

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

1

ROČNÍK 52, 1973-1974, ZÁŘÍ



ROČNÍK 52
ZÁŘÍ 1973

1

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMU Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1973.

OBSAH

OBSAH

Prof. E. Kraemer: Do dalšího ročníku Rozhledů	1
Dr. A. Vrba: O sjednocení a průniku konečných množin	3
V. Okřina: Nebojte se diferenciálních rovnic	6
S. Horák: Nerovnosti v geometrii	10
F. Hradecký: Společné tečny a společné body kuželoseček	14
P. Ferko: Relativistický pohyb elektronu	20
R. Kolomý: Cesta za elektrickým světlem	24
Dr. M. Bednařík, dr. M. Šírká: Velká rychlost sen každého motoristy	28
MO	33
Naše soutěž	40
J. Kotyk: Na závěr Kopernikova roku	42
J. Kotyk: Newtonův gravitační zákon	44
Recenze	46
Nejmladším čtenářům	47
Redakce hovoří	48
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. a 4. strana obálky

Do dalšího ročníku Rozhledů

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Tímto číslem zahajují Rozhledy matematicko-fyzikální svůj 52. ročník. I nadále zůstávají věrny svému tradičnímu poslání: prohlubovat a rozšiřovat znalosti našich středoškolských studentů v matematice, fyzice a astronomii, doplňovat je o znalosti z historie těchto věd a seznamovat je s jejich významem pro různé oblasti dnešní lidské činnosti, zejména pro obory technické. Tak pomáhají budít, rozšiřovat a posilovat zájem dospívající mládeže o technické a přírodovědecké obory, což je poslání, které bylo výslovně zdůrazněno v usnesení z letošního červencového zasedání ÚV KSČ věnovaného socialistické výchově mladého pokolení a jeho přípravě pro život a práci v rozvinuté socialistické společnosti.

Těžištěm Rozhledů matematicko-fyzikálních zůstávají vhodně vybrané a přístupně napsané články matematické, fyzikální i astronomické. Některé budou doplňovat a prohlubovat středoškolské učivo, jiné pojednají o některých moderních úsecích matematicko-fyzikálních věd, další upozorní na různé aplikace matematiky a fyziky, jiné vzpomenou na některé významné pracovníky v oblasti matematiky, fyziky nebo astronomie, některé uvedou drobné problémy nebo budou dobrým podkladem k řešení úloh apod. Budou tu i články týkající se akutní a mnohdy velmi vážné problematiky jako je např. značná nehodovost, vyplývající z prudkého rozvoje silniční dopravy. Odborné a historické články budou podstatně přispívat k výchovnému působení na naši mladou generaci, a to velmi přirozeně a nenásilně, neboť — jak na letošním červencovém zasedání ÚV KSČ zdůraznil tajemník Jan Fojtík, když hovořil o výchovném vlivu matematiky a přírodních věd — „výchovný význam těchto oborů je především v tom, že vedou k racionálnímu myšlení, k odporu proti jakémukoliv obskurantismu, tmářství a zaostalosti.“

Usilujeme-li v Rozhledech o zvýšení zájmu mladé generace o vědy matematicko-fyzikální a technické a tím také o podporu jejich dalšího rozvoje, nemůžeme přirozeně zapomenout na to, že opravdu úspěšný rozvoj těchto oborů by nebyl u nás možný bez politického, ekonomického a kulturního rozvoje naší socialistické společnosti. Proto v letošním ročníku Rozhledů připomeneme významné mezníky tohoto rozvoje,

zejména 30. výročí podepsání Československo-sovětské smlouvy o přátelství, vzájemné pomoci a poválečné spolupráci, 5. výročí vyhlášení a vzniku československé federace a 30. výročí Slovenského národního povstání. Nezapomeneme ovšem ani na další významná výročí, zejména ze světa vědy, kultury a techniky.

K podnícení hlubšího a aktivního zájmu o matematiku a fyziku budeme v Rozhledech otiskovat i ve školním roce 1973/74 úlohy k řešení z matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie. Nejlepší řešitelé těchto úloh budou odměněni cenami ministerstev školství ČSR a SSR i cenami Státního pedagogického nakladatelství. Kromě toho otisknou Rozhledy všeobecné informace o celostátních olympiádách (matematické a fyzikální) jakož i příklady z jednotlivých kategorií těchto soutěží. Pro mladší čtenáře přinesou Rozhledy zábavné úlohy a různé hříčky. Konečně hodlají informovat své čtenáře o těch publikacích z oboru matematiky, astronomie a fyziky, které jim jsou způsobem svého podání přístupné.

Redakce Rozhledů doufá, že se podaří naznačený program příštího ročníku splnit a tím účinně přispět k výchově české a slovenské mládeže ve smyslu potřeb naší socialistické společnosti a v souladu s požadavky vědeckotechnické revoluce.

Těsně před uzávěrkou tohoto čísla došla do redakce smutná zpráva, že po dlouhé a těžké nemoci zemřel ve věku 70 let

PhDr. OTAKAR HÖNIG

zasloužilý učitel a profesor střední průmyslové školy strojnické v Praze 1, Betlémská 4.

Jmenovaný profesor pracoval v naší redakční radě po plných 16 let při jazykové úpravě našeho časopisu. Tuto náročnou práci vykonával svědomitě a odpovědně, přičemž dovedl velmi jemně vystihnout nuance matematické terminologie bez porušení čistoty jazyka. Pro svou skromnost byl naším oblíbeným spolupracovníkem.

Vděčně na něho vzpomínáme!

matematika

0 sjednocení a průniku konečných množin

Dr. ANTONÍN VRBA, PRAHA

Možná, že si vzpomínáte na některou z těchto úloh:

1. Tři konečné množiny M_1, M_2, M_3 mají po řadě m_1, m_2, m_3 prvků; množina $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ má s prvků. Dokažte:

a) Je-li $m_1 + m_2 + m_3 \geq 2s + 1$, má průnik všech tří množin alespoň jeden prvek.

b) Má-li průnik všech tří množin alespoň jeden prvek, je $m_1 + m_2 + m_3 \geq s + 2$.

Dokažte dále, že podmínka b) není postačující pro to, aby průnik všech tří množin byl neprázdný.

2. Ze 100 osob koupilo na předvánočním trhu 80 lidí textilní zboží, 70 lidí knihy a 55 lidí elektrotechnické výrobky. Kolik nejméně osob koupilo výrobky všech tří druhů? Jestliže každá z uvedených 100 osob si koupila aspoň jeden z uvedených výrobků, kolik nejvýše osob koupilo výrobky všech tří druhů?

3. Množiny $M_1, M_2, M_3, M_4, M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ mají po řadě m_1, m_2, m_3, m_4, s prvků; přitom platí $M_1 \cap M_3 = M_2 \cap M_4 = \emptyset$. Dokažte, že platí

$$2s \geq m_1 + m_2 + m_3 + m_4.$$

Může nastat rovnost a v kterém případě?

Určitě je znají čtenáři, kteří se ve školním roce 1972/73 účastnili matematické olympiády v kategoriích B a C. Uvedené úlohy vedou k této obecné otázce: Jaká podmínka pro celá nezáporná čísla $m_1, m_2, \dots, m_k, s, p$ je nutná a stačí k tomu, aby existovaly množiny $M_1, M_2, \dots, M_k$ takové, že $|M_1| = m_1, |M_2| = m_2, \dots, |M_k| = m_k, |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k| = s, |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k| = p$? (Symbolem $|M|$ jsme označili a budeme nadále značit počet prvků množiny M .) V tomto článku otázku zodpovíme.

Některé nutné podmínky jsou vidět okamžitě. Předpokládejme, že existují popsané množiny. Pak pro každé $j = 1, 2, \dots, k$ zřejmě platí

$$p \leq m_j \leq s \leq m_1 + m_2 + \dots + m_k. \quad (1)$$

Dále: množina $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$ obsahuje p prvků, z nichž každý leží

ve všech k množinách $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_k$, a $s-p$ prvků, z nichž každý leží alespoň v jedné a nejvýše v $(k-1)$ ze zmíněných množin. Je tedy

$$pk + s - p \leq m_1 + m_2 + \dots + m_k \leq pk + (s-p)(k-1),$$

neboli

$$s + p(k-1) \leq m_1 + m_2 + \dots + m_k \leq p + s(k-1). \quad (2)$$

Ukážeme, že současná platnost nerovností (1) pro každé $j = 1, 2, \dots, k$ a (2) stačí k existenci popsaných množin. Mějme tedy dána celá nezáporná čísla $m_1, m_2, \dots, m_k, s, p$, jež splňují (1) a (2), a zkonstruujeme příslušné množiny $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_k$.

Je-li $p = s$, je podle (1) také $m_1 = m_2 = \dots = m_k = p$. Označme $\mathbf{P}$ nějakou množinu o p prvcích a položme $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 = \dots = \mathbf{M}_k = \mathbf{P}$. Tyto množiny zřejmě mají požadované vlastnosti.

Buď nyní $p < s$. V případě $p = 0$ označme $\mathbf{P}$ prázdnou množinu, v případě $p > 0$ označme $\mathbf{P}$ množinu $\{1, 2, \dots, p\}$. Dále uvažujme posloupnost $\{a_n\}$, jejíž n -tý člen je roven $a_n = z + p + 1$, kde z je zbytek při dělení čísla n číslem $s-p$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Je tedy

$$\{a_n\} = \{p+1, p+2, \dots, s, p+1, p+2, \dots, s, \dots\}.$$

Nyní sestrojme množiny $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_k$ následujícím způsobem: Množina $\mathbf{M}_1$ vznikne sjednocením množiny $\mathbf{P}$ s množinou prvních $m_1 - p$ (toto číslo je podle (1) nezáporné) členů posloupnosti $\{a_n\}$, množina $\mathbf{M}_2$ vznikne sjednocením množiny $\mathbf{P}$ s množinou dalších $m_2 - p$ členů posloupnosti $\{a_n\}$ atd. Je zřejmé, že

$$\mathbf{S} \supseteq \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \dots \cup \mathbf{M}_k,$$

$$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \cap \dots \cap \mathbf{M}_k$$

a že pro každé $j = 1, 2, \dots, k$ je $|\mathbf{M}_j| = m_j$. Při konstrukci jsme vyčerpali celkem $c = m_1 + m_2 + \dots + m_k - kp$ členů posloupnosti $\{a_n\}$. Podle (2) je

$$s - p \leq c \leq (k-1)(s-p).$$

Z toho je vidět, že mezi vyčerpanými členy je každé z čísel $p+1, p+2, \dots, s$ alespoň jednou a nejvýše $(k-1)$ -krát a tedy

$$\mathbf{S} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \dots \cup \mathbf{M}_k,$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \cap \dots \cap \mathbf{M}_k$$

a tedy $|\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \dots \cup \mathbf{M}_k| = |\mathbf{S}| = s$, $|\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \cap \dots \cap \mathbf{M}_k| = |\mathbf{P}| = p$.

Odvodili jsme tuto větu:

Budte $m_1, m_2, \dots, m_k, p, s$ celá nezáporná čísla. Množiny $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_k$ takové, že $|\mathbf{M}_1| = m_1, |\mathbf{M}_2| = m_2, \dots, |\mathbf{M}_k| = m_k, |\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \dots \cup \mathbf{M}_k| = s, |\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \cap \dots \cap \mathbf{M}_k| = p$, existují právě když jsou splněny nerovnosti (1) a (2).

Vraťme se k olympijským úlohám z úvodu článku a vyřešme je.

1. Z existence uvedených množin plyne podle dokázané věty mj. platnost nerovnosti (2), jež má tvar

$$s + 2p \leq m_1 + m_2 + m_3 \leq p + 2s,$$

kde p je počet prvků množiny $M_1 \cap M_2 \cap M_3$.

a) Je-li $m_1 + m_2 + m_3 \geq 2s + 1$, je

$$2s + p \geq m_1 + m_2 + m_3 \geq 2s + 1,$$

a tedy $p \geq 1$.

b) Je-li $p \geq 1$, je $m_1 + m_2 + m_3 \geq 2p + s \geq s + 2$.

Poslední úkol se díky dokázané větě redukuje na nalezení čtyř celých čísel $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq s$ takových, že $s + 2 \leq m_1 + m_2 + m_3 \leq 2s$. Např. čísla $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 3, s = 4$ tyto požadavky splňují.

2. Zde máme nejprve nalézt nejmenší z čísel p , pro něž existují množiny M_1, M_2, M_3 takové, že $|M_1| = 80, |M_2| = 70, |M_3| = 55, s = |M_1 \cup M_2 \cup M_3| \leq 100$ a $|M_1 \cap M_2 \cap M_3| = p$. Budeme opět aplikovat dokázanou větu. Aby byla splněna podmínka (2), musí vždy být $p \geq |M_1| + |M_2| + |M_3| - 2s = 205 - 2s$, a tedy $p \geq 5$. Vzhledem k tomu, že čísla $p = 5, s = 100$ vyhovují podmínkám (1) a (2), je hledané minimum 5.

Dále předpokládáme, že $s = 100$, a hledáme největší z uvedených čísel p . Aby byla splněna podmínka (2), musí být $p \leq \frac{1}{2} (|M_1| + |M_2| + |M_3| - s) = 52,5$. Je tedy vždy $p \leq 52$. Vzhledem k tomu, že $p = 52$ splňuje podmínky (1) a (2), je hledané maximum 52.

Zobecněním této úlohy je cvičení 1 na konci článku.

3. Označme $N_1 = M_1 \cup M_3, N_2 = M_2 \cup M_4$. Vzhledem k tomu, že jde o sjednocení disjunktních množin, je $|N_1| = m_1 + m_3, |N_2| = m_2 + m_4$. Dále je $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 = (M_1 \cup M_3) \cup (M_2 \cup M_4) = N_1 \cup N_2$, a tedy $|N_1 \cup N_2| = s$. Podle (1) je $|N_1| \leq |N_1 \cup N_2|$ a $|N_2| \leq |N_1 \cup N_2|$, a tedy $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = |N_1| + |N_2| \leq 2|N_1 \cup N_2| = 2s$. V poslední nerovnosti nastane rovnost, právě když nastane v obou předcházejících nerovnostech, což se stane právě když $N_1 = N_2 = N_1 \cup N_2$.

Cvičení

Dokažte následující dva důsledky věty, která byla odvozena v tomto článku. Je-li x reálné číslo, znamená $[x]$ celou část čísla x , tj. největší celé číslo nepřevyšující x .

1. Buďte $k \geq 2$ a $s \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k \geq 0$ celá čísla taková, že $s \leq m_1 + m_2 + \dots + m_k$. Je-li $m_1 + m_2 + \dots + m_k \leq s(1 - k)$, položme $P_1 = 0$, jinak $P_1 = m_1 + m_2 + \dots + m_k + s(1 - k)$. Je-li $s \leq m_1 + m_2 + \dots + m_{k-1} + (2 - k)m_k$, položme $P_2 = m_k$, jinak

$P_2 = \left\lfloor \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_k - s}{k-1} \right\rfloor$. Pak je $P_1 \leq P_2$. Buď p celé číslo.

K tomu, aby existovaly množiny $M_1, M_2, \dots, M_k$ takové, že $|M_1| = m_1, |M_2| = m_2, \dots, |M_k| = m_k, |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k| = s, |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k| = p$, je nutné a stačí, aby $P_1 \leq p \leq P_2$.

2. Buďte $k \geq 2$ a $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k \geq p \geq 0$ celá čísla. Je-li $p \geq (2-k)m_1 + m_2 + \dots + m_k$, položme $S_1 = m_1$, jinak

$S_1 = \left\lfloor \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_k - p}{k-1} \right\rfloor$. Dále položme $S_2 = m_1 + m_2 + \dots +$

$+ m_k + p(1-k)$. Pak je $S_1 \leq S_2$. Buď s celé číslo. K tomu, aby existovaly množiny $M_1, M_2, \dots, M_k$ takové, že $|M_1| = m_1, |M_2| = m_2, \dots, |M_k| = m_k, |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k| = s, |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k| = p$, je nutné a stačí, aby $S_1 \leq s \leq S_2$.

3. Uvědomte si, že z věty v článku a také ze cvič. 1 plyne platnost tohoto tvrzení: Buďte $s \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k \geq 0$ celá čísla taková, že $s \leq m_1 + m_2 + \dots + m_k$. Pak existují množiny $M_1, M_2, \dots, M_k$ takové, že $|M_1| = m_1, |M_2| = m_2, \dots, |M_k| = m_k, |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k| = s$. Sestrojte takové množiny přímo bez použití dosavadních výsledků.

Nebojte se diferenciálních rovnic

VILÉM OKŘINA, Jihlava

1. Mnozí z vás se s nimi při svém dalším studiu, zejména na vysokých školách technického směru, jistě setkají. Diferenciální rovnice mají velký význam při studiu přírodních jevů a při řešení nejrůznějších problémů technické praxe. Než si řekneme, jak vypadají, prohlédněte si nejprve pozorně následující rovnice, v nichž neznámou je funkce y jedné proměnné x :

$$2y' \sqrt{x} = y \quad (1)$$

$$x^2 \cdot y' + y = 0 \quad (2)$$

$$y' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$y' = \sin ax \quad (4)$$

$$y' = 3 \quad (5)$$

Především vidíte, že každá z uvedených rovnic obsahuje první deri-

vaci této neznámé funkce y . Poněvadž se jedná o funkci jedné proměnné, potom derivace, které se v rovnicích (1) až (5) vyskytují, jsou obyčejné derivace. Takovým rovnicím říkáme *obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu*. Řádem obyčejné diferenciální rovnice je tedy řád nejvyšší derivace hledané funkce, v ní se vyskytující. Jen pro úplnost uvádím, že diferenciální rovnice, v níž neznámá funkce je funkce dvou nebo více proměnných, se nazývá *parciální diferenciální rovnice*. S ohledem na rozsah učiva střední školy, budeme se v dalším zabývat pouze obyčejnými diferenciálními rovnicemi 1. řádu, tj. takovými, které obsahují vždy první derivaci neznámé funkce, ale které nemusí při tom obsahovat ani neznámou funkci, jak patrně z rovnice (4) a (5), ani explicitně nezávisle proměnnou, jak je tomu např. u rovnic (3) a (5).

S velmi jednoduchou diferenciální rovnicí jste se již ve školním vyučování setkali, když jste řešili úlohu: K dané funkci $f(x)$ najít funkci primitivní $F(x)$, tj.

$$\text{k } f(x) \text{ najít } F(x) = y \text{ tak, aby } F'(x) = f(x).$$

Pro neznámou funkci y má tedy platit

$$y' = f(x), \quad (6)$$

což je obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu. Obsahuje 1. derivaci neznámé funkce y a explicitně nezávisle proměnnou x v dané funkci $f(x)$ ale neobsahuje neznámou funkci. Vyjádříme-li y' jako podíl diferenciálů $\frac{dy}{dx}$, můžeme rovnici (6) psát též ve tvaru

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Z integrálního počtu víte, že nejobecnější funkce y , vyhovující rovnici (6), je

$$y = \int f(x)dx = F(x) + c,$$

kde c je libovolná konstanta a jíž říkáme *obecné řešení* nebo *obecný integrál* diferenciální rovnice (6). Každé řešení, které vznikne z obecného řešení tím, že konstantě c dáme určitou číselnou hodnotu, nazývá se *partikulární řešení* nebo *partikulární integrál*.

Příklad 1. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' = -x^3. \quad (7)$$

Řešení: Daná rovnice je tvaru (6) a proto její obecné řešení je

$$\begin{aligned} y &= \int (-x^3)dx \\ y &= -\frac{1}{4}x^4 + c. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{Zkouška: } y' = -\frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = -x^3.$$

Kdybychom například v rovnici (8) položili $c = -1$, dostali bychom jedno z nekonečně mnoha partikulárních řešení rovnice (7). Toto partikulární řešení $y = -\frac{1}{4}x^4 - 1$ můžeme z obecného řešení (8) dostat

také tak, že za x zvolíme 0 a $y = -1$. Hodnoty $x = 0$, $y = -1$ jsou tzv. *počáteční podmínky*. Každé volbě počátečních podmínek odpovídá jedno partikulární řešení rovnice (7).

Příklad 2. Určete partikulární řešení rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad (9)$$

vyhovující počáteční podmínce: pro $x = 1$ je $y = 2$.

Řešení: Obecné řešení rovnice $dy = \frac{1}{x} dx$, která je s danou rovnicí ekvivalentní, je

$$y = \int \frac{1}{x} dx$$

$$y = \ln x + c, \text{ pokud } x > 0.$$

Partikulární řešení dostaneme, zvolíme-li konstantu c tak, aby hledaná funkce y nabývala v bodě $x = 1$ hodnoty $y = 2$. Tedy tak, aby

$$2 = \ln 1 + c.$$

Odtud $c = 2 - \ln 1 = 2$. Takže hledané partikulární řešení má tvar

$$y = \ln x + 2. \quad (10)$$

Jestliže tuto funkci (10) graficky znázorníme (obr. 1), dostaneme tzv. *integrální křivku* dané diferenciální rovnice procházející bodem $M \equiv (1; 2)$. Kdybychom tuto křivku posunuli ve směru osy y tak, aby procházela například bodem $L \equiv (1; 0)$, obdrželi bychom další integrální křivku diferenciální rovnice (9). Byl by to graf jejího partikulárního řešení $y = \ln x$.

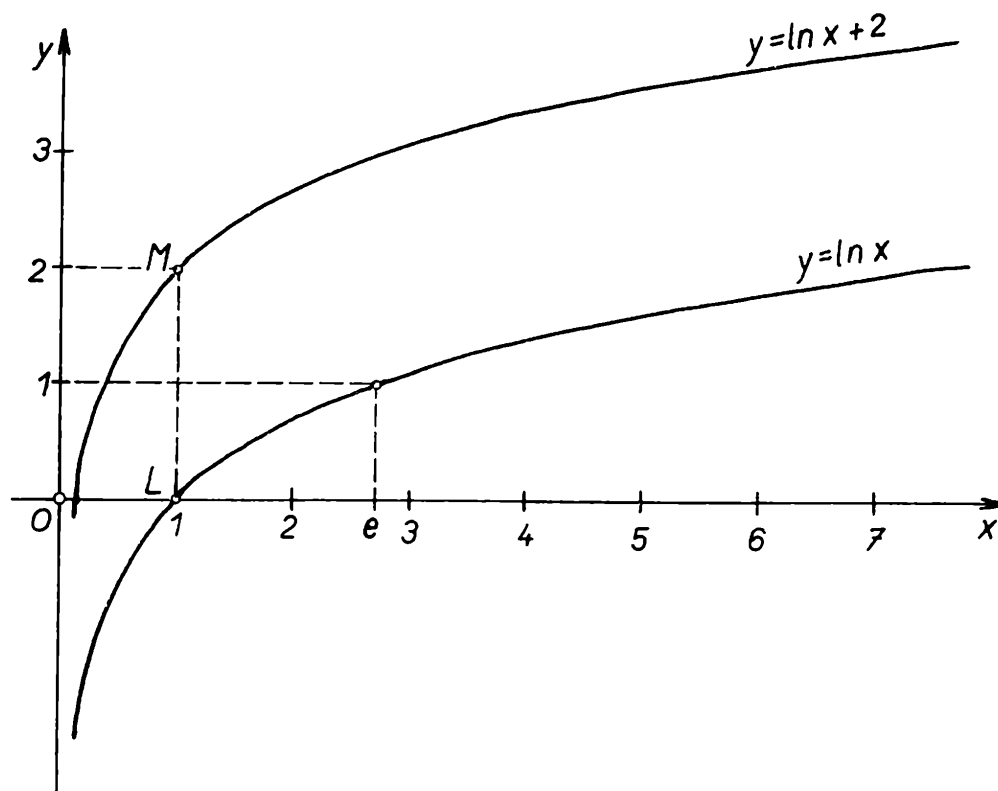
2. Diferenciální rovnice typu

$$f_1(x) \cdot \varphi_1(y) dy + f_2(x) \cdot \varphi_2(y) dx = 0,$$

kde každý z činitelů $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ je závislý jen na x , nebo jen na y , anebo je funkcí konstantní, je možné uvést na tvar

$$\varphi(y) dy = f(x) dx. \quad (11)$$

Jedna strana rovnice (11) obsahuje pak pouze funkci y a dy , druhá její strana je součinem funkce proměnné x a diferenciálu dx . Všimněte si, že



Obr 1.

rovnice (1) až (5) jsou také rovnicemi tohoto typu. Když jsou již takto proměnné od sebe odděleny (separovány), pak rovnici (11) integrujeme. Na každé její straně vznikne při tom jedna konstanta, které sečteme a zapíšeme nakonec integrační konstantu jen jednu. Někdy je užitečné psát

$$c = c \quad 1 = c \cdot \ln e = \ln e^c = \ln k,$$

kde k je kladné číslo, neboť je vždy $e^c > 0$. Uvedené metodě řešení diferenciálních rovnic říkáme *metoda separace proměnných*.

Příklad 3. Najděte obecné řešení rovnice

$$2y' \cdot \sqrt{x} = y. \quad (12)$$

Řešení: Funkce $y = 0$ je zřejmě řešením dané rovnice, neboť $y' = 0$ a daná diferenciální rovnice je splněna. Můžeme proto v dalším předpokládat, že $y \neq 0$ a $x > 0$. Pak $y \cdot \sqrt{x} \neq 0$ a můžeme obě strany rovnice (12) tímto součinem dělit:

$$2 \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Odtud pak dostaneme

$$2 \cdot \frac{1}{y} dy = \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$$

což je již rovnice tvaru (11), tedy rovnice se separovanými proměnnými.

Integrujeme-li ji, dostáváme

$$2 \int \frac{1}{y} dy = \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$2 \cdot \ln |y| + c_1 = 2\sqrt{x} + c_2 \quad |:2$$

$$\ln |y| = \sqrt{x} \cdot 1 + c_3$$

$$\ln |y| = \sqrt{x} \cdot \ln e + \ln k$$

$$\ln |y| = \ln e^{\sqrt{x}} + \ln k$$

$$\ln |y| = \ln k \cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$|y| = k \cdot e^{\sqrt{x}}$$

Obecné řešení dané diferenciální rovnice (12) je tedy souhrnem těchto funkcí:

$$y = k \cdot e^{\sqrt{x}}, \text{ kde } k \text{ je libovolné kladné číslo}$$

$$y = -k \cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$y = 0 \cdot e^{\sqrt{x}} = 0.$$

Je vidět, že všechna tato řešení lze vyjádřit stručněji jedinou rovnicí

$$y = c \cdot e^{\sqrt{x}},$$

kde c je libovolné reálné číslo.

(Pokračování)

Nerovnosti v geometrii

STANISLAV HORÁK, Praha

V posledních několika letech se stále častěji objevují práce z geometrie mnohoúhelníků, jejichž výsledkem je řada nerovností, platících mezi délkami a úhly mnohoúhelníků. Předložený článek odvozuje několik nerovností, které platí o různých délkách ve čtyřúhelníku za velmi speciálních podmínek.

I. Než přistoupíme k vlastnímu článku, odvodíme si pomocnou větu.

Věta 1. Jsou-li a, b libovolná kladná čísla, kde $a \geq b$, pak platí

$$a^2 + b^2 \geq 2ab. \quad (a)$$

Důkaz. O daných číslech platí

$$a - b \geq 0.$$

Umocníme:

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

a odtud

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Tím je důkaz proveden. Položíme-li v odvozeném vztahu

$$a^2 = x, \quad b^2 = y,$$

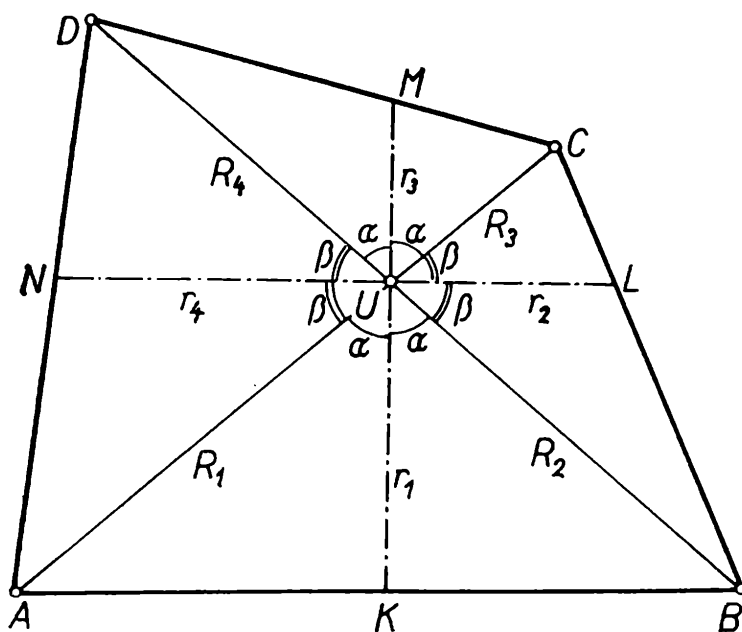
nabude jiné podoby:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}. \quad (b)$$

Tohoto vztahu budeme často používat. Ke vztahům (a) a (b) dodejme, že rovnost nastane právě tehdy, když $a = b$ nebo $x = y$.

II. A. Mějme dán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky se protínají v bodě U (obr. 1). Osy úhlů AUB a BUC protínají strany AB , BC , CD , DA po řadě v bodech K , L , M , N . Označme

$$\begin{aligned} \sphericalangle AUK &= \sphericalangle KUB = \sphericalangle CUM = \sphericalangle DUM = \alpha, \\ \sphericalangle BUL &= \sphericalangle LUC = \sphericalangle DUN = \sphericalangle NUA = \beta; \\ R_1 &= AU, R_2 = BU, R_3 = CU, R_4 = DU; \\ r_1 &= KU, r_2 = LU, r_3 = MU, r_4 = NU. \end{aligned}$$



Obr. 1.

Obsah trojúhelníka ABU vyjádříme jako součet obsahů trojúhelníků AKU a BKU . Přitom pro obsah S trojúhelníku použijeme vzorec

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

kde a , b jsou délky dvou stran trojúhelníku a γ je úhel těmito stranami sevřený. Je tedy

$$R_1 R_2 \sin 2\alpha = R_1 r_1 \sin \alpha + r_1 R_2 \sin \alpha .$$

Tuto rovnici ještě upravíme:

$$2 R_1 R_2 \cos \alpha = r_1 (R_1 + R_2) \geq 2 r_1 \sqrt{R_1 R_2} .$$

Tím jsme došli k nerovnosti

$$\sqrt{R_1 R_2} \cos \alpha \geq r_1 \quad (1)$$

Rovnost platí jen tehdy, když $R_1 = R_2$, což znamená, že trojúhelník ABU je rovnoramenný.

Podobně z trojúhelníků BUC , CUD , DUA dostaneme po řadě vztahy

$$\sqrt{R_2 R_3} \cos \beta \geq r_2 , \quad (2)$$

$$\sqrt{R_3 R_4} \cos \alpha \geq r_3 , \quad (3)$$

$$\sqrt{R_4 R_1} \cos \beta \geq r_4 , \quad (4)$$

Přitom rovnost platí právě tehdy, když

$$\text{ve vztahu (2) platí } R_2 = R_3 ,$$

$$\text{ve vztahu (3) platí } R_3 = R_4 ,$$

$$\text{ve vztahu (4) platí } R_4 = R_1$$

Sami řekněte, jaké jsou geometrické důsledky jednotlivých rovností.

Ze vztahů (1), (2), (3), (4) plyne

$$R_1 R_2 R_3 R_4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \geq r_1 r_2 r_3 r_4$$

Rovnost nastane právě tehdy, když

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 ,$$

což znamená, že daný čtyřúhelník je obdélník.

Poněvadž

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \text{platí } \cos \beta = \sin \alpha$$

To dosadíme do naší nerovnosti a po kratší úpravě máme

$$R_1 R_2 R_3 R_4 \sin^2 2\alpha \geq 4 r_1 r_2 r_3 r_4 \quad (I)$$

Rovnost platí právě tehdy, když $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$, tj. právě tehdy, když daný čtyřúhelník $ABCD$ je obdélník.

II. B. Ze vztahů (1) až (4) utvořme nerovnost

$$\begin{aligned} & 2 (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4) \leq \\ & \leq 2 (\sqrt{R_1^2 R_2 R_4} + \sqrt{R_1 R_2^2 R_3} + \sqrt{R_2 R_3^2 R_4} + \sqrt{R_1 R_3 R_4^2}) \cos \alpha \cos \beta + \\ & \quad + 2 \sqrt{R_1 R_2 R_3 R_4} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \end{aligned} \quad (B)$$

Upravovat budeme pravou stranu:

$$\cos \alpha \cos \beta = \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha ,$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Na jednotlivé součiny pod odmocninami můžeme znovu použít pomocné věty:

$$2\sqrt{R_1^2 R_2 R_4} \geq R_1 R_2 + R_1 R_4. \quad (5)$$

Rovnost nastane právě tehdy, když

$$R_1 R_2 = R_1 R_4, \quad \text{tj. } R_2 = R_4.$$

Potom však úhlopříčka BD je půlena úhlopříčkou AC .

Stejně upravujeme další výrazy:

$$2\sqrt{R_1 R_2^2 R_3} \leq R_1 R_2 + R_2 R_3. \quad (6)$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $R_1 = R_3$, tj. když úhlopříčka AC je půlena druhou úhlopříčkou.

Potom dostaneme

$$2\sqrt{R_2 R_3^2 R_4} \leq R_1 R_3 + R_3 R_4, \quad (7)$$

$$2\sqrt{R_1 R_3 R_4^2} \leq R_1 R_4 + R_3 R_4. \quad (8)$$

Rovnost nastane právě tehdy, když v nerovnosti (7) resp. (8) je $R_2 = R_4$ resp. $R_1 = R_3$. O geometrickém významu těchto dvou rovností rozhodne už čtenář sám. Ještě zbývá

$$2\sqrt{R_1 R_2 R_3 R_4} \leq R_1 R_3 + R_2 R_4$$

Rovnost nastane právě tehdy, když

$$R_1 R_3 = R_2 R_4, \quad \text{tj. } R_1 : R_2 = R_4 : R_3$$

Avšak tato rovnice vyjadřuje podmínku pro to, aby

$$\triangle ABU \sim \triangle DCU$$

Odtud

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$$

a z toho plyne, že se danému čtyřúhelníku $ABCD$ dá opsat kružnice, daný čtyřúhelník je tětiový.

Po dosazení do vztahu (B) dostaneme

$$\begin{aligned} & 2(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4) \leq \\ & \leq (R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4) \sin 2\alpha + (R_1 R_3 + R_2 R_4). \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

Rovnost nastane právě tehdy, když současně platí

$$R_1 = R_3, \quad R_2 = R_4, \quad R_1 : R_2 = R_4 : R_3.$$

Všechny tři rovnice jsou splněny, jak se snadno ukáže, právě pro obdélník.

Cvičení

Dokažte, že platí

- a) $2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \leq (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)(\cos \alpha + \sin \alpha);$
b) $2(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4) \leq$
 $(R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4) \sin 2\alpha (\sin \alpha + \cos \alpha).$

konstruktivní geometrie

Společné tečny a společné body kuželoseček

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

Každé dvě kuželosečky mohou mít nejvýš čtyři společné tečny a nejvýš čtyři společné body. Mají-li kuželosečky obecnou polohu, nelze tyto body sestavit užitím pravítka a kružítka, tj. eukleidovsky. Mají-li však dvě libovolné kuželosečky společné ohnisko, lze vždy společné body a společné tečny těchto kuželoseček sestavit eukleidovsky. Obsahem tohoto článku jsou právě tyto konstrukce.

Nejprve si připomeňme věty, kterých dále užijeme:

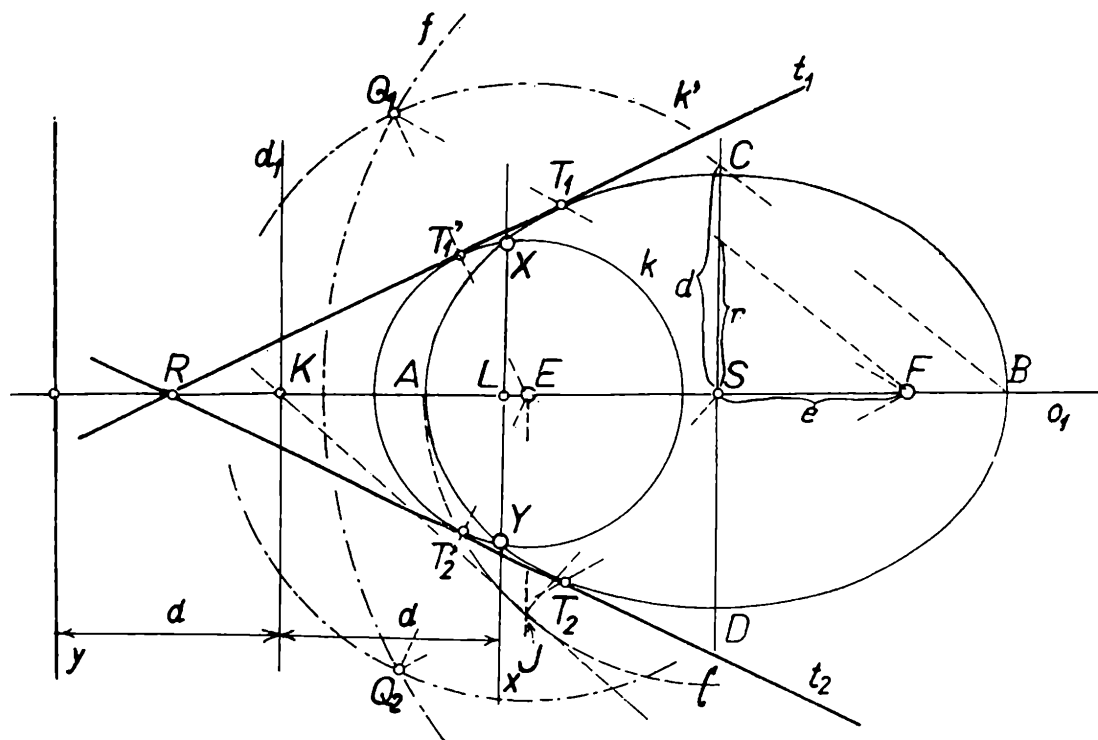
I. *Množinou všech bodů souměrně sdružených s ohniskem elipsy (hyperboly) podle všech jejích tečen je kružnice opsaná z druhého ohniska poloměrem rovným délce hlavní osy elipsy (hyperboly).* Přitom asymptoty hyperboly pokládáme též za tečny hyperboly.

II. *Množinou všech bodů souměrně sdružených s ohniskem paraboly podle všech jejích tečen je řídící přímka paraboly.*

Ke každému bodu uvedených množin bodů můžeme pak jednoznačně přiřadit přímku — osu úsečky, jejímiž krajními body jsou uvažovaný bod a příslušné ohnisko. Všechny tyto přímky obalují danou kuželosečku; hovoříme také někdy o tzv. *tečnové kuželosečce*. Přiřazení mezi body množin I. (II) a tečnami kuželosečky je vzájemně jednoznačné.

Konstrukci průsečíků přímky s kuželosečkou lze provést vždy eukleidovsky. Uvedu zde konstrukci, která je jistě mnohým čtenářům známá a která s jistými změnami platí pro všechny kuželosečky, o kterou se budeme dále opírat.

Středová kuželosečka (hyperbola) je dána svými ohnisky E , F a vrcholem A (obr. 1) Kružnice $f = (F; 2a)$, kde a je hlavní poloosa kuželosečky, je množinou všech bodů souměrně sdružených s ohniskem E podle všech jejích tečen. Vhodně zvolené kružnice, které mají středy na dané přímce p , vytínají na kružnici f dvojice bodů 1 , 2 , jejichž přímé spojnice se protínají v bodě U , který leží na kolmici, vedené ohniskem E k přímce p . Délky tečen vedených z bodu U ke kterékoli z těchto kružnic se rovnají délce tečen vedených z bodu U ke kružnici f . Přímky, spojující dotykové body T_1 , T_2 tečen vedených z bodu U ke kružnici f se středem této kružnice, protínají přímku p v hledaných průsečících X , Y přímky p s kuželosečkou. Body X , Y jsou středy kružnic, které procházejí bodem E a dotýkají se kružnice f .



Obr. 2.

podmínku (I) pro ohnisko E a určíme její průsečíky Q_1, Q_2 s kružnicí $k' = (E; 2r)$. Osy úseček EQ_1, EQ_2 jsou hledané společné tečny t_1, t_2 elipsy a kružnice. Dotykové body na nich vytínají přímky spojující ohniska E, F s body Q_1, Q_2 .

Konstrukce společných bodů: Nejprve určíme polohu řídicí přímky, příslušné k ohnisku E . Na oblouku kružnice $l = (S; a)$ určíme bod J , aby $EJ \perp o_1$, a v něm sestrojíme ke kružnici l tečnu. Jejím průsečíkem K s osou o_1 prochází řídicí přímka ($d_1 \perp o_1$) elipsy.

Je-li X společný bod elipsy a kružnice, pak platí současně $EX = r$.
 $\frac{EX}{d} = \frac{e}{a}$ (d značí vzdálenost od řídicí přímky d_1). Z těchto rovností

plyne $d = \frac{a \cdot r}{e}$. Úsečku délky $\frac{a \cdot r}{e}$ sestrojíme užitím úměrnosti. (Konstrukce je provedena na osách elipsy).

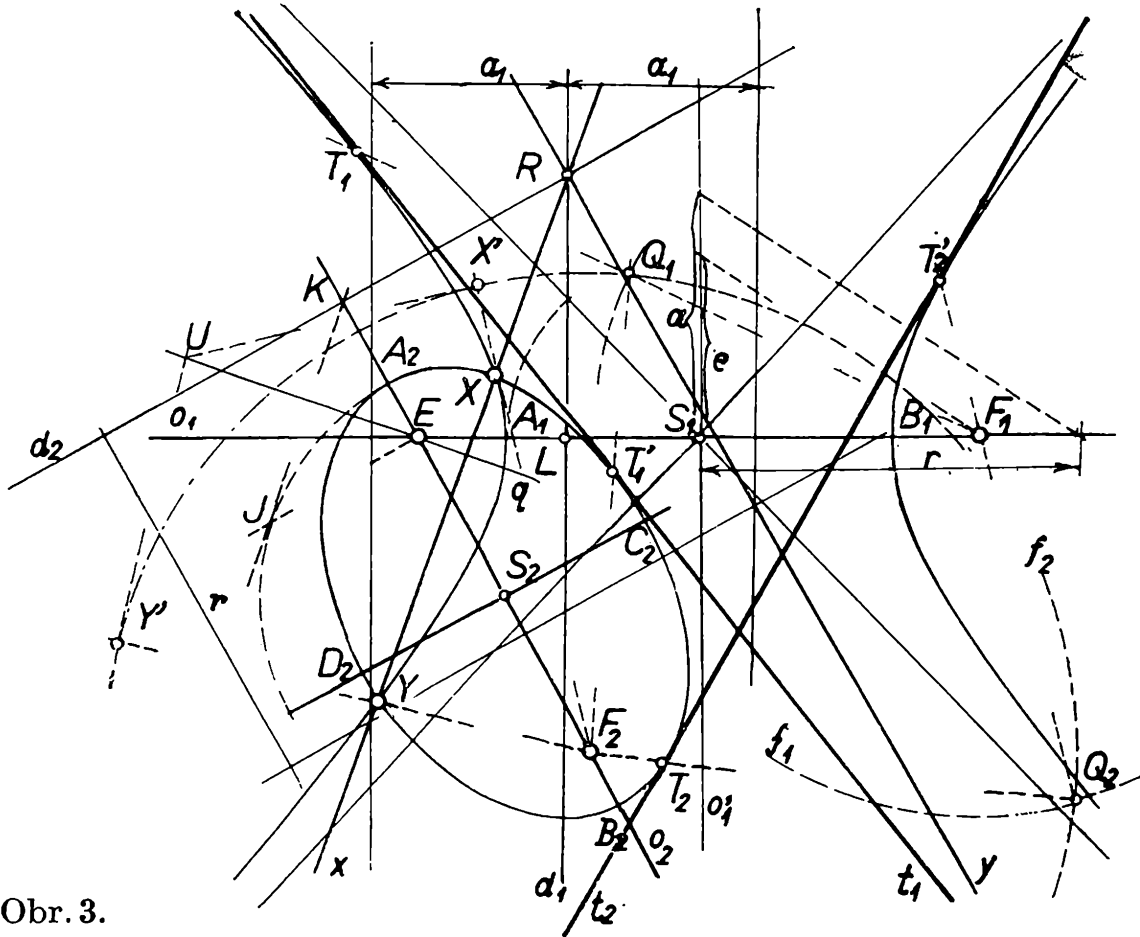
Přímka $x \parallel d_1$ vedená ve vzdálenosti d od sestrojené řídicí přímky, protíná kružnici v bodech X, Y , které jsou společnými body kružnice a elipsy. Přímka $y \parallel d_1$ ležící v opačné polorovině nemá s kružnicí k žádný společný bod, proto kružnice opsaná kolem ohniska elipsy může mít s elipsou nejvýš dva reálné body společné.

Příklad 2.

Máme určit společné tečny a společné body hyperboly a elipsy, které mají společné ohnisko.

Hyperbola má hlavní poloosu a_1 , excentricitu e_1 , elipsa má poloosu a_2 a excentricitu e_2 (obr. 3).

Abychom určili společné tečny, sestrojíme kružnici $f_1 = (F_1; 2a_1)$,



Obr. 3.

$f_2 = (F_2; 2a_2)$ splňující podmínku (I) pro ohnisko E a jejich společné body Q_1, Q_2 . Osy úseček EQ_1, EQ_2 jsou společnými tečnami t_1, t_2 obou kuželoseček. Dotykové body na nich vytínají přímky spojující ohniska F_1, F_2 s body Q_1, Q_2 .

Máme-li sestavit společné body těchto kuželoseček, sestavíme nejprve řídicí přímky d_1, d_2 hyperboly a elipsy, které přísluší ohnisku E . Tyto přímky procházejí body K, L kolmo na hlavní osy uvažovaných kuželoseček a mají od jejich středů vzdálenosti $\frac{a_i^2}{e_i}$ ($i = 1, 2$).

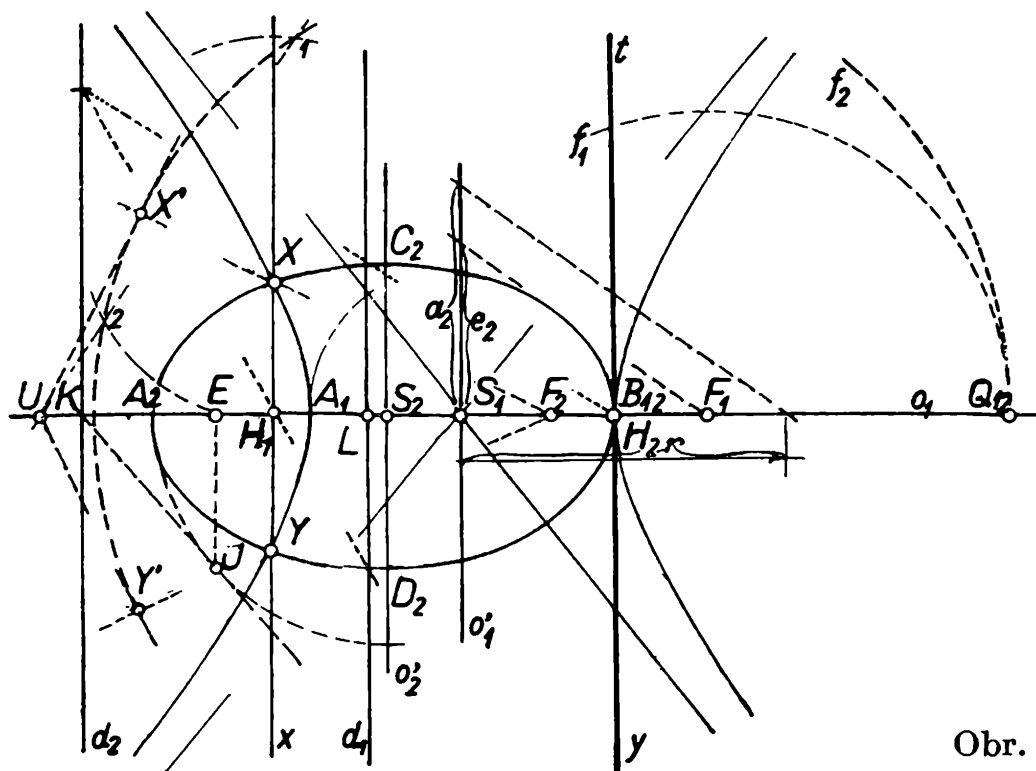
Průsečík řídicích přímek je $R = d_1 \cap d_2$.

Je-li X společný bod těchto kuželoseček, pak platí zároveň $\frac{XE}{d_1} = \frac{e_1}{a_1}$,

$\frac{XE}{d_2} = \frac{e_2}{a_2}$ a odtud plyne

$$d_1 \cdot d_2 = \frac{a_1}{e_1} \cdot \frac{a_2}{e_2} = a_1 \cdot a_2 \frac{e_1}{e_2} \quad (d_1, d_2 \text{ značí vzdálenosti od stejně označených řídicích přímek, čehož budeme užívat i v dalším textu).}$$

Úsečku délky $r = a_2 \cdot \frac{e_1}{e_2}$ lze sestavit užitím úměrnosti. (Konstrukce je provedena



Obr. 4

na osách hyperboly). Geometrickým místem bodů, které mají od přímek d_1 a d_2 (v tomto pořadí) stálý poměr vzdáleností $a_1 : r$, jsou dvě přímky x, y procházející bodem R . Jejich průsečíky s elipsou nebo hyperbolou sestrojíme způsobem dříve vyloženým. Z provedené konstrukce (na přímkách x, y leží úhlopříčky jistého rovnoběžníku, jehož strany mají směry přímek d_1, d_2) plyne, že přímky d_1, d_2, x, y tvoří harmonickou čtveřici přímek procházejících bodem R .

Mají-li kuželosečky společnou hlavní osu, jsou přímky $d_1 \parallel d_2$. Tento případ je uveden na obr. 4. Přímky $x \parallel y \parallel d_1 \parallel d_2$ protínají osu o_1 v bodech H_1, H_2, K, L , pro které platí $KH_i : LH_i = a_i : r$, ($i = 1, 2$), kde $r = a_2 \cdot \frac{e_1}{e_2}$. Poněvadž elipsa byla zvolena tak, že měla s hyperbolou

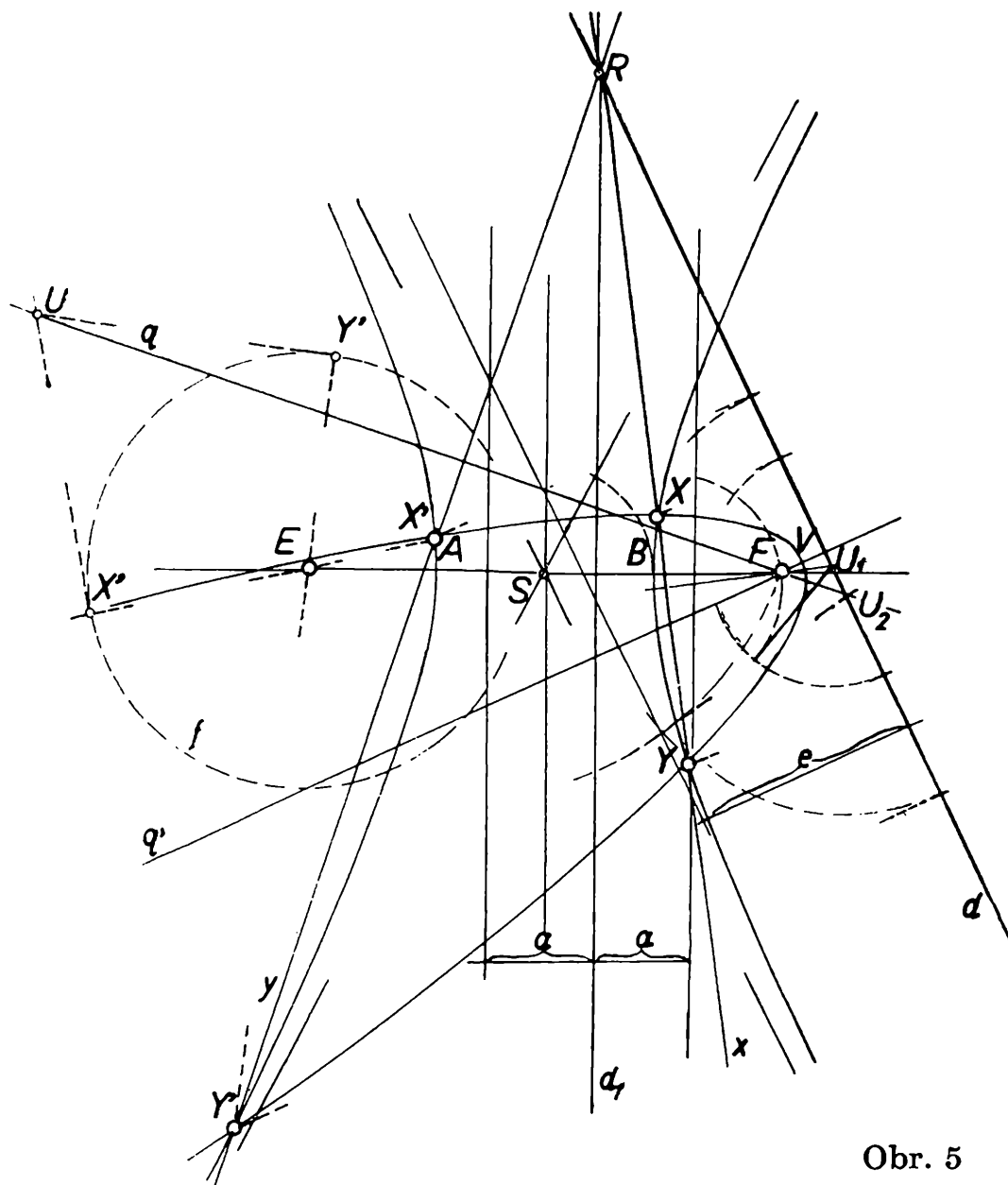
společný vrchol B_{12} , je $H_2 = B_{12}$ a přímka y splývá s vrcholovou tečnou hyperboly v bodě B_2 . Tato tečna je zároveň *jedinou společnou tečnou* obou kuželoseček. (Kružnice f_1 a f_2 mají společný jediný bod Q_{12} ležící na ose o_1).

Poněvadž body K, L, H, B tvoří harmonickou čtveřici bodů, je možno bod H_1 sestrojit jako harmonicky sdružený s bodem B_{12} vzhledem k bodům K, L , čímž se konstrukce podstatně zjednoduší.

Příklad 3

Určiti společné tečny a společné body paraboly a hyperboly o společném ohnisku.

Hyperbola má ohniska E, F a hlavní poloosu délky a , parabola je



Obr. 5

určena polohou osy, procházející ohniskem F , které je společné parabole i hyperbole, a vrcholem V (Obr. 5).

Abychom určili, mají-li uvedené kuželosečky společné body, sestrojíme kružnici $f = (E; 2a)$ splňující podmínku I vzhledem k ohnisku E a řídicí přímku d , splňující podmínku II. Společné body Q_1, Q_2 těchto geometrických míst (pokud existují) mohou vést opět nejvýš ke dvěma společným tečnám. V obr. 5 pro zvolenou polohu paraboly a hyperboly nemají řídicí přímky d a kružnice f žádný společný bod, takže tyto kuželosečky nemají žádnou společnou tečnu.

Je-li X společný bod paraboly a hyperboly, platí $\frac{XF}{d_1} = \frac{e_1}{a}$ a současně

$XF = d$, takže odtud plyne $d_1 : d = a : e$. Geometrickým místem bodů, které mají od přímek d_1 a d stálý poměr vzdálenosti $a : e$, jsou přímky x, y ; jejich průsečíky s parabolou, resp. hyperbolou sestrojíme podle dříve uvedené konstrukce.

Uvedené príklady postačí, aby si čtenář mohl provést příslušné konstrukce v dalších příkladech s jinou dvojicí kuželoseček, a to v polohách obecných i zvláštních.

Závěr: Z uvedených příkladů plyne: Mají-li dvě kuželosečky společné ohnisko, mohou mít nejvýš dvě společné reálné tečny, přitom mohou mít obě kuželosečky až čtyři reálné body společné. Společné tečny a společné jejich body lze vždy sestrojiti eukleidovsky.

fyzika

Relativistický pohyb elektrónu

PAVOL FERKO, Pedagogická fakulta, Banská Bystrica

1. K poznatkom z teórie relativity

Rozvoj teórie elektromagnetického poľa koncom 19. a začiatkom 20. storočia je podmienený vyvrcholením pokusov formulovať elektrodynamiku v pohybujúcich sa látkových prostrediach. Bolo potrebné zovšeobecniť Maxwellove rovnice platné pre elektromagnetická pole na pohybujúce sa vodiče, dielektriká, magnety, cievky, kondenzátory a iné. Podobný problém vzniká aj v optike ako časti všeobecnej elektrodynamiky, kde bolo treba preskúmať, ako sa šíri svetlo z pohybujúceho sa zdroja v pohybujúcom sa prostredí, ako sa odráža napr. na zrkadle za pohybu, alebo ako sa láme na pohybujúcej sa šošovke.

Maxwell na základe Faradayových objavov a predstáv dopĺňa zákony elektromagnetického poľa a formuluje ich ako diferenciálne rovnice, ktoré dnes poznáme ako Maxwellove rovnice alebo hlavné rovnice. V Maxwellovej teórii má poľa prvoradý význam. Treba sa naň pozeráť ako na osobitnú fyzikálnu realitu, ktorá sa môže vyznačovať aj samostatnou existenciou, nezávislou od nábojov (elektromagnetické vlny).

Takto vzniká éter, ktorý mal byť akýmsi nositeľom poľa, prostredím, v ktorom sa šíria elektromagnetické pôsobenia. Podľa tejto predstavy je elektromagnetické pole zvláštnym stavom éteru, prejavujúcim sa v deformáciách a vnútornom napätí éteru.

Vzniká množstvo pokusov, ktorými má byť dokázaný éter. Tieto pokusy nevedú k objaveniu éteru, ale k rozvoju novej fyzikálnej dis-

ciplíny a tým k zavrnutiu starých zaužívaných názorov na priestor a čas, ktoré vládli vo fyzike koncom minulého storočia.

Tieto názory, vyplývajúce z úspechov klasickej mechaniky možno vyjadriť nasledovne:

a) Každý fyzikálny proces je poznateľný len vtedy, ak vieme zostrojiť jeho mechanický model.

b) Jedine možný tvar fyzikálnych zákonov sú dynamické zákony klasickej mechaniky.

c) Všetky fyzikálne procesy prebiehajú v priestore a čase, pričom vlastnosti priestoru a času sú stanovené v klasickej mechanike.

D'alej platilo, že keď pohyb fyzikálnych telies vždy prebieha v priestore, telesá nijako nevplyvajú na jeho vlastnosti.

Platila tiež predstava o jednotnom svetovom čase, plynúcom rovnako a rovnomerne, nezávisle od pohybu fyzikálnych telies.

Rozvoj termodynamiky a molekulárnej fyziky pomáhal rozvoju týchto mechanických predstáv v celej fyzike.

Predsa však ďalší rozvoj fyziky začiatkom 20. storočia robí zásadný prevrat vo všetkých klasických predstavách.

V týchto dobách prácami Einsteina a Smoluchovského bola objavená teória Brownovho pohybu. Jeho experimentálne overenie poukazuje po prvý raz na reálnosť molekúl. Prácami Gipsovými mohutne sa rozvíja štatistická fyzika a molekulárna teória tepla.

Ukázalo sa, že pohyb molekúl má oveľa zložitejší charakter ako sa predpokladalo a jeho pochopenie je viazané na nový druh fyzikálnych zákonov, na zákony štatistické, ktoré sa svojou formuláciou odlišujú od zákonov dynamickej povahy.

Okrem štatistickej fyziky a molekulárnej teórie tepla začína sa formovať a rozvíjať teória relativity, ktorá za svoj počiatok môže datovať negatívny výsledok Michelsonovho pokusu (1881). Tento totiž pobádal Einsteina preveriť základné teórie klasickej fyziky a hlavne teóriu o priestore a čase. Po revízii týchto teórií vzniká špeciálna teória relativity, ktorej základom sú dva prírodné zákony:

a) princíp relatívnosti,

b) princíp konštantnej rýchlosti svetla.

Prvý tvrdí, že zákony fyzikálnych javov sú rovnaké vo všetkých vzťažných sústavách. Druhý hovorí, že svetlo sa šíri vo vákuu vo všetkých inerciálnych sústavách rovnakou rýchlosťou.

Vznikom teórie relativity nemožno zavrhnúť všetko to, čo už vo fyzike bolo vybudované. Ak sa zaoberáme procesmi, ktoré sa šíria malými rýchlosťami vzhľadom k rýchlosti svetla, celkom vystačíme so zákonmi klasickej fyziky, ktorá je vlastne hraničným prípadom modernej fyziky. Pri väčšine rýchlostí blízkych rýchlosti svetla berieme do úvahy relativistické efekty a prakticky pracujeme metódami modernej fyziky.

Klasická fyzika bola vybudovaná na predpokladoch, že tri základné veličiny — hmotnosť, dĺžka (priestor) a čas sú absolútne, to znamená, že ich veľkosť nezávisí od pohybu, od rýchlosti vzhľadom k iným fyzikálnym objektom.

Teória relativity tieto predstavy od základu zmenila. Dospela k týmto dvom dôležitým poznatkom:

a) Hmotnosť telesa nie je veličina konštantná, ale s rastúcou rýchlosťou sa zväčšuje. Platí vzťah

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

kde m je hmotnosť telesa, ktoré sa pohybuje rýchlosťou v vzhľadom k inerciálnemu systému, m_0 je hmotnosť daného telesa v pokoji, c je rýchlosť svetla vo vákuu

$$c = (2,997929 \pm 0,000008) \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

Samotná rovnica vedie k záveru, že rýchlosť telesa nemôže dosiahnuť rýchlosť svetla vo vákuu, lebo pre $v > c$ prestáva byť pravá strana číslo reálne. Ak sa rýchlosť telesa približuje rýchlosti svetla vo vákuu, jeho hmotnosť vzrastá nad všetky medze. Fotón, ktorý má nulovú hmotnosť v pokoji, sa vo všetkých inerciálnych sústavách pohybuje rýchlosťou c .

b) Teória relativity dala nový zmysel zákonu zachovania hmotnosti a energie. Energia telesa hmotnosti m je daná vzťahom

$$W = m c^2.$$

Potom to isté teleso, ktoré vzhľadom k určitej sústave je v pokoji, má energiu

$$W_0 = m_0 c^2$$

Ak do rovnice $W = m c^2$ dosadíme hmotnosť telesa vyjadrenú v časti a), dostávame

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Energiu telesa, ktorého hmotnosť v pokoji je m_0 a ktoré sa pohybuje rýchlosťou blízkou rýchlosti svetla, možno určiť z rozdielu jeho energií W , W_0 .

$$\begin{aligned}\Delta W &= W - W_0 \\ \Delta W &= (m - m_0) c^2 \\ \Delta W &= \Delta m c^2,\end{aligned}$$

kde Δm je prírastok hmotnosti telesa. Zistili sme, že hmotnosť telesa s rastúcou rýchlosťou sa zväčšuje.

2. Pohyb elektrónu v homogénnom elektrostatickom poli

V Rozhľadoch [3] sme sa zaoberali pohybom elektrónu v homogénnom elektrostatickom poli pri malých rýchlostiach voči rýchlosti svetla. Teraz ten istý problém budeme riešiť pre rýchlosti blízke rýchlosti svetla.

Keď aplikujeme predchádzajúcu úvahu na elektrón, môžeme povedať, že jeho hmotnosť sa s rastúcou rýchlosťou zväčšuje. Naproti tomu veľkosť elektrického náboja elektrónu je na pohybe nezávislá, a preto merný náboj elektrónu sa s rastúcou rýchlosťou znižuje.

Pre výpočet relativistickej rýchlosti elektrónu v homogénnom elektrostatickom poli vychádzame z rovníc:

$$(m - m_0) c^2 = e U,$$

$$\frac{m_0}{m} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

riešením ktorých dostávame vzťah pre relativistickú rýchlosť elektrónu

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + eU/m_0c^2)^2}}.$$

Ak sa napr. elektrón pohybuje v homogénnom elektrostatickom poli, kde rozdiel potenciálov $U = 10^4$ V a rýchlosť svetla vo vákuu zaokrouhlíme na $3 \cdot 10^5$ km s⁻¹, dostávame takúto rýchlosť elektrónu

$$v = 3 \cdot 10^5 \sqrt{0,0379} = 58\,404 \text{ km s}^{-1}.$$

Podľa uvedeného vzorca pre v môžeme vypočítať rýchlosť elektrónu v katódovej trubici, alebo v elektrónke, keď poznáme príslušný rozdiel potenciálov.

Vzťah

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

určuje relativistický prírastok hmotnosti elektrónu. Tak napr. ak je napätie $U = 10^4$ V, potom rýchlosť elektrónu je $58\,404$ km s⁻¹ a relativistický prírastok hmotnosti elektrónu pri tomto napätí je

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{58\,404}{300\,000}\right)^2}} \doteq 1,02.$$

To znamená, že hmotnosť elektrónu pri danej rýchlosti je $m = 1,02 m_0$.

Pri urýchľujúcom napätí $U = 3,1 \cdot 10^6$ V dosiahne elektrón rýchlosť $v = 2,97 \cdot 10^5$ km s⁻¹. Pri tejto rýchlosti dosahuje hmotnosť elektrónu približne sedemnásobok jeho hmotnosti v pokoji $m = 7,1 m_0$.

3. Záver

V tomto a predchádzajúcom článku zaoberali sme sa riešením nerelativistického a relativistického pohybu elektrónu v homogénnom elektrostatickom poli. Volili sme polia a tým i pokusy jednoduché, a to z tých príčin, že riešenie pohybu elektrónu v zložitých poliach je matematicky dosť náročné.

Pohyb elektrónu možno pozovať v rôznych poliach, a to rôznymi spôsobmi. Výsledky, ktoré by sme dostali pre kruhovú frekvenciu rotácie elektrónu a pre polomer jeho dráhy pri relativistickom pohybe v homogénnom magnetostatickom poli, majú veľký význam pre súčasnú jadrovú fyziku a techniku, pomocou nich je možné z odklonenia častice v magnetickom poli určiť jej impulz.

Literatúra :

- [1] ŠPOLSKIJ, E. V.: Atomová fyzika I. Praha, 1957
- [2] MAREK, J.: Atomová fyzika pro 3. ročník střední průmyslové školy jaderné techniky. Praha, 1964
- [3] FERKO, P.: Nerelativistické pohyby elektrónu. „Rozhledy matematicko-fyzikální“. 50, 1971—72, s. 158—165

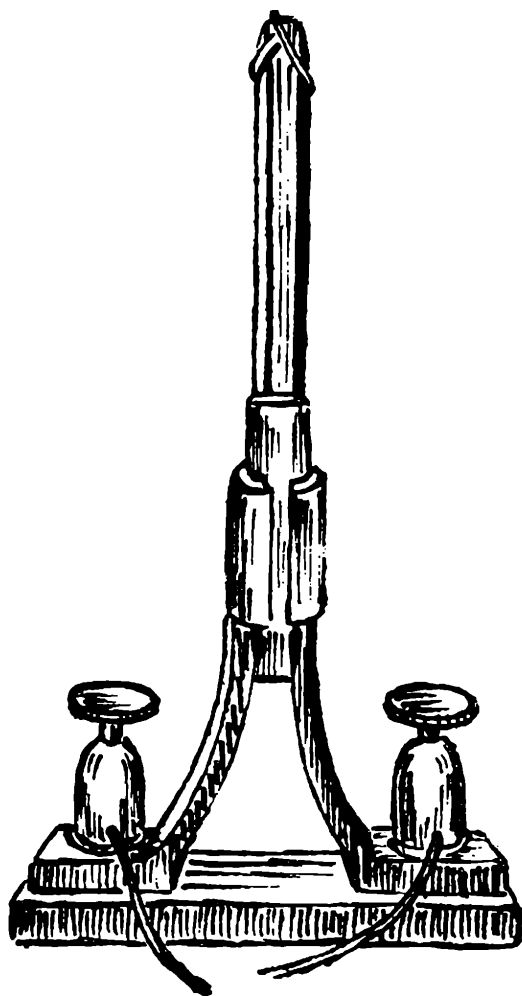
Cesta za elektrickým světlem

RUDOLF KOLOMÝ, Moravská Třebová

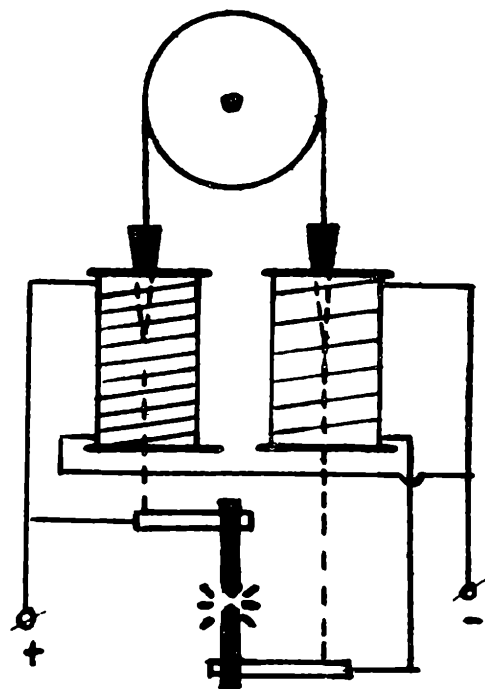
Stojí opravdu za to se občas zamyslet nad pokroky světové vědy a techniky, zejména když k tomu přímo vybízají určitá kulatá výročí vědců a techniků nebo jejich objevů a vynálezů. Dnes si ani neuvědomujeme, jak velkou námahu museli vynaložit vědci a technici, než se jim podařilo např. zkonstruovat první prakticky upotřebitelnou obloukovou lampu nebo elektrickou žárovku. Ovšem i tyto tak zdánlivě jednoduché věci mají dlouhou a bohatou historii.

Na samém počátku minulého století (1802) slavný anglický fyzik a chemik H. Davy zjistil, že mezi dvěma tyčinkami ze zuhelnatělého dřeva vznikne elektrický oblouk, jsou-li připojeny na dostatečně silný zdroj galvanického proudu, a že se tímž proudem slabý platinový drátek rozžhaví, až svítí. Oba tyto objevy vedly k praktickému využití — první byl podstatou obloukové lampy, druhý elektrické žárovky.

Všimněme si nejprve historie obloukové lampy. Do r. 1844 se používalo tyčinek ze zuhelnatělého dřeva (dřevěného uhlí), později z retortovaného uhlí. Problémem byla regulace vzdálenosti tyčinek, aby oblouk nezha-



Obr. 1



Obr. 2

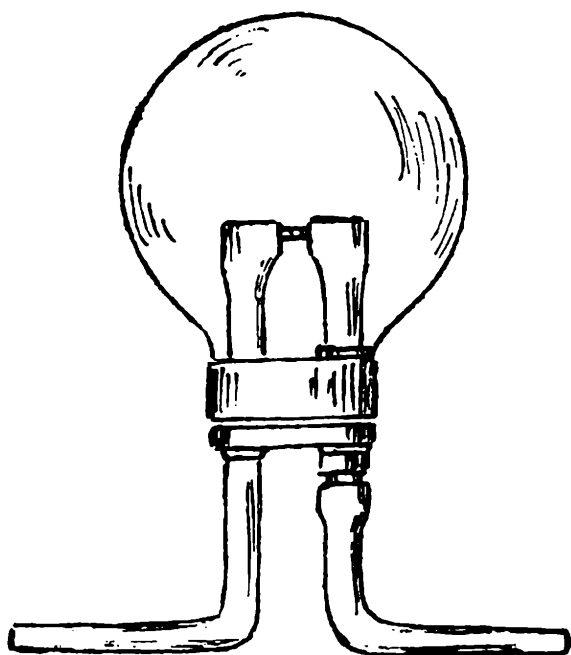
sínal. R. 1848 použil L. Foucault k regulaci hodinového strojku. Obloukové světlo si získalo ihned velké obliby pro značnou intenzitu a jas. Proto již r. 1846 bylo tohoto zdroje poprvé použito v pařížském divadle k efektivnímu osvětlení scény při premiéře Meyerbeerovy opery „Prorok“. R. 1850 zavedl prof. Jacobi pouliční osvětlení obloukovkami v Petrohradě. K osvětlování domácností se tohoto zdroje pro velkou svítivost nedalo dobře použít (nadále se užívalo petrolejových nebo plynových lamp). V r. 1875 vzbudil velkou pozornost vynález nové obloukové lampy (patent z r. 1876), jejímž autorem byl ruský fyzik P. N. Jabločkov (14. 9. 1847—31. 3. 1894; 125. výročí narození — kulturní výročí UNESCO na rok 1972) a které se všeobecně říkalo „Jabločkova svíčka“ (obr. 1). Užil poznatku, že oba uhlíky obloukovky uhořívají stejnoměrně, jsou-li připojeny na zdroj střídavého proudu. Místo obvyklého uspořádání uhlíků, při kterém se vzdálenost mezi nimi měnila zároveň s uhoříváním uhlíků, užil paralelního uspořádání a mezi uhlíky vložil izolující vložku, která uhořívala současně. Tato konstrukce se ukázala velmi zdařilou a nabyla rychle značného rozšíření. „Z Paříže — psal Jabločkov — se mé elektrické světlo rozšířilo po celém světě, dostalo se ke dvoru perského šacha i ke dvoru kambodžského krále“. Na světové

výstavě v Paříži (1878) hořelo trvale na 1000 „jabločkovek“. Další vývoj obloukovek spočíval již jen ve zlepšování regulace uhlíků. V tomto úsilí se také významnou měrou zapsal náš vynálezce ing. F. Křižík, „český Edison“, jak se mu všeobecně říkalo (8. 7. 1972 jsme vzpomínali 125. výročí jeho narození). Křižík byl nadšen světlem „Jabločkovy svíčky“, kterou viděl na pařížské výstavě, a rozhodl se pro některá zlepšení. Jeho vynález regulátoru (obr. 2) umožnil, že oblouková lampa svítila plných 12 hodin. Tím se Křižík rázem proslavil na celém světě a na další pařížské výstavě r. 1881 jeho konstrukce obloukové lampy vzbudila vedle Edisonovy žárovky největší pozornost. V krátké době se Křižíkova obloukovka stala nejrozšířenějším osvětlovacím tělesem na světě (v r. 1891 zařídil osvětlení Jubilejní výstavy v Praze, pro kterou zkonstruoval do té doby největší elektrickou světelnou fontánu na světě).

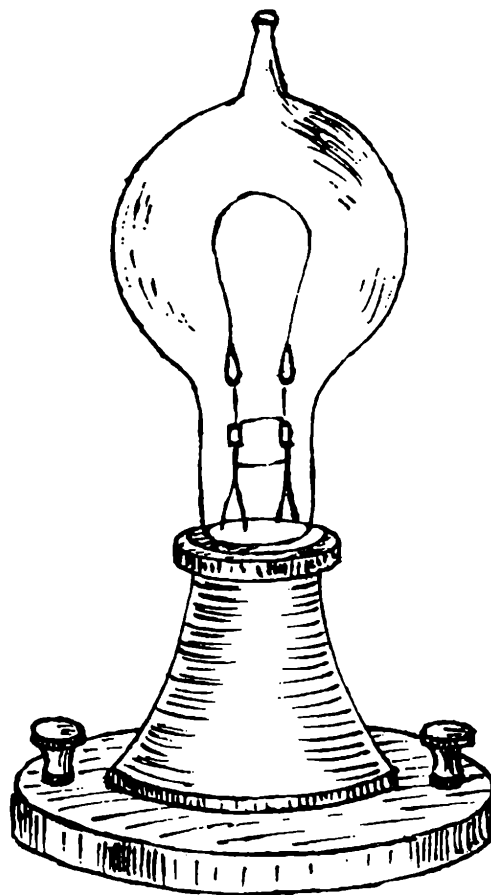
V této době však začaly obloukovkám silně konkurovat elektrické žárovky. Jejich historie je velmi zajímavá a poučná. Již r. 1836 se v časopisu *Courrier Libéral* navrhovalo, aby se v dolech, kde je velké nebezpečí výbuchu plynů, používalo lamp s tenkou uhlíkovou tyčinkou, rozžhavenou ve vzduchoprázdnu elektrickým proudem. Určitého úspěchu dosáhl až Belgičan italského původu de Changy, důlní inženýr, když použil tenkého platinového vlákna umístěného ve vzduchoprázdne baňce. Ovšem jeho pokusy brzo ztroskotaly pro vysokou cenu platinového vlákna a pro nedostatečnost elektrických zdrojů. Stejný osud postihl i mnohem dokonalejší žárovky H. Goebela (původem Němec, žil v New Yorku), který r. 1854 užil místo platinového vodiče zuhelnatělého bambusového vlákna. Svými žárovkami osvětloval pouze výkladní skříň svého obchodu, aby upoutal pozornost kolemjdoucích. Svůj vynález později prodal jakési firmě, která se v devadesátých letech 19. stol. pro výrobu žárovek dostala do sporu s General Electric Co, jež odkoupila patentní právo na Edisonovy žárovky. Nebýt tohoto sporu, ani bychom dnes nevěděli, že nějaký Goebel byl průkopníkem elektrických žárovek. Téměř současně (1855) s Goebelem připadl na myšlenku žárovky s uhlíkovým vláknem Angličan J. Swan. Téměř po čtvrtstoletí, po letech perné práce a mnohých zklamání, vystavil r. 1878 svou žárovku, která měla vlákno ze zuhelnatělé bavlny. Další velmi úspěšné pokusy s elektrickou žárovkou konal ruský vědec A. N. Lodygin (18. 10. 1847—16. 3. 1923 — 125. výročí narození; kulturní výročí UNESCO na rok 1972). Jeho žárovka (obr. 3) se skládala ze vzduchoprázdne skleněné koule, do níž mezi dvě silnější měděné tyčinky umístil tenkou uhlíkovou tyčinku. V r. 1873 osvětloval těmito žárovkami jednu z ulic Petrohradu. V r. 1874 obdržel za svůj vynález Lomonosovovu cenu Akademie věd. Později v důsledku značných finančních obtíží odjel za hranice (stejně jako Jabločkov), kde pokračoval v práci na zdokonalení svého vynálezu.

Ale to se již hlásí ke slovu Edisonova žárovka (obr. 4). R. 1878 Edison

poprvé spatřil obloukovou lampu. Bylo mu zřejmé, co svět potřebuje: „Rozdělit světlo na menší jednotky, obloukové světlo je příliš jasné a příliš velké, potřebujeme drobná světla rozdělená po domech, po způsobu plynového osvětlení...“ Z vodivých materiálů zkoušel Edison všelicos, i vlákna bambusu, která předtím zuhelnatil. Žárovka s vláknem ze zuhelnatělé bavlny svítila plných 45 hodin (21. října 1879). První



Obr. 3



Obr. 4

trvalé osvětlení 150 Edisonovými žárovkami dostal v květnu r. 1880 parník „Columbia“. Vítěznou cestu světem zahájily Edisonovy žárovky v r. 1881 na světové výstavě v Paříži. A my se můžeme pochlubit, že podle Edisonova principu a s jeho pomocí bylo v r. 1882 jako první v Evropě a snad i na světě elektrifikováno brněnské divadlo (90. výročí). Proč vyhrála Edisonova žárovka a proč se neuplatnily předchůdkyně, když některé byly podle úsudku znalců lepší, než žárovky Edisonovy? Proto, že Edison nevynalezl jen žárovku, nýbrž celou osvětlovací soustavu.

Velká rychlost - sen každého motoristy

Až si jednou pořídíte motorové vozidlo (1. část)

RNDr. MILAN BEDNAŘÍK

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Až si jednou pořídíte vlastní motorové vozidlo, což je v dnešní době nebývalého rozvoje motorismu velmi pravděpodobné, očekává vás jednak spousta příjemných zážitků spojených s možností rychlého a pohodlného cestování do míst, po kterých zatoužíte, jednak také několik zkušeností nepříjemného rázu, spojených s nebezpečím neopatrné jízdy, s různými defekty na vašem vozidle, se zaplacením pokuty za dopravní přestupek apod. Je samozřejmé, že vám žádnou z nepříjemných zkušeností nepřejeme, přesto však zůstává smutným faktem, že mnoho řidičů motorových vozidel na ně často doplácí, i když je právě v jejich moci se jim vyhnout. Je totiž všeobecně známo, že počet a rozsah těchto negativních zkušeností závisí ve značné míře na samotném řidiči.

Jednou z nejvážnějších příčin nebezpečných situací při jízdě motorovým vozidlem je *příliš velká rychlost*. Bylo např. zjištěno, že nejméně 32 % všech dopravních nehod je u nás způsobeno nepřiměřenou rychlostí. Přestože byla zavedena řada dopravních značek omezujících rychlost a přestože se každý žák autoškoly musí z paměti naučit, že „rychlost jízdy je řidič povinen přizpůsobit okolnostem, zejména stavebnímu stavu a povaze silnice, vzdálenosti, na kterou má rozhled, a situaci vzniklé v silničním provozu“ (citováno z Vyhlášky o pravidlech silničního provozu), zůstává snem každého mladého motoristy jezdit rychle.

Většina začínajících řidičů, kteří poprvé usedají na sedlo svého nového motocyklu nebo za volant svého naleštěného automobilu, je přesvědčena, že své neobyčejné řidičské schopnosti (ve skutečnosti jen slabě nacvičené dovednosti) prokáží právě rychlou jízdou. Rychlá jízda jim přináší okamžiky nebývalého vzrušení a vnitřní pocit blahého uspokojení. Chvilé vršení a spokojenosti bývají však při rychlé jízdě velmi často (až příliš často!) vystřídány okamžiky neočekávaného a hrozivého nebezpečí. Pohoda příjemné jízdy pak ve zlomku sekundy mizí a mění se v okamžik hrůzy; ozve se svištění brzd a zablokovaných kol, vozidlo se vychýlí z původního směru a dochází opět k jedné z četných dopravních nehod, končících zničením vozidla a někdy i ztrátou lidského života.

Věnujme se však nyní raději úvahám fyzikálního rázu. Zkoumejme, v čem tkví fyzikální příčiny katastrofálních následků dopravních nehod zaviněných nepřiměřenou rychlostí.

Z mechaniky víme, že u každého pohybujícího se tělesa můžeme určit

jeho kinetickou energii, jejíž velikost závisí na hmotnosti tělesa a na rychlosti jeho pohybu vzhledem k nepohyblivé soustavě ostatních těles (vzhledem k pevné vztažné soustavě). Označíme-li hmotnost jedoucího vozidla písmenem m a jeho rychlost v , je jeho kinetická energie dána vztahem

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (1)$$

Přitom uvažujeme pouze translační pohyb vozidla jako celku a nikoli dílčí pohyby jeho některých částí, jako je např. otáčení kol nebo složitý pohyb součástí pracujícího motoru; kinetickou energii těchto dílčích pohybů vzhledem k energii translačního pohybu vozidla můžeme zanedbat.

Ze vztahu (1) vidíme, že kinetická energie jedoucího vozidla roste jednak lineárně s hmotností vozidla (např. kinetická energie nákladního automobilu o hmotnosti 2 tuny je dvakrát větší než kinetická energie osobního vozu o hmotnosti 1 tuny, jedoucího stejnou rychlostí), jednak kvadraticky s jeho okamžitou rychlostí (zvýší-li se např. rychlost auta z 30 km h^{-1} na 60 km h^{-1} , tj. dvakrát, vzroste jeho kinetická energie čtyřikrát, v případě zvýšení rychlosti ze 30 km h^{-1} na 90 km h^{-1} , tj. na hodnotu třikrát větší, vzroste kinetická energie již devětkrát). Skutečnost, že kinetická energie nabývá obzvláště vysokých hodnot právě při velkých rychlostech, by si měli uvědomovat všichni řidiči, kteří jezdí „na plný plyn“. Ukážeme si to na jednoduchém příkladě.

Příklad 1: Vypočítejte kinetickou energii automobilu o hmotnosti 800 kg při rychlostech 18 km h^{-1} , 36 km h^{-1} , 72 km h^{-1} a 108 km h^{-1} .

Řešení: Došazujeme-li do vztahu (1) pro kinetickou energii hmotnost v kilogramech a rychlost v metrech za sekundu, obdržíme velikost kinetické energie v joulech. Snadno vypočítáme, že pro $m = 800 \text{ kg}$ a pro

$$\begin{aligned} v = 18 \text{ km h}^{-1} &= 5 \text{ m s}^{-1} \text{ je } W_k = 1 \cdot 10^4 \text{ J}, \\ v = 36 \text{ km h}^{-1} &= 10 \text{ m s}^{-1} \text{ je } W_k = 4 \cdot 10^4 \text{ J}, \\ v = 72 \text{ km h}^{-1} &= 20 \text{ m s}^{-1} \text{ je } W_k = 16 \cdot 10^4 \text{ J}, \\ v = 108 \text{ km h}^{-1} &= 30 \text{ m s}^{-1} \text{ je } W_k = 36 \cdot 10^4 \text{ J} \end{aligned}$$

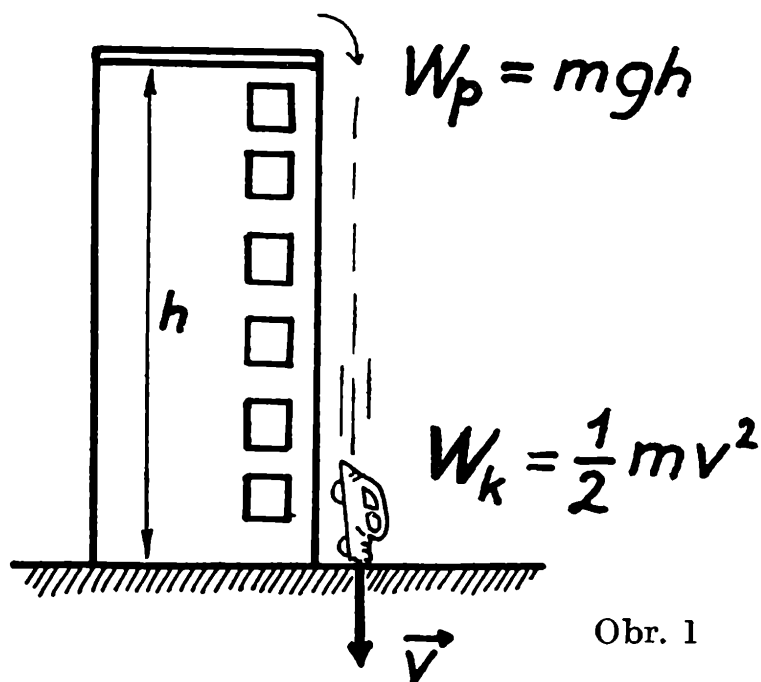
Z výsledků je ihned patrné, že zatímco dané rychlosti jsou v poměru $1 : 2 : 4 : 6$, jsou odpovídající hodnoty kinetické energie $1 : 4 : 16 : 36$.

Ukažme si nyní, jak souvisí velikost kinetické energie jedoucího vozidla s nebezpečím dopravní nehody. Ze zákona zachování a přeměny energie víme, že každé změně energie jednoho druhu odpovídá vždy změna energie jiného druhu. Tak např. při rozjíždění motorového vozidla se zvyšuje jeho pohybová energie na úkor energie tepelné při spalování pohonných látek v motoru, případně na úkor potenciální energie tíhové při jízdě vozidla ze svahu. Naopak při zastavování vo-

zidla se mění jeho kinetická energie opět v energii tepelnou, která se projevuje zahříváním brzdového mechanismu a pneumatik, případně při jízdě do kopce zvyšováním potenciální energie vozidla.

Přirozeným důsledkem zákona zachování energie je pak ona známá a v praxi nesčetněkrát otevřená skutečnost, že *čím větší je kinetická energie vozidla, tj. čím větší je jeho okamžitá jízdní rychlost, tím nesnadněji se vozidlo zastavuje*. Spatříme-li na silnici náhle překážku, která nás nutí neodkladně zastavit, snažíme se kinetickou energii svého vozidla „zmařit“ brzděním. O tom, zda se nám včasné zastavení podaří, rozhoduje především rychlost vozidla a vzdálenost, kterou máme pro zastavení k dispozici. Jestliže se totiž před námi objeví překážka vzhledem k okamžité rychlosti našeho vozidla příliš blízko, pak se ani sebeúčinnějším brzděním vozidlo zastavit nepodaří a obvykle dochází k jeho najetí na překážku. Je-li překážka pevná, vozidlo se o ni zastaví, přičemž se jeho kinetická energie odpovídající rychlosti vozidla v okamžiku nárazu „zmaří“ mechanickou deformací jak překážky tak i vozidla; velikost této deformace, která se projevuje nejčastěji tříštěním a celkovou destrukcí překážky a vozidla, závisí pak na velikosti kinetické energie vozidla v okamžiku nárazu (a samozřejmě na pevnosti a dalších mechanických vlastnostech materiálu obou střetnuvších se těles).

Příklad 2: V motoristické literatuře se uvádí, že náraz automobilu nebo motocyklu, který vjede rychlostí 72 km h^{-1} kolmo do pevné zdi, vyvolá přibližně stejný ničivý účinek, jako jeho pád ze střechy dvacetimetrového domu. Ověřte si toto tvrzení výpočtem.



Obr. 1

Řešení: Potenciální tíhová energie automobilu o hmotnosti m , který by byl umístěn na střeše domu o výšce h , je $W_p = mgh$, kde g je tíhové zrychlení. Kinetická energie téhož automobilu při rychlosti v je $W_k =$

$= \frac{1}{2} m v^2$. Má-li být účinek nárazu vozidla na zeď při rychlosti v stejný jako účinek jeho dopadu při volném pádu z výšky h , platí podle zákona zachování mechanické energie

$$W_p = W_k$$

neboli

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2$$

a odtud výška

$$h = \frac{v^2}{2g}.$$

Dosadíme-li $v = 72 \text{ km h}^{-1} = 20 \text{ m s}^{-1}$ a $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$, dostáváme pro výšku domu $h = 20 \text{ m}$, což odpovídá hodnotě uvedené v zadání příkladu. K fyzikální stránce řešení je však nutno ještě dodat, že výsledek je správný pouze za předpokladu, že šlo o volný pád tělesa a že směr a způsob dopadu automobilu na vodorovnou rovinu byl stejný jako při jeho nárazu na pevnou zeď.

Abychom si učinili konkrétnější představu o ničivém účinku nárazových sil vznikajících při najetí vozidla na překážku ve srovnání s účinkem dopadu téhož tělesa z určité výšky, uvádíme tabulku I. Hodnoty výšky h odpovídající rychlostem v byly vypočítány stejným způsobem jako v příkladu 2.

Tabulka I.

Rychlost v	km . h ⁻¹	36	72	108	144
	m . s ⁻¹	10	20	30	40
Výška h	m	5	20	45	80

Ničivé účinky nárazu vozidla na překážku postihují nejen samotné vozidlo, nýbrž i všechna tělesa umístěná uvnitř vozidla, tedy i jeho osádku. Ničivé působení na osoby se projevuje v podstatě dvěma způsoby: 1. deformací karosérie vozidla, což vede k poranění osob o roztržené sklo, o ostré hrany roztržených a zprohýbaných částí karosérie apod.; 2. setrvačným pohybem osob ve směru rychlosti vozidla v okamžiku jeho najetí na překážku, jehož důsledkem je náraz těchto osob na přední přístrojovou desku automobilu (u řidiče na volant), na přední ochranné sklo apod. Najede-li např. automobil rychlostí 72 km h^{-1} na pevnou překážku, narazí setrvačností vymrštěné lidské tělo prakticky touž rychlostí na přední stěnu karosérie. V případě jízdy na motocyklu je touto rychlostí vymrštěno ze sedla tělo motocyklisty, které pokračuje v setrvačném pohybu až do okamžiku nárazu na překážku. Vzhledem

k tomu, že působení tohoto nárazu je přibližně stejné jako účinek nárazu při pádu z výšky 20 m (viz příklad 2), nelze se vůbec divit, že při dopravních nehodách tohoto druhu dochází i ke smrtelným zraněním.

Závěrem odvodíme vztah pro velikost nárazových sil, vznikajících při najetí vozidla na překážku. Z mechaniky víme, že působí-li na těleso o hmotnosti m , které bylo původně v klidu, stálá síla F po dobu t , nabude těleso rychlosti v , což vyjadřujeme rovnicí

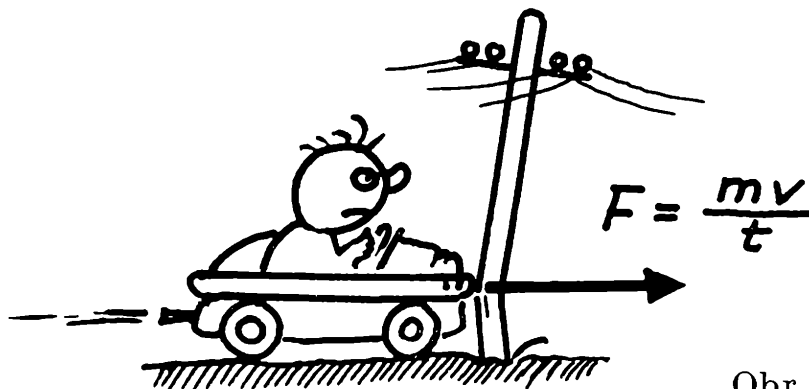
$$F t = m v, \quad (2)$$

Přitom součin $F t$ nazýváme impuls síly a součin $m v$ hybnost tělesa.

Rovnice (2) platí ovšem také tehdy, jestliže těleso o hmotnosti m , které se již pohybuje rychlostí v , chceme uvést za určitou dobu t působením stálé brzdící síly F do klidu. V případě najetí vozidla na překážku tato brzdící síla představuje nárazovou sílu, která způsobuje prudké zastavení vozidla. Její velikost lze vyjádřit z rovnice (2) vztahem

$$F = \frac{m v}{t},$$

kde v je v tomto případě rychlost vozidla v okamžiku nárazu a t je doba, za kterou klesne rychlost v při nárazu na nulu. Pro platnost vztahu se předpokládá, že síla F je po celou dobu nárazu t stálá.



Obr. 2

Příklad 3: Vypočítejte velikost nárazové síly, která způsobí zastavení automobilu o hmotnosti 800 kg za dobu 0,01 s, jestliže automobil najel na překážku rychlostí 72 km h⁻¹.

Řešení: Dosadíme-li do vztahu pro sílu F číselné hodnoty $m = 800$ kg, $t = 0,01$ s a $v = 72$ km h⁻¹ = 20 m s⁻¹, zjistíme, že velikost nárazové síly je $F = 1,6 \cdot 10^6$ N $\doteq$ 1,6 · 10⁵ kp. Jak vidíme, jde o sílu značné velikosti, tj. v našem případě o sílu značných destrukčních účinků.

Poněvadž nárazovým silám jsou vystavena i tělesa uvnitř vozidla, lze použít uvedeného postupu rovněž pro posouzení účinku těchto sil na osádku automobilu. Předpokládáme-li např., že cestující o hmotnosti 60 kg narazí stejně velkou rychlostí, jako měl automobil z příkladu 3, na přední přístrojovou desku, přičemž doba trvání nárazu je $t = 0,01$ s, dostaneme pro velikost nárazové síly $F = 120 \cdot 10^3$ N $\doteq$ 12 · 10³ kp.

S ohledem na zmírnění účinků těchto nárazových sil jsou dnes přepsány pro všechny nové osobní automobily *bezpečnostní pásy* pro řidiče a jeho spolujezdce na vedlejším sedadle. Bezpečnostní pásy jsou ochranným zařízením, které znemožňuje nebo alespoň brzdí setrvačný pohyb osob v okamžiku srážky, čímž podstatně zmírňuje nárazy těchto osob na vnitřní části vozu.

V příštím článku našeho nového seriálu, nazvaného „*Až si jednou pořídíte motorové vozidlo*“, se dovíte, jakou rychlostí jezdit, abychom místo nebezpečného najetí na překážku raději vozidlo zavčas zastavili.

olympiády

XXIII. ročník matematické olympiády

Ve školním roce 1973—74 proběhne již XXIII. ročník matematické olympiády pro žáky škol II. cyklu i ZDŠ. V organizaci MO nenastanou žádné změny, a proto uvedeme jen nejdůležitější termíny týkající se průběhu prvního kola.

Přípravná část I. kola obsahuje pro každou kategorii *čtyři úlohy*. Řešení těchto úloh odevzdají soutěžící všech kategorií do 15. listopadu 1973 svému učiteli (referentu MO) ve škole.

V *soutěžní části* I. kola mají účastníci v kategoriích A, B, C možnost volby úloh (podrobnosti budou opět uveřejněny v letáku), v kategorii Z jsou zadány opět jen čtyři úlohy.

Termín odevzdání řešení soutěžních úloh v kategorii A a Z je 15. leden 1974, v kategorii B a C je to až 15. února 1974.

Pro informaci učitelů i soutěžících uvedeme nyní texty úloh.

Přípravné úlohy I. kola

1. Kategorie A

1. Nechť A je konečná množina s k prvky, nechť P je množina všech konečných posloupností prvků z A . Jsou-li α, β dvě posloupnosti z P , $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, řekneme, že α je úsekem β , jestliže $n \leq m$ a $a_i = b_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Nechť R je část P s touto vlastností: ke každé posloupnosti $\alpha \in P$, která není úsekem žádné posloupnosti z R , lze v R nalézt právě jednu posloupnost, která je úsekem posloupnosti α .

Jestliže v R je r posloupností, kolik existuje v P posloupností, jež jsou úsekem a) právě jedné, b) alespoň jedné posloupnosti z R ?

2. Je dán rovnostranný trojúhelník o straně délky 1. Každou stranu rozdělte na k stejných dílů. Sestrojte všechny úsečky rovnoběžné s příslušnými stranami; jejich krajní body jsou dělicími body na stranách daného trojúhelníka. Vznikne tak síť složená z rovnostranných trojúhelníků. Určete počet všech trojúhelníků, které lze v této síti najít. (Např. pro $k = 3$ je 13 takových trojúhelníků.)

3. Jsou-li x, y, z vnitřní úhly v trojúhelníku a je-li $V = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z$, pak nutná a postačující podmínka, aby trojúhelník byl ostroúhlý, zní $V > 1$, pro tupouhlý $V < 1$.

4. Vo vypuklom štvoruholníku $ABCD$ sú stredy strán AB, BC, CD, DA označené po rade K, L, M, N .

Dokážte, že odchylky α, β dvojíc priamok AC, BD a KM, LN sú rovnaké práve vtedy, keď

$$2 \cdot \overline{KM} \cdot \overline{LN} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Kategorie B

1. a) V oboru všech reálných čísel řešte graficky soustavu nerovnic

$$\begin{aligned} y &< -x^2 - 2x + 1 \\ y &> -1 + \operatorname{sign}(x + 1). \end{aligned} \quad (1)$$

b) Nalezněte graficky $P \cap Q$, kde P je obor pravdivosti soustavy výrokových forem (1) a $Q = \{[x, y] \in E_1 \times E_1; y < (x + 1)^2 - 1 + \operatorname{sign}(x + 1)\}$. (E_1 je množina reálných čísel).

c) Je dána soustava nerovnic

$$\begin{aligned} y &\leq -x^2 - 2x + 1, \\ y &\geq -1 + \operatorname{sign}(x + 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Nalezněte $R \cap S$, kde R je obor pravdivosti soustavy (2) s reálnými proměnnými x, y a $S = \{(x, y) \in E_1 \times E_1; y \leq (x + 1)^2 - 1 + \operatorname{sign}(x + 1)\}$.
Poznámka: $\operatorname{Sign} x$ (čti $\operatorname{signum} x$) je funkce reálné proměnné definovaná takto:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x > 0 \\ 0, & \text{je-li } x = 0 \\ -1, & \text{je-li } x < 0. \end{cases}$$

2. V oboru přirozených čísel řešte soustavu rovnic

$$ac - bd = p, \quad ad - bc = 0,$$

kde a, b, c, d jsou neznámé a p je dané prvočíslo, $p > 2$.

3. V rovině jsou dány dva různé body A, D . Dále je dáno číslo r takové, že $r > \frac{1}{2} \cdot AD$. Určete geometrické místo průsečíků úhlopříček všech rovnoramenných lichoběžníků s ramenem AD a s poloměrem opsané kružnice r .

4. Určete objem čtyřstěnu, jehož každé dvě protější hrany mají tutéž délku; délky hran v těchto dvojicích jsou a, b, c .

Kategória C

1. Dokážte, že pre kladné čísla a, b, c platí:

$$\frac{b(2a-c)}{a} + \frac{c(2b-a)}{b} + \frac{a(2c-b)}{c} \leq \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}.$$

Kedy platí rovnosť?

2. Ktoré štvorciferné číslo deliteľné 36 sa dá zapísať ako súčet tretích mocnín dvoch po sebe nasledujúcich nepárnych prirodzených čísel?

3. Jsou dány dva různé body A, B a kladné číslo b . Určete geometrické místo těžišť všech trojúhelníků ABC takových, že $AC = b$.

4. Je dán obdélník $ABCD$ a M je jeho libovolný vnitřní nebo hraniční bod. Dokažte, že platí

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

Platí tato rovnost i pro body M roviny obdélníka, které leží v jeho vnějšku?

Kategorie Z

1. Šachový kroužek uspořádal turnaj, v němž každý z kamarádů Jirka, Karel, Tonda obsadil právě jedno z prvních tří míst. Určete pořadí chlapců v šachovém turnaji, víte-li, že z výroků

- a) Jirka je třetí,
- b) Tonda není druhý,
- c) Karel není třetí

je právě jeden pravdivý.

2. Ručičky hodin ukazují přesně 12 hodin. Otočíme velkou stokrát po sto stupních. Kolik hodin budou pak hodiny ukazovat? Udejte s přesností na minutu.

3. Pravidelný osmiúhelník má být vepsán do čtverce s jednotkovou stranou.

- a) Popište konstrukci.
- b) Vypočtete délku strany osmiúhelníka.
- c) Vypočtete délky všech úhlopříček osmiúhelníka.

4. Jsou dány dvě kružnice $k_1 = (S_1, r_1)$, $k_2 = (S_2, r_2)$, které se protínají v bodě Q , přičemž je $r_1 \neq r_2$, $\sphericalangle S_1 Q S_2 = 90^\circ$. Dále je dáno kladné číslo d . Bodem Q vedte přímku tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vyřaly dvě nepře-

krývající se třetivý, jejichž délky mají součet d . Provedte diskusi řešení úlohy.

Soutěžní úlohy I. kola

1. Kategorie A

1. Budte x_1, x_2, x_3 tři kladná čísla. Budte y_1, y_2, y_3 tři kladná čísla, která leží mezi největším a nejmenším z čísel x_1, x_2, x_3 . a necht' platí

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq y_1 + y_2 + y_3. \quad (1)$$

Dokažte, že pak je

$$x_1 x_2 x_3 \leq y_1 y_2 y_3, \quad (2)$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 \leq y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 \quad (3)$$

2. Jsou-li dána libovolná čtyři různá reálná čísla, lze vždy označit jedno z nich x a ostatní tři pak y, z, w tak, aby platila nerovnost

$$|x^3 - x^2(y + z + w)| < |x(yz + yw + zw) - yzw|; \quad (4)$$

dokažte.

3. Je dána konečná množina $\mathbf{Z}$; označme $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ libovolné dvě neprázdné její podmnožiny, s_{12}, d_{12} počty prvků množin $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2, (\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \setminus (\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2))$;

prohlašme číslo $\frac{d_{12}}{s_{12}}$ za vzdálenost množin $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$. Dokažte, že pro tuto vzdálenost platí trojúhelníková nerovnost (neostrá).

4. Zistite všechna reálná α z interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, pro která platí

$$\frac{\sin^2 \alpha (6 - \sin^2 \alpha) - 1}{\sin 2\alpha \cos \alpha} \leq \frac{7}{12}.$$

5. V rovině je dána přímka p a uvnitř jedné poloroviny určené touto přímkou jsou dány dva různé body A, B . Dále je dán úhel velikosti α , kde $0 < \alpha < 180^\circ$, a úsečka velikosti d . Uvnitř poloroviny opačné k polorovině pA určete všechny body C takové, že $\sphericalangle ACB = \alpha$ a že průnik tohoto úhlu s přímkou p je úsečka velikosti d .

6. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Je-li X libovolný bod prostoru, označme $d(X)$ součet druhých mocnin všech čtyř vzdáleností bodu X od stěn daného čtyřstěnu. Dokažte, že minimum funkce $d(X)$ lze vyjádřit jako funkcí výšek daného čtyřstěnu. Odvoďte příslušný vzorec.

Kategorie B

1. a) Dokažte, že následující úloha je neřešitelná: Máme sestavit takové neprázdné podmnožiny $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ množiny $\mathbf{R}$ všech reálných čísel, aby $\mathbf{R} =$

$= A \cup B$, aby alespoň jedna z množin $R \setminus A$, $R \setminus B$ nebyla prázdná a aby pro libovolná čísla $a \in A$, $a' \in A$, $b \in B$, $b' \in B$ platilo

$$a + a' \in A, \quad (1)$$

$$a + b \in B, \quad (2)$$

$$b + b' \in A. \quad (3)$$

b) Dokažte, že nahradíme-li ve formulaci úlohy a) množinu R množinou C celých čísel, existuje právě jedna dvojice množin A , B s požadovanými vlastnostmi. Najděte ji.

2. Označme pro přirozené číslo n a reálné číslo x

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n \text{sign}(x - i).$$

Nechť p je dané kladné číslo. Najděte všechna přirozená čísla n taková, aby platilo

$$f_n(p) = 0$$

3. Funkce f splňuje tyto podmínky:

(1) je definována právě pro všechna reálná čísla $x \geq 0$;

(2) $f(nx) = f(x)$ pro všechna přirozená n a $x \geq 0$;

(3) $f(x+1) = f(x)$ pro všechna $x \geq 0$;

(4) $f(0) \leq 0$;

(5) pro každou dvojici čísel $x \geq 0$, $y \geq 0$ platí $f(x) + f(y) \geq f(x+y)$.

a) Dokažte, že pak pro každou trojici přirozených čísel k , l , m platí

$$f\left(k\frac{l}{m}\right) \geq f(k) + f\left(\frac{l}{m}\right)$$

b) Ukažte na příkladě, že existuje funkce vyhovující podmínkám (1)–(5), která není identicky rovna 0 na intervalu $< 0, +\infty$).

4. Určete množinu všech bodů v rovině, jejichž pravoúhlé souřadnice x , y mají tu vlastnost, že existují celá čísla m a n taková, že platí

$$|x - 2m| + |y - 2n| \leq 1 \leq |(x - 2m) + (y - 2n)| + |(x - 2m) - (y - 2n)|$$

5. Je dán trojúhelník ABC ; jeho strany mají délky a , b , c . Určete bod trojúhelníka, který má minimální součet druhých mocnin vzdáleností od jeho vrcholů. Vyjádřete tento součet pomocí délek stran trojúhelníka.

6. V rovině je dána konečná množina M bodů, z nichž každé dva mají vzdálenost ≤ 1 . Dokažte, že existuje pravidelný osmiúhelník s poloměrem vepsané kružnice $\rho = \frac{1}{2}$, který obsahuje všechny body množiny M .

3. Kategória C

1. Ktoré štvorciferné číslo deliteľné 28 možno zapísať ako súčet druhých mocnín troch po sebe nasledujúcich párnych čísel?

2. Jsou dány tři konečné množiny M_1, M_2, M_3 . pro něž platí $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_3 = M_3 \cap M_1 \neq 0$. Označme po řadě $p, s_{12}, s_{23}, s_{31}$ počty prvků množin $M_1 \cap M_2 \cap M_3, M_1 \cup M_2, M_2 \cup M_3, M_3 \cup M_1$. Je-li každé z čísel s_{12}, s_{23}, s_{31} větší než p , pak lze sestavit trojúhelník, jehož strany mají délky

$$1 - \frac{p}{s_{12}}, 1 - \frac{p}{s_{23}}, 1 - \frac{p}{s_{31}}. \quad (1)$$

3. Cestovní kancelář organizovala čtyři typy týdenních rekreací, z nichž žádné dvě se časově nepřekrývaly. Označme je postupně symboly A, B, C, D . Pracovnice cestovní kanceláře zjistila:

Na rekreaci A, B, C, D se postupně hlásí 195, 203, 106, 329 osob, při čemž se nikdo nehlasí na právě tři z těchto rekreací. Na právě dvě rekreace se hlásí 267 lidí a to na rekreace A a B 64 lidí, na rekreace A a C 58 lidí, na rekreace B a C 32 osob, na rekreace C a D 14 osob a na rekreace B a D 51 osob. Na všechny čtyři rekreace se přihlásili dva lidé.

Může pracovníce z těchto údajů zjistit

- kolik lidí se přihlásilo na právě jednu z těchto rekreací,
- kolik lidí se celkem přihlásilo na organizované rekreace.

4. Je dán trojúhelník, jehož žádná strana nemá délku větší než 1.

Dokažte, že jej lze umístit do kruhu o poloměru $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Daný je rovnostranný trojúhelník ABC a M libovolný jeho vnútorný bod. Päty kolmic zostrojené bodom M na strany AB, BC, CA označte postupne P, Q, R .

a) Dokážte, že súčet $PB + QC + RA$ je rovný polovičnému obvodu trojuholníka ABC .

b) Platí vlastnosť uvedená v odseku a) i pre body M ležiace na obvode trojuholníka ABC ?

6. V rovině jsou dány dva různé body A, D . Dále je dáno číslo r takové, že $r > \frac{1}{2} AD$. Určete geometrické místo průsečíků úhlopříček všech rovnoramenných lichoběžníků s ramenem AD a s poloměrem opsané kružnice r .

Kategorie Z

1. Dosazujeme-li za n celá čísla do zlomků

$$a) \frac{18n + 13}{11n + 8}, \frac{5n + 7}{12n + 17}, \frac{24n + 13}{39n + 21}$$

dostaneme vždy zlomek v základním tvaru. Dokažte!

b) Platí totéž pro zlomky

$$\frac{12n + 7}{19n + 15}, \frac{29n + 31}{32n + 41}, \frac{79n + 25}{24n + 7} ?$$

2. Jsou dána kladná čísla a, b, c, d , pro která platí

$$a + b + c + d = 1.$$

Dokažte, že pak platí

$$abc + abd + acd + bcd < \frac{1}{6},$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 < 1.$$

3. Pravoúhlý trojúhelník ABC má odvěsny $AB = 4$, $BC = 3$. Opište mu čtverec $APQR$ tak, aby vrcholy B, C ležely po řadě na stranách PQ, QR .

a) Popište konstrukci.

b) Vypočtete délku AP .

4. Je dán obdélník $ABCD$, pro který platí $AB = 2BC$. Určete geometrické místo takových bodů X obdélníka $ABCD$, že pro obsahy trojúhelníků platí

$$\triangle ABX = \triangle BCX < \triangle ADX.$$

Seznam vítězů a úspěšných řešitelů III. kola kat. A ve XXII. ročníku MO v roce 1973

Vítězové

1. Jaromír Šimša, 3b, Šmeralova 1, Ostrava 1
2. Karel Horák, 4b, Strakonice II/166
3. Miroslav Kmošek, 4a, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 4.— 5. Pavel Ferst, 3d, Sladkovského ul., Praha 3
- 4.— 5. Petr Slačálek, 3f, W. Piecka, Praha 2
- 4.— 8. Tomáš Chrz, 4f, W. Piecka, Praha 2
- 6.— 8. Pavel Kindlmann, 3a, České Budějovice
- 6.— 8. Imrich Vrto, 4r., Rimavská Sobota
- 9.— 11. Lubor Kollár, 3r., Novohradská ul., Bratislava
- 9.— 11. Aleš Moravec, 4b, tř. kpt. Jaroše, Brno
- 9.— 11. František Šindler, 4r., Zlaté Moravce
- 12.— 13. Pavol Meravý, 3r., Novohradská ul., Bratislava
- 12.— 13. Pavol Zlatoš, 3r., Novohradská ul., Bratislava
- 14.— 17. František Drašnar, 4f, W. Piecka, Praha 2
- 14.— 17. Jan Frynta, 4f, W. Piecka, Praha 2
- 14.— 17. Tibor Lefkovič, 3r., Šrobárova 46, Košice
- 14.— 17. Peter Višnyi, 3t., Šrobárova 46, Košice
- 18.— 20. Magda Fořtová, 4d, nám. Odborářů, Plzeň
- 18.— 20. Josef Širaň, 3r., Novohradská, Bratislava
- 18.— 20. Ondřej Štefl, 4f, W. Piecka, Praha 2

Další úspěšní řešitelé :

- 21.—24. Tomáš Fiala, 4r., Příbram
21.—24. Jan Mandel, 4b, Řezníčkova ul., Náchod
21.—24. Ivo Mrázek, 2b, SPŠchem., Ústí n. Labem - Střekov
21.—24. Karol Pelikán, 4r., Šrobárova ul., Košice
25. Josef Voldřich, 2r., Vimperk
26.—30. Petr Jarolím, 4f, W. Piecka, Praha 2
26.—30. Ján Krajčík, 3r., Novohradská ul., Bratislava
26.—30. Jiří Měska, 3d, Sladkovského ul., Praha 3
26.—30. Petr Paukner, 4f, W. Piecka, Praha 2
26.—30. Dalibor Volný, 4f, W. Piecka, Praha 2
31.—35. Jaroslav Fiala, 2d, W. Piecka, Praha 2
31.—35. Petr Hejl, 4c, Štěpánská ul., Praha 1
31.—35. Tomáš Šimáček, 4f, W. Piecka, Praha 2
31.—35. Vítězslav Švejdar, 4b, Komenského nám., Děčín
31.—35. Jan Trlifaj, 3d, Sladkovského ul., Praha 3
36.—37. Tomáš Burian, 4a, Nad štolou, Praha 7
36.—37. Milan Kolibiar, 4r., Novohradská ul., Bratislava

Poznámka : Pokud v adrese není uveden druh školy, jedná se o gymnasium, příp. na Slovensku o SVŠ.

NAŠE SOUTĚŽ

Také letos vypisuje naše redakce spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím soutěž o ceny v řešení příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie - nezávisle na Matematické a fyzikální olympiádě.

Pokyny řešitelům :

Řešení každého příkladu pište čitelně (nejlépe strojem), vždy na zvláštní list formátu A4 po jedné straně, dole vpravo uveďte své celé jméno, třídu, školu a své bydliště. Nečitelná řešení vyřazujeme.

Příklady řešte samostatně, úsporně věcně, přitom odborně správně s užitím platné symboliky. Nejdelší řešení nebývá vždy nejlepší.

Soutěže se mohou zúčastnit i kolektivy z téže třídy, maximálně trojčlenné. Jména členů kolektivů a jejich adresy napište na nepopsanou druhou stránku papíru. Při případném umístění má kolektiv ovšem nárok na jedinou cenu.

Řešení první části soutěžních příkladů otištěných v tomto čísle zašlete nejpozději do 15. ledna 1974 na adresu redakce: Praha 2, Trojanova 13, p. sm. č. 12134, s označením: *Naše soutěž*.

Úlohy k řešení

Matematika

1. Je dána soustava

$$2x^3 + (k + 3) \cdot x^2 + x - 2 = 0$$

$$x^3 + kx^2 + x + 2 = 0$$

- a) Pro které hodnoty parametru k mají rovnice společný kořen?
b) Určete tento kořen a ostatní kořeny obou rovnic.
c) Ověřte správnost hodnoty společného kořene.

Jan Fráňa

2. Určete všechny pětímístné desetinné zlomky tvaru $0, ABCDE$ ($E \neq 0$) a všechna přirozená čísla x tak, aby platilo

$$x \cdot 0, ABCDE = 30, ABCDE.$$

František Kejla

3. Jestliže pro nezáporná čísla a, b, c platí $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} + \sqrt{c}$, platí také $\sqrt{a + (d + e)^2} \leq \sqrt{b + d^2} + \sqrt{c + e^2}$. Dokažte!

Josef Kotyk

4. Dokažte, že pro každé přirozené n a pro libovolná komplexní čísla $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ platí

$$\frac{|a_1 + a_2 + \dots + a_n|}{1 + |a_1 + a_2 + \dots + a_n|} \leq \frac{|a_1|}{1 + |a_1|} + \frac{|a_2|}{1 + |a_2|} + \dots + \frac{|a_n|}{1 + |a_n|}$$

Ivo Rosenberg

5. V rovině je dán konvexní n -úhelník $A_1A_2 \dots A_n$. Určete počet konvexních čtyřúhelníků $A_iA_jA_kA_l$, jejichž všechny strany jsou úhlopříčky daného n -úhelníka.

Jiří Sedláček

6. Najděte všechna trojčíselná čísla v soustavě o základu s tak, aby platilo

$$(xyz)_s = (zyx)_{s+1}$$

Ota Setzer

7. Jestliže p, q jsou reálná čísla a n celé ($n > 1$), rozložte polynom $x^{2n} + p \cdot x^{2n-1} + q$ na součin polynomů

$$(x^{2n-1} + p_1 \cdot x^{2n-2} + q_1) \cdot (x^{2n-1} + p_2 \cdot x^{2n-2} + q_2)$$

opět s reálnými koeficienty. Tím získáte — vzhledem k n indukivní způsob

a) rozkladu tohoto polynomu a současně

b) řešení rovnice $x^{2^n} + p \cdot x^{2^{n-1}} + q = 0$.

Najděte minimum uvedeného trojčlenu pro reálná x . Jako příklad rozložte binom $x^8 + 216$ a najděte jeho kořeny.

Přemysl Vihan

Konstruktivní geometrie

1. Daná je rovina ρ , mimo nej bod T a priamka m . Zostrojte pravidelný štvorsten $ABCD$, ktorý má ťažisko T , stenu ABC v rovine ρ a stenu ABD rovnobežnú s priamkou m .

Josef Filip

2. V první průmětně je dána úsečka AB a v druhé průmětně úsečka $CD = AB$; žádná z nich neleží na základnici. Najděte osu otáčení $^1o \perp \pi$ a osu otáčení $^2o \perp \nu$ tak, aby úsečka AB po otočení nejprve kolem 1o a potom kolem 2o přešla v úsečku CD . Provedte pro: $A(-4; 3; 0)$, $B(-1; 7; 0)$, $C(1; 0; 2)$, $D(5; 0; 5)$.

Stanislav Horák

3. Sestrojte krychli, je-li dán střed S jedné stěny a přímka p , na níž leží tělesová úhlopříčka krychle.

František Hradecký

4. Libovolný trojúhelník $A_1B_1C_1$ je rovnoběžným průmětem trojúhelníka ABC , který je částí pravidelného pětiúhelníka $ABCDE$. Sestrojte průmět $A_1B_1C_1D_1E_1$ tohoto pětiúhelníka.

Emil Kraemer

různé

NA ZÁVĚR KOPERNÍKOVA ROKU

JOSEF KOTYK, Pardubice

Na závěr Koperníkova jubilejního roku 1973 uvádíme čtenářům časopisu několik pamětihodných výroků z Koperníkova hlavního a celoživotního díla „De revolutionibus orbium coelestium libri VI.“ („O oběžných pohybech nebeských těles knih šestero“, 1543). Připomeňme si, že podle Koperníka „úkolem všech

věd je odvádět člověka od zla, vést jeho duševní činnost ke stále větší dokonalosti“.

„Dojem klidu není důkazem. Všechna změna místa totiž, která se jeví, děje se buď proto, že se pohybuje pozorovaná věc nebo pozorovatel nebo že se různým způsobem pohybují oba.“ (Kniha 1., kapitola 5.)

„Proto se nezdráhám tvrdit, že cokoli se zdá pohybem Slunce, dá se lépe a pravdivě vysvětlit pohybem Země.“ (Kniha 1., kapitola 10.)

„Je mnohem pravděpodobnější, že se pohybuje část (tedy Země) než celek vesmíru. Vždyť mnohem více bychom se podívovali, kdyby se za 24 hodiny otáčela tak obrovská rozlehlost světa než jeho maličká část, jakou je Země.“ (Kniha 1., kapitola 6.)

„Proto se nezdráhám také tvrdit, že i Země stejně jako ostatní planety obíhá kolem Slunce jedenkrát za rok a že při Slunci je střed světa, v němž nehybné Slunce spočívá“. (Kniha 1., kapitola 10.)

„Uprostřed všech (planet) spočívá Slunce. Vždyť kdo by v tomto překrásném chrámu vložil tuto svítilnu do jiného či lepšího místa, než odkud by všechno zároveň mohla osvětlovat? Vždyť jistě nikoli nevhodně někteří nazývají Slunce lucernou světa, jiní jeho myslí, jiní jeho vládcem.

Tak vskutku Slunce jakoby na královském stolci spočívající vládne rodině planet, kolem kroužící.“ (Kniha 1., kapitola 10.)

„Příslloví říká: Není léku proti kousnutí udavačovu.“

„Zajisté s určitostí mohu počítat s tím, že někteří, jakmile se doslechnou, že jsem v těchto knihách, které jsem napsal o obězích sfér světa, také Zemi některé pohyby prisoudil, ihned pokřik strhnou, že si zasloužím, abych pro takovou domněnku rázně umlčen byl ...“

„Čím nesmyslnější se však nyní většině zdát bude toto učení moje o pohybu Země, tím více si získá obdivu a uznání, až pozná, že vydáním mého spisu temnota protismyslnosti rozehnána byla nejprůzračnějšími důkazy.“ (Z dedikačního přípisu papeži Pavlovi III.)

Toto poznání se již dostavilo. Nechť citovaná slova zůstanou proto našim čtenářům trvalou vzpomínkou na vzácné chvíle, které v roce 1973 prožívali u příležitosti 500. výročí narození a 430. výročí úmrtí velikého vědce-revolucionáře MIKULÁŠE KOPERNÍKA, jenž, jak praví nápis na Koperníkově pomníku v Toruni — ZASTAVIL SLUNCE A POHNUL ZEMÍ. A nejen to, pohnul i dějinami lidstva.

Newtonův gravitační zákon

JOSEF KOTYK, Pardubice

(Napsáno k 330. výročí Newtonova narození.)

Fyzika se zabývá pohybem tělesa jako změnou jeho polohy vzhledem k okolním předmětům. Nestačí však jen vědět, jak se jednotlivé fáze pohybu registrují. Vyšetřujeme také souvislosti pohybového děje s jinými jevy, v nichž hledáme jeho příčinu. Od kinematického popisu pohybu přechází fyzika k jeho výkladu dynamickému.

Vhodným příkladem, jenž může ilustrovat tento postup, je známý vývoj heliocentrického světového názoru. Na místo původního Koperníkova¹⁾ a Keplerova kinematického popisu oběžného pohybu planety kolem Slunce nastoupil Newtonův výklad dynamický, jenž odpovídá na otázku: „Jaká síla působí tento pohyb?“ Pouhých dvaceti let potřeboval Newtonův genius k tomu, aby poznal, co lidstvo nemohlo pochopit za tisíciletí: vnitřní zařízení a tajemství pohybu světového orloje. V nesmrtelném díle veliké tvůrčí fantazie, podporované skvělou erudicí matematickou, „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (Matematické základy teoretické fyziky²⁾), které vyšlo roku 1687, vyjádřil hybnou sílu tohoto

velkolepého stroje formulí $F = \kappa \cdot \frac{m_1, m_2}{r^2}$ slavným zákonem o všeobecné přitažlivosti (gravitaci). Jestliže třemi tzv. pohybovými zákony dynamiky stalo se Newtonovo dílo korunou vznešené budovy klasické neboli Newtonovy mechaniky, spočívá na Newtonově gravitačním zákoně celá výstavba nebeské mechaniky.

Ztrátu, kterou věda utrpěla roku 1642 smrtí Galileiho, rok 1643 plně nahradil narozením Newtonovým. Newton našel příčinu oběžného pohybu planety kolem Slunce v gravitační síle. Dokázal, že Slunce a planeta se přitahují navzájem silou, jejíž velikost F je přímo úměrná součinu hmotností m_1, m_2 obou těles a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti r . Newtonův výklad je jednodušší než Keplerův, neboť shrnuje tři zákony Keplerovy

¹⁾ V podrobnostech odkazujeme k autorovu článku „O vývoji heliocentrické soustavy“, otištěnému v 51. ročníku Rozhledů u příležitosti 500. výročí Koperníkova narození.

²⁾ Přidrží se překladu, jehož ve svých universitních přednáškách užíval Dr. Viktor Trkal, profesor teoretické fyziky. Doporučuji také jeho skvělou učebnici „Mechanika hmotných bodů a tuhé těles“, vydanou nakl. ČSAV 1956. Cituji str. 46.

v zákon jediný³⁾); je však i obecnější, poněvadž z něho lze vypočítat také pohyby jiných těles nebeských, dvojhvězd a komet, a přesnější, neboť vykládá i tzv. perturbace (poruchy) planetární dráhy, odchylky, způsobené přitažlivostí jiných planet⁴⁾. Význam gravitačního zákona Newtonova pro další vývoj fyzikálního bádání nelze proto docenit. Celé fyzice po Newtonovi vtiskl svůj ráz, jím se stala tíže všeobecnou vlastností hmoty.

Čtenáři mohou právem poznamenat, že příčina pohybu byla hledána v síle odedávna. To je sice pravda, správných představ o tom však dlouho nebylo. Soudilo se např. také, že každý pohyb vyžaduje působení síly; teprve Galilei a Newton studiem setrvačnosti ukázali, že tomu tak není. Základním pojmem Newtonovy dynamiky stala se mimoto síla, zbavená posledního zbytku dřívějšího antropomorfického pojetí animistické periody ve vývoji fyziky. Mluvíme-li o síle působící na těleso, míníme tím souhrn mechanických účinků jiných hmot na dané těleso. Základní hypotézou Newtonovy dynamiky pak jest, že tato síla závisí toliko na vzájemných polohách hmot vzhledem k pozorovanému tělesu, a ty jsou vždy stejné, nechť vztahujeme svá měření ke kterékoli soustavě souřadnic. Tvar této závislosti musíme ovšem vyšetřit od případu k případu. Pro jednoduchost můžeme uvažované těleso pokládat, jak se zpravidla děje, za pouhý hmotný bod. Newtonův zákon gravitační platí přesně pro dva hmotné body; směr přitažlivé síly padá do úsečky, jež spojuje oba body. Newton dokázal však také, že výsledný přitažlivý účinek homogenní koule na hmotné body vně položené je takový, jako kdyby všechna hmotnost koule byla shromážděna v jejím středu. Newtonův zákon gravitační platí proto také pro dvě stejnorodé koule o hmotnostech m_1 a m_2 , jestliže r znamená vzdálenost jejich středů. Obecněji lze dokázat, že také dvě koule složené ze soustředných homogenních vrstev různé hustoty působí na sebe jako dvě bodové hmoty, umístěné v jejich středech.

³⁾ Odvození gravitačního zákona Newtonova ze tří zákonů Keplerových i odvození Keplerových zákonů jako důsledků gravitačního zákona Newtonova mohou čtenáři nalézt ve vysokoškolské učebnici cit. v pozn.2, čl. 56 a 57.

⁴⁾ Teorii perturbací rozvinul později neméně slavný dovršitel astronomického díla Newtonova Pierre Simon de Laplace, zvaný „Newton Francie“, tvůrce moderní nebeské mechaniky. Je zajímavé, že Newton zemřel v březnu 1727, Laplace právě sto let po něm v březnu 1827.

Roku 1846 byla z perturbací dráhy Uranovy vypočtena a ihned potom i pozorována poloha další nové planety — Neptuna.

⁵⁾ Viz např. Fyziku pro I. ročník SVVŠ, 1964, str. 142. Zpravidla mluvíme však stručně o gravitační konstantě.

Konstanta úměrnosti κ Newtonova gravitačního zákona se nazývá Newtonova gravitační konstanta⁵⁾. Snadným výpočtem

vychází $\kappa = \frac{F \cdot r^2}{m_1 \cdot m_2}$ ve zvláštním případě ($m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$, $r = 1 \text{ m}$) jde pak o zjištění síly, kterou se navzájem přitahují dvě stejnorodé koule, z nichž každá má hmotnost 1 kg, jestliže vzdálenost jejich středů činí 1 m. Experimentální určení velikosti této síly a tím i Newtonovy gravitační konstanty κ bylo provedeno mnohokrát a stále se setkávalo s velkými potížemi. O delikátnosti problému svědčí výsledky měření: Velikost příslušné gravitační síly činí za udaných okolností $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}$; hodnota gravitační konstanty v soustavě SI je tedy $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Předmětem zvláštního zájmu čtenářů zůstává případ, že na těleso nepůsobí žádná síla a jako vážný problém Newtonova učení představa, že hmota může působit silou přímo neboli bezprostředně do dálky (tzv. *actio in distans*); o tom bude pojednáno v samostatných článcích dalších.

recenze

Rychlost a bezpečná jízda

RNDr. M. BEDNAŘÍK RNDr. M. ŠIROKÁ

Kdo z mladých lidí by nechtěl okusit požitky z rychlé jízdy, ať už v sedle nového motocyklu nebo za volantem osobního automobilu, překonávat vzdálenosti, poznávat svět. Dopravní ruch na našich silnicích však přináší nejen chvíle příjemného vzrušení, ale i okamžiky mnohem méně příjemné, kdy je třeba bleskurychle reagovat na složitou situaci, zvládnout vozidlo a zabránit možná i havárii. Proto je třeba vyzbrojit se nejen teorií a praxí řídického umění, ale seznámit se s problematikou pohybu dopravních prostředků poněkud podrobněji.

To nám umožňuje knížka s názvem *Rychlost a bezpečná jízda*, která má podtitul *Trochu fyziky pro motoristy*. V sedmi kapitolách — Rychlost — výhoda i nebezpečí motorismu, Zastavíme včas?, Jedeme za vozem, Předjíždíme, Průměrná rych-

lost, Jízda na svahu, Zatačka — zkušební kámen motoristy — poznáme nejen řadu zákonitostí, kterými se řídí pohyb vozidla po silnici, ale získáme příležitost prohloubit si znalosti z mechaniky, procvičit svůj fyzikální ostrovtip na zajímavém a pro dnešního člověka tak aktuálním tématu, jako je bezpečnost jízdy motorovým vozidlem.

Každá kapitola obsahuje nejprve podrobný výklad určitého jevu dopravní problematiky a odvození příslušných fyzikálních vztahů, dále tabulky a grafy, ukázková řešení několika příkladů a konečně více než padesát příkladů určených k procvičování. Kniha je napsána zajímavě, čtivým slohem, který čtenáře zaujme již v prvních řádcích. Přitom k porozumění textu postačují elementární znalosti středoškolské fyziky, především kinematiky a dynamiky.

Jestliže se chcete naučit vypočítat vzdálenost, kterou je třeba udržovat za jiným vedoucím vozidlem, seznámit se s různými způsoby předjíždění, s podmínkami bezpečné jízdy jak na vodorovné a přímé silnici, tak na svahu i v zatáčce, přečtěte si knížku dr. Bednaříka a dr. Široké, jejichž příspěvky často najdete i na stránkách Rozhledů.

Zatím uvedeme na ukázkou alespoň jeden příklad:

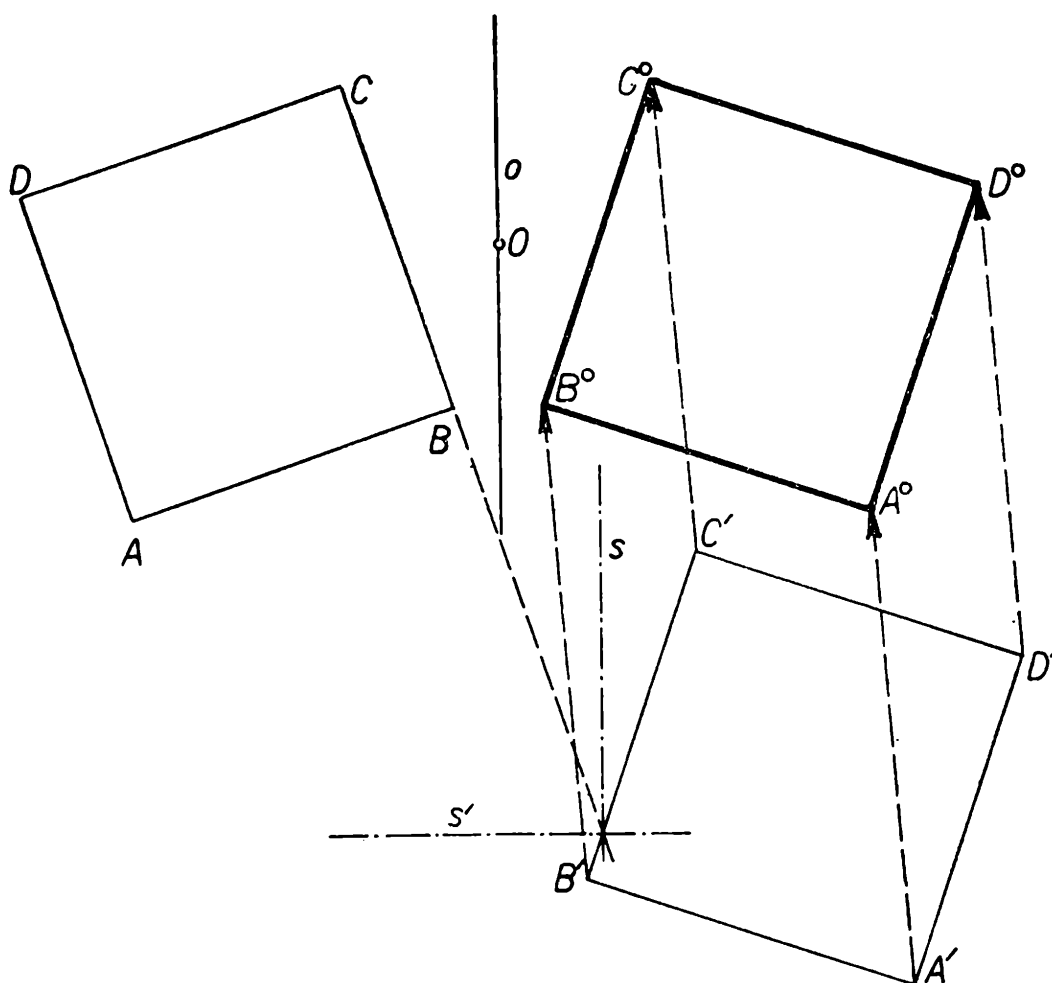
Na silnici s maximální dovolenou

rychlostí 60 km h^{-1} došlo k havárii. Pracovníci VB zjišťovali, zda řidič osobního vozu Škoda 1000 MB, který havárii zavinil, tuto rychlost nepřekročil. Změřena byla délka stopy zabrzděných kol na silnici, která činila 34 m. Součinitel tření mezi pneumatikami auta a povrchem silnice byl odhadnut na 0,6. Jaký závěr byl učiněn?

O tom a řadě dalších zajímavostí rychlé a bezpečné jízdy se poučíte v recenzované publikaci. -il

nejmladším čtenářům

Jsou dány dva nepřímě shodné čtverce $ABCD$, $A'B'C'D'$ a bod O . Čtverec $A'B'C'D'$ převedte pouze jedním posunutím do polohy, v níž by byl souměrně sdružený se čtvercem $ABCD$ podle osy o , která prochází bodem O .



Obr. 1

Řešení (obr. 1). Sestrojíme osu s souměrnosti přímek BC , $B'C'$. Hledaná osa o prochází potom bodem O rovnoběžně s přímkou s . K bodu D sestrojíme bod D° souměrně sdružený podle osy o . Úsečka $D'D^\circ$ udává žádaný směr posunutí.

Úloha má jediné řešení, v němž čtverec $ABCD$ je souměrně sdružený podle osy o se čtvercem $A'B'C'D'$. Kdybychom chtěli použít druhé osy s' přímek BC , $B'C'$, pak by čtverec $ABCD$ byl souměrně sdružený podle osy o' se čtvercem $C'D'A'B'$.

Důkaz správnosti konstrukce plyne z toho, že vrcholy D , D° jsou souměrně sdružené podle osy o a že přímky BC a $B^\circ C^\circ$ se protínají na ose o .
S. H.

redakce hovoří

O p r a v a . Na upozornění p. Vladimíra Lešovského z Brna opravte ve 3. čísle 51. ročníku (1972/73) Rozhledů v článku M. Komana „Přibližný výpočet délky elipsy“, že uvedená posloupnost d_0, d_1, d_2 , konverguje k hodnotě

$$d = \pi(a+b) \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \dots \right],$$

$$\text{kde } k = \frac{a-b}{a+b}$$

V 10. čísle minulého ročníku na str. 470 má být

$$H = \frac{(1+h)^2}{4\gamma}.$$

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

tisíc	mille
tisící	millième
tisícina	millième <i>m</i>
tloušťka	épaisseur <i>ž</i>
točení	rotation <i>ž</i>
točit	tourner
točivý	rotatoire
topologie	topologie <i>ž</i>
torus	tore <i>m</i>
torze	torsion <i>ž</i>
totální	total, e, aux
trajektorie	trajectoire <i>ž</i>
traktrix	tractrice <i>ž</i>
transcendentní	transcendent, e
transfinitní	transfini, e
transformace	transformation <i>ž</i>
transformovaný	transformé, e
transformovat	transformer
translace	translation <i>ž</i>
transponovaný	transposé, e
transponovaná matice	transposée d'une matrice
transpozice	transposition <i>ž</i>
transverzála	transversale <i>ž</i>
tranzitivita	transitivité <i>ž</i>
tranzitivní	transitif, ive
tranzitivnost	transitivité <i>ž</i>
triadický	triadique
triangulace	triangulation <i>ž</i>
trigonometrie	trigonométrie <i>ž</i>
trigonometrický	trigonométrique
trichotomie	trichotomie <i>ž</i>
trinomický	trinomique
trisekce	trisection <i>ž</i>
trisekce úhlu	trisection de l'angle <i>m</i>
triviální	trivial, e, aux

trochoida
trojčlen
trojčlenka
 trojčlenka jednoduchá
 trojčlenka složená
trojhran
trojice
trojnásobný, trojný
trojosý
trojúhelník
 křivočarý trojúhelník
 ostroúhlý trojúhelník
 pravoúhlý trojúhelník
 rovnoramenný trojúhelník
 rovnostranný trojúhelník
 různostranný trojúhelník
 sférický trojúhelník
 tupoúhlý trojúhelník
trojúhelníkový
 trojúhelníková nerovnost
 trojúhelníková matice
trs
třída
 třída ekvivalence
třídění
tupý
tvar
tvrzení

U

úběžnice
úběžník
údaj
úhel
 doplňkový úhel
 dutý úhel
 obvodový úhel

 ostrý úhel
 plný úhel
 pravý úhel
 přilehlý úhel
 přímý úhel
 středový úhel
 střídavé úhly
 tupý úhel
 vedlejší úhel
 vnější úhel
 vnitřní úhel
 vrcholové úhly
 výplňkový úhel
 vypuklý úhel

trochoïde *ž*
trinôme *m*
règle *ž* de trois
 règle de trois simple
 règle de trois composée
trièdre *m*
triplet *m*
triple
scalène
triangle *m*
 triangle curviligne
 triangle acutangle
 triangle rectangle
 triangle isocèle (též isoscèle)
 triangle équilatéral
 triangle scalène
 triangle sphérique
 triangle obtusangle
triangulaire
 inégalité *ž* du triangle
matrice *ž* triangulaire, též trigonale
gerbe *ž*
classe *ž*
 classe d'équivalence
triage *ž*
obtus, *e*
forme *ž*
assertion *ž*

droite *ž* de fuite
point *m* de fuite
donnée *ž*
angle *m*
 angle complémentaire
 angle convexe, též saillant
 angle inscrit (dans une circonféren-
 ce)
 angle aigu
 angle plein
 angle droit
 angle adjacent
 angle plat
 angle au centre
 angles alternes
 angle obtus
 angle voisin
 angle externe
 angle interne
 angles opposés par le sommet
 angle supplémentaire
 angle concave, též rentrant

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

2

ROČNÍK 52, 1973-1974, ŘÍJEN



rozhledy

ROČNÍK 52
ŘÍJEN 1973

2

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava
dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, CSc., Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1973.

OBSAH

OBSAH

Prof. J. Kůst: Diagonální cesty ve čtvercové síti	49
V. Okřina: Nebojte se diferenciálních rovnic (dokončení)	55
M. Litomiský: O úhlech pythagorských trojúhelníků	58
Dr. J. Sedláček: Největší dnes známé prvočíslo	60
Prof. dr. E. Kašpar: Proutkaření	61
Dr. M. Bednařík - dr. M. Šíroká: Na jak velké dráze se nám podaří zastavit?	72
Dr. J. Šíroky - dr. M. Šíroká: Plejády v Byku	80
Naše soutěž	83
Prof. R. Košťál: Třetí kolo kat. A, XIV. roč. FO	87
J. Kotyk: Actio in distans	89
Nejmladším čtenářům	92
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. a 4. str. obálky

Diagonální cesty ve čtvercové síti

Prof. JIŘÍ KÚST, Plzeň

Čtvercová síť v rovině a její mřížové body, tj. vrcholy jejích čtverců, se uplatňují při řešení mnohých zajímavých problémů ležících na hranici aritmetiky a geometrie. Také při řešení úlohy, která bude vyslovena po krátké přípravě, bude patrna úzká souvislost mezi aritmetikou a geometrií.

V rovině je dána čtvercová síť a její dva různé mřížové body P , Q . Zvolme např. bod P za počátek a stranu čtverce sítě za jednotkovou úsečku pravoúhlé soustavy souřadnic; její osy budte přímky obsahující dvě sousední strany čtverce sítě se společným bodem P . Označením os x, y a jejich vhodnou orientací lze dosáhnout toho, že souřadnice x bodu Q je kladné číslo. Je potom $P = [0; 0]$, $Q = [x; y]$; x, y jsou celá čísla, $x > 0$. Také ovšem souřadnice všech ostatních mřížových bodů jsou celá čísla.

