\operatorname{tg} 18^\circ 27' \doteq 0,33362$, tedy $|MQ| = 33,362$ mm. Na druhé rameno nanese od bodu M 100 mm, čímž získáme bod N . Polopřímka NQ svírá s polopřímkou NM požadovaný úhel $\alpha = 18^\circ 27'$.

Zdůvodnění konstrukce: Z trojúhelníku MNQ s pravým úhlem při vrcholu M plyne $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|MQ|}{|MN|}$, a tedy platí $|MQ| = |MN| \operatorname{tg} \alpha$; je-li $|MN| = 100$ mm, pak $|MQ| = 100 \operatorname{tg} \alpha$ a pro $\alpha = 18^\circ 27'$ dostáváme $|MQ| = 33,362$ mm.

K přesnější konstrukci úhlu α ovšem zvolíme délku úsečky BC nebo MN větší než 100 mm, např. 200 mm. Pak pro $\alpha = 18^\circ 27'$ dostáváme úsečky AC , MQ dvěstěnásobků hodnot $\sin 18^\circ 27'$ a $\operatorname{tg} 18^\circ 27'$, tedy délky 63,296 mm a 66,724 mm. Doporučujeme čtenáři, aby si popsáním způsobem žádaný úhel narýsoval a změřil.

Při měření sinusovým nebo tangentovým pravítkem se používá tzv. *koncových měrek*, jež jsou vyráběny v sadách tak, aby z nich bylo možno sestavit různé rozměry. Např. sestavení rozměru 31,648 mm



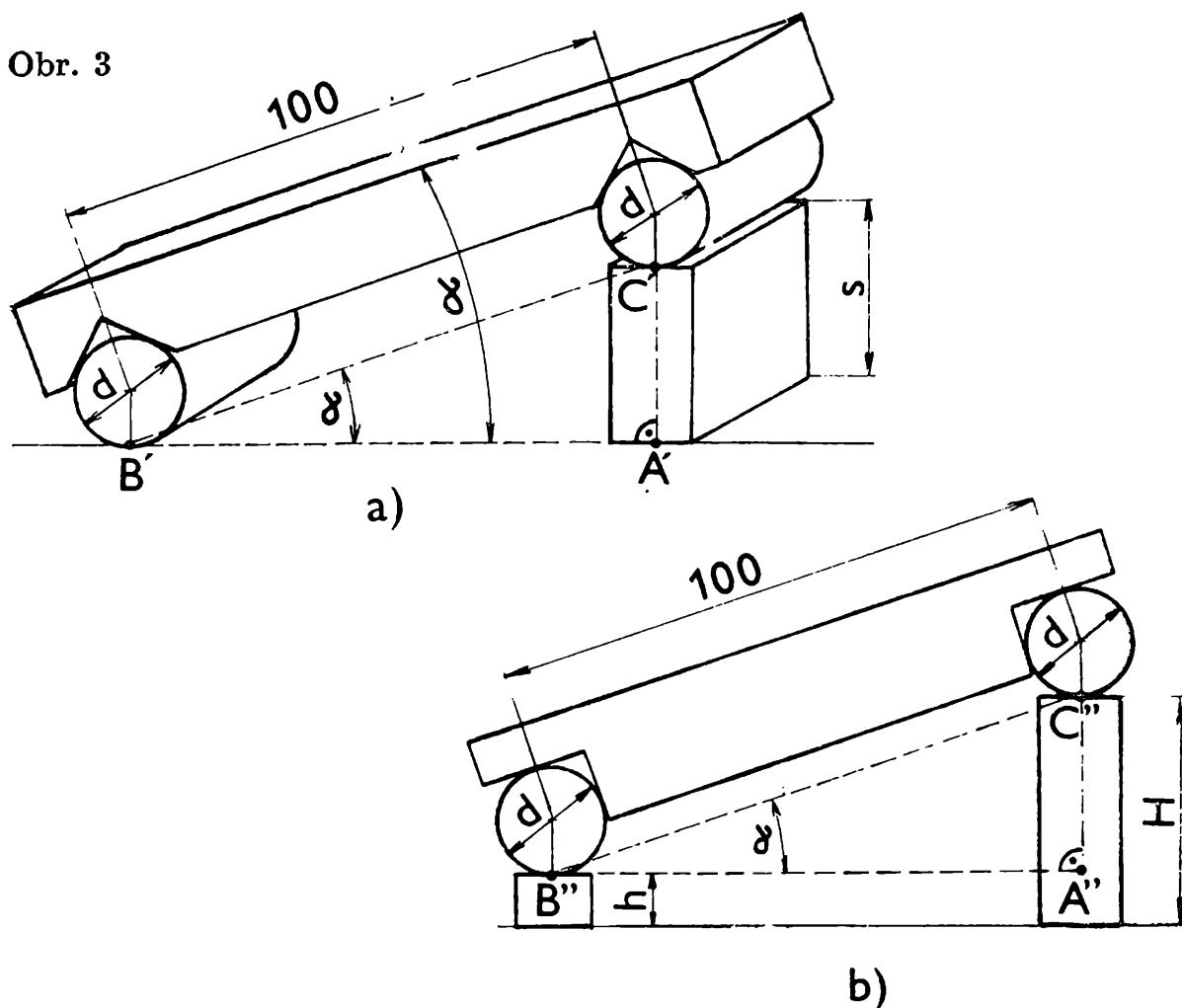
Obr. 2

z koncových měrek je znázorněno v obr. 2; níže uvádíme dílčí rozměry koncových měrek z nichž je výsledný rozměr sestaven.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1,008 \text{ mm} \\ a_2 &= 1,040 \text{ mm} \\ a_3 &= 1,600 \text{ mm} \\ a_4 &= 8,000 \text{ mm} \\ a_5 &= 20,000 \text{ mm} \\ \hline s &= 31,648 \text{ mm} \end{aligned}$$

Rozměr 33,362 mm sestavíme z koncových měrek třeba takto: $33,362 \text{ mm} = (1,002 + 1,060 + 1,300 + 30,000) \text{ mm}$.

Obr. 3

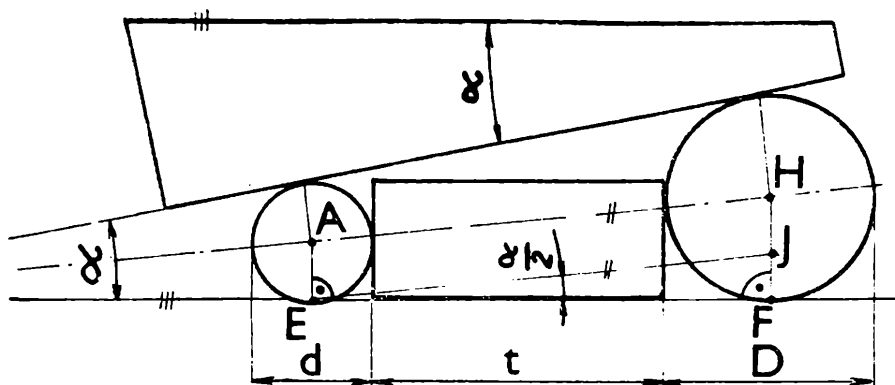


Popišme *sinusové pravítko* a jeho použití. Na obr. 3a) a 3b) jsou nakresleny dva typy sinusového pravítka. Oba válečky sinusového pravítka mají stejný průměr d a osy těchto válečků jsou od sebe vzdáleny právě 100,000 mm. Na obr. 3a) je pod jeden z válečků podložena sestava koncových měrek o rozměru $s = 31,648$ mm, tedy stonásobek hodnoty $\sin 18^\circ 27' = 0,31648$. Horní rovina sinusového pravítka svírá s rovinnou podložkou úhel $\alpha = 18^\circ 27'$. Snadno nahlédneme, že trojúhelník $A'B'C'$ v obr. 3a) je shodný s trojúhelníkem ABC v obr. 1a).

Obr. 3b) znázorňuje schéma situace, kdy bylo použito dvou sester koncových měrek tak, že rozměr s je vytvořen jako rozdíl $H - h$, tedy $s = H - h$. Pro úhel $\alpha = 18^\circ 27'$ je např. $h = 8,500$ mm a $H = 40,148$ mm $= (1,008 + 1,140 + 38,000)$ mm. Z obr. 3b) a 1a) plyne shodnost trojúhelníků $A''B''C''$, ABC .

Také *tangentové pravítko* je určeno k přesnému měření velikosti úhlů na strojních součástech. Měření tangentovým pravítkem nevyplývá z konstrukce, kterou jsme uvedli v obr. 1b), ale z principu, jež znázorňuje obr. 4.

Mezi dva přesně vyrobené ocelové válečky o průměrech d , D se vloží



Obr. 4

sestava koncových měrek o rozměru t . K výpočtu rozměru t vyjdeme ze vzorce

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{D - d}{D + d + 2t}, \quad (\text{T}')$$

z kterého vyjádříme t :

$$t = \frac{D - d}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - \frac{D + d}{2} \quad (\text{T})$$

Odvození vzorce (T') vychází z obr. 4, v němž čtyřúhelník $EJHA$ je rovnoběžník. Z trojúhelníku EFJ s pravým úhlem při vrcholu F plyne

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2} \right) : \left(\frac{d}{2} + t + \frac{D}{2} \right)$$

a po snadné úpravě máme vzorec (T').

Mějme úlohu narysovat nebo změřit úhel $6^{\circ}12'$. K řešení použijeme tangentového pravítka. Zvolíme-li válečky o průměrech $d = 14,000$ mm, $D = 20,000$ mm, pak rozměr t , který buď sestavíme z koncových měrek anebo ho přímo změříme, vypočteme ze vztahu (T).

$$t = \frac{20 - 14}{2 \cdot \operatorname{tg} 3^{\circ}6'} - \frac{20 + 14}{2}, \quad t = 38,391 \text{ mm.}$$

Další úloha vede k přesnému změření úhlu α , který svírají dvě roviny ocelového segmentu. Při použití válečků o průměrech $d = 12,000$ mm a $D = 14,000$ mm byl změřen rozměr $t = 6,230$ mm. Po dosazení příslušných hodnot do vzorce (T') vypočteme

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{14 - 12}{14 + 12 + 2 \cdot 6,23}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \doteq 0,052$$

a tedy $\frac{\alpha}{2} \doteq 2^{\circ}59'$ čili $\alpha \doteq 5^{\circ}58'$; logaritmický výpočet vede ještě k přesnějšímu výsledku:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{38,460},$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \log 2 - \log 38,5460$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \doteq 8,71602 - 10$$

$$\frac{\alpha}{2} \doteq 2^{\circ}58'37'', \text{ a tedy } \alpha \doteq 5^{\circ}57'14''$$

Na rozdíl od sinusového pravítka, kterým se snadno měří i dost velké úhly, tangentovým pravítkem měříme spíše malé úhly, jako jsou součásti s úkosy nebo přesné jehlanovitosti na strojních součástech apod.

Ještě o prvočíslech

Víme, že prvočísel je nekonečně mnoho. Dáme-li stranou prvočíslo 3, pak je možno všechna ostatní prvočísla rozdělit do dvou tříd takto: Do první třídy dáme všechna prvočísla, jež při dělení třemi dávají zbytek 1; do třídy druhé zahrneme ta prvočísla, jež při dělení třemi dají zbytek 2. Několik prvků z první třídy je

$$7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97, \dots$$

několik ze třídy druhé

$$2, 5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, \dots$$

a dá se dokázat, že každá z těchto dvou tříd obsahuje nekonečně mnoho prvků.

Označme $\pi_{3,1}(x)$ počet všech prvočísel z první třídy, která nejsou větší než číslo x a nechť $\pi_{3,2}(x)$ je počet všech prvočísel ze třídy druhé, jež nejsou větší než x . Např. tedy

$$\pi_{3,1}(100) = 11, \quad \pi_{3,2}(100) = 13.$$

Sledujeme-li tabulky prvočísel, zjišťujeme po řadě pokusů, že rozdíl

$$\pi_{3,2}(x) - \pi_{3,1}(x)$$

není pro žádné x záporný. Od minulého století, kdy se číselnou teorií zabýval *P. L. Čebyšev* (1821–1894), se hledalo nejmenší celé číslo x , pro něž $\pi_{3,2}(x)$ je menší než $\pi_{3,1}(x)$. Tohoto prahu před nedávnem dosáhli *C. Bayes* a *R. H. Hudson*, kteří zjistili, že pro

$$x = 608\,981\,813\,029$$

platí

$$\pi_{3,2}(x) - \pi_{3,1}(x) = -1.$$

Článek uveřejnili v časopise *Mathematics of Computation* roku 1978.

J. S.

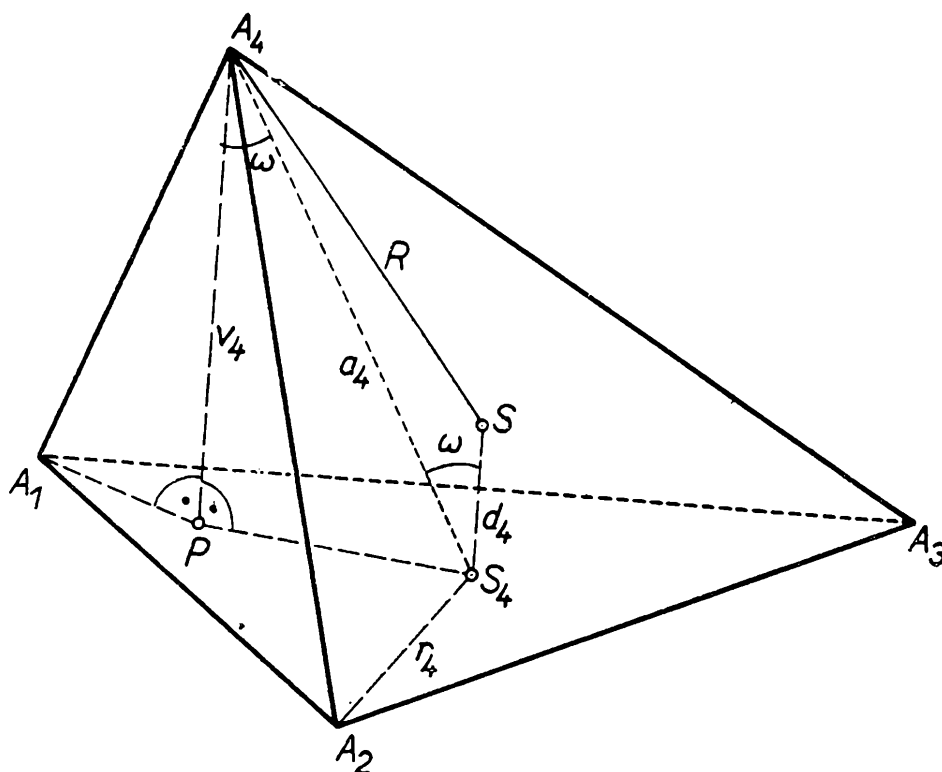
Objem čtyřstěnu

STANISLAV HORÁK, Praha

Objem čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$ se dá vyjádřit vzorcem

$$V = \frac{1}{3\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^4 P_i^2 (a_i^2 - r_i^2)},$$

kde P_i je obsah té stěny, která neobsahuje vrchol A_i , S_i je střed kružnice opsané té stěně čtyřstěnu, která neobsahuje vrchol A_i , r_i je délka poloměru kružnice opsané této stěně, $a_i = A_iS_i$. — Dokažte.



Obr. 1

Důkaz (obr. 1). Střed a délku poloměru kulové plochy opsané danému čtyřstěnu označme po řadě S , R . Délku úsečky SS_i označme d_i a délku tělesové výšky z vrcholu A_i označme v_i . Počítejme nyní hodnotu výrazu

$$a_4^2 - r_4^2 = a_4^2 - (R^2 - d_4^2), \quad (1)$$

jak vyplývá z pravoúhlého trojúhelníka SS_4A_2 . Na trojúhelník SS_4A_4 použijme kosinovou větu ($\angle SS_4A_4$ označme ω):

$$R^2 = a_4^2 + d_4^2 - 2a_4d_4 \cos \omega. \quad (2)$$

Avšak $\sphericalangle SS_4A_4 = \sphericalangle PA_4S_4$ (jsou to střídavé úhly při rovnoběžkách), kde P je pata tělesové výšky z vrcholu A_4 . Můžeme tedy psát

$$\cos \omega = v_4 : a_4$$

a vztah (2) nabude jednodušší tvar:

$$R^2 = a_4^2 + d_4^2 - 2 d_4 v_4.$$

I rovnice (1) po dosazení za R^2 se podstatně zjednoduší:

$$a_4^2 - r_4^2 = 2 d_4 v_4. \quad (3)$$

Cyklicky dostaneme obdobné výrazy pro $a_i^2 - r_i^2 (i = 1, 2, 3)$.

Obě strany vztahu (3) znásobíme P_4^2 a pravou stranu trochu upravíme:

$$P_4^2(a_4^2 - r_4^2) = 2 \cdot P_4 v_4 \cdot P_4 d_4 = 6 VP_4 d_4.$$

Posléze

$$\sum_{i=1}^4 P_i^2(a_i^2 - r_i^2) = 6 V \sum_{i=1}^4 P_i d_i = 18 V^2,$$

z čehož již bezprostředně plyne vzorec uvedený v textu úlohy.

FYZIKA

Archimédův zákon a některé jeho „neobvyklé“ důsledky

RNDr. VLADIMÍR MALÍŠEK, CSc., UP Olomouc

Staří učitelé nám kdysi kořenili matematické a fyzikální výklady nejednou příhodou starověkého i středověkého původu, v níž nás neváhali zařadit do dvou disjunktních tříd — oslíků a studentů. V sekundě jsem se dověděl, že takovým „oslím můstkem“ čili kriteriem pro matematiku je pochopení obsahu Pythagorovy věty — ve fyzice je snad podobným můstkem pochopení Archimédova zákona a jeho důsledků. Za nejednu kritickou připomínku našich přísných, ale dobrých profesorů, se alespoň dnes, čili se značným zpožděním, pokusím „pomstít“ stejně kritickou poznámkou, jež však může být adresována některým učebnicím stejně jako učitelům. Nuže, jak vlastně zní třeba Archimédův zákon?

Není pochyb o tom, že okamžitě řeknete (nebo alespoň v učebnici najdete), že „těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která je rovna tíze (resp. váze) kapaliny tímto tělesem vytlačené“. Také jeden či dva důkazy se v učebnici snadno najdou. A přece — formulace nevystihuje celou skutečnost! Především zákon platí nejen pro kapaliny, ale také pro plyny, ne však pro sypká či dokonce pevná tělesa. Čeština má pro plyny a kapaliny souhrnný termín tekutiny.

Ve formulaci zákona dále není zdůrazněno, že jde o statický případ — takovémuto archimédovskému nadlehčování je vystaveno těleso, jež se vůči tekutině nepohybuje; za pohybu přibude několik dalších sil na těleso působících.

Konečně se mluví o tom, že archimédovské nadlehčování je síla — je to tedy vektor — a ten je určen nejen velikostí (jež je rovna tíze vytlačené tekutiny) a směrem (těleso je nadlehčováno, čili síla působí proti směru zrychlení, jemuž je tekutina jako celek vystavena), ale také počátečním bodem, působištem — a to leží v těžišti vytlačené tekutiny. Mohli bychom tedy korigovat staré učebnice i v tak triviální záležitosti jako je Archimédův zákon a říci, že těleso ponořené do tekutiny, jež je v klidu vůči ní, je nadlehčováno silou, jejíž velikost je rovna tíze vytlačené tekutiny, směřuje proti zrychlení, jemuž je tekutina vystavena (nemusí to být vždy jen tíhové zrychlení) a její působíště leží v těžišti vytlačené tekutiny. Do matematické formulace zákona zvaného někdy Archimédův princip (protože platí ve dvou oblastech fyziky — hydromechanice i aeromechanice) se pouštět nebudeme, protože není vůbec elementární.

Nyní takto „poučení“ bychom již hravě zodpověděli „zrádnou otázku“ — co je těžší — kilogram zlata nebo železa? Zlato má větší hustotu, takže kilogram zlata má menší objem než kilogram železa; jeho archimédovské nadlehčování ve vzduchu, kde vážení provádíme, je menší, a proto na vahách bychom zjistili, že kilogram zlata je těžší než kilogram železa.

Archimédovské nadlehčování však není jen motivem dobrým k obdobným anekdotám, ale faktem, které je nezbytně třeba brát vždy v úvahu při přesném vážení. Pro ilustraci vypočteme hmotnost m tělesa objemu V při vážení ve vzduchu hustoty s_v na správných (tj. rovnoramenných) vahách; veličiny týkající se závaží označme čárkou, hustotu s' , hmotnost m' a objem V' . Za rovnováhy působí na misku vah těleso silou $mg - Vs_vg$ a závaží silou $m'g - V's_vg$; oba výrazy jsou si rovny. Uvědomíme-li si, že objem lze vyjádřit pomocí hmotnosti a hustoty, tj. $V = m/s$, $V' = m'/s'$ a zkrátíme-li zrychlení g , shledáme, že platí vztah

$$m - \frac{m}{s} s_v = m' - \frac{m'}{s'} s_v,$$

z něhož vyplývá pro hmotnost váženého tělesa

$$m = m' \frac{1 - \frac{s_v}{s'}}{1 - \frac{s_v}{s}}.$$

Vidíme tedy, že při přesném vážení tělesa je třeba zjistit nejen hmotnost závaží, jež je s ním v rovnováze, ale také již předem znát hustotu vzduchu (asi $1,2 \text{ kg/m}^3$), hustotu závaží, ale dokonce i hustotu váženého tělesa. Archimédův zákon je třeba respektovat také při měření hustoty a dalších veličin.

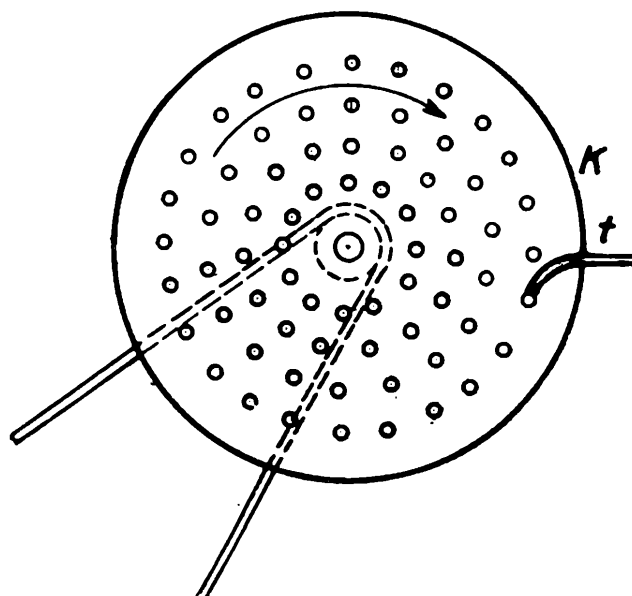
Seebeckova siréna

JOSEF KOTYK, Pardubice

Vznik zvuku lze sledovat pokusy se sirénami. Zajímavá a poučná pozorování poskytuje zejména kotoučová siréna, kterou sestrojil německý fyzik *Ludwig Seebeck* (1805—1849). Bývá proto po něm nazývána *sirénou Seebeckovou*.

Seebeckova siréna je papírový nebo kovový kotouč K (viz obr. 1) na otáčivé ose, opatřený v několika (na obr. 1 v čtyřech) soustředných kružnicích otvory stejně od sebe vzdálenými. Foukáme-li při rovnoměrném otáčení sirény zúženou trubičkou t proti otvorům kružnice, je proud vzduchu v pravidelných obdobích kotoučem zadržován a propouštěn. Kdykoliv se proti ústí trubičky ocitne otvor, nastane za deskou zhuštění vzduchu. Těmito pravidelnými nárazy vzduchu na vzduch za deskou vzniká při dosti rychlém otáčení určitý tón. Při rychlejším otáčení výška tónu stoupá; dovídáme se tak, že závisí přímo na počtu nárazů (kmitů) za jednotku času. Přesná definice zní: *Absolutní (prostá) výška tónu se stanoví počtem kmitů za jednotku času (kmitočtem)*.

Jestliže foukáme při rovnoměrném otáčení sirény trubičkou postupně proti otvorům dalších kružnic, vzbudíme řadu tónů, které tvoří zvláštní melodii. Poněvadž absolutní výšky jednotlivých tónů jsou stanoveny součinem počtu otvorů v příslušné kružnici a počtu otáček kotouče za sekundu, nezávisí jejich poměry na rychlosti otáčení a rovnají se poměrům mezi počty otvorů. Otáčí-li se siréna rychleji, všechny tóny se zvýší, *výškové rozdíly zv. intervaly* (odlehlosti) mezi tóny jeví se nám však stejné jako při otáčení pomalejším; celková melodie zní proto docela podobně.



Obr. 1

Seebeckova siréna má zpravidla osm soustředných kružnic. Počet otvorů bývá — od vnitřní kružnice počínaje — udán čísly

24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48.

Řada osmi tónů, jež tato siréna vydává, tvoří *diatonickou stupnici tvrdou* (dur). Její tóny se nazývají

I = prima, II = sekunda, III = tercie, IV = kvarta,
V = kvinta, VI = sexta, VII = septima a VIII = oktáva.

Jestliže se tato siréna otočí za sekundu právě jednou, je rozdíl výšek mezi prvním a druhým tónem $27 - 24 = 3$; otáčí-li se dvakrát rychleji, je rozdíl $2 \cdot 27 - 2 \cdot 24 = 6$, tedy dvojnásobný. Poznáváme, že stejnému intervalu neodpovídá stejný rozdíl absolutních výšek. Běží zřejmě o stejný poměr, neboť $2 \cdot 27 : 2 \cdot 24$ a obecně pro $k \neq 0$ je $k \cdot 27 : k \cdot 24 = 27 : 24$. Na otázku, jaký je výškový rozdíl dvou tónů, odpovídáme proto vždy uvedením *poměru* — a nikoliv rozdílu — jejich absolutních výšek. Důležitý je zejména poměr absolutní výšky určitého tónu k absolutní výšce tónu základního (primy); udává *relativní (poměrnou) výšku uvažovaného tónu*.

Příklady: Relativní výška kvarty činí $32 : 24 = 4 : 3$; relativní výška kvinty je obdobně $36 : 24 = 3 : 2$; interval mezi kvartou a kvintou je ovšem $36 : 32 = 9 : 8$; relativní výška oktávy je $48 : 24 = 2$; apod.

Shrneme-li, jsou *relativní výšky tónů tvrdé stupnice*:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

Intervaly mezi sousedními tóny tvrdé stupnice jsou:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	

Shledáváme, že v tvrdé stupnici se vyskytují jen *interval trojího druhu*: $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$ a $\frac{16}{15}$. Mají tyto názvy: $\frac{9}{8}$ je *velký celý tón*, $\frac{10}{9}$ *malý celý tón*, $\frac{16}{15}$ *velký půltón*. Intervaly $\frac{9}{8}$ a $\frac{10}{9}$ rozezná od sebe jen sluch hudebně vycvičený. V hudbě se někdy nerozlišují a mívají název *celý tón*. Označíme-li jej 1 a půltón $\frac{1}{2}$, zní jejich pořadí v tvrdé stupnici

$$1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ 1 \ 1 \ 1 \ \frac{1}{2}$$

Toto pořadí intervalů je pro tvrdou stupnici charakteristické.

Cvičení.

1) Vykonejte obdobné úvahy se Seebeckovou sirénou, jež vydává stupnici měkkou (moll), znáte-li počet otvorů v jejích osmi soustředěných kružnicích:

120, 135, 144, 160, 180, 192, 216, 240

2) Některé tóny jsou stupnicím dur a moll (počínajícím týmž tónem) společné. Můžete ihned říci, které?

3) Určete výškové rozdíly tónů, jimiž se obě stupnice liší!

Mládež a kosmonautika

RNDr. IVO VOLF, Hradec Králové

Je bezesporu, že dnešní mládež se zajímá o kosmonautiku, o problémy vypouštění umělých družic Země a kosmických sond k Měsíci či k blízkým planetám bez ohledu na to, že za 25 let od vypuštění první sovětské umělé družice Země se ročně do vesmíru dostává několik desítek či set těles a kosmonautika se stala sice odvážným, ale již ne neobvyklým povoláním, kterému se věnují stovky lidí. Na druhé straně může výuka fyziky využít přirozeného zájmu dětí a mládeže o vědeckovýzkumnou

práci v tomto oboru k vyvolání zájmu o vyučovací předmět fyzika (který nepatří, jak známe z výzkumu v různých státech světa, k těm nejoblíbenějším).

Aby se zvětšil zájem mládeže o vědu a techniku, zejména pak o vědecký program v oblasti kosmonautiky ve Spojených státech, obrátila se v r. 1971 Národní vědecká asociace profesorů za spoluúčasti americké instituce zabývající se letectvím a výzkumem kosmického prostoru NASA na žáky 9.—12. ročníků středních škol s návrhem, aby se zapojili přímo do vědeckého programu *Skylab*. Žáci byli vyzváni, aby navrhli, jaké experimenty by se mohly na palubě Skylabu uskutečnit. Výsledkem této výzvy bylo více než 3400 návrhů na experimenty, z nichž asociace vybrala 25 nejzajímavějších návrhů. Těchto 25 finalistů dostalo možnost se zúčastnit předběžného posuzování projektu, kde na týdenním soustředění s nimi byli i jejich učitelé, dále vědci, inženýři, technici a projektanti, kteří se účastnili na vytváření vědeckovýzkumného programu *Skylab*.

Po důkladném studiu v NASA bylo vybráno celkem 19 námětů, které byly zařazeny do programu *Skylab*. Autoři námětů se zúčastnili bezprostředně na přípravě přístrojového zabezpečení, nutného k uskutečnění navrhovaných experimentů, na podrobném rozpracování výzkumů, včetně návratu informací na povrch Země, jejich zpracování, na plánování letu a přípravě posádky. Po ukončení kosmického letu obdrželi autoři námětů získané informace a mohli napsat zprávu o výsledcích svých experimentů.

Uvedeme náměty těchto návrhů, některé z nich podrobněji popíšeme:

1. Pohlcování vyzařovaného tepla v zemské atmosféře.

Cílem bylo získání informací o ztrátách tepla v zemské atmosféře. Analogická měření se měla provádět současně na povrchu Země.

2. Pozorování kosmického prostoru a předpovídání výbuchů sopek.

Cílem studia je analýza snímků, získaných v infračerveném záření v oblastech, kde jsou známé sopky. Získané údaje byly srovnávány s údaji ze Země, aby bylo možno určit, zda přístroje mohou z velké vzdálenosti registrovat zvětšené tepelné záření, které může předcházet blížícímu se výbuchu sopky.

3. Fotografování libračních oblaků.

Zobrazovaly se dvě oblasti na oběžné dráze Měsíce, kde jsou podmínky gravitační rovnováhy, což vyvolává nahromadění kosmického prachu. Když se oblast dostala do zorného pole slunečních dalekohledů na stanici *Skylab*, provádělo se fotografování, zjišťovala se jasnost a dále polarizace světla odraženého.

4. Možné potvrzení existence objektů na dráze, jež je vnitřní vzhledem k oběžné dráze Merkuru.

Během pozorování byl učiněn pokus identifikovat těleso, které by mohlo obíhat kolem Slunce ve vzdálenosti asi 0,1 AU od Slunce. Expe-

riment vyžadoval studium asi 30 000 fotografií, jež byly provedeny pomocí koronografu.

5. Spktrografie některých kvazarů.

Byla provedena analýza fotografií získaných při pozorování hvězd v ultrafialovém pásmu spektra, a to v těch oblastech, kde již byly kvazary identifikovány.

6. Korelace rentgenového záření s dalšími spektrálními charakteristikami hvězd.

Pozorování oblastí nebeské sféry v rentgenovém pásmu a snaha spojit rentgenové záření se spektrálními charakteristikami. Studium výsledků pozorování Slunce v oblasti rentgenového záření a v dalších pásmech spektra s cílem zkoumat Slunce a jeho spojení s hvězdami.

7. Rentgenové záření, pocházející od planety Jupiter.

Cílem bylo objevit rentgenové záření pocházející od planety Jupiter a spojit výsledky s aktivitou sluneční činnosti a radiovým zářením Jupiteru, aby byly získány další poznatky o mechanismu záření této planety.

8. Hledání pulzarů v ultrafialovém záření.

Pozorování některých oblastí nebeské sféry v ultrafialovém pásmu spektra, snaha najít vztah záření ke známým pulzarům a k pulzaru v mlhovině v souhvězdí Raka, který vysílá impulsy v pásmu rentgenového záření, viditelného světla i radiových vln.

9. Chování bakterií a bakteriálních spor v podmínkách kosmického letu na stanici Skylab.

Studium kolonií bakterií různých druhů a jejich chování ve stavu beztlížném, aby se zjistilo, zda to má důsledky pro přetrvání, pro růst a mutace bakterií a spor ve srovnání s koloniemi na Zemi.

10. Studium jednotlivých imuniologických jevů ve zkumavce.

Cílem bylo stanovit, zda beztlížný stav má vliv na imuniologické látky.

11. Kvantitativní měření senzomotorických reakcí kosmonautů během dlouhodobého letu v podmínkách beztlížného stavu.

Bylo použito standartního zařízení k prověrce koordinace očí a pohybu rukou, aby se mohly zhodnotit změny senzomotorických návyků členů posádky. Kosmonaut měl za úkol pomocí ruční jehly uskutečnit elektrický kontakt v soustavě otvorů na perforované desce.

12. Vytváření pavučin v podmínkách beztlížného stavu.

Provádělo se fotografické pozorování procesu vytváření pavučiny a podrobné výstavby pavučiny pavouka *araneus diadematus* v zemských podmínkách a v podmínkách beztlížného stavu na kosmické lodi Skylab.

13. Růst rostlin v podmínkách beztlížného stavu

14. Úloha světla v orientaci růstu embrya v podmínkách beztlížného stavu.

Oba experimenty byly sloučeny do jednoho. Byly sledovány cíle určit rozdíly mezi sazenicemi rýže, pěstovanými v beztlížném stavu a sazenice-

mi, jež vyrostly na Zemi, a to vzhledem k růstu kořenové části, stébla a jejich orientace. Dále se mělo určit, zda lze použít světla místo gravitačního působení, aby sazenice rostly v požadovaném směru, stanovit minimální intenzitu tohoto světla.

15. Pohyb cytoplasmy v podmínkách beztížného stavu.

Kosmonaut pozoroval mikroskopem mřížku listu v podmínkách beztížného stavu, aby bylo zjištěno, zda existuje rozdíl v pohybu cytoplasmy v podmínkách beztížného stavu a na povrchu Země.

16. Studium kapilárních jevů v podmínkách beztížného stavu.

Cílem bylo určení, zda za podmínek beztížného stavu dochází ke změnám v charakteristikách kapilár a knotů vzhledem k podmínkám na Zemi.

17. Měření hmotnosti v podmínkách beztížného stavu.

Tento experiment byl doplněn přístrojem, určeným k měření hmotnosti: listová pružina, na jednom konci upevněná, na druhém konci listu bylo upevněno závaží, jehož hmotnost se měla stanovit.

18. Analýza neutronů na dráze kolem Země.

Detektory uvnitř stanice Skylab registrovaly neutrony pocházející ze tří zdrojů: neutrony difúzně odražené od Země, neutrony velkých energií pocházející ze Slunce a neutrony, pocházející ze sekundárních jevů na stanici Skylab.

19. Vlnivý pohyb v kapalině v beztížném stavu.

Bylo provedeno pozorování pohybu bublinky plynu v kapalině, když na ni působila známá pohybová síla.

Technické údaje ze stanice Skylab přicházely do kosmického střediska v Houstonu a byly postupně předávány výzkumným kolektivům. Filmy, diapozitivy, nákresy, vzorky, deníky a jiné formy informace se vrátily s posádkou na zemský povrch v sestupném kontejneru do řídicího centra a také byly poskytnuty vedoucím experimentů. Doplnkové informace o poloze stanice Skylab na dráze při měření, podrobnosti týkající se různých charakteristik, orientace stanice, údaje o prostředí, registrace úrovně radiace a znečištění aj. předala kolektivům NASA.

Článek byl připraven podle podrobného programu letu kosmické stanice Skylab, který zpracoval *Leland F. Belew* a *Ernst Stuhlinger* a byl vydán v r. 1973, a to z ruského překladu „Orbitalnaja stancija Skajleb, Moskva, Mašinostrojenije 1977.

Neutrinová astronomie

RNDr. RENÉ HUDEC, Ondřejov

Dva krajní směry fyziky — fyzika mikročástic a fyzika makrosvěta se setkávají v neutrinové astronomii. Vše začalo zhruba před 15 lety experimenty amerického jaderného fyzika *Raymonda Davise* z Brookhaven National Laboratory, který se jako první pokusil podívat na Slunce úplně novým způsobem. Za pozorovatelnu totiž na rozdíl od obvyklých observatoří nezvolil vrchol kopce, ale naopak místo, kam neproniká žádný světelný paprsek — štolu ještě pracujícího zlatého dolu v hloubce 1500 m. Nechtěl totiž pozorovat záření vznikající na slunečním povrchu a v ještě vyšších vrstvách, tedy záření světelné, rentgenové nebo rádiové, ale naopak tok neutrin, vznikajících ve slunečním nitru. Výsledek experimentu byl překvapivý — přístroj nezaregistroval ani třetinu teorií předpovězené hodnoty toku slunečních neutrin. Protože však byla realizace neutrinového teleskopu spojena s extrémními potížemi, nebylo jasné, jak rozdíl mezi naměřenou a předpovězenou hodnotou vysvětlit — zda chybou měření, chybným modelem slunečního nitra či dokonce chybnou teorií neutrina. I po dalších, upravených experimentech nadále zůstává nevysvětlitelný rozdíl mezi teorií a pokusem. Protože je stavba slunečního nitra a otázka produkce sluneční energie zásadní vědeckou otázkou, připravují nyní astronomové a fyzikové dokonalejší neutrinové detektory, které by s konečnou platností měly dát na neutrinovou záhadu odpověď. Pozorování budou velmi náročná a budou trvat roky, mohou však přinést změnu našich názorů jak na Slunce, tak i na neutrina.

Radioaktivita některých atomových jader je založena na přeměně jádrového neutronu na proton, tedy z neutrální částice vzniká částice kladně nabitá. Protože se musí zachovávat náboj, vzniká současně i záporně nabitý elektron — takzvané záření beta. Při výletu elektronu z jádra dochází zpětným rázem i k pohybu jádra — avšak při podrobné analýze směrů, kterými se od sebe jádro a elektron pohybují, dostáváme překvapení — úhel menší než 180° . Rovněž nesouhlasí energetické bilance — část při rozpadu uvolněné energie zdánlivě mizí. Aby zachoval platnost dvou základních fyzikálních zákonů — zákonu zachování energie a impulsu — postuloval *Wolfgang Pauli* v roce 1930 vznik další částice, neviditelné pro detektory — neutrina. Neutrino představuje — jak již sám název nasvědčuje — v analogii k neutronu rovněž neutrální, ale mnohem lehčí částici. Z energetické bilance beta rozpadu muselo být dokonce odvozeno, že má stejně jako foton nulovou klidovou hmotnost. Na základě posledních experimentů se dnes někteří vědci přiklánějí k názoru, že i když má neutrino extrémně malou klidovou hmotnost, není

nulová. Například skupina sovětských jaderných fyziků odvodila ze spektra beta rozpadu tricia klidovou hmotnost neutrina o hodnotě mezi 14 až 46 eV. Výsledky dalších týmů zase vedou k závěru o oscilacích neutrina — podle této teorie existují tři druhy neutrina, které se mohou navzájem přeměňovat. Skupina fyziků z Kalifornské university v Irwine soudí, že jednotlivé druhy neutrin se od sebe odlišují zhruba o 1 eV odlišnou klidovou hmotností. Na druhé straně pokusy na Laue-Langevinově institutu v Grenoblu tyto závěry nepotvrzují. Nicméně, nižší počet zachycených neutrin ze slunečního nitra lze principiálně vysvětlovat i tak, že část původních neutrin se cestou ze Slunce k detektoru přeměnila na neutrina jiných druhů, na která však zařízení není citlivé, přesněji řečeno neutrina mí a tau, přiřazená mionům a tauonům na rozdíl od neutrin elektronových. Připomeňme, že miony a tauony patří stejně jako elektron k leptonům, liší se však od elektronu mnohem větší hmotou.

Neutrina nepodléhají ani jaderným ani elektromagnetickým silám, pouze gravitaci. Proto je jejich zachycení mimořádně obtížným úkolem. Zatímco první experimenty využívaly chlór 37 a zachycovaly tedy jen neutrina s vyššími energiemi než 1 MeV, dnes se připravují detektory s galiem 71, které by měly umožnit záznam i neutrin o nižších energiích, které vznikají právě při nejčastějším proton-protonovém jaderném cyklu ve slunečním nitru. Pro experiment bude použito 35 nádrží o objemu po 2800 l s celkovým obsahem 50 tun galia — mimochodem to představuje více než roční celosvětovou produkci tohoto hliníku podobného kovu. Galium bude v nádržích ve formě roztoku chloridu galia. Galium 71 se po zachytu neutrina mění na germanium 71; vznikající chlorid germania bude vždy po ukončení čtyřtýdenní pozorovací periody z nádrží „vymyt“ heliem do chladičů jímky, kde se od helia opět oddělí. Výsledkem je metanu podobný plyn german, vedený do malého proporcionálního počítače detekujícího rozpad radioaktivních jader germania 71 — z jejich počtu tak lze odvodit tok slunečních neutrin. Odhaduje se, že za měsíční pozorovací období by tak z 50 tun galia mohlo být získáno asi 1 cm³ germanu obsahujícího asi 20 jader germania 71. To je velmi malé množství, a proto je celé zařízení zapotřebí umístit hluboko pod zemským povrchem, kam nepronikne rušivý vliv záření kosmického. Uvědomíme-li si, že podle teoretických odhadů by každou sekundu mělo plochou 1 cm² na zemském povrchu procházet asi 65 miliard neutrin slunečního původu, velmi názorně vidíme nepatrnou účinnost hmotných překážek, pokud se týče absorpce neutrina. Hodnota, kterou jsme uvedli, jednoduše plyne z velikosti sluneční konstanty a z toho, že za zdroj energie ve Slunci pokládáme jadernou syntézu vodíku na hélium. Slučováním vždy čtyř protonů do heliového jádra se uvolňuje energie 26,73 MeV a vznikají dvě neutrina, na něž připadá energie zhruba 0,5 MeV. Na každé uvolněné neutrino se tedy vyzáří

elektromagnetickým zářením přibližně 13 MeV energie a dostáváme tak jednoduchou souvislost mezi slunečním zářivým tokem a tokem neutrin.

V Sovětském svazu a ve Spojených státech věnují odborníci neutrinové astronomii velkou pozornost. Velký sovětský neutrinový dalekohled je již ve zkušebním provozu a americký s účastí západoněmeckých a izraelských vědců by měl být dokončen v roce 1985. Srovnání dat z obou přístrojů by mohlo s konečnou platností dát odpověď na řadu otázek, které si dnes jak astronomové, tak i jaderní fyzikové kladou.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Waclaw Sierpiński — významný vědec 20. století

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, CSc., FMF UK Praha

Na letošním seznamu výročí UNESCO je uvedeno i sté výročí narození polského matematika, který spoluvytvářel tzv. varšavskou matematickou školu a měl velmi přátelské kontakty s našimi vědci. Seznamme se aspoň stručně s jeho osudy a naznačme si význam jeho díla.

Waclaw Sierpiński se narodil ve Varšavě dne 14. 3. 1882 jako syn lékaře, studoval tam na gymnáziu a na univerzitě, kterou ukončil v r. 1904. Tlak carských úřadů vyvolával vření mezi studenty a učiteli, do konfliktů se v r. 1905 zapojil i mladý gymnaziální profesor Sierpiński. Záhy poté opustil Varšavu a přesídlil do Krakova*), kde získal doktorát filozofie, ve Lvově pak učitelské místo na univerzitě. Tím měl existenční zajištění a mohl začít soustavnou vědeckou práci.

Pod vlivem svého profesora *G. V. Voronoje* na varšavské univerzitě se zabýval zprvu teorií čísel. V r. 1907 však učinil paradoxní objev, že polohu každého bodu v rovině lze určit jediným číslem (ve zvolené soustavě souřadnic); Tento poznatek sdělil svému příteli na univerzitě v Göttingen, dostal telegram s jediným slovem „Cantor“ (*Georg Cantor*, tvůrce teorie množin, už před 25 lety dokázal obdobný výsledek — existenci vzájemně jednoznačného zobrazení úsečky na celý čtverec.) Za telegramem následovala zásilka knih, ze kterých *W. Sierpiński* nastudoval dosud známé výsledky teorie množin, a sám začal tuto teorii rozvíjet.

*) Jak víte, území Polska bylo tehdy rozděleno mezi Rusko, Německo a Rakousko-Uhersko; Varšava patřila do ruského záboru, zatímco Krakov a Lvov do rakousko-uherského.

Už v r. 1909 ji zařadil do svých přednášek na univerzitě, v r. 1912 napsal spis *Nástin teorie množin*, za který získal cenu krakovské Akademie věd.

Během 1. světové války byl po dobytí Lvova internován v Rusku, zprvu ve Vjatce, později v Moskvě, kde mu profesori moskevské univerzity umožnili přístup do knihovny i na schůzky Moskevské matematické společnosti. Jedním z jeho příznivců byl *B. K. Mlodziejewskij*, který sám začal jako první v Rusku přednášet teorii množin a vytvořil ruskou terminologii. Velké přátelství navázal Sierpiński s *N. N. Luzinem*, který později vedl slavnou moskevskou školu; během války společně publikovali v zahraničních časopisech práce z teorie funkcí.

V r. 1918 se Sierpiński vrátil do Varšavy, stal se profesorem univerzity, soustředil kolem sebe své bývalé žáky ze Lvova a začal organizovat vědeckou práci v teorii množin a jejích aplikacích (v teorii funkcí a v topologii). Tak se zrodila *varšavská matematická škola*, která dosáhla světového věhlasu. W. Sierpiński a *S. Mazurkiewicz* založili v r. 1919 časopis *Fundamenta mathematicae*, zaměřený na teorii množin a matematickou logiku s jejich aplikacemi. Prvotní obavy, že nebude co tisknout a komu prodávat, se brzy rozplynuly, časopis vycházel záhy ve dvou svazcích ročně a přispívali do něho významní odborníci z mnoha zemí (z našich zejména prof. *E. Čech* a jeho žáci).

