

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

1

ROČNÍK 53, 1974-1975, ZÁŘÍ

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1974.

OBSAH

Dr. J. Žofka: Ke třicátému výročí Slovenského národného povstání	1
M. Malík: Axiom o supremu	2
A. Wohlmuthová: Konvexní a konkávní funkce	7
Ing. B. Tesařík: Zaokrouhlování čísel a jejich zápis	13
V. Skalický: Rovina totožnosti	14
J. Filp: Kruhové rezy na kruhovej kužeľovej ploche	16
J. Kotyk: Hmotný střed soustavy hmotných bodů	18
Dr. M. Bednařík, dr. M. Šíroká: Jedeme s kopce	22
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroký: Pohyby Měsíce	30
Matematická olympiáda	34
Naše soutěž	40
Dr. J. Šedivý: Georg Cantor a sto let teorie množin	46
Nejmladším čtenářům	48
Slovníček anglicko-český (pokračování) 3. a 4. str. obálky	

Ke třicátému výročí Slovenského národního povstání

PhDr. JOSEF ŽOFKA, UK Praha

Slovenské národní povstání se zapsalo do dějin našich národů jako velké celonárodní vystoupení slovenského národa proti klerofašistickému režimu na Slovensku a německým okupantům i jako jedno z důležitých vystoupení evropského protifašistického boje za druhé světové války. Politická reprezentace revolučního Slovenska vypracovala a probjovala program, který ovlivnil charakter revolučních přeměn v celém Československu. Obnovená republika měla shodné pojmenování, ale vnitřně se v ní hodně změnilo. „Jiné síly, síly pracujícího lidu se staly hybnou pákou jejího dalšího vývoje“, uvádí ve svých vzpomínkách přední účastník Slovenského národního povstání, člen V ilegálního ÚV KSS, soudruh Gustáv Husák. V dramatickém průběhu národně osvobozenického boje byly vytvářeny předpoklady pro vznik nového československého státu dvou rovnoprávných národů Čechů a Slováků. „Nová Československá republika musí být vybudována jako bratrský svazek svobodných a rovnoprávných národů Čechů a Slováků. V Čechách bude pánem Čech a na Slovensku Slovák. A my všichni dohromady budeme společnými silami budovat společný stát, jsouce přesvědčeni o tom, že svoboda a vzájemné respektování národů učiní Československou republiku opravdu pevnou, mocnou a nezlomnou,“ prohlásil ve svém prvním vystoupení na zasedání ústředního orgánu povstání — Slovenské národní rady v Banské Bystrici 3. října 1944 člen moskevského vedení KSČ a aktivní účastník povstání Jan Šverma. Vyjádřil tím koncepční záměry, politickou linii KSČ, která vycházela z posunu třídních sil a procesu sjednocování celého odboje na programových zásadách komunistického odboje a trvala především na přesném určení základních politických principů výstavby osvobozené republiky

Vedoucí postavení KSČ při organizování a vedení protifašistického hnutí je nerozlučně spjato s jednoznačnou orientací na Sovětský svaz, bez jehož materiální, bojové, politické i morální pomoci by byl masový ozbrojený protifašistický boj na Slovensku nemyslitelný. Vítězství Sovětské armády u Stalingradu a Kurska měla velký ohlas mezi slovenským lidem; odbojové hnutí dostalo nový impuls podepsáním československo-sovětské smlouvy o přátelství, vzájemné pomoci a poválečné spolupráci v prosinci 1943 a sérií dílčích dohod, z nichž zvláštní pozornost zasluhuje dohoda z 8. května 1944, podle níž se sovětská strana zavazovala poskytnout pomoc protifašistickému hnutí a po ukončení vojenských operací předat moc na osvobozeném území do československých rukou.

Nedílnou součástí Slovenského národního povstání je hrdinný boj partyzánských jednotek, které společně s armádou bojovaly na povstaleckých frontách a hájily plných 71 dní „ostrov svobody“. Humanistický smysl národně osvobozenického boje na Slovensku podtrhuje i účast příslušníků 27 národů, které spojovala myšlenka mezinárodní solidarity a internacionalismu.

Letošní oslavy 30. výročí Slovenského národního povstání se proto stávají stále vracejícím se podnětem k promýšlení všech otázek společného soužití obou našich národů ve společném státě. Připomínáme-li si dnes základní fakta, která osvětlují podmínky života lidu za slovenského státu, předpoklady rozvoje národně osvobozenického boje i významná revoluční opatření na povstaleckém území, činíme tak proto, že šlo o politicky a vojensky nejvýznamnější událost národně osvobozenického boje, počátek naší národní a demokratické revoluce, znovusblížení dvou bratrských národů Čechů a Slováků.*)

matematika

Axiom o supremu

MAREK MALÍK, MFF UK Praha

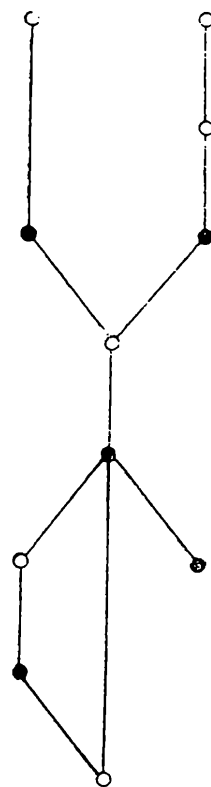
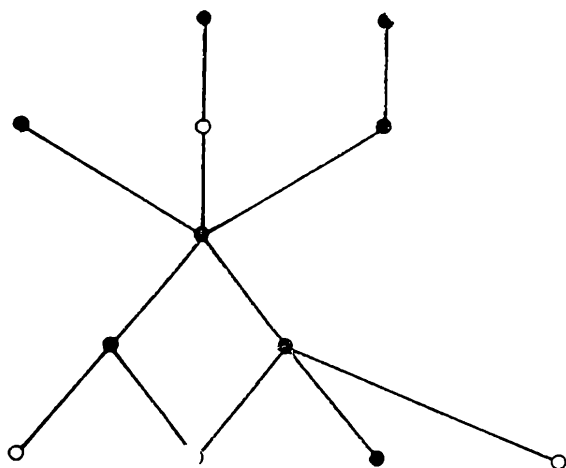
V článku „Význačné prvky v uspořádané množině“ (Rozhledy, č. 5) jsme definovali pojem suprema a infima části uspořádané množiny.

Čtenář jistě našel uspořádané množiny a jejich části, které neměly supremum ani infimum. Dva takové případy jsou znázorněny na obr. 1, v obou jde o množiny uspořádané nelineárně a prvky uvažovaných podmnožin jsou vyznačeny plnými kroužky. Připomeňme si, že uspořádaná množina $(M, \leq)$ je uspořádána lineárně, jestliže pro každé dva její různé prvky a, b platí

$$a > b \quad \text{nebo} \quad a < b.$$

V množině, která není lineárně uspořádána, existují prvky a, b , které jsou různé a přitom neplatí $a > b$ ani $a < b$.

*) Zaslíbený pohled na Slovenské národní povstání přináší kniha *Gustáva Husáka* Svědectví o Slovenském národním povstání, Svoboda 1974, 644 stran.



Obr. 1

V tomto článku si ukážeme, že ani pro lineárně uspořádané množiny není situace tak jednoduchá, jak bychom se snad mohli domnívat. Komplikace s existencí význačných prvků vznikají u nekonečných množin. Pro konečné množiny platí věta:

Věta 1. *Každá konečná neprázdná a lineárně uspořádaná množina $\mathbf{M}$ má největší a nejmenší prvek.*

Důkaz. Dokážeme jen existenci největšího prvku; pro nejmenší prvek se provede důkaz zcela analogicky. Existenci největšího prvku dokážeme indukcí podle počtu prvků množiny $\mathbf{M}$.

I. Buď $\mathbf{M}$ jednoprvková, tj. $\mathbf{M} = \{a\}$. Potom prvek a je zřejmě největším (a také nejmenším) prvkem množiny $\mathbf{M}$.

II. Buď $\mathbf{M} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}\}$, kde $n \geq 1$.

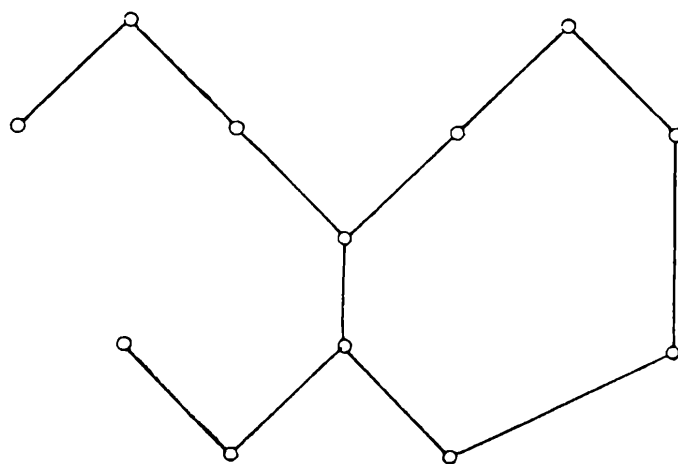
Potom podle indukčního předpokladu má množina $\mathbf{Z} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ největší prvek, označme jej b . Ale $x_{n+1} \notin \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, tedy $x_{n+1} \neq b$.

Podle předpokladů nastává právě jeden z případů:

$\alpha)$ $x_{n+1} > b$,

$\beta)$ $x_{n+1} < b$.

V případě $\alpha)$ je zřejmě největším prvkem množiny $\mathbf{M}$ prvek x_{n+1} , v případě $\beta)$ prvek b . Tím je dokázán indukční krok, a tedy i celá věta.



Obr. 2

Z článku citovaného v úvodu víme, že každý největší prvek uspořádané množiny je i jejím maximálním prvkem. Naopak to zřejmě platit nemusí (viz obr. 2). V teorii lineárního uspořádání množin však obrácená věta platí:

Věta 2. *Nechť je h maximální prvek lineárně uspořádané množiny $\mathbf{M}$, potom je prvek h v této množině největší.*

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že h není v $\mathbf{M}$ největší, tj. existuje prvek x množiny $\mathbf{M}$, pro který platí $x > h$. Pak ovšem h není ani maximálním prvkem množiny $\mathbf{M}$, a to je spor.

Samozřejmě platí analogická věta pro minimální a nejmenší prvek. (Zformulujte ji a dokažte.)

A nyní konečně přistoupíme k vlastnímu zkoumání nekonečných lineárně uspořádaných množin čísel. Označme symbolem $\mathbf{R}$ množinu všech reálných čísel a symbolem $\mathbf{Q}$ množinu všech racionálních čísel. Ze školy víme, že $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, ale $\mathbf{R} \neq \mathbf{Q}$; např. $\sqrt{2}, \pi \in \mathbf{R}$, a přitom $\sqrt{2}, \pi \notin \mathbf{Q}$. Množiny reálných čísel, které mají horní (dolní) závoru, stručně nazveme shora (zdola) omezenými množinami.

Reálná čísla se od racionálních čísel odlišují vlastností shora omezených množin, kterou vyjadřuje axiom o supremu:

Každá neprázdňá shora omezená podmnožina množiny $\mathbf{R}$ má v $\mathbf{R}$ supremum.

Množina $\mathbf{Q}$ všech racionálních čísel tuto vlastnost nemá. Lze například ukázat, že množina $\mathbf{M} = \{x \in \mathbf{Q}; x^2 \leq 2\}$ nemá v $\mathbf{Q}$ supremum, ačkoliv je shora omezená. Pro každé $x \in \mathbf{M}$ platí $x < 1,5$, ale číslo $\sqrt{2}$ (supremum množiny $\mathbf{M}$) není racionálním číslem.

Axiom o supremu vyjadřuje nejpodstatnější rozdíl mezi množinami $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ a má řadu velmi důležitých důsledků.

Nejprve si dokážeme analogickou větu o infimu.

Věta 3. *Každá neprázdná zdola omezená podmnožina M množiny R má v R infimum.*

Důkaz. Označme nejprve $N = \{x \in R; -x \in M\}$. Podle předpokladu má množina M alespoň jednu dolní zavoru, označme ji m , tj. pro každé $x \in N$ platí $m \leq -x$. Pak ale platí $-m \geq x$, a tedy $(-m)$ je horní zavora množiny N a podle axiomu existuje supremum s množiny N . Dokážeme, že číslo $(-s)$ je infimem množiny M . Pro každé $y \in N$ platí $y \leq s$, proto též $-y \geq -s$, číslo $-s$ je dolní zavorou množiny M . Pro každou horní zavoru k množiny N platí, že $-k$ je dolní zavorou množiny M . Současně pro každou horní zavoru k množiny N je $k \geq s$; neboli $-k \leq -s$. Tedy $-s$ je infimem množiny M .

Ještě dokážeme jednu větu, kterou budeme potřebovat dále.

Věta 4. *Nechť M_1, M_2 jsou neprázdné, shora i zdola omezené podmnožiny množiny R a nechť je $M_1 \subset M_2$. Je-li s_1 supremum a r_1 infimum množiny M_1 , s_2 supremum a r_2 infimum množiny M_2 , potom $s_1 \leq s_2$ a $r_1 \geq r_2$.*

Důkaz provedeme pouze pro suprema, pro infima se provádí analogicky. Předpokládejme, že $s_1 > s_2$. Podle definice suprema je s_2 horní zavorou množiny M_2 , a tedy i její části M_1 ; pak ovšem s_1 není nejmenší horní zavorou (tj. supremem) množiny M_1 . Dostáváme spor s předpokladem věty; proto neplatí $s_1 > s_2$, ale $s_1 \leq s_2$.

Pokud znáte pojem posloupnosti reálných čísel, neklesající posloupnosti a limity posloupnosti, tušíte jistě, že tyto pojmy někdy souvisejí se supremem množiny všech členů posloupnosti.

Věta 5. *Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající a shora omezená posloupnost reálných čísel, potom má limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.*

Důkaz této věty nebudeme provádět, naznačíme jen roli axiomu o supremu. Označme $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$, podle předpokladu je množina M shora omezená a podle axiomu existuje její supremum. Označíme supremum množiny M písmenem s a dokážeme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$.

Intuitivně chápeme, že limitou posloupnosti je to číslo, blízko něhož se nachází „konec posloupnosti“. Takto můžeme však vystihnout jen velmi omezenou třídu posloupností; např. zcela pravidelná posloupnost

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1,$$

zřejmě limitu nemá. Proto se definuje pojem hromadné hodnoty posloupnosti.

Definice 1. Říkáme, že číslo h je hromadnou hodnotou posloupnosti

$\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4}, \dots$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = h$.

Například uvedená posloupnost $0, 1, 0, 1, \dots$ má dvě hromadné hodnoty; nulu jako limitu vybrané posloupnosti $0, 0, 0, \dots$ a 1 jako limitu vybrané posloupnosti $1, 1, 1, \dots$.

Zřejmě platí: je-li číslo b limitou posloupnosti, je její jedinou hromadnou hodnotou.

K postihnutí „pohybu konce posloupnosti“ jsou důležité dvě význačné hromadné hodnoty, a to limita superior a limita inferior, které se zavádějí takto:

— Bud' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ shora i zdola omezená posloupnost reálných čísel. Označme.

$$M_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\},$$

$$M_2 = \{a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\},$$

$$M_3 = \{a_3, a_4, a_5, a_6, \dots\},$$

$$M_4 = \{a_4, a_5, a_6, a_7, \dots\},$$

$$M_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\},$$

Označme dále symbolem s_m supremum množiny M_m a symbolem r_m její infimum. Tato čísla existují na základě axiomu a věty 3 neboť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená.

Podle konstrukce je

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset M_4 \supset \dots$$

Odtud podle věty 4 je $\{s_m\}$ nerostoucí a $\{r_m\}$ neklesající posloupnost reálných čísel; podle věty 5 mají obě dvě posloupnosti limitu.

Nechť $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = S$ a $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = R$. Číslo S nazýváme limitou superior posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, číslo R její limitou inferior; píšeme $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = S$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = R$.

Je možno ukázat, že limita superior i limita inferior posloupnosti jsou hromadnými hodnotami posloupnosti. Z naší konstrukce vyplývá, že každá shora i zdola omezená posloupnost má limitu inferior i limitu superior. Připustíme-li však pro tyto limity i hodnoty $+\infty$ a $-\infty$, existují pak $\limsup$ a $\liminf$ ke každé posloupnosti. Opět intuitivně cítíme, že pojmy limita superior a limita inferior posloupnosti vystihují, mezi jakými hodnotami se „konec posloupnosti pohybuje“

Poznali jste několik ukázek, jak důležitou roli hraje v matematice axiom o supremu, charakterizující obor reálných čísel.

Cvičení

1. Dokažte: Je-li $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, pak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ a obráceně. Přitom je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.
2. Najděte případ shora omezené množiny $\mathbb{M}$ reálných čísel, která nemá největší prvek.

Konvexní a konkávní funkce

ANEŽKA WOHLMUTHOVÁ, ČVUT Praha

V starším ročníku Rozhledů se čtenář v pěkných článcích P. Vihana „Didoniny úlohy I, II“ (Rozhledy r. 51, 1972/73, č. 4 a č. 10) seznámil s elementárním řešením jednoho typu extrémálních úloh. Řešení bylo založeno na známé nerovnosti mezi geometrickým a aritmetickým průměrem

$$\sqrt{u_1 u_2} \leq \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (1)$$

Nerovnost (1) je splněna pro libovolná nezáporná čísla u_1, u_2 , neboť

$$\frac{u_1 + u_2}{2} - \sqrt{u_1 u_2} = \frac{(\sqrt{u_1} - \sqrt{u_2})^2}{2} \geq 0$$

Přitom rovnost v (1) nastává právě když $u_1 = u_2$.

Upravme nerovnost (1). Zvolme kladné číslo a . Jsou-li x_1, x_2 libovolná reálná čísla, pak čísla $u_1 = a^{x_1}, u_2 = a^{x_2}$ jsou jistě kladná a můžeme je dosadit do (1). Dostáváme

$$\sqrt{a^{x_1} \cdot a^{x_2}} \leq \frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2},$$

což lze přepsat

$$a^{\frac{x_1 + x_2}{2}} \leq \frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2} \quad (2)$$

Nerovnost (2) je splněna pro libovolná reálná čísla x_1, x_2 , přičemž rovnost nastává, právě když $a^{x_1} = a^{x_2}$. Je-li $a \neq 1$, je funkce $y = a^x$

ryze monotónní a rovnost ve (2) tedy nastává, právě když $x_1 = x_2$. Je-li $a = 1$, je funkce $y = a^x$ konstantní a rovnost ve (2) platí pro všechna x_1, x_2 .

Z nerovnosti (1) jsme tedy odvodili nerovnost (2). Naopak, je-li $a \neq 1$ a u_1, u_2 libovolná kladná čísla, můžeme ve (2) položit $x_1 = \log_a u_1$, $x_2 = \log_a u_2$ a dostaneme nerovnost (1), a to i s příslušným dodatkem o rovnosti.

Ukázali jsme tedy, že nerovnost (1), která hrála hlavní roli v řešení extrémálních úloh, se dá odvodit z nerovnosti (2).

Můžeme si položit otázku, zda tohoto postupu lze použít i pro další funkce f , tj. zda z nerovností mezi funkčními hodnotami

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \quad \text{a} \quad \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

plynou nerovnosti, kterých bychom mohli použít při řešení extrémálních úloh o jiných funkcích f . Ukazuje se, že je to možné. To nás vede k zavedení následujících pojmů.

Definice 1: Řekneme, že funkce f je středově konvexní, resp. středově konkávní, (dále už jen s-konvexní, resp. s-konkávní) na intervalu $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$, jestliže pro libovolné body $x_1, x_2 \in \mathbf{K}$ platí nerovnost

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad (3)$$

resp.

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad (3')$$

Definice 1' Řekneme, že funkce f je ostře s-konvexní (nebo též striktně s-konvexní), resp. ostře s-konkávní na intervalu $\mathbf{K}$, jestliže v nerovnosti (3), resp. (3') nastává rovnost, právě když $x_1 = x_2$.

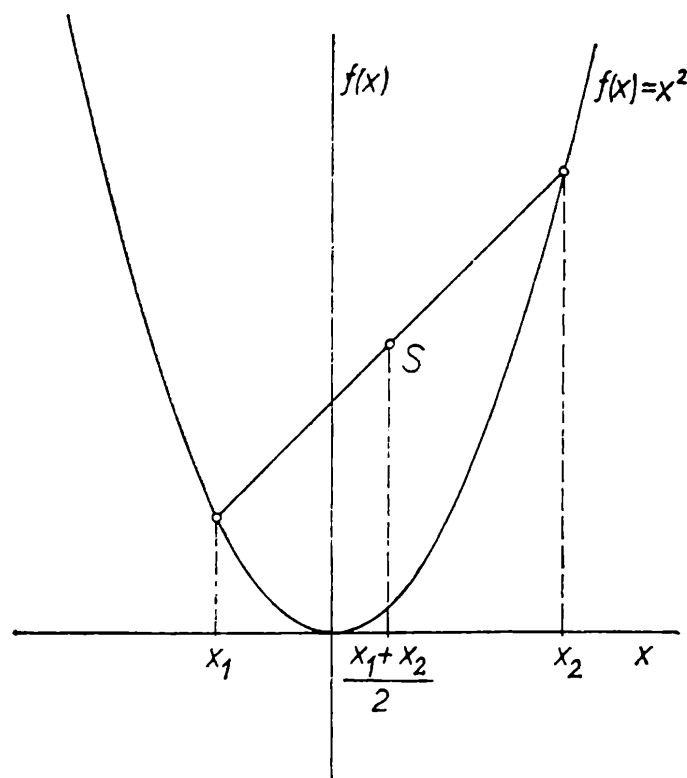
Pokud $\mathbf{K}$ je definiční obor funkce f , budeme říkat, že funkce f je s-konvexní, resp. s-konkávní.

Příklad 1: Funkce $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, je ostře s-konvexní (obr. 1).

Abychom naše tvrzení dokázali, musíme ukázat, že nerovnost

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad (4)$$

je splněna pro všechna $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, přičemž rovnost nastane, právě když $x_1 = x_2$.



Obr. 1

Výrazy z nerovnosti (4) porovnáme rozdílem:

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 &= \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{4} - \frac{2x_1x_2}{4} - \frac{x_2^2}{4} = \\ &= \frac{x_1^2}{4} - \frac{2x_1x_2}{4} + \frac{x_2^2}{4} = \left(\frac{x_1 - x_2}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Poslední výraz je nezáporný pro všechna $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, přičemž nule se rovná, právě když $x_1 = x_2$. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Příklad 2 Funkce $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$, je s-konvexní na $\mathbf{R}$, ale není striktně s-konvexní na $\mathbf{R}$

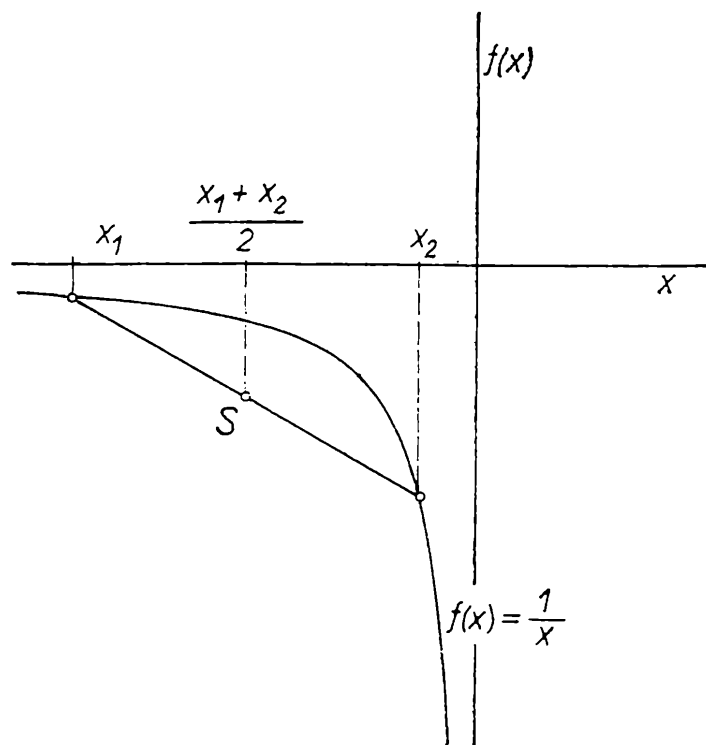
Nerovnost

$$\left| \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \leq \frac{1}{2} (|x_1| + |x_2|)$$

je splněna pro každé $x_1 \in \mathbf{R}$, $x_2 \in \mathbf{R}$, přičemž rovnost nastává pro každou dvojici x_1, x_2 , pro niž platí $\text{sign } x_1 = \text{sign } x_2$.*)

*) Sign je zkratka slova signum = znamení. Klademe $\text{sign } a = 1$ pro $a > 0$, $\text{sign } a = -1$ pro $a < 0$, $\text{sign } 0 = 0$.

Obr. 2



Příklad 3: Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je ostře s-konkávní na intervalu $(-\infty; 0)$ (obr. 2).

Vyšetříme rozdíl

$$\frac{1}{\frac{x_1 + x_2}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right),$$

kde $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$. Zřejmě platí:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x_1 + x_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) &= \frac{4x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2}{2(x_1 + x_2)x_1x_2} = \\ &= \frac{-(x_1 - x_2)^2}{2(x_1 + x_2)x_1x_2} = \frac{(x_1 - x_2)^2}{2(-x_1 - x_2)x_1x_2} \geq 0, \end{aligned}$$

přičemž rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2$. To však znamená, že

$$\frac{1}{\frac{x_1 + x_2}{2}} > \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2}$$

pro $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, $x_1 \neq x_2$, čímž je naše tvrzení dokázáno.

Podívejme se na geometrický význam definovaných pojmů. Označme x bod z definičního oboru funkce f . Jestliže je $y \geq f(x)$, budeme říkat,

že bod $(x; y)$ leží (slabě) nad grafem funkce f . Jestliže $y > f(x)$, budeme říkat, že bod $(x; y)$ leží striktně nad grafem funkce f . Protože středem úsečky o koncových bodech $(x_1; f(x_1))$, $(x_2; f(x_2))$ je bod

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right),$$

je funkce f s-konvexní, právě když střed libovolné úsečky s koncovými body na grafu funkce f leží (slabě) nad grafem funkce f . Podobně: funkce f je striktně s-konvexní, právě když střed libovolné (nedege-
rované) úsečky s koncovými body na grafu funkce f leží striktně nad grafem funkce f .

Jaký je geometrický význam tvrzení „funkce f je s-konkávní“ a „funkce f je ostře s-konkávní“, necháváme na rozmyšlenou čtenáři.

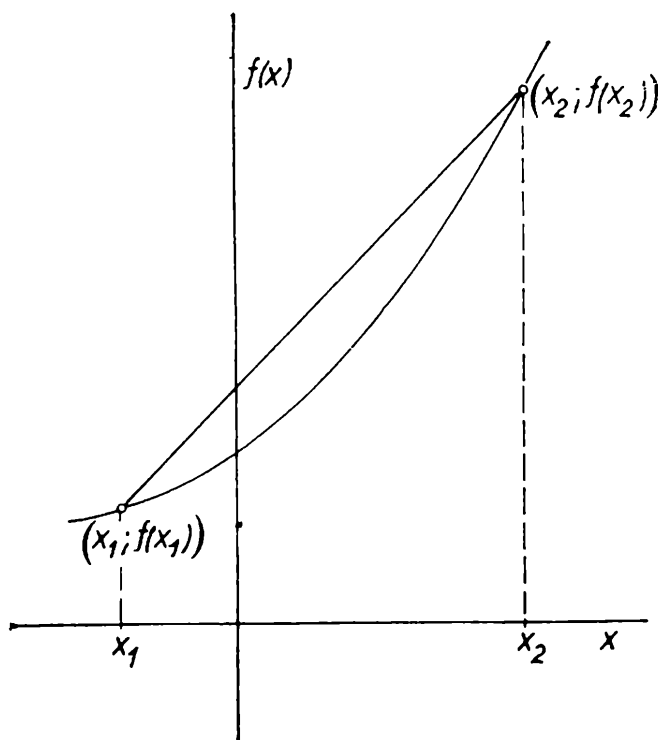
Z požadavku, aby nad grafem funkce f ležely všechny body úsečky s koncovými body na grafu funkce f , se dostáváme k funkci konvexní.

Definice 2: Řekneme, že funkce f je konvexní, resp. konkávní na intervalu K , jestliže pro libovolné body $x_1, x_2 \in K$ a libovolné číslo $t \in (0; 1)$ platí

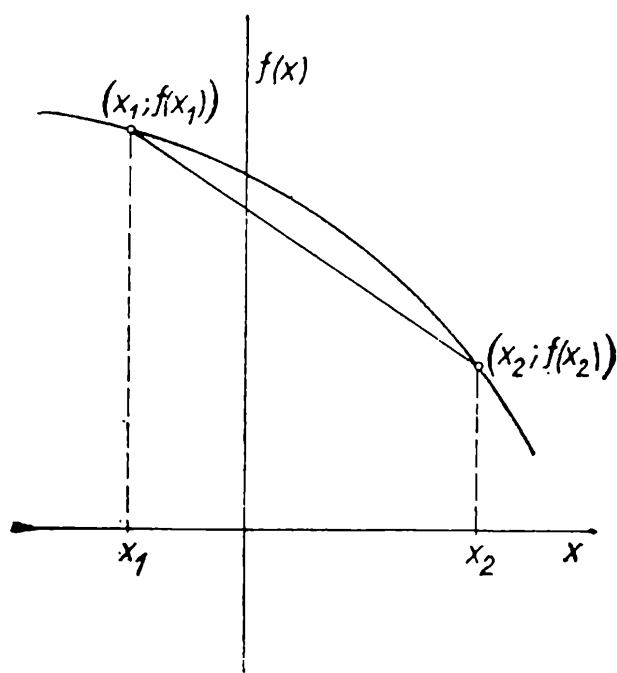
$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2), \quad (5)$$

resp.

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \geq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) \quad (5')$$



Obr. 3a



Obr. 3b

Definice 2' Řekneme, že funkce f je striktně konvexní, resp. striktně konkávní na intervalu $\mathbf{K}$, jestliže pro libovolné různé body $x_1, x_2 \in \mathbf{K}$ a libovolné $t \in (0; 1)$ platí

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) < tf(x_1) + (1 - t)f(x_2), \quad (6)$$

resp.

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) > tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) \quad (6')$$

(obr. 3a, 3b).

Příklad 4: Každá funkce $y = ax^2$ je při $a > 0, x \in \mathbf{R}$ striktně konvexní na $\mathbf{R}$.

Abychom toto tvrzení dokázali, je třeba ukázat, že nerovnost

$$a(tx_1 + (1 - t)x_2)^2 < tax_1^2 + (1 - t)ax_2^2$$

je splněna pro každé $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 \neq x_2, t \in (0; 1)$.

Výrazy na obou stranách nerovnosti porovnáme rozdílem:

$$\begin{aligned} & tax_1^2 + (1 - t)ax_2^2 - a(tx_1 + (1 - t)x_2)^2 = \\ & = a(tx_1^2 + (1 - t)x_2^2 - t^2x_1^2 - 2t(1 - t)x_1x_2 - (1 - t)^2x_2^2) = \\ & = a(t(1 - t)x_1^2 - 2t(1 - t)x_1x_2 + [(1 - t) - (1 - t)^2]x_2^2) = \\ & = a(t(1 - t)x_1^2 - 2t(1 - t)x_1x_2 + t(1 - t)x_2^2) = at(1 - t)(x_1 - x_2)^2 > 0 \end{aligned}$$

pro všechna $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 \neq x_2, t \in (0; 1)$.

Ověření konvexity funkce pomocí definice je složitější, nežli ověření s-konvexity. Např. pro exponenciální funkci se nám ověření konvexity nepovede bez užití složitějšího aparátu. Takový aparát poskytuje např. diferenciální počet, pomocí něhož se dají odvodit různá kritéria, užívající buď monotónnosti první derivace nebo znaménka druhé derivace.

Naší snahou bude zkoumat konvexitu funkcí elementárními prostředky. Proto se omezíme na s-konvexitu a v dalším článku vyšetříme s-konvexitu některých elementárních funkcí.

Podívejme se ještě na vztah mezi konvexitou a s-konvexitou funkcí. Jak rovnou plyne z definice 2 (zvolíme-li $t = \frac{1}{2}$), je každá konvexní funkce zároveň s-konvexní. Naproti tomu neplatí, že každá s-konvexní funkce je konvexní. Již v roce 1905 byla popsána s-konvexní funkce, definovaná pro všechna reálná čísla, která není konvexní.

Studiem podmínek, za kterých je s-konvexní funkce konvexní, se zabývala řada matematiků, z nichž např. H. Blumberg (1919), W. Sierpinski (1920) a A. Ostrovski (1929) dosáhli značných výsledků.

Zaokrouhlování čísel a jejich zápis

Ing. BOHUMIL TESAŘÍK, Kaznějov

S účinností od 1. 7. 1974 byla počátkem letošního roku vydána Úřadem pro normalizaci a měření významná čs. státní norma ČSN 01 1010, která stanoví zásady pro zaokrouhlování čísel, včetně zaokrouhlování číselných hodnot a veličin a způsobů psaní čísel přesných, nepřesných, neúplných a zaokrouhlených desítkové soustavy. Ve smyslu vydané normy jde vždy o zaokrouhlování dekadické. V meteorologii a ve zvláštních případech (např. zaokrouhlování čísel sestavených do řady nebo statistické tabulky) lze použít i jiných způsobů zaokrouhlování.

Osm stránek textu nové normy, vypracované Čs. meteorologickým ústavem — Praha (ing. dr. V. Šindelář, CSc.), je rozděleno do tří kapitol. V úvodu jsou definovány základní názvoslovné pojmy — přesné, nepřesné a neúplné číslo, platné místo čísla, zaokrouhlování, zaokrouhlené číslo, zaokrouhlená číslice, velikost zaokrouhlovaného intervalu, nejistota měření, platné místo nejistoty aj. Druhá část obsahuje pravidla zaokrouhlování — zaokrouhlování dolů a nahoru, podle pravidla sudé číslice (ve zvláštních případech, kdy za zaokrouhlenou číslici následuje číslice 5 a je známo, že za ní následují pouze nuly, tzv. přesná pětka) a zaokrouhlování čísel s nejistotou. Postupné zaokrouhlování téhož čísla ve dvou nebo více stupních je nepřípustné, protože může vést k omylu. Třetí část je věnována způsobům psaní čísel; aby byl způsob psaní výsledných čísel resp. číselných hodnot veličin ekonomický a jednotný, doporučuje se všeobecné dodržování těchto dvou zásad:

a) u fyzikálních veličin přednostně uvádět číselnou hodnotu v hlavních jednotkách (SI) příslušné veličiny:

b) číselné hodnoty přednostně uvádět tak, aby první (nenulová) číslice v číselné hodnotě byla na nultém řádu, tj. na prvním místě před desetinnou čárkou. Není-li to vhodné, doporučuje se, aby první platná číslice měla řád v rozmezí 10^{-1} až 10^2 ; řád číselné hodnoty se přitom vyjadřuje násobením příslušnou mocninou deseti.

Je-li žádoucí vyznačit, že nějaké desetinné číslo je konečným desetinným zlomkem nebo že jde o číselnou hodnotu přijatou nějakou konvencí jako přesnou, lze použít připojení poznámky „přesně“, tučnější sazbu popř. silnější napsání poslední číslice nebo podtržení poslední číslice u přesného čísla dvojitou čarou.

Neúplná čísla se při psaní na konečný, resp. zmenšený počet míst (aniž se zaokrouhlují) zapisují tak, že se za poslední uváděnou číslici dělají tři tečky. U zaokrouhlnutého čísla se podle potřeby vyznačuje způsob zaokrouhlování: při zaokrouhlování nahoru se poslední číslice

zaokrouhleného čísla podtrhne, při zaokrouhlování dolů se udělá nad poslední číslicí tečka. Číselná hodnota výsledků měření nějaké fyzikální veličiny se udává zpravidla současně s nejistotou udávanou ve stejných jednotkách a na stejný počet desetinných míst.

V dodatku jsou uvedeny principy nedekadického zaokrouhlování, které se používá v případech, kdy dekadické zaokrouhlování je příliš hrubé; podrobně jsou uvedeny zásady pro zaokrouhlování pětkové, tj. na polovinu řádu.

Souvisící čs. normou je ČSN 01 1310 Pravidla pro psaní a tisk rovnic a značek veličin a jednotek.

konstruktivní geometrie

Rovina totožnosti

VÁCLAV SKALICKÝ, Pardubice

V č. 9 r. 1969/70 tohoto časopisu byl uveřejněn článek [1] o rovině totožnosti, tj. rovině, která pólí úhel první a druhé průmětny a prochází přitom II. a IV. kvadrantem. Tato rovina může být také definována jako množina všech bodů A , jejichž sdružené průměty splývají: $A_1 = A_2$.

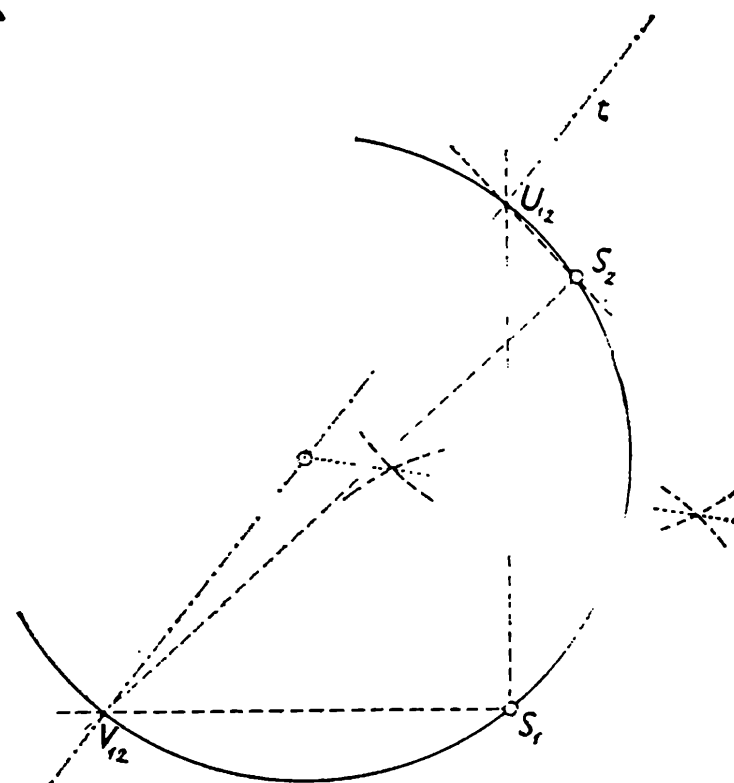
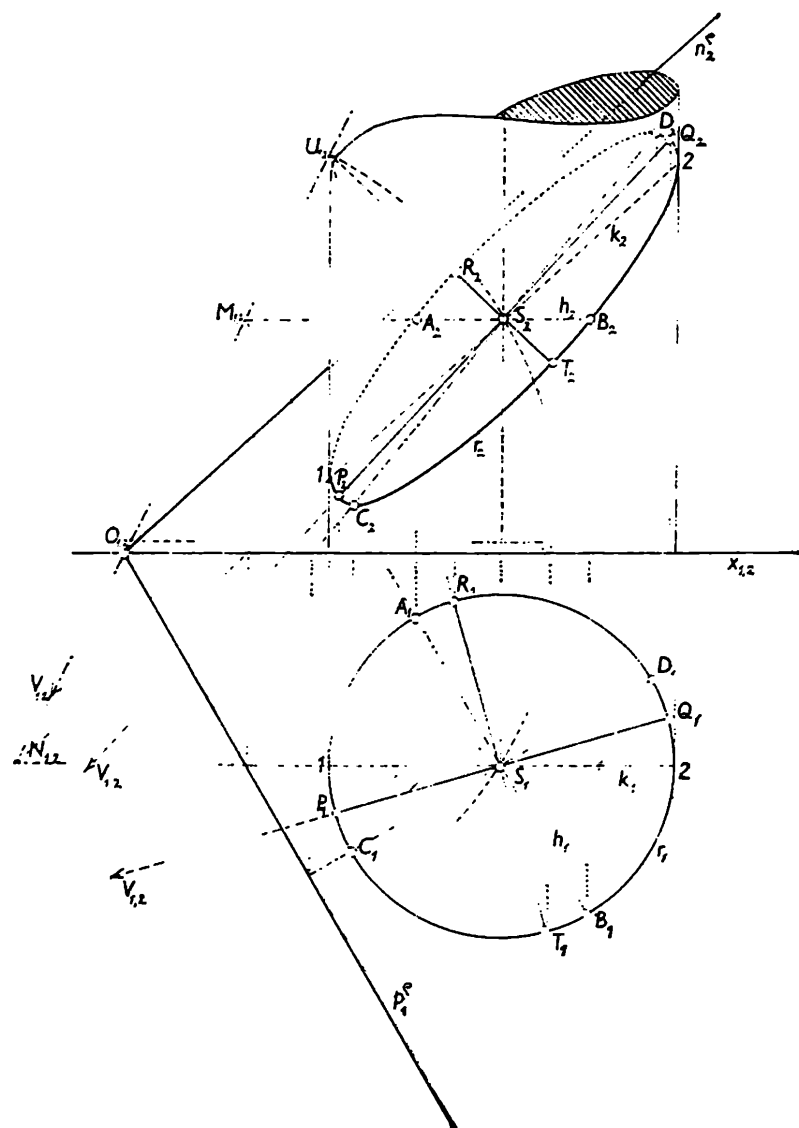
V článku jsou popsány některé vlastnosti útvarů ležících v této rovině (nazveme ji τ) a uvedeny možnosti jejich použití v úlohách. Jedno z možných použití roviny τ jsem tu však nenalezl, a soudím, že je užitečné na ně podrobněji poukázat, i když je pozorný čtenář po prostudování práce může sám odvodit. Jde o řez přímého kruhového válce (s podstavou v π) obecně položenou rovinou ϱ .

Sestrojení druhého průmětu řezu, jenž je obecně elipsa, provádí se zpravidla tak, že se pomocí hlavních přímek první a druhé osnovy (h' k) sestrojí předně střed elipsy řezu (S), dále pak sdružené průměty průměrů AB , CD . Volíme-li účelně $A_1B_1 \parallel p_1^e$, $C_1D_1 \perp p_1^e$, pak druhé průměty A_2B_2 , C_2D_2 jsou sdruženými průměry druhého průmětu elipsy řezu. Sestrojení os obrazu elipsy v nárysu ze sdružených průměrů lze provést některou známou konstrukcí (např. Chaslesovou).

Sestrojení těchto os lze však také provést využitím vlastností roviny τ , jak jsou uvedeny v citovaném článku [1].

Použijeme věty 3 této práce: Mezi prvním a druhým průmětem útvaru

Obr. 1



Obr. 1a

ležícího v rovině ϱ platí vztah osové afinity, jejíž osou je průsečnice t rovin ϱ a τ a jejímž směrem je směr ordinál. (Předpokládejme obecnou polohu ϱ , tedy nikoli $\varrho \parallel x$.)

Průsečnice t rovin ϱ , τ prochází bodem O na základnici, který je společný stopám p^e , n^e . Další bod přímky t je průsečík M první hlavní přímky h roviny ϱ s rovinou τ . Tato přímka prochází středem S hledaného řezu. Potom $t = OM$.

Afinita je nyní určena osou t a dvojicí bodů S_1 , S_2 , jež jsou v této afinitě sdruženy. Sestrojíme nyní kružnici, která má střed na ose afinity t a prochází přitom body S_1 , S_2 . Průsečíky této kružnice s osou afinity jsou samodružné body, které označíme U_{12} , V_{12} (obr. 1a). Dvojici sdružených průměrů S_1U_{12} , S_1V_{12} v kružnici r_1 odpovídá dvojice sdružených průměrů S_2U_{12} , S_2V_{12} v elipse r_2 . Ale $S_2U_{12} \perp S_2V_{12}$, a proto tyto dva průměry jsou osy elipsy. Omezíme je použitím naší afinity, jak je patrné z obr. 1.

Poznámka: Popsaný postup selhává v případě, že rovina ϱ je rovnoběžná se základnicí x . Konstrukce řezu postupuje tu jinou cestou a je zcela snadná.

Literatura:

1] Ho rák, Stanislav: Rovina totožnosti. — RMF r. 48 (1969/70), s. 397.

Kruhové rezy na kruhovej kužel'ovej ploche

JOSEF FILIP, Bratislava

V tomto príspevku chceme poukázat na jeden spôsob konštrukcie kruhových rezov na kruhovej kuželovej ploche. Využijeme na to poznatkov z článku F. Hradeckého (Veta 2 a 3) uverejneného v č. 5, roč. 52 tohto časopisu pod názvom „Stereografická projekce a Möbiova rovina“

Konštrukcia potom vyplynie z tejto jednoduchej úvahy. Nech je daná kružnica $k(S; r)$ v rovine π a bod V . Kuželová plocha (V, k) , ktorá má vrchol V a určujúcu kružnicu k , je plochou premietajúcou kružnicu k z bodu V . Našou úlohou je zostrojiť na tejto ploche ľubovoľný kruhový rez. Kružnicu k môžeme pokladať za stereografický priemet istej kružnice k^a na guľovej ploche G , ktorá má ľubovoľný polomer, prechádza vrcholom V a dotýka sa v tomto bode roviny $\pi' \parallel \pi$. Na obr. je znázornená táto situácia v pravouhlom premietaní na rovinu $\nu \perp \pi$, ktorá obsahuje priamku SV ($SV \parallel \nu$). (Priemety prvkov ležiacich v prie-

Hmotný střed soustavy hmotných bodů

JOSEF KOTYK, Pardubice

Přípravné pojmy

Zvolme na přímce dva body $A(x_1)$, $B(x_2)$ a třetí bod $C(x)$. Poměr úseček AC a BC , bráných se zřetelem ke smyslu, stanoví *dělicí poměr* $k = \frac{AC}{BC}$ bodu C vzhledem k základním bodům A , B .

Každému bodu přímky přísluší určitý jediný dělicí poměr.

Leží-li bod C vně úsečky AB , jsou úsečky AC , BC téhož smyslu; dělicí poměr bodu C je kladný. Je-li bod C vnitřním bodem úsečky AB , jsou úsečky AC , BC opačného smyslu; dělicí poměr bodu C je záporný. Střed S úsečky AB má tu vlastnost, že $BS = -AS$, má proto dělicí poměr $k = \frac{AS}{BS} = -1$.

Obráceně: *Každá hodnota dělicího poměru stanoví jediný bod přímky.*

Obecně jest $AC = x - x_1$, $BC = x - x_2$, takže $k = \frac{x - x_1}{x - x_2}$ odtud vychází souřadnice bodu C jako výraz $x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}$, mající význam pro každé $k \neq 1$.¹⁾ Je-li tento bod středem úsečky AB , je $k = -1$; jeho souřadnice jest, jak známo, $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Vzorec se tedy osvědčuje; v dalším výkladu ho proto několikrát použijeme.

* * *

Po této přípravě můžeme již snadno určit polohu hmotného středu²⁾ soustavy hmotných bodů ležících v přímce. Jsou-li

¹⁾ Uvedená věta bude platit bez této výjimky, jestliže do svých úvah zavedeme tzv. *nevlastní* (nekonečně vzdálený) bod přímky, pro nějž $k = 1$. Dosaditi tuto hodnotu do vzorce $x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}$ ovšem nelze.

²⁾ V učebnicích mechaniky se užívá také stručnějšího názvu *střed soustavy hmotných bodů* nebo *střed hmotné soustavy*.

tyto dané body $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M_3(x_3)$, $M_n(x_n)$ a jejich hmotností m_1 , m_2 , m_3 , m_n , lze dokázat, že souřadnice x hmotného středu této soustavy je stanovena výrazem

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Důkaz tohoto tvrzení, jež označíme symbolicky T_n , provedeme *matematickou indukcí*.

Ověřme učiněné tvrzení T_n nejprve pro dva body $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ s hmotnostmi m_1 , m_2 . Jejich hmotný střed je podle výkladů mechaniky působíštěm výslednice tíhových sil, které na dané hmotné body působí; leží na úsečce, jež oba body spojuje, a dělí ji v obráceném poměru jejich hmotností. Dělicí poměr hmotného středu vzhledem k daným bodům je tedy $k = -\frac{m_2}{m_1}$. Jeho užitím dostáváme souřadnici hmotného středu

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k} = \frac{x_1 - \frac{-m_2}{m_1} \cdot x_2}{1 - \frac{-m_2}{m_1}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

Tak shledáváme, že tvrzení T_n se pro $n = 2$ osvědčuje.

Jestliže přidáme k daným dvěma bodům další bod $M_3(x_3)$ s hmotností m_3 , můžeme hmotný střed této soustavy určit jako hmotný střed soustavy dvou bodů: Jedním z nich je hmotný střed původní soustavy dvou bodů M_1 , M_2 s hmotností $m_1 + m_2$, druhým pak bod M_3 právě přidaný. Vylíčeným postupem dostáváme

$$x = \frac{\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} - \frac{-m_3}{m_1 + m_2} x_3}{1 - \frac{-m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

jak jsme mohli na základě tvrzení T_n pro $n = 3$ očekávat.

Po těchto zkušenostech můžeme již přikročit k závěru z n na $n + 1$ a vysloviti tvrzení T_{n+1} takto:

Souřadnice hmotného středu soustavy hmotných bodů $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M_3(x_3)$, $M_n(x_n)$, $M_{n+1}(x_{n+1})$ ležících v přímce a majících po řadě hmotnosti m_1 , m_2 , m_3 , m_n , m_{n+1} je stanovena výrazem

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_nx_n + m_{n+1}x_{n+1}}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n + m_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n+1} m_i}.$$

Při provádění důkazu tohoto nového tvrzení T_{n+1} postupujeme jako dosud. Hmotný střed soustavy $(n+1)$ bodů stanovíme jako hmotný střed soustavy dvou bodů: Jedním z nich je hmotný střed původní soustavy n bodů $M_1, M_2, \dots, M_n$ s hmotností $m_1 + m_2 + \dots + m_n$, druhým pak bod M_{n+1} právě přidaný. Dostáváme

$$x = \frac{\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} - m_{n+1}}{1 - \frac{m_{n+1}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}} \cdot x_{n+1}$$

neboli

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_nx_n + m_{n+1}x_{n+1}}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n + m_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n+1} m_i}$$

jak jsme tvrdili.

Platí-li tedy výraz T_n pro určité n , platí také, píšeme-li v něm $n+1$ místo n . Jestliže platí pro nějaký počet hmotných bodů, platí také pro počet o 1 větší. Avšak pro $n=2, n=3$, jak jsme se přesvědčili, platí; platí tedy pro každý počet.

Cvičení.

1. Souřadnici hmotného středu soustavy tří hmotných bodů lze snadno stanovit také užitím vzorce dříve odvozeného pro souřadnici hmotného středu soustavy dvou hmotných bodů $x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$

Učiňte tak!

2. Týmž postupem stanovte znovu také souřadnici hmotného středu soustavy $(n+1)$ hmotných bodů!

3. Úvahami zcela podobnými těm, které jsme vykonali, vypočteme, že souřadnice hmotného středu soustavy n hmotných bodů v rovině $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ s hmotnostmi $m_1, m_2, \dots, m_n$ jsou

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \dots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Dokažte!

4. Souřadnice hmotného středu soustavy n hmotných bodů v prostoru $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_n(x_n, y_n, z_n)$ s hmotnostmi $m_1, m_2, \dots, m_n$ jsou obdobně

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} ;$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} ; \quad z = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Dokažte!

Poznámka.

Obecnější úvahy o stanovení polohy hmotného středu soustavy hmotných bodů mohou čtenáři nalézt ve výtečné učebnici univ. prof. Dr. Viktora Trkala „*Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*“ (nakl. ČSAV v Praze 1956), kterou doporučuji — zejména články 85 „Střed soustavy hmotných bodů (těžiště)“ a 158 „Těžiště“ — k dalšímu studiu.

Jedeme s kopce

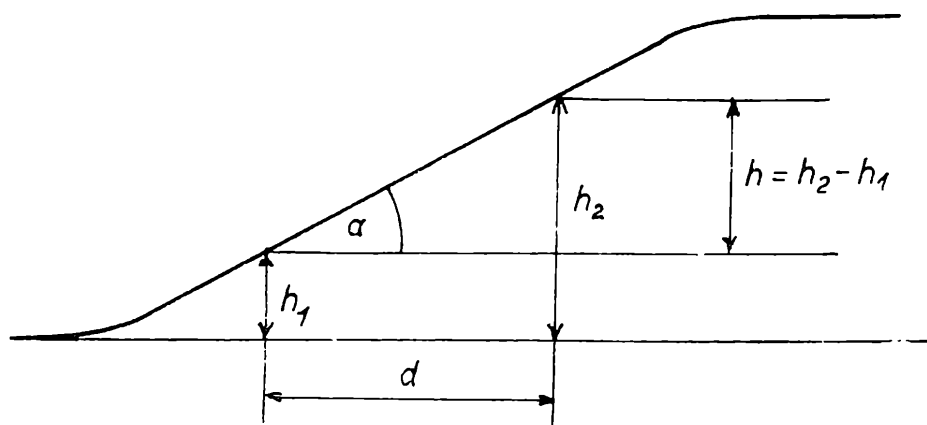
Až si jednou pořídíte motorové vozidlo (8. část)

RNDr. MILAN BEDNAŘÍK — RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Jestliže jste sledovali náš seriál „Až si jednou pořídíte motorové vozidlo“, měli jste možnost dovědět se o celé řadě fyzikálních jevů, které velmi těsně souvisely s problémy co nejbezpečnější jízdy motorových vozidel. Mohli jste se seznámit např. s výpočtem dráhy, kterou potřebujeme k bezpečnému zastavení jedoucího vozidla, se stanovením bezpečné vzdálenosti, kterou je třeba udržovat za jiným jedoucím vozidlem nebo se stanovením dráhy potřebné pro předjíždění, či s výpočtem rychlosti, kterou volíme pro bezpečné projetí zatáček. Ve všech těchto případech jsme předpokládali vodorovnou silnici.

V tomto článku ukážeme, jak se změní fyzikální podmínky bezpečné jízdy pro případy, kdy se motorové vozidlo pohybuje na silnicích svažujících se směrem dolů, neboli, jak se odborně říká, na silnicích s tzv. *klesáním trasy*.

Silnice s klesáním trasy je charakterizována *podélným sklonem*, který definujeme jako poměr výškového rozdílu h dvou míst na vozovce k jejich vodorovné vzdálenosti d (obr. 1). Označíme-li úhel, který svírá podélná

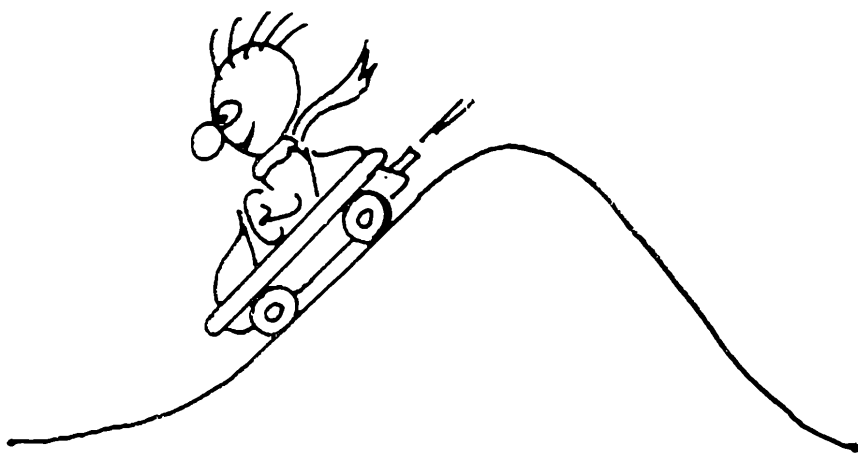
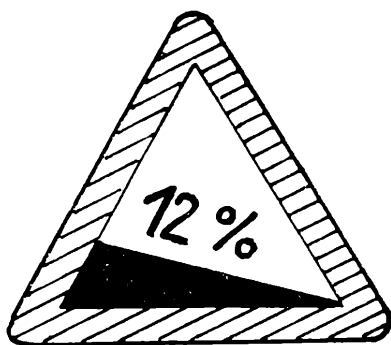


Obr. 1

osa silnice s vodorovným směrem, písmenem α , platí $\frac{h}{d} = \operatorname{tg} \alpha$. Podélný sklon silnice vyjádřený v procentech je pak $p = \frac{h}{d} \cdot 100 \% = \operatorname{tg} \alpha \cdot 100 \%$.

Spatříme-li např. u silnice dopravní značku v podobě červeně orámovaného trojúhelníka, v jehož bílém poli je nápis 12 % (obr. 2), pak bychom měli vědět, že podélná osa silnice svírá s vodorovnou rovinou

Obr.



nejvýše takový úhel, jehož tangenta je rovna 0,12 (této hodnotě odpovídá přibližně úhel 7°).

Jak známo, mnoho našich silnic prochází značně členitým terénem, zvláště pak pokud jde o horské oblasti. Vzhledem k této členitosti krajiny se často podélný sklon i téže silnice během jízdy velmi rychle mění. Jestliže je podélný sklon na určitém úseku silnice konstantní, mluvíme o *přímém klesání trasy*. A právě na tento případ, který představuje z fyzikálního hlediska vlastně nakloněnou rovinu, se soustředíme v dalších úvahách.

1. Zpomalení vozidla při brzdění

Předpokládejme, že po silnici, jejíž povrch svírá s vodorovnou rovinou úhel α , se pohybuje motorové vozidlo rychlostí v a uvažujme, za jakých podmínek se dá vozidlo zastavit. Víme již, že zastavení vozidla předchází vždy jeho zpomalení, kterého dosahujeme brzděním.

Při brzdění působí na vozidlo především dvě síly (obr. 3): ve směru pohybu je to složka tíhy vozidla

$$F_1 = m g \sin \alpha , \quad (1)$$

proti směru pohybu síla F_2 , kterou působí brzdy a která za předpokladu dostatečně účinných brzd může nabýt maximální hodnoty

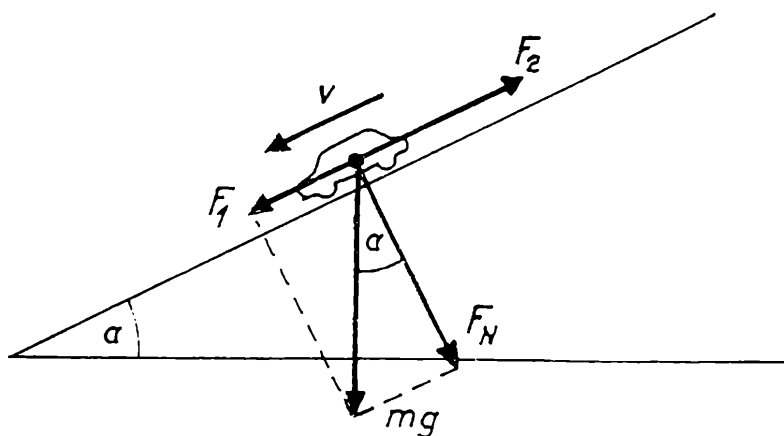
$$F_2 = \mu F_N , \quad (2)$$

kde μ je součinitel smykového tření a F_N kolmá tlaková síla, kterou vozidlo působí na vozovku. V našem případě je

$$F_N = m g \cos \alpha , \quad (3)$$

kde m je hmotnost vozidla, g tíhové zrychlení.

Aby nastal zpomalený pohyb vozidla, musí platit $F_2 > F_1$, přičemž výsledná síla uvádějící vozidlo do tohoto pohybu je



$$F = F_2 - F_1$$

Dosadíme-li za F_1 a F_2 výrazy ze vztahů (1), (2), (3) a $F = m a$, obdržíme po jednoduché úpravě zpomalení

$$a = g (\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$$

Použijeme-li dále převodních vztahů

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

lze vyjádřit zpomalení a pomocí podélného sklonu $\operatorname{tg} \alpha$ vztahem

$$a = \frac{g(\mu - \operatorname{tg} \alpha)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (4)$$

Poněvadž na našich silnicích bývá podélný sklon svahu malý, většinou menší než 20 %, můžeme ve jmenovateli zanedbat $\operatorname{tg}^2 \alpha$ vzhledem k jedničce a zjednodušit vztah (4) na tvar

$$a = g (\mu - \operatorname{tg} \alpha) \quad (5)$$

Dostali jsme výraz pro maximální zpomalení, kterého může dosáhnout automobil s dostatečně účinnými brzdami na silnici s podélným sklonem $\operatorname{tg} \alpha$ při součiniteli smykového tření μ .

Jestliže ve vztahu (5) je podélný sklon vozovky roven hodnotě součinitele smykového tření, tj. $\operatorname{tg} \alpha = \mu$, pak je zpomalení $a = 0$ a vozidlo nelze uvést do zpomaleného pohybu a tedy ani zastavit.

Příklad 1. Automobil sjíždí silnici s klesáním trasy, která je označena dopravní značkou s údajem 10 %. Jakého největšího zpomalení dosáhne, je-li součinitel smykového tření mezi pneumatikami a povrchem vozovky a) $\mu = 0,4$, b) $\mu = 0,1$.

Řešení: Dopravní značka s údajem 10 % znamená podélný sklon vozovky $\operatorname{tg} \alpha = 0,1$. Dosazením do vztahu (5) máme

$$\text{a) } a = 10 \text{ m s}^{-2} (0,4 - 0,1) = 3 \text{ m s}^{-2},$$

$$\text{b) } a = 10 \text{ m s}^{-2} (0,1 - 0,1) = 0 \text{ m s}^{-2}.$$

Automobil dosáhne pro $\mu = 0,4$ maximálního zpomalení 3 m s^{-2} , pro $\mu = 0,1$ je zpomalení rovno nule. Druhý případ, který mívá často velmi nebezpečné důsledky pro řidiče, může nastat např. na zledovatělé vozovce, kdy vozidlo klouže po povrchu vozovky i při úplném zabrzdění kol.

2. Dráha potřebná k zastavení vozidla

Uvažujme nyní, jak se změní při jízdě na vozovce s přímým klesáním trasy *velikost dráhy potřebné k zastavení vozidla* vzhledem k této dráze na vodorovné silnici. Jak jsme se dověděli ve 2. části našeho seriálu (viz „Rozhledy matematicko-fyzikální“, 52, 1973/74, č. 2, s. 72–79), dráha s potřebná k zastavení vozidla se skládá z dráhy nebrzděného vozidla s_τ a z brzdné dráhy s_b .

Pro dráhu nebrzděného vozidla s_τ jsme u vodorovné silnice zanedbávali všechny síly působící proti jeho pohybu (odpor vzduchu, valivé tření, brzdná síla motoru) a mohli jsme proto uvažovat, že se pohybuje na této dráze stálou rychlostí v . Kdybychom zanedbali tyto odpory i pro případ jízdy na silnici s klesáním trasy, museli bychom na dráze s_τ počítat se zrychlením $a' = g \sin \alpha \doteq g \operatorname{tg} \alpha$, neboť složka tíhy $F_1 = m g \sin \alpha$ uděluje vozidlu o hmotnosti m zrychlení $a' = \frac{F_1}{m} = g \sin \alpha$.

Poněvadž však budeme řešit jen případy vozovky s mírným klesáním nejvýše do 20 %, nedopustíme se velké chyby tím, budeme-li předpokládat, že pohybová složka tíhy F_1 je právě kompenzována silami působícími proti pohybu (zvláště tehdy, jede-li řidič se zařazeným převodovým stupněm). Proto i při jízdě na vozovce s přímým klesáním trasy budeme dále uvažovat, že vozidlo jede před začátkem působení brzd, tj. po celou dobu τ , stálou rychlostí v . Dráha nebrzděného vozidla zůstává tedy stejná jako při jízdě na vodorovné silnici, tj.

$$s_\tau = v\tau$$

Jinak je tomu ale s velikostí brzdné dráhy s_b . Na nejkratší brzdné dráze vozidlo zastaví tehdy, bude-li brzdit s největším možným zpomalením. Dosadíme-li toto zpomalení dané výrazem (5) do vztahu pro brzdnu dráhu

$$s_b = \frac{v^2}{2a},$$

dostáváme

$$s_b = \frac{v^2}{2g(\mu - \operatorname{tg} \alpha)} \quad (6)$$

Vidíme, že velikost brzdné dráhy závisí na druhé mocnině počáteční rychlosti vozidla, na součiniteli smykového tření a na podélném sklonu vozovky.

Všimneme si blíže, jaký vliv má na velikost brzdné dráhy součinitel smykového tření. Poněvadž ve jmenovateli výrazu (6) je rozdíl $\mu - \operatorname{tg} \alpha$, lze říci, že závislost brzdné dráhy na podélném sklonu $\operatorname{tg} \alpha$ se projeví tím výrazněji, čím je součinitel μ menší. O tom se můžeme přesvědčit v tabulce 1, v níž jsou obsaženy hodnoty brzdných drah v závislosti na sklonu $\operatorname{tg} \alpha$ pro několik různých hodnot součinitele μ a pro rychlost $v = 20 \text{ m s}^{-1}$.

Tabulka 1

Brzdná dráha s_b [m] pro různé hodnoty podélného sklonu $\operatorname{tg} \alpha$ a součinitel smykového tření Jízdní rychlost $v = 20 \text{ m s}^{-1}$

$\operatorname{tg} \alpha$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
0,1	200	400	—	—	—	—
0,2	100	133	200	400	—	—
0,3	67	80	100	133	200	400
0,4	50	57	67	80	100	133
0,5	40	45	50	57	67	80
0,6	33	36	40	45	50	57

Z tabulky 1 můžeme např. vyčíst, že pro $\mu = 0,1$ činí na vodorovné silnici ($\operatorname{tg} \alpha = 0$) brzdná dráha $s_b = 200 \text{ m}$, na vozovce se sklonem 5 % je $s_b = 400 \text{ m}$ a na vozovce se sklonem 10 % a větším již vozidlo zastavit nelze.

Protože sklon vozovky $\operatorname{tg} \alpha$ hodnotu brzdné dráhy s_b zvětšuje, je lépe při jízdě se svahu vždy raději snížit jízdní rychlost vozidla, přestože klesání vozovky často řidiče svádí k nepřiměřenému zvyšování rychlosti.

Příklad 2. Osobní automobil jede po vodorovné silnici rychlostí $v = 90 \text{ km h}^{-1}$ a řidič zjistí, že při maximálním zpomalení, které mu umožňuje tření mezi pneumatikami a povrchem vozovky, je jeho brzdná dráha $s_b = 80 \text{ m}$. Jak musí změnit rychlost vozidla při jízdě na vozovce s klesáním 10 %, aby zastavil na téže brzdné dráze?

Řešení: Brzdná dráha vozidla jedoucího po vodorovné silnici rychlostí v je

$$s_b = \frac{v^2}{2\mu g},$$

brzdná dráha téhož vozidla jedoucího rychlostí v' po vozovce s podélným sklonem $\operatorname{tg} \alpha$ je

$$s'_b = \frac{v'^2}{2g(\mu - \operatorname{tg} \alpha)}$$

Poněvadž obě brzdné dráhy mají být stejné, platí

$$s_b = s'_b$$

a odtud po dosazení a úpravě

$$v' = v \sqrt{\frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{\mu}}$$

Vyjádříme-li ještě součinitele tření μ ze vztahu pro brzdnou dráhu na vodorovné silnici

$$\mu = \frac{v^2}{2g s_b},$$

dostáváme

$$v' = \sqrt{v^2 - 2g s_b \operatorname{tg} \alpha}.$$

Číselně pro hodnoty $v = 25 \text{ m s}^{-1}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$, $\operatorname{tg} \alpha = 0,1$ a $s_b = 80 \text{ m}$ je hledaná rychlost $v' \doteq 21,6 \text{ m s}^{-1} \doteq 78 \text{ km h}^{-1}$. Řidič osobního automobilu musí tedy v daném případě snížit rychlost o $90 \text{ km h}^{-1} - 78 \text{ km h}^{-1} = 12 \text{ km h}^{-1}$.

3. Odstup za jedoucím vozidlem

Menší hodnoty zpomalení, kterých dosahují vozidla při jízdě na vozovce s přímým klesáním trasy, mohou mít vliv také na *odstup jedoucích vozidel*.

Pro kritickou vzdálenost, na kterou se může přiblížit rychlejší vozidlo jedoucí rychlostí v_2 k pomalejšímu vozidlu, jehož rychlost je v_1 , jsme odvodili ve 3. části seriálu (viz „Rozhledy matematicko-fyzikální“, 52, 1973/74, č. 3, s. 117–124) vztah

$$l = v_2 \tau + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$$

Dosadíme-li za zpomalení vztah (5), obdržíme pro bezpečnou vzdálenost mezi vozidly vztah

$$l \geq v_2 \tau + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g(\mu - \operatorname{tg} \alpha)}, \quad (7)$$

přičemž rovnost ve vztahu (7) určuje opět kritickou vzdálenost mezi

vozidly. Poněvadž hodnoty zpomalení $g(\mu - \operatorname{tg} \alpha)$ jsou vždy menší než hodnoty zpomalení na vodorovné silnici (při stejném součiniteli μ), bude se kritická vzdálenost se vzrůstajícím sklonem $\operatorname{tg} \alpha$ zvyšovat. Proto řidič vozidla, které dojíždí rychlostí $v_2 > v_1$ k jinému vozu o rychlosti v_1 , má na vozovce s přímým klesáním trasy začít brzdit nebo předjíždět ve větším odstupu než při jízdě na rovině. Jedou-li však oba vozy stejnou rychlostí $v_1 = v_2 = v$, pak se kritická vzdálenost nemění, neboť $l = v\tau$ již není funkcí zpomalení.

Příklad 3. Osobní vůz Škoda 1000 MB dojíždí rychlostí 108 km h^{-1} nákladní automobil jedoucí rychlostí 72 km h^{-1} . V jakém nejmenším odstupu má osobní vůz zmírnit rychlost nebo začít předjíždět, jedou-li oba vozy: a) po vodorovné silnici, b) po silnici s přímým klesáním 15 %. Počítejte pro dobu $\tau = 1 \text{ s}$ a součinitel smykového tření $\mu = 0,5$.

Řešení: Nejmenší odstup dvou vozidel počítáme jako kritickou vzdálenost l pro rychlosti $v_1 = 72 \text{ km h}^{-1} = 20 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 108 \text{ km h}^{-1} = 30 \text{ m s}^{-1}$, dobu $\tau = 1 \text{ s}$ a součinitel $\mu = 0,5$.

a) V případě vodorovné silnice obdržíme

$$l = 30 \text{ m s}^{-1} \cdot 1 \text{ s} + \frac{900 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} - 400 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{2 \cdot 0,5 \cdot 10 \text{ m s}^{-2}} = 80 \text{ m}.$$

b) V případě vozovky s podélným sklonem $\operatorname{tg} \alpha = 0,15$ je

$$l = 30 \text{ m s}^{-1} \cdot 1 \text{ s} + \frac{900 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} - 400 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{2 \cdot 10 \text{ m s}^{-2} (0,5 - 0,15)} = 102 \text{ m}.$$

Vidíme, že v daném případě je kritická vzdálenost při jízdě na klesající vozovce o více než 20 m delší než na vodorovné silnici.

4. Dráha potřebná k předjetí pomalejšího vozidla

Vzhledem k tomu, že se při jízdě na silnici s klesáním trasy mění kritická vzdálenost dvou vozidel, změní se rovněž dráha potřebná k předjetí pomalejšího vozidla.

V případě, že rychlejší vozidlo začne předjíždět v kritické vzdálenosti dané vztahem (7) a po celou dobu předjíždění jede stálou rychlostí, vypočítáme celkovou dráhu potřebnou k předjetí (viz „Rozhledy matematicko-fyzikální“, 52, 1973/74, č. 4, s. 166–172) podle vztahu

$$s = \frac{v_2}{v_2 - v_1} \left(v_2 \tau + v_1 \tau + d_1 + d_2 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} \right), \quad (8)$$

do něhož dosadíme za zpomalení $a = g(\mu - \operatorname{tg} \alpha)$; přitom d_1 a d_2 jsou délky předjížděného a předjíždějícího vozidla. Vzhledem k menší hodnotě

zpomalení a bude dráha daná vztahem (8) větší než pro vodorovnou silnici.

Naproti tomu v případě, kdy se pohybuje vozidlo po celou dobu předjíždění rovnoměrně zrychleně (viz „Rozhledy matematicko-fyzikální“, 52, 1973/74, č. 5, s. 210—217), může se dráha potřebná k předjetí, daná vztahem

$$s = 2v_1\tau + d_1 + d_2 + v_1 \sqrt{\frac{2}{a'}(2v_1\tau + d_1 + d_2)}, \quad (9)$$

zkrátit, neboť při jízdě po silnici s klesáním trasy vozidlo dosáhne snadno většího zrychlení a' . Ukážeme si to na příkladě.

Příklad 4. Vypočítejte dráhu potřebnou k předjetí vozidla o délce 5 m, které jede rychlostí 54 km h⁻¹, jestliže rychlejší vůz, rovněž o délce 5 m, jede: a) po celou dobu předjíždění rychlostí 72 km h⁻¹; b) zpočátku za pomalejším vozidlem rychlostí 54 km h⁻¹, pak začne předjíždět a pohybuje se rovnoměrně zrychleně po celou dobu předjíždění, přičemž hnací síla motoru dovoluje vozidlu zrychlení 1 m s⁻². Pro součinitel smykového tření berte hodnotu 0,5, pro dobu $\tau = 1$ s a pro tíhové zrychlení 10 m s⁻². Výpočet proveďte pro silnici s klesáním trasy 5 %.

Řešení: a) Dráha potřebná k předjetí je podle vztahu (8)

$$s = \frac{v_2}{v_2 - v_1} (v_1\tau + v_2\tau + d_1 + d_2 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g(\mu - \operatorname{tg} \alpha)}),$$

kde $v_1 = 54 \text{ km h}^{-1} = 15 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 72 \text{ km h}^{-1} = 20 \text{ m s}^{-1}$, $\tau = 1 \text{ s}$, $d_1 = d_2 = 5 \text{ m}$, $\mu = 0,5$, $\operatorname{tg} \alpha = 0,05$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Po dosazení je $s = 258 \text{ m}$.

b) Při druhém způsobu předjíždění vyjdeme ze vztahu (9), do nějž dosadíme $v_1 = 54 \text{ km h}^{-1} = 15 \text{ m s}^{-1}$, $\tau = 1 \text{ s}$, $d_1 = d_2 = 5 \text{ m}$. Při výpočtu zrychlení a' musíme uvážit, že kromě zrychlení způsobeného silou motoru podílí se na celkovém zrychlení také složka tíhového zrychlení $g \sin \alpha$, neboť ve směru pohybu působí složka tíhy vozidla $F_1 = m g \sin \alpha$ (obr. 3). Celkové zrychlení je pak

$$a' = a + g \sin \alpha \doteq a + g \operatorname{tg} \alpha$$

Po dosazení $a = 1 \text{ m s}^{-2}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$, $\operatorname{tg} \alpha = 0,05$ je $a' = 1,5 \text{ m s}^{-2}$ a dráha $s \doteq 150 \text{ m}$.

Porovnáme-li vypočítané dráhy pro silnici s klesáním trasy, vidíme, že při prvním způsobu předjíždění (při stálé rychlosti) měří dráha potřebná k předjetí 258 m, kdežto při druhém způsobu (zrychlení po celou dobu předjíždění) měří jen 150 m. Proto bývá při jízdě se svalu výhodnější dát přednost druhému způsobu předjíždění, kdy nejdříve zpomalíme, jedeme chvíli za pomalejším vozidlem a potom s největším možným zrychlením na volném úseku silnice předjedeme.

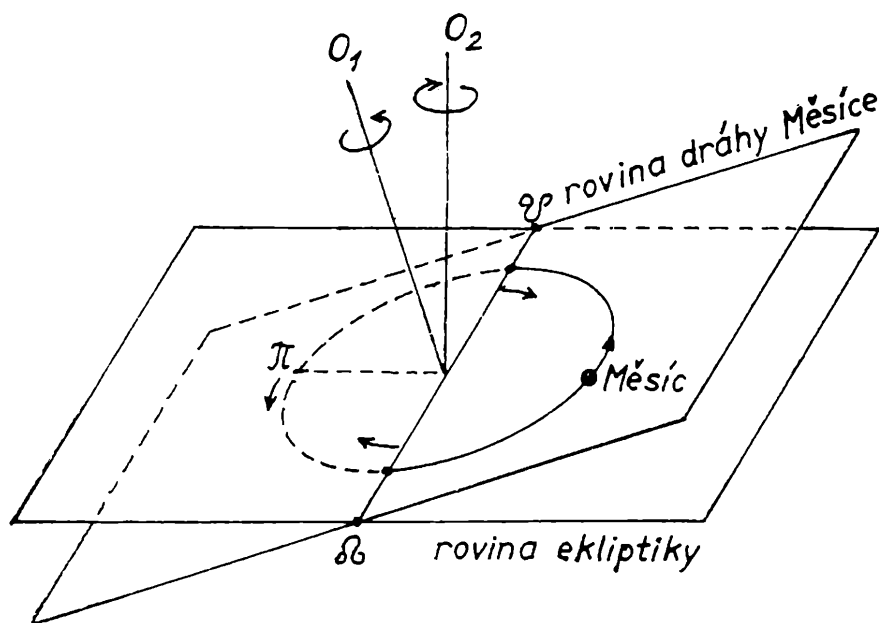
Pohyby Měsíce

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

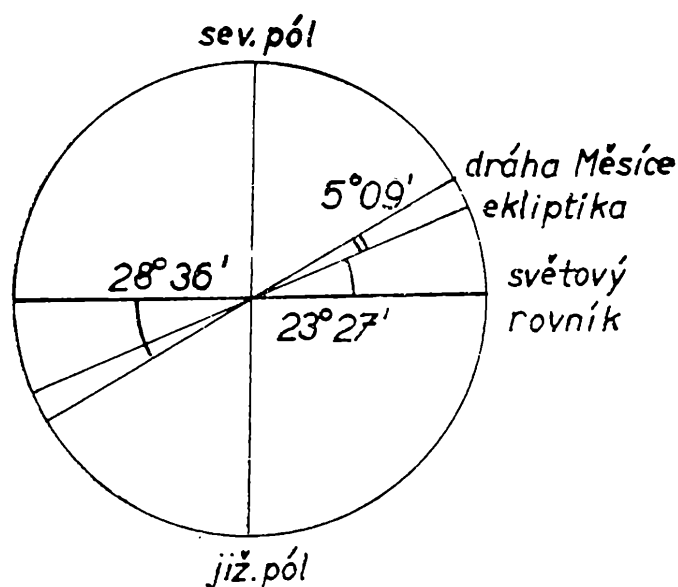
Pohyby našeho nejbližšího kosmického souseda — Měsíce — jsou z hlediska kosmické mechaniky neobyčejně zajímavé a poměrně složité. Je známo, že Měsíc obíhá kolem Země ve střední vzdálenosti 384 400 km po eliptické dráze, jejíž numerická excentricita má průměrnou hodnotu $e = 0,055$. Oběžná doba Měsíce vzhledem k hvězdám (siderická oběžná doba) je 27 32 dní, oběžná doba vzhledem ke Slunci (doba, která uplyne od novu k novu, neboli synodická oběžná doba) je 29,53 dní. Pohyb Měsíce po eliptické dráze však není zcela pravidelný, ale podléhá poruchám, působeným jednak gravitací Slunce, jednak tím, že vzhledem k relativně malé vzdálenosti Měsíce od Země se v gravitačním působení Země projevuje její zploštění.

Vzdálenost Měsíce od Země se v důsledku excentricity měsíční dráhy a rovněž vlivem poruch mění v mezích od 356 400 km do 407 700 km. Úhlový průměr Měsíce, jehož střední hodnota je 31,1', kolísá tedy přibližně od 29,3' do 33,5', tj. o více než jednu desetinu zdánlivého průměru Měsíce. Skutečné změny v průměru Měsíce nesmíme však zaměňovat se zdánlivým zvětšením měsíčního kotouče krátce po východu nad obzor anebo před západem, které je způsobeno optickým klamem a se změnou v průměru, způsobenou rozdílnou vzdáleností Měsíce od Země, nemá nic společného.

Rovina měsíční dráhy svírá s rovinou ekliptiky úhel, jehož střední hodnota je $5^{\circ}09'$; tento sklon však není konstantní, ale mění se od $4^{\circ}58'$ do $5^{\circ}20'$ v období 18,6 roku. Vlivem poruch se také otáčí uzlová přímka měsíční dráhy, tj. průsečnice měsíční dráhy s ekliptikou a mění se tedy poloha obou uzlů. Uzlová přímka se otáčí zpětným směrem, tj. od východu k západu, a za 18,6 roku (přesněji za 6793 dní) se otočí o 360° . Protože Měsíc obíhá v přímém směru, postupují uzly Měsíci vstříc a doba mezi dvěma průchody Měsíce týmž uzlem dráhy je tedy o něco kratší než siderický měsíc. Tato doba se nazývá *drakonický měsíc* a trvá 27,21 dní. Dalším důsledkem poruch je, že se mění excentricita i poloha perigea měsíční dráhy. Excentricita se mění od 0,043 do 0,072 s periodou 8,85 roku. Spojnice perigea a apogea (tzv. přímka apsid) se otáčí v přímém směru a za 8,85 roku se otočí o 360° . Jestliže budeme počítat oběžnou dobu Měsíce od jednoho průchodu perigeem k druhému, pak



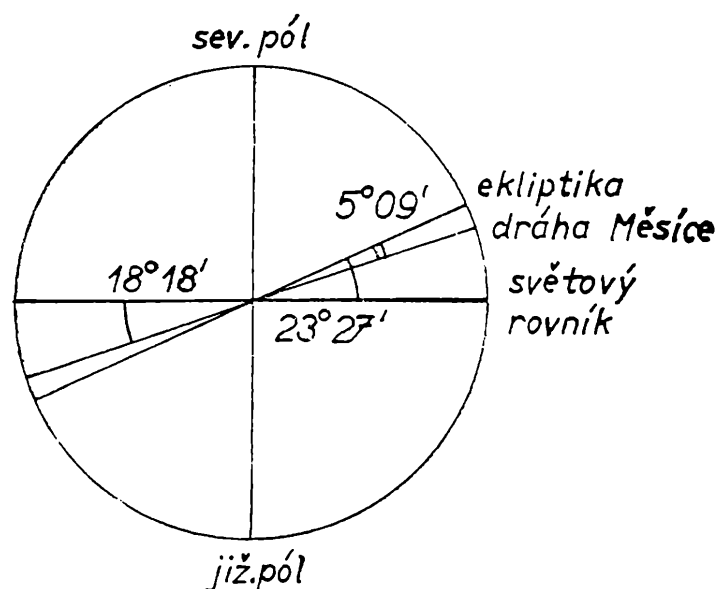
Obr. 1. Dvojitá stáčení dráhy Měsíce



Obr. 2. Poloha dráhy Měsíce, splývá-li výstupný uzel s jarním bodem

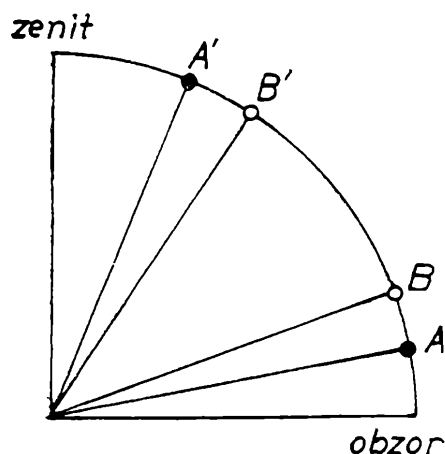
tato doba je větší než siderický měsíc, neboť přímka apsid se otáčí ve stejném směru jakým obíhá Měsíc. Tato doba, nazvaná *anomalistický měsíc*, trvá 27,55 dní. Můžeme tedy říci, že při každém oběhu kolem Země se pohybuje Měsíc po nové dráze; mění se poloha uzlové přímky, poloha perigea a tvar i sklon dráhy — nejméně podléhá změnám délka velké poloosy dráhy.

Dvojitá stáčení měsíční dráhy je znázorněno na obr. 1. Dráha se stáčí jednak v přímém směru kolem osy O_1 , kolmé k její rovině (posouvání perigea), jednak ve zpětném směru kolem osy O_2 , kolmé k rovině ekli-



Obr. 3. Poloha dráhy Měsíce, splývá-li sestupný uzel s jarním bodem

tiky (posouvání uzlů). Uvažujme nyní, jaký vliv má stáčení uzlové přímky na zdánlivou dráhu Měsíce na obloze. Víme, že Měsíc postupně mění své fáze, mění se také doba východu a západu Měsíce, a to v závislosti na měsíční fázi a rovněž na deklinaci Měsíce. Okamžitá deklinace Měsíce má vliv také na výšku Měsíce nad obzorem při kulminaci. Kdyby byla rovina měsíční dráhy totožná s rovinou ekliptiky, pak by se deklinace Měsíce měnila během jednoho oběhu ve stejných mezích, v jakých se mění deklinace Slunce během jednoho roku, tj. v mezích od $+23^{\circ}27'$ do $-23^{\circ}27'$. Dráha Měsíce však svírá s ekliptikou úhel $5^{\circ}09'$ a navíc se uzlová přímka stáčí. Uvažujme, že v určitém období splývá výstupný uzel měsíční dráhy s jarním bodem (průsečík světového rovníku s ekliptikou). Tato situace je znázorněna na obr. 2. V tomto případě leží dráha Měsíce nad ekliptikou a se světovým rovníkem svírá úhel $23^{\circ}27' + 5^{\circ}09' = 28^{\circ}36'$. Deklinace Měsíce se během jednoho oběhu bude měnit v mezích od $+28^{\circ}36'$ do $-28^{\circ}36'$. Za polovinu oběžné doby uzlové přímky, tj. za dobu 9,3 roku, se do jarního bodu přesune sestupný uzel (obr. 3). Dráha Měsíce svírá nyní se světovým rovníkem úhel $23^{\circ}27' - 5^{\circ}09' = 18^{\circ}18'$ a deklinace Měsíce se mění v mezích od $+18^{\circ}18'$ do $-18^{\circ}18'$. V prvním případě se bude pro pozorovatele na 50. stupni severní zeměpisné šířky měnit výška Měsíce nad obzorem při horní kulminaci od $68^{\circ}36'$ do $11^{\circ}24'$, což znamená, že jednou kulminuje Měsíc velmi vysoko nad obzorem (je o 5° výše než Slunce při letním slunovratu), jindy velmi nízko (o 5° níže než Slunce při zimním slunovratu). Ve druhém případě jsou změny výšky kulminujícího Měsíce podstatně menší: mění se od $58^{\circ}18'$ do $21^{\circ}42'$. Pro názornost jsou polohy Měsíce při kulminaci nakresleny na obr. 4. V případě splnutí výstupného uzlu s jarním



Obr. 4. Změny výšky Měsíce při kulminaci

bodem se mění od polohy A po A' v případě splynutí sestupného uzlu s jarním bodem od polohy B po B'

Kromě svého pohybu po dráze kolem Země vykonává Měsíc ještě jeden pohyb — otáčí se kolem své osy. Je známo, že Měsíc má tzv. vázanou rotaci, což znamená, že k nám přivrací stále stejnou polokouli. Rotační doba Měsíce je rovna siderickému měsíci, tj. 27,32 dne. Rotační osa Měsíce není kolmá na rovinu oběžné dráhy, ale svírá s ní úhel průměrně $83^{\circ}21'$ rovina měsíčního rovníku svírá tedy s rovinou jeho dráhy úhel $6^{\circ}39'$ a s rovinou ekliptiky úhel $-1^{\circ}30'$

Na závěr připomeňme, že kromě popsaných pravidelných změn v pohybu Měsíce podléhá Měsíc ještě mnoha dalším poruchám, takže jeho pohyb je neobyčejně složitý.

*

*

Diofantos Alexandrijský je jako osobnost záhadou; není přesně známo, kdy žil, udává se 1., 2. i 3. století našeho letopočtu. Věk, kterého se dožil, byl zašifrován ve veršovaném nápise na jeho náhrobku; ve volném překladu tento nápis zní: „Šestinu věku prožil jako dítě, dvanáctinu jako jinoch, po další sedmině věku se oženil a po pěti letech se dočkal syna. Čtyři poslední roky svého života oplakával syna, který se dožil jen poloviny jeho věku.“ Vypočítejte si, kolika let se dožil Diofantos!

Matematická olympiáda

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

1. Kategorie A

1. Je dáno přirozené číslo a ; vypočtěte součet

$$\sum_{k=1}^{1975} \left[\frac{k}{a} \right]$$

Pozn.: Pro každé reálné x značí $[x]$ jeho celou část, tj. celé číslo, pro které platí $[x] \leq x < [x] + 1$.

2. Je daná soustava rovnic s třemi neznámými x, y, z a s parametry a, b :

$$\begin{aligned}x + ay &= b, \\y - a^2z &= 1, \\az + x &= b + 1\end{aligned}$$

Určete všechny také hodnoty parametrů a, b , pro které má daná soustava nekonečně mnoho řešení.

3. Dokážte, že pro všechny reálné čísla x různé od nuly platí:

$$1 + x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{x} > 0.$$

4. V rovině je dán kruh K . Určete množinu vrcholů A všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$, o nichž platí, že $AC \leq BD$ a že celá úhlopříčka BD leží v kruhu K .

2. Kategorie B

1. Mějme posloupnost celých čísel

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n,$$

v níž pro všechna $n \geq 1$ platí

$$a_{n+1} + a_{n-1} = a_1 a_n.$$

a) Může být taková posloupnost posloupností aritmetickou?

b) Určete nutné a postačující podmínky pro to, aby v takové posloupnosti platilo

$$a_{n+k} + a_{n-k} = a_k a_n$$

pro všechna $n, k, n \geq k, k \geq 0$.

c) Jestliže $a_0 = 2$, pak existuje komplexní číslo z takové, že pro všechna $n \geq 0$ je

$$a_n = z^n + z^{-n}$$

dokažte.

2. Dokážte, že pro každé přirozené číslo n a pro všechny reálné čísla $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnost:

$$n(n+1)x^2 \geq 2 \sum_{i=1}^n i x_i (2x - x_i).$$

3. Trojúhelník ABC má tu vlastnost, že kružnice procházející středy jeho stran se dotýká kružnice opsané.

Dokažte, že bod dotyku je jedním vrcholem trojúhelníka ABC a že vnitřní úhel při tomto vrcholu je pravý.

4. Najděte všechny hodnoty parametra a , pro které je v kartézské souřadnicové soustavě s souřadnicami x, y graf rovnice

$$|x + y| + a|y| = 1$$

obvodem pravoúhelníka.

3. Kategorie C

1. Určete všechny řešení soustavy rovnic

$$x(x + y) + z(x - y) = 6$$

$$y(y + z) + x(y - z) = -2$$

$$z(z + x) + y(z - x) = 3.$$

2. Nechť p, q jsou prvočísla větší než 3. Potom číslo

$$p^2 + 7q^2 - 23$$

není prvočíslem; dokažte.

3. Je daná kružnice $k = (S; r)$, bod A z vnútra kruhu ohraničeného kružnicou k a kladné číslo d . Bodom A je vedená tetiva kružnice k tak, že tento bod ju rozdeľuje na dve úsečky, ktorých dĺžky majú rozdiel d .

a) Vyjadrite dĺžku t tejto tetivy a jej vzdialenosť od stredu S pomocou parametrov $r, d, v = SA$.

b) Zostrojte pomocou výsledku z úlohy a) všetky tetivy danej vlastnosti.

4. Nechť $\mathbf{M}$ je množina všech vrcholů čtverců dané šachovnice o 16 polích. Pro každý bod X a $\mathbf{M}$ označme $p(X)$ počet všech čtverců, jejichž všechny vrcholy patří do množiny $\mathbf{M}$, přičemž jedním z nich je bod X . Určete výčtem množinu všech čísel $p(X)$.

Přípravné úlohy kategorie Z

1. Součinem dvou kvadratických trojčlenů $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ je dvojčlen $x^4 + 4$. Určete koeficienty trojčlenů.

2. Kolikrát v době od 14.00 hod. do 14.05 hod. je centrální vteřinová ručka hodinek osou dutého úhlu sevřeného hodinovou a minutovou ručičkou? Udejte příslušné okamžiky s přesností na vteřiny.

3. Trojúhelník ABC má velikosti vnitřních úhlů $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

a) Vyjádřete délky stran b , c pomocí strany a .

b) Vyjádřete poměr délek všech tří výšek trojúhelníka ABC .

4. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a ; K je střed strany AD , L je bod polopřímky BA , pro který platí $BL = \frac{3}{2}a$. Označme o takovou přímkou procházející bodem D , že úsečka XY souměrně sdružená s KL podle osy o leží celá ve čtverci $ABCD$.

Jaký útvar vyplní všechny takto vytvořené úsečky XY ? Narýsujte brázek, vyšrafujte tento útvar a popište jeho konstrukci.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

1. Kategorie A

1. Riešte sústavu s neznámymi $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) o parametroch c, d :

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & & = c \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & & = 0, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 & & = 0, \\ - & - & - \\ - & - & - \\ -x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n & & = 0, \\ -x_{n-1} + 2x_n & & = d \end{array}$$

2. Nechť a, b, c, d jsou komplexní čísla; uvažujme kvadratickou rovnici

$$x^2 - px + q^2 = 0, \quad (1)$$

kde $p = |a|^2 + |d|^2 + 2 \operatorname{Re}(b\bar{c})$, $q = |ad - bc|$

Dokažte: Má-li rovnice (1) záporný reálný kořen, potom je to kořen dvojnásobný.

Poznámka: Zápis $\operatorname{Re} z$ znamená reálnou část komplexního čísla z , dále $\bar{c}$ je číslo komplexně sdružené s číslem c .

3. Vyšetřte průběh funkce

$$y = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{x}{k} \right] \left[\frac{k}{x} \right]$$

v intervale $(0, \infty)$.

4. Nechť a, b, c jsou velikosti stran trojúhelníka ABC a r poloměr kružnice jemu opsané. Označme $V = a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2$. Trojúhelník ABC je: ostroúhlý, právě když $V > 0$, pravoúhlý, právě když $V = 0$ a tupoúhlý, právě když $V < 0$.

Dokažte.

5. Jsou-li

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

velikosti libovolných n úhlů, platí nerovnost

$$|\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_n - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_n| \leq \sum_{j=1}^n |\sin \alpha_j - \cos \alpha_j|$$

dokažte. Kdy platí rovnost?

6. Je dána koule K . Určete množinu všech bodů A , pro něž lze sestavit takový rovnoběžník $ABCD$, že jeho celá úhlopříčka BD je obsažena v kouli K a o velikostech úhlopříček AC, BD platí $AC \leq BD$.

2. Kategorie B

1. Číslo $3025 = (30 + 25)^2$. Najděte všechna dvojčíferná a čtyřčíferná čísla téže vlastnosti.

2. Dokážte platnost nerovnosti

$$6 \sum_{i=1}^n i^2 \left(\frac{x_i}{x} \right)^2 \left[2 - \left(\frac{x_i}{x} \right)^2 \right] \leq n(n+1)(2n+1),$$

kde n je přirozené číslo a x, x_i reálné čísla. Kdy nastane rovnost?

3. Necht' pro $a \geq 0$ je

$$r_a(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x > a \\ 0 & \text{pro } |x| \leq a \\ x & \text{pro } x < -a \end{cases}$$

Řešte rovnici s reálným parametrem k

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i(x) = kx$$

4. Jsou dány čtyři různé body A, B, C, D ležící v téže přímce. Určete množinu všech bodů X v prostoru, pro něž platí

$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle BXC = \sphericalangle CXD$$

5. V rovině je dán trojúhelník. Najděte alespoň jeden lichoběžník, jehož všechny čtyři vrcholy leží na hranici daného trojúhelníka tak, že dělí jeho obvod ve čtyři stejně dlouhé části.

6. V pravoúhlé soustavě souřadnic v rovině jsou dány body $A = [2,0]$, $B = [0,3]$, $C = [0,0]$. Určete výraz $V(x, y)$ tak, aby grafem rovnice

$$V(x, y) = 0$$

byl obvod $\triangle ABC$. Přitom v této úloze definujeme výraz takto:

(1) $1, x, y$ jsou výrazy.

(2) Jsou-li $V_1(x, y), V_2(x, y)$ výrazy, jsou

$V_1(x, y) + V_2(x, y), V_1(x, y) - V_2(x, y), V_1(x, y) \cdot V_2(x, y)$ výrazy.

(3) Je-li $V(x, y)$ výraz, je $|V(x, y)|$ výraz.

3. Kategorie C

1. Necht' $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 1$) jsou prvočísla, všechna větší než 3. Potom $a_1 a_2^2 \dots a_n - 1$ je dělitelné číslem 24.

2. Určete množinu všech bodů v rovině, pro jejichž pravoúhlé souřadnice x, y platí

$$x + s(x) + y + s(y) < 1,$$

kde

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 1, \\ 0 & \text{pro } |x| \leq 1, \\ -1 & \text{pro } x < -1 \end{cases}$$

3. Řešte v reálném oboru soustavu rovnic o neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 s parametrem p ;

$$\begin{aligned}x_1(x_2 + x_3) &= p \\x_2(x_3 + x_4) &= p, \\x_3(x_4 + x_1) &= p, \\x_4(x_1 + x_2) &= p\end{aligned}$$

4. V rovině je dána úsečka AB a její vnitřní bod C . Sestrojme pravoúhlý $\triangle CBY$ s pravým úhlem u vrcholu Y . Označme X takový bod na úsečce AY , že $CX \parallel BY$. Dokažte, že všechny takové body X leží na kružnici; vyjádřete její poloměr pomocí vzdáleností AC , BC .

5. Je dán ostrý úhel $\sphericalangle MFN$. Na rameni FM jsou dány body A , B a C , pro něž platí

$$AF > BF > CF$$

Sestrojte na rameni FN takové body X , Y , aby průnikem trojúhelníků $\triangle AXB$ a $\triangle CYB$ byl čtyřúhelník osově souměrný podle osy procházející bodem B . Naleznete podmínku řešitelnosti.

6. Je dána rovina a v ní jednotková čtvercová síť. Vyšetřete posloupnost bodů

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \quad (1)$$

s těmito vlastnostmi:

Všechny body posloupnosti (1) leží ve vrcholech dané čtvercové sítě, a to tak, že úsečky $A_k A_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ jsou střídavě vždy buď stranou nebo úhlopříčkou některého jednotkového čtverce sítě. Jestliže pro některé $k = 1, 2, 3, \dots$ je $A_k A_{k+1}$ úhlopříčkou některého jednotkového čtverce dané sítě, jsou $A_{k-1} A_k$ a $A_{k+1} A_{k+2}$ stranami téhož čtverce.

a) Pro která přirozená n může být $A_n = A_0$?

b) Pro $n = 1, 2, 3, \dots$ určete maximální a minimální možnou vzdálenost bodu A_n od A_0 .

KATEGORIE Z

1. Určete všechny takové dvojice čísel a , b , pro něž je mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ možno vyjádřit jako součin mnohočlenů 2. stupně, z nichž jeden je $x^2 + ax + b$.

2. Na výstavě hraček jezdí dvě elektrické lokomotivy po kolejích položených na dvou soustředných kružnicích $k_1(S; r_1)$ a $k_2(S; r_2)$, $r_2 > r_1$ ve stejném smyslu stálou rychlostí v .

Vyjely z polohy, v níž byly sobě nejbližší. V kterých okamžicích po startu budou od sebe a) poprvé nejdále; b) poprvé nejbližší. Řešte nejprve obecně, pak pro: $r_1 = 60$ cm, $r_2 = 70$ cm, $v = 20$ cm/s, $\pi \doteq \frac{22}{7}$

3. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC , jehož strana má velikost a . Sestrojte bod O , jenž je průsečíkem jeho výšek, a bod P , jenž je s bodem O souměrně sdružen podle přímky BC . Dokažte, že čtyřúhelníku $ABPC$ lze vepsat i opsat kružnici. Vypočítejte poloměry obou těchto kružnic.

4. V rovině je dána kružnice k o poloměru 6 cm a čtverec $A_0B_0C_0D_0$, jehož strana má délku 3,5 cm. Označme $ABCD$ čtverec těchto vlastností:

1. vznikne rovnoběžným posunutím čtverce $A_0B_0C_0D_0$;
2. náleží kruhu s hranicí k ;
3. aspoň jeden jeho vrchol náleží kružnici k .

Narýsujte čáru, kterou vyplní vrcholy A všech takových čtverců.

Naše soutěž

Z technických důvodů budou soutěžní příklady pro školní rok 1974/75 otištěny v dalších číslech.

Řešení úloh loňské soutěže

Matematika

1. Je dána soustava: $2x^3 + (k + 3)x^2 + x - 2 = 0$

$$x^3 + kx^2 + x + 2 = 0$$

- a) Pro které hodnoty parametru k mají rovnice společný kořen.
- b) Určete tento kořen a ostatní kořeny obou rovnic.
- c) Ověřte správnost hodnoty společného kořene.

(Došlo 18 řešení.)

Jan Fráňa

Řešil Jan Teska, 4.b gymnasium Milevsko.

Odečtením obou rovnic dostaneme rovnici $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$. Trojčlen na levé straně rozložíme: $x^3 + 3x^2 - 4 = (x^3 - 1) + (3x^2 - 3) = (x^3 - 1) + 3(x^2 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 3(x - 1)(x + 2) = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x + 2)^2 = 0$.

Společné kořeny rovnic jsou tedy $x = 1$ a dvojnásobný kořen $x = -2$.

a) Pro tyto hodnoty x vypočítáme hodnoty parametru k :

$$x = 1, k = -4; \quad x = -2, k = 2.$$

Pro $k = -4$ nebo $k = 2$ mají rovnice společný kořen.

b) Pro $k = -4$ je společný kořen $x_1 = 1$.

První rovnice má tvar $2x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ a zbývající kořeny $x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}$ druhá rovnice má tvar $x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0$

a zbývající kořeny $x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

Pro $k = 2$ je společný kořen $x_1 = -2$.

První rovnice má tvar $2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$ a kořeny $x_2 = -1$, $x_3 = 1/2$; druhá rovnice má tvar $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$ a kořeny $x_{2,3} = \pm i$.

c) Správnost hodnoty společného kořene ověříme dosazením hodnot společného kořene do daných rovnic pro $k = -4$, resp. $k = 2$.

2. Určete všechny pětimístné desetinné zlomky tvaru $0,ABCDE$ ($E \neq 0$) a všechna přirozená čísla x tak, aby platilo

$$x \cdot 0,ABCDE = 30,ABCDE \quad (1)$$

(Došlo 17 řešení.)

František Kejla

Řešil: Josef Jettmar, IV.f G v Praze 2, W Piecka :

Vztah (1) můžeme celý vynásobit číslem 10^5 a zbavit se tak desetinných zlomků, tj. dostaneme

$$x \cdot ABCDE = 30 \cdot 10^5 + ABCDE$$

Číslo $ABCDE$ v tomto případě může být ale jedno — až pěticiferné přirozené číslo (v závislosti na hodnotách cifer A, B, C, D).

Označme číslo $ABCDE = y$; potom řešíme rovnici

$$x \cdot y = y + 30 \cdot 10^5$$

tj.

$$y = \frac{30 \cdot 10^5}{x - 1} \quad (2)$$

Protože číslo y je přirozené, musí číslo $x - 1$ dělit beze zbytku číslo $30 \cdot 10^5 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^6$, číslo x je také přirozené.

Tedy číslo x je tvaru

$$x = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c + 1,$$

kde platí

$$0 \leq a \leq 6$$

$$0 \leq b \leq 1$$

$$0 \leq c \leq 6$$

Potom číslo y bude tvaru

$$y = 2^{6-a} \cdot 3^{1-b} \cdot 5^{6-c}$$

Číslo y je nedělitelné 10, tedy zřejmě mohou nastat právě tři ($E \neq 0$) případy:

1. $6 - a = 0$
2. $6 - c = 0$
3. $6 - a = 6 - c = 0$

1. $6 - a = 0$, tj. $a = 6$

$x = 2^6 \cdot 5^c \cdot 3^b + 1, \quad c = 0, 1, 2, \dots, 6$ $y = 5^{6-c} \cdot 3^{1-b}$	$b = 0, 1$
--	------------

2. $6 - c = 0$, tj. $c = 6$

$x = 5^6 \cdot 2^a \cdot 3^b + 1 \quad a = 0, 1, \dots, 6$ $y = 2^{6-a} \cdot 3^{1-b}$	$b = 0, 1$
--	------------

3. $6 - a = 6 - c = 0$ tj. $a = c = 6$
 $b = 0, 1$ tento případ obsažen sub 1. a sub 2.

Celkem tedy získáme 26 různých řešení, tj. dvojic x, y — viz 1), 2).

Hledané desetinné zlomky $0,ABCDE$ jsou k nalezeným číslům y ve vztahu

$$0,ABCDE = y \cdot 10^{-5}$$

Namátkou vezměme např.: $b = 0, a = 6, c = 0$

$$x = 2^6 + 1 = 65$$

$$y = 5^6 \cdot 3 = 46\,875 \quad 0,ABCDE = 0,46875$$

$$x \cdot 0,ABCDE = 65 \cdot 0,46875 = 30,46875 = 30,ABCDE$$

Numerické výsledky úlohy:

x	y	$0,ABCDE$
1 000 001	3	0,00003
200 001	15	0,00015
40 001	75	0,00075
8 001	375	0,00375
1 601	1 875	0,01875
321	9 375	0,09375
65	46 875	0,46875
3 000 001	1	0,00001
600 001	5	0,00005
120 001	25	0,00025
24 001	125	0,00125
4 801	625	0,00625
961	3 125	0,03125
193	15 625	0,15625
1 500 001	6	0,00006
750 001	12	0,00012
125 001	24	0,00024
62 501	48	0,00048
31 251	96	0,00096
15 626	192	0,00192
1 500 001	2	0,00002
750 001	4	0,00004
375 001	8	0,00008
187 501	16	0,00016
93 751	32	0,00032
46 876	64	0,00064

3. Jestliže pro nezáporná čísla a, b, c platí $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} + \sqrt{c}$, platí také $\sqrt{a + (d + e)^2} \leq \sqrt{b + d^2} + \sqrt{c + e^2}$. Dokažte!

(Došlo 18 řešení.)

Josef Kotyk

Řešil: Miroslav Šedivý, II.B gymnasia v Přerově

Kdyby vztah, který máme dokázat, neplatil, bylo by nutně

$$\sqrt{a + (d + e)^2} > \sqrt{b + d^2} + \sqrt{c + e^2}$$

neboli

$$a + 2de > b + c + 2, \sqrt{(b + d^2) \cdot (c + e^2)}$$

Poněvadž

$$a \leq b + c + 2 \cdot \sqrt{bc},$$

bylo by

$$2de + 2 \cdot \sqrt{bc} > 2 \sqrt{(b + d^2) \cdot (c + e^2)}$$

$$d^2e^2 + 2de \cdot \sqrt{bc} + bc > bc + d^2e^2 + be^2 + cd^2$$

$$0 > be^2 - 2de \cdot \sqrt{bc} + cd^2,$$

neboli

$$0 > (e \cdot \sqrt{b} - d \cdot \sqrt{c})^2,$$

což není možné.

Nemůže proto vztah

$$\sqrt{a + (d + e)^2} \leq \sqrt{b + d^2} + \sqrt{c + e^2}$$

být nesprávný a je tím dokázán.

Fyzika

1. Do krve člověka bylo vstříknuto 1 cm³ radioaktivního roztoku ²⁴Na mající aktivitu A (0) = 2000 rozpadů za sekundu. Aktivita 1 cm³ krve za pět hodin po vstříknutí byla 16 rozpadů za minutu. Určete objem krve člověka. Poločas rozpadu ²⁴Na je 14,97 hod.

(Došlo 10 řešení.)

Zdeněk Janout

Řešil: Vojtech Bardiovský, II.F, SPŠE, Košice.

Závislost aktivity na čase je daná exponenciálním vztahom:

$$A(t) = A(0) e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

kde λ je rozpadová konstanta, pro kterou platí:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}, \quad (2)$$

T je poločas rozpadu.

Předpokládáme, že koncentrácia ²⁴Na v krvi je po čase $t = 5$ hod v celom tele človeka rovnaká. Pre aktivitu A_V pripadajúcu na objemovú jednotku krvi bude platiť:

$$N_V^{(t)} = \frac{A(t)}{V} i \quad (3)$$

Keď dosadíme rovnice (1), (2) do vzťahu (3), dostávame:

$$A_V(t) = \frac{A(0)}{V} e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \quad (4)$$

Ďalšou úpravou (4) dostaneme hľadaný vzťah:

$$V = \frac{A(0)}{A_V(t)} e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$$

Dosadením číselných hodnot $A(0) = 2000$ rozpadů/s, $A_V = 16$ rozpadů/min = $0,267$ rozpadů/s, $T = 14,97$ hod; $t = 5$ hod. dostávame $V = 5,95 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$.

Odpoveď: Objem krvi človeka je približne 6 litrov.

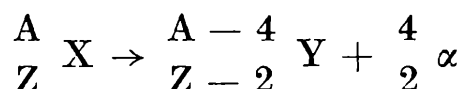
2. Jaký isotope se vytvoří z alfa radioaktivního isotope ^{232}Th v důsledku čtyř rozpadů alfa a dvou rozpadů β^- ?

(Došlo 13 řešení.)

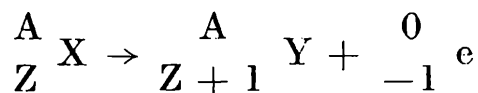
Zdeněk Janout

Řešil: Jiří Pavel, IV.A, gymnásium Jihlava.

Záření α jsou vlastně heliová jádra o hmotnostním čísle 4 a atomovém čísle 2. Jestliže atomové jádro $^A_Z \text{X}$ vyše záření α , zmenší se jeho hmotnostní číslo o 4 a atomové číslo o 2. Tento pochod můžeme schematicky zapsat ve tvaru:

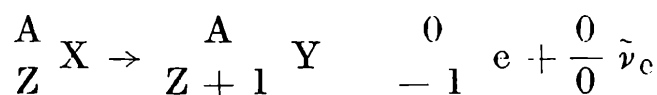


Záření β^- je záření elektronové. Vyše-li atomové jádro $^A_Z \text{X}$ částici β^- , tj. elektron, zvětší se jeho atomové číslo o 1 a hmotnostní číslo se nezmění. Rozpad β^- lze schematicky zapsat ve tvaru(*):



Poznámka autora

*) Tento zápis není zcela přesným zápisem rozpadu β^- , neboť při tomto pochodu je rozpadajícím se jádrem emitována vedle elektronu další částice antineutrino elektronové $\tilde{\nu}_e$. Klidová hmotnost i elektrický náboj této částice jsou rovny nule. Platí:



V důsledku čtyř rozpadů α zmenší se hmotnostní číslo o $4 \times 4 = 16$ a atomové číslo o $2 \times 4 = 8$.

V důsledku dvou rozpadů β se zvětší atomové číslo o $2 \times 1 = 2$ a hmotnostní číslo se nezmění.

Z ${}^{232}_{90}\text{Th}$ vznikne čtyřmi rozpady α a dvěma β atomové jádro o hmotnostním čísle $A = 232 - 16 = 216$, a atomovém čísle $Z = 90 - 8 + 2 = 84$. Z Mendělejevovy tabulky zjistíme, jaký prvek má atomové číslo 84. Je to polonium.

Závěr: V důsledku čtyř rozpadů α a dvou β vznikne z alfa radioaktivního isotopu ${}^{232}_{90}\text{Th}$ isotop ${}^{216}_{84}\text{Po}$.

různé

Georg Cantor a sto let teorie množin

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF KU

Většina čtenářů Rozhledů pracuje se základními množinovými pojmy při vyučování matematice, mnozí asi četli či slyšeli i jméno zakladatele teorie množin — Georga Cantora. Povězme si něco o jeho životě, abychom o něm věděli víc než pouhé jméno.

Georg Cantor byl nejstarším synem petrohradského obchodníka, který se do Ruska přistěhoval z Dánska. Matka pocházela z německé rodiny, v níž bylo mnoho umělecky činných členů. Pro otcovu plicní chorobu se stalo petrohradské podnebí nevhodné, a tak celá rodina přesídlila do Německa a nakonec se usídlila ve Frankfurtu n. Mohanem.

Georg se narodil 3. 3. 1845, do školy začal chodit v Petrohradě, po přestěhování v r. 1856 navštěvoval německé školy ve Wiesbadenu a Darmstadtu. Studoval velmi dobře, otec se ho snažil zaměřit ke studiu techniky, např. r. 1860 mu v jednom dopise psal, že očekává, že jeho nejstarší syn se stane „hvězdou mezi inženýry“. Avšak když si Georg oblíbil matematiku a chtěl ji studovat, otec mu nebránil. Po maturitě r. 1862 odešel mladý Cantor studovat do Curychu, ale vrátil se domů po otcově smrti na jaře r. 1863 a ve studiích pokračoval v Berlíně. Universitu ukončil v r. 1867 a pak asi rok vyučoval na dívčí škole. V r. 1869 získal místo na universitě v Halle, kde potom působil až do r. 1913, tj. do svých 68 let.

Vlivem profesorů Kroneckera a Weierstrasse se zaměřil zprvu na teorii čísel a nekonečných řad s hodnotami goniometrických funkcí. Vytvořil vlastní teorii iracionálních čísel a zkoumal hlouběji řadu problémů spojených s „nekonečnými počty“ čísel různých druhů. Připadl na myšlenku porovnávat různé nekonečné souhrny čísel tím, že hledal vzájemně jednoznačné zobrazení mezi nimi. Pokud bylo možno takové zobrazení nalézt, říkal, že souhrny jsou ekvivalentní (stejně mohutné). G. Cantor vytvořil r. 1870 pojem transfinite číslo, kterým vyjádřil „nekonečný počet“ objektů. Zprvu se domníval, že existuje „jedno nekonečno“, tj. že všechny nekonečné souhrny čísel jsou ekvivalentní. Byl překvapen zjištěním, že tomu tak není v případě souhrnu všech přirozených čísel a souhrnu všech reálných čísel (kontinua, jak jej Cantor nazýval).*)

Tento fakt zjistil r. 1873; záhy r. 1874 uveřejnil článek „O jedné vlastnosti souhrnu všech algebraických čísel“ který je považován za první práci z teorie množin, i když se v jeho názvu ještě slovo množina (německy Menge) neobjevilo. Proto můžeme hovořit o sto letech teorie množin.

V letech 1874—84 napsal G. Cantor ještě řadu příspěvků vztahujících se k teorii množin, nenacházel však ve svém okolí dost pochopení. Nervové vypětí spojené s tímto stavem, celkové přepracování i některé existenční problémy způsobily v r. 1884 jeho nervové zhroucení a depresi. Po roce však překonal tuto krizi a pracoval dále na universitě v Halle a byl velmi činný jako organizátor matematické společnosti v Německu (v letech 1890—93 byl jejím prvním předsedou), iniciátor svolání světových kongresů matematiků (první se konal r. 1897 v Curychu), atd.

Cantorovy práce získaly ohlas v pařížském kruhu matematiků, byly přeloženy do francouzštiny, italštiny a angličtiny; ideje teorie množin přijali zejména mladší matematici, kteří je uplatnili v různých odvětvích matematiky. Projevilo se to i v průběhu zmíněného kongresu matematiků v mnoha referátech; G. Cantor se tedy dočkal uznání ještě za svého života. I přes podlomené zdraví se dožil 73 let, zemřel 6. ledna 1918.

G. Cantor byl prý velmi vtipný, temperamentní a činně neklidný někdy vznětlivý člověk. Ke studentům měl vřelý vztah, zval je dokonce i domů, kde se velmi často „muzicírovalo“ G. Cantor měl šest dětí, ale žádné se nevěnovalo matematice.

Prvním českým matematikem který uplatnil ve své vědecké práci ideje teorie množin, byl patrně Matyáš Lerch (1860—1922), profesor na brněnských vysokých školách. Jemu se též připisuje vytvoření slova „množina“ jako termínu vyjadřujícího německé slovo Menge; na po-

*) Některé zdánlivě paradoxní objevy v teorii množin jsou přístupným způsobem vyloženy v knížce Vilenkin: Vyprávění o množinách, která vyšla v českém i slovenském překladu.

čátku 20. století se však užívalo v české matematické literatuře nejčastěji slova „množství“. K všeobecnému přijetí slova „množina“ jako termínu přispěly zejména práce akademika Eduarda Čecha a jeho žáků ve 30. letech tohoto století.

Můžeme říci, že G. Cantor splnil otcovo očekávání v tom, že se stal „hvězdou mezi matematiky“; vybudováním teorie množin vykonal průkopnické dílo, které ve svých důsledcích velmi výrazným způsobem změnilo tvář matematiky. Při poznávání množinových pojmů si buďte vědomi, že získáváte účinný matematický nástroj, který začal před sto lety vytvářet G. Cantor.

Cvičení

1. Množina $\mathbf{N}$ všech přirozených čísel a množina $\mathbf{Z}$ všech celých čísel jsou ekvivalentní. Posudte, zda vzájemně jednoznačným zobrazením mezi nimi je funkce $y = \frac{1}{2}(n - 1)$ pro lichá $n \in \mathbf{N}$, $y = -\frac{1}{2}n$ pro sudá $n \in \mathbf{N}$.

2. Množiny $\mathbf{N}$, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ jsou ekvivalentní, znázorněte $[x, y] \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ v rovině a ke každému bodu přiřaďte hodnotu funkce $z = \frac{1}{2}(x + y - 1)(x + y - 2) + x$

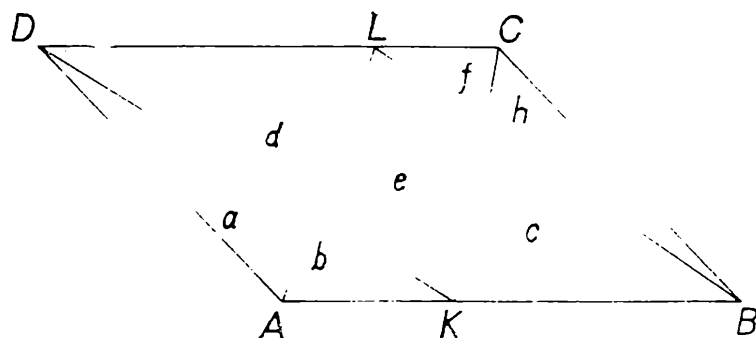
Nejmladším čtenářům

1. Ze čtverce o straně $a = 111$ cm se má vystříhnout pět stejně velkých čtverců. Jakou nejdelší stranu mohou mít?

2. Z obdélníka o stranách 90 cm a 80 cm mají být vystřiženy dva stejně velké kruhy. Jaký nejdelší poloměr mohou mít?

3. V rovnoběžníku $ABCD$ byly na rovnoběžných stranách AB a CD zvoleny libovolně body K a L ; spojnice AL , BL , KD , KC rozdělují rovnoběžník na sedm dílů (obr. 1). Dokažte, že pro ně platí:

$$b + c = d + f \quad a + h = e$$



Obr 1

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

discriminant

disjoint

disjunction

dispersion

displacement

distance

distribut

pro distribuci

dis

diverge

divergence

divergent

divide

dividend

divisibility

division

divisor

greatest common divisor

dodecagon

dodecahedron

domain

dot product

dotted

double

double ratio

dozen

draw

drawing

dual

duality

dummy

duodecahedron

duodenary

diskriminant

disjunktní

disjunkce

rozptýl, dispe

přeměňování

zášle

rozklad na rozdě

pravděpodobnosti

distributivní

divergov

diver

diverge

dělit

dělenec

dělitelnost

dělení

dělitel

největší společný dělitel

dvanáctiúhelník

dvanáctistěn

obor, oblast

skalární součin

čárkovaný, tečkovaný

dvojitý

dvojpoměr

tucet

nakresovat

nákres

duální

duálna

formální, nepravý

dvanáctistěn

dvanáctkový

E

eccentricity	výstřednost
edge	hrana
lateral edge	pobočná hrana
edge view	profil
effect	provést (výpočet)
eight	osm
eighth	osmý, osmina
eighteen	osmnáct
eighty	osmdesát
either . . . or	buď . . . anebo
element	prvek
elementary	elementární
elevation	kóta
angle of elevation	elevační úhel, úhel zdvihu
eleven	jedenáct
eliminate	eliminovat, vyloučit
ellipse	elipsa
ellipse-shaped	elipsovitý
ellipsoid	elipsoid
elliptic(al)	eliptický
embedding	vnoření
empirical	empirický
empty	prázdný
empty set	prázdná množina
end point	krajní, koncový bod
enlarge	zvětšit
entire	úplný, celý
enumerable	spočetný
enumerate	očíslovat
envelope	obálka křivky
equal	rovnat se, stejný
equal to zero	rovně nule
equality	rovnost, shodnost
equate	srovnat, porovnat (co do s něčím)
equation	rovnice
equator	rovník
equidistant	ekvidistantní
equilateral	rovnostanný
equivalence	ekvivalence
equivalent	ekvivalentní
erect a perpendicular	vztyčit kolnici
error	chyba, odchylka
actual error	skutečná chyba
constant error	konstantní chyba
logical error	logická chyba
error of measurement	chyba měření
escribed circle	připsaná (vně vepsaná) kružnice
essential	podstatný
essentially	podstatně
estimate	odhad

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

2

ROČNÍK 53, 1974-1975, ŘÍJEN



ROČNÍK 53
ŘÍJEN 1974

2

rozhled

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT, Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1974.

OBSAH

A. Wohlmuthová: Středová konvexnost elementárních funkcí .	49
K. Mišoň: Dyadické početní kouzlo	55
Dr. J. Skuhra: Problém simulace náhodných procesů	58
K. Pavlas: Několik úloh o pokrývání .	61
Doc. dr. K. Drábek, CSc.: Oskulační kružnice kuželoseček	66
Dr. M. Bednařík, dr. M. Šíroká: Jízda po silnici se stoupáním	70
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Librace Měsíce	76
Naše soutěž .	79
Dr. J. Šedivý: Zajímá vás původ slov?	92
Různé	93
Nejmladším čtenářům	95
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	3. a 4. str. obálky

Středová konvexnost elementárních funkcí

ANEŽKA WOHLMUTHOVÁ, ČVUT, Praha

V tomto článku vyšetříme z hlediska středové konvexity (zkráceně s -konvexity) některé elementární funkce jedné reálné proměnné. (S pojmem s -konvexity se čtenář mohl seznámit v článku „Konvexní a konkávní funkce“, uveřejněném v minulém čísle Rozhledů.)

Dokážeme nejprve pomocnou větu:

Věta 1 Pro libovolná $x_1, x_2 \in R_0^+ =]0, \infty)$, $l, k \in \mathbf{N}$, kde $\mathbf{N}$ je množina přirozených čísel, platí:

$$x_1^k x_2^l + x_1^l x_2^k \leq x_1^{k+l} + x_2^{k+l}, \quad (1)$$

přičemž rovnost v (1) nastává, právě když $x_1 = x_2$.

Důkaz: Oba výrazy v (1) porovnáme rozdílem:

$$\begin{aligned} x_1^{k+l} + x_2^{k+l} - (x_1^k x_2^l + x_1^l x_2^k) &= x_1^k (x_1^l - x_2^l) + x_2^k (x_2^l - x_1^l) = \\ &= (x_1^l - x_2^l) (x_1^k - x_2^k). \end{aligned}$$

Protože mocnina s přirozeným exponentem je v intervalu $]0, \infty)$ rostoucí, mají oba činitele v posledním výrazu totéž znamení a součin $(x_1^l - x_2^l) \cdot (x_1^k - x_2^k)$ je tedy nezáporný. Přitom je nulový, právě když $x_1 = x_2$.

Věta 2: Každá funkce $f(x) = x^m$ je při přirozeném $m \geq 2$ ostře s -konvexní na R_0^+ .

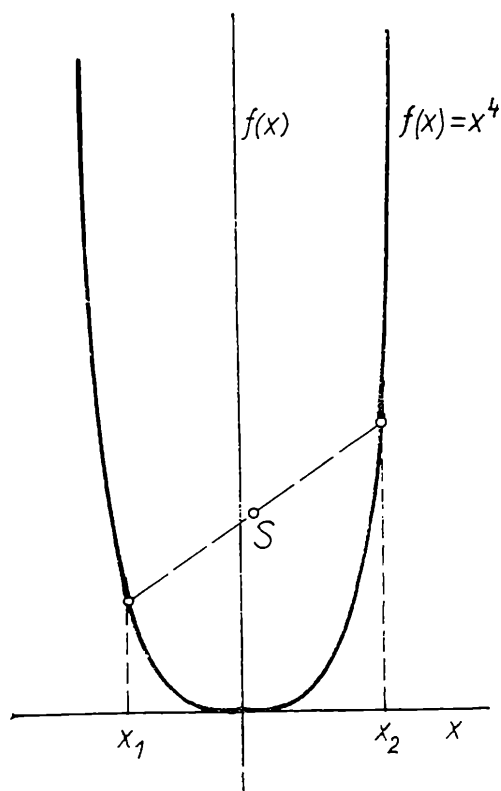
Důkaz: Máme dokázat, že pro každé $x_1, x_2 \in R_0^+$, $m \geq 2$ celé platí nerovnost

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^m \leq \frac{x_1^m + x_2^m}{2}, \quad (2_m),$$

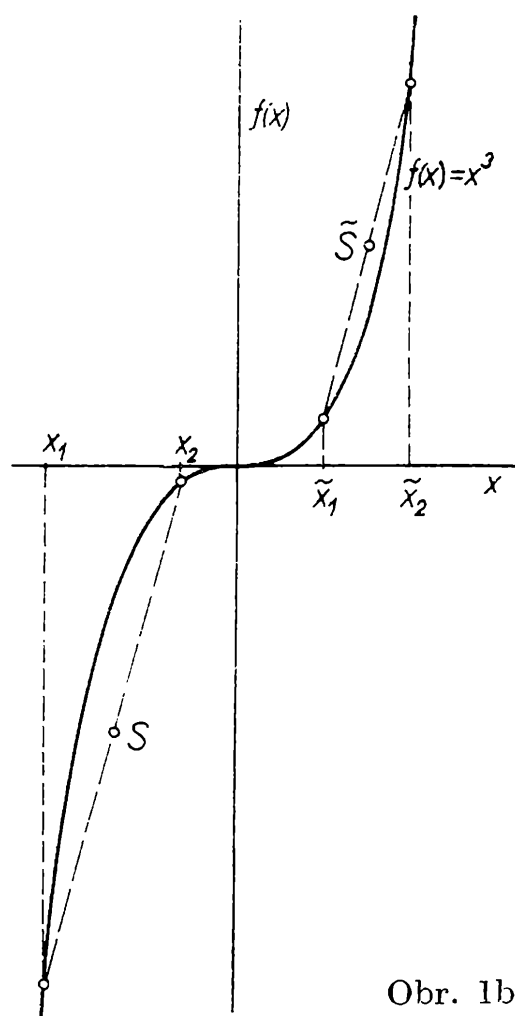
přičemž rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2$.

Čtenář si tento důkaz může provést užitím binomické věty a nerovnosti (4) z článku citovaném v úvodu. Zde provedeme důkaz indukci.

Víme již, že pro $m = 2$ nerovnost (2_m) platí, a to i s příslušným dodatkem o rovnosti. Předpokládejme, že (2_m) platí (i s dodatkem o rov-



Obr. 1a



Obr. 1b

nosti) pro jisté celé $m \geq 2$. Vynásob me (2_m) výrazem $\frac{x_1 + x_2}{2}$. Jelikož $x_1, x_2 \in R_0^+$, je $\frac{x_1 + x_2}{2} \geq 0$. Dostáváme

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{m+1} \leq \left(\frac{x_1^m + x_2^m}{2}\right) \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Po úpravě

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{m+1} \leq \frac{x_1^{m+1} + x_1 x_2^m + x_2 x_1^m + x_2^{m+1}}{4}$$

přitom rovnost platí, právě když $x_1 = x_2$. Užijeme-li nyní (1) pro $k = m$, $l = 1$, tj. nerovnosti

$$x_1^m x_2 + x_1 x_2^m \leq x_1^{m+1} + x_2^{m+1}$$

dostaneme snadno (2_{m+1}) i s příslušným dodatkem o rovnosti.

Věta 3: Nechť $m \in \mathbf{N}$. Každá funkce $f(x) = x^m$ je

a) při sudém $m \geq 2$ ostře s -konvexní na R (obr. 1a.)

b) při lichém $m > 2$ ostře s -konvexní na R_0^+ a ostře s -konkávní na R_0^- (obr. 1b.).

Důkaz: Jestliže $x_1, x_2 \in R_0^+$, platí nerovnost (2_m) i s příslušným dodatkem o rovnosti.

Jestliže $x_1, x_2 \in (-\infty, 0 >$, pak $-x_1, -x_2 \in < 0, \infty)$ a platí

$$\left(-\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^m \leq \frac{(-x_1)^m + (-x_2)^m}{2}$$

přičemž rovnost nastává, právě když $-x_1 = -x_2$, tj. $x_1 = x_2$.

Je-li m sudé, platí

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^m \leq \frac{x_1^m + x_2^m}{2}$$

Je-li m liché, platí

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^m \geq \frac{x_1^m + x_2^m}{2},$$

opět s příslušným dodatkem o rovnosti.

Jestliže $x_1 \in (-\infty, 0)$ a $x_2 \in (0, \infty)$ a je-li m sudé, je $-x_1 \in (0, \infty)$ a platí $|x_1 + x_2| < x_2 - x_1$. Tedy podle (2_m) pro sudé m dostáváme

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^m < \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^m \leq \frac{x_2^m + (-x_1)^m}{2} = \frac{x_2^m + x_1^m}{2}$$

Speciální volbou x_1 a x_2 můžeme dostat zajímavé a užitečné nerovnosti.

Například: Nechť $u_1, u_2 > 0$, m celé, $m \geq 2$. Položme $\sqrt[m]{u_1} = x_1$, $\sqrt[m]{u_2} = x_2$. Pak $x_1, x_2 > 0$, a tedy

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^m \leq \frac{x_1^m + x_2^m}{2},$$

přičemž rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2$. Protože m -tá mocnina, a tedy i m -tá odmocnina, jsou funkce rostoucí na R_0^+ , platí

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \leq \left(\frac{x_1^m + x_2^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}}$$

a tedy

$$\frac{\sqrt[m]{u_1} + \sqrt[m]{u_2}}{2} \leq \sqrt[m]{\frac{u_1 + u_2}{2}}$$

Zkoumejme nyní s -konvexitu logaritmické a exponenciální funkce.

Nechť $a > 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Pak

$$\log_a \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} = \frac{1}{2} \log_a \frac{(x_1 + x_2)^2}{4 x_1 x_2}.$$

Protože hodnoty logaritmické funkce mění v bodě 1 znamení, porovnejme argument $\frac{(x_1 + x_2)^2}{4 x_1 x_2}$ s jedničkou:

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{4 x_1 x_2} - 1 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{4 x_1 x_2} \geq 0,$$

přičemž rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2$. To však znamená, že $\log_a \frac{(x_1 + x_2)^2}{4 x_1 x_2} \geq 0$, a tedy

$$\log_a \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2}, \quad (3)$$

přičemž rovnost platí, právě když $x_1 = x_2$.

Položme nyní $x_1 = a^{u_1}$, $x_2 = a^{u_2}$ kde $u_1, u_2 \in R$. Pak podle (3) platí

$$\frac{u_1 + u_2}{2} \leq \log_a \frac{a^{u_1} + a^{u_2}}{2}$$

Protože exponenciální funkce se základem $a > 1$ je rostoucí na R , platí

$$a^{\frac{u_1 + u_2}{2}} \leq a^{\log_a \frac{a^{u_1} + a^{u_2}}{2}}$$

a tedy

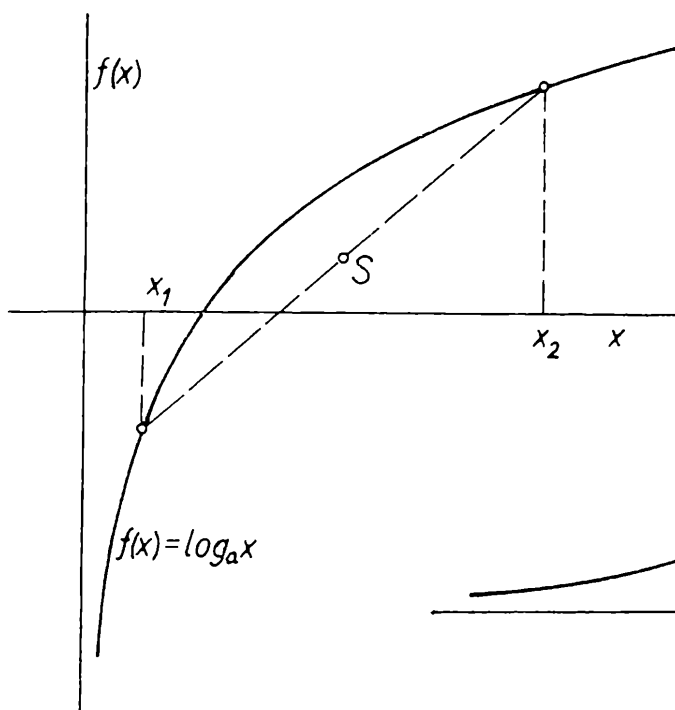
$$a^{\frac{u_1 + u_2}{2}} \leq \frac{a^{u_1} + a^{u_2}}{2} \quad (4)$$

pro všechna $u_1, u_2 \in R$, $a > 1$, přičemž rovnost nastává, právě když $u_1 = u_2$. Můžeme tedy vyslovit větu:

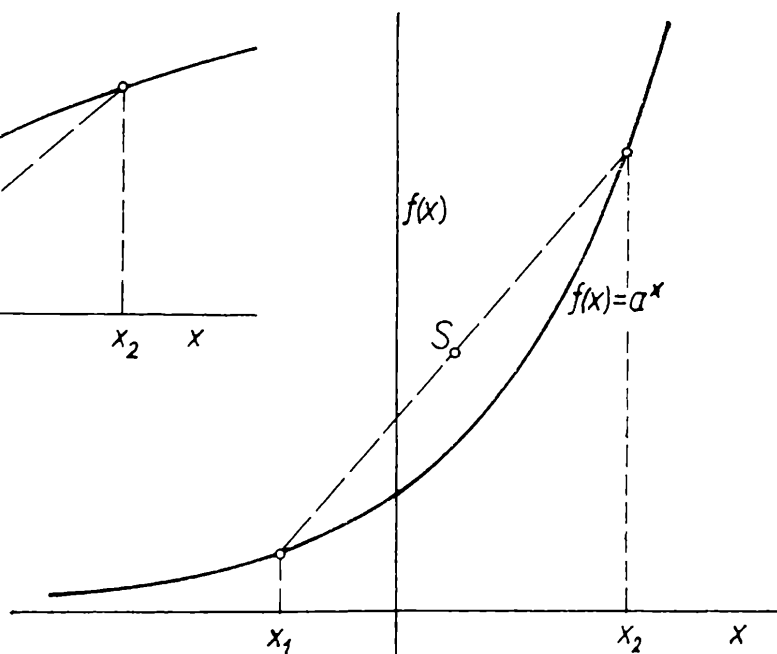
Věta 4: Buď $a > 1$. Pak každá funkce $\log_a x$ je ostře s -konkávní na intervalu $(0, \infty)$ a funkce a^x je ostře s -konvexní na intervalu $(-\infty, \infty)$ (obr. 2a, 2b).

Podívejme se ještě na s -konvexitu goniometrických funkcí. Porovnejme (rozdílem) funkční hodnoty $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ pro jednotlivé goniometrické funkce.

$$a) \quad \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} - \sin \frac{x_1 + x_2}{2} = \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2} -$$



Obr. 2a.



Obr. 2b.

$$- \sin \frac{x_1 + x_2}{2} = \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \left(\cos \frac{x_1 - x_2}{2} - 1 \right)$$

$$b) \frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2} - \cos \frac{x_1 + x_2}{2} = \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \left(\cos \frac{x_1 - x_2}{2} - 1 \right)$$

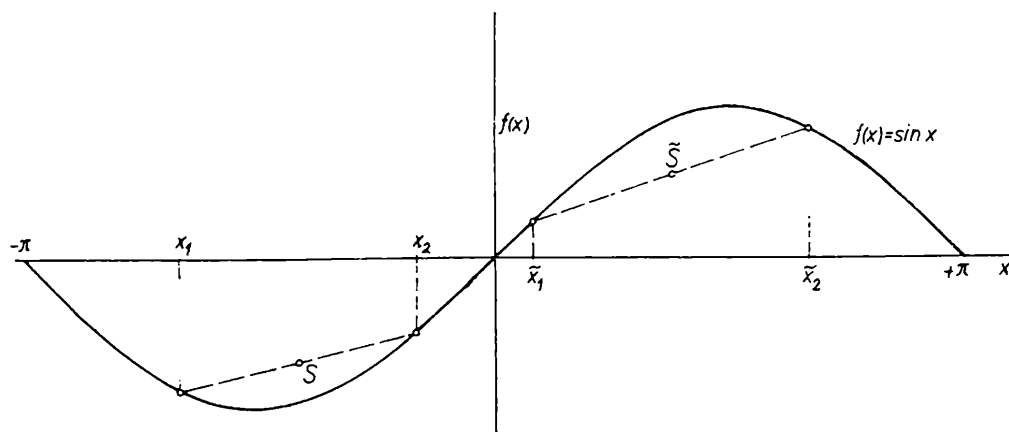
$$c) \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{tg} \frac{x_1 + x_2}{2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} \frac{x_1 + x_2}{2} \right) = \frac{\sin x_1 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} - \cos x_1 \sin \frac{x_1 + x_2}{2}}{2 \cos x_1 \cos \frac{x_1 + x_2}{2}} +$$

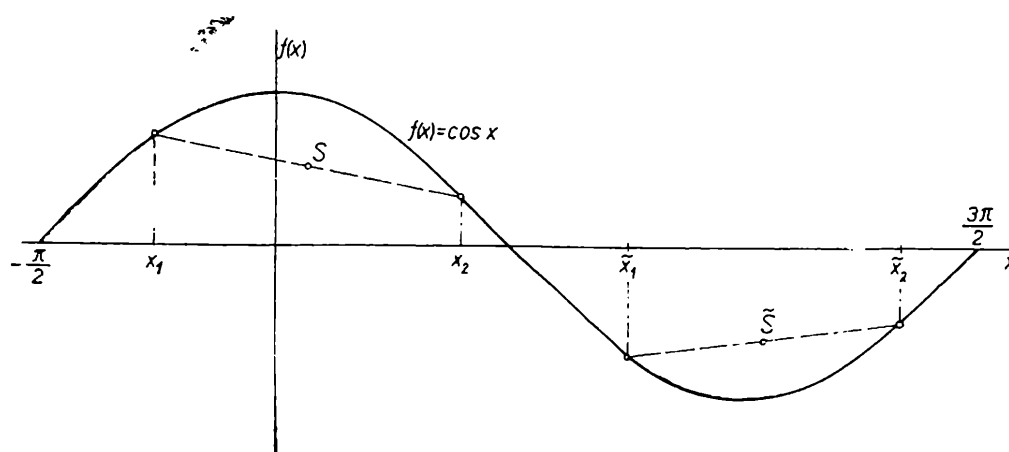
$$+ \frac{\sin x_2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} - \cos x_2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2}}{2 \cos x_2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos x_2 + \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos x_1}{2 \cos x_1 \cos x_2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2}} =$$

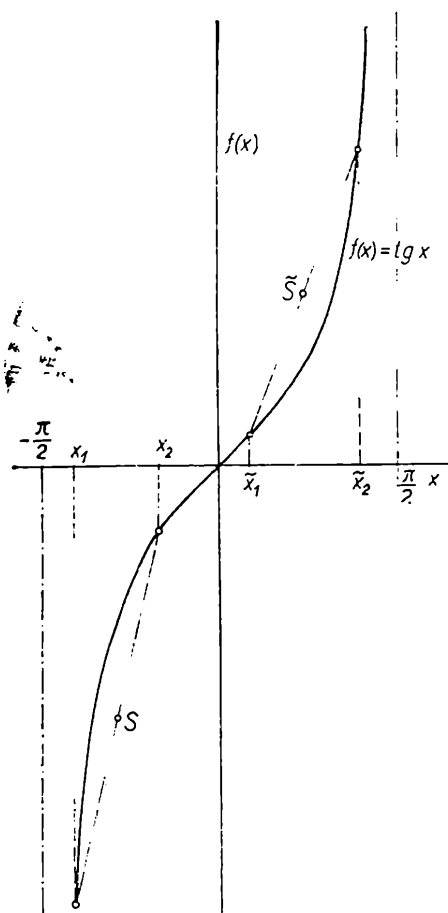
Obr. 3a



Obr. 3b



Obr. 3c ▼



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \frac{\cos x_1 - \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2}} = \\
 &= \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \frac{\sin \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}}{\cos x_1 \cos x_2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2}} = \\
 &= \frac{\sin^2 \frac{x_2 - x_1}{2} \operatorname{tg} \frac{x_1 + x_2}{2}}{\cos x_1 \cos x_2}
 \end{aligned}$$

Zřejmě $\cos \frac{x_1 - x_2}{2} - 1 \leq 0$ pro všechna $x_1, x_2 \in R$, přičemž rovnost nastane, právě když $\frac{x_1 - x_2}{2} = 2k\pi$, tj. $x_1 - x_2 = 4k\pi$, kde k je celé.

Podobně $\sin^2 \frac{x_2 - x_1}{2} \geq 0$, $x_1, x_2 \in R$, přičemž rovnost nastane, právě když $\frac{x_2 - x_1}{2} = k\pi$, tj. $x_2 - x_1 = 2k\pi$, k celé.

Můžeme vyslovit následující větu:

Věta 5:

a) Funkce $\sin x$ je ostře s -konvexní v každém intervalu, v němž je nekladná, tedy v intervalech $\langle (2k-1)\pi, 2k\pi \rangle$, k celé, a ostře konkávní je v každém intervalu, v němž je nezáporná, tedy v intervalech $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle$, kde k je celé (obr. 3a).

b) Funkce $\cos x$ je ostře s -konvexní v každém intervalu, v němž je nekladná, tj. v každém intervalu $\langle (2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2} \rangle$, k celé, a ostře s -konkávní v každém intervalu, v němž je nezáporná, tj. v každém intervalu $\langle (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \rangle$, kde k je celé (obr. 3b).

c) Funkce $\operatorname{tg} x$ je ostře s -konvexní v každém intervalu, v němž je nezáporná, tj. pro každé $x \in \langle k\pi, (k + \frac{1}{2})\pi \rangle$, kde k je celé, a ostře konvexní v každém intervalu, v němž je nekladná, tj. pro $x \in \langle (k - \frac{1}{2})\pi, k\pi \rangle$, k celé (obr. 3c).

Vyšetření s -konvexity funkce $\operatorname{cotg} x$ ponecháváme čtenáři.

Dyadické početní kouzlo

KAREL MIŠOŇ, Praha

Zápisu čísel ve dvojkové soustavě se užívá k jistému početnímu kouzlu opírajícímu se o okolnost (úplnou alternativní disjunkci), že na každém místě dvojkového zápisu je buď 0 (žádná jednotka příslušného řádu), nebo 1 (právě jedna jednotka tohoto řádu).

Sestavme dekadické zápisy přirozených čísel, majících v n -tém ($n = 0, 1, 2, \dots$) řádu dyadického zápisu *jednotku*, do samostatných posloupností pro jednotlivá n . Posloupnost odpovídající řádu $n = 0$, tj. soupis čísel majících ve dvojkovém zápisu jednu jednotku řádu nula, obsahuje lichá čísla

$$1; 3; 5; 7; \quad (1)$$

Posloupnost odpovídající řádu $n = 1$ obsahuje čísla

$$2, 3; 6, 7; 10, 11; 14, \quad (2)$$

posloupnost pro řád $n = 2$ je tvořena čísly

$$4, 5, 6, 7; 12, 13, 14, 15; 20, 21, \quad (3)$$

atd. Snadno postřehneme výtvarný zákon jednotlivých posloupností:

Každá z posloupností je sestavena z (nekonečného počtu) konečných aritmetických posloupností s diferencí 1 se stejným počtem členů tak, že mezi posledním členem jedné a prvním členem další aritmetické posloupnosti je vynecháno tolik čísel, kolik členů každá z aritmetických posloupností obsahuje. Totiž: Posloupnost odpovídající řádu n začíná číslem 2^n , které je prvním členem 2^n -členné aritmetické posloupnosti s diferencí 1. Po jejím posledním členu

$$2^n + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1 \quad (4)$$

je vynecháno 2^n čísel pokračujících v přirozené řadě čísel po čísle (4); další číslo

$$2^{n+1} - 1 + 2^n + 1 = 2^{n+1} + 2^n = 3 \cdot 2^n$$

je prvním členem druhé aritmetické posloupnosti končící číslem

$$2^{n+1} + 2^n + 2^n - 1 = 2^{n+2} - 1,$$

na něž navazuje aritmetická posloupnost začínající číslem

$$2^{n+2} - 1 + 2^n + 1 = 2^{n+2} + 2^n = 5 \cdot 2^n$$

atd. Každou z posloupností lze tedy získat mechanickým výběrem z přirozené řady čísel, jak ukazuje obrázek. Konciseji lze všechna čísla posloupností jednotlivých řádů $n = 0, 1, 2, \dots$ vystihnout zápisem

$$(2k+1)2^n, (2k+1)2^n+1, (2k+1)2^n+2, \dots, (2k+1)2^n+2^n-1; \\ k = 0, 1, 2,$$

Hodnoty odtud plynoucí pro jednotlivá k odpovídají aritmetickým posloupnostem odděleným v (1), (2), (3) středníky.

Každé přirozené číslo N je obsaženo v konečném počtu nekonečných posloupností, a to právě v těch, jež odpovídají řádům majícím v dyadickém zápise čísla N jednotku. Necht' jde o posloupnosti příslušející řádům $n_i; i = 1, 2, \dots, m$. Číslo N je pak rovno součtu čísel určujících hodnoty těchto řádů

$$N = \sum_{i=1}^m 2^{n_i}.$$

Přitom každý ze sčítanců 2^{n_i} je prvním (nejmenším) číslem v nekonečné posloupnosti příslušející řádu n_i . V obr. jsou (pro $n_i = 0, 1, 2, 3, 4$) příslušné hodnoty „začtverečkovány“.

Nenulové řády dyadického zápisu

řád	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	☒																										
1		☒																									
2				☒																							
3								☒																			
4																☒											

Sestavy čísel majících ve dvojkovém zápise na jednotlivých místech nenulové číslice

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63
65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95
97	99	101	103	105	107	109	111
113	115	117	119	121	123	125	127

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63
66	67	70	71	74	75	78	79
82	83	86	87	90	91	94	95
98	99	102	103	106	107	110	111
114	115	118	119	122	123	126	127

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63
68	69	70	71	76	77	78	79
84	85	86	87	92	93	94	95
100	101	102	103	108	109	110	111
116	117	118	119	124	125	126	127

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63
72	73	74	75	76	77	78	79
88	89	90	91	92	93	94	95
104	105	106	107	108	109	110	111
120	121	122	123	124	125	126	127

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

Této okolnosti je užito ke „kouzelnému“ odhalení myšleného čísla (s případným okrášlením na číslo domu, letopočet, stáří apod.): Kouzelník předloží obecenstvu souhrn tabulek s žádostí o sdělení, které z tabulek myšlené číslo obsahují. Sám pak sečtením prvních čísel na těchto tabulkách myšlené číslo zjistí.

Připojujeme 7 tabulek obsahujících začátky posloupnosti pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ začínající čísla $2^n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$ a obsahující všechna čísla vystižitelná dyadickým zápisem do sedmi míst, tj. do čísla $2^7 - 1 = 127$ včetně: $N = 1, 2, \dots, 127$. Přirozeně by bylo lze kouzlo předvádět i užitím grafu podle obrázku. To by asi bylo pro obecenstvo náročnější.

Příklad :

Myšlené číslo $N = 13$ nalezneme na tabulkách začínajících čísla 1, 4, 8; skutečně $1 + 4 + 8 = 13$. Podobně z grafu v obrázku: pod číslem 13 jsou vyšrafována políčka řad $n_1, 2, 3 = 0, 2, 3$ začínajících (vyznačeno zarámováním) čísla $2^{n_1, 2, 3} = 1, 4, 8$.

Poznámka :

$\alpha)$ Zahrnout do N čísla do $1000 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3$ by vyžadovalo zvýšit počet tabulek na $9 + 1 = 10$; v těch pak by bylo lze zahrnout možnosti N do $2^{10} - 1 = 1023$ včetně.

$\beta)$ Poněvadž

$$2^{14} - 1 = 16383 = \sum_{i=0}^{13} 2^i,$$

stačilo by $14 = 13 + 1$ tabulek k obsáhnutí možností $1 \leq N \leq 16383$.

Problém simulace náhodných procesů

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

Pepíček si hraje. Dívá se z okna a dělá si poznámky. Když se mu podíváme přes rameno, uvidíme řadu čísel:

0112011111011011101121110012112001110

„Pepíčku, co to znamená?“ ptáme se. „No, když vidím, že jede nákladní auto, udělám 0. A když jede osobní auto, tak udělám 1; 2 znamená, že jela tramvaj. Podívejte se, už jely čtyři tramvaje.“

Při návštěvě mičurinského kroužku jsme viděli vzorně vedené záznamy o prováděných pokusech. Velmi nás překvapily záznamy, které jsme viděli u každého pokusu:

00010011011001001111100010001010

Vysvětlení, kterého se nám od pionýrů dostalo, zní: „Pro naše pokusy je velmi důležité vědět den po dni během pokusu, zda přšlo či ne. Zaznamenáváme si tyto údaje symbolicky. 0 znamená, že příslušný den nepršelo a 1 znamená opak.“

Při exkurzi v závodě jsme v místnosti, kde se prováděla kontrola výrobků, viděli záznam:

00000000100000000000100000000000001000001000000

Na náš dotaz nám pracovníci kontroly odpověděli: „Toto je záznam, který využívá vedení závodu při plánování a organizaci práce. Jde o symbolicky zaznamenaný výskyt výrobků s nějakou vadou 1, které se musí vracet zpět do výroby, mezi bezvadnými výrobky 0.“

V jisté malé telefonní ústředně pro 500 účastníků se sleduje její vytíženost. Automat zaznamenává každou minutu počet právě probíhajících hovorů. Uvádíme část záznamu:

133 102 138 207 221 335 242 138 229 237 142 148 090 049

Zde uvedené příklady mají mnoho společného. Ve všech čtyřech případech jde o realizaci jistého náhodného procesu. Náhodným procesem rozumíme posloupnost stavů nějakého systému, do kterých se postupně systém dostává a přitom nejsme schopni říci, do jakého stavu se systém dostane v následujícím okamžiku. Náhodný proces může být popsán obecněji, ale pro naše účely to dostačuje.

Například: Pepíček sleduje systém (komunikaci) se třemi stavy: projíždí nákladní auto, osobní auto, tramvaj. Členové mičurinského kroužku sledují systém (počasí) se dvěma stavy: prší, neprší.

Příkladů náhodného procesu bychom mohli uvést mnoho a mnoho. Předpokládáme, že každý z vás si sám příklady najde. Zde si řekneme ještě o jednom. Systémem budeme rozumět frontu kupujících před pokladnou v samoobsluze a jeho stavy jsou: před pokladnou není žádný kupující, před pokladnou je právě jeden kupující, před pokladnou jsou právě dva kupující. před pokladnou je právě n kupujících.

Náhodné procesy se velmi intenzívně studují. Jejich důležitost je zřejmá. Například před stavbou nové samoobsluhy je třeba zodpovědět otázku: Kolik má mít tato nová samoobsluha pokladen, aby jich nebylo zbytečně mnoho, ale aby jich také nebylo málo a netvořily se u nich ve špičkách příliš dlouhé fronty? Tato otázka musí být zodpovězena dříve, než se začne stavět. Jak ale poznat chování procesu dříve, než tento proces bude existovat?

Ukazuje se, že při studiu náhodného procesu není nezbytně nutné pro zodpovězení mnoha otázek náhodný proces přímo realizovat, ale stačí jej simulovat například na počítačích strojích. To znamená, že vytvoříme

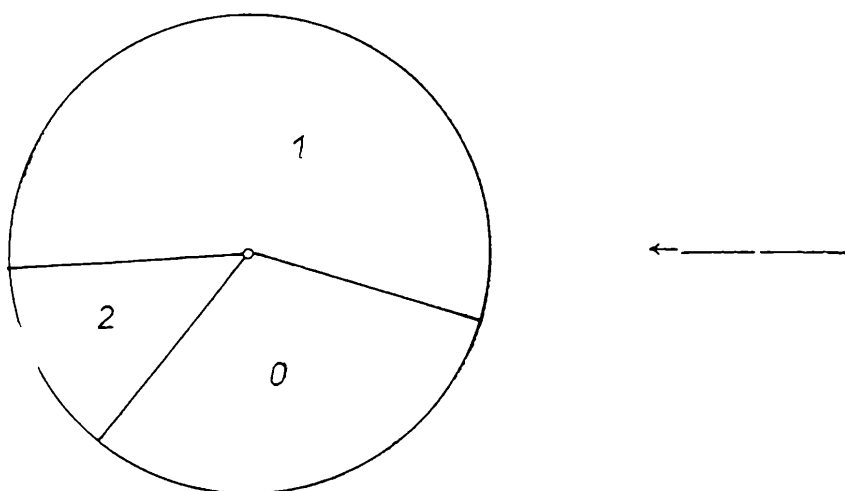
Tabulka náhodných čísel

16689	71147	43813	92542	26084	72866	11712	52601	78188	16940
07514	72046	19132	99071	45253	63203	00768	60329	43563	11770
48276	34864	46244	58231	18758	91379	05075	02199	13382	32624
64938	62343	36101	66364	33354	65688	05701	49740	12312	19832
91349	80859	21177	60349	65054	53587	18762	51167	39309	09943
38666	90502	86302	06296	51079	75348	53534	92143	78630	45491
37469	21384	91893	32488	14605	57973	31083	34003	46307	78976
27110	25367	39702	99822	68003	10701	08155	95690	83866	54958
30944	40234	38323	92658	61896	58417	91222	85219	04453	52243
57154	42239	55266	82626	86911	30653	39874	67493	70616	02135
63206	71084	19163	61185	26813	78728	14783	26234	82797	44262
76259	39923	08631	56179	55039	50315	07086	43839	42466	94650
86240	97114	35698	54949	48254	50402	16654	76151	83331	41859
95962	64943	58780	08071	02259	85542	42389	61486	25470	01935
71184	62457	90475	11222	05740	89996	95601	93535	56465	93153
27585	65134	39329	03835	10766	02981	54383	85559	50402	59350
33075	58054	75755	58827	91891	02500	43905	72112	84644	33313
14980	63843	47681	93865	72821	43825	52756	67160	63686	40827
01182	54566	88160	05178	29103	66504	38973	55333	04076	56391
45933	33258	22832	21715	24834	04065	60110	82773	76700	09182
34159	76657	69073	54757	56082	74932	13039	83010	79462	67997
12467	64359	54569	63926	98646	93792	70858	67640	76970	22468
62152	70845	15300	67877	05923	02895	51902	67801	54672	26302
92369	67282	53231	36746	95011	68694	93530	66754	51538	64405
83731	95211	24575	78101	54430	71438	19096	50055	72443	04958
37951	06680	97656	51461	60550	08998	10986	29705	11618	79913
52609	61378	15894	02502	38401	03368	06981	36602	89130	54431
84755	63463	53643	37730	38700	45210	26275	29584	59640	42161
60035	89963	04202	40914	25959	22488	96927	52330	05831	07252
31898	30044	39972	33241	66875	66058	20296	01258	03279	38557
51382	92176	21595	28712	66472	23612	32108	42917	94883	61898
97531	90626	98951	48127	05833	08942	40905	80761	97928	57406
10508	67850	03787	30237	55505	37362	43361	92898	21269	30271
16704	98029	06454	14019	14000	28188	98784	15201	88475	69292
03656	14368	48288	85334	20312	15583	87162	75246	41028	13110
25462	54158	51560	00245	18485	46840	87112	21468	21945	40984
94840	68812	22886	57967	64492	44617	81949	46934	04388	42907
64472	14063	63177	73612	86138	42707	22025	02222	17555	82580
27273	59642	03737	70036	05555	24634	18878	69501	97733	88238
36448	75308	02414	83337	61974	82379	07804	28998	06623	21973

matematický model, který se svým „chováním“ co nejvíce podobá svému reálnému vzoru, a ten pak studujeme.

Místo toho, abychom se s Pepíčkem dívali z okna, můžeme si hrát s kolem štěstí (obr. 1). Je to vlastně kotouč, který se může lehce otáčet kolem svého středu a zastavit v libovolné poloze (fyzikálně řečeno: je ve volné poloze). Kolo roztočíme, a až se zastaví, zaznameníme si číslo, které ukazuje šipka. Pokud šipka bude ukazovat na hraniční čáru, nezaznameníme nic a znovu kolo roztočíme.

Obr. 1



Ovšem i tento způsob je časově náročný a tělesně namáhavý. Používáme proto raději již připravených tabulek náhodných čísel. Tabulka náhodných čísel obsahuje číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, které jsou uspořádány tak, aby v nich nebyl žádný systém. Takové tabulky jsou velice pečlivě zkoumány; kdyby se v nich nějaký systém objevil, pak se vyřadí jako vadné. V tabulce náhodných čísel jsou číslice 0, 1, 2, ... 9 náhodně rozmístěny. Stejně tak jsou v ní náhodně rozmístěny dvojice číslic 00, 01, ... 98, 99. Totéž platí i o skupinách většího počtu číslic. Tato náhodnost je předností tabulek náhodných čísel. Část takové tabulky náhodných čísel přetiskujeme.*)

V dalších číslech časopisu si ukážeme, jak lze pomocí tabulky náhodných čísel simulovat různé situace. Uchovejte si proto dobře toto číslo Rozhledů, abyste mohli později pracovat s tabulkou na str. 60.

Několik úloh o pokrývání

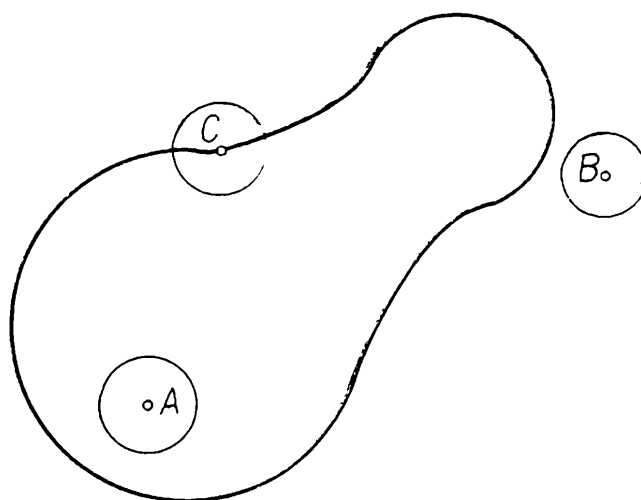
KAREL PAVLAS, gymnasium Třebíč

Budeme se zabývat konečnými bodovými množinami a konvexními útvary v rovině. Připomeneme si, že bod X nazýváme hraničním bodem útvaru U , když v každém jeho okolí jsou některé body, které útvaru patří a jiné, které mu nepatří (viz obr. 1). Množina všech hraničních bodů útvaru je jeho hranice.

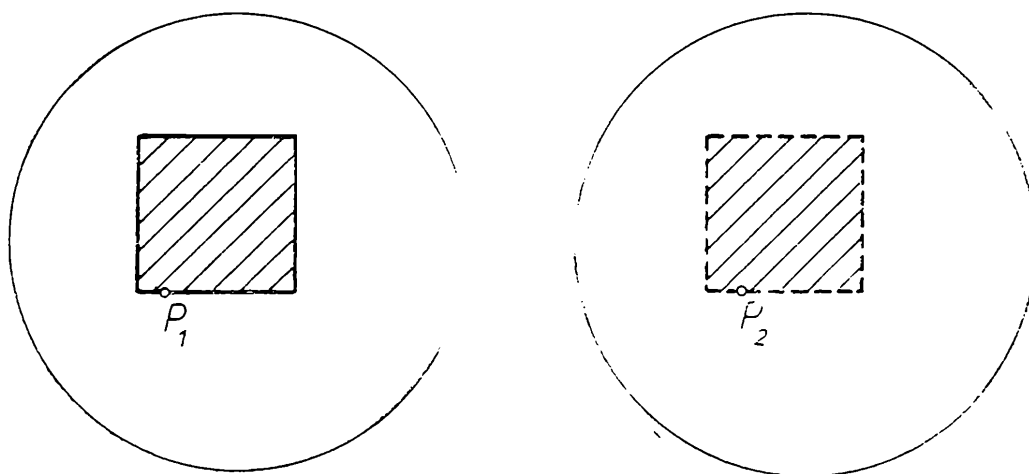
Útvar, který obsahuje svoji hranici, je uzavřený. Jestliže je možno umístit všechny body útvaru do vhodného kruhu, nazýváme útvar

*) Je použito části tabulek náhodných čísel z knížky V. Dupač - J. Hájek: Pravděpodobnost ve vědě a technice, NČSAV 1962

Obr. 1



A - vnitřní bod útvaru U , B - vnější bod útvaru U , C - hraniční bod útvaru U



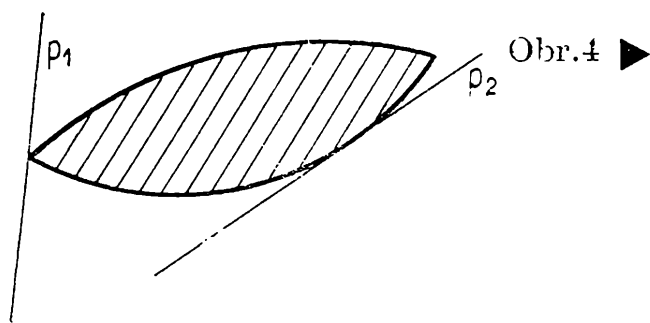
Obr. 2

omezený. Na obr. 2a je zobrazen čtverec, který je uzavřeným útwarem. Vnitřek čtverce znázorněný na obr. 2b není uzavřeným útwarem, v obou případech jde však o omezené útvary a body P_1 , P_2 (a všechny body obvodu) jsou jejich hraničními body.

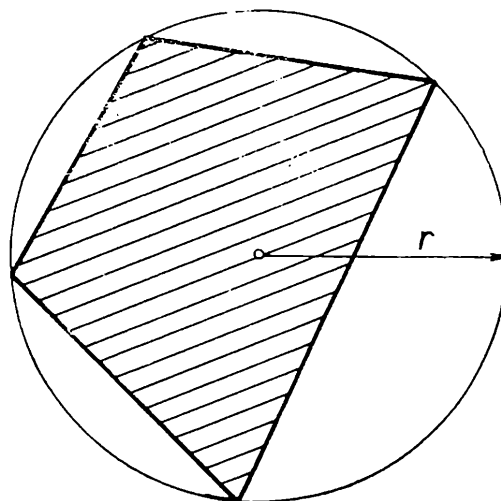
Jestliže přímka p obsahuje aspoň jeden hraniční bod útvaru U a přitom útvar U leží v jedné polorovině vytáté přímkou p , nazývá se p opěrnou přímkou útvaru U (viz obr. 3).

Definice 1. Poloměrem pokrytí r omezené bodové množiny rozumíme poloměr nejmenšího kruhu obsahujícího všechny body této množiny (obr. 4).

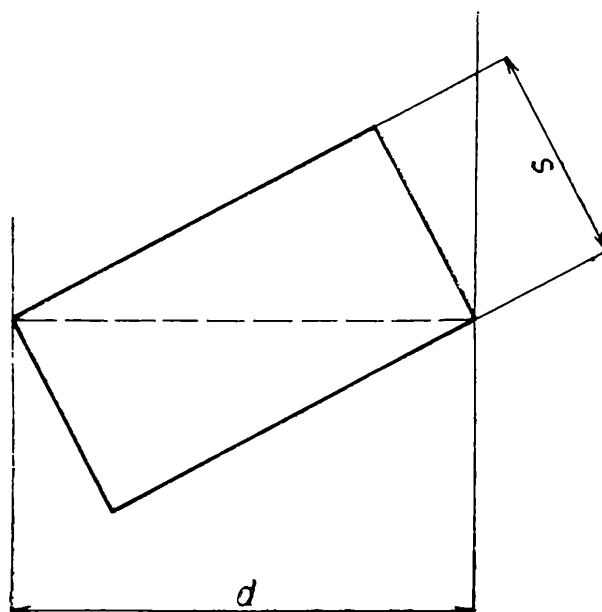
Definice 2. Uvažujme dvojici opěrných přímek útvaru, které jsou navzájem rovnoběžné. Mezi těmito rovnoběžkami jsou dvě opěrné přímky, jejichž vzdálenost je největší — tato vzdálenost se nazývá průměrem d útvaru. Dvojice opěrných přímek, které jsou rovnoběžné a jejichž vzdálenost je nejmenší, určuje šířku s útvaru (viz obr. 5).



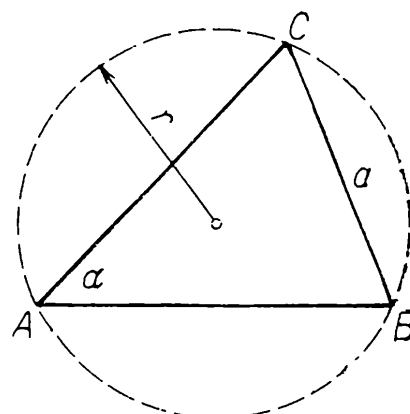
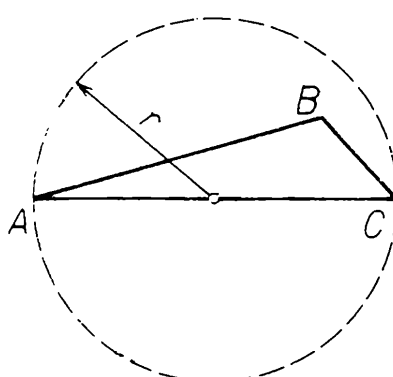
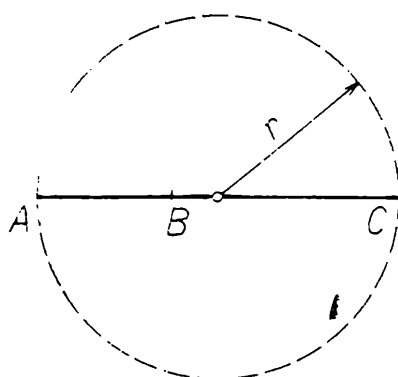
Obr. 3



Obr. 5 ►

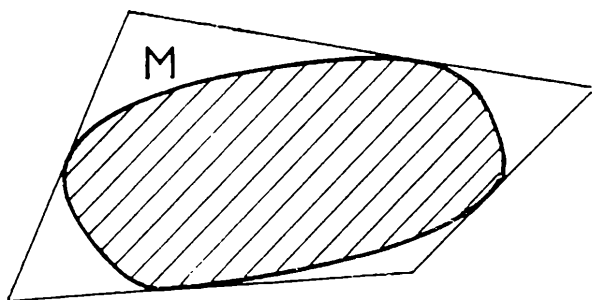


▼ Obr. 6

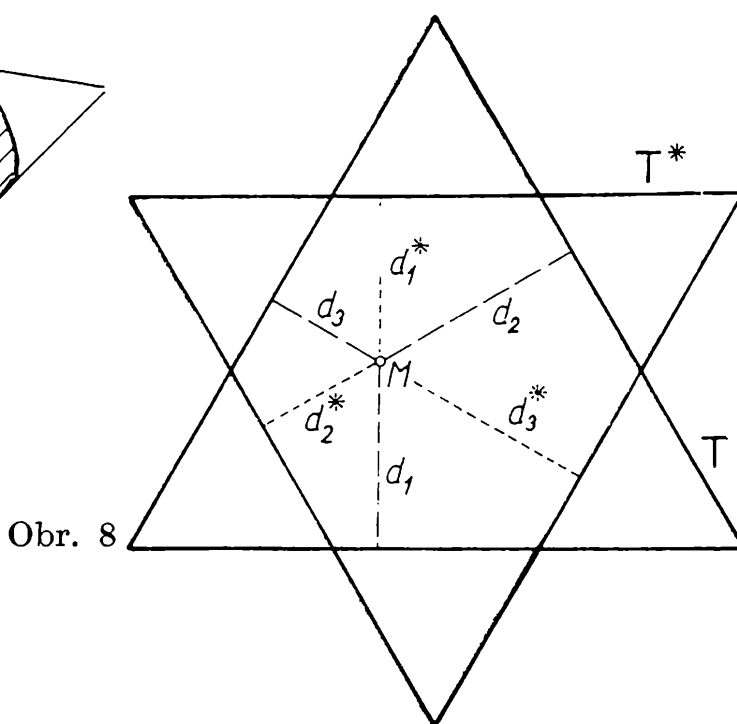


Úloha 1. Dokažte, že tříbodová množina o průměru $d = 1$ má poloměr pokrytí $r \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Řešení. Tři body dané množiny buďto leží v přímce, nebo tvoří vrcholy trojúhelníka. Jestliže leží v přímce, tvoří úsečku AC (viz obr. 6a), jejíž krajní body mají vzdálenost $d = 1$; potom kruh o poloměru $r =$



Obr. 7



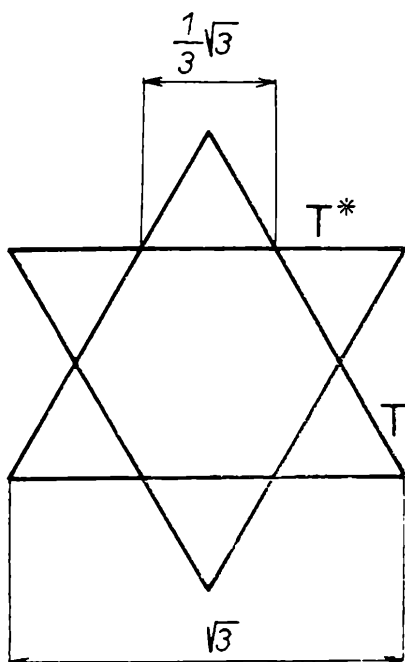
Obr. 8

$= \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ tuto úsečku pokrývá. Jestliže dané body neleží v přímce, tvoří vrcholy trojúhelníka, který je buď tupoúhlý nebo ostroúhlý. Je-li tupoúhlý, potom strana protilehlá tupému úhlu je nejdelší a je průměrem kruhu pokrývajícího dané tři body (viz obr. 6b). Pro poloměr pokrývajícího kruhu opět platí $r = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Je-li trojúhelník ostroúhlý, potom pro jeden jeho úhel, který označíme α , platí $\alpha \geq 60^\circ$, $\sin \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pro průměr pokrývajícího kruhu zřejmě platí $2r \leq \frac{a}{\sin \alpha}$, kde a je protější strana trojúhelníka (viz obr. 6c) k úhlu α . Protože $a \leq 1$, je $2r \leq \frac{a}{\sin \alpha} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Odtud vyplývá, že $r \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Tím je úloha rozřešena.

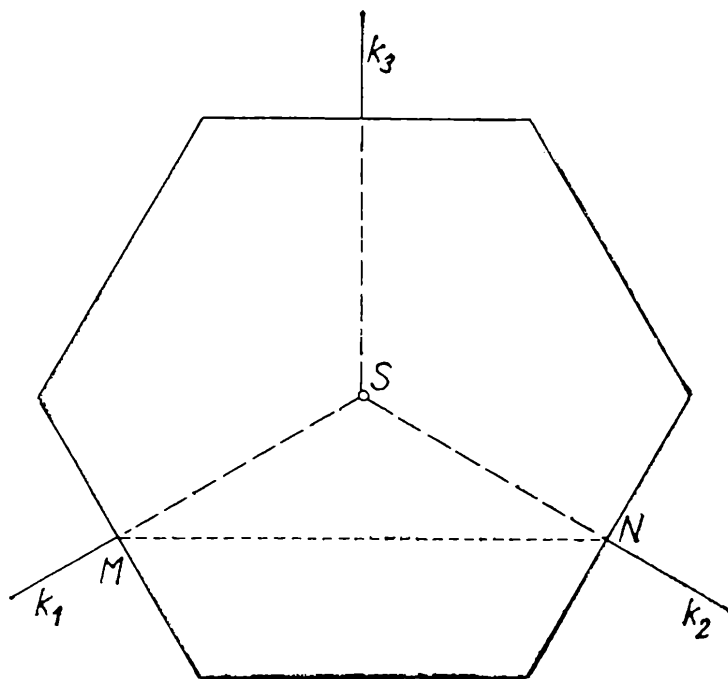
Definice 3. n -úhelník opsaný dané bodové množině $\mathbf{M}$ obsahuje $\mathbf{M}$ a na každé jeho straně leží aspoň jeden bod množiny $\mathbf{M}$. Říkáme, že n -úhelník množině opsaný tuto množinu pokrývá (viz obr. 7).

Úloha 2. Dokažte, že každou bodovou množinu s jednotkovým průměrem je možno pokrýt rovnostranným trojúhelníkem o straně $a \leq \sqrt{3}$.

Řešení. Dané množině opíšeme libovolný rovnostranný trojúhelník $\mathbf{T}$. Dále opíšeme dané množině jiný rovnostranný trojúhelník $\mathbf{T}^*$ tak, aby měl s trojúhelníkem $\mathbf{T}$ rovnoběžné strany (viz obr. 8). Trojúhelníky $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^*$ jsou stejnolehle. V průniku $\mathbf{T} \cap \mathbf{T}^*$ zvolíme libovolný bod M . Sestrojíme vzdálenosti d_1, d_2, d_3 bodu M od stran trojúhelníka $\mathbf{T}$ a podobně vzdálenosti d_1^*, d_2^*, d_3^* bodu M od stran trojúhelníka $\mathbf{T}^*$. Protože daná množina



Obr. 9



Obr. 10

má jednotkový průměr, je $d_i + d_i^* \leq 1$, kde $i = 1, 2, 3$. V rovnostranném $\triangle$ platí známá věta z planimetrie, podle níž součet vzdáleností libovolného bodu M , ležícího uvnitř tohoto trojúhelníka, od stran trojúhelníka je roven jeho výšce.