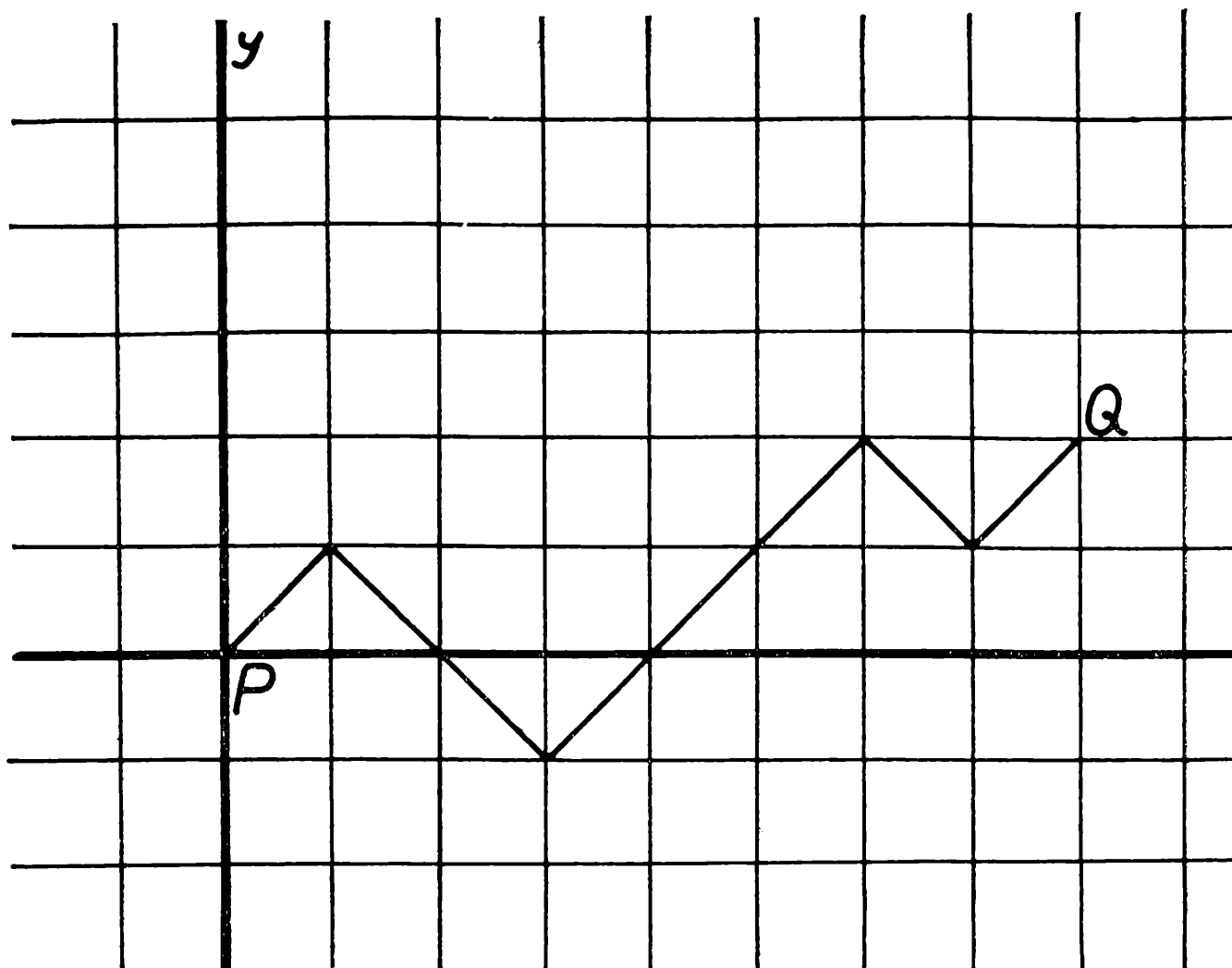
Diagonální cestou ve čtvercové síti z mřížového bodu $P = [0; 0]$ do mřížového bodu $Q = [x; y]$, $x > 0$ budeme rozumět cestu vedenou po úhlopříčkách čtverců sítě tak, že bod pohybující se po ní z bodu P do bodu Q neustále zvětšuje svou souřadnici x (obr. 1).

Úsek diagonální cesty, který je dán některou čtvercovou úhlopříčkou, z nichž je cesta složena, nazveme *výstupem* resp. *sestupem*, jestliže se na tomto úseku při rostoucí souřadnici x zvětšuje resp. zmenšuje souřadnice y . Cesta na obr. 1 má 5 výstupů a 3 sestupy.

Úloha: Hledejme diagonální cesty v síti vedoucí z mřížového bodu $P = [0; 0]$ do mřížového bodu $Q = [x; y]$, $x > 0$.

Pokud vůbec taková cesta existuje, bude zřejmě složena z x úhlopříček čtverce sítě. Úhrnný počet všech výstupů a sestupů na celé diagonální cestě je ovšem také roven počtu x všech čtvercových úhlopříček skládajících cestu. Cesta na obr. 1 je složena z 8 čtvercových úhlopříček, také souřadnice x bodu Q je 8.

a) Řešme naši úlohu v případě, že bod Q leží na ose x , tj. $y = 0$. Pak na cestě z bodu P do bodu Q musí být počet výstupů zřejmě roven počtu sestupů, tj. roven číslu $\frac{x}{2}$. Odtud je patrné, že diagonální cesta neexis-

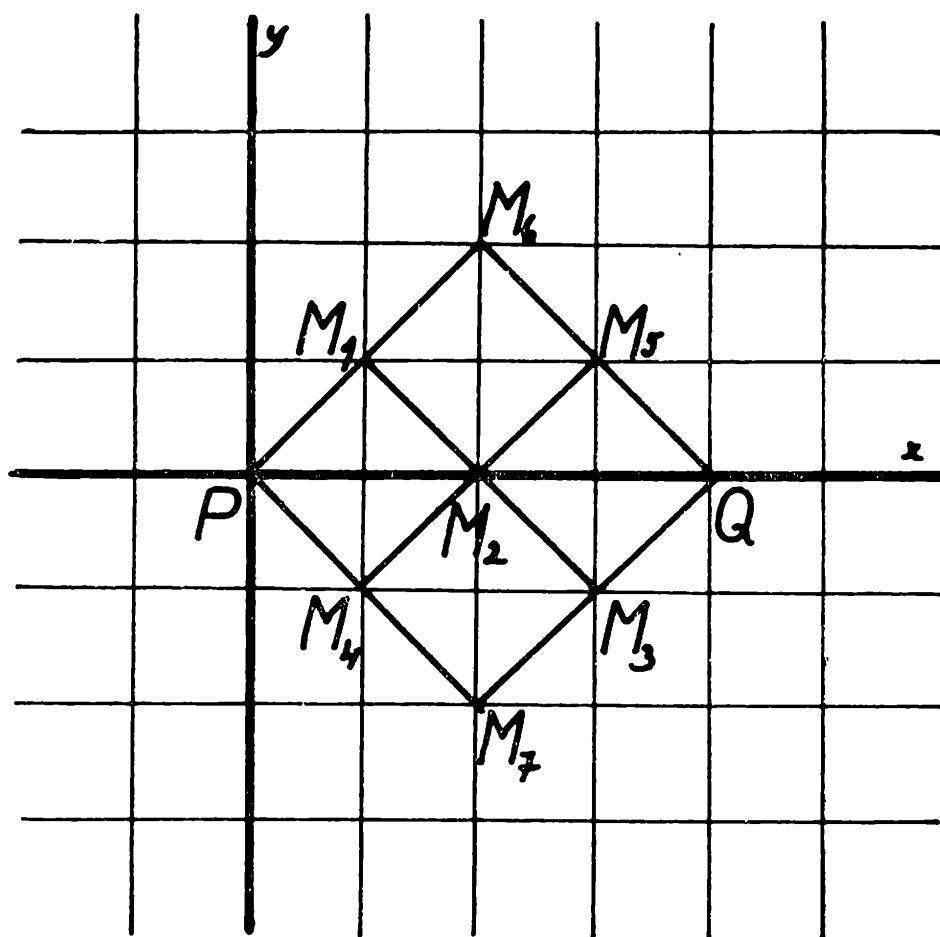


Obr. 1

tuje, je-li x číslo liché. Existují však takové cesty, je-li x libovolné číslo sudé. Snadno dojdeme k jejich konstrukci. Pravoúhlé průměty x čtvercových úhlopříček, skládajících cestu, do souřadnicové osy x jsou úsečky navzájem shodné a shodné se stranami čtverců sítě; rozdělí úsečku PQ na x rovných dílů. Očíslujeme-li tyto díly (v libovolném pořádku) např. čísly $1, 2, 3, \dots, x$, pak každá podmnožina o $\frac{x}{2}$ prvcích množiny $M = \{1, 2, \dots, x\}$ udává umístění výstupů a její doplněk v množině M umístění sestupů jedné diagonální cesty. Tím je také nalezen klíč k její konstrukci. Uvedené podmnožiny množiny M jsou $\frac{x}{2}$ — prvkové kombinace množiny M . Jejich počet, a tedy také počet všech diagonálních cest spojujících bod P s bodem Q , je dán kombinačním číslem $\binom{x}{\frac{x}{2}}$. V následující tabulce je uveden počet diagonálních cest pro několik sudých čísel x ; počet rychle roste.

x	2	4	6	8	10	12
$\binom{x}{x-2}$	$\binom{2}{1} = 2$	$\binom{4}{2} = 6$	$\binom{6}{3} = 20$	$\binom{8}{4} = 70$	$\binom{10}{5} = 252$	$\binom{12}{6} = 924$

V souměrnosti podle souřadnicové osy x je obrazem každé diagonální cesty z P do Q opět diagonální cesta z P do Q . Výstupům v této souměrnosti odpovídají totiž sestupy a sestupům odpovídají výstupy. Je tedy útvar složený ze všech diagonálních cest z P do Q a příslušný k libovolnému sudému číslu x souměrný podle osy x . Ze všech těchto cest pouze dvě jsou lomené čáry, tj. mají tu vlastnost, že žádné tři jejich mřížové body následující za sebou neleží na jedné přímce. U těchto dvou cest, které jsou souměrně sdružené podle osy x , následuje za každým výstupem sestup a za každým sestupem výstup.



Obr. 2

Na obr. 2 je zakresleno všech 6 diagonálních cest z bodu $P = [0; 0]$ do bodu $Q = [4; 0]$. Jsou to cesty $PM_1M_6M_5Q$, $PM_4M_7M_3Q$, $PM_1M_2M_3Q$, $PM_4M_2M_5Q$, $PM_1M_2M_5Q$, $PM_4M_2M_3Q$. Poslední dvě cesty jsou lomené čáry.

Budte $x_1 x_2$ dvě kladná sudá čísla a $x_1 < x_2$. Snadno usoudíme, že potom každá diagonální cesta z $P = [0; 0]$ do $Q_1 = [x_1; 0]$ je částí některé diagonální cesty z P do $Q_2 = [x_2; 0]$.

b) Uvažujme nyní obecnější případ, který zahrnuje i případ a) totiž kdy y je libovolné celé číslo. Označme v počet výstupů a s počet sestupů na cestě z P do Q ; pak zřejmě $v + s = x$, $v - s = y$ a odtud

$$v = \frac{x + y}{2}, \quad s = \frac{x - y}{2}. \quad (1)$$

Čísla v, s daná rovnostmi (1) jsou nezáporná a celá čísla, právě když celá čísla x, y jsou téže parity a zároveň $-x \leq y \leq x$. (p_1). Podmínky v řádku označeném (p_1) jsou nutné a postačující k tomu, aby existovala diagonální cesta z bodu $P = [0; 0]$ do mřížového bodu $Q = [x; y]$, kde x je kladné číslo.

Rovnosti (1), které udávají pro daná přípustná čísla x, y , tj. pro čísla splňující podmínky (p_1), počet výstupů a počet sestupů na cestě z P do Q , jsou obdobně jako v případě a) východiskem ke konstrukci těchto diagonálních cest.

Počet cest pro danou přípustnou dvojici x, y udává kombinační číslo

$$\binom{x}{\frac{x+y}{2}} = \binom{x}{\frac{x-y}{2}} \quad (2)$$

S daným celým kladným číslem x tvoří podle podmínek (p_1) přípustnou dvojici každé z čísel $-x, -x + 2, -x + 4, \dots, x - 4, x - 2, x$. Těmto $x + 1$ dvojicím odpovídají mřížové body $Q_0 = [x; -x], Q_1 = [x; -x + 2], Q_2 = [x; -x + 4], \dots, Q_{x-2} = [x; x - 4], Q_{x-1} = [x; x - 2], Q_x = [x; x]$, do kterých vedou diagonální cesty z bodu P .

Podle rovnosti (2) je jejich počet po řadě $\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \binom{x}{2},$

$\binom{x}{x-2}, \binom{x}{x-1}, \binom{x}{x}$. Celkový počet diagonálních cest, které vedou z bodu P do všech mřížových bodů se společnou souřadnicí x , tj. do bodů $Q_0, Q_1, \dots, Q_{x-1}, Q_x$, je 2^x , neboť

$$\begin{aligned} \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \dots + \binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} + \\ + \binom{x}{x} = (1 + 1)^x = 2^x. \end{aligned}$$

Následující tabulka udává počet diagonálních cest pro několik kladných celých čísel x a pro všechna k nim příslušná a přípustná čísla y . Ve sloupci nadepsaném m je uveden celkový počet diagonálních cest vedoucích z bodu P do mřížových bodů, jejichž společná souřadnice x je po řadě rovna číslům 1, 2, 3, 4, 5.

$\begin{array}{c} y \\ x \end{array}$	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...	m
1	-	-	-	-	-	-	$\binom{1}{0}$	-	$\binom{1}{1}$	-	-	-	-	-	-	2^1
2	-	-	-	-	-	$\binom{2}{0}$	-	$\binom{2}{1}$	-	$\binom{2}{2}$	-	-	-	-	-	2^2
3	-	-	-	-	$\binom{3}{0}$	-	$\binom{3}{1}$	-	$\binom{3}{2}$	-	$\binom{3}{3}$	-	-	-	-	2^3
4	-	-	-	$\binom{4}{0}$	-	$\binom{4}{1}$	-	$\binom{4}{2}$	-	$\binom{4}{3}$	-	$\binom{4}{4}$	-	-	-	2^4
5	-	-	$\binom{5}{0}$	-	$\binom{5}{1}$	-	$\binom{5}{2}$	-	$\binom{5}{3}$	-	$\binom{5}{4}$	-	$\binom{5}{5}$	-	-	2^5

c) Budte nyní $A = [x_1; y_1]$, $B = [x_2; y_2]$ dva mřížové body čtvercové sítě a necht $x_2 - x_1 > 0$. Provedme transformaci soustavy souřadnic posunutím ($P \rightarrow A$). Čtvercová síť se zřejmě tímto posunutím reprodukuje. Souřadnice bodů A , B v transformované soustavě souřadnic jsou $A = [0; 0]$, $B = [x_2 - x_1; y_2 - y_1]$. Podle b) existuje diagonální cesta z A do B , právě když jsou splněny podmínky (p_1), tj. jsou-li celá čísla

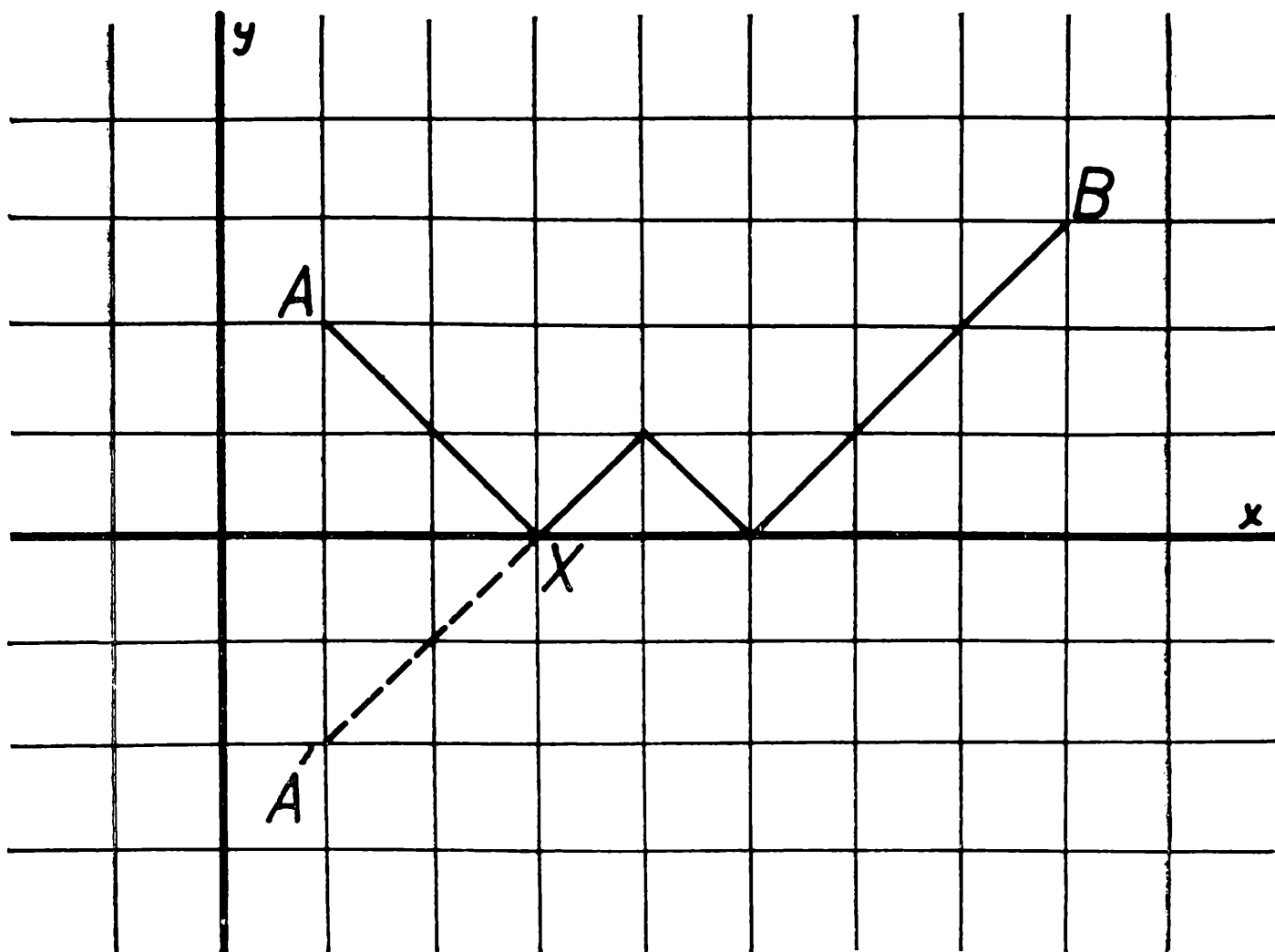
$x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ téže parity a je-li $x_1 - x_2 \leq y_2 - y_1 \leq x_2 - x_1$ (p_2)
Rovnosti (1) pro počet výstupů a sestupů na diagonální cestě nabudou nyní tvaru

$$v = \frac{x_2 - x_1 + y_2 - y_1}{2}, s = \frac{x_2 - x_1 - (y_2 - y_1)}{2} \quad (3)$$

počet všech diagonálních cest z A do B je dán podle (2) kombinačním číslem

$$\binom{\frac{x_2 - x_1}{2}}{\frac{x_2 - x_1 + y_2 - y_1}{2}} = \binom{\frac{x_2 - x_1}{2}}{\frac{x_2 - x_1 - y_2 - y_1}{2}} \quad (4)$$

Je-li např. $A = [-2; 4]$, $B = [10; 12]$, pak $v = 10$, $s = 2$ a počet cest z A do B je $\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66$; je-li $A = [1; -5]$, $B = [9; -1]$, pak $v = 6$, $s = 2$ a počet cest z A do B je $\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28$.



Obr. 3

d) Nechť body A, B leží uvnitř téže poloroviny vyřezané osou x — jako např. v posledních dvou příkladech (obr. 3). Stanovme počet všech diagonálních cest z A do B , které mají alespoň jeden společný bod s osou x .

Budiž d diagonální cesta z A do B , která má s osou x aspoň jeden společný bod. Označme D množinu takových cest. Budiž X společný bod cesty d a osy x , který je nejbližší bodu A . Bod X rozděluje cestu d na dvě části AX a XB , z nichž první je zřejmě diagonální cesta z A do X a druhá z X do B . Sestrojme obraz $A'X$ cesty AX v osové souměrnosti s osou x . Obdržíme zřejmě diagonální cestu vedoucí do bodu X z bodu A' souměrně sdruženého s bodem A podle osy x .

Přiřaďme diagonální cestě d diagonální cestu $A'B$, která je sjednocením diagonálních cest $A'X$ a XB . Množinu všech takových diagonálních cest označme E . Množiny D a E jsou zřejmě ekvivalentní. Vezměme ještě v úvahu množinu F všech diagonálních cest vedoucích z bodu A' do bodu B . Je zřejmé, že každá diagonální cesta množiny E je také diagonální cestou množiny F , tj. $E \subset F$. Body A' a B leží uvnitř různých polorovin vyřezaných osou x ; proto každá diagonální cesta množiny F protíná osu x aspoň v jednom bodě a lze ji považovat za

diagonální cestu, která vznikla shora uvedenou konstrukcí pomocí osové souměrnosti z jisté diagonální cesty množiny D . Je tedy každá diagonální cesta množiny F také diagonální cestou množiny E , tj. $F \subset E$. Z obou posledních inkluzí plyne $E = F$. Jsou tedy množiny D a F ekvivalentní a mají týž počet prvků.

Výsledek: Počet diagonálních cest, které vedou z bodu A do bodu B a mají s osou x aspoň jeden bod společný, je roven počtu diagonálních cest, které vedou do bodu B z bodu A' souměrně sdruženého s bodem A podle osy x .

V příštím čísle uvedeme aspoň dva příklady, při jejichž řešení se vydatně a zajímavě uplatní diagonální cesty ve čtvercové síti.

Nebojte se diferenciálních rovnic

VILÉM OKŘINA, Jihlava

(Dokončení)

Příklad 4. Řešte rovnici $dn = -\lambda n \cdot dt$ (λ je dané číslo), když $n = n_0$ pro $t = 0$.

Řešení: Snadno se dosazením přesvědčíme, že rovnice má opět řešení $n = 0$. Předpokládejme proto nadále, že $n \neq 0$. Separaci proměnných v dané rovnici provedeme násobením zlomkem $\frac{1}{n}$ a dostaneme

$$\frac{1}{n} dn = -\lambda \cdot dt.$$

Odtud je

$$\int \frac{1}{n} dn = -\lambda \int dt$$

$$\ln |n| = -\lambda t + c_1$$

$$\ln |n| = \ln e^{-\lambda t} + \ln k, \text{ kde } k > 0$$

$$|n| = k \cdot e^{-\lambda t},$$

což spolu s řešením $n = 0$ můžeme napsat ve tvaru

$$n = c \cdot e^{-\lambda t},$$

kde c je libovolné reálné číslo. Do nalezené rovnice dosadíme počáteční podmínky:

$$n_0 = c \cdot e^0.$$

Odtud $c = n_0$. Takže hledané partikulární řešení dané rovnice je

$$n = n_0 e^{-\lambda t}.$$

Již samo označení proměnných napovídá, že úloha, vedoucí na danou diferenciální rovnici, je rázu fyzikálního. Skutečně je tomu tak — jde o jistou úlohu z atomové fyziky. Také v ostatních partiích fyziky mají diferenciální rovnice četná užití a jsou cennou pomůckou při zkoumání fyzikálních dějů.

3. Je-li tedy už rovnice se separovatelnými proměnnými (každý její činitel je závislý jen na x nebo jen na y) uvedena na tvar (11), pak integrujeme levou stranu podle y a pravou podle x a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \varphi(y) dy &= \int f(x) dx \\ G(y) &= F(x) + c, \end{aligned} \quad (13)$$

kde c představuje součet obou integračních konstant. Vztahem na řádku (13) je určeno obecné řešení dané rovnice. Abychom dostali její partikulární řešení pro počáteční podmínky x_0, y_0 , musíme v rovnici (13) volit c tak, aby $y = y_0$ pro $x = x_0$. Tedy odtud

$$c = G(y_0) - F(x_0).$$

Po opětovém dosazení do (13) dostáváme

$$\begin{aligned} G(y) &= F(x) + G(y_0) - F(x_0) \\ G(y) &= G(y_0) - F(x) - (F(x_0) - F(x)), \end{aligned}$$

což lze podle věty Newton—Leibnizovy psát ve tvaru

$$\int_{y_0}^y \varphi(y) dy = \int_{x_0}^x f(x) dx. \quad (14)$$

Umíme-li pak rovnici (14) řešit vzhledem k y , dostaneme odtud partikulární řešení dané diferenciální rovnice, odpovídající počátečním podmínkám x_0, y_0 . Při hledání partikulárního řešení můžeme tedy postupovat také tak, jak je ukázáno v následujícím příkladu:

Příklad 5. Napište rovnici integrální křivky diferenciální rovnice $y' = y^2$, procházející bodem $N \equiv (2; 3)$.

Řešení: Separujeme-li proměnné v dané rovnici $\frac{dy}{dx} = y^2$, dostaneme

$$\frac{1}{y^2} dy = dx.$$

Partikulární řešení pro počáteční podmínky $x_0 = 2$, $y_0 = 3$ můžeme proto napsat ve tvaru

$$\int_3^y \frac{1}{y^2} dy = \int_2^x dx.$$

Vyčíslením těchto určitých integrálů obdržíme

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{3} = x - 2.$$

Vzhledem k tomu, že integrální křivka $y = 0$ neprochází bodem N , předpokládáme již od samého začátku, že $y \neq 0$. Proto také předcházející rovnici můžeme vynásobit součinem $3y$ a dostaneme pak

$$-3 + y = 3xy - 6y$$

$$-3 = (3x - 7) \cdot y$$

a odtud již vychází rovnice hledané integrální křivky ve tvaru

$$y = \frac{-3}{3x - 7}$$

4. Nyní si propočítejte sami tato cvičení. V hranatých závorkách jsou uvedeny výsledky.

1. Najděte obecné řešení rovnic a proveďte zkoušku:

$$a) \frac{dy}{dx} = 2$$

$$[y = 2x + c]$$

$$b) y' - 5 \sqrt[3]{x^2} = 0$$

$$[y = 3x^{\frac{5}{3}} + c]$$

$$c) dy \cos^2 x = (a - 1)dx$$

$$[y = (a - 1) \operatorname{tg} x + c]$$

$$d) \frac{dy}{dx} = x^2 + \sin 2x$$

$$\left[y = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} \cos 2x + c \right]$$

2. Integrujte rovnice:

$$a) y' + x = 0$$

$$[x^2 + y^2 = c]$$

$$b) y' \cdot x^3 = 2y$$

$$[y = c \cdot e^{\frac{1}{x^2}}]$$

$$c) 2s \cdot t^2 ds = (1 + t^2) dt$$

$$[s^2 = \frac{t^2 - 1 + ct}{t}]$$

3. Dokažte, že funkce $y = cx^3$ je řešením rovnice $3y - xy' = 0$. Se-

strojte integrální křivka procházející body $M \equiv \left(1; \frac{1}{3}\right)$ a $N \equiv (1; 1)$.

$$\left[y = \frac{1}{3} x^3; y = x^3 \right]$$

4. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice odpovídající daným počátečním podmínkám: $x^2 \cdot y' + y^2 = 0$; $y = 1$ pro $x = -1$. [$y = -x$].

5. Určete křivku procházející bodem $A \equiv (-1; 1)$, jestliže směrnice tečny v libovolném bodě křivky je rovna čtverci druhé souřadnice bodu dotyku. $\left[\frac{dy}{dx} = y^2; y = -\frac{1}{x} \right]$

6. Znázorněte graficky soustavu integrálních křivek diferenciální rovnice $x dy + y dx = 0$. [$xy = c, c \neq 0$]

5. V tomto článku jsme se seznámili s některými základními pojmy a řešili jen ty nejjednodušší diferenciální rovnice, abychom vystačili se znalostmi diferenciálního a integrálního počtu ze střední školy. Proto tu také není probrán žádný příklad na sestavení diferenciální rovnice (pomineme-li cvičení 5) a nejsou řešeny žádné diferenciální rovnice vyššího řádu — rovnice, které hrají v praktických aplikacích zvláště důležitou úlohu. Jestliže i přesto podnítil tento článek váš zájem o diferenciální rovnice, doporučuji vám k prostudování následující spisy:

a) J. Kaucký: Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.

b) R. Rychnovský: Obyčejné diferenciální rovnice a jejich řešení.

c) V. V. Stěpanov: Kurs diferenciálních rovnic.

0 úhlech pythagorských trojúhelníků

MIROSLAV LITOMISKÝ, Praha

Pravoúhlý trojúhelník nazýváme pythagorským, dají-li se jeho strany vyjádřit jako celistvé násobky délkové jednotky. Podle indického matematika Brahmagupty (asi r. 600 našeho letopočtu) obdržíme všechny možné takové trojúhelníky, když zvolíme dvě přirozená nesoudělná čísla $m > n$ a utvoříme z nich výrazy $2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2$. První dva výrazy dávají délky odvěsen, třetí délku přepony. Chceme-li se vyhnout duplicitě výsledků, volíme z čísel m, n , jedno sudé, druhé liché a přitom obě nesoudělné. Máme pak známou tabulku

m	n	odvěsny		přepona
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61

Krátkou studii o *úhlech* těchto trojúhelníků začneme grafickým pokusem. Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami $a_1 = 21$ mm, $b_1 = 28$ mm a přeponou $c_1 = 35$ mm. Pak zdvojnásobíme nejmenší úhel α_1 . Protějšší odvěsna vzroste na $a_2 = 96$ mm a přepona na $c_2 = 100$ mm a máme opět pythagorský trojúhelník s poměrem stran $24 : 7 : 25$, přičemž původní měl poměr stran $3 : 4 : 5$. Správnost přezkoušíme výpočtem úhlů. Je $\sin \alpha_1 = 3/5 = 0,6$ $\alpha_1 = 36^\circ 52' 10''$; $\sin \alpha_2 = 0,96$ $\alpha_2 = 73^\circ 44' 20'' = 2 \alpha_1$. Tento výsledek není nahodilý. Platí totiž:

Dvojnásobek nejmenšího úhlu pythagorského trojúhelníku o přeponě c_1 je vždy úhlem jiného pythagorského trojúhelníku, jehož přepona je $c_2 = c_1^2$.

Důkaz: V původním trojúhelníku platí: $\sin \alpha_1 = \frac{a_1}{c_1}$, $\cos \alpha_1 = \frac{b_1}{c_1}$

a v novém $\alpha_2 = 2\alpha_1$, $\frac{a_2}{c_2} = \sin \alpha_2 = 2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = \frac{2a_1b_1}{c_1^2} =$

$$= \frac{2a_1b_1}{a_1^2 + b_1^2}, |\cos \alpha_2| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} = \sqrt{1 - \frac{4a_1^2 b_1^2}{(a_1^2 + b_1^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a_1^4 + 2a_1^2 b_1^2 + b_1^4 - 4a_1^2 b_1^2}{(a_1^2 + b_1^2)^2}}.$$

Poněvadž $\alpha < \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$, $a_1 < b_1$ je

$$\frac{b_2}{c_2} = \cos \alpha_2 = \frac{b_1^2 - a_1^2}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Strany a_2 , b_2 , c_2 jsou tedy úměrné číslům $2a_1b_1$, $b_1^2 - a_1^2$, $a_1^2 + b_1^2$ a nový trojúhelník je podle Brahmaguptových relací pythagorský, což jsme měli dokázat.

Největší dnes známé prvočíslo

JIŘÍ SEDLÁČEK

Je to číslo $2^{19937} - 1$, jak nedávno zjistil *B. Tuckerman* spolu s *M. Specinerem* a *R. Schroeppelem*. Že skutečně jde o prvočíslo, zjistilo se na počítači IBM 360/91 a výsledek byl publikován r. 1971. Kdybychom tohoto číselného obra vyjádřili obvyklým způsobem v desítkové soustavě, měl by zápis celkem 6 002 číslice. O tom by nás ostatně snadno přesvědčil logaritmický výpočet.

Nově zjištěné prvočíslo patří mezi tzv. *prvočísla Mersenneova*, jež jsou tvaru $M_n = 2^n - 1$. Pojmenování těchto prvočísel nám připomíná, že se jimi začal zabývat již *M. Mersenne* (1588–1648). Aby M_n bylo prvočíslo, musí být také číslo n prvočíslem. Tato podmínka však není postačující, neboť $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$ a pro $n = 11$ tudíž dostáváme číslo složené. Do roku 1971 byla známa 23 prvočísla Mersenneova, jež odpovídají exponentům $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 617, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213$. Nyní tedy bylo objeveno Mersenneovo prvočíslo s pořadovým číslem 24.

Snad si mnohý čtenář položí otázku, proč se vyšetřování velkých prvočísel děje právě v oblasti prvočísel Mersenneových. Je to proto, že je známá poměrně jednoduchá věta, která podává nutnou a postačující podmínku k tomu, aby číslo M_n bylo prvočíslo. Tato *Lucasova* a *Lehmerova* podmínka zní: Číslo M_p , kde p je liché prvočíslo, je právě tehdy prvočíslem, jestliže M_p dělí $(p - 1)$ ní člen posloupnosti $s_1, s_2, s_3, \dots$ dané rekurentně vzorci $s_1 = 4, s_k = s_{k-1}^2 - 2$ pro $k = 2, 3, \dots$

Tuto poznámku ukončíme zmínkou o tzv. *číslech dokonalých*, jež úzce souvisejí s Mersenneovými prvočíslly. Přirozené číslo d větší než 1 se nazývá dokonalé, rovná-li se součtu všech svých dělitelů menších než d . Tak např. číslo 6 je dokonalé, neboť má dělitele 1, 2, 3, a 6 a platí $6 = 1 + 2 + 3$. Jsou známa jen sudá čísla dokonalá a ví se o nich toto: Je-li M_n prvočíslo Mersenneovo, pak $2^{n-1}M_n$ je číslo dokonalé. Přitom každé sudé dokonalé číslo je možno vyjádřit ve tvaru $2^{n-1}M_n$, kde M_n je vhodné Mersenneovo prvočíslo. Lichá dokonalá čísla nejsou známá, ale nebylo dokázáno, že neexistují.

fyzika

Proutkaření

Prof. RNDr. EMIL KAŠPAR, DrSc., KU, Praha

Čas od času jak v minulosti, tak také v posledních letech se objevují v obrázkových časopisech a v zábavných přílohách novin články o proutkaření, ba dokonce vycházejí i knihy, které obsahují pojednání a referáty o této činnosti. Tyto stati jsou psány často způsobem, který by mohl uvést čtenáře v mylný dojem, že jde o jevy, k nimž ani minulá ani soudobá věda nedovede nic říci, ba dokonce se objevují názory, že u proutkaření jde skutečně o jakési záhadné, vědecky dosud nevysvětlené síly, jichž proutkaři užívají při hledání vody, rudy, popř. jiných objektů skrytých v zemi, ale také nemocných míst na lidském těle apod.

Proutkařská pověra není jen mařením času na úrovni hledání kamene mudrců nebo elixíru života, ale působí veliké škody myšlenkově-morální, škodí seriózně založenému vědeckému výzkumu a nezřídka vede k velikým národohospodářským ztrátám. Proto je užitečné se jí zabývat. V tomto článku si nejprve všimneme historie proutkaření, zejména jak se tato pověra projevovala v různých obdobích, ve 2. části popíšeme různé typy proutkařského náčiní a jejich funkci, ve 3. části shrneme pavědecké výklady pohybu proutků a siderického kyvadla a ve 4. části uvedeme fyzikální vysvětlení těchto pohybů.

I. Proutky v mytologii a v historii

Proutek v mythech. Už ve starověkých bájích je čarodějný proutek nezřídka prostředkem k vykouzlení vody ze skály, ze země apod. V proutkařském podání je nejčastěji citován úryvek z bible, podle něhož Mojžíš udeřil holí na skálu, z níž pak vytryskl pramen. V antickém bájesloví je proutek nebo hůl prostředkem, jímž ze země nebo skály kouzlí vodu celá řada bohů či jiných hrdinů (Poseidón na Akropoli v Athénách, vodní víla Juturna, Janus na římském hradě atd.).

Proutky ve starší historii* a v pověře. Kromě mythických a polopohádkových příběhů jsou dochovány i historické zprávy o hledání vody pomocí proutků. Proutkaření bylo provozováno snad již u Sumerů, zabývali se jím Skythové, Indové, Peršané, Číňané od nej-

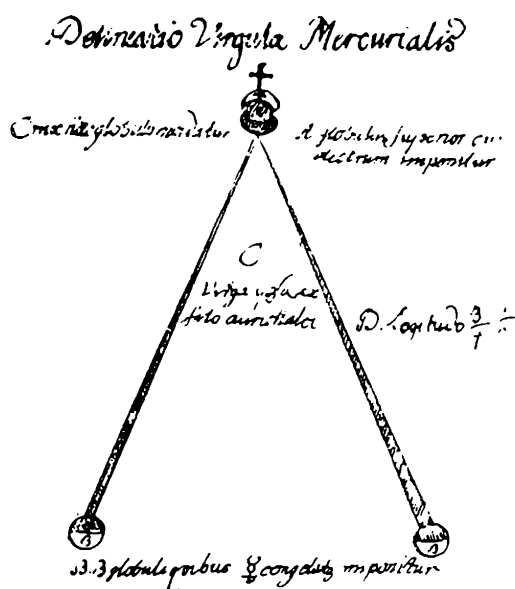
*) Poměrně podrobnou historii proutkaření až do dvacátých let našeho století obsahuje knížka *dr. Čeňka Zíbrta* „Virgule a siderické kyvadlo“, vydaná v Praze r. 1922. Z této publikace je čerpána většina historických poznámek v tomto článku.

starších dob. Ve starém Řecku se hledači vody nazývali *hydroskopové* (hydór = voda, skopeó = pozoruji, hledám) — tento název pro proutkaře zdomácněl i ve středověku —, v antickém Římě *aquileges* (aqua = = voda, lego = sbírám, hledám). Aquileges, které jejich souvěkovci považovali za čaroděje, usuzovali pomocí rozvětveného prutu a podle rostlin a keřů, zda pod nimi proudí voda.

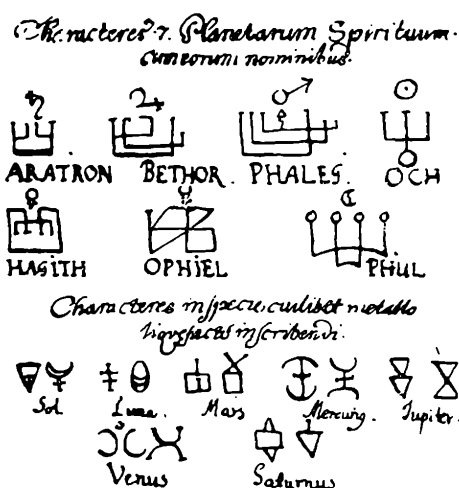
Jeden z prvních novodobých záznamů o čarodějném proutku pochází ze sklonku 15. století. Jeho autorem je alchymista benediktin *Basilius Valentinus*. V jeho knize „Poslední testament“, vydané tiskem až v l. 1651 a 1676 ve Štrasburku, je popsáno sedm druhů proutků z různých keřů a stromů, které se měly řezat pod astrologickými účinky hvězd a souhvězdí. Je zajímavé, že v knize je obsažen už také popis kovových virgulí pro hledání různých kovů.

Čechy byly již od dob nejstarších Přemyslovců proslulou hornickou zemí (srv. pověst o Horymírovi, který „doly zaválel“) a není proto divu, že jsou už od nejstarších dob dochovány literární doklady o proutku, užívaném v našem hornictví. První zmínka o čarodějném proutku u nás je úctyhodně stará, pochází ze 14. století a je obsažena ve známé německé skladbě „*Ackermann aus Böhmen*“ (Rolník z Čech). V ní autor „*Smrti na odloučení od milé*“ nazývá svou milou vedle jiných lichotek též „*mein versagene wunschelrut*“ (můj věštící čarodějný proutek).

Z 15. nebo 16. století pochází samostatný spisek obsahující zprávu o užití proutku v hornictví, který napsal Čech *Mikuláš Škorně* (zlatinizované jméno znělo asi „*Soleus*“). Knížka byla několikrát vydána a byla podkladem názorů a návodů o zhotovování a užívání virgule pro jiné autory. Od pražského františkána *Bernharda* pochází nejstarší samostatná knížka, která obsahuje (latinský) popis i nákres virgule. Popis virgule v této knížce, jejíž opis ze 17. století se dochoval, je pěkným dokladem, z jaké myšlenkové situace její autor vychází. Virgule je nahoře opatřena kovovou kuličkou s křížkem (viz obr. 1), dolů vybíhají dvě vidlice z mosazného drátu s udáním délek. Na konci každé vidlice je kulička, do které se vkládá rtuť (alchymisty oblíbený kov). Návod obsahuje poučení, z kterých látek se zhotovují kuličky (ze zlata, stříbra, železa, cínu, olova, rtuti a síry). Při výrobě kuliček je nutno dbát polohy planet a zvláště té „planety“, která látce odpovídá (Slunce, Měsíce, Marsu, Jupitera, Saturna, Merkura). „*Je třeba se obrnit čistou myslí, bezúhonným svědomím a pevným úmyslem.... Přitom se modli, zažehnávej a když kovová směsina vychladne, rýsuj kouzelné značky, „charaktery“*. Tyto značky jsou v rukopise pečlivě narýsovány (obrázky 2). Ze zlata a stříbra se připraví slitina (elektrum) velikosti pepřového zrna, vloží se v hedvábném obalu do kuličky posvěcené virgule. V knížce je obsírně vysvětleno, jak zaklínat duchy sedmi planet, jak požehnávat kovy, aby vyhledaly žádoucí poklady a jak zapudit přízraky zlých duchů.



Obr. 1 Kovová virgule podle františkána Bernharda (16. století)



Obr. 2 „Charaktery“, kouzelnické značky vyryté na virguli

Také ve slovníku Daniela Adama z Veleslavína, nazvaném „*Nomenclator Quadrilinguis*“, z r. 1598 je heslo: *virgule, virga Mercurii, Glückrut*. O virgulích píše také slavný mineralog Jiří Agricola (vlastním jménem *Georg Bauer*, 1494–1555), který byl od r. 1527 městským a horním lékařem v Jáchymově. Agricola vynikl spisem „*De re metallica*“ (O kovech), jehož 1. vydání vyšlo až po autorově smrti v Basileji r. 1556. Toto dílo bylo učebnicí hornictví a hutnictví až do 18. století. Agricola byl na svou dobu neobyčejně vzdělán a měl značnou dávku kritičnosti. Proslul např. tak ostrou kritikou alchymistů „vyrábějících“ zlato, že pozdější spisy, zamítající alchymii, byly nazývány prostě „agricola“. I když od Agricoly pochází úsloví, které zčeštěno zní: „*Nepotřebuje horník virgule, zná-li své regule*“, nebyl jeho postoj k hornickým kouzelným proutkům tak jednoznačně odmítavý, jak např. plyne z citátu z jeho knihy: „*Kterí věří v moc proutku, uříznou vidlicovitou lískovou větévku, kterou uznají za vhodnou k objevování ložisek; zvláště vypučel-li keř, jak se domnívají, nad některým kovovým ložiskem. Jiní používají ratolesti různých druhů: pro zlaté mince, zlato a stříbro proutků lískových, vrby pro měď, jedle pro olovo a všech druhů bílého dřeva pro železnou rudu.*“

Zmínky o užívání proutků u nás jsou obsaženy i ve spisech dalších autorů, např. *Lazara Erchnera*, nejvyššího mincmistra království Českého, *Bohuslava Balbína* aj. Proutků se užívalo ke hledání nejen rudných ložisek a vodních pramenů, ale též ukrytých pokladů. Pověrečné hledání pokladů a zaklínání duchů se u nás vyskytuje již od 15. století. Jsou dochovány písemné záznamy o tom, jak podvodní proutkaři využívali hlouposti a ziskuchtivosti lidské k vlastnímu obohacení.



Obr. 3 Církev odhaluje ďábla, maskovaného v proutkaři. Překlad latinského nápisu: „Nechť se krotí lidská opovázlivost a to, co není, nechť nehledá, ani ať nehlobá o tom, co jest“. (Ilustrace je z protiproutkařského díla z konce 17. století. Postavičky v pozadí obrázku užívají různé způsoby proutkaření).

Proutkaření v 18. a 19. století. Koncem 17. století vyvolala hotovou explozi všestranného použití čarodějných proutků tato událost. V r. 1692 byl v Lyonu ve sklepě zavražděn a oloupen vinárník s manželkou. Vrah zmizel beze stopy, a tu soudce zavolal na pomoc proutkaře, rolníka *Jakuba Aymara*. Proutky vedly Aymara 45 km daleko od místa činu po zemi, po řece i po moři až do osady Beaucaire v Languedocu do temějšího vězení, kde seděl v okovech zločinec. Ten zapíral, ale „proutky ho usvědčily, až donucen se k vraždě přiznal“. Sláva Aymarova neznala hranic. I když se vyskytly rozumné hlasy — vedle jiných odhalil Aymarovu podvodnost syn prince Condé a to při experimentech, ke kterým pozval Aymara do Paříže — všechny rozumné vývody byly umlčeny záplavou chvalozpěvů. Ba dokonce vševědoucí schopnost virgule byla rozšířena na všechno, kde bylo potřeba co důležitého zjistit.

V pověrečném, až fanatickém proutkařském blouznění zanikaly jakékoli kritické a střízlivé hlasy. Jediná síla, která stála pevně proti proutkařské pověře, byla církev. Ale církevní hodnostáři nebrojili proti proutkaření z vědeckých důvodů, nýbrž prohlašovali pohyb proutků za ďábelské šálení a proutkaře za rouhače proti boží všemohoucnosti (obr. 3). O tom svědčí následující hezký příběh o *dívce Ollivě*:

Jedním z odpůrců proutkaření byl kanovník *Le Brun* z Grenoblu, který vystoupil proti ďábelské moci proutků. *Le Brun* navštívil Aymara, nechal si od něho předvést jeho umění, ale prohlásil je za satanovu šalbu. O tom

se dověděla dívka *Olliva*, která uměla též provádět s proutky zázraky. Rozeznala prý v hromádce lidských kostí svaté ostatky světců a světic a pomocí proutků nalézala vodní zdroje. *Olliva* se vyzpovídala *Le Brunovi*, litovala své dosavadní hříšnosti a slíbila, že nebude proutkařit, aby neměla spolky se satanášem, a nábožně přijala Tělo Páně. A potom s *Le Brunem* zkusili, má-li nad ní satan ještě kouzelnou moc. Rozhodili po zahradě nejdříve tajně a potom zjevně kovy, dívka šla s proutkem, a hle, nic, proutek se ani nepohnul. Ani u studny se proutek nyní nepohnul, ačkoliv se před zpovědí mocně ohýbal. Kanovník i dívka byli přesvědčení, že se proutek, ač dábelskou mocí posedlý, nehýbal nyní proto, že ďáblovu moc docela zaplašili. — A my dodáváme: chytrá dívka *Olliva* tak možná ušla hranici pro čarodějnice.

Sedlák *Aymar* byl sice z Francie vypovězen, ale tím se víra v proutky nezlikvidovala, spíše naopak. I v našich zemích se proutkařská pověra rozbujela do tak obludných forem, že nakonec císař *Josef II.* byl nucen vydat přísný zákaz proutkaření. Jestliže v předchozí době byl proutek užíván především při hledání rud a vody, kdežto zakopaných pokladů jen výjimečně, rozmohlo se v 18. století pověrečné hledání pokladů proutkem a pomocí zaklinadel v masovou záležitost. Hornické spisy té doby sice varují před proutkem „posedlým mocí dábelskou“, ale vlivem hornických praktik se známost o proutkohybné moci šíří do lidového podání. Předpisy, z čeho řezat proutky, kdy je řezat, jakým způsobem, aby získaly nebo neztratily čarovnou moc, se nejen opisují, ale i opětovně vydávají tiskem.

V některých těchto návodech je obsaženo i zdůvodnění, proč Boží Milost udělila jen některým lidem schopnost proutkaření, např. (*Zibrt*, str. 31): „*Bůh udělil člověku proutek divotvorný, aby pomocí jeho mohl nalézati ... skrytá ložiska rudy kovů. Poněvadž hříšným pádem Adama a Evy lidský rozum byl oslaben, dostalo se této milosti, tohoto umění hledati proutkem, pouze několika málo lidem*“ Tento návod pokračuje kuriózní radou (otřesné jest, že se s něčím podobným setkáváme i v nejmodernějším proutkaření): „*Má-li se v krajině hledati, kde jsou vzácné rudy, rozloží se mapa krajiny a čarovný proutek ať se volně mapy dotýká. V místě, kde poprvé proutek na mapě bije, jsou ložiska bohatá a značné hloubky. Jsou-li ložiska zlatá, bije prut 28krát, na stříbře 22krát, na sůl 48krát, na vitriol 7krát*“

Přes úřední zákazy a negativní stanovisko církve nabyly proutek takové důvěry, že se jím v první polovině 19. století určovalo a hledalo všechno možné: voda, rudy, kovy, poklady, zloděj, vrah, zakopané mezníky, zbloudilý dobytek, zavátá nebo pravá cesta při bloudění, ženská nevěra, proutek prozradil pravdu nebo lež v hovoru, věstil zdraví nebo nemoc, dokonce i smrt milé osoby na dálku, předpovídal, zda dítě, které se má narodit, bude chlapec nebo děvče, převozníkům na řekách a na mořích poradil, kde je na dně potopené zboží, věstil před lovem, kudy potáhnou sledi atd. atd. Jsou zaznamenány i neuvěřitelné případy pověrečného poblouznění: např. v Tyrolsku jakýsi sedlák nabízel za

půjčení virgule a zaklínadla ke sv. Gertrudě na jedinou noc nový vůz i s párem volů.

K rychlému zbohatnutí neměly sloužit jen proutky, nýbrž i četná zaklínadla, jež bylo nutno při akci pronášet. Pověrečné modlitby byly nazývány *virguláře* nebo podle příslušného patrona pokladů, např. *křišťůvky* (k sv. Křištofu), *gabrielky* (k sv. Gabrielovi), *korunky* (k sv. Koruně-Kronice), dalšími příslušnými patrony byli sv. Ambeta, sv. Gevara, sv. Theodor a sv. Zachariáš. Vedle zaklínajících modliteb k světcům byla šířena i zaklínadla k méně dobrým duchům, např. *tafrielky*, které se obracely k nepočestnému duchu Tafrielu. A protože s těmito duchy nebyly žádné žerty, musilo podle toho vypadat i zaklínadlo:

„*Slyš, Tafrieli! Já N. N. nebohý sluha boží, volám a žádám, cítíruru a Tebe* (na tomto místě se prosebník obrací pro jistotu na velmi dlouhou řadu pravých svatých a světic, p. p.), *aby hned v tom okamžení ve vsí tichosti, bez strachu a uškození duše i těla i života mého i tovaryšů mých, beze škody tohoto budouňku (= budovy, p. p.) a jakýchkoli jiných věcí, k tomu přináležejících, v pěknej, výbornej, mladej, lidskej osobě, ponížene předemnou se dostavili a podle požádání mého 999 000 zlatejch dukátů donesl dobrého spravedlivého a čistého zlata...*“ V jiném zaklínadle se zaklínač domáhá, aby Tafriel přinesl „*summu peněz 999 000 dukátů dobré pravé vlastní a v každém místě běžné mince* *beze všeho třesku a gvaltu, ale uctivě a pokorně sem donesl ... však ne zuřivostí ..., abys toho pokladu na nás neshodil a nám neuškodil...*“

Pověrečné hledání pokladů pomocí virgulí a zaklínadel a šíření virgulářů se rozmohlo zvláště ve 2. polovině 18. století a mnozí důvěřivci se stali oběťmi podvodníků, kteří pod slibem nalezení pokladu mámili na svých obětech často nemalé obnosy. Víra v proutkaře nebyla zviklána u prostého českého člověka snad ani tak císařským zákazem a církevními záповědmi — čtenáři jistě neušla souvislost rozmachu proutkařské pověry s dobou „temna“ —, ale hlavně působením buditelů v obrozené době. Ti vystupovali tvrdě proti proutkařské pověře. Zejména účinné byly otiskované výstražné příběhy, které líčily, jak si proutkaři hrubě počínají, popř. jak se kde sami zesměšlili. Byly otiskovány i v podstatě správné výklady pohybu proutků. *) Snad také v té době vzniklo pořekadlo „*Proutkař obchází po mezi, rozluč se sedláče s penězi*“. I když proutkařská pověra byla ve své nejzrůdnější podobě rozumnými lidmi prohlédnuta, není možno říci, že by byla zcela vymýcena. Ještě v průběhu 19. století a i ve 20. století se setkáváme s pošetilci, kteří hledali pomocí proutků zakopané poklady, ba dokonce čísla, která budou tažena v nejbližším tahu loterie atd.

*) V podstatě fyzikálně správný výklad pohybu proutků je např. obsažen v knížce faráře *Javornického* „*Lucian, syn Fortunatův*“, která vyšla v Praze r. 1827. Podkladem výkladu je pravděpodobně starší německé dílo.

Proutkaření v moderní době. Koncem 19. a začátkem 20. století byla znovuvzkříšena sláva proutků, nikoliv však k získání zakopaných pokladů, nýbrž při hledání podzemní vody, popř. rudných žil. Na počátku tohoto rozmachu se objevuje řada jmen proutkařů, kteří vedle „zdařilých“ pokusů při objevování pramenů vymýšlejí i víceméně umělé ná- vody, nejen jak hledat vodní prameny, nýbrž i určovat jejich hloubku, vydatnost, složení minerálních vod atd. Někdy vyslovují i teorie o příči- nách sil, jimiž jsou proutky vychylovány. Tak vzniká moderní proutka- ření, s nímž se setkáváme i v nejnovější době. Ruku v ruce s rozvíjením proutkařských praktik a „teorií“ narůstá i publikační činnost, takže literatura o proutcích a proutkaření by sama o sobě vyplnila rozsáhlou knihovnu. Za zakladatele moderního proutkaření se považuje hrabě *Bülow-Rothkamp*. Tento slavný proutkař je vydáván za objevitele též lázeňských pramenů v Poděbradech. Byl pozván r. 1905 majitelem po- děbradského panství hr. *Hohenlohem* na hony a při té příležitosti „nalezl“ pomocí virgule minerální pramen na nádvoří zámku a podle své teorie sypočetl hloubku pramene na 30 m. Ve skutečnosti bylo pramene do- saženo až v hloubce 96 m. A jak tomu bývá, sláva této Bülowovy akce ve šířila a doznívá dodnes, ačkoliv ve skutečnosti byla poděbradská akce Bülowovým fiaskem, neboť vedle toho, že našel vodu v nesprávné hloubce, bylo nalezení vody v jednom jediném místě v rozporu se sku- tečností. Podle geologického složení zemských vrstev je totiž v této krajině minerální voda všude a přibližně ve stejné hloubce (asi 100 m).

Další rozmach praktického proutkaření nastal v letech 1. světové války a vyvolal jej vídeňský profesor *dr. Moritz Benedikt*, který ve vídeňských novinách *Neue Freie Presse* otiskl v r. 1915 článek „Kou- zelný proutek jako válečná nezbytnost“. Od tohoto autora pochází i výklad proutkohybných sil, jichž původ hledá v tzv. „biomechanickém jevu“. K němu se vrátíme v další části našeho článku.

Zájem o proutky a proutkaření neutuchá v určitých kruzích ani v nejnovější době. Nejenže vychází mnoho článků a pojednání o „rhab- domantii“, jak se učeně proutkařským praktikám říká, ale existují dokonce společnosti a jsou svolávány mezinárodní konference, věnované praxi i výkladu proutkařských jevů.

II. Typy virgulí a jejich funkce

Je třeba si uvědomit některé zásady, které musí být při bádání do- drženy, abychom mu mohli přiznat povahu vědeckosti. Jedna z těchto zásad je, že jev, jehož příčiny zkoumáme, musí být napřed dokonale objektivně prostudován a popsán. Uvedme si příklad s našimi proutky. Často se uvádí, že proutky v rukách proutkaře „reagují“, tj. ohýbají se, naproti tomu prý nereagují, uchopí-li je osoba, která není nadána zvlášť- ními proutkařskými schopnostmi. Tento popis funkce proutků je pro vědecký průzkum zcela nedostatečný, protože není uvedeno, zda „ne-

proutkař“ byl řádně poučen, jak má proutky uchopit a s nimi manipulovat, aby je přivedl do téhož stavu jako proutkař.

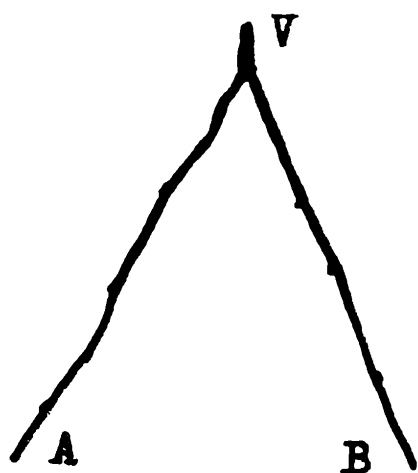
Abychom mohli objektivně vyložit a vysvětlit příčiny a zákony pohybu virgule, siderického kyvadla atd., je nutno seznámit se napřed s různými formami proutkařského náčiní a se způsoby, jak se s nimi zachází.

Proutky a proutkařské praktiky.

Pomůcky, jichž se při proutkaření používá, jejich užívání a proutkařská praxe vůbec jsou velmi rozmanité. Je zajímavé sledovat, jak rozvoj techniky, vědy, popř. lidského myšlení ovlivňuje proutkařovy pomůcky („indikátory“) či proutkařskou techniku vůbec. Zatímco v nejstarší době se užívalo ratolestí, tak jak je proutkaři nalézali v přírodě, z dob rozkvětu alchymie pocházejí popisy uměle zhotovených, ale i přirozených proutků upravovaných způsobem, který zcela odpovídá kabalistickým názorům své doby. Již jsme uvedli popis i nákres kovové virgule z knížky pražského františkána, pocházející z 15. století. Alchymistickou kuchyň připomíná ještě popis výroby proutků z r. 1905 obsažený v uvedené knížce Č. Zíbrta (str. 204): „*Vidlice na způsob latinského Y jest uříznuta na Štědrý den z mladého smrčku a má délku asi 8 cm. Dřeň se vyvrtá a vidlice svislou nožkou vsadí na prut. Do obou vyčnívajících ramen nalije se rtuť, načež se celá vidlice obalí pečetním voskem, takže dřevo její ani spojení její s proutkem není znát.*“ Vidíme, že vedle rtuti, oblíbené alchymisty, se zde užívá pečetní vosk. Technika výroby virgulí pokročila zřejmě zásluhou elektrostatiky, v níž pečetní vosk se užívá i jako izolant, i jako látka snadno elektrovatelná třením. Tato skutečnost působila jistě aspoň u prostého pozorovatele dojmem vědeckosti.

V nejnovější době tyto úpravy proutků již zastaraly a v proutkařské praxi již nemají tak důležitou úlohu. Popíšeme nyní různé způsoby úprav proutků a jiných „indikátorů“

Jednoduchá virgule. Snad nejpoužívanější formou proutků je klasický typ virgule, tj. rozvětvená větev ve tvaru vidlice (obr. 4). I když se i dnes vyskytují přerůzné návody o tom, z kterého stromu nebo keře a jakým způsobem se mají čarodějné proutky řezat, popř. v které roční nebo denní době, zkušenost ukazuje, že jediným kritériem pro dobrou funkci proutků je, aby měl vhodné pružné vlastnosti. Proto je též lhostejné, zda je proutek přirozený nebo z kovového drátu či zda je zhotoven z tyčinky z umělé hmoty apod. Z ocelového drátu se dají vyrobit vidlice, které — jak dále uvidíme — mají velmi vhodné vlastnosti pro demonstraci „proutkohybných“ sil. Tvar a velikost virgule se mohou obměňovat v širokých mezích. Někteří proutkaři užívají kovových prutů se smyčkou (obr. 5), jejichž vzhled je pro nezasvěceného pozorovatele zvlášť působivý. S jednoduchou virgulí „pracuje“ zpravidla jedna osoba, někdy drží virguli dvě osoby, každá za jednu vidlici.



Obr. 4 Přirozená virgule

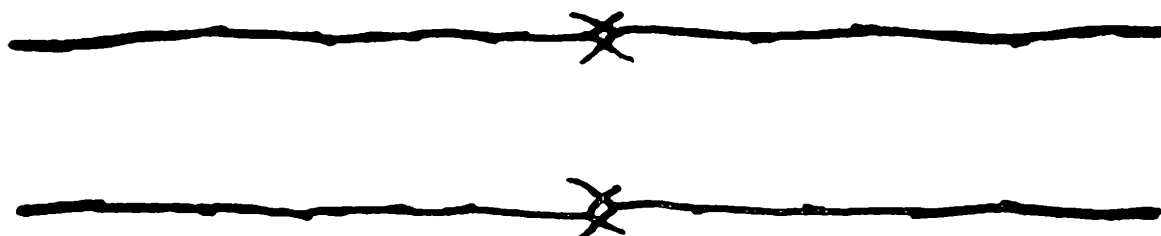


Obr. 5 Kovová virgule se smyčkou

Čtyři virgule jsou také velmi hojně užívanou formou proutků. Tyto proutky na rozdíl od předešlého typu mají nerozvětvenou část mnohem delší než vidlici (obr. 6 ab). Tato forma virgulí umožňuje proutkaři uvádět proutky do rozmanitějších pohybů než jednoduchá virgule: Dvojice proutků se může ohýbat současně nahoru nebo dolů nebo odklánět do stran, ale každá dvojice se též může ohýbat na jinou stranu, proutky se mohou překřížit atd. Fyzikální původ „proutkohybných sil“ je v tomto případě jiný než u jednoduché virgule, jak uvedeme dále.

O tom, jak tyto proutky mají zaznamenat přítomnost vody, se různé zkušenosti rozcházejí. Č. Zíbrt (str. 204) uvádí zprávu o tom, jak v r. 1905 hledali u České Třebové vodu: „*Ku hledání vody jest potřeba dvou lidí. Každý si vezme dvě virgule a na vyhlédnutém místě postaví se proti sobě tak, že držice paže k tělu, lokte tlačí k bokům, předloktí v klidu ohnuté trčí vpřed. Oba „spolníci“ zasadí vidlice do vidlice proti sobě napřažených a začnou mírně vpřed tlačiti.*) Když se virgule zdvihají (ohýbají) do výše, není na tom místě vody. Pakli se kloní k zemi, jest tam voda stojatá. Uhýbají-li se stranou, proudí voda tekoucí....*“

*) Toto silové působení vpřed je podstatné pro vznik pohybu proutků a tedy i pro fyzikální výklad funkce proutků. E. K.



Obr. 6a Čtyři proutky

Naproti tomu jiný proutkař v článku *Jak jsme hledali vodu**) píše „*Stojí-li osoby zrovna nad pramenem, tedy proutky ponenáhlu zvedají se vzhůru. Podle toho soudí na hloubku pramene pod zemí. Zvedají-li se hodně, jest pramen hluboko. Pakli méně, jest blíže povrchu...*“ Tento proutkař projevuje dále zajímavé názory: „*když jsem četl, že všechny podzemní proudy chovají v sobě mnoho elektřiny a že na proutky ty působí elektřina, proto patrně musí býti polepen konec pečelním voskem. Otevřená voda, ať v hotové studni, nebo jakákoliv voda na povrchu elektřiny nemá a tudíž na virgule již neúčinkuje...*“ Zřejmě na vznik a udržování proutkařské pověry měla a jistě i má podstatný vliv neznalost nejzákladnějších poznatků z fyziky.

Jednoduchému nerozvětvenému proutku dávají někteří proutkaři přednost, i když jeho funkce by se zdála méně ovladatelná, než když na proutky mohou působit obě ruce. Proutkaři tvrdí, že touto formou proutku mohou určit značně přesně i hloubku výskytu vody. Při tomto užití proutku nemůže být proutek ovlivněn za klidu, a z toho důvodu se užívá kmitavého pohybu. Proutkař drží proutek za silnější konec např. v levé ruce a pravou rukou rozkmitá jeho volný konec ve svislé rovině. Pak počítá kmity, které jsou tlumené a podle počtu kmitů do úplného utlumení pohybu soudí na hloubku pramene. Např. jednomu kmitu odpovídá hloubka 20 cm.

Spirála (obr. 7). Proutkařská spirála je vinuté péro, např. ocelové, ale může být i z jiného, zejména lehčího kovu. Spirála se drží podobně jako jednoduchá rozvětvená virgule a také se s ní podobně manipuluje. Proti přírodním proutkům, ale i kovovým v jednoduchém provedení, má užití spirály velikou přednost v tom, že vedle pružnosti v ohybu a v kroucení je možno využít i pružnosti v tahu a v tlaku. Proto spirála v rukách obratného proutkaře dokáže dělat pravé divy. I kovová spirála jako proutkařská rekvizita se užívá poměrně dlouho.

Siderické kyvadlo. Kdežto všechno proutkařské náčiní až dosud jmenované mělo aspoň to společné, že jejich užití v proutkařské praxi je založeno na pružných vlastnostech „proutků“, princip siderického kyvadla je zcela odlišný. Proutkařské kyvadlo — stručně často nazýva-

*) Č. Zíbrt cituje podle *Českého lidu* roč. 19



Obr. 6b Užití čtyř proutků při akci



Obr. 7 Užití proutkařské „spirály“

né *pendl**) — je v podstatě kovový předmět (kovová kulička, prsten, matka šroubu atp.) zavěšený na vlákně. Váha předmětu bývá kolem několika gramů, délka závěsu velmi různá, od 10 cm až do více než 1 m. V pověrečných proutkařských návodech se lze dočíst o víceméně přesných návodech, např. že předmětem musí být stříbrná kulička, nit že musí být z přírodního hedvábí; u různých autorů jsou tyto předpisy různé.

Podle kývavého pohybu kyvadla proutkaři určují nad mateřským lůnem pohlaví dítěte, které se má narodit (podobně se určuje pohlaví zárodku v oplozeném vejci), chorobná místa v lidském těle, polohu zakopaného pokladu v zemi, výskyt rudné žíly, výskyt a hloubku vody v zemi atd. Ani kyvadlo v manipulacích proutkařů není novým objevem, znali je už staří Číňané. Jak se užívalo kyvadla při hledání podzemní vody, dobře ilustruje tento výňatek, obsažený v Zíbrtově knížce: **) „*Ještě přesněji to (tj. pohyb kyvadla, p. p.) určí místo, kudy jde pramen, proud, nežli virgule, neb jak se málo uchýlí na stranu, již ono závaží opisuje elipsu, a jde-li se ještě dále od pramene, tu se konečně závaží rozkývá jako kyvadlo hodinové.*“

Ne všichni proutkaři postupovali takto jednoduše. Podle Zíbrta (str. 225) proslulý „vodní hrabě Werschowetz“ si otočil kolem zápěstí

*) Původní latinské slovo *pendulum* (= kyvadlo) bylo převzato do němčiny ve tvaru *Pendel*. K nám se dostalo do proutkařské praxe zřejmě přes praxi hornickou.

**) Podle Zíbrta byl výňatek uveřejněn v *Českém Lidu* roč. 19 pod titulem „*Jak jsme hledali virgulí vodu pro studni r. 1909*“

jedné ruky kovový řetěz, na jehož konci visela kulička naplněná ryzím zlatem. Na druhé noze měl pod spodky upevněnou elektrickou baterii. Jakmile se blížil podzemní vodě, pohnula prý se kulička směrem k prameni. Na hraběti přitom pozorovali silné duševní vzrušení, jehož intenzita a kvalita podle jeho tvrzení závisela na síle a hloubce pramene. Jestliže voda byla minerální, pak hrabě tvrdil, že na jazyku pocituje slanou nebo dokonce kovovou chuť podle chemického složení vody. Z tohoto popisu je zřejmé, že proutkařská fantazie neznala a nezná mezí.

Proutkaření je zajímavým dokladem toho, jak je u mnohých lidí mocně zakořeněn sklon k pověrečnosti. Nezřídka ani značné vzdělání ani zcela přesvědčivé vědecké vysvětlení jevů — zde pohybu proutků a kyvadla — nestačí, aby se tito pověřiví lidé zrekli svých naivních názorů. V závěru našeho článku si uvedeme vysvětlení pohybů proutků a kyvadla v rukách proutkařů, tak jak plyne z fyzikálních zákonů. Je však užitečné napřed popsat některá pavědecká vysvětlení pohybu proutků, jak je vymýšlejí přívrženci proutkaření. (Pokračování)

Na jak velké dráze se nám podaří zastavit?

Až si jednou pořídíte motorové vozidlo (2. část)

RNDr. MILAN BEDNAŘÍK - RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Na otázku, na jak velké dráze můžeme zastavit automobil jedoucí po volné přímé silnici běžnou cestovní rychlostí kolem 70 km h^{-1} , by vám mnoho řidičů, zvláště řidičů začátečníků, odpovědělo, že si troufají zastavit své vozidlo na vzdálenosti několika metrů nebo v případě zvýšeného nebezpečí třeba i téměř „na místě“. Pravděpodobně by nechtěli uvěřit tvrzení, že i nejzkušenější řidič, jehož automobil má bezvadně fungující brzdy, ujede při dané cestovní rychlosti od okamžiku, kdy spatří na silnici překážku, až do úplného zastavení vozidla celkovou dráhu až 60 metrů! A to ještě jen tehdy, kdyby šlo o úplně suchou a čistou vozovku. Na mokřem nebo zledovatělém povrchu silnice by totiž ujel vzdálenost dokonce dvakrát až třikrát větší! Tuto nikoli zrovna povzbuzující skutečnost vám mohou potvrdit jednak všichni zkušení a ostřílení řidiči, jednak řidiči, kteří již jednou na svůj špatný odhad vzdálenosti potřebné k zastavení vozidla doplatili na své vlastní kůži.

Poněvadž jsme přesvědčeni, že zjišťovat vzdálenost, potřebnou k bezpečnému zastavení vozidla, metodou „pokusu a omylu“, tj. metodou praktických zkušeností, není pro řidiče v tomto případě nijak zvlášť

výhodné ani příjemné, bude lépe, podíváme-li se na celou záležitost teoreticky: posadíme se ke svému pracovnímu stolu (tedy zatím ještě ne za volant), vezmeme papír a tužku a budeme zkoumat *velikost dráhy potřebné k zastavení vozidla z hlediska přísných zákonů mechaniky*.

Od okamžiku, v němž začnou účinkovat brzdy vozidla, pohybuje se vozidlo zpomaleně a do úplného zastavení urazí vzdálenost, kterou nazýváme *brzdná dráha*. Pro jednoduchost považujeme pohyb vozidla za rovnoměrně zpomalený. Je-li v počáteční rychlost vozidla, a zpomalení jeho pohybu, pak vozidlo zastaví za dobu $t = \frac{v}{a}$. Dosadíme-li tuto dobu do rovnice pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu

$$s = v t - \frac{1}{2} a t^2,$$

dostaneme po úpravě pro brzdnou dráhu s_b vztah

$$s_b = \frac{v^2}{2a}. \quad (1)$$

Ze vztahu (1) je zřejmé, že brzdná dráha je jednak přímo úměrná druhé mocnině rychlosti vozidla (při konstantním zpomalení), jednak nepřímo úměrná zpomalení vozidla (při dané hodnotě jeho rychlosti). Je-li např. při zpomalení 5 m s^{-2} a při počáteční rychlosti 10 m s^{-1} brzdná dráha 10 m, pak při tomtéž zpomalení, ale dvojnásobné rychlosti 20 m s^{-1} vzroste brzdná dráha na čtyřnásobek, tj. 40 m, a při trojnásobné rychlosti 30 m s^{-1} je již brzdná dráha 90 m. Při polovičním zpomalení, tj. $2,5 \text{ m s}^{-2}$, bychom pro brzdnou dráhu dostali při daných počátečních rychlostech hodnoty 20 m, 80 m a 180 m, o čemž se můžete snadno přesvědčit dosazením do vztahu (1).

Zpomalení, kterého může vozidlo dosáhnout, závisí na dvou činitelích. Prvním z nich je *účinnost brzdového systému*. Minimální účinnost brzdového systému je u nás stanovena předpisem. Pro vozidla, dosahující rychlosti nad 100 km h^{-1} , tedy prakticky pro všechny moderní osobní automobily, je předepsáno, že vozidlo musí s použitím provozní (nožní) brzdy zastavit při počáteční rychlosti 40 km h^{-1} na dráze 12,5 m; přitom se předpokládá vodorovná silnice se suchým a pevným povrchem. Podle vztahu (1) tomu odpovídá zpomalení $a = \frac{v^2}{2s_b} \doteq 5 \text{ m s}^{-2}$.

Druhým činitelem, na němž závisí dosažitelné zpomalení vozidla, je *součinitel smykového tření mezi pneumatikami a povrchem vozovky*. Součinitel smykového tření je dán jednak stavem pneumatik, jednak stavem a druhem povrchu vozovky. Přibližné hodnoty součinitele smykového tření pro různé kvality povrchu vozovky při neojetých pneumatikách uvádíme v tabulce I.

Tabulka I.

Vozovka	suchá	mokrá
šterková a malé kostky	0,8	0,6
betonová	0,7	0,5
dlážděná	0,6	0,3
asfaltová	0,5	0,3
zledovatělý povrch	0,2	0,1

Vidíme, že na mokré vozovce je součinitel smykového tření v průměru o 0,2 nižší než na vozovce suché. Kromě toho se však součinitel tření snižuje, je-li vozovka znečištěna (blátem nebo olejem). Při ojetých pneumatikách s nízkým vzorkem se součinitel tření snižuje zvláště na mokré vozovce, neboť voda na povrchu vozovky se nemůže vtlačit do mezer vzorku a pneumatika tak vlastně klouže po tenké vrstvě vody. Proto je v nových předpisech předepsána minimální hloubka vzorku 1 mm.

Fyzikální vztah pro zpomalení vozidla v závislosti na součiniteli smykového tření určíme z podmínky, že velikost brzdicí síly F nemůže ani při sebeúčinnějších brzdách překročit velikost třecí síly F_t mezi pneumatikami a povrchem vozovky; platí tedy nerovnost

$$F \leq F_t$$

a odtud zpomalení

$$a \leq \frac{F_t}{m}$$

Velikost třecí síly je rovna součinu součinitele smykového tření μ a kolmé tlakové síly F_N . V případě vodorovné vozovky je kolmá tlaková síla rovna tíze vozidla, platí tedy $F_t = \mu m g$ a pro zpomalení vozidla pak dostáváme vztah

$$a \leq \mu g.$$

Rovnost $a = \mu g$ přitom vyjadřuje maximální zpomalení, kterého může vozidlo při daném součiniteli μ dosáhnout. Tak např. na zledovatělé silnici ($\mu = 0,2$) nedosáhneme ani při sebelepší účinnosti brzd většího zpomalení než 2 m s^{-2} , je-li tato silnice navíc mokrá ($\mu = 0,1$), pak musíme počítat jen se zpomalením 1 m s^{-2} . Máme-li dosáhnout zpomalení 5 m s^{-2} , musí být splněny dvě podmínky: brzdy musí mít dostatečnou účinnost a součinitel smykového tření mezi pneumatikami a povrchem vozovky hodnotu větší než 0,5.

Tabulka II

$a \text{ [ms}^{-2}\text{]} \backslash v \text{ [ms}^{-1}\text{]}$	5	4	3	2	1
10	10	13	17	25	50
20	40	50	67	100	200
30	90	112	150	225	450
40	160	200	267	400	800

Pro názornost uvádíme v tabulce II řadu hodnot brzdné dráhy s_b v metrech v závislosti na počáteční rychlosti v vozidla a na jeho zpomalení a .

Z tabulky II je zřejmá závislost brzdné dráhy na počáteční rychlosti i na zpomalení; je-li např. při zpomalení 4 m s^{-2} a při rychlosti $20 \text{ m s}^{-1} = 72 \text{ km h}^{-1}$ brzdná dráha 50 m, pak na mokré zledovatělé vozovce, kde $\mu = 0,1$ a zpomalení $a = 1 \text{ m s}^{-2}$, bude při téže počáteční rychlosti brzdná dráha 200 m. Aby se brzdná dráha snížila opět na 50 m, je nutné snížit rychlost na polovinu, tj. na $10 \text{ m s}^{-1} = 36 \text{ km h}^{-1}$.

Příklad 1: Na silnici s maximální dovolenou rychlostí 70 km h^{-1} došlo k havárii. Pracovníci VB zjišťovali, zda řidič osobního vozu Škoda 110 L, který havárii zavinil, dovolenou rychlost nepřekročil. Změřili proto délku stopy zabrzděných kol na silnici a zjistili, že tato délka je 64 m. Součinitel smykového tření mezi pneumatikami a vozovkou byl odhadnut na 0,5. Jaký závěr byl učiněn?

Řešení: Dána je délka brzdné dráhy $s_b = 64 \text{ m}$ a součinitel smykového tření $\mu = 0,5$. Ze vztahu (1) pro brzdnu dráhu vyjádříme rychlost automobilu:

$$v = \sqrt{2as_b}$$

Vzhledem k tomu, že se automobil při brzdění pohyboval se zabrzděnými koly, mělo jeho zpomalení maximální hodnotu, kterou umožňuje dosáhnout součinitel smykového tření mezi pneumatikami a vozovkou, tedy $a = \mu g$. Po dosazení dosáváme pro rychlost výraz

$$v = \sqrt{2\mu g s_b}.$$

Dosadíme-li $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$, $\mu = 0,5$, $s_b = 64 \text{ m}$, vychází rychlost $v \doteq 25 \text{ m s}^{-1} = 90 \text{ km h}^{-1}$. Pracovníci VB došli k závěru, že řidič překročil dovolenou rychlost o 20 km h^{-1} .

Brzdná dráha však není jedinou veličinou, která rozhoduje o vzdálenosti, potřebné k zastavení vozidla. K ní je nutné připočítat ještě tzv. *dráhu nebrzděného vozidla*, kterou urazí vozidlo prakticky nezmenšenou rychlostí ještě před začátkem působení brzd.

Je známo, že od okamžiku, kdy řidič postřehne na silnici nebezpečnou situaci, do okamžiku sešlápnutí brzdového pedálu uplyne vždy určitá doba, kterou nazýváme *reakční doba řidiče*. Tato doba není u všech lidí stejná. Závisí na fyzických a duševních schopnostech řidiče, na jeho řidičské praxi a mění se i u téhož jednotlivce v závislosti na jeho okamžitém psychickém stavu a na celkové dopravní situaci na silnici. Experimentálně bylo zjištěno, že u průměrného řidiče nabývá reakční doba v závislosti na různých vlivech těchto hodnot:

Řidič je pozorný a připraven na překážku	0,7 s
Řidič je pozorný, ale neočekává nebezpečí	0,8 s
Pozornost řidiče je rozptýlena (např. řazením, pozorováním postranní cesty)	1,1 s
Řidič je nepozorný (např. baví se se spolujezdcem)	1,6 s
Řidič je k řízení indisponován (únavou, nemocí)	2,2 s

Dráhu nebrzděného vozidla dále prodlužuje časový interval, který uplyne od okamžiku sešlápnutí brzdového pedálu do okamžiku, kdy brzdy začnou skutečně účinkovat. Tento časový interval, nazývaný *doba zpoždění účinku brzd*, je dán druhem a technickým stavem brzdového systému. U mechanických a hydraulických brzd činí 0,1 s až 0,2 s, u vzduchových brzd 0,2 s až 0,6 s.

Vždy tedy existuje určitá doba τ , jež se rovná součtu reakční doby řidiče a doby zpoždění účinku brzd, po kterou jede automobil prakticky (alespoň na vodorovné silnici a při zanedbání odporu vzduchu a valivého tření) tou rychlostí, kterou se pohyboval v okamžiku, kdy řidič spatřil na vozovce překážku. Poněvadž jde za daných podmínek o pohyb rovnoměrný, lze vyjádřit dráhu nebrzděného vozidla s_τ vztahem

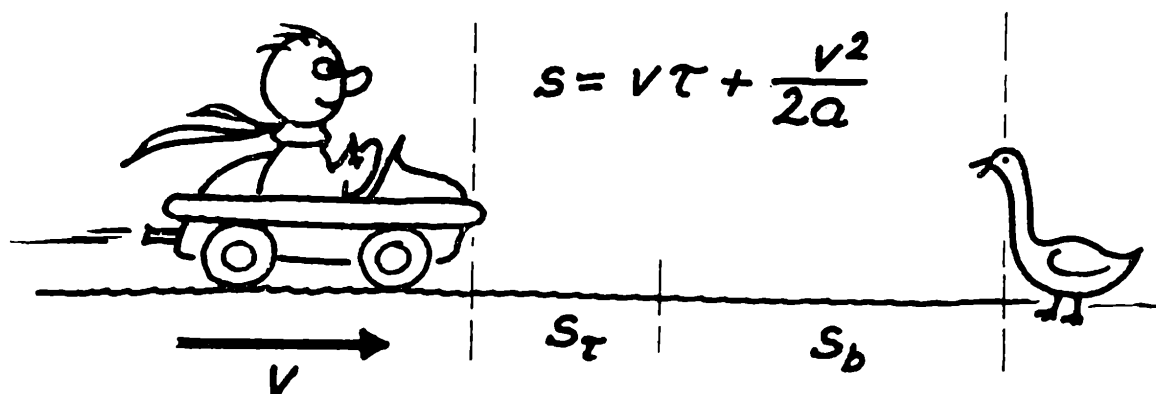
$$s_\tau = v\tau. \quad (2)$$

U pozorného řidiče a rychle účinkujících brzd můžeme počítat s dobou $\tau = 1$ s; v tom případě je dráha nebrzděného vozidla číselně rovna okamžité rychlosti vozidla vyjádřené v m s^{-1} . Např. pro rychlost $70 \text{ km h}^{-1} \doteq 19,5 \text{ m s}^{-1}$ je tedy dráha nebrzděného vozidla $s_\tau = 19,5 \text{ m}$. Vidíme, že ještě před začátkem účinku brzd ujede automobil dráhu téměř 20 m, a to v případě, že řidič je pozorný a brzdy účinkují rychle. Je-li řidič nepozorný nebo unavený, pak se doba τ a tím i dráha nebrzděného vozidla prodlužuje; při $\tau = 2$ s je při rychlosti 70 km h^{-1} dráha $s_\tau \doteq 40 \text{ m}$, tedy dvojnásobek dráhy ujeté řidičem pozorným.

Dráha nebrzděného vozidla roste ovšem také s rychlostí vozidla; kdybychom v předcházejícím příkladě uvažovali rychlost automobilu 108 km h^{-1} , dostali bychom u pozorného řidiče (doba $\tau = 1$ s) dráhu 30 m, u řidiče unaveného ($\tau = 2$ s) dráhu 60 m.

Poznáváme, že celková dráha s potřebná k zastavení vozidla se skládá ze dvou částí: z dráhy nebrzděného vozidla s_τ a z vlastní brzdné dráhy s_b . Vzhledem ke vztahům (1) a (2) pak pro tuto dráhu platí rovnice

$$s = v\tau + \frac{v^2}{2a}. \quad (3)$$



Celková dráha potřebná k zastavení vozidla je funkcí rychlosti v vozidla, zpomalení a , jehož může dosáhnout při brzdění, a doby τ , jejíž podstatnou část tvoří reakční doba řidiče. V tabulce III uvádíme hodnoty celkové dráhy potřebné k zastavení vozidla i obou jejích složek v závislosti na rychlosti, přičemž pro dobu τ byla dosazována hodnota $\tau = 1$ s a pro zpomalení $a = 5 \text{ m s}^{-2}$, tj. optimální hodnoty, odpovídající pozornému řidiči, správně fungujícímu brzdovému systému a dobrému stavu pneumatik a povrchu vozovky.

Tabulka III

Rychlost v [ms^{-1}]	10	20	30	40
Dráha nebrzděného vozidla s_τ [m]	10	20	30	40
Brzdná dráha s_b [m]	10	40	90	160
Celková dráha s [m]	20	60	120	200

Z tabulky III je patrné, že velikost celkové dráhy s je zvláště při vyšších rychlostech značná. Přitom si musíme uvědomit, že uvedené číselné hodnoty odpovídají pouze optimálním podmínkám a že jen stěží bychom dosáhli drah kratších. Naopak, je-li řidič unavený, brzdový systém jeho vozidla málo účinný nebo povrch vozovky či pneumatik

v takovém stavu, že snižuje součinitel smykového tření pod hodnotu 0,5, musíme počítat s drahami podstatně většími!

Příklad 2: Osobní automobil se pohybuje po vodorovné silnici rychlostí $v = 90 \text{ km h}^{-1}$. Součet reakční doby řidiče a doby zpoždění účinku brzd je $\tau = 1 \text{ s}$, brzdy i součinitel smykového tření mezi pneumatikami a povrchem vozovky umožňují zpomalení $a = 5 \text{ m s}^{-2}$. Vypočítejte: a) dráhu potřebnou k zastavení automobilu za daných podmínek; b) jak se tato dráha změní, je-li řidič nepozorný, takže je nutné počítat s dobou $\tau = 2 \text{ s}$ (zpomalení se nemění); c) jak se změní dráha potřebná k zastavení automobilu, je-li doba $\tau = 1 \text{ s}$, ale vzhledem k mokrému povrchu vozovky je maximální dosažitelné zpomalení $a' = 3 \text{ m s}^{-2}$.

Řešení: Dráha potřebná k zastavení se skládá z dráhy nebrzděného vozidla s_τ a z brzdné dráhy s_b . Dána je rychlost automobilu $v = 90 \text{ km h}^{-1} \doteq 25 \text{ m s}^{-1}$, která je ve všech třech případech stejná.

a) Dráhu nebrzděného vozidla určíme ze vztahu (2); pro $\tau = 1 \text{ s}$ je $s_\tau = 25 \text{ m}$. Brzdná dráha pro $a = 5 \text{ m s}^{-2}$ ze vztahu (1) je $s_b = 62,5 \text{ m}$. Celková dráha potřebná k zastavení vozidla je $s = s_\tau + s_b = 25 \text{ m} + 62,5 \text{ m} = 87,5 \text{ m}$.

b) Je-li doba $\tau' = 2 \text{ s}$, zvýší se dráha nebrzděného vozidla na hodnotu $s_\tau = 50 \text{ m}$; brzdná dráha se nezmění. Celková dráha potřebná k zastavení je nyní $s = 50 \text{ m} + 62,5 \text{ m} = 112,5 \text{ m}$; tato dráha je o 25 m delší než v případě, kdy byl řidič pozorný.

c) Na vozovce se sníženým součinitelem smykového tření je při době $\tau = 1 \text{ s}$ dráha nebrzděného vozidla stejná jako v případě a), avšak brzdná dráha vzroste na hodnotu $s_b \doteq 104,2 \text{ m}$, tedy na hodnotu větší než byla celková dráha potřebná k zastavení na suché vozovce v případě a). Celková dráha potřebná k zastavení je pak $s = 25 \text{ m} + 104,2 \text{ m} = 129,2 \text{ m}$.

Příklad 3: Celková dráha potřebná k zastavení motorového vozidla při rychlosti 108 km h^{-1} , zpomalení 5 m s^{-2} a době $\tau = 1,5 \text{ s}$ činí 135 m. Vyšetřete všechny možnosti, při nichž by se snížila změnou jedné z daných veličin dráha potřebná k zastavení vozidla na 100 m.

Řešení: Máme-li snížit dráhu potřebnou k zastavení vozidla ze 135 m na 100 m, můžeme to teoreticky učinit:

- účinnějším brzděním, tj. vyšší hodnotou zpomalení a ,
- snížením počáteční rychlosti v ,
- snížením doby τ , tj. především snížením reakční doby řidiče.

Tyto tři možnosti postupně vyšetříme.

- Ze vztahu (3) určíme zpomalení

$$a = \frac{v^2}{2(s - v\tau)}$$

Dosadíme-li $s = 100 \text{ m}$, $v = 30 \text{ m s}^{-1}$, $\tau = 1,5 \text{ s}$, máme $a \doteq 8,2 \text{ m s}^{-2}$. Takové zpomalení je však prakticky nereálné. Jednak mu neodpovídá

účinnost brzdového zařízení (za velmi dobré brzdy se považují již ty, které umožní zpomalení 7 m s^{-2}), jednak hodnoty smykového tření mezi pneumatikami a vozovkou.

b) Při výpočtu rychlosti v obdržíme úpravou vztahu (3) kvadratickou rovnici

$$v^2 + 2 a \tau v - 2 a s = 0,$$

jejímž řešením je

$$v_{1,2} = -a\tau \pm \sqrt{a^2\tau^2 + 2as}.$$

Po dosazení $s = 100 \text{ m}$, $a = 5 \text{ m s}^{-2}$, $\tau = 1,5 \text{ s}$ vychází $v_1 = 25 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = -40 \text{ m s}^{-1}$. Fyzikální význam má jen kořen $v_1 = 25 \text{ m s}^{-1} = 90 \text{ km h}^{-1}$. Je to rychlost, při níž činí dráha potřebná k zastavení požadovaných 100 m .

c) doba τ , vyjádřená ze vztahu (3), je

$$\tau = \frac{2as - v^2}{2as}$$

Dosadíme-li $a = 5 \text{ m s}^{-2}$, $s = 100 \text{ m}$, $v = 30 \text{ m s}^{-1}$, dostáváme pro dobu $\tau = 0,1 \text{ s}$. Tato doba je však nereálná, neboť jen zpoždění účinku brzd činí nejméně $0,1 \text{ s}$ a vzhledem k tomu, že reakční doba řidiče nemůže být ani u zkušeného a pozorného řidiče rovna nule (viz tabulku průměrných reakčních dob řidiče), nelze celkovou dobu τ snížit na hodnotu $0,1 \text{ s}$.

Za daných podmínek bylo možné snížit dráhu potřebnou k zastavení vozidla jen snížením rychlosti. Obecně lze říci, že *o bezpečnosti jízdy rozhoduje především přiměřená rychlost*.

Proto, až si jednou pořídíte vlastní automobil nebo motocykl, nepamenejte, že ho nelze nikdy zastavit „na místě“, neboť fyzikální zákony jsou zákony, které nelze obejít.

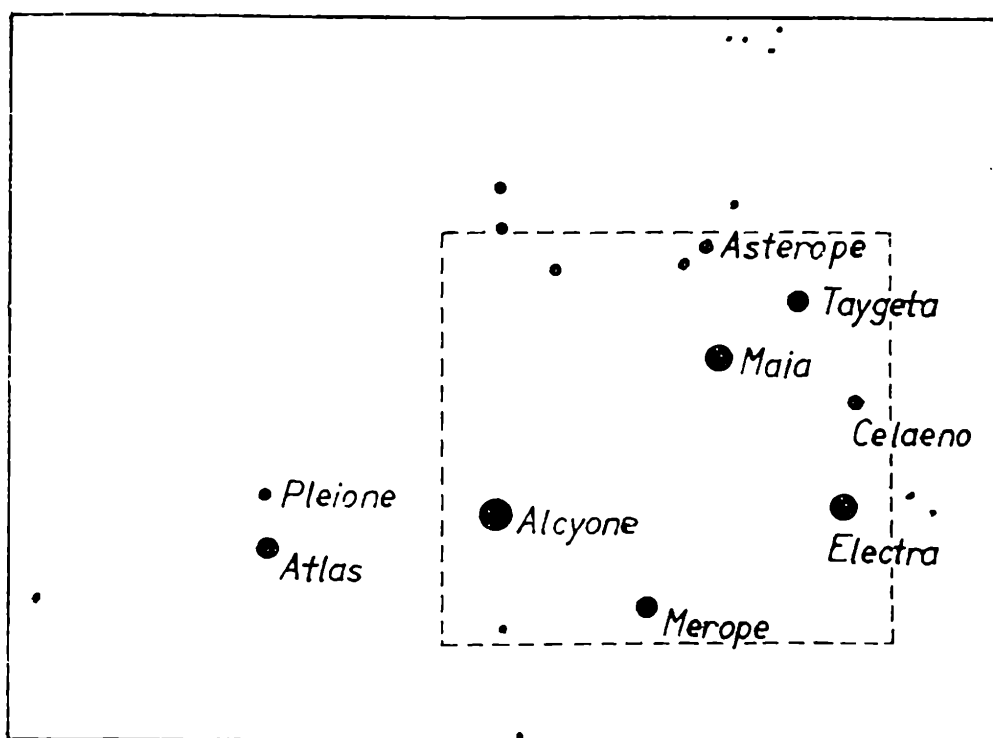
astronomie

Plejády v Býku

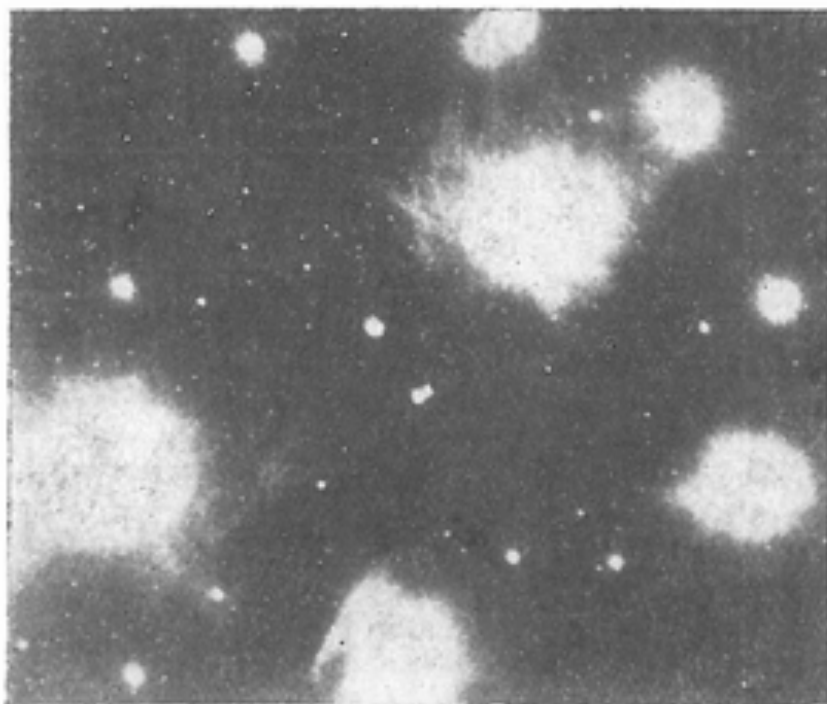
RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ - RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

V článku Otevřené hvězdokupy (RMF 50, 1971/72, č. 9, s. 420—422) jsme uvedli, že Plejády jsou nejznámější otevřenou hvězdokupou. V tabulce jsme shrnuli nejdůležitější údaje o této hvězdokupě: vzdálenost 126 parseků, průměr 4 pc, počet hvězd 120 a stáří Plejád 50 miliónů roků. Nyní se zmíníme o některých nových výzkumech.

V zimních měsících snadno vyhledáme na obloze souhvězdí Býka; nejjasnější hvězda tohoto souhvězdí, Aldebaran (α Tauri), je červený obr zdánlivé hvězdné velikosti 1,1^m. Severozápadním směrem od Aldebarana upoutá naši pozornost skupina hvězd, rozložených na poměrně malé ploše oblohy. Tyto hvězdy patří k otevřené hvězdokupě Plejády a česky bývají nazývány Kuřátka. Nejjasnější hvězda Plejád, Alcyone (η Tauri), má zdánlivou hvězdnou velikost asi 3^m. Pouhým okem rozlišíme v Plejádách celkem šest hvězd jasnějších než 5^m a za zvláště dobrých pozorovacích podmínek může pozorovatel s dobrým zrakem rozlišit celkem devět hvězd jasnějších než 6^m. Hvězd, tvořících tuto hvězdokupu, je ovšem ve skutečnosti mnohem více. Počet dosud objevených hvězd



Obr. 1. Mapka Plejád.



Obr. 2. Fotografie části Plejád.

v Plejádách je asi 120, celkový počet odhadují někteří astronomové (např. Trumpler) na 500.

Devět nejjasnějších hvězd, které lze za dobrých pozorovacích podmínek spatřit pouhým okem, dostalo v minulosti vlastní jména; jejich rozložení na obloze je patrné z mapky na obr. 1. Všechny tyto hvězdy jsou spektrální třídy B, jsou to tedy velmi žhavé a poměrně mladé hvězdy. Všechny jsou na hlavní větvi Hertzsprungova-Russellova diagramu. Z fotografií Plejád je zřejmé, že hvězdokupa je prostoupena mezihvězdnou látkou, která se na snímcích jeví ve formě prachové mlhoviny, ozářené světlem jasných a žhavých hvězd. Na obr. 2 je snímek části Plejád, zhotovený na Lickově observatoři s expoziční dobou jedné hodiny (na mapce na obr. 1 je tato část vyznačena čárkovaně). Na snímku zřetelně vidíme mlhoviny, obklopující nejjasnější hvězdy Plejád. Velmi zajímavá je hvězda Pleione (na obr. 2 není zaznamenána). Je to nepravidelná proměnná hvězda, jejíž zdánlivá hvězdná velikost se mění od $5,0^m$ do $5,5^m$. Ve spektru této hvězdy se vytvářejí emisní čáry, ale jen v určitých obdobích (byly pozorovány v letech 1888 až 1903 a v letech 1939 až 1951). Předpokládá se, že tyto čáry vznikají v plynném obalu, který se kolem hvězdy střídavě vytváří a opět rozplývá. V tab. I. uvádíme názvy a označení devíti nejjasnějších hvězd v Plejádách, jejich zdánlivé a absolutní hvězdné velikosti i spektrální třídy.

Nejnovější výzkumy, vykonané na Bjurakanské observatoři (Arménská SSSR), ukázaly, že v této mladé hvězdokupě existuje kromě žhavých

Tabulka I.
Devět nejjasnějších hvězd v Plejádách

Jméno hvězdy	Zdánlivá hvězdná velikost	Absolutní hvězdná velikost	Spektrální třída
Alcyone η Tauri	2,96 ^m	-2,5 ^M	B7
Asterope 21 Tauri	5,85	0,1	B9
Atlas 27 Tauri	3,80	-1,0	B9
Celaeno 16 Tauri	5,43	-0,3	B7
Electra 17 Tauri	3,81	-0,2	B5
Maia 20 Tauri	4,02	-0,4	B9
Merope 23 Tauri	4,25	-0,5	B5
Pleione 28 Tauri	5,0 až 5,5	—	B8p
Taygeta 19 Tauri	4,37	-0,4	B7

hvězd také více než sto červených trpasličích hvězd, které můžeme zařadit mezi eruptivní hvězdy. Nejjasnější z nich mají zdánlivou hvězdnou velikost 13,3^m. Trpasličí červené hvězdy jsou pozorovány téměř na vnějším okraji hvězdokupy ve vzdálenosti asi 1° od jejího středu (úhlový průměr Plejád je kolem 2°). Výzkumem Plejád se zabývali také astronomové na Yerkesově hvězdárně v USA. Proměřením fotografických desek, získaných v intervalu (30 až 66) roků, získali údaje o pohybech hvězd ve hvězdokupě; na základě pohybu hvězd a jejich prostorového rozložení pak bylo možné odhadnout celkovou hmotnost hvězdokupy. Podle astronoma Jonese je hmotnost Plejád 690 hmotností Slunce. Na závěr připomeňme, že Plejády jsou v Messierově katalogu (M) označeny pořadovým číslem 45 a jejich celková hvězdná velikost je 1,4^m.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh loňského ročníku

Konstruktivní geometrie

1. Je dána rovina τ , dvě nesoustředné kulové plochy $\kappa_1 \equiv (O_1; r_1)$, $\kappa_2 \equiv (O_2; r_2)$ a úsečka délky r , kde $r > r_1, r > r_2$. Sestrojte kulovou plochu poloměru r , která se dotýká roviny τ a přitom pólí povrchy ploch κ_1, κ_2 .

Stanislav Horák

(Došlo 12 řešení)

Řešil Martin Zedníček IV, A G Brno

1. a) Sestrojíme libovolnou kulovou plochu $\varrho_1 \equiv (S_1; r)$, která pólí povrch kulové plochy κ_1 . Geometrickým místem středů takových kulových ploch je kulová plocha $\kappa'_1 \equiv (O_1; O_1S_1)$, kde $O_1S_1 = \sqrt{r^2 - r_1^2}$.

b) Obdobně sestrojíme kulovou plochu $\varrho_2 \equiv (S_2; r)$, která pólí povrch kulové plochy κ_2 . Geometrickým místem středů takových kulových ploch je kulová plocha $\kappa'_2 \equiv (O_2; O_2S_2)$, kde $O_2S_2 = \sqrt{r^2 - r_2^2}$.

c) Geometrickým místem středů kulových ploch o poloměru r , které se dotýkají roviny τ , jsou roviny τ', τ'' vedené rovnoběžně s rovinou τ ve vzdálenosti r .

d) Kulové plochy κ'_1, κ'_2 se protínají v kružnici k , která je geometrickým místem středů kulových ploch, které mají poloměr r a pólí přitom povrch obou daných kulových ploch.

e) Společné body kružnice k s rovinou τ' (nebo τ'') jsou středy hledaných kulových ploch.

2. Je patrné, že kružnice k může mít vzhledem k rovině τ (nebo τ'') několik různých poloh.

a) Jestliže rovina τ' (nebo τ'') splývá s rovinou kružnice k , úloha má nesčíslně mnoho řešení. Každý bod kružnice k je středem jedné kulové plochy, která splňuje požadavky úlohy.

b) Jestliže rovina τ' (nebo τ''), není však možné, aby obě) má s kružnicí k společné dva různé body, pak úloha má dvě různá řešení.

c) Jestliže rovina τ' (nebo τ'') se dotýká kružnice k , úloha má právě jedno řešení.

d) V každém jiném případě řešení neexistuje.

2. Sestrojte pravidelný čtyřstěn, je-li dána rovina ϱ jeho čtvercového řezu a bod $M \notin \varrho$, který je středem jedné hrany čtyřstěnu. Jedna hrana

čtyřstěnu je rovnoběžná s danou rovinou σ (σ není rovnoběžná s rovinou ϱ).

(Došlo 11 řešení)

František Hradecký

Řešení: (Upraveno podle řešení Jana Frynty, 4. tř. G, Wilh. Piecka v Praze 2 a Karla Horáka, 4. tř. G, Strakonice).

V pravidelném čtyřstěnu jsou každé dvě protější hrany k sobě kolmé a středy zbývajících hran leží v rovině protínající čtyřstěn ve čtverci, neboť strany tohoto čtverce jsou středními příčkami čtyř shodných rovnostranných trojúhelníků a po dvou jsou rovnoběžné s kolmými protilehlými hranami čtyřstěnu.

Pata O kolmice z bodu M na rovinu ϱ je středem čtyřstěnu a zároveň středem čtvercového řezu $PQRS$, N je souměrně položený bod k bodu M podle roviny ϱ . Je-li MO vzdálenost bodu M od roviny ϱ , je délka hrany

čtyřstěnu $a = MO \cdot \sqrt{2}$, délka strany čtvercového řezu je $\frac{a}{2}$ a poloměr

kružnice k , která je čtverci $PQRS$ opsána, je $\frac{a}{\sqrt{2}} = MO$. Úsečky spojující

bod M resp. bod N s vrcholy čtvercového řezu jsou tudíž hranami pravidelného osmistěnu, směry jeho hran jsou zároveň směry hran hledaného čtyřstěnu.

Ke každému sestrojenému čtverci $PQRS$ můžeme pak snadno sestrojit dva pravidelné čtyřstěny, které tento čtverec obsahují. Stačí středem O čtverce vést k jeho rovině kolmici a na ni nanést $OM = ON = OP$, čímž dostaneme středy hran čtyřstěnu, které jsou rovnoběžné s úhlopříčkami PR , QS čtverce. Jejich délky se rovnají dvojnásobkům délek těchto úhlopříček.

Z uvedených vlastností plynou následující konstrukce čtyřstěnů:

a) Určíme průsečnici q rovin ϱ a σ . Do kružnice k ležící v rovině ϱ , mající střed v bodě O a poloměr $r = MO$ vepíšeme čtverec $PQRS$, jehož strany jsou rovnoběžné resp. kolmé k přímce q . K tomuto čtverci sestrojíme dříve uvedeným způsobem dva čtyřstěny splňující danou úlohu. Existují tudíž vždy *aspoň dvě řešení* dané úlohy.

b) Bodem M vedeme rovinu $\sigma' \parallel \sigma$, která protne rovinu ϱ v přímce m . Každý z průsečíků přímky m s kružnicí k může být vrcholem čtvercového řezu $PQRS$, který náleží vždy dvěma pravidelným čtyřstěnům. Poněvadž přímka m může kružnici protínat ve 2, 1, 0 bodech (je-li odchylka α roviny σ a ϱ : $\alpha \geq 45^\circ$), dostaneme 4, 2, 0 řešení dané úlohy.

Z provedené konstrukce a uvedených vlastností plyne, že sestrojené čtyřstěny splňují všechny podmínky úlohy.

Z a) a b) pak plyne, že úloha má vždy aspoň 2 řešení; může však mít také 4 nebo 6 řešení.

3. Sestrojte kulovou plochu, jsou-li dány tři její tečny a, b, c ležící v rovině σ a neprocházející jediným bodem, a další tečna d , neležící v rovině σ .

Stanislav Horák

(Došlo 12 řešení)

Upravené řešení Karla Horáka, 4. b G Strakonice

1. Rovina σ , v níž leží tečny a, b, c , protíná hledanou kulovou plochu v kružnici $k \equiv (O; r)$. Tato kružnice se dotýká přímk a, b, c . Střed S hledané plochy leží pak na kolmici s sestrojené v bodě O k rovině σ .

Nechť přímka d protne rovinu σ v bodě R . Z bodu R sestrojíme ke kružnici k tečnu a její délku označme t . Poněvadž délky všech tečen, vedených z bodu R k hledané kulové ploše, jsou shodné, můžeme na přímce d určit bod D tak, aby $RD = t$. Bod D je již bodem dotyku tečny d s hledanou kulovou plochou.

Střed S leží potom v rovině δ , která prochází bodem D kolmo k přímce d . Průsečík přímky s s rovinou δ je hledaný střed S kulové plochy. Poloměr kulové plochy je potom úsečka SD .

2. Konstrukce je potom tato:

- a) Sestrojíme kružnici $k \equiv (O; r)$, dotýkající se přímk a, b, c .
- b) V bodě O vztyčíme k rovině σ kolmici s .
- c) Zjistíme průsečík R přímky d s rovinou σ .
- d) Z bodu R sestrojíme ke kružnici k tečnu a její délku nanese od bodu R na tečnu d . Tím obdržíme bod D .
- e) V bodě D sestrojíme rovinu δ kolmo k tečně d .
- f) Určíme průsečík S přímky s s rovinou δ .
- g) Kolem S opíšeme kulovou plochu poloměrem SD .

3. A. Žádné dvě z přímk a, b, c nejsou rovnoběžné a přímka d je s rovinou σ různoběžná.

a) Bod R je vnějším bodem všech čtyř kružnic, které se dotýkají přímk a, b, c . Úloha má 8 různých řešení.

b) Bod R leží na jedné ze čtyř kružnic, které se dotýkají přímk a, b, c . Úloha má 7 různých řešení.

c) Bod R leží uvnitř jedné ze čtyř kružnic, které se dotýkají přímk a, b, c . Úloha má 6 různých řešení.

B. Žádné dvě z přímk a, b, c nejsou rovnoběžné, přímka d je rovnoběžná s rovinou σ . V tomto případě bod D je průsečík přímky d s rovinou δ vedenou bodem O kolmo k přímce d . Úloha má 4 různá řešení.

C. Právě dvě z přímk a, b, c jsou vzájemně rovnoběžné, přímka d je různoběžná s rovinou σ .

a) Bod R je vnějším bodem obou kružnic, které se dotýkají přímk a, b, c . Existují 4 různá řešení.

b) Bod R leží na jedné z kružnic, které se dotýkají přímk a, b, c . Existují 3 různá řešení.

D. Právě dvě z přímek a, b, c jsou vzájemně rovnoběžné, přímka d je rovnoběžná s rovinou σ . Existují 2 různá řešení.

E. Tečny a, b, c jsou navzájem rovnoběžné. Pak není možné sestavit kružnici k a neexistuje tudíž žádné řešení.

F. Kdyby právě dvě z tečen a, b, c splynuly, existovalo by nesčíslně mnoho řešení.

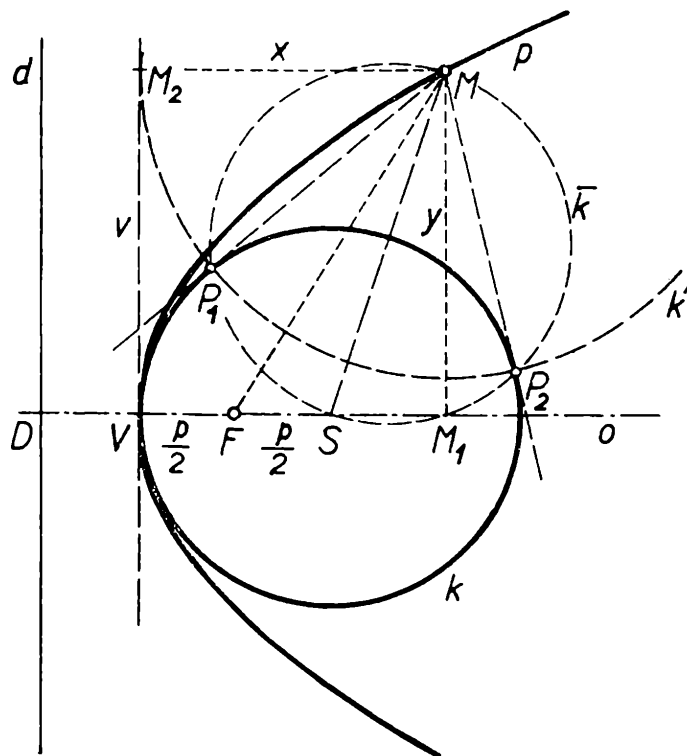
4. Sestrojte parabolu, znáte-li oskulační kružnici k v jejím vrcholu a bod M na parabole.

(Došlo 12 řešení).

Ota Setzer

Upravené řešení Petra Pauknera, IVF, Gymn. W. Piecka, Praha 2:

Oskulační kružnice k ve vrcholu V paraboly má střed S na ose a poloměr $VS = p$. Z rovnice paraboly $y^2 = 2px$ plyne pro její bod $M(x; y)$ podle Pythagorovy věty z $\triangle SM_1M$:



$$MS^2 = SM_1^2 + MM_1^2 = (x - p)^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2 + 2px = x^2 + p^2.$$

Thaletova kružnice $\bar{k}$ nad průměrem MS protne danou kružnici k v bodech P_1, P_2 , jež jsou podle konstrukce dotykovými body tečen vedených z bodu M ke kružnici k . Délky těchto tečen $MP_1 = MP_2$ vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku SP_1M : $MP_1^2 = MS^2 - SP_1^2 = x^2 + p^2 - p^2 = x^2$, čili $MP_1 = x = MM_2$.

Je proto délka tečny MP_1 z bodu M ke kružnici k rovna vzdálenosti x bodu M od vrcholové tečny v . Odtud konstrukce:

- 1) Sestrojíme Thaletovu kružnici $\bar{k}$ nad průměrem SM ;
 - 2) $k \cap \bar{k} \equiv P_1, P_2$;
 - 3) sestrojíme kružnici $k' (M; r = MP_1)$;
 - 4) společné tečny kružnic k a k' jsou vrcholové tečny v hledaných parabol.
- Diskuse:* Počet řešení závisí na poloze M ke kružnici k .
- 1) Je-li bod M vně kružnice k ($MS > p$) — dvě řešení,
 - 2) je-li bod M na kružnici k ($MS = p$) — jedno řešení,
 - 3) je-li bod M uvnitř kružnice k ($MS < p$) — žádné řešení.
- Autorova poznámka:* Někteří řešitelé postupovali takto (neeuclidovsky): Sestrojili libovolnou parabolu $\bar{p}$, která oskulovala danou kružnici k ($S; p$) v jejím libovolném bodě V . Pak opsali kružnici $\bar{k} (S; r = SM)$ a našli průsečíky P_1, P_2 křivek $\bar{p}, \bar{k}$. Nakonec otočili parabolu $\bar{p}$ kolem středu S o úhel P_1SM , resp. P_2SM do hledané polohy p_1 , resp. p_2 .

olympiády

Třetí kolo kat. A XIV. roč. FO

Prof. dr. ROSTISLAV KOŠŤÁL, Brno

Třetí kolo kat. A XIV. roč. FO se konalo ve dnech 25. až 27. dubna 1973 v Liberci. Účastníci byli vybráni z nejlepších řešitelů 2. kola kat. A v jednotlivých krajích, a to takřka všichni (kromě dvou) až po klasifikaci v 2. kole typu 1133 a z klasifikace typu 1233 dva, jichž bylo zapotřebí, aby kraj byl zastoupen aspoň dvěma účastníky (JČK a VSK). Celkem bylo pozváno 80 účastníků a všichni se dostavili.

Následující tabulka 1 udává pro každý kraj počet účastníků, počet úspěšných řešitelů, z toho počet vítězů a počet neúspěšných řešitelů.

Třetí kolo bylo slavnostně zahájeno v posluchárně Vysoké školy strojní a textilní za přítomnosti jejího rektora, zástupce OŠ KNV, tajemníka KV SSM a politického pracovníka ÚV SSM Jiřího Řepíše.

Teoretické úlohy řešili účastníci 26. dubna a laboratorní úlohu 27. dubna. Po absolvování teoretických úloh byla uspořádána exkurse k vysílačce na Ještědu a na Frýdlantsko.

Z 80 účastníků bylo 38 úspěšných a z toho 8 vítězů, tj. těch, kteří měli nanejvýš jednu úlohu hodnocenu známkou nevyhovující. Přehled výsledků podle jednotlivých krajů udává tabulka 1. Jména vítězů udává tabulka 2.

Prvých 19 řešitelů dostalo odměnu ve výši 1100,— Kčs až 400,— Kčs. Při zahájení dostal každý účastník darem od SSM maketu vysílačky

Tabulka 1

Kraj	počet všech účastníků	počet úspěšných řešitelů	z toho počet vítězů	počet neúspěšných řešitelů
Praha	14	8	2	6
Středočeský	2	2	—	—
Jihočeský	2	1	—	1
Západočeský	8	1	—	7
Severočeský	2	2	—	—
Východočeský	13	7	—	6
Jihomoravský	13	7	3	6
Severomoravský	8	4	3	4
Bratislava	5	1	—	4
Západoslovenský		3	—	4
Středoslovenský	4	1	—	3
Východoslovenský	2	1	—	1
Celkem	80	38	8	42

Tabulka 2

Pořadí	Jméno	Škola
1	Píštěk Petr	G Brno, Křenová
2—3	Janiš Václav	G Rožnov p. Radh.
	Švoma Josef	G Velké Meziříčí
4—6	Bauer Luboš	G Brno, Koněvova
	Burian Tomáš	G Praha 7, Nad školou
	Podloucký Jan	G Přerov
1	Krupa Vladimír	SPŠE Frenštát p. Radh.
	Fuksa Jiří	G Praha 7, Nad školou

na Ještědu, knihu — Pernegrův a Plajnerův překlad populární encyklopedie Atomový věk (v ceně 45,— Kčs) a pamětní medaili FO, vyrobenou k této příležitosti. Vysoká škola strojní a textilní věnovala vložku do knihy a KV FO propagační materiál o Liberecku.

Péči o hospodářskou stránku převzala Vysoká škola strojní a textilní. Účastníci byli ubytováni na Hluboké u Liberce.

Actio in distans

JOSEF KOTYK, Pardubice

(Napsáno k 330. výročí Newtonova narození)

Newtonovým gravitačním zákonem byla do fyziky zavedena akce zv. actio in distans (působení do dálky), představa, že hmota může působit silou přímo do dálky, takže není třeba, aby účinek síly byl přenášen nějakým prostředím. Uvědomíme-li si, že síla byla do té doby známa pouze jako tah nebo tlak vznikající při styku těles, pochopíme, s jakým odporem se setkala představa akce in distans již u mnohých Newtonových současníků. Otevřeně proti ní vystoupili zejména Christian Huygens (1629—1695) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716). Také stoupenci filosofie Descartesovy ji vylučovali. Newton sám pokládal myšlenku akce in distans, přímého, bezprostředního působení do dálky, rovněž za absurdní a snažil se původ gravitace vysvětlit jinak; výkladu založeného na pozorovatelných faktech však nenalezl a hypothes — tak výslovně prohlásil¹⁾ — nečiní.

Málokterý z fyzikálních zákonů se přesto osvědčil tak jako gravitační zákon Newtonův. Jeho správnost byla znovu a znovu zkoušena a ověřena na výsledcích nejrozličnějších astronomických pozorování. Newtonovo slavné dílo „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (1687) sloužilo jako tak dokonalá učebnice mechaniky, jaké do té doby nebylo. Jeho vliv na současníky byl nesmírný. Jestliže od starověku bylo postavení planet vykládáno jako bezprostřední projev vůle bohů, byla činnost Newtonovou zejména astrologie rázem znevážena. Nic neposílilo úctu před mladou fyzikou tak jako Newtonův výpočet planetárních drah. „Od té doby“, napsal historik²⁾, „stala se z ní velmoc, kterou žádná jiná moc nemůže beztrestně ignorovat“. Na Newtonově gravitačním zákoně je založena celá budova nebeské mechaniky. Teoretická astrono-

¹⁾ „Hypotheses non fingo!“ (Nezavádím hypotézy), zní známý Newtonův výrok. Avšak Newtonova „axiomata sive leges motus“, známé tři pohybové zákony Newtonovy dynamiky, jsou také hypotézy a výborně se osvědčily jako základy, na nichž Newton postavil velkolepou budovu klasické mechaniky.

„Formou rozvoje přírodních věd je hypotéza,“ prohlásil Engels. (Viz B. Engels: „Dialektika přírody“, nakl. Svoboda, Praha 1950.)

²⁾ Max von Laue: „Dějiny fyziky“ (Malá moderní encyklopedie, sv. 11, nakl. Orbis, Praha 1963). Cit. str. 32.

mie se stala dokonce vzorem exaktnosti. Její vývoj dospěl na základě zákonů Newtonových a nebeské mechaniky Laplaceovy k možnosti vědeckého předpovídání; čtenářům je zajisté znám pamětihodný objev Neptuna, předpověděný anglickým studentem Johnem C. Adamsem roku 1845 a Francouzem Urbainem J. J. Leverrierem roku 1846 — triumf, jemuž není rovno v dějinách astronomie.³⁾

Akce in distans byla proto uznána za základní vlastnost hmoty. Také soudržnost, pružnost a jiné tzv. molekulové vlastnosti látek se fyzikové pokoušeli vyložit působením sil, jež podobně účinkují mezi nejmenšími částicemi hmoty. Síly obdobné Newtonově gravitační byly pak hledány všude. Pod silným vlivem Newtonova objevu zákona všeobecné gravitace šířila se myšlenka akce in distans z mechaniky na další odvětví fyziky. Okolnost, že z ní je možno odvodit jednoduchou a elegantní teorii potenciálu, spolupůsobila při tomto vývoji zvláště příznivě. Když byla do fyziky zavedena představa o podstatě magnetismu a elektřiny jako nehmotných fluid, byla akce in distans přenesena i na ně. První teorie jevů elektrických a magnetických byly tedy rovněž teoriemi působení do dálky, akce in distans. Měření, jež roku 1785 vykonal Coulomb, skutečně potvrdila, že pro sílu, kterou na sebe působí dva magnetické póly nebo dva elektrické náboje, platí stejné zákony jako pro gravitaci. I teorii o magnetismu a elektřině prokazovala akce in distans, představa přímého působení do dálky, od počátku platné služby. Akce in distans se tak stala základem skoro celé fyziky.

Brzy se však ukázalo, že v nauce o magnetismu a elektřině nejsou poměry tak jednoduché jako v nauce o gravitaci. Bylo zejména zjištěno, že dva stejné elektrické náboje účinkují na sebe ve vzduchu větší silou než např. v oleji. Na elektrickou (a obdobně i magnetickou) sílu má tedy vliv prostředí, v němž působí. Do jednoduchého schématu Coulombova zákona nedaly se mimoto vměstnat síly, jež bylo třeba zavádět v elektrodynamice, když se měly akcí in distans vyložit přitažlivé a odpudivé síly mezi vodiči, jimiž prochází elektrický proud. Pokusy doplnit Coulombův zákon tak, aby platil nejen pro náboje v relativním klidu, nýbrž i pro náboje v pohybu, vedly k vleklým sporům, jež pozbyly významu teprve v letech 1886 a 1887, kdy Hertz experimentálně potvrdil vědecké předpovědi Maxwellovy⁴⁾, že magnetické a elektrické rozruchy se šíří prostorem konečnou rychlostí. To se již nedalo s akcí in distans sloučit; podle ní měl by se účinek každé změny náboje nebo jeho polohy a každá změna elektrické a magnetické síly tím způsobená projevit okamžitě ve vzdálenosti sebe větší, tj. šířit se rychlostí ne-

³⁾ Viz přednášky univ. prof. dr. Václava Lásky „Úvod do kosmické fyziky a matematické geografie“ (nakl. Spolku čsl. filosofů a přírodovědců, Praha 1926), str. 26.

⁴⁾ O nich pojednává podrobněji autorův článek „Vědecké předpovědi“ v Rozhledech roč. 48, čís. 4, str. 188 až 191.

konečně velikou. Všechny teorie elektrických a magnetických dějů, založené na akci in distans, byly proto posléze opuštěny.

Otázka gravitace upoutávala ovšem lidského ducha dále. O žádném předmětu fyziky (kromě atomistiky) se nepřemýšlelo tolik jako o ní. Nová Faraday-Maxwellova teorie elektřiny a magnetismu vzbudila záhy pokusy odstranit akci in distans i z teorie gravitace. Ukázalo se však, že v ní je to mnohem obtížnější. Chyběl zejména experimentální základ, z něhož by se mohlo vycházet. Neznáme experimentální fakt, který bychom mohli pokládat za důkaz, že gravitační účinky se šíří prostorem konečnou rychlostí. Nepodařilo se také dokázat vliv prostředí na gravitační sílu, zjištěný u síly magnetické a elektrické; gravitační síla, kterou se dvě hmoty přitahují, je vždy stejná, nechť mezi nimi je jakékoli prostředí. Pokusy, vyhledávat analogie mezi magnetickou a elektrickou silou na straně jedné a gravitací na straně druhé, byly stále marné.

Chceme-li z gravitační teorie akci in distans skutečně vyloučit, nezbyvá nakonec jiná cesta než ta, kterou se dříve ubírali Faraday a Maxwell v teorii elektřiny a magnetismu: Ti odstranili z výkladu elektrických a magnetických dějů nejen síly působící do dálky, ale i náboje, jež měly být podle starších názorů jejich příčinou; místo o nábojích mluví o elektrickém nebo magnetickém poli, o prostoru, v němž lze účinky elektrické nebo magnetické síly pozorovat. Od hmot, vzbuzujících sílu gravitační, bylo proto obdobně třeba přejít ke gravitačnímu poli, k celému prostoru, v němž jejich gravitační účinky pozorujeme. Tuto cestu nastoupil geniální Albert Einstein (1879—1955), tvůrce principu relativnosti a moderní gravitační teorie⁵⁾.

Není úkolem tohoto článku zabývat se podrobněji rozdíly Newtonovy a Einsteinovy gravitační teorie. Řeknu jen, že v teorii Newtonově je gravitační pole určeno, známe-li v každém jeho místě gravitační potenciál, skalár, stanovený jediným údajem, pouhou velikostí. Gravitační potenciál Einsteinovy teorie je však stanoven deseti složkami, pro něž Einstein odvodil neobyčejně složité rovnice na základě rozdělení hmot v prostoru. Přes rozdílnost stanovisek, z nichž Newton a Einstein vycházejí, není však v slabých gravitačních polích mezi oběma teoriemi hlubších rozdílů. Je ovšem velikým pokrokem, že Einsteinova teorie postupuje dále; Newtonovy zákony platí podle ní jen přibližně. Einstein ukázal také — zejména to nás nyní zajímá — že z rovnic jeho gravitační teorie plyne tento závěr: Gravitační rozruchy se šíří v slabých polích rychlostí konečnou, rychlostí světla. Ta je ve vakuu zároveň univerzální konstantou⁶⁾.

⁵⁾ Viz autorův článek „Albert Einstein, vědec a prorok“ v Rozhledech roč. 48, čís. 7, str. 326 až 329.

⁶⁾ Viz autorův článek „Einstein a jeho princip stálé světelné rychlosti“ v Rozhledech roč. 48, čís. 3, str. 143 až 146.

A actio in distans?

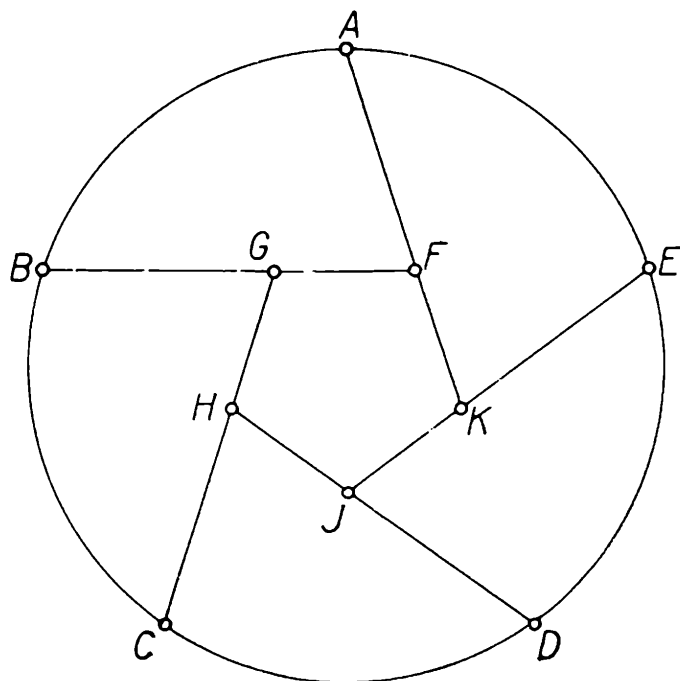
Činností Einsteinovou byla akce in distans konečně i z teorie gravitace definitivně odstraněna. Se světelným éterem a mnoha nejrozmanitějšími fluidy, „enfants terribles“⁷⁾ dřívější fyziky, zmizela v propadlišti dějin.

Nejmladším čtenářům

Deset po sobě jdoucích přirozených čísel $n, n + 1, n + 2, \dots, n + 9$ umístěte do bodů $A, B, C, \dots, K$ tak, aby součty všech trojic na vyznačených úsečkách si byly navzájem rovny a rovnaly se zároveň součtu pětice na kružnici. Kolik řešení má tato úloha? (Přitom řešení vznikající cyklickou záměnou nepočítáme za nová řešení!)

F. Kejla

Poznámka redakce: Řešení mladých čtenářů přijímá redakce do konce listopadu 1973. Bude-li o úlohu zájem, otiskneme v některém z dalších čísel podobnou úlohu poněkud složitější.



⁷⁾ Francouzského výrazu enfant terrible (čti anfan teribl), hrozné dítě, dítě „pro strach“ apod. užíváme také o lidech, chceme-li stručně vyjádřit výjimečnost jejich chování vzhledem k ustáleným zvyklostem.

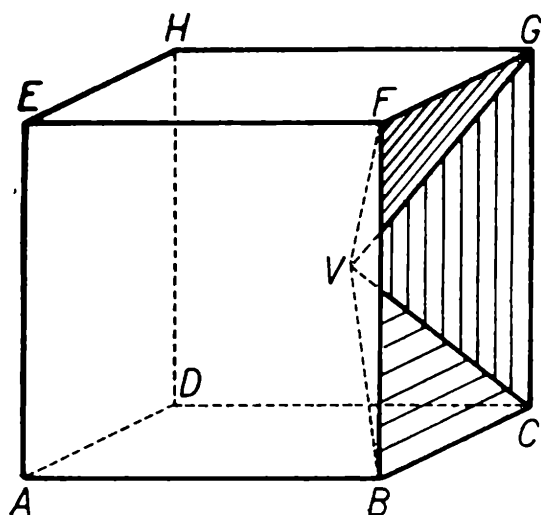
I. Euler, všestranný matematik (1707 až 1783) ukázal, že mezi počtem vrcholů určitého tělesa, počtem jeho stěn a počtem jeho hran platí určitý vztah. Mějme nějaké těleso (myslete si nějaký hranol či jehlan) a označme

v počet jeho vrcholů,
 s počet jeho stěn a
 h počet jeho hran.

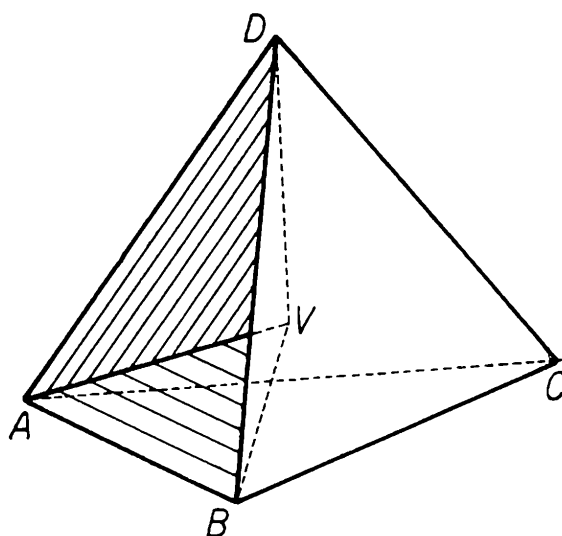
Potom platí

$$s + v = h + 2$$

Presvědčte se, že tento vztah platí pro všechna tělesa, která jste poznali ve škole. Všechna tělesa, pro která platí tento vztah, se nazývají Eulerova. Presvědčte se, že uvedený vztah, platí i pro tělesa s prohlubní, která jsou znázorněna na obr. 1 a, b.



Obr. 1a



Obr. 1b

II. Jsou však tělesa, pro která Eulerův vztah neplatí. Některá z nich tu uvedeme.

1. V obr. 2 je zobrazena krychle $ABCDEFGH$, v níž je prohlubeň tvaru čtyřbokého jehlanu. Podstava $KLMN$ tohoto jehlanu však nesplývá se stěnou $BCGF$ krychle. Pro toto těleso platí:

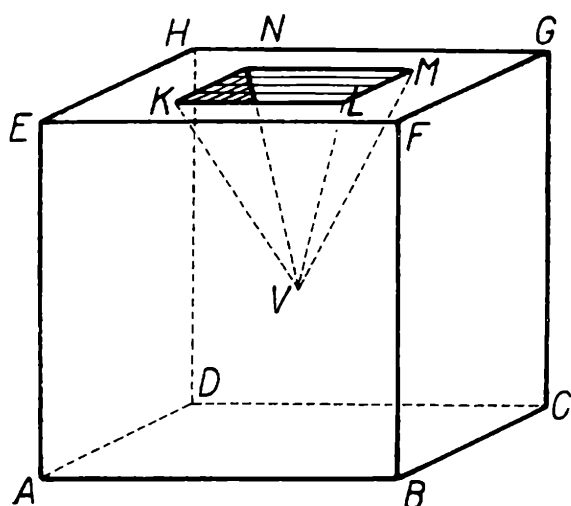
$$s = 10, v = 13, h = 20$$

$$s + v = 23, h + 2 = 22$$

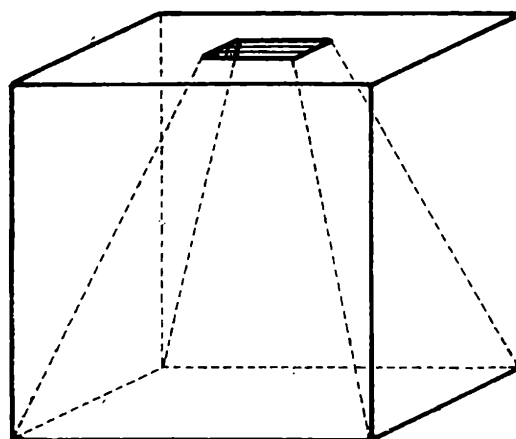
a Eulerův vztah neplatí.

2. Jiné těleso, pro které neplatí Eulerův vztah je znázorněno na obr. 3. Je to krychle, v níž je otvor tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu komolého. Jedna podstava jehlanu splývá se stěnou krychle. Zde je

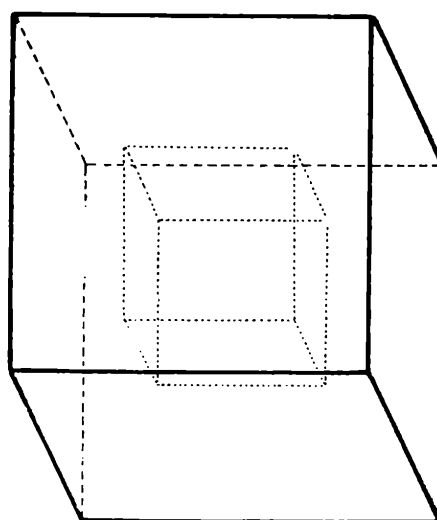
$$s = 9, v = 12, h = 20$$



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Eulerův vztah opět neplatí.

3. Matematicové vymysleli ještě jedno těleso, pro něž Eulerův vztah neplatí. Představte si, že kolem menší krychle z plechu byste ze sádky vymodelovali větší krychli. Ta menší by byla uvnitř skryta. Vznikne tak těleso s dutinou. V tomto případě je (obr. 4)

$$s = 12, v = 16, h = 24.$$

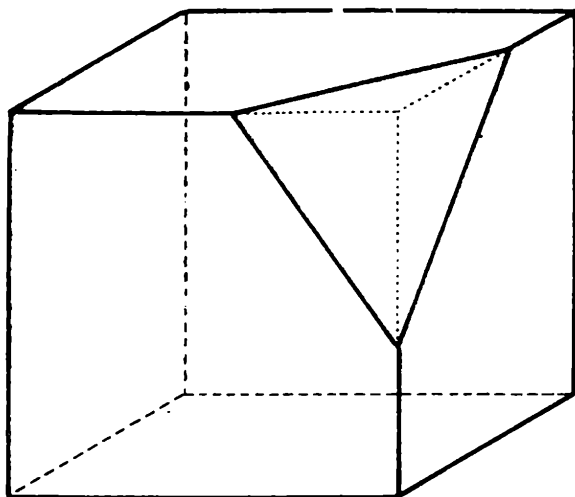
Kdyby uvnitř byla dutina tvaru čtyřstěnu, bylo by

$$s = 10, v = 12, h = 18.$$

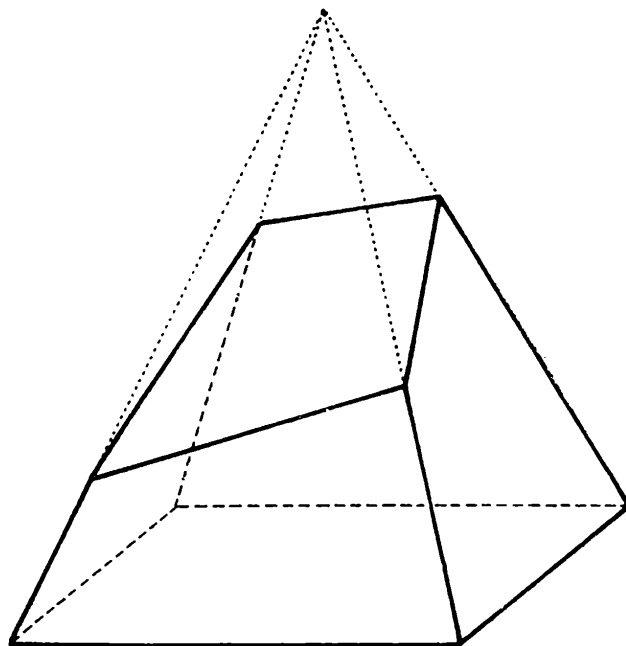
Eulerův vztah neplatí.

4. Ještě se zmíníme o jedné zajímavé větě, která souvisí s Eulerovým vztahem. Na obr. 5a, b jsou dvě konvexní tělesa, zkosená krychle a zkosený jehlan. Platí tedy o nich Eulerova rovnice. V obr. jsou některé stěny, vrcholy a hrany viditelné, některé jsou neviditelné. A tu platí:

Součet počtu viditelných stěn a vrcholů je roven počtu viditelných hran zvětšenému o 1.



Obr. 5a



Obr. 5b

Jestliže s_1 je počet viditelných stěn, v_1 počet viditelných vrcholů a h_1 počet viditelných hran, je

$$s_1 + v_1 = h_1 + 1.$$

Sami se přesvědčte o správnosti vyslovené věty. Vyslovte podobnou větu o počtu neviditelných stěn, vrcholů a hran.

Závěr. Článek měl u vás, mladých čtenářů, vzbudit zájem o prostоровou geometrii. Vidíte, že na tělesa se nemusíme dívat jen z hlediska velikosti objemu a povrchu. Jsou i jiné velmi zajímavé vlastnosti těles.

Cvičení.

1. V obr. 1a nahraďte jehlanovou prohlubeň prohlubní hranolovou, jejíž stěna nesplývá se stěnou $BCGF$. Platí potom Eulerův vztah?

2. V obr. 2 sestrojte ještě v jedné stěně jehlanovou prohlubeň (ale tak, aby obě prohlubně neměly žádný společný bod) a vypočítejte hodnoty s , v , h .

3. V obr. 4 si představte, že uvnitř krychle by byly dvě (tři, čtyři) dutiny, které by však neměly žádný společný bod. Vypočítejte v těchto případech hodnoty s , v , h .

4. Pro těleso v obr. 4 platí $s + v = h + 4$. Přitom dutina může mít tvar krychle nebo tvar čtyřstěnu. Kdyby dutina měla tvar tělesa z obr. 1a, platil by tentýž vztah. Platil by tento vztah i tehdy, když by dutina měla tvar tělesa z obr. 1b?

III. Tři obce A, B, C nepřilíží od sebe vzdálené a neležící v přímce si chtěly postavit společný kravín, ke kterému by bylo ze všech obcí stejně daleko. Věc by se dala snadno provést, kdyby tu nebyla řeka, která tekla poblíž obce B a oddělovala ji od obcí A, C . Přes řeku vedl jediný most v místě M , které leželo na přímé cestě z B do A . Jak se najde žádané místo X pro kravín?

S. H.

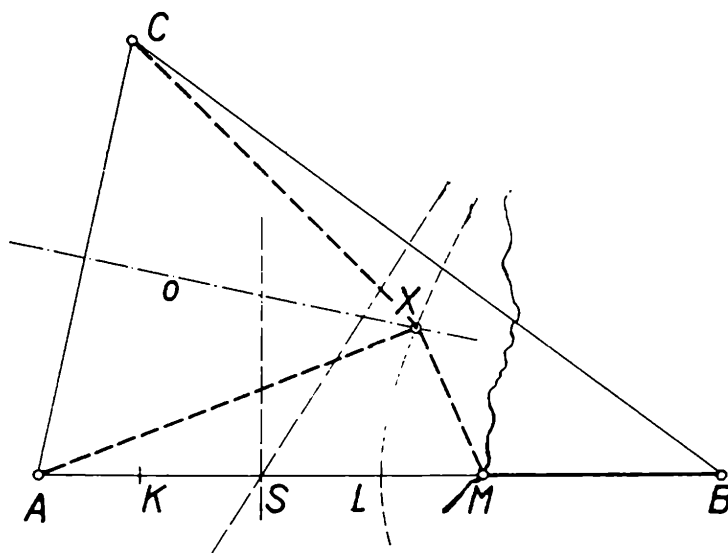
Označme $BM = m$, $MX = y$, $AX = BX = x$. Místo X leží na ose o souměrnosti úsečky AC . I platí

$$AX = BM + MX, \text{ tj. } x = m + y$$

čili

$$x - y = m.$$

Poslední rovnice však znamená, že bod X leží na hyperbole, jejíž ohniska jsou A, M a délka hlavní osy je m . Přesněji řečeno bod X leží



na té větvi hyperboly, pro kterou platí $AX > MX$. Hledaný bod X je podle toho průsečík osy o s touto větví hyperboly (viz vedl. obr.).

Říkali jsme, že A, M , jsou ohniska a m je délka hlavní osy. Víme, že

$$AM > m = BM.$$

Odtud plyne, že řešit úlohu popsáním způsobem je možné jedině tehdy, když $AM > BM$.

OPRAVA

V článku dr. J. Morávka „O Abelově metodě sčítání“, otištěném v 10. čísle roč. 51 se vyskytla dvě tisková nedopatření: Na str. 442 v příkladu 6 v předposledním členu součtu změňte znaménko před x_n . Nahradte na str. 444 ve cvičení 2 v posledním řádku znamení nerovnosti znaméním rovnosti.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

úhloměr
úhlopříčka
úhlopříčný
úhlový
 úhlová rychlost
úloha
úměra
úměrnost
úměrný
 nepřímo úměrný
 přímo úměrný
umístit
umocnit
 umocnit na druhou
 umocnit na třetí
 umocnit na n -tou
univerzální
úpatnice
úplnost
úplně
úplný
určený
 jednoznačně určený

určit
určitý
úseč
 kruhová (kulová) úseč
úsečka
uspořádání
 uspořádání množiny
uspořádaný
 uspořádaná dvojice
uspořádati
útvár
úvaha

rapporteur *m*
diagonale *ž*
diagonal, e, aux
angulaire
 vitesse *ž* angulaire
problème *m*
proportion *ž*
proportionnalité *ž*
proportionnel, elle
 inversement proportionnel
 directement proportionnel
placer, localiser
élever
 élever au carré
 élever au cube
 élever à la puissance n
universel, elle
podaire *ž*
complétude *ž*
totalement
complet, ète
déterminé, e
 bien déterminé; uniquement dé-
 terminé; univoquement déter-
 miné
déterminer; définir
défini, e
segment *m*
 segment circulaire (sphérique)
segment *m* de droite
ordre *m*
 ordre d'un ensemble
ordonné, e
 couple *m* ordonné
ordonner
figure *ž*
considération *ž*

uvažovat
uvnitř
uzávěr
uzavřený
užití
užitý

envisager, considérer
à l'intérieur
fermeture ž
fermé, e
application ž
appliqué, e

V

váha
válcový
válec
 kolmý válec
 kosý válec
 kruhový válec
 rotační válec
 šikmý válec
valení
variabilní
variac
variační
varietà
vážený průměr
vedlejší
vejčitý
vektor
 jednotkový vektor
 lineárně závislé vektory
 nulový vektor
 opačný vektor
 vázaný vektor
 volný vektor
vektorově
vektorový
 vektorové pole
 vektorový prostor
veličina
 nekonečně malá veličina
 nekonečně velká veličina
velikost
 skutečná velikost
vepsaný
vepsatelný
vepsat
verifikace
verifikovat
vertikála
vertikální

poids *m*
cylindrique
cylindre *m*
 cylindre droit
 cylindre oblique
 cylindre à base cylindrique
 cylindre de révolution
 cylindre oblique
roulement *m*
variable
variation ž
variationnel, elle
variété ž
moyenne ž pondérée
voisin, e
ovale
vecteur *m*
 vecteur unitaire; vecteur unité
 vecteurs linéairement dépendants
 vecteur nul
 vecteur opposé
 vecteur lié
 vecteur libre
vectoriellement
vectoriel, elle
 champ *m* de vecteurs
 espace *m* vectoriel
quantité ž
 infiniment petit *m*
 infiniment grand *m*
grandeur ž
 grandeur vraie
inscrit, e
inscriptible
inscrire
vérification ž
vérifier
verticale ž
vertical, e, aux

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

3

ROČNÍK 52, 1973-1974, LISTOPAD

ROČNÍK 52
LISTOPAD 1973

3

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava
dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, CSc., Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1973.

OBSAH

OBSAH

Dr. P. Kršňák: O sístave lineárných rovníc	97
Prof. J. Kúst: Diagonální cesty ve čtvercové síti (Dokončení)	103
Dr. J. Morávek, CSc.: O neobvyklém násobení komplexních čísel a matic	108
Prof. dr. E. Kašpar: Proutkaření (Pokračování)	112
Dr. M. Bednařík, dr. M. Široká: Jak velký odstup udržovat za jedoucím vozidlem	117
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Mračna Magellanova	125
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Spirální galaxie v Andromedě	127
R. Kolomý: Wilhelm Conrad Röntgen	129
Naše soutěž	132
Ze zahraničních časopisů	142
Nejmladším čtenářům	144
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. a 4. str. obálky

0 sústave lineárnych rovníc

RNDr. PAVEL KRŠŇÁK, PF, Banská Bystrica

V tomto článku sa chceme zaoberať riešením sústavy lineárnych rovníc. Pre sledovanie úvah predpokladáme isté znalosti z tzv. maticového počtu, najmä: pojem matice, prvok matice, riadky a stĺpce matice a násobenie matic. Odporúča sa preštudovať príspevok: E. Moravusová—O. Říha, „Násobení matic“, RMF, roč. 49 (1970—71), č. 2.