V meziválečném období napsal profesor Sierpiński řadu velkých prací (monografií) z různých oblastí matematiky a několik set článků. V teorii množin se hluboce zabýval tzv. hypotézou kontinua, které věnoval rozsáhlou knihu. Kromě vlastních výsledků však podstatně inspiroval i mnoho svých spolupracovníků a studentů k řešení důležitých problémů. V r. 1935 pomohl založit další odborný časopis *Acta Arithmetica*, do jehož redakční rady přizval i prof. *V. Jarník*a z Univerzity Karlovy. Styky polských a československých matematiků byly poměrně čilé a těmito pracovními kontakty ještě sílily.

Z podnětu prof. Sierpińského se konal v r. 1929 ve Varšavě *kongres slovanských matematiků* (v r. 1934 byl obdobný sjezd v Praze). W. Sierpiński získal mnoho poct i na mezinárodních kongresech matematiků, řadu čestných doktorátů a čestných členství v matematických společnostech. Naše Jednota čs. matematiků a fyziků mu tento titul udělila jako první už v r. 1923. V poválečném období se z iniciativy a za účasti prof. Sierpińského konala nevšední událost v r. 1949 — *společný sjezd československých a polských matematiků v Praze*.

Nacistickou okupaci přežil W. Sierpiński jako úředník varšavského magistrátu, přitom ve svém bytě o sobotách tajně pořádal matematické semináře. V době varšavského povstání byl s rodinou vyhnán na venkov, jeho byt s bohatou vědeckou knihovnou a korespondencí shořel. Po válce začal za velmi obtížných podmínek vyučovat, psal především nové učebnice pro vysoké školy, navazoval přetrhaná spojení. V nově zřízené

Polské akademii věd se stal viceprezidentem a pokračoval ve výchově mladých vědeckých pracovníků.

V posledních desetiletích svého života napsal i řadu popularizačních prací z teorie čísel, nejznámější z nich jsou *Trojúhelníková čísla*, *Pythagorejské trojúhelníky*, *O stu jednoduchých, ale obtížných záhad aritmetiky*, *Z pomezí aritmetiky a geometrie*, *Co víme a co nevíme o prvočíslech*. Najdete je v našich knihovnách převážně v ruském překladu, poslední z nich i v české verzi, kterou pořídil F. Veselý.

Bohatý a plodný život profesora Sierpiňského ukončila smrt dne 21. 10. 1969. Svou nevšední pracovitostí podněcoval k úsilovné práci i ostatní, zejména vychoval desítky mladých matematiků; trvale se vepsal do dějin nejen polské, ale světové matematiky 20. století.

O cestě k Newtonovým pohybovým zákonům

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., UK Praha

Vývoj fyzikálního pojmu síly začal již ve starověku. Základem pro něj byla naivní představa síly, kterou získáváme svalovými a hmatovými počítky. Tato představa se však po přenesení do neživé přírody nutně zatěžovala tajemností přecházející až do mystiky. Už ve starověku se podařilo ve staticce aspoň částečně oprostít fyzikální pojem síly od tohoto nánosu. U jednoduchých strojů (páka, kladka, kolo na hřídeli, nakloněná rovina, šroub) bylo možno měřit sílu závažími. Mohlo se tak od kvalitativního výkladu přejít k dostatečně korektnímu kvantitativnímu popisu. *Archimédes* (287 až 212 př. n. l.) vyslovil zcela přesným způsobem zákon o rovnováze na páce. Dalším skvělým úspěchem byl i jeho zákon o nadlehčování tělesa ponořeného do kapaliny.

Potíže však činily jevy, jejichž zákonitosti nebylo možno odhalit pouhým pozorováním a jeho logickým nebo sofistickým*) rozbořením. Tak si lze vysvětlit, že *Aristoteles* (384 až 322 př. n. l.) zanechal z fyziky ve svém jistě jinak velkolepém díle velmi málo. Přesto však do vývoje fyziky zasáhl značně neblaze. Na jeho názorech se totiž pak po staletí lpělo, neboť je převzala středověká scholastika. Uvedme několik aristotelských představ. Každé těleso má ve vesmíru své přirozené místo — lehká tělesa na nebi, těžká ve středu Země. Je-li těleso nuceno své

*) Sofismaty se nazývají slovní hříčky a myšlenkové triky, úmyslně užívané k odvození klamných závěrů.

přirozené místo opustit, snaží se je znovu zaujmout. Proto např. pára stoupá svisle vzhůru a kámen padá dolů. V jeho „Mechanice“ se píše: „Těleso, které se pohybuje, dostane se do klidu, jestliže síla, která je pohání, nepůsobí již tak, že je pohání.“ Tomu odpovídal i výklad vrhu tělesa, podle kterého se těleso pohybuje nejprve silou vrhajícího a po jejím „vypotřebování“ začne padat k Zemi, k „přirozenému“ místu těžkých věcí.

Poslední krok k dovršení pojmu síly ve statice učinil *Simon Stevin* (1548 až 1620), když použil při vyšetřování rovnováhy na nakloněné rovině rozklad tíhy na dvě složky, a tak objevil tzv. rovnoběžník sil. Svůj objev popsal v knize „*Hypomnemata mathematica*“, vydané roku 1605. Stevinovo jméno není příliš známé, ačkoli jeho objev rovnoběžníku sil je svým významem srovnatelný s pracemi Galileia a Newtona.

Další pokrok v chápání pojmu síly se musel odehrát v dynamice. Zde však byla cesta vpřed velmi obtížná. Po staletí se tradovaly nesprávné aristotelské představy a při zkoumání skutečnosti se vycházelo jen z pouhého pozorování. Zajímavé je, že další vývoj probíhal po dvou cestách.

Jedna z nich je patrná i ze současných středoškolských učebnic mechaniky. Vše začalo u *Mikuláše Koperníka* (1473 až 1543) při formulaci heliocentrického systému, který byl ovšem znám již ve starověku a s nímž ve 13. století vystoupil anglický filozof a přírodovědec *Roger Bacon* (asi 1214 až 1294). Na Koperníka navázal *Johannes Kepler* (1571 až 1630), když na základě pozorování *Tychona Brahe* (1546 až 1601) objevil slavné tři zákony pro pohyb planet. Další významnou postavou je *Galileo Galilei* (1564 až 1642), který studoval volný pád a jednoduché mechanické pohyby.

Galileiovi se podařilo již zcela překonat bariéru scholastiky a Aristotelova učení o pohybu. Jeho činnost je důležitá i z metodologického hlediska. Dokázal shrnovat výsledky pokusů a pozorování, provádět jejich analýzu, oprostit je od náhodných podmínek, provádět idealizaci a pak formulovat přírodní zákon. Galilei takovým postupem objevuje zákon volného pádu. Zde je představa volně padajícího tělesa bezesporu idealizací. Zjistil, že rychlost volného pádu roste rovnoměrně s časem, a tak dospívá k novému fyzikálnímu pojmu — k pojmu *zrychlení*. Dalším jeho velkým objevem byl *zákon setrvačnosti*.

Galileia lze pokládat za zakladatele vědecké mechaniky, v níž jsou spekulace nepřipustné. Vznikající experimentální věda má i svého filozofického teoretika. Je jím *Francis Bacon* (1561 až 1626), který byl podle Marxe „skutečným praotcem anglického materialismu a veškeré moderní experimentální vědy“. Podle Bacona je jediným spolehlivým zdrojem poznání zkušenost, správnou metodou poznání je indukce.

Druhou cestu pokroku v mechanice vytváří francouzská filozofická a fyzikální škola, jejímž hlavním představitelem byl *René Descartes*

(1596 až 1650). Rozešel se zcela s aristotelismem, s jeho spekulacemi. Vytvořil však nový opět spekulativní systém, který se opíral o nové přírodovědecké poznatky. Hlavní vadou však bylo, že přistupoval k problémům přírody spekulativně, vytvářel nové hypotézy a neopíral se o experimenty. Doplnil však Galileiův zákon setrvačnosti, když poukázal na to, že pohyb bez působení síly musí být přímočarý. Descartes směřoval k mechanickému materialismu, neboť vnesl představu, že veškerý pohyb je mechanický. Stává se slavný výrokem: „Dejte mi hmotu a pohyb a stvořím svět.“ Snad tak chtěl také vyjádřit pokrok v poznávání světa od dob Archimédových, který prohlásil: „Dejte mi pevný bod a pohnu světem.“

Obě dvě cesty rozvoje mechaniky se uzavírají v díle *Isaaca Newtona* (1642 až 1727), tvůrce tzv. klasické mechaniky. Na Keplera a Galileia přímo navazoval, na Descarta se však díval velmi kriticky. Hlavně se od něj lišil filozofickým přístupem. Ve vědecké práci se řídil zásadou „Hypotheses non fingo“ (Hypotézy nevymýšlím.). Tato zásada mu umožňovala v největší možné míře se osvobodit od spekulativních filozofických představ, které mohou být případně z počátku i progresivní, avšak později začnou omezovat vědecký rozvoj. Své názory vyjádřil Newton čtyřmi pravidly (viz [2], str. 82):

1. Není třeba připouštět více příčin přírodních jevů, než které jsou pravdivé a stačí k vysvětlení oněch jevů.
2. A tak příčiny přírodních jevů téhož druhu jsou tytéž.
3. Vlastnosti těles, které nemohou být ani zesíleny ani zeslabeny a které jsou vlastní všem tělesům, na nichž je možno provést experimenty, je třeba považovat za vlastnosti všech těles.
4. V experimentální fyzice je třeba indukci získané zákony, pokud neexistují opačné, považovat za přesné nebo za velmi blízké pravdě, pokud pomocí nových jevů nedosáhnou větší přesnosti.

Těmito zásadami se Newton hlásí k Baconovi, k jeho empirismu. Newton přijímá zásadu, že mechanika je empirickou vědou a že je nutno užívat racionální metody na smyslové údaje. Newton pokládal i matematiku za disciplínu, jež má přímý původ v materiálním světě. S tím souvisí jeho snaha matematizovat fyzikální problémy a vykládat mechaniku axiomatickou metodou, tj. způsobem, kterého použil Eukleides ve svých Základech. Eukleidova přesnost výkladu nebyla v 17. století ještě nikým překonána. Pro zajímavost uvedme, že *Isaac Barrow* (1630 až 1677), jenž byl Newtonovým univerzitním učitelem a později přítelem, vydává komentované Eukleidovy Základy. Barrow též vydal Archimédův spis, v němž byly precizně řešeny některé problémy, které dnes náleží do infinitezimálního počtu.

Newtonovi byly Descartovy názory zcela nepřijatelné. Descartes při řešení fyzikálních otázek nevycházel od experimentů, jejich analýzy

a zobecnění, nýbrž přistupoval k přírodě obrazně řečeno „z filozofických výšin“, když chtěl fyzikální otázky řešit jako důsledky spekulativně vytvořených obecných filozofických představ. Přesto však byl Newton Descartem ovlivněn, ovšem jinak než tomu obvykle bývá. Podrobil jeho dílo důkladné analýze a kritice a ve své vědecké práci Descartovy chyby a omyly překonal. Možná, že ho Descartes takto motivoval k vědecké práci, jejíž korektnost snese i dnešní měřítko. V knize [2] na str. 81 se uvádí, že dokonce v názvu Newtonova stěžejního díla „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ se pravděpodobně záměrně užívají slova „přírodní“ a „matematický“, aby bylo zřejmé, že jde o jistou odpověď na Descartovo hlavní dílo „*Principia philosophiae*“, vydané v roce 1644.

Při psaní svých Principií, jak se obvykle stručně nazývá výše uvedené Newtonovo dílo, se snažil Newton postupovat přísně deduktivně. Přitom dodržel tradiční zvyk matematiků, podle něhož se nepublikují přípravné úvahy, nesdělují se čtenáři nic o omylech a neúspěších, o slepých cestách, které nikam nevedly, dále se nepíše o tom, jak vznikaly nové pojmy, apod. Čtenář poznává až krásnou harmonickou stavbu celé teorie. Její obtíže zrodu mu zůstávají utajeny, ačkoli pro filozofický pohled na problematiku by bylo třeba právě tuto genezi znát. Chceme-li pochopit newtonovský pojem síly, musíme se pokusit zrekonstruovat Newtonovy myšlenkové postupy. To není snadné, neboť jen obtížně se lze přenést o tři sta let zpět. Principia totiž vyšla v roce 1687. Je možné, že tak, jak dále popíšeme, Newton vůbec nepostupoval. Uvedený sled myšlenek je však velmi pravděpodobný.

Newton znal Galileiův zákon setrvačnosti, který doplnil Descartes. Tedy věděl, že pokud na těleso nepůsobí síly, pak setrvává ve stavu klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu. Síly je jistě možno měřit změnami pohybového stavu těles, na něž působí. Bylo tedy nutno nalézt míru množství pohybu v tělese. Zde se mohl Newton trochu opřít o náznaky v úvahách Galileia a Descarta, o nichž hovoří Engels v [1] na str. 77. Nejprve však bylo třeba zavést pojem míry množství hmoty v tělese. V Principiích lze nalézt definici: „Množství hmoty je její míra, daná společně její hustotou a velikostí.“ ([2], str. 132) Tuto míru množství hmoty nazýváme v současné české terminologii *hmotností*. Avšak Newton ji definoval chybně. Hmotnost je totiž třeba měřit účinky setrvačnými (setrvačná hmotnost) nebo gravitačními (gravitační hmotnost). Oba způsoby měření vedou ke stejným výsledkům. Poznamenejme, že rovnost obou hmotností byla až do vzniku obecné teorie relativity záhadou. Jako míru množství pohybu v tělese zavedl Newton součin hmotnosti a rychlosti. Tuto veličinu nazýváme *hybností*.

Změnu velikosti pohybu tělesa a velikost vnější síly spojil Newton ve svém slavném 2. pohybovém zákonu, jenž v původní formulaci ([2], str. 133) zněl:

„Změna pohybu je úměrná vtištěné pohybuující síle a děje se ve směru přímky, po níž ona síla působí.“

Podle Laueho ([4], str. 21) užíval Newton také formulace, která v dnešní terminologii zní: Síla se rovná změně hybnosti za jednotku času. Užijeme-li derivace, docházíme k rovnosti

$$F = \frac{d(mv)}{dt}, \quad (1)$$

kde F je síla, m hmotnost, v rychlost a t čas. Po úpravě, která se zdá být samozřejmá, dostáváme

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot a,$$

kde a je zrychlení. Pozoruhodné je, že původní Newtonova formulace (1) se ukázala velmi prozíravá, neboť nepředpokládala, že hmotnost musí být konstantní.

V rovnosti (1) jsme užili derivace. Isaac Newton je jedním z tvůrců infinitezimálního počtu. První krok k jeho objevu vykonal Descartes, když zavedl do matematiky proměnnou veličinu, a tak pronikl do matematiky pohyb a dialektika ([1], str. 220). Doba pro objev infinitezimálního počtu byla zřejmě zralá, neboť nezávisle na Newtonovi jej objevuje *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646 až 1716). Zajímavé ovšem je, že Newton ve všech výpočtech a důkazech ve svých *Principiích* užívá důsledně geometrie a nikoli infinitezimálního počtu. Snad tak chtěl učinit *Principia* přístupnější. Traduje se, že některé problémy vyřešil nejprve infinitezimálně a teprve pak geometricky.

V knížce [3] na str. 13 se upozorňuje, že někteří fyzikové se dnes domnívají, že předpoklad, že měřítka i hodiny měří spojitě všechny vzdálenosti a časové intervaly, nemusí být oprávněný. Potvrdí-li se jednou jejich domněnka, pak by zápis (1) 2. pohybového zákona nebyl zcela korektní a pohybové rovnice by nebyly diferenciálními.

Newtonovy tři pohybové zákony je třeba brát vždy jako celek. Na prvním pohybovém zákonu je nejcennější, že zdůrazňuje neoddělitelnost hmoty a pohybu. Třetí pohybový zákon, nazývaný zákonem akce a reakce, je neodmyslitelným doplňkem zákona druhého. Na první pohled se zdá být samozřejmý, jeho význam je však dalekosáhlý. Dokonale platí nejen v kosmickém měřítku, ale i v atomárních a subatomárních procesech.

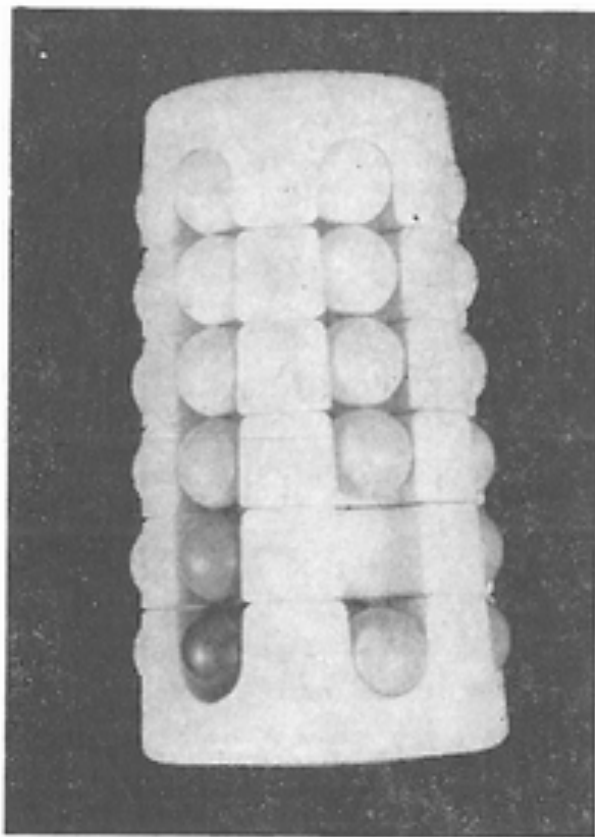
Literatura

- [1] B. Engels: *Dialektika přírody*, Svoboda, Praha 1950
- [2] L. Nový — J. Smolka: *Isaac Newton*, Orbis, Praha 1969
- [3] I. Úlehla: *Od fyziky k filosofii*, Orbis, Praha 1963
- [4] M. von Laue: *Dějiny fyziky*, Orbis, Praha 1963

Babylónská věž

Pestrá šestibarevná Rubikova kostka se stala velkým šlágrems v oblasti matematických hlavolamů a her s matematickým podtextem. Velký úspěch kostky inspiroval sestrojení nových vtipných hlavolamů v MLR. Jedním z nich je i novinka — babylónská věž. Jde o věžičku ve tvaru komolého kužele, která má šest poschodí, která jsou vzhledem k ostatním otočná kolem osy kužele. V každém poschodí je šest okének, v nichž jsou umístěny kuličky šesti barev a každá z nich je zastoupena šesti odstíny. K dispozici tedy je 36 kuliček, které mají různé barvy resp.

jejich odstíny. Okénka jsou ve svislém směru propojena a tvoří kolejničku, ve které jsou kuličky uloženy. V nejspodnějším poschodí věže je zařízení, které umožní ve dvou protilehlých okénkách uschovat nejspodnější kuličku ve vnitřku věže tak, že na její místo vklouzne nejbližší vyšší kulička a podrží uschovanou kuličku v jejím úkrytu. Když je jeden z úkrytů obsazen, nelze druhý už použít. Uschováním jedné z kuliček vznikne v příslušné kolejničce prázdné okénko, které lze, vzhledem k otočnosti jednotlivých poschodí a vzhledem k volnému pohybu kuliček v jedné kolejničce přenášet do libovolného jiného poschodí a kolejničky.



Několika pohyby s přesouváním prázdného okénka a otáčením poschodí se kuličky na věži zcela zamíchají. Cílem hry je seřadit kuličky podle nějakého pravidla — například lze seřazovat každou z barev do jedné kolejničky (sloupce) tak, aby nejsvětlejší byla v horním a nejtmavší v dolním poschodí.

Hříčka vzdáleně připomíná známou hru s patnácti čtverci v krabici, v níž je volné místo pro posouvání jednoho ze čtverců.

Toho, kdo babylonskou věž dostane do rukou, může přivést k úvahám o permutacích a matematických zákonitostech, které hrají roli při seřazování kuliček na věži. Obtížnost hry a její výchovnou hodnotu pro pěstování představivosti nelze s Rubikovou kostkou srovnávat. Je jednodušší zejména proto, že reprezentuje úlohu na válci, který má pouze dvě dimenze. Lze si s ní ale také docela dobře pohrát a trochu i přemýšlet nad jejími taji.

RNDr. Štefan Schwabik, CSc.

Nejmladším čtenářům

STANISLAV HORÁK, Praha

V NDR v kraji Cottbus (Lužickosrbsky Chotěbuz) byl vydán svazeček obsahující 792 příkladů z různých odvětví matematiky. Příklady jsou určeny žákům 5. až 10. ročníku. Nejsou to tedy příklady nějak obtížné, a proto jsem jich několik vybral pro naše nejmladší čtenáře.

1. V trojúhelníku ABC mají vnitřní úhly velikosti α, β, γ . Osa úhlu $\sphericalangle CAB$ protne stranu BC v bodě D . Označme $|\sphericalangle ADB| = \delta, |\sphericalangle ADC| = \varepsilon$. Dokažte, že platí

$$\delta - \varepsilon = \gamma - \beta.$$

2. Jestliže v trojúhelníku ABC je $|\sphericalangle CAB| = 30^\circ$, pak délka strany BC je rovna poloměru kružnice opsané našemu trojúhelníku.

3. Nad každou stranou rovnoběžníka $ABCD$ je vně rovnoběžníka sestrojen čtverec. Středy těchto čtverců jsou vrcholy nového čtverce. Dokažte.

4. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC ($|AB| = |AC|$). Výška jdoucí vrcholem B protne kružnici opsanou danému trojúhelníku v bodě D a osu úhlu $\sphericalangle BAC$ v bodě M . Ukažte, že trojúhelník AMD je rovnoramenný a podobný danému.

5. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), jestliže je dáno: $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|CD| = 5 \text{ cm}$, $|AC| = 9 \text{ cm}$ a $|BD| = 6 \text{ cm}$.

6. Jsou dány dvě krychle, délky jejich hran jsou a, b . Vypočítejte poměr a) jejich povrchů, b) jejich objemů. — Dosadte potom $b = 2a(3a, 4a, \dots)$. Co můžete říci o poměrech povrchů a o poměrech objemů v tomto případě?

7. Jsou dána tři různá přirozená čísla, z nichž žádné není dělitelné číslem 3. Potom

- a) buď součet všech tří čísel je dělitelný třemi nebo
- b) součet některých dvou čísel je dělitelný třemi.

8. Jestliže a je libovolné přirozené číslo, potom zlomek

$$\frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a - 1}$$

se nedá krátit ani dvěma ani třemi. Dokažte.

9. Jestliže se nedá krátit zlomek

$$\frac{a - b}{a + b},$$

kde a, b jsou přirozená čísla, pak se nedá krátit ani zlomek $\frac{a}{b}$. Dokažte.

10. Pro která racionální čísla a, b je splněna rovnost

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(a + b)(a - b)}{ab}?$$

Sedm zajímavých úloh

1. Kterou číslici nepoužili v tiskárně, když vysadili všechny dělitele čísla 420?

[9]

2. Jakou číslicí končí součin všech lichých čísel větších než 1 a menších než 999?

[5]

3. Dokažte, že součin všech kladných celých čísel menších než 100 je dělitelný čísly 10, 899, 3599.

4. Nalezněte všechny trojice prvočísel, jejichž součet je číslo 100.

[2, 19, 79; 2, 31, 67; 2, 37, 61]

5. Budeme počítat prsty své ruky takto: první je palec, druhý ukazováček, třetí prostředníček, čtvrtý prsteníček, pátý malíček, šestý prsteníček, sedmý prostředníček, osmý ukazováček, devátý palec, desátý ukazováček, ... Tímto způsobem pokračujeme, pokud nezjistíme název 1982. prstu. Který je to prst?

[prsteníček]

6. Dokažte, že číslo $7251^5 + 6159^7$ je dělitelné devadesáti.

7. Které z čísel 3^{303} a 2^{454} je větší?

[3^{303}]

Poznámka: Ve všech úlohách se předpokládá, že čísla jsou zapsána v desítkové soustavě.

Jan Voříšek, Ústí nad Labem

Ještě pro nejmladší členáře

Píšeme-li za sebou přirozená čísla v jednom sledu

1234567891011121314...,

pak na 19. místě jest čtyřka.

Zjistěte a) která cifra stojí na 1982. místě;

b) která číslice je na miliontém místě!

O. Setzer

Řešení : a) 9, b) 6

Jak rozdělit osm zlatáků

V západoněmeckém časopise Archimedes (roč. 1964) byla tato pěkná úloha:

Dva beduini, z nichž první měl 5 bochníků chleba a druhý 3 bochníky, potkali na poušti hladovějícího. Tu si sedli a všech 8 bochníků snědli; každý snědl právě třetinu všech bochníků. Hladovějící dal oběma dohromady 8 zlatáků, aby se rozdělili. První beduin si chtěl vzít 5 zlatáků a druhému dával 3 zlatáky. Druhý však nebyl spokojen. „Jsme dva, každý dostane 4 zlatáky,“ tvrdil. Nakonec šli ke kádímu a ten je přesvědčil, že ani jeden z nich nemá pravdu, a rozdělil 8 zlatáků spravedlivě. Jak to provedl?

Pokuste se sami rozřešit tento zlatákový problém a pak se podívejte na str 381, kde je řešení kádího.

S. Horák

Z redakční pošty

V rubrike „Z redakční pošty“ v čísle 5 roč. 80/81 a č. 1 roč. 81/82 sme sa zaoberali rozkladom čísiel v tvare 3333... 33331. Uvádzam ďalšie čísla:

$$33\ 333\ 333\ 333\ 333\ 331 = 31 \times 1\ 075\ 268\ 817\ 204\ 301$$

$$33\ 333\ 333\ 333\ 333\ 333\ 331 = 29 \times 1\ 149\ 425\ 287\ 356\ 321\ 839$$

$$333\ 333\ 333\ 333\ 333\ 333\ 331 = 23 \times 14\ 492\ 753\ 623\ 188\ 405\ 797$$

Záver k riešeniu tohoto problému by mohol dať príklad z časopisu *Kvant* uvedený v Rozhľedech č. 2 roč. 81/82 na strane 73 pod č. 1:

Dokážte, že v postupnosti 31, 331, 3331, ... existuje nekonečne mnoho čísel deliteľných číslom 31.

Tejto úlohe vyhovujú 31 násobky čísiel v tvare:

$$1\ (075\ 268\ 817\ 204\ 301)_n$$

Číslo $n = 0, 1, 2, \dots$ znamená, že daná skupina čísel se opakuje n -krát.
Pre $n = 0$ je $31 \times 1 = 31$
Pre $n = 1$ je výsledok uvedený vyššie. Pre ďalšie n si riešenie môže vyskúšať každý sám.
Podobne se dá dokázať, že v uvedenej postupnosti existuje nekonečne veľa čísel deliteľných číslom 17, 23, 29, ... atď.

Edmund Newman

Efektní experimenty: Rozbijte sklo zpěvem

Malý Oskar v románu *G. Grasse* Plechový bubínek rozbíjel křikem okenní tabule. Operní pěvci a pěvkyně dokáží silně zazpívanými vysokými tóny roztržít sklenky na sekt. Zkuste to také. Podaří se to jen při určitých tónech, které musíte zpívat několik sekund než sklo praskne. Nestačí-li Vám hlas, může pomoci technika. (Vysvětlení je na str. 382).

Petr Hnilička

INFORMACE

Přijímací zkoušky z fyziky na fakultu jadernou a fyzikálně inženýrskou ČVUT v Praze v roce 1981

RNDr. EVA HAVRÁNKOVÁ, FJFI ČVUT, Praha

Chtěli bychom, podobně jako jsme to učinili již dříve (viz (1)), seznámit studenty středních škol s příklady, které byly zadány u písemných přijímacích zkoušek z fyziky na fakultu jadernou a fyzikálně inženýrskou v Praze v roce 1981. Uchazeči o studium na této fakultě skládají písemnou zkoušku z matematiky a z fyziky. Z matematiky řešili šest příkladů, které zadávalo ministerstvo školství jednotně pro všechny fakulty ČVUT, otázky a příklady z fyziky zadávala fakulta sama. Bylo položeno pět otázek, které se týkaly všech částí fyziky, které se učí na gymnáziích (mechaniky, molekulové fyziky a termiky, elektři-

ny a magnetismu, optiky a fyziky atomového obalu a atomového jádra). Při formulaci otázek a příkladů jsme se drželi brožury „Požadavky z fyziky pro přijímací řízení na fakultách ČVUT“ a středoškolských učebnic, především však učebnic pro gymnázia (viz /2/ až /12/). První čtyři otázky byly rozděleny na dvě části, část a) a část b). V části a) jsme se ptali na teoretické vědomosti (základní zákony, základní vztahy, definice různých fyzikálních veličin, část b) byla početní (příklad). Pátá otázka, která se týkala fyziky atomového obalu a atomového jádra, byla rozdělena na čtyři podotázky.

Při vypracovávání otázek nesměli studenti užívat kalkulačky ani fyzikální a matematické tabulky (v těch jsou právě základní vztahy uvedeny). Příklady byly voleny tak, aby numerický výpočet nebyl podstatný. Při řešení příkladů s numerickými údaji jsme však vyžadovali, aby ve výsledném vzorci byly dosažené číselné údaje uvedeny, aby byly v jednotkách soustavy SI a aby byl řádově správně proveden výpočet a uvedena výsledná jednotka.

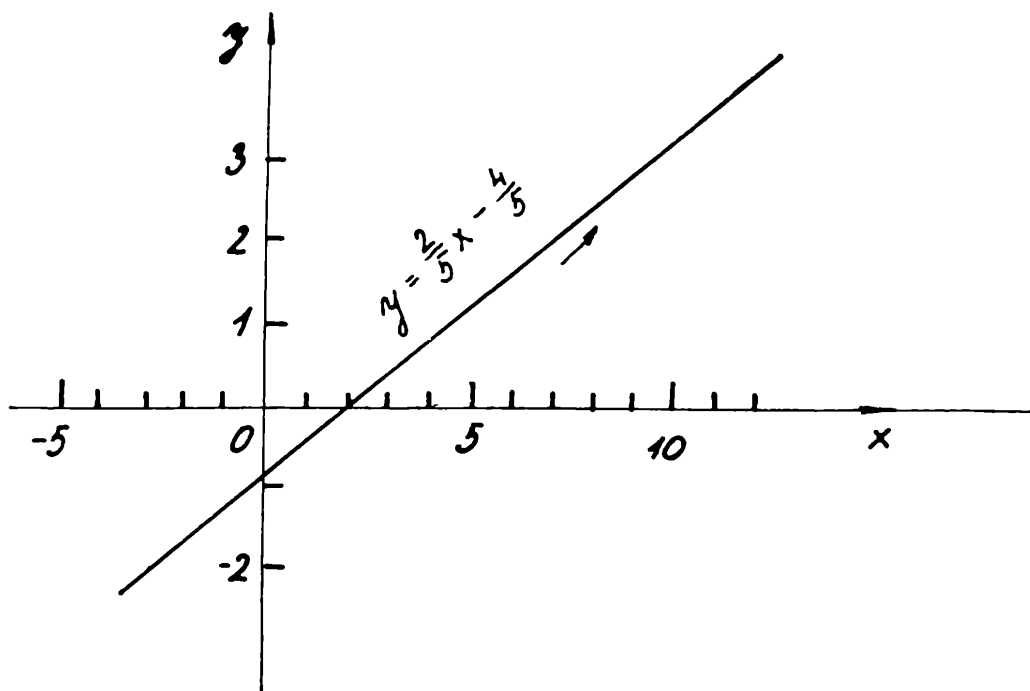
Uvedeme nyní znění všech pěti otázek, které jsme při přijímacích zkouškách zadali.

- (1) a) Definujte rychlost pohybu hmotného bodu a uveďte její jednotku.
b) Hmotný bod se pohybuje v rovině x, y . Jeho souřadnice x, y se mění s časem t podle vztahů $x = 5t + 2$, $y = 2t$. (Délky jsou uváděny v metrech, čas v sekundách.) Nakreslete dráhu hmotného bodu a určete jeho rychlost.
- (2) a) Napište stavovou rovnici pro
 - 1) 1 mol ideálního plynu
 - 2) n molů ideálního plynu
 - 3) m kilogramů ideálního plynu.(Nezapomeňte udat význam symbolů, které při psaní stavové rovnice použijete).
b) Jaký objem zaujímá 1 kg vodíku při tlaku 0,1 MPa a při teplotě 300 K?
- (3) a) Co je to interference světla, jaké podmínky musíte splnit, aby byla interference dvou světelných vln pozorovatelná? Kdy se světelné vlny zesilují a kdy zeslabují?
b) Na dvě velmi úzké rovnoběžné štěrbin v neprůhledném stínítku dopadá kolmo rovinná monochromatická světelná vlna s vlnovou délkou 400 nm (fialové světlo). Ve vzdálenosti 3 m od štěrbin je umístěno stínítko, na kterém pozorujeme interferenci. Maximum interference druhého řádu je vzdáleno od hlavního maxima o 4,8 mm. Uveďte vzájemnou vzdálenost štěrbin v neprůhledném stínítku.

- (4) Dva odpory o hodnotách R_1 , R_2 jsou zapojeny jednou vedle sebe a podruhé za sebou.
- Nakreslete příslušná zapojení a napište v obou případech, čemu se rovná výsledný odpor.
 - Oba vzorce pro sčítání odporů odvoďte.
- (5) 1) Vysvětlete, co je to ionizace atomu. Je nutno při ionizaci atomu energii dodat nebo ji z atomu získáme?
- 2) Vyslovte definici atomové hmotnostní konstanty m_u a Avogadrovy konstanty N_A . Odvoďte vztah mezi jejich číselnými hodnotami.
- 3) Z kterých částí atomu může vycházet
- viditelné světlo
 - ultrafialové záření
 - infrachervené záření
 - rentgenové záření
 - gama záření
 - alfa paprsky
 - beta paprsky.
- 4) Napište, které objevy jsou spojeny se jmény vědců *Mendělejev*, *Becquerel*, *Hahn*, *Einstein*.

Bylo by dobře, aby ti čtenáři, kteří mají zájem o studium na naší fakultě, si zkusili samostatně odpovědět na otázky a vypočítat příklady. Studenti, kteří skládali přijímací zkoušky, měli na vypracování odpovědi na otázky a vyřešení příkladů devadesát minut. Pro kontrolu, jak jste pracovali, uvedeme stručně výsledky.

- (1) a) Předpokládáme, že známe pohyb hmotného bodu v nějaké vztažené soustavě. To znamená, že známe například jeho kartézské souřadnice x, y, z jako funkce času. Rychlost tohoto pohybu je vektor, jehož složky v_x, v_y, v_z se rovnají derivacím souřadnic x, y, z podle času; $\mathbf{v} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$.
- b) Hmotný bod se bude pohybovat po přímce (viz obr. 1) o rovnici $y = (2/5)x - 4/5$ s konstantní rychlostí $\mathbf{v}$ (rovnoměrný přímočarý pohyb) o složkách $v_x = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_y = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Tato rychlost má velikost $v \doteq 5,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, směr přímky, po které se hmotný bod pohybuje, a míří na grafu na obr. 1 vpravo.
- (2) a) 1) $pV = RT$
 2) $pV = nRT$
 3) $pV = (m/\mu) RT$,



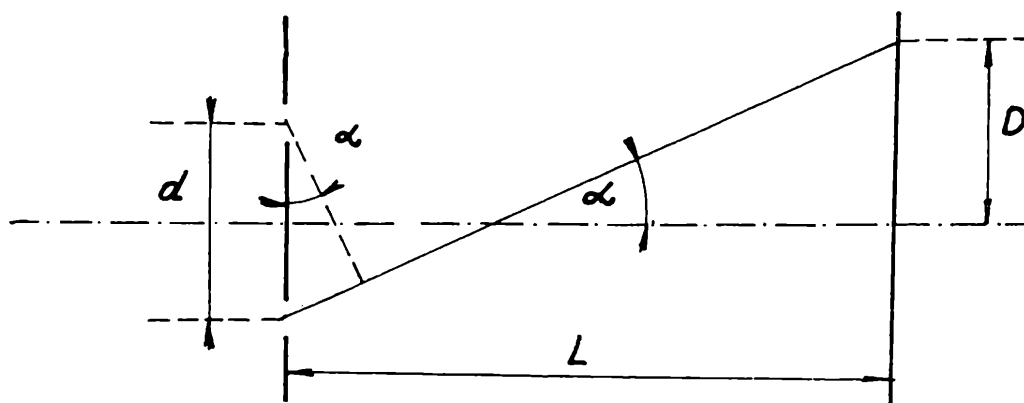
Obr. 1

kde p je tlak plynu, V je jeho objem, R je universální plynová konstanta ($R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$), T je Kelvinova teplota, n je počet molů, μ je molární hmotnost uvažovaného plynu, m je hmotnost tohoto plynu.

b) $V = n R T/p \doteq 12,5 \text{ m}^3$, $n = m/\mu = (1/2) \cdot 10^3 \text{ mol}$.

(3) a) Interference světla je skládání světelných vln. Aby se daly interferenční jevy pozorovat, je nutné, aby světelné rozruchy měly stejný kmitočet a na čase nezávislý fázový rozdíl. U světelných vln pocházejících z různých zdrojů nelze tento požadavek splnit, je však možné použít světla vycházejícího z téhož zdroje, které rozdělíme (odrazem, lomem, clonami) ve dvě nebo několik vlnění. Takováto vlnění nazýváme koherentní. Výsledek interference dvou koherentních světelných vln závisí na jejich dráhovém rozdílu. Největší zesílení nastane při dráhovém rozdílu rovném celistvému násobku vlnové délky (sudému násobku poloviny vlnové délky), největší zeslabení při dráhovém rozdílu rovném lichému násobku poloviny vlnové délky.

b) Schéma pokusu je znázorněno na obr. 2. Tento pokus je známý pod názvem *Youngův pokus*. Maxima interference vzniknou pro $d \sin \alpha = n\lambda$, kde $\sin \alpha \doteq \tan \alpha = D/L$, d je vzdálenost štěrbin v neprůhledném stínítku, n je řád interference, λ je vlnová délka užitého světla, L je vzdálenost stínítka se štěrbinami od stínítka, na kterém pozorujeme interferenci, D je vzdálenost maxima interference 2. řádu od hlavního maxima. Platí tedy $d = n\lambda L/D = 0,5 \text{ mm}$.



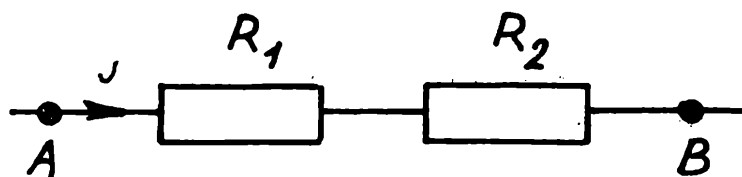
Obr. 2

(4) a) Zapojení jsou nakreslena na obrázku 3a, b.

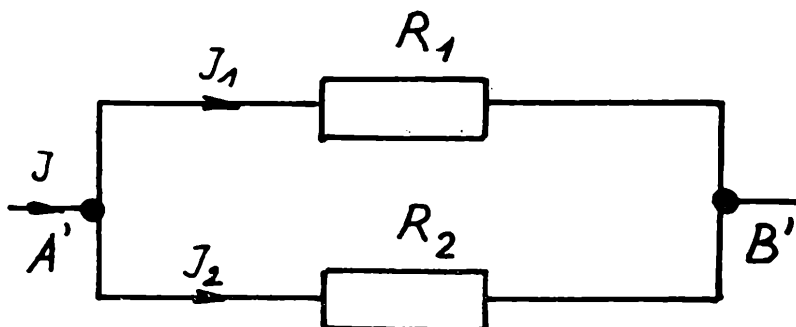
a) $R = R_1 + R_2$

b) $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}; \quad R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$

Obr. 3a



Obr. 3b



b) Napětí U_{AB} mezi body A, B na obrázku 3a se rovná součtu napětí U_1 na odporu R_1 a napětí U_2 na odporu R_2 . Oběma odpory protéká proud I . Užijeme-li Ohmův zákon ($U_1 = R_1 I$, $U_2 = R_2 I$, $U_{AB} = U_1 + U_2 = R I$), dostaneme pro odpor R hledaný vztah $R = R_1 + R_2$. Napětí $U_{A'B'}$ mezi A', B' na obrázku 3b se rovná napětí $R_1 I_1$ a napětí $R_2 I_2$, kde I_1 je proud tekoucí odporem R_1 a I_2 je proud tekoucí odporem R_2 . Odpory R_1 a R_2 zapojené vedle sebe si myslíme nahrazeny jediným odporem R' . Užijeme-li Kirchhofovy zákony ($I_1 + I_2 = I$, I je proud vtékající do uzlu A' a vytékající z uzlu

B' ; $R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$), dostaneme pro odpor R' vztah $1/R' = 1/R_1 + 1/R_2$.

- (5) 1) Ionizace je odtržení elektronu z atomu. Energii je zapotřebí dodat.
- 2) $m_u = \frac{1}{12} M(^{12}\text{C})$; atomová hmotnostní konstanta m_u je jedna dvanáctina klidové hmotnosti atomu izotopu uhlíku ^{12}C ; $m_u = 1,66044 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.
Avogadrova konstanta N_A je počet částic jednoho molu chemicky stejnorodé látky; $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Mezi atomovou hmotnostní konstantou m_u a Avogadrovou konstantou N_A platí vztah $m_u = 1/N_A$.
- 3) Z obalu atomu vychází záření uvedené pod body a), b), c), d), z jádra atomu záření uvedené pod body e), f), g).
- 4) *Mendělejev* — periodická soustava prvků;
Becquerel — objev přirozené radioaktivity;
Hahn — štěpení atomového jádra uranu;
Einstein — teorie relativity, vysvětlení fotoelektrického jevu.

Doufáme, že uveřejnění těchto otázek dá alespoň trochu jasný obraz uchazečům o studium na naší fakultě o tom, co by měli z fyziky znát. Studenti z průmyslových škol a středních odborných učilišť, kde se fyzika vyučuje v menším rozsahu než na gymnáziu, by si měli své vědomosti doplnit z učebnic pro gymnázia (viz [3] až [9]).

Přejeme si, aby uveřejnění tohoto článku pomohlo všem, kteří mají opravdový zájem u nás na fakultě studovat, nejen se dobře připravit na přijímací zkoušky, ale také v budoucnu úspěšně čelit všem nástrahám náročného studia.

Literatura :

- [1] Maršák Z.: Rozhledy mat.-fyz. ročník 58, 1979/80, č. 7, str. 329 a č. 8 str. 382.
- [2] Požadavky z fyziky pro přijímací řízení na fakultách ČVUT, ČVUT 1981
- [3] Fyzika pro I. ročník střední všeobecně vzdělávací školy, SPN Praha
- [4] Fyzika pro II. ročník SVVŠ, SPN Praha
- [5] Fyzika pro III. ročník SVVŠ, SPN Praha
- [6] Doplněk k učivu fyziky pro I. ročník gymnázia, SPN Praha
- [7] Doplněk k učivu fyziky pro II. ročník gymnázia, SPN Praha
- [8] Doplněk k učivu fyziky pro III. ročník gymnázia, SPN Praha
- [9] Doplněk k učivu fyziky pro IV. ročník gymnázia, SPN Praha
- [10] Fyzika pro I. ročník středních průmyslových škol, SPN Praha
- [11] Sbírka úloh z fyziky pro žáky středních škol, SPN Praha
- [12] Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, SPN Praha

Dvě Bolzanovy plakety

V 7. čísle minulého ročníku jsme psali o stříbrné Bolzanově plaketě, kterou uděluje prezidium Československé akademie věd významným vědeckým pracovníkům u příležitosti jejich životního jubilea. V roce 1981, kdy jsme si připomínali dvousté výročí narození Bernarda Bolzana (1781—1848), dostali za své zásluhy o matematické vědy tuto poctu další dva známí matematikové: člen korespondent ČSAV *Miroslav Fiedler* a člen korespondent ČSAV *Jaroslav Kurzweil*. Oba oslavili v roce 1981 pětapadesáté narozeniny.

Blahopřejeme těmto dvěma novým nositelům Bolzanovy stříbrné plakety a rádi připomínáme naší čtenářské veřejnosti, že oba tito vědečtí pracovníci mají už od doby svých středoškolských studií dobrý vztah k našemu časopisu.

Redakce

Řešení zlatákového problému

Beduini měli dohromady

$$5 + 3 = 8 = \frac{24}{3} \text{ bochníku chleba.}$$

První měl $\frac{15}{3}$ bochníku, sám snědl $\frac{8}{3}$ bochníku a hladovějícímu poskytl $\frac{7}{3}$ bochníku. — Druhý měl $\frac{9}{3}$ bochníku, sám snědl $\frac{8}{3}$ bochníku a hladovějícímu poskytl $\frac{1}{3}$ bochníku. Podle toho první dostal 7 zlatáků a druhý 1 zlaták.

OPRAVA

V 8. čísle loňského ročníku *Rozhledů* v článku *Relativita — vec jednoduchá, ale rafinovaná* došlo k několika tiskovým chybám. Na str. 353 ve druhém vztahu shora má místo $1 - v^2/c^2$ být $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Stejná chyba je na str. 354 v rovnosti (5) a ve druhém vztahu shora na str. 355. Dále na str. 356 má být místo $\sqrt{1 + v^2/c^2}$ všude $\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Redakce se omlouvá autorovi i čtenářům.

Vysvětlení efektního experimentu Rozbijte sklo zpěvem

Při určité rezonanční frekvenci se okenní tabule nebo sklenice rozkmitá. Zpívá-li zpěvák právě tón o rezonanční frekvenci, mohou se kmity skla rezonancí zvětšit tak, že se sklo roztříští.

SPN vydalo

Matuška, Trefný: MATEMATIKA V OTÁZKÁCH A HESLECH

Publikace je velmi vhodná pro žáky ZDŠ, kteří si chtějí opakovat i upřesnit vědomosti z oboru matematiky. Ve formě otázek a hesel je podán stručný přehled veškeré učební látky. Odpovědi na otázky a hesla jsou demonstrovány na vzorových příkladech a doprovázeny výraznými ilustracemi hlavně v části geometrické. Úlohy přiřazené k jednotlivým statím usměrňují procvičení učiva. Výsledky k těmto úlohám jsou souhrnně uvedeny na konci publikace zároveň se seznamem vhodné literatury k dalšímu prohlubování nabytých vědomostí.