Označíme-li výšky trojúhelníků $\mathbf{T}, \mathbf{T}^*$ písmeny v, v^* , platí, že $v + v^* \leq 3$. Z obou trojúhelníků $\mathbf{T}, \mathbf{T}^*$ vezmeme ten, který má menší výšku, pro ni platí $v \leq \frac{3}{2}$. Snadným výpočtem zjistíme, že strana tohoto rovnostranného trojúhelníka je nejvýše $\sqrt{3}$.

Úloha 3. Každou bodovou množinu s jednotkovým průměrem je možno pokrýt pravidelným šestiúhelníkem o straně $a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Řešení. Využijeme rovnostranného trojúhelníka $\mathbf{T}$, opsaného dané množině tak jako v úloze 2. Délka strany tohoto trojúhelníka $\mathbf{T}$ závisí na směru jeho strany. Sestrojíme-li k trojúhelníku $\mathbf{T}$ trojúhelník $\mathbf{T}^*$, opsaný dané množině, který je s ním podle těžiště stejnohlý, jsou trojúhelníky $\mathbf{T}, \mathbf{T}^*$ shodné a průnik $\mathbf{T} \cap \mathbf{T}^*$ je pravidelný šestiúhelník pokrývající naši množinu. Z obr. 9 je vidět, že jeho strana je $a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Úloha 4. Každou bodovou množinu s jednotkovým průměrem je možno pokrýt třemi obrazci, přičemž průměr žádného z nich nepřevyšuje $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Řešení. Danou bodovou množinu můžeme podle úlohy 3 pokrýt pravidelným šestiúhelníkem o straně $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Tento šestiúhelník rozložíme na tři shodné obrazce tímto způsobem: ze středu S šestiúhelníka spustíme kolmice k_1, k_2, k_3 na nesousedící jeho strany. Vzniknou tak tři shodné pětiúhelníky, jejichž průměr tvoří největší vzdálenost jejich bodů M, N . Z obr. 10 je patrný výpočet velikosti $d = MN$. Je $a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$$d = a + \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

konstruktivní geometrie

Oskulační kružnice kuželoseček

Doc. dr. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT, Praha

Při praktickém rýsování křivek často nahrazujeme oblouk křivky v okolí jejího bodu obloukem tzv. *oskulační kružnice*.

Sestrojení oskulační kružnice v bodě kuželosečky dané osami lze provést užitím Steiner-Pelzovy paraboly¹⁾, která je určena čtyřmi tečnami, jimiž jsou obě osy, tečna a normála v uvažovaném bodě. Střed oskulační kružnice je pak bodem dotyku této paraboly na normále kuželosečky.

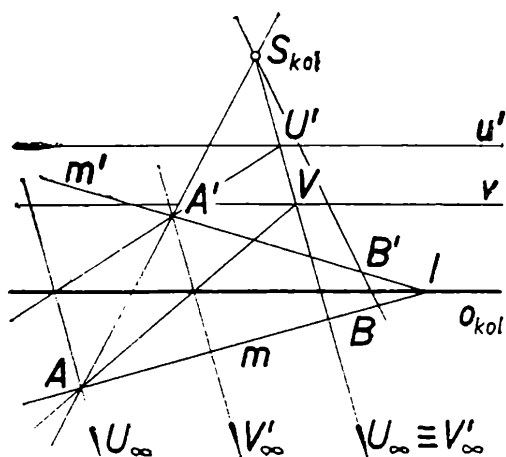
V případě, že kuželosečka je dána tečnou v bodě, ve kterém chceme sestavit oskulační kružnici, a třemi body (nebo dvěma body a tečnou, příp. další tečnou s bodem dotyku a bodem nebo tečnou), můžeme sestrojení oskulační kružnice snadno provést užitím perspektivní kolineace v rovině.

Pro perspektivní kolineaci v rovině platí (obr. 1):²⁾

¹⁾ *Jacob Steiner* (1796—1863) se zabýval vedle tzv. syntetické geometrie také elementární geometrií a ukázal, že všechny euklidovské konstrukce lze provést jen pravítkem, je-li dána pevná kružnice se svým středem.

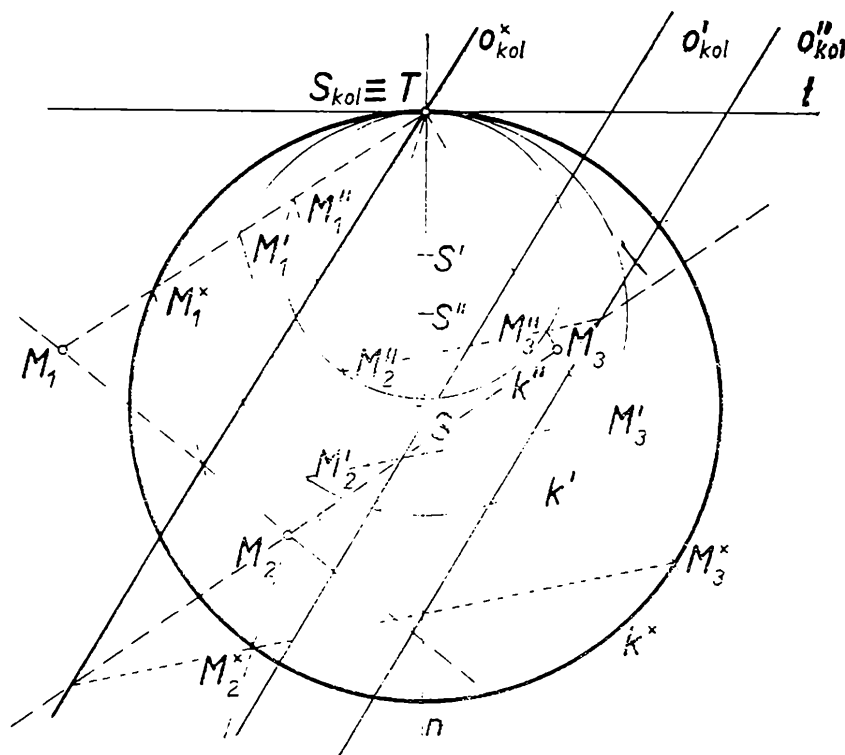
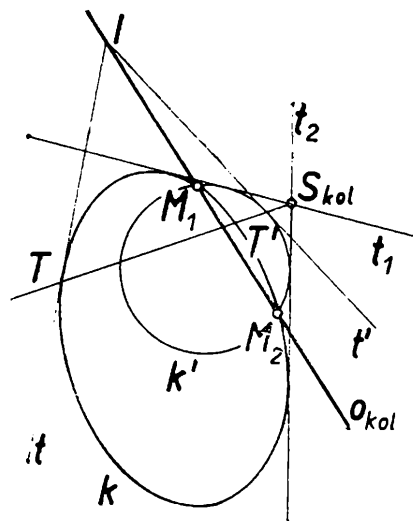
Karel Pelz (1845—1908), třetí profesor deskriptivní geometrie na pražské technice, se vedle problémů z projektivní geometrie a ploch druhého stupně zabýval základy axonometrie.

²⁾ O této lineární bodové příbuznosti a jejím užití při konstrukcích kuželoseček najdete více např. v knize A. Urbana: *Deskriptivní geometrie I*, SNTL 1965, str. 105—109 a 335—342 nebo v knize R. Pisky-V. Medka: *Deskriptivní geometrie I*, SNTL 1965, str. 88—92 a 135—149.



Obr. 1

Obr. 2



Obr. 3

- a) Odpovídající si body $A, A'; B, B'$; leží na přímkách procházejících bodem S_{kol} , tzv. *středem perspektivní kolineace*,
b) odpovídající si přímky $a, a'; b, b'$; se protínají na přímce o_{kol} , tzv. *ose perspektivní kolineace*,
c) incidence bodu a přímky je zachována.

Doplňování v perspektivní kolineaci provádíme užitím všech tří vlastností perspektivní kolineace. V obr. 1 byla tak sestrojena přímka m' odpovídající přímce m jdoucí bodem A , k bodu B' odpovídající bod B a body U', V odpovídající bodu $U_{\infty} \equiv V'_{\infty}$ (tj. nevlastnímu bodu zvoleného směru) a přímky u', v odpovídající nevlastní přímce $u_{\infty} \equiv v'_{\infty}$.

Podrobnějším rozбором vztahu perspektivní kolineace mezi kružnicí a jí odpovídající křivkou³⁾ zjistíme, že kružnici je přiřazena kuželosečka

³⁾ Viz uvedené části knih v pozn. 2).

jako perspektivně kolineární útvar. Druh této kuželosečky a konstrukce jejích bodů a tečen plyne z dané perspektivní kolineace. Zároveň z vlastností kolineace (obr. 2, kde je případ kružnice-elipsa) vyplývá, že

1. *tečny sestrojené ze středu kolineace k jedné kuželosečky jsou také tečnami ke druhé kuželosečce,*

2. *průsečíky jedné z kuželoseček s osou kolineace prochází také druhá kuželosečka.*

Jedné nebo druhé vlastnosti kružnice a kuželosečky v perspektivní kolineaci užíváme při konstrukcích kuželoseček daných body a tečnami (v celkovém počtu pěti prvků).

Uvažujme kuželosečku k danou tečnou t s bodem dotyku T a dalšími třemi body M_1, M_2, M_3 (obr. 3). Zvolme střed kolineace S_{kol} v bodě T a na normále n kdekoliv střed S' kružnice k' , která se v bodě T dotýká dané kuželosečky k .⁴⁾ V obr. 3 vyměňte body S', S''

K bodům M_1, M_2, M_3 kuželosečky k přiřadíme body M'_1, M'_2, M'_3 kružnice k' , které jsou průsečíky spojnic středu kolineace S_{kol} a bodů M_1, M_2, M_3 s kružnicí k'

Přímky M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3 se protínají s odpovídajícími přímkami $M'_1M'_2, M'_1M'_3, M'_2M'_3$ ve třech bodech, které leží na jedné přímce o' ⁵⁾, která je osou kolineace určené volbou kružnice k'

Tuto kružnici k' můžeme zřejmě zvolit tak, že protíná kuželosečku k v dalších dvou reálných různých bodech.

Zvolme jinou kružnici k'' volbou jejího středu S'' na normále n dané kuželosečky a zopakujme úvahu. Najdeme tak osu o'' kolineace mezi kružnicí k'' a kuželosečkou k .

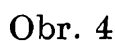
Kružnice k', k'' jsou stejnohlé pro střed stejnolehlosti v bodě T , proto jsou sestrojené osy o', o'' obou perspektivních kolineací rovnoběžné.

Sestrojme teď kružnici k^x tak, aby osa o^x kolineace mezi k^x a k procházela bodem T . K tomu stačí ve stejnolehlosti mezi k^x a např. k' určit k bodu M'_1 příslušný bod M_1^x . Tato zvláštní kružnice k^x má v bodě T s kuželosečkou (v limitě) společné tři body, protíná kuželosečku už jen v jediném dalším a vždy reálném bodě a nazývá se *oskulační kružnicí v tomto bodě*. Její střed S_T (index označuje, pro který bod kuželosečky je tato kružnice sestrojena) je potom na ose souměrnosti úsečky M_1^xT (nebo M_2^xT , příp. M_3^xT) a na příslušné normále n .

Zvláštním případem jsou *oskulační kružnice ve vrcholech* kuželoseček, které jsou ještě určeny dvěma body nikoliv souměrnými podle osy jdoucí daným vrcholem, nebo tečnou s bodem dotyku, příp. bodem a tečnou.

⁴⁾ Kružnice k' a kuželosečka k mají společné dvě tečny t, t' v limitě splývající a tedy podle vlastnosti 1) je jejich průsečík T středem kolineace mezi k, k' .

⁵⁾ Toto tvrzení plyne z Desarguesovy věty pro dva perspektivně kolineární trojúhelníky, viz např. Piska-Medek: DG I, str. 84—85.



c) Konečně pro parabolu (obr. 4c) určenou ohniskem F a vrcholovou tečnou a sestrojme v kolineaci o středu $S_{\text{kol}} \equiv A$ a ose $o_{\text{kol}} \equiv a$ k tečně t v bodě M , pro který $MF \perp AF$, $MF = p = 2 \cdot AF$, odpovídající prvky

t', M' Osa úsečky AM' protíná osu paraboly v bodě S_A , který je opět středem hledané hyperoskulační kružnice ve vrcholu A .

Protože $\triangle AIS_A$ je pravoúhlý a shodný s $\triangle AFM$, plyne

$$AS_A = MF = p.$$

Ve všech třech případech jsou uvedené konstrukce shodné s konstrukcemi užívanými při rýsování kuželoseček v deskriptivní geometrii na středních a odborných školách, kdy jsou zpravidla uváděny bez důkazu.

Cvičení:

1. Sestrojte oskulační kružnici k^x v bodě T kuželosečky, dané ještě a) t, T_1, t_1, M , b) t, t_1, M_1, M_2 , c) t, T_1, t_1, t_2 .

2. Sestrojte oskulační kružnici v bodě T hyperboly, dané ještě a) $t, {}^s a_I, {}^s a_{II}, M$ (přičemž ${}^s a_I$ je směr asymptoty a_I), b) $t, a_I, {}^s a_{II}, M$, c) $t, T_1, t_1, {}^s a_I$, d) $t, {}^s a_I, {}^s a_{II}, t_1$, e) $t, t_1, {}^s a_I, {}^s a_{II}$, f) t, t_1, a_I .

3. Sestrojte oskulační kružnici v bodě T paraboly, dané ještě a) t, M, s_0 (přičemž s_0 je směr osy paraboly), b) t, t_1, s_0 , c) t, M_1, M_2 , d) t, T_1, t_1 .

4. Je dána oskulační kružnice k^x ve vrcholu A kuželosečky a další bod T nebo tečna t . Sestrojte tuto kuželosečku!

Návod: Pomocí kolineace mezi k^x a kuželosečkou k sestrojte v daném bodě tečnu t (nebo na dané tečně bod dotyku T). Spojnice průsečíku tečen a, t a půlícího bodu tětivy AT je průměrová přímka, jejíž pomocí najdeme střed S kuželosečky. V případě elipsy odpovídá druhé ose o_2 přímka o_2^x bodem S^x (různým od S_A) odpovídajícím bodu S . Z jejích průsečíků C^x, D^x s kružnicí k^x plynou vrcholy C, D . V případě hyperboly protne Thaletova kružnice nad průměrem SS_A tečnu a v bodě, jímž prochází asymptota hyperboly.

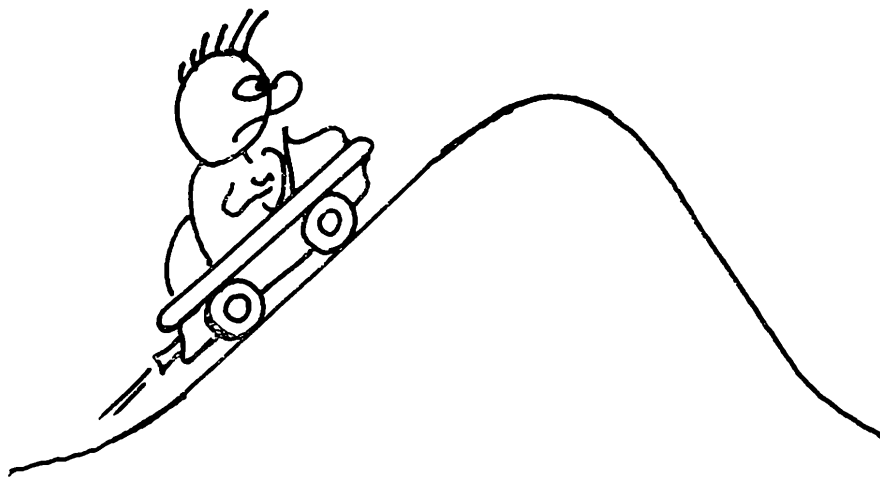
fyzika

Jízda po silnici se stoupáním

Až si jednou pořídíte motorové vozidlo (9. část)

RNDr. MILAN BEDNAŘÍK — RNDR. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Mnozí řidiči jezdí po silnicích se stoupáním neradi. Tvrdí, že do kopce to jede pomalu, že se zvyšuje spotřeba benzínu a tím i finanční náklady pro provoz vozidla, že se musí často měnit zařazení převodového stupně.



To vše je pravda, ale poněvadž žijeme v zemi geologicky značně zvrásněné, nezbyvá nám nic jiného než se s tím smířit, případně si říci, že vše špatné je také k něčemu dobré. Například již sám fakt, že při jízdě do kopce jsme nuceni jet pomaleji, činí jízdu v mnoha případech bezpečnější nežli je tomu na vodorovné silnici.

V článku „Jedeme s kopce“ jsme se zabývali fyzikálními podmínkami jízdy po silnici s klesáním trasy. Poznali jsme, že se při jízdě s kopce prodlužuje vzhledem k jízdě po vodorovné silnici jak dráha potřebná k zastavení vozidla, tak odstup dvou za sebou jedoucích vozidel, a v některých případech i dráha nutná k předjetí jiného vozidla. Z hlediska bezpečnosti jsme proto nepokládali jízdu s kopce za nijak výhodnou.

Zkoumejme nyní, jak tomu bude s bezpečností jízdy při pohybu vozidla do kopce — neboli odborněji řečeno — při pohybu vozidla po *silnici se stoupáním trasy*.

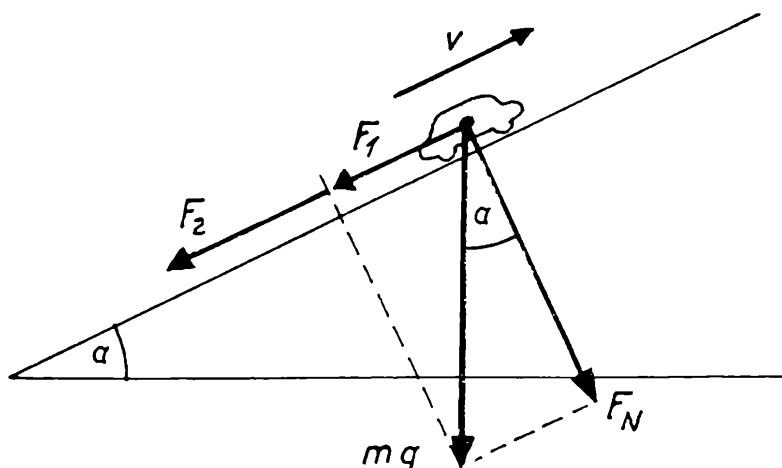
Stoupá-li motorové vozidlo po silnici s podélným sklonem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{d}$, působí proti směru jeho pohybu kromě třecích sil a odporu vzduchu především složka jeho tíhy $F_1 = m g \sin \alpha$ (obr. 1). Proto také, jakmile přestane vozidlo pohánět síla motoru, bude se na rozdíl od případu jízdy po vodorovné nebo klesající silnici pohybovat zpomaleně, a to se zpomalením

$$a_0 = \frac{F_1}{m} = g \sin \alpha$$

Tento vztah udává zpomalení nebrzděného vozidla.

Začne-li řidič brzdit, přistupuje k síle F_1 další síla F_2 , o níž víme, že může nabýt při dostatečně účinných brzdách hodnoty $F_2 = \mu F_N = \mu m g \cos \alpha$. Při brzdění tedy působí na vozidlo výsledná síla $F = F_1 + F_2 = m g \sin \alpha + \mu m g \cos \alpha$, která udílí vozidlu zpomalení

$$a = \frac{F}{m} = g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$



Je to vztah pro celkové zpomalení brzděného vozidla.

Použijeme-li ještě převodních vztahů mezi goniometrickými funkcemi, máme pro zpomalení nebrzděného vozidla

$$a_0 = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \doteq g \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$

a pro celkové zpomalení brzděného vozidla

$$a = \frac{g (\operatorname{tg} \alpha + \mu)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \doteq g (\operatorname{tg} \alpha + \mu) \quad (2)$$

Příklad 1. Automobil jede po silnici se stoupáním 15 ‰ rychlostí 54 km h⁻¹. Za jak dlouho se zastaví, jestliže řidič a) vyřadí chod motoru, b) začne brzdit s maximálním zpomalením, které mu dovolí součinitel smykového tření $\mu = 0,45$.

Řešení : Automobil, který jede počáteční rychlostí v , zastaví při zpomalení a za dobu $t = \frac{v}{a}$.

a) Zpomalení nebrzděného vozidla při stoupání na vozovce se sklonem $\operatorname{tg} \alpha$ je $a_0 = g \operatorname{tg} \alpha$ a hledaná doba

$$t = \frac{v}{g \operatorname{tg} \alpha}$$

Číselně pro $v = 54 \text{ km h}^{-1} = 15 \text{ m s}^{-1}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ a $\operatorname{tg} \alpha = 0,15$ je doba $t = 10 \text{ s}$.

b) Pohybuje-li se vozidlo při brzdění se zpomalením $a = g (\operatorname{tg} \alpha + \mu)$, zastaví za dobu

$$t = \frac{v}{g (\operatorname{tg} \alpha + \mu)},$$

což dává číselný výsledek $t = 2,5 \text{ s}$.

Známe-li počáteční jízdní rychlost vozidla v a jeho zpomalení a_0 při stoupání, snadno vypočítáme také dráhu s , na které při daném zpomalení vozidlo zastaví. V případě nebrzděného vozidla (jízda s vyřazeným motorem), kdy je zpomalení dáno vztahem (1), je tato dráha

$$s = \frac{v^2}{2 a_0} = \frac{v^2}{2 g \operatorname{tg} \alpha}.$$

Použije-li řidič brzd a dosáhne maximálního zpomalení, které je dáno vztahem (2), ujede vozidlo do okamžiku zastavení dráhu

$$s_b = \frac{v^2}{2 g (\operatorname{tg} \alpha + \mu)}, \quad (3)$$

která vyjadřuje brzdnu dráhu vozidla při jízdě po silnici se stoupáním trasy.

Nyní odvodíme vztah pro celkovou dráhu potřebnou pro zastavení vozidla. V případech jízdy po vodorovné silnici jsme počítali celkovou dráhu (viz RMF, 52, 1973/74, č. 2, s. 72–79) z rovnice

$$s = s_\tau + s_b$$

neboli

$$s = v\tau + \frac{v^2}{2 a},$$

přičemž jsme předpokládali, že po dobu τ jede vozidlo stálou rychlostí v . Proto dráha nebrzděného vozidla byla $s_\tau = v\tau$.

V případě jízdy do kopce však víme, že i nebrzděné vozidlo se pohybuje se zpomalením $a_0 = g \operatorname{tg} \alpha$. Proto dráha nebrzděného vozidla je

$$s_\tau = v\tau - \frac{1}{2} a_0 \tau^2 \quad (4)$$

Na konci této dráhy poklesne rychlost vozidla na hodnotu

$$v' = v - a_0 \tau$$

a teprve při této rychlosti začnou působit brzdy. Pak se vozidlo pohybuje se zpomalením a , přičemž urazí brzdnu dráhu

$$s_b = \frac{v'^2}{2 a}$$

a po dosazení výrazů (2) a (3)

$$s_b = \frac{(v - a_0 \tau)^2}{2g (\mu + \operatorname{tg} \alpha)}. \quad (5)$$

Příklad 2. Stanovte dráhu, na které zastaví automobil, jedoucí po silnici se stoupáním 10 % rychlostí $v = 30 \text{ m s}^{-1}$, je-li doba $\tau = 1 \text{ s}$,

součinitel smykového tření $\mu = 0,4$ a tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Výpočet proveďte a) bez ohledu na pokles rychlosti před začátkem brzdění, b) s ohledem na zpomalení během doby τ .

Řešení: a) Předpokládáme-li, že se automobil pohybuje během doby τ stálou rychlostí v , je dráha nebrzděného vozidla

$$s_\tau = v\tau = 30 \text{ m s}^{-1} \cdot 1 \text{ s} = 30 \text{ m},$$

brzdná dráha podle vztahu (3)

$$s_b = \frac{v^2}{2g(\mu + \operatorname{tg}\alpha)} = \frac{900 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{2 \cdot 10 \text{ m s}^{-2} (0,4 + 0,1)} = 90 \text{ m},$$

a celková dráha $s = 30 \text{ m} + 90 \text{ m} = 120 \text{ m}$

b) Uvažujeme-li během doby τ zpomalení $a_0 = g \operatorname{tg}\alpha = 10 \text{ m s}^{-2} \cdot 0,1 = 1 \text{ m s}^{-2}$, je dráha

$$s_\tau = v\tau - \frac{1}{2} a_0 \tau^2 = 30 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 29,5 \text{ m},$$

brzdná dráha

$$s_b = \frac{(v - a_0 \tau)^2}{2g(\mu + \operatorname{tg}\alpha)} = \frac{(30 - 1)^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{2 \cdot 10 \text{ m s}^{-2} (0,4 + 0,1)} = 84,1 \text{ m}$$

a celková dráha $s = 29,5 \text{ m} + 84,1 \text{ m} = 113,6 \text{ m}$.

Porovnáme-li oba výsledky posledního příkladu, vidíme, že vliv zpomalení a_0 během doby τ je poměrně malý: dráha nebrzděného vozidla se zkrátila pouze o $30 \text{ m} - 29,5 \text{ m} = 0,5 \text{ m}$, brzdná dráha o $90 \text{ m} - 84,1 \text{ m} = 5,9 \text{ m}$ a celková dráha o $120 \text{ m} - 113,6 \text{ m} = 6,4 \text{ m}$. Poněvadž je změna celkové dráhy malá (v našem případě činí asi 5 % z dráhy počítané při zanedbání zpomalení vozidla), je možné pro krátké časové intervaly τ vliv zpomalení zanedbat jako v případě a).

Větší vliv má zpomalení při jízdě na vozovce se stoupáním na vzájemný odstup dvou vozidel. Dosadíme-li do vztahu pro kritickou vzdálenost $a = g(\operatorname{tg}\alpha + \mu)$, dostáváme

$$l = v_2 \tau + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g(\operatorname{tg}\alpha + \mu)}, \quad (6)$$

kde v_1 je rychlost pomalejšího vozidla a v_2 rychlost vozidla rychlejšího. Vzhledem k tomu, že zpomalení nabývá při jízdě do svahu vyšších hodnot než při jízdě na vodorovné silnici, bude kritická vzdálenost v tomto případě menší, tzn. že se můžeme přiblížit k pomalejšímu vozidlu na kratší vzdálenost.

Příklad 3. Osobní vůz Škoda 1000 MB dojíždí rychlostí 108 km h^{-1} nákladní automobil, který se pohybuje rychlostí 72 km h^{-1} . Vypočítejte,

v jakém nejmenším odstupu by měl osobní vůz začít brzdit nebo předjíždět, jedou-li oba vozy po silnici se stoupáním 5 ‰. Počítejte pro dobu $\tau = 1$ s a součinitel tření $\mu = 0,5$.

Řešení: Jde o výpočet kritické vzdálenosti l podle vztahu (6). Po dosazení $v_1 = 72 \text{ km h}^{-1} = 20 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 108 \text{ km h}^{-1} = 30 \text{ m s}^{-1}$, $\tau = 1$ s, $\mu = 0,5$, $\text{tg}\alpha = 0,05$ dostáváme

$$l = 30 \text{ m s}^{-1} \cdot 1 \text{ s} + \frac{[900 \text{ m}^2\text{s}^{-2} - 400 \text{ m}^2\text{s}^{-2}]}{2 \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} (0,5 + 0,05)} = 30 \text{ m} + 45 \text{ m} = 75 \text{ m}.$$

Závěrem ještě ukážeme, jak se mění při jízdě po silnici se stoupáním trasy *dráha potřebná k předjetí vozidla*. V následujícím příkladu uvidíme, že při předjíždění stálou rychlostí se dráha vzhledem k vodorovné silnici poněkud zkracuje, kdežto při předjíždění se zrychlením se tato dráha prodlužuje, protože vozidlo dosáhne menšího zrychlení.

Příklad 4. Vypočítejte dráhy potřebné k předjetí vozidla jedoucího rychlostí 54 km h^{-1} na silnici se stoupáním 5 ‰, jestliže rychlejší vůz jede: a) po celou dobu předjíždění rychlostí 72 km h^{-1} , b) zpočátku rychlostí 54 km h^{-1} , pak začne předjíždět rovnoměrně zrychleně, přičemž hnací síla motoru dovoluje zrychlení 1 m s^{-2} . Počítejte pro dobu $\tau = 1$ s, součinitel $\mu = 0,5$, tíhové zrychlení 10 m s^{-2} , délky obou vozidel 5 m.

Řešení: a) Dráhu potřebnou k předjetí při stálé rychlosti předjíždějícího vozidla určíme ze vztahu (viz RMF, 52, 1973/74, č. 4, s. 166–172)

$$s = \frac{v_2}{v_2 - v_1} \left(v_1 \tau + v_2 \tau + d_1 + d_2 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} \right),$$

do něhož dosadíme $v_1 = 54 \text{ km h}^{-1} = 15 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 72 \text{ km h}^{-1} = 20 \text{ m s}^{-1}$, $\tau = 1$ s, $d_1 = d_2 = 5$ m a dosažitelné zpomalení

$$a = g (\mu + \text{tg}\alpha),$$

kde $\mu = 0,5$, $\text{tg}\alpha = 0,05$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$, a vypočítáme $s = 244 \text{ m}$.

V případě vodorovné silnice, na níž $\text{tg}\alpha = 0$, bychom dostali $s = 250 \text{ m}$.

b) Předjíždíme-li jiné vozidlo po celou dobu předjíždění rovnoměrně zrychleně a dosáhne-li tažná síla motoru na vodorovné rovině zrychlení $a = 1 \text{ m s}^{-2}$, má toto vozidlo při jízdě do svahu zrychlení

$$a' = a - g \sin\alpha = a - g \text{tg}\alpha,$$

neboť proti tažné síle motoru působí složka tíhy vozidla $F_1 = mg \sin\alpha$. Dráhu potřebnou k předjetí vypočteme (viz RMF, 52, 1973/74, č. 5, s. 210–217) ze vztahu

$$s = 2 v_1 \tau + d_1 + d_2 + v_1 \sqrt{\frac{2}{a'} (2 v_1 \tau + d_1 + d_2)}$$

Po dosazení $v_1 = 15 \text{ m s}^{-1}$, $d_1 = d_2 = 5 \text{ m}$, $\tau = 1 \text{ s}$, $a' = 1 \text{ m s}^{-2} - 10 \text{ m s}^{-2} \cdot 0,05 = 0,5 \text{ m s}^{-2}$ je dráha $s \doteq 230 \text{ m}$.

Kdybychom uskutečnili totéž předjetí na vodorovné silnici ($\text{tg} \alpha = 0$), dostali bychom $s = 175 \text{ m}$. Vidíme tedy, že při jízdě po silnici se stoupáním trasy je výhodnější předjíždět stálou rychlostí, zatímco při jízdě po silnici s klesáním trasy bylo výhodnější předjíždět se zrychlením (viz předcházející část tohoto seriálu).

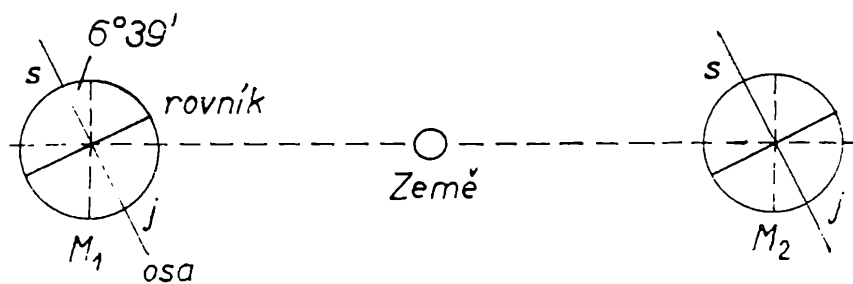
astronomie

Librace Měsíce

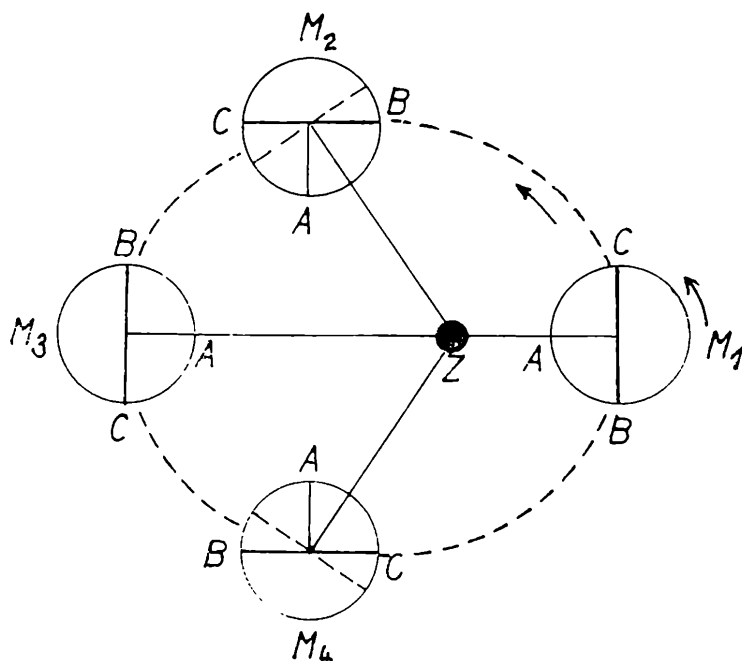
RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Měsíc má tzv. vázanou rotaci, což znamená, že doba jedné otočky Měsíce kolem osy je právě rovna jeho siderické oběžné době kolem Země. Důsledkem vázané rotace je skutečnost, že je k nám Měsíc obrácen stále stejnou polokoulí. Pozorujeme-li Měsíc v úplňku, vidíme právě polovinu jeho povrchu a na první pohled by se zdálo, že více než těchto 50 % povrchu není možné ze Země pozorovat. Při dlouholetých pozorováních však bylo zjištěno, že se Měsíc zdánlivě poněkud pootáčí, jako by pomalu kmital kolem základní polohy, takže v určitých obdobích můžeme vidět poněkud „za okraj“ přivrácené polokoule. Tento úkaz se nazývá *librace Měsíce* a umožňuje pozorovat ze Země téměř 60 % měsíčního povrchu. Podle toho, jak librace vzniká, rozlišujeme tři typy librace: libraci v délce, libraci v šířce a paralaktickou libraci. Protože „pootáčení“ Měsíce je nepatrné, bylo objeveno až při pozorování Měsíce dalekohledem. Libraci v šířce a paralaktickou libraci objevil v roce 1610 Galileo Galilei, v polovině 17. století pak Riccioli a Heweliusz objevili libraci v délce.

Příčinou *librace v šířce* je skutečnost, že rotační osa Měsíce není kolmá k rovině jeho dráhy. V článku „Pohyby Měsíce“ jsme uvedli, že osa Měsíce svírá s rovinou jeho dráhy průměrně úhel $83^{\circ}21'$, rovina měsíčního rovníku svírá tedy s rovinou jeho dráhy úhel $6^{\circ}39'$. Situace, která vzniká při oběhu Měsíce kolem Země, je znázorněna na obr. 1. Je-li Měsíc v poloze M_1 , je k nám o $6^{\circ}39'$ přivrácen jižní pól Měsíce; vykoná-li Měsíc



Obr. 1. Librace Měsíce v šířce

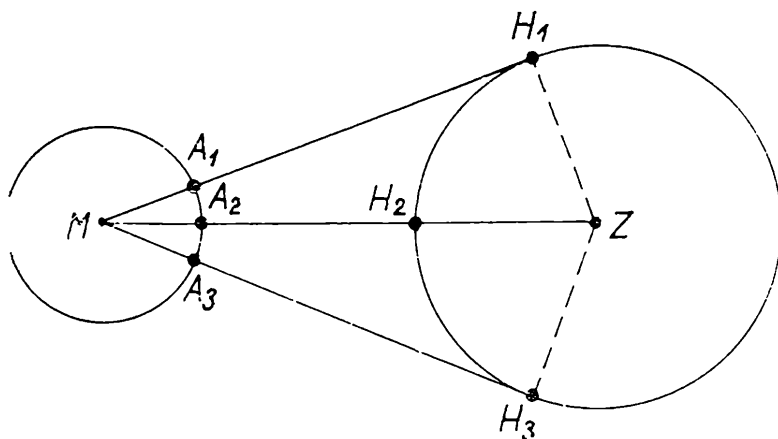


Obr. 2. Librace Měsíce v délce

polovinu oběhu, je v poloze M_2 a k Zemi je přivrácen severní pól Měsíce. Perioda librace v šířce je rovna drakonickému měsíci, tj. době mezi dvěma průchody Měsíce týmž uzlem dráhy. Připomeňme, že uzly měsíční dráhy se pohybují zpětným směrem s periodou 18,6 roku; ve stejné periodě se mění také sklon měsíčního rovníku — můžeme říci, že Měsíc koná precesní pohyb podobně jako Země, jenže mnohem rychleji. Vzhledem ke změnám sklonu měsíčního rovníku může librace v šířce nabýt hodnoty až $\pm 6^\circ 51'$

Librace v délce vzniká v důsledku excentricity dráhy Měsíce. Rotaci Měsíce kolem jeho osy můžeme pokládat za rovnoměrnou, avšak rychlost Měsíce na eliptické dráze se mění: v perigeu se Měsíc pohybuje rychleji než v apogeu. K tomu přistupuje ještě skutečnost, že Země není ve středu eliptické dráhy, ale v jejím ohnisku. Na obr. 2 jsou znázorněny čtyři polohy Měsíce vždy po uplynutí čtvrtiny oběžné doby. V poloze M_1 je Měsíc v perigeu a pozorovatel na Zemi vidí ve středu měsíčního disku bod A, na západním okraji bod B a na východním bod C. Za čtvrtinu

Obr. 3. Paralaktická librace Měsíce



měsíce se posune Měsíc do polohy M_2 . Kolem osy se otočí právě o 90° , avšak urazí více než čtvrtinu své dráhy. Bod A , který byl původně ve středu disku, se posune poněkud doleva (směrem k východu), ve stejném směru se posune i bod B , takže vidíme poněkud za západní okraj, zatímco bod C v této poloze Měsíce je již na jeho odvrácené straně. V poloze M_3 je Měsíc v apogeum — vzhledem k poloze M_1 vykonal polovinu dráhy a otočil se o 180° , je tedy ve středu kotouče opět bod A a pozorujeme tutéž polovinu povrchu jako v perigeu. Za další čtvrtinu měsíce se však Měsíc pootočí opět o 90° , avšak urazí méně než čtvrtinu dráhy. V poloze M_4 je bod A posunut směrem k západu, bod B je na odvrácené části Měsíce a můžeme pozorovat část povrchu Měsíce za jeho východním okrajem. Librace Měsíce v délce dosahuje hodnoty až $\pm 7^\circ 54'$ a její perioda je rovna anomalistickému měsíci (anomalistický měsíc je doba mezi dvěma po sobě následujícími průchody Měsíce perigeem). Libraci Měsíce v šířce tedy můžeme definovat jako zdánlivé naklánění Měsíce k severu nebo k jihu, libraci v délce jako zdánlivé natáčení k východu nebo k západu.

Obě popsané librace Měsíce jsme vztahovali ke středu Země, tj. považovali jsme Zemi za bod a neuvažovali jsme polohu pozorovatele na povrchu Země.

Vzdálenost Měsíce od Země je poměrně malá vzhledem k rozměrům Země (střední vzdálenost je rovna 60,3 poloměru Země), proto můžeme pozorovat ještě třetí typ librace — *libraci denní* neboli *paralaktickou*. Paralaktická librace spočívá v tom, že pozorovatelé na různých místech Země vidí ve středu měsíčního kotouče různé body. Protože se Země otáčí kolem své osy, mění se i poloha téhož pozorovatele vzhledem k Měsíci. Vznik paralaktické librace je znázorněn na obr. 3. Je-li pozorovatel v poloze H_1 , pak pro něj Měsíc právě vychází nad obzor a ve středu měsíčního kotouče je bod A_1 . Protože se Země otáčí, ocitne se přibližně po 6 hodinách pozorovatel v bodě H_2 . Měsíc nyní kulminuje a ve středu kotouče je bod A_2 . Po dalších šesti hodinách je pozorovatel v bodě H_3 , Měsíc právě zapadá a ve středu kotouče je bod A_3 . Pozorovatel tedy při východu Měsíce vidí poněkud za jeho západní okraj, při západu Měsíce

pak může pozorovat část povrchu za východním okrajem. Je zřejmé, že velikost paralaktické librace závisí na zeměpisné šířce pozorovacího místa. Pro pozorovatele na pólu by byla rovna nule, největší je pro pozorovatele na zemském rovníku, pro nějž může nabýt maximální hodnoty $1,03^\circ$; je tedy podstatně menší než librace v šířce nebo v délce. Libraci v délce a v šířce se říká také optická librace, všechny tři popsané typy librace se pak souhrnně nazývají zdánlivá librace.

Kromě zdánlivé librace existuje ještě skutečná neboli fyzická librace, způsobená skutečným periodickým natáčením Měsíce. Měsíc totiž není dokonalá koule, ale má tvar elipsoidu, jehož velká osa směřuje k Zemi. Při oběhu Měsíce kolem Země se v důsledku excentricity měsíční dráhy tato velká osa odchyluje od spojnice Země—Měsíc a zemskou přitažlivostí je vrácena do původní polohy. Měsíc tedy tvoří jakési kyvadlo, kývající v gravitačním poli Země. Amplituda těchto kmitů je však velmi malá, takže fyzickou libraci, která dosahuje jen několika úhlových vteřin, lze zjistit jen při velmi přesných měřeních.

NAŠE SOUTĚŽ

Také letos vypisuje naše redakce spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím soutěž o ceny v řešení příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie - nezávisle na Matematické a fyzikální olympiádě.

Pokyny řešitelům

Řešení každého příkladu pište čitelně (nejlépe strojem), vždy na zvláštní list formátu A4 po jedné straně, dole vpravo uveďte své celé jméno, třídu, školu a své bydliště. Nečitelná řešení vyřazujeme.

Příklady řešte samostatně, úsporně věcně, přitom odborně správně s užitím platné symboliky. Nejdelší řešení nebývá vždy nejlepší.

Soutěže se mohou zúčastnit i kolektivy z téže třídy, maximálně trojčlenné. Jména členů kolektivů a jejich adresy napište na nepopsanou druhou stránku papíru. Při případném umístění má kolektiv ovšem nárok na jedinou cenu.

Řešení první části soutěžních příkladů otištěných v tomto čísle zašlete nejpozději do 15. ledna 1975 na adresu redakce: Praha 2, Trojanova 13, PSČ 12134 s označením: *Naše soutěž*.

Úlohy k řešení

Matematika

1. Daná je úsečka CP a na nej (eventuálně na jej předlžení) bod V . Zostrojte rovnoramenný trojúhelník ABC , keď CP je jeho výška na základňu AB a bod V ortocentrum (priesečník výšok).

Josef Filip

2. V trojúhelníku ABC jsou B' , C' po řadě středy stran AC , AB . Na polopřímce opačné k polopřímce $B'B$, $(C'C)$ sestrojme bod K (L) tak, aby $B'K = \frac{2}{3} B'B$ ($C'L = \frac{1}{3} C'C$). Vypočtete úhly trojúhelníka ABC , jestliže trojúhelníky ACK , ABL jsou pravoúhlé s pravými úhly při vrcholech K , L .

Stanislav Horák

3. Vyjádřete logaritmus výrazu $X = \frac{x+1}{x-1}$, v němž

$$x = \frac{a^5 - 125a^3 + 3004a}{5040}$$

Josef Kotyk

4. Budiž α odchylka tečny hyperboly od její hlavní osy. Vyjádřete vzdálenost středu hyperboly od její tečny jako funkci proměnné α .

Emil Kraemer

5. Nechť n je dané přirozené číslo a φ dané reálné číslo, přičemž $\varphi \neq 2k\pi$ ($k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$). Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$, pro která $1 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, platí

$$|1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n - z_0| \leq \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|}$$

kde $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ a $z_0 = \frac{1}{2} \left(1 + i \cotg \frac{\varphi}{2} \right)$

Jaroslav Morávek

6. Nechť je každému reálnému číslu x ($x \in \mathbb{R}$) přiřazeno nezáporné číslo $f(x)$ (tj. f je nezáporná funkce definovaná na množině všech reálných čísel) a nechť je splněna tato podmínka: Existuje kladné číslo C tak, že pro každou konečnou množinu

reálných čísel platí

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) = C.$$

Dokažte, že existuje reálné číslo α , pro které $f(\alpha) = 0$.

Jaroslav Morávek

7. Buď n přirozené číslo. Určete všechny n -tice celých čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ takové, že platí identicky

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n =$$

$$= (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

tj. všechny kořeny polynomu P se shodují s jeho koeficienty.

Břetislav Novák

8. V množině komplexních čísel řešte systémy lineárních rovnic s komplexními koeficienty:

$$\begin{aligned} \text{a) } 3x + (i - 1)y - 3z &= 5 - 7i \\ ix - y + 3iz &= 1 \\ (2 + i)x - iy + (3 + 6i)z &= 5 + 2i \\ \text{b) } 4x + iy + (1 - i)z &= 4 + 3i \\ -ix + (i - 1)y + 2z &= 7 - 6i \\ (3 + i)x - 5y + (2 + i)z &= 1 + 7i \end{aligned}$$

Evžen Říman

9. Řešte rovnici

$$\sqrt{3 - x} - \sqrt{\frac{1 - x}{2 - x}} = 1$$

Sov. čas. Kvant

10. Upravte výraz

$$5^{\log_{1/5}(1/2)} + \log_{1/2} \frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \log_{1/2} \frac{1}{10 + 2\sqrt{21}}.$$

Sov. čas. Kvant

11. Narýsujte přesně kružnice k_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) těchto vlastností:

- a) kružnice k_i má poloměr $r_i = i$;
 - b) každá kružnice k_{i+1} se vně dotýká kružnic k_i a k_{i+2} .
- Dotykový bod kružnic k_i, k_{i+1} označme znakem $T_{i, i+1}$.

Co lze říci o úsečkách $T_{1,2}$ $T_{2,3}$ $T_{2,3}$ $T_{3,4}$, $T_{n-2,n-1}$ $T_{n-1,n}$? Své tvrzení (i negativní) dokažte analyticky!

Ota Setzer

12. V rovině je dán konvexní devítiúhelník. Rozhodněte, zdali každá jeho úhlopříčka může být obarvena jednou z devíti daných barev tak, že každou barvou jsou vždy obarveny tři úhlopříčky tvořící strany trojúhelníka.

Jiří Sedláček

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Loňské soutěže Rozhledů se zúčastnilo 24 soutěžících a jeden kolektiv. Překvapuje opět malý počet řešených příkladů z konstruktivní geometrie, i když pro budoucí posluchače technik je tento předmět důležitý.

Výsledky nejúspěšnějších řešitelů jednotlivých disciplín:

Matematika

1. Pavel Kindlmann, G České Budějovice	54 bodů
2. Alena Vencovská, ak. G Praha 2	52
3.—4. Josef Jettmar, G Praha 2	51
3.—4. Václav Salač, G Praha 4	51
5. Vlastimil Klíma, G Benešov	50
6. Václav Kohout, G Blovice	49
7. Jiří Pavel, G Jihlava	42
8. Pavel Tvrdík, G Kolín	41
9. Ivo Semrád, G Opava	39
10. Josef Voldřich, G Vimperk	38

Fyzika

1. Jiří Pavel, G Jihlava	30 bodů
2. Václav Salač, G Praha 4.	26
3. Pavel Kindlmann, G České Budějovice	25
4. Tomáš Frajer, SPŠS Čáslav	24
5. Marie Veselá, G Blovice	21
6. Pavel Tvrdík, G Kolín	20

Konstruktivní geometrie

1. Jan Teska, G Milevsko	17 bodů
--------------------------	---------

2. Václav Salač, G Praha 4.	16
3. Josef Voldřich, G Vimperk.	15
4. Pavel Kindlmann, G České Budějovice	14

ABSOLUTNÍ VÍTĚZOVÉ

V celkové soutěži je toto pořadí na prvních 6 místech:

1.—2. Pavel Kindlmann, G České Budějovice	93 bodů
1.—2. Václav Salač, G Praha 4	93
3. Jiří Pavel, G Jihlava	84
4. Josef Jettmar, G Praha 2	78
5. Václav Kohout, G Blovice	77
6. Josef Voldřich, G Vimperk.	72

Nakonec připojujeme abecední seznam všech úspěšných řešitelů. Za jménem řešitele je uveden ústav, na němž řešitel studuje, pak čísla správně řešených příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie. Čísla uvedená v závorce jsou čísla příkladů rozřešených s menšími nedostatky. Příklady nesprávně řešené neuvádíme.

Vojtěch Bardiovský, SPŠ Košice, F 1, 2, 4, 5; *Tomáš Frajer*, SPŠS Čáslav; M 2, 4 (1, 3), F 1—4, (6); *Jiří Hůlka*, G Hradec Králové, M 3, 4, 5 (1, 7); *Josef Jettmar*, G Praha 2, M 2—7, 10—12 (1, 9), F 2, 4—6, G (1, 2), *Pavel Kindlmann*, G Č. Budějovice, M 2—10, 12 (11), F 1, 2, 4, 5 (3, 6), G 3 (1, 2, 4); *Vlastimil Klíma*, G Benešov, M 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12 (3, 11); *Menhard Kocsis*, maď. G Galanta, M 6 (7); *Václav Kohout*, G Blovice, M 1—7, 10, 12 (11), F 1, 2, 4 (3), G (1—3); *Hana Kovářiková*, G Jihlava, M 2, 10 (6, 9), F 2, G (1—3); *Josef Kuba*, G Kostelec n. Orli., M 2, 3, 4 (6, 7). G (2—4); *Rupert Leitner*, G Semily, F 1, 2, 5 (6); *Antonín Otáhal*, G Ostrava-Zábřeh, G 3 (2); *Jiří Pavel*, G Jihlava, M 3—7, 9, 10, 12, F 1—6, G 3 (2, 4); *Václav Salač*, G Praha 4, M 2—7, 9—12, F 2—6, G 3, 4 (1, 2); *Ivo Semrád*, G Opava, M 3—6, 9, 10, 12 (11), G (1, 3); *Miroslav Šedivý*, G Přerov, M 1, 3, 6, 7 (4); *Josef Širáň*, G Bratislava, M 2—7 (1); *Jan Teska*, G Milevsko, M 1, 3, G 1, 3, 4 (2); *Pavel Tvrdík*, G Kolín, M 2—4, 6, 9—11 (1, 7), F 1, 2, 5, 6; *Stanislav Vanečík*, G Michalovce, F 2, 5 (3); *Alena Vencovská*, ak. G Praha 2, M 3—7, 9—12 (1, 2); *Marie Veselá*, G Blovice, F 1, 4 (2, 3, 5, 6); *Josef Voldřich*, G Vimperk, M 3—6, 9, 10 (11, 12), F 2, 5 (1, 3, 6), G 3, 4 (1, 2); *kolektiv maď. G Galanta*, M (1, 2, 3)

Redakce Rozhledů děkuje všem řešitelům za projevený zájem a vítězům blahopřeje.

Řešení úloh z minulého ročníku

Matematika

4. Dokažte, že pro každé přirozené n a pro libovolná komplexní čísla $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ platí

$$\frac{|a_1 + a_2 + \dots + a_n|}{1 + |a_1 + a_2 + \dots + a_n|} \leq \frac{|a_1|}{1 + |a_1|} + \frac{|a_2|}{1 + |a_2|} + \dots + \frac{|a_n|}{1 + |a_n|}$$

(Došlo 16 řešení.)

F. K.

Řešení podle Aleny Vencovské, AG Praha 2:

Nejprve dokážeme, že pro libovolná dvě komplexní čísla a, b platí

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|} \quad (1)$$

Užijeme přitom trojúhelníkové nerovnosti $|a + b| \leq |a| + |b|$

$$\begin{aligned} \frac{|a + b|}{1 + |a + b|} &= 1 - \frac{1}{1 + |a + b|} \leq 1 - \frac{1}{1 + |a| + |b|} \leq 1 - \\ &- \frac{1}{1 + |a| + |b| + |a| + |b|} = \frac{|a| + |b| + |a| + |b|}{(1 + |a|)(1 + |b|)} \leq \\ &\leq \frac{|a| + |b| + 2|a| + 2|b|}{(1 + |a|)(1 + |b|)} = \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|} \end{aligned}$$

Daný vztah dokážeme nyní matematickou indukcí.

1. Pro $n = 1$ daný vztah platí:

$$\frac{|a_1|}{1 + |a_1|} \leq \frac{|a_1|}{1 + |a_1|}$$

2. Předpokládejme, že pro určité n platí

$$\begin{aligned} \frac{|a_1 + a_2 + \dots + a_n|}{1 + |a_1 + a_2 + \dots + a_n|} &\leq \frac{|a_1|}{1 + |a_1|} + \\ &+ \frac{|a_2|}{1 + |a_2|} + \dots + \frac{|a_n|}{1 + |a_n|}. \end{aligned} \quad (2)$$

Dokážeme, že pak takový vztah platí i pro $n + 1$, tj.

$$\frac{|a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}|}{1 + |a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}|} \leq \frac{|a_1|}{1 + |a_1|} +$$

$$+ \frac{|a_2|}{1 + |a_2|} + \dots + \frac{|a_n|}{1 + |a_n|} + \frac{|a_{n+1}|}{1 + |a_{n+1}|}$$

Důkaz: Označme $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b$

Pak podle (1) a (2) platí:

$$\frac{|a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}|}{1 + |a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}|} = \frac{|b + a_{n+1}|}{1 + |b + a_{n+1}|} \leq \frac{|b|}{1 + |b|} +$$

$$+ \frac{|a_{n+1}|}{1 + |a_{n+1}|} \leq \frac{|a_1|}{1 + |a_1|} + \frac{|a_2|}{1 + |a_2|} + \dots + \frac{|a_n|}{1 + |a_n|} +$$

$$+ \frac{|a_{n+1}|}{1 + |a_{n+1}|}, \text{ c b d.}$$

5. V rovině je dán konvexní n -úhelník $A_1 A_2 \dots A_n$. Určete počet konvexních čtyřúhelníků $A_i A_j A_k A_l$, jejichž všechny strany jsou úhlopříčky daného n -úhelníka.

(Došlo 11 řešení.)

Jiří Sedláček

Řešil Josef Voldřich, 3. tř. G Vimperk:

Uvažujme nejprve takové čtyřúhelníky, jejichž jeden vrchol je A_1 . Nechť jedna strana tohoto čtyřúhelníka je $A_1 A_3$ a druhá $A_1 A_{n-1}$. Takovýchto čtyřúhelníků je pak $n - 7$, neboť tři vrcholy A_{n-1}, A_1, A_3 jsou již známy a čtvrtý vrchol může být $A_{n-3}, A_{n-4}, \dots, A_5$.

Nechť jsou nyní dány strany $A_1 A_3, A_1 A_{n-2}$. Pak všech možných čtyřúhelníků je $n - 8$. Takto můžeme stále pokračovat, až dostaneme počet všech čtyřúhelníků nad stranou $A_1 A_3$

$$s(A_1 A_3) = (n - 7) + (n - 8) + \dots + 1 =$$

$$= \frac{(n - 7)(n - 6)}{2} = \binom{n - 6}{2}.$$

Podobně nad stranou $A_1 A_4$ lze sestavit

$$s(A_1 A_4) = (n - 8) + (n - 9) + \dots + 1 =$$

$$= \frac{(n - 8)(n - 7)}{2} = \binom{n - 7}{2}$$

a obecně nad $A_1 A_i$ je počet čtyřúhelníků:

$$s(A_1 A_i) = (n - 4 - i) + (n - 5 - i) + \dots + 1$$

Přitom uvažujeme pouze čtyřúhelníky v polorovině $A_1 A_i A^u$ neboť v polorovině k ní opačné již byly všechny počítány.

Počet všech daných čtyřúhelníků s vrcholem v A_1 je pak

$$s(A_1) = \binom{n-6}{2} + \binom{n-7}{2} + \dots + 1 = \binom{n-5}{3}$$

Sečteme-li $s(A_1) + s(A_2) + \dots + s(A_n)$, je každý čtyřúhelník započítán čtyřikrát. Proto hledaný počet čtyřúhelníků je

$$s = \frac{1}{4} n \cdot s(A_1) = \frac{n}{4} \binom{n-5}{3} = \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{24}.$$

Poznámka. V řešení se mlčky předpokládalo, že $n \geq 8$, ale získaný vzorec platí zřejmě též pro $n = 7, 6, 5$.

6. Najděte všechna trojčíselná čísla v soustavě o základu s tak, aby platilo $(xyz)_s = (zyx)_{s+1}$

(Došlo 15 řešení).

Ota Setzer

Autorské řešení:

Danou rovnici lze psát ve tvaru

$$xs^2 + ys + z = z(s+1)^2 + y(s+1) + x,$$

$$x(s^2 - 1) = z(s+1)^2 + y - z \quad | \quad (s+1) > 0$$

$$x(s-1) = z(s+1) + \frac{y-z}{s+1} \Rightarrow y-z=0, y=z$$

pak

$$x(s-1) = z(s+1), \quad \text{neboli}$$

$$(x-z)s = x+z \Rightarrow x+z=s$$

$$x-z=1$$

Řešením dostáváme:

$$x = \frac{s+1}{2} \quad z = \frac{s-1}{2};$$

protože x, y, z jsou celá čísla, musí být s liché: $s = 2k+1$,
pak $x = k+1, y = z = k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

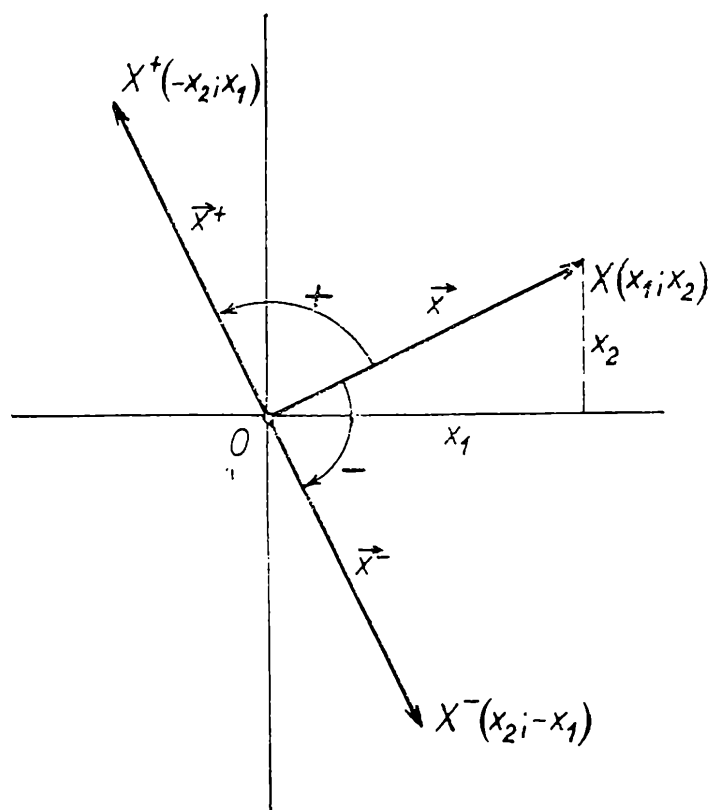
10. Dokažte, že existuje n -ciferné číslo napsané jen jednotkami a dvojkami, které je dělitelné mocninou 2^n .

(Došlo 11 řešení.)

Z hol. čas. „Pythagoras“

Řešil Ivo Semrád, IV.b, G v Opavě:

1. Pro $n = 1$ je hledané číslo $A_1 = 2$.



2. Předpokládejme, že věta platí pro n -ciferné číslo

$$A_n = a_n a_{n-1} \quad a_2 a_1 \quad (a_i = 1 \text{ nebo } a_i = 2),$$

$$A_n = k \cdot 2^n$$

Pak lze psát buď $A_{n+1} = 10^n + k \cdot 2^n = 2^n (5^n + k)$
 anebo $A_{n+1} = 2 \cdot 10^n + k \cdot 2^n = 2^n (2 \cdot 5^n + k)$

Jedno z čísel $(5^n + k)$, $(2 \cdot 5^n + k)$ je vždy sudé ($= 2 \cdot m$),
 neboli $A_{n+1} = 2^n \cdot 2m = m \cdot 2^{n+1}$

Touto matematickou indukcí jsme uvedenou větu dokázali.

11. Nad stranami $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ obecného trojúhelníka ABC jsou sestrojeny čtverce $ABDE$, $BCFG$, $CAHK$, dále čtverce $DGLM$, $FKNP$ a $EHQR$. Jaké jsou vztahy mezi úsečkami $a'' = LP$, $b'' = NQ$, $c'' = RM$ a stranami a , b , c daného trojúhelníka?

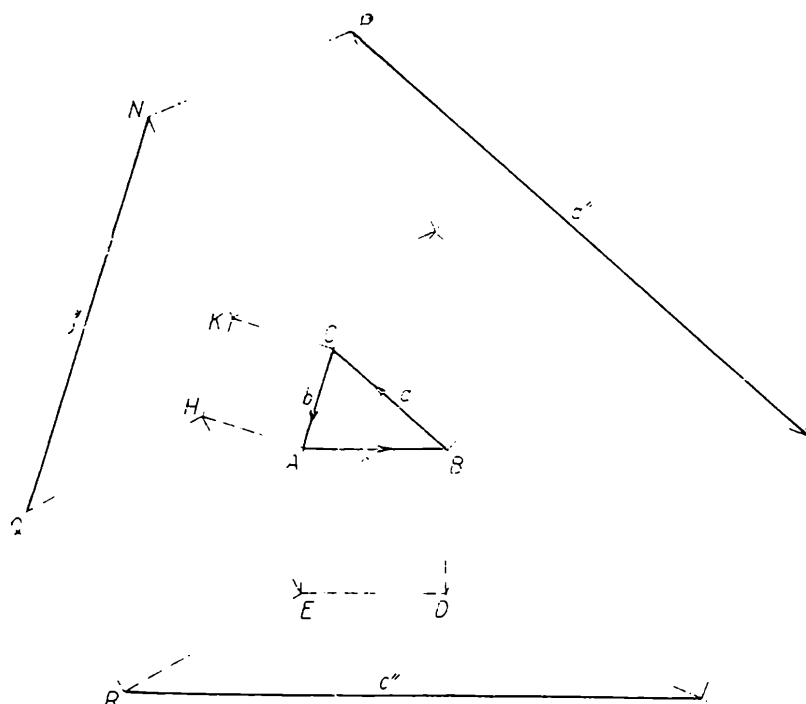
(Došlo 9 řešení.)

Ota Setzer

Upravené řešení Aleny Vencovské, IV b AG v Praze 2:

Úlohu řešme pomocí vektorů. Označme $\mathbf{AB} = \mathbf{c} (c_1; c_2)$, $\mathbf{BC} = \mathbf{a} (a_1; a_2)$, $\mathbf{CA} = \mathbf{b} (b_1; b_2)$; pak: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, $a_1 + b_1 + c_1 = 0$, $a_2 + b_2 + c_2 = 0$. Podle obr. 1 platí pro vektor $\mathbf{x}^+$ vzniklý z vektoru $\mathbf{x} (x_1; x_2)$ otočením v kladném smyslu o úhel 90° : $\mathbf{x}^+ (-x_2; x_1)$ a pro opačný vektor $\mathbf{x}^- (x_2; -x_1)$.

Obr. 2



Podle obr 2: $\mathbf{BD} = \mathbf{AE} = \mathbf{AB}^- = (c_2; -c_1)$

$$\mathbf{BG} = \mathbf{CF} = \mathbf{BC}^- = (a_2; -a_1)$$

$$\mathbf{BD} + \mathbf{DG} - \mathbf{BG} = 0, \mathbf{DG} = \mathbf{BG} - \mathbf{BD} = (a_2; -a_1) - (c_2; -c_1) = (a_2 - c_2; -a_1 + c_1),$$

$$\mathbf{CK} = \mathbf{AH} = \mathbf{CA}^- = (b_2; -b_1),$$

$$\mathbf{FK} = \mathbf{CK} - \mathbf{CF} = (b_2; -b_1) - (a_2; -a_1) = (b_2 - a_2; a_1 - b_1),$$

$$\mathbf{GL} = \mathbf{DG}^- = (-a_1 + c_1; -a_2 + c_2), \mathbf{FP} = \mathbf{FK}^- = (a_1 - b_1; a_2 - b_2),$$

$$\mathbf{FG} + \mathbf{GL} + \mathbf{LP} + \mathbf{PF} = 0, \mathbf{LP} = -\mathbf{FG} - \mathbf{GL} + \mathbf{FP},$$

$$\mathbf{LP} = \mathbf{BC} (a_1; a_2) - (-a_1 + c_1; -a_2 + c_2) + (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$$

$$\mathbf{LP} = (3a_1 - b_1 - c_1; 3a_2 - b_2 - c_2) = (4a_1; 4a_2) = 4 \cdot \mathbf{a}$$

Obdobně vypočteme $\mathbf{NQ} = 4 \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{RM} = 4 \cdot \mathbf{c}$

Úsečky $a'' = LP$, $b'' = NQ$, $c'' = RM$ jsou se stranami a , b , c původního trojúhelníka rovnoběžné a jsou jejich čtyřnásobky.

Poznámka autora: Někteří řešitelé sice vypočtli správně délky úseček a'' , b'' , c'' , nedokázali však rovnoběžnost $a'' \parallel a$, $b'' \parallel b$, $c'' \parallel c$.

Řešitel Josef Jettmar z G W. Piecka v Praze 2 dokázal nejprve větu: Úsečka DG je kolmá k těžnici t_b , přičemž $DG = 2 \cdot t_b$, potom dokázal naše vztahy.

Konstruktivní geometrie

1. Daná je rovina ρ , mimo nej bod T a přímka m . Zostrojte pravidelný štvorsten $ABCD$, který má ťažisko T , stenu ABC v rovine ρ a stenu ABD rovnoběžnú s priamkou m .

(Došlo 11 řešení.)

Josef Filip

Řešil Jan Teska, IV.b G, Milevsko:

1. Z vlastností pravidelného čtyřstěnu vyplývá:

a) Těžiště pravidelného čtyřstěnu je v průsečíku jeho výšek a dělí je v poměru 3 : 1, přičemž delší část má krajní bod ve vrcholu čtyřstěnu. Pata každé výšky je těžištěm příslušné stěny.

b) Když označíme T_1 těžiště stěny $\triangle ABC$, t_1 jeho vzdálenost od strany trojúhelníka ABC a t vzdálenost TT_1 , je $DT_1 = 4t$, dále $4t = \sqrt{(3t_1)^2 - (t_1)^2}$ a z toho $t_1 = t\sqrt{2}$.

c) Množina všech rovin rovnoběžných s přímkou m a jdoucích bodem D je svazek rovin s osou p , pro kterou platí: $p \parallel m$ a $D \in p$.

2. Konstrukce pak probíhá takto:

a) Bodem T vedeme přímkou d a na ní sestrojíme bod $T_1 \equiv d \cdot \varrho$ a bod D tak, že $DT = 3t$ (1a).

b) Bodem D vedeme přímkou $p \parallel m$ a na ní sestrojíme bod $P \equiv p \cdot \varrho$ (1c).

c) V rovině ϱ sestrojíme kružnici $k_1 \equiv (T_1; t\sqrt{2})$ a k ní vedeme tečnu a z bodu P (1b). Poloměr $r = t\sqrt{2}$ kružnice k_1 je shodný s úhlopříčkou čtverce o straně t . Na tečně a leží hrana AB , neboť přímka a leží v rovině náležející svazku o ose p a je vzdálená od bodu T_1 právě tak jako strany $\triangle ABC$.

d) Pak sestrojíme bodem T_1 přímkou $o \perp a$, dále kružnici $k_2 \equiv (T_1; 2t\sqrt{2})$ a na ní body: $A \equiv a \cdot k_2$, $B \equiv a \cdot k_2 \neq A$ a $C \equiv o \cdot k_2$ (v polorovině aT_1).

Čtyřstěn $ABCD$, jehož vrcholy jsme právě sestrojili, je řešením úlohy.

3. Důkaz plyne z rozboru a konstrukce.

4. Úloha má 0, 1, 2 řešení podle toho, jak velká je vzdálenost bodu P od středu T_1 v porovnání s poloměrem $r = t\sqrt{2}$ kružnice k_1 .

Je-li $PT_1 < r$, neexistuje tečna z bodu P ke kružnici k_1 . 0 řešení.

Je-li $PT_1 = r$ ($P \in k_1$), existuje jediná tečna a z P ke k_1 . 1 řešení.

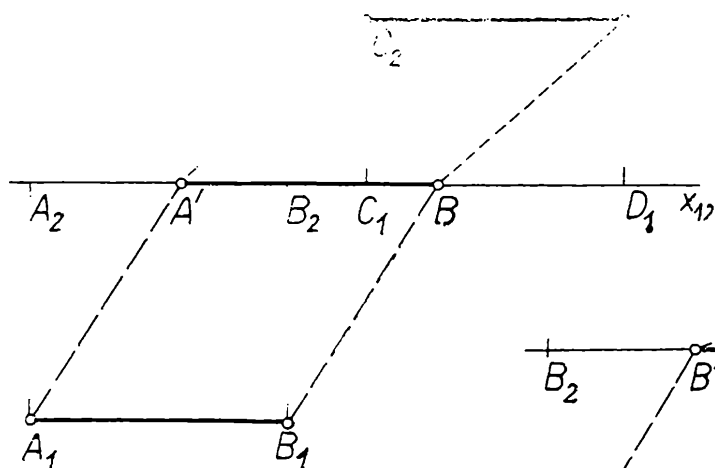
Je-li $PT_1 = 2r$ ($P \in k_2$), existují sice dvě tečny a, b z P ke k_1 , ale $\angle ab = 60^\circ$ a proto obě řešení splynou do jednoho 1 řešení.

Je-li $PT_1 > r$, ale $PT_1 \neq 2r$, existují dvě tečny a, b z P ke k_1 takové, že $\angle ab \neq 60^\circ$ 2 řešení.

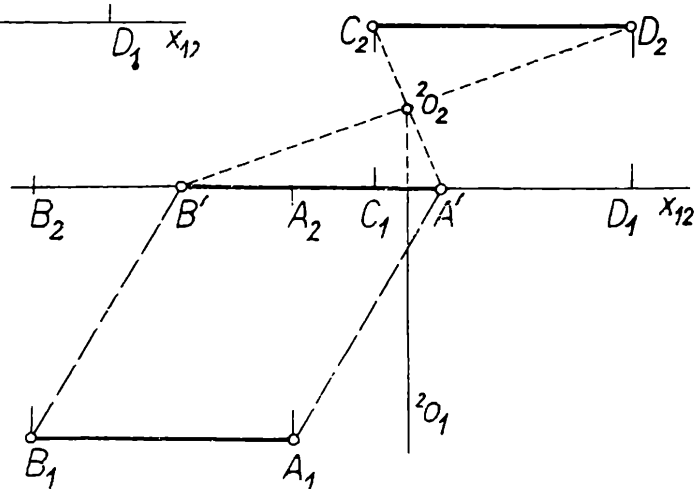
2. V první průmětně je dána úsečka AB a v druhé průmětně úsečka $CD = AB$; žádná z nich neleží na základnici. Najděte osu otáčení ^{1o} kolmou k první průmětně a osu otáčení ^{2o} kolmou k druhé průmětně tak, aby úsečka AB po otočení nejprve kolem ^{1o} a potom kolem ^{2o} přešla v úsečku CD . — Proveďte pro A (— 4; 3; 0), B (— 1; 7; 0), C (1; 0; 2), D (5; 0; 5).

(Došlo 10 řešení.)

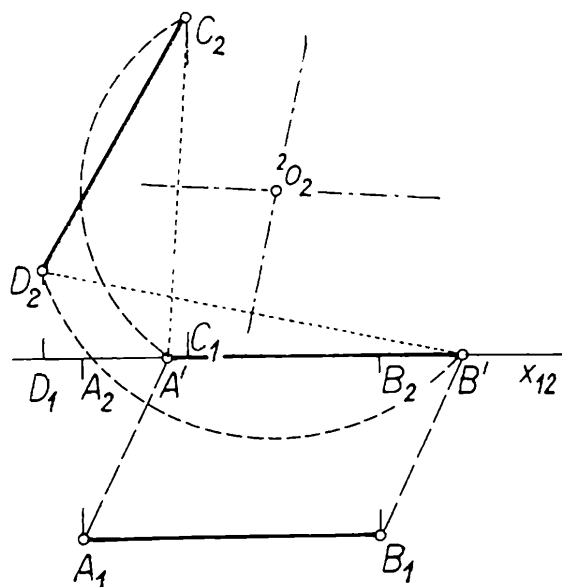
Stanislav Horák



Obr. 1a



Obr. 1b



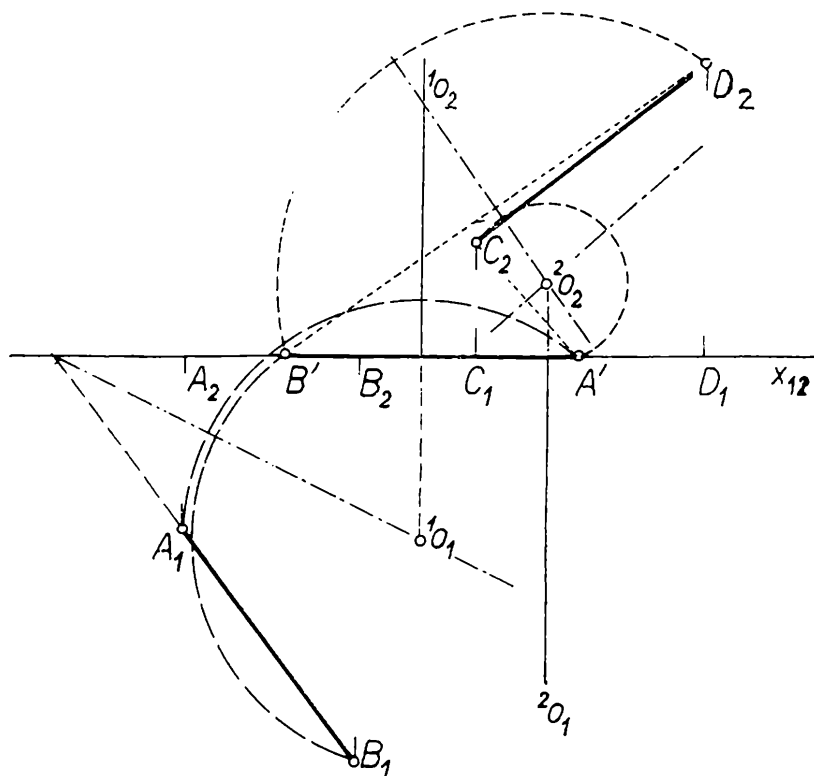
Obr. 2

Řešil Pavel Kindlmann, IV A G Č. Budějovice :

Úsečku AB budeme přemísťovat tak, aby bod A splynul s bodem C (a bod B s bodem D).

Nejprve si uvědomíme, že při otáčení úsečky AB kolem 1o , bude se tato úsečka pohybovat v první průmětně. Při otáčení kolem 2o se bude tato úsečka pohybovat v druhé průmětně. Z toho vyplývá, že otočení kolem 1o směřuje k tomu, abychom úsečku AB přemístili do druhé průmětny, tj. na základnici x_{12} .

I. Předpokládejme, že $AB \parallel x_{12}$ a současně $CD \parallel x_{12}$. Potom stačí pouhým posunutím přemístit na základnici x_{12} (do jakékoli polohy) do úsečky $A'B'$. Jsou-li úsečky $A'B'$, CD souhlasně rovnoběžné, stačí opět posunutí k tomu, aby úsečka $A'B'$ splynula s úsečkou CD . Jestliže



úsečka $A'B'$ je s úsečkou CD nesouhlasně rovnoběžná, potom je nutné úsečku $A'B'$ otočit kolem osy 2o , která je průsečnicí rovin souměrnosti úseček CA' , DB' (Obr. 1a, b.)

II. Jestliže $AB \parallel x_{12}$ a současně $CD \nparallel x_{12}$, potom translací přemístíme úsečku AB do polohy na základnici (A' můžeme přitom zvolit na x_{12} kdekoliv). Úsečku $A'B'$ pak otočíme kolem 2o do polohy CD . Přitom osa 2o je průsečnice roviny souměrnosti úsečky AC s rovinou souměrnosti úsečky BD . (Obr. 2.)

III. Jestliže $CD \parallel x_{12}$ a současně $AB \nparallel x_{12}$, pak úsečku AB otočíme kolem osy 1o , která prochází průsečíkem přímky AB se základnicí, do polohy $A'B'$ na základnici. Úsečku $A'B'$ pak posunutím nebo otočením ztotožníme s úsečkou CD .

IV. Nechť $AB \nparallel x_{12}$ a zároveň $CD \nparallel x_{12}$. Nejprve úsečku AB otočíme do polohy $A'B'$ na x_{12} kolem osy 1o . Tato osa otáčení prochází libovolným bodem přímky, půlící úhel přímek AB a x_{12} . Osa otáčení 2o je průsečnice roviny souměrnosti úsečky CA' a DB' (Obr. 3.)

různé

Zajímá vás původ slov?

Povězme si něco o původu slov, která označují typy škol a vědeckých pracovišť; uvidíte, že jde o slova velmi stará, která v průběhu staletí nabyla dost odlišného významu.

Gymnasium je latinskou koncovkou pozměněné řecké slovo *gymnasion*, odvozené od *gymnos* = nahý. V antickém Řecku označovalo instituce umístěné ve zvláštních budovách, kde probíhala tělesná výchova mužské mládeže (gymnastika, sport), ale i přednášky filosofů, četba knih, řečnická cvičení, diskuse apod. Obecný název *gymnasium* se objevil znovu až v 16. století a označoval střední školu vyučující především klasickým jazykům — řečtině a latině. Zaměření gymnasií se ovšem postupně měnilo tak, aby vyhovovalo potřebám společnosti, zejména se posiluje zastoupení přírodovědných předmětů.

Lyceum je rovněž latinským přepisem změněné řecké slovo *Lykeion*, což byl název jednoho z aténských gymnasií, kde vyučoval Aristoteles. Ve Francii, Polsku i jinde jsou lycea státní střední školy; v bývalém Rakousko-Uhersku se tak nazývaly střední školy pro dívky.

Akademie je slovo odvozené z názvu aténského předměstí, kde založil Platón svou filosofickou školu kolem r. 387 před n. l. Antické akademie zrušili křesťanští císaři východořímské říše. Název akademie dal r. 1440 nově založené vědecké společnosti florentský vládce Cosimo de Medici, později vznikly takové instituce v jiných zemích a městech. Kuriozitou je název „Akademie bystrozrakých jako rys“, která byla založena v Římě r. 1603. Slovo akademie postupně nabylo i mnoha jiných významů (kulturně tělovýchovná slavnost, vyšší odborná škola, umělecká škola, osvětová instituce apod.).

Muzeum je latinskou koncovkou opatřené řecké slovo *Múseion*, které označovalo chrám Múz a sdružení lidí, kteří se věnovali vědám a umění. Nejslavnější *Múseion* bylo založeno na počátku 3. století před n. l. v Alexandrii, pracoval v něm zřejmě i Eukleides; šlo vlastně o vědecký ústav s bohatou knihovnou, hvězdárnou, botanickou i zoologickou zahradou, pitevnou atd. Také v tomto případě se význam slova postupně poněkud změnil až k dnešnímu, který dobře znáte.

Technika je slovo odvozené z řeckého *techné* (umění, dovednost v řemeslné a umělecké práci), v novověku označuje též nástroje, stroje a další zařízení, která člověk vytváří k výrobním účelům. Jako název školy je u nás jen hovorovou zkratkou slov „vysoké učení technické“.

Universita je jediné ze slov, která jsme uvedli, jež je čistě latinského původu, od 12. století označuje evropské vysoké školy.

Š. J.



Vynález knihtisku v polovině 15. století se po čase projevil i ve vydávání tištěných matematických spisů; za první tisk se považuje *Kupecká aritmetika* (Treviso, 1478) a latinské vydání Euklidova díla *Základy* (Benátky, 1482). Luca Pacioli vydal r. 1494 knihtiskem encyklopedické dílo o aritmetice, algebře a trigonometrii své doby — *Summa de Arithmetica*. Jím použitá aritmetická symbolika včetně tzv. arabských číslic se stala vzorem pro sazbu matematických knih a zachovala se s malými změnami dodnes.



Nejstarší evropská universita v Bologni (založená už r. 1119) byla od poloviny 15. století nejproslulejším evropským učilištěm v přírodních vědách. Astronomická fakulta měla až 16 učitelů, studoval na ní Mikuláš Koperník, Albrecht Dürer i Luca Pacioli, přítel Leonarda da Vinci. Součástí studia byla účast na veřejných disputacích, které bývaly velmi živé a probíhaly mnohdy i na náměstích.



Mikuláš Koperník prožil na italských universitách téměř deset let; původně byl vyslán r. 1496 ve svých 23 letech na studium práv do Bologni. Stal se však ze zájmu pomocníkem astronoma di Novarry a ten ho získal pro astronomická pozorování; svůj první objev si Koperník zaznamenal 9. března 1497. Po třech letech odešel do Říma, kde v r. 1500 přednášel matematiku. V r. 1501 přešel na vyhlášenou lékařskou fakultu v Padově, na které studoval medicínu do r. 1505, i když doktorský diplom získal již v r. 1503. Do Polska se vrátil jako učenec s encyklopedickými znalostmi.



Augustus de Morgan (1806—71) napsal mnoho vědeckých prací z matematiky a logiky a byl i vynikajícím učitelem; v britské encyklopedii se o něm píše, že jako učitel neměl sobě rovného. Již r. 1836 publikoval stať, ve které doporučoval užívání různých základů při zápisech čísel, nejen základu 10 (dekadické soustavy). Uváděl, že tím student získá jasnější pohled na podstatu matematických postupů než při jiné metodě. A. de Morgan pozoruhodně předběhl svou dobu; s různými základy se pracuje ve školách až v současné době v některých modernizačních experimentech.



René Descartes (Cartesius) vydal r. 1637 knihu o geometrii nazvanou *La géometrie*, ve které ukazuje mnoho příkladů, jak lze vyjádřit geometrické problémy algebraicky a tak je vyřešit. Používá při tom velmi rozmanitých „souřadnicových systémů“; knihu nelze tedy považovat za dílo vykládající princip kartézské soustavy souřadnic. V celé knize se dokonce slovo „souřadnice“ vyskytuje jen na několika místech a vyjadřuje vzdálenost bodu křivky od osy křivky. Zdá se, že princip soustavy souřadnic s kolmými osami více propracoval Pierre Fermat ve svém díle *Isagoge*, napsaném dříve než Descartesova *Géometrie*.



Grafy funkcí (v dnešním smyslu slova) se objevují až v 17. století, ale již ve 14. století se užívalo zvláštního geometrického znázorňování pohybů pomocí obdélníků. Jeden rozměr obdélníku vyjadřoval dobu pohybu, druhý rychlost, obsah obdélníka pak znázorňoval dráhu pohybu. Znázorněte si tak rovnoměrné a rovnoměrně zrychlené pohyby! Objevitel této metody není spolehlivě znám, uvádějí se jména R. Swineshead z Oxfordu, G. di Casali, Mikuláš Oresme. Stejné metody užíval ještě r. 1638 Galileo Galilei ke znázornění volného pádu, z ní vyšel zřejmě jak Fermat tak Descartes při algebraickém vyjadřování geometrických problémů.



Mikuláš Oresme (1323—1382) působil na pařížské universitě a později se stal biskupem v Normandii. Matematikou se zabýval ze záliby a napsal i matematické traktáty, v nichž se objevuje řada originálních idejí. Pozoruhodné je zejména jeho počítání s mocninami, které mají *racionalní* exponent (!). V díle *De latitudinibus formarum* (asi z r. 1360) popsal geometrické znázorňování závislosti jedné proměnné na druhé pomocí obdélníků, kterého se používalo až do 17. století. Oresmeova díla se zachovala v desítkách ručních opisů, byla tedy velmi rozšířena ještě před vynálezem knihtisku.



Benjamin Banneker (1731—1806) byl prvním americkým černochem, který se stal matematikem-výpočtářem. Jeho otec byl otrokem, ale děd se narodil ještě v Africe a byl prý synem tamního krále. Benjamín navštěvoval školu jen v zimě, protože pracoval na farmě; naučil se číst, psát a počítat. Jako rychlý a přesný počtář byl znám v širším okolí a řešil úlohy, které mu lidé posílali; řešení často zpracoval ve veršované

podobě. Intenzívně studoval vše, co se mu podařilo vypůjčit v rodinách bílých přistěhovalců. Sestavoval roční kalendáře a astronomické tabulky na základě vlastních výpočtů, stal se i asistentem komise, která vyměřovala r. 1791 území dnešního Washingtonu.

Bannekerovy práce zaslal tehdejší státní tajemník Thomas Jefferson do porevoluční Francie jako doklad o způsobilosti barevných ovládnout vědecké poznatky (zmiňoval se o matematických schopnostech a architektonických dovednostech Bannekera). Benjamin Banneker byl idealistou a pacifistou; zachoval se jeho dopis z r. 1791 adresovaný T. Jeffersonovi, kde se zastává práv černochů, později navrhl zřízení výboru pro zajištění „národního míru“. Z hlediska rozvoje matematiky nepřinesl sice Banneker nic nového, ale dosáhl vrcholné úrovně matematiky v tehdejších Spojených státech, kde tvůrčí matematici nebyli; proto se právem uvádí v historii černošského lidu Ameriky jako první černoch, který psal vědecké práce.

Nejmladším členářům

Čtverec, jehož strana má délku a , je rovnoběžkami se stranami rozdělen na 9 navzájem shodných čtverců. Jestliže do tohoto čtverce umístíme naprosto libovolně 10 bodů, pak lze mezi nimi najít aspoň 2 body, o jejichž vzdálenosti d platí

$$d \leq \frac{a}{4} \sqrt{2}$$

Dokažte.

7. Ověřte a dokažte, že číslo $5^{4n-2} + 3^{4n-2}$ je pro každé přirozené číslo $n \geq 1$ dělitelné 34.

8. Vyhledejte přirozené číslo z , které splňuje rovnici

$$10^{z(z-1)(z+1)(z+2)} = 100^{60}$$

9. Doplňte chybějící cifry do čísla 3 4 ? 6 3 ? tak, aby bylo dělitelné 84 a určete všechny možnosti!

Řešení úloh z minulého čísla:

1. Strany hledaných čtverců jsou x . Pak podle obr. 1

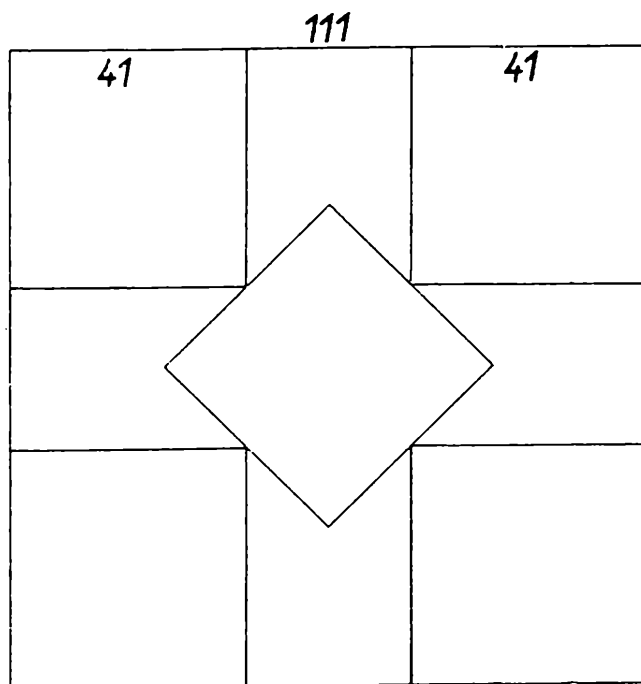
$$2x + \frac{x}{2} \sqrt{2} = 111$$

z toho $x \doteq 41$.

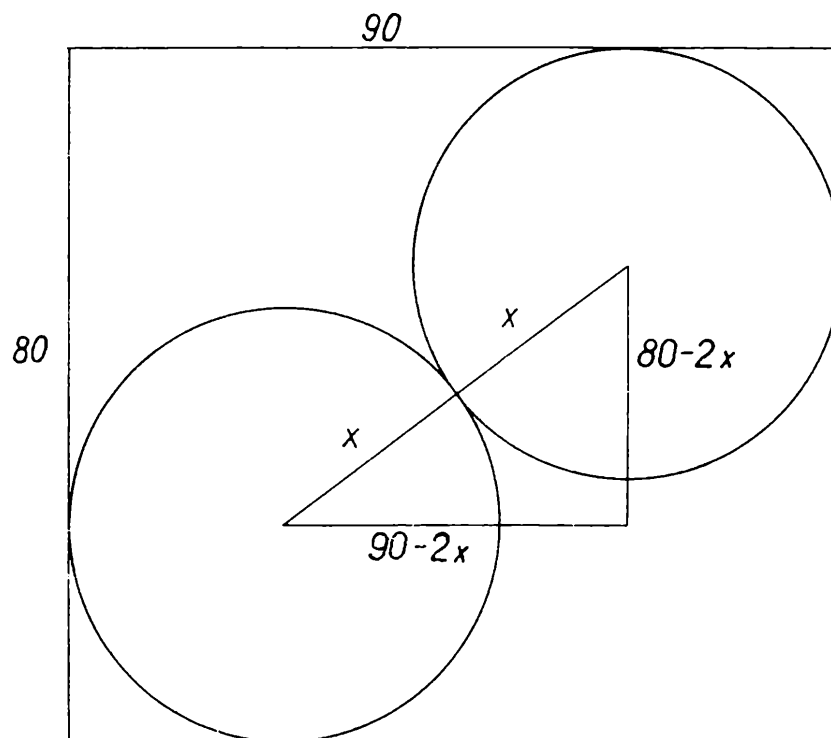
2. Podle obr. 2 vypočteme Pythagorovou větou:

$$4x^2 = (90 - 2x)^2 + (80 - 2x)^2,$$

Obr. 1



Obr. 2



odtud $x_1 = 25$, druhý kořen $x_2 = 145$ nevyhovuje.

3. Označme obsah $ABCD = R$, $ABL = T_1$, $CDK = T_2$:

a) $T_1 = T_2$, $b + e + c = d + e + f$, z toho

$$b + c = d + f$$

b) $R = T_1 + T_2$,

$$a + b + c + d + e + f + h = b + e + c + d + e + f \Rightarrow a + h = e$$

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

Euclidean
evaluate
evaluation
even
event
 disjoint events
 random event
every
evident
evolution
exact
example
exception
excircle
exclude
exclusive or
 mutually exclusive events
exist
existence
expansible
expansion
 asymptotic expansion
expectations
 mathematical expectation
experiment
exponent
exponential
 exponential equation
 exponential function

eukleidovský
vypočítat, zhodnotit
výpočet, hodnocení
sudý
jev
 neslučitelné jevy
 náhodný jev
každý
zřejmé, evidentní
odnociňování
přesný
příklad
výjimka
připsaná (vně vepsaná) kružnice
vyloučit
vylučovací nebo
 vzájemně se vylučující jevy
existovat
existence
rozvinutelný
rozvoj
 asymptotický rozvoj
předpoklady, pravděpodobnost
matematická naděje
pokus
mocnitel, exponent
exponenciální
 exponenciální rovnice
 exponenciální funkce

express
 expression
 extension
 exterior angle
 exterior point
 external
 extract the root
 extreme
 extremes
 eye level

vyjádřit
 v : az
 rozšíření
 vnější úhel
 vnější bod
 vnější
 odmocnit
 mez, extrém
 vnější členy (úměry)
 horizont

F

face
 factor
 factor (factorize)
 factorable
 factorial
 fall
 false
 faulty
 field

 fifteen
 fifth
 fifty
 figure
 final
 finite
 first
 five
 focal
 focus (pl. foci)
 follow
 following
 follows
 foot (of the perpendicular)

stěna
 činitel, konstanta
 rozložit
 rozložitelný
 faktoriál
 klesat
 nepravdivý
 chybný
 těleso (v algebře), pole (ve vektorové
 analýze)
 patnáct
 pětina, pátý
 padesát
 číslice, obrazec, obrázek
 konečný
 konečný, finitní
 první
 pět
 ohniskový
 ohnisko, zaostřit, soustředit
 následovat, vyplývat
 následující
 plyne
 pata (kolmice)

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

3

ROČNÍK 53, 1974-1975, LISTOPAD



ROČNÍK 53
LISTOPAD 1974

3

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT, Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMU Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1974.

OBSAH

A. Wohlmuthová: Jensenovy nerovnosti .	97
Dr. J. Skuhra: Problém Ludolfova čísla .	100
K. Pavlas: Několik úloh o pokrývání (pokračování)	103
T. Medeková: O asymptotách hyperboly	107
Dr. E. Rajčan: O platnosti Ohmovho zákona akustiky	109
Dr. I. Šolc: Optické a piezoelektrické měření tloušťky vakuově napařených vrstev	113
Olympiády	117
Naše soutěž	127
J. Kotyk: M. V. Lomonosov .	138
J. Burešová: Mladí pythagorovci .	142
Recenze	143
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	
3. a 4. str. obálky	

Jensenovy nerovnosti

ANEŽKA WOHLMUTHOVÁ, FSv — Praha

V minulých číslech Rozhledů se čtenář seznámil s pojmem středové konvexity (s -konvexity) funkce jedné reálné proměnné. Řekli jsme, že funkce f je striktně s -konvexní na intervalu I , pokud pro každé dva body $x_1, x_2 \in I$ je splněna nerovnost

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

přičemž rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2$.

Podívejme se nyní, zda pro striktně s -konvexní funkce platí obdobné nerovnosti i při větším počtu bodů $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$. Zvolme nejprve čtyři body $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$. Jelikož f je s -konvexní na I , je

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad (1a)$$

$$f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right) \leq \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2}, \quad (1b)$$

přičemž rovnost v (1a) nastane, právě když $x_1 = x_2$, v (1b) právě když $x_3 = x_4$.

Jelikož body $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2}$ leží opět v intervalu I , platí

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}\right)\right) \leq \\ &\leq \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)}{2}, \end{aligned} \quad (1c)$$

přičemž rovnost nastává, právě když $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2}$.

Z nerovností (1a), (1b), (1c) snadno plyne

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4} \quad (1)$$

přičemž rovnost nastane, právě když $x_1 = x_2, x_3 = x_4, \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2}$,
tj. právě když $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Je zřejmé, že (indukcí podle k) lze dokázat následující tvrzení: Je-li f s -konvexní funkce na intervalu I , $x_1, x_2, \dots, x_m$, kde $m = 2^k$ bodů intervalu I , pak platí

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_m)}{m} \quad (2)$$

přičemž rovnost ve (2) nastává, právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_m$. Formální provedení důkazu ponecháváme čtenáři.

Mějme nyní n bodů z intervalu I . Označme $\tilde{x}$ jejich aritmetický průměr, tj.

$$\tilde{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Zvolme přirozené číslo k tak, že $2^k > n$. K bodům $x_1, x_2, \dots, x_n$ přidáme další body z intervalu I tak, aby se nezměnil jejich aritmetický průměr a aby celkový počet bodů byl 2^k , tj. chceme, aby platilo

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} + \dots + x_m}{m},$$

kde $m = 2^k$. To lze zařídit, položíme-li $x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_m = \tilde{x}$. Pak totiž

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m} = \frac{n\tilde{x} + (m - n)\tilde{x}}{m} = \tilde{x}, \text{ kde } m = 2^k.$$

Podle (2) platí

$$f(\tilde{x}) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + (m - n)f(\tilde{x})}{m}$$

z čehož dostáváme snadným výpočtem

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}, \quad (3)$$

přičemž rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \tilde{x}$, tj. právě když (vzhledem k volbě $x_{n+l}, l = 1, 2, \dots, 2^k - n$) $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Odvodili jsme tedy následující větu:

Věta 1: Nechť f je striktně s -konvexní funkce na intervalu I . Pak pro libovolné body $x_1, x_2, \dots, x_n$ z intervalu I platí:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

Přitom znamení rovnosti nastane, právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Pro funkci f , která je s -konkávní na intervalu I , platí zřejmě analogické tvrzení s opačnými nerovnostmi.

Z věty 1 můžeme (speciální volbou čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$) dostat zajímavé nerovnosti. Tak např. volíme-li p čísel $x_1, x_2, \dots, x_p$ rovných u a zbývajících $n-p$ čísel rovných v a označíme-li $\frac{p}{n} = r, \frac{n-p}{n} = s$, dostáváme:

Důsledek 1: Nechť f je s -konvexní funkce na intervalu I . Pak pro $u, v \in I$ a libovolná racionální čísla $r > 0, s > 0$ taková, že $r + s = 1$, platí

$$f(ru + sv) \leq rf(u) + sf(v). \quad (4)$$

Rovnost nastane, právě když $u = v$.

Jiným rozkladem čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ (ve skupiny sobě rovných čísel) dostáváme ještě poněkud obecnější tvrzení:

Důsledek 2: Nechť f je s -konvexní funkce na intervalu I . Pak pro libovolné body $u_1, u_2, \dots, u_m \in I$ a racionální čísla $r_1, r_2, \dots, r_m$ taková, že $r_1 > 0, r_2 > 0, \dots, r_m > 0, r_1 + r_2 + \dots + r_m = 1$, platí

$$f(r_1 u_1 + r_2 u_2 + \dots + r_m u_m) \leq r_1 f(u_1) + r_2 f(u_2) + \dots + r_m f(u_m). \quad (5)$$

Přitom znamení rovnosti nastane, právě když $u_1 = u_2 = \dots = u_m$.

Příklad 1: Ze všech konvexních n -úhelníků vepsaných do kruhu o poloměru r hledejme ten, který má maximální (plošný) obsah.

Označme S střed kružnice o poloměru r , $A_1, A_2, \dots, A_n$ vrcholy konvexního n -úhelníka vepsaného do daného kruhu.

Položme $A_{n+1} = A_1$ a předpokládejme, že $A_j, A_{j+1}, j = 1, 2, \dots, n$ jsou sousední vrcholy n -úhelníka. Označme $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ středový úhel příslušný oblouku A_j, A_{j+1} (tj. oblouku, který neobsahuje již žádný další vrchol n -úhelníka). Pak zřejmě $x_j \in (0, 2\pi)$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, n$, přičemž $\sum_{j=1}^n x_j = 2\pi$.

Pro plošný obsah P zkoumaného n -úhelníka platí

$$P = \frac{r^2}{2} (\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n),$$

a to i v případě, že pro některé j je $x_j > \pi$ (tj. střed kruhu leží mimo příslušný n -úhelník).

Čtenář se může přesvědčit, že při hledání extrému se můžeme omezit na ty n -úhelníky, které obsahují střed dané kružnice. Hledáme tedy extrém výrazu

$$P = \frac{r^2}{2} (\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n)$$

pro $x_j \in (0, \pi), j = 1, 2, \dots, n, \sum_{j=1}^n x_j = 2\pi$.

Protože funkce sinus je ostře s -konkávní na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, platí:

$$P = \frac{r^2}{2} (\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n) \leq \frac{r^2}{2} n \sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

přičemž rovnost nastává, právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. To však znamená, že maximální plošný obsah má rovnostranný n -úhelník. Toto maximum je

$$P_{\max} = \frac{1}{2} r^2 n \sin \frac{2\pi}{n}$$

Příklad 2: Ze všech trojúhelníků s vnitřními úhly α, β, γ hledejme ten, pro nějž je součet

$$s = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$$

maximální.

Jelikož α, β, γ jsou vnitřní úhly v trojúhelníku, je $\alpha \in (0, \pi), \beta \in (0, \pi), \gamma \in (0, \pi)$. Protože funkce $\sin x$ je ostře s -konkávní na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, platí:

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \leq \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3},$$

přičemž rovnost nastane, právě když $\alpha = \beta = \gamma$. To znamená, že součet bude maximální, bude-li náš trojúhelník rovnostranný, a bude se rovnat

$$s_{\max} = 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3 \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Problém Ludolfova čísla

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

Již v dávných dobách lidé zjistili, že poměr obsahu kteréhokoli čtverce a obsahu do něho vepsaného kruhu je stálý. Protože obsah čtverce znali, došli nakonec ke vzorci $P = \pi r^2$ pro výpočet obsahu kruhu s poloměrem r (vzorec je ovšem vyjádřen naší současnou symbolikou). Problém měli se stanovením konstanty π , kterou určovali aproximativně různými metodami, například pomocí pravidelných n -úhelníků vepsa-

ných do kružnice. *) My budeme nyní také hledat přibližnou hodnotu konstanty π , ale jinou metodou.

Velice prostá metoda určení čísla π spočívá v následujícím pokusu: Narýsujeme si čtverec a do něj vepíšeme kružnici. Tento obrázek posypeme nějakým jemným materiálem, třeba krupicí. Musíme přitom dbát, abychom posypali obrázek krupicí rovnoměrně a jen v jedné vrstvě. Nyní spočítáme počet zrníček krupice, která se nalézají uvnitř čtverce, označme tento počet N , a spočítáme počet zrníček krupice, která se nalézají uvnitř narýsovaného kruhu, označme tento počet A . Protože jsme přísně dbali na to, aby krupice byla rovnoměrně rozptýlena po obrázku, je celkem zřejmé, že můžeme přibližný obsah čtverce, resp. obsah kruhu získat násobením získaného počtu zrníček jistou konstantou k . Obsah kruhu je tedy přibližně kA a obsah čtverce kN . Velikost konstanty k je závislá na velikosti narýsovaného obrázku a na množství použité krupice. Naštěstí konstantu k pro určení hodnoty čísla π vůbec nepotřebujeme znát. Počítejme: je-li poloměr kružnice r , je velikost strany opsaného čtverce $2r$ a platí

$$\frac{A}{N} = \frac{k \cdot A}{k \cdot N} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$$

Poměr počtu zrníček krupice roztroušených po kruhu a počtu zrníček roztroušených po čtverci dává přibližnou hodnotu čísla $\frac{\pi}{4}$. Přibližnou hodnotu čísla π tedy vypočítáme jako čtyřnásobek tohoto poměru.

Budeme-li si brát na své matematické pokusy krupici, může se stát, že nás maminka nepochválí. Použijeme proto raději tabulku náhodných čísel uveřejněnou v 1. čísle letošního ročníku. „Házet čísla“ po obrázku budeme následujícím způsobem:

Zakreslíme kružnici o poloměru 10 se středem v počátku souřadnic a opíšeme jí čtverec o straně 20 tak, aby strany čtverce byly rovnoběžné se souřadnými osami. Dále budeme uvažovat pouze čtvrtkruh v I. kvadrantu. Vezmeme tabulku náhodných čísel a začneme z jejího pravého dolního rohu „házet“ na náš obrázek body podle této interpretace: Číslice psané nad sebou pokládáme za souřadnice místa, kam dopadl námi „hozený“ bod. První dva řádky posledního sloupce tabulky nám dávají tyto souřadnice: [3,8]; [7,3]; [9,2]; [1,8]; [2,8]. Pak pokračujeme na další dva řádky atd., až celý sloupec vyčerpáme. Bude-li v tabulkách číslice 0, nebudeme tento bod počítat, protože nevíme, zda znamená souřadnici 0 nebo 10. Ty z ostatních bodů, jejichž souřadnice budou vyhovovat rovnici vnitřku našeho kruhu $x^2 + y^2 < 10$, budeme brát do počtu A . Označme sloupce zprava doleva římskými čísly. Prvních pět sloupců dává tyto výsledky:

*) Více si o historii čísla π můžete přečíst v článku RNDr. J. Šedivého, který byl uveřejněn v 8. čísle minulého ročníku Rozhledů.

sloupec	I	II	III	IV	V
A	61	71	64	58	58
N	83	82	79	74	78
odhad π	2,94	3,47	3,24	3,13	2,97

Výsledky, které dostáváme z jednotlivých sloupců, jsou značně variabilní. Lépe bude získané hodnoty kumulovat.

sloupec	I	I + II	I + ... + III	I + ... + IV	I + ... + V
A	61	132	196	254	312
N	83	165	244	318	396
odhad	2,94	3,18	3,20	3,18	3,151

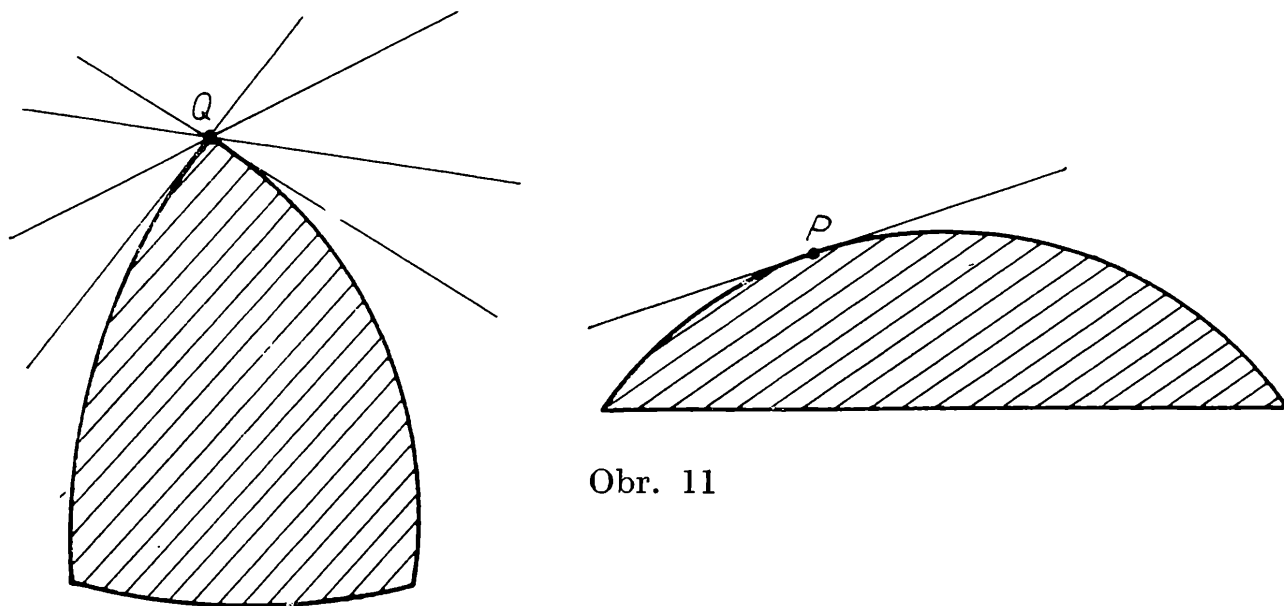
Skutečně jsme tím dosáhli menší variability odhadu čísla π . Použitý postup byl matematicky jednoduchý, ale měl jednu velkou vadu, že jsme mohli body „hodit“ jen na místa s celočíselnými souřadnicemi. Vezměme si tabulku náhodných čísel znova. Čísla z intervalu $(0; 10)$ v lichých sloupcích (tentokrát zleva doprava) pokládejme za x -ové souřadnice a v sudých sloupcích za y -ové souřadnice míst dopadu bodů. První „hozený“ bod padne do místa o souřadnicích $[1,6689; 7,1147]$. Zpracujeme-li takto celou otištěnou tabulku, dostaneme z 200 bodů odhad pro číslo $\pi \doteq 3,26$. Abychom dostali přesnější výsledek, museli bychom zpracovat mnohem větší počet bodů.

Úlohu jsme řešili statistickou metodou, která se jmenuje Metoda Monte Carlo. A hledá-li někdo souvislost s nějakým náhodným procesem, najde ji celkem snadno. Zkoumali jsme systém, který měl dva stavy — bod padl do vnitřku čtvrtkruhu, bod padl mimo vnitřek čtvrtkruhu. Označíme-li první stav číslicí 1, druhý stav číslicí 0, zajímal nás relativní výskyt jedniček.

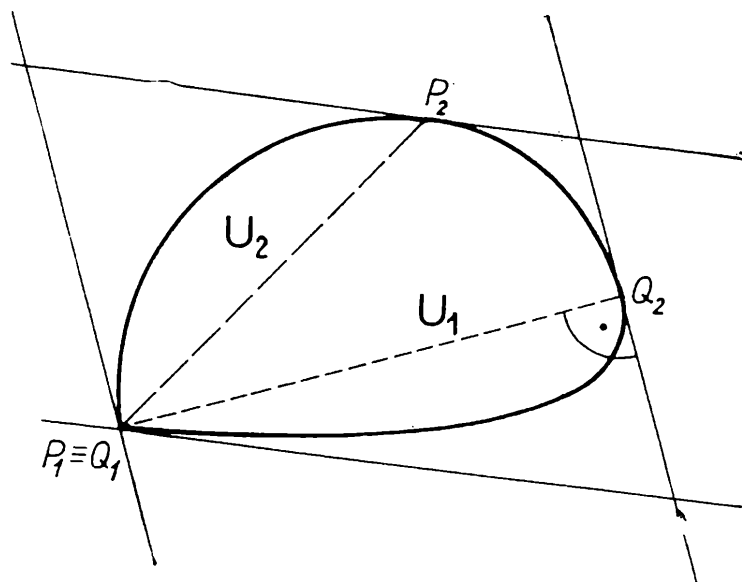
Několik úloh o pokrývání (pokračování)

KAREL PAVLAS, Třebíč

Definice 4. Obyčejný hraniční bod konvexního útvaru je takový bod útvaru, jímž prochází jediná opěrná přímka. Jestliže hraničním bodem prochází více než jedna opěrná přímka, nazveme tento bod bodem úhlovým (viz obr. 11, kde P je obyčejným bodem a Q je úhlovým bodem).

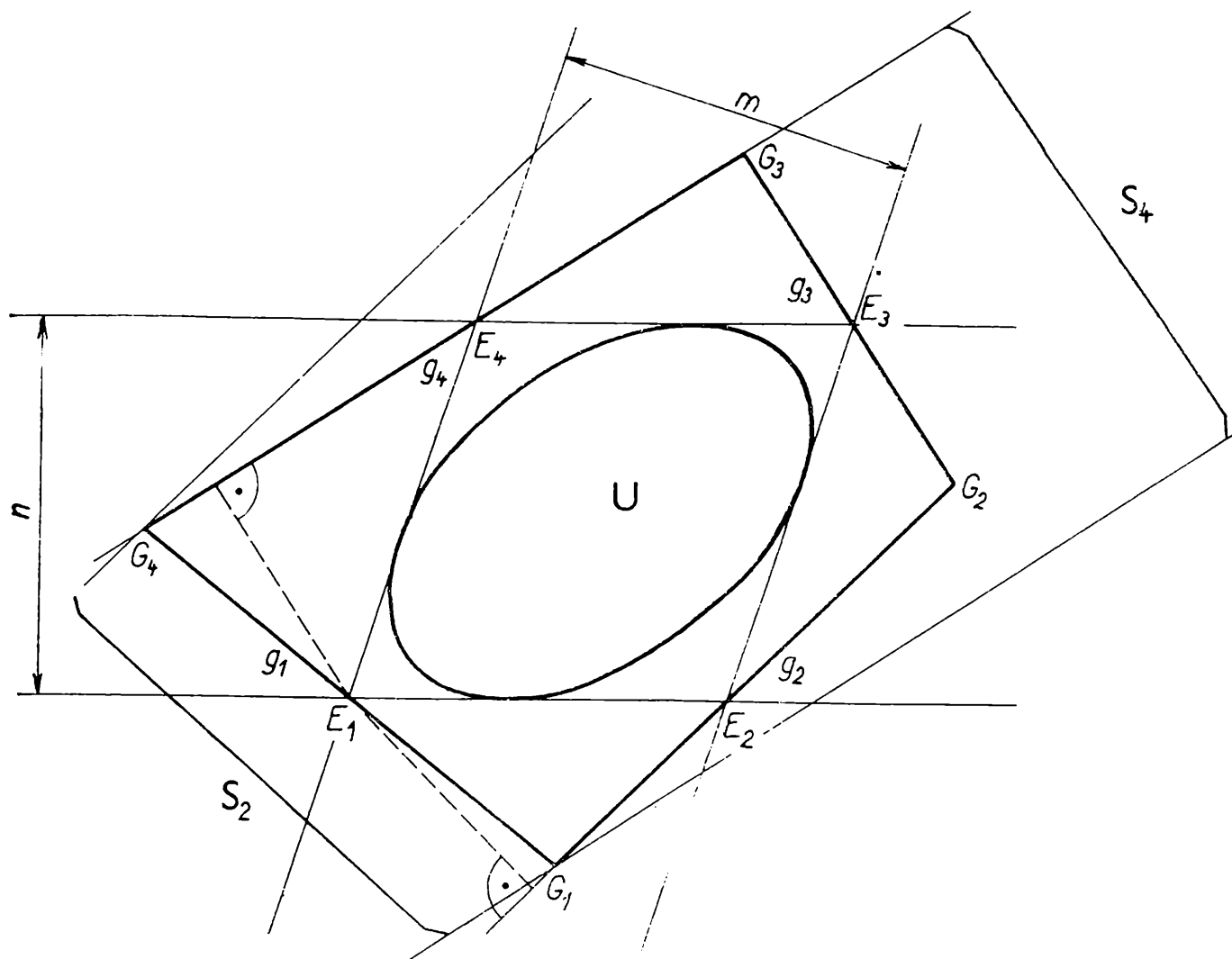


Obr. 11



Obr. 12

Definice 5. Pod pojmem rovinný pás šířky m budeme rozumět množinu bodů tvořenou všemi body ležícími mezi dvěma rovnoběžkami, jejichž vzdálenost je m (i s hraničními přímkami).



Úloha 5. Každý konvexní útvar U s jednotkovým průměrem a bez úhlových bodů, který může být pokryt pásem S šířky $m < 1$, může být rozložen na dva útvary U_1 , U_2 mající průměry menší než 1. Dokažte.

Řešení. Nechť útvar U má jednotkový průměr a nemá úhlové body. Dále nechť existuje pás S šířky $m < 1$ pokrývající útvar U . Můžeme předpokládat, že na každé hraniční přímce pásu S leží aspoň jeden hraniční bod útvaru U ; tyto body označíme P_1 , P_2 . Dokážeme, že úsečka P_1P_2 rozděluje útvar U na takové dva útvary U_1 , U_2 , že žádný z nich neobsahuje dvojici bodů Q_1 , Q_2 , jejichž vzdálenost by byla rovna 1. Jinak řečeno, dokážeme, že průměr útvarů U_1 , U_2 je menší než 1. Dokážeme to nepřímou. Předpokládejme opak: úsečka P_1P_2 rozděluje útvar U na dva útvary U_1 , U_2 , z nichž aspoň jeden má průměr 1 (viz obr. 12). Tento útvar obsahuje dvojici bodů Q_1 , Q_2 , jejichž vzdálenost je rovna 1. Sestrojíme pás T , jehož hraniční přímky jsou kolmé na úsečku Q_1Q_2 . Přitom pás T nemůže být rovnoběžný s pásem S , proto $S \cap T$ je rovnoběžník, na jehož protilehlých stranách leží dvojice bodů P_1 , P_2 a Q_1 , Q_2 .

Proto průsečík $P_1P_2 \cup Q_1Q_2$ náleží rovnoběžníku $S \cap T$ a tento průsečík náleží také útvaru U . To je možné jenom tak, že jeden z bodů P_1, P_2 je vrcholem rovnoběžníka a splývá s bodem Q_1 . Tímto bodem jdou tedy dvě opěrné přímky útvaru U , což je spor s předpokladem, protože útvar U nemá úhlové body.

Úloha 6. Jestliže konvexní útvar U je pokryt dvěma pásy o šířkách m, n , pak může být pokryt jediným pásem, jehož šířka nepřevyšuje $m + n$.

Řešení. V případě, že pásy o šířkách m, n , které pokrývají útvar U , jsou rovnoběžné, pak je možno je nahradit jediným pásem o šířce $m + n$. Tento případ je triviální. Uvažujme případ, kdy pásy pokrývající útvar U jsou různoběžné. Průnik obou pokrývajících pásů má tvar rovnoběžníka E (obr. 13), jehož vrcholy popíšeme E_1, E_2, E_3, E_4 ; přitom zvolíme vrcholy E_2, E_4 u neostrých úhlů rovnoběžníka. Vrcholy E_1, E_2, E_3, E_4 rovnoběžníka E vedeme odpovídající přímky g_1, g_2, g_3, g_4 tak, aby vnitřek čtyřúhelníka G jimi vytvořeného obsahoval útvar U . Nyní dokážeme, že *každý* čtyřúhelník G , takto sestrojený k rovnoběžníku E , je možné pokrýt pásem o šířce nejvýše $m + n$. Zvolme pás S_2 , jehož jedna hranice jde úsečkou g_2 , druhá hranice bodem G_4 (viz obr. 13), dále zvolíme pás S_4 , jehož jedna hranice jde úsečkou g_4 , druhá bodem G_1 . Nyní vyjádříme součet vzdáleností bodu E_1 od stran g_2, g_4 čtyřúhelníka G pomocí m, n . Vzdálenost bodu E_1 od strany g_2 je menší než vzdálenost m bodu E_1 od přímky E_2E_3 . Podobně vzdálenost bodu E_1 od strany g_4 je menší než vzdálenost n bodu E_1 od přímky E_3E_4 . Proto jsou vzdálenosti bodu E_1 od stran g_2 a g_4 menší nebo nejvýše rovny součtu $m + n$. Pás o šířce nejvýše $m + n$ pokrývá čtyřúhelník G a tím i útvar U .

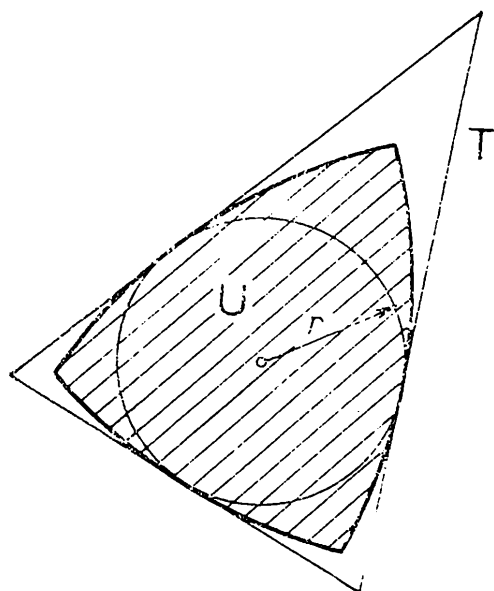
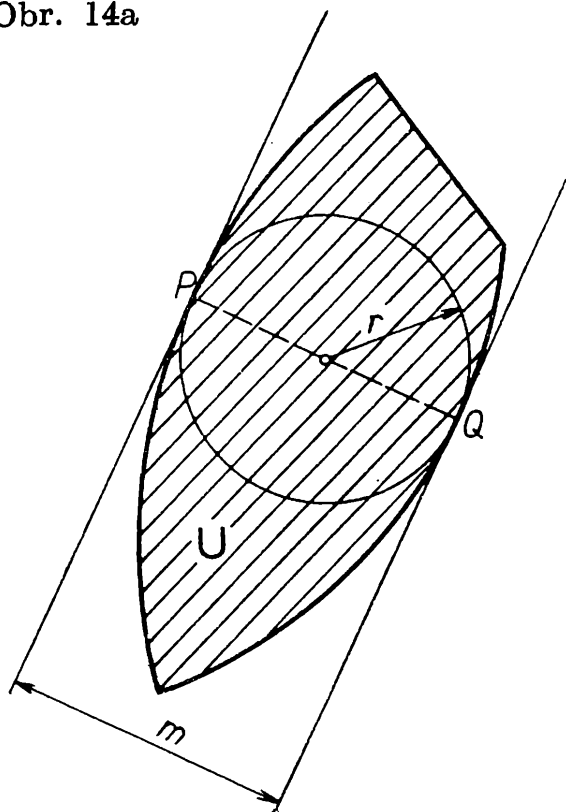
Úloha 7. Jestliže konvexní útvar U nemůže být pokryt žádným pásem, který má šířku $m \leq 1$, pak je možno v tomto útvaru sestrojit kruh s poloměrem $r \geq \frac{1}{3}$

Řešení. Označme U konvexní útvar, který *nelze* pokrýt pásem majícím šířku $m \leq 1$. Označme r poloměr největšího kruhu, jehož všechny body patří útvaru U . Rozlišujeme dva případy:

Případ 1. Největší vepsaný kruh útvaru U má s jeho hranicí dva diametrálně protilehlé body P, Q společné (obr. 14a). Tečny ke kruhu v bodech P, Q vymezují pás, ve kterém leží útvar U , proto šířka m tohoto pásu je podle předpokladu větší než 1. Pro poloměr největšího kruhu platí $r > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

Případ 2. Největší vepsaný kruh útvaru U má s jeho hranicí tři body společné, které všechny neleží na jedné polokružnici (obr. 14b). V těchto bodech vedeme ke kruhu tečny, které vymezují trojúhelník T . Tento

Obr. 14a



Obr. 14b

trojúhelník obsahuje útvar U , a proto trojúhelník T nemůže být pokryt žádným pásem o šířce $m \leq 1$; tudíž všechny jeho výšky jsou větší než 1. Vzdálenost těžiště od strany trojúhelníka T je rovna třetině příslušné výšky. Kružnice, která má poloměr rovný třetině nejmenší výšky trojúhelníka T a jejíž střed leží v těžišti trojúhelníka T , leží celá v trojúhelníku T . Proto pro kruh s největším poloměrem r , který celý leží v trojúhelníku T a tedy patří i útvaru U , platí $r \geq \frac{1}{3}$. V obou případech je tedy možno do útvaru U vepsat kruh o poloměru $r \geq \frac{1}{3}$.

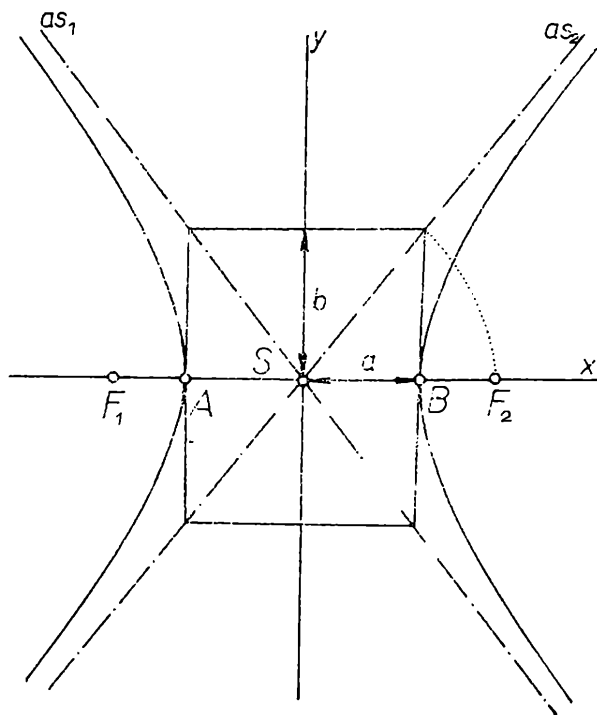
konstruktívni geometrie

0 asymptotách hyperboly

TATIANA MEDEKOVÁ, Bratislava

1. Asymptoty hyperboly sú v literatúre rôzne definované, napr. ako uhlopriečky istého obdĺžnika, ako ramená určitých uhlov, ako dotyčnice v nekonečne vzdialenom bode. Uvediem jednu definíciu asymptot hyperboly, pomocou ktorej možno veľmi jednoducho odvodiť ich rovnice.

Definícia: Asymptoty hyperboly sú také priamky v jej rovine, ktoré nemajú s hyperbolou žiaden spoločný bod a každá iná rovnobežka s asymptotou má s hyperbolou spoločný jeden bod.



Obr. 1

Na základe tejto definície dokážeme vetu: Asymptoty hyperboly, ktorej rovnica je $b^2(x - x_0)^2 - a^2(y - y_0)^2 = a^2b^2$ sú priamky o rovniciach $b(x - x_0) \pm a(y - y_0) = 0$.

Dôkaz: Podľa tvrdenia vety sú asymptoty priamky, prechádzajúce stredom hyperboly $S(x_0, y_0)$. Keby totiž bola asymptotou priamka, neprechádzajúca cez stred hyperboly, potom by bola asymptotou aj priamka s ňou súmerná podľa stredu hyperboly (to vyplýva zo symetrie hyperboly podľa jej stredu). Pretože obe priamky sú rovnobežné, dostávame spor s definíciou.

Teraz ukážeme, že priamky z vety sú podľa definície asymptotami. Pre jednoduchosť stačí sa zaoberať iba prípadom, keď $x_0 = y_0 = 0$. (obr. 1.). Priamka o rovnici $bx - ay = 0$ hyperbolu nepretína. Každá priamka rovnobežná s priamkou $bx - ay = 0$ má rovnicu $bx = ay + c$, kde $c \neq 0$. Jej priesečník s hyperbolou dostaneme pomocou riešenia rovnice $(ay + c)^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Keďže je riešenie $y = \frac{a^2b^2 - c^2}{2ac}$ jediné, je aj priesečník jediný bod so súradnicami $x = \frac{a^2b^2 + c^2}{2bc}$, $y = \frac{a^2b^2 - c^2}{2ac}$.

To isté dostaneme aj pre priamku o rovnici $bx + ay = 0$. Teda podľa definície priamky $bx \pm ay = 0$ sú asymptoty hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Ešte treba ukázať, že žiadna iná priamka, prechádzajúca stredom hyperboly, nie je asymptotou. Za tým účelom zaoberajme sa priamkami, prechádzajúcimi cez vrchol $B(a, 0)$ hyperboly. Ľubovoľná priamka, idúca vrcholom $B(a, 0)$ (a rôzna od osi x , ktorá iste nie je asymptotou), má rovnicu $x = a + cy$. Pretína hyperbolu jednak v bode B a ešte v jednom bode H , ktorého súradnica $y = \frac{2ab^2c}{a^2 - b^2c^2}$. Bod H existuje, keď $a^2 - b^2c^2 \neq 0$, t.j. keď $c \neq \pm \frac{a}{b}$. Keď je teda $c \neq \pm \frac{a}{b}$, potom priamka $x = a + cy$ má s hyperbolou dva spoločné body a priamka s ňou rovnobežná idúca stredom hyperboly nemôže byť asymptotou. Keď $c = \frac{a}{b}$, priamka $x = a + cy$ pretína hyperbolu len v jednom bode a priamka je rovnobežná s asymptotou.

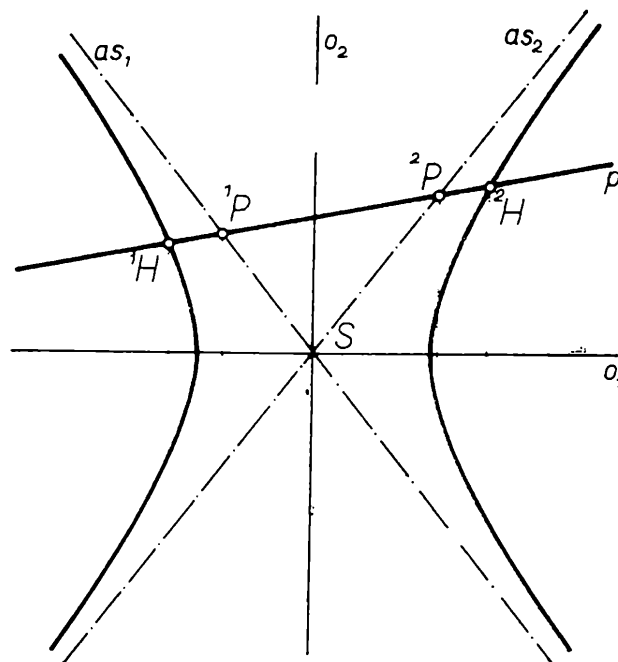
Poznámka: Ak stred hyperboly neleží v bode $O(0, 0)$, ale je v bode $S(x_0, y_0)$ toto posunutie nemá vplyv na dôkaz vety. Stačí položiť $x - x_0 = \xi$, $y - y_0 = \eta$.

2. Ak poznáme asymptoty hyperboly a jeden jej bod, možno ľahko zostrojiť ľubovoľný počet bodov hyperboly bez toho, aby bolo treba hľadať osi a ohniská. Konštrukciu robíme na základe nasledujúcej vety (obr. 2).

Veta: Nech priesečníky priamky p , ktorá nie je rovnobežná s asymptotou hyperboly, sú body 1P a 2P . Jej priesečníky s hyperbolou nech sú body 1H a 2H . Potom platí $|^1P^1H| = |^2P^2H|$.

Dôkaz: Pre priamky rovnobežné s vedľajšou osou hyperboly táto vlastnosť vyplýva zo súmernosti hyperboly podľa hlavnej osi. Pre iné priamky dokážeme vetu pomocou rovnice hyperboly v stredovom tvare.

Rovnice asymptot hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ sú $ay = \pm bx$. Rovnica priamky je $y = kx + q$, kde $k \neq \pm \frac{a}{b}$. Priamym výpočtom



nájde body 1P , 2P , 1H , 2H . Pre dôkaz stačí vypočítať, že súradnica x bodov 1P a 2P je $\mp \frac{aq}{b \pm ak}$ a bodov 1H , 2H je

$$\frac{a^2 k q \pm \sqrt{a^4 k^2 q^2 \pm (b^2 - a^2 k^2)(a^2 b^2 - q^2 a^2)}}{b^2 k^2 - a^2}$$

Stred úsečky $^1P^2P$ má súradnicu $x = \frac{a^2 k q}{b^2 - a^2 k^2}$, ale to isté platí aj pre stred úsečky $^1H, ^2H$. Vidíme, že obe úsečky majú spoločný stred, preto platí tvrdenie vety.

fyzika

O platnosti Ohmovho zákona akustiky

RNDr. E. RAJČAN, VŠLD Zvolen

Záujem pracovníkov rôznych oblastí aplikovanej fyziky sa v súčasnosti zameriava na výskum súvislostí medzi (objektívnymi) signálmi a príslušnými (subjektívnymi) vnemami. Typickou oblasťou výskumu je psychoakustika, zameraná na problematiku akustických signálov. Jedným z aktuálnych problémov psychoakustiky sa zaoberáme v nasledujúcom článku.

Pri diskusii o dôležitosti fyzikálnych parametrov pre subjektívne hodnotenie zvukových signálov je užitočné vychádzať z Ohmovho zákona akustiky. I keď tento zákon je nepochybne menej známy ako Ohmov zákon z náuky o elektrine, predsa sa jeho všeobecná platnosť považuje ešte často za samozrejmu. V príspevku poukážeme na potrebu kritického pohľadu na spomenutý zákon, pritom uvedieme obmedzenia jeho platnosti.

Zákon je vlastne definíciou tónu vyslovenou Ohmom (1843) [1] a hovorí: Tón o výške zodpovedajúcej frekvencii f zaznamenaná sluch len vtedy, keď vnímaný zvuk obsahuje harmonickú vlnu (zložku) s touto frekvenciou. Vychádzajúc z tejto definície vyslovil Helmholtz [2] pravidlo, podľa ktorého je sluch schopný analyzovať zvuk zložený z viacerých harmonických zložiek na sériu jednotlivých zložiek, pričom každá z nich je vnímaná ako jednoduchý tón. V zmysle týchto predstáv je napr. pre vnem tónu o určitej výške dôležitý, či zvuk obsahuje alebo neobsahuje harmonickú vlnu príslušnej frekvencie.

Experimentálne bolo dokázané, že tieto tvrdenia majú iba obmedzenú platnosť. Ak príčinou zvuku je harmonická vlna frekvencie f vhodnej amplitúdy, je takýto zvuk vnímaný ako (čistý, jednoduchý) tón, jeho výška korešponduje frekvencii f . V prípade, že zvuková vlna pozostáva z malého počtu sínusoidálnych zložiek frekvenčne dostatočne od seba vzdialených, každá zložka je počuteľná. Potiaľto je to v súlade s Ohmovým zákonom akustiky.

V čase, keď Ohm formuloval svoj zákon akustiky, bol však už 100 rokov známy jav, ktorý signalizoval, že spomínaný zákon neplatí všeobecne. Hudobníci Sorge, Tartini a Romieu totiž zistili, že ak súčasne znejú dostatočne silné dva tóny, počuť aj tretí tón. Relatívna výška tretieho tónu nebola týmito ako aj ďalšími pozorovateľmi udávaná jednoznačne. Ako ukázal ďalší výskum tohto javu (v poslednej dobe konaný napr. Plompom [3]), dva dostatočne silné tóny môžu vyvolať vnem nielen jedného, ale viacerých tónov, ktorých frekvenciu možno vyjadriť lineárnou kombináciou daných dvoch (primárnych) tónov. Tieto tóny boli nazvané *kombinačné*. (Je zaujímavé, že Ohm nekonfrontoval svoju definíciu tónu s problémom kombinačných tónov.) Podľa Plompových experimentov frekvencie najpriekaznejších kombinačných tónov sú dané nasledovnými lineárnymi kombináciami frekvencií primárnych tónov: $f_1 - f_2$; $2f_2 - f_1$; $3f_2 - 2f_1$, kde f_1 , resp. f_2 je frekvencia vyššieho, resp. nižšieho primárneho tónu. Vhodné podmienky pre vnem uvedených kombinačných tónov sú vtedy, ak primárne tóny majú frekvencie nad 1000 Hz a kombinačné tóny zas pod 1000 Hz. (Možno sa o tom presvedčiť jednoduchým experimentom s použitím dvoch tónových generátorov, zosilňovačov a reproduktorov.)

Ukázali sme teda, že človek môže počuť (kombinačný) tón s výškou zodpovedajúcou frekvencii, ktorá nie je objektívne prítomná v akustic-

kom signáli. Kombinačné tóny vznikajú v sluchovom aparáte následkom nelineárneho skreslenia pri vyšších hladinách akustického tlaku primárnych tónov než približne 60 dB.

Významné pokusy vedúce k ďalšiemu obmedzeniu platnosti Ohmovho zákona akustiky vykonal Schouten [4] pomocou dômyselného zariadenia, tzv. optickej sirény. Optická siréna mu umožňovala získať zložený zvukový signál pozostávajúci z viacerých zložiek, z ktorých každá mala frekvenciu danú celistvým násobkom základnej frekvencie (väčšinou 200 Hz) a voliteľnú amplitúdu (napr. aj nulovú). Schouten zistil, že zložený zvuk, pozostávajúci z väčšieho počtu harmonicky príbuzných zložiek, je vnímaný ako jeden tón s výškou korešpondujúcou základnej frekvencii, a to aj vtedy, keď zvuk neobsahuje harmonickú vlnu tejto frekvencie. Pri vysvetlení svojich experimentálnych výsledkov vychádzal Schouten z predpokladu, že sluch nedokáže úplne analyzovať komponenty zloženého zvuku na príslušné (čisté) tóny, ale namiesto toho sa dostavuje vnem jedného tónu ostrej farby. Tento vnem nazval Schouten *rezíduum*. Vnem rezídua nemožno vysvetliť pomocou nelineárneho skreslenia v sluchovom aparáte (napr. aj z toho dôvodu, že sa dostavuje pri tak nízkych hladinách akustického tlaku, pri ktorých nedochádza k nelineárnemu skresleniu). Ďalší výskum tohto javu ukázal, že totálne rezíduum, vyznačujúce sa určitou výškou, existuje iba za istých podmienok, je napr. obmedzené na interval výšok zodpovedajúcich frekvenciám približne 80 Hz až 800 Hz.

Pomocou rezídua možno napr. vysvetliť javy, ktoré sa nesprávne vysvetľovali nelineárnym skreslením v sluchu:

a) Spektrum niektorých zvukov, ako napr. vokálu „a“ alebo znejúcej husľovej struny „g“, obsahuje základný tón s relatívne malou amplitúdou (pozri obr. 1). Aj keď je amplitúda základných zložiek spomenutých zvukov veľmi malá, vždy ich vnímame ako tóny s výškou základnej zložky a ostatné harmonické (napriek tomu, že sú silnejšie) ovplyvňujú len farbu tónu.

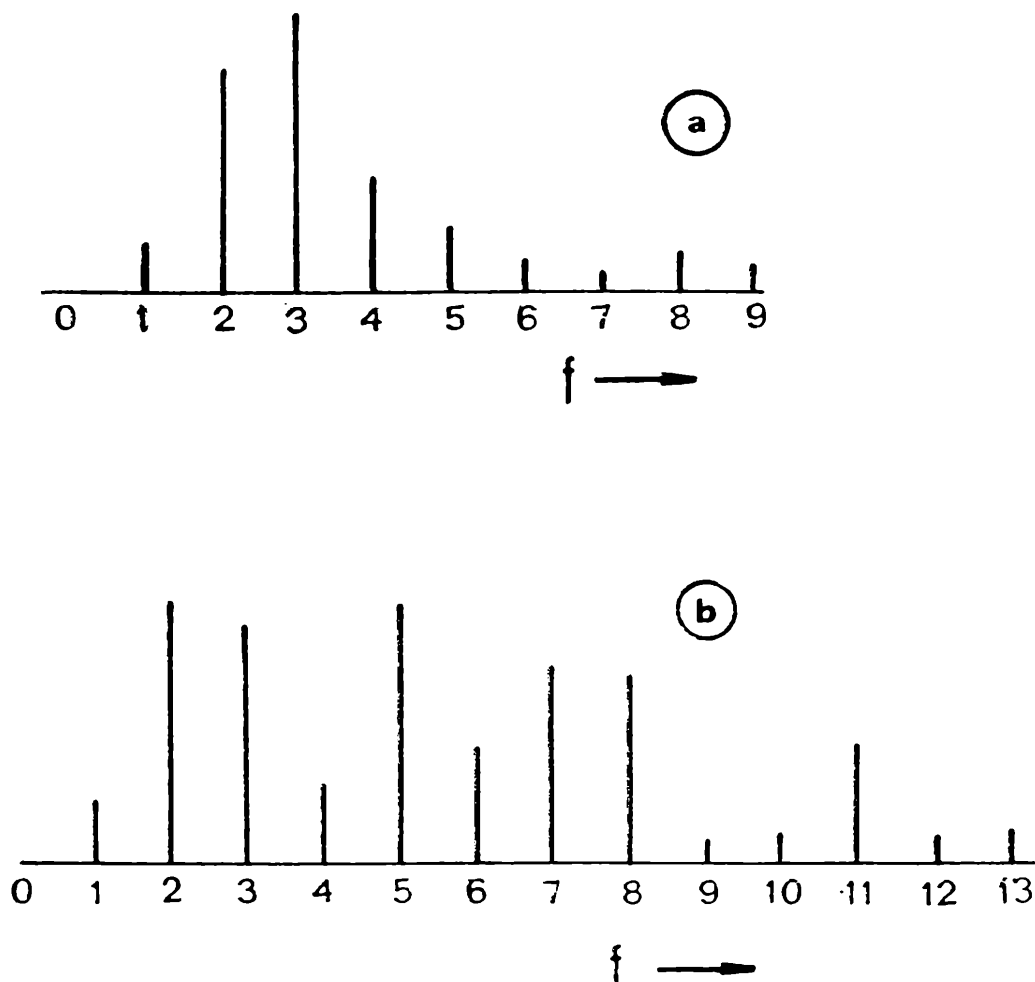
b) Skutočnosť, že v telefónnom spojení sa výška hlasu hovoriaceho zachováva, napriek tomu, že celú oblasť frekvencií pod 300 Hz aparátúra bežne neprenáša (a práve v tejto oblasti leží základný tón mužského a niekedy aj ženského hlasu), možno tiež vysvetliť prostredníctvom rezídua.

c) Základný zvuk zvona, ktorý naprosto nie je obsiahnutý v jeho spektre (a znie nápadne silne oproti ostatným zložkám), možno vysvetliť tiež pomocou rezídua.

Nedostatkom vysvetlenia týchto javov prostredníctvom nelineárneho skreslenia je skutočnosť, že nízky komponent (základnú frekvenciu) počujeme aj pri tak nízkych hladinách akustického tlaku, pri ktorých ako ukázal Plomp [3] nedochádza k nelineárnemu skresleniu v sluchovom systéme.

Záverom uvedieme súhrnne obmednenia platnosti Ohmovho zákona akustiky:

V určitej oblasti výšok nie je pre vnem tónu dôležitá prítomnosť harmonickej vlny príslušnej frekvencie v zvuku.



Obr. 1. Spektrum (a) vokálu „a“; (b) husľovej struny „g“ rozozvučanej sláčikom.

Ak je napr. v (a) základnou frekvenciou 200 Hz, amplitúda tejto zložky je znázornená nad č. 1; nad č. 2 je znázornená amplitúda zložky o frekvencii 400 Hz, č. 3 amplitúda zložky o frekvencii 600 Hz, atď.

2. Objektívna prítomnosť harmonickej vlny (s inak dostatočne veľkou amplitúdou) nemusí viesť zakaždým k vnemu tónu príslušnej výšky.

Literatúra :

- 1] Ohm G. S., Ueber die Definition des Tones nebst daran geknüpfter Theorie der Sirene und ähnlicher tonbildender Vorrichtungen. Ann. Phys. Chem. 59 (1843), 513. (Cit. podľa [2].)
- [2] Helmholtz H. L. F., Die Lehre von Tonempfindungen als physiologische Grundlage für Theorie der Musik. Anglický preklad, INC. New York (1954). [3] Plomp R., Detectability Threshold for Combination Tones. J. Acoust. Soc. Amer. 37. 37 (1965), 1110
- 4] Schouten J. F., Synthetischer Schall, Philips Techn. Rundschau. 6 (1939), 176.

Optické a piezoelektrické měření tloušťky vakuově napařených vrstev

RNDr. IVAN ŠOLC, CSc., Malá Skála

Tloušťku vrstev je nutno měřit provozně přímo v průběhu procesu vakuového napařování. V případě výroby vícevrstvého systému se pro tuto práci nejlépe hodí metody optické a piezoelektrické, které se vzájemně z části doplňují.

Opticky měříme vrstvy nejčastěji na pokusném podložním sklíčku, které se prosvěcuje zdrojem rovnoběžného světla. Jedním čidlem se měří intenzita paprsků procházejících, druhým intenzita paprsků odražených. V obou případech je možné pracovat se světlem bílým nebo se světlem monochromatickým, obvykle mechanicky přerušovaným pro možnost střídavých zesilovačů i vyloučení nežádoucího okolního světla. Při použití světla bílého měříme průměrnou propustnost nebo odrazivost vrstvy (nebo systému vrstev), v případě monochromatického měříme obvykle kolísání intenzity vlivem interference v průběhu napařování vrstvy. Při měření propustnosti v integrálním (bílém) světle intenzita klesá s přibývajícím tloušťkou vrstvy. Závislost intenzity na tloušťce vrstvy může být velmi složitá, jak odpovídá fyzikálně chemickému stavu vrstev, především velmi tenkých [1]. V praxi se však často uplatňuje nejjednodušší závislost exponenciální, kdy intenzita prošlého světla I závisí na tloušťce vrstvy

$$I = I_0 \cdot e^{-ad} \quad (1)$$

Touto metodou lze na př. dobře měřit tloušťku vrstev kovů nebo TiO , které jeví značnou absorpci pro viditelné světlo a stávají se průhlednými až po oxidaci na TiO_2 .

Položíme-li dopadající intenzitu $I_0 = 100 \%$ (po opravě na ztráty odrazem na holém měřícím skle), platí dle (1) pro TiO rovnice:

$$I = 100 \cdot e^{-27 \cdot d}, \quad (1a)$$

kde d je tloušťka vrstvy v mikrometrech. Spektrální obor v tomto případě je od barvy fialové po červenou, jak odpovídá asi citlivosti zraku. V tomto oboru je absorpce TiO na vlnové délce téměř nezávislá. Kdybychom použili fotonky citlivé též v infračerveném oboru, konstanta 27 by pro TiO neplatila, protože TiO má v IČ oboru nižší absorpci a byla by např. okolo 20. To však není vhodné, protože pro případy, kdy je absorpční konstanta a funkcí vlnové délky, při měření v širším spektrálním oboru rovnice (1) neplatí. Vyjádříme-li z rovnice (1) tloušťku d , vychází pro ni logaritmická závislost:

$$d_{(\text{TiO})} = 0,037 \, l_n \frac{I_0}{I} \quad (1b)$$

Použijeme-li za fotonkou logaritmického zesilovače, získáme na jeho výstupu lineární průběh tloušťky vrstvy udávaný měřidlem. Tato metoda vyhovuje nejen pro TiO, nýbrž i pro většinu kovů a obecně vždy, když látka jeví značnější absorpci v širším spektrálním oboru. Výsledky jsou dobře reprodukovatelné, citlivost je vysoká, chyby měření bývají pod 1 %. Při napařování vícevrstvých systémů vždy nastavíme měřidlo pomocí elektrických prvků nebo i světelných clon na největší výchylku a napařujeme až k žádanému dílku stupnice.

Obdoba předchozí metody zavedená pro odraz má jen malý význam. Zato se používá měření intenzity v odraženém světle monochromatickém, kdy se stoupající tloušťkou vrstvy se střídají interferenční maxima a minima. Tato metoda je vhodná u vrstev s malou absorpcí. Průběh intenzity světla se potom řídí indexy lomu a tloušťkou vrstvy podložní a vrstvy napařované, přičemž se uplatňuje případně i soustava vrstev dříve na tuto podložku napařených. Obecná teorie Fresnelova vede pro tyto případy k dosti složitým vzorcům Vašíčkovým, Drudeovým a Rouardovým, případně i jiným, podle způsobu pojetí úlohy [2]. V praxi však se nedopustíme velké chyby, vyjádříme-li závislost intenzity na tloušťce vrstvy vzorcem:

$$I \doteq I_0 \left(\cos^2 \frac{2\pi d \cdot n}{\lambda} + Z \right) \quad (2)$$

Ve vzorci (2) se uplatňuje kosinová funkce, napařujeme-li vrstvu s nižším indexem lomu na podložku s vyšším indexem lomu a sinová funkce při situaci opačné. Označení veličin je obvyklé: λ je vlnová délka monochromatického světla, n index lomu napařované látky a $0 < Z < 1$ je číslo k zbytkové intenzitě světla v interferenčním minimu. Tak např. při napařování SiO na podložku TiO je $Z \doteq 0,1$. Uvažujeme-li práci při vlnové délce asi $\lambda = 0,6 \, \mu\text{m}$, index lomu SiO je přibližně $n \doteq 1,45$, vycházejí pro maxima a minima intenzity podle (2) postupně tyto tloušťky:

Tloušťka SiO	Intenzita
0	základní maximum
0,0862 μm	1 minimum
0,1725 μm	1 maximum
0,2587 μm	2 minimum
0,345 μm	2 maximum

Elektronickými obvody zesilovače lze upravit měřicí soustavu tak, že kompenzačním knoflíkem vyloučíme při měření konstantu Z dle rovnice (2) a maximální hodnotu upravíme tak, že odpovídá maximální výchylce měřidla. Pak může být např. stupnice měřidla lineární o 100 dílcích, které převádíme pomocí vztahu (2) na procenta vztažená na 100 % vzdálenost mezi sousedním minimem a maximem. Podle rovnice (2) pak platí pro tento případ převodní tabulka:

% max min	dílků měřidla	tloušťka SiO
0	0	0, —
10	2,4	0,008625 μm
20	9,5	0,017250 μm
30	20,6	0,025875 μm
40	34,5	0,034500 μm
50	50	0,043125 μm
60	65,4	0,051750 μm
70	79,4	0,060375 μm
80	90,5	0,069000 μm
90	97,6	0,077595 μm
100	100	0,086250 μm

Užitím vhodných nelineárních prvků (Zenerových diod) v obvodech lze opět stupnici přibližně linearizovat, takže při stejných dílcích ukazuje opět přímo procenta vzdálenosti mezi maximem a minimem. Výsledky jsou nejpřesnější uprostřed stupnice měřidla. Největší chyby na okrajích stupnice vyloučíme volbou vlnové délky monochromatického světla tak, aby v okamžiku dosažení požadované tloušťky vrstvy byla ručička ve střední části měřidla (což je vždy možné předem početně zajistit). Odrazová měření jsou opět značně přesná, jak ostatně vyplývá i z tabulky 2. Čteme-li opět přibližně setinu rozsahu stupnice, znamená to pro její střední část chybu odpovídající tloušťce SiO_2 asi $\pm 8 \cdot 10^{-7} \text{ mm}$.

Piezoelektrická měření vycházejí ze závislosti frekvence vlastních kmitů piezoelektrického výbrusu na jeho momentu setrvačnosti, čili pro kmity tloušťkové a tloušťkově střížné na tloušťce destičky. Označíme-li tloušťku destičky t , platí pro vlastní frekvenci tloušťkových kmitů f známý vztah [3]:

$$f = \frac{K}{t}, \quad (3)$$

kde K je konstanta, závislá na materiálu destičky, na krystalografické orientaci úhlu řezu a na typu kmitu. Měrnou hmotnost materiálu destičky označíme ρ_0 , měrnou hmotnost napařené látky ρ . Je-li tloušťka napařené vrstvy d , poklesne frekvence kmitů na F dle vzorce:

$$F = \frac{K}{t + d \frac{\rho}{\rho_0}} \quad (4)$$

Protože při napařování bývá obvykle zacloněna okrajová část kmitající destičky, musíme doplnit rovnici (4) dalším koeficientem L , který respektuje tuto skutečnost a jehož hodnota bývá 1, může však být větší i menší než 1:

$$F = \frac{K}{t + L \frac{\rho}{\rho_0} \cdot d}; \quad (5)$$

napařováním tedy poklesne frekvence z f na f' o rozdíl:

$$\Delta f = f - f' = \frac{K \cdot L \cdot d}{t^2 \left(1 + L \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{d}{t} \right)} \cdot \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (6)$$

Výraz (6) je přesný vztah pro frekvenční změnu vzniklou napařením vrstvy d . Odchyłky od něj mohou vzniknout především zvýšením teploty krystalu v průběhu napařování (ve velkých aparaturách až o 100 °C) nebo změnou stavu vazeb okolních rezonancí [3, 4]. Vzhledem k těmto vlivům, které nelze zcela vyloučit, není nutno uvažovat ve jmenovateli (6) druhý člen závorky, který je mnohem menší než 1. Vzorec (6) se pak zjednoduší na:

$$\Delta f \doteq K \cdot L \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{d}{t^2}. \quad (7)$$

Rovnice (7) tedy vyjadřuje, že změna frekvence (pokles) je lineární funkcí tloušťky d .

Propočítejme konkrétní případ. Užijeme křemenného řezu AT [3], kde $K = 1,67$ MHz/mm, $\rho_0 = 2,65$ g/cm³. Tloušťka destičky výbrusu nechť je přibližně 0,5 mm, což odpovídá základní frekvenci $f \doteq 3,34$ MHz. Na tento výbrus napaříme SiO (u něhož předpokládáme $\rho = \rho_0$) v uspořádání, v němž je přibližně $L \doteq 1$. Tloušťka napařené vrstvy nechť odpovídá prvnímu minimu dle tabulky 1, čili $d = 8,62 \cdot 10^{-3}$ mm. Dosažením těchto hodnot do vztahu (7) vychází $\Delta f \doteq 576$ Hz. Vzhledem k uvedeným vlivům teploty vazeb lze odhadnout spolehlivost čtení s chybou asi ± 5 %, což odpovídá přibližně stejné přesnosti měření jako při metodách optických.

Závěrem možno shrnout: Optické měřicí metody na průchod a na odraz jsou velmi přesné, chyba měření je kolem 10⁻⁶ mm. V interferenční úpravě poskytují možnost kalibrace vyznačených tloušťek vrstev, odpovídajících vzniku maxim a minim. Linearizace stupnice tloušťky na měřidle lze dosáhnout úpravou elektrických obvodů. Piezoelektrické měření

poskytuje přímo lineární údaje, jeho kalibrace je možná kombinací s měřením optickým, výsledek piezoelektrických měření však může být poněkud zkreslen vlivem teploty a změny stavu vazeb vlastních rezonancí výbrusů.

Literatura :

- [1] Methfessel S.: Dünne Schichten, Halle 1953.
- [2] Vašíček A.: Optika tenkých vrstev I, ČSAV 1956.
- [3] Petržílka V. a kol.: Piezoelektrina, ČSAV 1960.
- [4] Bergman L : Ultraschall — Zürich 1954, Moskva 1956.
- [5] Macleod H. A.: Thin-Film optical Filters — London 1969.

olympiády

Třetí kolo kat. A XV. roč. FO

Ve dnech 24.—26. dubna 1974 probíhalo v Nitře třetí kolo kat. A XV. roč. FO. Účastníci byli vybráni z nejlepších řešitelů 2. kola kat. A v jed-

Tabulka 1

Kraj	Počet všech účastníků	Počet úspěšných řešitelů	Z toho počet vítězů	Počet neúspěšných řešitelů
Praha	17	5	2	12
Středočeský	3	2	1	1
Jihočeský	3	1	—	2
Západočeský	3	1	—	2
Severočeský	5	1	—	4
Východočeský	9	5	4	4
Jihomoravský	13	2	2	11
Severomoravský	11	2	1	9
Bratislava	10	6	1	4
Západoslovenský	2	—	—	2
Středoslovenský	2	—	—	2
Východoslovenský	2	—	—	2
Celkem	80	25	11	55

Tabulka 2

Pořadí	Jméno žáka	Škola
1.	Svoboda Zdeněk	G Rakovník
2.	Hruška Jiří	G Hradec Králové
3.—5.	Fexa Jiří	G Praha 2, W. Piecka
3.—5.	Hubáček Jaroslav	G Hradec Králové
3.—5.	Kotrba Pavel	G Praha 1, Štěpánká
6.—9.	Kindl Dobroslav	G Pardubice
6.—9.	Steinhart Miloš	G Hradec Králové
6.—9.	Šimša Jaromír	G Žďár nad Sázavou
—9.	Varga Štefan	G Bratislava, Novohradská
10.	Kuchta Radomír	G Havířov, Tajovského
11.	Horák Michal	G Brno, kpt. Jaroše

notlivých krajích, a to všichni až po klasifikaci 1133 a z klasifikace 1233 jen dva, jichž bylo zapotřebí, aby kraj byl zastoupen aspoň dvěma účastníky (ZSK a VSK). Celkem bylo pozváno 81 účastníků, z nichž se nedostavil jeden řešitel (ze StřČK). Tištěné pozvánky byly zaslány každému účastníku.

Prvá tabulka uvádí pro každý kraj počet účastníků 3. kola, počet úspěšných řešitelů, z toho počet vítězů a počet neúspěšných řešitelů.

Třetí kolo bylo slavnostně zahájeno v aule pedagogické fakulty v Nitře za účasti ministra školství SSR s. prof. ing. Št. Chochola, CSc. Po slavnostním zahájení byl v aule kulturní pořad. Členové ÚVFO byli přijati děkanem pedagogické fakulty.

Teoretické úlohy řešili účastníci 25. dubna a laboratorní úlohu 26. dubna na pedagogické fakultě. Po absolvování teoretických úloh byla uspořádána exkurse do Tesly - Vráble, na zámek Topolčianky a do arboreta v Mlyňanech. Večer se promítal film s tematikou SNP.

Z 80 účastníků bylo jen 25 úspěšných řešitelů a z toho 11 vítězů. Přehled výsledků podle jednotlivých krajů udává tabulka 1. Jména vítězů jsou uvedena v tabulce 2.

Prvých 16 řešitelů dostalo odměnu ve výši 1200 Kčs až 450 Kčs. SSM věnovalo každému žákovi knihu.

Prof. dr. ROSTISLAV KOŠŤÁL, Brno

Sedmá mezinárodní fyzikální olympiáda ve Varšavě

Prof. dr. ROSTISLAV KOŠŤÁL, Brno

Po dvou letech byla na závěr šk. r. 1973/74 opět uspořádána Mezinárodní fyzikální olympiáda v pořadí již sedmá (VII. MFO). Jejím organizátorem byla Polská lidová republika. MFO probíhala ve dnech 8. až 20. července 1974 ve Varšavě. Zúčastnilo se jí 8 států a to sedm, které se obvykle zúčastňují, Bulharsko (BLR), Československo (ČSSR), Maďarsko (MLR), Německá demokratická republika (NDR), Polsko (PLR), Rumunsko (RSR) a Svaz sovětských socialistických republik (SSSR) a nově Německá spolková republika (NSR). Z dřívějších účastníků se nezúčastnila Jugoslávie, Francie a Kuba.

Z každého státu bylo pozváno 5 soutěžících. Podle výsledků 3. kola kat. A a podle výsledků na soustředění našich kandidátů pro mezinárodní fyzikální olympiádu, konaném od 19. do 29. června 1974 ve Vyškově, byli vybráni do našeho družstva:

1. Zdeněk Svoboda, 4.r. G Rakovník,
2. Dobroslav Kindl, 4.r. G Pardubice,
3. Jiří Hruška, 4.r. G Hradec Králové,
4. Štefan Olejník, 4.r. G Bratislava, Novohradská,
5. Jaroslav Hubáček, 4.r. G Hradec Králové.

Vedoucím družstva byl místopředseda ÚVFO doc. dr. Ivan Náter a pedagogickým instruktorem člen užšího ÚVFO doc. dr. Bohumil Vlach.

Předsedou mezinárodní fyzikální komise byl jmenován prof. dr. hab. Iwo Bialynicky-Birula, vedoucí katedry teoretické fyziky přírodovědecké fakulty university ve Varšavě.

Prvá úloha byla z atomistiky, druhá z optiky, třetí z technické termodynamiky a laboratorní úloha byla z elektřiny. Na vypracování teoretických úloh byla vyměřena doba 5 hodin, na vypracování laboratorní úlohy rovněž doba 5 hodin. Teoretické úlohy řešili studenti 8. července, laboratorní úlohu 10. července. Každá teoretická úloha se hodnotila na nejvýš 10 body, laboratorní úloha na nejvýš 20 body. Mohl tedy každý soutěžící dosáhnout maximálně 50 bodů.

Komise stanovila, že nejvyšší počet dosažených bodů bude tvořit 100 % bodů, takže ceny a pochvalné uznání byly přiděleny takto:

- | | |
|------------------|-------------|
| 1. cena | 46—42 bodů, |
| 2. cena | 41—36 bodů, |
| 3. cena | 35—30 bodů, |
| pochvalná uznání | 29—23 bodů. |

Následující tabulka uvádí pořadí států podle získaných bodů a k tomu počet cen a pochvalných uznání.

Po- radí	Stát	Počet bodů	Počet cen			Počet pochv. uznání	Počet neúspěš- ných
			1.	2.	3.		
1.	SSSR	150	—	—	2	3	—
2.	PLR	138	2	—	—	—	3
3.	MLR	137	1	—	2	—	2
4.	NDR	135	—	—	2	2	1
5.	RSR	116	—	—	—	2	3
6.	ČSSR	107	—	—	2	—	3
7.	BLR	69	—	—	—	—	5
8.	NSR	31	—	—	—	—	5

Byly tedy uděleny:

3 první ceny, žádná druhá cena, 8 třetích cen a 7 pochvalných uznání; 22 (tj. přes 50 %) soutěžících bylo neúspěšných.

Naši soutěžící dosáhli mezi 40 soutěžícími těchto výsledků:

Pořadí	Jméno	Úloha				Cel- kem	Vyhodno- cení
		1	2	3	4		
4.—7.	Hruška Jiří	6	10	2	17	35	3. cena
4.—7.	Svoboda Zdeněk	9	8	1	17	35	3. cena
28.	Kindl Dobroslav	9	0	0	7	16	neúspěšný
31.—32.	Olejník Štefan	6	0	0	7	13	neúspěšný
24.—35.	Hubáček Jaroslav	8	0	0	0	8	neúspěšný

Na jednotlivé úlohy získala družstva tento počet bodů:

Pořadí	Stát	Bodů za úlohu				Celkem bodů
		1	2	3	4	
1.	SSSR	38	17	18	77	150
2.	PLR	35	22	21	60	138
3.	MLR	28	24	20	65	137
4.	NDR	27	25	3	80	135
5.	RSR	22	38	18	38	116
6.	ČSSR	38	18	3	48	107
7.	BLR	3	18	13	35	69
8.	NSR	8	0	1	22	31
Celkem bodů v %		199 49,8	162 40,5	97 24,3	425 53,1	883 44,2

Naše družstvo patrilo u úlohy z atomistiky k najlepším (stejný počet bodů se SSSR), u úlohy z technické termodynamiky k nejslabším (společně s NDR a lepší jen než NSR).

Závěrečného aktu — vyhlášení výsledků a rozdělení cen — zúčastnil se ministr školství Jerzej Kuberski. Všichni účastníci a zvláště úspěšní řešitelé dostali věcné dary značné hodnoty, zakoupené MŠ.

Již v týdnu během soutěže a pak celý následující týden byly uspořádány autobusové zájezdy po Polsku.

Matematické nádeje sůťažili v Erfurte

(Správa o XVI. medzinárodnej matematickej olympiáde)

RNDr. JOZEF MORAVČÍK, CSc., Žilina

1. Organizácia a priebeh súťaže

O starostlivej organizačnej príprave XVI. MMO najlepšie svedčí skutočnosť, že už počas XV MMO v júli 1973 v Moskve dostali vedúci zúčastnených delegácií od vedenia delegácie NDR jej rámcový program a organizačný poriadok súťaže. Samotný priebeh XVI. MMO len potvrdil neobyčajnú pozornosť, ktorú súdruhovia z NDR jej organizácii venovali. Poriadateľmi súťaže, ktorá sa konala od 4. do 17. júla 1974, boli ministerstvo školstva NDR, Matematická spoločnosť NDR (Mathematische Gesellschaft der DDR) a ústredný výbor FDJ (mládežnícka organizácia NDR). Vlastná súťaž sa konala v krajskom meste Erfurte na juhozápade NDR a záver so slávnostným vyhlásením výsledkov bol v hlavnom meste NDR — Berlíne.

Nielen veľmi dobrou organizáciou, ale aj počtom zúčastnených krajín patrila XVI. MMO medzi najvydarenejšie z doterajších medzinárodných stretnutí mladých matematických nádejí. K družstvám 16 krajín, ktoré sa zúčastnili XV. MMO v Moskve, pribudli ako noví účastníci MMO družstvá USA a Vietnamskej demokratickej republiky. Na XVI. MMO do NDR vyslalo teda svoje družstvá týchto 18 krajín: Rakúsko (A), Bulharsko (BG), Kuba (C), ČSSR (CS), NDR (DDR), Francúzsko (F), Veľká Británia (GB), Maďarsko (H), Mongolsko (M), Holandsko (NL), Poľsko (PL), Rumunsko (R), Švédsko (S), Fínsko (SF), ZSSR (SU), USA (USA), Vietnamská demokratická republika (VN), a Juhoslávia (YU). S výnimkou Kuby (7 žiakov) a VDR (5 žiakov) boli všetky družstvá osemčlenné, ako to stanovoval organizačný poriadok súťaže. Celkom na XVI. MMO sůťažilo teda 140 žiakov.

Vedúci delegácií jednotlivých krajín, ktorí tvorili medzinárodnú jury súťaže, sa schádzali do Erfurtu vo štvrtok 4. 7. 1974. Hneď po príchode na železničnú stanicu či letovisko ich organizátori odviezli do neďalekého Weimaru (23 km), strediska nemeckej klasiky a humanistických tradícií, kde boli ubytovaní v interhoteli Elephant.

Po celý čas svojho pobytu v Durýnsku (5.—12. 7.) pracovala jury v priestoroch Hochschule für Architektur und Bauwesen vo Weimare. Na prvom zasadnutí jury jej prezident prof. dr. Engel privítal vedúcich delegácií zúčastnených krajín, zaželel im úspešnú prácu a príjemný pobyt v NDR a informoval, že na XVI. MMO bolo pozvané tiež Taliansko, ktoré aj prisľúbilo účasť, ale v poslednej chvíli sa ospravednilo. Predmetom rokovania jury boli dva varianty po 6 úloh, ktoré z cca 50 úloh navrhnutých z jednotlivých prihlásených krajín do 15. 4. vybrali členovia komisie organizačného výboru pre úlohy. Pri výbere vychádzali z toho, aby každý variant obsahoval úlohy z rôznych oblastí matematiky, ktoré by boli pôvodné a pokiaľ možno rôznej obťažnosti. Do prvého variantu zaradili pomerne jednoduchý „hlavolam“ (USA), zaujímavú úlohu na odhad nekonečného súčtu (PL), netradičnú úlohu o mnohočlenoch s celočíselnými koeficientmi (S), veľmi peknú dôkazovú úlohu na odhad minima istej konečnej množiny reálnych čísel (SU), obťažne formulovateľnú úlohu na dôkaz existencie zhodných trojuholníkov v istom nekonečnom systéme trojuholníkov so spoločnou opísanou kružnicou (GB) a úlohu zo školskej teórie čísel využívajúcu určité prvky kombinatoriky (R). Druhý variant obsahoval dôkazovú úlohu zo školskej teórie čísel tradičného charakteru (PL), úlohu na nájdenie množiny hodnôt istej homogénnej funkcie štyroch reálnych premenných (NL), dôkaz identity založený na použití trigonometrických funkcií (C), pomerne jednoduchú úlohu z klasickej planimetrie (SF), zaujímavú a nie veľmi náročnú úlohu na pokrytie (BG) a konečne veľmi peknú, ale značne náročnú úlohu kombinatorického charakteru (SU).

Základom pre diskusiu mal byť prvý navrhnutý variant. Pre námietky viacerých delegátov boli z neho vynechané poľská a sovietská úloha (v určitých variantoch už boli známe) a úloha britská (pre obťažnosť formulácie a príslušnú náročnosť pre klauzúru). Nahradené boli fínskou, bulharskou a holandskou úlohou z druhého variantu, takže na záver sobotňajšieho zasadnutia jury bol jednomyslné prijatý nižšie uvedený komplex súťažných úloh. Formulácii textov úloh v rokovacích jazykoch (nemčina, ruština, angličtina, francúzština), ktorá patrí už tradične k najnáročnejším povinnostiam jury, boli venované dve zasadnutia jury: v sobotu 6. 7. popoludní a v nedeľu 7. 7. predpoludním. Pri nej bol podstatne zmenený najmä pôvodný text americkej úlohy. Na záver nedeľného predpoludňajšieho zasadnutia schválila jury jednomyslné návrh vedúceho československej delegácie na rozdelenie úloh pre oba súťažné dni

ako aj maximálne počty bodov za úplné riešenie jednotlivých úloh. Na riešenie každej trojice úloh boli stanovené 4 hodiny čistého času.

Nedeľňajšieho zasadnutia jury sa zúčastnili už aj zástupcovia vedúcich delegácií, ktorí mali družstvá priviesť do Erfurtu najneskoršie v sobotu 6. 7. Žiaci boli ubytovaní v modernom internáte Pädagogische Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“ v Erfurte, zatiaľ čo zástupcovia vedúcich delegácií sa ubytovali spoločne so svojimi vedúcimi vo Weimare. O žiakov jednotlivých družstiev sa po celý čas pobytu v NDR starali okrem tlmočníkov aj nemeckí sprievodcovia — členovia FDJ.

Slávnostné otvorenie XVI. MMO sa konalo 8. 7. ráno v aule Pädagogische Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“ v Erfurte. Po ňom čakali na jej účastníkov v dvoch štvorhodinových klauzúrach nasledujúce úlohy:

Prvý deň súťaže — 8. júla 1974

1. Traja hráči A , B a C hrajú hru, pri ktorej používajú tri hracie karty. Na každej z týchto kariet je napísané číslo: na prvej p , na druhej q , na tretej r , pričom platí $0 < p < q < r$. Pri každom kole hry sa zamiešajú a každý hráč dostane jednu z nich. Potom kartu vráti a dostane za ňu toľko guľčiek, koľko udáva na nej napísané číslo.

Hra trvala N kôl, $N \geq 2$. Na konci hry mal hráč A celkom 20 guľčiek, hráč B 10 a hráč C 9 guľčiek.

Ak viete, že v poslednom kole hráč B dostal r guľčiek, určite, ktorý z hráčov dostal v prvom kole q guľčiek. (USA, 5 bodov).

2. Označme veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC pri vrcholoch A , B , C v uvedenom poradí α , β , γ .

Dokážte, že nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby na úsečke AB existoval bod D tak, že dĺžka úsečky CD je geometrickým priemerom dĺžok AD a BD , je splnenie nerovnosti.

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \leq \sin^2 \frac{\gamma}{2} \quad (\text{Fínsko, 6 bodov})$$

3. Dokážte, že pre žiadne prirodzené číslo n nie je číslo

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$$

deliteľné číslom 5. (Rumunsko, 8 bodov).

Druhý deň súťaže — 9. 7. 1974

4. Rozdeľme šachovnicu pozostávajúcu z 8×8 polí na p neprekrývajúcich sa pravouhlých rovnobežníkov. Uvažujme o všetkých takýchto rozdeleniach šachovnice, pre ktoré platia nasledujúce podmienky:

a) Každý z pravouhlých rovnobežníkov pozostáva z celých polí a obsahuje bielych polí práve toľko ako čierných.

b) Ak a_i znamená počet bielych polí v i -tom rovnobežníku, potom platí: $a_1 < a_2 < \dots < a_p$.

Nájdite najväčšie číslo p , pre ktoré je také rozdelenie šachovnice možné. Pre toto p určite všetky postupnosti $a_1, a_2, \dots, a_p$, pre ktoré možno také rozdelenie šachovnice realizovať. (Bulharsko, 6 bodov).

5. Určite množinu hodnôt, ktoré môže nadobúdať súčet

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d},$$

keď a, b, c, d sú ľubovoľné kladné reálne čísla. (Holandsko, 7 bodov).

6. Nech P je mnohočlen s celočíselnými koeficientmi, ktorý nie je identicky rovný konštante a nech $n(P)$ je počet všetkých navzájom rôznych celých čísel k , pre ktoré platí: $[P(k)]^2 = 1$.

Dokážte, že

$$n(P) - \deg(P) \leq 2,$$

kde $\deg(P)$ znamená stupeň mnohočlena P . (Švédsko, 8 bodov).

V zátvorke za textom je uvedené, ktorá krajina úlohu navrhla a maximálny počet bodov, ktorý bolo možné získať za úplné riešenie úlohy. Tieto údaje však žiakom pri súťaži oznámené neboli. Počas súťaže boli žiaci rozdelení do 8 učební, v každej z nich bol najviac jeden príslušník každého družstva. Po oba súťažné dni najneskoršie pol hodiny po obdržaní textov mohli žiaci predkladať písomné otázky na prípadné nejasnosti v textoch. Na tieto otázky po predchádzajúcom prerokovaní v jury písomne odpovedali vedúci delegácií.

Hneď popoludní v prvý deň súťaže začali vedúci delegácií a ich zástupcovia s korektúrami a hodnotením žiackých riešení. Hodnotenia riešení jednotlivých úloh koordinovali trojčlenné skupiny matematikov usporiadajúcej krajiny. Riešenia žiakov družstva NDR — ako je to už v prípade družstva poriadajúcej krajiny tradičné — koordinovali vedúci delegácií tých krajín, ktoré navrhli úlohy.

Pri koordinácii hodnotení sa nevyskytli žiadne vážnejšie nedorozumenia, takže jury mala pri svojom záverečnom zasadnutí, ktoré sa konalo v piatok 12. 7. predpoludním, uľahčenú úlohu. Stanovila hranice bodov pre udelenie cien, čo nedalo veľa práce vzhľadom na ustanovenie organizačného poriadku, podľa ktorého nemal počet odmenených v zásade prekročiť polovicu všetkých účastníkov a počty prvých, druhých a tretích cien mali byť, pokiaľ možno, v pomere 1 : 2 : 3. Vychádzajúc z tohto ustanovenia rozhodla jury o hraniciach cien takto: I. cena od 40 do 38 bodov, II. cena od 37 do 30 bodov a III. cena od 29 do 23 bodov. Zna-

menalo to, že 10 žiakov dostane I. 24 II. a 37 III. cenu, čo je spolu 71 odmenených zo 140 účastníkov XVI. MMO. Napokon jury prerokovala 4 návrhy na udelenie diplomov za originálne a zvlášť elegantné riešenia. Jeden z nich zamietla (jednému z maďarských žiakov za riešenie 2. úlohy) a ostatné tri schválila (jednému žiakovi z družstva Švédska za riešenie 5. úlohy a jednomu žiakovi z družstiev USA a Maďarska za riešenie 6. úlohy).

Organizátori XVI. MMO pripravili pre jej účastníkov aj bohatý spoločenský program. Ešte pred súťažou sa žiaci mali možnosť zoznámiť s pamätihodnosťami Erfurtu, ktorý je vo svete známy o.i. medzinárodnými výstavami kvetov. Popoludnie prvého dňa súťaže strávili na športoviskách študentského domova, v ktorom boli ubytovaní, a po druhej klauzúre pre nich usporiadatelia zorganizovali mládežnícku zábavu, na ktorú okrem výbornej hudby zabezpečili aj dostatočný počet dievčat z erfurtských stredných škôl. Medzi účastníkmi XVI. MMO boli totiž len dve dievčatá: Sarah-Maria Duyos z Kuby a naša Alena Vencovská.

Kým sa vedúci delegácií a ich zástupcovia vo Weimare plne zamestnávali korektúrami, hodnotením a koordináciou riešení, absolvovali žiaci dve celodenné autokarové exkurzie do okolia Erfurtu. Navštívili o.i. známe stredisko zimných športov Oberhof v Durýnskom lese, dejisko nedávnych majstrovstiev sveta v športovej strelbe v Suhle, Eisenach a Wartburg. Počas záverečného zasadnutia jury si prezreli Weimar, kde navštívili Goetheho a Schillerovo múzeum a v piatok popoludní spoločne s vedúcimi delegácií a ich zástupcami vykonali exkurziu do múzea na mieste niekdajšieho koncentračného tábora v Buchenwalde, v ktorom fašistické jednotky SS počas 2. svetovej vojny povraždili 56 000 ľudí, príslušníkov takmer všetkých európskych národov.