Čitateľ iste pozná niekoľko spôsobov riešenia sústavy lineárnych rovníc. My sa oboznámime se spôsobom riešenia, ktorý síce nie je vždy najrýchlejší, ale sa dá vždy použiť (aj na riešenie sústavy rovníc, ktorých počet je rôzny od počtu neznámych) a naprogramovať na samočinný počítač.

Zápis rovnice o troch neznámych je príklad výrokovej formy troch premenných, na označenie ktorej obyčajne používame obecný zápis $V(x, y, z)$. Nech pre naše úvahy je základnou množinou množina všetkých usporiadaných trojíc $[x, y, z]$, tj. kartézsky súčin $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ je množina reálnych čísel. V ďalšom mieste $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ budeme písať $\mathbf{R}^3$.

Ak do výrokovej formy $V(x, y, z)$ dosadíme prvok $[x_0, y_0, z_0] \in \mathbf{R}^3$, potom výroková forma sa stáva výrokom, ktorý môže byť pravdivý alebo nepravdivý. Množinu všetkých tých $[x, y, z] \in \mathbf{R}^3$, pre ktoré je $V(x, y, z)$ pravdivým výrokom, voláme obor pravdivosti $\mathbf{K}$ rovnice $V(x, y, z)$. Vyriešiť rovnicu znamená určiť jej obor pravdivosti.

Riešiť sústavu troch rovníc $V_1(x, y, z); V_2(x, y, z); V_3(x, y, z)$ o troch neznámych, znamená určiť v $\mathbf{R}^3$ obor pravdivosti $\mathbf{K}$ výrokovej formy $V_1(x, y, z) \wedge V_2(x, y, z) \wedge V_3(x, y, z)$. Obor pravdivosti $\mathbf{K}$ je množina všetkých usporiadaných trojíc $[x, y, z] \in \mathbf{R}^3$, ktoré vyhovujú rovnici $V_1(x, y, z)$ a zároveň $V_2(x, y, z)$ a zároveň $V_3(x, y, z)$. Teda $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2 \cap \mathbf{K}_3$, kde $\mathbf{K}_i$ je obor pravdivosti $V_i(x, y, z)$, pre $i = 1, 2, 3$.

Príklad 1. Rovnica $2x - y + z - 5 = 0$ je výroková forma o troch premenných. Základná množina nech je $\mathbf{R}^3$. Do oboru pravdivosti uvedenej rovnice patria napr. trojice $[2, 1, 2]$, $[1, 0, 3]$, $[-\frac{1}{2}, 1, 7]$ a pod.

Trochu menej obvyklý spôsob riešenia sústavy lineárnych rovníc budeme sledovať na konkrétnych príkladoch.

Príklad 2. V $\mathbb{R}^3$ riešte sústavu rovníc

$$x + 3y + 4z = 1 \quad (1)$$

$$2x + y - 2z = 4 \quad (2)$$

$$x - 2y + 3z = 2. \quad (3)$$

Skorej než pristúpime k riešeniu uvedenej sústavy rovníc, všimnime si, že tieto môžu byť zapísané ako jedna rovnica v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Uvedený spôsob zápisu rovníc je výhodný, lebo pomerne jednoducho môžeme zo schémy čísel určiť obor pravdivosti výrokovej formy

$$x + 3y + 4z = 1 \wedge 2x + y - 2z = 4 \wedge x - 2y + 3z = 2.$$

Metóda riešenia uvedenej sústavy bude nasledovná:

Najskôr použijeme rovnicu (1) k tomu, aby sme z rovníc (2) a (3) vylúčili neznámu x , t. j. mínus dvojnásobok prvej rovnice pripočítame k rovnici (2) a mínus jedna-násobok prvej rovnice pripočítame k rovnici (3), potom dostaneme

$$x + 3y + 4z = 1 \quad (1')$$

$$0 - 5y - 10z = 2 \quad (2')$$

$$0 - 5y - z = 1. \quad (3')$$

Teraz násobíme rovnicu (2') číslom $\frac{3}{5}$ a pripočítame ju k rovnici (1') a ďalej rovnicu (2') násobíme číslom -1 a pripočítame ju k rovnici (3'), dostaneme

$$x + 0 - 2z = \frac{11}{5} \quad (1'')$$

$$0 - 5y - 10z = 2 \quad (2'')$$

$$0 + 0 + 9z = -1. \quad (3'')$$

Ak teraz rovnicu (3'') násobíme číslom $\frac{2}{9}$ a pripočítame ju ku (1'') a ďalej rovnicu (3'') násobíme číslom $\frac{10}{9}$ a pripočítame ju k rovnici (2''), dostaneme

$$x + 0 + 0 = \frac{89}{45} \quad (1''')$$

$$0 - 5y + 0 = \frac{8}{9} \quad (2''')$$

$$0 + 0 + 9z = -1. \quad (3''')$$

Naostatok, ak rovnicu (2''') násobíme číslom $-\frac{1}{5}$ a rovnicu (3''') číslom $\frac{1}{9}$ dostaneme

$$x + 0 + 0 = \frac{89}{45} \quad (1 \text{ Iv})$$

$$0 + y + 0 = -\frac{8}{45} \quad (2 \text{ Iv})$$

$$0 + 0 + z = -\frac{1}{9} \quad (3 \text{ Iv})$$

Z posledných rovníc už ľahko prečítame obor pravdivosti riešenej sústavy rovníc, ktorým je jednoprvková množina $\left\{ \left[\frac{89}{45}, -\frac{8}{45}, -\frac{1}{9} \right] \right\}$.

Pri zápise sústavy rovníc sa obyčajne pridržame nasledovnej zásady: neznáme, koeficienty a znaky rovnosti (rovnítko) usporiadame do stĺpcov a v procese riešenia ich udržíme stále v tom istom stĺpci. (Např.: Konštanty pri neznámej x sú stále v prvom stĺpci, konštanty pravej strany sústavy vo štvrtom stĺpci a pod.)

Celý postup riešenia sústavy lineárnych rovníc môžeme zjednodušiť zapísať pomocou matíc, ktorých prvky sú koeficienty sústavy rovníc. Např. matica

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right\| \quad (4)$$

ma tú vlastnosť, že prvky prvého stĺpca sú koeficienty pri neznámej x druhého pri neznámej y , tretieho pri neznámej z a konštanty pravej strany sústavy (1), (2), (3) sú vo štvrtom stĺpci. Zvislá čiara nám môže predstavovať znaky rovnosti použité v sústave.

Ak v matici (4) budeme vykonávať tie isté počtové výkony ako pri riešení sústavy rovníc (1), (2) a (3), dostaneme nasledujúce matice

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -10 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{array} \right\| \quad (5)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{11}{5} \\ 0 & -5 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -1 \end{array} \right\| \quad (6)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{89}{45} \\ 0 & -5 & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 9 & -1 \end{array} \right\| \quad (7)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{89}{45} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{45} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} \end{array} \right\| \quad (8)$$

Súvislosť medzi výpočtom a napísanými maticami je nasledovná:

Sústave (1), (2) a (3) odpovedá matica (4).

Sústave (1'), (2') a (3') odpovedá matica (5).

Sústave (1''), (2'') a (3'') odpovedá matica (6).

Sústave (1'''), (2''') a (3''') odpovedá matica (7).

Sústave (1^{IV}), (2^{IV}) a (3^{IV}) odpovedá matica (8).

Všimnime si, že v prvých troch stĺpcoch matice (8) sa v jej hlavnej uhlopriečke nachádzajú len jednotky (ostatné prvky matice sú nuly) a keďže sústave (1^{IV}), (2^{IV}) (3^{IV}) odpovedá matica (8), môžeme hneď zo štvrtého stĺpca (8) čítať riešenie sústavy. (Ak by hlavná uhlopriečka neobsahovala samé jednotky, potom vo štvrtom stĺpci by nebolo ob-siahnuté riešenie sústavy.)

Teraz z matice (8) prečítame riešenie sústavy (1), (2) a (3), ktoré je:

$$x = \frac{89}{45}, y = -\frac{8}{45}, z = \frac{1}{9}$$

Ak uvedenou metódou riešime ľubovoľnú sústavu lineárnych rovníc, veľmi ľahko zistíme jej obor pravdivosti, ktorý môže byť:

- a) jednoprvková množina (viď. príklad 2),
- b) prázdna množina,
- c) množina o nekonečne veľa prvkoch.

Uvedieme príklady.

Príklad 3. V $\mathbb{R}^3$ riešte sústavu rovníc

$$\begin{array}{l} 3x + 4y + z = 0 \\ 8x + 10y + 8z = 1 \\ 5x + 6y + 7z = 2. \end{array} \quad (9)$$

Riešenie: Sústave (9) odpovedá matica

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 10 & 8 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \end{array} \right\| \quad (10)$$

ktorú postupnými úpravami (ako v príklade 2) dostaneme do tvaru

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 33 & 6 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{16}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \quad (11)$$

Z posledného riadku matice (11) vyplýva $z \cdot 0 = 1$, čo je nepravdivý výrok pre všetky hodnoty premennej z . Z tohoto usudzujeme, že sústava (11) nemá žiadne riešenie, alebo ináč povedané, jej obor pravdivosti je množina prázdna.

Príklad 4. V $\mathbf{R}^3$ riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ -x - 3y + 2z &= 0 \\ 3y - 3z &= -1. \end{aligned} \quad (12)$$

Riešenie: Sústave (12) odpovedá matica,

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{array} \right\|,$$

ktorú postupnými úpravami dostaneme do tvaru

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad (14)$$

Z posledného riadku matice (14) vyplýva $z \cdot 0 = 0$, čo je pravdivý výrok pre všetky hodnoty premennej z . Z tohoto usudzujeme, že sústava (12) má nekonečne veľa riešení, alebo ináč povedané, jej obor pravdivosti je množina všetkých usporiadaných trojíc reálnych čísel tvaru $\left[1 - u, u - \frac{1}{3}u \right]$, kde u je ľubovoľné reálne číslo, čo vyplýva z toho, že (12) sa redukuje na sústavu $x + z = 1$, $-3y + 3z = 1$.

Uvedená metóda riešenia sústavy rovníc je zvlášť výhodná, ak máme riešiť dve sústavy lineárnych rovníc, ktoré sa od seba odlišujú len v koeficientoch pravých strán. Napr. máme riešiť v $\mathbf{R}^3$ sústavy rovníc, ktoré sú dané v maticovom tvare

$$\left\| \begin{array}{ccc} 5 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 40 \\ 43 \\ 16 \end{array} \right\| \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad (16)$$

potom obidve sústavy môžeme napísať pomocou jednej matice takto

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 40 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 43 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 16 & 1 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Matica (17) se dá upraviť do tvaru

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{12}{19} \\ 0 & 1 & 0 & 5 & \frac{17}{19} \\ 0 & 0 & 1 & 10 & \frac{14}{19} \end{vmatrix} \quad (18)$$

a z matice (18) dostávame riešenie $x = 1$, $y = 5$, $z = 10$ pre sústavu (15) a riešenie $x = -\frac{12}{19}$, $y = \frac{17}{19}$, $z = \frac{14}{19}$ pre sústavu (16).

Zvrchu popísanou metódou pokúste sa riešiť nasledovné sústavy rovníc v $\mathbb{R}^3$:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -11 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

Diagonální cesty ve čtvercové síti

Prof. JIŘÍ KŮST, Plzeň

(Dokončení).

Příklad 1. Ve volbách bylo odevzdáno n hlasů. Kandidát X zvítězil nad kandidátem Y rozdílem k hlasů.

a) Kolika způsoby může být provedeno sčítání hlasovacích lístků, aby v průběhu celého sčítání vedl kandidát X nad Y ?

b) Jaká je pravděpodobnost, že v průběhu celého sčítání vede kandidát X nad Y ?

Řešení: a) Průběh sčítání hlasů znázorníme diagonální cestou ve čtvercové síti. Pořadí, ve kterém sčítáme hlasy, zaznamenané na ose x . Každý hlas odevzdáný pro X znázorníme výstupem a každý hlas pro Y sestupem diagonální cesty. Cesta $A_1 A_2 \dots A_n$ bude vycházet z bodu $A_1 = [1, 1]$ odpovídajícímu prvnímu sčítanému hlasu, který musí být pro X , a skončí v bodu $A_n = [n; k]$, který odpovídá poslednímu sčítanému hlasu. U každého mřížového bodu $A_i = [i; y_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, diagonální cesta znamená druhá souřadnice y_i rozdíl všech hlasů na hlasovacích lístcích $1, 2, \dots, i$ odevzdáných pro X a všech hlasů na těchto lístcích odevzdáných pro Y . Jestliže kandidát X v průběhu celého sčítání hlasů má vést nad kandidátem Y , pak nesmí mít odpovídající diagonální cesta žádný společný bod s osou x .

Podle podmínky (p_2) existuje diagonální cesta z A_1 do A_n , právě když čísla $n - 1$, $k - 1$ jsou téže parity, tj. také čísla n , k jsou téže parity a je-li $k \leq n$. Z rovnosti (4) pro počet f všech diagonálních cest vedoucích z A_1 do A_n vychází

$$f = \binom{n-1}{\frac{(n-1) + (k-1)}{2}} = \binom{n-1}{\frac{n+k-2}{2}}. \quad (5)$$

Počet g diagonálních cest z A_1 do A_n , které mají aspoň jeden bod společný s osou x , je podle výsledku úlohy d) roven počtu všech diagonálních cest z bodu $A_1' = [1; -1]$ do bodu $A_n = [n; k]$, kde A_1' je bod souměrně sdružený s bodem A_1 podle osy x . Je tedy podle rovnosti (4)

$$g = \binom{n-1}{\frac{(n-1) + (k+1)}{2}} = \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}} \quad (6)$$

Počet h všech diagonálních cest z A_1 do A_n , které nemají žádný bod společný s osou x , je

$$h = f - g = \binom{n-1}{\frac{n+k-2}{2}} - \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}} \quad (7)$$

Zároveň jsme našli řešení příkladu 1a). Počet h způsobů sčítání n hlasovacích lístků, při kterých v průběhu celého sčítání vede kandidát X nad Y a zvítězí vždy rozdílem k hlasů, je dán rovností (7).

V následující tabulce jsou uvedena čísla h pro $n = 7$ a pro $n = 10$ a pro všechna přípustná čísla k .

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	5	—	9	—	1	—	—	—	—	—
10	—	42	—	48	—	27	—	8	—	—

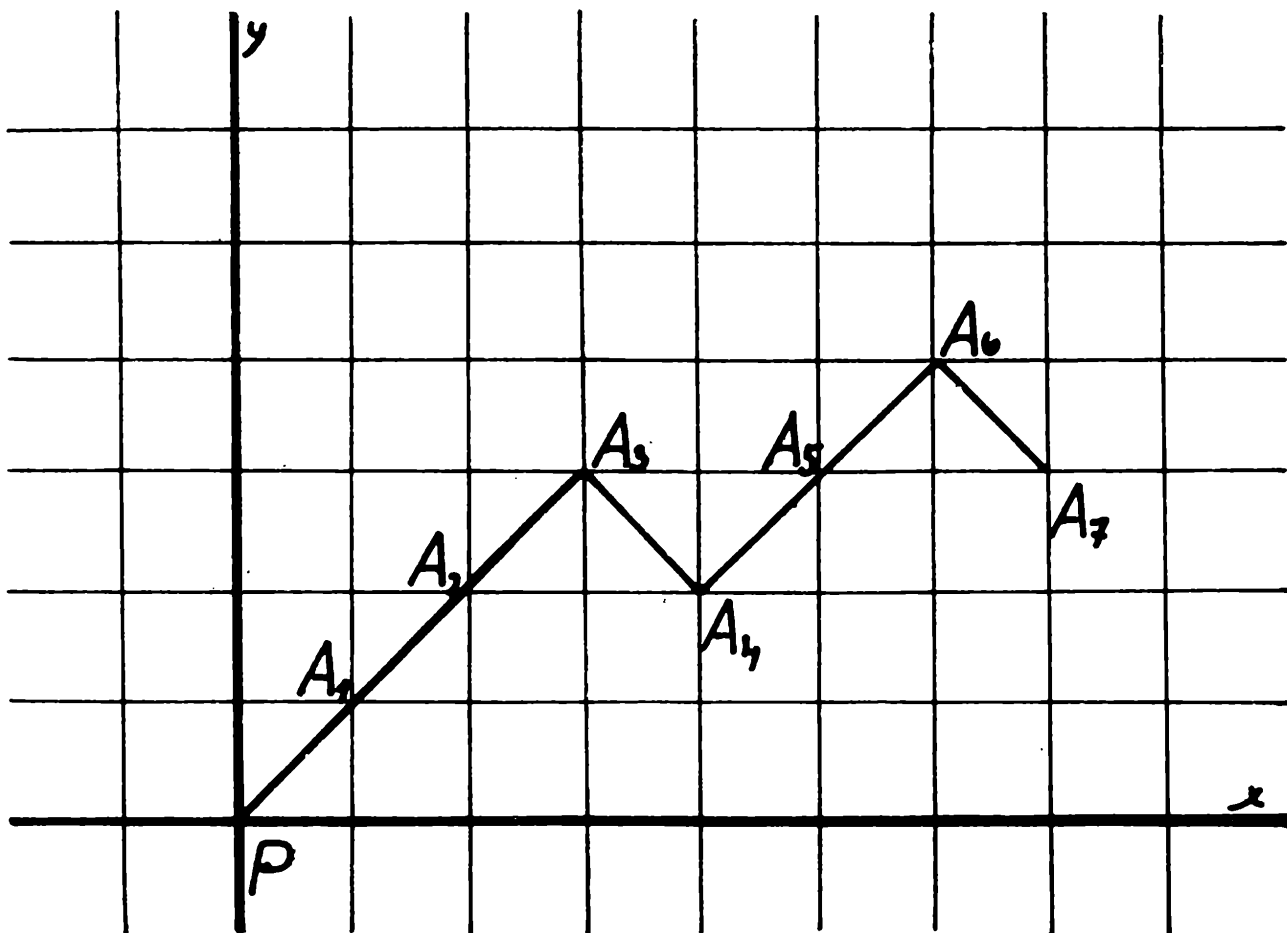
Vidíme, že pro $n = 7$, $k = 3$ je $h = 9$. To znamená, že je-li odevzdáno 7 hlasů a vede-li X nad Y rozdílem 3 hlasů, pak existuje 9 způsobů sčítání hlasovacích lístků, při kterých v průběhu celého sčítání vede kandidát X nad Y . Jedna diagonální cesta odpovídající takovému způsobu sčítání lístků je zakreslena na obr. 4.

b) Označme $\mathbf{M}$ množinu, jejíž prvky jsou všechny možné postupy při sčítání n hlasů, při nichž kandidát X vede rozdílem k hlasů nad kandidátem Y . Při každém takovém postupu získává X zřejmě $\frac{n+k}{2}$ hlasů a Y získává $\frac{n-k}{2}$ hlasů. Očíslujeme-li hlasovací lístky (v libovolném

pořádku) čísly $1, 2, \dots, n$, pak každá podmnožina o $\frac{n+k}{2}$ prvcích množiny $\mathbf{M} = \{1, 2, \dots, n\}$ udává pořadí hlasovacích lístků odevzdaných pro X a její doplněk v množině $\mathbf{M}$ pořadí hlasovacích lístků pro Y v jednom postupu z množiny $\mathbf{M}$. Uvedené podmnožiny množiny $\mathbf{M}$ jsou $\frac{n+k}{2}$ — prvkové kombinace množiny $\mathbf{M}$; n, k jsou čísla téže parity.

Jejich počet a také počet m postupů (prvků) množiny $\mathbf{M}$ je $m = \binom{n}{\frac{n+k}{2}}$.

K stejnému výsledku dojdeme následující úvahou, při které se uplatní diagonální cesty. Rozložme množinu $\mathbf{M}$ ve dvě třídy $\mathbf{F}$ a $\mathbf{G}$. Třidu $\mathbf{F}$ tvoří všechny postupy, u kterých první sčítaný hlas je pro X . Jejich



Obr. 4.

počet f je dán počtem všech diagonálních cest z $A_1 = [1; 1]$ do $A_n = [n; k]$. Podle rovnosti (5) je $f = \binom{n-1}{\frac{n+k-2}{2}}$ Třidu G tvoří

všechny postupy, u kterých první sčítaný hlas je pro Y . Jejich počet g se rovná počtu všech diagonálních cest z $A'_1 = [1; -1]$ do $A_n = [n; k]$.

Podle rovnosti (6) je $g = \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}}$ Počtem m postupů (prvků)

množiny M je

$$m = f + g = \binom{n-1}{\frac{n+k-2}{2}} + \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}} = \binom{n-1}{\frac{n+k}{2} - 1} + \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}}$$

Počet a všech postupů sčítání n hlasovacích lístků, při nichž kandidát X zvítězí rozdílem k hlasů a také v průběhu celého sčítání vede nad Y , je roven počtu všech diagonálních cest z $A_1 = [1; 1]$ do $A_n = [n; k]$, které nemají žádný společný bod s osou x .

Podle rovnosti (7) je

$$a = h = f - g = \binom{n-1}{\frac{n+k-2}{2}} - \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}}$$

Teoretická pravděpodobnost p jevu, že kandidát X , který zvítězil rozdílem k hlasů, vede i v průběhu celého sčítání n hlasů nad kandidátem Y , je

$$p = \frac{a}{m} = \frac{f-g}{f+g} = \left[\binom{n-1}{\frac{n+k-2}{2}} - \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}} \right] \cdot \binom{n}{\frac{n+k}{2}}$$

Pro $n = 7, k = 3$ je $p = \frac{9}{21} = \frac{3}{7} \doteq 0,43$.

Příklad 2. Ve volbách zvítězí z kandidátů X, Y ten, který dostane více hlasů. Bylo odevzdáno n hlasů. Jaká je pravděpodobnost, že zvítězí např. X a že i v průběhu celého sčítání hlasovacích lístků vede X nad Y ?

Řešení. Označme J_k jev, který nastane, když při sčítání n hlasů se dojde k výsledku, že X vítězí rozdílem k hlasů a že také v průběhu celého sčítání stále vede nad Y . Podle rovnosti (7) je četnost v_k jevu J_k

$$v_k = \binom{n-1}{\frac{n+k-2}{2}} - \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}} \quad (8)$$

Každý z v_k prvků množiny jevů J_k je jistý sled n hlasů, z nichž $\frac{n+k}{2}$

je pro X a $\frac{n-k}{2}$ pro Y ; čísla n, k jsou téže parity, $k \leq n$. Nechť $p(J)$

je pravděpodobnost jevu J , že sčítaný hlas je pro X a $p(J)$ pravděpodobnost jevu J' , že sčítaný hlas je pro Y . Zřejmě je $p(J') = p(J) =$

$\frac{1}{2}$. Z v_k prvků množiny jevů J_k vybereme jeden určitý. Pravdě-

podobnost, že nastane tento jeden pevně stanovený sled hlasů pro X a pro Y , je pravděpodobnost průniku n nezávislých a opakujících se jevů J a J' . Vypočte se jako součin jejich pravděpodobností, tj. rovná

se součinu $[p(J)]^{\frac{n+k}{2}} \cdot [p(J')]^{\frac{n-k}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Pravděpodobnost p_k , že nastane (libovolný) jev J_k , je pravděpodobnost sjednocení v_k disjunktních jevů, z nichž každý má, jak jsme právě zjistili, pravděpodobnost $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Vypočte se jako součet v_k sčítanců, z nichž každý je $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, tj. $p_k = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_k$.

Pravděpodobnost p , že X ve volbách zvítězí většinou hlasů a že také v průběhu celého sčítání n hlasů stále vede nad Y , je opět pravděpodobnost sjednocení disjunktních jevů J_k pro všechna přípustná čísla k . Je tedy

$$p = \sum_k p_k = \sum_k \left(\frac{1}{2}\right)^n v_k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_k v_k \text{ pro všechna přípustná čísla } k.$$

Je-li n číslo sudé, je

$$p = \frac{1}{2^n} \sum_k v_k = \frac{1}{2^n} (v_2 + v_4 + \dots + v_{n-2} + v_n).$$

Dosazujeme-li postupně do rovnosti (8), dostaneme

$$\begin{aligned} & v_2 + v_4 + \dots + v_{n-2} + v_n = \\ & = \left[\binom{n-1}{\frac{n}{2}} - \binom{n-1}{\frac{n+2}{2}} \right] + \left[\binom{n-1}{\frac{n+2}{2}} - \binom{n-1}{\frac{n+4}{2}} \right] + \dots + \\ & + \left[\binom{n-1}{\frac{n+(n-4)}{2}} - \binom{n-1}{\frac{n+(n-2)}{2}} \right] + \left[\binom{n-1}{\frac{n+(n-2)}{2}} - \right. \\ & \left. - \binom{n-1}{\frac{n+n}{2}} \right] = \binom{n-1}{\frac{n}{2}} - \binom{n-1}{n} = \binom{n-1}{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Je tedy } p = \binom{n-1}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n}.$$

Je-li n číslo liché, je

$$p = \frac{1}{2^n} \sum_k v_k = \frac{1}{2^n} (v_1 + v_3 + \dots + v_{n-2} + v_n).$$

Dosazujeme-li postupně opět do rovnosti (8), dojdeme zde k výsledku

$$p = \left[\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} - \binom{n-1}{n} \right] \cdot \frac{1}{2^n} = \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2^n}.$$

Pro $n = 7$ je $p = \binom{6}{3} \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{20}{128} = \frac{5}{32} = 0,156$;

pro $n = 10$ je $p = \binom{9}{5} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{126}{1024} = 0,123$.

Je patrné, že některé úlohy kombinatoriky nabudou konkrétnější podoby, uplatní-li se při jejich řešení souvislost s diagonálními cestami ve čtvercové síti. Konstrukce diagonálních cest by mohly být vhodným námětem pro samostatné práce žáků už na ZDŠ a pomohly by zároveň osvětlit základní pojmy kombinatoriky.

Nakonec dodejme, že podobně jako ve čtvercové síti lze zavést diagonální cesty i v prostorové síti krychlové.

0 neobvyklém násobení komplexních čísel a matic

RNDr. JAROSLAV MORÁVEK, CSc., Praha

Mějme dvě komplexní čísla $a + bi$ a $\alpha + \beta i$ (i označuje imaginární jednotku, a, b, α, β jsou libovolná reálná čísla). Součin komplexních čísel $a + bi$ a $\alpha + \beta i$ je definován známým vzorcem

$$(a + bi)(\alpha + \beta i) = a\alpha - b\beta + (a\beta + \alpha b)i. \quad (1)$$

Určit součin (1) znamená tedy ze čtveřice daných reálných čísel a, b, α, β určit čísla $a\alpha - b\beta$ (reálná část součinu) a $a\beta + \alpha b$ (imaginární část součinu).

Metoda výpočtu součinu $(a + bi)(\alpha + \beta i)$, založená bezprostředně na vzorci (1), vypadá, s přesností až na záměnu pořadí některých kroků, takto:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| 1. určí se součin $a\alpha$ | 4. určí se součin αb |
| 2. určí se součin $b\beta$ | 5. určí se rozdíl $a\alpha - b\beta$ |
| 3. určí se součin $a\beta$ | 6. určí se součet $a\beta + \alpha b$ |

Z numerického (výpočetního) hlediska vyžaduje tato metoda jednu operaci sčítání, jednu operaci odčítání a čtyři operace násobení. Pod pojmem operace zde ovšem máme na mysli operace s reálnými (nikoliv s komplexními!) čísly.

Položme si nyní otázku, zdali existuje metoda (postup) výpočtu součinu $(a + bi)(\alpha + \beta i)$, která vystačí s menším počtem „reálných“ násobení. Pro čtenáře bude snad překvapením, že takovýto postup skutečně existuje, třebaže vzorec (1) vypadá velmi přirozeně a úsporně. Tento postup je založen na zřejmých vztazích

$$\begin{aligned} a\alpha - b\beta &= (a + b)\alpha - b(\alpha + \beta) \\ a\beta + \alpha b &= (a - b)\beta + b(\alpha + \beta) \end{aligned} \quad (2)$$

Výpočet na základě (2) může probíhat např. podle tohoto schématu:

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. určí se součet $a + b$ | 5. určí se součin $(a - b)\beta$ |
| 2. určí se rozdíl $a - b$ | 6. určí se součin $b(\alpha + \beta)$ |
| 3. určí se součet $\alpha + \beta$ | 7. určí se rozdíl $(a + b)\alpha - b(\alpha + \beta)$ |
| 4. určí se součin $(a + b)\alpha$ | 8. určí se součet $(a - b)\beta + b(\alpha + \beta)$. |

Poslední schéma vyžaduje pouze tři „reálná“ násobení.

Zajímavé nyní je, že s méně než třemi „reálnými“ násobeními při výpočtu součinu komplexních čísel vystačit nelze. Poněkud přesněji řečeno, platí toto: Každý postup, který vychází ze čtveřice libovolných(!) reálných čísel a, b, α, β a použitím konečného počtu operací sčítání, odčítání a násobení počítá $a\alpha - b\beta$ a $a\beta + \alpha b$, vyžaduje alespoň tři operace násobení.

Přesný důkaz posledního tvrzení je sice dosti elementární, avšak poměrně zdlouhavý a náročný na počítání, a především vyžaduje upřesnění pojmu „postup“. Nebudeme se jím proto zabývat a přejdeme k násobení matic typu 2×2 .

Matice typu 2×2 byly v poměrně nedávné době předmětem některých článků v tomto časopise. Připomeňme si, že maticí typu 2×2 rozumíme čtvercové schéma tvaru

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d jsou libovolná reálná čísla. Součin dvou matic

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

v uvedeném pořadí (!)* je definován jako matice

$$\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}, \text{ kde}$$

$$A = a\alpha + b\gamma, B = a\beta + b\delta, C = c\alpha + d\gamma, D = c\beta + d\delta. \quad (3)$$

Přímý výpočet součinu matic typu 2×2 na základě vzorců (3) vyžaduje zřejmě $4 \cdot 2 = 8$ operací násobení. Třebaže pojem součinu matic

*) Násobení matic není komutativní.

se v matematice a jejích aplikacích používá již velmi dlouho, patrně nikoho až do nedávné doby nenapadlo, že počet násobení osm by se dal snížit. Důvodem je opět zejména přirozenost a jednoduchost vzorců (3).

Bylo proto překvapením, když švýcarský matematik V. Strassen navrhl v roce 1969 způsob výpočtu součinu

$$\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix},$$

zakládající se na tomto tvrzení.

Věta: Platí

$$\begin{aligned} A &= m_1 + m_2, & B &= m_5 - m_7 - m_1 - m_4 \\ C &= m_6 + m_7 - m_2 + m_3, & D &= m_4 - m_3, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} m_1 &= (a - b)\alpha, & m_4 &= c(\beta + \delta), \\ m_2 &= b(\alpha + \gamma), & m_5 &= (a + c)(\alpha + \beta), \\ m_3 &= (c - d)\delta, & m_6 &= (b + d)(\gamma + \delta), \\ & & m_7 &= (b + c)(\alpha - \delta). \end{aligned}$$

Větu dokáže snadno čtenář samostatně, bezprostředním ověřením platnosti čtyř vztahů pro A, B, C, D . Ověříme např. platnost vztahu

$$\begin{aligned} B &= m_5 - m_7 - m_1 - m_4. \text{ Skutečně, } m_5 - m_7 - m_1 - m_4 = \\ &= (a + c)(\alpha + \beta) - (b + c)(\alpha - \delta) - (a - b)\alpha - c(\beta + \delta) = \\ &= (a + c)\alpha + (a + c)\beta - (b + c)\alpha + (b + c)\delta - (a - b)\alpha - c(\beta + \delta) \\ &= 0 \cdot \alpha + a\beta + b\delta = B. \end{aligned}$$

Zformulovaná věta umožňuje určit součin matic typu 2×2 pomocí sedmi operací násobení. Americký matematik S. Winograd dokázal v roce 1971, že minimální počet operací násobení, nutný k výpočtu součinu obecných matic typu 2×2 , pomocí libovolného postupu, skládajícího se z konečně mnoha sčítání, odčítání a násobení, je roven 7. Winogradův důkaz vyžaduje podobně jako důkaz v případě násobení komplexních čísel manipulaci se složitými mnohočleny a kromě toho se v něm vyskytují i některé obecnější algebraické úvahy.

Nebudeme proto vykládat ani Winogradův důkaz. Aby se však čtenář necítil zcela ošizen, chceme na velmi jednoduchém příkladě naznačit základní myšlenku metod, kterými lze v některých případech získat výsledky o minimálním počtu operací násobení, nutných při výpočtu různých aritmetických výrazů.

Budeme se zabývat výpočtem výrazu $a^2 + b^2$ pomocí konečného počtu sčítání, odčítání a násobení, kde a, b jsou libovolná reálná čísla. Zřejmý postup, zakládající se na vztahu $a^2 + b^2 = a \cdot a + b \cdot b$, vyžaduje dvě operace násobení. Naším cílem je ukázat, že méně než dvě násobení nestačí. Přitom používáme záměrně slovesa „ukázat“ místo „dokázat“, abychom podtrhli, že naše úvahy nemají charakter přesného důkazu, zejména s ohledem na již zmíněnou nepřesnost názvu postup.

Připustme, že existuje postup pro výpočet $a^2 + b^2$ z uspořádané dvojice a, b , který vystačí s nejvýše jedním násobením. Takový postup však vyžaduje právě jedno násobení, neboť pomocí pouhých operací sčítání a odčítání můžeme z a, b vytvořit pouze výrazy tvaru $pa + qb$, kde p, q jsou celá čísla. Žádný výraz tvaru $pa + qb$, jakožto lineární polynom proměnných a, b , se však nemůže pro všechna a, b rovnat kvadratickému polynomu $a^2 + b^2$.

Uvažovaný postup tedy musí obsahovat právě jedno násobení a výpočet podle něho lze rozdělit na tři po sobě následující části:

A) Část výpočtu předcházející jediné operaci násobení.

B) Provedení operace násobení.

C) Část výpočtu následující za operaci násobení.

Výsledkem části A) je množina výrazů tvaru $pa + qb$, kde p a q jsou celá čísla. V části B) se utvoří nějaký součin tvaru $(p_1 a + q_1 b)(p_2 a + q_2 b)$, kde p_1, p_2, q_1, q_2 jsou nějaká celá čísla, a nakonec, výsledkem části C) jsou hodnoty výrazů tvaru $r(p_1 a + q_1 b)(p_2 a + q_2 b) + p_3 a + q_3 b$, kde r, p_j, q_j ($j = 1, 2, 3$) jsou celá čísla.

Tedy k tomu, aby náš postup počítal $a^2 + b^2$ při libovolných reálných a, b , musí existovat celá čísla r, p_j, q_j ($j = 1, 2, 3$) tak, aby vztah

$$r(p_1 a + q_1 b)(p_2 a + q_2 b) + p_3 a + q_3 b = a^2 + b^2 \quad (4)$$

byl splněn pro všechna reálná a, b .

Nalezená podmínka představuje rovnost dvou polynomů proměnných a, b . Roznásobením závorek na levé straně a porovnáním koeficientů u odpovídajících si členů dostáváme $p_3 = q_3 = 0$ a dále

$$\left. \begin{aligned} r p_1 p_2 &= 1 \\ r q_1 q_2 &= 1 \\ r(p_1 q_2 + p_2 q_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Lze však dokázat, že soustava (5) nemá žádné řešení ani v celých, a dokonce ani v reálných číslech r, p_1, p_2, q_1, q_2 . Skutečně, připustíme-li, že existují reálná čísla r, p_1, p_2, q_1, q_2 vyhovující soustavě (5), dostáváme z jejích prvních dvou rovnic $r^2(p_1 q_2)(p_2 q_1) = 1$ a ze třetí rovnice $r^2(p_1 q_2 + p_2 q_1)^2 = 0$. Z posledních dvou vztahů však vyplývá $r^2(p_1 q_2 - p_2 q_1)^2 = -4$, což znamená spor.

Tím jsme tedy dokázali, že rovnost (4) neplatí, takže k výpočtu $a^2 + b^2$ jsou potřeba alespoň dvě násobení.

Úlohy diskutované v tomto informativním článku jsou jednoduchými ilustracemi problémů, jimiž se, mimo jiné, zabývá mladá, avšak rychle se rozvíjející matematická disciplína — teorie výpočetní složitosti. Její význam tkví, kromě čistě teoretické přitažlivosti, v možných aplikacích při racionálním využití výpočetní techniky.

Cvičení 1. Určete součin $(3,42 + 0,59i)(1,38 - 7,53i)$ použitím tří „reálných“ násobení. Výsledek ověřte obvyklým způsobem násobení komplexních čísel.

Cvičení 2. Ukažte, že minimální počet „reálných“ násobení pro určení druhé mocniny komplexního čísla (ve smyslu tohoto článku) je roven dvěma.

Cvičení 3. Použijte Strassenovy metody na určení součinu

$$\begin{pmatrix} 3, & 2 \\ -5, & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8, & 11 \\ 3, & 7 \end{pmatrix},$$

a správnost výsledku zkontrolujte obvyklým způsobem násobení matic typu 2×2 .

Cvičení 4. Přesvědčte se, že soustava (5) má alespoň jedno řešení v oboru komplexních čísel.

fyzika

Proutkaření

Prof. RNDr. EMIL KAŠPAR, UK, Praha

III. Nevědecké výklady pohybu proutků (Pokračování)

Nebudeme zde uvádět pověrečné výklady, kterými např. církve bojovala proti proutkařům a proutkaření. Prohlásila-li církev, že proutkařské schopnosti, popř. pohyby proutků jsou dílem ďáblovým, byl její postoj k proutkaření na stejné úrovni jako názory, které proutkaři připisují „osobnímu magnetismu“, tedy mimořádné schopnosti, kterou proutkař má na rozdíl od nás ostatních „obyčejných“ lidí. Pokusíme se spíše shrnout výklady, které zní jako pokusy o vážné vědecké vysvětlení a které by proto mohly oklamat čtenáře, kteří nejsou zasvěceni do skutečné podstaty proutkařských jevů. I tyto nevědecké nebo pavědecké výklady či „teorie“ odrážejí stav soudobých vědeckých znalostí, přinejmenším tím, že užívají, popř. tvoří názvosloví, které připomíná terminologii vědeckou.*)

*) Místo o věštění pomocí proutků se mluví o rābdomantii (*rhabdos*, řec. = proutek, *manthein*, řec. = věštiti), místo o silách, které uvádějí proutky v pohyb, se mluví o *rābdomotorických silách*, proutky se nazývají *indikátory*, doporučuje se, aby se proutkaři nebo pendlaři nazývali *operátoři* atd. Jde zřejmě o snahy dodat publikacím o proutkaření aspoň vnější vzhled vědeckosti.

Jak už bylo řečeno, různé „teorie“ proutkaření výrazně zrcadlí stupeň kritičnosti vykladatele a ovšem také stupeň soudobého fyzikálního poznání. Proto některé starší výklady je možno považovat za vědecké hypotézy, za pokusy o skutečně vědecký výklad, i když se nám se stanoviska dnešní vědy jeví buď naivní nebo jako výplod dnes stěží pochopitelné fantazie.

Ve vývoji fyziky jako vědy lze zřetelně rozlišit dvě období: první období před *Galileo Galileem*, jehož práce zakládají fyziku jako kritickou experimentální vědu a zahajují tedy druhé období vývoje fyziky. Za tento mezník můžeme zhruba považovat rok 1600.

Z vykladatelů z prvního období zaslouží zmínku již zmíněný mineralog *Jiří Agricola* (1494—1555), který v knize o kovech (*De re metallica*) tvrdí, že nezáleží na úpravě proutku, ale že jeho kouzelná síla pramení z proutkařských čarodějných zaříkadel. Ale zdá se, že Agricola nebyl tak úplně v zajetí důvěry v čarodějnou moc proutků.*) Daleko kritičtější byl svérázný filosof lékař *Paracelsus***) (1493—1551), který nevěří pohádkovým pověstem o kouzelné moci proutku. Soudí, že jen vůle lidská řídí pohyby proutku, a to často vůle zlá s podvodnými úmysly.

Snad vůbec první pokus o fyzikální výklad pochází od *Athanasia Kirchnera* (1601—1680), který ve spise o magnetismu (*De re magnetica*) vyslovil dohad, že pohyb proutků je fyzikálně mechanického původu. Podle Kirchnera vycházejí z vody nebo kovů výpary (*vapor exhalatio metallica*), ty se spojují nebo přitahují s výpary z větví a listů, hromadí se kolem prutu, až prut se ponenáhlu vahou sklání a vztyčuje (obr. 8). U Kirchnerova výkladu se vlastně setkáváme s určitým druhem fluida („magnetického“), na něž byla fyzika a chemie té a pozdější doby tak bohatá. Je to též první výklad funkce proutků „magnetismem“, který se v naivních výkladech objevuje až do dnešního dne.

Kirchnerův výklad byl o něco později zastíněn teorií, založenou na učení o atomech, kterou formuloval *Vallemont* v knize „*Záhadná fyzika neboli pojednání o kouzelném proutku*“*). Proti jeho výkladu vystoupil *J. G. Zeidler* ve spisku „*Pantomysterium*“. Spisek vyšel v Halle r. 1700. Podle Zeidlera tu působí „pevná vůle člověka“, tedy nefyzikální příčiny.

Lze celkem sledovat, že jakmile ve fyzice nebo v chemii byl zjištěn nový důležitý jev, ihned byl použit pro „vědecký“ výklad pohybu proutků. Není proto divu, že objevení elektrického proudu, které souvisí se jmény *L. Galvani* (1737—1798) a *A. Volta* (1785—1827), dalo

*) Viz citát na str. 63.

**) Plné jméno: *Phillipus Aureolus Theophrastus Bombastus von Hohenheim*, lékař v Basileji.

*) *Abbé de Vallemont, Physique occulte ou Traité de la baguette divinatoire*, Paříž 1693.

LETTRES

QUI DECOUVRENT

L'ILLUSION

DES

PHILOSOPHES

SUR LA

BAGUETTE,

ET QUI DETRUISENT

LEURS SYSTEMES

Populus meus in ligno suo interrogavit
et ait illi: Quis tuus dominus et
quis dominus tuus?



A PARIS.

chez Jean Boudet, rue S. Jacques,
au Salon d'or.

M. DE SEVE



Obr. 8. První znázornění „teorie vypařování“ (titulní stránka díla Theophila Albina z r. 1696)

podnět k „elektrickým teoriím“ i v proutkaření. Prvním z těchto vyklada-
datelů byl pravděpodobně francouzský fyzik *Thouvenel*, který v r. 1781**)
dokazoval, že schopnosti a síly proutkařovy souvisí s elektřinou a mag-
netismem. Tuto teorii později širě rozvedli fyzik *Fortis* a mineralog
C. Amoretti ve spisku *Della raddomancia* (1808).

**) *Thouvenel*, *Mémoire physique et médicinal montrant les rapports évi-
dents entre les phénomènes de la baguette divinatoire, du magnetisme et de
l'électricité*, Londýn a Paříž 1781.

Za zmínku stojí i „teorie“ o živočišném magnetismu, kterou vyslovil v r. 1808 *J. W. Ritter*, dále „teorie“ o pozitivním a negativním fluidu (pravé a levé ruky), která podle jejího autora *J. de Tristana* (1826) přecházejí z lidského těla na proutek. Zajímavé je, že i *J. W. Goethe* patřil mezi vyznavače proutkaření a věřil ve zvláštní schopnosti některých lidí.

Z historie proutkaření by bylo možno uvádět i další doklady prérůžných „teorií“ a jejich obměn. My si v dalším všimneme podrobněji jen nevědeckých výkladů funkce proutků z nejnovější doby.

Veliký rozmach proutkaření vyvolal v letech 1. světové války vídeňský profesor *Dr M. Benedikt* článkem, který uveřejnil v listě *Neue Freie Presse*.) Benedikt navázal na názory, které před ním vyslovil *Voll***), a rozvedl je. U Benedikta se poprvé vyskytuje termín „biomechanický jev“, který v nejnovější době ožívá ve výkladech proutkařských jevů tím způsobem, že jsou zařazovány mezi tzv. „biofyzikální jevy“. Dnešní proutkařské „teoretiky“ ovlivnil Benediktův výklad natolik, že je vhodné mu věnovat víc pozornosti. Č. *Zibrt* píše ve své knize doslova toto: „Benedikt tvrdí: Záchvěv, úder proutku, rovná se nezměnitelné, vždy stejné délce vlny při vyzařování (emanaci) paprsků z jednotlivých látek. Každá látka má tu svůj určitý počet vln, jimiž vyvolává svůj zvláštní a svůj určitý, nezměnitelný počet záchvěvů, „úderů“ při proutku. Látky příbuzné vyvolávají příbuznými vlnami stejný nebo přibližně rovný počet záchvěvů proutku. Emanace jsou vyvolány napětím, jež nemá ráz elektrické působivosti a není také magnetická nebo chemická. Benedikt je označuje za zjev „biomechanický“. Poněvadž označení to není posavad snadno srozumitelné a ustálené, nazývá je „organické“, „animální“ napětí. Proutkohybná síla v těle, jak ji Benedikt líčí, plyne podobně jako proud elektrický do vyzařujících látek a pohyby proutku jsou jen viditelný výkon tohoto splynutí. Prut jest tedy pojítkem mezi proutkohybnou silou těla lidského a mezi emanacemi, výrony látek proutkohybných, jež vyvolávají v těle vyzařováním onu sílu proutkohybnou. Pokusy svými s proutkem chce prý Benedikt odhaliti nové, posavad najisto neprozkoumané vztahy lidského organismu ku veškeré oblasti zjevů a sil přírodních.“

S tímto „zemním zářením“ nebo „vlnami“ apod. je možno se setkat téměř u všech soudobých vykladačů pohybu virgulí a siderického kyvadla. Uvedme si proto přehled těchto „teorií“. *N. N. Sočevanov* ve sborníku „*Telepatie a jasnovidnost*“*) uvádí řadu hypotéz, které mají vy-

*) *Benedikt, M.*: *Wünschelrute eine Kriegsnotwendigkeit*, Neue Freie Presse 7. I. 1915, Vídeň.

**) *Voll, A.*: *Die Wünschelrute und siderisches Pendel*, Altmann-Verlag, Lipsko 1910.

*) *Rejdlák, Z.* *Telepatie a jasnovidnost*, Svoboda Praha, 1970.

světlit proutkařské jevy. (Sočevanov nazývá tyto jevy „biofyzikální“, ale název pro nás není vhodný vzhledem k tomu, že biofyzika je vážná vědecká disciplína, která nemá s proutkařskými praktikami nic společného.) Sočevanov uvádí, že všechny hypotézy lze zásadně rozdělit do dvou skupin: 1. První skupina hypotéz vychází z předpokladu, že „*existuje vnější fyzikální pole, které je proutkařem indikováno, a sekundárním zjevem je přitom otáčení smyčky*“. 2. Podle hypotéz druhé skupiny „*proutkař působí jako aktivní lokátor, který vysílá signál. Odražený signál je organismem a smyčkou přijat a opět jako následek vnějšího působení vzniká otáčení smyčky*“.

S. píše, že do 1. skupiny patří 7 hypotéz, z nichž — jak praví — tři nebyly potvrzeny zjištěnými skutečnostmi. Jsou to hypotézy hledající příčinu otáčení smyčky v ionizaci atmosféry, dále ve změně gradientu místního elektrostatického pole Země a konečně hypotéza, vytvořená

Y. Rocardem, která předpokládá vliv derivace $\frac{dT}{dt}$, o které S. praví, že je „*částí podílu horizontálního gradientu celkového vektoru magnetického pole Země podle času...*“. Čtvrtá hypotéza „... předpokládá pohyb vody následkem turbulentního proudění v nádržích podzemních vod vznikají stojaté vlny, které pronikají povrchovými vrstvami a šíří se dále do atmosféry“.***) Pátou hypotézu nazývá S. hydrodynamickou. Ta předpokládá „*krátkodobé pulzace vnějšího magnetického pole Země a jejich vliv na elektromagnetická pole, která se nacházejí uvnitř lidského těla, a na elektrolyt, jakým je krev člověka*“. Šestá, „gravitační“ hypotéza předpokládá, že proutkař reaguje na malé změny gravitačního pole. Sedmá hypotéza „*předpokládá spojení mezi biofyzikálním jevem (pohybem proutků, p. p.) a přirozenou radiací — elektromagnetickými kmity na molekulární úrovni registrované proutkařem*“ K této hypotéze, nazývané též hypotézou pronikavého záření, poznamenává sám S., že její „*Slabinou... je naprostý nedostatek jakýchkoli zmínek o těch frekvenčních pásmech záření, se kterými by bylo možno spojovat existenci biofyzikálního jevu*“.*)

**) Zastáncem této hypotézy je S. Tabara, který o své hypotéze přednesl referát na semináři *Všesvazové společnosti pro stavbu přístrojů*, sekce *Bio-entroskopie* v Moskvě (11. a 12. dubna 1968). Obsah referátu svědčí o tom, že hypotéza je založena na omylech na úrovni elementární fyziky.

*) Tato hypotéza předpokládá, že existují jisté druhy elektromagnetického záření, vysílané různými látkami a prostředími, které mohou registrovat určité osoby, nadané zvláštní schopností „mimosmyslového vnímání“. Pro tuto schopnost navrhl abbé Bouly (viz Randák, str. 179) název *radiestezie* (citlivost na záření). Tohoto názvu se užívá převážně „*v sesterském odvětví proutkařství, které používá převážně jiného detektoru nežli proutku*“ (kyvadélka, p. p.). Teorii o zemním záření vyvrací důkladným vědeckým rozбором knížka prof. dr. Otto Prokopa, *Wünschelrute, Erdstrahlen und Wissenschaft*, Urania-Verlag, Jena—Lipsko 1957.

S. uvádí, že do 2. skupiny patří vlastně jediná hypotéza. Ta předpokládá, že proutkař vysílá do okolí signál a přijímá zpět signál odražený. Podle *S.* je proti této hypotéze možno namítat, že je obtížné si představit, aby proutkař vyslal signál s takovou energií, že by byl schopen projít vodivými vrstvami lehkých hornin, vzbudit v hloubce (70 až 100) m rudné ložisko, vrátit se zpět a být opět proutkařem registrován.

Sočevanov uvádí na závěr, že ani jedna z uvedených hypotéz není schopna objasnit všechny skutečnosti, známé z proutkařské praxe.

Všechny tyto pavědecké teorie se vyznačují velkou dávkou mlhavosti, fantastických představ plynoucích z neznalosti fyzikálních zákonů. Závěry z nich odporují nejzákladnějším fyzikálním poznatkům. Je také zajímavé, že se teorie proutkařských jevů spojují s jinými okultními jevy, jako s telepatí, jasnovidectvím ap. Autor tohoto článku je přesvědčen, že se nevědecké výklady proutkařských jevů nejlépe vyvrátí tím, že uvedeme výklad pohybu virgulí apod., který je založen na známých fyzikálních zákonech.

Jak velký odstup udržovat za jedoucím vozidlem

Až si jednou pořídíte motorové vozidlo (3. část)

RNDr, MILAN BEDNAŘÍK - RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Jistě jste již někdy stáli na okraji vozovky a přihlíželi, jak kolem vás projíždí dlouhá kolona vojenských vozidel. Možná jste netrpělivě čekali, až kolona přejede, abyste konečně mohli přejít na druhou stranu vozovky. Třeba jste i s nelibostí zauvažovali o tom, že kdyby jednotlivá vozidla jela v menších vzájemných odstupech, kolona by přejela rychleji a vy byste nemuseli tak dlouho čekat.

Napadla vás však otázka, jak vlastně ty odstupy mezi vozidly mají být velké? Existuje nějaký dopravní předpis, že vozidla mají mezi sebou udržovat určitou vzdálenost? Ano, podobný předpis existuje, ale není v něm psáno nic o velikosti této vzdálenosti.

Vyhláška o pravidlech silničního provozu uvádí, že řidič je povinen zachovávat takovou vzdálenost od vozidla jedoucího před ním, aby mohl vždy závčas snížit rychlost, případně i zastavit, sníží-li náhle řidič jedoucí před ním rychlost jízdy nebo náhle zastaví. Jak však má řidič poznat, že právě ta jeho vzdálenost, kterou zachovává za jiným vozidlem, vyhovuje uvedeným podmínkám?

Většina řidičů se při odhadování bezpečného odstupu od jiného vozidla řídí vlastní zkušeností. Málo zkušení řidiči a začátečníci by měli rozhodně volit odstupy větší, zatímco zkušení řidiči si mohou dovolit odstup přiměřeně zkrátit. Co to však znamená „přiměřeně zkrátit“? Do jaké meze může toto přiměřené zkrácení jít? Zde docházíme k velmi důležitému problému, kterým je *stanovení nejmenšího odstupu dvou za sebou jedoucích vozidel*, který bychom mohli považovat pro zkušené řidiče ještě za bezpečný. Pokusme se o řešení tohoto problému.

Než tak učiníme, zopakujme si z předchozího článku „*Na jak velké dráze se nám podaří zastavit?*“, který najdete v 2 čísle tohoto časopisu, několik vztahů. Je to především vztah pro brzdnou dráhu

$$s_b = \frac{v^2}{2a}, \quad (1)$$

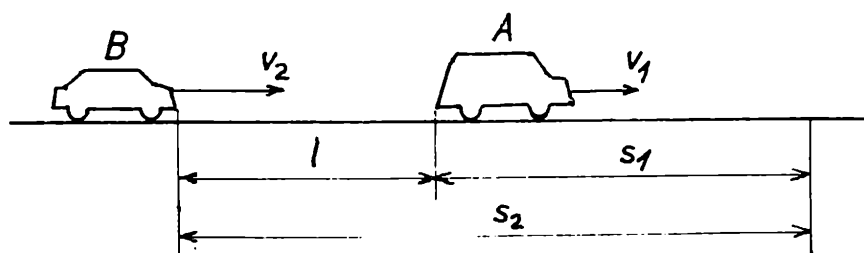
kde v je rychlost vozidla v okamžiku, kdy začalo brzdit, a a zpomalení vozidla při brzdění. Dále je to vztah pro dráhu nebrzděného vozidla, tj. vztah pro dráhu, kterou vozidlo ujede od okamžiku, kdy řidič spatří před sebou nebezpečnou situaci, do okamžiku, v němž začnou působit brzdy jeho vozu,

$$s_\tau = v \tau, \quad (2)$$

kde v je opět rychlost vozidla, τ je součet reakční doby řidiče a doby zpoždění účinku brzd. Pro celkovou dráhu potřebnou k zastavení vozidla byl pak odvozen vztah

$$s = v \tau + \frac{v^2}{2a}. \quad (3)$$

A nyní již můžeme přikročit k řešení našeho dopravního problému. Představme si, že po přímé a vodorovné silnici jede vozidlo A rychlostí v_1 a za ním vozidlo B rychlostí v_2 , přičemž $v_2 > v_1$, tzn., že vozidlo B dojíždí vozidlo A (obr. 1). Uvažujme, co se stane, začne-li řidič vozidla A náhle brzdit.

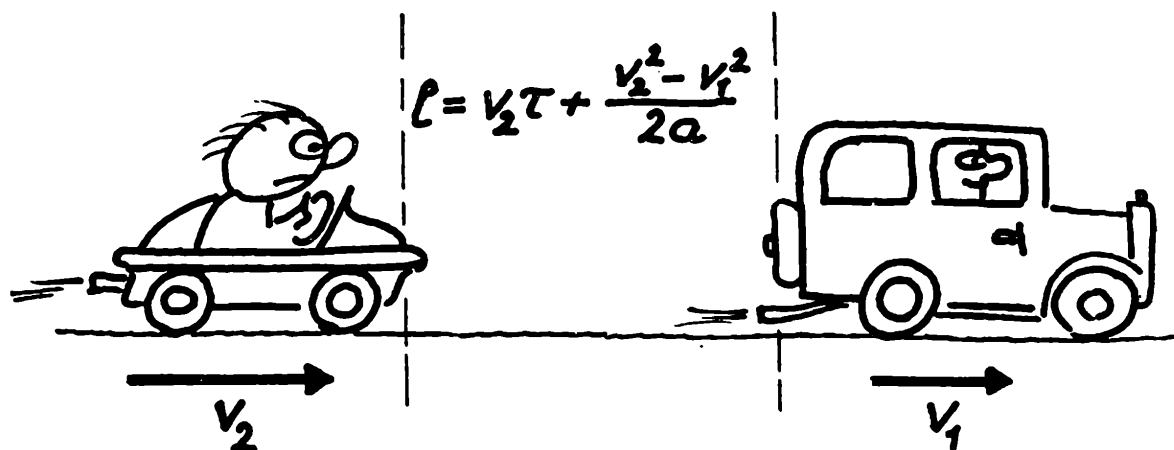


Obr. 1.

Kdyby se vozidlo A pohybovalo se stálým zpomalením a až do svého zastavení, ujelo by podle vztahu (1) dráhu

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2a} \quad (4)$$

Jak by se v tom případě choval řidič vozidla B ? Jestliže by spatřil brzdová světla před ním jedoucím vozidlem, reagoval by rovněž brzdě-



Obr. 2.

ním, a za předpokladu, že by jeho vozidlo jelo s tímž stálým zpomalením a , zastavilo by vzhledem ke vztahu (3) na dráze

$$s_2 = v_2\tau + \frac{v_2^2}{2a} \quad (5)$$

Jestliže nemá dojít k nárazu vozidla B na vozidlo A , musí být mezi nimi v okamžiku, kdy se začalo pohybovat vozidlo A rovnoměrně zpomaleně, vzdálenost l , která vyhovuje vztahu (viz obr. 1)

$$s_2 \leq l + s_1$$

Dosadíme-li za s_1 a s_2 podle vztahů (4) a (5), obdržíme po úpravě

$$l = v_2\tau + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} \quad (6)$$

kde rovnost vyjadřuje velikost tzv. *kritické vzdálenosti*, tj. velikost vzdálenosti, při které by dojel za výše uvedených podmínek vůz B právě k vozu A . Tato vzdálenost současně představuje nejmenší odstup vozidla B od vozidla A . Z hlediska bezpečnosti je však samozřejmé, že za bezpečný odstup mezi vozidly se pokládá vždy vzdálenost větší než kritická. V řídičské praxi to znamená, že řidič vozu B by měl při dojíždění vozu A vždy rychlost svého vozu snížit nebo začít vůz A předjíždět ještě před dosažením kritické vzdálenosti l .

Všimněme si blíže odvozeného vztahu (6). Jeho pravá strana má dva členy. První člen $v_2\tau$ představuje dráhu, kterou ujede vozidlo B od okamžiku, kdy jeho řidič zpozoroval brzdová světla vozidla A , do okamžiku, kdy začly působit brzdy vozu B . Vidíme, že velikost této dráhy závisí jednak na rychlosti v_2 vozidla B , jednak na době τ , v níž je zahrnuta reakční doba řidiče tohoto vozidla. Druhý člen $\frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$ představuje vlastně rozdíl brzdných drah obou vozidel. Tento rozdíl je tím větší, čím větší je rychlost v_2 vozidla B vzhledem k rychlosti v_1 vozidla A (ovšem za předpokladu stejného zpomalení obou vozidel). Kromě toho

rozdíl brzdných drah roste s klesajícím zpomalením vozidel; např. na mokré vozovce, na níž dosahují vozidla v průměru dvakrát menších hodnot zpomalení než na vozovce suché, nabývá velikost tohoto rozdílu hodnoty dvakrát větší.

Blíží-li se tedy vozidlo B k vozidlu A , musí řidič vozidla B snížit rychlost jízdy nebo začít předjíždět ve vzdálenosti tím větší, čím jede rychleji (rychlost v_2), čím je reakční doba řidiče delší (obsažena v době τ), čím je jeho rychlost vzhledem k rychlosti vozidla dojížděného větší (rozdíl $v_2^2 - v_1^2$) a čím je dosažitelné zpomalení vozidla menší (zpomalení a).

Příklad 1. Osobní vůz Škoda 110 L jede po přímé a rovné silnici rychlostí 108 km h^{-1} a dojíždí nákladní auto, jehož rychlost je 72 km h^{-1} . V jaké nejmenší vzdálenosti od nákladního auta by měl řidič osobního vozu snížit rychlost nebo začít předjíždět, předpokládáme-li u obou vozidel: a) na suché vozovce zpomalení $a = 5 \text{ m s}^{-2}$, b) na mokré a blátem znečištěné vozovce zpomalení $a = 2 \text{ m s}^{-2}$. Počítejte pro dobu $\tau = 1 \text{ s}$.

Řešení : Jde o výpočet kritické vzdálenosti podle vztahu (6), do něhož postupně dosazujeme $v_2 = 108 \text{ km h}^{-1} = 30 \text{ m s}^{-1}$, $v_1 = 72 \text{ km h}^{-1} = 20 \text{ m s}^{-1}$, $\tau = 1 \text{ s}$ a dále pro případ a) $a = 5 \text{ m s}^{-2}$ a pro případ b) $a = 2 \text{ m s}^{-2}$.

Jak se můžeme snadno přesvědčit, dostáváme:

a) na suché vozovce $l = 80 \text{ m}$,

b) na mokré a blátem znečištěné vozovce $l = 155 \text{ m}$.

Všimněte si, že na mokré a kluzké vozovce se kritická vzdálenost v tomto případě téměř zdvojnásobí. Proto při dojíždění jiného vozidla na takové silnici dbejme zvýšené opatrnosti!

V dalším příkladu ukážeme, jak se při určité rychlosti v_2 vozidla A mění velikost kritické vzdálenosti l v závislosti na různých rychlostech v_1 vozidla B .

Příklad 2. Nákladní auto jede rychlostí 36 km h^{-1} . Do jaké nejmenší vzdálenosti se smí přiblížit osobní automobil, který dojíždí nákladní auto při rychlosti: a) 54 km h^{-1} , b) 72 km h^{-1} , c) 90 km h^{-1} ? Předpokládáme dobu $\tau = 1 \text{ s}$ a možné zpomalení obou vozidel 5 m s^{-2} .

Řešení : Podobně jako v příkladu 1 dosazujeme do vztahu (6) $v_1 = 36 \text{ km h}^{-1} = 10 \text{ m s}^{-1}$, $\tau = 1 \text{ s}$, $a = 5 \text{ m s}^{-2}$ a dostáváme:

a) pro $v_2 = 54 \text{ km h}^{-1} = 15 \text{ m s}^{-1}$ vzdálenost $l = 27,5 \text{ m}$,

b) pro $v_2 = 72 \text{ km h}^{-1} = 20 \text{ m s}^{-1}$ vzdálenost $l = 50 \text{ m}$,

c) pro $v_2 = 90 \text{ km h}^{-1} = 25 \text{ m s}^{-1}$ vzdálenost $l = 77,5 \text{ m}$.

Z výsledků je opět zřejmé, že čím rychleji dojíždíme jiný automobil, tím dříve se musíme rozhodnout buď ke snížení rychlosti nebo k předjíždění.

Velmi názorně můžeme sledovat hodnoty kritické vzdálenosti při různých velikostech rychlostí v_1 a v_2 v tabulce I. K jejich výpočtu jsme použili nejčastěji se vyskytující hodnoty, doby $\tau = 1$ s a zpomalení $a = 5$ m s⁻². Z tabulky můžeme např. snadno vyčíst:

20 m při rychlosti $v_2 = 20$ m s⁻¹,
 80 m při rychlosti $v_2 = 30$ m s⁻¹,
 160 m při rychlosti $v_2 = 40$ m s⁻¹.

Kromě toho si můžeme všimnout, že při stejných rychlostech obou vozidel je hodnota kritické vzdálenosti nejmenší a je číselně rovna jejich rychlosti vyjádřené v metrech za sekundu; např. při rychlosti obou vozidel 20 m s⁻¹, 30 m s⁻¹, 40 m s⁻¹ je kritická vzdálenost 20 m, 30 m, 40 m.

Toto zjištění nás však nemusí překvapovat, neboť vyplývá přímo ze vztahu (6). Dosadíme-li totiž do tohoto vztahu $v_1 = v_2$, je druhý člen $\frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$ roven nule a kritická vzdálenost

$$l = v_2 \tau. \quad (7)$$

Dospěli jsme k důležité rovnici pro kritickou vzdálenost vozidel, která se pohybují stejnými rychlostmi. Porovnáme-li rovnici (7) se vztahem (2), poznáváme, že se tato vzdálenost rovná dráze nebrzděného vozidla.

Poněvadž případ vozidel jedoucích za sebou stejnými rychlostmi nastává na silnicích poměrně často (např. při větší frekvenci vozidel), měli by se řidiči naučit kritickou vzdálenost, danou vztahem (7), spolehlivě odhadovat. Tento odhad je poměrně jednoduchý. Předpokládáme-li u pozorného řidiče a rychle reagujících brzd dobu $\tau = 1$ s, stačí jen převést hodnotu rychlosti, kterou ukazuje rychloměr vozidla v km h⁻¹, na hodnotu v m s⁻¹; ta je pak číselně rovna právě kritické vzdálenosti l v metrech. Jedeme-li např. rychlostí 90 km h⁻¹ = 25 m s⁻¹, je vzdálenost $l = 25$ m; má-li být ovšem naše jízda bezpečná, budeme udržovat za vozidlem jedoucím před námi vždy vzdálenost větší než 25 m.

Příklad 3. Vypočítejte kritickou vzdálenost dvou za sebou jedoucích vozidel při jejich rychlosti 90 km h⁻¹, je-li doba zpoždění účinku brzd 0,2.

Příklad 3. Vypočítejte kritickou vzdálenost dvou za sebou jedoucích vozidel při jejich rychlosti 90 km h⁻¹, je-li doba zpoždění účinku brzd 0,2 s a reakční doba řidiče: a) 0,8 s, b) 1,2 s, c) 1,8 s.

Řešení: Jelikož obě vozidla mají stejnou rychlost, použijeme k výpočtu kritické vzdálenosti vztahu (7), v němž doba τ je součet doby

zpoždění účinku brzd a reakční doby řidiče. Pro rychlost $v_2 = 90 \text{ km h}^{-1} = 25 \text{ m s}^{-1}$ a pro jednotlivé reakční doby řidiče dostáváme:

- a) doba $\tau = 1 \text{ s}$, vzdálenost $l = 25 \text{ m}$,
- b) doba $\tau = 1,4 \text{ s}$, vzdálenost $l = 35 \text{ m}$,
- c) doba $\tau = 2 \text{ s}$, vzdálenost $l = 50 \text{ m}$.

Z výsledků vyplývá pro řidiče jedno závažné poučení: Je-li vaše reakční doba z jakýchkoli důvodů snížena (např. únavou, rozptýlením při rozhovoru se spolucestujícími), udržujte od vozidla jedoucího před vámi větší odstup!

Příklad 4. Kolona deseti vojenských vozidel se pohybuje po silnici rychlostí 54 km h^{-1} . Vypočítejte nejkratší délku kolony, při níž odstup mezi jednotlivými vozy kolony je roven kritické vzdálenosti l . Délka každého vozidla je 8 m . Předpokládejte, že doba zpoždění účinku brzd je $0,2 \text{ s}$, reakční doba každého řidiče 1 s a možné zpomalení vozidel 5 m s^{-2} .

Řešení: Nejdříve určíme kritickou vzdálenost dvou vozidel podle vztahu (7), do něhož dosadíme za rychlost $v_2 = 54 \text{ km h}^{-1} = 15 \text{ m s}^{-1}$ a za dobu $\tau = 1,2 \text{ s}$. Pro kritickou vzdálenost obdržíme $l = 18 \text{ m}$. Poněvadž mezi deseti za sebou jedoucími vozidly je devět mezer, činí úhrnná vzdálenost mezi vozidly $9 \cdot 18 \text{ m} = 162 \text{ m}$. K tomu pak připočítáme délku deseti vozidel, tj. $8 \text{ m} \cdot 10 = 80 \text{ m}$ a dostaneme nejkratší délku kolony $162 + 80 \text{ m} = 242 \text{ m}$.

Chcete-li, můžete si pro zajímavost ještě vypočítat nejkratší délku této kolony při rychlostí 72 km h^{-1} a 90 km h^{-1} . Zjistíte, že délka kolony musí být při vyšších rychlostech větší — nejméně 296 m a 350 m .

Nedodržování bezpečných odstupů mezi vozidly zvláště při velkých rychlostech se nevyplácí. Jistě jste slyšeli nebo četli o hromadných haváriích na dálnicích, které vznikají např. tím, že jedno vozidlo z dlouhé kolony rychle jedoucích vozidel náhle zabrzdí a několik dalších vozů na ně pak najede.

Ale vraťme se ještě k tabulce I a sledujme její údaje v prvním řádku, tj. údaje pro rychlost dojížděného vozidla $v_1 = 0 \text{ m s}^{-1}$. Poněvadž jde v tomto případě o stojící vozidlo, které představuje pro ostatní vozidla na silnici nehybnou překážku, nabývá vzdálenost největších hodnot a je rovna celkové dráze potřebné k zastavení vozidla. Dosadíme-li totiž do vztahu (6) $v_1 = 0$, obdržíme

$$l \leq v_2 \tau + \frac{v_2^2}{2a},$$

což se v podstatě shoduje se vztahem (3).

Vztah (6) pro kritickou vzdálenost jsme odvodili pro stejné zpomalení obou vozidel. Často se však stává, že dvě za sebou jedoucí vozidla mají

Tabulka I.

Rychlost v_2 [m s ⁻¹]		10	20	30	40	m
Vzdálenost l [m] pro rychlosti v_1 [m s ⁻¹]	$v_1 = 0$	20	60	120	200	m
	$v_1 = 10$	10	50	110	190	m
	$v_1 = 20$	—	20	80	170	m
	$v_1 = 30$	—	—	30	110	k

různou účinnost brzdového zařízení a mohou tak dosáhnout různých hodnot zpomalení. Vzhledem k bezpečnosti provozu na silnicích je zvlášť důležitý případ, kdy první vozidlo A je schopno většího zpomalení než za ním jedoucí vozidlo B .

Předpokládejme, že vozidlo A jedoucí rychlostí v_1 začne brzdit a zastaví při zpomalení a_1 na dráze

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2a_1}$$

Spatří-li řidič vozu B jedoucí rychlostí v_2 brzdová světla vozidla A , reaguje rovněž brzděním a zastaví při zpomalení a_2 na dráze

$$s_2 = v_2\tau + \frac{v_2^2}{2a_2}$$

Nemá-li dojít ke kolizi vozidel, platí pro jejich vzájemnou vzdálenost l vztah (viz obr. 1)

$$s_2 \leq l + s_1,$$

z něhož po dosazení za s_1 a s_2 dostaneme po úpravě

$$l \geq v_2\tau + \frac{v_2^2}{2a_2} - \frac{v_1^2}{2a_1}, \quad (8)$$

přičemž znaménko rovnosti vyjadřuje opět kritickou vzdálenost vozidel.

Ze vztahu (8) je zřejmé, že o velikosti kritické vzdálenosti rozhoduje kromě výrazu $v_2\tau$ také rozdíl brzdných drah uvažovaných vozidel. Tento rozdíl je pak tím větší, čím větší je rychlost v_2 vzhledem k rychlosti v_1 a čím menší je zpomalení a_2 vzhledem ke zpomalení a_1 . Přibližuje-li se tedy rychlejší vozidlo B k pomalejšímu vozidlu A , musí vozidlo B udržet tím větší odstup od vozidla A , čím je jeho relativní rychlost větší a čím menšího zpomalení může při brzdění dosáhnout.

Uvažujeme-li ještě případ, kdy obě vozidla mají stejnou rychlost, ale každé z nich může dosáhnout jiného zpomalení, lze vztah (8) poněkud zjednodušit. Položíme $v_1 = v_2 = v$ a dostáváme

$$l \geq v\tau + \frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right). \quad (9)$$

Porovnáme-li tento vztah se vztahem (7), zjistíme, že kritická vzdálenost vozidel schopných různého zpomalení se liší od kritické vzdálenosti vozidel stejného zpomalení právě o člen

$$\frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right)$$

Je-li $a_2 < a_1$, je $\frac{1}{a_2} > \frac{1}{a_1}$ a kritická vzdálenost $l > v\tau$

Je-li naopak $a_2 > a_1$, pak je $\frac{1}{a_2} < \frac{1}{a_1}$ a kritická vzdálenost $l < v\tau$; v tomto

případě, kdy druhé vozidlo je schopno většího zpomalení než vozidlo první, by kritická vzdálenost l dokonce klesla pod hodnotu určenou výrazem $v\tau$. Poněvadž však žádný řidič nemůže bezpečně vědět, že jeho vůz je schopen většího zpomalení než vůz jedoucí před ním, neměl by nikdy odstup od tohoto vozidla zmenšovat pod hodnotu $l = v\tau$.

Příklad 5. Určete kritickou vzdálenost, dojíždí-li automobil, jehož brzdy mohou vyvolat zpomalení pouze 3 m s^{-2} , rychlostí 108 km h^{-1} jiný automobil, který jede rychlostí 72 km h^{-1} a u něhož se předpokládá zpomalení 5 m s^{-2} . Doba $\tau = 1 \text{ s}$. Jaká je tato vzdálenost v případě, že by oba vozy jely rychlostí 108 km h^{-1} ?

Řešení: V první části úlohy máme určit kritickou vzdálenost vozidel jedoucích různými rychlostmi a schopných různého zpomalení. Použijeme-li proto vztahu (8), do něhož dosadíme $v_1 = 72 \text{ km h}^{-1} = 20 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 108 \text{ km h}^{-1} = 30 \text{ m s}^{-1}$, $a_1 = 5 \text{ m s}^{-2}$, $a_2 = 3 \text{ m s}^{-2}$, $\tau = 1 \text{ s}$ a vy počítáme $l = 140 \text{ m}$.

Druhou část úlohy, v níž předpokládáme stejnou rychlost obou vozidel, vyřešíme pomocí vztahu (9), do něhož dosadíme rychlost $v = 108 \text{ km h}^{-1}$.

Druhou část úlohy, v níž předpokládáme stejnou rychlost obou vozidel, vyřešíme pomocí vztahu (9), do něhož dosadíme rychlost $v = 108 \text{ km h}^{-1} = 30 \text{ m s}^{-1}$ (hodnoty ostatních veličin se nemění) a vy počítáme $l = 90 \text{ m}$.

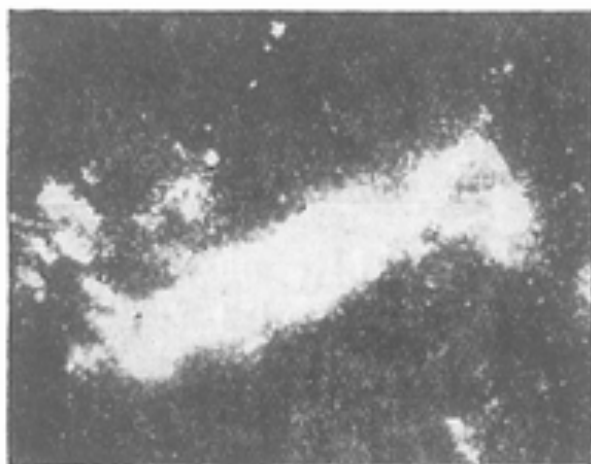
Dodržování bezpečného dostupu vozidel na silnicích by mělo být samozřejmou povinností každého řidiče. Pamatujme, že bezpečný odstup od jiného vozidla máme teprve tehdy, je-li větší než je kritická vzdálenost, kterou jsme stanovili pro několik základních případů silničního provozu. Stanovení kritické vzdálenosti je však rovněž užitečné pro řešení jiného neméně významného dopravního problému, kterým je vzájemné předjíždění vozidel. Ale o tom až příště.

Mračna Magellanova

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ - RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Magellanova mračna byla pojmenována po slavném portugalském mořeplavci Ferdinandu Magellanovi, který žil v letech 1480 až 1521. Magellan je objevil v roce 1519 při své plavbě kolem světa, název jim dal Antonio Pigafetta, účastník a dějepisec Magellanovy výpravy. Prostému oku se jeví Magellanova mračna jako dva mlhavé obláčky, ve skutečnosti jsou to však blízké galaktické soustavy, které lze považovat za satelity naší Galaxie.

V našich zeměpisných šířkách nejsou Magellanova mračna pozorovatelná, neboť jsou v blízkosti jižního světového pólu. Velké mračno Magellanovo je v úhlové vzdálenosti 22° od jižního pólu a promítá se do souhvězdí Dorado a Mensa (české názvy těchto souhvězdí jsou



Obr. 1.

Mečoun a Tabulová hora), Malé mračno je ve vzdálenosti 18° od jižního pólu a je v souhvězdí Tucana (Tukan). Na jižní hvězdné obloze mohou tato mračna nahradit Polárku (vzdálenost Polárky od severního světového pólu je ovšem jen asi 1°).

Velké mračno Magellanovo má zdánlivou hvězdnou velikost $0,5^m$ a úhlový průměr $9^\circ 10'$ (tj. asi 18 průměrů Měsíce v úplňku); zdánlivá hvězdná velikost Malého mračna je $1,5^m$ a průměr $5^\circ 20'$. Obě mračna se řadí mezi nepravidelné galaxie, i když se v posledních letech některým astronomům (např. G. de Vaucouleursovi) podařilo najít náznak spirální struktury. Fotografie Velkého mračna je na obr. 1.

Magellanova mračna jsou poměrně velmi blízko naší Galaxie. Vzdálenost Velkého mračna byla odhadnuta na 64 kpc, Malého mračna na 69 kpc; průměr naší Galaxie je asi 30 kpc, můžeme tedy říci, že mračna jsou ve vzdálenosti, rovné jen asi dvěma průměrům Galaxie. Vzájemná vzdálenost mračen je přitom asi 26 kpc, tedy přibližně jeden průměr Galaxie. Obě mračna jsou menší než naše Galaxie. Skutečný průměr Velkého mračna byl odhadnut na 10 kpc, Malého mračna na 6 kpc, celková hmotnost Velkého mračna se odhaduje na 10 miliard hmotností Slunce, Malého mračna jen na 3 miliardy hmotností Slunce. Pro srovnání připomeňme, že hmotnost Galaxie je kolem 100 miliard hmotností Slunce.

I když jsou obě mračna z hlediska rozměrů Galaxie poměrně blízko (jsou to nejbližší galaxie), je modul vzdálenosti (tj. zdánlivá minus absolutní hvězdná velikost) pro Velké mračno $18,7^m$ a pro Malé mračno $19,0^m$, z čehož plyne, že naše Slunce, jehož absolutní hvězdná velikost je 5^M , by se ze vzdálenosti Magellanových mračen jevilo jako hvězdička 24 zdánlivé hvězdné velikosti a nebylo by viditelné ani největšími dalekohledy. Podobně nemůžeme se Země pozorovat v Magellanových mračnech jednotlivé hvězdy o svítivosti našeho Slunce, můžeme však rozlišit jen hvězdy jasnější. Již hvězdy s absolutní hvězdnou velikostí 3^M , tedy o dvě magnitudy jasnější než Slunce, mají zdánlivou hvězdnou velikost 22^m a jsou na hranicích pozorovatelnosti.

V posledních letech bylo vykonáno mnoho pozorování Magellanových mračen, především na Evropské jižní observatoři Cerro la Silla v severním Chile, na observatořích v Austrálii aj. Bylo zjištěno, že obě mračna jsou bohatá na proměnné hvězdy typu δ Cephei, přičemž relativní počet těchto hvězd, tj. počet hvězd přepočtený na jeden čtverečný stupeň, je v Malém mračnu čtyřikrát větší než ve Velkém mračnu. Manželé Gaposchkinovi zkatalogizovali 1111 těchto hvězd ve Velkém mračnu a 1155 v Malém mračnu. V mračnech byly objeveny také hvězdné asociace. Ve Velkém mračnu bylo např. objeveno 122 hvězdných asociací, přičemž střední průměr asociací je 78 parseků, což je hodnota blízká rozměrům asociací v okolí Slunce v naší Galaxii. Pomocí radioastronomických měření na vlnové délce 21 cm byla odhadnuta i hmotnost neutrálního vodíku v obou soustavách. Podle výpočtů dosahuje asi 45 % hmotnosti těchto galaxií.

Měření radiálních rychlostí ukázala, že se obě mračna vzdalují od Slunce; Velké mračno rychlostí 275 km s^{-1} , Malé rychlostí 163 km s^{-1} . Předpokládá se, že se Magellanova mračna otáčejí kolem své osy. Rotační doba Velkého mračna byla odhadnuta na 200 miliónů roků, avšak poloha rotační osy nebyla dosud bezpečně stanovena. V posledních letech bylo také zjištěno, že Velké mračno je zdroem rentgenového záření, které je 30krát intenzivnější než záření Krabí mlhoviny v souhvězdí Býka. V Magellanových mračnech byl zjištěn také značný

počet kulových hvězdokup. Zvláštností je, že se mezi nimi vyskytují kulové hvězdokupy složené ze žhavých modrých hvězd, což nasvědčuje tomu, že jde o poměrně mladé útvary, zatím co v naší Galaxii patří kulové hvězdokupy k nejstarším objektům.

Spirální galaxie v Andromedě

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Mezi objekty, které můžeme na severní hvězdné obloze pozorovat pouhým okem, patří známá spirální galaxie M 31 (NGC X24) v souhvězdí Andromedy. Její zdánlivá hvězdná velikost je 5,0^m a najdeme ji jako mlhavý obláček v blízkosti hvězdy ν , severně od hvězdy Mirach (β Andromedae). Skutečný vzhled této galaxie ukáže teprve fotografie, zhotovená velkým dalekohledem (obr. 1). Úhlové rozměry galaxie na



Obr. 1. Spirální galaxie M 31 v Andromedě

obloze jsou $160' \times 40'$ a na fotografii vidíme kromě centrálního jádra také spirální větve.

Jako první zaznamenal existenci mlhavého obláčku v Andromedě v roce 1612 Simon Marius, žák Braheův a Keplerův; považoval však tento útvar za mlhovinu. V pozdějších letech byla pomocí dalekohledů objevena řada dalších podobných útvarů, avšak ještě v 19. století byly všechny mylně považovány za mlhoviny a předpokládalo se, že jsou řádově ve stejné vzdálenosti jako hvězdy.

Významným mezníkem ve studiu „mlhoviny“ v Andromedě byl rok 1885, kdy E. Hartwig pozoroval v této soustavě vzplanutí supernovy, ale tehdejší přístrojová technika nestačila ještě k tomu, aby mohla být zjištěna skutečná podstata mlhoviny. Teprve v r. 1926 se americkému astronomu Walteru Baadeovi podařilo pomocí tehdy největšího dalekohledu o průměru 250 cm na hvězdárně Mt. Wilson rozložit okrajové části soustavy na jednotlivé hvězdy. Tehdy už nebylo pochyb o tom, že se nejedná o žádnou mlhovinu, ale o obrovskou soustavu hvězd, která leží daleko za hranicemi naší Galaxie. Další pokrok nastal v roce 1944, kdy též astronom rozložil na hvězdy i centrální oblasti této galaxie.

Dnes víme, že spirální galaxie v Andromedě je nejvzdálenější útvar, pozorovatelný pouhým okem. Vzdálenost této galaxie se odhaduje na 830 kiloparseků, tj. asi 30 průměrů naší Galaxie. Skutečný průměr galaxie M 31 je asi 50 kiloparseků a celková hmotnost kolem 250 miliard hmotností Slunce. Soustava se svou strukturou i rozměry podobá naší Galaxii, i když je pravděpodobně ještě větší než naše Galaxie. Podobu zvyšuje ještě ta skutečnost, že galaxie M 31 v Andromedě má také dva menší průvodce — jsou to eliptické galaxie M 32 (NGC 221) a NGC 205. Připomeňme, že průvodci naší Galaxie jsou Magellanova mračna, nepravidelné galaxie vzdálené asi dva průměry Galaxie.

Ve spirální galaxii M 31 byly objeveny jasné obří a veleobří hvězdy, řada pulsujících proměnných hvězd, bylo pozorováno vzplanutí více než sta nov. Soustava obsahuje rovněž kulové hvězdokupy, kterých bylo dosud zjištěno více než 250 a které jeví, podobně jako kulové hvězdokupy v naší Galaxii, koncentraci ke středu galaxie. Bylo v ní objeveno téměř 700 plynných mlhovin, rozložených podél spirálních větví. Z rozboru rádiového záření této galaxie vyplývá, že 99 % látky galaxie je soustředěno ve hvězdách a jen 1 % připadá na mezihvězdnou látku, což svědčí o poměrně vysokém stáří galaxie. Měření radiálních rychlostí ukázala, že se galaxie M 31 otáčí kolem své osy, přičemž jádro rotuje jako tuhé těleso a ve větších vzdálenostech od jádra úhlová rychlost klesá. Ve vzdálenosti 10 kpc od jádra je oběžná doba asi 250 miliónů roků, což odpovídá oběžné době Slunce kolem středu Galaxie.

Galaxie M 31 v Andromedě se svými průvodci i naše Galaxie s Magellanovými mračny patří do tzv. místní skupiny galaxií. Tato skupina

galaxií má průměr 2000 kpc a tvoří ji celkem asi 30 galaxií, z nichž největší jsou galaxie M 31 v Andromedě a naše Galaxie. Patří k ní také známá spirální galaxie M 33 v souhvězdí Trojúhelníka, která je ve vzdálenosti 800 kpc a má průměr 16 kpc. Několik členů místní skupiny jsou nepravidelné galaxie (např. Magellanova mračna), většinu tvoří poměrně malé eliptické galaxie. V poslední době byly v infračerveném záření objeveny na okraji místní skupiny další dvě galaxie, označované — podle italského astronoma, který je objevil v r. 1968 — Maffei 1 a Maffei 2. Tyto objekty leží v galaktické rovině a proto jsou ve vizuálním oboru silně zeslabeny absorpcí světla v mezihvězdné látce.

různé

Wilhelm Conrad Röntgen

RUDOLF KOLOMÝ, Moravská Třebová

Letos 10. února uplynulo 50 let od úmrtí významného fyzika 2. poloviny 19. stol. a počátku 20. stol. Wilhelma Conrada Röntgena, jehož objev paprsků X znamenal velký převrat v přírodních a technických vědách.

W. C. Röntgen se narodil 27. března 1845 v Lennepe (Německo) v rodině obchodníka. Na gymnasiu v Utrechtu prospíval jen průměrně, dokonce byl pro nějaký žákovský přestupek vyloučen ze školy a po externím studiu neprospěl ani při maturitní zkoušce. Proto se nemohl zapsat na universitu a odešel na polytechniku do Curychu (kde jej přijali bez maturity), kterou ukončil v r. 1868 s diplomem strojního inženýra. Nemínil se však věnovat inženýrskému povolání a raději přijal místo asistenta u prof. Kundta, předního fyzika na polytechnice v Curychu. Brzo se vypracoval na velmi schopného experimentátora a r. 1869 dosáhl doktorátu. V roce 1872 odešel s prof. Kundtem na universitu do Štrasburku, potom působil po tři roky jako profesor matematiky a fyziky na zemědělské akademii v Hohenheimu. Když na sebe upozornil svými vědeckými pracemi, byl jmenován na doporučení několika významných fyziků (Helmholtze, Kirchhoffa, Kundta a Mayera) řádným profesorem na universitě v Giesenu a později ve Würzburgu. Tam také se udál slavný objev paprsků X, později nazvaných rentgenovými.

Zákony elektrického proudu v kovových vodičích a elektrolytech byly známy již v 1. polovině 19. stol. (Ohm, Kirchhoff, Faraday). Pozornost

fyziků se obracela k elektrickým výbojům ve zředěných plynech. J. Plücker objevil r. 1859 do té doby neznámé paprsky, které Goldstein později nazval katodovými, o nichž bylo zjištěno, že jsou proudem záporně nabitých elektrických částic, vycházejících kolmo z katody výbojové trubice (Hittorf, Crookes, Hertz, Lenard).

Při experimentování s katodovými paprsky 8. listopadu 1895 objevil Röntgen nový druh paprsků, které pojmenoval paprsky X. Podstatu svého objevu popsal takto: „Když necháme procházet elektrický výboj většího Ruhmkorffova induktoru Hittorfovou trubicí či Crookesovou trubicí nebo podobnou aparaturou a jestliže ji těsně obalíme černým kartonovým papírem v dokonale zatemněné místnosti, stínidlo pokryté kyanidem platnatobarnatým, nacházející se nedaleko trubice, světélkuje, a to i tehdy, když citlivou vrstvu odvrátíme od trubice. Tuto fluorescenci pozorujeme i v tom případě, když stínidlo je ve vzdálenosti dvou metrů od experimentálního zařízení. Nejpozoruhodnější na tomto objevu je ta skutečnost, že určitý aktivní činitel prochází černým obalem, který je neprůsvitný pro viditelné a ultrafialové záření Slunce anebo elektrického oblouku...“ Röntgen vložil mezi stínítko a trubicí svou ruku a spatřil, co dosud nikdo na světě — obraz kostí vlastní ruky.

Brzy po objevu Röntgen prozkoumal i základní vlastnosti paprsků X. Zjistil, že tyto paprsky vznikají v katodové trubicí dopadem katodových paprsků na antikatodu, šíří se přímočaře, ve vzduchu se málo pohlcují, v hranolu se nelámou, elektrickým a magnetickým polem nejsou vychylovány — nemohou tedy být totožné s katodovými paprsky, avšak jsou jimi vyvolávány. Když dal paprskům X do cesty různá tělesa, pozoroval, že pronikají neprůzračnými látkami, a to tím lépe, čím je hustota látky menší. Podle Röntgenova vyjádření procházejí paprsky X neprůzračnou látkou tak, jako světlo zakouřenou místností. Později zjistil řadu dalších důležitých vlastností, jako např. ionizaci vzduchu, vzrůst pronikavosti se zvětšením rychlosti elektronů v katodových paprscích aj. Jako první zkonstruoval trubicí se šikmo nastavenou antikatodou z platiny a s katodou tvaru kulového vrchlíku — Röntgenovu trubicí.

28. prosince 1895 podal Röntgen zprávu „O novém druhu paprsků“ na zasedání Fyzikální a lékařské společnosti ve Würzburgu; zpráva byla ihned publikována. Později uveřejnil ještě dva články: „Nový druh paprsků“ (1896) a „Další pozorování vlastností paprsků X“ (1897). Všechny tři práce měly pouhých 19 tištěných stran. Max von Laue se později o nich vyjádřil takto: „Röntgen musel velmi pracovat, aby v letech 1895—1897 napsal tři články, které natolik vyčerpaly zkoumanou problematiku, že celé desetiletí nemohlo nic přidat. S takovou geniální důkladností byly tyto články napsány mnozí přední experimentální fyzici pracovali se stejnými prostředky, a přesto neobjevili paprsky X...“

O tom, že objev nových paprsků byl skutečně „na spadnutí“, svědčí i to, že také u nás byli dva fyzikové, kteří prováděli pokusy nezávisle na Röntgenovi současně s ním nebo snad i dříve než on, aniž však se svým objevem vystoupili. Byl to profesor německé techniky v Praze dr. Ivan Puluj (1845—1918) a dr. František Nábělek (1852—1916), profesor gymnasia v Kroměříži, jemuž byla nedávno odhalena pamětní deska na domě, kde bydlel. Nábělkovi žáci dlouho vzpomínali, jak jim několikrát prosvítil svou ruku neznámými paprsky a přitom říkal: „Abyste viděli, jak bude vypadat váš profesor po smrti.“

Málokterý z vědeckých objevů způsobil ve veřejnosti takový roruch (stal se i předmětem nesčetných kabaretních vtipů). Již 13. ledna 1896 požádal Röntgena německý císař o osobní informaci.

Röntgen nazval neznámé záření paprsky X, ale 23. ledna 1896 na zasedání Fyzikální a lékařské společnosti ve Würzburgu navrhl anatom A. von Kolliker, aby nové paprsky byly pojmenovány Röntgenovým jménem. Vynálezce odmítl stejně jako řadu nabídek průmyslových závodů, které se předbíhaly v získání patentu, a odmítl ve své skromnosti i šlechtický titul. Dobrovolně odevzdal svůj vynález celému lidstvu, když prohlásil: „Mají ho užívat všichni ti, kteří to budou potřebovat.“ Odmítl čestné a vysoce placené místo člena Berlínské akademie věd i Helmholtzovu katedru fyziky na universitě v Berlíně. R. 1901 dostal za svůj objev jako první Nobelovu cenu za fyziku a finanční částku s ní spojenou odkázal své universitě pro podporu dalšího vědeckého bádání. (Mezi kandidáty na první Nobelovu cenu za fyziku byli kromě Röntgena S. Arrhenius, H. Becquerel, lord Kelvin, J. J. Thomson, J. D. van der Waals a P. Zeeman.)

Röntgenův objev sehrál velkou úlohu v rozvoji přírodních a technických věd. Röntgenovy paprsky umožnily podrobné studium struktury atomů i krystalů (tzn. studium toho, jak jsou uspořádány elektrony v atomech a jak jsou rozmístěny atomy v krystalické mřížce.) Významné uplatnění našly v průmyslu zejména v defektoskopii (kontrola celistvosti materiálů). Neocenitelné služby poskytly medicíně, a to nejen k účelům diagnostickým, nýbrž i léčebným (např. k ozařování zhoubných nádorů), kde se jich začalo z Röntgenovy iniciativy užívat ihned po jejich objevu.

Velkou úlohu sehrál Röntgenův objev i v dějinách přírodních věd. Objevením těchto paprsků spolu s Becquerelovým objevem přirozené radioaktivity z r. 1896 a objevem nových radioaktivních prvků radia a polonia manžely Curieovými r. 1898 se uzavřela klasická část fyziky, vysvětlující vše na základě mechaniky, a zároveň se otevřela nová moderní část fyziky — atomistika.

W. C. Röntgen se ještě dočkal obrovského rozšíření svého objevu — zemřel 10. února 1923 v Mnichově.

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

1. Danému trojúhelníku ABC , v němž $BC > AC > AB$, je opsána kružnice k . Průsečíky osy vnitřního úhlu CAB (ABC , BCA) s kružnicí k označme A' (B' , C').

a) Ukažte, že pro délky úseček AA' , BB' , CC' může v daném případě platit pouze jediná, nikoli libovolná rovnost ze tří možných

$$AA' = BB', BB' = CC', CC' = AA'.$$

b) Popište konstrukci trojúhelníka ABC , jsou-li dány ony dvě úsečky, pro něž rovnost sub a) platí, a dva vrcholy trojúhelníka, z nichž tyto úsečky vycházejí.

(Došlo 18 řešení)

Josef Brejcha

Řešil: Imrich Vrto, IVA, G, Rimavská Sobota:

Určíme nejprve délky úseček AA' , BB' , CC' . V označení v textu úlohy plyne ze sinové věty pro trojúhelník ABA' s ohledem na větu o obvodových úhlech v kružnici nad touž tětivou

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{\sin \left[2R - \left(\gamma + \frac{\alpha}{2} \right) \right]}{\sin \gamma} \Rightarrow AA' = \frac{AB}{\sin \gamma} \sin \left(\gamma + \frac{\alpha}{2} \right) \quad (1)$$

Je-li r poloměr kružnice, opsané trojúhelníku ABC , pak platí

$$AB = 2r \sin \gamma.$$

Po dosazení do (1) máme ihned

$$AA' = 2r \sin \left(\gamma + \frac{\alpha}{2} \right)$$

Podobně určíme:
$$BB' = 2r \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right)$$

$$CC' = 2r \sin \left(\beta + \frac{\gamma}{2} \right)$$

Podmínku $BC > AC > AB$ v textu úlohy nahradíme ekvivalentní podmínkou pro vnitřní úhly

$$\alpha > \beta > \gamma \quad (2)$$

Předpokládejme nyní, že platí rovnost $AA' = BB'$. Potom platí též

$$\sin \left(\gamma + \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right)$$

odkud plyne 1.:

$$\gamma + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \frac{\beta}{2} \quad \text{tj.}$$

$$\gamma = 60^\circ.$$

Pak je ale, vzhledem k (2):

$$\alpha + \beta + \gamma > 3\gamma = > \alpha + \beta + \gamma > 2R, \text{ což je spor.}$$

$$2.: \gamma + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2}, \text{ tj.}$$

$$\alpha = \beta,$$

což je rovněž spor s předpokladem $\alpha > \beta$.

Rovnost $AA' = BB'$ tedy platit nemůže. Zcela analogicky lze ukázat, že nemůže platit ani rovnost $BB' = CC'$.

Nechť tedy platí rovnost $AA' = CC'$. Pak platí též

$$\sin \left(\gamma + \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \left(\beta + \frac{\gamma}{2} \right), \text{ tj.}$$

1.:

$$\gamma + \frac{\alpha}{2} = \beta + \frac{\gamma}{2}$$

$$\beta = 60^\circ,$$

což je vzhledem k podmínce (2) hodnota přípustná.

2.:

$$\gamma + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \beta - \frac{\gamma}{2},$$

$$\alpha = \gamma, \text{ což je spor.}$$

Ze tří, v textu úlohy uvedených rovností, může tedy platit pouze rovnost $AA' = CC'$ a to v případě, že $\beta = 60^\circ$

Konstrukce:

Podle textu úlohy je sestrojiti trojúhelník daný stranou AC , úsečkou $d = AA' = CC'$ a úhlem $\beta = 60^\circ$.

1. Hledaný vrchol B bude bodem kruhového oblouku k , který je geometrickým místem bodů, z nichž je úsečku AC vidět v daném úhlu $\beta = 60^\circ$.

2. Bod A' je určen jako jeden ze dvou*) průsečíků kruhového oblouku k s kružnicí, opsanou kolem středu A poloměrem $d = AA'$

3. Bod B je pak bodem kruhového oblouku k takovým, že platí

$$\widehat{CA'} = \widehat{A'B}$$

vzhledem ke známé větě, že symetrála strany trojúhelníka a symetrála jeho protějšího vnitřního úhlu se protínají v bodě kružnice, tomuto trojúhelníku opsané.

Podmínkou řešitelnosti je nerovnost $AC < d < \frac{AC}{\sin 60^\circ}$

2. V rovině je dána kružnice $k \equiv (S; r)$. Necht' Q je libovolný vypuklý tečnový čtyřúhelník, jemuž je kružnice k vepsána a který má alespoň jeden úhel velikosti 60° . Najděte geometrické místo druhého nejvzdálenějšího vrcholu od středu S všech takových čtyřúhelníků Q .

(Došlo 19 řešení)

Miroslav Fiedler

Řešení podle Karla Horáka, IV B, G, Strakonice:

Je-li X vrchol čtyřúhelníka Q s příslušným úhlem ξ , platí

$$SX = \frac{r}{\sin \frac{\xi}{2}} \quad 0 < \xi < 180^\circ. \quad (1)$$

Funkce sinus je rostoucí v I. kvadrantu, takže vrcholu čtyřúhelníka *vzdálenějšímu* od S odpovídá menší úhel.

Čtyřúhelník Q má zřejmě právě jeden nebo právě dva úhly velikosti 60° . Označme jeho vrcholy A, B, C, D a příslušné úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tak, že

$$\alpha = 60^\circ, \beta \leq \gamma \leq \delta, \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ. \quad (2)$$

Rozlišujeme:

1. $\alpha = \beta = 60^\circ$; pak $\gamma + \delta = 240^\circ$, tedy $60^\circ < \gamma \leq \delta$, což podle (1) dává

$$SA = SB = 2r > SC \geq SD.$$

*) Přísluší-li k jednomu průsečíku A' trojúhelník ABC , přísluší i druhému trojúhelník $A\bar{B}C$, souměrný s prvním podle symetrály strany AC . Pro trojúhelník $A\bar{B}C$ je ovšem nutno podmínku -2- nahradit podmínkou

$$\gamma > \beta > \alpha.$$

V tomto případě probíhá druhý nejvzdálenější vrchol kružnici

$$k_1 \equiv (S; r_1 = 2r) \quad (3)$$

2. $\alpha = 60^\circ$, $\beta < 60^\circ$; pak nutně $60^\circ < \gamma \leq \delta$, $\beta + \gamma + \delta = 300^\circ$.

Je tedy $SB > SA > SC \geq SD$ a vrchol probíhá opět kružnici k_1 .

3. $\alpha = 60^\circ$, $60^\circ < \beta \leq \gamma \leq \delta$; pak $SA > SB \geq SC \geq SD$ a z podmínky $\beta + \gamma + \delta = 300^\circ$ plyne $60^\circ < \beta \leq 100^\circ$ čili

$$r_2 = \frac{r}{\sin 50^\circ} \leq SB < 2r = r_1. \quad (4)$$

Označme M mezikruží omezené kružnicemi k_1 a $k_2 \equiv (S; r_2 = \frac{r}{\sin 50^\circ})$, přičemž k_1 a k_2 počítáme k M . Dokážeme, že M je hledané geometrické místo. Podle (3) a (4) patří každý bod hledaného geometrického místa množině M . Je-li obráceně $B \in M$, pak tečná polopřímka vedená z bodu B ke kružnici k protne k_1 v bodě, který označíme A . Lze pak sestavit tečnový čtyřúhelník $ABCD$ tak, že $\gamma = \delta = \frac{1}{2}(300^\circ - \beta)$, neboť $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ a $100^\circ \leq \gamma = \delta < 120^\circ$. Protože $SA \geq SB \geq SC = SD$, je bod $B \in M$ druhým nejvzdálenějším vrcholem čtyřúhelníka $ABCD$ od středu S .

Závěr. Geometrickým místem je mezikruží M omezené kružnicemi

$$k_1 \equiv (S; 2r) \text{ a } k_2 \equiv \left(S; \frac{r}{\sin 50^\circ}\right)$$

3. V tětiovém čtyřúhelníku $ABCD$ (při obvyklém označení předpokládejme $a < b < c < d$) je dán obsah $S = 30\sqrt{6} \text{ cm}^2$, obvod $2s = 36 \text{ cm}$, součet čtverců všech jeho stran $\sigma = 350 \text{ cm}^2$ a součin jeho úhlopříček e, f , $ef = 158 \text{ cm}^2$. Určete délky jeho stran. (Při výpočtu použijte vzorce pro obsah tětiového čtyřúhelníka a vzorce pro součin úhlopříček.)

(Došlo 18 řešení)

Jan Fráňa

Řešil Karel Horák, 4.b gymnasium Strakonice

Platí:

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = 30\sqrt{6} \quad (1)$$

$$2s = a + b + c + d = 36 \quad (2)$$

$$\sigma = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 350 \quad (3)$$

$$ef = ac + bd = 158 \quad (4)$$

předpoklad

$$a < b < c < d. \quad (5)$$

Z rovnic (1), (2) dostaneme rovnici:

$$(18 - a) \cdot (18 - b) \cdot (18 - c) \cdot (18 - d) = 5400$$

čili

$$[324 - 18(a + c) + ac] \cdot [324 - 18(b + d) + bd] = 5400. \quad (6)$$

Umocněním vztahu:

$$(a + c) + (b + d) = 36 \quad (7)$$

máme rovnici:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(ac + bd) + 2(ab + ad + bc + cd) = 1296;$$

užitím (3), (4) a úpravou dostáváme:

$$(a + c) \cdot (b + d) = 315. \quad (8)$$

Rovnice (7) a (8) vzhledem k podmínce (5) dávají řešení:

$$a + c = 15; \quad b + d = 21. \quad (9)$$

Rovnici (6) můžeme užitím (9) psát ve tvaru:

$$(54 + ac) \cdot (bd - 54) = 5400;$$

avšak $bd = 158 - ac$, takže $(54 + ac) \cdot (104 - ac) = 5400$; pak

$$(ac)^2 - 50ac - 216 = 0. \quad (10)$$

Vyhovuje kořen $ac = 54$; $bd = 104$.

Soustava rovnic (9), (10) vzhledem k předpokladu (5) určuje délky stran tětiového čtyřúhelníka: $a = 6$, $b = 8$, $c = 9$, $d = 13$ cm.

4. V intervalu $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ najděte všechny úhly x , které vyhovují nerovnici

$$3 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cos 2x < 2 (1 - \operatorname{tg}^2 x)^2.$$

(Došlo 22 řešení)

Stanislav Horák

Řešení podle Jaroslava Hory, IV A, G Blovice

Je patrné, že jedním řešením je $x = 0^\circ, 360^\circ$. Tímto triviálním řešením se nebudeme v dalším zabývat.

Danou nerovnici upravujeme:

$$3 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos 2x < 2 \left(\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} \right)^2$$

$$3 \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x \cdot \cos 2x < 2 \cos^2 2x$$

$$3 \sin 2x \cdot \cos 2x < 4 \cos^2 2x$$

$$\operatorname{tg} 2x < \frac{4}{3}$$

Jestliže $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3}$, pak z tabulek zjistíme, že $2\alpha = 53^\circ 08' + k \cdot 180^\circ$,

kde k je libovolné celé číslo. Podle toho

$$0^\circ + k \cdot 180^\circ < 2x < 53^\circ 08' + k \cdot 180^\circ$$

$$0^\circ + k \cdot 90^\circ < x < 26^\circ 34' + k \cdot 90^\circ$$

Jestliže: $k = 0$: $0^\circ < x < 26^\circ 34'$,

$k = 1$: $90^\circ < x < 116^\circ 34'$,

$k = 2$: $180^\circ < x < 206^\circ 34'$,

$k = 3$: $270^\circ < x < 296^\circ 34'$

K těmto řešením přistupují dříve uvedené meze přípustného intervalu $x = 0^\circ, 360^\circ$

Poznámka. Mez $26^\circ 34'$ není přesná, neboť byla vzata z tabulek. Skutečná mez je asi o $1''$ menší.

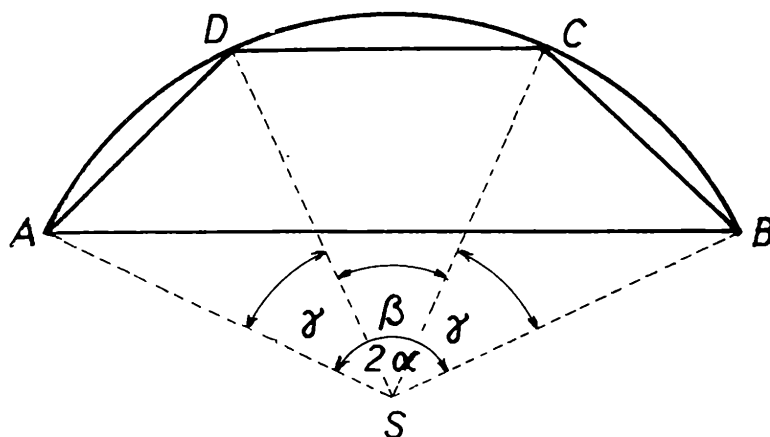
5. Z kruhové úseče, určené středovým úhlem $2\alpha < \pi$ a poloměrem r , vystrihněte rovnoramenný lichoběžník největšího obsahu.

(Došlo 18 řešení)

Jaromír Hroník

Řešil Jozef Širáň, IIIB, G J. Hronca, Bratislava:

Nech na obr. 1 je rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ so základňami AB , CD .



Obr .1.

1. Nech pre uhol α platí: $2\alpha \leq \pi$.

Potom obsah lichoběžníka $ABCD$ možme vypočítat ako rozdiel obsahov päťuholníka $ASBCD$ a trojuholníka ASB $P = P_{ASBCD} - P_{ASB}$.

Je-li $\gamma =$ veľkosť $\sphericalangle ASD =$ veľkosť $\sphericalangle CSB$,

$\beta =$ veľkosť $\sphericalangle DSC$, potom

$$P_{ASD} = \frac{1}{2} r^2 \sin \gamma = P_{CSB} \quad P_{DSC} = \frac{1}{2} r^2 \sin \beta$$

$$P = r^2 \left(\sin \gamma + \frac{1}{2} \sin \beta - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right). \quad (1)$$

Z $2\gamma + \beta = 2\alpha$ vyplýva:

$$\beta = 2\alpha - 2\gamma. \quad (2)$$

Z (2) dosadíme do (1); po úprave:

$$P = \frac{r^2}{2} \left(2 \sin \gamma + \sin (2\alpha - 2\gamma) - \sin 2\alpha \right). \quad (3)$$

Z (3) vyplýva, že P nadobudne maximum práve vtedy, keď nadobudne maximum výraz

$$y = 2 \sin \gamma + \sin (2\alpha - 2\gamma), \quad (4)$$

kde

$$0 < \gamma < 2\alpha \leq \pi. \quad (5)$$

Určíme všetky γ z (5), pre ktoré je $y' = 0$:

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cos \gamma - 2 \cos (2\alpha - 2\gamma), \\ 2 \cos \gamma - 2 \cos (2\alpha - 2\gamma) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Z (6) vyplýva:

$$\begin{aligned} -2 \sin \frac{2\alpha - \gamma}{2} \sin \frac{3\gamma - 2\alpha}{2} &= 0 \Leftrightarrow \sin \frac{2\alpha - \gamma}{2} = 0 \vee \\ \vee \sin \frac{3\gamma - 2\alpha}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Z (7) vzhľadom na (5) vyhovuje práve $\frac{3\gamma - 2\alpha}{2} = 0$, z čoho

$$\gamma = \frac{2}{3} \alpha \quad (8)$$

Lahko sa presvedčíme, že pre (8) je $y'' < 0$, teda funkcia (4) nadobúda maximum v (5) práve pre $\gamma = \frac{2}{3} \alpha$.

Z (8) a (2) okamžite vyplýva

$$\gamma = \beta \quad (9)$$

Z (9) vyplýva $AD = DC = CB$.

Záver: Rovnoramenný lichobežník vpísaný do kruhovej úseče so stredovým uhlom $2\alpha \leq \pi$ a polomerom r má najväčší obsah práve vtedy, keď $AD = DC = CB$. Pre dĺžky AD , DC , CB vychádza $AD = DC = CB = 2r \cdot \sin \frac{1}{3} \alpha$, a pre maximálny obsah $P_{\max} = 2r^2 \cdot \sin^3 \frac{2}{3} \alpha$.

2. Nech $\pi < 2\alpha < \frac{3}{2}\pi$, potom platí ten istý záver.

3. Nech $\frac{3}{2}\pi \leq 2\alpha \leq 2\pi$, potom „lichobežník“ maximálneho obsahu je vlastne štvorec $ABCD$ vpísaný do kružnice. Ak teda nepovažujeme štvorec za rovnoramenný lichobežník, potom najväčší lichobežník v uvedenom intervale pre α neexistuje.

Úlohy k řešení

K úlohám otištěným v 1. čísle připojujeme další, jejichž řešení zašlete nejpozději do 1. března 1974 na adresu redakce: Praha 2, Trojanova 13, PSČ 121 34, s označením: Naše soutěž.

Matematika

8. Jsou-li $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ úhly z intervalu $< 0; \pi >$, pak

$$\left(\sum_{i=1}^n \cos \varphi_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \sin \varphi_i \right)^2 \geq 1,$$

jakmile n je liché. Dokažte!

Miroslav Fiedler

9. Budiž $n \geq 2$ dané přirozené číslo. Dokažte, že rovnice

$$\left(x_1 - \frac{n}{4} \right)^2 + \left(x_2 - \frac{n}{4} \right)^2 + \dots + \left(x_n - \frac{n}{4} \right)^2 = \frac{n^3}{16}$$

má alespoň jedno řešení v přirozených číslech $x_1, x_2, \dots, x_n$

Jaroslav Morávek

10. Dokažte, že existuje n -ciferné číslo napsané jen jednotkami a dvojkami, které je dělitelné mocninou 2^n .

Podle holandského časopisu *Pythagoras*

11. Nad stranami $a \equiv BC$, $b \equiv CA$, $c \equiv AB$ obecného trojúhelníka ABC jsou sestaveny čtverce $ABDE$, $BCFG$, $CAHK$, dále čtverce $DGLM$, $FKNP$ a $EHOR$. Jaké vztahy platí mezi úsečkami $a'' \equiv LP$, $b'' \equiv NQ$, $c'' \equiv RM$ a stranami a, b, c daného trojúhelníka?

Ota Setzer

12. Řešte elementárně bez použití diferenciálního počtu úlohu:

Jsou dány tři body A , B , C trojrozměrného euklidovského prostoru, které neleží v jedné přímce. Z bodu A se pohybuje bod rovnoměrně po polopřímce AC rychlostí v_a , z bodu B také rovnoměrně jiný bod po polopřímce BC rychlostí v_b . Najděte takový okamžik, v němž vzdálenost obou bodů bude nejmenší a vypočítejte ji za předpokladu, že se oba body začnou pohybovat v témž okamžiku. *Přemysl Vihan*

Fyzika

1. Do krve člověka bylo vstříknuto 1 cm^3 radioaktivního roztoku ^{24}Na mající aktivitu $A(0) = 2000$ rozpadů za sekundu. Aktivita 1 cm^3 krve za pět hodin po vstříknutí byla 16 rozpadů za sekundu. Určete objem krve člověka. Poločas rozpadu ^{24}Na je 14,97 hodin. *Zdeněk Janout*

2. Jaký izotop se utvoří z alfa radioaktivního izotopu ^{232}Th v důsledku čtyř rozpadů alfa a dvou rozpadů β^- ? *Zdeněk Janout*

3. Pro zajišťování jednotnosti a přesnosti měření síly má československý metrologický ústav k dispozici etalonové zatěžovací stroje, kde se využívá tíhové síly sady závaží. Má-li jedno takové etalonové zařízení závaží (5, 10, 20, 50, 100, 500) kg, máme v rámci akce přechodu na SI vypočítat: a) jak je zapotřebí upravit stávající závaží, aby jejich hodnoty v newtonech byly opět celistvé; b) jak by bylo třeba upravit stávající závaží, aby jejich hodnoty byly celistvé, kdyby stroj měl být přestěhován do místa s jiným tíhovým zrychlením (z původního $g_1 = 9,810 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ na nové $g_2 = 9,805 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$); c) jaké absolutní chyby přesnosti jsou přípustné u případných přivažků, je-li od etalonového stroje požadována relativní přesnost 10^{-5} . *Václav Šindelář*

5. Konštantná sila $F = 52 \cdot 10^3$ newtonov urychľuje ťachtovú kabínu, ktorej vnútorná výška je $h = 3 \text{ m}$. Od stropu je na lanku dĺžky $s = 1,7 \text{ m}$ (a zanedbateľnej hmotnosti) zavesené teleso hmotnosti $m_2 = 50 \text{ kg}$. Celková hmotnosť výťahu aj s telesom je $m_1 + m_2 = 3250 \text{ kg}$.

Stanovte (zanedbajúc trenie a odpor prostredia):

α) Hodnotu a smer zrýchlenia (a_1), ktoré dodá sila F celej sústave, tj. hmotnosti $m_1 + m_2$.

β) Ťahové napätie lanka (F_t) v pohybujúcej sa kabíne. V istom okamihu sa lanko pretrhlo.

γ) Aké veľké zrýchlenie (a_2) nadobudne výťah v dobe od pretrhnutia lanka do dopadnutia telesa na dlážku kabíny?

δ) Aké veľké zrýchlenie (a_3) má v tej dobe teleso m_2 ?

z) Akú dobu (t_p) trvá pád telesa m_2 od okamihu pretrhnutia do dopadnutia na dlážku kabíny?

Pokyn: Riešte — ako vždy — najprv obecné a určujte pre každú otázku patričný obecný vzťah, v ktorom na pravej strane sú len znaky veličín daných! Overujte dimenzionálnu správnosť získaných vzorcov dosadzovaním fyzikálnych jednotiek. Pre numerický výpočet užívajte $g = 9,80 \text{ m s}^{-2}$!

Evžen Říman

6. Zdroj neznámeho napätia U , ktorého vnútorný odpor je nulový, dáva pre pripojení k neznámemu odporu R prúd I_1 . Ak pripojíme k odporu R v sérii ešte ďalší odpor R_2 , klesne idúci prúd na hodnotu I_2 .

a) Stanovte veľkosť veličín R , U .

b) Keby zdroj mal (neznámy) vnútorný odpor R_i , vtedy by na určenie neznámych R , U , R_i bolo potrebné ešte tretie meranie: napr. odpor R_2 by bol zapojený paralelne k odporu R , takže by zdroj dával prúd I_3 . Odvodte vzťah pre elektromotorické napätie E zdroja v tomto prípade!

Evžen Říman

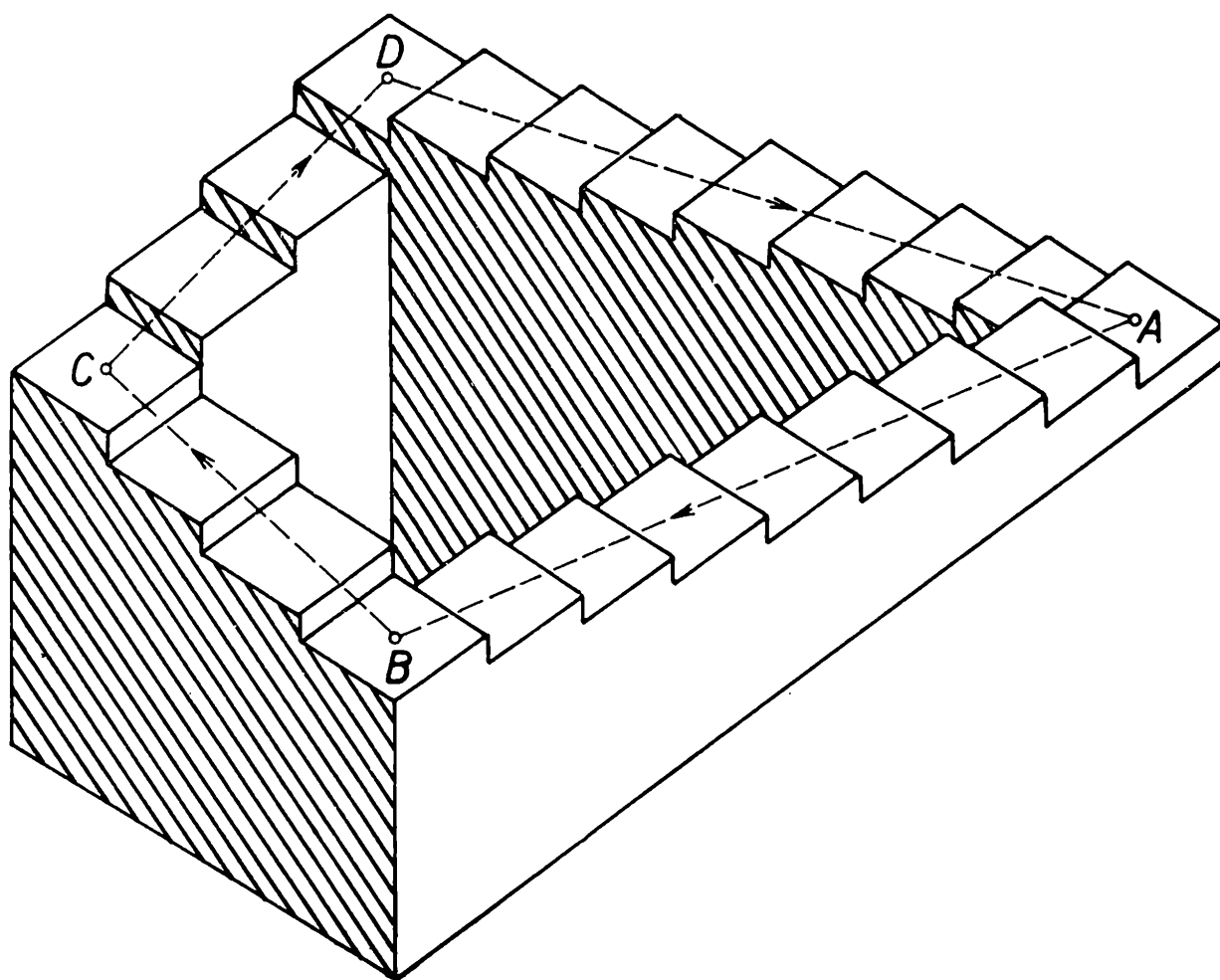
4. Na elektrickém vaříči se nějaké množství vody začne vařit za $\tau_1 = 20 \text{ min.}$, je-li napětí v síti, na niž je vaříč připojen, $U_1 = 120 \text{ V}$. Poklesne-li napětí na $U_2 = 110 \text{ V}$, začne totéž množství vody vřít (ze stejné počáteční teploty) za dobu $\tau_2 = 18 \text{ min.}$ Na kolik by se prodloužil ohřev (τ_3) až do varu, kdyby napětí bylo pouze $U_3 = 100 \text{ V}$. Ve všech třech případech je zřejmě napětí stálé od počátku sledovaného děje až po začátek varu. Při výpočtu uvažujme také ztráty tepla do okolí, jako přímo úměrné době ohřevu.

Václav Šindelář

Ze zahraničních časopisů

Zdání klame aneb podivné schodiště

Na obr. 1, otištěném podle holandského časopisu Pythagoras, stoupá chodec z bodu A přes body B , C , D zase do bodu A .



Z holandského časopisu Pythagoras:

1. Čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla jsou pořadě dělitelná jedenácti, sedmi, pěti a čtyřmi. Najděte nejmenší čtveřici této vlastnosti.

2. Přirozená čísla x , y , z jsou větší než 1. Je-li $x \leq y \leq z$, najděte všechny kořeny rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

3. Jak lze v zahradě umístit 10 stromů do 4 řad tak, aby v každé řadě byly právě 4 stromy?

4. Zvon tluče 6 hodin po dobu 6 vteřin. Za jak dlouho odbije 12 hodin?

5. Jaký je mocnitel čísla 7, rozložíme-li faktoriál 10 000! na součin mocnin prvočíselných činitelů?

Řešení úloh ze str. 142 a 143:

1. 1133, 1134, 1135 a 1136. 2. (3; 7; 42), (3; 8; 24), (3; 9; 18), (3; 10; 15), (3; 12; 12), (4; 5; 20), (4; 6; 12), (4; 8; 8), (5; 5; 10), (6; 6; 6). 3. Pět stromů zasadíme do vrcholů A, B, C, D, E vypuklého pětiúhelníka, ostatních pět do průsečíků jeho úhlopříček. 4. 13,2 vteřiny. 5. $m = 1665$.

6. Máme dvě dvojciferná čísla, která začínají stejnou cifrou a součet cifer na místě jednotek je 10. (na příklad 47 ; 43). Potom jejich součin se dá vypočítat tímto způsobem:

$$\begin{array}{rcl}
 47 \cdot 43 & : 4 \cdot 5 \cdot 10^2 & = 2\,000 \\
 3 \cdot 7 & & = 21 \\
 \hline
 47 \cdot 43 & & = 2\,021 \\
 \text{Jiný příklad: } 71 \cdot 79 & 7 \cdot 8 \cdot 10^2 & = 5\,600 \\
 & 1 \cdot 9 & = 9 \\
 \hline
 \end{array}$$

Dokažte oprávněnost tohoto postupu!

(podle německého matematického časopisu Alpha)

$$\begin{aligned}
 & (10u + v) \cdot (10u + 10 - v) = \\
 & = 10^2 u^2 + 10 uv + 10^2 u + 10 v - 10 uv - v^2 = \\
 & = 10^2 u \cdot (u + 1) + v \cdot (10 - v)
 \end{aligned}$$

kde u představuje počet desítek a písmeno v počet jednotek.

7. Z Prahy do Kaira letí inženýr, montér a elektrikář. Jejich jména jsou Dubský, Linda a Kohout. Žádný z nich nemá současně dvě povolání. Z jejich hovoru vyjímáme:

1. Inženýr a Linda jedou do Bombaye.
2. Kohout a elektrikář jsou z Berlína, zatímco třetí je z Drážďan.
3. Dubský je mladší než montér.
4. Kohout je starší než inženýr.

Jak se jmenují inženýr, montér a elektrikář?

Podle německého časopisu Alpha.

Inženýr se jmenuje Dubský, elektrikář Linda a montér Kohout.

Nejmladším čtenářům

V knihovně je čtyřdílný román (viz obr.). Kolika způsoby je možné jednotlivé díly přemístit tak, aby žádný z dílů nestál na svém původním místě? Napište, v jakém pořadí budou pak jednotlivé díly stát.



1. Jsou dána čtyři čísla: 1, 3, 9, 27. Ukažte, že se z nich užitím sečítání a odečítání dají napsat všechna čísla od 1 do 40. Např.

1 je dané číslo,
 $2 = 3 - 1$,
3 je dané číslo,
 $4 = 3 + 1$ atd.

2. Zjednodušte výrazy

a) $\frac{(3a + 2b)^3 + (b + 3c)^3}{a^2 - (b + c)^2}$;

b) $(2a + b + 2c)^2 - (3a + 2b + 3c)^2 - (4a + 3b + 4c)^2 + (5a + 4b + 5c)^2$.

3. Je dán úhel velikosti 27° . Jak se dá s použitím pravítka a kružítka rozdělit na 3 shodné díly.

4. Jestliže do zlomku

$$Z = \frac{2a + b}{a - 2b}$$

dosadíme $a = 1 + 22k$, $b = 11k - 2$, kde k je libovolné přirozené číslo, pak zlomek se dá zkrátit tak, že vyjde přirozené číslo dělitelné jednácti. Provedte dosazení.

Řešení. 2) a) $(a + b + c)(a - b - c)$; b) $4(a + b + c)^2$.

3) $3 \cdot 27^\circ = 81^\circ$, $90^\circ - 81^\circ = 9^\circ = \frac{1}{3}27^\circ$.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

vést	mener
vést bodem přímku	mener une droite par un point
věta	théorème <i>m</i>
binomická věta	binôme de Newton
existenční věta	théorème d'existence
cosinová věta	théorème des cosinus
sinusová věta	théorème réciproque
opačná věta	théorème contraire
pomocná	lemme
sinusová věta	théorème de sinus
tangentová věta	théorème des tangentes
věta o jednoznačnosti	théorème d'unicité
větev	branche
vícenásobný	multiple
víceznačný	multivalent, <i>o</i> ; multivoque
viditelný	visible
vlastní	propre
vlastnost	propriété <i>ž</i>
vliv	influence <i>ž</i>
vlna	onde <i>ž</i>
vlnovka (nad písmenem)	tilde <i>m</i>
vně	à l'extérieur
vnějšek	extérieur <i>m</i>
vnější	extérieur <i>e</i> ; externe
vnitřek	intérieur, <i>m</i>
vnitřní	intérieur, <i>e</i> ; intern <i>isèque</i>
vnoření	plongement <i>m</i>
vnořiti	plonger
vodorovný	horizontal,
volba	choix <i>m</i>
voliti	choisir
volný	libre
vrchlík kulový	calotte sphérique

vrchol	sommet <i>m</i>
vrstevnice	courbe <i>ž</i> de niveau
vrstva	couche <i>ž</i>
vržený	porté, <i>e</i>
všude	partout
vteřina	seconde <i>ž</i>
výběr	choix <i>m</i>
vyhovovat	satisfaire
vyhovovat podmínkám	satisfaire aux conditions
vyjádřit	exprimer
výjimka	exception <i>ž</i>
výjimečný	exceptionnel, elle
výklad	explication <i>ž</i>
výkres	épure <i>ž</i>
vyloučit	éliminer; exclure
vyložit	expliquer
vyměňovat	échanger
vynechat	omettre; supprimer
vyplývat	suivre; découler
výpočet	calcul <i>m</i>
elementární výpočet	calcul banal
přibližný výpočet	calcul approché
výpočet z paměti	calcul mental
vypočítat	calculer
vypustit	supprimer
výraz	expression <i>ž</i> ; terme <i>m</i>
výrok	proposition <i>ž</i>
výrokový	propositionnel, elle
výrokový počet	calcul <i>m</i> des propositions
výseč	secteur <i>m</i>
kulová (kruhová) výseč	secteur sphérique (circulaire)
výsledek	résultat <i>m</i>
výslednice	résultante <i>ž</i>
výsledný	final, <i>e</i> , aux
výstřednost	excentricité <i>ž</i>
vyšetřit	étudier
výška	hauteur <i>ž</i> ; épaisseur <i>ž</i>
nadmořská výška	altitude <i>ž</i>
výška trojúhelníka	hauteur d'un triangle
výška pobočné stěny	apothème <i>m</i>
vyšší derivace	dérivées <i>ž</i> successives
vytínat	intercepter
vytvorující přímka (křivka)	génératrice <i>ž</i>
vyvodit	déduire; tirer une conséquence

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

4

ROČNÍK 52, 1973-1974, PROSINEC



ROČNÍK 52
PROSINEC 1973

4

rozhled

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava
dr. Oldřich Lepil, ČSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, ČSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, ČSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, ČSc., ČSMU Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, ČSc., Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1973.

OBSAH

OBSAH

V. Okřina: Úlohy o neexistenci	145
Dr. J. Šedivý: George Boole a jeho algebry	148
S. Horák: Vzdálenost dvou bodů .	151
Prof. D. E. Kašpar, DrSc.: Proutkaření (Dokončení)	155
Dr. M. Bednařík - Dr. M. Široká: Předjízďení není vždy snadné .	166
Dr. J. Široký - Dr. M. Široká: Roční paralaxa hvězd	172
Dr. J. Široký - Dr. M. Široká: Dva Lunochody zkoumaly Měsíc .	175
J. Kotyk: Charakter matematiky	179
Dr. I. Chajda: Pranostiky a matematická logika	184
Naše soutěž	186
Pokyny autorům .	192
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. a 4. str. obálky

matematika

Úlohy o neexistenci

VILÉM OKŘINA, Jihlava

Úlohy o neexistenci patří mezi úlohy důkazové, s nimiž se v matematice setkáváme velmi často. Protože úzce souvisejí s úlohami určovacími, tj. s úlohami, v nichž se žádá určit všechny objekty mající dané vlastnosti, uvedeme si nejdříve jeden příklad úlohy určovací:

Určete všechna kladná reálná čísla a, b, c , která splňují nerovnici

$$\frac{ac + b^2}{(a + c)b} \leq 1 \quad (1)$$

Řešení: Jsou-li a, b, c kladná čísla, pak $(a + c) \cdot b > 0$. Vynásobíme-li danou nerovnici tímto kladným číslem, dostaneme:

$$\begin{aligned} ac + b^2 &\leq (a + c) \cdot b \\ ac + b^2 &\leq ab + bc \end{aligned} \quad (2)$$

Z nerovnice (2) dále dovolenými úpravami obdržíme

$$\begin{aligned} ac - ab &\leq bc - b^2 \\ a(c - b) &\leq b(c - b) \end{aligned} \quad (3)$$

1. Je-li $c - b > 0$ (čili $c > b$), je z nerovnice (3) vidět, že musí být $a \leq b$. Nerovnici (3) a tudíž i dané nerovnici (1), neboť bylo v rozboru použito jen úprav ekvivalentních, vyhovují tedy všechny takové trojice kladných čísel a, b, c , pro něž platí $a \leq b \leq c$. To ale nejsou všechna řešení, neboť v nerovnici (3) může být též

2. $c - b < 0$ (čili $c < b$) a pak je $a \geq b$. To znamená, že k dosavadním řešením musíme přibrat i takové trojice, pro něž platí $a \geq b > c$.

3. Je-li $c = b$ (pak $c - b = 0$), může být a libovolné. Z uvedené diskuse vyplývá, že danou nerovnici splňují všechny trojice kladných čísel a, b, c , pro něž platí

$$a \leq b \leq c \quad \text{nebo} \quad a \geq b \geq c. \quad (4)$$

V této úloze šlo o to, najít všechny trojice kladných čísel a, b, c , vyhovujících nerovnici (1). Množina **M** všech trojic kladných čísel a, b, c , z níž

jednotlivá řešení prostřednictvím nerovnice (4) vybíráme, je *oborem řešení* naší dané úlohy. Souhrn všech trojic z množiny $\mathbf{M}$, pro něž platí vztah (4) a které, jak víme, vyhovují i dané nerovnici (1), nazýváme *soustavou řešení*.

Důkazové úlohy vznikají z úloh určovacích, udáme-li buď částečně nebo úplně soustavu řešení a požadujeme-li pak důkaz, že uvedená řešení jsou skutečně řešeními úlohy. Tak například, udáme-li v předcházející určovací úloze část její soustavy řešení (např. množinu všech trojic kladných čísel a, b, c , pro něž $a \leq b \leq c$), vznikne následující důkazová úloha:

Jsou-li a, b, c kladná čísla taková, že $a \leq b \leq c$, pak

$$\frac{ac+b^2}{(a+c)b} \leq 1. \text{ Dokažte!}$$

Důkaz.

a) Obrácením postupu rozboru:

Je-li $b \leq c$, je $c - b \geq 0$. Vynásobíme-li nerovnici $a \leq b$ nezáporným číslem $(c - b)$, dostaneme

$$\begin{aligned} a(c-b) &\leq b(c-b) \\ ac - ab &\leq bc - b^2 \\ ac + b^2 &\leq b(a+c) \end{aligned} \tag{5}$$

Poněvadž $b(a+c) > 0$, můžeme obě strany nerovnice (5) tímto součinem dělit a dostáváme

$$\frac{ac+b^2}{(a+c)b} \leq 1,$$

Důkaz byl zde usnadněn tím, že známe rozbor příslušné úlohy určovací. Lze ho ale provést též nepřímou.

b) Nepřímý důkaz:

Kdyby bylo, při zachování v úloze uvedených předpokladů,

$$\frac{ac+b^2}{(a+c)b} > 1$$

platilo by

$$ac + b^2 > (a+c) \cdot b$$

neboli

$$\begin{aligned} ac + b^2 - ab - bc &> 0 \\ a(c-b) + b(b-c) &> 0 \\ (c-b) \cdot (a-b) &> 0, \end{aligned}$$

což je ve sporu s předpoklady $a \leq b \leq c$, neboť z těch vyplývá, že $(c-b)(a-b) \leq 0$.

Zvláštním případem důkazových úloh jsou *úlohy, kde se má ověřit, že soustava řešení, uvedená v zadání úlohy, je prázdná*. Úlohám tohoto druhu říkáme úlohy o neexistenci a řešíme je téměř vždycky nepřímým postupem. Předpokládáme, že existuje aspoň jedno řešení a z tohoto předpokladu vyvodíme nepravdivý výrok. Tím dokážeme, že náš předpoklad je též nepravdivým výrokem.

Příklad 1. Dokažte, že neexistuje kladné racionální číslo, jehož druhá mocnina je rovna 3.

Důkaz (nepřímý): Předpokládejme, že množina všech kladných racionálních čísel, jejichž druhá mocnina je rovna 3, není prázdná, tj., že existuje aspoň jedno kladné racionální číslo $\frac{p}{q}$, pro něž platí $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 3$, kde p, q jsou čísla přirozená a nesoudělná. Po umocnění dostaneme

$$p^2 = 3q^2, \quad (6)$$

$$p \cdot p = 3q^2. \quad (7)$$

Ze vztahu (7) vyplývá, že p je dělitelné 3. Lze ho tedy psát ve tvaru $p = 3k$ (k je přirozené). Po dosazení do (6) dostaneme $9k^2 = 3q^2$, neboli $3k^2 = q^2$. Z toho je patrné, že i q je dělitelné 3. Čísla p, q mají tedy dělitele 3, jsou soudělná, a to je ve sporu s předpokladem.

Příklad 2. Dokažte, že neexistuje v rovině rovnostranný trojúhelník, jehož všechny tři vrcholy mají od dvou k sobě kolmých přímk této roviny celočíselné vzdálenosti.

Důkaz: Předpokládejme, že aspoň jeden takový trojúhelník existuje. Pak $x_A, x_B, x_C, y_A, y_B, y_C$ (souřadnice vrcholů trojúhelníka) jsou celá čísla a podíl $k_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ je racionální. Rovněž tak číslo $k_2 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$ je racionální (k_1 je směrnice přímky AB a k_2 směrnice přímky AC).

Jsou-li čísla k_1, k_2 racionální, je také číslo $\left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ racionální, což je spor, neboť v předcházejícím příkladu jsme dokázali, že odmocnina ze tří není racionální číslo.

Příklad 3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo k je $\cos k \neq 0$.

Důkaz: Předpokládejme, že pro některé přirozené číslo k platí $\cos k = 0$. Pak je

$$k = \frac{\pi}{2} + \lambda \cdot \pi,$$

kde λ je celé číslo. Odtud pak plyne

$$\begin{aligned}2k &= \pi + 2\lambda \cdot \pi \\2k &= \pi(1 + 2\lambda).\end{aligned}\tag{8}$$

Dělíme-li rovnici (8) číslem $1 + 2\lambda$, které je různé od nuly, dostaneme vztah

$$\pi = \frac{2k}{1 + 2\lambda},$$

z něhož plyne, že π je číslo racionální, a to je spor! Předpoklad, z něhož jsme vyšli, je tedy nepravdivý — to znamená, že neexistuje žádné přirozené číslo k , pro něž $\cos k = 0$. Vzhledem k tomu, že $\cos k$ je pro všechna přirozená čísla definován, není jiné možnosti než, že pro všechna přirozená čísla k je $\cos k \neq 0$.

Řešení úloh je velmi důležitou složkou studia matematiky, a proto zaujímají matematické úlohy tak důležité postavení i ve středoškolské výuce. Těm z vás, kteří rádi řešíte úlohy a chcete se blíže seznámit s obecnými zásadami i dalšími konkrétními ukázkami řešení matematických úloh, doporučuji k přečtení příručku doc. Jana Vyšína: *Metodika řešení matematických úloh*. Z ní jsem čerpal i já při psaní tohoto článku.

George Boole a jeho algebry

Dr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

Čtenáři minulých ročníků Rozhledů již poznali základy Booleových algeber a seznámili se s některými jejich aplikacemi. Osobnost muže, jehož jménem jsou tyto algebry nazvány, zůstává však neznáma; pokusme se tedy vylíčit jeho pozoruhodný život a naznačit jeho dílo.

George Boole se narodil 2. listopadu 1815 v anglickém městě Lincolnu jako syn ševce; jeho otec John Boole měl však zájmy daleko všestrannější než vlastní řemeslo. Obyvatelům města zhotovoval nejen boty, ale i brýle a hvězdářské dalekohledy, a byl ochoten diskutovat o čemkoliv; vypráví se dokonce anekdota, že jeho manželka odpověděla na dotaz, čím byl její manžel: „Byl filosofem.“

Chlapec George dostal jen základní školní vzdělání, měl však neskonale touhu stát se vzdělaným člověkem a začal studovat sám. Hodiny latiny mu dával místní knihkupec, který mu též zapůjčováním knih umožnil, aby si osvojil řečtinu, němčinu a francouzštinu. Už ve čtrnácti letech přeložil George jednu rozsáhlejší starořeckou báseň a tento pře-

klad vyšel v místním nakladatelství; takový úspěch podnítil mladíka v dalším sebevzdělávání. Jako šestnáctiletý se stal pomocníkem učitele v menším městě, a tam teprve začal studovat matematiku; sáhl prý po těchto knihách, protože byly levnější než knihy z oboru filologie. Jeho matematické vzdělání doplňoval pak otcův přítel, který byl absolventem oxfordské university. V 18 letech se stává George učitelem a v 25 letech zakládá svou vlastní soukromou školu v rodném městě.

Ohromná šíře vědeckých zájmů G. Boolea se postupně soustředila na aplikace matematických metod v humanitních vědách, a tedy i v logice. Začal si dopisovat s některými matematiky na cambridžské universitě, kteří ocenili originalnost jeho myšlenek a doporučili mu, aby je publikoval; v r. 1844 získal za své práce z matematické analýzy zlatou medaili university. Přátelé ho též doporučili na místo profesora matematiky na novém učilišti Queens College v irském městě Corku, třebaže neměl universitní diplom. Jako učitel dával prý Boole přednost tomu způsobu vyučování, při kterém žáci sami objevují matematické poznatky.

Svá hlavní díla věnovaná logice vydal v letech 1847—1864, a to *Matematická analýza logiky* (1847), *Logický počet* (1848) a *Zkoumání zákonů myšlení* (1854). První práce byly inspirovány veřejnou diskusí logika A. de Morgana a filosofa W. Hamiltona; Boole v nich dovršil staletou ideu vytvořit tzv. algebru logiky, tj. zvládnout logické operace v podobě výpočtů. První Booleova verze tohoto logického počtu byla však značně složitá a dost odlišná od dnešního podání Booleovy algebry (rozdíly naznačíme později). To však nic nemění na historickém významu Booleova díla, které otevřelo cestu matematizaci velkých partií logiky.

G. Boole měl i přes úspěchy na poli vědy vytrvale též literárně poetické sklony, psal a publikoval básně i v dalších letech. Oženil se s dcerou T. Everesta (jeho jménem byla nazvána nejvyšší hora světa) a stal se otcem pěti dcer. Tři z nich byly též vědecky nebo literárně činné, nejmladší Ethel (provdaná Vojničová) je autorkou dosti známého románu *Střeček*. Boole byl nekompromisní demokrat, který nectil sociální bariéry britské společnosti, pracoval neúnavně až do své smrti v r. 1864, nedožil se tedy ani 50 let.

Boole vytvořil svůj logický počet několik desetiletí před zrodem teorie množin, nepoužíval proto množinové terminologie, hovořil o třídách (classes). Prázdné třídy přiřadil symbol 0, univerzální třídě symbol 1, libovolné třídy označoval malými písmeny x , y , z atd. Doplněk třídy x byl v jeho systému zapsán symbolem $(1 - x)$, průnik tříd x , y zapisoval xy a symetrický rozdíl*) těchto tříd zapisoval $x + y$. Se získa-

*) O symetrickém rozdílu množin byl publikován v minulém ročníku příspěvek J. Drábka; v symetrickém rozdílu dvou množin nejsou zahrnuty ty prvky sjednocení obou množin, které patří do jejich průniku.

nými algebraickými výrazy počítal běžným způsobem, řešil dokonce tzv. logické rovnice pomocí dělení, měl však značné nesnáze s interpretací výsledků. Současníci pohlíželi na jeho logický počet s nedůvěrou, i když získával vesměs správné výsledky řešených úloh.

Dnešní podobu Booleovy algebry (či lépe Booleových algeber) vytvořili jeho následovníci, zejména *Ernst Schröder*. Nepokračoval v Booleově snaze přiblížit logický počet běžné algebře, ale chtěl zjednodušit logický počet i za tu cenu, že se odliší více od číselné algebry. Místo symetrického rozdílu vzal sjednocení dvou tříd jako podklad operace sčítání a dosáhl tím velmi pozoruhodného projasnění podstaty Booleovy algebry, zejména zrcadlení (duality) jejích axiomů. Tuto dualitu zachovává většina později vypracovaných axiomatik, např. tato (uvedená v citované publikaci O. Odvárka):

$$\begin{array}{ll}
 x + y = y + x & x \cdot y = y \cdot x \\
 (x + y) + z = x + (y + z) & (x \cdot y) \cdot z = (y \cdot z) \\
 x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) & x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \\
 x + 0 = x & x \cdot 1 = x \\
 x + x' = 1 & x \cdot x' = 0
 \end{array}$$

Záměnou symbolů „+“ a „·“, 0 a 1 získáme z axiomů zapsaných v levém sloupci axiomu zapsané v pravém sloupci. Tato krásná „symetrie“ umožňuje získat z každé odvozené věty Booleovy algebry „zdarma“ novou větu, lišící se od původní právě jen záměnou zmíněných symbolů.