Váz. Kčs 12,—

Polák: PŘEHLED STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATIKY

Kniha obsahuje souhrn veškerého středoškolského učiva s výkladem pojmů i s aplikacemi učiva na velkém množství vzorově vyřešených příkladů. Kniha je vlastně kombinací přehledu učiva a sbírky řešených úloh. Poskytuje ucelený pohled na středoškolské matematické učivo a je cennou pomůckou pro opakování k maturitě a k přípravě na vysoké školy.

Váz. Kčs 44,—

Z NOVÝCH KNIH

Ján Černý: ENTROPIA A INFORMÁCIA V KYBERNETIKE

Vydalo nakladatelství ALFA, Bratislava 1981, 89 stran, 7 Kčs

Jednou z rozhodujících podmínek efektivního chodu každé organizace a společnosti je postačující kapacita a kvalita její informační soustavy. Vytváření a studium matematických modelů přenosových sítí a procesů v nich probíhajících, formulace různých optimalizačních úloh a hledání metod jejich řešení je předmětem matematické disciplíny, která se nazývá teorie informace.

O základních pojmech a výsledcích této teorie pojednává recenzovaná knížka. Čtenář se v ní dozví o možných definicích pojmu informace, o entropii (což je míra informační vydatnosti — či neurčitosti), pozornost se věnuje přenosu informace a jejímu kódování a konečně se hovoří o přenosových kanálech a jejich kvalitě (Shannonovy věty).

Knížka si neklade za cíl detailní zvládnutí látky včetně důkazů jednotlivých tvrzení. Jde v ní spíše o to, seznámit čtenáře se zvolenou problematikou, tak aktuální v současné složitě uspořádané společnosti, s jejími základními pojmy a výsledky a ukázat mu též některé zajímavé úlohy

a souvislosti. Je psána způsobem přístupným i pro středoškoláky (s případným vynecháním dvou krátkých odstavců) a je dobrým informativním textem pro všechny, kteří se hodlají zabývat teorií informace a jejími aplikacemi.

Zdeněk Renc

A. R. Brown, W. A. Sampson: LADENIE PROGRAMOV

ALFA Bratislava 1981, překlad z anglického originálu Program debugging, London 1973), přeložili Dagmar Čárská a Vladimír Balko, 192 stran, 27 obr., cena váz. výtisku 14,— Kčs.

Dnes je mnoho technických, ekonomických, vojenských i jiných projektů řízeno počítačovými systémy, které pracují na základě programů sestavených programátorem. Od těchto programů je nutno vyžadovat spolehlivost a bezchybnost provozu, kterou programátor ověřuje laděním. Problematikou ladění programů se zabývá citovaná kniha, která je rozdělena do pěti částí.

První obsahuje klasifikaci poruch funkce počítačového systému, z nichž asi 90 % připadá na chyby v programech. Odhaduje se, že ladění sestaveného programu zabírá programátorovi asi 50 %

času, v němž se neuplatňuje mnohdy žádná pracovní metoda, a tím dochází ke značným časovým i finančním ztrátám. Proto si autoři vytkli tyto cíle: 1. Navrhnout metodu, která zajistí minimalizaci chyb při programování. 2. Řídícím pracovníkům vysvětlit pracovní metody programování, které snižují výskyt chyb. 3. Dát podklady pro vypracování norem programování. 4. Dát programátorům impuls pro revizi vlastního přístupu k navrhování, psaní a ladění programů.

Předcházení chybám je tématem druhé části, která se na svém začátku zabývá programátorem jako pracovní silou, neboť jeho mentalita, disciplinovanost, odpovědnost i ostatní osobní vlastnosti ovlivňují významně množství části, která popisuje diagnostiku a odstraňování chyb. První čin-

nost, která následuje po navržení programu, je tvorba vývojového diagramu. Autoři varují před jeho podceňováním, klasifikují chyby a navrhují způsoby ověřování bezchybnosti vývojových diagramů. Dále jsou rozebírány běžné metody pro kódování a běžné metody pro testování programů.

Ve čtvrté části jsou předcházející poznatky aplikovány na tvorbu programů sestavených z více modulů, které jsou sepsány a testovány v první fázi práce samostatně a až později přichází ladění celku.

Poslední část se jenom stručně zmiňuje o problémech chyb programového vybavení, které je dodáváno výrobcem a programátor o něm předpokládá, že je bezchybné.

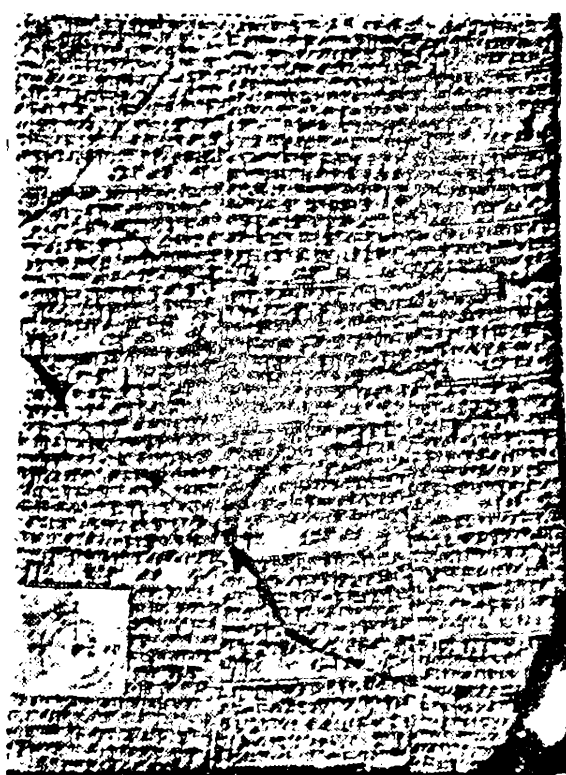
Ing. Zdeněk Vospěl, CSc.

Hliněné učebnice matematiky

Hliněné tabulky byly hlavním psacím materiálem v Mezopotámii. Už z druhé poloviny 3. tisíciletí před n. l. se dochovaly desetitisíce školních tabulek, některé jsou zřejmě dílem „prvňáčků“, jiné ukazují už mistrné ovládnutí klínového rydla.

Na obrázku vidíte starobabylónskou tabulku s klínopisným textem. Obsahuje 16 úloh, každá je vměstnána do jednoho políčka tabulky. Úlohy předvádějí výpočty vztahující se většinou k zemním pracím (valy, násypy, studně, nádrže), ilustrovaná úloha v levé spodní části se týká výpočtu objemu kruhové zdi. Jedna úloha pojednává o objemu komolého kužele s kruhovými podstavami, předvádí však nepřesný postup (objem se počítá z aritmetického průměru obsahů dolní a horní podstavy násobeného výškou).

V archivech úřadů a škol se zachovaly tabulky převrácených čísel, tabulky druhých a třetích mocnin i odmocnin. Mezi řešenými úlohami byly zastoupeny i takové, které dnes řešíme pomocí rovnic druhého a třetího stupně s jednou neznámou, resp. pomocí



soustav lineární a kvadratické rovnice s dvěma neznámými. V geometrických úlohách se uplatňovaly poznatky, které vyjadřuje věty Pythagorova a věty Euklidovy. Pro hospodářství země měla velký význam astronomická pozorování, vypracování kalendáře apod. Stupňová míra úhlů s 360 stupni po 60 minutách atd. má svůj původ v šedesátkové soustavě mezopotamské numerace.

J. Foltá

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12 Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kašková 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1982.

ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

**1921/22
1981/82**

*** 60 let**

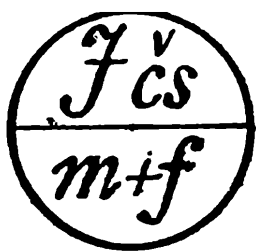
951

1982

(9)

**ROČNÍK 60, 1981/82
KVĚTEN**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Vladimír
Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr.
Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

B. Zelinka: Jak je to s desetinnými rozvoji	385
M. Hejný: Důkaz Pythagorovy vety	387
S. Horák: Těžiště v trojúhelníku	388
B. Ipóth: Tepelná závislost elektrického odporu	392
V. Hužák: Radionuklidový generátor ⁹⁹ Mo — ^{99m} Tc a jeho použití v lékařství	396
J. Machalický: 275 let první inženýrské školy v našich zemích	402
E. Kraemer: Vynikající matematická dva- cátého století	405
Přemýšlíme, řešíme	409
Olympiády	423
Úlohy I. kola 32. ročníku MO (1982/83)	423
Informace	431
Z nových knih	432
Pohledy do dějin	3. str. obálky

Jak je to s desetinnými rozvoji

RNDr. BOHDAN ZELINKA, CSc., Liberec

Víme, že desetinný rozvoj racionálního čísla je buď konečný nebo nekonečný periodický, zatímco desetinný rozvoj iracionálního čísla je nekonečný neperiodický. U racionálních čísel tedy mohou nastat dva různé případy a nás by zajímalo, kdy který z nich nastane.

Jak známo, racionální číslo je takové, které lze vyjádřit jako podíl dvou celých čísel p/q . Požadujeme-li, aby čísla p, q byla nesoudělná a aby q bylo kladné, pak čísla p, q jsou pro dané racionální číslo určena jednoznačně; říkáme, že číslo je určeno zlomkem p/q v nezkracitelném tvaru.

Mějme tedy racionální číslo $a = p/q$, kde p/q je zlomek v nezkracitelném tvaru. Předpokládejme nejprve, že q není dělitelné žádným prvočíslem různým od 2 a 5. Pak tedy

$$q = 2^m \cdot 5^n,$$

kde m, n jsou nezáporná celá čísla. Je-li $m \geq n$, položme

$$r = 5^{m-n}$$

Číslo r je zřejmě celé, protože jak základ 5, tak exponent $m - n$ jsou čísla celá nezáporná. Nyní rozšíříme zlomek p/q číslem r na zlomek pr/qr . Jmenovatel získaného zlomku je

$$qr = 2^m \cdot 5^n \cdot 5^{m-n} = 2^m \cdot 5^m = 10^m$$

Číslo a máme vyjádřeno jako zlomek se jmenovatelem 10^m , proto je můžeme rovněž vyjádřit desetinným rozvojem nejvýše o m desetinných místech (to znamená konečným desetinným rozvojem). Je-li $m < n$, položíme

$$s = 2^{n-m}$$

Číslo s je opět celé. Rozšíříme-li zlomek p/q číslem s , dostaneme ps/qs , přičemž

$$qs = 2^m \cdot 5^n \cdot 2^{n-m} = 2^n \cdot 5^n = 10^n$$

Pak můžeme číslo a vyjádřit desetinným rozvojem nejvýše o n desetinných místech.

Nyní předpokládejme, že q je dělitelné prvočíslem t různým od 2 a 5. Je tedy $q = tu$, kde u je nějaké přirozené číslo. Předpokládejme, že a má konečný desetinný rozvoj; budiž k počet desetinných míst tohoto rozvoje. Znamená to, že a může být vyjádřeno jako zlomek o jmenovateli 10^k . Je tedy

$$a = p/q = p/tu = h/10^k,$$

kde h je nějaké celé číslo. Z toho pak dostáváme

$$10^k \cdot p = htu.$$

Na pravé straně máme celé číslo dělitelné prvočíslem t , tedy i číslo na levé straně je dělitelné tímto prvočíslem. Jak známo, součin dvou celých čísel je dělitelný daným prvočíslem právě tehdy, je-li alespoň jeden z činitelů tímto prvočíslem dělitelný. Číslo 10^k je dělitelné pouze prvočíslly 2 a 5, tedy číslo p musí být dělitelné číslem t ; máme $p = tv$, kde v je celé číslo. Potom však čísla $p = tv$, $q = tu$ mají společný dělitel t , což je spor s předpokladem, že p/q je zlomek v nezkracitelném tvaru.

Platí tedy následující věta:

Věta. Racionální číslo, které lze vyjádřit zlomkem p/q v nezkracitelném tvaru, má konečný desetinný rozvoj právě tehdy, jestliže q není dělitelné žádným prvočíslem různým od 2 a 5.

Pokud znáte jiné číselné soustavy než desítkovou, asi vás napadne otázka, jak to vypadá v těchto jiných soustavách. Obecně platí, že číslo vyjadřitelné zlomkem p/q v nezkracitelném tvaru má konečný rozvoj právě tehdy, jestliže q není dělitelné žádným prvočíslem, které nedělí základ soustavy. V opačném případě má rozvoj nekonečný periodický.

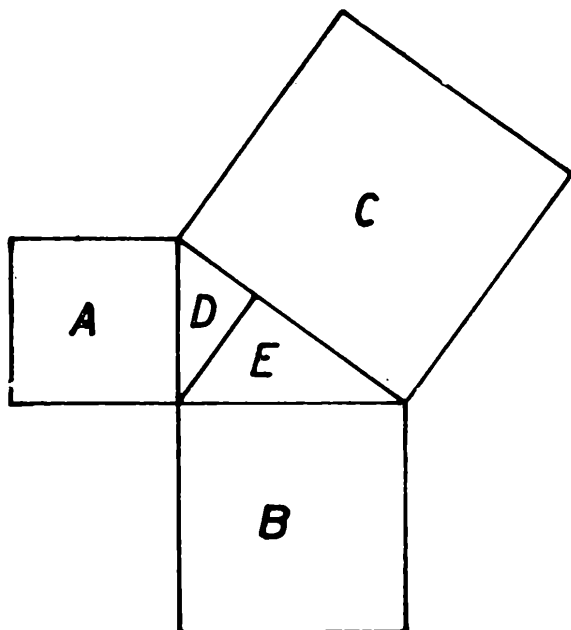
Například číslo $\frac{1}{5}$ má v desítkové soustavě konečný rozvoj 0,2, ve dvojkové soustavě má nekonečný periodický rozvoj 0,001100110011

Iracionální číslo má v libovolné číselné soustavě rozvoj nekonečný neperiodický.

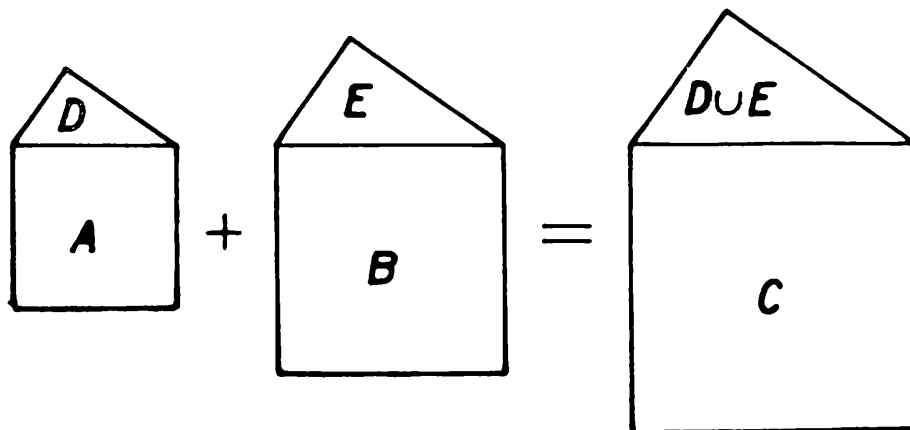
Dôkaz Pytagorovej vety

Doc. dr. MILAN HEJNÝ, CSc., MFF UK Bratislava

Na obrázku 1. je znázornená známa situácia z Pytagorovej vety. Celý útvar je rozdelený na 5 častí: tri štvorce A , B , C a dva trojuholníky D , E . Z útvaru „vyberieme“ tri päťuholníky: $A \cup D$, $B \cup E$, $C \cup D \cup E$.



Obr. 1



Obr. 2

Stačí sa trochu pozornejšie pozrieť a vidíme, že všetky tri tieto päťuholníky sú navzájom podobné, pričom každý z nich sa skladá zo štvorca a trojuholníka. Teda pomer obsahov trojuholníka a štvorca je pre každý päťuholník rovnaký. Nakoľko súčet obsahov malých dvoch trojuholníkov je rovný obsahu trojuholníka veľkého, je aj súčet obsahov dvoch malých štvorcov rovný obsahu štvorca veľkého — pozri obrázok 2. To je ale znenie Pytagorovej vety.

Těžiště v trojúhelníku

STANISLAV HORÁK, Praha

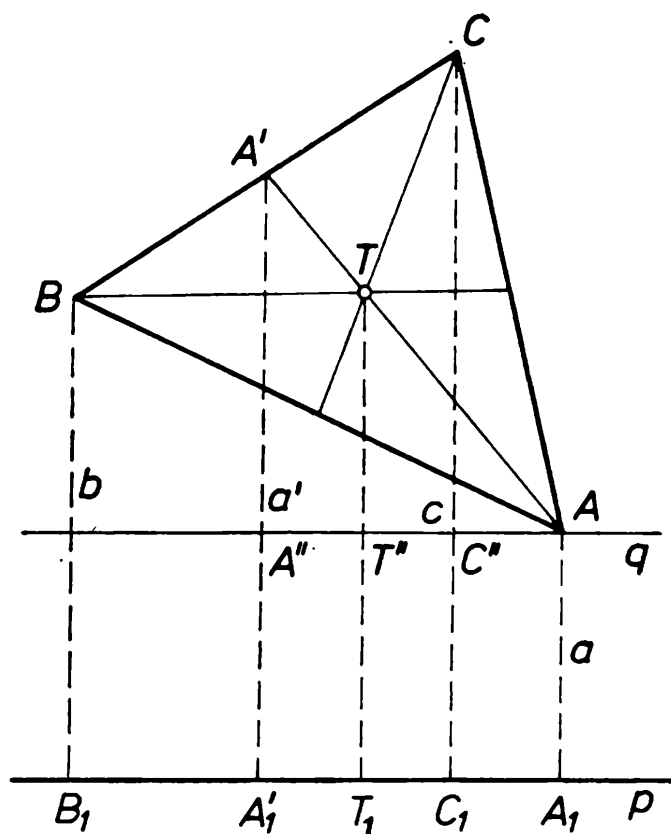
Těžiště v trojúhelníku má mnohé zajímavé vlastnosti, a nebude tedy na škodu některé z nich uvést. Obsah článku je tak jednoduchý, že jej mohou s porozuměním číst i nadaní žáci základních škol.

I. Mějme dán v rovině trojúhelník ABC s těžištěm T a přímkou p , která nemá s trojúhelníkem žádný společný bod. Jsou-li a, b, c, t vzdálenosti po řadě bodů A, B, C, T od přímky p , potom je

$$t = \frac{1}{3} (a + b + c)$$

Dokažte.

Důkaz (obr. 1). Střed strany BC označme A' a jeho vzdálenost od



Obr. 1

přímky p označme a' . Paty kolmic z bodů A, B, C, T, A' na přímku p označme po řadě A_1, B_1, C_1, T_1, A'_1 . Z lichoběžníku BCC_1B_1 plyne

$$a' = \frac{1}{2} (b + c) \quad (1)$$

Vrcholem A proložme přímkou $q \parallel p$. Ta protne úsečky $A'A'_1$, TT_1 po řadě v bodech A'' , T'' (Nutno podotknout, že obrázek je narysován tak, aby platilo $a < b$, $a < c$. Kdyby bylo např. $b < a$, $b < c$, pak stačí vyměnit označení vrcholů A , B .) Trojúhelníky $AA'A''$, ATT'' jsou podobné, a proto

$$|AT| \quad |AA'| = |TT''| \quad |A'A''|$$

Tato úměra se dá nahradit úměrou s ní ekvivalentní:

$$2 \quad 3 = (t - a) \quad (a' - a)$$

Dosadíme z (1):

$$2 \quad 3 = (t - a) \quad \frac{1}{2} (b + c - 2a)$$

a po kratší úpravě

$$t = \frac{1}{3} (a + b + c), \quad (2)$$

čímž jsme s důkazem hotovi.

Cvičení

1. Dokažte, že věta I platí, i když a) přímka p má s trojúhelníkem společný právě jeden vrchol, b) jedna strana trojúhelníka leží na přímce p .
2. Zkuste už sami dokázat, že vzorec (2) platí i tehdy, když kolmice AA_1 , BB_1 , CC_1 , TT_1 , $A'A'_1$ k přímce p nahradíme přímkami navzájem rovnoběžnými a svírajícími s přímkou p kosý úhel.

II. V prostoru je dán trojúhelník ABC s těžištěm T a rovina ρ různoběžná s rovinou trojúhelníka, která nemá s daným trojúhelníkem žádný společný bod. Jestliže vzdálenosti bodů A , B , C , T od roviny ρ označíme po řadě a , b , c , t , pak

$$t = \frac{1}{3} (a + b + c)$$

Dokažte.

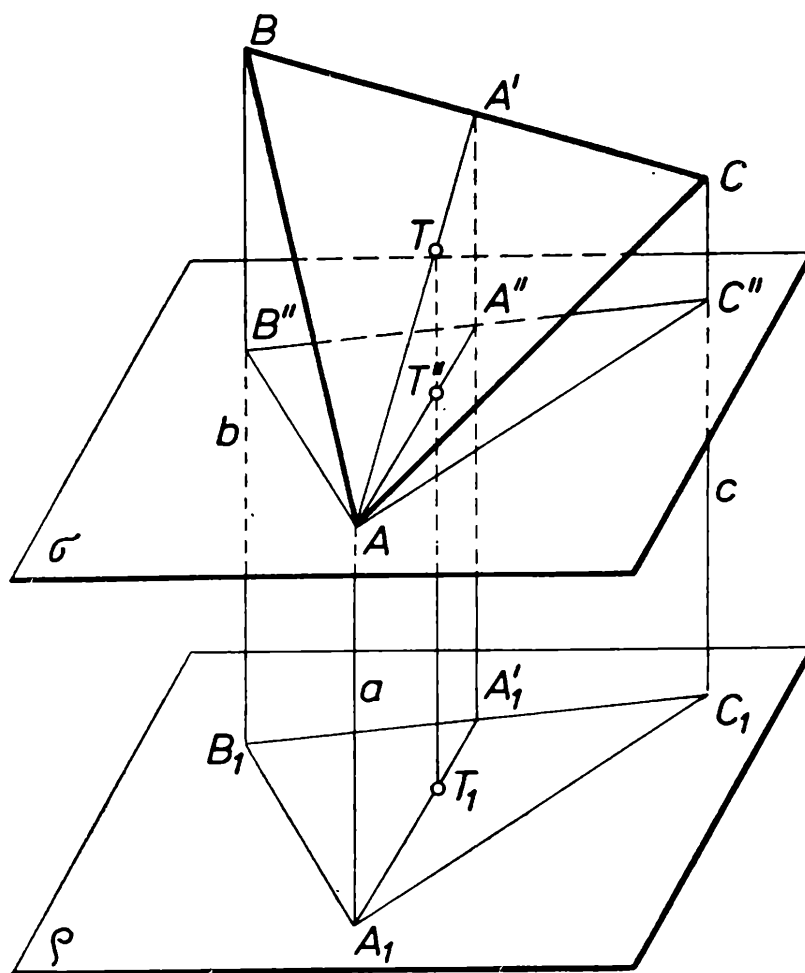
Důkaz (obr. 2) je obdobný důkazu předešlé věty. Střed strany BC označíme A' . Paty kolmic spuštěných z bodů A , B , C , T , A' na rovinu ρ označíme postupně A_1 , B_1 , C_1 , T_1 , A'_1 . Vhodným označením vrcholů trojúhelníka můžeme dosáhnout toho, že $a < b$, $a < c$. Potom pomocná rovina $\sigma \parallel \rho$ vedená vrcholem A protne úsečky BB_1 , CC_1 , TT_1 , $A'A'_1$ v bodech B'' , C'' , T'' , A'' . Všimněme si, že pravoúhlé trojúhelníky ATT'' , $AA'A''$ jsou podobné, a platí tedy

$$|AT| \quad |AA'| = |TT''| \quad |A'A''|$$

Tuto úměru nahradíme úměrou s ní ekvivalentní:

$$2 \quad 3 = (t - a) \quad (a' - a) \quad (3)$$

Obr. 2



Z lichoběžníka BCC_1B_1 plyne

$$a' = \frac{1}{2} (b + c)$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice (3), dojdeme po kratší úpravě k rovnici

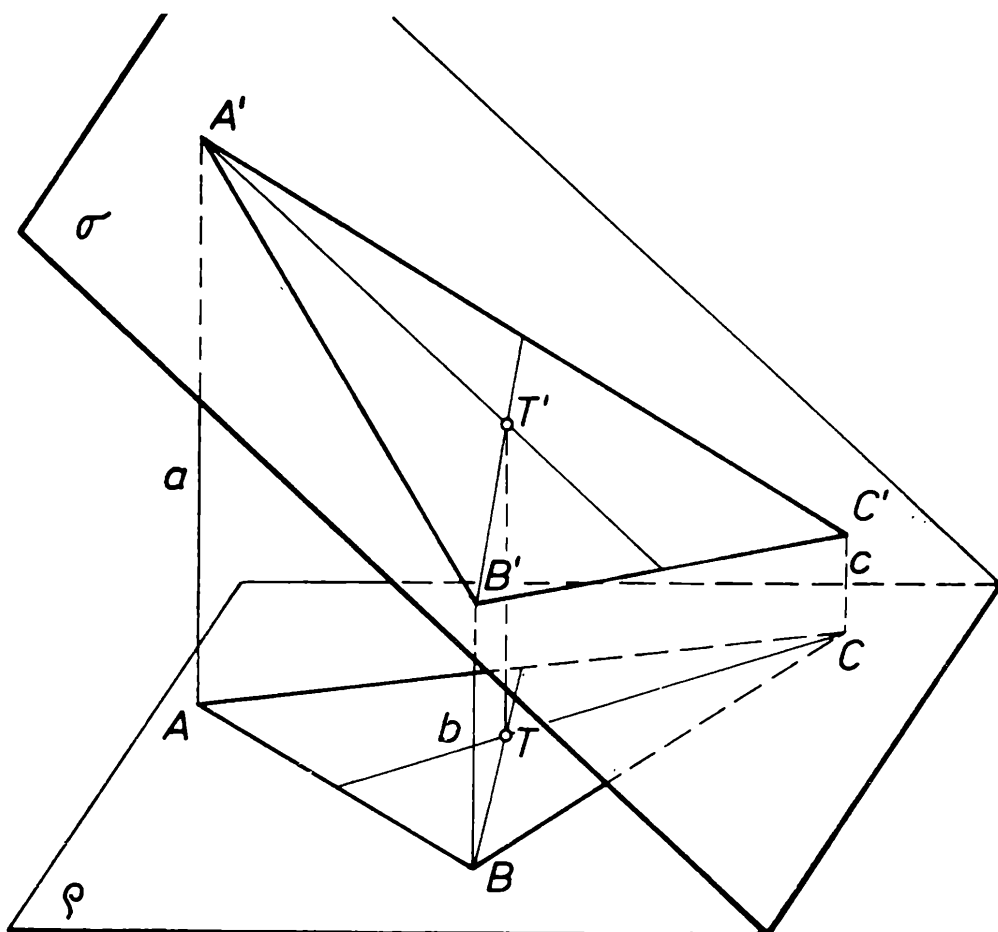
$$t = \frac{1}{3} (a + b + c) ,$$

jak jsme měli dokázat.

Cvičení

1. Dokázaná věta platí i tehdy, když kolmice $AA_1, BB_1, \dots$ nahradíme přímkami navzájem rovnoběžnými, které svírají s rovinou ϱ kosý úhel. Dokažte.
2. Ukažte, že věta platí i v případě, že rovina ϱ a) má s trojúhelníkem společný právě jen jeden vrchol, b) obsahuje právě jednu stranu trojúhelníka.

III. Mějme kolmý trojboký hranol s podstavou ABC v rovině ϱ , který je seříznut rovinou σ v trojúhelníku $A'B'C'$, přičemž oba trojúhel-



Obr. 3

níky nemají žádný společný bod. Tím vzniklo nové těleso, v němž označíme $|AA'| = a$, $|BB'| = b$, $|CC'| = c$. Objem tohoto tělesa je

$$V = P \cdot \frac{1}{3}(a + b + c) = P \cdot t,$$

kde P je obsah podstavy ABC a t je vzdálenost těžišť T , T' trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ (Přirozeně, $TT' \perp \varrho$.) Dokažte.

Důkaz (obr. 3). Těleso $ABCA'B'C'$ rozdělíme na dva disjunktní jehlany; na trojboký jehlan $A'(ABC)$ a čtyřboký jehlan $A'(BCC'B')$. Objem prvního jehlanu je

$$J_3 = \frac{1}{3} Pa$$

(Předpokládáme, že $a > b$, $a > c$.) Objem druhého jehlanu je

$$J_4 = \frac{1}{3} P(b + c)$$

Objem tělesa $ABCA'B'C'$ je podle toho

$$V = J_3 + J_4 = P \cdot \frac{1}{3} (a + b + c)$$

Z odst. II však víme, že

$$\frac{1}{3} (a + b + c) = t$$

a tím jsme vlastně s důkazem hotovi.

FYZIKA

Tepelná závislost elektrického odporu

BARNABÁŠ IPÓTH, Gymnázium Komárno

O tejto problematike je zmienka v učebnici [1] na strane 225 a strane 236. Je to pomerne okrajový problém v učebných osnovách pre stredné školy. I napriek tomu problém poskytuje možnosť:

na použitie štatistických zákonov ideálneho plynu,
na elementárne odvodenie Ohmovho zákona,
na porovnanie teoretických a experimentálnych výsledkov,
poukázať, ako a kde hľadať východisko, keď sa teoretické a experimentálne výsledky nezhodujú, alebo ináč povedané, kde sú hranice použiteľnosti klasických fyzikálnych zákonov.

Z hore uvedených príčin považujem za potrebné nad týmto javom sa hlbšie zamyslieť.

Na prvý pohľad sa zdá, že elektrický odpor sa zmení ako dôsledok rozmerových zmien vodiča. Experimentálne výsledky však ukazujú, že zmena odporu ako dôsledok rozmerových zmien vodiča je zanedbateľne malá vzhľadom na skutočné merané zmeny odporu. Z toho vidieť, že príčinu zmien musíme hľadať inde. Vysvetlenie na danú otázku čiastočne dáva klasická elektrónová teória vedenia prúdu.

Na „elektrónový plyn“, ktorý pozostáva z voľných elektrónov, možno použiť štatistické zákony ideálneho plynu ([2], [3], [1], [6]). Na základe klasickej teórie jeden elektrón hociktorého kovu, ktorý vykonáva ter-

mický pohyb a pohybuje sa strednou rýchlosťou $\mathbf{v}_s$, disponuje s kinetickou energiou

$$\frac{1}{2} m v_s^2 = \frac{3}{2} kT \quad (1)$$

kde T je Kelvinova teplota kovu, k Boltzmanova konštanta, m hmotnosť elektrónu. Z rovnice (1) vyplýva

$$v_s = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (2)$$

Pod vplyvom termického pôsobenia voľné elektróny vykonávajú nepravidelný chaotický pohyb, pritom pružne sa zrážajú s mriežkovými iónmi, pri ktorých ich kinetická energia klesne na nulu. Medzi po sebe idúcimi pružnými zrážkami prekonávajú tzv. strednú voľnú dráhu λ . Na prekonanie strednej voľnej dráhy λ je potrebný čas

$$\tau = \frac{\lambda}{v_s} \quad (3)$$

Veľkosť strednej rýchlosti v_s elektrónu je značná už aj pri laboratórnych teplotách, viď. rovnicu (2). V dôsledku veľkého počtu zrážok stredná rýchlosť chaotického pohybu voľného elektrónu bude nulová. Voľné elektróny vykonávajú chaotický pohyb, a tak vo vodiči nevznikne pravidelné jednosmerné prúdenie voľných elektrónov — elektrický prúd.

Ak sa voľné elektróny dostanú do elektrického poľa o intenzite $\mathbf{E}$, pôsobí na každý z nich sila

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$$

Pod vplyvom vonkajšieho elektrického poľa nastane jednosmerné prúdenie voľných elektrónov. Elektrón medzi dvoma po sebe nasledujúcimi zrážkami vykoná zrýchlený pohyb vo smere opačnom so smerom $\mathbf{E}$ so zrýchlením

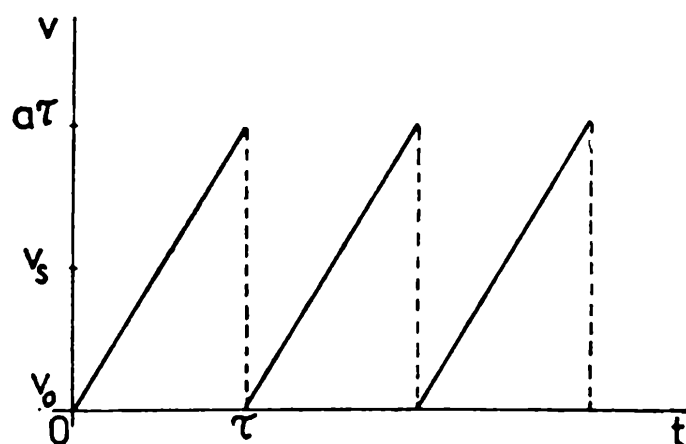
$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{e\mathbf{E}}{m} \quad (4)$$

Elektrón pritom získa rýchlosť

$$\mathbf{v}_{\max} = \mathbf{a}\tau \quad (5)$$

Narastanie rýchlosti prebieha za čas τ na dráhe λ , preto stredná rýchlosť $\mathbf{v}'_s$ usmerneného pohybu elektrónu v elektrickom poli je strednou hodnotou rýchlosti $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ na začiatku strednej voľnej dráhy a maximálnej rýchlosti $\mathbf{v}_{\max}$ na konci pred nasledujúcou zrážkou, t. j.

$$\mathbf{v}'_s = \frac{\mathbf{0} + \mathbf{v}_{\max}}{2} \quad (6)$$



Obr. 1

Podľa predstáv klasickej elektrónovej teórie je to tak preto, lebo voľné elektróny sa pri svojom pohybe cez kryštalovú mriežku ustavične zrážajú s iónmi mriežky a odovzdávajú im svoju kinetickú energiu, ktorú v elektrickom poli s intenzitou E získali. V čase medzi zrážkami bude rýchlosť elektrónov lineárne narastať podľa rovnice (5) vo smere pôso-biacej sily a pri zrážke klesne opäť na pôvodnú hodnotu, ako je sche-maticky znázornené na obr. 1 ([7]).

Z rovníc (3), (4), (5), (6) vyplýva

$$v_s = \frac{1}{2} a\tau = -\frac{1}{2} \cdot \frac{eE}{m} \cdot \frac{\lambda}{v_s}$$

alebo

$$v'_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{eE}{m} \cdot \frac{\lambda}{v_s}. \quad (7)$$

Táto rovnica dobre vystihuje skutočnosť, ak $v'_s \ll v_s$.

Nech je v jednotkovom objeme počet voľných elektrónov n , ktorých náboj je ne . Cez ľubovoľný prierez S za čas dt prejdú len tie elektróny, ktoré od prierezu S sú vo vzdialenosti

$$ds = v'_s dt \quad (8)$$

a ktoré sa nachádzajú v objemovom elemente

$$dV = Sv'_s dt \quad (9)$$

Celkový náboj týchto elektrónov

$$dQ = nedV = neSv'_s dt \quad (10)$$

Podľa definície elektrického prúdu možno písať

$$I = \frac{dQ}{dt} = neSv'_s \quad (11)$$

Z rovníc (7) a (11) vyplýva

$$I = \frac{ne^2 S \lambda}{2mv_s} E \quad (12)$$

Ak intenzita elektrického poľa E je konštantná, tak v prípade, že lineárny vodič má dĺžku l , možno písať

$$E = \frac{U}{l}. \quad (13)$$

Z rovníc (12) a (13) vyplýva

$$I = \frac{ne^2 S \lambda}{2mv_s} \cdot \frac{U}{l} = \frac{U}{\frac{2mv_s}{ne^2 \lambda} \cdot \frac{l}{S}}. \quad (14)$$

Rovnice (14) je vlastne ohmovým zákonom, z ktorého vyplýva pre elektrický odpor vodiča

$$R = \frac{2mv_s}{ne^2 \lambda} \cdot \frac{l}{S} \quad (15)$$

Z rovnica (15) pre merný elektrický odpor dostaneme

$$\varrho = \frac{2mv_s}{ne^2 \lambda} \quad (16)$$

alebo

$$\varrho = \frac{2m}{ne^2 \tau}$$

Z rovníc (2) a (16) vyplýva

$$\varrho = \frac{2m}{\lambda ne^2} \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (17)$$

Ako vidieť, ϱ je priamo úmerné druhej odmocnine Kelvinovej teploty vodiča.

Na základe experimentálnych meraní pre väčšinu kovov v širokom tepelnom intervale približne platí lineárna závislosť

$$\varrho = \varrho_0 [1 + \alpha_0 (t - t_0)], \quad (18)$$

kde ϱ_0 je merný elektrický odpor pri teplote t_0 , α_0 teplotný koeficient odporu ([1], [6], [7]).

Rovnica (18) udáva, že ϱ je úmerné T a nie $\sqrt{T}$, ako vidieť z rovnice (17).

Rovnica (17), ktorú sme odvodili na základe klasickej elektrónovej teórie vedenia elektrického prúdu, vystihuje skutočnosť len približne. Rozpor, ktorý je daný rovnicou (17) a (18), klasická elektrónová teória

vedenia elektrického prúdu riešiť nevie, t. j. klasické predstavy nie sú v súlade so skutočnosťou ([7]).

Experimentálne výsledky, ktoré získame pri meraniach, možno vysvetliť len na základe modernej teórie kovov. Táto teória stručne hovorí: nesúhlas medzi teoretickým odvodením a experimentálnymi výsledkami je zapríčinené rozdielnosťou medzi ideálnou a skutočnou kovovou mriežkou ([6]).

Z rovníc (15), (17) a (18) vidieť, že merný odpor je závislý od teploty, odpor vodiča od merného odporu, t. j. aj odpor vodiča je závislý od teploty prostredia.

Záverom možno vysloviť: Napriek tomu, že v dôsledku teplotných zmien prostredia zmenia sa aj rozmery vodiča, tepelná závislosť elektrického odporu je v rozhodujúcej miere ovplyvnená tepelnou závislosťou merného odporu.

Literatúra :

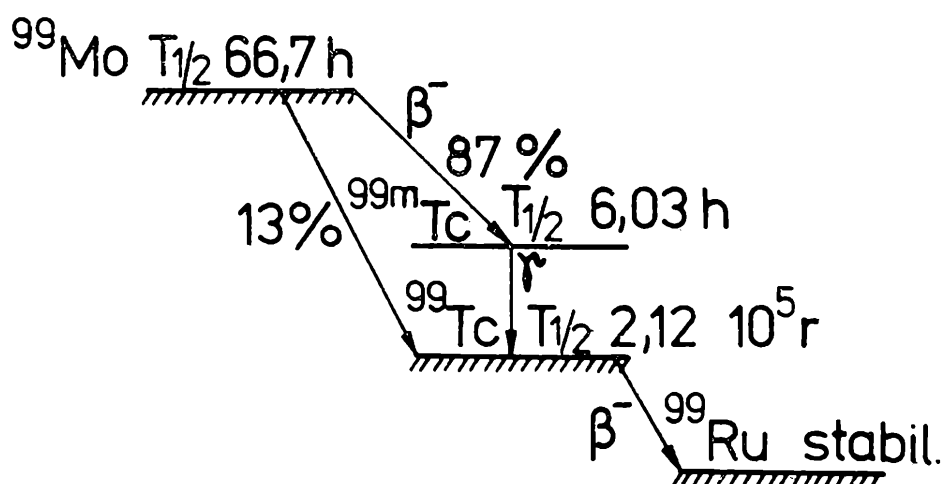
- [1] Vanovič, J. a kol.: Fyzika pre 2. a 3. ročník gymnázia, SPN, Bratislava 1977
- [2] Hlavička, A. a kol.: Fyzika pro pedagogické fakulty, SPN, Praha 1971
- [3] Záviška, F.: Kinetická teorie plynů, SPN, Praha 1951
- [4] Ilkovič, D.: Fyzika II., ALFA, Bratislava 1970
- [5] Fuka, J., Havelka, B.: Elektřina a magnetismus, SPN, Praha 1979
- [6] Hajko, V., Daniel—Szabó, J.: Základy fyziky, Veda, Bratislava 1980
- [7] Čičmanec, P.: Elektřina a magnetismus, SNTL, Praha 1980

Radionuklidový generátor ^{99}Mo — $^{99\text{m}}\text{Tc}$ a jeho použití v lékařství

Ing. VÁCLAV HUŠÁK, CSc., Lékařská fakulta UP, Olomouc

V současné době je známo na 2000 radioaktivních izotopů 106 chemických prvků. Jedná se převážně o umělé radionuklidy, jež se vyrábějí v jaderných reaktorech a urychlovačích (cyklotronech). Přirozených radionuklidů, tj. takových, které se vyskytují v přírodě, je jen asi 70.

Z uvedeného velkého množství umělých radionuklidů jsou jen některé vhodné pro použití v lékařství. Radioizotopová diagnostika klade velmi přísné požadavky na fyzikální charakteristiky radionuklidů. Přednost se dává zářičům gama s vhodnou energií záření a s relativně krátkým poločasem několika hodin, které je možno snadno registrovat a jejichž aplikace lidem je spojena s nízkou radiační zátěží organismu. Pokud



Obr. 1

mají radionuklidy krátký poločas řádově několik hodin, jejich doprava z výrobního centra na místo spotřeby je velmi neekonomická, příp. je zcela nemožná. Radionuklidové generátory umožnily získávání krátkodobých radionuklidů přímo v místech, kde jsou aplikovány pacientům.

Generátorem se rozumí zařízení obsahující vhodný mateřský radionuklid, jenž se přeměňuje na žádaný krátkodobý produkt používaný pro diagnostiku různých onemocnění v lékařství. Nejznámějším a nejrozšířenějším generátorem je $^{99}\text{Mo} - ^{99\text{m}}\text{Tc}$, z něhož se získává $^{99\text{m}}\text{Tc}$, které je dnes nejpoužívanější radioaktivní látkou v nukleární medicíně.

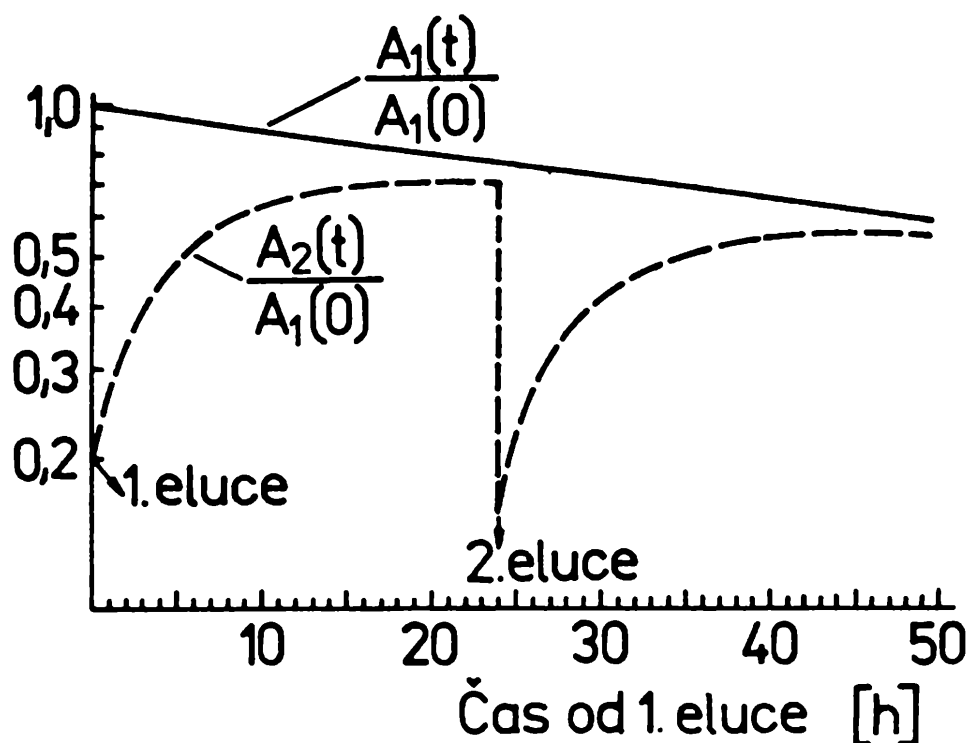
Zjednodušené přeměnové schéma $^{99\text{m}}\text{Tc}$ je na obr. 1. Mateřský radionuklid ^{99}Mo se přeměňuje s poločasem 66,7 h jednak na $^{99\text{m}}\text{Tc}$, jednak přímo na ^{99}Tc . Izomerní stav $^{99\text{m}}\text{Tc}$ (poločas 6,03 h) přechází s emisí záření gama o energii 140 keV na ^{99}Tc . Radionuklid ^{99}Tc má velmi dlouhý poločas a produktem jeho přeměny je stabilní ^{99}Ru .

Obecně časová závislost aktivity $A_1(t)$ mateřského radionuklidu a aktivity $A_2(t)$ dceřiného produktu jsou popsány známými vztahy

$$A_1(t) = A_1(0) e^{-\lambda_1 t}, \quad (1)$$

$$A_2(t) = \frac{k\lambda_2 A_1(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + A_2(0) e^{-\lambda_2 t}, \quad (2)$$

kde $A_1(0)$ a $A_2(0)$ jsou aktivity mateřského a dceřiného radionuklidu v čase $t = 0$, λ_1 a λ_2 jsou odpovídající přeměnové konstanty, konstanta k charakterizuje větvení v přeměnovém schématu, tj. vyjadřuje, jaká část přeměn mateřského radionuklidu vede ke vzniku uvažovaného dceřiného produktu. Druhý člen na pravé straně vztahu (2) označuje aktivitu dceřiného nuklidu přítomnou v čase $t = 0$. Pro nukleární medicínu má smysl jen taková geneticky svázaná dvojice radionuklidů, pro niž platí $\lambda_1 \ll \lambda_2$. Jelikož pro ^{99}Mo je $\lambda_1 = 0,0105 \text{ h}^{-1}$ a pro $^{99\text{m}}\text{Tc}$ $\lambda_2 = 0,115 \text{ h}^{-1}$, je tato podmínka splněna. V takovém systému totiž dochází poměrně rychle k posuvné radioaktivní rovnováze mezi mateřským



Obr. 2

***a* dceřiným radionuklidem.** Po oddělení (eluci) dceřiného nuklidu se tento nuklid v systému opět hromadí a po uplynutí vhodného časového intervalu může být eluce opakována. Závislost aktivity ^{99}Mo a $^{99\text{m}}\text{Tc}$ vyjádřená vztahy (1) a (2) je graficky znázorněna na obr. 2.