S Durýnskom sa účastníci XVI. MMO rozlúčili v sobotu 13. 7., kedy rýchlikom odcestovali do Berlína na záver súťaže. Počas berlínskeho pobytu podnikli vyhliadkovú plavbu po Spréve a priľahlých jezerách, navštívili viac než stotisícové krajské mesto Potsdam, kde si prezreli niekdajší kráľovský letohrádok Sanssouci s rozľahlým parkom a historické miesto konania Postupimskej konferencie Cecilienhof.

Slávnostné odovzdanie diplomov úspešným účastníkom olympiády sa uskutočnilo v pondelok 15. 7. popoludní v Kongresovej hale na Alexandrovom námestí v Berlíne. Na tejto slávnosti v zastúpení súťažiacich žiakov poďakovala organizátorom olympiády za vytvorenie veľmi dobrých podmienok pre súťaž i bohatý spoločenský program členka čl. družstva Alena Vencovská. Kuriozitou záverečnej slávnosti bolo to, že na nej účinkoval ako klavírista Wolfgang Burmeister, úspešný účastník niekoľkých MMO, ktorý vysokoškolské štúdium matematiky absolvoval za tri roky.

Večer po slávnosti sa opäť v Kongresovej hale konala záverečná spoločná večera, počas ktorej všetci účastníci dostali spomienkové darčeky

od jej organizátorov. Celý večer sa niesol v radostnom a priateľskom ovzduší. Mladé matematické nádeje si vymieňali adresy a prísluby ďalších vzájomných kontaktov.

Na rozdiel od predchádzajúcich MMO sa tým oficiálny program XVI. MMO ešte neskončil. Jej účastníci ešte v utorok absolvovali prehliadku Berlína a mali o.i. možnosť pozrieť sa na hlavné mesto NDR z 203 metrovej výšky pri výstupe na berlínsku televíznu vežu.

Jednotlivé delegácie začali odchádzať v utorok večer. Delegáciu ČSSR odvážala Vindobona z berlínskej stanice Ostbahnhof v stredu predpoludním. Jej členovia odchádzali zo susedného socialistického nemeckého štátu bohatší o mnohé dojmy a pekné zážitky a tí, ktorí majú ešte možnosť, plní predsavzatí urobiť všetko pre to, aby ich budúca cesta na MMO bola úspešnejšia.

2. Výsledky súťaže

Najdôležitejšou a zároveň najťažšou úlohou medzinárodnej jury MMO je každoročne výber súťažných úloh. Jej náročnosť narastá s rastom počtu zúčastnených krajín hlavne preto, že sa zmenšuje prienik množín tých partii matematiky, ktoré sa vyučujú na stredných školách v zúčastnených krajinách. V návrhoch úloh, ktoré prišli organizátorom XVI. MMO, bolo napr. málo vhodných úloh z geometrie a v predloženom súbo-
re, ako to ukázali výsledky, nebolo prakticky úloh strednej náročnosti. Na plný počet bodov riešilo zo 140 účastníkov súťaže 1. úlohu 112, 2. úlohu 67, 3. úlohu 35, 4. úlohu 90, 5. úlohu 27 a 6. úlohu 35. Na druhej strane najviac 1 bod získalo za riešenie 1. úlohy 6, 2. 42, 3. 80, 4. 4, 5. 56 a 6. 79. Ešte presnejšie vyjadrenie relatívnej úspešnosti riešenia jednotlivých úloh dáva pomer počtu udelených bodov k celkovému možnému počtu bodov, ktorý je vyjadrený v % takýto: 1. 90,3 %, 2. 62,7 %, 3. 35,1 %, 4. 84,4 %, 5. 44,6 %, 6. 38,4 %.

Hoci MMO je súťažou jednotlivcov, každoročne býva zvykom zostavovať neoficiálne poradie družstiev podľa súčtu dosiahnutých bodov. Na XVI. MMO je toto poradie ešte skreslené tým, že dve krajiny, Kuba a Vietnamská demokratická republika nevyužili možnosť poslať do NDR kompletne osemčlenné družstvá a vyzerá takto (v zátvorke je uvedený tiež počet prvých, druhých a tretích cien ako aj celkový počet odmenených členov družstva): 1. ZSSR 256 ($2 + 3 + 2 = 7$), 2. USA 243 ($0 + 5 + 3 = 8$), 3. Maďarsko 237 ($1 + 3 + 3 = 7$), 4. NDR 236 ($0 + 5 + 2 = 7$), 5. Juhoslávia 216 ($2 + 1 + 2 = 5$), 6. Rakúsko ($1 + 1 + 4 = 6$), 7. Rumunsko 199 ($1 + 1 + 3 = 5$), 8. Francúzsko 194 ($1 + 1 + 3 = 5$), 9. Veľká Británia 188 ($0 + 1 + 3 = 4$), 10. Švédsko 187 ($1 + 1 + 0 = 2$), 11. Bulharsko 177 ($0 + 1 + 4 = 5$), 12. ČSSR 158 ($0 + 0 + 2 = 2$), 13. Vietnamská demokratická republika 146 ($1 + 1 + 2 = 4$), 14. Poľsko 138 ($0 + 0 + 2 = 2$), 15. Holandsko 112 ($0 + 0 +$

1 = 1), 16. Fínsko 111 ($0 + 0 + 1 = 1$), 17. Kuba 65 (0), 18. Mongolská ľudová republika 60 (0). Veľkým prínosom sa ukázali byť družstvá krajín, ktoré sa MMO zúčastnili po prvý raz. Družstvo USA sa vklínilo medzi už tradične najlepšie družstvá ZSSR, Maďarska a NDR a bolo jediným družstvom, ktorého všetci členovia získali cenu. Výsledky, ktoré dosiahlo nekompletné družstvo VDR, boli pre všetkých nečakaným prekvapením. V porovnaní s minulým rokom sa značne zlepšili najmä družstvá Juhoslávie, Rakúska, Švédska, Bulharska a čiastočne i družstvo Rumunska. Francúzske družstvo potvrdilo, že jeho vlašajší výsledok nebol náhodný. Nečekané slabé výsledky dosiahlo družstvo Poľska a, žiaľ, aj ČSSR. Výsledky ostatných družstiev sú v zhode s doterajšími zvyklosťami s výnimkou snáď len Veľkej Británie, ktorej družstvo nekleslo pri svojich doterajších štartoch na MMO v neoficiálnom poradí pod šiestu priečku. Celkove možno povedať, že dosiahnuté výsledky sú vyrovnanejšie než na niekoľkých predchádzajúcich MMO a aj napriek trom pomerne náročným úlohám sa našlo až 6 žiakov, ktorí získali plný počet 40 bodov, a to po jednom z družstiev Rakúska, Francúzska, Maďarska, Rumunska, Švédska a ZSSR.

(Pokračovanie)

NAŠE SOUTĚŽ

V soutěži o ceny, kterou jsme vypsalí v minulém čísle Rozhledů, otiskujeme další příklady, a to z fyziky a konstruktivní geometrie.

Řešení těchto příkladů, upravená podle návodu v 2. čísle, zašlete nejpozději do 15. února 1975 na adresu redakce: Praha 2, Trojanova 13, PSČ 12134 s označením: *Naše soutěž*.

Úlohy k řešení

Konstruktivní geometrie

1. Jsou dány: přímka a , na ní bod A , přímka b různoběžná s přímkou a , ale neprocházející bodem A a rovina τ různoběžná s přímkami a , b a neprocházející bodem A . Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká roviny τ , přímky b a přímky a v bodě A . Úlohu proveďte pro případ: $a = [R(-9; 3; 0)]$, $A(-2, 5; 3; 7, 5)$, $b = [R; L(6; 3; 2, 5)]$, $\tau(8; 120^\circ; 90^\circ)$.

František Hradecký

2. Sestrojte kulovou plochu dotýkající se dané roviny π , kulové plochy κ a jdoucí body A, B . Všechny dané útvary leží v témž poloprostoru vyřazeném rovinou π .

Stanislav Horák

3. V rovině je dán trojúhelník ABC a přímka o . Určete osovou afinitu s osou o tak, aby obrazem trojúhelníka ABC byl trojúhelník $A'B'C'$, jehož osy vnitřních úhlů jsou obrazy os vnitřních úhlů trojúhelníka ABC .

Emil Kraemer

4. Zobrazte kulovou plochu, která se z bodů $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(0; 0; a)$ jeví v zorných úhlech $\alpha = 60^\circ$ a z počátku $P(0; 0; 0)$ v zorném úhlu $\beta = 90^\circ$

Ota Setzer

Fyzika

1. V jaderné fyzice se zpravidla klidové hmotnosti elementárních částic vyjadřují v energetických jednotkách tzv. elektronvoltech ($1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$, $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$). Například klidová hmotnost elektronu vyjádřená v kg je $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ a v energetických jednotkách $E_e = m_e c^2 = 9,11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 = 81,99 \times 10^{-15} \text{ J} = 0,51 \text{ MeV}$. Konstanta c je rychlost světla.

Vyjádřete:

- klidovou hmotnost těžké elementární částice Σ^- hyperonu v kg, víte-li, že je 2347,72 krát větší než klidová hmotnost elektronu.
- klidovou hmotnost částice Σ^- v energetických jednotkách MeV.

Zdeněk Janout

2. Radioaktivní jádro uranu ${}_{92}^{238}\text{U}$, které je v klidu, se rozpadá na jádro ${}_{90}^{234}\text{Th}$, přičemž vyletuje částice s hmotností m_1 . Energie E_r uvolněná při rozpadu je rovna 4,26 MeV ($1 \text{ MeV} = 1,602 \times 10^{-13} \text{ J}$).

- Určete, o jaký typ radioaktivity se jedná, zda jde o rozpad beta či alfa.
- Užitím zákonů zachování energie a hybnosti vypočítejte kinetickou energii vyletující částice v energetických jednotkách MeV.

Zdeněk Janout

3. Má sa navrhnuť spirála ohrievača o výkone $P = 700 \text{ [W]}$ z nichromového drôtu o priemeru $d = 0,72 \text{ [mm]}$; spirála má dávať teplo

pri teplote $\vartheta_1 = 870$ [°C], kým teplota okolia sa predpokladá $\vartheta_0 = 20$ [°C]. Nichrom má merný odpor $\varrho_0 = 1,1 \cdot 10^{-4}$ [Ω cm] pri teplote $\vartheta_0 = 20$ [°C], teplotný koeficient odporu je $\alpha = 1,73 \cdot 10^{-4}$ [°C⁻¹], napätie el. siete je $U = 240$ [V]. Stanovte dĺžku l navrhovanej spirály obecné, spravte dimenzionálnu skúšku najdeného vzorca a urobte výpočet pro zadané hodnoty.

Evžen Říman

4. Dve telesá o hmotnostiach m_1, m_2 a konštantných rýchlostiach $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sa pohybujú po vodorovnej rovine. Dané hodnoty sú: $m_1 = 45$ [kg], $m_2 = 36$ [kg]; $\mathbf{v}_1 = 12 \mathbf{i} + 19 \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_2 = -6 \mathbf{i} + 1 \mathbf{j}$.

Nájdite: α) Rýchlosť hmotného stredu. Pokyn: hmotný stred = ťažisko T = barycentrum (z gréc. „barys“ = ťažký) je myslený bod, v ktorom možno predpokladať, že pôsobí celá tiaživá sila („váha“ G) telesa; jeho polohový vektor $\mathbf{r}_T$ (počítaný pre ľubovoľne zvolený počiatok súradníc) je pre 2 hmotné body daný vzťahom

$$\mathbf{r}_T = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Vektor rýchlosti ťažiska $\mathbf{v}_T$ sa určí derivovaním podľa času t , takže hľa-

$$\text{dané } \mathbf{v}_T = \frac{d \mathbf{r}_T}{dt}$$

β) Celkovú hybnosť ($\mathbf{p} = m \mathbf{v}$).

γ) Rýchlosti $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ uvažované v tej súradnicovej sústave, kde hmotný stred je v klude. (Pokyn: Od rýchlosti $\mathbf{v}$ odčítame rýchlosť hmotného stredu.

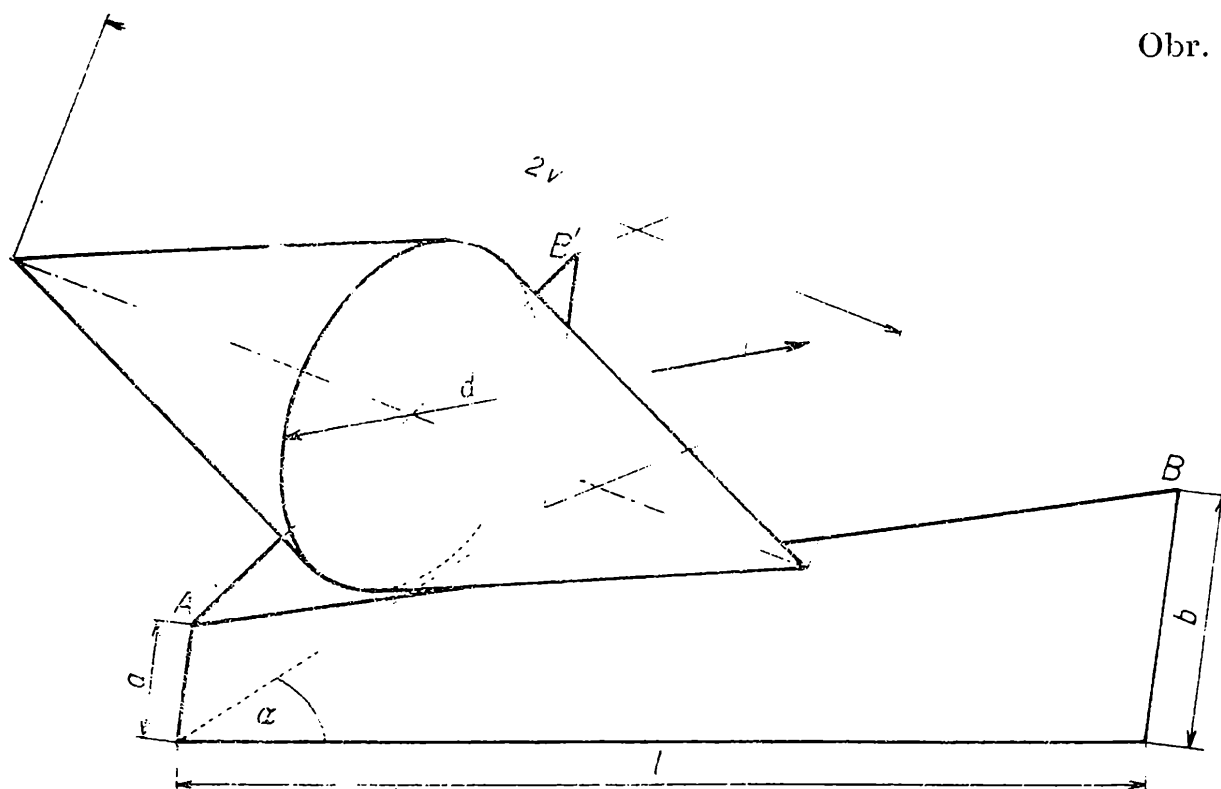
Evžen Říman

5. V jednom fantastickém románu byl navržen tento projekt: Za účelem zkrácení dopravy provrtat Zemí tunel, jdoucí jejím středem. Ponechme stranou diskusi o možnosti nebo nemožnosti projektu. Rozhodněte, jaký pohyb by konalo těleso (např. vlak) spuštěné do takového tunelu a ponechané dále samo sobě, jestliže se tíhová síla tělesa mění se

vzdáleností r těžiště tělesa od středu Země podle vztahu $G = mg \cdot \frac{r}{R}$

(m je hmotnost tělesa, g tíhové zrychlení na povrchu Země, rovné $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a $R = 6400 \text{ km}$ je poloměr Země). Jiné síly už na těleso nepůsobí. Vypočtěte dobu, za kterou proletí těleso tunelem a udejte rychlost, které nabude ve středu Země.

František Vencálek



6. Je dána soustava dvou lichoběžníkových tenkých desek (obr. 1) s délkami vzájemně kolmých stran a , b a l . Obě desky mají společnou stranu délky a a jejich roviny svírají vzájemně úhel α . Soustava desek je umístěna na vodorovné podložce a je na ni vložen rotační dvojkužel tak, aby rovina proložená kruhovou hranou dvojkužele ležela v rovině souměrnosti soustavy desek. Průměr kruhové hrany dvojkužele je d a jeho celková výška $2v$. Určete hodnotu d tak, aby se po umístění na soustavu desek dal právě do pohybu ve směru šipky (od bodu A k bodům B a B'). Tření přitom zanedbáváme. Je dáno a , b , l , α , $2v$. Řešte nejprve obecně, pak pro zvláštní případ, $a = 8$ cm, $b = 12$ cm, $l = 30$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $2v = 35$ cm.

Václav Šindelář

Řešení úloh z minulého ročníku

Matematika

4. Dokažte, že pro každé přirozené n a pro libovolná čísla $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ platí

$$\frac{|a_1 + a_2 + \dots + a_n|}{1 + |a_1 + a_2 + \dots + a_n|} \leq \frac{|a_1|}{1 + |a_1|} + \frac{|a_2|}{1 + |a_2|} + \dots + \frac{|a_n|}{1 + |a_n|}$$

(Došlo 16 řešení)

František Kejla

Řešila Alena Vencovská, IV B AG, Praha, Štěpánská :

Dokážeme, že pro libovolná 2 komplexní čísla $a = a_1 + i a_2$, $b = b_1 + i b_2$ platí vztah

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že $|a| + |b| \geq |a+b|$

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &= 1 - \frac{1}{1+|a+b|} \leq 1 - \frac{1}{1+|a|+|b|} \leq \\ &\leq 1 - \frac{1}{1+|a|+|b|+|a||b|} = \frac{|a|+|b|+|a||b|}{1+|a|+|b|+|a||b|} \leq \\ &\leq \frac{|a|+|b|+2|a||b|}{1+|a|+|b|+|a||b|} = \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \end{aligned}$$

Použijeme matematickou indukci:

1. Platí:
$$\frac{|a_1|}{1+|a_1|} \leq \frac{|a_1|}{1+|a_1|}$$

2. platí-li
$$\frac{|a_1+a_2+\dots+a_n|}{1+|a_1+a_2+\dots+a_n|} \leq \frac{|a_1|}{1+|a_1|} + \frac{|a_2|}{1+|a_2|} + \dots + \frac{|a_n|}{1+|a_n|}$$

pak platí
$$\frac{|a_1+a_2+\dots+a_{n+1}|}{1+|a_1+a_2+\dots+a_{n+1}|} \leq \frac{|a_1|}{1+|a_1|} + \frac{|a_2|}{1+|a_2|} + \dots + \frac{|a_{n+1}|}{1+|a_{n+1}|}$$

Důkaz : Označme komplexní číslo $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = b$.

$$\begin{aligned} \frac{|a_1|}{1+|a_1|} + \frac{|a_2|}{1+|a_2|} + \dots + \frac{|a_n|}{1+|a_n|} + \frac{|a_{n+1}|}{1+|a_{n+1}|} &\geq \frac{|b|}{1+|b|} + \\ + \frac{|a_{n+1}|}{1+|a_{n+1}|} &\geq \frac{|a_1+a_2+\dots+a_{n+1}|}{1+|a_1+a_2+\dots+a_{n+1}|}. \end{aligned}$$

Fyzika

3. Pro zajišťování jednotnosti a přesnosti síly má Československý metrologický ústav k dispozici etalonové zatěžovací stroje, kde se využívá tíhové síly sady závaží. Má-li jedno takové etalonové zařízení závaží (5, 10, 20, 50, 100, 500) kg, máme v rámci akce přechodu na SI

vypočítat: a) jak je zapotřebí upravit stávající závaží, aby jejich hodnoty v newtonech byly opět celistvé; b) jak by bylo třeba upravit stávající závaží, aby jejich hodnoty byly celistvé, kdyby stroj měl být přestěhován do místa s jiným tíhovým zrychlením (z původního $g_1 = 9,810 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ na nové $g_2 = 9,805 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$); jaké absolutní chyby přesnosti jsou přípustné u případných přivažků, je-li od etalonového stroje požadována relativní přesnost 10^{-5} .

(Došlo 8 řešení)

Václav Šindelář

Autorovo řešení :

Etalonové zatěžovací stroje představují etalony statické síly, využívající účinků tíhového pole Země na vhodná tělesa (závaží). Pro síly asi do $5 \cdot 10^4 \text{ N}$ staví se tyto stroje běžně na přímé zatížení, pro větší síly se používá zpravidla pákových nebo hydraulických převodů. Takové „zatížení“ nazýváme nepřímým. Tyto stroje slouží k ověřování (cejchování) dynamometrů, tj. měřidel určených k provoznímu měření (statických) sil. Aby bylo možno těmito stroji realizovat různé, vhodně odstupňované hodnoty síly, tvoří zatěžovací závaží vhodně volené a sestavené sady. Odstupňování bývá zpravidla po hodnotách odpovídajících hodnotě nejmenšího závaží. V daném případě po 5 kg (vyjadřujeme-li hmotnost závaží). Uvedená sada by však plynulou stupňovitost realizace neumožňovala. Nelze z ní sestavit závaží pro hodnoty (40, 45, 90, 95, 140, 145, 190, 195, 200 až 495) kg a některé další hodnoty nad 500 kg (maximální hmotnost všech závaží činí 685 kg). Na tuto skutečnost nebyli řešitelé sice přímo dotazováni, nikdo z nich však na ni neupozornil. (Všimněme si, jak jsou sestavovány sady hodnot jiných veličin, např. elektrických odporů, elektrických kapacit aj.).

Přesto, že v příkladě uváděná sada závaží má dříve uvedený nedostatek (nemá potřebný počet členů), je na ní patrna celistvost hodnot jednotlivých členů (současně s celistvostí násobků jmenovitých hodnot nižších členů sady při jejich porovnání se jmenovitými hodnotami členů vyšších). Mohli bychom hovořit také o okrouhlých hodnotách.

První otázka zněla, jak je zapotřebí upravit stávající závaží, aby jejich hodnoty v newtonech byly opět celistvé. Hodnoty v newtonech jsou ovšem hodnotami silovými. Mají-li být tedy „opět“ celistvé, značí to, že původní závaží jsou svými hodnotami dosud celistvá, a to rovněž v silových hodnotách. Pochopitelně ovšem pro jinou jednotku síly. Jednotku síly, nepatřící do Mezinárodní soustavy jednotek, což plyne z poznámky o akci přechodu na SI. Touto jednotkou může být podle udaných hodnot hmotností zatěžovacích závaží pouze kilopond. Protože jsou však jako celistvé udány (jmenovité) hodnoty hmotnosti zatěžovacích závaží v kilogramech, mohou být jejich hodnoty v kilopondech stejně celistvé pouze tehdy, má-li místní tíhové zrychlení nor-

mální hodnotu (tj. rovná-li se $g_n = 9,806\ 65\ \text{m}\ \text{s}^{-2} \approx 9,81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$). Přitom se ovšem nepřihlíží k účinkům vztlaku vzduchu. V případě, že místní tíhové zrychlení má zmíněnou normální hodnotu, byly by síly vyvozené statickým silovým působením uvedené sady závaží rovné (5, 10, 20, 50, 100, 500) kp. Hodnoty tíhového zrychlení uvedené v otázce b) se první otázky netýkají. Protože víme, že

$$1\ \text{kp} = 9,806\ 65\ \text{N}\ (\text{přesně}),$$

dostáváme postupně pro převod číselné hodnoty x v kilopondech na číselnou hodnotu x' v newtonech podle vztahu

$$x\ \text{kp} = x'\ \text{N}$$

hodnoty:

$$(5, 10, 20, 50, 100, 500) \cdot 9,806\ 65\ \text{N},$$

tedy

$$49,033\ 25\ \text{N},\ 98,0665\ \text{N},\quad \text{atd.}$$

To ovšem celistvé hodnoty patrně nejsou. Aby celistvými byly, musíme každé ze závaží zvětšit. Např. první závaží takto

$$(49,033\ 25 + 0,966\ 75)\ \text{N} = 50\ \text{N}\ \text{atd.}$$

Protože všechna závaží jsou svými hodnotami celistvými násobky prvního závaží (přesněji jeho hodnotami), bude absolutní zvětšení tíhy u jednotlivých závaží rovněž celistvým násobkem absolutního zvětšení tíhy u prvního (tj. nejmenšího) závaží. Relativní zvětšení tíhy bude u všech závaží zřejmě stejné a rovněž tak relativní zvětšení hmotnosti, neboť můžeme postupně psát:

$$\frac{a \cdot 0,966\ 75\ \text{N}}{a \cdot 49,033\ 25\ \text{N}} = \frac{0,966\ 75\ \text{N}}{49,033\ 25\ \text{N}} = \frac{\frac{0,966\ 75\ \text{N}}{g_n\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}}{\frac{49,033\ 25\ \text{N}}{g_n\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}} = \frac{0,098\ 581\ \text{kg}}{5,000\ 000\ \text{kg}},$$

kde a je celé kladné číslo a $g_n = 9,806\ 65\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ je místní tíhové zrychlení (s normální hodnotou). U každého závaží je tedy nutno zvětšit jeho hmotnost o

$$\frac{0,098\ 581}{5,000\ 000} = 0,019\ 716 = 1,9716\ \%.$$

U prvního závaží jde o toto absolutní zvětšení hmotnosti:

$$\Delta m_1 = 0,019\ 716 \cdot 5 = 0,098\ 581\ \text{kg}.$$

V místě normálního tíhového zrychlení bude tíha vyvozená prvním závažím

$$(m_1 + \Delta m_1) g_n = (5,000\,000 + 0,098\,581) 9,806\,65 \doteq 50\,\text{N}$$

Kdyby bylo tíhové zrychlení jiné než normální, pak by ovšem zvětšení hmotnosti (přivažek) muselo být jiné. To se již týká druhé části úlohy. Podle ní má silový zatěžovací stroj taková závaží, aby vyvozovala celistvé silové hodnoty při místním tíhovém zrychlení $g_1 = 9,810\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Po přemístění stroje z původního místa do místa nového s tíhovým zrychlením $g_2 = 9,805\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ musí dojít ke změně hmotnosti závaží. Protože $g_2 < g_1$, musí se zřejmě všechny hmotnosti závaží zvětšit, jak plyne z následující rovnice:

$$m_1 \cdot g_1 = m_2 g_2,$$

kde m_1 resp. m_2 jsou hmotnosti téhož určitého závaží v místě 1 resp. 2, má-li hodnota tíhy zůstat při přemístění nezměněna.

Podle toho

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{g_1}{g_2} = \frac{9\,805}{9,810} = 0,999\,49$$

resp.

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{m_1 + \Delta m_1}{m_1} = 1,000\,51$$

Hmotnost závaží je tedy nutno zvětšit u všech závaží 1,000 51 —krát, tedy o 0,051 % proti jejich původní hmotnostní hodnotě. Řešení by bylo možno ještě dále rozvést numericky na původně uvedenou sadu závaží.

Pokud jde o třetí část úlohy, byla v podstatě zodpovězena správně téměř všem řešiteli. Relativní přesnost 10^{-5} reprodukce silového zařízení je dosti náročná. Dosud se běžně dosahuje relativní přesnosti 10^{-4} .

Pro celkovou hmotnost nějakého závaží s přivažkem a s příslušnými chybami můžeme psát

$$m_{1c} = m_1 \pm \kappa(m_1) + \Delta m_1 \pm \kappa(\Delta m_1)$$

Odpověď na třetí část úlohy se má týkat výsledku první i druhé části úlohy. Naznačme si řešení pro výsledky první části úlohy.

Přivažek nejmenšího (5 kg) a největšího závaží (500 kg) činí

$$0,098\,581\,\text{kg}, \text{ resp. } 9,8581\,\text{kg}.$$

Při požadované relativní přesnosti 10^{-5} musí být relativní krajní chyba hmotnosti přivažku (za předpokladu, že se jiné vlivy na této přesnosti nepodílejí) rovna nebo menší nežli $\pm 10^{-5}$.

U nejmenšího a největšího závaží má pak absolutní krajní chyba přivažku tyto okrouhlé hodnoty:

$$\kappa(\Delta m_1) \doteq 0,1 \cdot 10^{-5}\,\text{kg} = 0,001\,\text{g}, \text{ resp. } \kappa(\Delta m_6) \doteq 0,1\,\text{g}.$$

4. Na elektrickém vařiči se nějaké množství vody začne vařit za $t_1 = 18$ min, je-li napětí v síti, na niž je vařič připojen, $U_1 = 120$ V. Poklesne-li napětí na $U_2 = 110$ V, začne totéž množství vody vřít (ze stejné počáteční teploty) za dobu $t_2 = 20$ min. Na kolik by se prodloužil ohřev (t_3) až do varu, kdyby napětí bylo pouze $U_3 = 100$ V. Ve všech třech případech je zřejmě napětí stálé od počátku sledovaného děje až po začátek varu. Při výpočtu uvažujte také ztráty tepla do okolí, jako přímo úměrné době ohřevu.

(Došlo 10 řešení)

Václav Šindelář

Řešil: Jiří Pavel, 4A G, Jihlava:

Odpor vařiče označíme R . Když ho připojíme na napětí U_1 , prochází vařičem proud I_1 . Výkon vařiče pak bude $P = U_1 I_1$. Z Ohmova zákona je však

$$I_1 = \frac{U_1}{R}; \quad P = \frac{U_1^2}{R}$$

Za čas t_1 vykoná vařič práci $A = P \cdot t_1 = \frac{U_1^2}{R} t_1$

Na přivedení vody do varu je třeba energie (tepla) o velikosti Q . Ztráty tepla při ohřevu označíme Q_z . Toto teplo je přímo úměrné době ohřevu. Platí tedy $Q_z = k \cdot t$.

Práce, kterou vykoná vařič za čas t_1 , se spotřebuje na ohřátí vody a na ztráty Q_z . Můžeme tedy psát:

$$A = Q + Q_z,$$

$$\frac{U_1^2}{R} t_1 = Q + k \cdot t_1. \quad (1)$$

Jestliže bude vařič připojen na napětí U_2 , bude doba ohřevu t_2 . Můžeme tedy psát obdobu rovnice (1).

$$\frac{U_2^2}{R} t_2 = Q + k \cdot t_2. \quad (2)$$

Stejně tak bude pro napětí U_3 a dobu t_3

$$\frac{U_3^2}{R} t_3 = Q + k \cdot t_3 \quad (3)$$

Dostáváme soustavu rovnic (1), (2), (3). Tyto rovnice rozšíříme R .

$$U_1^2 t_1 = QR + Rkt_1 \quad (4)$$

$$U_2^2 t_2 = QR + Rkt_2 \quad (5)$$

$$U_3^2 t_3 = QR + Rkt_3. \quad (6)$$

Z rovnic (4), (5) vyjádříme veličiny QR , Rk a dosadíme do (6). Z (6) vyjádříme t_3 :

$$Rk = \frac{U_1^2 t_1 - U_2^2 t_2}{t_1 - t_2}$$

$$QR = U_1^2 t_1 - Rkt_1 = \frac{t_1 t_2 (U_2^2 - U_1^2)}{t_1 - t_2}$$

$$t_3 = \frac{QR}{U_3^2 - Rk} = \frac{t_1 t_2 (U_2^2 - U_1^2)}{(t_1 - t_2) U_3^2 - U_1^2 t_1 + U_2^2 t_2} \quad (7)$$

$$[t_3] = \frac{s^2 V^2}{s V^2} = s$$

Jestliže připojíme vaříč na napětí U_3 , ohřeje se voda za čas t_3 , který je vyjádřen vztahem (7).

Číselně: Do výsledku (7) dosadíme tyto hodnoty:

$$\begin{array}{ll} U_1 = 120 \text{ V} & t_1 = 18 \text{ min} \\ U_2 = 110 \text{ V} & t_2 = 20 \text{ min} \\ U_3 = 100 \text{ V} & t_3 = 22,2 \text{ min} \end{array}$$

Jestliže připojíme vaříč na napětí $U_3 = 100 \text{ V}$, přivede se voda do varu za čas $t_3 = 22,2 \text{ min}$.

5. Konštantná sila $F = 52 \cdot 10^3 \text{ N}$ urýchľuje šachtovú kabínu, ktorej vnútorná výška je $h = 3 \text{ m}$. Od stropu je na lanku dĺžky $s = 1,7 \text{ m}$ (a zanedbateľnej hmotnosti) zavesené teleso hmotnosti $m_2 = 50 \text{ kg}$. Celková hmotnosť aj s telesom je $m_1 + m_2 = 3250 \text{ kg}$.

Stanovte (zanedbávajúc trenie a odpor prostredia):

α) Hodnotu a smer zrýchlenia (a_1), ktoré dodá sila F celej sústave, tj. hmotnosti $m_1 + m_2$. β) Ťahové napätie lanka (F_t) v pohybujúcej sa kabíne. V istom okamihu sa lanko pretrhlo.

γ) Aké veľké zrýchlenie (a_2) nadobudne výťah v dobe od pretrhnutia lanka do dopadnutia telesa na dlážku kabíny?

δ) Aké veľké zrýchlenie (a_3) má v tej dobe teleso m_2 ?

ϵ) Akú dobu (t_p) trvá pád telesa m_2 od okamihu pretrhnutia do dopadnutia na dlážku kabíny?

Pozn. $g = 9,80 \text{ m s}^{-2}$

E. Říman

Riešenie Stanislava Vanečíka, 3c gymn. Michalovce.

α) Pre sústavu telies $m_1 + m_2$ platia rovnice

$$F - G = (m_1 + m_2) a_1; \quad G = (m_1 + m_2) g; \quad \text{z toho} \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{F - (m_1 + m_2) g}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

β) Na lanko pôsobia dve sily: tiažová sila telesa m_2 smerom nadol a konštantná sila F smerom hore. Platia rovnice

$$-G_2 + F = +m_2 a_1, \quad \text{takže}$$

$$F_t = m_2 (g + a_1) = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

γ) Po odtrhnutí lanka so závažím bude kabína mať hmotnosť iba $m_1 = 3200$ kg. Preto platia

$$F - G = m_1 a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{F - m_1 g}{m_1}. \quad (3)$$

δ) Po pretrhnutí pôsobí na teleso iba tiažová sila; preto teleso m_2 sa pohybuje so zrýchlením

$$a_3 = -g = -9,80 \text{ m s}^{-2}, \quad (4)$$

kde záporné znamienko naznačuje smer nadol.

ε) Vzdialenosť telesa m_2 od dlážky kabíny je (až do okamihu odtrhnutia) $h - s$. Za hľadanú dobu pádu (t_p) teleso m_2 klesne voľným pádom o dĺžku $\frac{1}{2} g t_p^2$; dlážka kabíny sa zdvihne o $\frac{1}{2} a_2 t_p^2$ (veď oba pohyby sú rovnomerne zrýchlené). Súčet obidvoch dĺžok dáva pôvodnú vzdialenosť ($h - s$), tj. platí

$$\frac{1}{2} g t_p^2 + \frac{1}{2} a_2 t_p^2 = h - s,$$

čo po jednoduchšej úprave a dosadení vzťahu (3) dá

$$t_p = \sqrt{\frac{2(h-s)}{g+a_2}} = \sqrt{\frac{2m_2(h-s)}{F}} \quad (5)$$

Dimenzionálna správnosť výsledných vzťahov je ihneď patrná lebo

$$\text{dimenzia sily} = \{F\} = \text{newton} = [N] = [\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$$

Numerický výpočet zo zadáných veličín:

$$a_1 = 6,20 \text{ m s}^{-2}; \quad F = 800 \text{ N}; \quad a_2 = 6,45 \text{ m s}^{-2}; \quad t_p = 0,4 \text{ s}$$

různé

Michajl Vasiljevič Lomonosov

JOSEF KOTYK, Pardubice

„Lomonosov vytvořil první ruskou universitu, ba lépe řečeno, sám byl první naší universitou.“ Tato pamětihodná slova Puškinova charakterizují Lomonosova jako velikého člověka i geniálního vědce a vystihují jeho historický význam. V době mezi vládou cara Petra I. Velikého (1689—1725) a carevny Kateřiny II. (1762—1796) je Lomonosov jediným ruským bojovníkem za pokrok a šíření vědy. Od jeho smrti uplyne letos 210 let.

MICHAIL VASILJEVIČ LOMONOSOV se narodil dne 8. (19.) listopadu 1711 v rodině rybáře v malé obci Mišaninskaja, ležící na drsném pobřeží Bílého moře nedaleko městečka Cholmogory v Archangelské gubernii. Od mládí byl velmi zvědavý a dychtil po vědomostech. Při svém prostém původu, nepříznivém rodinném prostředí a nepochopení musel si však přístup ke vzdělání těžce vybojovat. Teprve desetiletý naučil se u svého souseda Ivana Šubného, rolníka, číst a psát. Branou k vědění staly se mu podle vlastního doznání dvě knihy, které mu ze své knihovny půjčil a v roce 1724 daroval Christofor Dudin, syn cholmogorského kněze: „Gramatika“ M. Smotrického a „Aritmetika“, sborník různých přírodních věd L. Magnického. S nimi jako jedinými průvodci a 3 rubly v kapse kabátu, který dostal od Šubného, opustil dne 9. prosince 1730 proti vůli rodičů domov a vydal se na dalekou pouť za vzděláním na cestu do Moskvy.

Dne 15. ledna 1731 byl Lomonosov přijat na Slovansko-řecko-latinskou akademii v Moskvě. Ústav ho však svými scholastickými metodami neuspokojil; nemohl mu zejména poskytnouti vědomosti z přírodních věd, po nichž nejvíce toužil. Také jeho hmotné poměry byly velmi drsné. „Nemohl jsem si dovolit“ doznal, „na den víc než za půl kopejky chleba a za půl kopejky kvasu. Jedině jeho neobyčejná touha po vzdělání mu dodávala síl, aby vše trpělivě překonával a studií nezanechal.

Svět přírodních a exaktních věd se Lomonosovi otevřel teprve vstupem na universitu v Petrohradě v lednu 1736 a v Marburgu v listopadu téhož roku. Tam prošel věhlasnou školou profesora Christiana Wolffa.^{1/}

^{1/} V písemném styku s Christianem Wolffem (1670—1759) byl také náš matematik *Joseph Stepling* (1716—1778), zakladatel hvězdárny v Praze v Klementinu.

Jeho přednášky měly na Lomonosova veliký vliv; působily velmi příznivě na jeho vědecký růst i budoucí vědeckou činnost. K Wolffovu idealistickému učení zaujal však Lomonosov postoj přísný a kritický; jeho teleologický světový názor^{2/} odmítal a šel vlastní cestou *důsledného nazírání materialistického*.

„Lomonosov vášnivě miloval vědu, ale přemýšlel a staral se jedině o to, čeho bylo třeba pro blaho vlasti“, napsal N. G. Černyševskij. Chtěl sloužit především vlasti. Po pětiletém pobytu v cizině vrátil se proto roku 1741 do Ruska. Stal se předním členem Petrohradské Akademie věd, jež i po založení první ruské university v Moskvě^{3/} zůstala jeho vlastním vědeckým působištěm. Ve své osobě spojoval encyklopedičnost teoretického vzdělání s experimentálně-tvůrčí vědeckou činností. Šíří zájmů i rozhledu připomíná některé vynikající duchy doby renesanční; plným právem můžeme o něm mluvit jako o polyhistorovi. Za svůj přední úkol považoval však studium fyziky, a to v nejužší spolupráci s matematikou a chemií. O tom svědčí nejlépe vlastní Lomonosovova slova: „Matematik, zvyknuv matematické přísnosti při různých objevech a důkazech, dovede vyvozovat v přesném a neochvějném pořádku pravdu skrytou v přírodě. Bez užitku jsou však oči tomu, kdo chce spatřit nitro věcí a nemá rukou, aby je odhalil. Bez užitku jsou také ruce tomu, kdo nemá oči, jimiž by prozkoumal věci již odhalené. Právem můžeme proto chemii nazvat rukama a matematiku očima fyziky.“

Ve vlasti se Lomonosov záhy stal mluvčím nových směrů. Přírodní vědy vděčí jeho géniu za řadu objevů, hypotéz, teorií i nových badatelských metod. V G. Bělinskij přirovnal Lomonosova k polární záři, jež se rozhořela nad břehy Ledového moře, rozhánějíc temnoty, v nichž se tehdejší Rusko utápělo. V „Ódě na severní záři“ — také o ní platí však Lomonosovova slova: „Básnění je mým potěšením, fyzika mým úkolem“ — Lomonosov vyslovil a zdůvodnil svůj názor o elektřině atmosférické; polární záře je podle něho rovněž jejím projevem. Přesvědčení, že bouřkové mraky jsou nabitý elektřinou a že blesk je vlastně mohutná elektrická jiskra, si ověřil v letech 1752 a 1753 pokusy.^{4/} Lomonosovův „hromostroj“ („hromový stroj“, gromovaja mašina), vztyčený na jeho domě v Petrohradě, upoutával pozornost celého okolí. Teprve tragická smrt přítele a blízkého spolupracovníka G. W. Richmanna^{5/} zapůsobila

^{2/} Podle něho, dodává vtipně Engels, ukazuje přírodní řád účelnost např. tím, že „kočky byly stvořeny, aby žraly myši, myši zase, aby byly požírány kočkami“ a pod. (Viz B. Engels „Dialektika přírody“, Praha 1952, str. 27.)

^{3/} Byla slavnostně otevřena dne 12. ledna 1755. Po svém zakladateli byla pojmenována *Univerzitou Lomonosovovou*.

^{4/} Okolnost, že v těchto letech také Benjamin Franklin a náš Prokop Diviš se proslavili památnými pokusy tohoto druhu, dokazuje, že doba byla již velmi zralá k sestrojení bleskosvodu. V podrobnostech viz autorovy články „Prokop Diviš“ v Rozhledech, roč. 44, čís. 3, str. 139 až 143 a „Hrst vzpomínek“ v Rozhledech, roč. 48, čís. 10, str. 458 až 461.

^{5/} Georg Wilhelm Richmann, narozený v témž roce 1711 jako Lomonosov,

na Lomonosova tak mocně, že dalších nebezpečných pokusů tohoto druhu zanechal.

V době, o níž píší, byla věda v zajetí fluid, zvláštních nevažitelných, tedy čistě spekulativních a tajemných substancí, jimiž byly vysvětlovány jevy přírodní. Veden vědeckou kritičností a materialistickým přesvědčením, že všechno dění v přírodě má příčinu hmotnou, dospěl Lomonosov roku 1743 na základě experimentálních prací k závěrům^{6/}, které se v podstatě kryjí s našimi dnešními představami o stavbě látek: Nikoli nehmotná fluida, nýbrž hmotné částice, atomy a molekuly, jejich vzájemné seskupení a pohyby jsou skutečnou příčinou všech vlastností látek a přírodních jevů. Lomonosov bývá proto právem považován za *zakladatele molekulární fyziky*.

V nazírání na děje tepelné předběhl Lomonosov vývoj (mechanickou teorii tepla, kinetickou teorii plynů) téměř o sto let. Novější objevy neotřásl ani pravdou obsaženou v jeho zkušenostech s *nezničitelností hmoty*, jež mu umožnily položit *základy k zákonu o zachování hmoty a energie, prvnímu velkému pilíři novodobé materialistické dialektiky*; naopak, upevnily ji a potvrdily. V dopise historicky památném napsal Lomonosov svému příteli, slavnému matematikovi *Leonhardu Eulerovi*, rovněž vynikajícímu členu Petrohradské Akademie,^{7/} dne 5. července 1748: „Všechny děje v přírodě jsou takového rázu, že odebere-li se něco jednomu tělesu, druhému se právě tolik přidruží; *jestliže někde hmoty ubude, na druhém místě jí tolikéž přibude*.“ O čtvrt století později, roku 1774, potvrdil Lomonosovy závěry *Lavoisier*^{8/} klasickými slovy: „*Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme*.“ *Nic nezaniká, nic nevzniká, všechno se proměňuje...*

Lomonosov byl také *velmi plodným vynálezcem*. Navrhl a sestrojil řadu významných přístrojů, první viskosimetr, elektrometr, kapesní teploměr, pérové váhy, glóbus, refraktometr, sextant s umělým horizontem k určení polohy lodi na moři, kovový teploměr pro zkoumání

profesor fyziky a člen Akademie věd v Petrohradě, byl za bouřky dne 26. července 1753 elektrickým výbojem při pokuse zabít.

Našim čtenářům je znám také z termiky. Pracoval zvláště v kalorimetrii; směšovací pravidlo bývalo dříve začasť označováno jeho jménem (*Richmannovo pravidlo*).

^{6/} Učinil tak v pojednání „O neviditelných fyzikálních částechkách, z nichž se skládají přírodní látky a v nichž je dostatečná příčina všech jejich charakteristických vlastností“.

^{7/} *Leonhard Euler* (1707–1783), nejvýkonnější matematik 18. století, pobýval v letech 1725 až 1741 a v letech 1766 až 1783 v Petrohradě. Jeho vědecké práce uveřejňovala Petrohradská Akademie ještě v roce 1830, tj. půl století po jeho smrti. Eulerovo jméno zůstává dodnes z nejslavnějších v dějinách matematiky vůbec.

^{8/} *Antoine Laurent Lavoisier* (1743–1794), francouzský chemik, byl pro politickou činnost odsouzen revolučním tribunálem k smrti a dne 8. května 1794 v Paříži popraven.

nejsilnějších mrazů na Sibiři, námořní barometr pro předpovídání bouří na moři aj. Jeho konstrukce modelu helikoptéry pro průzkum horních vrstev atmosféry nebo projekt spojení Ruska s Amerikou přes Arktidu nás opravňují srovnávat Lomonosova s Leonardem da Vinci a jinými velikány období renesance.

MICHAIL VASILJEVIČ LOMONOSOV zemřel dne 4. (15.) dubna 1765. Jeho pohřbu na Lazarevském hřbitově se zúčastnil celý kulturní Petrohrad. Nazván „*Petrem Velikým ruské kultury*“ zanechal bohaté dílo a stejně bohaté podněty příštím generacím. „Lituji,“ řekl na smrtelném loži, „že jsem nemohl dokončit vše, co jsem podnikl pro vlast, pro zmnožení věd a slávu Akademie.“ Jeho jméno zůstalo dodnes symbolem ušlechtilých snah, jež usilují o to, aby ideje vědy a pokroku, zaseté do ruské půdy, přinesly bohaté plody ruské zemi i jejímu lidu.

Literatura.

K dalšímu studiu doporučuji *M. V. Lomonosova: Vybrané spisy*, Praha 1955.

Mladí pythagorovci

Krajský pionýrský dům v Hradci Králové pořádá každý rok o prázdninách čtrnáctidenní turnusy táborů s matematickým zaměřením v Bělči nad Orlicí. Jeden běh je pro žáky 6.—9. třídy ZDŠ, druhý pro studenty středních škol.

Frekventanti se věnují každé dopoledne zajímavým partiím matematiky, které nejsou zařazeny do učebních osnov (lineární algebra, teorie čísel aj.). Výuku zajišťují jednak vysokoškolští učitelé, jednak učitelé základních a středních škol. Odpoledne a večery jsou věnovány kultuře a sportu. Účastníci zápolí nejen v atletice, míčových hrách, stolním tenisu, badmintonu, v šachu, ale také v táborové matematické olympiádě.

Tábor je velice oblíben pro svou náplň, která se vymyká tradičním náplním letních pionýrských a mládežnických táborů. Svědčí o tom i šestkrát opakovaná účast mnoha jednotlivců. Na počtu přihlášek samozřejmě závisí uspořádání dalšího běhu; třebaže je každý rok přihlášek dost, upozornujeme, že Krajský dům pionýrů a mládeže v Hradci Králové přijímá přihlášky vždy od ledna.

Jarmila Burešová

František Běhounek:

ATOMY VLÁDNOU — ČLOVĚK V ATOMOVÉM VĚKU

Vydalo: Pressfoto Praha 1972,
str. 270, cena 13,50 Kčs

Známý autor, který byl současně velmi úspěšným spisovatelem i vědcem (od r. 1960 člen ČSAV; zemřel v r. 1973), podává v této populárně vědecké knize malou historii atomu od jeho představ o složení až po současné využití jeho obrovské energie. Před našima očima defluje celá řada středoškolákům dobře známých vědeckých jmen, s nimiž se seznamují při studiu moderních partií fyziky.

V úvodní kapitole F. Běhounek trochu poodhaluje historii staroslavných jáchymovských stříbrných dolů, které se však již v 17. stol. vyčerpaly. Potom se těžilo jen trochu barevných kovů, arsen, vizmut, kobalt a později již jen olovo a smolně černá ruda — smolinec, který havíři v dobách stříbrné slávy proklínali, protože kdykoliv se dostal nějakým způsobem do stříbrné rudy, zkazil celou tavbu. Ve smolinci chemikové našli celou řadu známých prvků a mezi nimi i jeden z nejtěžších — uran, jehož soli se s úspěchem používaly k barvení skla a keramiky (prvek uran objevil r. 1789 M. H. Klaproth). Dále nás seznamuje s historií objevu Röntgenových paprsků

(z listopadu r. 1895), s prvními pokusy H. Becquerela z r. 1896, Marie Skłodowské-Curieové z r. 1887 a jejího manžela Pierra Curieho z oblasti přirozené radioaktivity a s objevem a izolací nových prvků polonia a rádia (1898) z jáchymovského a příbramského smolince. Ukazuje, jak podrobně byly studovány všechny vlastnosti a účinky radioaktivního záření, stručně popisuje některé metody pozorování a registrace tohoto záření.

Koncem 20. let 20. stol. končí I. etapa studia radioaktivity — studium přirozené radioaktivity, v níž po základních objevech Becquerela a manželů Curieových zejména práce E. Rutherforda a N. Bohra umožnily v hrubých rysech určit stavbu atomu s jeho elektrony a jádrem a rovněž popsat samovolné přeměny několika vzácných radioaktivních prvků.

Od r. 1930 začíná II. etapa — studium umělé radioaktivity. R. 1932 anglický fyzik J. Chadwick, který pracoval s E. Rutherfordem v Cavendishově laboratoři v Cambridgi, experimentálně dokázal existenci neutronu (předpověděnou již v roce 1915 Rutherfordem), když zkoumal záření, které vzniklo při bombardování lehkých prvků berylia, lithia a bóru alfa částicemi (toto záření poprvé pozorovali r. 1930 němečtí fyzikové W. Bothe a H. Becker). Zjistil, že nejde o zvláštní druh elektromagnetického záření, ale o proud

nových elektricky neutrálních částic (neutronů) s hmotností blízkou hmotnosti protonu. Na stopě této nové částici byli i manželé Irena Curieová (dcera Marie Curieové) a Frédéric Joliot-Curie. V r. 1934 při studiu vlastností pozitronů (objeveny C. D. Andersonem v r. 1932 v kosmickém záření, předpověděny P. Diracem v r. 1928) a neutronů objevili umělou radioaktivitu, za niž r. 1935 obdrželi Nobelovu cenu za chemii. Při pokusech s ostřelováním různých látek částicemi alfa zjistili totiž, že ostřelovaná látka často vydává záření i potom, když se zdroj částic alfa vzdálí. Možnosti umělé přípravy radioaktivních izotopů se velmi rozšířily až používáním urychlovačů nabitých částic (van de Graaffův elektrostatický generátor, cyklotron, fázotron, synchrofázotron, betatron). Tím byl dán základní předpoklad k většímu využití radioaktivních izotopů v různých oborech lidské činnosti, jako např. v lékařství, v biologii, v zemědělství, v technice aj., jak se o tom pěkně píše v této knize.

Koncem 30. let 20. stol. začíná III. etapa ve studiu atomové fyziky — štěpení jader atomů, využití atomové energie. Totiž v r. 1938 němečtí fyzikové O. Hahn a F. Strassmann objevili štěpení jader uranu ^{235}U působením neutronů a brzo nato řetězovou reakci. K témuž výsledku dospěli v témže roce i F. Joliot-Curie, L. Kowarski a H. v Halban jun. v Paříži. Zjistili, že každé rozštěpené atomové jádro uranu ^{235}U uvolní průměrně 3,5 neutronů. V téže době podobný závěr (avšak v průměru se 2 neutrony) obdržela i vý-

znamná skupina fyziků v USA, která tam emigrovala z Evropy před nacisty (L. Szilard, V. Weisskopf aj.). 2. prosince 1942 uvádí E. Fermi v Chicagu do chodu první atomový reaktor na světě, když předtím objevil možnost zpomalování pohybu neutronů pomocí moderátoru (tzv. Fermiho efekt; za výzkum vlastností neutronů obdržel v r. 1938 Nobelovu cenu za fyziku). Avšak to již několik roků na kontinentech zuří II. světová válka. Na obou bojujících stranách se horečně pracuje na konstrukci atomové zbraně. Autor podrobně seznamuje čtenáře s touto honbou po zázračné zbraně a současně uvádí, jaké vážné následky mělo svržení atomových pum na japonská města Hirošimu a Nagasaki (6. VIII. a 9. VIII. 1945). Zmiňuje se o zkouškách s americkými a francouzskými atomovými a později vodíkovými pumami v Tichomoří po skončení II. světové války a s úsilím socialistického tábora po mírovém využití atomové energie (spuštění první atomové elektrárny na světě v SSSR 24. VI. 1954 a prvního atomového ledoborce „Lenin“ na vodu v prosinci 1957 aj.). Sám autor této knihy se zúčastnil několika mezinárodních konferencí o mírovém využití atomové energie, jako např. v Ženevě r. 1958 a naši vědu úspěšně reprezentoval i v mezinárodní komisi OSN pro studium účinků atomového záření.

V závěru knihy je připojen krátký životopis F. Běhounka z pera J. Spisara.

Knihy je velmi pěkně a zajímavě napsána. Uvítá ji jistě každý, zejména ten, kdo již četl např. knihu

novináře R. Jungka: Jasnější než tisíc sluncí, MF Praha 1963 nebo Běhounkovu dřívější práci životopis: Frédéric Joliot-Curie, Praha Orbis 1965, edice Portréty.

*Prof. Rudolf Kolomý,
Moravská Třebová*

Ladislav Beran:

GRUPY A SVAZY

Matematický seminář SNTL
Praha 1974

Kniha obsahuje jednak elementární úvod do teorie grup a svazů, jednak obsahuje nové výsledky,

týkající se současné problematiky těchto teorií. První část knihy nepředpokládá žádných podstatných předběžných znalostí a svou formou je vhodná i pro zájemce z řad studentů středních škol. Kniha je doplněna mnoha cvičeními, jichž by bylo možno s úspěchem využít při volitelné matematice na gymnasiích.

Druhá část knihy přináší solidní zpracování výsledků z teorie svazů a grup (např. Sylowovy věty, reprezentace grup aj.), která je důležitá v mnoha odvětvích matematiky i fyziky.

Středoškolským učitelům matematiky, kteří chtějí prohloubit své znalosti algebry, lze tuto knihu doporučit.

Jarmila Burešová

redakce hovoří

a) se čtenáři:

upozorňujeme, že nemůžeme zasílat čtenářům chybějící čísla, protože expedici provádí jen PNS; eventuální reklamace zasílejte na SPN (s. Coklan), Praha 2, Ostrovní 30;

b) s autory:

množí se případy, že někteří málo kritičtí autoři nám zasílají rukopisy, které by se pro svou vysokou úroveň, rozsah nebo odlehlost tématu lépe hodily do odborných časopisů. Nevyžádané rukopisy redakce nevrací.

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

form	tvár, forma
formula	vzorec
formulation	formulace
forty	čtyřicet
foundation	základ
four	čtyři
four-colour problem	problém čtyř barev
fourteen	čtrnáct
fourth	čtvrtý, čtvrtina
fourth proportional	čtvrtá měrická úměrná
fraction	zlomek
clearing of fractions	odstranění zlomků (v rovnici)
complex fraction	složený zlomek
continued fraction	řetězový zlomek
improper fraction	nepravý zlomek
proper fraction	pravý zlomek
free	volný
free group	volná grupa
frequency	četnost
frequency distribution	rozdělení četnosti
front view	nárys
frustum (frustrum) of a cone	komolý kužel
fulfil	splňovat
function	funkce
analytic function	analytická funkce
characteristic function	charakteristická funkce
circular function	goniometrická funkce
composite function	složená funkce
continuous function	spojitá funkce
differentiable function	funkce mající derivaci
discontinuous function	nespojité funkce
even function	sudá funkce
exponential function	exponenciální funkce
harmonic function	harmonická funkce
increasing function	rostoucí funkce
integrable function	integrovatelná funkce

inverse function
 inverse circular function
 linear fractional function
 logarithmic function
 majorant function
 monotone function
 odd function
 primitive function
 function of a complex variable
 function of a real variable
 functional analysis
 fundamental
 fundamental operations

inverzní funkce
 cyklometrická funkce
 lineární lomená funkce
 logaritmická funkce
 majorantní funkce
 monotonní funkce
 lichá funkce
 primitivní funkce
 funkce komplexní proměnné
 funkce reálné proměnné
 funkcionální analýza
 základní
 základní početní výkony, operace

G

gain
 game
 Gaussian curve
 general
 in general
 generality
 generalization
 generate
 generating line, generator
 genus
 geometric
 geometric average, mean
 geometric image
 geometry
 given
 golden section
 golden ratio
 great circle
 greatest common divisor
 gradient
 graph
 bar graph
 directed graph
 labeled graph
 graphic, graphical
 graphic representation
 ground
 ground line
 group
 commutative group
 group of permutations
 group of transformations
 group theory
 growth

získat, dosáhnout
 hra
 Gaussova křivka
 obecný
 obecně
 obecnost
 zobecnění
 vytvořit
 tvořící přímka
 rod
 geometrický
 geometrický průměr
 geometrický obraz
 geometrie
 daný
 zlatý řez
 poměr zlatého řezu
 hlavní kružnice
 největší společný dělitel
 gradient
 graf, diagram
 sloupcový diagram
 orientovaný graf
 ohodnocený graf
 grafický
 grafické znázornění
 základ
 základnice
 grupa
 komutativní grupa
 grupa permutací
 grupa transformací
 teorie grup
 růst

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

4

ROČNÍK 53, 1974-1975, PROSINEC



Prozhléd

ROČNÍK 53
PROSINEC 1974

4

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT, Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, nár. pod. v Praze 1974.

OBSAH

Š. Il'aš: Lomená čára a súvislosti s ňou	145
Dr. J. Skuhra: Problém námořníka Jima .	150
S. Horák: Středové kuželosečky .	155
T. Medeková: K jednej konštrukcii dotýč- ic paraboly	158
Doc. ing. L. Drs: Viditeľnosť bodů a křiv- ek plochy	161
Dr. J. Fiala: Inspiro a trochoidy .	164
Dr. M. Široká—dr. J. Široký: Zákryty hvězd Měsícem	170
Naše soutěž	173
Olympiády	179
Dr. J. Šedivý: Stanislav Vydra	189
Redakce hovoří	192
Recenze	192
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český 3. a 4. str. obálky	

Lomená čiara a súvislosti s ňou

ŠTEFAN ILAŠ, odb. asistent PF Prešov

Priradíme každému prirodzenému číslu od 1 do n jeden bod roviny. Určíme týmto postupnosť bodov

$$A, B, C, D, \quad (1)$$

Predpokladajme, že $n > 1$. Spojme úsečkami prvý bod postupnosti (1) s druhým, druhý s tretím, atď., až predposledný s posledným. Dostaneme takto postupnosť $(n - 1)$ úsečiek a nazveme ju reťazcom úsečiek.

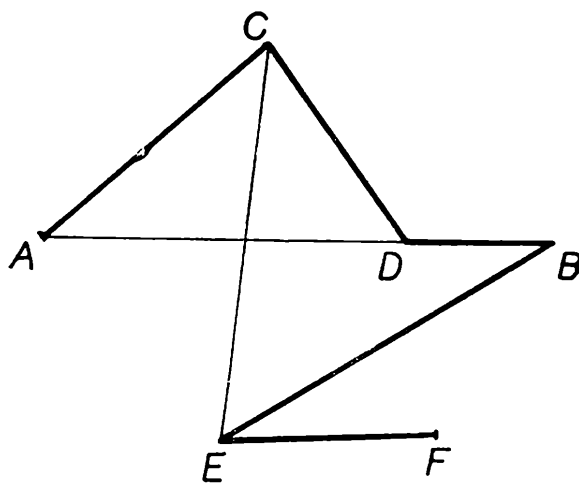
Ilustrujme to na obr. 1, pre konkrétny prípad šiestich bodov. Pomocou nich môžeme vytvoriť rôzne postupnosti týchto bodov podľa toho, aké poradové čísla jednotlivým bodom priradíme. Tak napr. z postupnosti

A, B, D, C, E, F dostaneme reťazec úsečiek AB, BD, DC, CE, EF , (a)

z postupnosti

A, C, D, B, E, F dostaneme reťazec úsečiek AC, CD, DB, BE, EF (b)

(na obr. 1 vyznačený silnejšie).



Obr. 1.

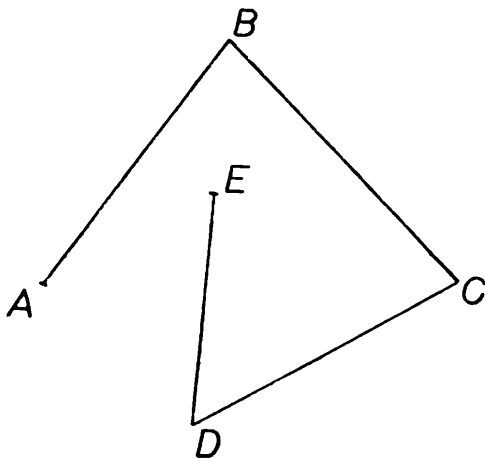
Z istých dôvodov chceme zvýrazniť podstatný (teda nie formálny) rozdiel medzi týmito refazcami. Otázkou teda je, v čom je tento rozdiel. Ak „prejdeme“ úsečkami oboch refazcov, ľahko zistíme, že v prípade (b) „neideme“ po žiadnej úsečke dvakrát. To je síce pravda, ale povedané dosť povrchné, preto sa pokúsime o precíznejšie vyjadrenie tejto skutočnosti. Matematickým jazykom dá sa totiž povedať, že v prípade (b) dve ľubovoľné úsečky buď nemajú vo všeobecnosti žiaden spoločný bod, alebo majú presne jeden spoločný bod. Tj. dve úsečky refazca (b) majú najviac jeden spoločný bod, čo zrejme neplatí pre prípad refazca (a). (Prečo?) Geometrický útvar z prípadu (b) nazývame vo všeobecnosti lomenou čiarou.

Definícia 1.

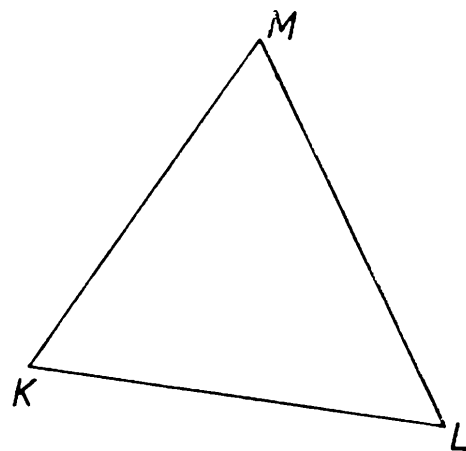
Lomenou čiarou nazývame geometrický útvar zložený z úsečiek nejakého refazca úsečiek, v ktorom ľubovoľné dve úsečky majú najviac jeden spoločný bod.

Poznámka. Dôležité si je uvedomiť, že definícia hovorí, že má existovať refazec úsečiek s danou vlastnosťou, avšak nie každý refazec úsečiek geometrického útvaru má danú vlastnosť.

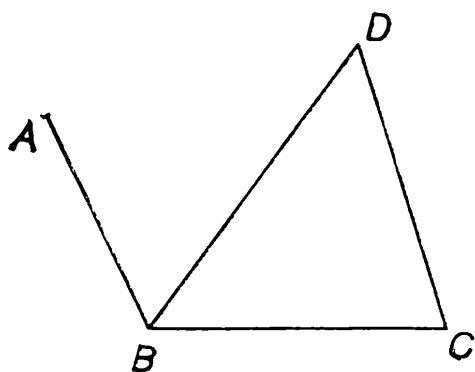
Špeciálne lomené čiary sú na obr. 2a, b. Tieto čiary nazývame jednoduchými lomenými čiarami. Naproti tomu na obr. 3 sú lomené čiary, ktoré nie sú jednoduchými. Pokúsme sa teda utvoriť definíciu jednoduchej lomenej čiar. Niektorí povia, že jej úsečky môžu mať spoločné iba koncové body. Iný zistí, že jeden bod môže byť koncom najviac dvoch úsečiek. A konečne „tretí hlas vysloví“, že dve úsečky so spoločným koncom neležia na jednej priamke. Ak však všetky tieto vlastnosti zhrnieme, dostaneme definíciu jednoduchej lomenej čiar.



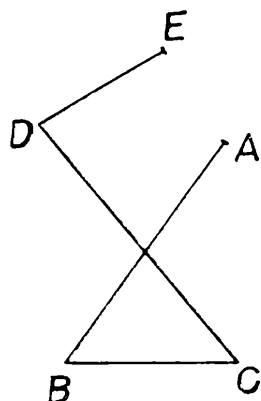
Obr. 2a.



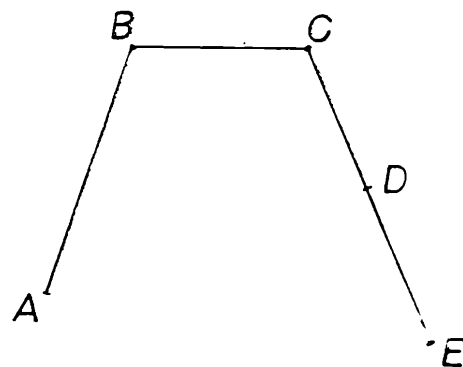
Obr. 2b.



Obr. 3a.



Obr. 3b.



Obr. 3c.

Definícia 2.

Lomenú čiaru nazývame jednoduchou, ak je zjednotením úsečiek refazca s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. dve úsečky, ktoré majú spoločný koniec, neležia na jednej priamke;
2. dve úsečky, ktoré nemajú spoločný koniec, sú dizjunktné;
3. koniec ľubovoľnej úsečky môže byť koncom iba jednej ďalšej úsečky refazca.

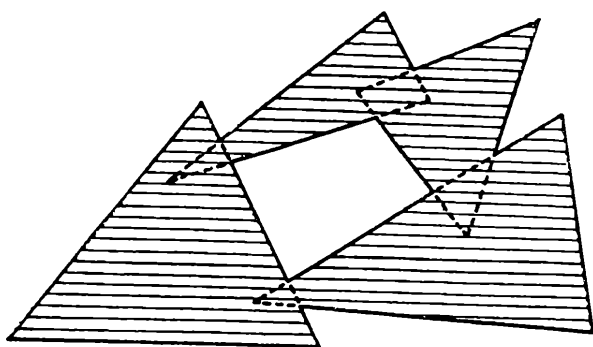
Každú jednoduchú lomenú čiaru možno rozložiť na úsečky (a to spôsobom podľa definície 2.). Tieto úsečky nazývame stranami jednoduchej lomenej čiary a ich konce — vrcholmi. Ak každý vrchol jednoduchej lomenej čiary je spoločný dvom jej stranám, potom takáto čiara sa nazýva uzavretá (obr. 2b). V opačnom prípade hovoríme, že je otvorená (obr. 2a).

Každá uzavretá lomená čiara ohraničuje v rovine istý mnohoúhelník. Každý mnohoúhelník je zjednotením konečného počtu trojuholníkov. Možno ho preto rozložiť na trojuholníky. Avšak nie každý rovinný geometrický útvar (ako množina bodov), ktorý (ktorá) je zjednotením konečného počtu trojuholníkov, musí byť mnohoúhelníkom. Napr. na obr. 4 geometrický útvar je zjednotením štyroch trojuholníkov, ale nie je mnohoúhelníkom.

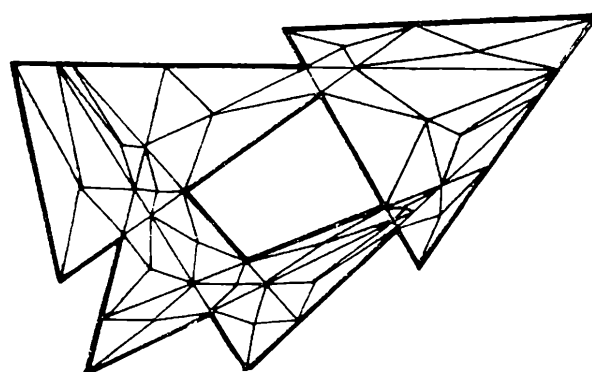
Predpokladajme, že je daný geometrický útvar U , ktorý je zjednotením trojuholníkov $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ ležiacich v jednej rovine, tj.

$$U = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup \dots \cup T_n.$$

Predĺžme strany všetkých trojuholníkov T_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) po priamkach. Rozdelia nám takto útvar U na trojuholníky a konvexné mnohoúhelníky. Ak zoberieme v každom mnohoúhelníku, ktorý nie je trojuholníkom, ľubovoľný vnútorný bod a spojíme ho s vrcholmi mnohoúhelníka, rozdelíme týmto mnohoúhelník na trojuholníky a takýmto spôsobom dostaneme rozklad



Obr. 4.



Obr.

$$U = T'_1 \cup T'_2 \cup \dots \cup T'_m$$

útvary U na nové trojuholníky (obr. 5). Nové trojuholníky T'_i už majú tie vlastnosti, že prienikom $T'_i \cap T'_j$ ľubovoľných dvoch nedizjunktných trojuholníkov T'_i, T'_j z rozkladu je buď ich spoločný vrchol alebo spoločná strana. Rozklady geometrických útvarov na takéto trojuholníky nazývame trianguláciami. Žiadne dva trojuholníky takéhoto rozkladu nemajú spoločné vnútorné body.

Geometrický útvar môže mať zrejme viacero rôznych triangulácií (obr. 6). Môžu byť utvorené z veľkých alebo malých trojuholníkov.

Metóda triangulácií je veľmi dôležitá nielen v samotnej matematike (o čom sa ešte zmienime), ale i v geodézii (kartografii) pri zhotovení máp, plánov; v astronómii a kozmonautike pri vyznačovaní dráh nebeských telies a umelých družíc ako aj v technike vôbec.

Úlohy.

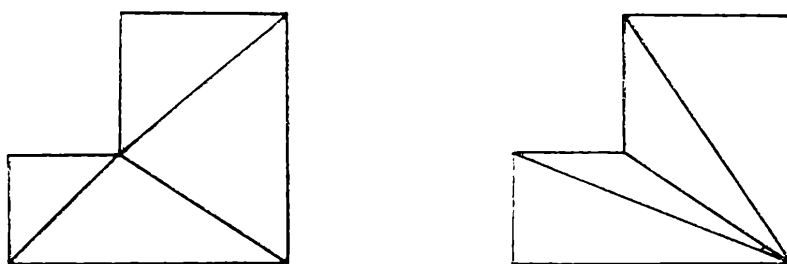
1. Doplníte každý geometrický útvar narysovaný na obr. 7 (tj. skladajúci sa z narysovaných úsečiek) jednou úsečkou tak, aby vznikla lomená čiara.

2. Odoberte z každého geometrického útvaru narysovaného na obr. 8 po jednej narysovanej úsečke tak, aby vznikla lomená čiara.

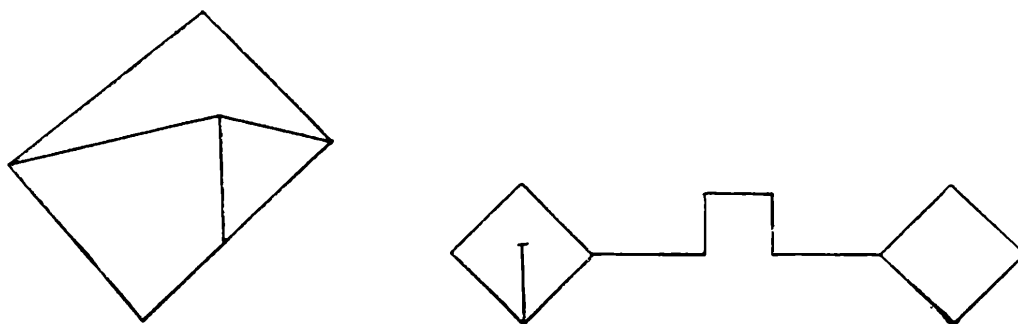
3. Prevedte trianguláciu vyšrafovaného obrazca na obr. 9 (i viacerými spôsobmi).

4. Rozložte štvorec na trojuholníky tak, aby to nebola triangulácia.

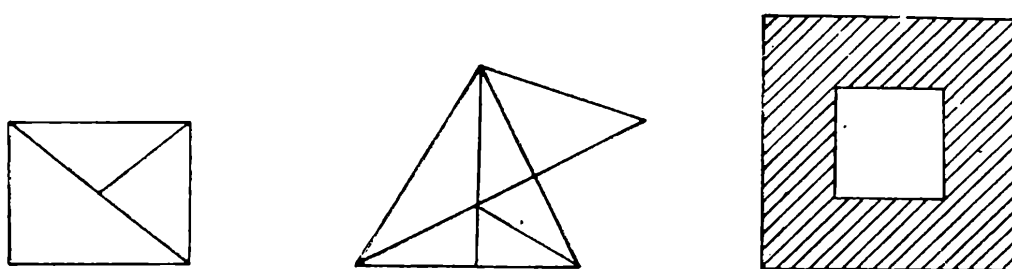
Ak sa vám „podarilo vyriešiť“ 1. a 2. úlohu, pravdepodobne ste sa uspokojili s jedným riešením a nesnažili ste sa nájsť úplné riešenie (čo má byť cieľom, aký sme si povinní dať pri riešení matematickej úlohy vôbec). Ak ste predsa uvažovali o možnosti viacerých riešení, otázkou je, či sa vám podarilo nájsť všetky. Ak ste neuspeli v tomto smere, chceme vám v tom pomôcť nasledujúcimi úvahami.



Obr. 6.



Obr. 7.



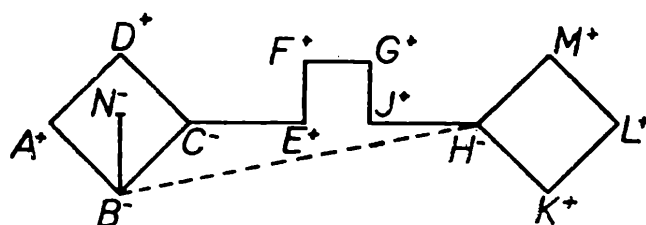
Obr. 8.

Obr. 9.

Predovšetkým je zrejmé, že metóda „skusmo“ (ktorou ste spomínané úlohy asi riešili) nám nikdy nedá odpoveď na otázku o úplnosti riešenia úlohy. Vráťme sa preto opäť k 1. definícii, aby sme z nej čosi viac vyťažili pre hlbšie pochopenie lomenej čiary. Pokúsme sa na lomenú čiaru pozeráť ako na refazec úsečiek, ktoré sú spojené uzlami (tie uzly vidíme vo vrcholoch, akoby „zväčšených“ bodov — vrcholov).

Uzol môže byť začiatkom lomenej čiary, alebo jej koncom, alebo aj koncom aj začiatkom dvoch susedných úsečiek v refazci úsečiek. Môže sa totiž stať, že istý uzol bude spĺňať súčasne viacero podmienok.

V prvom a druhom prípade počet úsečiek schádzajúcich sa v uzle je nepárny a uzol sa tak stáva nepárnym (takéto uzly označme znamienkom —). Na druhej strane, v treťom prípade je počet úsečiek schádzajúcich sa v uzle párny a uzol je teda párnym (tie uzly označíme +). Máme teda iba dve možnosti na to, aby daný geometrický útvar (spolu s usporiadaním uzlov) bol lomenou čiarou:



Obr. 10.

1. Nemá nepárne uzly a vtedy lomená čiara je uzavretá.

2. Sú iba dva nepárne uzly a vtedy je lomená čiara otvorená. Uzly nepárne sú súčasne začiatkom i koncom lomenej čiary.

Čiary, ktoré majú jednu z uvedených vlastností, sa nazývajú unikurzálne a vyznačujú sa tým, že sa dajú nakresliť „jedným ťahom“ tj. prejsť po celej čiare spojitým — neprerušeným pohybom tak, aby sme po žiadnej jej časti — strane neprešli viac ako 1-krát. Obe požiadavky na unikurzálnosť čiary prvý vyslovil Euler. Na základe toho každá lomená čiara je unikurzálnou čiarou a naša prvá úloha vedie teda k tomu, aby sme daný geometrický útvar doplnili práve jednou úsečkou tak, aby nebolo nepárnych uzlov, alebo ostali iba dva nepárne uzly. Sami sa pokúste o úplné riešenie 1. úlohy. Jedno z možných riešení druhého útvaru je vyznačené čiarkovanou úsečkou na obr. 10.

Potom začiatkom lomenej čiary je bod N a koncom bod C (a body prebiehajú v poradí: $NBADCEFGJHMLKHBC$) alebo naopak (a body prebiehajú v poradí: $CBHKLMLHJGFEC DABN$).

Podobne treba postupovať pri úplnom riešení 2. úlohy.

(Pokračování)

Problém námořníka Jima

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

Námořník Jim ztratil orientaci v městě, které je tak divné, že vyznává jako nejdokonalejší tvar čtverec — půdorysy domů jsou čtverce, celé město tvoří čtverec. Ulice jsou rovnoběžné, resp. vzájemně kolmé, a ekvidistantní. Kdybychom do roviny, v níž je město postaveno, zavedli soustavu souřadnic s osami umístěnými do dvou hlavních tříd města, mohli bychom vhodnou volbou měřítka dosáhnout toho, že křižovatky leží v mřížových bodech, tj. v bodech s celočíselnými souřadnicemi.

Celé město spí, jen námořník Jim v podroušeném stavu se právě nalézá v místě, kde máme počátek souřadnic. A Jim se začne pohybovat.

Chceme-li procházku námořníka Jima simulovat, musíme mít zaručen náhodný výběr trasy a to nám nejlépe umožní tabulka náhodných čísel (viz 1. číslo letošního ročníku Rozhledů). Musíme si zajistit stejnou



pravděpodobnost výběru směru sever, západ, jih, východ. Víme, že v tabulce náhodných čísel se číslice 1, 2, 3, . . . 8, 9, 0 objevují se stejnou pravděpodobností. Proto půjdeme na sever, když nalezneme v tabulce náhodných čísel na příslušném místě číslice 1 a 5, na západ při číslicích 2 a 6, na jih při číslicích 3 a 7 a na východ při číslicích 4 a 8. Tím zaručíme stejnou pravděpodobnost výběru směru cesty. Číslic 9 a 0 si nebudeme všímat, prostě je přeskočíme.

Nyní si v tabulce náhodných čísel vybereme jeden řádek a nalezneme tam tuto posloupnost číslic: 96321814060952. Tato posloupnost číslic nás zavede z počátku P do křižovatky A (obr. 1). Vzdálenost této křižovatky od počátku je $d_1 = |-2| + |2| = 4$. Jiná posloupnost 384412703966 . . . nás zavede do křižovatky B , která je od počátku vzdálena $d_2 = 2$.

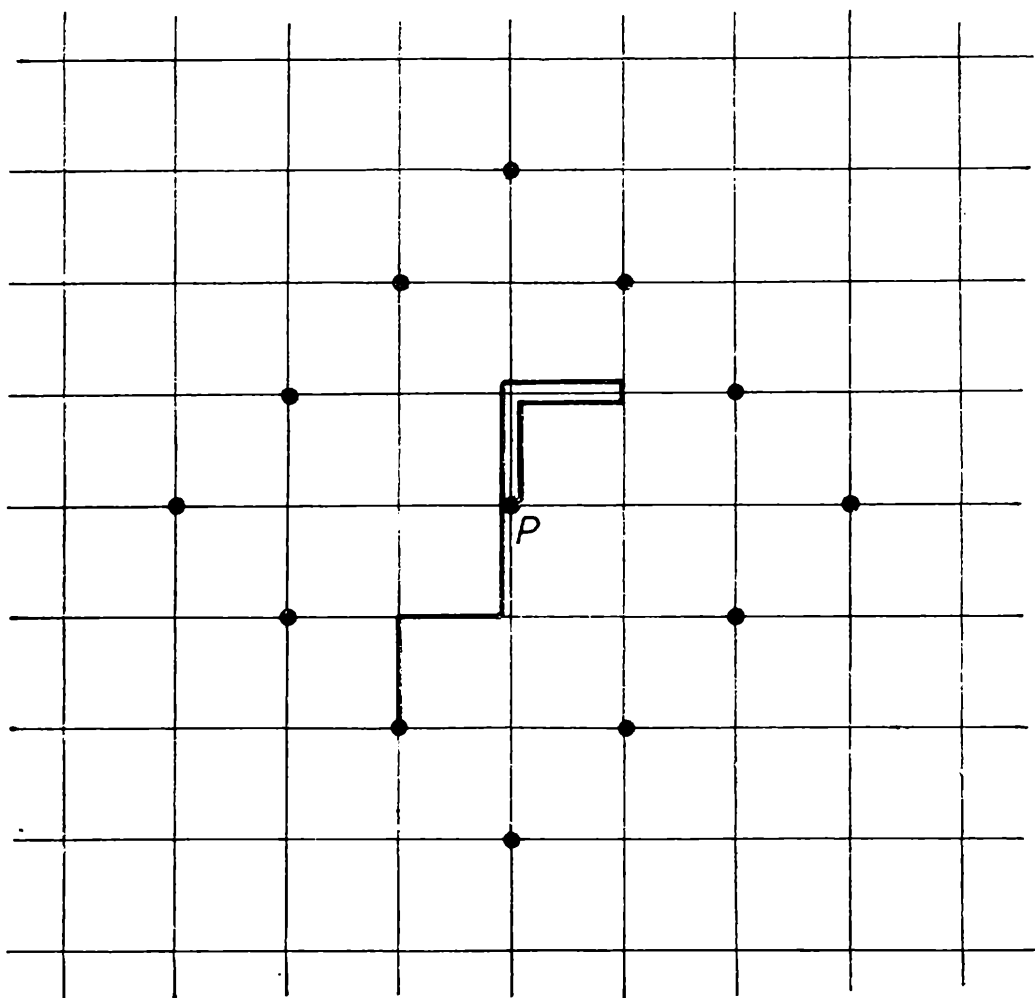
Podle otištěné tabulky náhodných čísel zpracujeme prvních 40 procházek. Začneme třeba ve třetím sloupci. První procházka je určena prvním řádkem 43813925422 . . . , druhá druhým 191329907145253 . . atd. Výsledky jsou přehledně zapsány v tabulce 1. Při pohledu na tuto tabulku se vnucuje otázka: Proč nemůže být 10. křižovatka vzdálena od počátku o lichý počet jednotek? Dokážete tuto otázku zodpovědět? Dosažený výsledek je třeba zpřesnit simulací dalších procházek. Tuto činnost přenecháváme čtenáři.

Tabulka 1

Vzdálenost 10. křižovatky od počátku	0	1	2	3	4	5	6	7	8	průměrná vzdálenost
Počet případů z prvních 20-ti procházek	1	0	5	0	12	0	1	0	1	3,60
Z druhých 20-ti	0	0	2	0	9	0	9	0	0	4,70
Ze 40-ti	1	0	7	0	21	0	10	0	1	4,15

Již jsme si řekli, že studium náhodných procházek má souvislost s řešením parciálních diferenciálních rovnic. A právě pro diferenciální rovnice má význam následující úloha.

Na křižovatkách vzdálených tři jednotky od počátku jsou vykopány nechráněné jámy, do kterých Jim může spadnout (obr. 2). Ptáme se:



Obr. 2.

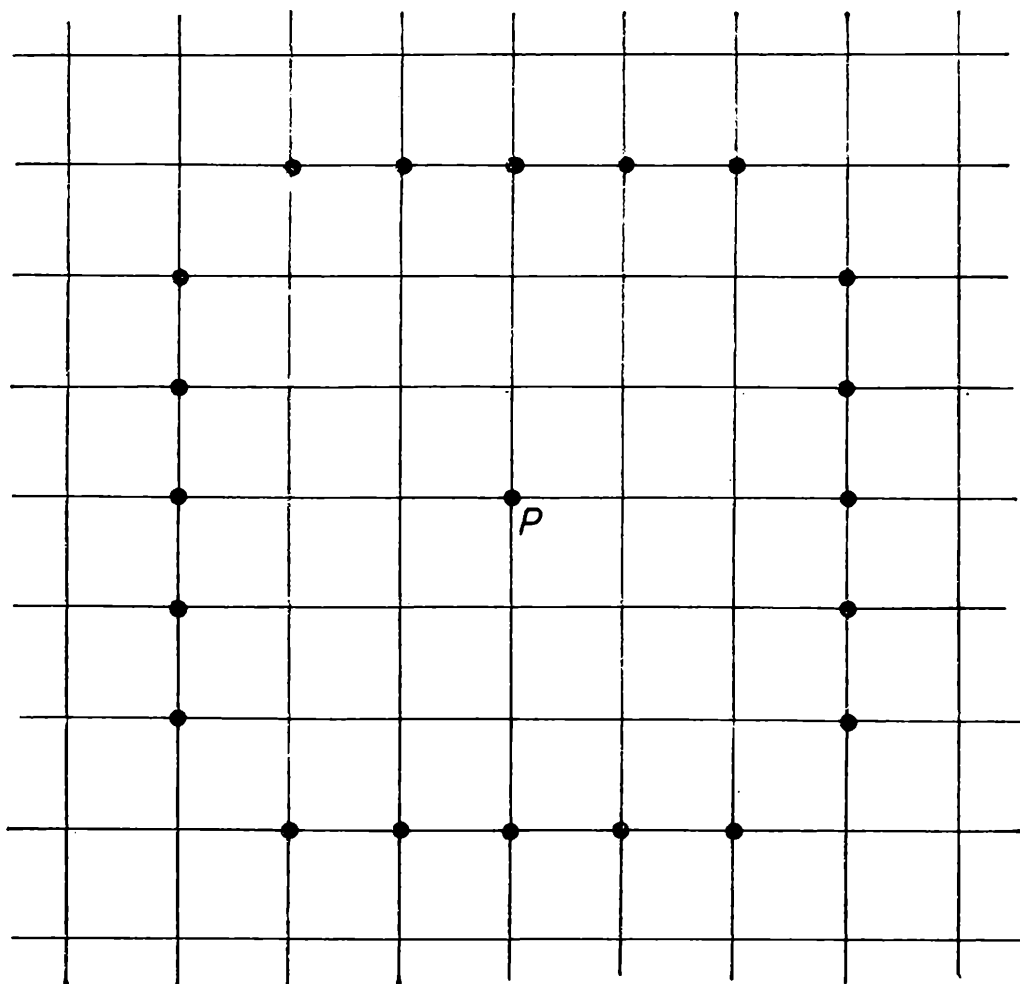
Tabulka 2

Délka cesty	3	5	7	9	11	13	15	17	více
Počet případů	17	15	10	2	2	2	0	0	0

Jak dlouho (v průměru) trvá Jimovi, než spadne do některé jámy? Přitom předpokládáme, že se pohybuje náhodně a bereme za jednotku času dobu, kterou Jim potřebuje k projití od jedné křižovatky ke druhé. Jinak řečeno: Jak dlouhá je cesta Jima z výchozího bodu do jámy, bereme-li za jednotku délky vzdálenost sousedních křižovatek?

Náhodnou procházku nám bude opět určovat tabulka náhodných čísel. Pravidla jsou stejná jako v předchozím případě. V tabulce náhodných čísel budeme tentokrát postupovat třeba po jednociferných sloup-

cích shora dolů. První náhodná procházka (obr. 2) z počátku až do jedné jámy je určena posloupností číslic: 104693323, která má délku 7. Tentokrát nemůže nastat případ, že by délka cesty byla sudá. Proto tyto případy jsou v tabulce 2 vynechány. Tabulka 2 shrnuje výsledky z 50-ti procházek.



Obr. 3.

Průměrná délka cesty je 6,84; teoretická hodnota je 5,26.

Pozměňme nyní systém jam (obr. 3). Čtenáři přenechávám úkol nalézt aproximativní odpověď (metodou Monte Carlo) na stejnou otázku jako v situaci na obr. 2. Předpokládám také, že si výsledky všech úloh zpřesníte nasimulováním většího počtu náhodných procházek, než jsme to udělali na těchto stránkách.

Středové kuželosečky

STANISLAV HORÁK, Praha

Analytická metoda nám často velmi jednoduchými prostředky umožňuje odhalit různé vlastnosti geometrických útvarů, k nimž bychom jiným způsobem dospěli dost pracně. Na základě takto získaných vlastností můžeme pak zdůvodnit četné konstrukce. U nás této metody mistrně využíval profesor UK dr. Jan Sobotka (1862—1931). Tato stať chce upozornit na jednu pěknou vlastnost středových kuželoseček a ukázat její použití v konstruktivní geometrii.

I. Existují dva typy středových kuželoseček, elipsa a hyperbola. Jestliže čísla a , b mají obvyklý význam a jestliže osu x položíme do hlavní osy kuželosečky a osu y do vedlejší osy kuželosečky, potom

elipsa má rovnici $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

a hyperbola má rovnici $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Je přirozené, že vzhledem k významu čísel a , b je vždy $ab \neq 0$. Obě rovnice lze však vyjádřit jedinou rovnicí

$$b^2x^2 + \varepsilon a^2y^2 = a^2b^2.$$

Číslo ε nabývá právě dvou hodnot; $\varepsilon = +1$ pro elipsu a $\varepsilon = -1$ pro hyperbolu.

Věta 1. Je dána středová kuželosečka. V libovolném jejím bodě L , který není vrcholem, sestrojme její tečnu a normálu. Tyto dvě přímky protnou vedlejší osu po řadě v bodech U , V . Kružnice k , sestrojená nad průměrem UV , prochází oběma ohnisky dané kuželosečky.

Důkaz (obr. 1a, b). Na středové kuželosečce (1) zvolme libovolný bod $L(x_1; y_1)$, kde $x_1y_1 \neq 0$. (Tím máme zajištěno, že bod L není vrcholem.) Rovnice tečny t , sestrojené v bodě L , je

$$t \equiv b^2x_1x + \varepsilon a^2y_1y = a^2b^2.$$

Rovnice normály n tohoto bodu je

$$n \equiv a^2y_1x - b^2x_1y + x_1y_1(b^2 - \varepsilon a^2) = 0.$$

Průsečík U tečny t s vedlejší osou kuželosečky (tj. se souřadnicovou osou y) je

$$U\left(0; \frac{b^2}{\varepsilon y_1}\right)$$

a průsečík V normály n s vedlejší osou elipsy je

$$V\left(0; -\frac{e^2}{\varepsilon b^2}\right)$$

Předpokládejme, že $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ a pro stručnost označme souřadnice y bodů U , V po řadě y_U , y_V . Jestliže

$$y_U > 0 \Rightarrow \varepsilon = +1 \Rightarrow y_V < 0 \text{ (jde o elipsu).}$$

Jestliže

$$y_U < 0 \Rightarrow \varepsilon = -1 \Rightarrow y_V > 0 \text{ (jde o hyperbolu).}$$

To však znamená, že hlavní osa elipsy (nebo střed kuželosečky) odděluje body U , V , a to tak, že v případě elipsy leží bod U v téže polorovině vyřaté hlavní osou elipsy jako bod L . V případě hyperboly leží body U , L v opačných polorovinách.

K témuž výsledku bychom dospěli, i kdyby $x_1 > 0$, $y_1 < 0$ nebo $x_1 < 0$, $y_1 > 0$ nebo $x_1 < 0$, $y_1 < 0$.

Nyní můžeme určit střed O a poloměr r kružnice k .

$$x_0 = 0, y_0 = \frac{1}{2}(y_U + y_V) = (b^4 - e^2 y_1^2) : 2 \varepsilon b^2 y_1$$

$$r = |OU| = (b^4 + e^2 y_1^2) : 2 \varepsilon b^2 y_1.$$

Kružnice k má potom rovnici

$$x^2 + \left(y - \frac{b^4 - e^2 y_1^2}{2 \varepsilon b^2 y_1}\right)^2 = \left(\frac{b^4 + e^2 y_1^2}{2 \varepsilon b^2 y_1}\right)^2$$

Dosazením se snadno přesvědčíme, že ohniska $E(-e; 0)$, $F(e; 0)$ leží na kružnici k , a tím je také vyslovená věta dokázána.

Příklad. Je dána hlavní osa h a vedlejší osa v středové kuželosečky. Kromě toho je ještě dána její tečna t s bodem dotyku L . Sestrojte tuto kuželosečku (tj. obě její ohniska a všechny vrcholy).

Řešení (obr. 1a, b). Známe-li tečnu i její bod dotyku, můžeme v tomto bodě sestavit normálu n . Tečna a normála protínají vedlejší osu kuželosečky po řadě v bodech U , V . Kružnice nad průměrem UV protne hlavní osu v hledaných ohniscích E , F .

Patu kolmice, vedené ohniskem E na tečnu t , označme P . Délka SP — kde S je střed kuželosečky — je délka hlavní poloosy. Další postup je již známý.

Úloha má jediné řešení právě tehdy, když body U , V jsou odděleny středem elipsy. Jestliže body U , L leží v téže polorovině vyřaté hlavní osou h , je řešením elipsa; leží-li v opačných polorovinách, je řešením hyperbola.

Kdyby tečna t byla kolmá na hlavní osu a bod L ležel na této ose,

existovalo by nekonečně mnoho středových kuželoseček, vyhovujících podmínkám úlohy. Kdyby tečna t byla kolmá na vedlejší osu a bod L ležel na této ose, existovalo by nekonečně mnoho elips, splňujících podmínky úlohy.

II. Všimněme si ještě jedné zajímavosti. Vypočítali jsme, že

$$y_U = b^2 : \varepsilon y_1.$$

Této rovnici dáme tvar

$$y_U \cdot y_1 = \varepsilon b^2$$

a výsledek vyjádříme větou:

Věta 2. Geometrický průměr velikosti pořadnice bodu dotyku L a velikosti pořadnice průsečíku tečny s vedlejší osou je roven délce vedlejší poloosy.

Cvičení:

1. Sestrojte středovou kuželosečku, je-li dána její vedlejší osa v , ohnisko F a bod $L \neq F$ kuželosečky. Body L, F nejsou incidentní s osou v . (K řešení použijte věty 1.)
2. Sestrojte deltoid UL_1VL_2 ($UL_1 = UL_2 = 55$ mm, $VL_1 = VL_2 = 85$ mm, $UL_1 \perp VL_1$, $UL_2 \perp VL_2$). Přímky $t_1 \equiv UL_1$, $t_2 \equiv UL_2$ jsou tečny a přímky $n_1 \equiv VL_1$, $n_2 \equiv VL_2$ jsou normály středové kuželosečky po řadě v bodech L_1, L_2 . Sestrojte tuto kuželosečku, víte-li, že její hlavní osa je od bodu L_1 vzdálena 10 mm.

konstruktivní geometrie

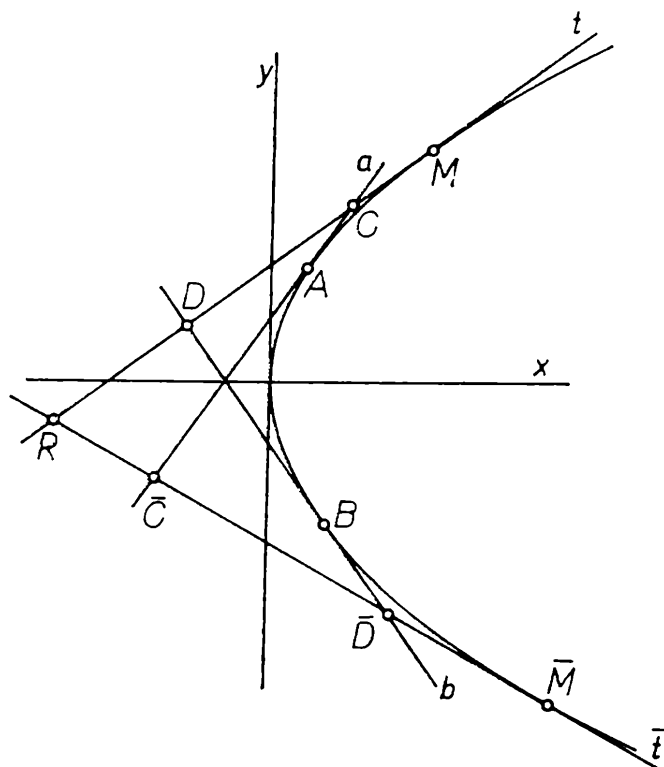
K jednej konstrukcii dotyčnic paraboly

TATIANA MEDEKOVÁ, Bratislava

V technickej praxi často sa stane, že pre parabolu poznáme dve dotyčnice s bodmi dotyku. Konštrukcia ďalších dotyčnic opiera sa o poznatky z projektívnej geometrie kuželosečiek.

Vieme, že spojnice podobných*) bodových radov sú dotyčnicami paraboly. Ak teda pre parabolu poznáme dotyčnice $t, \bar{t}$ s bodmi dotyku $M, \bar{M}$ a zostrojíme priesečník R týchto dotyčnic, stačí rozdeliť každú z úsečiek MR a $\bar{M}\bar{R}$ na rovnaký počet zhodných úsečiek. Spojením

*) Ak na dvoch priamkach určíme jednoznačné priradenie ich bodov tak, že deliaci pomer sebe odpovedajúcich trojíc bodov je rovnaký, hovoríme, že priamky sú nositeľkami podobných bodových radov.



ich krajných bodov (ako na obrázku: $C\bar{C} = a$, $D\bar{D} = b$) dostaneme ďalšie dotyčnice. Príslušné dielky možno nanášať aj mimo úsečiek MR , $\bar{M}R$, čím môžeme nakresliť ľubovoľné množstvo dotyčníc paraboly.

Túto konštrukciu možno pomerne jednoducho zdôvodniť metodami analytickej geometrie. Dokážeme, že pomer dĺžok úsečiek CD , $\bar{C}\bar{D}$ je konštantný a konštanta sa rovná podielu $\frac{|RM|}{|R\bar{M}|}$. Je nezávislá na dotyčniciach a , b .

Nech rovnica paraboly je $y^2 = 2px$, kde $p > 0$. Rovnica jej dotyčnice t v ľubovoľnom bode $T[x_1; y_1]$, kde $y_1 \neq 0$, je

$$t \equiv y = (2px + y_1^2) : 2y_1. \quad (1)$$

Nech $M\left[\frac{m^2}{2p}; m\right]$, $\bar{M}\left[\frac{\bar{m}^2}{2p}; \bar{m}\right]$ sú dva rôzne body paraboly ($m\bar{m} \neq 0$); potom dotyčnice v týchto bodoch majú rovnice

$$t \equiv y = (2mx + m^2) : 2m, \quad \bar{t} \equiv y = (2\bar{m}x + \bar{m}^2) : 2\bar{m}. \quad (2)$$

Ich priesečník je

$$R = [m\bar{m} : 2p; (m + \bar{m}) : 2]. \quad (3)$$

Vzdialenosť $|RM|$ a $|R\bar{M}|$ (po úprave) je

$$|RM| = |\bar{m} - m| \cdot \sqrt{m^2 + p^2} : 2p, \quad |R\bar{M}| = |m - \bar{m}| \cdot \sqrt{\bar{m}^2 + p^2} : 2p$$

a ďalej

$$|RM : R\bar{M}| = \sqrt{m^2 + p^2} : \sqrt{\bar{m}^2 + p^2}.$$

Ďalšie dve dotyčnice v bodoch $A [a^2 : 2p; a]$, $B [b^2 : 2p; b]$, kde $a \neq b$, majú rovnice

$$y = (2px + a^2) : 2a, \quad y = (2px + b^2) : 2b.$$

Priesečníkmi týchto dotyčníc s dotyčnicami (2) sú body

$$C [ma : 2p; (m + a) : 2],$$

$$\bar{O} [\bar{m}a : 2p; (\bar{m} + a) : 2],$$

$$D [mb : 2p; (m + b) : 2],$$

$$\bar{D} [\bar{m}b : 2p; (\bar{m} + b) : 2].$$

Ďalším výpočtom zistíme, že

$$\begin{aligned} \frac{|CD|}{|\bar{C}\bar{D}|} &= \frac{\sqrt{\left[\frac{m(b-a)}{2p}\right]^2 + \left[\frac{b-a}{2}\right]^2}}{\sqrt{\left[\frac{\bar{m}(b-a)}{2p}\right]^2 + \left[\frac{b-a}{2}\right]^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{m^2 + p^2}}{\sqrt{\bar{m}^2 + p^2}} = \frac{|RM|}{|R\bar{M}|}. \end{aligned}$$

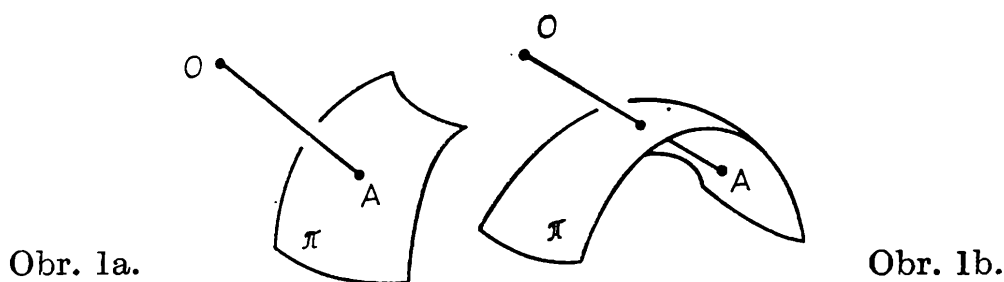
Poznámka: Pri výpočte možno vychádzať aj z iného umiestnenia bodov $M, \bar{M}, A, B$ vzhľadom na os paraboly, napr. voliť všetky s kladnými súradnicami y . Priamym výpočtom dá sa ľahko presvedčiť, že výsledok počítania je rovnaký.

Viditelnost bodů a křivek plochy

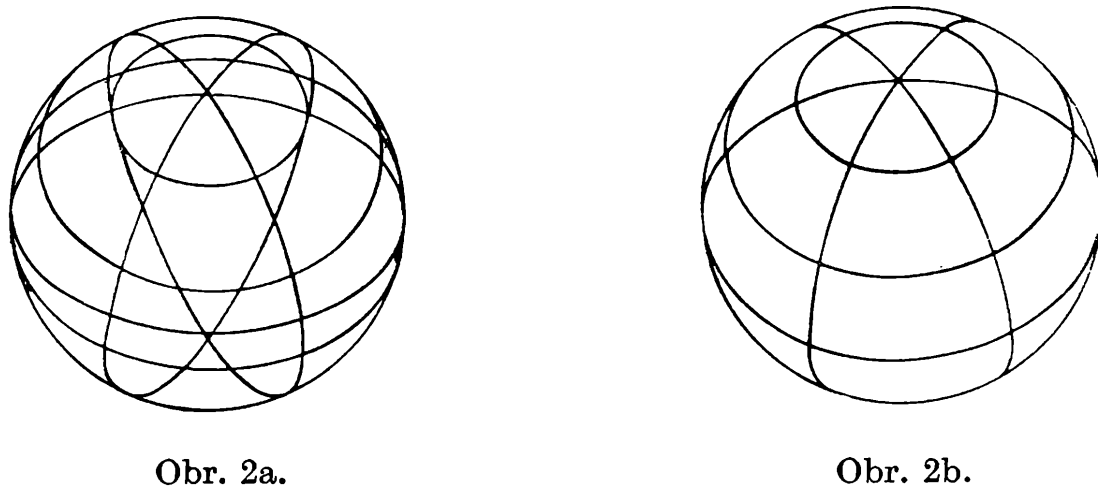
Doc. ing. LADISLAV DRS, ČVUT Praha

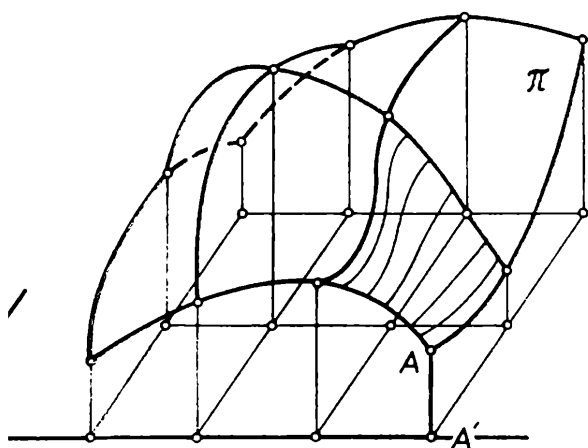
Uvažujme bod o (oko pozorovatele) a plochu π . Říkáme, že bod A plochy π je viditelný (neviditelný), jestliže úsečka OA neobsahuje (obsahuje) další bod plochy π . (Obr. 1a — bod A viditelný, obr. 1b — bod A neviditelný.) Souhrn viditelných bodů křivky plochy je viditelný oblouk (nebo oblouky) křivky plochy, ostatní body tvoří neviditelný oblouk (nebo oblouky) křivky plochy.

Určování neviditelných oblouků křivek plochy má velký význam při zobrazování ploch. Na obr. 2 je zobrazena kulová plocha s několika rovnoběžkami a poledníky. V obr. 2a nedbáme na viditelnost, zatímco u obr. 2b nejsou neviditelné oblouky kresleny. Obr. 2b působí plasticky, obr. 2a je nepřehledný, nenázorný. I když se geometr musí umět orientovat i v nenázorných zobrazeních, má názornost přece jen svůj psychologický

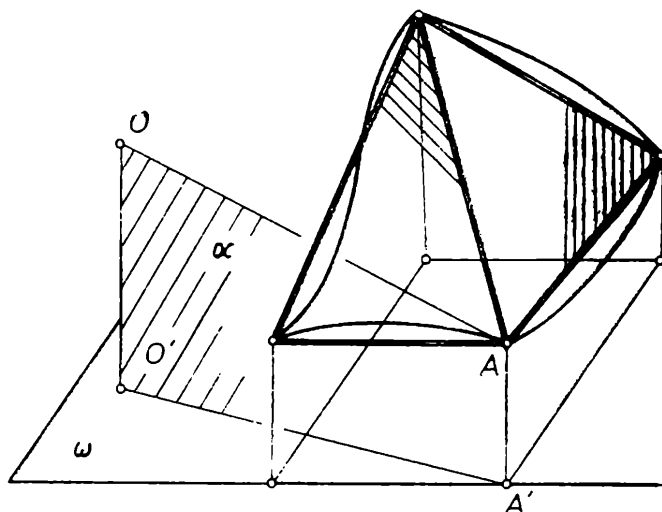


význam. Geometr by měl názornosti využívat všude, kde to je možné, a zejména vždy, když jsou jeho úvahy určeny širší veřejnosti. Jsou však i jiné důvody, pro něž je určení viditelnosti důležité: např. určení viditelnosti plochy zemského povrchu má svůj význam v letectví, při budování radarové sítě apod.

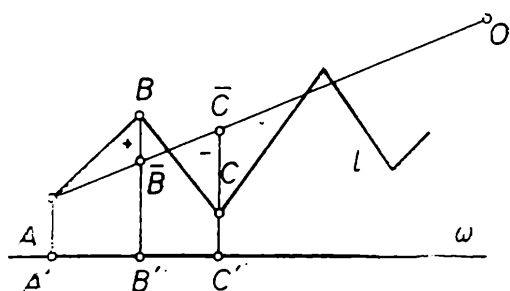




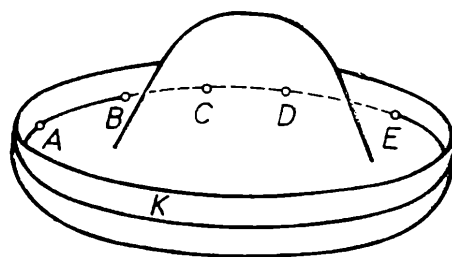
Obr. 3.



Obr. 4.



Obr. 5.



Obr. 6.

Jakým způsobem určujeme viditelnost křivek plochy? U jednoduchých ploch (např. u válcové plochy, kulové plochy apod.) to není obtížné a s řešením se studenti seznamují ve středoškolské geometrii. Co když se však jedná o složitější plochy (jako byla právě vzpomenutá plocha terénu)? V takovém případě už řešení viditelnosti není snadné a dokonce lze říci, že až do dnešní éry samočinných počítačů byl tento problém prakticky neřešitelný.

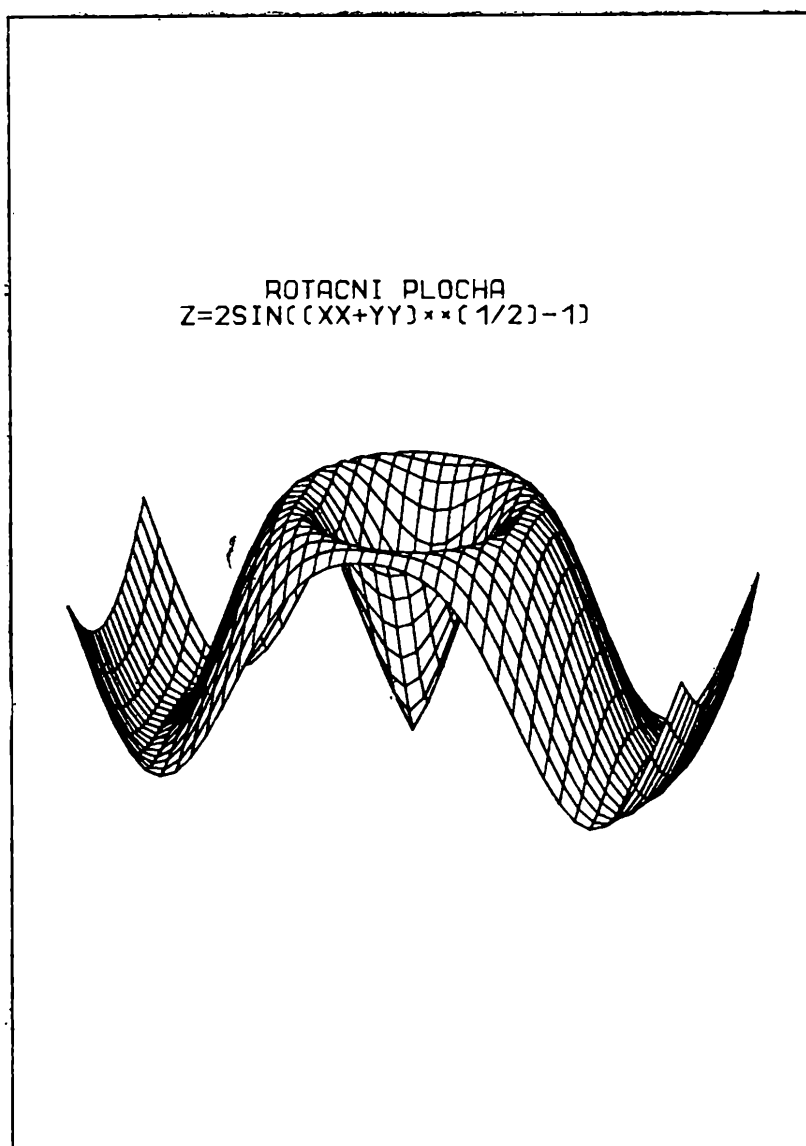
V další části našich úvah naznačíme, jak lze viditelnost určit za pomoci počítače. Metoda vede k přibližnému, ale pro praxi dostačujícímu řešení.

Zvolme na ploše π křivky, jejichž kolmý průmět do roviny ω (např. vodorovné) tvoří dosti hustou čtvercovou síť (obr. 3). Plochu π nahradíme mnohostěnem tak, že každé „oko“ vytvořené sousedními křivkami (na obr. 3 vyšrafováno) nahradíme dvěma trojúhelníky podle obr. 4. Vyšetříme viditelnost vrcholů tohoto náhradního mnohostěnu. Je-li bod A vrcholem, sestrojíme svislý řez rovinou α jdoucí přímkou AO (obr. 4, kolmé průměty do roviny ω jsou označeny čárkou). Tímto řezem je lomená čára l (obr. 5) se stranami v průsečnicích roviny α s příslušnými trojúhelníky mnohostěnu. Protíná-li čára l úsečku OA , je bod A neviditelný, v opačném případě viditelný. Průsečík zjišťuje počítač tak, že určuje znaménko rozdílu z -souřadnic vrcholů B, C , lomené čáry l

a příslušných bodů $\bar{B}$, $\bar{C}$, ... na zorném paprsku OA (tj. bodů s týmž kolmým průmětem do roviny ω , jako je průmět B' , C' , ... vrcholů lomené čáry). Nenastane-li změna znaménka, je bod A viditelný, změna znaménka má za následek neviditelnost bodu A (a další vyšetřování se již na l neprovádí). Na obr. 5, který je průmětem ve směru rovnoběžném s rovinou ω , je bod A neviditelný, znaménko rozdílu je pro bod B kladné, pro bod C záporné.

Určíme-li tímto způsobem viditelnost vrcholů mnohostěnu na určité, původně zvolené křivce plochy, bude viditelný oblouk křivky k omezený dvěma sousedními neviditelnými body nebo mezi viditelným a neviditelným bodem (obr. 6, oblouk AB viditelný, oblouky BC , CD , DE neviditelné).

Přesnost výsledku závisí na hustotě sítě. Na základě řídké sítě nahradíme plochu mnohostěnem nepřesně a nepřesně bude určena i viditelnost (viz obr. 6 oblouk DE). Příliš hustá síť však vyžaduje velké množství výpočtů. Uvedme příklad: Volíme-li padesát křivek v jednom a sto křivek



Obr. 7.

v druhém směru, má náhradní mnohostěn 5000 vrcholů a $(49.99.2)$ stěn. Je nutno určit 5000 řezů, tj. lomených čar, které mohou mít až ke dvěma stům stran, a popsáním způsobem rozhodnout o viditelnosti příslušného bodu. Z toho je patrné, jak velké množství početních úkonů je nutno provést k zjištění viditelnosti. Kapacita středního počítače stačí na určení viditelnosti plochy, na níž je zvoleno asi 3000 bodů.

Na obr. 7 je zobrazena část plochy, která vznikla rotací sinusoidy (průmět osy není nakreslen, představme si ji podle obr. 7 jako osu „kráteru“). Na ploše je zvoleno 20 + 40 křivek v rovnoběžných, stejně vzdálených a na sebe kolmých rovinách rovnoběžných s osou rotace. Počítač MINSK 22 určil postupně souřadnice 800 společných bodů těchto křivek z rovnice plochy ($z = 2 \sin(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)$), jejich viditelnost (vzhledem k předepsanému rovnoběžnému promítání), viditelné oblouky křivek plochy a jejich průmět. Nakonec „vedl ruku“ automatickému kreslicímu stroji (bubnovému plottru, informace o něm jsou v článku L. Drs, Automatické kreslení, Rozhledy 50, č. 4, str. 156), který kresbu provedl. Výpočet s kresbou trval přibližně 20 minut. Chyby výsledného průmětu nepřesahují ± 0.1 mm. Bylo by téměř nemožné narýsovat průmět tak přesně bez počítače.

Inspiro a trochoidy

Dr. JIŘÍ FIALA, Praha

Nedávno se v našich obchodech objevila nová velmi zajímavá hračka s názvem *Inspiro*, kterou vyrábí družstvo Maják v Jablonci nad Nisou. Jde o soupravu 18 ozubených koleček různých poloměrů a dvou ozubených mezikružích. Jedno z mezikružích se připevní špendlíky na podložku, do něj (nebo vně) se položí některé z ozubených koleček a do jednoho z otvorů, kterými jsou kolečka opatřena, se nasadí propisovačka. Volným pohybem kolečka kolem mezikružích se vytváří pozoruhodné krásné křivky.

Hlavní uspokojení je ovšem estetické — několik křivek nakreslených přes sebe různými barvami vytváří velice působivé obrázky. Hračka je však také velmi zajímavá z matematického hlediska. Křivky, které takto vznikají, mají totiž velký historický i praktický význam. Jsou to křivky, které opisuje bod pevně spojený s nějakou křivkou, která se valí bez klouzání po jiné křivce. Tyto křivky bývají označovány jako *cykloidální*. V našem případě jde o valivý pohyb jedné kružnice po druhé a křivky se pak dělí na *epitrochoidy* (když je pohybující se kružnice vně

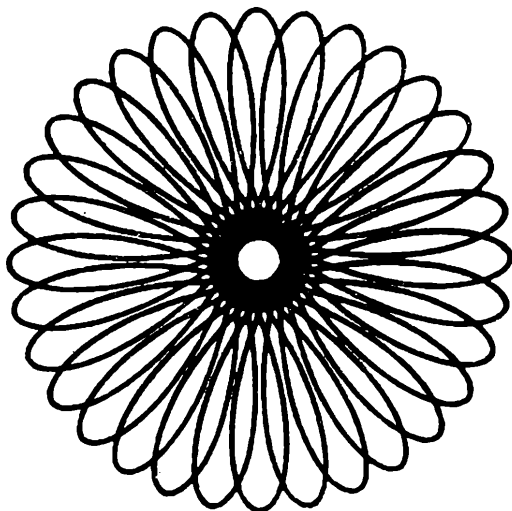
pevné kružnice) a *hypotrochoidy* (když je dotyk zevnitř). Bod, který je pevně spojen s pohybující se kružnicí, je v případě Inspira vždy uvnitř kruhu, ale obecně se může nacházet i na kružnici i vně kruhu. Poloměr pevné kružnice budeme označovat R , pohyblivé kružnice r a vzdálenost bodu od středu pohyblivé kružnice h .

Historie těchto křivek sahá přinejmenším k Hipparchovi (2. stol. př. n. l.), který pohybu kruhu po kruhu používal k názornému objasnění pohybu planet. Nejstarší vyšetřování těchto křivek se nachází v díle velikého německého malíře Albrechta Dürera (*Underweysung der Messung mit dem Zyrkel und Rychtscheyd*, Norimberk 1525), který zkonstruoval dokonce i zvláštní přístroj pro jejich kreslení. Zdá se však, že Dürerova zkoumání neměla na vývoj matematiky žádný vliv. Teprve po sto letech vychází pojednání o těchto křivkách od Francouze La Hire, který však sám přisuzuje jejich objev a nalezení jejich souvislosti s ozubenými koly velkému francouzskému geometru Desarguesovi.

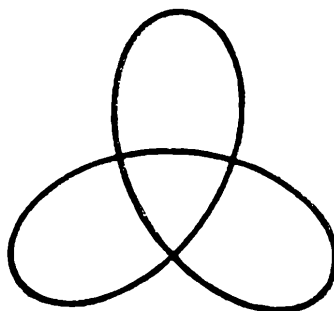
Když je poloměr pevné kružnice nekonečný, stává se z ní přímka a odpovídající epitrochoida se pak nazývá *trochoida*. Pokud je pak pohybující se bod přímo na kružnici, dostáváme speciální případ — *cykloidu*. Cykloidy mají velmi bohatou historii a jejich význam v dějinách matematiky je obrovský — od nich vede jedna z cest k vytvoření matematické analýzy. Název cykloida pochází od Galilei Galileiho, který je vyšetřoval v r. 1599. Název trochoida, odvozený od řeckého slova pro kolo (*τροχός*), pochází od francouzského matematika 17. století Robervalu.

Zkoumání těchto křivek a jejich velmi zajímavých vlastností bylo prakticky uzavřeno v minulém století a přispěli k němu i čeští matematici, např. Weyr a Jeřábek.

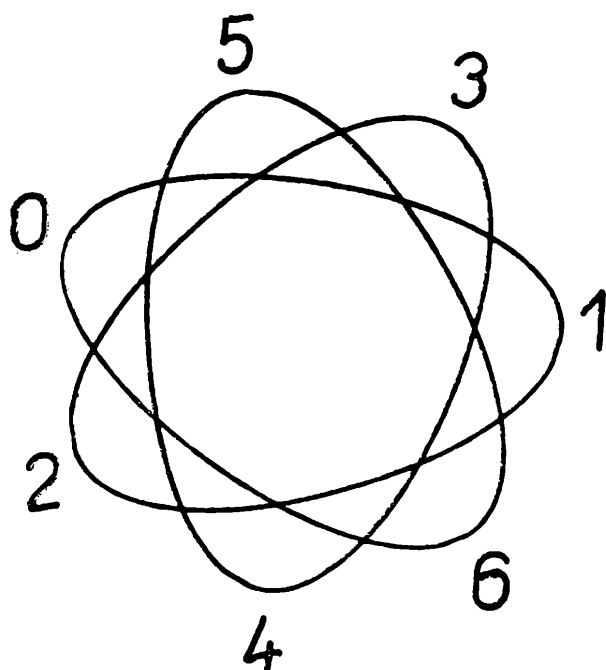
V tomto článku budeme hovořit jen o několika vlastnostech těchto křivek — těch, které nejvíce upoutají při práci s Inspirem. První otázkou je, jak objasnit, že křivky jsou uzavřené. Druhým problémem je počet větví (smyček). Když třeba vezmeme mezikružní 96 a pohyblivé ko-



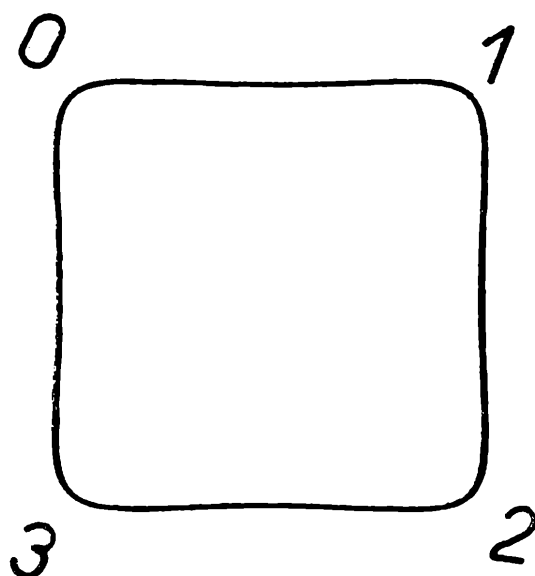
Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.



Obr. 4.

lečko s 63 zoubky, dostaneme křivku, která má 32 větví (obr. 1). Když však za pohyblivé kolečko vezmeme to, které má jen o jeden zoubek víc (64), dostaneme křivku jen se třemi větvemi (obr. 2). Třetí otázkou je pořadí, ve kterém se větve při kreslení objevují. Různá pořadí objevování se větví je možno sledovat na obrázcích 3 (45/105), 4 (24/96) a 5 (72/96). Otázka tedy zní: jak lze z počtu zoubků (tedy poloměrů kružnic) zjistit, kolik bude mít výsledná křivka větví a v jakém pořadí se budou objevovat? Přestože jde o vyšetřování geometrických křivek, budeme používat pouze elementární teorii čísel. Předpokládáme, že čtenář je seznámen se základními pojmy jako je dělitelnost, kongruence, největší společný dělitel, Eukleidův algoritmus apod.

Nejprve si celý pohyb rozvineme do přímky, na které si vyznačíme body $0, 2\pi R, 4\pi R, \dots$ a také body $2\pi r, 4\pi r, 6\pi r, \dots$. Křivka se uzavře, když poprvé dva z těchto bodů splynou. Hledáme tedy nejmenší přirozené číslo q takové, že $qr = pR$, p celé. Taková p a q musí být nesoudělná, a protože $r/R = p/q$, jsou určena jednoznačně (dokažte!). Číslo q ovšem pak udává právě počet větví kreslené křivky. Máme tedy první závěr — formulujeme ho už v počtech zoubků: *Jsou-li počty zoubků pevné kružnice b a pohyblivé kružnice a a když $a/b = p/q$, kde p a q jsou nesoudělná, pak q je počet větví.*

Tím jsme objasnili první dvě otázky: proč je křivka uzavřená a jaký je počet větví. Uzavřenost křivky vyplývá z toho, že poměr poloměrů obou kružnic je racionální číslo. Kdyby tomu tak nebylo, křivka by se nikdy neuzavřela — i kdybychom udělali sebevíc větví.

Nyní přistoupíme ke zjištění pořadí, ve kterém se větve při kreslení objevují. Větve budeme vždy číslovat od nuly. Větev, která sousedí

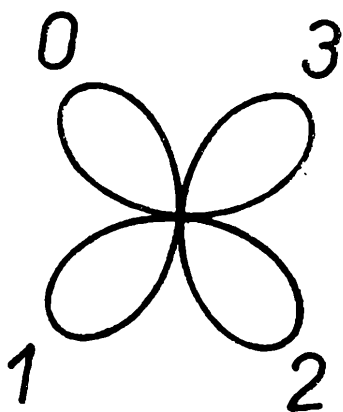
s větví nula, tedy větev, která má v přirozeném pořadí (po nakreslení) pořadové číslo 1 bude ta větev, která se při kreslení objeví jako i -tá, přičemž bod $2\pi ir$ má nejmenší relativní polohu v odpovídajícím intervalu $(2\pi kR, 2\pi(k+1)R)$. Seřadíme-li tedy body $2\pi ir$ podle jejich relativní polohy, dostaneme je v přirozeném pořadí (tedy jako po nakreslení). Relativní polohu je možno nejlépe vyjádřit jako zbytek po dělení čísla ak číslem b , tedy zbytek po dělení čísla pk číslem q pro $k = 0, 1, \dots, (q-1)$.

Dříve než budeme vše formulovat obecně, proberme si to na jednom konkrétním příkladu (obr. 3). Zde je $p/q = 45/105$, tedy $p = 3$ a $q = 7$ (počet větví je skutečně sedm, jak jsme už ověřili dříve).

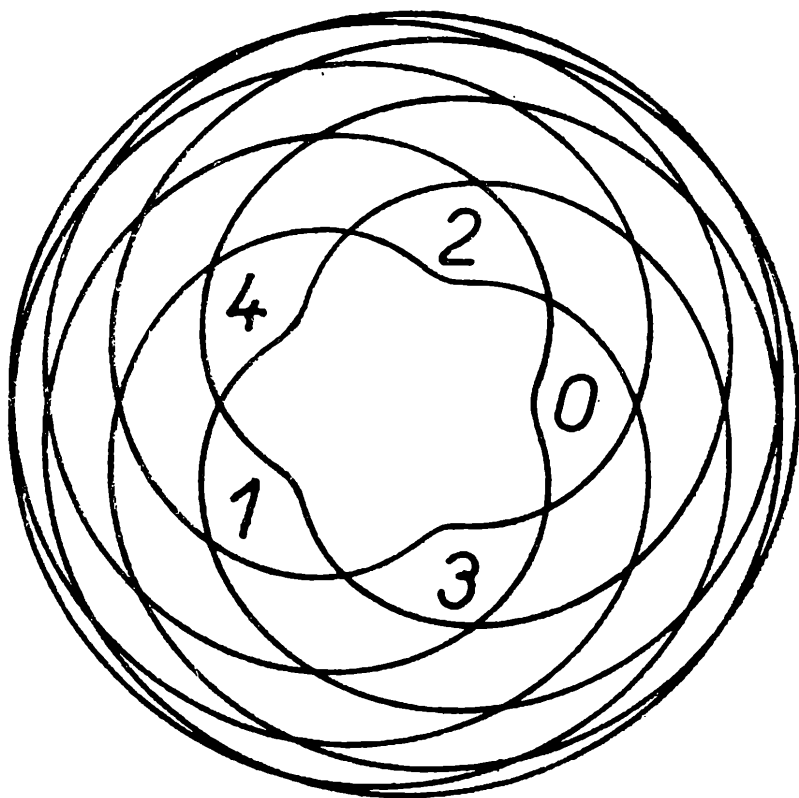
Pořadové číslo:	0	1	2	3	4	5	6
Násobky p :	0	3	6	9	12	15	18
Zbytky po dělení q :	0	3	6	2	5	1	4

Z této tabulky vidíme, že jako první se při kreslení objeví větev, která bude mít při přirozeném očíslování (po nakreslení) číslo 3, nebo že větev sousedící s větví 0 (tedy s přirozeným pořadovým číslem 1) se objeví při kreslení jako třetí. Z této tabulky také vyčteme pořadí, ve kterém se větve budou objevovat, totiž 0, 3, 6, 2, 5, 1, 4.

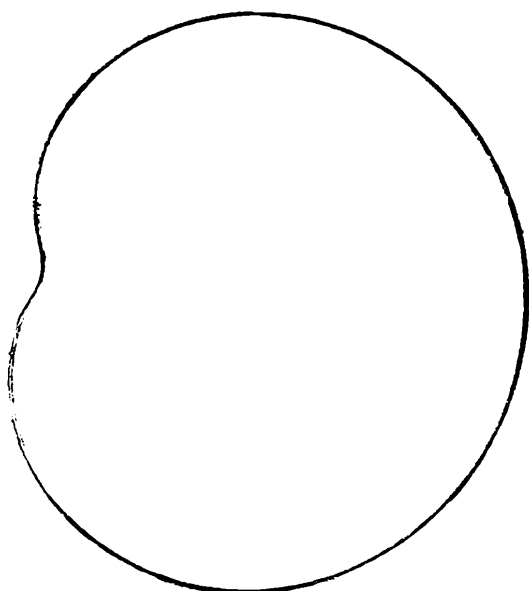
Obecná úvaha je tato: Nechť zbytky po dělení čísel



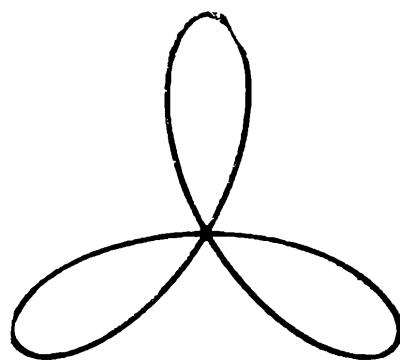
Obr. 5.



Obr. 6.



Obr. 7.



Obr. 8.

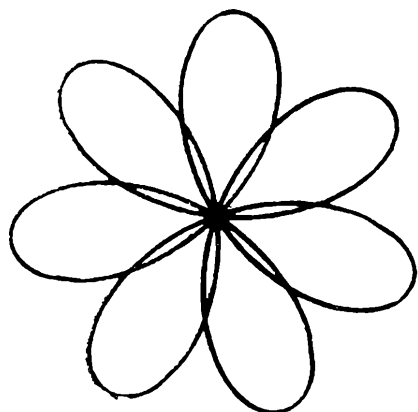
	0	p	$2p$	$3p$	$(q-1)p$
číslem q jsou	0	l_1	l_2	l_3	l_{q-1}

Tyto zbytky tvoří úplnou soustavu zbytků. Větev, která je v přirozeném pořadí k -tá, se objeví při kreslení jako i -tá, kde i je určeno vztahem $l_i = k$. Určení i z této rovnice je vlastně úlohou řešit kongruenci $ip \equiv k \pmod{q}$. Tato kongruence má přesně jedno řešení (v úplné soustavě zbytků), které lze získat např. pomocí řetězových zlomků (viz např. I. M. Vinogradov. Základy teorie čísel, NČSAV 1953, kap. 4). Speciálně tedy větve sousedící s počáteční se objeví při kreslení jako i -tá, kde i je určeno kongruencí $pi \equiv 1 \pmod{q}$. Toto i lze určit třeba tak, že se určí x a y (podle Eukleidova algoritmu) tak, aby platilo $px + qy = 1$. Pak $i = x$.

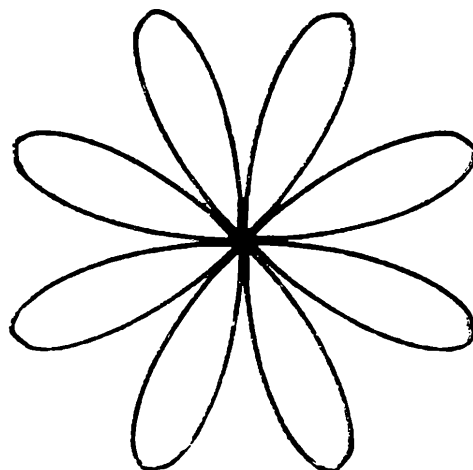
V této podobě je vše přece jen složité pro použití při práci s Inspirem. Když si znovu prohlédneme obrázek 3, zjistíme, že v objevování se větví je ještě jedna pravidelnost: Mezi dvěma po sobě jdoucími větvemi (při kreslení) jsou vždy dvě jiné větve (po úplném nakreslení). Zkusme tedy zjistit obecně počet větví mezi větvemi, které za sebou následují při kreslení.

Nechť i -tá větev má přirozené pořadí k tj. $pi \equiv k \pmod{q}$ a podobně $i+1$ nechť odpovídá k' tj. $p(i+1) \equiv k' \pmod{q}$. Je-li $k < k'$, je počet větví mezi roven $k' - k - 1$. Je-li $k > k'$, je tento počet roven $k' + q - k - 1$ (ověřte!). Z obou kongruencí dostáváme jejich odečtením $k' - k \equiv p \pmod{q}$. Nechť nyní je p' zbytek po dělení p číslem q . Pak dostáváme $k' - k = p'$ pro $k' > k$ a $k' + q - k = p'$ pro $k' < k$ (dokažte!). Máme tedy tento závěr:

Je-li počet zoubků pevného kolečka b a pohyblivého kolečka a a když $a/b = p/q$, kde p a q jsou nesoudělná a p' je zbytek po dělení čísla p číslem q , pak když $p' = 1$, následují větve při kreslení za sebou v přirozeném pořadí,



Obr. 9.



Obr. 10.

a když $p' \neq 1$, pak mezi každými dvěma větvemi, které jdou po sobě při kreslení, se nachází $p' - 1$ jiných větví (po nakreslení).

Inspiro skýtá množství příkladů pro ověření tohoto závěru. Na obrázku 6 (pevné kolečko se 30 zoubky, pohyblivé se 48) vidíme, jak se větve objevují pro epitrochoidu. Zde je $p/q = 48/30$, tj. $p = 8$ a $q = 5$. Epitrochoida má 5 větví a mezi dvěma po sobě jdoucími větvemi jsou vždy $p' - 1 = 3 - 1 = 2$ jiné větve.

Pozoruhodné jsou také některé zvláštní případy epi- a hypotrochoid. *Elipsa* je hypotrochoidou s $R = 2r$. Na Inspiru si to můžete vyzkoušet s mezikružím 96 a kolečkem 48. Čím blíže je bod kružnici, tedy čím větší je h , tím je elipsa protáhlejší. Pro $h = r$ dostaneme úsečku — tento fakt udivoval velice Koperníka. Uměli byste to dokázat?

Významnou technickou křivkou je *Pascalova závitnice*, která je epitrochoidou s $R = r$; pokud je navíc $h = r$, pak jde o *kardioidu*. Na Inspiru lze nakreslit Pascalovu závitnici, pokud vám někdo půjčí ještě jedno kolečko ze své sady. Pascalova závitnice na obrázku 7 byla nakreslena pomocí dvou koleček s 36 zoubky — ovšem zde tvar nezávisí na počtu zoubků.

Obzvlášť zajímavou historii mají křivky nazývané *růžice*. Jsou to hypo- a epitrochoidy, pro které je $R \pm r = h$. Na Inspiru lze nakreslit ovšem pouze růžice s $R - r = h$. Několik jich je na obrázcích 5 (72/96, otvor 20), 8 (64/96, otvor 12), 9 (75/105, otvor 19) a konečně 10 (60/96, otvor 8). Růžice objevil Guido Grandi začátkem 18. století, když hledal geometrické vyjádření tvarů květů. Krásné vlastnosti těchto křivek popsal už v dopisech Leibnizovi v r. 1713 a později jim věnoval celou knihu (*Flores geometrici ex rhodoaerum et claeliarum descriptione resultantes*), která vyšla ve Florencii r. 1728.

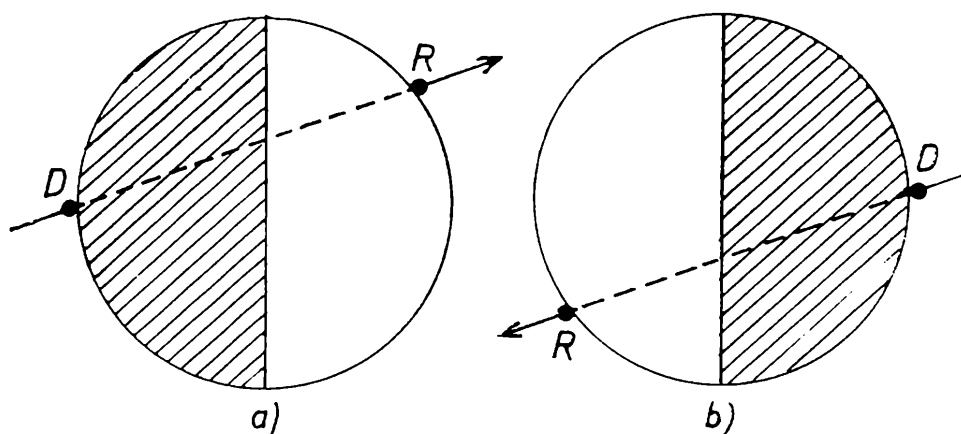
Zákryty hvězd Měsícem

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Jedním ze zajímavých úkazů, které můžeme sledovat již malým dalekohledem, jsou zákryty hvězd Měsícem. Zákryt hvězdy Měsícem lze do určité míry přirovnat k zatmění Slunce; dojde k němu tehdy, když stín, který vrhá do prostoru Měsíc, osvětlený hvězdou, dopadne na pozorovací místo na Zemi. Na rozdíl od Slunce je ovšem hvězda bodovým zdrojem světla, o němž můžeme navíc předpokládat, že je v nekonečně velké vzdálenosti. Proto stín Měsíce má v tomto případě tvar válce o průměru rovném průměru Měsíce a neexistuje polostín. Podobně jako zatmění Slunce je i zákryt hvězdy Měsícem pozorovatelný jen na těch místech zemského povrchu, na něž dopadá stín, a pro různá pozorovací místa nastává v různou dobu, neboť stín Měsíce se po zemském povrchu pohybuje rychlostí asi 1 km s^{-1} . Víme, že Měsíc obíhá kolem Země po dráze, jejíž sklon k rovině ekliptiky je $5^{\circ}09'$, proto může Měsíc zakrývat jen hvězdy, ležící v pásu $\pm 5^{\circ}$ podél ekliptiky. Měsíc se mezi hvězdami pohybuje přímým směrem, tj. od západu k východu tak, že se za jednu hodinu přesune přibližně o půl stupně, čili o svůj vlastní průměr. Doba trvání zákrytu určité hvězdy tedy může být maximálně asi jedna hodina, a to pro pozorovací místa, přes něž přechází střed stínu Měsíce, neboli pro pozorovací místa, z nichž se zákryt jeví tak, jako by hvězda prošla středem měsíčního kotouče. Pro ostatní místa je doba trvání zákrytu kratší, případně pro ně zákryt vůbec nenastane.

K zákrytu hvězdy Měsícem může dojít při libovolné fázi Měsíce. Vzhledem k pohybu Měsíce mezi hvězdami dochází v době mezi novem a úplňkem k zakrytí tmavým okrajem Měsíce, v době mezi úplňkem a novem k zakrytí osvětleným okrajem Měsíce. K pozorování jsou výhodnější zákryty tmavým okrajem Měsíce, neboť tolik neruší jeho světlo.

Na obr. 1 je nakreslen průběh zákrytu jak při pozorování nepřevracujícím dalekohledem, např. triedrem (a), tak při pozorování převracujícím astronomickým dalekohledem (b). „Vstup“ hvězdy za okraj Měsíce se označuje písmenem *D* (podle anglického slova disappearance = zmizení), „výstup“ hvězdy písmenem *R* (reappearance = opětné objevení). Vstup i výstup hvězdy proběhnou v neměřitelně krátkém časovém okamžiku, neboť hvězda je bodovým zdrojem světla. Nebylo pozorováno slábnutí



Obr. 1. Zákryt hvězdy Měsícem v první čtvrti.

světla hvězdy při jejím přiblížení k okraji měsíčního kotouče, ani lom světla, který by se projevil změnou polohy hvězdy na obloze. To je jedním z důkazů, že Měsíc nemá atmosféru.

Význam studia zákrytů hvězd Měsícem spočíval v minulých desetiletích zejména v kontrole pohybu Měsíce, protože známe-li souřadnice pozorovacího místa, můžeme přesným určením okamžiku zákrytu hvězdy současně určit i polohu Měsíce mezi hvězdami neboli jeho souřadnice. Obráceně se pozorování zákrytů používalo i k určení zeměpisných souřadnic pozorovacího místa. Časová měření musí ovšem být velmi přesná. Rychlost stínu Měsíce, jak jsme již uvedli, je asi 1 km s^{-1} . Chceme-li určit polohu pozorovacího místa s přesností $\pm 10 \text{ m}$, pak chyba v určení okamžiku zákrytu nesmí překročit hodnotu $\pm 0,01 \text{ s}$. Tuto přesnost v současné době zajišťují metody, nezávislé na osobních chybách pozorovatelů. Jde např. o fotoelektrické metody pozorování, které jsou však použitelné jen u velmi jasných hvězd do 4. zdánlivé hvězdné velikosti. Přesná měření jsou ztížena skutečností, že Měsíc není dokonalá koule, ale jeho povrch je hornatý. Hory na okraji Měsíce mohou způsobit, že se okamžiky zákrytu, určené i na poměrně velmi blízkých pozorovacích místech, od sebe liší.

Velkého významu došly zákryty hvězd Měsícem po zavedení tzv. efemeridového času, který plyne nezávisle na rotaci Země kolem osy a je v podstatě určován z pohybu Měsíce. Jestliže dopředu vypočteme polohy Měsíce a srovnáme je později s polohami zaměřenými, zjistíme, že čas odvozený z rotace Země kolem osy neplyne rovnoměrně, neboť ani rotace Země není zcela rovnoměrná. Jestliže při výpočtu poloh Měsíce vezmeme v úvahu všechny vlivy, které na pohyb Měsíce působí, pak odchylky v poloze Měsíce nemohou být způsobeny nepravidelnostmi v jeho pohybu, ale jen rozdíly mezi časem rotačním a časem efemeridovým.

Okamžiky zákrytů některých jasných hvězd Měsícem pro Prahu a Hodonín přináší každoročně Hvězdářská ročenka. Výběr hvězd je zde

proveden s ohledem na měsíční fázi, kterou charakterizuje úhlová vzdálenost Měsíce od Slunce. Do úhlové vzdálenosti 15° nejsou zákryty uváděny, neboť Měsíc je prakticky na denní obloze; při úhlové vzdálenosti od 15° do 25° jsou uvedeny zákryty jen u hvězd jasnějších než $1,9^m$, při vzdálenosti od 25° do 155° jsou zákryty vypočteny pro hvězdy do 7^m , při vzdálenosti od 155° do 165° je vzhledem k přibývajícimu jas Měsíce výběr hvězd omezen na hvězdy do $5,5^m$ a konečně v období kolem úplňku, tj. při úhlové vzdálenosti Měsíce od Slunce 165° až 180° jen pro hvězdy do 3^m . Předpovědi zákrytů počítá tzv. Occultation Machine (zákrytový stroj), který je na hvězdárně v Greenwiche. Zákryty jsou počítány pro jasné hvězdy v pásmu $\pm 5^\circ$ podél ekliptiky, jejichž polohy jsou přesně proměřeny a shrnuty do katalogu označeného zkratkou NZC (The New Zodiacal Catalogue).

Kromě zákrytů hvězd Měsícem může dojít také k zákrytům planet a planetek Měsícem, k zákrytům hvězd planetami nebo planetkami. Na základě pozorování zákrytu hvězdy BD $-5^\circ 5863$ planetkou Pallas, který trval 25,53 sekundy, byl určen průměr této planetky na 430 km. Zákryty hvězd planetami a zvláště planetkami jsou však neobyčejně vzácné, neboť úhlové průměry těchto těles jsou malé a tím pravděpodobnost zákrytu je nepatrná.

Od padesátých let našeho století se sledují rovněž zákryty kosmických zdrojů rádiového záření Měsícem, případně sluneční korónou. Tato pozorování slouží k přesnému určení polohy zdrojů rádiového záření. Rozlišovací schopnost rádiových dalekohledů je ve srovnání s optickými dalekohledy poměrně malá, proto je obtížné identifikovat zdroj rádiového záření s některým zdrojem viditelného záření. Při zákrytu rádiového zdroje Měsícem rádiové záření vymizí a souřadnice zdroje tak určíme poměrně velmi přesně. Tato metoda stanovení souřadnic rádiových zdrojů je ovšem omezena jen na zdroje ležící v pásu $\pm 5^\circ$ podél ekliptiky.

naše soutěž

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

7. Jestliže p, q jsou reálná čísla a n celé, $n > 1$, rozložte polynom $x^{2n} + p \cdot x^{2n-1} + q$ na součin polynomů

$$(x^{2n-1} + p_1 \cdot x^{2n-2} + q_1) \cdot (x^{2n-1} + p_2 \cdot x^{2n-2} + q_2)$$

opět s reálnými koeficienty. Tím získáte vzhledem k n indukční způsob a) rozkladu tohoto polynomu a současně b) řešení rovnice

$$x^{2n} + p \cdot x^{2n-1} + q = 0.$$

Najděte minimum uvedeného trojčlenu pro reálná x . Jako příklad rozložte binom $x^8 + 216$ a najděte jeho kořeny.

(Došlo 15 řešení.)

Přemysl Vihan

Upravené řešení: Vlastimil Klíma, 2 tř. G, Benešov:

Rozlišujeme v podstatě dva případy:

1. $p^2 - 4q \geq 0$. Potom

$$\begin{aligned} x^{2n} + p \cdot x^{2n-1} + q &= \left(x^{2n-1} + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} = \\ &= \left(x^{2n-1} + \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right) \cdot \left(x^{2n-1} + \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right); \end{aligned}$$

2. $p^2 - 4q < 0$; důsledkem je $q > 0$.

Jelikož

$$p^2 - 4q = (p - 2\sqrt{q}) \cdot (p + 2\sqrt{q}),$$

je buď

$$\text{i) } p + 2\sqrt{q} < 0 \quad \text{a} \quad p - 2\sqrt{q} > 0$$

nebo

$$\text{ii) } p + 2\sqrt{q} > 0 \quad \text{a} \quad p - 2\sqrt{q} < 0.$$

V případě i) píšeme

$$\begin{aligned} x^{2n} + p \cdot x^{2n-1} + q &= (x^{2n-1} - \sqrt{q})^2 - x^2 \cdot (-p - 2\sqrt{q}) = \\ &= (x^{2n-1} - \sqrt{q} - x^{2n-2} \sqrt{-2\sqrt{q} - p}) \cdot (x^{2n-1} - \end{aligned}$$

$$- \sqrt{q} + x^{2^{n-2}} \sqrt{-2\sqrt{q} - p})$$

V případě ii) píšeme

$$\begin{aligned} x^{2^n} + p \cdot x^{2^{n-1}} + q &= (x^{2^{n-1}} + \sqrt{q})^2 - x^{2^{n-1}} \cdot (2\sqrt{q} - p) = \\ &= (x^{2^{n-1}} + \sqrt{q} - x^{2^{n-2}} \sqrt{2\sqrt{q} - p}) \cdot (x^{2^{n-1}} + \sqrt{q} + \\ &\quad + x^{2^{n-2}} \sqrt{2\sqrt{q} - p}). \end{aligned}$$

Takto získané polynomy jsou buď tvaru $x^2 + a \cdot x + b$ s reálnými a, b , nebo stejného typu jako původní polynom. Tak rozložíme původní polynom na 2^{n-1} polynomů tvaru $x^2 + a \cdot x + b$ s reálnými koeficienty a, b . Rozkladem kvadratických mnohočlenů na lineární (ne už nutně reálné) mnohočleny dostaneme komplexní čísla $r_1, \dots, r_{2n}$, kořeny polynomu $x^{2^n} + p \cdot x^{2^{n-1}} + q = (x - r_1) \cdot (x - r_{2n})$.

Pro určení minima polynomu $x^{2^n} + p \cdot x^{2^{n-1}} + q$ ($n > 1$) upravíme jej na tvar $\left(x^{2^{n-1}} + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$. Potom při $p \geq 0$ je jeho minimum rovno q (a to pro $x = 0$), při $p < 0$ je jeho nejmenší hodnota $q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ (a to pro $x = \pm \sqrt[2^{n-1}]{-\frac{p}{2}}$).

Rozklad mnohočlenů $x^8 + 216$:

$$x^8 + 216 = 216 \cdot \left[\left(\frac{x}{\sqrt[8]{216}} \right)^8 + 1 \right] = 216 \cdot (y^8 + 1);$$

$$\begin{aligned} y^8 + 1 &= (y^4 + 1)^2 - 2y^4 = (y^4 + 1 - \sqrt{2} \cdot y^2) \cdot (y^4 + 1 + \sqrt{2} \cdot y^2) = \\ &= [(y^2 + 1)^2 - (2 + \sqrt{2})y^2] \cdot [(y^2 + 1)^2 - (2 - \sqrt{2})y^2] = \\ &= (y^2 + 1 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}y) \cdot (y^2 + 1 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}y) \cdot (y^2 + 1 - \\ &\quad - \sqrt{2 - \sqrt{2}}y) \cdot (y^2 + 1 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}y). \end{aligned}$$

To je tzv. úplný reálný rozklad mnohočlenů $y^8 + 1$.

Kořeny polynomu $x^8 + 216$ jsou potom

$$\begin{aligned} &\sqrt[8]{216} \cdot (\pm \sqrt{2 + \sqrt{2}} \pm i \sqrt{2 - \sqrt{2}}) \cdot \frac{1}{2}; \\ &\sqrt[8]{216} \cdot (\pm \sqrt{2 - \sqrt{2}} \pm i \sqrt{2 + \sqrt{2}}) \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

12. Jsou dány tři body trojrozměrného euklidovského prostoru, které neleží v jedné přímce. Z bodu A se pohybuje bod rovnoměrně po polo-

přímce AC rychlostí v_a , z bodu B také rovnoměrně jiný bod po polopřímce BC rychlostí v_b . Najděte takový okamžik, v němž vzdálenost obou bodů bude nejmenší, a vypočtěte ji za předpokladu, že se oba body začnou pohybovat v témž okamžiku.

(Došlo 10 řešení.)

Přemysl Vihan

Upravené řešení: Vlastimil Klíma, 2.b G, Benešov:

Vyšetřme obecnější úlohu, která upouští od požadavku nekolineárnosti bodů A, B, C a připouští i $v_a = 0$ nebo $v_b = 0$. Označme vzdálenost $AC = a$, $BC = b$ a φ úhel $\sphericalangle ACB$. Je tedy $v_a \geq 0$, $v_b \geq 0$ a $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Potom je, jestliže

- (1) $v_a = v_b$ a současně $\varphi = 0$, vzdálenost obou bodů stále táž a rovna $|b - a|$;
- (2) $v_a \neq v_b$ nebo $\varphi \neq 0$ a $a \cdot v_a + b \cdot v_b - (a \cdot v_b + b \cdot v_a) \cdot \cos \varphi > 0$, nejmenší vzdálenost bodů rovna

$$\frac{|\sin \varphi| \cdot |a \cdot v_b - b \cdot v_a|}{\sqrt{v_a^2 + v_b^2 - 2v_a \cdot v_b \cdot \cos \varphi}}$$

a dosáhnou jí v okamžiku

$$t = \frac{a \cdot v_a + b \cdot v_b - (a \cdot v_b + b \cdot v_a) \cdot \cos \varphi}{v_a^2 + v_b^2 - 2v_a \cdot v_b \cdot \cos \varphi};$$

- (3) $v_a \neq v_b$ nebo $\varphi \neq 0$ a $a \cdot v_a + b \cdot v_b - (a \cdot v_b + b \cdot v_a) \cdot \cos \varphi \leq 0$, nejmenší vzdálenost obou bodů rovna AB , a to pro $t = 0$.

Důkaz: Označme A' , příp. B' bod, v němž se nachází v okamžiku t bod pohybující se po polopřímce AC , případně BC , $d(t)$ čtverec vzdálenosti bodů A', B' a ψ úhel $\sphericalangle A'CB'$. Je tedy $\psi = \varphi$ nebo $\psi = \pi - \varphi$.

$$d(t) = |a - v_a \cdot t|^2 + |b - v_b \cdot t|^2 - 2|a - v_a \cdot t| |b - v_b \cdot t| \cdot \cos \psi,$$

což je v obou případech — mají-li totiž výrazy $(a - v_a \cdot t)$, $(b - v_b \cdot t)$ táž znaménka nebo opačná —

$$d(t) = (a - v_a \cdot t)^2 + (b - v_b \cdot t)^2 - 2(a - v_a \cdot t) \cdot (b - v_b \cdot t) \cdot \cos \varphi.$$

Po úpravě dostaneme $d(t) = p \cdot t^2 - 2q \cdot t + r$, kde

$$\begin{aligned} p &= v_a^2 + v_b^2 - 2v_a \cdot v_b \cdot \cos \varphi, \quad q = a \cdot v_a + b \cdot v_b - \\ &\quad - (a \cdot v_b + b \cdot v_a) \cdot \cos \varphi, \\ r &= a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

Jelikož pro $v_a \cdot v_b \geq 0$ je $v_a^2 + v_b^2 - 2v_a \cdot v_b \cdot \cos \varphi \geq (v_a - v_b)^2 \geq 0$, je $p \geq 0$ a rovnost $p = 0$ platí, právě když $v_a = v_b$ a současně $\varphi = 0$. Jestliže je $v_a = v_b$ a současně $\varphi = 0$, je $d(t) = (a - b)^2$ pro všechna t .

Jestliže je $v_a \neq v_b$ nebo $\varphi \neq 0$, upravíme $d(t)$ takto:

$$d(t) = p \cdot \left(t^2 - 2 \frac{q}{p} t + \frac{r}{p} \right) = p \cdot \left(t - \frac{q}{p} \right)^2 + r - \frac{q^2}{p}.$$

Potom je při $q > 0$ zřejmě $d(t)$ nejmenší pro $t = \frac{q}{p}$ a rovno

$$r - \frac{q^2}{p} = \frac{\sin^2 \varphi \cdot (a \cdot v_b - b \cdot v_a)^2}{v_a^2 + v_b^2 - 2v_a \cdot v_b \cdot \cos \varphi};$$

při $q \leq 0$ je $d(t)$ nejmenší pro $t = 0$ a rovno r .

Tím je tvrzení dokázáno, neboť nezáporná funkce a její čtverec nabudou (pokud existují) svého minima v témž bodě.

Jestliže $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbf{E}^3$ a označíme-li $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3)$, je

$$a = \sqrt{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + (a_3 - c_3)^2},$$

$$b = \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2 + (b_3 - c_3)^2},$$

$$r = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} \quad \text{a}$$

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{A} - \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{C})}{|\mathbf{A} - \mathbf{C}| \cdot |\mathbf{B} - \mathbf{C}|},$$

kde v čitateli je skalární součin vektorů $\mathbf{A} - \mathbf{C}$, $\mathbf{B} - \mathbf{C}$.

Konstruktivní geometrie

3. Sestrojte krychli, je-li dán střed S jedné její stěny a přímka p , na níž leží tělesová úhlopříčka krychle.

(Došlo 10 řešení.)

František Hradecký

Upravené řešení: Václav Salač, 4 tř. G v Praze 4, Ohradní:

Označme vrcholy krychle tak, aby na přímce p ležela úhlopříčka AG a bod S byl středem stěny $ABCD$. Bodem S a přímkou p proložíme rovinu ρ a v ní sestrojíme obdélník $ACGE$, který je úhlopříčným řezem krychle $ABCDEFGH$.

Označme X patu kolmice sestavené z bodu S na přímku p . Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $\triangle AXS \sim \triangle ACG$ (u, u) plyne

$$SX : XA = CG : AC = 1 : \sqrt{2} \quad \text{a odtud} \quad XA = SX \cdot \sqrt{2}.$$

Z pravoúhlého $\triangle AXS$, v němž $AS = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (a je délka hrany krychle), plyne podle Pythagorovy věty $AX^2 + SX^2 = \frac{a^2}{2}$, tj. $2 \cdot SX^2 + SX^2 = \frac{a^2}{2}$, a odtud $SX = \frac{a}{\sqrt{6}}$ a $AX = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Je tudíž $AX = \frac{1}{3} \cdot AG$.

Bod G je obrazem bodu X ve stejnolehlosti se středem v bodě A a koeficientem 3, bod C je obrazem bodu S ve stejnolehlosti se středem v bodě A a koeficientem 2. Tím je obdélník $ACGE$ v rovině ρ určen.

Vedeme-li nyní bodem S a bodem S' (S' je střed úsečky EG) kolmice k rovině ρ a nanese-li na ně úsečku délky AS , dostaneme zbývající vrcholy B, D, F, H krychle.

Správnost konstrukce plyne z provedeného rozboru. Poněvadž střed stěny krychle nemůže být bodem tělesové úhlopříčky, je $S \notin p$. Pro určení bodu A na přímce p jsou pak dvě možnosti. Má tudíž úloha právě dvě řešení. Obě výsledné krychle jsou souměrně sdruženy podle roviny σ procházející bodem S kolmo k přímce p .

Pozn. Antonín Otáhal ze 4.A G. Ostravy-Zábřehu sestrojil napřed v rovině σ procházející bodem S kolmo k přímce p rovnostranný trojúhelník SS_1S_2 , jehož střed je v průsečíku X této roviny s přímkou p . Body S, S_1, S_2 jsou středy stěn krychle majících společný bod A , který sestrojil stejným způsobem jako v uvedeném řešení. Užitím stejnolehlosti se středem v bodě A a koeficientem 2 dostal vrcholy C, F, H krychle. Sestrojením úhlopříčného řezu $ACGE$, v němž je $AE \parallel CG \parallel SS'$ (S' je střed úsečky HF) dostal další vrcholy E, G krychle. Další konstrukce je již zřejmá.

4. Libovolný trojúhelník $A_1B_1C_1$ je rovnoběžným průmětem trojúhelníka ABC , který je částí pravidelného pětiúhelníka $ABCDE$. Sestrojte průmět $A_1B_1C_1D_1E_1$ tohoto pětiúhelníka.

(Došlo 10 řešení.)

Emil Kraemer

Řešení autorovo :

Sestrojíme-li průsečík F úhlopříček AD, CE , dostaneme rovnoběžník $ABCF$. Jeho rovnoběžný průmět $A_1B_1C_1F_1$ je potom také rovnoběžník, takže bod F_1 se snadno sestojí. Jestliže se nám podaří sestojit průmět E_1 bodu E , bude úloha rozřešena; ke konstrukci bodu D_1 uijeme toho, že je $CD \parallel BE, ED \parallel AC$, a tedy též $C_1D_1 \parallel B_1E_1, E_1D_1 \parallel A_1C_1$.

Ke konstrukci bodu E_1 uijeme této vlastnosti rovnoběžného promítání: Jestliže úsečky MN, PQ leží na téže přímce (která nepatří směru promítání), potom pro jejich průměty M_1N_1, P_1Q_1 platí:

$$M_1N_1 : P_1Q_1 = MN : PQ$$

V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ je $AC \parallel DE$; přitom je $\sphericalangle ACF = \sphericalangle DEF$ (úhly obvodové nad shodnými tětivami kružnice opsané pětiúhelníku $ABCDE$). Je tedy $\triangle ACF \sim \triangle DEF$ (uu), takže je

$$EF : ED = CF : CA . \quad (1)$$

Avšak $ED = CF$ (neboť $CF = AB = ED$), $CA = CE$ (neboť $\triangle EAC$ má shodné úhly při straně EA). Podle (1) je tedy

$$EF : CF = CF : CE . \quad (2)$$

Podle výše uvedené vlastnosti rovnoběžného promítání je

$$\begin{aligned} E_1F_1 : C_1F_1 &= EF : CF \\ C_1F_1 : C_1E_1 &= CF : CE . \end{aligned}$$

To znamená, že podle (2) platí:

$$E_1F_1 : C_1F_1 = C_1F_1 : C_1E_1 . \quad (3)$$

Je-li $C_1E_1 = x$, $C_1F_1 = a$, je $E_1F_1 = x - a$. Podle (3) tak dostaneme pro x tuto rovnici:

$$\frac{x - a}{a} = \frac{a}{x} .$$

Je tedy

$$x^2 - ax - a^2 = 0 ;$$

tato rovnice má kořeny:

$$x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}, \quad x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} .$$

Protože je $x > 0$ (délka úsečky), platí jenom kořen x_1 .

Úsečku $x = C_1E_1$ snadno sestrojíme jako součet úsečky o délce $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}C_1F_1$ s úsečkou, která je přeponou pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami $\frac{a}{2}, a$.

olympiády

Matematické nádeje súťažili v Erfurte (Dokončenie)

RNDr. JOZEF MORAVČÍK, CSc., Žilina

3. K československej účasti na XVI. MMO

Ako družstvo ČSSR pre XVI. MMO vybralo predsedníctvo ÚVMO 10 žiakov na záver týždenného sústredu, ktoré sa konalo v Prahe od 17. do 22. 6. 1974. Účastníci sústredu boli vybraní na základe výsledkov III. a II. kola XXIII. ročníka MO a prípadnej predchádzajúcej účasti na MMO. Z účasti na sústrede sa ospravedlnili dvaja, do ktorých sa vkladali najväčšie nádeje: Jaromír Šimša, ktorý získal už na XIV. i XV. MMO tretiu cenu (pre účasť na sústrede maturantov odchádzajúcich na jeseň študovať do zahraničia) a Pavel Ferst, ktorý na XV. MMO získal dokonca II. cenu. Za nich bolo nutné povolať náhradníkov, medzi



Naše družstvo na XVI. MMO na nádvorí zámku Cecilienhof v Postupimi. Na obrázku sú zľava doprava :

Dr. Rosenbaum (tlumočník), Kindlmann, Voldřich, Navrátil, Trlifaj, Vencovská, Balanda, Valášek, Širáň, Macháček (pedag. vedúci družstva), R. Strůby (prievodca družstva).

nimi i Alenu Vencovskú, ktorá sa napokon v Erfurte ukázala byť najlepšou členkou nášho družstva. Na základe poznatkov zo sústredenia, ochudobneného o skúsených reprezentantov, bolo do NDR vyslaných týchto 8 žiakov (v tabuľke sú zároveň uvedené výsledky, ktoré dosiahli na XVI. MMO):

Por. čís.	Priezvisko a meno	Trieda a škola	Počet bodov získaných za						Sp.
			úl. 1	úl. 2	úl. 3	úl. 4	úl. 5	úl. 6	
1.	Balanda Lubomír	3.b gymn. Český Těšín	5	4	0	6	1	0	16
2.	Kindlmann Pavel	4.a gymn. Čes. Budějovice	5	6	3	6	2	1	23
3.	Navrátil Jiří	1.a gymn. Olomouc-Hejčín	5	6	0	2	5	0	18
4.	Širáň Jozef	4.b gymn. Bratislava, Novoh.	5	6	1	6	4	0	22
5.	Trlifaj Jan	4.d gymn. Pha 3, Sladkovského	5	6	0	6	0	1	18
6.	Valášek M.	3.d gymn. Pha 2, W. Piecka	5	1	1	6	0	1	14
7.	Vencovská Alena	4.tr. gymn. Pha 1, Štěpánská	5	4	1	6	5	8	29
8.	Voldřich Josef	3.tr. gymn. Vimperk	5	6	0	6	0	1	18
Spolu			40	39	6	44	17	12	158

Ako vidno, naši žiaci si veľmi dobre poradili s 1. úlohou a s výnimkou víťaza XXIII. ročníka MO a najmladšieho člena čl. družstva J. Navrátila aj so 4. úlohou. Za veľmi dobrý možno považovať aj výsledok v 2. úlohe, ktorú neriešil s úspechom len M. Valášek. Katastrofálne sú však výsledky dosiahnuté vo všetkých troch tzv. ťažkých úlohách. Výnimku tvorí len jediná žena v čl. družstve A. Vencovská, ktorá veľmi vtípne riešila 6. úlohu (i keď s niektorými drobnými nepresnosťami) a pomerne úspešne aj 5. úlohu. Len to, že v 2. úlohe nedokázala postačujúcu podmienku spôsobiť, že jej o vlások ušla II. cena. Ku jej cti slúži fakt, že maturovala v triede s humanitným zameraním a pokiaľ ide o matematiku, možno ju považovať do značnej miery za samouka. Ukázala, čo dokáže vytrvalosť a pevná vôľa, v čom môže opravdu slúžiť príkladom. Uspokojivý výsledok v 5. úlohe dosiahli ešte J. Navrátil a J. Širáň, ktorému ušla III. cena len o jediný bod. P. Kindlmannovi, jedinému z našich žiakov, ktorý sa zúčastňoval MMO po druhý raz, umožnili zopakovať vlaňajší úspech a získať opäť III. cenu pokusy o využitie binomickej vety pri riešení 3. úlohy.

Po spoločenskej stránke reprezentovali naši žiaci veľmi dobre. Tvorili stmelený kolektív s veľmi slušným vystupovaním. Neúspechy v súťaži ich viditeľne mrzeli a treba po pravde povedať, že i počas exkurzií sa zaoberali matematikou a riešením úloh. Po prvej klauzúre nešli na večeru dovtedy, kým sa im nepodarilo nájsť riešenie 3. úlohy (je uvedené nižšie), čo medzi drobničkami zo XVI. MMO zaznamenal aj „Junge Welt“. Úlohy, s ktorými si pri klauzúrach väčšina z nich neporadila, boli netradičné a pre našich stredoškolákov nezvyklé.

Ak chceme v budúcnosti dosahovať na MMO lepšie výsledky, bude treba po celý rok sa venovať príprave družstva. Širší výber by mal byť známy už v septembri a s ním by bolo treba pracovať pravidelne, sústavne a cieľavedome po celý školský rok. Takto to robia dnes už prakticky vo všetkých krajinách, ktoré skončili na XVI. MMO v neoficiálnom poradí pred nami. Semináre poriadané v Prahe pre vybraných žiakov pražských škôl a týždenné sústredenie krátko pred odchodom na MMO k dobrej príprave rozhodne nepostačujú. Čas, prostriedky a energia venované systematickej príprave talentov by určite neboli samoučelné.

Určitým prísľubom do budúcnosti sú 4 gymnázia so špeciálnymi matematickými triedami (po 2 v ČSR a SSR), ktoré sa od 1. 9. 1974 otvárajú z iniciatívy ÚVMO a predovšetkým jeho predsedu doc. Vyšína, CSc. Ani od nich však nemožno očakávať zázraky. Už aj preto nie, že pri najlepšej vôli nebudú môcť samotné podchytiť všetky matematické talenty.

4. Riešenia súťažných úloh

Riešenie 1. úlohy: Keďže z čísel p, q, r sa v každom kole každé vyskytuje práve raz, pre celkový počet rozdанных guličiek zrejme platí:

$$N(p + q + r) = 20 + 10 + 9 = 39 = 3 \cdot 13. \quad (1)$$

Vzhľadom na to, že $N \geq 2$ a pre navzájom rôzne prirodzené čísla p, q, r určite platí: $p + q + r \geq 6$, vyplýva z (1):

$$N = 3, \quad p + q + r = 13.$$

Keďže hráč B v treťom kole získal r guličiek a za celú hru len 10 guličiek (menej než 13), musel v prvom i druhom kole získať po p guličiek. Hráč A mohol v treťom kole získať najviac q guličiek a keďže jeho celkový zisk bol 20 guličiek (viac než 13), musel v prvom i druhom kole získať po r guličiek. Z toho vyplýva, že q guličiek v prvom kole získal hráč C .

Na základe vyššie vykonanej úvahy môžeme navyiac určiť i číselné hodnoty p, q, r , pretože platí: $2p + r = 10$ (zisk hráča B) a buď $2r + p = 20$, $3q = 9$ alebo $2r + q = 20$, $2q + p = 9$. V prvom prípade dostá-

vame $q = 3$, $p + r = 10$, $r - p = 10$, čiže $q = 3$, $r = 10$, $p = 0$, čo podmienkam úlohy nevyhovuje. V druhom prípade $r = 10 - 2p \leq 8$, $q = 2(10 - r) \geq 4$, $p = 9 - 2q \leq 1$, z čoho hneď máme $p = 1$, $r = 8$, $q = 4$. Zisk guľčiek jednotlivými hráčmi vo všetkých 3 kolách udáva teda nasledujúca tabuľka:

Hráč	Kolo			
	1.	2.	3.	Σ
A	8	8	4	20
B	1	1	8	10
C	4	4	1	9

Záver: V prvom kole získal q guľčiek hráč C .

Riešenie 2. úlohy: Nech vo vnútri úsečky AB existuje bod D (obr.) tak, že platí:

$$CD^2 = DA \cdot DB. \quad (1)$$

Označme $\sphericalangle ACD = \gamma_1$, $\sphericalangle BCD = \gamma_2$. Platí zrejme $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$. Pre trojuholníky ADC , BDC zo sínusovej vety vyplýva:

$$\sin \alpha = \frac{CD}{AD} \sin \gamma_1, \quad \sin \beta = \frac{CD}{BD} \sin \gamma_2. \quad (2)$$

Priamo z (1) a (2) dostaneme

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{CD^2}{AD \cdot BD} \sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2 = \sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2 = \\ &= \frac{1}{2} [\cos (\gamma_1 - \gamma_2) - \cos (\gamma_1 + \gamma_2)], \end{aligned}$$

čiže

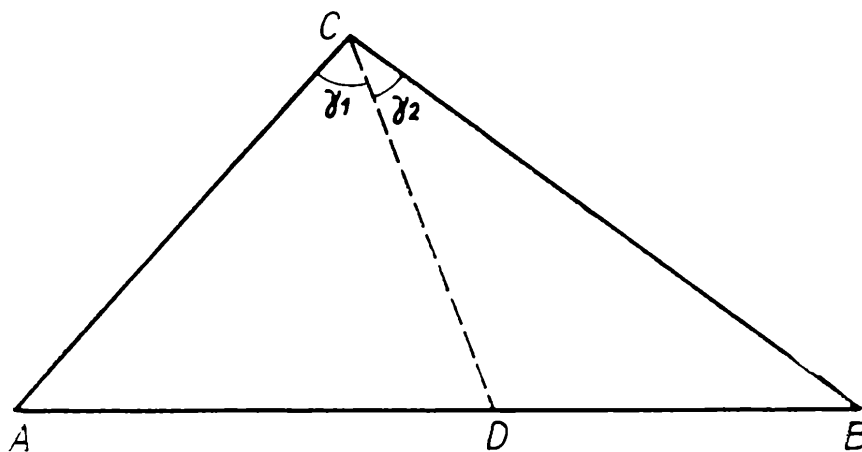
$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos \delta - \cos \gamma), \quad (3)$$

kde $0 \leq |\gamma_1 - \gamma_2| = \delta < \gamma$. Zrejme vždy $\cos \delta \leq 1$ a z (3) máme

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \leq \frac{1}{2} (1 - \cos \gamma) = \sin^2 \frac{\gamma}{2}, \quad (4)$$

čo sme mali dokázať.

Nech obrátene platí (4) tj.



$$\cos \gamma < 2 \sin \alpha \sin \beta + \cos \gamma \leq 1 ,$$

pretože $\sin \alpha \sin \beta > 0$. Vzhľadom na to, že funkcia $\cos x$ je v intervale $\langle 0; \gamma \rangle$ spojitá, existuje aspoň jedna hodnota $\delta \in (0; \gamma)$ tak, že platí:

$$2 \sin \alpha \sin \beta + \cos \gamma = \cos \delta . \quad (5)$$

Rozdelme uhol na uhly γ_1, γ_2 tak, aby platilo $|\gamma_1 - \gamma_2| = \delta$ t. j. buď $\gamma_1 - \gamma_2 = \delta$, alebo $\gamma_2 - \gamma_1 = \delta$. V prvom prípade

$$\gamma_1 = \frac{\gamma + \delta}{2} , \quad \gamma_2 = \frac{\gamma - \delta}{2} ,$$

pričom

$$\frac{\gamma}{2} \leq \gamma_1 < \gamma, \quad 0 < \gamma_2 \leq \frac{\gamma}{2} .$$

V druhom prípade

$$\gamma_1 = \frac{\gamma - \delta}{2} , \quad \gamma_2 = \frac{\gamma + \delta}{2} ,$$

pričom

$$0 < \gamma_1 \leq \frac{\gamma}{2} , \quad \frac{\gamma}{2} \leq \gamma_2 < \gamma .$$

Ak označíme D priesečník úsečky AB so spoločným ramenom uhlov γ_1, γ_2 , potom z (2) a (3) dostávame

$$\frac{\overline{CD}^2}{\overline{AD} \cdot \overline{BD}} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2} = 1 ,$$

čím sme dokázali, že vo vnútri úsečky AB existuje bod D s požadovanou vlastnosťou.

Riešenie 3. úlohy : Označme pri danom prirodzenom n daný súčet A_n . Zrejme platí:

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k} = 2^{-3/2} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (2^{3/2})^{2k+1}.$$

Podľa binomickej vety platí

$$\begin{aligned} (2^{3/2} + 1)^{2n+1} &= \sum_{m=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{m} (2^{3/2})^m = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (2^{3/2})^{2k+1} + \\ &+ \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (2^{3/2})^{2k} = 2^{3/2} A_n + B_n, \end{aligned}$$

kde

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (2^{3/2})^{2k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} 2^{3k}$$

je pri každom prirodzenom n zrejme celé číslo.