K dalšímu rozvoji Booleových algeber přispěly desítky dalších vědců, jmenujme aspoň S. W. Jevonse, J. Venna a P. S. Poreckého. Zvláštní pozornosti zaslouží pozdější využití dvouprvkové Booleovy algebry; tato „nejmenší“ algebra je plně zadána tabulkami operací ‘, +, ·, které zde připomeneme (byly už též publikovány v minulých ročnících *Rozhledů*):

x	x'	$+$	0	1		0	1
0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1

Vytvořením pneumatických, elektrotechnických i jiných modelů Booleovy algebry se otevřely brány rozvoji počítačové techniky, kybernetiky a jiných typických složek procesu vědeckotechnické revoluce ve 20. století.

Nezapomínejme, že základy tohoto pokroku položil houževnatý samouk, učitel a učenec George Boole svými díly v polovině 19. století. Při

dalších setkání s jeho jménem si uvědomte jeho vytrvalou cestu za vzděláním, šíří jeho zájmů a nezměrnou pracovitost, jistě hodnou následování.

Literatura :

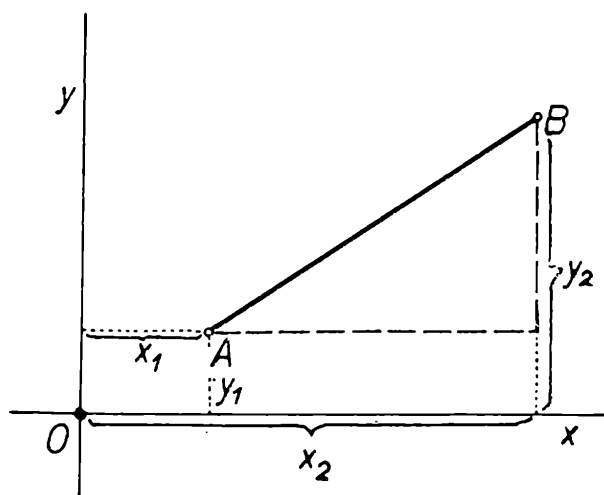
- N. I. Stjažkin* : Formirovanije matěmatičeskoj logiki, izd. Nauka, Moskva 1967.
A. S. Kuzičev : Diagrammy Venna, izd. Nauka, Moskva 1968.
O. Odvárko : Booleova algebra, Škola mladých matematiků, sv. 31, Mladá fronta, 1973.

Vzdálenost dvou bodů

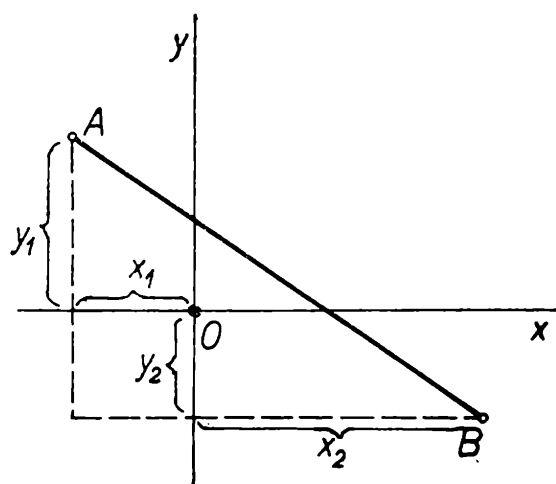
STANISLAV HORÁK, Praha

Doc. RNDr. Alois Kufner, CSc., je autorem nedávno vyšlé knížky Geometrie Hilbertova prostoru. (Vydalo SNTL, 248 stran, 15 obr., cena 16 Kčs). První stránky knížky jsou snadno pochopitelné i starším čtenářům Rozhledů, a proto zde podáme jejich obsah. Přitom se budeme držet — až na nepodstatné odchylky — výkladu v knížce.

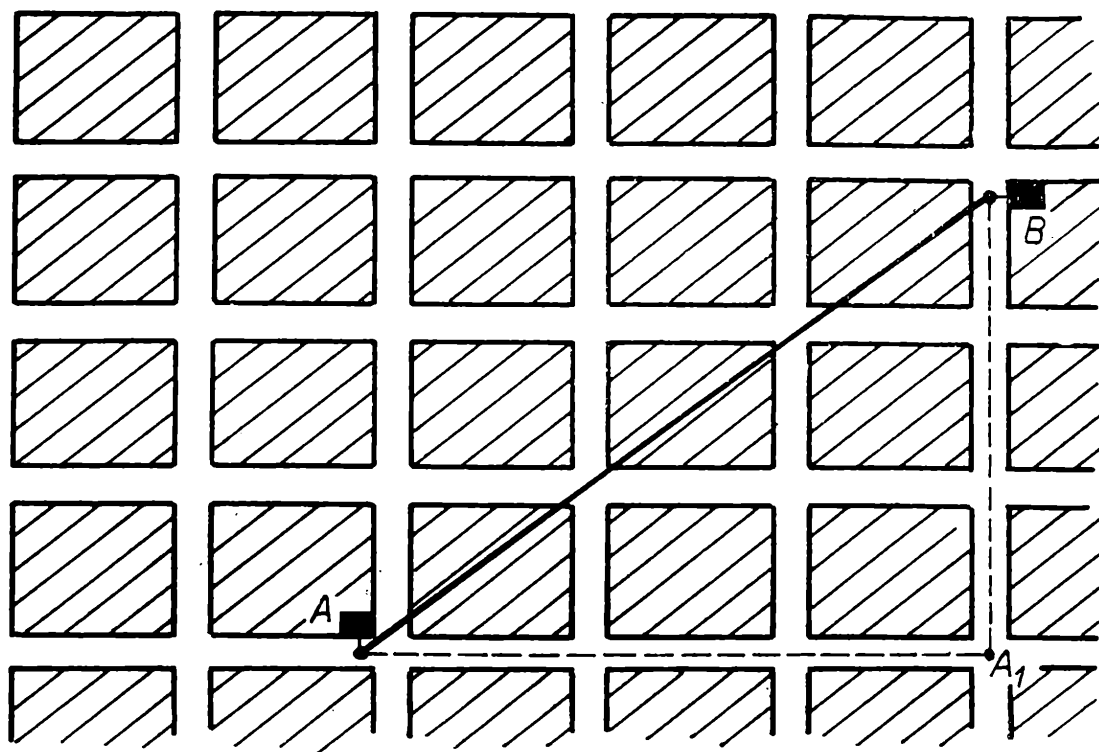
A. Začneme vzdáleností dvou bodů v rovině. V dané rovině zvolme pravoúhlou soustavu souřadnicovou $O(x; y)$. Zvolme dále dva body $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Jejich vzdálenost $d(A, B)$ snadno vypočítáme užitím Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku (obr. 1a, b).



Obr. 1a



Obr. 1b



Obr. 2a

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (Z)$$

Tento známý vzorec má tři vlastnosti:

I. $d(A, B) = 0$ právě tehdy, když $A = B$. Stručně zapsáno:

$$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

II. Jsou-li dány tři body A, B, C v rovině, platí tzv. trojúhelníková nerovnost

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

III. Vzdálenost bodu A od B je právě taková jako vzdálenost bodu B od A .

$$d(A, B) = d(B, A)$$

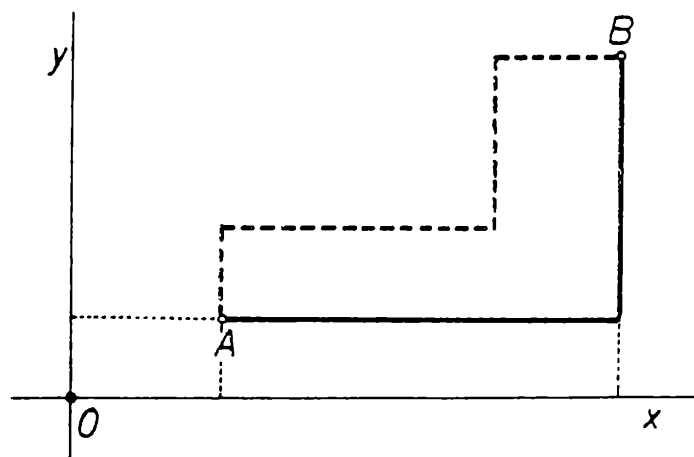
Všechny uvedené vlastnosti čtenář jistě dobře zná a proto je nebudeme dokazovat.

B. Obr. 2a považujeme za plán části města, v níž se ulice protínají kolmo. Pro vzdálenost dvou míst A, B platí vzorec (Z). Přitom předpokládáme, že zobrazená část města leží v rovině. Vzorec (Z) nám však udává délku vzdušné čáry. Pro listonoše, který má doručit psaní z pošty A do domu B , platí jiná vzdálenost míst A, B . Listonoš musí jít třeba tak, jak je vyznačeno v obr. 2a čárkovaně, a vzdálenost míst A, B by si definoval takto (obr. 2b):

$$d_1(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \quad (Z_1)$$

Rozumí se, že by listonoš mohl jít i jinak (viz čárkovanou cestu v obr. 2b), ale vzdálenost $d_1(A, B)$ by se tím nezměnila.

Ukážeme si, že vzorec (Z_1) má též vlastnosti I, II, III, které měl vzorec (Z) .



Obr. 2b

$$\text{I. } d_1(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

Důkaz. Jestliže $A = B$, znamená to, že

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1$$

Po dosazení do (Z_1) dostaneme $d_1(A, B) = 0$.

Mějme obráceně $d_1(A, B) = 0$, tj.

$$|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = 0.$$

Oba sčítanci v této rovnici jsou nezáporná čísla. Jestliže jejich součet je nula, je to možné jedině tak, že

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1,$$

což znamená, že $A = B$.

$$\text{II. } d_1(A, C) \leq d_1(A, B) + d_1(B, C).$$

$$\text{Důkaz. } d_1(A, C) = |x_3 - x_1| + |y_3 - y_1| =$$

$$\begin{aligned} &= |x_3 - x_2 + x_2 - x_1| + |y_3 - y_2 + y_2 - y_1| = \\ &= |(x_3 - x_2) + (x_2 - x_1)| + |(y_3 - y_2) + (y_2 - y_1)| \leq \\ &\leq |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1| + |y_3 - y_2| + |y_2 - y_1| = \\ &= \{|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|\} + \{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|\} = \\ &= d_1(B, C) + d_1(A, B) = d_1(A, B) + d_1(B, C) \end{aligned}$$

a tím je důkaz proveden.

III. $d_1(A, B) = d_1(B, A)$.

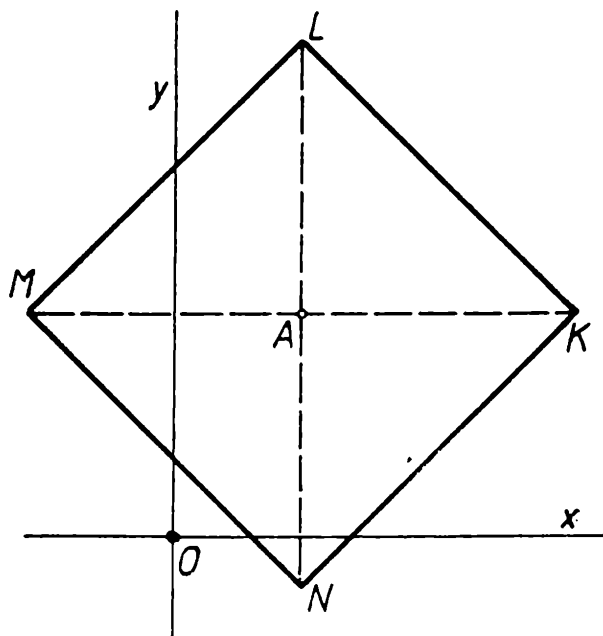
Důkaz tohoto tvrzení plyne z rovností

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|, \quad |y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|.$$

C. Vše, co jsme si až dosud řekli, mělo jediný cíl: ukázat, že vzdálenost dvou bodů v rovině lze pojímat (definovat) různě. Vedle klasické definice jsme uvedli ještě jednu, která má, jak jsme ukázali, i praktický význam. Existují však ještě jiné definice. Kdybychom se v geometrii drželi vzorce (Z_1) , mělo by to nečekané důsledky. Pro doklad nemusíme chodit daleko.

Hledejme množinu všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu $A(x_1; y_1)$ stále stejnou vzdálenost. Použijeme-li vzorce (Z) , pak žádanou množinou je kružnice se středem v bodě A . Její rovnice je

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = d^2(A, B).$$



Obr. 3

Použijeme-li však vzorce (Z_1) , je žádanou množinou obvod čtverce $KLMN$ (obr. 3), jehož střed je bod A a jehož úhlopříčky mají délku $2 \cdot d_1(A, B)$. Rovnice obvodu tohoto čtverce má rovnici

$$|x - x_1| + |y - y_1| = d_1(A, B).$$

D. Měli jsme dānu množinu všech bodů $A, B, C \dots$ v rovině $\mathbf{M}$. Každé dvojici bodů X, Y , kde $X \in \mathbf{M}, Y \in \mathbf{M}$, jsme přiřadili nezáporné číslo $\varrho(A, B)$ tak, že byly splněny tyto požadavky:

I. $\varrho(X, Y) = 0$ právě, když $X = Y$.

II. $\varrho(X, Z) \leq \varrho(X, Y) + \varrho(Y, Z)$ pro každé tři body X, Y, Z roviny $\mathbf{M}$.

III. $\varrho(X, Y) = \varrho(Y, X)$ pro každé dva body X, Y roviny $\mathbf{M}$.

V takovémto případě říkáme, že jsme v rovině $\mathbf{M}$ zavedli (definovali) metriku. Rovina $\mathbf{M}$ je potom metrická rovina (metrický prostor dimenze 2).

Viděli jsme, že metriku v rovině lze zavést různými způsoby. Ve cvičení pak uvidíme, že metriku lze zavést i na libovolných množinách.

Cvičení

1. Mějme množinu všech bodů v rovině $\mathbf{M}$. Dokažte, že předpisem

$$\text{a) } \varrho(A, B) = \sqrt{\left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2}$$

$$\text{b) } \varrho(A, B) = \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + \frac{|x_2 - y_2|}{2 \cdot \{1 + |x_2 - y_2|\}}$$

je definována metrika (tj. jsou splněny požadavky I, II, III).

2. Nechť $\mathbf{M}$ je libovolná množina. Přesvědčte se, že předpisem

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \neq y, \\ 0 & \text{pro } x = y. \end{cases}$$

je na této množině definována metrika.

fyzika

Proutkaření

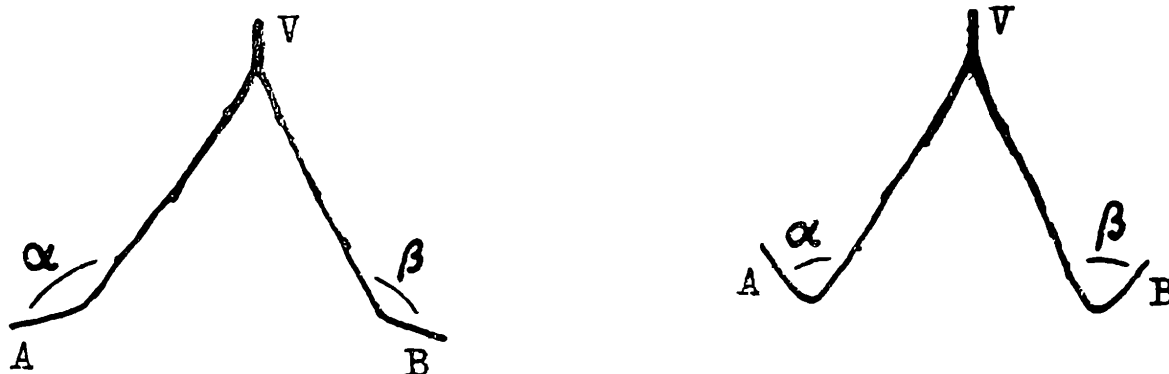
Prof. RNDr. EMIL KAŠPAR, DrSc. KU Praha

IV. FYZIKÁLNÍ VÝKLAD POHYBU PROUTKŮ A SIDERICKÉHO KYVADLA

Než si uvedeme fyzikální výklad „proutkohybných sil“, je třeba s uvědomit, že *jedinou podstatnou otázkou pro výklad proutkaření na vědeckém základě jest, jaký je původ sil, který uvádějí proutky či kyvadlo do po-*



Obr. 9. Svislá poloha virgule při použití

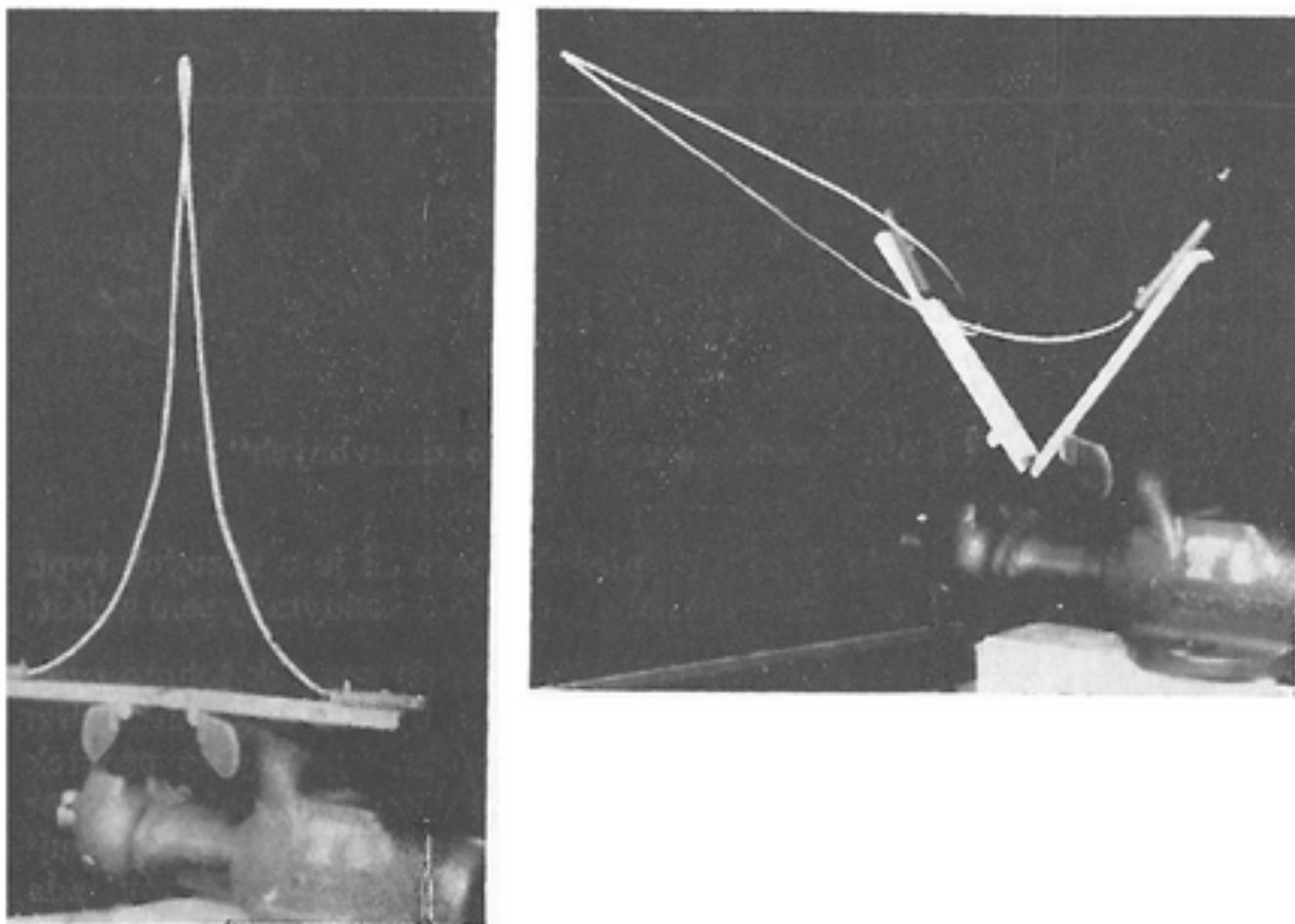


Obr. 10ab. K výkladu vzniku „proutkohybných“ sil

hybu v rukách proutkaře. Fyzikální původ těchto sil je u různých typů proutků různý, a proto se musíme zabývat takřka každým typem zvlášť.

Jednoduchá virgule. Proutkař „v akci“ drží proutek tohoto typu buď vodorovně nebo svisle před sebou (obr. 5, 9). Konce proutků drží buď nadhmatem (obr. 5) nebo podhmatem (obr. 9). Aby se proutek „samovolně“ vychýlil, je nutno konce proutků vhodně ohnout. Proutkař drží konce A , B pevně v dlaních a ohýbá je tak, že se úhly α , β zmenšují (obr. 10ab). Vhodné ohnutí proutků je podstatnou podmínkou, zda proutky v rukách proutkaře „reagují“ či nikoliv. Jestliže jsou proutky ohnuty tak, že úhly α a β jsou menší než určitá hodnota (kdyby části proutků zůstaly rovné jako v obrázku, byla by tato mezní hodnota úhlů 90°), pak se srostlá část V prudce vychýlí z původní roviny. Fyzikální výklad je tento: Když proutkař ohýbá konce A , B , dodává proutkům potenciální energii pružnosti v ohybu. Dokud jsou úhly α a β menší než 90° a proutkař drží konce A , B pevně v dlaních, aby se proutky nemohly narovnat, nemohou se proutky ze své roviny vykroutit, protože by se přitom úhly α a β zmenšovaly, tím by vzrůstala jejich potenciální energie, a to není možné bez konání práce zevnějška.

Nechť např. proutkař drží proutky svisle vzhůru a ohýbá konce A a B též směrem nahoru (obr. 10b). Přesáhnou-li úhly uvedené mezní hodnoty a drží-li proutkař konce A a B pevně v dlaních, jsou proutky ve stavu labilní rovnováhy, tj. mají větší potenciální energii, než by měly při vykroucení dopředu nebo dozadu. Při tomto vykroucování se totiž úhly α a β zvětšují a potenciální energie pružnosti se zmenšuje. A z fyziky je znám základní zákon, že těleso (soustava těles apod.), které je v klidu v poloze, ve které má vzhledem ke všem možným sousedním polohám největší potenciální energii, je v labilní (vratké) poloze, ze které samovolně přechází do polohy o potenciální energii menší. Chce-li proutkař, aby se proutky vychýlily vhodným směrem, stačí k tomu zcela nepatrné pootočení (pro vnějšího pozorovatele neznatelné) proutků z labilní polohy. Pak se proutky „samovolně“ víceméně mocně v tomto



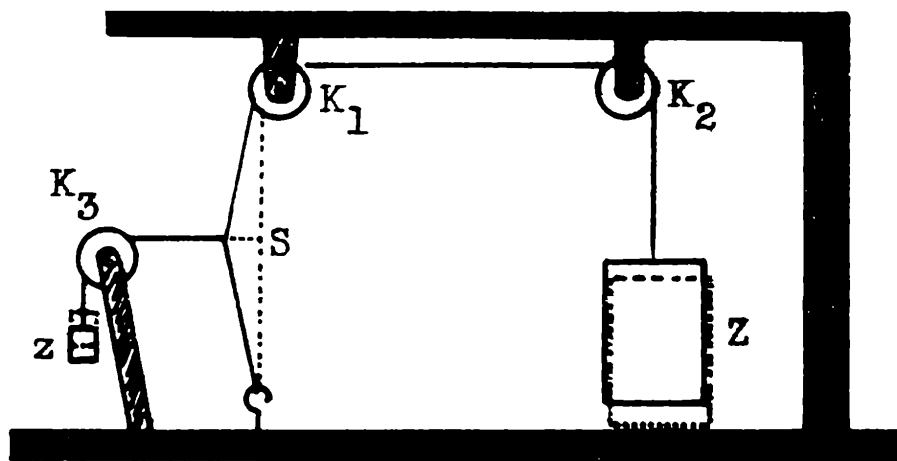
Obr. 11ab. Demonstrace funkce virgule „simulátorem“ proutkaře

směru ohnou. Proutkař, který není vědomým šarlatánem, si tento nepatrný pohyb ani neuvědomuje.

O tom, že „proutkohybné síly“ mají opravdu původ, který jsme zde objasnili, se lze přesvědčit, jestliže proutkaře nahradíme přístrojem. Přístroj je zcela jednoduchý a každý čtenář si ho může snadno zhotovit. Jsou to v podstatě dvě laťky, spojené kloubem. K laťkám připevníme konce proutků. Když proutky ohýbáme tím, že laťky navzájem přibližujeme, zůstávají proutky ve své poloze až k určitému kritickému úhlu laťek. Je-li úhel laťek menší, pak se proutky samovolně vychýlí. Na obr. 11ab je pokus zachycen fotograficky ve dvou fázích při zmenšování úhlu mezi laťkami. Při pokuse se ani proutků ani laťek nemusí lidská ruka vůbec dotknout; na našich snímcích se laťky přibližují např. pomocí svěráku.

Na stejném principu jsou založeny všechny vidlicovité virgule, a to ať jsou přirozené či zhotovené z kovu nebo z jiných pružných látek. Zcela stejný výklad pohybu virgulí platí i pro případ, že proutek drží dvě osoby, každá za jeden konec. K prudkému vychýlení virgule stačí deformace jednoho konce, který drží proutkař.

Poněkud složitější je funkce *spirály*, ač podstata její proutkařské funkce je stejná. I u ní proutkař ohne spirálu do tvaru virgule (obr. 7)



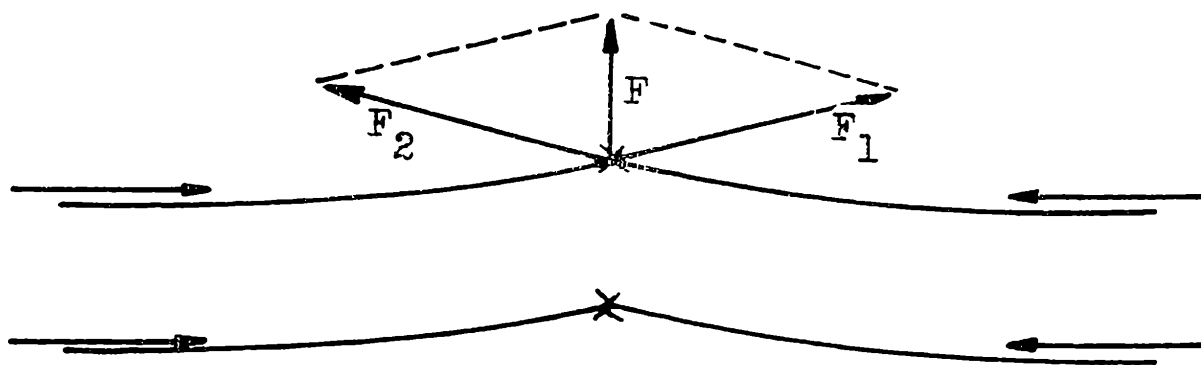
Obr. 12. Přístroj k demonstraci vzniku velké síly působením síly malé

a i podmínky labilní polohy jsou velmi podobné jako u jednoduché virgule. Spirála však díky využití i pružnosti v tahu, v kroucení apod. umožňuje proutkaři mnohem rozmanitější manipulaci, může se např. ze základní polohy nejen vychýlit, ale i vytvářet v obratných rukách různě orientované smyčky apod.

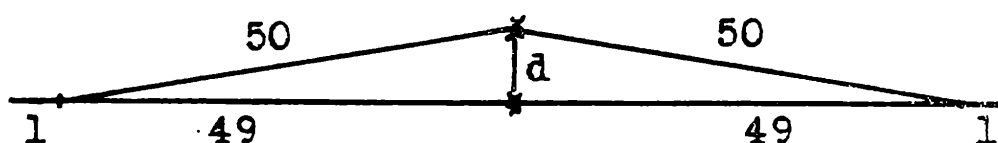
Čtveřice virgulí. Na málo odlišném fyzikálním principu je založena funkce čtyř proutků, které drží dva „spolníci“ (obr. 6b). Již bylo uvedeno, jak se s tímto typem virgule manipuluje. Pohyb proutků má příčinu opět v pružnosti v ohybu, jde též o vychýlení z labilní polohy. „Proutkohybné síly“ vznikají rozkladem sil, kterými jsou proutky tlačeny dopředu. (Proutkař svému laickému protějšku zpravidla nařizuje, aby proutky držel pevně k tělu. Sám pak s proutky manipuluje podle libosti.) Z fyziky je známo, že je např. možno i poměrně silné ocelové lano zdeformovat (vychýlit) i zcela nepatrnou silou, která působí kolmo k jeho délce. O tom se předvádí působivý školní pokus (obr. 12). Při něm je lano, vedené přes kladky K_1 a K_2 , zatíženo velkým závažím Z . Jestliže na lano působí v místě S i nepatrná síla (rovná tíze závažíčka z), lanko se zdeformuje a nadzvedne závaží Z .

Podobně je tomu u proutků. Na proutky působí oba protějšky silami F_1 a F_2 proti sobě (obr. 13). Pak stačí, jsou-li proutky i jen nepatrně vychýleny z téže přímky (v obr. 13 je pro názornost úhel proutků přehnaně velký), aby vznikla výslednice, která působí kolmo na směr proutků. Vhodný směr vychýlení proutků zajišťuje proutkař obratnou manipulací svou dvojicí proutků.

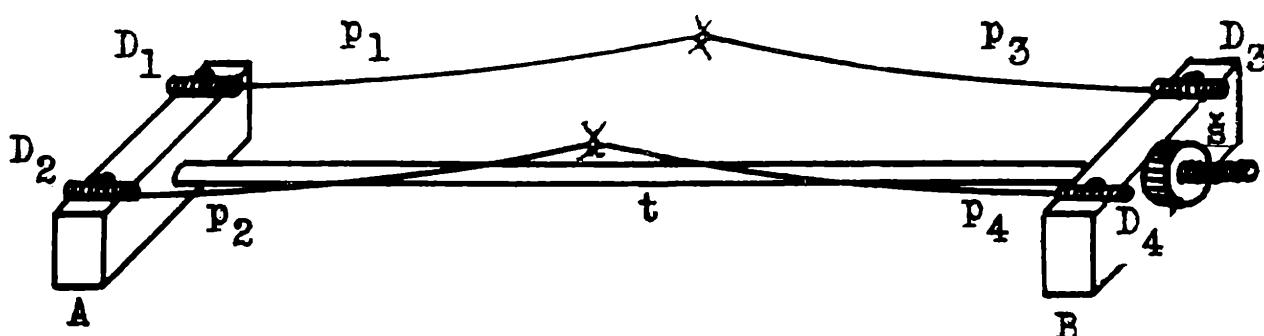
U tohoto typu proutků překvapuje nezasvěceného pozorovatele ještě další okolnost, kterou je poměrně velká výchylka vidlicovitých konců, které jsou do sebe zaklesnuty, i když posuv dopředu od proutkařova těla je zcela nepatrný. Ale i tuto skutečnost vysvětlíme z poznatků geo-



Obr. 13. Výklad vzniku „proutkohybné“ síly u čtveřice proutků



Obr. 14. Výklad výchylky u čtveřice proutků



Obr. 15. Mechanický „simulátor“ funkce čtveřice proutků

metrie snadným výpočtem. Nechť jsou proutky např. dlouhé 50 cm. Vypočítáme odchylku vidlice při podélném posuvu proutků o 1 cm. Z obr. 14 a z Pythagorovy věty plyne, že se v tom případě vidlice vychýlí z původní polohy o vzdálenost

$$d = \sqrt{50^2 - 49^2} \text{ cm} \doteq 10 \text{ cm},$$

tedy velmi značně. A tato okolnost umožňuje proutkaři snadno dosáhnout překřížování proutků, jejich zvedání, uchytování do stran atp.

Funkci čtveřice proutků můžeme též předvést přístrojem, a to podle obr. 15. Jeho podstatou jsou dvě laťky A , B , které je možno rovnoběžně navzájem přibližovat, což umožňují vodící tyčky t_1 a t_2 a šroub $\bar{s}$. K laťkám A , B jsou připevněny čtyři proutky p_1 — p_4 . Vzdálenost laťek nastavíme tak, aby vidlice virgulí do sebe právě zapadaly. Přibližujeme-li

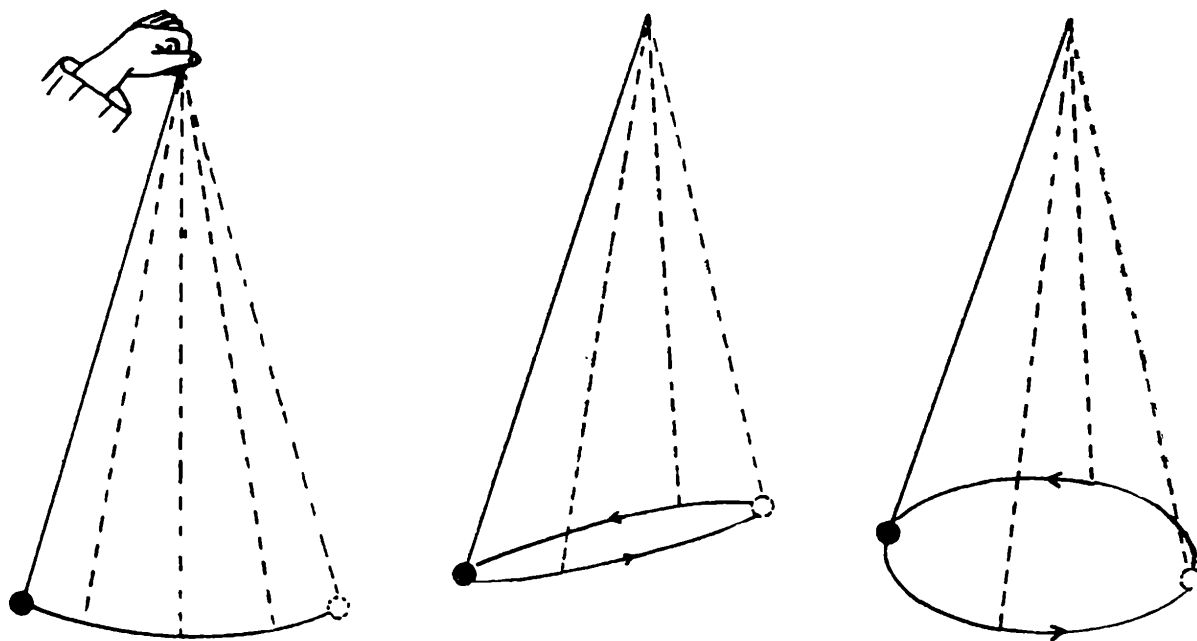


Obr. 16. Kmitající prut

navzájem laťky A , B , proutky se překvapivě prudce vychýlí i při nepatrném posuvu podobně jako v rukách proutkařů. „Vhodný“ směr vychýlení proutků zajistíme nepatrným natočením např. držadel D_1 a D_2 proutků.

Jednoduchý prut. V tomto případě může být užito prutu dvojím způsobem, buď v *rovnovážné poloze* nebo v *kmitavém pohybu*. Nejjednodušší a také nejnaivnější způsob „hledání“ ložiska prutem spočívá v tom, že proutkař položí prut, též hůl či jiný podobný předmět na prst přibližně pod těžištěm a při akci s ním jde a vhodně s prutem balancuje. Malým pootočením prstu dosáhne toho, že se prut nachyluje, popř. otáčí vhodným směrem. Použití prutu v tomto případě nemůže oklamat nikoho, kdo se zdarem prošel fyzikálním tématem o rovnovážných polohách podepřeného tělesa ve fyzice na základní škole.

Na jiném principu je založeno užití *kmitajícího* prutu. Někteří proutkaři určují hloubku vodního pramene, ložiska rudy, ale také jakost a rozlehlost podzemního ložiska pomocí kmitavého pohybu prutu. V tomto případě drží proutkař tenký prut asi 1 m dlouhý lehce za jeden konec (obr. 16), zpravidla silnější, potom volný konec sám rozkmitá ve



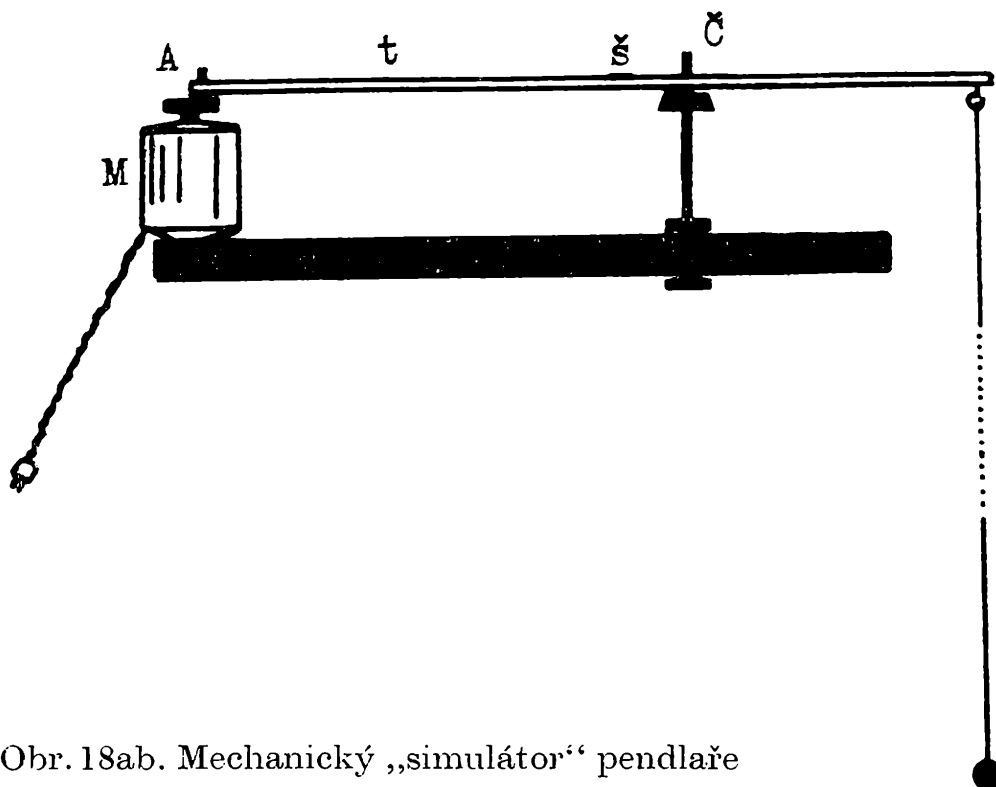
Obr. 17. Pohyb siderického kyvadla

svislé rovině a podle počtu kmitů až do úplného utlumení pohybu určuje např. hloubku podzemního ložiska. Po fyzikální stránce nejde o nic jiného než o vynucené kmity, do kterých uvádí proutkař prut periodickými impulzy.*) Bez těchto impulzů by kmity po několika málo výchylkách úplně ustaly. Podle výkladů proutkařů je tento efekt způsoben „zemním zářením“, které buď vysílá ložisko nebo proutkař a ložisko je odráží. Nehledíme-li na skutečnost, že možnost existence takového záření byla vědecky vyvrácena (viz o tom uvedenou knihu prof. O. Prokopa), mělo by toto záření mít současně dva účinky, které se navzájem vylučují, tj. jednak prut udržuje v kmitech, jednak tyto kmity tlumí. Přijmout takovou hypotézu — k tomu je nutno mít opravdu notnou dávku fyzikální naivity.

Siderické kyvadlo. *Siderické kyvadlo* neboli *pendl* či prostě *kyvadlo* je proutkařské náčiní užívané pravděpodobně stejně dlouho jako prutek. Kyvadélko může v ruce proutkařově konat buď pohyb ve svislé rovině jako kyvadlo u hodin, nebo může opisovat elipsu, která je v různém stupni zploštělá, od pohybu ve svislé rovině až po kruhový pohyb ve vodorovné rovině (obr. 17abc). Kyvy téhož kyvadla se mohou lišit velikostí rozkyvů, ale také orientací roviny kyvů nebo velké osy eliptických kyvů, při kruhovém a eliptickém pohybu může být různý i smysl obíhání kuličky kyvadla. Tato mnohotvárnost hraje značnou úlohu v praktikách proutkařů.

*) Proutkař rozkmitává prutek nejen před započítáním akce, nýbrž i po celou dobu tlumených kmitů, ovšem postupně s menší a menší intenzitou. To lze zjistit, díváme-li se proutkaři pozorně na ruce, kterými drží prut.

a) schéma
přístroje



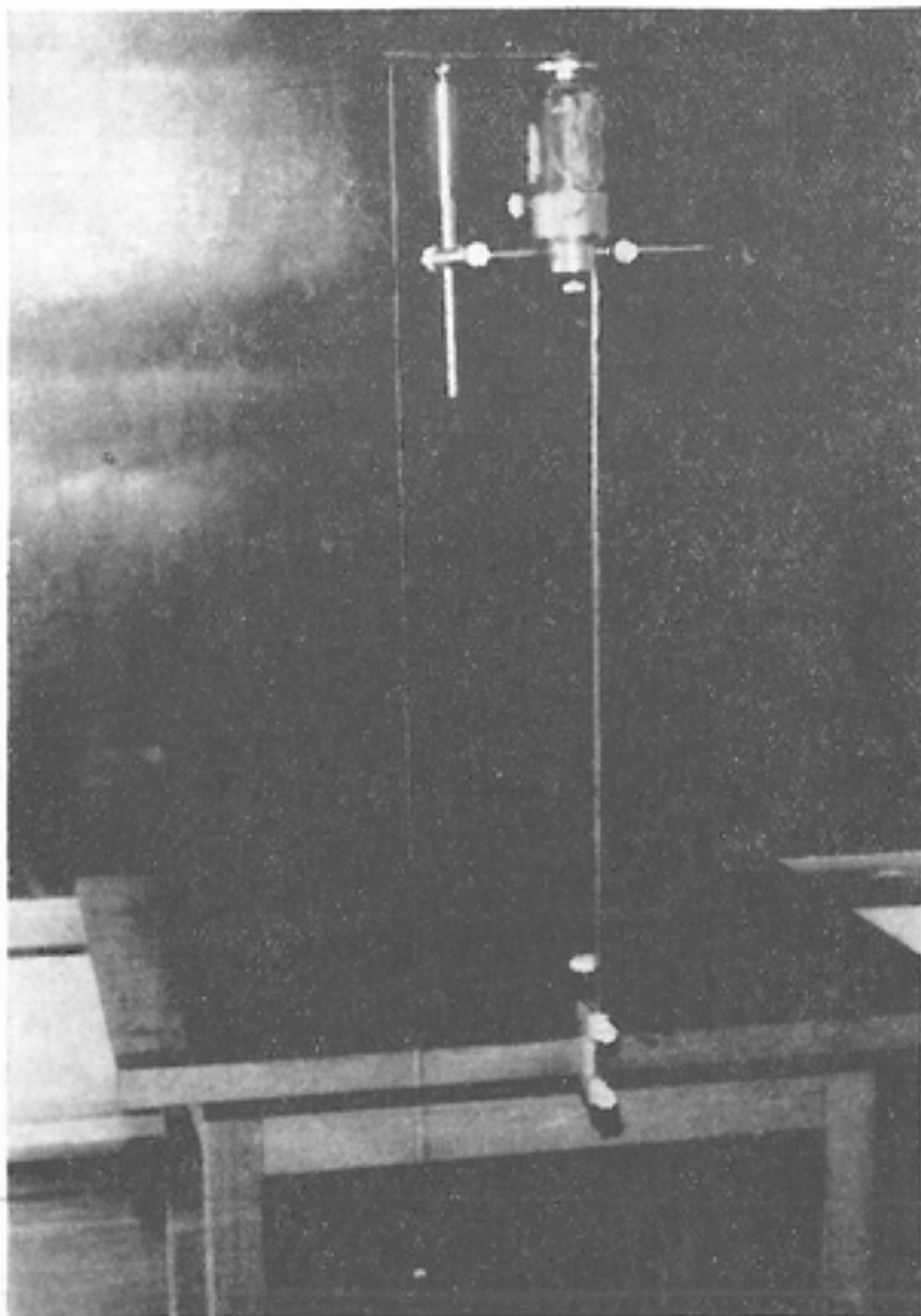
Obr. 18ab. Mechanický „simulátor“ pendlaře

Pohyb kyvadla v rukách proutkaře nemá nic společného s podzemními ložisky či se zvláštními vlohami proutkaře, nýbrž je jen určitým využitím rezonance. „Budícím systémem“ je ruka proutkaře, která koná takřka nepozorovatelné pohyby, přesněji řečeno proutkař pohybuje závěsem kyvadla s takřka neznatelnými rozkyvy a v souhlase s těmito pohyby se kyvadélko rozkývá postupně se zvětšujícími se rozkyvy. Tvar křivky, kterou opisuje kyvadlo, je podobný dráze, kterou opisují špičky prstů, jež drží závěs kyvadla. Pohybuje-li proutkař osou kyvadla ve vodorovné přímce, rozkývá kyvadlo ve svislé rovině a to pak koná obyčejné kyvy. Opisují-li prsty maličké vodorovné kružnice nebo elipsy, kyvadlo začne konat dráhu kruhovou nebo eliptickou, jejíž rozměry stále rostou.

I pohyby siderického kyvadla lze napodobit pomocí přístroje. Na obr. 18a je schéma mechanického „simulátoru“ proutkaře s kyvadélkem a na obr. 18b snímek jeho skutečného provedení. Na řemeničce motorku M , jehož rychlost můžeme měnit, je nepatrně excentricky připevněno táhélko t . Táhélko má tvar lišty, která je opatřena podélnou šterbinou $š$. Pomocí čepu $Č$, který prochází šterbinou táhélka, se kruhový pohyb konce A přenáší na konec B , na nějž zavěsíme kyvadélko. Obrátky motoru vyregulujeme tak, aby oběžná doba čepu A byla rovna době dvojkyvu kyvadélka. Kyvadélko začne opisovat kruhový pohyb, jehož amplituda se stále zvětšuje.

Chceme-li demonstrovat vznik kyvů ve svislé rovině, stačí posunout

b) přístroj



Obr. 18ab. Mechanický „simulátor“ pendlaře

čep $\check{C}$ blízko ke konci B , který pak koná vratný pohyb téměř v přímce.*)

Fyzikálně nezkušeného pozorovatele mohou pohyby kyvadla, vyvolané proutkařem, opravdu uvést v mylný výklad příčin pohybu, neboť nepostřehne málo znatelné pohyby ruky proutkaře. Stačí však, když se podepřou pevnou podpěrou prsty, ve kterých proutkař drží kyvadélko, a „kouzlo“ zmizí.

*) Místo konstruování složitých přístrojů se ovšem lze přesvědčit o rezonančním principu kyvadélka prostě tak, že závěs kyvadélka držíme v prstech a činnost proutkaře napodobíme sami.

Ukázali jsme si, jaký je původ sil, které působí pohyb proutků a kyvadla v rukou proutkaře. Je tedy vyloučeno, aby nějaké ložisko v podzemí, poloha nemocného místa v těle atd. mohly být nalezeny pomocí pohybu proutků nebo virgule. Na podporu proutkaření se však často uvádějí případy úspěšného nalezení pramenů, rudy apod. proutkaři. K tomuto argumentu lze jen říci, že dosud nikdy žádné vodní či jiné podzemní ložisko, ani nemoc nebyly nalezeny z pohybu proutků nebo siderického kyvadla, neboť — jak jsme si ukázali — pohyb virgule a kyvadla se děje zákonitě jinými příčinami než neexistujícím působením těchto zdrojů na proutky nebo na proutkaře. Úspěšné nalezení pramene proutkařem je buď dílem náhody nebo — v nejlepším případě — se proutkař řídí při hledání jinými svými zkušenostmi o výskytu vody apod. Je také běžným zjevem, že zpráva o „úspěšném nalezení vody“ proutkařem se rychle šíří a zveličuje, zatímco o neúspěších se diskrétně mlčí. (Nikdo se rád nechlubí tím, že se nechal napálit, zejména jestliže odměnil proutkaře z veřejných peněz.) Ostatně je skutečností, že v žádném experimentu, který byl konán za přísně vědeckých podmínek, nebyl potvrzen vliv podzemních zdrojů ani na proutky ani na proutkaře.

Existuje též velká řada dokladů z dřívější i nedávné minulosti o obrovských finančních nákladech, které byly doslova vymrhány na marné nákladné vrty v místech, na nichž proutkaři „nalezli“ podzemní ložiska nafty, vodní zdroje a jiné přírodní suroviny. Např. v *„Naučném slovníku přírodních věd pro školu a dům“* 3. díl, vydaném v Praze r. 1940 pod redakcí prof. Kaviny, který sám na určité schopnosti proutkařů asi věřil, čteme na str. 504 mj. i toto: *„Celá sta hlubinných vrtů, bezvýsledně u nás provedených na návrhy proutkařů (např. v Praze a v jiném okolí), což znamená velmi značné náklady, musí být výstrahou před výhradním použitím proutkařů k větším a odpovědnějším pracím.“*

V německé knížce prof. Prokopa, o které jsme již psali, je psáno na str. 179 an. toto: *„Také z ekonomického hlediska je naléhavě nutná ochrana proti proutkařům, p.). Stále ještě jsou mrhány velmi značné veřejné a komunální prostředky na bezvýsledné vrty podle návrhů proutkařů. ... Po desetiletí bezvýsledně „provrtával“ německý naftový průmysl milióny marek, spoléhaje na pochybné údaje proutkařů.“*

Jsou ovšem lidé, které nelze přesvědčit žádným vědeckým důkazem o jejich omylu. Ale to jsou lidé, jejichž myšlení je v podstatě na stejné úrovni jako těch vrstevníků *Galileo Galilei*, kteří se odmítli podívat do dalekohledu, když jim tento veliký vědec nabízel, aby zhlédli skutečný vzhled Měsíce, skvrny na Slunci, fáze Venuše a „planetární“ soustavu Jupiterových měsíců.

A tak se nakonec nabízí otázka: *Jsou anebo nejsou proutkaři podvodníci?* V odpověď můžeme všechny proutkaře rozdělit do dvou skupin: Do první skupiny patří ti, kteří provozují proutkaření za úplatu (zpravidla nemalou). Podobné činnosti charakterizuje trestní zákoník jako nekalé. Do druhé skupiny patří ti čestní lidé, kteří věří na tajemné síly, vycházející ze zemních zdrojů, ohnisek nemocí atd. nebo z těchto „proutkařů“ samotných, protože si neumějí vysvětlit přirozeným způsobem mocné pohyby proutků nebo kroužení kyvadla pro nedostatečné fyzikální vzdělání. Tito lidé se ovšem nezabývají proutkařením řemeslně.

Autor tohoto článku vidí nejlepší lék proti proutkařské pověře a jejím škodlivým následkům v tom, když se „proutkaření“ naučí každý občan jako hře. A k tomu přeje všem čtenářům mnoho úspěchů.

Předjíždění není vždy snadné

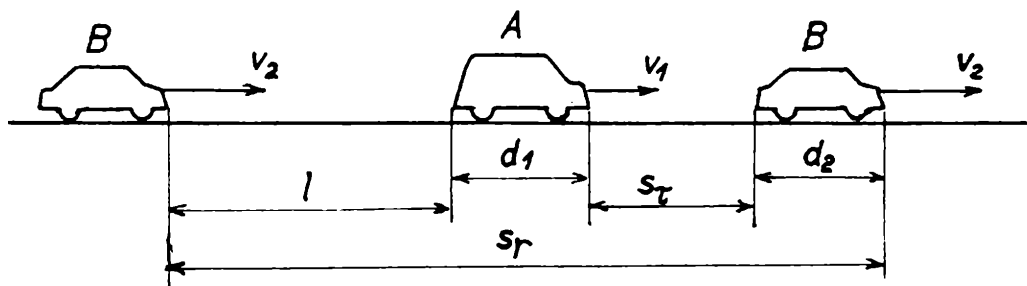
Až si jednou pořídíte motorové vozidlo (4. část)

RNDr. MILAN BEDNAŘÍK — RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Počet motorových vozidel na našich silnicích rok od roku vzrůstá. Stále častěji dochází k tomu, že řidiči rychlejších automobilů předjíždějí vozidla pomalejší. Je totiž všeobecně známo, že většina řidičů, pokud vlastní rychlý a spolehlivý automobil, se velmi nerada přizpůsobuje jízdě vozidel s menší rychlostí. Tito řidiči bývají obvykle značně netrpěliví (ačkoliv třeba nikam zrovna nespěchají), jsou-li celkovou dopravní situací donuceni jet delší dobu v přiměřeném odstupu za jiným, byť i jen o málo pomalejším vozidlem.*) Proto využívají každé příležitosti k tomu, aby vozidlo, které jim brání v jejich jízdě, co nejdříve předjeli.

Vzájemné předjíždění motorových vozidel však není pro řidiče záležitost vždy jednoduchá. Skrývá v sobě řadu nebezpečí, která vyplývají z vysokého počtu vozidel na silnicích, z různé rychlosti těchto vozidel, z nedostatečné šířky některých vozovek apod. Přitom snad největším nebezpečím je skutečnost, že po celou dobu předjíždění jede vozidlo mimo pravou stranu vozovky, tzn. u většiny našich silnic proti směru všech protijedoucích vozidel.

*) O velikosti odstupu, který je nutno udržovat za jiným vozidlem, jste se mohli dočíst ve 3. části tohoto seriálu.



Obr. 1.

Na to je pamatováno i ve vyhlášce o pravidlech silničního provozu, kde je výslovně uvedeno, že řidič smí předjíždět jen tehdy, má-li dostatečný rozhled na celou dráhu potřebnou k předjetí (proto je zakázáno předjíždět např. na křižovatkách, před vrcholem stoupání, v tunelech a na jiných nepřehledných místech), neohrozí-li přitom bezpečnost protijedoucích vozidel (ani je nedonutí ke snížení rychlosti jízdy) a může-li se pak bezpečně zařadit před vozidlo nebo vozidla, která chce předjet.

Otázka bezpečnosti při předjíždění úzce souvisí se stanovením dráhy, kterou vozidlo pro tento manévř potřebuje. Uvědomíme-li si, že tato dráha musí být po celou dobu předjíždění, kdy se vozidlo pohybuje mimo pravý jízdní pruh vozovky, stále volná, můžeme říci, že předjíždění bude tím bezpečnější, čím bude tato dráha kratší.

Velikost dráhy potřebné k předjetí závisí především na rychlosti obou vozidel, tj. na rychlosti vozidla předjíždějícího i vozidla předjížděného. Pro rychlost předjíždějícího vozidla budeme uvažovat celkem tři případy:

1. Předjíždějící vozidlo jede po celou dobu předjíždění stálou rychlostí, tj. koná pohyb rovnoměrný.
2. Předjíždějící vozidlo jede po celou dobu předjíždění se stálým zrychlením, tj. koná pohyb rovnoměrně zrychlený.
3. Předjíždějící vozidlo jede rovnoměrně zrychleně jen po určitou dobu předjíždění, zbývající dobu koná pohyb rovnoměrný.

Pro předjížděné vozidlo budeme ve všech uvedených případech uvažovat pouze pohyb rovnoměrný. Předpokládáme totiž, že všichni řidiči dodržují další pravidlo silničního provozu, podle něhož nesmí předjížděné vozidlo nikdy zvyšovat rychlost jízdy.

V tomto článku se zaměříme jen na řešení případu číslo 1, tj. na případ, kdy předjíždějící vozidlo koná po celou dobu předjíždění pohyb rovnoměrný. Další dva případy budou obsahem příštího článku.

Vyjdeme ze situace zobrazené na obr. 1. Nechť vozidlo A jede stálou rychlostí v_1 a vozidlo B se k němu blíží rychlostí $v_2 > v_1$. Předpokládejme, že vozidlo B začne předjíždět v okamžiku, kdy bude právě

v kritické vzdálenosti l od vozidla A ; pro tuto vzdálenost jsme odvodili v předchozím článku vztah

$$l = v_2 \tau + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}, \quad (1)$$

v němž doba τ je součet reakční doby řidiče a doby zpoždění účinku brzd vozidla B , a je zpomalení, kterého mohou dosáhnout obě vozidla.

Po celou dobu předjíždění se rychlosti obou vozidel nemění. Nechť vozidlo B ukončí předjíždění tím, že se zařadí opět na pravou stranu vozovky v odstupu

$$s\tau = v_1\tau \quad (2)$$

před vozidlo A , tj. ve vzdálenosti rovnající se dráze nebrzděného vozidla A (tento odstup je zcela bezpečný, neboť vozidlo A , jedoucí nyní již jako druhé, se pohybuje menší rychlostí než vozidlo B).

Označíme-li ještě d_1 délku vozidla A , d_2 délku vozidla B , můžeme vyjádřit vzdálenost, o kterou se přesune vozidlo B vzhledem k vozu A , rovnicí

$$s_r = l + s\tau + d_1 + d_2.$$

Jelikož se vůz B pohybuje vzhledem k vozu A relativní rychlostí

$$v_r = v_2 - v_1,$$

proběhne celé předjíždění za dobu

$$t = \frac{s_r}{v_r} = \frac{l + s\tau + d_1 + d_2}{v_2 - v_1}.$$

Za tutéž dobu však urazí předjíždějící vozidlo B skutečnou dráhu

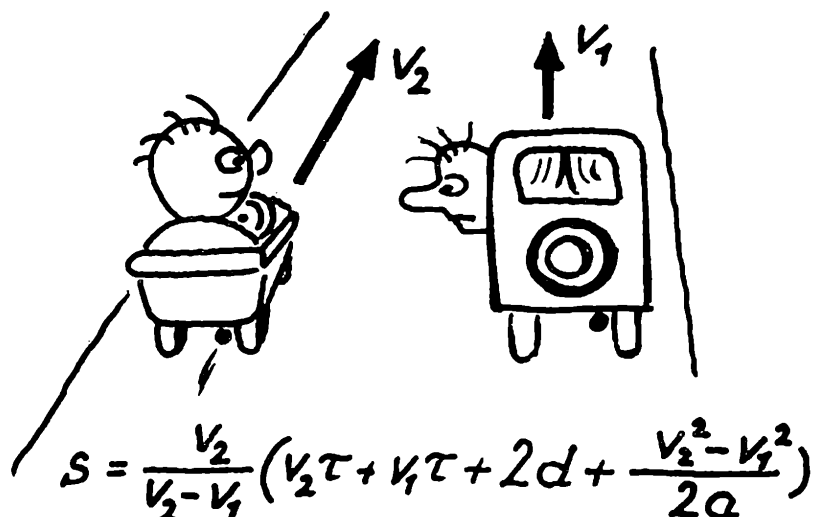
$$s = v_2 t.$$

Dosadíme-li dále za dobu t předchozí vztah a použijeme-li současně vztahů (1) a (2), dostaneme po menší úpravě

$$s = \frac{v_2}{v_2 - v_1} \left(v_2 \tau + v_1 \tau + d_1 + d_2 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} \right). \quad (3)$$

Tím jsme získali konečný vztah pro velikost celé dráhy, kterou urazí vozidlo B při předjíždění vozidla A . Přitom má vztah smysl jen pro rychlosti $v_2 > v_1$ a zpomalení $a > 0$.

Přestože vztah (3) vyhlíží poměrně složitě, je v podstatě jednoduchý; rovněž číselné výpočty, které se podle něho provádějí, jsou (jak uvidíme dále) zcela prosté. Ze vztahu je zřejmé, že dráha potřebná k předjetí závisí na těchto veličinách: na velikostech rychlostí v_1 , v_2 obou vozidel, na jejich délkách d_1 , d_2 , na době τ (pro jednoduchost předpokládáme pro



obě vozidla dobu τ stejnou) a na možném zpomalení a vozidel (i zde předpokládáme u obou vozidel stejné zpomalení).

Příklad 1: Řidič osobního automobilu jede po přímé a rovné silnici rychlostí 108 km h^{-1} a dojíždí jiný osobní vůz, který se pohybuje rychlostí 90 km h^{-1} . Délka každého z obou vozů je 4 m , doba $\tau = 1 \text{ s}$, předpokládané zpomalení je 5 m s^{-2} . Je možno pokládat předjetí za bezpečné, má-li řidič rychlejšího vozu k dispozici volnou dráhu 500 m ?

Řešení: Abychom zjistili, zda uvedená vzdálenost 500 m je pro bezpečné předjetí postačující, vypočítáme dráhu s potřebnou k předjetí. Do vztahu (3) dosazujeme $v_2 = 108 \text{ km h}^{-1} = 30 \text{ m s}^{-1}$, $v_1 = 90 \text{ km h}^{-1} = 25 \text{ m s}^{-1}$, $\tau = 1 \text{ s}$, $d_1 = d_2 = 4 \text{ m}$, $a = 5 \text{ m s}^{-2}$ a dostáváme

$$s = \frac{30}{30 - 25} \left(30 \cdot 1 + 25 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + \frac{900 - 625}{2 \cdot 5} \right) = 543.$$

Zápis příslušných jednotek jsme ve výpočtu pro úsporu místa vynechali. Poněvadž všechny číselné hodnoty byly dosazovány v jednotkách soustavy SI, je vypočítaná dráha v metrech, tedy $s = 543 \text{ m}$.

Závěr: Poněvadž vypočítaná dráha potřebná k předjetí překračuje velikost dráhy, kterou měl automobil k dispozici, o $(543 - 500) \text{ m} = 43 \text{ m}$, nelze pokládat předjíždění za bezpečné.

Příklad 2: Jak se změní velikost dráhy potřebné k předjetí ve výsledku předchozího příkladu, jestliže se za podmínek jinak stejných rychlost obou vozidel a) zvětší o 5 m s^{-1} , b) zmenší o 5 m s^{-1} ?

Řešení: Postupujeme analogickým způsobem jako v příkladu 1. Do vztahu (3) dosadíme změněné hodnoty rychlostí:

$$\text{a) } v_2 = 35 \text{ m s}^{-1}, \quad v_1 = 30 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{b) } v_2 = 25 \text{ m s}^{-1}, \quad v_1 = 20 \text{ m s}^{-1}$$

a při stejných číselných hodnotách ostatních veličin vypočítáme:

$$\text{a) } s = 739 \text{ m, } \text{b) } s = 378 \text{ m.}$$

Z výsledku je patrné, že při menší rychlosti obou vozidel proběhne předjíždění na mnohem kratší dráze než při rychlosti velké, kdy bychom překročili dráhu 500 m, kterou mělo v příkladu 1. předjíždějící vozidlo k dispozici, téměř o 50 %. Současně vidíme, že při menší rychlosti by bylo předjíždění za daných okolností zcela bezpečné, neboť předjíždějící vozidlo urazí při předjíždění dráhu o $(500 - 378) \text{ m} = 122 \text{ m}$ kratší, než je volný úsek silnice.

V dalším příkladu si můžete všimnout, jak se změní dráha potřebná k předjetí v případě, že změním rychlost pouze jednoho vozidla.

Příklad 3: Jak se změní velikost dráhy potřebné k předjetí ve výsledku příkladu 1, jestliže se o 5 m s^{-1} zvětší rychlost a) předjíždějícího automobilu, b) předjížděného automobilu.

Řešení: Tentokrát dosazujeme do vztahu (3) všechny číselné hodnoty stejné jako v příkladu 1, až na rychlost v_2 v případě a) nebo rychlost v_1 v případě b). Jak si snadno můžete vypočítat, je

$$\text{a) pro } v_2 = 35 \text{ m s}^{-1}, v_1 = 25 \text{ m s}^{-1} \text{ dráha } s = 448 \text{ m,}$$

$$\text{b) pro } v_2 = 30 \text{ m s}^{-1}, v_1 = 30 \text{ m s}^{-1} \text{ dráhu vypočítat nelze,}$$

neboť ve jmenovateli prvního zlomku ve vztahu (3) je $v_2 - v_1 = 0$.

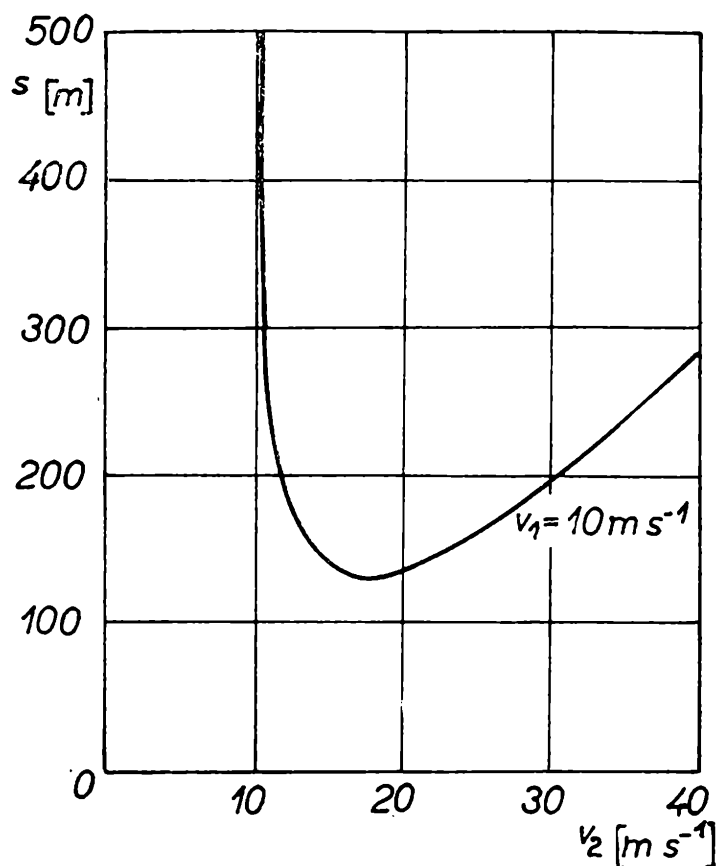
Jak vidíme, předjetí je při volné dráze 500 m v prvním případě bezpečné, zatímco v případě druhém není předjetí vůbec možné, neboť obě vozidla mají stejnou rychlost.

Celkový přehled o tom, jakých přibližných hodnot nabývá dráha s v závislosti na různých hodnotách rychlostí v_1 a v_2 , poskytuje tabulka I.

Tabulka I.

Rychlost v_2 [m s^{-1}]		5	10	15	20	25	30	35	40
Dráha s [m] pro rychlosti v_1 [m s^{-1}]	$v_1 = 0$	18	30	48	70	98	130	168	210
	$v_1 = 10$	—	—	134	140	163	195	235	280
	$v_1 = 20$	—	—	—	—	388	330	344	380
	$v_1 = 30$	—	—	—	—	—	—	753	600

Číselné hodnoty dráhy s byly vypočítány pro hodnoty $\tau = 1 \text{ s}$, $a = 5 \text{ m s}^{-2}$ a $d_1 = d_2 = 5 \text{ m}$. Z tabulky je ihned patrné, že při rychlostech $v_2 \leq v_1$ není předjetí možné (viz prázdná místa tabulky). Sledujeme-li dále svislé řádky tabulky, zjišťujeme, že s rostoucí rychlostí v_1 se rovněž zvětšuje dráha s potřebná k předjetí. Pohlédneme-li však na vodorovné řádky, poznáváme, že růst dráhy s v závislosti na rychlosti v_2



Obr. 2.

je patrný pouze pro rychlost $v_1 = 0$ (v tomto případě předjížděné vozidlo stojí), kdežto pro rychlosti $v_1 \neq 0$ se objevuje až od druhého číselného údaje. Z toho ovšem vyplývá, že funkce vyjadřující závislost dráhy s na rychlosti v_2 při parametru $v_1 \neq 0$ není v celém svém oboru rostoucí; funkce $s = f(v_2)$ má někde minimum.

O tom se můžeme nejlépe přesvědčit z obr. 2, na němž je funkce $s = f(v_2)$ znázorněna graficky pro $v_1 = 10 \text{ m s}^{-1}$. Z grafu snadno odhadneme, že funkce má minimum přibližně pro $v_2 = 18 \text{ m s}^{-1}$, přičemž hodnota tohoto minima je $s \doteq 135 \text{ m}$. V našem případě to znamená, že na nejkratší dráze 135 m předjedeme vozidlo jedoucí rychlostí $10 \text{ m s}^{-1} = 36 \text{ km h}^{-1}$ tehdy, pojedeme-li rychlostí $18 \text{ m s}^{-1} \doteq 65 \text{ km h}^{-1}$. Pojedeme-li rychlostí větší než 18 m s^{-1} , např. 25 m s^{-1} , 30 m s^{-1} , 40 m s^{-1} , potřebujeme k předjetí dráhu větší, v našem případě 163 m, 195 m, 280 m (viz tabulka I).

Dráha potřebná k předjetí se však zvětšuje také při menších rychlostech než 18 m s^{-1} , a to dokonce, jak je patrné z obr. 1, s klesající rychlostí mnohem rychleji. Kdybychom např. chtěli předjet dané vozidlo rychlostí pouze 12 m s^{-1} , 11 m s^{-1} nebo $10,5 \text{ m s}^{-1}$, potřebovali bychom volnou vzdálenost asi 216 m, 352 m nebo 672 m, a kdyby se rychlost našeho vozidla blížila rychlosti vozidla předjížděného, tj. rychlosti 10 m s^{-1} , vzrostla by dráha s nade všechny meze.

Odtud vyplývá důležitý závěr pro řidičskou praxi: Nemůžeme-li předjet přiměřeně vyšší rychlostí než je rychlost vozidla jedoucího před námi, pak je výhodnější a pro nás bezpečnější od předjíždění upustit.

Pro bezpečnost předjíždění je však významná ještě jedna okolnost. Poněvadž při předjíždění musí věnovat řidič zvýšenou pozornost také protijedoucím vozidlům, je nutné, aby volný úsek silnice, na který má výhled, byl ve skutečnosti mnohem větší než pouze dráha potřebná k předjetí, daná vztahem (3). Objeví-li se totiž v protisměru automobil, jedoucí stejnou rychlostí, jakou ukazuje rychloměr našeho vozidla, potřebujeme k předjetí volný úsek silnice o délce nejméně dvojnásobné.

Příklad 4. Je předjíždění vozidel popsané v příkladu 1 bezpečné, jestliže proti automobilu, který začíná předjíždět, se objeví ve vzdálenosti 1 km protijedoucí vozidlo, jehož rychlost je rovněž 108 km h^{-1} ?

Řešení: V příkladu 1 jsme vypočetli pro dráhu potřebnou k předjetí hodnotu $s = 543 \text{ m}$. Vzhledem k tomu, že při stejné rychlosti urazí během doby našeho předjíždění stejnou dráhu i protijedoucí automobil, potřebovali bychom k předjetí volnou dráhu celkem $2 \cdot 543 \text{ m} = 1086 \text{ m}$. Tedy přestože protijedoucí automobil byl vzdálen 1 km (což by mnozí řidiči mohli snadno pokládat za vzdálenost dostatečně velkou), bylo by předjíždění za daných rychlostních podmínek velmi riskantní.

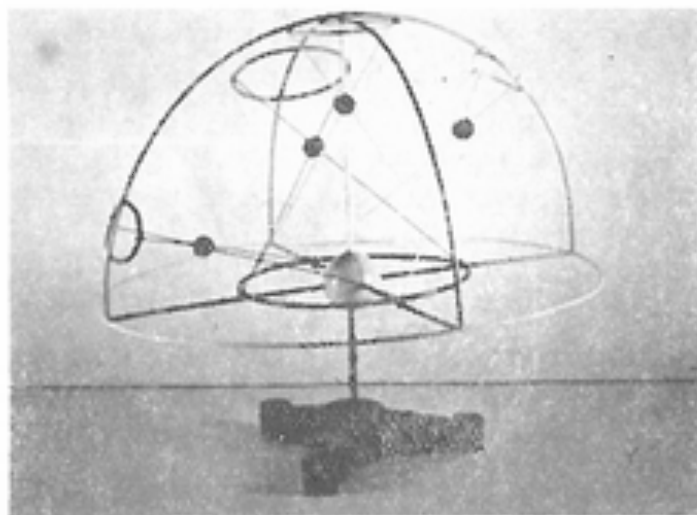
Je samozřejmé, že v praxi se předjíždí často také jinak. Jestliže např. uvidí řidič při předjíždění v protisměru jiné rychle jedoucí vozidlo, bude se snažit předjetí dokončit dříve tím, že „přidá plyn“ a pojedou rychleji. To už však je případ předjíždění se zrychlením, o němž se můžete dočíst v příštím článku.

astronomie

Roční paralaxa hvězd

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ—RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Jedním z důvodů, pro které nepřijal slavný dánský astronom Tycho Brahe (1546—1601) novou Koperníkovu heliocentrickou světovou soustavu, bylo to, že nenaměřil roční paralaxu hvězd. Správně totiž usuzoval, že když Země obíhá kolem Slunce, pak se tento pohyb musí projevit i ve zdánlivém pohybu hvězd. Vznik roční paralaxy hvězd je názorně vidět na modelu, jehož snímek je na obr. 1. Kulička uprostřed



Obr. 1. Model roční paralaxy hvězd

znázorňuje Slunce, vnitřní elipsa dráhu Země. Projekcí dráhy Země na sféru dostáváme rovinu ekliptiky. V různých vzdálenostech od Slunce a pod různými úhly vzhledem k rovině ekliptiky jsou umístěny čtyři kuličky, znázorňující hvězdy. Oběh Země kolem Slunce se zrcadlí ve zdánlivém pohybu hvězd tak, že hvězda opíše za jeden rok elipsu, jejíž velká poloosa je tím menší, čím je hvězda vzdálenější. Tvar elipsy závisí na ekliptikálních souřadnicích hvězdy, konkrétně na její astronomické šířce. Hvězda, která je přesně na pólu ekliptiky, opisuje elipsu, jejíž tvar je stejný jako tvar dráhy Země, tedy prakticky kružnicí. Čím je hvězda blíže k rovině ekliptiky, tím větší je výstřednost elipsy, až hvězda, která je přesně v rovině ekliptiky, koná jen harmonický kmitavý pohyb po úsečce ležící v rovině ekliptiky.

Tycho Brahe byl jedním z posledních astronomů, kteří pozorovali oblohu bez dalekohledu; přesnost v určení polohy hvězd tehdejšími přístroji dosahovala jen 1 až 2 obloukových minut. To byl také důvod, proč Brahe roční paralaxu nemohl změřit: paralaxy všech hvězd jsou menší než jedna oblouková vteřina. Po objevu dalekohledu se přesnost v určování poloh hvězd zvětšila, ale přesto nebyla zpočátku ještě dostatečná k měření tak malých úhlů; o změření paralaxy pomocí dalekohledu se také marně pokoušeli Robert Hooke a Olaf Römer.

Teprve ve třicátých letech 19. století dosáhli úspěchu téměř současně F. Bessel v Německu, F. Struve v Rusku a T. Henderson na mysu Dobré naděje.

Friedrich Wilhelm Bessel (1784—1846) zvolil pro měření hvězdu 61 Cygni (61. hvězdu v souhvězdí Labutě), a to proto, že měla největší v té době známý vlastní pohyb — $5''$ za rok — a z toho bylo zřejmé, že jde o poměrně blízkou hvězdu. Bessel pozoroval hvězdu 61 Cygni v ob-

dobí od srpna 1837 do října 1839 a určoval její polohu vzhledem ke dvěma přibližně s ní symetricky položeným hvězdám. Tyto srovnávací hvězdy volil poměrně málo jasné, neboť o nich lze předpokládat, že jsou velmi vzdálené a jejich paralaktický posuv po obloze je zanedbatelně malý, lze je tedy považovat za „klidné“. Výsledkem Besselových měření paralaxy hvězdy 61 Cygni byla hodnota $\pi = 0,314''$

Ředitel pulkovské hvězdárny Friedrich G. W. Struve (1793—1864) použil k měření paralaxy hvězdu Vega (α Lyrae). Protože jde o poměrně jasnou hvězdu, Struve usoudil, že je poměrně blízko. Z měření, vykonaných v letech 1835 až 1838, mu vyšla hodnota paralaxy $0,261''$

Konečně Thomas Henderson (1798—1844) změřil paralaxu hvězdy α Centauri a obdržel hodnotu $0,91''$. Z toho je vidět, že roční paralaxy hvězd jsou hodnoty velmi malé a obtížně měřitelné i za pomoci dokonalých přístrojů. Pro úplnost připomeňme, že současné hodnoty paralax těchto tří hvězd se poněkud liší; výsledky udává tab. 1.

Tabulka 1. *Roční paralaxy hvězd*

Hvězda	Pozorovatel	Rok	Paralaxa π	Nynější hodnota paralaxy π
61 Cygni	Bessel	1839	$0,314''$	$0,299''$
Vega, α Lyrae	Struve	1840	$0,261''$	$0,124''$
α Centauri	Henderson	1839	$0,91''$	$0,754''$

Měření ročních paralax je i při použití fotografických metod stále zatíženo poměrně velkými pozorovacími chybami. Většině našich čtenářů je známo, že převrácená hodnota roční paralaxy hvězdy udává vzdálenost hvězdy v parsekách (pc). Nejbližší hvězdou je známá Proxima Centauri, jejíž paralaxa je $0,763''$, čili 1,3 pc (neboli 4,3 světelných roků). Přesnost měření těchto tzv. trigonometrických paralax je asi $\pm 0,03''$ až $\pm 0,02''$, což znamená, že lze takto určovat vzdálenost hvězd do 40 až 50 parseků. Paralaxa hvězdy ve vzdálenosti 50 pc je $0,02''$, čili chyba dosahuje sta procent. Dosud byly změřeny trigonometrické paralaxy asi u 6000 hvězd, ale jen šestina z nich má paralaxu změřenou spolehlivě.

Dva Lunochody zkoumaly Měsíc

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ — RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Začátek epochy přímého zkoumání Měsíce můžeme klást do roku 1959, kdy na Měsíc dopadla sovětská automatická sonda Luna 2. Již rok předtím byly o vyslání rakety k Měsíci učiněny tři pokusy v USA, avšak všechny skončily nezdarem — žádná z těchto raket nedosáhla potřebné vzdálenosti od Země. V lednu 1959 byla k Měsíci vyslána Luna 1. Nedopadla sice na Měsíc, ale proletěla ve vzdálenosti pouhých 6000 km od jeho povrchu a po opuštění gravitačního pole Měsíce začala obíhat kolem Slunce a vytvořila tak první umělou planetku.

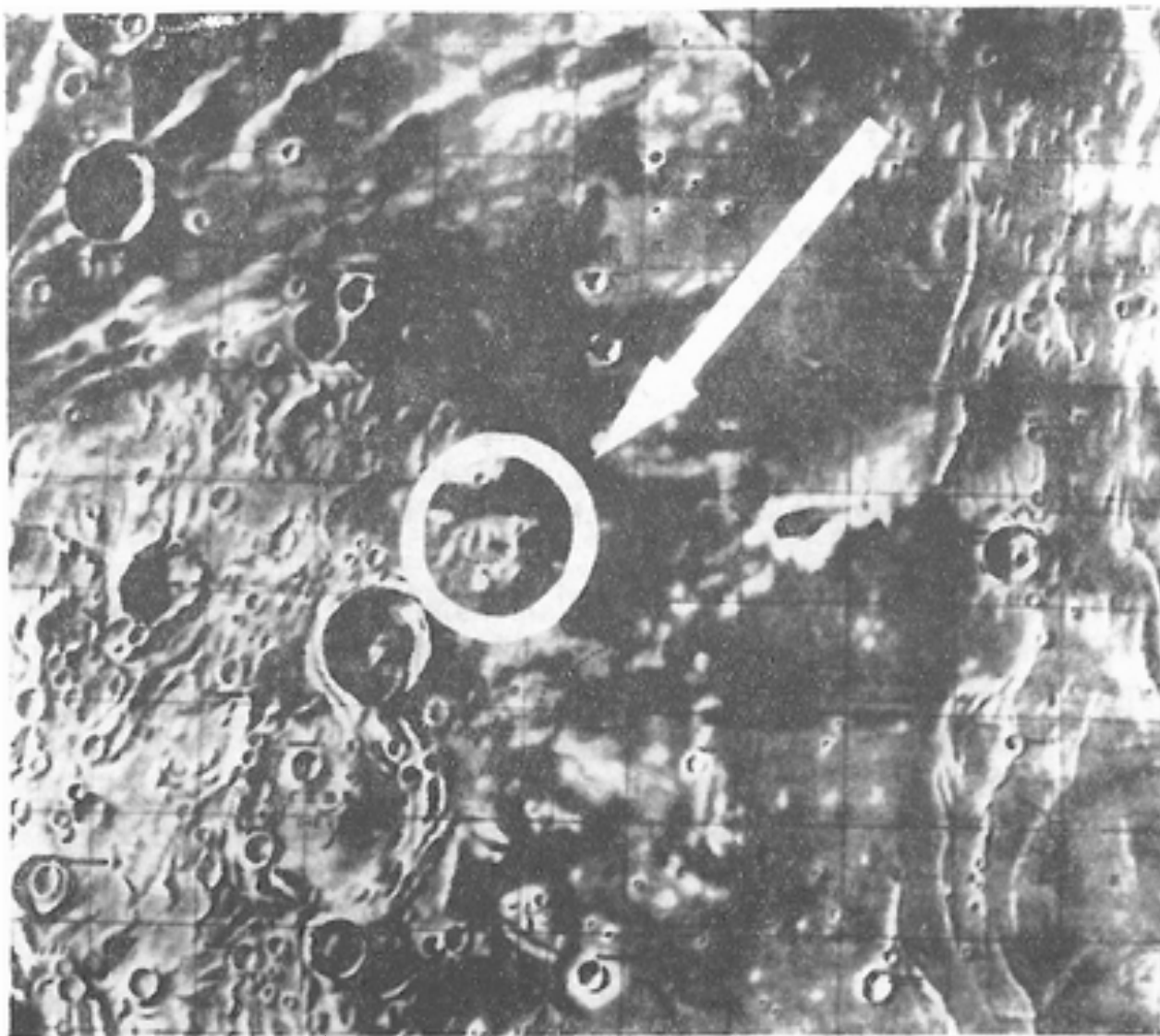
Luna 2 byla vypuštěna dne 12. září 1959. Nesla kabinu s četnými vědeckými přístroji, během letu vysílala naměřené údaje a na povrch Měsíce dopadla 14. září 1959 v oblasti Mare Serenitatis. Tím byl poprvé v dějinách lidstva uskutečněn let na nejbližší kosmické těleso.

Po úspěšném letu Luny 2 následovaly další meziplanetární stanice, které byly k Měsíci vysílány v SSSR i USA. Krátce po Luně 2, v říjnu 1959, byla vypuštěna Luna 3, která uskutečnila první oblet Měsíce a pořídila první snímky jeho odvrácené strany. Lety k Měsíci byly stále úspěšnější a postupně byla vyfotografována a zmapována celá odvrácená strana Měsíce.

V roce 1966 se uskutečnilo první měkké přistání na Měsíci — 6. února 1966 měkce přistála v oblasti Oceanus Procellarum sovětská meziplanetární sonda Luna 9; místo jejího přistání je na obr. 1 vyznačeno kroužkem. O tři roky později, v r. 1969, poprvé vstoupil na Měsíc člověk — americký kosmonaut Neil Armstrong. V USA byly pak vysílány k Měsíci další kosmické lodi s lidskou posádkou a američtí kosmonauti prováděli přímý výzkum Měsíce.

Vědci v Sovětském svazu nenásledovali ve vysílání lidí na Měsíc své americké kolegy. Kosmonauti jsou při letu na Měsíc i při sebelepší technice vystaveni četným nebezpečím, jako jsou meteory, které, nebrzděny atmosférou, mohou kosmickou loď poškodit. Jiným nebezpečím je kosmické záření a korpuskulární záření Slunce, jehož intenzita se může při erupcích na Slunci nebezpečně zvýšit. Musíme také uvážit, že při jakékoli poruše na kosmické lodi nebo na měsíčním modulu by byl znemožněn návrat kosmonautů a případná pomoc ze Země by nemusela přijít včas.

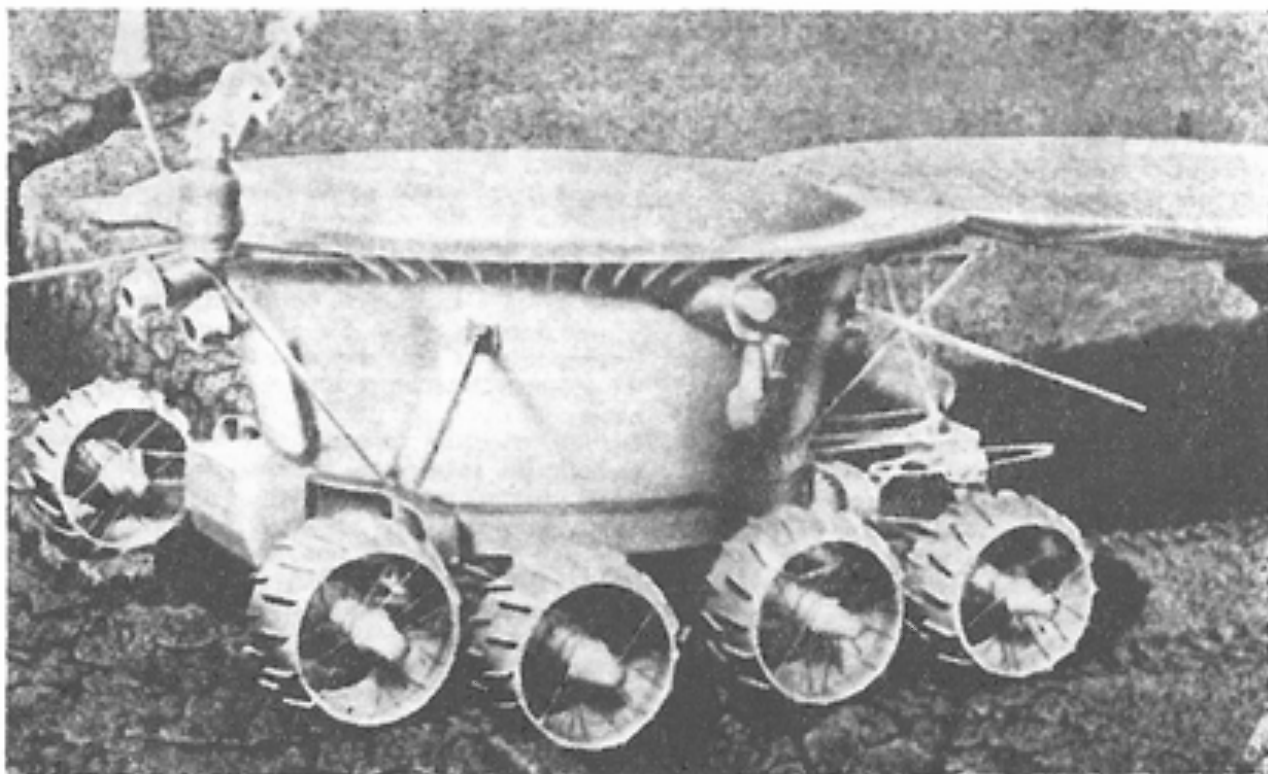
Aby životy kosmonautů nebyly ohroženy, volili vědci v Sovětském svazu jiný způsob přímého výzkumu Měsíce, a to pomocí automatických samohybných laboratoří. Na Měsíci pracovaly již dvě takové labora-



Obr. 1. Místo dopadu sovětské sondy Luna 9 na povrch Měsíce

toře, které dostaly název Lunochod 1 a Lunochod 2. Předností těchto laboratorí je také to, že mohou na Měsíci pracovat po velmi dlouhou dobu, jaká pro kosmonauty není dosud myslitelná.

Lunochod 1 byl na Měsíc dopraven automatickou stanicí Luna 17, která byla vypuštěna 10. listopadu 1970 a měkce přistála na Měsíci 17. listopadu 1970. Automatická stanice byla při letu řízena ze Země a k přistání byla navedena v oblasti Mare Imbrium. Lunochod 1 byl 221 cm dlouhý a 160 cm široký a měl hmotnost 756 kg (obr. 2). Pohyboval se na osmikolovém podvozku, jehož každé kolo mělo vlastní elektromotor, brzdu, mechanismus pro odpojení přívodu elektrického proudu a snímač počtu otáček kola. Vozidlo bylo řízeno rádiovými povely ze Země. Na Zemi byl pohyb vozidla sledován pomocí televizního systému; mezi předními koly podvozku byly umístěny dvě televizní kamery, po stranách pak boční kamery. Zde si musíme uvědomit, že řízení vozidla bylo ztíženo tím, že signál z Lunochodu, šířící se rychlostí



Obr. 2. Sovětská stanice Lúnochod 1

$300\,000\text{ km s}^{-1}$, potřebuje k dosažení Země asi 1,28 s, a stejnou dobu potřebuje řídicí signál ze Země k dosažení Měsíce — v řídicím středisku na Zemi museli při vysílání povelů s touto časovou ztrátou počítat. Kromě televizního systému, určeného ke kontrole projížděné trasy, byl na Lunochodu 1 umístěn další systém, který sloužil k vysílání panoramatických záběrů; celkem obsahoval čtyři kamery.

Na podvozku vozidla byl umístěn hermeticky uzavřený přístrojový úsek. Ten byl během měsíční noci zakryt poklopem, který zabraňoval vyzařování tepla. Během dne byl otevřen a články slunečních baterií, umístěných na jeho vnitřní straně, nabíjely akumulátory. Aby byla zajištěna stálá teplota přístrojů, byl přístrojový úsek naplněn plynem; v noci, kdy sluneční baterie nebyly v činnosti, vyráběly teplo speciální radioizotopy.

Lunochod 1 se pohyboval v západní oblasti Mare Imbrium, které je poměrně ploché a na němž ze Země nevidíme větší krátery. Vědecký program Lunochodu 1 byl neobyčejně bohatý. Za dobu deset a půl měsíce, od 17. listopadu 1970 do 4. října 1971, po kterou byl v činnosti, urazil po měsíčním povrchu vzdálenost 10,54 km a podrobně prozkoumal $80\,000\text{ m}^2$ měsíčního povrchu. Ve více než 500 místech byly studovány fyzikálně-mechanické vlastnosti povrchu a na 25 místech byly vykonány chemické analýzy jeho složení. Televizní soustavy vyslaly na Zemi kolem 200 panoramatických záběrů měsíční krajiny a 20 000 fotografií, mezi nimiž byly i stereoskopické snímky. Kromě řady dalších přístrojů byl na

Lunochodu 1 umístěn rentgenový dalekohled, jímž byly sledovány zdroje rentgenového záření (připomeňme, že ze Země taková pozorování není možné konat, neboť rentgenové záření je pohlcováno zemskou atmosférou). Zkoumány byly např. zdroje Sco X-1 (první zdroj rentgenového záření v souhvězdí Štíra), dále Sco X-2 a další zdroje v souhvězdí Kasiopeji, Centaura a Střelce. Na Lunochodu 1 byl instalován také laserový reflektor. Od tohoto reflektoru se odrazily světelné impulsy vyslané ze Země, což umožnilo s velkou přesností změřit vzdálenost mezi Zemí a Měsícem. Na konci své činnosti zaujal Lunochod 1 polohu, při níž byl laserový reflektor namířen k Zemi tak, aby i po skončení činnosti Lunochodu bylo možné konat další laserová zaměrování.

Lunochod 2 dopravila 15. ledna 1973 ve 23 hodin 25 minut na povrch Měsíce sovětská automatická stanice Luna 21, a to na východní okraj Mare Serenitatis, do kráteru Le Monnier. Mare Serenitatis je jedním z typických kruhových „moří“ na viditelném povrchu Měsíce. Kráter Le Monnier měří v průměru 55 km. Lunochod 2 se prakticky nelišil od svého předchůdce, měl však větší hmotnost (o 84 kg). Měl lepší manévrovací schopnost a asi dvojnásobnou rychlost. Také na Lunochodu 2 byla zařízení k určování mechanických vlastností a chemického složení měsíčního povrchu, dále k měření intenzity světla oblohy na Měsíci a rentgenový dalekohled k studiu rentgenového záření Slunce. Navíc obsahoval Lunochod 2 magnetometr k měření magnetických vlastností měsíční horniny. Také na tomto Lunochodu byl instalován laserový reflektor francouzské výroby.

První výsledky měření Lunochodu 2 ukazují, že se povrch Měsíce liší od oblasti, v níž pracoval Lunochod 1. Panoramatické snímky Lunochodu 2 ukázaly vrcholky pohoří Taurus a v jižním směru pak horu, která byla předběžně nazvána Pic Lunochodu. Ráz povrchu v této oblasti je poměrně stejnorodý, bez větších kamenů. Na své cestě po měsíčním povrchu překonával Lunochod 2 mělké krátery o průměru 15 metrů, přičemž sklon jejich stěn dosahoval 20° až 25°. Za dobu téměř pěti měsíců překonala stanice vzdálenost 36,20 km. Činnost Lunochodu 2 byla podle zprávy TASS ukončena 8. května 1973.

Literatura :

Články v časopise „Zemlja i Vselennaja“ 1971, č. 3 a 6; 1972, č. 2; 1973, č. 3 a 4.

Charakter matematiky

JOSEF KOTYK, Pardubice

Zkušeností a přemýšlením nabývá člověk četných a velmi rozmanitých poznatků. Jeho vědomosti se tak stále rozmnožují. Hospodárnost v myšlení a požadavek přehlednosti vyžadují, aby tyto poznatky byly tříděny a sestavovány v celky, které by obsáhly poznatky určitého druhu v souboru soustavně uspořádaném a — pokud možno — úplném. Takovým celkům říkáme vědecké disciplíny, krátce vědy.¹⁾

V soustavě věd zaujímá významné místo matematika.

Všechno naše vědění, tedy i vědění matematické, má základ ve zkušenosti. Matematika přejala ze zkušenosti své základní pojmy, např. pojmy veličina, číslo, bod, přímka aj. Shledáváme však, že zkušenost nepodává tyto pojmy přímo, nýbrž že k nim dospíváme — někdy i velmi složitou — abstrakcí. Z dějin matematiky je vidět, že abstrakce patří k nejtěžším záležitostem lidského myšlení. V dějinách matematiky nalézáme také velmi četné pokusy, jimiž měly být základní pojmy, které nelze definovati, aspoň nějak objasněny. Do složitosti situace mohou čtenáři poněkud nahlédnouti např. již u samotného pojmu čísla: Není možno podati pro pojem čísla definici, která by neobsahovala nějakou větu, avšak je těžké vysloviti větu, která by neobsahovala nějakou číslovku anebo slovo v množném čísle. Pro zajímavost uvádím proto jen některá objasnění (nazývaná někdy, ovšem nesprávně, také definicemi) pro základní pojmy geometrické, pojem bodu, přímky a roviny.

Pro pojem bodu zaslouží pozornosti již dávný výrok Eukleidův,²⁾ jenž v překladě Widmanově (1489) zní: „Punctus ist eyn kleyn Ding daz nicht zu teylen ist.“ O této „věcičce, kterou nelze dále rozdělovati“

¹⁾ Vědecká disciplína je vědou v užším smyslu tohoto slova: v širším smyslu nazýváme vědou souhrn (soubor) všech vědeckých disciplín, tedy vědění vůbec.

²⁾ Stěžejní dílo „Stoicheia“ (Elementa, Základy) geniálního Eukleida z Alexandrie, řeckého matematika z doby okolo roku 300 před n. l., rozvíjí přehledně soustavu eukleidovské axiomatiky, jež neinteresuje jen matematika, nýbrž představuje také neodlučitelnou součást logiky. Do češtiny bylo přeloženo Františkem Servítem roku 1907.

říkáme po staletích, lidé pokročilého atomového věku, neméně moudře: „Bod nemá rozměru.“ Obdobně říkáme: „Rovina je plocha nekřivá.“ Co je však plocha? Záporné znaky mimoto vůbec neexistují! Uvedená rčení jsou tedy pouze výpomocným náznakem či pokusem o dorozumění, mohou proto stačiti toliko prvnímu uvedení do geometrie.

Podobná objasnění byla věhlasnými matematiky podána pro pojem přímky. Podle Eukleida je přímka „čára, jež leží stejně vzhledem k svým bodům“. Podle Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646—1716), posledního polyhistora, je přímka „čára, jež nemění svou polohu, jestliže jí otáčíme kolem jejích dvou pevných bodů“ Někdy říkáme také: „Přímka je čára, jež zachovává v každém svém bodě stálý směr.“³⁾ Jindy opět: „Přímka je čára, jež rozděluje rovinu ve dvě části shodné.“

Velmi výhodnou definicí čáry (nebo také plochy) je zejména její rovnice v analytické geometrii. Např. rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem r zní $x^2 + y^2 = r^2$, rovnice kulové plochy za týchž předpokladů pak $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$; jimi vyjadřujeme známou vlastnost všech bodů kružnice resp. kulové plochy, že mají od jejího středu stálou vzdálenost.

Matematické pojmy lze však často definovati rozmanitými způsoby. Např. kružnici definujeme někdy také jako geometrické místo bodů v rovině, majících od určitých dvou bodů roviny stálý poměr vzdáleností, jindy jako geometrické místo vrcholů obvodových úhlů pravých, jindy jako rovinnou čáru stálé křivosti, jindy jako čáru, v níž rovina protíná plochu kulovou, nebo čáru, v níž se protínají dvě plochy kulové, atd. Tyto výroky jsou pozoruhodné tím, že užívají pojmů bod, přímka, rovina, plocha, tedy základních pojmů, jež definovati nelze. Situace, která tak vzniká, je tedy zcela zvláštní. Shledáváme však toto: Okolnost, že základní pojmy definovati nelze, není přesné logické výstavbě matematiky jako vědy na závalu. Definice základních pojmů se nikde v matematice neužívá. V aritmetice nepotřebujeme nikde odpovědět na otázku, co je celé číslo, v geometrii obdobně na otázku, co je bod nebo přímka, všude vystačíme s axiomy, jimiž se celá čísla, body a přímky řídí. Jinak řečeno: V matematice užíváme právě jen těch vlastností základních pojmů, jež jsou vyjádřeny axiomy.

Axiomy (základní věty, zvané někdy také zásady)⁴⁾ jsou výroky dané někdy přímo názorem, jindy vlastnostmi pojmů, o něž jde, nebo výroky plynoucí ze zákonů myšlení. Bývají zpravidla tak evidentní, že

³⁾ Viz také Cvičení 3.

⁴⁾ Vytčení axiomů je věc zásadní důležitosti pro logické vybudování matematiky jako vědy. Podrobnější poučení o nich mohou čtenáři nalézt v autorových článcích „Základy geometrie“ (roč. 23, čís. 5, str. 132 až 135) a „Základy aritmetiky“ (roč. 24, čís. 2 až 3, str. 66 až 70).

nepocítujeme vůbec potřeby je dokazovati. Prvním matematikům byl jejich obsah dokonce tak samozřejmý, že jich někdy výslovně ani neuváděli, např. „Celek je větší než jeho část“, „Přímka je určena dvěma (různými) body“,⁵⁾ atd.

Axiomy mají svůj základ rovněž ve zkušenosti. Ani ony nebyly však do matematiky přejaty přímo tak, jak je zkušenost podává. Sledujme to blíže např. na axiomu geometrie „Dvěma (různými) body je určena přímka“. Jeho podkladem je zkušenost, že tyč se musí podepřít zpravidla na dvou místech, aby byla v rovnováze. Co platí však jen „zpravidla“, neplatí ovšem vždycky. Někdy lze tyč podepřít také v jednom bodě, pod těžištěm, jindy zase dva body, jsou-li příliš blízké nebo leží-li na téže straně těžiště, k tomu nestačí, apod. Matematika zjednodušuje větu vzatou ze zkušenosti abstrakcí (nepřihlíží např. také k hmotě tyče) a zobecní ji ve výrok vhodný pro dedukci. Tím nabývá netoliko uvažovaný axiom, nýbrž i jiné axiomy zároveň povahy postulátu (požadavku). Jiné postuláty žádají např., aby přímkou čáru omezenou bylo vždy možno prodloužit, aby každý bod bylo vždy možno s každým jiným spojit jedinou přímkou, apod.

Na základech takto položených lze matematiku dále budovati a logickou dedukcí i jejími pomůckami dospěti k větám postupně složitějším. Empirická metoda omezuje se v matematice tedy jen na stanovení malého počtu pojmů a vět; vše ostatní je odtud definováno a odvozeno postupem logickým tak, že celý soubor matematických poznatků je uveden v soustavu logicky dokonalou. Svou soustavností vyniká matematika jako vědecký celek. Některé obory matematické vyhovují pak úplně ideální představě vědecké soustavy, jejíž základní pojmy a věty jsou určité vytčeny a ostatní z nich bezvadně odvozeny.

K podrobnější charakteristice matematiky je třeba ještě dodat, že matematické pojmy, definice, úsudky i důkazy jsou zcela určité, jasné a přesné. Přesnost matematiky je umožněna jednoduchostí jejích pojmů i vět⁶⁾ a poměrně malou jejich závislostí na zkušenosti. Ve své přesnosti pokládá se matematika proto všeobecně za vzor vědy exaktní.⁷⁾ Vědám, které jí používají, vtiskuje pak rovněž tuto charakteristic-

⁵⁾ Viz Cvičení 6.

⁶⁾ Věhlasný francouzský racionalista René Descartes (1596—1650) napsal: „Aritmetika a geometrie jsou daleko spolehlivější než jiné vědy proto, že se jediné zabývají věcmi zcela prostými a jednoduchými...“ (viz jeho „Regulae ad directionem ingenii etc.“, 1701).

⁷⁾ Lat. exactus = přesný, úplně provedený.

kou známku; jsou považovány také za exaktní, a to tou měrou, kterou dovedou svůj předmět zpracovati metodami matematickými.⁸⁾

V ohledu formálním je neocenitelná podrobná, důmyslná a účelná symbolika, soustava symbolů (znaků), které si matematika vypěstovala k označování svých pojmů, útvarů i operací. Jí je umožněna nejen známá matematická hospodárnost, ekonomie místa a času, také však ekonomie matematického myšlení i obsažnost ve vyjadřování. Projevuje se např. již zavedením pozičního systému číselného,⁹⁾ užíváním písmen k označení obecných čísel a veličin, rozmanitých operačních znamének, vzorců aj. Úsudky téhož nebo podobného druhu, jaké jsme již nejednou provedli, vystihneme vzorcem tak úsporně, že máme pro příště ušetřeno mnoho práce a sil, jež můžeme uplatniti při řešení nových úloh. Popsané prostředky umožňují matematikům podávat obsah vědy zároveň v tvaru stručném a znění zhuštěném, přehledném, i v záležitostech obtížnějších. Odtud pochází také úsilí jiných věd, aby i v nich byl způsob ten více méně šťastně napodobován.

„Jednotný charakter matematiky je podmíněn vnitřní podstatou této vědy, neboť matematika je základem všeho exaktního přírodovědného poznání,“ prohlásil David Hilbert.¹⁰⁾ Při rozšiřování matematiky jejím rozvojem se tento charakter neztrácí. Dnešní charakter matematiky ukazuje, že proces vzájemného prolínání a sjednocování matematických disciplin naopak stále pokračuje a zůstane zajisté charakteristickým rysem i pro matematiku budoucnosti.

Jeden starý francouzský matematik řekl: „Matematickou teorii můžeš pokládat za dokonalou, až ve chvíli, kdy jsi ji učinil tak jasnou, že bys ji mohl vysvětlit prvnímu člověku, kterého potkáš na ulici.“ Také matematický problém, který si chce činiti nárok na dokonalost, má podle Hilberta splňovati tento požadavek jasnosti a přístupnosti. Potom nás možností snadného pochopení přitahuje. Musí být ovšem zároveň natolik obtížný, aby nás vzrušoval, byl nám orientačním bodem

⁸⁾ Filosofové-idealisté však význam matematiky, domnělé „královny věd“, nadmíru zveličují. S míněním německého filosofa Immanuela Kanta (žil v letech 1724 až 1804), že „v každé přírodní nauce se najde jen tolik vědy, kolik se v ní najde matematiky“, zajisté nelze souhlasiti.

⁹⁾ Poziční soustava sehrála v rozvoji lidské kultury významnou úlohu. Užívali jí již Sumerové a Semité ve staré Mezopotámii, Mayové v střední Americe a j. V Evropě se však poziční zapisování čísel začalo rozvíjet až ve 12. století n. l.

¹⁰⁾ Cituji z Hilbertovy přednášky na 2. mezinárodním kongresu matematiků roku 1900 v Paříži. V ní formuloval Hilbert badatelský program týkající se logických základů matematiky. Zemřel před 30 lety roku 1943, proslulé Hilbertovy problémy ukazují však stále, jak bohatá, rozmanitá a široká je dnešní věda matematická.

na stezkách vedoucích k řešení a na konci cesty nás odměnil radostí z nalezení skryté pravdy.

Závěr článku nás přivádí ještě k poznámce o pověstné matematické jistotě v jiných vědách nedosažitelné. Čtenářům je známo, že např. nejvzdálenější oběžnice sluneční soustavy byly objeveny na místech nejprve výpočty zjištěných. Astronom najde hvězdu vždy tam, kde podle výpočtu být má, a byl by vysoce překvapen, kdyby na tomto místě nebyla!

Cvičení.

1. Podejte rozmanité definice

- a) přímé úměrnosti,
- b) rovnoběžníka.

2. Filosof Platón (427 až 347 před n. l.), hlava athénské Akademie, podal tuto definici úsečky: „Úsečka je čára, jejíž střed přikrývá oba konce.“ Vyložte, jak tomu možno rozuměti!

3. Výrok „Přímka je čára o stálém směru“ je příkladem definice chybné, neboť uvádí mezi znaky i pojem, který chceme definovati. Neříkáte někdy podobně „Tečna křivky je přímka, jež se křivky dotýká“?

4. Výrok „Rovnoběžka je přímka, jež není s danou přímkou ani mimoběžná ani různoběžná“ je příkladem definice chybné, neboť obsahuje pouze znaky záporné. Podejte jiné definice rovnoběžek!

5. Výrok „Reálné číslo je buď celé nebo lomené nebo iracionální“ je příkladem definice chybné, neboť udává rozsah pojmu. Neříkáte někdy podobně „Kruželosečky jsou elipsa, parabola a hyperbola“?

6. Žák chtěl dokázat, že přímka je určena dvěma (různými) body, z okolnosti, že v rovnici přímky $y = kx + q$ se vyskytují dvě konstanty. Vyložte, proč se mu to nemohlo podařiti!

7. Známý výrok¹¹⁾ praví: „Kdyby se geometrické axiomy dotýkaly zájmů lidí, jistě by je vyvraceli.“ Axiomy geometrie se třídních zájmů bezprostředně nedotýkají. Co z toho můžete usouditi? Studium dějin matematiky si svůj závěr ověřte!

¹¹⁾ Cituji z článku „Marxismus a revizionismus“, který uveřejnil Vladimír Iljič Lenin roku 1908 ve sbírníku vydaném k 90. výročí narození Karla Marxe.

Pranostiky a matematická logika

RNDr. IVAN CHAJDA, Přerov

Existuje mnoho pranostik, podle kterých se lidé snaží určit, jaké bude počasí podle některých známek z okolního prostředí. Některé vznikly dlouhodobým sledováním zákonitostí přírody, jiné jsou pouhými pověrami. Jedna z nich, kterou často slyšíme na konci roku, je tato:

Pranostika (P) — prvních 12 dní po Štědrém dni tohoto roku určuje, jakých bude příštích 12 měsíců následujícího roku. Pranostiku (P) obvykle chápeme v tomto smyslu: má-li n -tý den ($n = 1, 2, \dots, 12$) po Štědrém dni i -tého roku meteorologickou vlastnost S , pak má n -tý měsíc $(i + 1)$ -ho roku meteorologickou vlastnost S (předpokládáme, že i je přirozené číslo).

Tuto pranostiku lze snadno rozebrat pomocí matematické logiky a na základě pozorování ukázat, že se jedná o pouhou pověru.

1.

Symbolem S označme nějakou meteorologickou vlastnost, např. „být deštivý“, „být studený“, „být suchý“, „být slunný“ atd., symbolem (x) označme některý omezený časový úsek, např. rok, den, týden, odpoledne ap., a symbolem $S(x)$ označme výrok „ x má vlastnost S “. Je-li například S vlastnost „být suchý“ a jestliže (x) označuje rok 1971, pak $S(x)$ označuje výrok „rok 1971 byl suchý“.

Nechť nyní symbol (k, i) označuje i -tý měsíc k -ho roku, symbol (k, i, j) označuje j -tý den i -ho měsíce k -ho roku. Je zřejmé, že k může být libovolné přirozené číslo, i může nabývat pouze hodnot 1, 2, ..., 12 a j může nabývat pouze hodnot 1, 2, ..., 31, přičemž však pouze hodnot 1, 2, ..., 28 může nabývat libovolně, hodnot 29, 30, 31 nabývá j jen pro některá i a k (např. pro $i = 11$ nemůže být $j = 31$, pro $k = 1973$ a $i = 2$ nemůže být $j = 29$ ap.).

Uvažujme nyní tento výrok:

(A) jestliže je pro některé indexy k, i výrok $S(k, i)$ pravdivý, pak je pro každé j (z výše uvedené množiny indexů) také výrok $S(k, i, j)$ pravdivý.

Zřejmě existují meteorologické vlastnosti, pro které je výrok (A) pravdivý. Jsou to např. vlastnosti „být bez srážek“, „být bez bouřky“ ap. Řekneme-li totiž, že září 1972 bylo bez srážek (tj. výrok $S(1972, 9)$ je pravdivý pro S znamenající být bez srážek), pak to znamená, že žádný den měsíce září 1972 nebyly žádné srážky, tedy výroky $S(1972, 9, 1)$,

$S(1972, 9, 30)$ jsou pravdivé. Označme symbolem φ množinu všech meteorologických vlastností, pro které je výrok (A) pravdivý. Jak jsme ukázali, je $\varphi \neq \emptyset$.

2.

Uvažujme nyní některou meteorologickou vlastnost $S \in \varphi$, pro kterou je výrok (A) pravdivý pro libovolné k, i z příslušných množin indexů. Zvolme pevně $k = k_0$ a zkoumejme pranostiku (P) . Nechť tedy v k_0 -tém roce měl první den po Štědrém dni (tj. 25. 12. k_0) vlastnost S , tedy $S(k_0, 12, 25)$ je pravdivý výrok. Pak podle pranostiky (P) je pravdivý i výrok $S(k_0 + 1, 1)$ a odtud plyne podle (A) i pravdivost výroků $S(k_0 + 1, 1, j)$ pro $j = 1, 2, \dots, 31$. Avšak z pranostiky (P) plyne z pravdivosti $S(k_0 + 1, 1, 1), \dots, S(k_0 + 1, 1, 5)$ také pravdivost výroků $S(k_0 + 1, 8), \dots, S(k_0 + 1, 12)$, neboť 1. až 5. den ledna roku $k_0 + 1$ jsou 8. až 12. den po Štědrém dni roku k_0 . Z pravdivosti $S(k_0 + 1, 12)$ pak plyne podle (A) také pravdivost výroků $S(k_0 + 1, 12, 25), \dots, S(k_0 + 1, 12, 31)$ a odtud pak podle (P) pravdivost $S(k_0 + 2, 1), \dots, S(k_0 + 2, 7)$, z pravdivosti $S(k_0 + 2, 1)$ plyne podle (A) také pravdivost $S(k_0 + 2, 1, 1), \dots, S(k_0 + 2, 1, 5)$ a odtud opět podle (P) plyne pravdivost $S(k_0 + 2, 8), \dots, S(k_0 + 2, 12)$.

Tedy shrnuto, má-li první den po Štědrém dni roku k_0 vlastnost $S \in \varphi$, pak podle pranostiky (P) mají všechny dny roku $k_0 + 2$ vlastnost S [a opět podle (P) mají všechny dny roků následujících po roce $k_0 + 2$ vlastnost S]. Tento závěr vyplynul užitím matematické logiky na zkoumanou pranostiku, avšak pozorováním počasí zjistíme, že závěr je nesmyslný, neboť 25. 12. 1970 nebyla bouřka, ale v červenci 1972 bylo bouřek dosti.

Vidíme tedy, že uznání pravdivosti pranostiky (P) vede k nesmyslným závěrům, a tedy (P) je pouhá pověra.

Matematická logika však není metoda, kterou by se pranostiky daly dokázat nebo vyvrátit, to lze pouze pozorováním nebo statistickým šetřením. Matematická logika je však užitečným nástrojem pro rozbor těchto pozorování a pomáhá ukázat smysluplnost různých výroků z běžného života.

NAŠE SOUTĚŽ

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Redakce uzavírá soutěž ročníku 1972/3. Proti předchozímu roku se zvětšil počet řešitelů, přibyli však řešitelé, kteří se omezili jen na jeden obor.

Uvádíme seznam všech úspěšných řešitelů. Za jejich jmény je uveden ústav, na němž studují, pak jsou uvedena čísla správně řešených příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie; čísla uvedená v závorkách jsou čísla příkladů rozřešených s menšími nedostatky. Příklady nesprávně řešené neuvádíme.

Ladislav Bohal, G W. Piecka Praha 2: F 3, 4, 5, 6 (2); *Zdeněk Drábek*, G Lanškroun: M 1—4, 7—10, 12 (5, 6, 11); *Ondřej Felix*, G W. Piecka Praha 2: F 1, 3, 5, 6 (2, 4); *Václav Fiala*, G Blovice: F 3—6 (2); *Jan Frynta*, G W. Piecka Praha 2: M 1, 2, 7—10, 12 (3, 5, 6, 11); F 1, 3—6 (2); G 1—4; *Václav Hanušík*, G Michalovce: F 3—6 (1, 2); *Vladimír Hašlar*, G Slaný: F 3, 5, 6 (4); *Jaroslav Hora*, G Blovice: M 4, 9 (6, 7, 10); F 2—6; *Karel Horák*, G Strakonice: M 1, 3, 5, 7—9, 12 (2, 4, 6); F 2, 5, 6 (1, 3, 4); G 1—3 (4); *Peter Hroščo*, SVŠ Topolčany: M 2, 7—9; F (3—6); *Tomáš Chrz*, G W. Piecka Praha 2: M 1—4, 6, 8, 9, 12 (5, 7, 10, 11), F 1, 3—6 (2); *Petr Jarolím*, G W. Piecka Praha 2: M 1, 3, 5, 6, 8, 9, 12 (2, 4, 7, 10); F 1, 3—6 (2); G 1, 2, 4 (3); *Milan Jasem*, G Michalovce: M 3, 7, 9 (4); F 3—6 (2); G 1, 4 (3); *Pavel Kindlmann*, G České Budějovice: M 2—5, 7—9, 11 (1, 10); F 3, 4, 6 (5); G 1, 4 (2, 3); *Josef Kočí*, G Tábor: M 1, 9 (4, 5, 7, 8, 10); *Lubor Kollár*, G Bratislava, Novohradská: M 1—4, 7, 8 (5, 6, 9); *Jiří Malec*, G Brno, Křenová: F 2—6 (1); *Vladimír Meier*, G Ml. Boleslav: M 1, 3, 5, 9 (2, 4, 6, 7, 10); F 1—6; G 1, 3, 4 (2); *Petr Paukner*, G W. Piecka Praha 2: G 1—4; *Jiří Pavel*, G Jihlava: M 1, 3, 5, (4, 6); *Václav Salač*, G Praha 4: M 1, 5, 8, 9, 12 (2—4, 6, 7, 10, 11); F 1, 3—6; *Ivo Semrád*, G Opava: G 1 (3); *Josef Scholz*, G J. Keplera, Praha 6: M 3, 7—9, 12 (1, 2, 4, 10, 11); F 1—3, 5, 6 (4); G 1—4; *Jozef Širáň*, G J. Hronca, Bratislava: M 1, 3—5; *Michael Valášek*, G W. Piecka, Praha 2, M (3, 4, 6); *Alena Vencovská*, ak. G Praha 2: M 3, 7—9 (1, 6, 10, 12); *Imrich Vrto*, G Rim. Sobota: M 1—3, 8, 9, 12 (5—7, 11); F 1, 2, 5, 6 (3, 4); G 1, 3, 4 (2); *Martin Zedníček*, G Brno, Lerchova: G 1, 3, (2, 4).

Kolektivy: G Jihlava (Pavel Brada, Petr Málek, Vítězslav Zoufalý): M 2, 6, 7, 9 (1, 3—5, 8, 10); F 3—6 (1); G 3 (1, 4); G Praha 6 - Leninova (Lenka Divišovská, Dana Pýchová, Nina Věková): M 1, 6—9 (5, 10); Maďarsko (Tibor Tóth, Gábor Pender, Sándor Csiszár): M 5 (6).

V jednotlivých disciplínách se nejlépe umístili:

Matematika:

1. Zdeněk Drábek, G Lanškroun	54 bodů
2. Tomáš Chrz, G W. Piecka Praha 2	50
3.—4. Jan Frynta, G W. Piecka Praha 2	48
3.—4. Petr Jarolím, G W. Piecka Praha 2	48
5. Pavel Kindlmann, G Č. Budějovice	46
6.—7. Karel Horák, G Strakonice	45
6.—7. Václav Salač, G Praha 4 - Ohradní	45
8. Imrich Vrto, G Rim. Sobota	44

Fyzika:

1. Vladimír Meier, G Ml. Boleslav	30 bodů
2.—6. Jan Frynta, G W. Piecka Praha 2	28
2.—6. Tomáš Chrz, G W. Piecka Praha 2	28
2.—6. Petr Jarolím, G W. Piecka Praha 2	28
2.—6. Jiří Malec, G Brno - Křenová	28
2.—6. Josef Scholz, G J. Keplera Praha 6	28

Konstruktivní geometrie:

1. Petr Paukner, G W. Piecka Praha 2	20 bodů
2. Josef Scholz, G J. Keplera Praha 6	19

Absolutní vítězové:

1.— 2. Jan Frynta, G W. Piecka Praha 2	94 bodů
1.— 2. Petr Jarolím, G W. Piecka Praha 2	94
3. Josef Scholz, G J. Keplera Praha 6	89
4. Karel Horák, G Strakonice	87
5. Imrich Vrto, G Rim. Sobota	86
6. Vladimír Meier, G Ml. Boleslav	83
7. Pavel Kindlmann, G Č. Budějovice	80
8. Tomáš Chrz, G W. Piecka Praha 2	78
9. Kolektiv, G Jihlava	74
10. Václav Salač, G Praha 4 - Ohradní	71

Vítězům blahopřejeme.

Řešení příkladů loňské soutěže Rozhledů

Fyzika

1. Určete množství olova ${}^{206}_{82}\text{Pb}$, které vznikne rozpadem z 1 kg čistého isotopu uranu ${}^{238}_{92}\text{U}$ za dobu rovnou stáří Země ($2,5 \cdot 10^9$ let). Poločas rozpadu isotopu uranu je ($4,5 \cdot 10^9$) let.

(Došlo 16 řešení)

Zdeněk Janout

Řešil: Vladimír Meier, III. B, gymnasium Mladá Boleslav.

Rozpad radioaktivní látky se řídí rozpadovým zákonem

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

kde N a N_0 jsou počty atomů radioaktivní látky v časech t a $t = 0$. Mezi rozpadovou konstantou λ a poločasem rozpadu T platí vztah:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \quad (2)$$

Dosadíme-li za λ do rovnice (1) dostaneme:

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} \quad (3)$$

Počet atomů látky, které vzniknou rozpadem, bude roven:

$$N' = N_0 - N = N_0 (1 - 2^{-\frac{t}{T}}). \quad (4)$$

Obecně platí, že počet atomů látky hmotnosti m , která má molovou hmotnost M , je roven

$$N = n N_A = \frac{m}{M} N_A,$$

kde n je látkové množství, N_A je Avogadrovo číslo. V našem případě pro rozpadající se uran a vznikající olovo platí:

$$N_0 = \frac{m_{\text{U}}}{M_{\text{U}}} N_A \quad \text{a} \quad N' = \frac{m_{\text{Pb}}}{M_{\text{Pb}}} N_A \quad (5)$$

Dosadíme-li do rovnice (4) za N_0 a N' , dostaneme hledaný vztah:

$$m_{\text{Pb}} = M_{\text{U}} \frac{M_{\text{Pb}}}{M_{\text{U}}} \left(1 - 2^{-\frac{t}{T}} \right) = 1 \cdot \frac{206}{238} \left(1 - 2^{-\frac{2,5}{4,5}} \right) = 0,278 \text{ kg.}$$

Odpověď: Za dobu rovnou stáří Země vznikne z 1 kg čistého uranu ^{237}U 278 gramů olova ^{206}Pb .

Poznámka autora: Někteří řešitelé správně poukázali na to, že se jedná o isotop olova $^{208}_{82}\text{Pb}$, který je koncovým členem uran-radiové řady. Chyba vznikla při přepisu příkladu.

2. Podle Einsteinovy teorie se zpomalují při pohybu všechny fyzikální procesy tak, že doba libovolného fyzikálního procesu se prodlouží

$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ krát. Tento efekt se projevuje i ve zvětšení poločasu

rozpadu nestabilních částic, např. π mesonů. Meson π je nestabilní částice s klidovou energií 140 MeV a s poločasem rozpadu v klidu $T_0 = 1,8 \cdot 10^{-8}$ s.

Vypočítejte:

a) O kolik se prodlouží poločas rozpadu svazku π mesonů, jsou-li urychleny na energii 140 MeV.

b) Jakou dráhu urazí π mesony za tuto dobu. (v je rychlost π mesonu, c je rychlost světla).

(Došlo 16 řešení)

Zdeněk Janout

Řešil: Josef Scholz, IV C, Keplerovo gymnasium, Praha 6.

a) Doba poločasu rozpadu T závisí na rychlosti částice v podle vztahu:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (1)$$

kde T_0 je poločas rozpadu částice v klidu a c je rychlost světla.

Veličinu $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ vyjádříme pomocí kinetické energie W částice.

Podle Einsteinovy teorie je tato energie rovna rozdílu celkové energie $E = mc^2$ a klidové energie částice $E_0 = m_0c^2$, tj. platí

$$W = E - E_0 = (m - m_0)c^2, \quad (2)$$

kde m_0 a m jsou hmotnosti částice v klidu a v pohybu, mezi kterými platí vztah:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (3)$$

Užitím rovnic (2) a (3) vypočítáme veličinu

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1 + \frac{W}{m_0 c^2}, \quad (4)$$

kterou dosadíme do vztahu (1). Dostáváme:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{W}{m_0 c^2} \right) \quad (5)$$

Dosadíme-li do vztahu (5) číselné hodnoty $W = 140 \text{ MeV}$ a $m_0 c^2 = 140 \text{ MeV}$, dostaneme $T = 2T_0 = 3,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

Odpověď: Jsou-li piony urychleny na energii 140 MeV, prodlouží se jejich doba života na dvojnásobek, než kdyby byly v klidu.

b) Urychlené piony urazí za dobu T dráhu

$$s = vT = cT_0 \sqrt{\left(\frac{W}{m_0 c^2}\right)^2 + 2 \frac{W}{m_0 c^2}}, \quad (6)$$

kde jsme za v dosadili ze vztahu (4).

Dosadíme-li do vztahu (6) číselné hodnoty, dostaneme:

$$s = 3 \cdot 10^8 \cdot 1,8 \cdot 10^{-8} \sqrt{3} = 9,34 \text{ m}.$$

Odpověď: Piony urazí za dobu T dráhu rovnou 9,34 m.

3. Náboj q kondenzátoru o kapacitě C , nabitého na potenciál U_0 , jehož desky byly spojeny přes ohmický odpor R , klesá s časem na hodnotu danou výrazem

$$q = C U_0 e^{-t_1/\tau}, \quad (1)$$

kde e je základ přirozených logaritmů, $\tau = RC$ je tzv. časová konstanta.

Někdo, pohlížeje na vztah (1), by mohl namítat, že kondenzátor se vlastně nikdy úplně nevybije, neboť náboj se sice ustavičně zmenšuje, ale nabude nulové hodnoty až v čase $t \rightarrow \infty$. Abyste tuto námitku vyvrátili, vypočtete dobu t_1 , potřebnou k tomu, aby náboj kondenzátoru klesl na hodnotu jednoho elementárního kvanta, tj. $q_e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ [A s]}$, je-li dáno $C = 1 [\mu\text{F}]$, $U_0 = 100 \text{ [V]}$, $R = 0,5 \cdot 10^6 [\Omega]$. Provádějte dimenzionální kontroly.

(Došlo 19 řešení)

Evžen Říman

Řešil Ladislav Bohal, IV. F gymn. W. Piecka, Praha 2.

V čase $t = 0$ byl původní náboj $q(0) = C U_0 = 10^{-4} \text{ [A s]}$; časová

konstanta je $\tau = R C = 0,5$ [s]. V hledaném čase $t = t_1$ bude $q(t_1) = q_e$, takže daný vztah (1) dá

$$q_e = C U_0 e^{-t_1/\tau}, \quad (2)$$

kde neznámou je čas t_1 .

Upravme (2) na tvar $q_e \cdot e^{t_1/\tau} = C U_0$, z čehož

$$e^{t_1/\tau} = \frac{C U_0}{q_e}. \quad (2')$$

Obě strany vztahu (2') jsou bez fyzikální dimenze, neboť kapacita $C = q/U$ je podíl náboje q a potenciálového rozdílu U obou desek kondenzátoru; exponent t_1/τ je podíl času t_1 a časové konstanty τ , což obé je v sekundách. (Ostatně exponent mocniny musí být vždy bezrozměrný, neboť mocnina by jinak nebyla definována.)

Logaritmujeme-li vztah (2'), obdržíme $\frac{t_1}{\tau} \log e = \log (C U_0) - \log q_e$, takže

$$t_1 = \frac{\tau}{\log e} \log \frac{C U_0}{q_e}. \quad (3)$$

Numerický výpočet: Do vztahu (3) dosadíme zadané hodnoty $\tau = 0,5$ [s], $C U_0 = 10^{-4}$ [A s], $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ [A s], takže

$$\frac{C U_0}{q_e} = \frac{10^{-4} \text{ [A s]}}{1,6 \cdot 10^{-11} \text{ [A s]}} = \frac{10^{-15}}{1,6}$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{0,5 \text{ [s]}}{0,4343} \log \frac{10^{15}}{1,6} = \frac{1,0 \text{ [s]}}{0,8686} (15 - \log 1,6) = \\ &= \frac{1,0 \text{ [s]}}{0,8686} (15 - 0,2041) = \frac{14,7959}{0,8686} \text{ [s]} \doteq \underline{\underline{17,03 \text{ [s]}}}. \end{aligned}$$

Závěr: V kondenzátoru by zbyl náboj jednoho elektronu přibližně za dobu 17,03 sekundy.

Pokyny autorům

Rozhledy matematicko-fyzikální otiskují články, které byly zaslány redakci s úplným autorovým jménem (včetně akademických titulů), jeho působištěm a plnou adresou (bydlištěm). O otištění rozhoduje redakční rada po vyslechnutí připomínek určeného recenzenta. Nevýžádané rukopisy se nevracejí. Zamítavé recenze se autorům oznamují až po jejich schválení redakční radou, a to ve zhuštěné formě. Recenze ani otištění proto neurgujte!

Úprava rukopisu. Nejprve uveďte název příspěvku (krátký a výstižný), nikoli tedy např. „O jedné zajímavé větě, týkající se zvláštních speciálních n-úhelníků, které splňují vedlejší podmínku. . .“ Potom napište jméno autora. Text pište strojem, černou páskou, ob řádek. Piše se jen po jedné straně jakostního papíru formátu A4. Stránka obsahuje nanejvýš 30 řádků po 60 úhozech. Nadpisy ani jiná zdůrazněná slova se nepodtrhávají.

Matematické výrazy i vzorce se doplňují do textu ručně velmi čitelně tuší nebo inkoustem. Při psaní vzorců rozlišujte 1 (jedničku) od l (malé el) 0 (nulu) od O (malého i velkého „O“) a používejte vyznačování podle ČSN 01 1001 a ČSN 88 0220. Zvlášť pozorně a opatrně přepisujte indexy a exponenty. Vzorce číslujte jen tehdy, jestliže se na ně v dalším textu odvoláváte. Očíslování takových vzorců provádějte v kulatých závorkách vpravo.

Poznámky pod čarou — pokud možno v minimálním počtu — vyznačte v textu postupnými číslicemi v exponentu a pište je hned za řádek rukopisu, k němuž patří; od ostatního textu je oddělte vodorovnými čarami.

Odkazy na literaturu číslujte v textu průběžně, čísla pište v hranatých závorkách. Zpravidla obsahuje takový odkaz úplné jméno autora, název knihy, místo, vydavatele a rok vydání a stránku. Odkaz na článek v časopise obsahuje jméno autora, název časopisu, svazek, ročník a stránku, event. i název článku.

Obrázky vyrýsuje autor na pauzovacím papíře, popíše je normalizovaným písmem šablonou 5 mm. Čáry musí být ostré a nerozpité. Obrazce se 2krát zmenšují, proto se vyhněte příliš tenkým čarám. Očíslované texty k obrázkům se přikládají na konec rukopisu. Fotografie vyžadujeme ostré, kvalitní, zhotovené na lesklém bílém papíru.

Obsah : Dáváme přednost příspěvkům kratším před seriály, článkům s moderní tematikou před suchopárnými méně čtivými, vítáme svěží sloh před koženou mluvou některých autorů.

Autoři se musí řídit pravidly českého nebo slovenského pravopisu, v matematice a geometrii musí používat přijatých názvů a značek, ve fyzice pak zákonem stanovených jednotek i označení.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

vyvoditelný
vyvracení
vyvracet
vzájemně
 útvary vzájemně podobné
vzájemný
vzdálenost
 vzdálenost bodu od roviny
vzdalovat
vzhledem
vzorec
vztah
vztyčit kolmici

déductible
réfutation *ž*
réfuter
mutuellement
 figures *ž* semblables entre elles
mutuel, elle; réciproque
distance *ž*
 distance d'un point à un plan
éloigner
par rapport
formule *ž*
relation *ž*
élever une perpendiculaire

Z

zadání (úlohy)
zachovávat
základ
 základy geometrie
 logarithmus o základu *z*
základna
základní
zákon
 asociativní zákon
 zákon velkých čísel
záměna
 cyklická záměna
záměnnost
zaměnit
zanedbat
zanedbatelný

énoncé *m* (d'un problème)
conserver
fondement *m*
 fondements de géométrie
 logarithme *m* dans un système
 de base *z*
base *ž*
fondamental, *e*
loi *ž*
 loi associative
 loi des grands nombres
échange *ž*; interversion *ž*
 changement *ž* cyclique
interséquentialité *ž*
intervertir; échanger
négliger
négligeable

zaokrouhlení	arrondissement <i>m</i>
zaokrouhlený	arrondi, e
zaokrouhlovat	arrondir
záporný	néгатif, ive
záviset (na ...)	dépendre (de ...)
závisle proměnná	variable <i>ž</i> dépendante
závislost	dépendance <i>ž</i>
lineární závislost	dépendance linéaire
závislý	dépendant, e
závit	spire <i>ž</i>
závitnice (Pascalova)	limaçon <i>m</i> (de Pascal)
závorka	parenthèse <i>ž</i>
zborcený	gauche
zborcená plocha	surface <i>ž</i> gauche
zbytek	reste <i>m</i>
zdánlivý	apparent, e
zjednodušení	simplification <i>ž</i>
zjednodužit	simplifier
zkouška správnosti	preuve <i>ž</i>
zkrácený	abrégé, e; raccourci, e
zlomek	fraction <i>ž</i>
desetinný zlomek	fraction décimale
nezkracitelný zlomek	fraction réduite
řetězový zlomek	fraction continue
změna	changement <i>m</i>
zmenšení	diminution <i>ž</i>
zmenšovat	diminuer
zmizet	disparaître
znamení; znaménko	signe <i>m</i>
znázornit	illustrer
zobecnění	généralisation <i>ž</i>
zobecněný	généralisé, e
zobecnit	généraliser
zobrazení	application <i>ž</i>
zploštělý	aplati
ztotožnit	identifier
zvětšení	agrandissement <i>m</i>
zvětšovat	agrandir; grandir
zvláštní	particulier, ère; spécial, e, aux
zvolený	choisi, e
vhodně zvolený	dûment choisi

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

5

ROČNÍK 52, 1973-1974, LEDEN



ROČNÍK 52
LEDEN 1974

5

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava
dr. Oldřich Lepil, CSc., FÚ Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Sedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMU Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, CSc., Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1973.

OBSAH

O B S A H

Dr. J. Žofka: Třicet let československo-sovětské spojenecké smlouvy	193
E. Calda: Rovnice rovinných útvarů .	195
M. Malík: Význačné prvky v uspořádané množině	200
Dr. J. Novák: K problému dr. Zítka .	204
F. Hradecký: Stereografická projekce a Möbiova rovina	207
Dr. M. Bednařík - dr. M. Šíroká: Předjízdy se zrychlením	210
Dr. J. Šíroký - dr. M. Šíroká: Zatmění Měsíce do roku 2000	213
Dr. J. Šíroký - dr. M. Šíroká: Zatmění Slunce	221
Naše soutěž	226
Recenze	240
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	3 a 4 str. obálky

Třicet let československo-sovětské spojenecké smlouvy

PhDr. JOSEF ŽOFKA, UK Praha

Dne 12. prosince 1943 byla v Moskvě podepsána mezi Československou republikou a SSSR Smlouva o přátelství, vzájemné pomoci a poválečné spolupráci, která výrazným způsobem ovlivnila nejen vývoj vzájemných vztahů obou zemí, ale byla též mocným impulsem, zasahujícím do širšího rámce evropské politiky. „Význam smlouvy je stejně tak dalekosáhlý, jako jsou a budou důsledky poslední války pro náš stát a pro celou Evropu. Evropa vychází z války zásadně pozměněna,“ hodnotil s odstupem dvou let dosah této historické události její přímý účastník Zdeněk Fierlinger, v době války velvyslanec ČSR v Moskvě, který z plné moci presidenta smlouvu podepsal.

V čem spočívaly tyto zásadní změny a jaký vliv měly na utváření zahraničně politické orientace Československa?

Druhá světová válka byla nejen bojem armád, ale i střetnutím dvou světových společenských soustav. Rozhodný a důsledný postoj SSSR v době Mnichova, úmluva o společném postupu ve válce proti Německu z 18. července 1941, v níž Československo vystupovalo jako rovnoprávný smluvní partner, světový ohlas vítězných bitev u Stalingradu a Kurska uspíšily krystalizaci názorů uvnitř našeho odboje v otázkách zajištění bezpečnosti poválečného Československa. Výsledkem těchto skutečností bylo odmítnutí myšlenky polsko-československé konfederace (pod britskou patronací) a československo-sovětská jednání vyústila podpisem spojenecké smlouvy nového typu. Byla to vůbec první smlouva uzavřená za války, která se dotýkala i poválečných vztahů. Článek čtvrtý obsahoval dohodu o „těsné a přátelské spolupráci v době po obnovení míru“ a především závazek, že smluvní strany budou „vyvíjeti v měřítku co možná nejširším své hospodářské styky a poskytovat si vzájemně veške-

rou možnou hospodářskou pomoc po válce“. Klíčová otázka naší národní a státní existence byla pak zakotvena ve IV. kapitole Košického vládního programu z 5. dubna 1945, který stanovil „od počátku uplatňovat praktickou součinnost se SSSR, a to ve všech směrech — vojensky, politicky, hospodářsky, kulturně“.

Čs.-sovětská spojenecká smlouva z 12. prosince 1943 ve svých důsledcích kladla zahraničně politické základy k přechodu národně osvobozené země v národní a demokratickou revoluci a jejímu postupnému přerůstání v revoluci socialistickou. Byla první smlouvou ze série dvoustranných spojeneckých smluv o přátelství, spolupráci a vzájemné pomoci se Sovětským svazem a potom i mezi jednotlivými lidově demokratickými státy navzájem. V letech 1943—1949 tak vznikl rozsáhlý systém spojeneckých smluv mezi státy střední a jihovýchodní Evropy, jejichž přirozeným centrem a pojítkem byl Sovětský svaz, systém, který vedl ke vzniku společenství socialistických zemí a napomáhal vytváření kolektivních orgánů spolupráce socialistických zemí: Rady vzájemné hospodářské pomoci z roku 1949 a Varšavské smlouvy z roku 1955. O novém charakteru vztahů mezi ČSSR a SSSR svědčí i nová čs.-sovětská smlouva z 6. května 1970, která navazuje na smlouvu z 12. prosince 1943 a její prodloužení v roce 1963 a která potvrzuje, že „podpora, upevňování a ochrana socialistických vymožeností, jichž bylo dosaženo hrdinným úsilím a obětavou prací lidu každé země, jsou společnou internacionální povinností socialistických zemí“ Je to dokument velkého politického významu, který upevňuje politický a vojenský svazek socialistických států v současném období.*)

*) Ucelený pohled na charakter československo-sovětských vztahů v chronologickém sledu ze všech sfér života společnosti poskytuje sborník dokumentů a materiálů „Československo-sovětské vztahy v letech 1945—1960“, Praha 1971 a dále Základní dokumenty světové socialistické soustavy (evropská část). Praha 1972.

matematika

Rovnice rovinných útvarů

EMIL CALDA, MFF UK Praha

V průběhu středoškolského studia získáváte dojem, že rovnicí $f(x, y) = 0$ lze vyjádřit pouze rovinné křivky, zatímco „plošné“ útvary jsou nutně popsány nerovnicemi. V tomto článku poznáte, že jakýkoli rovinný útvar lze vyjádřit rovnicí.

Útvarem v rovině (krátce jen útvarem) budeme rozumět každou podmnožinu množiny všech bodů roviny. Máme-li dán kartézský souřadnicový systém v rovině, můžeme každý útvar U v rovině považovat za kartézský graf jisté binární relace $V \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ je množina všech reálných čísel. Říkáme-li, že útvar U je kartézským grafem binární relace V , rozumíme tím, že bod $X = [x, y]$ je prvkem útvaru U právě tehdy, když uspořádaná dvojice $[x, y]$ je prvkem relace V . Je-li útvar U grafem relace $V = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}; f(x, y) = 0\}$, říkáme stručně, že útvar U má rovnici $f(x, y) = 0$ nebo že je vyjádřen touto rovnicí. Kromě útvarů, jež mají rovnici $f(x, y) = 0$, budeme se v tomto článku zabývat útvary, jež jsou vyjádřeny nerovnicemi $g(x, y) \geq 0$, $g(x, y) \leq 0$, $g(x, y) > 0$, $g(x, y) < 0$.

Nejprve nám půjde o to, abychom vyjádřili rovnicí útvar U , známe-li jeho vyjádření nerovnicí. Ukažme si příklad: mějme polorovinu U (obr. 1a) vyjádřenu nerovnicí $x + y \geq 0$ a hledejme její vyjádření některou rovnicí $f(x, y) = 0$. Uvědomme si, že pro každé reálné číslo u platí: $u \geq 0 \Leftrightarrow u - |u| = 0$. Pro každou uspořádanou dvojici $[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je $x + y$ rovněž reálné číslo, platí tedy: $x + y \geq 0 \Leftrightarrow x + y - |x + y| = 0$. Danou polorovinu lze tedy vyjádřit rovnicí $x + y - |x + y| = 0$.

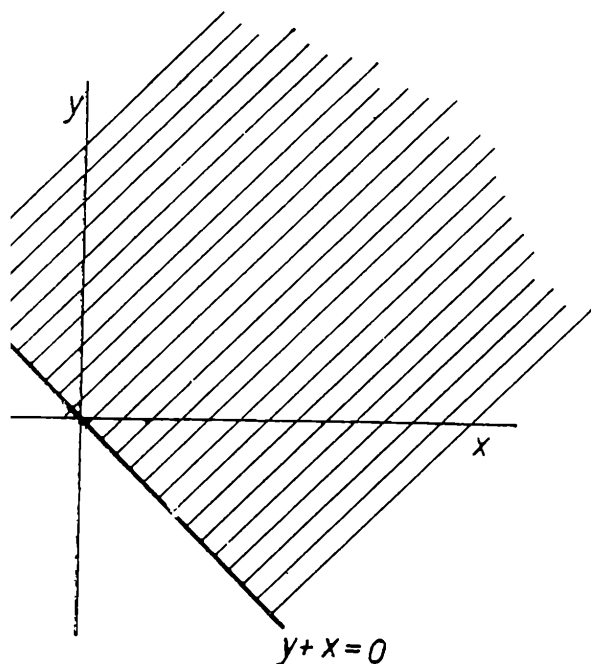
Uvedeme nyní jednoduchou větu, která vždycky umožní vyjádřit útvar U rovnicí, známe-li jeho vyjádření nerovnicí.

Věta 1.: Pro každé reálné číslo u platí:

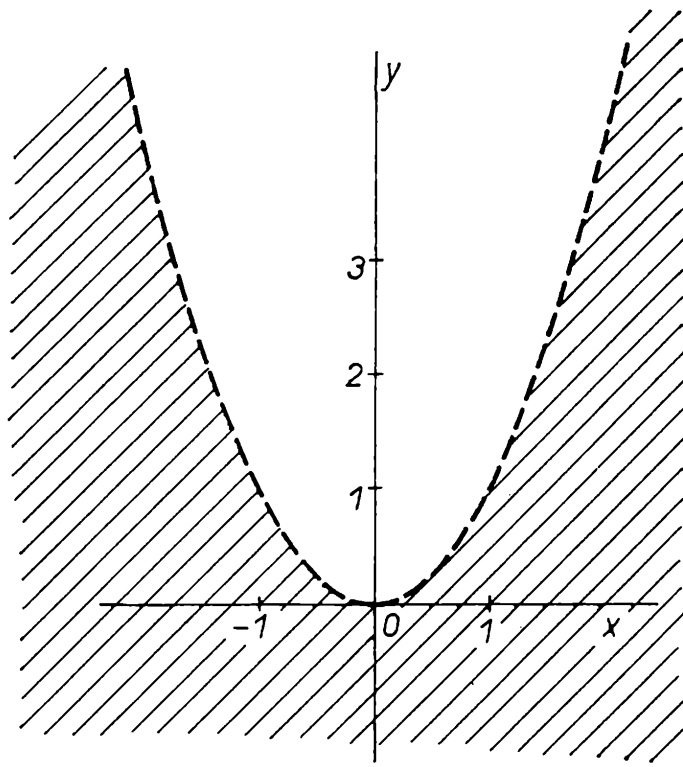
a) $u \geq 0 \Leftrightarrow u - |u| = 0$,

b) $u \leq 0 \Leftrightarrow u + |u| = 0$,

c) $u > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{u} - \frac{1}{|u|} = 0$,



Obr. 1a



Obr. 1b

$$d) u < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{u} + \frac{1}{|u|} = 0.$$

Důkaz této věty je jednoduchý, postačí v něm aplikovat definici absolutní hodnoty reálného čísla; přenecháváme jej tedy čtenáři.

Užitím věty 1 se čtenář snadno přesvědčí o správnosti následujících tvrzení:

a) Útvar vyjádřený nerovnicí $y < x^2$ (obr. 1b) má rovnici

$$\frac{1}{y - x^2} + \frac{1}{|y - x^2|} = 0.$$

b) Vnitřek poloroviny s hraniční přímkou $y = 0$ a s vnitřním bodem $A = [0; 1]$ má rovnici $\frac{1}{y} - \frac{1}{|y|} = 0$.

c) Jednotkový kruh se středem v počátku má rovnici $x^2 + y^2 - 1 + |x^2 + y^2 - 1| = 0$.

Řadu podobných příkladů si čtenář jistě vymyslí sám.