Generátor $^{99}\text{Mo} - ^{99\text{m}}\text{Tc}$ je prakticky proveden tak, že na chromatografickém sloupci tvořeném oxidem hlinitým je nasorbován molybdenan amonný $\text{NH}_4^{99}\text{MoO}_4^-$. Při přeměně ^{99}Mo vzniká $^{99\text{m}}\text{Tc}$ jako pertechnetátový ion, který se ze sloupce odloučí promytím generátoru elučním činidlem (fyziologickým roztokem). Na obr. 3 je schematický průřez generátorem.

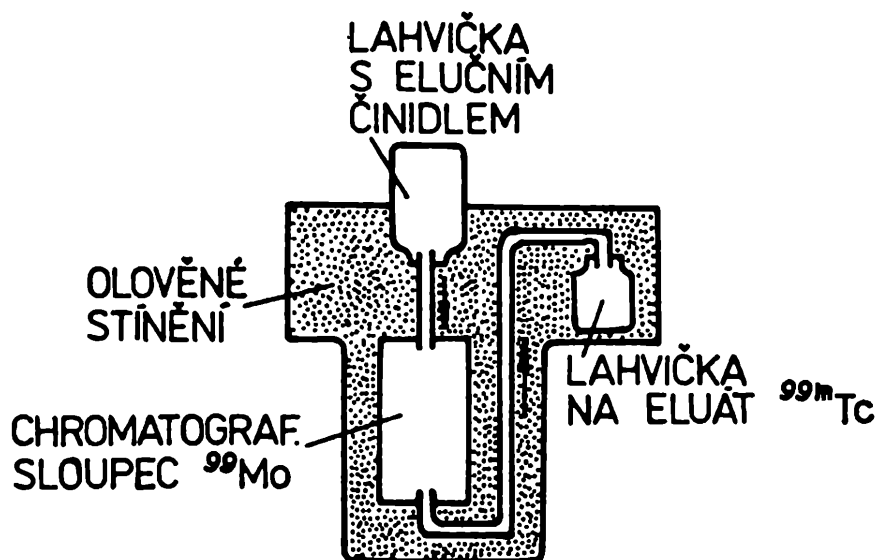
Aktivita dceřiného nuklidu v generátoru nabývá své *maximální hodnoty* dříve, než se ustaví radioaktivní rovnováha. Doba, za niž aktivita dceřiného nuklidu dosáhne maxima, se vypočte ze vztahu

$$t_m = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \eta \right), \quad (3)$$

kde

$$\eta = 1 - \frac{A_2(0)}{A_2^r(0)} \quad (4)$$

označuje *eluční účinnost generátoru*, tj. poměr aktivity dceřiného radionuklidu získaného při eluci a celkové aktivity tohoto produktu přítomné na sloupci. $A_2^r(0)$ je aktivita dceřiného nuklidu v období radioaktivní rovnováhy. Při eluční účinnosti $\eta = 1$ dostaneme po dosazení do vztahu (3) a (4) $t_m = 23$ h. Ideální účinnosti oddělení $^{99\text{m}}\text{Tc}$ se v praxi



Obr. 3

nedosahuje — po eluci zůstává v generátoru zpravidla 20 % původní aktivity ^{99m}Tc . Pro tento případ $\eta = 0,8$ a vzorce (3) a (4) poskytnou $t_m = 21$ h. Abychom tedy získali z generátoru maximální aktivitu ^{99m}Tc , je nutno čekat po dobu 21 h od předchozí eluce. V praxi se eluce generátoru provádějí zpravidla v jednodenních intervalech. Je-li někdy nutno provést eluci po uplynutí doby podstatně kratší než 21 h, je třeba počítat s nižším výtěžkem aktivity ^{99m}Tc , než jaký dostaneme v čase t_m podle vztahu (3).

V období radioaktivní rovnováhy klesá aktivita ^{99m}Tc s poločasem mateřského radionuklidu, jelikož v tomto období platí

$$A_2^r(t) = \frac{k\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_1(t). \quad (5)$$

Po dosazení hodnoty přeměnových konstant ^{99}Mo a ^{99m}Tc a $k = 0,87$ (obr. 1) je

$$A_2^r(t) = 0,96 A_1(t). \quad (6)$$

Eluce generátoru se provádějí tak dlouho, dokud aktivita mateřského radionuklidu neklesne pod určitou mez, kdy je aktivita dceřiného nuklidu již příliš malá z hlediska praktického použití. Životnost generátoru je jeden až dva týdny — po této době musí být na pracoviště dodán další generátor. V ČSSR se používají nejvíce generátory ^{99}Mo — ^{99m}Tc vyráběné v NDR a v Anglii.

Fyzikální charakteristiky ^{99m}Tc jsou velmi výhodné z hlediska použití v nukleární medicíně. Energie záření gama 140 keV umožňuje vysoce účinnou detekci pomocí *scintilačních detektorů*. Při přeměně ^{99m}Tc není emitováno záření beta, které u jiných radionuklidů značně zvyšuje radiační zátěž vyšetřovaných osob, nýbrž jen málo intenzivní záření rentgenové, konverzní a Augerovy elektrony. Důsledkem krátkého po-

ločasu přeměny ^{99m}Tc a nepřítomnosti emise záření beta je nízká absorbovaná dávka v těle — o jeden až tři řády nižší než u radionuklidů ^{85}Sr , ^{198}Au , ^{131}I aj., které se používaly v nukleární medicíně před zavedením ^{99m}Tc . Farmaka značená ^{99m}Tc , jež se aplikují intravenózně pacientům, umožnila značné rozšíření dynamických vyšetřovacích postupů, při nichž se sleduje pohyb radioaktivní látky v detekčním poli kamery (např. při vyšetřeních činnosti srdce). Dynamická vyšetření vyžadují aplikaci vysokých aktivit, což je možné jen za podmínky, že radiační zátěž způsobená radioaktivní látkou není nadměrná. Právě i v tomto ohledu je ^{99m}Tc vynikající.

Kromě zmíněného typu generátoru ^{99}Mo — ^{99m}Tc , který se nazývá *chromatografický (sorpční)*, byly vyvinuty ještě další typy: generátor extrakční a generátor sublimační.

Extrakční generátor využívá schopnosti organického rozpouštědla — metyletylketonu — selektivně extrahovat technecium z vodné fáze obsahující molybden. Používá se výhodně jako tzv. centralizovaný extrakční generátor, který zásobuje radiotechneciem více pracovišť nukleární medicíny. U nás byl realizován v r. 1979 v Ústavu jaderného výzkumu v Řeži (autoři J. Prokop, F. Budský, K. Svoboda) a zásobují se z něho pracoviště nukleární medicíny v Praze a v okolních městech. Extrakční způsob získávání ^{99m}Tc je technicky náročnější, než je tomu u sorpčního generátoru, vyžaduje složitější aparaturu a vyškolenou obsluhu. Zkouší se i zjednodušená aparatura pro extrakci, kterou je možno provozovat v laboratoři na každém velkém pracovišti nukleární medicíny. Výhodou extrakčního generátoru je vysoká kvalita přípravku, která v některých parametrech převyšuje kvalitu eluátu z chromatografických generátorů (např. radiochemická čistota je větší než 99 %, radionuklidová čistota je lepší než 10^{-4} %, preparát má vysokou objemovou aktivitu).

Sublimační generátor je založen na principu vyšší těkavosti oxidu technecistého oproti oxidu molybdenovému. Skládá se obvykle z elektrické pícky, do níž se vkládá ozářený materiál. Lze provádět separaci ^{99m}Tc i ze suroviny s nízkou měrnou aktivitou ^{99}Mo při vysoké celkové aktivitě. Produkt je velmi kvalitní, výtěžky separace jsou však poměrně nízké. Podobně jako extrakční generátor i tento typ je vhodný pro hromadnou výrobu ^{99m}Tc pro více pracovišť. V ČSSR byl sublimační generátor vyvinut ve spolupráci KHS Hradec Králové, VŠCHT Pardubice a ÚVVVR Praha (J. Roháček, J. Vlček, V. Macháň, V. Rusek, L. Kokta), nebyl však zaveden do praxe.

Radiomolybden, kterým se generátory plní, se vyrábí v jaderných reaktorech dvěma způsoby — jednak ozařováním přírodního ^{98}Mo neutrony v reakci (n, γ), jednak se získává separací ze štěpných pro-

duktů, které vznikají z přírodního obohaceného uranu při jeho ozařování neutrony.

V závěru připomeneme zajímavou historii objevu prvku technecia, generátoru ^{99}Mo — $^{99\text{m}}\text{Tc}$ a jeho využití v lékařství. Technecium patří k prvkům, jejichž existenci předpověděl objevitel periodického zákona prvků *D. I. Mendělejev*. Připravit technecium uměle se podařilo až v r. 1937 Perrierovi a Segrému ozařováním molybdenu deuterony urychlenými v cyklotronu. Tito autoři jako první stanovili základní chemické vlastnosti tohoto prvku. Původně se myslelo, že technecium vůbec v přírodě neexistuje — výzkumy v posledních letech však prokázaly jeho přítomnost v uranových a molybdenových rudách, kde vzniká účinkem neutronů kosmického záření a při samovolném štěpení ^{238}U . Dlouhodobé ^{99}Tc se dostává do biosféry při zkouškách jaderných zbraní a při provozu jaderných reaktorů. I když ^{99}Tc není pro člověka zdaleka tak nebezpečné jako známý ^{131}I a jiné štěpné produkty, jeho obsah v životním prostředí narůstá a mohl by nabýt na významu v blízké budoucnosti. Příspěvek nukleární medicíny ke zvyšování obsahu ^{99}Tc v biosféře je nepatrný ve srovnání se zmíněnými zdroji.

V současné době je známo 21 izotopů technecia a 6 izomerů, které jsou všechny radioaktivní. Z nich se v lékařství využívá jen $^{99\text{m}}\text{Tc}$. I když přeměnové schéma a základní fyzikální údaje o tomto zářiči byly stanoveny již kolem r. 1950, zůstal nepovšimnut až do r. 1960, kdy *Richards* upozornil, že má výhodné fyzikální charakteristiky z hlediska aplikace v nukleární medicíně.

Komerčně se začaly vyrábět generátory ^{99}Mo — $^{99\text{m}}\text{Tc}$ v r. 1962. Prudký nárůst aplikací $^{99\text{m}}\text{Tc}$ v nukleární medicíně byl umožněn zvláště tím, že v r. 1964 se stala dostupnou *Angerova scintilační kamera*. Vysoká spotřeba sloučenin značených $^{99\text{m}}\text{Tc}$ při vyšetřeních pomocí scintilačních kamer a dalších přístrojů nutí výrobce k neustálému zvyšování výroby generátorů a ke zlepšování jejich parametrů. Odhaduje se, že kolem 90 % všech vyšetření v nukleární medicíně se dnes provádí s farmaky značenými $^{99\text{m}}\text{Tc}$. I když se nukleární medicína neobejde i bez dalších radionuklidů, získalo $^{99\text{m}}\text{Tc}$ v tomto oboru absolutní prvenství.

275 let první inženýrské školy v našich zemích (nynějšího Českého vysokého učení technického v Praze)

Ing. JIŘÍ MACHALICKÝ, CSc., ČVUT Praha

Praha patřila od dávných dob k významným kulturním i politickým centrům. Ve středověku byla stálým královským sídlem a co do rozlohy i počtu obyvatel se řadila mezi největší města. Jako taková hrála i důležitou roli v evropských dějinách. Už v r. 1348 zde založil Karel IV. pro obyvatele Království českého první univerzitu ve střední Evropě. V Praze se setkávali a působili i význační stavitelé a umělci. Na nádherných a historicky cenných stavbách pracovali čeští řemeslníci, jejichž práce byla vždy velmi vysoce ceněna. Habsburská monarchie však potřebovala též technicky zdatné odborníky pro mnohé stavby vojenského charakteru. Tak se již na počátku 18. století vytvořily v Praze podmínky příznivé k založení prvního technického vysokoškolského učiliště ve střední Evropě (ještě před Vídní). Pražskou stavovskou školu (byla vydržována z prostředků českých stavů, tj. z prostředků České země) založil v r. 1707 inženýr *Kristian Josef Willenberg*, pocházející z Lužice. Byl také jejím prvním profesorem. Již za jeho vedení, ale zejména za jeho nástupců ztrácela škola postupně svůj vojenský charakter a zaměřovala se více na potřeby civilního stavitelství. V r. 1803 navrhl *František Josef Gerstner* (1756—1832), nejvýznamnější postava české vědy tehdejší doby, přetvoření pražské inženýrské školy tak, aby vyhovovala vzrůstajícím potřebám průmyslu. Nově koncipovaný ústav byl, stejně jako předchozí stavovská škola, přivtělen k pražské univerzitě, ale měl svého vlastního ředitele. K osamostatnění ústavu došlo v r. 1815. Výuka na této škole (která se nazývala Pražský polytechnický ústav) byla zahájena až v r. 1806. Studium na ní bylo tříleté a vyučovacím jazykem byla němčina. F. J. Gerstner, který byl profesorem vyšší matematiky na pražské univerzitě (1789—1820), přednášel současně na polytechnice matematiku, mechaniku a hydrauliku s aplikacemi ve strojnictví. Měl výjimečné organizační schopnosti a přenášel na obě pražské vysoké školy i nejnovější výsledky bádání z ciziny. Na polytechnice působil ve funkci jejího ředitele 25 let. Ve zmíněné reformě zavedl mimo jiné též povinné přípravné studium základních

teoretických předmětů (matematika, mechanika, fyzika, chemie). Za období jeho působení získala škola na věhlasu i tím, že učitelská místa byla obsazována kvalitními učiteli na základě konkursů. Také posluchači byli vybíráni (od r. 1813) formou přijímacích zkoušek. Pražská škola se tak stala po boku proslavené pařížské École polytechnique nejvýznamnější technickou školou v Evropě. V revolučním roce 1848 měla škola již přes 600 posluchačů, kteří se většinou spolu se studenty univerzity zúčastnili revolučních bojů na barikádách. V těchto bojích šlo i o prosazení některých studentských požadavků. Studentům šlo zejména o zavedení češtiny jako vyučovacího jazyka, o svobodu vyučování a učení se (tj. dobrovolnost zkoušek) a lepší zpřístupnění knihovny. Porážka revoluce provázená obdobím bachovského absolutismu a opakované odsouvání návrhů na úpravy studia způsobily, že pražská polytechnika ztrácela krok s nově vznikajícími moderními západoevropskými školami. Obrat k lepšímu nastal až v padesátých letech, zvláště pak po pádu Bachova absolutistického režimu (r. 1859).

V té době zde byla zřízena též profesura deskriptivní geometrie a samostatná stolice vyšší matematiky. Deskriptivní geometrii přednášel profesor *Rudolf Skuherský* (1828—1863), známý tím, že ve šk. roce 1861 až 62 zahájil výklady v jazyce českém, a to z vlastní iniciativy. Úspěch jeho přednášek byl obrovský. Přednáškami z fyziky v češtině i němčině byl v r. 1863 pověřen docent, později vynikající profesor *Karel Václav Zenger* (1830—1908). V r. 1869 při rozdělení polytechniky na českou a německou přešel Zenger na český ústav.

V r. 1863 byla škola rozdělena na studijní obory, z nichž se později vyvinuly fakulty. Do jejich vedení byli postaveni děkani a v čele škol stál rektor volený na období jednoho roku. V r. 1875 byly obě polytechniky zestátněny a pro českou část stanoven název *C. k. český polytechnický ústav v Praze*. Podle návrhu architekta V. I. Ulmanna byla pro tento ústav vystavěna nová budova na Karlově náměstí (která dosud slouží strojní a elektrotechnické fakultě ČVUT). Rozdělení ústavů způsobilo sice ochuzení sbírek modelů a dalších pomůcek i snížení prostředků, avšak zkušenosti ukázaly, že česká vysoká škola technická je útvarem zdravým a národu prospěšným. V tradičních i nově vznikajících oborech se uplatnila celá plejáda význačných odborníků a pedagogů.

Koncem osmdesátých let byly na technikách zavedeny dvě přísné státnicové skoušky. Později bylo uzákoněno pro absolventy techniky právo užívat stavovský titul „inženýr“. V r. 1899 byla zřízena druhá česká technika v Brně. O dva roky později bylo technikám přiznáno právo udílet doktoráty technických věd (na základě předložené disertační práce a vykonání rigorosní zkoušky). Po vzniku samostatného československého státu existovaly na pražské technice kromě fakulty inženýrského stavitelství také samostatná fakulta architektury a po-

zemního stavitelství, fakulta meliorací, fakulta strojního a elektrotechnického inženýrství, fakulta chemie a fakulta zemědělsko-lesnická. Škola zajišťovala též výuku zeměměřičů, pojistných techniků a přípravné studium důlních inženýrů. V r. 1919 byla provedena reorganizace a od r. 1920 nese už dnešní název *České vysoké učení technické (ČVUT) v Praze*. V období mezi oběma světovými válkami bylo ČVUT reprezentováno sedmi poměrně samostatnými vysokými školami s několika tisíci posluchači.

Za německé okupace byly české vysoké školy uzavřeny a mnoho studentů a učitelů bylo zahnáno do věznic a koncentračních táborů. Mnozí z nich se vrátili s podlomeným zdravím a někteří se osvobození nedočkali.

Brzy po skončení války se nezměrným úsilím těch pracovníků, kteří se vrátili do své školy, podařilo (pod vedením nadšeného odbojového pracovníka profesora Dr. Františka Kadeřávka) znovu obnovit výuku. První schůzku učitelů a ostatních zaměstnanců ČVUT svolal prof. Kadeřávek už na 9. května 1945. Pak následovalo pracné a vyčerpávající pátrání po inventáři školy, který byl za války roznesen jak po různých školách v Praze, tak do pohraničí. Nebyly učebny ani laboratoře, nebyly však ani učebnice a skripta. Přesto — díky nadlidské práci učitelů — začaly už v květnu 1945 probíhat zkoušky těch studentů, jejichž studium bylo přerušeno, a současně se konaly i přednášky. Pro přednášky byly provizorně využívány i sály několika pražských biografů, i když byly pro tento účel značně nevyhovující. Postupně však škola začínala obnovovat svoji pravidelnou činnost, byly doplněny učitelské kádry, začaly vycházet nejn nutnější učební pomůcky, studenti se mohli vrátit do obnovených učeben a laboratoří a učitelům zbylo i trochu času pro vlastní vědeckou práci. V r. 1957 při oslavách 250letého trvání byla činnost ČVUT oceněna udělením Řádu republiky.

V následujících dvaceti pěti letech se i v dění na ČVUT odráží vše, čím žije naše vlast. To ostatně můžete sami posoudit jako bezprostřední účastníci. Omezím se zde proto jen na stručné vyjmenování fakult, které ve svazku ČVUT poskytují nejvyšší technické vzdělání naší mladé generaci, na níž zakrátko spočine odpovědnost za plnění smělých plánů naší socialistické společnosti. Čísla uváděná v závorkách značí počty studentů denního studia, zahraničních studentů, v dálkovém studiu a studiu postgraduálním (ve šk. r. 1981/82):

Fakulta stavební	(4798	142	756	96)
strojní	(4392	165	644	516)
elektrotechnická	(4361	114	1443	586)
jaderná a				
fyzikálně-inženýrská	(430	39	—	15)
architektury	(640	11	—	—)

Studium je ve většině specializací na ČVUT pětileté, jen v některých oborech čtyřleté. V závěru studia se výuka diferencuje nejprve podle studijních oborů, později i podle zaměření. Studium končí státní závěrečnou zkouškou, sestávající z vypracování diplomové práce a její obhajoby před komisí. Mimořádně nadaní studenti mohou být počínaje III. nebo IV. ročníkem zařazeni do diferencované výuky, zajišťující jejich hlubší teoretickou přípravu vhodnou zejména pro práci v oblasti výzkumu. Ti nejlepší z nich mohou být přijati bezprostředně jako interní aspiranti.

ČVUT je nejen inženýrským učilištěm, jehož výsledky odpovídají tradicím školy a jsou uznávány v celém světě, ale působností svých školících pracovišť se podílí také na vědecké výchově mladých pracovníků. Soustavná pozornost je zde také věnována zapojování studentů do vědecké a výzkumné činnosti.

Na závěr tohoto stručného připomenutí slavné historie nynějšího ČVUT připomínám, že pro vás, kteří nacházíte potěšení v řešení různých matematických a fyzikálních problémů, jsou dveře všech fakult ČVUT otevřeny.

Literatura :

1. Vysoké školy technické v Československé republice, vydalo MŠK k 250. výročí založení technických škol v Praze, SPN Praha 1957.
2. Dr. L. Nový, CSc. a kol.: Dějiny exaktních věd v českých zemích, nakl. ČSAV Praha 1961.
3. Sborník: Sto let České vysoké školy technické, Zvláštní číslo Acta Polytechnica, Práce ČVUT v Praze, VI. ř. 1 (1969).
4. Informační brožura o ČVUT podle stavu k 1. lednu 1980 (pořadatel Dr. Z. Vančura), SPN Praha, 1981.

Vynikající matematika dvacátého století

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Dnes už nikoho neudivuje, že na středních školách vyučují matematiku a fyziku vysokoškolsky vzdělané profesorky; ženy - matematicky nejsou v dnešní době vzácností ani na katedrách vysokých škol a ve vědeckých ústavech. Avšak v dlouhé historii matematiky se jen zcela ojediněle setkáváme se ženami, které se zabývaly matematikou nebo v ní dokonce vynikly. Teprve od 18. století, kdy začal nebývalý rozvoj matematiky a přírodních věd, začíná matematicek přibývat; uveďme aspoň čtyři,

které v 18. a 19. století patřily k vynikajícím pracovníkům v oblasti matematicko-fyzikálních věd.

Významnou matematickou v Itálii byla členka boloňské akademie *Maria Gaetana Agnesi* (1718—1799), která se zabývala hlavně geometrií a analýzou, v Anglii vynikla zejména v astronomii *Lukrecie Karolina Herschel* (1750—1848) a ve Francii se nejvíce proslavila *Sophie Germain* (1776—1831), jejíž pojednání z teorie čísel i studie fyzikálně teoretické otiskovaly tehdejší přední matematické časopisy. Avšak nejznámější matematickou, pokládanou ve své době za vzor emancipované ženy, je asi Ruska *Sofja Vasiljevna Kovalevskaja* (*Soňa Kovalevská*, 1850—1891), která po studiích u vynikajících německých matematiků a fyziků působila na univerzitě ve Stockholmu; v roce 1889 jí udělila pařížská Akademie cenu za vynikající pojednání z kinematiky a v témže roce byla jako první žena jmenována členkou-korespondentkou petrohradské Akademie. Psala také verše, novely a romány, avšak tyto její práce nemají takovou hodnotu jako její vědecká pojednání.

Svým životním dílem patří už do dvacátého století další vynikající matematicka, a to Emmy Noether, od jejíhož narození uplynulo letos v březnu právě 100 let. Všimněme si trochu blíže jejího života, při jehož sledování poznáme, jak obtížně se ještě počátkem 20. století prosazovalo vysokoškolské vzdělání žen, a to i ve státě, který už tehdy patřil mezi nejvyspělejší země světa.

Amalie Emmy Noether se narodila jako první dítě židovských rodičů 23. března 1882 v nevelkém bavorském městě Erlangen ležícím severně od Norimberka. Její otec *Max Noether* (1844—1921) byl profesorem matematiky na univerzitě, která v tomto městě existovala od roku 1743. Působil na ní vynikající matematik *Christian von Staudt* (1798 až 1867), avšak proslavil ji především neméně vynikající matematik *Felix Klein* (1849—1925), zvaný v Německu *der grosse Klein**), a to svou nástupní přednáškou z roku 1872, v níž poprvé objasnil význam pojmu grupa pro geometrii. Pod jménem *Erlangenský program* se jím vyložené myšlenky rozšířily tak, že Erlangen se stalo nejčastěji jmenovaným městem v matematické literatuře.

Po absolvování vyšší dívčí školy v Erlangenu vykonala Emmy Noetherová v roce 1900 zkoušky z francouzštiny a angličtiny; opravňovaly ji k vyučování těchto jazyků na dívčích školách, nikoli však ke studiu na univerzitě. K tomu jí nepomohlo ani vykonání maturitní zkoušky na reálném gymnáziu v Norimberku (r. 1903), neboť v Německu nemohly být ženy řádnými posluchačkami vysokých škol. Univerzitní přednášky mohly navštěvovat jen jako hospitantky (bez práva konat zkoušky), a to jen se svolením těch profesorů, jejichž přednášky hodlaly navštěvovat. Leckdy se profesori zdráhali toto povolení dát; v německé

*) gross = velký, klein = malý

literatuře se dočítáme, že na berlínské univerzitě byl dokonce profesor, který i později, když už ženy mohly na univerzitě studovat (od r. 1904), nezačal přednášet, dokud byla v posluchárně třeba jen jedna žena. Proto mladá Noetherová mohla být v letech 1900 až 1904 na univerzitě zapsána jen jako hospitantka. Navštěvovala nejprve přednášky z historie a moderní filologie, později přednášky z matematiky a fyziky, a to na univerzitách v městech Erlangen a Göttingen. Teprve ve školním roce 1904/05 mohla být zapsána jako řádná posluchačka na erlangenské univerzitě; věnovala se už jen studiu matematiky, které dokončila v roce 1907 získáním doktorátu filozofie na základě disertační práce z oboru algebry.

V dalších letech pracovala dr. Noetherová bezplatně v matematickém ústavu erlangenské univerzity. Vlivem profesora *Ernsta Fischera* (1875 až 1954), který zde působil, se začala zabývat obtížnými abstraktními problémy moderní algebry a tomuto zaměření své práce zůstala trvale věrna. V létě r. 1915 přešla na pozvání göttingenských matematiků *Felixe Kleina* a *Davidy Hilberta* (1862–1943) na univerzitu v Göttingen, kde se měla habilitovat. Avšak podle habilitačního řádu z roku 1908 byla habilitace dovolena jen mužům; žádost göttingenské univerzity o výjimku pro dr. Noetherovou ministerstvo školství zamítlo. Proto nesměla samostatně přednášet ani vést semináře; v seznamu ohlašovaných přednášek byla vždy uvedena jen jako spolupracovnice profesora Hilberta. Teprve změněné politické poměry po skončení první světové války umožnily její habilitaci, která se konala na jaře roku 1919; od školního roku 1919/20 mohla už samostatně přednášet a vést semináře. V roce 1922 byla jmenována mimořádnou profesorkou a v tomto úředním zařazení (s nepříliš velkým platem) zůstala až do konce svého působení na göttingenské univerzitě, tj. až do roku 1933.

Působení na göttingenské univerzitě bylo zlatou dobou života profesorky Noetherové, a to v její práci pedagogické i vědecké. Neosvědčila se příliš při vyučování elementárních disciplín určených pro širší okruh studentů, vynikla však v pedagogickém působení, které bylo těsně spjato s její vlastní vědeckou prací. Ve specializovaných přednáškách, v seminářích a diskusích, které pokračovaly i po jejich skončení, nadhazovala nové problémy i možnosti jejich řešení a podněcovala tak nadané studenty i své mladé spolupracovníky k samostatné vědecké práci. Jedním z jejích nejvýznamnějších spolupracovníků byl později proslulý holandský matematik *B. L. van der Waerden*, který přišel do Göttingen v roce 1924. Jeho dvojdílná kniha *Lehrbuch der Algebra*, která je tak rozšířena jako žádné jiné dílo z tohoto oboru, má ještě v 7. vydání pod svým titulem dovětek „S použitím přednášek E. Artina a E. Noetherové“

Způsob vědecké práce profesorky Noetherové charakterizoval velmi

výstižně akademik *Vladimír Koříněk* (Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, roč. 65, str. D 1 až D 6) takto:

„Noetherová se snažila vždy nalézt ty nejvšeobecnější podmínky, za kterých platí věty určité matematické teorie. Aby toho dosáhla, rozkládala pojmy, které se v oné teorii vyskytovaly, na řadu pojmů jednodušších, abstraktnějších a obecnějších. Pro takto nově utvořené pojmy vybudovala novou teorii, daleko obecnější než teorie původní, z níž vyplynuly věty původní teorie jakožto speciální případy. Tím získala nejen velké zevšeobecnění výsledků, nýbrž i celá teorie se stala jednodušší a průhlednější. Při tom zavrhovala jakýkoli početní aparát, pracovala jen s pojmy a jejich vzájemnými logickými vztahy.“

Během dvacátých let se stala Emmy Noetherová známou matematickou; do okruhu zájemců o její práce patřila vedle německých matematiků také řada matematiků zahraničních. Seznámila se s nimi zpravidla i osobně, neboť do Göttingen, které byly tehdy nazývány světovým centrem matematiky, přijížděli významní profesori i mladí matematikové z celého světa. Přitahovala je sem celá řada výrazných osobností, k nimž vedle slavného už tehdy Davida Hilberta náleželi: *Edmund Landau* (1877—1938), *Constantin Carathéodory* (1873—1950), *Richard Courant* (1888 až 1972) a ještě někteří další matematici, k nimž patřila i Emmy Noetherová. Vedle četných Američanů zajížděli do Göttingen také někteří významní badatelé sovětsí; z nich se o práce profesorky Noetherové zajímali zejména algebraikové *N. G. Čebotarev* (1894—1947) a *Oto Julevič Šmidt* (1891—1956), známý široké veřejnosti především jako významný polární badatel. Emmy Noetherová byla také pozvána do Moskvy, kde přednášela koncem zimního a počátkem letního semestru školního roku 1928/29. V roce 1929 přednášela také na sjezdu německých fyziků a matematiků, který se konal v září toho roku v Praze.

Emmy Noetherová se vždy soustřeďovala jen na svou práci; o hmotné podmínky svého života, které byly skromné, příliš nedbala a žila jen pro matematiku. V Göttingen, které si velmi oblíbila, žila klidně až do roku 1933, který s nástupem nacistů k moci přinesl do jejího života náhlou změnu. Již v dubnu r. 1933 jí bylo zakázáno na univerzitě přednášet a brzy potom byla z univerzity propuštěna. Jejím přátelům v USA se podařilo pro ni získat místo profesorky na ženské koleji v Bryn Mawr, kde začala přednášet už v zimě školního roku 1933/34. Od února 1934 přednášela také jednou týdně v Ústavu pro pokročilá studia univerzity v blízkém Princetonu (New Jersey). Špatně si na Ameriku zvykala a stýskalo se jí po Göttingen, které ještě navštívila při své cestě do Německa v létě roku 1934. Na jaře 1935 byla operována a po operaci tumoru zemřela; její život skončil 14. dubna 1935 v Bryn Mawr, kde je také pohřbena.

O významu práce Emmy Noetherové svědčí několik nekrologů sepsaných vesměs významnými matematiky. Z českého, jehož autorem

je nedávno zesnulý akademik Kořínek, je výše citována charakteristika způsobu vědecké práce profesorky Noetherové; k autorům dalších, otištěných vesměs v roce 1935, patří zejména *Albert Einstein* (The New York Times, 4. 5.), *B. L. van der Waerden* (Mathematische Annalen 111) a *Hermann Weyl* (Scripta mathematica III). Nejobsáhlejší je článek Weylův; v závěru obsahuje porovnání E. Noetherové se Soňou Kovalenskou.

Profesor Weyl připomíná, že Soňa byla úplnější osobností s literárními zájmy; měla však méně šťastnou povahu než Emmy. Ze vzdoru k rodičům uzavřela formální sňatek, měla ženský půvab, instinkty i marnivost; společenské úspěchy byly pro ni důležité. Žila v napětí mezi tvořivou prací a vášnivým životem. Jak vzdálené od možností, které měla Emmy, říká profesor Weyl. Ta neměla ani vzpurnou povahu, ani bohémské sklony; nevynikala ženským půvabem, i když měla určitý šarm. Žila jen pro matematiku a největší potěšení nacházela ve své práci. Její srdce neznalo zlomyslnost, nevěřila ve zlo a nenapadlo ji vůbec, že zlo může hrát nějakou roli v lidském životě. Podle mého názoru, končí profesor Weyl, to byla nejen nejlepší žena-matematicka, která kdy žila, ale i velká lidská osobnost.

PŘEMÝŠLÍME ŘEŠÍME...

1 99²

Víte, že všechna racionální čísla mají desetinný rozvoj buď konečný nebo nekonečný a periodický. Snadno poznáme, zda racionální číslo zapsané zlomkem v základním tvaru $\frac{a}{b}$, kde $D(a, b) = 1$, má ukončený desetinný rozvoj.

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby racionální číslo $\frac{a}{b}$ zapsané v základním tvaru mělo konečný desetinný rozvoj je, že jmenovatel b má tvar $b = 2^r 5^s$ ($r \geq 0, s \geq 0$).

Věta je dokázána na str. 385-6.

Ukončený desetinný rozvoj mají tedy např. čísla

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{16}, \quad \frac{12}{25}, \quad \frac{3}{50}$$

Číslo $\frac{1}{99^2}$ uvedené v nadpise má tudíž desetinný rozvoj nekonečný periodický. Asi vás překvapí jeho zajímavý tvar. My vám jej však zatím neprozradíme. Povíme vám nejdříve, jakou periodu má obdobné racionální číslo $\frac{1}{9^2}$

$$\frac{1}{9^2} = 0,\overline{012\,345\,679}.$$

Jeho perioda má 9 číslic. Chybí pouze 8, ostatní číslice jsou uvedeny ve vzestupném pořadí počínaje nulou.

Přesvědčte se o tom sami.

Pokuste se nyní najít sami periodu čísla $\frac{1}{99^2}$. Výsledek si ověřte na str. 412.

M. Koman

Deset úloh z Jugoslávie pro nejmladší členáře

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

V Jugoslávii vychází čtyřikrát za rok chorvatský časopis *Matematičko fizički list za učenike srednjih škola*, který má obdobné poslání jako naše *Rozhledy matematicko-fyzikální*. Vedle článků a obtížnějších soutěžních úloh přináší také méně náročné úlohy, které mohou řešit i průměrní žáci. Uveřejňujeme z tohoto časopisu deset úloh, jejichž řešení by nemělo činit potíže studujícím prvního ročníku našeho gymnázia nebo čtyřleté střední odborné školy.

K řešení hezké první úlohy, která je převzata z amerických *Scripta mathematica* (USA, 1956), stačí umět vytýkat před závorku a znát vzorce pro druhou a třetí mocninu dvojčlenu. Aritmetický průměr dvou reálných čísel, o němž se hovoří v úloze 3, je jejich poloviční součet;

geometrickým průměrem dvou nezáporných čísel x, y rozporné číslo $\sqrt[3]{xy}$. Pro tyto dva průměry nezáporných čísel x

$$\sqrt[3]{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

přítom rovnost nastane právě tehdy, je-li $x = y$. Pravdu tvrzení snadno dokážeme (např. nepřímou). Toho se užije v 7. Při řešení geometrických úloh vystačíme se znalostí věty a vzorců pro obsah trojúhelníku a lichoběžníku.

1. Předpokládejme, že aspoň jedno z reálných čísel x , y . Dokažte, že potom pro čísla

$$a = \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2}, \quad b = \frac{x^2 - xy}{x^2 + y^2}, \quad c = \frac{y^2 + xy}{x^2 + y^2}, \quad d = \frac{y^2 - xy}{x^2 + y^2}$$

platí:

$$a + b + c + d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$$

2. Nechť pro kladná čísla a, b, c, d platí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; dokažte

$$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d} = 0$$

Pokyn: Z daného předpokladu plyne, že je $a = kb$, c je kladné číslo.

3. Nechť reálné číslo y je aritmetickým průměrem čísel x a z , že potom číslo $x^2 + xz + z^2$ je aritmetickým průměrem

$$x^2 + xy + y^2, \quad y^2 + yz + z^2$$

4. Pro které parametry a, b má soustava rovnic $a^2x - bx + (3 - 2b)y = 3 + a$ jediné řešení $x = 1, y = 1$? $a = 1, b = -1$ nebo $a = -1, b = 1$.

5. Nechť je $a > 2, b > 2$; dokažte, že potom je $ab > a + b$.

6. Pro reálné číslo x řešte rovnici:

$$\frac{x + |x|}{2x^2} = \frac{2x^2}{x + |x|}$$

[Jediné řešení je $x = 1$].

7. Které z čísel $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{100 + n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ je největší?

$$\left[\text{Číslo } a_{100} = \frac{1}{20} \right]$$

8. Sestrojte lichoběžník, jehož delší základna AB má (při dané jednotce délky) velikost $a = 25$, jehož výška $v = 12$ a jehož ramena mají délky $|BC| = b = 13$, $|AD| = d = 15$. Vypočtěte jeho obsah P .

[Lichoběžníky jsou dva; $P_1 = 216$, $P_2 = 276$.]

9. Bod E je středem strany CD čtverce $ABCD$; bod F je patou kolmice vedené bodem B k přímce AE . Dokažte, že délky stran trojúhelníku EFB jsou v poměru $3 : 4 : 5$.

10. V dané kružnici o poloměru $r = 10$ cm je sestrojena tětiva AB , jejíž délka je 16 cm. Sestrojte lichoběžník, který je do dané kružnice vepsán tak, že má základnu AB a druhou základnu CD dlouhou 12 cm. Vypočtěte jeho obsah P .

[Lichoběžníky jsou dva; $P_1 = 28 \text{ cm}^2$, $P_2 = 196 \text{ cm}^2$].

Výsledek úlohy: $\frac{1}{99^2}$

Nekonečný desetinný rozvoj čísla $\frac{1}{99^2}$ má tvar

$$\frac{1}{99^2} = 0,00 \overline{01 \ 02 \ \dots \ 09 \ 10 \ 11 \ \dots \ 96 \ 97 \ 99} \quad (\text{T})$$

Perioda se skládá z 99 dvojčíferných skupin, kterými lze zapsat všechna celá čísla od 0 do 99 s výjimkou čísla 98 ve vzestupném pořadí.

Na rozdíl od rozvoje

$$\frac{1}{9^2} = 0,01 \overline{2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 9}$$

se však o správnosti rovnosti (T) můžeme jen těžko přesvědčit pouhým výpočtem

$$1 \ 99^2 = 1 \ 9801$$

Také ověření tohoto výsledku na kapesní kalkulačce přináší značné obtíže, protože výpočet je nutno provádět po částech. (Proč?)

Pokuste se sami přesvědčit vhodnou úvahou o správnosti rozvoje (T). Řešení najdete na str. 415.

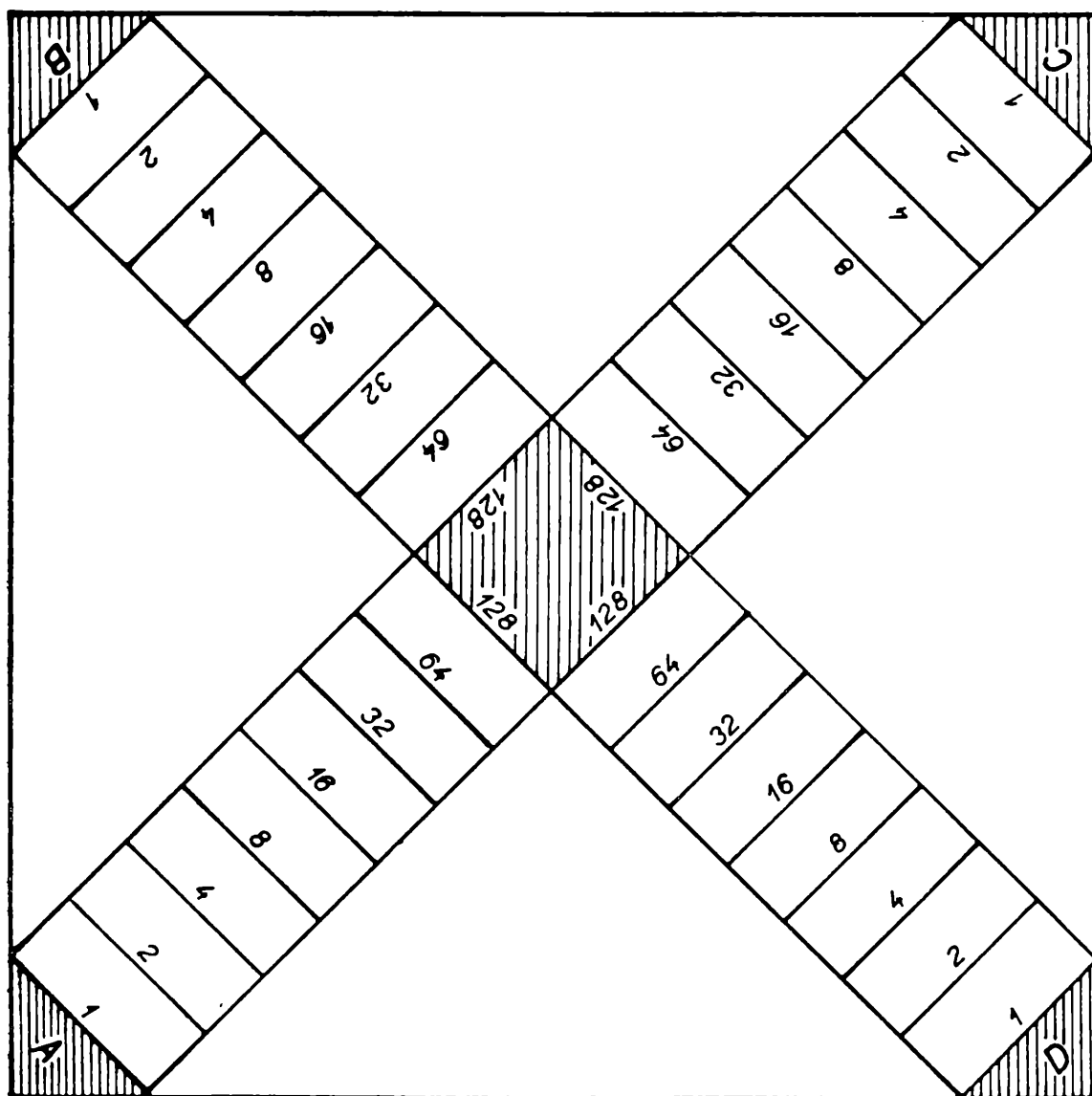
Hra „Jedna ze dvou“

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., UK Praha

Název hry vyjadřuje, že setkání dvou figurek na stejném poli hracího plánu způsobí, že jedna z nich postoupí na další pole a druhá se vrátí mimo hrací plán. Přitom se vlastně užívá dvojkové soustavy. Pokud o ní téměř nic nevíte, nemusíte se obávat a hledat poučení v učebnicích matematiky. I bez znalosti teorie dvojkové soustavy pravidla této hry pochopíte a budete ji moci hrát.

Hry se mohou zúčastnit 2, 3 nebo 4 hráči. Každý z nich dostane 7 figurek, které se užívají např. v halmě. Figurky lze nahradit mincemi, knoflíky apod. Dále potřebujeme hrací kostku.

Obr. 1



Hrací plán si zhotovte podle obr. 1. Stručně jej popišme. Jsou na něm čtyři cesty, na jejichž začátku jsou písmena *A*, *B*, *C*, *D*. Všechny cesty končí ve středovém poli, jež je vyšrafováno a v němž je možno čtyřikrát číst číslo 128. Každá cesta je rozdělena na sedm polí, ve kterých jsou vepsána čísla 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Nejdříve si každý hráč zvolí na hracím plánu cestu, kterou bude užívat. Potom se určí, kdo z hráčů bude začínat. Další budou pokračovat v pořadí, které je obvyklé při stolních společenských hrách, tj. podle toho, jak sedí kolem stolu.

Každý hráč, když přijde na řadu, hodí hrací kostkou a pak se rozhodne pro jednu ze dvou možností.

1. možnost

Počet ok, který na kostce padl, vyznačí na své cestě figurkami. Jde-li o čísla 1, 2, 4, pak užije jedné figurky, kterou postaví na příslušné pole označené 1, 2, 4. K vyznačení čísel 3, 5, 6 užije dvou figurek. Při čísle 3 umístí figurky na polích označených čísly 1 a 2, při čísle 5 na polích 1 a 4, při čísle 6 na polích 2 a 4.

Když na hráče přijde řada podruhé, potřetí atd., pak se může stát, že po vyznačení čísla, které padlo na kostce, budou na některém poli dvě figurky. V takovém případě hráč jednu figurku posune na sousední pole ve směru ke středu hracího plánu a druhou si vezme zpět, aby ji později případně použil k vyznačení čísla, které se ukáže na kostce po některém dalším hodu. Tyto operace s figurkami se opakují tak dlouho, až na každém poli stojí nejvýše jedna figurka.

Poslední pole, na které lze figurku posunout, je středové pole. Hráč, jenž první posune svou figurku na toto pole, je vítězem.

2. možnost

Hráč se vzdá vyznačení počtu ok, který mu padl na kostce. K tomuto rozhodnutí je obvykle přinucen jedním z těchto důvodů:

- a) Má volnou jen jednu figurku a k vyznačení čísla potřebuje dvě figurky.
- b) Zjistí, že po vyznačení čísla by měl všechny své figurky na hracím plánu, přičemž na žádném poli by nebyly dvě, takže by žádnou nemohl získat zpět. Nevyznačením čísla, které padlo na kostce, hráč ze hry neodstupuje. Až na něj přijde řada, opět hází kostkou a opět si může vybrat jednu z možností, které jsme výše uvedli.

Úlohy

1. V partii hry „Jedna ze dvou“ zvítězil hráč, jemuž při posledním hodu padlo číslo 6. Jak stály jeho figurky před tímto hodem na hracím plánu?

2. Při hře „Jedna ze dvou“ se stává, že hráč se musí vzdát vyznačení čísla, které mu padlo, aby mu zůstala pro další hru aspoň jedna volná figurka. Nalezněte nejmenší počet figurek, při kterém by k tomu nedocházelo.
3. Ve hře „Jedna ze dvou“ podle výše uvedených pravidel má každý hráč 7 figurek. Mohl by se vítězem stát hráč, který by měl figurek menší počet? Kolik by mu jich stačilo a jaké číslo by mu muselo padnout při posledním hození?