Analogicky použitím binomickej vety dostaneme

$$(2^{3/2} - 1)^{2n+1} = 2^{3/2} A_n - B_n. \quad (1)$$

Vynásobením rovnosti (1) a rovnosti

$$(2^{3/2} + 1)^{2n+1} = 2^{3/2} A_n + B_n$$

dostaneme

$$2^3 A_n^2 - B_n^2 = (2^3 - 1)^{2n+1}. \quad (2)$$

Použitím kongruencií mod 5 sa rovnosť (2) redukuje na rovnosť

$$3 A_n^2 - B_n^2 \equiv 2 (-1)^n \pmod{5}.$$

Keďže $0^2 \equiv 0 \pmod{5}$, $1^2 \equiv 4^2 \equiv 1 \pmod{5}$, $2^2 \equiv 3^2 \equiv -1 \pmod{5}$, nebude pre žiadne n $B_n^2 \equiv \pm 2 \pmod{5}$, čo znamená, že $3A_n^2 \not\equiv 0 \pmod{5}$, a teda $A_n \equiv 0 \pmod{5}$ pri žiadnom prirodzenom n , čo sme mali dokázať.

Iné riešenie: Zrejme platí

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (5+3)^k \equiv \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} 3^k \pmod{5}.$$

Označme

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} 3^k = \frac{(\sqrt{3} + 1)^{2n+1} + (\sqrt{3} - 1)^{2n+1}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + 1)(4 + 2\sqrt{3})^n + (\sqrt{3} - 1)(4 - 2\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

Kedže čísla $4 + 2\sqrt{3}$, $4 - 2\sqrt{3}$ vyhovujú rovnici

$$x^2 - 8x + 4 = 0,$$

platí zrejme rekurentný vzťah

$$S_{n+2} = 8S_{n+1} - 4S_n \quad (3)$$

pre každé celé číslo $n \geq 0$. Z (3) hneď dostaneme

$$S_{n+2} \equiv S_n - 2S_{n+1} \pmod{5}. \quad (4)$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že platí:

$$S_0 \equiv 1 \pmod{5}, \quad S_1 \equiv 1 \pmod{5}. \quad (5)$$

Z (5) a (4) postupne dostaneme

$$\begin{aligned} S_2 &\equiv 1 - 2 \cdot 1 \equiv 4 \pmod{5}, \quad S_3 \equiv 1 - 2 \cdot 4 \equiv 3 \pmod{5}, \quad S_4 \equiv 4 - \\ &- 2 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{5}, \quad S_5 \equiv 3 - 2 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{5}, \quad S_6 \equiv 3 - 2 \cdot 2 \equiv 4 \\ &\pmod{5}, \quad S_7 \equiv 2 - 2 \cdot 4 \equiv 4 \pmod{5}, \quad S_8 \equiv 4 - 2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{5}, \\ S_9 &\equiv 4 - 2 \cdot 1 \equiv 2 \pmod{5}, \quad S_{10} \equiv 1 - 2 \cdot 2 \equiv 2 \pmod{5}, \quad S_{11} \equiv 2 - \\ &- 2 \cdot 2 \equiv 3 \pmod{5}, \quad S_{12} \equiv 2 - 2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}, \quad S_{13} \equiv 3 - 2 \cdot 1 \equiv 1 \\ &\pmod{5}. \end{aligned} \quad (6)$$

Zo (6) a (5) vzhľadom na (4) vyplýva, že pre všetky $k \geq 0$ platí

$$S_{12+k} \equiv S_k \pmod{5}.$$

Kedže $S_k \not\equiv 0 \pmod{5}$ pre $k = 0, 1, \dots, 11$, znamená to zároveň, že $S_k \not\equiv 0 \pmod{5}$ pre všetky $k \geq 0$, čiže $A_n \not\equiv 0 \pmod{5}$ pre každé prirodzené číslo n , čo sme mali dokázať.

Pozn.: Týmto spôsobom riešil 3. úlohu najmladší člen čsl. družstva J. Navrátil, žiaľ, až po súťaži.

Riešenie 4. úlohy: Predovšetkým si treba uvedomiť, že

$$\sum_{i=1}^p a_i = 32. \quad (1)$$

Z ostrej monotónnosti čísel a_i vyplýva ďalej, že musí byť $a_i \geq i$, $i = 1, 2, \dots, p$, z čoho priamo máme

$$\sum_{i=1}^p a_i \geq \sum_{i=1}^p i = \frac{p(p+1)}{2} \quad (2)$$

Z (1) a (2) dostávame nerovnosť

$$\frac{p(p+1)}{2} \leq 32, \text{ čiže } p(p+1) \leq 64,$$

ktorej vyhovujú len tie prirodzené čísla p , pre ktoré platí:

$$p \leq 7$$

Pokúsime sa overiť existenciu rozkladu požadovaných vlastností pre najväčšie z nich, tj. $p = 7$. Keďže $\sum_{i=1}^7 i = 28$, je rozklad čísla 32 na 7 rôznych sčítancov s najväčším možným sčítancom

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 11. \quad (3)$$

Z neho postupným zmenšovaním najväčších sčítancov a zväčšovaním vhodných menších dostaneme všetky také rozklady čísla 32 na 7 sčítancov, ktoré vyhovujú požadovaným podmienkam:

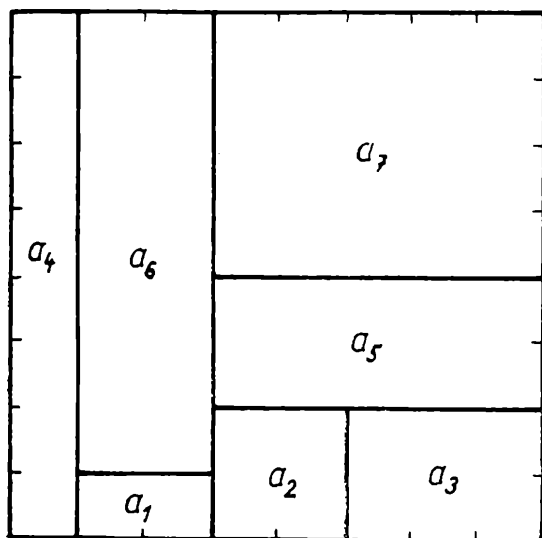
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 10, \quad (4)$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 9, \quad (5)$$

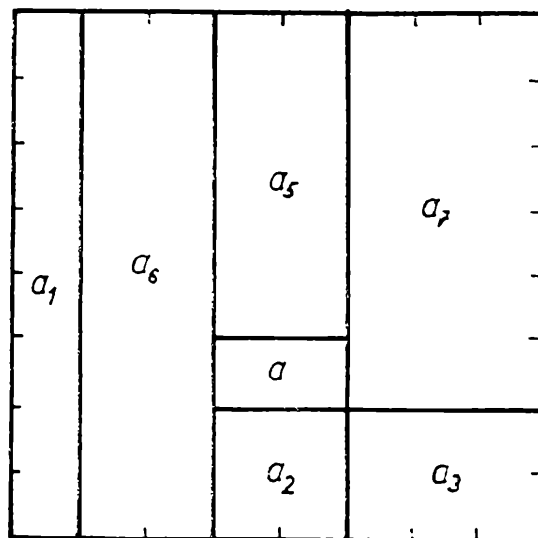
$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9, \quad (6)$$

$$1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8. \quad (7)$$

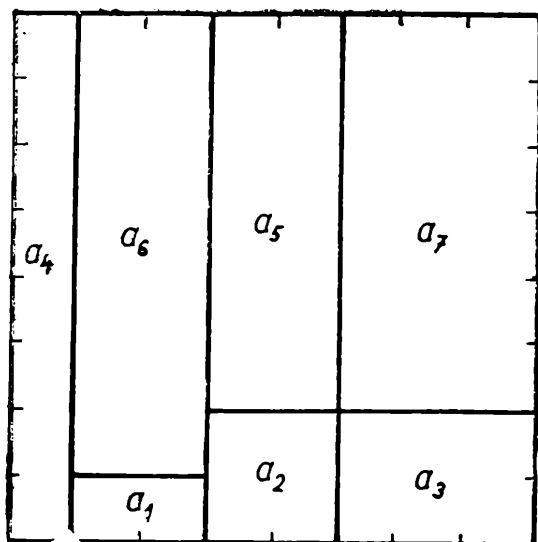
Rozklad šachovnice na 7 rovnobežníkov s počtom bielych polí podľa (3) neexistuje, pretože rovnobežník s 22 poliami by musel mať rozmery 1×22 , resp. 2×11 , čo na šachovnici s 8×8 poliami nie je možné. Rozklady šachovnice na rovnobežníky s počtom bielych polí podľa (4) — (7) sú na obr. 1—4.



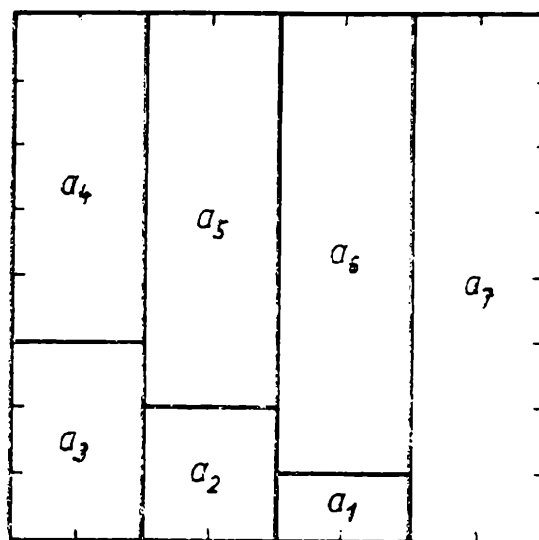
Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.



Obr. 4.

Záver: Najväčším číslom p , pre ktoré je možné rozdelenie šachovnice požadovaných vlastností, je teda číslo 7 a daným podmienkam vyhovujú nasledujúce 7-členné postupnosti: $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}$, $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$, $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$. V obrázkoch 1—4 sú jednotlivé rovnobežníky označené tým členom príslušnej postupnosti, ktorý sa rovná počtu bielych polí v nich obsiahnutých.

Riešenie 5. úlohy: Pre každú štvoricu kladných reálnych čísel a, b, c, d zrejme platí

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \\
 &+ \frac{d}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \\
 &+ \frac{d}{a+c+d} = S < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2.
 \end{aligned}$$

Tým sme ukázali, že všetky hodnoty súčtu S pre ľubovoľné štvorice a, b, c, d , kladných reálnych čísel musia ležať v intervale $(1; 2)$.

Pokúsme sa ešte ukázať, že súčet S každé číslo $x \in (1; 2)$ skutočne pre nejakú štvoricu a, b, c, d nadobúda. Označme $S(a, b, c, d)$ hodnotu daného súčtu pre štvoricu a, b, c, d . Ľahko sa vidí, že $S(ka, kb, kc, kd) = S(a, b, c, d)$ pre každé kladné číslo k . Stačí preto uvažovať len o takých štvoricach a, b, c, d , pre ktoré platí $a + b + c + d = 1$. Označme $a + c = u$, $b + d = v$, kde u, v sú také kladné reálne konštanty, pre ktoré platí $u + v = 1$. Pre také štvorice a, b, c, d kladných reálnych čísel je

$$S(a, b, c, d) = \frac{a}{a+v} + \frac{c}{c+v} + \frac{b}{b+u} + \frac{d}{d+u} = \frac{2ac+uv}{ac+uv+v^2} + \\ + \frac{2bd+uv}{bd+uv+u^2} = \frac{2ac+u-u^2}{ac+1-u} + \frac{2bd+v-v^2}{bd+1-v}$$

Ak a, c sú ľubovoľné kladné reálne čísla, pre ktoré $a+c=u$, kde u je pevné, potom

$$0 < ac \leq \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{u^2}{4}.$$

Analogicky pre b, d , pre ktoré $b+d=v$, je

$$0 < bd \leq \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 = \frac{v^2}{4}.$$

Zlomok

$$\frac{2ac+u-u^2}{ac+1-u} = S_1(ac)$$

je pri pevnom $u \in (0, 1)$ rastúcou funkciou ac , pretože

$$S_1(ac) = \frac{(2-u)(1-u)}{(ac+1-u)^2} > 0,$$

a analogicky

$$S_2(bd) = \frac{2bd+v-v^2}{bd+1-v}$$

pri pevnom $v \in (0, 1)$ je rastúcou funkciou bd . Z toho vyplýva, že

$$u < S_1 \leq \frac{2u}{2-u}, \quad v < S_2 \leq \frac{2v}{2-v},$$

a teda

$$1 = u + v < S \leq \frac{2u}{2-u} + \frac{2v}{2-v} = \frac{4-4uv}{2+uv}.$$

Keďže zlomok

$$S_3(uv) = \frac{4-4uv}{2+uv}$$

je spojitou klesajúcou funkciou uv :

$$S_3'(uv) = -\frac{12}{(2+uv)^2} < 0 \text{ a } \lim_{uv \rightarrow 0} \frac{4-4uv}{2+uv} = 2,$$

nadobúda súčet S všetky hodnoty z intervalu $(1; 2)$.

Riešenie 6. úlohy: Ak má celočíselné korene len jedna z rovníc

$$P(x) = 1, \quad (1)$$

$$P(x) = -1, \quad (2)$$

potom zrejme je $n(P) \leq \deg(P)$ a daná nerovnosť je splnená. Nech pre mnohočlen P súčasne existujú celočíselné korene rovnice (1) i rovnice (2). Nech k, m sú ľubovoľné celé čísla, pre ktoré platí $P(k) = 1, P(m) = -1$. Potom $P(k) - P(m) = 2$. Keďže $k - m$ delí celé číslo $P(k) - P(m)$, musí byť buď $|k - m| = 1$ alebo $|k - m| = 2$. To však znamená, že pre ľubovoľný nekonštantný mnohočlen P , pre ktorý majú obe rovnice (1), (2) celočíselné riešenie, je $n(P) \leq 5$. Z toho vyplýva, že daná nerovnosť je splnená pre každý mnohočlen P , pre ktorý $\deg(P) \geq 3$. Keďže pre mnohočlen 2. stupňa je $n(P) \leq 4$ a pre mnohočlen 1. stupňa je $n(P) \leq 2$, je daná nerovnosť splnená pre každý nekonštantný mnohočlen P , čo sme mali dokázať.

Pozn.: Uvedené riešenie vzniklo úpravou riešenia najúspešnejšej čl. účastníčky XVI. MMO A. Vencovskej.

různ é

Stanislav Vydra

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

Postava profesora Vydry je známa čtenářům Jiráskova spisu *F. L. Věk*, kde vystupuje na několika místech děje, poprvé ve XIV. kapitole prvního dílu. I televizní seriál, vysílaný před několika málo lety, ho přiblížil divákům scénou z posluchárny filosofické fakulty, když vyšly najevo slabé matematické znalosti mladého Věka. Alois Jirásek však uspořádal děj tak, aby Věk vzápětí získal přízeň profesora Vydry svými znalostmi z české historie (datum Žižkovy smrti) i původem z hradeckého kraje. Tím zdůraznil Vydrovo vlastenectví, jeho „slabost“ pro rodáky z východních Čech i otcovský poměr ke studentům, z nichž mnohé zdarma doučoval i hmotně podporoval. Z Jiráskova spisu se však nedozvíme o životní dráze profesora Vydry ani o jeho matematickém zaměření; povězte si proto zde něco o těchto i dalších stránkách jeho osobnosti.

Stanislav Vydra se narodil 13. 11. 1741 v Hradci Králové, kde byl

jeho otec městským úředníkem (syndikem). Stanislav byl nejmladším ze tří synů, z nichž dva dali nábožensky ortodoxní rodiče studovat k jezuitům; oba synové také vstoupili do řádu již ve věku kolem 15 let. Tato výchova zformovala samozřejmě základní světový názor i politické postoje Stanislava Vydry v jezuitském duchu. Jako pilný student řádových škol četl však Vydra i mnoho spisů, které sice byly sepsány jezuiti, ale řád je nedovolil vydat (např. spisy Balbínovy*) ze 17. století). Universitní studia v Praze zahájil S. Vydra na filosofické fakultě, po celý rok 1764 studoval však jen matematiku u profesora Steplinga a stal se jeho asistentem při astronomických pozorováních. Z vůle řádu musel ovšem Vydra dokončit i teologická studia, v r. 1769 byl vysvěcen na kněze a poslán na faru do Vilémova u Čáslavi.

Profesor Stepling*) však dosáhl toho, že v r. 1772 byl Vydra povolán na universitu, kde se právě uvolnilo místo profesora elementární matematiky. Shodou okolností to bylo v posledním roce, kdy měl jezuitský řád moc nad pražským vysokým učením (řád byl papežem zrušen r. 1773). Řádoví učitelé byli z university většinou vypovězeni, ale skupinka profesorů přírodních věd zůstala (Stepling, Tesánek, Chládek, Vydra).

S. Vydra se věnoval svým učitelským povinnostem s neobyčejnou vervou, už v r. 1774 vydal sérii latinsky psaných učebnic diferenciálního a integrálního počtu aritmetiky a teorie kuželoseček. Přednášel na filosofické fakultě 6 hodin čisté matematiky týdně v 1. ročníku a 6 hodin aplikované matematiky týdně ve 2. ročníku (od r. 1775). Velmi si potrpěl na veřejné zkoušky svých studentů; jednou až třikrát ročně zkoušel s ostatními profesory na fakultním shromáždění studenty z přednesené látky. Před každou takovou slavností vypracovali examinátoři soupis několika set otázek a studenti se připravovali tak, aby je mohli zodpovědět. [Vidíte, že studium nebylo ani v 18. století možno odbývat.]

Exjezuita Vydra sice nedal dopustit na řád, který mu umožnil vystudovat, ale je dost důvodů soudit, že zrušení řádu mohl děkovat za to, že nepocítil jeho tvrdou ruku při rozvíjení Balbínova odkazu. Dílo *Bohemia docta* (Učené Čechy) B. Balbína zdůrazňovalo vysokou úroveň české literatury před bělohorskou katastrofou r. 1620, Vydra je doplnil r. 1776 spisem „*Historia matheseos in Bohemia et Moravia . . .*“, zamě-

*) *Bohuslav Balbín* (1621–1688), jezuitský historik, autor rozsáhlých děl psaných latinsky, ale ve vlasteneckém duchu. Jeho proslulá *Obrana jazyka slovanského, zvláště českého*, vyšla tiskem až r. 1775, po zrušení jezuitského řádu.

*) *Josef Stepling* (1716–1778), byl jedním z prvních šířitelů Newtonovy koncepce fyziky ve střední Evropě, vybudoval též hvězdárnu v pražském Klementinu. Publikoval řadu matematických prací, dopisoval si například i s L. Eulerem a rozvíjel jeho ideje.

řeným k historii matematických znalostí v českých zemích. Při stém výročí Balbínova úmrtí zorganizoval Vydra okázalou slavnost, na které měl přednášku, jež vyšla i tiskem a podněcovala obrozenecké snahy.

Vydrovo vlastenectví se zaměřuje na obranu českého jazyka, proti germanizačním snahám josefinské doby; sám ovládal rodný jazyk velmi dobře v plné bohatosti jeho tehdejší slovní zásoby. Hněval se na Dobrovského i Pelcla za to, že český jazyk nepovažují za životaschopný a studují ho jen jako historický jev. Podporoval úsilí Kramera, Tháma, Puchmajera a dalších, kteří se snažili vzkřísit a obohatit národní jazyk tak, aby se jím dalo vyjádřit vše, co je sdělováno latinsky nebo německy. Vydrovým vlivem prošla celá generace Jungmannova, která v nových podmínkách obrodila český jazyk a dala mu i odborné termíny ze všech vědních oborů.

Přínos profesora Vydry pro národní obrození nebyl jistě malý, ovšem sám jako jedinec by mnoho nezmohl, kdyby společenský vývoj nevytvořil příznivou půdu pro nový rozvoj národa. Dokladem může být na druhé straně marné Vydrovo hřímání proti idejím francouzské revoluce, proti osvícenství a snahám rozbít feudální poměry; vývoj tím nezastavil.

Všechny matematické práce S. Vydry mají pedagogický účel, nejde o vědecky průbojná díla; jejich posláním bylo zpřístupnit matematiku a mechaniku studentům. Slabě připraveným studentům, zejména z chudých venkovských vrstev, pomáhal Vydra všestranně, jeho „korepetičky“ (opakovací hodiny) byly proslulé. Žákem Vydrovým byl i *Bernard Bolzano*, který mu věnoval svou první vědeckou práci v r. 1804 a jen pro přílišné mládí se nestal i jeho přímým nástupcem.

Profesor Vydra byl dvakrát děkanem fakulty a v r. 1800 dokonce rektorem university. V r. 1799 však oslepl na jedno oko, r. 1803 i na druhé; stalo se tak v průběhu přednášky, odkud musel být odveden studenty do svého bytu. Ani tehdy neklesl na mysli, skládal dokonce latinské epigramy, jež vydal r. 1804. Zároveň se vrátil k práci, kterou pocítoval jako svůj úkol — *napsat české učebnice matematiky*. V té době mohl však už jen z hlavy diktovat dvěma studentům své matematické přednášky. Šlo mu, jak píše, „o vykládání umění početního v jazyku českém, aby Čechové, jimž latina neb němčina nepovědoma, ode mne se jí naučili“.

Po nadiktování české učebnice aritmetiky začal tvořit učebnici algebry, ale v létě r. 1804 i ohluchl a celkově natolik zeslábl, že nemohl dílo dokončit. Zemřel 3. prosince 1804; jeho knihu *Počátkové arithmetyky* vydal až r. 1806 L. Jandera. Je to knížka malého formátu, která má 254 stran, ale zahrnuje i výklad logaritmů.

Protože neznal z dřívější literatury dost českých matematických termínů, užíval Vydra buď názvů latinských (např. multiplikand, multiplikátor, produkt, které byly později nahrazeny slovy násobenec, násobitel, součin), nebo přidával latinským slovům české koncovky podobně, jako

si počíná němčina (*addovati* = sčítat, *dyvyzý* = dělení, *proporcý* = poměr). Použil však i mnoha ryze českých termínů, které jsou v oběhu dodnes: *zbytek*, *kořen*, *velikost*, *množství*, *pravidlo*, *důkaz*, *příklad*, *rozdíl*, *dělití*, *jmenovatel* aj. Ve své knížce připomněl Vydra i možnost vystačit při zápisu čísel s dvěma číslicemi, zdůraznil přitom, že „taková arytmetika, kteráž od Leybnice nalezená, a od Pelikána Čecha v Praze vysvětlená a rozmnožená, Dyadika zove“.*)

Profesor Vydra byl výraznou postavou českého obrozeneckého hnutí na konci 18. století. Svými názory na dobu, v níž žil, patřil ke konzervativcům (a byl za to kritizován), ale pokroku posloužil svým buditelským působením na tisíce českých studentů. Kromě toho byl svědomitým učitelem matematiky a opravdovým přítelem svých žáků. Snad ho vám, dnešním studentům, tento krátký článek ukázal dostatečně realisticky jako člověka na rozhraní dvou epoch. Připomněli jsme si tak 170. výročí jeho úmrtí.

recenze

J a r o s l a v C h u d ý :

DETERMINANTY A MATICE

Vydalo SNTL, Praha 1974; 213 stran, 18 obrázků, brožovaná stojí 19 Kčs.

Kniha je rozdělena do čtyř kapitol. V první se čtenář seznámí se základními pojmy lineární algebry, s pojmem vektoru, vektorového prostoru a matice. Druhá kapitola je věnována determinantům, jejich vlastnostem a užití. Třetí kapitola se zabývá soustavami lineárních rovnic a některými metodami jejich řešení. Poslední,

nejrozsáhlejší kapitola, obsahuje základy maticového počtu.

Tato knížka vychází ve druhém vydání, které je oproti prvnímu doplněno mnoha cvičeními s výsledky.

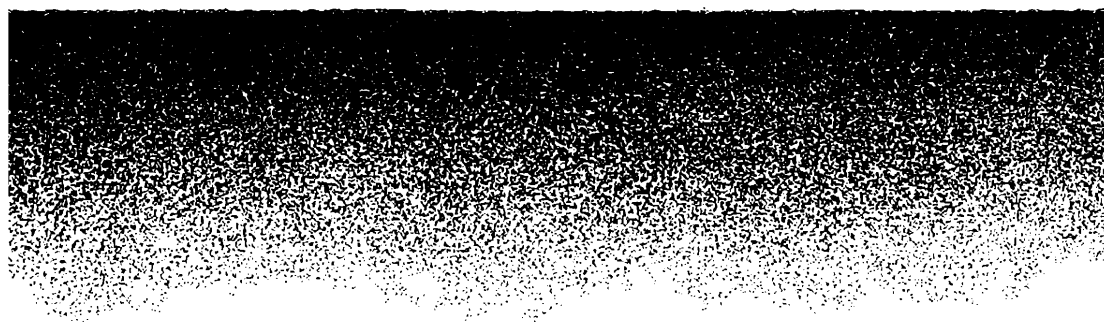
Autorem je kniha určena studentům a absolventům všech typů středních škol a posluchačům prvních ročníků vysokých škol technického a přírodovědného směru. Může však být dobrým pomocníkem i učitelům matematiky středních škol. Množství příkladů, které přehledně a srozumitelně vyloženou látku provází, lze využít ve volitelné matematice.

Anežka Wohlmuthová

*) *Josef Václav Pelikán* vydal r. 1712 knížku, v níž ukazoval výhodnost početních výkonů ve dvojkové (dyadické) soustavě a doporučoval její všeobecné zavedení. (Ve dvojkové soustavě pracují moderní počítačové stroje; princip jejich práce je vyložen v článcích dr. R. Beka v 51. ročníku *Rozhledů*.)

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)



H

half
half-line
half-plane
half-space
halve
harmonic
 harmonic function
 harmonic progression
 harmonic quadrangle
hectare
height
helix
hemisphere
hence
heptagon
hexagon
hexagonal
hexahedron
hidden
higher
highest common factor
hold
hollow
holomorphic
homogeneous
homologous
homomorphy

polovina
polopřímka, paprsek
polorovina
poloprostor
dělit dvěma
harmonický
 harmonická funkce
 harmonická posloupnost
úplný čtyřroh
hektar
výška
šroubovice
polokoule
odtud, tedy
sedmiúhelník
šestiúhelník
šestiboký
šestistěn
neviditelný
vyšší
největší společný dělitel
platit, zachovat
dutý
holomorfní
homogenní
odpovídající
homomorfismus

homothetic
 homothety
 horizon
 hour
 hundred
 hundredth
 hyperbola
 hyperbolic
 hyperboloid
 hyperboloid of one sheet
 hyperboloid of two sheets
 hyperplane
 hypersurface
 hypotenuse
 hypothesis

stejnolehký, homotetický
 stejnolehlost, homotetie
 obzor, horizont
 hodina
 sto
 stý, setina
 hyperbola
 hyperbolický
 hyperboloid
 jednodílný hyperboloid
 dvojdílný hyperboloid
 nadrovina
 nadplocha
 přepona
 předpoklad, hypotéza

I

icosahedron
 ideal
 identity
 identity element
 identical
 identical in form
 if
 iff (if and only if)
 illustrate
 image
 imaginary
 imaginary number
 imaginary part of complex
 number
 implement
 implication
 implicit
 imply
 impossible
 improper
 inaccessible
 incentre
 inch
 incidence
 incidence matrix
 incident
 incircle

dvacetistěn
 nevlastní (bod)
 identita
 neutrální prvek
 identický
 podobný
 jestliže
 tehdy a jen tehdy
 znázornit
 obraz
 imaginární
 imaginární číslo
 imaginární část komplexního čísla
 nástroj
 implikace
 implicitní
 implikovat
 nemožný
 nevlastní (limita, integrál; zlomek)
 nepřístupný, nedosažitelný
 střed vepsané kružnice
 palec (míra) $\doteq 2,54$ cm
 incidence
 incidenční matice
 incidentní
 vepsaná kružnice

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

5

ROČNÍK 53, 1974-1975, LEDEN



ROČNÍK 53
LEDEN 1975

5

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT, Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., CSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, nár. pod. v Praze 1974.

OBSAH

Z. Matoušek: Číselné řady	241
Š. Iláš: Lomená čára a súvislosti s ňou (Dokončenie)	246
Dr. Jiří Skuhra: Problém muže s vosami	251
Dr. Jiří Svoboda: Modelování jednoduché činnosti živých systémů logickými sítěmi	254
Prof. dr. Brejcha: Některé vlastnosti úplného čtyřstranu	258
Ing. J. Myslík: Grafy signálních toků	265
Dr. J. Bednář: Bouřky jako důležitý faktor v atmosférické elektře	269
Dr. M. Šíroká-Dr. J. Šíroky: Astronomická refrakce	272
D. Jedinák: Zo života a diela A. M. Ampéra	276
J. Kotyk: Karl Friedrich Gauss	279
Dr. Z. Šípek: K dvoustému výročí školské reformy J. I. Felbigera a založení Státního pedagogického nakladatelství	285
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	3. a 4. str. obálky

matematika

Číselné řady

ZDENĚK MATOUŠEK, Hlučín

1. V matematice i jejích mnohých aplikacích používáme pro zkrácení zápisu součtu n sčítanců $a_1, a_2, \dots, a_n$ řeckého písmene Σ , čteme suma. Součet $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ zapíšeme ve tvaru

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k. \quad (1)$$

Symbol $\sum_{k=1}^n a_k$ čteme: suma a_k , k se mění od 1 do n .

Lehce lze dokázat dvě základní vlastnosti znaku Σ :

$$\sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^n a_k, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k. \quad (2')$$

2. Zabývejme se nyní otázkou vyčíslení součtu řady tvaru

$$\sum_{k=1}^n f(k) = f(1) + f(2) + \dots + f(n), \quad (3)$$

kde f je známá funkce celočíselného argumentu. Tento součet lze snadno určit v případě, že se nám podaří nalézt takovou funkci $F(k)$, definovanou pro celočíselný argument $k = 1, 2, \dots, n, n+1$, že pro všechna čísla k určená nerovností $1 \leq k \leq n$ platí rovnost

$$f(k) = F(k+1) - F(k). \quad (4)$$

Dosazujeme-li postupně do (4) za $k = 1, 2, \dots, n-1, n$, obdržíme

$$\begin{aligned} f(1) &= F(2) - F(1), \\ f(2) &= F(3) - F(2), \\ &\vdots \\ f(n-1) &= F(n) - F(n-1), \\ f(n) &= F(n+1) - F(n). \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f(n-1) &= F(n) - F(n-1), \\ f(n) &= F(n+1) - F(n). \end{aligned}$$

Sečteme-li vztahy (5), získáme

$$\sum_{k=1}^n f(k) = F(n+1) - F(1). \quad (6)$$

Odtud je patrné, že znalost funkce $F(k)$ umožňuje zcela jednoduše určit součet (3).

Příklad 1.

Určete součet $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Řešení:

$$\text{Zde je } f(k) = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Označíme-li $F(k) = -\frac{1}{k}$, pak $F(k+1) = -\frac{1}{k+1}$ a vztah (4) bude splněn pro všechna přirozená čísla k , neboť

$$f(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = -F(k) + F(k+1) = F(k+1) - F(k).$$

Protože

$$F(1) = -1 \quad \text{a} \quad F(n+1) = -\frac{1}{n+1},$$

pak podle (6) platí

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Příklad 2.

Určete součet $\sum_{k=1}^n q^k$, kde $q \neq 1$.

Ř e š e n í

Platí jednoduchý vztah $q^{k+1} - q^k = q^k (q - 1)$, odkud plyne

$$f(k) = q^k = \frac{q^{k+1}}{q-1} - \frac{q^k}{q-1}$$

Položme

$$F(k) = \frac{q^k}{q-1},$$

pak jednak

$$F(1) = \frac{q}{q-1},$$

jednak

$$F(n+1) = \frac{q^{n+1}}{q-1},$$

a tedy opět podle (6) platí

$$\sum_{k=1}^n q^k = \frac{q^{n+1}}{q-1} - \frac{q}{q-1} = \frac{q^{n+1} - q}{q-1}.$$

Příklad 3.

Určete součet $\sum_{k=1}^n \sin kx$, kde $x \neq 2\pi n$.

Řešení:

Snadno lze ověřit vztah

$$\sin kx = \frac{\cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x},$$

tedy

$$\sin kx = F(k+1) - F(k),$$

kde

$$F(k) = -\frac{\cos(k - \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

Odtud po dosazení do (6) získáme

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)x \cdot \sin \frac{1}{2}nx}{\sin \frac{1}{2}x}$$

Na výše uvedených příkladech se mohl čtenář přesvědčit, že vztah (6) poskytuje velmi hezký způsob nalezení součtu (3).

3. Nechť jsou dány dvě konečné posloupnosti

$$\begin{aligned} u_1, u_2, \dots, u_n, \\ v_1, v_2, \dots, v_n \end{aligned} \tag{7}$$

a chceme určit součet $\sum_{k=1}^n u_k v_k$.

$$\text{Označme} \quad V_n = \sum_{k=1}^n v_k; \tag{8}$$

odtud je patrné, že

$$\begin{aligned} V_1 &= v_1, \\ V_2 &= v_1 + v_2, \end{aligned}$$

$$V_{k-1} = v_1 + v_2 + \dots + v_{k-1},$$

$$V_k = v_1 + v_2 + \dots + v_k.$$

Z posledních dvou vztahů plyne rovnost $v_k = V_k - V_{k-1}$.

Proto

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k v_k &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \\ &= u_1 V_1 + u_2 (V_2 - V_1) + \dots + u_n (V_n - V_{n-1}). \end{aligned}$$

Po úpravě lze psát

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k v_k &= u_n V_n - (u_2 - u_1) V_1 - (u_3 - u_2) V_2 - \dots - \\ &- (u_n - u_{n-1}) V_{n-1} = u_n V_n - \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Právě popsany postup se nazývá Abelovou transformací.¹⁾

Příklad 4.

Určete součet $\sum_{k=1}^n k^2$.

Řešení:

Protože $k^2 = k \cdot k$, lze položit $u_k = v_k = k$.

Pak $u_{k+1} - u_k = 1$ a dle (8) je

$$V_k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{1}{2} k (k + 1).$$

Využitím (9) můžeme psát

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^2 (n + 1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k (k + 1)}{2} = \frac{n^2 (n + 1)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k.$$

Protože

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 - n^2 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n (n - 1)}{2},$$

obdržíme pro hledaný součet vztah

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n (n + 1) (2n + 1)}{6}$$

Cvičení.

1. Určete součty

¹⁾ Pozn.: Niels Henrik Abel, 1802—1829, norský matematik.

$$(a) \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}, \left[F(k) = -\frac{1}{2(2k-1)}, \text{ výsl. } \frac{100}{201} \right];$$

$$(b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}, \left[F(k) = -\frac{1}{3(3k-1)}, \text{ výsl. } \frac{3n+1}{3(3n+2)} \right]$$

2. Určete součty

$$(a) \sum_{k=1}^n kq^k, \left[\text{výsl. } \frac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{(q-1)^2} \right]$$

$$(b) \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

kde $\{a_k\}$ je aritmetická a $\{b_k\}$ je geometrická posloupnost.

[Označme d diferenci posloupnosti $\{a_n\}$, q kvocient posloupnosti $\{b_n\}$.
Dále

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] [b_1 q^{k-1}] = \\ &= \sum_{k=1}^n a_1 b_1 q^{k-1} + \sum_{k=1}^n b_1 d (k-1) q^{k-1} = \\ &= a_1 b_1 \sum_{k=1}^n q^{k-1} + b_1 d \sum_{k=1}^n (k-1) q^{k-1} = \\ &= a_1 b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + b_1 d \cdot \frac{(n-1)q^{n+1} - nq^n + q}{(q-1)^2}, \end{aligned}$$

přičemž jsme použili rovnosti

$$\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k.]$$

3. Určete součty řad pomocí Abelovy transformace

$$(a) \sum_{k=1}^n k^3, [\text{výsl. } \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2];$$

$$(b) \sum_{k=1}^n k^4, [\text{výsl. } \frac{1}{80} n (n+1) (2n+1) (3n^2 + 3n - 1)].$$

Lomená čiara a souvislosti s ňou (Dokončenie)

ŠTEFAN ILÁŠ, odb. asistent PF Prešov

Aby sme si uvedenú metódu dôkladne osvojili, uvedieme na precvičenie ešte ďalšie úlohy:

5. Určte, ktoré geometrické útvary narysované na obr. 11 sú lomenými čiarami a pokúste sa ich (stanovením poradia uzlov-vrcholov) nakresliť „jedným ťahom“.

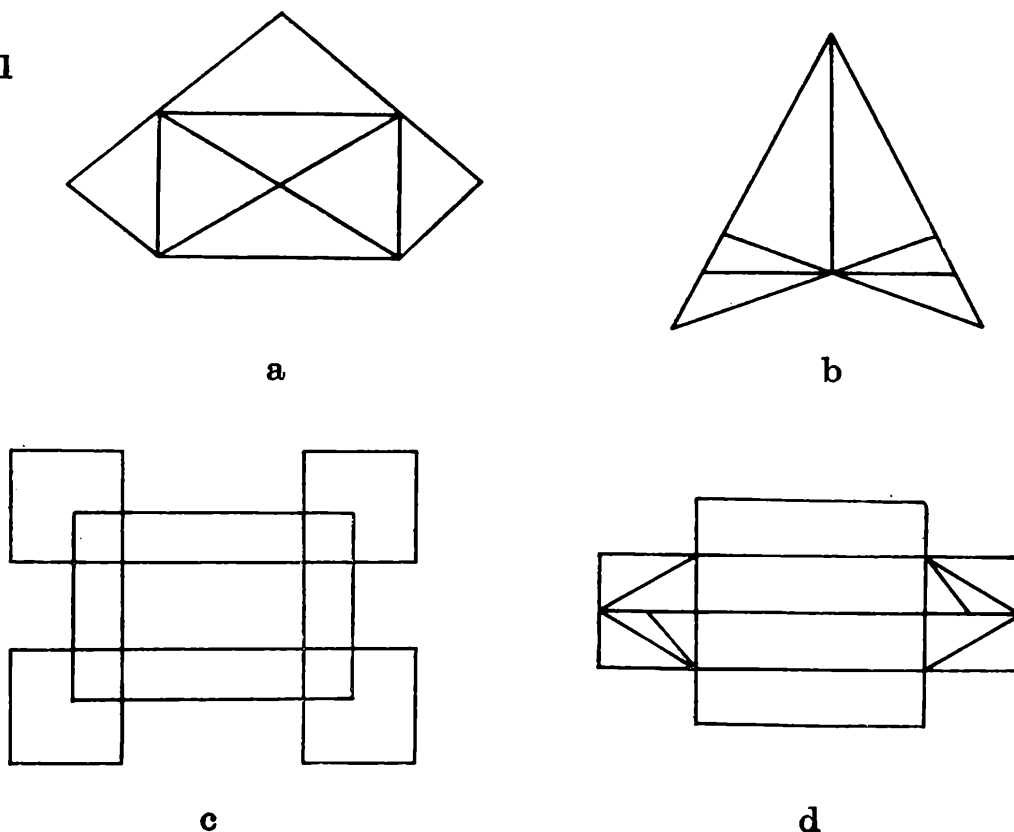
6. Ktorý pravidelný n -uholník ($n > 6$) zo všetkými jeho uhlopriečkami možno nakresliť jedným ťahom?

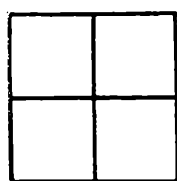
7. Vylúčte zo štvorcovej mriežky (podľa obr. 12) niektoré úsečky tak, aby zvyšný obrázok bolo možné nakresliť jedným ťahom.

8. Obr. 13 je časťou schématickej mapy, siete železničných kolajníc okolia Brna. Možno prejsť vlakom túto sieť „jedným ťahom“? Ak ano, z ktorej stanice treba vyjsť a do ktorej treba dôjsť naposledy?

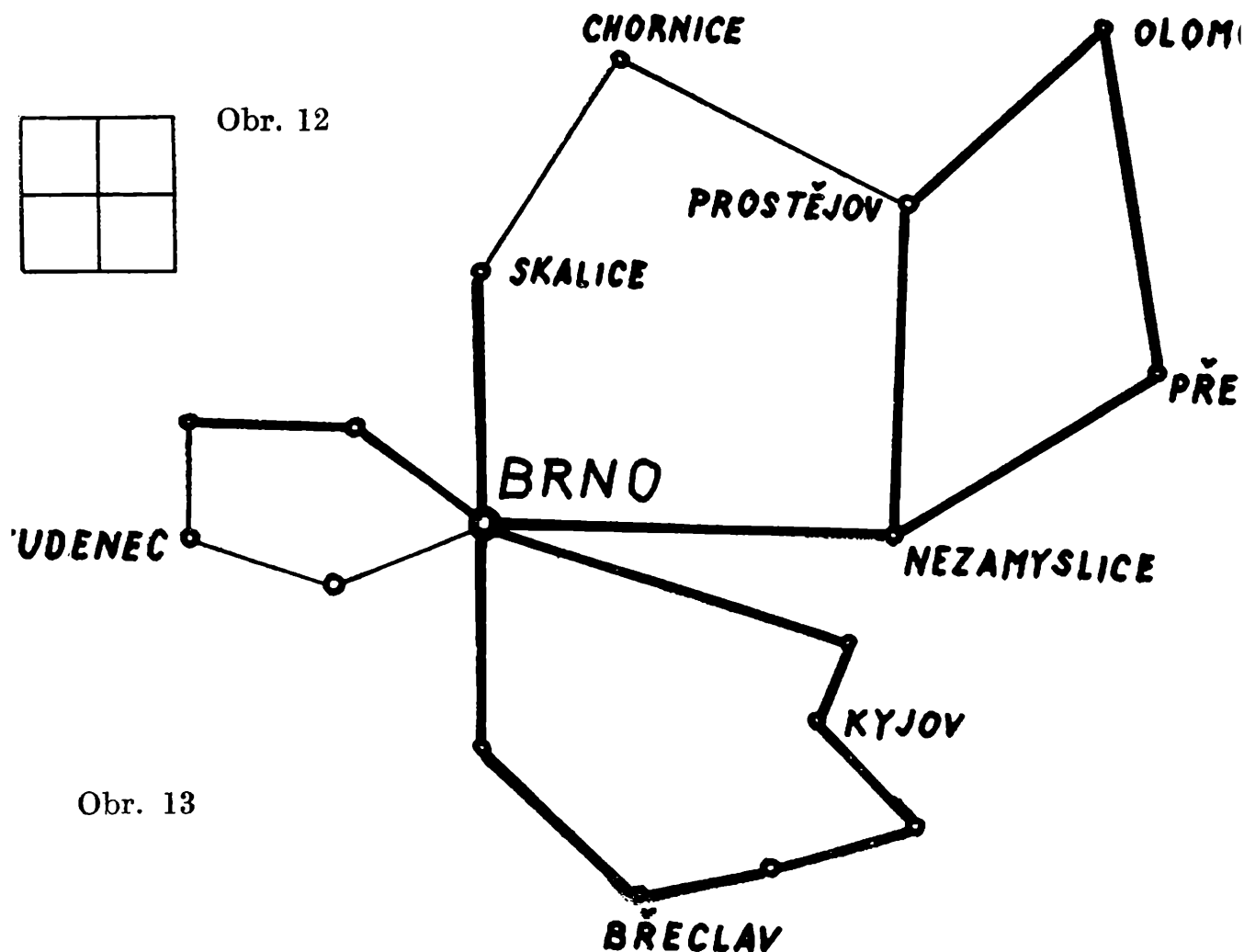
Úlohy uvedeného druhu možno považovať za vhodné pre rozvíjanie myslenia, vzbudenie záujmu o matematiku a sú tiež príkladom úloh, ktoré majú významné postavenie v samotnej teoretickej matematike, ako aj v praktických aplikáciách. O tom je podrobne pojednané v publikácii [1], ovšem v inom jazyku, kde lomenú čiaru nahrádza všeobecnejší pojem „graf“ a „stranu“, „hrana“.

Obr. 11





Obr. 12

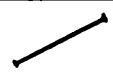
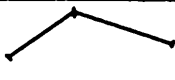
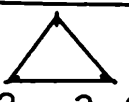
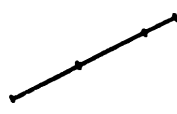
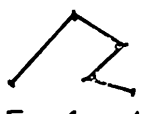
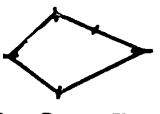
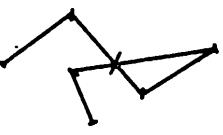
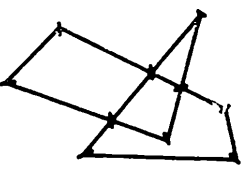


Obr. 13

V závere tohto článku chceme ešte „odhaliť“ jednu dôležitú matematickú vetu. Už z ľudskej intuície je zrejmé, že každá jednoduchá uzavretá lomená čiara rozdeľuje rovinu na dve časti, tzv. oblasti, z ktorých jedna je ohraničená a druhá neohraničená. (Je to známe tvrdenie Jordanovej vety; tvrdenie zrejmé, ale dôkaz zložitý.) Ak si všimneme vzájomnú súvislosť medzi vrcholmi lomenej čiary, jej stranami a oblasťami, dôjdeme k dôležitému poznatku. Začnime úsečkami (prvý stĺpec obr. 14), potom prejdeme k otvoreným lomeným čiaram (druhý stĺpec obr. 14) a nakoniec k uzavretým lomeným čiaram (tretí stĺpec obr. 14). Vrcholy (presnejšie ich počet) je tu označený písmenom „ v “, strany „ s “ a oblasti „ o “. V každom z uvedených prípadov dochádzame k tej istej rovnici: $v + o = s + 2$. Je to *Eulerova rovnica*, jej platnosť je všeobecná a to nielen pre „rovnú plochu“, tj. rovinu, ale i pre plochy na mnohostenoch (ktoré pozostávajú z konečného počtu stien — mnohoúhelníkov), ktoré nemajú „diery“ (napr. plochy na kocke, hranole, ihlane); teda pre plochy na konvexných mnohostenoch. Pre takéto mnohosteny je slovné vyjadrenie Eulerovej rovnice známe ako Eulerova veta: Súčet počtu vrcholov „ v “ a počtu stien (oblasti) „ o “ sa rovná počtu hrán (strán) „ s “ zväčšenému o dve tj.

$$v + o = s + 2. \quad (2)$$

Obr. 10

v σ s	v σ s	v σ s
 $2 + 1 = 1 + 2$	 $3 + 1 = 2 + 2$	 $3 + 2 = 3 + 2$
 $4 + 1 = 3 + 2$	 $5 + 1 = 4 + 2$	 $5 + 2 = 5 + 2$
	 $7 + 2 = 7 + 2$	 $10 + 5 = 13 + 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
<u>$v + \sigma = s + 2$</u>	<u>$v + \sigma = s + 2$</u>	<u>$v + \sigma = s + 2$</u>

(Treba ešte poznamenať, že táto veta platí i pre niektoré nekonvexné mnohosteny.) Z rovnice (2) dostávame dôležité číslo

$$ch(S^2) = v + \sigma - s = 2,$$

ktoré sa nazýva Eulerovou charakteristikou (niektorí autori ju nazývajú tiež Eulerovo-Pioncarého charakteristikou) plochy S^2 mnohostena M ; preto niekedy sa značí $ch(M)$. Podľa Eulerovej charakteristiky sa určuje „typ“ (presnejšie: topologický typ) plochy. V ďalšom uvidíme, že nie všetky plochy telies majú túto charakteristiku rovnú dvom.

Eulerova charakteristika mnohostenov sa najčastejšie vyjadruje pomocou triangulácie ich plôch týmito slovami:

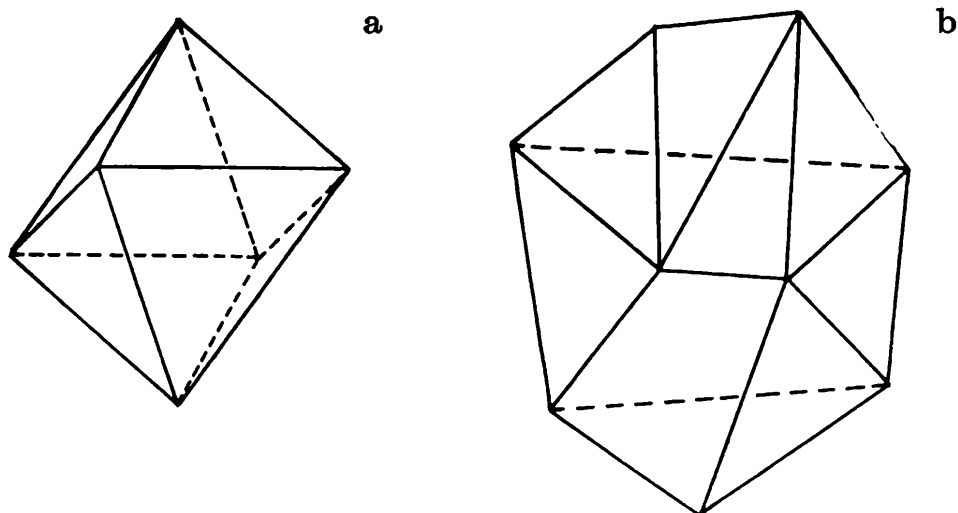
Ak je daná ľubovoľná triangulácia plochy S^2 mnohostena M a α_i je počet i -rozmerných simplexov¹⁾ v tejto triangulácii ($i = 0, 1, 2$), potom

$$ch(S^2) = ch(M) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \alpha_i = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2.$$

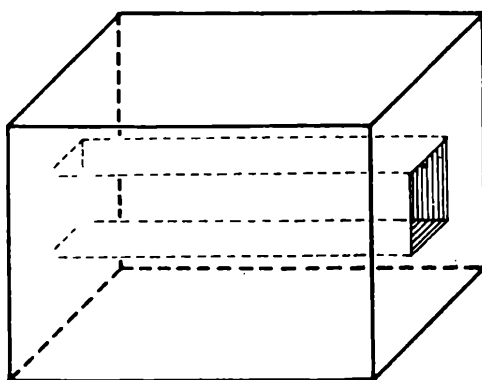
Ak dve rôzne plochy S_i^2 , S_j^2 majú rôzne charakteristiky, potom sú to plochy rôznych (topologických) typov. Triangulácia je teda prostriedkom na skúmanie plôch. Jej úloha je analogická, ako úloha súradnicového systému v analytickej geometrii. Tak ako v analytickej geometrii sa často prejde do iného súradnicového systému, tak i tu sa niekedy vypláca prejsť na inú trianguláciu, pričom výsledok (v našom prípade charakteristika danej plochy) sa nezmení.

¹⁾ Pod 0-rozmerným simplexom rozumieme vrchol (bod), jednorozmerným simplexom je hrana (úsečka) a dvojrozmerným trojuholník.

Obr. 15



Obr. 16



Zatiaľ sme hovorili iba o plochách na mnohostenoch. Je zrejmé, že tak isto ako tieto plochy možno študovať (skúmať) i iné „krivé“ plochy; napr. guľovú plochu, plochu anuloidu, valcovú a kužeľovú plochu spolu s ich podstavami (tj. ich povrch) atď. Triangulácia týchto plôch, alebo všeobecnejšie ich rozklad na jednoduché konvexné časti (tzv. konvexné buňky) sa robí pomocou im vpísaných konvexných mnohostenov, ktoré sa premietnu z niektorého ich spoločného vnútorného bodu (napr. v prípade guľovej plochy z jej stredu) na skúmanú „krivú“ plochu (v spomínanom prípade na guľovú plochu). Tak dostaneme buď krivočiaru trianguláciu krivej plochy, ktorú tvoria sférické trojuholníky, alebo rozklad takejto plochy na konvexné krivočiare mnohouholníky (konvexné buňky). V niektorých prípadoch však stačí previesť stredové resp. osové rezy telesa.

Je všeobecne známe, že niet lepšej metódy na skúmanie plôch, ako je metóda rozkladu na konvexné časti (buňky), ktorej špeciálnym prípadom je triangulácia (tj. rozklad na trojuholníky). Túto metódu zaviedol už H. Poincaré (1854—1912), keď sa ukázalo, že analytická metóda (pomocou royníc) vedie často k radu ťažkostí.

Rozklad rovinných geometrických útvarov na konvexné mnohouholníky vedie k ďalšiemu dôležitému pojmu, ktorý v matematike vystu-

puje pod názvom „parketáže“. Avšak o tomto pojme sa už nechceme na tomto mieste podrobnejšie zmieňovať. Možno sa o ňom dočítať predovšetkým v [2], ako i v sovietskom časopise „Kvant“ v článkoch: 1. Kolmogorov: Parkety iz pravilnych mnogougolnikov, No. 3 (mart), rok 1970 a 2. Kaplun-Lejbovič-Papernov: Konečnyje parkety, No. 10 (oktjabr), rok 1972.

Tento vedecko-populárny, matematicko-fyzikálny časopis možno pri tejto príležitosti vrelo odporúčať našim mladým záujemcom o matematiku a fyziku.

Cvičenia.

1. Overte, že Eulerova charakteristika pre kocku, štvorsten, osemsten (obr. 15a) a teleso obr. 15b sa rovná dvom.

2. Určte Eulerovu charakteristiku telesa na obr. 16 (je to kváder s výrezom) a obrazca na obr. 9.

3. Overte, že valec, kužeľ a guľa majú Eulerovu charakteristiku dve.

Návod. Možno voliť metódu triangulácie, avšak jednoduchší je postup pomocou rezov (u valca a kužeľa osových a u gule rovníkom a poludníkom), ktorými rozdelíme príslušné plochy — povrchy na konvexné časti. Za „hrany“ treba počítať i oblúky (kružnicové) a za „steny“ všetky časti povrchu. Napr. jedným osovým rezom kužeľa vzniknú 3 vrcholy, 5 „hrán“ (dva z nich kružnicové oblúky) a 4 „steny“ (dve z nich na plášti).]

4. Pokúste sa určiť Eulerovu charakteristiku anuloidu (prstenca). [Odp.: nula.]

5. Skúste dokázať, že podlahu „pravouhlej miestnosti“ nie je možné pokryť konečným počtom zhodných parkiet tvaru rovnostranných trojuholníkov ani pravidelných šesťuholníkov.

6. Vymyslite príklad „pravouhlej miestnosti“, ktorú nemožno vyparketovať žiadnym konečným počtom zhodných štvorcových parkiet.

Literatúra.

- [1] Sedláček, J.: Kombinatorika v teórii a praxi. Praha: NČAV 1964.
- [2] Sedláček, J.: Nebojte se matematiky. Praha: SNTL 1969.
- [3] Šedivý, J.: Grafy s uzly a hranami. Rozhledy, roč. 50, (1971—72), č. 7.
- [4] Horák, S.: Mnohosteny. Praha: Mladá fronta 1970.
- [5] Krygowska, Z.: Geometrija, Moskva: Prosveščeniye 1971.
- [6] Courant-Robbins: Čto takoe matematika? Moskva: Prosveščeniye 1967.

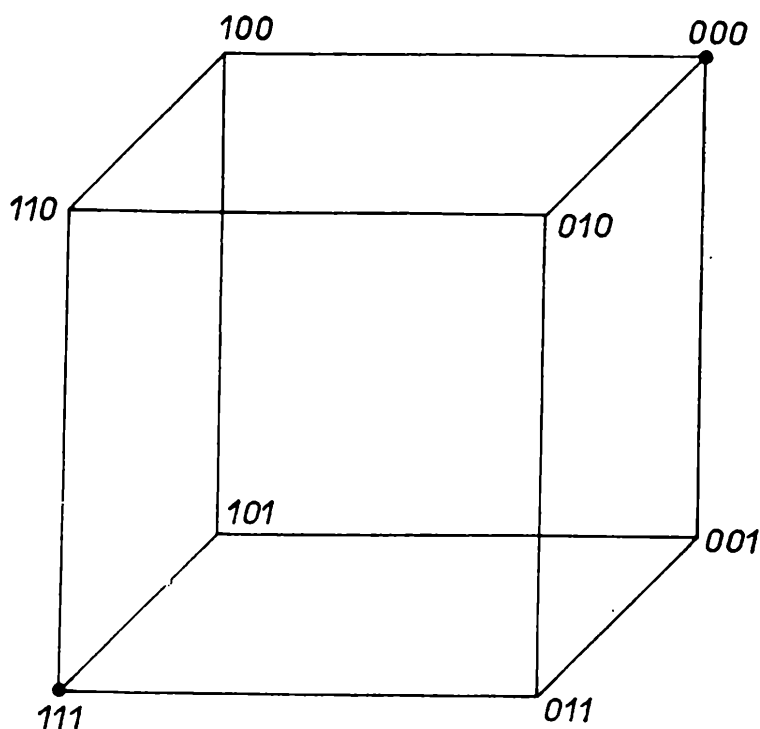
Problém muže s vosami

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

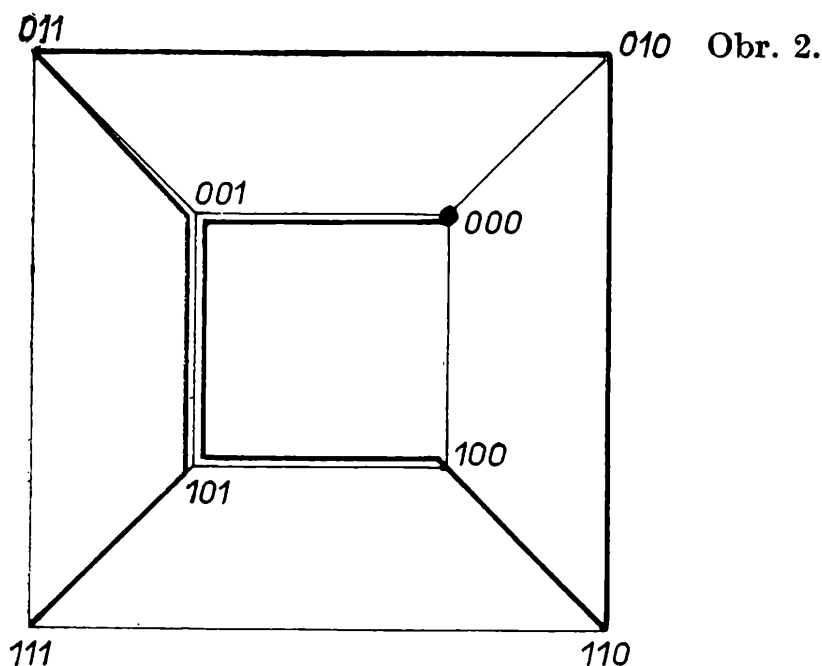
Muž sedí v obývacím pokoji a čte. Kromě něho jsou však v pokoji i tři vosy. Vosy jsou hosty nejen nezvanými, ale také velice nepříjemnými. Muž čte a vosy ho ruší. Jejich společnost je muži velmi nemilá, ba pokládá je za tvory příliš vlezlé, a proto se jich chce zbavit. Muž tedy vstane, otevře dveře do kuchyně a čeká. Průměrně proletí dveřmi jedna voska za jednu minutu z pokoje do kuchyně nebo z kuchyně do pokoje. Až všechny vosy budou v kuchyni, pak muž zavře dveře a opět usedne ke knížce. Jak dlouho musí muž čekat, než se zbaví vos?

Tento problém budeme řešit metodou Monte Carlo. K tomu si musíme sestavit vhodný pravděpodobnostní model, proto problém zformulujeme jinak:

V obývacím pokoji jsou tři vosy. Tyto vosy si můžeme očíslovat; dáme jim „na záda“ startovní čísla 1, 2, 3. Uspořádaná trojice z číslic 0,1 nám popisuje okamžitý stav v obývacím pokoji. Například trojice 101 znamená, že vosy se startovním číslem 1 a 3 se nalézají v pokoji, zatímco voska s číslem 2 je v kuchyni. Počáteční stav je vyjádřen trojicí 111 a kýžený konečný stav trojicí 000. Každou minutu se stav změní (jedna voska prolétne dveřmi) a v našem značení se to projeví změnou jedné číslice v druhou. Např. stav 101 může přejít do jednoho ze stavů 001, 111, 100; jiná možnost není. Všechny tři přechody jsou přitom stejně pravděpodobné a to, který z nich nastane, je náhodné.

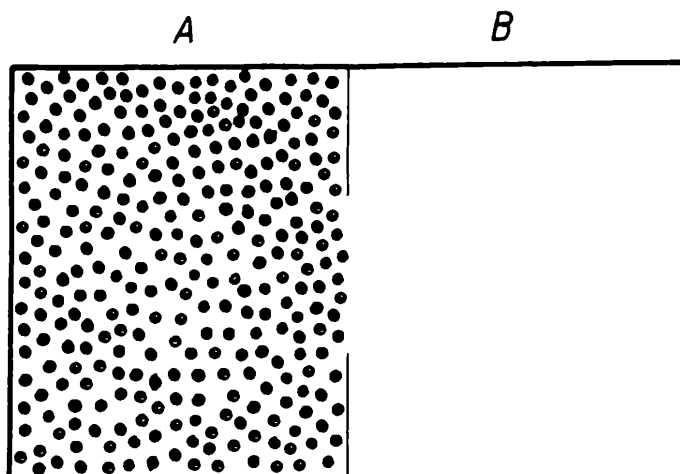


Obr. 1



Obr. 2.

Obr. 3.



Celou situaci si můžeme snadno znázornit jako drátěný model krychle, kde vrcholy znázorňují stavy a hrany znázorňují možné přechody (obr. 1). Po této krychli necháme náhodně cestovat brouka. Vypustíme brouka vždycky ve vrcholu 111 a do vrcholu 000 umístíme prudký jed. Brouk cestuje po hranách krychle a tím znázorňuje stavy vos v pokoji a změny těchto stavů. Původní otázka zněla: Jak dlouho musí muž čekat, než se zbaví vos? Odpověď na tuto otázku je stejná jako na otázku: Jaká je doba života brouka, když mu trvá cesta z jednoho vrcholu krychle na druhý jednu minutu?

Tím jsme převedli problém s vosami na problém náhodné procházky po krychli. Pro snadnější manipulaci tabulkou náhodných čísel si překreslíme krychli do roviny podle obrázku 2. V každém vrcholu začínají tři hrany. Po které hraně budeme pokračovat při náhodné procházce dál, ponecháme náhodě. Protože každá hrana má mít stejnou pravdě-

Tabulka 1.

Doba života	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23 a více
Pozorované četnosti	225	167	140	99	71	58	42	49	34	27	88
	222	173	135	105	82	63	49	38	30	23	81

podobnost výběru, budeme pokračovat podle tohoto předpisu: Budou-li v tabulce náhodných čísel číslice 1, 4, 7, půjde o hranu, která vede ke změně na 1. místě uspořádaných trojic. Analogicky změnu na 2. místě signalizují číslice 2, 5, 8 a na třetím místě číslice 3, 6, 9. Číslice 0 si nevšímáme. Posloupnost čísel 27831026703 nám představuje posloupnost stavů $111 \rightarrow 101 \rightarrow 001 \rightarrow 011 \rightarrow 010 \rightarrow 110 \rightarrow 100 \rightarrow 101 \rightarrow 001 \rightarrow 000$. Procházka je znázorněna na obr. 2. V tomto konkrétním případě žil brouk 9 minut a stejně dlouho čekal muž, než všechny vosy přeletěly do kuchyně.

Bylo provedeno dvakrát 1000 simulací s výsledky uvedenými v tabulce 1. Vypočítané průměrné doby života brouka 9,6 minut z prvních 1000 simulací a 9,4 minut z druhých 1000 jsou poněkud podhodnoceny. Je to způsobeno tím, že doba života 23 minut zastupuje všechny delší doby života a má průměrně velkou četnost. Teoretická hodnota průměrné doby života brouka je 10 minut.

Proveďte si simulaci náhodných procházek pomocí tabulky náhodných čísel otištěné v prvním čísle letošního ročníku Rozhledů a nekumuluje spolu jednotlivé doby života. Jaký výsledek dostanete?

Zkoumaný problém muže s vosami je zjednodušený fyzikální problém difuze. Máme dvě nádoby A a B (obr. 3). V nádobě A je N molekul plynu, v nádobě B je vakuum. V čase $t = 0$ uvolníme přepážku mezi nádobami a studujeme systém z různých hledisek. Matematický model, který jsme si v tomto článku popsali, jako první studoval Ehrenfest.

Modelování jednoduché činnosti živých systémů logickými sítěmi

MUDr. JIŘÍ SVOBODA, nemocnice Leděč n. Sázavou

Živý organismus přijímá svými smysly určité množství podnětů, zpracovává je a reaguje na ně. Způsob reakce organismu je určen druhem podnětu a vnitřním stavem paměti organismu, který závisí na jeho dřívějších zážitcích. Chování organismů může být modelováno tzv. konečnými automaty, jejichž jádrem je blok s pamětí, zpožďovačem a zpětnou vazbou. Výsledná reakce automatu závisí též na podnětu a na vnitřním stavu jeho paměti; někdy dostaneme na týž podnět stejné reakce, jindy různé reakce (změnil-li se vnitřní stav automatu).

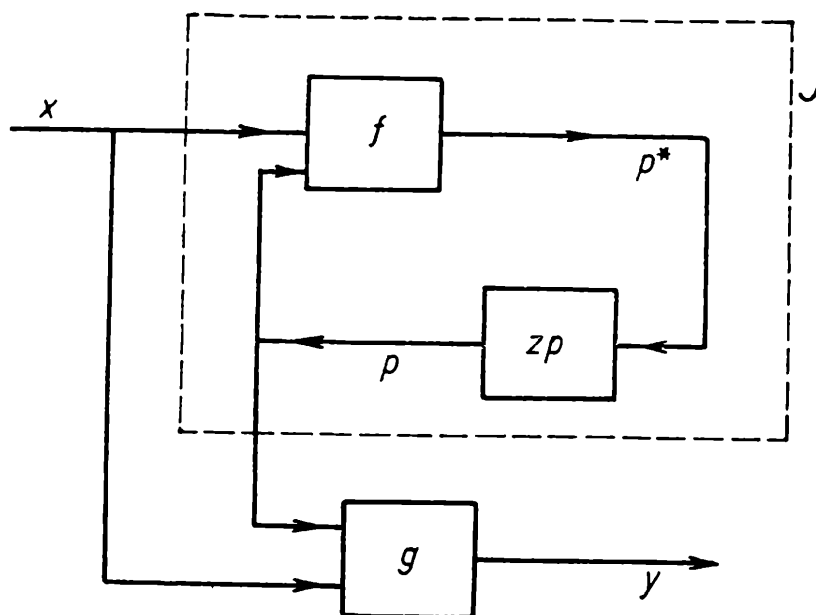
O konečných automatech jste četli článek dr. M. Hladkého v 7. čísle minulého ročníku Rozhledů. Víte tedy, že v jeho definici se hovoří o vstupní abecedě, která je množinou všech uvažovaných podnětů; dále o množině všech stavů, kterou můžeme nazvat vnitřní abecedou automatu, a konečně o množině všech koncových stavů — výstupní abecedě. V nejjednodušším případě, který budeme mít na mysli, budou tvořit výstupní abecedu automatu jeho reakce. Kromě toho budeme mít činnost automatu popsánu dvěma přechodovými funkcemi:

- $\leftarrow f$ — určí stav p^* paměti v taktu následujícím po působení podnětu x při stavu paměti p , $p^* = f(x, p)$;
- $\leftarrow g$ — určí reakci y automatu po působení podnětu x při stavu p , $y = g(x, p)$.

Obě funkce tedy vyjadřují závislosti hodnot p^* , y na vstupních hodnotách x a na stavech paměti p . Existuje několik typů automatů, které se liší zapojením paměti; pro naši potřebu postačí tzv. Mealyho stroj, jehož schéma vidíme na obr. 1; čárkovane je ohraničeno jádro J stroje, které obsahuje paměť f , zpožďovač zp a zpětnou vazbu „od zp do f “. Blok, který modeluje funkci g , má dva vstupy; jedním je vnější podnět x , druhým výstup p z jádra automatu.

Zkoumáme-li nějaký živý systém, který nemáme zatím popsán funkcemi, působíme na jeho vstupy podněty a sledujeme odpovídající reakce. Posloupnosti podnětů a reakcí zaznamenáváme do časově uspořádaných protokolů a hledáme zákonitosti přechodů z jednoho stavu do druhého. Jsou-li tyto přechody jednoznačné, jde o determinovaný systém a je možno sestavit tabulky přechodů i zmíněné funkce.

Abychom mohli reprezentovat živý organismus automatem pohodlněji, můžeme zjištěné vztahy mezi vstupem, vnitřním stavem a výstupem zakódovat v signálech složených z prvků 0,1 dvouprvkové Booleovy



algebry. Přicházejí-li v úvahu jen dva druhy podnětů, vystačíme s údaji 0,1 a jedním kanálem. Jsou-li vnitřní stavy tři, potřebujeme již dva kanály ($2^2 > 3$), kterými vytvoříme uspořádané dvojice 01, 10, 11 (dvojici 00 nemusíme využívat). Je-li výstupních reakcí pět, upotřebíme tři kanály ($2^3 > 5$) a např. trojice 001, 010, 011, 101, 100 (ostatní tři možnosti nevyužijeme).

Příkladem jednoduché činnosti živočichů je známý podmíněný reflex studovaný I. P. Pavlovem. Při pohledu na maso (tzv. nepodmíněném podnětu) reaguje pes po určité době sliněním. Jestliže je předložení masa několikrát spojeno se současným zapísknutím (tzv. podmíněným podnětem), vypracuje se u psa podmíněný reflex, kdy postačí zapísknout a pes začne slinit. Není-li však tento reflex po čase posílen předložení masu, přestane pes na samotné zapísknutí reagovat a reflex vyhasíná.

K modelování tohoto podmíněného reflexu je třeba:

- a) modelovat současné působení (koincidenci) podnětu nepodmíněného a podmíněného,
- b) zajistit, aby byl reflex vypracován až po několikeré koincidenci,
- c) zajistit, aby reflex vyhasl po několikerém neposílení.

Modelem koincidence bude logická síť s pamětí, která zaznamená současné působení podmíněného a nepodmíněného podnětu; stav paměti vyjádří proměnná p . Spolu s oběma podněty, tj. nepodmíněným x_1 a podmíněným x_2 , jde celkem o tři proměnné. Tabulka všech trojic hodnot proměnných bude mít osm řádků; v její levé části zapíšeme všechny trojice hodnot proměnných x_1, x_2, p , ve sloupcích y, p^* budou jedničky právě v těch případech, kdy reakce bude pozitivní, resp. paměť bude v příštím okamžiku naplněna (reflex je vytvořen).

Reakce (slinění) nastane právě v těchto případech:

a) je dán nepodmíněný podnět (maso), na stavu paměti nezáleží (5.—8. řádek),

b) paměť je naplněna a přichází podmíněný podnět (4. řádek).

Paměť bude v příštím taktu naplněna, jestliže nastane některý z těchto případů:

a) paměť je plná v současném taktu (2., 4., 6. a 8. řádek),

b) paměť je prázdná a oba podněty působí současně (7. řádek).

	x_1	x_2	p	y	p^*
1.	0	0	0	0	0
2.	0	0	1	0	1
3.	0	1	0	0	0
4.	0	1	1	1	1
5.	1	0	0	1	0
6.	1	0	1	1	1
7.	1	1	0	1	1
8.	1	1	1	1	1

Hledejme nyní booleovskou funkci f , která přiřazuje uspořádané trojici hodnot (x_1, x_2, p) hodnotu p^* . (Postup byl již popsán v Rozhledech několikrát, naposledy v článku J. Zahradníka v 7. čísle minulého ročníku.) Všimneme si řádků tabulky, kde je v sloupci pro p^* jednička; hodnoty proměnných x_1, x_2, p v témž řádku vyjádříme součinem tří z šesti proměnných $x_1, x_2, p, x'_1, x'_2, p'$ tak, že při výskytu jedničky píšeme proměnnou, při výskytu nuly její negaci (s čárkou). Součiny odpovídající vybraným řádkům sečteme, získáme tak vyjádření

$$f: \quad p^* = x'_1 x'_2 p + x'_1 x_2 p + x_1 x'_2 p + x_1 x_2 p' + x_1 x_2 p.$$

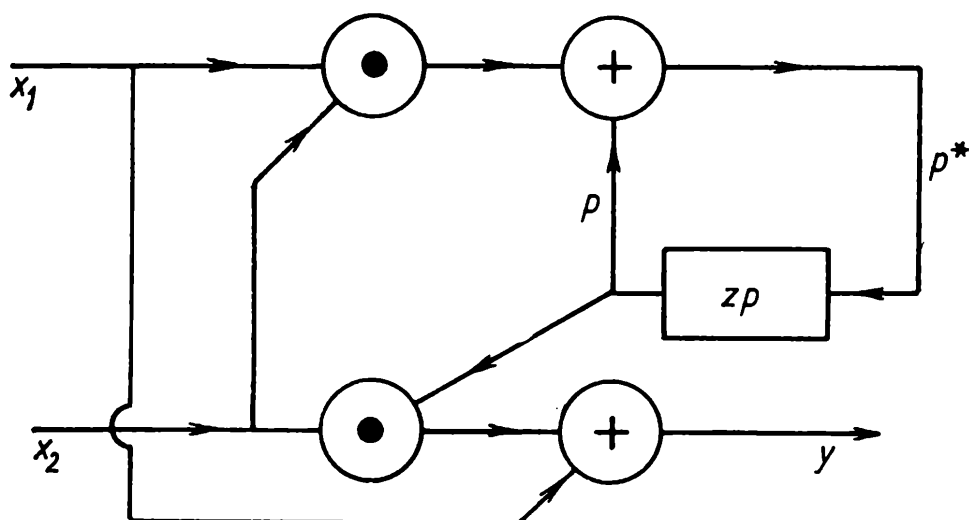
Obdobným způsobem pracujeme s jedničkami ve sloupci pro y a zapíšeme funkci g ve tvaru

$$g: \quad y = x'_1 x_2 p + x_1 x'_2 p' + x_1 x'_2 p + x_1 x_2 p' + x_1 x_2 p.$$

Po úpravách podle pravidel Booleovy algebry vyjdou jednoduché výrazy

$$f: \quad p^* = p + x_1 x_2$$

$$g: \quad y = p x_2 + x_1,$$



Obr. 2

které můžeme zakreslit logickou sítí (obr. 2) a modelovat pak sítěmi s elektronkami nebo polovodiči.

Má-li být reflex vypracován až po určitém počtu koincidencí nepodmíněného a podmíněného podnětu (ne tedy po jediné jako v příkladě, kterým jsme se zabývali), lze tuto podmínku modelovat přídatným počítačem následných vstupů. Obdobně se realizuje vyhasnutí reflexu po nějakém počtu, například čtyř, neposílených podnětů (písknutí bez podání masa).

Jak jste viděli, jde při modelování podmíněného reflexu o záležitost booleovských funkcí několika proměnných, které lze realizovat logickou sítí a jejími technickými modely.

Literatura

- G. E. Hoernes, M. F. Heilweil: Úvod do Booleovy algebry a navrhování logických obvodů, Praha 1969
- V. Pinkava: Organismy jako automaty, Praha 1969
- W. Ross Ashby: Kybernetika, Praha 1961
- Z. Wunsch: Úvod do lékařské kybernetiky, Praha 1972

Některé vlastnosti úplného čtyřstranu

Prof. Dr. JOSEF BREJCHA, Brno

V tomto článku si odvodíme několik vlastností úplného čtyřstranu. Aby čtenáři věděli, o co vlastně jde, řekneme, že každé čtyři přímky a_1, a_2, a_3, a_4 , které leží v rovině a z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem, tvoří úplný čtyřstran. Dané čtyři přímky jsou strany úplného čtyřstranu. Průsečíky stran jsou vrcholy úplného čtyřstranu. V obr. 1 to jsou body: $A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34}$. Úplný čtyřstran má šest vrcholů.

Duálně: Každé čtyři body v rovině, z nichž žádné tři neleží v téže přímce, určují úplný čtyřroh. Dané body jsou vrcholy tohoto čtyřrohu. Spojnice (tj. přímka) každých dvou vrcholů je strana úplného čtyřrohu. Úplný čtyřroh má šest stran.

Redakce

Nechť přímky a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) jsou stranami úplného čtyřstranu $\{a_i\}$, body O_i středy kružnic k_i , opsaných trojúhelníkům, tvořeným stranami a_j, a_k, a_m (i, j, k, m libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3, 4). Kružnice k_i , jak známo, se protínají ve společném bodě P .

Bez újmy obecnosti platí podle obr. 1:

Věta 1.

Bod P je vnitřním bodem rovinného sektoru Σ , omezeného polopřímkami $A_{13}A_{14}, A_{24}A_{23}$ a úsečkami $A_{12}A_{13}, A_{12}A_{24}$.

Důkaz (obr.1):

Vně uvedeného sektoru leží:

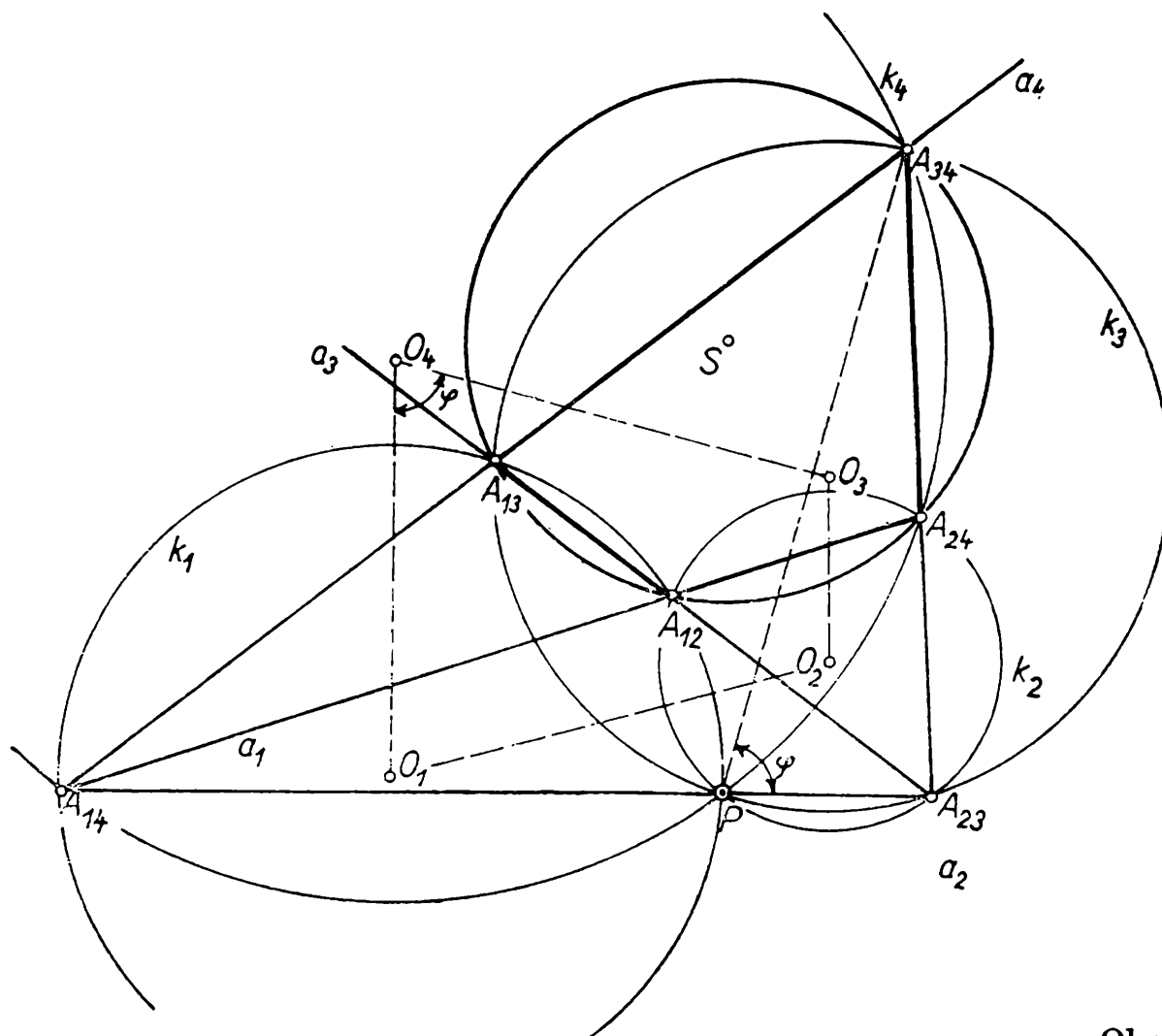
1. oblouky $\widehat{A_{34}A_{24}}, \widehat{A_{34}A_{23}}, \widehat{A_{24}A_{23}}$ kružnic k_4, k_3, k_2 ,
2. oblouky $\widehat{A_{34}A_{13}}, \widehat{A_{14}A_{34}}, \widehat{A_{13}A_{14}}$ kružnic k_3, k_4, k_1

V polorovině $A_{14}A_{24}A_{34}$ leží oblouky $\widehat{A_{14}A_{12}}, \widehat{A_{14}A_{24}}, \widehat{A_{12}A_{24}}$ kružnic k_1, k_4, k_2 ,

v polorovině $A_{13}A_{23}A_{34}$ leží oblouky $\widehat{A_{13}A_{12}}, \widehat{A_{12}A_{13}}, \widehat{A_{13}A_{23}}$ kružnic k_1, k_2, k_3 .

Bod P jako společný bod všech čtyř kružnic musí tedy být vnitřním bodem rovinného sektoru věty 1.

Pro účely tohoto článku nazveme úsečku $A_{14}A_{23}$ vnější diagonálou daného čtyřstranu $\{a_i\}$, body A_{14}, A_{23} vnějšími vrcholy.



Obr. 1

Věta 2.

Strany a_i úplného čtyřstranu $\{a_i\}$ vytvoří tětivový čtyřúhelník $[a_i]$ ($i = 1, 2, 3, 4$) tehdy a jen tehdy, je-li bod P vnitřním bodem vnější diagonály příslušného čtyřstranu $\{a_i\}$.

Důkaz:

1. Nechť bod P je vnitřním bodem diagonály $A_{14}A_{23}$. Pak body A_{13}, A_{24} leží v opačných polorovinách, vyřazených přímkou $A_{34}P$. Podle věty o obvodových úhlech platí zřejmě

$$\sphericalangle A_{23}PA_{34} = \varphi = \sphericalangle A_{23}A_{13}A_{34} \dots \text{ (kružnice } k_3),$$

$$\sphericalangle A_{14}PA_{34} = 2R - \varphi = \sphericalangle A_{14}A_{24}A_{34} \dots \text{ (kružnice } k_4).$$

Sečtením: $\sphericalangle A_{12}A_{13}A_{34} + \sphericalangle A_{12}A_{24}A_{34} = 2R$, tj. čtyřúhelník o vrcholech $A_{12}A_{13}A_{34}A_{24}$ je tětivový.

2. Bod P není bodem vnější diagonály $A_{14}A_{23}$. Pak lze snadno ukázat, že platí $\sphericalangle A_{12}A_{13}A_{34} + \sphericalangle A_{12}A_{24}A_{34} > 2R$, leží-li bod P v polo-

rovině, obsahující bod A_{12} , vyřazené přímkou $A_{14}A_{23}$, $\angle A_{12}A_{13}A_{34} + \angle A_{12}A_{24}A_{34} < 2R$, leží-li bod P v polorovině opačné.

Věta 3.

Středy O_i ($i = 1, 2, 3, 4$) kružnic k_i a bod P leží na téže kružnici Γ .

Důkaz:

Vrcholy $A_{ij} \in a_m$, $i \neq j \neq m$, $i, j, m = 1, 2, 3, 4$ čtyřstranu $\{a_i\}$ jsou průsečíky kružnic k_i, k_j . Z předpokladů plyne $O_i \neq O_j$, $i \neq j$, A_{ij} je zrcadlový obraz bodu P vzhledem k přímce O_iO_j . Dále je pak $P \neq A_{ij}$, body P, O_i, O_j ($i, j = 1, 2, 3, 4$) neleží v přímce. Pak jsou i středy M_{ij} úseček PA_{ij} po dvojicích různé a žádné tři ze středů O_{ij} neleží v přímce, jinak by totiž některé z bodů M_{ij} , jako paty kolmic z bodu P na O_iO_j , splynuly. Body A_{ij} tvoří vrcholy úplného čtyřstranu $\{a_{ij}\}$ právě tehdy, když i body M_{ij} jsou vrcholy úplného čtyřstranu (M_{12}, M_{13}, M_{23} leží v jedné přímce atd.). To nastane podle Wallaceovy věty (Simsonovy věty) právě tehdy, leží-li body P, O_i ($i = 1, 2, 3, 4$) na jediné kružnici.

Věta 4.

Strany úplného čtyřstranu $\{a_i\}$ tvoří tětivový čtyřúhelník $[a_i]$ právě tehdy, tvoří-li středy O_i ($i = 1, 2, 3, 4$) lichoběžník (případně pravoúhelník) vepsaný do kružnice Γ . Bod P je pak vnitřním bodem oblouku této kružnice, vyřazeného ramenem příslušného lichoběžníka jako tětivou a leží v polorovině, která neobsahuje střed kružnice Γ .

Důkaz:

Centrála dvou kružnic je kolmá na jejich společnou tětivu. Proto platí:

$$O_iO_j \perp PA_{ij}, O_iP = O_iA_{ij}, O_jP = O_jA_{ij}.$$

Z těchto relací a s ohledem na věty 1, 2:

$$O_1O_4 \perp PA_{14}, O_2O_3 \perp PA_{23}, O_1O_4 \parallel O_2O_3 \text{ c. b. d.}$$

Přímka O_1O_4 je symetrálou úsečky PA_{14} , přímka O_2O_3 je symetrálou úsečky PA_{23} .

Označme nyní S střed kružnice, opsané tětivovému čtyřúhelníku $[a_i]$ o vrcholech $A_{12}, A_{13}, A_{34}, A_{24}$.

Věta 5.

Střed S je druhým průsečíkem kolmice, vztyčené v bodě P na vnější diagonálu příslušného čtyřstranu $\{a_i\}$ s kruž-

nicí Γ , na níž leží spolu s bodem P i středy O_i kružnic k_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Důkaz:

Podle věty 2 je $\varphi = \sphericalangle A_{23}PA_{34} = \sphericalangle A_{12}A_{13}A_{34}$.

Podle konstrukce je $O_1O_4 \perp A_{14}A_{23}$, $PA_{34} \perp O_3O_4$, PA_{34} společná tětiva kružnic k_3, k_4 . Dále je podle obr. 1: $\sphericalangle O_1O_4O_3 = \varphi$.

Je-li S střed kružnice K , opsané příslušnému tětivovému čtyřúhelníku $[a_i]$, je $O_4S \perp A_{24}A_{34}$, $O_2S \perp A_{12}A_{24} \Rightarrow \sphericalangle O_4SO_2 = 2R - \varphi$, tj. střed S je vnitřním bodem oblouku $\widehat{O_4SO_2}$ kružnice Γ . Podobně lze ukázat, že $\sphericalangle O_3SO_1 = \varphi$, tj. střed S je vnitřním bodem oblouku $\widehat{O_3SO_1}$ kružnice Γ .

Současná platnost obou relací, určujících polohu bodu S , je tedy možná pouze tehdy, je-li S vnitřním bodem oblouku $\widehat{O_4O_3}$ kružnice Γ v polorovině, která neobsahuje střed této kružnice.

Budiž tedy S bodem oblouku $\widehat{O_4O_3}$.

Je pak $\sphericalangle O_3O_4S = \sphericalangle PA_{34}A_{23}$ ($O_4O_3 \perp PA_{34}$, $O_4S \perp A_{23}A_{24}$),
 $\sphericalangle PA_{34}A_{23} = \sphericalangle PA_{14}A_{24}$

(obvodové úhly nad tětivou PA_{24} kružnice k_4) $= \frac{1}{2} \sphericalangle PO_1A_{12}$ (středový úhel nad tětivou PA_{12} kružnice k_1).

Je tedy

$$\sphericalangle O_3O_4S = \sphericalangle PA_{34}A_{23} = \frac{1}{2} \sphericalangle PO_1A_{12} = \sphericalangle PO_1O_2.$$

Poněvadž čtyřúhelník o vrcholech O_i ($i = 1, 2, 3, 4$) je podle věty 4 rovnoramenný lichoběžník, platí $\sphericalangle O_2O_1O_4 = \sphericalangle O_1O_4O_3$, a tedy též $\sphericalangle O_1O_4S = \sphericalangle O_4O_1P$, odkud plyne $SP \parallel O_1O_4$ vzhledem k tomu, že čtyřúhelník o vrcholech O_1, O_4, S, P je čtyřúhelníkem tětivovým.

Budtež nyní dány v rovině 3 body A_{14}, A_{23}, S neležící v jedné přímce. Je nalézt nutné a postačující podmínky pro existenci úplného čtyřstranu $\{a_i\}$, jehož vnější vrcholy by splývaly s body A_{14}, A_{23} a jehož strany a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) by omezovaly tětivový čtyřúhelník $[a_i]$, vepsaný do kružnice o středu S . Je zřejmé, že takových čtyřstranů, existují-li, je nekonečně mnoho; jejich existence závisí jednak na volbě bodů A_{14}, A_{23}, S , jednak na existenci středů O_i jako průsečíků kružnice Γ se symetrálami úseček PA_{14}, PA_{23} . Při dané pevné poloze bodů A_{14}, A_{23}, S a tím též bodu P jako paty kolmice, spuštěné z bodu S na přímku $A_{14}A_{23}$ (věta 5) tak, aby vzhledem k větě 2 byl bod P vnitřním bodem úsečky $A_{14}A_{23}$, musí být každému jednotlivému čtyřstranu $\{a_i\}$ jednoznačně přiřazena jistá kružnice Γ o tětivě SP .

Budiž $\left\{ \begin{matrix} T_{14} \\ T_{23} \end{matrix} \right.$ průsečík symetrály $\left\{ \begin{matrix} O_1O_4 \\ O_2O_3 \end{matrix} \right.$ s přímkou $\left\{ \begin{matrix} A_{14}S \\ A_{23}S \end{matrix} \right.$

Zřejmě je

$$A_{14}T_{14} = T_{14}S, \quad A_{23}T_{23} = T_{23}S, \quad T_{14}T_{23} \parallel A_{14}A_{23}.$$

Označme dále

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{14} \\ Q_{23} \end{array} \right. \text{ průsečík symetrály úsečky } \left\{ \begin{array}{l} T_{14}S \\ T_{23}S \end{array} \right. \text{ s přímkou } T_{14}T_{23},$$

na níž musí nutně ležet středy všech kružnic Γ . Aby každá z těchto kružnic byla kružnicí přípustnou ve smyslu dané úlohy, k tomu je nutno a stačí, aby střed této kružnice byl vnitřním bodem úsečky $Q_{14}Q_{23}$ jako průniku polopřímky $T_{14}Q_{14}$ (koncový bod Q_{14}) a polopřímky $Q_{23}T_{23}$ (koncový bod Q_{23}).

Tento průnik jako množina středů přípustných kružnic Γ je prázdná množina, je-li vnitřní úhel $\sphericalangle A_{14}SA_{23}$ trojúhelníka o vrcholech A_{14}, S, A_{23} úhel tupý nebo pravý; skládá se ze všech vnitřních bodů úsečky $Q_{14}Q_{23}$, je-li zmíněný úhel úhlem ostrým.

Platí proto věta 6.

Budtež A_{14}, A_{23}, S libovolné body neležící v jedné přímce. Tyto body určují čtyřstran $\{a_i\}$, jehož vnější vrcholy splývají s body A_{14}, A_{23} a jehož strany omezují tětivový čtyřúhelník $[a]$ ($i = 1, 2, 3, 4$) vepsaný do kružnice K o středu S tehdy a jen tehdy:

a) tvoří-li tyto body ostroúhlý trojúhelník, kde bod P je patou výšky spuštěné z bodu S na stranu $A_{14}A_{23}$ a současně

b) kružnice Γ tvoří svazek o společné tětivě SP tak, že do tohoto svazku patří každá kružnice Γ , pokud je symetrálami úseček $A_{14}P, A_{23}P$ prořata ve čtyřech různých bodech (středy $O_i, i = 1, 2, 3, 4$).

Poloměr r kružnice K opsané každému příslušnému tětivovému čtyřúhelníku $[a_i]$, je dán úsečkou $r = SA_{ij}$, kde bod A_{ij} je průsečíkem kružnic k_i, k_j ; i, j libovolná kombinace 2. třídy čísel 1, 2, 3, 4, $i, j \neq 1, 4, i, j \neq 2, 3$.

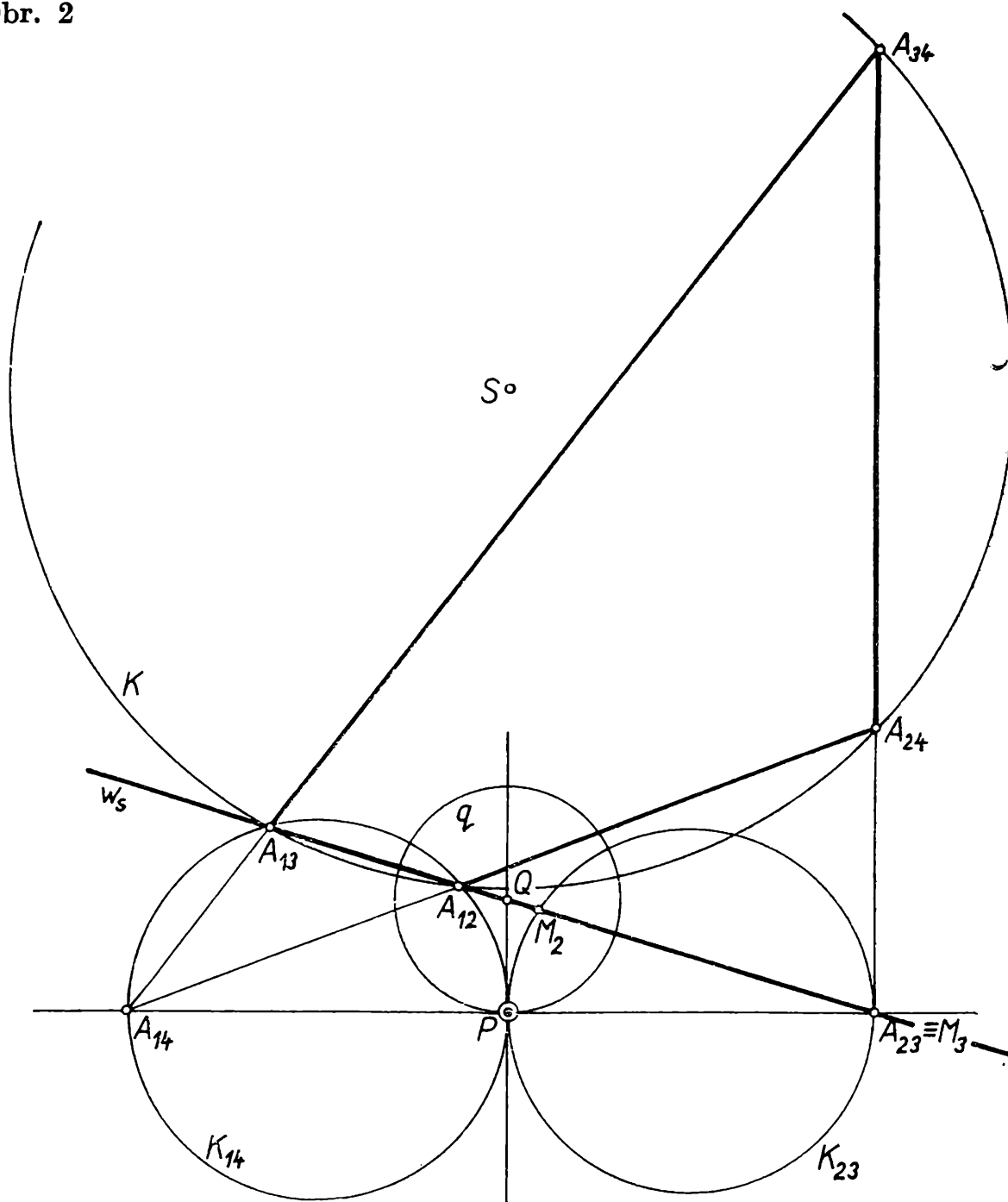
Věta 7.

Paty M kolmic, spuštěných z bodu P na strany a_i úplného čtyřstranu $\{a_i\}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) leží v přímce.

Důkaz:

Bod P (různý od každého z vrcholů) je bodem kružnice opsané trojúhelníku o stranách např. a_i ($i = 1, 2, 3$). Paty M_i kolmic spuštěných z vrcholu P na tyto strany leží na Wallaceově (Simsonově) přímce w . Podobně pro trojúhelník o stranách a_1, a_2, a_4 leží příslušné paty kolmic

Obr. 2



M_1, M_2, M_4 na Wallaceově přímce $\bar{w}$. Tyto přímky mají společné dva různé body M_1, M_2 , a proto splývají; body M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) leží tedy v jediné přímce.

Z důkazu je patrné, že platí i věta obrácená:

Protneme-li úplný čtyřstran $\{a_i\}$ přímkou w tak, že kolmice vztyčené ve čtyřech různých průsečících M_i k příslušným stranám a_i se protínají v jednom bodě, pak tento bod je zároveň bodem P , v němž se protínají i kružnice opsané jednotlivým trojúhelníkům, tvořeným stranami příslušného úplného čtyřstranu $\{a_i\}$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Zavedme označení:

- K — kružnice o středu S , opsaná tětiovým čtyřúhelníkem $[a_i]$ podle dřívější symboliky;
- K_{14} — kružnice opsaná nad úsečkou $A_{14}P$ jako průměrem;
- K_{23} — kružnice opsaná nad úsečkou $A_{23}P$ jako průměrem;
- w_s — přímka spojující paty M_i kolmic spuštěných z bodu P na strany a_i libovolného přípustného úplného čtyřstranu $\{a_i\}_s$, které tvoří tětiový čtyřúhelník $[a_i]_s$.

Pak platí věta 8.

Přímky w_s ($s = 1, 2, 3, 4, \dots$) tvoří svazek paprsků, jehož vrcholem je chordální střed Q kružnic K, K_{14}, K_{23} .

Důkaz (obr. 2)]

Je patrné, že každá přímka protínající kružnice K_{14}, K_{23} ve čtyřech různých bodech M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) je w_s přímkou některého ze čtyřstranů $\{a_i\}_s$, jejichž strany uzavírají tětiový čtyřúhelník $[a_i]_s$, který ovšem nemusí být vepsán do kružnice K o středu S .

Předpokládejme, že čtyřúhelník $[a_i]_s$ do kružnice K o středu S vepsán je, a uvažujme možnost, že kružnice K a K_{14} se protínají ve dvou různých bodech A_{12}, A_{13} . Nechť dále protne přímka $A_{12}A_{13}$ kružnici K_{23} ve dvou různých bodech M_2, M_3 . Vzhledem k Thaletově větě pro kružnice K_{14}, K_{23} je tedy tato přímka w_s přímkou jistého čtyřstranu $\{a_i\}_s$, jehož vnější vrcholy splývají s body A_{14}, A_{23} a jehož strany tvoří tětiový čtyřúhelník $[a_i]_s$ vepsaný do kružnice K o středu S . Přímka $A_{12}A_{13}$ je však jednou ze stran tohoto čtyřúhelníka a v prodloužení prochází vnějším vrcholem A_{23} , s nímž též nutně splyne i jeden z bodů M_2, M_3 (třeba M_3); je však současně chordálou kružnic K, K_{14} a protíná společnou tečnu QP kružnic K_{14}, K_{23} (dotykový bod P) jako jejich chordálu v bodě Q , který je tedy chordálním středem kružnic K, K_{14}, K_{23} .

Proto platí

$$QA_{12} \cdot QA_{13} = QM_2 \cdot QA_{23} = (QP)^2.$$

Poněvadž QP je společnou tečnou kružnic K_{14}, K_{23} , existuje vždy reálná kružnice q o středu Q a o poloměru QP , která kolmo protíná všechny tři kružnice K, K_{14}, K_{23} ; poloměr r kružnice K je pak určen jako délka tečny vedené ze středu S ke kružnici q . Podle vlastností chordálního středu je kružnice K též pro každou přímku w_s , která prochází bodem Q a kružnice K_{14}, K_{23} protíná ve čtyřech různých bodech a jen pro tuto přímku. Tím je důkaz ukončen.

Grafy signálních toků

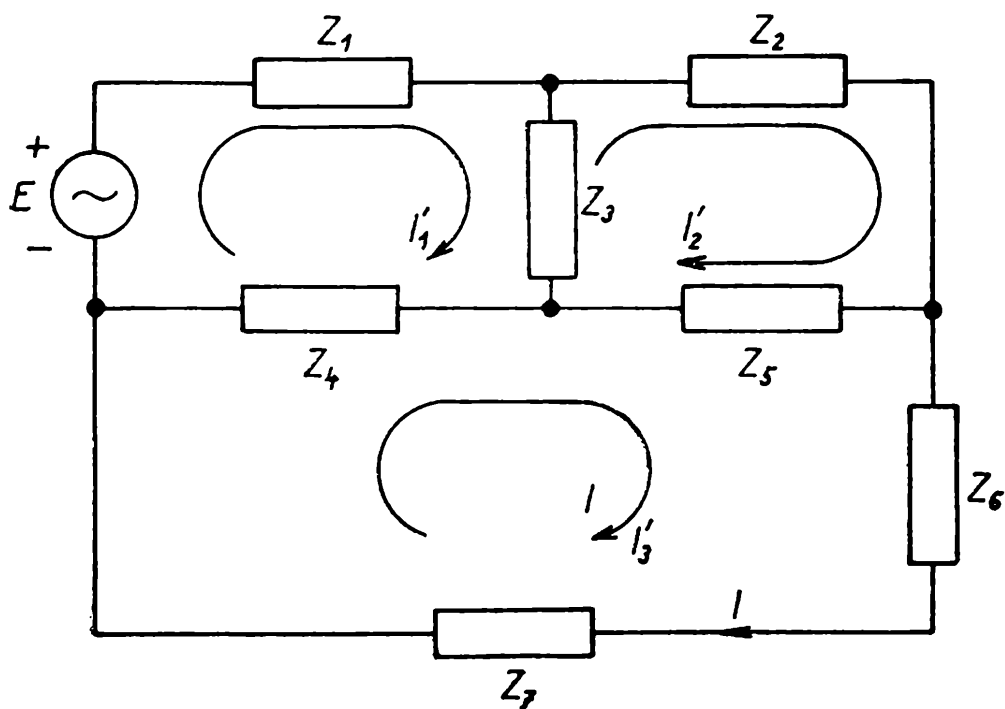
Ing. JIŘÍ MYSLÍK, n. p. Škoda Plzeň

Jednou z poměrně nových metod řešení elektrických obvodů je tzv. metoda signálních toků. Tuto metodu lze uplatnit i při řešení jiných úloh, ale v tomto článku si všimneme právě elektrických obvodů, kde se jí poprvé začalo užívat.

Podívejte se na obr. 1, na kterém je obvyklým způsobem znázorněn elektrický obvod s řadou veličin — E , Z_1 , Z_2 , ..., Z_7 i s tzv. smyčkovými proudy I'_1 , I'_2 , a $I'_3 = I$. Abychom mohli vyjádřit závislost proudu I na ostatních veličinách, napíšeme nejprve soustavu rovnic, které pro obvod platí.

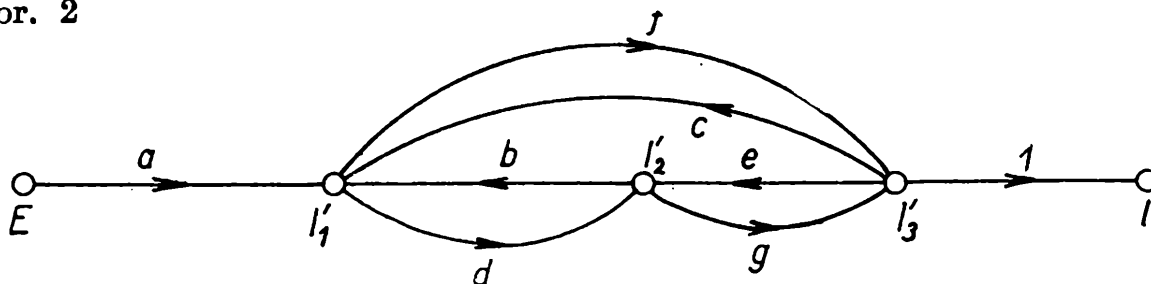
Předpokládám, že je vám známa metoda smyčkových proudů, vycházející z II. Kirchhoffova zákona, a proto rovnice sestavíme touto metodou. Smyčkové proudy jsou označeny čárkou. Všechny veličiny jsou komplexní, tuto skutečnost tiskem nevyjadřujeme.

$$\begin{aligned} Z_1 I'_1 + Z_3 (I'_1 - I'_2) + Z_4 (I'_1 - I'_3) &= E \\ Z_2 I'_2 + Z_3 (I'_2 - I'_1) + Z_5 (I'_2 - I'_3) &= 0 \\ I'_3 (Z_6 + Z_7) + Z_4 (I'_3 - I'_1) + Z_5 (I'_3 - I'_2) &= 0 \\ I &= I'_3 \end{aligned}$$

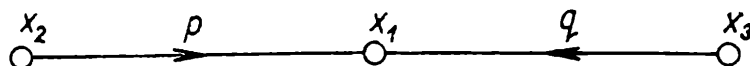


Obr. 1

Obr. 2



Obr. 3



Eliminováním neznámých smyčkových proudů a úpravou dostaneme soustavu rovnic

$$I'_1 = aE + bI'_2 + cI'_3$$

$$I'_2 = dI'_1 + eI'_3$$

$$I'_3 = fI'_1 + gI'_2$$

$$I = I'_3.$$

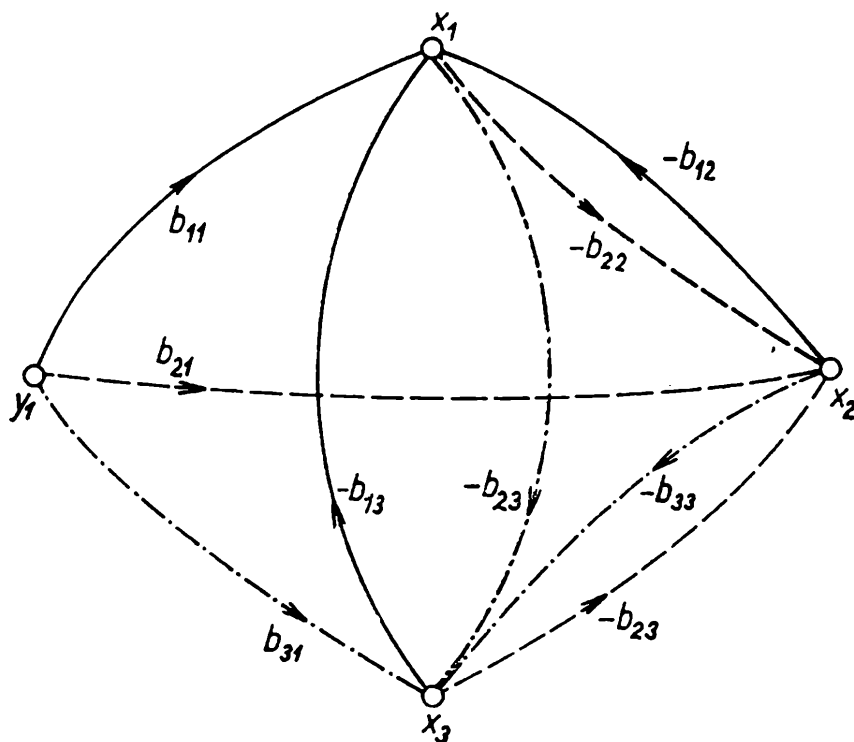
Koeficienty u neznámých jsou, jak se lze snadno přesvědčit,

$$a = \frac{1}{Z_1 + Z_3 + Z_4}, \quad b = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_4} \text{ atd.}$$

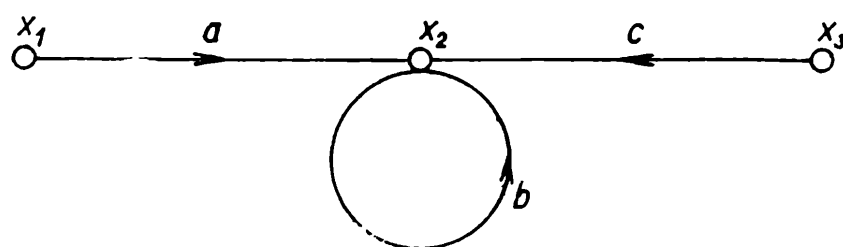
Řešení elektrického obvodu nás přivedlo k soustavě lineárních rovnic. Grafy signálních toků přiřazujeme právě soustavám lineárních rovnic, na obr. 2 vidíte takový graf přiřazený naší soustavě. Jak patrně, je to graf s uzly E, I, I'_1, I'_2, I'_3 , k jehož hranám (větvím) jsou připsány koeficienty vystupující v rovnicích soustavy. Jde tedy zřejmě o dosti přehledné grafické znázornění neznámých a koeficientů z rovnic soustavy.

V tomto článku se seznámíme s přiřazováním grafu soustavám lineárních rovnic a s elementárními úpravami grafů, které odpovídají úpravám lineárních rovnic. Ukázkou řešení elektrického obvodu ponecháme do dalšího článku.

Nechť je dána lineární rovnice $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, kde a, b, c jsou nenulové konstanty. Vyjádříme například závislost neznámé x_1 na x_2 a x_3 . Dostaneme rovnici $x_1 = px_2 + qx_3$, kde $p = -b/a, q = -c/a$. Provedme nyní toto přiřazení: Každou neznámou x_1, x_2, x_3 znázorníme v rovině kroužkem a nazveme tyto kroužky *uzly*. Okolnost, že x_1 závisí na x_2 a x_3 , vyjádříme spojnici těchto uzlů tak, že kroužek příslušející neznámé x_1 spojíme s kroužky odpovídajícími x_2 a x_3 a tyto *hrany grafu* (zvané též *větvě*) orientujeme šipkami do x_1 . Nakonec provedme tzv. *ohodnocení větví grafu* koeficienty p, q uvažované rovnice. Tyto koefi-



Obr. 4



Obr. 5

cienty se nazývají koeficienty přenosu signálu větví, zkráceně jen přenosy větví. Tak získáme graf znázorněný na obr. 3.

Podobně můžeme přiřadit graf i soustavě rovnic. Nechť je například dána soustava tří rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = py_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = qy_1$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = ry_1.$$

Z rovnic eliminujeme jednotlivé neznámé např. takto:

$$x_1 = b_{11}y_1 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3$$

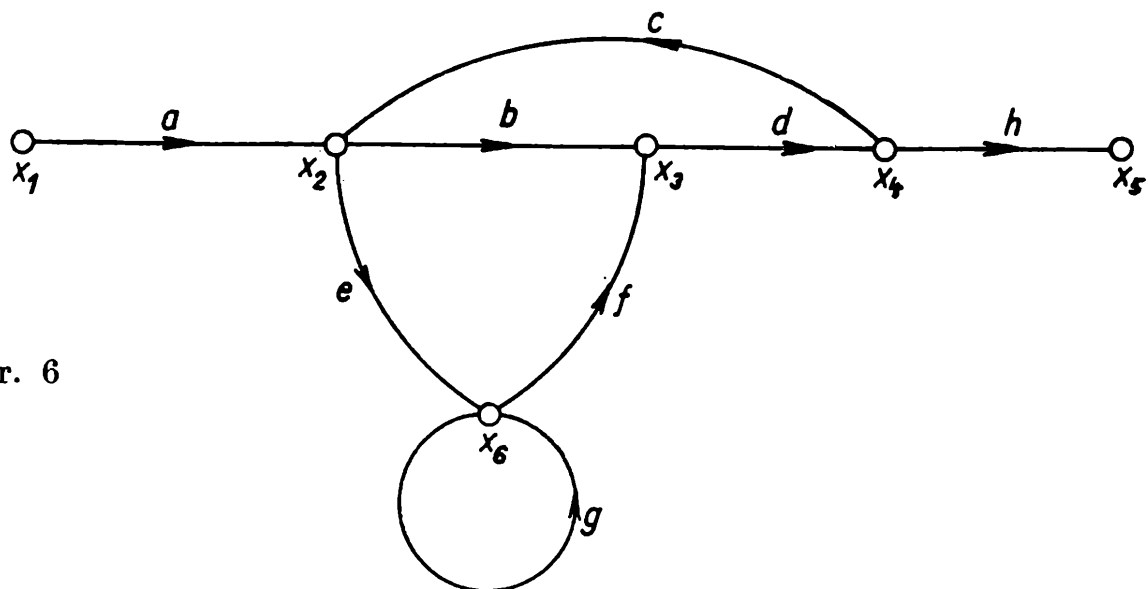
$$x_2 = b_{21}y_1 - b_{22}x_1 - b_{23}x_3$$

$$x_3 = b_{31}y_1 - b_{32}x_1 - b_{33}x_2.$$

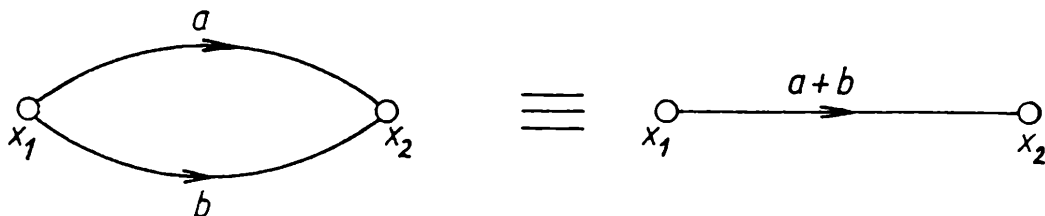
Pro koeficienty b_{ij} platí, jak se lze snadno přesvědčit,

$$b_{21} = q/a_{22}, \quad b_{31} = r/a_{33} \quad \text{atd.}$$

Graf příslušející poslední soustavě nakreslíme již známým způsobem, je znázorněn na obr. 4. Pro větší přehlednost jsou hrany (větve) odpo-

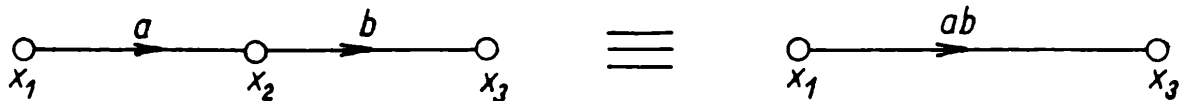


Obr. 6



Obr. 7

Obr. 8 ▼



vídající první rovnici nakresleny plnou čarou, větve odpovídající druhé rovnici čárkovanou čarou, větve odpovídající třetí rovnici čerchovanou čarou. Takové rozlišování „původu“ hran však není potřebné.

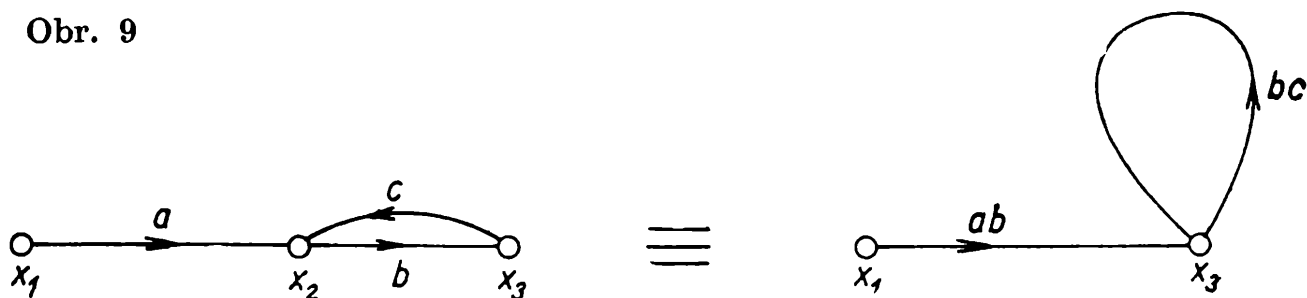
Všimněme si ještě rovnice typu $x_2 = ax_1 + bx_2 + cx_3$, jejíž graf je nakreslen na obr. 5. V grafu se vyskytuje tzv. uzavřená větev (smýčka z teorie grafů, v teorii elektrických obvodů má však slovo smýčka jiný význam), která má připsánu hodnotu b . Uzavřenou větev obsahuje i graf na obr. 6.

Přiřadíme-li elektrickému obvodu soustavu lineárních rovnic a té graf, potřebujeme ještě znát úpravy grafu, které odpovídají úpravám soustavy rovnic při vyjadřování jedné neznámé pomocí ostatních.

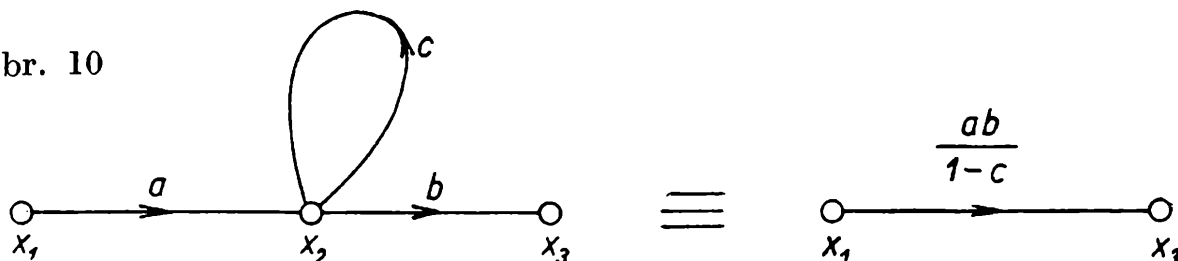
Nejprve uveďme jednoduché příklady redukce grafů. Tyto příklady jsou velmi názorné, a proto připojujeme jen velmi stručný komentář.

1. *Náhrada dvou paralelních větví jedinou větví* (obr. 7). Graf znázorňuje vztah $x_2 = ax_1 + bx_1$, který lze upravit vytknutím na $x_2 = (a+b)x_1$ a provést tak náhradu dvojice větví jedinou větví s přenosem $a+b$. Poznámka: Kdyby orientace některé z větví byla opačná, pak uvedené pravidlo neplatí!

Obr. 9



Obr. 10



2. *Náhrada dvou větví v sérii jedinou větví* (obr. 8). Platí $x_2 = ax_1$, $x_3 = bx_2$. Po úpravě $x_3 = abx_1$.

3. *Odstranění smyčky* (obr. 9). Platí $x_2 = ax_1 + cx_3$, $x_3 = bx_2$, po úpravě je $x_3 = abx_1 + bcx_3$.

4. *Eliminace uzavřené větve* (obr. 10). Předpokládáme $|c| < 1$. Platí $x_2 = ax_1 + cx_2$, $x_3 = bx_2$. Z toho $x_2 = ax_1/(1 - c)$ a $x_3 = abx_1/(1 - c)$.

V dalším článku se budeme zabývat řešením elektrického obvodu přímo pomocí grafů, bez sestavování lineárních rovnic. Promyslete si proto dobře čtyři způsoby redukce grafu zachycené na obr. 7–10.

Cvičení

1. Dívejte se jen na obr. 3 a 5 a napište lineární rovnice, které znázorňují.
2. Obdobně napište sami (bez nahlížení do textu) rovnice znázorněné grafem na obr. 4 a na obr. 6.
3. V grafu na obr. 6 proveďte redukci podgrafu tvořeného cestou $x_2 \rightarrow x_6 \rightarrow x_3$! Pak aplikujte první způsob redukce na hrany vycházející z uzlu x_2 , dále odstraňte uzel x_3 .

Bouřky jako důležitý faktor v atmosférické elektřině

RNDr. JAN BEDNÁŘ, Praha

Základním faktem, ze kterého musíme vycházet, chceme-li se zabývat problematikou atmosférické elektřiny, je existence elektrického pole v ovzduší. Toto elektrické pole má přibližně vertikální směr a při jasné obloze nebo při výskytu jen slabší oblačnosti je zpravidla orientováno

tak, že zemský povrch se jeví záporně nabitý a atmosféra nese kladný náboj. Vodivost vzduchu v blízkosti zemského povrchu je sice malá, ale nikoli nulová. Je způsobena tím, že určitá část molekul vzduchu je ionizována radioaktivním zářením zemského povrchu a kosmickým zářením pronikajícím do atmosféry z vnějšího prostoru. Rozhodující úloha se přitom připisuje kosmickému záření, což je potvrzováno vzrůstem vodivosti vzduchu s výškou. Ve výškách nad 50 km dosahuje už ionizace takového stupně, že vzduch se zde stává takřka dokonalým vodičem elektrického proudu.

Jelikož v atmosféře existuje elektrické pole a vzduch má jistou elektrickou vodivost, vzniká i vodivý proud, který by po určité době měl způsobit zánik elektrického pole a zneutralizovat záporný náboj zemského povrchu. Pozorováním však bylo spolehlivě zjištěno, že velikost záporného náboje zemského povrchu se s časem v dlouhodobém průměru prakticky nemění. Musí tedy existovat v ovzduší nějaký mechanismus, který záporný náboj zemského povrchu regeneruje. Tímto mechanismem je, jak se zdá, bouřková činnost. Pod základnami bouřkových oblaků totiž existují silná elektrická pole, která jsou orientována opačně ve srovnání s popsaným běžným elektrickým polem v atmosféře. Je to způsobeno tím, že ve spodní části bouřkových oblaků bývá koncentrován veliký záporný náboj, vůči němuž jindy záporně nabitý zemský povrch je kladným.

Celkové — přirozeně velice zjednodušené — schéma elektrických procesů v atmosféře tedy vypadá takto: V oblastech, kde právě probíhá bouřková činnost, je záporný náboj zemského povrchu působením vodivých proudů neutralizován. Naproti tomu v oblastech s probíhající bouřkovou činností je záporný náboj k zemskému povrchu přiváděn a vlivem jeho vysoké vodivosti se téměř okamžitě rozestře po celé jeho ploše. Přívod záporného náboje k zemskému povrchu pod základnami bouřkových oblaků je velmi intenzivní, neboť vedle vodivého proudu se na něm v rozhodující míře podílejí bleskové výboje a zejména tiché neboli doutnavé výboje na vrcholcích stromů, keřů, stožárů, věží a podobně.

Z toho, co bylo uvedeno, vyplývá, že důležitým faktorem je existence záporného centra elektrického náboje v dolní části bouřkového oblaku. Kromě něho se však v bouřkovém oblaku, a to v jeho horní části, vyskytuje centrum náboje kladného. Bouřkový oblak má tedy po elektrické stránce v podstatě bipolární strukturu. O vzniku separovaných center elektrického náboje existuje řada hypotéz a teorií. Nejvýznamnější z nich jsou ty, které zahrnují do úvahy existenci pevné fáze vody, neboť je bezpečně prokázáno, že vznik bouřkových jevů je, alespoň v našich zeměpisných šířkách, vždy vázán na přítomnost ledových krystalků v oblaku. Laika dále často překvapí fakt, že v oblacích se i při teplotách nižších než 0 °C část vody vyskytuje v kapalném skupenství ve formě

přechlazených vodních kapiček, které při srážkách s ledovými krystalky na nich rychle namrzají a působí tak jejich prudký růst.

Nyní si blíže povšimněme jedné ze zmíněných teorií, která vychází z termoelektrických vlastností ledu.

V kousku ledu se vyskytují anionty OH^- a kationty vodíku H^+ , které jsou ve srovnání s OH^- natolik pohyblivější, že termický pohyb aniontů OH^- lze zanedbat. Představme si ledovou tyčinku, jejíž dva konce udržujeme na nestejně teplotě. Kationty H^+ budou vlivem termické difuze přecházet na chladnější konec, který se tak bude kladně nabíjet, zatímco teplejší ponese přebytek záporného náboje. Je přirozené předpokládat, že v bouřkovém oblaku velké ledové krystaly zachycují více přechlazených kapiček a více se proto na svém povrchu zahřívají uvolňováním latentního tepla tuhnutí než malé krystalky. Při vzájemných pružných srážkách se pak na okamžik dostává do kontaktu relativně teplý povrch velkých krystalů s chladnějším povrchem krystalků malých, což způsobí, že velké krystaly se nabíjejí záporně a malé kladně. Velké krystaly vlivem zemské tíže padají dolů a jeví se ve spodní části bouřkového oblaku jako centrum záporného náboje, zatímco kladně nabitě malé krystalky jsou výstupnými pohyby vzduchu, které vždy existují v bouřkovém oblaku (s výjimkou poslední rozpadové fáze tohoto oblaku), vynášeny vzhůru a vytvářejí horní kladné centrum náboje.

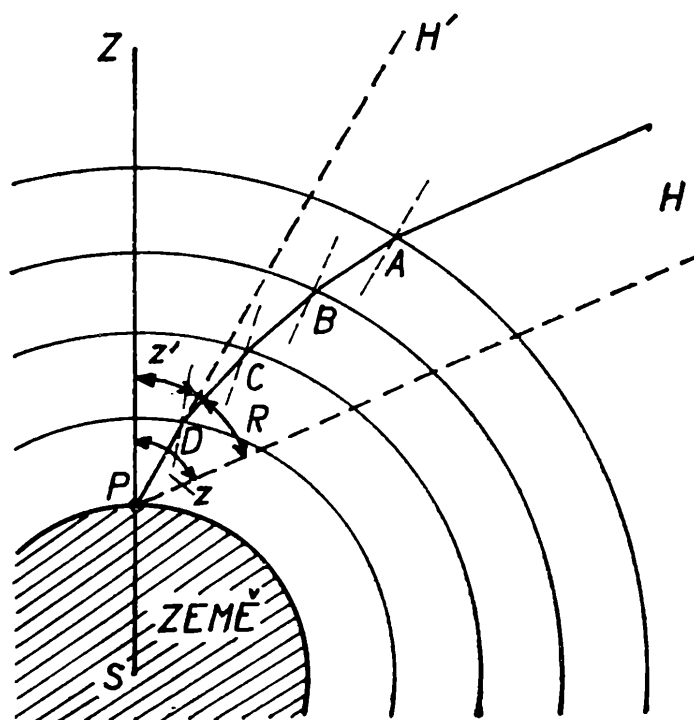
Jiná z teorií předpokládá, že proces zachycování přechlazených vodních kapiček na povrchu ledových krystalků může být natolik intenzivní, že zachycená voda nestačí ihned zmrznout a ledový krystalek se pak obalí blanou přechlazené vody. Laboratorní pokusy ukázaly, že pokud se na ledové podložce při teplotách nižších 0°C vytvoří vrstvička přechlazené vody obsahující chemické příměsi typické pro srážkovou vodu (různé soli), dochází k zápornému nabíjení ledu a kladnému nabíjení přechlazené vody. V bouřkovém oblaku, kde vždy působí silná turbulence a dochází ke vzájemným srážkám krystalků, může dojít k tomu, že z obalové blány tvořené přechlazenou vodou odstříkují drobné kladně nabitě kapičky, které se vlivem výstupných proudů vzduchu hromadí v horní části oblaku, zatímco velké záporně nabitě ledové krystaly propadávají dolů, neboť jejich pádová rychlost převyšuje rychlost výstupných vzduchových proudů.

Kromě těchto dvou existuje i řada dalších teorií. Žádná z teorií však nestačí sama o sobě po kvantitativní stránce vysvětlit bouřkové jevy. Soudí se proto, že vznik separovaných center elektrického náboje v bouřkových oblacích je výsledkem několika vzájemně se doplňujících procesů, které probíhají podle jednotlivých teorií. Nejnapadnější bouřkové jevy, jakými jsou bezesporu blesky, pak vznikají jako jiskrové výboje mezi horním kladným a dolním záporným centrem elektrického náboje (blesk vnitřní) nebo mezi dolním záporným centrem a zemským povrchem (blesk do země).

Astronomická refrakce

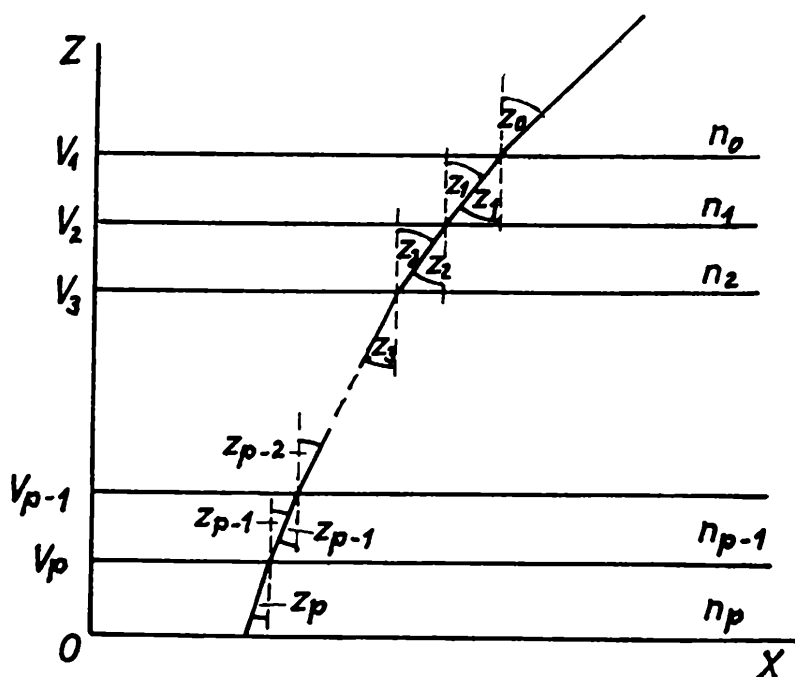
RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Země je obklopena atmosférou, sahající do výšky několika set kilometrů. Složení zemské atmosféry se s rostoucí výškou nad povrchem Země podstatně nemění, zato však rychle ubývá její hustoty. Zemská atmosféra má vliv na směr paprsků, které k nám přicházejí z mimozemských zdrojů světla. Světlo se v atmosféře láme a vzniká úchylka světelného paprsku, které říkáme *astronomická refrakce*. Teorií refrakce se zabývala řada slavných fyziků a astronomů, z nichž jmenujme alespoň I. Newtona, D. Cassiniho a F. Bessella.



Obr. 1. Vznik astronomické refrakce.

Vznik astronomické refrakce je znázorněn na obr. 1. Hustota ovzduš se sice mění spojitě, pro jednoduchost si však představme, že se atmosféra skládá z několika soustředných stejnorodých vrstev, jejichž hustota se zmenšuje s výškou, a sledujme paprsek, přicházející od hvězdy H k pozorovateli P . Kdyby neexistovala atmosféra, postupoval by paprsek



Obr. 2. K odvození vzorce pro astronomickou refrakci.

po přímé dráze (na obr. 1 je nakreslen čárkovaně). Na rozhraní mezi prázdným prostorem a první vrstvou atmosféry však nastane lom světla — paprsek se láme ke kolmici dopadu v bodě A a na rozhraní druhé vrstvy dopadne v bodě B . Nastane opět lom ke kolmici, neboť nižší vrstva má větší hustotu a tedy také větší index lomu. Na další vrstvu dopadne paprsek v bodě C , láme se opět ke kolmici a na nejnižší a nejhustší vrstvu dopadne v bodě D . Po dalším lomu ke kolmici dospěje paprsek k pozorovateli P . Pozorovatel vidí hvězdu ve směru, v němž k němu přichází paprsek, tedy ve směru PD . Hvězda, která je ve skutečnosti ve směru PH , promítá se do směru PH' a pozorovatel zjistí místo skutečné zenitové vzdálenosti z hvězdy zdánlivou zenitovou vzdálenost z' . Zdánlivá zenitová vzdálenost je vždy menší než skutečná a rozdíl $z - z' = R$ se nazývá *refrakční úhel* nebo pouze *refrakce*. Je samozřejmé, že ve skutečnosti se hustota ovzduší mění s výškou plynule, paprsek tedy nepostupuje po lomené čáře, ale po plynulé křivce a pozorovatel pak vidí hvězdu ve směru tečny k této křivce v pozorovacím místě. Refrakce závisí na zenitové vzdálenosti pozorovaného objektu. Pro objekty v zenitu je refrakce nulová (paprsek dopadá na jednotlivá rozhraní kolmo, proto se neodchyluje od původního směru), směrem k obzoru roste refrakce nejprve zvolna, pak stále rychleji a největší hodnoty nabývá na obzoru, kde dosahuje hodnoty kolem $35'$, tj. více, než je úhlový průměr Slunce nebo Měsíce.

Pro objekty, jejichž zenitová vzdálenost je poměrně malá, můžeme odvodit vztah pro refrakci v závislosti na zenitové vzdálenosti. Na obr. 2 je OX povrch Země, OZ svislá přímka. Atmosféru rozdělíme na p stejnorodých vrstev, rozhraní jednotlivých vrstev atmosféry jsou

označena $V_1, V_2, \dots, V_p$. Protože uvažujeme objekty, jejichž zenitová vzdálenost je malá, můžeme zakřivení zemského povrchu i jednotlivých vrstev zanedbat. Paprsek z hvězdy H dopadá na první vrstvu pod úhlem z_0 , láme se pod úhlem z_1 , pod tímto úhlem dopadá na rozhraní V_1 , kde se láme pod úhlem z_2 ; po dalších lomech dopadá na povrch Země pod úhlem z_p . Označíme-li index lomu vakua n_0 , indexy lomu jednotlivých vrstev postupně $n_1, n_2, \dots, n_p$, pak podle Snelliova zákona lomu můžeme pro lomy na jednotlivých rozhraních napsat rovnice

$$\frac{\sin z_1}{\sin z_0} = \frac{n_0}{n_1},$$

$$\frac{\sin z_2}{\sin z_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{\sin z_p}{\sin z_{p-1}} = \frac{n_{p-1}}{n_p}$$

Vynásobíme-li tyto rovnice navzájem, dostaneme

$$\frac{\sin z_p}{\sin z_0} = \frac{n_0}{n_p}$$

Úhel z_0 je rovný skutečné zenitové vzdálenosti z , úhel z_p je rovný zdánlivé zenitové vzdálenosti z' . Uvážíme-li, že index lomu vakua $n_0 = 1$, dostáváme

$$\sin z = n_p \sin z'$$

kde n_p je index lomu vzduchu pro pozorovací místo. Protože refrakce $R = z - z'$, lze předešlou rovnici psát ve tvaru

$$\sin(z' + R) = n_p \sin z'$$

neboli

$$\sin z' \cos R + \sin R \cos z' = n_p \sin z'$$

Protože R je velmi malý úhel, je $\cos R \doteq 1$, $\sin R \doteq R$ a platí

$$\sin z' + R \cos z' = n_p \sin z'$$

Odtud refrakce

$$R = (n_p - 1) \operatorname{tg} z'$$

Refrakce je tedy při malých zenitových vzdálenostech přímo úměrná tangentě zdánlivé zenitové vzdálenosti. Index lomu vzduchu je pro teplotu 0°C a tlak 760 torr rovný $n_p = 1,000\,292$. Pro refrakci vyjádřenou v úhlových vteřinách pak dostáváme

$$R = 60,2'' \operatorname{tg} z'$$

Index lomu vzduchu závisí na barometrickém tlaku a na teplotě vzduchu. Je-li b barometrický tlak vzduchu vyjádřený v torrech a t teplota ve stupních Celsia, je refrakce

$$R = 60,2'' \frac{b}{760} \frac{273}{273 + t} \operatorname{tg} z'$$

Pomocí tohoto vztahu můžeme refrakci vypočítat pro zenitové vzdálenosti do 70° . Pro větší zenitové vzdálenosti je výpočet refrakce složitější a její hodnoty uvádíme v tab. 1.

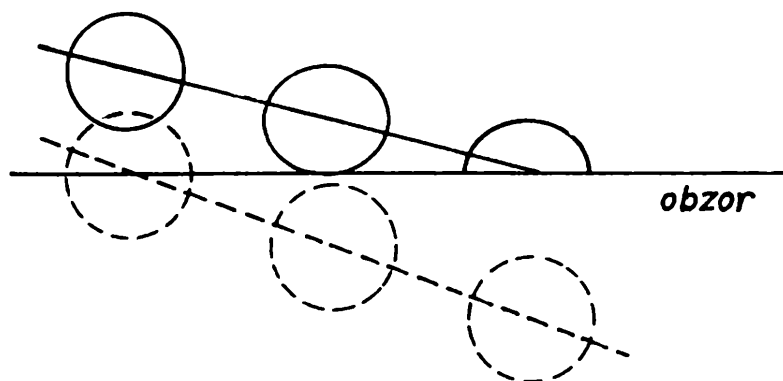
Tabulka 1.

Závislost refrakce R na zdánlivé zenitové vzdálenosti z' pro $t = 0^\circ\text{C}$,
 $b = 760$ Torr

z'	R	z'	R
70°	$2' 44''$	$89^\circ 00'$	$25' 37''$
75°	$3' 41''$	$89^\circ 10'$	$27' 03''$
80°	$5' 30''$	$89^\circ 20'$	$28' 38''$
85°	$10' 14''$	$89^\circ 30'$	$30' 31''$
86°	$12' 12''$	$89^\circ 40'$	$32' 14''$
87°	$14' 59''$	$89^\circ 50'$	$34' 19''$
88°	$19' 07''$	$90^\circ 00'$	$36' 36''$

S refrakcí souvisí celá řada zajímavých jevů. Především jsou jí ovlivněny okamžiky východu a západu kosmických těles. U obzoru dosahuje refrakce hodnoty $35'$, což znamená, že pozorujeme-li právě západ hvězdy, tj. je-li hvězda zdánlivě na obzoru neboli ve zdánlivé zenitové vzdálenosti 90° , je skutečná zenitová vzdálenost $90^\circ 35'$, z čehož plyne, že hvězda je ve skutečnosti již $35'$ pod obzorem. Protože refrakce u obzoru je větší než úhlový průměr Slunce, pak v okamžiku, kdy se spodní okraj Slunce zdánlivě právě dotkne obzoru, je ve skutečnosti již celé Slunce pod obzorem. Vlivem refrakce tedy Slunce vychází dříve a zapadá později, čímž se o několik minut prodlužuje den.

Vlivem refrakce vzniká v blízkosti obzoru zdánlivé zploštění Slunce nebo Měsíce. Směrem k obzoru přibývá refrakce velmi rychle, takže spodní okraj Slunce je refrakcí více „zdvížen“ než okraj horní. Svislý průměr Slunce se tedy zdánlivě zmenší, zatímco vodorovný průměr



Obr. 3. Skutečné a zdánlivé polohy Slunce při západu.

zůstává nezměněn. Na obr. 3 je nakreslen průběh západu Slunce. Čárkovane jsou nakresleny skutečné polohy Slunce (jak bychom je viděli, kdyby Země neměla atmosféru), plně polohy zdánlivé, tj. jak se jeví pozorovateli.

Velikost refrakce závisí také na barvě světla. Nejvíce se láme světlo fialové, nejméně červené. Pozorujeme-li dalekohledem hvězdu v blízkosti obzoru, spatříme ji rozloženu v malé spektrum: nahoře je barva fialová, dole barva červená. Podobně sluneční kotouč vidíme nahoře vroubený fialově nebo modře, dole červeně.

Je ještě třeba poznamenat, že vlivem náhlých změn teploty nebo barometrického tlaku se stává, zvláště u obzoru, kde světlo prochází tlustou vrstvou atmosféry, že vznikají odchylky od pravidelného průběhu refrakce. Tyto odchylky se projevují např. určitými deformacemi slunečního kotouče při východu nebo západu Slunce nebo změnami v horizontální souřadnici — v azimutu hvězdy. Tyto refrakční anomálie mají velký vliv na přesnost měření.

různé

Zo života a diela A. M. Ampèra

DUŠAN JEDINÁK, G Topoľčany

V rozľahlej oblasti elektrodynamiky a elektromagnetizmu nesporne dôležité miesto patrí výsledkom prác A. M. Ampèra. Veľké množstvo fyzikálnych pojmov a veličín nesúcich jeho meno sú toho nestarnúcim dôkazom.



André Marie Ampère pri pokusoch s elektrinou poznal, že napätie je príčinou a prúd účinkom. Tieto pojmy veľmi dobre rozlišoval. Ako prvý objasnil pojem elektrického prúdu a definoval pojem smeru prúdu ako smeru pohybu kladného náboja. Oerstedov objav pôsobenia elektrického prúdu na magnetku určil pre Ampèra smer ďalšieho bádania. Ampère stanovil „pravidlo plavca“ na určenie odchýlky severného pólu magnetky, nad ktorou je vodič s prúdom: „Ak si myslíme, že nad magnetkou je plavec, ktorý pláva v smere elektrického prúdu a díva sa na magnetku, potom sa severný pól magnetky vychýľuje k jeho ľavej ruke.“ Dnes známe Ampèrovo pravidlo pravej ruky určuje smer indukčných čiar, ktoré charakterizujú magnetické pole v okolí vodiča s prúdom.

V roku 1820 A. M. Ampère objavil, že dva rovnobežné vodiče so súhlasne orientovanými prúdmi sa priťahujú a s opačne orientovanými smermi prúdov sa odpudzujú. Nové silové pôsobenie pohybujúcich sa nábojov sa stalo základom nového odvetvia — elektrodynamiky. Ampère pokračoval v pokusoch so solenoidom, ukázal, že pomocou neho možno magnetovať, dokázal, že cievka s prúdom je vo svojich účinkoch ekvivalentná permanentnému magnetu. Poznmal, že v magnetickom poli Zeme sa voľne zavesený solenoid, ktorým preteká elektrický

prúd, orientuje podobne ako magnetka. Po potvrdení predstavy, že magnetické pole kruhovej slučky s prúdom je ekvivalentné s magnetickým polom tenkého rovinného kruhového magnetu, prišiel Ampère na myšlienku existencie molekulárnych elektrických prúdov v telesách a vyslovil hypotézu na vysvetlenie magnetických vlastností telies pomocou usmernenia orientácie týchto elementárnych elektrických prúdov. Ampère ukázal možnosť prevedenia magnetických javov na javy elektrické.

Výsledky svojich prác zhrnul A. M. Ampère v roku 1826 v práci *La théorie des phénomènes électro-dynamiques*. Tu kvantitatívne formuluje zákon vzájomného pôsobenia elektrických prúdov, ktorý dnes nazývame jeho menom a učíme sa v tvare

$$F = k \cdot \frac{I_1 I_2 \cdot l}{d} ;$$

сила F , ktorou na seba pôsobia dva veľmi dlhé vodiče s prúdom, je priamo úmerná súčinu veľkostí prúdov I_1 , I_2 a dĺžky vodičov l a nepriamo úmerná kolmej vzdialenosti d medzi vodičmi. Intenzitu magnetického poľa vzbudeného vodičom s prúdom udáva obecné Biot-Savartov zákon.

Význam prác A. M. Ampèra oceňuje J. C. Maxwell slovami: „Experimentálne výskumy, pomocou ktorých Ampère našiel zákon vzájomného mechanického pôsobenia medzi elektrickými prúdmi, patria medzi najväčšie úspechy vedy. Tieto bádania sú zakončené ideálnou presnosťou a zhrnuté vo vzorci, z ktorého môžu byť odvodené všetky elektrické javy a ktorý vždy zostane základom elektrodynamiky.“

André Marie Ampère sa narodil 22. januára 1775 v Polémieux pri Lyone. Už v mladosti prečítal francúzsku encyklopédiu, študoval botaniku, chémiu, fyziku, matematiku, psychológiu. Ovládal latinčinu, taliančinu aj gréčtinu. V roku 1799 sa oženil. Žil z príjmov za súkromné vyučovacie hodiny. Pôsobil ako učiteľ fyziky v Bourgu, v Lyone, bol repetítorom a neskôr profesorom matematiky na polytechnickej škole v Paríži. Od roku 1824 vyučoval ako profesor experimentálnej fyziky na Collège de France. Bol členom viacerých akadémií vied. Svoje vedecké práce začal „Úvahami o matematickej teórii hry“. Znalosti vyššej matematiky aplikoval na problémy mechaniky, optiky a teórie plynov. Za práce v teórii diferenciálnych rovníc bol v roku 1814 menovaný za člena Institutu de France, z ktorého potom vznikla parížska Akadémia vied.

A. M. Ampère bol po celý život naplnený túžbou po poznaní, zaujímal sa o najrozmanitejšie vedné odbory. V diele *Essai sur la Philosophie des sciences* chcel urobiť klasifikáciu celého ľudského poznania. Prvá časť práce vyšla v roku 1834 a druhá až po jeho smrti, v roku 1843. Filozofia A. M. Ampèra ako vedca i človeka bola vždy naplnená myšlienkami vývoja a pokroku. V pomeroch hmotného a finančného nedostatku

aj v časoch duševného nepokoja zostával hlbavým a citlivým k problémom ľudského poznávania. Výsledky jeho práce oceňovali a uznávali už za jeho života. No aj tak si želal, aby mal na hrobe nápis: Tandem felix — konečne šťastný. Zomrel na ceste do Marseille, 10. júla 1836.

Aj dnes je pre nás práca André Marie Ampèra živým prameňom poučenia a ukážkou zápalitej cesty za poznáním. Ampér je nielen názvom jednotky elektrického prúdu, ale aj symbolom života a diela významného francúzskeho fyzika a matematika.

Literatúra :

P. Baláž: Význační fyzici, SPN Bratislava 1966.

J. Bober: Malá encyklopédia bádateľov a vynálezcov, Obzor Bratislava 1973.

M. Laue: Dějiny fyziky, Orbis Praha 1963.

Karl Friedrich Gauss

JOSEF KOTYK, Pardubice

V roce 1855, právě před 120 lety, zemřel Karl Friedrich Gauss, slavný princeps mathematicorum, kníže matematiků. V dějinách dominuje jeho majestátní postava na předělu mezi matematikou 18. a 19. století. Gauss bývá pokládán zpravidla za největšího německého matematika vůbec.

KARL FRIEDRICH GAUSS¹⁾ se narodil dne 30. dubna 1777 v německém městě Brunšviku (Braunschweig). Již jako dítě vynikal mimořádným nadáním počtářským; tvrdívá se dokonce, že prý uměl dříve počítat než mluvit. Šťastnou náhodou poznal „zázračné“ dítě brunšvický vévoda a převzal od rodičů starost o jeho výchovu. Jako žák upozorňoval na sebe Gauss neobyčejnými vědomostmi matematickými. V letech 1795 až 1798 studoval v Göttingen. Roku 1796 sestrojil mladý génius pravidelný 17úhelník; proto také je jím ozdoben jeho pomník v rodném městě Brunšviku. V doktorské disertační práci podal v Helmstädtu již roku 1799, tj. teprve 22letý, první přesný důkaz věty o existenci kořenů algebraických rovnic: „Každá algebraická rovnice s reálnými koeficienty má aspoň jeden komplexní kořen“. Vtipným důkazem této fundamentální věty algebry²⁾ upoutal na sebe poprvé zájem matematického světa. Všeobecného uznání však dosáhl spisem „Disquisitiones arithmeticae“ z roku 1801. Roku 1807 byl povolán za universitního profesora a ředitele astronomické observatoře do Göttingen, kde působil až do své smrti.

¹⁾ V německé literatuře píše se často také Gauß.

²⁾ Gauss byl zaujat obsahem této věty natolik, že podal později další (celkem čtyři) důkazy její platnosti.



Svědčí o jeho osobní skromnosti, že nepřijal jiného místa, ač mu byly činěny mnohé výhodné nabídky do Berlína, Vídně i do zahraničí.

„Disquisitiones arithmeticae“ obsahují Gaussovo zkoumání kořenů rovnice $x^n = 1$ neboli dělení kruhu. Vedlo k pozoruhodnému závěru, že stranu pravidelného 17úhelníka, obecněji n -úhelníka pro prvočíslo n tvaru $2^{2^k} + 1$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) lze sestrojiti pouhým pravítkem a kružítkem. Kniha shrnuje mistrovsky také práce Gaussových předchůdců v teorii čísel, kterou však obohatila tou měrou, že počátky novodobé teorie čísel se někdy datují od jejího vydání. Jisto je však, že již v roce 1795 našel Gauss (nezávisle na Eulerovi) kvadratický zákon reciprocity. Jádrem jeho knihy tvoří teorie kvadratických kongruencí, forem a zbytků; vrcholí zákonem kvadratických zbytků, nazývaným „teorema aureum“, jehož první úplný důkaz Gauss podal.³⁾ Později (v letech 1825 a 1831) následovala Gaussova díla o bikvadratických zbytcích jako pokračování teorie kvadratických zbytků z „Disquisitiones arithmeticae“, vypracovaná však novými metodami teorie komplexních čísel.

Gauss propracoval nauku o číslech imaginárních a zvláště přispěl k tomu, že význam těchto čísel byl konečně — poměrně velmi pozdě —

³⁾ Podrobnější poučení přinášejí učebnice teorie číselné, v češtině přístupně psaný „Úvod do elementární teorie číselné“ prof. Dr. Karla Rychlíka (JČMF, edice KRUH sv. 7, Praha 1931), zejména kap. IV. „Kvadratické zbytky, kvadratický zákon reciprocity“ § 43 (Gaussovo lemma) aj.

vystižen. Rozšíření a všeobecné uznání čísel imaginárních kolem roku 1800 je přední zásluhou Gaussovou. Třetí důkaz fundamentální věty algebry z roku 1816 ukazuje, že již tehdy Gauss ovládal teorii čísel komplexních. Jeho pojednání z roku 1831 podává algebru (i aritmetiku) komplexních čísel, ve které např. číslo 5 není již prvočíslem, neboť se dá rozložit v součin komplexních činitelů $(2 + i) \cdot (2 - i)$ nebo také v součin $(1 + 2i) \cdot (1 - 2i)$. Aby rozptýlil záhadnost čísel imaginárních a komplexních, Gauss první prováděl také grafické znázornění těchto čísel; rovinu, v níž toto zobrazení provádíme, jmenujeme proto rovinou Gaussovou.

V roce 1800 objevil Gauss funkce eliptické. Roku 1801 označil diskriminant kvadratické formy binární a ternární názvem „determinant“. Užívaje názvu Gaussem zavedeného, rozšířil Cauchy toto pojmenování ve smyslu dnes běžném. Gauss znal také již pojem determinantu recipročního. Determinantů hojně užíval v teorii čísel; správně tušil, že nauka o determinantech se stane nepostradatelným nástrojem matematiků, za který je dnes skutečně pokládána.

Gaussovou formulí

$$\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{18} + 8 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{57} - 5 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}$$

lze získat řady pro číslo π , jež konvergují rychleji a jsou tedy pro numerický výpočet čísla π mnohem způsobilější než známé řady plynoucí např. z mocninného rozvoje funkce $\operatorname{arctg} x$ pro $x = 1$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ aj.

V integrálním počtu nabyla zvláštní důležitosti Gaussova relace, užitečná pro výpočet Eulerova integrálu druhého druhu $\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{\mu-1} dx$, definujícího pro $\mu > 0$ tzv. funkci gama $\Gamma(\mu)$; Gaussova relace zní

$$\begin{aligned} \Gamma(\mu) \cdot \Gamma\left(\mu + \frac{1}{m}\right) \cdot \Gamma\left(\mu + \frac{2}{m}\right) \dots \Gamma\left(\mu + \frac{m-1}{m}\right) = \\ = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{m} \cdot m^{-m\mu} \cdot \Gamma(m\mu) \end{aligned}$$

a platí pro kladná celá m . Pomocí Gaussových součtů

$$G\left(\frac{p}{q}\right) = 1 + e^{\frac{2\pi ip \cdot 1^2}{q}} + e^{\frac{2\pi ip \cdot 2^2}{q}} + \dots + e^{\frac{2\pi ip \cdot (q-1)^2}{q}}$$

lze snadno počítat hodnoty Fresnelových integrálů

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

S Riemannem zkoumal Gauss hodnoty funkce zv. logaritmus integrál (nebo také integrállogaritmus)

$$\operatorname{li} x = \int_0^x \frac{dx}{\log x}; \operatorname{li} x = C + \log |\log x| + \frac{\log x}{1 \cdot 1!} + \frac{\log^2 x}{2 \cdot 2!} + \\ + \frac{\log^3 x}{3 \cdot 3!} + \quad \text{pro } x > 0, x \neq 1;$$

číslo

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \quad + \frac{1}{n} - \log n \right) = 0,5772156649.$$

po číslech e a π nejdůležitější konstanta analýzy, bylo zavedeno do matematiky poprvé Eulerem (Eulerova konstanta). Gauss poukázal také na význam funkce $\operatorname{li} x$ v číselné teorii při stanovení počtu prvočísel. Roku 1818 zavedl do matematiky též algoritmus aritmeticko-geometrického středu (Werke III); odvodil transformaci po něm zvanou a metody pro numerický výpočet eliptických integrálů prvního a druhého druhu na základě aritmeticko-geometrického středu a dosáhl značného zjednodušení výsledků. Známý jsou též přednosti Gaussovy metody pro mechanickou kvadraturu (numerické počítání určitých integrálů), Gaussovy práce v oboru integrálů plošných a tělesných (věta Gaussova, mající veliký význam také v teoretické fyzice), rozvojů hypergeometrických a tzv. funkcí „styčných“, jím do matematiky zavedených („functiones contiguae“), polynomech sférických neboli kulových („Kugelfunktionen“, Werke VI), Gaussova neboli hypergeometrická rovnice diferenciální a j.

V trigonometrii se označují Gaussovým jménem úměry, zvané někdy také Cagnoliovy nebo Delambreovy či Mollweidovy; odvodili je na sobě neodvisle Delambre roku 1807, Mollweide roku 1808, Gauss roku 1809, Cagnoli roku 1816, znal je však také již Newton roku 1707 ve svém díle „Arithmetica universalis“ — jejich historie je tedy příliš složitá, neboť byly několikrát znovu objeveny. Francouzové nazývají tyto vzorce (zv. také „analogie“) Delambreovými, Němci zpravidla Gaussovými. Od Gausse pochází také metoda, kterou můžeme z řady stejně přesných, nahodilým chybám však podléhajících výsledků pozorování stanovit pravděnejpodobnější hodnotu vyšetřované veličiny. V letech 1821 až 1823 podal Gauss výklad metody nejmenších čtverců. Gaussův zákon chyb tvoří základ všeho matematicko-statistického bádání nové doby, které nabylo zejména také ve fyzice velikého významu.

Od roku 1816 obracel se Gauss k problémům geodézie. Studoval nejkratší spojnice na elipsoidu a připravoval se teoreticky na úkoly, před které byl postaven v letech 1821 až 1841 při vyměřování Hannoverska. Veden úvahami o základech geometrie měřil úhly trojúhelníka, jehož vrcholy byly Brocken, Inselsberg a Hoher-Hagen; odchylka součtu úhlů od 180° byla však v mezích pozorovacích chyb. Z činnosti v geodézii

a prací, kterých se zúčastnil při triangulaci přímo v terénu, vzešly dva Gaussovy spisy, jeden z roku 1822 o konformním zobrazení ploch, druhý „Disquisitiones circa superficies curvas“ z roku 1827 o novém pojmu míry křivosti (totální křivosti) plochy v jejím bodě. Gauss našel tehdy jistý výraz (nazývaný dnes Gaussovou křivostí), jenž se nemění, jestliže se plocha deformuje tak, že na ní zůstávají zachovány délky. Gauss nazval svůj epochální objev „theorema egregium“, znamenitý teorém, byl si tedy jeho významu plně vědom. Vybudoval zároveň systematický základ ke studiu ploch, diferenciální geometrii.

Vedle geometrie euklidovské připouštěl Gauss také možnost jiné geometrie, která by neobsahovala postulátů Euklidových, výsledky svých prací však neuveřejnil z obavy, aby mu prý pak „sršni nelítali kolem uší“; jsou obsaženy toliko v dopisech, jež byly teprve později uveřejněny. Roku 1799 psal např. W. Bolyaiovi: „Man könne sich eine Geometrie konstruieren, für die das Parallelenaxiom nicht gültig sei. Wenn man jedoch annehme, daß es für den Dreiecksinhalt eine obere Grenze nicht gebe, so könne man die euklidische Geometrie beweisen. Anderenfalls käme man zu einer anderen Geometrie“.*) Přesvědčen o tom, že definice rovnoběžek je úskalím geometrie, definoval rovnoběžky způsobem, který platí pro geometrii euklidovskou i tzv. hyperbolickou (IV, 5); na této definici vybudoval pak základy hyperbolické geometrie. Věděl již také, že v hyperbolické geometrii neexistují útvary podobné. Je tedy Gauss opravdu jedním z prvních zakladatelů neeuklidovské geometrie. V dopise z roku 1832 sděluje, že „Appendix scientiam . .“ Jánoše Bolyaie (1802—1860), jemuž se objev nové (tzv. absolutní) geometrie rovněž přiznává, obsahuje myšlenky, k nimž on sám, Gauss, dospěl již před 30 až 35 lety. Když W. Bolyai (1775—1856), otec Jánošův a spolužák Gaussův, dokazoval, že množinou bodů od přímky stejně vzdálených je přímka, prozíravý Gauss popřel správnost jeho důkazu . .⁴⁾

V pozdních letech svého života vracel se Gauss častěji než dříve od matematiky „čisté“ k matematice „užité“. Avšak již v roce 1830 vyslovil se v dopise Legendreovi pro syntézu obou stanovisek. Mistrovské zvládnutí matematiky ryzí i aplikované dovolovalo mu užívat matematiky bohatě v geodézii, ve fyzice a v astronomii. Když dne 1. ledna 1801, v prvním dni 19. století, objevil Piazzzi v Palermu první planetoidu Ceres, vypočítal Gauss ihned její dráhu, a to z malého počtu údajů získaných

*) Dala by se zkonstruovat geometrie, pro kterou by neplatil axiom o rovnoběžkách. Kdyby se však předpokládalo, že pro obsah trojúhelníka neexistuje ohraničení shora, dala by se euklidovská geometrie dokázat. Jinak by se dospělo k jiné geometrii.

⁴⁾ Obsah stati o počátcích neeuklidovské geometrie jsem čerpal m. j. z universitních přednášek svého učitele prof. Dr. Václava Hlavatého. Odkazuji také k jeho výtečné učebnici „Úvod do neeuklidovské geometrie“ (JČMF, edice KRUH sv. 3, Praha 1926).

krátkým pozorováním nového tělesa; umožnil tak, že planetka byla po konjunkci se Sluncem znovu nalezena. Když roku 1802 byla objevena planetka Pallas, začal se Gauss zabývat studiem sekulárních perturbací. Když se v roce 1811 objevila velká kometa, vypočítal rovněž její parabolickou dráhu. Těmito výpočty a řadou spisů, pojednávajících o teorii pohybů nebeských těles (1809), o přitahování elipsoidů (1813), o sekulárních perturbacích (1818) aj., proslavil se po celém světě.

V letech 1832 až 1834 pracoval Gauss velmi úspěšně v nauce o zemském magnetismu. V rozpravě uveřejněné roku 1832 popsal metodu určení intenzity zemského magnetismu. V ní použil poprvé soustavu měr, v níž zvolil za jednotku délky 1 mm, za jednotku hmotnosti 1 mg, za jednotku doby 1 s; zavedení absolutní soustavy centimetr-gram-sekundové (CGS) bývá přesto zpravidla uváděno ve spojitosti se záslužnou činností Gaussovou.⁵⁾ K jeho počtě byla také jednotka magnetické indukce (hustoty magnetického toku) nazvána gauss (G); převodní vztah na hlavní jednotku teslu (T) zní: $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$.

Sousoší v Göttingen představuje Gausse a jeho kolegu Wilhelma Webera při vynalezení elektromagnetického „telegrafu“. Oba fyzikové spojili v roce 1833 hvězdárnu v Göttingen s tamějším Fyzikálním ústavem a na vzdálenost 2,3 km se dorozuměli depešemi, které četli z výchylek magnetky. Společně s Weberem zabýval se Gauss také studiem elektromagnetismu a teorií potenciálu.

V lednu roku 1851 provedl Léon J. B. Foucault v pařížském Pantheonu svůj památný důkaz, že Země se točí. Jeho kyvadlem byla koule vážící 30 kp, zavěšená na ocelovém drátě dlouhém 67 m; doba kmitová činila 16 s. Roku 1853 Gauss upozornil na možnost dokázat rotační pohyb Země fyzickým kyvadlem poměrně malých rozměrů, je-li zavěšeno v Cardanově závěsu. Teorii Gaussova kyvadla propracoval a pečlivými pokusy v roce 1879 potvrdil H. Kamerlingh Onnes.

Ze subtilních problémů teoretické mechaniky, jimiž se K. F. Gauss také hojně zabýval, připomeni stručně několik nejpřednějších. Přirozený logaritmus tzv. poměru útlumu e^{aT} balistického periodického tlumeného pohybu (kde e je základ přirozených logaritmů, a konstanta útlumu, T perioda tlumených kmitů) nazýváme podle Gausse logaritmickým dekrementem pohybu. Mimořádné zásluhy o mechaniku si Gauss zjednal tím, že ji obohatil nejobecnějším principem po něm nazývaným. Gaussův variační princip diferenciální (1829) je prost různých vad, jimiž byl zatížen starší princip d'Alembertův; princip, který později (1894) postavil v čelo celé mechaniky Hertz, vyplývá pak jako speciální případ z obecného principu Gaussova.

Když dne 23. února 1855 Gauss zemřel, dal Jiří V., král hannoverský, razit na jeho počest pamětní medaili s nápisem: „Georgius V. rex

⁵⁾ Viz např. Malý encyklopedický slovník A—Ž (Academia, Praha 1972), str. 343 a j.

Hannoverae mathematicorum principi“. Výsledky jeho bohaté vědecké činnosti byly po jeho smrti vydány v sedmi svazcích. Matematika byla Gaussovi královnou věd, jež spolu s krásnou literaturou ducha lidského nejvíce vzdělává. Jak nazíral na tvůrčí činnost vědeckého pracovníka, vyplývá nejlépe z dopisu, v němž Gauss napsal Bolyaiovi⁶⁾: „Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den größten Genuß gewährt“.**) Nechtť jakkoli subjektivní je toto mínění, nepostrádá zajímavosti, je-li vysloveno géníem druhu Gaussova.



K dvoustému výročí školské reformy J. I. Felbigera a založení Státního pedagogického nakladatelství

PhDr. ZDENĚK ŠÍPEK, CSc., UK Praha

Na přelomu let 1974 a 1975 si připomínáme dvě významná kulturní výročí, která spolu velmi úzce souvisí, a to časově i věcně. Nejdříve si všimněme prvního, již uplynulého výročí.

Hospodářská, politická a vojenská situace habsburské monarchie v polovině 18. století donutila „osvícené“ panovníky Marii Terezii a Josefa II. k celé řadě reforem, kterými se feudální řád přizpůsoboval novým kapitalistickým poměrům u nás. Do série těchto celostátních reforem patří i školská reforma z roku 1774, prováděná zaháňským opatem Johannem Ignatem Felbigerem (1724 — 1788), a to podle vzorku, který zkoušel deset let ve Slezsku.

Podle Felbigerovy reformy (platící skoro sto let) byla zřízena v hlavních městech jednotlivých zemí monarchie normální škola, v krajských městech hlavní škola a v sídlech farnosti triviální škola (z lat. tri-; zna-

⁶⁾ Lietzmann: „Methodik des mathematischen Unterrichtes“, svazek II., str. 140.

**) Nikoliv vědění, nýbrž učení, nikoliv mít (rozuměj: vědomosti, pozn. red.), nýbrž získávat, nikoliv být u cíle, nýbrž přijít na věc — to je to, co dává největší požitek.

menalo v tomto případě výuku třem základním předmětům — čtení, psaní a počty). Při výuce ve všech uvedených typech škol se učilo povinným předmětům (včetně náboženství) i základům zemědělství nebo průmyslové výroby podle toho, ve kterém kraji škola byla. Bylo v intencích doby, že se ve všech těchto školách učilo převážně německy.

Stát se postaral nejen o zřízení sítě škol, nýbrž i o zabezpečení výuky nejdůležitějšími školními pomůckami (učebnice, metodické příručky a pomocné knihy, tiskopisy, knihy pro rodiče a nejširší veřejnost). Zpočátku tuto funkci plnilo nakladatelství, knihtiskárna a prodejna spolu se skladem zřízené při vídeňské normální škole. Velmi brzy se však ukázalo, že tyto vídeňské instituce nestačí krýt poptávku po uvedených nejdůležitějších školních pomůckách v celostátním měřítku. Proto vláda v roce 1775 udělila právo opatrovat potřebné knihy a pomůcky nakladatelstvími zřizovanými při normálních školách v dalších zemích soustátí. Brněnské nakladatelství bylo založeno 20. února 1775, pražské nakladatelství 10. června 1775. Brněnské nakladatelství bylo zrušeno v roce 1850 výnosem ministerstva kultu a vyučování, avšak pražské nakladatelství trvá dodnes. Toto nakladatelství vydávalo od roku 1850 (vedle soukromých nakladatelství) nejdůležitější školní pomůcky německé a české, a to nejen pro Čechy, ale i pro Moravu a Slezsko.

Počátky pražského nakladatelství, jehož pokračovatelem je dnešní Státní pedagogické nakladatelství, nebyly nijak lehké a jednoduché. Zpočátku existovala tiskárna odděleně od nakladatelství, prodejny a skladu. Učebnice byly tištěny nejprve ve známé Schönfeldově knihtiskárně, od roku 1886 pak už ve vlastní tiskárně. Zpočátku mělo pražské nakladatelství vydávat jenom některé německé školní knihy vydávané ve Vídni. Mezi těmito prvními knihami byl i návod k počítání pro městské (tj. gymnázia, normální a hlavní školy) a venkovské (tj. triviální) školy. Postupně bylo však nakladatelské právo pražské instituce rozšiřováno. V roce 1800 už pražské nakladatelství vydávalo samostatně nejen německé, latinské a řecké knihy, ale i české publikace pro školu a mimo ni. Šlo o učebnice, metodické příručky a pomocné knihy, ale také o knihy pro širší veřejnost aj. Později vydávalo pražské nakladatelství ještě některé mapy a časopisy.

Prvním českým školním časopisem byl Přítel mládeže, vycházející v letech 1823 až 1846. Do tohoto časopisu přispívali např. Josef Jungmann, humanitní profesor v Praze, Vojtěch Sedláček, doktor a profesor matematiky v Plzni, aj. Časopis se dostával i do venkovských rodin, pěstoval český jazyk a podporoval národní obrození. V tom bylo jeho hlavní poslání.

Po vítězství kapitalismu v našich zemích po buržoazní revoluci z let 1848/49 došlo také k úpravě školství. V roce 1849 byla reformována gymnázia a filosofické fakulty. Podle základního školského zákona z roku 1869 byla v celostátním měřítku založena síť obecných, měšťan-

ských škol a učitelských ústavů, trvající v našich zemích až do roku 1948. S rozvojem kapitalismu po stránce hospodářské i politické rostl také počet českých škol, pro něž pražské nakladatelství už nestačilo (zejména pro střední školy) vydávat nejdůležitější školní pomůcky. Této situace využívali jednotlivci a vydávali hledané publikace, často bez ohledu na kvalitu. Jedině odborně fundované instituce vydávaly vesměs publikace hodnotné, a to učebnice i časopisy pro střední i vysoké školy. Na prvním místě tu lze uvést Jednotu českých matematiků (pozdější Jednota čs. matematiků a fyziků). Pražskému nakladatelství, označovanému od roku 1921 jako Státní nakladatelství, zůstalo vydávání nejdůležitějších školních pomůcek především pro obecné a měšťanské školy. V paměti našich otců a dědů jsou učebnice jako Močnickovy početnice, Kožíškova Poupata, Štorchovy — Čondlovy Pracovní učebnice dějepisu a jiné.

Nacistická okupace rozrušila nejen naše hospodářství a politický život, ale i naše školství. Také do Státního nakladatelství byli jako vedoucí činitelé dosazeni Němci a čeští kolaboranti. Demokratický obsah učebnic a v tomto smyslu vedené školské časopisy a ostatní školní pomůcky zde vydávané byly odstraněny; nejdůležitější učební pomůcky pak mohly vycházet ve stále menším počtu, zato se stále větším obsahem nacistické ideologie.

Osvobozením naší vlasti Rudou armádou před třiceti lety se začala národní a demokratická revoluce, ukončená Vítězným únorem. Po rozhodujících hospodářských a politických přeměnách uskutečňovaných pod vedením KSČ muselo dojít i k zásadním změnám v našem školství a ve vydavatelské činnosti Státního nakladatelství, přejmenovaného v roce 1951 na Státní pedagogické nakladatelství (dále zkracováno SPN). Univ. prof. dr. Zdeněk Nejedlý, člen ÚV KSČ a ministr školství a osvěty, osobně navštívil Státní nakladatelství 20. listopadu 1945. Přitom už tehdy vyslovil názor, že bude účelné soustředit do Státního nakladatelství vydávání pokud možno všech učebnic a školních pomůcek. Tento názor byl plně prosazen po vydání zákona o jednotné škole.

Nové úkoly, které Státní pedagogické nakladatelství (SPN) dostává od naší společnosti, jsou velmi rozsáhlé; SPN opatřuje škole vše, co potřebuje k výuce, tj. učebnice pro všechny stupně a druhy škol v českém a polském jazyce, skripta pro střední, odborné a vysoké školy, školní potřeby žactva, zařízení i výzdobu školních místností. Dále vydává vše potřebné pro ty, kteří ve škole pracují nebo se školou spolupracují — pro učitele, vychovatele, rodiče a různé školní a výchovné instituce (knižnice „Na pomoc učiteli“, odborné časopisy s metodickým zaměřením atd.). Vedle toho vycházejí v SNP závažná pedagogická díla v Kruhu přátel pedagogické literatury. Pro tyto vysoce náročné úkoly byla také tiskárna vybavena moderní technikou. Zároveň byly pro zaměstnance Státního pedagogického nakladatelství vytvořeny nové

pracovní podmínky, aby mohli co nejlépe plnit své úkoly ve prospěch našeho školství.

Na stále se zvětšující úkoly socialistické školy a výchovy u nás nestačí už vždy naše ekonomické možnosti. Proto v nejednom směru dochází ke spolupráci pražského SPN se Slovenským pedagogickým nakladatelstvom v Bratislavě a se školskými nakladatelstvími zemí RVHP. Tak např. už v roce 1958 došlo k dohodě mezi oddělením jazykových učebnic SPN s Nakladatelstvím cizojazyčných a národnostních slovníků v Moskvě o společném vydávání středního slovníku rusko-českého a česko-ruského. Některé naše učebnice se tisknou v NDR, v Maďarsku apod.

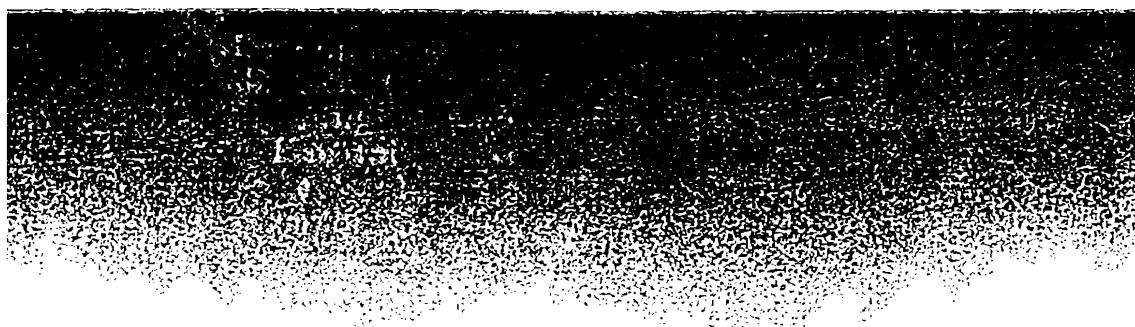
Snahou SPN při vydávání nejdůležitějších učebních pomůcek pro všechny stupně a druhy škol je, aby vynikaly nejen vysokou ideovostí a odborností, ale aby byly zároveň technicky a esteticky co nejlepší. Proto se na tvorbě učebnic i ostatních učebních pomůcek podílejí nejen naši přední odborníci, ale i význační výtvarní umělci, jako např. Zd. Burian, L. Jiřincová, M. Hanák, aj. Z matematicko-fyzikálních publikací vyniká v tomto směru především učebnice fyziky pro 7. ročník ZDŠ.

Naše učebnice, výsledek pečlivé práce autorů, výtvarníků, techniků a redaktorů, se dostaly i na mezinárodní knižní veletrhy pořádané v socialistických státech; úspěšně však pronikají také na veletrhy v západoevropských i jiných metropolích, jako např. do Frankfurtu n/M; do Londýna, do Stockholmu, do Djakarty apod.

Závěrem můžeme říci, že Státní pedagogické nakladatelství plní úspěšně své poslání dodnes. Jeho nynější činnost se ovšem nedá srovnávat s činností před dvěma sty lety. Tehdy vyrůstala z nepatrných začátků, dnes se vyrovnává činnosti velikých vydavatelských podniků v socialistických i západních zemích. Jménem čtenářské obce Rozhledů mu přejeme do dalších let činnosti mnoho úspěchů.