Zabývejme se nyní otázkou, jakou rovnici má průnik útvarů U_1 a U_2 , jsou-li známy rovnice těchto útvarů. Z definice průniku dvou množin je zřejmé: je-li útvar U_1 vyjádřen rovnicí $f_1(x, y) = 0$ a útvar U_2 rovnicí $f_2(x, y) = 0$, pak útvar $U = U_1 \cap U_2$ je vyjádřen konjunkcí $f_1(x, y) = 0 \wedge f_2(x, y) = 0$. To je však soustava rovnic, nikoli jediná rovnice. Uvědomme si, že pro každá dvě reálná čísla u, v platí: $u = 0 \wedge v = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u^2 + v^2 = 0$. Je tedy $f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y) = 0$ rovnicí útvaru $U = U_1 \cap U_2$, neboť $f_1(x, y)$ i $f_2(x, y)$ nabývají pouze reálných hodnot. S tímto postupem vystačíme vždy; jsou-li totiž útvary U_1 a U_2 vyjádřeny nerovnicemi, umožňuje věta 1 vyjádřit je rovnicemi.

Uvedme konkrétní příklad: máme vyjádřit rovnicí pravý úhel, který tvoří první kvadrant a jeho hranice na osách x, y . Tento útvar lze považovat za průnik polorovin U_1 a U_2 , jež jsou vyjádřeny nerovnicemi $x \geq 0, y \geq 0$. Podle věty 1 máme: $x \geq 0, \Leftrightarrow x - |x| = 0, y \geq 0 \Leftrightarrow y - |y| = 0$. Rovnice uvažovaného pravého úhlu je tedy $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 0$ nebo po snadné úpravě $x(x - |x|) + y(y - |y|) = 0$. Určeme ještě rovnici prvního kvadrantu, který je průnikem útvarů (vnitřků polorovin) vyjádřených nerovnicemi $x > 0, y > 0$. Rovnice těchto útvarů můžeme — užitím věty 1 a po snadné úpravě — napsat ve tvaru $\frac{x}{|x|} - 1 = 0, \frac{y}{|y|} - 1 = 0$. Rovnice kvadrantu je tedy $\left(\frac{x}{|x|} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{|y|} - 1\right)^2 = 0$ nebo po jednoduché úpravě $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 2$.

Chceme-li určit rovnici útvaru U , který je průnikem útvarů U_1 a U_2 , vyjádřených nerovnicemi $g_1(x, y) \geq 0, g_2(x, y) \geq 0$, můžeme postupovat i jiným způsobem, než bylo uvedeno. Dokážeme si nejprve větu:

Věta 2.: Pro každá dvě reálná čísla u, v platí:

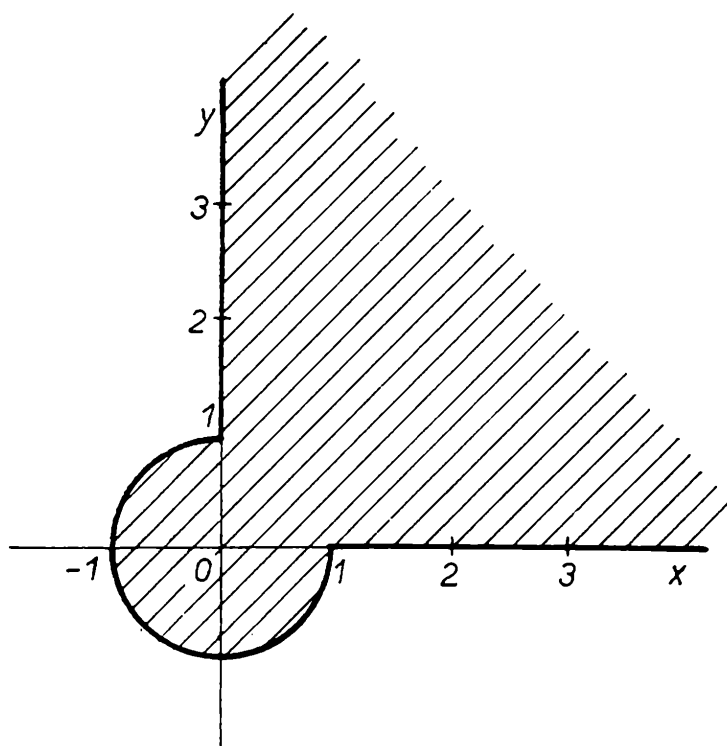
$$u \geq 0 \wedge v \geq 0 \Leftrightarrow u + v - |u - v| \geq 0.$$

Důkaz: a) Nechť platí $u \geq 0 \wedge v \geq 0$; pro $u + v - |u - v|$ nastane jediná ze dvou možností: pro $u \geq v$ je $u + v - |u - v| = u + v - u + v = 2v$, což je nezáporné podle předpokladu $v \geq 0$; pro $u < v$ je $u + v - |u - v| = u + v + u - v = 2u$, což je opět nezáporné podle předpokladu $u \geq 0$.

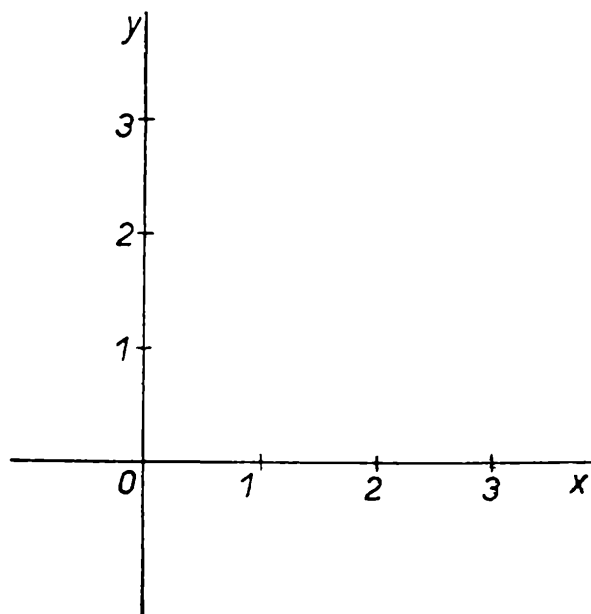
b) Nechť platí $u + v - |u - v| \geq 0$; pro $u \geq v$ je $u + v - |u - v| = u + v - u + v = 2v$; je tedy $v \geq 0$ a protože je $u \geq v$, je i $u \geq 0$; pro $u \leq v$ je $u + v - |u - v| = u + v + u - v = 2u \geq 0$; je tedy $u \geq 0$ a protože je $v \geq u$, je i $v \geq 0$.

Užitím této věty vyjádříme útvar U nerovnicí $g_1(x, y) + g_2(x, y) - |g_1(x, y) - g_2(x, y)| \geq 0$ a užitím věty 1 dostaneme rovnici útvaru U .

Vyjádříme tímto způsobem pravý úhel U vyjádřený konjunkcí $x \geq 0 \wedge y \geq 0$. Zřejmě platí: $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Leftrightarrow x + y - |x - y| \geq 0$; z věty 1 pak dostáváme rovnici úhlu U : $x + y - |x - y| - |x + y - |x - y|| = 0$. Protože tato rovnice vyjadřuje též útvar jako dříve odvozená rovnice $x(x - |x|) + y(y - |y|) = 0$, musí být obě tato vyjádření ekvivalentní, což jistě není na první pohled patrné.



Obr. 2



Obr. 3

Čtenář by se měl opět přesvědčit o správnosti následujících tvrzení:

a) Rovnice pásu (včetně obou hraničních přímek) určeného dvěma rovnoběžkami $y = x$ a $y = x + 1$ je $1 - |2x - 2y + 1| - |1 - |2x - 2y + 1|| = 0$. (Užijte nejprve věty 2 a pak věty 1.)

b) Rovnicí úsečky AB , kde $A = [0; 1]$ a $B = [1; 0]$, je např. rovnice $(x + y - 1)^2 + [x(x - |x|) + y(y - |y|)]^2 = 0$. (Úsečku považujte za průnik pravého úhlu a přímky.)

c) Rovnice čtverce, jehož strany leží na přímkách $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$ a $y = 1$, je např. $(1 - |x| - |1 - |x||)^2 + (1 - |y| - |1 - |y||)^2 = 0$.

Hledejme nyní rovnici útvaru U , který je sjednocením útvarů U_1 a U_2 , přičemž známe rovnice útvarů U_1 a U_2 . Z definice sjednocení dvou množin je zřejmé: Je-li útvar U_1 vyjádřen rovnicí $f_1(x, y) = 0$ a útvar U_2 rovnicí $f_2(x, y) = 0$, pak útvar $U = U_1 \cup U_2$ je grafem relace $V = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; f_1(x, y) = 0 \vee f_2(x, y) = 0\}$.

Protože pro každá dvě reálná čísla u, v platí:

$$uv = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee v = 0,$$

je $f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) = 0$ rovnicí útvaru U , neboť obě funkce jsou reálné. Jsou-li útvary U_1 a U_2 vyjádřeny nerovnicemi, najdeme jejich rovnice pomocí věty 1.

Určeme například rovnici útvaru U , který je sjednocením prvního kvadrantu, jeho hraničních polopřímek a jednotkového kruhu se stře-

dem v počátku (obr. 2). Útvar U je tedy množinou právě těch bodů $X = [x, y]$, pro něž platí $[x(x - |x|) + y(y - |y|) = 0] \vee [x^2 + y^2 - 1 + |x^2 + y^2 - 1| = 0]$. Rovnice útvaru U je tedy $[x(x - |x|) + y(y - |y|)] [x^2 + y^2 - 1 + |x^2 + y^2 - 1|] = 0$.

Někdy lze postupovat i jiným způsobem, a to užitím obdobné věty k větě 2.

Věta 3.: Pro každá dvě reálná čísla u, v platí:

$$u \geq 0 \vee v \geq 0 \Leftrightarrow u + v + |u - v| \geq 0.$$

Důkaz je analogický důkazu věty 2 a čtenář si jej jistě provede sám.

Rovnici útvaru U z posledního příkladu lze tedy dostat rovněž takto: první kvadrant s jeho hranicí lze vyjádřit nerovnicí $x + y - |x - y| \geq 0$, uvedený kruh nerovnicí $1 - x^2 - y^2 \geq 0$. Útvar U má tedy podle věty 3 vyjádření

$$x + y - |x - y| + 1 - x^2 - y^2 + |x + y - |x - y| - 1 + x^2 + y^2| \geq 0$$

a jeho rovnici dostaneme užitím věty 1.

Určeme ještě rovnici útvaru U , který obsahuje právě tyto mřížové body roviny: $A = [1; 1]$, $B = [1; 2]$, $C = [2; 1]$, $D = [2; 2]$ (obr. 3). Útvar U lze považovat za průnik útvarů U_1 a U_2 , kde U_1 je sjednocením dvou přímek o rovnicích $x = 1$ a $x = 2$ a U_2 je sjednocením dvou přímek o rovnicích $y = 1$ a $y = 2$. Útvary U_1, U_2 mají pořadě rovnice $(x - 1)(x - 2) = 0$, $(y - 1)(y - 2) = 0$. Rovnice útvaru $U = U_1 \cap U_2$ je tedy: $[(x - 1)(x - 2)]^2 + [(y - 1)(y - 2)]^2 = 0$.

Čtenáři je jistě zřejmé, že každý rovinný útvar obsahující konečný počet bodů lze vyjádřit rovnicí. Neprázdnou množinu bodů lze totiž považovat za sjednocení útvarů, které obsahují jediný bod. Jednobodovou množinu bodů roviny umíme vyjádřit rovnicí, např. množinu $\{[2; 3]\}$ lze vyjádřit rovnicí $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$. Prázdnou množinu bodů roviny lze rovněž vyjádřit rovnicí, např. $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Uvedené postupy lze vhodným způsobem kombinovat, eventuálně odvozovat další. Čtenář jistě nahlédne, že mají-li útvary U_1, U_2 pořadě rovnice $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$, pak rovnice útvaru U , který obsahuje právě ty body útvaru U_1 , které nepatří do útvaru U_2 , je $\frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} = 0$. Na-

příklad přímka $y = x$ bez bodu $A = [1; 1]$ má rovnici $\frac{y - x}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = 0$ nebo polorovina $y \leq x$ s vyloučením všech bodů přímek $y = x - 1$ a $y = x - 2$ má rovnici $\frac{x - y - |x - y|}{(x - y - 1)(x - y - 2)} = 0$.

Způsoby vyjadřování rovinných útvarů rovnicemi popsané v tomto článku vedou sice vždycky k cíli, avšak někdy dostáváme vyjádření velmi těžkopádné. Jako u všech obecných metod, můžeme i zde v některých případech dospět k cíli jednodušším způsobem, vtipným nápadem apod. To však nesnižuje význam obecného poznatku, k němuž jsme dospěli: Každý rovinný útvar lze vyjádřit rovnicí s proměnnými $x, y \in \mathbb{R}$.

Cvičení:

1. Určete rovnici

a) mezikružší určeného kružnicemi $x^2 + y^2 = 1$ a $x^2 + y^2 = 2$;

$$[1 - |2x^2 + 2y^2 - 3| - |1 - |2x^2 + 2y^2 - 3|| = 0];$$

b) trojúhelníka, jehož strany leží na přímkách $x = 0, y = 0$

$$y = x - 1; [(x - |x|)^2 + (y + |y|)^2 + (y - x + 1 - |y - x + 1|)^2 = 0];$$

c) polopřímky s počátečním bodem $A = [-1; 1]$ a s vnitřním bodem

$$B = [0; 2]; [(x - y + 2)^2 + (x + 1 - |x + 1|)^2 = 0];$$

d) útvaru U , který obsahuje právě ty body $X = [x; y]$ roviny, pro něž platí: $(x \geq y \wedge x \geq -y) \vee (x \leq y \wedge x \leq -y)$;

$$[|x| - |y| - ||x| - |y|| = 0];$$

e) útvaru U , který obsahuje právě ty body jednotkového kruhu se středem v počátku, jež neleží na osách x, y a na obvodu čtverce $ABCD$, kde $A = [1; 0], B = [0; 1], C = [-1; 0], D = [0; -1]$;

$$\left[\frac{1 - x^2 - y^2}{xy(|x| + |y| - 1)} = 0 \right].$$

2. Přesvědčte se, že závěry, s nimiž jste se v tomto článku seznámili, lze s příslušnými změnami přenést i do prostoru.

Literatura:

B. I. Argunov: Figury i uravnenija (Matematika v škole č. 2, 1971).

Význačné prvky v uspořádané množině

MAREK MALÍK, stud. MFF UK Praha

V článku o Hasseových diagramech uspořádaných konečných množin (v 10. čísle minulého ročníku Rozhledů) jsme narazili na problém existence maximálního prvku v uspořádané množině. Nyní upřesníme tento pojem a několik jemu podobných.

Na obr. 1 a 2 máme pomocí Hasseových diagramů znázorněny dva případy uspořádaných množin. Prvek X na obr. 1 je podle našeho intuitivního pojetí maximálním prvkem množiny $\{A, B, \dots, G, X\}$. Ovšem i prvky X, Y na obr. 2 jsou svým způsobem maximální v množině $\{A, B, \dots, F\}$, neboť neexistuje v dané uspořádané množině žádný prvek větší než X ani větší než Y . Tyto rozdíly nás vedou ke dvěma různým definicím, které vyslovíme pro neprázdnou množinu M uspořádanou relací $\leq$.

Definice 1. Řekneme, že prvek a je *maximálním prvkem* uspořádané množiny M , jestliže v M neexistuje žádný prvek větší než a . Obdobně říkáme, že prvek b je *minimálním prvkem* množiny M , jestliže v M neexistuje žádný prvek, který by byl menší než b .

Na obr. 2 jsou tedy X i Y maximálními prvky množiny M , zatímco E, F jsou minimální prvky této množiny; maximálních i minimálních prvků může tedy být několik. Názorně však vidíme, že prvek X na obr. 1 má poněkud silnější vlastnost než právě definovanou maximalitu; tu vystihneme novým pojmem.

Definice 2. Řekneme, že prvek a je *největším prvkem* množiny M , jestliže každý prvek množiny M je menší nebo roven a . Obdobně říkáme, že prvek b je *nejmenším prvkem* množiny M , jestliže každý prvek množiny M je větší nebo roven b .

Promyslete si dobře rozdílnost definovaných pojmů, uvědomte si, že maximální prvek množiny nemusí být jejím největším prvkem v případě, kdy nejsou každé dva prvky množiny srovnatelné v daném uspořádání. Dokažme nyní několik jednoduchých vět o těchto nových pojmech.

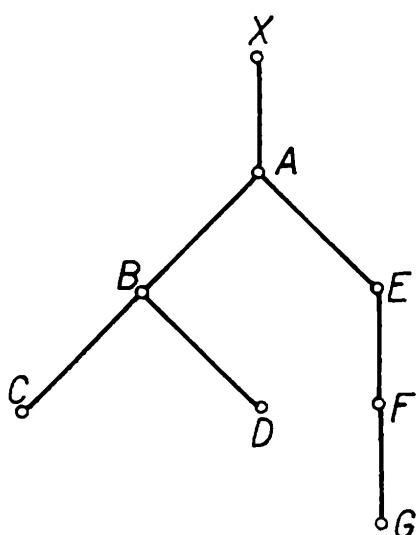
Věta 1. Největší prvek uspořádané množiny M je v M maximální.
Důkaz. Předpokládejme, že největší prvek není maximální; potom existuje prvek x množiny M , který je větší než a , a to odporuje definici největšího prvku.

Věta 2. Každá uspořádaná množina M má nejvýše jeden největší prvek.

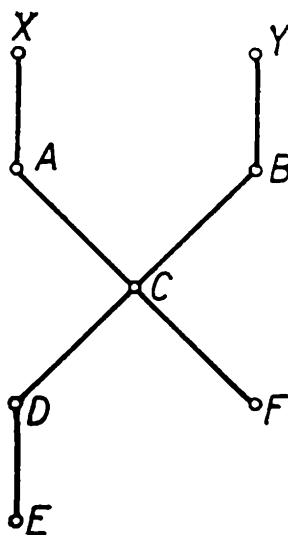
Důkaz. Nechť množina M má dva různé největší prvky a_1, a_2 . Podle definice 2 platí jednak $a_1 \leq a_2$, jednak $a_2 \leq a_1$, a tedy $a_1 = a_2$, což odporuje předpokladu, že jde o dva různé prvky.

Věta 3. Má-li uspořádaná množina M aspoň dva různé maximální prvky, nemá největší prvek.

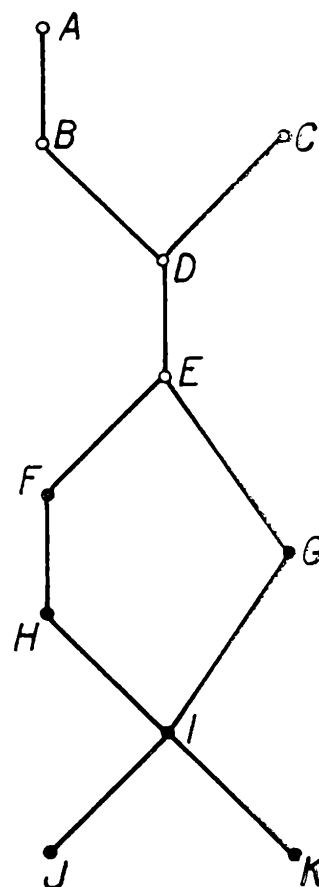
Důkaz provedeme opět sporem. Nechť jsou a_1, a_2 dva různé maximální prvky množiny M a nechť a_3 je její největší prvek. Podle definice 2 je $a_1 \leq a_3$ a současně $a_2 \leq a_3$, podle definice 1 platí $a_1 = a_3$, obdobně



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

z maximálnosti prvku a_2 plyne, že $a_2 = a_3$. Je tedy $a_1 = a_2 = a_3$, a to odporuje předpokladu o různosti prvků.

Definované pojmy lze ještě zobecnit, všimneme-li si podmnožin v uspořádaných množinách. Nejprve si však uvědomme jednu podstatnou vlastnost každé relace uspořádání:

Je-li množina M uspořádána relací R a je-li P neprázdňá podmnožina množiny M , potom relace $R \cap (P \times P)$ je uspořádáním v množině P .

Můžeme tedy hovořit o maximálních, minimálních, největších a nejmenších prvcích každé neprázdňé části uspořádané množiny. Např. na obr. 1 je E největším prvkem uspořádané množiny $\{E, F, G\}$, na obr. 2 je B největším prvkem množiny $\{B, C, D, E, F\}$ a A maximálním prvkem množiny $\{A, Y, B, D, E, F\}$ a podobně.

Pro části uspořádané množiny lze však definovat i další pojmy; všimněme si např. uspořádané množiny znázorněné na obr. 3. Množina $\{F, H, G, I, J, K\}$ patrně nemá žádný největší prvek; má sice dva maximální prvky G a F , ale každý z nich se „vztahuje“ jen ke své „větvi“. Na druhé straně jsou všechny prvky uvedené množiny menší než prvky A, B, C, D, E , a to naznačuje potřebu vyjádřit nějakým pojmem existenci „závor“ podmnožiny v dané uspořádané množině.

Definice 3. Máme dānu neprāzdnou množinu M uspořádanou relací $\leq$, její neprāzdnou podmnožinu P a prvek $h \in M$. Prvek h nazveme horní

závorou množiny P právě tehdy, když každý prvek množiny P je menší nebo roven h .

V definici se nepožaduje, aby prvek h patřil do množiny P , na obr. 3 jsou prvky A, B, C, D, E horními závory množiny $\{F, G, H, I, J, K\}$, přestože nejsou jejími prvky. Platí ovšem tato věta:

Věta 4. Je-li h horní závorou množiny P a platí-li současně $h \in P$ potom h je největším prvkem množiny P .

Ze všech horních závor nějaké množiny může mít některá „nejtěsnější vztah“ k takové množině, např. prvek E na obr. 3 k množině znázorněné plnými kroužky. Proto zesilujeme pojem horní závory množiny takto:

Definice 4. Nechť M je uspořádaná množina, P její neprázdňá podmnožina. Nejmenší prvek množiny všech horních závor množiny P v množině M nazýváme **supremum** množiny P (v množině M).

Prvek E na obr. 3 je zřejmě supremem množiny $\{F, G, H, I, J, K\}$, každá uspořádaná množina však nemusí mít supremum (uvedte takové příklady přímo na obr. 3). Obdobným způsobem jako pojem horní závory se definuje názorně zřejmý *pojem dolní závory* uspořádané množiny, největší prvek množiny všech dolních závor takové množiny se pak nazývá její *infimum*. Pojem suprema a infima hraje neobyčejně významnou roli v matematické analýze, tam se ovšem vztahuje k lineárně uspořádaným množinám reálných čísel, zejména k nekonečným množinám. Promyslete si, které prvky množiny všech reálných čísel jsou supremem, resp. infimem, otevřeného intervalu (a, b) , uzavřeného intervalu $\langle a, b \rangle$ atd.

Cvičení

1. Rozhodněte, zda platí věta: Každá konečná množina má v libovolném uspořádání aspoň jeden maximální a aspoň jeden minimální prvek.

2. Rozhodněte, zda musí mít každá neprázdňá podmnožina uspořádané množiny horní a dolní závoru.

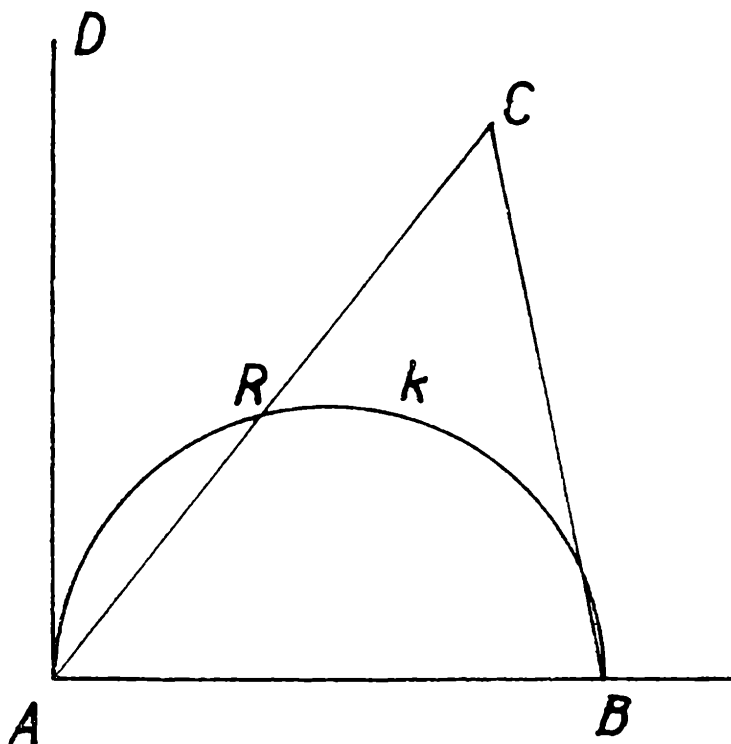
Příspěvek k problému dr. Zítka.

Dr. JIŘÍ NOVÁK, CSc., Liberec

V publikaci „20 let matematické olympiády v ČSSR“¹⁾ formuloval dr. Frant. Zítek, CSc., v článku „Matematické klípky“ problém z teorie konvexních mnohoúhelníků.²⁾ Podávám jeho řešení v případě čtyřúhelníku. Dokážeme, že platí tato věta:

V každém konvexním čtyřúhelníku $ABCD$, ve kterém platí $\overline{AB} \leq \overline{BC} \leq \overline{CD} \leq \overline{DA}$, existuje nekonečně mnoho vnitřních bodů X , pro něž platí

$$\sphericalangle AXB \leq \sphericalangle BXC \leq \sphericalangle CXD \leq \sphericalangle DXA.$$



Obr. 1

¹⁾ O této knížce přinesly Rozhledy nedávno zprávu (roč. 50, 1971—72, str. 333—334).

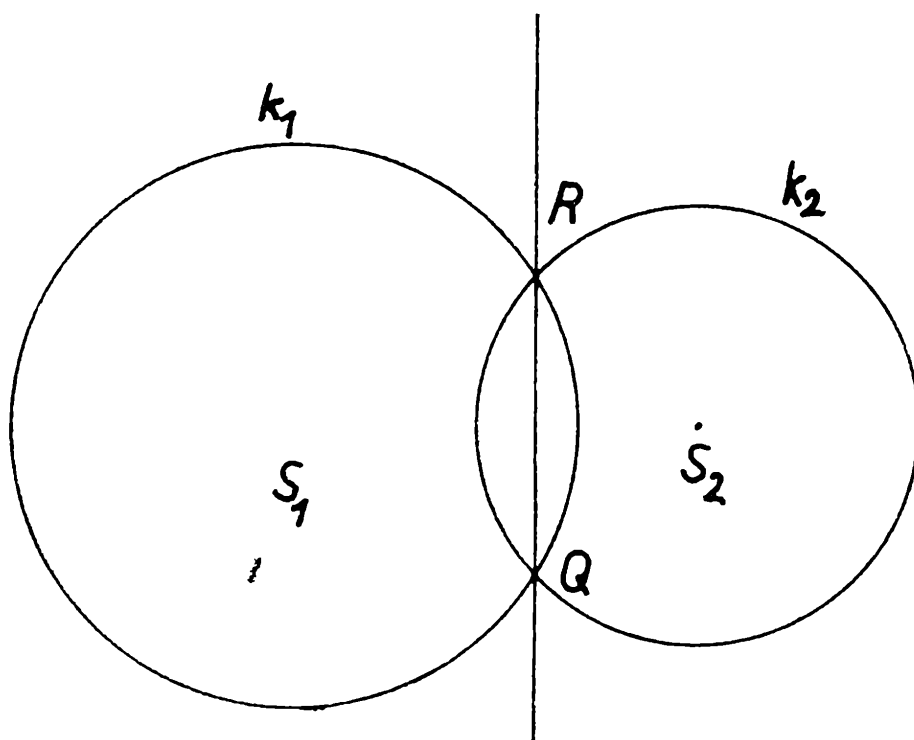
²⁾ V původní formulaci dr. F. Zítka zní úloha takto: V rovině je dán konvexní n -úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ takový, že délky jeho stran tvoří neklesající posloupnost.

$$A_1A_2 \leq A_2A_3 \leq \dots \leq A_{n-1}A_n \leq A_nA_1.$$

Potom uvnitř daného n -úhelníka existuje bod B takový, že velikosti úhlů $\sphericalangle A_iBA_{i+1}$ rovněž tvoří neklesající posloupnost

$$A_1BA_2 \leq A_2BA_3 \leq \dots \leq A_{n-1}BA_n \leq A_nBA_1.$$

Dokažte nebo vyvráťte.



Obr. 2

Uvedeme nejprve bez důkazu tři pomocné věty.

Lemma 1. V trojúhelníku ABC , ve kterém platí $a < b < c$, protíná osa kterékoliv strany větší stranu ze zbývajících dvou v jejím vnitřním bodě.

Lemma 2 (obr. 1). Leží-li bod C uvnitř pravého úhlu DAB a je-li vnějším bodem kružnice k nad průměrem AB , potom spojnice AC protíná kružnici k v bodě R , který je vnitřním bodem úsečky AC . Je-li C jakýkoliv vnější bod kružnice k , potom $\sphericalangle ACB$ je ostrý nebo roven nule.

Lemma 3 (obr. 2). Mějme dvě nesoustředné kružnice k_1, k_2 se středy S_1, S_2 , které se protínají v bodech R, Q . Body kružnice k_2 , které leží uvnitř kružnice k_1 , leží v polorovině opačné k polorovině RQS_2 .

Důkaz věty (obr. 3): Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Předpokládejme, že $\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{CD} < \overline{DA}$.

Sestrojíme-li osu o úhlopříčky AC , potom protíná stranu BC ve vnitřním bodě R této strany (lemma 1), Q je středem úhlopříčky AC . $\triangle RQC$ je pravoúhlý, tedy $\sphericalangle QRC$ je ostrý. Poněvadž $\overline{AD} > \overline{DC}$, musí ležet bod D v opačné polorovině vyřazené osou o , než ve které leží bod A , tedy v polorovině oC . Bod B leží v polorovině oA . Vedme jím $o' \parallel o$. Body R, C, D, Q leží v téže polorovině $o'C$. Označíme Q' průsečík přímek AC, o' . Bod D leží uvnitř ostrého úhlu $Q'BC$ a vně kružnice se středem C a poloměrem BC (vzhledem k tomu, že $\overline{CD} > \overline{BC}$). Sestrojme Thaletovy polokružnice nad AB a BC , ležící v polorovinách ABD a BCD . Tyto

BD kružnici k_2 v bodě P , který je vnitřním bodem úhlopříčky BD , tedy vnitřním bodem čtyřúhelníka $ABCD$ (použito lemmatu 2).

Bod P leží na úhlopříčce BD , která leží v polorovině $o'C$, tedy leží sám uvnitř této poloroviny. Body kružnice k_2 , které leží uvnitř kružnice k_1 , leží podle lemmatu 3. v polorovině opačné k $o'S_2 \equiv o'C$. Odtud vyplývá, že bod P je vnějším bodem kružnice k_1 . Odtud plyne, že úhel APB je ostrý (lemma 2), dále $\sphericalangle BPC = 90^\circ$, $\sphericalangle CPD = 90^\circ$, $\sphericalangle DPA > 90^\circ$. Bod P je tedy jedním z hledaných bodů X .

Ukažme nyní, že takových bodů je nekonečně mnoho (obr. 4). Na úhlopříčce BD sestrojme bod P' , aby $\sphericalangle BP'C = \alpha$. Bod P' je zřejmě bodem úsečky PD . Kdyby snad P' padl za bod D , zvolíme libovolný bod úsečky PD . Poněvadž α je vnějším úhlem trojúhelníka APP' , je $\sphericalangle AP'B = \alpha' < \alpha$. Dále platí: $\sphericalangle CP'D = 180 - \alpha$, $\sphericalangle AP'D = 180 - \alpha'$, $\alpha' < \alpha < 180 - \alpha < 180 - \alpha'$. Je tedy bod P' hledaným bodem X . Podobně dokážeme, že též všechny vnitřní body úsečky PP' mají požadovanou vlastnost.

Jestliže mezi velikostmi stran platí neostré nerovnosti, pak postup důkazu je v podstatě shodný s uvedeným, a proto jej přenecháváme čtenáři.

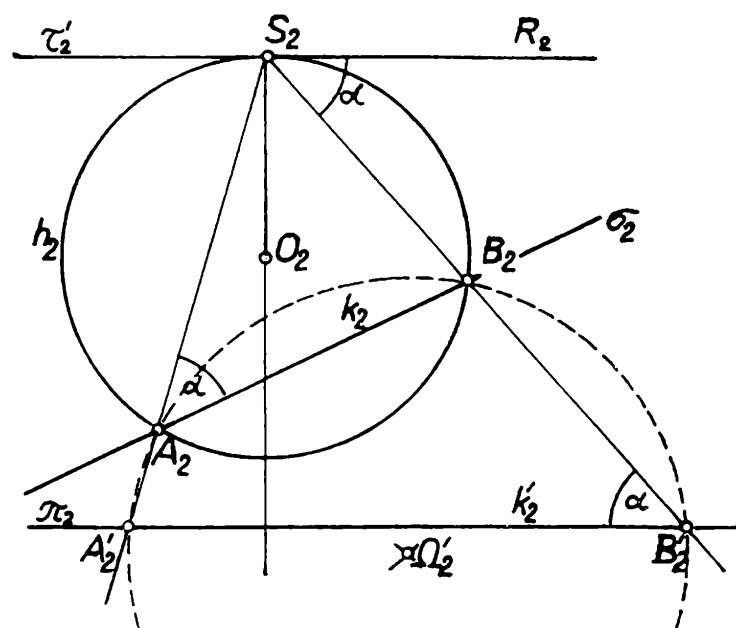
konstruktivní geometrie

Stereografická projekce a Möbiova rovina

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

Zobrazování kulové plochy na rovinu je problémem důležitým v nauce o mapách (kartografii), jedním způsobem promítání kulové plochy do roviny se budeme nyní zabývat. Jde o tzv. stereografickou projekci, která byla známa již antickému hvězdáři Hipparchovi z Nikaie ve 2. století před naším letopočtem. Vlastnosti této projekce byly podrobně zkoumány v 18. a 19. století, toto studium vedlo k vytvoření rovinného modelu geometrie na kulové ploše, kterým je Möbiova rovina.

Stereografická projekce je vžitý název pro středové promítání kulové plochy do roviny v případě, kdy středem promítání je bod S kulové plochy a průmětnou je rovina π rovnoběžná s tečnou rovinou τ' kulové plochy v bodě S (obr. 1). Je samozřejmé, že volíme rovinu π různou od roviny τ' . Snadno si představíme, že každým bodem M kulové plochy různým od bodu S prochází promítací přímka různoběžná s rovinou π



Obr. 2

Věta 2. *Kružnice, které neprocházejí středem promítání, se zobrazují opět jako kružnice. Kružnice, které procházejí středem promítání, se zobrazují jako přímky, přitom střed promítání nemá přiřazen žádný obraz.*

Důkaz. Prochází-li kružnice středem promítání S , je jejím průmětem přímka, která je průsečnicí roviny kružnice s průmětnou. Neprochází-li rovina σ kružnice k bodem S (obr. 2), zvolíme za pomocnou průmětnu rovinu procházející body S , O a kolmou k rovině σ . Tato rovina protíná kulovou plochu v hlavní kružnici h , průmětem kružnice k do této průmětny je úsečka A_2B_2 . Z vlastností obvodového a k němu příslušného úsekového úhlu plyne: $\sphericalangle S_2A_2B_2 = \sphericalangle R_2S_2B_2$. Ale $\sphericalangle R_2S_2B_2 = \sphericalangle A'_2B'_2S_2$ (jde o střídavé úhly), A' , B' jsou středové průměty bodů A , B na rovinu π . Čtyřúhelník $A'_2B'_2B_2A_2$ je tětiový čtyřúhelník a kružnice jemu opsaná je hlavní kružnicí kulové plochy, která má střed Ω v pomocné průmětně. Roviny π a σ protínají kulovou plochu v kružnicích, proto je kružnice k' s průměrem $A'B'$, ležící v rovině π stereografickým průmětem kružnice k , ležící na kulové ploše. Tím je věta 2 dokázána.

Věta 3. *Každá přímka v rovině π je stereografickým průmětem jedné kružnice procházející bodem S na kulové ploše. Každá kružnice v rovině π je stereografickým průmětem jedné kružnice ležící na kulové ploše.*

Důkaz věty podá čtenář snadno sám, stejně jako důkaz další věty:

Věta 4. *Stereografickou projekcí se zachovávají incidenční a dotykové vlastnosti kružnic.*

Jak patrně, můžeme na základě stereografické projekce kulové plochy do roviny definovat vzájemně jednoznačné zobrazení mezi rovinou π a kulovou plochou bez bodu S . Nepříjemnou výjimečnost bodu S můžeme

odstranit tím, že k rovině π připojíme jediný nevlastní bod, který budeme považovat za obraz bodu S . Takto rozšířenou euklidovskou rovinu π nazýváme Möbiova rovina.*) Uvědomte si dobře, že právě popsáný způsob rozšíření euklidovské roviny je zásadně odlišný od doplnění roviny nevlastní přímkou, které je užitečné při jiných příležitostech a je daleko běžnější.

Seznamme se stručně s výhodami Möbiovy roviny, další poznáme v následujících článcích. Předně zvolíme společný název pro přímky a kružnice v Möbiově rovině, budeme je nazývat *kruhové křivky*. Přímky jsou právě ty kruhové křivky, které obsahují nevlastní bod roviny; přitom všechny přímky roviny obsahují též nevlastní bod. Dvě kruhové křivky se buď protínají ve dvou bodech nebo se dotýkají nebo nemají společný bod; pokud jde o přímky, mají různoběžky společné dva body (jeden vlastní a druhý nevlastní), zatímco rovnoběžky představují dvě kruhové křivky, které se dotýkají v nevlastním bodě. Všechny uvedené poznatky o Möbiově rovině si snadno zdůvodníme, promítneme-li uvažované útvary z Möbiovy roviny na kulovou plochu.

V dalších článcích poznáte významné metody řešení úloh o přímkách a kružnicích, které plně využívají zobrazení v Möbiově rovině.

fyzika

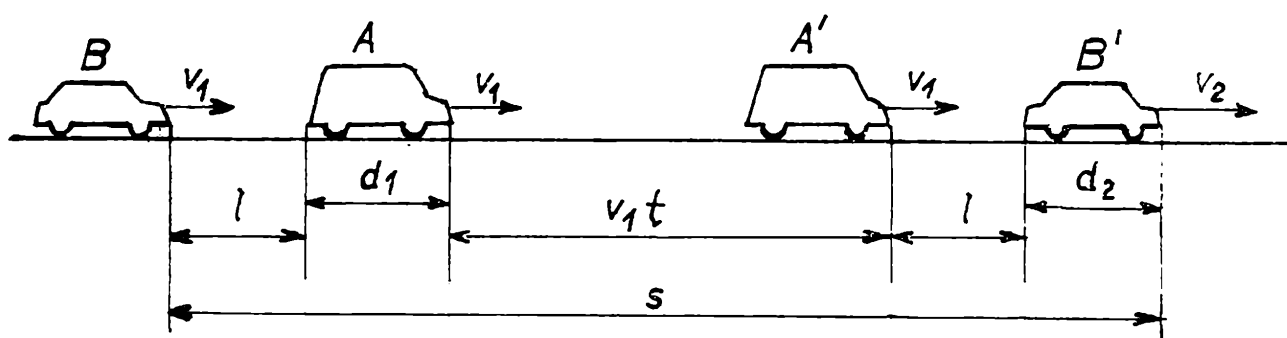
Předjíždění se zrychlením

Až si jednou pořídíte motorové vozidlo (5. část)

RNDr. MILAN BEDNAŘÍK—RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

V minulém článku tohoto seriálu jsme řešili případ předjíždění vozidel stálou rychlostí. Při odvozování vztahu pro velikost dráhy potřebné k předjetí jsme předpokládali, že řidič rychlejšího vozidla začne před-

*) A. F. Möbius byl německý matematik, který žil v letech 1790 až 1868, přes padesát let pracoval na hvězdárně v Lipsku. Významným způsobem přispěl zejména k rozvoji geometrie, je autorem mnoha originálních metod algebraického přístupu ke studiu geometrické problematiky. Patří také k zakladatelům topologie, znám je tzv. Möbiův list, příklad jednostranné plochy.



Obr. 1

jíždět v okamžiku, kdy se přiblíží k jinému vozidlu na tzv. kritickou vzdálenost a pak po celou dobu předjíždění koná pohyb rovnoměrný. Na několika příkladech jsme ukázali, že dráha potřebná k předjetí bývá někdy značně velká, zvláště tehdy, jestliže se rychlosti obou vozidel od sebe málo liší.

Uvažujme nyní, že se řidič rychlého vozu blíží k pomalejšímu vozidlu v místě, kde nemůže nebo nesmí předjíždět, např. v úseku, kde je předjíždění zakázáno dopravní značkou, objeví-li se v protisměru jiné vozidlo apod. V tom případě musí zpomalit, zařadit se za pomalejší vozidlo a jet za ním v přiměřeném odstupu až do doby, kdy se silnice uvolní. Pak teprve může „přidat plyn“ a pomalejší vozidlo předjet. Protože však předjíždějící vůz musí mít vyšší rychlost než vozidlo předjížděné, je zřejmé, že při tomto způsobu předjíždění koná předjíždějící vozidlo pohyb zrychlený.

Nejprve předpokládejme, že se *předjíždějící vozidlo pohybuje rovnoměrně zrychleně po celou dobu předjíždění*. Při odvození vztahu pro velikost dráhy potřebné k předjetí vyjdeme ze situace znázorněné na obr. 1.

Dvě motorová vozidla A , B jedou za sebou stejnou rychlostí v_1 ve vzájemném odstupu $l = v_1\tau$, tj. v odstupu, který se rovná kritické vzdálenosti mezi vozidly jedoucími za sebou stejnou rychlostí; přitom doba τ je součet reakční doby řidiče a doby zpoždění účinku brzd vozidla B (viz 3. část tohoto seriálu). Řidič vozidla B začne předjíždět se zrychlením a' , které udržuje po celou dobu předjíždění, a zařadí se před vůz A opět v odstupu $l = v_1\tau$, což znamená, že před vozem A ponechá vzdálenost rovnou dráze nebrzděného vozidla A , podobně jako při předjíždění stálou rychlostí (dobu τ předpokládáme u obou vozidel stejnou). O předjížděném vozidle předpokládáme, že v souhlase s dopravními předpisy nezvyšuje rychlost, jede tedy stálou rychlostí v_1 . Trvá-li předjíždění dobu t , ujede předjížděné vozidlo dráhu $v_1 t$. Označíme-li d_1 délku vozidla A , d_2 délku vozidla B , pak vozidlo B urazí při předjíždění dráhu (viz obr. 1)

$$s = 2v_1\tau + d_1 + d_2 + v_1t. \quad (1)$$

Protože vozidlo B koná rovnoměrně zrychlený pohyb s počáteční rychlostí v_1 a se zrychlením a' , lze dráhu, kterou urazí za dobu t , vyjádřit také vztahem

$$s = v_1t + \frac{1}{2}a't^2. \quad (2)$$

Porovnáme-li vztahy (1) a (2), určíme *dobu předjíždění*

$$t = \sqrt{\frac{2}{a'} (2v_1\tau + d_1 + d_2)}. \quad (3)$$

Dosazením doby t vyjádřené vztahem (3) do rovnice (1) nebo (2) pak dostaneme *celkovou dráhu potřebnou k předjetí*:

$$s = 2v_1\tau + d_1 + d_2 + v_1 \sqrt{\frac{2}{a'} (2v_1\tau + d_1 + d_2)}. \quad (4)$$

Vidíme, že dráha potřebná k předjetí závisí na rychlosti v_1 , kterou mají obě vozidla před začátkem předjíždění (a kterou jede předjížděné vozidlo po celou dobu předjíždění), na délkách d_1 , d_2 obou vozidel, na době τ , kterou předpokládáme u obou vozidel stejnou, a na zrychlení a' .

Ze vztahu (4) je zřejmá tato důležitá skutečnost: při konstantních veličinách v_1 , d_1 , d_2 , τ klesá dráha s potřebná k předjetí s rostoucím zrychlením a' . Z tohoto hlediska je tedy předjíždění při větším zrychlení bezpečnější. Na druhé straně však jeho bezpečnost klesá, neboť se zvyšuje rychlost předjíždějícího vozidla. Při pohybu se stálým zrychlením a' vzroste totiž za dobu t , po kterou předjíždění trvá, *rychlost vozidla* z hodnoty v_1 na hodnotu

$$v_2 = v_1 + a't,$$

nebo po dosazení za dobu t ze vztahu (3)

$$v_2 = v_1 + \sqrt{2a' (2v_1\tau + d_1 + d_2)}. \quad (5)$$

Rychlost v_2 , kterou vozidlo ukončí předjíždění, roste se zrychlením a' ; v některých případech by tato rychlost vzrostla na hodnotu, která již vzhledem ke stavu silnice nebo dopravní situaci není bezpečná. To vše musí mít na paměti řidič a volit způsob předjíždění tak, aby neohrozil bezpečnost svou ani ostatních účastníků silničního provozu.

Příklad 1. Dva automobily, každý o délce 5 m, jedou za sebou rychlostí 72 km h⁻¹ v odstupu, který je roven kritické vzdálenosti l . Druhý automobil začne předjíždět v okamžiku, kdy má k dispozici volný úsek silnice o délce 400 m, přičemž nejvyšší dovolená rychlost na tomto úseku je 100 km h⁻¹. Určete, zda předjíždění lze pokládat za bezpečné, je-li zrychlení předjíždějícího automobilu a) 0,25 m s⁻², b) 0,5 m s⁻², c) 1 m s⁻². U obou automobilů předpokládejte dobu $\tau = 1$ s.

Řešení: Předjíždění lze pokládat za bezpečné tehdy, nepřekročí-li dráha potřebná k předjetí délku 400 m a rychlost předjíždějícího vozidla hodnotu 100 km h⁻¹. Dráhu vypočteme ze vztahu (4), rychlost na konci předjíždění ze vztahu (5). Do obou vztahů dosazujeme dané číselné hodnoty, tj. počáteční rychlost $v_1 = 72 \text{ km h}^{-1} = 20 \text{ m s}^{-1}$, délky vozidel $d_1 = d_2 = 5 \text{ m}$, dobu $\tau = 1 \text{ s}$, a postupně tři dané hodnoty zrychlení:

a) pro zrychlení $a' = 0,25 \text{ m s}^{-2}$ je dráha $s = 450 \text{ m}$, rychlost $v_2 = 25 \text{ m s}^{-1} = 90 \text{ km h}^{-1}$,

b) pro zrychlení $a' = 0,5 \text{ m s}^{-2}$ je dráha $s \doteq 333 \text{ m}$, rychlost $v_2 \doteq 27,1 \text{ m s}^{-1} \doteq 97,6 \text{ km h}^{-1}$,

c) pro zrychlení $a' = 1 \text{ m s}^{-2}$ je dráha $s = 250 \text{ m}$, rychlost $v_2 = 30 \text{ m s}^{-1} = 108 \text{ km h}^{-1}$.

Předjíždění lze pokládat za bezpečné jen v případě b), tj. při zrychlení $a' = 0,5 \text{ m s}^{-2}$, neboť dráha potřebná k předjetí je kratší než 400 m a rychlost na konci předjíždění menší než 100 km h⁻¹. V případě a), tj. při zrychlení $a' = 0,25 \text{ m s}^{-2}$ je dráha potřebná k předjetí o 450 m — 400 m = 50 m delší než volný úsek silnice, který má řidič k dispozici, v případě c), tj. při zrychlení $a' = 1 \text{ m s}^{-2}$ by řidič na konci předjíždění překročil dovolenou rychlost o 108 km h⁻¹ — 100 km h⁻¹ = 8 km h⁻¹.

Příklad 2. Při kterém ze tří zrychlení, uvažovaných v příkladu 1, by bylo předjíždění nejvýhodnější, kdyby za jinak stejných podmínek byla počáteční rychlost obou automobilů $v_1 = 54 \text{ km h}^{-1}$?

Řešení: Délky vozidel i doba τ zůstávají stejné jako v příkladu 1, rychlost má nyní hodnotu $v_1 = 54 \text{ km h}^{-1} = 15 \text{ m s}^{-1}$. Ze vztahů (4) a (5) postupně vypočteme:

a) pro zrychlení $a' = 0,25 \text{ m s}^{-2}$ dráhu $s \doteq 308 \text{ m}$, rychlost $v_2 \doteq 19,5 \text{ m s}^{-1} \doteq 70,2 \text{ km h}^{-1}$,

b) pro zrychlení $a' = 0,5 \text{ m s}^{-2}$ dráhu $s \doteq 230 \text{ m}$, rychlost $v_2 \doteq 21,3 \text{ m s}^{-1} \doteq 76,7 \text{ km h}^{-1}$,

c) pro zrychlení $a' = 1 \text{ m s}^{-2}$ dráhu $s \doteq 174 \text{ m}$, rychlost $v_2 \doteq 23,9 \text{ m s}^{-1} \doteq 86,0 \text{ km h}^{-1}$.

V tomto příkladu lze předjíždění pokládat za bezpečné ve všech třech případech, neboť dráha nepřekračuje 400 m a rychlost 100 km h⁻¹, nejvýhodnější je však případ c), kdy se předjetí uskuteční na nejkratší dráze 174 m.

Přehled o tom, jakých hodnot nabývá dráha s a rychlost v_2 v závislosti na zrychlení a' a rychlosti v_1 , poskytuje tabulka I. Číselné hodnoty byly počítány pro délky vozidel $d_1 = d_2 = 5 \text{ m}$ a dobu $\tau = 1 \text{ s}$.

Tabulka I

v_1 [m.s ⁻¹]	$a' = 0,25 \text{ m.s}^{-2}$		$a' = 0,5 \text{ m.s}^{-2}$		$a' = 1 \text{ m.s}^{-2}$		$a' = 1,5 \text{ m.s}^{-2}$	
	s [m]	v_2 [m.s ⁻¹]	s [m]	v_2 [m.s ⁻¹]	s [m]	v_2 [m.s ⁻¹]	s [m]	v_2 [m.s ⁻¹]
5	83	8,2	65	9,5	52	11,3	46	12,8
10	185	13,9	40	15,5	108	17,8	93	19,5
15	308	19,5	230	21,3	174	23,9	149	25,9
20	450	25,0	333	27,1	250	30,0	214	32,3
25	608	30,5	447	32,8	334	36,0	284	38,4

Z tabulky je zřejmé, že při libovolné počáteční rychlosti je předjíždění s větším zrychlením výhodnější z hlediska délky dráhy, kterou vozidlo při předjíždění urazí (viz číselné hodnoty dráhy s pro zrychlení $a' = 1,5 \text{ m.s}^{-2}$), zatímco tomu tak nemusí být z hlediska rychlosti dosažené na konci předjíždění; rychlost v_2 nabývá totiž při vyšších počátečních rychlostech v_1 tak vysokých hodnot (viz číselné hodnoty pro rychlost v_2 v posledním řádku tabulky I), že by je bylo možné považovat za bezpečné snad na čtyřproudové dálnici, a to ještě jen za předpokladu bezvadného stavu vozidla a dobrých schopností řidiče.

Jak si má tedy počínat řidič, který chce předjet na co nejkratší dráze, ale nehodlá ohrozit svou bezpečnost příliš velkou rychlostí? Předjíždět s menším zrychlením jistě není nejlepší řešení; tím vzroste dráha potřebná k předjetí a při vyšší počáteční rychlosti může být i rychlost dosažená na konci předjíždění příliš velká (viz dráhu 608 m a rychlost $30,5 \text{ m.s}^{-1}$ pro zrychlení $a' = 0,25 \text{ m.s}^{-2}$ a počáteční rychlost $v_1 = 25 \text{ m.s}^{-1}$).

Výhodný a v praxi velmi často používaný způsob předjíždění je ten, kdy předjíždějící vozidlo koná zpočátku pohyb zrychlený a když dosáhne určité rychlosti, pokračuje v předjíždění pohybem rovnoměrným. Předjíždění tedy probíhá ve dvou fázích: nejdříve jako pohyb rovnoměrně zrychlený po dobu t_1 , pak jako pohyb rovnoměrný po dobu t_2 .

Uvažujme dvě vozidla, která jedou za sebou rychlostí v_1 v odstupu $l = v_1\tau$. Druhé vozidlo, které začne předjíždět se zrychlením a' , dosáhne za dobu t_1 rychlosti v_2 . Touto rychlostí pokračuje v předjíždění a za dobu t_2 se zařadí před první vozidlo opět v odstupu $l = v_1\tau$. Za celou dobu předjíždění $t = t_1 + t_2$ ujede dráhu

$$s = v_1 t_1 + \frac{1}{2} a' t_1^2 + v_2 t_2. \quad (6)$$

Podle obr. 1 můžeme dráhu s vyjádřit také vztahem (1), do něhož dosadíme dobu $t = t_1 + t_2$. Potom dráha

$$s = 2v_1\tau + d_1 + d_2 + v_1t_1 + v_1t_2, \quad (7)$$

v níž zbývá určit doby t_1 a t_2 . Za dobu t_1 se při zrychlení a' zvýší rychlost předjíždějícího vozidla z v_1 na v_2 ; platí tedy

$$t_1 = \frac{v_2 - v_1}{a'}. \quad (8)$$

Abychom určili dobu t_2 , porovnáme pravé strany rovnic (6) a (7), dosadíme za t_1 výraz (8) a dostaneme

$$t_2 = \frac{2v_1\tau + d_1 + d_2}{v_2 - v_1} - \frac{v_2 - v_1}{2a'}. \quad (9)$$

Dosadíme-li nyní doby t_1 a t_2 do rovnice (6) nebo (7), obdržíme po úpravě pro celkovou dráhu potřebnou k předjetí

$$s = \frac{v_1}{2a'}(v_2 - v_1) + \frac{v_2}{v_2 - v_1}(2v_1\tau + d_1 + d_2). \quad (10)$$

Při předjíždění uvažujeme $v_2 > v_1$, $a' > 0$. Poněvadž počítaný čas je veličina nezáporná, musí platit nejen $t_1 > 0$, ale i $t_2 > 0$, což je vzhledem ke vztahu (9) splněno, platí-li nerovnost

$$\frac{2v_1\tau + d_1 + d_2}{v_2 - v_1} \geq \frac{v_2 - v_1}{2a'}. \quad (11)$$

Příklad 3. Dva automobily, každý o délce 5 m, jedou za sebou rychlostí 72 km h⁻¹ v odstupu, který je roven kritické vzdálenosti l . Druhý automobil začne předjíždět se zrychlením $a' = 1$ m s⁻² až dosáhne rychlosti 100 km h⁻¹, kterou již do konce předjíždění nemění. Určete doby t_1 a t_2 trvání obou fází předjíždění a dráhu s potřebnou k předjetí. Předpokládejte dobu $\tau = 1$ s.

Řešení: Dána je počáteční rychlost $v_1 = 72$ km h⁻¹ = 20 m s⁻¹, rychlost na konci předjíždění $v_2 = 100$ km h⁻¹ = 27,8 m s⁻¹, délky vozidel $d_1 = d_2 = 5$ m a doba $\tau = 1$ s.

Použitím vztahů (8) a (9) dostaneme pro dobu zrychleného pohybu hodnotu $t_1 = 7,8$ s a pro dobu rovnoměrného pohybu $t_2 = 2,5$ s. Celkovou dráhu potřebnou k předjetí vypočteme buď ze vztahu (10) nebo dosazením vypočtených hodnot t_1 a t_2 do vztahů (6) nebo (7). Délka této dráhy je $s = 256$ m.

Porovnáme-li tento výsledek s výsledky příkladu 1, vidíme, že právě uvedený způsob předjíždění ve dvou fázích je nejvýhodnější: rychlost nepřekročí dovolenou hodnotu 100 km h⁻¹ a dráha je jen o 256 m —

— 250 m = 6 m delší než v případě 1c, kdy byla rychlost na konci předjíždění 108 km h⁻¹.

Příklad 4. Osobní automobil o délce 5 m jede za nákladním autem s vlekem o celkové délce 15 m. Oba vozy jedou rychlostí 54 km h⁻¹ a odstup mezi nimi je rovný kritické vzdálenosti l . Osobní automobil začne předjíždět rovnoměrně zrychleným pohybem, až dosáhne rychlosti 90 km h⁻¹ a touto rychlostí také předjíždění ukončí. Určete doby t_1 , t_2 obou fází předjíždění a celkovou dráhu s potřebnou k předjetí, je-li zrychlení osobního automobilu v první fázi předjíždění a) 1,25 m s⁻², b) 1,0 m s⁻², c) 0,5 m s⁻². Počítejte pro dobu $\tau = 1$ s.

Řešení: Počáteční rychlost $v_1 = 54 \text{ km h}^{-1} = 15 \text{ m s}^{-1}$, rychlost ve druhé fázi předjíždění $v_2 = 90 \text{ km h}^{-1} = 25 \text{ m s}^{-1}$, délky vozů $d_1 = 5 \text{ m}$, $d_2 = 15 \text{ m}$, doba $\tau = 1 \text{ s}$.

Při výpočtu postupujeme analogickým způsobem jako v příkladu 3.

a) Pro zrychlení $a' = 1,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je doba $t_1 = 8 \text{ s}$, doba $t_2 = 1 \text{ s}$ a dráha $s = 185 \text{ m}$.

b) Pro zrychlení $a' = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je doba $t_1 = 10 \text{ s}$ a doba $t_2 = 0$. V tomto případě jede automobil rovnoměrně zrychleně po celou dobu předjíždění, druhá fáze pohybu při předjíždění nenastane a rychlosti v_2 dosáhne automobil právě v okamžiku, kdy ukončí předjíždění. Dráhu s můžeme počítat pomocí některého ze vztahů (6), (7), (10), ale také pomocí vztahu (4), který byl odvozen pro případ rovnoměrně zrychleného pohybu po celou dobu předjíždění. Délka dráhy potřebné k předjetí je $s = 200 \text{ m}$.

c) Pro zrychlení $a' = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je doba $t_1 = 20 \text{ s}$, $t_2 = -5 \text{ s}$, což ovšem není možné, neboť čas, jak jsme již uvedli, je veličina nezáporná. V tomto případě není splněna nerovnost (11), což znamená, že předjíždění je ukončeno ještě dříve než automobil dosáhne rychlosti 90 km h⁻¹.

Proto musíme pro výpočet času i dráhy použít vztahů odvozených v první části tohoto článku. Ze vztahu (3) vypočteme, že celé předjíždění je při konstantním zrychlení 0,5 m s⁻² ukončeno za dobu $t = 14,1 \text{ s}$, dráha potřebná k předjetí je podle vztahu (4) $s = 262 \text{ m}$ a pro rychlost na konci předjíždění dostaneme použitím vztahu (5) hodnotu $v_2 = 22,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 79,6 \text{ km h}^{-1}$. Vidíme, že rychlost, kterou je předjíždění ukončeno, je o 90 km h⁻¹ — 79,6 km h⁻¹ = 10,4 km h⁻¹ menší než rychlost požadovaná v zadání.

V tabulce II uvádíme číselné hodnoty dráhy s potřebné k předjetí v závislosti na počáteční rychlosti v_1 a zrychlení a' . Hodnoty byly počítány pro rychlost $v_2 = v_1 + 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, délky vozidel $d_1 = d_2 = 5 \text{ m}$ a dobu $\tau = 1 \text{ s}$. U údajů uvedených v závorce jde o případ, kdy před-

jízďení skončí dříve, než nabude předjíždějící vozidlo požadované rychlosti v_2 . Tyto údaje byly počítány ze vztahu (4).

Tabulka II

v_1 [m.s ⁻¹]	Dráha s [m] pro zrychlení:			
	$a' = 0,25 \text{ m.s}^{-2}$	$a' = 0,5 \text{ m.s}^{-2}$	$a' = 1,0 \text{ m.s}^{-2}$	$a' = 1,5 \text{ m.s}^{-2}$
5	(83)	(65)	52	48
10	(185)	140	115	107
11	(308)	235	198	185
20	450	350	300	283
25	610	485	422	402

Z tabulky II je zřejmé, že předjíždění s větším zrychlením je bezpečnější, neboť dráha potřebná k předjetí se s rostoucím zrychlením zkracuje. Naopak tato dráha se prodlužuje s rostoucí počáteční rychlostí; čím rychleji jede vozidlo, které chceme předjet, tím více při předjíždění riskujeme. K tomu přistupuje ještě skutečnost, že při velkých rychlostech nelze zpravidla dosáhnout dostatečně velkého zrychlení. Při stálém výkonu motoru klesá s rostoucí rychlostí jeho tažná síla a tím i dosažitelné zrychlení, kromě toho se zvětšuje odporová síla vzduchu působící proti směru pohybu.

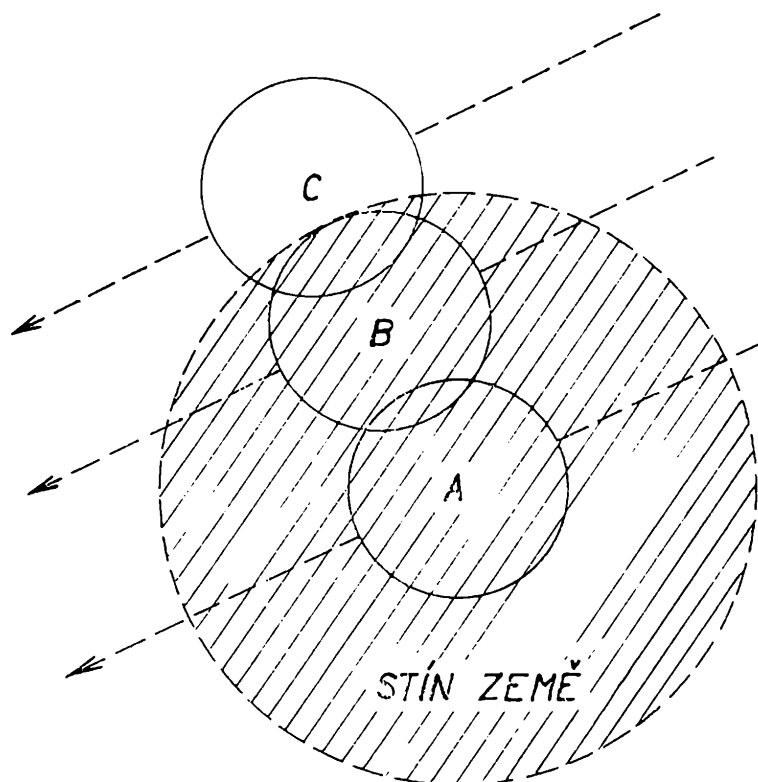
Odtud vyplývá jednoduchý závěr: *nemůžeme-li vozidlo, jedoucí před námi jen o málo menší rychlostí než je naše cestovní rychlost, předjet s dostatečně velkým zrychlením, je lépe od předjíždění upustit a raději jet i nadále v přiměřeném odstupu za tímto vozidlem.* Tím spíše to platí, jede-li po běžné dvoupruhové silnici kolona osobních automobilů, což se stává velmi často na výpadových silnicích v okolí větších měst. Je známo, že spěchající řidič, snažící se za každou cenu dostat do čela kolony, již ne-jednou způsobil těžkou dopravní nehodu, na niž doplatil nejen on sám, ale také řidič vozidla v protisměru a mnohdy i někteří z ukázněných řidičů jedoucích v koloně.

Zatmění Měsíce do roku 2000

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ—RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Odpovědět na otázku, jak vzniká zatmění Měsíce, dokáže dnes každý absolvent základní školy. Víme, že k zatmění Měsíce dochází tehdy, když Měsíc vstoupí do stínu, který do prostoru vrhá Země ozařovaná Sluncem. Předpokladem vzniku zatmění tedy je, aby středy Slunce, Země a Měsíce ležely přibližně na téže přímce a Měsíc byl v opozici se Sluncem, tj. aby byl na opačné straně od Země než je Slunce. Jinými slovy, k zatmění Měsíce může dojít, je-li Měsíc v úplňku. Kdyby dráha Měsíce ležela přesně v rovině ekliptiky, tj. v rovině dráhy Země, pak by se při každém úplňku ocitly středy všech tří těles na jedné přímce a při každém úplňku by nastalo úplné zatmění Měsíce (a také při každém novu zatmění Slunce). Rovina dráhy Měsíce však svírá s rovinou ekliptiky úhel $5^{\circ}9'$, čímž je počet zatmění značně omezen. Středy Slunce, Země a Měsíce jsou na jedné přímce jen tehdy, nastane-li úplněk v okamžiku, kdy Měsíc prochází uzlem své dráhy (tj. leží na průsečnici roviny ekliptiky a roviny dráhy Měsíce). V takovém případě nastane úplné zatmění Měsíce a Měsíc prochází středem zemského stínu. Toto úplné zatmění může trvat až $1\frac{3}{4}$ hodiny. Protože průměr stínu Země ve vzdálenosti Měsíce je více než 2,5krát větší než průměr Měsíce (obr. 1), může úplné zatmění Měsíce nastat ještě tehdy, je-li střed Měsíce ve vzdálenosti $25'$ od roviny ekliptiky; v tomto případě ovšem prochází Měsíc okrajem stínu a úplné zatmění trvá jen jediný okamžik. Je-li vzdálenost středu Měsíce od roviny ekliptiky větší než $25'$, ale menší než $56'$, pak nastává částečné zatmění Měsíce, při němž je do zemského stínu ponořena jen část měsíčního kotouče. Kromě úplného a částečného zatmění Měsíce nastávají také zatmění polostínová; při těchto zatměních překročí vzdálenost středu Měsíce od ekliptiky hodnotu $56'$ a Měsíc vstoupí jen do polostínu Země. Ovšem tato zatmění nejsou nijak výrazná, neboť zmenšení jasnosti měsíčního úplňku je jen nepatrné, a proto se často mezi zatmění ani nepočítají a v dalším o nich nebudeme uvažovat.

Úplné nebo alespoň částečné zatmění Měsíce může tedy nastat jen v blízkém okolí uzlu měsíční dráhy, přičemž současně musí být Měsíc v úplňku. Doba mezi dvěma po sobě následujícími úplňky Měsíce — synodický měsíc — je přibližně 29,53 dne, doba mezi dvěma průchody Měsíce týmž uzlem dráhy — drakonický měsíc — je 27,21 dne. Je-li



Obr. 1. Různé průběhy zatmění Měsíce. Znázorněny jsou polohy Měsíce při středu zatmění. V poloze A prochází střed Měsíce středem zemského stínu a zatmění má maximální dobu trvání. V poloze B nastává ještě úplné zatmění, avšak při středu zatmění se vnější okraj Měsíce jen dotkne okraje stínu. V poloze C nastává jen částečné zatmění.

Měsíc určitého dne v úplňku a současně v uzlu své dráhy, pak se stejná situace bude opakovat po uplynutí asi 18 roků a 11 dní. Toto období, v němž se pravidelně opakuje sled zatmění Měsíce a Slunce v určitém pořadí, se jmenuje saros a znali je již chaldejští hvězdáři v 6. století před naším letopočtem. Saros obsahuje 223 synodických měsíců a současně 242 drakonických měsíců. V sarosu nastává 70 zatmění, z toho 41 slunečních a 29 měsíčních. Protože však 223 synodických měsíců trvá 6585,36 dní = 18 roků 11,36 dne a 242 drakonických měsíců 6585,32 dne, nebudou mít jednotlivá zatmění přesně stejný průběh. Rozdíl 0,04 dne (čili asi 1 hodina) mezi dobou trvání 223 synodických a 242 drakonických měsíců způsobuje, že po uplynutí sarosu je Měsíc při úplňku v poněkud odlišné vzdálenosti od uzlu své dráhy. Proto zatmění v příštím období sarosu nastávají asi o jednu hodinu později a nejsou přesně stejná. Zatmění Měsíce je zprvu částečné, po několika periodách sarosu úplné, později se stane opět částečným až konečně zanikne; v dalších obdobích je nahrazeno nově vznikajícím částečným zatměním.

Zatmění Měsíce je na rozdíl od zatmění Slunce pozorovatelné všude, kde je Měsíc v době zatmění nad obzorem (samozřejmě za předpokladu bezmračné oblohy); pro všechna tato místa začíná současně a má shodný průběh. Úplné zatmění Měsíce je velmi zajímavý úkaz. Měsíc vstupuje

nejprve do polostínu, což, jak jsme již uvedli, není jev příliš nápadný. Jakmile se měsíční kotouč dotkne plného stínu Země, nastává částečné zatmění. Měsíce postupně ubývá, přičemž zastíněná část se zdá zprvu zcela temná — to je však jen důsledek kontrastu mezi jasnou částí Měsíce a částí zastíněnou. Když z Měsíce zbývá již jen malý srpek, začíná se plný stín „vyjasňovat“. Při vstupu celého Měsíce do plného stínu nastává úplné zatmění Měsíce. Měsíc na obloze nezmizí, intenzita jeho záření sice asi stokrát poklesne, Měsíc je však dobře pozorovatelný a má tmavočervené zabarvení. Jak se Měsíc noří stále hlouběji do plného stínu, klesá intenzita jeho osvětlení a mění se jeho barva, po celou dobu zatmění je však pozorovatelný. Vysvětlení tohoto úkazu spočívá v zemské atmosféře. Kdyby Země byla (podobně jako Měsíc) bez atmosféry, byl by stín, vržený Zemí do prostoru, zcela ostrý a v době zatmění by Měsíc na obloze „zmizel“, neboť by na něj nedopadaly žádné sluneční paprsky. Ve skutečnosti však sluneční paprsky procházejí u povrchu Země atmosférou, v níž se lámou směrem dovnitř stínu. Přitom krátkovlnné (modré) paprsky jsou atmosférou pohlcovány mnohem více než dlouhovlnné (červené) paprsky a odtud plyne červenavé zbarvení Měsíce při zatmění. Proměřením intenzity světla Měsíce a jeho barvy při zatmění můžeme zjistit hustotu a barvu světla v zemském stínu a odtud získáváme důležité informace o zemské atmosféře. Vlivem změn v zemské atmosféře se také jasnost a zabarvení Měsíce případ od případu mění. Studium zatmění Měsíce má tedy význam i pro zkoumání vlastností zemské atmosféry a do doby, než byly vypuštěny první umělé družice Země, byla zatmění Měsíce jediným zdrojem informací o propustnosti a optických vlastnostech jednotlivých vrstev zemské atmosféry.

Zatmění Měsíce i Slunce dovedou dnes astronomové vypočítat na mnoho let dopředu, a to nejen co do okamžiku, kdy nastanou, ale i co do jejich průběhu. Pro naše čtenáře jsme z vypočtených zatmění vybrali všechna částečná i úplná zatmění Měsíce, která nastanou do konce našeho století. Jejich přehled uvádíme v tabulce I. Kromě data je v tabulce uvedena rovněž velikost zatmění v %; tento údaj vyjadřuje, kolik procent měsíčního průměru je zakryto plným stínem při středu zatmění. Tak např. velikost zatmění 50 % znamená, že ve středu zatmění je zakryta stínem polovina průměru; velikost zatmění 100 a více procent znamená, že nastává úplné zatmění, přičemž přebytek nad 100 % udává, jak hluboko ve stínu leží okraj měsíčního kotouče: např. při velikosti zatmění 133 % je při středu zatmění okraj Měsíce od okraje stínu vzdálen o 33 %, tj. o třetinu průměru Měsíce. Připomínáme, že některá zatmění, uvedená v tab. I, nejsou u nás viditelná a tabulka také neobsahuje časový průběh zatmění. Přesné údaje o zatměních přináší každoročně Hvězdářská ročenka, kterou vydává Academia, nakladatelství Československé akademie věd v Praze.

Tabulka I

Zatmění Měsíce od roku 1974 do roku 2000

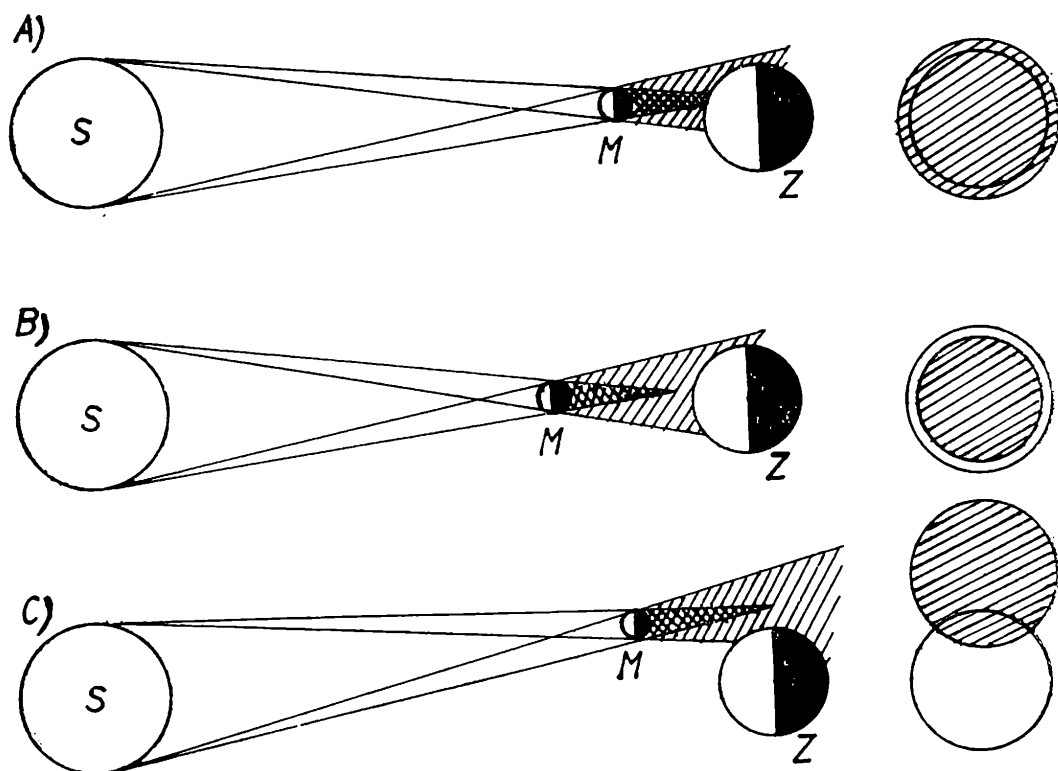
Datum			Velikost %	Úplné zatmění min	Datum			Velikost %	Úplné zatmění min
1974	4.	6.	83	—	1988	27.	8.	30	—
1974	29.	11.	129	76	1989	20.	2.	128	76
1975	25.	5.	146	90	1989	17.	8.	160	98
1975	18.	11.	109	46	1990	9.	2.	109	46
1976	13.	5.	14	—	1990	6.	8.	68	—
1977	4.	4.	21	—	1991	21.	12.	9	—
1978	24.	3.	146	90	1992	15.	6.	69	—
1978	16.	9.	133	82	1992	9.	12.	127	74
1979	13.	3.	88	—	1993	4.	6.	157	98
1979	6.	9.	112	52	1993	29.	11.	111	50
1981	17.	7.	57	—	1994	25.	5.	28	—
1982	9.	1.	135	84	1995	15.	4.	12	—
1982	6.	7.	172	102	1996	4.	4.	137	84
1982	30.	12.	120	66	1996	27.	9.	124	72
1983	25.	6.	34	—	1997	24.	3.	93	—
1985	4.	5.	123	70	1997	16.	9.	120	66
1985	28.	10.	107	42	1999	28.	7.	42	—
1986	24.	4.	122	68	2000	21.	1.	135	84
1986	17.	10.	127	74	2000	16.	7.	177	102
1987	7.	10.	1	—					

Zatmění Slunce

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ—RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

V článku „Zatmění Měsíce do roku 2000“ jsme se zmínili o tom, že zatmění Měsíce a Slunce se opakují v určitém pořadí v periodě, která se nazývá saros a trvá 18 roků a 11 dnů; uvedli jsme rovněž, že v této periodě nastane 29 zatmění Měsíce a 41 zatmění Slunce. Zatmění Slunce jsou tedy častější než zatmění Měsíce. Ve zdánlivém rozporu s tím je známá skutečnost, že úplné zatmění Slunce je velmi vzácný úkaz a do míst, kde má nastat, jsou vysílány vědecké výpravy, aby jej mohly zkoumat.

Podívejme se na tento problém podrobněji. Zatmění Slunce nastane tehdy, dopadne-li na povrch Země stín, který do prostoru vrhá Měsíc ozařovaný Sluncem. Úplné zatmění pozorujeme v místech, kam dopadá



Obr. 1. Úplné, prstencové a částečné zatmění Slunce

na Zemi plný stín, částečné zatmění v místech, kam dopadá polostín. Předpokladem vzniku zatmění je, aby středy Slunce, Měsíce a Země ležely přibližně v téže přímce, přičemž Měsíc musí být v konjunkci se Sluncem (tj. musí být mezi Sluncem a Zemí), čili musí být v novu. Vzhledem k tomu, že rovina dráhy Měsíce není totožná s rovinou ekliptiky, ale svírá s ní úhel $5^{\circ}9'$, může zatmění Slunce nastat jen tehdy, nastane-li fáze novu v okolí uzlu měsíční dráhy.

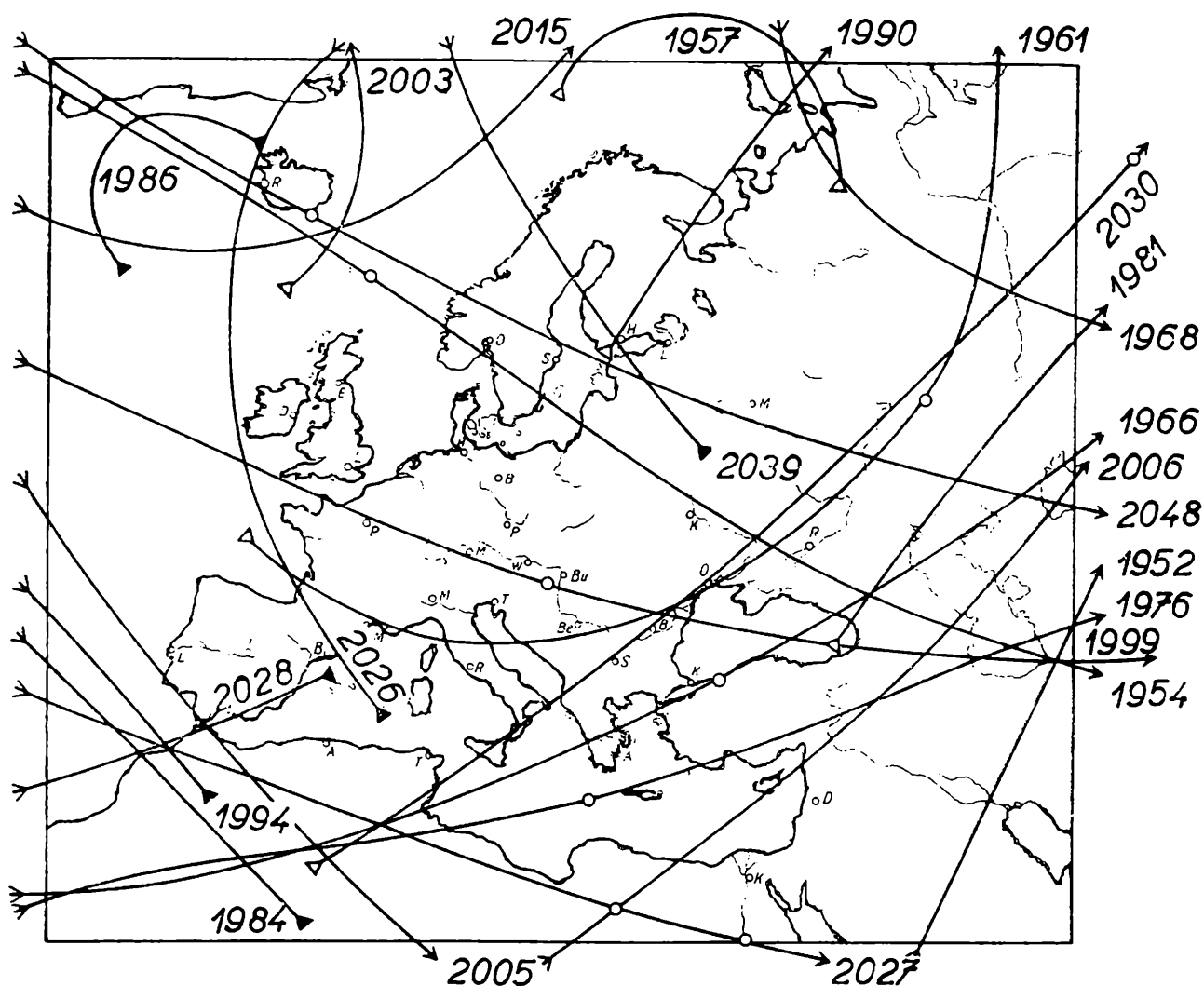
Měsíc nemá atmosféru, proto je jeho stín zcela ostrý a můžeme snadno vypočítat délku plného stínu i průměr stínového kužele plného stínu i polostínu v určité vzdálenosti od Měsíce. Uvedli jsme již, že podmínkou vzniku úplného zatmění je, aby na povrch Země dopadl plný stín Měsíce. Vzhledem k tomu, že dráha Země kolem Slunce není kruhová a určitou výstřednost má i dráha Měsíce kolem Země, mění se délka stínového kužele v mezích od 366 300 km do 380 700 km, vzdálenost Měsíce od Země pak v mezích od 356 400 km do 406 700 km. Aby na Zemi nastalo úplné zatmění Slunce, musí být splněny dvě podmínky: osa kužele plného stínu musí protínat zemské těleso a délka stínového kužele musí být větší (v krajním případě alespoň rovna) než vzdálenost Měsíce od Země. Tato situace je znázorněna na obr. 1A. Z obrázku je zřejmé, že úplné zatmění Slunce je pak pozorovatelné jen pro určitá místa na povrchu Země. Za nejpriznivějších podmínek, je-li Země v aféliu a Měsíc současně v perigeu, je délka stínu 380 700 km a vzdálenost Měsíce od Země 356 400 km. Lze vypočítat, že za těchto podmínek by byl průměr kužele plného stínu ve vzdálenosti Země 264 km, což je také maximální

průměr stínové plochy Měsíce na povrchu Země. Vzhledem ke vzájemnému pohybu všech tří těles a vzhledem k rotaci Země se stínová plocha po povrchu Země posouvá určitou rychlostí; pro místo ve středu plochy by za těchto nejpriznivějších podmínek byla doba trvání úplného zatmění 7,7 minut. To je také maximální doba, po kterou může úplné zatmění Slunce trvat. Je samozřejmé, že tak příznivé podmínky nastanou jen velmi zřídka; obvykle je průměr stínové plochy podstatně menší a doba trvání úplného zatmění podstatně kratší.

V případě, že při zatmění je délka stínu právě rovna vzdálenosti Měsíce od Země, nastane úplné zatmění na jen jediný okamžik a jen pro místa, na něž postupně dopadá vrchol stínového kužele. Je-li délka stínu kratší než vzdálenost Měsíce od Země, ale osa stínového kužele přitom protíná zemské těleso, pak pro určitá místa, ležící v blízkosti průsečíku osy s povrchem Země, nastane prstencové zatmění Slunce: zdánlivý průměr Měsíce je menší než zdánlivý průměr Slunce a při středu zatmění pozorujeme okrajové části slunečního disku jako zářící prstenec (obr. 1B).

Jde-li osa plného stínu mimo Zemi, ale na Zemi dopadá alespoň polostín (obr. 1C), nastane pro ta pozorovací místa, na něž polostín dopadá, částečné zatmění Slunce. Průměr polostínu je mnohem větší než průměr plného stínu, a proto jsou částečná zatmění mnohem častějším úkazem než zatmění úplná. Lze vypočítat, že částečné zatmění alespoň pro některá místa na povrchu Země může nastat ještě tehdy, je-li úhlová vzdálenost středu Měsíce od roviny ekliptiky $89'$ (v tomto případě se vnější okraj polostínu právě dotýká Země). Tato hodnota je větší než mezní hodnota pro částečné zatmění Měsíce ($56'$) a v tom spočívá důvod, proč jsou celkově zatmění Slunce (včetně částečných) častější než zatmění Měsíce.

Na rozdíl od zatmění Měsíce, které je pozorovatelné všude, kde je Měsíc právě nad obzorem a má také pro všechna pozorovací místa stejný průběh, je zatmění Slunce závislé na pozorovacím místě. Úplné zatmění Slunce je pozorovatelné jen v určité oblasti na povrchu Země — v poměrně úzkém pásmu, jímž postupně prochází plný stín Měsíce. Tomuto pásmu se říká pásmo totality. I pro místa v pásmu totality trvá úplné zatmění po velmi krátkou dobu (srovnejme maximální dobu 7,7 min trvání úplného zatmění Slunce s maximální dobou $1\frac{3}{4}$ hodiny trvání úplného zatmění Měsíce). V okolí pásma totality je pak zatmění pozorovatelné jako částečné zatmění, přičemž velikost zatmění klesá se vzdáleností od pásma totality. Totéž zatmění může tedy být pro některá pozorovací místa zatměním úplným, pro jiná částečným a pro další pozorovací místa nemusí být vůbec pozorovatelné (uvažujeme samozřejmě jen ta pozorovací místa, pro něž je Slunce v době zatmění nad obzorem).



Obr. 2. Pásma viditelnosti úplných a prstencových zatmění Slunce v letech 1951 až 2050.

Úplná zatmění Slunce mají velký význam pro fyziku Slunce. Při zatmění Měsíc zakryje jasnou fotosféru a kolem Slunce lze pozorovat nejvyšší vrstvu sluneční atmosféry — korónu. Hustota látky v této vrstvě je neobyčejně malá, teplota je velmi vysoká (kolem miliónu K) a předpokládá se, že koróna je tvořena volnými elektrony a částicemi látky, které jsou vyvrhovány Sluncem do meziplanetárního prostoru. Bylo zjištěno, že tvar koróny je závislý na sluneční činnosti: v období maxima je její tvar přibližně kruhový, v období minima má tvar eliptický, přičemž hlavní osa leží v rovníkové rovině Slunce. Během vzácných okamžiků úplného zatmění Slunce se snaží vědecké expedice, vyslané do pásma totality, získat co nejrozsáhlejší pozorovací materiál. Konají se fotometrická a polarimetrická měření v různých spektrálních oborech, fotografuje se spektrum koróny atd., kromě toho se konají přesná časová měření začátku a konce úplného zatmění apod. Při úplném zatmění byla také prokázána platnost Einsteinovy obecné teorie relativity, podle níž se světelný paprsek ohýbá při průchodu v blízkosti velmi hmotných

Tabulka I

Úplná a prstencová zatmění Slunce pozorovatelná v Evropě v časovém intervalu od r. 1951 do r. 2050. (ú) — úplné zatmění, (p) — prstencové zatmění, (p + ú) — zatmění pozorovatelné v některých oblastech jako prstencové, v jiných jako úplné

Datum	Datum
1952 25. 2. (ú)	1999 22. 8. (ú)
1954 30. 6. (ú)	2003 31. 5. (p)
1957 30. 4. (p)	2005 3. 10. (p)
1961 15. 2. (ú)	2006 29. 3. (ú)
1966 20. 5. (p + ú)	2015 20. 3. (ú)
1968 22. 9. (ú)	2026 12. 8. (ú)
1976 29. 4. (p)	2027 2. 8. (ú)
1981 31. 8. (ú)	2028 26. 1. (p)
1984 30. 5. (p + ú)	2030 1. 6. (p)
1986 3. 10. (ú)	3039 21. 6. (p)
1990 22. 7. (ú)	2048 11. 6. (p)
1994 10. 5. (p)	

těles. Za tímto účelem byla přesně změřena poloha hvězd, promítajících se při úplném zatmění do těsné blízkosti okraje slunečního kotouče; naměřená odchylka v poloze hvězd byla v dobrém souhlasu s odchylkou, vypočtenou podle Einsteinovy teorie z hmotnosti a rozměrů Slunce.

Také českoslovenští astronomové uskutečnili již několik výprav za pozorováním úplného zatmění Slunce. Před druhou světovou válkou to byly výpravy do Sovětského svazu a do Japonska v roce 1936, po druhé světové válce do Brazílie roku 1947, do SSSR a do Polska v roce 1954 (úplné zatmění z roku 1954 bylo u nás pozorovatelné jako 83% částečné zatmění a pásmo totality procházelo v blízkosti naší republiky). Na pozorování úplného zatmění Slunce 30. června 1973 vypravil Astronomický ústav Slovenské akademie věd expedici do pouštních oblastí Afriky. Střed měsíčního stínu procházel oblastí, kde se dotýkají hranice států Mali, Alžírsko a Nigeru. Zatmění trvalo 7 minut 3,9 s a šířka pásu totality byla 260 km. Do programu této výpravy byly zařazeny tyto úkoly: fotografování koróny v bílém světle, fotografie spektra koróny, měření polarizace a případné hledání komet a planetek v blízkosti Slunce.

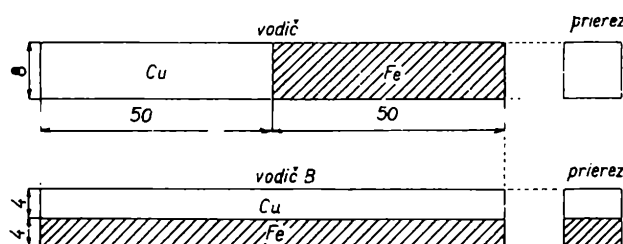
Na našem území bylo v tomto století pozorovatelné úplné zatmění Slunce v roce 1910 a další úplné zatmění bude u nás viditelné až v roce 1999. V tab. I uvádíme seznam úplných a prstencových zatmění Slunce, viditelných ve druhé polovině 20. století a v první polovině 21. století v Evropě a v jejím blízkém okolí; na obr. 2 jsou pak zakreslena pásma totality pro tato zatmění.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh loňského ročníku

Fyzika

4. Při laboratorní teplotě je rezistivita pro čistou měď $\rho_1 = 1,55 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ cm}$, pro čisté železo $\rho_2 = 10,0 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ cm}$. Stanovte odpor každého z dvou rozličně složených vodičů: Obidva mají rovnakou délku a rovnaký průřez. Vodič A je zhotovený sériovým spojením dvou tyčiek, medenej a železnej; délka každej tyčky je $l/2 = 50 \text{ cm}$ a průřezom každej tyčky je štvorec o strane $a = 8 \text{ mm}$. Vodič B je zhotovený spojením tyčky medenej a železnej, položených na seba plochou 8 mm krát 1 meter ; obidve tyčky majú rovnakú dĺžku $l = 1 \text{ m}$ a obdĺžnikový prierez 4 mm krát 8 mm . (Vid' obr. 1, Rozhledy roč. 51, 1972—1973, čís. 2, str. 86.)



Obr. 1

a) Zjistite odpor každého z vodičů mezi obidvoma konci.

b) V ktorom materiále (medi či železe) vo vodiči A sa konštantným prúdom vyvíja viacej tepla?

c) Odpovedzte na tu istú otázku pre vodič B a odôvodnite.

(Došlo 19 řešení)

Evžen Říman

Riešenie upravené podľa riešiteľov IV. A tr. gymnázia Michalovce (Václav Hanušik a Michal Jasem) a kolektívu IV. A gymn. Jihlava (Pavel Brada, Petr Málek, Vítězslav Zoufalý):

Potrebujem vzťahy: Výsledný odpor pri sériovom, resp. paralelnom spojení je daný vzťahmi (1), resp. (2)

$$(1) \quad R_s = R_1 + R_2 \qquad R_p = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) \qquad (2)$$

Závislosť odporu R na dĺžke l a prierezu S je

$$R = \rho l / S \quad (3)$$

Množstvo tepla Q , ktoré sa vyvinie prúdom I vo vodiči, na ktorého koncoch je napätie U a ktorý má odpor R , sa určí vzťahom

$$Q = R I^2 t = U^2 t / R \quad (4)$$

a) Odpor R_A vodiča A , zloženého z tyčky medenej a tyčky železnej v sériovom spojení je podľa (1) a (3) daný vzťahom

$$R_A = R_1 + R_2 = R_{Cu} + R_{Fe} = l(\rho_1 + \rho_2) / (2a^2) \quad (5)$$

lebo tyčky majú dĺžku $l/2$ a prierez a^2 .

Numerický výpočet dosadením daných hodnôt, prevedených do sústavy SI, tj. $l = 1 \text{ m}$; $\rho_1 = 1,55 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$; $\rho_2 = 10,0 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$, $a^2 = 64 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$, dá

$$R_A = \frac{1}{2,64 \cdot 10^{-6}} \frac{(1,55 + 10,0) \cdot 10^{-8}}{\text{m}^2} \frac{\text{m} \cdot \Omega \text{ m}}{\text{m}^2} = \underline{\underline{9,02_3 \Omega}} \quad (5_1)$$

Dimenzionálna správnosť je zrejmá.

Vodič B je zložený zo dvoch homogenných vodičov v paralelnom spojení; preto podľa (2) dostaneme po snadnej úprave

$$R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2\rho_1 \rho_2 l}{(\rho_1 + \rho_2) \cdot a^2} \quad (6)$$

pretože každá tyčka má dĺžku l a prierez $a^2/2$.

Numerický výpočet dá (dimenzionálna správnosť je zrejmá)

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{2 \cdot 1,55 \cdot 10^{-8} \cdot 10,0 \cdot 10^{-8}}{(1,55 + 10,0) \cdot 10^{-8}} \frac{1}{64 \cdot 10^{-6}} \frac{\Omega^2 \text{ m}^2 \cdot \text{m}}{\text{m} \cdot \text{m}^2} = \\ &= \frac{3100 \cdot 10^{-18}}{739,2 \cdot 10^{-14}} = \underline{\underline{4,19 \cdot 10^{-4}}} \quad (6)_1 \end{aligned}$$

b) Množstvo tepla Q , ktoré sa vyvinie v každom z materiálov vodiča A , kde tyčky sú spojené sériovo, možno posúdiť vzorcom (4), ktorý upravíme pomocou (3) na tvar

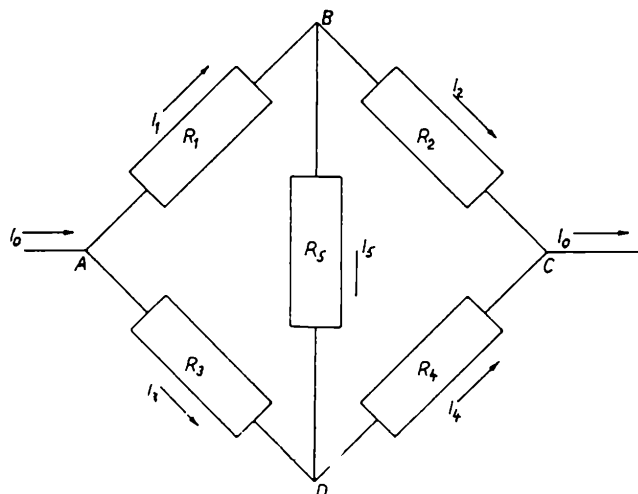
$$Q = R I^2 t = \rho \frac{l}{S} I^2 t \quad (7)$$

Keďže veličiny l , S , I , t sú pre obidva materiály tie isté, je vyvinuté teplo *väčšie v železe*, lebo $\rho_2 > \rho_1$.

c) Analogicky pre vodič B ; tyčky sú spojené paralelne, proto bude vyvinuté teplo v každom z materiálov dané vzťahom

$$Q = \frac{U^2}{R} t = U^2 \frac{S}{l \rho} t. \quad (8)$$

V tomto prípade sú veličiny U , S , l , t pre oba materiály rovnaké; preto ako vidieť z (8) *viac* tepla se vyvinie vo vodiči, ktorého rezistivita ρ je menšia (Q je teda nepriamo úmerné rezistivite). Podľa zadania je $\rho_1 < \rho_2$, preto *viac* tepla sa vyvinie v *medi*.



Obr. 2

5. V zapojení podle obr. 2 (Wheatstoneův můstek) — viz Rozhledy roč. 51, 1972—1973, čís. 2, str. 87 — je dán proud I_0 a odpory R_k , kde $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

a) Najděte vztahy pro velikost každého z proudů I_k .

b) Jaká podmínka vznikne, je-li $I_5 = 0$?

(Došlo 19 řešení)

Evžen Říman

Řešili: Václav Salač, 3. A gymn. v Praze 4-Michle a Jiří Malec, IV. S gymn. Brno, Křenová.

a) Orientaci proudu I_5 volme ve směru polopřímky $\overrightarrow{BD}$ a aplikujme Kirchhoffovy zákony pro větvení proudu:

1. Algebraický součet všech proudů do *uzlu* vstupujících se rovná nule (přitékající se znaménkem plus, odtékající minus) tj. $\sum I = 0$. Pro uzly A , B , C dostáváme rovnice:

$$(1) \quad I_0 - I_1 - I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = I_0 - I_1 \quad (1')$$

$$(2) \quad I_1 - I_2 - I_5 = 0 \Rightarrow I_5 = I_1 - I_2 \quad (3')$$

$$(3) \quad I_3 + I_5 - I_4 = 0 \Rightarrow I_4 = I_3 + I_5 = I_3 + I_1 - I_2 \quad (2')$$

2. Algebraický součet všech ohmických napětí (což je součin odporu a jím protékajícího proudu, tedy $U_R = R I$) je roven součtu všech elektromotorických napětí (ΣU_e) ve smyčce, tj. $\Sigma R I = \Sigma U_e$.

Pro smyčky $ABDA$, $BDCB$ (v nichž není zařazeno žádné U_e) platí:

$$R_1 I_1 + R_5(I_1 - I_2) - R_3(I_0 - I_1) = 0 \quad (4)$$

$$R_5(I_1 - I_2) + R_4(I_0 - I_2) - R_2 I_2 = 0 \quad (5)$$

Soustava rovnic (1) až (5) je soustava lineárních rovnic o pěti neznámých; při jejich řešení lze s výhodou použít CRAMERO-vo pravidlo a determinanty.*)

Kvůli úspoře času a místa pokračujeme kratěji:

Upravme rovnice (4) a (5) na tvar

$$I_1(R_1 + R_3 + R_5) - I_2 R_5 = I_0 R_3 \quad (4')$$

$$-I_1 R_5 + I_2(R_2 + R_4 + R_5) = I_0 R_4 \quad (5')$$

a řešme je sčítací metodou. Vyjde

$$I_1 = \frac{I_0}{D} [R_3(R_2 + R_4) + R_5(R_3 + R_4)] \quad (6)$$

$$I_2 = \frac{I_0}{D} [R_4(R_1 + R_3) + R_5(R_3 + R_4)] \quad (7)$$

kde jmenovatel D jímž je determinant soustavy rovnic (1) až (5), má hodnotu

$$D = (R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_5(R_1 + R_2 + R_3 + R_4). \quad (8)$$

Nyní dosazením odvozených vztahů (6) a (7) do rovnice (1'), (2') a (3') dostaneme hodnoty neznámých I_3 , I_4 a I_5

$$I_3 = I_0 - I_1 = \frac{I_0}{D} [R_1(R_2 + R_4) + R_5(R_1 + R_2)], \quad (9)$$

$$I_4 = I_3 + I_1 - I_2 = \frac{I_0}{D} [R_2(R_1 + R_3) + R_5(R_1 + R_2)], \quad (10)$$

$$I_5 = I_1 - I_2 = \frac{I_0}{D} (R_2 R_3 - R_1 R_4) \quad (11)$$

b) Má-li být $I_5 = 0$, potom vztah (11) dá

$$R_2 R_3 - R_1 R_4 = 0 \quad (12)$$

neboť $D > 0$; z toho plyne $I_5 = 0$.

*) Pozn. redakce: Brněnský řešitel a rovněž řešitelé z pražského gymnasia W. Piecka skutečně řešili tuto soustavu onou krásnou a teoreticky elegantní metodou, která je však pracná a vyžaduje výpočet šesti determinantů pátého řádu!

Vztah (12) lze upravit na známou podmínku rovnováhy při měření odporů Wheatstoneovým můstkem, jímž je uvažované schéma, ve kterém odporem R_5 je galvanometr.

Tuto podmínku lze ovšem snadno odvodit z jednoduššího schématu předpokladem $I_5 = 0$ a pomocí vztahů pro napětí: $U_{AB} = U_{AC}$ (resp. $U_{BC} = U_{BD}$), neboť uzly B a D mají pak týž potenciál.

Avšak zde nalezený vztah (11) pro I_5 podává též informaci o velikosti proudu procházejícího galvanometrem při *nevyváženém* můstku a umožňuje tedy *předem* stanovit citlivost můstku.

6. Těleso o hmotnosti $m = 0,5$ kg je postaveno na kraji vodorovné desky stolu. Tento okraj desky byl zdvižen o $h = 0,025$ m. S jakou rychlostí dorazí těleso na druhý konec stolu za předpokladu, že deska stolu je absolutně hladká?

(Došlo 19 řešení)

František Vencálek

Upravené řešení Václava Hanušíka, IVa. G Michalovce.

Po zvednutí desky má těleso potenciální energii $W_p = mg(h + h')$ (h' je vzdálenost vodorovné desky stolu od země) a kinetickou energii $W_k = 0$, takže celková mechanická energie

$$W_1 = mg(h + h')$$

Jestliže pohyb tělesa probíhal bez otáčení, nabude těleso na druhém konci desky rychlost v a kinetickou energii $W'_k = \frac{1}{2}mv^2$. Jeho potenciální energie $W'_p = mgh'$, takže celková mechanická energie

$$W_2 = mgh' + \frac{1}{2}mv^2$$

Poněvadž během pohybu nenastaly energetické ztráty, dostáváme (ze zákona zachování energie), že $W_1 = W_2$, a tedy

$$mg(h + h') = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

a konečně

$$v = \sqrt{2gh}$$

Pro dané hodnoty je (pro $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,025 \text{ m}} = 0,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Jiný způsob řešení :

Poněvadž se těleso pohybuje po absolutně hladké nakloněné rovině (ve vakuu), nabude, jak známo, rychlosti $v = \sqrt{2gh}$ (jako by spadlo při volném pádu s výšky h).

Velikost rychlosti nezávisí ani na velikosti hmotnosti tělesa (tento údaj byl v úloze zbytečný), ani na tvaru dráhy po rovině stolu. (Je možno udělit pohybu tělesa jiný směr vhodnou překážkou na horní hraně desky.)

Matematika

6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

(Došlo 20 řešení)

František Janeček

Řešil: Kolektiv IV A, G Jihlava.

Výraz $\binom{2n}{n}$ je koeficientem binomického rozvoje výrazu $(1+x)^{2n}$ při členu x^n :

$$(1+x)^{2n} = \binom{2n}{0}x^0 + \binom{2n}{1}x^1 + \dots + \binom{2n}{n}x^n + \dots + \binom{2n}{2n}x^{2n}$$

Dále platí:

$$\begin{aligned} (1+x)^{2n} &= (1+x)^n \cdot (1+x)^n = \\ &= \left[\binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \dots + \binom{n}{n}x^n \right] \cdot \\ &\cdot \left[\binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \dots + \binom{n}{n}x^n \right] = \\ &= \left[\binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \dots + \binom{n}{n}x^n \right] \cdot \\ &\cdot \left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n}x^0 \right] \end{aligned} \tag{1}$$

Roznásobením obou rozvojų (1) vzniknou členy, obsahující postupně

$x^0, x^1, x^2, \dots, x^n, \dots, x^{2n}$. Výraz $\binom{2n}{n}$ se bude rovnat součtu všech koeficientů při x^n po roznásobení rozvojů (1). Součet těchto koeficientů zřejmě dostaneme, když postupně vynásobíme kombinační čísla prvních členů rozvojů (1), potom druhých atd. a nakonec tyto výsledky sečteme. Tím dostaneme:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Tímto je vzorec dokázán.

7. Řešte úlohu z tzv. lineárního programování: Je dána lineární funkce vzorcem

$$f(x; y) = -x + y + C$$

s definičním oborem všech řešení soustavy lineárních nerovností

$$-2x + y \leq 2$$

$$x - 2y \leq 2$$

$$x + y \leq 5$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Najděte graficky absolutní minimum funkce $f(x; y)$.

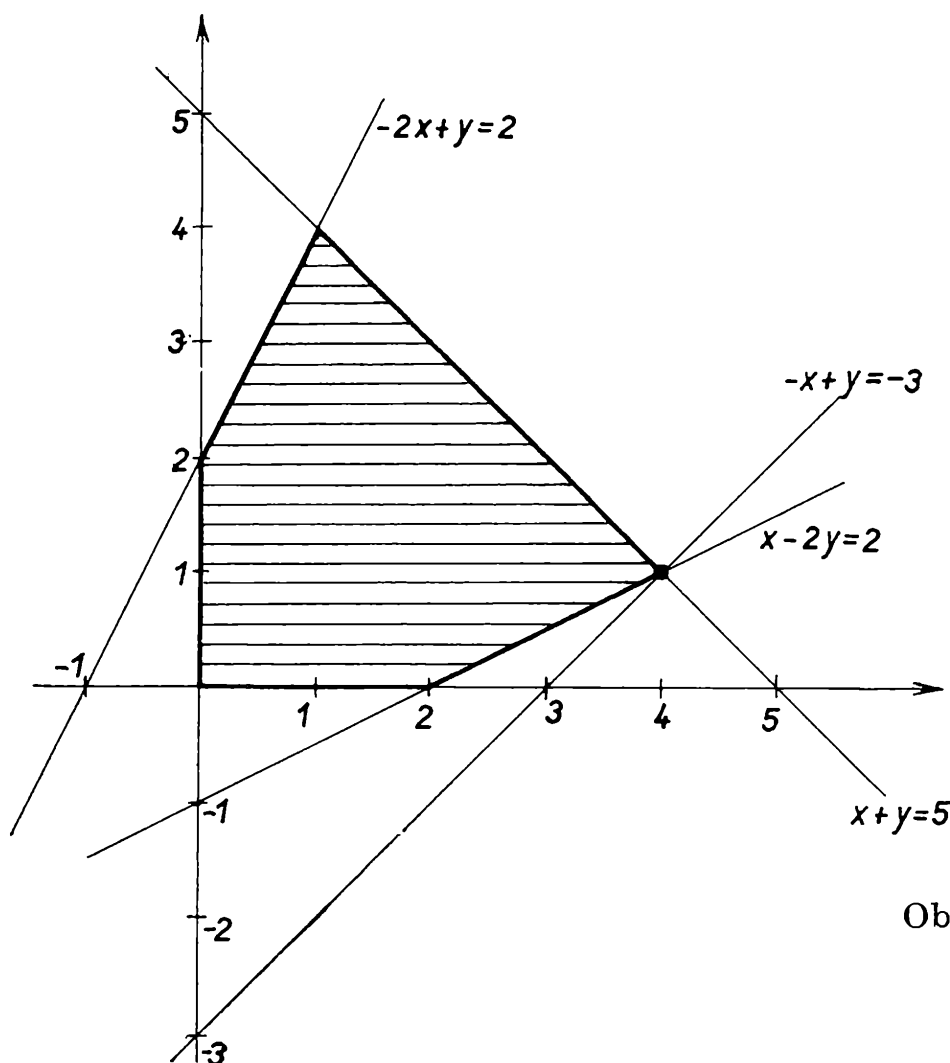
(Došlo 18 řešení)

Milan Píšek

Řešil: Zdeněk Drábek, 3. G, Lanškroun.

Nejprve najdeme všechna řešení soustavy lineárních nerovností — definiční obor funkce. Tato množina je graficky znázorněna v pravouhlých souřadnicích jako vypuklý pětiúhelník. Vzhledem k tomu, že nerovnosti, určující definiční obor funkce, jsou neostré, patří do něho i strany pětiúhelníka (viz obr. 1). Přímka o rovnici $-x + y = -3$ obsahuje jediný bod definičního oboru, a to vrchol pětiúhelníka $(4; 1)$, jemuž odpovídá hodnota minimalizované funkce $f(4; 1) = -4 + 1 + C = C - 3$. Všechny ostatní body pětiúhelníka leží v polovině určené nerovností $-x + y > -3$, takže jim odpovídající funkční hodnoty splňují nerovnost $f(x; y) = -x + y + C > C - 3$. Funkce $f(x; y)$ nabývá tedy absolutního minima pro $x = 4, y = 1$.

8. Je dána nekonečná aritmetická posloupnost s prvním členem a_1 a s diferencí d , přičemž a_1, d jsou kladná racionální čísla. Potom je možné



Obr. 1

ze členů posloupnosti vybrat geometrickou posloupnost. Dokažte! Platí tvrzení, vypustíme-li z předpokladu slovo „racionální“?

(Došlo 14 řešení)

Jiří Sedláček

Řešil: Petr Jarolím, 4 F, G W Piecka, Praha 2:

Protože a_1, d jsou kladná racionální čísla, lze je vyjádřit ve tvaru

$$a_1 = \frac{p}{q}, \quad d = \frac{r}{s},$$

kde p, q, r, s jsou kladná celá čísla. Za první dva členy geometrické posloupnosti lze vybrat členy $a_1, a_1 + p s d$. Třetí člen geometrické posloupnosti je pak

$$a_1 + (2ps + pqrs) d,$$

jak se výpočtem snadno přesvědčíme.

Vypustíme-li z předpokladu slovo „racionální“, tvrzení neplatí. Ukážeme to na příkladě, v němž $a_1 = \sqrt{2}, d = 1$. Mezi třemi prvky

$\sqrt{2} + x, \sqrt{2} + y, \sqrt{2} + z$, kde $0 \leq x < y < z$, má platit vztah
 $(\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} + z) = (\sqrt{2} + y)^2$,

čili po úpravě

$$\sqrt{2}(x + z - 2y) = y^2 - xz.$$

Jestliže $x + z - 2y = 0$, je $y^2 - xz = 0$. Odtud

$$(x + z)^2 = 4y^2 = 4xz$$

a dále $(x - z)^2 = 0$.

To však odporuje předpokladu $x < z$. Musí být tedy $x + z - 2y \neq 0$, ale pak vyjádření

$$\sqrt{2} = \frac{y^2 - xz}{x + z - 2y}$$

říká, že číslo $\sqrt{2}$ lze psát jako podíl dvou celých čísel. To však není možné.

9. Řešte rovnici

$$|6 - 5|4 - 3|x - 2|| = 1$$

(Došlo 17 řešení)

Ota Setzer

Upravené řešení A. Venclovské, akad. G, Praha, Štěpánská :

Rovnice tvaru $|a + b|c + d|x + e|| = f$, kde $a, b, c, d, e \neq 0$, má stejné řešení jako rovnice

$$b|c + d|x + e|| = -a \pm f,$$

$$|c + d|x + e|| = \frac{-a \pm f}{b},$$

$$d|x + e| = -c \pm \frac{-a \pm f}{b},$$

$$|x + e| = -\frac{c}{d} \pm \frac{-a \pm f}{bd}$$

$$x = -e \pm \frac{c}{d} \pm \frac{-a \pm f}{bd}$$

V našem případě $a = 6, b = -5, c = 4, d = -3, e = -2, f = 1$.

Po dosazení a úpravě

$$x = \frac{30 \pm 20 \pm 6 \pm 1}{15}$$

$$x_1 = \frac{57}{15}, \quad x_2 = \frac{55}{15}, \quad x_3 = \frac{45}{15}, \quad x_4 = \frac{43}{15},$$

$$x_5 = \frac{17}{15}, \quad x_6 = \frac{15}{15}, \quad x_7 = \frac{5}{15}, \quad x_8 = \frac{3}{15}.$$

10. Určete, kolik z čísel 1, 2, ..., 100 000 je mocninou jiného přirozeného čísla.

Poznámka: Mocninou se zde přirozeně míní mocnina s přirozeným exponentem.

(Došlo 16 řešení)

Antonín Vrba

Řešil: Zdeněk Drábek, 3. G, Lanškroun:

Číslo 1 je mocninou jen sebe sama a tak je můžeme vynechat. Označme M_i množinu všech i -tých mocnin mezi čísly 2, 3, ..., 100 000. Vzhledem k tomu, že $2^{16} < 100\,000 < 2^{17}$, jsou od M_{17} počínaje množiny M_i prázdné. Je-li přirozené číslo mocninou jiného přirozeného čísla, je též mocninou s prvočíselným exponentem nějakého přirozeného čísla. Úloha se tedy redukuje na nalezení počtu prvků množiny $M_2 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7 \cup M_{11} \cup M_{13}$. K tomu použijeme „principu inkluze a exkluze“ (viz článek „O chytrém předsedovi“ v loňském ročníku Rozhledů). Ještě si uvědomme, že pro navzájem různá prvočísla $i, j, \dots, k$ platí $M_i \cap M_j \cap M_k = M_{ijk}$. Snadno určíme (zkusmo nebo pomocí logaritmických tabulek), že

$ M_2 = 315$	$ M_2 \cap M_3 = M_6 = 5$
$ M_3 = 45$	$ M_2 \cap M_5 = M_{10} = 2$
$ M_5 = 9$	$ M_2 \cap M_7 = M_{14} = 1$
$ M_7 = 4$	$ M_3 \cap M_5 = M_{15} = 1$
$ M_{11} = 1$	
$ M_{13} = 1$	

a že ostatním kombinacím prvočísel odpovídají prázdné množiny. Hledaný počet je tedy

$$315 + 45 + 9 + 4 + 1 + 1 - 5 - 2 - 1 - 1 = 366.$$

11. Je dán čtyřstěn $ABCD$ a jeho vnitřní bod X . Dokažte, že existuje kladné číslo r takové, že každá koule o poloměru r , která neobsahuje žádný z vrcholů A, B, C, D , neobsahuje ani bod X .

(Došlo 12 řešení)

Jaroslav Zemánek

Autorské řešení: Nechť koule K obsahuje bod X , ale neobsahuje žádný z bodů A, B, C, D . Označíme-li α (β, γ, δ) rovinu, která pólí úsečku

AX (BX , CX , DX) a je k ní kolmá, pak střed S koule K leží uvnitř poloprostoru αX (βX , γX , δX). Z názoru se zdá zřejmé, že průnikem T těchto čtyř poloprostorů je jistý tetraedr; abychom mohli nyní dokončit myšlenku řešení, odložme zatím důkaz této domněnky.

Ze čtyř soustředných kulových ploch, které mají střed A a procházejí po řadě vrcholy čtyřstěnu T , vyberme tu, která má největší poloměr d . Pak vně této kulové plochy neleží žádný bod čtyřstěnu T . To vyplývá z toho, že koule i čtyřstěn jsou konvexní množiny: především je jasné, že vrcholy čtyřstěnu T leží v kouli určené největší kulovou plochou, proto i hrany čtyřstěnu T náleží této kouli, dále i všechny stěny, neboť každý bod stěny čtyřstěnu je obsažen v nějaké úsečce, jejíž krajní body leží na obvodu té stěny, a nakonec se podobně dokáže, že i celý čtyřstěn T leží v naší kouli. Jinak řečeno, dokázali jsme toto tvrzení: Existuje vrchol čtyřstěnu T , jehož vzdálenost od bodu A není menší než vzdálenost libovolného jiného bodu tohoto čtyřstěnu. Zvolme nyní $r > d$.

Kdyby nějaká koule K o poloměru r obsahovala bod X , ale neobsahovala žádný z bodů A , B , C , D , náležel by její střed S čtyřstěnu T (dokonce by byl jeho vnitřním bodem). Pak by platilo $AS \leq d < r$, takže bod A by byl vnitřním bodem koule K , což by byl spor.

Zbývá tedy dokázat, že T je skutečně čtyřstěn. Každé tři ze čtyř rovin α , β , γ , δ se protínají v jediném bodě — je to střed kulové plochy opsané jednomu ze čtyřstěnů $BCDX$, $ACDX$, $ABDX$, $ABCX$. Označme tedy S_a , S_b , S_c , S_d středy kulových ploch, opsaných po řadě čtyřstěnům $BCDX$, $ACDX$, $ABDX$, $ABCX$ a ukažme, že T je čtyřstěn s vrcholy S_a , S_b , S_c , S_d . Především je jasné, že všechny body S_a , S_b , S_c , S_d jsou navzájem různé (jinak by totiž bod X musel ležet na kulové ploše opsané čtyřstěnu $ABCD$, což není možné, neboť X je vnitřní bod čtyřstěnu $ABCD$ a leží tedy uvnitř této kulové plochy — dokažte podrobně!). Body S_b , S_c , S_d leží v rovině α ; ukažme, že neleží na jedné přímce. Body S_c , S_d leží také v rovině β , a proto platí $XB \perp S_cS_d$; obdobně je $XC \perp S_bS_d$, $XD \perp S_bS_c$. Kdyby body S_b , S_c , S_d ležely v jedné přímce s , byly by k této přímce kolmé tři přímky XB , XC , XD , takže by tyto tři přímky musely ležet v jedné rovině (procházející bodem X a kolmé k přímce s), což však odporuje předpokladu úlohy. Žádné tři z bodů S_a , S_b , S_c , S_d neleží tedy v přímce. Ukažme ještě, že tyto čtyři body neleží v jedné rovině. Kdyby např. bod S_a ležel v rovině α , měl by stejnou vzdálenost od všech pěti bodů A , B , C , D , X ; před chvílí jsme však poznamenali, že těmito pěti body nemůže procházet kulová plocha. Body S_a , S_b , S_c , S_d jsou tedy skutečně vrcholy čtyřstěnu.

Množina T je průnik poloprostorů αX , βX , γX , δX a čtyřstěn $S_aS_bS_cS_d$ je průnik poloprostorů αS_a , βS_b , γS_c , δS_d . Stačilo by tedy již jen do-

kázat, že např. rovina α neodděluje body X, S_a . Kdyby je oddělovala, pak by body A, S_a ležely uvnitř téhož poloprostoru určeného rovinou α (opačného k αX), takže bod A by ležel uvnitř kulové plochy o středu S_a a poloměru $S_a X$. Tato kulová plocha by (podle definice bodu S_a) procházela také body B, C, D . Pak by zřejmě (dokažte!) všechny body čtyřstěnu $ABCD$, až na vrcholy B, C, D , ležely uvnitř této kulové plochy; dostali bychom spor s polohou bodu X . Množina T je tedy totožná s množinou všech bodů čtyřstěnu $S_a S_b S_c S_d$ a řešení je dokončeno.

12. Určete všechny posloupnosti celých čísel

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \quad (1)$$

s těmito vlastnostmi:

(a) $a_0 = 2$ a kromě toho existují ještě aspoň dvě přirozená čísla p, q , pro která je $a_p = a_q = 2$.

(b) Existuje celé číslo α tak, že pro každé přirozené n platí

$$a_{n+1} + a_{n-1} = \alpha a_n. \quad (2)$$

U každé posloupnosti s vlastnostmi (a) a (b) udejte též množinu M těch přirozených čísel m , pro něž je $a_m = 2$.

(Došlo 9 řešení)

František Zítek

Řešení většiny řešitelů :

Vyšetříme nejprve posloupnosti (1) s vlastností (b), při čemž $|\alpha| > 2$. V takové posloupnosti platí pro každé přirozené n nerovnosti

$2|a_n| < |\alpha| |a_n| = |\alpha a_n| = |a_{n+1} + a_{n-1}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n-1}|$, takže je nutně buď $|a_n| < |a_{n+1}|$ nebo $|a_n| < |a_{n-1}|$. Je-li tedy pro některé přirozené k : $|a_{k-1}| \leq |a_k|$, je pak zřejmě dále

$$|a_k| < |a_{k+1}| < |a_{k+2}| < \quad (3)$$

Avšak $a_n, n = 0, 1, 2, \dots$ jsou celá čísla, takže posloupnost jejich absolutních hodnot $|a_0|, |a_1|, |a_2|, \dots$ nemůže být stále klesající. Existuje tedy v každé takové posloupnosti nutně index k , pro nějž platí (3).

Ukážeme si, že žádná taková posloupnost nemůže mít vlastnost (a), neboť je buď $|a_0| \leq |a_1|$, tzn. že platí (3) už pro $k = 0$, a pak ovšem $|a_n| > 2$ pro všechna přirozená $n \geq 2$ — anebo je

$$|a_0| > |a_1| > \dots > |a_k| \leq |a_{k+1}| < |a_{k+2}| < \dots$$

avšak v rostoucí posloupnosti čísel $|a_{k+1}|, |a_{k+2}|, \dots$ může být nejvýše jedno rovné dvěma.

V žádném případě tedy není možné, aby posloupnost celých čísel (1) měla vlastnosti (a) i (b) a aby bylo $|\alpha| > 2$.

Máme tedy jen pět možností: $\alpha = -2, -1, 0, 1, 2$, které nyní postupně vyšetříme.

1. $\alpha = 2$. Rovnost (2) lze tu psát ve tvaru $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$,

odkud je ihned vidět, že posloupnost (1) je aritmetická. Má-li mít vlastnost (a), musí být nutně stacionární, tj. musí být $a_n = 2$ pro všechna $n = 0$. Dostáváme tak jednu posloupnost požadovaných vlastností: 2, 2, 2, 2, ... Je pak ovšem $\mathbf{M} = \{1, 2, 3, \dots\}$ množina všech přirozených čísel.

2. $\alpha = -2$. Položme $b_n = (-1)^n a_n$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$, rovnost (2) pak lze přepsat na $b_{n+1} - b_n = b_n - b_{n-1}$,

takže vidíme, že posloupnost čísel b_n je aritmetická.

Podle vlastnosti (a) posloupnosti (1) existují přirozená čísla p, q tak, že $(-1)^p b_p = (-1)^q b_q = b_0 = 2$.

Z čísel $0, p, q$ mají nutně aspoň dvě touž paritu, v aritmetické posloupnosti $\{b_n\}$ existují tedy aspoň dva členy stejné, což je ovšem možné jen tehdy, je-li $b_n = 2$ pro všechna $n = 0$. Dostali jsme tak znovu jednu posloupnost (1) požadovaných vlastností, totiž posloupnost 2, -2, 2, -2, ... [$a_n = (-1)^n \cdot 2$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$]. Množina $\mathbf{M}$ je zde množina všech sudých přirozených čísel: $\mathbf{M} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

3. $\alpha = 0$. Rovnost (2) tu nabývá tvaru

$$a_{n+1} = -a_{n-1}. \quad (4)$$

Spolu s $a_0 = 2$ je tedy také $a_m = 2$ pro všechna $m \equiv 0 \pmod{4}$, kdežto pro $m \equiv 2 \pmod{4}$ je $a_m = -2$. Členy s lichými indexy mohou být — až na vztah (4) — libovolné. Musíme pak rozlišit několik případů podle hodnoty a_1 .

(i) Je-li $|a_1| \neq 2$, je posloupností s hledanými vlastnostmi posloupnost 2, a_1 , -2, $-a_1$, $-a_1$, 2, a_1 , -2, ... , pro kterou je $\mathbf{M} = \{4, 8, 12, \dots\}$: $m \in \mathbf{M}$ právě když $m \equiv 0 \pmod{4}$.

(ii) Je-li $a_1 = 2$, jde o posloupnost 2, 2, -2, -2, 2, 2, -2, ... , pro niž je $\mathbf{M} = \{1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, \dots\}$, tzn. $m \in \mathbf{M}$ právě když je $m \equiv 0$ nebo $m \equiv 1 \pmod{4}$.

(iii) Je-li $a_1 = -2$, je tu posloupnost 2, -2, -2, 2, 2, -2, ... s množinou $\mathbf{M} = \{3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, \dots\}$, tzn. $m \in \mathbf{M}$ právě když je $m \equiv 0$ nebo $m \equiv 3 \pmod{4}$.

4. $\alpha = 1$. Z rovnosti (2) dostáváme — při obecném a_1 — posloupnost

$$2, a_1, a_1 - 2, -2, -a_1, 2 - a_1, 2, a_1, a_1 - 2,$$

Opět rozlišíme několik případů:

(i) Je-li $a_2 \neq 0$, $a_1 \neq 4$, $a_1 \neq 2$, je $\mathbf{M} = \{6, 12, 18, \dots\}$, tzn. $m \in \mathbf{M}$ právě když $m \equiv 0 \pmod{6}$.

(ii) Je-li $a_1 = 2$, je $\mathbf{M} = \{1, 6, 7, 12, 13, \dots\}$, tzn. $m \in \mathbf{M}$, právě když $m \equiv 0$ nebo $m \equiv 1 \pmod{6}$.

(iii) Je-li $a_1 = 4$, je $\mathbf{M} = \{2, 6, 8, 12, 14, \dots\}$, tzn. $m \in \mathbf{M}$, právě když $m \equiv 0$ nebo $m \equiv 2 \pmod{6}$.

(iv) Je-li $a_1 = -2$, je $\mathbf{M} = \{4, 6, 10, 12, 16, 18, \dots\}$ a $m \in \mathbf{M}$ právě když $m \equiv 0$ nebo $m \equiv 4 \pmod{6}$.

(v) Je-li $a_1 = 0$, je $\mathbf{M} = \{5, 6, 11, 12, 17, 18, \dots\}$, tj. $m \in \mathbf{M}$ právě když $m \equiv 0$ nebo $m \equiv 5 \pmod{6}$.

5. $\alpha = -1$. Rovnost (2) lze přepsat na tvar $a_{n+1} + a_n + a_{n-1} = 0$; odtud dostáváme při obecném a_1 posloupnost

$$2, a_1, -2-a_1, 2, a_1, -2-a_1, 2,$$

Rozlišíme případy:

(i) $a_1 \neq -4$, $a_1 \neq 2$. Tu je $\mathbf{M} = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$, tj. $m \in \mathbf{M}$, právě když $m \equiv 0 \pmod{3}$.

(ii) Je-li $a_1 = 2$, je $\mathbf{M} = \{1, 3, 4, 6, 7, 9, \dots\}$: $m \in \mathbf{M}$ právě když $m \equiv 0$ nebo $m \equiv 1 \pmod{3}$.

(iii) Je-li $a_1 = -4$, je $\mathbf{M} = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, \dots\}$, tj. $m \in \mathbf{M}$ právě tehdy, když $m \equiv 0$ nebo $m \equiv 2 \pmod{3}$.

Celkem jsme získali 13 typů posloupností (1) — a ovšem také 13 odpovídajících množin $\mathbf{M}$:

Typ	Odstavec	α	Množina $\mathbf{M}$
1.	1	2	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$
2.	2	-2	$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$
3.	3 (i)	0	$\{4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$
4.	3 (ii)	0	$\{1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, \dots\}$
5.	3 (iii)	0	$\{3, 4, 7, 8, 11, 12, \dots\}$
6.	4 (i)	1	$\{6, 12, 18, 24, 30, \dots\}$
7.	4 (ii)	1	$\{1, 6, 7, 12, 13, 18, 19, \dots\}$
8.	4 (iii)	1	$\{2, 6, 8, 12, 14, 18, 20, \dots\}$
9.	4 (iv)	1	$\{4, 6, 10, 12, 16, 18, \dots\}$
10.	4 (v)	1	$\{5, 6, 11, 12, 17, 18, \dots\}$
11.	5 (i)	-1	$\{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$
12.	5 (ii)	-1	$\{1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, \dots\}$
13.	5 (iii)	-1	$\{2, 3, 5, 6, 8, 9, \dots\}$

Poznámka. Někteří řešitelé dovedli při řešení této úlohy využít svých znalostí diferenčního počtu. Věděli tak, že členy posloupností (1) s vlastností (b) s $|\alpha| \neq 2$ lze vyjádřit ve tvaru

$$a_n = Au^n + Bv^n,$$

kde u, v jsou kořeny reciproké kvadratické rovnice

$$x^2 - x + 1 = 0$$

a A, B jsou konstanty.

redakce hovoří

Opravy:

V čísle 3 na str. 140 opravte v 1. soutěžním příkladě z fyziky (2 věta) 16 rozpadů za minutu místo chybného za sekundu.

Ředitelství MO nám zaslalo opravené znění soutěžní úlohy kategorie B, příklad 6:

V rovině je dána množina $\mathbf{M}$ bodů, z nichž každé dva mají vzdálenost ≤ 1 . Dokažte, že existuje pravidelný osmiúhelník $A_1A_2 \dots A_8$ s poloměrem vepsané kružnice $\varrho = \frac{1}{2}$ tak, že šestiúhelník, který je průnikem polorovin

$$A_8A_1A_2 \cap A_1A_2A_3 \cap A_2A_3A_4 \cap A_3A_4A_5 \cap A_4A_5A_6 \cap A_6A_7A_8,$$

obsahuje všechny body množiny $\mathbf{M}$.

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ

A

Abelian	abelovský, Abelova
about	asi, kolem
absence	nepřítomnost
absolute value	absolutní hodnota
absolutely convergent	absolutně konvergentní
abstract	abstraktní
accessible	přístupný, dosažitelný
according to	podle
accumulation point	hromadný bod
accuracy	přesnost
accurate to n decimal places	s přesností na n desetinných míst
actual	skutečný, vlastní
acute angle	ostrý úhel
acute (—angled) triangle	ostroúhlý trojúhelník
add	sčítat, přidat
addend	sčítanec
addition	sčítání
additive	aditivní
additivity	aditivnost
ad infinitum	nade všechny meze
adjacent	přilehlé, sousední
affine	afinní
affinity	afinita
algebra	algebra
algebraic	algebraický
algebraically closed	algebraicky uzavřený
algorithm	algoritmus
aliquot part	dělitel
all	všechny
along	podél
alphabetical order	abecední pořadí
alternate segment theorem	věta o úsekovém úhlu
alternating	alternující, střídavý
altitude	výška

amount	množství
amplitude	amplituda
analogous	analogický
analysis	rozbor, analýza
analytic	analytický
analytic function	analytická funkce
analytic geometry	analytická geometrie
angle	úhel
acute angle	ostrý úhel
adjacent angles	vedlejší úhly
alternate angles	střídavé úhly
complementary angles	doplňkové úhly
convex angle	konvexní úhel
included angle	sevřený úhel
obtuse angle	tupý úhel
right angle	pravý úhel
straight angle	přímý úhel
supplementary angles	výplňkové úhly
unit angle	jednotkový úhel
vertical angles	vrcholové úhly
angle at centre	středový úhel
angle of depression	hloubkový úhel
angle of elevation	výškový úhel
angle of inclination	odchylka
angle preserving	zachovávající úhly
angular	úhlový, hranatý
angular coefficient	směrnice
annul	anulovat
annulus	mezikruží
antiderivative	primitivní funkce
apex	vrchol proti základně
apothem	poloměr kružnice vepsané
apparent	zřejmý
appendix	dodatek
application	použití, aplikace
applied mathematics	aplikovaná matematika
approximate	přibližný
approximation	aproximace, přiblížení
approximately	asi, přibližně
arbitrary	libovolný, volitelný
arc	oblouk
arc of a circle	kruhový oblouk
are	ar
area	obsah
area of faces	povrch hranatého tělesa
lateral area	plášť

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

6

ROČNÍK 52, 1973-1974, ÚNOR



ROČNÍK 52
ÚNOR 1974

6

rozhledy MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, CSc., Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1974.

OBSAH

O B S A H

A. Šarounová: Hleděj ... živější pravo- úhelník	241
J. Nečas: Misionáři a Kanibalové	242
Dr. J. Skuhra: Problém divokých kachen	248
A. Šarounová: O zlatém řezu úsečky, zla- tém obdélníku a zlaté spirále	251
J. Drábek - J. Zach: Eulerova věta pro konvexní mnohostěny	255
Dr. M. Bednařík - dr. M. Šíroká: Pozor, zatáčka!	259
Dr. M. Bednařík - dr. M. Šíroká: Čeká vás zkouška z fyziky?	264
Dr. M. Šíroká - dr. J. Šíroky: O pohybech hvězd	271
E. Říman, CSc.: Zamyšlení nad výsledky 1972/73	274
J. Kotyk: Počátky radiotelegrafi	279
Recenze:	284
S. Horák: Víte, co je ... ?	286
Nejmladším čtenářům	287
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-čes- ký	3. a 4. str. obálky

matematika

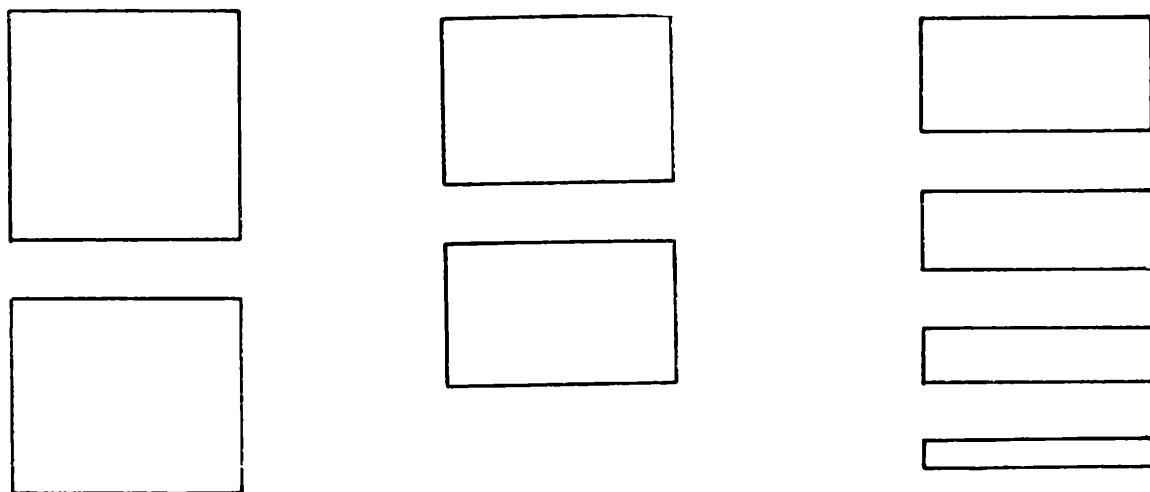
Hledejte nejlíbivější pravoúhelník

ALENA ŠAROUNOVÁ, MFF UK Praha

V experimentální estetice se uplatňují rozsáhlá statistická šetření o estetickém působení různých barev, tvarů a proporcí předmětů. Jeden z klasických pokusů, opakovaných již mnohokrát, je určování poměru stran pravoúhelníků, který vyvolává nejlepší estetický dojem; prostě řečeno — hledání nejlíbivějšího pravoúhelníka.

Chcete se také zúčastnit či sami provést takový výzkum? Podívejte se na připojený obrázek s několika pravoúhelníky, soustředěně si je prohlédněte a vyberte si ten, který se vám *nejvíce* líbí. Zeptejte se na totéž svých spolužáků, jiných přátel a příbuzných, zapisujte si však pečlivě výsledky (pro snazší záznam výsledků „hlasování“ si označte pravoúhelníky na obrázku od shora dolů římskými číslicemi). Pořídte si tabulku výsledků a na jejím základě sestrojte graf nebo sloupkový diagram, zjistíte zajímavý poznatek.

Těší-li vás taková činnost, ptejte se dotazovaných osob i na to, který pravoúhelník se jim *nejméně* líbí; výsledky zpracujte obdobným způsobem, tj. v tabulce a graficky. V dalším článku (str. 251) se dočtete o závěrech získaných přesnými statistickými metodami, blíže se také seznámíme s nejlíbivějším pravoúhelníkem.



Obr. 1

Misionáři a kanibalové

JIRÍ NEČAS, SNTL Praha

Úloha o převozníkovi, který měl malou loďkou přepravit přes řeku vlka, kozu a seno, je asi většině čtenářů známa. S převozníkem se do loďky vešel nanejvýš jeden z přepravovaných „předmětů“, přitom ze snadno pochopitelných důvodů nemohl zůstat bez dozoru vlk s kozou ani koza se senem. Řešení této úlohy je poměrně snadné i bez použití nějakého matematického aparátu. My se budeme nyní zabývat podobným, ovšem poněkud složitějším problémem; k tomu, abychom našli jeho řešení, bude velice výhodné použít určité metody teorie grafů (popíšeme ji dále).

Přenesme se v myšlenkách o tři desetiletí zpět na nějaký obydlený ostrov v Polynésii. Stalo se, že tam spolu cestovali tři misionáři a tři již poměrně civilizovaní kanibalové. Vycházeli mezi sebou docela dobře, uměli se spolu domluvit, ale přesto tu bylo nebezpečí, jehož si byli všichni vědomi — totiž kdyby někdy byli kanibalové v početní převaze nad misionáři, mohly by se v nich probudit jejich staré choutky a některý z misionářů by se jim mohl stát pokrmem. Proto všichni stále dbali na to, aby byla splněna tato *bezpečnostní podmínka*: Je-li někde aspoň jeden misionář, pak tam kanibalové nesmějí být v početní převaze.

Jednou spolu dorazili na levý břeh jakési velké řeky. Potřebovali se přeplavit na druhou stranu. K dispozici měli však jen malou loďku, do níž se vešli současně nanejvýš dva lidé; aspoň jeden z nich musil pochopitelně umět veslovat. Přitom veslovat uměli všichni misionáři a jeden kanibal.

Príslušníci naší šestičlenné skupinky si nyní kladli tyto otázky:

1. Můžeme se vůbec všichni přeplavit, aniž bychom riskovali, že by některý misionář byl sněden?
2. Pokud můžeme, pak
 - a) jaký je nejmenší počet p cest loďky přes řeku, nutný k přeplavení?
 - b) jak se na druhý břeh všichni dostaneme pomocí p cest loďky?

Problém, před nímž stáli, nebyl nijak jednoduchý. Jeden z misionářů se však zajímal o matematiku. A tento misionář-matematik považoval za svou povinnost najít odpovědi na dané otázky. Vzpomněl si, že se mu krátce před odchodem do Polynésie dostala do ruky zajímavá, tehdy poměrně nová kniha D. Königa, která se zabývala novou matematickou disciplínou — teorií grafů,^{*)} pomocí níž lze řešit mnoho problémů z řady

^{*)} König, D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936.

velice odlišných oborů, ať už vědeckých či praktických nebo zábavných. Věděl, že pomocí teorie grafů lze najít odpověď na starý známý problém o mostech města Královce (nyní Kaliningrad), jehož řešení ovšem znal už L. Euler r. 1736 (viz např. [2]).

Teorie grafů slouží ke zkoumání takových množin U , v nichž mezi některými dvojicemi prvků jsou dány nějaké vazby. Takovou množinou U může být např. množina atomů v molekule organické látky, vazbami mezi prvky množiny U jsou pak chemické vazby atomů v molekule. Prvky množiny U nazýváme *uzly grafu*, vazby mezi nimi *hranami grafu*; množinu všech hran nějakého grafu označujeme obvykle písmenem H . Množinu U spolu s množinou H pak nazýváme *grafem*.

Uvedená aplikace teorie grafů v chemii, známá mnohem dříve než König vydal svou významnou knihu, již vlastně teorie grafů vznikla, naše misionáře a kanibaly v jejich situaci samozřejmě nezajímala. Ovšem, jak jsme již řekli, oblast aplikací teorie grafů je nesmírně pestrá. Grafy nacházejí uplatnění i pro zkoumání změn stavu nějakého systému. A tak misionář-matematik uvažoval takto: Tvoříme s loďkou určitý *systém*. Pokud loďka bude u některého břehu, budeme říkat, že se náš systém nalézá v určitém *stavu*; ten můžeme např. popsat tak, že udáme počet m misionářů, počet v veslujících kanibalů, počet n neveslujících kanibalů a počet l loděk u levého břehu; poněvadž v době, kdy o stavech mluvíme, na řece nikdo není, určíme tak i situaci u břehu pravého. Veličiny m ; v ; n ; l mohou nabývat po řadě těchto hodnot: 0; 1; 2 nebo 3; 0 nebo 1; 0; 1 nebo 2; 0 nebo 1; u pravého břehu je 3 — m misionářů, 1 — v veslujících kanibalů, 2 — n neveslujících kanibalů a 1 — l loděk. Pro řešení problému nemá význam mezi sebou rozlišovat jednotlivé misionáře či neveslující kanibaly (misionář-matematik by vypracoval plán převozu před jeho započítáním a dále by se jím řídil stejně jako ostatní). Misionář-matematik si tedy uvědomil, že stav jejich systému je určen uspořádanou čtveřicí (m, v, n, l) čísel, nabývajících dříve uvedených hodnot; poněvadž všechny hodnoty jsou vyjádřeny jednocifernými čísly, lze použít stručného zápisu $mvnl$. Bude-li např. na levém břehu jeden veslující kanibal a tři misionáři, zatímco loďka a neveslující kanibalové budou u pravého břehu, vyjádříme stav zápisem 3100. (Může se systém do tohoto stavu dostat?)

Stav vyšetřovaného systému se může měnit; nás spolu se sledovanou skupinou šesti lidí zajímá, zda se může dostat ze stavu 3121 do stavu 0000. Nejjednodušší je taková změna stavu, která se může uskutečnit jednou cestou loďky od jednoho břehu k břehu protějšnému — takovouto změnu stavu nazveme *elementární*. Elementární změna stavu spojuje určité dva stavy, je jakousi vazbou mezi nimi. Je proto přirozené znázornit stavy uzly a elementární změny stavu hranami grafu. Nejdříve je třeba určit všechny prvky množiny U uzlů tohoto grafu, tj. určit všechny

ty stavy, v nichž je splněna bezpečnostní podmínka, uvedená na začátku článku. Misionář-matematik postupoval při určování prvků množiny U systematicky:

- A) všichni misionáři na levém břehu, na rozložení kanibalů nezáleží: 3121, 3120, 3111, 3110, 3101, 3100, 3021, 3020, 3011, 3010, 3001, 3000;
- B) na levém břehu dva misionáři, na pravém jeden, tedy také na levém břehu dva kanibalové, na pravém jeden: 2111, 2110, 2021, 2020;
- C) na levém břehu jeden misionář, na pravém dva, tedy také na levém břehu jeden kanibal, na pravém dva: 1101, 1100, 1011, 1010;
- D) všichni misionáři na pravém břehu, na rozložení kanibalů nezáleží: 0121, 0120, 0111, 0110, 0101, 0100, 0021, 0020, 0011, 0010, 0001, 0000.

Takto byl získán seznam všech stavů, v nichž se zkoumaný systém může nacházet, a tedy i všech uzlů hledaného grafu. Pro jednoduchost budeme dále pojmy stav — uzel, elementární změna stavu — hrana zaměňovat, uzly a stavy budeme označovat stejně.

Když měl misionář-matematik množinu U určenu, mohl přistoupit k určování množiny hran H a zároveň ke znázorňování grafu v rovině tak, jak je to běžné. Uzly se obvykle znázorňují body, kroužky nebo obdélníčky v rovině a hrany čarami spojujícími dva příslušné uzly. Misionář-matematik se rozhodl znázornit uzly obdélníčky, do nichž vepsal jejich označení. Zakresloval je do dvou sloupců, do levého zakreslil ty uzly, jimž odpovídala poloha loďky u levého břehu a do pravého pak ty, které představovaly stav s loďkou u břehu pravého. Toto uspořádání je výhodné, neboť každá hrana musí spojoval právě jeden uzel z levého sloupce právě s jedním uzlem z pravého sloupce. Když měl misionář-matematik zakresleny uzly, mohl přistoupit k zakreslování hran. Postupoval přitom tak, že probíral postupně jeden uzel levého sloupce za druhým a uvažoval všechny možné elementární změny v příslušném stavu začínající (a tím i všechny elementární změny v něm končící, neboť každá změna může probíhat v obou směrech). Tak zakreslil všechny hrany grafu, pro kontrolu ještě prošel obdobným způsobem všechny uzly v pravém sloupci. Množina hran H je tedy již určena. Graf, který misionář-matematik tímto způsobem získal, je *matematickým modelem problému*, který stojí před nimi. Protože vyjadřuje stavy a jejich elementární změny, řekněme mu *stavový graf*.