Výsledky

1. Jsou dvě možnosti. Figurky stály na polích 2, 8, 16, 32, 64 nebo 4, 8, 16, 32, 64.
2. 9 figurek
3. 6 figurek, číslo 4

Řešení úlohy $\frac{1}{99^2}$

Máme dokázat, že

$$\frac{1}{99^2} = 1 \quad 99^2 = 0, \overline{00 \ 01 \ 02 \quad 09 \ 10 \ 11 \quad 96 \ 97 \ 99}$$

Výpočet provedeme postupně

$$1 \quad 99^2 = (1 \quad 99) \quad 99$$

První dělení dává výsledek

$$1 \quad 99 = 0, \overline{01} = 0,0101010101 \dots$$

Zapíšeme 1. část druhého výpočtu

$$0, \overline{01 \ 01 \ 01 \ 01 \ 01} \quad 99 = 0, \overline{00 \ 01 \ 02 \ 03}$$

$$\begin{array}{r} \overline{01} \mid 01 \\ \quad \overline{02} \mid 01 \\ \qquad \overline{03} \mid 01 \\ \qquad \qquad \overline{04} \end{array}$$

Vidíme, že při dělení číslem 99 dostáváme postupně 99 dvojciferných zbytků

$$01 \ 02 \ 03 \dots 09 \ 10 \ 11 \quad 97 \ 98 \ 00 ,$$

takže postupně skutečně počítáme

$$0001 \quad 99 = 00, \text{ zbytek } 01$$

$$0101 \quad 99 = 01, \text{ zbytek } 02$$

$$\underline{0201} \quad 99 = 02, \text{ zbytek } \underline{03}$$

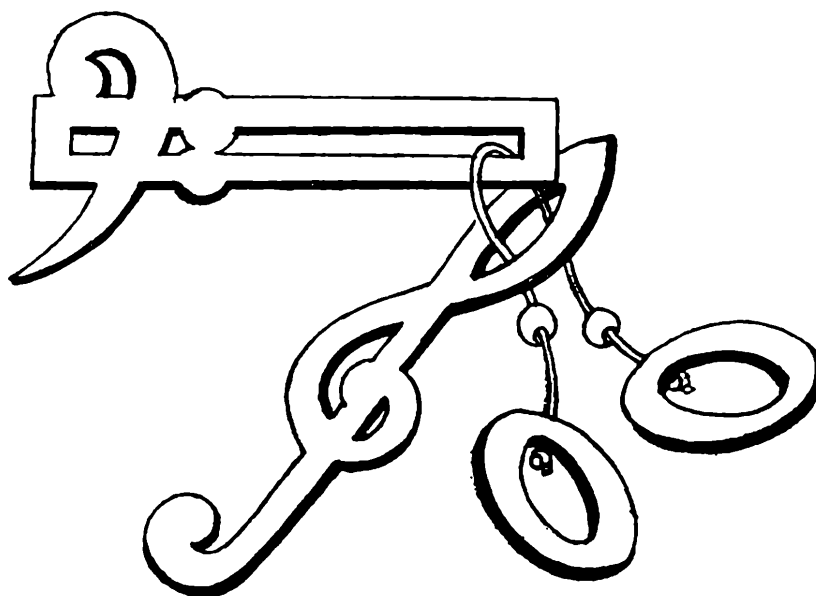
$$\dots$$
$$\underline{9701} \quad 99 = 97, \text{ zbytek } \underline{98}$$

$$\underline{9801} \quad 99 = 99, \text{ zbytek } \underline{00}.$$

Závěr. Jistě nyní sami snadno rozřešíte obdobnou úlohu pro číslo $\frac{1}{999^2}$.

Hudební hlavolam

Dnes přicházíme s hlavolamem, které jsme nazvali „hlavolam hudební“. Hudební proto, že se skládá v podstatě ze dvou klíčů: basového a houslového. Mohl by mít i jiné jméno, kdybychom si vymysleli jiné tvary. Podstatné u tohoto hlavolamu jsou dva otvory: úzký podlouhlý otvor B vedle basového klíče a otvor H v horní části houslového klíče (obr. 1).



Obr. 1

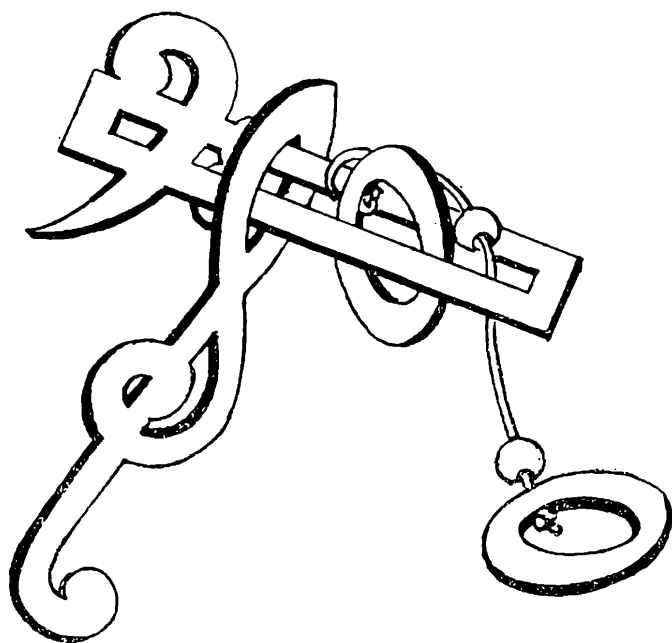
Ke zhotovení hlavolamu potřebujeme kousky umělé hmoty různé síly (tenčí použijeme k vyřezání klíčů, silnější k vyřezání not), dva korále, které musí být tak velké, aby prošly otvorem H , ale neprošly otvorem B , a kousek tenké bužírky. Velikost klíčů si určíme sami podle

toho, jak velké máme korále. Noty, které jsme vyřezali ze silnější des-
tičky, musí být tak velké, aby prošly otvorem *B*, ale neprošly otvorem
H. První notu provrtáme podle nákresu, připevníme k ní bužírku, na
kterou navlékneme první korálek a houslový klíč otvorem *H*. Potom
bužírku provlékneme otvorem *B* i *H*, navlékneme na ni druhý korálek
a připevníme k druhé notě. Tím je hlavolam hotov.

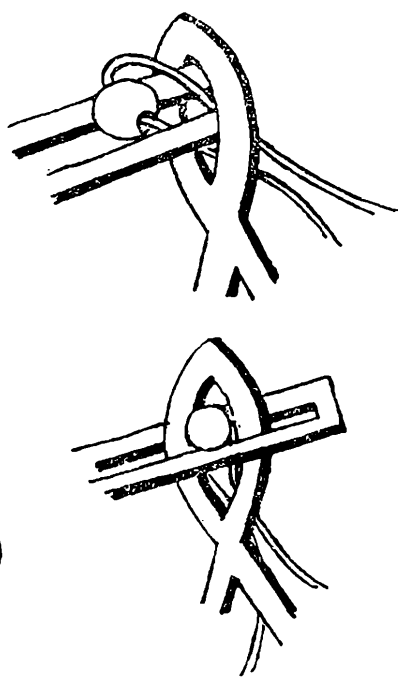
Úkol zní: *vyprosti houslový klíč ze zajetí obou not a basového klíče
a opačným postupem jej znovu navlékni na původní místo.*

Řešení: 1. krok - houslový klíč navlékneme otvorem *H* na basový klíč
(obr. 2a);

Obr. 2a



Obr. 2b



Obr. 2c

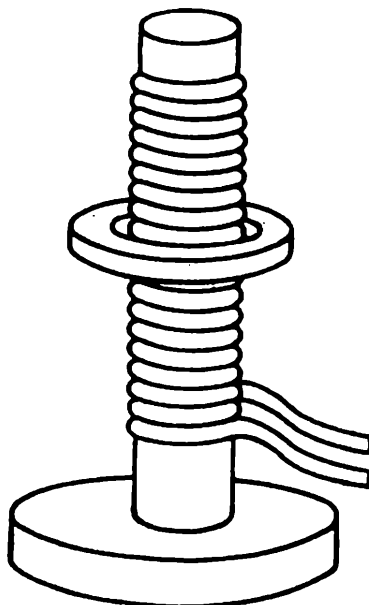
2. krok - jednu z not provlékneme shora otvorem *B* tak, že na
otvoru *B* zůstane korálek, který jím neprojde(obr.
2a);
3. krok - houslový klíč přetáhneme přes korálek zpět na obě
noty (obr. 2b);
4. krok - houslový klíč vsuneme zespodu otvorem *B* a otvorem
H v houslovém klíči provlékneme korálek (obr. 2c).
Houslový klíč vysuneme z otvoru *B*, čímž jsme jej
vyprostili.

Opačným postupem dostaneme houslový klíč na původní místo.

Josef Svoboda

Efektivní experimenty: Cívka a kroužek

Protéká-li cívkou střídavý proud, může nastat situace (obr. 1), že se kovový kroužek navlečený na cívku bude volně vznášet ve vzduchu.



Jestliže proud do cívky zavedeme sepnutím obvodu, vyskočí kroužek prudce vysoko nad cívku. Pokus lze provést i se školním rozkladným transformátorem. Vysvětlení naleznete na str. 432.

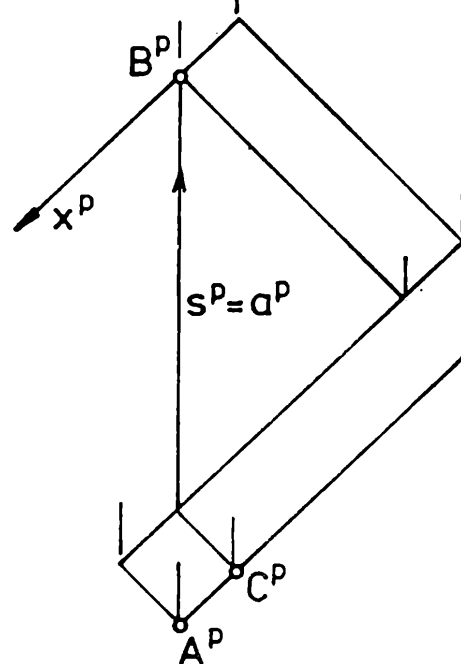
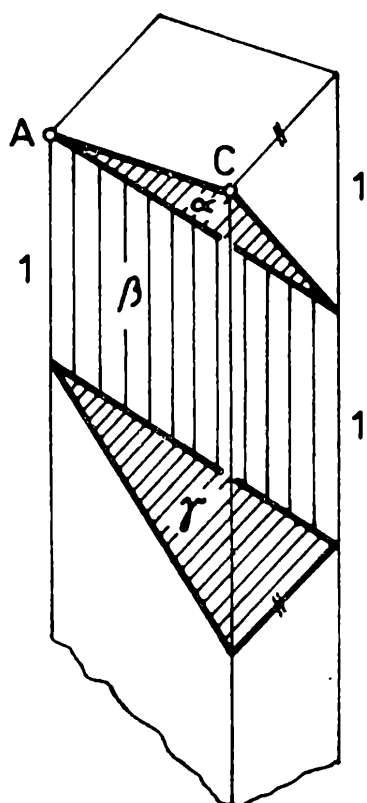
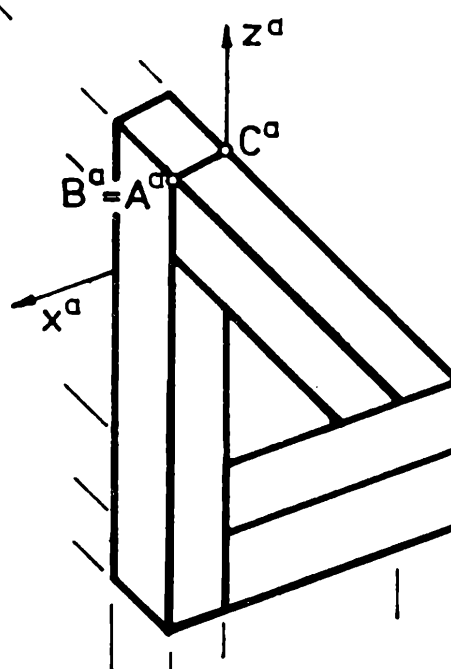
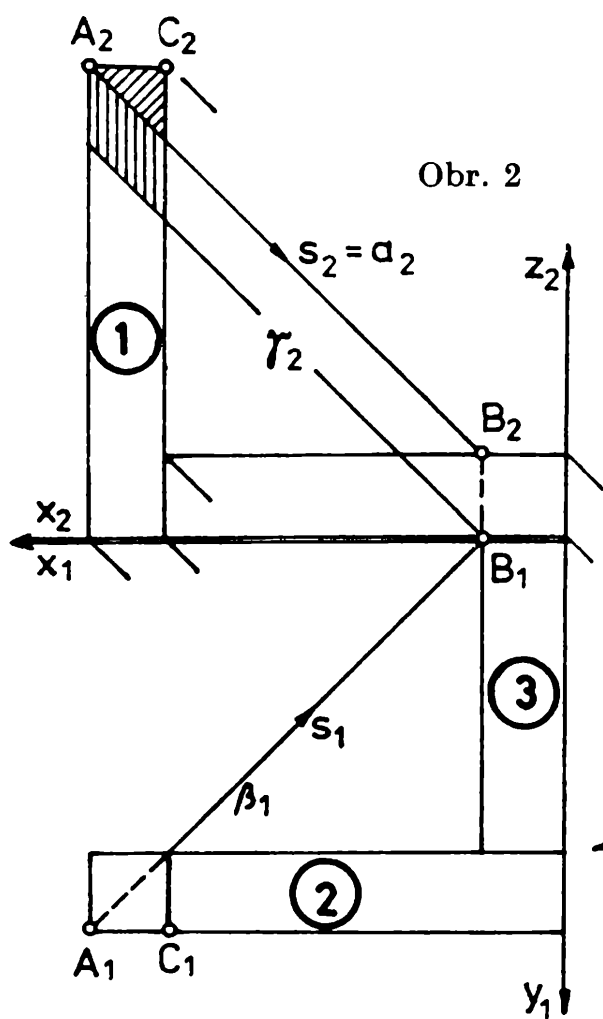
Petr Hnilička

Udělejte si „nemožné“

Doc. Ing. Dr. LADISLAV DRS, CSc., ČVUT Praha

Obr. 1 znázorňuje zdánlivě nemožný objekt. Nazývá se po svém objeviteli Penrosův trojúhelník (*Ronald Penrose* je prezident Institutu současného umění v Londýně).

Pro deskriptiváře však není nesnadné tento nemožný objekt vyrobit. Skládá se ze tří hranolů 1, 2, 3 (obr. 2, půdorys a nárys objektu). Hranoly mají za podstavu jednotkový čtverec a délky 6, 5 a 4. Hranol 1 má výřez, určený třemi rovinami α , β , γ . Rovina α je dána třemi body A , B a C , roviny β a γ jsou promítací. Tvar zářezu je patrný na obr. 3. Promítneme-li tento objekt směrem $s = AB$, vznikne *Penrosův trojúhelník*, průmět „nemožného“ objektu z obr. 2. „Nemožnost“ byla vyvolána naší podvědomou domněnkou, že se jedná o uzavřený objekt.



Obr. 3

Nenapadlo nás, že dojem uzavřenosti způsobil šikový směr promítání, k němuž dopomohl zářez, který umožnil, aby se konec hranolu 3 ležící při promítání směrem s pod hranolem 1 opticky s hranolem 1 spojil.

Průmět objektu směrem s získáme snadno „průsečnou“ metodou. Půdorys odstříhneme od nárysu a přemístíme podle obr. 4 do polohy označené indexem p . Axonometrický průmět libovolného bodu, např. A , určíme v průsečíku rovnoběžky a_2 se směrem s_2 vedené bodem A_2 a rovnoběžky a^p se směrem s^p vedené bodem A^p ; $A^a = a_2 \cap a^p$. Podobně postupujeme při konstrukci dalších bodů. Potřebné rovnoběžky jsou jen naznačeny.

Ještě efektnější je fotografie objektu směrem s . Pokuste se o ni a pošlete-li nám zdařilé snímky, redakce nejlepší uveřejní!

K článku Fyzika v priemyselnej praxi

Ing. ZOLTÁN TÓTH, Levice

Zaujal ma článok v 2. čísle Rozhladov M-F, roč. 1981/82 od prof. RNDr. Ladislava Zachovala, člena koresp. ČSAV. Dal mi podnet k napísaniu týchto riadkov.

Ako inžinier technik vo svojej práci tiež často narážam na technické problémy úzko späté s fyzikou. Som rád, keď sa takýto problém vyskytne, pretože som fyziku vždy mal vo veľkej obľube.

Jeden zaujímavý a poučný poznatok zo svojej technickej praxe by som rád s Vami sdelil. V jednom podniku na výrobu vysokotlakých kotlov sme vyvíjali a konštruovali plynové a olejové horáky. Na zabezpečenie horenia plameňa sa používali u nich tzv. strážce plameňa rôznej elektronickej konštrukcie. Ich hlavnou časťou boli vákuové fotónky s rôznou spektrálnou citlivosťou. Napríklad pre kontinuálne snímanie propan-butanového, resp. plameňa zemného plynu sme používali UV-hlásiče. Najväčšiu citlivosť preukazovali v neviditeľnej oblasti spektra.

Pri konštrukčnom riešení sme chceli zvoliť nasmerovanie optiky strážcu plameňa súoso, priamo cez rovnú časť trubky, ktorým prúdila horlavá zmes plyn-vzduch. Na naše nemilé prekvapenie strážca, ktorý z bočného pohľadu plameň bezpečne indikoval, cez rovnakú svetlosť pri opísanom spôsobe úplne zlyhal.

Trvalo nám to určitú dobu, kým sme našli vysvetlenie. Spomenul som si na Fraunhoferové čiary v spektre Slnka, na absorpčné spektrum plyn-

ných látok. Vyplynulo z toho, že priamo horľavé médium „zaciľovalo“ pre UV-hlásič vyžarované spektrum. Ostávajúci technický problém sme potom vyriešili buď voľbou iného typu strážcu plameňa, resp. iným konštrukčným usporiadaním.

Pohľad do 30. ročníku Rozhledů — řešení úloh

V 5. čísle nynějšího ročníku byly na str. 223—5 otištěny úlohy z 30. ročníku Rozhledů. Uvedeme jejich výsledky, resp. výtahy z jejich řešení (u konstrukčních úloh jen hlavní ideu postupu), a to v pořadí, které mají v citovaném textu.

Popsaný jev je důsledkem vyzařování tepla; na chladnější straně listů se sráží více vody.

Kapky vody jsou různě nabitě, přitahují se. Vychýlení tenkého praménku je způsobeno přitahováním částic zelektrovanou tyčí.

Hostinský má 25 Kčs, hosté 3 Kčs, číšník 2 Kčs z částky 30 Kčs. Za obědy hosté zaplatili 27 Kčs, odnášejí si 3 Kčs z téže částky 30 Kčs. Paradox je vytvořen umělým porovnáváním údajů, které se nemusí doplňovat do 30.

Kovadlina s tělem představuje celek s velkou hmotností; účinek síly na těle je pak jen částí jejího účinku na tento celek.

Průvan je průtok vzduchu brzděný zavírajícími se dveřmi. Pohybová energie vzduchu se mění v potenciální, tedy v tlak, který může dosáhnout značných velikostí.

Řešení úlohy o 40 mincích je v citovaném ročníku odloženo do dalšího ročníku, učiníme tak i my. Přemýšlejte nad ním v době prázdnin!

Přilévání vody působí hydrostatickým tlakem na rtuť, v níž tlak vzrůstá. Zvětšuje se i tlak rtuti na dolní podstavu kvádru a ten se ze rtuti vynořuje tím více, čím více vody přiléváme.

Hledaným čtyřciferným číslem je číslo 8416.

Při konstrukci trojúhelníku ABC z údajů v_a, v_b, ϱ lze využít rovností $av_a = bv_b = (a + b + c)\varrho$, z nichž plyne $a v_b = b v_a = (a + b + c) v_a v_b \varrho^{-1}$. Hledaný trojúhelník je podobný tomu, který má strany v_b, v_a a obvod $v_a v_b \varrho^{-1}$.

Hledaným geometrickým místem bodů je buď jednoprvková množina nebo přímka nebo sjednocení dvou přímek.

Obsah pravoúhlého trojúhelníku je roven $\rho(\rho + c)$.

Pravděpodobnost se rovná $[10^{n-1} + (-1)^n] : 11 \cdot 10^{n-1}$.

Hledaný součet se rovná $(3n + 2)n(n^2 - 1) : 24$.

Konstrukce čtyřstěnu se převede na konstrukci jeho vrcholu na dané přímce; je to bod, který leží též na určité rotační kuželové ploše.

Je-li s délka a $\text{tg } \alpha$ sklon roviny, pak doba t valení koule se vypočítá z rovnice $5gt^2 \sin \alpha = 14s$. (V řešení byla vyjádřena energie pohybu a energie polohy, z matematických prostředků se uplatnil i integrální počet.)

Žebřík se udrží pro úhly α , pro něž $\text{tg } \alpha \geq (1 - kk') : 2k$, kde k je koeficient tření na podlaze, k' je koeficient tření na zdi. Tření na zdi samo nestačí.

Tepelné ztráty jsou nejmenší při rozvětvení podle 2. zákona Kirchhoffova (řešení pomocí diferenciálního počtu nenašel před 30 lety žádný středoškolák).

Pro řidiče je z hlediska času výhodnější brzdit; vzdálenost a při rychlosti v (v okamžiku své reakce na překážku) projede za dobu $2a : v$, čtvrtinu kružnice o poloměru a projede už za dobu $\frac{1}{2}\pi a : v$, tedy kratší.

[Text úlohy nebyl však dostatečně jasný ve významu slov „co je lepší“.]

Jaroslav Šedivý

Prehľad niektorých celoštátnych akcií fyzikálnej olympiády v roku 1982

Tretie (celoštátne) kolo kategórie A v XXIII. ročníku FO sa uskutoční v dňoch 25. až 28. 4. 1982. Usporiada ho KV FO Severomoravského kraja.

Tretie (krajské) kolo kategórie E v XXIII. ročníku FO sa uskutoční dňa 15. 5. 1982 na miestach, určených jednotlivými KV FO.

Celoštátne sústredenie vybraných úspešných riešiteľov z predmaturitných ročníkov (kategória B) usporiada KV FO v spolupráci s KV MO v Západočeskom kraji v trvaní dvoch týždňov koncom júna 1982.

Sekretariát ÚV FO v Bratislave

Úlohy I. kola 32. ročníku MO (1982 / 83)*Kategorie A***A—I—1**

Nech k, n sú prirodzené čísla, $n \geq 2$. Ak prirodzené čísla x, y vyhovujú nerovnici

$$\left| \frac{x}{y} - \sqrt[n]{k^2 + 1} \right| < \frac{1}{y^n},$$

potom platí

$$\frac{x}{y} + k > y^{n-2} - 1$$

Dokážte!

A—I—2

Nech $a_1, \dots, a_n$ sú kladné reálne čísla. Pre každú n -ticu kladných reálnych čísel $x_1, \dots, x_n$ platí nerovnosť

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} \right)} \geq \sqrt[n]{\frac{x_1}{a_1} \frac{x_n}{a_n}}$$

Dokážte! Kedy platí rovnosť?

A—I—3

Množina φ bodů v rovině ϱ má tyto dvě vlastnosti:

V_1 : Spolu s každými svými dvěma navzájem různými body A, B obsahuje celou úsečku AB .

V_2 : V každém kruhu o poloměru 1 leží alespoň jeden bod z φ . Potom platí $\varphi = \varrho$. Dokážte!

A—I—4

Je dána krychle $ABCDEFGH$, jejíž hrana má délku a . Bodem E vedte rovinu σ a sestrojte bod X na hraně AE tak, aby v souměrnosti podle roviny σ odpovídala kouli o průměru AX koule největšího objemu,

ktorá celá náleží průniku krychle s koulí se středem O a poloměrem $\frac{a}{2}$, kde O je střed stěny $BCGF$. Vypočítejte délku průměru AX .

A—I—5

V rovine je daný štvorec $ABCD$ se stranou $|AB| = 1$.

a) Určete v rovine množinu M , ktorú vyplnia tretie vrcholy všetkých rovnostranných trojuholníkov, ktorých dva vrcholy ležia vo vnútri alebo na hranici daného štvorca $ABCD$.

b) Vypočítajte obsah množiny M .

A—I—6

Pre dané prirodzené číslo n riešte sústavu n rovníc o n neznámých $x_1, \dots, x_n$:

$$\binom{2}{2} x_1 = \binom{4}{4},$$

$$\binom{3}{2} x_1 + \binom{2}{2} x_2 = \binom{5}{4},$$

$$\binom{n+1}{2} x_1 + \binom{n}{2} x_2 + \dots + \binom{2}{2} x_n = \binom{n+3}{4}$$

Kategorie B

B—I—1

Dokážte, že z čísel $3^{1982} + 2^{1981}$ a $3^{1982} - 2^{1981}$ žiadne nie je prvočíslo.

B—I—2

Určte množinu všetkých bodov v rovině, ktorá je grafom relácie

$$C = \left\{ [x, y] \in R \times R : (x - m)^2 + (y - n)^2 = \frac{1}{16} \wedge (x - \frac{1}{2} - m)^2 + (y - \frac{1}{2} - n)^2 = \frac{(2\sqrt{2} - 1)^2}{16}; m, n \text{ sú celé čísla} \right\}.$$

B—I—3

Lineárnym mnohočlenom troch premenných x, y, z rozumieme funkciu tvaru $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz + d$, kde a, b, c, d sú reálne čísla, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Čísla a, b, c, d sa nazývajú koeficientami mnohočlena.

Zistite, či existujú také lineárne mnohočleny L_1, L_2, L_3, L_4 troch premenných x, y, z s reálnymi koeficientami, že pre všetky reálne x, y, z platí

$$L_1(x, y, z) \cdot L_2(x, y, z) + L_3(x, y, z) \cdot L_4(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

B—I—4

Zostrojte trojuholník ABC , ak je daná dĺžka strany c , výška na stranu c a rozdiel φ uhlov pri vrchoch A a B hľadaného trojuholníka.

B—I—5

V kruhu K s polomerom 1 sa nachádza kruhový oblúk C_1 s polomerom 1, ktorého koncové body ležia oba na hraničnej kružnici kruhu K a majú vzdialenosť c . Oblúku C_1 sa dotýka kruhový oblúk C_2 s polomerom 1 ležiaci v kruhu K , pritom oba jeho koncové body P, Q ležia na hraničnej kružnici kruhu K . Nájdite množinu stredov tetív PQ všetkých možných oblúkov C_2 .

B—I—6

Dve protiľahlé hrany h_1, h_2 štvorstena sú na seba kolmé a ich vzdialenosť je v . Zostávajúce hrany štvorstena sú rovnako dlhé, ich dĺžka je d .

a) Ukážte, že výšky štvorstena vychádzajúce z krajných bodov hrany h_1 sa pretínajú v bode X_1 . Podobne označíme X_2 priesečník výšok štvorstena vychádzajúcich z krajných bodov hrany h_2 .

b) Dokážte, že vzdialenosť bodov X_1 a X_2 závisí len na číslach v a d a nie na veľkostiach hrán h_1, h_2 .

Kategorie C

C—I—1

Je dán ostroúhlý trojuholník ABC . Kružnice, ktorá je mu opsána, má stred S a polomer r . Zvolme soustřednou kružnici o poloměru $r' < r$, která však také protíná všechny strany trojúhelníku ve dvou bodech. Označme u, v, w velikosti tětiv, které tato kružnice vytíná na stranách trojúhelníku ABC . Dokažte, že

$$u^2 + v^2 + w^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 12(r^2 - r'^2),$$

kde a, b, c značí velikosti stran trojúhelníku ABC .

C—I—2

Jsou dány dvě kružnice $k_1 = (A, r_1)$, $k_2 = (B, r_2)$, přičemž $r_1 < 2r_2$, $A \in k_2$. Na kružnici k_1 zvolme libovolný bod T tak, aby tečna v něm sestrojená ke kružnici k_1 prořála k_2 v různých bodech K, L . Dokažte, že $|AK| \cdot |AL| = \text{konst.}$

C—I—3

Je dán rovnostranný trojúhelník KLM a uvnitř jeho strany KL bod O . Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC , jehož odvěsna AC leží

na přímce KM , bod O je středem odvěsny AB a střed přepony BC leží na přímce LM .

C—I—4

Najděte všechna přirozená čísla, jejichž třetí mocniny končí skupinou cifer 56 789.

C—I—5

605 koulí stejného průměru je srovnáno do dvou pyramid, z nichž jedna má ve spodní vrstvě koule uspořádané do čtverce, druhá do rovnostranného trojúhelníku. Obě pyramidy mají stejný počet vrstev. Určete, v kolika vrstvách byly koule srovnány v každé z pyramid a kolik koulí bylo v jednotlivých pyramidách.

C—I—6

Pro každé dva trojúhelníky se stranami a, b, c a p, q, r platí:

$$(a + 1)^2 + (b - 1)^2 + (c + 1)^2 - 2(ap + bq + cr) > \\ > 6 - (p + 1)^2 - (q - 1)^2 - (r + 1)^2. \text{ Dokažte.}$$

Kategorie Z

Z—I—1

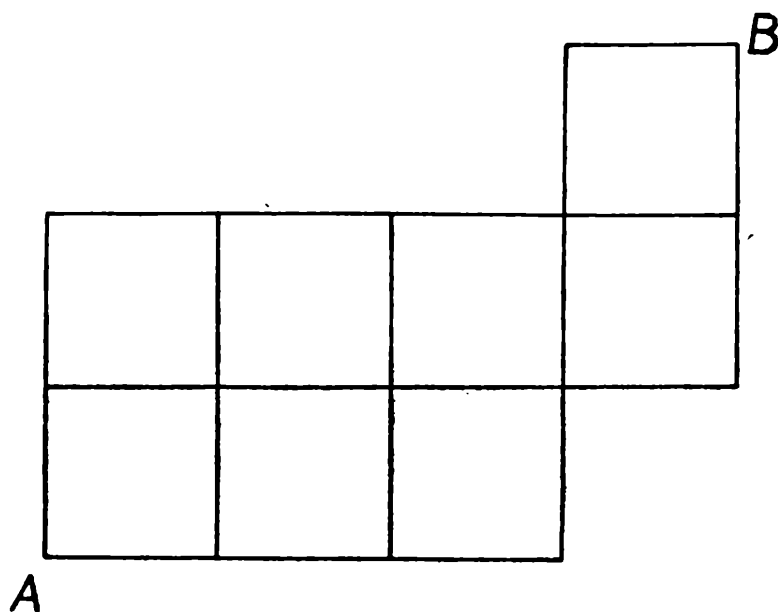
Každý ze šesti kamarádů má dřevěnou kostku, jejíž každá stěna je obarvena jednou z barev bílá, žlutá, červená, zelená, modrá, černá. Na žádné kostce nejsou dvě různé stěny obarveny stejně a proti bílé stěně je vždy stěna černá. Kostky se liší pouze umístěním dalších barev, například Alšova kostka má proti zelené stěně stěnu modrou, zatímco u Honzovy kostky jsou zelená a modrá stěna sousedními stěnami. Mohou být kostky všech šesti kamarádů obarveny tak, aby se každé dvě lišily?

Z—I—2

Mezi místy A a B tvoří ulice čtvercovou síť, strana každého čtverce měří 100 m (obrázek 1). Jakou nejmenší vzdálenost musí chodec ujít, aby se dostal z místa A po ulicích do místa B ? Kolika možnými způsoby to může provést? Přitom považujeme dvě cesty z A do B za různé, jakmile se liší alespoň jedním úsekem.

Z—I—3

Sedminásobný součet dvou dvojciferných přirozených čísel je desetkrát větší než jejich rozdíl. Určete všechny takové dvojice.



Obr. 1

Z—I—4

Z krychlí o hraně 1 cm jsme slepili krychli o hraně 4 cm. Potom jsme stěnám velké krychle přiřadili čísla 1, 2, 3, 4, 5 a 6 stejným způsobem jako na hrací kostce, tj. na protějších stěnách jsou čísla 1 a 6, 2 a 5, 3 a 4. Každé z těchto čísel jsme napsali na příslušné stěně do každého pole čtvercové sítě vytvořené hranami malých krychlí. Velkou krychli jsme pak opět rozdělili na původní malé krychle a pro každou malou krychli jsme vypočetli součet všech čísel, která na ní byla napsána.

Zjistěte:

- Kolik je celkem malých krychlí se součtem rovným číslu 2?
- Kolik je celkem malých krychlí se součtem rovným číslu 6?
- Jaký je největší možný součet a kolik existuje malých krychlí s tímto největším součtem?

Z—I—5

Sestrojte pětiúhelník $ABCDE$, jestliže platí $|AB| = 1$, $|BC| = 2$, $|CD| = 3$, $|DE| = 4$, $|AE| = 5$ a úhly ABC a CDE jsou pravé.

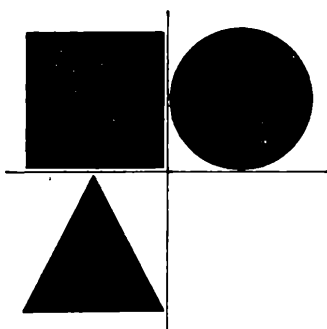
Z—I—6

Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$ o hraně délky 10. Kulová plocha protíná stěnu BCC' v kružnici vepsané čtverci $BCC'B'$ a prochází středem S protější stěny $ADD'A'$. Určete střed a poloměr kulové plochy.

Soutěžící v kategorii A odevzdají vyřešené úlohy svému učiteli matematiky do 30. listopadu 1982, v kategoriích B, C do 10. ledna 1983. V kategorii Z odevzdají žáci první trojici úloh do 15. listopadu 1982 a druhou trojici úloh do 15. ledna 1983 také svému učiteli matematiky.

Spolková soutěž v matematice

Po vzoru matematických olympiád v socialistických zemích vznikly obdobné soutěže i v dalších státech, například v Německé spolkové republice. Tam má název „*Bundeswettbewerb Mathematik*“, jehož český překlad je v nadpisu tohoto článku. Přídavné jméno „spolková“ značí, že se jedná o záležitost celostátní, netýkající se jen některé země, na které je NSR rozdělena. Spolková soutěž v matematice má svůj znak (obr. 1) a je určena pro všechny studenty, kteří navštěvují školu připravující k maturitě. Na rozdíl od naší matematické olympiády soutěží



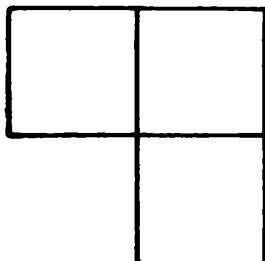
Obr. 1

všichni žáci společně, bez ohledu na třídu, kterou navštěvují. Existuje tedy vlastně jen jedna kategorie. V prosinci jsou vypsány čtyři matematické úlohy a kdo chce, může řešit. Žáci musí úlohy řešit samostatně, učitel jim smí pouze vysvětlit neznámé pojmy a poradit vhodnou literaturu. Pro postup do dalšího kola musí soutěžící poslat řešení alespoň tří úloh přímo na ústředí soutěže, kde se úlohy opraví a stanoví, kdo obdrží první, druhou či třetí cenu I. kola. Ty jsou spojeny s finanční odměnou a do druhého kola postupují ti, kteří získali první nebo druhou cenu. Druhé kolo se koná na podzim dalšího školního roku, takže někteří jeho účastníci se třeba mezitím již stali posluchači vysoké školy. Ve druhém kole dostanou soutěžící opět čtyři úlohy, které řeší doma stejně jako úlohy v I. kole. Vítězové prvních cen druhého kola se účastní 3. kola, které probíhá formou pohovoru dvou matematiků se soutěžícím o jeho matematických zájmech, schopnostech, zkušenostech. Pohovor má ukázat matematické vlohy soutěžícího, ne tedy jen jeho znalosti. Po 3. kole jsou vyhlášeni vítězové celé soutěže, kteří jsou finančně odměněni a při vstupu na vysokou školu obdrží stipendium bez ohledu na zvolený obor studia. Vzhledem k tomu, že soutěž je jednotná pro všechny věkové kategorie, může se některý žák stát vítězem víckrát. A teď se podívejme na některé úlohy posledních ročníků této soutěže.

1. V prvním kole 11. ročníku 1980/81 byla úloha: Čtverec o straně 2^n je stejně jako šachovnice rozdělen v jednotkové čtverce. Jeden

z těchto čtverečků odstraníme. Dokažte, že zbytek je možno pokrýt deskami, které se skládají ze tří jednotkových čtverců, jejichž tvar je znázorněn na obr. 2, přičemž se desky nesmí samozřejmě překrývat.

Řešení: Tvrzení úlohy dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení platí, protože po odstranění jednoho jednotkového čtverce ze



Obr. 2

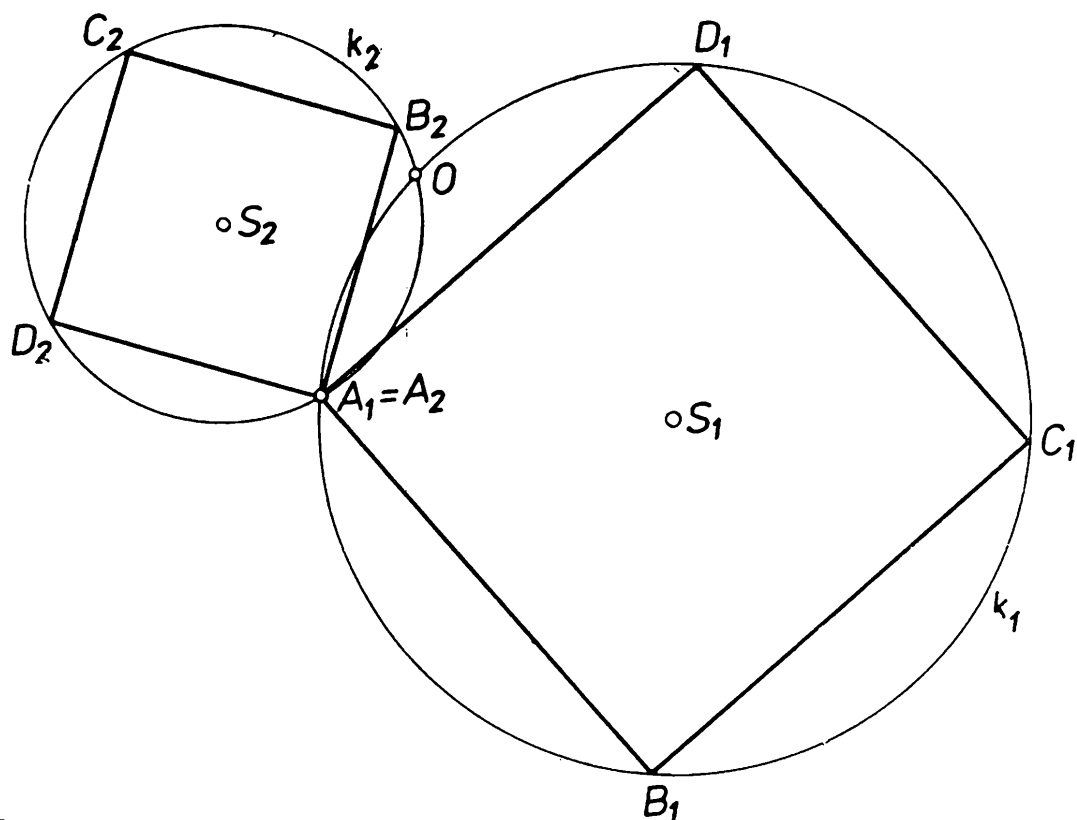
šachovnice tvaru 2×2 dostaneme právě jednu desku, kterými máme zbytek pokrýt. Předpokládejme, že tvrzení platí pro přirozené číslo n , a mějme šachovnici o $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ jednotkových čtvercích. Rozdělme ji na čtyři šachovnice o $2^n \times 2^n$ polích tak, že mají společný střed S původního čtverce. Označme tyto části A, B, C, D . Můžeme předpokládat, že odstraněný čtverec je v části A . Její zbytek dovedeme požadovaným způsobem pokrýt podle indukčního předpokladu. Z částí B, C, D vezmeme ty tři jednotkové čtverce, které mají jeden vrchol v bodě S . Ty pokryjeme jednou deskou. Z každé části B, C, D jsme tím vlastně odstranili jeden jednotkový čtverec a zbytky dovedeme opět podle indukčního předpokladu pokrýt. Tím bude pak ovšem pokryt daným způsobem celý velký čtverec o straně 2^{n+1} .

2. Z téhož kola je úloha: Platí-li pro strany a, b, c nerovnostranného trojúhelníku vztah $a + b = 2c$, je spojnice těžiště trojúhelníku a středu kružnice trojúhelníku vepsané rovnoběžná s některou stranou trojúhelníku. Dokažte.

Řešení: Označme ρ poloměr kružnice trojúhelníku vepsané a v výšku na stranu c . Platí $\rho(a + b + c) = 2P = cv$, kde P je obsah trojúhelníku. Dále víme, že těžiště dělí těžnici v její třetině, proto je vzdálenost σ těžiště od strany c rovna $v/3$. Střed kružnice vepsané splývá s těžištěm u trojúhelníku rovnostranného. Vyloučíme-li tento případ, je spojnice uvažovaných dvou bodů rovnoběžná se stranou c právě tehdy, je-li $\rho = \sigma$ (oba body leží totiž uvnitř trojúhelníku), tedy právě tehdy, je-li $a + b = 2c$.

3. V roce 1979 řešili účastníci matematické soutěže NSR úlohu: V rovině jsou dány dva různé čtverce $A_1B_1C_1D_1$ a $A_2B_2C_2D_2$, které mají společný vrchol $A_1 = A_2$ a jsou stejně orientovány. Dokažte, že přímky B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 procházejí jedním bodem.

Řešení: Označme ještě S_1, S_2 středy uvažovaných čtverců a k_1, k_2 kružnice jim opsané (obr. 3). Nechť mají kružnice k_1, k_2 kromě bodu



Obr. 3

A_1 ještě společný bod O . Protože $\sphericalangle A_1S_1B_1 = 90^\circ$, je velikost $\sphericalangle A_1OB_1$ rovna 45° nebo 135° (věta o obvodovém a středovém úhlu). Totéž platí o úhlu A_2OB_2 , a protože $A_1 \equiv A_2$, leží body B_1 , B_2 a O na jedné přímce. Přímka B_1B_2 tedy prochází bodem O a totéž platí o přímkách C_1C_2 , D_1D_2 . Tím je úloha v tomto případě dokázána. Dotýkají-li se kružnice k_1 , k_2 , procházejí uvažované tři přímky bodem dotyku obou kružnic. Úloha se dá lehce zobecnit, čtverce můžeme nahradit podobnými třetivými mnohoúhelníky.

Věříme, že se vám předložené úlohy líbily. Jsou na první pohled těžké, ale nevyžadují vlastně žádné velké znalosti, jen trochu přemýšlení, trochu důvtipu. Takže se mohou prosadit i mladší žáci proti maturantům, jak se v soutěži skutečně již víckrát stalo. A ještě jednu zajímavost. Kromě znaku má spolková soutěž v matematice svůj plakát, jehož motiv se každý rok mění. A návrhy na jeho provedení podávají ti, kteří se mohou zúčastnit soutěže. Vychází se ze stanoviska, že matematika a umění mají mnoho společného.

dr. Leo Boček, CSc.

Pamätná tabuľa akademika Jura Hronca (1881-1959), slovenského matematika, pedagóga a verejného činiteľa

V prvom čísle letošného ročníku Rozhľadů jsme otiskli na str. 23 pamětní desku akademika Jura Hronca. Neuvedli jsme však jejího autora ani místo, kde je deska umístěna. Proto ji otiskujeme ještě jednou i s potřebnými údaji.

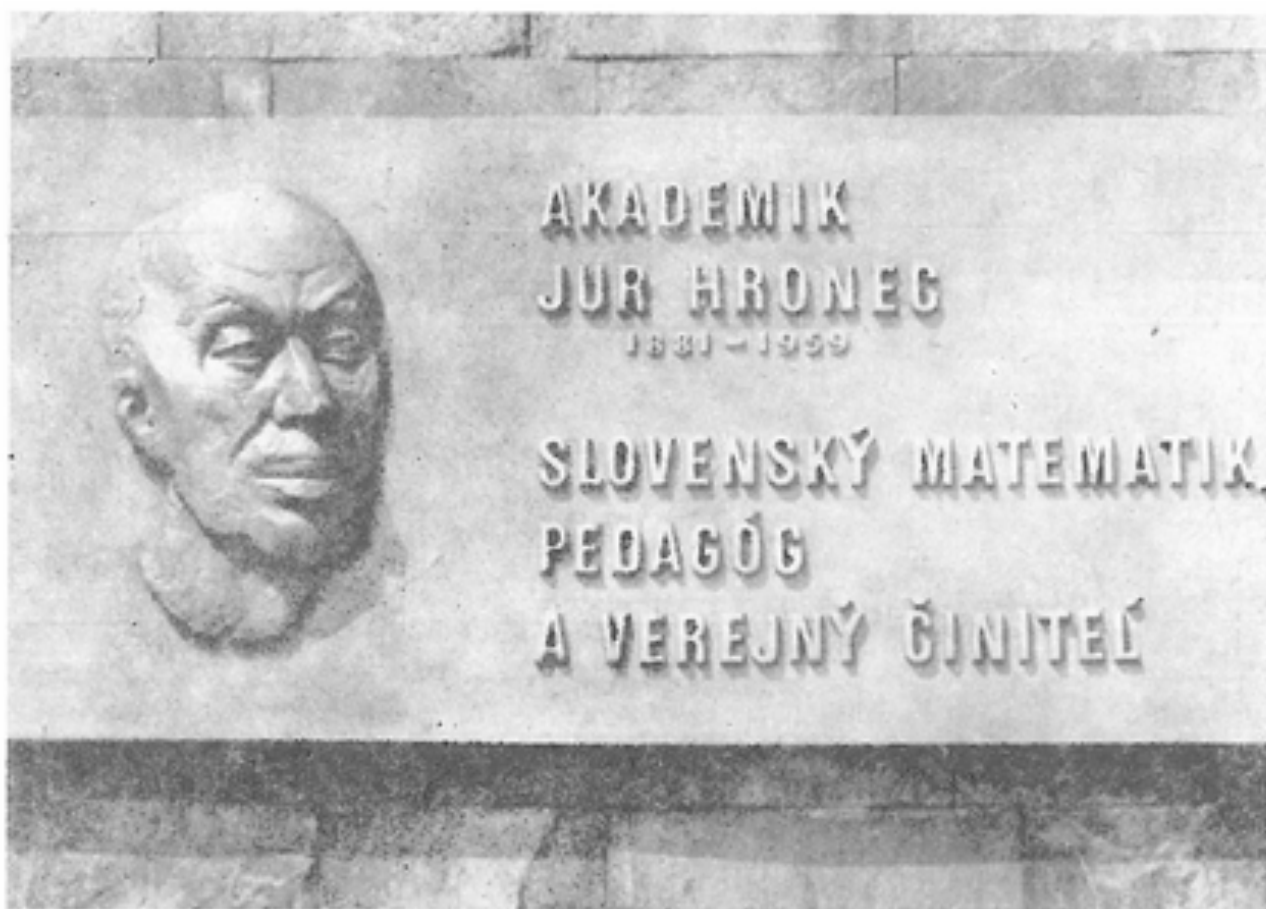
Autor pamätnej dosky:

Rudolf Šipkovský, docent katedry teórie a dejín architektúry kreslenia a modelovania Fakulty architektúry SVŠT v Bratislave.