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

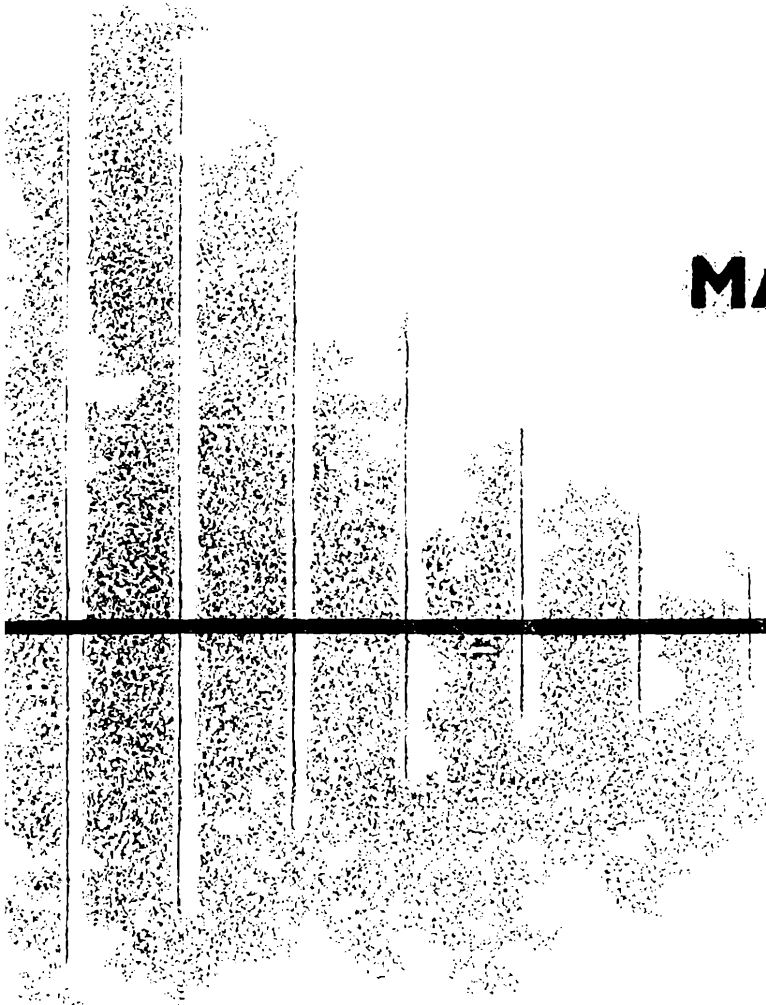


elimination
maximum inclination
clude
inclusion
inclusive
incomplete
incommensurable
increase
increasing
increment
indecomposable
indefinite
independence
independent
indeterminate
index
indirect
induction
inequality
 triangle inequality
 strict inequality
infinitesimal
infinitely
infinity
inflection
in general
initial
inner

spád, sklon, odchylka
 největší spád
obsahovat
inkluze
včetně
neúplný
nesouměřitelný
stoupat
rostoucí
přírůstek
nerozložitelný
neurčitý
nezávislost
nezávislý
neurčitý
index
nepřímý
indukce
nerovnost
 trojúhelníková nerovnost
 ostrá nerovnost
infinitesimální
nekonečně
nekonečno
inflexe
obecně
počáteční
vnitřní

inscribed	vepsaný
instant	okamžik
instruction	návod
integer	celé číslo
integrable	integrovatelný
integral	integrál
definite integral	určitý integrál
improper integral	nevlastní integrál
indefinite integral	neurčitý integrál
multiple integral	množný integrál
surface integral	plošný integrál
integral calculus	integrální počet
integral function	integrální funkce
integral number	celé číslo
integral sign	integrační znamení
integration by parts	integrace per partes
intercept	vytnout, svírat, úsek
intercept form of the equation of a straight line	úseková rovnice přímky
interchange	zaměnit
interest	úrok
compound interest	složený úrok
simple interest	jednoduchý úrok
interior angle	vnitřní úhel
interior point	vnitřní bod
internal	vnitřní
interpolation	interpolace
intersect	protínat (se)
intersecting lines	různoběžné přímky
intersection	průnik
line of intersection	průsečnice
point of intersection	průsečík
interval	interval
bounded interval	ohraničený interval
open interval	otevřený interval
time interval	časový interval
introduction	zavedení, úvod
invariance	neměnnost, stálost
invariant	invariant, invariantní
inverse	inverzní, převrácený
inverse circular function	cyklometrická funkce
inversion	inverze
invert	převrátit, invertovat
investigate	zkoumat
invisible	neviditelný

rozhledy



**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

6

ROČNÍK 53, 1974-1975, ÚNOR



ROČNÍK 53
ÚNOR 1975

6

rozhled

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT, Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, nár. pod. v Praze 1975.

OBSAH

Doc. dr. V. Čapek: Únor 1948 – mezník ve vývoji Československa k socialismu	289
S. Horák: Racionální body na rovinných algebraických křivkách	291
Dr. J. Skuhra: Problém sběratele známek	294
J. Straka: Gaussovy funkce	296
Dr. J. Šedivý: Zjednodušování grafů signálních toků	302
R. Baník: Zaujímavý jav na kondenzátore	307
Dr. O. Houdek: Přeměna energie v kmitající soustavě	314
Dr. K. Mišoň: Beztížnost v letadle	317
Ing. Z. Janout, CSc.: Spojený ústav jaderných výzkumů v Dubně (SSSR)	320
J. Kotyk: Hrst vzpomínek	323
S. Horák: Euklides Danicus	325
Dr. J. Šedivý: Krátké texty o logaritmech	327
D. Jedinák: Za dejinami matematiky	328
Ze zahraničních časopisů	330
Recenze	331
Matematické zábavy	335
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	
3. a 4. str. obálky	

ÚNOR 1948

mezník ve vývoji Československa k socialismu

Doc. PhDr. VRATISLAV ČAPEK, CSc., UK Praha.,

Zamyšlení nad významem únorových událostí roku 1948 je dnes již prosvíceno třicetiletým vývojem našich národů, zkušenostmi, vítězstvími, ale i neúspěchy, jež jsme přitom prožili nejen jako pouzí svědkové, ale jako účastníci, jako aktivní tvůrci, jako spoluodpovědní činitelé historického vývoje.

Pražská operace v květnu 1945 skončila protifašistický boj našeho lidu a dovršila tak národně osvobozenou demokratickou revoluci jako proces, který obnovil naši národní a státní samostatnost, rozbil fašistickou diktaturu a povznesl dělnickou třídu a Komunistickou stranu Československa na vedoucí místo ve vítězné národní a demokratické revoluci, která se pak stala východiskem k revoluci socialistické.

Nová historická skutečnost po druhé světové válce, charakterizovaná neobyčejným vzrůstem vlivu Sovětského svazu ve světě, zejména ve střední a jihovýchodní Evropě, růstem autority revolučního socialistického a komunistického hnutí jako důsledného odpůrce fašismu a nej-přednějšího bojovníka za národní svobodu a sociální přestavbu společnosti, vytvořila vhodné pozadí pro přerůstání národní a demokratické revoluce v revoluci socialistickou. Výrazem této etapy bylo vybudování lidově demokratického režimu a těsné spojení se Sovětským svazem, postupné vytváření socialistické soustavy. Tato etapa přerůstání jedné sociálně ekonomické formace v druhou byla doprovázena ostrým třídním bojem mezi dělnickou třídou a buržoazními silami uvnitř našeho státu i v mezinárodním měřítku. Ve světě došlo k rozpadu spojeneckých sil z doby války; mezinárodní imperialismus se zároveň snažil ekonomickými i ideově politickými prostředky rozleptat vznikající soustavu lidově demokratických zemí v čele se Sovětským svazem. Ostrý třídní boj uvnitř našeho státu měl rozhodnout o tom, zda se naše národy vrátí na cestu předmnichovské republiky či zda pod vedením KSČ probouje dělnická třída cestu k diktatuře proletariátu a již v této fázi splní svou historickou úlohu, kterou vědecky zdůvodnili K. Marx a B. Engels, totiž zlikvidovat kapitalismus a vybudovat socialismus.

Stále zřetelnější zostřování třídního boje vedlo k polarizaci třídních sil. Projevilo se začínající „studenou válkou“, která měla izolovat lidově demokratické země a vytvořit prostor k vyprovokování rozhodného mocenského zápasu. Toto střetnutí protikladných třídních sil proběhlo ve všech lidově demokratických státech zhruba ve stejné době, tj. kolem poloviny století, a mělo zhruba stejný vývoj a stejné důsledky. Marx-leninská teorie umožňovala řešit toto střetnutí diferencovaně podle podmínek v jednotlivých státech, ale vždy se zřetelem k účinné teoretické a praktické pomoci Sovětského svazu. Komunistická strana Československa se orientovala na pokojnou cestu prosazení socialistického vývoje. Diskuse o postupu uvnitř vedení strany nutily k stále hlubšímu zamýšlení nad charakterem probíhající revoluce, nad strategií a taktikou dělnické třídy v ní.

Únorová politická krize, probíhající u nás od 20. do 25. února 1948, byla vyvolána pravicovými silami. Zastihla však KSČ a dělnickou třídu teoreticky i prakticky připravenou. Většina pracujících podpořila komunistické řešení krize, tj. zbavit se reakčních sil a rozhodnout s konečnou platností o naší socialistické budoucnosti. Rozhodující byla přitom masová podpora, kterou dělnické třídě poskytli především rolníci. Únorovým vítězstvím lidu byl ukončen proces pokojného přerůstání národní a demokratické revoluce v revoluci socialistickou. Lidově demokratický režim začal plnit funkci diktatury proletariátu. Rok 1945 byl zásadním přelomem v našich nejnovějších dějinách, rok 1948 urychlil a zajistil naši další cestu k socialismu. Dělnická třída vedená KSČ převzala moc sama ve formě diktatury proletariátu. Únor rozhodl nejen o naší další etapě, o budování socialistické společnosti, tj. o změnách, ze kterých vznikla a rozvíjí se naše přítomnost, ale rozhodl též o naší zahraničně politické orientaci. Upevnil a prohloubil se náš vztah k národům Sovětského svazu i k ostatním socialistickým zemím. Prohloubil se smysl a význam našeho internacionalistického postoje v teoretické a praktické pomoci jiným zemím, které bojují proti mezinárodnímu imperialismu. Teoretické zkušenosti načerpané Únorem se staly zároveň přínosem marx-leninské teorii socialistické revoluce.

Tím, že KSČ dosáhla v únoru i po něm masové podpory lidových vrstev, mohla dělnická třída dosáhnout diktatury proletariátu a rozvíjet ji pokojnou cestou, bez ozbrojeného boje, bez občanské války, bez povstání, při zachování ústavních a parlamentních zvyklostí. Tyto pře-

vratné momenty spojené s přeměnou naší národně demokratické revoluce v revoluci socialistickou a s budováním socialistické společnosti jsou navždy spojeny s generací vedoucích osobností KSČ v čele s Klementem Gottwaldem. Jim se podařilo tvořivě aplikovat zásady vědeckého socialismu v našich poměrech a přitom zajistit spolehlivou internacionální podporu Sovětského svazu. Únorem byly započaty socialistické procesy a zákonitosti, jež fungují dodnes.

matematika

Racionální body na rovinných algebraických křivkách

STANISLAV HORÁK, Praha

V tomto článku budeme mluvit o rovinných algebraických křivkách. Proto si nejprve řekneme, co to je rovinná algebraická křivka. Je to křivka daná rovnicí

$$f(x; y) = 0,$$

$f(x; y)$ je mnohočlen v proměnných x, y . Je-li to mnohočlen stupně n , říkáme, že i křivka je stupně n .

Tak např. kuželosečky jsou algebraické rovinné křivky druhého stupně; křivky

$$y = x^3, \quad x^2y + xy^2 + x^2 - 2y^2 = 0$$

jsou rovinné algebraické křivky stupně 3. atd.

Na rovinných algebraických křivkách se někdy vyskytují tzv. racionální body, což jsou ty body křivky, jejichž obě souřadnice jsou racionální čísla. Např. křivka $y = x^3$ má nekonečně mnoho racionálních bodů. Stačí totiž za x zvolit libovolné racionální číslo a souřadnice y je potom též racionální číslo. Tudíž i příslušný bod je racionální.

V následujících řádcích si na několika jednoduchých příkladech ukážeme jeden způsob hledání takových bodů. Podmínkou vždy bude, abychom (zkusmo) našli jeden racionální bod dané křivky.

Příklad 1. Najděte racionální body na elipse

$$x^2 + 2y^2 = 1 \tag{1}$$

Řešení. Na této křivce leží racionální bod $R = [-1; 0]$. Proložme jím libovolnou přímkou. Její rovnice je

$$y = kx + k \quad (2)$$

a předpokládejme zatím, že k je libovolné číslo. Hledáme-li průsečíky této přímky s danou elipsou, dojdeme k rovnici

$$x^2(2k^2 + 1) + 4k^2x + (2k^2 - 1) = 0$$

Její kořeny jsou

$$x_1 = -1, \quad x_2 = (-2k^2 + 1) / (2k^2 + 1)$$

Prvnímu kořenu odpovídá nám již známý racionální bod $R = [-1; 0]$ a druhému kořenu odpovídá bod Q

$$Q = \left[\frac{-2k^2 + 1}{2k^2 + 1}, \frac{2k}{2k^2 + 1} \right].$$

Pokud k je racionální číslo, jsou i souřadnice bodu Q (který leží na dané elipse) racionální a bod Q je tedy racionální bod křivky (1). Odtud je patrné, že na dané elipse leží nekonečně mnoho racionálních bodů.

Příklad 2. Na křivce 3. stupně, která je dána rovnicí

$$x^2y + xy^2 + x^2 - 2y^2 = 0, \quad (3)$$

najděte racionální body.

Řešení je totéž jako v 1. příkladu. Na křivce (3) leží racionální bod $R = [0; 0]$. Jím proložme libovolnou přímkou, jejíž rovnice je

$$y = kx \quad (4)$$

Hledejme nyní body společné přímce (4) a křivce (3). Tím jsme přivedeni k rovnici

$$x^2 [(k^2 + k)x + (1 - 2k^2)] = 0 \quad (5)$$

Odtud plyne

a) $x^2 = 0$, tj. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, což znamená, že rovnice (5) má jeden dvojnásobný kořen; geometricky to znamená, že křivka (3) má v bodě R dvojnásobný bod (obr. 1).

b) Kromě bodu R dostáváme ještě průsečík, jehož souřadnice x je dána rovnicí

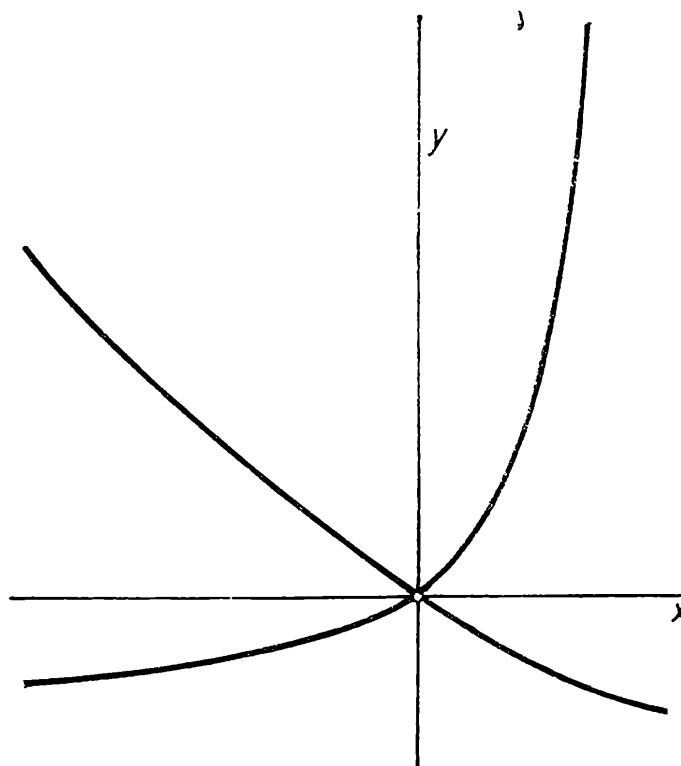
$$x(k^2 + k) + (1 - 2k^2) = 0$$

Za předpokladu, že

$$k^2 + k \neq 0, \quad \text{tj.} \quad k \neq 0, \quad k \neq -1,$$

můžeme psát

$$x_3 = (2k^2 - 1) / (k^2 + k)$$



Z rovnice (4) k tomu vypočteme příslušnou souřadnici y :

$$y_3 = (2k^2 - 1)(k + 1)$$

Jestliže k je libovolné racionální číslo, potom bod $Q = [x_3; y_3]$ je racionální bod křivky (3). Je patrné, že na dané křivce leží opět nesčíslně mnoho racionálních bodů.

Poznámka. Pro úplnost je nutno všimnout si případu, kdy číselník souřadnic x_3, y_3 je roven nule. Potom $x_3 = y_3 = 0$, což by znamenalo, že přímka (4) má s křivkou (3) společné tři splývající body a potom přímka (4) je tečnou dané křivky v bodě R . Poněvadž bod R je dvojnásobný bod křivky (3), existují v něm dvě tečny, což odpovídá dvěma hodnotám směrnice k .

Cvičení.

1. Má křivka $y = x^3/\sqrt{2}$ nějaký racionální bod?
2. V 1. příkladu jsou souřadnice bodu Q vyjádřeny jako funkce parametru k . Dosadte za k postupně čísla $0, 1, 2, \dots, -1, -2$, a přesvědčte se, že takto získané body $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$ leží na křivce (1).
3. Totéž pro souřadnice bodu Q v 2. příkladu.
4. Najděte racionální body křivek:

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $x^2 - 4y^2 = 9$; | b) $x^2y - 3x^2 - xy + y^2 = 0$; |
| c) $x^4 + y^4 - x^3 - y^3 = 0$; | d) $x^2 + cy^2 = d^2$, |

kde c, d jsou racionální čísla a $cd \neq 0$.

V ý s l e d k y.

1. Jediný racionální bod je $R = [0; 0]$.

2. Po dosazení vypsanych hodnot dostaneme po řadě:

$$Q_0 = [1; 0], Q_1 = [-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}], Q_2 = [-\frac{7}{9}; \frac{4}{9}], Q_{-1} = [-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}], \\ Q_{-2} = [-\frac{7}{9}; -\frac{4}{9}].$$

3. Nesmíme dosadit $k = 0, -1$.

$$Q_1 = [\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], Q_2 = [\frac{7}{6}; \frac{2}{3}], Q_{-2} = [\frac{7}{2}; -7].$$

4. a) $R = [3; 0]$. $x = (12k^2 + 3)(1 - 4k^2)$, $y = 24k^3(1 - 4k^2)$,
kde $k \neq \pm \frac{1}{2}$;

b) $R = [0; 0]$, $x = (3 + k - k^2)k$, $y = 3 + k - k^2$;

c) $R = [0; 0]$, $x = (1 + k^3)(1 + k^4)$, $y = (k + k^4)(1 + k^4)$;

d) $R = [d; 0]$, $x = d(ck^2 - 1)(ck^2 + 1)$, $y = -2kd(ck^2 + 1)$.

Problém sběratele známek

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

Pan Novák má velkého koníčka — sbírá známky. Tomuto koníčku se věnuje s vášní lovce, jehož revírem je denní pošta v jeho úřadě. Denně se mu kupí na stole hromádka dopisů a balíčků se spoustou nalepených známek. Tady čerpá přírůstky do své sbírky.

Zrovna byla vydána nová série šesti známek. Pan Novák se těší, jak snadno získá do své sbírky tyto přírůstky. Stačí mu, aby čekal, až se nové známky poprvé objeví na některém dopise. Předpokládejme, že každý den nalezne pan Novák právě jednu známku této nové série (dny pracovního klidu a jiné komplikace neuvažujeme). Známky se však objevují náhodně; přicházejí mu i ty, které již jednou získal. V každém dnu mají všechny stejnou pravděpodobnost, že se octnou na stole pana Nováka. Jak dlouho musí pan Novák čekat, než dostane celou sérii?

Tuto situaci si můžeme představit jako házení hrací kostkou. Při jednotlivých bodech je padnutí kteréhokoli počtu ok (1, 2, 3, 4, 5, 6) stejně pravděpodobné. Kolikrát musíme hodit kostkou, než dostaneme celou sérii, tj. než nám padne každé číslo na hrací kostce aspoň jednou?

Předchozí odstavec nám dává přesný návod, jak simulovat problém pana Nováka. Jak již víme, není nutné házet kostkou, stačí studovat tabulku náhodných čísel.*) Nejjednodušší je sledovat výskyt číslic

*) Tabulka náhodných čísel je uveřejněna v úvodním článku k tématice simulování náhodných procesů (Rozhledy, č. 2 tohoto ročníku).

1, 2, 3, 4, 5, 6 a číslice 7, 8, 9, 0 pomíjet. Vezmeme-li první řádek tabulky, pak posloupnost 16689 71147 43813 925 představuje jednu simulaci pokusu. Pan Novák musí čekat 12 dní.

Tento postup je však velmi neekonomický; z 18 číslic jsme 6 číslic pomíjeli, a to je příliš velký odpad. Z každých deseti číslic čteme průměrně čtyři zbytečně, odpad tedy činí 40 %. Celý postup zefektivníme následujícím obratem. Budeme sledovat sto uspořádaných dvojic číslic 00, 01, 02, , 10, 11, , 99. Rozdělíme je do šesti stejně početných disjunktních množin a sedmé, co nejméně početné, například takto:

$$\begin{aligned} A &= \{00, 01, 02, & 14, 15\} & B &= \{16, 17, 18, & 30, 31\} \\ C &= \{32, 33, 34, & 46, 47\} & D &= \{48, 49, 50, & 62, 63\}, \\ E &= \{64, 65, 66, & 78, 79\} & F &= \{80, 81, 82, & 94, 95\} \\ G &= \{96, 97, 98, 99\} \end{aligned}$$

Výskyt dvojice z množin A, B, C, D, E, F v tabulce náhodných čísel nám bude říkat, že pan Novák dostal po řadě 1., 2., 3., 4., 5., 6. známku série. Dvojice z množiny G přehlízíme. Při tomto postupu pomíjíme čtyři dvojice ze sta, což je čtyřprocentní odpad. Kdybychom uvažovali trojice číslic, klesl by odpad na 0,4 %.

Každé posloupnosti dvojic číslic přiřadíme posloupnost písmen (místo příslušné uspořádané dvojice napíšeme symbol té množiny, které je prvkem) a budeme sledovat výskyt všech písmen A, B, C, D, E, F a délku této písmenové posloupnosti.

Začneme-li prvním řádkem, dostáváme posloupnost číslic 16689711 4743813925422608472866117125260178188169400751 a té odpovídá posloupnost písmen $BEGACCFBCBACBEAEBBAEBFECAD$, která představuje simulaci pokusu, kdy pan Novák musí čekat 26 dní.

Tato úloha byla simulována na jedné škole pomocí hrací kostky. Žáci nasimulovali celkem 282 pokusů. V připojené tabulce jsou vypsány četnosti pro jednotlivé čekací doby. Když vypočítáme průměr z hodnot uvedených v tabulce, vychází nám průměrná doba čekání na celou sérii známek 15,1 dne.

Pokusme se určit teoretickou hodnotu doby čekání. Celková čekací doba se dá rozložit na šest dílčích dob. Nejprve čekáme průměrně a_1 dní na některou ze známek série. Pak čekáme průměrně a_2 dní na některou z pěti známek, které ještě nemáme. Analogický význam mají doby čekání a_3, a_4, a_5, a_6 . Celková průměrná doba čekání a je rovna součtu

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

Podle podmínek úlohy je doba čekání na nějakou známku série jeden den; tedy $a_1 = 1$. Průměrná doba čekání a_2 je větší než a_1 , protože nyní čekáme na jednu známku z pěti a přitom celý soubor jich obsahuje šest. Doba čekání se musí zvětšit ve stejném poměru jako se zmenší skupina

známek, na které ještě čekáme. Jde tedy o nepřímou úměrnost. Pomocí trojčlenky snadno vypočteme, že průměrná doba čekání a_2 je rovna $6/5$ dne. Analogickou úvahou určíme ostatní doby čekání, které jsou $a_3 = 6/4$ dne, $a_4 = 6/3$ dne, $a_5 = 6/2$ dne, $a_6 = 6/1$ dne. A tedy teoretická hodnota průměrné doby čekání pana Nováka na sérii známek za daných podmínek je 14,7 dne.

Doba čekání	6		8	9	10	11	12	13	14	15	16
Četnost	4	14	15	19	20	14	23	24	21	16	19

Doba čekání	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Četnost	13	6	8	9	7	10	2	6	4	2	6

Doba čekání	28	29	30	31	32	33	34	35	36	42	46	61
Četnost	5	2		1	0	1	2	1	2	1	1	1

Gaussovy funkce

JOSEF STRAKA, VŠZ Praha

V článku si všimneme pojmu celá část reálného čísla a jeho základních vlastností, seznámíme se s Gaussovou funkcí a v článku, který vyjde v příštím čísle, ukážeme řešení rovnic, ve kterých se užívá zmíněného pojmu.

Začneme jednoduchým příkladem. Jistě víte, že mzda každého pracovníka podléhá dani ze mzdy, která se vypočítává podle tabulek. Část tabulky daně ze mzdy pro platové rozpětí 1800 Kčs až 2000 Kčs vypadá takto (daň je zaokrouhlena na celé Kčs):

Měsíční mzda v Kčs přes — do	Daň ze mzdy v Kčs
1800—1820	217
1820—1840	221
1840—1860	224
1860—1880	228
1880—1900	231
1900—1920	234
1920—1940	238
1940—1960	241
1960—1980	244
1980—2000	248

Obrázek 1 znázorňuje graf závislosti daně na mzdě v daném rozpětí. Je vidět, že graf není spojitý a že levé krajní body úseček ke grafu nepatří. Například mzda 1820 Kčs je zdaněna částkou 217 Kčs, zatímco mzda 1821 Kčs je zdaněna částkou 221 Kčs.

Lze nalézt více obdobných příkladů. Závislost ceny jízdného u ČSD na počtu ujetých km vypadá podobně. Podívejte se do jízdního řádu a promyslete si grafické znázornění uvedené závislosti pro určité rozpětí ujetých kilometrů.

Nyní se budeme zabývat matematickou problematikou, a to funkcemi, které mají obdobné grafy jako obr. 1.

V některých partiích matematiky je třeba přiřazovat každému reálnému číslu x celé číslo zapisované symbolem $[x]$, pro které platí

$$x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1 \quad (\text{a})$$

Celé číslo $[x]$, pro které platí (a), nazýváme celá část reálného čísla x^*).

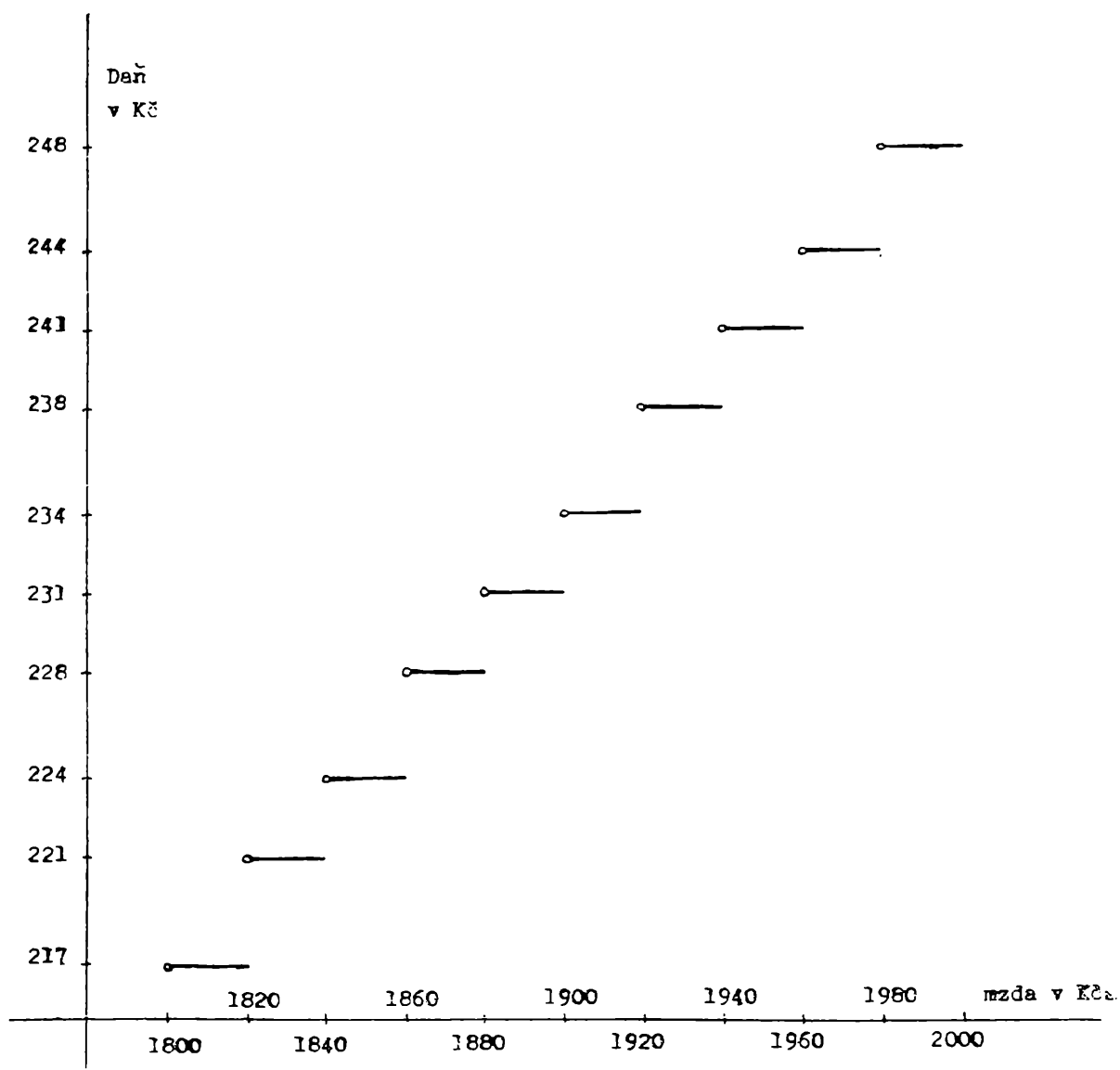
Celou částí $[x]$ reálného čísla x je tedy to celé číslo, jehož obraz na číselné ose je „nejbližší zleva“ k obrazu reálného čísla x . Např.: $[-4,2] = -5$, $[-3] = -3$, $[-0,6] = -1$, $[2] = 2$, $[2\sqrt{3}] = 3$, $[12,4] = 12$ atd. (viz obr. 2).

Pro $[x]$ platí řada vět; uvedeme dvě věty, kterých v dalším využijeme.

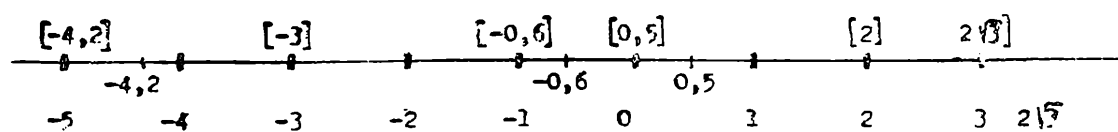
Věta 1. Ke každému reálnému číslu x existuje takové reálné číslo α , že platí

$$0 \leq \alpha < 1 \quad \text{a} \quad x = [x] + \alpha. \quad (\text{b})$$

*) Symbolický zápis $[x]$ pochází od německého matematika C. F. Gaussa (1777–1855). Méně často se necelá část reálného čísla x označuje symbolem $E(x)$, který pochází od francouzského matematika A. M. Legendrea (1752–1833).



Obr. 1



Obr. 2

Důkaz. Pro každé reálné číslo x platí podle definice:

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$$0 \leq x - [x] < 1$$

Položíme-li $x - [x] = \alpha$, platí skutečně $0 \leq \alpha < 1$ a $x = [x] + \alpha$.
Např.: $-7,3 = [-7,3] + 0,7$ apod.

Věta 2. Pro každé reálné číslo x a každé celé číslo n platí

$$[x + n] = [x] + n. \quad (c)$$

Důkaz. Pro každé reálné číslo $x + n$ platí podle definice

$$x + n - 1 < [x + n] \leq x + n,$$

$$x - 1 < [x + n] - n \leq x.$$

Zároveň však platí

$$x - 1 < [x] \leq x$$

a $[x]$ je jediné celé číslo s touto vlastností, proto

$$[x + n] - n = [x].$$

Ověřte si např., že

$$[-8,7 - 3] = [-8,7] - 3$$

Pro každé reálné číslo x je množina všech uspořádaných dvojic $(x, [x])$ podmnožinou kartézského součinu $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, tedy relací v $\mathbf{R}$. Protože však každé reálné číslo x je první složkou právě jedné uspořádané dvojice $(x, [x])$, je uvedená binární relace zobrazením v množině všech reálných čísel, a tedy reálnou funkcí v $\mathbf{R}$.

Víte, že při každém zobrazení v dané množině A můžeme v této množině určit významnou relaci ekvivalence. Dva různé prvky x_1, x_2 množiny A můžeme pokládat vzhledem k danému zobrazení za ekvivalentní, právě když mají týž obraz v množině A .

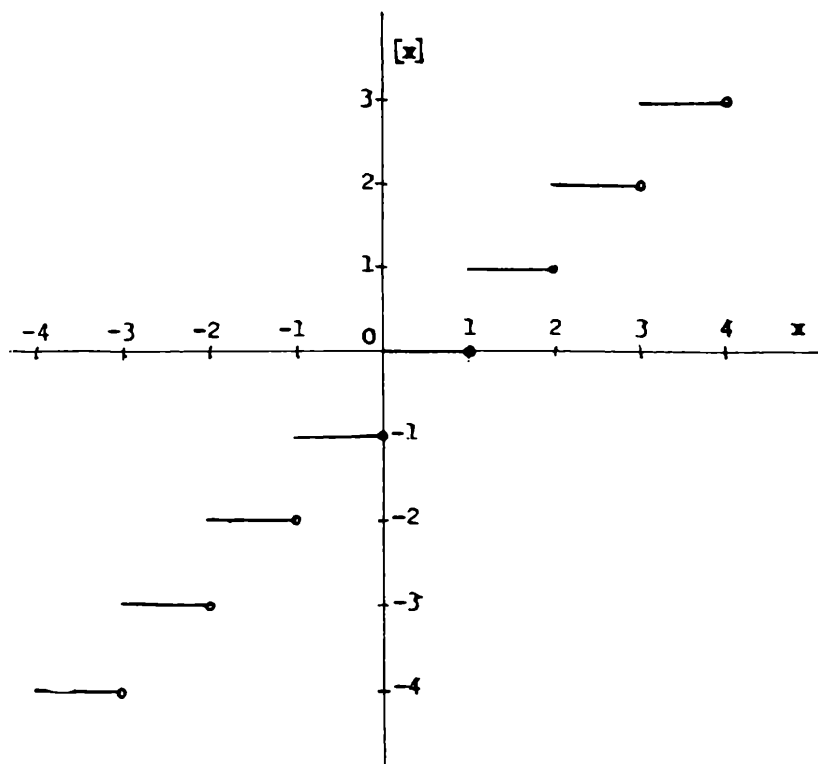
Tak při zobrazení $F : x \rightarrow [x]$ v množině $\mathbf{R}$ všech reálných čísel můžeme např. prvky $x_1 = 2,1$, $x_2 = 2,8$ pokládat za ekvivalentní, neboť mají týž obraz $[x_1] = [x_2] = 2$.

Za ekvivalentní vzhledem k zobrazení F můžeme pokládat každá dvě reálná čísla z intervalu $< 0, 1)$, protože mají při zobrazení F týž obraz v množině $\mathbf{R}$, totiž číslo 0. Totéž se týká intervalů $< 1, 2)$, $< 2, 3)$, . . . a také intervalů $< -1, 0)$, $< -2, -1)$, $< -3, -2)$, atd.

Víme také, že každá relace ekvivalence v dané množině A má za následek rozklad množiny A na systém disjunktních podmnožin $A_1, A_2 \dots$, kterým říkáme třídy ekvivalence.

Zobrazení $F : x \rightarrow [x]$ v množině $\mathbf{R}$ všech reálných čísel určuje v této množině ekvivalenci a tato ekvivalence v $\mathbf{R}$ má za následek rozklad množiny $\mathbf{R}$ na systém disjunktních podmnožin — tříd ekvivalence. Těmito třídami jsou vzhledem k zobrazení F číselné intervaly . . . , $< -2, -1)$, $< -1, 0)$, $< 0, 1)$, $< 1, 2)$, . . . , jejichž sjednocením je množina $\mathbf{R}$ všech reálných čísel. Každá dvě reálná čísla z téhož intervalu můžeme vzhledem k zobrazení F pokládat za ekvivalentní (neboť mají v $\mathbf{R}$ týž obraz) a každá dvě reálná čísla z různých intervalů nemůžeme pokládat za ekvivalentní (protože nemají v $\mathbf{R}$ týž obraz).

Obr. 3



Příklad 1. Obrázek 3 ukazuje grafické znázornění funkce $F : x \rightarrow [x]$. Graf byl sestaven s použitím tabulky

$x \in$		$< -3, -2)$	$< -2, -1)$	$< -1, 0)$	$< 0, 1)$	$< 1, 2)$	$< 2, 3)$	$< 3, 4)$	
$[x]$		-3	-2	-1	0	1	2	3	

Při zobrazení $F : x \rightarrow [x]$ je množinou V všech vzorů množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, množinou O všech obrazů je množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel. Zobrazení F můžeme blíže charakterizovat jako zobrazení $\mathbb{R}$ na $\mathbb{Z}$, které není prosté (proč?).

Právě uvažovaná funkce F je zvláštním případem funkce $G : x \rightarrow [ax + b]$, kde $a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}$. Funkce G se nazývají Gaussovy funkce.

Příklad 2. Obrázek 4 ukazuje grafické znázornění funkce

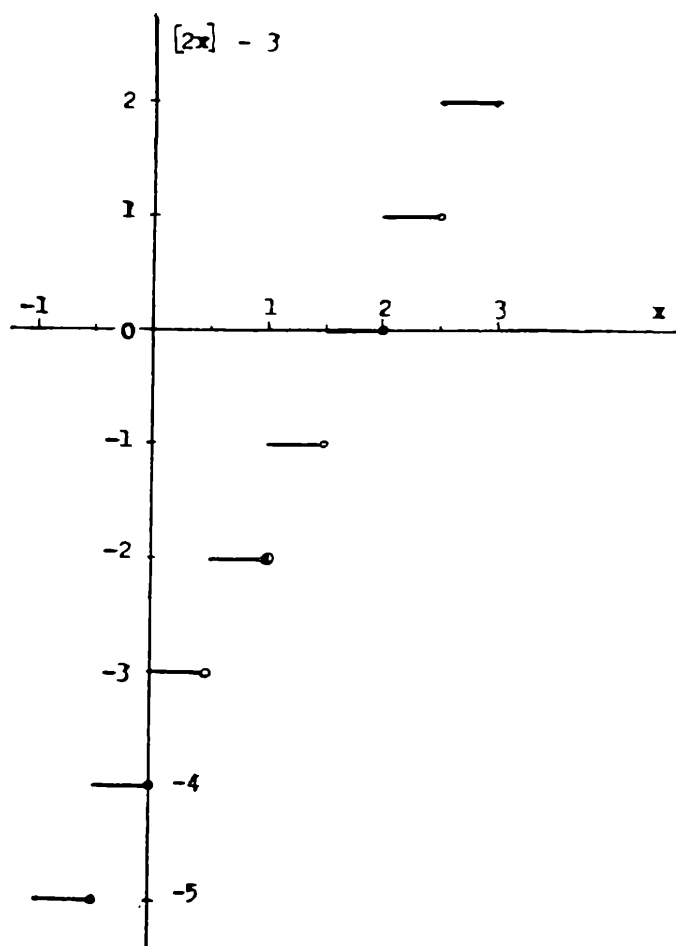
$$G : x \rightarrow [2x - 3] .$$

Podle (c) můžeme funkci G zapsat takto

$$G : x \rightarrow [2x] - 3 .$$

Pro která $x \in \mathbb{R}$ je $[2x] = 0$? Podle (a) platí

$$2x - 1 < [2x] \leq 2x \Rightarrow 2x - 1 < 0 \leq 2x \Rightarrow x \in < 0, \frac{1}{2}) .$$



Pro každé $x \in < 0, \frac{1}{2})$ je hodnota $[2x]$ rovna nule. Obdobně vyšetříme ostatní intervaly.

$x \in$		$< -1, -\frac{1}{2})$	$< -\frac{1}{2}, 0)$	$< 0, \frac{1}{2})$	$< \frac{1}{2}, 1)$	$< 1, \frac{3}{2})$	$< \frac{3}{2}, 2)$	$< 2, \frac{5}{2})$	$< \frac{5}{2}, 3)$	
$[2x]$		-2	-1	0	1	2	3	4	5	
$[2x] - 3$		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	

I v tomto případě platí $V = \mathbf{R}$; $\mathbf{0} = \mathbf{Z}$ a funkce G je zobrazením množiny $\mathbf{R}$ na množinu $\mathbf{Z}$, které není prosté.

Zobrazení G určuje v množině $\mathbf{R}$ všech reálných čísel ekvivalenci a ta má za následek rozklad množiny $\mathbf{R}$ na ekvivalentní třídy, jimiž jsou intervaly $\dots, < -1, -\frac{1}{2}), < -\frac{1}{2}, 0), < 0, \frac{1}{2}), < \frac{1}{2}, 1),$

Obrázky 3 a 4 názorně ukazují, že Gaussova funkce je pěkným příkladem funkce nespojité v nekonečně mnoha bodech.

Závěrem připojujeme několik cvičení, která poslouží k samostatné práci.

1) Dokažte, že pro každé reálné číslo x a každé celé číslo n platí

$$\frac{[nx]}{n} \leq x < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n}.$$

2) Sestrojte graf Gaussovy funkce $x \rightarrow [-2x + 3]$.

3) Porovnejte grafy těchto funkcí

$$y = [x], y = [x - 1] + 1, y = -[-x].$$

4) Porovnejte $[x] + [y]$, $[x + y]$ po dosazení několika dvojic reálných čísel x, y . Vyslovte a ověřte hypotézu o platnosti takového vztahu pro každá dvě reálná čísla.

fyzika

Zjednodušování grafů signálních toků

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

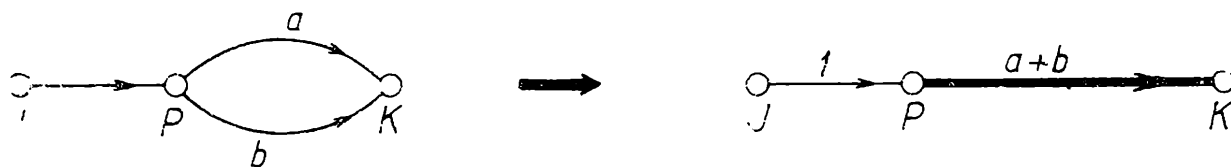
V minulém čísle Rozhledů byl otištěn příspěvek ing. J. Myslíka, v němž autor vyložil postup, kterým lze přiřadit elektrickým obvodům tzv. *grafy signálních toků*. V závěru svého článku zdůvodnil z úprav lineárních rovnic nejjednodušší úpravy takových grafů. Procvičme si nyní v několika příkladech tyto úpravy a vyložme si i význam grafů pro výpočet celkového toku signálu v koncovém uzlu sítě. Pojem signálu lze chápat velmi široce, tématice citovaného článku však zůstaneme nejbližší, představíme-li si elektrický proud.

Uzly P, A, K na obr. 1, 2 a 3 znázorňují místa, kde se měří tok nějakého signálu v nějakých jednotkách. Z místa P se přijatý jednotkový signál vysílá jednou větví (obr. 1), resp. dvěma (obr. 2 a 3). Na každé větvi je instalováno zařízení, které změní tok signálu a -krát (b -krát, c -krát). Jak velký tok signálu bude zjištěn v koncovém místě K ?

Jistě dáte snadno odpověď v situaci na obr. 1; jestliže i v místě A bude zajištěn bezztrátový přenos signálu, pak do K dojde signál s $a \cdot b$ jednotkami toku. V situaci na obr. 2 můžeme počítat s $a + b$ jednotkami toku; obtížnější je situace na obr. 3, kde se objevuje tzv. *zpětná vazba*.



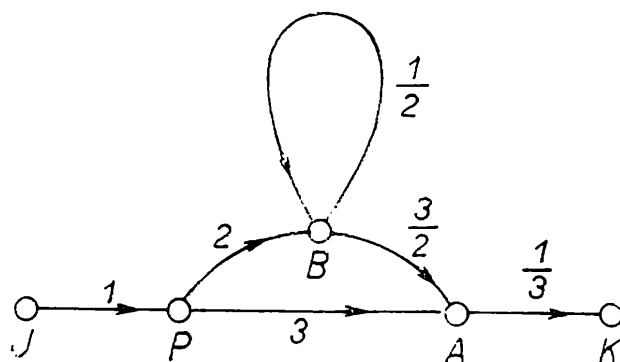
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

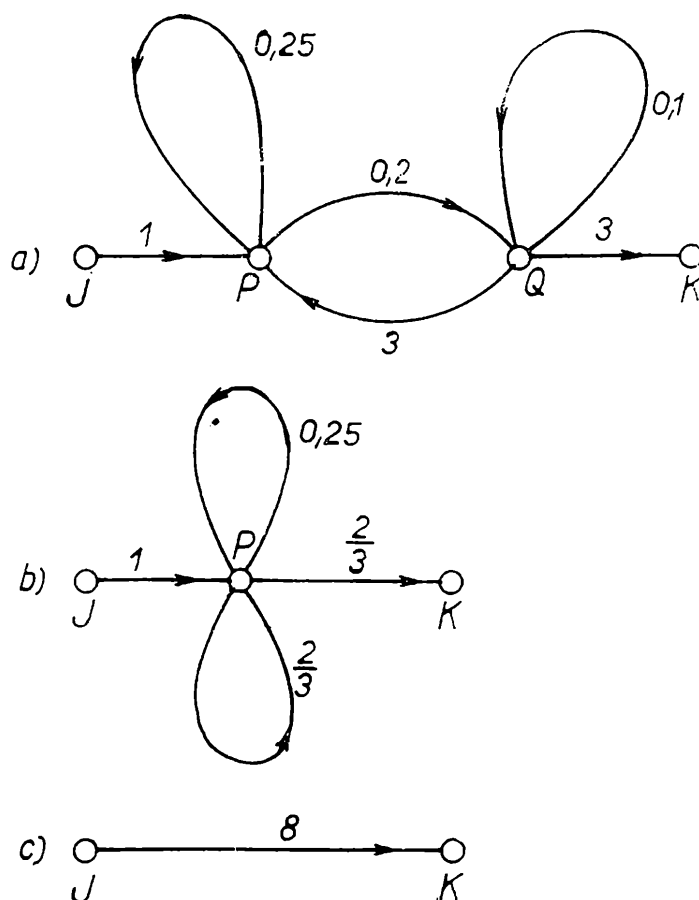
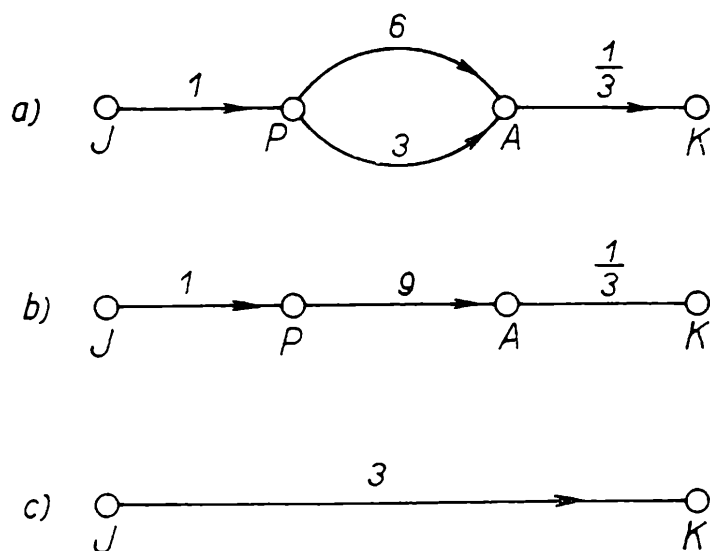
Pokud je $0 < c < 1$, můžeme si pomocí součtu geometrické řady vyjádřit zesílení původního jednotkového toku číslem

$$1 + c + c^2 + c^3 + \dots = \frac{1}{1 - c}$$

(Tomuto výsledku odpovídá představa o průběhu signálu nekonečně mnoha smyčkami u téhož uzlu.) Vliv smyčky se tedy projeví zesílením původního jednotkového toku vyslaného z P po větvi PK na $1/(1 - c)$ jednotek; při přenosu touto větví se pak zesílí na $a/(1 - c)$ jednotek toku. Tyto výsledky přesně souhlasí s těmi, které byly v citovaném článku odvozeny algebraicky.

Podívejme se na obr. 4, kde jde signál z P do K složitější sítí. Do uzlu A přichází horní větví signál

$$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 6\text{-krát} \text{ zesílený ve srovnání se signálem vyslaným}$$



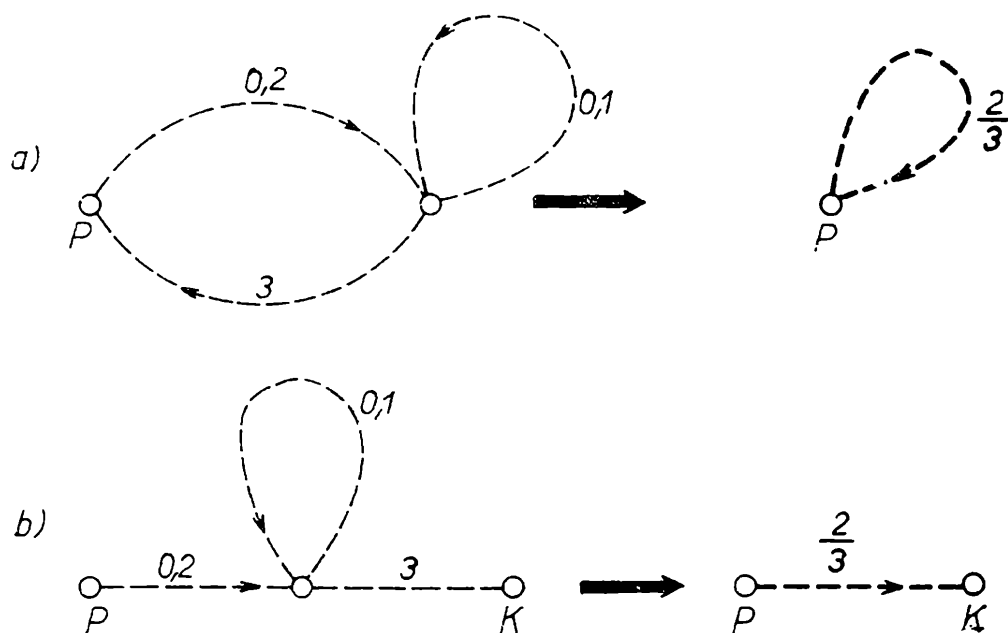
Obr. 6

z uzlu P ; do uzlu K dojde signál

$$(6 + 3) \cdot \frac{1}{3} = 3\text{-krát silnější než do uzlu } P.$$

Tyto výpočty je účelné provést postupně při zjednodušování grafu pomocí úprav znázorněných na obr. 1—3; graf z obr. 4 je tak zjednodušován na obr. 5a, b, c. Při těchto úpravách postupně odstraňujeme uzly a hrany grafu s cílem dospět ke grafu s jedinou hranou končící v uzlu K .

Síť pro přenos signálu z P do K , kterou znázorňuje obr. 6a, je mnohem



Obr. 7

složitější, takže úpravy grafu musíme podrobněji vysvětlit. Chceme-li odstranit uzel Q , musíme v novém grafu zachytit všechny cesty z P do P , z P do K , z K do P , z K do K , které vedou přes odstraňovaný uzel Q .

Na obr. 7a je vlevo naznačena čárkovanou čarou cesta signálu z P do P přes Q i s koeficienty přenosu, vpravo je silněji vytažena hrana, která nahrazuje v grafu Q tuto cestu smyčkou s koeficientem

$$0,2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{1 - 0,1} = \frac{2}{3}$$

Na obr. 7b je obdobně znázorněna úvaha o cestě z P do K přes Q výsledné zesílení signálu koeficientem

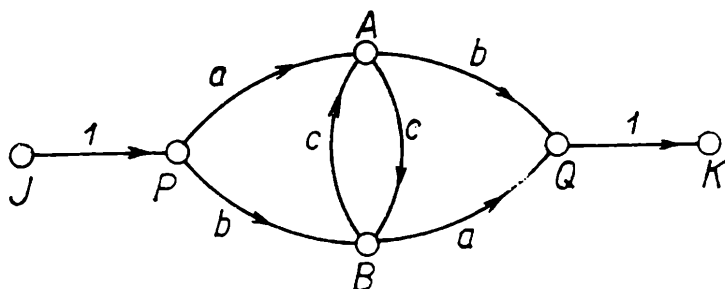
$$0,2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{1 - 0,1} = \frac{2}{3}$$

Protože žádná cesta z K do P ani z K do K přes Q nevede, neobjeví se na obr. 6b žádná větev z K do P ani smyčka u uzlu K . Graf na obr. 6b zjednodušíme nejprve na graf s jednou smyčkou s koeficientem

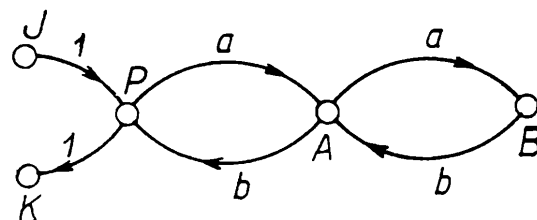
$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$$

a ten pak na graf (obr. 6c) s jednou hranou, která má koeficient

$$1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{11}{12}} = 8$$



Obr. 9



Naše „zamotaná“ síť z obr. 6a tedy zesiluje signál celkem *osmkrát*, ačkoliv na větvích směřujících viditelně od leva do prava jsou čísla, jejichž součin je roven jen 0,6.

Připomeňme si souvislost grafů signálních toků a soustav lineárních rovnic vyloženou v článku ing. Myslíka. Graf na obr. 6a můžeme popsat soustavou rovnic (a) s proměnnými J, P, Q, K :

$$\begin{array}{ll} P = J + 0,25 P + 3 Q & P = J + 0,25 P + \frac{2}{3} P \\ \text{(a)} \quad Q = & 0,2 P + 0,1 Q \quad \text{(b)} \quad K = \frac{2}{3} P \\ K = & 3 Q \end{array}$$

Soustava (b) popisuje graf na obr. 6b; eliminace uzlu Q v grafu má svůj odraz v eliminaci proměnné Q dosazením $9 Q = 2 P$ z druhé rovnice do první a třetí rovnice. Graf na obr. 6c vyjadřuje, že $K = 8 J$, což je součást řešení soustavy (a) i (b). Tímto řešením je každá uspořádaná čtveřice (J, P, Q, K) , ve které

$$P = 12 J \quad Q = \frac{8}{3} J \quad K = 8 J$$

Při určování toku signálu v uzlu K pomocí grafu se vyhýbáme hledání hodnot ostatních neznámých, zaměřujeme se přímo k stanovení závislosti proměnné K na proměnné J . Grafické řešení je výhodné pro toho, kdo je ovládne spolehlivě, ušetří mu psaní soustav rovnic i jejich řešení či tápavé hledání závislostí jedné proměnné na druhé. (Eliminací uzlů grafu eliminuje proměnné daleko efektivněji.) To jsou hlavní důvody, proč se metoda grafů signálních toků rychle rozšířila mezi techniky asi před dvaceti lety. Tvůrcem této metody je *S. J. Mason* [mejsn], v literatuře se proto grafy signálních toků nazývají *Masonovy grafy*. Pro různé typy úloh v teorii elektrických obvodů se ovšem užívá mnoha speciálních úprav *Masonových grafů*, o kterých jsme zde nehovořili.

Přesvědčte se úpravou grafu na obr. 8, zda tam znázorněná síť zesiluje tok signálu při $a = b = 2, c = 0,5$ celkem 16krát. Obdobně se pokuste

ověřit, zda síť na obr. 9 zesílí tok signálu při $a = 0,8$, $b = 0,6$ celkem 13krát. (Odstraňujte postupně uzly B , A , P v grafu, pro kontrolu napište i příslušné soustavy rovnic a vyřešte je.)

Cvičení

1. Odvoďte obecné vzorce pro výsledné zesílení signálu sítěmi znázorněnými na obr. 8 a 9.
2. Připojte k uzlům A , B na obr. 8 smyčky s koeficienty c a vypočítejte tok signálu v uzlu K této nové sítě.
3. Zvyšte počet „ok“ v grafu na obr. 9 ze dvou na tři, pět, Zapište výsledné toky v uzlu K pomocí složených zlomků.

Zaujímavý jav na kondenzátore

RASTISLAV BANÍK, PF Baňská Bystrica

Ak sa vonkajšou silou zväčší vzdialenosť dosiek nabitého kondenzátora, vzdialujú sa od seba opačné elektrické náboje, vykoná vonkajšia sila vždy určitú prácu $A > 0$. O tomto sa možno experimentálne presvedčiť.

Ak sa oddialením dosiek kondenzátora vonkajšou silou jeho elektrická energia zväčší, je to iste v zhode s tým, čo by sme tu mohli očakávať.

Môže však nastať i taký prípad, kedy sa oddialením dosiek elektrická energia kondenzátora zníži (hoci je práca vonkajšej sily kladná). Keďže v takomto prípade kondenzátoru dodáme určitú prácu, ale jeho energia sa jednako zníži, zdá sa takýto prípad na prvý pohľad nemožným — paradoxným.

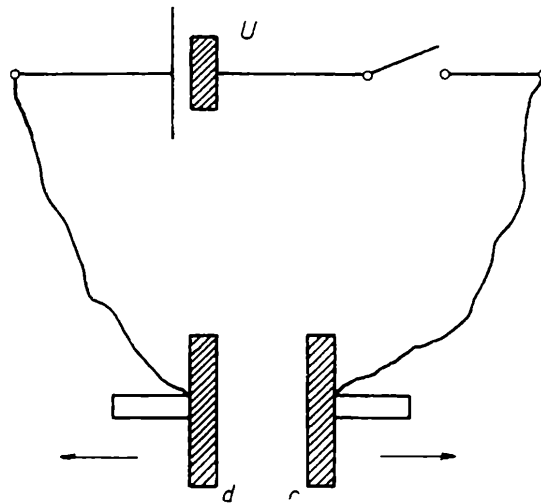
Na dvoch jednoduchých príkladoch si ukážeme, kedy sa oddialením dosiek kondenzátora jeho elektrická energia zvýši a kedy nastane tzv. paradox, pri ktorom sa energia kondenzátora zníži.

Vo fyzike sa na označovanie javov na prvý pohľad nemožných používal termín paradox a je samozrejmé, že tak ako všetky fyzikálne paradoxy, aj tento s kondenzátorom je len paradox zdanlivý.

Prvý príklad: Nabitý doskový kondenzátor má kapacitu C , medzi jeho doskami je vzdialenosť d , priestor je vyplnený vzduchom s relatívnou permitivitou približne rovnou jednej. Kondenzátor je nabitý od akumulátorovej batérie, ku ktorej bol pripojený na napätie U . Vonkajšou silou zväčšíme vzájomnú vzdialenosť dosiek na $n \cdot d$. Vypočítajte prácu vonkajšej sily, ktorá uskutočnila oddialenie dosiek kondenzátora. (Obr. 1.)

Numerické zadanie: $C = 1 \mu\text{F}$, $d = 1 \text{ mm}$, $n = 10$, $U = 1000 \text{ V}$. Pri riešení príkladu berieme do úvahy to, že oddialením dosiek sa kapacita

Obr. 1



kondenzátora n -krát zmenší. Pre kapacitu kondenzátora po oddialení jeho dosiek platí:

$$C' = \frac{1}{n} C$$

Keďže kondenzátor nie je k ničomu vodivo pripojený, nemení sa náboj na jeho doskách, $Q' = Q$ a postupne píšeme

$$C' U' = C U$$

$$\frac{1}{n} C U' = C U$$

Oddialením dosiek sa zmení napätie medzi doskami kondenzátora na:

$$U' = n \cdot U$$

Napätie na kondenzátore sa n -krát zväčší. Elektrická energia kondenzátora mala na začiatku hodnotu

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2$$

a po oddialení dosiek

$$W_e = \frac{1}{2} C' U'^2$$

Keďže

$$C' = \frac{1}{n} C \quad \text{a} \quad U' = n \cdot U$$

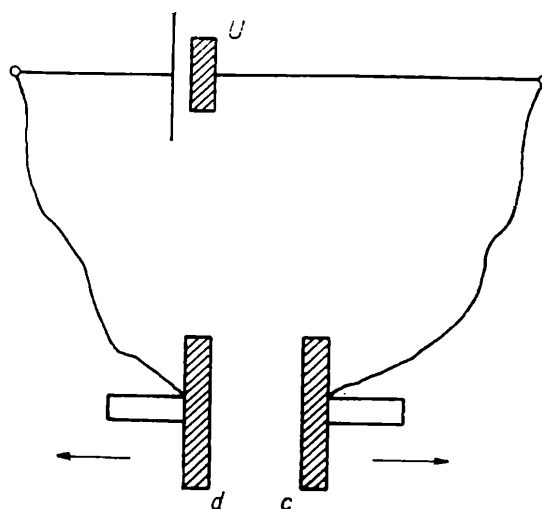
dostávame po dosadení

$$W'_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} C n^2 U^2$$

a ďalej postupne

$$W'_e = n \cdot \frac{1}{2} C U^2$$

$$W'_e = n \cdot W_e.$$



Elektrická energia kondenzátora sa oddialením jeho dosiek n -krát zväčšila.

Pretože tu žiadna iná forma energie a energetickej premeny nevystupuje, môžeme písať pre prácu vonkajšej sily:

$$A = W'_e - W_e,$$

$$A = n \cdot W_e - W_e,$$

$$A = (n - 1) W_e,$$

$$A = (n - 1) \frac{1}{2} CU^2$$

Pri numerickom výpočte by sme dospeli k hodnotám uvedeným v tabuľke:

	Na začiatku	Na konci
Kapacita	$1 \mu\text{F}$	$0,1 \mu\text{F}$
Napätie	1000 V	$10\,000 \text{ V}$
Energia kond.	$0,5 \text{ J}$	5 J
Práca	$4,5 \text{ J}$	

Pri tomto príklade sme nenarazili na žiadnu zdanlivú nehodu. Kondenzátor prijal určitú prácu a svoju energiu zvýšil, pripadá nám to logické, pochopiteľné.

Druhý príklad: Doskový kondenzátor kapacity C je trvale pripojený k akumulátorovej batérii s napätím U . Vzdialenosť medzi doskami je d , priestor medzi doskami vyplňuje vzduch ($\epsilon_r = 1$). Vonkajšia sila zväčší vzdialenosť platnů na $n \cdot d$. Vypočítajte, akú prácu vykoná vonkajšia sila pri tomto oddialení dosiek! (Obr. 2.)

Numerické zadanie: $C = 1 \mu\text{F}$, $U = 1000 \text{ V}$, $d = 1 \text{ mm}$, $n = 10$. Pri tomto príklade zostáva kondenzátor trvale pripojený k akumulátorovej batérii a tak napätie medzi jeho doskami zostáva rovnaké:

$$U' = U$$

Kapacita kondenzátora sa oddialením dosiek zmení na

$$C' = \frac{1}{n} C$$

Pre energiu kondenzátora na začiatku platí

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2$$

a pre energiu po oddialení dosiek

$$W_e = \frac{1}{2} C' U'^2$$

Keďže

$$C' = \frac{1}{n} C, \quad U' = U,$$

píšeme postupne ďalej

$$W_e' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} C U^2,$$

$$W_e' = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} C U^2.$$

$$W_e' = \frac{1}{n} W_e.$$

Vidíme, že energia kondenzátora sa oddialením dosiek n -krát zníži. Zmena energie kondenzátora

$$W_e' - W_e$$

je záporná a neudáva prácu vonkajšej sily. Ak by sme prácu počítali z rozdielu energií kondenzátora

$$A = W_e' - W_e,$$

čo by bolo vo formálnej zhode s postupom pri riešení prvého príkladu, vyšla by nám práca záporná, pretože

$$W_e' < W_e.$$

Výsledok $A < 0$, by hovoril, že vonkajšia sila prácu nekonala, ale ju spotrebovala. A teda, že oddialovanie dosiek kondenzátora sa neuskutočnilo vonkajšou silou, ale že vonkajšia sila len zabraňovala tomuto

oddialovaniu. Znamenalo by to, že elektrickým poľom boli dosky, hoci nesúhlasne nabité, od seba odpuzované, čo nemôže byť pravda.

Experimentom by sme sa mohli presvedčiť, že práca vonkajšej sily je v takomto prípade oddialovania dosiek kondenzátora kladná. V druhom príklade sú kondenzátor a batéria spolu energeticky viazané.

Prácu vonkajšej sily nemôžeme vypočítať len zo zmeny energie kondenzátora. Musíme brať do úvahy aj to, že sa tu mení i energia batérie.

Všimnime si, že elektrický náboj kondenzátora je na začiatku

$$Q = C U$$

a po oddialení dosiek

$$Q' = C' U',$$

pretože

$$C' = \frac{1}{n} C \quad \text{a} \quad U' = U$$

$$Q' = \frac{1}{n} C U$$

$$Q' = \frac{1}{n} Q$$

Oddialením dosiek sa náboj na kondenzátore n -krát zmenšil.

Zmenšil sa o hodnotu

$$Q - Q'$$

Kam odišiel náboj $Q - Q'$, ktorý ubudol na kondenzátore?

Elektrický náboj udaný rozdielom $Q - Q'$ prešiel z kondenzátora nazad na batériu, akumulátorová batéria sa tým zvláštne nabíja, zvyšuje sa jej energia o hodnotu:

$$W = U (Q - Q').$$

Oddialovaním dosiek koná vonkajšia sila prácu, sústave kondenzátor—batéria sa tým dodáva energia. Kondenzátor zmení svoju energiu o hodnotu

$$W'_e - W_e,$$

batéria zmení svoju energiu o hodnotu

$$U (Q - Q').$$

Súčet týchto dvoch energetických zmien je rovný práci, ktorú vykoná vonkajšia sila, takže

$$A = (W'_e - W_e) + U' (Q - Q')$$

Postupnými úpravami dostávame:

$$A = \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{1}{2} C U^2 + \frac{2}{2} U \left(C U - \frac{1}{n} C U \right)$$

$$A = \left(\frac{1}{n} - 1 + 2 - \frac{2}{n} \right) \frac{1}{2} C U^2$$

$$A = \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{2} C U^2$$

Keďže je $\frac{1}{n} < 1$, vidíme, že pre prácu vonkajšej sily vychádza $A > 0$.

Pri numerickom riešení by sme dostali hodnoty zhrnuté v tabuľke:

	Na začiatku	Na konci
Kapacita	1 μF	0,1 μF
Napätie	1000 V	1000 V
Náboj konden.	0,001 C	0,0001 C
Energia konden.	0,50 J	0,05 J
Zmena energie batérie		0,90 J
Práca		0,45 J

Práca vonkajšej sily je kladná, no energia kondenzátora sa znižuje, lebo

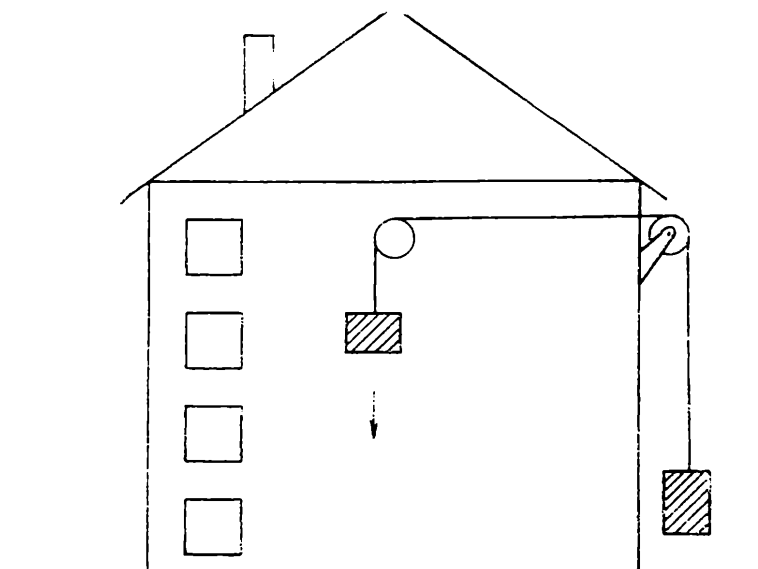
$$W'_e = \frac{1}{n} \cdot W_e,$$

čo sa nám zdalo na prvý pohľad nemožným — paradoxným.

Paradox sa tu stráca vtedy, ak správne chápeme energetickú spätosť kondenzátora s batériou. Bolo by možné spomenúť nejaké mechanické prirovnanie k dokresleniu problematiky.

Vonkajšou silou prenesieme závažie m_1 z tretieho poschodia na prvé, práca vonkajšej sily je pritom $A > 0$. Toto by sa nám tiež mohlo zdať nemožným. Predsa, ak prešlo závažie m_1 z tretieho poschodia na prvé, jeho potenciálna energia sa znížila, ako mohla byť pritom práca vonkajšej sily kladná? Obrátene, ak je práca pri premiestení závažia m_1 kladná, je možné, aby tým závažie m_1 prešlo do nižšieho energetického stavu?

Je to možné, napr. v usporiadaní, aké nám ukazuje obrázok (obr. 3). Závažie m_1 je lankom spojené cez kladky so závažím m_2 umiesteným v inej časti domu. Závažie m_1 a m_2 sú energeticky spojené, viazané prostredníctvom lanka, ktoré nemôžeme nevidieť. Práca vonkajšej sily sa vlastne neodovzdáva len závažiu m_1 , ale sústave tvorenej závažím



m_1 a m_2 . Vonkajšia sila dodá sústave prácu, energia jedného závažia m_1 sa tým síce znižuje, ale energia druhého závažia m_2 , ako aj energia sústavy ako celku sa zvýši. Celková zmena energie sústavy sa rovná práci, ktorú vykoná vonkajšia sila. Existenciu lanka a toho, k čomu ono vedie, aké energetické spojenie predstavuje, nemôžeme nebrať do úvahy.

V príklade s kondenzátorom nemôžeme nevidieť existenciu vodivého spojenia a batérie, ktorá je takto spojená s kondenzátorom. Hoci vonkajšia sila vykonáva prácu na jednej z týchto súčiastok, na kondenzátore, nemôžeme sa naň energeticky pozeráť ako na vec s ničím nič spoločné nemajúcu v prípade, že je vodivo spojený s batériou.

Všetky paradoxy vo fyzike sú len paradoxami na prvý pohľad a pri dôkladnejšom vyšetrení sa strácajú. Jednako predstavujú paradoxy zaujímavé spetrenie pri vyučovaní a pri štúdiu fyziky. Ich rozbor nás učí potláčať formálnosti pri riešení fyzikálnych problémov a vyšetřovať javy dôslednejšie a obozretnejšie. Rozbor paradoxu, tj. zlikvidovanie jeho podstaty, vždy vedie k hlbšiemu pochopeniu veci a k jej trvalejšiemu správne zapamätaniu si.

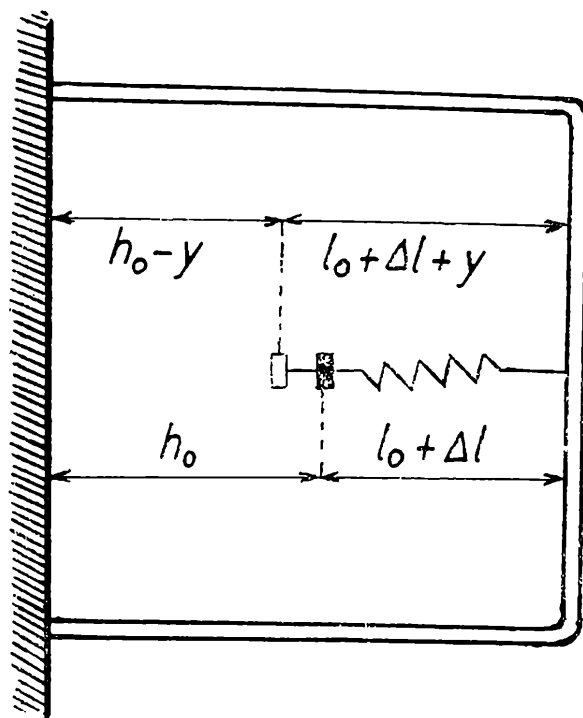
Paradoxy nás učia, že naše urýchlené posúdenie fyzikálneho javu môže byť nesprávne.

Přeměna energie v kmitající soustavě

Dr. OLDŘICH HOUDEK, Jičín

Při studiu kmitajících soustav je významný aspekt energetický a s ním spojený přenos energie v těchto systémech. V tomto článku prostudujeme jednoduchý příklad přenosu a přeměny energie v případě harmonického oscilátoru v tíhovém poli Země. Přitom modelování průběhu energetických změn bylo provedeno pomocí školního analogového počítače AP-S, přičemž k indikaci řešení bylo použito souřadnicového zapisovače Bak II.

Modelem uvažované soustavy může být těleso (hmotný bod) kmitající na pružném vlákně (pružině) zanedbatelné hmotnosti (obr. 1). Za hla-



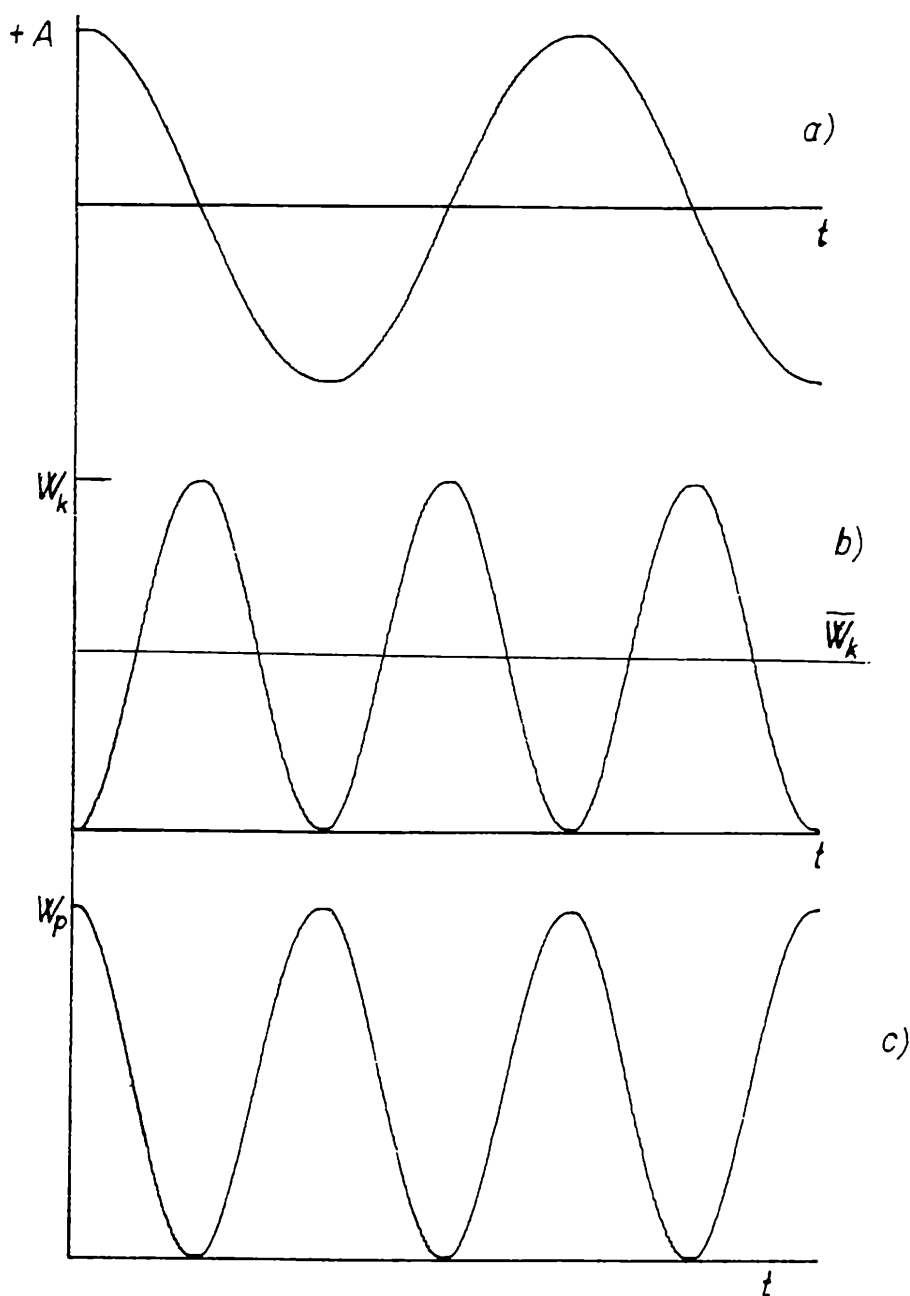
Obr. 1

dinu nulové potenciální energie tíhové byla zvolena rovina desky, ve které je upevněn stojan oscilátoru. Celková energie bude tedy rovna součtu potenciální a kinetické energie soustavy. Přitom potenciální energie má dvě složky. Prvá z nich je elastická energie pružiny a druhá tíhová energie kmitajícího tělesa.

Při řešení problému se po zavedení vztahů pro tuhost pružiny, výchylku a rychlost kmitajícího tělesa, tj.

$$K = m\omega^2 \quad y = A \sin \omega t \quad v = \omega A \cos \omega t$$

postupem známým ze středoškolských učebnic fyziky odvodí pro potenciální a kinetickou energii tyto vztahy:



$$W_p = K \frac{y^2}{2} = \frac{K}{2} A^2 \sin^2 \omega t = W \sin^2 \omega t, \quad (1)$$

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2} A^2 \cos^2 \omega t = W \cos^2 \omega t, \quad (2)$$

přičemž

$$W = W_p + W_k = \frac{1}{2} K A^2.$$

Kvantitativní řešení energetické transformace bylo potom provedeno analogovým počítačem a získáno ve tvaru časové závislosti příslušných veličin (obr. 2). Z hlediska fyziky je zajímavé provést jejich rozbor. Jak je patrné z první části indikace (obr. 2a), řešení vychází z okamžiku,

kdy $y = +A$. Tehdy, jak je zřejmé z další části řešení (obr. 2c), má potenciální energie maximální hodnotu, zatímco kinetická energie má hodnotu nulovou (obr. 2b). V rovnovážné poloze bude tomu právě naopak, tj. maximální hodnotu bude zde mít energie kinetická. Z porovnání jednotlivých řešení plyne, že perioda energetické změny je vzhledem k periodě oscilace poloviční. Vzhledem k přesnosti řešení lze tedy z něho kvantitativně vyvodit, že amplituda $\pm A$ se během periody změní dvakrát, zatímco energie, jejíž velikost je úměrná druhé mocnině amplitudy, na jejím znaménku nezávisí.

Nyní je možno řešení, které bylo získáno počítačem, vyjádřit v příslušných funkčních závislostech. Při použití známých trigonometrických vztahů

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \text{a} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

lze rovnice (1) a (2) zapsat ve tvaru

$$W_p = W \sin^2 \omega t = W \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right), \quad (3)$$

$$W_k = W \cos^2 \omega t = W \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right) \quad (4)$$

Z těchto vztahů je patrné, že oba druhy mechanické energie se mění s frekvencí dvojnásobnou vzhledem k frekvenci oscilací. Za dobu kmitu projde tedy těleso dvakrát rovnovážnou polohou, kde má největší kinetickou energii, a dvakrát body obratu, v nichž je maximální potenciální energie. Dochází proto k vzájemné přeměně mechanických energií s poloviční periodou.

Analýza získaných závislostí potom umožňuje hlubší pochopení studovaného děje. Z rovnic (1) a (2) plyne, že celková energie kmitající soustavy

$$W = W_p + W_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

nezávisí na čase, což je v souladu se zákonem zachování mechanické energie. Naproti tomu rovnice (3) a (4) obsahují jednak člen konstantní $\frac{W}{2}$, jednak člen závislý na čase $\pm \frac{W}{2} \cos 2\omega t$. Snadno lze se přesvědčit, že stálý člen určuje průměrnou hodnotu potenciální a průměrnou hodnotu kinetické energie. Z tohoto poznatku je možno odvodit hodnotu efektivní rychlosti, jestliže srovnáme velikost plochy omezené křivkou řešení a osou časovou s plochou obdélníka o stejné časové základně a výšce rovné střední hodnotě kinetické energie (obr. 2b). Vzhledem k přesnosti řešení získaného počítačem bude platit

$$\frac{mv_{\text{ef}}^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{4} = \overline{W}_k = \frac{W}{2}$$

Odtud potom

$$v_{\text{ef}}^2 = \frac{A^2 \omega^2}{2} \quad \text{a} \quad v_{\text{ef}} = \frac{\omega A}{\sqrt{2}} = 0,707 \, \omega A = 0,707 \, v_{\text{max}}.$$

Zde ωA je maximální rychlost během kmitu. V akustických aplikacích má efektivní hodnota rychlosti stejný význam jako efektivní hodnoty proudu a napětí v elektrotechnice.

Pomocí jednoduchého počítače, kdy k indikaci řešení lze použít místo souřadnicového zapisovače osciloskopu, je možno analogicky studovat přeměny energie i v soustavách složených z více oscilátorů stejně jako v případě oscilátorů vázaných různými druhy vazeb.

Beztížnost v letadle

RNDr. KAREL MIŠOŇ, Praha

Tyto jsou doby, kdy beztížnost byla námětem omezeným na fantastiku literární tvorby nebo na ryze akademické úvahy teoretiků. Vzpomeňme Verneova pojetí letu kosmického projektilu místem s vyrovnanou zemskou a měsíční přitažlivostí. Kdekdo dnes ví, že beztížnost by byla provázela trojici dobrodružných cestovatelů během celého letu! Na místě dobových představ ilustrátorů o poměrech v ocelové Columbianě sledujeme televizní přenosy z kosmických lodí a odborný i denní tisk přináší snímky výzkumníků vznášejících se volně v letadlech simulujících beztížný stav.

Letecká technika dovoluje — alespoň krátkodobou — realizaci beztížného stavu s celkem bezpečnou možností experimentálního studia. Fyzikálně jde o vyloučení zrychleného pohybu (působeného tíhovým polem) vzhledem k pozorovacímu prostředí, aniž se uplatňují vazbové síly. Náznorněji: Bude-li volně pohyblivá laboratoř podléhat jen silovému působení tíhového pole stejně jako předměty v ní umístěné, bude vzájemné zrychlení předmětů vzhledem ke stěnám laboratoře nulové. Gravitační síla je vyrovnána silou ze setrvačnosti. Předmět ponechaný sám sobě se v laboratoři — rozuměj vzhledem k jejím stěnám — pohybuje rovnoměrnou rychlostí včetně možné rychlosti nulové. Její nulová hodnota odpovídá volnému vznášení v prostoru laboratoře. Tak jest chápat beztížnost, aniž by bylo třeba vylučovat existenci tíhového pole.

Beztížný stav bývá označován jako *agravický*, stav se zmenšenou (zvýšenou) gravitací jako *subgravický* (*přetížení*). Z repertoáru černého humoru sem spadá výrok: pád s mrakodrapu není nebezpečný (*pokud se neuplatňují vazby, padající je v beztížném stavu*); nebezpečí je toliko v rychlé změně pohybového stavu (*uplatnění vazeb*).

Z několika (ať už jen projektových nebo také vyzkoušených) pozemských možností realizace beztlžného stavu přihlédneme k nejefektivnější: parabolické dráze letadla odpovídající šikmému vrhu vzhůru v homogenním gravitačním poli (*parabolická balistika*). Letadlo pak odpovídá (alespoň velmi aproximativně) „volně pohyblivé laboratoři podléhající jen silovému působení tíhového pole“. Podle prvního Keplerova zákona by letadlo při vypnutých motorech opisovalo v zemském gravitačním poli eliptický oblouk (*terestrická balistika*). Pro letové rozsahy, v nichž se směr ani velikost tíhového zrychlení prakticky nemění, lze okolí apocentra eliptické dráhy nahradit drahou parabolickou, odpovídající šikmému vrhu v homogenním poli.

Známy výraz pro dobu výstupu šikmého vrhu vzhůru (označení patrně z obrázku) $(v_0 \sin \alpha)/g$ dává pro dobu T parabolického letu, za kterou se objekt startující v o vrátí do úrovně bodu o ,

$$T = \frac{2}{g} v_0 \sin \alpha .$$

Minimální letová rychlost (ve vrcholu paraboly) je rovna (během pohybu stálé) horizontální složce rychlosti

$$v_0 \cos \alpha \quad (*)$$

Efektivnost pokusu vyžaduje co největší hodnoty T . Při dané počáteční letové rychlosti v_0 (řekněme *naváděcí rychlosti parabolického letu*) to znamená maximalisovat $\sin \alpha$. Největší hodnota pro $\alpha = 90^\circ$ (vrh svislý vzhůru) však vede k nulové horizontální složce (*) (rychlosti ve vrcholu paraboly), zatímco ovladatelnost letadla vyžaduje jistou dolní hranici rychlosti v_m . Index m připomíná na požadavek manévrovatelnosti. Při technicky předepsaných hodnotách: co největší v_0 a co nejmenší v_m je úhel *naváděcího stoupání* α určen požadavkem

$$\cos \alpha = v_m/v_0 ,$$

takže pro trvání experimentu vychází

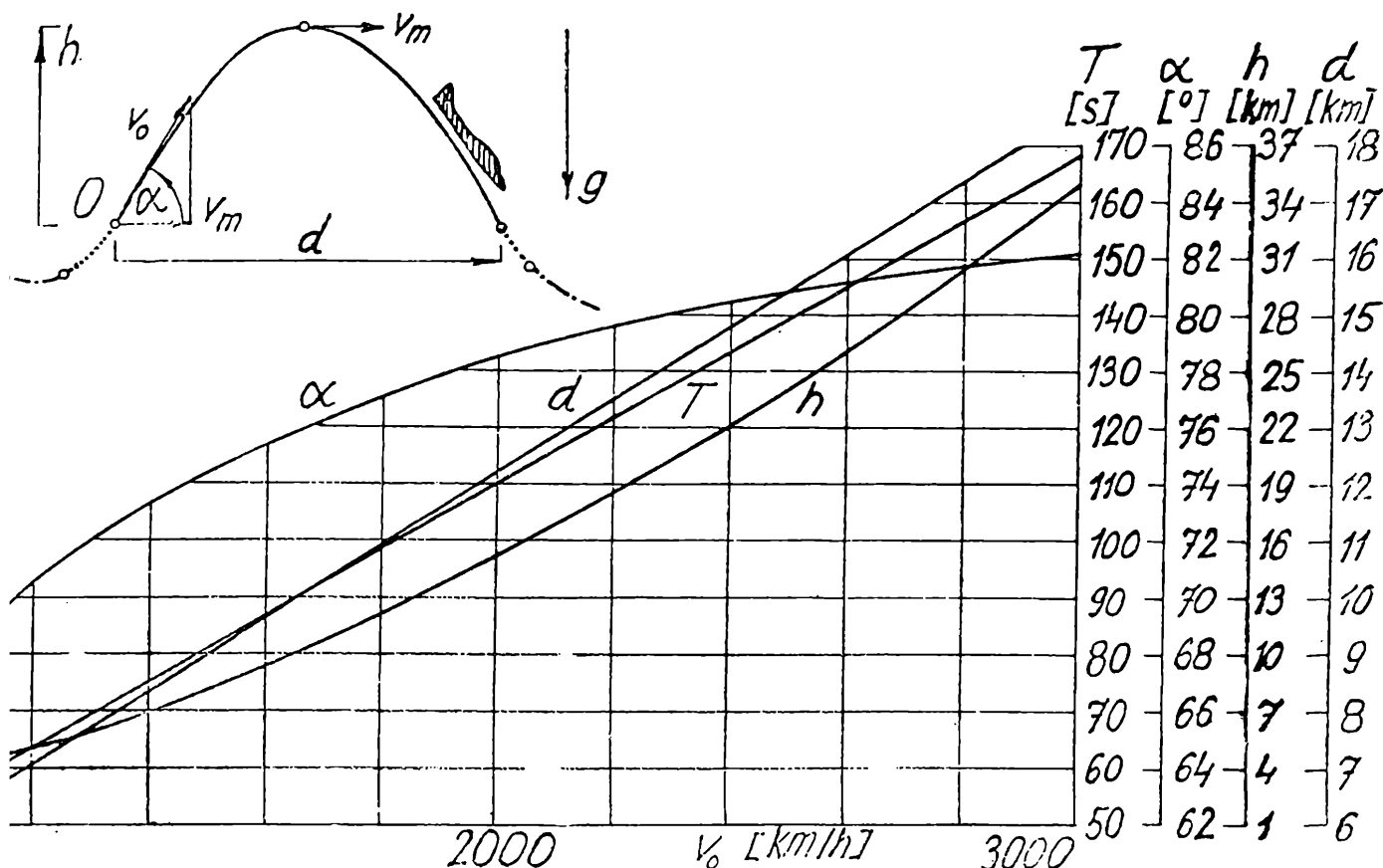
$$T = \frac{2}{g} \sqrt{v_0^2 - v_m^2} .$$

S touto hodnotou vyjádříme výšku parabolického oblouku

$$h = \frac{1}{2} g \left(\frac{T}{2} \right)^2 = \frac{1}{2g} (v_0^2 - v_m^2)$$

a horizontální dálku parabolické dráhy

$$d = v_m T = \frac{2}{g} v_m \sqrt{v_0^2 - v_m^2} .$$



V zájmu konkretizace představ přihlédneme k číselným hodnotám při různých naváděcích rychlostech parabolického letu

$$v_0 \in \langle 1000, 3000 \rangle \text{ km/h}$$

a při stálé minimální letové rychlosti

$$v_m = 400 \text{ km/h.}$$

Připojený graf při čtení naváděcí parabolické rychlosti v_0 z vodorovné osy vede přes křivky T , α , h , d (v_m izoplety) ke stejně označeným hodnotám na čtveřici svislých stupnic. Tak pro $v_0 = 2000 \text{ km/h}$ nalezneme: trvání agravitačního letu $T \approx 110 \text{ s}$, naváděcí úhel $\alpha \approx 78,5^\circ$, parabolickou výšku $h \approx 15 \text{ km}$ a horizontální dálku letu $d \approx 12,3 \text{ km}$. Připojený schematický obrázek vyznačuje beztlížný let plnou čarou, let s normálním tíhovým zrychlením je tečkován a letové úseky za přetížení jsou čerchovány.

Jako snadné numerické cvičení ověřte oprávněnost zjednodušujícího užití parabolické balistiky na místě balistiky terestrické. Vypočtete si proto úhel sevřený vektory tíhového zrychlení při maximální zahrnuté hodnotě $d = 18 \text{ km}$ a rozdíl modulů tíhových zrychlení odpovídajících nejvyšší zahrnuté hodnotě $h = 37 \text{ km}$. Jak se přitom projeví změna výšky navedení, třeba 5000 m resp. 10 000 m nad zemským povrchem?

Spojený ústav jaderných výzkumů v Dubně (SSSR)

Ing. ZDENĚK JANOUT, CSc., FJFJ ČVUT Praha

Začátkem padesátých let začaly dosahovat finanční náklady potřebné pro jaderný výzkum takových částek, že si výstavbu potřebných unikátních zařízení, jakými jsou např. urychlovače částic, nemohla dovolit většina států světa. Jako příklad uveďme finanční náklady vynaložené na stavbu protonového synchrotronu urychlujícího protony do energie 6 GeV, vybudovaného v Berkeley (USA) v letech 1949–1954. Připomeňme, že na tomto urychlovači byl v roce 1955 objeven antiproton a později i antineutron. Finanční náklady pro stavbu urychlovače činily okolo 30 milionů dolarů. Roční rozpočet laboratoře, která vlastní tento urychlovač, činí 5,6 milionů dolarů; z této částky jsou 40% hrazeny provozní náklady urychlovače a 60% jsou hrazeny náklady vynaložené na vlastní experimentální výzkum. Je zřejmé, že stavba urychlovačů, urychlujících částice na ještě vyšší energie, vyžaduje ještě větších finančních nákladů. V tab. 1 jsou uvedeny náklady vynaložené na výstavbu některých velkých urychlovačů, vybudovaných během posledních dvaceti let.

A tak tedy hlavně ekonomická situace přinutila vlády států ke spojení finančních prostředků a k vytvoření mezinárodních atomových center financovaných několika státy. Téměř ve stejnou dobu — v polovině padesátých let — vznikají v Evropě dva mezinárodní ústavy. Ve Švýcarsku, nedaleko Ženevy, byl vybudován ústav, který byl nazván Evropským centrem jaderného výzkumu (CERN — Centre Européen pour la Recherche Nucléaire). Druhý ústav — Spojený ústav jaderných výzkumů (dále jen SÚJV) byl vybudován v SSSR v městě Dubně. Později vznikl další ústav: Mezinárodní centrum pro teoretickou fyziku v Terstu. V poslední době, kdy se stal experimentální výzkum v oblasti fyziky elementárních částic tak náročným, že se ho musí účastnit velké kolektivy fyziků (10 až 20 pracovníků), dochází k široké mezinárodní spolupráci mezi velkými národními laboratořemi. Například skupiny fyziků z CERN a Saclay (Francie) uskutečňují ve spolupráci se sovětskými fyziky měření na protonovém synchrotronu v Serpuchově (SSSR) a sovětští fyzikové ve spolupráci s americkými fyziky provádějí měření na dosud největším protonovém urychlovači (200 GeV) v Batavii, ležící nedaleko Chicaga v USA. Pravděpodobně tento proces je zárodečným projevem mezinárodní spolupráce ve vědě, který se v příštích letech ukáže nezbytným i v dalších vědních oborech.

SÚJV byl založen 26. března 1956 z podnětu vlády SSSR. Dohodu o založení ústavu podepsalo 11 států, později se ještě připojila Vietnamská lidová republika. V současné době, po odchodu Albánie a Číny,

jsou členy SÚJV tyto státy: BLR, MLR, NDR, KLDK, Mongolská republika, PLR, RSR, SSSR a ČSSR. Prvním ředitelem ústavu byl zvolen prof. D. I. Blochincev a jako jeho zástupci byli zvoleni prof. V. Votruba (ČSSR) a prof. Danysz (PLR). V témže roce (23. září 1956) byl schválen Statut SÚJV. V Statutu je konstatováno, že „veškerá činnost ústavu přispěje k využití jaderné energie pouze pro blaho všeho lidstva“

Podle podepsané dohody každý členský stát přispívá ročně na vědecko-výzkumnou činnost ústavu finanční částkou, jejíž výše byla určena podle ekonomických možností jednotlivých členských zemí. Příspěvky se pohybují od čistě symbolických (0,05 %) do desítek procent. Příspěvek SSSR činí téměř 50 %. Náklady spojené s životem města Dubny, kde žijí pracovníci ústavu, plně hradí sovětská vláda. Bez ohledu na výši členských příspěvků jsou všechny členské státy v SÚJV rovnoprávné jak v otázkách řízení ústavu, tak i v účasti na jeho vědecké činnosti. V roce 1972 činil finanční rozpočet SÚJV 34 milionů rublů (viz Ročenka Dubna 1972).

SSSR daroval nově vzniklému ústavu pro začátek dva již postavené ústavy v Dubně: Ústav jaderných problémů a Ústav vysokých energií, které do té doby spravovala AV SSSR. Bylo proto možno bezprostředně přikročit k vlastní vědecké práci a neztrácet čas s výstavbou nutných zařízení, což by zdrželo výzkum asi o pět let. První vědecké práce byly publikovány již v listopadu 1956. Postupem času vedle těchto ústavů vznikly další laboratoře SÚJV

Nejvyšším orgánem ústavu je Výbor vládních zástupců členských států. Československým vládním zástupcem je již dlouhou dobu akademik Kožešník. Výbor se schází zpravidla jednou ročně a řeší nejdůležitější otázky spojené s existencí a dalším rozvojem ústavu. Například schvaluje roční rozpočet ústavu, výši členských příspěvků, perspektivní plány výzkumu a výstavby atd. Pomocným orgánem výboru je Finanční výbor, jehož členy jsou zástupci všech členských zemí. Otázky bezprostředně související s vědeckou činností řeší Vědecká rada (dále jen VR) ústavu. Členy VR jsou přední vědečtí pracovníci z členských zemí. VR zasedá dvakrát ročně; hodnotí vědeckou činnost ústavu, schvaluje plán dalšího výzkumu, projednává možnosti mezinárodní spolupráce atd. VR předkládá Výboru vládních zástupců návrhy a doporučení v otázkách plánování vědeckého programu, financování výzkumu, stavby nových objektů, zařízení atd. Speciálními poradními orgány, jejichž působnost je omezena pouze na určitou oblast, jsou výbory pro bublinkové a jiné komory, pro fotoemulsní techniku, pro neutronovou fyziku a pro jadernou fyziku. Jejich úkolem je koordinovat vědeckou činnost SÚJV s činností národních laboratoří členských zemí.

Ústav je nepřetržitě řízen ředitelstvím ústavu, které zodpovídá za svoji činnost vládám členských zemí. Ředitel ústavu se volí na tři roky, jeho dva zástupci na dva roky. Ředitel ústavu jmenuje administrativního

ředitele, který vede administrativní a hospodářské oddělení. Do těchto funkcí jsou voleni nejlepší specialisté z členských zemí. V současné době je ředitelem ústavu akademik N. N. Bogoljubov, jeho zástupci akademik Lanius (NDR) a prof. ing. Č. Šimáně (ČSSR). Kromě prof. Šimáně byli z československých odborníků do funkce zástupce ředitele ústavu zvoleni: v roce 1956 prof. V. Votruba a v roce 1965 prof. I. Úlehla.

Podle charakteru výzkumu je ústav rozdělen do šesti laboratoří: Laboratoř vysokých energií (LVE), Laboratoř jaderných problémů (LJaP), Laboratoř jaderných reakcí (LJaR), Laboratoř neutronové fyziky (LNF), Laboratoř teoretické fyziky (LTF), Laboratoř výpočtové techniky a automatizace (LVTA). Organizační struktura SÚJV je ukázána na obr. 1. Čtyři z těchto laboratoří (LVE, PJaP, LJaR, LNF) představují vlastně svým rozsahem velké ústavy. Činnost každé laboratoře je řízena ředitelstvím laboratoře. Některé z laboratoří mají svoji VR. Všechny funkce v laboratořích jsou volitelné.

Stručná charakteristika laboratoří :

LVE

je největší laboratoř SÚJV a je vzdálena 3 km od ostatních laboratoří ústavu.

Ředitel: prof. A. M. Baldin.

Základní experimentální zařízení: synchrofázotron urychlující protony na energii 10 GeV. Některé parametry urychlovače: průměr prstencového magnetu je 60 m, hmotnost magnetu 36 tisíc tun. Intenzita protonového svazku je 2×10^{11} protonů/impuls při opakovací frekvenci 7 cyklů za minutu. Čas potřebný k urychlení protonů do 10 GeV je 3,3 s. Příkon urychlovače je 150 MW, což je téměř 1/4 elektrického výkonu Dněprostroje.

Základní směry výzkumu (výzkum se provádí v oblasti energií větších než 1 GeV):

Studium: — struktury elementárních částic a jejich vlastností,
— rezonančních stavů částic,
— procesů silné, elektromagnetické a slabé interakce.

Některé dosažené výsledky

- v r. 1960 byla objevena nová částice antisigma minus hyperon,
- byla experimentálně dokázána existence reálné části amplitudy pružného rozptylu (p, p), (π , p), (d, p),
- byla objevena řada rezonančních stavů částic a prostudovány jejich vlastnosti,
- experimentálně byly objeveny nové typy rozpadu K_2^0 mezonu.

(Pokračování)

různé

Hrst vzpomínek

JOSEF KOTYK, Pardubice

Ó, jiskru svého mladistvého vznětu,
vy mrtví, dejte nám!

Svatopluk Čech.



Je krásným rysem vzdělaného člověka, že dovede ctít vědecké pracovníky, kteří reprezentují kulturní výši jeho národa. V dějinách našeho národa a české vědy zůstane zachována trvalá památka a nehynoucí čest profesorům Karlovy university v Praze Dr. KARLU PETROVI a DR. FRANTIŠKU ZÁVIŠKOVÍ. Světovou úroveň jejich vědeckých prací připomíná mj. také poštovní známka s portréty obou badatelů (viz obr.), vydaná roku 1962 k 100. výročí založení Jednoty čsl. matematiků a fyziků. Památná výročí, jež si připomínáme letos, totiž 25 let od úmrtí Petrova a 30 let od smrti Závistkovy, jsou bohatým zdrojem vzpomínek jejich vděčných žáků i podnětem k napsání těchto řádků.

* * *

Dr. KAREL PETR (1868—1950) působil na Karlově universitě od roku 1903 jako profesor matematiky. Jeho vědecká činnost je velmi rozsáhlá. Dotýká se celé řady oborů matematické vědy a v mnohých přinesla nové a vynikající výsledky trvalé ceny. Všeobecně uznáván je velký vědecký význam Petrových prací z analytické teorie číselné, z teorie algebraických forem a vyšší analýzy. Řada prací se vztahuje ke kořenům dané rovnice algebraické. V mnohých svých pracích užíval Petr s oblibou a velkým úspěchem determinantů. Značnou pozornost věnoval také numerickým výpočtům a příslušným vhodným metodám. O veliké šíři jeho zájmů svědčí také četné práce z geometrie.

Učebnice prof. Petra (O rovnicích diferenciálních, 1911; Počet integrální, 1915; Počet diferenciální, 1923) jsou originálně pojaté a vzorně přesné; v mnohém předčí nejlepší učebnice jiných národů. Roku 1925 vyšla tiskem přednáška „Bernard Bolzano

a jeho význam v matematice“, kterou Petr proslovil jako nastupující rektor Karlovy university; svědčí o Petrově hlubokém zájmu filosofickém a o hlavním motivu jeho vědecké činnosti: o jeho snaze poznat a hájit pravdu.¹⁾

Petrovu snahu vychovávat mládež k přesnému logickému myšlení dokládají jeho vlastní slova: „Nepopírám, že každému člověku je zpravidla příjemnější málo myslet (nebo vůbec nemyslet), než trochu namáhavěji myslet. Také pro získání vědomostí platí však staré přísloví: „Jak nabyt, tak pozbyt.“ Zvláště studující musí proto mít stále na vědomí přesnost, s níž pracují, a vyhledávat každou příležitost, aby zesílili svou inteligenci. Povrchnost v myšlení považují pro národy, jejichž jazyk má tak malé rozšíření jako náš, přímo za nebezpečí, jež by je neodvratně vedlo k duchovní i materiální závislosti na národech vyšší vědecké úrovně.“

Jméno profesora KARLA PETRA bude vždy uváděno mezi předními českými vědeckými pracovníky, kteří svou záslužnou badatelskou činností dávají našemu malému národu z kulturního stanoviska právo k samostatnosti.

* * *

Dr. FRANTIŠEK ZÁVIŠKA (1879—1945) působil na Karlově universitě od roku 1906 jako profesor teoretické fyziky. Také on spojoval ve své osobnosti s vzácnou harmonií vědecké bádání s dokonalým uměním pedagoga. Nejlepším osobním příkladem, svědomitostí, radou i pomocí usiloval o to, aby hojné vědomosti i matematický způsob myšlení, přesnost a logická kázeň pronikly co nejvíce do srdcí posluchačů a jimi do naší národní vzdělanosti.

Vědecké práce prof. Závišky se týkají obtížných problémů fyziky experimentální i teoretické (šíření elektromagnetických vln, studia éteru, záření Röntgenova, tepelného záření, problematiky Einsteinovy teorie relativity²⁾ aj.) a reprezentují vysokou úroveň naší fyziky i na mezinárodním fóru; také krystalová optika a hydrodynamika náležely k oborům vědeckého zájmu Záviškova. Knižní díla prof. Závišky (Einsteinův princip relativnosti a teorie gravitační, 1925; Mechanika, 1933; Termodynamika, 1942) vynikají mistrovstvím

¹⁾ Bernard Bolzano (1781—1848) se svými pracemi řadí na přední místo v moderním bádání matematickém. Bolzano daleko předstihl svou dobu v přesném pojetí fundamentálních pojmů matematické analýzy. V podrobnostech viz autorův článek „Bernard Bolzano“ v ROZHLEDECH roč. 27, čís. 5, str. 129 až 133.

²⁾ Záviška byl nadšeným stoupencem Einsteinovy teorie relativity. Svému zanícení pro pravdu a pokrok i vědeckému přesvědčení dovedl dát ostrý průchod v mnohých sporech, jež vedl s jejími odpůrci o správnost Einsteinových názorů. Viz např. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. LIII, str. 319 až 324, str. 401 až 404 aj.

slohu a pečlivostí výkladu; došla proto veliké obliby u čtenářů a stala se trvalou ozdobou jejich knihoven.

Do bohaté tvůrčí činnosti profesora Závišky zasáhla nelítostně válka. Dne 21. ledna 1944 byl Záviška zatčen a odvezen nejprve do pověstného Petschkova paláce, potom na Pankrác, do Brna, posléze do koncentračních táborů v Mauthausenu a Osterode (Harz), kde toužebně očekával v roce 1945 své vysvobození. Dne 6. dubna 1945 byl tábor evakuován. Teprve dne 15. dubna 1945 po několikadenním pochodu hladu a smrti, stížen úplavicí a k smrti vyčerpan, dostal se profesor Záviška do rukou Američanů a do nemocnice v Gifhornu, kde v krátké době dotrpěl. Zemřel dne 17. dubna 1945. Daleko od domova, v nevlídné cizí zemi, došel po nelidských a nevylicitelných útrapách věčného klidu vzácný člověk, který přinesl oběť tak velikou.

Je tragické, že badatel tak schopný zemřel v posledních dnech války, po jejímž ukončení a vítězství pravdy a spravedlnosti, v něž vždy pevně věřil, chtěl svému milovanému národu prokazovat vědeckou činností další neocenitelné služby. Jméno profesora FRANTIŠKA ZÁVIŠKY zůstane proto trvale zapsáno v dějinách českého národa, jenž zachová svému významnému vědci a mučedníku za osvobození českého lidu světlou památku.

* * *

Verše z básně Svatopluka Čecha „MRTVÝM VLASTENCŮM“, jež jsem úvodem předeslal, vyznívají našimi vzpomínkami v toužebné přání vzdáti ČEST MRTVÝM VLASTENCŮM nadějným očekáváním, že z řad naší studující mládeže vyroste českému národu mnoho vzácných vědeckých pracovníků a obětavých vlastenců charakteru Petrova a Záviškova.

Euklides Danicus

STANISLAV HORÁK, Praha

V německém časopisu Alpha (roč. 1974, č. 2) byl uveřejněn zajímavý článek s nadpisem: Der „Euklides Danicus“ von Mohr. Poněvadž jsem přesvědčen, že zaujme i čtenáře Rozhledů, uvedu zkráceně jeho obsah.

Eukleidovské konstrukce jsou takové, které lze provést kružítkem a pravítkem. Přitom kružítko používáme jedině k tomu, abychom narýsovali kružnici daného středu a procházející daným bodem (nebo daného poloměru). Pravítka používáme pouze k narýsování přímky, jejíž dva body jsou dány. Pravítka tedy používáme k tomu, abychom dva různé body spojili přímkou. Při eukleidovských konstrukcích získáváme bod jako průsečík a) dvou přímek, b) přímky a kružnice, c) dvou

kružnic. Podle toho konstrukce bodu, získaného jako průsečík kružnice s elipsou, není eukleidovská. Konstrukce tečny z bodu ke kružnici získaná tak, že přiložíme pravítko k bodu a kružnici, není také eukleidovská, neboť se tu použilo pravítka jinak, než dovolují eukleidovské konstrukce. (Připouštíme však, že to může být přesná konstrukce.)

Lorenzo Mascheroni (Maskeroni) dokázal, že všechny eukleidovské konstrukce se dají provést pouhým kružítkem. (Mascheroni žil v letech 1750 až 1800. Byl řádovým mnichem a učil matematice na padovské univerzitě.) Přirozeně, že v jeho úlohách — říkáme jim Mascheroniho — je řeč i o přímkách, ale ty se nerýsují. Rýsují se jen kružnice (kruhové oblouky). Přímka se považuje za určenou, jsou-li známy její dva různé body. Bod je v Mascheroniho úlohách určen jako průsečík dvou kružnic. Jestliže se např. hledá průsečík dvou různoběžek, z nichž každá je dána dvěma různými body, pak v Mascheroniho řešení jej dostaneme jako průsečík dvou kružnic.

Mascheroni svůj objev vydal knižně r. 1797 pod názvem „La geometria del compasso“. Snadno si domyslíme, že tato práce vzbudila v tehdejší vědecké světě velkou pozornost.

Tenkrát se však nevědělo a dosud je velmi málo známé, že Mascheroniho konstrukce byly zveřejněny již 123 let před vyjitím „La geometria del compasso“. Popsal je dánský matematik Georg Mohr, který se narodil r. 1640 v Kodani. Za vzděláním pobyl několik let v Anglii, Francii a Holandsku. Po návratu z ciziny žil nějaký čas ve své vlasti, potom přesídlil do Holandska, kde r. 1697 zemřel.

Mohr napsal řadu prací, z nichž se nám dochovalo velmi málo. V roce 1672 (ještě za pobytu v Dánsku) vydal knihu, jejíž titul byl „Euklides Danicus“ (Jak bylo tehdy zvykem, následoval po hlavním titulu sáhodlouhý podtitul.) A právě v tomto díle popisuje Mohr konstrukce, kterým nyní říkáme Mascheroniho. Nepřízní osudu - snad v tom vykonal své i nevhodně zvolený titul knihy - se stalo, že kniha upadla v úplné zapomenutí. Byla objevena náhodou v r. 1928, kdy ji v knihkupectví koupil jeden student a ukázal ji svému profesorovi na kodaňské univerzitě. Ten ji s velkým zaujetím přečetl a napsal o ní recenzi. A ještě roku 1928 byla kniha znovu vydána kodaňskou akademií v dánském jazyku.

Mascheroniho konstrukce nemají nějaký zvláštní význam, i když se jim nedá upřít určitá zajímavost. Jejich zapomenutí na 123 roků tedy nemohlo přibrzdit prudký rozvoj matematiky v 18. století

Pro zpestření obsahu Rozhledů se občas vyskytne i zde nějaká Mascheroniho úloha. Posledně to bylo v článku doc. O. Setzra, Dovedete sestrojit čtverec pouhým kružítkem? (Roč. 52, str. 319.) A aby čtenáři nevyšli naprázdno, končím úlohou: Je dána úsečka AB (tj. jsou dány body A , B , které však nejsou spojeny úsečkou). Na přímce AB sestrojte užitím pouhého kružítko bod C tak, aby $BC = 2 \cdot AB$. (Sestrojíme jen bod C , ale přímku nerýsujeme.)

Krátké texty o logaritmech

Dr. J. ŠEDIVÝ

První logaritmické pravítko sestrojil londýnský profesor *Gunter* v letech 1620—23; jeho pravítko mělo jen jednu stupnici, a proto se při práci s ním užívalo i kružítko k přenášení délek. *W. Outhred* zdokonalil r. 1633 logaritmické pravítko tím, že užil dvou stupnic, které se po sobě posouvaly; dnešní tvar logaritmického pravítka pochází od matematika *Wainsgata*. Jezdcem vybavil pravítko až r. 1851 francouzský dělostřelecký důstojník *Maniheim*. K všeobecnému rozšíření logaritmického pravítka došlo koncem 19. století, kdy se stalo pomůckou techniků ve výrobě.

John Napier (nepje), autor díla o logaritmech, byl lordem z Merchistonu ve Skotsku. Žil v letech 1550—1617, kromě studijní cesty po kontinentu (1566—71) neopustil britské ostrovy a žil převážně samotářsky na svém zámku. Zabýval se zejména trigonometrií a budoval systém jejich poznatků. Obtížnost trigonometrických výpočtů ho přivedla k úsilí o zjednodušení výpočtů; počítání s logaritmy bylo jedním z prostředků, které navrhl.

Slovo *logarithmus* je utvořeno z řeckých slov *logos* (= poměr) a *arithmos* (= číslo); objevuje se poprvé v názvu Napierova díla „Popis obdivuhodné tabulky logaritmů“ z r. 1614. V této práci jsou na 90 stránkách tabulky osmimístných hodnot logaritmů goniometrických funkcí; dílo obsahuje i tabulky hodnot sinu, kosinu, tangenty, a to po jedné minutě od 0° do 90°. Obdivuhodná práce!

Tzv. přirozené logaritmy nejsou dílem Johna Napiera; ten se ani otázkou základu logaritmů nezabýval. Hledáme-li však, kterému číslu přiřazuje Napier *logarithmus* rovný jedné, najdeme hodnotu

$$(1 - 10^{-7})10^7$$

jež se přibližně rovná e^{-1} . První tabulky přirozených logaritmů (se základem e) vydal r. 1619 anglický matematik *Spadell* v práci „Nové logaritmy“

„*Logaritmy prodlužují život astronomů*“, je *Laplaceův* výrok. Slavný astronom *Tycho de Brahe* (1546—1601) se prý v Praze dozvěděl už r. 1594 od nějakého Skota, že J. Napier vypracovává tabulky logaritmů (dvacet let před jejich vydáním!). *Tychonův* nástupce J. *Keppler* využíval již logaritmů při astronomických výpočtech, dokonce sám vydal r. 1624 dílo o počítání s logaritmy.

V Praze vydané tabulky logaritmů zpracoval švýcarský matematik *Joost Bürgi* (1552—1632); vytištěny byly sice až r. 1620, ale byly vytvořeny v letech 1603—11. Kniha „Aritmetické a geometrické tabulky

posloupností“ má červený a čierny tisk; Bürgi hovořil jen o červených a černých číslech, jde však o přirozené logaritmy a o čísla, jimž tyto logaritmy přísluší. Právem je tedy J. Bürgi považován za nezávislého tvůrce logaritmických tabulek (vedle J. Napiera).

Dekadické logaritmy se připisují Henry Briggsovi (1556—1630), který vydal první tabulku těchto logaritmů v r. 1617, a to čtrnáctimístné (!) logaritmy čísel od 1 do 1000. Samotnou ideu však vyslovil J. Napier, kterého H. Briggs navštívil aspoň dvakrát v letech 1615 a 1616 a diskutoval s ním o realizaci záměru. H. Briggs byl profesorem geometrie na Greshamově koleji v Londýně, o počítání s logaritmy napsal rozsáhlou práci „Logaritmická aritmetika“, jež byla vydána r. 1624.

Za dejinami matematiky

DUŠAN JEDINÁK, gymnázium Topoľčany

„Ako dlho budú ešte musieť mladí ľudia celé dni počúvať a bezhlavo opakovať? Kedy sa budú môcť zamyslieť nad horou vedomostí, usporiadať si v duchu kopu izolovaných poučiek, výpočtov bez akýchkoľvek súvislostí? Nebolo by výhodnejšie vyžadovať od žiakov metódy a úvahy, ale v najjednoduchšej a najplodnejšej forme? Nie, vyučujú sa starostlivo oklieštené teórie, nabité zbytočnými úvahami, a na najjednoduchšie a najskvelejšie algebraické poučky sa prasto zabúda.“

„Tvrdé“ slová aj na dnešné dni, v ktorých modernizácia vyučovania matematiky robí veľké kroky vpred. Ich autor, rebel nielen v matematike, Evariste Galois, ich napísal v roku 1831 do časopisu La Gazette des Ecoles. Až dodnes znejú svojím mnohoznačným echom.

Nás však zaujíma hodnota poznávania vývoja matematiky a cena znalostí prostredia a ľudí, ktorí matematiku „robili“. V čase čítania románov a dobrodružnej literatúry je pre nás priam ideálna knižka „Evariste Galois“ od L. Infelda. Strhujúce životné osudy mladého francúzskeho republikána, autora úvodnej „rebelie“ nášho článku, sú ukážkou nielen temperamentného spôsobu života tohto matematika, ale aj úvodom do sveta zjednocujúceho pohľadu teórie grúp, ku ktorému E. Galois, aj za krátky životný čas, tak podstatne prispel.

Skoro vždy sme sa stretali s matematikou cez čísla. Dnes vieme, že pre matematiku je pojem čísla len jedným z mnohých podstatných, na dlhej ceste vývoja tejto vedy však určite najstarším. O tom, ako ľudská myšlienka spracovávala svoje úsudky o počte prvkov, o tom ako prerastala číselnými obormi, aby po vyčíslení javov statických a konštantných, povzbudzovaná praktickým použitím, zaútočila na dianie

v pohybe a poznala zákonitosti dynamiky, o tom, ako vedela zaznamenať a predpovedať zmenu, riadiacu sa podľa prírodných zákonov, sa dozvedáme v knihách pre všetkých prístupných: „Čísel hra kouzelná“, „Kamarádi čísla“ a „Svet čísel“. Lákajú nás do ríše rozprávok o číslach a ponúkajú zásobu informácií z dejín matematiky a pozorne vysvetľujú myšlienky, ktoré prispeli k vývoju teorie a rozšíreniu sfér jej použitia. Pre malých i veľkých, pre tých, čo ešte iba začínajú, a aj pre tých, čo už pocítili radosť z matematických úsudkov a výsledkov, sa v týchto knižkách nájdú poznatky, ba aj obrázky, ktoré potešia dušu priaznivú pre reč čísel.

Roky školských lavíc urobia z číselných hračiek a priestorových konštrukcií „počty a merbu“, ktoré končia povinným trpeným predmetom „matematika“ vo vyšších ročníkoch. A vtedy, v krátkych historických poznámkach našich učebníc, mnohí spoznali, že predmet, ktorý sa možno s nezáujmom učia, má dlhú tradíciu. Vo voľných chvíľach, v knižniciach rodinných, školských i mestských, ne jeden študent objaví knižku E. Colerusa „Od Pythagory k Hilbertovi“, alebo z tých novších „Z dejín elementárnej matematiky“ od F. Baladu, a tak uspokojí, aspoň na čas, túžbu po poznaní histórie jednej z najstarších vied. V zviazaných ročníkoch časopisov „Matematika ve škole“, „Pokroky matematiky, fyziky a astronomie“ a „Rozhledy matematicko-fyzikální“ nájde určite každý záujemca myšlienky o ľuďoch, ktorí žili pre matematiku. Náhodné pohľady do knižníc nás často vedú k encyklopédiám. A veru máme i také, v ktorých sa hovorí, aj v časoch dnešného rozkvetu vied prírodných a matematických, o živote a diele matematikov minulých. Nezabudnite si prelistovať „Malú encyklopédiu matematiky“ a „Malú encyklopédiu bádateľov a vynálezcov“.

V čase predmaturitnom, v dobe to vážnej pre štúdium, k éram minulým nás privedú „Dějiny matematiky ve středověku“ a „Dějiny matematiky ve starověku“. Celkový prehľad v ríši objavov matematických, rozdelujúci pohľad na mená ľudí pre matematiku tvoriacich, umožní Dirk J. Struik knihou „Dějiny matematiky“. Mnohé vzorce, vzťahy a vety ožívajú v našich mysliach pri spomienkach na ich dejinný vývoj.

V súčasnej dobe naozaj potrebujeme matematiku živú, matematiku plnú elánu a nadšenia, matematiku pre štruktúru poznania i pre praktické použitie. Možno, že každé slovo, zakotvené v hĺbkach histórie, prispeje k tvorivému poznávaniu a uplatneniu matematiky.

Podrobnejšie údaje o spomínaných knihách :

L. Infeld: Evariste Galois, Mladé letá, Bratislava 1961.

I. Adler: Čísel hra kouzelná, Horizont, Praha 1972.

V Koval: Kamarádi čísla, SPN, Praha 1969.

I. Depman, J. Folta: Svet čísel, SPN, Bratislava 1973.

E. Colerus: Od Pythagory k Hilbertovi, Družstevní práce, Praha 1941.

F. Balada: Z dějin elementární matematiky, Praha 1959.

Kolektív: Malá encyklopédia matematiky, Obzor, Bratislava 1967.

J. Bober: Malá encyklopédia bádateľov a vynálezcov, Obzor, Bratislava 1973.

A. Kolman: Dějiny matematiky ve starověku, Praha 1969.

A. P. Juškevič: Dějiny matematiky ve středověku, Praha 1972.

Ze zahraničních časopisů

Z polského časopisu *Matematyka* jsme pro mladé čtenáře vybrali tyto příklady:

1. Co je větší, součet všech lichých čísel menších než 100 nebo součet všech sudých čísel menších než 100?

2. Jakou cifru je nutno vložit mezi cifry dvojčíselného čísla, které je dělitelné sedmi, aby vzniklé trojčíselné číslo bylo též dělitelné sedmi?

3. Která přirozená čísla x, y splňují neurčitou rovnici

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = (x + y)^2 + 1 ?$$

4. Ukažte, že trojčlen $x^{2n} + x^2 - 2$ je dělitelný dvojčlenem $x^2 - 1$. ($n \geq 1$ je přirozené číslo.)

5. Pro která prvočísla p a přirozené číslo n je splněna rovnice

$$p + 1 = n^5 ?$$

6. Je dán trojúhelník ABC . Na prodloužené straně AB jsou sestrojeny body K, L tak, že $KA = BL = AB$. Podobně na přímkách BC (AC) jsou sestrojeny body M, N (P, R) tak, že $BM = CN = BC$ ($AP = CR = AC$). Vypočítejte obsah šestiúhelníku $PMLRNK$ za předpokladu, že obsah daného trojúhelníku je roven 1 j².

Výsledky 1. Součet lichých čísel je 2500, součet sudých je 2450. — 2. Výsledek, který můžeme dostat zkusmo nebo výpočtem, seřadíme do dvojic: (14, 154), (21, 231), (28, 238), (35, 315), (42, 462), (49, 469), (56, 546), (63, 693), (70, 700), (70, 770), (77, 707), (77, 777), (84, 854), (91, 931), (98, 938). — 3. $x_1 = 2, y_1 = 1$ nebo $x_2 = 1, y_2 = 2$. — 4. Daný trojčlen se dá rozložit: $(x^2 - 1)(x^{2n-2} + x^{2n-4} + x^{2n-6} + \dots + 2)$. — 5. $n = 2, p = 31$. — 6. Šestiúhelník se dá rozložit na 13 trojúhelníků téhož obsahu. Jeho obsah je tudíž 13 j².

recenze

Miloš Jelínek:

MNOŽINY

Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1973, 133 stran, 116 obrázků, brožovaná 6,50 Kčs.

Milí mladí čtenáři, jste zvyklí, že se na těchto stránkách Rozhledů dovídáte o nových knihách, které vám mohou pomoci při studiu matematiky a fyziky a jimiž si můžete upřesnit a prohloubit znalosti v těchto oborech. Tentokrát jde o publikaci určenou vašim rodičům, rodičům žáků základních devítiletých škol a všem těm, kteří chtějí být informováni o tzv. modernizaci vyučování matematice.

Stejně jako v celém světě i u nás dochází v posledních letech k reformě vyučování matematice. Aby se rodiče žáků dověděli, čemu se jejich děti učí a budou učit z tzv. moderní matematiky, rozhodlo se SPN vydávat v sešitovém vydání příručku, v níž budou elementárním způsobem vyloženy některé matematické pojmy, které nebyly obsaženy v tradiční školské matematice. Příručka bude vycházet postupně v sešitech, z nichž každý bude věnován jednomu tématu. Sešity budou volně na sebe navazovat.

Knih „Množiny“ je prvním sešitem této příručky. Je rozdělena do pěti částí. V první části se čtenář seznámí s pojmem množina. Důležitost tohoto matematického pojmu rostla od jeho zavedení. (Zaklada-

telem teorie množin je George Cantor, 1845 — 1918). V současné době téměř celá matematika je vybudována na teorii množin. Ukázalo se, že tohoto pojmu lze s výhodou využít nejen ve vědě, ale i při vyučování matematice. Umožňuje totiž jednodušeji a pochopitelněji definovat základní pojmy školské matematiky jako např. pojem čísla, velikosti, funkce, atd.

Druhá část knihy pojednává o operacích, které můžeme s množinami provádět. Dovíme se, co je to sjednocení, průnik a rozdíl dvou konečných množin a jak množiny mezi sebou násobíme. (Knížka pojednává téměř výlučně o konečných množinách.)

Ve třetí části autor rozebírá vlastnosti těchto množinových operací. Zkoumá, zda tyto operace jsou komutativní, asociativní a distributivní, tak jak jsme tomu zvyklí při operacích s čísly.

Čtvrtá část se zabývá rozkladem množiny na podmnožiny a pátá část mohutnostmi konečných i nekonečných množin.

Pojmy, zavedené v jednotlivých částech knihy, jsou vždy vysvětleny na několika příkladech. K snadnému pochopení slouží i množství pečlivě volených obrázků a diagramů. Prostudovanou látku si čtenář může procvičit pomocí mnoha cvičení, jejichž vzorová řešení najde na konci knihy.

Kniha je velmi pěkně a srozumitelně napsána. (O tom svědčí i zcela rozebrané první vydání. Se sešity druhého vydání se sejdem na pultech našich knihkupectví v nejbližší době.) Rodiče, kteří chtějí být informováni, čemu se jejich dítě učí, by si ji neměli nechat ujít.

Anežka Wohlmuthová

František Jílek:

Muž za patnáct miliard dolarů

Vydalo: Pressfoto Praha 1973
str. 343, cena 19 Kčs

Autor, vedoucí vědecký pracovník oddělení dějin techniky v Národním technickém muzeu v Praze, seznamuje čtenáře v této knize — napsané pěknou beletristickou formou — se životem a dílem Thomase Alvy Edisona, o němž se A. Einstein vyjádřil, že byl největším vynálezcem v dějinách. Před našima očima se rozvíjí bohatý život technického génia, naplněný čínorodou prací ve prospěch všeho lidstva.

T. A. Edison se narodil 11. února 1847 v Milanu, Erie Land, stát Ohio v USA. Do školy chodil jen tři měsíce, další vzdělání získal od své matky. Jako dvanáctiletý se stal roznašečem novin, potom novinářem (v železničním voze vydával týdeník Weekly Herald) a krátce nato telegrafistou. Avšak stále více jej přitahovalo studium fyziky a chemie. Od r. 1868, kdy přihlásil svůj první patent, tzv. skrutátor — počítač hlasů pro poslaneckou sněmovnu, datuje se

dlouhá řada jeho úspěšných vynálezů. S velkým počtem svých spolupracovníků získal na 1500 patentů, z nichž asi 20 má základní význam. Roku 1871 zkonstruoval psací stroj, v letech 1872—1875 pracoval na automatizaci telegrafu, vyvinul dvojnásobný a pak čtyřnásobný telegrafní systém pro vysílání dvou až čtyř zpráv po jednom vedení. Podstatně zdokonalil telefon (patent A. G. Bella z roku 1872), když vynalezl uhlíkový mikrofon. Slavný anglický spisovatel a dramatik Bernard Shaw, který býval v mladých letech ve službách Edisonovy telefonní společnosti v Anglii, vzpomíná, že Edisonův telefon měl „hlas tak mohutný, že vyřval nejsoukromější zprávu na celý dům“. Roku 1876 zařizuje Edison slavnou laboratoř v Menlo Parku blízko Newarku ve státě New Jersey asi 30 km na východ od New Yorku, první výzkumný ústav, který tvořil pro potřeby národního hospodářství a průmyslu a u něhož založil i továrnu na výrobu přístrojů, které se svým štábem spolupracovníků vynalezl. Zde pracoval až do r. 1887, kdy se přestěhoval s laboratoří a továrnou do West Orange ve státě New Jersey. Roku 1877 vynalezl „mluvící stroj“ — fonograf, který později v letech 1887—1890 podstatně zdokonalil. Od r. 1878 začíná studovat elektrické světlo. Úsilovná a vyčerpávající práce celého kolektivu pracovníků byla 21. října 1879 korunována úspěchem, když sestrojil první prakticky upotřebitelnou žárovku s uhlíkovým vláknem, která svítila nepřetržitě 40

hodin. Na Silvestra téhož roku potom předvedl třem tisícům nadšených diváků dokonalé osvětlení celého Menlo Parku žárovkami. Edisonovou zásluhou je, že vypracoval celý systém žárovkového osvětlení včetně výroby proudu, jeho kontroly, rozvodu (r. 1883 vynalezl elektrickou pojistku), měření (r. 1880 vynalezl elektroměr) a získal potřebné patenty. V roce 1881 založil společnost „Edison General Electric“, která si dala za úkol zavádět elektrické osvětlení ve městech. V tomtéž roce vystavuje na světové výstavě v Paříži obrovské dynamo „Jumbo“ pro napájení osvětlovací soustavy, považované tehdy za světový zázrak. Pro nás je potěšující, že Edisonova společnost již v roce 1882 instalovala elektrické osvětlení v brněnském divadle — jako prvním na evropském kontinentě. V tomtéž roce dává do provozu první elektrárnu s celou osvětlovací soustavou na Pearl Street v New Yorku. Z dalších významných vynálezů „čaroděje z Menlo Parku“, jak byl Edison často nazýván, uvedme aspoň stručně: magnetický třídič rud (1880), elektrická lokomotiva (1880), kinetograf a kinetoskop (1891; o rok později vybudoval první filmový ateliér Black Mary u svých nových laboratoří ve West Orange), mlýn na rudu (1892), elektrický automobil (1902), rotační elektrická pec na výrobu cementu (1903), helikoptéra (1908), alkalický akumulátor (1909), zařízení na výrobu syntetického fenolu (1914) a umělého kaučuku. Postavil také to-

várnu na výrobu portlandského cementu, zavedl významná zlepšení v jeho výrobě, čímž se stal průkopníkem dnešního rozšíření prefabrikátů. Již v r. 1883 pozoroval termoelektronovou emisi (Edisonův efekt), která dala základ dnešnímu mohutnému rozvoji elektroniky

Edison byl rozhodným zastáncem stejnosměrného proudu, kdežto jeho největší americký konkurent jihoslovanského původu Nikola Tesla prosazoval střídavý proud (Tesla učinil sám asi 200 objevů, vypracoval např. do všech podrobností dvou- a třífázový systém, získal patent na elektromotor s točivým magnetickým polem atd.). Úvahy elektrotechniků z přelomu století, zda stejnosměrný či střídavý proud, se naplňují v současné době kompromisem: stejnosměrný i střídavý proud.

Edison v protikladu např. k Teslovi i po finanční stránce maximálně využil všech svých objevů, neboť byl velmi úspěšným podnikatelem a obchodníkem. Vzájemnému boji různých podnikatelských skupin v tehdejší době v USA je v knize věnováno hodně místa.

V r. 1888 pracoval také v Edisonových laboratořích jako asistent náš inženýr Emil Kolben, zakladatel velkých elektrotechnických závodů v Praze, rozhodný stoupenec střídavého proudu (na rozdíl od svého největšího soupeře ing. F. Křižíka, který propagoval stejnosměrný proud). V září r. 1911 Edison navštívil Brno a Prahu,

prohlédl si továrnu E. Kolbena a byl přijat na pražské radnici.

Jílkova kniha vychází krátce po velmi pěkné knize Josefa Honse: *Tajemství mysu Wardencliff* (vydalo nakladatelství Profil v Ostravě 1972, str. 176, cena 15 Kčs, o níž se již v *Rozhledech matematicko-fyzikálních psalo* — roč. 51, 1972—1973, č. 10, str. 475—476), která je věnována světovému rozvoji elektrotechniky a jejím dvěma nejvýznačnějším představitelům T. A. Edisonovi a N. Teslovi. Stejně tak jako jsme čtenářům vřele doporučovali Honsovu knihu, můžeme totéž učinit i u Jílkovy knihy.

Na závěr uvedme aspoň dvě aktuální Edisonovy myšlenky: „Tajemství úspěchu v životě není dělat to, co se nám líbí, ale nalézat zalíbení v tom, co děláme.“

„Vynález, toť z 99 % transpirace (pot) a z 1 % inspirace“

Rudolf Kolomý

K. Mišoň, Z. Pírko:

ZÁKLADY ASTRONAUTIKY

ACADEMIA, Praha 1974

Svazek 22 sbírky Cesta k vědění. 268 stránek, 1 příloha, 58 pérovek, cena 20,— Kčs.

Kniha pojednává přehledně o základních fyzikálních a matematických problémech astronautiky. Výklad je rozdělen do dvanácti kapitol: I. Gravitační zákon a problém dvou těles. — Aplikace výsledků této kapitoly na pohyb umělého kosmického tělesa podávají kapitoly II. (Letová rychlost), III. (Mezikontinentální raketa) a IV (Svazky drah, apsidy, zenitální sonda).

Kapitola V (Mechanika proměnné massy) rozšiřují Newtonskou mechaniku neproměnné hmotnosti na tělesa s hmotností proměnlivou a VI. uvádí specializaci jejích závěrů na mechaniku rakety.

O technických otázkách raketových projektů vykládá kap. VII. (Mechanika rakety: Reaktivní síla, účinnost termická a tahová), VIII. (Termodynamika rakety). Charakterizující veličiny raket jsou zavedeny v kapitole IX. (Raketa jednoduchá) a X. (Raketa složená). Ty pak umožňují v části XI. řešit mnohé optimalizační úlohy.

Závěrečná kapitola XII., věnovaná relativistické raketě, staví se kriticky k některým módním názorům o ovlivnitelnosti procesu lidského stárnutí.

Kniha nepředkládá k věření pouhé výsledky, nýbrž jednotlivé poznatky se postupně odvozují. Pochopitelnou výjimkou je uvedení vzorce pro relativistické stáčení dráhy a připomínka Kalitzinova vztahu. Vůdčí úloha ruské vědy je historicky zvýzdvižena zdůrazněním průkopnických prací Ciolkovského a Měščerského s výstižným pojmenováním řady vztahů jejich jmény. Vynikající úspěchy sovětské techniky výmluvně připomíná úvodní vyobrazení raketového obra z bajkonurského kosmodromu a přiléhavým citátem z Nerudových *Kosmických písní*.

Výsledky jsou ilustrovány četnými nomogramy a doprovázeny číselnými příklady. Velmi cenná je metodika zvolená k odvození vzorce pro třetí kosmickou rychlost a úvodní historický přehled na myšlenkový pochod Keplerův vedoucí k objevu planetárních zákonů.

Malé tiskové chyby si čtenář snadno opraví sám. Rušivěji působí nákupení pěti tiskových chyb na předposlední textové stránce: zřejmě chybný je výraz (12.17.12), jak ukazuje tabulka 12.1; vzorec (12.17.8) a (12.17.9) mají po jedné chybě, (12.17.11) má chyby dvě.

Recenzovaná kniha podává úvod-

ní přístup do studia početné zahraniční kosmonautické literatury. Soupis sedmnácti českých a slovenských titulů (vesměs populárních) je uveden na str. 256.

Náročnost jednotlivých kapitol z hlediska potřebných vědomostí matematických a fyzikálních je nestejná. Některé jsou středoškolsky dobře únosné, jiné přesahují středoškolskou látku. Kapitoly IX. a X. pracují jen s elementární algebrou. Úvodní znalosti fyziky postačují

k pochopení většiny kapitoly VII, která podává poučný pohled přesahující běžné představy o technické účinnosti. Žáci průmyslových škol strojního zaměření lehce zvládnou kapitolu VIII. a na školách, které probírají začátky vyšší matematiky, lze s pomocí učitele probrat 6 prvních kapitol.

Kniha se hodí pro knihovny učitelské i žákovské (zvl. pro zájmové kroužky).

Evžen Říman, Praha

matematické zábavy

PŮLNOČNÍ ÚLOHY L. CARROLLA

Lewis Carroll (1832—1898) je mnohým z vás znám jako autor knížky *Alenka v říši divů*, která se zdá být dětskou knížkou. Je to sice opravdová pohádková knížka, ale je prosycena tolika jazykovými hříčkami a logickými paradoxy, že je zajímavým čtením i pro dospělé vědce, filosofy, logiky a matematiky. V dalších číslech *Rozhledů* si některé hříčky připomeneme.

Její autor skutečně byl matematikem a logikem, přednášel dokonce v jedné oxfordské koleji a jmenoval se *Charles Lutwidge Dodgson*. Svůj pseudonym vytvořil jistou hrou se svými křestními jmény; Charles je anglická podoba latinského Carolus (slovenský Karol!), z něhož vytvořil obměnu *Carroll*, Lutwidge připomíná latinské Ludovicus (náš Ludvík), které má francouzskou podobu Louis (lui), anglicky psané slovo *Lewis* se čte podobně.

Zatímco Ch. L. Dodgson publikoval „suché“ práce matematické, psal L. Carroll šťavnaté a nápadité knížky plné fantazie a paradoxů (o některých se říká, že jsou schopny „rozházet“ i moderní počítač). Někde uprostřed mezi těmito krajními tóny je sbírka matematických úloh nazvaná *Půlnoční úlohy* L. Carroll vysvětluje v předmluvě, že jde skutečně o úlohy z jeho bezesných nocí, kdy řešil „z hlavy“ takové problémy. Přiznává, že nad některými pak přemýšlel i ve dne, ale zásadně přitom nic nepsal ani nekreslil. Učinil si z nich jakousi gymnastiku mozku; 72 takových úloh pak vydal pro všechny zájemce o trénink mozkových závitů.

Chcete-li ochutnat, o jaké úlohy šlo, předložím vám několik z nich jako vzorek. Ale neřešte je o půlnoci!!

1. Dvě kružnice se protínají tak, že jejich společné tětivě přísluší v jedné kružnici středový úhel 60° a ve druhé 30° . Jak velká část menšího kruhu leží uvnitř většího?

2. Dvě kružnice se protínají a v průsečících jsou sestrojeny tečny ke každé z nich. Tyto čtyři přímky omezují čtyřúhelník, jehož obsah máte vypočítat na základě známých poloměrů a středné obou kružnic.

3. Jsou-li a , b dvě nesoudělná přirozená čísla, pak lze nalézt takové přirozené číslo n , že číslo $a^n - 1$ je dělitelné číslem b . Dokažte.

4. Je-li nějaké číslo trojnásobkem součtu tří různých čtverců (druhých mocnin) přirozených čísel, pak je též součtem čtverců (druhých mocnin) nějakých čtyř přirozených čísel. Dokažte. Š. J.

Tři detektivové a pět klobouků

Ve Scotland Yardu měl vedoucí jistého oddělení vybrat ze tří detektivů jednoho k povýšení. Zdálo se, že všichni mají stejné schopnosti, a proto jejich šéf provedl s nimi zkoušku, aby zjistil jejich schopnosti při logickém uvažování. Ukázal jim 3 černé a 2 bílé klobouky, které se jinak od sebe nelišily. Potom zhasl světla a v naprosté tmě dal každému na hlavu jeden klobouk a zbývající dva schoval. Pak znovu rozžehl a řekl: „Kdo první uhodne, jaké barvy je jeho klobouk, bude povýšen.“ Po dlouhém uvažování prohlásil detektiv A: „Na hlavě mám černý klobouk.“

Jak k tomuto závěru došel?

Sami jistě uznáte, že mohou nastat tyto 3 případy.

1. Kdyby A viděl na hlavách svých kolegů bílé klobouky, pak bez rozmýšlení může prohlásit, že má černý klobouk. Tento případ však nastat nemohl, neboť A došel k svému závěru po dlouhém uvažování. Proto musel vidět jiné dva klobouky.

2. A viděl na hlavě kolegy B černý klobouk a na hlavě C bílý klobouk. V tomto případě A sám nemůže mít bílý klobouk. Kdyby totiž A měl bílý klobouk, B by bez rozmýšlení ohlásil, že má černý klobouk. Proto A musí mít černý klobouk.

3. A viděl na hlavách B i C černé klobouky a pak usuzoval takto: Kdybych měl bílý klobouk, pak jistě B nebo C by provedl úvahu, kterou jsem provedl v odst. 2. Poněvadž se tak nestalo, musím mít černý klobouk.

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

involute
involution
involutory
irrational
irreducible
isogonal

isolated
isolated singular point
isometric
isomorphic
isosceles
iterative

evolventa
involuce
involutorní
iracionální
ireducibilní, nerozložitelný
zachovávající úhly, mající stejné
úhly
izolovaný
izolovaný singulární bod
izometrický
izomorfní
rovnoramenný
iterační

J

join
jump
junction

spojit
skok
stanice, uzel

K

keep
kernel
kilogram(me)
kilometre
kind
kite
knowledge
known

podržet
jádro
kilogram
kilometr
druh
deltoid
znalost
známý

L

arge
ateral area
attice
aw

velký
plášť
mříž
zákon

lead	vést
leave out	výnechat, vypustit
least common multiple	nejmenší společný násobek
leg	odvěsna
lemma	lema
length	délka
less	méně
lessen	zmenšit
letter	označit písmenem
level line	vrstevnice
lie	ležet
limit	limita, mez
left hand limit, limit on the left	limita zleva
lower limit	dolní mez
right hand limit, limit on the right	limita zprava
upper limit	horní mez
limit point	hromadný bod
limited	omezený
line	čára, přímka
broken line	lomenná čára
dot and dash line	cerchovaná čára
dotted line	tečkovaná čára
fraction line	zlomková čára
principal line	hlavní přímka
straight line	přímka
lines polar to each other	sdružené poláry
line of definite length	úsečka
line of intersection	průsečnice
linear	lineární
linear combination	lineární kombinace
linear-fractional function	lineární lomená funkce
litre	litr
location	poloha
local	lokální
locus (pl. loci)	geometrické místo
logarithm	logaritmus
logarithmic	logaritmický
logarithmic calculus	logaritmování
logarithmic curve	logaritmická křivka
logarithmic equation	logaritmická rovnice
logarithmic function	logaritmická funkce
logarithmic scale	logaritmická stupnice
logarithmic tables	logaritmické tabulky
logic	logika
logical	logický
long	dlouhý
long radius	poloměr opsané kružnice
longitude	zeměpisná délka
look for	hledat
loop	smyčka
lower	dolní
lower bound	dolní mez
lower estimate	dolní odhad
loxodromic line, loxodromic curve	loxodroma

rozhledy



MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

7

ROČNÍK 53, 1974-1975, BŘEZEN



rozhled

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT, Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMU Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, nár. pod. v Praze 1975.

ROČNÍK 53
BŘEZEN 1975

7

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

OBSAH

J. Straka: Li	ice s výrazy	337
($a \times b$)	.	.
Dr. E. Calda: Od dětské hry k průniku	doplňků množin	344
Dr. M. Hladký: Zásobníkové automaty		349
Dr. J. Skuhra: Problém rodin s pěti dětmi		353
Ing. J. Myslík: Použití grafů signálních	toků v elektrotechnice	356
Ing. Z. Janout: Spojený ústav jaderných	výzkumů v Dubně (pokračování)	359
Dr. K. Mišoň, CSc.: Československá aka-	demie věd	363
J. Kotyk: Z počátků železnic		368
Dr. K. Mišoň, CSc.: Matematický folklór		372
J. Fronková, E. Vopatová: Dvě historky	pro detektivy - amatéry	374
J. Šedivý: Dva královské problémy pro	bystré hlavy	376
Ze zahraničních časopisů		377
Nejmladším čtenářům		378
Recenze		382
H. Hofmanová: Slovníček	anglicko-čes-	
ký	3. a 4. str. obálky	

Lineární rovnice s výrazy $[ax + b]$

JOSEF STRAKA, VŠZ Praha

Budeme se zabývat řešením lineárních rovnic, ve kterých se vyskytuje neznámá x ve výrazech typu $[ax + b]$, $cx + d$. Ukážeme si několik způsobů řešení takových rovnic, použijeme přitom vět uvedených v článku *Gaussovy funkce* v minulém čísle Rozhledů.

Příklad 1. V množině R máme řešit rovnici $2 [3x + 1] = 5x - 1$.
Řešení. Obor pravdivosti dané rovnice označme písmenem P ,

$$P = \{x \in R ; 2 [3x + 1] = 5x - 1\}$$

1. způsob. Uplatníme nerovnice pro $[3x + 1]$ uvedené v definici celé části reálného čísla v citovaném článku; využijeme též toho, že výraz $5x - 1$ je pro všechny prvky množiny P sudým číslem.

Rozbor. Pro každé reálné číslo x platí:

Jestliže $x \in P$, pak $5x - 1 = 2k$, a tedy $x = (2k + 1) \cdot \frac{1}{5}$ při $k \in Z$,
tj. x je lichým násobkem čísla $\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} \text{Dále platí: } 2 (3x + 1 - 1) &< 2 [3x + 1] \leq 2 (3x + 1), \\ 6x &< 2 [3x + 1] \leq 6x + 2, \\ 6x < 5x - 1 &\leq 6x + 2. \end{aligned}$$

Odtud získáváme jednak $x < -1$, jednak $-3 \leq x$, tj. $x \in \langle -3; -1 \rangle$.
Shrňme výsledky rozboru:

Jestliže $x \in P$, pak x je lichým násobkem čísla $\frac{1}{5}$ v intervalu $\langle -3; -1 \rangle$,

$$\text{tj. } x \in W = \left\{ -3, -\frac{13}{5}, -\frac{11}{5}, -\frac{9}{5}, -\frac{7}{5} \right\}, \quad P \subset W$$

Zkouška, které prvky množiny W patří do P : Dosazením se přesvědčíme, že všechny prvky množiny W patří do P , tj. $W \subset P$.

Například pro $x = -\frac{11}{5}$ vypočítáme:

$$L\left(-\frac{11}{5}\right) = 2\left[3\cdot\left(-\frac{11}{5}\right) + 1\right] = 2\cdot\left[-5\frac{3}{5}\right] = 2\cdot(-6) = -12,$$

$$P\left(-\frac{11}{5}\right) = 5\left(-\frac{11}{5}\right) - 1 = -11 - 1 = -12$$

Zjišťujeme, že $\left(-\frac{11}{5}\right) \in \mathbf{P}$

Máme tedy výsledek $\mathbf{P} = \left\{-3; -\frac{13}{5}; -\frac{11}{5}; -\frac{9}{5}; -\frac{7}{5}\right\}$

2. způsob. Uplatníme vyjádření $x = [x] + \alpha$, kde $0 \leq \alpha < 1$, neboli $[x] = x - \alpha$.

Rozbor. Pro každé reálné číslo x platí:

Jestliže $x \in \mathbf{P}$, pak $5x - 1 = 2k$, a tedy $x = (2k + 1) \cdot \frac{1}{5}$ při $k \in \mathbf{Z}$, tj. x je lichým násobkem čísla $\frac{1}{5}$

Dále existuje takové číslo α , $0 \leq \alpha < 1$, které je lichým násobkem $\frac{1}{5}$, že

$$\begin{aligned} [3x + 1] &= 3x + 1 - \alpha, \\ 2[3x + 1] &= 6x + 2 - 2\alpha = 5x - 1, \\ x &= -3 + 2\alpha. \end{aligned}$$

Vzhledem k $0 \leq \alpha < 1$ je $-3 \leq x < -3 + 2 = -1$ a můžeme opět napsat:

$$x \in \mathbf{W} = \left\{-3, -\frac{13}{5}, -\frac{11}{5}, -\frac{9}{5}, -\frac{7}{5}\right\}, \quad \mathbf{P} \subset \mathbf{W}$$

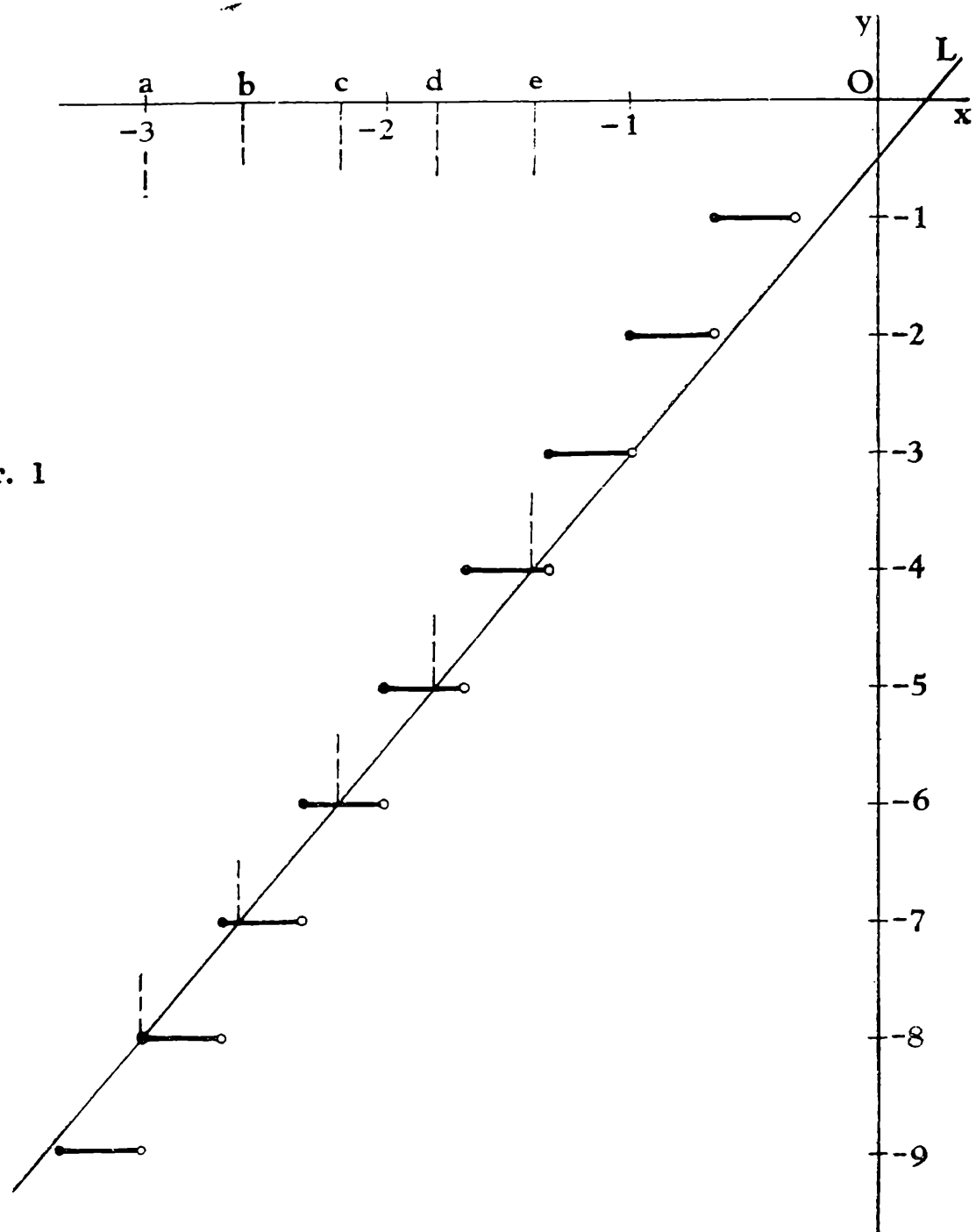
Zkoušku provedeme obdobně jako při 1. způsobu a samozřejmě s tímž výsledkem.

3. způsob. Využijeme grafů funkcí G, L :

$$G : x \rightarrow [3x + 1] = [3x] + 1 \quad (\text{Gaussova funkce}),$$

$$L : x \rightarrow \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \quad (\text{lineární funkce})$$

Společné body obou grafů existují (obr. 1), jejich x -ové souřadnice jsou označeny písmeny a, b, c, d, e . Při konstrukci grafu G jsme uplatnili rozklad množiny $\mathbf{R}$ všech reálných čísel na intervaly, ve kterých G nabývá stejné hodnoty. Všimněme si intervalů, ve kterých patrně leží čísla a, b, c, d, e :



Obr. 1

x		$\langle -\frac{10}{3}, -3 \rangle$	$\langle -3, -\frac{8}{3} \rangle$	$\langle -\frac{8}{3}, -\frac{7}{3} \rangle$	$\langle -\frac{7}{3}, -2 \rangle$	$\langle -2, -\frac{5}{3} \rangle$	$\langle -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3} \rangle$
$[3x]$		-10	-9	-8	-7	-6	-5
$G(x) = [3x] + 1$		-9	-8	-7	-6	-5	-4

Rozbor provedeme v každém intervalu zvlášť.

Všechna čísla $x \in \left(-\frac{10}{3}, -3\right)$ můžeme zapsat $x = -\frac{10}{3} + \beta$, kde $0 \leq \beta < \frac{1}{3}$; pro ně získáváme z předpokladu $x \in \mathbf{P}$, tj. $G(x) = L(x)$, rovnici

$$-9 = \frac{5}{2} \left(-\frac{10}{3} + \beta\right) - \frac{1}{2}$$

s kořenem $\beta_1 = -\frac{1}{15}$, který nevyhovuje podmínce $0 \leq \beta < \frac{1}{3}$.

V intervalu $\left(-\frac{10}{3}, -3\right)$ tedy neleží žádné z čísel a, b, c, d, e . Všechna čísla $x \in \left(-3, -\frac{8}{3}\right)$ můžeme zapsat $x = -3 + \beta$, kde $0 \leq \beta < \frac{1}{3}$; z předpokladu $G(x) = L(x)$ získáváme rovnici

$$-8 = \frac{5}{2} (-3 + \beta) - \frac{1}{2}$$

s kořenem $\beta_2 = 0$, kterému odpovídá hodnota $a = -3$.

Zkouškou se přesvědčíme, že číslo $a = -3$ je kořenem rovnice. Obdobným způsobem prozkoumáme ostatní uvedené intervaly a objevíme

$$b = -\frac{13}{5}, c = -\frac{11}{5}, d = -\frac{9}{5}, e = -\frac{7}{5};$$

$$\mathbf{P} = \left\{-3; -\frac{13}{5}; -\frac{11}{5}; -\frac{9}{5}; -\frac{7}{5}\right\}$$

Ukažme si ještě řešení rovnice s dvěma výrazy typu $[ax + b]$.

Příklad 2. Řešte v množině $\mathbf{R}$ rovnici $[x + 1] + [2x - 3] = 2x - 1$. *Řešení* se pokusíme provést obdobnými způsoby jako v prvním příkladě; předem však můžeme rovnici upravit pomocí vzorce $[x + n] = [x] + n$ pro všechna $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned}[x] + 1 + [2x] - 3 &= 2x - 1, \\ [x] + [2x] &= 2x + 1\end{aligned}$$

Označíme opět $\mathbf{P} = \{x \in \mathbf{R} ; [x] + [2x] = 2x + 1\}$

1. způsob. Využijeme toho, že $2x + 1$ je celé číslo, a dále nerovnic typu $x - 1 < [x] \leq x$

Rozbor. Pro každé reálné číslo x platí:

Jestliže $x \in \mathbf{P}$, pak $2x + 1 = n$, kde $n \in \mathbf{Z}$, a tedy $x = (n - 1) \frac{1}{2}$, tj. x je celočíselným násobkem čísla $\frac{1}{2}$

Dále platí:

$$\begin{aligned}x - 1 &< [x] \leq x, \\2x - 1 &< [2x] \leq 2x, \\3x - 2 &< [x] + [2x] \leq 3x \\3x - 2 &< 2x + 1 \leq 3x\end{aligned}$$

Odtud získáváme jednak $x < 3$, jednak $1 \leq x$, tj. $x \in < 1; 3)$. Výsledkem rozboru je zjištění:

Jestliže $x \in \mathbf{P}$, pak x je celočíselným násobkem $\frac{1}{2}$ v intervalu $< 1; 3)$,

$$\text{tj. } x \in \mathbf{W} = \left\{1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}\right\}, \quad \mathbf{P} \subset \mathbf{W}$$

Zkouška, zda $\mathbf{W} \subset \mathbf{P}$, ukáže, že $1 \in \mathbf{P}$, $\frac{3}{2} \in \mathbf{P}$, $2 \notin \mathbf{P}$, $5 \notin \mathbf{P}$.

$$\text{Je tedy } \mathbf{P} = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$$

2. způsob. Uplatníme vyjádření:

$$\begin{aligned}x &= [x] + \alpha, \text{ kde } 0 \leq \alpha < 1, \\2x &= 2[x] + 2\alpha, \\[2x] &= [2[x] + 2\alpha] = 2[x] + [2\alpha]\end{aligned}$$

Rozbor. Pro každé reálné číslo x platí:

Jestliže $x \in \mathbf{P}$, pak

$$\begin{aligned}[x] + [2x] &= 2x + 1, \\[x] + 2[x] + [2\alpha] &= 2[x] + 2\alpha + 1, \\[x] + [2\alpha] &= 2\alpha + 1,\end{aligned}$$

což je celé číslo, proto $\alpha = 0$ nebo $\alpha = \frac{1}{2}$.

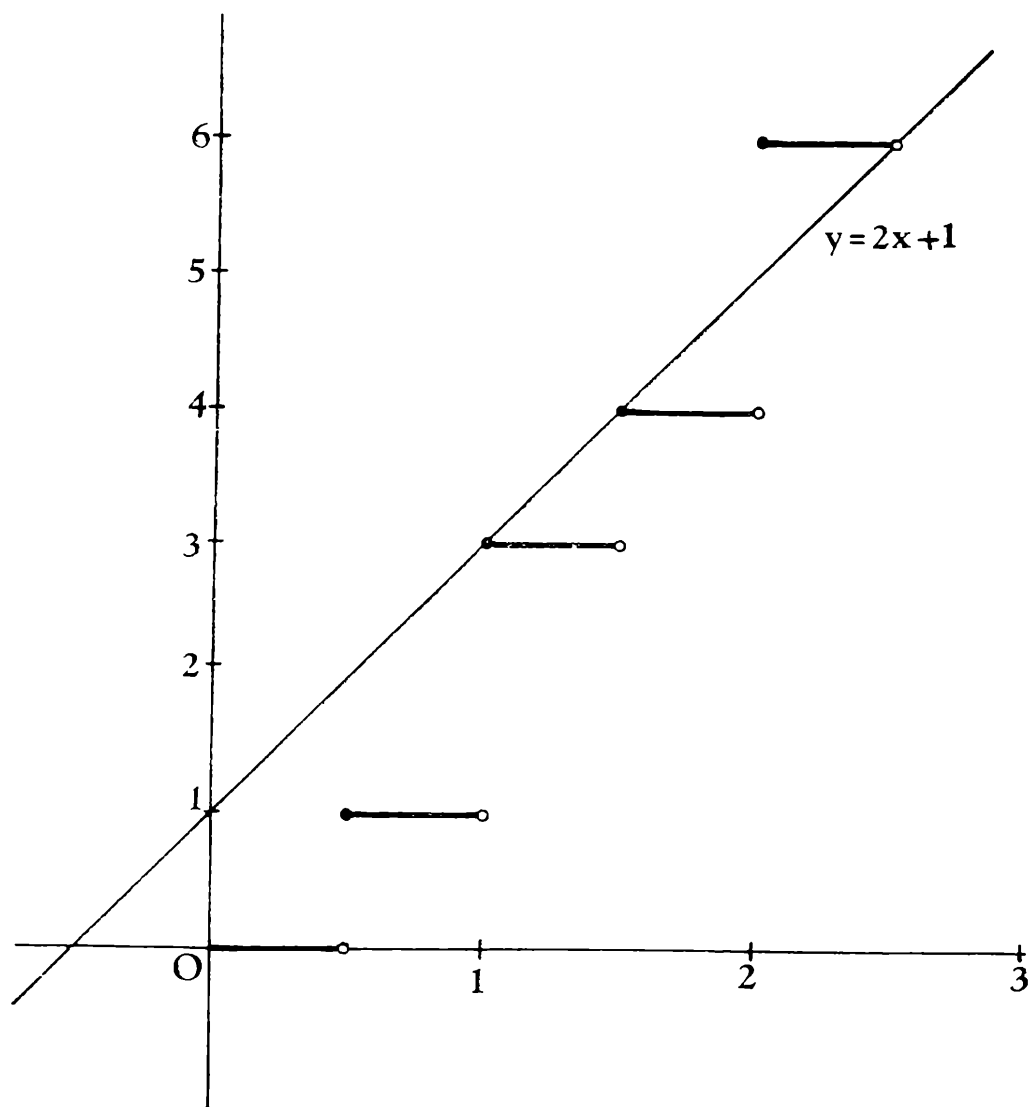
a) Je-li $\alpha = 0$, získáme rovnici

$$\begin{aligned}[x] + [0] &= 2 \cdot 0 + 1, \\[x] &= 1, \quad x = [x] + \alpha = 1\end{aligned}$$

b) Je-li $\alpha = \frac{1}{2}$, získáme rovnici

$$\begin{aligned}[x] + [1] &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 1, \\[x] &= 1, \quad x = [x] + \alpha = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Obr. 2



Výsledkem rozboru je nyní zjištění, že $P \subset \{1; \frac{3}{2}\}$. Zkouška potvrdí, že $P = \{1; \frac{3}{2}\}$.

3. způsob. Při konstrukci grafů funkcí $x \rightarrow [x] + [2x]$, $x \rightarrow 2x + 1$ použijeme rozkladu množiny $\mathbb{R}$ na intervaly typu $\langle n, n + \frac{1}{2} \rangle$, $\langle n + \frac{1}{2}, n + 1 \rangle$. Z obr. 2 je zřejmé, že „podezřelé intervaly“ leží v $\langle 1, 3 \rangle$, tento odhad však musíme potvrdit algebraickým výpočtem. Rozlišíme dva typy intervalů:

a) Interval $\langle n, n + \frac{1}{2} \rangle$ lze zapsat $x = n + \alpha$, kde $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, pak $[x] = n$, $2x = 2n + 2\alpha$, $0 \leq 2\alpha < 1$, $[2x] = 2n$.

Jestliže $x \in P$, pak

$$\begin{aligned} [x] + [2x] &= 2x + 1, \\ n + 2n &= 2n + 2\alpha + 1, \\ n &= 2\alpha + 1; \end{aligned}$$

pak nutně $\alpha = 0$, $n = 1$, $x = 1$.

b) Intervaly $\langle n + \frac{1}{2}, n + 1 \rangle$ lze zapsat $x = n + \beta$, kde $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$, pak $[x] = n$, $2x = 2n + 2\beta$, kde $1 \leq 2\beta < 2$, $[2x] = 2n + 1$.

Jestliže $x \in P$, pak

$$\begin{aligned} [x] + [2x] &= 2x + 1, \\ n + 2n + 1 &= 2n + 2\beta + 1, \\ n &= 2\beta; \end{aligned}$$

pak nutně $\beta = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $x = \frac{3}{2}$.

Získáváme opět závěr, že $P \subset \{1; \frac{3}{2}\}$. Zkouška potvrdí, že $P = \{1; \frac{3}{2}\}$.

Přesvědčili jste se, že k cíli vedou různé cesty; první způsob se obejde bez pomocných proměnných, v příkladě 2 nám však dal dvě tzv. nadbytečná řešení. Druhý způsob využívá pomocné proměnné α , v rovnicích s několika výrazy typu $[ax + b]$ vyžaduje diskusi více případů. Třetí způsob zahrnuje trochu pracné sestrojování grafů, při něm však získáme účelný rozklad množiny $\mathbf{R}$ na intervaly a pak již o něco snadněji provedeme diskusi. Ve všech případech je užitečné zapsat v rovnici na jedné straně všechny výrazy typu $[ax + b]$ a na druhé straně ponechat ostatní. Můžeme pak vytěžit důležité důsledky z toho, že i druhá strana nabývá jen celočíselných hodnot.

Hlubší seznámení s Gaussovyými funkcemi nabízí čtenářům knížka Rychlík: *Úvod do elementární číselné teorie*, která vyšla sice už v r. 1950 ale je v knihovnách matematické literatury.

Cvičení

1. Řešte v $\mathbf{R}$ tyto rovnice:

$$\text{a) } 10[x] = 9x, \quad \text{b) } [x - 2] = 2 - x, \quad \text{c) } [2x + 5] = 3x - 2.$$

2. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici:

$$\text{a) } 2[x] + 3[2x - 1] = 2x - 4, \quad \text{b) } [2x - 1] + [x - 2] = 0.$$

3. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici s parametrem $a \in \mathbf{Z}$; proveďte podrobnou diskusi:

$$a[x] = (a - 1)x.$$

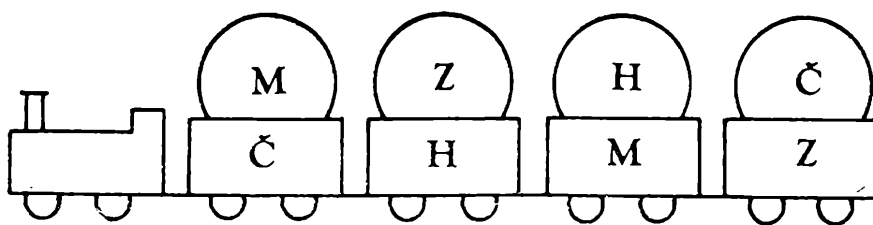
Od dětské hry k průniku doplňků množin

RNDr. E M I L C A L D A, MFF UK Praha

Malý Petřík si hraje s vláčkem, který se skládá z lokomotivy a barevných nákladních vagónků pevně spojených v tomto pořadí: červený, hnědý, modrý a zelený. Ke hře dále používá čtyř barevných kuliček, a to rovněž červené, hnědé, modré a zelené. Vláček nakládá tak, že do každého vagónku vloží právě jednu ze čtyř kuliček. Pro pozorovatele této dětské hry může vzniknout matematický problém:

Kolika způsoby lze naložit vláček (s daným pořadím vagónků) tak, aby v každém vagónku byla právě jedna kulička a aby se barva kuličky neshodovala s barvou vagónku, v němž je umístěna? Pokusem se snadno přesvědčíme, že takové náklady existují; jeden z možných výsledků znázorňuje obr. 1.

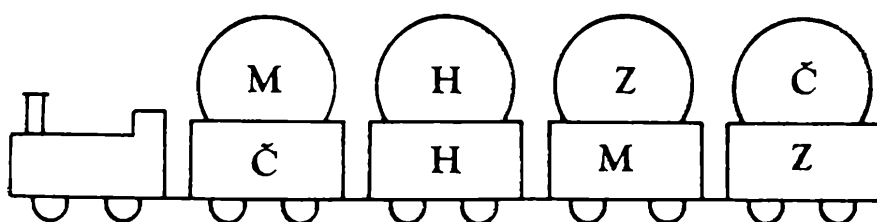
Obr. 1



Způsob, kterým budeme tuto úlohu řešit, je založen na tzv. principu inkluze a exkluze. Nelekejte se však — znalost tohoto principu nepředpokládáme, neboť jeho výklad není zařazen do středoškolské matematiky. Chceme k němu naopak prostřednictvím uvedené motivační úlohy teprve dojít. Je jenom zapotřebí, abyste pozorně sledovali jednotlivé kroky při řešení „vláčkového problému“.

Označíme písmenem **H** množinu všech možných nákladů, při nichž je v každém vagónku právě jedna kulička. Uvědomme si, že do **H** patří nejen náklady vyhovující dané podmínce (v každém vagónku je kulička jiné barvy, než má vagónek), ale i náklady, které tuto podmínku nesplňují, například náklad znázorněný na obr. 2.

Obr. 2



Utvoříme dále tyto podmnožiny množiny H :

- H_1 . — množina všech nákladů, v nichž je červená kulička v červeném vagónku;
 H_2 — množina všech nákladů, v nichž je hnědá kulička v hnědém vagónku;
 H_3 — množina všech nákladů, v nichž je modrá kulička v modrém vagónku;
 H_4 — množina všech nákladů, v nichž je zelená kulička v zeleném vagónku.

Vezměme nyní doplňky H'_1, H'_2, H'_3, H'_4 množin H_1, H_2, H_3, H_4 v množině H . Které náklady obsahuje např. množina H'_3 ? Právě ty, v nichž modrá kulička není umístěna v modrém vagónku. Kterými operacemi s množinami H'_1, H'_2, H'_3, H'_4 vytvoříme podmnožinu množiny H , do níž patří právě ty náklady, jež splňují danou podmínku? Nepovedlo-li se vám tuto množinu najít, zdůvodněte alespoň, že je to množina $H'_1 \cap H'_2 \cap H'_3 \cap H'_4$.

K určení počtu prvků této množiny (který je roven počtu všech nákladů splňujících danou podmínku) použijeme Vennova diagramu na obr. 3, v němž je oblast příslušná množině $H'_1 \cap H'_2 \cap H'_3 \cap H'_4$ vyšrafována. Do zbývajících oblastí tohoto diagramu jsou vepsány římské číslice I, II, III, IV tak, že:

každá ze čtyř oblastí označených I je obrazem právě jedné z množin $H_1 \cap H'_2 \cap H'_3 \cap H'_4, H'_1 \cap H_2 \cap H'_3 \cap H'_4, H'_1 \cap H'_2 \cap H_3 \cap H'_4, H'_1 \cap H'_2 \cap H'_3 \cap H_4$;

každá ze šesti oblastí označených II je obrazem právě jedné z množin

$$H_1 \cap H_2 \cap H'_3 \cap H'_4, H_1 \cap H'_2 \cap H_3 \cap H'_4, H_1 \cap H'_2 \cap H'_3 \cap H_4, \\ H'_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H'_4, H'_1 \cap H_2 \cap H'_3 \cap H_4, H'_1 \cap H'_2 \cap H_3 \cap H_4;$$

každá ze čtyř oblastí označených III je obrazem právě jedné z množin

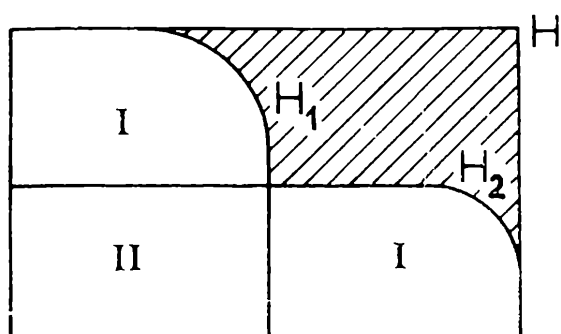
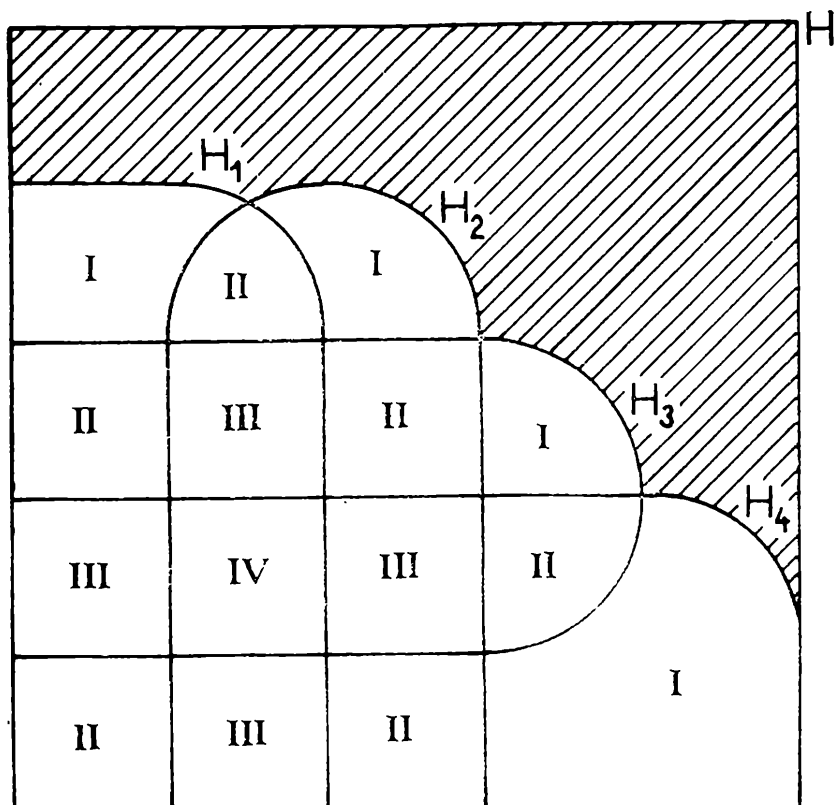
$$H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H'_4, H_1 \cap H_2 \cap H'_3 \cap H_4, H_1 \cap H'_2 \cap H_3 \cap H_4, \\ H'_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4;$$

oblast označená IV je obrazem množiny $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$.

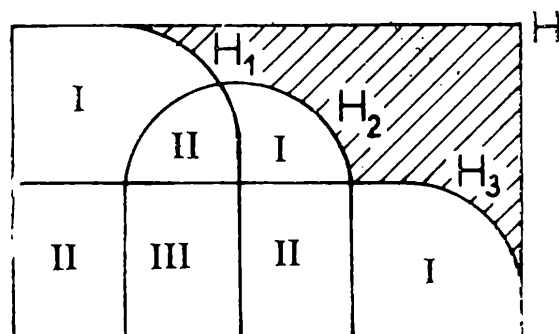
Pokusíme se vyjádřit počet prvků množiny $H'_1 \cap H'_2 \cap H'_3 \cap H'_4$ pomocí počtu prvků množiny H a počtu prvků množin příslušejících jednotlivým oblastem I, II, III, IV. Cestu nám ukážou příklady jednodušší, kdy jsou dány pouze dvě nebo tři podmnožiny dané množiny. Symbolem $p(X)$ budeme přitom značit počet prvků libovolné konečné množiny X .

Příklad 1 Nechť je dána konečná množina H a její podmnožiny H_1, H_2 . Určete počet prvků množiny $H'_1 \cap H'_2$, tj. číslo $p(H'_1 \cap H'_2)$.

Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

K řešení použijeme Vennův diagram (viz obr. 4), v němž je oblast příslušná množině $H'_1 \cap H'_2$ vyšrafována a v němž jsou do zbývajících oblastí vepsány římské číslice I, II podle analogických pravidel jako v obr. 3: každá ze dvou oblastí označených I je obrazem právě jedné z množin $H_1 \cap H'_2$, $H'_1 \cap H_2$; oblast označená II je obrazem množiny $H_1 \cap H_2$. K určení $p(H'_1 \cap H'_2)$ utvoříme nejprve rozdíl $p(H) - p(H_1) - p(H_2)$, který se však nemusí rovnat výrazu $p(H'_1 \cap H'_2)$, neboť je v něm od $p(H)$ odečten každý prvek z oblasti I právě jednou, ale každý prvek patřící do oblasti II právě dvakrát. Aby byl i každý prvek z oblasti II odečten právě jednou, stačí k uvažovanému rozdílu přičíst $p(H_1 \cap H_2)$. Výraz $p(H) - p(H_1) - p(H_2) + p(H_1 \cap H_2)$ pak udává počet prvků patřící do vyšrafované oblasti, tj. platí:

$$p(\mathbf{H}'_1 \cap \mathbf{H}'_2) = p(\mathbf{H}) - p(\mathbf{H}_1) - p(\mathbf{H}_2) + p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2)$$

Příklad 2: Nechť je dána konečná množina $\mathbf{H}$ a její podmnožiny $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3$. Určete počet prvků množiny $\mathbf{H}'_1 \cap \mathbf{H}'_2 \cap \mathbf{H}'_3$, tj. číslo $p(\mathbf{H}'_1 \cap \mathbf{H}'_2 \cap \mathbf{H}'_3)$.