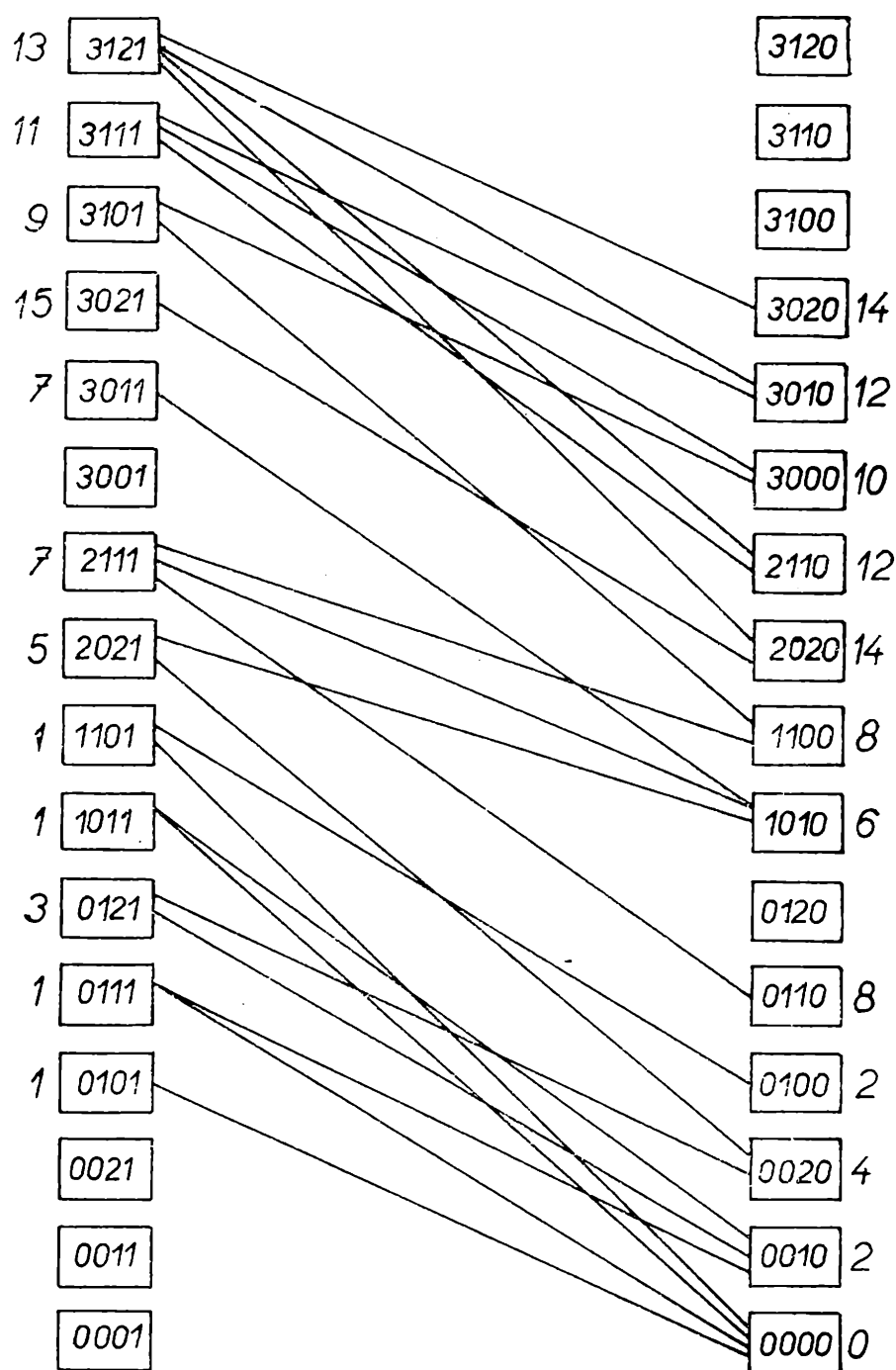
Nyní mohl misionář-matematik převést do řeči teorie grafů požadavky vyplývající z otázek položených v úvodu:

1. Zjistit, zda existuje cesta z uzlu 3121 do uzlu 0000.
2. Pokud existuje, pak

- a) určit délku p nejkratší z nich (délkou cesty rozumíme počet hran na ní ležících);

- b) popsat některou cestu délky p .

Když se příslušníci naší skupinky na nakreslený graf podívali (obr. 1),



Obr. 1

vůbec jim nebylo jasné, k čemu jim bude — viděli nějaké obdélníčky a mezi nimi změt čar. Misionář-matematik ovšem vymyslel metodu řešení. Přišel totiž na způsob, jak ke každému uzlu $mvnl$, z něhož existuje cesta do uzlu 0000, určit číslo x , vyjadřující vzdálenost od uzlu $mvnl$ do uzlu 0000, tj. nejmenší možnou délku cesty z uzlu $mvnl$ do uzlu 0000 (minimální počet elementárních změn stavu nutných k přechodu ze stavu $mvnl$ do stavu 0000). Tato čísla k uzlům pak připsal — uzly jimi ohodnotil. Uzly, z nichž se do stavu 0000 posloupností elementárních změn dostat nelze, zůstanou neohodnoceny.

Ohodnocení stavového grafu přenechal misionář-matematik jednomu ze svých kolegů, jemuž vysvětlil postup:

1. K uzlu 0000 přiřaď číslo 0.
2. Polož $i = 0$.
3. Zjisti, zda existuje dosud neohodnocený uzel, spojený hranou s některým uzlem ohodnoceným číslem i . Pokud takový uzel existuje, pokračuj podle bodu 4. Pokud takový uzel neexistuje, jsi s uzlovým ohodnocením stavového grafu hotov.
4. Ke všem dosud neohodnoceným uzlům, spojeným hranou s některým uzlem ohodnoceným číslem i , přiřaď číslo $i + 1$.
5. Dosad za i číslo $i + 1$ a vrať se k bodu 3.

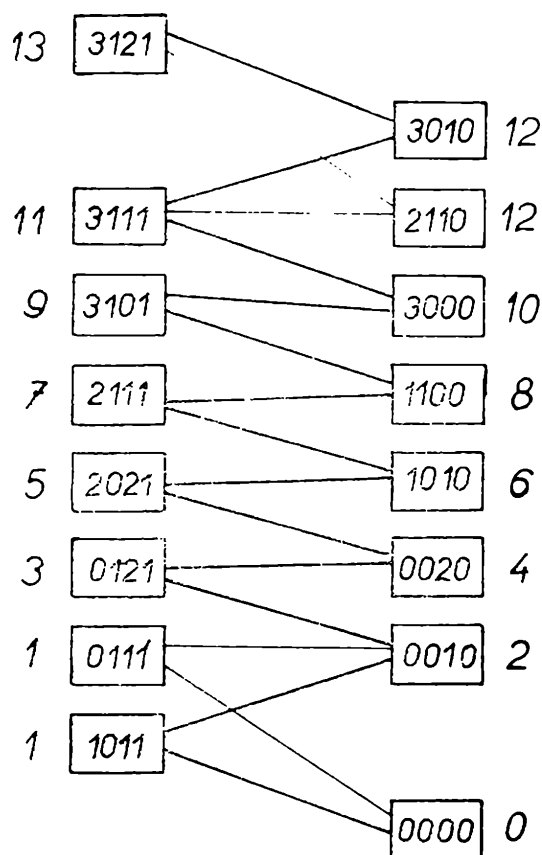
(Doporučuji čtenářům, aby si podle tohoto *algoritmu* ohodnotili graf samostatně.)

Ukážeme nyní, že ohodnocení získané užitím uvedeného algoritmu má požadované vlastnosti: Předpokládejme nejdříve, že existuje cesta ze stavu $mvnl$ do stavu 0000, obsahující r elementárních změn stavu; označme stavy, jimiž prochází, $S_r = mvnl$, S_{r-1} , ..., $S_2, S_1, S_0 = 0000$. Uzel S_1 bude ohodnocen číslem 1, uzel S_2 bude ohodnocen číslem 2 nebo menším (z dřívějšího kroku), uzel S_3 buď byl ohodnocen v některém dřívějším kroku, nebo se ohodnotí číslem o 1 větším než uzel S_2 , v žádném případě nebude ohodnocen číslem větším než 3, atd. Každý z uzlů S_j tedy bude ohodnocen, a to číslem menším nebo rovným číslu j , speciálně uzel $S_r = mvnl$ bude ohodnocen, a to číslem menším nebo rovným délce cesty. Vidíme tedy, že neohodnoceny mohly zůstat jen takové stavy, z nichž se posloupností elementárních změn do cílového stavu 0000 dostat nelze, a dále, že ohodnocení libovolného uzlu je nutně menší nebo rovno délce libovolné, tedy i nejkratší cesty z tohoto uzlu do cílového uzlu 0000. Zbývá dokázat, že je-li uzel $mvnl \neq 0000$ ohodnocen číslem s , pak skutečně je možno pomocí s elementárních změn stavu se dostat z $mvnl$ do 0000. Tím bude dokázáno, že z každého ohodnoceného uzlu se do cílového dostat lze a že ohodnocení libovolného uzlu $mvnl$ není menší, ale je rovno délce nejkratší cesty z uzlu $mvnl$ do uzlu $0000 = T_0$. Je-li uzel $mvnl = T_s$ ohodnocen číslem s , pak existuje hrana, která jej spojuje s nějakým uzlem T_{s-1} , ohodnoceným číslem $s - 1$, pokud $T_{s-1} \neq 0000$, existuje uzel T_{s-2} , ohodnocený číslem $s - 2$ atd. Získáme tak posloupnost uzlů $T_s, T_{s-1}, \dots, T_1, T_0$, ohodnocených po řadě čísla $s, s - 1, \dots, 1, 0$, přičemž každé dva po sobě následující uzly v této posloupnosti jsou spojeny hranou; to však znamená, že existuje cesta ze stavu $mvnl = T_s$ do stavu $0000 = T_0$, která prochází právě všemi stavy této posloupnosti a která tedy obsahuje s elementárních změn stavu.

Výchozí uzel 3121 je ohodnocen číslem 13, tedy přepravu uskutečnit

lze a loďka při ní musí vykonat minimálně 13 cest přes řeku (7 „tam“ a 6 „zpět“).

Z takto ohodnoceného stavového grafu již uměli určit plán přepravy s 13 cestami loďky přes řeku všichni misionáři; bylo jim jasné, že ze stavu ohodnoceného číslem 13 je třeba přejít do stavu ohodnoceného číslem 12, odtud do stavu ohodnoceného číslem 11 atd. Misionář-matematik přehledně znázornil všechna řešení jejich problému pomocí takového *podgrafu* stavového grafu, který obsahuje právě ty hrany a ty uzly, jimiž prochází nějaká cesta délky 13 z uzlu 3121 do uzlu 0000 (obr. 2); jedno řešení zvolil (na obr. 2 vyjádřeno pomocí tlustých čar) a sestavil tento plán přepravy:



Obr. 2

Výchozí stav: 3121 (13).

1. cesta: 1 veslující, 1 neveslující kanibal.

Stav: 3010 (12).

2. cesta: 1 veslující kanibal.

Stav: 3111 (11).

3. cesta: 1 veslující, 1 neveslující kanibal.

Stav: 3000 (10).

4. cesta: 1 veslující kanibal.

Stav: 3101 (9).

5. cesta: 2 misionáři.

Stav: 1100 (8).

6. cesta: 1 misionář, 1 neveslující kanibal.

Stav: 2111 (7).
 7. cesta: 1 misionář, 1 veslující kanibal.
 Stav: 1010 (6).
 8. cesta: 1 misionář, 1 neveslující kanibal.
 Stav: 2021 (5).
 9. cesta: 2 misionáři.
 Stav: 0020 (4).
 10. cesta: 1 veslující kanibal.
 Stav: 0121 (3).
 11. cesta: 1 veslující, 1 neveslující kanibal.
 Stav: 0010 (2).
 12. cesta: 1 misionář.
 Stav: 1011 (1).
 13. cesta: 1 misionář, 1 neveslující kanibal.
 Cílový stav: 0000 (0).

Naše skupinka tří misionářů a tří kanibalů problém rozřešila. Čtenářům ponecháme k samostatnému řešení tři podobné problémy, lišící se od našeho tím, že mezi třemi kanibaly

- a) uměli dva veslovat,
- b) uměli veslovat všichni tři,
- c) neuměl veslovat žádný z nich.

Pro kontrolu uvedme, že v případech a) a b) přepravu lze uskutečnit, a to v obou z nich s minimálním počtem 11 cest přes řeku, v případě c) přepravu uskutečnit nelze.

A ti čtenáři, kteří neznají řešení úlohy o převozníkovi, vlkovi, koze a zelí a nedaří se jim vyřešit tuto úlohu z paměti, mohou k jejímu řešení použít metody misionáře-matematika.

Literatura:

- [1] SEDLÁČEK, J.: Kombinatorika v teorii a praxi. Praha, NČSAV 1964.
- [2] SEDLÁČEK, J.: Nebojte se matematiky. Praha, SNTL 1960.
- [3] ŠEDIVÝ, J.: O modernizácii školskej matematiky. Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo 1972.

Problém divokých kachen

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

Náhoda hraje v životě lidí velkou roli. Nepočítáme-li tragické náhody na silnicích (a mnohdy to náhody nejsou), zbývá ještě nepřeberné množství dalších. Kolikrát slyšíme: „Pětku jsem dostal jenom náhodou.“ „Náhodou se mi dostala do ruky moc pěkná knížka“. „Výsledky měření jsou ovlivněny náhodnými chybami“.

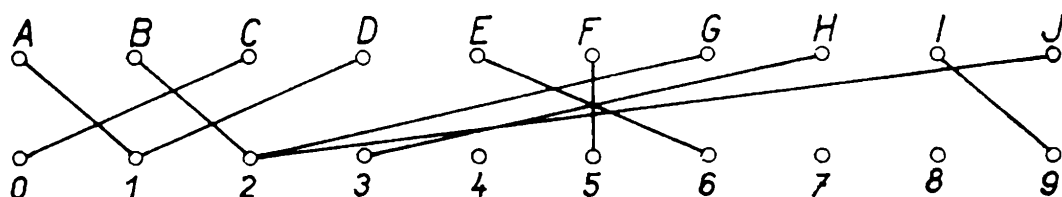
Ke studiu náhodných jevů slouží partie matematiky, nazývané teorie

pravděpodobnosti a matematická statistika, jejichž aplikovatelnost v ostatních vědách stále vzrůstá. Díky matematické statistice dosáhly zvláště společenské vědy mnohem vyšší úrovně, než na jaké byly dříve. Bohužel, na středních školách nemáte zatím možnost se s těmito důležitými obory důkladněji seznámit. Poodhrňme proto závěs skrývající studium náhodných jevů aspoň na stránkách tohoto časopisu.

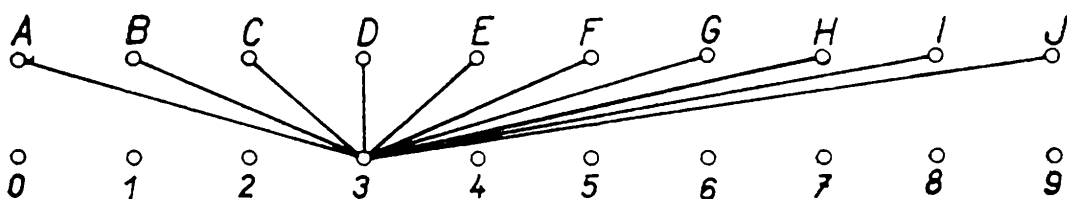
Náhoda hraje roli nejen v životě lidí, ale i v životě kachen. Když přijde doba lovu, mají to kachny zlé. Studujme tuto zjednodušenou situaci: Na jistém rybníku žije každý rok 10 kachen. Každoročně v den D se vydá 10 nimrodů na lov. Vyčkají, až kachny vzlétnou, každý si rychle některou zvolí a střílí. Ránu mají jistou, ale protože střílejí náhodně, padnou některé kachny pod dvěma i více výstřely a jiné nejsou zasaženy vůbec. Po této kanonádě není již po čem střílet, protože zbylé kachny se zachránily tím, že uletěly. A čeká se rok na další příležitost. Ptáme se, kolik kachen si průměrně ročně zachrání život?

Podívejme se na diagram střelby z několika prvních let. Na obr. 1—4 jsou číslicemi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 označeny kachny a písmeny $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ jsou označeni lovci. Úsečka znázorňuje dráhu střely. Tak jsme získali graf.

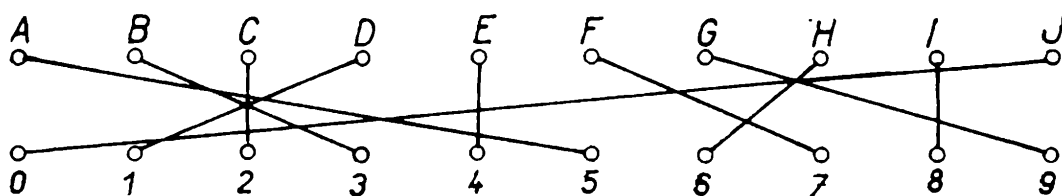
Z grafu vyčteme: v 1. roce se zachránily 3 kachny, v 2. roce 9 kachen,



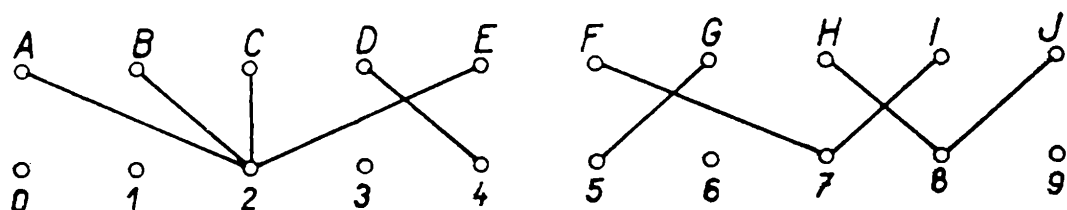
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

ve 3. roce žádná a ve 4. roce 5 kachen. Za první čtyři sledované roky se zachránilo celkem 17 kachen; průměrně $17 : 4 = 4,25$ kachny v každém roce.

Ale čtyři roky nám neumožňují určit dostatečně spolehlivý výsledek. Stačí, aby se v následujícím roce nezachránila žádná kachna a průměr „skočí“ na hodnotu $(17 + 0) : 5 = 3,40$, nebo se jich zachrání opět devět a průměr nabude hodnoty $(17 + 9) : 5 = 5,20$. Průměr se pohybuje v rozsahu $5,20 - 3,40 = 1,80$ a to je mnoho. Abychom dostali výsledek méně variabilní při extrémních situacích, musíme sledovat lov kachen aspoň 100 let¹⁾ nebo raději ještě déle.

Náhoda hraje svou úlohu i v gastronomii, například: Zadělalí jste těsto na koláče a chcete, aby v nich byly i rozinky. Když je všechno připraveno, sáhnete po sáčku s rozinkami, leč naneštěstí je tam rozinek jen deset. Nemáte již možnost opatřit si nové, a proto do těsta zamícháte pouze těchto deset rozinek. Z těsta vyrobíte 10 koláčů. Kolik koláčů bude průměrně bez rozinek?

Označíme-li rozinky písmeny $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ a koláče číslicemi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pak grafy nakreslené na obr. 1—4 pro lovce a kachny můžeme použít i nyní (jako by lovci stříleli rozinkami po létajících koláčích).

Pokusme se úlohy počítat přímo. Napřed si však musíme přesně říci, co to je aritmetický průměr a vážený aritmetický průměr. Jsou to základní a nejjednodušší statistické veličiny. Víte-li, že jste dostali tyto známky z matematiky: 1, 1, 2, 3, 2, 2, 3, 5, 3, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, počítáte si jejich průměr (přesněji aritmetický průměr) tak, že sečtete všechny známky a součet dělíte počtem všech známek, dostanete $34 : 17 = 2,00$.

Obecně: Máme-li hodnoty $a_1, a_2, \dots, a_n$, pak *aritmetický průměr* těchto hodnot je číslo

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Mnoho známek však bylo stejných: 6 jedniček, 7 dvojek, 3 trojky, 0 čtyřka, 1 pětka. Aritmetický průměr můžeme počítat proto jednodušeji takto:

$$\frac{6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{6 + 7 + 3 + 0 + 1} = \frac{34}{17} = 2,00.$$

V tomto případě mluvíme o váženém průměru.

¹⁾ Kdyby byl například průměr za sto let roven 4,25 a ve 101. roce se nezachránila žádná kachna, bude průměr za 101 let $(425 + 0) : 101 = 4,21$ a v případě, že se zachrání devět kachen, bude průměr roven $(425 + 9) : 101 = 4,29$. Variabilita průměru je nyní pouze 0,08.

Obecně: Máme-li n_1 -krát hodnotu x_1 , n_2 -krát hodnotu x_2 , ..., n_k -krát hodnotu x_k , pak říkáme, že hodnota x_i má váhu n_i ($i = 1, 2, \dots, k$), a *váženým aritmetickým průměrem* rozumíme číslo

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i,$$

kde $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Vypočítejme naši úlohu podobně. Potřebujeme proto znát, v kolika případech se zachrání právě k kachen (váhy pro hodnotu k) a kolik je všech různých možných případů střelby při lovu (tj. číslo n).

Tímto problémem se budeme zabývat příště. Než vyjde další číslo časopisu, měli byste se sami pokusit o řešení.

(Pokračování)

0 zlatém řezu úsečky, zlatém obdélníku a zlaté spirále

ALENA ŠAROUNOVÁ, MFF KU

V článku uveřejněném na předchozích stranách jste byli vyzváni, abyste provedli jeden z pokusů experimentální estetiky a zjistili, který pravoúhelník z dané série považuje většina lidí za nejlíbivější. Obdobný pokus prováděl před mnoha lety psycholog Fechner a později Lalo s velkým množstvím pokusných osob, které vybíraly z řady pravoúhelníků se stranami v různých poměrech (1 : 1 až 1 : 0,4) nejhezčí a nejméně hezký pravoúhelník. Výsledky jejich pokusů ukazují, že 30–35 % pokusných osob dává přednost obdélníku se stranami v poměru 1 : 0,62 a žádná pokusná osoba tento obdélník neuvedla jako nejméně líbivý. V tabulce jsou shrnuty výsledky pokusů osou psychologů. I výsledky jiných metod, užitých v pokusech k téže problematice (sestrojování obdélníků, určování pořadí líbivosti aj.), potvrzují výsadní postavení obdélníků, jež mají uvedený poměr stran 1 : 0,62. V připojeném diagramu jsou znázorněny výsledky Fechnerovy, plnou čarou jsou spojeny body, vyjadřující hodnoty získané při určování nejlíbivějšího obdélníka, přerušovaná čára vyjadřuje obdobným způsobem hlasování o nejméně líbivém obdélníku.

Poměr stran nejlíbivějšího obdélníka odpovídá tzv. zlatému řezu úsečky. Rozdělíme-li úsečku a na dvě části x , $a-x$ takové, že platí

$$a : x = x : (a-x) \quad (*)$$

říkáme, že jsme sestrojili její zlatý řez. Zlatého řezu se užívá nejen v matematice, ale též v malířství a architektuře, kde estetické působení hraje důležitou roli.

Z úměry (*) pro $a = 1$ plyne

$$1 - x = x^2$$

neboli

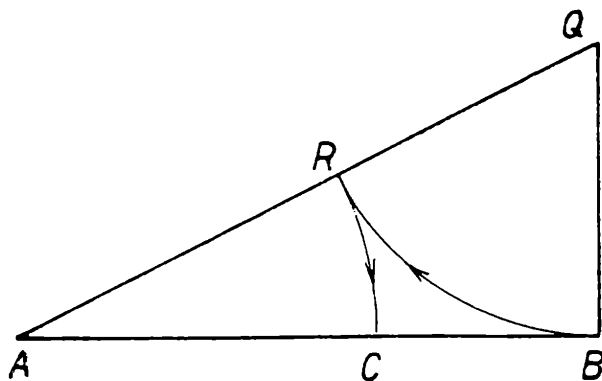
$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Kořeny této kvadratické rovnice jsou

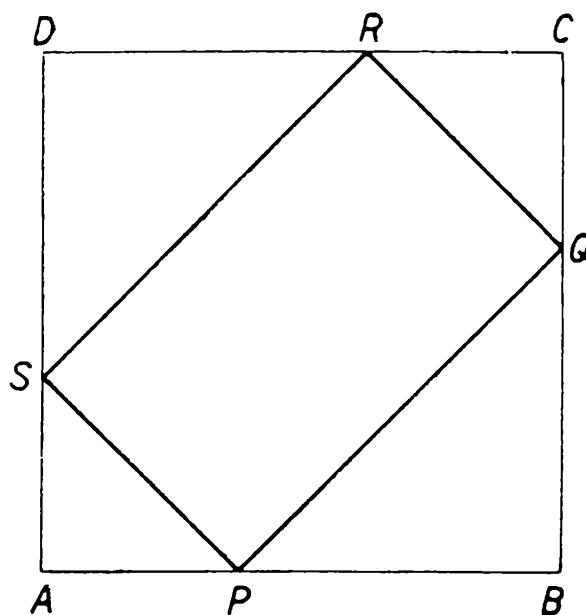
$$\tau = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \tau' = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Protože velikost úsečky je nezáporné číslo, můžeme ke zlatému řezu užít pouze kořen τ , jehož přibližná hodnota je 0,618.

Konstrukce zlatého řezu úsečky AB je znázorněna na obr. 1; zdůvodněte její správnost ($\triangle ABQ$ je pravoúhlý, $BQ = 1/2$, $AB = 1$; $RQ = QB$, $AC = AR$).



Obr. 1

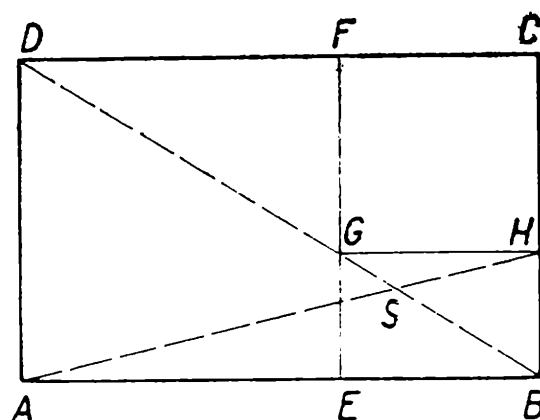


Obr. 2

Obdélníku s poměrem stran $1 : \tau$ se říká zlatý obdélník. Výsledky pokusů psychologů Fechnera a Lala můžeme tedy formulovat takto: *Nejlíbivějším obdélníkem je zlatý obdélník.*

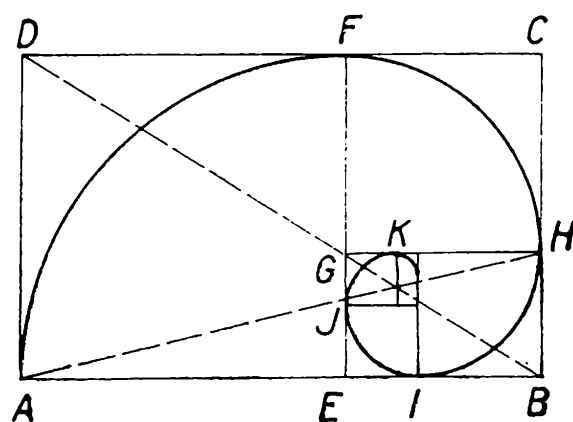
Rozdělíme-li ve čtverci všechny jeho strany zlatým řezem tak, aby kratší úseky řezů měly krajní body A, C (obr. 2), jsou dělicí body (na stranách čtverce) vrcholy zlatého obdélníka. Trojúhelníky $\triangle SAP$ a $\triangle QBP$ jsou rovnoramenné a podobné; protože jejich strany jsou v poměru $1 - \tau : \tau$, platí $PS = PQ = 1 - \tau$ a $\tau = \tau$.

Ukažme si ještě tzv. zlatou spirálu! Rozdělíme-li zlatý obdélník $ABCD$ (obr. 3) na čtverec $AEFD$ a obdélník $EBCF$, je tento obdélník rovněž zlatý a můžeme tedy v dělení pokračovat: vyznačit čtverec



Obr. 3

$GHCF$ a zlatý obdélník $EBHG$ stejnohlý s obdélníkem $ABCD$. Bod B je středem stejnohlosti H_1 ($A \rightarrow E$, $B \rightarrow B$, $C \rightarrow H$, $D \rightarrow G$) s koeficientem $\lambda_1 = 1 - \tau$; existuje však ještě další stejnohlost H_2 ($A \rightarrow H$, $B \rightarrow G$, $C \rightarrow E$, $D \rightarrow B$), která zobrazuje obdélník $ABCD$ na obdélník $GHEB$, má záporný koeficient $\lambda_2 = \tau - 1$ a střed S , který je průsečíkem přímek AH , BD , CE .



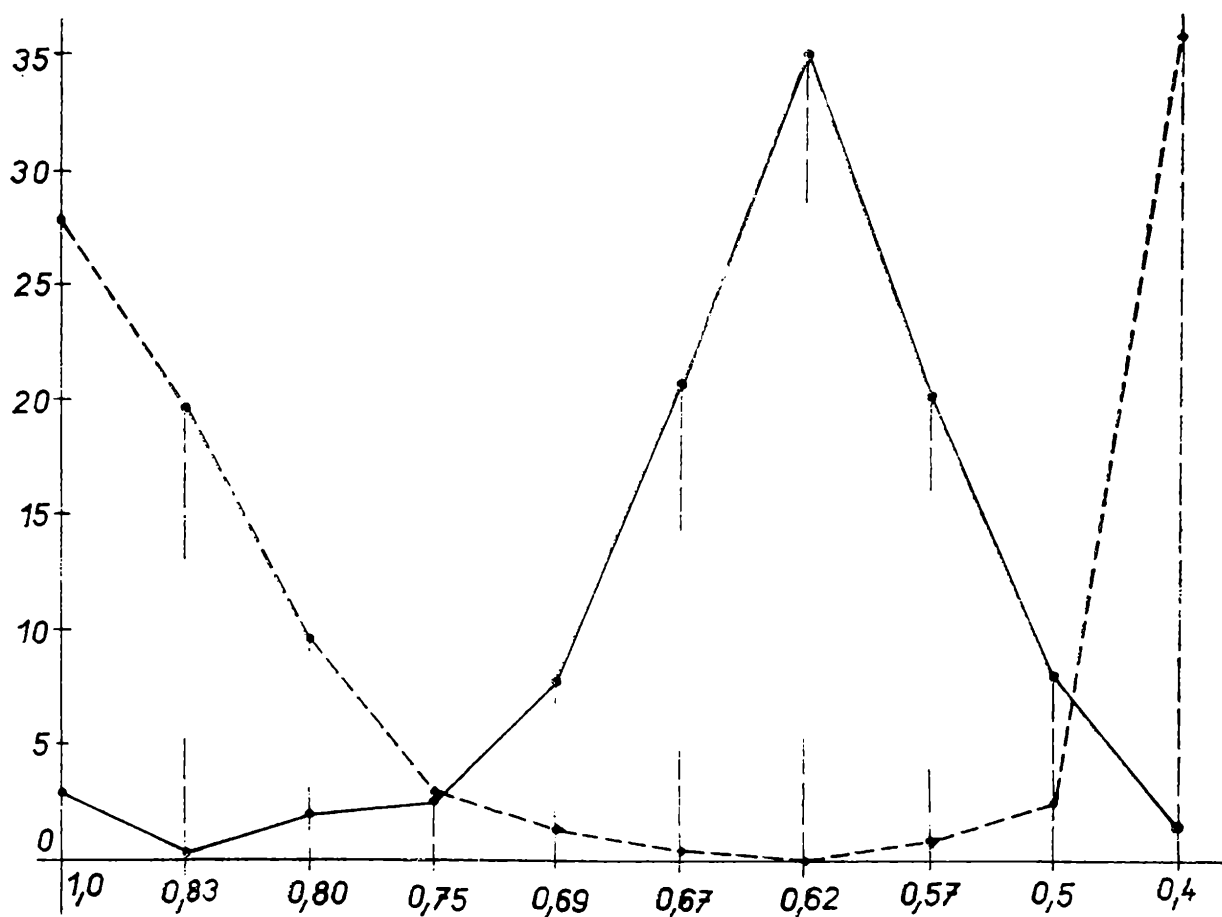
Obr. 4

Pokračujeme-li v oddělování čtverců od zlatých obdélníků způsobem, který je patrný z obr. 4, získáváme posloupnost stejnohlých zlatých obdélníků obsahujících bod S . Sestrojíme-li čtvrtkružnice vepsané do oddělovaných čtverců, získáme oblouky AF , FH , HI , IJ , JK , KL , ..., které na sebe plynule navazují. Křivka, kterou vytvoříme sjednocením takových oblouků, má spirálový tvar a aproximuje zhruba křivku zvanou zlatá spirála. Ta též prochází vyznačenými body A , F , H , I , J , K , L , ..., ale mezi nimi má poněkud odlišný průběh; definice zlaté spirály vyžaduje znalosti, které zde nepředpokládáme.

Číslo τ a jeho vlastnostem věnoval jednu svou knihu matematik *Luca Paccioli* (1445–1509), nazval ji *De divina proportionem* (O božském po-

Relativní četnost v preferování obdélníků (v %)

Poměr výšky k šířce	Nejlíbivější obdélník		Nejméně líbivý obdélník	
	Fechner	Lalo	Fechner	Lalo
1,00	3,0	11,7	27,8	22,5
0,83	0,2	1,0	19,7	16,6
0,80	2,0	1,3	9,4	9,1
0,75	2,5	9,5	2,5	9,1
0,69	7,7	5,6	1,2	2,5
0,67	20,6	11,0	0,4	0,6
0,62	35,0	30,3	0,0	0,0
0,57	20,0	6,3	0,8	0,6
0,50	7,5	8,0	2,5	12,5
0,40	1,5	15,3	35,7	26,6



Obr. 5

měru) a velmi nadšeně v ní popisuje podivuhodné vlastnosti tohoto čísla a jeho četné výskyty v pravidelných geometrických útvarech a tělesech. Narýsujte si pravidelný pětiúhelník a pokuste se objevit dvě úsečky, jejichž délky jsou v poměru „božském“.

konstruktivní geometrie

Eulerova věta pro konvexní mnohostěny

JAROSLAV DRÁBEK, JIŘÍ ZACH, PF Plzeň

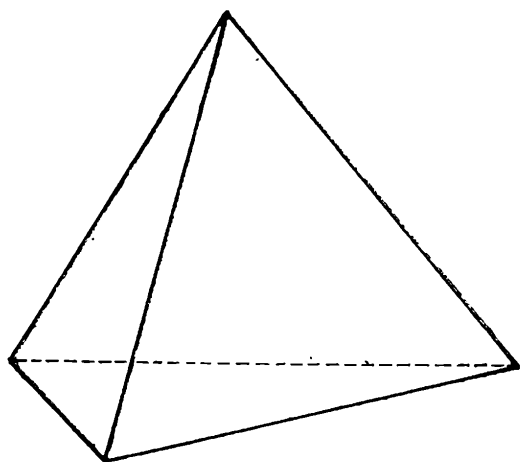
Čtenář možná již ví, že pro každý konvexní mnohostěn, který má v vrcholů, h hran a s stěn, platí

$$s + v = h + 2.$$

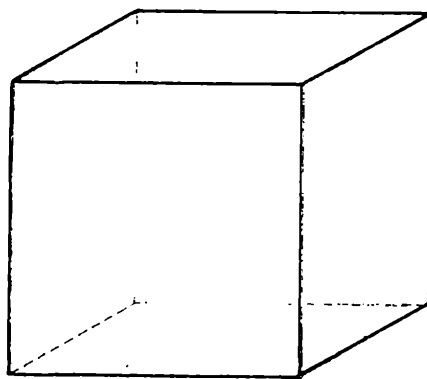
Tato věta se nazývá Eulerova věta pro konvexní mnohostěny, i když byla známa dříve, například Descartesovi. V tomto článku budeme platnost věty demonstrovat na příkladech pravidelných těles a seznámíme se s konstrukcí topologické sítě konvexního tělesa, která je rovinným grafem. Důkaz Eulerovy věty pro takové rovinné grafy je totiž snazší, podáme ho v dalším článku a tím dokážeme i vyslovenou větu pro konvexní mnohostěny.

Na obrázcích 1—5 jsou po řadě znázorněny tyto pravidelné mnohostěny: čtyřstěn, krychle (šestistěn), osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn; v tabulce jsou udány počty jejich vrcholů, hran a stěn.

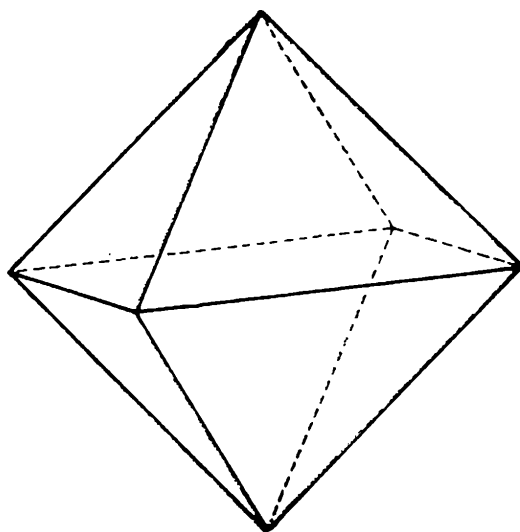
	s	v	$s + v$	h	$h + 2$
čtyřstěn	4	4	8	6	8
krychle	6	8	14	12	14
osmistěn	8	6	14	12	14
dvanáctistěn	12	20	32	30	32
dvacetistěn	20	12	32	30	32



Obr. 1

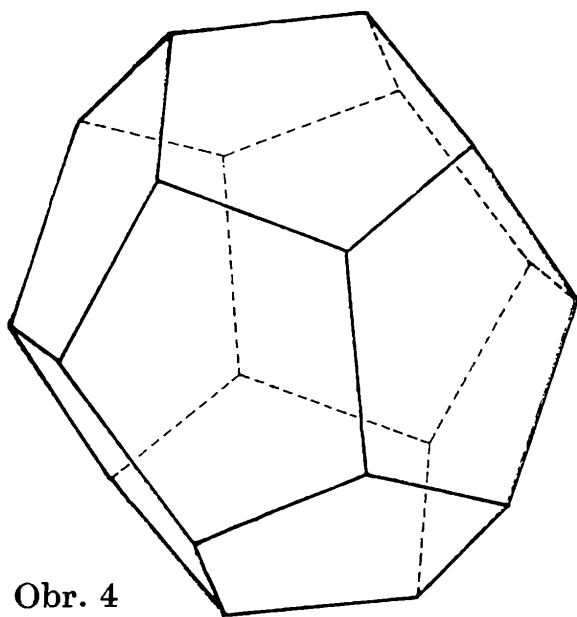


Obr. 2

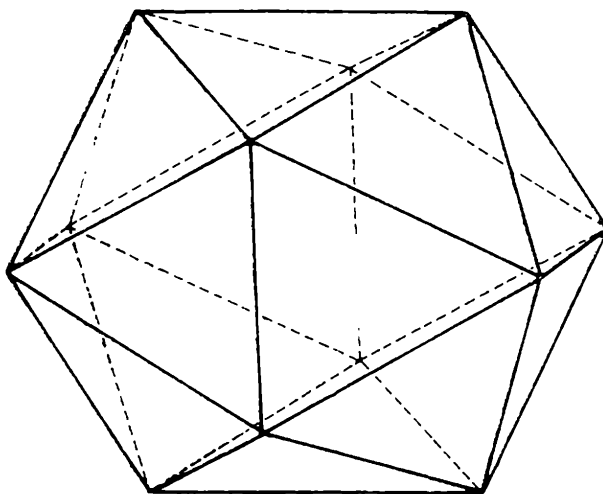


Obr. 3

Jak patrně, platí skutečně pro uvedená tělesa vzorec $s + v = h + 2$; všimněte si též záměny čísel ve sloupcích pro s a v , jejím podkladem je skutečnost, že středy všech stěn jednoho pravidelného tělesa mohou být vrcholy jiného pravidelného tělesa (přesvědčte se o tom).

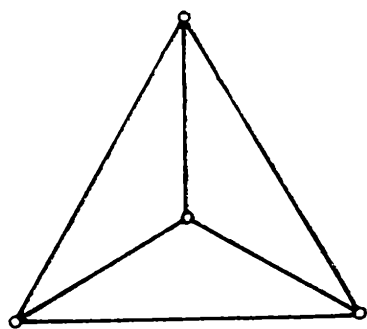


Obr. 4

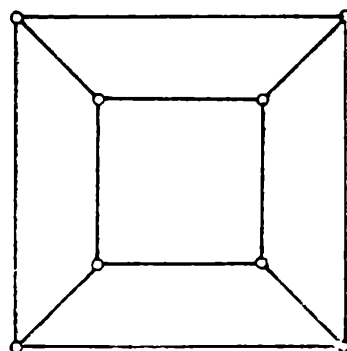


Obr. 5

Ukažme si nyní, že každému konvexnímu mnohostěnu lze přiřadit rovinný graf, tj. útvar vytvořený neprotínajícími se spojnicemi v vrcholů v rovině (na obrázcích 6—8 jsou zakresleny jako kroužky). Každému vrcholu mnohostěnu přísluší jeden vrchol rovinného grafu, každé hraně mnohostěnu odpovídá spojnice příslušných vrcholů, nazývaná hrana grafu, každé stěně mnohostěnu (kromě jedné) přísluší část roviny ohraničená hranami, kterou nazveme též stěna grafu. Jedné stěně tělesa je však nutno přiřadit vnější oblast grafu. Tímto způsobem dosáhneme

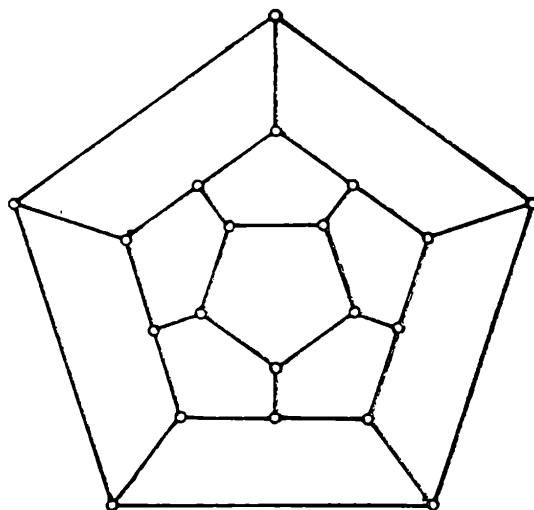


Obr. 6



Obr. 7

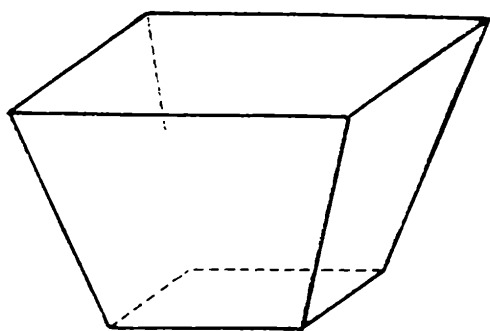
zobrazení mnohostěnu na rovinný graf; na obr. 6 je graf přiřazený čtyřstěnu, na obr. 7 krychli a na obr. 8 pravidelnému dvanáctistěnu. Nakreslete sami vhodné grafy odpovídající pravidelnému osmistěnu, resp. dvacetistěnu.



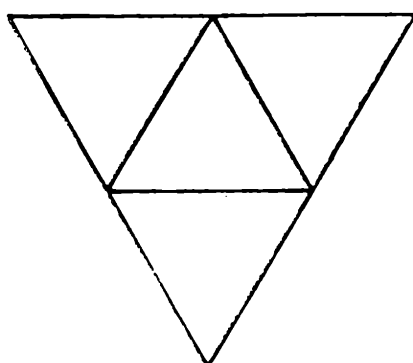
Obr. 8

Názornou představu o vytvoření vhodného rovinného grafu můžeme získat pomocí deformace povrchu mnohostěnu. Provedme ji například s krychlí znázorněnou na obr. 2, jejíž povrch budeme deformovat do roviny dolní podstavy. Nejprve je však nutné odejmout horní podstavu a předpokládat takovou elasticnost povrchu, která nám dovolí bez přetržení libovolně roztáhnout každou boční stěnu. Na obr. 9 je zachycena ta fáze deformace, kdy se boční stěny krychle „rozevírají“, aby se v konečné fázi „položily“ vně nehybné podstavy dolní. Tak získáme polohu hran krychle zachycenou na obr. 7, horní podstavě dodatečně přiřadíme vnější oblast grafu. Podobně bychom mohli ověřit, že každý konvexní mnohostěn se dá deformovat na rovinný graf se stejným počtem vrcholů a hran, ale počet stěn je o jednu menší.

Poznamenejme ještě, že v rýsování jste přiřazovali mnohostěnům jiné rovinné útvary, tzv. normální sítě; na obr. 10 a 11 jsou znázorněny dvě možné sítě čtyřstěnu a krychle. Těchto normálních sítí je účelné využívat při řešení některých metrických úloh na povrchu mnohostěnů, ale



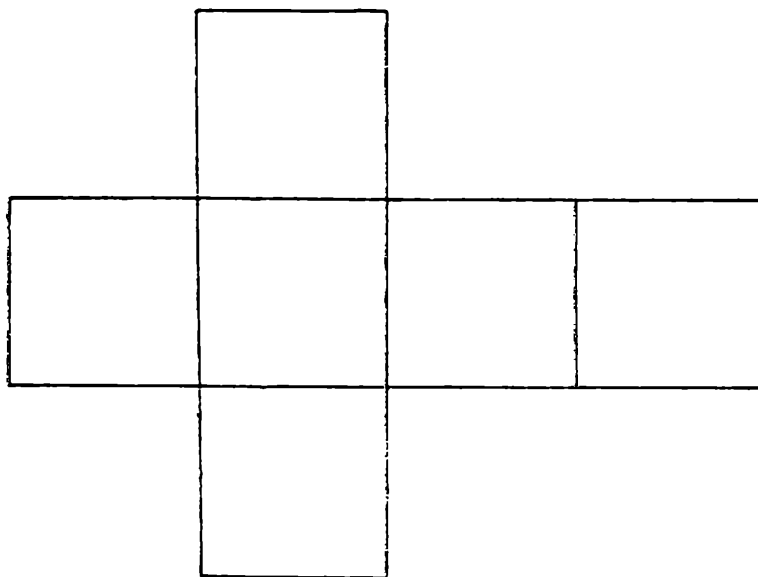
Obr. 9



Obr.10

při řešení jiných úloh je výhodnější pořídit rovinný graf, který též nazýváme topologickou sítí mnohostěnu. Ze srovnání obr. 7 a 11 jasné plyne, že se oba zmíněné druhy sítí podstatně liší.

Máte-li dobrou prostorovou představivost, můžete nalézt i jinou cestu od mnohostěnu k jeho rovinnému grafu. Představte si drátěný model krychle, který je průhledný, protože nemá vyplněné stěny. Přiblížíme-li se okem ke středu některé stěny, uvidíme hrany krychle položené tak



Obr. 11

jako na obr. 7. Stejného efektu dosáhneme, umístíme-li do zmíněné polohy střed promítání (zdroj osvětlení) a získáme průmět (stín) drátěného modelu na vhodné rovině. Takovým promítáním může být i stereografická projekce kulové plochy do roviny, se kterou jste se mohli seznámit v minulém čísle Rozhledů; mnohostěn nejprve promítneme z jeho středu na kulovou plochu a tento průmět pak stereograficky promítneme do roviny.

Vidíte, že konvexnímu mnohostěnu lze přiřadit rovinný graf rozmanitými způsoby, této okolnosti využijeme v dalším článku k důkazu Eulerovy věty pro rovinné grafy a konvexní mnohostěny.

fyzika

Pozor, zatáčka!

Až si jednou pořídíte motorové vozidlo (6. část)

RNDr. MILAN BEDNAŘÍK - RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Jaké by to byly automobilové závody, kdyby v nich chyběly zatáčky! Kde jinde by mohl návštěvník závodů prožívat větší napětí z podívané než právě tam, kde závodní vozy projíždějí s pronikavým hvizdem pneumatik ostře zakřivený oblouk zatáčky! Něco jiného je však podívaná, něco jiného je závodní praxe. I ti nejzkušenější účastníci různých mezinárodních mistrovství dobře vědí, co pro ně taková trať plná ostrých zatáček znamená. Například vědí, že jen nepatrné překročení rychlosti, která je pro danou zatáčku s ohledem na konstrukci jejich vozu ještě přijatelná, znamená buď jisté vyjetí ze zatáčky, nebo překlopení automobilu, popřípadě obojí.

Abychom se však přesvědčili o nebezpečí zatáček, nemusíme chodit na závodní dráhu. Stačí, sledujeme-li statistiky dopravních nehod, k nimž dochází každoročně na území našeho státu. Z těchto statistik je zřejmé, že téměř jedna třetina všech dopravních nehod se odehrála v poslední době v zatáčkách.

Bezpečné projetí zatáčky vyžaduje zkušeného řidiče. Ne všechny zatáčky na našich silnicích jsou stejné. Liší se od sebe různým zakřivením, tj. různým poloměrem kruhového oblouku, různým sklonem a různým povrchem vozovky. Tyto vlastnosti musí dobrý řidič odhadnout ještě před najetím do zatáčky a podle toho přizpůsobit rychlost svého vozidla. Jestliže lze např. projet určitou zatáčkou rychlostí 50 km h^{-1} , pak již rychlost 55 km h^{-1} může představovat vážné nebezpečí, které nemusí často ani ten nejlepší motorista úspěšně překonat. Jak vidíme, *bezpečné projetí zatáčky je dáno především rychlostí vozidla.*

Jak velká však tato rychlost má být? Jak velká rychlost je pro opravdu bezpečné, ale přitom plynulé projetí zatáčky nejvhodnější? Chceme-li nalézt správnou odpověď na tuto otázku, závažnou z dopravního hlediska, neobejdeme se (stejně jako při řešení jiných dopravních problémů, jež jsme popsali v předchozích částech tohoto seriálu) bez některých základních poznatků z fyziky.

Představme si, že jako řidič osobního automobilu vjíždíme právě do

zátáčky. Zkoumejme, které síly přitom na náš automobil působí, případně jak se jejich působení projeví.

Především je to *tíha* automobilu, která působí, ať už je automobil v klidu nebo v pohybu, ať už jede po příčné silnici nebo v zatáčce; tíha má směr svislý a je orientována přibližně do středu Země. Druhou silou je *síla smykového tření* mezi pneumatikami vozu a povrchem vozovky; tato síla, která je rovnoběžná s povrchem vozovky a orientovaná „dovnitř“ zatáčky, umožňuje potřebné zakřivení dráhy vozidla (nutí vozidlo, aby se pohybovalo po oblouku zatáčky). Třetí silou je tzv. *síla setrvačná*, vznikající jako důsledek setrvačného pohybu tělesa; setrvačná síla je opět rovnoběžná s povrchem vozovky, ale je orientována „ven“ ze zatáčky, tedy proti síle smykového tření.

Poznámka: Kromě uvedených sil působí na jedoucí vozidlo některé další síly, které se buď navzájem ruší, takže nemají na projetí zatáčky žádný vliv (např. hnací síla motoru a síly valivého tření spolu s odporem vzduchu při stálé rychlosti vozidla), nebo se projeví jen za určitých okolností (např. síly vznikající brzděním, dynamické síly kmitajících částí vozidla, nárazové síly větru apod.); k těmto dalším silám nebudeme v našich úvahách přihlížet.

Pro bezpečnost jízdy motorového vozidla při jeho projíždění zatáčkou má rozhodující význam *velikost setrvačné síly*. Setrvačná síla může ohrozit vozidlo dvojím způsobem:

1. Překoná sílu smykového tření a vynese vozidlo z jeho kruhové dráhy na vnější stranu zatáčky; dochází k tzv. *radiálnímu posunutí vozidla* po povrchu vozovky nebo ke *smyku vozidla*.

2. Způsobí *bočné překlopení celého vozidla*, ovšem za předpokladu, že síla tření je tak velká, aby již předtím nedošlo ke smyku vozidla.

Poněvadž účinky setrvačné síly závisí také na tom, zda povrch vozovky je v zatáčce vodorovný (neklopená zatáčka) nebo zda je vzhledem k vodorovné rovině nakloněn (klopená zatáčka), probereme každý případ zvlášť. V tomto článku budeme studovat účinky setrvačné síly na jedoucí vozidlo pro *případ zatáčky s vodorovným povrchem vozovky*, tj. pro *případ zatáčky neklopené*.

Uvažujme, že vozidlo o hmotnosti m projíždí zatáčkou o poloměru r rychlostí v . Setrvačná síla F , která přitom na vozidlo působí, je co do velikosti rovna dostředivé síle:

$$F = \frac{m v^2}{r}.$$

Aby nedošlo ke smyku vozidla, nesmí setrvačná síla překročit sílu smykového tření $F_t = \mu F_N$, kde μ je součinitel smykového tření a F_N tlaková síla, která se rovná v případě vodorovného povrchu vozovky tíze vozidla $G = mg$; tedy síla $F_t = \mu mg$. Podmínka pro projetí zatáčky

je pak

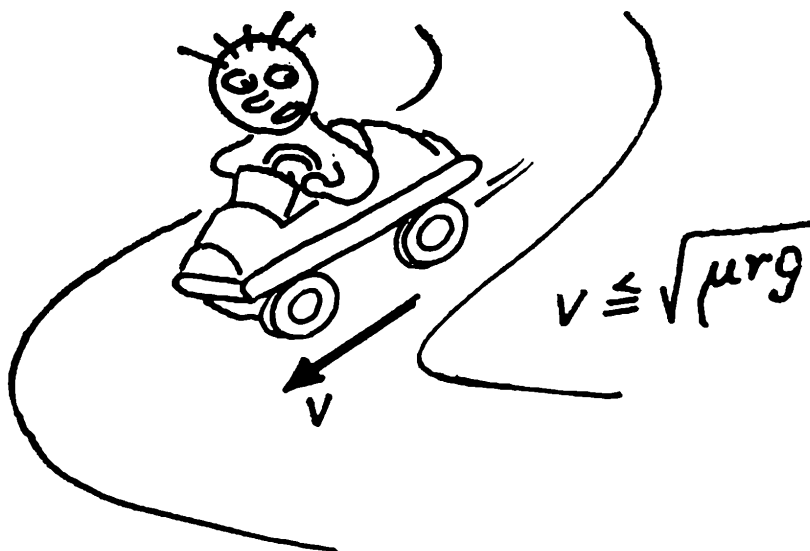
$$F \leq F_t$$

neboli

$$\frac{m v^2}{r} \leq \mu m g$$

a odtud rychlost

$$v \leq \sqrt{\mu r g} \quad (1)$$



Rovnost ve vztahu (1) vyjadřuje maximální hodnotu rychlosti vozidla v zatáčce

$$v_{\max} = \sqrt{\mu r g} \quad (2)$$

po jejímž překročení dochází k radiálnímu posunutí vozidla po povrchu vozovky „ven“ ze zatáčky. Jak vidíme, tato maximální rychlost je při dané hodnotě tíhového zrychlení g funkcí součinitele smykového tření μ a poloměru kruhového oblouku r , který tvoří zatáčku.

Je samozřejmé, že chceme-li projet zatáčku opravdu bezpečně, nepojedeme největší možnou rychlostí $v_{\max}$, ale vždy rychlostí menší než je rychlost $v_{\max}$. Tedy za bezpečnou rychlost vozidla projíždějícího zatáčkou pokládáme vždy rychlost $v < v_{\max}$.

Příklad 1. Určete největší rychlost, kterou automobil ještě projede oblouk zatáčky o poloměru 80 m, aniž dojde ke smyku vozidla, je-li součinitel smykového tření mezi pneumatikami a povrchem vozovky 0,5. Jak se musí snížit rychlost vozidla, poklesne-li součinitel tření na hodnotu 0,2 (na zledovatělé vozovce)?

Řešení: Největší rychlost automobilu určíme ze vztahu (2), do něhož dosazujeme $g = 10 \text{ m s}^{-2}$, $r = 80 \text{ m}$, dále $\mu = 0,5$ v prvním případě a $\mu = 0,2$ v případě zledovatělé vozovky.

Pro $\mu = 0,5$ je $v_{\max} = 20 \text{ m s}^{-1} = 72 \text{ km h}^{-1}$,
 pro $\mu = 0,2$ je $v_{\max} \doteq 12,6 \text{ m s}^{-1} \doteq 45 \text{ km h}^{-1}$.

Sníží-li se tedy součinitel tření z hodnoty 0,5 na hodnotu 0,2, sníží se maximální rychlost, kterou lze zatáčkou projet, ze 72 km h^{-1} na 45 km h^{-1} . Připomínáme, že pro bezpečné projetí zatáčkou za daných podmínek musí řidič volit vždy rychlosti menší, než jsou rychlosti právě vypočítané.

Příklad 2. Při stavbě zatáčky se počítalo s tím, že jí budou projíždět motorová vozidla do rychlosti $v = 90 \text{ km h}^{-1}$.

a) Jaký by musela mít podle toho zatáčka poloměr r , předpokládáme-li součinitel smykového tření $\mu = 0,3$?

b) Které hodnoty součinitele μ by odpovídaly uvedenému rychlosti, kdyby zatáčka měla poloměr $r = 125 \text{ m}$?

Řešení: Použijeme opět vztahu (2), z něhož stanovíme nejdříve poloměr r , pak součinitele μ .

a) Poloměr zatáčky pro rychlost $v = 90 \text{ km h}^{-1} = 25 \text{ m s}^{-1}$ a součinitele $\mu = 0,3$ je

$$r = \frac{v_{\max}^2}{\mu g} \doteq 208 \text{ m}.$$

Daným podmínkám vyhovují zatáčky o poloměru $r \geq 208 \text{ m}$.

b) Součinitel smykového tření

$$\mu = \frac{v_{\max}^2}{r g} = 0,5.$$

V tomto případě odpovídají daným podmínkám vozovky, pro něž je $\mu \geq 0,5$.

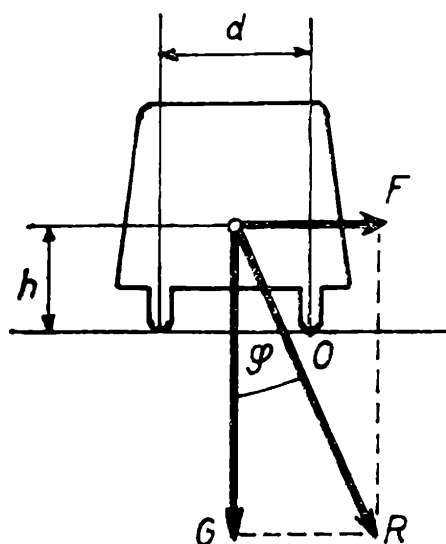
Sledujme nyní účinek setrvačné síly na *bočné překlopení vozidla*. Jede-li vozidlo po kruhovém oblouku zatáčky o poloměru r rychlostí $v < v_{\max}$, pak výslednice R setrvačné síly F a tíhy vozidla G svírá se svislým směrem úhel φ . Podle obr. 1 platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{G}$$

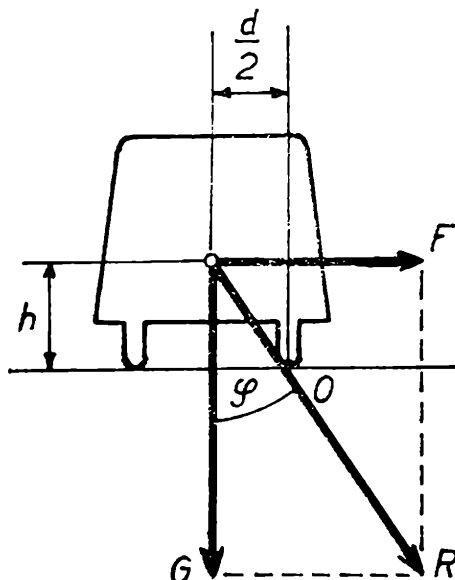
a po dosazení $F = \frac{mv^2}{r}$, $G = mg$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v^2}{r g}. \quad (3)$$

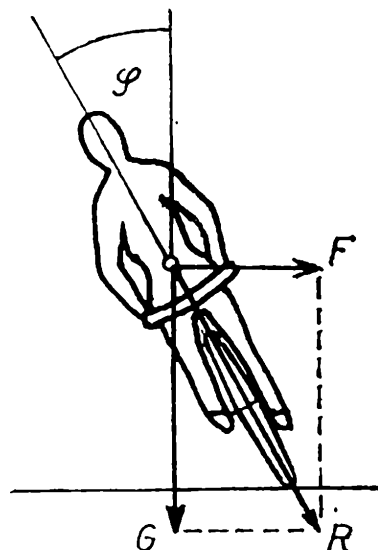
Aby nedošlo k překlopení vozidla kolem osy O , procházející pneumatikami v místě jejich dotyku s vozovkou, musí výslednice R buď ležet uvnitř rozchodu kol (viz obr. 1), nebo nanejvýš procházet bodem O



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

(viz obr. 2). Označíme-li d rozchod kol a h výšku těžiště vozidla nad povrchem vozovky, lze pro úhel φ psát

$$\operatorname{tg} \varphi \leq \frac{\frac{d}{2}}{h} = \frac{d}{2h}. \quad (4)$$

Porovnáním vztahů (3) a (4) pak dostáváme pro rychlost vozidla vztah

$$v \leq \sqrt{\frac{r g d}{2h}} \quad (5)$$

kde rovnost vyjadřuje opět maximální hodnotu rychlosti vozidla v zatáčce, při které ještě nedochází k bočnímu překlopení vozidla. Za bezpečnou rychlost vzhledem k překlopení pak pokládáme rychlost menší, než je rychlost maximální.

Příklad 3. V jaké největší vzdálenosti od povrchu vozovky může ležet těžiště naloženého stěhovacího vozu o rozchodu kol $d = 2$ m, má-li vůz projíždět zatáčkou o poloměru $r = 100$ m až rychlostí $v = 72$ km h⁻¹? Součinitel smykového tření $\mu > 0,4$.

Řešení: Vzhledem k obr. 2 platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v^2}{r g} = \frac{d}{2h}$$

a odtud

$$h = \frac{r g d}{2v^2}.$$

Po dosazení $v = 72$ km h⁻¹ = 20 m s⁻¹, $r = 100$ m, $d = 2$ m a $g = 10$ m s⁻² dostáváme pro výšku $h = 2,5$ m. Aby při vyšších rychlostech nemohlo dojít k překlopení vozidla, umísťují se v praxi náklady

ve voze tak, aby těžiště celé soustavy (automobil včetně nákladu) bylo co nejnižší.

Závěrem si všimněme ještě významu tangenty úhlu φ ve vztahu (3). Dosadíme-li do tohoto vztahu za rychlost hodnotu danou vztahem (1), obdržíme po úpravě

$$\operatorname{tg} \varphi \leq \mu. \quad (6)$$

Úhel φ , který svírá výslednice setrvačné síly a tíhy vozidla se svislým směrem (viz obr. 1), může tedy nabýt nejvýše hodnoty, při které je $\operatorname{tg} \varphi$ roven součiniteli smykového tření μ . Po překročení této hodnoty dochází ke smyku. Vztah (6) vyjadřuje další podmínku pro bezsmykové projetí vozidla zatáčkou.

Zvláštní význam má úhel φ při jízdě jednostopých vozidel, kdy je roven úhlu, o který se v zatáčce odklání tato vozidla od svislého směru. O úhel φ se např. zřetelně nakloní tělo cyklisty včetně jízdního kola, projíždí-li cyklista zatáčkou (viz obr. 3). Přitom naklonění cyklisty je právě takové, že výslednice R prochází přímkou, která je určena dvěma body dotyku obou pneumatik s vozovkou. Snadno odvodíme, že

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{G} = \frac{v^2}{rg},$$

tj. vztah shodný se vztahem (3) pro dvoustopá vozidla.

Příklad 4. O jaký úhel se odkloní motocyklista od svislého směru, projíždí-li obloukem zatáčky o poloměru $r = 400$ m rychlostí $v = 72$ km h⁻¹? Jakou hodnotu součinitele smykového tření musíme předpokládat?

Řešení: Do vztahu $\operatorname{tg} \varphi = \frac{v^2}{rg}$ dosadíme $v = 72$ km h⁻¹ = 20 m s⁻¹, $r = 400$ m, $g = 10$ m s⁻² a dostaneme $\operatorname{tg} \varphi = 0,1$. Tomu odpovídá úhel $\varphi = 5^\circ 40'$.

Vzhledem ke vztahu (6) nesmí tangenta úhlu φ překročit hodnotu součinitele smykového tření μ , to znamená, že v našem případě musí být $\mu \geq 0,1$.

Čeká vás zkouška z fyziky?

RNDr. MILAN BEDNAŘÍK - RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Zkouška z fyziky není pro většinu studentů jednoduchou záležitostí. Poznali jste to již mnohokrát na vlastní kůži ve škole, kdy jste měli prokázat znalost fyzikálních zákonů, různých vzorců, jednotek, pouček, kdy jste měli vysvětlit nějaký fyzikální jev, provést praktický pokus nebo vyřešit fyzikální příklad.

Je známo, že každá zkouška je tím obtížnější, čím rozsáhlejší je učivo,

které se zkouší (opakování na konci pololetí dá jistě „více zabrat“ než opakování z poslední hodiny), čím trvá déle (půlhodinová písemka je jistě náročnější než několikaminutové ústní zkoušení) a čím více otázky vyžadují důkladné porozumění učivu či samostatné řešení určitého fyzikálního problému (výpočet složitěho příkladu, v němž musíte uplatnit řadu poznatků i vlastní důvtip, je nepoměrně obtížnější než odříkávání pouček či vzorců). A právě takové vlastnosti mívají jednak maturitní zkoušky z fyziky, jednak zkoušky konané v rámci přijímacího řízení na vysoké školy. U těchto zkoušek pak přistupuje navíc další faktor, kterým je vliv výsledku zkoušky na další osud studenta.

Ale i velmi náročné a ve svých důsledcích významné zkoušky se mohou stát pro studenta relativně snadné nebo alespoň bez zbytečných obav překonatelné, jestliže se student na ně řádně připraví. To platí i pro přijímací zkoušky z fyziky. Každý student, který si pečlivě a s pochopením zopakuje středoškolské učivo fyziky, může přistoupit k takové zkoušce zcela bez obav. Členové zkušebních komisí na universitách i na vysokých školách technického směru zkoušejí zásadně jen to učivo, které se mohl student naučit na střední škole, přičemž kladou důraz na schopnost samostatného myšlení a přihlížejí k zájmu uchazeče o fyziku.

Abychom alespoň trochu pomohli studentům středních škol, kteří se budou připravovat na přijímací zkoušku z fyziky na některou z našich vysokých škol, uvádíme pro jejich orientaci doslovné znění dvou písemných prací, jež byly v posledních letech zadány v rámci přijímacích zkoušek na přírodovědeckou fakultu University Palackého v Olomouci. Písemná práce byla zadána uchazečům o učitelské studium matematiky — fyziky a všem uchazečům o odborné studium jemné mechaniky a optiky, numerické matematiky a analytické chemie. Kromě písemné práce vykonali všichni uchazeči také zkoušku ústní.

Každá z obou písemných prací má šest příkladů, z nichž každý obsahuje čtyři dílčí úkoly; celá písemná práce se tedy skládá celkem ze dvaceti čtyř otázek. Jednotlivé příklady jsou sestaveny tak, aby zahrnovaly učivo ze všech hlavních disciplín středoškolské fyziky, tj. učivo z mechaniky, termiky, elektřiny a optiky. K vyřešení všech úkolů písemné práce byla určena doba 60 minut.

Nyní následuje zadání písemných prací, v nichž současně uvádíme u každého dílčího úkolu jeho správné řešení. Za každou písemnou práci připojujeme tabulku, která obsahuje údaje o četnosti správných řešení jednotlivých úkolů zkoušky, tj. údaje o tom, kolik procent uchazečů vyřešilo ten který úkol správně. Z těchto údajů můžete snadno usoudit, který úkol byl pro studenty obtížný (ten vyřešilo méně studentů) a který snadný (ten vyřešila většina studentů). Tedy procenta správných řešení vám poslouží k tomu, abyste odhadli stupeň obtížnosti každého dílčího úkolu.

Písemná práce č. 1.

1. Těleso o hmotnosti $m = 200$ g je vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí $v_0 = 20$ m s⁻¹. Tíhové zrychlení $g = 10$ m s⁻².

Vypočítejte:

a) okamžitou rychlost v tělesa na konci první sekundy pohybu, tj. v čase $t_1 = 1$ s [$v = v_0 - gt_1 = 10$ m s⁻¹],

b) výšku h výstupu tělesa $\left[h = \frac{v_0^2}{2g} = 20 \text{ m} \right]$,

c) kinetickou energii W_k tělesa na počátku vrhu

$$\left[W_k = \frac{1}{2} m v_0^2 = 40 \text{ J} \right],$$

d) potenciální energii W_p tělesa na konci první sekundy pohybu

$$\left[W_p = mgh_1 = mg \left(v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \right) = 30 \text{ J} \right]$$

2. Disk o poloměru $r = 20$ cm se otáčí kolem své osy úhlovou rychlostí $\omega = 10$ rad s⁻¹. Určete:

a) dobu T jedné otočky disku $\left[T = \frac{2\pi}{\omega} \doteq 0,628 \text{ s} \right]$,

b) dráhovou rychlost v bodů na obvodu disku [$v = \omega r = 2$ m s⁻¹],

c) dostředivé zrychlení a_n bodů na obvodu disku

$$[a_n = \omega^2 r = 20 \text{ m s}^{-2}],$$

d) kinetickou energii W_k rotujícího disku, je-li jeho moment setrvačnosti vzhledem k uvažované ose rotace $J = 0,04$ kg m²

$$\left[W_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = 2 \text{ J} \right].$$

3. Plyn má při teplotě $t_0 = 0$ °C tlak $p_0 = 2 \cdot 10^5$ Pa a objem $V_0 = 100$ litrů. Stanovte:

a) tlak p plynu, zvýšíme-li při stálém objemu jeho teplotu na hodnotu $t = 273$ °C

$$\left[p = p_0 \frac{T}{T_0} = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa, přičemž } T \doteq 273 + t \right],$$

b) tlak p plynu, zmenšíme-li při konstantní teplotě $t_0 = 0$ °C jeho objem na hodnotu $V = 10$ litrů

$$\left[p = p_0 \frac{V_0}{V} = 20 \cdot 10^5 \text{ Pa} \right],$$

- c) tlak p plynu, jestliže změníme jeho objem na $V = 50$ litrů a současně zvýšíme teplotu na $t = 546$ °C

$$\left[p = \frac{p_0 V_0}{T_0} \quad \frac{T}{V} = 12 \cdot 10^5 \text{ Pa} \right],$$

- d) střední kvadratickou rychlost v_k molekul plynu při tlaku $p = 2 \cdot 10^5$ Pa a hustotě $\rho = 3 \text{ kg m}^{-3}$

$$\left[v_k = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 447 \text{ m s}^{-1} \right].$$

4. Ze zdroje o svorkovém napětí $U = 12$ V je proud veden odporem $R_1 = 2 \Omega$ a pak dvěma paralelně spojenými odpory $R_2 = 3 \Omega$ a $R_3 = 6 \Omega$. Určete:

a) výsledný odpor R obvodu $\left[R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 4 \Omega \right],$

b) proud I_1 procházející odporem R_1 $\left[I_1 = \frac{U}{R} = 3 \text{ A} \right],$

c) proud I_2 procházející odporem R_2 $\left[I_2 = \frac{I_1 R_3}{R_2 + R_3} = 2 \text{ A} \right],$

d) napětí U_2 na odporu R_2 [$U_2 = I_2 R_2 = 6$ V].

5. Elektromotorem na střídavý proud prochází při efektivním napětí $U = 200$ V efektivní proud $I = 5$ A. Účinník $\cos \varphi = 0,8$. Vypočítejte:

a) amplitudu I_m střídavého proudu [$I_m = I \sqrt{2} = 7 \text{ A}$],

b) činný výkon P elektromotoru [$P = UI \cos \varphi = 800$ W],

c) indukanci X_L , je-li odpor vinutí $R = 32 \Omega$ (kapacitu zanedbejte)

$$\left[X_L = \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2} = 24 \Omega \right],$$

- d) práci A ve watthodinách, kterou elektromotor vykoná za dobu $t = 15$ minut, je-li jeho účinnost $\eta = 0,9$

$$[A = \eta t UI \cos \varphi = 180 \text{ W h}].$$

6. Spojka má ohniskovou vzdálenost $f = 50$ cm. Stanovte:

a) optickou mohutnost φ spojky $\left[\varphi = \frac{1}{f} = 2 \text{ dioptrie} \right],$

b) vzdálenost a' obrazu od čočky, je-li vzdálenost předmětu $a = 1,5$ m

$$\left[a' = \frac{af}{a - f} = 0,75 \text{ m} \right],$$

c) příčné zvětšení Z při vzdálenosti předmětu od čočky $a = 2,5$ m

$$\left[Z = -\frac{f}{a - f} = -0,25 \right],$$

- d) index lomu n skla, z něhož je čočka zhotovena, jsou-li oba její poloměry křivosti $r = 0,5 \text{ m}$

$$\left[n = 1 + \frac{r}{2f} = 1,5 \right]$$

Tabulka 1.

Příklad	1	2	3
Dílčí úkol	a b c d	a b c d	a b c d
Četnost správných řešení v %	79 67 84 55	67 69 64 43	72 86 47 23
Příklad	4	5	6
Dílčí úkol	a b c d	a b c d	a b c d
Četnost správných řešení v %	62 31 25 30	39 68 14 40	72 73 39 45

Písemná práce č. 2:

- Kámen o hmotnosti $m = 3 \text{ kg}$ necháme volně padat (tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m s}^{-2}$) do propasti hloubky $h = 45 \text{ m}$. Vypočítejte:
 - kinetickou energii W_k kamene na konci první sekundy od začátku pohybu, tj. v čase $t_1 = 1 \text{ s}$

$$\left[W_k = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m (gt_1)^2 = 150 \text{ J} \right],$$

- úbytek potenciální energie W_p kamene za první sekundu pohybu

$$\left[W_p = mgh_1 = mg \frac{1}{2} gt_1^2 = 150 \text{ J} \right],$$

- dobu t , za kterou dopadne kámen na dno propasti $\left[t = \frac{2h}{g} = 3 \text{ s} \right]$,

- rychlost v dopadu kamene $[v = gt = \sqrt{2gh} = 30 \text{ m s}^{-1}]$

- Na těleso o hmotnosti $m = 10 \text{ kg}$, pohybující se rychlostí $v_1 = 5 \text{ m s}^{-1}$, začne působit konstantní síla $F = 20 \text{ N}$, která má směr rychlosti.

Stanovte:

- dobu t , za kterou se rychlost tělesa zvýší na hodnotu $v_2 = 15 \text{ m s}^{-1}$

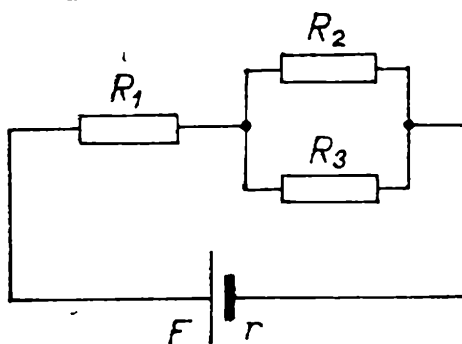
$$\left[t = \frac{m}{F} (v_2 - v_1) = 5 \text{ s} \right],$$

b) práci A , kterou síla F přitom vykoná

$$\left[A = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = 10^3 \text{ J} \right],$$

c) okamžitý výkon P síly F při počáteční rychlosti $v_1 = 5 \text{ m s}^{-1}$ [$P = Fv = 10^3 \text{ W}$],

d) poloměr r oblouku, po němž by se těleso pohybovalo, kdyby daná síla F působila na těleso stále kolmo ke směru rychlosti $v_1 = 5 \text{ m s}^{-1}$ $\left[r = \frac{mv_1^2}{F} = 12,5 \text{ m} \right]$.



Obr. 1

3. Baterie o elektromotorickém napětí $E = 8,2 \text{ V}$ a vnitřním odporu $r = 2 \Omega$ je zapojena do obvodu (viz obr. 1), kde $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $R_3 = 120 \Omega$. Vypočítejte:

a) celkový vnější odpor R obvodu

$$\left[R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 80 \Omega \right]$$

b) proud I_1 procházející odporem R_1 $\left[I_1 = \frac{E}{R + r} = 0,1 \text{ A} \right]$,

c) proud I_3 procházející odporem R_3 $\left[I_3 = \frac{I_1 R_2}{R_2 + R_3} = 0,025 \text{ A} \right]$

d) napětí U_1 na odporu R_1 [$U_1 = I_1 R_1 = 5 \text{ V}$]

4. Ponorným vařičem o příkonu $P = 600 \text{ W}$ na napětí $U = 200 \text{ V}$ ohříváme $m = 2 \text{ kg}$ vody o počáteční teplotě $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ po dobu $\tau = 5 \text{ minut}$. Vypočítejte:

a) odpor R topné spirály $\left[R = \frac{U^2}{P} = 66,7 \Omega \right]$,

b) spotřebu elektrické energie A ve watthodinách

$$[A = Pt = 50 \text{ W h}]$$

c) množství tepla Q v kcal, odpovídající spotřebované elektrické energii [$Q = 0,24 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 \text{ A} = 43,2 \text{ kcal}$],

d) teplotu t ohřáté vody, zanedbáváme-li tepelné ztráty

$$\left[t = t_1 + \frac{Q}{mc} = 41,6 \text{ } ^\circ\text{C}, \text{ přičemž } c = 1 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \right].$$

5. Spirála má tuhost $K = 20 \text{ N m}^{-1}$. Vypočítejte:

a) o jakou délku y se spirála prodlouží, napínáme-li ji silou $F = 5 \text{ N}$

$$\left[y = \frac{F}{K} = 0,25 \text{ m} \right],$$

b) potenciální energii W_p spirály při prodloužení o $y_0 = 10 \text{ cm}$

$$\left[W_p = \frac{1}{2} K y_0^2 = 0,1 \text{ J} \right]$$

c) dobu kmitu T závaží o hmotnosti $m = 200 \text{ g}$, které zavěsíme na

$$\text{danou spirálu } \left[T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \doteq 0,628 \text{ s} \right],$$

d) délku l matematického kyvadla, které má stejnou dobu kmitu jako

$$\text{závaží na spirále } \left[l = \frac{m}{K} g = 0,1 \text{ m} \right].$$

6. Objektiv promítacího přístroje o ohniskové vzdálenosti $f = 150 \text{ mm}$ promítá diapozitivy o výšce $y = 50 \text{ mm}$ na stěnu ve vzdálenosti $a' = 6 \text{ m}$;

a) načrtněte schéma chodu paprsků objektivem,

b) vypočítejte vzdálenost a diapozitivu od objektivu

$$\left[a = \frac{a'f}{a' - f} \doteq 0,154 \text{ m} \right],$$

c) stanovte příčné zvětšení Z $\left[Z = -\frac{a'}{a} \doteq -39 \right]$

d) určete optickou mohutnost φ objektivu $\left[\varphi = \frac{1}{f} \doteq 6,67 \text{ dioptrie} \right].$

Tabulka 2.

Příklad	1	2	3
Dílčí úkol	a b c d	a b c d	a b c d
Četnost správných řešení v %	73 76 87 84	63 13 41 39	72 38 27 41
Příklad	4	5	6
Dílčí úkol	a b c d	a b c d	a b c d
Četnost správných řešení v %	64 62 38 48	72 23 35 35	47 44 32 60

Z údajů v tabulce 1 je zřejmé, že v první písemné práci byl relativně nejsnadnější příklad 1, který se týkal svislého vrhu vzhůru; dílčí úkol 1a vyřešilo správně 79 % studentů, 1b 67 %, 1c 84 % a 1d 55 % studentů. Rovněž příklad 2 byl až na úkol 2d správně vyřešen většinou studentů. Poněkud horší výsledky jsou u příkladu 3; první dva dílčí úkoly sice vyřešila správně rovněž většina studentů, avšak úkol 3c, vyžadující znalost stavové rovnice ideálního plynu, vyřešilo jen 47 % studentů, a úkol 3d z kinetické teorie plynů jen 23 %, což je méně než čtvrtina. Jako nejtěžší se projevíly zřejmě příklady 4 a 5, zaměřené na učivo elektřiny. Až na úkoly 4a a 5b je správně nevyřešila ani polovina studentů, u úkolu 5c se objevuje nejhorší výsledek v celé písemné práci — jen 14 % studentů jej vyřešilo. U příkladu 6 jsou výsledky opět poněkud lepší, což souvisí asi s tím, že od učiva, jehož se týkal, tj. optiky, měli studenti nejmenší časový odstup.

V druhé písemné práci, jejíž výsledky jsou shrnuty v tabulce 2, byl opět nejsnadnější příklad 1. Příklad 2 dopadl již hůře, o čemž svědčí jednak to, že ze čtyř jeho dílčích úkolů pouze úkol 2a vyřešila správně více než polovina studentů, jednak to, že se zde objevuje nejslabší výsledek z celé písemné práce — jen 13 % správných řešení. Poměrně slabé výsledky byly také u příkladu 5 z učiva o kmitání a v porovnání s první písemnou prací rovněž u příkladu 6 z optiky.

Tedy, čeká-li vás letos přijímací zkouška z fyziky, máte možnost ověřit své síly tím, že se pokusíte vyřešit uvedené příklady v předepsaném časovém limitu 60 minut pro každou práci.

astronomie

0 pohybech hvězd

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Až do 18. století se astronomové domnívali, že hvězdy jsou v klidu vzhledem ke Slunci, že se nepohybují. Proto také pro hvězdy používali název „stálice“, neboť pokládali jejich polohu za stálou a neměnnou. Teprve v roce 1718 zjistil anglický astronom *Edmond Halley* (1656 až 1742), že tomu tak není. Srovnával totiž polohy hvězd, které sám naměřil, s údaji obsaženými ve starých katalozích; ukázalo se, že hvězdy Aldebaran (α Tauri), Sírius (α Canis Majoris), Arktur (α Bootis) a Betei-

geuze (α Orionis) prokazatelně změnily svou polohu. Rozdíly v souřadnicích těchto hvězd byly tak velké, že je nebylo možné vysvětlit ani změnou v poloze ekliptiky, ani chybami měření: jediné možné vysvětlení bylo to, že hvězdy skutečně změnily svou polohu, že se tedy pohybují. Astronomové, kteří byli zvyklí pokládat hvězdy za nehybná tělesa, nepřijali novou představu o hvězdách jako tělesech v neustálém pohybu nijak snadno a snažili se najít jiné vysvětlení. Ještě o dvacet pět let později se jiný anglický astronom, *James Bradley* (1692—1762), který se rovněž zabýval měřením změn v poloze hvězd, domníval, že pohyby hvězd jsou jenom zdánlivé — že hvězdy jsou prý v klidu a pohybuje se jen sluneční soustava. Další měření však nezvratně prokázala, že se pohybuje jak sluneční soustava, tak také hvězdy.

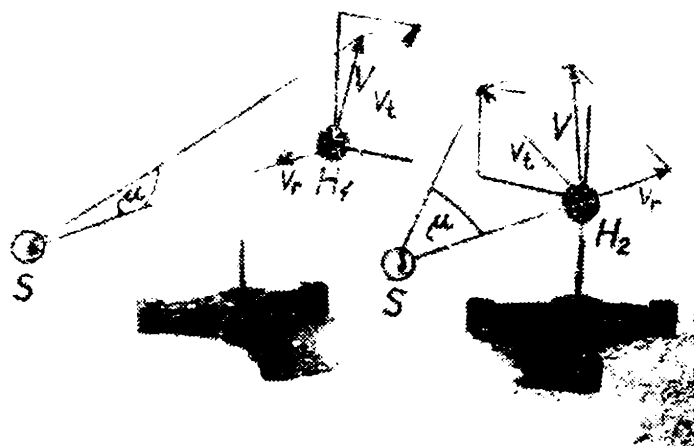
Prostorový pohyb hvězd můžeme rozložit na dvě složky: na pohyb ve směru kolmém k zornému paprsku, který se projevuje změnami souřadnic, a na pohyb ve směru zorného paprsku, který zjistíme proměřením poloh spektrálních čar ve spektru hvězd.

Změny souřadnic nazýváme *vlastní pohyb hvězdy*; vzhledem k tomu, že tyto změny jsou velmi malé, udává se vlastní pohyb v obloukových vteřinách za rok. Poloha hvězdy na sféře je určena dvěma souřadnicemi; obvykle se používají k určení polohy rektascenze a deklinace hvězdy. Proto také vlastní pohyb hvězdy má dvě složky, a to vlastní pohyb v rektascenzi μ_α a vlastní pohyb v deklinaci μ_δ . Výsledný vlastní pohyb μ pak dostaneme vektorovým složením těchto dvou navzájem kolmých složek. Známe-li vlastní pohyb μ hvězdy a její paralaxu π , můžeme vypočítat *tangenciální rychlost* V_t hvězdy. Tangenciální rychlost se udává v kilometrech za sekundu.

K měření rychlosti hvězd ve směru zorného paprsku, neboli tzv. *radiální rychlosti* V_r , bylo možno přistoupit teprve tehdy, až přístrojová technika pokročila natolik, že bylo možné získat fotografie spekter hvězd a přesně proměřit polohy jednotlivých čar. Podle Dopplerova principu se totiž spektrální čáry hvězdy, která se k nám přibližuje, posunou o určitou hodnotu směrem k fialovému konci spektra a spektrální čáry hvězdy, která se od nás vzdaluje, se posunou k červenému konci spektra. Posune-li se spektrální čára o vlnové délce λ o hodnotu $\Delta\lambda$, pak radiální rychlost V_r hvězdy vypočteme ze vztahu

$$V_r = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda},$$

v němž c znamená rychlost šíření světla ve vakuu. Dohodou bylo stanoveno, že radiální rychlosti hvězd, které se k nám přibližují, mají záporné znaménko, a radiální rychlosti hvězd, které se od nás vzdalují, mají kladné znaménko. První měření radiální rychlosti hvězdy vykonal v šedesátých letech minulého století *William Huggins* (1824—1910),



Obr. 1. Model prostorové rychlosti hvězdy

a to hvězdy Síría pomocí vizuálního spektroskopu. Nyní se radiální rychlosti měří na fotografiích spekter, tzv. spektrogramech.

Na obr. 1 je snímek modelu prostorového pohybu hvězd. Vlevo je model pro hvězdu H_1 , která se k nám přibližuje, vpravo model pro hvězdu H_2 , která se od nás vzdaluje. U obou modelů je kulička, znázorňující Slunce, označena písmenem S , dále vlastní pohyb hvězdy μ , tangenciální rychlost V_t (můžete si všimnout rovněž obou složek tangenciální rychlosti: vodorovná složka odpovídá složce vlastního pohybu μ_α , svislá složka pohybu μ_δ .) Radiální rychlost je označena V_r a výsledná *prostorová rychlost hvězdy*, která je vektorovým součtem složek V_t a V_r , je označena písmenem V . Model znázorňuje rychlosti hvězd vzhledem ke Slunci, tedy rychlosti oprostěné od pohybu Země kolem Slunce.

Je třeba ještě poznamenat, že hodnoty tangenciálních a radiálních rychlostí nejsou stejně přesně určeny. Při měření radiálních rychlostí dosahujeme značné přesnosti. Jako příklad můžeme uvést měření astronoma *Waltera Adamse*, který u hvězdy α Bootis (Arktur) změřil radiální rychlost $V_r = -(5211 \pm 5) \text{ m s}^{-1}$; absolutní chyba je tedy jen 5 m s^{-1} , relativní chyba menší než $0,1 \%$. Běžně se radiální rychlosti určují s chybou $\pm 1 \text{ km s}^{-1}$, což je vzhledem k poměrně velkým hodnotám rychlostí dostatečně vysoká přesnost.

Mnohonásobně většími chybami jsou zatížena určování tangenciálních rychlostí. K výpočtu tangenciální rychlosti musíme znát jednak parallaxu hvězdy (zde je přesnost měření asi $\pm 0,002''$, což u hvězdy ve vzdálenosti 50 pc představuje již relativní chybu 100%), jednak vlastní pohyb. Při měření vlastních pohybů jde o velmi malé úhly a navíc je třeba mít změřeny polohy hvězd v co možno největším časovém intervalu. Protože se tato měření konají na fotografických deskách, je třeba, aby tyto desky byly exponovány stejným dalekohledem na stejný foto-

grafický materiál, stejně zpracovány atd. Německý astronom *R. Schorr* vydal v r. 1936 obsáhlý katalog vlastních pohybů hvězd pod názvem *Bergedorfer Eigenbewegungs-Lexicon*, který obsahuje 94 731 hvězdu se změřeným vlastním pohybem. Vlastní pohyby 258 997 hvězd jsou obsaženy v katalogu hvězd, který vydala Smithsonianská astrofyzikální observatoř v roce 1966. Kromě toho vydala řada hvězdáren v USA, SSSR, Holandsku a v NSR řadu menších katalogů vlastních pohybů hvězd pro vybraná pole. Radiální rychlosti 15 106 hvězd obsahuje Generální katalog radiálních rychlostí, který vydal *R. Wilson* v r. 1953 ve Washingtonu. Další katalogy, obsahující radiální rychlosti několika set hvězd, vydali jiní astronomové. Katalog prostorových rychlostí 3483 hvězd vydal r. 1962 astronom *O. Eggen*.

Naše soutěž

V zamyšlení nad výsledky 1972/73

EVŽEN ŘÍMAN, CSc., Praha

V prosincovém čísle 52. ročníku *Rozhledů* referovala redakce o průběhu loňské soutěže. Připojená *Tabulka výsledků 1972/73*, zpracovaná podle škol, ve kterých řešitelé studují, má umožnit kritické zhodnocení soutěže, zjištění účasti žáků středních škol různých typů v krajích a městech a posouzení, zda zadávané úlohy jsou přiměřené znalostem žáků. Sledujme:

1. *Účast různých typů škol*: Ze 30 účastníků byl pouze 1 řešitel ze SVŠ (Topolčany), ostatní z gymnasií. Průmyslové školy a SVVŠ, které v minulých letech se přece zúčastňovaly, nejsou zastoupeny vůbec. Příčina jejich neúčasti je neznámá.

2. *Účast škol z Čech, Moravy a Slovenska* je vyjádřena poměrem $12 : 4 : 5$, kdežto účast řešitelů je v poměru $19 : 6 : 6$. V Čechách ovšem lví podíl má Praha, kde se účastnilo 5 škol s 11 řešiteli, kteří získali 568 bodů (tj. téměř polovinu všech bodů soutěže, tj. 1383). Více než polovina řešitelů z Čech je na pražských školách.

3. *Účast chlapců a dívek* je vyjádřena poměrem $28 : 2$. Uvážíme-li, že studuje přibližně stejný počet chlapců a dívek, dále že na školách — kromě vysokých — je počet učitelek značně vyšší než učitelů, pak hořejší poměr svědčí o tom, že bohužel ani *Rozhledy* ani školy nedovedou získat zájem žákyň o exaktní vědy, ač na vysokých školách (technických

Jméno řešitele	Počet úloh řešených						Tím získaný počet bodů v kategorii			Dosažené umístění (pořadí) v kategorii			Absolutní vítěz	
	správně			neúplně									počet bodů	pořadí
	v kategorii			v kategorii										
	M	F	G	M	F	G	M	F	G	M	F	G		
Gymn. BLOVICE: celkem 48 bodů, řešitelé 2														
Fiala Václav	—	4	—	—	1	—	—	23	—	—	6	—	23	17
Hora Jaroslav	2	5	—	3	—	—	19	25	—	16	4	—	44	10
Gymn. Jur. Hronca, BRATISLAVA: celkom 20 bodov, riešiteľ 1														
Širáň Jozef	4	—	—	—	—	—	20	—	—	15	—	—	20	19
Gymn. BRATISLAVA, Novohradská: celkom 30 bodov, riešiteľ 1														
Kollár Lubor	6	—	—	3	—	—	39	—	—	8	—	—	39	11
Gymn. BRNO, Křenová: celkem 28 bodů, řešitel 1														
Malec Jiří	—	5	—	—	1	—	—	28	—	—	2	—	28	14
Gymn. BRNO, Lerchova: celkem 16 bodů, řešitel 1														
Zedníček Mart.	—	—	2	—	—	2	—	—	16	—	—	3	16	21
Gymn. ČESKÉ BUDĚJOVICE, celkem 80 bodů, řešitel 1														
Kindlmann Pavel	8	3	2	2	1	2	46	18	16	4	7	3	80	6
Gymn. JIHLAVA: celkem 93 bodů, řešitelé 2														
Pavel Jiří	3	—	—	2	—	—	21	—	—	14	—	—	21	18
Kolektiv*)	4	4	1	6	1	2	38	23	11	9	6	5	72	7
Gymn. LANŠKROUN: celkem 54 body, řešitel 1														
Drábek Zdeněk	9	—	—	3	—	—	54	—	—	1	—	—	54	9
Gymn. MICHALOVCE: celkom 80 bodov, riešitelia 2														
Hanušík Václ.	—	4	—	—	2	—	—	26	—	—	3	—	26	15
Jasem Michal	3	4	2	1	1	1	18	23	13	16	6	4	54	9
Gymn. MLADÁ BOLESLAV: celkem 83 body, řešitel 1														
Meier Vladimír	4	6	3	5	—	1	35	30	18	10	1	2	86	5
Gymn. OPAVA: celkem 8 bodů, řešitel 1														
Semrád Ivo	—	—	1	—	—	1	—	—	8	—	—	6	8	23

Jméno řešitele	Počet úloh řešených						Tím získaný počet bodů v kategorii			Dosažené umístění (pořadí) v kategorii			Absolutní vítěz	
	správně			neúplně									počet bodů	pořadí
	v kategorii			v kategorii										
	M	F	G	M	F	G	M	F	G	M	F	G		
Ak. gymn. PRAHA 2: celkem 35 bodů, řešitelka 1														
Vencovská Alena	4	—	—	4	—	—	32	—	—	11	—	—	32	12
Gymn. Wilh. Piecka PRAHA 2, Vinohrady: celkem 346 bodů, řešitelů 7														
Bohal Ladislav	—	4	—	—	1	—	—	23	—	—	6	—	23	17
Felix Ondřej	—	4	—	—	2	—	—	26	—	—	3	—	26	15
Frynta Jan	7	5	4	4	1	—	47	28	20	3	2	1	95	1
Chrz Tomáš	8	5	—	4	1	—	52	28	—	2	2	—	80	6
Jarolím Petr	7	5	3	4	1	1	47	28	18	3	2	2	93	2
Paukner Petr	—	—	4	—	—	—	—	—	20	—	—	1	20	19
Valášek Michal	—	—	—	3	—	—	9	—	—	17	—	—	9	22
Gymn. PRAHA 4, Ohradní: celkem 71 bodů, řešitel 1														
Salač Václav	5	5	—	7	—	—	46	25	—	4	4	—	71	8
Gymn. PRAHA 6, Leninova: celkem 31 bodů, řešitel 1														
Kolektiv**)	5	—	—	2	—	—	31	—	—	12	—	—	31	13
Gymn. Jana Keplera PRAHA 6: celkem 88 bodů, řešitel 1														
Scholz Josef	5	5	4	5	1	—	40	28	20	7	2	1	88	3
Gymn. RIMAVSKÁ SOBOTA: celkem 86 bodů, řešitel 1														
Vrto Imrich	6	4	3	4	2	1	2	26	18	6	3	2	86	4
Gymn. SLANÝ: celkem 18 bodů, řešitel 1														
Hašlar Vladimír	—	3	—	—	1	—	—	18	—	—	7	—	18	20
Gymn. STRAKONICE: celkem 86 bodů, řešitel 1														
Horák Karel	7	3	3	3	3	1	44	24	18	5	5	2	86	4
Gymn. TÁBOR: celkem 25 bodů, řešitel 1														
Kočí Josef	2	—	—	5	—	—	25	—	—	12	—	—	25	16
SVŠ TOPOLEČANY: celkem 32 bodů, řešitel 1														
Hroščo Peter	4	—	—	—	4	—	20	12	—	15	8	—	32	12
Σ	103	78	32	70	24	12	725	462	196				1383	

Poznámky: Kolektiv*) (Gymn. JIHLAVA): Pavel Brada, Petr Málek, Vítězslav Zoufalý. Kolektiv**) (Gymn. PRAHA 6, Leninova): Lenka Divišovská, Dana Pýchová, Nina Vlčková.

a pedagogických) jich studuje mnoho. Stejné poměry byly před rokem 1918 (kdy ovšem dívkám bylo znemožněno studovat gymnasia a reálky) i za prvé republiky (kdy speciální dívčí ústavy měly v osnovách málo matematiky a kromě toho dívek studovalo méně a zaměstnaných žen bylo též mnohem méně než dnes).

4. *Celkový počet řešitelů (30) a počet řešitelů matematických úloh (21) v soutěži 1973 je mnohem lepší než r. 1972, kdy všech řešitelů bylo pouze 11.* — Rozhoduje asi vhodnost zadaných úloh. — Stále ovšem nedosahujeme čísel např. z let třicátých: V letech 1930, 1931 a 1932 bylo řešitelů z matematiky postupně 23, 41, 15.

5. *Řešitelů z malých měst by mělo být relativně více než z velkoměst, kde je mnohem pravděpodobnější rozptýlení žactva zábavami, sportovními a divadelními pořady.* Správnost této domněnky se letos ukázala. Velkoměsta mají: BRNO účastněných škol 2 (řešitelů rovněž 2), BRATISLAVA 2 (2); obě tedy právě tolik jako malé MICHALOVCE (ovšem úspěšnějších). Žádné účastníky nemají Plzeň, Ostrava (a celý ostravský kraj), celé Slovácko, Hradec Králové, Most, severní Čechy, jižní Morava, střední a východní Slovensko. Mnoho zde asi zavinila nedokonalá kolportáž.

Příkrým nesouhlasem s hořejší domněnkou o nevýhodnosti velkoměst je — a byla i dříve — PRAHA s 5 zúčastněnými školami, 11 řešiteli a 568 získanými body.

Ale ještě překvapivějším je fakt, že ze všech pražských škol daleko vpředu vede — a vedla i v minulých letech — jediná škola: *Gymnasium Wilh. Piecka, Praha 2*, se 346 získanými body a 7 řešiteli, kteří se umístili ve všech kategoriích na předních místech. Můžeme jen blahopřát: učitelům, že mají tak nadané a vytrvalé žáky, a žákům k výborným a obětavým učitelům. Od obojích bychom rádi slyšeli o kořenech tohoto vítězství.

6. Potěšitelné je a též dříve tomu tak bylo, že jména mnohých účastníků se vždy až i ve třech ročnících po sobě následujících opakují, tj. získaný žákův zájem o matematiku (a vědy ji vyžadující) se změní v zálibu, ba dokonce vášeň. Vzbudit tuto zálibu jest hlavně úkolem učitelů! Rozhledy zde mají význam jen druhořadý. A jistě více než polovina těchto nadšenců se později věnuje studiu matematiky a technických věd. Ovšem lásku k matematice nutno pěstovat již od dětství!

7. *Nesnáz je s oceňováním řešitelů pracujících v kolektivu, neboť nelze ocenit řešitelské schopnosti každého z členů.* Proto další sledování jejich vývoje a šancí pro vysokou školu je nemožné. Vzorem zde asi byly sportovní závody mužstev, štafet apod.; ale tam se mlčky předpokládá, že výkonost všech členů je téměř stejná! Právě tak jako ve škole ne-

můžeme nechat klasifikační práci (např. maturitní, nebo zkouškovou na VŠ) písemnou psát v kolektivu, neboť potom klasifikace jednotlivce by byla nemožná, stejně i v naší soutěži a olympiádách navrhuje připustit jen výkon jednotlivců.

8. Zadané úlohy se téměř všechny ukázaly přibližně *stejně vhodné* — měreno zlomkem, počet získaných bodů dělený počtem řešitelů jednoho každého příkladu. V kategorii M, kde bylo 12 úloh, je průměrná hodnota zlomku 4,19, v kat. F (6 úloh) je 4,53, v kat. G (4 úlohy) je 4,45.

9. Navrhujeme dále zvětšit počet úloh na předválečnou úroveň: 20 pro M, 10 pro F a 5 pro G.

Důvod: větší možnost výběru a rozmanitost zájmu řešících.

10. Uvažme dnešní situaci studentů: školní rok jim prakticky začíná až koncem září (brigády, sběr chmele a jiné potřebné akce). A proto učitelé, v zájmu včasného a dobrého probrání učiva, začnou splnou vervou ukládat domácí úlohy a zkoušet. To zpravidla trvá aspoň do polovice ledna. A v tomto náboru prací obdrží čtenáři Rozhledů (opožděné) říjnové číslo, v němž je uveřejněna první polovice textů úloh, jichž řešení má být do ledna odesláno! Pak přijdou exkurze škol za lyžováním a hokejem, nový spěch s probráním stanoveného učiva a dalším termínem pro odeslání řešení (konec března) je skončena žákova možnost uplatnit se v soutěži.

Bylo by vhodné, kdyby redakce mohla sdělit řešitelům výsledky soutěže ještě před prázdninami. Tím budou informováni školní činitelé i žák, který se event. může tím vykázat při přihlašování na vysokou školu, rozhodne-li se. Žák postupující na střední škole dále nabude sebevědomí a chuti k další práci.

Námítka, že hlavní prázdniny mají být dobou odpočinku od „dřiny“, neobstojí: člověk nadšený hudbou, malířstvím, ba každý kutil naprosto nedbá, zda je v zaměstnání anebo na dovolené. A oduševnělý milovník matematiky bude i na letních procházkách, ve vlaku, při dlouhých čekáních a v nespavých nocích řešit (bez psaní) matematické příklady, jak činilo mnoho generací před ním. Odměnou bude mu duševní klid, filosofičtější světový názor a radost z vykonané práce.

A takové nadšené techniky, učitele, výzkumníky, zlepšovatele a vynálezce potřebuje společnost v dnešní době více než kdy předtím! Bude-me povděční čtenářům za připomínky k tomuto článku.

různé

Počátky radiotelegrafie

JOSEF KOTYK, Pardubice

Méně známý citát z římského básníka Vergilia¹⁾ říká: „*Inventas vitam juvat excoluisse per artes*“, což (volně přeloženo) znamená: „Jaká slast je vidět lidský život zušlechtěn vynálezy!“

Na exkurzích dějinami vědy a techniky neujdeme otázce, které vynálezy byly lidstvu nejprospěšnější. Anglický spisovatel T. B. Macaulay na ni odpovídá slovy: „Nejvíce prospěly civilizaci vynálezy, které sblížily vzdálené země.“

Jako červená nit vine se stránkami dějin vskutku neodolatelná touha člověka zvítězit nad prostorem a časem. Od nepaměti se lidé pokoušeli navazovat spojení na dálku, podávat na vzdálená místa zprávy co nejrychleji. Teprve však 19. století změnilo v základech míru a rytmus pozemské rychlosti. Již v jeho první polovině sblížily se země a národy, pokud jde o časovou a prostorovou vzdálenost, více než předtím za tisíce let. V třicátých letech 19. století staly se poprvé předmětem zkoumání možnosti, jak použít k přenášení zpráv do dálky energie elektrického proudu. Výkony elektromagnetických telegrafů budily úžas a přivodily v telekomunikacích opravdový převrat.²⁾ A to nebylo ještě možno v této době tušit, co lze očekávat od zázraku — bezdrátového spojení!

Úsilí o největší úspornost vysílání zpráv do dálky vyvrcholilo také již v 19. století vynálezem radiotelegrafie, tj. přenášení Morseových značek elektromagnetickými vlnami, o nichž bylo Maxwellem roku 1865 předpověděno a Hertzem roku 1887 experimentálně dokázáno, že mají stejnou podstatu a obdobné vlastnosti jako světlo. Nositelem zpráv se tak opět stal vlnivý děj, který se šíří rychlostí světla, jako v dávných dobách, kdy byla dávána znamení ohněm, nebo v dobách pozdější telegrafie optické. Paprsky světelné jsou tedy první bezdrátovou telegrafií vesmíru.

Hertzovy pokusy vzbudily po celém světě veliký ohlas a byly všude

¹⁾ Publius Vergilius Maro (70 až 19 před n. l.), největší epický básník římské literatury, proslul zejména velikou básní Aeneidou, složenou podle vzoru Homérova. Připomenutý citát čteme na rubu zlaté medaile, která je součástí Nobelovy ceny.

²⁾ V podrobnostech viz sborník „Devatenácté století slovem i obrazem“ (nakl. Jos. R. Vilímk v Praze), díl II, svazek 1.

s úspěchem opakovány. Z fyziků jedni pracovali na vědeckém výzkumu elektromagnetického vlnění, druzí se snažili o praktické využití Hertzova objevu. Pokusy, které v letech 1891 až 1893 konal slavný chorvatský badatel Nikola TESLA (1856—1943), „Slovanský Edison“, znamenají v podstatě již epochální začátky radiotelegrafie. O prohloubení laboratorních zkušeností a realizaci zázraku bezdrátového spojení vzdálenějších pozemských stanic elektromagnetickými vlnami se pak nejvíce zasloužili Rus Alexander Stěpanovič POPOV (1859 až 1906) a Ital Guglielmo Marchese MARCONI (1874—1937). Okolnost, že na základních principech radiotechniky pracovali na sklonku 19. století také další badatelé různých národností, Němec Karl Ferdinand BRAUN (1850—1918), Slovák Jozef MURGAŠ (1864 až 1929) aj., dokazuje přesvědčivě, že devadesátá léta minulého století byla k objevu radiotelegrafie velmi zralá. Skutečnost pak, že Popov se narodil před 115 lety, Murgaš před 110 lety, Marconi před 100 lety, dodává našim vzpomínkám právě letos časovosti.

Alexander Stěpanovič POPOV se narodil dne 16. března 1859 ve vesnici Turjinskije Rudniki (dnešním Krasnoturjinsku) ve Sverdlovské oblasti na Urale. Problémem bezdrátové telegrafie se zabýval již za studií na matematicko-fyzikální fakultě university v Petrohradě. Střediskem ruského technického snažení stala se však v době, o níž píší, námořní kolej, založená právě před 100 lety roku 1874 v Kronštadtě. Roku 1883 se Popov stal přednostou jejího Fyzikálního ústavu a vedl kurs praktické fyziky, zvláště elektrotechniky. Sestrojil Teslův transformátor a úspěšně demonstroval pokusy Teslovy i Hertzovy s elektromagnetickými vlnami. Svou pozornost soustředil nejprve na technické vybavení stanice přijímací. Do přijímacího obvodu zapojil pilinový detektor (dnes již málo známý koherer), jehož činnost předváděl na svých přednáškách od roku 1890, kdy jej vynalezl francouzský fyzik Edouard Branly. Byla to (viz obr. 1) skleněná trubička



Obr. 1. Koherer Branlyho

uzavřená dvěma kovovými válečky; prostor mezi nimi byl vyplněn ne příliš hustě směsí niklových a stříbrných pilin. Jsou-li piliny seskupeny volně, kladou tak veliký odpor, že zvonek s kohererem do vedení zapojený nezvoní. Dopadne-li však na koherer elektromagnetické vlnění, přeskakují mezi kovovými pilinami jiskřičky, dotyk pilin se zlepší a odpor kohereru velmi značně klesne; zvonek začne zvonit a zvoní

i tehdy, když vlnění přestalo docházet. Zvonění ustane teprve, když poklepem na trubičku porušíme dobrý dotyk pilin a koherer obnoví původní značný odpor.

V roce 1895 zaslal Popov ruské Fyzikálně-chemické společnosti důležitou zprávu, v níž pojednává o vynalezení antény. Dne 7. května 1895 předvedl svůj radiotelegrafický přijímač poprvé veřejně. Pokus proběhl s plným zdarem. Popov prohlásil tedy právem, že problém bezdrátové telegrafie je v podstatě rozřešen. Dne 7. května 1895 se začalo nové období v dějinách telekomunikací — vývoj radiotelefrafie. Popov získal zároveň světový primát ve vynálezu radiotelefrafie a stal se jejím skutečným zakladatelem. 7. květen se stal dnem historicky památným a slaví se v SSSR každoročně jako DEN ROZHLASU.

Popov nazýval svůj radiotelefrafický přijímač grozometčik = ohlašovatel bouřky. Vysílání elektromagnetických vln obstarávala laboratoř přírody, mohutná elektrická jiskra — blesk. Jiskrový výboj kondenzátoru studoval v letech 1858 a 1859 Wilhelm Feddersen, profesor fyziky v Lipsku. Pozoroval jej v otáčivém zrcadle. Shledal, že jednotlivé jiskry se rozložily ve veliké množství jiskřiček, jež následovaly velmi rychle za sebou, a to střídavě opačnými směry. Tím bylo dokázáno, že výboj kondenzátoru není jednoduchý, nýbrž mnohonásobný, oscilační (kmitavý). Hertz vzbuzoval elektromagnetické vlny oscilátorem, který se skládal ze dvou mosazných tyčí, opatřených kuličkami; mezi nimi přeskakovaly jiskry z induktoru. Také Popovovo původní vysílací zařízení využívalo tlumených elektrických kmitů, buzených elektrickou jiskrou (vysílač jiskrový). Popov upravil Hertzovo pokusné zařízení pro vysílání i příjem Morseových značek a předvedl celou soupravu při přednášce na universitě v Petrohradě dne 24. března 1896. Vysílací a přijímací stanice, umístěné v různých ústavech university, byly vzdáleny přibližně 250 m. V roce 1897 vykonal Popov další úspěšné pokusy o radiotelefrafické spojení přístavu v Kronštadtě s lodí na moři na vzdálenost 640 m, nepřízeň ministerstva zahraničí znemožnila mu však další práce na technickém zdokonalení vynálezu. Tak se stalo, že Ital Marconi, navázav tím na vynález Popovův a na vynálezy četných jiných pracovníků na tomto poli, hlásil se sám o poctu vynálezce bezdrátové telegrafie.

Guglielmo Marchese MARCONI se narodil dne 25. dubna 1874 v Griffone u Bologne v Itálii. V literatuře bývá líčen jako mimořádně nadaný, velmi pilný, v práci vytrvalý a dovedný. Pokusy telegrafovat bez drátu zabýval se již za studií na universitě v Bologni. Elektromagnetické vlny produkoval a vysílal zcela jednoduše: klíčem spojoval a přerušoval primární obvod cívky, která byla zapojena do oscilátoru



Obr. 2. Oscilátor Righiho

Righiho.³⁾ Jeho jiskřiště (viz obr. 2) tvořily čtyři koule; prostřední C_1 , C_2 , větší, byly uzavřeny ve válcovitém pouzdře naplněném vazelínovým olejem, krajní, c_1 , c_2 , menší, byly spojeny s póly sekundární cívky Ruhmkorffova⁴⁾ induktoru (transformátoru). Při výboji vznikaly tři jiskry, z nichž prostřední byla účinná. Dlouhý drát, vztyčený do vzduchu a přes jiskřiště uzemněný, tvořil vysílací anténu. Zařízení přijímací stanice bylo obdobné zařízení Popovovu. Podrobnější popis kompletní radiotelegrafické soustavy Marconiho přenechávám již čtenáři podle připojeného obrázku (viz obr. 3).⁵⁾

Naše líčení dějinného vývoje telekomunikací⁶⁾ na sklonku 19. století by nebylo úplné, kdybychom nepřihlédli ještě k osobním vlastnostem obou badatelů. Vynález radiotelegrafie, s nímž Popov vystoupil roku 1895, si nedal patentovat. V době od září 1895 do února 1896 vyřešil

³⁾ Agosto Righi (1850–1920) byl profesorem fyziky na universitách v Palermu a v Bologni. Sestrojil také rezonátor pro dopad elektromagnetických vln jako zrcadlo, jehož postroubřenou stranu až na úzký proužek oškrabal, proužek jemně rozřízl a shledal, že při dopadu elektromagnetických vln v řezu přeskakovaly jiskřičky.

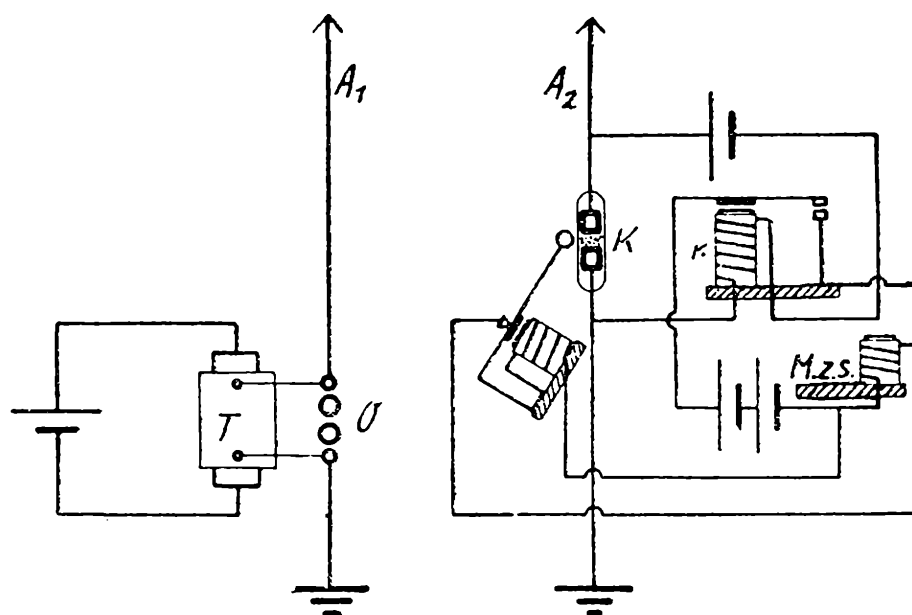
Objevil také závislost odporu vizmutu na intenzitě magnetického pole.

⁴⁾ Německý mechanik Heinrich Ruhmkorff (1803–1877) zařídil si roku 1839 v Paříži dílnu na výrobu fyzikálních přístrojů. Induktor (transformátor) po něm nazvaný — dnešní ruhmkorff — sestrojil v letech 1850 a 1851. Roku 1855 vystavil jej na Světové výstavě v Paříži, dostal za tento vynález první vyznamenání, byl jmenován rytířem Čestné legie a obdržel Voltovu cenu 50 000 franků.

⁵⁾ Značky v něm užití A_1 , A_2 znamenají antény, M. z. s. Morseův zapisovací stroj, r. relais, O = oscilátor Righiho, K = koherer Branlyho, T = transformátor Ruhmkorffův.

Všimněte si zejména také velmi účelného umístění kohereru: Palička kotvy elektromagnetu tlučí střídavě na zvonek a na koherer. Při této úpravě vede koherer proud, jen pokud docházejí elektromagnetické vlny. Jakmile přestanou docházet, ihned přestane zvonek znít.

⁶⁾ Viz také autorovy články „Vývoj telekomunikací“ a „Z dějin telegrafie“ v ROZHLEDECH roč. 50, čís. 9 a 10.



Obr. 3. Radiotelegrafická soustava Marconiho

problém bezdrátové telegrafie také již mladý Marconi a získal na něj ihned první patent. Na lákavé nabídky z ciziny, aby svůj vynález odprodal, odpověděl skromný a hluboce vlastenecky citící Popov památnými slovy: „Já, Rus, mohu všechny své vědomosti, všechnu svou práci i veškeré její výsledky dávat jedině své vlasti.“ Marconi, po otci Ital, po matce Ir, se po zdaru provedených pokusů roku 1896 odebral do Anglie a roku 1897 založil s pomocí anglických finančníků společnost „Marconi's Wireless Telegraph Company“ Dobrý obchodník! V roce 1897 vysílal radiotelegrafické zprávy již na vzdálenost 18 km, roku 1898 uvedl v radiotelegrafické spojení jachtu Osborne s Ladywood-Cottage, v roce 1899 telegrafoval přes La Manche, roku 1901 přes Atlantský oceán z Poldhu v Cornwallu do St. Johns na New Foundlandu, roku 1902 mezi Anglií a Kanadou — nebylo roku, aby Marconi, finančně dobře zajištěn, nepřekvapil svět novým úspěchem. Se stejnou pravidelností následovaly další Marconiho vynálezy: Roku 1902 magnetický detektor, roku 1903 duplexní radiotelegrafie, roku 1904 rotační jiskřiště, roku 1905 vodorovná směrová anténa atd. V roce 1909 byla Marconimu (spolu s Braunem) v uznání velkých zásluh o rozvoj radiotelegrafie udělena Nobelova cena. Spory o prioritu v radiotelegrafickém přenosu prvních signálů se však hlavně zásluhou Marconiho společníků-finančníků vlekly dále. Teprve když všichni hrdinové našeho vyprávění zemřeli (Popov dne 13. ledna 1906, Marconi dne 20. července 1937, Tesla dne 7. ledna 1943), Nejvyšší federální soud USA rozhodl o věci tím, že základní Marconiho patenty — zrušil.

Nebylo udělení Nobelovy ceny Marconimu snad také omylem ?

Nobelova cena za rok 1909 zůstala přiznána německému fyzikovi Karlu Ferdinandu BRAUNOVÍ,⁷⁾ autoru radiotelegrafie la-
děné. Braun omezil některé nedostatky dosavadní radiotelegrafie (vlny
vysílané soustavou Marconiho byly velmi tlumené, mohly být přijaty
všemi stanicemi v okolí aj.). Braunovou soustavou se podařilo roku 1914
realizovat jako další technický zázrak přenos radiotelegrafických zpráv
ze stanice Nauen u Berlína až do západní Afriky na vzdálenost skoro
10 000 km.

V pokročilém 20. století budeme proto snad věřit v zázraky?

Podle známých slov anglického spisovatele Gilberta Keitha
Chestertona, vrstevníka Marconiho (narodil se právě před 100 lety
v témž roce 1874 jako Marconi; zemřel v roce 1936, o rok dříve než
Marconi), je v době technické revoluce „zázrak — květem nut-
nosti!“ Ukázal jsem vám, milí čtenáři, že podle slov téhož spisovatele
„na zázracích je zvláštní právě to, že — se dějí...“

recenze

Dr. Josip Kleczek: **SLUNCE A ČLOVĚK**

Academia Praha 1973, Nové obzory vědy sv. 15, 212 str., 80 obr., 29 Kčs

Knihy dr. J. Kleczky, jednoho z předních vědeckých pracovníků
Slunečního oddělení AÚ ČSAV v Ondřejově, vychází v době, kdy ji
nejvíce potřebujeme, neboť kosmonautika a astronomie se dostávají
stále důrazněji do popředí zájmu nejširší veřejnosti. Zároveň i na ško-
lách se stále prohlubuje význam vyučování této oblasti přírodních věd.

Otázky, které bylo dosud možno studovat v jednotlivých odborných
a vědecko-populárních časopisech izolovaně, nacházíme v uvedené publi-
kaci zpracované komplexně a neobyčejně přitažlivou formou.

Čtenáře upoutá vztah člověka ke Slunci, vyjádřený v průběhu dějin
lidstva v literatuře a poezii, v hudbě, výtvarném umění i v architektuře.

Pro učitele bude cennou a dnes již nezbytnou pomůckou přehled nej-
novějších fyzikálních vlastností a údajů o Slunci (objem, hustota, teplo-
ta, tlak na povrchu a v nitru...), popis vzniku a vývoje Slunce, vzniku

⁷⁾ Z přístrojů, jež sestrojil, jsou čtenářům známy např. Braunův elek-
troměr, Braunova trubice, užívaná ke studiu katodového záření aj.

planetární soustavy, záření v nitru i v atmosféře, základ spektrální analýzy a rozbor Fraunhoferových čar, záření v zemské atmosféře a vliv magnetosféry. Kniha nám přibližuje období vzniku vesmíru v dobách před 10 miliardami roků, vývoj vesmíru a zánik jednotlivých hvězd.

Možnost využití mocné energie obrovského přírodního termionukleárního reaktoru jako zdroje veškerého pohybu a dárce života na Zemi je rovněž jednou z ústředních myšlenek.

Knihu uvítají jak učitelé, tak i studenti a neměla by chybět v žádné knihovničce fyzikálních kabinetů.

Podle edičního plánu publikace vyjde v prosinci 1973.

Prof. A. Bezděk, G Říčany

Základy astronomie v příkladech

RNDr. J. ŠIROKÝ - RNDr. M. ŠIROKÁ

Koncem roku 1973 vydalo Státní pedagogické nakladatelství v Praze ve druhém vydání publikaci, jejíž autory znají čtenáři našeho časopisu z mnoha astronomických článků. Ačkoliv je tato kniha určena vysokoškolským studentům, mohou ji studovat i žáci nejvyšších tříd středních škol, neboť v úvodu každé kapitoly jsou shrnuty nejdůležitější pojmy, veličiny a vzorce, potřebné k řešení příkladů. U všech 300 příkladů je připojen výsledek; některé příklady jsou řešené, u jiných je naznačen postup řešení.

Obsah knihy je rozdělen do pěti kapitol. V první kapitole jsou probrány základy sférické astronomie, ve druhé sluneční soustava a ve třetí základy astrofyziky. Čtvrtá kapitola se týká hvězdného vesmíru a poslední, pátá kapitola, astronomických přístrojů. V textu je 19 tabulek, v závěru pak dalších devět tabulek. K větší názornosti slouží 52 obrázků. Jako doplněk k první kapitole je připojen návod, jak se určuje z polohy hvězd střední sluneční čas.

Knihu doporučujeme všem vážným zájemcům o astronomii, kteří se nespokojí jen s četbou populárních článků, ale snaží se poznat metody a způsoby, jak se určují některé údaje o planetách, hvězdách a hvězdných soustavách. Recenzovaná kniha vyšla v edici Vysokoškolské příručky a cena vázaného výtisku je 15 Kčs.

O. L.

matematické zábavy

Víte, co je . . . ?

Nedovedeme si náležitě představit, co pro náš národ znamenala obrozenecká doba. Díváme-li se na tuto dobu z odstupu 150 let, vidíme, že se tehdy kladly základní kameny k našemu životu vědeckému, kulturnímu i hospodářskému. Český jazyk však neměl výrazy pro mnohé pojmy, a proto naši buditelé nové výrazy tvořili. Z r. 1824 se nám dochoval návrh na zčeštění asi 200 matematických výrazů. Šlo vesměs o doslovné překlady z latiny. Několik příkladů zde uvedu.

Zvícnost, zvícka = veličina (odvozeno od zvící); zvícník = matematik
stejnisko = znaménko rovnosti; vícko = znaménko sečítání; míňko =
= znaménko odečítání; zvícka sazecí neboli tvrdící = veličina kladná;
zvícka zapírací = veličina záporná; činec = činitel; součinec = součinitel,
koeficient; četník = čitatel; jmenovník = jmenovatel; kout =
= úhel; hnáty koutové = ramena úhlu; kout šurý = kosý úhel; tříhranník,
tříkoutník = trojúhelník; kolejník = rovnoběžník; routník =
= kosočtverec; stolík = lichoběžník; kolejnovec = rovnoběžnostěn;
skrojky homolové či kuželové = kuželoščky; páliště = ohnisko atd.

Doufám, že jste se tímto čtením dobře pobavili a že už víte, co to jsou hnáty koutu šurého. Úmyslně jsem uváděl výrazy, které se nevžily a poněvadž jsou nezvyklé, působí směšně. Nezapomeňme však, že asi z téže doby a snad od týchž autorů pocházejí tyto výrazy: poučka, podíl, zlomek, posloupnost, mocnost, přetržitý, bod, přímka, křivka, plocha, tětíva, soustředný a mnoho jiných. Po tomto zjištění se mi už ty dřívější výrazy nezdály být tak k smíchu. A vám?

S. H.

Nejmladším čtenářům

1. Ukažte, že číslo $5 + 4^n$ je pro každé přirozené n dělitelné třemi!
2. Dokažte, že číslo $8^{2n} - 3^{2n}$ je vždy dělitelné 55 pro každé přirozené $n \geq 1$.
3. Tři různá reálná čísla a, b, c se dají uspořádat podle velikosti třeba tímto způsobem:

$$\left. \begin{array}{l} a < b \\ b < c \end{array} \right\} \Rightarrow a < b < c$$

- a) Můžete uspořádat reálná čísla v, x, y, z platí-li

$$z > x, v > x, y > v, z < y, z < v?$$

- b) Uspořádejte pět reálných čísel k, l, m, n , platí-li

$$1 > n, p > 1, m > p, p < k, p > n, m < k, n < m,$$

$$k > 1, n < k !$$

4. Jedno auto z taxi-slужby ujelo za čtrnáct dnů 3 200 km, druhé auto stejné značky ujelo 2 400 km a spotřebovalo o 72 litrů pohonné hmoty méně. Kolik litrů pohonných hmot spotřebovala obě auta za 14 dní, předpokládáme-li jejich spotřebu na 100 km stejnou?

5. Doplňte zbývající cifry!

$$18?4?2? \quad ?8? = 6?9?$$

$$1429$$

$$??1?$$

$$??96$$

$$0$$

$$??7? \times ?9?$$

$$?43??$$

$$7????5$$

$$??6??$$

$$4????35?$$

Řešení příkladů ze str. 287:

$$\begin{aligned} 1. \quad 5 + 4^n &= 9 - 4 + 4^n = 9 + 4 \cdot (4^{n-1} - 1) = \\ &= 9 + (2^{n-1} - 1) \cdot (2^{n-1} + 1) \end{aligned}$$

Třemi je dělitelný buď výraz v první nebo v druhé závorce.

$$\begin{aligned} 2. \quad 8^{2n} - 3^{2n} &= 64^n - 9^n = (64 - 9) \cdot (64^{n-1} + \dots) = \\ &= 55 \cdot (64^{n-1} + \dots) \end{aligned}$$

3. a) Nerovnosti uspořádáme takto:

$$\left. \begin{array}{l} y > v, y > z, \\ v > x, v > z \\ z > x \end{array} \right\} \Rightarrow v > z > x \quad \left. \right\} \Rightarrow y > v > z > x$$

b) Obdobně:

$$\left. \begin{array}{l} k > p, k > m, k > l, k > n, \\ m > p, m > n, \\ p > l, p > n \\ l > n \end{array} \right\} \Rightarrow m > p > l > n \quad \left. \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k > m > p > l > n$$

4. Na 800 km je třeba 72 litrů pohonných hmot. Na sto kilometrů je třeba 9 litrů. — Bylo spotřebováno $9 \cdot 56$ litrů = 504 litry.

$$\begin{array}{r} 5. \quad 1\,864\,926 : 287 = 6\,498 \\ \quad 142\,9 \\ \quad 28\,12 \\ \quad 2\,296 \\ \quad \quad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\,575 \cdot 498 \\ \quad 34\,300 \\ \quad 7\,717\,5 \\ \quad 686\,00 \\ \hline 4\,270\,350 \end{array}$$

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

argument
arithmetic
 arithmetic progression
arm
around
arrange
arrangement
ascending
assertion
associative
assumption
asterisk
asymmetric
asymptotic line asymptote
at least
at random
at the most
attitude
automorphism
auxiliary
average
axiom
axiomatic
axial symmetry
axis (pl. axes)
 major axis
 minor, conjugate axis
 rectangular axes
axonometry

argument
aritmetika, aritmetický
 aritmetická posloupnost
rameno
kolem
uspořádat
uspořádání, permutace
rostoucí
tvrzení
asociativní
předpoklad
hvězdička
asymetrický
asymptota
nejméně, aspoň
náhodně
nejvýše
přístup, postoj
automorfismus
pomocný
průměrný, průměr
axióm
axiomatický
osová souměrnost
osa
 hlavní osa
 vedlejší osa
 pravoúhlá soustava souřadnic
axonometrie

B

base	základ, podstava, základna
basic	základní
basis	báze
battery, batch	soubor (statistický)
behaviour	chování
between	mezi
bilinear function	bilineární funkce
binary number system	dvojková soustava
binary operation	binární operace
binomial	dvojčlen, binomický
binomial coefficient	binomický koeficient
binomial expansion	binomický rozvoj
binomial theorem	binomická věta
bipartite	sudý, skládající se ze dvou částí
bisect	půlit
bisector	osa
perpendicular bisector	osa úsečky
bisector of an angle	osa úhlu
bisector of a side	osa strany
block graph	blokdigram
Boolean algebra	Booleova algebra
bound	mez
greatest lower bound	infimum
least upper bound	supremum
lower bound	dolní mez
upper bound	horní mez
boundary	obvod, hranice
boundary point	hraniční bod
bounded	ohraničený, omezený
brace	složená závorka, příčka
brackets	závorky (zpravidla lomené)
branch	větev
breadth	hloubka, šířka
Briggs' logarithm	Briggsův (dekadický) logaritmus
broken line	lomená čára
bundle of planes	trs rovin

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

7

ROČNÍK 52, 1973-1974, BŘEZEN



ROČNÍK 52
BŘEZEN 1974

7

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, CSc., Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1974.

OBSAH

O B S A H

Prof. E. Kraemer: Na počátku roku 1974	289
A. Wohlmuthová: Konvexní množiny .	289
J. Zahradník: Dva způsoby zadání booleovských funkcí	295
Dr. O. Odvárko: Sčítat nebo násobit?	298
Dr. J. Skuhra: Problém divokých kachen a kombinatorické výpočty .	303
Š. Ilaš: Topologická historka	305
Dr. M. Hladký: O konečných automatech a jejich některých vlastnostech .	310
S. Horák: Kadeřávkova konstrukce normál-elipsy	316
Doc. O. Setzer: Umíte sestrojít čtverec pouhým kružítkem?	319
Dr. P. Ferko: Tunelový efekt .	320
Dr. M. Bernařík, dr. M. Šíroká: Jak jezdit v klopené zatáčce	324
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Saturnův prstenec	329
Recenze:	334
Ze zahraničních časopisů .	336
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	3. a 4. str. obálky

Na počátku roku 1974

V prosinci r. 1973 jsme vzpomenuli třicátého výročí podepsání československo-sovětské spojenecké smlouvy, na něž navázala jednání o spolupráci hlavních směrů českého a slovenského odboje ve druhé světové válce i jednání o zásadách budoucího uspořádání poměrů v Československé republice. Již tehdy bylo požadováno budování společného státu Čechů a Slováků na základě principu naprosté rovnoprávnosti obou národů, a to tak, aby tento stát byl uspořádán spravedlivě nejen národnostně a politicky, ale také sociálně. K důsledné realizaci všech těchto požadavků však došlo až po Únoru 1948.

V dalším vývoji je významným mezníkem ústavní zákon o československé federaci; páté výročí jeho platnosti jsme oslavili právě na Nový rok 1974.

Vzpomínáme-li však těchto výročí, činíme tak s oprávněným uspokojením nad dosaženými úspěchy i s přesvědčením o jasné perspektivě dalšího rozvoje ČSSR v rámci mezinárodní dělby práce všech socialistických států v čele se Sovětským svazem.

Prof. Emil Kraemer

matematika

Konvexní množiny

ANEŽKA WOHLMUTHOVÁ, prom. fyz., ČVUT Praha

Teorie konvexních množin a konvexních funkcí patří k novějším partím matematiky. Většina výsledků pochází z první poloviny XX. století. Dnes je tato teorie podrobně propracována a našla široké použití jak v matematice samé, tak i mimo ni.

Nežli řekneme, co rozumíme konvexní množinou, zopakujme si několik pojmů:

Definice: Množinu všech uspořádaných n -tic $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazveme n -rozměrným prostorem a označíme $\mathbf{R}^n$.

Prvky prostoru $\mathbf{R}^n$ (tj. příslušné uspořádané n -tice) nazýváme též body prostoru $\mathbf{R}^n$. Značíme

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazýváme souřadnicemi bodu X .

Např. jednorozměrným prostorem je množina $\mathbf{R}^1$ všech reálných čísel. Jelikož existuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi reálnými čísly a body přímky, je geometrickou interpretací prostoru $\mathbf{R}^1$ přímka. Podobně $\mathbf{R}^2$ je prostor všech uspořádaných dvojic reálných čísel; obrazem prostoru $\mathbf{R}^2$ je rovina.

Vztahy „rovnost“, „větší než“, „menší než“ a početní operace součet, součin zavedeme v $\mathbf{R}^n$ tímto způsobem:

Definice: Řekneme, že dva prvky $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ prostoru $\mathbf{R}^n$ jsou si rovny, rovnají-li se všechny jejich vzájemně si odpovídající souřadnice, tj. platí-li $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$ a píšeme $X = Y$.

Stručně bychom mohli psát: $X = Y \Leftrightarrow x_i = y_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. V opačném případě říkáme, že X a Y jsou různé a píšeme $X \neq Y$.

Definice: Řekneme, že $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je větší než $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, právě když $x_i > y_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Zapisujeme

$$X > Y.$$

Podobně definujeme vztahy $X < Y, X \geq Y, X \leq Y$. Přitom mezi dvěma prvky prostoru $\mathbf{R}^n$ nemusí platit ani jeden z těchto vztahů.

Příklad: Mějme čtyři body prostoru $\mathbf{R}^2$:

$$A_1 = \left(\frac{1}{2}, 3\right), A_2 = (-1, 2), A_3 = \left(\frac{1}{2}, -3\right), A_4 = (1, \sqrt{2}).$$

Zřejmě je

$$A_2 < A_1, \quad A_3 \leq A_1,$$

ale mezi A_1 a A_4 neplatí žádný z výše uvedených vztahů.

Definice: Součtem prvků $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ prostoru $\mathbf{R}^n$ nazýváme prvek $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, jehož každá souřadnice je součtem odpovídajících souřadnic prvků X a Y ; tedy $z_i = x_i + y_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Píšeme

$$Z = X + Y$$

Prvek $O = (0, 0, \dots, 0)$ nazveme nulovým prvkem prostoru $\mathbf{R}^n$,

prvek $-X = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ opačným prvkem k prvku $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definice: Rozdílem prvků $X - Y$ rozumíme součet prvku X a prvku opačného k Y . Tedy

$$X - Y = X + (-Y).$$

čili $X - Y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (-y_1, -y_2, \dots, -y_n) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$.

Příklad: Nechť A_1, A_2 jsou body prostoru $\mathbf{R}^3$ o souřadnicích $A_1 = (2, 3, 6)$, $A_2 = \left(-2, 0, \frac{1}{3}\right)$. Spočteme

$$A_1 + A_2 = \left(2 + (-2); 3 + 0; 6 + \frac{1}{3}\right) = \left(0, 3, \frac{19}{3}\right),$$

$$A_1 - A_2 = \left(2 - (-2); 3 - 0; 6 - \frac{1}{3}\right) = \left(4, 3, \frac{17}{3}\right)$$

Pro zavedenou početní operaci sčítání platí nám známé zákony: komutativní

$$X + Y = Y + X$$

a asociativní

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z).$$

V dalším budeme ještě potřebovat pojem součinu reálného čísla a prvku prostoru $\mathbf{R}^n$.

Definice: Součin prvku $X \in \mathbf{R}^n$ a čísla $k \in \mathbf{R}^1$ je prvek $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ definovaný vztahem

$$Z = kX = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n).$$

Příklad: Nechť $A = \left(-1, 2, \frac{4}{5}\right)$ a $k = 5$, pak $kA = (-5, 10, 4)$.

Pojem přímky a úsečky v prostoru $\mathbf{R}^n$ zavedeme zobecněním obdobných pojmů z geometrie dvojrozměrného a trojrozměrného prostoru.

Definice: Přímkou procházející dvěma různými body $X_1, X_2 \in \mathbf{R}^n$ nazveme množinu všech bodů X , určených rovnicí

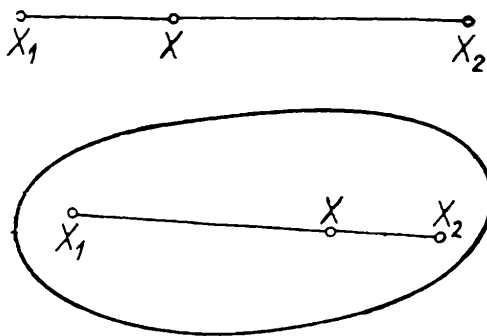
$$X = (1 - t) X_1 + tX_2,$$

kde t je parametr, který nabývá všech reálných hodnot, tj. $t \in \mathbf{R}^1$.

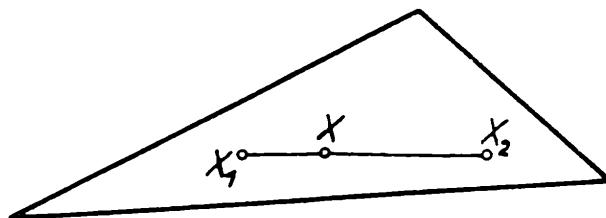
Definice: Úsečkou spojující dva různé body $X_1, X_2 \in \mathbf{R}^n$ rozumíme množinu bodů X , splňujících rovnici

$$X = (1 - t) X_1 + tX_2,$$

kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$.



Obr. 1a, 1b



Obr. c

Přepíšeme-li např. v prostoru $\mathbf{R}^2$ rovnici přímky

$$X = (1 - t) X_1 + tX_2$$

procházející body $X_1 = (x_1, y_1)$, $X_2 = (x_2, y_2)$ pomocí souřadnic, dostáváme

$$\begin{aligned} x &= (1 - t)x_1 + tx_2 \\ y &= (1 - t)y_1 + ty_2, \end{aligned}$$

kde $X = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $t \in \mathbf{R}^1$. Po úpravě vyjde

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1), \end{aligned}$$

což jsou z analytické geometrie nám dobře známé parametrické rovnice přímky.

Definice: Množinu bodů $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ prostoru $\mathbf{R}^n$, jejichž souřadnice $x_1, x_2, \dots, x_n$ splňují vztah

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n < a_0,$$

resp.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n > a_0,$$

kde $a_i \in \mathbf{R}^1$, $i = 0, 1, \dots, n$ a $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq \emptyset$, nazveme otevřeným poloprostorem prostoru $\mathbf{R}^n$.

V případě, že nerovnice z předchozí definice je neostrá, tj. má tvar

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq a_0,$$

resp.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq a_0,$$

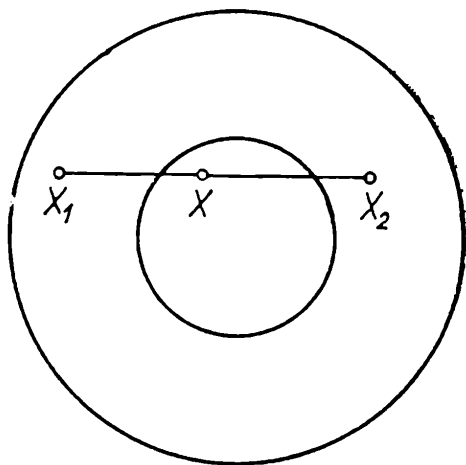
mluvíme o poloprostoru uzavřeném.

Nyní přistoupíme k definici konvexní množiny.

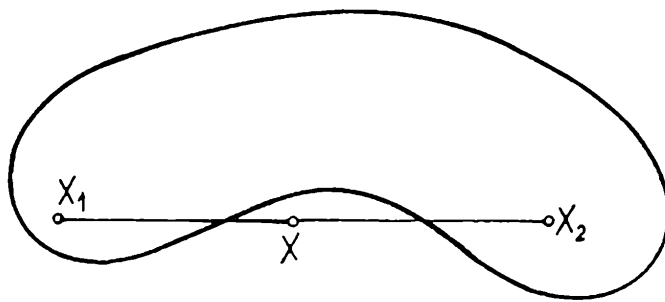
Definice: Množinu $K \subset \mathbf{R}^n$ nazveme konvexní množinou, jestliže pro každé dva body $X_1, X_2 \in K$ a každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$ je i bod

$$X = tX_1 + (1 - t)X_2$$

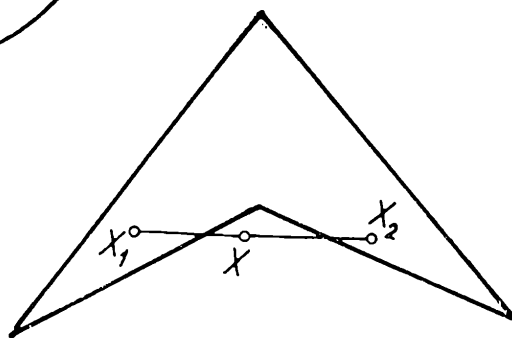
prvkem množiny K .



Obr. 2a



Obr. 2b



Obr. 2c

To znamená, že s každými dvěma body množiny K patří do K i všechny body úsečky, která tyto dva body spojuje.

Obrázky 1a, 1b, 1c jsou ilustrací dvojrozměrných případů konvexních množin; na obr. 2a, 2b, 2c jsou znázorněny nekonvexní množiny bodů.

Čtenář je jistě sám schopen uvést celou řadu konvexních útvarů: přímka, rovina, koule, krychle atd.

K procvičení definice nám poslouží následující příklady.

Příklad 1. Ukažte, že uzavřený poloprostor P je konvexní množina.

Podle definice je poloprostor P množina bodů $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, jejichž souřadnice splňují nerovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq a_0, \quad (1)$$

kde $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ a $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$. Abychom ověřili, že P je konvexní množina, musíme ukázat, že s každými dvěma body $X_1 \in P$, $X_2 \in P$ je i bod

$$X = tX_1 + (1 - t)X_2, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

bodem množiny P .

Nechť tedy $X_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}) \in P$, $X_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}) \in P$. Potom však jejich souřadnice splňují nerovnici (1); platí tedy

$$\begin{aligned} a_1x_{11} + a_2x_{12} + \dots + a_nx_{1n} &\geq a_0 \\ a_1x_{21} + a_2x_{22} + \dots + a_nx_{2n} &\geq a_0. \end{aligned}$$

Vynásobme první nerovnici t a druhou $(1 - t)$, což jsou obě čísla nezáporná, neboť t je podle předpokladu z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Dostáváme

$$\begin{aligned} t(a_1x_{11} + a_2x_{12} + \dots + a_nx_{1n}) &\geq ta_0 \\ (1-t)(a_1x_{21} + a_2x_{22} + \dots + a_nx_{2n}) &\geq (1-t)a_0. \end{aligned}$$

Obě nerovnice sečteme; po úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} a_1[tx_{11} + (1-t)x_{21}] + a_2[tx_{12} + (1-t)x_{22}] + \dots + \\ + a_n[tx_{1n} + (1-t)x_{2n}] \geq a_0. \end{aligned}$$

To však znamená, že bod $[tx_{11} + (1-t)x_{21}; tx_{12} + (1-t)x_{22}; tx_{1n} + (1-t)x_{2n}]$ je bodem množiny $\mathbf{P}$, což jsme měli dokázat.

Podobně bychom dokázali, že každý otevřený poloprostor je konvexní množina.

Příklad 2. Ukažte, že okolí $\mathbf{U}$ bodu $X_0 \in \mathbf{R}^n$ je konvexní množina.

Okolím bodu $X_0 \in \mathbf{R}^n$ nazýváme množinu $\mathbf{U}$ bodů $X \in \mathbf{R}^n$, které splňují nerovnici

$$|X - X_0| < \delta, \quad \delta \in \mathbf{R}, \quad \delta > 0.$$

Při důkazu tohoto tvrzení budeme postupovat stejně jako v minulém příkladě.

Nechť $X_1, X_2 \in \mathbf{U}$.

Chceme ukázat, že každý bod X , splňující rovnici

$$X = tX_1 + (1-t)X_2 \quad \text{při} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

je též prvkem množiny $\mathbf{U}$.

Zřejmě

$$\begin{aligned} |X_1 - X_0| &< \delta \\ |X_2 - X_0| &< \delta \\ X - X_0 &= t(X_1 - X_0) + (1-t)(X_2 - X_0) \\ |X - X_0| &= |t(X_1 - X_0) + (1-t)(X_2 - X_0)| \leq \\ &\leq t|X_1 - X_0| + (1-t)|X_2 - X_0| < t\delta + \\ &+ (1-t)\delta = \delta. \end{aligned}$$

To však znamená, že $X \in \mathbf{U}$.