Doska odhalená na Matematickom pavilóne Matematicko-fyzikálnej fakulty UK v Bratislave

dňa: 18. 5. 1981.

Foto Ludovít Pulc



Z NOVÝCH KNIH

Glade, H. — Manteuffel, K.:

NA ZAČIATKU BOL ABAKUS

Vydala Smena, Bratislava, v roku 1981, v edícii Sputnik. Preklad z nemčiny, strán 216, viaz. Kčs 26,-

Pre tých, ktorí chcú aj v historických súvislostiach poznať cestu výpočtovej techniky tisíročiami, je určená knižka „Na začiatku bol abakus“.

Autori pripravili prehľad vývoja počítania, počtárskych pomôcok, vymenovali osobnosti, ktoré vynachádzali stroje, princípy i metódy. Dozviete sa o prechode od hieroglyfov k číslicovému písmu, o ceste číslic z Indie do Európy. Môžete si pripomenúť počítanie so zručnými prstami, na rováši, pomocou uzlov, na abakuse, s logaritmi a logaritmickým pravítkom. Mená Pascal, Leibniz, Odhner, Čebyšev, Babbage, Hollerith, Aiken, Neumann lemujú cestu k samočinným počítačovým systémom. V závere knižky je niekoľko veľmi jednoduchých po-

znatkov o matematických a logických základoch i konštrukčnej činnosti elektronických počítačov.

Dušan Jedinák

Rebrov, M.:

TAJOMSTVÁ VZDUŠNÉHO OCEÁNU

Vydala Smena, v edícii Pionierska knižnica, Bratislava 1981. Preklad z ruštiny, 125 strán, Kčs 11,-.

Michail Rebrov je vedúci oddelenia vedy, techniky a kozmonautiky v redakcii novín „Krasnaja zvezda“. Veľmi citlivo, pôsobivo a účinne informuje o mnohých nových oblastiach skúmania našej planéty z kozmu. V krátkych článkoch (je ich 21) je ukázaná problematika nových vedných oblastí z hľadiska moderného kozmického výskumu. Knižka bude zaujímavou pre mladých čitateľov, ktorí si chcú priblížiť kozmonautiku ako nový prostriedok na poznanie sveta.

Dušan Jedinák

Vysvětlení efektního experimentu: Cívka a kroužek

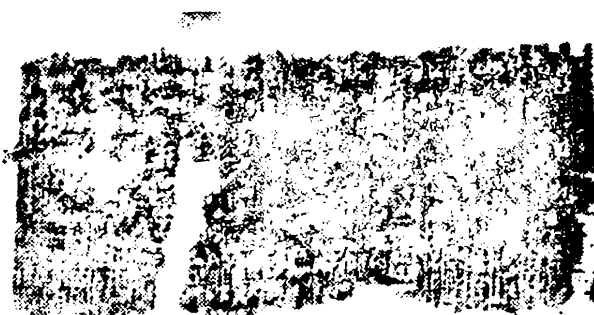
Prochází-li cívkou střídavý proud, vzniká střídavé magnetické pole, které v kroužku indukuje také proud. Magnetické pole tohoto indukovaného proudu je namířeno proti magnetickému poli cívky a síly vzniklé při složení těchto polí mohou kroužek udržet ve vzduchu. Při zapojení proudu dochází k prudkému vzrůstu a pak poklesu proudu v cívce. Tato změna magnetického pole indukuje v kroužku silný proud, jehož magnetické pole je dostatečně silné k vymrštění kroužku.

POHLEDY DO DĚJIN

Moskevský papyrus

Povodí Nilu bylo oblastí vyspělé kultury už na počátku 3. tisíciletí před n. l., kdy se již stavěly velké pyramidy. Texty oslavující panovníky se tesaly do kamene, hospodářské záznamy se psaly na úlomky nádob, nejčastěji však na svitky slepené ze stonků rostliny zvané papyrus. Na tyto svitky psali i žáci písarských škol, na ně opisovali i vzorová řešení úloh s matematickým obsahem.

Nejrozsáhlejší dochované papýry tohoto druhu jsou dnes uloženy v Moskvě (tzv. Goleniščevův papyrus) a v Londýně (tzv. Rhindův papyrus). Na obrázku vidíte záběr části Moskevského papýru, který pochází z doby kolem r. 1850 před n. l.; je patrna struktura materiálu a psací hieratické písmo, pod ním je přepis textu v hieroglyfech. Jak patrně, jde o výpočet obsahu trojúhelníku; na papýru se zachovalo 25 úloh, na porušeném začátku se řešily úlohy o stavbě lodi, další úlohy se týkají obsahu obdélníků, trojúhelníků, a dokonce i objemu komolého jehlanu se čtvercovými podstavami. Udivu-



je, že text pomocí číselných údajů popisuje výpočet podle našeho

vzorce $V = \frac{1}{3}v(a^2 + ab + b^2)$.

Další úlohy se týkají řešení rovnic s jednou neznámou; většinou jde o výpočty vázané na množství obilí potřebného k upečení potřebného množství chleba, resp. uvaření požadovaného množství piva. O druhém papýru si povíme příště.

J. Šedivý

SPN vydalo

Hlinka, Všetečka: DVACET TISÍC MIL OD VERNA

Autor, spisovatel Bohuslav Hlinka, byl postaven před velmi těžký úkol: informovat co největší počet mladých lidí a jejich rodičů o studiu strojírenských oborů, ukázat jim atraktivnost těchto oborů a probudit jejich zájem o studium na některé katedře strojírenské fakulty ČVUT. Zvolil beletristický, popularizující přístup. Protože charakteristiku jednotlivých oborů, jejich zajímavost, význam demonstroval na různých situacích a z různých pohledů, je každá z 30 kapitol zajímavá a vždy upoutá. Váz. Kčs 41,—

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12 Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačková 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1982.

ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

1921/22

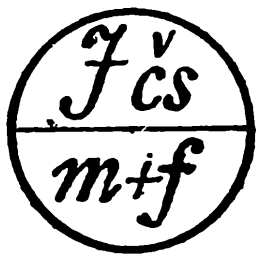
1981/82

*** 60 let**

(10)

**ROČNÍK 60, 1981/82
ČERVEN**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc,
doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Vladimír
Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr.
Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

E. Kraemer: Trisekce úhlu pravítkem a kružítkem	433
S. Horák: Z geometrie trojúhelníka .	436
V. Mráz: Geometrie ozubeného soukolí	439
I. Belošovič: Skôr než zapnem merací prístroj	448
M. Florek: Komplexné využitie jadrových reaktorov	451
I. Kraus: Sedmdesáté výročí Laueova ob- jevu difrakce rentgenového záření na krystalech a životní jubileum prof. A. Kochanovského . . .	459
J. Šedivý: Giuseppe Peano – matematik a tvůrce jazyků .	461
A. Lesová: O jedné rektifikaci kružnice	464
J. Maláč: Řeště kryptogramy .	465
Úlohy pro 1. kolo XXIV. ročníku FO .	466
Z nových knih .	475
Pohledy do dějin .	. 3. str. obálky

Trisekce úhlu pravítkem a kružítkem

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Pravděpodobně jste slyšeli nebo četli o těchto třech klasických problémech konstrukční geometrie, jimiž se zabývali už řečtí matematikové ve starověku:

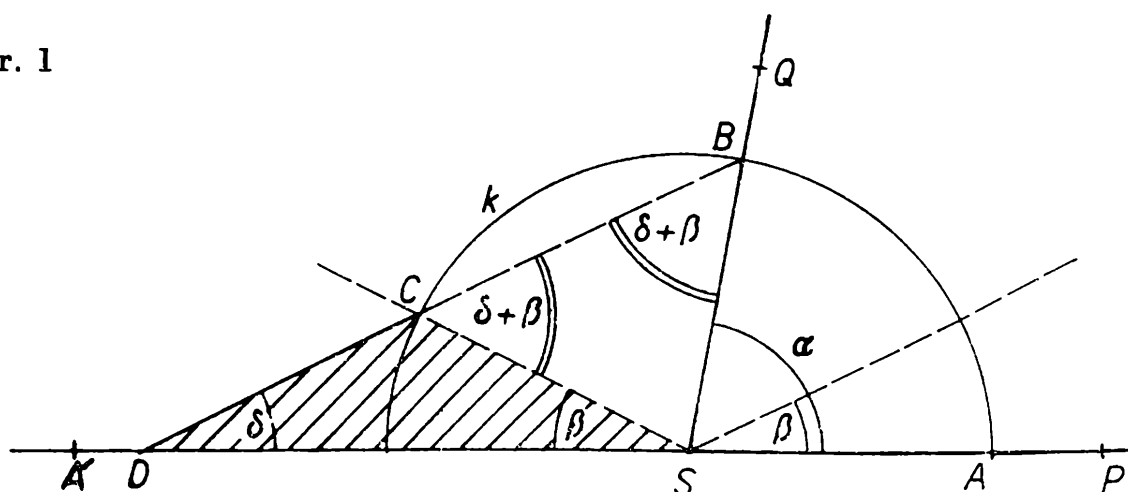
Rozdělit libovolný daný úhel na tři shodné úhly (*trisekce úhlu*). Sestrojit hranu krychle, jejíž objem je dvakrát větší než hrana dané krychle (*zdvojení krychle*). Sestrojit čtverec, který má též obsah jako daný kruh (*kvadratura kruhu*).

Asi také víte, že tyto tři úlohy nelze řešit tehdy, jestliže použijeme jenom obyčejné pravítko a kružítko. Tato formulace, pokud není doplněna přesným výkladem jejího smyslu, není ovšem pravdivá. Přesvědčíme se o tom na řešení úlohy o trisekci úhlu provedeném způsobem, který najdeme už v díle vynikajícího starověkého učenice *Archiméda ze Syrakus* (žil v letech 287 až 212 před naším letopočtem).

Pravý úhel dovedeme rozdělit na tři shodné úhly, neboť umíme přesně sestrojit úhel o velikosti 60° i úhel o velikosti 30° . Dovedeme-li rozdělit na tři shodné úhly úhel, jehož velikost je nejvýše 90° , dovedeme rozdělit na tři shodné úhly také libovolný konvexní úhel o velikosti α ($0^\circ < \alpha \leq \leq 180^\circ$). Rozdělíme ho na dva shodné úhly (známou konstrukcí) a jeden z nich potom rozdělíme na tři shodné úhly; grafický součet dvou z nich má velikost $\frac{\alpha}{3}$.

Budiž tedy dán libovolný konvexní úhel PSQ , jehož velikost α je menší než 90° (obr. 1). Opišme kolem jeho vrcholu S kružnici k libovolným poloměrem $r > 0$; její průsečíky s rameny SP , SQ označme po řadě A , B . Prodlužme rameno SP za vrchol S ; tak dostaneme polopřímku SA' opačnou k polopřímce SA . V polorovině SAB sestrojme úhel, jehož jedno rameno je polopřímka SA' a jehož velikost je $\beta = \frac{\alpha}{3}$; jeho druhé rameno protíná kružnici k v bodu C . Protože je $\alpha < 90^\circ$, je $\beta < 30^\circ$, takže polopřímka SC rozděluje úhel $A'SB$; z konstrukce polopřímky SC plyne, že bod $C \neq B$ má od přímky SA menší vzdálenost než bod B . Proto polopřímka BC protne přímku SA v bodu D , který leží vně oblasti omezené kružnicí k na polopřímce SA' .

Obr. 1



Podle konstrukce je

$$|\sphericalangle CSD| = \beta = \frac{\alpha}{3}; \quad (1)$$

budiž ještě

$$|\sphericalangle CDS| = |\sphericalangle BDS| = \delta. \quad (2)$$

Podle věty o vnějším úhlu trojúhelníku užití na trojúhelník DSC je $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CDS| + |\sphericalangle CSD|$, čili podle (2) a (1) je

$$|\sphericalangle BCS| = \delta + \beta. \quad (3)$$

Protože trojúhelník BCS je rovnoramenný se základnou BC , je úhel CBS shodný s úhlem BCS , takže podle (3) je

$$|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle DBS| = \delta + \beta. \quad (4)$$

Podle věty o vnějším úhlu trojúhelníku aplikované na trojúhelník BSD je $\alpha = |\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle DBS| + |\sphericalangle BDS|$, tj. podle (4) a (2) je

$$\alpha = \delta + \beta + \delta;$$

z toho plyne, že je $2\delta = \alpha - \beta$, a tedy podle (1) je

$$\delta = \frac{\alpha}{3} = \beta.$$

Trojúhelník CDS je tedy rovnoramenný se základnou DS ; proto je $|CD| = |CS| = r$. Z toho plyne tato trisekce daného úhlu PSQ o velikosti α ($0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$).

1. Opíšeme kolem jeho vrcholu S kružnici k libovolným poloměrem $r > 0$; její průsečíky s rameny SP , SQ označíme po řadě A , B . Rameno SA prodloužíme za bod S .

2. Na hraně obyčejného pravítka vyznačíme krajní body C , D úsečky o délce $r = |SA|$.

3. Toto pravítko položíme na nákresnu tak, aby jeho hrana s vyznačenými body C , D procházela bodem B , aby bod C byl bodem kružnice k (v polorovině SAB) a bod D byl bodem polopřímky opačné k polopřímce SA .

Snadno dokážeme, že úhel SDB má velikost $\delta = \frac{\alpha}{3}$. Podle konstrukce je trojúhelník DSC rovnoramenný se základnou DS ; proto jsou úhly CDS , DSC shodné, čili $\beta = \delta$; je tedy $\beta + \delta = 2\delta$, což je velikost vnějšího úhlu BCS trojúhelníku DSC . Z rovnoramenného trojúhelníku BCS plyne, že velikost úhlu CBS je též 2δ . Vnější úhel ASB (tj. daný úhel PSQ) trojúhelníku BSD má tedy velikost $\alpha = \delta + 2\delta = 3\delta$.

Poznámka. Snadno se přesvědčíme, že popsaná konstrukce platí pro každý úhel PSQ , jehož velikost je menší než 135° ; je-li $|\sphericalangle PSQ| = 135^\circ$, je $C = B$ a přímka BD je tečnou kružnice k v bodu $C = B$.

Sestrojili jsme tedy úhel SDB , jehož velikost je třetinou daného úhlu PSQ . Úlohu jsme rozřešili jen s použitím pravítka a kružítka; s pravítkem jsme přitom ovšem zacházeli jinak, než jsme zvyklí. A v tom je jádro věci. Konstrukcí „pomocí pravítka a kružítka“ se totiž od dob Euklidových rozumí jen toto použití těchto pomůcek:

1. Narýsování přímky procházející dvěma danými body.
2. Sestrojení průsečíku dvou přímek.
3. Narýsování kružnice, je-li znám její střed a poloměr.
4. Sestrojení průsečíku kružnice s přímkou nebo s jinou kružnicí.
5. Každý prvek (bod, přímka nebo kružnice) se pokládá za známý jen tehdy, je-li dán nebo je-li sestrojen podle 1 až 4.

Takto prováděným konstrukcím říkáme *euklidovské*; je to vhodnější označení než konstrukce pravítkem a kružítkem. Naše konstrukce, při níž jsme použili jen pravítka a kružítka, není tedy euklidovská.

Úlohy, které nelze řešit euklidovsky, se dají řešit různými přibližnými konstrukcemi, tj. konstrukcemi, které vedou k výsledku, který se velmi málo liší od výsledku přesného. Při rýsování obrázků obvyklé (tj. poměrně malé) velikosti se výsledek některé takové konstrukce nedá prakticky rozeznat od přesného výsledku. Autoři takových konstrukcí z toho často usuzují, že rozřešili dosud neřešitelný problém; některé takové autory jsme poznali i v redakci Rozhledů.

Na závěr ještě připomeňme, že pojem euklidovské konstrukce je dost umělý. Kružítka a pravítka jsou jistě nejjednodušší pomůcky pro přesné rýsování, avšak omezení konstrukcí jen na tyto pomůcky není podstatou geometrie. Mnohé úlohy, které nelze řešit euklidovskými konstrukcemi (např. zdvojení krychle), se dají rozřešit, jestliže použijeme pravítka s dvěma pravými úhly. Kromě toho existují pomůcky, jichž lze použít k přesnému narýsování elips, hyperbol nebo ještě složitějších křivek.

Pomocí takových pomůcek lze podstatně rozšířit počet úloh, které lze přesně graficky řešit.

Euklidovské konstrukce mají však značný význam historický. Snaha o řešení některých problémů těmito konstrukcemi totiž podstatně přispěla k rozvoji matematiky. Po staletí se opakujících marných pokusech o jejich řešení vznikla konečně domněnka, že jsou patrně neřešitelné. To vedlo přirozeně k otázce, jak dokázat, že takový problém je neřešitelný. Tuto otázku se podařilo rozřešit až s rozvojem algebry v 19. století, a to tím, že metodami analytické geometrie se tyto úlohy převedly na úlohy algebraické; o možnosti jejich řešení se potom už dá rozhodnout. K tomu je ovšem třeba mít poněkud větší znalosti algebry, než jaké má absolvent střední školy.

Z geometrie trojúhelníka

STANISLAV HORÁK, Praha

Jestliže je dána kružnice k a bod $V (V \notin k)$, pak existuje nekonečně mnoho trojúhelníků vepsaných dané kružnici, které mají v bodě V své ortocentrum (ortocentrum je průsečík výšek trojúhelníku). Tato věta je jádrem tohoto článku, ale dřív, než ji dokážeme, odvodíme jednu pomocnou větu, kterou v dalším budeme potřebovat.

Pomocná věta. Je dán trojúhelník nikoliv pravoúhlý; jeho opsaná kružnice je k a jeho ortocentrum je V . Body, které jsou souměrně sdružené s ortocentrem V podle všech stran daného trojúhelníka, leží na kružnici k .

Důkaz provedeme zvlášť pro ostroúhlý a zvlášť pro tupoúhlý trojúhelník. Velikosti úhlů v trojúhelníku označíme obvyklým způsobem α, β, γ .

a) Trojúhelník ABC je ostroúhlý (obr. 1a). Bod souměrně sdružený s ortocentrem V podle strany BC označme V_1 . Z jeho konstrukce plyne, že $\triangle VBV_1$ je rovnoramenný ($|BV| = |BV_1|$) a že čtyřúhelník $CVBV_1$ je deltoid. Odtud

$$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BV_1C| = \alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$$

To však znamená, že čtyřúhelník $CABV_1$ je tětiový a že mu lze opsat kružnici. Avšak vrcholy A, B, C leží na kružnici k , a proto i bod V_1 leží na této kružnici.

Tím jsme dokázali, že pomocná věta platí pro bod V_1 . Důkaz se však úplně stejně provádí pro bod V_2 (V_3), který je souměrně sdružený s orto-

To však znamená, že $|\sphericalangle BEC| = 90^\circ$, tj. úsečka BE je výška trojúhelníka ABC .

b) V případě, že bod V leží vně kružnice, se důkaz provádí obdobně, a proto jej přenechávám čtenářům (obr. 2b).

Cvičení

1. Existují v množině $(k; V)$ rovnoramenné trojúhelníky?
2. Ukažte, že množina všech bodů D (viz obr. 2a, b) je kružnice, jejíž poloměr je dvakrát menší než poloměr kružnice k .
3. V obr. 1a i 1b jsou trojúhelníky ABV , BCV , CAV , ABC . Najděte ortocentra těchto čtyř trojúhelníků. Jakou větu můžete vyslovit?
4. Dovedete vysvětlit, proč jsme a) v 1. části článku vyloučili pravoúhlý trojúhelník, b) v 2. části článku vyloučili případ $V \in k$?
5. Jestliže ortocentrum V nahradíte těžištěm T , dostanete množinu trojúhelníků $(k; T)$. Vyšetřete ji. Může být těžiště T na kružnici nebo vně kružnice?
6. Co vyplňují středy stran všech trojúhelníků množiny $(k; T)$?

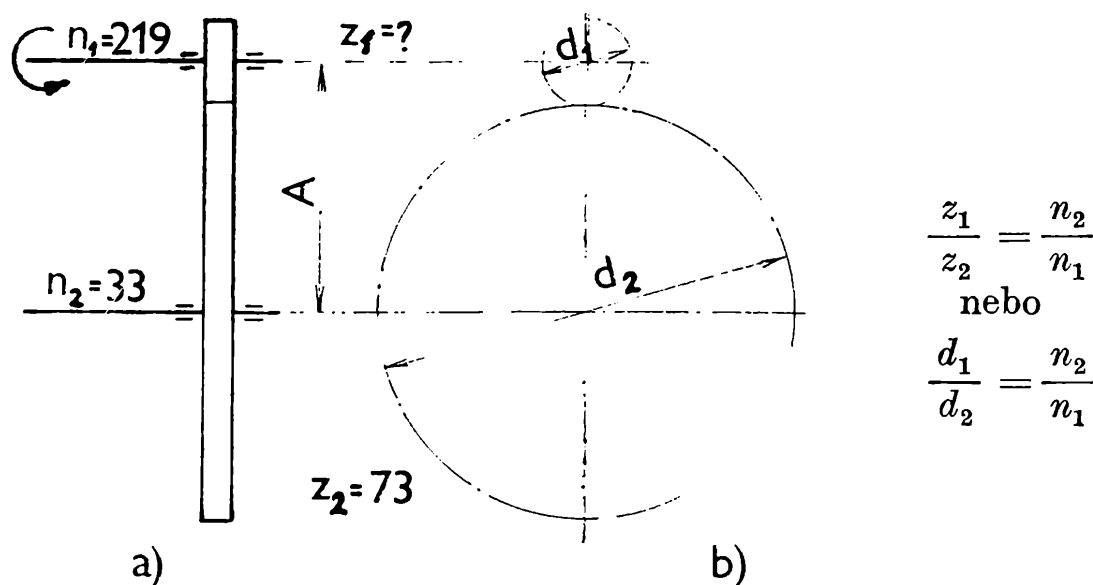
Geometrie ozubeného soukolí

Doc. Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

Převod otáčivého pohybu spojený s přenosem krouticího momentu, který se uskutečňuje *ozubeným soukolím*, patří již dlouho k technickým aplikacím ve vyučování matematice, popř. fyzice. Procvičují se na nich výpočty se zlomky, úlohy na dělitelnost, určování nejmenšího společného násobku dvou přirozených čísel nebo i řešení lineárních rovnic. Úlohy na jednoduchý výpočet převodů ozubených soukolí nacházíme i v psychologických testech inteligence a v testech psychotechnických. Případné obrázky, které takové úlohy doplňují, bývají jen schematické a neumožňují zasvěcenější pohled do *polytechnické* problematiky uváděných úloh. V dnešním článku rozšíříme pohled na ozubená soukolí a všimneme si především jednoduché geometrie tvaru zubů nejběžnějších tzv. *vnějších čelních ozubených kol s příkými zuby*.¹⁾ S tím také souvisejí vcelku jednoduché výpočty a technické kreslení (rýsování) čelních ozubených kol jako strojních součástí.

¹⁾ Na rozdíl od uvedených ozubených kol jsou i ozubená kola se šikmými zuby, kuželová ozubená kola, která přenášejí rotační pohyb mezi šikmo postavenými a protínajícími se osami atd. Podrobné rozdělení ozubených soukolí a další podrobnosti čtenář najde např. v doporučené Československé státní normě ČSN 01 4602 z roku 1961.

Pro názornost vyjdeme z běžné školní učebnicové úlohy, v níž se např. požaduje stanovit počet zubů z_1 hnacího ozubeného kola, jehož počet otáček $n_1 = 219 \text{ min}^{-1}$, jestliže hnané kolo s počtem zubů $z_2 = 73$ má počet otáček $n_2 = 33 \text{ min}^{-1}$. Taková úloha bývá doplněna obrázkem 1a) nebo 1b), vedle něhož jsme uvedli základní vztahy sloužící k výpočtu počtu zubů $z_1 = \frac{z_2 n_2}{n_1}$; po dosazení daných číselných hodnot vychází, že hnací ozubené kolo má $z_1 = 11$ zubů a ovšem také stejný počet zubních mezer.



Obr. 1

Položme si otázku, kterou si klade konstruktér, když navrhuje převod z uvedené úlohy. Jak velká je vzdálenost A os uvažovaných dvou ozubených kol s počty zubů $z_1 = 11$ a $z_2 = 73$? Obdobná je otázka na *průměry roztečných kružnic* ozubených kol, které jsme na obr. 1b) okótováli d_1 a d_2 . Je zřejmé, že obvodová rychlost je na roztečných kružnicích spolu zabírajících kol stejně velká. V našem případě pro obvodovou rychlost platí:

$$\pi d_1 n_1 = \pi d_2 n_2$$

a z této rovnosti vyplývá druhá rovnost, uvedená vedle obr. 1. Snadno nahlédneme, že průměr roztečné kružnice ozubeného kola a počet jeho zubů jsou přímo úměrné. Velikost zubů soukolí, které konstruktér volí, popř. kontroluje pevnostním výpočtem, je stejná. U malých přístrojů jemné mechaniky se volí malé zuby (budík), u větších strojů se volí zuby větší (rychlostní skříň automobilu, výtahu, jeřábu).

Dříve než odpovíme na položenou otázku na vzdálenost os A , všimneme si obr. 2, na němž je čerchovanou čarou znázorněna roztečná kružnice ozubeného kola, mající průměr d . Největší průměr D ozubeného kola, tedy průměr válce, z něhož se bude ozubené kolo vyrábět, je prů-

měr *hlavové kružnice*. Vzdálenost dvou sousedních zubů, tzv. *rozteč* t se měří na roztečné kružnici. Tloušťka zubu (i zubní mezery) je polovina rozteče, tedy $\frac{t}{2}$.

Sledujme úvahu, která je základem k výpočtu rozměrů ozubeného kola, resp. jeho ozubení. Má-li ozubené kolo z zubů, pak pro obvod O roztečné kružnice platí jednak $O = \pi d$, jednak $O = tz$; z porovnání obou stran těchto rovností plyne

$$\pi d = tz, \quad (1')$$

z čehož vyjádříme d :

$$d = \frac{t}{\pi} z. \quad (1'')$$

Označíme-li v (1'') zlomek $\frac{t}{\pi}$ jako *modul* m , tedy

$$m = \frac{t}{\pi}, \quad (2)$$

nabude vztah (1'') tvaru $d = mz$. (1)

Průměr d roztečné kružnice ozubeného kola je tedy součinem zvoleného modulu m a vypočteného nebo daného počtu zubů z , jak udává vzorec (1). Z rovnosti (2) můžeme ovšem vypočítat i rozteč t :

$$t = \pi m. \quad (2')$$

Volba modulu m je význačnou charakteristikou ozubení, z níž vycházejí nejen základní rozměry ozubeného soukolí, ale také geometrie, kinematika a dynamika ozubení, a proto se velikost modulu vždy udává na technickém (dílenském) výkrese ozubeného kola. Na obr. 2 je okótována *výška* h *zubu*, resp. *hloubka* zubní mezery:

$$h = h_1 + h_2, \quad (3')$$

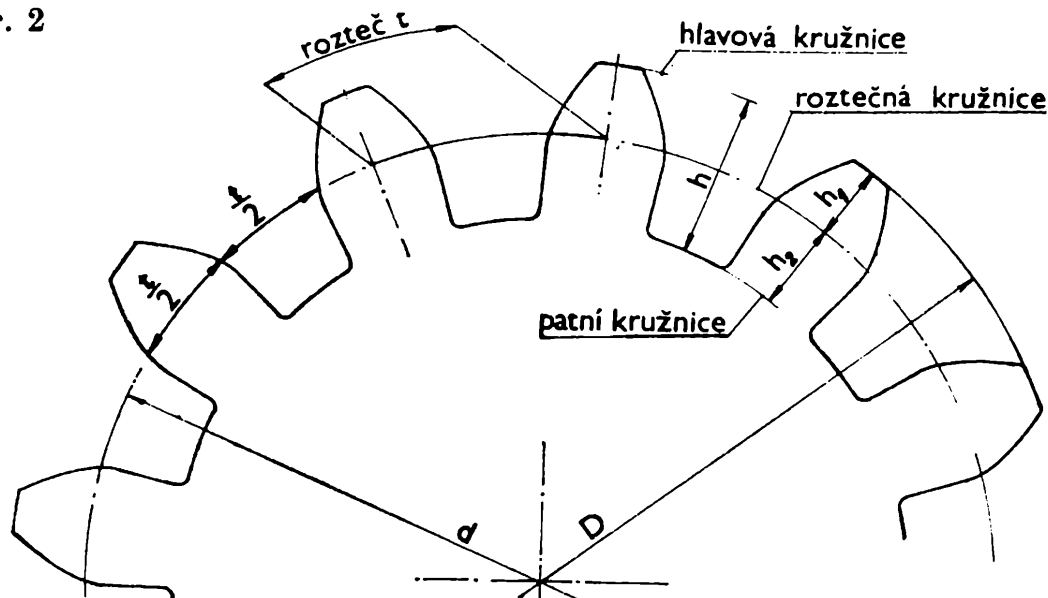
kde $h_1 = m$, $h_2 = m + \frac{m}{6}$,

takže platí vzorce $h \doteq 2,17 m$, resp. $h \doteq m + 1,17 m$. (3)

Na základě uvedených vztahů snadno určíme nebo jen odhadneme modul ozubeného kola. Změříme-li výšku zubu, např. $h = 10,85$ mm, má toto ozubené kolo modul $m \doteq \frac{10,85}{2,17}$, čili $m \doteq 5$ mm.²⁾

²⁾ Na technických výkresech se rozměry zpravidla rozumějí v milimetrech, které však se na výkres nezapisují. To platí i o rozměrech modulu $m = 5$ mm. Na výkrese se zapíše jen $m = 5$. Této zásady se nadále přidržíme i my.

Obr. 2



Při technickém kreslení ozubeného kola postupujeme tak, že poloměr $\frac{d}{2}$ roztečné kružnice vypočtený podle vzorce (1) zvětšíme o modul m , čímž dostaneme největší poloměr $\frac{D}{2}$ hlavové kružnice. Platí tedy, že

$$\frac{D}{2} = \frac{d}{2} + m, \text{ a z toho je}$$

$$D = d + 2m; \quad (4)$$

využijeme-li rovnosti (1), dostaneme též

$$D = m(z + 2). \quad (4')$$

Záběr páru ozubených kol s počty zubů $z_1 = 20$, $z_2 = 52$ a $m = 2,5$ je na obr. 3.³⁾ Na tomto obrázku je zakótována vzdálenost os $A = 90$ spolu zabírajících ozubených kol, pro niž ovšem platí rovnost

$$A = \frac{d_1 + d_2}{2}, \quad (5)$$

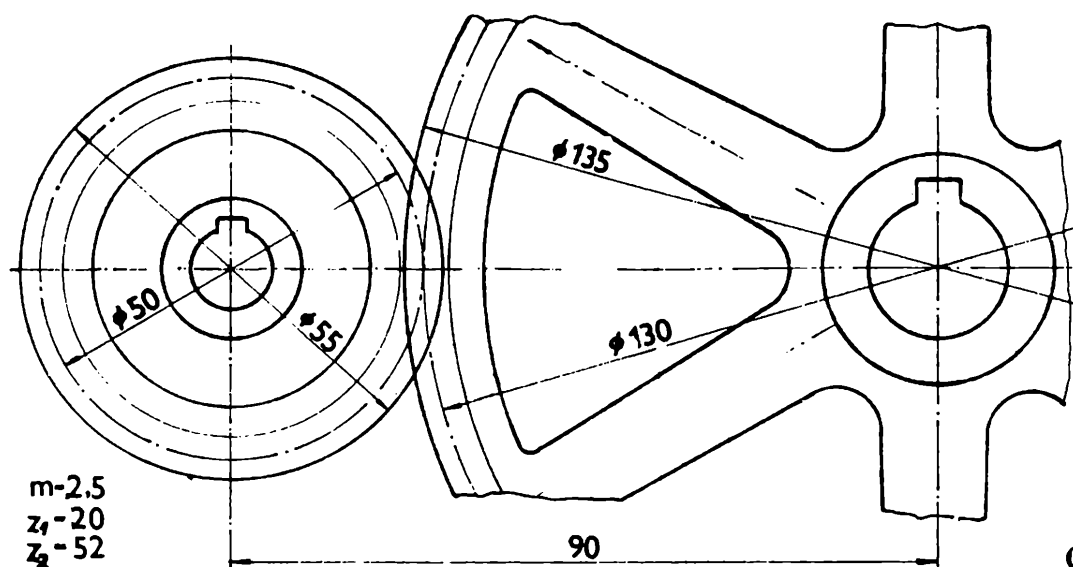
resp. při použití vzorců (1) a (2) dostaneme pro vzdálenost os páru ozubených kol rovnosti

$$A = m \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad A = \frac{t}{\pi} \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (5')$$

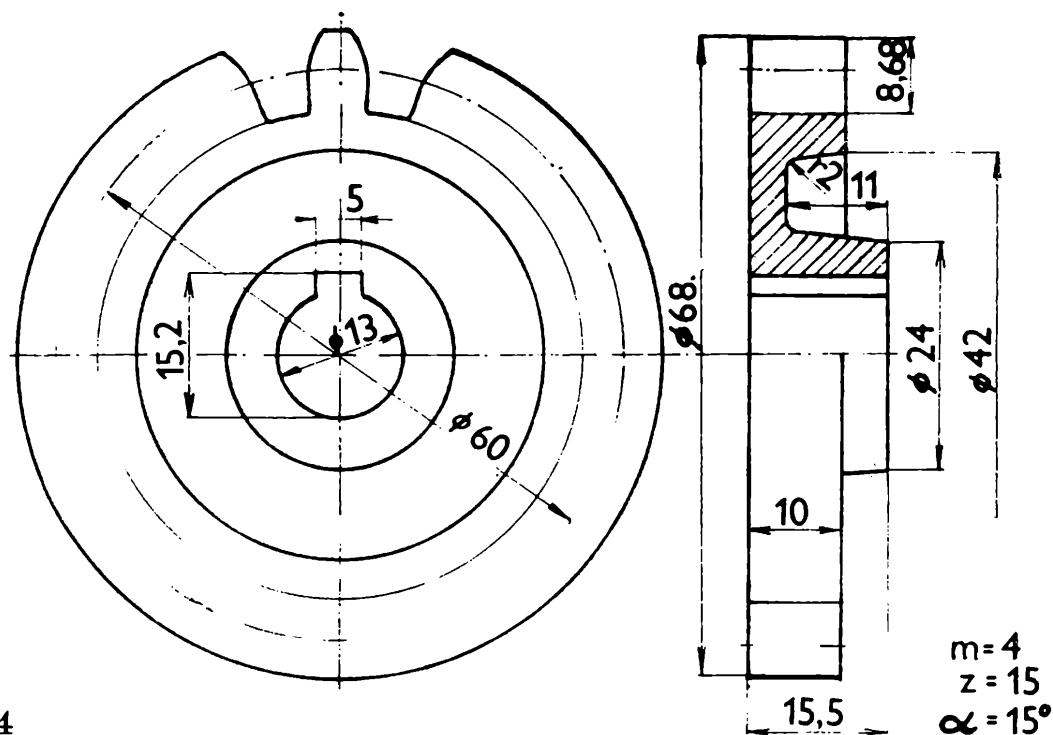
Příslušné výpočty rozměrů soukolí z obr. 3 jsou:

$$\begin{aligned} d_1 &= mz_1 & d_1 &= 2,5 \cdot 20 = 50 \\ d_2 &= mz_2 & d_2 &= 2,5 \cdot 52 = 130 \end{aligned}$$

³⁾ Velmi často se menší kolo ozubeného soukolí nazývá pastorek.



Obr. 3



Obr. 4

$$D_1 = d_1 + 2m$$

$$D_2 = d_2 + 2m$$

$$A = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

$$h = 2,17 m$$

$$D_1 = 50 + 2 \cdot 2,5 = 55$$

$$D_2 = 130 + 2 \cdot 2,5 = 135$$

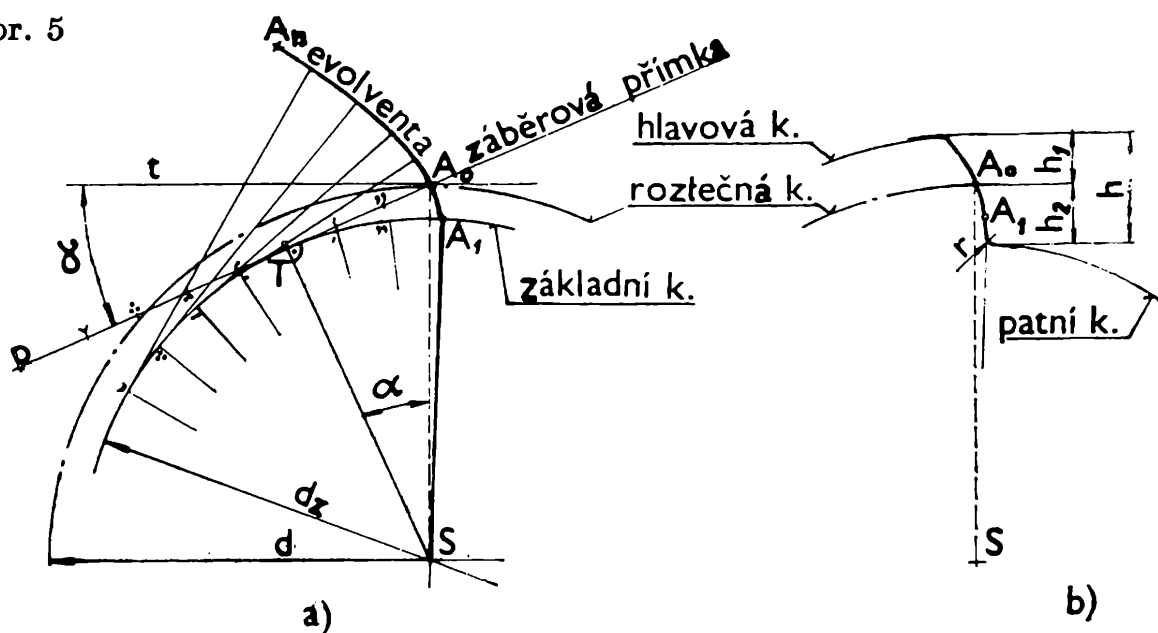
$$A = \frac{50 + 130}{2} = 90$$

$$h = 2,17 \cdot 1,5 = 3,255$$

Technický výkres čelního ozubeného kola s počtem zubů $z = 15$ a $m = 4$ je na obr. 4. O kótě $\alpha = 15^\circ$ na výkrese uvedené bude ještě řeč.

Nyní vyšetříme profil zubů (zubových obrysů), které jsou vyrobeny na obvodech ozubených kol. Nejčastěji se používá tzv. *evolventního ozubení*, kde základem profilu zubu je křivka zvaná (kruhová) *evolventa*.

Obr. 5



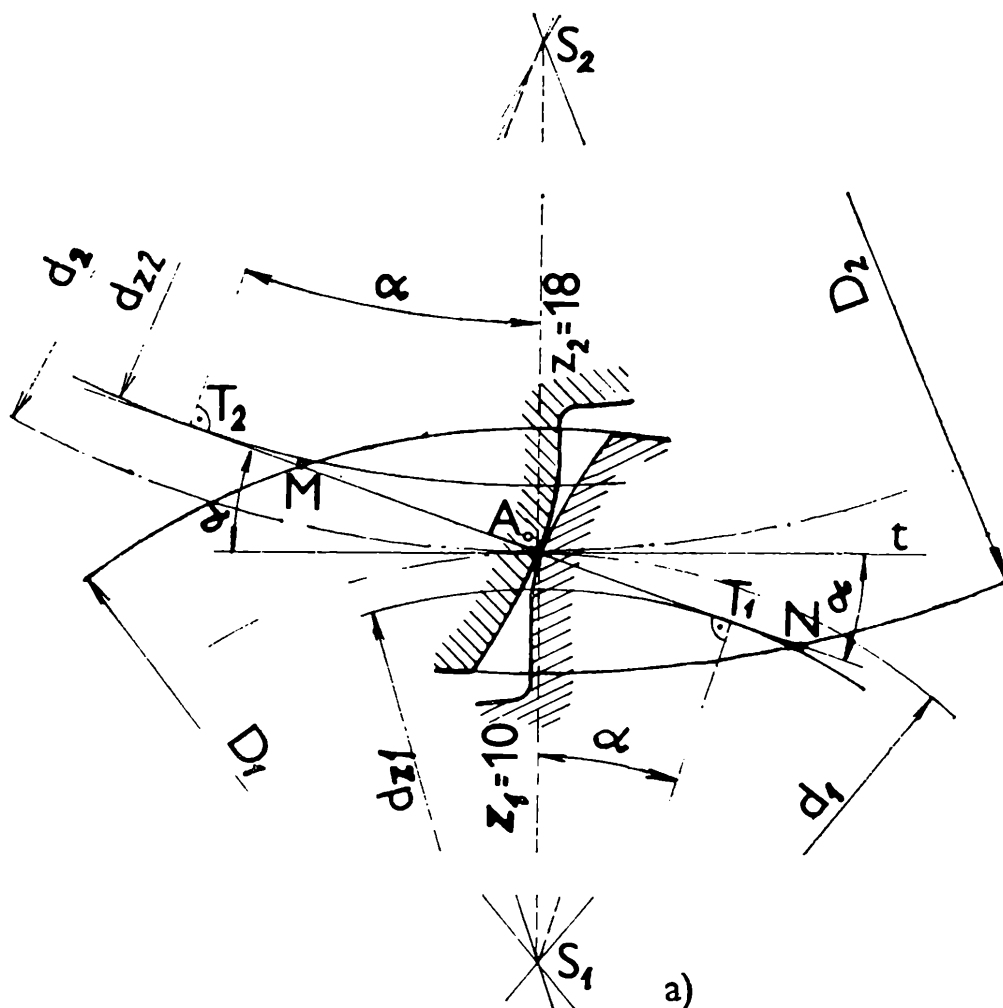
Evolventa vznikne odvalováním přímky po kružnici. Názorně si čtenář představí evolventu jako rovinnou křivku, kterou opisuje koncový bod napjaté nitě odvíjející se z cívky. Odvalující přímka se zde nazývá záběrová přímka. Na obr. 5 a je nakreslena evolventa, již opisuje *tvorící bod* A_0 na *záběrové přímce* p . Záběrová přímka p svírá s tečnou t roztečné kružnice tzv. *záběrový úhel* α , který se volí 15° nebo 20° . Tato záběrová přímka p se odvaluje po *základní kružnici*, jejíž průměr získáme jako část kolmice spuštěné ze středu S ozubeného kola na záběrovou přímku p . Patou kolmice je bod T ; délka úsečky ST je poloměr základní kružnice s průměrem d_z , pro nějž platí:

$$d_z = d \cdot \cos \alpha. \quad (6)$$

Vraťme se k obr. 5a), na němž je tvar evolventy procházející body A_1, A_0, A_n vyšetřen. Začátek této evolventy a část na ni navazující spojnice A_1S tvoří obrys profilu zubu, resp. zubní mezery ozubeného kola. Podrobněji je tento profil znázorněn a okótován v obr. 5b). Z pevnostních důvodů je přechod mezi bokem zubu a patří kružnicí zaoblen polo-

měrem $r < \frac{m}{6}$.

Dále uvidíme, že u ozubených kol s větším počtem zubů je tvar zubu utvořen jen evolventou, takže přímková část odpadá. Zejména to je dobře patrné u ozubených kol se značně velkým počtem zubů; u těchto ozubených kol má evolventa také jen „málo zaoblený“ tvar. U ozubeného hřebenu, na který se můžeme dívat jako na ozubené kolo s nekonečně velkým počtem zubů, přechází evolventa v přímku, jak uzazuje obr. 7 (ozubený hřeben je vlastně segmentem ozubeného kola s nekonečně velkým počtem zubů). Ozubený hřeben na rozdíl od ozubeného kola ovšem nekoná rotační, ale přímočarý pohyb.



Obr. 6

Vyšetření profilu zubů dvou spolu zabírajících ozubených kol o nesterajném počtu zubů je provedeno jednak na obr. 6a) ($z_1 = 10$, $z_2 = 18$), jednak na obr. 7, kde pastorek má $z_1 = 40$ zubů a místo druhého kola je záběr uskutečněn s ozubeným hřebenem ($z_2 = \infty$). Uvážíme-li tloušťku zubu, která je polovinou rozteče $t = \pi m$, tedy $\frac{t}{2}$, a také osovou symetrii profilu zubu, pak můžeme tvar ozubení narýsovat, jak také ukazuje obr. 2 a obr. 7.

Při vyšetřování profilu evoventních ozubených kol s malým počtem zubů jsou tyto zuby podříznuty, což z pevnostních důvodů je nevýhodné, a proto se záběrový úhel α u těchto kol volí 20° , čímž se podříznutí zubů zmenší, popř. odstraní. Již jsme uvedli, že u kol s velkým počtem zubů je profil zubu vytvořen jen evolventou, protože bod A_1 , v němž by evolventa navazovala na přímku, padne až pod obvod patní kružnice, popř. s ní splyne — viz obr. 5. Dochází k tomu, když průměr základní kružnice $d_z = d \cos \alpha$ (vzorec (6)) je roven nebo je menší než průměr d_p kružnice patní $d_p = d - 2,33 m$ (viz rovnici (3)). To vyjadřuje vztah

$$d \cos \alpha \leq d - 2,33 m,$$

V dnešním článku jsme ukázali jen základní charakteristiky a vztahy „normálního“ evolventního ozubení. Stranou jsme ponechali výpočty a zásady, které souvisejí s výrobou ozubení a které se také promítají do geometrie ozubení, stejně jako korigované ozubení, kde z důvodu lepšího záběru i z hlediska pevnosti zubů, zvláště u malých pastorků, se ozubení ještě dále upravuje. To však už je úzce spjato s řadou způsobů výroby ozubených soukolí.