K řešení použijeme opět Vennův diagram (viz obr. 5), v němž oblast příslušná množině $\mathbf{H}'_1 \cap \mathbf{H}'_2 \cap \mathbf{H}'_3$ je vyšrafována a v němž jsou známým způsobem zbývající oblasti označeny I, II, III. K určení $p(\mathbf{H}'_1 \cap \mathbf{H}'_2 \cap \mathbf{H}'_3)$ utvoříme nejprve rozdíl $p(\mathbf{H}) - p(\mathbf{H}_1) - p(\mathbf{H}_2) - p(\mathbf{H}_3)$, v němž je však od $p(\mathbf{H})$ odečten každý prvek z oblasti I právě jednou, každý prvek z oblasti II právě dvakrát a každý prvek z oblasti III právě třikrát. Přičteme-li k tomuto rozdílu součet $p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2) + p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_3) + p(\mathbf{H}_2 \cap \mathbf{H}_3)$, je ve výrazu $p(\mathbf{H}) - p(\mathbf{H}_1) - p(\mathbf{H}_2) - p(\mathbf{H}_3) + p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2) + p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_3) + p(\mathbf{H}_2 \cap \mathbf{H}_3)$ odečten od $p(\mathbf{H})$ každý prvek z oblastí I a II právě jednou, zatímco prvky z oblasti III nejsou odečteny vůbec. Stačí tedy od tohoto výrazu odečíst ještě $p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 \cap \mathbf{H}_3)$ a dostaneme počet prvků patřících do vyšrafované oblasti:

$$p(\mathbf{H}'_1 \cap \mathbf{H}'_2 \cap \mathbf{H}'_3) = p(\mathbf{H}) - p(\mathbf{H}_1) - p(\mathbf{H}_2) - p(\mathbf{H}_3) + p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2) + p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_3) + p(\mathbf{H}_2 \cap \mathbf{H}_3) - p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 \cap \mathbf{H}_3).$$

Z těchto příkladů je zřejmé, jak máme postupovat při určování počtu prvků množiny $\mathbf{H}'_1 \cap \mathbf{H}'_2 \cap \mathbf{H}'_3 \cap \mathbf{H}'_4$ znázorněné na obr. 3 vyšrafovanou oblastí. Všimneme-li si, jak se při určování počtu prvků průniků doplňků všech daných podmnožin v uvedených příkladech postupně „vypojovaly a zapojovaly“ jednotlivé oblasti Vennova diagramu, poměrně snadno zjistíme, že pro podmnožiny $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_4$ množiny $\mathbf{H}$ platí:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{H}'_1 \cap \mathbf{H}'_2 \cap \mathbf{H}'_3 \cap \mathbf{H}'_4) = & p(\mathbf{H}) - p(\mathbf{H}_1) - p(\mathbf{H}_2) - p(\mathbf{H}_3) - p(\mathbf{H}_4) + \\ & + p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2) + p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_3) + p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_4) + \\ & + p(\mathbf{H}_2 \cap \mathbf{H}_3) + p(\mathbf{H}_2 \cap \mathbf{H}_4) + p(\mathbf{H}_3 \cap \mathbf{H}_4) - \\ & - p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 \cap \mathbf{H}_3) - p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 \cap \mathbf{H}_4) - \\ & - p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_3 \cap \mathbf{H}_4) - p(\mathbf{H}_2 \cap \mathbf{H}_3 \cap \mathbf{H}_4) + \\ & + p(\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 \cap \mathbf{H}_3 \cap \mathbf{H}_4). \end{aligned}$$

Vrátíme-li se nyní k původnímu problému a připomeneme-li si, jaké prvky obsahují v tomto případě množiny $\mathbf{H}, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_4$, můžeme určit hledaný počet nákladů. Určíme nejprve počet prvků množiny $\mathbf{H}$, tj. číslo $p(\mathbf{H})$. Do červeného vagónku lze naložit libovolnou ze čtyř kuliček; po jejím výběru lze do hnědého naložit libovolnou ze tří zbývajících; po jejím výběru lze do modrého vagónku naložit libovolnou ze dvou zbývajících a po jejím výběru lze do zeleného naložit jedinou zbývající kuličku.

$$\text{Je tedy: } p(\mathbf{H}) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Určíme dále počet prvků množiny H_1 . Umístíme-li do červeného vagónku červenou kuličku, můžeme do hnědého umístit libovolnou ze tří zbývajících kuliček, po jejím výběru do modrého libovolnou ze dvou zbývajících a po jejím výběru lze do zeleného vagónku umístit jedinou zbývající kuličku.

Je tedy: $p(H_1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Protože však počet způsobů naložení vláčku, v nichž je kulička zvolené barvy umístěna ve vagónku téže barvy, nezávisí na barvě této kuličky, platí:

$$p(H_1) = p(H_2) = p(H_3) = p(H_4) = 6.$$

Podobnými úvahami dospíváme k tomu, že platí dále:

$$\begin{aligned} p(H_1 \cap H_2) &= p(H_1 \cap H_3) = p(H_1 \cap H_4) = p(H_2 \cap H_3) = \\ &= p(H_2 \cap H_4) = p(H_3 \cap H_4) = 2 \cdot 1 = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(H_1 \cap H_2 \cap H_3) &= p(H_1 \cap H_2 \cap H_4) = p(H_1 \cap H_3 \cap H_4) = \\ &= p(H_2 \cap H_3 \cap H_4) = 1, \end{aligned}$$

$$p(H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4) = 1.$$

Dostáváme tak:

$$p(H'_1 \cap H'_2 \cap H'_3 \cap H'_4) = 24 - 4 \cdot 6 + 6 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 1 = 9.$$

Existuje tedy právě devět takových nákladů, při nichž je v každém vagónku právě jedna kulička, jejíž barva se neshoduje s barvou vagónku.

V dalším článku zobecníme uvedené úvahy pro n podmnožin $H_1, H_2, \dots, H_n$ dané množiny H .

Cvičení:

1. Určete počet všech přirozených čísel nejvýše rovných číslu 100, která jsou dělitelná každým z čísel 2, 3, 5. (Výsledek: 26.)
2. Z množiny šedesáti sedmi osob umějí 47 německy, 35 rusky, 20 anglicky, 23 německy a rusky, 11 rusky a anglicky, 12 německy a anglicky, 5 rusky, německy i anglicky. Způsobem uvedeným v tomto článku určete počet osob z dané množiny, které neumějí žádný z těchto jazyků. (Výsledek: 5.)
3. Korespondentka napsala pět dopisů různého obsahu a příslušné obálky pěti různým adresátům. Kolik existuje způsobů zařazení každého dopisu do jediné obálky tak, že v každé obálce je dopis určený jinému adresátu? (Výsledek: 44.)

Zásobníkové automaty

Dr. MIROSLAV HLADKÝ, FE VUT Brno

V březnovém čísle roč. 1973—74 jsme se zabývali jedním z nejjednodušších typů automatů — tzv. konečným automatem. Jako jeho praktická interpretace nám posloužil *příklad nedobytné pokladny*, která se otevřela po volbě jednoho pětimístného čísla na voliči. Vraťme se na okamžik znovu k tomuto příkladu.

Čtenáři, který pročtl článek, by mělo být zřejmé, že k otevření pokladny dojde po volbě kteréhokoli číselného řetězu z množiny $T(M)$, tj. množiny slov generovaných automatem M , jehož činnost simuluje činnost pokladny. Ani více možností ve volbě kódu neuspokojuje však opatrného uživatele, který by chtěl *měnit kód po každém otevření pokladny*. I toto přání mu můžeme splnit, ovšem původní typ automatu by nám již nestačil. Proto užijeme tzv. zásobníkového automatu, který popíšeme nejprve zcela neformálně.

Zásobníkový automat se v jistém smyslu velmi podobá konečnému automatu; pracuje opět v taktech, v každém taktu se nachází v jistém stavu, vstupní zařízení čte jedno políčko na vstupní pásce (případně prázdné) a postupuje doprava. Počet políček směrem doprava není omezen. Na počátku činnosti je automat v počátečním stavu, generována jsou ta slova, která uvedou automat do koncového stavu. Až potud zůstává téměř vše stejné jako u konečného automatu. Podstatný rozdíl je však v tom, že zásobníkový automat má navíc ještě tzv. zásobník, tj. další jednostranně nekonečnou pásku. Její první políčko nazýváme vrcholem zásobníku.

Řetěz symbolů umísťujeme do prázdného zásobníku tak, že jeho první symbol je na vrcholu zásobníku a ostatní symboly následují v původním pořadí. Máme-li do zásobníku dodat další řetěz, je opět jeho první symbol na vrcholu, za ním následuje zbytek tohoto řetězu a za ním teprve původní obsah zásobníku, ovšem bez původního vrcholového symbolu, který se přitom vymazal. Můžeme také jen vymazat symbol na vrcholu zásobníku, pak však dojde k posuvu zbývajících obsahu zásobníku tak, že na vrchol se dostává další symbol v pořadí. V každém pracovním taktu se čte políčko na pásce a přihlíží se k obsahu vrcholu zásobníku. Bezděčně se nabízí srovnání se zásobníkem automatické střelné zbraně, do něhož zasouváme nebo z něhož odebíráme nábojnice. Přitom na „vrcholu“ vidíme pouze první nábojnici nebo prázdné dno zásobníku. Činnost zásobníkového automatu ilustruje připojený obrázek.

V každém taktu přejde automat do stavu určeného *přechodovou funkcí*, a to v závislosti na stavu, v němž se nacházel dosud, na vstupním symbolu a na symbolu, který je na vrcholu zásobníku. Dále se v témž

taktu symbol na vrcholu zásobníku nahradí jistým řetězem (případně prázdným) a automat je připraven k dalšímu pracovnímu taktu. Vstupní abeceda a tzv. pomocná abeceda mohou přitom být různé. V pomocné abecedě vyznačíme ještě symbol Z_0 , který je na počátku činnosti automatu na vrcholu zásobníku.

Nyní se již můžeme pokusit o *návrh vylepšeného voliče pokladny*. Jako vstupní abecedu uvažujeme $\{0, 1, c\}$. Uživatel pokladny při odchodu zvolí (a poznamená si) libovolnou posloupnost w nul a jedniček, např. $w = 01011$ a zakončí ji symbolem c . Pokladna se otevře, až když dokončí volbu tím, že přidá posloupnost $\bar{w}$, která je zrcadlovým obrazem posloupnosti w (symboly ve $\bar{w}$ jsou v opačném pořadí, tedy $\bar{w} = 11010$). Uživatel může tedy zcela libovolně měnit heslo (i co do délky). Za pomocnou abecedu vezmeme množinu $\{R, B, G\}$ přičemž symbol R je počátečním symbolem pomocné abecedy, za množinu stavů pak množinu $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$, kde s_0 je počáteční, s_2 koncový stav a stav s_3 odpovídá zapnutí poplašného zařízení. Přejchodová funkce δ je dána vztahy:

$$\begin{aligned}\delta(s_0, 0, R) &= \{(s_0, BR)\} \\ \delta(s_0, 0, B) &= \{(s_0, BB)\} \\ \delta(s_0, 0, G) &= \{(s_0, BG)\} \\ \delta(s_0, c, R) &= \{(s_1, R)\} \\ \delta(s_0, c, B) &= \{(s_1, B)\} \\ \delta(s_0, c, G) &= \{(s_1, G)\} \\ \delta(s_0, 1, R) &= \{(s_0, GR)\} \\ \delta(s_0, 1, B) &= \{(s_0, GB)\} \\ \delta(s_0, 1, G) &= \{(s_0, GG)\} \\ \delta(s_1, 0, B) &= \{(s_1, A)\} \\ \delta(s_1, 1, G) &= \{(s_1, A)\}\end{aligned}\tag{1}$$

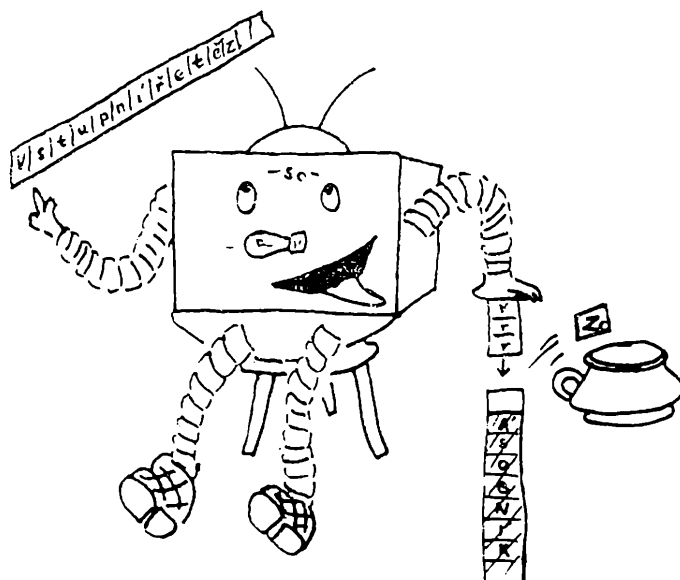
$$\delta(s_1, A, R) = \{(s_2, R)\}\tag{2}$$

a

$$\delta(s_i, a, P) = \{(s_3, A)\},\tag{3}$$

$i = 0, 1, 2, 3$, $a \in \{A\} \cup \{0, 1, c\}$, $P \in \{R, B, G\}$, pokud nejsou tyto případy uvedeny již v (1) nebo (2).

Přitom např. vztah $\delta(s_0, 0, R) = \{(s_0, BR)\}$ znamená, že automat, který je ve stavu s_0 , na vstupní pásce čte symbol 0 a má symbol R na vrcholu zásobníku, zůstává ve stavu s_0 a symbol R na vrcholu zásobníku je nahrazen řetězem BR tak, že B je na vrcholu a čtecí hlava je připravena číst další symbol vstupního řetězu na vstupní pásce. Ukážeme si, jak vypadá činnost automatu, je-li řetěz $w\bar{w}$ na vstupu. Ujijeme k tomu uspořádaných trojic (stav; část vstupního řetězu, která má být ještě zpracována; obsah zásobníku), které popisují situaci v jednotlivých taktech oddělených symbolem $\sim$.



$$\begin{aligned}
 (s_0, 01011c11010, R) &\sim (s_0, 1011c11010, BR) \sim (s_0, 011c11010, GBR) \sim \\
 &\sim (s_0, 11c11010, BGBR) \sim (s_0, 1c11010, GBGBR) \\
 &\quad (s_0, c11010, GGBGBR) \sim \\
 &\quad \sim (s_0, c11010, GGBGBR) \sim \\
 &\quad \sim (s_1, 11010, GGBGBR) \sim \\
 &\quad \sim (s_1, 1010, GBGBR) \sim \\
 (s_1, 010, BGBR) &\sim (s_1, 10, GBR) \sim (s_1, 0, BR) \sim \\
 (s_1, \Lambda, R) &\sim (s_2, \Lambda, R).
 \end{aligned}$$

Automat je v koncovém stavu s_2 , řetěz $w\bar{c}\bar{w}$ je jím generován. Čtenář se snadno přesvědčí, že volbou jiného řetězu než $\bar{w}$ bychom přivedli automat do stavu s_3 a uvedli bychom v činnost poplašné zařízení. Ponechme stranou technické detaily, které nemají pro náš záměr podstatný význam. Povšimněte si však, že kdybychom místo (2) volili

$$\delta(s_1, \Lambda, R) = (s_1, \Lambda) \quad (2')$$

a množinu koncových stavů ponechali prázdnou, pak všechny řetězy, které uvedly původní automat do koncového stavu, způsobí u takto upraveného automatu úplné vyprázdnění zásobníku. Tak přicházíme k důležitým otázkám: *v jakém vztahu je množina řetězů, které uvedou daný zásobníkový automat do koncového stavu, k množině řetězů, které způsobí, že se vyprázdní zásobník automatu?* O jaké třídy jde a v jakém jsou vztahu k regulárním množinám? Čtenář jistě cítí, že než se pokusíme zodpovědět na tyto otázky, bylo by záhodno matematicky precizovat zatím jen intuitivně popsané dojmy. Tedy:

Zásobníkovým automatem $\bar{M}$ nazveme uspořádanou sedmicí

$$(S, A, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F),$$

kde S je konečná neprázdná množina stavů,
 A je konečná neprázdná vstupní abeceda,
 Γ je konečná neprázdná pomocná abeceda,
 δ je zobrazení z $S \times (A \cup \{A\}) \times \Gamma$ (do množiny konečných podmnožin $S \times (\Gamma \cup \{A\})$),
 $s_0 \in S$ je tzv. počáteční stav,
 $Z_0 \in \Gamma$ je počáteční pomocný symbol,
 $F \subset S$ je množina koncových stavů.

Množinu všech řetězů, které uvedou automat M do některého z koncových stavů, nazveme množinou řetězů generovaných automatem M a označíme $T(M)$.

Množinu všech řetězů, které způsobí, že po jejich zpracování se v automatu M vyprázdní zásobník, nazveme množinou řetězů generovaných automatem M za vyprázdnění zásobníku a označíme $N(M)$.

Příklady:

1. Zásobníkový automat $M_1 = (\{s_0, s_1, s_2, s_3\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta_1, s_0, R, \{s_2\})$, kde přechodová funkce δ_1 je dána vztahy (1), (2), (3), generuje množinu
 $T(M_1) = \{wc\bar{w}; \bar{w} \text{ je zrcadlový obraz } w\}$.
2. Zásobníkový automat $M_2 = (\{s_0, s_1\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta_2, s_0, R, \emptyset)$, kde δ_2 je dána vztahy (1), (2'), generuje za vyprázdnění zásobníku stejnou množinu, tj.

$$N(M_2) = T(M_1).$$

Nejdůležitější vlastnosti zásobníkových automatů:

- A. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:
 1. $L = N(M)$ pro nějaký zásobníkový automat M ,
 2. $L = T(M')$ pro nějaký zásobníkový automat M' .
- B. Existuje množina $L = T(M)$ generovaná zásobníkovým automatem M taková, že není generovaná žádným konečným automatem.
- C. Ke každé regulární množině R je možno najít zásobníkový automat M takový, že $R = T(M)$.

Třída množin řetězů, generovaných zásobníkovými automaty, je tedy širší než třída regulárních množin. Z hlediska jejich struktury jde o mimořádně důležitou třídu tzv. nekontextových jazyků, které mají stěžejní důležitost v teorii programovacích jazyků.

Problém rodin s pěti dětmi

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

V městečku Pětice mají jednu zvláštnost. Ač to zní podivně, přesto je pravda, že všechny rodiny, které zde žijí, mají pět dětí. Ano, je tomu tak ve všech 3200 rodinách.

Starosta městečka dostal dotazník, který musí být ihned vyplněn a ihned odeslán. Tento dotazník klade následující otázky: Kolik procent rodin má samé dcery? Kolik procent rodin má čtyři dcery a jednoho syna? Kolik procent ? Kolik procent rodin má samé syny?

Starostovi bylo jasné, že není možno pro nedostatek času obejít všechny rodiny a zjistit požadované údaje. Proto se rozhodl, že do dotazníku napíše odhady, které budou dostatečně směrodatné. Protože jeho děti odebírají časopis Rozhledy, je obeznámen s metodou Monte Carlo. I rozhodl se této metody použít.

V první řadě je nutno nalézt vhodný model. Lze předpokládat, že chlapců se rodí stejně jako děvčat. Statistiky sice uvádějí, že chlapců se rodí o něco více,*) ale my budeme uvažovat ideální polovinu. Pak však hod korunovou mincí s výsledky „padla panna, padl lev“, nám reprezentují po řadě údaje „dcera, syn“ v pětické rodině. Budeme-li házet pěti mincemi najednou, pak počet panen reprezentuje počet dcer v jedné rodině.

Přesně podle tohoto matematického modelu žáci jedné školy provedli celkem 1600 simulací s výsledky uvedenými v tabulce 1.

Tabulka 1.

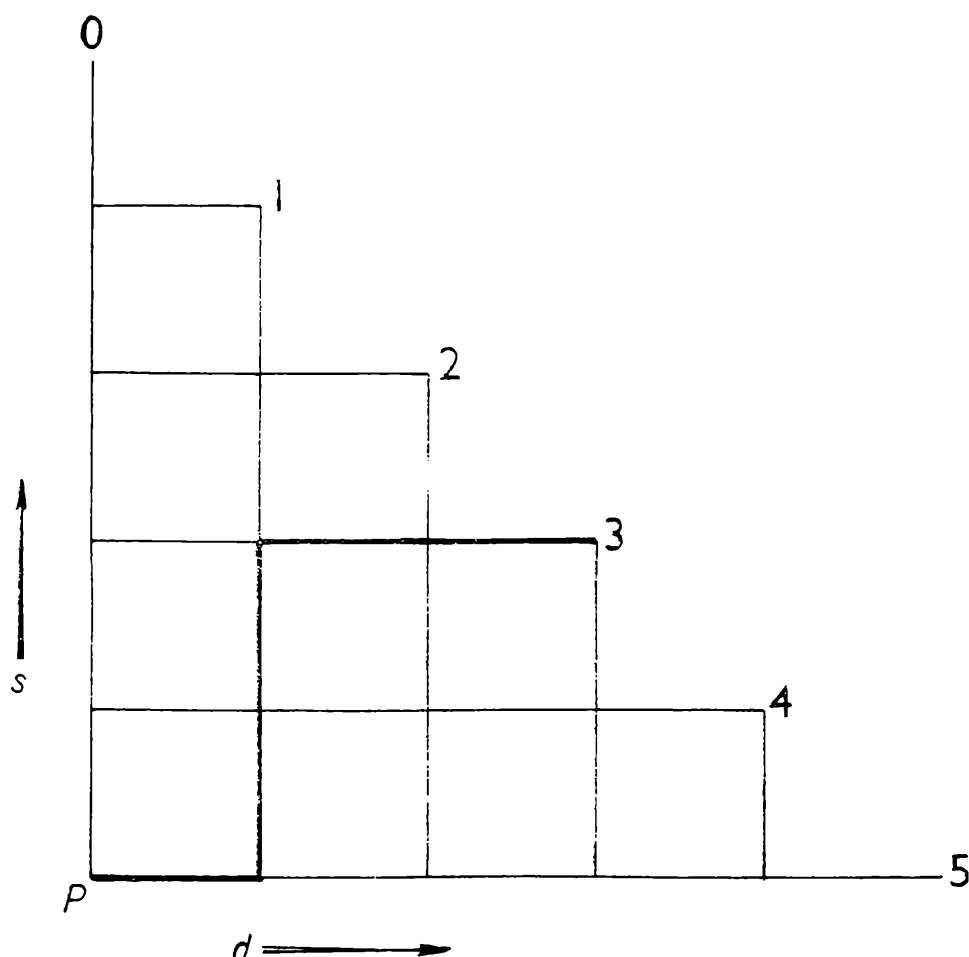
Počet dcer v rodině		4	3		1	0
Četnost	57	273	465	502	232	71
Relativní četnost v %	3,5	17,1	29,1	31,4	14,5	4,4

V tabulce jsou zároveň uvedeny odpovědi na otázky položené v dotazníku. Rodin se dvěma dcerami a třemi syny žije v městečku 31,4 % atd.

Jak je to s teoretickými hodnotami? Ten, kdo je obeznámen aspoň trochu s teorií pravděpodobnosti, snadno úlohu vyřeší. A ti ostatní necheť uvažují s námi. V městečku Pětice postavíme park, který má

*) Dlouhodobá pozorování ukazují, že z tisíce narozených dětí je průměrně 516 chlapců.

Obr. 1

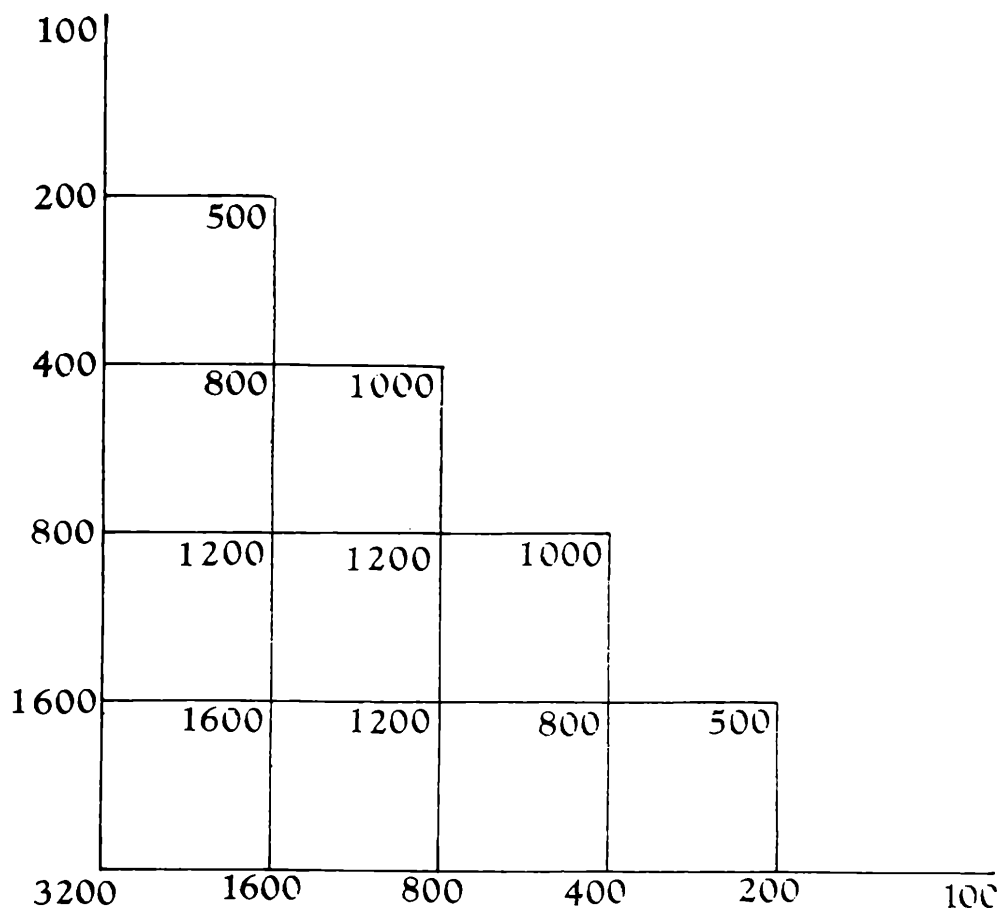


cestičky uspořádaný podle obrázku 1. V bodě P shromáždíme všech 3200 otců rodin a řekneme:

„Vážení otcové, pozvali jsme vás na procházku nově zbudovaným parkem. Procházka však nebude ledajaká. Vzpomeňte si, v jakém pořadí vám přicházely děti do rodin. Podle toho budete naším parkem procházet. Na každé křižovatce určí směr další cesty skutečnost, zda další v pořadí dětí je dcera nebo syn. Příslušný směr ukazují směrníky. A protože nejlepší je vždy osobní příklad, pan starosta vám to předvede. Jak všichni víte, manželka pana starosty postupně porodila Anežku, Bohouše, Petra, Voršilu a Zuzanu.“ (Na obrázku 1 je cesta pana starosty zakreslena silněji.)

Nyní vyzveme shromážděné otce k vlastní procházce. Až dojdou na konec, tj. do bodů označených čísly 0, 1, 2, 3, 4, 5, vyjde najevo, kolik otců má doma po řadě 0, 1, 2, 3, 4, 5 dcer.

Uvažujeme-li teoreticky, musí se na každé křižovatce skupina otců, kteří tam došli, rozdělit na polovinu, protože předpokládáme, že dívek se rodí stejně jako chlapců. Obrázek 2 nám ukazuje počty otců, kteří skončili na příslušných místech parku. Na tomto podkladě sestavíme četnostní tabulku, tentokrát pro teoretické četnosti.



Tabulka 2.

Počet dcer v rodině	5	4	3	2	1	0
Teoretická četnost	100	500	1000	1000	500	100
Relativní četnost v %	3,1	15,6	31,3	31,3	15,6	3,1

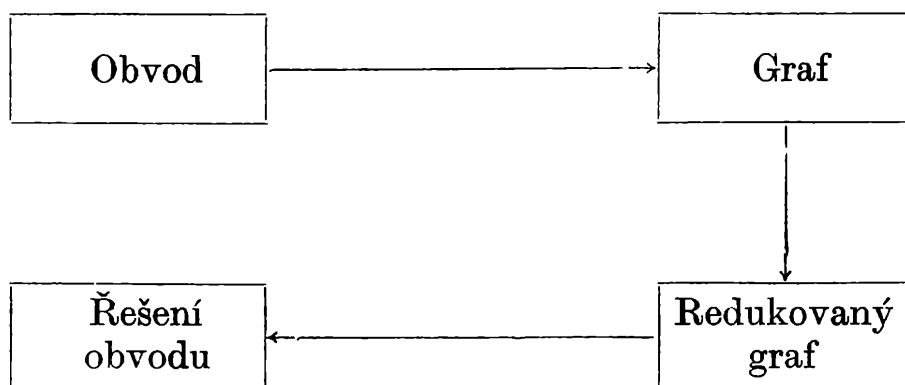
Teoretické hodnoty se od hodnot zjištěných metodou Monte Carlo poměrně dost liší. Příští článek proto věnujeme problému přesnosti odhadu získaného metodou Monte Carlo.

Použití grafů signálních toků v elektrotechnice

Ing. J I Ř Í M Y S L Í K, n. p. Škoda Plzeň

V článku *Grafy signálních toků* (Rozhledy č. 5) jste získali základní informace o řešení jednoduchového elektrického obvodu pomocí soustavy lineárních rovnic, o znázornění této soustavy grafem a o možných úpravách takového grafu. V 6. čísle Rozhledů*) jste si mohli dále procvičit nejjednodušší úpravy grafů signálních toků směřující k redukcí počtu uzlů a hran grafu.

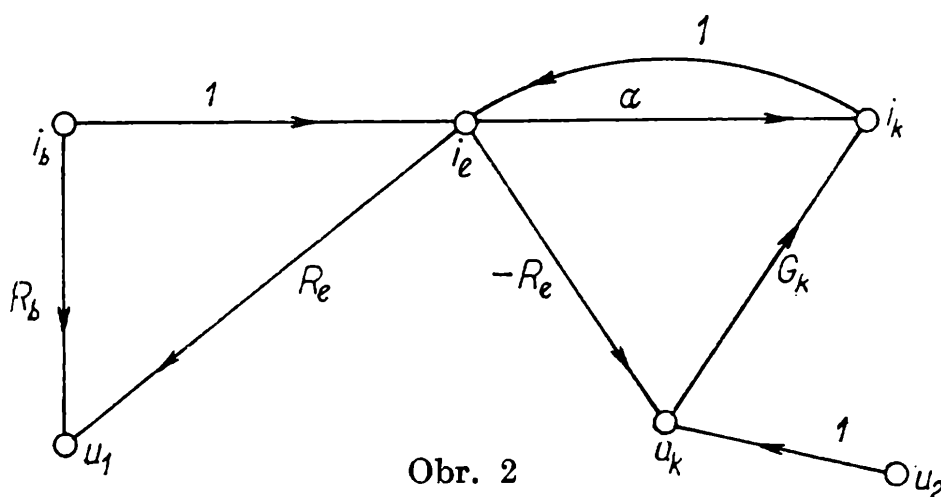
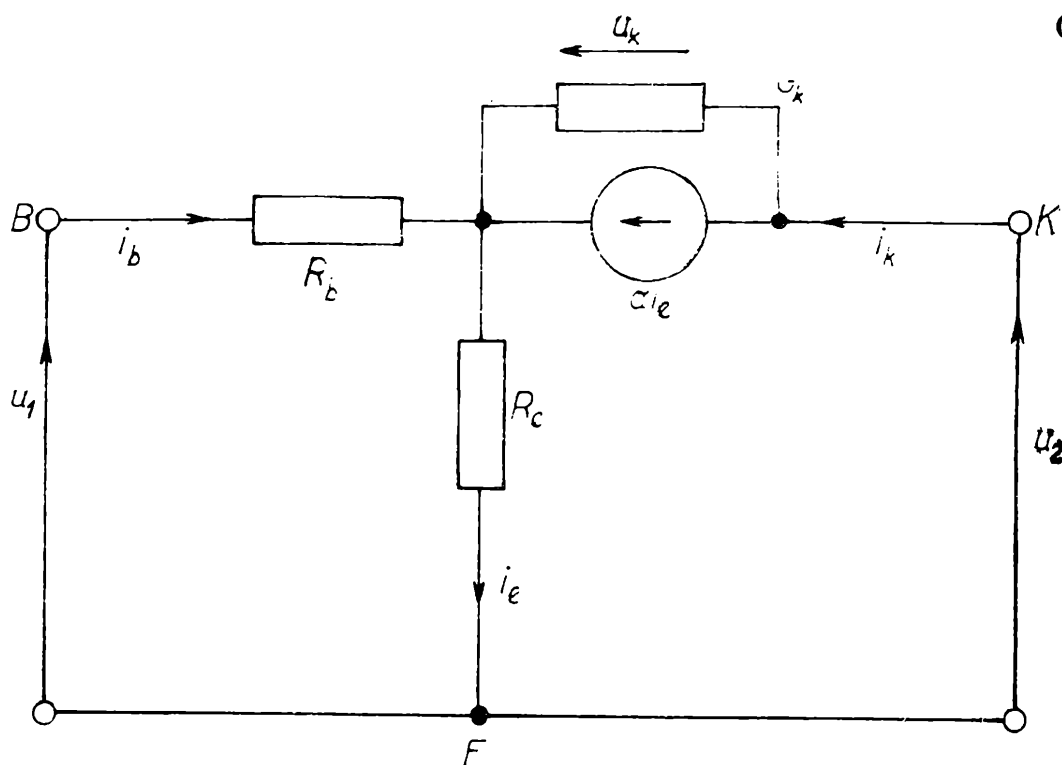
Použijme nyní těchto základních znalostí a dovedností k řešení úlohy o jednom elektrickém obvodu. Náš postup lze vystihnout tímto schématem:



Jak patrně, „obcházíme“ přímé řešení obvodu tím, že mu nejprve přiřadíme graf (jde o graf signálních toků); v další etapě tento graf redukuje se záměrem získat graf s uzly, které potřebujeme; nakonec interpretujeme redukovaný graf jako řešení obvodu. Sledujte pozorně tyto etapy řešení v následujícím příkladě z elektroniky.

Náhradní schéma tranzistoru pro nízké kmitočty v zapojení se společným emitorem je zakresleno na obr. 1. R_b , R_e značí odpory báze a emitoru, G_k vodivost kolektoru, α koeficient proudového zesílení; význam ostatních symbolů je běžně známý. Požaduje se vyjádřit závislosti mezi i_b , i_k , u_1 a u_2 .

*) V článku *Zjednodušování grafů signálních toků* popsal dr. J. Šedivý podrobněji postup při elementárních úpravách grafů.

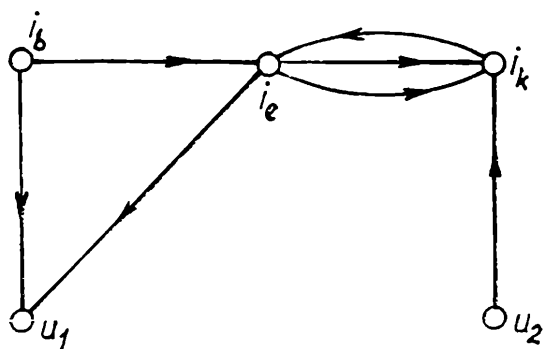


Obr. 2

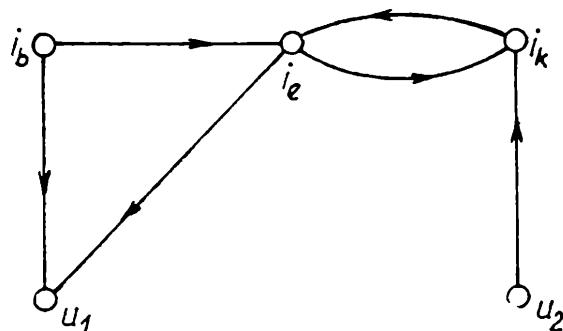
Při konstrukci grafu uplatníme ty znalosti o elektrických obvodech, které jsme si připomněli v prvním článku. Výsledkem je graf na obr. 2 (zapište si soustavu lineárních rovnic, kterou představuje).

Při redukci grafu budeme dbát na to, abychom zachovali jeho uzly i_b , i_k , u_1 , u_2 . Postup úprav je zachycen na obr. 3 až 6, koeficienty k jejich hranám si však dopište sami (drobným písmem) podle těchto poznámek:

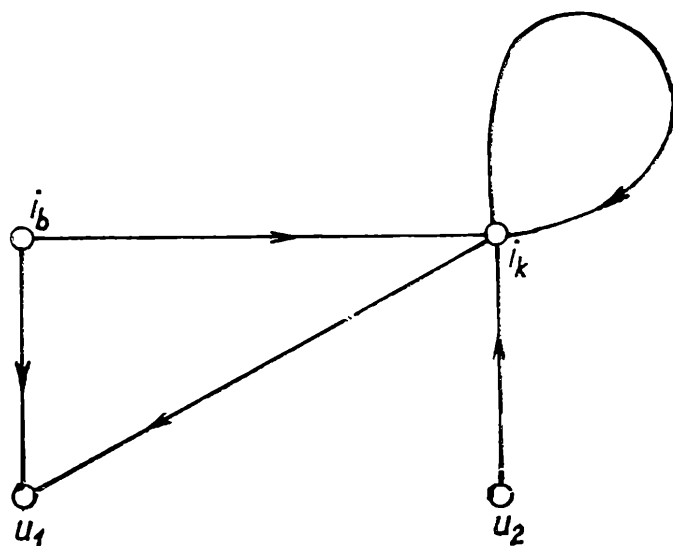
a) Při eliminaci uzlu u_k nahrazujeme cestu $i_e \rightarrow u_k \rightarrow i_k$ „spodní“ hranou $i_e i_k$ s koeficientem $(-R_e G_k)$; cestu $u_2 \rightarrow u_k \rightarrow i_k$ nahrazuje hrana $u_2 i_k$ s koeficientem G_k . Získáme graf na obr. 3; v něm ještě nahradíme dvě souběžné hrany z i_e do i_k jednou hranou s koeficientem $\alpha - R_e G_k$ (obr. 4).



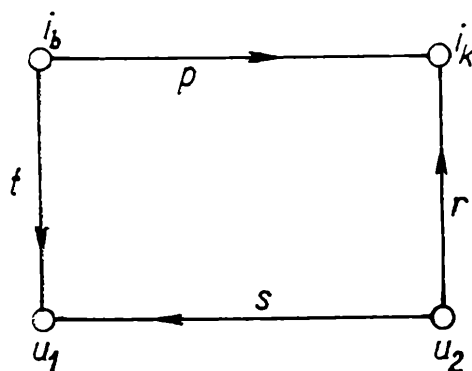
Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

b) Při eliminaci uzlu i_e sledujeme všechny cesty z některého jeho sousedního uzlu do jiného, které jdou přes i_e . Cesta $i_b \rightarrow i_e \rightarrow i_k$ je nahrazena v obr. 5 hranou $i_b \rightarrow i_k$ s koeficientem $\alpha - R_e G_k$; cesta $i_k \rightarrow i_e \rightarrow u_1$ je zastoupena hranou $i_k \rightarrow u_1$ s číslem R_e ; cestu $i_k \rightarrow i_e \rightarrow i_k$ nahrazuje smyčka u uzlu i_k s hodnotou $\alpha - R_e G_k$ (obr. 5).

c) Při eliminaci smyčky u uzlu i_k sledujeme všechny cesty mezi zbývajícími uzly, které procházejí uzlem i_k ; každou takovou cestu znázorníme hranou s příslušným koeficientem (obr. 6):

$$i_b i_k \text{ má koeficient } p = \frac{\alpha - R_e G_k}{1 - \alpha + R_e G_k},$$

$$u_2 i_k \text{ má koeficient } r = \frac{G_k}{1 - \alpha + R_e G_k},$$

$$u_2 u_1 \text{ má koeficient } s = \frac{R_e G_k}{1 - \alpha + R_e G_k},$$

$$i_b u_1 \text{ má koeficient rovný součtu } t = R_b + \frac{R_e}{1 - \alpha + R_e G_k}.$$

Z obr. 6 tedy získáme rovnice:

$$u_1 = \left(R_b + \frac{R_e}{1 - \alpha + R_e G_k} \right) \cdot i_b + \frac{R_e G_k}{1 - \alpha + R_e G_k} \cdot u_2 .$$

$$i_k = \frac{\alpha - R_e G_k}{1 - \alpha + R_e G_k} \cdot i_b + \frac{G_k}{1 - \alpha + R_e G_k} \cdot u_2 .$$

I v případě, že čtenář není obeznámen s teoretickou elektrotechnikou v tom rozsahu, aby si mohl nakreslit graf na obr. 2 na základě schématu z obr. 1, rozumí jistě dalšímu postupu, tj. vlastní metodě, kterou zde poznáváme.

Při praktickém řešení elektrických obvodů se užívá většího počtu úprav grafů, např. inverze (změna orientace) větve, inverze cesty, rozdělování uzlů, dále též normování grafu, Masonova pravidla atd. S ohledem na informativní charakter článku jsme se těmito úpravami nezabývali.

Literatura

- [1] Mezon-Cimmerman: Elektronnyje cepi, signaly i sistemy, Moskva 1963.
- [2] Robišo-Buaver-Rober: Napravljenyje grafy i ich priloženije k električeskim cepjam i mašinam, Moskva 1964.
- [3] Automatizace č. 10, roč. 1964, str. 272.
- [4] Bessonov: Linejnyje električeskije cepi, Moskva 1968.

Spojený ústav jaderných výzkumů v Dubně (SSSR)

(pokračování)

Ing. ZDENĚK JANOUT, CSc., JFJ ČVUT Praha

Stručná charakteristika dalších laboratoří SÚJV

LJaP

je nejstarší laboratoří SÚJV. V sousedství této laboratoře byly později vybudovány i ostatní laboratoře ústavu (mimo LVE).

Ředitel: prof. V. P. Dželepov, člen korespondent AV SSSR.

Základní experimentální zařízení: synchrocyclotron urychlující protony na energii 680 MeV Některé další parametry: vnitřní intenzita je

$1,4 \times 10^{13}$ protonů/s (tj. 2,3 μA). Hmotnost magnetu 7000 tun, průměr pólových nástavců magnetu je 6 m, průměr cívek 12 m.

Základní směry výzkumu (výzkum se provádí v oblasti energií menších než 1 GeV):

Studium: — silné interakce mezi nukleony (N, N) a (π , N),
— elmg. procesů s účastí mezonů μ a π (fyzika mezoatomů),
— slabé interakce,
— neutronodeficitních a silně deformovaných atomových jader (jaderná spektroskopie).

Některé dosažené výsledky :

- v průběhu několika let byl převeden soubor experimentů (tzv. úplný pokus) s pružným N-N rozptylem, které daly důležité informace o jaderných silách,
- byly získány důležité informace o záchytu mezonů μ v atomových jádrech,
- byl proveden přímý důkaz existence jádra He^8 ,
- bylo objeveno asi 80 nových radioaktivních jader.

LJaR

byla založena v r. 1956.

Ředitel : akademik G. N. Flerov

Základní experimentální zařízení : dva cyklotrony na urychlování mnohonásobně nabitých iontů. *Cyklotron U 300 :* energie urychlených iontů 10 MeV/nukleon, proud iont. svazku $^{22}\text{Ne}^{+4}$ je 100 μA . Lze urychlovat ionty prvků od ^{12}C do ^{40}Ar . *Cyklotron U 200 :* energie urychlených iontů 9 až 20 MeV/nukleon. Lze urychlovat ionty v oblasti od ^1H do ^{20}Ne .

Základní směry výzkumu :

Studium: — syntézy transuranových prvků a jejich vlastností,
— jaderných reakcí s nabitými ionty,
— hledání protonoradioaktivních jader.

Některé dosažené výsledky :

- byla provedena syntéza šesti izotopů prvku 102^{251} až 256 , dvou izotopů prvku 103^{256} , 257 ,
- prvně vůbec byl získán prvek $Z = 104$ ($A = 260$), který byl na návrh objevitelů pojmenován Kurčatoviem (Ku),
- byla objevena protonová radioaktivita u některých atomových jader.

LNF

byla založena v roce 1956.

Ředitel : akademik I. M. Frank, nositel Nobelovy ceny z r. 1958.

Základní experimentální zařízení

Impulsní reaktor IBR 30 střední výkon reaktoru je 30 kW, v impulsu 150 MW. Pološířka impulsu je 50 μ s, opakovací frekvence 5 impulsů za sekundu. Dva *Van de Graaffovy urychlovače*. Jeden urychluje ionty tritia ^3H a ^3He do energie 2 MeV, proud svazku 1 μA . Druhý urychluje protony, deutrony a ionty ^3He do energie 5 MeV proud 5 μA .

Základní směry výzkumu:

Studium: — stavby atomových jader metodou neutronové spektroskopie,
— struktury pevných látek a kapalin,
— neutronografie magnetických struktur v silných magnetických polích,
— jaderných reakcí s nabitými částicemi.

Některé dosažené výsledky

— byly naměřeny účinné průřezy pro záchyt a štěpení jader ^{235}U a ^{239}Pu neutrony,
— experimenty s polarizovanými neutrony a jádru určily rozptylovou délku neutronu na deuteronu,
— byly určeny spiny rezonancí jádra holmia.

LVT A

byla založena v r. 1966 a představuje velké výpočtové středisko.

Ředitel: prof. M. G. Mesčerjakov, člen korespondent AV SSSR.

Vybavení laboratoře tvoří počítačí stroje: BESM 4 (3 ks), BESM 3M (1 ks), BESM 6, CDC 1604A, CDC 6200, Minsk 22 a Minsk 2.

Úkoly laboratoře:

Pracovníci laboratoře

— řeší teoretické a experimentální úkoly jaderné fyziky,
— rozvíjejí nové matematické metody a vytvářejí efektivní algoritmy,
— navrhují a konstruuji poloautomatické a automatické přístroje pro prohlížení snímků z bublinových a jiskrových komor,
— zabezpečují přímé spřažení počítačích strojů s experimentální aparaturou umístěnou u urychlovačů (tzv. spojení „on line“).

LTF

byla založena v roce 1956.

Ředitel: prof. D. I. Blochincev, člen korespondent AV SSSR.

Výzkumnou problematiku této laboratoře lze rozdělit na tři hlavní směry:

— elementární částice (disperzní relace, kvazipotenciální metoda v úlo-

- hách rozptylu, nelokální a nelineární metody v teorii polí, fyzika slabých interakcí a neutrin),
- fyzika atomového jádra (otázky struktury atomových jader, teorie jaderných reakcí, metody pro modelování „průměrného“ pole atomového jádra atd.),
 - statistická fyzika (problémy spojené s teorií krystalické mříže, studium magnetismu, fázových přechodů apod.).

Oddělení nových metod urychlování.

Vedoucí: M. V. Sarancev, DrSc.

Tématika výzkumu: Kolektivní metody urychlování nabitých částic. Výzkumy provedené v tomto oddělení ukázaly, že lze užitím kolektivní metody urychlování vytvořit urychlovací systémy nabitých částic, které jsou jednodušší a levnější než dosavadní, například postavit protonové urychlovače do 1000 GeV a urychlovače pro urychlování libovolných mnohonásobně nabitých iontů s intenzitou iontového svazku 10^4 iontů/s a energií 10 MeV/nukleon.

V současné době fyzikové z laboratoří LVE a LJaP velmi těsně spolupracují při uskutečňování experimentů na protonovém synchrotronu 76 GeV v Ústavu fyziky vysokých energií v Serpuchově. SÚJV Dubna již instaloval v Serpuchově dvě velká fyzikální zařízení. Je to jednak dvoumetrová vodíková komora „Ludmila“, která bude sloužit ke studiu interakce mezi vysoce energetickými částicemi svazku a protony v komoře, jednak pětimetrový jiskrový spektrometr umístěný na svazku pionů. Dále fyzikové z Dubny zhotovili pro experimenty s neutrálními mezony K (kaony) třímetrový terčik s obsahem kapalného vodíku.

Pracovníci z Dubny se taktéž účastní experimentu — studium pružného rozptylu protonů na protonech, který je prováděn ve spolupráci s americkými fyziky na urychlovači protonů 200 GeV v Batavii (USA). První naměřené výsledky byly publikovány v posledních měsících.

Důležitým střediskem v SÚJV je centrální knihovna, umístěná v LTF. V prostorách knihovny je dobře vybavená velká studovna. Knihovna je organizována tak, aby čtenář mohl získat co nejrychleji hledanou informaci. Proto v prostorách knihovny má čtenář naprosto volný přístup ke všem preprintům, časopisům, knihám atd. Teprve při vynášení knihy či časopisu mimo prostor knihovny se provádí registrace daného titulu. Každý týden vydává knihovna „express-bulletiny“, kde jsou uvedeny informace o nově došlých knihách, preprintech atd. V jedné z místností knihovny je permanentně instalována výstavka došlé literatury, která se pravidelně mění jednou týdně.

Zaměstnanci ústavu pracující v prostředích, kde je přítomno radioaktivní záření (u urychlovačů, v radiochemických laboratořích atd.),

jsou nepřetržitě pod osobní dozimetrickou kontrolou prováděnou dozimetrickým oddělením. V roce 1972 nepřesáhla u 90 % pracovníků (z 2000 sledovaných pracovníků) obdržená dávka 0,2 roční přípustné dávky (5 rem).

SÚJV Dubna je organizátorem řady vědeckých konferencí, symposií, vědeckých porad, letních fyzikálních škol atd. Některé z těchto akcí jsou pořádány za spoluúčasti institucí členských zemí. Například v r. 1972 se uskutečnilo v ČSSR (Štrbské pleso) II. symposium o fyzice vysokých energií, v NDR symposium o teorii elementárních částic, v Dubně symposium o kolektivních metodách urychlování, v SSSR (Alušta — Krym) letní škola o struktuře atomového jádra.

Českoslovenští specialisté z různých pracovišť se aktivně podílejí na činnosti SÚJV. Průměrně pracuje v Dubně v rámci dlouhodobého pobytu (2 až 3 roky) kolem 40 pracovníků. Kromě toho se naši vědečtí pracovníci účastní činnosti v různých orgánech ústavu, zúčastňují se konferencí, pracovních porad, seminářů a podobných akcí.

různé

Československá akademie věd

RNDr. K A R E L M I Š O Ň, CSc., ČVUT Praha

Vliv průběžného rozvoje vědy se zřetelně projevuje nejen ve vyspělém výrobním průmyslu, ale i v každodenním životě jednotlivců. Vzpomeňme *mechanického ulehčování práce, komfortního vybavení bytového prostředí, zrychlení dopravy se souběžným zkvalitňováním, telekomunikačních možností, ochrany životního prostředí, zdravotnicko-léčebného rozvoje, zdokonalování výživy, průběžné zvyšování lidského věku atd.* Vědě přísluší prvořadá úloha v úrovni a rozvoji společenského i osobního života.

Je přirozené, že souběžně se zahájením socialistické výstavby státu se výrazně rýsovala nutnost vytvořit progresivní vrcholnou vědeckou instituci, která by v organizačním sepětí teoretického výzkumu a praktického využití zabezpečovala co nejefektivněji účelnost investovaných prostředků. Bylo třeba jednotlivé dřívější oddělené vědecké instituce — jmenujme alespoň obě přední: *Královskou českou společnost nauk a Českou akademii věd a umění*, založené roku 1784 a 1891 — nahradit pracovně jednotnou, pokrokovou a koncepčně vytříbenou organizací zcela nového typu. Podobně jako v ostatních zemích socialistického tábora dochází

i u nás ke zřízení Československé akademie věd (ČSAV) jako sdružení nejvýznamnějších vědeckých odborníků ve státě.

Právní postavení nové instituce je zakotveno ve významném zákoně o ČSAV č. 52 Sb. ze dne 29. října 1952. Necelých čtrnáct dní později, 12. listopadu, jmenuje první dělnický prezident Klement Gottwald na návrh vlády první členy presidia ČSAV a první řádné členy, akademiky ČSAV. Presidentem ČSAV se stává akademik Zdeněk Nejedlý (1878 až 1962), jehož světový rozhled a bohaté zkušenosti soustředěné do významné studie „*Vybudujeme československou akademii věd*“ byly vedle podkladů Akademie věd SSSR (AN CCCP — jejímž členem prof. Nejedlý byl) vůdčí osnovou koncepční práce vládní komise (zřízené 15. ledna 1952) pro vybudování ČSAV. Vlastní ustavení Akademie se uskutečnilo v památném datu 17. listopadu na slavnostním zasedání v Národním divadle. Stejně motivy vedly k zákonu SNR ze dne 18. června 1953 ustavujícímu Slovenskou akademii věd (SAV).

Velkorysá podpora stranických a vládních orgánů umožnila rychlý kvalitativní i kvantitativní rozmach pracovišť ČSAV a bohatou organizačně pracovní vývojovou činnost. Akademie orientuje své zaměření na potřeby socialistické společnosti. Vzniká *Komise pro pomoc velkým stavbám socialismu* (1953), *Komise pro pomoc výstavbě hlavního města Prahy* (1953), *Rada pro rozvoj výrobních sil* (1955).

Úzký kontakt Akademie a potřeb společnosti se zračí v těsné návaznosti usnesení ÚV KSČ a vlády ze dne 22. února 1956 o úkolech vědy a novelizace zákona o ČSAV zákonem č. 53 ze dne 31. října 1957, který vybavil Akademii širokými pravomocemi. Akademie se stává poradcem vlády v zásadních vědeckých otázkách a vrcholným reprezentantem československé vědy v mezinárodních stycích. První Stanovy ČSAV přijaté v duchu tohoto zákona valným shromážděním 15. listopadu 1957 schválilo usnesení vlády č. 337 z 9. dubna 1958. Pracovní zkušenosti si vyžádaly další vývojovou etapu zahájenou usnesením byra ÚV KSČ ze dne 10. října 1961 („*O nové organizaci Československé akademie věd*“). ČSAV uzavírá smlouvy o spolupráci s Universitou Karlovou (KU) i s Českým vysokým učením technickým (ČVUT) a s jinými vysokými školami, s oborovým podnikem Škoda Plzeň a s dalšími průmyslovými závody. Jsou dohodnuty principy spolupráce s orgány Národního shromáždění. Státní změny vyvolané přijetím nové socialistické ústavy se projevují novelizačním zákonem č. 54 ze dne 9. července 1963 (na Slovensku zákon SNR č. 74 ze dne 23. 9. 1963). Zákonné opatření Federálního shromáždění č. 26/1970 Sb. (na Slovensku zákon SNR č. 43/1970 Sb.) se staly výchozí právní normou obou akademií. Rozvoj a význam Akademie plně potvrzuje slova Gottwaldova dopisu ke slavnostnímu zahájení 17. 11. 52: „*Akademie bude mít své místo ne někde na periferii našeho života, nýbrž v samém jeho středu.*“

Obě akademie ČSAV i SAV se zařadily svými důsledky do předních

světových trendů vědeckého bádání, v němž se jejich práce symbioticky doplňují. Důraz v hodnocení takových úspěchů spadá na vrub SAV, která dovedla hned ve svých začátcích tak úspěšně překonat historii nastřádané nepříznivé ekonomické, technické i kulturní rozdíly ve srovnání a příznivějším vývojem v českých zemích.

Uvedeme alespoň ve stručném soupisu jednotlivých osm programů základního výzkumu v pětiletém plánu: I. *Mikrostruktura a vlastnosti hmoty. Metody současné matematiky*. II. *Kosmický prostor, Země a využívání jejích zdrojů*. III. *Nové teoretické základy techniky*. IV. *Nové chemické procesy, jejich kontrola a technika*. V. *Struktura a funkce živé hmoty*. VI. *Člověk a biosféra*. VII. *Biologické a lékařské základy zdravého vývoje člověka*. VIII. *Socialistická společnost v údobí vědeckotechnické revoluce a v podmínkách třídně rozděleného světa*. Z přebohaté pracovní náplně v početných pracovištích (jen pražský telefonní seznam obsahuje $3 \cdot 10^5$ přímých linek!) přihlédneme alespoň orientačně ve stručném výběru k matematicko-fyzikálním a odpovídajícím technickým zaměřením.

Výzkumné výsledky dosažené v teorii diferenciálních rovnic nalézají uplatnění v analýze významných technických úkolů. Bohatá škola s dlouhou tradicí věnovaná topologii se řadí na prvé výspy světové vědy — podobně i funkcionální analýza. Biologická praxe účelně využívá obecných přístupů z matematické statistiky. Dlouhodobá výzkumnická práce umožnila projekt řídicího počítače třetí generace (RPP 16), jehož parametry dosahují světové úrovně. Náš polovodičový průmysl vděčí fyzikálnímu výzkumu pevných látek. Přínos výsledků týkajících se amorfních polovodičů nalezl světový ohlas. Podobně i studium nestabilit horkého i studeného plazmatu. Významné teoretické poznatky z elektronové optiky umožnily n. p. Tesla Brno uskutečnit výrobu špičkových mikroskopů a spektrometrů jaderné magnetické rezonance (RVHP). Převážně exportně zaměřená výrobní kapacita dosahuje ročně sta milionů Kčs. Projekt zařízení pro buzení a automatickou synchronizaci středních a dlouhých vln rozhlasových stanic (budič ARB-1) podle podmínek sovětského ministerstva spojů byl umožněn výsledky radioelektronického výzkumu. Unikátním přístrojem v celé Evropě se stal infračervený spektrometr pro oblast 1 až 25 μm . Zkušeností získaných při jeho vývoji využila i sovětská AH CCCP.

Významným úspěchem měřicí techniky je vyřešení problému modulované elektrochemické stovebnice, která kombinací jednoduchých principů umožňuje řadu aplikačních možností. Nová výroba speciální techniky v Turčanských strojárnách v Martině využívá objektivní kritéria při hodnocení houževnatosti svařovaných materiálů. Vědecké podklady poskytl teoretický výzkum kovů. Výsledky umožnily také prodloužení provozní doby tepelně vysoce namáhaných vinutých těles. Některé výrobní závody (ČKD, Škoda, MEZ) využívají výzkum nelineárních polí a parazitních jevů v točivých elektrických strojích se zaměřením k ome-

zení hlučnosti. Tvářecí stroje s uplatněním tuhosti konstrukce, vyráběné n. p. Žďárské strojírny, vděčí výzkumu šíření napěťových vln v pevných tělesech. Získané výsledky umožnily rozvoj užitečné metodiky nedestruktivních zkoušek materiálů. Železárnám Bohumín slouží k zavádění nových typů železničních kol určených pro vysoké rychlosti.

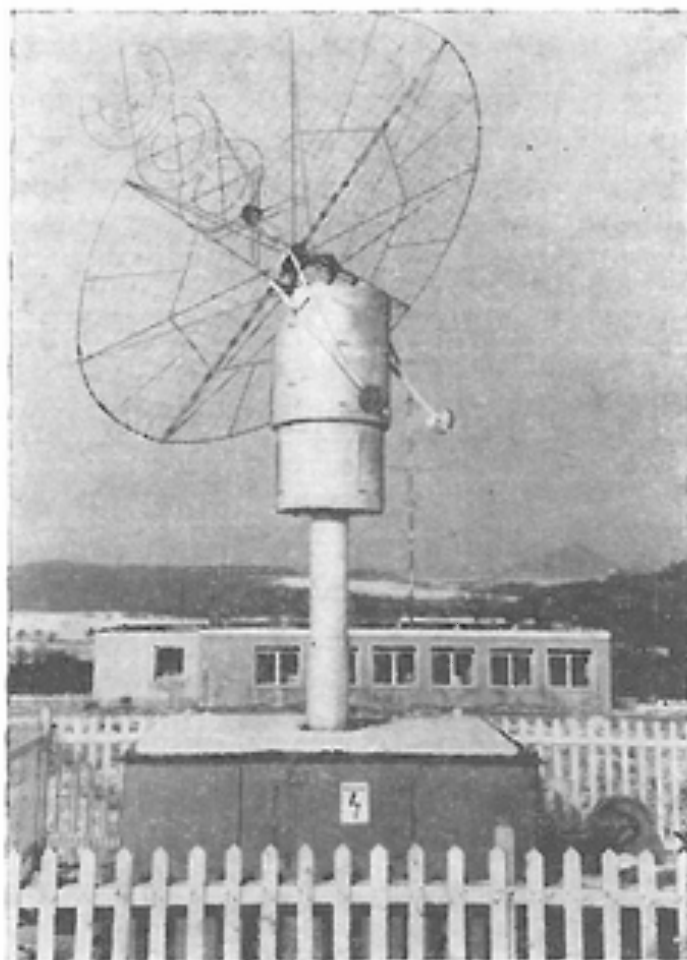
Bezpečnost práce v otřesových oblastech březohorského revíru je střežena automaticky pracující aparaturou, využívající objev závislosti mezi seismoakustickými otřesy a nebezpečím závalu v hlubinných dolech. Devizový přínos plynoucí s uplatněním metody v Rakousku a v Itálii není nevýznamný.

Astronomické výzkumy, otevírající cestu k poznání nových forem hmoty a zákonů jejích přeměn, nejsou již dávno královskou doménou nadpozemských teoretiků. Závažné objevy z kosmického prostoru se přenášejí do aplikability pro život společnosti. Naše práce přinesla úspěšné výsledky třeba ve výzkumech sluneční aktivity, interplanetární hmoty a při studiu fyzikálních pochodů v nitru hvězd. Geofyzika zpřesňuje údaje o tíhovém poli Země a řady jevů v oblasti seismicity.

Legióny umělých družic a kosmických sond staví astronomii mezi vědy experimentální a otevírají nepřehledná pole nových výzkumů. Když 14. dubna 1965 navrhl předseda rady ministrů SSSR A. N. Kosygin socialistickým zemím spolupráci v otázkách organizace rádiových i televizních spojení a výzkumů horních vrstev atmosféry i kosmického prostoru využitím meteorologických i geofyzikálních raket a umělých družic Země, zapojila se nadšeně i naše věda do spolupráce. A tak 14. října 1969 (start stanice Interkosmos 1) se dostávají do kosmického prostoru první přístroje československé výroby. Z jedenácti dosud vypuštěných družic této série se naši výzkumníci s pracovišti podíleli na deseti. Uvedme alespoň hlavní výzkumné problémy: *krátkovlnné záření (především ultrafialové a rentgenové), šíření rádiových vln, kosmické záření.* V aparaturách dodaných našimi pracovišti nedošlo ani k jedinému selhání; veškerý užitý konstrukční materiál i součástky byly domácho původu! Získané poznatky pak dovolují i další aplikabilitu v terestrických podmínkách (*přenosné detektory pro práci s radioizotopy a pro geologický průzkum, lékařské využití počítače měkkého rentgenu, vývoj úsporných hybridních obvodů*). Účast na programu Interkosmos umožňuje naší vědě přístup k progresivním metodám soudobé geofyziky a astronomie.

Ve vlastním nakladatelství Academia vydává ČSAV původní vědecké práce, překlady významných zahraničních vědeckých děl, sborníky, vědeckopopulární publikace i populárně vědecké časopisy. Jde o cca 20 edičních řad a tři knižnice širšího zaměření, 16 periodických sborníků; svými 67 časopisy je Academia na prvním místě ve státě. Od zahájení 1953 do konce roku 1973 vydala 3040 titulů v celkovém počtu 8 953 000 výtisků! Přitom zhruba třetina produkce (jak knih, tak časopisů) je

Ionosférická observatoř GFÚ ČSAV v Panské Vsi. Na snímku je směrová anténa pro příjem telemetrie z družic Interkosmos. Foto GFÚ ČSAV.



cizojazyčná, určená ve spolupráci se zahraničními partnery pro export. Každoroční výstavy pořádané v Universitní knihovně (letos jedenáctý rok) jsou přesvědčivým dokladem světové úrovně naší produkce.

Není bez zajímavosti připomenout si závěrem projekt akademie z myšlenkové dílny našeho největšího přírodovědce, Jana Evangelisty Purkyně (1787—1869).*) Uvažoval o akademii, která by byla pracovní institucí s organizačně propracovaným programem respektujícím heslo *theoria cum praxi* se zaměřením k životu země. Takový pohled důrazně nadřazoval reprezentativním účelům formálně módních vědeckých společností. Oproti akademiím omezeným tvořivě na živelné zájmy jednotlivých pracovníků stojí programově organizované a stmelené týmy s vytčenými, účelově zaměřenými úkoly. To ovšem nesmí znamenat nerespektování individuálních tendencí jednotlivých zanícených a schopných badatelů. I jejich elánu je třeba maximálně využít vhodným zapojením, ke kterému právě socialistická věda poskytuje — jak situaci lapidárně vystihl generální tajemník ÚV KSČ, dr. Gustáv Husák — široké mantinely.

*) Purkyňovu světovou proslulost sdostatek dokládá okolnost, že jako adresa ze zámoří stačil poště údaj: Purkyne, Europe.

Z počátků železnic

JOSEF KOTYK, Pardubice

Devatenácté století vstoupilo do dějin od svého počátku jako století páry. V rozmachu technických vymožeností jeho první poloviny zaujímá důležité místo železniční doprava. Jejimi předními průkopníky byli anglický technik GEORGE STEPHENSON (čti Džordž Stývnsn; 1781—1848) a v našich zemích inženýr JAN PERNER (1815—1845).

Již v roce 1804 sestrojil Angličan Richard Trevithick, konstruktér prvních vysokotlakých parních strojů, první parní lokomotivu. O deset let později, roku 1814, postavil zdokonalenou lokomotivu STEPHENSON; vynalezl mj. také zvratný rozvod, aby lokomotiva mohla jet buď dopředu nebo dozadu. V této době pracoval na konstrukci svého proslulého parního vozu také český vynálezce Josef Božek; předváděl jej dne 17. 9. 1815 — před 160 lety — v Královské oboře v Praze.¹⁾ Tehdy také se narodil dne 7. září 1815 v Bratčicích na Čáslavsku JAN PERNER, první český projektant a architekt železnic v našich zemích.

V roce 1825 — před 150 lety — stál před britským parlamentním výborem Stephenson, aby obhájil svůj stroj, který měl lidstvu pomáhat zkracovat vzdálenosti. Dotazů²⁾ bylo mnoho. „Co si počnete, když na koleje vběhne, udivena touto novotou, kráva? A postaví se proti stroji! Nebude to strašná situace?“ — „Bude, ale jen pro tu krávu,“ odpověděl pohotově vynálezce. „Co uděláte, když déšť uhasí oheň v lokomotivě? Co budete dělat, když vítr za bouře rozdmychá plamen v topeňšti a kotel vybuchne?“ — „Nějak to udělám,“ vyhýbavě odvětil málomluvný Stephenson.

A udělal! Naštěstí udělal. Parlamentní výbor jeho projekt sice nepřijal, ba odsoudil vynálezce jako podnikatele neschopného, bezradně tápajícího. Stephenson byl si významu svého vynálezu pro pokrok lidstva naštěstí plně vědom. Ještě v témž roce 1825 byla dne 27. září zahájena doprava osob na trati Stockton—Darlington,³⁾ dne 15. září 1830 již na železnici dlouhé 48 km mezi Manchestrem a Liverpoolem.⁴⁾ Tak byl poprvé uveden v život vynález, bez něhož by si lidstvo svůj další život neumělo snad ani představit.

¹⁾ V podrobnostech viz autorův článek „Josef Božek“ v Rozhledech roč. 46, čís. 3, str. 152 a 153. Božek zemřel dne 21. října 1835 — před 140 lety — v Praze.

²⁾ Některé uvádí např. sborník Devatenácté století slovem i obrazem (nakl. J. R. Vilímk v Praze), díl II., svazek I., str. 5, nejnověji také týdeník Rozhlas, roč. 41/1974, čís. 39, str. 1.

V Německu byla železniční doprava zahájena před 140 lety roku 1835. Bavorské „Ober-Medizinal-Kollegium“ bylo tehdy vládou vy-
zváno, aby se vyslovalo, zdali jízda ve voze taženém lokomotivou nebude
snad lidskému zdraví škodlivou. Kollegium se po „bedlivé úvaze“ vy-
vyjádřilo takto⁵⁾: „Nemůže o tom býti pochybnosti, že jízda taková
velice zdraví lidskému je nebezpečna, neboť takový rychlý pohyb musí
cestujícím přivoditi chorobu mozkovou, jistý druh deliria furiosa. Chtí-li
cestující vydati se všanc tomuto nebezpečí, toť jejich věcí, pak ale vláda
ať chrání aspoň ostatní obecnost, které chtějí nechtějí bude musit na
ujíždějící vozy pohlížeti a z toho dívání taktéž nebezpečnou onu nemoc
si přivoditi. Tomu se dá zabrániti tím, že bude podnikatelům nařízeno,
aby zřídili podél celé tratě po obou stranách vysoké a neproniknutelné
ploty.“

Než hlasy těchto „odborníků“ nepůsobily. Kdo by také nevzpomněl
na dochované legendy o odporu některých českých měst (Vysokého
Mýta, Litomyšle, Chrudimi, Kutné Hory) proti projektované dráze?
Pokrok je ovšem nezadržitelný. Železnice byly proto stavěny dále. Dnes
mají všechny trati světa již asi třikrát takovou délku, jako je vzdálenost
Měsíce od Země. Československá železniční síť má délku tratí 13 139 km
a připadá na ni 87 % veškerého dopravního výkonu.⁶⁾

* *

*

U nás byla za přítomnosti arciknížete Karla Ferdinanda v prosinci 1838
slavnostně otevřena železniční trať Rajhrad—Brno. Dne 7. července 1839
byla zahájena pravidelná doprava na trati Brno—Vídeň, přičemž
došlo k prvnímu železničnímu neštěstí. Při slavnostní zahajovací jízdě
nastala ve stanici Vranovicích na Moravě srážka vlaků; dva vozy byly
rozbity, mnoho cestujících bylo zraněno.

V roce 1845, právě před 130 lety, byla v našich zemích dobudována
významná trať Olomouc—Pardubice—Praha. Provoz na ní byl slavnostně
zahájen dne 20. srpna 1845. První pestře vyzdobený vlak, pojmenovaný
„Bohemia“, vyjel z Olomouce o 6. hodině a byl v 11 hodin 30 minut
v Pardubicích pozdraven ranami ze čtyř děl, čestnou stráží ostrostřelců
a oddílem hulánů s hudbou. Mezi zástupy občanů s praporky a korouh-
vemi byli také mnozí vzácní hosté. Podle prof. Josefa Sakaře⁷⁾ projížděli

³⁾ Obrázek Stephensonovy lokomotivy z roku 1825 přináší sborník cit.
v pozn. ²⁾ na str. 5, obraz celého vlaku titulní dvoustrana téhož svazku.

⁴⁾ Obrázek Stephensonovy lokomotivy „The rocket“ z roku 1830 přináší
sborník cit. v pozn. ²⁾ na str. 6.

⁵⁾ Viz sborník cit. v pozn. ²⁾, str. 11 ¶ 12.

⁶⁾ Viz Malý encyklopedický slovník A—Ž (vyd. Academia, Praha 1972),
str. 1412.

tímto vlakem Pardubicemi arcivévoda František Karel, zástupce císaře Ferdinanda V., uherský palatin Josef, pražský arcibiskup A. J. svob. pán Schrenk, zemský hofmistr hrabě Salm a jiní vysocí hodnostáři státní i církevní správy. Dojmy onoho slavného dne nechť nám dokreslí několik veršů básně Marie Čacké⁸⁾ „Radostný ohlas Pardubčanů při slavném otevření železné dráhy“:

„Stroj tu divný vzav si větru křídla,
ocelnou k Čechii drahou letí.
Viděv dnes daleká bratrů sídla,
nese nám je — k milému objetí.“

Výtisky slavné básně⁹⁾ byly před slavnostní hostinou rozdávány vzácným hostům.

Neméně slavnostní bylo ovšem vítání a svěcení vlaku, když dojel do Prahy.¹⁰⁾

Dnem 1. září 1845 byla na trati Olomouc—Praha zahájena pravidelná doprava. Byl-li však srpen před 130 lety měsícem oslav a radosti, přinesl měsíc září ihned dny bolesti a smutku. Je poznamenán velikou ztrátou, kterou česká technika utrpěla úmrtím mladého — teprve 30letého — vynikajícího železničního odborníka inženýra JANA PERNERA.

Inženýr JAN PERNER účastnil se již v roce 1836 s Frant. Ant. Gerstnerem stavby železnice v Rusku (trati Petrohrad—Carské Selo, dnešní Puškino)¹¹⁾ a od roku 1837 i v Rakousku (trati Vídeň—Brno); v českých zemích stavěl trati Praha—Olomouc a Břeclav—Hranice, projektoval a řídil stavbu pražského nádraží (dnešní Praha-střed), proslavil se projektem choceňského tunelu a karlínského viaduktu (Praha-střed—Bubny), dlouhého 1111 m s 87 pískovcovými oblouky, jenž však byl postaven jeho synovcem J. Kazdou a odevzdán dopravě teprve v roce 1851, šest let po Pernerově tragické smrti.

Při jízdě vlakem dne 9. září 1845 utrpěl inženýr Jan Perner smrtelný úraz. Sestoupiv po výjezdu vlaku z tunelu u Chocně na nejnižší stupeň

⁷⁾ Josef Sakař: Dějiny Pardubic, díl I., část 2 (Pardubice, 1920), cit. str. 196.

⁸⁾ Tohoto pseudonymu užívala paní Frant. Boh. Pichlová, choť lékaře a spisovatele dr. Josefa Bojislava Pichla, o němž ještě bude řeč níže; z jejích „Písní“ (1857) některé znárodněly.

⁹⁾ Bohatě typograficky upravený dvojlist s touto básní je uchováván v archivu muzea v Pardubicích.

¹⁰⁾ Zajímavý obrázek podle současné litografie přináší sborník cit. v pozn. ²⁾ na str. 9.

¹¹⁾ Obraz o Pernerově životě na tehdejší Rusi a o tom, jakou účast na stavbě první ruské železnice měli technici z Čech, podává ze sovětských pramenů a dokladů dříve neuveřejněných kniha Ing. Josefa Honse „U kolébky železných drah“ (Život a dílo Jana Perneru), 2. vyd., Dopravní nakladatelství Praha 1956.

schůdků vozu, vyklonil se a ohlédl zpět, horní částí pravé strany hlavy narazil však prudce na sloup vrat u vjezdu do nádraží a byl jím sražen k zemi. Velmi těžce zraněn pokračoval týmž vlakem v cestě k rodičům do Pardubic, kde však přes všestrannou péči, kterou mu obětavě poskytl jeho přítel MUDr. Josef Bojislav Pichl, již dne 10. září 1845 skončil . . .



Smrt inženýra Jana Pernera měla v české společnosti hluboký ohlas. Bolestné bylo vzrušení všeho českého lidu. Zpráva, kterou o smutné události přinesly „Květy“ dne 13. září 1845, končí tklivým veršem „Hvězda nadějná v noc věčnou sklesla zpět“ z básně Karla Sabiny „Na smrt Jana Pernera“.

Vděčné Pardubice pojmenovaly ulici, ve které zemřel, Pernerovou. V ní, na budově Chemingu, jež stojí na místě někdejšího domu Pernerova, mlýna „Valchy“, je zasazena pamětní deska, která připomíná dnešku smutnou událost před 130 lety

Nechť také naše řádky jsou vděčnou vzpomínkou na talentovaného železničního odborníka a národního buditele inženýra JANA PERNERA, jenž s nadšením svého průbojného a pokrokového mládí dovedl vzácným způsobem spojit práci technika při stavbě dopravní tepny přes Čechy a Moravu s úsilím o odborné i kulturní povznesení českého národa.

matematické zábavy

Matematický folklór

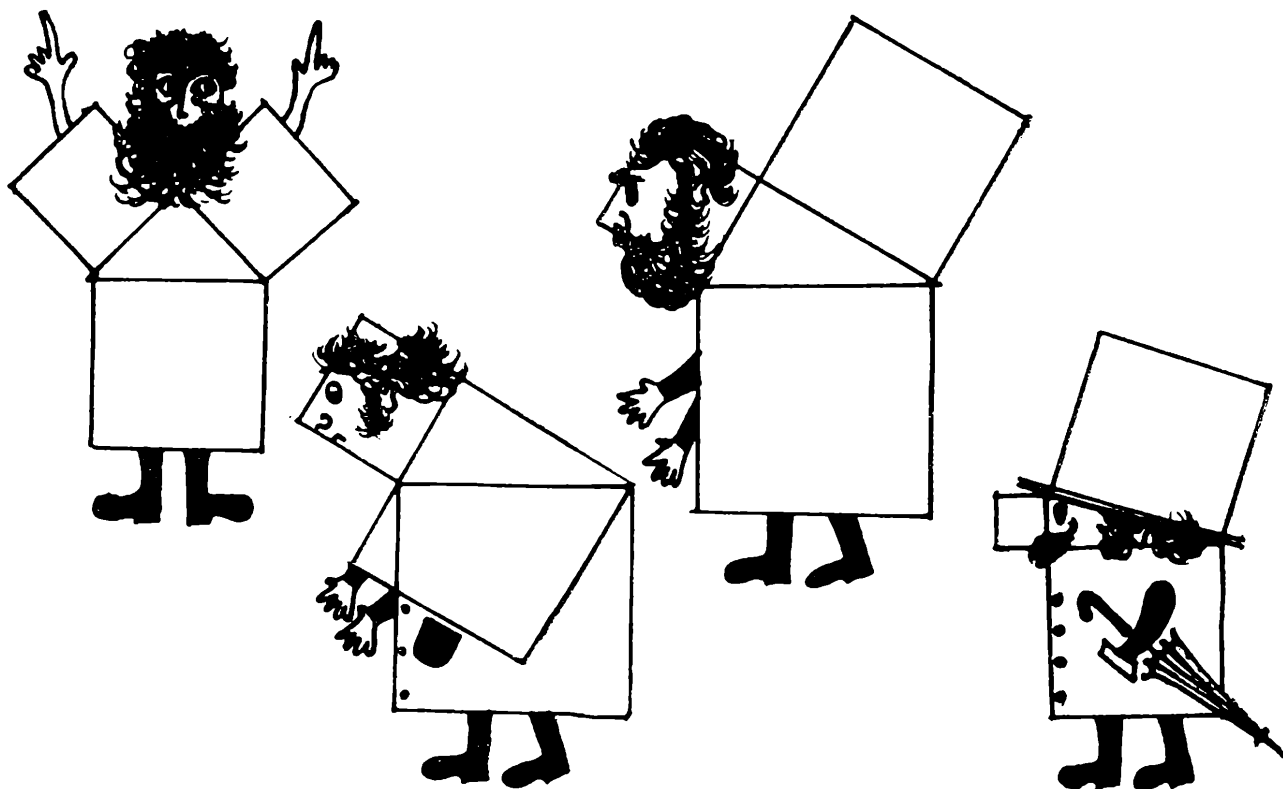
Dr. K A R E L M I Š O Ň, CSc., ČVUT Praha

Život studentský — život veselý. Ani nejabstraktnější z předkládaných oborů školní moudrosti, matematika, není námětově nepodnětným zdrojem živelné inspirace študáckého humoru. Na učebnicích, na sešitech, na pijácích (pohřích též na lavicích i leckde jinde) se sporadicky objevují tu jamby, tu daktyly rýmově štěpných veršů inspirovaných přirozenou odezvou bujarého mládí na kantorskou náplň učebních osnov. Při zákovských i maturitních večírcích reagují úsměvní veršotepci leckdy pohotově, leckdy reminiscenčně na školní zážitky. Vzájemná předmětová návaznost indukuje širší zaměření.

Pod zorným úhlem historie se dovídáme, že „*logaritmy znal už Adam, když chodíval za svou madam*“, takže ani nepřekvapí, že „*logaritmům v Atlantidě učili už v první třídě*“ a že „*přede trůnem logaritmů hasne sláva řeckých mýtů*“. Za těchto okolností byly ovšem logaritmy už na úsvitu kultury triviální záležitostí: „*Logaritmů slavná éra skončila už do Homéra. Proto jeho velebásně odbyly se bez nich krásně*.“ Poslední rým je patrně odezvou reklamního sloganu „*lidé píší básně, jak Rychlík čistí krásně*“ z válečných let, kdy se čtyřverší objevilo. Apenninský poloostrov postřehl nematematickou aplikaci: „*Logaritmy v starém Římě užívali proti rýmě. Nám ke zdraví úplně stačí česká kuchyně*“. Naši otcové a dědové ze zlomu století věděli, že „*jasnější nad všechny svíčky jsou logaritmy od Studničky*“*) s ne příliš způsobným dovětkem: „*až uděláš maturitu, hoď je třeba do obřitu!*“ Současní studenti, pokud dostatečně neocenují teoretický význam logaritmické závislosti a spojují její představu jen s číselným počítáním, hledí — zřejmě s ohledem na progresivní rozšíření elektronických počítačů — na tuto část učiva s jistým pohrdáním: „*Logaritmy velice — potřebují opice. Ale člověk bystré hlavy — svěruje se bez obavy — výpočetní technice*.“

Pons asinorum — oslí lávka — školních vědomostí svou geometrickou podstatou vnuká grafické ztvárnění. Zásluhou Lietzmannovy knížky o Pythagorově větě se staly známými stylizované kresby (obr.) profesora v taláru, nosiče s krosnou, mnicha v kutně a podsaditého šviháka. Vzдор těmto podnětným inspiracím není Pythagorova osobnost

*) František Josef Studnička (1836—1903), první profesor matematiky na České pražské universitě.



Pythagorejští človrdíci.

miláčkem studentů, ač jeho velikost uznávají: „*Pythagoras, to byl třída, tři čtverce a v světě díra, škoda, že jich neznal víc, moh' uletět na Měsíc a lidem tohoto světa neztrpčovat školní leta.*“

Hodiny literatury i čítanková četba zabezpečují přetlumočení národních klasiků do svérázného zaměření. Připomeňme alespoň Erbena: „*U tabule dítě stálo, z plna hrdla mlčelo: z matyky je vyvoláno, aniž by co umělo*“; Vrchlického: „*Byl jednou jeden matykář, jenž v školním sídlel hradu, ten pás měl z číslic uvitý a od křidy měl bradu*“; Wolkra: „*To není Faustova jizba, však duše zde propadá v prokletí, to je matykův pelech s omšelou zbrojí pradávných století, strakatých drátů, špalíčků, špičatin všelikých ze skříně civí lány, šedí dávných mudrců je tu zakleta jak dopis zašifrovaný*“

Aspirantský folklór Moskevské university ve dvacátých letech lovil lva*). Z četných pohledů (analýza, topologie, matematická logika, kvantová fyzika, .), jež namnoze značně převyšují středoškolskou látku, se stal světoznámým přístup geometrický: *Lovec vstoupí bezpečně do prázdné kruhové klece blízko k drátům. Inverzí se octne vně klece v její blízkosti, zatím co lev se přemístí do klece — quod erat faciendum.* Z polského pramene pochází svérázné využití matematiky v zemědělství. Z celkově náročného aparátu vyjímáme**) vstupní pohled: úroda

*) Pozdější zpracování viz Vesmír, 1967, č. 4, str. 125.

**) Úplnou zprávu z pera kocourkovského starosty uvádějí Pokroky matematiky, fyziky & astronomie 1974, sešit 4, str. 224.

kukuřice se blíží extrémní hodnotě, když se pole posype obyčejnými derivacemi. Koupili jsme tedy tunu funkcí jedné proměnné . . .“

Námětově vpravdě přeplněn je estrádní horor našich vysokoškoláků: „*Jak získal totální diferenciál šarmantní funkci*“. Kromě *matematického kyvadla* ukazujícího hodinu duchů a Cauchyových-Riemannových podmínek a *sinusovek* rtů se matematické záležitosti děje vymykají středoškolské látce. Orientačně uvádíme konec hororu: „*Kvantifikátor T z ranče ‚Nevlastní integrál‘ provrtal totální diferenciál, protože jeho rotace gradientu byla značně rozdílná od nuly. Začínalo svítat. Nad vyprahlým oborem integrity se počaly jasně črtat kontury nekonečna*.“

Pojem nekonečna inspiruje k myšlenkám souvisejícím s epitafy — bez ohledu na školní předmět, jehož představitelům jsou věnovány. Závěrem vybíráme dva příklady, určené mládeži matematikům. Smířlivé vyrovnání: „*Nekonečna na útesu, hledím svého do notesu, kam jsem často v marném běsu svoje pětky šifroval. Až sem přijdou moji žáci, pilníci i darebáci, bude nám jen pro legraci, co jsem do nich štěpoval a matematicky lapidární konstatování: ‚Než jsem se nadál, sešel jsem se s Věčnem, teď tady ležím, nula lomená nekonečnem*.“

Dvě historky pro detektivy - amatéry

Většina čtenářů Rozhledů ovládá základy výrokové logiky a její tabulkovou metodu; mnozí jistě řešíte i zábavné detektivní úlohy uveřejňované v denících a časopisech. Při řešení historek, které si nyní přečtete, je nezbytné správně vyjádřit ve strohém jazyku logiky vše podstatné, co je řečeno volným způsobem; nepodstatné údaje odloupnete jako slupky skrývající jádro.

Taková aristokratická rodinka

Starý lord Roger zemřel za okolností přinejmenším podivných. Protože jeho poslední slova zněla „Zatraceně dobrý kůň“, měl přivolaný detektiv Cracker před sebou první otazník: byl kůň související s lordovou smrtí šachovým jezdcem, anebo tu hraje roli kůň, na kterém prý viděli někoho odjíždět? Cracker se rozhodl vyslechnout nejprve rodinu lorda a služebnou. Jednalo se mu především o popis pachatele, zda je to muž či žena, zda hraje šachy či jezdí na koni. Všichni vypovídají nejasně, říkají samozřejmosti, každý asi něco tají.

Lordův bratr : „Pokud je pachatelem žena, pochybuji, že jezdí na koni nebo hraje šachy. Znam ženské! K zjevu pachatele mohu říci jen to, že určitě nebyl světlooký brunet ani tmavooký blondák.“

Mladší syn : „Pokud ten člověk nosí brýle a přitom neví, co je rošáda, mám důvod se domnívat, že je asi tak blond jako naše černá služebná. V každém případě tvrdím, že pachatel jezdí na koni nebo hraje šachy.“

Starší syn : „Nepodezřívám žádného muže blondáka ani služebnou Mary jako jedinou tmavovlásku, tedy pachatelem může být muž jenom pokud je tmavovlasý. Taký bych se vsadil, že nosí-li pachatel brýle, je to ten muž, který odjel na koni a předtím hrál s otcem šachy.“

Dcera : „Na koni rozhodně odjel muž. Pokud se nemýlím, pachatelem je brunet.“

Lady Rogerová : „Pachatel je světlovlasý a odjel na koni anebo je to tmavooký člověk, který hraje šachy jako velmistr Capablanca.“

Mary : „Žena to není, to bych mohla odpřisáhnout.“

Cracker se zamyslel — a pak stěží potlačil žalovatelný výrok. Podle výpovědí podařené rodinky se popis pachatele hodil pouze na jednoho z přítomných — na samotného Crackera. O to rychleji pak našel skutečného pachatele, byl jím lordův starší syn, seversky světlý typ, po otci vynikající šachista, který by na koně nikdy nevsedl. A ta vražda . ale to sem nepatří, šlo o zaplacení dluhů pachatele.

Jaký je váš úkol? Popište detektiva Crackera (předpokládejte pravdivost všech výpovědí). Umíte rozhodnout, které výpovědi svědků jsou pravdivé, když už znáte pachatele?

Jarmila Fronková

Budu či nebudu ?

V áčku je o přestávce před hodinou biologie dusno. Honza si tiše brumlá: „Motýlokvěté, brutnákovité, brukvovité, hvězdnicovité .“

„Kdo ještě nebyl z opáčka z biologie?“ ozval se kdosi.

Dobře informovaní uvádějí hned Janu alias Kráčmeru, Frantu, Stonohovou a Honzu. Někteří se s tím upokojili, ale jmenovaná čtveřice rozebírá situaci dál.

„Honzo, doufám, že si uvědomuješ, že když Matějková nevyvolá žádnou holku, odskáčeme to my,“ naříká Franta.

„Nevím, nevím,“ odpovídá od knihy Honza, „já bývám vždycky s Kráčmerou.“

„Máš pravdu, Honzo,“ podotýká Petr, „zrovna jsem chtěl říci, že bude-li Kráčmera nebo Stonožka, budeš vytažen i ty.“

„Tuším v zádech, že když bude zkoušená Stonožka, budu i já a do stanu pětku,“ filozofuje Kráčmera.

Mohli bychom pomalu založit malé třídní sázení. Věra například tvrdí, že Matějková vyvolá buď všechny čtyři, kteří očekávají pohromu, nebo jen Frantu, který je na tom nejhůř se známkami. Tonda soudí, že když bude tažena Kráčmera, nevyvolá Matějková už Stonožku, ale

Honzu a že padne pětka. Jirka tipuje buď Frantu s Honzou nebo nikoho. Jitka si myslí, že to Kráčmeru nemine, ale dojde i aspoň na jednoho hocha.

„Upřímně vás lituji,“ udýchaně vykřikuje Martin, „byl jsem na výzvěдах v céčku. Matějková prý hrozně rádí. Řekl bych, že padne pětka, ať vytáhne kohokoliv.“

Hanka dodává: „Jsem přesvědčená, že když bude vyvolán Honza i Franta a žádný z nich nedostane pětku, budeš zkoušená i ty, Kráčmero.“

„Pěkně děkuji, jen mě hodně znervózňujte. Však se uvidí, kdo se bude smát naposled !“

Zvoní.

Jistě už tušíte, že máte zjistit, kdo z našich čtyř ohrožených se mohl smát v případě, že by vyslovené výroky byly pravdivé. Neodporuji si však? Rozhodněte tuto zásadní otázku a pak ještě řešte úlohu v případě, že Věra nevyslovila pravdivý výrok, zatímco ostatní ano. Kdo byl určitě zkoušen a kdo unikl zkoušení?

Eva Vopatová

Řešení úloh z příspěvku Dvě historky pro detektivy-amatéry:

Detektiv Cracker je tmavooký brunet, který dobře hraje šachy, ostatní údaje nelze spolehlivě zjistit. Pravdivé výpovědi pronesli Rogerův bratr, služebná a mladší syn.

Výroky studentů si odporují, po vynechání Věřina výroku vyjde výsledek: Stonohová zkoušena nebude, ostatní ano, a padne pětka.

DVA KRÁLOVSKÉ PROBLÉMY PRO BYSTRÉ HLAVY

V jedné ze svých knih otiskl *L. Carroll* i dva problémy, ve kterých hraje hlavní roli kladka upevněná u okna v nejvyšším patře věže. Tam je v malé komůrce vězněna trojčlenná královská rodina, která má naději uniknout z vězení, využije-li vhodně okolnosti, že přes kladku je vedeno lano dosahující na zem, na jehož koncích jsou dva stejně těžké koše. A teď se trochu odchylme od historické předlohy, sledujte pozorně text:

Jsou-li koše prázdné či stejně zatížené, může osoba stojící u okna nebo v horním koši pohybovat lanem a kterýkoliv koš spustit či vytáhnout nahoru. Lano spolehlivě unese zátěže, které potřebujeme přepravit, ale pohyb koše s člověkem dolů je bezpečný jen tehdy, když klesající koš má o nejvýš 10 kg větší zátěž než druhý koš. Královský pár je poněkud těžší — král váží rovných 100 kg, královna 80 kg, mladý princ jen 45 kg. Jak patrně, jsou váhové rozdíly příliš velké (větší než 10 kg); z chudého

inventáře vězení mohou však použít kované truhlice, která váží 35 kg. Koš s truhlicí může padat volným pádem; předpokládáme, že se nepoškodí truhlice ani žádný koš.

1. *problém.* Navrhněte postup přepravy v koších, který bude bezpečný pro všechny tři vězně a dovolí všem uniknout.
2. *problém.* Navrhněte organizaci přepravy v koších tak, aby královská rodina mohla vzít s sebou i opici vážící 25 kg, dále 15kilového psa a pětikilovou kočku. (Nezapomeňte, že tyto tři další „objekty“ musí někdo do koše umístit a vyložit a že zvířata mohou sjíždět bezpečně za stejných podmínek jako lidé.)

Najdete-li vlastní řešení, zkontrolujte ještě, zda je nejkratší, tj. zda celá akce může proběhnout s menším počtem cest košů. Mnoho zdaru!

Š. J.

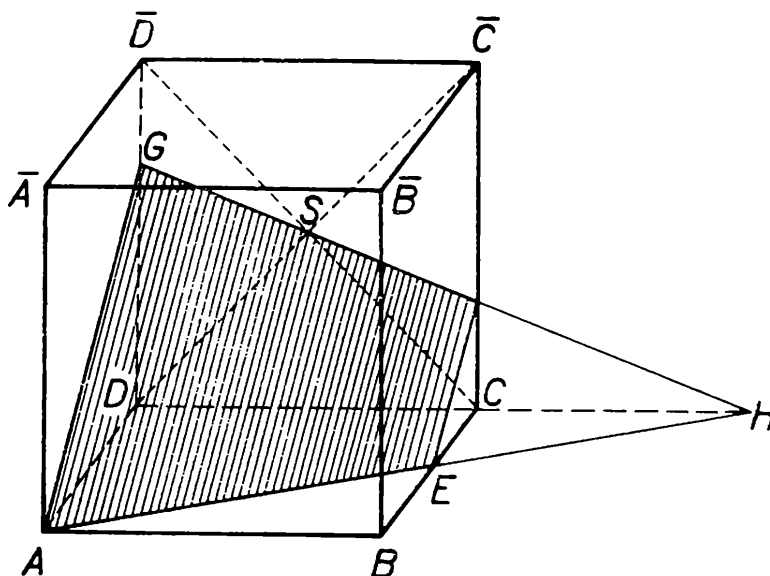
Ze zahraničních časopisů

Doc. O T A S E T Z E R, ČVUT Praha

Z jugoslávského časopisu *Matematičko-fizički list*:

1. Dána je krychle $ABCD\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$. Bod E je středem hrany BC , bod S středem čtverce $\bar{C}\bar{C}\bar{D}\bar{D}$. V jakém poměru dělí rovina AES (obr. 1) objem krychle?

2. Bez logaritmických tabulek určete úhly trojúhelníka, jehož strany jsou: $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.



Obr. I

3. Určete dvě kladná čísla a, b tak, aby $a, a + 2b, 2a + b$ tvořily aritmetickou posloupnost a $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$ posloupnost geometrickou.

4. Najděte 4 čísla, víte-li, že první tři tvoří geometrickou posloupnost, poslední tři aritmetickou posloupnost a že součet krajních čísel je 21, součet prostředních roven 18.

Z bulharského časopisu *Matematika*:

5. Jakou cifrou končí číslo $N = 1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + \dots + 9^{11}$?

6. Dokažte, že součet $2^9 + 2^{99}$ je dělitelný stem!

7. Letošní rok lze psát ve tvaru $1975 = 5^2 \cdot 79$, tj. $xyz_u = u^2 \cdot zy$. Dovedete napsat jiný letopočet téže vlastnosti?

Řešení úloh 1 až 5:

1. $V_1, V_2 = 7, 29, 2, \alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 75^\circ, 3, a = 3;$
 $b = 1, 4, a) 3, 6, 12, 18; b) \frac{7}{4}, \frac{4}{4}, \frac{2}{4}, \frac{9}{4} \cdot 5$. Končí pětkou.

8. Dokažte: Je-li p číslo různé od nuly a platí-li pro každou hodnotu argumentu x rovnice

$$f(x + p) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)},$$

je funkce $f(x)$ periodická a má periodu $4p$.

Řešení: Je třeba dokázat, že $f(x + 4p) = f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x + 4p) &= f(x + 3p + p) = \frac{1 + f(x + 3p)}{1 - f(x + 3p)} = \frac{1 + \frac{1 + f(x + 2p)}{1 - f(x + 2p)}}{1 - \frac{1 + f(x + 2p)}{1 - f(x + 2p)}} = \\ &= \frac{2}{-2f(x + 2p)} = \frac{-1}{f(x + 2p)} = \frac{-1}{\frac{1 + f(x + p)}{1 - f(x + p)}} = -\frac{1 - f(x)}{1 + f(x)} = \\ &= -\frac{1 - f(x) - 1 - f(x)}{1 - f(x) + 1 + f(x)} = \frac{2f(x)}{2} = f(x) \quad \text{c. b. d.} \end{aligned}$$

9. Součet po sobě jdoucích přirozených čísel je 1000. Určete tato čísla.

Výsledek: a) 198, 199, 200, 201, 202; b) 28, 29, ..., 51, 52;
c) 55, 56, ..., 69, 70.

Ze sovětského časopisu *Matematika ve škole*:

10. Najděte všechna n -ciferná čísla tvaru $*00\dots 0^{**}$, která jsou dělitelná 15, 18, i 20.

11. Zjednodušte výraz

$$\frac{2 + \sin 2\alpha - 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{3 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)}$$

12. Řešte rovnici

$$\log_8^2 x + \frac{1}{3} \log_8 x = 0.$$

13. Celými čísly řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 10x^2 + 5y^2 + 13z^2 &= 12xy + 4xz + 6yz \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 288. \end{aligned}$$

Ze sovětského časopisu *Kvant*:

14. V aritmetické posloupnosti je $a_m = n, a_n = m$ ($m \neq n$).
Určete a_p .

Výsledky: 10. 900...000; 700...020; 500...040; 300...060; 100...080;

11. $2 \cos \alpha$; 12. $1, \frac{1}{2}$; 13. $x = 4, y = 6, z = 2$; 14. $a_p = m + n - p$.

Nejmladším čtenářům

1. Najděte čtyřciferné číslo, které je dělitelné číslem 7 a jehož zápis v desítkové soustavě má tyto vlastnosti:

- a) první a poslední cifra jsou stejné,
- b) prostřední dvě cifry jsou stejné.

2. Najděte taková přirozená čísla x, y , jež splňují vztah

$$x^2 = 2y - 1$$

3. V obr. 1 je trojúhelník ABC pravoúhlý. Konstrukce bodů D, E, F je zřejmá. Dokažte, že ($a = BC, b = AC$)

$$AF : BE = b^3 : a^3.$$

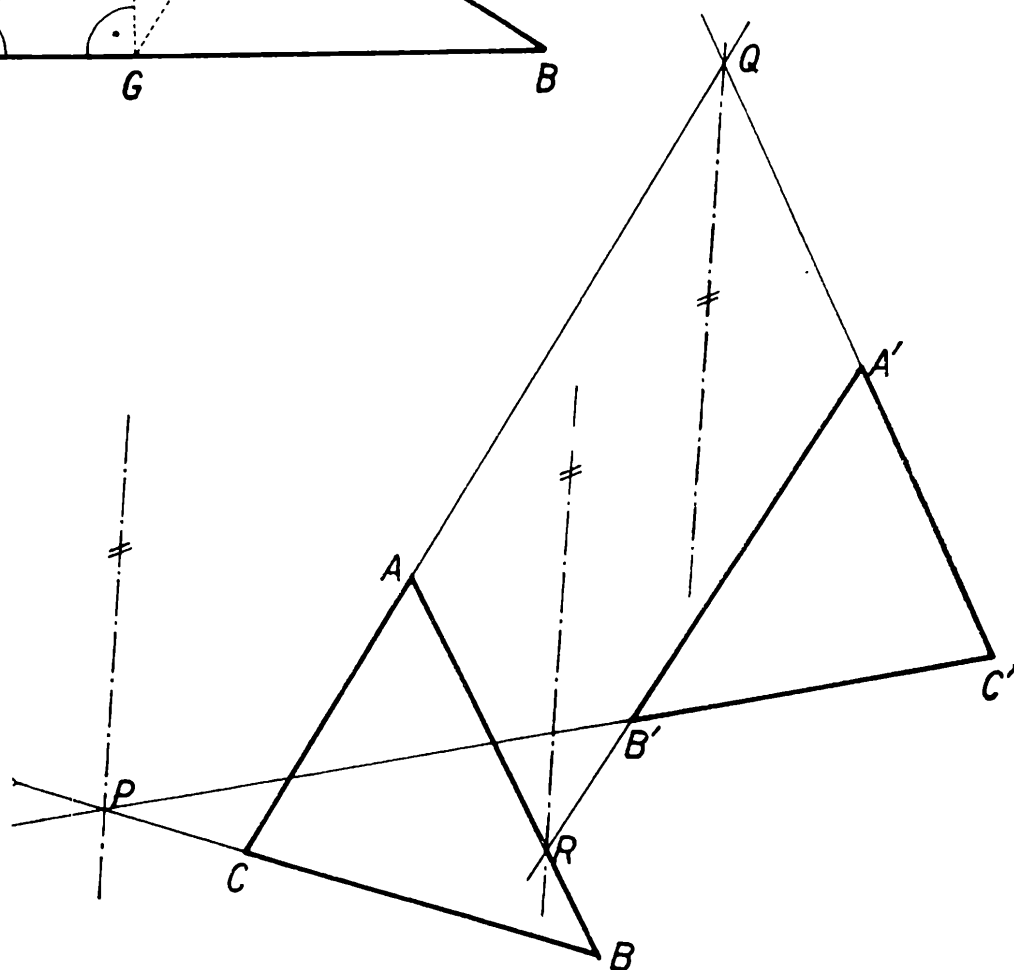
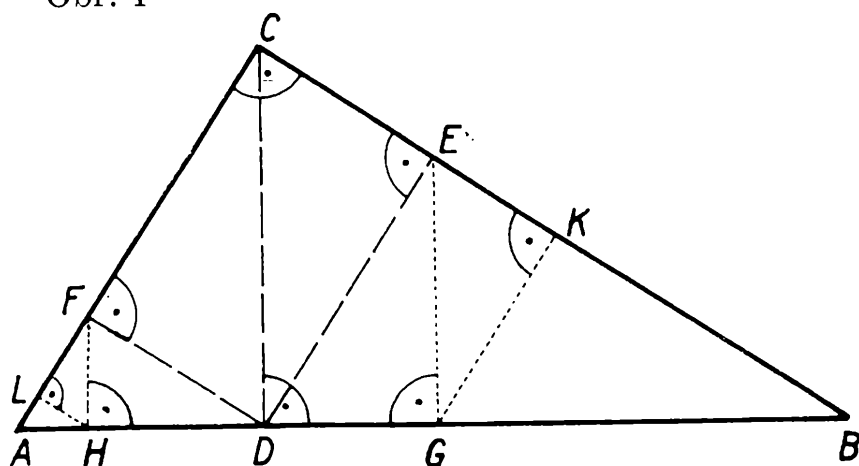
Kdybychom sestrojili ještě body G, H, K, L , jak je naznačeno v obr., platilo by

$$AL : BK = b^5 : a^5.$$

4. Je dán různostranný trojúhelník ABC . Z jeho tří výšek je nejmenší ta, která prochází vrcholem A . Ukažte, že úhel při tomto vrcholu je větší než 60° .

5. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ v obr. 2 jsou nepřímě shodné. Přímky $AB, A'B'$ ($AC, A'C'$; $BC, B'C'$) se protnou v bodě R ($Q; P$). Ukažte, že osy souměrnosti úhlů ARA', AQA' a úhlu vedlejšího k úhlu CPC' jsou navzájem rovnoběžné.

Obr. 1



Obr. 2

Výsledky.

1. Zápis žádaného čísla je $\alpha\beta\beta\alpha = 7k$. To vede na rovnici $1001\alpha + 110\beta = 7k$, z čehož $k = 143\alpha + 15\beta + \frac{5}{7}\beta$. Odtud $\beta = 7t$. Poněvadž $1 \leq \beta \leq 9$, máme $t = 1$. Hledané číslo je $\alpha 77 \alpha$, kde $\alpha = 1, 2, 3, \dots, 9$.

2. Poněvadž $2y = x^2 + 1$, je vidět, že x je liché číslo. Tedy $x = 2t + 1$, $y = 2t^2 + 2t + 1$, kde t je libovolné přirozené číslo nebo nula.

3. Z podobnosti trojúhelníků $A'FD$, ACB (BED , BCA) dostaneme $AF = b^3 : c^2$, $BE = a^3 : c^2$.

4. Ze vzorců pro obsah S trojúhelníku: $2S = av_a = bv_b = cv_c$ plyne, že a je nejdelší strana a proti ní leží největší úhel, tedy $\alpha > 60^\circ$.

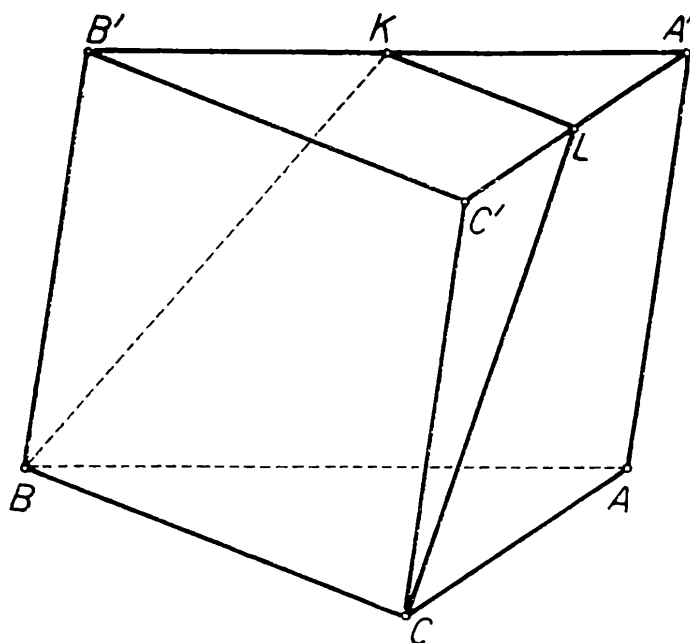
5. Vhodným posunutím trojúhelníku $A'B'C'$ lze dosáhnout toho, aby oba trojúhelníky byly souměrně sdružené podle osy o . Potom body P , Q , R leží na této ose a věta platí. V našem případě jsou zmíněné osy úhlů s osou o rovnoběžné.

S. H.

6. Dosadíme-li do výrazu

$$(a - b)(b + c)(c + a) + (b - c)(a + b)(a + c) + \\ + (c - a)(a + b)(b + c) + (a - b)(b - c)(c - a)$$

za a, b, c libovolná čísla, dostaneme vždy týž výsledek. Jaký?



Obr. 3

7. Ze vztahu

$$x^3 + y = y^3 + x,$$

kde $x \neq y$ jsou libovolná čísla, lze odvodit vztah

$$x^2 + y^2 + xy = 1$$

Pokuste se o to.

8. Do výrazu

$$x^3 + y^3 - 3axy$$

dosadte

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}$$

Co dostanete?

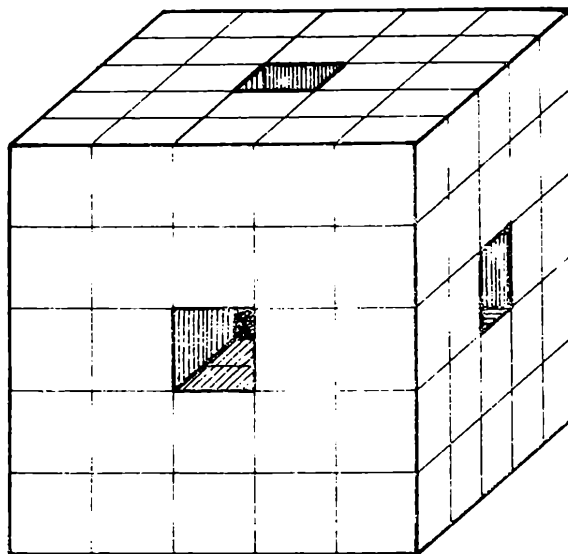
9. Ukažte, že

$$\frac{(-a^2 + b^2 + c^2 + 2bc)(a + b - c)}{(a + b + c)(a^2 - 2ac + c^2 - b^2)} = -1$$

10. Obr. 3 znázorňuje pravidelný trojboký hranol, jehož všechny hrany mají délku 1. Středy hran $A'B'$ a $A'C'$ označme po řadě K, L . Vypočtete obvod a obsah čtyřúhelníku $BCLK$.

11. Krychle je složena ze 125 shodných krychlíček, jejichž hrany mají délku 1. Svislý prostřední sloupec krychlíček je vybrán. Právě tak je

vybrán prostřední sloupec mezi přední a zadní stěnou a prostřední sloupec mezi levou a pravou stěnou (obr. 4). Vypočtete povrch a objem vzniklého tělesa.



Obr. 4

Řešení:

6. Po úpravě vyjde 0. — 7. Rovnici dáme tvar $x^3 - y^3 = x - y$ a dělíme ji $(x - y)$. — 8. Výsledek dosazení je 0. — 9. Výsledek po zkrácení je -1 . — 10. $BCLK$ je rovnoramenný lichoběžník. $BC = 1$, $KL = \frac{1}{2}$, $BK = CL = \sqrt{\frac{5}{4}}$, výška $v = \frac{\sqrt{19}}{4}$, $o = \frac{3 + \sqrt{19}}{2}$, $S = \frac{3\sqrt{19}}{16}$. — 11. Bylo vybráno 13 krychlíček. $V = 112$, $S = 144$.

„Maticový počet a jeho použití v technice“

Doc. JOSEF SCHMIDTMAYER, CSc.

Třetí, přepracované a rozšířené vydání, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha 1974, 360 stran, 73 obrázků, 10 tabulek, dvě přílohy pod páskou. Cena vázaného výtisku Kčs 40,00.

Samotný název knihy hovoří, že ide o teóriu maticového počtu a determinantov pre technickú prax. Je to už jej tretie prepracované a rozšírené vydanie, určené pre inžinierov, výskumných pracovníkov a pre poslucháčov vysokých škôl technického smeru.

Kniha pozostáva z troch častí: zo základnej látky, z aplikácií a z dodatkov. Prvá časť obsahuje trinásť kapitol, ktoré prehľadne zoznamujú so základmi algebraických štruktúr, s maticami a operáciami s nimi, uvádza pojmy transponovanej, inverznej matice a ich vlastnosti, hodnotu matice a všetko je doplnené riešenými príkladmi. Ďalej objasňuje lineárny priestor, základné pojmy, lineárnu závislosť, izomorfizmus, lineárny podpriestor a iné množiny. Potom pristupuje k sústavám lineárnych algebraických rovníc, k formám, k lineárnym transformáciám, objasňuje niektoré numerické metódy, rozdelené matice.

Prvá časť knihy je akýsi základ,

ktorý by mal ovládať každý, kto sa chce zapodievať maticovým počtom, a je vhodným doplnkom i pre poslucháčov vysokých škôl a vyspelejších žiakov vyšších ročníkov stredných škôl.

V druhej časti knihy sú aplikácie, a to v elektrotechnike, v mechanike, v ekonomii a iných oboch. Tak napríklad aplikuje maticový počet na vyšetrovanie empirických funkcií s tabelárnou metódou, v elektrotechnike na riešenie sústav elektrických obvodov, v mechanike je to výpočet rozloženia vztlaku po rozpätie krídla, v kryptografii a v ekonomike uvádza príklad.

V tretej časti knihy sa autor zaoberá dodatkami, a to hlavne determinantmi, ich vlastnosťami, výpočtom, špeciálnymi typmi. Nájdeme tu i základy analýzy matíc. Pojmy zavedené v jednotlivých častiach knihy sú vždy objasnené na niekoľkých príkladoch, obrázkoch a tabuľkách. Nakoniec ešte je tu slovníček z elementárnej teórie matíc a množín v piatich jazykoch — česky, rusky, anglicky, nemecky a francúzsky.

Maticový počet sa stal veľmi účinnou pomôckou v matematike a táto kniha veľmi rýchlo, pre-

hľadne zoznámi čitateľa s najviac používanými časťami maticového počtu a s jeho výhodnou symbolikou pre zápis složitějších závislostí.

Viera Zedníčková

J. Kalužay-M. Zeman:

500 riešených úloh z fyziky,

Alfa, Bratislava 1973, str. 273,
cena viaz. Kčs 18,—

Koncom roku 1973 sa objavila na trhu kniha slovenských autorov Jozefa Kalužaya a Michala Zemana: „500 riešených úloh z fyziky“. Ako hovorí jej názov, zbierka obsahuje 500 príkladov z fyziky. Z nich je 416 podrobne riešených a 84 obsahuje návod na riešenie a na konci knihy sú výsledky ich riešení.

Zbierka je zostavená tak, aby príkladmi pokryla všetky časti fyziky, predpísané osnovami pre gymnázia a odborné stredné školy. Pred každú kapitolu zaradili autori krátké prehľady látky, ktorá sa potom nasledujúcimi príkladmi utvrdzuje. Zbierka obsahuje aj príklady z fyziky atómového jadra, špeciálnej teórie relativity a astronómie. Používa výhradne jednotky sústavy SI až na teplotný stupeň, pre ktorý používa normami nedoporučovaný symbol deg.

Kniha je vhodná pre samostatné domáce cvičenie v riešení fyzikálnych príkladov, preto bude dobrou pomôckou študentom stredných škôl.

Eva Tokáriková

Miloš Jelínek:

Relace a funkce

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1974. Kniha má 127 stran, 116 obrázků; brožovaná stojí 6,50 Kčs.

Tato publikace je druhým sešitem z řady příruček, jejichž úkolem je seznámit co nejširší veřejnost s netradičními pojmy, používanými v současné středoškolské matematice. Knížka je věnována dvěma základním matematickým pojmům, pojmu relace a pojmu funkce. Čtenář, u kterého autor předpokládá znalosti matematiky v rozsahu osnov základní devítileté školy, se zde seznámí s různými typy relací, jejich vlastnostmi a některými početními operacemi, které lze s relacemi provádět. Velkou pozornost věnoval autor vysvětlení vztahů pojmů relace a funkce a zavedení pojmů inverzní a složené funkce. Vše je pečlivě objasněno vždy na několika příkladech s obrázky a diagramy. Prostudovanou látku si čtenář může procvičit na mnoha cvičeních, jejichž řešení najde na konci knihy.

Knížka je hezky, pečlivě a promyšleně napsána. Myslím, že dobře poslouží nejen rodičům k seznámení s pojmy, se kterými pracují jejich děti, ale i mnohým středoškolským studentům.

Anežka Wohlmuthová

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

M

magic square	magický čtverec
magnification	zvětšení
magnitude	velikost
major	hlavní
major arc of circle	větší oblouk kružnice
major axis of ellipse	hlavní osa elipsy
major subject	tematický celek
majorant	majoranta
majority	majorita
mapping	zobrazení
one-to-one (one-one) mapping	vzájemné jednoznačné zobrazení
mathematical	matematický
mathematical expectation	matematická naděje
mathematical statistics	matematická statistika
mathematics	matematika
matrix	matice
column matrix	sloupce matice
identity, unit matrix	jednotková matice
row matrix	řádková matice
skew symmetric matrix	antisymetrická matice
square matrix	čtvercová matice
maximal	maximální
maximum	maximum
maximum inclination	největší sklon
mean	průměr
mean value theorem	věta o střední hodnotě
mean terms of proportion	střední člen úměrnosti
measure	měra, míra
measure of interior	obsah
measure theory	teorie míry
generalized function	obecná funkce
measurement	měření, měr
median	střední, střední hodnota, střední
	řád
meridian	de
meridian section	poledník
method	metoda

metre
 metric
 metric space
 midline
 midpoint
 million
 millionth
 minimal
 minimum
 minor
 minuend
 minus
 minute
 mode
 model
 module, modulus
 moment
 monomial
 monotone, monotonic
 more
 motion, movement
 multiple
 multiple-valued
 multiplicand
 multiplication
 multiplicity
 multiplied by
 multiplier
 multiply
 multivariate analysis
 mutual
 mutually exclusive

metr
 metrický, metrika
 metrický prostor
 střední příčka v lichoběžníku
 střed úsečky
 milión
 milionty, milióntina
 minimální
 minimum
 menší, vedlejší
 menšence
 minus
 minuta
 módus
 model
 modul
 okamžik, moment
 člen
 monotonní
 více
 pohyb
 vícenásobný, mnohonásobný
 mnohoznačný
 násobitel, činiteľ
 násobení
 násobnost
 násobené, krát
 činitel
 násobit
 mnohorozměrová analýza
 vzájemný
 jemně vylučný

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

8

ROČNÍK 53, 1974-1975, DUBEN

ROČNÍK 53
DUBEN 1975

8

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Sedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1975.

OBSAH

Dr. Blanka Kussová, CSc.: Některé vlastnosti nekonečných množin	385
Dr. E. Calda: Princip inkluze a exkluze	389
L. Ferjenčík/ Ještě o součtech mocnin, mnohočlenech a kombinatorice .	392
F. Hradecký: Stereografický průmět souměrnosti podle rovníku	399
Ing. Jiří Pospíšil: Spojové družice	402
A. Wohlmuthová: Sluneční energie	409
Dr. K. Mišoň, CSc.: Raketová rovnice	411
Ing. J. Macháň: Hologram	418
Dr. E. Scholtz: Magnetické vlastnosti atomů	422
Dr. M. Šíroká - dr. J. Šíroky: Kosmické zdroje rentgenového záření .	427
Olympiády	431
Nejmladším čtenářům	432
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	3 a 4. str. obálky

Některé vlastnosti nekonečných množin

RNDr. BLANKA KUSSOVÁ, CSc., MFF UK Praha

Čeho je více — čísel sudých nebo lichých, přirozených či celých? Je více bodů na přímce či v rovině, v prostoru anebo v obrazu intervalu $\langle 0,1 \rangle$ na číselné ose?

Dříve než se pokusíme zodpovědět alespoň některé z právě uvedených otázek, promysleme si jednodušší situaci.

Uvažujme dvě množiny: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Odkud víme, že v množině A je více prvků než v množině B ? Jak jsme k takovému závěru dospěli? Nejspíše asi tak, že jsme spočítali prvky obou množin a srovnali výsledky; neboli každé z množin jsme přiřadili jisté přirozené číslo udávající počet jejich prvků, a tato čísla jsme porovnali. Lze však této metody použít i v případě množin všech přirozených čísel a všech celých čísel? Je zřejmé, že uvedený postup nevyhovuje. Hledejme proto jiný způsob, jak porovnat dvě množiny podle jejich „velikostí“

K tomu je užitečné si uvědomit, jak postupujeme v běžném životě. Chceme-li například zjistit, není-li v naší oblíbené kavárně obsazeno, jistě v ní nepřepočítáváme všechny židle a hosty; postupujeme daleko elegantněji. Naše úvahy spočívají v tom, že každému hostu přiřadíme židli, na níž sedí (ovšem za zjednodušujícího předpokladu, že žádný host nestojí) a hledáme, zda nenalezneme prázdnou židli. V případě, že mají obě množiny, to jest množina H všech hostů v kavárně a množina Z všech židlí určených pro hosty, stejný počet prvků, dospíváme k smutnému závěru, že v kavárně je obsazeno.

Tedy při řešení situací výše uvedeného typu nepřepočítáváme prvky obou množin, ale přiřazujeme je navzájem. Přitom je zřejmé, že toto přiřazení musí splňovat jisté podmínky, má-li nám podat informaci, zda jsou dvě dané množiny „stejně velké“. Jak tušíte, zmíněné přiřazení musí být vzájemně jednoznačným zobrazením jedné množiny na druhou.

Vzhledem k tomu, že s pojmem vzájemně jednoznačného zobrazení budeme dále často pracovat, zavedeme si pro něj speciální označení:

Je-li F vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B , budeme psát $F: A \leftrightarrow B$.

K pojmu vzájemně jednoznačného zobrazení jsme dospěli úvahou o tom, co u „malých“ množin charakterizuje skutečnost, že mají týž

počet prvků. Tato charakteristika byla matematiky rozšířena i na „větší“ množiny a existence vzájemně jednoznačného zobrazení mezi dvěma množinami byla vzata jako obecné kritérium pro posouzení, zda jsou „stejně velké“.

O libovolných množinách A, B , pro něž lze nalézt zobrazení F tak, aby bylo $F : A \leftrightarrow B$, říkáme, že mají stejnou mohutnost neboli, že jsou ekvivalentní, což značíme $A \sim B$. Jestliže neplatí $A \sim B$, píšeme $A \not\sim B$.

Je zbytečné posuzovat „malé“ množiny pomocí kritéria o existenci vzájemně jednoznačného zobrazení. Posloužit nám však může tam, kde prvky množin nelze přepočítat, jako například u množiny všech přirozených, respektive celých čísel apod. Jak budeme přitom postupovat, ozřejmíme si na řadě příkladů.

Vyjděme od množiny N_0 všech přirozených čísel s nulou a studujme, které množiny mají s ní stejnou mohutnost. Podle naší definice to bude každá množina A , pro niž nalezneme zobrazení F tak, že je $F : N_0 \leftrightarrow A$.

Označme si $N = N_0 - \{0\}$. Ač to odporuje naší zkušenosti s „malými“ množinami, je množina N ekvivalentní s N_0 , neboť zobrazení F definované pro každé $n \in N_0$ rovnicí

$$F(n) = n + 1$$

je — jak si čtenář snadno ověří — vzájemně jednoznačným zobrazením N_0 na N . Přestože tedy je N vlastní podmnožinou N_0 , má s ní stejnou mohutnost.

Dospěli jsme k situaci, která nemá obdoby u „malých“ množin, neboť zřejmě nelze například množinu $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ zobrazit vzájemně jednoznačně na žádnou množinu A' , kde $A' \subset A$ a $A' \neq A$. Chová se tudíž množina všech přirozených čísel podivněji než „malé“ množiny. Právě uvedeného rozdílu se užívá často k definici pojmu konečné, respektive nekonečné množiny.

Řekneme, že množina M je konečná, právě když není ekvivalentní s žádnou vlastní částí, to jest: pro každou množinu M' platí

$$(M' \subset M \quad \wedge \quad M' \neq M) \mid \Rightarrow \quad M' \not\sim M$$

Není-li množina M konečná, říkáme, že je nekonečná. Tedy M je nekonečná, jestliže existuje množina M' , pro kterou platí

$$M' \subset M \quad \wedge \quad M' \neq M \quad \wedge \quad M' \sim M.$$

Na základě právě uvedených definic můžeme říci, že například množina $A = \{1, 2, 3\}$ je konečná, zatímco množina všech přirozených čísel N je nekonečná.

Vraťme se však k množině N , která má o jeden prvek méně než N_0 a přesto má s N_0 stejnou mohutnost. Odebráním jednoho prvku z mno-

žiny N_0 se tedy její mohutnost nezmenší. Stejná situace nastává i v případě odebrání dvou prvků z N_0 .

Buď $N_2 = N_0 - \{0; 1\}$. Pak zobrazení F definované tak, že každému $n \in N_0$ přiřazuje

$$F(n) = n + 2,$$

zobrazuje vzájemně jednoznačně N_0 na N_2 , takže je opět $N_0 \sim N_2$.

Označíme-li $N_m = N_0 - \{0; 1; \dots; m-1\}$, kde m je libovolné přirozené číslo, udává předpis $F(n) = n + m$ pro každé $n \in N_0$ vzájemně jednoznačné zobrazení N_0 na N_m . Odebereme-li tedy z N_0 libovolný konečný počet prvků (množina $\{0, 1, \dots, m\}$ je zřejmě konečná), nezměníme její mohutnost. K tomu jen poznamenejme, že my jsme pro jednoduchost odebírali z N_0 vždy prvky po řadě za sebou počínaje 0. Tvrzení však platí obecně, neboť například lehce prokážeme, že je $N_0 - \{2; 5\} \sim N_0 - \{0; 1\}$; k tomu stačí zvolit F takto:

$$[(n \neq 0 \wedge n \neq 1 \wedge n \neq 2 \wedge n \neq 5) \Rightarrow F(n) = n] \wedge \\ \wedge F(0) = 2 \wedge F(1) = 5.$$

Z uvedeného příkladu je patrné, jak postupovat v každém konkrétním případě.

Nezmenší-li se mohutnost množiny všech přirozených čísel odebráním konečně mnoha prvků, lze očekávat, že se tak stane, odečteme-li od N nějakou nekonečnou množinu. Prozkoumejme, zda tomu tak jest. Za tím účelem se vraťme k otázkám, uvádějícím tento článek.

Čeho je více, všech přirozených čísel nebo všech sudých přirozených čísel? „Selský“ rozum nám napoví, že více bude těch prvních. Převáděno do řeči matematiků by to znamenalo, že neexistuje žádné vzájemně jednoznačné zobrazení množiny N na množinu všech sudých přirozených čísel (označme ji N_S). To však přece není pravda — stačí vzít zobrazení, jež každému přirozenému číslu n přiřadí číslo $2n$. Čtenář snadno nahlédne, že toto zobrazení je vzájemně jednoznačným zobrazením N na N_S . Tedy množiny N a N_S mají stejnou mohutnost.

Stejně lehce lze prokázat, že množina N je ekvivalentní s množinou všech lichých přirozených čísel — budeme ji značit N_L . Příslušné zobrazení lze definovat takto:

$$F(n) = 2n - 1.$$

O množinách N_S i N_L snadno dokážeme, že jsou nekonečné. Důkaz provedeme pro N_S (pro N_L je obdobný). Označme symbolem $N_C = \{k; n \in N \wedge k = 4n\}$. Zřejmě je $N_C \subset N_S$ a $N_C \neq N_S$. Poněvadž zobrazení F určené předpisem

$$F(n) = 2n, \text{ kde } n \in N_S,$$

zobrazuje vzájemně jednoznačně N_S na N_C , je množina N_S nekonečná.

Avšak $N_S = N - N_L$ a podobně $N_L = N - N_S$. Odečítáme tedy v obou případech od N nekonečnou množinu, a přesto výsledná množina má stejnou mohutnost jako množina všech přirozených čísel. Dospěli jsme tak k jednomu z pozoruhodných závěrů matematiky, který zcela odporuje běžným představám.

Doposud jsme zkoumali množinu všech přirozených čísel s nulou při ubírání jejích prvků. Nyní budeme naopak k N_0 nějaké prvky přidávat. Studovaná situace bude přitom zřejmě zajímavá pouze v případě, že k množině N_0 přidáme prvky, jež v ní neleží. K tomu nám dobře poslouží celá záporná čísla.

Označme $N_{-1} = N_0 \cup \{-1\}$ a vyšetřujme, jakou mohutnost má množina N_{-1} . Snadno ukážeme, že je opět $N_0 \sim N_{-1}$; za odpovídající zobrazení zvolíme F definované předpisem

$$F(n) = n - 1 \text{ pro každé } n \in N_0.$$

Čtenář nechť si sám dokáže, že též množiny $N_{-2} = N_0 \cup \{-1, -2\}$,
 $\dots$, $N_{-m} = N_0 \cup \{-1, -2, \dots, -m\}$ mají stejnou mohutnost jako množina všech přirozených čísel.

Co se však stane, když N_0 sjednotíme s nějakou nekonečnou množinou? V plné obecnosti tuto úlohu řešit nebudeme, neboť přesahuje rámec tohoto článku. Omezíme se jen na speciální případ, kdy k N_0 přidáme množinu všech celých záporných čísel (budeme ji značit $-N$). Množina $-N$ je, jak se snadno přesvědčíme, nekonečná (je například ekvivalentní s množinou $-N - \{-1\}$) a má stejnou mohutnost jako N_0 .

Sjednotíme tedy množinu N_0 s nekonečnou množinou $-N$ téže mohutnosti a budeme se ptát na mohutnost výsledné množiny, to jest množiny všech celých čísel (označíme ji C).

S úlohou obdobného typu jsme se však již setkali, neboť sama množina N_0 je sjednocením dvou nekonečných množin N_S a N_L , jež obě jsou ekvivalentní s N . Tohoto poznatku s výhodou využijeme k nalezení vzájemně jednoznačného zobrazení množiny všech celých čísel na množinu všech přirozených čísel.

Víme tedy, že $C = N_0 \cup -N$, kde množiny N_0 a $-N$ jsou disjunktní, dále že $N = N_L \cup N_S$ a $N_0 \sim N_L$ (příslušné zobrazení má tvar $F_1(n) = 2n + 1$ pro každé $n \in N_0$). Snadno ukážeme, že je též $-N \sim N_S$ (příkladem vzájemně jednoznačného zobrazení $-N$ na N_S je F_2 definované předpisem $F_2(n) = -2n$ pro každé $n \in -N$).

Spojíme-li vhodně oba předpisy pro zobrazení F_1 a F_2 , dostaneme zobrazení množiny C na $N_L \cup N_S$ neboli na množinu N . Stačí definovat pro libovolné celé číslo n :

$$\begin{aligned} G(n) &= F_1(n) = 2n + 1, & \text{je-li } n \in N_0 \text{ a} \\ G(n) &= F_2(n) = -2n, & \text{je-li } n \in -N \end{aligned}$$

Z vlastností zobrazení F_1, F_2 a z disjunktnosti množin $N_0, -N$ a N_L, N_S ihned plyne, že G je vzájemně jednoznačným zobrazením C na N .

Množina všech celých čísel má tudíž stejnou mohutnost jako množina všech přirozených čísel. Ačkoliv je tento výsledek naprosto neočekávaný a zcela odporuje běžným představám, je — jak bylo vidět — v matematice lehce dokazatelný.

Princip inkluze a exkluze

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

V minulém čísle Rozhledů jsme v článku „Od dětské hry k průniku doplňků množin“ odvodili vzorce pro počet prvků průniku všech doplňků dvou, tří a čtyř podmnožin v dané konečné množině A a slíbili jsme, že se budeme zabývat možnostmi jejich zobecnění pro n podmnožin $A_1, A_2, \dots, A_n$ dané konečné množiny A . Zapišeme proto tyto vzorce přehledněji pomocí symbolu sumace; před tím je však nutno uvést poznámku týkající se způsobu zápisu sumace v tomto článku.

Jak je vám známo, bývá u tohoto symbolu označeno, podle jakých indexů, v jakých mezích a za jakých dalších eventuálních podmínek má být sčítání prováděno. Abychom v tomto článku učinili zápis sumace jednodušším, nebudeme u něho psát žádné indexy a žádné podmínky, které musí tyto indexy splňovat; nahlédnete sami, že jen stěží by mohlo dojít k nedorozumění. Je-li dána konečná množina A a její podmnožiny $A_1, A_2, \dots, A_n$, bude symbol $\Sigma p(A_i)$ značit součet $p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$; symbol $\Sigma p(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_s})$ bude v tomto případě znamenat součet všech $p(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_s})$ takových, že indexy $i_1, i_2, \dots, i_s$ se mění od jedné do n tak, že je vždy $i_1 < i_2 < \dots < i_s$.

Na základě této úmluvy zapišeme vzorce ze zmíněného článku v minulém čísle takto:

$$\begin{aligned} p(A'_1 \cap A'_2) &= p(A) - \Sigma p(A_i) + p(A_1 \cap A_2), \\ p(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3) &= p(A) - \Sigma p(A_i) + \Sigma p(A_i \cap A_j) - p(A_1 \cap A_2 \cap A_3), \\ p(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3 \cap A'_4) &= p(A) - \Sigma p(A_i) + \\ &\quad + \Sigma p(A_i \cap A_j) - \Sigma p(A_i \cap A_j \cap A_k) + \\ &\quad + p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{aligned}$$

Všimnete-li si analogie těchto vzorců, zdá se, že pro případ n podmnožin $A_1, A_2, \dots, A_n$ dané konečné množiny A bude platit následující věta o počtu prvků množiny $A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_n$, která bývá označována jako princip inkluze a exkluze.

Pro libovolnou konečnou množinu A a její libovolné podmnožiny $A_1, A_2, \dots, A_n$ platí:

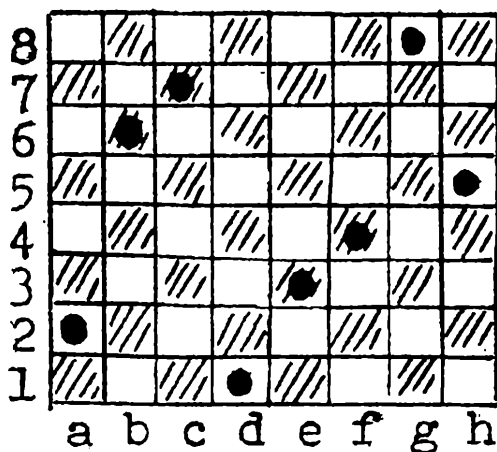
$$p(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3 \cap \dots \cap A'_n) = p(A) - \sum p(A_i) + \sum p(A_i \cap A_j) - \sum p(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^s \sum p(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_s}) + \dots + (-1)^n p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Větu lze dokázat indukcí podle počtu n podmnožin dané množiny A .

Způsobem založeným na principu inkluze a exkluze jsme ve zmíněném článku z posledního čísla Rozhledů vyřešili „vláčkový problém“; další úlohy k řešení byly uvedeny ve cvičení. Na základě tohoto principu vyřešíme nyní příklad, v němž se vyskytuje osm podmnožin dané konečné množiny:

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 umístit osm mincí tak, aby v každé řadě a v každém sloupci šachovnice byla právě jedna mince a přitom každé pole diagonály skládající se z osmi černých políček bylo prázdné.

Jeden z možných způsobů umístění mincí, který splňuje uvedené podmínky, je znázorněn na obr. 1. Z tohoto obrázku je patrné, že každé umístění mincí splňující dané podmínky lze považovat za prosté zobrazení množiny $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ na množinu $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, které neobsahuje žádnou z uspořádaných dvojic $[a, 1], [b, 2], [c, 3], [d, 4], [e, 5], [f, 6], [g, 7], [h, 8]$. Obr. 1 znázorňuje to prosté zobrazení f_1 množiny B na množinu C , pro něž platí: $f_1 = \{[a, 2], [b, 6], [c, 7], [d, 1], [e, 3], [f, 4], [g, 8], [h, 5]\}$. Podle principu inkluze a exkluze utvoříme množiny:



Obr. 1

- A — množina všech prostých zobrazení množiny B na množinu C ,
 A_1 — množina všech prostých zobrazení B na C , jež obsahují $[a, 1]$,
 A_2 — množina všech prostých zobrazení B na C , jež obsahují $[b, 2]$,
 $\dots$
 A_8 — množina všech prostých zobrazení B na C , jež obsahují $[h, 8]$.

Počet všech prostých zobrazení množiny **B** na množinu **C**, která neobsahují žádnou z uspořádaných dvojic $[a, 1], [b, 2], [c, 3], [d, 4], [e, 5], [f, 6], [g, 7], [h, 8]$, tj. hledaný počet způsobů umístění mincí, je roven počtu prvků množiny $A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_8$; číslo $p(A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_8)$ vyjádříme podle principu inkluze a exkluze. Na základě úvah, které jsme již prováděli při řešení „vláčkového problému“, dospějeme k tomu, že platí:

$$p(A) = 8! ,$$

$$p(A_1) = p(A_2) = \dots = p(A_8) = 7! ,$$

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1 \cap A_3) = \dots = p(A_7 \cap A_8) = 6! ,$$

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \dots = p(A_6 \cap A_7 \cap A_8) = 5! ,$$

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \dots = p(A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8) = 4! ,$$

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \dots = p(A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8) = 3! ,$$

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_6) = \dots = p(A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_8) = 2! ,$$

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_7) = \dots = p(A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_8) = 1! ,$$

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_8) = 1 ,$$

kde pro každé přirozené číslo n symbolem $n!$ rozumíme součin

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Sčítanci v každém součtu $\sum p(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_s})$ se navzájem rovnají; zbývá určit jejich počet. Známe-li pojem a význam kombinačního čísla $\binom{n}{k}$, snadno zdůvodníme, že v každém součtu uvedeného tvaru je právě $\binom{8}{s}$ sčítanců; v opačném případě je možno počet těchto sčítanců určit rozepsáním tohoto součtu pro každé s (nejvýše rovné osmi). Dostaneme tak:

$$\begin{aligned} p(A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_8) &= 8! - \binom{8}{1} 7! + \binom{8}{2} 6! - \binom{8}{3} 5! + \binom{8}{4} 4! - \\ &\quad - \binom{8}{5} 3! + \binom{8}{6} 2! - \binom{8}{7} 1! + 1 = \\ &= 8! - 8 \cdot 7! + 28 \cdot 6! - 56 \cdot 5! + \\ &\quad + 70 \cdot 4! - 56 \cdot 3! + 28 \cdot 2! - 8 \cdot 1! + \\ &\quad + 1 = 14\,833. \end{aligned}$$

Existuje právě 14 833 způsobů, jak umístit na danou šachovnici osm mincí tak, aby byly splněny požadované podmínky.

Způsob užití principu inkluze a exkluze je z uvedených příkladů jistě zřejmý. Znalost tohoto principu vám může pomoci i v řešení některých dalších problémů, s nimiž se setkáte.

Cvičení :

1. Na tanečním večírku se sešlo sedm manželských párů. Určete, kolika způsoby lze sestavit sedm tanečních dvojic, aby žádná tato dvojice nebyla tvořena manželským párem. (Výsledek: 1 854.)
2. Určete počet různých šesticiferných přirozených čísel, pro jejichž dekadický zápis platí: obsahuje každou z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6 a neobsahuje žádné z těchto dvojčíslí: 12, 23, 34, 45, 56. (Výsledek: 309.)

Ještě o součtech mocnin, mnohočlenech a kombinatorice

LUDOVÍT FERJENČÍK, Pardubice

V 2. čísle Rozhledů roč. 47 byl otištěn článek Františka Janečka: Součty 2. a 3. mocnin přirozených čísel. Autor používá k řešení této otázky kombinačních čísel, ale podle mého mínění nevyužívá všech výhod, které se tu nabízejí.

Předpokládám, že čtenář zmíněný článek četl, takže tvrzení v něm dokázaná jenom stručně zopakuji.

1. Začneme přehledem poznatků z kombinatoriky, které potřebujeme. Pro libovolnou dvojici celých nezáporných čísel n, k je definován symbol $\binom{n}{k}$ takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Platí tyto vztahy:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad (2)$$

$$(n-k)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1} \quad (3)$$

Identity (1) a (3) nejspíš už znáte ze školy, (2) se dokazuje v citovaném článku.

Malá úprava identity (3) vede ke vzorci

$$n\binom{n}{k} = k\binom{n}{k} + (k+1)\binom{n}{k+1} \quad (3a)$$

Například

$$n \binom{n}{2} = 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3},$$

$$7 \binom{7}{5} = 5 \binom{7}{5} + 6 \binom{7}{6},$$

$$i \binom{i}{0} = \binom{i}{1}$$

Cvičení: Zopakujte si odvození identit (1) až (3) a aplikujte je na jednoduché příklady. Nevyhýbejte se ani případům, kdy je $n \leq k$ nebo $n = 0$ nebo $k = 0$.

2. Přirozenou mocninu celého nezáporného čísla i lze rozvinout v součet kombinačních čísel. Známe už rozvoj

$$i^1 = \binom{i}{1}$$

$$i^2 = i \binom{i}{1} = \binom{i}{1} + 2 \binom{i}{2}$$

Dále je

$$i^3 = i \cdot i^2 = i \binom{i}{1} + 2i \binom{i}{2} = \binom{i}{1} + 2 \binom{i}{2} + 2 \left[2 \binom{i}{2} + 3 \binom{i}{3} \right].$$

Úpravy jsme provedli podle (3a). Máme tedy další rozvoj

$$i^3 = \binom{i}{1} + 6 \binom{i}{2} + 6 \binom{i}{3}$$

Identita (2) dává ihned součty:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n i &= \binom{n+1}{2} & \sum_{i=0}^n i^2 &= \binom{n+1}{2} + 2 \binom{n+1}{3} \\ \sum_{i=0}^n i^3 &= \binom{n+1}{2} + 6 \binom{n+1}{3} + 6 \binom{n+1}{4} \end{aligned}$$

Sčítání lze podle libosti opakovat, tj. např.:

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j i^2 = \binom{n+2}{3} + 2 \binom{n+2}{4}$$

a podobně.

3. Chcete-li si „troufnout“ na součty pátých nebo desátých mocnin, přijde vám vhod jednoduchý „recept“, jak bez zdlouhavých úprav najdeme rozvoj

$$i^k = C_1^{(k)} \binom{i}{1} + C_2^{(k)} \binom{i}{2} + \dots + C_k^{(k)} \binom{i}{k}, \quad (4)$$

kde $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$, ..., $C_k^{(k)}$ jsou celá nezáporná čísla, $C_k^{(k)} \neq 0$.

Výpočet koeficientů $C_j^{(k)}$ ($j = 1, 2, \dots, k$) provedeme v schématu, připomínajícím svým tvarem známý Pascalův trojúhelník

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & C_1^{(1)} & & \\
 & & & & & C_2^{(2)} & \\
 & & C_1^{(3)} & & C_2^{(3)} & & C_3^{(3)} \\
 C_1^{(4)} & & C_2^{(4)} & & C_3^{(4)} & & C_4^{(4)}
 \end{array}$$

První tři řádky schématu už známe. Jsou tu koeficienty

$$\begin{array}{ccc}
 & 1 & \\
 & 1 & 2 \\
 1 & 6 & 6
 \end{array}$$

Koeficienty $C_j^{(3)}$ jsme počítali takto:

$$1 = 1 \quad 1 \quad 6 = 2 \cdot (1 + 2) \quad 6 = 3 \cdot 2$$

Analogicky budeme počítat koeficienty pro $k = 4, 5, \dots$ Odvodíme a dokážeme příslušná tvrzení:

a) Víme, že rozvoj typu (4) existuje pro $k = 1, 2, 3$ a platí

$$\begin{aligned}
 C_1^{(1)} &= C_1^{(2)} = C_1^{(3)} = 1, \\
 C_1^{(1)} &= 1! \quad C_2^{(2)} = 2! \quad C_3^{(3)} = 3!
 \end{aligned}$$

b) Nechť pro $k \geq 1$ existuje rozvoj (4), v němž platí $C_1^{(k)} = 1$, $C_k^{(k)} = k!$. Užitím identity (3a) vypočteme koeficienty obdobného rozvoje mocniny i^{k+1} .

$$\begin{aligned}
 i^{k+1} &= i \cdot i^k = i \sum_{j=1}^k C_j^{(k)} \binom{i}{j} = \sum_{j=1}^k C_j^{(k)} i \binom{i}{j} = \\
 &= \sum_{j=1}^k C_j^{(k)} \left[j \binom{i}{j} + (j+1) \binom{i}{j+1} \right] = \\
 &= C_1^{(k)} \binom{i}{1} + \sum_{j=2}^k C_j^{(k)} j \binom{i}{j} + \sum_{l=1}^{k-1} C_{l+1}^{(k)} (l+1) \binom{i}{l+1} + \\
 &+ C_k^{(k)} (k+1) \binom{i}{k+1} = 1 \cdot \binom{i}{1} + \sum_{j=2}^k j (C_{j-1}^{(k)} + C_j^{(k)}) \binom{i}{j} + \\
 &+ (k+1)! \binom{i}{k+1}
 \end{aligned}$$

(Součet uprostřed jsme dostali dosazením $j = l + 1$ do předchozího vyjádření.)

Je tedy

$$\begin{aligned} C_1^{(k+1)} &= 1, \\ C_j^{(k+1)} &= j (C_{j-1}^{(k)} + C_j^{(k)}) \quad \text{pro} \quad 2 \leq j \leq k, \\ C_{k+1}^{(k+1)} &= (k+1)! \end{aligned} \quad (6)$$

Vzorce (6) představují rekurentní vztahy pro postupný výpočet koeficientů $C_j^{(k)}$ ze schématu (5). Pro $k = 4$ je

$$\begin{aligned} C_1^{(4)} &= 1 \quad 1 = 1, & C_2^{(4)} &= 2 \quad (1 + 6) = 14 \\ C_3^{(4)} &= 3 \cdot (6 + 6) = 36, & C_4^{(4)} &= 4! = 24. \end{aligned}$$

Schéma (5) rozvineme dále takto:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & 2 & & \\
 & & & & & & 6 & & 6 & & \\
 & & 1 & & 14 & & 36 & & 24 & & \\
 & 1 & & 30 & & 150 & & 240 & & 120 & \\
 & & 1 & & 62 & & 540 & & 1800 & & 720 \\
 1 & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

Příklad: Najdeme součet $\sum_{i=0}^n i^6$. Pomocí vypočtených koeficientů napíšeme rozvoj

$$i^6 = \binom{i}{1} + 62 \binom{i}{2} + 540 \binom{i}{3} + 1560 \binom{i}{4} + 1800 \binom{i}{5} + 720 \binom{i}{6}$$

Hledaný součet je tedy

$$\sum_{i=0}^n i^6 = \binom{n+1}{2} + 62 \binom{n+1}{3} + 540 \binom{n+1}{4} + 1560 \binom{n+1}{5} + 1800 \binom{n+1}{6} + 720 \binom{n+1}{7}$$

Výsledek lze upraviť

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n i^6 &= \frac{1}{42} n(n+1) [21 + 434 (n-1) + 945 (n-1)(n-2) + \\ &+ 546 (n-1)(n-2)(n-3) + 105 (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + \\ &+ 6 (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)] = \\ &= \frac{1}{42} n(n+1) (2n+1) (3n^4 + 6n^3 - 3n + 1), \end{aligned}$$

ovšem převedení součtu na výsledný tvar je dost pracné.

4. Z toho, co jsme dosud řekli, je vidět, že libovolný mnohočlen v proměnné n (n celé) stupně k

$$P(n) = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \dots + \alpha_k n^k, \quad \alpha_k \neq 0$$

lze rozvinout v kombinačních číslech takto:

$$P(n) = b_0 + b_1 \binom{n}{1} + \dots + b_k \binom{n}{k}, \quad b_k \neq 0. \quad (7)$$

Koeficienty b_j nemusíme počítat přes rozvoje jednotlivých mocnin argumentu n . Ukážeme si jednodušší postup — nejprve na příkladu.

Příklad: Mnohočlen 2. stupně

$$P(n) = 2n^2 - 5n + 1$$

má hodnoty

$$P(0) = 1, \quad P(1) = -2, \quad P(2) = -1, \quad P(3) = 4,$$

Tato čísla zapíšeme v posloupnosti

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 4 \end{array}$$

Nyní utvoříme tzv. diferenční posloupnosti

$$(-2) - 1 = -3, \quad (-1) - (-2) = 1, \quad 4 - (-1) = 5,$$

a podobně v dalších řádcích. Vše píšeme přehledně v schématu

$$\begin{array}{cccccc} \underline{1} & & -2 & & -1 & & 4 \\ & -3 & & 1 & & 5 & \\ & & 4 & & 4 & & \end{array}$$

(Dokažte, že druhá diferenční posloupnost má všechny členy stejné, rovné 4.)

Podtržené členy schématu jsou rovny koeficientům hledaného rozvoje, který má tvar

$$P(n) = 1 - 3 \binom{n}{1} + 4 \binom{n}{2}$$

(Přezkoušejte, že tento mnohočlen je totožný s původně zadaným.)

Odvoďme příslušné obecné tvrzení. Nechť existuje rozvoj mnohočlenu $P_0(n)$ stupně k v kombinačních číslech

$$P_0(n) = b_0 + b_1 \binom{n}{1} + \dots + b_k \binom{n}{k}, \quad b_k \neq 0.$$

Rozepišme diferenční schéma:

$$P_k(\mathbf{0})$$

$$\begin{aligned} \overline{P_1}(n) &= P_0(n+1) - P_0(n) = b_0 - b_0 + \sum_{j=1}^k b_j \left[\binom{n+1}{j} - \binom{n}{j} \right] = \\ &= \sum_{j=1}^k b_j \binom{n}{j-1} = b_1 + b_2 \binom{n}{1} + \dots + b_k \binom{n}{k-1}. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} P_j(n) &= b_j + b_{j+1} \binom{n}{1} + \dots + b_k \binom{n}{k-j} \quad \text{pro} \quad 2 \leq j \leq k-1, \\ P_k(n) &= b_k. \end{aligned}$$
$$P_0(0) = b_0, \quad P_1(0) = b_1, \quad P_k(0) = b_k. \quad (8)$$

b) Stupeň rovný nule přiřadíme mnohočlenu $P_k(n) = b_k$. Jeho hodnoty pro libovolné n jsou rovny témuž číslu $b_k \neq 0$.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 2 + 3 + 4 & & & & & & \\ 3 + 4 + 5 + 6 + 7 & & & & & & \\ 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 & & & & & & \end{array}$$
$$P(0) = 1, \quad P(1) = 9, \quad P(2) = 25,$$

Je totiž

$$P_1(n) = P(n+1) - P(n) = \\ = (3n+2) + (3n+3) + (3n+4) - (n+1) = 8n+8,$$

což je mnohočlen stupně 1.

Po rozepsání diferenčního schématu

$$\begin{array}{cccc} 1 & & 9 & 25 \\ & 8 & & 16 \\ & & 8 & \end{array}$$

máme

$$P(n) = 1 + 8 \binom{n}{1} + 8 \binom{n}{2} = 1 + 8n + 4n(n-1) = (2n+1)^2,$$

tj. čtverec lichého čísla.

K řešení následujících cvičení užíjte postupu naznačeného v předchozích příkladech. Nejdříve je třeba vždy stanovit, zda výraz, který řeší danou úlohu, má tvar mnohočlenu, a provést správně horní odhad stupně hledaného mnohočlenu.

Cvičení:

1. Najděte mnohočlen 3. stupně, který má hodnoty

$$P(0) = -4, \quad P(1) = 2, \quad P(2) = 1, \quad P(3) = 7.$$

2. Dokažte

$$\text{a) } \left[\binom{n}{3} - \binom{n}{2} \right]^2 = \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - 6 \binom{n}{4} + 10 \binom{n}{5} + 20 \binom{n}{6},$$

$$\text{b) } \binom{\binom{n}{2}}{2} = 3 \binom{n+1}{4}$$

3. Vyjádřete obecný člen posloupnosti ve tvaru mnohočlenu:

$$\text{a) } 1; \quad 3+5; \quad 5+7+9; \quad 7+9+11+13;$$

$$\text{b) } 1; \quad 2^2+3^3; \quad 4^2+5^2+6^2; \quad 7^2+8^2+9^2+10^2;$$

4. Posloupnost čísel je dána předpisem:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 1 \cdot 2$$

$$a_3 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3$$

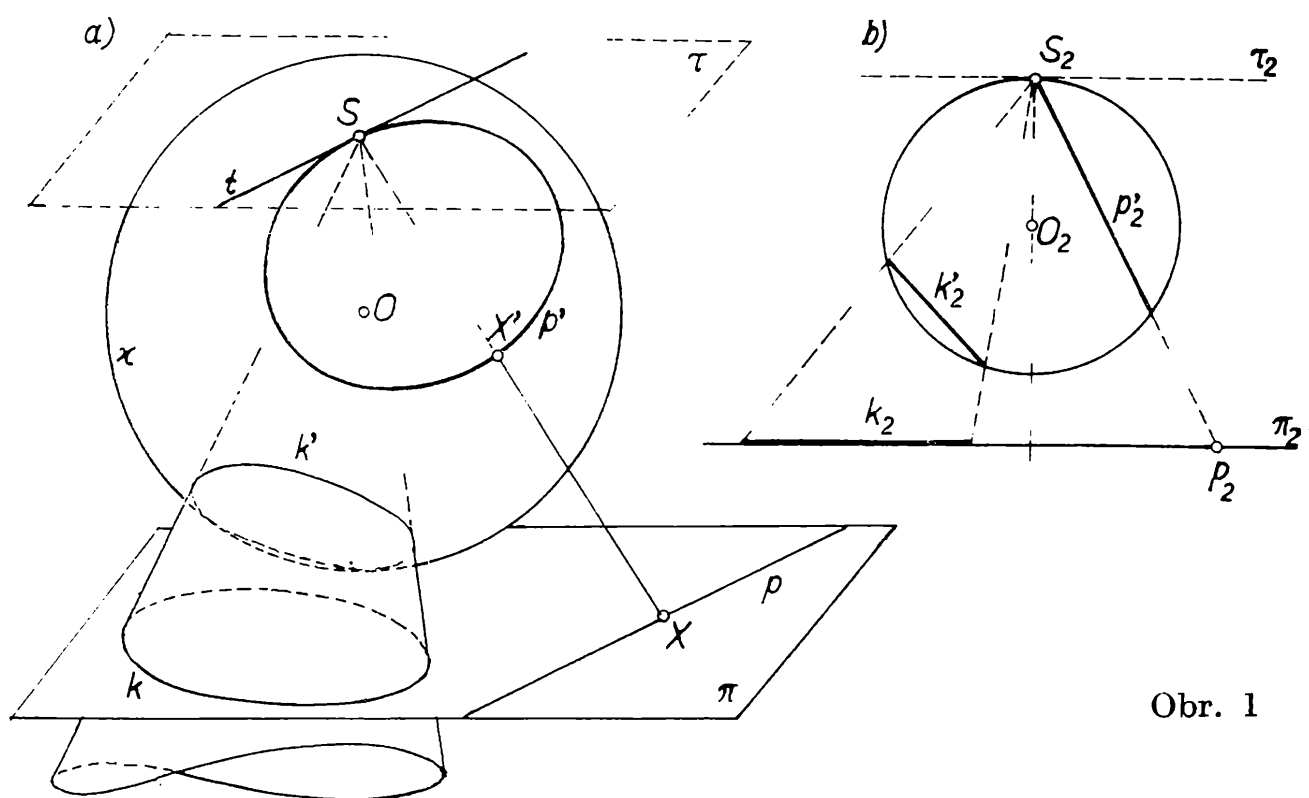
$$a_n = \sum_{1 \leq j < k \leq n} j \cdot k.$$

Dokažte, že obecný člen této posloupnosti je mnohočlen, a vyjádřete ho.

Stereografický průmět souměrnosti podle rovníku

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

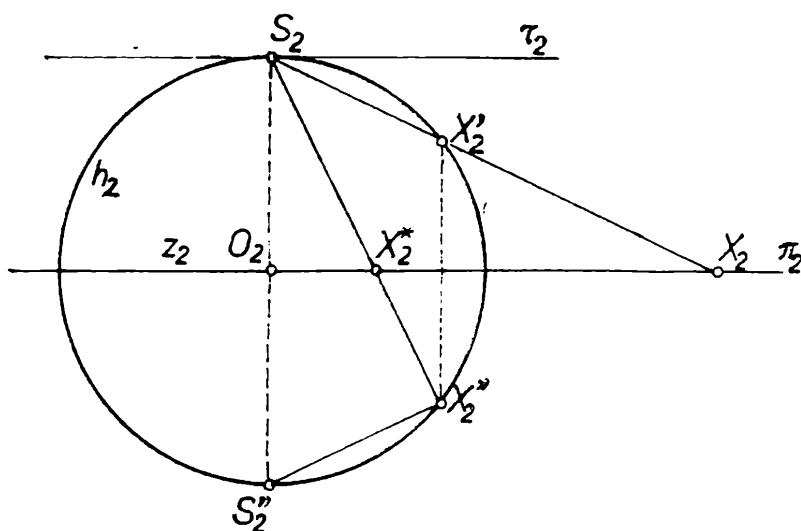
Se stereografickou projekcí kulové plochy do *Möbiovu roviny* jsme se seznámili v 5. čísle Rozhledů, roč. 1973–74. Jde o středové promítání kulové plochy κ z jednoho jejího bodu S do roviny π rovnoběžné s tečnou rovinou τ kulové plochy v bodě S (obr. 1). Vzájemné jednoznačnosti zobrazení κ na π dosahujeme tím, že k euklidovské rovině π připojujeme *jeden* nevlastní bod N^∞ , který považujeme za stereografický průmět bodu S ; tak získáváme Möbiovu rovinu π .



Obr. 1

V citovaném článku jsme dokázali, že stereografickým průmětem každé kružnice k' na kulové ploše je kružnice nebo přímka v rovině π ; přímku získáváme v případě, že střed promítání S leží na kružnici (p' na obr. 1a, b). Proto v Möbiově rovině zavádíme pojem *kruhové křivky*, který zahrnuje kružnice i přímky. Dále víme, že stereografické zobrazení kulové plochy je *izogonální*, tj. úhel dvou kružnic na kulové ploše je roven úhlu jejich průmětů v rovině π .

Obr. 2



Po tomto stručném připomenutí již vyložených poznatků se zabýváme významným zobrazením v Möbiově rovině, které získáme stereografickým promítnutím souměrnosti podle rovníku kulové plochy.

V dalších úvahách budeme jako průmětnu π volit rovinu procházející středem O kulové plochy κ . Tato rovina protne kulovou plochu v hlavní kružnici z , kterou budeme nazývat *základní kružnicí*.

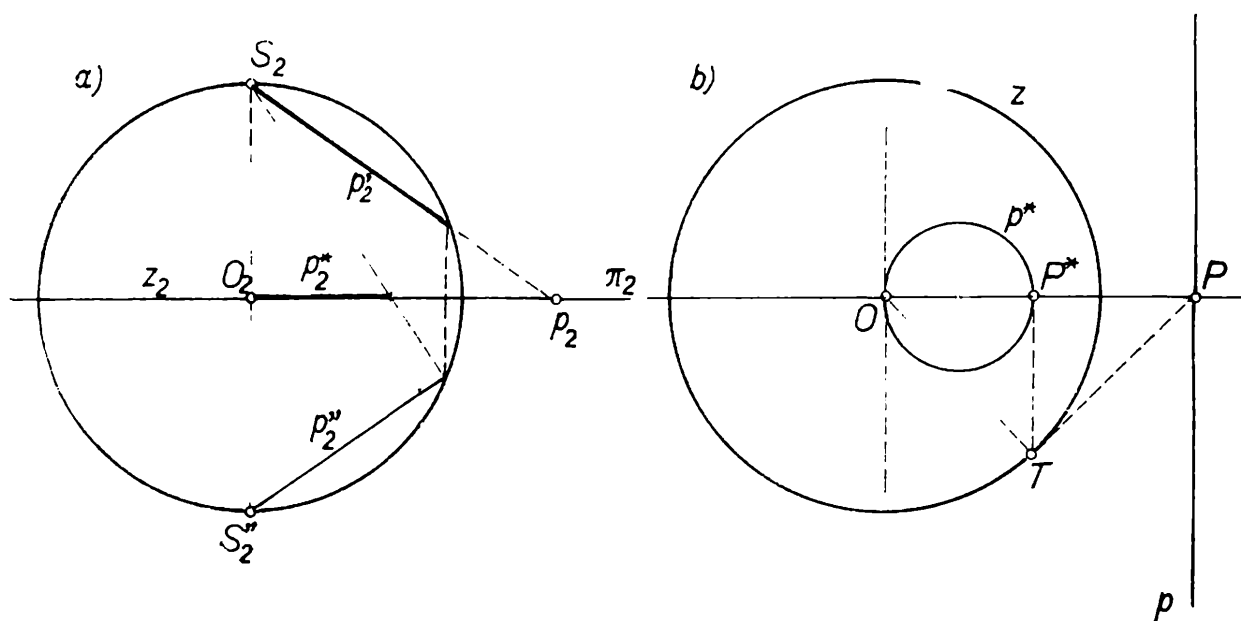
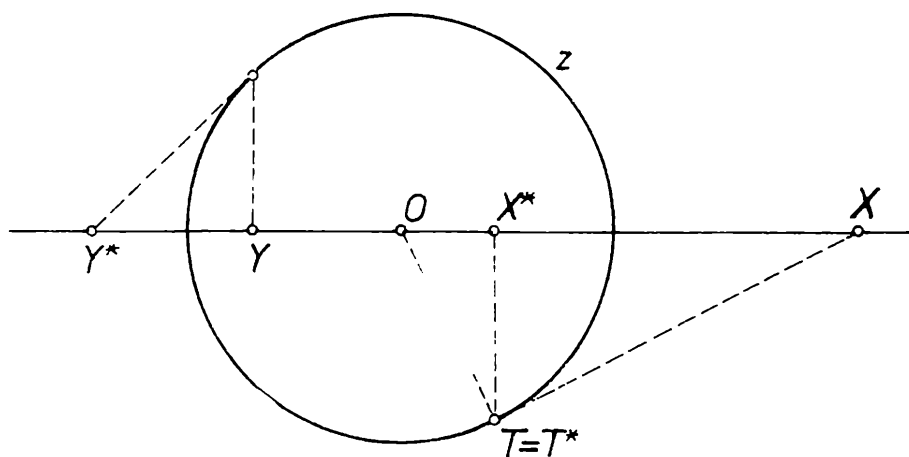
Je-li X libovolný bod roviny π (obr. 2), sestrojíme nejprve průsečík X' promítací přímky SX s kulovou plochou κ , pak k bodu X' sestrojíme bod X'' souměrný podle roviny π a tento bod promítneme z bodu S do roviny π do bodu X^* . Tím dostaneme zobrazení v rovině π , v němž bodu X jako vzoru je přiřazen bod X^* jako obraz. Zvolíme-li rovinu SOX za pomocnou průmětnu, snadno dokážeme, že platí vztah:

$$OX^* \cdot OX = r^2, \quad (1)$$

kde r je poloměr kružnice z .

Z rovnosti úhlů vyznačených na obr. 2 (jde o střídavé úhly mezi rovnoběžkami a o vztah mezi obvodovým a k němu příslušným úhlem úsekovým) plyne, že $\triangle O_2 X_2 S_2 \sim \triangle O_2 S_2 X_2^*$ a tudíž platí: $O_2 X_2^* : O_2 S_2 = O_2 S_2 : O_2 X_2$ a odtud plyne vztah (1). V Möbiově rovině π získáváme tak zobrazení, které nazveme *kruhovou inverzí* se základní kružnicí z o poloměru r . Bod O se nazývá *střed inverze* a číslo r^2 *mocností kruhové inverze*.

Podle vztahu (1) přiřadíme v kruhové inverzi se středem O vlastnímu bodu X obraz X^* nejsnáze tak, že uplatníme Euklidovu větu o odvěsně (obr. 3). Z bodu X , který leží vně kružnice z , vedeme tečnu ke kružnici z a z jejího bodu dotyku T kolmici na polopřímku OX ; pata kolmice je obrazem X^* bodu X v uvažované inverzi. Bodu $Y \neq O$, který leží uvnitř kružnice z , přiřadíme obraz opačným postupem než v případě bodu X . Body kružnice z jsou v inverzi *samodružné*.



Obr. 4

Na základě nalezeného vztahu mezi rovinovou souměrností na π a kruhovou inverzí o mocnosti r^2 zjistíme nyní snadno, jaké útvary odpovídají přímce a kružnici v kruhové inverzi se středem O a mocností r^2 . Je-li dána přímka p neprocházející středem O kružnice z (obr. 4), pak rovina Sp protne kulovou plochu κ v kružnici p' , k níž sestrojíme kružnici p'' souměrnou podle roviny π a tu promítneme z bodu S do roviny π do kružnice p^* . Tato kružnice nutně prochází středem O základní kružnice, který je průmětem bodu S'' kružnice p'' . Pokud přímka p protíná základní kružnici z , prochází kružnice p^* průsečíky přímky p s kružnicí z . Tím jsme dokázali větu:

1. Každá přímka, která neprochází středem O inverze, se zobrazuje v inverzi jako kružnice procházející středem inverze.

Snadno nahlédneme, že tečna ke kružnici v bodě O je rovnoběžná s danou přímkou (obr. 4b). Stejným postupem, jako jsme dokázali větu 1, dokážeme všechny následující věty:

2. Všechny body základní kružnice inverze jsou samodružné.

3. *Středu inverze odpovídá nevlastní bod Möbiovy roviny.*
4. *Přímky, které procházejí středem inverze, jsou samodružné, nejsou však samodružné všechny jejich body.*
5. *Kružnici, která prochází středem inverze, odpovídá přímka rovnoběžná s tečnou kružnice sestrojenou v bodě O (tj. středu inverze).*
6. *Kružnici, která neprochází středem inverze, odpovídá kružnice neprocházející středem inverze.*
7. *Kruhová inverze je zobrazením izogonálním, tj. zachovává velikosti úhlů i dotykové vlastnosti útvarů.*

Obecněji platí: Útvary na kulové ploše κ , které jsou souměrné podle roviny π základní kružnice z , mají za stereografické průměty útvary, které jsou sdruženy v kruhové inverzi se základní kružnicí $z = (O, r)$. Tak např. kružnice na kulové ploše κ , jejichž roviny jsou kolmé k rovině základní kružnice z , jsou souměrné podle roviny π a svírají s touto kružnicí pravé úhly. Jejich stereografickým průmětem jsou pak kružnice, které protínají základní kružnici inverze ortogonálně, takže platí věta:

8. *Kružnice, které protínají základní kružnici inverze ortogonálně, jsou v této inverzi samodružné (jako celek), nejsou však samodružné všechny jejich body.*

Tímto způsobem je možno odvodit všechny základní vlastnosti kruhové inverze s kladnou mocností r^2 . Podrobné promyšlení a odůvodnění uvedených vět ponechávám čtenáři; v pokračování článku se zaměříme na konstrukce a důkazy využívající kruhové inverze v Möbiově rovině.

fyzika

Spojové družice

Ing. JIŘÍ POSPÍŠIL, ČSA, Praha-Ruzyně

Začátkem května byla loni uvedena do provozu první čs. pozemská stanice družicových spojů. Tato stanice je vybavena standardní parabolickou anténou o průměru 12 metrů a přestože přijímá rádiové, telefonní a telegrafní signály, je určena především pro přenos televizního signálu z Moskvy prostřednictvím sovětské spojové družice typu Molnija 2.

Úkolem tohoto příspěvku je seznámit ve stručnosti čtenáře s touto problematikou.

Teoretické zdůvodnění, že je možno vytvořit umělé nebeské těleso obíhající kolem Země, najdeme již v geniální práci Isaaka Newtona „Matematické základy přírodopytu“ (Philosophiae naturalis principia mathematica), vydané roku 1687. Avšak v 18. a 19. století se na Newtonovy vývody hledělo jen jako na odtažitě úvahy, které mají usnadnit pochopení pohybových zákonů nebeských těles.

Na začátku našeho století navrhl K. E. Ciolkovskij (1857—1935), který již roku 1895 vyslovil myšlenku, že bude vytvořena umělá družice (UD) Země, „aby byla zřízena stálá observatoř obíhající za hranicemi atmosféry neomezeně dlouho kolem Země, podobně jako Měsíc“.

Plány K. E. Ciolkovského nemohly být za jeho života uskutečněny, neboť tehdy ještě nebylo pro vyřešení tak složitého úkolu, jako je vytvoření UD Země, dost předpokladů. 4. října a 3. listopadu 1957 se sen stal skutečností, neboť byly v Sovětském svazu vypuštěny dvě UD Země. Tím se objevila nová možnost spojení, které by využilo právě těchto UD. Srovnáme-li vlastnosti tohoto způsobu spojení s dnešními dálkovými spoji, ukazuje se, že použití UD Země umožňuje vybudovat spolehlivý a pružný systém celosvětového spojení, jehož by se využilo pro přenosy televizního programu, telegrafního a telefonního provozu.

Spojové družice se mohou pohybovat po drahách, které se vzájemně liší těmito parametry:

1. Sklonem roviny dráhy k rovině rovníku Země. Podle toho může být dráha rovníková (úhel sklonu je nulový), polární dráha (úhel sklonu 90°) a dráha s libovolným sklonem.

2. Tvarem dráhy — buď kruhová nebo eliptická.

3. Výškou dráhy nad povrchem Země.

U družice, která obíhá po kruhové dráze, můžeme snadno určit vztah mezi její výškou a oběžnou dobou. Musí platit, že v každém okamžiku přitažlivá síla

$$F_p = \kappa \frac{Mm}{r^2} \text{ [N]} \quad (1)$$

je v rovnováze se silou odstředivou

$$F_0 = \frac{mv_k^2}{r} \text{ [N]}, \quad (2)$$

takže oběžná rychlost

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa M}{r}} \text{ [m/s]} \quad (3)$$

kde je $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ [m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}]$ gravitační konstanta,
 $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ [kg]}$ hmotnost Země,

m [kg] hmotnost UD Země,
 r [m] poloměr kruhové dráhy od středu Země,
 v_k [m . s⁻¹] oběžná rychlost po kruhové dráze.

Je-li $r \equiv R_Z \doteq 6,36 \cdot 10^6$ [m] poloměr Země, pak

$$v_{k0} = 7,9 \quad [\text{km} \cdot \text{s}^{-1}] \quad (4)$$

a vztah (3) můžeme vyjádřit v tvaru

$$v_k = \frac{630}{\sqrt{r[\text{km}]}} \quad [\text{km} \cdot \text{s}^{-1}]. \quad (5)$$

Doba oběhu UD po kruhové dráze o poloměru r je

$$T = 1,66 \cdot 10^{-4} \sqrt{r_{[\text{km}]}^3} \quad [\text{min}]. \quad (6)$$

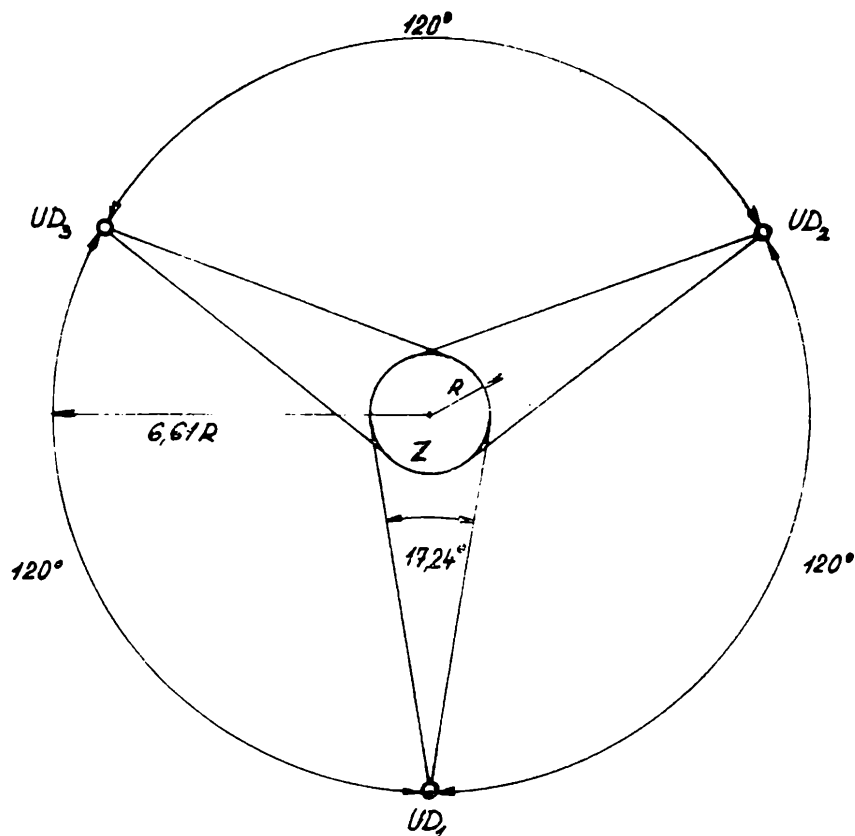
(Odvoďte si jako cvičení.)

Tabulka 1.

Výška nad povrchem Země [km]	Kruhová rychlost [km . s ⁻¹]	Siderická doba oběhu [min]
0	7,912	84
200	7,791	86
400	7,675	92
1 000	7,356	105
3 000	6,525	151
5 000	5,924	201
7 000	5,463	257
20 000	3,880	710
35 810	3,076	1 440 = 24 h

Tabulka 2.

Výška nad povrchem Země [km]	Oběžná doba	
	siderická	pozorovaná
10 000	6,0	8,0
14 000	8,0	12,0
35 810	24,0	∞



Obr. 1

Z tabulky 2 vyplývá, že při pohybu UD po rovníkové dráze ve výšce asi 36 000 km bude družice vůči pozorovateli na Zemi umístěna na téže místě oblohy. Dráhy ve výšce 10 000 km a 14 000 km jsou zajímavé tím, že UD může být na Zemi pozorována dvakrát nebo třikrát denně v téže místním čase.

Protože se nebeská tělesa vzájemně přitahují, není možno vytvořit UD, která by stála v meziplanetárním prostoru na jednom místě — taková UD je odsouzena k zániku. Je však možno vytvořit UD, která se sice pohybuje vzhledem ke hvězdám, avšak vzhledem k pozorovateli na Zemi je nehybná. Jak vidíme z tabulky 1, je oběžná dráha UD kolem Země tím větší, čím větší je vzdálenost UD od Země. Vidíme, že existuje vzdálenost, při které UD opíše svou dráhu přesně za 24 hodin.

Bude-li se kromě toho tato UD pohybovat v rovině rovníku, a to od západu k východu, bude její úhlová rychlost stejná jako úhlová rychlost otáčení Země kolem vlastní osy, takže se pozorovateli na Zemi bude zdát, že UD je nehybná. Taková družice — budeme ji nazývat stacionární UD — by se musela pohybovat ve výšce 35 810 km nad rovníkem (viz tabulka 2). Přitažlivost Měsíce bude sice způsobovat v dráze této UD jisté poruchy, takže časem bude její „nehybnost“ porušena, avšak tyto poruchy bude možno odstranit příslušnou korekturou oběžné dráhy.

Proti jiným UD má stacionární UD řadu výhod. Použijeme-li tři takové stacionární UD, které mezi sebou svírají úhel 120° , můžeme zajistit trvalé celosvětové spojení, jak vyplývá z obr. 1. Značná výhoda tohoto spojení je v tom, že k příjmu přenášeného signálu používáme pevného anténního systému.

Tabulka 3.