Ověřovat pomocí definice, zda nějaká množina je či není konvexní, je práce zdoluhavá a mnohdy i obtížná. Uvedeme si nyní dvě kritéria, která nám usnadní rozhodnutí, zda množina je či není konvexní.

Věta 1. Nechť $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_n$ jsou konvexní množiny. Pak množina je konvexní.

$$\mathbf{L} = \mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2 \cap \dots \cap \mathbf{K}_n$$

Důkaz: Nechť X_1, X_2 jsou dva různé body množiny $\mathbf{L}$. To znamená, že

$$\begin{aligned} X_1 &\in \mathbf{K}_j \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \dots, n \\ X_2 &\in \mathbf{K}_j \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Označme l úsečku spojující body X_1, X_2 . Protože každá z množin $\mathbf{K}_j$ je podle předpokladu konvexní, je $l \subset \mathbf{K}_j$ pro $j = 1, 2, \dots, n$. Tedy

$$l \subset \mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2 \cap \dots \cap \mathbf{K}_n = \mathbf{L}.$$

Ukázali jsme, že úsečka l spojující libovolné dva body X_1, X_2 množiny L leží celá v L . Z toho plyne, že L je konvexní množina.

Příklad 3. Ukažte, že trojúhelník T je konvexní množina.

Množina T je průnikem tří polorovin, jejichž hraniční přímky obsahují strany T . Podle příkladu 1 je každá polorovina konvexní množinou. Podle věty 1 průnik konvexních množin je opět konvexní množina. Z toho plyne, že T je konvexní.

Příklad 4. Ukažte, že interval $I = \langle a, b \rangle$, $a \in \mathbf{R}^1, b \in \mathbf{R}^1$ je konvexní množina.

Toto tvrzení čtenář sám snadno dokáže.

V důkazu věty 1 jsme nikde nepoužili faktu, že počet množin K_j je konečný. Můžeme tedy zřejmě tuto větu vyslovit ještě obecněji.

Věta 2. Průnik libovolného počtu konvexních množin je konvexní množina.

Dva způsoby zadání booleovských funkcí

JAN ZAHRADNÍK, G. České Budějovice

V minulých ročnících Rozhledů jste se seznámili s Booleovou algebrou, s jejím axiomatickým základem a řadou jejích modelů; pracovali jste také s booleovskými funkcemi, hlavně z hlediska jejich aplikací. V tomto článku se budeme zabývat dvěma způsoby zadání booleovských funkcí a vztahem mezi nimi.

Omezíme se zde na dvouprvkovou Booleovu algebru obsahující pouze prvky 0 a 1, označíme $\mathbf{D} = \{0, 1\}$ a algebru budeme značit symbolem $[\mathbf{D}, +, \cdot]$; operace sčítání, násobení a inverze mají vlastnosti připomenuté znovu v článku o G. Booleovi ve 4. čísle tohoto ročníku Rozhledů.

Booleovskou funkcí o n proměnných, kde n je libovolné přirozené číslo, nazveme každé zobrazení f množiny $\mathbf{D}^n$ do množiny $\mathbf{D}$; přitom $\mathbf{D}^n = \mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \dots \times \mathbf{D}$ je množinou všech uspořádaných n -tic složených z nul a jedniček. Například

$$\mathbf{D}^2 = \{[0,0], [0,1], [1,0], [1,1]\},$$

$$\mathbf{D}^3 = \{[0,0,0], [0,0,1], [0,1,0], [0,1,1], [1,0,0], [1,0,1], [1,1,0], [1,1,1]\}.$$

Definičním oborem booleovské funkce n proměnných je množina $\mathbf{D}^n$, obor všech hodnot funkce je podmnožinou množiny $\mathbf{D}$. Rovnost dvou booleovských funkcí f, g definovaných v $\mathbf{D}^n$ vymežeme takto:

$$f = g \Leftrightarrow \forall [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbf{D}^n; f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Množina $\mathbf{D}^n$ obsahuje 2^n prvků, protože každý člen uspořádané n -tice nabývá hodnoty 0 nebo 1. Při konečném počtu prvků definičního oboru lze tedy funkci udat výčtem, který obvykle zapisujeme do tabulky, například:

$[x_1, x_2]$	$f(x_1, x_2)$
[0, 0]	1
[0, 1]	0
[1, 0]	0
[1, 1]	1

Další způsob zadání booleovské funkce úzce souvisí s pojmem booleovského polynomu. Každou proměnnou považujeme za booleovský polynom; jsou-li výrazy P_1, P_2 booleovskými polynomy, jsou jimi také výrazy $P_1 + P_2, P_1 \cdot P_2, P_1'$. Příklady booleovských polynomů jsou $x_1, x_2, x_1', x_2', x_1 + x_2, x_1 x_2, x_1 x_2 + x_3', x_2 x_1' + x_3 x_1' + x_1' x_2'$ atd. Takové polynomy budeme označovat velkými tiskacími písmeny, jejich hodnoty pak zapíšeme např. $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Budeme říkat, že jsme booleovskou funkci f proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ vyjádřili booleovským polynomem P , platí-li

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

pro každé $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{D}^n$. Označíme-li hodnotu funkce písmenem y , zapíšeme

$$f: y = P(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

tento způsob zadání booleovské funkce nazýváme zadání funkce rovnicí. Například $f: y = x$, $g: y = x_1 x_2 + x_1'$, $h: y = x_1 + x_1 x_2 x_3' + x_1' x_3$.

Je-li dána funkce rovnicí, například $f: y = x_1 x_2 + x_1' x_2'$, snadno pořídíme její tabulkový zápis; naše funkce f je tak zapsána ve výše uvedené tabulce, v pravém sloupci jsou zapsány hodnoty $f(0, 0), f(0, 1), f(1, 0), f(1, 1)$. Zabývejme se však problémem, zda lze každou funkci zadanou tabulkou vyjádřit též rovnicí pomocí booleovského polynomu. Dokážeme dvě věty:

Věta 1. Pro každou booleovskou funkci f proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ a pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ platí:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) + x_i' f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Důkaz je velmi jednoduchý a je založen na tom, že x_i může nabývat pouze hodnot 0 a 1. Nechť tedy $x_i = 1$, pak $x_i' = 0$ a na levé straně vzorce máme $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ stejně jako na pravé straně po dosazení. Je-li $x_i = 0$, pak $x_i' = 1$ a ověření rovnosti proběhne zcela obdobně.

Nahradíme-li $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ výrazem zapsaným v textu věty 1, říkáme, že jsme funkci *rozložili* podle i -té proměnné. Je jistě zřejmé, že můžeme danou funkci rozkládat postupně podle dalších proměnných. Pro funkce dvou proměnných získáme například rozklad:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 \cdot f(1, x_2) + x_1' \cdot f(0, x_2) = \\ &= x_1 x_2 \cdot f(1, 1) + x_1 x_2' \cdot f(1, 0) + x_1' x_2 \cdot f(0, 1) + x_1' x_2' \cdot f(0, 0). \end{aligned}$$

A nyní je již zřejmé, jak bychom k funkci dané tabulkou, kterou jsme uvedli výše, našli její vyjádření rovnicí $y = x_1 x_2 + x_1' x_2'$; dosadili bychom hodnoty $f(1, 1)$, $f(1, 0)$, $f(0, 1)$ a $f(0, 0)$ do zápisu rozkladu funkce podle obou proměnných.

Věta 2. Ke každé booleovské funkci f proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ existuje aspoň jeden booleovský polynom P , pro který platí:

$$f: y = P(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Důkaz. Pravdivost věty je zřejmá z výsledku, ke kterému vede postupné rozkládání funkce podle jednotlivých proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$. Čtenáři, kteří znají princip matematické indukce, mohou dát důkazu přesnější formu:

1. Ověříme pravdivost věty pro funkce jedné proměnné, ty jsou celkem čtyři a můžeme je zadat připojenou tabulkou:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	1	1	0	0
1	1	0	1	0

Tyto funkce můžeme vyjádřit polynomy takto:

$$f_1: y = x + x', f_2: y = x', f_3: y = x, f_4: y = x \cdot x' = 0.$$

2. Předpokládáme, že věta platí pro funkce proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$; dokážeme, že platí i pro funkce proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$. Funkční hodnotu $f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ vyjádříme podle věty 1 ve tvaru:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} \cdot f(x_1, \dots, x_n, 1) + x_{n+1}' \cdot f(x_1, \dots, x_n, 0).$$

Funkce $f_1: y = f(x_1, \dots, x_n, 1)$ a $f_2: y = f(x_1, \dots, x_n, 0)$ jsou funkce n proměnných, které můžeme podle předpokladu vyjádřit polynomy P_1, P_2 . Platí tedy pro všechny $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{D}^n$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} \cdot P_1(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}' \cdot P_2(x_1, \dots, x_n),$$

podle definice booleovského polynomu je i výraz na pravé straně booleovským polynomem. Tím je věta dokázána.

Zdůvodnili jsme tedy, že každou booleovskou funkci zadanou tabulkou můžeme vyjádřit rovnicí pomocí booleovského polynomu; přitom není vyloučeno, že polynom, který získáme bezprostřední aplikací popsaného postupu, lze podstatně zjednodušit. Čtenáři, který by se chtěl o této problematice poučit hlouběji, doporučuji prostudování literatury, věnované Booleově algebře.

Sčítat nebo násobit?

RNDr. OLDŘICH ODVÁRKO, MFF KU Praha

Přijali jsme dnes pozvání účastnit se jako hosté rodinné rady Novákových.¹⁾ Otec Novák zahájil zasedání zvoláním „*Buď fit!*“ a rozložil na stole turistickou mapu Posázaví. „*V neděli se jde na pěší túru. Očekávám vaše návrhy.*“ Po počátečních (zcela marných) protestech dospěla rodina k závěru, že by bylo nejlépe navštívit některá ze čtyř výletních míst, jež zde pro stručnost označíme A, B, C, D . Konkrétní návrhy jednotlivých členů rodiny lze stručně vyjádřit takto (na obrázku 1 je zjednodušený plánec, v němž jsou vyznačeny všechny turistické cesty spojující jednotlivá místa A, B, C, D):

Matka: „*Zvolme za výchozí bod místo C a projdeme se odsud buď do A nebo do B .*“

Otec (považuje tuto trasu za příliš krátkou): „*Navrhuji pochodovat z A do B přes C .*“

Jana: „*Já bych šla nejraději z C do A nebo z B do D .*“²⁾

Jirka: „*Myslím, že nejlepší výlet by byl z D do C .*“

Rodinná rada se chystá hodnotit všechny možnosti turistických tras, které skýtají jednotlivé návrhy. Jirka vyslovuje obavu, zda těchto možností nebude příliš mnoho.

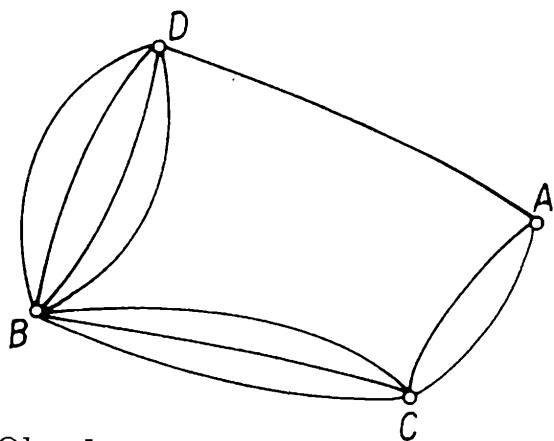
Jana rychle počítá: „*Matčin návrh dává celkem pět možností — dostaneme je tak, že sečteme počet možností výběru cest z C do A a cest z C do B . Otcův návrh poskytuje celkem šest možností; to je ihned vidět — stačí vynásobit mezi sebou počet cest z C do A a počet cest z C do B . Můj návrh...*“

Jirka ji přerušuje: „*To jsou podezřelé výpočty. Jednou sčítáš, podruhé násobíš — a v obou případech se vyskytují shodně cesty spojující C s A a C s B . Podle mne musí být počet možností v obou případech stejný. Mám pravdu nebo ne?*“

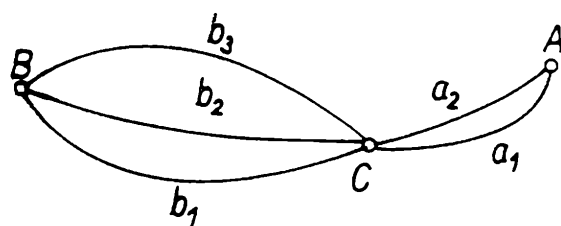
Podívejme se na oba návrhy podrobněji. Na obrázku 2 je část plánu z obr. 1; písmena a_1, a_2 označují možné cesty z A do C , písmena b_1, b_2, b_3 cesty z B do C .

¹⁾ Věrným čtenářům našeho časopisu není tato rodina tak zcela neznámá. Již jednou jsme jí pomáhali řešit určité rodinné problémy (r. 47, č. 10). Dnes se, bohužel, nesetkáme s babičkou Novákovou — je na zájezdu s klubem důchodců.

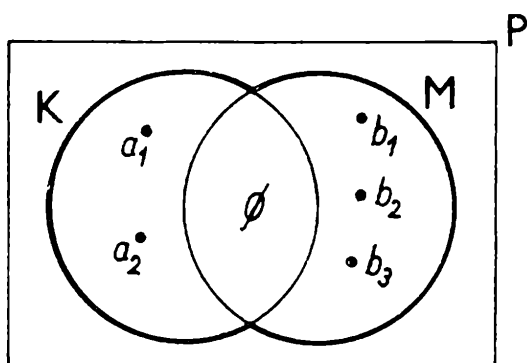
²⁾ Upozorňujeme čtenáře, že matka i Jana mají vždy na mysli realizovat pouze jednu z navrhovaných alternativ; „nebo“ chápou zcela samozřejmě ve smyslu vylučovacím. Přitom si nepředstavují, že by některou z navrhovaných tras šly „oklikou“ (např., že by pochodovaly z C do A přes B a D).



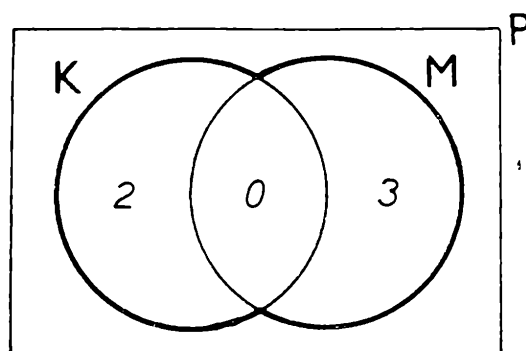
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Věnujme se nejprve matčinu návrhu. Podle něho se vydáme buď z C do A — zde můžeme vybírat ze dvou možností... a_1, a_2 , nebo půjdeme z C do B — tady máme tři možnosti výběru... b_1, b_2, b_3 . Celkem tedy existuje pět možností... a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 . Počet možných tras získáváme (v souladu s Janiným tvrzením) jako součet počtu turistických cest z C do A a z C do B .

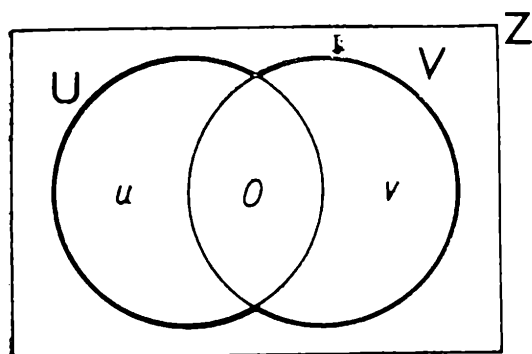
Převeďme tuto úvahu do jazyka množin: Nechť K označuje množinu všech možných turistických cest z C do A a M množinu všech cest z C do B . Je tedy $K = \{a_1, a_2\}$, $M = \{b_1, b_2, b_3\}$. Množina $K \cup M = \{a_1, a_2, b_1, b_2, b_3\}$ obsahuje všechny možné turistické cesty, jež vedou z C do A , a dále cesty z C do B .

Počet prvků množiny $K \cup M$ je roven součtu počtu prvků množin K a M .

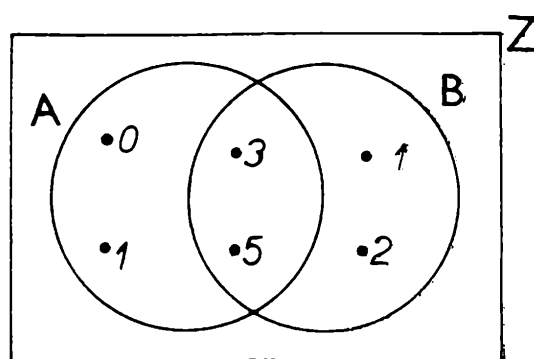
Naše úvahy lze ilustrovat též graficky. Na obrázku 3 je Vennův diagram pro množiny K a M (písmeno P značí množinu všech turistických cest v Posázaví) a na obr. 4 příslušný číselný Vennův diagram.

Oba tyto obrázky jasně ukazují, že množiny K a M nemají žádný společný prvek, čili že jsou disjunktní ($K \cap M = 0$).

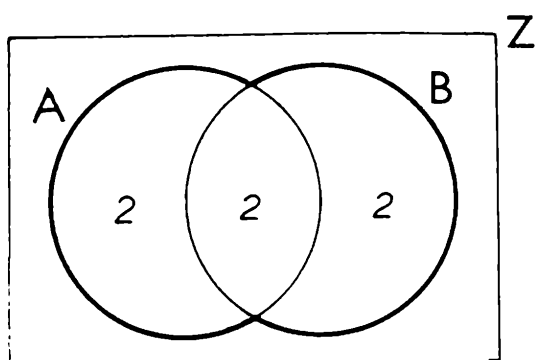
Velmi snadno už nyní dospějeme k tomuto obecnému závěru (promyslete jej):



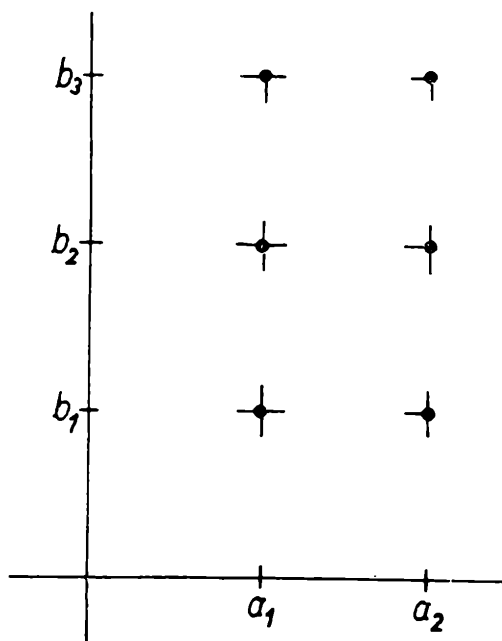
Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8

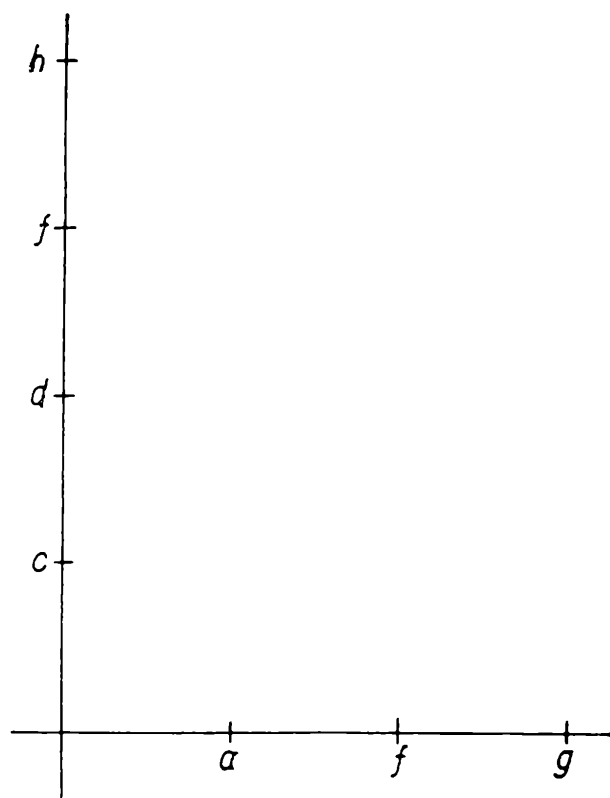
Nechť U , V jsou konečné množiny, jež jsou disjunktní ($U \cap V = \emptyset$), a jež mají po řadě u , v prvků (u , v jsou tedy jistá nezáporná čísla). Pak počet prvků množiny $U \cup V$ je roven $u + v$ (viz obr. 5).

Uvedené tvrzení bývá nazýváno pravidlem součtu (pro dvě množiny) a má značnou důležitost v kombinatorických úvahách.

Podívejme se na to, zda pravidlo součtu platí i pro množiny, které nejsou disjunktní. Lehce ukážeme, že nikoliv. Zvolme například množiny $A = \{0, 1, 3, 5\}$, $B = \{-1, 2, 3, 5\}$ — ty zřejmě disjunktní nejsou ... $A \cap B = \{3, 5\}$. Počet prvků množiny A je 4, množina B je též čtyřprvková; součet počtu prvků obou množin je tedy 8 — ale počet prvků množiny $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5\}$ je pouze 6. Tuto situaci opět dobře osvětlí Vennovy diagramy (obr. 6 a 7).

Tedy pozor! Pravidlo součtu platí jen pro disjunktní množiny.³⁾

³⁾ Obecným případem množin, jež nejsou disjunktní, se budeme v těchto souvislostech zabývat v příštím článku.



Obr. 9

Nyní se budeme věnovat počtu možností turistických tras, jež odpovídají otcovu návrhu. Vraťme se k obrázku 2. Z A do C můžeme putovat například po cestě a_1 a z C do B po cestě b_1 . Příslušnou trasu z A do B označme (a_1, b_1) . Všechny možné trasy získáme takto: Vybereme jednu z cest z A do C , například a_1 a postupně k ní „připojíme“ vždy jednu cestu z cest z C do B ; poté vezmeme druhou z možných cest z A do C , tj. a_2 , a opakujeme týž postup jako v prvním případě. Dostaneme těchto šest možností:

$$(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3).$$

Graficky můžeme všechny tyto možnosti znázornit tak, jak je uvedeno na obrázku 8. Na vodorovné přímce jsou zobrazeny jednotlivé cesty z A do C , na svislé přímce cesty z C do B . Kolečko, jež leží např. v průsečíku kolmic vedených body a_1, b_2 k příslušným přímkám, zobrazuje trasu (a_1, b_2) .

Z obrázku je dobře vidět, že celkový počet možností výběru turistické trasy z A do B dostaneme tak, že vynásobíme počet prvků množiny $\mathbf{K} = \{a_1, a_2\}$ počtem prvků množiny $\mathbf{M} = \{b_1, b_2, b_3\}$ (tedy i v tomto případě měla Jana pravdu).

Uvedme pro objasnění ještě jeden příklad. Mějme dány množiny $\mathbf{S} = \{a, f, g\}$, $\mathbf{T} = \{c, d, f, h\}$. Určeme počet všech možných dvojic, v nichž na prvním místě je prvek z $\mathbf{S}$ a na druhém místě prvek z $\mathbf{T}$. Přitom dvě dvojice budeme považovat za různé i v těch případech, když se „skládají“ z týchž prvků, ale liší se v pořadí svých členů — např.

(f, g) a (g, f) považujeme za různé dvojice. V takovýchto případech mluvíme o tzv. uspořádaných dvojicích.

Řešení úkolu plyne ihned z obrázku 9. Opět jako v předešlém příkladě dostaneme hledaný počet dvojic jakožto součin počtů prvků jednotlivých množin, tj. $3 \cdot 4 = 12$.

Všimněme si, že uvažované množiny S , T nejsou disjunktní (na rozdíl od množin K , M).

Naše úvahy lze zobecnit takto (promyslete):

Nechť P , R jsou konečné množiny (nikoliv nutně disjunktní), jejichž počty prvků jsou po řadě p , r . Počet všech uspořádaných dvojic, v nichž na první místo může být vybrán libovolný prvek z množiny P a na druhé místo libovolný prvek z R , je roven součinu počtu prvků množin P a R , tj. $p \cdot r$.⁴⁾

Uvedené tvrzení bývá nazýváno pravidlem součinu (pro dvě množiny).

Pomocí pravidel součtu a součinu určíme na závěr počet možností výběru turistické trasy podle Jirkova návrhu (viz obr. 1).

Označme písmenem F množinu všech cest z D do C přes B , písmenem G množinu všech cest vedoucích z D do C přes A . Platí zřejmě $F \cap G = \emptyset$ a můžeme tedy na množiny F , G použít pravidlo součtu.

Z obrázku 1 je dále vidět, že při výpočtu počtu prvků množiny F (resp. G) bude třeba vyjít z množin F_1 množina všech cest z D do B , F_2 množina všech cest z B do C (resp. G_1 množina cest z D do A , G_2 množina cest z A do C) a použít na ně pravidlo součinu.

Proveďte, že počet možností podle Jirkova návrhu je $4 \cdot 3 + 1 \cdot 2$, tj. 14.

Cvičení

1. Určete počet všech turistických tras, které odpovídají Janině návrhu.
2. Pokuste se formulovat pravidla součtu a součinu pro k konečných množin (k je přirozené číslo větší nebo rovné dvěma).

⁴⁾ Množina všech těchto uspořádaných dvojic se nazývá kartézský součin množin P , R a označuje se $P \times R$. Naše tvrzení lze pak formulovat také takto: Nechť P , R jsou konečné množiny, jejichž počty prvků jsou p a r ; potom počet prvků kartézského součinu $P \times R$ je roven $p \cdot r$.

Oprava. V č. 3 na str. 104_{5, 6, 7, 8} nahradte množinu M množinou N . Na str. 106₇ má být $p(J')$ místo $p(J)$.

V č. 2 na str. 53 v rovnosti (4) $+y_1$ místo $-y$.

Problém divokých kachen a kombinatorické výpočty

(Pokračování)

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

V minulém čísle Rozhledů jsme došli k poznání, že k vyřešení naší úlohy potřebujeme znát, kolik je všech různých možných případů střelby při lovu a kolik je všech různých možných případů, kdy se zachrání právě k kachen.

Úlohu snadno převedeme na určování počtu zobrazení s jistou vlastností. Označme množiny $M = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$, $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Grafy na obr. 1 nyní znázorňují různá zobrazení množiny M do množiny N .

Náš první úkol je určit počet všech různých zobrazení množiny M do množiny N . To je totéž jako určit počet všech uspořádaných desetic prvků množiny N , přičemž se prvky mohou v deseticích opakovat. Zobrazení z obr. 1 zapíšeme v těchto uspořádaných deseticích:

$$\begin{array}{ll} (1, 2, 0, 1, 6, 5, 2, 3, 9, 2), & (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3), \\ (5, 3, 2, 1, 4, 7, 9, 6, 8, 0), & (2, 2, 2, 4, 2, 7, 5, 8, 7, 8). \end{array}$$

Počet všech takových uspořádaných desetic určíme touto úvahou: Na první místo desetice můžeme zapsat libovolný prvek množiny N , to je 10 možností. Na druhé místo desetice můžeme zapsat opět libovolný prvek množiny N , nezávisle na tom, jaký je na 1. místě desetice, to je opět 10 možností. Na první dvě místa desetice můžeme tedy umístit prvky množiny N stem různých možností. Celkem je všech takových uspořádaných desetic 10^{10} .

Spočítejme nyní, kolik je možných případů, kdy se zachrání právě k kachen ($k = 0, 1, \dots, 9$). Vyberme si pevnou podmnožinu $P = \{a_1, a_2, \dots, a_{10-k}\}$ množiny N . Musíme spočítat, kolik existuje různých zobrazení množiny M na množinu P . Tím zjistíme, v kolika případech se zachrání právě kachny $a_{10-k+1}, \dots, a_{10}$.

Potřebujeme znát počet uspořádaných desetic, které budou obsahovat všechny prvky množiny P aspoň jednou. Výpočet provedeme tak, že vybereme z desetice uspořádanou $(10-k)$ -tici míst a tato místa zaplníme po řadě prvky $a_1, a_2, \dots, a_{10-k}$ a na zbývajících k místech umístíme prvky množiny P již libovolně. Výsledný počet pak bude dán součinem počtu možných výběrů uspořádaných $(10-k)$ tic míst a počtu možných obsazení k míst prvky množiny P , přičemž se mohou prvky opakovat. Druhého činitele už umíme určit; je roven $(10-k)^k$.

Prvního činitele určíme za chvíli. Zamysleme se napřed nad touto úlohou: Máme n různých prvků a zajímá nás, kolika různými způsoby je

můžeme uspořádat s podmínkou, že žádný prvek se neopakuje. Na 1. místo můžeme umístit libovolný prvek, tj. n možností. Na druhé místo nesmíme umístit ten prvek, který je na 1. místě, jinak máme volnost, tj. máme $(n-1)$ možností. Atd. Na poslední n -té místo můžeme umístit jeden prvek, neboť $(n-1)$ jich je již umístěno na předchozích $(n-1)$ místech. Celkem tedy existuje $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ různých možností, jak uspořádat n prvků. Toto číslo se značí $n!$ a nazývá n -faktoriál. Hodnoty faktoriálů máte v Matematicko-fyzikálních tabulkách na str. 47. Navíc se dělá úmluva: $0! = 1$.

Ptejme se dále: *Kolika různými způsoby můžeme n různých prvků uspořádat do k -tic ($0 \leq k \leq n$) tak, aby se prvky v k -ticích neopakovaly?* Podle postupu z předchozího případu dostáváme tento počet:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ptejme se do třetice: Množina A obsahuje n různých prvků. *Kolik existuje různých podmnožin množiny A obsahující právě k prvků ($0 \leq k \leq n$)?* Uvědomíme-li si, že $\{a, b\}$, $\{b, a\}$ jsou pouze různé zápisy téže množiny a že $\{a, b, b\}$ je nepřipustný zápis množiny, můžeme otázku formulovat jinak. Kolik je různých neuspořádaných k -tic z n různých prvků, přičemž žádný prvek se nesmí v k -tici opakovat? Úlohu vyřešíme velmi snadno. Počet všech uspořádaných k -tic z n prvků musí být roven součinu počtu všech neuspořádaných k -tic z n prvků a počtu všech možných uspořádání jedné k -tice. Označíme-li počet neuspořádaných k -tic z n prvků symbolem $\binom{n}{k}$, pak platí

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k! \quad \text{neboli} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

Tento symbol se nazývá kombinační číslo a čte se „en nad ká“ Hodnoty kombinačních čísel máte v tabulkách na str. 47 pod názvem binomičtí součinitelé.

Po této odbočce se vraťme zpět k naší úloze o počtu zobrazení. Určení prvního činitele nám již nečiní potíže. Ten je roven $10! \cdot k!$. Počet všech zobrazení množiny M na P je

$$\frac{10!}{k!} \cdot (10-k)^k$$

Ale my chceme znát počet případů, kdy se zachrání právě k kachen a je jedno, které to budou. Náš dosavadní výsledek musíme proto ještě znásobit počtem všech podmnožin množiny N o $(10-k)$ prvcích, tj. počtem všech možných různých množin P . Počet všech případů, kdy se zachrání právě k kachen, pak je

$$A(k) = \binom{10}{10-k} \cdot \frac{10!}{k!} (10-k)^k = \binom{10}{k}^2 \cdot (10-k)! (10-k)^k$$

Nebude na škodu, prověříme-li si správnost vzorce na dvou krajních případech. Zachránil-li se 9 kachen, znamená to, že všichni lovci stříleli na jednu kachnu. Těchto případů je zřejmě 10, také $A(9) = 10$. Počet všech možností, kdy se nezachrání žádná kachna, je dán počtem všech možných uspořádání deseti prvků; těch je $10!$, a to je $A(0)$.

Průměrný počet zachráněných kachen, resp. průměrný počet koláčů bez rozinek vypočítáme jako vážený aritmetický průměr

$$\frac{1}{10^{10}} \sum_{k=0}^9 k \cdot A(k)$$

S několika archy papíru, tužkou a dostatečnou trpělivostí dostaneme po několika hodinách výpočtů výsledek 3,487... Buďme přitom rádi, že kachen a lovců bylo jenom 10. Co kdyby jich bylo třeba 100?

Exaktní postup, který nás dovedl k výsledku, není však vhodný pro počítačové stroje. Příště si ukážeme, jak řešit tuto úlohu a nejen tuto statistickou metodou, která je velmi jednoduchá a velice užitečná a má i sympatický název: metoda Monte Carlo.

Topologická historka

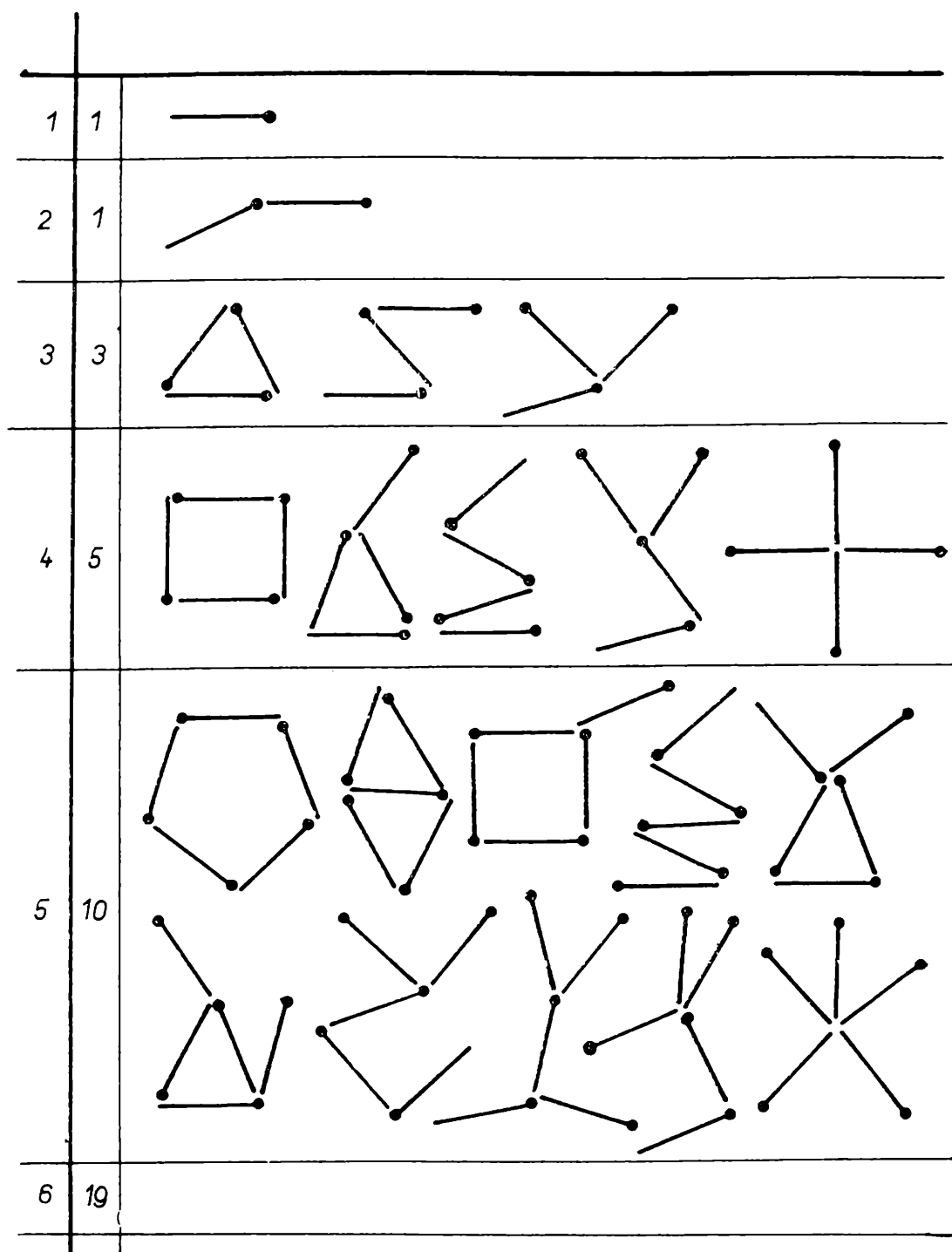
ŠTEFAN IL'AŠ, PF Prešov

O profesorovi L. S. Wilsunovi, ktorý je považovaný v USA za vynikajúceho, hoci do istej miery výstredného topológa,¹⁾ je známe, že jeho pôvodné priezvisko bolo Wilson.

Dôvod zmeny jeho pôvodného priezviska je viazaný s nasledujúcim príbehom:

Pri istej debate v okruhu profesorových mladších kolegov padla poznámka, že v priezvisku WILSON, ak je napísané veľkými tlačnými písmenami, sú všetky písmená topologicky ekvivalentné, až na jediné, ktorým je „O“. To profesora tak popúdilo, že sa nakoniec rozhodol zmeniť svoje pôvodné a pravé priezvisko WILSON na WILSUN.

¹⁾ Topológ je špecialista (odborník) v oblasti jedného z novších oborov matematiky, ktorá sa nazýva topológia. Tento pojem bude v ďalšom postupne ozrejmnený.

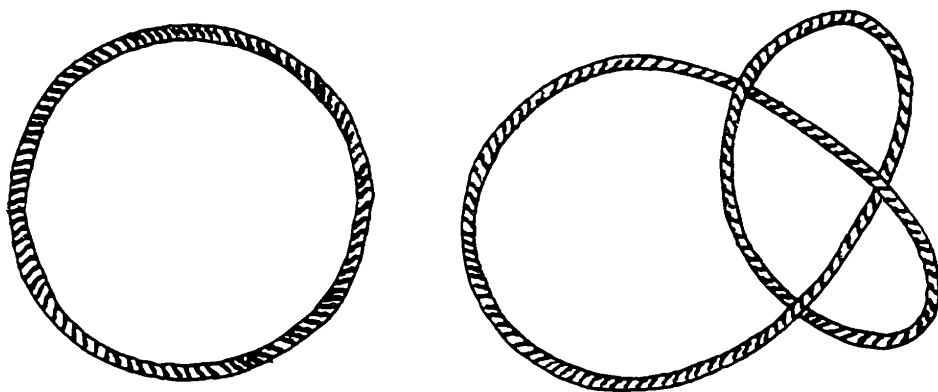


Obr. 1

Známy americký špecialista v oblasti populárnej matematiky M. Gardner ho príležitostne zastihol, ako skladal zo zápalek nejaké figúrky na svojom pracovnom stole.

„Iste nový topologický hlavolom?“ opýtal sa s nádejou Gardner.

„Ako vám to povedať,“ odpovedal Wilsun, „pokúšam sa jednoducho určiť, koľko topologicky rôznych rovinných útvarov možno zložiť zo šiestich zápalek, ak sa nemá klásť jedna zápalka na druhú (ani svojimi časťami) a možno ich spájať jedine v koncoch.“



Obr.

„Určite to nie je ťažké,“ poznamenal Gardner.

„Iste ťažšie, než sa vám to zdá,“ znela odpoveď topológa.

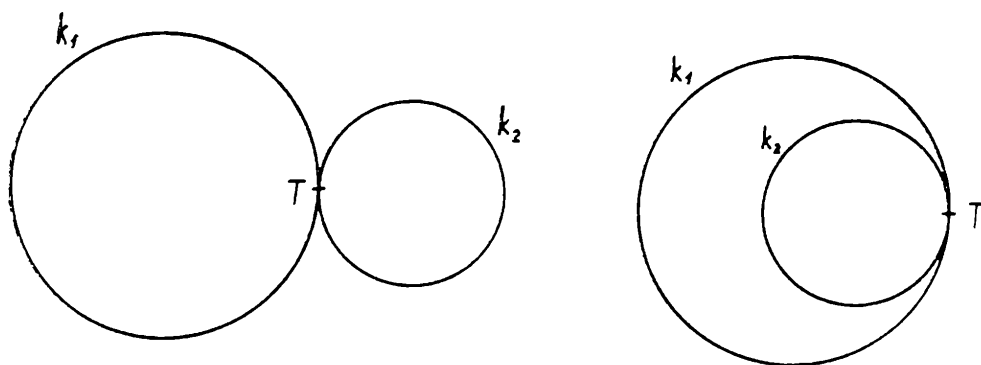
Potom Gardner sám skúšal zložiť všetky možné útvary z menšieho počtu zápaliiek, ale Wilsun medzi tým už vytiahol obálku, na ktorej experimentoval so zápalkami jeho spoločník a na jej opačnej strane bola zobrazená tabuľka, uvedená na obr. 1. Gardner si ju so záujmom prezeral a nakoniec poznamenal:

„Nevynechali ste jeden útvar z piatich zápaliiek? Pozrite, prosím, na stredný — štvorec s „chvostom“. Predpokladajme, že „chvost“ je vnútri štvorca. Zrejme, že tieto dva útvary nemožno premeniť jeden na druhý deformáciou, ak nezodvihujeme zápalku — „chvost“ nad rovinu.“

Wilsun s nesúhlasom pokrútil hlavou a dodal: „To je síce dosť všeobecne rozšírená mienka, ktorá je ovšem mylná, lebo je založená na nesprávnom pochopení topologickej ekvivalentnosti. Ak dva útvary možno premeniť jeden na druhý roztahovaním, avšak bez roztrhnutia (topológovia tomu hovoria „spojitou deformáciou“), potom sú topologicky ekvivalentné (rovnocenné z topologického hľadiska). Opak ovšem neplatí. Ak sú totiž dva útvary topologicky ekvivalentné, potom nie vždy možno premeniť jeden na druhý spojitou deformáciou.“

„Prosím o prepáčenie,“ ospravedlňoval sa Gardner.

„Nestojí za to,“ poznamenal Wilsun a pokračoval: „Dva útvary sú topologicky ekvivalentné, ak pri „opisovaní“ jedného z nich tzv. spojitým pohybom ceruzky (tj. nezodvihnutím ceruzky z papiera), môžete súčasne inou ceruzkou „opísať“ i druhý útvar, avšak za predpokladu, že medzi bodmi oboch útvarov existuje vzájomne jednoznačné priradenie a v každom časovom momente hroty vašich ceruziek sa budú nachádzať v „odpovedajúcich“ si bodoch týchto útvarov. Napr. špagát, ktorého konce sú spojené tak, že tvorí kruh, je topologicky ekvivalentný s takým špagátom, ktorý pred spojením svojich koncov bol zaviazaný na uzol (obr. 2), hoci previesť spojitou deformáciou kruh s uzlom na kruh



Obr. 3

bez uzla sa zrejme nedá. Alebo dve kružnice (prípadne guľové plochy), ktoré sa vzájomne dotýkajú zvonku, sú topologicky ekvivalentné s ľubovoľnými dvoma kružnicami (guľovými plochami), ktoré sa dotýkajú zvnútra (obr. 3).“

Keďže Wilsun pritom postrehol zarazený výzor Gardnerovej tváre, pohotovo pokračoval: „Pozrite, prosím, názorný príklad, ktorý iste nie je ťažko pochopiť. Útvary zo zápaliek sú položené na stole; ale predstavte si, že sú zhotovené z elastickej pásky, trebás z pomerne tenkej gummy. Možno ich zodvihnúť nad rovinu (nad stôl) do trojrozmerného priestoru a tam ľubovoľne deformovať (ohýbať, prekrúcať, natahovať) a potom znovu položiť do roviny. Ak sa vám takýmto spôsobom podarí premeniť jeden útvar na druhý, potom oba tieto útvary treba považovať za topologicky ekvivalentné.“

„Rozumiem,“ povedal Gardner, a aby o tom presvedčil, dodal: „To teda znamená, že ak umiestime daný útvar do priestoru s väčšou dimenziou (rozmernosťou), potom ho možno pomocou deformácie premeniť na iný útvar, ktorý je s daným topologicky ekvivalentný.“

Wilsun na znak súhlasu prikývnul hlavou a doplnil Gardnera: „Predstavte si, že nekonečne dlhý špagát, alebo dve guľové plochy (o ktorých sme pred chvíľou hovorili), sú umiestené do štvorrozmerného priestoru. Potom špagát možno zaviazať i rozviazať bez rozpojenia jeho koncov a menšiu guľovú plochu možno vložiť do väčšej a voľne ju z nej opäť vybrať von.“

Potiaľ historka.¹⁾

A teraz sa sami pokúste riešiť úlohu, ktorú si postavil prof. Wilsun: *Určite počet topologicky neekvivalentných útvarov, ktoré možno zostaviť zo šiestich zápaliek v rovine*, ak topologickú ekvivalenciu chápete tak, ako prof. Wilsun. (Pomôžte si pritom tabuľkou na obr. 1.) Zápalky pritom nemožno rozlamovať, dotýkať sa môžu iba svojimi koncami a nesmú sa tiež vzájomne prekrývať žiadnymi svojimi časťami. Avšak už zhotovený

¹⁾ Spracované podľa predlohy Gardner, M.: *Matematičeskije dosugi*. Moskva: Mir 1972, str. 152–154.

útvár možno ľubovoľne rozťahovať, dvíhať nad rovinu, deformovať v trojrozmernom priestore a potom ho znovu položiť na rovinu. Pritom vrcholy, v ktorých sa stýkali dve zápalky, už nemusia byť vrcholmi deformovaného útvaru. Inými slovami, nerobíme už rozdiel napr. medzi trojúhelníkom, štvorcom, päťuholníkom, alebo i kruhom. Reťazec zostavený z dvoch zápaliek je ekvivalentný s reťazcom ľubovoľnej dĺžky; písmená E, F, T a Y sú vzájomne topologicky ekvivalentné, ale písmeno R už nie je s nimi ekvivalentné, je však ekvivalentné so svojím obrazom v zrkadle, atď.

(Prezradíme vám, že v rovine možno zostaviť 19 topologicky neekvivalentných útvarov zo šiestich zápaliek.)

Poznámka. Je zaujímavé, že v trojrozmernom priestore je iba o jeden útvár viac; je ním „kostra“ štvorstena, tj. útvár zložený z hrán štvorstena.

Ak ste ešte dostatočne disponovaní, pokúste sa nájsť všetky topologicky neekvivalentné útvary v rovine, zostavené zo siedmich zápaliek (je ich 39). A nakoniec si ešte všimnite, koľko písmien vášho priezviska by bolo treba zmeniť, ak by ste chceli nasledovať prof. Wilsuna (tj. mať všetky písmená v priezvisku topologicky ekvivalentné).

V závere tohto článku chceme už iba splniť sľub daný v úvode a povedať, čo je to topológia. Krátko povedané, je to tá časť matematiky (alebo také matematické odvetvie), ktorá sa zaoberá topologickými ekvivalenciami geometrických útvarov (bodových množín). Matematik, ktorý tvorivo pracuje v tomto matematickom obore, sa nazýva topológ.

Bežne nám známe vlastnosti geometrických útvarov zo školskej geometrie, akými sú zhodnosť, podobnosť, veľkosť (dĺžka, obsah, objem) atď., si topológ pri skúmaní bodových množín (geometrických útvarov) nevšima. Tie sú pre neho, vzhľadom k výsledkom, ktoré on sleduje, jednoducho bezpredmetné a teda zbytočné (tak, ako sú pre sochára zbytočné kusy, ktoré pri robení sochy odsekáva z dreva alebo z mramoru). Pre topológa totiž nie je podstatné, či štvoruholník je štvorcom, alebo či súvislá časť priestoru je guľa alebo elipsoid, ale je podstatné, či tomuto štvoruholníku patrí i jeho hranica (tj. obvod), alebo či má guľa „diery“ alebo nie. Takéto (ako i ďalšie tzv. topologické vlastnosti) upútajú pozornosť topológa.

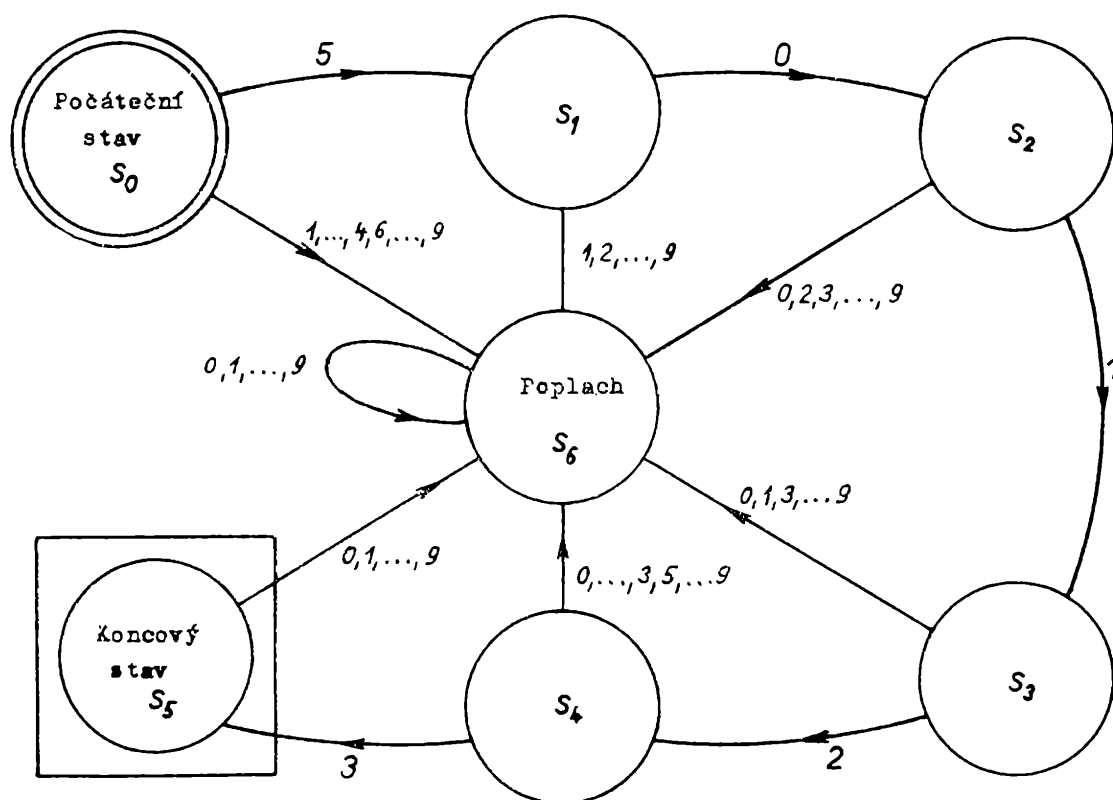
0 konečných automatech a jejich některých vlastnostech

RNDr. MIROSLAV HLADKÝ, VUT Brno

S rozvojem a rozšířením samočinných počítačů, jehož jsme již delší dobu svědky, se stále častěji setkáváme s pojmem automatu. Tento pojem je velmi široký, vždyť automaty v nejrůznějších modifikacích zasahují účinně do široké škály oborů od medicíny přes techniku až po lingvistiku a filosofii. Teorie automatů je také již plně rozvinutá vědecká disciplína s bohatými výsledky.

V tomto příspěvku se pokusíme ukázat si, jakým způsobem je možno pojem automatu matematicky precizovat. Proto vyjdeme z pojmu konečného (deterministického) automatu, který se pro náš účel mimořádně hodí pro svou jednoduchost, a předvedeme si, jak lze pomocí tohoto automatu generovat jistý druh množin — tzv. regulární množiny, které tvoří jednu ze základních skupin formálních jazyků. Přesvědčíme se, že obecnější automaty nemusejí vždy generovat širší třídy jazyků.

Představme si nedobytnou pokladnu, která se otevře 1 minutu po vytočení jistého pětimístného čísla na voliči (např. 50123). Při volbě první špatné číslice nebo při pokusu o vytočení šesté číslice ještě před otevřením pokladny se rozezní poplašné zařízení.



Obr. 1

Můžeme uvažovat, že zařízení pracuje v taktech, přičemž se v každém taktu nachází v jistém stavu. Tedy na začátku je ve stavu, kdy „očekává“ první volbu — v tzv. počátečním stavu. V každém taktu pak přichází na vstupní zařízení (říkejme krátce na vstup) jedna číslice a každé uspořádané dvojici (stav, číslice na vstupu) odpovídá některý ze stavů. Za tzv. koncový stav určíme stav, v němž je zařízení po přijetí správného čísla (pokladna se pak po jedné minutě otevře). Vytočíme-li dříve než za minutu další číslici (správné číslo bylo nepovolanou osobou vytočeno náhodou), rozezní se také poplašné zařízení. Činnost celého zařízení je možno popsat pomocí schématu na obr. 1.

Stavy znázorníme jako „body“ v rovině a orientované spojnice označené symbolem na vstupu ukazují stav, do něhož zařízení přechází. Podobně, je-li určena množina stavů, počáteční stav a množina koncových stavů, můžeme popsat činnost takového zařízení následující tabulkou (tzv. přechodovou funkcí):

Čís. na vstupu Stav										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s_0	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_1	s_6	s_6	s_6	s_6
s_1	s_2	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6
s_2	s_6	s_3	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6
s_3	s_6	s_6	s_4	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6
s_4	s_6	s_6	s_6	s_5	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6
s_5	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6
s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6

Definice 1. Konečným automatem $\mathbf{M}$ nazveme uspořádanou pětici (S, A, f, s_0, F) , kde

S je konečná neprázdná množina zvaná množina stavů,

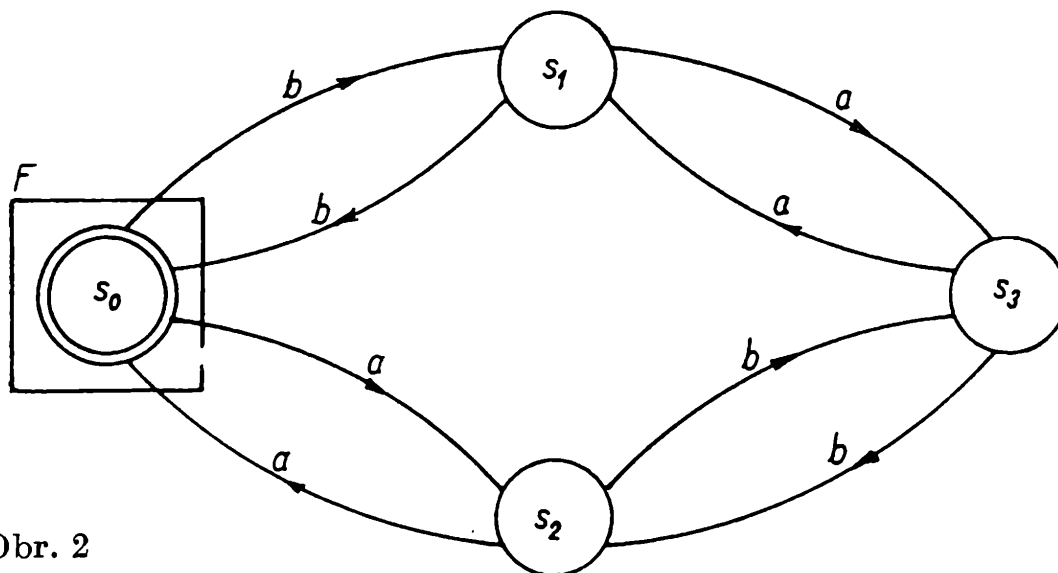
A je konečná neprázdná množina symbolů, tzv. vstupní abeceda nebo též slovník. Prvky množiny A nazýváme písmena, řetězy (tj. konečné posloupnosti) písmen slova. Délkou slova rozumíme počet písmen ve slově.

f je zobrazení kartézského součinu $S \times A$ do S zvané přechodová funkce.

s_0 je vyznačený prvek množiny S zvaný počáteční stav.

F je neprázdná podmnožina množiny S zvaná množina koncových stavů.

Příklad 1. Automat $\mathbf{M} = (S, A, f, s_0, F)$, kde



Obr. 2

$$\begin{aligned}
 A &= \{a, b\} \\
 S &= \{s_0, s_1, s_2, s_3\} \\
 F &= \{s_0\}
 \end{aligned}$$

f	a	b
s_0	s_2	s_1
s_1	s_3	s_0
s_2	s_0	s_3
s_3	s_1	s_2

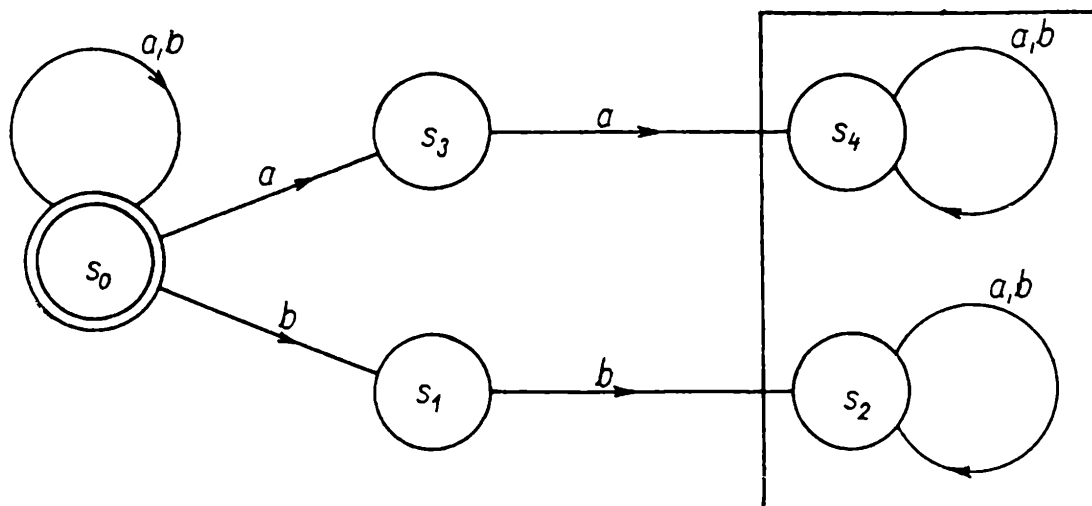
Přechodovou funkci vyjádříme ve formě tabulky, ze které čteme $f(s_0, a) = s_2$, $f(s_0, b) = s_1$ atd. Pro větší názornost popisujeme často činnost automatu pomocí grafu; stavy znázorníme jako navzájem různé body v rovině (uzly) a orientované spojnice (hrany) $\overrightarrow{s_i s_j}$ označené symboly z A reprezentují vztahy dané přechodovou funkcí, hrany vycházející na obr. 2 z uzlu s_0 znázorňují $f(s_0, a) = s_2$, $f(s_0, b) = s_1$.

Dále vyznačíme množinu koncových stavů F a počáteční stav s_0 . Můžeme-li projít z počátečního stavu do některého z koncových stavů tak, že posloupnost označení postupně procházených hran (ve smyslu jejich orientace) je totožná se zkoumaným slovem, je slovo generováno daným automatem, v opačném případě nikoli. Činnost automatu z příkladu 1 lze tedy ilustrovat grafem na obr. 2.

Snadno nahlédneme, že daným automatem jsou generována právě slova, obsahující jak písmena „a“, tak písmena „b“ v sudém počtu. Poznamenejme ještě, že počáteční stav patří v našem případě i do množiny koncových stavů. Tato skutečnost však není v rozporu s definicí konečného automatu.

V dalším textu se neobejdeme bez konvence již vžitě týkající se symboliky:

Symbolu Λ použijeme k označení prázdného slova (slova délky 0). Je-li A abeceda (tj. konečná neprázdná množina písmen), pak A^* bude



Obr. 3

značit množinu všech slov, která je možno utvořit z písmen abecedy A včetně prázdného slova Λ . A konečně, je-li B množina, pak symbolu 2^B budeme užívat k označení množiny všech podmnožin množiny B včetně prázdné množiny $\emptyset$.

Zobrazení f :

$$S \times A \text{ do } S \quad (1)$$

z definice 1 lze jednoznačně rozšířit v zobrazení

$$S \times A^* \text{ do } S \quad (2)$$

(budeme jej značit rovněž f) následujícím způsobem:
položíme

$$f(x, \Lambda) = s \quad (3)$$

pro každé $s \in S$ a

$$f(s, xa) = f[f(s, x), a] \quad (4)$$

pro každé $s \in S$, $x \in A^*$, $a \in A$.

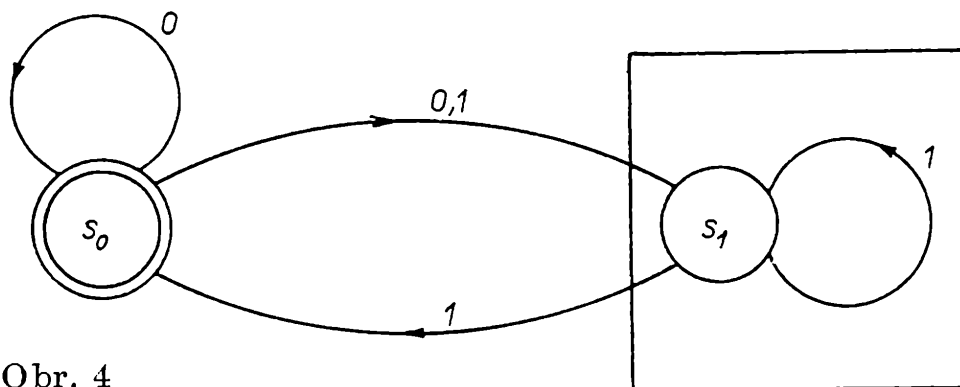
Máme-li tedy např. slovo $a_1a_2a_3 \in A^*$ a je-li s_0 počáteční stav, platí:

$$f(s_0, a_1a_2a_3) = f[f(s_0, a_1a_2), a_3] = f\{f[f(s_0, a_1), a_2], a_3\}.$$

Můžeme si tedy představit, že automat pracuje v taktech, přičemž při každém taktu se přečte jedno písmeno slova na vstupu a každé uspořádané dvojici (stav, písmeno na vstupu) se přiřadí některý ze stavů množiny S . Je-li na vstupu prázdné slovo Λ , setrvává automat v témže stavu. Jelikož slovo na vstupu má konečný počet písmen, zastaví se automat po konečném počtu taktů v některém ze stavů množiny S . Jak se ukáže v dalším, záleží nyní na tom, zda tento stav patří do množiny koncových stavů či nikoli. V prvním případě řekneme, že dané slovo bylo automatem generováno (někdy též přijato), ve druhém, že nikoli. Ke každému konečnému automatu lze tedy jednoznačně přiřadit množinu slov generovaných tímto automatem.

Nyní můžeme upřesnit pojmy, o nichž jsme právě mluvili.

Definice 2. Buď $\mathbf{M} = (S, A, f, s_0, F)$ konečný automat a nechť $T(\mathbf{M}) = \{x | x \in A^* \text{ \& } f(s_0, x) \in F\}$. Množinu $T(\mathbf{M})$ nazveme množinou slov generovaných automatem $\mathbf{M}$.



Obr. 4

Definice 3. Množinu $U \subseteq A^*$ nazveme regulární, jestliže existuje konečný automat $\mathbf{M} = (S, A, f, s_0, F)$ takový, že $U = T(\mathbf{M})$.

Až dosud byl přechodovou funkcí přiřazen vždy jediný stav každé uspořádané dvojici (stav, písmeno). Nabízí se otázka, jak by se rozšířila třída množin slov generovaných konečnými automaty upravenými tak, že dvojici (stav, písmeno) bychom přiřadili více stavů. Zdálo by se, že složitější automaty by měly generovat i obecnější množiny slov. Tak tomu velmi často doopravdy je, třídy formálních jazyků jsou úzce svázány s typy automatů, které je přijímají. V našem případě, jak uvidíme, se však takovýmto rozšířením automatu jeho generační síla nemění. Tento nový druh automatu definujeme takto:

Definice 4. Nedeterministickým konečným automatem $\mathbf{N}$ nazveme uspořádanou pětici (S, A, f, s_0, F) , kde S, A, s_0, F jsou definovány stejně jako v definici 1 a f je zobrazení kartézského součinu $S \times A$ do množiny 2^S (tj. do množiny všech podmnožin množiny S).

Interpretace vztahu

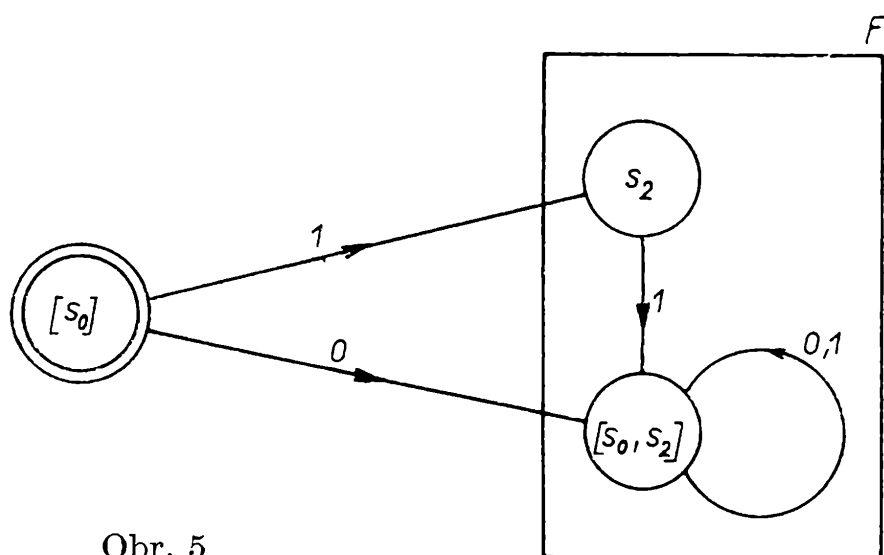
$$f(s, a) = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$$

je ta, že automat $\mathbf{N}$ ze stavu s při symbolu a na vstupu přejde do některého ze stavů $q_1, q_2, \dots, q_k \in S$.

Příklad 2. $\mathbf{N} = (S, A, f, s_0, F)$, kde f je opět dána tabulkou.

		a	b
$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	s_0	$\{s_0, s_3\}$	$\{s_0, s_1\}$
$A = \{a, b\}$	s_1	$\emptyset$	$\{s_2\}$
$F = \{s_2, s_4\}$	s_2	$\{s_2\}$	$\{s_2\}$
	s_3	$\{s_4\}$	$\emptyset$
	s_4	$\{s_4\}$	$\{s_4\}$

Činnost automatu $\mathbf{N}$ můžeme opět ilustrovat grafem (obr. 3). Snadno ověříme, že daný automat generuje právě slova obsahující buď dvojici „aa“ nebo „bb“ jakožto dvojici sousedních písmen. Nabízí se otázka,



Obr. 5

zda je možno najít konečný automat ve smyslu definic 1 (často označovaný jako deterministický), který by generoval stejnou množinu slov jako daný nedeterministický automat. Takovouto konstrukci si ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 3. Buď $N = (\{s_0, s_1\}, \{0, 1\}, f, s_0, \{s_1\})$ nedeterministický automat, přičemž přechodová funkce je definována tak, že

$$f(s_0, 0) = \{s_0, s_1\}$$

$$f(s_0, 1) = \{s_1\}$$

$$f(s_1, 0) = \emptyset$$

$$f(s_1, 1) = \{s_0, s_1\}$$

Odpovídající deterministický automat $M = (S', A', f', s'_1, F')$ sestojíme takto:

Za množinu stavů S' vezmeme množinu všech podmnožin množiny S , tj.

$$S' = \{\emptyset, [s_0], [s_1], [s_0, s_1]\}.$$

Vstupní abecedu ponecháme, tj. $A = A' = \{0, 1\}$.

Předně definujeme

$$f'(\emptyset, 0) = f'(\emptyset, 1) = \emptyset.$$

Jelikož $f(s_0, 0) = \{s_0, s_1\}$, položíme

$$f'([s_0], 0) = [s_0, s_1],$$

a podobně

$$f'([s_0], 1) = [s_1]$$

$$f'([s_1], 0) = \emptyset$$

$$f'([s_1], 1) = [s_0, s_1].$$

Jako důsledek vztahů

$$f(\{s_0, s_1\}, 0) = f(s_0, 0) \cup f(s_1, 0) = \{s_0, s_1\} \cup \emptyset = \{s_0, s_1\}$$

a

$$f(\{s_0, s_1\}, 1) = f(s_0, 1) \cup f(s_1, 1) = \{s_1\} \cup \{s_0, s_1\} = \{s_0, s_1\}$$

definujeme

$$\begin{aligned} f'([s_0, s_1], 0) &= [s_0, s_1] \\ f'([s_0, s_1], 1) &= [s_0, s_1] \end{aligned}$$

a nakonec položíme

$$s'_0 = [s_0].$$

Za koncové stavy vezmeme ty stavy množiny S' , které obsahují koncový stav s_1 , tj. $F' = \{[s_1], [s_0, s_1]\}$.

Následující grafy obou automatů (obr. 4 a 5) nám umožňují přesvědčit se, že oba automaty generují stejné množiny slov (tj. jakékoli posloupnosti nul a jedniček, které nezačínají dvojicí 10).

Zobecněním postupu z tohoto příkladu můžeme dokázat, že ke každému nedeterministickému konečnému automatu N existuje deterministický konečný automat M takový, že $T(N) = T(M)$. Tedy ani nedeterministické automaty nejsou schopny generovat více než regulární množiny.

Literatura

B. A. Trachtenbrot: Algoritmy a strojové řešení úloh, Praha, 1963.

konstruktivní geometrie

Kadeřávkova konstrukce normál elipsy

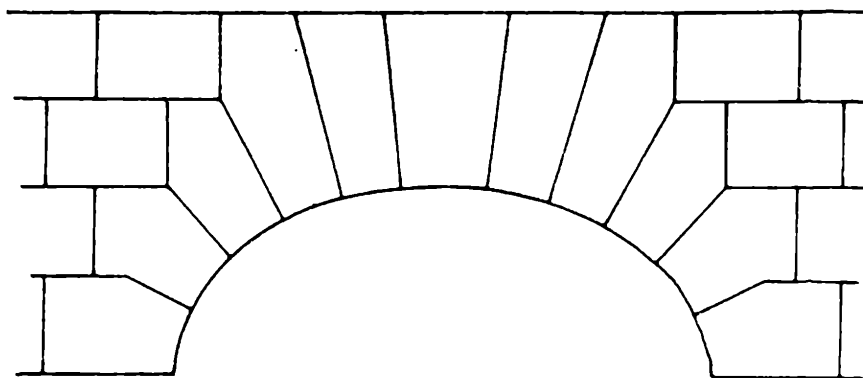
STANISLAV HORÁK, Praha

Při rýsování elipsy jistě používáte kružnic křivosti ve vrcholech. Konstrukce jejich středů je provedena na obr. 1. Střed křivosti vrcholu A je označen S_1 . Z podobných trojúhelníků AEC , S_1AE se dá vypočítat, že poloměr kružnice křivosti ve vrcholu A má délku $AS_1 = \rho = b^2 : a$.

Mějme danu elipsu; S je její střed (obr. 1), A , B jsou hlavní vrcholy, C , D vedlejší vrcholy, F_1 , F_2 ohniska, S_1 střed křivosti ve vrcholu A . Na této elipse zvolme libovolný bod M , různý od vrcholů elipsy. Normála bodu M protíná hlavní osu v bodě N . Patu kolmice, spuštěné z bodu M na vedlejší osu elipsy, označme P . Tu platí:

$$SN \cdot PM = SS_1 \cdot SA. \quad (1)$$

Obr. 3



Počítejme už poměr

$$SN \quad PM = x_N \quad x_1 = \frac{e^2 x_1}{a^2} \quad x_1 = \frac{e^2}{a} \quad a = SS_1 \quad SA.$$

Tím je dokázána správnost rovnice (1).

Tohoto vztahu se používá k sestrojení normál elipsy. Je přirozené, že ho nebudeme používat k sestrojení jediné normály. Máme-li však narýsovat druhý průmět válcové klenby, kde řídící křivkou je elipsa, pak je výhodné a časově úsporné sestrojovat jednotlivé normály (které představují průměty spár mezi jednotlivými kameny) podle odvozené věty. K tomu je pak nutno sestrojit redukční úhel pro zmenšení $\frac{e^2}{a}$ a .

Sestrojení tohoto úhlu¹⁾ i jeho použití je v obr. 2. Na obr. 3 je znázorněna zmíněná klenba. K sestrojení normál bylo použito naší věty.

Na závěr krátkou poznámku. Uvedená věta je v geometrii celkem bezvýznamná drobnůstka. Pro praxi má však jakýsi význam, jak jsme si ověřili. Při sestrojování většího množství normál téže elipsy představuje jakýsi „zlepšovák“

Tuto větu objevil dr. František Kadeřávek, profesor deskriptivní geometrie na stavební fakultě ČVUT v Praze. Žil v letech 1885 až 1961.

Cvičení. Dokažte, že vyslovená věta platí i pro hyperbolu.

¹⁾ Narýsujeme polopřímku a kolem jejího počátku opíšeme oblouk kružnice poloměrem a . Od jeho průsečíku s polopřímkou přetneme oblouk poloměrem SS_1 . Spojnice vzniklého bodu s počátkem polopřímky je druhé rameno redukčního úhlu.

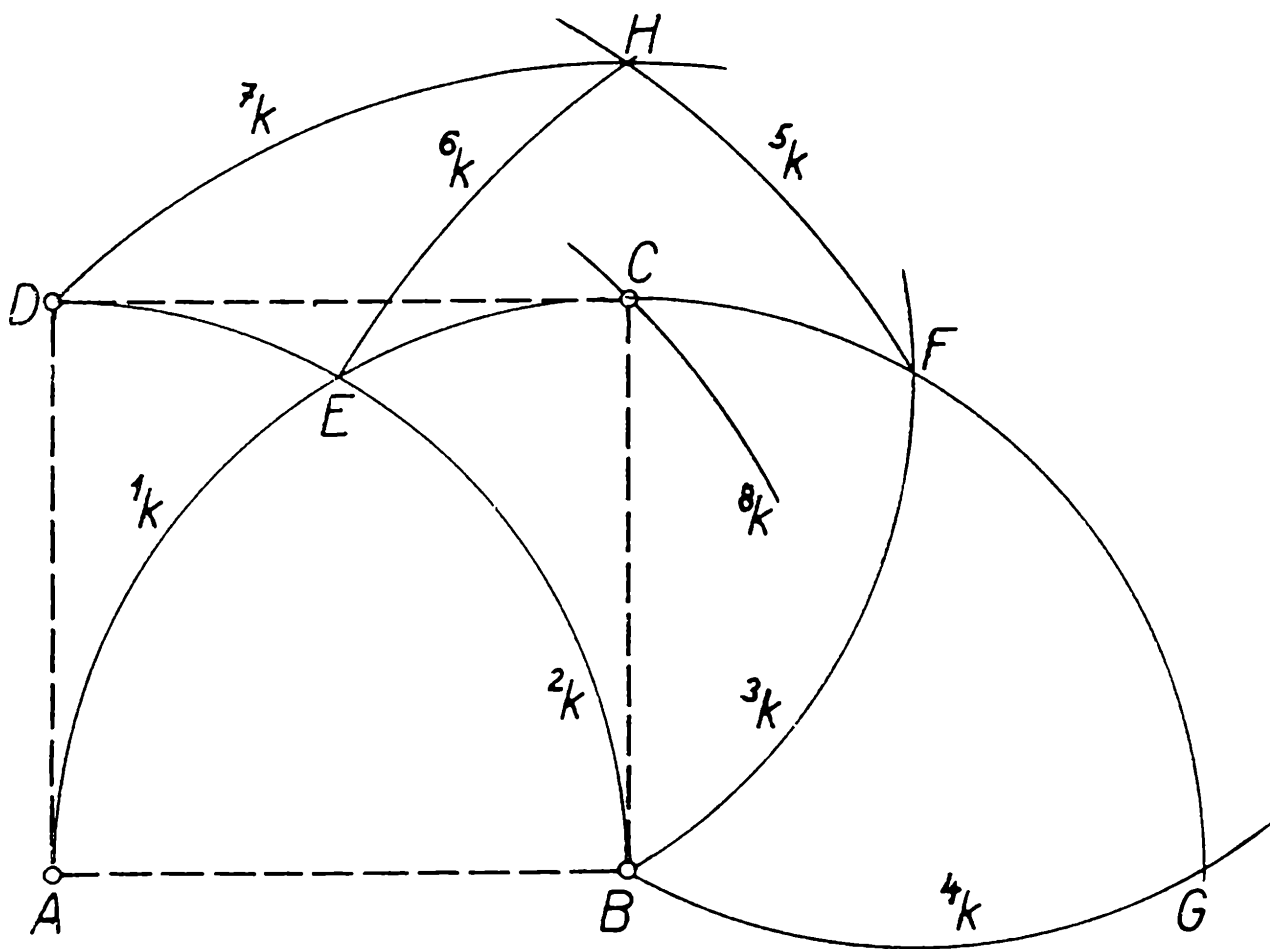
Dovedete sestrojít čtverec pouhým kružítkem?

Doc: OTA SETZER, ČVUT, Praha

Položme si úlohu: Sestrojte jen kružítkem vrcholy C , D čtverce $ABCD$, znáte-li polohu vrcholů A , B .

Tato úloha patří k tzv. úlohám *mascheronským*, kdy řešitel smí k sestrojení použít jen kružítko (nikoli pravítka).

Podle obrázku 1 se přesvědčíme o správnosti tohoto postupu: Je-li daná úsečka $AB = a$ strana hledaného čtverce, sestrojujeme postupně kruhové oblouky $^1k(B; a)$, tj. kruhový oblouk o středu B a poloměru a , $^2k(A; a)$, průsečík $^1k \cap ^2k \equiv E$, dále oblouky $^3k(E; a)$, $^3k \cap ^1k \equiv F$, $^4k(F; a)$, $^4k \cap ^1k \equiv G$; podle konstrukce je $AF = a\sqrt{3}$; další oblouky jsou $^5k(A; a\sqrt{3})$, $^6k(G; a\sqrt{3})$, $^5k \cap ^6k \equiv H$; pak $BH^2 = AH^2 - AB^2 = a^2$, což je délka úhlopříčky našeho čtverce; oblouk $^7k(B; BH) \cap ^2k \equiv D$; analogicky $^8k(A; BH) \cap ^1k \equiv C$.



Obr. 1

fyzika

Tunelový efekt

RNDr. PAVOL FERKO, PF Banská Bystrica

Úvod

V 17. až 19. storočí význační bádatelia Galilei, Newton, Faraday, Maxwell a ich nasledovníci objavili základné a veľmi obsažné zákony, ktoré sa mohli použiť na presný výklad prírodného diania v širokej oblasti javov, čo nazývame klasickou fyzikou.

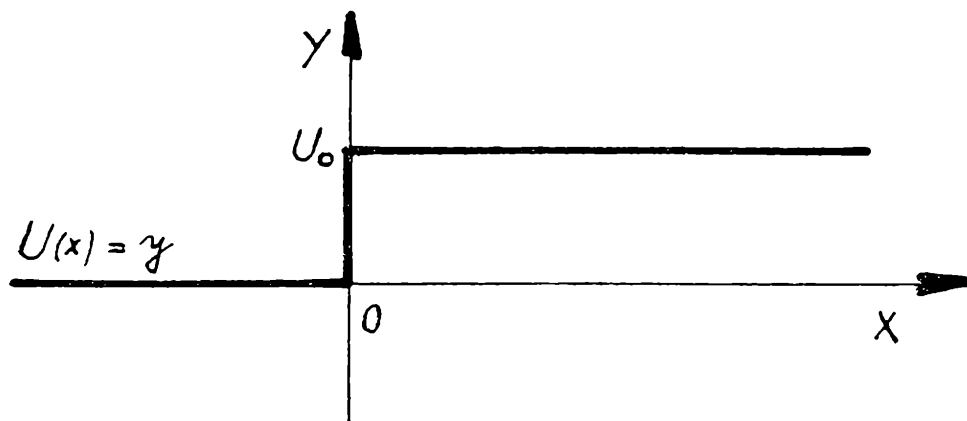
Klasická fyzika preformovala obraz, ktorý si človek vytvoril o svete, stvorila techniku a priemysel. Koncom 19. storočia boli vo všetkých odboroch známe základné zákony, pomocou ktorých klasická fyzika poskytovala úplné poznanie a využitie prírodných javov. Predpokladalo sa, že fyzikálna tvorba sa blíži ku koncu, lebo zostáva vysvetliť už len niekoľko nepodstatných otázok. Medzi tieto otázky patrili: výklad tepelného žiarenia, atómová štruktúra telies, teoretický výklad závislosti molekulového tepla telies od ich tepelného stavu.

Nedoriešené otázky, ktoré zanechala klasická fyzika 20. storočia, boli len zdanlivo nepodstatné. Keď fyzici začali tieto otázky skúmať, objavili sa neočakávané a prekvapujúce výsledky. Zistilo sa, že na celý rad úkazov nemožno aplikovať zákony klasickej fyziky. Nové poznatky sa museli hľadať od základov, lebo vyšlo najavo, že nedostatky sú práve v základoch klasickej fyziky. Tak sa zrodila nová fyzikálna teória — kvantová fyzika. Pomocou nej sa už preskúmal taký rozsiahly systém prírodných zákonov, ktorý odкрýva zákonitosti prírodných javov v omnoho širšom rozsahu, ako to urobila klasická fyzika.

Matematický aparát potrebný na riešenie fyzikálnych problémov v kvantovej fyzike je veľmi náročný a obťažný. Vynasnažíme sa mu vyhnúť, pokiaľ to bude len možné, aby sme si trochu zjednodušenou formou sprístupnili jeden z problémov kvantovej fyziky, ktorý nazývame tunelový efekt.

1. Pravouhlý potenciálový schod

V ďalších úvahách sa budeme zaoberať pohybom voľných častíc v silovom poli. Nech sa napr. voľný elektrón dostane do Coulombovho silového poľa atómového jadra. V dostatočne veľkej vzdialenosti od atómového jadra nepôsobí ešte Coulombova sila, pohyb elektrónu nie je zrýchlený, jeho energia je len kinetická a môže mať ľubovoľnú hodnotu. Ak sa elektrón dostane do blízkosti atómového jadra, jeho pohyb bude ovplyvnený Coulombovou silou. No vzhľadom na to, že potenciálna energia v danom prípade nezávisí od času, celková energia častice



Obr. 1

zostane stála počas celého pohybu. Energia voľnej častice je preto aj v Coulombovom silovom poli spojitá a kladná. Pri voľnej častici je totiž kinetická energia omnoho väčšia ako absolútna hodnota potenciálnej energie.

Z uvedeného vyplýva, že našou úlohou pri štúdiu pohybu voľných častíc v danom silovom poli nebude určenie vlastných hodnôt energie, pretože tieto hodnoty budú definované počiatočným pohybovým stavom častíc. Budeme skúmať len zmeny pohybu súvisiace s pôsobením daného silového poľa v najjednoduchšom jednorozmernom prípade.

Nech voľná častica pohybujúca sa pozdĺž zápornej časti osi x v bode $x = 0$ dosiahne pravouhlý potenciálový schod, definovaný analytickým vyjadrením

$$a) \quad U(x) = 0, \quad \text{ak } x < 0$$

$$b) \quad U(x) = U_0, \quad \text{ak } x > 0$$

Riešením diferenciálnych rovníc dostávame tieto výsledky:

$$p = \sqrt{2\mu E}, \quad \text{ak } x < 0$$

$$q = \sqrt{2\mu(E - U_0)}, \quad \text{ak } x > 0, \text{ kde } \mu \text{ je hmotnosť častice.}$$

Hodnota p udáva počiatočný impulz častice, q zasa znamená impulz častice po jej vstupe do silového poľa, ktoré predstavuje pravouhlý potenciálový schod. Predpokladáme, že počiatočná kinetická energia častice je väčšia ako výška potenciálového schodu, $E > U_0$, preto je hodnota q reálna.

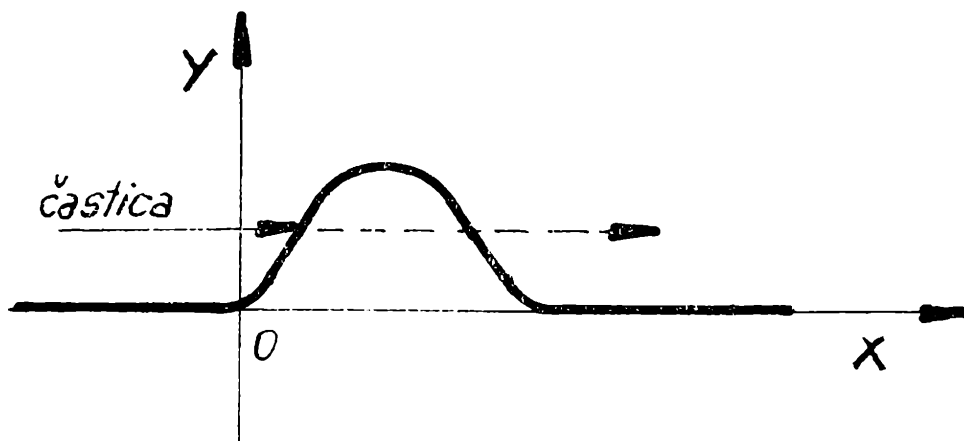
Pravdepodobnosť vniknutia častice do oblasti potenciálového schodu je daná vzťahom

$$W = \frac{4pq}{(p + q)^2}.$$

Pre pravdepodobnosť odrazu (reflexie) platí vzťah

$$|R = \left(\frac{p - q}{p + q} \right)^2 \quad W + R = 1|.$$

Vidíme, že podľa zákonov kvantovej mechaniky je aj v prípade $E > U_0$ hodnota $W < 1$, takže vznikne aj odraz. Pravdepodobnosť



Obr.

odrazu je tým väčšia, čím menší je pomer hodnôt q a p , t. j. čím menší je zlomok $\frac{E - U_0}{E}$.

Ak je počiatočná kinetická energia častice menšia ako výška potenciálového schodu $E < U_0$, potom sa častica celkom iste odrazí, čo je v zhode s klasickou teóriou. No niektoré výsledky kvantovej fyziky sa napriek tomu aj v tomto prípade líšia od klasických výsledkov.

Z výsledkov kvantovej fyziky vyplýva, že častica v tomto prípade vnikne do potenciálového schodu len na malú vzdialenosť od jeho čelnej steny. Za mieru tohoto efektu považujeme vzdialenosť, ktorá je daná vzťahom

$$d = \frac{h}{\sqrt{8(U_0 - E)}},$$

kde $h = \frac{h}{2\pi}$ predstavuje konštantu často zavádzanú v atómovej fyzike miesto Planckovej konštanty h .

Vniknutie častice do časti priestoru potenciálového schodu charakterizovanej hodnotou $E < U_0$ je v kvantovej mechanike všeobecným javom.

Uvažovaný úkaz pripomína javy pozorovateľné v optike pri úplnom odraze. V oboch prípadoch ide o efekty, ktoré súvisia s vlnovými vlastnosťami objektívnej reality.

2. Pravoúhlý potenciálový val

Uvažujeme o prechode voľnej častice jednorozmerným silovým poľom, ktoré má potenciálnu energiu definovanú analytickým vyjadrením takto:

- a) $U(x) = 0$, ak $x < 0$; $x > a$
- b) $U(x) = U_0$, ak $0 < x < a$

Takéto silové pole nazývame pravoúhlým potenciálovým valom, čo je vlastne ukončený pravoúhlý potenciálový schod. Hodnota $a > 0$ udáva šírku valu.

Nech pozdĺž zápornej osi x dopadá na ľavú stenu valu voľná častica,

o ktorej predpokladáme, že jej kinetická energia E je väčšia ako potenciálna energia U_0 , ktorú zobrazuje výška valu. Takáto hodnota kinetickej energie je podľa klasickej mechaniky postačujúca pre prechod častice daným potenciálovým valom.

Pravdepodobnosť prechodu častice daným pravouhlým valom v tomto prípade udáva vzťah

$$W = \frac{1}{1 + \frac{U_0^2 \sin^2 h^2 qa}{4E(E - U_0)}}$$

Výsledok ukazuje, že ak kinetická energia E dopadajúcej častice dostatočne málo prevyšuje potenciálnu energiu U_0 , vznikne odraz častice s pomerne veľkou pravdepodobnosťou, čo je v rozpore s náhľadom klasickej fyziky. S rastúcimi hodnotami kinetickej energie E hodnota uvedeného výrazu konverguje k číslu 1.

Omnoho zaujímavejší je prípad, v ktorom častica dopadá na stenu potenciálového valu s kinetickou energiou menšou, ako je hodnota potenciálnej energie. Podľa zákonov klasickej mechaniky by sa v tomto prípade mala častica bezpodmienečne odraziť naspäť.

Výpočtom v tomto prípade vychádza pre pravdepodobnosť prechodu častice daným pravouhlým potenciálovým valom hodnota

$$W = \frac{1}{\frac{U_0^2 \sin^2 h^2 \frac{a}{2d}}{4E(U_0 - E)}}$$

Výsledok ukazuje, že pravdepodobnosť prechodu častice daným pravouhlým potenciálovým valom sa líši od nuly aj v tom prípade, keď kinetická energia častice z hľadiska klasickej teórie na prechod nestačí. Tento úkaz nazývame tunelovým efektom.

Pre nedostatok potrebnej kinetickej energie častica nepreletí nad potenciálovým valom, ale ani sa bezpodmienečne neodrazí od steny valu (ako by to malo byť z hľadiska klasickej fyziky), ale s určitou (nenulovou) pravdepodobnosťou prejde cez val, ako by v ňom bol priechod na spôsob tunela.

Tunelový efekt možno pochopiť v súvislosti s vlnovými vlastnosťami fyzikálnych objektov. Rovinné vlnenie dopadajúce na ľavú stenu potenciálového valu sa sčasti odrazí a sčasti vnikne do oblasti valu, do hĺbky. Ak je šírka valu dostatočne tenká vzhľadom na dĺžku d (vzťah sme uviedli pri pravouhlom potenciálovom schode), vlnenie prenikne s dostatočne veľkou pravdepodobnosťou do priestoru za pravú stenu valu.

Elektrón môže na spôsob tunelového javu preniknúť potenciálovým valom niekoľko elektrónvoltov vysokým, ak šírka tohto valu bude rovná aj niekoľkonásobnej dĺžke priemeru atómu.

3. Tunelový efekt v praxi

Tunelový efekt sa využíva i v technickej praxi. Na základe tunelového efektu sa realizuje napr. vedenie elektrického prúdu cez dotykovú vrstvu dvoch kovových vodičov, ktorá sa vytvorí medzi dotykovými plochami obidvoch kovov oxydáciou a znečistením týchto plôch a predstavuje potenciálový val šírky niekoľkých molekúl. Iným dôležitým prípadom tunelového efektu je studená emisía.

Podmienky pre vznik tunelového javu pri časticiach s väčšou hmotnosťou sú nepriaznivejšie. Napriek tomu má tunelový efekt vo fyzike atómového jadra dôležitú úlohu. Najznámejší úkaz tohoto druhu je rádioaktívny α -rozpad.

V súvislosti s tunelovým javom môžu kladne nabité častice vniknúť do atómového jadra napriek odpudivej Coulombovej sile už pri menšej kinetickej energii.

Tunelový jav má rozhodujúci význam i pre termonukleárne reakcie.

Záver

Z príkladov, ktoré sme uviedli, vidieť, že kvantová fyzika poskytuje zákony oveľa všeobecnejšej platnosti ako klasická teória, preto znamená mnoho vyšší stupeň poznania ako klasická fyzika. Klasická fyzika vlastne predstavuje časť kvantovej fyziky, ktorú možno uplatniť pri špeciálnych podmienkach. Dnes sa výsledky kvantovej teórie stávajú základom pro technické aplikácie. Zvukový film, televízia, tranzistor a atómové reaktory pracujú na základe zákonov, ktoré objavila kvantová fyzika.

Literatura:

- [1] CHRAPAN, J.: Úvod do kvantovej fyziky. Bratislava, 1961.
- [2] BLOCHINCEV, D. J.: Základy kvantovej mechaniky. Praha, 1956.
- [3] ŠPOLSKIJ, E. V.: Atomová fyzika, I., II. Praha, 1957.

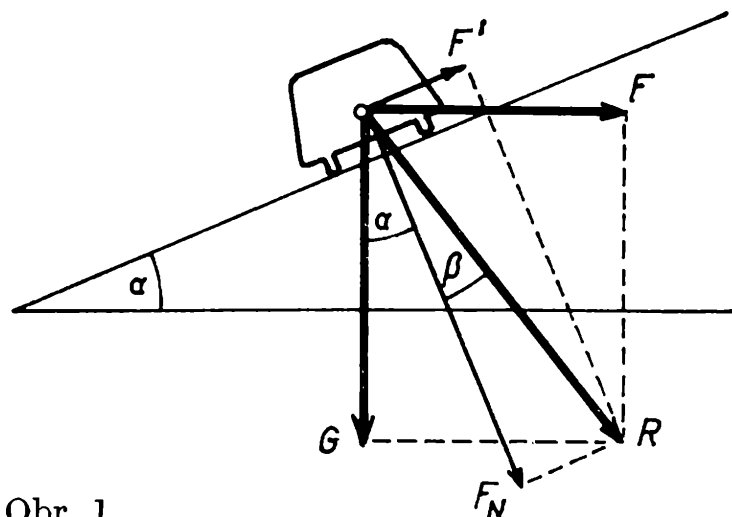
Jak jezdit v klopené zatáčce¹

Až si jednou pořídíte motorové vozidlo (7. část)

RNDr. MILAN BEJČKA — RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

V předešlé části našeho seriálu jsme odvodili vztah pro rychlost, kterou lze projet neklopenou zatáčkou, aniž dojde k radiálnímu posunutí vozidla po povrchu vozovky, tj. ke smyku, nebo aniž dojde k bočnímu překlopení vozidla. Poznali jsme, že pro bezpečnost jízdy vozidla v zatáčce má rozhodující význam velikost setrvačné síly, která vzniká jako důsledek křivočarého pohybu tělesa.

Nyní ukážeme, že účinky setrvačné síly při jízdě v zatáčce se podstatně sníží, je-li zatáčka *dostředně klopená*. V klopených zatáčkách je povrch vozovky skloněn do středu oblouku o úhel α ; přitom tangenta



Obr. 1

úhlu α udává tzv. *dostředný sklon zatáčky*. Obvykle vyjadřujeme dostředný sklon zatáčky p v procentech

$$p = \operatorname{tg} \alpha \cdot 100 \, \%.$$

Uvažujme vozidlo o hmotnosti m , které projíždí rychlostí v kruhovým obloukem zatáčky o poloměru r , jejíž povrch je skloněn do středu oblouku o úhel α (obr. 1). Na vozidlo působí, podobně jako při jízdě v neklopené zatáčce, tři síly: *tíha vozidla*

$$G = mg,$$

jejíž směr je svislý, *setrvačná síla* $F = \frac{mv^2}{r}$,

která má směr poloměru kruhového oblouku a je orientována „ven“ ze zatáčky (u zatáčky v rovinném terénu leží tedy ve vodorovné rovině) a *síla smykového tření*

$$F_t = \mu F_N,$$

rovnoběžná s povrchem vozovky a orientovaná „dovnitř“ zatáčky (μ je součinitel smykového tření mezi pneumatikami a povrchem vozovky, F_N je kolmá tlaková síla).

Výslednice R setrvačné síly F a tíhy vozidla G svírá s kolmicí k povrchu vozovky úhel β . Výslednici R můžeme rozložit ve dvě další navzájem kolmé složky. Obdržíme sílu

$$F' = R \sin \beta,$$

která je rovnoběžná s povrchem vozovky, a kolmou tlakovou sílu

$$F_N = R \cos \beta.$$

Nemá-li dojít k radiálnímu posunutí vozidla po povrchu vozovky, nesmí síla F' překročit sílu tření F_t ; musí tedy platit $F' \leq F_t$. Odtud vyplývá podmínka

$$R \sin \beta \leq \mu R \cos \beta,$$

neboli

$$\operatorname{tg} \beta \leq \mu. \quad (1)$$

Nyní odvodíme vztah pro tzv. *optimální rychlost* vozidla v zatáčce. Jde o takovou rychlost, při níž je výslednice R setrvačné síly a tíhy vozidla právě kolmá k povrchu vozovky. Pak je výslednice totožná s kolmou tlakovou silou, úhel β je rovný nule a rovněž síla F' je rovna nule. Znamená to, že na vozidlo v zatáčce nepůsobí žádná boční síla. Optimální rychlostí by bylo možné projet zatáčkou bez smyku i tehdy, kdyby součinitel tření μ byl rovný nule, tj. kdyby vozovka byla dokonale hladká. Projíždí-li vozidlo zatáčkou optimální rychlostí v_{opt} , platí pro poměr setrvačné síly a tíhy vozidla vztah

$$\frac{F}{G} = \operatorname{tg} \alpha,$$

kde α je úhel, pod kterým je povrch vozovky skloněn do středu oblouku.

Dosadíme-li $F = \frac{mv_{\text{opt}}^2}{r}$ $G = mg$, dostaneme pro optimální rychlost výraz

$$v_{\text{opt}} = \sqrt{rg \operatorname{tg} \alpha} \quad (2)$$

Příklad 1. Jak velká je optimální rychlost pro zatáčku o poloměru 800 m, je-li dostředný sklon vozovky 5 %?

Řešení: Optimální rychlost vypočteme ze vztahu (2), do nějž dosadíme $r = 800$ m, $g = 10$ m · s⁻², $\operatorname{tg} \alpha = 0,05$. Rychlost $v_{\text{opt}} = 20$ m · s⁻¹ = 72 km · h⁻¹. Při této rychlosti je v dané zatáčce výslednice setrvačné síly a tíhy vozidla kolmá k povrchu vozovky.

Vraťme se nyní k běžnějšímu případu, kdy rychlost v vozidla v zatáčce je buď větší než optimální rychlost, takže výslednice R leží vně úhlu α (obr. 1), nebo je naopak menší než optimální rychlost a výslednice R leží uvnitř úhlu α (obr. 2). Poměr setrvačné síly a tíhy vozidla lze v prvním případě vyjádřit vztahem

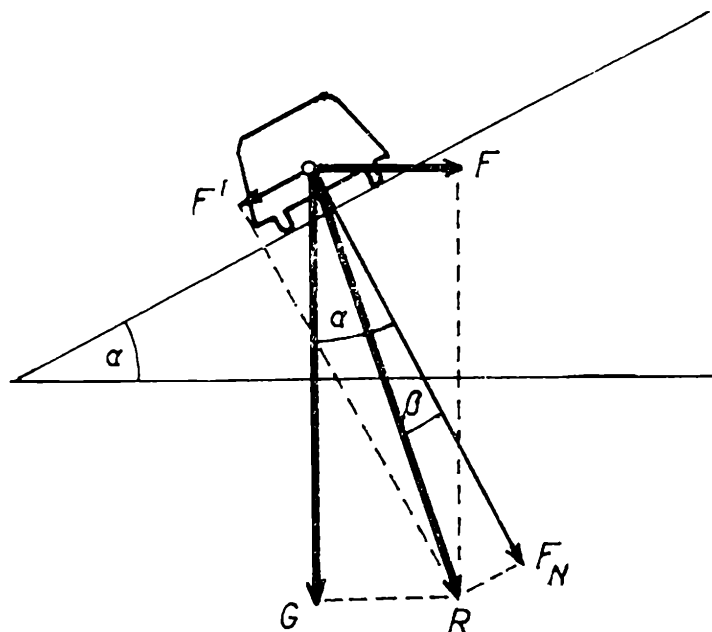
$$\frac{F}{G} = \operatorname{tg} (\alpha + \beta),$$

ve druhém případě

$$\frac{F}{G} = \operatorname{tg} (\alpha - \beta).$$

Dosadíme-li $F = \frac{mv^2}{r}$, $G = mg$, obdržíme pro rychlost výrazy

$$v = \sqrt{rg \operatorname{tg} (\alpha + \beta)} = \sqrt{rg \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}},$$



Obr.

$$v = \sqrt{rg \operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = \sqrt{rg \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}}.$$

Vzhledem ke vztahu (1) platí pro *největší a nejmenší rychlost vozidla*, jíž může projet zatáčkou bez smyku, vztahy

$$v_{\max} = \sqrt{rg \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}}, \quad (3)$$

$$v_{\min} = \sqrt{rg \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}}. \quad (4)$$

Při rychlosti větší než $v_{\max}$ dochází k radiálnímu posunutí vozidla na vnější stranu zatáčky, při rychlosti menší než $v_{\min}$ na stranu vnitřní. Tedy podmínku pro rychlost v vozidla v klopené zatáčce lze vyjádřit vztahem

$$v_{\min} \leq v \leq v_{\max}.$$

Výraz (4) pro minimální rychlost má ovšem smysl jen tehdy, je-li $\operatorname{tg} \alpha \geq \mu$.

Příklad 2. Automobil projíždí na závodní dráze zatáčkou o poloměru $r = 50$ m, dostředně skloněnou o úhel $\alpha = 22^\circ$. Určete horní a dolní mez rychlosti automobilu, při níž nedojde ke smyku, je-li součinitel smykového tření mezi pneumatikami a vozovkou $\mu = 0,3$.

Řešení: Dosadíme-li do vztahů (3) a (4) číselné hodnoty $r = 50$ m, $g = 10$ m s⁻², $\mu = 0,3$ a $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 22^\circ = 0,4$, dostaneme pro maximální rychlost hodnotu $v_{\max} \doteq 20$ m s⁻¹ = 72 km . h⁻¹, pro minimální rychlost hodnotu $v_{\min} \doteq 6,7$ m . s⁻¹ = 24 km . h⁻¹. Bezsmyslové projetí zatáčkou je za daných podmínek možné pro rychlosti v , pro něž platí $24 \text{ km h}^{-1} \leq v \leq 72 \text{ km h}^{-1}$. Při rychlosti $v > 72 \text{ km h}^{-1}$

dochází k radiálnímu posunutí vozidla na vnější stranu zatáčky, při rychlosti $v < 24 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ na stranu vnitřní.

Jestliže dostředný sklon vozovky je do 20 %, tj. $\text{tg } \alpha < 0,2$ (při projektování dnešních silnic se uvažuje s maximálním dostředným sklonem jen 10 %) a počítáme-li se součinitelem smykového tření $\mu < 0,2$, můžeme ve vztazích (3) a (4) zanedbat součin $\mu \text{tg } \alpha$ vzhledem k číslu 1 a pro maximální a minimální rychlost pak dostaneme jednodušší přibližné vztahy

$$v_{\max} \doteq \sqrt{rg (\text{tg } \alpha + \mu)}, \quad (5)$$

$$v_{\min} \doteq \sqrt{rg (\text{tg } \alpha - \mu)}. \quad (6)$$

Hodnoty rychlostí se v tomto případě nebudou lišit od hodnot vypočítaných ze vztahů (3) a (4) o více než 2 %.

Příklad 3. Určete horní a dolní mez rychlosti automobilu, který projíždí zatáčkou o poloměru $r = 100 \text{ m}$ a dostředným sklonu $p = 12,5 \%$, uvažujeme-li součinitel smykového tření $\mu = 0,1$.

Řešení: Mezní rychlosti vypočteme ze vztahů (5) a (6), do nichž dosadíme $r = 100 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\text{tg } \alpha = 0,125$ a $\mu = 0,1$. Dostaneme hodnoty $v_{\max} = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, $v_{\min} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Příklad 4. Jak se změní meze rychlosti v předchozím příkladu, uvažujeme-li součinitel smykového tření $\mu = 0,2$?

Řešení: Dosazením číselných hodnot do vztahu (5) dostaneme maximální rychlost $v_{\max} \doteq 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 65 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; dolní mez rychlosti v tomto případě neexistuje, neboť $\mu > \text{tg } \alpha$ a výraz (6) tedy nemá smysl. Vozidlo nesklouzne na vnitřní stranu zatáčky ani v případě, že se zastaví.

Maximální rychlost, kterou vozidlo projede zatáčkou ještě bez smyku, je funkcí poloměru zatáčky, součinitele smykového tření a dostředného sklonu vozovky. Závislost maximální rychlosti $v_{\max}$ na dostředném sklonu vozovky pro několik různých hodnot součinitele smykového tření μ a pro poloměr zatáčky $r = 100 \text{ m}$ můžeme sledovat v tabulce 1.

Tabulka 1. Maximální rychlost $v_{\max}$ [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] pro bezsmykové projetí zatáčkou o poloměru $r = 100 \text{ m}$

$\mu \backslash \text{tg } \alpha$	−0,10	−0,05	0	0,05	0,10	0,15	0,20
0	—	—	0	7,1	10,0	12,2	14,1
0,1	0	7,1	10,0	12,2	14,1	15,9	17,5
0,2	9,9	12,2	14,1	15,9	17,5	19,0	20,4
0,3	13,9	15,7	17,3	18,9	20,3	21,7	22,8
0,4	17,0	18,5	20,0	21,4	22,7	24,2	25,5
0,5	19,5	21,0	22,4	23,8	25,1	26,5	27,9

V tabulce jsou uvedeny hodnoty maximální rychlosti také pro záporné hodnoty dostředného sklonu vozovky; s opačně klopenou zatáčkou se řidiči mohou někdy setkat na silnicích s vypuklým příčným profilem, který je zachován i v zatáčce.

Prázdná místa v prvním řádku tabulky 1 znamenají, že pro součinitel smykového tření $\mu = 0$ a opačně klopenou zatáčku neexistuje žádná rychlost, kterou by bylo možné zatáčkou projet bez smyku; i stojící vozidlo by klouzalo na vnější stranu zatáčky. Číselné hodnoty v prvním řádku tabulky, vypočtené pro součinitel $\mu = 0$, udávají jedinou hodnotu rychlosti, kterou lze takovou zatáčkou projet bez smyku, neboť při dokonale hladkém povrchu vozovky by při větší rychlosti došlo k posunu vozidla na vnější stranu zatáčky, při menší rychlosti k posunu na stranu vnitřní, současně pak znamenají pro projetí zatáčkou o daném sklonu $\text{tg } \alpha$ hodnotu optimální rychlosti, při níž je výslednice setrvačné síly a tíhy vozidla kolmá k povrchu vozovky.

V dalších řádcích tabulky 1 můžeme sledovat, jak maximální rychlost pro bezsmykové projetí zatáčkou roste s dostředným sklonem zatáčky. Jestliže např. při součiniteli $\mu = 0,1$ lze neklopenou zatáčkou ($\text{tg } \alpha = 0$) projet maximální rychlostí $v_{\text{max}} = 10,0 \text{ m s}^{-1}$, pak již při sklonu 5 % ($\text{tg } \alpha = 0,05$) se tato rychlost zvýší na $12,2 \text{ m s}^{-1}$, při sklonu 10 % ($\text{tg } \alpha = 0,10$) na $14,1 \text{ m s}^{-1}$ a při sklonu 20 % ($\text{tg } \alpha = 0,20$) na $17,5 \text{ m s}^{-1}$. Maximální rychlost pro bezsmykové projetí zatáčkou roste také se součinitelem tření μ , což můžeme sledovat z údajů ve sloupcích tabulky.

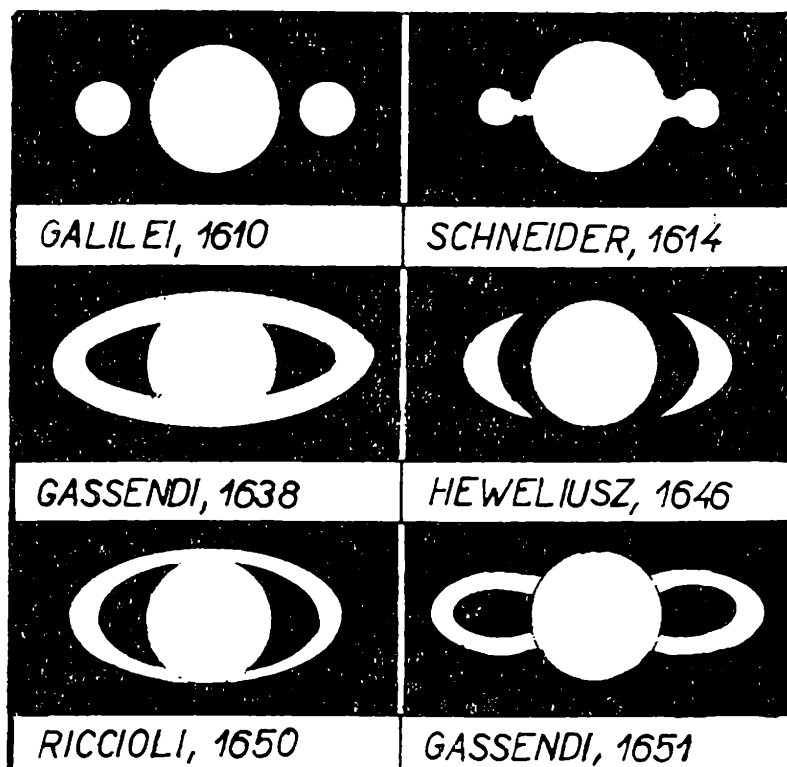
astronomie

Saturnův prstenec

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Planeta Saturn se odlišuje od všech ostatních planet sluneční soustavy pozoruhodným útvarem — plochým prstencem, obíhajícím kolem Saturna v jeho rovníkové rovině. Pro tento prstenec bývá Saturn pokládán za nejkrásnější planetu sluneční soustavy.

Saturnův prstenec lze ovšem pozorovat jen pomocí dalekohledu. Jako první jej uviděl italský vědec Galileo Galilei v roce 1610. Jeho dalekohled měl však malou rozlišovací schopnost, proto Galilei nemohl prstenec

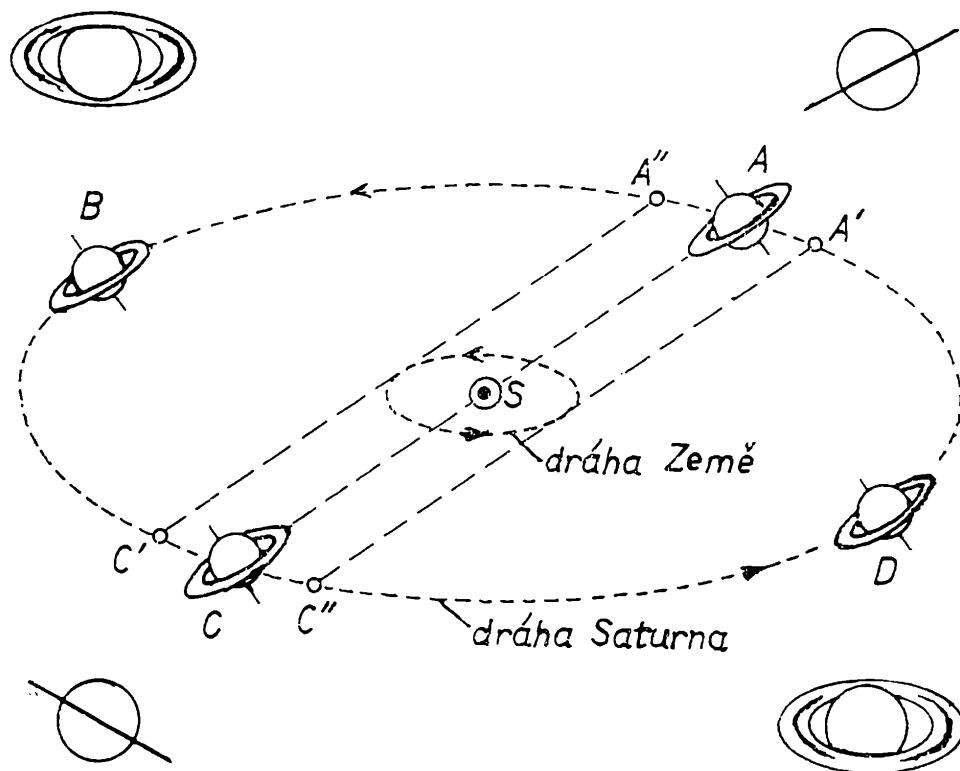


Obr. 1. Saturn se svým prstencem podle kreseb pozorovatelů ze 17. století.

dostatečně rozeznat; v dalekohledu viděl po obou stranách Saturna dva menší kotouče, téměř se dotýkající kotouče planety. Domníval se tedy, že Saturn je „trojitá planeta“; svým objevem byl značně udiven a do jisté míry pochyboval o jeho skutečnosti. Po dvou letech zjistil, že obě „postranní tělesa“ zmizela a Saturn se opět začal podobat ostatním planetám, ale o něco později se úkaz objevil znovu. Galilei přišel k závěru, že tento podivný jev je způsoben optickým klamem, vznikajícím v jeho dalekohledu, a přestal Saturnovi věnovat pozornost. Galilei zemřel, aniž tuto záhadu rozluštil. Na obr. 1 je znázorněn Saturn, jak se jevil Galileimu a jeho současníkům. Nejblíže k objevení skutečného vzhledu planety byl pravděpodobně francouzský hvězdář Gassendi, který však v r. 1655 náhle zemřel.

Za objevitele Saturnova prstence můžeme tedy pokládat Christiana Huygense, který v r. 1655 prstenec pozoroval a svá pozorování si také správně vysvětlil. Svůj překvapující a na tehdejší dobu neuvěřitelný objev uveřejnil v r. 1656. V té době sice prstenec opět „zmizel“, Huygens však dovedl vysvětlit, proč tomu tak je.

Změny vzhledu Saturnova prstence pro pozemského pozorovatele vysvětlíme pomocí obr. 2. Vnější průměr prstence je více než dvojnásobek průměru Saturna, tloušťka prstence je jen několik kilometrů. Při oběhu Saturna kolem Slunce zachovává jeho osa stálý směr v prostoru, proto také rovina prstence, která je totožná s rovníkovou rovinou Saturna, zůstává stále rovnoběžná sama se sebou a svírá s rovinou ekliptiky stálý



Obr. 2. K vysvětlení různého vzhledu Saturnova prstence pro pozorovatele na Zemi

úhel $28^{\circ} 5'$ V okamžiku, kdy rovina prstence prochází Zemí, leží zorný paprsek v rovině prstence — na prstenec se díváme z boku a protože jeho tloušťka je velmi malá, není prstenec pozorovatelný. Prstenec není pozorovatelný také tehdy, prochází-li jeho rovina Sluncem; pak je osvětlena jen „hrana“ prstence. Za dobu oběhu Saturna kolem Slunce, která činí asi 29,5 roku, prochází rovina prstence Sluncem dvakrát; na obr. 2 je poloha Saturna pro tyto případy označena A a C . Dráhu Země začíná rovina prstence protínat asi půl roku před průchodem Sluncem (Saturn v poloze A' nebo C') a prochází jí ještě půl roku po průchodu Sluncem (Saturn v polohách A'' a C''). Z obr. 2 je zřejmé, že za dobu přibližně jednoho roku, za kterou se Saturn přesune z polohy A' do polohy A'' (nebo z polohy C' do polohy C'') projde rovina prstence nejméně jedenkrát Zemí. Vzhledem k tomu, že se Země rovněž pohybuje, může se stát, že rovina prstence projde Zemí i dvakrát nebo dokonce třikrát, takové případy jsou však vzácné. Vzdaluje-li se rovina prstence od Slunce a Země, začíná se prstenec „otevírat“ — jeví se jako elipsa — a nejrozevřenější je tehdy, je-li průsečnice roviny prstence s ekliptikou kolmá na zorný paprsek (tyto polohy Saturna jsou na obr. 2 označeny B a D). Označíme-li velkou osu elipsy a (tato osa je rovna skutečnému průměru prstence), pak při největším rozevření prstence je malá osa $b = a \sin 28^{\circ} 5' \doteq 0,47 a$. Malá osa v tomto případě přesahuje průměr

Tabulka I. Saturnovy prstence

Prstenec	Vnější okraj km	Vnitřní okraj km	Mezera km
<i>A</i> (vnější)	138 000	120 000	Cassiniho dělení 4000
<i>B</i> (hlavní)	116 000	90 000	mezera 1000
<i>C</i> (vnitřní).	89 000	71 000	
Rovníkový poloměr Saturna je 60 000 km			

Saturna. U poloh *A*, *B*, *C*, *D* je na obr. 2 znázorněn vzhled Saturna pro pozorovatele na Zemi. Během jednoho oběhu Saturna kolem Slunce, tj. během 29,5 roku tedy prstenec dvakrát „zmizí“ a dvakrát se objeví v největším rozevření, přičemž v poloze *B* pozorujeme prstenec „zdola“ čili z jižní strany, v poloze *D* jej pozorujeme „shora“ neboli ze strany severní. Největší rozevření prstence bylo v poslední době v r. 1973, z čehož plyne, že i letos bude prstenec dobře pozorovatelný.

Saturnův prstenec byl intenzívně pozorován ihned po ohlášení jeho objevu Huygensem. Již v r. 1675 objevil Cassini, že světlý prstenec rozděluje temná čára, která jej dělí na dvě části. V polovině 19. století objevili další pozorovatelé dělicí tmavou čáru v jasnější části prstence. Proto dnes obvykle hovoříme o třech Saturnových prstencích: vnější, středně jasný, je označován písmenem *A*, prostřední a nejjasnější prstenec písmenem *B* a poměrně málo jasný, vnitřní, písmenem *C*. Mezera mezi prstenci *A* a *B* se nazývá Cassiniho dělení. Saturn se svými prstenci je znázorněn na obr. 3, přehled o rozměrech prstenců je uveden v tab. I.

O rozřešení fyzikální podstaty prstenců se poprvé pokusil již Cassini, který vyslovil názor, že se nejedná o celistvý útvar, nýbrž že se prstence skládají z velkého počtu drobných tělísek, obíhajících kolem planety. Tento názor podpořil francouzský matematik a astronom Laplace, který matematicky dokázal, že tuhý prstenec daných rozměrů nemůže existovat — nutně by se musel rozpadnout. Přesvědčivý důkaz o tom, že se prstence skládají z drobných tělísek, podala fotometrická měření a především spektrální analýza. Na základě Dopplerova jevu bylo zjištěno, že vnější části prstence obíhají kolem Saturna rychlostí $16 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, zatímco vnitřní mají rychlost větší $20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Kdyby byl prstenec tuhý, musely by mít vnější části větší rychlost než vnitřní, neboť rychlost při rotaci tuhého tělesa roste se vzdáleností od osy rotace. Rychlosti $16 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ a $20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ odpovídají kruhovým rychlostem v daných vzdálenostech od Saturna; takovými rychlostmi by obíhaly Saturnovy družice, kdyby byly na místě částic.



Obr. 3. Planeta Saturn, jak se jeví ve hvězdářském dalekohledu

Vznik prstenců není dosud uspokojivě vysvětlen. Některé hypotézy předpokládají, že prstence vznikly ze Saturnova měsíce, který se rozpadl působením gravitačních sil, jiné předpokládají, že se v blízkosti Saturna srazila dvě tělesa, která se rozpadla a jejich úlomky vytvořily postupně prstence.

Zkoumání Saturnových prstenců pokračuje i v současné době. V říjnu 1969 byl na vysokohorské hvězdárně Pic du Midi ve Francii objeven další prstenec *D* uvnitř prstence *C*. Jeho jasnost je poměrně malá, nepřesahuje 5 % jasnosti nejjasnější části prstence *B*. Nová měření v oboru infračerveného záření ukázala, že prstence obsahují krystaly ledu.

Otevřená je dosud otázka, jakou tloušťku mají Saturnovy prstence. Starší měření vedla k hodnotě kolem 100 km, novější a přesnější měření nasvědčují tomu, že tloušťka nepřesahuje 20 km. Studium tloušťky prstenců se zabývala v r. 1966 skupina sovětských a francouzských astronomů (v r. 1966 byly k nám prstence obráceny „hranou“). Tak např. Kiladze (Abastumanská observatoř) naměřil v modrém světle tloušťku prstenců 1,5 km, Dolfus a Focas (hvězdárna na Pic du Midi) naměřili ve žlutém světle 2,8 km. Chyby v určení těchto hodnot se odhadují na 25 % až 50 %, z čehož vyplývá, že tloušťka Saturnových prstenců je pravděpodobně menší než 5 km. Pokud se týká tělísek, která tvoří prstence, uvažovalo se, že jejich rozměry jsou velmi malé — že jde o drobné prachové částice. V prosinci 1972 a v lednu 1973 byl Saturn poprvé radiolokován, přičemž radiový signál se odrazil od prstenců, které byly v té době značně rozevřené. Z analýzy odraženého signálu vyplývá, že částice, tvořící prstence, mají větší rozměry, než se původně soudilo; jejich průměry jsou kolem jednoho metru nebo i více.

Vzhledem k tomu, že v současné době jsou prstence rozevřené a dobře pozorovatelné, připomínáme, že prstence jsou viditelné již v malém hvězdářském dalekohledu o průměru objektivu 50 mm, v dalekohledu o průměru 80 mm můžeme již uvidět Cassiniho dělení.

recenze

Jiří Koryta
MICHAEL FARADAY
Orbis, Praha 1972, 161 str., 34 obr.,
brož. 9,— Kčs

Vážení mladí přátelé, dovolujeme si vás upozornit na tuto velmi pěknou biografii známého anglického vědce Michaela Faradaye, kterou autor věnoval památce našeho prvního laureáta Nobelovy ceny Jaroslava Heyrovského, od jehož objevu polarografie (10. února 1922) uplynulo již přes 50 let. Heyrovský považoval Faradaye za svůj velký vzor a Faradayův portrét visel nad jeho psacím stolem.

Autor vykonal velmi záslužnou práci, když se uvolil vyličit životní osudy a dílo tohoto nejvýznamnějšího fyzika 19. stol., jehož objevy značnou měrou posunuly hranici vědeckého bádání a umožnily dnešní mohutný rozmach přírodních věd a techniky.

Čtenář se nejprve ve stručnosti seznámí se všemi hlavními objevy z nauky o elektřině a magnetismu do vystoupení Faradaye. Pak následuje vyličení neradostného Faradayova mládí, počátky jeho vědecké práce a slavné objevy. Pro skromné prostředky rodiny mohl získat jen základní vzdělání a ve třinácti letech byl dán do učení k londýnskému knihkupci a knihaři. Toto zaměstnání mu umožňovalo, že se mohl seznámit s řadou významných děl

vědců a filosofů 18. stol., zvláštní zájem jevil o knihy pojednávající o fyzice, chemii a filosofii. Touha po hlubším vzdělání jej r. 1812 přivedla na přednášky tehdy nejpopulárnějšího anglického vědce, chemika H. Davyho a r. 1813 se stal jeho asistentem v Královském ústavu v Londýně (Royal Institution). V letech 1813—1815 provázal Davyho na jeho cestách po Francii, Itálii a Švýcarsku, a tak měl možnost se osobně seznámit s mnoha vynikajícími učiteli té doby, jako byli: Ampère, Gay-Lussac, Cuvier, Volta, Humboldt aj. Jeho vědecký obzor se značně rozšířil a tato cesta mu nahradila universitu. R. 1824 byl zvolen členem anglické Královské společnosti nauk (Royal Society), r. 1825 se stal po Davym ředitelem laboratoře a v roce 1827 byl povolán za prof. chemie na Královský ústav. Byl členem Institut de France, akademií věd všech evropských zemí a čestným doktorem mnoha universit.

Připomeňme si stručně hlavní Faradayovy objevy. Jeho první vědecké práce patří chemii. Objevil dvě nové sloučeniny chlóru s uhlíkem, nové slitiny oceli, nové druhy optického skla pro čočky dalekohledů, r. 1825 benzen, prováděl zkapalňování plynů a zkoumal složení svítivého plynu a různých nerostů.

Od r. 1821, od Oerstedova objevu působení elektrického proudu na magnetku, obrátil svou pozornost na

elektrické a magnetické jevy. Roku 1831, po desetiletém vytrvalém bádání, objevil elektromagnetickou indukci, která dala základ rozvoji moderní elektrotechniky (alternátory, dynamo, transformátory, elektromotory s točivým magnetickým polem atd.). R. 1833 objevil zákony elektrolýzy, které dodnes nesou jeho jméno, r. 1834 samoindukci, v letech 1836–37 studoval vliv dielektrika na elektrostatické procesy a v roce 1844 diamagnetismus a stáčení polarizační roviny světla silným magnetickým polem.

Dodnes tohoto významného anglického vědce připomínají různé názvy, jako např.: Faradayova klec, Faradayův jev, Faradayův náboj, Faradayův proud, Faradayova konstanta, nebo užívané výrazy: farad, ale i ion, kation, anion, elektroda aj.

Faraday zcela nově vysvětloval elektrické a magnetické jevy a do fyziky zavedl nové pojmy: pojem elektrického a magnetického pole a pojem siločar. Faradayovy představy matematicky zformuloval J. C. Maxwell a učinil je východiskem své elektromagnetické teorie pole (Faraday nebyl matematik). Z této teorie pak Maxwell teoreticky dokázal existenci elektromagnetických vln, kterou experimentálně potvrdil v r. 1887 významný německý fyzik H. Hertz. Tím byla otevřena cesta rozvoji sdělovací techniky (bezdrátová telegrafie, rozhlas, televize, radar aj.).

K dokreslení osobnosti tohoto badatele autor uvádí jeho filosofické názory, připomíná jeho pedagogickou činnost, veřejnou činnost, podává ukázkou z jeho písemností a v závěru dává slovo významným vědcům, kteří Faradayovo dílo dále rozvíjeli. Einstein oceňuje jeho dílo takto: „Nejúchvatnějším předmětem v údobí mého studia byla Maxwellova teorie...“ a končí slovy: „V této souvislosti se nemohu zdržet poznámky, že dvojice Faraday—Maxwell má pozoruhodnou vnitřní podobnost s dvojicí Galileo—Newton; první z každé dvojice intuitivně pochopil souvislosti a druhý je přesně formuloval a kvantitativně aplikoval.“

Významný ruský fyzik A. G. Stoletov v r. 1879 napsal: „Faraday, syn kováře, v mládí knihařský učeň, zakončil život jako člen mnohých vědeckých společností, nesporně uznávaný za hlavu fyziků své doby. Od dob Galilea neviděl svět tolik překvapujících a rozmanitých objevů z jedné hlavy a sotva tak brzy uvidí druhého Faradaye. Jeho zásluhy jsou obrovské. Hluboké myšlenky, které zavedl do teorie elektrických jevů, teprve nyní získávají příslušné ocenění...“

Knížka je velmi pěkně napsána a žádný vážnější zájemce o studium přírodních věd a techniky z řad středoškolské mládeže by si ji neměl nechat ujít. Doplní mu v mnohém směru někdy suchý školní výklad a najde i mnoho poučení o přístupu k vážné vědecké práci.

Prof. Rudolf Kolomý

Ze zahraničních časopisů

Z bulharského časopisu „Matematika“:

Dokažte: Je-li p číslo různé od nuly a platí-li pro každou hodnotu argumentu x rovnice

$$f(x + p) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)},$$

je funkce $f(x)$ periodická a má periodu $4p$.

Řešení: Je třeba dokázat, že $f(x + 4p) = f(x)$. Počítejme:

$$\begin{aligned} f(x + 4p) &= f[(x + 3p) + p] = \frac{1 + f(x + 3p)}{1 - f(x + 3p)} = \frac{1 + \frac{1 + f(x + 2p)}{1 - f(x + 2p)}}{1 - \frac{1 + f(x + 2p)}{1 - f(x + 2p)}} = \\ &= \frac{2}{-2f(x + 2p)} = \frac{-1}{f(x + 2p)} = \frac{-1}{\frac{1 + f(x + p)}{1 - f(x + p)}} = -\frac{1 - \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}}{1 + \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}} = \\ &= -\frac{1 - f(x) - 1 - f(x)}{1 - f(x) + 1 + f(x)} = \frac{2f(x)}{2} = f(x) \quad \text{c. b. d.} \end{aligned}$$

Ukázky úloh pro jednotlivé třídy střední školy.

8. třída:

Dokažte, že výraz $A = x^5 + 4x$ je dělitelný pěti pro všechna přirozená čísla x .

9. třída:

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n je čtyřmi dělitelný výraz

$$3^n \cdot (2n - 1) + 1$$

10. třída:

Řešte rovnici $5^x \sqrt[3]{8^x} = 100$

11. třída:

Určete definiční obor funkce $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} + \lg(x + 3)$

O. S.

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

C

calculate
calculation
calculus
 calculus of probability
 differential and integral c.
 calculus of variations
cancel
canonical
cap
cardinal number
cardioid
carrying in addition
carry out
Cartesian coordinates
Cartesian product
cartography
case
 special case
category
central
 central angle
 central conic
 central projection
 central symmetry
centre
 centre of homothety
 centre of symmetry
 centre of vision
centroid, centre of gravity
certain
certainty
chance

vypočítat
výpočet
matematická analýza
 počet pravděpodobnosti
 diferenciální a integrální počet
 variační počet
krátit, rušit, zrušit
kanonický
vrchlík, symbol průniku $\cap$
kardinální číslo
kardioida
sčítání s přechodem
provést, uskutečnit
kartézské souřadnice
kartézský součin
kartografie
případ
 zvláštní případ
kategorie, druh
středový
 středový úhel
 středová kuželosečka
 středové promítání
 středová souměrnost
střed
 střed stejnolehlosti
 střed souměrnosti
 hlavní bod
těžiště
určitý
jistota
náhoda, náhodný

change	měnit, změna
change of position	přemísťování
chart	diagram
column chart	sloupcový diagram
check	zkouška, kontrolovat
chess	šachy
choice	volba
choose	volit
chord	tětiva
chosen at random	libovolně zvolený
circle	kruh, kružnice
great circle	hlavní kružnice
nine-points circle	kružnice devíti bodů
circuit	okruh, kružnice (v teorii grafů)
circular	kruhový
circular function	goniometrická funkce
circular ring	mezikružší
circulation	otáčení, oběh
circumcircle	opsaná kružnice
circumcentre	střed opsané kružnice
circumference	obvod kružnice, kruhu
circumscribe	opsat kružnici
circumscribed circle of polygon	kružnice opsaná mnohoúhelníku
class	třída, druh
clockwise	ve smyslu hodinových ručiček
closed	uzavřený
closure	uzávěr
cluster point	hromadný bod
coaxal (coaxial) planes	roviny téhož svazku
code	kód
coefficient	koeficient
angular coefficient	směrnice
cofactor	doplňek (v determinantu)
cofunction	kofunkce
coincidence	incidence
coincide	být incidentní, krýti se
coincident	totožné
colinear	kolineární
collineation	kolineace
column	sloupec
combination	kombinace, kombinační číslo
linear combination	lineární kombinace
combinatorial analysis	kombinatorická analýza
comma	čárka (nikoli desetinná)
commensurable	souměřitelné

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

8

ROČNÍK 52, 1973-1974 DUBEN



ROČNÍK 52
DUBEN 1974

8

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, CSc., Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1974.

OBSAH

O B S A H

Dr. J. Šedivý: O číslu π .	337
S. Horák: Nerovnosti v geometrii	339
A. Šarounová: Heronův vzorec pro třetivové čtyřúhelníky . . .	342
J. Nečas: Vzorce pro součty k-tých mocnin přirozených čísel . . .	344
Dr. J. Skuhra: Problém divokých kachen (dokončení) . . .	347
J. Drábek, J. Zach: Eulerova věta pro rovinné grafy . . .	349
E. Cířka: Ke kolineaci kružnice s kuželosečkou	353
F. Hradecký: Řetězce kružnic na kulové ploše a v rovině	356
Dr. I. Baník, dr. J. Zámečník: Několko zajímavostí o fyzice vysokých tlaků	360
V. I. Levantovskij: Raketou ke Slunci	363
E. Procházková: Zdánlivá (střední) hmotnost kilomolu směsi dvou plynů .	365
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Dvanáct Jupiterových měsíců . . .	369
J. Kotyk: Nikolaj Ivanovič Lobačevskij	372
Prof. dr. J. Skotnický: O příčinnosti .	376
Dr. J. Šedivý: Třikrát Thales a třikrát Pythagoras . . .	380
Archimedes . . .	381
Recenze:	383
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český . . .	3, a 4. str. obálky

matematika

0 čísle π .

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

Poměr délky kružnice k délce jejího průměru byl jednou z prvních číselných konstant, kterou lidé určovali už ve starověku. Je pravděpodobné, že se po dlouhou dobu spokojovali s jeho přibližnou hodnotou 3, například na jedné hliněné tabulce z Mezopotámie je klínovým písmem zapsáno:

Je-li 60 kružnice, pak třetina je 20, a to je průměr.

Staří Egypťané byli patrně první v úsilí o přesnější vyjádření uvedeného poměru zlomkem, resp. smíšeným číslem, v 17. století př. n. l. užívali čísla $3\frac{1}{6}$ nebo $4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$. Toto druhé číslo udávalo přibližný obsah jednotkového kruhu.

Vynikajícím počtářem délek křivek, obsahů obrazců a objemů i povrchů těles byl *Archimedes*, ten našel pomocí jednoho 96-úhelníka vepsaného a druhého opsaného kružnici meze pro poměr délky kružnice k délce jejího průměru — čísla

$$3\frac{10'}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Heron uvádí tři odhady užívané v 1. století n. l. — číslo 3, číslo $\sqrt{10}$ a číslo $22 : 7$. Ptolemaios ve 2. století n. l. užívá čísla $377 : 120 = 3,1416$.

V čínské literatuře ze třetího století n. l. je udáván poměr $157 : 50$, z pátého století pochází poměr $355 : 113$, který je podstatně přesnější (přesvědčte se o tom). V indických spisech lze též najít hodnotu 3,1416, v arabské literatuře v 8.—11. století se vyskytují čísla, která jsme již uvedli, v traktátu matematika al-Kaší z r. 1424 je prý uvedeno 17 desetinných míst čísla π .

Evropská matematika se začala prudce rozvíjet až v 16. století, r. 1585 Holanďan A. Antoniszoon znovuobjevil poměr $355 : 113 \doteq 3,1415929$, který dává šest desetinných míst čísla π . Ostatní počtáři se už nesnažili udat zlomek, ale závodili v hledání co největšího počtu desetinných míst čísla π .

Výkon Francouze F. Vièty z r. 1579 je obdivuhodný — použil Archimedy metody pro 393216-úhelník a získal *devět* desetinných míst čísla π . Vlámský matematik A. van Roomen pracoval s 2^{30} -úhelníkem a určil r. 1593 *patnáct* desetinných míst čísla π (uvědomme si, že $2^{30} > 10^{10}$). V té době však již jeho krajan *Ludolf van Ceulen* (čti fan Kojlen) počítal s mnohoúhelníky majícími více než 32 miliard stran a získal v r. 1596 přesných *dvacet* desetinných míst a později dalších patnáct. Výpočet celkem 35 desetinných míst čísla π byl takovým výkonem, že zkoumaný poměr byl na jeho počest nazýván *Ludolfovým číslem*.

Další pokusy o ještě přesnější určení číslic v zápisu čísla π probíhaly už pomocí silnějších matematických prostředků, zejména součtů nekonečných řad, pomocí nekonečných součinů a podílů (řetězových zlomků). Ideje k pohodlnějšímu výpočtu čísla π dali i tak známí matematici jako R. Descartes, G. W. Leibniz, J. Wallis, Ch. Huygens aj. V r. 1647 označil W. Outhred zkoumané číslo symbolem $\pi : \delta$ (perimetr : diametr), r. 1706 W. Jones poprvé užil pouze písmene π ; definitivnímu všeobecnému přijetí písmene π v tomto významu napomohl svou autoritou L. Euler v polovině 18. století. L. Euler také zkontroloval a opravil výpočet 128 desetinných míst čísla π , která našel de Lagny r. 1717; celý výpočet prý Eulerovi trval jen 80 hodin.

Mnoho počtářů zvyšovalo pak postupně počet známých míst čísla π , až r. 1873 uveřejnil W. Shanks po 20 letech práce celkem 707 desetinných míst. Tento rekord již nebyl „rukodělnou technikou“ překonán, ale v r. 1945 byla objevena chyba na 520. místě Shanksova výpočtu. Moderní počítače umožnily pohodlný výpočet ohromného počtu číslic v zápise čísla π , r. 1958 bylo vypočítáno přes 10 000 míst, r. 1961 již 100 000 míst (za osm minut práce stroje!). V současné době je výpočet cifer čísla π vhodnou rozvíčkou programátorů i počítačů. Honba za vysokým počtem desetinných míst čísla π nemá valný význam, číslice zápisu jsou spíše předmětem statistického studia.

Matematiky však zajímalo, jakého druhu je číslo π , zejména, zda jde o číslo racionální. V r. 1767 dokázal J. H. Lambert, že *číslo π je iracionální*, tj. nelze je vyjádřit podílem dvou přirozených čísel. Stručněji dokázali totéž pro π i π^2 A. M. Legendre r. 1794 a Ch. Hermite r. 1873, ten pak dokázal o číslu e (základu přirozených logaritmů), že není kořenem žádné algebraické rovnice typu $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ s racionálními koeficienty. Hermiteova výsledku použil F. Lindemann r. 1882 k důkazu, že ani číslo π není kořenem žádné takové rovnice. Stručně se říká, že *čísla π , e nejsou algebraická, ale transcendentní nad oborem racionálních čísel*.

Tento výsledek s konečnou platností rozřešil i po tisíciletí trvající problém, zda lze provést kvadraturu kruhu, tj. sestavit kružítkem

a pravítkem čtverec, který má stejný obsah jako daný kruh. Transcendentnost čísla π vylučuje možnost takové konstrukce, všechny konstrukce kružítkem a pravítkem mohou být jen přibližné. Totéž samozřejmě platí i pro rektifikaci kružnice, tj. konstrukci úsečky, která má stejnou délku jako kružnice.

Literatura:

E. Kol'man: Istorija matematiki v drevnosti, Moskva 1961.

F. Kympan: Istorija čísla π , Moskva 1971.

M. Gardner: Matematičeskije golovolomki i razvlečenija, Moskva 1971.

Nerovnosti v geometrii

STANISLAV HORÁK, Praha

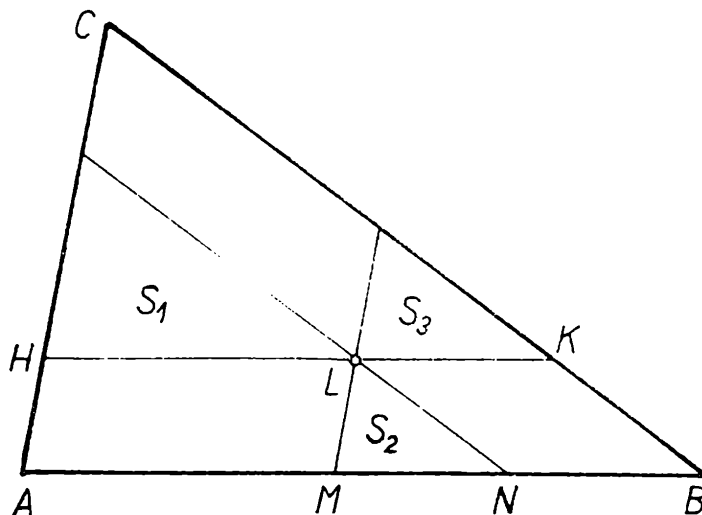
Již jsem se tu v Rozhledech zmínil o tom, že v posledních desetiletích se objevilo mnoho prací, pojednávajících o nerovnostech mezi prvky trojúhelníku. Uveřejněním několika nerovností chceme čtenářům Rozhledů přiblížit tento nový proud v elementární geometrii.

I. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod L , kterým jsou proloženy přímky rovnoběžné se stranami daného trojúhelníka. Jímí je trojúhelník ABC rozdělen na tři trojúhelníky a tři rovnoběžníky. Jsou-li obsahy těchto trojúhelníků označeny S_1, S_2, S_3 , platí

$$S \leq 3 \cdot (S_1 + S_2 + S_3),$$

kde S je obsah daného trojúhelníka. Rovnost platí právě tehdy, když bod L splývá s těžištěm T daného trojúhelníka. (Viz literatura č. 1.)

Důkaz (obr. 1). Rovnoběžka se stranou AB protne strany AC, BC po



Obr. 1

řadě v bodech H, K . Rovnoběžka s BC (s AC) protne stranu AB v bodě N (M). O obsahích trojúhelníků platí:

$$S_1 : S = HL^2 : AB^2 \quad \sqrt{S_1} = \frac{HL}{AB} \sqrt{S}.$$

Podobně:

$$S_2 : S = MN^2 : AB^2 \quad \sqrt{S_2} = \frac{NM}{AB} \sqrt{S}$$

$$S_3 : S = LK^2 : AB^2 \quad \sqrt{S_3} = \frac{LK}{AB} \sqrt{S}. \quad (0)$$

Sečtením:

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S} \frac{HL + MN + LK}{AB} = \sqrt{S} \cdot \frac{AB}{AB} = \sqrt{S}.$$

Odtud

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + 2\sqrt{S_1 S_2} + 2\sqrt{S_2 S_3} + 2\sqrt{S_3 S_1}. \quad (1)$$

Nyní použijeme známé nerovnosti pro nezáporná čísla

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}, \quad (2)$$

v níž rovnost platí jen v případě, že $x = y$. Podle toho

$$2\sqrt{S_1 S_2} \leq S_1 + S_2, \quad 2\sqrt{S_2 S_3} \leq S_2 + S_3, \quad 2\sqrt{S_3 S_1} \leq S_3 + S_1;$$

rovnost v prvním vztahu platí právě tehdy, když $S_1 = S_2$,

rovnost v druhém vztahu platí právě tehdy, když $S_2 = S_3$ a

rovnost v třetím vztahu platí právě tehdy, když $S_1 = S_3$.

Z této poslední rovnosti a z první a třetí rovnice (0) plyne $HL = LK$, což znamená, že bod L leží na těžnici t_c .

Podobně z rovnosti $S_1 = S_2$ plyne, že bod L leží na těžnici t_a a z rovnosti $S_2 = S_3$ vyplývá, že bod L leží na těžnici t_b .

Po dosazení do vztahu (1) dojdeme k výsledku

$$S \leq 3 \cdot (S_1 + S_2 + S_3).$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $S_1 = S_2 = S_3$, tj. právě tehdy, když bod L splyne s těžištěm daného trojúhelníku.

Cvičení. Ze vztahů (1) a (2) odvoďte nerovnost

$$S \geq 3 \cdot (\sqrt{S_1 S_2} + \sqrt{S_2 S_3} + \sqrt{S_3 S_1}).$$

II. V jedné práci dokazuje M. Jovanović nerovnost (viz literaturu č.2):

Při obvyklém označení prvků trojúhelníku platí

$$\frac{3}{8} (bc + ca + ab) \leq t_b t_c + t_c t_a + t_a t_b < \frac{3}{2} (bc + ca + ab).$$

Zde si dokážeme jednodušší nerovnost:

$$\frac{3}{4}(bc + ca + ab) \leq t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 < \frac{3}{2}(bc + ca + ab).$$

Důkaz. a) Víme, že $t_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$.

Cyklickou záměnou dostaneme obdobné vzorce pro t_b^2 a t_c^2 . Odtud pak máme

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

nebo jinak

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2). \quad (3)$$

b) Strany trojúhelníka označme tak, aby platilo

$$a \geq b \geq c.$$

Potom ze vztahů

$$a - b \geq 0, \quad a - c \geq 0, \quad b - c \geq 0 \quad (4)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq 2bc \\ a^2 + c^2 &\geq 2ac \\ b^2 + c^2 &\geq 2bc. \end{aligned}$$

Rovnost platí v první nerovnosti pro rovnoramenný trojúhelník, v němž $a = b$. Podobně tomu je v druhých dvou nerovnostech.