Hodlá-li se čtenář důkladně s vyloženou problematikou seznámit, může si profil některých ozubených soukolí propočítat a narýsovat. Např. se může pokusit navrhnout převod ozubených kol z úvodního příkladu, avšak s touto omezující podmínkou: a) Vzdálenost os nesmí být větší než 30 mm; b) vzdálenost os musí být větší než 186 mm; může stanovit i obvodové rychlosti obou převodů (uvažují se průměry roztečných kružnic). Nechť si dále vyšetří tvar ozubení pro evolventní soukolí $z_1 = 25$, $z_2 = 114$ a $m = 3$ jednak při velikosti záběrového úhlu $\alpha = 15^\circ$, jednak při $\alpha = 20^\circ$; může také vypočítat délku záběrové čáry u obou případů.

Na závěr ještě poznamenejme, že kromě evolventního ozubení, o kterém jsme v našem článku pojednávali, se používá tzv. cykloidního ozubení, o němž jsme nejednali. Jeho základem jsou rovinné křivky zvané *cykloidy*, resp. *epicykloida* a *hypocykloida*. Vzniknou jako stopy bodu tvořící kružnice, která se valí po přímce, resp. vně nebo uvnitř kružnice základní. Profil boků zubů cykloidního ozubení je výrobně náročnější, např. tolerance vzdálenosti os A cykloidního soukolí musí být menší než u soukolí evolventního. To způsobuje jeho mnohem řidší používání.

FYZIKA

Skôr než zapnem merací prístroj

Ing. IVAN BELOŠOVIČ, Žilina

Používanie vreckových kalkulačiek pri vyučovaní matematiky, fyziky aj chémie sa stáva už pomaly každodennou záležitosťou. Mnohí z Vás sú zaujatí presnosťou počítania, rýchlosťou aj účelnosťou tohoto nového pomocníka študentov. Dá sa naň v každom prípade spoľahnúť. Čo znamenajú vlastne čísla vypočítané na mnoho desatinných miest? Má vždy význam počítat s veľkou presnosťou?

V ďalších riadkoch nášho článku sa chceme formou rozhovoru dvoch bratov, žiaka strednej školy *Janka* a poslucháča vysokej školy *Miška*, zamyslieť nad problémom, kedy má význam využiť mimoriadnu presnosť vypočítaných výsledkov, ktoré sme dostali pomocou kalkulačky. Ide tu o problém: Ako hodnotiť názor Janka, ktorý je mimoriadne nadšený svojou vreckovou kalkulačkou a tvrdí: „Ja si neviem predstaviť počítanie matematických alebo fyzikálnych úloh bez toho, aby som nepoužíval kalkulačku. Jednoducho je to rýchle, nemusím sa vrtať v tabuľkách a hlavne počítam s mimoriadnou presnosťou. Pozri sa (obráti sa na brata Miška) až na 6 desatinných miest!“

Sledujme teraz, aký dojem urobili na Janka výroky jeho brata Miška.
M. To je pravda. Kalkulačka je výborný pomocník. Len pozor na to, aby výsledky ňou vypočítané neboli presným výsledkom z nepresných čísiel.

J. Ako to myslíš? Poďme na to konkrétne. Mám na domácu úlohu vypočítať príklad: „Vypočítajte, aký prúd bude pretekať spotrebičom, ktorý má odpor 14,5 ohmov, keď ho pripojíme k napätiu 60 voltov.“ Použijem Ohmov zákon: $I = U/R$. Dosadím hodnoty odporu a napätia. Prúd potom je $I = 60/14,5 = 4,137931$ ampérov. Keby som to mal vypočítať na papieri, riadne by som sa natrápil. Tak je to dobre vypočítané alebo nie?!

M. Postupoval si správne a aj vďaka kalkulačke je výsledok veľmi presný. Mal by si zaň dostať jednotku.

J. A tak prečo si mi na začiatku chcel spochybniť vypočítané výsledky?

M. Využijem práve tento príklad, aby som ti vysvetlil, čo som mal na mysli. Beriem ho ako praktický príklad, pri ktorom používaš Ohmov zákon k tomu, aby si zistil, aký prúd bude pretekať daným skutočným spotrebičom.

J. Presne taký, aký som vypočítal.

M. Ak spotrebič bude mať presne 14,5 ohmov a zdroj napätia presne 60 voltov, bude ním prechádzať tebou vypočítaný prúd.

J. Tak teda?

M. Upozorňujem ešte raz, že sa mi jedná o praktický príklad a že výsledok si chcem aj overiť meraním. Teraz to už nebude matematika, delenie dvoch čísiel, ale skutočnosť. Pri nej sa mi vynorí mnoho ďalších problémov a otázok. Ak pri meraní nebudeš postupovať správne, môžeš dôjsť k veľmi rozdielnym výsledkom.

J. Ak dobre rozumiem, tak proti mojmu výpočtu niet námietok. Chceš ma len upozorniť na chyby, ktorých by som sa pri jeho laboratórnom overovaní mohol dopustiť.

M. Presne tak. A ešte naviac, aby som ti ukázal, že tvoj „presný“ výsledok sa môže veľmi rozchádzať so skutočnosťou, a preto nemá význam jeho počítanie s presnosťou na mnoho desatinných miest.

- J. Ja tomu Ohmovi verím a som presvedčený, že keď podobný prípad budeme merať, nájdeme metódu, aby namerané a vypočítané výsledky boli totožné.
- M. Vidíš, to je správne. Tak by mal uvažovať každý žiak túžiaci po poznaní. Ale ver, že na to budeš musieť byť dobre teoreticky pripravený. Rozhodne k tomu dôjdeš. Veď aj Ohm to musel dokázať, aby sa to uznalo za zákon. Pri bežnom praktickom meraní a počítaní ale nepostupujeme presne tak, ako by sme mali.
- J. A prečo? Čo nám v tom bráni?
- M. To, že vtedy nemáme všetky predpoklady pre to, aby sme tak konali.
- J. Aby bol súlad medzi výpočtom a meraním, musia sa asi splniť určité podmienky.
- M. Áno. A sú celkom jednoduché. Všetky veličiny musia byť počas merania stálé a tiež musíme korigovať vplyvy meracích prístrojov.
- J. Hovoríš jednoduché, a prečo sú potom ťažko splniteľné?
- M. Preto, lebo je veľa vzájomných súvislostí, okolností, ktoré sa navzájom ovplyvňujú.
- J. Môžeš mi ich vysvetliť?
- M. Iste. Ale odmedzím sa len na jeden prípad, ktorý vzhľadom na tvoje terajšie poznatky môžeš ľahko pochopiť. Tak napríklad odpor počas merania musí mať stálu hodnotu.
- J. A prečo by nemal?
- M. Môže mať, ale musíme sa o to postarať. Vieš, že odpor, v našom prípade spotrebiča a vodičov, sa mení teplom. A že prechodom prúdu odporom sa časť energie mení na teplo — jouleove straty.
- J. Viem, že pre každý materiál platí určitý teplotný súčiniteľ odporu a že veľkosť tepelných strát môžem vypočítať zo vzťahu $P = R \cdot I^2$.
- M. Výborne. Tak to daj dohromady. Nájdí súvislosť.
- J. No, povedal by som, že ak pri meraní bude spotrebičom prechádzať prúd, materiál, z ktorého je elektrický obvod spotrebiča zhotovený, sa zohreje a zmení sa jeho odpor.
- M. Správne. A keď k tomu vezmeš do úvahy aj to, že hodnota odporu spotrebiča platila napr. pre 20 °C a ty budeš merať pri inej teplote, dopustíš sa ešte ďalšej chyby.
- J. Tá chyba ale nebude vždy rovnaká.
- M. Nebude. Ak budem v tomto prípade udržiavať stálu teplotu 20°C, splním podmienku pre správne meranie. Ak budem merať pri inej teplote, bude hodnota prúdu zodpovedať príslušnej hodnote odporu.
- J. Keď bude odchylka od 20°C malá, bude aj chyba malá. Však? A vtedy ju budem môcť aj zanedbať?
- M. Áno, ale musíš odhadnúť alebo si vypočítať, či pre tvoju praktickú potrebu je to chyba príliš veľká alebo zanedbateľná. Hranice je v každom prípade iná.
- J. Na to nie sú presné pravidlá?

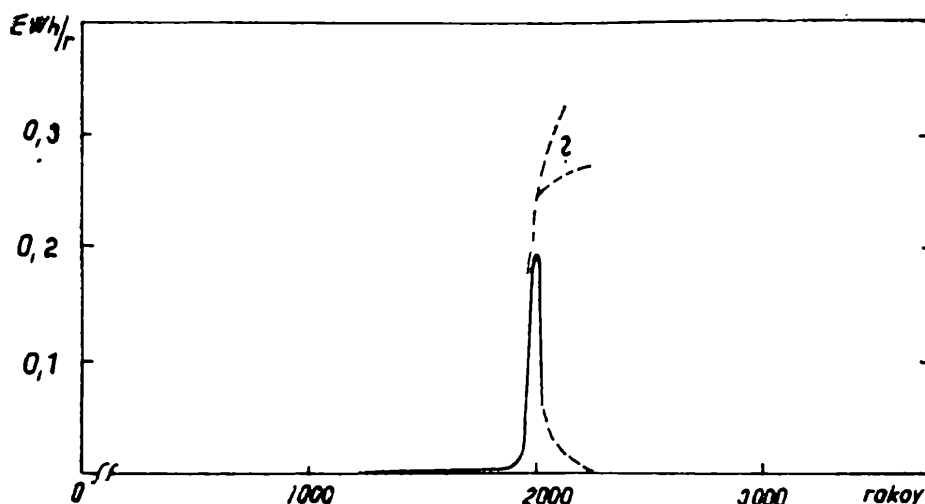
- M. Povedal by som, že nie.
- J. Tak iba teplota mi môže znehodnotiť moje presné výpočty?
- M. To je len jeden príklad, ako som ti povedal. Sú ešte ďalšie vplyvy, ktoré ovplyvňujú hodnotu odporu, a sú aj ďalšie, ktoré ovplyvňujú druhú veličinu — napätie. A pri praktickom meraní výsledky ešte omnoho viac ovplyvňujú napríklad samotné merací prístroje.
- J. Z toho vyplýva, že lepšie spravím, ak presne vypočítaný výsledok radšej zaokrúhlím?
- M. Z praktického hľadiska je to rozhodne lepšie. Ale nie je to správne z matematického hľadiska a pri presných laboratórnych meraniach.
- J. Tak ako mám vlastne pri domácich úlohách postupovať?
- M. Pozri. Keď ti v tvojom príklade udali, že dve veličiny majú určité hodnoty, tebe nezostáva nič iné, len ich vydeliť. Stačilo by, aby si to spravil na papieri na jedno desatinné miesto, ako je to vo väčšine „výsledkov“, ale nie je na závalu aj na „X“ desatinných miest, ktoré ti vypočíta tvoja kalkulačka. Mne išlo len o to, aby si si uvedomil, čo sa za tvojim výpočtom skrýva.
- J. Teraz už chápem tvoje vysvetlenie. Ale predsa mi nedá pokoj ešte jedna vec. Nemôžem niekedy zanedbať odchylky od presných hodnôt?
- M. Ale iste. Veď si na to už prv upozornil. Môžeš ich zanedbať, ak ich hodnota je taká, že neovplyvňuje požadovanú presnosť. Ale o tom až inokedy.

Komplexné využitie jadrových reaktorov

RNDr. MATEJ FLOREK, CSc., Katedra jadrovej fyziky
Matematicko-fyzikálnej fakulty UK, Bratislava

A. Úvod

Z dávnych dôb mohol človek využívať drevo ako regulovateľný zdroj tepla. V staroveku prirodzený ročný prírastok dreva stačil pokryť požiadavky prvotných ľudí, avšak v novoveku sa prejavila disproporcia medzi produkciou dreva a požiadavkami rozvíjajúceho sa priemyslu, najmä sklárskeho a hutníckeho. Nedostatok dreva bolo treba kompenzovať ťažbou fosílnych palív, najmä kamenného uhlia. Ťažba týchto palív prudko vzrastala v 20. storočí. Nadchádzajúce obdobie bude pravdepodobne kulminačným bodom ich využívania (obr. 1).



Obr. 1. Zmena spotreby fosílnych palív v rôznych rokoch nášho letopočtu. Prerušovanou čiarou je znázornená predpokladaná výroba energie po roku 2000. Jej výroba sa musí zabezpečiť z jadrových zdrojov, prípadne pomocou slnečnej energie.

Prvotnou príčinou očakávaného poklesu spotreby fosílnych palív je ohraničenosť ich zásob. Odhaduje sa, že zásoby týchto palív, vyjadrené v energetických jednotkách joule, predstavujú asi $130 \cdot 10^{21}$ J. Z tohoto množstva predstavujú *ušľachtilé palivá* (ropa, zemný plyn) len $6 \cdot 10^{21}$ J, avšak ich podiel na svetovej ročnej spotrebe, ktorá dosahuje $0,2 \cdot 10^{21}$ J, je väčší ako 60 %. Ak by sa spotreba ropy a plynu nezvyšovala, tak by zásoby týchto palív vystačili na 40 rokov. Ďaleko väčšie sú zásoby *uhlia*. Dostačujú na pokrytie spotreby v priebehu najbližších 500 rokov, avšak ich využitie je spojené so značným znečistením životného prostredia.

V súčasnej dobe poznáme niekoľko alternatívnych zdrojov energie, z ktorých len dva umožňujú využívať energiu vo veľkom merítke. Prvý z perspektívnych zdrojov je využitie slnečnej energie.

2. Slnečná energia

Už pomerne dávno je známy spôsob, ako sa dá pomocou slnečných batérií (fotočlánkov) premieňať energia slnečného žiarenia priamo na energiu elektrickú. V súčasnej dobe sa slnečné batérie používajú ako zdroje energie v umelých kozmických telesách. Taktiež je možné pomocou zrkadiel koncentrovať svetelné lúče do ohniska, v ktorom je parný kotol, a pomocou parných turbín vyrábať elektrickú energiu.

Kvalitatívne iná situácia vzniká, ak sa má využívať slnečné žiarenie vo veľkom merítke, t. j. keby sa mali budovať slnečné elektrárne o veľkom výkone (1000 MW). Mnohé hľadiská (potreba pôdy, mikro a makroklimatické účinky, investície) nie sú závažné, ak sa slnečná energia využíva

len v malom rozsahu, ale nadobúdajú rozhodujúci význam pri jej využívaní v skutočne veľkom merítku.

Jedným z hlavných limitujúcich faktorov rozvoja slnečných elektrární sú veľké požiadavky na plochu. Ak zoberieme do úvahy celoročný priemer, tak na 1 m^2 povrchu Zeme u nás dopadá za jeden deň asi 3 kWh slnečnej energie. Zhruba len 10% tejto energie sa môže premeniť na energiu elektrickú. To znamená, že čím má mať elektráreň väčší príkon, tým väčšia plocha je potrebná. Tak napr. pre jednu slnečnú elektráreň podobného výkonu, ako má jadrová elektráreň V-1 v *Jaslovských Bohuniciach*, je potrebná plocha asi 80 mil. m^2 . Z toho vidíme, že požiadavky na plochu sú veľké a nie všade sú také súvislé plochy k dispozícii. Ovšem, až by sa vyriešili závažné technické problémy výstavby slnečných elektrární, k tomuto účelu by sa mohli využiť úhorom ležiace plochy, prípadne plochy oceánov. Tento spôsob využitia slnečnej energie je otázkou ďalekej budúcnosti.

Zdá sa, že najväčšiu možnosť realizácie majú tzv. *slnečné domy*, v ktorých sa využíva strecha domu na umiestnenie fotodosiek a tepelných dosiek. Táto koncepcia má tú výhodu, že nie sú potrebné nové plochy — využíva sa už zastavaná plocha. Tu sa znova objavujú ekonomické problémy, pretože sa jedná o veľký počet zdrojov malého výkonu.

Slnečné elektrárne veľkého výkonu je možné budovať v kozmickom priestore. Tam odpadajú problémy spojené s výberom plôch. Takáto elektráreň by bola družicou Zeme a pozostávala by z obrovského počtu vzájomne prepojených fotočlánkov. Vysokofrekvenčná elektronika by zabezpečila bezdrôtový prenos elektrickej energie. Predpokladá sa, že v budúcom storočí dosiahne technický pokrok taký stav, že bude rentabilné budovať slnečné elektrárne v kozmickom priestore. V našom storočí musíme obrátiť hlavnú pozornosť k druhému zdroju energie.

3. Jadrová energia

Druhým perspektívnym zdrojom je využitie energie akumulovanej v jadrách atómov. Zatiaľ je technicky realizované uvoľňovanie jadrovej energie pri štiepení atómových jadier. Zásoby jadrového štiepneho paliva — uránu a thória — sú kolosálne. Predpokladá sa, že dosahujú hodnoty 10^{27} J , no väčšina týchto zásob je rozptýlená v morskej vode a zemskej kôre a ich ťažba je nerentabilná. Dostupných zásob uránu a thória je na našej Zemi asi 60 mil. ton , čo predstavuje $20 \cdot 10^{21} \text{ J}$, ak sa urán bude spaľovať v tepelných reaktoroch, a $2000 \cdot 10^{21} \text{ J}$, ak z uránu-238 a thória-232 sa bude získavať nové jadrové palivo plutónium-239 a urán-233. Tento proces môže efektívne prebiehať v rýchlych reaktoroch, a preto sa vedúce atómové mocnosti zameriavajú na získanie tzv. *plodivých reaktorov* na báze rýchleho, sodíkom chladeného reaktora.

Na rozdiel od prvého zdroja, jadrová energia uvoľňovaná pri štiepení jadier sa využíva v priemyselnom merítke už v súčasnej dobe. Jadrové energetické reaktory nachádzajú dosiaľ uplatnenie takmer výhradne ako zdroje energie v jadrových elektrárnach. I keď vezmeme do úvahy stále rastúci podiel elektriny na celkovej spotrebe energie, je zrejmé, že jadrové elektrárne nemôžu nahradiť viac ako 30 % klasických zdrojov energie. V strednej a severnej Európe 35–50 % energie sa spotrebuje na vykurovanie budov, značnú časť energie spotrebuje metalurgický a chemický priemysel, doprava a pod.

Zdá sa, že ideálnym riešením by bolo prenášať energiu k spotrebiteľom vo forme elektrickej energie. Je to „čistá“ energia, môže sa používať na pohon silových zariadení (elektromotory), na ohrev a osvetlenie, na komunikačné účely a pre špeciálne priemyselné účely. Okrem toho zdroj výroby elektrickej energie môže byť v značnej vzdialenosti od spotrebiteľa, čo uľahčuje riešenie ekologických problémov. Podstatnou nevýhodou tohoto riešenia je skutočnosť, že pri výrobe elektrickej energie takmer 2/3 energie sa stráca bez úžitku.

4. Príčina vysokých strát

Vysoké straty pri výrobe elektrickej energie má na „svedomí“ druhý termodynamický zákon. Aby sme nemuseli zachádzať do podrobností, pripomenieme, že účinnosť premeny tepelnej energie na energiu mechanickú η v ideálnom prípade (*Carnotov cyklus*) je rovná

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

kde T_1 je teplota ohrievača a T_2 teplota chladiča. V reálnych podmienkach je účinnosť η menšia. V elektrárnach teplota chladiča nemôže byť menšia ako teplota okolitého prostredia (~ 300 K), a preto môžeme zvýšiť účinnosť tak, že zvýšime teplotu ohrievača. V moderných tepelných elektrárnach spaľujúcich fosílna palivá je obvykle $T_1 \sim 800$ K, avšak v jadrových elektrárnach s ľahkovodným reaktorom, ku ktorým patria aj reaktory typu VVER, ktoré sa budujú u nás, T_1 dosahuje len 550 K. Preto v tepelných elektrárnach účinnosť presahuje 40 %, v jadrových elektrárnach sa pohybuje okolo 33 %. Z tohoto hľadiska sú jadrové elektrárne v nevýhode pred elektrárnami tepelnými.

5. Problémy so zvyšovaním teploty ohrievača

V súčasnej dobe najrozšírenejším typom reaktora v jadrových elektrárnach sú *ľahkovodné reaktory*. V týchto reaktoroch nosičom tepla od reaktora do ohrievača (tzv. chladiace médium) je obyčajná (ľahká) voda. Aby teplota vody v ľahkovodnom reaktore bola vysoká, musí sa nachádzať

zať pod vysokým tlakom, a preto musí byť plášť reaktora (priemer 3—5 m, výška 10—20 m) konštruovaný ako vysokotlaková nádoba. V reaktoroch typu VVER tlak dosahuje hodnotu 15 MPa. Konštrukcia a výroba tak veľkých tlakových nádob je zložitá technologická úloha. Z tohoto dôvodu (nie však jediného) je ťažko očakávať zvýšenie tlaku a tým aj teploty chladiaceho média. Aby sa dosiahlo podstatnejšie zvýšenie teploty ohrievača, je potrebné konštruovať reaktory nového typu.

6. Využitie odpadného tepla z jadrových elektrární

Logickým riešením sledujúcim lepšie využitie energie v jadrových elektrárnach (JE) by bolo použiť časť odpadného tepla na vykurovanie budov. Týmto spôsobom by bolo možné využiť až 65 % energie, ktorá sa uvoľňuje v jadrovom reaktore. Prvý projekt tohoto typu realizovali vo Švédsku už v r. 1964, avšak po 10 rokoch — z ekonomických dôvodov — bol reaktor odstavený. Druhý projekt uskutočnili v ZSSR vybudovaním viacúčelovej centrálly *Bilibino* za polárnym kruhom. Bilibinská jadrová elektráreň a tepláreň je vzhľadom k svojej polohe ekonomicky odôvodnená. Avšak širšiemu využitiu odpadového tepla z jadrových elektrární bránia hlavne dva momenty:

1. Podstatnú zložku ceny elektrickej energie z JE predstavujú investičné náklady. Aby merné investičné náklady (náklady na jednotku výkonu) boli menšie, jadrové reaktory pre elektrárne sa konštruujú na tepelný výkon až 3000 MW. Odpadové teplo z takejto elektrárne postačuje pre mesto s počtom obyvateľov okolo 1 mil. Takýchto miest je relatívne málo. Okrem toho, konštrukcia JE ako dvojúčelového zariadenia by značne zvýšila investičné náklady, čo by sa nepriaznivo prejavilo v celkových ekonomických ukazovateľoch.

2. Z hľadiska radiačnej bezpečnosti sa JE umiestňujú mimo oblasť väčších mestských aglomerácií. Preprava tepla na veľké vzdialenosti zvyšuje jeho straty.

Preto v najbližšom období sa za schodnejšiu cestu považuje budovanie len jadrových teplární. Použitie špeciálnych jadrových reaktorov v teplárenskom režime prináša mnoho výhod. Spomenieme dve:

1. Reaktory môžu byť projektované na nižšie parametre, čo sa priaznivo prejaví vo zvýšení spoľahlivosti a bezpečnosti systému. Dokonalé bezpečnostné opatrenia umožňujú priblížiť jadrovú tepláreň k centrom spotreby tepla.

2. Je možné skonštruovať špeciálny tepelný reaktor s menším výkonom a ich zdvojnásobením, prípadne strojnásobením sa môže získať veľmi spoľahlivý systém dodávky tepla, ktorý nie je ohrozený prípadným vypadnutím jedného reaktora.

Vývoj jadrových reaktorov pre teplárne sa dostáva do popredia záujmu hlavných svetových výrobcov jadrovo-energetických zariadení.

7. Jadrový reaktor pre teplárne

V ZSSR bol rozpracovaný a overený projekt 500 MW jadrového reaktora pre teplárne. V meste *Voronež* a *Gorkij* sa už započala výstavba teplární, z ktorých každá bude mať dva reaktory. U nás sa pripravujú podobné projekty pre mestá *Brno*, *Prahu* a *Olomouc*.

Schématické znázornenie konštrukcie 500 MW teplárenského reaktora je na obr. 2. Konštrukčne reaktor naväzuje na úspešné ľahkovodné reaktory vyvíjané pre JE, avšak je v maximálnej miere zjednodušený. Reaktorová oceľová nádoba má priemer 6 m a výšku 15 m a je naplnená vodou. V spodnej časti nádoby je aktívna zóna — oblasť, v ktorej prebieha štiepenie jadier a uvoľňovanie tepla. Voda vo vnútri aktívnej zóny a v jej bezprostrednom okolí sa nahrieva a vystupuje smerom hore. V hornej časti sú tepelné výmeníky, ktoré odoberajú teplo z chladiaceho média a odovzdávajú ho vode sekundárneho okruhu. Ochladená voda primárneho okruhu klesá späť (má väčšiu hustotu) do spodnej časti reaktorovej nádoby. Vzniká prirodzená cirkulácia vody, nie sú potrebné obehové čerpadlá ako pre reaktory JE. Pre teplárenské účely nie je potrebná voda o vysokej teplote, tlak v reaktorovej nádobe je menší, pohybuje sa v medziach 1,6—2,0 MPa. Z bezpečnostného hľadiska je celý reaktor umiestnený v železobetónovom kryte, ktorý aj počas najvážnejšej poruchy reaktora neprepustí do okolia rádioaktívne látky.

Jadrové palivo — urán, obsahuje asi 2 % izotopu ^{235}U , je umiestnený do palivových trubiek. Výmena paliva sa robí raz za dva roky.

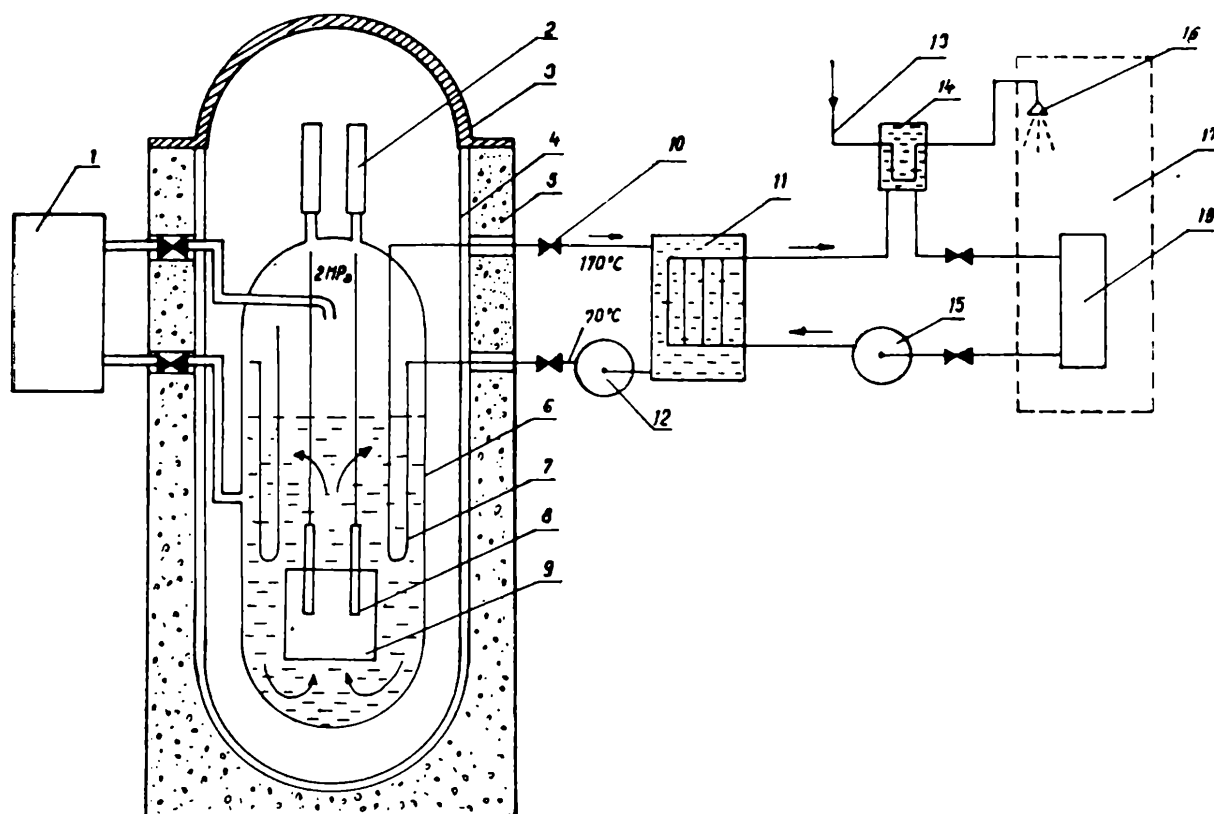
8. Výroba vodíka pomocou jadrových reaktorov

Popisované jadrové teplárne sa budú budovať len pre veľké mestá s počtom obyvateľov nad 200.000. Na vykurovanie budov menších miest a v domácnostiach sa bude používať syntetické palivo — vodík. Vodík pre jeho vlastnosti možno považovať za ideálny nosič energie. Jeho najväčšou prednosťou je možnosť výroby z prakticky neobmedzeného množstva suroviny — vody a produktom jeho spaľovania je opäť voda ($2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$). Výhrevnosť vodíka je najmenej dvakrát väčšia ako výhrevnosť iných prírodných palív.

Je mnoho spôsobov, ako získať vodík, avšak pre priemyselnú výrobu vyhovujú len niektoré. Zatiaľ je najlepšie rozpracovaná metóda plynofikácie uhlia

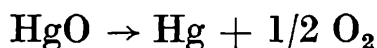
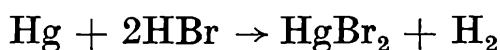
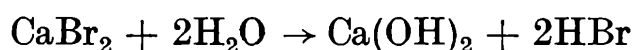


V tejto metóde základnou surovinou sú však fosílna palivá, a pravdepodobne sa použije pre zužitkovanie menej hodnotných palív, ako sú uhlie s vysokým obsahom síry, lignit, naftonosné bridlice a dehtové piesky. Takto sa budú získavať kvalitnejšie palivá, schopné prepravy na pomerne vzdialené odbytiská.



Obr. 2. Schématický prierez jadrovou teplárnou. (1 - pomocný obvod primárneho okruhu (čistenie vody, ap.), 2 - ťahové mechanizmy regulačných tyčí, 3 - kovový kryt, 4 - kovová vaňa, 5 - železobetónová šachta, 6 - reaktorová nádoba, 7 - tepelný výmenník sekundárneho okruhu, 8 - regulačné tyče, 9 - aktívna zóna, 10 - ventil, 11 - tepelný výmenník terciálneho okruhu, 12, 15 - obehové čerpadlá, 13 - vodovodné potrubie, 14 - ohrev vody, 16 - sprcha, 17 - obytný dom, 18 - radiátor)

V budúcnosti sa bude vodík vyrábať pomocou jadrových reaktorov. Najjednoduchšie by bolo získať vodík pri elektrolýze vody. Týmto spôsobom sa získava vodík aj v súčasnej dobe, ale metóda je nákladná. Vyžaduje o 60 % viac nákladov ako plynofikácia, pretože tepelná energia sa najprv premieňa na energiu elektrickú (s účinnosťou 30–40 %) a až potom sa získava vodík. Priamy tepelný rozklad vody by bol výhodnejší, ale prebieha len pri vysokých teplotách ($\sim 2500\text{ }^{\circ}\text{C}$). Zatiaľ nie je možné ani uvažovať o zdroji reaktorového typu, z ktorého by vychádzalo chladiace médium o tak vysokej teplote. Je však možné postupné štiepenie vody použitím niekoľkých recyklických chemických činidiel k tvorbe medziproduktov, napr.



Na termochemický rozklad vody vo vyššie uvedených reakciách potrebujeme teplotu maximálne 750 °C, čo je v medziach možností už súčasných vysokoteplotných reaktorov, známych pod označením HTGR (High Temperature Gas Colled Reactor).

9. Vysokoteplotné reaktory

V súčasnej dobe sa intenzívne pracuje na vývoji vysokoteplotného reaktora HTGR. V reaktore typu HTGR sa ako palivo používa obohatený urán, moderátorom je grafit a chladiace médium je hélium. Vďaka keramickej aktívnej zóne môže vysokoteplotný reaktor pracovať pri teplotách 850—900 °C, zdokonalené typy dosiahnu 1000—1200 °C.

Hlavnou úlohou vysokoteplotných reaktorov bude výroba vysokopotenciálneho tepla pre potreby chemického a metalurgického priemyslu a pre výrobu vodíka.

Použitie vodíka v metalurgii ušetrí značné množstvo kvalitných fosílnych palív. Energetickou základňou súčasnej metalurgickej výroby je koksovateľné uhlie a prírodný plyn. Produkty spracovania týchto palív — koks a redukčný plyn — sa používajú v hutníctve ako zdroje tepla a chemické reagenty. Redukcia železa je možná aj pomocou vodíka ($\text{Fe}_2\text{O}_3 + 3\text{H} \rightarrow 2\text{Fe} + 3\text{H}_2\text{O}$), ale efektívne prebieha len pri vysokých teplotách. Vyrobený horúci vodík v reaktoroch HTGR môže v plnej miere nahradiť fosílnu surovinu i ako redukčný činiteľ i ako palivo.

10. Záver

V priebehu najbližších 20 rokov jadrová energia bude musieť postupne zamieňať fosílna palivá v rôznych sférach ich spotreby. Z technického hľadiska to bude veľmi náročná úloha. Podstatný je však ten fakt, že spôsoby riešenia, základné chemické procesy sú známe a zostávajú len problémy, týkajúce sa hlavne chemicko-inžinierskej realizácie.

Jadrová energia môže v plnej miere nahradiť fosílna palivá a zabrániť energetickému hladu. Treba však poznamenať, že aj v budúcnosti, keď sa vyrieši problém termojadrových reaktorov, bude sa vyrábať len toľko energie, koľko jej bude ľudstvo nevyhnutne potrebovať. Uvoľňovanie energie z atómových jadier prináša svoje špecifické problémy (napr. rádioaktívny odpad), ale hlavnou príčinou ohraničenia možností je skutočnosť, že nesmieme narušiť tepelnú rovnováhu, ktorá sa ustálila na našej Zemi v priebehu miliónov rokov. Ak si uvedomíme, že Slnko dodáva našej Zemi energiu rovnú $3 \cdot 10^{24}$ J za rok, tak množstvo vyrobenej energie v priebehu roka musí byť omnoho menšie ako uvedená hodnota. Zatiaľ je predčasné udávať hranicu ročnej výroby, možno to bude $3 \cdot 10^{21}$ J, avšak jedno je isté, že aj v budúcnosti sa bude s energiou zachádzať hospodárne.

Sedmdesáté výročí Laueova objevu difrakce rentgenového záření na krystalech a životní jubileum prof. A. Kochanovské

Doc. RNDr. IVO KRAUS, CSc., fakulta jaderná
a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

W. C. *Röntgen* objevil své X-paprsky koncem roku 1895. Trvalo však celých sedmnáct let, než se podařilo jednoznačně rozhodnout, že se nejedná o částice, ale o elektromagnetické záření. Spor mezi obhájci vlnové a korpuskulární povahy rentgenového záření ukončil v roce 1912 jeden jediný pokus, uskutečněný díky šťastné kombinaci myšlenek a lidí. Připomeňme si alespoň krátce historii slavného experimentu, který patří bezesporu mezi největší úspěchy, jakých kdy bylo ve fyzice dosaženo.

V únoru 1912 se *P. P. Ewald*, doktorand mnichovského fyzika *A. Sommerfelda*, zabýval teorií průchodu světelných vln prostorovou mřížkou tvořenou polarizovatelnými atomy (dipóly). Ewald si z počátku s tímto problémem nevěděl rady, a proto poprosil o pomoc teoretického fyzika *Maxe von Laue*. A právě tehdy se zrodila idea využít pravidelnou strukturu krystalů jako difrakční mřížku pro rentgenové paprsky. Laue si uvědomil, že zjištění interferenčních jevů by bylo důkazem vlnové povahy paprsků a zároveň experimentálním potvrzením mřížkové stavby krystalů.

Protože sám nebyl experimentátorem, konzultoval provedení pokusu se Sommerfeldem. Ten však byl vůči Lauově myšlence velmi nedůvěřivý. Domníval se, že tepelný pohyb příliš naruší pravidelné uspořádání stavebních částic krystalu, než aby mohl vzniknout difrakční efekt. Svému asistentovi *Friedrichovi* dokonce zakázal ztrácet s takovými nesmyslnými pokusy čas. Naštěstí měl Friedrich poněkud jiný názor než Sommerfeld a s přítelem *Knippingem* pokus tajně provedli. Zvolili si k tomu krystal síranu měďnatého, který byl v laboratoři právě k dispozici. Již napodruhé se experiment podařil. Snímek získaný průchodem úzkého svazku rovnoběžných rentgenových paprsků destičkou krystalu ukazoval kromě stopy od přímého prošlého svazku soustavu pravidelně uspořádaných skvrn zobrazujících souměrnost krystalu. Tak byla objevena difrakce rentgenových paprsků.

Díky Lauově geniální myšlence vznikla dvě nová odvětví fyziky: rentgenová spektroskopie (výzkum spekter vysílaných anodou rentgenové trubice) a určování krystalových struktur. Rozvoj těchto fyzikálních disciplín v Československu je nerozlučně spjat s vědeckým dílem prof. Dr. *Adély Kochanovské*, DrSc., členky korespondentky ČSAV, laureátky státní ceny Klementa Gottwalda, nositelky Řádu práce a mnoha dalších vyznamenání.

Adéla Kochanovská-Němejcová se narodila 8. března 1907 ve Slezské Ostravě jako dcera důlního inženýra. Byla to především matka, která výchovou k systematičnosti ovlivnila její volbu jít po maturitě na gymnázium v Plzni studovat obor matematika-fyzika. Zájem A. Kochanovské se brzy přestal omezovat jen na získávání teoretických znalostí, a tak



už od pátého semestru na přírodovědecké fakultě začíná vedle studia pracovat ve Spektroskopickém ústavu Karlovy univerzity u prof. *V. Dolejška*. Své první zaměstnání hledá v období hospodářské krize třicátých let. Protože se jí nedaří získat místo středoškolské profesorky ani učitelky na měšťance, nastupuje zpočátku jako konceptní síla v patentní kanceláři a po roce přechází do matematického oddělení Všeobecného penzijního ústavu. Její spolupráce se Spektroskopickým ústavem však stále pokračuje.

V roce 1935 vznikl na půdě Karlovy univerzity Fyzikální výzkum Škodových závodů. Mezi jeho první vědecké pracovníky patří A. Kochanovská. Ve skupině rentgenové mikrostruktury vedené prof. Dolejškem začíná její třicetiletá úspěšná vědecká dráha věnovaná využití Lauova objevu pro základní výzkum i technickou praxi. Na tomto pracovišti, z něhož po osvobození vznikl Ústav technické fyziky a později Ústav fyziky pevných látek (nyní součást Fyzikálního ústavu ČSAV), působila trvale až do svého přechodu na fakultu jadernou a fyzikálně inženýrskou ČVUT, kde byla v září 1968 jmenována vedoucí katedry inženýrství pevných látek. S rentgenostrukturní laboratoří této katedry spolupracuje dodnes při řešení úkolů státního plánu výzkumu i aktuálních problémů našich průmyslových podniků.

Vědecké dílo prof. Kochanovské představuje více než 70 původních prací soustavně rozvíjejících a prohlubujících studium jemné struktury materiálu. Velkou pozornost věnovala např. metodice přesného měření mřížkových parametrů polykrystalických látek, určování mřížkových poruch a studiu jejich vlivu na fyzikální a chemické vlastnosti materiálu. Výsledky, kterých při své práci dosáhla, jsou příkladem harmonického

spojení základního a aplikovaného fyzikálního výzkumu. Podněty z výroby byly pro ni zdrojem, z něhož čerpala nové poznatky přispívající k rozvoji strukturní rentgenografie i celé experimentální fyziky.

Většina našich vědeckých a technických pracovníků v oboru využití rentgenové difrakční analýzy byla přímo nebo nepřímo vychována prof. A. Kochanovskou. Ti všichni přejí své paní profesorce k životnímu jubileu hodně pevného zdraví a další úspěchy ve vědecké práci.

Giuseppe Peano — matematik a tvůrce jazyků

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, CSc., UK Praha

V letošním roce uplynulo 50 let od úmrtí italského matematika, který zavedl mnoho nového do jazyka matematiky a byl velmi aktivní i v hnutí za mezinárodní jazyk vědy 20. století. Povězme si o něm více zejména z těchto dvou hledisek.

Giuseppe Peano se narodil 27. 8. 1858 na italském venkově poblíž Cunea v Piemontu, který byl součástí sardinského království. V jeho hlavním městě Turinu mladý Giuseppe studoval střední i vysokou školu; díky výbornému prospěchu dostával různé ceny spojené s peněžními obnosy, ze kterých hradil školné a poplatky za zkoušky. Právě před 100 lety, v roce 1882, začal na turinské univerzitě přednášet diferenciální a integrální počet; při promýšlení látky zjišťoval různé nedostatky v definicích důležitých pojmů v dosavadních učebnicích. Jeho první (a pak mnohé) vědecké práce se týkaly zpřesňování pojmů, zjednodušování důkazů, zobecňování vět apod. Poznával přitom, že mnoho pouček a definic se vyslovuje ledabyly; stal se mistrem ve vymýšlení tzv. protipříkladů.

Úsilí o přesnost a jednoduchost matematického textu ho přivedlo k zájmu o *symbolický úsporný jazyk* logiky a matematiky. Osmdesátá léta 19. století byla obdobím, kdy vrcholila snaha o přesné axiomatické základy matematiky; Peanovu založení byla tato tendence velmi blízká. Už v r. 1888 vyslovil první systém axiomů vektorového prostoru, v r. 1889 systém axiomů aritmetiky přirozených čísel a axiomatiku elementární geometrie. Všude přitom zdůrazňoval operace logické, a to jednak s výroky, jednak s třídami, zaváděl symboly. V jeho pracích se objevily symboly $\cap$, $\cup$, $\supset$, $\in$, které se plně ujaly, ovšem také řada takových, které byly nahrazeny účelnějšími.

Peano je považován za jednoho z tvůrců matematické logiky, dovršitele axiomatické metody v moderním pojetí a propagátora vektorové

koncepce v geometrii a mechanice. Zdůrazněním kvantifikátorů a zavedením jich symbolů výrazně ovlivnil jazyk odborných matematických prací. Jako první rozlišil objekt c a jednoprvkovou množinu $\{c\}$ a řadu obdobných jemností. Přes 15 let práce věnoval vydávání tzv. *Formulario matematico* — souboru všech matematických definic a vět (s důkazy) zapsaných úsporným symbolickým jazykem. To už byla práce dosti samoučelná, protože málokdo měl trpělivost číst složité symbolické zápisy. Vymáhání přesnosti na jiných autorech mu vyneslo pověst „hlídač psa přesnosti“ a mnoho ostrých polemik i na stránkách odborného tisku.

Svou pohotovostí v diskusích, přesnou analýzou logických chyb odpůrců a vlastním přesným vyjadřováním si získal obdiv, například mladý *Bertrand Russell* byl jeho vystoupením na kongresu filozofů v Paříži r. 1900 ohromen, vyžádal si hned všechny jeho práce za 20 let vědecké činnosti a během několika týdnů je soustředěně prostudoval. Russell se stal pokračovatelem Peanova díla v základech logiky a matematiky, protože Peano v té době už „přesedlával na jiného koně“

Zhruba od r. 1880 se v Evropě rozvíjelo úsilí o vytvoření umělého mezinárodního jazyka (dodnes rozšířené esperanto pochází např. z r. 1887). Peano se k hnutí, která si konkurovala, tehdy nepřipojil; až dlouholetá práce na symbolickém jazyku matematiky ho přivedla k myšlence vyhledat *pro potřebu vědy* slova, která jsou srozumitelná co největšímu počtu vědců. Připomněl si sen *G. W. Leibnize* z konce 17. století o univerzálním jazyku, vzal v úvahu někdejší roli latiny a pokusil se propagovat latinu s minimální gramatikou. V r. 1903 uveřejnil návrh na užívání mezinárodního pomocného jazyka — zjednodušené latiny *Latino sine flexione* („latina bez ohýbání“, tj. bez skloňování a časování). Vydal příslušný slovník, který pak za spolupráce s dalšími rozšiřoval až na rozsáhlou publikaci se 14 000 termíny (v r. 1915).

V r. 1908 se stal Peano předsedou mezinárodního sdružení „Akademi internacional de lingu universal“, kterou navrhl přejmenovat na *Academia pro Interlingua*. Název *interlingua* se pak vžil pro Peanem propagovaný pomocný jazyk, který postupně vznikl na základě statistických studií a měl ráz latiny s anglickými úpravami (např. přidávání —s pro tvary plurálu). Lze říci, že se Peano až do konce života věnoval především tomuto jazyku, publikoval v něm odborné články, sestavoval slovníky (i vícejazyčné); vysloužil si opět jiný přídomek — „apoštol interlinguy“. Na mezinárodním kongresu matematiků v Torontu v r. 1924 přednášel v jazyku interlingua, ale vrátil se s pocitem, že vývoj nepřeje pomocnému mezinárodnímu jazyku. (A to byl správný odhad, po 2. světové válce už se o takovém jazyku ani nemluví.)

Peano neměl prý příjemný hlas ani dobrou výslovnost, ale pronikavým myšlením si získával stoupence. Byl také velmi pracovitý; složité formule svého symbolického jazyka sázel sám na stroji, který si koupil, do

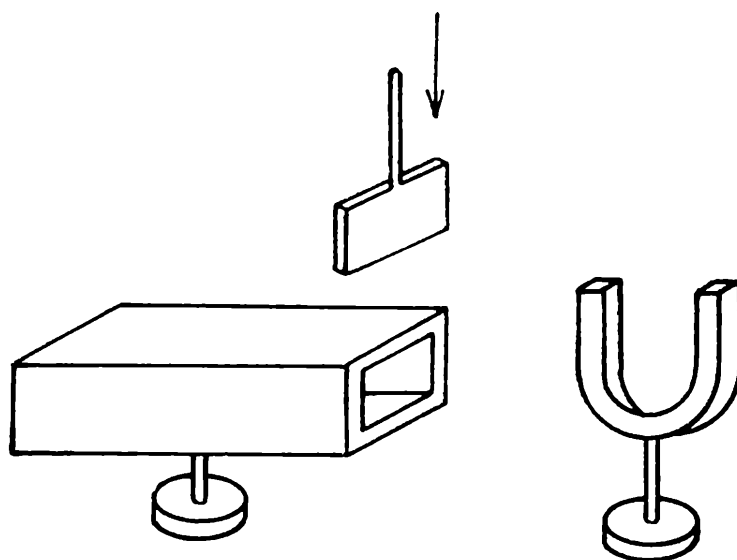
tiskárny už posílal hotové stránky. V politickém dění nevystupoval, ale zastával levicová stanoviska, například v době stávek v průmyslovém Turíně projevil stávkujícím výraznou podporu. Nebyl odměřený ani ke studentům, rád s nimi prý chodil na zmrzlinu či do kavárny apod. V posledních desetiletích života žil celkem klidně, smrt ho zastihla náhle dne 20. 4. 1932.