Oběžná doba vzhledem k Slunci	24 hodin
Oběžná doba vzhledem k obloze	23 h 45 min 4 s
Vzdálenost od středu Země	42 188 km
Výška nad rovníkem	35 810 km
Kruhová rychlost	3076 m/s
Viditelnost polárních oblastí	0

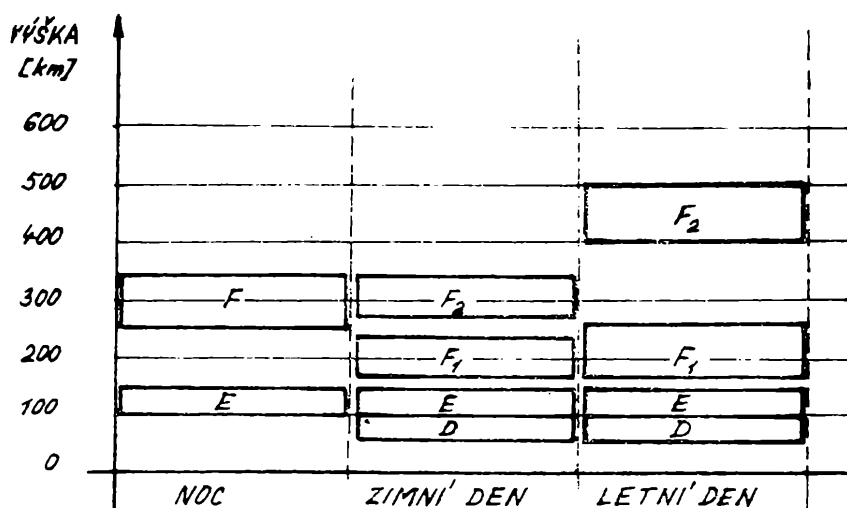
Povede-li dráha UD v téže vzdálenosti od středu Země jako dráha stacionární UD (42 188 km), ale na rozdíl od stacionární dráhy nebude v rovině rovníku, bude doba oběhu sice stejná, ale UD nebude vidět z téhož místa na Zemi stále v jednom směru, nýbrž v různé době ji bude vidět v různé výšce nad obzorem. Avšak v téže době hvězdného dne ji bude možno spatřit v témže bodě na obloze.

Jak je patrné z tabulky 3, nelze se stacionární UD korespondovat z oblastí okolo severního a jižního pólu. Vzhledem k tomu, že značná část sovětského území leží na severu, je v SSSR zvolena jiná oběžná dráha. Spojové UD létají po protáhlé elipse, přičemž v minimální vzdálenosti od povrchu (500 km) jsou na jihu a v maximální (40 000 km) na severu. Následkem toho se tyto UD nad severní polokoulí pohybují relativně pomalu a ze sovětského území, Evropy a severní Afriky jsou proto viditelné přibližně 8 hodin. To znamená, že tři takové družice dokáží zajistit nepřetržité spojení 24 hodin denně. Samozřejmě antény pozemních stanic musí let UD neustále sledovat a točit se za nimi.

První Molnija 1 byla vypuštěna 23. dubna 1965. Tato družice má tvar válce vysokého 4 metry a o průměru 2 metrů. Váží kolem 4 tun. Po navedení na dráhu se okolo ní rozvine 6 panelů slunečních baterií. Molnija 1 nese 3 silné vysílače, z toho dva jsou záložní.

Od 24. listopadu 1971 rovněž odstartovalo několik družic typu Molnija 2. Je to zdokonalený model.

Dosud jsme se zabývali mechanikou letu. Nyní si povíme něco o spojení s UD Země. Soudobá radiotechnika je schopna vytvořit rádiové spojení UD Země se Zemí i vzájemné spojení UD.



Obr. 2

Běžný přenos televizního obrazového signálu mezi jednotlivými státy zatím zprostředkovává síť retranslačních stanic — pro přenos obrazu musí být každých 50 km jedna věž a zvuk musí být veden zvláštním kabelem. To při použití UD odpadá. Signál běží z moskevského studia do pozemské stanice u sovětské metropole, která jej vyšle na družici Molnija 2, odkud je okamžitě odeslán stanici v ČSSR, která jej zpracuje obvyklým způsobem a předá pražskému studiu. Musíme však zvolit optimální pracovní kmitočet pro spojení. Jak známo, v horních vrstvách atmosféry se elektromagnetické vlny v různé míře odrážejí nebo pohlcují. To je tím, že v horní části atmosféry vzniká ionisace atomů vlivem působení slunečního záření. Je to zejména ultrafialové záření, které způsobuje, že se atomy plynů, které jsou zde ve velkém zředění, rozdělují na kladné ionty a volné záporné elektrony. Tím se stane vzdušné prostředí elektrickým a působí na rádiové vlny. Ionisace vzniká ve značných výškách atmosféry, kde je hustota plynů zhruba stejná s hustotou vzduchu v elektronce a kde nenastává opět rychlé spojování iontů a elektronů v nevodivé atomy. Ionisovaná oblast má několik maxim ionisace. Experimentálně byla zjištěna čtyři maxima ionisace, která se nazývají vrstvy D, E, F₁ a F₂. Po západu Slunce vrstvy D a F₁ zmizí. Elektronová koncentrace vrstev E a F₂ se v noci zmenšuje, ale zůstává zachována po celou noc. V letních měsících existují vrstvy F₁ a F₂ ve dne samostatně, v noci se spojují a vytvářejí jedinou vrstvu F (obr. 2). Dopadne-li rádiová vlna na ionosféru, volné elektrony v ionosféře se rozkmitají a jsou zdrojem nového elektromagnetického záření. Při tomto procesu dochází ke srážkám volných elektronů, takže se část energie těmito srážkami spotřebovává, čímž nastává útlum rádiové vlny v ionosféře. Útlum v ionosféře má tyto vlastnosti:

1. klesá s rostoucím pracovním kmitočtem;
2. pro určitý kmitočet je útlum rádiové vlny pro určitou ionosférickou vrstvu konstantní.

Kromě tohoto útlumu vzniká ještě útlum v atmosféře a je způsoben jednak molekulami plynů obsaženými v atmosféře (rezonanční útlum) (kyslík, dusík, vodní páry), jednak meteorologickými částicemi (déšť, mlha, sníh). Pracovní pásmo kmitočtů určujeme tak, že jeho dolní mez je dána kmitočtem, který ještě ionosférou proniká a horní mez pak rezonančním útlumem. Z průběhu útlumových křivek v atmosféře vyplývá, že v pásmu 1 až 10 GHz je tak zvané „radiové okno“, které nám umožňuje navázat spojení mezi Zemí a UD. Je-li vysílací anténa parabolická a přijímací anténa nesměrová (isotropická), nebude dosah zařízení záviset na délce vlny. Budou-li obě antény isotropní, poroste dosah přístroje s poklesem frekvence. To platí pro vakuum. Musí-li rádiové vlny projít při přenosu celou atmosférou, je volba frekvence mnohem složitější. Čím nižší je frekvence, tím jednodušší je technika generátorů vln, tím větší však jsou zase rozměry směrové antény. Z důvodů, jejichž objasnění přesahuje rámec tohoto elementárního článku, se volí pracovní kmitočet v pásmu 4 až 10 GHz. Jednou nevýhodou kosmických retranslátorů, které nelze odstranit, je konečná rychlost šíření elektromagnetických — a tedy i rádiových vln. Víte dobře, že se prostorem nemůže žádná hmota ani energie šířit rychlostí větší, než je přibližně rychlost $300\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, zvaná rychlost světla. Přenos signálu na vzdálenost 80 000 km (tzv. jeden skok) trvá přibližně 0,3 sekundy — a to je zpoždění, které se již zřetelně projeví při každém telefonním hovoru. Toto zpoždění však při televizních přenosech nevadí, protože divák nemá možnost s hercem komunikovat, aby to poznal, a nesoulad obrazu se zvukem nevzniká.

Závěrem tohoto stručného pojednání o problematice spojových družic se zmíníme o použití družic v letecké dopravě.

Použití UD v letecké dopravě je velmi lákavé. Důvodem je možnost využití VKV pro navigaci (malé antény, snadnost směřování, malé výkony, pravidelnost šíření a omezené úniky). Navigace pomocí UD by mohla být prováděna jednotně v celém světě s minimálním palubním vybavením. Provozním důsledkem jejich použití by bylo zjednodušení služeb řízení provozu, zmenšení počtu řídicích středisek, zmenšení nároků na kmitočtové pásmo apod. Praktické zavedení však má v současnosti značné problémy a to nejen v oblasti radiotechniky, ale i v technice družic a v neposlední řadě v oblasti mezinárodních dohod. Letecký družicový systém se v dnešní době jeví být proveditelný v ekonomických mezích pro přenosová hlasová sdělení, jakož i pro přenos dat k účelům řízení provozu a dále pro služby řídicí postup letu a rozestupy letadel. Předpokládá se, že ověřovací provozní fáze bude provedena do r. 1980.

Sluneční energie

ANEŽKA WOHLMUTHOVÁ, FSv — Praha

V současné době se téměř denně setkáváme — ať na stránkách novin, v rozhlase či televizi — se slovem energie.

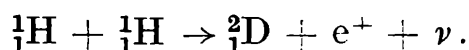
Kdybychom chtěli rozebírat význam energie pro člověka, museli bychom si především všimnout, že sama existence života je podmíněna dodáváním energie obsažené v potravě. Aby však člověk mohl žít, musí být energií zásobováno i jeho okolí. Člověk nemůže například být trvale v prostředí s velmi nízkou teplotou, v prostředí beze světla. Tepelnou a světelnou energii má člověk k dispozici odedávna. Jejím zdrojem je Slunce. Množství energie, které dopadá na Zemi ve formě tepelného a světelného slunečního záření, je veliké. V průměru za den je to asi 0,5 kW h (což je $1,8 \cdot 10^6$ joulu) na jeden m² zemského povrchu.

Odkud Slunce bere toto nesmírné množství energie? Zodpovědět tuto otázku se fyzikům podařilo až ve XX. století, po objevení termonukleárních reakcí. (O termonukleárních reakcích se čtenář mohl dočíst např. v článku „Termonukleární reakce — zdroj energie“ otištěném v časopise Rozhledy roč. 50, číslo 2, str. 71—76.) Slunce je velký termonukleární reaktor, v jehož nitru probíhají reakce jaderné syntézy, při nichž se uvolňují velká kvanta energie.

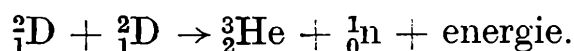
Zdrojem všech informací o Slunci je sluneční záření. Záření, které Slunce vysílá, dává však informace jen o pochodech, probíhajících na jeho povrchu. Sluneční povrch má teplotu asi $6 \cdot 10^3$ °C. Při této teplotě však žádné termojaderné reakce probíhat nemohou. Ty probíhají při teplotách mnohonásobně vyšších. Takové teploty jsou až v poměrně malém okolí slunečního středu. Přesto se fyzikům podařilo (na základě množství měření a teoretických výpočtů) zjistit, jaké termojaderné reakce uvnitř Slunce probíhají a jaká je jejich rychlost.

Teplota sluneční hmoty, složené převážně z vodíku (asi 75 %) a hélia (asi 24 %), stoupá od povrchu ke středu Slunce, kde dosahuje hodnoty asi $13 \cdot 10^6$ °C. Při této teplotě se atomy vodíku pohybují velmi rychle a srážejí se tak prudce, že elektron obíhající kolem vodíkového jádra — protonu se od jádra oddělí a pohybuje se volně. Podobně se oddělí elektrony od jader hélia, uhlíku, dusíku a ostatních prvků obsažených uvnitř Slunce. Hmota slunečního středu je tedy ve stavu ionisovaného plynu — plazmatu, tvořeného volnými elektrony, jádry vodíku, hélia a dalšími částicemi. Všechny tyto částice se pohybují velkými rychlostmi a neustále se spolu srážejí. Mají-li dva protony při takovéto srážce dostatečnou rychlost, může se stát, že se k sobě přiblíží až na vzdálenost působení přitažlivých jaderných sil. Pak proběhne reakce jaderné syntézy, při níž vzniká deuteron ${}^2_1\text{D}$, positron e^+ (kladný elektron) a neu-

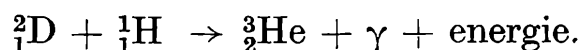
trino ν (neutrální částice o hmotnosti daleko menší, nežli je hmotnost elektronu). Reakci lze zapsat rovnicí



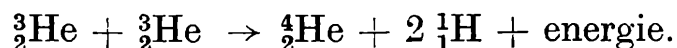
Vzniklý deuteron může při srážce s jinými jádry vyvolat další reakce. Tak srazí-li se v dostatečné rychlosti s jiným deuteronem, proběhne jaderná reakce, při níž vzniká jádro lehkého hélia ${}^3_2\text{He}$, uvolní se neutron ${}^1_0\text{n}$ a značné množství energie:



Kromě této reakce je možná ještě druhá reakce deuteronu při srážce s protonem. Při ní vzniká jádro hélia za současného uvolnění γ -záření



Jádro hélia ${}^3_2\text{He}$ je již značně stabilní. Přesto při vzájemné srážce těchto dvou jader může dojít k reakci, při níž vznikne jádro hélia ${}^4_2\text{He}$ a dva protony



Popsaný sled jaderných reakcí se nazývá proton — protonový řetězec.

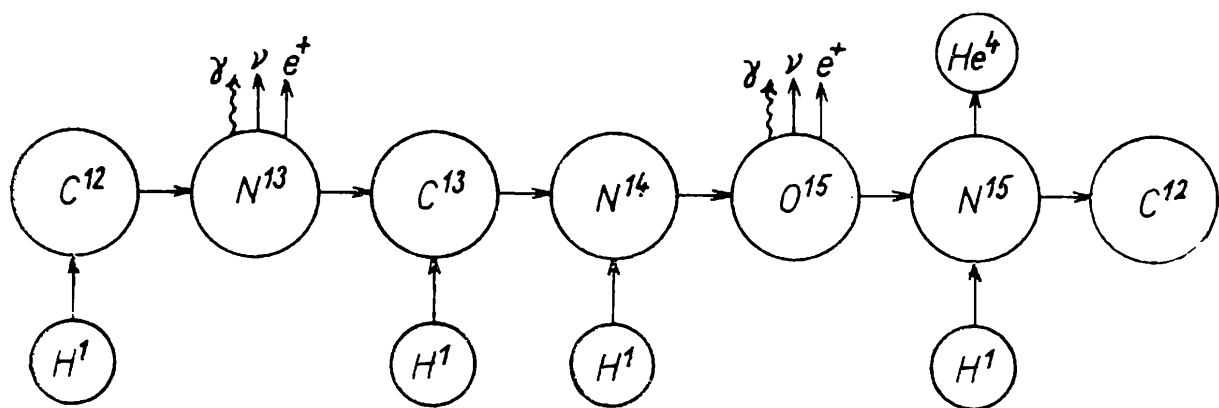
K vytváření jader hélia z protonů však dochází ještě druhým způsobem, který v r. 1939 popsal Bethe. Je to takzvaný uhlíko-dusíkový cyklus. Průběh reakcí tohoto cyklu je složitější. Protony se v něm nespojují přímo, ale vnikají postupně do jader těžších prvků-isotopů uhlíku a dusíku. Při vysokých teplotách panujících v nitru Slunce může rychlý proton proniknout do jádra uhlíku ${}^{12}_6\text{C}$. Vzniká jádro dusíku ${}^{13}_7\text{N}$, které vyzáří část své energie ve formě γ -záření.

Vzniklý isotope ${}^{13}_7\text{N}$ je velmi nestálý. Během několika minut se jeden z protonů jeho jádra mění na neutron, přičemž je vyzářen positron a neutrino. Výsledkem tohoto radioaktivního rozpadu je isotope uhlíku ${}^{13}_6\text{C}$. Pohlcením protonu se vzniklé jádro uhlíku mění na jádro dusíku ${}^{14}_7\text{N}$.

Isotope ${}^{14}_7\text{N}$ je již velmi stálý. Přesto se stane (řádově v průběhu miliónů let), že uchvátí proton a změní se v kyslík ${}^{15}_8\text{O}$ za vyzáření γ -kvanta. Isotope ${}^{15}_8\text{O}$ se téměř ihned rozpadá. Při tomto radioaktivním rozpadu vzniká jádro dusíku ${}^{15}_7\text{N}$.

Poslední reakcí cyklu je reakce, při níž jádro ${}^{15}_7\text{N}$ pohltí proton a rozpadá se na jádro uhlíku ${}^{12}_6\text{C}$ (s nímž cyklus začal) a jádro hélia za uvolnění γ -záření. Celý cyklus je schematicky znázorněn na obr. 1.

Všimneme-li si podrobněji proton-protonového řetězce a uhlíko-dusíkového cyklu, zjistíme, že výsledek obou typů reakcí je stejný. V obou případech vzniká ze čtyř protonů jádro hélia ${}^4_2\text{He}$. Je tedy i uvolněná energie v případě obou cyklů stejná, a to $4,3 \cdot 10^{-12}$ joulu na každé vzniklé jádro hélia.



Obr. 3

Oba typy jaderných reakcí probíhají na Slunci velmi pomalu. (Např. ke vniknutí protonu do jádra dusíku dochází průměrně za $13 \cdot 10^6$ let.) Velikost energie vyzařovaná Sluncem není dána rychlostí reakcí, ale ohromnými rozměry Slunce, a tedy velkým počtem reakcí. (Hmotnost Slunce je asi 333 000krát větší než hmota Země.) Pomalý průběh termonukleárních reakcí, při nichž se spaluje vodík a vzniká hélium, zaručuje, že Slunce vydrží se svým jaderným palivem ještě velmi dlouho.

Literatura :

J. Kleczek: Nitro Slunce a život na Zemi.

L. Pekárek: Termonukleární energie.

Raketová rovnice

RNDr. KAREL MIŠOŇ, CSc., ČVUT Praha

Mechanika proměnlivé hmoty

Druhý pohybový zákon v původním Newtonově pojetí (síla je úměrná časové změně hybnosti) zahrnuje sice i (relativistický) případ měnící se setrvačné hmoty, ale jen pokud tato změna není doprovázena silovým působením ovlivňujícím pohyb. Pro pohyb rakety je však silové působení (*reaktivní tah*) vyvolané změnou hmotnosti rakety (proud opouštějící trysku) vlivem stěžejním. V tom smyslu vyžaduje otázka pohybu rakety zobecnění druhého pohybového zákona na případ proměnlivé hmotnosti s vyšetřením dynamického vlivu *odpoutávané* hmoty.

Podnětem k soustavnému vyšetřování dynamiky proměnlivé hmotnosti byly odchylky pozorovaných poloh Měsíce oproti teoreticky vypočteným hodnotám. Byla nasnadě myšlenka hledat původ odchylek

ve vlivu dopadajících meteorů (tedy *narůstání* hmoty). K současnému *narůstání i odpoutávání* hmoty dochází třeba při letu meteoru atmosférou: spalování vede k úbytku, strhávání vzdušného polštáře odpovídá nárůstu hmotnosti. Připomeňme ještě alespoň: válec tiskařského papíru — vedle změny hmotnosti je zde výrazná i změna momentu setrvačnosti — a trysková letadla. Vznikl nový vědní obor — *mechanika (proměnlivé) hmoty*.

Metodická poznámka

Široká popularita raketových letů podněcuje snahu získat potřebnou pohybovou rovnici co nejprístupnějším — rozuměj co nejelementárnějším — způsobem. Zatímco solidní a přitom velmi krátké odvození vyžaduje jen zcela *elementární znalost integrálního počtu*, jsou vymyšleny aproximativní úvahy vedoucí z umělých a ne zcela správných předpokladů ke správným výsledkům bez užití integrálního počtu. Přitom jsou ve srovnání se solidním řešením podstatně delší. O jejich *průkaznosti* lze těžko hovořit, snad nejvýše jen v tom smyslu, že vedou ke stejným výsledkům jako cesta solidní.

Přihlédneme nejdříve k jednomu takovému způsobu, či lépe řečeno *nezpůsobu*.

Neprůkazný postup

Budiž m hmotnost rakety, když z ní bylo vyproudilo $\Delta m < 0$ zplodin hoření rychlostí U měřenou vzhledem k trysce. Věta o zachování hybnosti, vztažená na inerciální soustavu sdílející pohyb raketového tělesa v okamžiku, kdy Δm začalo opouštět trysku, dává (obr.)

$$m\Delta v + U\Delta m = 0 \quad (1)$$



Přímočarý let rakety v bezsilovém neodporujícím poli.

Přitom Δv je změna rychlosti rakety vyvolaná reaktivní silou. Pozor na znaménko druhého sčítance levé strany ($\Delta m < 0$)! Po dalších vyprouděních hmotnosti Δm bude hmotnost raketového tělesa klesat v posloupnosti, která pro $|\Delta m| \ll m$ nabízí aproximativní vyjádření

$$\begin{aligned}
m_1 &= m + \Delta m = m \left(1 + \frac{\Delta m}{m} \right), \\
m_2 &= m_1 + \Delta m = m \left(1 + 2 \frac{\Delta m}{m} \right) \approx m \left(1 + \frac{\Delta m}{m} \right)^2, \\
m_3 &= m_2 + \Delta m \approx m \left(1 + \frac{\Delta m}{m} \right)^2 + \Delta m = m \left(1 + 3 \frac{\Delta m}{m} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\Delta m}{m} \right)^2 \right) \approx m \left(1 + \frac{\Delta m}{m} \right)^3, \\
m_4 &= m_3 + \Delta m \approx m \left(1 + \frac{\Delta m}{m} \right)^3 + \Delta m = m \left(1 + 4 \frac{\Delta m}{m} + \right. \\
&\quad \left. + 3 \left(\frac{\Delta m}{m} \right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m} \right)^3 \right) \approx m \left(1 + \frac{\Delta m}{m} \right)^4, \\
m_n &\approx m \left(1 + \frac{\Delta m}{m} \right)^n
\end{aligned} \tag{2}$$

Považujeme-li přírůstek rychlosti plynoucí z (1)

$$\Delta v = -U \frac{\Delta m}{m} > 0$$

za stejný při všech jednotlivých odpoutáních vedoucích postupně k úhrnnému poklesu hmotnosti $m_1 \rightarrow m_n$, je celkový vzrůst rychlosti rakety $n\Delta v$. Uvažujeme-li start — zahájení činnosti motoru — rakety z klidu (*ryze reaktivní případ*, bez katapultování), je výsledná rychlost rakety

$$v = n\Delta v = -nU \frac{\Delta m}{m} \Rightarrow n = -\frac{vm}{U\Delta m}$$

a (2) poskytuje

$$\left(\frac{m_n}{m} \right)^{\frac{U}{v}} = \left(1 + \frac{\Delta m}{m} \right)^{-\frac{m}{\Delta m}} \tag{3}$$

Plynulé činnosti reaktivního motoru patrně odpovídá přechod $\Delta m \rightarrow 0$, tj. $-m/(\Delta m) \rightarrow \infty$ se současným $n \rightarrow \infty$. Hodnota m_n se stává *spojitě proměnlivou veličinou* vyjadřující okamžitou hmotnost raketového tělesa. Označme ji m , zatímco na místě dosud užitého — neproměnného — m píšeme M (*počáteční hmotnost rakety, plná raketa*). S tímto označením přechází vztah (3) v

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{U}{v}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$$

kde pro stručnost položeno $k = -M/(\Delta m)$. Úprava limitního výrazu

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{k-1} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{k}{k-1}}\right)^{k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \end{aligned}$$

ukazuje

$$\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{U}{v}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

Limita na pravé straně je známé Eulerovo číslo e (základ přirozených logaritmů), takže po zlogaritmování v přirozených logaritmech je

$$v = U \ln \frac{M}{m}. \quad (4)$$

To je základní *raketová rovnice* vyjadřující rychlost v rakety letící přímočaře v bezsilovém poli v závislosti na výtokové rychlosti plynů U , počáteční hmotnosti rakety M ve fázi letu, do níž bylo spotřebováno $M - m$ pohonných hmot. Další úpravu viz níže.

Ciolkovského rovnice

Přejdeme-li ve (3) k diferenciálům, máme ihned po separaci proměnných

$$U \int_M^m \frac{dm}{m} + \int_{v_0}^v dv = 0$$

V dolní mezi druhého z integrálů uvažujeme obecnou počáteční rychlost v_0 (katapultovaná raketa, případně zapnutí motoru v letící raketě). Při vytknutí výtokové rychlosti U v prvním integrálu předpokládáme $U = \text{konst}$ (*Ciolkovského hypotéza*). Bezprostřední integrace

$$U [\ln m]_M^m + v - v_0 = 0$$

vede k *Ciolkovského rovnici*

$$v = v_0 + U \cdot \ln \frac{M}{m}. \quad (5)$$

Pro $v_0 = 0$ se výsledek specializuje v předchozí (4).

Doba, po kterou pracuje motor rakety, se nazývá *aktivní perioda* T . Vyčerpá-li se během ní celá zásoba pohonných hmot E , redukuje se m na *konečnou hmotnost* K (*prázdná raketa*). Argument logaritmu M/m v tomto případě je důležitým parametrem rakety jako celku, *Ciolkovského číslem*

$$r = \frac{M}{K} = \frac{M}{M - E} > 1 \quad (6)$$

Pro $v_0 = 0$ vyjadřuje pak (5) celkovou (*charakteristickou*) rychlost V , které může raketa startující z klidu v bezsilovém neodporujícím poli s danou energetickou zásobou dosáhnout

$$U = u \ln r \quad (7)$$

Na okamžitou, s časem proměnnou, hodnotu argumentu logaritmu v (5) M/m lze nahlížet jako na proměnnou hodnotu Ciolkovského čísla. Na odlišení od (6) se pak mluví o *Ciolkovského funkci* κ . Předpisem časové závislosti $m(t)$, zvané *režimem hoření*, je Ciolkovského funkce dána vztahem

$$\kappa(t) = \frac{M}{m(t)}$$

Přitom $m(t)$ je nerostoucí (stacionarita znamená — třeba přerušované — vypnutí motoru), $\kappa(t)$ je neklesající. Všimněme si, že charakteristická rychlost (7) *nezávisí na režimu hoření* $m(t)$, jsouc určena (při dané výtokové rychlosti U a v negravitačním, neodporujícím poli) jen maximální hodnotou Ciolkovského funkce $\kappa(T) = r$.

S užitím závislosti $\kappa(t)$ lze místo (7) psát

$$v(t) = U \ln \kappa(t), \quad (8)$$

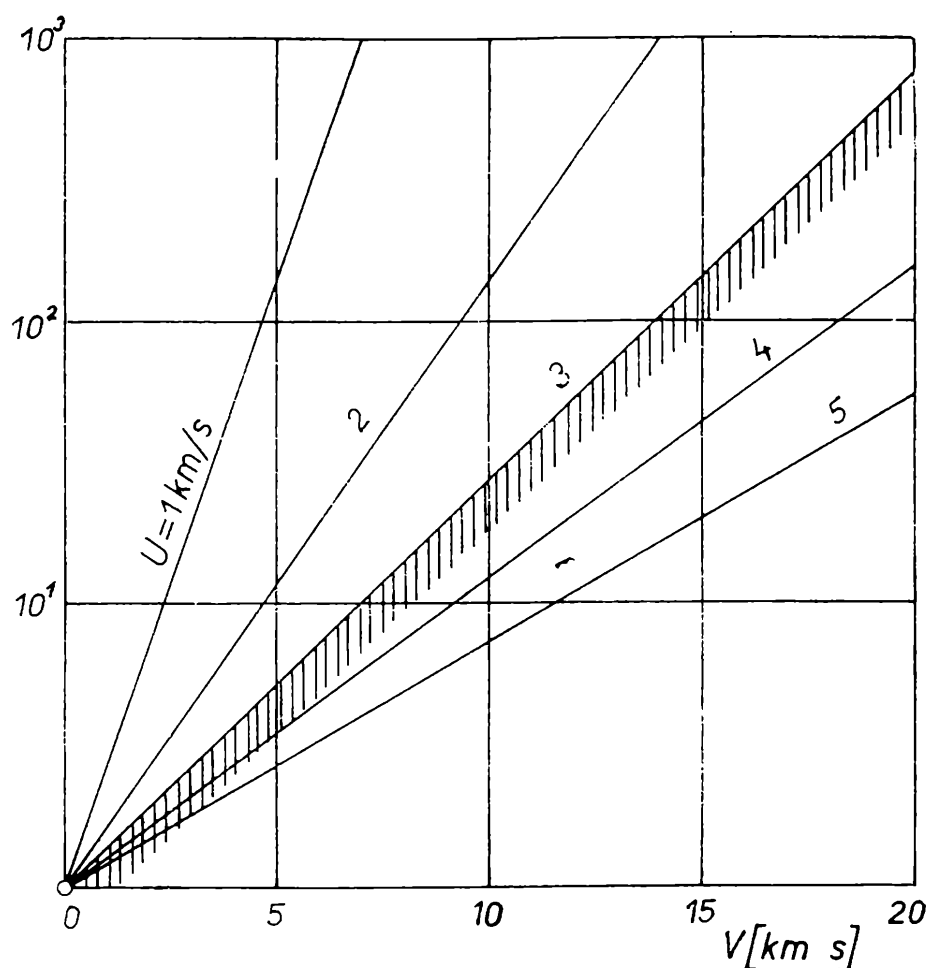
kde $v(t)$ je během aktivní periody proměnná rychlost. Jisté formální zjednodušení znamená zavedení *parametrické rychlosti* $w = v/u$ jako poměru letové a výtokové rychlosti. Na místě (8) nastupuje

$$w = \ln \kappa$$

s bezrozměrnými veličinami.

Připojený graf vyjadřuje závislost charakteristické rychlosti v [km/s], výtokové rychlosti U [km/s] a Ciolkovského čísla M [1]. Izopleta $U = 1$ km/s číselně odpovídá bezrozměrné parametrické rychlosti w . Šrafovaný obor ($U > 3$ km/s) je technicky perspektivní.

Připomínáme alespoň životní data Ciolkovského 1857—1935, jehož průkopnická práce, předstihující dvě generace, je všeobecně známa.



Nomogram Ciolkovského rovnice $V = U \ln r$ pro charakteristickou rychlost jednoduché rakety. Šrafování ($U > 3$ km/s) označuje hranici dnešních technických možností.

Ackeretova rovnice

Pro čtenáře seznámené se základy speciální teorie relativity*) připojujeme odvození *relativistické raketové rovnice přímého letu v bezsilovém neodporujícím prostředí*. Značí-li dv' změnu hybnosti konstatovanou astronautem (lokální systém rakety), nastupuje na místě (1)

$$mdv' + Udm = 0 \quad (9)$$

Užití relativistického teorému skládání rychlostí dává

$$v + dv = \frac{v + dv'}{1 + \frac{v dv'}{c^2}}, \quad c \quad \text{rychlost světla,}$$

*) Třeba: Josef Fuka, Základní poznatky teorie relativity, SPN 1973.

takže

$$dv = \frac{v + dv'}{1 + \frac{v dv'}{c^2}} - v = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v dv'}{c^2}} dv' \rightarrow \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dv'$$

Dosadíme-li odtud plynoucí

$$dv' = \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

do (9), získáme

$$\int_{v_0=0}^v \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + U \int_M^m \frac{dm}{m} = 0$$

Vzhledem k

$$\int \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - \frac{v}{c}} + \frac{1}{1 + \frac{v}{c}} \right) dv = \frac{c}{2} \ln \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}$$

je

$$\frac{c}{2} \ln \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} + U \ln \frac{m}{M} = 0$$

a po snadné úpravě

$$v = c \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2U}{c}} - 1}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2U}{c}} + 1} \quad (10)$$

To je *Ackeretova relativistická raketová rovnice* (1945). V jiném tvaru a za jistého omezujícího předpokladu se rovnice vyskytuje už u Esnault-Pelterieho (1930). Pro výtokovou rychlost rovnou rychlosti světelné poskytuje (9) *rovnici fotonové rakety*

$$v_{\text{fot}} = c \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^2 - 1}{\left(\frac{M}{m}\right)^2 + 1} = c \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}$$

Hologram

Ing. J Á N M A C H Á N, Košice

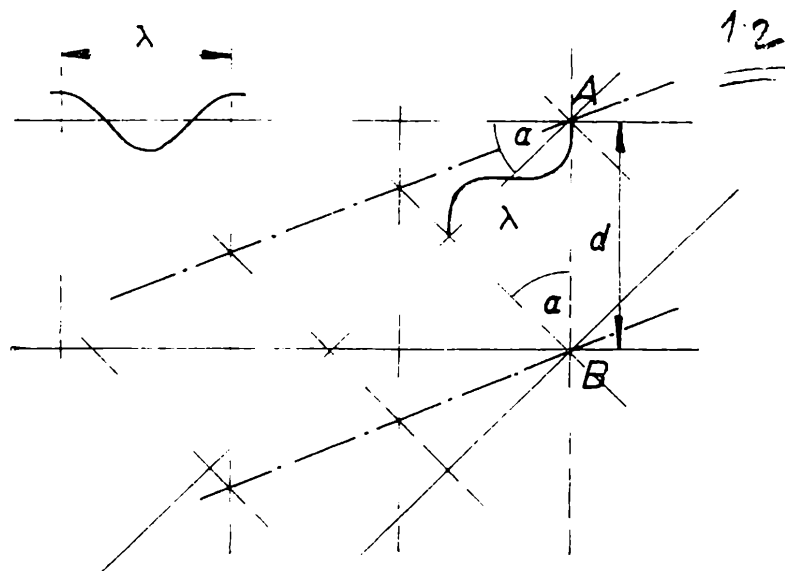
V posledných rokoch sa stala známou nová zobrazovacia metóda, nazývaná holografiou. Ak sfotografujeme nejaký priestorový predmet, získame jeho „obyčajný“ obraz zobrazený šošovkovou sústavou aparátu. Obraz takto získaný závisí na tom, z ktorej strany sa na predmet pri fotografovaní dívame. Ak časť filmu by sme odstrihli, na fotografii už tá časť bude chýbať, inými slovami, je potrebná celá plocha filmu (rozumej snímku), aby sme celý obraz predmetu získali. Túto skutočnosť je dôležité pripomenúť preto, lebo je to jeden z momentov, kde sa bude hologram od zobrazovania šošovkami líšiť. Totiž oproti šošovkám získava sa hologram využitím interferencie. Je prekvapujúca a v prvom okamihu i nepochopiteľná jedna vlastnosť hologramu, a to že dáva tak priestorový obraz, na ktorý ak sa dívame z rôznych strán, bude sa nám aj predmet javiť ako videný z týchto strán, teda sú badateľné paralaxné odchýlky. Dívajúc sa na hologram zachytený na plochej platni môžeme obraz do určitej miery akoby obísť, nazrieť zaň. Okrem toho možno hologram rozkúskovať, na rozdiel od klasického filmu, a každá jeho časť bude zobrazovať znova celý predmet. K vysvetleniu princípu hologramu je treba si pripomenúť dva známe svetelné javy.

1. Stretnutie vlnových polí

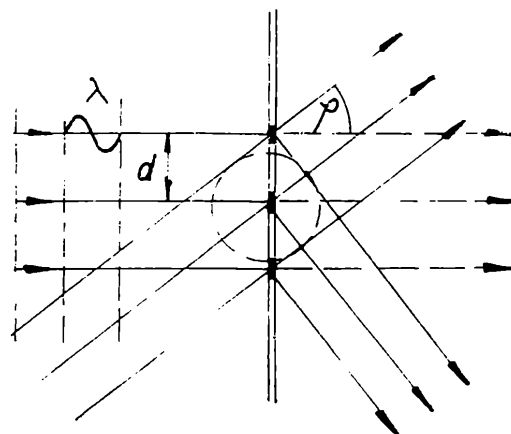
Na obr. 1 sa pohybuje zľava doprava vodorovne jedna rovinná vlna. Jej jednotlivé vrcholy, vzdialené navzájom o vlnovú dĺžku λ , pohybujú sa tiež doprava, a to rýchlosťou svetla. Kolmo na smer pohybu sú čiarkovane označené tie miesta, kde sa jednotlivé vrcholy v určitom okamihu nachádzajú. Ďalšia, presne rovnaká vlna prichádza zo smeru zvierajúceho s predošlým uhol α . Tak isto u tejto vlny sú kolmo na smer jej pohybu čiarkovane vyznačené miesta, kde sa jednotlivé vrcholy tejto vlny v danom okamihu nachádzajú. Z obr. 1 plynie, že v miestach, kde sa stretávajú časti vln majúce rovnakú fázu, dochádza k zosilneniu. Toto miesto leží na čiare rozpolťujúcej uhol, ktorý jednotlivé smery pohybu vln navzájom zvierajú (na obr. bodkočiarkovane). V týchto miestach bude vlnenie stále silné. Presne rovnaký obraz uvidíme, ak sa na vodnej hladine stretnú dve vlny. Takýmto myšlienkovým postupom možno potom pojednávať mnoho interferenčných javov.

Ak si do nášho vlnového poľa vložíme tienítka AB , objaví sa na ňom séria svetlých a tmavých miest. Vzdialenosť dvoch svetlých (alebo dvoch tmavých) miest na tienítku bude:

$$d = \frac{\lambda}{\sin \alpha}$$



obr. 1



obr. 2

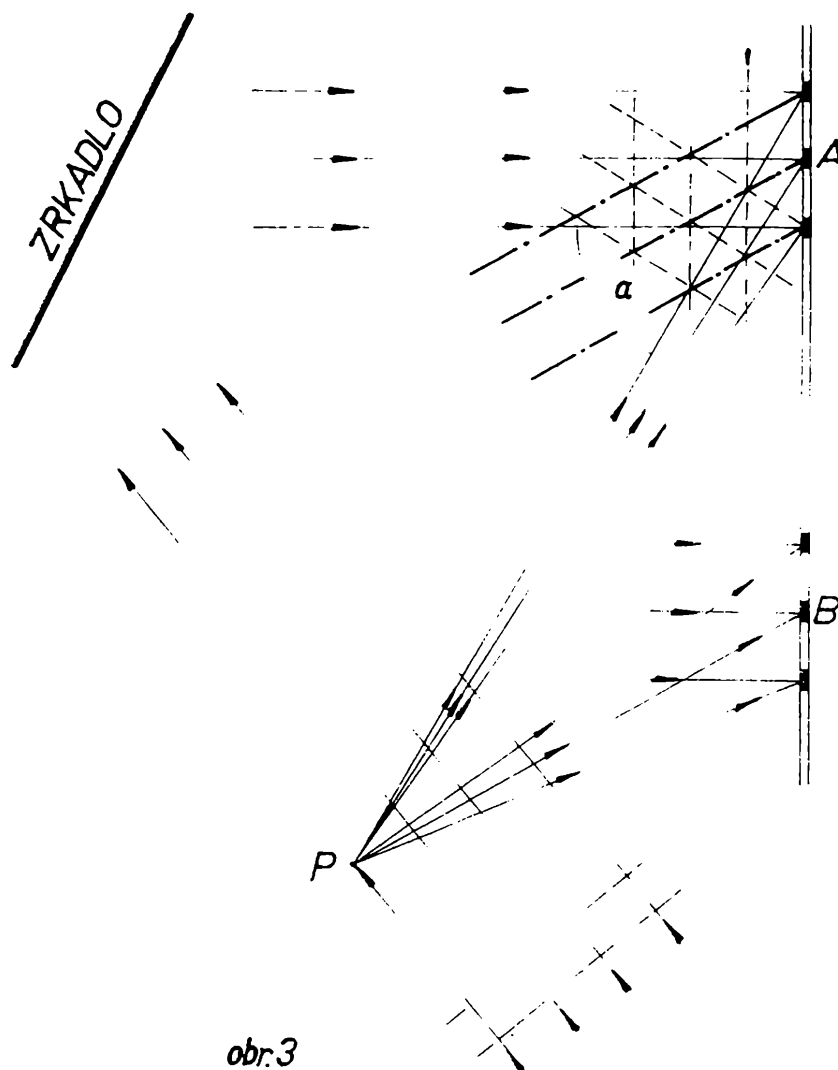
2. Optická mriežka

Optická mriežka je séria rovnobežných, rovnako vzdialených a rovnako širokých vrypov (napr. na sklenenej doske), niekoľko sto na dĺžku 1 mm. Vrypy predstavujú na doske málo priehľadné miesta, medzery medzi nimi sa uplatňujú ako štrbiny. Na obr. 2 vzdialenosť d predstavuje tzv. mriežkovú konštantu, je to vzdialenosť dvoch susedných štrbín. Podľa Huygensovho princípu, ak na mriežku dopadne rovinná vlna, všetky body v jednotlivých štrbinách stávajú sa elementárnymi zdrojmi guľových vln. Vlny vychádzajúce v smere uhla φ budú sa zosilňovať vtedy, ak vzdialenosť $d \sin \varphi$ bude rovná vlnovej dĺžke (v prípade prvého zosilnenia):

$$\lambda = d \sin \varphi$$

Guľové vlny sa budú šíriť aj v smere doľava a ak je možné ich pozorovanie, bude aj tu možno badať zosilnenie, svetlo v smere $\sin \varphi = \lambda/d$.

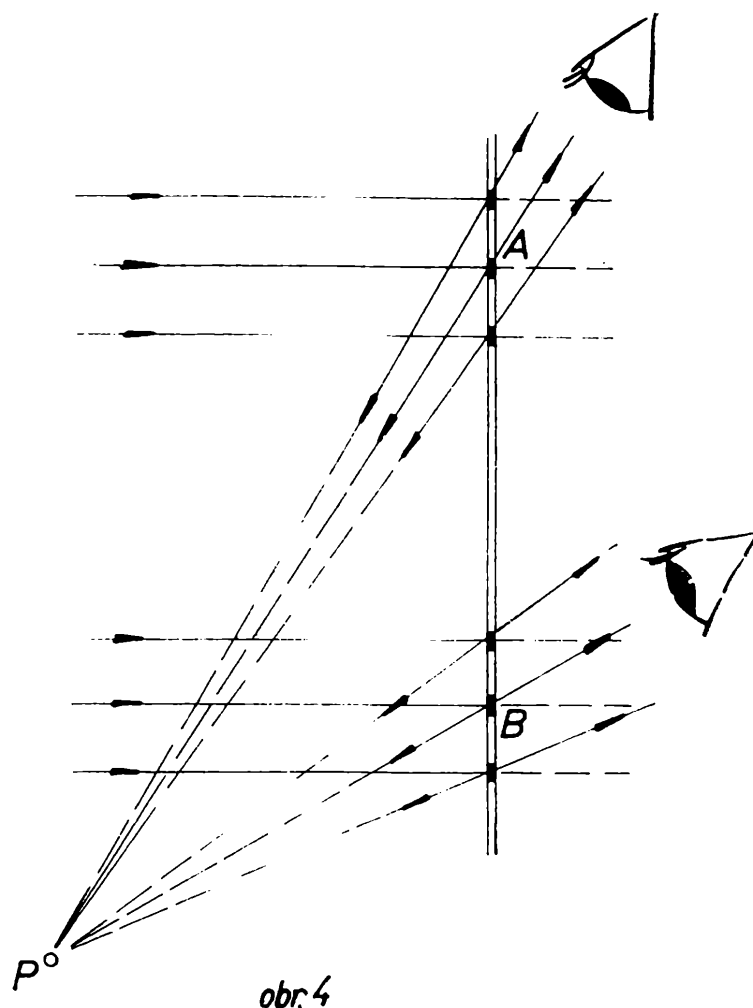
Teraz už možno prikročiť k vysvetleniu samotného hologramu (obr. 3). Chceme napríklad získať hologram malého predmetu, valčeka, umiestne-



obr.3

ného v bode P . Sprava zdola dopadá na valček rovnobežný zväzok lúčov. Časť týchto lúčov sa odrazí, časť sa rozptýli na predmete a tieto potom sa šíria v tvare guľ. V dôsledku veľkej vzdialenosti malý kúsok povrchu vlny rozptýleného svetla v mieste A je prakticky rovinnou plochou, jej lúče sú skoro rovnobežné. Nesmieme zabudnúť, že celý náčrt nie je kreslený v mierke, pretože vzdialenosť PA vzhľadom k vlnovej dĺžke by bola ráda km.

Veľká časť k osvetleniu slúžiaceho lúča prejde popri predmete P . Tieto uniknuté lúče potom odrazíme späť zrkadlom vo smere bodu A a nazývame ich referenčnými. V bode A sa rozptýlené svetlo z predmetu a odrazené lúče (referenčné) stretávajú pod uhlom α . Výsledkom tohto stretnutia budú už predtým spomenuté zosilnenia. Tak sa potom na fotografickú dosku vloženú do roviny AB nafotografuje optická mriežka s konštantou mriežky $d = \lambda / \sin \alpha$. V bode B nastáva to isté s tým rozdielom, že uhol α je menší, a preto konštanta mriežky bude väčšia. Samozrejme medzi bodmi A a B všade dostávame obraz optickej mriežky so stále rastúcou mriežkovou konštantou. Po vhodne dlhom osvetlení sa doska vyvolá a hologram je hotový.



Z takto získaného hologramu môžeme získať späť obraz na ňom zachyteného predmetu. Osvetlíme hologram zľava svetlom o vlnovej dĺžke λ . V bode A sa správa hologram ako optická mriežka a teda prvé zosilnenie nastane vo smere $\sin \varphi = \lambda/d$. Keďže $d = \lambda/\sin \alpha$, bude

$$\sin \varphi = \lambda : \frac{\lambda}{\sin \alpha} = \sin \alpha, \quad \varphi = \alpha.$$

Čiže ako hľadacie na lúče z mriežky sa vzdalujúce, bude vidieť svetlo pod tým istým uhlom α a teda aj bod P , pod akým uhlom dopadlo rozptýlené svetlo z bodu P na dosku v bode A . Ak sa oko díva na hologram v bode B , tamojšia redšia mriežka bude dávať zosilnenie pod menším uhlom a z mriežky sa vzdalujúce lúče zdajú sa opäť vychádzať z pôvodného bodu P . Musíme brať do úvahy aj to, že na obr. 3 z bodu P do bodu A prichádzajúce lúče nie sú rovnobežné, preto aj mriežková konštanta v okolí bodu A nie je rovnomerná, smerom nahor trochu hustejšia, smerom nadol trochu redšia. Preto aj lúče smerujúce z bodu A k oku nie sú celkom rovnobežné, ale sa trochu rozchádzajú, teda oko celkom presne vidí virtuálny obraz v bode P . Lúče smerujúce dolava sa zbiehajú a práve v bode P dávajú reálny, na tienítku zachytiteľný obraz.

Skutočný predmet pozostáva z mnohých, bodu P podobných čiastočiek, z každého z nich dostaneme virtuálny a skutočný obraz. Každá vlastnosť hologramu sa tým stáva zrozumiteľnou. Možnosť vidieť predmet z rozličných strán (tedy možnosť akoby obísť predmet) znamená, že ak sa dívame cez hociktorú časť hologramu, budeme vidieť bod P a ostatné body predmetu vždy v pôvodnom priestorovom usporiadaní, teda v perspektíve, v akej sa nám javí predmet z daného bodu pri pohľade voľným okom. Ak sa dívame na hologram cez bod A , zbývajúcu časť hologramu si možno odmyslieť (akoby odhodiť) ako keby nechýbala, predsa budeme vidieť predmet tak, ako je ho vidieť z bodu A v skutočnosti voľným okom. Samozrejme ak by nám chýbala časť hologramu napr. z okolia bodu B , potom by nám chýbal aj pohľad z tohto bodu. Okrem toho nemožno hologram kúskovať neobmedzene, napr. aby nám zostala len jedna mriežka.

Bezpodmienečne je treba zdôrazniť, že k príprave hologramu a naopak aj k dívaniu sa naň je potrebné koherentné svetlo. Fáza rozptýleného svetla voči fáze referentného lúča sa nesmie meniť. Za vypracovanie holografickej metódy dostal r. 1971 Nobelovu cenu za fyziku Dénes Gábor, v Anglicku pôsobiaci fyzik maďarského pôvodu. Výsledky svojich prác uverejnil už r. 1948, ale v tom čase ešte nebol k dispozícii vhodný zdroj svetla. Z dovtedy známych svetelných zdrojov dobre interferujúce vlny podarilo sa získať len za cenu vysokých strát. Obrat nastal až po objavení laseru. Laserové lúče vynikajúco interferujú a ich intenzita je mnoho miliónnásobne väčšia než predtým známych svetelných zdrojov. V r. 1964 americkí vedci Leith a Upatneiks po prvýkrát získali laserovým lúčom z hologramu jedného predmetu jeho trojdimenzný obraz dobrej kvality. Potom už nasledoval celý rad vedeckých aj praktických aplikácií v mikroskopii, počítačovej technike, najviac sa však jeho využitie ponúka u stereoskopického kina.

Magnetické vlastnosti atómov

RNDr. E. SCHOLTZ, Fakultné gymnázium, Košice.

1. Úvod

Pri názornom vysvetľovaní magnetických vlastností atómov je možné vychádzať z predstavy o stacionárnych kruhových a eliptických dráhach elektrónov, pohybujúcich sa v elektrickom poli kladného atómového jadra. Berieme pritom do úvahy, že magnetické pole existuje v okolí pohybujúcich sa elektricky nabitých častíc a že za tzv. molekulárne

prúdy, ktoré v snahe vysvetliť magnetické vlastnosti látok zaviedol už Ampère, považujeme práve elektróny, obiehajúce okolo jadra atómu po uzavretých dráhach.

V elektrónovej dráhe vidíme analógiu uzavretého rovinného elektrického okruhu, ktorý sa chová ako magnet. Napr. keď vložíme závit s prúdom do magnetického poľa, vzniká dvojica síl, ktorá má na závit otáčavý (orientujúci) účinok. Práve tak si môžeme predstaviť účinok vonkajšieho magnetického poľa na elektrónové dráhy — orbity v atómoch. Ukázalo sa, že teória magnetizmu založená na takejto predstave vysvetľuje pomerne široký okruh magnetických javov.

Experimentálne bola objavená predtým neznáma a neočakávaná vlastnosť elektrónov — elektrónový spin. Tieto častice majú totiž aj také magnetické vlastnosti, ktoré nesúvisia s ich orbitálnym pohybom okolo jadra atómu. Túto vlastnosť dnes radíme spolu s hmotnosťou a nábojom elektrónov medzi ich základné charakteristiky. Predpokladáme, že existencia elektrónového spinu môže súvisieť so zložitou štruktúrou elektrónov.

Aj jadrá atómov majú magnetické vlastnosti. Ich magnetické účinky sú však v porovnaní s magnetizmom elektrónov rádovo tisíckrát menšie.

Magnetické vlastnosti elektrónov a atómových jadier podmieňujú celkový magnetizmus atómov a ako to v ďalšom ukážeme, aj možné hodnoty (hladiny) energie atómov umiestnených v magnetickom poli. Prejavuje sa to v tzv. jemnej a veľmi jemnej štruktúre spektrálnych čiar.

2. Dipóly a dipólové momenty

V okolí elektrických nábojov existuje elektrické pole, ktoré sa prejavuje silovým pôsobením na iné elektrické náboje. Sústava dvoch bodových nábojov rovnakej veľkosti a opačného znamienka, medzi ktorými je malá vzdialenosť v porovnaní so vzdialenosťou, v ktorej skúmame vlastnosti jej elektrického poľa, sa volá elektrický dipól. V elektrickom poli o intenzite E pôsobí na dipól s výbojmi $+Q$ a $-Q$ a vzdialenosťou d medzi nimi dvojica síl F , ktorá má naň otáčavý účinok. Situácia v homogénnom elektrickom poli je znázornená na obr. 1.

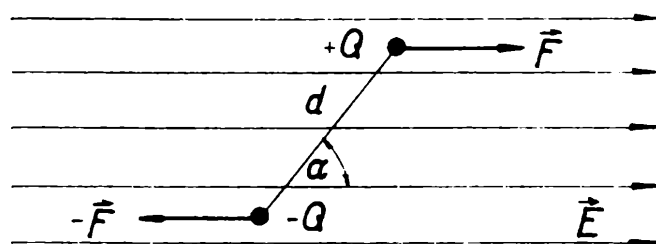
Pre veľkosť síl F pôsobiacich na dipól platí rovnica $F = QE$ a pre moment dvojice síl, stáčajúci dipól do smeru siločiar elektrického poľa môžeme napísať rovnicu

$$M = Fd' = QdE \sin \alpha \quad (1)$$

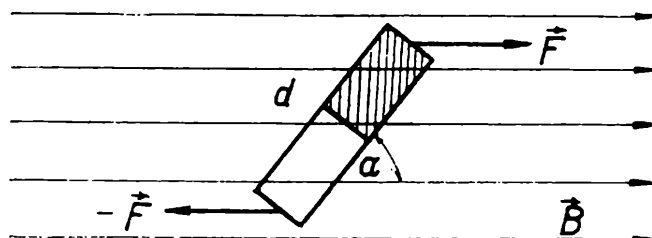
Vidíme, že pôsobenie vonkajšieho elektrického poľa, tj. orientujúci účinok na dipól závisí pri danej intenzite poľa E a uhle α len od vlastností dipólu — na veľkosti náboja Q a vzdialenosti d . Veličina daná súčinom

$$M_e = Qd \quad (2)$$

Obr. 1



Obr.



sa nazýva dipólový moment a vyjadruje vlastnosti elektrického dipólu, ktoré sa prejavujú po jeho vložení do elektrického poľa.

V okolí pohybujúcich sa elektrických nábojov (nabitých častíc, prúdov, prúdovodičov) existuje zvláštny druh silového poľa — magnetické pole, ktoré sa prejavuje silovým pôsobením na iné pohybujúce sa nabité častice (prúdy, prúdovodiče). K orientujúcemu účinku elektrického poľa na elektrický dipól môžeme prirovnať orientujúci účinok magnetického poľa na tyčový magnet. Predstavme si ho v homogénnom magnetickom poli o indukcii B podľa obr. 2.

Ako analógiu k elektrickému náboju by sme mohli zaviesť formálne veličinu magnetický náboj (magnetické množstvo) m a definovať magnetický moment

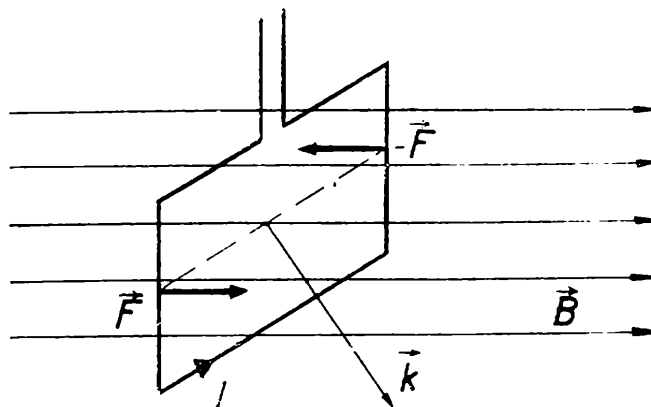
$$M_m = md, \quad (3)$$

ktorý by vyjadroval vlastnosti magnetického dipólu, teda magnetický dipólový moment. Mechanický moment dvojice síl pôsobiacej na takýto magnetický dipól v magnetickom poli by sme potom mohli vypočítavať z rovnice

$$M = mdH \sin \alpha, \quad (4)$$

kde H je intenzita magnetického poľa súvisiaca s jeho indukciou B podľa známeho vzťahu $B = \mu H$, pričom μ je magnetická permeabilita prostredia.

Je treba zdôrazniť, že veličinu m sme zaviedli len formálne, v snahe vyjadriť vlastnosti elektrického a magnetického dipólu analogickými rovnicami. V súčasnosti nemáme dostatočné dôvody predpokladať, žeby „severné“ a „južné“ magnetické náboje ako vlastnosti objektov analogických s elektricky nabitými časticami skutočne existovali.



Pri štúdiu magnetických polí sa často používa uzavretý rovinný útvar — závit s prúdom, ktorý sa chová ako magnet. Keď ho vložíme do magnetického poľa, pozorujeme orientujúci účinok v súhlase s náčrtom na obr. 3. Hodnotu príslušného mechanického momentu dvojice síl vypočítame z rovnice

$$M = BIS \sin \alpha = \mu HIS \sin \alpha \quad (5)$$

z ktorej vidíme, že účinok magnetického poľa na závit s prúdom závisí pri danej intenzite H a uhle α , ktorý zvierá kolmica k na plochu závit, na hodnote súčinu

$$m_A = \mu IS \quad (6)$$

v ktorom vystupujú vlastnosti závit-magnetu — plocha S , prúd I a magnetická permeabilita μ prostredia, v ktorom je závit vložený. Rovnica (6) teda definuje veličinu ekvivalentnú veličine danej rovnicou (3) a nazýva sa Ampérov magnetický moment.

V nasledujúcom si ukážeme, ako je možné uplatnením poznatkov o vlastnostiach závit s prúdom na elektrónové orbity v atóme a predstáv kvantovej teórie atómu vysvetliť magnetické vlastnosti atómov.

3. Magnetizmus ako dôsledok pohybu elektrónov v atóme

Uvažujme pre jednoduchosť atóm vodíka, v ktorom si predstavíme elektrón ako elektricky nabitú časticu s nábojom — e , obiehajúcu rovnomerne po kružnici okolo jadra s frekvenciou f na jednej z možných stacionárnych dráh [1] o polomere r . Na tento elektrón sa budeme pozerať ako na rovinný kruhový závit s prúdom, pre hodnotu ktorého platí v súhlase s definíciou prúdu $I = \frac{Q}{t}$ rovnica

$$I = |-ef| = e \frac{\omega}{2\pi} \quad (7)$$

kde ω je uhlová rýchlosť kruhového pohybu.

Uvažovaný útvar sa teda bude javiť ako magnet a v prítomnosti vonkajšieho magnetického poľa vznikne podobne ako u závitú s prúdom dvojica síl. Tá bude stáčať rovinu elektrónovej dráhy do smeru vonkajšieho poľa, pričom orientujúci účinok bude možné vyjadriť hodnotou magnetického momentu m_A v súhlase s rovnicou (6) a (7) takto:

$$m_A = \mu \quad IS = -\mu_0 e \frac{\omega}{2\pi} \pi r^2 ,$$

$$|m_A| = \frac{1}{2} e \mu_0 \omega r^2 \quad (8)$$

Teraz si všimneme aj mechanické vlastnosti elektrónu pri jeho obiehaní okolo jadra. Hmotnosť elektrónu je m_e . Obvodová rýchlosť v je v každom bode kruhovej dráhy kolmá na jej polomer. Súčin $m_e v$ predstavuje potom hybnosť elektrónu. Vynásobením hybnosti polomerom vypočítame hodnotu tzv. točivosti, alebo momentu hybnosti [1] elektrónu na danej kruhovej dráhe. Platí

$$b = m_e v r = m_e \omega r^2 \quad (9)$$

V súhlase s teóriou atómu vodíka (Bohr 1913) môže byť elektrón v atóme len na dráhe s takým polomerom, pre ktorý je splnená podmienka

$$b = n \cdot \frac{h}{2\pi} , \quad n = 1, 2, 3, \quad (10)$$

kde h je Planckova konštanta a n je kvantové číslo.

Rovnice (8) a (9) umožňujú nájsť vzájomný vzťah medzi mechanickým a magnetickým momentom atómu vodíka

$$m_A = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{e}{m_e} b , \quad (11)$$

ktorý vyjadruje skutočnosť, že magnetické pole atómu súvisí s orbitálnym pohybom elektrónu okolo jadra. V súvislosti s tým hovoríme tiež o mechanickom a magnetickom orbitálnom momente (b a m_A).

Dosadením z (10) do (11) získame rovnicu

$$b = n \frac{\mu_0 e h}{4\pi m_e} \quad n = 1, 2, 3, \quad (13)$$

z ktorej vidieť, že magnetický orbitálny moment nemôže nadobúdať ľubovoľné hodnoty. Jeho možné hodnoty súvisia totiž s možnými hodnotami kvantového čísla n . Hovoríme, že orbitálny magnetický moment je analogicky ako vzdialenosť elektrónu od jadra a jeho energia tiež

kvantovaný. Najmenšia hodnota magnetického momentu m_A z (13) vychádza pre $n = 1$. Potom je

$$m_A = \frac{\mu_0 e \hbar}{4\pi m_e} = \mu_B = 1,165 \cdot 10^{-29} \text{ V. s. m}$$

a volá sa Bohrov magnetón μ_B . Tento magnetický moment teda zodpovedá atómu vodíka v základnom stave.

Rovnaké úvahy aj pre eliptické dráhy elektrónov si vyžadujú zavedenie dvoch kvantových čísel (Sommerfeld 1915). Hlavné kvantové číslo n určuje možné veľkosti hlavných poloosí eliptických dráh (orbitov) a možné hodnoty (hladiny) energie elektrónov na týchto dráhach. Vedľajšie kvantové číslo k určuje pri danom n možné hodnoty vedľajších poloosí a možné hodnoty mechanického a magnetického orbitálneho momentu. Platí

$$b = k \frac{k}{2\pi}, \quad m_A = k\mu_B \quad (13)$$

(Dokončení)

astronomie

Kosmické zdroje rentgenového záření

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

V roce 1895 objevil německý fyzik W. C. Roentgen, že z místa katodové trubice, na něž dopadá proud rychlých elektronů, vychází velmi pronikavé záření, které nazval paprsky X. Dnes víme, že toto záření, nazývané podle svého objevitele rentgenové záření, jsou elektromagnetické vlny s vlnovými délkami v rozmezí od 10 nm do 10^{-2} nm; přesto se však dosud někdy používá původního označení „paprsky X“ a proto také byly kosmické zdroje rentgenového záření nazvány „extary“.

Rentgenové záření je zcela pohlcováno zemskou atmosférou, a proto bylo po dlouhou dobu pro astrofyzikální zkoumání nedostupné. Teprve rozvoj raketové techniky umožnil umístit na výškových raketách a později na umělých družicích Země přístroje, registrující rentgenové záření přicházející z mimozemských zdrojů.

V roce 1949 bylo zjištěno, že rentgenové záření vysílá Slunce a v roce 1960 byl získán první obraz Slunce v oboru rentgenového záření. Tento



Obr. 1. Fotografie části Mléčné dráhy v souhvězdí Střelce, v jehož směru leží centrum naší Galaxie. Tmavá místa jsou mračna mezihvězdné látky, která absorbuje záření vzdálenějších objektů.

obraz byl získán pomocí rentgenového dalekohledu, umístěného na umělé družici Země OSO 4 (tj. oběžná sluneční observatoř číslo 4). Slunce je nyní nejlépe prozkoumaným mimozemským zdrojem rentgenového záření. Bylo zjištěno, že energie, připadající na rentgenové záření, tvoří jen asi jednu milióntinu celkové energie, vyzařované Sluncem. Intenzita rentgenového záření se mění jednak s jedenáctiletým cyklem sluneční činnosti, jednak s výskytem aktivních center na povrchu Slunce, jako jsou protonové erupce a protuberance.

První galaktický zdroj rentgenového záření byl objeven v roce 1963 v souhvězdí Štíra (Scorpius), čili ve směru k centru Galaxie (obr. 1). Brzy nato následoval objev zdroje rentgenového záření v souhvězdí Býka (Taurus), který byl ztotožněn se známou Krabí mlhovinou. V současné době je známo asi 160 zdrojů rentgenového záření — extarů. Zásahu na objevech extarů měla především umělá družice Země nazvaná „Uhuru“, což ve svahilštině znamená „Svoboda“. První družice Uhuru byla vypuštěna na oběžnou dráhu v roce 1970.

Extary se označují latinskou zkratkou souhvězdí, v němž byly objeveny, písmenem X a pořadovým číslem extaru v daném souhvězdí. Tak např. první objevený galaktický extar je označen Sco X-1, tj. první extar v souhvězdí Štíra (Scorpius), extar ztotožněný s Krabí mlhovinou má označení Tau X-1, tj. první extar v souhvězdí Býka (Taurus). Některé extary jsou v naší Galaxii, o jiných se předpokládá, že leží

daleko za hranicemi naší Galaxie a jsou ztotožňovány s některými galaxiemi a kvazary. Jako první mimogalaktický zdroj rentgenového záření byla zjištěna galaxie M 87, rentgenové záření vysílají také obě mračna Magellanova.

Extary v naší Galaxii jsou koncentrovány poblíž galaktické roviny a některé z nich byly ztotožněny s optickými nebo rádiovými zdroji. První objevený extar Sco X-1 byl ztotožněn s hvězdou o zdánlivé hvězdné velikosti 13^m ; tento extar je ve vzdálenosti 300 parseků a je tedy po Slunci nejbližším zdrojem rentgenového záření. Extar Cyg X-1, který je ve vzdálenosti 2,2 kpc, byl v roce 1972 ztotožněn s modrou veleobří hvězdou, jejíž zdánlivá hvězdná velikost je 9^m . Ze spektra této hvězdy bylo zjištěno, že jde o spektroskopickou dvouhvězdu s oběžnou dobou 5,6 dne, přičemž hlavní hvězda má hmotnost třicetkrát větší než Slunce, průvodce čtrnáctkrát. Extar Cyg X-2 je ve vzdálenosti 700 pc a v optickém záření se jeví jako hvězda 15^m . Z rozboru optického spektra vyplývá, že jde o trpasličí hvězdu spektrální třídy G, neboli o hvězdu podobnou Slunci. Zajímavý je rovněž extar Vela X-1. Byl ztotožněn se zákrytovou dvojhvězdou, jejíž hlavní složka má hmotnost 45krát větší než Slunce, hmotnost průvodce se odhaduje na 2,5 až 3 hmotnosti Slunce, přičemž není vyloučeno, že jde o hvězdu, která je ve stadiu gravitačního kolapsu. U mnoha extarů, které byly ztotožněny s optickými objekty, je pravděpodobné, že jde o novy nebo supernovy po výbuchu. Zcela zřejmé je to u extaru Tau X-1, ztotožněném s Krabí mlhovinou.

Nejprozkoumanější zdroje rentgenového záření v Galaxii uvádíme v tab. I. V prvním sloupci tabulky je označení extaru, ve druhém optický nebo rádiový zdroj, s nímž extar byl ztotožněn, ve třetím typ objektu, ve čtvrtém sloupci vzdálenost v kiloparsekách (kpc) a v pátém poznámka, týkající se případné proměnnosti záření.

Mechanismy vzniku rentgenového záření ve vesmíru mohou být různé. Rentgenové záření vyzařuje např. horká plazma. Tak vzniká toto záření ve sluneční koróně, v korónách hvězd a v horkých obálkách nov a supernov. Rovněž nabité částice, např. elektrony, které mají velkou energii a jsou zachyceny v magnetickém poli, mohou vyzařovat rentgenové záření. Mluvíme pak o magnetickém brzděném záření nebo synchrotronovém záření. Tento mechanismus vzniku rentgenového záření se předpokládá u extaru v Krabí mlhovině, v níž byly elektrony urychleny při výbuchu supernovy v 11. století.

Velmi zajímavou hypotézu vyslovil sovětský astrofyzik J. S. Šklovskij. Podle této hypotézy může rentgenové záření vzniknout v okolí chladných zhroucených hvězd neboli kolapsarů. Dostane-li se kolapsar do mračna mezihvězdné látky, je část látky strhávána gravitačním polem hvězdy a v její blízkosti jsou částice urychlovány na rychlosti blízké rychlosti šíření světla. Částice dopadají na povrch hvězdy, jejich obrovská kine-

Tabulka I
Galaktické zdroje rentgenového záření

Zdroj rtg záření	Optický nebo rádiový objekt	Typ objektu	Vzdále- nost kpc	Pozn.
Cep X-1	Braheova supernova	zbytek supernovy	5,0	a)
Tau X-1	Krabí mlhovina	zbytek supernovy	2,0	a)
Pup X-1	Puppis A	zbytek supernovy	1,8	a)
Vel X-2	Vela X	zbytek supernovy	0,5	a)
Cyg X-5	Cygnus	zbytek supernovy	0,8	a)
Cas X-1	Cassiopeia A	zbytek supernovy	3,4	a)
Sco X-1	—	modrý objekt 12 ^m	0,3	b)
Her X-1	HZ Herculis	zákrytová troj- hvězda, 13 ^m až 14,8 ^m	5	c)
Cyg X-1	HD 226 868	spektroskopická dvojhvězda 9 ^m	5	d)
Cyg X-2	—	zvláštní objekt, podobný hvězdě 15 ^m	0,7	e)

Poznámky

- a) objekt s konstantní jasností,
- b) v rentgenovém i optickém záření existují kolísání s periodou několika minut,
- c) v rentgenovém i optickém záření jsou pulsace s periodou 1,238 s; oběžná doba je 1,7 dne,
- d) v rentgenovém záření jsou pulsace s periodou 0,1 s, v optickém záření pulsace a periodické změny s periodou 5,6 dne,
- e) chaotická proměnnost s periodou řádově dní.

tická energie se mění v energii tepelnou, takže místo dopadu částic na povrchu hvězdy se zahřívá na vysokou teplotu a vysílá rentgenové záření. K této zajímavé hypotéze je ovšem třeba poznamenat, že dosud nebyla přesně propočítána a také existence kolapsarů nebyla dosud praktickou astrofyzikou potvrzena a zůstávají tedy v oblasti teorie.

olympiády

Konkurs na úlohy pro matematickou olympiádu

Naposledy bylo v Rozhledech uveřejněno upozornění na tento konkurs v květnu 1972. Konkurs probíhá nepřetržitě, není časově omezen. Jeho vyhlášovatelé jsou společně Jednota československých matematiků a fyziků a Jednota slovenských matematiků a fyziků.

Od vyhlášení konkursu v roce 1966 došlo do konce roku 1974 celkem 1010 úloh od 101 autorů. Z toho 599 úloh bylo přijato a odměněno, 353 úloh bylo vráceno a u zbývajících dosud nebylo ukončeno recensní řízení.

Podmínky konkursu jsou v poslední době pravidelně uveřejňovány v letácích s úlohami MO. Tyto letáky se však některým zájemcům o konkurs samozřejmě nedostanou do rukou. Uvádíme tedy jeho podmínky:

Text a řešení každé úlohy je třeba zasílat ve dvojím vyhotovení (originál a jednu kopii) na listech formátu A4 na adresu: Ústřední výbor matematické olympiády, 115 67 Praha 1 - Nové Město, Žitná 25. Za každou přijatou úlohu se vyplácí odměna ve výši 50 Kčs v kategoriích A, B, C a 30 Kčs v kategorii Z. Odměna může být případně zvýšena; např. přijaté úlohy, s nimiž se počítá, že budou na některé mezinárodní MO předloženy jako československý návrh, jsou odměňovány částkou 80 Kčs. Úlohy, které neprojdou úspěšně konkursním řízením, se autorům vracejí. Přijaté úlohy jsou zařazeny do archivu ÚV MO. Vyplacením odměny autorovi získává ÚV MO dispoziční právo, zejména upravit text úlohy i autorské řešení a použít úlohy pro účely MO podle vlastní volby. Autor samozřejmě na sebe bere závazek, že přijatou úlohu utají, aby průběh olympiády nebyl narušen.

Uvedené podmínky doplníme ještě stručnou informací, které úlohy mají v konkursu naději na úspěch. Prvním předpokladem je původnost. Dále je třeba, aby úloha odpovídala současným osnovám matematiky ZDŠ a přírodovědné větve gymnasia, nebo případně aby bylo možno řešitelům doporučit některou z knížek Školy mladých matematiků. Dále by úloha měla při řešení vyžadovat trochu vtipu a neměly by k němu stačit např. jen mechanické úpravy algebraických výrazů či numerické výpočty.

J. M.

Nejmladším čtenářům

1. Číslo $7xy$, které je napsáno v desítkové soustavě, je dělitelné číslem 44. Určete cifry x, y .

2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y , které vyhovují rovnici

$$2x + y^2 = 81$$

3. Číslo 120 napište jako součin dvou nesoudělných čísel.

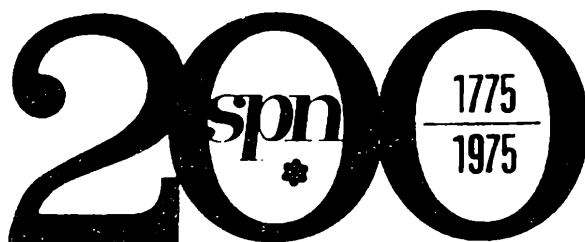
4. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y , které splňují rovnici

$$x(y - 1) = 12$$

5. Jsou dány tři kružnice, které mají po řadě poloměry délek 2 cm, 3 cm, 10 cm a každá z nich má s druhými dvěma vnější dotyk. Vypočítejte délku středných a obsah trojúhelníku, který středné omezují.

6. Nyní si ověřte, jak přesně umíte rýsovat. Narýsujte dvě různé rovnoběžky a, b (vzdálené od sebe asi 5 cm). Na první zvolte tři různé body, které označíme 1, 3, 5 a na druhé zvolme též tři různé body, které označíme 2, 4, 6. Přímky 12, 45 se protnou v bodě I, přímky 23, 56 se protnou v bodě II a přímky 34, 61 se protnou v bodě III. Body I, II, III leží v přímce. Vyšlo vám to tak?

Řešení. 1. 704, 748, 792. — 2. (40; 1), (36; 3), (28; 5), (16; 7). — 3. $8 \cdot 15 = 3 \cdot 40 = 5 \cdot 24$. — 4. (1; 13), (2; 7), (3; 5), (4; 4), (6; 3). — 5. Středné mají délky 5 cm, 12 cm, 13 cm a určují pravoúhlý trojúhelník. Jeho obsah je 30 cm^2 . S. H.



SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

[illegible]

number
 cardinal number
 complex number
 composite number
 conjugate complex numbers
 decimal number
 even number
 finite number
 mixed number
 natural number
 odd number
 ordinal number
 positive number
 prime number
 pure imaginary number
 rational number
 real number
 surd (irrational) number
 whole number
 number line
 number scale
 number series
 numeral
 numerator
 numerator
 numeration
 numerical

číslo, počet
 kardinální číslo
 komplexní číslo
 složené číslo
 komplexně sdružená čísla
 desetinné číslo
 sudé číslo
 konečný počet
 smíšené číslo
 přirozené číslo
 liché číslo
 ordinální číslo
 kladné číslo
 prvočíslo
 ryze imaginární číslo
 racionální číslo
 reálné číslo
 iracionální číslo
 celé číslo
 číselná osa
 číselná osa, stupnice
 číselná řada
 číslovka, číselný
 počítat
 čítatel
 počítání, výpočet
 číselný, numerický, číslicový

O

oblique
 obtuse
 obtuse(-angled) triangle
 octagon
 octagonal
 octahedron
 odd
 one
 one(-to-) one
 only
 open
 operation
 operator
 opposite

nakloněný, kosý, kosouhly netotož-
 ný
 tupý
 tupouhly trojúhelník
 osmiúhelník
 osmiboký
 osmistěn
 lichý
 jeden
 vzájemně jednoznačné
 jen, pouze
 otevřený
 operace
 operátor
 opačný, protilehlý

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

9

ROČNÍK 53, 1974-1975, KVĚTEN

ROČNÍK 53
KVĚTEN 1975

9

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1975.

OBSAH

Dr. J. Žofka: Květnové povstání českého lidu	433
Dr. E. Calda: Řešení některých rekurentních rovnic	435
Dr. M. Hladký: Přepisovací systémy	441
S. Horák: Eulerova nerovnost	444
Doc. dr. K. Drábek: Úloha o elipsách a Fibonacciho čísla	446
Dr. E. Scholtz: Magnetické vlastnosti atomů (Dokončení)	449
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: O modelech sluneční soustavy	455
FO: Úlohy pro I. kolo soutěže	458
Ing. dr. V. Šindelář: Sto let metrické konvence	474
J. Kotyk: Z počátků paroplavby	476
Recenze	480
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	3. a 4. str. obálky

Květnové povstání českého lidu

PhDr. JOSEF ŽOFKA, UK Praha

Na jaře 1945, na prahu války a míru byla pozornost politických a vojenských činitelů soustředěna na české země. Rychlý spád událostí na sovětsko-německé frontě podněcoval na území Československa, dosud nacisty obsazeném, nový rozmach národně osvobozenického boje. Blížil se konec ničivé války a na pořad se dostávaly otázky poválečného uspořádání, rozložení politických sil a tím i místo Československa v třídně rozděleném světě.

Změny mocenských poměrů, ke kterým došlo v průběhu války, se přímo odrážely ve složení první československé vlády a jejího vládního programu z 5. dubna 1945. Skutečnost, že o tomto programu se jednalo na podkladě návrhu komunistů a v Moskvě (březen 1945), svědčila o růstu přirozené autority této nejrevolučnější složky národně osvobozenického hnutí a poprvé vládní strany v dějinách Československa. Proto ve II. kapitole Košického vládního programu se připomínalo, že „ještě rádí smrtelně zraněný, ale nicméně zoufale se bránící nepřítel na západním Slovensku a v českých zemích..., proto vláda bude podporovat všemi dostupnými jí prostředky postupující Rudou armádu..., v zázemí nepřitele organizovat všenárodní boj nejširších vrstev národa proti okupantům, bude působit k tomu, aby český lid obětavě stupňoval svůj dosavadní hrdinný boj, aby po příkladu Slováků a partyzánských skupin v českých zemích... přispěl tak ke zkrácení utrpení cizácké okupace a k úplnému a brzkému vyhnání okupantů“

Květnové vystoupení českého lidu tedy nebylo historicky izolovanou událostí, ale logickým vyústěním společenského procesu, v jehož čele stála organizovaná politická síla — KSČ, jejíž koncepce byla spojena s rozhodující úlohou SSSR ve druhé světové válce a také podložena — rozumově i citově — hlubokými sympatiemi širokých vrstev českého a slovenského národa k SSSR. Přímé osvobozování Československa začalo v září 1944 a bylo dovršeno pražskou operací, kterou uskutečnila Sovětská armáda ve dnech 6.—11. května 1945 a která byla posledním střetnutím druhé světové války v Evropě. Fašistické Německo skládalo poslední naděje v rozkol protihitlerovské koalice a vytvoření jednotné protisovětské fronty. Proto milionová armáda maršála Schörnera kladla

houževnatý odpor Sovětské armádě až do posledních hodin války, zatímco na západní frontě hromadně kapitulovala. Obsazení co největší části Čech a především Prahy mělo nesmírný politický dosah. Složitost vojenských operací na našem území vyplývala ze skutečnosti, že zde procházela čára styku Sovětské armády se spojeneckými vojsky (Karlovy Vary—Plzeň—České Budějovice).

Květnové povstání českého lidu začalo jako řetěz místních povstání a nepokojů již v prvních květnových dnech. Povstání v Praze, které vzplánilo 5. května, dalo událostem charakter všelidového boje. Za jedinou noc z 5. na 6. května bylo postaveno na 1600 barikád, které bránilo asi 30 000 lidí. Začal těžký a nerovný boj s fašistickými okupanty, kteří po prvním překvapení z prudkosti útoku zahájili protiakce. Česká národní rada — ústřední odbojový orgán — vydala prohlášení, že přebírá moc do svých rukou. Třebaže se hlásila k programu košické vlády, nebyla s to ujasnit si všechny revoluční úkoly. Její složení neodpovídalo skutečnému rozložení sil v českém odboji a zájmová rozpornost oslabovala jednotu a akceschopnost a vedla k uzavírání kompromisních dohod bez ohledu na spojenecké závazky, které přijala za války československá vláda jako člen protihitlerovské koalice. Dohoda o kapitulaci německých vojsk byla ze strany České národní rady politickou chybou, zkreslovala skutečný charakter povstání.

Boj Prahy se stal signálem k všeobecnému ozbrojenému povstání v celé zemi. Po šesti letech vyšlo legální Rudé právo. Kolem Prahy se vytvořil „rudý pás“ měst a obcí, pomáhajících bojujícímu městu. Obrana Prahy se stala celonárodní záležitostí. Aby byla povstání poskytnuta účinná pomoc, sovětské velení rozhodlo přejít v co nejkratší době do útoku. 9. května osvobodila Sovětská armáda Prahu — několik hodin poté, co vstoupila v platnost bezpodmínečná kapitulace fašistického Německa.

Osvobození Prahy a naprosté většiny Československa Sovětskou armádou sehrálo mimořádně významnou roli pro další vývoj našich národů. Končí první etapa národní a demokratické revoluce, v níž byly položeny základy nové lidové moci, jejíž plody dnes sklízíme. „Velikost historického vítězství Sovětského svazu v boji proti fašistickému Německu spočívá v tom,“ uvádí ve svých pamětech maršál Žukov, „že sovětský lid uhájil nejen svůj socialistický stát, ale že bojoval obětavě také za proletářský internacionální cíl — za osvobození evropských národů od fašismu.“

Řešení některých rekurentních rovnic

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

V tématu týkajícím se posloupností jste se ve škole seznámili s některými jednoduchými rekurentními rovnicemi. Víte například, že každá posloupnost splňující pro všechna $n \in \mathbb{N}$ rekurentní rovnici

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

kde d je konstanta, se nazývá *posloupnost aritmetická*, dále že každá posloupnost splňující pro všechna $n \in \mathbb{N}$ rekurentní rovnici

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$

kde q je konstanta, se nazývá *posloupnost geometrická*. V ojedinělých příkladech jste možná řešili i rekurentní rovnice složitější; pro nedostatek času jste se řešením rekurentních rovnic nemohli zabývat soustavněji.

V tomto článku se naučíme určit všechny posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, které pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňují tzv. *lineární rekurentní rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty*; takovou rovnicí je například rovnice $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Obecně ji zapíšeme ve tvaru

$$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n,$$

kde c_1, c_2 jsou konstanty. Domluvíme se na tom, že místo zápisu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ budeme používat jednoduššího označení $\{a_n\}$; zápis jednoprvkové množiny obsahující prvek a_n se nebude v textu vyskytovat, takže nedorozumění.

Každou posloupnost $\{a_n\}$, která pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňuje rekurentní rovnici $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$, nazveme řešením této rovnice. *Obecným řešením* dané rekurentní rovnice pak budeme rozumět množinu všech posloupností, které jsou řešením této rovnice. Obecné řešení budeme formálně zapisovat jako posloupnost, jejíž členy závisí na parametrech A_1, A_2 . Aby tento zápis vyjadřoval množinu všech posloupností, které jsou řešením dané rekurentní rovnice, musí platit, že dosazením libovolných čísel za A_1, A_2 dostaneme posloupnost, která je řešením, a obráceně, že ke každé posloupnosti, která je řešením, existují hodnoty příslušných parametrů A_1, A_2 . Říkáme sice, že obecným řešením rekurentní rovnice je posloupnost, avšak vzhledem k tomu, že její členy závisí na

A_1, A_2 , představuje její zápis množinu posloupností (právě těch, které jsou řešením dané rekurentní rovnice). Pro lepší objasnění těchto pojmů uvedeme konkrétní příklad.

Vezměme rekurentní rovnici

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n.$$

Je posloupnost $\{5 \cdot 2^n - 3^{n+1}\}$ jejím řešením? Odpověď je kladná, neboť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} 5a_{n+1} - 6a_n &= 5 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^{n+1} - 30 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^{n+1} = \\ &= 5 \cdot 2^{n+2} - 3^{n+3} = a_{n+2}. \end{aligned}$$

Je obecným řešením této rekurentní rovnice posloupnost $\{A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n\}$? Odpověď je opět kladná. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} 5a_{n+1} - 6a_n &= 5 \cdot A_1 \cdot 2^{n+1} + 5A_2 \cdot 3^{n+1} - 6A_1 \cdot 2^n - 6A_2 \cdot 3^n = \\ &= A_1 \cdot 2^{n+2} + A_2 \cdot 3^{n+2} = a_{n+2}; \end{aligned}$$

dosazením libovolných čísel za A_1, A_2 dostaneme vždy posloupnost, která je řešením dané rekurentní rovnice. Dále musíme ukázat, že každou posloupnost $\{a_n\}$, která je řešením dané rovnice, lze vyjádřit ve tvaru $\{A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n\}$. To znamená, že je nutno dokázat, že pro libovolná a_1, a_2 (první členy posloupnosti $\{a_n\}$, která je řešením) vždy existují čísla A_1, A_2 tak, že platí:

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1 \cdot 2 + A_2 \cdot 3, \\ a_2 &= A_1 \cdot 4 + A_2 \cdot 9. \end{aligned}$$

Můžete se sami přesvědčit, že tato soustava rovnic s proměnnými A_1, A_2 má pro libovolné hodnoty a_1, a_2 právě jedno řešení:

$$A_1 = \frac{3a_1 - a_2}{2} \quad A_2 = \frac{a_2 - 2a_1}{3}.$$

takže ke každé posloupnosti $\{a_n\}$, která je řešením, existují čísla A_1, A_2 . Každou posloupnost $\{a_n\}$, která je řešením dané rovnice, lze tedy vyjádřit ve tvaru $\{A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n\}$.

Pokuste se sami určit v obecném řešení $\{A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n\}$ čísla A_1, A_2 tak, abyste dostali posloupnost $\{5 \cdot 2^n - 3^{n+1}\}$, o níž víte, že je řešením dané rekurentní rovnice. Mělo by vám vyjít $A_1 = 5, A_2 = -3$.

Uvědomte si ještě, že doplníme-li rekurentní rovnici $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ stanovením hodnot pro a_1, a_2 , má tato rekurentní rovnice s danými podmínkami jediné řešení. Například rekurentní rovnice $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ s podmínkami $a_1 = 1, a_2 = -7$ má jediné řešení, a to posloupnost $\{5 \cdot 2^n - 3^{n+1}\}$.

Můžeme nyní přistoupit k určení obecného řešení rekurentní rovnice $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$. Řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru geometrické posloupnosti $\{q^{n-1}\}$. Má-li být tato posloupnost řešením dané rekurentní rovnice, musí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platit

$$q^{n+1} = c_1 q^n + c_2 q^{n-1}.$$

Tato rovnice, předpokládáme-li $q \neq 0$, je ekvivalentní s rovnicí

$$q^2 = c_1 q + c_2.$$

Tuto rovnici s proměnnou q nazýváme *charakteristickou rovnicí rekurentní rovnice* $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$. Formálně ji můžeme získat přímo tak, že v dané rekurentní rovnici nahradíme výrazy a_{n+2} , a_{n+1} , a_n po řadě těmito mocninami proměnné q : q^2 , q , $q^0 = 1$. Obecné řešení rekurentní rovnice $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ závisí na tom, zda pro kořeny q_1, q_2 její charakteristické rovnice $q^2 = c_1 q + c_2$ nastane případ $q_1 \neq q_2$, nebo $q_1 = q_2$. Platí následující věta:

Má-li charakteristická rovnice $q^2 = c_1 q + c_2$ lineární rekurentní rovnice $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ s konstantními koeficienty c_1, c_2 dva různé kořeny q_1, q_2 , je obecným řešením této rovnice posloupnost $\{A_1 q_1^{n-1} + A_2 q_2^{n-1}\}$.

Dokážeme nejprve, že posloupnost $\{A_1 q_1^{n-1} + A_2 q_2^{n-1}\}$ je řešením dané rovnice. Protože q_1 je kořenem charakteristické rovnice, platí $q_1^2 = c_1 q_1 + c_2$; vynásobením této rovnosti číslem q_1^{n-1} dostáváme $q_1^{n+1} = c_1 q_1^n + c_2 q_1^{n-1}$, což znamená, že posloupnost $\{q_1^{n-1}\}$ je řešením dané rekurentní rovnice. Protože i q_2 je kořenem charakteristické rovnice, je posloupnost $\{q_2^{n-1}\}$ rovněž řešením dané rovnice. Platí tedy:

$$q_1^{n+1} = c_1 q_1^n + c_2 q_1^{n-1}, \quad q_2^{n+1} = c_1 q_2^n + c_2 q_2^{n-1}$$

Vynásobíme-li první z těchto rovností libovolným číslem A_1 , druhou libovolným číslem A_2 , dostaneme sečtením získaných rovností:

$$A_1 q_1^{n+1} + A_2 q_2^{n+1} = c_1 (A_1 q_1^n + A_2 q_2^n) + c_2 (A_1 q_1^{n-1} + A_2 q_2^{n-1}).$$

Tato rovnost znamená, že posloupnost $\{A_1 q_1^{n-1} + A_2 q_2^{n-1}\}$ je řešením rekurentní rovnice $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$.

Zbývá dokázat, že každou posloupnost $\{a_n\}$, která je řešením rovnice $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$, lze vyjádřit ve tvaru $\{A_1 q_1^{n-1} + A_2 q_2^{n-1}\}$. Snadno se přesvědčíte, že k prvním dvěma členům a_1, a_2 každé posloupnosti $\{a_n\}$, která je řešením dané rekurentní rovnice, vždy existují čísla A_1, A_2 tak, že platí:

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1 + A_2, \\ a_2 &= A_1 q_1 + A_2 q_2. \end{aligned}$$

Tato soustava rovnic s proměnnými A_1, A_2 má totiž pro libovolné hodnoty a_1, a_2 vzhledem k předpokladu $q_1 \neq q_2$ právě jedno řešení:

$$A_1 = \frac{a_2 - a_1 q_2}{q_1 - q_2}, \quad A_2 = \frac{a_1 q_1 - a_2}{q_1 - q_2}$$

Dokázali jsme, že posloupnost $\{A_1 q_1^{n-1} + A_2 q_2^{n-1}\}$ je obecným řešením rekurentní rovnice $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ v případě, že odpovídající charakteristická rovnice má dva různé kořeny q_1, q_2 .

Zmíníme se ještě o případě, kdy kořeny q_1, q_2 charakteristické rovnice $q^2 = c_1 q + c_2$ splývají. Za tohoto předpokladu nebude posloupnost $\{A_1 q_1^{n-1} + A_2 q_2^{n-1}\}$ obecným řešením; lze ji totiž vyjádřit ve tvaru $\{A q_1^{n-1}\}$, kde jsme položili $A_1 + A_2 = A$. Každou posloupnost $\{a_n\}$, která je řešením rekurentní rovnice $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ nelze již vyjádřit v uvedeném tvaru, neboť soustava rovnic

$$\begin{aligned} a_1 &= A \\ a_2 &= A q_1 \end{aligned}$$

s proměnnou A nemá pro každá a_1, a_2 řešení. Je tedy nutno najít ještě jedno řešení rovnice $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$, které je různé od posloupnosti $\{q_1^{n-1}\}$. Ukážeme, že takovým řešením je posloupnost $\{n q_1^{n-1}\}$.

Charakteristická rovnice $q^2 = c_1 q + c_2$ má podle předpokladu dva splývající kořeny $q_1 = q_2$, takže podle známých vlastností kořenů kvadratické rovnice platí: $2q_1 = c_1$, $q_1^2 = -c_2$. Rekurentní rovnici $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ lze tedy vyjádřit ve tvaru $a_{n+2} = 2q_1 a_{n+1} - q_1^2 a_n$. Snadno se přesvědčíme, že posloupnost $\{a_n\} = \{n q_1^{n-1}\}$ je řešením této rovnice, neboť platí:

$$2q_1 a_{n+1} - q_1^2 a_n = 2q_1(n+1)q_1^{n-1} - q_1^2 n q_1^{n-1} = (n+2)q_1^{n+1} = a_{n+2}.$$

Pro případ splývajících kořenů charakteristické rovnice platí následující věta:

Má-li charakteristická rovnice $q^2 = c_1 q + c_2$ lineární rekurentní rovnice $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ s konstantními koeficienty c_1, c_2 dva splývající kořeny $q_1 = q_2$, je obecným řešením této rovnice posloupnost $\{A_1 q_1^{n-1} + A_2 n q_1^{n-1}\}$.

Důkaz této věty je podobný důkazu věty předcházející, přenecháváme jej proto čtenáři.

Závěrem článku vyřešíme několik příkladů.

1. Nalezněte obecné řešení rekurentní rovnice $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$.

Pro kořeny příslušné charakteristické rovnice $q^2 - 3q + 2 = 0$ platí $q_1 = 1, q_2 = 2$, takže obecným řešením dané rekurentní rovnice je posloupnost $\{A_1 + A_2 \cdot 2^{n-1}\}$.

2. Určete posloupnost, která splňuje rekurentní rovnici $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ a podmínky $a_1 = 2, a_2 = 4$.

Pro kořeny příslušné charakteristické rovnice $q^2 - 4q + 4 = 0$ dostáváme $q_1 = q_2 = 2$, takže obecným řešením je posloupnost $\{A_1 2^{n-1} + A_2 n 2^{n-1}\}$. Z podmínek pro členy a_1, a_2 máme soustavu s proměnnými A_1, A_2

$$2 = A_1 + A_2$$

$$4 = 2A_1 + 4A_2,$$

jejímž řešením dostaneme $A_1 = 2, A_2 = 0$. Hledanou posloupností je právě posloupnost $\{2^n\}$.

3. Určete posloupnost $\{a_n\}$, která splňuje rekurentní rovnici $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ a podmínky $a_1 = a_2 = 1$. (Tato posloupnost se nazývá Fibonacciova.)

Pro kořeny příslušné charakteristické rovnice $q^2 - q - 1 = 0$ platí $q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, takže obecným řešením je posloupnost

$$\left\{ A_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + A_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right\}$$

Vzhledem k dalším podmínkám platí

$$1 = A_1 + A_2$$

$$1 = A_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + A_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$A_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad A_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Hledanou posloupností je právě posloupnost

$$\left\{ \frac{(1 + \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} - \frac{(1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} \right\}$$

Jinými slovy: n -tým členem Fibonacciovy posloupnosti 1, 1, 2, 3, 5, 8,

13, je číslo $a_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} - \frac{(1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$. Vzhledem k tomu, že

každý člen této posloupnosti je přirozené číslo, znamená tento výsledek i ten fakt, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je výraz $\frac{(1 + \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} - \frac{(1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$

přirozené číslo. Vzhledem k tomu, že tento výraz je zapsán pomocí iracionálních čísel $\sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}$, je tento fakt jistě pozoruhodný.

Cvičení.

1. Určete posloupnost $\{a_n\}$, která splňuje rekurentní rovnici $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ a podmínky $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. (Výsledek:

$$\left\{ \frac{(1 + \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1} \sqrt{5}} - \frac{(1 - \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1} \sqrt{5}} \right\}$$

2. Určete posloupnost $\{a_n\}$, která splňuje rekurentní rovnici $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$; která posloupnost $\{a_n\}$ vyhovuje navíc podmínkám $a_1 = 1$, $a_2 = -7$? Výsledek porovnejte s příkladem v textu, na němž byly vysvětlovány pojmy řešení a obecné řešení rekurentní rovnice.

Literatura : N. J. Vilenkin, Kombinatorika, Moskva 1969

(Tato vtipně napsaná kniha s množstvím příkladů je vhodná i pro vás a vyjde brzy v českém překladu.)

Přepisovací systémy

Dr. MIROSLAV HLADKÝ, CSc., Brno

Přirozené jazyky vytvořili lidé především proto, aby se mohli mezi sebou dorozumívat a mimo jiné i proto, aby si mohli sdělovat výsledky lidského poznání světa, v němž žili. S rozvojem řemesel, techniky, vědy atd. se lidské poznání rozrůstalo a přirozený jazyk se stále více obohacoval a upravoval. Vznikly i umělé jazyky např. esperanto nebo programovací jazyky vytvořené pro „dorozumění“ člověka s počítačem. V každém jazyce je možno vyčlenit množinu jeho výrazů, z nichž je jazyk utvořen, a množinu významů, které jsou jazykovými výrazy vyjadřovány. Můžeme si představit setkání dvou příslušníků různých kmenů, majících snahu se dorozumět (nikoli pomocí klacku). Jeden z nich ukáže např. na strom a pojmenuje ho ve svém jazyce, druhý dodá odpovídající výraz svého jazyka. Výrazy budou patrně různé, význam je však stejný. Na druhé straně, řekne-li např. Slovák slovo „moja“, má asi zcela jinou představu než třeba Arab, pro nějž toto slovo znamená „voda“ (O tom by mohl vyprávět i jistý čs. expert, který vylézá z Nilu, v němž delší dobu nedobrovolně prodléval, byl na zoufalé volání „duša moja“ zahrnován mírumilovným obyvatelstvem opět živlem, jehož již užil nadmíru). Čili výrazy jsou stejné, ale významy různé.

Každý jazyk má svoji *syntaxi* (skladbu), která studuje jazyk z hlediska vnějších forem výrazů aniž přihlíží k jejich obsahu (tj. k tomu, co

takové výrazy znamenají) a *sémantiku*, jejímž úkolem je studium významové stránky jazyka, čili vztahu k objektům, které tyto výrazy zastupují.

Všimáme-li si pouze syntaktické stránky jazyka, můžeme ho považovat (ať je to živý jazyk či zcela formální) za množinu konečných řetězů, tj. posloupností základních symbolů. Vezmeme-li za množinu základních symbolů množinu všech slov (slova již uvažujeme jako nedělitelné celky, nikoli jako řetězy symbolů), pak tyto řetězy nazýváme *věty* a množinu základních symbolů *slovník*. Někdy uvažujeme základní symboly jako písmena. Pak říkáme řetězům *slova* a množině základních symbolů *abeceda*.

Jazykem je jistá podmnožina množiny všech řetězů nad jistou množinou základních symbolů (tj. množina správně utvořených vět, příp. slov). Tyto řetězy vyčleňujeme z množiny všech řetězů buď pomocí rozpoznávacího zařízení (zpravidla pomocí některého vhodného automatu, tak jak tomu bylo v [1] a [2], nebo pomocí generujícího zařízení nazývaného též přepisovací systém, pomocí něhož na základě postupného přepisování řetězů podle jistých pravidel dostáváme právě řetězy jazyka. Tímto zařízením je nejčastěji *gramatika*, jejíž definici také podáme. Napřed se však podívejme na následující model:

Zvolíme výchozí symbol S , z něhož budeme při přepisování vždy vycházet a několik tzv. přepisovacích pravidel:

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow AB & B \rightarrow \text{čte} \\ A \rightarrow \text{otec} & B \rightarrow \text{píše} \\ A \rightarrow \text{matka} & \end{array}$$

Základní řetězy jsou S , A , B , *otec*, *matka*, *čte*, *píše*, přičemž S , A , B mají charakter proměnných, za něž dosazujeme, a řetězy *otec*, *matka*, *čte*, *píše* se již dále nepřepisují (říkáme jim terminální symboly).

Aplikovat dané pravidlo na řetěz α znamená, že výskyt levé strany pravidla v řetězu α nahradíme pravou stranou tohoto pravidla, čímž získáme nějaký řetěz β . Říkáme přitom, že α bezprostředně generuje β a píšeme $\alpha \Rightarrow \beta$. Tedy např.:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow \text{otec } B \Rightarrow \text{otec čte}$$

nebo

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow A \text{ píše} \Rightarrow \text{matka píše}.$$

Platí-li $\alpha = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha_n = \beta$ pro $n \geq 0$, říkáme, že řetěz α generuje řetěz β a užíváme zápisu $\alpha \Rightarrow^* \beta$ (vidíme, že platí i $\alpha \Rightarrow^* \alpha$).

$$\text{Tedy } S \Rightarrow^* \text{otec čte} \quad \text{nebo} \quad S \Rightarrow^* A \text{ píše}.$$

Do jazyka patří všechny věty, které lze generovat z počátečního symbolu S a které jsou tvořeny pouze terminálními symboly, tj. věty *otec*

čte, otec píše, matka čte, matka píše. (Tedy nikoli např. věty *čte otec, matka otec, A otec* atd.)

Mohli bychom sáhnout k poněkud komplikovanějším pravidlům, např.:

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow AB & B \rightarrow \textit{syn chytá D} \\ A \rightarrow C \textit{ čte} & D \rightarrow \textit{ryby} \\ A \rightarrow C \textit{ spí} & D \rightarrow \textit{lelky} \\ C \rightarrow \textit{otec} & \end{array}$$

která dávají i bohatější věty, jak se snadno přesvědčíte. I když podnikaví synové jsou jistě schopni upravit pravidla tak, aby byly generovány věty pro ně příznivější, je třeba si přiznat, že k popisu živého jazyka v plné šíři by bylo třeba obrovského množství pravidel a celý případ by byl velmi komplikovaný.

Uvažme ještě následující příklad:

$$\begin{array}{l} S \rightarrow 0 S 1 \\ S \rightarrow 0 1 \end{array}$$

Pravidla jsou jen dvě, přitom proměnná je S a terminální symboly jsou 0, 1. Vidíme, že do jazyka budou patřit ty řetězy, které obsahují jistý počet nul následovaný stejným počtem jedniček, tj. řetězy 0011, 000111 atd. Tento jazyk je zcela formální a k mluvení by se patrně příliš nehodil.

Než přikročíme k definici gramatiky, uvědomme si, že k tomu, abychom mohli tímto způsobem generovat jazyk, potřebujeme znát množinu proměnných, množinu terminálních symbolů, výchozí symbol a množinu pravidel. Tedy:

Gramatikou G nazveme uspořádanou čtveřici

$$G = (V_N, V_T, P, S), \text{ kde}$$

V_N je množina proměnných (množ. neterminálních symbolů zvaná též neterminální slovník)

V_T je množina terminálních symbolů

($V_N \cup V_T = V$ je množina základních symbolů, přitom $V_N \cap V_T = \emptyset$:

V^* je množina všech řetězů nad V včetně prázdného řetězu Λ)

P je množina přepisovacích pravidel tvaru $u \rightarrow v$, kde $u, v \in V^*$ a u obsahuje aspoň jeden neterminální symbol)

S je výchozí symbol.

Jazykem $L(G)$ generovaným gramatikou G nazveme množinu řetězů

$$L(G) = \{x; S \Rightarrow^* x \wedge x \in V_T^*\}$$

(tj. množinu všech řetězů, tvořených pouze terminálními symboly, které lze generovat z výchozího symbolu).

Podle tvaru pravidel provádíme i klasifikaci gramatik a jazyků (dnes již historickou, tak jak ji provedl 1956 jeden ze zakladatelů matematické teorie jazyků Chomský):

Pro $i = 0, 1, 2, 3$ je gramatika $G = (V_N, V_T, P, S)$ typu i , splňuje-li následující omezení:

(0) Žádné omezení

(1) Každé pravidlo z P je tvaru $u_1 X u_2 \rightarrow u_1 x u_2$, kde $u_1, u_2 \in V^*$, $X \in V_N$ a $x \neq \Lambda$

(2) Každé pravidlo z P je tvaru $X \rightarrow x$, kde $X \in V_N$, $x \in V^*$

(3) Každé pravidlo je tvaru $X \rightarrow Y$ nebo $X \rightarrow a$, kde $X, Y \in V_N$, $a \in V_T$.

Jazyky generované gramatikami typu i , $i = 0, 1, 2, 3$ nazýváme jazyky typu i .

Nejjednodušší jsou jazyky typu 3 nazývané též *regulární*. Již jsme se s nimi setkali v [1] a víme tedy, že jsou přijímány konečnými automaty.

Jazyky typu 2 jsou nazývány *nekontextové*. Název ovlivnila skutečnost, že při generování přepisujeme vždy jediný neterminální symbol, aniž bychom se zajímali o jeho levý či pravý kontext. I tyto jazyky jsme již poznali v [2] a víme tedy, že jsou přijímány zásobníkovými automaty.

Jazyky typu 1 nazýváme též *kontextové*, též na základě skutečnosti, že neterminální symbol můžeme přepsat jen tehdy, nachází-li se v kontextu uvedeném na levé straně některého z pravidel. Jsou přijímány tzv. lineárně ohraničenými automaty.

Jazyky typu 0 jsou nejobecnější a zahrnují všechny možné formální jazyky. Jsou přijímány tzv. Turingovými stroji.

Literatura

- [1] M. Hladký: O konečných automatech a jejich některých vlastnostech, Rozhledy m. f. 1973—74
- [2] M. Hladký: Zásobníkové automaty, Rozhledy m. f. 1974—1975
- [3] M. Novotný: Matematika pro lingvisty, SNTL Praha, 1956

Eulerova nerovnost

STANISLAV HORÁK, Praha

Označíme-li r , ϱ velikosti poloměru kružnice trojúhelníku opsané a vepsané, platí

$$r \geq 2\varrho.$$

Rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

To jsme vyslovili Eulerovu nerovnost, kterou si v následujících řádcích dokážeme. K tomu ovšem potřebujeme znát několik pomocných vět. Označme ϱ , ϱ_a , ϱ_b , ϱ_c po řadě velikosti poloměrů kružnice vepsané vnitř a vně, a to tak, že kružnice poloměru ϱ_a (ϱ_b , ϱ_c) se dotýká strany $a = BC$ ($b = CA$, $c = AB$) ve vnitřním bodě. Víme, že (S je velikost obsahu uvažovaného trojúhelníku)

$$\varrho = \frac{S}{s}, \quad \varrho_a = \frac{S}{s-a}, \quad \varrho_b = \frac{S}{s-b},$$
$$\varrho_c = \frac{S}{s-c}, \quad r = \frac{abc}{4S}$$

1. pomocná věta. O velikostech poloměrů r , ϱ , ϱ_a , ϱ_b , ϱ_c platí

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r$$

Důkaz. Počítejme

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = \frac{S}{s-a} + \frac{S}{s-b} + \frac{S}{s-c} - \frac{S}{s}$$

Po dosazení z prve uvedených vzorců a po kratší úpravě dostaneme žádaný výsledek. Podle toho

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 4r + \varrho. \quad (\text{I})$$

2. pomocná věta. O velikostech poloměrů ϱ_a , ϱ_b , ϱ_c , ϱ platí

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} - \frac{1}{\varrho} = 0$$

Důkaz.

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} - \frac{1}{\varrho} = \frac{s-a}{S} + \frac{s-b}{S} + \frac{s-c}{S} - \frac{s}{S} = 0$$

Tudíž je

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho} \quad (\text{II})$$

3. pomocná věta. O třech kladných číslech a, b, c platí

$$V = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3^2,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a = b = c$.

Důkaz. Vynásobením dostaneme

$$V = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \quad (\text{III})$$

Avšak, jak víme, pro každé kladné číslo x platí

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

přičemž rovnost platí jedině pro $x = 1$. Podle toho

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2, \quad \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2. \quad (\text{IV})$$

Rovnost platí právě tehdy, když v jednotlivých nerovnostech postupně platí $a = b$, $b = c$, $c = a$. Spojením vztahů (III) a (IV) dostaneme danou nerovnost.

Po tomto úvodu můžeme přistoupit k důkazu Eulerovy nerovnosti. Vynásobením identit (I) a (II) dostaneme

$$(\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c) \left(\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} \right) = \frac{4r}{\varrho} + 1 \quad (\text{V})$$

Podle 3. pomocné věty však platí

$$(\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c) \left(\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} \right) \geq 3^2. \quad (\text{VI})$$

Ze vztahů (V) a (VI) docházíme k výsledku

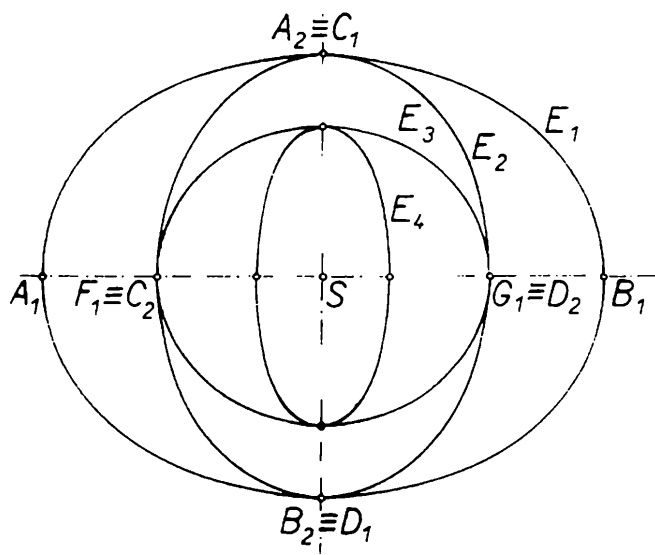
$$\frac{4r}{\varrho} + 1 \geq 9 \Rightarrow r \geq 2\varrho,$$

což je Eulerova nerovnost. Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když $\varrho_a = \varrho_b = \varrho_c$, tj. pro rovnostranný trojúhelník.

Úloha o elipsách a Fibonacciova čísla

Doc. Dr. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT, Praha

Je-li dána základní elipsa E_1 s poloosami a_1, b_1 , kde a_1, b_1 jsou přirozená čísla, pak v případě, že její excentricita $e_1 < b_1$, sestrojme elipsu E_2 s poloosami $a_2 = b_1, b_2 = e_1$. Má-li takto sestrojená elipsa E_2 excentricitu $e_2 < b_2$, můžeme sestrojit elipsu E_3 s poloosami $a_3 = b_2, b_3 = e_2$. Postupujeme-li obdobně dále, položme si otázku, kdy takových elips pro dané b_1 existuje právě k , přičemž k je přirozené číslo; viz obr. 1 pro $a_1 = 5, b_1 = 4$ a $k = 4$.



Obr. 1

Při hledání odpovědi je tedy $a_1 = b_1 + x$, $x > 0$ celé. Pro excentricitu první elipsy máme vztah $e_1^2 = x^2 + 2b_1x$.

Aby existovala pouze první elipsa E_1 , musí být $e_1 > b_1$, takže dostáváme podmínku

$$x^2 + 2b_1x - b_1^2 > 0.$$

Pro dané b_1 je tato nerovnost splněna pro ta (kladná) x , která plynou z řešení získané kvadratické nerovnosti, tedy pro

$$x > b_1(\sqrt{2} - 1),$$

nebo

$$b_1 < x(\sqrt{2} + 1). \quad (1)$$

Např. pro $x = 1$ existuje první elipsa E_1 jen pro $b_1 = 1, a_1 = 2$, příp. pro $b_1 = 2, a_1 = 3$.

Aby existovala ještě aspoň elipsa E_2 (přičemž není předem vyloučena existence elipsy E_3 , příp. i dalších takových elips), musí být

$$x(\sqrt{2} + 1) < b_1. \quad (1^*)$$

Žádáme-li existenci právě druhé elipsy E_2 , musí při platnosti vztahu (1^*) být ještě $e_2 > b_2$ a z této podmínky plyne nerovnost

$$2x^2 + 4b_1x - b_1^2 < 0.$$

Tato nerovnost je splněna při daném b_1 (nebo x), pro které platí

$$x < b_1(\sqrt{6} - 2) \quad 2 \text{ nebo } b_1 > x(\sqrt{6} + 2). \quad (2)$$

Má-li existovat aspoň trojice elips E_1, E_2, E_3 , je třeba, aby

$$x(\sqrt{2} + 1) < b_1 < x(\sqrt{6} + 2). \quad (2^*)$$

Při požadavku existence právě takové trojice musí být $e_3 > b_3$ a po vyjádření této nerovnosti pomocí b_1 a x obdržíme

$$3x^2 + 6b_1x - 2b_1^2 > 0,$$

takže pro $x > b_1(\sqrt{15} - 3) \quad 3$, tj. pro $b_1 < x(\sqrt{15} + 3) \quad 2$ je náš požadavek splněn; platí však ve spojení se vztahem (1^*) , takže celkem máme

$$x(\sqrt{2} + 1) < b_1 < x(\sqrt{15} + 3) \quad 2.$$

Ještě aspoň stručně pro další zvýšení počtu elips: Pro existenci aspoň čtveřice E_1, E_2, E_3, E_4 je splněna nerovnost

$$x(\sqrt{15} + 3) \quad 2 < b_1 < x(\sqrt{6} + 2),$$

pro existenci právě čtveřice těchto elips z nerovnosti

$$5x^2 + 10b_1x - 3b_1^2 < 0$$

plyne

$$x(\sqrt{40} + 5) \quad 3 < b_1 < x(\sqrt{6} + 2)$$

a aspoň pětice elips existuje pro

$$x(\sqrt{15} + 3) \quad 2 < b_1 < x(\sqrt{40} + 5) \quad 3.$$

Při hledání podmínky existence právě k elips řešíme tudíž vždy kvadratickou nerovnost

$$A_{k+1}x^2 + 2A_{k+1}b_1x - A_k b_1^2 \quad \begin{cases} > 0 \text{ pro } k \text{ liché,} \\ < 0 \text{ pro } k \text{ sudé,} \end{cases}$$

přičemž čísla A_k tvoří posloupnost

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,$$

s rekurentním vzorcem

$$A_{k+1} = A_k + A_{k-1}, \quad k = 1, \quad A_1 = 1$$

a klademe $A_0 = 0$.

Tvoří tedy tuto posloupnost tzv. *Fibonacciova čísla*.¹⁾

Řešením nerovností pro existenci právě k elips v případě, že k je liché, dostaneme ($k \geq 3$)

$$x(\sqrt{A_{k-1}A_k} + A_{k-1}) - A_{k-2} < b_1 < x(\sqrt{A_{k+1}A_{k+2}} + A_{k+1}) - A_k;$$

v případě, že k je sudé ($k \geq 4$), dostaneme

$$x(\sqrt{A_{k+1}A_{k+2}} + A_{k+1}) - A_k < b_1 < x(\sqrt{A_{k-1}A_k} + A_{k-1}) - A_{k-2}.$$

Z tohoto vztahu pro zvolené k a velikost vedlejší poloosy b_1 základní elipsy určíme možné hodnoty x a tím i velikost hlavní poloosy a_1 základní elipsy. Rovněž lze při daném x a k stanovit velikost vedlejší a tím i hlavní poloosy základní elipsy (pokud ovšem vůbec pro zvolené hodnoty taková elipsa existuje).

Např. pro $k = 4$, $x = 1$ máme

$$(\sqrt{40} + 5) - 3 < b_1 < \sqrt{6} + 2$$

takže

$$3,7 < b_1 < 4,4$$

a odtud $b_1 = 4$, $a_1 = 5$ (viz znovu obr. 1).

Poznámka redakce.

Doporučujeme čtenáři, aby si před tímto článkem prostudoval nejprve článek „Řešení některých rekurentních rovnic“ od dr. Emila Caldy, otištěný v tomto čísle na str. 435.

¹⁾ Tato čísla lze vyjádřit vzorcem $A_k = \frac{(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k}{2^k \sqrt{5}}$, viz např.

článek Haňková B.—Hrnčíř F.: Fibonacciova čísla a jejich vlastnosti, *Rozhledy* (43), 1964—65, str. 97—98, 150—155, 204—208, nebo populární knížku: Vorobjev N. N.: Fibonacciova čísla, SNTL Praha, 1953, překlad z ruského originálu.

Magnetické vlastnosti atómov (Dokončení)

RNDr. E. SCHOLTZ, Fakultné gymnázium, Košice

Všetky doterajšie úvahy sme prevádzali pre atóm vodíka, v ktorom sa orbitálny pohyb elektrónu odohráva v jednej rovine. Keď sa atóm nenachádza v magnetickom poli, je takýto popis úplne postačujúci, lebo v tomto prípade otázka, ako je umiestnená rovina orbitu v priestore, je bezvýznamná.

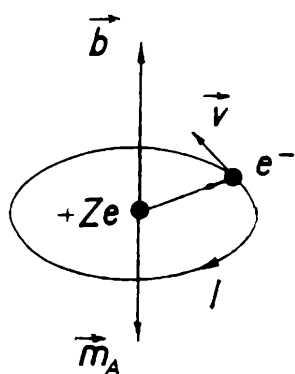
Vo vonkajšom magnetickom poli sa prejavuje orientujúci účinok na rovinu elektrónového orbitu tak, ako sme to pozorovali na závíte s prúdom. Názornú predstavu o tejto situácii umožňuje tzv. vektorový model. Na obr. 4a sú znázornené vektory $\mathbf{b}/m_A$ a $\mathbf{v}$ pre kruhový elektrónový orbit. Vektor $\mathbf{r}$ je sprievodič elektrónu a spolu s vektorom $\mathbf{v}$, ktorý je kolmý na $\mathbf{r}$, ležia v rovine orbitu. Vektory $\mathbf{b}$ a $\mathbf{m}_A$ sú na túto rovinu kolmé, ale sú opačne orientované. Moment hybnosti totiž súvisí so zmyslom obiehania elektrónu a magnetický moment s prúdom (prúd je vždy opačného smeru ako pohyb elektrónov).

V magnetickom poli sa rovina elektrónového orbitu natáča a zaujme v priestore určitú polohu vzhľadom na smer magnetických indukčných čiar. So zmenou umiestnenia roviny orbitu sa mení aj poloha vektorov $\mathbf{b}$ a $\mathbf{m}_A$, tak ako je to znázornené na obr. 4b. Po natočení zvierajú tieto vektory so smerom vonkajšieho pola uhol α . Ak s týmto smerom stotožníme smer niektorej osi vzťažnej súradnicovej sústavy napr. osi Z , môžeme určiť priemety b_z a m_{Az} vektorov $\mathbf{b}$ a $\mathbf{m}_A$ do smeru tejto osi: $b_z = b \cos \alpha$, $m_{Az} = m_A \cos \alpha$.

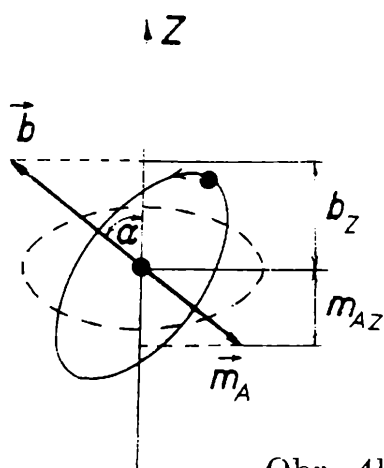
Riešenie takejto úlohy v kvantovej mechanike vedie k záveru, že smer vektorov $\mathbf{b}$ a $\mathbf{m}_A$ vzhľadom na smer vonkajšieho magnetického pola nemôže byť ľubovoľný. Orbitálna rovina a teda aj vektory príslušného mechanického a magnetického momentu môžu v priestore zaujať len určité (dovolené) polohy, pričom pre možné hodnoty uhla natočenia vzhľadom smeru magnetických indukčných čiar (osi Z) platí podmienka

$$\cos \alpha = \frac{m}{k} \quad (14)$$

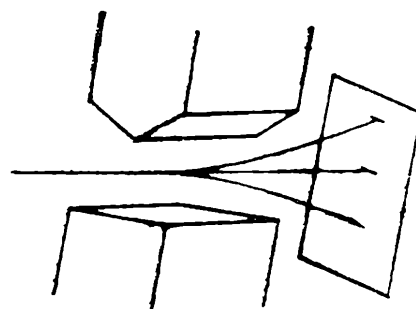
kde k je vedľajšie a m tzv. magnetické kvantové číslo. Potreba zavedenia čísla m súvisí s tým, že pri interakcii (vzájomnom pôsobení)



Obr. 4a



Obr. 4b



Obr.

elektrónového orbitu ako magnetu s vonkajším magnetickým poľom, získava elektrón určitú potenciálnu energiu. Veľkosť tejto energie závisí na veľkosti priemetu magnetického momentu do smeru vonkajšieho poľa. Z rovnice (14) a z toho, že hodnoty funkcie $\cos \alpha$ sú z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ plynie, že možné hodnoty magnetického kvantového čísla sú v intervale $-k \leq m \leq k$. Napr. keď je $k = 2$, môže m nadobúdať len hodnoty $-2, -1, 0, 1, 2$ a pod.

Keď zoberieme do úvahy kvantovú podmienku (13) a (14), nájdeme pre možné hodnoty priemetov orbitálneho mechanického a magnetického momentu do smeru vonkajšieho poľa vzťahy

$$b_z = m \frac{h}{2\pi} \quad m_{Az} = m \frac{h}{2\pi} \quad (15)$$

Hovoríme potom o priestorovom kvantovaní, ktoré vedie k nespojitým možným hodnotám priemetov mechanického a magnetického momentu atómu. Mechanický a magnetický moment atómov pritom považujeme za výslednicu vektorového sčítania momentov, prislúchajúcich jednotlivým elektrónovým orbitom.

Teoretické uzávery boli pokusne overované O. Sternom a V. Gerlachom v r. 1921. Úzkou štrbinou bol vymedzený zväzok atómov, ktorý predchádzal medzi pólmi elektromagnetu, vytvárajúceho nehomogénne magnetické pole a dopadal na tienidlo. Keď atóm — magnet predchádza homogénnym magnetickým poľom, pôsobí naň dvojica síl, ktorá ho síce natáča, ale nevychýli ho zo smeru jeho dráhy. V nehomogénnom poli sily pôsobiace na magnetické póly atómu nie sú rovnaké a výsledná sila, ktorá je nenulová, vychyluje ťažisko atómu. Veľkosť výchylky je úmerná nehomogénnosti magnetického poľa. Nehomogénnosť magnetického poľa v danom prípade musí byť taká veľká, aby sa magnetická indukcia dostatočne menila už v rámci vzdialenosti rovnej rozmerom atómu, tj. 10^{-10} m. Pólové nástavce elektromagnetu mali preto vhodne upravený tvar, znázornený na obrázku 5.

Kým vinutím elektromagnetu neprechádzal prúd, vytvoril zväzok letiacich atómov na tienidle T úzky pás tvaru štrbiny. Vytvorením nehomogénneho magnetického poľa sa jednotlivé atómy odchyľili z pôvodného smeru, pričom odchyľka súvisela s veľkosťou priemetu magnetického momentu do smeru poľa. Ak by sa mohol tento vektor v priestore orientovať ľubovoľne, boli by sa jednotlivé atómy odchyľili rôznym spôsobom tak, že obraz štrbiny na tienidle by bol rozmazaný. V skutočnosti bolo pri všetkých pokusoch s rôznymi druhmi atómov pozorované rozdelenie zväzku atómov tak, že vzniklo niekoľko ostrých obrazov štrbiny. Napr. zväzok atómov vodíka sa v magnetickom poli rozštiepil na dva zväzky. Z toho bolo možné usúdiť, že priemety magnetického momentu atómu vodíka do smeru poľa môžu nadobudnúť len dve hodnoty. Hodnota magnetického momentu vypočítaná z výsledkov merania bola presne rovná Bohrovmu magnetónu μ_B .

Výsledky pokusov Sterna a Gerlacha principiálne potvrdili priestorové kvantovanie, ale nesúhlasili vždy s pravidlami kvantovania. Tak napr. v prípade vodíka sa mal pôvodný zväzok atómov rozštiepiť nie na dva ale na tri zväzky, čo by zodpovedalo trom možným hodnotám priemetov magnetického momentu, tj. $m_{Az} = -1, 0, 1$.

Túto okolnosť teoreticky zdôvodnil W. Heisenberg na základe vlnovej mechaniky, založenej na predstave o častici-vlne. Podľa jeho návrhu sa používa ako vedľajšie kvantové číslo tzv. orbitálne kvantové číslo $l = k - 1$, ktoré môže nadobúdať hodnoty prirodzených čísel z intervalu $0 \leq l < n$, tj. $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, kde n je hlavné kvantové číslo.

Podľa výsledkov vlnovej mechaniky orbitálny moment hybnosti b nie je celistvým násobkom čísla $\frac{h}{2\pi}$, ako to vyžaduje podmienka (10). Platí

$$b = \sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi} \quad l = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \quad (16)$$

Pre hodnoty magnetického momentu, ktoré sme pôvodne vyjadrili podmienkou (11), potom platí

$$m_A = \frac{\mu_0 e h}{4\pi m_e} \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \sqrt{l(l+1)} \quad (17)$$

Zaujímavé je, že pre možné hodnoty priemetov orbitálneho mechanického a magnetického momentu do smeru vonkajšieho poľa platia rovnice majúce rovnaký tvar ako v (15), tj.

$$b_z = m \frac{h}{2\pi}, \quad m_{Az} = m \frac{h}{2\pi}$$

pričom hodnoty nového magnetického čísla, ktorému ponechávame symbol m , môžu byť z intervalu $-l \leq m \leq l$. Napr. pre $l = 1$ ($k = 2$) možné hodnoty magnetického kvantového čísla sú $m = -1, 0, 1$.

Pre každé číslo l teda existuje $2l + 1$ hodnôt kvantového čísla m . Tento výsledok plne zodpovedá a vysvetľuje experimentálne údaje o tom, že napr. vodík v základnom stave nemá magnetický moment.

4. Elektrónový spin

Správnosť teoretických uzáverov kvantovej teórie potvrdilo aj skúmanie čiarových spektier žiariacich atómov. Prechody elektrónov medzi hladinami s rôznou energiou spôsobujú vyžarovanie elektromagnetického žiarenia vo forme fotónov, ktorých energia ΔW zodpovedá rozdielu $W_2 - W_1$ energií jednotlivých hladín. Ako je známe, každej možnej hodnote ΔW prislúcha fotón žiarenia s príslušnou frekvenciou f , splňujúcej vzťah

$$\Delta W = hf = W_2 - W_1,$$

kde h je Planckova konštanta. Každému kmitočtu f potom zodpovedá spektrálna čiara, ktorej prítomnosť v čiarovom spektre svedčí o tom, že sa príslušný prechod uskutočnil.

Energia elektrónov na každom elektrónovom orbite súvisí s hodnotou príslušného kvantového čísla n a l . Existuje teda n stavov elektrónu s rôznou energiou (spektrálnych termov), zodpovedajúcich počtu možných hodnôt čísla l pri danom n , tj. $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Keď sú žiariace atómy v magnetickom poli, pozorujeme štiepenie spektrálnych čiar (s pôvodne jednoduchých čiar vznikne v ich blízkom okolí určitý počet nových čiar), čo sa dá vysvetliť vznikom ďalších možných energetických hladín v dôsledku orientujúceho účinku magnetického poľa na elektrónové orbity.

Spektrálnymi prístrojmi s veľkou rozlišovacou schopnosťou bolo objavené aj tzv. veľmi jemné delenie spektrálnych čiar. Tento jav je nezávislý na prítomnosti vonkajšieho magnetického poľa. Jedná sa o to, že každá spektrálna čiara, mimo čiar zodpovedajúcich elektrónom, pre ktoré je hodnota kvantového čísla $l = 0$, pozostáva z dvoch blízko seba ležiacich čiar. Existencia týchto dvojíc — dubletov (čítaj dabletov) z teórie nevyplývala.

Snaha vysvetliť tento jav viedla k predpokladu (Goudschmit, Uhlenbeck, 1925), že elektrónu je treba prisúdiť zvláštnu vlastnosť — vlastný moment hybnosti, ktorý by mal existovať v dôsledku rotácie elektrónu okolo jeho osi. Elektrón sa teda chová ako zotrvačník. Táto jeho vlastnosť dostala názov elektrónový spin.

O zvláštnych vlastnostiach elektrónov svedčia aj pokusy Sterna a Gerlacha s vychyľovaním zväzku atómov v magnetickom poli. Napr. zväzok atómov vodíka sa v nehomogénnom magnetickom poli rozdelil

na dva. Elektrónom nevzbudených atómov vodíka však prislúcha hodnota kvantového čísla $m = 0$ a majú teda mať nulový mechanický aj magnetický moment. V magnetickom poli by sa zo svojho smeru odchyľovať nemali. Pokus však ukazuje rozštiepenie pôvodného zväzku na dva a svedčí o tom, že atómy vodíka magnetický moment majú. Priemety tohoto momentu do smeru magnetického poľa môžu však nadobudnúť len dve hodnoty. Z výsledkov merania vyplynulo, že tieto hodnoty sú rovné Bohrovmu magnetónu $+\mu_B$, alebo $-\mu_B$.

Podrobný rozbor experimentálnych výsledkov s vychyľovaním atómov a pozorovaním spektier ukázal, že elektrónu je treba prisúdiť mimo vlastného momentu hybnosti S aj vlastný (spinový) magnetický moment m_S , ktorý nesúvisí s orbitálnym pohybom elektrónu. Pre hodnoty priemetov vlastného momentu hybnosti S_z a magnetického momentu m_{Sz} do smeru vonkajšieho poľa sú kvantované a môžu nadobudnúť len dve možné hodnoty, ktoré sú násobkom čísla $h/2\pi$, resp. Bohrovho magnetónu μ_B

$$S_z = \pm \frac{h}{2\pi}, \quad m_{Sz} = \pm \mu_B \quad (19)$$

Podobne ako orbitálny moment hybnosti, ktorý teraz označíme b_l , súvisí s orbitálnym kvantovým číslom l podľa rovnice (16) a môže nadobudnúť celkom $2l + 1$ hodnôt, súvisí aj spinový moment hybnosti S s tzv. spinovým kvantovým číslom s podľa vzťahu

$$S = \sqrt{s(s+1)} \frac{h}{2\pi} \quad (20)$$

Počet možných hodnôt $2s + 1$ spinového momentu je však v súhlase s pokusmi rovný 2. Z podmienky $2s + 1 = 2$ vychádza hodnota kvantového čísla $s = \frac{1}{2}$.

Pre hodnotu spinového momentu hybnosti potom z (20) vychádza $S = (\sqrt{3}/2) (h/2\pi)$, a hodnoty jeho priemetov do význačného smeru sú dané rovnicami (19), kde po zavedení spinového kvantového čísla má s hodnotou buď $+\frac{1}{2}$ alebo $-\frac{1}{2}$.

Vzťah medzi spinovým momentom hybnosti a magnetickým momentom môžeme určiť z rovníc (19). Vychádza

$$m_{Sz} = \frac{\mu_{0e}}{m_e} S_z \quad (21)$$

Porovnaním rovníc (21) a (11) zistíme, že sa líšia numerickým faktorom 2.

Predstava o spine, rotujúcom elektróne — zotrvačníku a magnete, bola Goudschmitom a Uhlenbeckom zavedená na vysvetlenie svojráznych vlastností elektrónu len ako hypotéza. Ukázalo sa (Dirac), že

existencia spinových vlastností elektrónu vyplýva z „pohybovej“ rovnice pre elektrón, pri odvodení ktorej sa vychádzalo nielen z predstáv kvantovej teórie, ale aj z teórie relativity.

5. Záver

S predchádzajúcich úvah možno nahliadnúť, že magnetizmus atómu ako zložitej sústavy je treba považovať za výslednicu magnetických vlastností jednotlivých elektrónov. Konkrétne, výsledný magnetický moment atómu je výslednicou vektorového súčtu magnetických momentov jednotlivých elektrónov. Máme pritom na mysli jak orbitálne, tak aj spinové magnetické momenty. Obidva druhy magnetických momentov elektrónov v atóme môžu však byť do istej miery vykompenzované, resp. sa rušia úplne. Pritom vieme, že spinový magnetický moment vykazuje voči orbitálnemu určitú anomáliu, ako sme to vyjadrili v rovnici (21). Takéto anomálne chovanie spinu má veľký význam v tom zmysle, že ak určíme pre ľubovoľný atóm pomer magnetického a mechanického momentu, môžeme rozhodnúť, či magnetizmus má pôvod v orbitálnych alebo spinových momentoch. Pre pomer medzi magnetickým a mechanickým momentom atómu sa zavádza rovnica

$$m_A = g \frac{e}{2m_e} \mu_0 b, \quad (22)$$

kde g je tzv. Landéov faktor. Hodnota tohoto numerického faktora je $g = 1$ pre orbitálne a $g = 2$ pre spinové momenty. Pre rôzne druhy atómov prichádzajú do úvahy štyri prípady:

- a) orbitálne momenty sú kompenzované, výsledný magnetický moment je daný spinovými momentami,
- b) spinové momenty sú kompenzované, výsledný moment je daný orbitálnymi magnetickými momentami,
- c) časť orbitálnych a časť spinových momentov je kompenzovaná,
- d) všetky magnetické momenty sú kompenzované, výsledný magnetický moment je nulový. Atóm sa navonok nejaví ako magnet.

V tomto článku samozrejme nie je možné vyčerpať celú problematiku štúdia magnetických vlastností atómov ani poukázať na všetky experimentálne fakty a ich teoretické vysvetlenie. Bolo by treba zaberať sa rôznymi anomáliami v chovaní sa atómov umiestnených v magnetickom poli, existenciou tzv. veľmi jemného delenia spektrálnych čiar spôsobené vlastným magnetickým momentom atómového jadra, štiepením spektrálnych čiar v elektrickom poli a i.

Ukázali sme, že snaha vysvetliť magnetické vlastnosti atómov na základe klasických predstáv o stavbe atómu a vlastnostiach elektrónov nevedie k výsledkom, ktoré by plne súhlasili s experimentálne zistenými skutočnosťami. Zákonitosti objavené v spektrách, pokusy s vychyľo-

vaním atómov v magnetickom poli a objav jemného delenia spektrálnych čiar je možné vysvetliť len tak, keď uznáme nerozlučnú súvislosť korpuskulárnych a vlnových vlastností elektrónov a platnosť zákonov teórie relativity.

Literatúra:

- 1) Scholtz, E.: Bohrov model atómu, Rozhledy matematicko-fyzikální, čís. 5, leden 1973.
- 2) Brož, J.: Moderní problémy feromagnetismu, ČSAV, Praha 1962.
- 3) Karjakin, I. N.: Přehled fyziky, SNTL, Praha 1970.
- 4) Kolektív: Malá encyklopédia fyziky, OBZOR, Bratislava 1972.

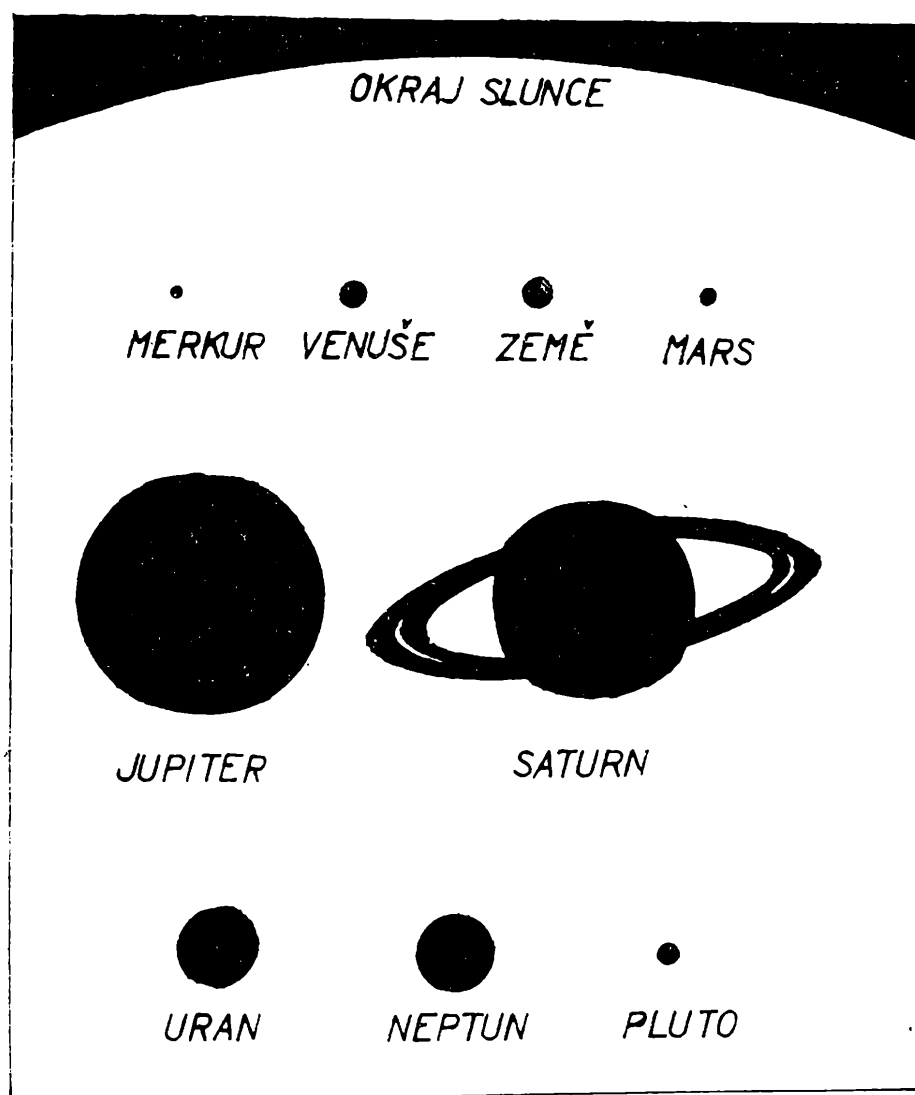
konstruktivní geometrie

0 modelech sluneční soustavy

RNDr. MIROSLAV / ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Sluneční soustavou rozumíme Slunce a devět velkých planet, dále měsíce těchto planet, téměř dva tisíce planetek, obíhajících přibližně mezi dráhami Marsu a Jupitera, periodické komety, meteory a meteorické roje, jakož i drobné prachové a plynové částice včetně slunečního větru a zodiakálního světla. Jako poloměr sluneční soustavy se obvykle udává střední vzdálenost nejvzdálenější planety — Pluta — od Slunce, tedy 40 astronomických jednotek (UA). Dráhy některých dlouhoperiodických komet jsou ovšem velmi protáhlé elipsy a u mnohých komet leží afélium jejich dráhy daleko za dráhou Pluta; tak např. u komety Delavane se uvádí, že její afélium je ve vzdálenosti 170 000 UA, z čehož by vyplývalo, že tato kometa má oběžnou dobu 24 miliónů roků.

Po fyzikální stránce dělíme velké planety na dvě skupiny: jednak na planety zemského typu (k nim počítáme Merkura, Venuši, Zemi a Mars) a na obří planety (Jupiter, Saturn, Uran a Neptun). Zařazení Pluta je dosud nejisté. Planety zemské skupiny mají hmotnosti řádově 10^{24} kg, hustoty kolem $5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a poměrně malý počet měsíců (Merkur a Venuše jsou bez měsíců vůbec). Naproti tomu obří planety mají hmotnosti řádově stokrát větší než planety zemské skupiny, avšak neobyčejně malé hustoty, řádově $1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (Saturn má dokonce hustotu menší než voda), velký počet měsíců a vyznačují se hustými atmosférami. Chemické složení planet zemské skupiny lze označit jako silikáty a horniny, obří planety se skládají především z vodíku a hélia.



Obr. 1. Srovnání velikosti Slunce a planet

Ústředním tělesem sluneční soustavy je Slunce, v němž je soustředěno 99 % látky celé soustavy. Poloměr Slunce je přibližně $7 \cdot 10^5$ km, tj. 109 poloměrů Země, poloměry planet jsou od 0,38 poloměru Země (Merkur) do 11,2 poloměru Země (Jupiter). Rozdělení planet na dvě skupiny názorně vynikne, znázorníme-li jejich velikosti ve vhodném měřítku; příklad takového znázornění je na obr. 1, na němž je naznačena i velikost Slunce.

Vzdálenosti planet od Slunce se udávají v astronomických jednotkách; nejbližší Slunci obíhá Merkur — velká poloosa jeho dráhy je přibližně 0,4 UA, nejvzdálenější Pluto má velkou poloosu dráhy stokrát větší — přibližně 40 UA. vzdálenosti jednotlivých planet od Slunce bychom mohli znázornit pomocí modelu, v němž bychom jednu astronomickou jednotku zobrazili úsečkou o délce 10 cm. vzdálenost Merkura od Slunce bude v tomto měřítku 4 cm, Venuše 7 cm, Země 10 cm a Marsu 15 cm — vidíme, že planety zemské skupiny obíhají poměrně blízko Slunce. Největší planeta sluneční soustavy Jupiter bude ve vzdálenosti 52 cm,

Saturn ve vzdálenosti 95 cm, Uran 191 cm, Neptun 300 cm a Pluto 400 cm. K znázornění drah planet v tomto měřítku bychom potřebovali stěnu o délce nejméně 4 m.

Velmi obtížné je sestavit model Slunce a planet tak, aby zachycoval v tomtéž poměru velikosti planet i jejich vzdálenosti od Slunce. Jeden z možných modelů je uveden v tab. I. Zvolené měřítko je 1 : 10 miliard. V tomto zmenšení bude Slunce znázorněno jako koule o průměru 140 mm, průměr Země bude 1,3 mm, Jupitera 14,3 mm, Merkura 0,5 mm. Vzdálenosti planet od Slunce pak budou od 5,8 m (Merkur) do 590,6 m (Pluto). Pro zajímavost uvedme, že poloměr dráhy Měsíce je v tomto měřítku 38,4 mm. Z této představy je zřejmé, že rozměry všech těles sluneční soustavy jsou nepatrné ve srovnání s rozměry jejich drah. Nejbližší hvězda, Proxima Centauri, která je ve skutečnosti ve vzdálenosti 1,3 pc neboli $4 \cdot 10^{13}$ km, by v tomto modelu byla ve vzdálenosti 4000 km od modelu Slunce.

Tabulka I. Poměrné velikosti Slunce a planet a vzdálenosti planet od Slunce

Těleso	Průměr mm	Vzdá- lenost m	Těleso	Prů- měr mm	Vzdá- lenost m
Slunce	140,0	0,0	Jupiter	14,3	77,8
Merkur	0,5	5,8	Saturn	12,1	142,6
Venuše	1,2	10,8	Uran.	5,0	286,8
Země.	1,3	15,0	Neptun.	4,5	449,4
Mars	0,7	22,8	Pluto.	0,6 ²	590,6

Z uvedeného příkladu je zřejmé, že prakticky nelze v tomtéž měřítku srovnávat současně rozměry planet a jejich vzdálenosti od Slunce. Proto se často používá model, v němž jsou poloměry drah planet zmenšeny v určitém poměru a poloměry planet v poměru jiném. Můžeme se pokusit o zhotovení modelu sluneční soustavy tak, aby poloměr dráhy nejvzdálenější planety Pluta byl např. 3 metry; pak 1 cm na modelu odpovídá 20 miliónům km ve skutečnosti. Vzdálenosti planet od Slunce budou 3 cm, 6 cm, 8 cm, 12 cm, 39 cm, 71 cm, 143 cm, 225 cm a 300 cm. Rozměry drah jsou tedy zmenšeny v poměru $1 : 2 \cdot 10^{12}$. Zvolíme-li pro průměry planet měřítko $1 : 25 \cdot 10^8$, pak 1 cm na modelu odpovídá 25 000 km ve skutečnosti a planety budou znázorněny kuličkami o průměrech 2 mm, 5 mm, 5 mm, 3 mm, 56 mm, 48 mm, 20 mm, 18 mm a 3 mm. Tento model můžeme poměrně snadno zhotovit; stačí stěna o délce 3 m a devět kuliček uvedených rozměrů, případně devět kotoučků, vystřižených z papíru. Slunce znázorníme v modelu jen jako bod, neboť jeho rozměry zmenšené v poměru $1 : 25 \cdot 10^8$ by byly příliš velké.

Úlohy pro I. kolo soutěže F0

Kategorie A

1. Strela má zasiahnúť cieľ, ktorý je vo vzdialenosti d . Spojnica ústia hlavne a cieľa zvierá s vodorovným smerom uhol φ .

a) Určte rýchlosť v strely po opustení hlavne, ak os dela zvierá s vodorovným smerom uhol α .

b) Určte najmenšiu rýchlosť v_0 strely po opustení hlavne tak, aby strela ešte zasiahla cieľ. Aký uhol α_0 zvierá vtedy os hlavne s vodorovným smerom?

c) Odôvodnite zjednodušujúce predpoklady, ktoré ste pri riešení úlohy použili.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $d = 2200$ m, $\varphi = 30,0^\circ$, $\alpha = 45,0^\circ$

2. Obvod sestavený z rezistoru o odporu R a kondenzátoru o kapacite C (obr. 1) je pripojen ke zdroji harmonického striedavého napätia o efektívnej hodnote U a úhlovom kmitočte ω .

1. Stanovte proudy I_C , I_R , I .

2. Z hodnot U , I stanovte impedanci Z_1 obvodu.

3. Horní mezní kmitočet f_h resp. horní mezní úhlový kmitočet ω_h je definován tak, že při něm poměr $\frac{Z_1}{R}$ nabývá hodnoty $\frac{1}{2}$. Stanovte tento kmitočet.

4. Graficky znázorněte funkci $\frac{Z_1}{R} = F_1\left(\frac{f}{f_h}\right)$. Počítejte pro hodnoty $\frac{f}{f_h} = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, 1, 2, 4$. Vodorovnou stupnici pro $\frac{f}{f_h}$ volte logaritmickou. Graf označte v obrázku jako „křivku a “

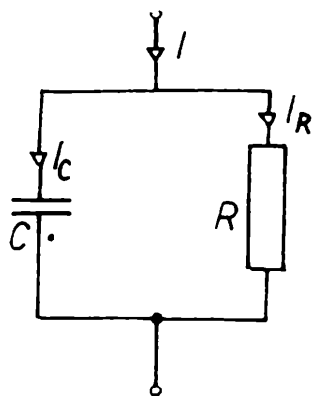
b) Obvod sestavený podle obr. 2 je připojen k témuž zdroji jako obvod v části a).

1. Stanovte proudy I_C , I_{RL} , I .

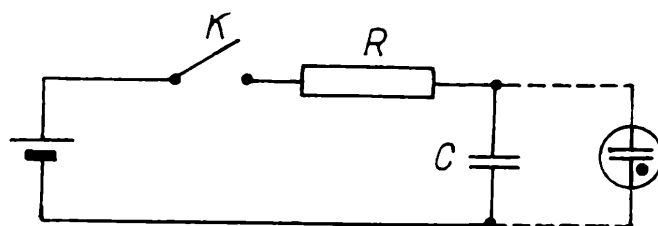
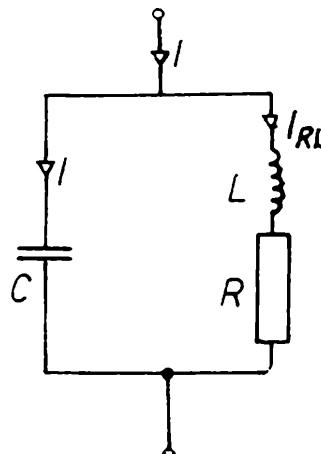
2. Z hodnot U , I stanovte impedanci Z obvodu.

c) V obecném výsledku části b) položte $L = R^2C$ a vyjádřete impen-

Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

danci Z_2 obvodu. Graficky znázorněte funkci $\frac{Z_2}{R} = F_2\left(\frac{f}{f_h}\right)$, kde f_h značí kmitočet týž jako v části a). Postupujte obdobně jako v a) — křivku označte jako „křivku b“ Pro zpřesnění grafu vypočítejte i lokální maximum funkce F_2 a hodnotu poměru $\frac{f}{f_h}$, při níž poměr $\frac{Z_2}{R}$ nabývá hodnoty $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (odpovídá tzv. hodnínmu meznímu kmitočtu upraveného obvodu).

- d) V obecném výsledku podle části b) položte $L = \frac{1}{2} R^2 C$ a vyjádřete impedanci Z_3 obvodu. Dále postupujte jako v části c), tj. graficky znázorněte funkci $\frac{Z_3}{R} = F_3\left(\frac{f}{f_h}\right)$ a křivku označte jako „křivku c“

Poznámky

1. Všechny tři křivky zakreslete do téže soustavy souřadnic; obrázek umožní porovnání všech tří průběhů.

2. Při řešení částí a) a b) můžete vycházet z vektorových diagramů.

3. Úloha se týká tzv. paralelní kompenzace u obrazových zesilovačů používaných v televizní technice, C značí různé škodlivé kapacity, které působí paralelně k pracovnímu odporu R zesilovače. Ve svém řešení můžete popř. také uvést, co je Vám o tom známo z Vaší zájmové činnosti.

3. Na obr. 3 (vytaženo plně) je schéma obvodu při nabíjení kondenzátoru přes rezistor. Připojíme-li v čase $t = 0$ s klíčem K zdroj stá-

lého napětí U , kondenzátor se nabíjí a napětí u_C na něm roste s časem t podle vztahu

$$u_C = U \left[1 - \exp \left(- \frac{t}{\tau} \right) \right]$$

kde $\tau = RC$ značí tzv. časovou konstantu nabíjení. Připojíme-li paralelně ke kondenzátoru doutnavku, jejíž zápalné napětí je U_1 a zhasací U_2 ($U_2 < U_1 < U$), vznikne doutnavkový generátor pilovitých kmitů.

a) Vyložte princip činnosti tohoto generátoru.

b) Stanovte kmitočet f pilovitých kmitů, tj. vyjádřete jej pomocí veličin U , U_1 , U_2 , R , C .

c) Stanovte elektrický náboj Q , který při každém kmitu projde doutnavkou.

d) Pomocí vztahu pro napětí u_C stanovte funkce $u_R = f_1(t)$, $i = f_2(t)$ pro případ, že se kondenzátor (bez připojené doutnavky) nabíjí; u_R značí napětí na rezistoru, i nabíjecí proud.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $U = 200 \text{ V}$, $U_1 = 80,0 \text{ V}$, $U_2 = 70,0 \text{ V}$, $R = 100 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$. Odpor zapálené doutnavky považujeme za nulový, takže vybití kondenzátoru přes doutnavku proběhne okamžitě; odpor nezapálené doutnavky považujeme za nekonečně velký.

e) Pro zadané hodnoty znázorněte graficky funkci $u'_C = f(t)$, kde u'_C značí napětí na kondenzátoru v případě, že paralelně k němu je připojena doutnavka. V grafu vyznačte průběh několika pilovitých kmitů, graficky stanovte jejich kmitočet a výsledek porovnejte s vypočítanou hodnotou.

4. Promítací žárovka s wolframovým vláknem má při napětí U příkon P , její vlákno má přitom teplotu t_0 ; teplotní součinitel odporu wolframu je α . Ke zmírnění proudového nárazu při zapnutí je v sérii k žárovce připojen termistor, jehož odpor při teplotě t_1 místnosti je R_1 . Odpor R termistoru se mění s teplotou podle vztahu

$$R = A \exp \frac{B}{T},$$

kde A , B jsou konstanty, T absolutní teplota termistoru.

a) Jaký proud I_1 prochází žárovkou a ochranným termistorem při připojení ke zdroji harmonického střídavého napětí o efektivní hodnotě U v okamžiku, kdy jeho napětí má svou maximální hodnotu?

b) Jaký proud I_2 by za týchž podmínek procházel žárovkou připojenou ke zdroji bez ochranného termistoru?

c) Jaký příkon P_0 má žárovka v ustáleném stavu, když teplota sériově připojeného termistoru se ustálí na hodnotě t_2 ($t_2 > t_1$) a když soustava žárovky a termistoru je připojena ke zdroji harmonického střídavého napětí o efektivní hodnotě U ?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $t_1 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$, $t_2 = 150\text{ }^{\circ}\text{C}$, $t_0 = 2600\text{ }^{\circ}\text{C}$, $R_1 = 150\text{ }\Omega$, $U = 220\text{ V}$, $P = 200\text{ W}$, $B = 2,0 \cdot 10^3\text{ K}$, $\alpha = 3,6 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$.

Poznámka :

Při řešení části c) předpokládejme, že odpor vlákna žárovky v ustáleném stavu je roven odporu danému jejími jmenovitými hodnotami U , P

5. V homogenním magnetickém poli, jehož indukce $\mathbf{B}$ má svislý směr, jsou dvě rovnoběžné líhy, jejichž vzájemná vzdálenost je d . Rovina, v níž líhy leží, je od vodorovné roviny odchýlena o úhel α . Líhy, jejichž elektrický odpor je zanedbatelný, jsou na horním konci připojeny k rezistoru o odporu R . Na líhách je vodorovně položena kovová tyč obdélníkového průřezu o hmotnosti m , jejíž elektrický odpor je zanedbatelný. V určitém čase je tyč uvolněna z klidové polohy a počne klouzat po líhách, přičemž součinitel smykového tření je f .

a) Stanovte obecně funkci $a = F(v)$, kde a značí zrychlení tyče ve směru líh, v její rychlost v témž směru.

b) Podle výsledku části a) stanovte, jaké největší rychlosti $v_{\max}$ může tyč dosáhnout. Nalezený výsledek ověřte pomocí principu setrvačnosti. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $B = 1,2\text{ T}$, $m = 0,85\text{ kg}$, $d = 1,1\text{ m}$, $\alpha = 30^{\circ}$, $R = 0,70\text{ }\Omega$, $f = 0,15$.

c) Pro zadané hodnoty zakreslete graf funkce $a = F(v)$.

6. Měření ohniskové vzdálenosti spojně čočky

Určete ohniskovou vzdálenost tlusté spojně čočky

a) ze dvou poloh čočky, v nichž se vytvoří ostrý obraz pevného předmětu na pevném stínítku,

b) určením polohy obrazového ohniska a polohy záporné hlavní roviny obrazové.

Ad a) Nastavení proveďte pětkrát a z vypočtených hodnot f určete pravděpodobnou hodnotu a příslušnou chybu výsledku.

Ad b) Nastavení proveďte pětkrát a z vypočtených hodnot s příslušnou střední chybou vypočtete pravděpodobnou hodnotu a příslušnou chybu výsledku.

V úvodu stručně vyložte princip použitých měřicích metod.

7. a) Sestrojte obraz předmětu výšky $y = 10,0\text{ cm}$, který vznikne při zobrazení teleskopickým systémem dvou centrovaných soustav. Prvá soustava má ohniska navzájem vzdálená $d_1 = 61,0\text{ mm}$ a ohniskové vzdálenosti $f_1 = 25,0\text{ mm}$; $f'_1 = 30,0\text{ mm}$, druhá soustava má ohniska navzájem vzdálená $d_2 = 76,0\text{ mm}$ a ohniskové vzdálenosti $f_2 = 30,0\text{ mm}$, $f'_2 = 36,0\text{ mm}$. Poloha předmětu je $x_1 = 10,0\text{ mm}$.

1. Proveďte konstrukci užitím paprsku rovnoběžného s optickou osou a paprsku jdoucího zápornými uzlovými body.

2. Vysvětlete způsob konstrukce.

b) Vypočtete polohu a velikost obrazu vzhledem k druhé soustavě.

Kategorie B

1. Na pevné kladce o poloměru r , která se může otáčet okolo vodorovné osy, je navinutá niť. Na volném konci nite je zavěšené závaží hmotnosti m , které z kludové polohy vykoná po uvolnění dráhu h za dobu t .

a) Vypočítajte moment zotrvačnosti J kladky. Zanedbajte pri výpočte hmotnosť nite a trenie v ložiskách kladky.

b) Pre kruhový priamy valec z homogénneho materiálu možno moment zotrvačnosti vzhľadom na jeho geometrickú os určiť podľa vzorca

$$J = \frac{1}{2} M r^2,$$

kde M je hmotnosť valca a r jeho polomer.

Ak kladka by mala tvar takéhoto valca, vykonajme skutočné meranie príslušných veličín a určíme moment zotrvačnosti J_1 jednak podľa bodu a), jednak J_2 podľa vzorca. Odôvodnite, prečo dostávame odlišné hodnoty a posúďte, ktorá hodnota bude väčšia.

c) Vyjadrite zrýchlenie a závažia ako funkciu veličín, nezávislých od času.

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty: $r = 0,20$ m, $m = 0,21$ kg, $h = 1,85$ m, $t = 2,2$ s.

d) Vypracujte návrh na technickú realizáciu zariadenia, ktorým by bolo možné vykonať opísané meranie. Hodnoty uvedené v úlohe pre číselný výpočet tu nie sú záväzné.

2. Valcová nádoba má vonkajší polomer r , výšku h a hrúbku steny d .

a) Nádoba pláva so zvislou osou v stálej rovnovážnej polohe v kvapaline o hustote ρ_1 . Určte podmienku, ktorú musí spĺňať hustota steny nádoby.

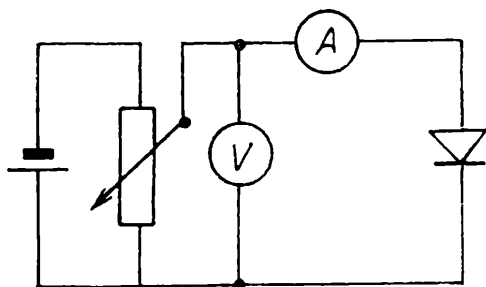
b) Do nádoby sypeme piesok, ktorého povrch v nádobe upravíme vodorovne. Určte hmotnosť piesku tak, aby bola splnená podmienka a).

c) Uvážte, či tvar povrchu piesku ovplyvní riešenie úlohy b). Riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty $r = 0,15$ m, $h = 0,10$ m, $d = 0,010$ m, $\rho_1 = 1,0 \cdot 10^3$ kg m⁻³.

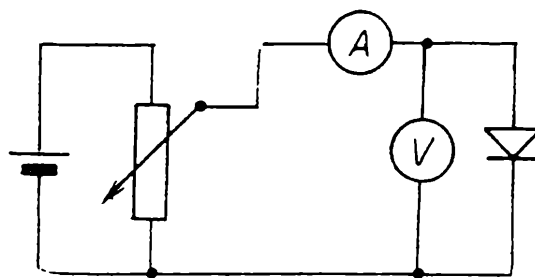
3. Na litinové kolo byla těsně naražena ocelová obruč obdélníkového průřezu o šířce d . Při naražení měla obruč teplotu t_1 , prostředí mělo teplotu t_2 , $t_2 < t_1$. Obruč při chladnutí praskla, poněvadž měla příčnou trhlinu délky h , rovnoběžnou s osou kola.

Vypočítejte minimální délku trhliny.

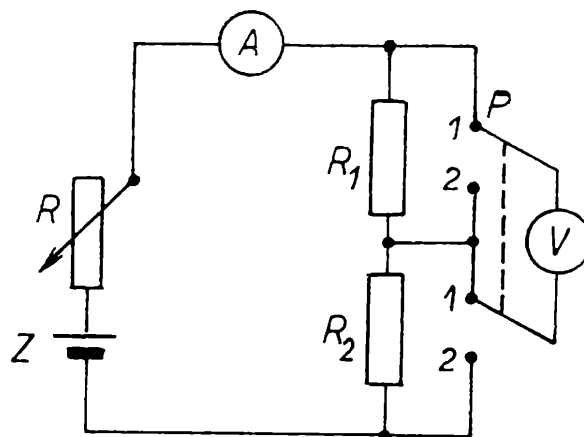
Mez pevnosti oceli je p_h , modul pružnosti v tahu oceli je E a součinitel teplotní délkové roztažnosti oceli je α . Předpokládáme, že Hookův



Obr. 2



Obr. 2



Obr. 3

zákon platí až po mez pevnosti. K zmenšovaniu šírky a tloušťky obruče při jejím chladnutí nepřehlídíme.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $p = 1,8 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $\sqrt{E} = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $\alpha = 1,2 \cdot 10^5 \text{ K}^{-1}$, $t_1 = 270^\circ \text{C}$, $t_2 = 20^\circ \text{C}$.

4. a) Dve kvapky ortuti rovnakej teploty t_1 a rovnakého polomeru r sa spojili do jednej kvapky, ktorej teplota je t_2 . Určte rozdiel $\Delta t = t_2 - t_1$.

b) Stred kvapky ortuti, ktorá odkvapne z kapiláry, je vo výške h nad stredom kvapky ležiacej na podložke. Polomer oboch kvapiek je r a teplota t'_1 . Kvapka ortuti dopadne na kvapku ležiacu na podložke a obe kvapky sa spoja. Teplota vzniknutej kvapky je t'_2 . Určte rozdiel

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

Predpokladajte, že nedochádza k výmene tepla medzi kvapkami a okolím. Ďalej predpokladajte, že kvapky majú guľový tvar. Zmenu výšky stredov kvapiek pred spojením a po spojení do jednej kvapky neuvažujte. Predpokladajte, že merné teplo c , povrchové napätie σ a hustota ortuti ρ sa počas uvedených dejov nemenia. K výpočtu použite hodnoty týchto veličín pri teplote 20°C .

5. Do roztaveného čistého germania o hmotnosti $m = 100 \text{ g}$ byl přidán antimon o hmotnosti $m_1 = 3,22 \text{ mg}$ a galium o hmotnosti $m_2 = 0,780 \text{ mg}$. Atomy obou příměsí se v tavenině rovnoměrně rozptýlily.

Určete

- typ vodivosti vzniklé slitiny,
- měrnou vodivost γ a měrný odpor ρ slitiny,
- Hallovu konstantu R_H slitiny.

Díry mají v germaniu pohyblivost $\mu_p = 0,170 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, elektrony $\mu_n = 0,360 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. Ostatní číselné údaje potřebné k řešení vyhledejte v tabulkách.

Vlastní vodivost je zanedbatelná. Všechny akceptory a všechny donory jsou ionizovány. Změna objemu následkem přidání uvedených přísad je zanedbatelná. Rozdíl mezi pohyblivostí Hallovou a driftovou neuvažujeme.

Řešte nejprve obecně, potom pro zadané hodnoty.

6. Vyšetřovanie charakteristiky polovodičovej diódy

Pomôcky dióda KY 701, zdroj jednosmerného napätia do 100 V, reostat 1000Ω až 3000Ω (približne), voltmeter, ampérmetr.

Cieľ merania: Meranie charakteristiky polovodičovej diódy KY 701. *Postup merania*: Najskôr určíme charakteristiku v závernom smere. Zapojíme obvod podľa obr. 1.

Napätie postupne znižujeme z hodnoty $U = 80 \text{ V}$ na nulu, aby sme získali niekoľko bodov na zobrazenie charakteristiky. Prúd, ktorý prechádza diódou, je veľmi malý.

Charakteristiku v priepustnom smere meriame v zapojení podľa obr. 2. Napätie zvyšujeme od nuly až do hodnoty, pri ktorej tečie diódou maximálny prípustný prúd.

Uvážte, či je potrebné opraviť údaje o úbytok napätia na použitom ampérmetri, resp. o prúd prechádzajúci použitým voltmetrom. Ak áno, opravte namerané hodnoty.

Výsledky merania a korigované hodnoty vpište do vhodnej tabuľky.

Zostrojte graf závislosti prúdu I od napätia U diódy.

Medzné hodnoty diódy vyhľadajte v katalógu polovodičových súčiastok TESLA.

V prípade, že nemáte k dispozícii diódu KY 701, môžete k meraniu použiť aj inú polovodičovú diódu. Dbajte na to, aby ste neprekročili jej medzné hodnoty.

7. K rezistorom s odpormi R_1 , R_2 , ktoré sú pripojené na zdroj Z napätia, môžeme pomocou prepínača P pripojiť voltmeter V (obr. 3). Vnútorňý odpor voltmetra je R_V . Prepínač dáme do polohy 1, voltmeter ukazuje napätie U_1 , ampérmetrom A tečie prúd I .

Potom dáme prepínač do polohy 2 a pomocou reostatu R nastavíme v obvode znova prúd I , voltmeter ukazuje napätie U_2 .

a) Určte hodnotu odporu R_1 z veličín R_2 , R_V , U_1 , U_2 .

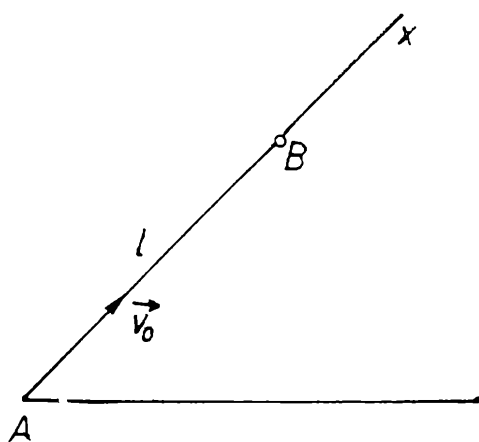
b) Určte odpor R_1' použitím vzťahu $R_1' = \frac{U_1}{U_2} R_2$.

c) Ktorá z hodnôt R_1' , R_0 je presnejšia? Svoje tvrdenie odôvodnite. Vypočítajte rozdiel $\Delta R = |R_1 - R_1'|$.

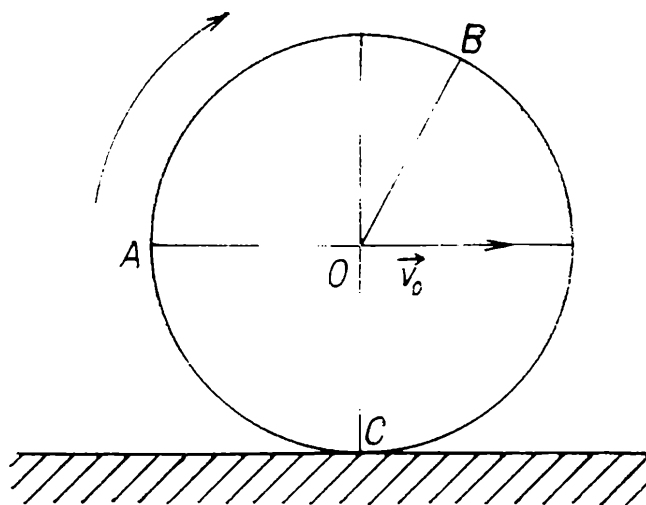
Riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_V = 60 \text{ k}\Omega$, $U_1 = 40 \text{ V}$, $U_2 = 20 \text{ V}$

1. Na koncích niti vedené přes pevnou kladku jsou upevněna dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 , $m_1 < m_2$. V počáteční klidové poloze je těleso o hmotnosti m_2 nad tělesem o hmotnosti m_1 : vzdálenost vodorovných rovin vedených jejich těžišti je y_0 . Hmotnost niti a kladky zanedbáváme vzhledem k hmotnosti těles. Soustava se uvede do pohybu jen působením tíhového pole.

- Vyjádřete vzdálenost y vodorovných rovin procházejících těžišti obou těles v pohybu jako funkci času, měřeného od počátku pohybu.
- Za kterou dobu t_0 od počátku pohybu je spojnice těžišť těles vodorovná?
- Vyjádřete dráhu a těžiště soustavy těles jako funkci času. Popište pohyb těžiště soustavy těles.
- Pro hodnoty $m_1 = 2,0$ kg, $m_2 = 3,0$ kg, $y_0 = 1,0$ m nakreslete ve vhodném měřítku dráhy těles (hmotných bodů) a dráhu těžiště soustavy těles. V obrázku vyznačte polohy těles (hmotných bodů) a polohy těžiště soustavy v počátečním okamžiku pohybu ($t = 0$ s), v čase t_0 od počátku pohybu a v časech $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s, $t_3 = 3$ s od počátku pohybu.



Obr. 1

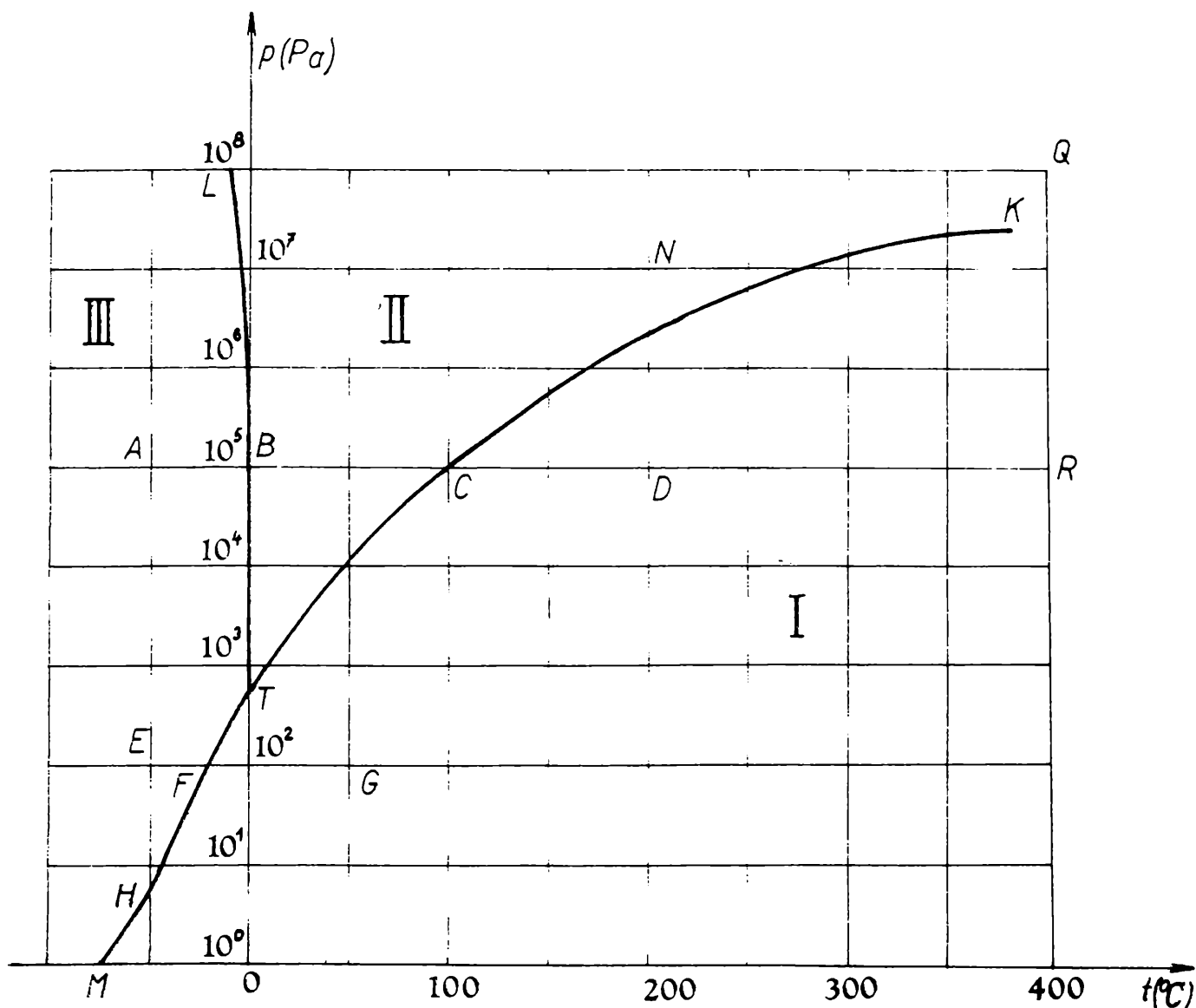


Obr. 2

2. Koule byla vržena po nakloněné rovině Ax vzhůru z polohy A . Bodem B ve vzdálenosti l od bodu A proběhla dvakrát, a to v čase t_1 a v čase t_2 od počátku pohybu (obr. 1).

a) Určete počáteční rychlost v_0 a zrychlení pohybu a , za předpokladu, že je stálé. Provedte diskusi řešení.

b) Z výsledku diskuse ověřte, zda úloha má řešení pro hodnoty: $l = 1,0$ m, $t_1 = 2,0$ s, $t_2 = 3,0$ s. V kladném případě určete hodnoty obou veličin.



Obr. 3

3. Kolo o poloměru r se valí bez klouzání po vodorovné podložce. Rychlost $\mathbf{v}_0$ středu O je stálá vzhledem k podložce. Určete poloměry kružnic křivosti R_A a R_B pro body A a B v okamžiku, kdy spojnice bodu A se středem O je vodorovná a spojnice bodu B se středem O svírá ostrý úhel α se svislým směrem (obr. 2).

a) Řešte úlohu v inerciální vztažné soustavě spojené se středem kola O .

b) Řešte úlohu v inerciální vztažné soustavě spojené s bodem C , který je v daném okamžiku vzhledem k podložce v klidu (C je okamžitý střed otáčení kola).

4. Pro pneumatické práce se používá zásobník vzduchu o objemu V . Vzduch v zásobníku má počáteční tlak rovný atmosférickému tlaku p_1 a teplotu t_1 . Vzduch se nasává do zásobníku rotačním kompresorem. Na konci děje je tlak vzduchu v zásobníku p_2 a teplota vzduchu t_2 . Za hodinu se nasaje vzduch, který při objemu V má tlak p_3 a teplotu t_3 .

- a) Určete hmotnost vzduchu nasátého kompresorem do zásobníku, víte-li, že při normálním tlaku p_0 a při teplotě T_0 je hustota vzduchu ρ .
- b) Určete průměrný hmotnostní průtok nasávacího zařízení.
- c) Jakou dobu kompresor pracoval?

Předpokládáme, že vzduch je dokonalý plyn.

Po obecném vyřešení řešte pro hodnoty: $p_1 = p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $t_1 = 12^\circ\text{C}$, $p_2 = 6,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $t_2 = 43^\circ\text{C}$; $V = 15 \text{ m}^3$; $p_3 = 0,98 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $t_3 = t_1$; $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$, $\rho_0 = 1,29 \text{ kg m}^{-3}$.

5. Na obr. je fázový diagram pro fáze: led—voda—vodní pára.

- a) Vysvětlete význam bodů: T ($0,01^\circ\text{C}$, $6,106 \cdot 10^2 \text{ Pa}$),
 K ($374,16^\circ\text{C}$, $2,213 \cdot 10^7 \text{ Pa}$)
- b) Vysvětlete význam křivek TK , TL , TM .
- c) Vysvětlete význam oblastí I, II, III.
- d) Popište děje znázorněné orientovanými úsečkami $ABCD$, EFG a také úsečkami opačně orientovanými. Vysvětlete význam bodů B , C , F
- e) Popište děje znázorněné orientovanými úsečkami NPD , QR , EHI a také úsečkami orientovanými opačně. Vysvětlete význam bodů P a H .
- f) Popište změny vnitřní energie a hustoty tělesa při dějích: $ABCD$, NPD .

6. Určete pokusně moment setrvačnosti stejnorodé kruhové desky vzhledem k ose, která prochází těžištěm tělesa kolmo ke kruhovým plochám.

Příprava úlohy :

Ocelová kruhová deska o hmotnosti asi 500 g má uprostřed kruhový otvor opatřený z obou stran závitem. Do závitů upevníme z každé strany tenkou ocelovou tyč, opatřenou na konci odpovídajícím závitem. Obě tyče mají stejnou délku a stejný průřez, tvoří čepy kotouče podobně jako u kotouče Maxwellova kyvadla. Těleso zavěsíme na vodorovné rameno na dvě vlákna stejné délky, upevněná na koncích čepů. V rovnovážné poloze je osa čepů vodorovná. Otáčením tělesa kolem vodorovné osy navineme obě vlákna na čepy a těžiště tělesa zvedneme do výšky h nad rovnovážnou polohu. Po uvolnění těleso klesá, jeho potenciální energie tíhová se přeměňuje na kinetickou energii posuvného a otáčivého pohybu. Předpokládejme, že těžiště tělesa přitom koná rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb a v nejnižší poloze dosáhne rychlosti v . Současně koná kotouč rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb kolem vodorovné osy a dosáhne v nejnižší poloze úhlové rychlosti ω .

Vyloučíme-li tření, platí

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (1)$$

Postup řešení :

a) Ověřte měřením, zda pohyb těžiště tělesa je rovnoměrně zrychlený. Změřte t_i doby pádu tělesa pro různé počáteční výšky h_i těžiště nad

rovnovážnou polohou; proveďte asi deset měření; maximální výška $h = 1500$ mm. Sestrojte náčrtek pokusu. Které pomůcky k měření potřebujete? Jak z naměřených veličin ověříte, je-li pohyb těžiště rovnoměrně zrychlený?

b) Dokažte, že potom platí $v = \frac{2h}{t}$ $\omega = \frac{v}{r}$, kde v je rychlost těžiště

tělesa na konci dráhy h , t je doba pádu tělesa po dráze h , r je poloměr čepu.

c) Z rovnice (1) určete vztah pro J . Které veličiny změříte, abyste mohli podle tohoto vztahu vypočítat J ? Které pomůcky k tomu potřebujete?

d) Proveďte měření potřebných veličin podle bodu c) a stanovte absolutní a relativní chybu měření každé z nich. Která z naměřených veličin má největší relativní chybu?

e) Z naměřených veličin vypočítejte J a správně zaokrouhlete.

f) Moment setrvačnosti tenké stejnorodé kruhové desky vzhledem k ose, která je totožná s geometrickou osou desky, určíme podle vztahu

$$J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2} \quad (2)$$

kde m_1 je hmotnost desky, r_1 poloměr její podstavy. Které veličiny změříte, abyste mohli podle tohoto vztahu vypočítat J_1 ? Které pomůcky k tomu potřebujete? Proveďte měření veličin a stanovte absolutní a relativní chybu měření každé veličiny. Z naměřených veličin určete hodnotu J_1 a správně ji zaokrouhlete.

g) Porovnejte výsledky výpočtů momentu setrvačnosti kruhové desky podle bodů e) a f). V obou případech je určení momentu setrvačnosti homogenní kruhové desky přibližné. Rozborem vztahů (1) a (2) porovnejte fyzikální podmínky obou postupů. Vymezte zjednodušující podmínky při určení momentu setrvačnosti homogenní kruhové desky v jednom nebo ve druhém případě a posuďte, jak jsou ve vaší práci splněny.

7. Dvě koule o hmotnostech m_1 a m_2 se pohybují rychlostmi v_1 a v_2 vzhledem k povrchu Země ve vodorovném směru tak, že dojde k jejich přímému středovému rázu. Koule o hmotnosti m_2 po rázu zůstane vzhledem k povrchu Země v klidu.

Určete poměr $x = \frac{v_1}{v_2}$,

a) jsou-li koule pružné,

b) jsou-li koule nepružné,

c) je-li součinitel restituace k .

Ve všech případech proveďte diskusi řešení.

d) Určete úbytek kinetické energie soustavy po rázu v případě c) pro hodnoty: $m_1 = 2,0 \text{ kg}$, $m_2 = 1,0 \text{ kg}$, $v_2 = 10,0 \text{ m s}^{-1}$, $k = 0,40$.

Kategorie D

1. Po silnici E 11 jede vůz Trabant 601 stálou rychlostí 72 km h^{-1} a v určitém čase míjí křižovatku. Na vedlejší silnici na téže křižovatce stojí automobil Škoda 110 L, který se v témž čase rozjede rovnoměrně zrychleným pohybem po silnici E 11 v témž směru jako Trabant. Za dobu 25 s dosáhne rychlosti 90 km h^{-1} a touto rychlostí pak jede dále.

a) Stanovte vzájemnou vzdálenost obou automobilů v čase, v němž automobil Škoda 110 L dosáhne uvedené rychlosti 90 km h^{-1} .

b) V jaké vzdálenosti od křižovatky dohoní automobil Škoda vůz Trabant?

Řešte nejprve obecně, potom pro zadané hodnoty. Rozměry obou automobilů zanedbáváme.

c) Pro zadané hodnoty znázorněte pohyb obou automobilů graficky v souřadnicových soustavách $(t; v)$ a $(t; s)$. Z grafu ověřte výsledky částí a), b).

2. Vůz Trabant jede po přímé silnici stálou rychlostí 72 km h^{-1} . Za ním jede automobil Škoda 100, jehož řidič se rozhodne k předjíždění, když Trabant je ve vzdálenosti 30 m před ním. Předjíždění považujeme za bezpečné, když vůz Škoda se zařadí ve vzdálenosti 30 m před Trabantem.

a) Automobil Škoda jede stálou rychlostí 90 km h^{-1} . Určete dobu bezpečného předjíždění a dráhy, které přitom ujedou oba automobily.

b) Oba automobily jedou nejprve touž rychlostí. Když se řidič automobilu Škoda rozhodne k předjíždění, počne rovnoměrně zvyšovat rychlost svého vozu až na 90 km h^{-1} se zrychlením $1,0 \text{ m s}^{-2}$, načež jede touto rychlostí dále. Určete dobu bezpečného předjíždění a dráhy, které přitom ujedou oba automobily.

Řešte nejprve obecně, potom pro zadané hodnoty. Rozměry obou automobilů zanedbáváme, jejich pohyb považujeme za přímočarý.

3. Automobil Škoda 100 jede po úzké silnici stálou rychlostí 90 km h^{-1} . Jeho řidič spatří ve vzdálenosti 50 m před sebou kombajn jedoucí týmž směrem rychlostí 36 km h^{-1} . Počne brzdít se zrychlením $-4,0 \text{ m s}^{-2}$.

a) Zjistěte, zda dojde ke střetnutí vozidel, je-li doba reakce řidiče $0,80 \text{ s}$, popř. $1,5 \text{ s}$ (prodloužení reakční doby následkem únavy).

b) V jaké vzdálenosti od kombajnu by na počátku uvažované situace musel být automobil, aby po zmenšení své rychlosti na 36 km h^{-1} mohl jet ve vzdálenosti 20 m za kombajnem?

c) Jaká musí být nejmenší vzájemná vzdálenost obou vozidel na počátku uvažované situace, jedou-li vozidla proti sobě, aby automobil

Škoda 100 mohl zastavit u okraje vozovky a aby mohl projet kombajn při stálé rychlosti $36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

Řešte nejprve obecně, potom pro zadané hodnoty.

d) Znázorněte grafické řešení úlohy v souřadnicové soustavě $(t; s)$.

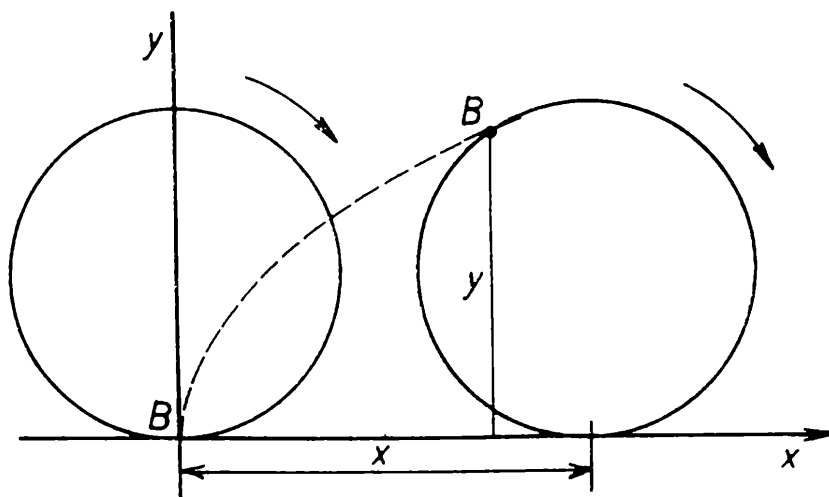
4. Automobil Škoda 100 jede rychlostí $54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ po přímé trati. Pneumatiky automobilu mají vnější průměr 58 cm . Automobil brzdí se stálým zrychlením a zastaví se za dobu $5,0 \text{ s}$ od okamžiku, v němž začal brzdit.

a) Stanovte zrychlení při brzdění a brzdnou dráhu.

b) Stanovte úhlovou rychlost kol automobilu při brzdění jako funkci času a úhlové zrychlení každého kola.

c) Kolik otáček vykoná každé kolo automobilu od počátku brzdění až do zastavení? Počítejte nejprve s použitím výsledků části a), pak s použitím výsledků části b).

d) V souřadnicové soustavě $(x; y)$ znázorněte trajektorii některého bodu na obvodu pneumatiky; x značí vodorovnou vzdálenost od nějakého vhodně zvoleného počátku, y výšku uvažovaného bodu nad zemí (obr. 1). Ke konstrukci trajektorie si vystříhnete kroužek o průměru



Obr. 1

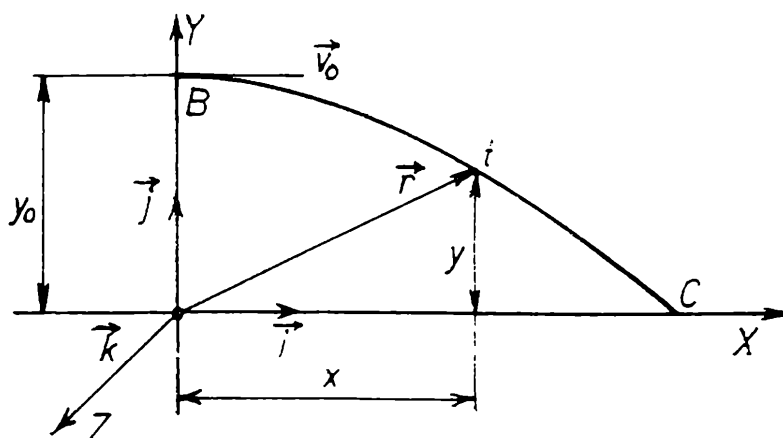
58 mm , na obvodu učiňte značku. Kroužek rozdělte osmi průměry na 16 stejných částí a v grafu vždy vyznačte polohu značky při odvalení kroužku (bez klouzání) o šestnáctinu celé otáčky. Křivka, kterou takto nakreslíte, se nazývá cikloida.

Předpokládáme, že kola při brzdění neprokluzují a pneumatiky se při jízdě nedeformují.

Části a) až c) řešte nejprve obecně, potom pro zadané hodnoty.

5. Těleso bylo vrženo vodorovně v čase $t = 0$ s počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0$ z bodu B ve výši y_0 nad vodorovnou rovinou XZ (obr. 2). Souřadnice bodu B a vektoru $\mathbf{v}_0$ jsou $B(0; y_0; 0)$, $\mathbf{v}_0(v_0; 0; 0)$.

a) Polohový vektor $\mathbf{r}$ hmotného bodu je vektorovou funkcí času $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Stanovte tvar této funkce pro čas $0 \leq t \leq t_1$, kde t_1 je okamžik průchodu tělesa rovinou YZ v bodě C . Pro tentýž časový interval



stanovte závislost velikosti okamžité rychlosti tělesa na čase, tedy funkci $|\mathbf{v}| = v(t)$.

b) Stanovte velikost v okamžité rychlosti i úhel, který svírá její vektorová přímka s osou X při průchodu tělesa bodem C , a dále tečné a_t i normálové a_n zrychlení pohybu a poloměr křivosti R dráhy v tomto bodě. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $y_0 = 45 \text{ m}$, $v_0 = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Těleso považujte za hmotný bod, odpory prostředí zanedbejte a tíhové zrychlení zaokrouhľujte na hodnotu $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

6. Studium zákona zachování mechanické energie

Pohyb tělesa v homogenním tíhovém poli v blízkosti povrchu Země může být charakterizován kinetickou energií $W_k = \frac{1}{2} m v^2$ a potenciální tíhovou energií $W_p = m g h$, kde m je hmotnost tělesa, v velikost jeho okamžité rychlosti vzhledem ke zvolené vztažné soustavě, h je výška tělesa nad povrchem Země, g tíhové zrychlení. Počáteční podmínky volíme tak, že platí: pro $v = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ je $W_k = 0 \text{ J}$, pro $h = 0 \text{ m}$ je $W_p = 0 \text{ J}$. Změny potenciální tíhové nebo kinetické energie souvisí s vykonanou prací

$$A = \Delta W_p = m g (h_2 - h_1) \quad \text{nebo} \quad A = \Delta W_k = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2).$$

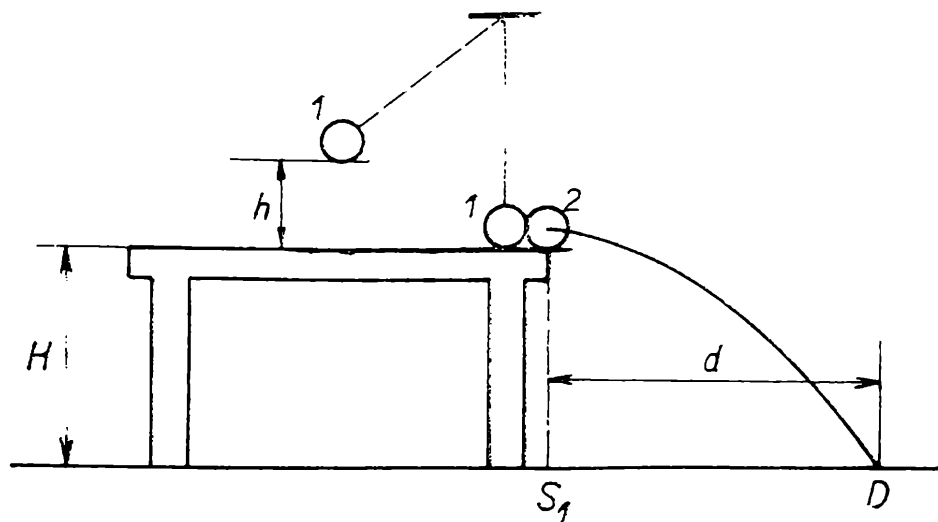
Naším úkolem bude stanovit vztah mezi změnou potenciální tíhové a kinetické energie tělesa pohybujícího se v homogenním tíhovém poli. K výzkumu sestavíme následující aparaturu, přičemž můžeme použít prvků ze žákovské soupravy pro mechaniku či jiných pomůcek doma nebo ve školním kabinetě fyziky.

Pomůcky: stůl, stojan, 2 kuličky o téže hmotnosti z pružného materiálu, měřítko, vlákno, papír A4, kopírovací (uhlový) papír.

Postup práce:

1. Kuličku 2 umístíme na okraji stolu tak, aby se dotýkala kuličky 1 na závěsu v rovnovážné poloze. Kuličku 1 vychýlíme do výšky h_1 ,

Obr. 3



pustíme a zjistíme místo dopadu druhé kuličky ve vzdálenosti d_1 od svislice (obr. 3).

2. Na základě pozorování vysvětlíte změny mechanické energie při těchto dějích:

- při vychýlení kuličky 1 z rovnovážné polohy,
- při návratu kuličky 1 zpět do rovnovážné polohy,
- při dopadu kuličky 2 na podlahu.

3. Zjistili jste orientačně místo dopadu kuličky 2 na podlahu; na dané místo položte list papíru rozměrů A4 pokrytý kopírovacím (uhlovým) papírem. Po dopadu zanechá kulička 2 zřetelný otisk na papíře a nemusíte namáhavě sledovat pohyb kuličky a určovat místo dopadu. Pokus opakujte celkem osmkrát pro výšku h_1 bez pohnutí papíru.

4. Označte si na podlaze polohu místa S_1 podle obr. 3 a umístění papíru (nejlépe polohou vrcholů obdélníka). Sejměte kopírovací papír a zjistíte, že místa dopadu nejsou totožná, vzniká rozptyl ve vašem měření. Vysvětlíte jeho vznik.

5. Stanovte střední polohu $\bar{D}$ místa dopadu kuličky. Použijte k tomu např. této metody: Vytvořte z daných bodů disjunktní dvojice, body každé dvojice spojte úsečkou a sestrojte její střed. Postup opakujte pro nalezené středy tolikrát, až získáte jediný bod, který považujeme za střední polohu $\bar{D}$.

a) Vysvětlíte, jak zpracujete výsledky v případě, že některé z bodů budou příliš vzdáleny od většiny ostatních.

b) Výšku kuličky měříme jako vzdálenost nejnižšího bodu jejího povrchu (namísto těžiště) od desky stolu. Posuďte, zda je tento postup správný.

6. Položte papír zpět na podlahu a určete vzdálenost $S_1\bar{D} = \bar{d}_1$.

7. Odvoďte následující vztah a zdůvodněte své úvahy:

$$d_1 = v_1 \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad \text{nebo} \quad v_1 = d_1 \sqrt{\frac{g}{2H}}$$

8. Měření proveďte pro různé výšky h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 . Změřené hodnoty запиšte do tabulky a doplňte ji.

č.	h	$\bar{d}$	$\bar{v}$	$W_p = mgh$	$W_k = \frac{1}{2}mv^2$	$W_p - W_k$	$\frac{W_p - W_k}{W_p}$
1							
2							
3							
4							
5							

$H =$

$m =$

9. Porovnejte navzájem hodnoty v posledním sloupci tabulky. Vysvětlete, proč $W_k - W_p \neq 1$.

7. Automobil Škoda 110 L jede stálou rychlostí v_1 popř. v_2 ($v_2 > v_1$). Síla odporu proti pohybu má velikost $F_t = kG$, kde k značí vhodný součinitel, G tíhu automobilu.

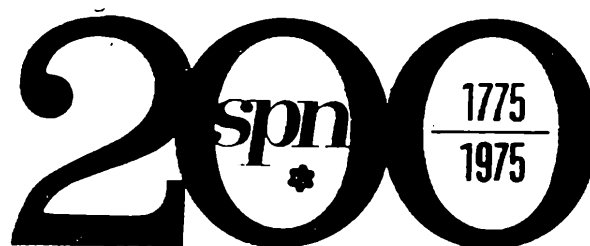
a) Stanovte průměrný výkon motoru jako funkci rychlosti automobilu a znázorněte ji graficky pro zadané hodnoty.

b) Vypočítejte průměrný výkon motoru při daných rychlostech v_1, v_2 a vypočítané hodnoty vyznačte v grafu.

c) Jakou rychlostí jede automobil při dosažení maximálního výkonu $P_{\max}$ motoru?

d) Palivo o hustotě ρ má výhřevnost H . Jaký objem V má palivo, které automobil spotřebuje na dráze d , je-li μ jeho celková účinnost?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $v_1 = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, $v_2 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, $k = 0,10$, $G = 1,1 \cdot 10^4 \text{ N}$, $P_{\max} = 40 \text{ kW}$, $\rho = 0,72 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $H = 4,6 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$, $d = 100 \text{ km}$, $\mu = 30 \%$



Sto let metrické konvence

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc., Praha

V letošním roce je tomu sto let, co byla v Paříži podepsána¹⁾ zástupci 18 států, mezi nimiž bylo i bývalé Rakousko, metrická konvence (dohoda o metru). Byl to velmi významný mezinárodní dokument, který představoval mezník v mezinárodním zabezpečování jednotnosti a přesnosti tehdy nejběžnějších měřidel a měření.²⁾ Metrickou konvencí byl zřízen Mezinárodní úřad pro váhy a míry,³⁾ jehož sídlo mělo být původně přímo v Paříži, na společný náklad všech signatářů (tj. států, které dohodu podepsaly a které se tak staly členy této mezinárodní organizace). Také náklady na udržování jeho provozu a jeho potřebný rozvoj jsou společné. O jeho vhodné umístění se měla tehdy postarat francouzská vláda.⁴⁾ V tomto mezinárodním úřadě měly být především laboratoře se základním přístrojovým a měřicím vybavením, dále potřebné pracovny, knihovna a archiv. Protože na realizaci metrického systému i na navržení metrické konvence měla tehdy hlavní zásluhu francouzská vláda, ponechala si tato i nadále záštitu nad nově založeným úřadem. Mezinárodní úřad pro váhy a míry,⁵⁾ v jehož čele je ředitel, podléhá Mezinárodnímu výboru pro váhy a míry,⁶⁾ jehož 18 členů dnes tvoří

¹⁾ Dohoda o metru (Convention [Internationale] du mètre) byla podepsána v Paříži 20. května 1875. Podpisu se zúčastnily tyto státy: Německo, Rakousko-Uhersko, Belgie, Brazílie, Argentina, Dánsko, Španělsko, USA, Francie, Itálie, Peru, Portugalsko, Rusko, Švédsko, Norsko, Švýcarsko, Turecko a Venezuela. Od té doby přistoupila ke konvenci řada dalších států.

V bývalém Rakousku ratifikoval tuto dohodu císař František Josef 31. prosince 1875, a to v Budapešti. Oficiálně bylo znění publikováno ve 20. čísle Říšské sbírky zákonů (Reichs-Gesetz-Blatt) z r. 1876. Po rozpadu bývalého Rakouska potvrdilo Československo svou kontinuální účast v r. 1924.

²⁾ I když byl tehdejší svět na počátku průmyslové revoluce, byl počet fyzikálních veličin, které se tehdy běžně měřily, poměrně malý. Byla to především délka, z níž se odvozoval plošný obsah a objem a dále váha (dnešní hmotnost). U těchto veličin se také ve větší míře staral o jednotnost a přesnost měření státní orgán. Jiné veličiny tehdy takové péči nepodléhaly.

³⁾ Bureau International des Poids et Mesures (zkratka BIPM).

⁴⁾ Je to Pavillon de Breteuil v parku de Saint-Claud v Sèvres za okrajem Paříže. Umístění je dosti podobné jako má v Praze na Petříně Nebozízek. Původní budova doplněná dalšími dostavbami sloužila za feudální éry jako letohrádek. Pohled na hlavní budovu je zachycen v Corbinově kresbě.

⁵⁾ Také se používá název Mezinárodní úřad vah a měr. Podobně je tomu u názvů dalších orgánů.



CENTENAIRE
1875 DU BUREAU INTERNATIONAL
1975 DES POIDS ET MESURES

význační odborníci, vědci i technici z různých zemí a který sám podléhá nejvyššímu orgánu Metrické konvence, kterým je Generální konference pro váhy a míry,⁷⁾ která se pořádá periodicky v Paříži. Na tyto konference vysílají vlády signatářských států svoje delegace. Usneseními těchto konferencí jsou udělovány potřebné pravomoci Mezinárodnímu výboru pro váhy a míry a aktuální úkoly výboru i úřadu.

Hlavními úkoly, které musí Mezinárodní úřad pro váhy a míry zabezpečovat, je účast na realizaci a vlastní zavádění základních etalonů, resp. stupnic význačnějších fyzikálních veličin (původně se tato činnost omezovala prakticky jen na prototypy metru a kilogramu) včetně uchovávání mezinárodních etalonů, dále porovnávání⁸⁾ těchto etalonů s nejvyššími etalony jednotlivých států, účast na volbě příslušné nejvhodnější měřicí techniky a metodiky a jejím sjednocování a konečně stanovování některých fyzikálních konstant a koordinování výsledků z různých metrologických pracovišť.

Původně se omezoval Mezinárodní úřad ve své práci na oblast délky a hmotnosti (pro jejichž základní etalony je povoleno pojmenování „prototyp“), postupně se však počet zajišťovaných veličin rozšiřoval,

⁶⁾ Comité International des Poids et Mesures (CIPM).

⁷⁾ Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM). První Generální konference se konala v roce 1889 a dosud poslední r. 1971.

⁸⁾ Původní znění konvence se dotýkalo ve svém čl. 6 v podstatě stejných úkolů, ovšem s menším počtem veličin a poněkud jinak členěných. Zvláště se hovořilo o metru a kilogramu (spolu s potřebným teploměrem), zvláště o geodetických stupnicích, výrazně bylo uvedeno také porovnávání nemetrických měřidel s metrickými apod. Jedním z prvních úkolů byl dohled nad výrobou prototypů pro členské státy, jejich vyhodnocení a distribuce.

nejdříve o veličiny elektrické (v r. 1927), později fotometrické (v r. 1937) a nejnověji o některé veličiny atomové a jaderné fyziky (v r. 1960).

Tak jako původní — velmi zajímavá — idea metrického systému, která měla odvozovat všechny používané jednotky od metru, dala tomuto systému svůj název, tak i původní Metrická konvence (poněkud upravená v r. 1921) odvozovala svoje pojmenování od nejvýznačnější jednotky té doby — od metru.

Dnes pracuje v laboratořích Mezinárodního úřadu pro váhy a míry asi 30 fyziků a techniků, kteří se zabývají základním metrologickým výzkumem a rozličnými absolutními i porovnávacími měřeními vysoké přesnosti.

Krátce jsme se zmínili o orgánech Metrické konvence. Pro některé speciální oblasti byly vytvořeny Poradní výbory,⁹⁾ které svoje posudky a doporučení předávají Mezinárodnímu výboru, kterému podléhají a jehož jsou poradními orgány. Těchto poradních orgánů je dosud 7 (pro elektřinu, fotometrii a radiometrii, termometrii, pro definici metru, pro definici sekundy, pro ionizující záření a pro jednotky).

I když zavádění metrického systému většinou předcházelo¹⁰⁾ Metrickou konvencí, bylo jeho zevšeobecnění a zakotvení umožněno teprve touto konvencí, jejíž význam a důležitost stále stoupá a jež se zasloužila také o vznik Mezinárodní soustavy měřicích jednotek (SI) a v nedávné době byla iniciátorem prakticky celosvětového sjednocení měřicích jednotek, které se má uskutečnit v nejbližších letech.

Z počátků paroplavby

JOSEF KOTYK, Pardubice

Již v dávných bájích se vypráví o plavbě po řekách a mořích. Mezi nejstarší dopravní prostředky lidstva patří loď.

V nejstarších dobách lidské kultury se doprava po vodě prováděla na vorech, vydlabaných kmenech a jiných jednoduchých plavidlech. Z nich se časem vyvinuly lodi poháněné vesly. Veslové lodi se udržely až do 16. století, kdy byly — nejprve z námořní dopravy na větší vzdálenosti — vytlačeny loděmi, jež užívaly k pohonu síly větru opírajícího se do plachet. Plachetnice dosahovaly postupně větší a větší technické

⁹⁾ Comité consultatif.

¹⁰⁾ Metr, kilogram a další ustanovení o metrických mírách a vahách byly v bývalém Rakousku uzákoněny 23. července 1871 (Sb. zák., č. 16 z r. 1872).



dokonalosti, a to až do 19. století, „století páry“, v němž dochází k převratné změně zavedením lodního šroubu¹⁾ a užitím nové hnací síly — síly páry.

Avšak již v roce 1543 dovedl španělský kapitán Blasco de Garay uvádět v pohyb loď bez vesel a plachet hnací silou páry. Podrobné zprávy o ní sice chybějí, podle vyprávění současníků²⁾ „byla po obou stranách lodi kola, na něž Blasco de Garay hnal páru z velkého kotle, v němž vřela horká voda“. Zkoušky, jež s ní prováděl na rozkaz císaře Karla V. v Barceloně, byly zcela úspěšné; loď těžká 4000 centnýřů proplula prý za dvě hodiny vzdálenost tří mořských mil.³⁾ Vynálezce byl proto panovníkem, jemuž předvedl velmi zajímavou podívanou, s uznáním odměněn, další pokusy tohoto druhu byly mu však ihned zakázány! Byly prý „příliš nebezpečny“. Opatrnosti přece nikdy nezbývá...

O jiném podobném pokusu vypravuje podrobněji francouzský spisovatel Louis Cons ve svém díle „Biographies d'hommes célèbres“ (Životopisy slavných lidí). Píše o lodi, „qui pouvait se mouvoir avec des

¹⁾ Půvaby tohoto vývoje vylíčil autor našim čtenářům podrobněji v článku „Od vesla k lodnímu šroubu“, otištěném k 100. výročí úmrtí Josefa Resslera (1793—1857), revolucionáře mořeplavby, v Rozhledech roč. 36, čís. 3, str. 135 až 137 a čís. 5, str. 234 až 237.

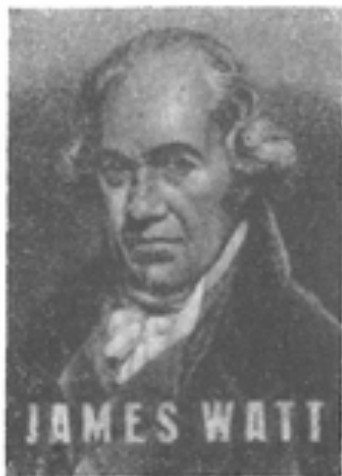
²⁾ Cituji ze sborníku „Devatenácté století slovem i obrazem“ (nakl. Jos. R. Vilímek v Praze), díl II., svazek 1., str. 35 a 36, stať red. Karla Jonáše „Parní lodi“.

³⁾ Centnýř (centér), stará jednotka hmotnosti, průměrně rovná 120 librám, přesněji 61,6 kg. Míle námořní (angl.) = 1853,184 m.

roues, sans le secours de voiles et de rames“, tj. „která se mohla pohybovati s koly, bez pomoci plachet a vesel“. Sestrojil ji slavný francouzský vynálezce Denis Papin.⁴⁾ Po odvolání ediktu nanteského, zaručujícího nekatolíkům od roku 1598 náboženskou svobodu, opustil roku 1685 jako protestant Francii a odebral se do Německa, kde se stal roku 1687 profesorem fyziky na universitě v Marburgu. Sestrojil parní lodici a vyjel s ní roku 1707 z Kasselu, chtěje po řekách Fuldě a Veseře doplout do Severního moře a prý až do Anglie.⁵⁾ Dojel však jen do Mindenu, kde ho čekalo bolestné překvapení. Plavba po Veseře náležela cechu lodníků, kteří měli právo zabavit všechny čluny, jež se plavily po řece bez jejich svolení. Když uviděli Papinovu loď, která se pohybovala nějakým kouzlem zdánlivě bez vnějších sil, spatřovali v ní ihned nebezpečného konkurenta, jenž by je jistě existenčně zničil; vytáhli ji proto na břeh a v rozčilení ji úplně rozbili. To byla poslední a nejtěžší rána pro nešťastného Papina. Zachránil sice holý život, avšak stár a zcela bez prostředků nemohl již své pokusy opakovat. Uchýlil se do Anglie, kde v bídě a všemi opuštěn, neznámo kde a jak, v letech 1710 až 1714 zemřel.

V dalších pokusech s parními čluny bylo pokračováno až v 19. století. Nepochopení doby pro vynálezy tohoto druhu však trvalo. Když v roce 1801 jakýsi Symigton vykonal se svým parním člunem několik výjžděk v průlivu Clydeském (v záp. Skotsku), byly mu další pokusy zakázány s odůvodněním,⁶⁾ že „kola veslová, hnaná parou, způsobují veliké vlny, které velice poškozují břehy, čímž celá města do značného nebezpečí se uvádějí“

O další vývoj se velmi zasloužil James Watt (viz obr. 2). Žil v letech 1736 až 1819. Jako mechanik university v Glasgowě se zabýval opravami staršího modelu parního stroje⁷⁾ i podrobným studiem všech příslušných fyzikálních jevů, stanovil závislost napětí syté vodní páry na teplotě, určil objem páry, která vznikla z daného objemu vody, stanovil kondenzační teplo vodní páry, zavedl kondenzátor, přívod páry střídavě na obě strany pístu (šoupátkový rozvod Wattův), vynalezl odstředivý regulátor a indikátor; používal i setrvačného kola. Sestrojil tak první dokonalý parní stroj (1769). Později vpouštěl páru jen do části parního válce; využíval tím i její expanze. První lodí, která byla



⁴⁾ Denis (= Dionysius) Papin (viz obr. 1), narozený roku 1647 v Blois, sestrojil známý kotlík po něm nazvaný (Papinův hrnec), při němž bylo poprvé užito pojišťovací záklopy.

⁵⁾ Viz sborník citovaný v pozn. 2, str. 36.

⁶⁾ Viz opět sborník citovaný v pozn. 2, str. 36.

⁷⁾ Počátkem 18. století oddělili Newcomen a Cowley kotel od parního válce; do válce vpouštěli páru a zase ji kohoutkem vypouštěli, čímž uváděli píst do pohybu střídavě nahoru a dolů.

poháněna parou, stala se proto před dějinami kolesová říční loď s Wattovým parním strojem, postavená v Anglii v roce 1802.

Dne 9. srpna 1803 předvedl svůj parní člun na řece Seině v Paříži Američan Robert Fulton. Zkouška proběhla úspěšně, Fulton si proto vyžádal audienci u Napoleona a nabídl se, že sestrojí v krátké době „celou řadu parních lodí, po nichž bude možno dopravit francouzské vojsko do Anglie“.⁸⁾ Tato nabídka vzbudila však u Napoleona nedůvěru; jeho pochybnosti posílilo vyjádření komise „odborníků“, která vyslovila o Fultonově vynálezu odmítavý úsudek. Napoleon rozhodl pak o věci definitivně klasickými slovy: „Blázen! Vařící se vodou chce dopravovat armádu do Anglie!“

Fulton, rozmrzen nepochopením, s nímž se setkával v Evropě, se vrátil do Ameriky, kde již po čtyřech letech dne 17. srpna 1807 uskutečnil památnou plavbu po řece Hudsonu z New Yorku do Albany parní lodí „Claremont“ dlouhou 42,6 m a širokou 14,6 m. Vzdálenost 220 km urazila Fultonova loď za 32 hodiny.

V roce 1815, právě před 160 lety, v němž dne 24. února Fulton zemřel, kdy hladinu oceánu brázdila také již první námořní loď s parním pohonem — malý ruský parník „Jelizaveta“ — bylo zlomeno definitivně v památném období „sta dní“ kouzlo moci korsického despoty. V zajetí na ostrově sv. Heleny v letech 1815 až 1821 Napoleon pozdě přemýšlel o hlavních a neomluvitelných chybách, kterých se za své vlády dopustil; doznal je a odsoudil v pamětech, jež diktoval markýzi de Las Cases. Odmítnutí Fultonovy nabídky bylo jednou z největších...

Ani náš malý národ neměl však zůstat bez účasti na vědecko-technické revoluci v století páry. Památného dne 1. června 1817 předvedl Pražanům na rameni Vltavy v Bubenči svou první parní loď 7 sáhů dlouhou a 9 stop širokou⁹⁾ 35letý nadějný český vynálezce Josef Božek, jehož tehdejší společnost nechala, bohužel, zapadnout...¹⁰⁾

V roce 1818 dokazoval dr. Lardner v „Quarterly Review“, že parní loď se nikdy nedostane přes Atlantský oceán. Prohlašoval: „Přeplouti veliké ty spousty vodstva znamená tolik, jako bychom si řekli, že zítra pojedeme z New Yorku nebo Liverpoolu — na Měsíc!“¹¹⁾ Avšak již několik měsíců nato brázdil Atlantský oceán kolesový plachetní parník „Savannah“, jenž doplul v roce 1819 — ještě za života Napoleonova — z New Yorku do Liverpoolu za 26 dní.

⁸⁾ Cituji opět ze sborníku uvedeného v pozn. 2, str. 37.

⁹⁾ Sáhu a stopy bylo tehdy užíváno jako měr délkových této velikosti: 1 sáh = 1,896 m; 1 stopa = 0,316 m.

¹⁰⁾ Zemřel dne 21. října 1835, právě před 140 lety, v Praze. Záslužné činnosti tohoto zapomínaného pionýra technického pokroku a jeho průkopnického díla vzpomněl autor u příležitosti 150. výročí jeho památných pokusů článkem „Josef Božek“ v Rozhledech roč. 46, čís. 3, str. 152–153.

¹¹⁾ Cituji opět ze sborníku uvedeného v pozn. 2, str. 38.

V roce 1825, právě před 150 lety, dochází pak k zásadní změně v pohonu lodí vynálezem Resselova lodního šroubu. Po dalším půlstoletí, v roce 1874, vykonal šroubový parník cestu přes Atlantik již za pouhých 8 dní, v roce 1910 parník „Lusitanie“ dokonce již za $4\frac{1}{2}$ dne! Pro srovnání: Objevná plavba Kolumbova v roce 1492 trvala přes dva měsíce, 68 dní. Při památném obeplutí Afriky kolem roku 600 před n. l. plavci féničtí podle zprávy Hérodotovy však „až po uplynutí dvou let, roku třetího, zpět do Egypta přišli..“¹²⁾

recenze

Miloš Jelínek:

NUMERAČNÍ SOUSTAVY

Vydalo Stát. pedagogické nakladatelství, Praha 1974; 128 stran, 93 obrázků, brož. 7, — Kčs

Publikace je třetím sešitem z řady populárních příruček, vydávaných v knižnici Nové směry ve školské matematice. Jejich úkolem je seznámit co nejširší veřejnost s některými převážně netradičními pojmy školské matematiky. První dva sešity byly věnovány pojmům množina, relace, funkce. Třetí sešit přivede čtenáře zpět k tradiční aritmetice — k pojmu přirozeného čísla.

První třetina knihy popisuje způsoby zápisu přirozených čísel čili numerační soustavy starých, kulturně vyspělých národů, jako byli Sumeřané a Babyloňané, staří Egypťané, Řekové, Římané a staří Mayové. V další části se čtenář dozví, na jakých principech je vybudována naše desítková numerační soustava. Seznámí se však i s numeračními soustavami o jiných základech a se základními početními operacemi v těchto soustavách.

Kniha Numerační soustavy je pěkně a zajímavě napsaná. Bude přínosem do každé knihovny.

Anežka Wohlmuthová

¹²⁾ Hérodotos z Halikarnassu (naroz. asi 484 před n. l.), „otec dějepisu“, sepsal první veliké dějepisné dílo, „aby časem neupadlo v zapomnutí, co se na světě přihodilo“.

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

order	řád, uspořádání, usporadat, řad
order of curve	stupeň křivky
order of derivative	řád derivace
order of determinant	řád determinantu
order of differential equation	řád diferenciální rovnice
order of group	řád grupy
order of matrix	řád matice
order of node	stupeň uzlu
order of radical	stupeň odnože
order of root	násobnost koře
order of surface	stupeň plochy
ordered	uspořádaný
linearly ordered	lineárně uspořádaný
ordered n-tuple	uspořádaná n-tice
partially ordered	částečně uspořádaný
well ordered	dobře uspořádaný
orientation	orientace
oriented	orientovaný
origin	půlka
originate	odvozovat, vycházet
orthocentre	ortocentrum, průsečík výšek
orthogonal	pravoúhlý, kolmý
orthogonal projection	pravoúhlé promítání
orthographic	ortografický
orthonormal basis	ortonormální báze
oscillation	oscilace
osculating	oskulační
osculating circle	oskulační kružnice
osculating plane	oskulační rovina
osculatory	oskulační
outer	vnější
overlap	překrývat se

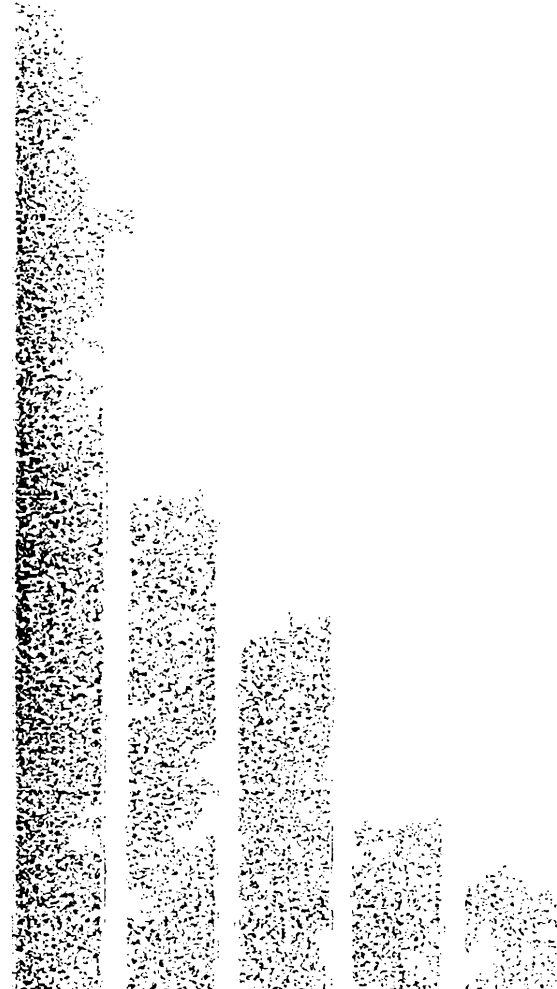
P

pair	dvojice
parabola	parabola
parabolic	parabolický

paraboloid
 paraboloid of revolution
 paradox
 parallax
 parallel
 parallels
 parallelepiped
 rectangular parallelepiped
 right parallelepiped
 parallelogram
 parameter
 paranthesis
 parity
 part
 partial
 partially
 partially ordered
 partition
 Pascal's triangle
 pass through
 path
 pencil of lines
 pencil of planes
 pencil of points
 penetrate
 pentagon
 pentagonal prism
 pentahedron
 percent
 percentage
 perfect square
 perimeter
 period
 periodic
 periodic decimal
 periodic function
 periphery
 permutation
 even permutation
 odd permutation
 perpendicular
 perpendicular line
 perpendicular bisector
 perpendicular bisector of side
 perspective
 perspective projection
 perspective transformation
 perspective view
 photogrammetry
 pierce
 place
 decimal place

paraboloid
 rotační paraboloid
 paradox
 paralaxa
 rovnoběžný, rovnoběžka
 rovnoběžky, hlavní přímky
 rovnoběžnostěn
 kvádr
 kolmý rovnoběžnostěn
 rovnoběžník, kosodélník
 parametr
 závorka (kulatá)
 parita
 část, díl
 částečný, parciální
 částečně
 částečně uspořádaný
 rozklad
 Pascalův trojúhelník
 vést, procházet
 dráha
 svazek přímek
 svazek rovin
 řada bodová
 protínat
 pětiúhelník
 pětiboký hranol
 pětistěn
 procento
 procento
 úplný čtverec
 obvod
 období, perioda
 periodický
 periodické číslo v desítkové soustavě
 periodická funkce
 obvod
 permutace
 sudá permutace
 lichá permutace
 kolmý
 kolmá přímka, kolmice
 osa úsečky
 osa strany
 perspektivní, perspektivita
 perspektiva, perspektivní průmět
 perspektivita
 perspektiva
 fotogrammetrie
 protnout
 místo
 desetinné místo

rozhledy



**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

10

ROČNÍK 53. 1974-1975. ČERVEN



ROČNÍK 53
ČERVEN 1975

10

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., CSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1975.

OBSAH

Dr. M. Kočandrlová: Spočetné a nespočetné množiny	481
Dr. J. Skuhra: Problém přesnosti odhadů získaných metodou Monte Carlo	486
M. Malík: Co jsou normální algoritmy	490
J. Berger: Množství informace v živém organismu	494
Dr. M. Hladký, CSc.: Lindenmayerovy systémy	496
S. Horák: Nerovnosti v geometrii	499
Ing. E. Veselá: Současné názory na prostor a čas	502
Dr. J. Široký: Cygnus XR-1 = „černá jáma“?	509
Dr. J. Široký dr. M. Široká: Sluneční skvrny	511
Doc. dr. K. Drábek: Výročí narozenin pěti profesorů pražské vysoké technické školy	515
F. Morkes: Christian Doppler	519
S. Šmakal - J. Voříšek: Z komise pro matematiku na vysokých školách technických, ekonomických a zemědělských	521
Recenze	522
Nejmladším čtenářům	523
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	3. a 4. str. obálky

matematika

.....

Spočetné a nespočetné množiny

RNDr. MILADA KOČANDRLOVÁ, ČVUT Praha

O nekonečných množinách se čtenář mohl seznámit v osmém čísle Rozhledů v článku dr. Kussově „Některé vlastnosti nekonečných množin“. Na tento článek naváží a budu ilustrovat výsledky v něm dosažené několika příklady. V textu některé pojmy zopakují a dokáží několik vět z teorie množin. (Čtenář, který výše jmenovaný článek neprostudoval, se nemusí obávat, neboť příklady jsou snadno pochopitelné.)

Řekneme, že dvě množiny mají stejnou mohutnost, jestliže jejich prvky můžeme vzájemně jednoznačně přiřadit. Přesněji řečeno, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení jedné množiny na množinu druhou. V tomto případě se jednak užívá pojmu stejná mohutnost nebo též pro větší názornost stejný počet prvků. Druhý název je zcela zřejmý pro množiny o konečném počtu prvků.

Je vidět, že jestliže množina A má stejnou mohutnost jako množina B a množina B má stejnou mohutnost jako množina C , má i množina A stejnou mohutnost jako množina C .

Uvedme nyní několik příkladů.

Příklad 1: Všech přirozených čísel je stejně jako všech sudých přirozených čísel. Vzájemně jednoznačné zobrazení snadno sestrojíme, přiřadíme-li každému přirozenému číslu k sudé přirozené číslo $2k$. Zde, jako v matematice vůbec, se musíme držet logického postupu a nesmíme se dát zlákat názorem k tvrzení, že sudých čísel je méně a odůvodňovat toto tvrzení například tím, že při sestrojeném zobrazení sudá čísla „vyčerpáme rychleji“ než čísla přirozená.

Je vidět, že můžeme-li prvky nějaké množiny seřadit do posloupnosti, má tato množina stejnou mohutnost jako množina přirozených čísel. Množiny tohoto druhu nazýváme *spočetné*.

Příklad 2: Množina všech celých čísel je spočetná. K důkazu tohoto tvrzení seřadíme celá čísla do posloupnosti $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3,$

Následující příklad spočetné množiny je již dosti překvapující.

Příklad 3: Množina všech racionálních čísel je spočetná. Při důkazu tohoto tvrzení stačí zřejmě omezit se jen na kladná racionální čísla. Seřadíme-li totiž kladná racionální čísla do posloupnosti, můžeme seřadit

i záporná racionální čísla do posloupnosti a z obou posloupností vytvořit jedinou posloupnost, podobně jako jsme to udělali v 2. příkladě. Každé kladné racionální číslo píšeme ve tvaru p/q , kde p, q jsou přirozená čísla a p/q je nezkracitelný zlomek. Je vidět, že množina těch racionálních čísel p/q , pro něž je $p + q = s$, kde s je dané přirozené číslo, je konečná. Nyní seřadíme kladná racionální čísla do posloupnosti tak, že nejdříve napíšeme ta čísla p/q , pro něž je $p + q = 2$, potom ta, pro něž je $p + q = 3$, $p + q = 4$ atd. Tímto postupem vyčerpáme všechna racionální čísla. Několik prvních členů této posloupnosti pak vypadá například takto:

$$1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1,$$

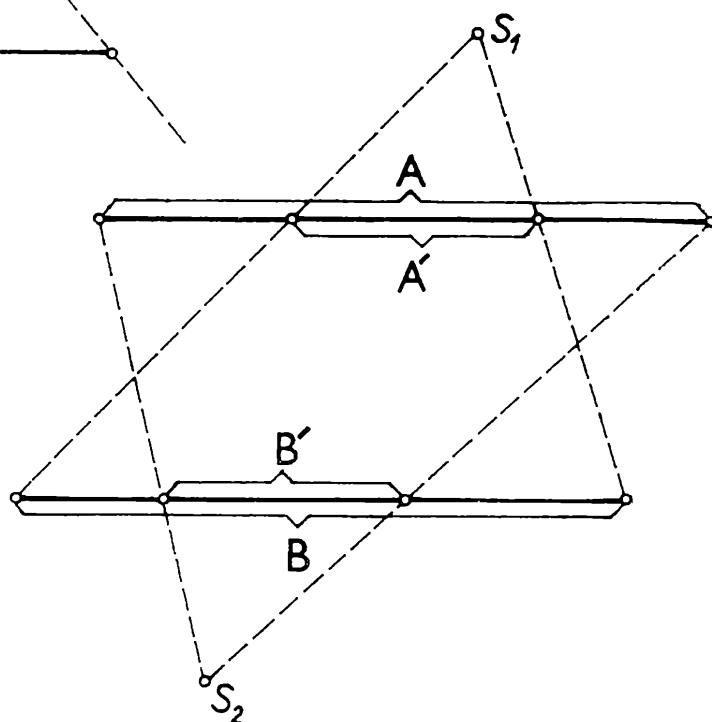
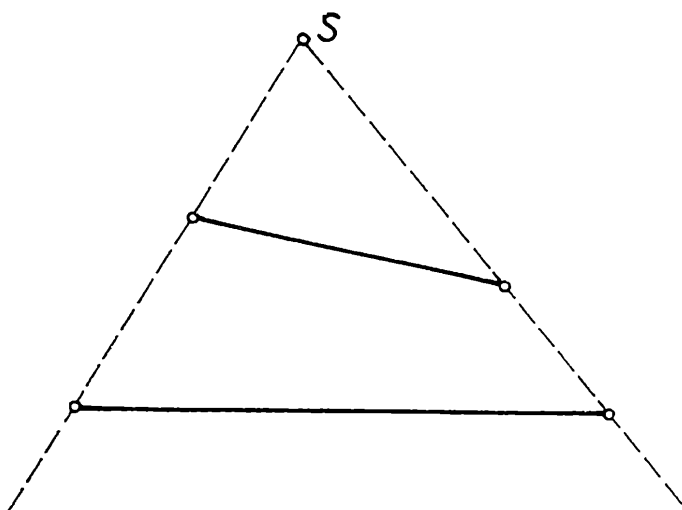
Příklad 4: Každé dvě úsečky mají stejnou mohutnost. Pro dvě shodné úsečky je tvrzení zcela zřejmé. V případě různých úseček dostaneme vzájemně jednoznačné zobrazení jedné na druhou vhodnou projekcí — na obr. 1 promítáním ze středu S . (Není totiž problém přemístit jednu úsečku tak, aby se promítala na druhou, např. posunutím, otočením.)

Příklad 5: Je vidět, že reálných čísel z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je stejný počet jako všech reálných čísel. Vzájemně jednoznačné zobrazení je dáno například funkcí tangens.

Často se stává, že pro dvě množiny je obtížné zjistit, zda existuje vzájemně jednoznačné zobrazení jedné z nich na druhou, ale můžeme poměrně snadno sestavit prosté zobrazení libovolné z nich do druhé množiny. Dokážeme, že v tomto případě mají stejnou mohutnost. Toto tvrzení dokážeme nejdříve pro speciální případ. Komu by se zdál důkaz věty příliš obtížný, může jej — právě tak jako důkazy dalších vět, které uvedu — přeskočit. Tvrzení věty je snadno pochopitelné i bez prostudování jejího důkazu.

Věta 1: Mějme množiny $A \supset B \supset C$. Nechť množiny A a C mají stejnou mohutnost. Potom i množiny A a B mají stejnou mohutnost.

Důkaz: Nechť φ je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu C . Označme $A_1 = A - B$ (tj. A_1 je množina všech prvků, které leží v A a neleží v B). Symbolem $\varphi(A_1)$ označíme množinu všech obrazů prvků z množiny A_1 při zobrazení φ . Označíme $A_2 = \varphi(A_1)$. Podobně sestavíme množiny $A_3 = \varphi(A_2)$, $A_4 = \varphi(A_3)$ atd. Pomocí předpisu $A_n = \varphi(A_{n-1})$ najdeme ke každému přirozenému číslu n příslušnou množinu A_n . Nyní budeme definovat zobrazení ψ množiny A do sebe následujícím předpisem: Jestliže prvek $X \in A$ leží v některé množině A_n ($n = 1, 2, \dots$), definujeme $\psi(X) = \varphi(X)$. Jestliže prvek $X \in A$ neleží v žádné z množin A_n ($n = 1, 2, \dots$), definujeme $\psi(X) = X$. Je vidět, že sestavené zobrazení ψ je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A



Obr. 2

na množinu $\mathbf{B}$. Obraz libovolného prvku X z množiny $\mathbf{A}$ totiž je při zobrazení ψ prvkem množiny $\mathbf{B}$ (při zobrazení φ je obraz prvku X dokonce prvkem množiny $\mathbf{C} \subset \mathbf{B}$) a je-li obráceně $X' \in \mathbf{B}$, je buď X' z nějaké množiny $\mathbf{A}_n$, kde $n \geq 2$, a potom pro něj můžeme najít vzor při zobrazení φ , což je nějaký prvek $X \in \mathbf{A}_{n-1}$. Zřejmě je $\psi(X) = X'$. Není-li X' z žádné množiny $\mathbf{A}_n$, je $\psi(X') = X'$, tudíž prvek X' má za svůj vzor sebe sama.

Právě dokázané věty nyní použijeme k důkazu další věty.

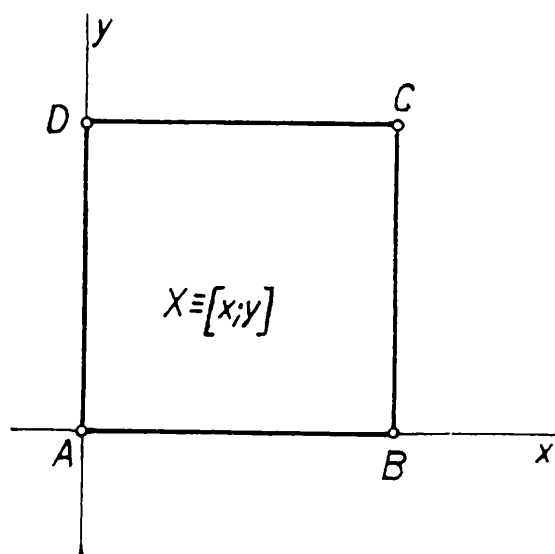
Věta 2: Předpokládejme, že máme dány množiny $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$. Nechť $\mathbf{A}' \subset \mathbf{A}$, $\mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$ a nechť množina $\mathbf{A}$ má stejnou mohutnost jako množina $\mathbf{B}'$ a množina $\mathbf{B}$ má stejnou mohutnost jako množina $\mathbf{A}'$. Potom množiny $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mají stejnou mohutnost.

Než tuto větu dokážeme, ozřejmíme si ji na příkladě 6.

Příklad 6: Na obrázku 2 jsou všechny množiny $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ úsečky a množina $\mathbf{A}$ se vzájemně jednoznačně zobrazí na množinu $\mathbf{B}'$ promítnutím ze středu S_2 , a tedy množiny $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}'$ mají stejnou mohutnost. Podobně

i množiny B a A' mají stejnou mohutnost. Z tvrzení věty 2 pak vyplývá, že i úsečky A a B mají stejnou mohutnost. Toto tvrzení nám sice již bylo známo (viz příklad 4 — obrázek 1), ale pomocí věty 2 dostaneme tvrzení i v případě, že úsečku A bereme bez jejích krajních bodů a úsečku B i s krajními body.

Nyní již přistoupíme k důkazu věty 2: Množiny B a A' mají podle předpokladu stejnou mohutnost a můžeme tedy sestrojit vzájemně jednoznačné zobrazení f množiny B na množinu A' . Označme B'' obraz množiny B' při zobrazení f . Je $B'' \subset A'$. Množiny A a B'' mají stejnou mohutnost (protože A a B' a zároveň B' a B'' mají stejnou mohutnost) a tedy podle věty 1 mají i množiny A a A' a tedy i A a B stejnou mohutnost.



Obr. 3

Příklad 7: Pomocí věty 2 si dokážeme, že vnitřek čtverce má stejnou mohutnost jako jeho strana (nebo jiná úsečka, viz př. 4 a 6), což je výsledek dosti překvapivý. Zvolme si osy souřadnic ve dvou stranách čtverce a jednotku na osách volme tak, aby strany čtverce měly velikost 1 (viz obr. 3). Každý bod uvnitř čtverce můžeme popsat dvojicí čísel x, y takových, že $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Tato dvě čísla si zapíšeme ve tvaru nekonečného desetinného rozvoje: $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$, $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$, (pro každé j jsou x_j a y_j číslice od 0 do 9). Nyní bodu $X = [x; y]$ přiřadíme číslo $z = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \dots$. Například bodu $[0,1400 \dots, 0,327500 \dots]$ je přiřazeno číslo $0,1342070500 \dots$. Tím jsme dostali zobrazení čtverce do intervalu $(0, 1)$. Je vidět, že máme-li obraz z bodu $X = [x; y]$ při tomto zobrazení, jsou čísla x i y tímto obrazem již určena jednoznačně — desetinný rozvoj čísla x tvoří všechny číslice na lichých místech v desetinném rozvoji čísla z , desetinný rozvoj čísla y tvoří všechny číslice na sudých místech v desetinném rozvoji čísla z . Sestrojené zobrazení je tedy prosté, tudíž čtverec má stejnou mohutnost jako nějaká podmnožina intervalu $(0, 1)$. Sestrojme nyní

zobrazení intervalu $(0, 1)$ do uvažovaného čtverce tak, že číslu $x \in (0, 1)$ přiřadíme bod $X = [x, \frac{1}{2}]$ čtverce. Toto zobrazení je opět prosté. Odtud proto podle věty 2 vyplývá, že čtverec má stejnou mohutnost jako jeho strana.

Všechny uvedené příklady nás přesvědčily o tom, že množiny, které z názorného hlediska vypadají různě veliké, mohou mít stejnou mohutnost. Můžeme si tedy položit otázku, jak vypadají dvě nekonečné množiny, které nemají stejnou mohutnost, a zda takové množiny vůbec existují. Na tuto otázku odpoví následující věta.

Věta 3: Nechť M je libovolná množina. Označme $\mathfrak{M}$ množinu všech podmnožin dané množiny M (tj. prvky množiny $\mathfrak{M}$ jsou podmnožiny množiny M). Potom množiny $\mathfrak{M}$ a M nemají stejnou mohutnost. Důkaz této věty provedeme sporem, tj. budeme předpokládat, že uvedené množiny mají stejnou mohutnost a ukážeme, že tento předpoklad vede ke sporu. Nechť f je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny M na množinu $\mathfrak{M}$. Tedy, je-li $A \in M$, je $f(A) \in \mathfrak{M}$, tj. $f(A)$ je podmnožina množiny M . Označme N množinu všech těch prvků $X \in M$ takových, že $X \notin f(X)$ (tj. X neleží v množině, která je mu přiřazena zobrazením f). Protože f je zobrazení vzájemně jednoznačné, existuje prvek $N \in M$ tak, že $N = f(N)$. Kdyby byl prvek N prvkem množiny N , muselo by zároveň (podle zavedení množiny N) platit $N \notin f(N) = N$, což není možné. Kdyby prvek N nebyl prvkem množiny $N = f(N)$, muselo by zároveň být (opět podle zavedení množiny N) $N \in N$, což opět není možné. V každém případě tedy dostáváme spor, tudíž vzájemně jednoznačné zobrazení množiny M na množinu $\mathfrak{M}$ nemůže existovat.

Příklad 8: Jako příklad se nyní přesvědčíme, že přirozených čísel a reálných čísel není stejný počet, přesněji řečeno, že množina všech reálných čísel není spočetná. Důkaz tohoto tvrzení provedeme tak, že dokážeme následující tvrzení: Je-li N množina všech přirozených čísel a $\mathfrak{N}$ množina všech podmnožin množiny N , pak množina $\mathfrak{N}$ má stejnou mohutnost jako množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel. Při důkazu tohoto tvrzení sestrojíme prosté zobrazení f množiny $\mathfrak{N}$ do $\mathbb{R}$ a prosté zobrazení g množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathfrak{N}$. Dokazované tvrzení pak bude okamžitě vyplývat z věty 3 a věty 2. Buď nyní A podmnožina množiny N (tj. $A \in \mathfrak{N}$). Množině A přiřadíme reálné číslo z intervalu $(0, 1)$ takové, že desetinný rozvoj tohoto čísla má na i -tém desetinném místě jedničku, jestliže přirozené číslo i patří do množiny A , a má na i -tém desetinném místě nulu, jestliže číslo i nepatří do množiny A . Tedy například jestliže podmnožina A obsahuje jen tři přirozená čísla 2, 3, 5, přiřadíme jí reálné číslo 0,011010. Tím je definováno prosté zobrazení f množiny $\mathfrak{N}$ do množiny $\mathbb{R}$. Hledejme dále prosté zobrazení g množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathfrak{N}$. Předpokládejme proto, že všechna racionální čísla jsou seřazena do posloupnosti $\{r_n\}$ (viz př. 3). Nyní libovolnému reálnému číslu a přiřadíme množinu

$B \subset \mathbb{N}$ takovou, že přirozené číslo n je prvkem množiny B právě tehdy, když je $r_n < a$. Přiřadíme-li každému reálnému číslu a k němu sestrojenou množinu B , dostáváme hledané zobrazení g množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathfrak{N}$. Nepříliš složitou úvahou bychom se mohli přesvědčit, že i toto zobrazení je prosté. Tím je, jak již bylo řečeno, tvrzení příkladu 8 dokázáno.

Dosud jsme se vlastně stále zabývali tím, co to znamená, že dvě množiny mají stejnou mohutnost, a zatím nebylo uvedeno, co to znamená, že jedna množina má větší mohutnost než množina druhá. Tento pojem však není obtížné zavést. Říkáme, že množina A má větší mohutnost než množina B , jestliže obě množiny nemají stejnou mohutnost a přitom množina B má stejnou mohutnost jako některá podmnožina množiny A . Protože každý prvek libovolné množiny M můžeme chápat jako podmnožinu množiny M sestávající pouze z tohoto prvku, můžeme větu 3 formulovat též tak, že množina všech podmnožin libovolné množiny M má větší mohutnost než množina M .

Na závěr uvedu ještě několik cvičení, na nichž si každý sám může vyzkoušet, jak porozuměl vyložené látce.

Cvičení :

1. Dokažte, že dva různé čtverce v rovině mají stejnou mohutnost.
2. Dokažte, že vnitřek čtverce má stejnou mohutnost jako čtverec.
3. Dokažte, že čtverec má stejnou mohutnost jako libovolný kruh.
4. Dokažte, že čtverec má stejnou mohutnost jako celá rovina.
5. Dokažte, že množina všech iracionálních čísel má stejnou mohutnost jako množina všech reálných čísel.

Problém přesnosti odhadů získaných metodou Monte Carlo

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

Řešení všech problémů, které jsme v tomto ročníku Rozhledů studovali metodou Monte Carlo, mělo stejnou strukturu. Nalezli jsme pravděpodobnostní model, který měl s daným problémem stejný počet jevů, jež mohly nastat; navíc měly příslušné jevy reálné skutečnosti a modelu stejnou pravděpodobnost výskytu. Pak jsme provedli jistý počet simulací reálné skutečnosti pomocí tohoto pravděpodobnostního modelu a sestavili jsme četnostní tabulku. Protože jsme se ptali téměř vždy na prů-

měrnou hodnotu určité náhodné kvantitativní veličiny, počítali jsme v dalším kroku řešení aritmetický průměr z četnostní tabulky. Tento vypočtený aritmetický průměr nám sloužil jako odhad skutečné průměrné hodnoty studované veličiny. Přesnost metody Monte Carlo je dána přesností, s níž aritmetický průměr odhaduje skutečnou střední (průměrnou) hodnotu náhodné veličiny. A to si nyní, na závěr seriálu článků, podrobněji vyložíme, i když ne se všemi důkazy.

Pracujeme s pravděpodobnostním modelem, který ve studovaných otázkách plně nahrazuje skutečnost. Pravděpodobnostní model je dán náhodnou veličinou X a jejím pravděpodobnostním rozložením. Náhodná veličina X může nabývat pouze hodnot z množiny $H(X) \subset \mathbb{R}$. Každé hodnoty $x \in H(X)$ nabývá náhodná veličina X s pravděpodobností $p(x)$. Střední hodnota náhodné veličiny X se značí EX . Je-li množina $H(X)$ konečná, $H(X) = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$, pak

$$EX = \sum_{i=1}^n p(x_i^0) x_i^0$$

Druhá důležitá charakteristika náhodné veličiny X je její variance, kterou označíme $\text{var } X$. Variance charakterizuje rozptyl prvků množiny $H(X)$ kolem střední hodnoty EX . Je-li množina $H(X)$ konečná, pak varianci vypočteme ze vzorce

$$\text{var } X = \sum_{i=1}^n (x_i^0 - EX)^2 p(x_i^0)$$

Dále provedeme N simulací. Při nich sledujeme hodnoty $x_1, x_2, \dots, x_N \in H(X)$, jichž náhodná veličina X nabyla. Aritmetický průměr těchto hodnot

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

je odhadem střední hodnoty EX . Odhad variance $\text{var } X$ se značí s^2 a nazývá se (výběrový) rozptyl. Vypočítáme ho ze získaných hodnot pomocí vzorce

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (1)$$

Mnozí jistě vidíte souvislost s^2 s odhadem střední absolutní chyby měření, které používáte ve fyzikálním praktiku.

V tabulce 1 jsou uvedeny v prvních třech sloupcích hodnoty $N, \bar{x}, s$ pro náhodné veličiny, které jsme zkoumali v článcích uveřejněných v minulém a nynějším ročníku Rozhledů. Názvy článků najdete podle hesla uvedeného v tabulce 1.

Tabulka 1

	N	$\bar{x}$	s	ε_0	[%]
Kachny	100	3,80	1,057	0,274	7,2
Číslo π	396	3,15	0,4100	0,087	2,8
Jim I.	50	6,84	1,594	0,585	8,6
Jim II.	40	4,15	3,8806	1,23	29,6
Vosy	2000	9,6	6,3321	0,366	3,8
Známky	282	15,1	7,3487	1,13	7,5

Hledejme velikost chyby, již se dopouštíme tím, že místo střední hodnoty EX bereme její odhad $\bar{x}$. Označíme-li tuto chybu symbolem ε , pak platí tvrzení, které nebudeme odvozovat:

Jev $|\bar{x} - EX| > \varepsilon$ nastane s pravděpodobností $p \leq 0,01$ právě tehdy, když

$$\frac{\varepsilon \sqrt{N}}{\sqrt{\text{var } X}} = 2,59 \quad (2)$$

Jinak řečeno: Absolutní hodnota rozdílu střední hodnoty EX a jejího odhadu $\bar{x}$ je menší než číslo ε s pravděpodobností aspoň 0,99, právě když platí (2).

Malou úpravou vzorce (2) dostaneme omezení pro chybu

$$\varepsilon \geq \frac{2,59}{\sqrt{N}} \sqrt{\text{var } X}$$

Za $\text{var } X$ dosadíme její odhad s^2 a číslo $\varepsilon_0 = 2,59 s/\sqrt{N}$ nám slouží jako dolní odhad možné chyby. Tabulka 1 uvádí tento dolní odhad ε_0 pro některé problémy, které jsme v Rozhledech řešili.

Upravený vzorec (2) nám zatím posloužil k odhadu chyby, které jsme se dopustili, když jsme místo střední hodnoty EX brali její odhad $\bar{x}$. Vzorec (2) nám může posloužit i jiným způsobem. Jestliže si předem předepíšeme velikost absolutní chyby ε a nějakým vhodným způsobem odhadneme varianci $\text{var } X$, můžeme vypočítat, kolik simulací je nutno provést k dosažení této přesnosti s pravděpodobností 0,99. Jednoduchá úprava dává nerovnost pro počet N simulací:

$$N \geq \frac{6,70 \text{ var } X}{\varepsilon^2} \quad (3)$$

$\text{Var } X$ odhadneme nejlépe tak, že provedeme určitý počet simulací a ze získaných hodnot vypočítáme rozptyl podle vzorce (1).

Ze vztahu (3) bezprostředně vyplývá, že počet nutných simulací je nepřímě úměrný druhé mocnině absolutní chyby. Chceme-li například

zmenšit absolutní chybu o jeden řád (třeba z 0,1 na 0,01), musíme provést stokrát více simulací.

Tabulka 2

	N		
	při $\varepsilon = 0,1$	při $\varepsilon = 0,05$	při $\varepsilon = 0,01$
Kachny	749	2 994	74 840
Číslo π	112	448	11 190
Jim I.	1 703	6 810	170 247
Jim II.	10 090	40 359	1 008 953
Vosy	26 867	107 468	2 686 700
Známky	36 180	144 720	3 618 000

Tabulka 2 uvádí, jaký nejmenší počet simulací musíme provést, aby absolutní chyba v našich příkladech byla $\varepsilon = 0,1$, resp. $\varepsilon = 0,05$, resp. $\varepsilon = 0,01$ (za odhad $\text{var } X$ jsme použili hodnoty s z tabulky 1).

Zatím jsme se zabývali absolutní chybou. Z fyzikálního praktika víte, že dvě různá měření, která mají stejnou absolutní chybu, mohou být různě přesná. Pro porovnání přesnosti dvou různých měření používáme relativní chyby, která se uvádí v % a vypočítá se ze vzorce

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\bar{x}} \cdot 100 \%$$

Hodnoty ϱ v % v jednotlivých případech, o nichž hovoříme, jsou uvedeny v posledním sloupci tabulky 1.

Rozšíříme-li pravou stranu vztahu (3) číslem $x^2 \cdot 10^4$ a zavedeme-li si do něho relativní chybu ϱ , je odhad počtu simulací N vyjádřen takto:

$$N \geq \frac{6,70 \text{ var } X \cdot 10^4}{\varrho^2 \bar{x}^2}$$

Je-li relativní chyba $\varrho \leq 1 \%$, považujeme ve školním fyzikálním praktiku měření za dostatečně přesné. Tabulka 3 uvádí počet simulací, který je nutný k dosažení přesnosti s relativní chybou $\varrho = 1 \%$ (jako odhad $\text{var } X$ jsme opět vzali hodnoty veličiny s uvedené v tabulce 1).

Tabulka 3

Kachny	Číslo	Jim I.	Jim II.	Vosy	Známky
5 186	1 133	3 639	58 585	29 152	15 873

Toto numerické cvičení ukazuje, že aplikace metody Monte Carlo vyžaduje použití počítačového stroje, chceme-li dosáhnout slušné přesnosti výsledku. Přesto si myslím, že byste neměli na tuto statisticko-pravděpodobnostní metodu s tak sympatickým názvem zapomenout. V mnoha problémech, které budete řešit, vám může poskytnout hrubou orientaci už při několika desítkách simulací, které zvládnete i bez stroje.

Co jsou normální algoritmy

MAREK MALÍK, MFF UK Praha

Vraťme se na chvíli do třetí třídy základní školy, kde jsme se učili také sečítat víceciferná čísla v desítkové soustavě. Všichni již víme, jak sčítat taková čísla: sečteme cifry jednotek, napíšeme počet jednotek součtu, počet desítek součtu si pamatujeme, sečteme cifry desítek atd. známým způsobem.

To je nám všem zcela jasné, ale zamysleme se nad zmíněnou procedurou ještě jednou a povšimněme si zejména, že mechanický postup sčítání vůbec nezáleží na tom, jaká čísla sčítáme. Stejně tak provádění operace násobení, dělení, umocňování naprosto nezáleží na konkrétně zadaných číslech. Ke každé uvedené operaci existuje určitý postup jejího provádění nazývaný algoritmus.

Algoritmus je předpis pro vykonání určitých operací, které vedou k vyřešení každé úlohy daného typu.

Pro matematiku je ovšem tato definice algoritmu značně široká. Chceme-li pracovat s algoritmy jako s matematickými objekty, musíme precizovat jejich pojetí.

Nejprve si však řekneme něco o jednodušších pojmech. Co je abeceda v matematickém slova smyslu, dozvěděli jsme se již v Rozhledech v článku dr. Hladkého: „O konečných automatech a jejich některých vlastnostech“ (Rozhledy 52, 1973/74, č. 7, str. 310.) Pro připomenutí: *Abeceda* je neprázdná množina symbolů, prvky abecedy nazýváme *písmena*, konečné posloupnosti písmen *slova*.

Například máme-li abecedu $B = \{*, \triangle, \square, \bigcirc, -\}$, jsou třeba symboly $*$ a $\triangle$ písmena abecedy B a posloupnost písmen $**\triangle\bigcirc\triangle\triangle$ je slovem v abecedě B .

Délkou slova P rozumíme počet písmen ve slově P , označujeme ji $d(P)$. Důležitý je též pojem prázdného slova, tj. slova, které neobsahuje žádné písmeno. Prázdné slovo označujeme Λ , $d(\Lambda) = 0$.

Dvě slova můžeme spojovat, tj. zapsat za sebou. Máme-li kupříkladu slova $P = \square\bigcirc\bigcirc\triangle$ a $R = **\triangle--$, bude mít spojení slov P a R

(označované PR) tvar $PR = \square\bigcirc\bigcirc\triangle^{**}\triangle - -$. Pochopitelně můžeme spojovat i více než dvě slova, spojení označujeme pak analogicky, třeba $PRPQ$. Spojovat můžeme samozřejmě i slovo se sebou samým, například $PPPQ$.

Se slovy v abecedě můžeme provádět mnoho dalších operací, ale pro nás bude důležitá operace přechodu, se kterou se dále seznámíme a která odpovídá úpravám výrazů v algebře.

Definice. Řekneme, že slovo P se *vyskytuje* ve slově R , jestliže existují slova S a T (mohou být i prázdná) taková, že $R = SPT$.

Např. slovo $P = \bigcirc\triangle\triangle^*$ se vyskytuje ve slově $R = \square\bigcirc\square\bigcirc\triangle\triangle^{***}-$, je totiž $R = (\square\bigcirc\square) P (**-)$. Uvědomíme si ještě, že každé slovo se vyskytuje samo v sobě — pro S a T prázdná získáme $\Lambda P \Lambda = P$.

Definice. Vyskytuje-li se slovo P ve slově R , nazveme uspořádanou trojici slov $\langle S, P, T \rangle$ takových, že $R = SPT$, *výskytem slova P ve slově R* .

Takový výskyt není však určen jednoznačně. Například ve slově $R = \square\bigcirc\bigcirc^{**}-\triangle\bigcirc\bigcirc^*\triangle\triangle$ se slovo $P = \bigcirc\bigcirc^*$ vyskytuje dvakrát; totiž $R = (\square) P (*-\triangle\bigcirc\bigcirc^*\triangle\triangle)$ a $R = (\square\bigcirc\bigcirc^{**}-\triangle) P (\triangle\triangle)$. Proto budeme definovat tzv. *první výskyt*:

Definice. Vyskytuje-li se slovo P ve slově R , nazveme výskyt $\langle S, P, T \rangle$ *prvním výskytem slova P ve slově R* , jestliže slovo S má ze všech ostatních výskytů slova P v R minimální délku. Přesněji řečeno: $\langle S, P, T \rangle$ je první výskyt P v R , jestliže pro každý výskyt $\langle S', P', T' \rangle$ slova P v R platí $d(S') \geq d(S)$.

Např. v uvedeném případě je prvním výskytem slova $\bigcirc\bigcirc^*$ ve slově $\square\bigcirc\bigcirc^{**}-\triangle\bigcirc\bigcirc^*\triangle\triangle$ uspořádaná trojice slov $\langle \square, \bigcirc\bigcirc^*, *-\triangle\bigcirc\bigcirc^*\triangle\triangle \rangle$. První výskyt je vždy určen jednoznačně. (Dokažte!) Nyní zavedeme pojmy, které se týkají úpravy slov.

Definice. Mějme abecedu Π ; S a T slova v abecedě Π (opět mohou být i prázdná). Potom zápis $S \rightarrow T$ nazveme *přechodovou formulí* v abecedě Π a $S \rightarrow \bullet T$ nazveme *koncovou přechodovou formulí* v abecedě Π .

Každé přechodové formulí odpovídá operace se slovy. Mějme přechodovou formulí $S \rightarrow T$ a slovo R , ve kterém se slovo S vyskytuje. Vezmeme první výskyt slova S ve slově R : $\langle U, S, V \rangle$. Pak operace přechodu od slova R podle formule $S \rightarrow T$ vydává slovo $W = UT V$. Zapisujeme $R - W$ (Neformálně řečeno: první vyskytující se slovo S ve slově R zaměníme v tomto slově slovem T .) Pro objasnění uvedeme několik příkladů:

Přechod od slova $\square^{**}\triangle\bigcirc\bigcirc^{**}\triangle-$ podle formule $^{**}\triangle \rightarrow \square\square$ vydá slovo $\square\square\square\bigcirc\bigcirc^{**}\triangle-$; nebo přechod od slova $\square^{**}\triangle$ podle formule $^{**} \rightarrow \Lambda$ vydá slovo $\square\triangle$. Podobně přechod od slova $\triangle\bigcirc\bigcirc^*-^*$

podle formule $\Lambda \rightarrow **$ bude mít za výsledek slovo $**\triangle\bigcirc\bigcirc*-*$. Protože prvním výskytem prázdného slova ve slově $\triangle\bigcirc\bigcirc*-*$ je trojice $\langle \Lambda, \Lambda, \triangle\bigcirc\bigcirc*-* \rangle$.

Nyní nám již zavedené pojmy postačují k definici normálního algoritmu.

Definice. Buď Γ abeceda. Normálním algoritmem v abecedě Γ nazveme konečnou (neprázdnou) posloupnost přechodových formulí a koncových přechodových formulí v abecedě Γ .

Normální algoritmus $\mathfrak{A}$ budeme zapisovat

$$\mathfrak{A} \left\{ \begin{array}{l} S_1 \rightarrow T_1 \\ S_2 \rightarrow T_2 \\ \vdots \\ S_n \rightarrow T_n \end{array} \right.$$

Libovolná z těchto přechodových formulí může být koncová (tj. mohou být koncové třeba všechny, či nemusí být koncová též žádná). Pomocí normálního algoritmu budeme přepracovávat slova v jeho abecedě. Nejprve si samozřejmě ukážeme, jak normální algoritmus pracuje.

Mějme normální algoritmus $\mathfrak{A}$ v abecedě Γ , mějme dále slovo R v téže abecedě.

Nejprve zjistíme, vyskytuje-li se některá levá strana formulí algoritmu $\mathfrak{A}$ ve slově R . Jestliže ne — pak vydá algoritmus $\mathfrak{A}$ slovo R jako výsledek a skončí práci. Jestliže ano, pak vezmeme první přechodovou formuli, jejíž levá strana se v R vyskytuje, a provedeme přechod od R podle této formule. Dostaneme tak slovo P . Byla-li použitá formule koncová, algoritmus se zastaví a vydá slovo P . Nebyla-li koncová, vezmeme slovo P a opět zjistíme, vyskytuje-li se některá levá strana formulí algoritmu $\mathfrak{A}$ ve slově P . Jestliže ne, vydáme slovo P a končíme. Jestliže ano, vezmeme opět první přechodovou formuli, jejíž levá strana se v P vyskytuje (tedy první ve smyslu uspořádání posloupnosti přechodových formulí algoritmu) a přejdeme podle ní od slova P ke slovu T . Byla-li tato formule koncová, vydáme slovo T a algoritmus se zastaví; nebyla-li koncová, pokračujeme se slovem T analogickým způsobem dále.

Práci algoritmu si objasníme na několika případech.

$$\text{Algoritmus } \mathfrak{A} \left\{ \begin{array}{l} ** \rightarrow \square\bigcirc\triangle \\ \triangle\bigcirc \rightarrow \bullet ** \\ \bigcirc\triangle \rightarrow \triangle\bigcirc\bigcirc \\ \square\bigcirc \rightarrow \square \end{array} \right.$$

bude přepracovávat slovo $\triangle**$ takto:

Ve slově $\triangle**$ se vyskytuje levá strana hned 1. formule, podle ní je $(\triangle**) \vdash (\triangle\square\bigcirc\triangle)$. Protože použitá formule nebyla koncová, pokračujeme

čujeme dále: Ve slově $\triangle\square\bigcirc\triangle$ se vyskytuje levá strana třetí a čtvrté formule. Musíme ale použít první z nich — tj. třetí, podle ní je $(\triangle\square\bigcirc\triangle) \vdash (\triangle\square\triangle\bigcirc\bigcirc)$. Použitá formule opět nebyla koncová, pokračujeme se slovem $\triangle\square\triangle\bigcirc\bigcirc$ dále. V tomto slově se vyskytuje levá strana druhé formule, tedy $(\triangle\square\triangle\bigcirc\bigcirc) \vdash (\triangle\square**\bigcirc)$. Nyní jsme použili koncovou formuli; algoritmus se tedy zastaví a vydá jako výsledek slovo $\triangle\square**\bigcirc$.

$$\text{Jiný algoritmus } \mathfrak{B} \left\{ \begin{array}{ll} \triangle & \rightarrow \bullet * \\ ** & \rightarrow \bigcirc\bigcirc \\ \triangle\bigcirc & \rightarrow - \\ -- & \rightarrow \bullet \square \end{array} \right.$$

necháme přepracovat slovo $\square**$. Podle druhé formule je $(\square**) \vdash (\square\bigcirc\bigcirc)$. Ve slově $\square\bigcirc\bigcirc$ se však žádná levá strana formulí algoritmu $\mathfrak{B}$ nevyskytuje, proto se algoritmus $\mathfrak{B}$ zastaví a vydá hned výsledek $\square\bigcirc\bigcirc$.

Práce algoritmu na určitém slově se ovšem podle našeho schématu také vůbec zastavit nemusí.

Např. algoritmus $\mathfrak{N} \{ * \rightarrow **$

se na slově $\square*\triangle\triangle$ nezastaví. V prvním kroku dostaneme slovo $\square**\triangle\triangle$, ve druhém $\square***\triangle\triangle$, ve třetím $\square****\triangle\triangle$ atd. Algoritmus se tedy nikdy nezastaví a nikdy též výsledek nevydá.

Tato zkušenost nás vede k následující definici:

Definice. Řekneme, že algoritmus $\mathfrak{U}$ je použitelný ke slovu P (zápis $\mathfrak{U}[P]$), jestliže se při práci s tímto slovem P zastaví a vydá výsledek.

Jestliže algoritmus $\mathfrak{U}$ vydá na základě slova P jako výsledek slovo R , budeme psát $\mathfrak{U}[P] = R$. (Algoritmus může přirozeně vydat jako výsledek prázdné slovo.)

Závěrem článku se vrátíme k naší počáteční úvaze o sčítání čísel a ukážeme si, že pro číselné operace existují velice jednoduché algoritmy.

S přirozenými čísly pracujeme obvykle v abecedě $\{0, /\}$, kde nám přirozená čísla reprezentují následující slova:

$$0 = 0, 1 = 0/, 2 = 0//, 3 = 0///, \quad 7 = 0////////, \quad \text{atd.}$$

$$\text{Pak například algoritmus } \mathfrak{U} \{ 0 \rightarrow \bullet 0////////$$

přičte ke každému přirozenému číslu 5.

$$\text{Algoritmus } \mathfrak{B} \left\{ \begin{array}{ll} /0 & \rightarrow / \\ 00 & \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

je použitelný ke každé dvojici přirozených čísel (tj. ke spojení příslušných slov) a vydá jejich součet. (Dokažte!)

Podobných algoritmů je možno zkonstruovat velice mnoho.

Cvičení:

1. Je operace spojování slov tranzitivní?
2. Co je výsledkem přechodu od slova $\triangle ** \square \bigcirc$ podle formule:
 - (a) $\triangle ** \square \bigcirc \rightarrow \square \square \bigcirc$
 - (b) $\Lambda \rightarrow \bigcirc \bigcirc$
 - (c) $** \square \rightarrow \Lambda$

3. Je algoritmus

$$\mathfrak{A} \left\{ \begin{array}{l} /0/ \rightarrow 0 \\ 00 \rightarrow 0 \\ /0 \rightarrow / \end{array} \right.$$

použitelný ke každé dvojici přirozených čísel (tj. spojení příslušných slov)? Co vydává?

Množství informace v živém organismu

J. BERGER, Pardubice

Jedním z ústředních problémů molekulární a teoretické biologie. (vzniklé prolínáním biologie, fyziky, matematiky a chemie) je studium vlastností informace, kterou nesou v sobě živé organismy. Poznávání této informace i mechanismů jejího přepisu a přenosu v živém organismu umožňuje odpovídat na některé otázky týkající se vzniku a vývoje života na Zemi, vzniku virových onemocnění, vzniku rakoviny atd. Množství informace „uskladené“ v živém organismu je velké, a proto její poznání není zdaleka dokončeno; pro srovnání vypočtíme, jak tlustá by byla kniha obsahující toto množství informace v lidském organismu, tj. kniha obsahující popis člověka. Zároveň může být tento výpočet příkladem aplikace matematiky v biologii.

Zajímavé řešení uvažovaného problému poskytuje metoda S. M. Dancoffa a H. Quastlera. Spočívá v zobrazení organismu jako budovy postavené z různých cihel. Při řešení se určují vlastnosti, umístění a orientace každé „cihly“ = základního prvku organismu. Množství informace můžeme definovat jako funkci

$$H = - \sum_i p(i) \cdot \log_2 p(i),$$

kde H = průměrné množství informace vyjádřené v *bitech*,
 $p(i)$ = pravděpodobnost užití prvku daného typu, přičemž platí

$$p(i) = \frac{n}{i},$$

kde i = soubor navzájem různých druhů základních prvků a možných orientací každého z nich v organismu, n = četnost uvažovaného prvku. Množství informace celého organismu je tak rovno součinu funkce H s počtem základních prvků = „cihel“, které organismus tvoří (může být i nižší, než je tento součin, jsou-li některé kombinace prvků = „cihel“ nemožné).

Nyní se vraťme ke konkrétnímu řešení zadané úlohy. Rozmanitost složení živých organismů přináší problém, co je základním prvkem = „cihlou“? Elementární částice, atom, molekula, organela, buňka, tkáň, orgán, soustava orgánů? Je jasné, že na těchto různých úrovních budou rozdíly ve výsledcích, neboť počet možných kombinací je na nižších úrovních vzhledem k vyššímu počtu základních prvků vyšší, a tudíž bude na nižších úrovních i množství informace větší. Úroveň elementárních částic můžeme vyloučit, neboť obvykle nukleární reakce v živých organismech neprobíhají. Uvažujme atomární úroveň (postup řešení pro zbývajících úrovně popisu bude podobný).

V organismech je asi 60 různých atomů, které v případě, že by jejich výskyt byl stejně pravděpodobný, by měly zapotřebí pro specifikaci jednoho atomu asi 6 bitů:

$$H = - 60 \frac{1}{60} \cdot \log_2 \frac{1}{60} = \log_2 60 \approx 6.$$

Ale ve skutečnosti je důležitých prvků jen šest: uhlík, kyslík, vodík, dusík, fosfor a síra. Ostatní mají malou pravděpodobnost výskytu, takže nemohou mít velký vliv na hodnotu funkce H . Hodnota funkce H nutná k určení jednoho atomu se tak snižuje asi na 2 bity:

$$H = -6 \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} = \log_2 6 \approx 2$$

Ale dvě třetiny organismu jsou tvořeny atomy vodíku, 22 % atomy kyslíku, 7 % atomy uhlíku atd., a tak skutečná hodnota funkce H je o něco nižší — asi 1,5 bitu.

Mimoto počítejme, že v 1 cm³ živé hmoty je asi 10²³ atomů (tj. 1 atom v 0,01 nm³) a že amplitudy tepelných vibrací jsou asi 0,002 nm. Snadno tedy vypočteme, že existuje

$$\frac{10^{-2} \text{ nm}^3}{8 \cdot 10^{-9} \text{ nm}^3} = 1,25 \cdot 10^6$$

1,25 · 10⁶ krychlí o hraně 0,002 nm v krychli o objemu 0,01 nm³, tj. v krychli, kterou má pro svou existenci k dispozici jeden atom. Tzn., že

je $1,25 \cdot 10^6$ možností polohy atomu. Množství informace nezbytné k určení polohy jednoho atomu je tak

$$H = - 1,25 \cdot 10^6 \frac{1}{1,25 \cdot 10^6} \log_2 \frac{1}{1,25 \cdot 10^6} = \log_2 8 \cdot 10^6$$

$$H = 3 + 3,32 \cdot 6 \doteq 23 \text{ bitů.}$$

Celkem $23 + 1,5 = 24,5$ bitu určuje atom jako základní prvek = „cihlu“ v živém organismu. Je-li v dospělém sedmdesátikilogramovém člověku $7 \cdot 10^{27}$ atomů, pak množství informace na atomární úrovni u dospělého člověka je

$$H \leq 24,5 \cdot 7 \cdot 10^{27} \approx 2 \cdot 10^{29} \text{ bitů.}$$

Je-li množství informace na jedné straně knihy asi 10^4 bitů, pak popis dospělého člověka je na atomární úrovni popisu asi na $2 \cdot 10^{25}$ stranách, což představuje komplex knihoven obsahujících asi 10^{22} až 10^{23} knih. Vzhledem k tomu, že se ve světě nyní vydává ročně asi $6 \cdot 10^5$ titulů, můžeme odhadnout, že jenom vydávání knih s popisem člověka (na atomární úrovni) by zabralo asi 10^{17} let (pomineme-li stoupající trend knižní produkce).

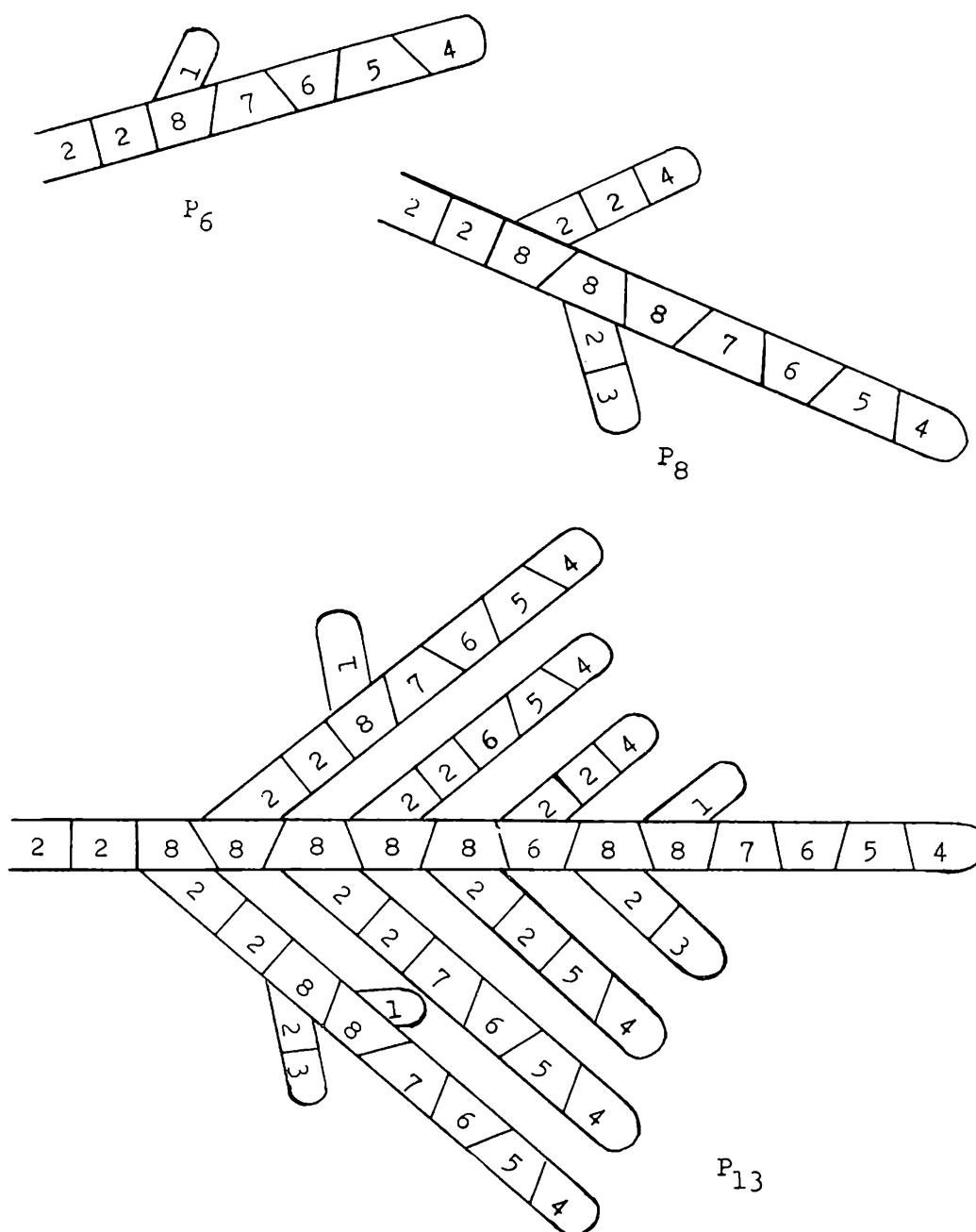
Uvážíme-li, že na Zemi existuje asi milión různých druhů organismů s těžko odhadnutelným počtem variet, výše uvedený výpočet zároveň umožňuje vytvořit si představu, kolik práce ještě zbývá biologům, chemikům, fyzikům (při řešení problematiky biofyziky nativních látek) i matematikům (při řešení problémů teoretické biologie) k odhalení různých tajemství živé přírody.

Lindenmayerovy systémy

Dr. MIROSLAV HLADKÝ, CSc., Brno

V [1] jsme si ukázali matematický přístup k teorii jazyků. Viděli jsme jakým způsobem můžeme v daném přepisovacím systému, v tomto případě gramatice, generovat jazyk a zmínili jsme se o klasifikaci jazyků.

Nyní si ukážeme poněkud odlišný typ přepisovacích systémů tzv. *Lindenmayerovy systémy* (dále již jen *L* — systémy), které vznikly při pokusu formálně popsat buněčný vývoj vláknitých organismů. Našly však velké uplatnění i při řešení celé řady dalších biologických problémů, při studiu složitých molekul v chemii, v teorii programování samočinných počítačů apod.



Lindenmayer použil při popisu buněčného vývoje matematického aparátu, v němž podobně jako v matematické teorii formálních jazyků jsou vývojová stadia buněčných polí reprezentována řetězy, tj. konečnými posloupnostmi symbolů (v našem případě písmen). Každý symbol představuje stav jedné biologické buňky. Vývojové instrukce, o nichž se předpokládá, že se podle nich řídí generování v daném organismu, jsou modelovány přepisovacími pravidly, která se aplikují současně na všechny symboly (buňky), tedy nikoli postupně jako u jazyků. Není zde provedeno rozdělení na terminální a neterminální symboly, protože všechny buňky jsou živé a terminální symboly by představovaly buňky mrtvé — již neměnné. Zánik (zmizení) buňky můžeme provést užitím

prázdného řetězu Λ na pravé straně příslušného pravidla. Přitom různé buňky vyvíjejícího se organismu mohou, ale nemusí, vzájemně komunikovat (můžeme srovnat s kontextovými a nekontextovými jazyky).

Nejjednodušší verze L -systému předpokládá, že vývoj buňky je deterministický (je možná vždy jediná volba), probíhá bez vlivu okolních buněk a že jednotlivé buňky během vývoje nezanikají.

Ukažme si původní Lindenmayerovu aplikaci deterministického L -systému, na němž ilustruje vývojová stadia červených řas. Výchozí symbol je 1 a pravidla jsou tvaru:

$1 \rightarrow 2 \# 3$	$7 \rightarrow 8(1)$
$2 \rightarrow 2$	$8 \rightarrow 8$
$3 \rightarrow 2 \# 4$	$(\rightarrow ($
$4 \rightarrow 5 0 4$	$) \rightarrow)$
$5 \rightarrow 6$	$\# \rightarrow \#$
$6 \rightarrow 7$	$0 \rightarrow 0$

Snadno dostáváme (v každém kroku uplatníme vždy všechna možná pravidla na všechny symboly)

$P_0 = 1$
$P_1 = 2 \quad 3$
$P_2 = 2 \quad 2 \quad 4$
$P_3 = 2 \quad 2 \quad 5 \quad 0 \quad 4$
$P_4 = 2 \quad 2 \quad 60504$
$P_5 = 2 \quad 2 \quad 7060504$
$P_6 = 2 \quad 2 \quad 8(1)07060504$

Indukcí můžeme dokázat, že pro všechna $n \geq 0$ platí $P_{n+6} = 2 \# 2 \# \# 8(P_n)08(P_{n-1})0 \quad 08(P_0)07060504$. Vývojová stadia P_6 , P_8 a P_{13} jsou na uvedeném obrázku.

Ač L -systémy vypadají na první pohled příliš jednoduše, než aby obsáhly složitost biologického vývoje, byly mimořádně úspěšně aplikovány při studiu mnoha organismů, v chemii a v řadě dalších disciplín. L -systémy však mohou být studovány nezávisle na jejich původní biologické motivaci, prostě z hlediska teorie formálních jazyků, což je také tendence posledních 3–4 let.

Literatura :

[1] M. Hladký: Přepisovací systémy, Rozhledy m. f.

Za texty úloh fyzikální olympiády uveřejněných v 9. čísle odpovídá Ústřední výbor FO v Brně.

Nerovnosti v geometrii

STANISLAV HORÁK, Praha

Matematikové — i zvučných jmen — se v současné době často zabývají nerovnostmi v geometrii, zejména v geometrii trojúhelníku. Používá se přitom zpravidla prostředků velmi jednoduchých. Obraty, jichž se při důkazech používá, jsou však umělé a mnohdy i nečekané, a tak si čtenář uvědomuje rozdíl mezi elementárním a triviálním.

Dřív než přistoupíme k důkazům několika vět, řekněme si něco o označení prvků. Vrcholy daného trojúhelníku jsou A, B, C , délky jeho stran a, b, c a velikosti úhlů α, β, γ . Poloměry kružnic danému trojúhelníku vepsaných jsou r, r_a, r_b, r_c , poloměr kružnice opsané je R a obsah trojúhelníku je S .

Věta 1. *V trojúhelníku platí*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}, \quad (1)$$

kde rovnost platí, právě když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz (obr. 1). Nad stranou AB v polorovině ABC sestrojíme rovnostranný trojúhelník ABC_1 . Z kosinové věty pro trojúhelník BCC_1 dostaneme (výraz hned upravujeme):

$$\begin{aligned} CC_1^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos(60^\circ - \beta) = \\ &= a^2 + c^2 - ac(\cos \beta + \sqrt{3} \sin \beta) = \\ &= a^2 + c^2 - 2S\sqrt{3} - ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2S\sqrt{3} \geq 0 \end{aligned}$$

Odtud již máme vztah (1).

Rovnost platí jedině tehdy, když $CC_1 = 0$, což nastane právě tenkrát, když daný trojúhelník je rovnostranný.

Věta 2. *O úhlech trojúhelníka platí*

$$\cotg \alpha + \cotg \beta + \cotg \gamma \geq \sqrt{3}.$$

Důkaz. Vyjdeme z kosinové věty pro trojúhelník ABC :

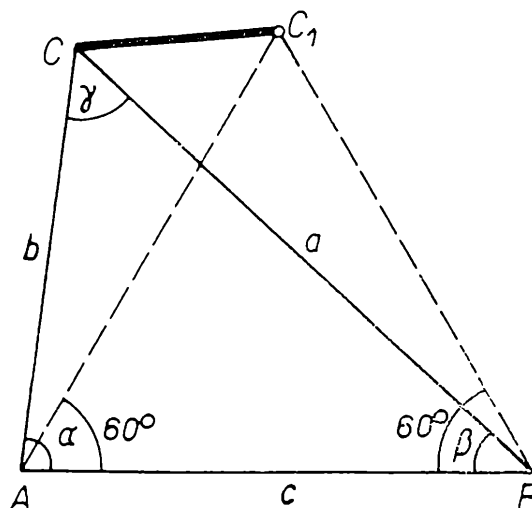
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - 4S \cotg \alpha$$

Další dvě rovnosti dostaneme cyklickou záměnou a sečtením všech tří dostaneme

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S (\cotg \alpha + \cotg \beta + \cotg \gamma) \geq 4S\sqrt{3},$$

kde — jak víme z věty (1) — platí rovnost pouze pro rovnostranný trojúhelník. Odtud již máme náš vztah

$$\cotg \alpha + \cotg \beta + \cotg \gamma \geq \sqrt{3}.$$



Obr. 1

K důkazu další věty budeme potřebovat dvě pomocné věty.

I. O úhlech v trojúhelníku platí

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1$$

Víme, že $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ (a další dvě relace cyklickou změnou), a potom stačí do předcházející rovnosti dosadit a po krátké úpravě zjistíme, že identita je správná.

II. Pro každá tři kladná čísla p, q, r platí

$$(p + q + r) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right) \geq 9$$

Oba trojčleny na levé straně nerovnosti vynásobíme a srovnáme:

$$3 + \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) + \left(\frac{q}{r} + \frac{r}{q} \right) + \left(\frac{r}{p} + \frac{p}{r} \right)$$

Podle známé věty je každý dvojčlen v závorkách větší než 2 a tím je věta II. dokázána.

Věta 3. *Dokažte, že o úhlech trojúhelníka platí*

$$V = \cotg^2 \frac{\alpha}{2} + \cotg^2 \frac{\beta}{2} + \cotg^2 \frac{\gamma}{2} \geq 9 ,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Víme, že

$$\cotg \frac{\alpha}{2} > 0, \quad \cotg \frac{\beta}{2} > 0, \quad \cotg \frac{\gamma}{2} > 0 ,$$

a proto

$$\cotg^2 \frac{\alpha}{2} + \cotg^2 \frac{\beta}{2} \geq 2 \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} ,$$

kde rovnost platí jen pro $\alpha = \beta$. Cyklicky dojdeme k dalším dvěma obdobným vztahům a sečtením máme

$$\begin{aligned} \cotg^2 \frac{\alpha}{2} + \cotg^2 \frac{\beta}{2} + \cotg^2 \frac{\gamma}{2} &\geq \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} + \\ &+ \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} , \end{aligned}$$

přičemž rovnost platí jen pro $\alpha = \beta = \gamma$.

S použitím pomocné věty II. máme

$$\begin{aligned} &\left(\tg \frac{\alpha}{2} \tg \frac{\beta}{2} + \tg \frac{\beta}{2} \tg \frac{\gamma}{2} + \tg \frac{\gamma}{2} \tg \frac{\alpha}{2} \right) \\ &\left(\cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} \right) \geq 9 \end{aligned}$$

Podle pomocné věty I. je výraz v první závorce roven 1, a proto

$$\cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} \geq 9$$

a odtud vyplývá správnost tvrzení věty 3.

Věta 4. *Dokažte, že výraz*

$$V = (r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) \cdot s^2$$

má nejmenší hodnotu, právě když daný trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Délky poloměrů kružnic vně vepsaných se dají vyjádřit jako funkce délek stran:

$$r_a = S \cdot (s - a), \quad r_b = S \cdot (s - b), \quad r_c = S \cdot (s - c).$$

Potom

$$\begin{aligned}
 r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 &= S^2 - (s-a)^2 + S^2 - (s-b)^2 + S^2 - (s-c)^2, \\
 (r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) / s^2 &= \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} + \frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)} + \\
 &+ \frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq \\
 &\geq \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1,
 \end{aligned}$$

jak jsme zjistili během důkazu věty 3. Rovnost platí jen a jen pro rovnostranný trojúhelník. Tím jsme zároveň provedli důkaz, že nejmenší hodnota podílu je pro rovnostranný trojúhelník, pro každý jiný trojúhelník je hodnota uvedeného podílu větší.

fyzika

Současné názory na prostor a čas

Ing. EVA VESELÁ, ČVUT—FSI, Praha

Prostor a čas jsou dva pojmy, které jsou nerozlučně spojeny s pojmem třetím — hmotou. Představa prostoru a času bez reálných hmotných procesů je pouhá myšlenková spekulace.

Prostorové vztahy můžeme definovat jako polohové (koexistenční) vztahy mezi hmotnými útvary. *Časové vztahy* můžeme definovat jako posloupné (sukcesivní) a vývojové vztahy mezi hmotnými procesy. Prostorovými vztahy a vlastnostmi mezi hmotnými útvary se zabývá *geometrie*. Začátky geometrie vznikaly asi ve 4. stol. př. n. l. v Euklidově díle. Tato tzv. euklidovská geometrie je založena na neměnných vztazích bezrozměrných bodů, čar bez šířky a ploch bez tloušťky. Tato geometrie vznikala ze zkušeností při měření geometrických útvarů běžných rozměrů. Otázkou, je-li tato euklidovská geometrie jedinou možnou geometrií a zda skutečně vystihuje skutečnost, se jako první zabýval C. F. Gauss (1816). Gauss se však chtěl nejprve pokusit o experimentální ověření a pak publikovat. Myšlenkou, že mimo běžné euklidovské geometrie jsou možné i geometrie jiné, se zabýval též ruský matematik N. I. Lobačevskij (1793—1856). Nezávisle na něm se podobnými myš-



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 53, 1974-75

Vydává

ministerstvo školství

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

VEDOUCÍ REDAKTOR: prof. Emil KRAEMER,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR: Doc. Ota SETZER,
nositel vyznamenání **Za vynikající práci**

REDAKČNÍ RADA: Dr. Jaroslav Bayer, VÚT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nositel vyznamenání Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha

Úvodníky

Čapek Vratislav: Únor 1948, mezník ve vývoji Československa k socialismu	289
Žofka Josef: Ke třicátému výročí Slovenského národního povstání	433
Květnové povstání českého lidu	433

Matematika

Berger J.: Množství informace v živém organismu	494
Brejcha Josef: Některé vlastnosti úplného čtyřstranu	258
Calda Emil: Od dětské hry k průniku doplňků množi	344
Princip inkluze a exkluze	389
Řešení některých rekurentních rovnic	435
Drábek Karel: Úloha o elipsách a Fibonacciho čísla	446
Ferjenčík Ludovít: Ještě o součtech mocnin, mnohočlenech a kombinatorice	392
Hladký Miroslav: Lindenmayerovy systémy	496
Přepisovací systémy	440
Zásobníkové automaty	349
Horák Stanislav: Eulerova konstanta	444
Nerovnosti v geometrii	499
Racionální body na algebraických křivkách	291
Středové kuželosečky	155
Iláš Štefan: Lomená čára a súvislosti s ňou	145, 246
Kočandrlová Milada: Spočetné a nespočetné množiny	481
Kussová Blanka: Některé vlastnosti nekonečných množin	385
Malík Marek: Axióm o supremu	2
Co jsou normální algoritmy	490
Matoušek Zdeněk: Číselné řady	241
Mišoň Karel: Dyadické početní kouzlo	55
Pavlas Karel: Několik úloh o pokrývání	61, 103
Skuhra Jiří: Problém Ludolfova čísla	100
Problém muže s vosami	251
Problém námořníka jima	150
Přesnost odhadů získaných metodou Monte Carlo	486
Problém rodin s pěti dětmi	353
Problém sběratele známek	294
Problém simulace náhodných procesů	58
Straka Josef: Gaussovy funkce	296
Lineární rovnice s výrazy $[ax+b]$	337
Svoboda Jiří: Modelování jednoduché činnosti živých systémů logickými sítěmi	254
Tesařík Bohumil: Zaokrouhlování čísel a jejich zápis	13
Wohlmuthová Anežka: Jensenovy nerovnosti	97
Konvexní a konkávní funkce	7
Středová konvexnost elementárních funkcí	49

Konstruktivní geometrie

Drábek Karel: Oskulační kružnice kuželoseček	66
Drs Ladislav: Viditelnost bodů a křivek plochy	161
Fiala Jiří: Inspiro a trochoidy	164
Filip Jozef: Kruhové rezy na kruhové kuželové ploše	16
Hradecký František: Stereografický průmět souměrnosti podle rovníku	399
Medeková Tatiana: K jedné konstrukci dotýcníc paraboly	158
O asymptotách hyperboly	107
Skalický Václav: Rovina totožnosti	14

Fyzika

Baník Rastislav: Zaujímavý jav na kondenzátore	307
Bednář Jan: Bouřky jako důležitý faktor v atmosférické elektřii	269
Bednářik M., Široká M.: Jedeme po silnici se stoupáním	70
Jedeme s kopce	22
Houdek Oldřich: Přeměna energie v kmitající soustavě	314
Janout Zdeněk: Spojený ústav jaderných výzkumů v Dubně (SSSR)	320, 359
Kotyk Josef: Hmotný střed soustavy hmotných bodů	18
Machán Ján: Hologram	418
Mišoň Karel: Beztížnost v letadle	317
Raketová rovnice	411

Myslík Jiří: Grafy signálních toků	265
Použití grafů signálních toků v elektrotechnice	356
Pospíšil Jiří: Spojové družice	402
Rajčan E.: O platnosti Ohmovho zákona akustiky	109
Scholtz Elemír: Magnetické vlastnosti atomů	422, 449
Šedivý Jaroslav: Zjednodušování grafů signálních toků	302
Šolc Ivan: Optické a piezoelektrické měření tloušťky vakuově napařených vrstev	113
Veselá Eva: Současné názory na prostor a čas	502
Wohlmuthová Anežka: Sluneční energie	409

Astronomie

Široká M., Široký J.: Astronomická refrakce	272
Kosmické zdroje rentgenového záření	427
Librace Měsíce	76
O modelech sluneční soustavy	455
Pohyby Měsíce	30
Sluneční skvrny	511
Zákryty hvězd Měsícem	170
Široký Miroslav: Cygnus XR-1=„černá jáma“?	509

Různé

Drábek Karel: Výročí narozenin pěti profesorů pražské vysoké technické školy	515
Horák Stanislav: Euklides Danicus	325
Jedinák Dušan: Za dejinami matematiky	328
Zo života a diela A. M. Ampèra	278
Kotyk Josef: Hrst vzpomínek	323
Karl Friedrich Gauss	279
Michajl Vasiljevič Lomonosov	138
Z počátků paroplavby	476
Z počátků železnic	368
Mišoň Karel: Československá akademie věd	363
Morkes František: Christian Doppler	519
Šedivý Jaroslav: Georg Cantor a sto let teorie množin	46
Krátké texty o logaritmech	327
Stanislav Vydra	189
Zajímá vás původ slov?	92
Šindelář Václav: Sto let metrické konvence	474
Šípek Zdeněk: K 200. výročí školské reformy J. I. Felbingera a založení Státního pedagogického nakladatelství	285
Zprávy	141, 521

Olympiády

Koštál Rostislav: VII. MFO ve Varšavě	119
Moravčík Jozef: Matematické nádeje súťažili v Erfurte	121, 179
MO	34, 431
FO	117, 458

Naše soutěž

Řešení úloh loňské soutěže	40, 130, 173
Úlohy k řešení	79, 127
Výsledky loňské soutěže	82

Nejmladším čtenářům	48, 95, 379, 432, 523
---------------------	-----------------------

Matematické zábavy	335, 372
--------------------	----------

Ze zahraničních časopisů	330, 377
--------------------------	----------

Recenze	142, 192, 331, 383, 480, 522
---------	------------------------------

Redakce hovoří	144
----------------	-----

lenkami zabýval i maďarský matematik J. Bolyai (1802—1860), který vyslovil názor, že skutečné vlastnosti prostoru by mohly vystihovat lépe jiné geometrie než geometrie euklidovská.

K úvahám o možnosti existence těchto tzv. neeuklidovských geometrií daly podnět pochybnosti o axiomu o rovnoběžkách, které nás myšlenkově vedou k pojmu *zakřivený prostor*. Tím se dostáváme též ke geometrickým otázkám, je-li např. u velkých trojúhelníků, majících vesmírné rozměry, součet úhlů větší, roven či menší než 180 stupňů.¹⁾ Řešení této otázky podala pak obecná teorie relativity, podle které závisí geometrie na rozložení hmot v dané časoprostorové části vesmíru a součet úhlů v trojúhelníku je nutně odlišný od 180 stupňů.

Dalším ze zakladatelů neeuklidovské geometrie byl německý matematik B. Riemann (1826—1866), který matematicky vytvořil soustavy, které se sice dosavadní geometrii podobají, ale neomezují se jen na prostorové vztahy. Při matematickém zpracování analyzujeme všechny body tohoto prostoru matematicky tak, jako kdyby to byly body geometrické. Hovoříme pak o prostorech více než trojrozměrných a všechny úvahy o těchto prostorech nazýváme geometriemi, i když nepojednávají jen o polohových vztazích mezi tělesy. Např. Einsteinova teorie relativity předpokládá čtyřrozměrný prostor, který má tři souřadnice prostorové a čtvrtou souřadnici, kterou je čas.²⁾

Klasická fyzika vztahovala veškeré dění k Newtonovu absolutnímu prostoru a k absolutnímu času. Tyto dva pojmy na sobě vůbec nezávisely a Newton sám, zakladatel klasické mechaniky, je definoval takto: Absolutní, pravý a matematický čas plyne sám o sobě a podle své povahy rovnoměrně bez vztahu k jakékoli vnější věci. Absolutní prostor, který svou povahou nesouvisí s čímkoli vnějším, je stále týž a nehybný. Absolutní pohyb je posuv nějakého tělesa z jednoho absolutního místa do druhého (viz lit. 1, překlad viz lit. 3).

Speciální teorie relativity

Tuto teorii vytvořil Albert Einstein (1879—1955) roku 1905. Speciální teorie relativity je založena na přezkoumání tzv. *Galileiho principu relativity*, který nám říká, že platí-li zákony mechaniky v některé souřadné soustavě, pak platí i v každé další soustavě souřadné, která se vzhledem k první soustavě pohybuje pohybem rovnoměrným přímočarým.

¹⁾ Tak např. v geometrii, kterou vypracoval Lobačevskij a Bolyai platí, že součet úhlů v trojúhelníku je vždy menší než 180 stupňů, a v geometrii Riemannově je vždy součet úhlů v trojúhelníku větší než 180 stupňů.

²⁾ Aby rovnice byla rozměrově správná, musí mít i čtvrtá souřadnice rozměr délky, pak je nutno rozměr času vynásobit rozměrem rychlosti a v teorii relativity je pak čtvrtý rozměr roven $c \cdot t$, kde c je rychlost světla ve vakuu a t je čas.

Pro pochopení tohoto principu relativity je nutno definovat si pojem souřadná soustava. Je to vztažná soustava sestavená z pevných a neproměnných těles. Každý pohyb či fyzikální děj musíme nutně vztahovat k určité vztažné soustavě a není tedy možno říci, zda dané těleso se pohybuje rovnoměrně přímočaře resp. pohybem rovnoměrně zrychleným, ale že dané těleso se pohybuje rovnoměrně přímočaře, resp. pohybem rovnoměrně zrychleným *vzhledem* k souřadné soustavě spojené se Zemí. Vyšetřujeme-li např. pohyb bomby vypuštěné z letícího letadla, můžeme vztahovat tento pohyb k souřadné soustavě spojené se Zemí, a pak bude horizontální složka rychlosti bomby konstantní a rovna velikosti rychlosti letadla vzhledem k Zemi v časovém okamžiku, kdy byla bomba vypuštěna; nebo můžeme považovat za souřadnou soustavu (vztažný systém) letadlo, které se samo pohybuje určitou rychlostí, a bude-li tato rychlost od okamžiku vypuštění bomby konstantní, pak se horizontální složka rychlosti bomby vzhledem k tomuto souřadnému systému bude rovnat nule a bomba dopadne přesně do místa položeného pod letadlem (uvažujeme-li pohyb ve vzduchoprázdnu).

Soustavy, které se vzájemně pohybují pohybem rovnoměrným přímočarým, nazýváme soustavami *inerciálními*. Jsou to tedy takové soustavy, kde platí zákony mechaniky. Ze zkušenosti víme, že např. ve vlaku, pokud se pohybuje konstantní rychlostí a přímým směrem, dávají fyzikální pokusy tytéž výsledky jako na Zemi. Ale jakmile se vlak zastavuje či zrychluje nebo jede do zatáčky, přestávají tyto zákony platit (padají kufry atd.).

Galileiho princip relativity platí tedy pro mechanické jevy. Zajímá nás nyní, platí-li také i pro ostatní nemechanické jevy. Naše úvahy se budou týkat vlnění, a to nejprve šíření zvuku. Aby byl zvuk slyšitelný, potřebuje ke svému přenosu vždy nějaké prostředí, čili můžeme vše vysvětlovat opět mechanicky, a Galileiho princip relativity bude opět splněn (v souřadné soustavě spojené s vlakem, ve kterém je zdroj zvuku, se šíří zvuk všemi směry stejnou rychlostí, a v souřadné soustavě spojené se Zemí je rychlost zvuku v různých směrech různá — ve směru pohybu větší a proti směru pohybu menší. Nyní budeme uvažovat šíření dalšího vlnění (elektromagnetického) — světla, a bude nás zajímat velikost rychlosti šíření světla v různých směrech při pohybu zdroje světla. Provedeme-li stejnou úvahu jako v předchozím případě, dospějeme k závěru, že ve směru pohybu zdroje světla je rychlost větší a proti směru pohybu zdroje bychom dostali hodnotu menší). Závěr by tedy zněl: rychlost světla závisí na rychlosti světelného zdroje. Ovšem, uvažujeme-li dále tak, že v případě, kdy naše rychlost by byla větší než rychlost světla, mohli bychom světelný paprsek předběhnout a mohli bychom vidět události odehrávající se v minulosti, neboť by bylo možno dostihnout světelné vlny vyslané dříve. Zachycovali bychom je v obráceném pořadí a události bychom viděli jako film promítaný pozpátku.

Všechna pozorování, která byla učiněna, odporují tomuto závěru, čili logicky bez jakéhokoli důkazu z toho musí plynout závěr, že *rychlost světla je ve všech souřadných systémech stejná a nezávisí na tom, zdali a jak se světelný zdroj pohybuje*. Jedním z fyzikálních pokusů, které tento logický závěr potvrzují, je známý Michelsonův-Morleyův pokus (1887), při kterém byla měřena rychlost světla ve směru a proti směru pohybu Země a v obou případech byla naměřena přesně táž rychlost. Z tohoto pokusu, který se nejprve zdál být nevysvětlitelný, vyplývá, že tedy neplatí *Galileiho princip relativity*.

Závěry plynoucí z těchto úvah a pokusů jsou tedy tyto: klasická transformace (a Galileiho princip relativity) nemůže splňovat podmínku, aby rychlost čehokoli (tedy i rychlost světla) byla konstantní i při pohybujícím se zdroji vlnění. Z toho nutně vyplývá, že se této jednoduché transformace musíme vzdát a že je nutno ji nahradit jinými zákony. Zákony, které platí i nadále a ze kterých je tedy nutno vycházet, jsou tyto:

1. Rychlost světla ve vakuu je pro všechny inerciální souřadné systémy stejná.

2. Všechny přírodní zákony jsou ve všech relativně k sobě přímočaře se pohybujících systémech stejné.

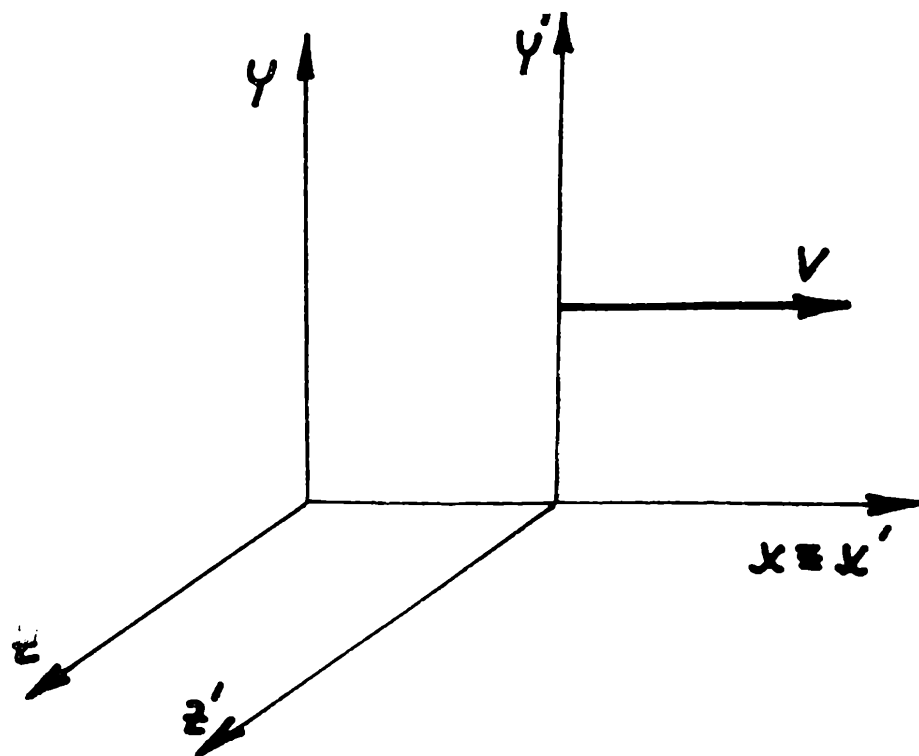
Tyto dva předpoklady jsou základem *Einsteinovy speciální teorie relativity*.

Z principu stálé rychlosti světla plyne např. závěr, že dva děje současné vzhledem k jedné soustavě souřadné nejsou současné, vztahujeme-li je k soustavě jiné, která je v relativním pohybu k soustavě první, čili nám „hodiny“ (pod pojmem hodiny si představujeme libovolný periodický děj s konstantní dobou kyvu) v obou souřadných systémech nemohou ukazovat týž čas, resp. tytéž časové intervaly. Tím se logicky dostáváme k pojmu *časoprostor*, tedy k nutnosti spojit čas s daným souřadným systémem, a na oba tyto pojmy (prostor a čas) musíme hledět jako na něco, co není možno od sebe oddělit.

Z relativnosti současnosti plynou pak ještě další závěry. Pro délku tyče, kterou definujeme jako vzdálenost dvou současných poloh jejích koncových bodů, tak plyne z relativnosti současnosti i nutnost relativnosti délek a v důsledku toho pak i relativnost hmotností (matematické vztahy viz dále).

Jak bylo uvedeno, Einsteinova teorie relativity používá čtyřrozměrného zobrazovacího prostoru, kde jako čtvrtý rozměr vystupuje čas. Tuto novou transformaci, která nám nahrazuje klasickou Galileiho transformaci, nazýváme *transformací Lorentzovou*. V této transformaci vystupují tedy transformační zákony nejen pro prostor, ale i pro čas. Druhý z principů speciální teorie relativity nám říká, že přírodní zákony musí být ve všech relativně se k sobě rovnoměrně přímočaře pohybujících systémech souřadných stejné čili *invariantní*, musí tedy splňovat

Obr. 1



Lorentzovu transformaci. Ve všech inerciálních systémech platí stejné zákony a přechod z jedné soustavy souřadné do druhé je dán Lorentzovou transformací.

Uvažujme pro jednoduchost dvě inerciální soustavy (nečárkovanou a čárkovanou), které se pohybují navzájem rovnoměrně přímočaře relativní rychlostí $v = \text{konst.}$ ve směru osy $x \equiv x'$ (viz obr. 1). Pak platí matematické vztahy pro

Galileiho transformaci:

$$\begin{array}{ll} x = x' + vt & x' = x - vt \\ y = y' & y' = y \\ z = z' & z' = z \\ t = t' & t' = t \end{array}$$

Lorentzovu transformaci:

$$\begin{array}{ll} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y & y = y' \\ z' = z & z = z' \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array}$$

Důsledky plynoucí z Lorentzovy transformace:

Kontrakce délek. Při pohybu nastává zkrácení rozměrů těles ve směru jejich pohybu. Označíme-li si délku tyče, která je vůči pozorovací sou-

stavě v klidu jako l_0 , pak pohybuje-li se tato tyč vůči této soustavě rychlostí v ve směru l_0 , bude její délka za pohybu rovna

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dilatace času. Označíme-li si dobu trvání nějakého děje (např. doby kyvu kyvadla) v soustavě, která je vzhledem k pozorovací soustavě v klidu, jako t_0 , pak doba trvání téhož děje v soustavě, která se vůči pozorovací soustavě pohybuje relativní rychlostí v , bude

$$t = t_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

a tedy nastává za pohybu prodlužování doby trvání dějů.

Změna hmotnosti. Z Einsteinovy teorie relativity vyplývá, že hmotnost se vzrůstající rychlostí tělesa roste. Označíme-li si hmotnost tělesa, které je vůči pozorovací soustavě v klidu jako m_0 , pak pro jeho hmotnost při pohybu bude platit

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Při pohledu na Einsteinovy vzorce vidíme, že klasická Galileiho transformace je pouze speciálním případem Lorentzovy transformace a platí jen tehdy, jsou-li relativní rychlosti obou souřadných systémů vzhledem k rychlosti světla malé. Dále je zřejmé, že při vzrůstu rychlosti hmotného tělesa roste jeho hmotnost a při rychlosti rovné rychlosti světla by jeho hmotnost byla nekonečně velká. Z toho plyne velmi důležitý závěr teorie relativity, že totiž *žádné hmotné těleso nemůže nabýt rychlosti, která by byla větší nebo rovna rychlosti světla.*

Hlavní rozdíl mezi klasickou transformací a transformací Lorentzovou je ten, že v Lorentzově transformaci *není* čas invariantní. Tedy podle teorie relativity musí mít každá souřadná soustava vlastní hodiny, které jsou v klidu (neboť pohyb mění rytmus hodin). Pak dva pozorovatelé ve dvou různých souřadných systémech přiřadí jak místu tak i času, v němž se událost děje, různá čísla.

Dalším důsledkem plynoucím z teorie relativity je nový názor na energii. Je zřejmé, že těleso v klidu má hmotnost, ale nemá kinetickou energii. Pohybující se těleso má jak pohybovou energii tak hmotnost (ta se však podle teorie relativity zvětšuje se vzrůstající rychlostí tělesa), čili pohybující se těleso klade větší odpor změně rychlosti než těleso

v klidu. Kvantitativně je možno tento poznatek formulovat tak, že veškerá energie klade odpor změně pohybu, čili že veškerá energie se chová jako hmotnost (např. kus železa má větší hmotnost, je-li rozžhaven než za studena). Podle teorie relativity není žádný rozdíl mezi hmotností a energií. Vztah mezi těmito dvěma veličinami je vyjádřen Einsteinovým vzorcem $E = m \cdot c^2$, kde m je hmotnost tělesa.

Obecná teorie relativity (A. Einstein, 1915)

Tato teorie se snaží formulovat fyzikální zákony tak, aby platily pro všechny souřadné systémy (nikoli tedy pouze pro systémy inerciální). Jedním z fyzikálních zákonů, který nebyl invariantní vůči Lorentzově transformaci (tedy vůči speciální teorii relativity), je Newtonův gravitační zákon. Je tedy zřejmé, že tento zákon nebude invariantní ani vůči obecné teorii relativity (ta platí i pro neinerciální systémy). Z toho logicky vyplývá, že obecná teorie relativity nám dá nové názory na gravitaci. Řešením rovnic obecné teorie relativity dostáváme vztah mezi gravitací a metrikou prostoru. Svět není euklidovský a jeho geometrie je dána rozložením hmot a jejich rychlostí.

Zakřivení prostoru je závislé na místním a časovém rozložení hmot. Protože se rozdělení hmoty ve vesmíru časově i prostorově mění, musí se měnit i vlastnosti tohoto prostoru. V tomto tzv. časoprostoru se v dosahu přitažlivosti hmot světelné paprsky pohybují po tzv. geodetických čarách v geometrii daného prostoru. Na Newtonův gravitační zákon se musíme dívat jako na speciální případ obecné teorie relativity, který platí pouze pro slabé gravitační účinky.

Z Einsteinovy speciální a obecné teorie relativity vyplývají matematické a fyzikální důvody pro nerozlučné spojení pojmů prostor, čas, hmota a energie. Správným výkladem dostaneme nový názor na pojetí světa.

Literatura

1. Newton, I., *Mathematische Principien der Naturlehre*, Anmerkung zu den einleitenden Definitionen, Lipsko 1889.
2. Einstein, A., Infeld, L., *Fyzika jako dobrodružství poznání*, Orbis, Praha 1959.
3. Hollitscher, W., *Příroda ve vědeckém obrazu světa*, Státní nakladatelství politické literatury, Praha 1961.
4. Horák Z., Krupka, F., *Fyzika*, SNTL 1966.
5. Votruba, V., *Základy speciální teorie relativity*, Academia Praha 1969.
6. Havlíček, K., *Kde žijeme?*, JČMF 1949.

Cygnus XR-1 = „černá jáma?“

V článku „Existují ‚černé jámy‘?“, otištěném v našem časopise (č. 9) předminulého ročníku, jsme čtenáře seznámili s teoretickými úvahami o konečném stadiu vývoje hvězdy. Nyní bychom chtěli upozornit na další výzkumy v tomto směru, a to z článku doktora fyzikálně-matematických věd *J. D. Novikova*, otištěném v časopise *Zemlja i Vselennaja*, 1973, č. 2 pod názvem „Zákony fyziky a nové objevy v astronomii“.

Konečnou etapou aktivního života hvězdy je tzv. pulsar; je to těleso s poměrně malou hmotností. Ve stadiu pulsaru setrvává hvězda jen poměrně krátkou dobu — jeden až deset miliónů roků. Pak všechny procesy v neutronové hvězdě končí a hvězda se postupně ochlazuje. Kdyby byla ponechána sama sobě, mohla by se ochladit až na teplotu 3 K, což je teplota tzv. reliktového záření, které proniká celým vesmírem. A v takovém stadiu by pak mohla setrvat po neomezeně dlouhou dobu.

Ve vesmíru však hvězdu obklopuje plyn, který na ni padá, zahřívá se při srážkách s jejím povrchem a vysílá rentgenové záření. Jestliže je neutronová hvězda složkou dvojhvězdy a teče-li z atmosféry „normální“ hvězdy plyn, pak se může dostat do gravitačního pole neutronové hvězdy. V takovém případě se proud plynů a intenzita rentgenového záření neobyčejně zvyšuje. Takový rentgenový pulsar byl již ve dvojhvězdě objeven. Je to zdroj rentgenového záření označený jako Hercules XR-1 (tj. první zdroj rtg záření v souhvězdí Herkulesa). Předpověď sovětského vědce Lva Davidoviče Landaua z r. 1932 o existenci neutronových hvězd byla jednou z nejdůležitějších v astrofyzice.

Jinou významnou předpověď učinili v r. 1939 J. R. Oppenheimer a H. Snyder. Na základě obecné teorie relativity dokázali, že je-li hmotnost hvězdy podstatně větší než hmotnost Slunce, pak její smršťování na konci vývoje nemůže být zastaveno pružností „jaderné kapaliny“. Za desítky sekund se ohromná hvězda smrští na velikost Země, vybuchne jako supernova a odvrhne plynný obal. Jestliže má zbylá látka hvězdy hmotnost větší než dvě hmotnosti Slunce, pak nastává katastrofické smrštění — gravitační kolaps. Jestliže poloměr hvězdy dosáhne gravitačního poloměru, který se vypočítá ze vzorce $r = 2\kappa M/c^2$ a který je pro Slunce roven 3 km, pak již gravitační síly nepustí z takové oblasti žádné záření, žádné hmotné částice. Na kolabující hvězdu padá všechno, ale nic odtud nevychází, nic se nevyzáří. Tak vzniká ve vesmíru „černá jáma“; toto obrazné pojmenování je od amerického fyzika J. Wheelera.



Obr. 1. Model dvojhvězdy Cygnus XR-1

Černé jámy pro nás nejsou jen novým úkazem ve vesmíru, ale též zvláštními dveřmi do nové oblasti v poznávání světa.

Teoretikové vypracovali i metody hledání černých jam. Akademik J. B. Zeldovič a jeho spolupracovníci aplikovali na neobvyklou situaci základní fyzikální zákony a předpověděli, k čemu musí docházet v okolí černých jam.

Černá jáma, jejíž hmotnost je rovna dvěma hmotnostem Slunce, má poloměr 6 km. V její blízkosti je gravitační pole velmi intenzivní, ale ve větší vzdálenosti je již stejné jako u normální hvězdy téže hmotnosti. Obklopující plyn tedy dopadá na černou jámu a za celou dobu existence Galaxie může na osamocenou černou jámu dopadnout plyn, jehož hmotnost je 10^{-4} hmotnosti slunce. Plyn, který se blíží k černé jámě, se zahřívá, zesiluje se jeho magnetické pole a vyzařuje se energie velmi rychlých nabitých částic. Dříve než plyn dosáhne kritické oblasti o poloměru, rovném gravitačnímu, musí se vyzářit. V optickém pásmu je zářivost černé jámy kolem 10^{25} W, ale to je jen malá část zářivosti Slunce ($4 \cdot 10^{26}$ W); z toho je zřejmé, že osamocenou černou jámu bude velmi obtížné objevit mezi ostatními hvězdami, které pozorujeme.

Je-li však černá jáma složkou dvojhvězdy, pak budou všechny procesy probíhat mnohem intenzivněji. Proud plynu k takové černé jámě z obálky normální hvězdy bude o pět řádů větší než je tomu u osamocené černé jámy. Pokud složky dvojhvězdy obíhají kolem společného těžiště, pak plyn, vytékající z normální hvězdy, se zatačí (zakřivuje) a vytváří disk kolem černé jámy (obr. 1). Částice plynu se pohybují po kruhových drahách, přecházejí z jedné dráhy na druhou, stále blíže k černé jámě, dokud na ni nedopadnou. Při tom se uvolňuje energie. Poněvadž teplota plynného disku dosahuje 1 až 10 miliónů kelvinů, může tento plyn zářit v rentgenovém oboru; proto černé jámy můžeme hledat mezi zdroji rentgenového záření.

Již po několik let obíhá kolem Země umělá družice nazvaná „Uhuru“ (ve svahilštině to znamená svoboda), a s její pomocí bylo objeveno 120 zdrojů rentgenového záření. Několik z nich má vlastnosti, které

teoretici předpokládají u černých jam. J. Wheeler předpověděl, že černé jámy, stejně jako neutronové hvězdy, budou objeveny za 33 roků od jejich předpovědi, tj. v r. 1972. Wheelerova předpověď, jak se zdá, byla splněna. Většina odborníků zastává názor, že první černá jáma byla již objevena.

Zdroj rentgenového záření, který má vlastnosti charakteristické pro černou jámu, označuje se Cygnus XR-1 (první zdroj rtg záření v souhvězdí Labutě). Intenzita rentgenového záření je 10^{30} W, což o čtyři řády převyšuje zářivost našeho Slunce.

Cygnus XR-1 je dvojhvězda. Normální hvězda, kterou pozorujeme, patří do spektrální třídy B. Ve spektru dvojhvězdy byly objeveny čáry vysoce ionizovaného hélia, které mohou vznikat jen v plynném disku kolem černé jámy, kde je teplota velmi vysoká. Pokud složky dvojhvězdy obíhají kolem společného těžiště, pak se spektrální čáry hvězdy a čáry hélia posunují podle Dopplerova jevu. Pak ze zákonů kosmické mechaniky můžeme vypočítat hmotnost normální hvězdy a neviditelné složky, jejíž gravitace způsobuje dopadání plynu a jeho záření. Normální hvězda má hmotnost 20krát větší než je hmotnost Slunce, neviditelná složka má hmotnost desetkrát větší než hmotnost Slunce. Poněvadž hmotnost bílých trpaslíků nemůže být větší než 1,5 hmotnosti Slunce a hmotnost neutronových hvězd nemůže být větší než dvě hmotnosti Slunce, pak neviditelné těleso ve dvojhvězdě Cygnus XR-1 nemůže být ani jedním z obou případů. A rovněž nemůže být ani normální hvězdou, neboť jak ukázalo studium rentgenového záření, není její poloměr větší než tisíc kilometrů.

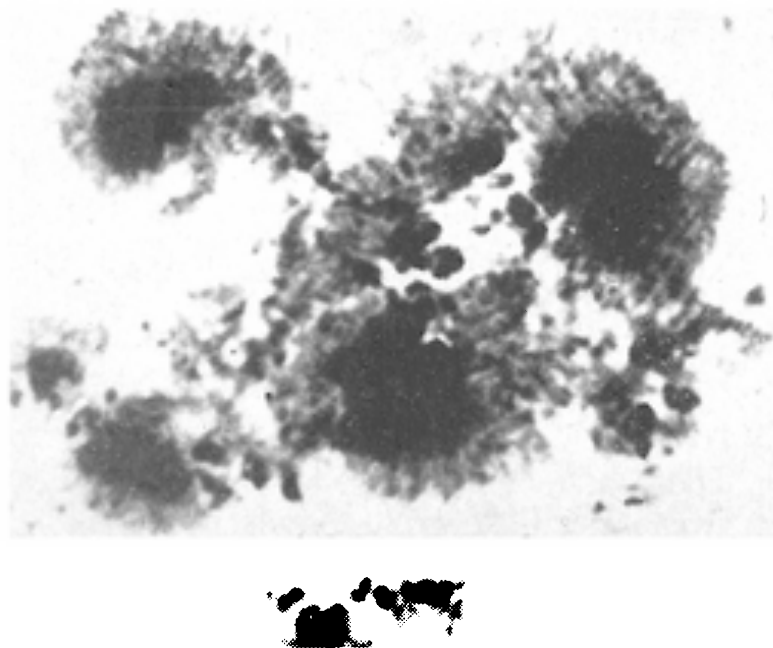
Je tedy pravděpodobné, že neviditelná složka v soustavě Cygnus XR-1 je černá jáma. Jestliže se v dalších výzkumech potvrdí zde vyslovené předpoklady, pak to bude významný objev astronomie a nový triumf teoretické astrofyziky.

Zkráceně přeložil a upravil *dr. Jaromír Široký*

Sluneční skvrny

RNDr. JAROMÍR ŠÍROKÝ — RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

V červnu 1611 vyšla práce německého astronoma Jana Fabricia (nar. 1587, zemř. kolem r. 1615), nazvaná „O slunečních skvrnách“. Skvrny na Slunci pozoroval koncem roku 1610 italský fyzik a astronom Galileo Galilei; ten však svá pozorování uveřejnil až v roce 1612. Téměř současně s nimi pozoroval sluneční skvrny Christian Scheiner, který z pozorování slunečních skvrn určil dobu rotace Slunce na 25,5 dne.



Obr. 1. Fotografie velké skupiny slunečních skvrn

Sluneční skvrny mají obvykle tmavší jádro (nazývané umbra, tj. stín), které je obklopeno méně tmavým polostínem (penumbra). Tvar skvrn bývá kruhovitý nebo nepravidelný. Velikost skvrn je různá, některé velké skvrny dosahují až 200 000 km. Je-li průměr skvrny alespoň 50 000 km, pak ji můžeme uvidět i pouhým okem. Sluneční skvrny se jeví tmavší vzhledem k jasnějšímu pozadí, neboť jde o chladnější místa fotosféry; jejich teplota je asi o 1000 K nižší než teplota okolního plynu, tzn., že teplota skvrn je kolem 5000 K.

Často se skvrny vyskytují ve skupinách (obr. 1), které prodělávají vývoj. Podle klasifikace vypracované na Curyšské hvězdárně můžeme ve vývoji skupiny slunečních skvrn odlišit devět typů, označených písmeny *A* až *I* (obr. 2). Avšak každá skupina nemusí prodělat celý vývoj, většina menších skupin projde vývojovým cyklem $A \rightarrow B \rightarrow A$ nebo $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ nebo $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow I$ apod. Doba, v níž skupina prochází jedním vývojovým typem, roste od typu *A* k typu *I*. Ve stadiu *A* setrvává skvrna průměrně jeden den, ve stadiu *F* pak 12 až 15 dní a ve stadiu *H* a *I* též po několik týdnů.

V roce 1843 objevil astronom-amatér Heinrich Schwabe (po dvacetiletém soustavném pozorování skvrn), že se počet skvrn na Slunci mění periodicky v jedenáctiletém období. K vyjádření počtu skvrn a tím i činnosti Slunce zavedl švýcarský astronom Rudolf Wolf velmi jednoduchý způsob, kterým je tzv. relativní číslo *R*, definované vztahem

$$R = k(10g + f),$$

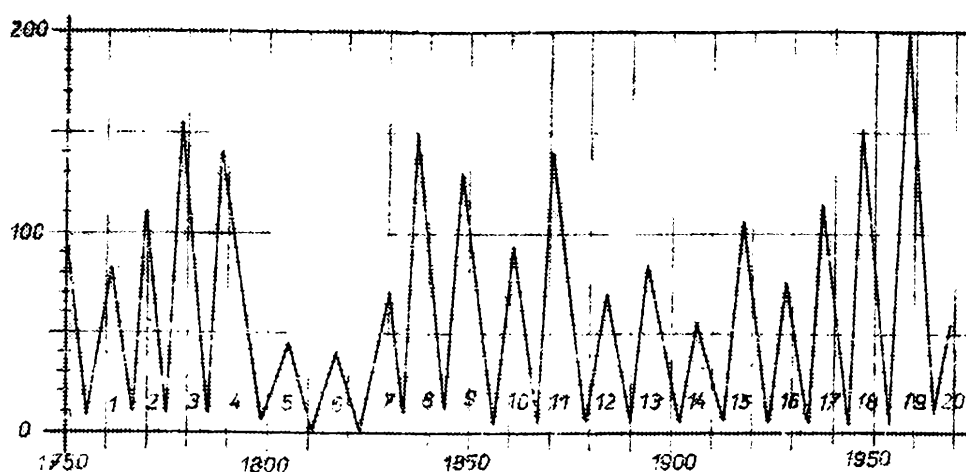
kde *g* je počet skupin slunečních skvrn a *f* počet všech skvrn viditelných

A	
B	
C	
D	
E	
G	
H	
I	

Obr. 2. Curyšská klasifikace slunečních skvrn

v okamžiku pozorování na Slunci. Protože při pozorování různě velkými dalekohledy následkem různé rozlišovací schopnosti bychom spatřili (rozlišili) různý počet slunečních skvrn, je třeba naše pozorování násobit redukčním koeficientem k , jehož číselná hodnota je závislá na použitém dalekohledu, pozorovací metodě a pozorovateli. Jen tak je možno srovnávat a statisticky zpracovávat pozorování, vykonaná na různých místech Země. Hodnota koeficientu k se tedy určuje pro každého pozorovatele dodatečně za předpokladu delší pozorovací řady; zhruba platí, že $0,55 \leq k \leq 1,0$. Z denních hodnot relativního čísla se počítají průměrná měsíční a roční relativní čísla. Na obr. 3 je znázorněn průběh relativních čísel od r. 1750 do r. 1970.

Skvrny se vyskytují ve dvou pásmech rovnoběžných se slunečním rovníkem a jejich šířka je 15° až 20° . Na počátku jedenáctiletého cyklu jsou středy těchto pásem ve vzdálenosti $\pm 28^\circ$ od slunečního rovníku během cyklu postupují skvrny k rovníku a dosahují vzdálenosti $\pm 10^\circ$



Obr. 3. Průběh relativního čísla R od r. 1750

na jeho konci. Začátek nového cyklu sluneční činnosti se ohlašuje výskytem skvrn ve větších úhlových vzdálenostech od rovníku. Sluneční skvrny jeví však i vlastní pohyby ve fotosféře. Bylo zjištěno, že skvrny, které jsou ve vzdálenosti menší než $\pm 16^\circ$ od rovníku, se pohybují směrem k rovníku, skvrny ve větší vzdálenosti od rovníku se pohybují směrem k pólům.

O slunečních skvrnách bylo zjištěno, že mají poměrně silné magnetické pole, jehož indukce dosahuje několik desetin T (tesla). Fyzikální podstata slunečních skvrn není dosud uspokojivě vysvětlena. Víme, že jejich vznik je vázán na tzv. aktivní oblasti na Slunci, že se v nejnižších vrstvách fotosféry pozoruje proudění plynů směrem ze skvrny, ve vyšších vrstvách dochází naopak k proudění plynů směrem do skvrny. Významnou roli hraje při vytváření slunečních skvrn magnetické pole, které je průvodním jevem elektrických proudů ve vysoce ionizovaném plynu. Byla objevena souvislost sluneční činnosti např. se změnami zemského geomagnetického pole, s polárními zářemi a magnetickými bouřemi.

K pozorování Slunce je třeba speciální tzv. helioskopický okulár, který propustí jen malou část slunečního záření. Nejlépe je však promítnout obraz Slunce na stínítko (bílý papír) a na něm teprve pozorovat sluneční skvrny. Nesmíme se nikdy podívat na Slunce přímo hvězdářským dalekohledem, neboť bychom si vážně poškodili zrak.

různé

Výročí narozenin pěti profesorů pražské vysoké technické školy

Doc. RNDr. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT, Praha

V letošním roce vzpomeneme výročí narozenin čtyř profesorů deskriptivní geometrie a jednoho profesora matematiky, kteří působili na pražské vysoké škole technické postupně v letech 1864 až 1958, tedy do doby teprve nedávno minulé. Všichni se svou celoživotní vědeckou a společenskou prací velmi zasloužili o rozvoj a slávu této školy, o které je známo, že se vyvinula z nejstarší inženýrské školy ve střední Evropě, založené podle císařského (česky psaného) reskriptu v roce 1707, ve skutečnosti činné od roku 1717. Stalo se tak na (rovněž česky psanou) žádost císařského inženýra Christiana Josefa Willenberga (1676—1731). Také královské české stavovské technické učiliště, vzniklé z ní v roce 1806, jemuž byla vzorem francouzská École polytechnique z roku 1794, je nejstarší školou tohoto druhu ve střední Evropě. Je však třeba upozornit na to, že v tehdejší době přívlastek český značil pouze to, že škola byla v Čechách, jinak výuka a celé vedení bylo německé.

Všimneme si dnes krátce života těchto profesorů a velmi stručně charakteristiky jejich vědecké a odborné práce.¹⁾

Po smrti Rudolfa Skuherského byl na uprázdněné profesorské místo s českou vyučovací řečí vypsan konkurs, profesorský sbor však rozhodl povolat na ně v roce 1864 Františka Tilšera,²⁾ který v té době působil na ženíjní akademii v Louce u Znojma.

František Tilšer se narodil 12. června 1825 v Budětsku u Konice na Moravě. Po studiích na gymnasiu a universitě v Olomouci byl krátký čas vychovatelem, pak se však rozhodl pro vojenskou dráhu. Po absolvování vojenské akademie ve Vídni se stal profesorem deskriptivní geometrie na ženíjní akademii. Zde vydal německy litografované přednášky z deskriptivní geometrie a rovněž německy v roce 1862 knihu o osvětlování ploch, která byla velmi příznivě přijata vídeňskou akademií věd. Po příchodu

¹⁾ Více o životopisných datech s podrobnějšími rozbory prací jednotlivých vzpomínaných profesorů v soupisu literatury, ve kterém uvádím pouze nej důležitější publikaci, zpravidla články k významnému výročí, příp. nekrolog.

²⁾ Obdobně byl povolán za profesora deskriptivní geometrie s německou vyučovací řečí Dr. Wilhelm Fiedler, tehdy profesor na vyšší průmyslové škole v Saské Kamenici (dnes Karl-Marx-Stadt).

do Prahy vydal (opět německy) knihu o perspektivě (I. díl 1865, II. díl 1866, 2. vyd. 1883). Na technice se ujal horlivě svěřeného úkolu a snažil se o domyšlení některých problémů, které podle jeho názoru byly v Mongeově učebnici deskriptivní geometrie ještě neujasněné.

V době povolání do Prahy již neovládal dobře češtinu (psal se také Tilscher), ale tento nedostatek velmi rychle odstranil a v roce 1865 vydává v Časopise Musea král. českého práci „Vědecké základy kreslitelství a malířství“

Další jeho práce z deskriptivní geometrie se týkají jejích základů, vydává je česky (a současně některé i německy). Právě zde se prof. Tilšer rozešel se současným směrem bádání v geometrii, neboť neuznával vedle neeuklidovské geometrie také geometrii ve vícerozměrných prostorech, které se v jeho době začínají úspěšně rozvíjet.

Pro přesné označování objektů zavedl zvláštní druh písma a filosofickým přístupem velmi ztížil posluchačům techniky porozumění základům deskriptivní geometrie.

V roce 1870 se stal poslancem v zemském sněmu, později v říšské radě a působil v celé řadě významných veřejných funkcí.

V roce 1895 odchází do výslužby. Při této příležitosti byl poctěn titulem doktora technických věd, ale ještě v dalších letech se věnoval veřejné práci, přičemž pevně setrval na svých filosofických názorech až do své smrti dne 5. února 1913.

Po prof. Tilšerovi byl jmenován jako třetí profesorem deskriptivní geometrie Karel Pelz, který se narodil 2. října 1845 v Bělči u Křivokláta. Po přestěhování do Olešné u Rakovníka studoval na rakovnické reálce (1858—64) a potom na pražské polytechnice (1864—69), kde ho zvláště zaujala deskriptivní geometrie a z ní pak projektivní geometrie, kterou poslouchal u prof. Fiedlera. Po absolvování pracoval jako kreslič ve Vídni, pak byl asistentem deskriptivní geometrie u prof. Küppera (nástupce prof. Fiedlera), profesorem na reálce v Těšíně a posléze na reálce ve Štýrském Hradci. Zde se habilitoval a stal se v roce 1878 mimořádným a v roce 1881 řádným profesorem deskriptivní geometrie tamější techniky. Na této škole působil až do roku 1896, kdy po konkursním řízení byl jmenován řádným profesorem na pražské české vysoké škole technické a zůstal jím až do své smrti dne 16. června 1908; je pohřben na vyšehradském hřbitově.

Karel Pelz (podle matričního záznamu Pelc) napsal všechny své práce německy a většinu z nich za pobytu ve Štýrském Hradci, jedinou poslední pak v Praze. Výsledků jeho vědecké práce se v mnoha případech používá dosud, zabýval se v nich vlastnostmi kuželoseček, plochami druhého stupně a základy pravoúhlé axonometrie.

Po prof. Pelzovi je pro odbor strojního inženýrství jmenován profeso-

rem Bedřich Procházka, narozený dne 4. července 1855 v Rakovníku.³⁾⁴⁾ Po absolvování rakovnické reálky studoval na pražské technice (1872 až 1876, první tři roky na české, čtvrtý rok na německé). Po absolutoriu byl asistentem u prof. Tilšera, po složení státní zkoušky z matematiky a deskriptivní geometrie učil na řadě českých reálek (Praha — Křemencová ul. a Ječná ul., Chrudim, Pardubice a Karlín). V této době se habilitoval a také přednášel za prof. Tilšera při jeho zaneprázdnění veřejnou činností. Od roku 1897 do 1904 byl ředitelem nově založené náchodské reálky a odtud přešel jako řádný profesor na českou techniku do Brna.

V roce 1908 byl jmenován na pražskou techniku a zde společně s prof. Jarolímekem vydal první českou učebnici deskriptivní geometrie pro technické vysoké školy (1909, 2. a 3. vyd. nezměněné 1919 a 1922). Tato učebnice může být po metodické i didaktické stránce dosud vzorem i pro dnes psané a připravované učebnice deskriptivní geometrie. Vedle této záslužné práce napsal řadu vědeckých článků (většinou z kinematické geometrie), na jejichž podkladě byl zvolen členem tehdejších vědeckých společností.

Do výslužby odešel v roce 1925, přednášel však ještě do roku 1930 kandidátům profesury matematiky a deskriptivní geometrie tzv. vybrané stati. Zemřel 3. ledna 1934 v Praze.

Po prof. Jarolímekovi byl jmenován v roce 1917 profesorem deskriptivní geometrie a stereotomie ing. dr. techn. František Kadeřávek, narozený dne 26. června 1885 v Praze. Po maturitě s vyznamenáním na reálce (tehdy v Ječné ul.) studoval od roku 1902 strojní inženýrství a v letech 1905—07 matematiku s deskriptivní geometrií a řadou dalších předmětů, které jej zajímaly. Aprobaci pro učitelství na středních školách získal v roce 1908, ale od 1. prosince 1906 byl již asistentem u prof. Pelze, neboť začátkem tohoto roku napsal svou první geometrickou práci. Pak již získal hodnost doktora technických věd (1910), habilitoval se (1912) a v roce 1917 byl jmenován mimořádným, 1920 řádným profesorem.

Celý život prof. Kadeřávka nepatřil však jen činnosti učitelské a vědecké, v nichž dosáhl významných úspěchů, ale také nastupujícímu mládí, ať už šlo o studenty Hlávkových studentských kolejí, kde byl členem správy kolejí, nebo o práci ve Studentském zdravotním ústavu, příp. o další významné veřejné funkce.

Ve vědecké práci se zabýval užitím metod syntetické geometrie na problémy deskriptivní geometrie a vyšetřování vlastností křivek a ploch.

³⁾ V roce 1907 byl pro obor stavební jmenován profesorem Vincenc Jarolímek, který v roce 1915 odchází do výslužby.

⁴⁾ Vedle prof. Pelze a Procházky byl jako absolvent rakovnické reálky profesorem deskriptivní geometrie na pražské technice také Josef Kounovský (1878—1949).

Velmi záslužnou práci vykonal se svými spolupracovníky (prof. Klímou a Kounovským), s nimiž vydal dvoudílnou učebnici deskriptivní geometrie (I. díl 1929, II. díl 1932) pro vysoké školy technické, kde je otištěno mnoho z jeho prací o plochách a křivkách. Znalci „vědeckého rukopisu“ prof. Kadeřávka snadno poznají ty kapitoly, které jím byly napsány.

Také další knihy vznikly z jeho zájmu o použití geometrie ve výtvarném umění a stejně cenné jsou jeho články o našich vynikajících lidech, zvláště pak o prof. Skuherském.

Za svou celoživotní práci byl poctěn hodností doktora věd a vyznamenán Řádem republiky.

Velké zásluhy měl na dokonale připravených oslavách 250 let pražské techniky v roce 1957, kdy bylo mnoho učiněno z jeho popudu a jeho úsilím (slavnostní publikace, popularizující články apod.). V posledních letech svého života pracoval na dějinách ČVUT, podle vlastních slov je dokončil, ale není známo, kde dnes rukopis této velmi záslužné práce je uložen.

Prof. Kadeřávek zemřel 9. února 1961, urna s jeho popelem je na vršovickém hřbitově.

Závěrem připomeňme nedožitě sedmdesátiny prof. dr. Františka Vyčichla, který byl prvním vedoucím katedry matematiky a deskriptivní geometrie na ČVUT po provedené reorganizaci v roce 1950. Narodil se 22. dubna 1905 v Pardubicích, po maturitě na pardubické reálce studoval v letech 1923–28 matematiku s deskriptivní geometrií. V roce 1929 se stal doktorem přírodních věd. Pak byl asistentem v ústavu matematiky vysoké školy inženýrského stavitelství a od roku 1930 pak profesorem na karlínské reálce. V této době suploval přednášky z deskriptivní geometrie (za prof. Sobotku, příp. za prof. Hlavatého) a vedl cvičení z tohoto oboru. Po ročním studijním pobytu (1937–38) ve Florencii se habilitoval na ČVUT (geometrie) a na universitě (matematika a geometrie). Jeho další vysokoškolské působení bylo přerušeno 17. listopadu 1939. V době okupace vyučoval na umělecko-průmyslové škole a od listopadu 1944 zaměřoval a zakresloval význačné stavební památky pro případ rekonstrukce při eventuálním zničení.

Po osvobození přednášel od 1. června 1945 na vysoké škole (později fakultě) inženýrského stavitelství ČVUT, kde byl ke dni 1. října 1945 jmenován profesorem matematiky.

Pracoval převážně v algebraické a diferenciální geometrii, pro čtenáře Rozhledů sepsal řadu populárních článků z deskriptivní geometrie a mnoho úloh k řešení. Vedle toho působil ještě v mnoha náročných funkcích jak před rokem 1939 tak i v období 2. světové války i po ní, zvláště pak jako redaktor Rozhledů (vydávaných tehdy Jednotou československých matematiků a fyziků) a řady dalších matematických časopisů a knižních sbírek (např. „Cesta k vědění“). Zejména tato sbírka

umožnila pozdějším studentům vysokých škol získat základní počáteční znalosti v mnoha oborech.

Za jeho vědeckou činnost byla mu udělena hodnost doktora věd a vyznamenání Řád práce.

Je s podivem, že jediný člověk, jako byl prof. Vyčichlo, přes své narušené zdraví si získal tak velké zásluhy o celý náš kulturní, politický, společenský a také vědecký a pedagogický život. Skutečně po jeho smrti dne 6. ledna 1958, která tehdy všechny jeho přátele velmi překvapila, bylo třeba velkého počtu pracovníků k tomu, aby dokázali to, co uměl udělat prof. Vyčichlo sám.

Literatura

- [1] Babuška I., Havlíček K., Nožička F.: Památce prof. RNDr. Františka Vyčichla. Časopis pro pěstování matematiky 1958 (83), str. 374—387.
- [2] Kepr B.: Sedmdesát let prof. ing. Dr. Františka Kadeřávka. Časopis 1955 (80), str. 375—382.
- [3] Kounovský J.: Profesor Bedřich Procházka sedmdesátníkem, Časopis 1926 (55), str. 1—10.
- [4] Procházka B.: Prof. Dr. Techn. František Tilšer. Časopis 1914 (43), str. 1—25.
- [5] Sobotka J.: O životě a činnosti Karla Pelze. Časopis 1910 (39), str. 433 až 460.

Christian Doppler

FRANTIŠEK MORKES

Před 140 lety přijel do Prahy ke svému dvanáctiletému pedagogickému působení Christian Doppler, bezesporu po Albertu Einsteinovi druhý fyzik světového významu, který působil na pražských školách.

Narodil se 29. listopadu 1803 v Salzburku v rodině kameníka. Po studiích na vídeňské polytechnice a filosofii, kde se plně projevil jeho mimořádné nadání a vyhranil i jeho badatelský zájem, působil jako asistent na katedře vyšší matematiky. Když byl 7. února 1835 jmenován profesorem na pražské reálce, zastihla ho tato zpráva již v Mnichově, kde se připravoval na emigraci do Ameriky. Pražská reálka, na které byla zahájena výuka ve školním roce 1833/1834, spadala v té době přímo pod polytechniku. Doppler také záhy po svém příjezdu do Prahy vyvinul nemalé úsilí, aby mohl přednášet i na tomto učilišti. Po ročním bezplatném přednášení vyšší matematiky přebírá na polytechnice katedru elementární matematiky.

Obtížné pedagogické povinnosti, kdy musel přednášet i pro více než 400 studentů, spolu s těžkou chorobou ho značně vyčerpávaly. Ani on sám nenacházel vnitřní uspokojení v základní matematické přednášce pro množství studentů, kteří často přicházeli na polytechniku nejen s minimálními znalostmi, ale i problematickým zájmem o matematické vědy. Více se proto věnoval problémům fyziky. Královská společnost nauk, která mu poskytovala publikační možnosti, ho také již v červnu 1840 jmenovala svým mimořádným členem a o tři roky později členem řádným. Tyto pocty mu byly uděleny především na podkladě základního díla O barevném světle dvouhvězd, které publikoval v roce 1842 a kterým položil základy k moderní astrofyzice. I český sněm ještě v roce 1844 uděluje, s přihlédnutím především k vědecké činnosti, Dopplerovi pochvalu. Tentýž rok však na Christiana Dopplera přichází anonymní udání, které napadá celou jeho pedagogickou činnost. Je mu vytýkáno, že často nekoná přednášky, že odbyl zkoušky pouze písemnými úlohami, které nespravedlivě ohodnotil, a že postrádá vlastnosti, které by každý pedagog měl mít.

Doppler se hájil značně sebevědomě. Zdůrazňoval, že na pražské polytechnice ještě nikdy nebylo v jeho oborech tolik vykonáno, že žádné obdobné učiliště v Německu neposkytuje víc matematických znalostí a že ani jeho klasifikační průměr není horší než v jiných předmětech. Přes tyto námitky i poukazování na pokročilost vleklé krční choroby mu byla udělena až nezvykle ostrá důtka.

Po jejím udělení zůstává Doppler nemocen a jeho zdravotní stav si vyžaduje delší léčení. Na polytechniku se vrací až po jednom roce, a když je mu v roce 1847 nabídnuta profesura matematiky, fyziky a mechaniky na báňské a lesnické akademii v Banské Štiavnici, spojená s drobnými osobními výhodami, odchází z Prahy, jejíž technické učiliště mu připravilo řadu zklamání. Těsně před tímto odchodem mu uděluje jako důkaz uznání pražská universita čestný doktorát. Okamžitě po Dopplerově odchodu z Prahy byly na polytechnice vysilující povinnosti učitele elementární matematiky rozděleny mezi dva zdravé nástupce.

V důsledku revolučních bouří v roce 1848 byla akademie v Banské Štiavnici celý rok uzavřena, a tak na ní Doppler prakticky nepřednášel. V roce 1849 se vrací do Vídně, kde se uvolnilo místo profesora praktické geometrie. O rok později je jmenován řádným profesorem experimentální fyziky na vídeňské universitě a současně ředitelem nově založeného fyzikálního ústavu. Jeho podlomené zdraví mu však nedovolilo, aby se z těchto poct dlouho těšil a Christian Doppler 17. března 1853 v Benátkách umírá ve věku necelých padesáti let.

Jeho věhlas, ač většinu svých plodných let prožil jako profesor matematiky, spočívá ve fyzikálních objevech. Vynikal především skvělou invencí a často i překvapivou fantazií a odvahou klást si otázky. Jeho

teoretické základy bývaly nejednou právem kritizovány a byl mu i vytýkán sklon ke spekulacím, které nejsou podloženy experimentem. Přesto — a možná právě proto — vyslovil ve svém stěžejním díle závěry, které dnes nesou jeho jméno a jsou všeobecně známy. Vedle své světoznámé práce z roku 1842 publikoval řadu dalších studií, ve kterých se zabýval propracováním teorie vlnění v akustice i optice, zasahoval i do teorie elektřiny a do geofyziky. Nemalé úsilí věnoval i konstrukcím některých optických přístrojů a podal správný a proveditelný návrh stroboskopické metody.

Z komise pro matematiku na vysokých školách technických, ekonomických a zemědělských

S. ŠMAKAL, J. VOŘÍŠEK, Praha

Je jen velmi málo studentů, kteří v údobí svého přijetí na gymnasium nebo na střední odbornou školu mají jasnou představu o svém dalším životě. Tato představa osciluje mezi různými obory a krystalizuje často teprve v době, kdy student je nucen řešit nějakým způsobem svůj další život, tedy v době, kdy vskutku „přihořívá“ a termínovaná přihláška na vysokou školu nutí k vážnému rozhodnutí. Zkušenost ukazuje, že toto rozhodnutí nebývá vždy opřeno o důkladnou znalost věci a hlubokou analýzu vlastních možností, představy o náplni studia zvoleného oboru bývají často zkreslené subjektivní představou nebo i dobře míněnou, časově však determinovanou zkušeností a radou bývalých absolventů z praxe, kteří mají váhu znalců.

Vysoká škola je živý organismus, který musí respektovat hlavní směry vývoje příslušného vědního oboru a reagovat citlivě na společenský pohyb v oblasti středoškolské výchovy a vzdělání. Rok od roku dochází proto na našich vysokých školách k některým posunům, mění se postupně struktura i náplň existujících studijních oborů a vznikají zákonitě obory nové. Bylo by jistě k prospěchu věci, kdyby existovala nějaká centrální instituce, chcete-li centrální odborná informační poradna pro volbu studijního oboru, která by uchazečům o vysokoškolské studium mohla podat zasvěcenou informaci o náplni studijních oborů a seznámila by je s požadavky a předpokládaným stavem vědomostí v rámci přijímacího řízení. Uchazeč by tak získal dobrý přehled o tom, co ho na vysoké škole čeká, jaké jsou možnosti jeho přijetí, mohl by včas orientovat svůj zájem daným směrem a rozhodovací proces v kritickém okamžiku přihlášky by byl zodpovědnější, uvážení a schůdnější také psy-

chologicky. Uvedený námět je jistě líbivý, jeho realizace není však zcela jednoduchá, a proto je do jisté míry utopická. Podobné poradenské centrum v současné době sice neexistuje, nedá se však říci, že se v tomto směru nic nedělá. Jednotlivé vysoké školy nebo fakulty vydávají informační letáky, které seznamují globálně se studijními obory, pořádají se „dny otevřených dveří“, dobrou tradici mají dnes také konzultativní schůze studentů středních škol a jejich rodičů s vysokoškolskými učiteli a funkcionáři, pořádané vedením škol a SRPŠ na středních školách.

V této souvislosti vás chceme upozornit, že v rámci matematické vědecké sekce JČSMF pracuje komise pro matematiku na vysokých školách technických, ekonomických a zemědělských. Není účelem těchto řádků podat zevrubnou zprávu o celé účinnosti této komise; chceme vyzvednout pouze dva směry její činnosti, které spolu velmi úzce souvisejí: Již deset let jsou pod patronací komise pořádány celostátní konference, na nichž jsou diskutovány odborné i pedagogické otázky matematického vzdělání nových inženýrských kádří. Tyto konference, na které jsou zváni i středoškolští profesori matematiky, nabízejí dobrý přehled o současných i perspektivních požadavcích a potřebách matematiky na vysokých školách inženýrských směrů v ČSSR i ve světě.

Aby umožnila lepší informovanost uchazečů o vysokoškolské studium inženýrských oborů, přichází v současné době komise s dalším námětem. Složení komise je do té míry reprezentativní, že může nabídnout poradenskou službu z hlediska matematiky všem zájemcům o studium zmíněných oborů, to znamená informace o obsahu i rozsahu kursů matematiky na jednotlivých vysokých školách a nutných vědomostech ze střední školy, které vysoké školy předpokládají. Jsme toho názoru, že studenti i profesori středních škol tuto nabídku přivítají. Obráceně lze říci, že členové komise rádi přispějí ke zvýšení informovanosti naší veřejnosti, kde kolují často velmi neúplné nebo zkreslené představy o práci na vysokých školách. Adresa komise: JČSMF, komise pro matematiku na VŠTEZ, Spálená 26, PSČ 120 00, Praha 2.

recenze

Š. Novoveský, K. Křižalkovič,
J. Lečko:

ZÁBAVNÁ MATEMATIKA

V knižnici všeobecného vzdělání
— Maják vydalo Státní pedago-

gické nakladatelství v Praze, 1975;
324 stran, cena váz. výtisku 16 Kčs.

Tuto knížku tří slovenských autorů přeložil do češtiny Z. Trefný. Již názvy jednotlivých kapitol ukazují pestrou a vtipnou

náplň „Zábavné matematiky“

I. Matematická kouzla. II. Aritmetické hry. III. Algebra hrou. IV. Táčky u geometrie. V Číselné rébusy. VI. Zajímavosti hádankářské, kombinatorické a šachové. VII. Tajné písmo a číselné soustavy. VIII. Vtipná geometrie. IX. Zábavně o všeličems.

V knížce se procvičují a vysvětlují některé poznatky ze středoškolské matematiky, čtenář zde musí projevovat pohotovost při správné volbě způsobu řešení předložených úloh. Úlohy v knížce jsou různě obtížné, jen některé překračují rámec středoškolských osnov. Setkáme se tu i s problémy, které se neřeší matematickými metodami; jsou zařazeny, aby zpestřily obsah publikace.

Velkým kladem knihy jsou řešení, uvedená v druhé části knihy, která umožňují čtenáři, aby si téměř u všech příkladů ověřil, zdali při svém samostatném řešení po-

stupoval správně a co neekonomičtěji.

Na ukázkou uvedu příklad 6,11: Na úzký most, po kterém může přejet jen jedno vozidlo, vjel v mlze z jedné strany parní válec a z druhé strany nákladní automobil. Když se na mostě setkaly, ujelo již nákladní auto $\frac{2}{3}$ délky mostu a válec $\frac{1}{3}$. Auto jede po mostě čtyřikrát rychleji než válec. Zpáteční rychlost obou vozidel je nejvýše jedna polovina rychlosti při jízdě vpřed. Jedno z vozidel musí zřejmě couvnout, aby druhé mohlo přejet. Které má couvnout, aby obě vozidla spotřebovala na přejetí mostu nejmenší možnou dobu?

Z předchozího zřejmě plyne, že se autorům podařilo snést do knížky z dostupné literatury velké množství vhodných příkladů, které zaujmou nejen středoškolské čtenáře, nýbrž i jejich učitele a rodiče. Knížka by neměla chybět v žákovských knihovnách. Vřele ji doporučuji.

O. S.

Nejmladším čtenářům

1. Který z následujících dvou zlomků je větší?

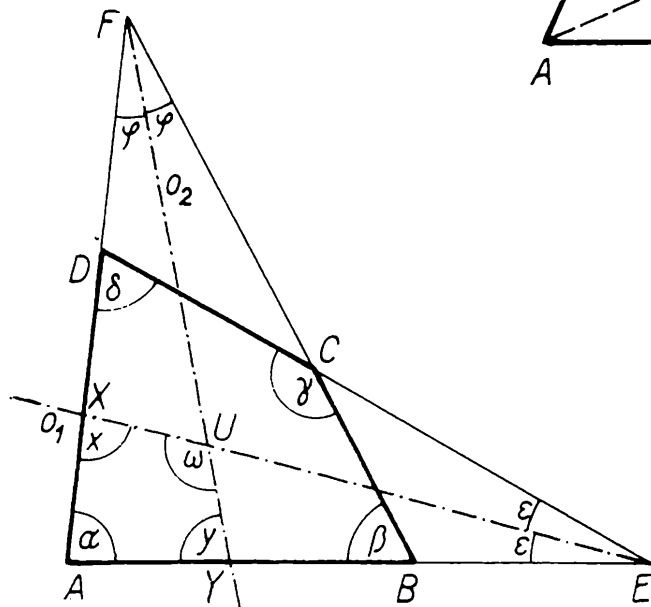
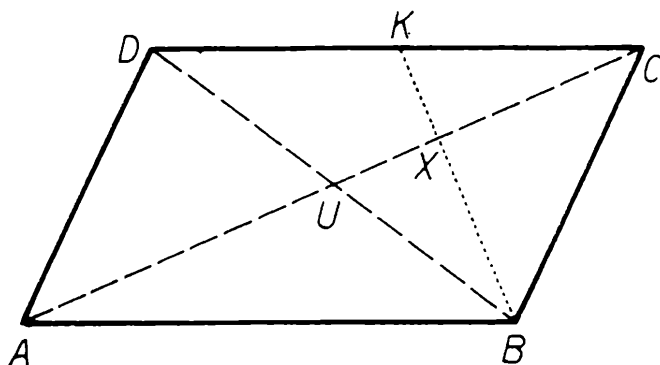
$$\frac{999\,999\,999\,997}{999\,999\,999\,999}$$

$$\frac{999\,999\,999\,996}{999\,999\,999\,998}$$

2. Které dvojice přirozených čísel x , y splňují rovnici $xy = 360$? Která z nalezených dvojic má nejmenší součet?

3. V obr. 1 je dán rovnoběžník $ABCD$; U je průsečík jeho úhlopříček a K je střed strany CD . Přímky AC , KB se protínají v bodě X . Ukažte, že $UX = \frac{1}{6} AC$.

Obr. 1



Obr. 2

4. V obr. 2 je $ABCD$ různoběžník. Jeho protější strany se v prodloužení protínají v bodech E, F . Přímka o_1 (o_2) je osou úhlu AED (AFB). Pomocí úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vyjádřete velikost úhlu ω . Kdy $\omega = 90^\circ$?

5. Je dán obdélník $ABCD$ ($AB = a, BC = b$). Na prodloužení úhlopříčky AC za bod C je sestrojen bod E tak, že $CE = AC$. a) Zjistěte délky stran trojúhelníku BDE . b) Kde je těžiště trojúhelníku BDE ?

Řešení. 1. Dané zlomky lze psát takto: $\frac{A}{A+2}, \frac{A-1}{A+1}$. Uvedením na společného jmenovatele zjistíme, že první zlomek je větší. — 2. Dvojice čísel jsou: (1; 360), (2; 180), (3; 120), (4; 90), (5; 72), (6; 60), (8; 45), (9; 40), (10; 36), (12; 30), (15; 24), (18; 20). Nejmenší součet má poslední dvojice. — 3. Bod X je v trojúhelníku BCD těžiště. — 4. Z trojúhelníku ADE máme $\varepsilon = R - \frac{\alpha + \delta}{2}$. Z trojúhelníku ABF je $\varphi = R - \frac{\alpha + \beta}{2}$. Z trojúhelníku AEX je $x = R + \frac{\delta - \alpha}{2}$, z trojúhelníku AFY je $y = R + \frac{\beta - \alpha}{2}$. Ze čtyřúhelníku $AYUX$ je $\omega = 2R - \frac{\beta - \delta}{2} = 2R - \frac{\alpha + \gamma}{2}$. Přímky o_1, o_2 jsou k sobě kolmé tehdy, když $\frac{\beta + \delta}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2} = R$, a pak daný čtyřúhelník je tětiový. — 5. a) $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$, $BE = \sqrt{a^2 + 4b^2}$, $DE = \sqrt{4a^2 + b^2}$. b) Těžiště je vrchol C .

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

plan

planár

planar graph

plane

plane angle

plane domain

plane geometry

plane of projection

profile plane

secant plane

secondary plane of projection

Platonic solid

plausible

plumbline

point

accumulation point

decimal point

double point

end point

ideal point

integral point

isolated point

limit point

null point

saddle point

singular point

point of contact

point of division

point of inflexion

point of intersection

point of tangency

point set

polar

polar coordinates

polar form of complex number

polar line

plán, půdorys

rovinný

rovinný graf

rovina, rovinný

rovinný úhel

rovinný obor

planimetrie

průmětna

bokorysna.

kolmá na zá-

kladnici

sečná rovina, rovina řezu

pomocná průmětna

pravidelný mnohostěn

pravděpodobný

svislá přímka, olovnice

bod. desetinná tečka

hromadný bod

desetinná tečka

samodružný bod

konečný bod

nevlastní bod

mřížový bod

izolovaný bod

hromadný bod

nulový bod

hyperbolický, sedlový bod

singulární bod

dotykový bod

dělicí bod

inflexní bod

průsečík

dotykový bod

bodová množina

polára

polární souřadnice

goniometrický tvar komplexního
čísla

sdružené poláry

pole
 polygon
 convex polygon
 equiangular polygon
 equilateral polygon
 regular polygon
 similar polygons
 polyhedron
 polynomial
 portion
 position
 positive
 postulate
 power
 power series
 precision
 present value
 preservation of angles
 prime (number)
 prime factor
 prime to each other
 relatively prime
 primitive
 principal line
 principle
 prism
 hexagonal prism
 octagonal prism
 pentagonal prism
 right prism
 square prism
 triangular prism
 truncated prism
 prismatic
 probability
 probability distribution
 calculus of probability
 probable
 problem
 proceeding
 produce
 product
 Cartesian product
 scalar (dot) product
 vector (cross) product
 profile
 profile plane

pól
 mnohoúhelník
 konvexní mnohoúhelník
 mnohoúhelník se shodnými úhly
 rovnostranný mnohoúhelník
 pravidelný mnohoúhelník
 podobné mnohoúhelníky
 mnohostěn
 mnohočlen
 část
 poloha
 kladný
 postulát
 mohutnost, mocnost, mocnina, expo-
 nent
 mocninné řady
 přesnost
 diskontovaná (současná) hodnota
 zachování úhlů
 prvočíslo
 prvočinitel
 nesoudělná
 nesoudělná
 primitivní funkce
 hlavní přímka
 princip, zásada
 hranol
 šestiboký hranol
 osmiboký hranol
 pětiboký hranol
 kolmý hranol
 pravidelný čtyřboký hranol
 trojboký hranol
 šikmo seříznutý hranol
 hranolový
 pravděpodobnost
 rozložení pravděpodobnosti
 počet pravděpodobnosti
 pravděpodobný
 úloha, problém
 postup
 prodloužit
 součín
 kartézský součín
 skalární součín
 vektorový součín
 bokorys
 bokorysna