Při studiu matematiky se setkáte s Peanovým jménem na řadě míst (Peanovy axiomy aritmetiky, Peanovy křivky a j.), ale ještě častěji si nepozorovaně osvojíte jím zavedené symboly a definice (například pojmu funkce, míry útvaru, integrálu), jím zjednodušené formulace důležitých vět, jím vyslovené axiomy vektorového (lineárního) prostoru apod.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Efektní experimenty: Schovejte zvuk

Ve školním fyzikálním kabinetu najdete ladičku umístěnou na rezonanční skříňce, která je na jedné z nejmenších stěn otevřená. Na tento otvor si opatřte víčko na tyčce nebo na pružině, která má plstěný podklad a uspořádejte pokus podle obr. 1. Před otvorem skříňky rozezvučte



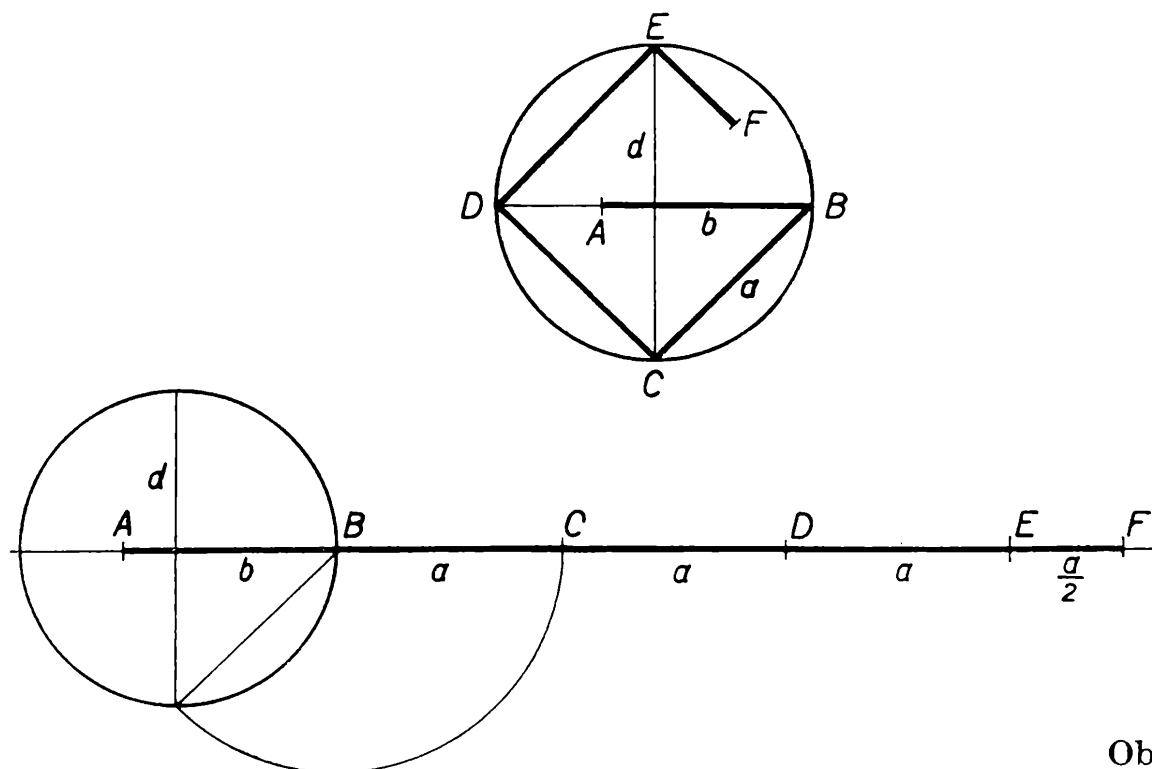
Obr. 1

ladičku. Pak otvor skříňky lehce přikryjte víčkem a ladičku dotykem umlčte. Neuslyšíte nic. Když za krátký čas víčko odklopíte, uslyšíte opět výrazně původní tón. Uslyšíte ho dokonce ještě po několikerém uzavření a otevření skříňky. Pokus můžete uspořádat i s jinou krabičkou či hudebním nástrojem. (Vysvětlení je na str. 476.) *Petr Hnilička*

0 jedné rektifikaci kružnice

ANTONIE LESOVÁ, Ostrava

Jako geometrickou zajímavost si ukažme konstrukci lomené čáry, jejíž délka se přibližně rovná délce dané kružnice. Lomenou čáru tvoří dvě třetiny průměru kružnice a sedm osmin obvodu tětívového čtverce (obr. 1).



Obr. 1

Na obrázku je to lomená čára $ABCDEF$, kde $|AB| = (2r : 3) \cdot 2$, $|BC| = |CD| = |DE| = r\sqrt{2}$, $|EF| = r\sqrt{2} : 2$, lomená čára má délku $(7r\sqrt{2} : 2) + (2r : 3) \cdot 2$, tj.

$$\frac{21\sqrt{2} + 8}{6} \cdot r.$$

Od $2\pi r$ se liší ještě méně než délka úsečky získaná při známé konstrukci Kochaňského (viz připojenou tabulku).

	Hodnota $2\pi r$	Kochaňski	Nová konstrukce
$r = 1$	6,2831853	6,2830668	6,2830808
	rozdíly:	— 0,0001185	— 0,0001045

Z této konstrukce lze sestavit i jiné varianty obrazců, dokonce i uzavřený čtverec, vždy se stejným početním výsledkem.

Řešte kryptogramy

Nahradte v následujících pravoúhelnících písmena číslicemi tak, aby vzniklá čísla byla ve všech sloupcích a ve všech řádcích druhými mocninami celých čísel:

a)

A	B	B
B	C	B
B	B	A

b)

K	L	M
L	N	L
M	L	K

Řešení:

Z tabulek si zjistíme: 1) že druhé mocniny jen dvou čísel: 12 a 21 — tedy 144 a 441 mají na místě desítek číslici 4. Vyhovují tedy pro prvý a třetí řádek v případě a); 2) že jen tři trojciferná čísla, která jsou druhými mocninami celých čísel, mají na místě jednotek i stovek stejné číslice:

$$121 = 11^2; 484 = 22^2; 676 = 26^2.$$

Číslo 121 pro případ b) nevyhovuje. Písmeno L nemůže značit číslici 1. To proto, že neexistuje trojciferné číslo, které je druhou mocninou celého čísla a má číslici 1 na místě desítek.

Pro druhý řádek tabulky a) zřejmě vyhovuje číslo 484. Pro prostřední řadu tabulky b) zbývá tedy číslo 676 = 26² a pro sloupce čísla 169 = 13² a 961 = 31².

a)

1	4	4
4	8	4
4	4	1

b)

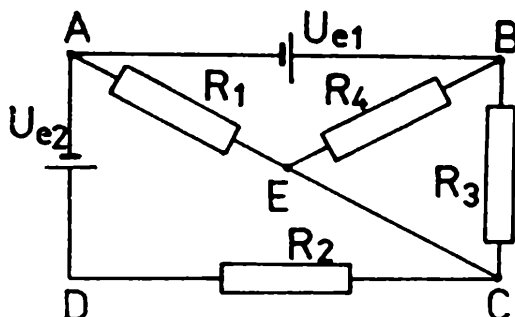
1	6	9
6	7	6
9	6	1

RNDr. Jaromír Maláč, Brno

Úlohy pro 1. kolo XXIV. ročníku FO

Kategória A

1. Dva zdroje elektromotorických napätí $U_{e1} = 2,1 \text{ V}$, $U_{e2} = 1,9 \text{ V}$ a štyri rezistory $R_1 = 45 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $R_4 = 15 \Omega$ sú zapojené podľa schémy na obr. 1. Vnúťorné odpory zdrojov neuvažujeme.



Obr. 1

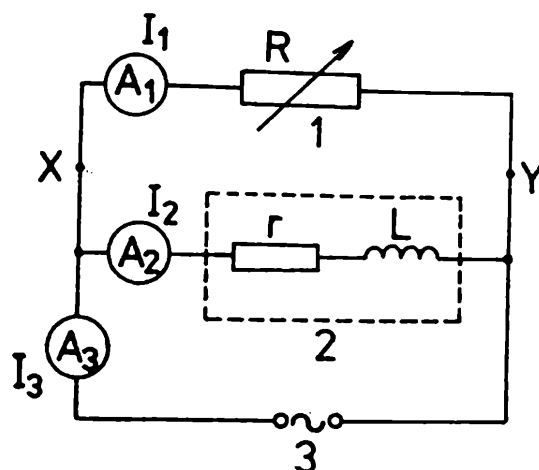
- Odhadnite a vyznačte smery prúdov prechádzajúcich jednotlivými rezistormi a vypočítajte tyto prúdy.
- Určte napätie, ktoré by ste namerali medzi bodmi B, C voltmetrom s vnútorným odporom $R_V = 200 \Omega$.

2. Dané sú tri veľmi tenké šošovky s ohniskovými vzdialenosťami $f_1 = 12,5 \text{ cm}$, $f_2 = 50,0 \text{ cm}$, $f_3 = -100 \text{ cm}$.

- Navrhnete možnosti zostavenia ďalekohľadu z týchto šošoviek.
- Vytvorte z týchto šošoviek ďalekohľad s maximálnym zväčšením. Urobte schématický obrázok.
- Určte zväčšenie ďalekohľadu z úlohy b).

3. Kondenzátor s kapacitou C a ampérmetr sú zapojené za sebou a pripojené na zdroj harmonického napätia s meniteľnou frekvenciou (generátor RC). Na svorky kondenzátora je pripojený (elektrónkový) voltmetr s veľkým vnútorným odporom. Pri stálej hodnote napätia $U = 4,0 \text{ V}$ sa menila frekvencia f napätia zdroja. Do tabuľky sa zaznamenali dvojice (f_i, I_i) frekvencie f a prúdu I prechádzajúceho obvodom:

$f \text{ (Hz)}$	600	700	800	900	1000	1100	1200
$I \text{ (mA)}$	30	36	39	45	52	54	60



Obr. 2

- Nakreslite schému obvodu.
- Na milimetrový papier v pravouhlej súradnicovej sústave zobrazte funkciu $I = I(f)$. Túto funkciu vyjádrite analyticky.
- Meraním na grafe funkcie $I = I(f)$ stanovte kapacitu C kondenzátora.

4. V Balmerovej sérii čiarového spektra atómu vodíka prislúcha čiara H_α vlnová dĺžka 656,3 nm a čiara H_δ vlnová dĺžka 410 nm.

Vychádzame z Bohrovho modelu atómu vodíka.

- Vypočítajte, akú energiu pred preskokom a po ňom majú elektróny.
- Aké sú polomery dráh L a P vodíkového atómu?
- Akú energiu musí mať fotón, ktorý po absorpcii atómom vodíka spôsobí preskok elektrónu z dráhy L na dráhu P ?

5. Vnútri upevnenej uzavretej kovovej nádoby tvaru gule s vnútorným polomerom $r = a(\sqrt{2} + 1)$ sú umiestnené v dielektrickej nestlačiteľnej kvapaline štyri rovnaké gule s polomerom a . Tieto gule sú z tuhého rovnorodého dielektrika s permitivitou ϵ rovnakou ako permitivita kvapaliny. V strede každej z týchto gulí je „bodové“ jadierko. Dve gule majú jadierko s nábojom $+Q$ a dve s nábojom $-Q$. Každá guľa (spolu s jadierkom) má rovnakú hmotnosť m . Kvapalina a štyri gule vyplňajú celý objem nádoby. Gule sa vznášajú v kvapaline.

- Vypočítajte hustotu ρ kvapaliny.
- Nájdite všetky možné usporiadania gulí, pri ktorých sú aspoň tri gule v dotyku.
- Ktoré z týchto usporiadaní je elektricky stabilné?
- Aké energie získame pri prechode gulí z elektricky nestabilných usporiadaní do elektricky stabilného usporiadania?
- Ako sa prejaví premena energie pri prechode podľa bodu b)?

6. Měření indukčnosti metodou tří ampérmetrů.

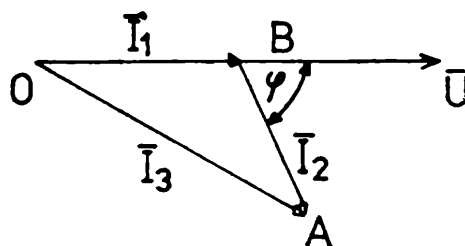
Úvod

Indukčnost cívky se dá měřit v zapojení podle obr. 2, v němž 1 je rezistor (reostat) o známém odporu R , 2 cívka o indukčnosti L a odporu

r , 3 zdroj harmonického napětí. Označíme-li I_1, I_2, I_3 efektivní proudy měřené ampérmetry A_1, A_2, A_3 , vypočítáme indukčnost cívky ze vztahu

$$L = R \frac{\sqrt{I_s(I_s - I_1)(I_s - I_2)(I_s - I_3)}}{\pi f I_2^2}, \quad (1)$$

kde $I_s = \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + I_3)$, f kmitočet harmonického napětí zdroje (v našem případě to bude 50 Hz). Podle obr. 3 je $\bar{U}$ fázor napětí, proud $\bar{I}_1$



Obr. 3

má fázi souhlasnou s $\bar{U}$, proud $\bar{I}_2$ je ve fázi zpožděn o fázový úhel φ , pro který platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{X_L}{\sqrt{r^2 + X_L^2}},$$

kde $X_L = 2 \pi f L$ je reaktance cívky.

Obsah S trojúhelníku OAB vyjádříme pomocí tří stran

$$S = \sqrt{I_s(I_s - I_1)(I_s - I_2)(I_s - I_3)}, \quad (2)$$

pak pomocí stran OB , BA a sevřeného úhlu

$$S = \frac{1}{2} I_1 I_2 \sin(\pi - \varphi) = \frac{1}{2} I_1 I_2 \frac{X_L}{\sqrt{r^2 + X_L^2}}. \quad (3)$$

Pro dolní větev platí

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{r^2 + X_L^2}} = \frac{R I_1}{\sqrt{r^2 + X_L^2}}.$$

Za $\sqrt{r^2 + X_L^2}$ dosadíme do (3):

$$S = \frac{I_2^2 X_L}{2R}. \quad (4)$$

Porovnáme (2) a (4), vyjádříme X_L , odtud dostaneme pro L vztah (1).

Úloha

Metodou tří ampérmetrů změřte indukčnosti dvou cívek bez jader. Pomůcky:

Reostat, dvě cívky bez jader s velkým počtem závitů (např. dvě různé

cívky z demonstračního rozkladného transformátoru), zdroj nízkého napětí do 24 V o kmitočtu 50 Hz, tři ampérmetry s malým vnitřním odporem (postačí však jen jeden), spojovací vodiče.

Postup

1. Sestavte elektrický obvod podle obr. 2. Napětí zdroje volte tak, aby nebyl překročen maximální proud přípustný pro cívku a pro reostat.
2. Pokusně nastavte odpor R tak, aby proudy I_1 , I_2 byly přibližně stejně velké.
3. Nastavený odpor zjistěte (jakoukoli metodou).
4. Na reostatu postupně nastavte 5 různých hodnot odporu v okolí hodnoty R (menších i větších), měřte proudy I_1 , I_2 , I_3 a podle (1) určete indukčnost první cívky. Měření opakujte pro druhou cívku a určete její indukčnost. Indukčnost první cívky označte L_1 , indukčnost druhé cívky L_2 . Naměřené hodnoty a výsledky sestavte do tabulek podle následujícího vzoru:

č.	$R (\Omega)$	$I_1 (\text{A})$	$I_2 (\text{A})$	$I_3 (\text{A})$	$I_s (\text{A})$	$L (\text{H})$

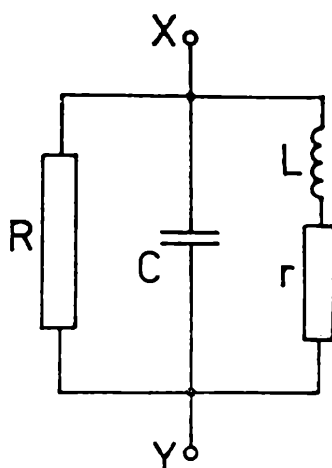
5. Vypočítejte průměrné hodnoty L_{1p} , L_{2p} indukčností obou cívek.

Doplňkové úlohy

1. Podle výsledků nalezených pro obě cívky, jejichž počty závitů znáte, usudte, jak indukčnost cívky bez jádra závisí na počtu jejích závitů (za předpokladu, že vnitřní průřezy obou cívek mají stejný obsah a cívky jsou stejně dlouhé).
2. Máte-li k použití měřicí můstek (např. Omega II nebo elektronický můstek RLC), ověřte správnost naměřených hodnot indukčností, tj. porovnejte je s hodnotami naměřenými můstkovou metodou.

Poznámky

1. Nemáte-li tři vhodné ampérmetry, postačí jen jeden (v obr. 2 označený A_3). Ke svorkám X , Y připojíte nejprve větev horní, pak dolní a pak obě paralelně.
 2. Použijete-li reostat válcový, volte typ takový, aby počet zařazených závitů byl velmi výrazně menší než počet závitů cívky, tj. aby jeho indukčnost byla vzhledem k indukčnosti cívky zanedbatelná.
 7. Obvod znázorněný na obr. 4 je zjednodušený ekvivalent paralelního rezonančního obvodu sestaveného z cívky o indukčnosti L a odporu r a kondenzátoru kapacity C , jehož dielektrikum má svodový odpor R .
- a) Stanovte rezonanční kmitočet f_0 obvodu. Určete podmínku řešitelnosti.



Obr. 4

- b) Stanovte rezonanční vodivost G_r a rezonanční odpor R_r obvodu, když harmonické napětí na svorkách X, Y má úhlový kmitočet $\omega_0 = 2\pi f_0$.
- c) Označme I_R, I_C, I_L proudy v jednotlivých větvích při rezonančním kmitočtu, I proud v nerozvětvené části obvodu. Stanovte poměry $p_1 = I_R/I, p_2 = I_C/I, p_3 = I_L/I$.
- d) Jaké jsou tyto poměry p'_1, p'_2, p'_3 pro $R \rightarrow \infty$? Úlohy a), b), c), d) řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $R = 1,0 \cdot 10^{10} \Omega, C = 300 \text{ pF}, L = 0,20 \text{ mH}, r = 2,0 \Omega$.
- e) Jaký důsledek vyplývá pro použitou cívku při zadaných hodnotách, jestliže $I = 1,0 \text{ mA}$?

Kategória B

1. Jeden mol jednoatómového plynu je v uzavretej nádobe, ktorej jedna stena je pohyblivá.

Plyn budeme zahrievať a pomocou pohyblivej steny zabezpečíme izobarický resp. izochorický priebeh dejov v plyne.

Konečný stav plynu dosiahneme dvoma spôsobmi:

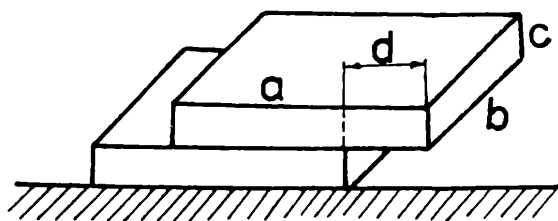
1. izochoricky sa zväčší tlak plynu a -krát a potom sa izobaricky zväčší objem plynu b -krát. Plyn prijme teplo Q_1 ;
2. izobaricky sa zväčší objem plynu a -krát a potom sa izochoricky zväčší tlak plynu b -krát. Plyn prijme teplo Q_2 .

a) Určte podiel $k = Q_1/Q_2$.

b) Určte parameter a tak, aby podiel $k = 1$, keď $b = 1,5$.

Plyn považujte za ideálny.

2. Dĺžky hrán rovnakých rovnorodých kvádrov sú a, b, c ($a > b > c$). Kvádre postupne ukladáme na seba tak, že dvojice ich bočných stien s dĺžkami hrán a, c sú v dvoch zvislých rovinách. Steny s dĺžkami hrán b, c každej dvojice susedných kvádrov sú však navzájom posunuté. Vzdialenosť d rovín, v ktorých sa nachádzajú sebeodpovedajúce steny



Obr. 5

s dĺžkami hrán b, c dvojice kvádrov, nazveme vysunutím (obr. 5). Kvádre máme uložiť na seba tak, aby sústava kvádrov nebola labilná.

- Určte najväčší počet n_0 kvádrov, ktoré môžeme týmto spôsobom na seba uložiť, ak vysunutie každej susednej dvojice kvádrov má rovnakú hodnotu $d = \frac{a}{p}$, kde p je celé číslo.
- Určte spôsob ukladania kvádrov tak, aby pri danom počte kvádrov bolo vysunutie vrchného kvádra vzhľadom na spodný kváder čo najväčšie. Určte toto vysunutie pre 10, 20, 30 kvádrov. Je možné, aby toto vysunutie bolo neohraničene veľké?

Predpokladáme, že kvádre sa nedeformujú.

3. Tenká tyč s hmotnosťou m a s dĺžkou h je položená na vodorovnej podložke. V smere priamky kolmej na tyč a prechádzajúcej koncovým bodom tyče sa pohybuje stálou rýchlosťou v teliesko z plastelíny s hmotnosťou m , ktoré po dokonale nepružnom náraze sa spojí s koncom tyče. Dej zrazu trvá veľmi krátku dobu.

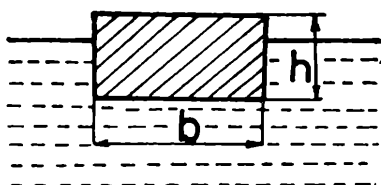
- Určte rýchlosti hmotného stredu sústavy tyče a telieska pred a po ich zraze.
- Určte moment hybnosti sústavy vzhľadom na jej hmotný stred bezprostredne pred zrazom tyče a telieska.
- Určte uhlovú rýchlosť otáčania sústavy vzhľadom na jej hmotný stred po zraze tyče s telieskom.
- Ako sa zmení energia sústavy po zraze telieska a tyče vzhľadom na ich energiu pred zrazom?

Trenie medzi tyčou, telieskom a vodorovnou podložkou ako aj rozmery telieska neuvažujte.

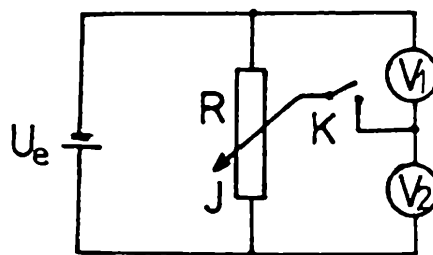
Odporúčaná štúdiijná literatúra :

M. Chytilová: Zákon zachování momentu hybnosti, studijní text pro kategorii C v XIX. ročníku FO, školní rok 1977/78, str. 69.

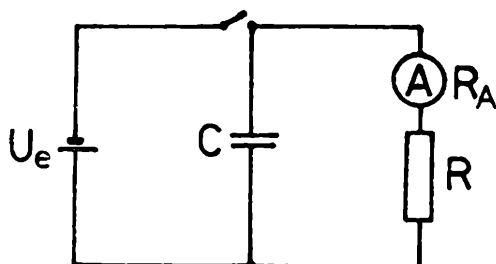
4. Stejnorodý kvádr o rozměrech l, b, h a hustotě ρ plave v kapalině s hustotou ρ_k tak, jak je znázorněno na obr. 6. Určete podíl $p = \frac{h}{b}$ výšky h a šířky b příčného řezu kvádra, aby poloha kvádra plovoucího v kapalině byla stabilní. Předpokládejte $l \gg b, l \gg h$.



Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8

Doporučená literatúra :

Slavík a kol.: Základy fyziky I, článok 16, 11 Tlak v kapalině (Stabilní rovnovážná poloha plovoucího tělesa, str. 268); Academia 1961.

D. Ilkovič: Fyzika (stabilita plávania, str. 247) SVTL Bratislava 1957.

5. Zdroj s elektromotorickým napätím U_e , rezistor s meniteľným odporom a celkovým odporom R , dva voltmetry s vnútornými odporami R_1 , R_2 a spínač K jsou spojené podľa schématu na obr. 7.

- Určete napětí U_1 , U_2 , která naměříme voltmetry, když spínač K je vypnut.
- Určete napětí U'_1 , U'_2 , která naměříme voltmetry, když spínač K je zapnut a jezdec J rezistoru je přesně v jeho středu.
- Určete odpory R' a R'' částí rezistoru, na které jezdec rozděluje rezistor v případě, že spínač K je zapnutý a napětí mezi svorkami voltmetrů jsou stejné.

Vnitřní odpor zdroje a odpory spojovacích vodičů neuvažujte. Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $U_e = 20 \text{ V}$, $R = 20 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 6,0 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 4,0 \text{ k}\Omega$.

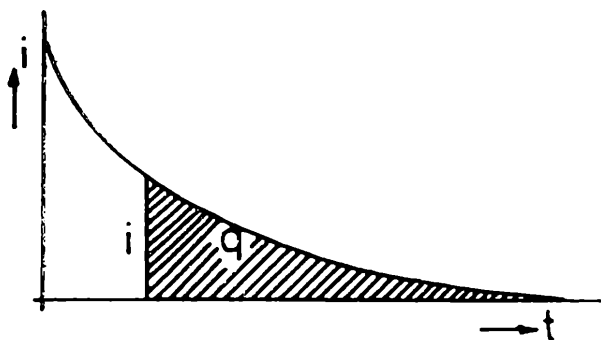
6. Meranie kapacity kondenzátora metódou určenia funkcie $i = f(t)$ prúdu, kde i je prúd v jednoduchom obvode, t je čas.

Princíp merania

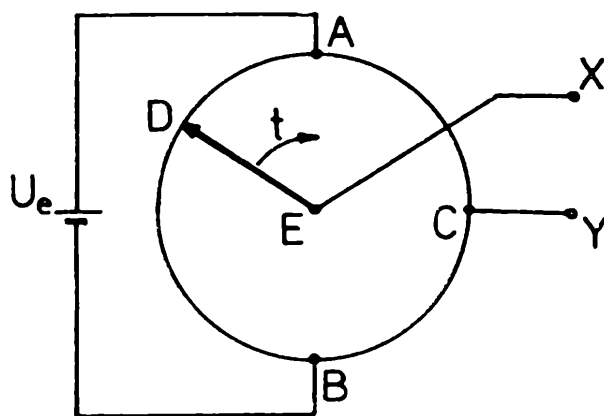
Pre meranie budeme používať kondenzátor s väčšou kapacitou zapojený v obvode podľa schémy na obr. 8.

Kondenzátor po zapnutí spínača získa náboj

$$Q = C U_e.$$



Obr. 9



Obr. 10

Po vypnutí spínača obvodem ampérmetra s vnútorným odporom R_A a rezistora s odporom R prechádza prúd i , ktorého veľkosť sa stále zmenšuje (obr. 9).

Vtedy približne platí

$$q = C U = C i(R + R_A), \quad (1)$$

kde q je okamžitý náboj na kondenzátore.

Zo vzťahu (1) vyplýva

$$C = \frac{q}{i(R + R_A)}. \quad (2)$$

Postup merania

Na meranie použijeme mikroampérmeter s vnútorným odporom R_A , rezistor s odporom do $1 \text{ M}\Omega$, kondenzátor, o ktorom predpokladáme, že má väčšiu kapacitu (rádovo niekoľko desiatok μF), batériu $4,5 \text{ V}$, spojovacie vodiče, spínač, stopky. Obvod zapojíme podľa obr. 8. Navrhujeme tabuľky, do ktorých zapisujeme v určitých časoch t prúd i . Z grafu funkcie $i = f(t)$ určíme niekoľko hodnôt i a q a potom zo vzťahu (2) kapacitu C kondenzátora. Určíme najpravdepodobnejšiu hodnotu kapacity C a chybu merania.

Poznámky :

1. V prípade, že pri meraní je pokles prúdu veľmi pomalý, zapojíme do obvodu rezistor s menším odporom. Snažíme sa k meraniu použiť rezistor s najmenším odporom, aby prúd v obvode bol väčší a pokles prúdu merateľný s potrebnou presnosťou.
2. Náboj q určujeme z obsahu plochy príslušnej časti grafu funkcie $i = f(t)$, napr. metódou grafickej integrácie alebo použitím milimetrového papiera.

7. Elektricky vodivá tyč t (obr. 10) sa rovnomerne otáča uhlovou rýchlosťou ω okolo bodu E tak, že koncový bod D tyče klže po rovnomernom odporovom drôte, ktorý je upravený do tvaru kružnice. Ku dvom

protiľahlým bodom A , B kružnice je pripojený zdroj s elektromotorickým napätím U_e . Bod C drôtu ($AC = BC$) je vodivo spojený so svorkou Y , koniec E tyče je vodivo spojený so svorkou X .

Určte funkciu $u = f(t)$, kde u je napätie medzi svorkami X a Y , t je čas; nakreslite jej graf.

Vnútorňý odpor zdroja napätia a odpory vodičov, ktoré spájajú zdroj napätia s bodmi A a B a body E a C so svorkami, sú veľmi malé.

Dvacet let Školy mladých matematiků

Loňského roku uplynulo dvacet let od doby, kdy jsme se poprvé setkali s útlými knížkami označenými velkými písmeny M a O. Pro soutěžící v matematické olympiádě je začal vydávat ústřední výbor matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta. Tehdejší řešitelé úloh matematické olympiády už dávno ukončili svá studia a do knížek ŠMM budou brzo nahlížet jejich děti.

Letos v lednu tomu již bylo pět let, co nás navždy opustil dlouholetý člen ÚV MO profesor *František Veselý*, z jehož podnětu edice Škola mladých matematiků vznikla. Napsal pro ni též dva svazky, které jsou pro řešitele matematické olympiády dodnes přitažlivé. Jsou to knížky *O nerovnostech* a *O dělitelnosti čísel celých*.

Knižnici zahájil svazek s geometrickou tematikou. Nazývá se *Několik úloh z geometrie jednoduchých těles* a napsali jej František Hradecký, Milan Koman a Jan Vyšín. Zajímavé je, že dosud poslední knížka edice ŠMM se také zabývá geometrií. Je v pořadí 47., jmenuje se *Zajímavé dvojice trojúhelníků* a jejím autorem je Arnošt Niederle. Zbývajících 45 svazků seznamuje čtenáře nejen s geometrií, ale i s dalšími oblastmi matematiky. Knížky jsou dvojího druhu. Některé z nich mají charakter sbírek řešených úloh, přičemž řešení jsou podrobně komentována. Svazky druhého druhu jsou již náročnější na studium a jsou napsány sice přístupně, však způsobem blízkým odborným matematickým knihám.

Během dvaceti let se knižnice Škola mladých matematiků stala pro mnohé mladé matematiky — účastníky matematické olympiády — skutečnou školou.

Jiří Mída

Z NOVÝCH KNIH

Maksimačev, B. A. — Komarov V. N.:

V LABYRINTE HVIEZD

Vydalo Vydavateľstvo Obzor, n. p. Bratislava 1981, preklad z ruštiny, edícia Periskop, strán 192, viaz. Kčs 18,—.

Autori knižky veľmi účinne naznačujú, ako možno pochopiť podstatu orientácie v labirinte hviezdnych ornamentov. Kniha má 7 kapitol. Prvá je venovaná základným údajom sférickej astronómie (meranie uhlov na oblohe, obzorňiková a rovníková súradnicová sústava). V druhej sa zoznámime so sextantom, určovaním zemepisnej šírky a dĺžky i určovaním polohy na Zemi. „Hviezdne majáky“ sú kapitolou pre rýchle a presné poznanie a vyhľadanie najvýznamnejších súhvezdí. Je tu uvedený veľmi pôsobivý opis súhvezdí severnej i južnej oblohy aj s ich pozoruhodnosťami. Ďalšia časť knižky je venovaná spôsobu určovania astronavigačných hviezd aj s krátkou aplikáciou pri kozmických letoch. Šiesta kapitola je venovaná prítomnosti a budúcnosti Mesiaca a orientácii na ňom. Posledná časť je stručnou poznámkou o Slnku a jeho planétach. Súčasťou publikácie je zoznam hlavných navigačných

hviezd, zoznam súhvezdí a veľké mapky hviezdnej oblohy.

Spôsob výkladu je veľmi pôsobivý, vystihujúci zábery autorov. Ak sa chcete zoznámiť so začiatkami astronavigácie, zoberte si túto knižku do rúk. Skúste sami, ako rýchlo s jej pomocou získate návyky na rýchle a presné hľadanie súhvezdí a významných hviezd.

Podobnou problematikou sa zaoberá aj knižka K. Lindnera *Hviezdná obloha*, ktorú vydal Horizont v Prahe roku 1979. V nej je vhodne využitá farebná grafická úprava.

Dušan Jedinák

Čechák, V. - Berka, K. - Zapletal, I.:

CO VÍTE O MODERNÍ LOGICE

Vydal Horizont v Prahe roku 1981, edícia Malá moderní encyklopedie, 328 strán, viaz. Kčs 30,—

Knižka obsahuje základné oblasti logiky, umožňuje získať orientáciu v dejinách logiky, zoznamuje s jazykom logiky a jej základnými úvahami. Približuje výrokovú logiku, otázky odvodzovania a axiomatizácie, predikátový počet, základy teórie množín, prirodzenú dedukciu i neklasické logiky. V zá-

vere knižky sú poznámky o definíciach a aplikáciach logiky v niektorých praktických úlohách.

Niektoré základné poznatky z logiky ste už získali napríklad na hodinách matematiky, niektoré ďalšie nájdete v tejto novej knižke. Dozviete sa o výstavbe formalizovaného jazyka, o bezospornosti,

úplnosti a nezávislosti v axiomatizovaných sústavách. Hlbšie spoznáte zákony predikátovej logiky, axiomatickej teórie množín, pravidiel sekvenčného počtu i otázky okolo intuicionistickej logiky. Knižka orientuje, uvádza do problematiky, podáva základné informácie.

Dušan Jedinák

INFORMACE

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle §6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Vysvětlení efektního experimentu: Schovejte zvuk

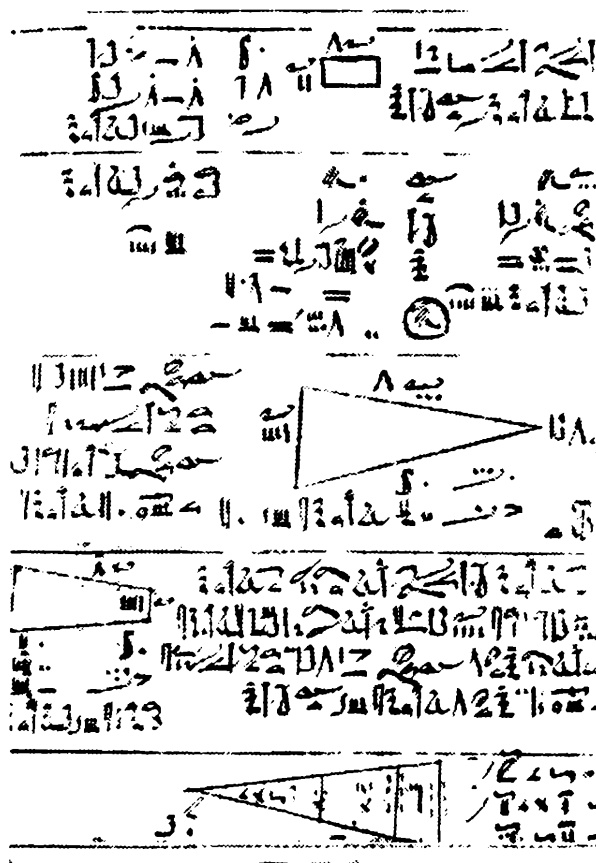
Původní tón ladičky je zesílen kmitáním rezonanční skříňky, která rozkmitává okolní vzduch. Rozkmitáván je také vzduchový sloupec uvnitř skříňky, v níž dochází ke skládání vlnění. Zvuková vlna postupuje otvorem skříňky ven. Toto vlnění není uzavřením skříňky narušeno, změní se zřejmě na vlnění stojaté.

Ahmósova počtenice

Papyrus uložený dnes v Londýně se častěji nazývá *Rhindův papyrus* nebo *Ahmósova počtenice*, protože písař Ahmóse si ji opsal ze staršího rukopisu, který pocházel asi z téhož období jako Moskevský papyrus (z 19. století před n. l.).

Na obrázku vidíte výsek z Ahmósovy počtenice z doby před 3500 lety, která je nadepsána „Průvodce k přesnému počítání, uvádění do věcí, poznání jsoucích věcí vůbec“. Papyrus se dochoval ve dvou pásech, které jsou široké 33 cm a dlouhé dohromady 564 cm. Naše ukázka zahrnuje výpočty měr polí, podle ilustrací je zřejmé, že jde o pole trojúhelníkové, obdélníkové, kruhové i lichoběžníkové.

Ahmósova počtenice obsahuje i pomocné tabulky pro podíly $2:3$, $2:5$, ..., $2:101$; $1:10$, $2:10$, ..., $9:10$, jejichž vyjádření bylo pro tehdejší počtáře ne snadné, protože výsledky zapisovali jen pomocí tzv. kmenných zlomků typu $1:n$. Dále se řeší úlohy o rozdělování určitého počtu chlebě na dávky (v udaném poměru), výpočty objemů válcových



a kvádrových sýpek, výměr polí, počítá se sklon stěn pyramidy.

Ahmóse stejně jako jiní písaři si vzorová řešení úloh opisovali ve svých „učňovských“ letech, ale používali jich pak při výkonu povolání jako příručku. Vzhledem k ustálenému rytmu života ve starém Egyptě sloužila taková sbírka po staletí i dalším generacím písařů.

J. Foltá

Problematiku technickej, algoritmickej, programátorskej a aplikačnej oblasti počítačov si môžete doplniť z týchto popularnovedeckých knižiek o výpočtovej technike:

Bartošová, K. - Janics, G.: Spracúvanie informácií. Bratislava, Obzor 1977

Carda, A. - Kusý, J.: Počítače a jejich užití. Praha, Práce 1979.

Franek, M.: Od algebry k počítačom. Bratislava, SPN 1971.

Hodinár, K.: Žijeme v storočí počítačov. Bratislava, Alfa 1979.

Honzík, M.: Automatické mozky. Praha, Albatros 1976.

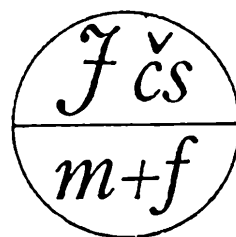
Sedlák, J.: Člověk a výpočtová technika. Praha, SNTL - Práce 1977.

Sokol, J.: Jak počítá počítač. Praha. SNTL 1977.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12 Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1982.



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 60, 1981-82

VEDOUCÍ REDAKTOR: Prof. Emil KRAEMER, UK Praha
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA: Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno,
dr. Milan Bednařík, UP Olomouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc.,
UK Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. dr. Ján
Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT
Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, doc. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Karel Mišoň,
CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, dr.
Oldřich Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV
Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý,
CSc., UK Praha, prof. dr. Ondrej Šedivý, CSc., PF Nitra,
ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

Vydává ministerstvo školství

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

OBSAH

Úvodní články

Chloupek Jaroslav: Světové prvenství Sovětského svazu v kosmickém výzkumu — I., II., III.	97, 145, 193
Kraemer Emil: Významné jubileum Rozhledů matematicko-fyzikálních	1

Matematika

Boček Leo: Podobnost	293
Calda Emil: Profesor Ypsilon na Velké kunratické	103
Profesor Ypsilon nad tilketem sportky	151
Matematika v herních systémech sportovních soutěží	289
Zajímavá množina bodů	345
Drbohlavová Ivana: Obousměrná zelená vlna	295
Gerža Ivan: Neurčité diofantické rovnice	149
Hájek Jaroslav: Geometrie pomáhá řešit algebraické úlohy	101
Hejný Milan: Důkaz Pythagorovej vety	387
Horák Stanislav: Objem čtyřstěnu	353
Těžiště v trojúhelníku	388
Z geometrie trojúhelníku	436
J. S.: Ještě o prvočíslech	352
Kadleček Jiří: Modelování jednoho typu slovních úloh	337
Kraemer Emil: Trisekce úhlu pravítkem a kružítkem	433
Kuřina František: Shodná zobrazení roviny v jazyku šipek	49
Malíšek Vladimír: Odmocnina z komplexního, surdického a smíšeného čísla	6
Martinovičová Eva: Zaujímavé obsahy	340
Mráz Vlastimil: Měření libelou	241
Sinusové a tangentové pravítko	348
Geometrie ozubeného soukolí	439
Pěnička Petr: Archeologie v novém světle	201
Porubský Štefan: Kalendár tajov zbavený	56
Renc Zdeněk: O matematické logice I., II., III.	9, 246, 302
Trávníček Stanislav: Rytmičné etudy	105
Troják Jan: Hlavolam s mosty — cesta do teorie grafů	153
Grafy jedním tahem	196
Veselý Jiří: Bolzanova funkce	251
Zelinka Bohdan: Jak pluje loď	100
Jak je to s desetinnými rozvoji	385

Fyzika

Belošovič Ivan: Skôr než zapnem merací prístroj	448
Brada Pavel: Ionizující záření v radioterapii	13

Florek Matej: Komplexné využitie jadrových reaktorov	451
Golab František, Procházka Josef: Meteorologické veličiny a organizace jejich měření v ČSSR	157
Hudec René: Planeta tisíce prstenců	19
Neutrinová astronomie	362
Hušák Václav: Radionuklidový generátor ^{99}Mo — $^{99\text{m}}\text{Tc}$ a jeho použití v lékařství	396
Ipóth Barnabáš: Tepelná závislost elektrického odporu	392
Kotyk Josef: Seebeckova siréna	356
Kůs Josef: Metoda náhradního zdroje	212, 328
Malíšek Vladimír: Znáte stavovou rovnici plynů?	311
Archimédův zákon a jeho „neobvyklé“ důsledky	354
Ohera Marcel: Interakce jaderného záření s hmotou	161
Využití teorie relativity při rozpadech atomového jádra	254
Tolar Jiří: Uvidíme kontrakci délek?	312
Volf Ivo: Mládež a kosmonautika	358
Zachoval Ladislav: Fyzik v průmyslové praxi — I., II.	64, 117
Jak na ni vyzrát, na tu fyziku?	306

Z dějin exaktních věd

Hrivňák Jiří: K pobytu Alberta Einsteina v Praze	121
Jáchim František: Josef Božek — český technik a vynálezce	260
Jedinák Dušan: Významný slovenský matematik	24
Kolomý Rudolf: Pražský pobyt Jana Keplera	317
Kotyk Josef: České ornitoptéry	119
Kraemer Emil: Vynikající matematika dvacátého století	405
Kraus Ivo: Sedmdesáté výročí Laueova objevu difrakce rentgenového záření na krystalech a životní jubileum prof. A. Kochanovské	459
Machalický Jiří: 275 let první inženýrské školy v našich zemích (nynějšího Českého vysokého učení technického v Praze)	402
Maláč Jaromír: Ludolfovo číslo	263
Malíšek Vladimír: Fyzika před 10, 100 a 1000 roky	217
Kdo byl Archimédes ze Syrakus	320
Mída Jiří: Druhý velký matematik z Brunšviku	169
O cestě k Newtonovým pohybovým zákonům	366
Nečas Jiří: Vzpomínka na Magdeburk	28
Neuman František: Akademik Otakar Borůvka	71
Rebstöck Radovan: Kouzelník z Menlo Parku	26
Repáš Vítazoslav: Sté výročí narodenia Jura Hronca	22
Sedláček Jiří: Prof. RNDr. Karel Hruša	122
Sedivý Jaroslav: Odvážný myslitel Bernard Bolzano	67
Wacław Sierpiński — významný vědec 20. století	364
Guiseppe Peano — matematik a tvůrce jazyků	461

Přemýšlíme, řešíme . . .

Barták František: O jednom využití harmonického průměru ve fyzice	219
Calda Emil: Námořní bitva a úlohy o pokrývání	271
Dragounová Vlasta: Kdy začne jaro?	171
Drs Ladislav: Udělejte si „nemožné“	418
Hejný Milan: Pséfoforia a iracionalita $\sqrt{2}$	123
Hnilička Petr: Efektní experimenty	21, 76, 144, 179, 240, 270, 326, 375, 418, 463
Horák Stanislav: Z Časopisu Kvant	73
Nejmladším čtenářům	372
Koman Milan: Mnohobarevné krychle	323
1 / 99 ²	409
Kraemer Emil: Dvacet úloh z Bulharska pro nejmladší čtenáře	176
Deset úloh z Jugoslávie pro nejmladší čtenáře	410
Lesová Antonie: O jedné rektifikaci kružnice	464
Maláč Jaromír: Řešte kryptogramy	465
Mída Jiří: Návod na jedno kouzlo s hrací kostkou	225
Hra „Jedna ze dvou“	413
Newman Edmund: Z redakční pošty	374
Polák Jiří: Rybářský hlavolam	31
Simon Petr: Kterak kroutit kostkou ku kýžené konfiguraci	266
Svoboda Josef: Hlavolam kotva	326
Hudební hlavolam	416
Šedivý Jaroslav: Pohled do třicátého ročníku Rozhledů	223, 421
Schwabik Štefan: Babylónská věž	371
Š. J.: Druhy útvarů, které mají každé dva prvky podobné	221
Tóth Zoltán: K článku Fyzika v priemyselnej praxi	420

Naše soutěž

Výsledky loňské soutěže	76
Řešení úloh minulého ročníku	78, 127, 180, 226, 274, 276
Úlohy k řešení	85, 135

Olympiády

MO	43, 87, 89, 138, 187, 190, 237, 283, 423, 428, 474
FO	34, 90, 281, 282, 329, 466

Informace

Středoškolská odborná činnost	44, 330, 331
Úlohy z přijímacích zkoušek na vysoké školy	334, 375

Z nových knih 45, 95, 143, 191, 240, 287, 336, 383, 432, 475

Šindelář Karel: Slovníček italsko-český	3. str. obálky v č. 1 až 6
Fořta Jaroslav — Šedivý Jaroslav: Pohledy do dějin	3. str. obálky v č. 7 až 10