Sečtením všech tří vztahů máme

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Rovnost platí jen tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

S použitím rovnosti (3) se tento vztah změní:

$$ab + bc + ca \leq \frac{4}{3}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2). \quad (5)$$

c) Ze základních nerovností, platících o délkách stran trojúhelníku

$$\begin{aligned} a &< b + c \quad | \cdot a \\ b &< c + a \quad | \cdot b \\ c &< a + b \quad | \cdot c \end{aligned}$$

dostaneme naznačenou úpravou a po sečtení

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca),$$

po dosazení ze vztahu (3)

$$\frac{4}{3} (t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) < 2(ab + bc + ca). \quad (6)$$

Spojením (5) a (6) máme výsledek

$$\frac{3}{4} (ab + bc + ca) \leq t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 < \frac{3}{2} (ab + bc + ca).$$

Přitom rovnost platí jedině tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný.

Poznámka na závěr. Je vidět, že k sestavování nerovností musíme znát důkladně rovnosti, platící o prvcích trojúhelníku. To však byl předmět studia předcházejících matematických generací.

Literatura:

- [1] Gojko Kalajdžić, Some Inequalities for the triangle. Publikacije elektrotehničkog fakulteta univerziteta u Beograd; no 273.
- [2] Mirko Jovanović, Some inequalities involving elements of a triangle and a polygon. Tatáž publikace, no 374.

Heronův vzorec pro tělivové čtyřúhelníky

ALENA ŠAROUNOVÁ, MFF UK Praha

Jistě všichni znáte Heronův vzorec pro výpočet obsahu P trojúhelníka se stranami a, b, c a $2s = a + b + c$:

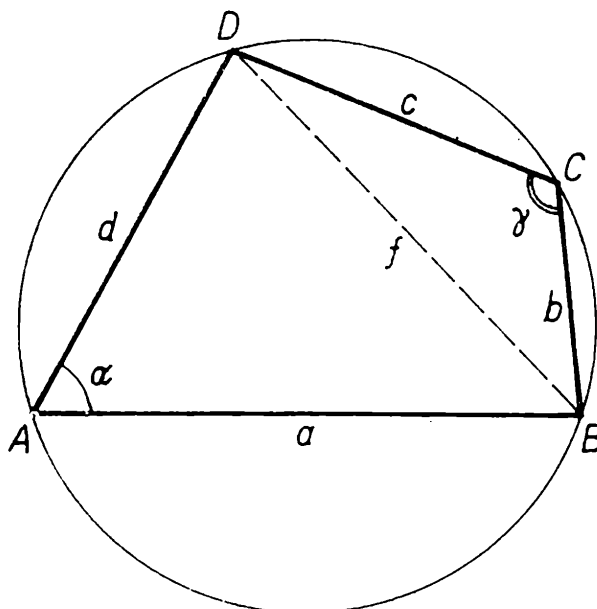
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

který uvedl ve svém díle *Metrika* matematik a mechanik *Heron* v 1. století n. l. Heron však určitě není objevitelem vzorce (znal ho již např. Archimedes o 250 let dříve), ale podal svůj vlastní důkaz vzorce. Šlo o vzorec prakticky velmi užitečný, protože v mnoha případech je snadnější změřit strany trojúhelníka (pozemku, podstavu tělesa), než v něm sestrojovat a měřit výšku.

Obdobný vzorec můžeme odvodit též pro výpočet obsahu tělivových čtyřúhelníků, tj. konvexních čtyřúhelníků, jejichž vrcholy leží na jedné kružnici. Má-li takový čtyřúhelník délky stran a, b, c, d , pak pro jeho obsah P platí:

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

kde $2s = a + b + c + d$. I tento vzorec bývá nazýván Heronův, spíše



však jen pro formální podobu s výše uvedeným vzorcem. Dokažme nyní vzorec pro obsah tětiového čtyřúhelníka (obr. 1):

Součet každých dvou protějších vnitřních úhlů tětiového čtyřúhelníka je úhel přímý. Užijeme-li označení z obrázku, můžeme psát:

$$\alpha + \gamma = 180^\circ; \beta + \delta = 180^\circ \quad (1)$$

Z vlastností goniometrických funkcí $y = \sin x$, $y = \cos x$ a z (1) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \gamma \\ \cos \alpha &= -\cos \gamma \end{aligned} \quad (2)$$

Obsah P čtyřúhelníka $ABCD$ je roven součtu obsahů trojúhelníků ABD , BCD :

$$P = \frac{1}{2} ad \sin \alpha + \frac{1}{2} bc \sin \gamma$$

a užitím (2)

$$4P = (2ad + 2bc) \sin \alpha. \quad (3)$$

Číslo BD^2 (BD je velikost společné strany uvažovaných trojúhelníků) můžeme pomocí kosinové věty vyjádřit dvěma způsoby:

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha$$

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma;$$

platí tedy rovnost

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma$$

a užitím (2)

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = (2ad + 2bc) \cos \alpha. \quad (4)$$

Na pravé straně této rovnosti uplatníme vzorec pro rozklad rozdílu čtverců; postupně dostáváme:

$$\begin{aligned}
16P^2 &= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2) (2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) \\
16P^2 &= [(a + d)^2 - (b - c)^2] [(b + c)^2 - (a - d)^2] \\
16P^2 &= (a + b - c + d) (a - b + c + d) (a + b + c - d) \\
&\quad (-a + b + c + d). \tag{5}
\end{aligned}$$

Jestliže označíme polovinu obvodu čtyřúhelníka písmenem s , platí:
 $a + b + c + d = 2s$; $-a + b + c + d = 2(s - a)$; $a - b + c + d = 2(s - b)$;
 $a + b - c + d = 2(s - c)$; $a + b + c - d = 2(s - d)$.

Po dosazení do (5) dostáváme

$$16P^2 = 2(s - a) \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - c) \cdot 2(s - d)$$

a po zkrácení hledaný vzorec

$$P^2 = (s - a) (s - b) (s - c) (s - d). \tag{6}$$

Dovedete najít souvislost mezi Heronovým vzorcem pro obsah P trojúhelníka ABC a vzorcem (6)? [Využijte představy, že číslo d se zmenšuje a blíží se k nule!]

Vzorce pro součty k -tých mocnin přirozených čísel

JIŘÍ NEČAS, SNTL Praha

Ve sbírkách úloh z matematiky se obvykle objevují některé z následujících vzorců, které máte dokázat matematickou indukcí:

$$(A0) \quad 1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots + n^0 = n$$

$$(A1) \quad 1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots + n^1 = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

$$(A2) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$

$$(A3) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n + 1)^2}{4}$$

$$(A4) \quad 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

$$(B0) \quad 2^0 + 4^0 + 6^0 + \dots + (2n)^0 = n$$

$$(B1) \quad 2^1 + 4^1 + 6^1 + \dots + (2n)^1 = n \cdot (n + 1)$$

$$(B2) \quad 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{3}$$

$$(B3) \quad 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2 \cdot (n + 1)^2$$

$$(C0) \quad 1^0 + 3^0 + 5^0 + \dots + (2n - 1)^0 = n$$

$$(C1) \quad 1^1 + 3^1 + 5^1 + \dots + (2n - 1)^1 = n^2$$

$$(C2) \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 2(n - 1)^2 = \frac{n \cdot (4n^2 - 1)}{3}$$

$$(C3) \quad 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3 = n^2 \cdot (2n^2 - 1)$$

Vzorce (A0), (A1), (B0), (B1), (C0), (C1) jsou odvoditelné jako vzorce pro součet n členů aritmetických posloupností s diferencemi 0, 1, 2. Všechny uvedené vzorce lze dokázat matematickou indukcí, tím však nezískáme žádný návod k odhadu výrazů na pravých stranách podobných vzorců.

Ukažme si, jakým postupem lze odhadnout vhodný výraz na pravé straně (A5) $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \dots$

Ve vzorcích A0 až A4 vidíme, že pro $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ je součet k -tých mocnin přirozených čísel od 1 do n vyjádřen mnohočlenem stupně $k + 1$. To nás vede k domněnce, že součet pátých mocnin čísel od 1 do n bude vyjádřen mnohočlenem 6. stupně:

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = an^6 + bn^5 + cn^4 + dn^3 + en^2 + fn + g \quad (I)$$

Stojíme nyní před úkolem najít 7 koeficientů a, b, c, d, e, f, g . Poněvadž hledáme vzorec, který by platil pro všechna přirozená čísla n , musí platit i pro $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Postupným dosazením těchto čísel za n do (I) získáme soustavu 7 lineárních rovnic o 7 proměnných:

$$(II) \quad \begin{array}{rcll} 1 & = & a + & b + c + d + e + f + g \\ 33 & = & 64a + & 32b + 16c + 8d + 4e + 2f + g \\ 276 & = & 729a + & 243b + 81c + 27d + 9e + 3f + g \\ 1300 & = & 4096a + & 1024b + 256c + 64d + 16e + 4f + g \\ 4425 & = & 15625a + & 3125b + 625c + 125d + 25e + 5f + g \\ 12201 & = & 46656a + & 7776b + 1296c + 216d + 36e + 6f + g \\ 29008 & = & 117649a + & 16807b + 2401c + 343d + 49e + 7f + g. \end{array}$$

Soustava lineárních rovnic (II) má řešení, ale to by nám samo o sobě nestačilo; po dosazení vypočítaných hodnot a, b, c, d, e, f, g do (I) by bylo nutno vzorec (I) s dosazenými hodnotami za koeficienty dokázat. Pokud bychom jeho neplatnost zjistili, znamenalo by to chybu někde ve výpočtu (její pravděpodobnost je u takovéto soustavy značná) nebo mylnost předpokladu, že hledaná pravá strana je mnohočlenem 6. stupně.

Řešení soustavy (II) by bylo nesmírně pracné — zkusme tedy jít metodou neúplné indukce hlouběji, hledejme další zákonitosti v pravých stranách vzorců A0 až A4! (Doporučuji čtenáři, který není zvyklý rychle se orientovat v součinném tvaru mnohočlenu, aby si výrazy „roznásobil“, tj. uvedl do součtového tvaru, a vhodně upravil, např. podle klesajícího mocnitele n .) Ve všech případech je absolutní člen roven nule a koeficient u nejvyšší mocniny je roven právě převrácené hodnotě mocnitele. To nás vede k domněnce, že hledaný výraz je mnohočlenem tvaru

$$(III) \quad \frac{1}{6}n^6 + bn^5 + cn^4 + dn^3 + en^2 + fn$$

Počet neurčených koeficientů je zde o dva nižší než v (I); budeme-li postupovat analogicky jako v případě 7 neurčených koeficientů, stačí nám sestavit soustavu 5 lineárních rovnic o pěti proměnných:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{6} + b + c + d + e + f \\ 33 &= \frac{64}{6} + 32b + 16c + 8d + 4e + 2f \\ (IV) \quad 276 &= \frac{729}{6} + 243b + 81c + 27d + 9e + 3f \\ 1300 &= \frac{4096}{6} + 1024b + 256c + 64d + 16e + 4f \\ 4425 &= \frac{15625}{6} + 3125b + 625c + 125d + 25e + 5f. \end{aligned}$$

Jejím řešením získáme:

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} & e &= -\frac{1}{12} \\ c &= \frac{5}{12} & f &= 0. \\ d &= 0 \end{aligned}$$

Vyslovme tedy nyní domněnku, že platí:

$$(A5') \quad 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2.$$

Pravé strany ve výrazech (A0) až (A4) jsme uvedli v součinném tvaru, proto takto upravme i pravou stranu (A5'), dostaneme:

$$(A5) \quad 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{12} n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n^2 + 2n - 1).$$

Právě zapsaný vzorec (A5) lze matematickou indukcí snadno dokázat. Poznali jste zcela elementární způsob odhadu vzorce pro součet pátých mocnin přirozených čísel; nepamatujete-li vzorce pro součet druhých, třetích či čtvrtých mocnin, zkuste je odhadnout stejným způsobem.

Cvičení

1. Odhadněte výrazy na pravých stranách vzorců:

$$(B4) \quad 2^4 + 4^4 + 6^4 + \dots + (2n)^4 = \dots$$

$$(C4) \quad 1^4 + 3^4 + 5^4 + \dots + (2n-1)^4 = \dots$$

Při důkazu svých hypotéz použijte matematické indukce nebo bezprostředního odvození ze vzorců (A4), resp. (A4) a (B4).

2. Odhadněte výraz na pravé straně vzorce (A6).

Problém divokých kachen (dokončení)

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

V minulém čísle Rozhledů jsme došli k výsledku, že se každoročně zachrání průměrně 3,487 kachny. Tento výsledek jsme dostali po velké námaze a nakonec je jenom přibližný. S druhé strany, vzhledem k úloze, kterou jsme řešili, je tento výsledek zbytečně přesný. Proto hledáme metodu, která by nám dala dostatečně přesný výsledek a nebyla přitom tak namáhavá.

Jak bychom mohli získat výsledky ze sta lovů na kachny? Nemusíme na ně čekat sto let, stačí si namalovat 100 grafů (viz obr. 1–4 v 6. čísle Rozhledů) a dokonce stačí jen si vypsát 100 uspořádaných desetic utvořených z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Při takovém postupu říkáme, že simulujeme skutečnou situaci, je ovšem nutné zachovat podmínku, že lovci střílejí na náhodně zvolenou kachnu, tj. že žádná kachna nemá při výběru cíle přednost.

To znamená, že nesmíme dopustit, abychom (i třeba nevědomky) některou číslici při simulacích protěžovali. Proto bude lepší přenechat výběr číslic náhodě. Použijeme k tomu generátor dekadických číslic. Ten si můžeme představit třeba jako osudí s 10 koulemi označenými číslicemi 0, 1, ... 9. Osudím zatočíme, vybereme náhodně jednu kouli,

zaznamenáme si označenou číslici, kouli vrátíme zpět do osudí, osudím zatočíme, atd.

Tento postup je také namáhavý, kdybychom jej museli provést pro našich 100 desetic. Avšak náhodné dekadické číslice za nás mohou vytvářet počítačí stroje. Takové číslice jsou publikovány v tabulkách náhodných čísel.

Tabulku náhodných čísel si můžete sestavit také jinak. Postavte se na frekventovanou ulici a zapisujte si čísla aut projíždějících v jednom směru. Ale pozor! Nesmíte dopustit, aby se některé číslo často opakovalo. Nesmíte se proto postavit například na silnici, kudy jezdí šest nákladních aut se štěrkem z lomu a zpět, neboť těchto šest čísel byste měli zapsáno mnohokrát. V příštím ročníku budeme tabulky náhodných čísel často používat, a proto část takové tabulky přetiskneme. Nyní se spokojíme jenom s ukázkou několika řádek.*)

16689 71147 43813 92542 26084 72866 11712 52601 78188 16940
 07514 72046 19132 99071 45253 63203 00768 60329 43563 11770
 48276 34864 46244 58231 18758 91379 05075 02199 13382 32624
 64938 62343 36101 66364 33354 65688 05701 49740 12312 19832
 91349 80859 21177 60349 65054 53587 18762 51167 39309 09943

Tato ukázka představuje 25 desetic. V prvním řádku máme 5 desetic. Z první desetic 16689 71147 vyplývá, že se zachránily 4 kachny označené číslicemi 0, 2, 3, 5. Analogicky pokračujeme dále a zpracujeme těchto 25 desetic do tabulky:

počet zachráněných kachen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
počet případů	0	0	1	8	12	3	1	0	0	0

Průměr je

$$\frac{1 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{25} = 3,80.$$

Budeme-li uvažovat 100 let, dostaneme například tuto tabulku:

počet zachráněných kachen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
počet případů	0	2	15	28	39	13	3	0	0	0

*) Bylo použito tabulek náhodných čísel z knížky V. Dupač - J. Hájek: Pravděpodobnost ve vědě a technice, NČSAV 1962.

a průměr 3,55, což je docela dobrý výsledek. Kdybychom uvažovali 1000 let, dostali bychom výsledek přesnější.

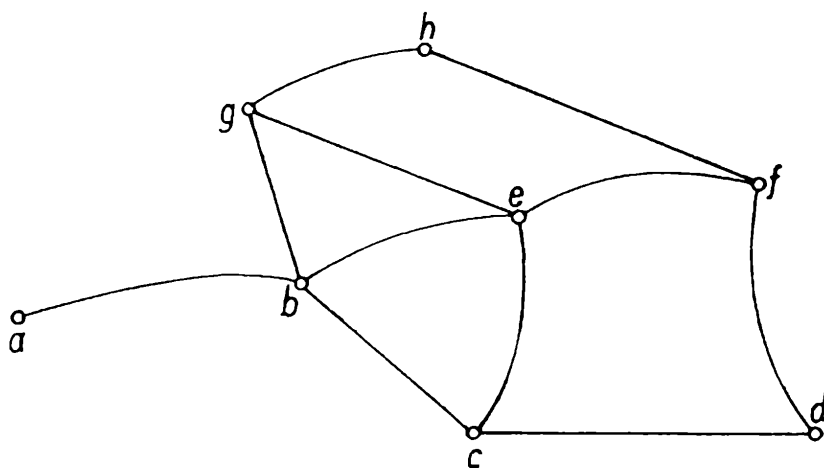
Použitá metoda se nazývá *metoda Monte Carlo* a pomáhá nám všude tam, kde je buď přesné řešení příliš náročné a přitom výsledek tak přesný nepotřebujeme, nebo tam, kde vůbec nejsme schopni přesné řešení nalézt. Metoda Monte Carlo je založena na zákonech teorie pravděpodobnosti. Metodou Monte Carlo můžeme dostat výsledky s předem požadovanou přesností; je to jen otázka počtu simulací. Nepříjemný je přitom ten fakt, že když chceme zvětšit přesnost výsledku desetkrát, musíme provést stokrát více simulací.

Použití této metody si ukážeme ještě na jiných příkladech v dalších číslech tohoto časopisu.

Eulerova věta pro rovinné grafy

JAROSLAV DRÁBEK, JIŘÍ ZACH, PF Plzeň

V šestém čísle letošního ročníku Rozhledů jste se seznámili s konstrukcí rovinných grafů, které schematicky znázorňují povrch konvexních mnohostěnů, tj. jejich vrcholy, hrany a stěny. Nyní se budeme zabývat těmito útvary v rovině, které jsou vytvořeny systémem kroužků a jejich spojníc (obr. 1). Víte již z řady článků, že jde o tzv. *neorientované grafy*, slovo „neorientovaný“ budeme však v tomto článku většinou vynechávat. Graf považujeme za rovinný, lze-li jej nakreslit tak, že se žádné dvě jeho hrany neprotnou. Na obr. 1 je znázorněn graf s uzly $a, b, \dots, h$, všechny hrany kromě ab ohraničují nějakou stěnu grafu.



Obr. 1

Představa *stěny grafu* je jistě velmi názorná, její přesná definice není však tak snadná; musí se odvolat na pojem vnitřní oblasti uzavřené rovinné křivky: každá uzavřená rovinná křivka, která se sama neprotíná, vytváří v rovině dvě oblasti — vnitřní a vnější. V rovinném grafu získáme takové uzavřené křivky sjednocením hran grafu patřících jistě kružnici. Naznačíme si tento postup, omezíme se však na grafy bez smyček a dvojúhelníků, tj. na grafy, kde každá hrana spojuje dva různé uzly, ale každé dva uzly jsou spojeny nejvýše jednou hranou.

Nechť u_i, u_j jsou symboly označující uzly grafu a $u_i u_j$ je symbol označující hranu grafu; každou posloupnost $(u_0 u_1, u_1 u_2, \dots, u_{n-1} u_n)$ hran grafu, ve které je každý uzel grafu označen nejvýše jedním symbolem u_i , nazveme cestou v grafu. Nejkratší cesta v grafu je zřejmě tvořena hranou spojující dva různé uzly, tzv. sousední uzly grafu.

Graf nazveme souvislým právě tehdy, když ke každým dvěma různým uzlům grafu existuje v grafu cesta, která je spojuje. Graf na obr. 1 je souvislý, graf na obr. 2 není souvislý, protože existuje dvojice uzlů x, a , které nelze spojit žádnou cestou.

Jsou-li dva sousední uzly u_0, u_n grafu spojeny cestou, která neobsahuje hranu $u_0 u_n$, můžeme sjednocením všech hran obou cest vytvořit kružnici v grafu. Například uzly c, e na obr. 1 lze spojit jednak cestou (cd, df, fh, hg, ge) , jednak cestou (ec) . Sjednocením všech uvedených hran získáme kružnici v grafu, kterou můžeme stručně zapsat $cdfhgec$.

Každá kružnice v grafu je sama grafem s jistou množinou uzlů a hran, jde tedy o podgraf daného grafu. Zároveň je kružnice uzavřenou křivkou, která vytváří v rovině dvě oblasti. Vnitřní oblast kružnice $cdfhgec$ obsahuje hranu ef spojující uzly kružnice, zatímco vnitřní oblasti kružnic $bceb, cdfec, efhge, gbeg$ neobsahují žádnou hranu grafu spojující uzly kružnice.

Nechť vnitřní oblast kružnice v grafu neobsahuje žádnou hranu grafu spojující uzly kružnice, pak sjednocení této vnitřní oblasti s kružnicí tvoří část roviny, kterou nazveme stěna grafu. Hovoříme o vrcholech (uzlech) stěny, o hranách stěny, vnitřku stěny, sousedních stěnách, společné hraně dvou stěn apod. Je samozřejmé, že v zápisu stěny uvádíme její vrcholy v libovolném pořadí odpovídajícím cestě z prvního uzlu do předposledního, např. v obr. 1 označují zápisy $bceb, cebc, ebce, becb, cbec, ecbe$ tutéž stěnu.

Dále se budeme zabývat jen souvislými rovinnými grafy, a to počty v jejich vrcholů, počty h jejich hran a počty s jejich stěn. Jak je vidět z obr. 1, nemusí každá hrana grafu náležet některé stěně, dále snadno spočítáme $v = 8, h = 11, s = 4, s + v - h = 1$. Stejný výsledek pro $s + v - h$ získáme i pro jiné souvislé rovinné grafy, vyslovíme proto a dokážeme tuto větu:

Eulerova věta pro souvislé rovinné grafy. Pro každý souvislý graf G , který má v vrcholů, h hran a s stěn, platí

$$(s + v) - h = 1.$$

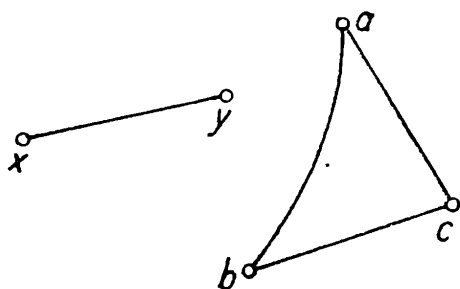
Důkaz provedeme matematickou indukcí podle počtu hran h .

- I. Je-li $h = 1$, má graf dva uzly a jednu hranu, žádnou stěnu, $s + v - h = 1$.
- II. Předpokládejme, že věta platí pro každý souvislý rovinný graf G s $h = n$ hranami, a dokažme, že pak platí i pro všechny souvislé grafy G' s $h = n + 1$ hranami.

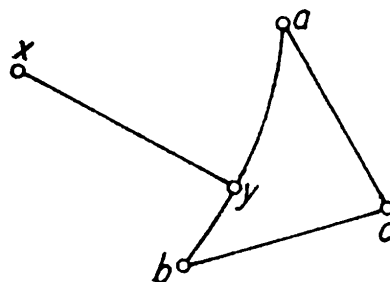
Sledujme všechna možná rozšíření grafu G na graf G' ; nejprve zdůvodněme několik pomocných tvrzení:

Aspoň jeden uzel nově připojené hrany xy musí být už uzlem grafu.

Kdyby tomu tak nebylo, tj. žádný z vrcholů x, y by nebyl uzlem grafu G , pak by buď oba ležely mimo hrany grafu (obr. 2) nebo aspoň jeden uvnitř hrany grafu (obr. 3). V prvním případě získáme nesouvislý graf G' , ve druhém získáme G' s $n + 2$ hranami, což odporuje předpo-



Obr. 2



Obr. 3

kladu o grafu G' . (Ještě výraznější rozdíl v počtu hran grafu G' získáte při umístění obou uzlů x, y na tutéž hranu, resp. na různé hrany grafu G' .)

V případě, že x je uzel grafu G , neleží druhý uzel y nově připojené hrany xy uvnitř žádné hrany, která nevychází z x .

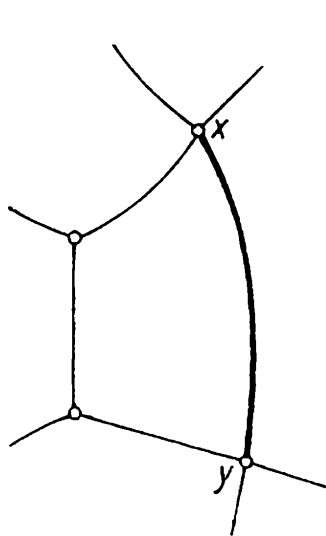
Kdyby y ležel uvnitř takové hrany, měl by graf G' opět $n + 2$ hran místo předpokládaných $(n + 1)$ hran.

Proberme nyní všechny možnosti, jak lze připojit hranu xy , je-li x uzlem grafu G a má-li G' o jedinou hranu více než G :

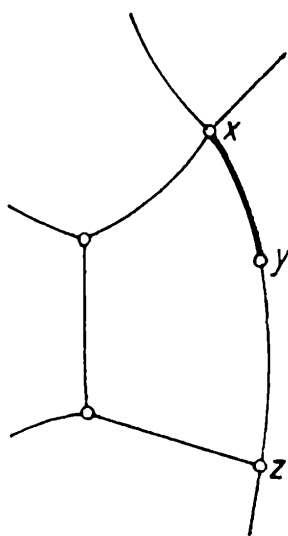
1. uzel y je též uzlem grafu G' , ale nesousedí s x ,
2. uzel y zakreslíme uvnitř některé hrany grafu G' vycházející z uzlu x ,
3. uzel y neleží na žádné hraně grafu G' .

Tyto možnosti jsou znázorněny na obr. 4–6; v případě 1 získáme graf G' s $v' = v$, $h' = h + 1$, $s' = s + 1$, tedy $(s' + v') - h' =$

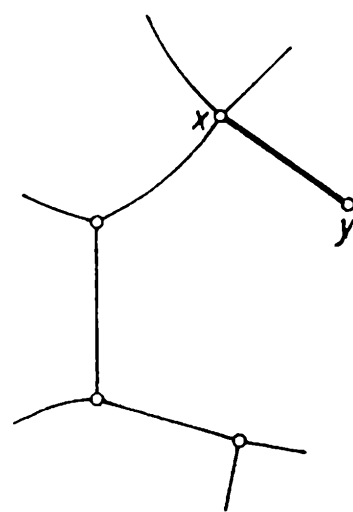
$= s + 1 + v - n - 1 = s + v - n = 1$. V případech 2 a 3 vyjde $s' = s$, $v' = v + 1$, $h' = n + 1$, a tedy znovu $(s' + v') - h' = 1$. Tím je dokázána platnost Eulerovy věty pro souvislé rovinné grafy bez smyček a dvojúhelníků.



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Nyní můžeme snadno podat slíbený *důkaz Eulerovy věty pro konvexní mnohostěny*. Každému konvexnímu mnohostěnu s v vrcholy, h hranami a s stěnami jsme přiřadili souvislý rovinný graf (bez smyček a dvojúhelníků), který má v uzlů, h hran a $s - 1$ stěn. Protože platí $v + (s - 1) - h = 1$, platí pro konvexní mnohostěn

$$s + v - h = 2.$$

Cvičení

1. Pokuste se rozšířit platnost Eulerovy věty pro souvislé rovinné grafy i na případ grafů se smyčkami a dvojúhelníky.
2. Zdůvodněte, že Eulerova věta neplatí pro nesouvislé rovinné grafy.

I. Začneme parabolou (obr. 1). Ta je kolineárním obrazem kružnice $k = (o; r)$ ve středové kolineaci určené středem S , osou o a úběžnicí u . Úběžnice se dotýká kružnice k v bodě B . Přímka SB udává směr osy paraboly. Vrcholová tečna v' paraboly je k přímce SB kolmá a její úběžník U leží na přímce $SU \perp SB$. Bod dotyku V tečny, vedené bodem $U \neq B$ ke kružnici k , je bod, jemuž v naší kolineaci odpovídá vrchol V' paraboly. Dál je už vše jasné.

II. Sestrojení os elipsy je úloha mnohem náročnější a k jejímu řešení budeme potřebovat nějaké přípravné úvahy.

V pravoúhlé soustavě souřadnicové je dána kružnice k o středu $(0; n)$

$$x^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

Polára bodu $A = [x_0; 0]$ vzhledem k této kružnici je

$$p \equiv x_0 x - n(y - n) = r^2$$

Průsečík této poláry s úběžnicí tj. (s osou x) je

$$\bar{A} \left(\bar{x}_0 = \frac{r^2 - n^2}{x_0}; \bar{y}_0 = 0 \right), x_0 \neq 0.$$

Napišme nyní rovnici poláry bodu $\bar{A}$:

$$\bar{p} \equiv \bar{x}_0 x - n(y - n) = r^2$$

$$\bar{p} \equiv \frac{r^2 - n^2}{x_0} x - n(y - n) = r^2.$$

Její průsečík s úběžnicí je bod A , jak se můžeme snadno přesvědčit.

Podobně můžeme říci: bodu A_1 ($A_2, A_3, \dots$) na úběžnici u odpovídá popsáním způsobem bod $\bar{A}_1$ ($\bar{A}_2, \bar{A}_3, \dots$) a obráceně bodu $\bar{A}_1$ ($\bar{A}_2, \bar{A}_3, \dots$) odpovídá bod A_1 ($A_2, A_3, \dots$). Dvojicím $(A; \bar{A})$, $(A_1; \bar{A}_1)$, $(A_2; \bar{A}_2)$, říkáme sdružené póly.

Poláry bodů $A_1, \bar{A}_1$ ($A_2, \bar{A}_2; A_3, \bar{A}_3; \dots$) označme po řadě $p_1, \bar{p}_1$ ($p_2, \bar{p}_2; p_3, \bar{p}_3; \dots$). Potom dvojice polár $(p; \bar{p})$, $(p_1; \bar{p}_1)$, $(p_2; \bar{p}_2)$, $\dots$ nazýváme sdružené poláry. Je zajímavé, že sdružené poláry bodů $A, A_1, A_2, \dots; \bar{A}, \bar{A}_1, \bar{A}_2,$ procházejí pevným bodem na ose y

$$O \left(0; \frac{n^2 - r^2}{n} \right),$$

což je pól úběžnice u . Přesvědčte se o tom.

Polára středu O' elipsy (obr. 2) vzhledem k této elipse je nevlastní přímka u'_∞ . V naší kolineaci středu O' odpovídá bod O a nevlastní přímce u'_∞ odpovídá úběžnice u , což je polára bodu O vzhledem ke kružnici k .

$$BP'_0 \cdot \overline{BP}'_0 = B_1P'_0 \cdot \overline{B_1P}'_0 = \dots = \text{konst} ,$$

což vyplývá ze stejnolehlosti, jejíž střed je O , mezi přímkami u, o . Na tento konstantní součin se můžeme dívat jako na mocnost bodu P'_0 vzhledem ke každé kružnici jdoucí body $B, \overline{B}$ nebo body $B_1, \overline{B_1}$ ($B_2; \overline{B_2}; \dots$). Mezi dvojicemi bodů $B_i, \overline{B_i}$ hledáme nyní tu dvojici $Y, \overline{Y}$, která se z bodu O promítá párem kolmic; tyto dvě kolmice jsou osy hledané kuželosečky.

Body $Y, \overline{Y}, O$ jsou podle toho vrcholy pravoúhlého trojúhelníku s přeponou $Y\overline{Y}$, a tudíž kružnice m jemu opsaná má svůj střed ve středu úsečky $Y\overline{Y}$. Poněvadž též platí

$$YP'_0 \cdot \overline{YP}'_0 = BP'_0 \cdot \overline{BP}'_0 = \dots = \text{konst} ,$$

musí kružnice m procházet bodem M , který je určen rovnicí

$$BP'_0 \cdot \overline{BP}'_0 = P'_0 M^2$$

a který je vrcholem pravého úhlu v trojúhelníku $M, B, \overline{B}$. Dá se sestavit užitím některé Eukleidovy věty. Střed Ω kružnice m je pak průsečík osy o s osou souměrnosti úsečky MO' . Kružnice se středem Ω a poloměrem $\Omega O' = \Omega M$ protne osou kolineace v bodech $Y, \overline{Y}$, jimiž procházejí žádané osy kuželosečky. Jejich omezení užitím kolineace je věc již snadná.

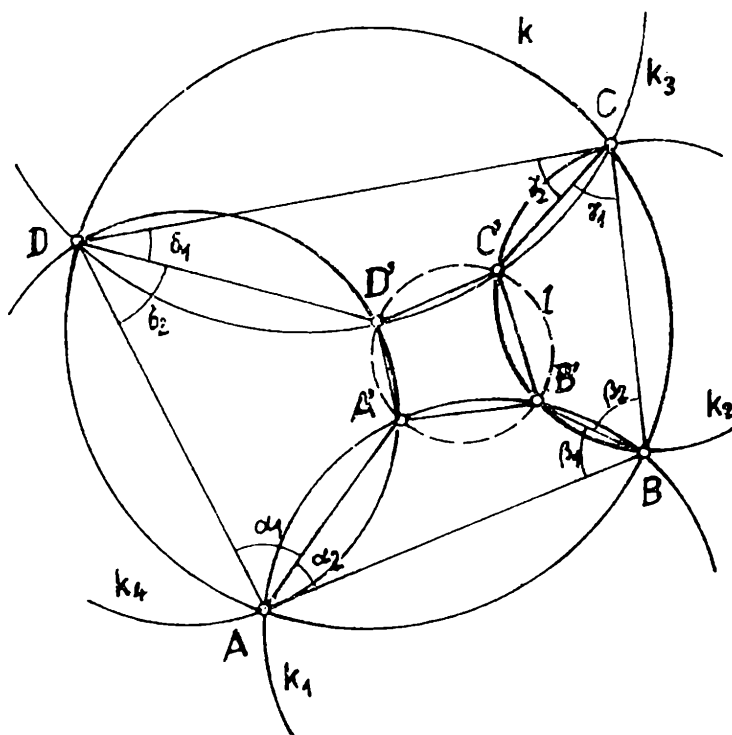
Řetězce kružnic na kulové ploše a v rovině

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

V článku Stereografická projekce a Möbiova rovina (5. číslo Rozhledů) jste poznali základní věty o stereografické projekci kulové plochy do roviny a o vytvoření Möbiovy roviny. O užitečnosti těchto pojmů se nyní přesvědčíte při řešení celé skupiny důkazových úloh.

Řetězcem čtyř kružnic v rovině (na kulové ploše) rozumíme skupinu kružnic k_1, k_2, k_3, k_4 v případě, kdy se protínají jen k_1 s k_2 , k_2 s k_3 , k_3 s k_4 a k_4 s k_1 . Příklad vidíte na obr. 1, načrtněte si však své vlastní obrázky, „srovnejte“ přitom čtyři průsečíky kružnic (každý z jiné dvojice) na přímce či na kružnici. Co zjistíte o zbývajících čtyřech průsečících?

Odpověď je patrná z našich obrázků (přerušovaná čára l prochází body A', B', C', D'), zdůvodněme ji podrobněji v situaci na obr. 1.



Použijeme přitom věty, kterou jistě znáte: *konvexní čtyřúhelník je tětí-
vovým čtyřúhelníkem (vepsaným do kružnice) právě tehdy, když součet
dvojice jeho protějších vnitřních úhlů je 180° .*

Na obr. 1 je dán řetězec čtyř kružnic k_1, k_2, k_3, k_4 v rovině, které
protínají kružnici k v bodech A, B, C, D tak, že platí

$$k_1 \cap k_2 = \{B, B'\}, k_2 \cap k_3 = \{C, C'\}, k_3 \cap k_4 = \{D, D'\}, k_4 \cap k_1 = \{A, A'\}.$$

Body A', B', C', D' jsou navzájem různé a tvoří vrcholy jistého kon-
vexního čtyřúhelníka obsaženého uvnitř konvexního čtyřúhelníka
 $ABCD$. V tomto případě můžeme postupovat takto:

Označme podle obr. 1 vnitřní úhly čtyřúhelníka $ABCD$ při jeho
vrcholech, $\sphericalangle A = \alpha_1 + \alpha_2$; $\sphericalangle B = \beta_1 + \beta_2$, $\sphericalangle C = \gamma_1 + \gamma_2$, $\sphericalangle D =$
 $= \delta_1 + \delta_2$.

Z vlastností tětíového čtyřúhelníka plyne

$$\begin{aligned}\sphericalangle A + \sphericalangle C &= \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = \pi, \\ \sphericalangle B + \sphericalangle D &= \beta_1 + \beta_2 + \delta_1 + \delta_2 = \pi.\end{aligned}\tag{1}$$

Poněvadž čtyřúhelníky $ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'$ jsou vesměs
tětíové čtyřúhelníky, můžeme vypočítat velikosti vnitřních úhlů čtyř-
úhelníka $A'B'C'D'$.

$\sphericalangle A' = 2\pi - (\pi - \beta_1) - (\pi - \delta_2) = \beta_1 + \delta_2$; podobně vypočteme
velikosti úhlů

$$\sphericalangle B' = \alpha_2 + \gamma_1, \quad \sphericalangle C' = \beta_2 + \delta_1, \quad \sphericalangle D' = \gamma_2 + \alpha_1.$$

Užitím vztahů (1) dostaneme

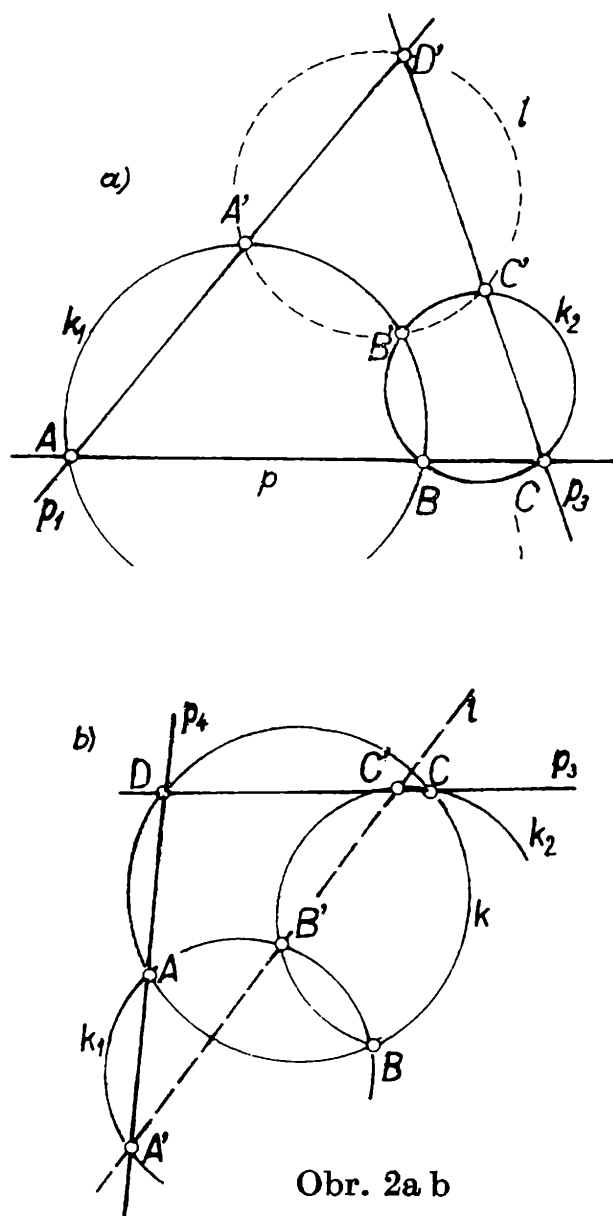
$$\sphericalangle A' + \sphericalangle C' = \beta_1 + \delta_2 + \delta_1 + \beta_2 = \pi,$$

$$\sphericalangle B' + \sphericalangle D' = \gamma_1 + \alpha_2 + \alpha_1 + \gamma_2 = \pi.$$

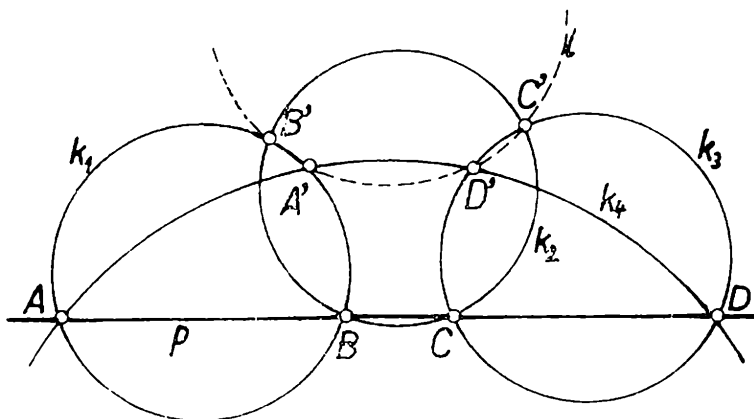
Z věty o tětíivovém čtyřúhelníku plyne, že body A', B', C', D' leží na kružnici, na obr. 1 je označena písmenem l .

Promítneme-li řetězec kružnic znázorněný na obr. 1 na kulovou plochu stereografickou projekcí, získáme řetězec kružnic $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4$ na kulové ploše s obdobnými vlastnostmi jejich průsečíků — body $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ leží na kružnici $\overline{k}$ a body $\overline{A'}, \overline{B'}, \overline{C'}, \overline{D'}$ též leží na kružnici $\overline{l}$.

A nyní pozor! Každý řetězec kružnic $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4$ na kulové ploše s kružnicemi $\overline{k} = \overline{ABCD}$ a $\overline{l} = \overline{A'B'C'D'}$ obsahujícími jejich průsečíky můžeme promítnout do Möbiovy roviny libovolnou stereografickou projekcí se zvoleným středem S . Obrázek 2 ukazuje výsledky v případě, kdy



Obr. 2a b



- a) $S = \overline{D}$, pak bod D je na obr. 2a nevlastní, průměty kružnic $\overline{k_3}, \overline{k_4}, \overline{k}$ jsou přímky p_3, p_4, p , ale body A', B', C', D' leží opět na kružnici l ;
 b) $S = \overline{D'}$, pak je na obr. 2b nevlastní bod D' , průměty kružnic $\overline{k_3}, \overline{k_4}, \overline{l}$ jsou přímky p_3, p_4, l , přitom body A', B', C' leží na přímce l .

Můžeme tedy hovořit o *řetězcích kruhových křivek* (kružnic i přímek) v Möbiově rovině a o kruhových křivkách (kružnicích, přímkách) obsahujících jejich průsečíky. Vyslovme větu:

Nechť je v Möbiově rovině dán takový řetězec kruhových křivek k_1, k_2, k_3, k_4 , že $k_4 \cap k_1 = \{A, A'\}$, $k_1 \cap k_2 = \{B, B'\}$, $k_2 \cap k_3 = \{C, C'\}$, $k_3 \cap k_4 = \{D, D'\}$. Jestliže body A, B, C, D náležejí téže kruhové křivce k , pak i body A', B', C', D' leží na jedné kruhové křivce l .

Důkaz této věty je zčásti proveden úvahou k obr. 1, kterou jsme popsali výše. Úplný důkaz by vyžadoval diskusi o dalších možných polohách bodů A', B', C', D' (např. jako na obr. 2b aj.). Ve všech případech se však uplatní věta o tětíovém čtyřúhelníku.

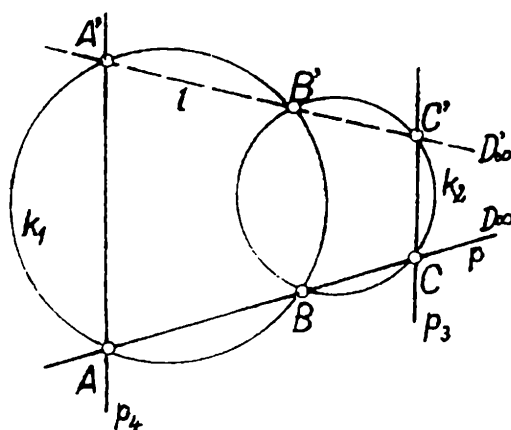
Lze dokonce vyšetřovat i obecnější polohy čtyř kruhových křivek k_1, k_2, k_3, k_4 v rovině než jsou řetězce; obrázek 3 ukazuje existenci přímky $p = ABCD$ a kružnice $l = A'B'C'D'$ i v případě, kdy kružnice k_4 protíná všechny ostatní kružnice. Obrázek 4 ukazuje další zobecnění polohy kružnic i na jejich dotyk (rovnoběžné přímky jsou kruhovými křivkami, které se dotýkají v nevlastním bodě Möbiovy roviny), tady je zřejmé $D = D'$.

Přesvědčte se sami vhodným obrázkem, že v případě, kdy kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 netvoří řetězec a přesto splňují ostatní předpoklady výše uvedené věty, mohou všechny procházet jedním bodem (kruhová křivka l přejde v bod).

Cvičení

1. Dokažte tvrzení o poloze bodů A', B', C', D na jedné kružnici l (přímce p) přímo v situaci na obr. 2a, 2b.
2. Zjistěte, zda je možné, aby se kruhové křivky k, l , o nichž se hovoří ve vyslovené větě, dotýkaly.

Obr. 4



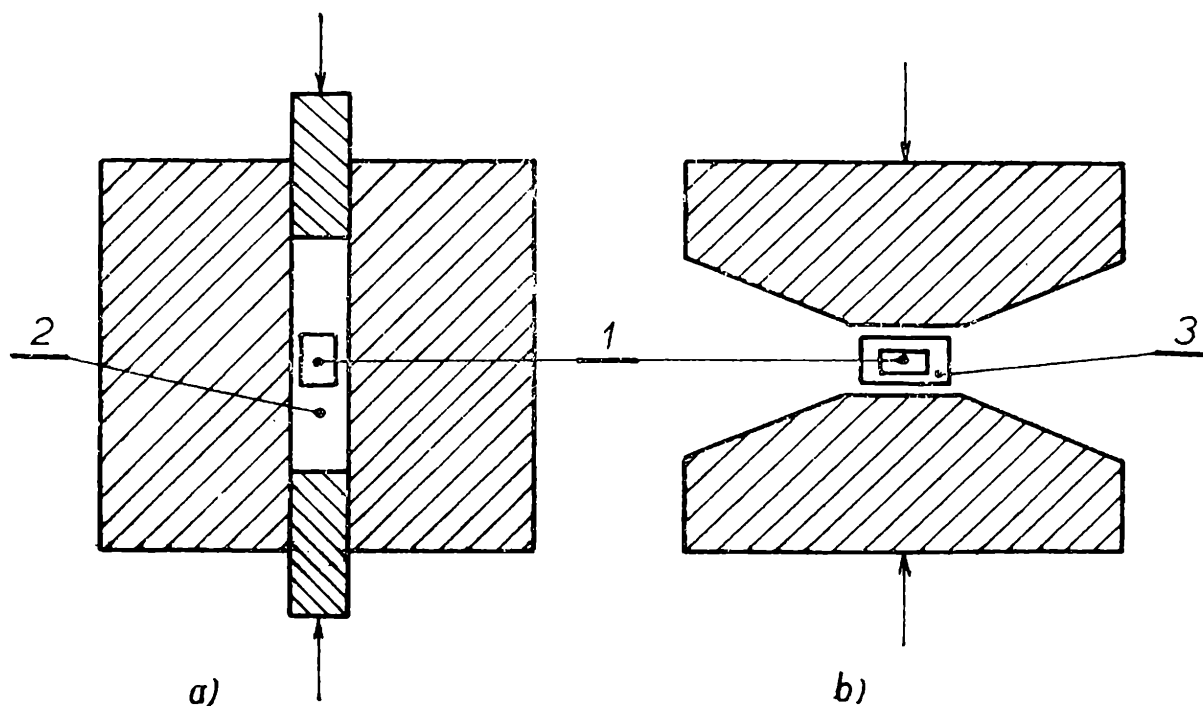
3. Pokuste se o úplný dôkaz vyslovené vety o reťazcích čtyř kružnic pomocí všech případů, které mohou nastat, když bod D je nevlastní.
4. Zdůvodněte, že body A' , B' , C' , D' v situacích na obr. 3 a 4 leží na jedné kruhové křivce.
5. Promítněte útvary na obr. 4 stereograficky na kulovou plochu a získané kružnice pak znovu promítněte jinou stereografickou projekcí do roviny. Jakou větu o dotýkajících se kružnicích tím vlastně máte dokázanu?

fyzika

Niekoľko zaujímavostí o fyzike vysokých tlakov

RNDr. IVAN BANÍK, RNDr. JOZEF ZÁMEČNÍK, SVŠT Bratislava

V posledných rokoch sa pomerne intenzívne rozvíja nový obor fyziky nesúci názov fyzika vysokých tlakov, zaoberajúci sa skúmaním vplyvu vysokého tlaku na vlastnosti látok. Rozsah tlakov, v ktorom sa dnes pracuje, je pomerne veľmi široký, počnúc tlakom normálnym a končiac tlakmi rádovo 10^{11}Nm^{-2} (približne milión atmosfér). Uvedený tlakový rozsah sa obyčajne rozdeľuje na dve oblasti — oblasť do $3 \cdot 10^9 \text{Nm}^{-2}$ a oblasť nad uvedenú hodnotu. Všestranný, alebo tiež hydrostatický tlak možno vytvoriť len v oblasti nižších tlakov, lebo pri vyšších tlakoch



Schematické znázornenie vysokotlakového zariadenia: a) pre všestranný tlak do $3 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-2}$, b) pre tlak nad $3 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-2}$. 1 — vzorka, 2 — kvapalina prenášajúca tlak na vzorku, 3 — tuhá plastická látka prenášajúca tlak na vzorku.

kvapaliny, ktoré tlak prenášajú, prestávajú byť kvapalinami, stávajú sa viskóznymi, takže prenášaný tlak nebude už úplne všestranný.

Z hľadiska spôsobov vytvárania tlakov treba rozlišovať tlaky statické a dynamické. Statické vznikajú napríklad stláčaním kvapaliny v silnostennom valci s piestom pod lisom, alebo stláčaním skúmaného telesa medzi vhodnými čelustami (obr. 1a, b). Dynamické tlaky sa obvyčajne vytvárajú na spôsob výbuchu, alebo zrážkami telies, napríklad dopadom vystreleného „náboja“ na prekážku, pričom vždy ide o krátkodobé pôsobenie vysokého tlaku. Najvyššie tlaky sa dosiahli práve dynamicky.

Vzniká samozrejme otázka: Aký význam má sledovanie vlastností látok pod vysokým tlakom? Aj keď obor fyziky vysokých tlakov je pomerne mladý, už dnes priniesol svoje ovocie. Na ilustráciu uvedme napríklad výrobu umelých diamantov, ktoré sú dnes neoceniteľným pomocníkom v priemysle. Umelé priemyselné diamanty sa dnes široko využívajú na výrobu vysokokvalitných nástrojov pre strojárenský priemysl (napríklad diamantové brusné kotúče). V tejto súvislosti stojí za povšimnutie, že ČSSR je vývozcom umelých priemyselných diamantov.

Umelé diamanty sa vyrábajú pri teplote okolo 2000°C a tlaku blízkeho hodnote 10^{10} N m^{-2} ($\doteq 100\,000 \text{ kg/cm}^2$) a to z grafitu, ktorý, podobne ako diamant, pozostáva z atómov čistého uhlíka, pravda, s odlišnou kryštalickou štruktúrou.

Ďalším úžitocným výsledkom fyziky vysokých tlakov je vytvorenie v prírode sa nevyskytujúceho kryštálu-borazonu, ktorého vlastnosti sú v mnohom podobné diamantu a ktorý je tiež v dnešnom priemysle úspešne používaný.

Ďalším veľmi zaujímavým a perspektívnym využitím vysokých tlakov je aj spracovávanie materiálov výbuchom. Ukázalo sa, že pomocou výbuchu možno tvarovať veľmi dobre najmä kovy, pričom tieto podstatne lepšie znášajú zmeny tvaru (bez popraskania) pri výbuchu, ako pri pomalejšej deformácii. Kovovému prípravku možno dať požadovaný tvar napríklad tak, že ho podobne ako strelu vystrelíme z kanóna a po výstrele dopadne na matricu s pripraveným „otvorom“ v nej, do ktorého vniká a nadobudne tvar dutiny, ktorý môže byť dosť zložitý. Jediným výstrelom sa tak vytvorí súčiastka, ktorej výroba by bola ináč dosť zložitá a pomerne nákladná.

Fyzika vysokých tlakov má však opodstatnenie aj z čiste „fyzikálneho hľadiska“. Poskytuje poznatky o fyzikálnych vlastnostiach látok a ich zmien pri pôsobení tlaku, čo pomáha upresňovať fyzikálne modely a teórie, o význame ktorých dnes už nikto nepochybuje. Ide napríklad o štúdium síl medzi atómami, o závislosť týchto síl od vzdialenosti atómov, čo zrejme súvisí so stlačiteľnosťou látok. Ďalej sa jedná o fázové zmeny látok pod tlakom, o zmeny elektrických vlastností látok pod vplyvom tlaku atď. Iste nie sú bez zaujímavosti poznatky, že pri stlačení oleja na 10^9 N m^{-2} sa jeho objem zmení asi o 15 percent a že jeho viskozita vzrastie pritom niekoľko tisíc krát. Ďalej, že ortuť, ktorá za normálneho tlaku tuhne pri teplote $-38,8^\circ \text{C}$, tuhne pri tlaku $7,560 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2}$ už pri teplote 0°C . Veľmi zaujímavý je aj poznatok, že polovodič telúr sa pri tlaku asi $9 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-2}$ stáva kovom, ďalej, že niektoré amorfné polovodiče (chalkogenidové sklá) majú pri tlaku $5 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2}$ elektrickú vodivosť asi 6krát vyššiu než za tlaku normálneho.

Vlastnosti látok pod vysokým tlakom zaujímajú napríklad geológov, čo je pochopiteľné, ak uvážime, že už v hĺbke 10 km pod povrchom Zeme je tlak rádovo 10^8 N m^{-2} , zatiaľ čo v hĺbke 3000 km činí tlak okolo $1,5 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$.

Už niekoľko vybraných príkladov ukazuje, že fyzika vysokých tlakov môže byť úžitocná pre rozširovanie našich poznatkov o okolitom svete, ale i bezprostredne pre výrobu. Z týchto dôvodov sa jej začína venovať zvýšená pozornosť vo viacerých krajinách. V súčasnosti je na najvyššom stupni v ZSSR a USA.

Raketou ke Slunci

V. I. LEVANTOVSKIJ

Na první pohled se zdá, že spadnout raketou na Slunce je stejně jednoduché, jako když jablko upadne se stromu na povrch Země.

V mnoha fantastických povídkách o kosmických letech se líčí jako nejstrašlivější katastrofa, která může postihnout kosmonauty při výzkumu Sluneční soustavy, pád kosmické lodi na Slunce. Jednou je příčinou technická chyba, jindy omyl pilota při řízení lodi a podobně.

A přitom nahodilý pád na Slunce je stejně nepravděpodobný, jako kdyby spadlo na Měsíc třeba letadlo, které provádí akrobacii ve velké výši nad Zemí. Problém je v tom, že kosmickou loď lze uvést na dráhu pádu ke Slunci jen na úkor značného množství energie, což vyžaduje příliš velkou spotřebu paliva.

Vypočítáme rychlost, kterou musí nosná raketa udělit kosmické sondě, aby doletěla ke Slunci. Jestliže by raketa startovala se Země, která by neměla přitažlivost, pak by stačilo, kdyby raketa dosáhla stejně velké rychlosti, jakou má Země na dráze kolem Slunce, čili $29,77 \text{ km s}^{-1}$, ovšem v opačném směru. Pak by byla heliocentrická rychlost sondy (tzn. rychlost vzhledem ke Slunci) rovna nule a sonda by začala padat ke Slunci po přímočaré dráze.

Vezmeme nyní v úvahu zemskou přitažlivost. Nechť se geocentrická rychlost kosmické sondy (tzn. rychlost vzhledem k Zemi) postupně zmenšuje a dosáhne ve vzdálenosti od Země, kde již můžeme vliv přitažlivosti zanedbat (v nekonečnu), hodnoty $v_{\infty} = 29,77 \text{ km s}^{-1}$. Pro tento případ vyjádříme rovnicí zákon zachování energie:

$$\frac{m v_p^2}{2} - \frac{\kappa M m}{r_p} = \frac{m v_{\infty}^2}{2} \quad (1)$$

(m a M jsou hmotnosti sondy a Země; v_p a r_p jsou počáteční rychlost a vzdálenost od středu Země, v níž začal pasivní let, tzn. když přestal působit pohon rakety; κ je gravitační konstanta). Na pravé straně rovnice chybí potenciální energie rakety v poli zemské přitažlivosti, která je v nekonečnu rovna nule. Po úpravě dostaneme vztah

$$v_p^2 = v_{\infty}^2 + \frac{2 \kappa M}{r_p}. \quad (2)$$

Avšak druhý člen pravé strany rovnice je roven čtverci únikové rychlosti v_u (druhé kosmické rychlosti). O tom se můžeme přesvědčit, když v rovnici (2) položíme $v_p = v_u$; pak $v_{\infty} = 0$ (v souladu s definicí únikové rychlosti).

Platí tedy, že
$$v_p = \sqrt{v_\infty^2 + v_u^2}. \quad (3)$$

Když položíme $v_u = 11, 19 \text{ km s}^{-1}$ (což je hodnota na povrchu Země) a $v_\infty = 29,77 \text{ km s}^{-1}$, vypočítáme: $v_p = 31,8 \text{ km s}^{-1}$. Takové rychlosti musí dosáhnout raketa, aby dospěla ke Slunci. Tato rychlost se někdy nazývá *čtvrtá kosmická rychlost*. Je rovna téměř dvojnásobku *třetí kosmické rychlosti* ($16,67 \text{ km s}^{-1}$), která umožňuje únik ze Sluneční soustavy.

Podíváme se nyní, jaké těžkosti musí překonat technika, aby kosmická sonda mohla získat čtvrtou kosmickou rychlost a pronikla ke Slunci.

Připusťme, že raketa se sondou startuje z kruhové dráhy umělé družice Země, která se pohybuje ve výši 200 km nad povrchem Země. Když uvážíme, že se družice pohybuje rychlostí $7,8 \text{ km s}^{-1}$, najdeme počáteční startovní rychlost z dráhy družice: $31,8 - 7,8 = 24 \text{ km s}^{-1}$.

Použijeme známého vzorce, který určuje vztah mezi počáteční hmotností rakety M a konečnou hmotností (užitečným zatížením) m :

$$\frac{M}{m} = e^{v/c} \left(\frac{s - 1}{s - e^{v/nc}} \right)^n \quad (4)$$

kde e je základ přirozených logaritmů; v je rychlost, kterou je třeba udělit užitečnému zatížení; c je výtoková rychlost plynů z trysky rakety; n je počet stupňů; s je konstrukční parametr vyjadřující poměr hmotnosti stupně rakety naplněné palivem a hmotnosti stupně bez paliva.

Budeme předpokládat, že konstrukční parametr má mimořádně velkou hodnotu $s = 20$ a v motorech, které udělí kosmické sondě rychlost 24 km s^{-1} , se používá jako paliva tekutého vodíku a jako okysličovadla tekutého kyslíku. S tímto palivem lze dosáhnout výtokové rychlosti c přibližně 4 km s^{-1} .

Při $n = 1$ a $n = 2$ bude pro náš případ $s < e^{v/nc}$, což znamená, že jednostupňovou ani dvoustupňovou raketou nemůže být potřebné rychlosti dosaženo. Při $n = 3$ bude $M/m = 1380$ a při $n = 5$ bude $M/m = 906,6$. Z toho vyplývá, že pomocí současných chemických paliv (tzn. při $c = 4 \text{ km s}^{-1}$; hodnota c pro chemická paliva ani v budoucnosti nemůže překročit 5 km s^{-1}) na každý kilogram užitečného zatížení dopraveného na Slunce připadá 1380 kg startovní hmotnosti třístupňové varianty a 906,6 kg startovní hmotnosti pětistupňové varianty rakety startující z oběžné dráhy kolem Země. Zvětšení počtu stupňů na 10 snižuje poměr hmotností M/m jen na 627,9.

V případě, že hmotnost kosmické sondy bude 500 kg, pak při $n = 5$ dostaneme $M = 453,3$ tuny. Aby byla na oběžné dráze kolem Země smontována pětistupňová raketa takové hmotnosti, bylo by třeba ze Země vypustit na oběžnou dráhu pět raket takové třídy, jako je americká měsíční raketa *Saturn 2*. Z energetického hlediska není vyslání malé sondy ke Slunci o nic snazší, než uskutečnit několik měsíčních expedicí.

Naše úvaha by vypadala docela jinak, kdyby bylo na dráze kolem Země použito motorů nikoliv chemických, ale na jaderné palivo. Kdybychom počítali se zcela přiměřenou hodnotou $c = 8 \text{ km s}^{-1}$, pak při $n = 2$ bude poměr $M/m = 30,11$. To znamená, že dvoustupňové jaderno-reaktivní zařízení startující z kruhové oběžné dráhy by mohlo mít hmotnost 15 tun při užitečném zatížení $m = 0,5$ tuny. Přitom není nutná montáž na oběžné dráze: vypuštění družice takové hmotnosti je již dávno možné.

Avšak dosáhnout Slunce lze i pomocí obvyklých chemických motorů, jestliže se využije gravitačních polí Jupitera nebo Venuše. Jupiter může kosmickou sondu odchýlit na dráhu ke Slunci podobně, jako Měsíc vrací k Zemi lunární stanici, která kolem něho obíhá. Rovněž Venuše může přiblížit ke Slunci dráhu sondy, která se pohybuje v její blízkosti.

Volně přeloženo z časopisu *Kvant* 1972, č. 11, s. 29

O. L.

Zdánlivá (střední) hmotnost kilomolu směsi dvou plynů

EVA PROCHÁZKOVÁ, prom. fyz., České Budějovice

Ve fyzikálních tabulkách [1] je uvedena hodnota hmotnosti kilomolu vzduchu $28,96 \text{ kg kmol}^{-1}$. Tato hodnota se objevuje i jinde [2], [3], [4]. Protože vzduch je směs plynů, nejde o skutečnou veličinu, ale o zdánlivou (střední) hmotnost kilomolu. Položil si některý student otázku, jak se tato hodnota vypočte? Zjistila jsem, že i když se problém zjednoduší a vzduch je považován za směs dvou plynů, mnozí studenti vycházejí při řešení z chybných úvah a dospívají k nesprávným výsledkům.

Protože tento problém lze řešit několika zajímavými způsoby a uplatní se při něm značnou měrou logika a fyzikální myšlení, uvedu zde několik postupů pro výpočet zdánlivé (střední) hmotnosti kilomolu směsi dvou plynů. Obecné výsledky by bylo možno rozšířit i na směsi více plynů.

V dalších úvahách budeme používat označení:

- m — celková hmotnost směsi plynů,
- n — celkový počet molekul směsi plynů,
- q_1, q_2 — poměrná hmotnost první a druhé složky směsi plynů (podíl hmotnosti složky a hmotnosti směsi),
- $q_1 m, q_2 m$ — hmotnost první a druhé složky,
- N — Avogadrova konstanta (počet molekul v kilomolu),
- M_1, M_2 — hmotnost kilomolu první a druhé složky,

$\frac{M_1}{N}, \frac{M_2}{N}$ — hmotnost molekuly první a druhé složky,

$n_1 = \frac{q_1 m N}{M_1}, n_2 = \frac{q_2 m N}{M_2}$ počet molekul první a druhé složky,

R — universální plynová konstanta (podle [1] $8,314 \cdot 10^3$ J K⁻¹ kmol⁻¹),

T — Kelvinova teplota plynu,

p — tlak směsi plynů,

p_1, p_2 — parciální tlak první a druhé složky,

V — objem směsi plynů,

$\bar{M}$ — zdánlivá (střední) hmotnost kilomolu směsi plynů.

A. Nejjednodušší a nejkratší cesta při výpočtu zdánlivé (střední) hmotnosti kilomolu směsi je tato: ve směsi je n_1 molekul prvního plynu, n_2 molekul druhého. Celkem je $n = n_1 + n_2$ molekul. Jestliže celkovou hmotnost plynu m dělíme celkovým počtem molekul n , dostaneme střední hmotnost m jedné molekuly m/n . Jestliže ji násobíme Avogadro-vou konstantou N , dostaneme zdánlivou (střední) hmotnost kilomolu směsi $\bar{M}$. Lze tedy psát

$$\bar{M} = \frac{m}{n} N = \frac{m N}{n_1 + n_2} = \frac{m N}{\frac{q_1 m N}{M_1} + \frac{q_2 m N}{M_2}} = \frac{M_1 M_2}{q_1 M_2 + q_2 M_1}$$

B. Jiný postup při výpočtu zdánlivé (střední) hmotnosti kilomolu směsi plyne z této úvahy: na hledané hodnotě se budou podílet svou hmotností kilomoly složek směsi úměrně jejich relativnímu počtu, tj. podílu jejich počtu a celkového počtu kilomolů ve směsi. Proto lze napsat rovnici

$$\bar{M} = q'_1 M_1 + q'_2 M_2,$$

kde q'_1, q'_2 jsou čísla udávající relativní počet kilomolů složek ve směsi (nemůžeme sem tedy dosadit poměrné hmotnosti složek q_1, q_2). K vyjádření veličin q'_1, q'_2 dojdeme takto:

Výrazy udávající počet kilomolů jednotlivých složek jsou

$$\frac{q_1 m}{M_1}, \quad \frac{q_2 m}{M_2}$$

Celkový počet kilomolů je dán součtem těchto výrazů.

Pro q'_1, q'_2 tedy dostáváme

$$q'_1 = \frac{\frac{q_1 m}{M_1}}{\frac{q_1 m}{M_1} + \frac{q_2 m}{M_2}}, \quad q'_2 = \frac{\frac{q_2 m}{M_2}}{\frac{q_1 m}{M_1} + \frac{q_2 m}{M_2}}.$$

Po krácení a dosazení těchto výrazů do vzorce $\bar{M}$ a další úpravou

dostaneme

$$\bar{M} = \frac{q_1 + q_2}{\frac{q_1}{M_1} + \frac{q_2}{M_2}} = \frac{M_1 M_2}{q_1 M_2 + q_2 M_1} ,$$

neboť $q_1 + q_2 = l$.

C. Při výpočtu lze užít rovněž stavových rovnic. Má-li platit stavová rovnice

$$p V = \frac{m}{\bar{M}} R T$$

pro směs dvou ideálních plynů, je nutno určit zdánlivou (střední) hmotnost kilomolu směsi $\bar{M}$ [3]. Pro každou jednotlivou složku směsi lze napsat stavovou rovnici zvlášť, neboť podle Daltonova zákona ve směsi každá ze složek zaujímá objem V a působí na stěny svým parciálním tlakem p_1, p_2 . Pro první a druhou složku platí

$$p_1 V = \frac{q_1 m}{M_1} R T ,$$

$$p_2 V = \frac{q_2 m}{M_2} R T ,$$

$$p_1 + p_2 = p .$$

Sečtením prvních dvou rovnic a dosazením z třetí dostaneme

$$p V = m \left(\frac{q_1}{M_1} + \frac{q_2}{M_2} \right) R T$$

Porovnáním se stavovou rovnicí pro směs dostaneme

$$\frac{1}{\bar{M}} = \frac{q_1}{M_1} + \frac{q_2}{M_2} ,$$

a tedy

$$\bar{M} = \frac{M_1 M_2}{q_1 M_2 + q_2 M_1} .$$

Z Avogadrova zákona plyne, že za stejných fyzikálních podmínek zaujímá kilomol libovolného ideálního plynu stejný objem. Při teplotě $T_0 = 273,15$ K a tlaku $p_0 = 10^5$ N m⁻² zaujímá objem $V_n = 22,7106$ m³ [1]. Měrná hmotnost plynu za těchto podmínek je tedy

$$\varrho_0 = \frac{M}{V_n} ,$$

kde M je hmotnost kilomolu plynu. Z tohoto výrazu lze určit hmotnost kilomolu plynu M . Zdánlivou (střední) hmotnost kilomolu směsi plynů

lze rovněž určit tímto způsobem, a platí tedy

$$\bar{M} = \varrho_0 V_n,$$

kde ϱ_0 je měrná hmotnost směsi za uvedených podmínek p_0, T_0 .

Tento způsob výpočtu je ekvivalentní předešlým metodám, jak ukážeme úvahou: Měrnou hmotnost ϱ_0 směsi lze určit ze vzorce $\varrho_0 = m/V_0$, kde V_0 je objem směsi plynů za podmínek p_0, T_0 . Objem V směsi plynů při tlaku p a teplotě T můžeme určit ze stavových rovnic pro složky směsi plynů, uvedených v oddíle C, a z rovnice $p = p_1 + p_2$, z nichž odvodíme vztah

$$V = m \left(\frac{q_1}{M_1} + \frac{q_2}{M_2} \right) \frac{R T}{p}$$

Dosazením hodnot p_0, T_0 do této rovnice dostaneme objem V_0 .

Pro měrnou hmotnost ϱ_0 lze tedy psát

$$\varrho_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{p_0}{R T_0} \frac{M_1 M_2}{q_1 M_2 + q_2 M_1}$$

Protože ze stavové rovnice pro kilomol ideálního plynu vyplývá

$$\frac{p_0}{R T_0} = \frac{1}{V_n},$$

vyjde pro zdánlivou (střední) hmotnost kilomolu směsi vzorec

$$\bar{M} = \varrho_0 V_n = \frac{M_1 M_2}{q_1 M_2 + q_2 M_1},$$

takže výpočet pomocí měrné hmotnosti vede k témuž výsledku jako předešlé metody.

Známe-li měrné hmotnosti q_1, q_2 složek při tlaku p a teplotě T a chceme-li určit měrnou hmotnost ϱ směsi při stejném tlaku a teplotě, použijeme vzorce

$$\varrho = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{q_1 \varrho_2 + q_2 \varrho_1}$$

Uvedeme odvození tohoto vzorce: podle Daltonova zákona při smíchání 2 plynů, jejichž původní tlaky p byly stejné a původní objemy byly V_1, V_2 , na směs o tlaku rovnajícím se rovněž p a objemu V lze psát rovnici

$$p V_1 + p V_2 = p V,$$

odtud $V_1 + V_2 = V$. Měrná hmotnost směsi

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{q_1 m + q_2 m}{V_1 + V_2}.$$

Pro měrné hmotnosti ϱ_1, ϱ_2 složek před smícháním platí

$$\varrho_1 = \frac{q_1 m}{V_1}, \quad \varrho_2 = \frac{q_2 m}{V_2}$$

Odtud vypočteme V_1 a V_2 , dosadíme do výrazu pro ϱ a dostaneme

$$\varrho = \frac{\frac{q_1 m}{\varrho_1} + \frac{q_2 m}{\varrho_2}}{\frac{q_1 m}{\varrho_1} + \frac{q_2 m}{\varrho_2}} = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{q_1 \varrho_2 + q_2 \varrho_1}$$

U způsobu A až D vychází konečný vzorec pro určení M stejný. Podstatou všech těchto úvah je zachování celkového počtu kilomolů ve směsi.

(Pokračování.)

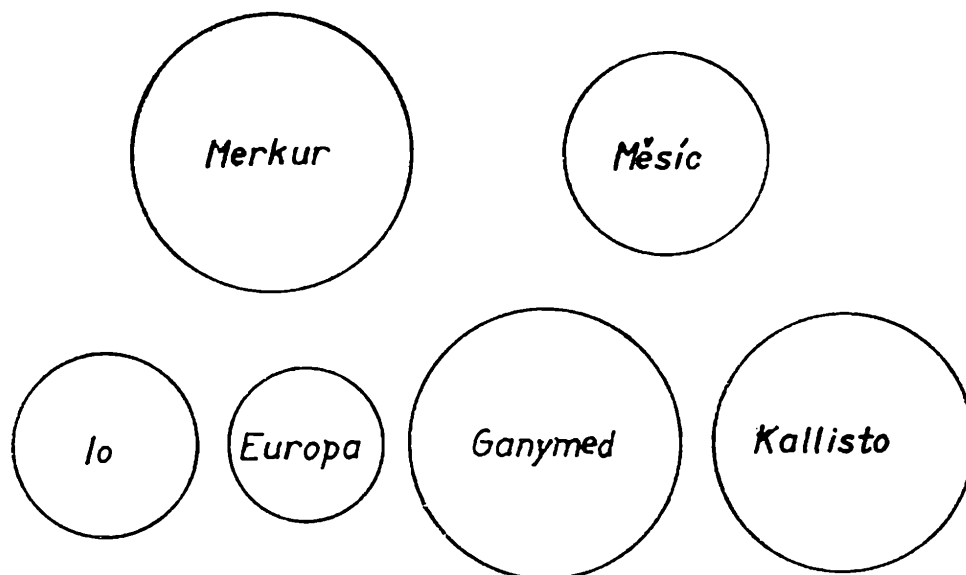
astronomie

Dvanáct Jupiterových měsíců

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Planeta Jupiter má největší průměr a také největší hmotnost ze všech planet sluneční soustavy; hmotnost Jupitera je prakticky jedna tisícina hmotnosti Slunce. Tato planeta má ještě jeden primát: bylo u ní objeveno nejvíce měsíců. První čtyři objevil v roce 1610 známý italský fyzik a astronom Galileo Galilei při pozorování Jupitera dalekohledem vlastní konstrukce. Od té doby se počet objevených měsíců rozrůstal až k dnešnímu počtu 12. První čtyři měsíce jsou největší a nejjasnější, ostatní jsou mnohem menší, proto na objev dalšího — pátého měsíce — bylo třeba počkat až do roku 1892, kdy jej objevil americký astronom E. Barnard. Objevy dalších měsíců spadají do dvacátého století a byly učiněny pomocí fotografie. Šestý měsíc objevil Perrine v roce 1904, tentýž astronom objevil o rok později sedmý měsíc, Melotte objevil v r. 1908 osmý měsíc. Objevy posledních čtyř měsíců náležejí S. B. Nicholsonovi: v roce 1914 to byl devátý měsíc, v r. 1938 prakticky současně desátý a jedenáctý a konečně v roce 1951 dvanáctý měsíc.

Jupiterovy měsíce se označují římskými číslicemi v pořadí podle toho, jak byly objeveny. První čtyři, tzv. Galileiovy měsíce, mají kromě označení číslicemi také svá jména: I. měsíc se nazývá Io, II. — Europa,

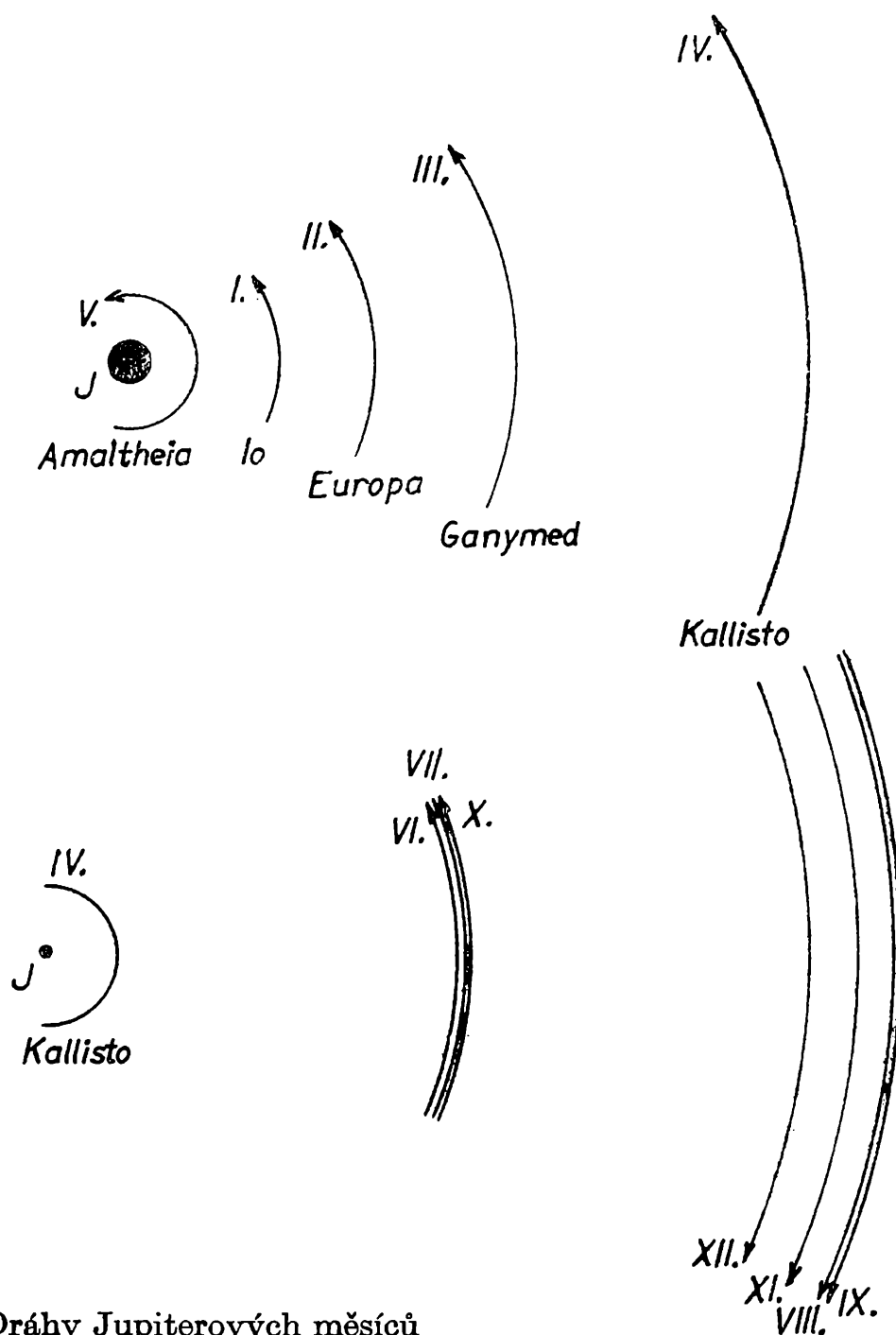


Obr. 1. Velikosti prvních čtyř Jupiterových měsíců ve srovnání s Merkurem a Měsícem

III. — Ganymed a IV. — Kallisto. V poslední době byl V. měsíc, obíhající kolem Jupitera uvnitř drah prvních čtyř měsíců, pojmenován Amaltheia; ostatní měsíce jména nemají.

První čtyři měsíce jsou poměrně jasné a jsou pozorovatelné již v malém astronomickém dalekohledu; jde o tělesa, jejichž průměr je srovnatelný s průměrem planety Merkura. Číselné údaje najde čtenář v Matematických, fyzikálních a chemických tabulkách pro střední školy (tab. 106 — Měsíce planet). Pro názornost jsou na obr. 1 nakresleny tyto měsíce ve srovnání s planetou Merkurem a naším Měsícem. Zvláštností těchto měsíců je také to, že obíhají kolem Jupitera po přesně kruhových drahách, tj. mají numerickou excentricitu rovnu nule a mají také nulový sklon vzhledem k rovině Jupiterova rovníku, čili obíhají přesně v rovníkové rovině planety. U měsíců Io, Europa a Ganymed byla zjištěna řídká atmosféra. Připomeňme, že tyto Jupiterovy měsíce vešly i do dějin fyziky jako tělesa, pomocí nichž byla v 17. století dánským astronomem O. Roemerem poprvé změřena rychlost šíření světla. Roemer sledoval vstupy Jupiterových měsíců do stínu, vrženého do prostoru Jupiterem. Po nějaké době si všiml, že se časový interval mezi zatměními po sobě následujícími prodlužuje, až zpoždění dosáhlo hodnoty 1000 sekund. Roemer správně usoudil, že tento rozdíl je třeba přičíst na vrub té okolnosti, že se Země za půl roku posunula o celý průměr své dráhy od Jupitera. Průměr zemské dráhy je přibližně $300 \cdot 10^6$ km; dělíme-li tuto vzdálenost dobou 1000 s, dostáváme pro rychlost šíření světla hodnotu $300\,000 \text{ km s}^{-1}$.

Pátý měsíc je již podstatně menší, má průměr kolem 160 km a obíhá kolem Jupitera po dráze o poloměru rovném jen asi 2,5 poloměru Jupi-



Obr. 2. Dráhy Jupiterových měsíců

tera. Přibližně stejný průměr má také šestý měsíc, ostatní měsíce jsou ještě menší a mají průměry kolem 20 km. Na obr. 2 jsou v horní části znázorněny dráhy prvních pěti Jupiterových měsíců ve srovnání s průměrem planety, v dolní části pak dráhy měsíců VI. až XII., přičemž pro srovnání je zakreslena také dráha IV. měsíce. Z obr. 2 je zřejmé, že měsíce VI., VII., a X. mají dráhy o velmi málo odlišných poloměrech, rovněž poloměry drah měsíců VIII., IX., XI. a XII. se navzájem poměrně málo liší. Zajímavé je, že čtyři nejvzdálenější měsíce obíhají zpětným směrem, tj. proti směru otáčení Jupitera kolem osy.

Zdánlivé hvězdné velikosti malých Jupiterových měsíců jsou kolem 18^m , lze je tedy zjistit jen na fotografických snímcích zhotovených velkými dalekohledy, neboť při vizuálním pozorování je přezaruje světlo Jupitera.

Čtyři největší měsíce mají hvězdné velikosti od $5,1^m$ (Ganymed) do $6,3^m$ (Kallisto), můžeme je tedy uvidět již pomocí dobrého triedru nebo malého astronomického dalekohledu. Polohy těchto čtyř měsíců přináší každoročně Hvězdářská ročenka (vydává nakladatelství Academia v Praze) v grafickém znázornění pro pozorování v astronomickém dalekohledu.

různé

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij

JOSEF KOTYK, Pardubice*)

Jako v prvních etapách svého vývoje vyznačuje se i věda 18. století bezprostředním vztahem k praxi. Počínající významné postavení vědy ve společnosti umožňuje však již rozvinout i některé problémy čistě teoretické. Charakteristickým projevem těchto tendencí je zejména veliký rozmach matematických věd té doby. Základní matematické objevy připravily pak půdu také vzniku nové geometrie zv. ne-euklidovské¹⁾. Jejím tvůrcem se stal veliký ruský myslitel Nikolaj

*) Autor článku Josef Kotyk oslavil před čtvrtrokem (25. 12. 1973) své sedmdesáté narozeniny. Vedle velmi úspěšné pedagogické činnosti jako středoškolský profesor se zasloužil o náš časopis, kde po léta seznamuje středoškoláky dobře čtivými články s fyzikou i jejími dějinami. Redakce mu děkuje za tuto spolupráci a srdečně blahopřeje.

¹⁾ Název pochází od „krále matematiků“ (rex mathematicorum) Karla Friedricha Gausse (1777–1855). V dopise z roku 1832 sděluje Gauss, že „Appendix scientiam . . .“ Jánoše Bolyaie, jemuž se objev nové (tzv. absolutní) geometrie rovněž přiznává, obsahuje myšlenky, k nimž on, sám Gauss, dospěl již před 30 až 35 lety! O objev neeuklidovské geometrie, jenž byl dosavadním vývojem celé matematiky připravován a pak už zřejmě „visel ve vzduchu“, se tak nezávisle na sobě a skoro současně zasloužili tři badatelé: Lobačevskij, Gauss a Bolyai.

Ivanovič LOBAČEVSKIJ, od jehož narození uplyne letos 180 let. Nechť naše řádky jsou u příležitosti tohoto výročí vděčnou vzpomínkou na něho.

Nikolaj Ivanovič LOBAČEVSKIJ se narodil dne 20. listopadu (1. prosince) 1792 v Makarjevě (gubernie Nižnij Novgorod). Od roku 1816 až do své smrti působil jako profesor matematiky na universitě v Kazani.



Na rozdíl od Gausse, jenž o nové geometrii nikdy nic neuveřejnil, poněvadž by pro ni prý „nenalezl u současníků pochopení a sršni by mu pak létali kolem uší“, byl Lobačevskij odhodlanější. S rozhodností hodnou dobré věci první odmítl v přednáškách již v únoru roku 1826 autoritu dvou tisíciletí, kritizoval problematiku rovnoběžek v euklidovské geometrii — problém pověstného 5. Eukleidova postulátu ²⁾ byl často nazýván „skandálem základů matematiky“, „skvrnou na krásném těle matematiky“, podle D'Alemberta „úskalím a takřka ostudou základů geometrie“ apod. — a vystoupil s novými podněty. Své revoluční myšlenky veřejně předložil Fyzikálně-matematické fakultě university v Kazani. Publikoval je, rovněž první, ve svém památném pojednání „Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles“ (Stručný výklad základů geometrie s přesným důkazem teorému rovnoběžek). Lobačevskij zkonstruoval geometrii,

²⁾ Tento postulát v moderním tvaru tvrdí, že bodem ležícím mimo přímku lze k ní vést jen jedinou přímku, která ji neprotíná. Jeho význam spočívá v tom, že bez důkazu omezuje počet možných rovnoběžek na jednu. Toho si byl i Eukleides okolo roku 300 před n. l. již plně vědom; je pozoruhodné, že z něho neodvozoval, pokud možno, důsledků.

v níž Eukleidův rovnoběžkový postulát neplatí; vycházel z požadavku: „Bodem položeným mimo přímku lze k ní vést vždy dvě rovnoběžky“³⁾). Na těchto základech vybudoval úplný logický systém první neeuklidovské geometrie, kterou zval imaginární geometrií nebo také pangeometrií; dnes jí říkáme geometrie hyperbolická. Její věty tvoří celek, jenž neobsahuje sporu, znění některých z nich bude však našim čtenářům poněkud nezvyklé, např. „Součet úhlů trojúhelníka je menší než 180° “ apod. Pochopíme pak, proč „Exposition“, hlavní práce Lobačevského, jež mu zaručuje zároveň prioritu objevu neeuklidovské geometrie, nesetkala se ihned se všestranným porozuměním a nedošla za jeho života uznání. Ohlasem na jeho spis „O načalach geometrii“ a publikace v universitním časopise Kazaňskij věstnik v letech 1829 a 1830 byly jen ostré a nehorázné kritiky,⁴⁾ často i výsměch...

Nenacházeje pochopení doma, začal Lobačevskij publikovat své práce v zahraničí. Větší pozornost vzbudilo jeho pojednání „Géométrie imaginaire“ (Imaginární geometrie) v časopise Crelle Journal 1837, sv. 17 a kniha „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“ (Geometrická vyšetřování k teorii rovnoběžek, Berlín 1840), o níž zejména zase Gauss projevil hlubší zájem. Zvlášť kladně musíme pak u obou badatelů hodnotit odhodlání ověřit dosažené výsledky v praxi, tj. přímým měřením rozhodnout, která z geometrií, euklidovská či hyperbolická, je platná. Zkoumali proto součet úhlů ve velkých trojúhelnících. Gauss měřil úhly trojúhelníka, jehož vrcholy byly Brocken, Inselsberg a Hoher-Hagen, Lobačevskij vzal za vrcholy trojúhelníka dokonce stálice: Rigel, Sirius a 29. Eridani. Odchylka součtu úhlů od 180° byla v obou případech sice v mezích pozorovacích chyb, myšlenka sama byla však velmi šťastná.

Lobačevskij, obhájiv dialektický a materialistický názor na matematiku, vybudoval v mnoha pojednáních také celou stavbu neeuklidovské geometrie; odvodil zvláště formule trigonometrické. „Je s podivem, jak krásných výsledků se dopravoval, aniž měl

³⁾ Přidržuji se klasického vyjádření, jež jako citát z Lobačevského uvádí prof. dr. Václav Hlavatý ve své výtečné (zároveň první české) učebnici neeuklidovské geometrie. Viz jeho „Úvod do neeuklidovské geometrie“ (JČMF, edice KRUH, sv. 3; Praha 1926). Cit. str. 20. Dodávám, že v novější české literatuře bývají ony dvě přímky, jež oddělují různoběžky od mimoběžek, nazývány také přímkami souběžnými s danou přímkou.

⁴⁾ Hloubku neporozumění dokazuje zejména také postoj, který k novým podnětům Lobačevského zaujal např. i slavný ruský matematik akademik Michail Vasiljevič Ostrogradskij aj.

tak snadnou pomoc v názoru, jehož používáme my, opírajíce se o různá zobrazení“, přiznávají dnešní odborníci.⁵⁾

Lobačevskij zemřel dne 12. (24.) února 1856 v Kazani. Okolnost, že ještě po jeho smrti vyšla jeho „Pangeometria“ a že i jeho dřívější práce byly dále znovu a znovu vydávány,⁶⁾ svědčí, že vědecká tematika jeho neeuklidovské geometrie nabyla již vedle velkého významu matematického i zásadního významu filosofického. Zaslouží zvláštní pozornosti, že vznikla v době kantovské víry v apriorismus prostorového nazírání. Vznikla jako revolta proti této víře, vzpoura plná důsledků. Působila proto mocně novotou svých myšlenek. Zahájila bádání o základech geometrie, jež je jedním z význačných znaků a slávou kritického devatenáctého století. Tomuto bádání byla vystoupením Lobačevského otevřena brána dokořán.

Ve dvacátém století přikročila věda k přesnějšímu zkoumání širšího světa kolem nás — kosmických prostorů. Neeuklidovská geometrie dostala se pak pod přímým vlivem pokusů o nový výklad stavby světa a působením Einsteinovy teorie relativity také již do ostrého vztahu ke skutečnosti. Jestliže jsme geometrické znázornění vztahů prostoru a času dříve rýsovali na rovný papír, nyní je rýsujeme na oblý povrch čtyřrozměrného míče. Avšak již sto let před vznikem teorie relativity předvídal Lobačevskij, že neeuklidovské geometrie bude jednou vhodně použito k znázornění fyzikálních vztahů, které budou později objeveny.

Literatura.

K dalšímu studiu doporučuji knihy:

J. B. Pavlíčka: „Základy neeuklidovské geometrie Lobačevského“ (Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1953,
K. Havlíčka a kol.: „Cesty moderní matematiky“. (Malá moderní encyklopedie, Orbis, Praha 1960).

*

*

*

⁵⁾ Viz např. V. Hlavatého „Úvod do neeuklidovské geometrie“, str. 177.

⁶⁾ „Geometrische Untersuchungen“ vyšly v 2. vydání roku 1887, „Imaginární geometrie“ německy v Lipsku roku 1904, „Pangeometrie“ francouzsky v Paříži roku 1905 apod. V době nejnovější byly vydány Lobačevského „Úplné sebrané spisy“ rusky roku 1949 v několika svazcích.

O príčinnosti

Prof. Dr. JOZEF SKOTNICKÝ, UPJŠ Košice

Príčinnosť-kausalita je myšlienkový princíp odrážajúci objektívny vzťah medzi dvoma javmi, z ktorých jeden je príčinou a druhý, následný, účinkom. Príčinnosť vyplýva zo skúsenosti, lebo u mnohých prírodných javov ľahko poznávame ich príčiny, a ďalším zobecnením i abstrakciou dochádzame k obecnému pojmu príčinnosti. Zdravý ľudský rozum vedie teda k obecnému záveru, že každý jav má svoju príčinu a nič sa nedeje bez príčiny; a tak princíp kauzality sa stáva postulátom našej vôle k stanoveniu príčin všetkých javov. Že príčinnosť zodpovedá prirodzenému ľudskému mysleniu, o tom svedčí okolnosť, že už aj malé deti si plne osvojujú tento spôsob myslenia a chcú poznávať okolitý svet z hľadiska príčinnosti — ich neustále otázky „prečo to“, „prečo ono“ vyvádzajú z trpezlivosti mnohých rodičov, ktorí na tieto otázky musia odpovedať.

Aj veda samotná je preniknutá snahou po poznávaní príčin prírodných javov a zo zvedavosti i morálne sme nútení hľadať pre prírodné javy príčiny a ich účinky. Podľa Leibniza kauzalita vedie prírodné dejstvo k časovému usporiadaniu javov a Leibniz považuje kauzalitu práve za onen reálny vzťah medzi javmi, ktorý nutne vedie k tejto časovej následnosti. Podobne aj Poincaré súdi, že jav predchádzajúci je príčinou javu nasledujúceho, účinku. Medzi dvoma javmi je teda kauzálne spojenie, keď jeden predchádza druhý a sú vzájomne v nutnom vzťahu. Tento časový interval medzi príčinou a účinkom uznávajú aj mnohí iní filozofi ako podstatný rys kauzality.

Naproti tomu Kant je zastáncom teórie kontinuitnej, podľa ktorej najväčšia časť príčin pôsobiacich v prírode je s účinkami súčasná. Medzi dvoma javmi niet teda časovej medzery, ale jeden jav musí plynule prechádzať v druhý, lebo keby príčina prestala, nemohol by sa dostaviť účinok, ako to vyjadruje aj scholastický výrok „cessante causa cessat effectus“. Medzi príčinou a účinkom niet časového intervalu, lebo účinok tkvie od prvopočiatku v príčine; preto sú oba čo do časového priebehu súčasné. Napr. kachle ohrievajú vzduch v miestnosti, guľa tlačí na podložku a podobne. Keď teda ide o deje súčasné, zlyháva Leibnizova diskontinuitná teória, ktorá pôvodne tvorila empirické kritérium kauzality a časového kauzálneho usporiadania prírodných javov.

Sporom medzi kontinuitnou a diskontinuitnou teóriou kauzality sa vyhneme, keď sa prikloníme k Helmholtzovej teórii legalitnej, ktorá za príčiny prírodných javov nepovažuje javy iné, predchodzie alebo súčasné, ale prírodné zákony, keď teda legalitu budeme považovať za

podklad kauzality. Legalita zahrnuje prírodné zákony, ktoré sú našimi subjektívnymi a často aj kvantitatívnymi výrazmi o objektívnych a podstatných súvislostiach medzi prírodnými javmi, telesami a látkami. Helmholtz [1] považuje teda tieto prírodné zákony za objektívne platné príčiny prírodných javov, za sily, lebo sila nie je nič iné než objektivovaný zákon pôsobenia. Podľa neho nadobúda naša snaha pochopiť prírodné javy, t.j. nájsť ich zákony, nový výraz: ten totiž, že chceme nájsť sily, ktoré sú príčinami prírodných javov; zákonnosť prírody chápeme potom jako súvislosť kauzálnu, keď len uznávame jej nezávislosť na našom myšlení a našej vôli. — Legalita i kauzalita sú nutnými postulátmi vedeckej práce. Legalita umožňuje zvládnutie skutočnosti pomerne jednoduchými prostriedkami a kauzalita dáva zase nášmu mysleniu a konaniu zmysel. Kde teda niet zákonného zväzku, tam niet ani zväzku kauzálneho a určenie prvého je krokom k zisteniu druhého. Význam vedy nespočíva teda len vo formulovaní prírodných zákonov, veda je živá, a preto pojem kauzality je v nej nutný. Bola by nesprávna mienka, že snáď veda spočíva len na princípe legality; naopak veda je preniknutá aj snahou po poznávaní príčin, lebo legalita samotná nestačí k pochopeniu sveta. Názor, že prírodoveda sa má obmedziť len na popis javov, teda legalitu, je pozitivistický a fenomenalistický. Dialektický materializmus naproti tomu uznáva kauzalitu za významný a objektívny prírodovedecký princíp, uznáva objektívnu príčinnú súvislosť javov, nezávislú na našej vôli a vedomí, ako aj jej správny odraz v našej myšli. Aj Lenin napísal [2]: „Kauzalita, ako ju obyčajne ponímame, je len malá čiastočka vesmírnej súvislosti, avšak čiastočka nie subjektívnej, ale objektívne reálnej súvislosti.“ V kauzálny vzťah veríme všade, kde pozorujeme určitú pravidelnosť, aj keď u niektorých pravidelných javov doteraz príčiny nepoznáme. Bádanie nemôže byť vyčerpané púhym popisom. Popis zisťuje len časovú a priestorovú súvislosť javov, ale nie kauzálnu, ktorá vystihuje nutnosť ich priebehu. Časová a priestorová súvislosť ešte nijako nesvedčí aj o súvislosti kauzálnej, lebo vždy neplatí známy výrok: post hoc, ergo propter hoc. Iba poverčivý človek môže napr. spájať vypuknutie vojen so zatmením slnka, zjavením sa komety a pod. Poznanie ako také je predovšetkým poznaním príčin javov. Už Spinoza hovorí, že je v prirodzenosti ľudského rozumu, aby považoval prírodné javy nie za náhodné, ale nutné. Prírodoveda sa nemôže odlúčiť od filozofie, lebo nepostupuje vpred len by „trial and failure“ v experimentoch, ale tiež v premýšľaní; pri tvorení hypotéz a teórií zostáva z veľkej časti aj vedou špekulatívnou. Psychologicky vzaté, je myšlienka kauzálnej spojitosti vierou v pravidelný beh sveta. Vskutku sa zdá, že princíp kauzality vzniká z ľudskej túhy po zjednotení a zharmonizovaní všetkého prírodného diania.

Keď z hľadiska legality analyzujeme napr. voľný pád kameňa, musíme za príčinu voľného pádu označiť Newtonov gravitačný zákon, resp.

gravitáciu a vyzdvihnutie kameňa do výšky, ako aj jeho uvoľnenie len za podmienky resp. popudy tohoto deja. Gravitácia je pritom tiež jediný faktor, ktorý nepodlieha našej vôli. — Podobne je to aj so vzrastom rastliny zo semena. Podľa diskontinuitnej teórie mohli by sme za príčinu rastu označiť zasiatie semena do výživnej pôdy a za ďalšie príčiny podľa kontinuitnej teórie udržiavanie vhodnej teploty i vlhkosti behom klíčenia semena a jeho rastu. No hlbšia úvaha vedie k legalitnej predstave príčinnosti, podľa ktorej príčinou rastu každej rastliny sú biologické zákony individuálneho vývoja jedinca, zasiatie semena je popudom rastu a vhodná teplota aj vlhkosť trvalými podmienkami úspešného rastu rastliny. — Popudov a podmienok, za ktorých príčiny pôsobia, môže teda byť veľmi mnoho a ich znalosť dáva nám možnosť predvídať prírodné dianie a tiež ho aktívne riadiť v náš prospech, aj keď príčiny vo forme prírodných zákonov nepodliehajú našej vôli. V tomto zmysle Bacon už pred viac než 300 rokmi vyhlásil: „Knowledge is power — vedenie je moc.“

Podobne ako popudov a podmienok, je veľmi mnoho aj príčin prírodného diania, prakticky toľko, koľko je prírodných zákonov, ovšem len príčinnostných. Lebo mimo týchto máme aj prírodné zákony popisné, napr. zákon o striedaní dňa a noci, o striedaní ročných dôb, zákony Keplerove a iné. Už aj podľa Milla účelom induktívnej logiky je stanoviť príčinnostné zákony, t.j. tie, ktoré určujú účinky každej príčiny a príčiny všetkých účinkov. Mill považuje určitý jav za vysvetlený, keď sa podarí nájsť jeho príčinu. Vysvetliť určitý jav znamená ovšem previesť ho na určité zákony alebo dedukovať ho z nich. — Aj keď takýchto príčinnostných prírodných zákonov je veľmi mnoho, prírodoveda má tendenciu združovať ich vo väčšie celky, v hypotézy a teórie. Tak už v minulom storočí Maxwell združil početné zákony elektromagnetizmu v svoje štyri známe obecné rovnice a na prelome storočia Planck združil tri zákony žiarenia čierneho telesa v svoju obecnú rovnicu. Aj v poslednom desaťročí Skotnický združil desať zákonov chemickej termodynamiky v svoju obecnú rovnicu pre jednotný výklad fyzikálno-chemických procesov [3]. Tak hovorí aj E. P. Wigner [4]: „O čo našej vede najviac ide, to je skúmanie zákonitostí vyskytujúcich sa medzi javmi a vtelovanie týchto prírodných zákonov v stále obecnějšíe princípy — fyzikálne teórie. Tým sa vytvárajú jednotiace hľadiska so stále širšou platnosťou. Naša veda je teda skôr nepretržitá snaha o nachádzanie obecnějších princípov než prostriedok k objasneniu toho či onoho javu.“

Z hľadiska tejto jednotiacej snahy súčasnej prírodovedy treba hodnotiť ako významnú skutočnosť, že sa už podarilo obecné formulovať druhý hlavný zákon termodynamiky ako zákon o stálom poklese pracovnej schopnosti v priebehu prírodného diania [3], [5]. Každý prírodný dej je teda doprevádzaný poklesom pracovnej schopnosti telies, látok

a ich systémov. Táto zákonitosť vyplýva aj z nemožnosti zostrojenia perpetua mobile (stroja, ktorý by večne konal prácu) a má obecnú platnosť podobne ako zákon o zachovaní energie. Zatiaľ čo však zákon o zachovaní energie platí za každých podmienok, tj. kludových aj pohybových, zákon o poklese pracovnej schopnosti platí len pre prírodné deje. Za podmienok kludových sa zachováva pracovná schopnosť práve tak ako aj energia. Na základe legalitnej teórie príčinnosti môžeme teda druhý hlavný zákon termodynamiky preformulovať na obecný zákon príčinnosti, platný pre všetky prírodné deje, na „zákon monokauzality“ v znení: jednotnou príčinou všetkého prírodného diania je snaha telies, látok a ich systémov po znížení ich pracovnej schopnosti. Bolo by snáď možné namietat, že pojem „snaha“, s ktorým sa stretáme u živých jedincov, nie je možné aplikovať aj na neživé systémy. Ale aj Newton použil pojem „sily“ predtým známy len v živej prírode, aj pre neživé telesá a pomocou neho vyjadril svoj gravitačný zákon. A konečne priťažlivá sila medzi telesami tiež len vyjadruje snahu telies po ich vzájomnom zblížení. — Zákon monokauzality znamená podstatný prínos pre materialistickú filozofiu, lebo predstavuje jednotnú objektívnu príčinu všetkého prírodného diania, ktorú jednotlivé náboženstvá pripisujú svojim bohom ako personifikovaným príčinám prírodného diania.

V zmysle výskumu kauzality napísal Helmholtz už pred sto rokmi [1] (s. 188 a 191): „Keď chceme hovoriť o pokroku celej prírodovedy, tak prvá otázka, ktorú musíme zodpovedať, bude táto: podľa akého merítka máme takýto pokrok posudzovať? Keď sa teda pýtame na pokrok prírodovedy ako celku, musíme ho posudzovať podľa toho, nakoľko pokročilo poznanie a uznanie príčinnej súvislosti, zahrňujúcej všetky prírodné javy.“

Tematika kauzality je ovšem veľmi závažná a dôležitá, lebo mimo iné rieši aj taký starodávny náboženský rozpor, ako je otázka pravého náboženstva a pravého objektívne jestvujúceho boha. Karol May podáva vo svojich arabských cestopisoch „mohamedánske“ riešenie tejto otázky. Podľa neho vraj nazývajú mohamedáni každého inoverca „neveriacim psom“, „džaurom“. Tak teda psí ľudia musia mať aj psích bohov, a potom jediným pravým bohom je Allah. — My sa ovšem na túto otázku nemôžeme dívať takto jednostranne, musíme všetkých ľudí považovať zhruba za rovnocenných a za takýchto aj ich bohov. Jehova, Allah, boh kresťanský aj budhistický zápasia v mysliach stámilionov veriacich ľudí o pravosť a prvenstvo, ale toto ešte stále nie je žiadnemu z nich priznané.

Do týchto náboženských rozporov prináša teraz jasno materialistická prírodoveda a filozofia. Vytyčuje zákon monokauzality ako všeobecný prírodný a objektívne dokázateľný zákon, ako jednotnú príčinu všetkého

prírodného diania. — A keď teda prírodovedeckým spôsobom môžeme definovať jednotnú príčinu všetkého prírodného diania, stávajú sa zbytočnými religiózni bohovia, lebo každý z nich bol prorokmi vytvorený tiež len ako personifikovaná príčina prírodného diania. Musíme teda považovať týchto religióznych bohov len za subjektívne predstavy v myšliach veriacich ľudí. Starodávny religiózny spor o „pravom“ náboženstve a „pravom“ bohu sa teda takto rieši v prospech materialistickej prírodovedy, v prospech zákona monokauzality, ktorý objektívne dokázateľne jestvuje a bude jestvovať tak dlho ako príroda samotná.

Literatura:

- [1] H. Helmholtz, Populäre wissenschaftliche Voträge, Braunschweig (Vieweg) 1865, s. 190 a Handbuch der Physiologischen Optik III. Leipzig (Voss) 1910, s. 31.
- [2] V. I. Lenin, Filozofické sešity 1954, s. 130.
- [3] J. Skotnický, Zborník Lek. fak. Košice XIV, 28 (1971), s. 32 a V. Santolzer: Učebnica lekárskej fyziky, Avicenum Praha 1971, s. 123.
- [4] E. P. Wigner, Čsl. čas. fyz. A 23 (1973), s. 418.
- [5] J. Skotnický, Rozhledy mat. fyz. 51, 9 (1972/73), s. 410—415.

Třikrát Thales a třikrát Pythagoras

Thales z Miletu žil patrně v letech 624—547 před naším letopočtem, byl považován za velkého učence a počítán mezi sedm mudrců starého Řecka. Osvědčil se jako státník, proslavil se jako filosof, astronom (předpověděl zatmění Slunce r. 585 př. n. l.) a jako matematik udivil i egyptského faraóna Amásise tím, že určil výšku pyramidy pomocí stínu tyče (využil podobnosti trojúhelníků). Uměli byste určit výšku topolu pomocí jeho stínu a stínu tyče?

Thales z Miletu asi sám nenapsal žádné knihy, ale pozdější autoři mu připisují mnoho objevů z elementární teorie trojúhelníka a kružnice. Patří mezi ně i věta o vrcholech pravých úhlů nad danou úsečkou, kterou i dnes nazýváme jeho jménem. Za největší Thaletovu zásluhu se však považuje to, že uváděl důkazy pouček, nesděloval jen recepty, jak tomu bylo do té doby zvykem.

Thales z Miletu byl uznávaný astronom, přesto však o něm kolovala tato anekdota: Jednou se za noci procházel po ulici, hleděl vzhůru k noční obloze, soustředěně přemýšlel — a spadl do jámy. Nějaká babka

viděla jeho pád a dala mu hned mravní naučení: „Jak můžeš vědět, co je na nebi, když nevíš, co je u tvých nohou?“

Pythagoras ze Samu byl politikem a filosofem, žil v 6. století př. n. l.; kolem r. 530 př. n. l. odešel z Řecka do jižní Itálie, kterou tehdy řecké státy kolonizovaly. V městě Krotónu založil zvláštní společnost, která byla filosofickou školou, náboženským spolkem i politickou skupinou ovládající město, patřila ke zpátečnickým silám společnosti.

Pythagorovci uctívali svého učitele a jako dogmata tradovali jeho výroky s důrazem „On sám to řekl“. Pěstovali nauku o číslech jako mystické učení; hlásali, že podstatou všeho je číslo. Kupodivu reálné měli názory na postavení Země ve vesmíru — hovořili o jejím kulovém tvaru i denním otáčení, neumísťovali ji do středu vesmíru.

Pythagorova věta byla známa v Babylónii již v 18. století před naším letopočtem (tedy 1200 let před Pythagorou), ale jen jako empirický fakt. Důvod, proč byla nazvána Pythagorovým jménem, se spatřuje v tom, že jeho škola asi podala nějaký *důkaz* její platnosti.

Archimedes

Archimedes žil v letech 287—212 před n. l., a to převážně v Syrakusách, které tehdy byly řeckým městem. Studoval však v Alexandrii a s tamními matematiky (žáky Eukleida) udržoval po celý život písemný styk. Úroveň metod a výsledků, kterých dosáhl Archimedes, byla překonána až v 17. století n. l. G. W. Leibniz mu vzdal v té době úctu svým výrokiem: „Každý, kdo je schopen pochopit Archimeda, bude méně vzrušen objevy největších současníků.“

Archimedova smrt v r. 212 před n. l. po dobytí Syrakus Římany je spojena se známou legendou o slovech „Nedotýkej se mých kruhů!“ (Noli tangere circulos meos!). Archimedes je měl údajně pronést, když vojáci vtrhli do jeho zahrady, kde on právě přemýšlel nad obrazci nakreslenými v písku. Jak píše historik Titus Livius, zaplatil tuto odmluvu životem, ačkoliv velitel římského vojska Marcellus vydal před útokem na město rozkaz, aby Archimedes byl ušetřen.

Archimedův náhrobek byl ozdoben podle jeho přání obrazcem znázorňujícím kouli vepsanou do válce; měl připomínat Archimedův objev, že povrch takového válce se čtvercovým osovým řezem je 1,5násobkem povrchu koule a objem tohoto válce je 1,5násobkem objemu koule. (Přesvědčte se o tom pomocí vzorců, které znáte.) Cicero ve svých spisech uvádí, že jen díky tomuto obrazci našel zapomenutý Archimedův hrob v Syrakusách po 150 letech.

Archimedovo zvolání Heuréka! je spojeno s legendou o objevu velikosti síly nadnášející tělesa ve vodě. Historiku o tomto objevu v lázni zaznamenal římský architekt Vitruvius; Archimedes prý vyběhl z lázni nahý na ulici a volal Heuréka! Heuréka! (Přišel jsem na to!) Čtete-li v současné době o heuristických metodách, jde o metody, jak objevovat.

„*Dej mi pevný bod a pohnu Zemí!*“, prohlásil prý Archimedes syrakuskému vládci Hieronovi, když mu předvedl vytažení těžké námořní lodi na břeh pomocí soustavy pák a kladek s nepatrnou námahou vlastní ruky. Archimedes zformuloval a zdůvodnil zákon rovnováhy na páce, napsal knihy o vážení a o těžišti.

Dvě matematicky

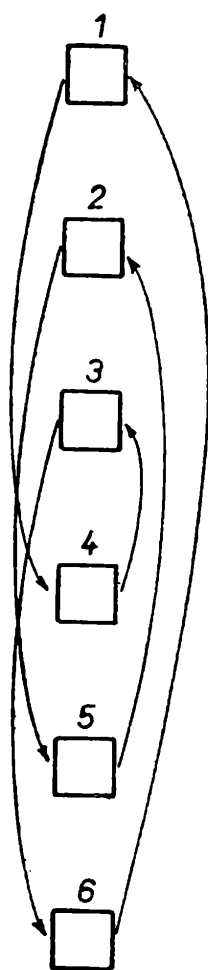
Sophie Germainová (1776—1831) byla jednou z mála evropských žen, které tvořivě pracovaly v matematice a fyzice v 18. a 19. století. Její zájem o matematiku se probudil ve 13 letech, kdy se jí dostala do ruky kniha o historii matematiky; přečetla si pasáž o smrti Archimeda nad jeho kruhy a zatoužila poznat vědu, která dokáže člověka tak zaujmout, že zapomene na nebezpečí smrti. Sophiini rodiče však nechtěli připustit, aby se zabývala matematikou; domácími tresty včetně hladu a tmy se ji snažili přinutit, aby se přestala matematikou zabývat. Nakonec ustoupili, Sophie studovala vědeckou literaturu a až do smrti se zabývala matematickými a fyzikálními problémy. Získala prémii pařížské Akademie věd za práce z fyziky; její práce z teorie čísel vysoce oceňoval sám K. F. Gauss. S. Germainová si s ním dopisovala o vědeckých problémech, používala však mužského pseudonymu z obavy, aby snad Gauss neodmítl diskutovat s ženou. Její obavy byly zbytečné, Gauss naopak navrhl své universitě v Göttingen, aby udělila S. Germainové čestný doktorát, když se dozvěděl, s kým vedl odbornou diskusi. V době, kdy se návrh projednával, však S. Germainová zemřela.

Nejznámější matematickou starověku byla *Hypatia* (370—415 n. l.), dcera Theona Alexandrijského, pracovníka slavného vědeckého střediska v Alexandrii. Hypatia získala všestranné vzdělání ve filosofii, matematice, astronomii a lékařství, znala mnoho jazyků a byla dobrým řečníkem. Napsala řadu tzv. komentářů k dílům Apollonia, Diofanta a Ptolemaia; tyto komentáře se zachovaly a jsou jediným svědectvím o ztracených knihách starších autorů. Hypatia žila ve velmi neklidné době rozpadu římské říše, boje mezi křesťany a pohany, zahynula násilnou smrtí, když byla přepadena na ulici zfanatizovaným davem.

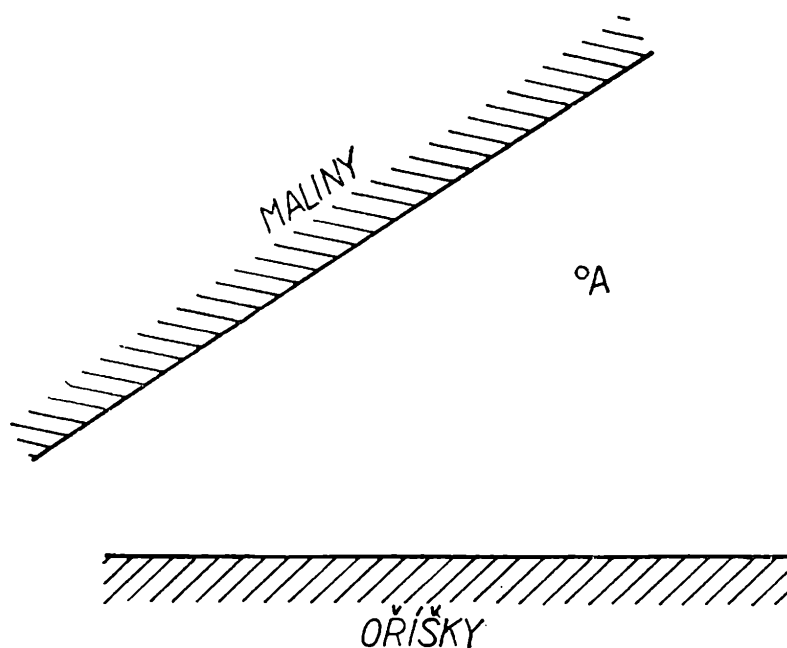
J. Š.

O dvou výletech a zejména o tom druhém

Máme samozřejmě na mysli dvě knížky, jež nedávno vyšly v edici Škola mladých matematiků. První z nich má název Malý výlet do moderní matematiky, dostala v edici ŠMM pořadové číslo 30 a náš časopis už před časem o ní přinesl referát. Druhá knížka je v jistém smyslu volným pokračováním svazku právě zmíněného. Jmenuje se Druhý výlet do moderní matematiky, má pořadové číslo 32 a napsali ji doc. Jan Vyšín, CSc., a Jitka Kučerová. Na druhý výlet se čtenáři vypravují vybaveni podobnou výzbrojí, jakou už znají ze svazečku předcházejícího. Autoři zde vybrali řadu úloh z učebních textů, podle nichž se učí žáci



Obr. 1



Obr. 2

pokusných základních škol. V úlohách množiny „ožívají“ a čtenář se tak může podívat i na „život uvnitř množin“. Knížka se totiž rozpadá do dvou kapitol, z nichž první se zabývá binárními relacemi a druhá binárními operacemi. Poznáte, že pod těmito učenými názvy se skrývají věci, které jste vlastně už trochu znali ze školské aritmetiky a geometrie a občas i z běžné životní praxe. Jsou tu příklady teoretické i takové, jež se řeší „selským rozumem“. Z těch druhých namátkou vybíráme dvě na ukázkou, jakým stylem je knížka psána.

1. Šest žáků stojí v zástupu. Na dané znamení se přemístí podle obr. 1. Po kolika přemístěních budou všichni na svých původních místech?

2. Čtyři kamarádi tábořili na palouku v lese (v místě A) a měli přesně zakreslený plán okolí (obr. 2). Hledali nejkratší cestu z tábora A pro maliny, pak pro oříšky a zpět do tábora. Našel ji Mirek. Jakou cestu zvolil? Jak přesvědčil kamarády, že volil správně?

Zbývá dodat, že edice ŠMM vychází v nakladatelství Mladá fronta, že Druhý výlet zde vyšel r. 1973, má 100 stran, 69 obrázků a brožovaný výtisk stojí 6 Kčs. Přejeme vám příjemnou zábavu při studiu.

Jiřina Sedláčková

Jaroslav Morávek:

O DYNAMICKÉM PROGRAMOVÁNÍ

Vydal ÚV Matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta jako 33. svazek edice Škola mladých matematiků.

Praha, 1973, 80 stran, cena Kčs 6, —. S optimalizačními úlohami se setkáváme snad ve všech odvětvích vědy, techniky a hospodářství. Vědeckotechnický pokrok přitom přináší stále náročnější úlohy, k jejichž řešení je zapotřebí nových metod. Jedním z úspěšných nových postupů je tzv. dynamické programování.

Přesto, že základní myšlenky dynamického programování jsou srozumitelné středoškolským studentům, chyběla dosud publikace,

která by naše středoškoláky informovala o této oblasti přístupným způsobem a s přijatelnou matematickou přesností. Úspěšným příspěvkem k vyplnění této mezery je Morávkova knížka „O dynamickém programování“. Studium této knížky doporučuji každému středoškolskému studentu s hlubším zájmem o matematiku a její použití při řešení praktických úloh. Čtenář se seznámí nejen se základními vlastnostmi optimalizačních úloh a s myšlenkami dynamického programování, ale také s řešením zajímavých konkrétních úloh praktického charakteru. Stupeň pochopení výkladu si čtenář může současně ověřovat řešením cvičení, která jsou připojena téměř ke každé kapitole.

Milan Vlach

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

common	společný
common denominator	společný jmenovatel
common difference	diference aritmetické posloupnosti
common tangent	společná tečna
commutative	komutativní
commutative group	komutativní grupa
commutative law	komutativní zákon
commutative operation	komutativní operace
commutative ring	komutativní okruh
compare	porovnat
comparable	srovnatelný
comparison	srovnání
compasses (pl)	kružítka
complement	doplňek, komplement
complementary	doplňkový, komplementární
completing the square	doplnění na čtverec
complete	úplný, doplnit
complex	komplexní, složený
complex fraction	složený zlomek
complex number	komplexní číslo
complex-valued	nabývající komplexních hodnot
complex variable	komplexní proměnná
complicated	složitý
component	složka
composed	složený
composition	složení
iterated composition	opakované skládání
composite	složený
composite number	složené číslo
composite of functions	složená funkce

compound interest	složený úrok
computation	výpočet
compute	počítat
computer	počítač
analogue computer	analogový počítač
digital computer	číslicový počítač
concave	konkávní
concentric	soustředný
concept	pojem
concern	týkat se
concessive	přípustný
conclusion	závěr, tvrzení
concurrent	mající společný bod
condensation point	bod kondenzace
condition	podmínka
necessary and sufficient c.	nutná a postačující podmínka
conditionally convergent	neabsolutně, relativně konvergentní
cone	kužel
cone of revolution	rotační kužel
confocal	konfokální
conformal	konformní
conic	kuželosečka
congruence	shoda, kongruence
congruent	shodný, kongruentní
conical surface	kuželová plocha
conjugate	sdužený, konjugovaný
conjugate complex numbers	komplexně sdužená čísla
lines conjugate with respect to conic	sdužené poláry
conjunction	konjunkce
connection	souvislost
connect	spojit
connected	souvislý
consequence	důsledek
consider	uvažovat
constant	konstanta
constant of integration	integrační konstanta
constant of proportionality	konstanta úměrnosti
constrained	vázaný
constraint	podmínka
construct	sestavit
constructing, construction	konstrukce
ruler and compass construction	konstrukce kružítkem a pravítkem
contact	dotyk
point of contact	bod dotyku
continue	pokračovat

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

9

ROČNÍK 52, 1973-1974, KVETEN



ROČNÍK 52
KVĚTEN 1974

9

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. Marie Valešová, CSc., Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1974.

OBSAH

O B S A H

Dr. B. Zelinka: Kapesní průvodce po království matematiky	385,
J. Drábek, J. Zach: Dualita rovinných map	390
J. Kateřinák: Malé počítací a rýsovací stroje a jejich užití	394
S. Horák: Nerovnosti v geometrii II .	398
Ing. dr. V. Šindelář: Metrologie .	405
E. Procházková: Zdánlivá (střední) hmotnost kilomolu směsi dvou plynů	410
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Hvězdy s neviditelnými průvodci	413
Olympiády: FO	417
J. Kotyk: Předmět a charakter fyziky .	422
R. Kolomý: Průkopníci bezdrátové telegrafie	424
Nejmladším čtenářům .	427
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	3. a 4. str. obálky

matematika

Kapesní průvodce po království matematiky

RNDr. BOHDAN ZELINKA, CSc., Liberec

Vydává-li se člověk do neznámé země, vždy se mu vyplatí, když má s sebou průvodce. Někdy to bývá průvodce živý, který nikdy člověka neopomene upozornit, kdy se má dívat vpravo a kdy vlevo. Není-li takovýto průvodce, pomůže aspoň průvodce tištěný. Velkou proslulost si získaly zejména průvodce Baedekerovy, podle nichž se i jiným říkává bedekry. Vyznačovaly se mimo jiné i tím, že hodnotily turistické pamětihodnosti podobně jako koňak — příslušným počtem hvězdiček. Turista, který měl jen málo času, se omezil na prohlídku míst s maximem hvězdiček; kdo nemusel časem šetřit, prohlížel i pamětihodnosti jednohvězdičkové.

Mnozí z vás, milí čtenáři, se vydají zanedlouho do království matematiky. Buď budou přímo studovat matematiku jako obor, nebo se s ní v hojné míře setkají při studiu některého jiného oboru. Království matematiky sice pro vás není zcela neznámou zemí, jistý malý pohraniční styk jste s ní měli už dříve. Nyní však vás bude čekat náročnější cesta do vnitrozemí, a je tedy třeba, abyste se dověděli, co vás na té cestě čeká. Budete sice moci přechíst si studijní plány i pro vyšší ročníky, ty však začátečníka svou spoustou neznámých názvů spíše děsí než informují. Potřebovali byste tedy nějaký bedekr, a protože firma Baedeker jej zatím nevydala, pokusím se vám sám předložit alespoň určité kapesní vydání. Někteří z vás se seznámí se vším, o čem tu bude řeč, někteří se omezí jen na některé oblasti. Doufám však, že i těm bude užitečný.

Matematika bývá nazývána královnou věd. Proto je zcela oprávněně nazývat její říši královstvím. Které je hlavní město tohoto království, o tom se názory různí. Občané této říše se často vyznačují lokálním patriotismem a považují prostě za hlavní město to město, v němž bydlí. V našem bedekru zachováme v této věci přísnou neutralitu a hlavní město nebudeme uvádět. Ze stejného důvodu nebudeme také kreslit žádné hvězdičky; o významnosti jednotlivých partií matematiky nechť si každý učiní sám svůj vlastní názor.

A nyní k osobě samotné královny. Mnozí lidé mají o matematice před-

stavu, že je to prostě počítání. Vezmeme-li však Etymologický slovník jazyka českého, zjistíme, že slovo matematika vzniklo z řeckého slova *μαθημα*. A toto slovo neznačí ani „počítati“, ani „číslo“, nýbrž — „učení“! Ano, matematika je v podstatě obecné učení o věcech našeho světa, je to skutečně jakýsi druh filosofie. Přesněji řečeno, matematika je věda o kvantitativních a prostorových vztazích skutečného světa. (Příruční slovník naučný, Academia Praha 1966.)

A teď už se můžeme rozjet po jejím království. Samozřejmě je neprojedeme celé. Snad jen mezi občany Andorry, Lichtenštejska, Monaka, San Marina nebo Vatikánu lze najít člověka, který by se opravdu právem mohl chlubit, že zná svou vlast dokonale. Tak ani ti, jimž se království matematiky stalo vlastně také vlastí, nemohou poznat vše, co v sobě matematika tají. Vždyť by neměli ani čas přečíst si nadpisy všech vědeckých prací, které se v této vědě publikují. Mohou se soustředit pouze na úzký obor a ty ostatní sledovat jen informativně.

Zastavme se nejprve u toho, co se nazývá základy matematiky nebo základní matematické disciplíny. Zjistíme-li, že existuje katedra základních matematických disciplín, máme zprvu o jejích příslušnících dosti nízké mínění. Domníváme se, že jsou to lidé, kteří se nedokázali v matematice dostat příliš daleko za malou násobilku. To je ovšem veliký omyl. Tyto disciplíny se nazývají základní nikoli proto, že by patřily k tomu nejjednoduššímu, co v této vědě je; naopak, nazývají se tak proto, že jsou jakýmsi obrem Atlantem, který na svých mocných ramenou celou říši matematiky drží. A jejich náplň netvoří malá násobilka, ba ani velká, ale teorie množin a matematická logika.

S pojmem množiny jste se zřejmě už setkali. Je to pojem, na němž stojí celá matematika; každý matematický obor zkoumá vlastně množiny nějakých objektů. Teorie množin se pak zabývá množinami zcela obecně. Setkáváme se zde s pojmy sjednocení, průniku a doplňku, ale to hlavní jsou zde množiny nekonečné. Poznáváme, že není nekonečno jako nekonečno. Máme-li nekonečnou množinu a vezmeme-li množinu všech jejích podmnožin (to jest částí), dostaneme samozřejmě opět nekonečnou množinu. Avšak tato množina je jaksi „více nekonečná“ než ta původní. Chceme-li vytvořit dvojice vždy z jednoho prvku původní množiny a z jednoho prvku té naší nové množiny, vždy nám budou některé prvky nové množiny „přebývat“. Utvoříme-li z té nové množiny opět množinu všech podmnožin, dostaneme „ještě nekonečnější“ množinu. Takto můžeme pokračovat do nekonečna, ale ani pak to ještě nekončí; můžeme všechny takto získané množiny sjednotit a dostaneme „ještě větší množinu“. A pak můžeme vzít opět množinu všech jejích podmnožin a sisyfovská práce začíná znova. Těmto různým nekonečnům se říká nekonečná kardinální čísla a značí se obvykle hebrejským písmenem alef s různými indexy. Pak můžeme množiny také různým způsobem uspořádat, čemuž odpovídá zase jiný typ čísel, takzvaná čísla ordinální.

O různých axiomatických systémech teorie množin se zde šířit nebudu; na to je příliš málo místa.

Všechny vědy musejí nutně při svých úvahách vycházet z logiky. Nejinak je tomu i v matematice. Logika tedy pomáhá matematice, avšak na rozdíl od jiných věd se jí za to matematika opravdu odvděčuje, a to tím, že zavádí v logice své metody. Mluvíme potom o matematické logice. Používá se v ní axiomů a odvozovacích pravidel. K nejjednodušším částem matematické logiky patří výrokový počet se svými konjunkcemi, disjunkcemi, implikacemi a negacemi; o tom už jste slyšeli. Tím se ovšem matematická logika zdaleka nevyčerpává. Důležité jsou v ní mnohem složitější věci jako například důkazy rozhodnutelnosti či nerozhodnutelnosti matematických teorií.

Pod pojmem vyšší matematika si člověk zpravidla představuje diferenciální a integrální počet. Tyto obory patří do matematické analýzy, která zkoumá různé vlastnosti funkcí. Zkoumá funkce nejen jedné, ale i více proměnných, a to nejen reálných, nýbrž i komplexních. Existuje například i sinus a kosinus komplexního argumentu. Matematická analýza se vyznačuje tím, že se v ní stále mluví o tom, že ke každému kladnému ε existuje kladné δ tak, že je-li o něco menší δ , je něco jiného zase menší než ε . Zpočátku to člověku připadá velice tajemné, ale když si uvědomí, co to znamená, zvykne si na to jako na denní chléb. Je třeba si zvyknout i na trochu neobvyklé vyjadřování. Například funkce může mít v některém bodě limitu zleva a třeba současně i limitu zprava, a přesto to ještě neznamená, že by měla limitu. A je více podobných slovních spojení. Tajemný je i sám pojem diferenciálu. Je to něco nekonečně malého, ale přesto to není nula.

Důležitou částí matematické analýzy (která se vlastně už skoro od ní osamostatnila) je teorie diferenciálních rovnic. V těchto rovnicích se vyskytují sice proměnné jako v obvyklých algebraických rovnicích, neznamenaají však čísla, ale funkce. Podobně je tomu i u diferenčních a integrálních rovnic.

Pojem funkce lze dále zobecnit na pojem distribuce; těmi se zabývá teorie distribucí. O té se nebudeme šířit, je to už dosti speciální obor.

Jinak je možno pojem funkce zobecnit také tak, že místo abychom číslům přiřazovali čísla, můžeme prvkům nějakých obecnějších prostorů (metrických, vektorových) přiřazovat buď zase čísla nebo jiné prvky. Potom jde o funkcionály a operátory. Zabývá se jimi funkcionální analýza. S integrály opět souvisí takzvaná teorie míry. Míra je číslo, přiřazené určité množině a vyjadřující v určitém smyslu její velikost. Příkladem míry je délka úsečky, obsah obrazce nebo objem tělesa.

Matematická analýza je výplodem novověku. Od ní se pustíme k oboru, kterým na nás zavane vůně Orientu, a to ještě Orientu středověkého. Je to algebra. Toto slovo vzniklo z názvu knihy „Hisab al-džabr val-muqabala“, kterou napsal v devátém století (ještě před Cyrilem a Metodějem)

Muhammad ibn Músá al-Chvárizmí. Znamená to „věda o redukci a vzájemném rušení“ a nebylo to nic jiného než nauka o řešení rovnic. Takto jste poznali algebru také na základní a střední škole. Od vysokoškolské algebry by člověk očekával, že ho naučí vzorcům pro kořeny rovnic alespoň do dvacátého stupně. V tomto ohledu je tedy zklamán. Doví se dokonce, že pro rovnice vyššího stupně než čtvrtého by bylo marnou lopotou takovéto vzorce hledat; ony se prostě najít nedají. Zato se však člověk naučí počítat s maticemi, což nejsou pouhá čísla, ale celé tabulky čísel úhledně uspořádané do tvaru obdélníku nebo čtverce. Slovo algebra je pro mnoho lidí děsivé samo o sobě. Představme si nyní, že se k němu přidá ještě přívlastek „abstraktní“. Dostaneme tak algebru, v níž se nepočítá s čísly, ba ani s tabulkami čísel, ale s určitými abstraktními prvky. Prostě se vezme množina nějakých prvků, kterým se neříká nikdy jinak než „prvek a “, „prvek b “ a podobně, zavedou se na ní nějaké operace, pro něž mají platit nějaké axiomy, a to všechno se pojmenuje nějakým divným slovem. Ještě ujdou slova jako „svaz“, „okruh“, „těleso“, která samozřejmě v matematickém textu znamenají něco zcela jiného než v běžné mluvě. Horší už je „polosvaz“ nebo „polookruh“ nebo docela cizí slova jako „grupa“, „pologrupa“, „grupoid“, „kvazigrupa“. Vyskytuje se i výraz „lupa“, který však se zvětšovací sklem nemá nic společného, ale značí kvazigrupu s jednotkovým prvkem. Neděsme se toho přespříliš; všechno je pouze zobecnění těch věcí, které známe z dřívějšíka. Tak například reálná nebo racionální čísla tvoří těleso, zatímco celá pouze okruh a přirozená pouze polookruh. Existují ovšem i jiná tělesa (neplést s geometrií!), jiné okruhy, jiné polookruhy. To všechno jednou také pochopíte. Podobnou abstrakcí vznikl i pojem kategorie, který zkoumá teorie kategorií, obor dosti příbuzný algebře.

Zdálo by se, že moderní algebra už dávno hodila přes palubu všechna čísla. Není tomu tak, existuje teorie čísel, která rovněž souvisí s algebrou, a ta se opravdu zabývá čísly. A zdaleka ani ona neprozkoumala všechna tajemství, která v sobě čísla tají. Z problémů, které dosud odolávají snahám o vyřešení, uvedme alespoň velkou Fermatovu větu, která tvrdí, že pro žádná čtyři přirozená čísla a , b , c , n , kde $n \geq 3$, neplatí $a^n + b^n = c^n$. Tuto větu údajně dokázal francouzský matematik Fermat, její důkaz se však nezachoval a od té doby se nikomu nepodařilo jej nalézt.

Z Orientu se nyní přenesme do antického Řecka, kde vznikla geometrie. Přesněji řečeno, některé geometrické poznatky znaly již dřívější národy jako Egypťané a Babyloňané; jak jinak by bylo možno stavět pyramidy a podobné stavby? Avšak soustavné zkoumání geometrie započal Eukleides a slovo geometrie také pochází z řeckých slov $\gamma\eta$ — země a $\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\iota\nu$ — měřiti. Dalo by se to tedy přeložit jako zeměměřictví. Zpočátku to skutečně vystihovalo náplň tohoto oboru, dnes ovšem již dávno nikoliv, což je zřejmé už z toho, že se dnes zeměměřictví nazývá

cizím slovem geodesie. Základy novověké geometrie položili němečtí matematikové Hilbert a Klein. Hilbert na základě Eukleidova díla zformuloval axiomatiku geometrie. Klein ve svém Erlangenském programu vyložil, že každá oblast geometrie je teorií invariantů některé grupy transformací. (Ejhle, zase ty grupy!) Pokusme se to vyložit trochu srozumitelněji. Můžeme brát Hilbertovu teorii v plném rozsahu, potom máme takovou geometrii, s níž jsme se seznámili na základní a střední škole. Protože v ní měříme délky úseček a velikosti úhlů, říkáme jí geometrie metrická. Rozhodneme-li se upustit od měření a omezit se na vlastnosti, které se nemění afinními transformacemi, dostáváme geometrii afinní. V ní nás například u přímek zajímá jen to, zda jsou spolu rovnoběžné nebo zda se protínají a v kterém bodě. Užíváme zde nevlastních prvků, tyto prvky však mají v afinní geometrii stále výsadní postavení. Jestliže jim toto výsadní postavení odebereme, to znamená, že je nijak neodlišujeme od ostatních prvků, dostáváme projektivní geometrii; v ní se prostě nestaráme ani o tu rovnoběžnost. A máme-li jednu projektivní geometrii, můžeme zkusit, zda by její axiomy neplatily i pro jiné body a přímky než ty, na které jsme zvyklí, zda by jich nemohl být třeba jen konečný počet. A vida, jde to také a my dostáváme konečnou projektivní geometrii.

Můžeme se ovšem vydat i jiným směrem; prostě některý z Hilbertových axiomů nahradit jiným. To se provádí zvláště se známým axiomem o tom, že daným bodem k dané přímce lze vést právě jednu rovnoběžku. Jestliže budeme tvrdit, že jich lze vést více, dostaneme hyperbolickou geometrii, budeme-li naopak tvrdit, že neexistuje žádná, dostaneme eliptickou geometrii. Těmto geometriím se říká neeukleidovské. První matematikové, kteří přišli na to, že by bylo možno zkoumat takovéto neeukleidovské geometrie, byli Gauss, Lobačevskij a Bolyai. Tyto geometrie rozhodně nejsou tak nesmyslné, jak by se zdálo, nemáme však dosti místa na to, abychom jejich význam objasnili.

Geometrie se však vyvíjí i jinak než škrtáním nebo zaměňováním axiomů. Jsou vám jistě známy základy analytické geometrie, která používá systému souřadnic a tak převádí geometrické úvahy na úvahy algebraické. Na ni navazuje algebraická geometrie, která se zabývá rovnicemi různých křivek a ploch. Vtrhne-li do algebraické geometrie matematická analýza se svými diferenciály a integrály, vzniká diferenciální geometrie a integrální geometrie. Diferenciální geometrie se ve svých počátcích zabývala rovnicemi tečen a tečných rovin, křivek a ploch, ale později se z ní vyvinul obor, který podstatně rozšiřuje algebraickou geometrii a objevuje různé důležité vlastnosti geometrických útvarů. Na diferenciální geometrii navazuje teorie pláství, která nemá nic společného s včelami, ale vyšetřuje vlastnosti určitých soustav křivek na plochách. Zmiňme se ještě o kombinatorické geometrii, která zavádí do geometrie kombinatorické úvahy. Může nás poučit například o tom,

jak máme klást parkety, aby všechny byly stejné a přitom vyplnily bez mezer celou rovinu. A aby nám nebylo líto, že máme málo příležitostí umazat si ruce od tuše, je tu deskriptivní geometrie, při níž se narýsujeme dost a dost; zkoumá různé metody zobrazení vícerozměrných útvarů v menším počtu rozměrů, nejčastěji tedy útvarů třírozměrných v rovině.

(Pokračování)

Dualita rovinných map

JAROSLAV DRÁBEK, JIŘÍ ZACH, PF Plzeň

V článku „Eulerova věta pro rovinné grafy“ byly definovány základní pojmy z teorie rovinných grafů. Graf znázorněný na obrázku 1 má některé speciální vlastnosti: z každého jeho vrcholu vycházejí aspoň tři hrany a každá jeho hrana je částí hranice aspoň jedné stěny. Graf svým vzhledem připomíná zeměpisnou mapu, takový graf skutečně nazveme rovinnou mapou.

Konečný neorientovaný rovinný graf nazýváme *rovinnou mapou* právě tehdy, když

- a) z každého vrcholu vycházejí aspoň tři hrany,
- b) každá hrana je částí hranice aspoň jedné stěny.

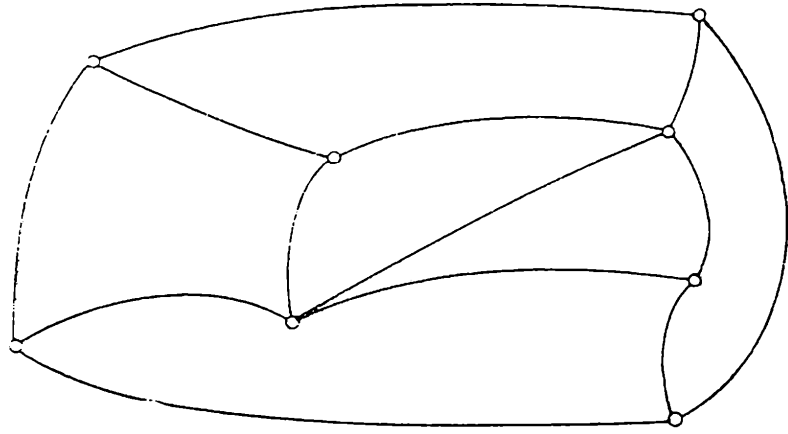
Zdůvodněte, proč rovinné grafy znázorněné na obrázku 2 a 3 nejsou rovinnými mapami.

Je samozřejmé, že rovinnou mapu považujeme za souvislou právě tehdy, když je souvislým grafem. Jestliže rovinný graf je mapou, potom místo o stěně grafu hovoříme o území rovinné mapy. Vnější oblast*) mapy považujeme též za území, které je ovšem neomezené a někdy ho v teorii rovinných map nazýváme „mořem“. Z Eulerovy věty pro souvislé rovinné grafy dostáváme tento výsledek pro mapy:

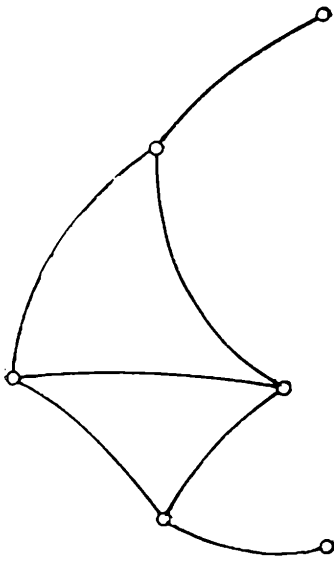
Jestliže souvislá rovinná mapa M má v vrcholů, h hran a u území, potom platí

$$(u + v) - h = 2.$$

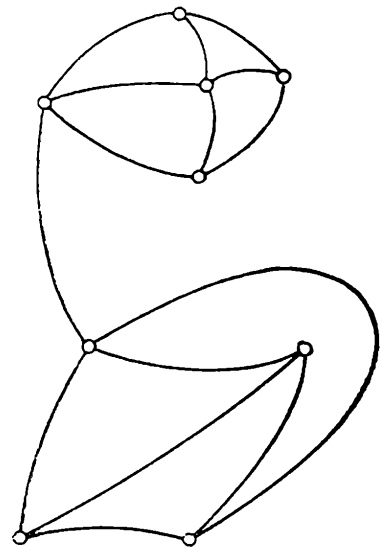
*) Pod vnější oblastí je třeba rozumět doplněk sjednocení všech území mapy M vzhledem k rovině.



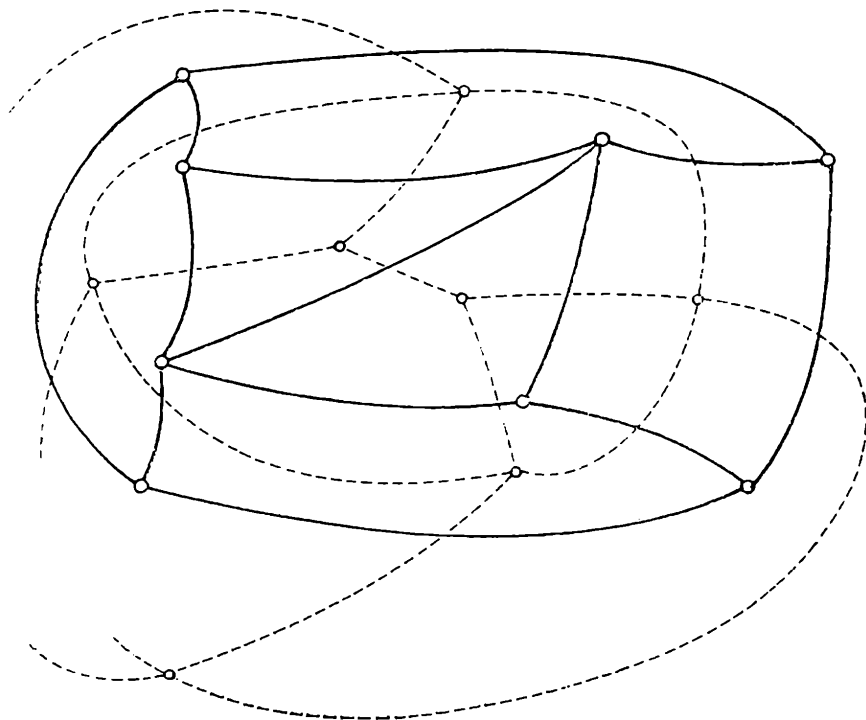
Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.



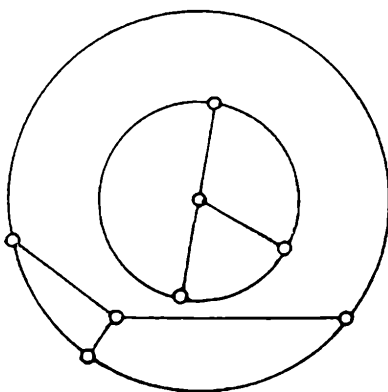
Obr. 4.

Při důkazu stačí uvážit, že počet území mapy M je o jedno větší než počet stěn souvislého rovinného grafu M .

Ukažme si nyní zajímavou konstrukci nové mapy M' v dané mapě M .

V každém území mapy M zvolme vnitřní bod, který znázorňuje například hlavní město tohoto území. Hlavní města kterýchkoliv dvou sousedních území spojme železnici, přitom dbejme na to, aby se železnice vzájemně neprotínaly a aby společná hrana dvou sousedních území byla protáta právě jednou železnici. Na obr. 4 jsou železnice znázorněny čárkovanými spojnicemi. Snadno nahlédneme, že vzniklý neorientovaný graf G' (jeho hrany jsou tvořeny čárkovanými spojnicemi) je rovinnou souvislou mapou, kterou nazýváme mapou duální k mapě M .

Ukažte, že ve vnější oblasti grafu duálního k nesouvislé mapě M na obr. 5 leží dva různé vrcholy původní mapy M .



Obr. 5.

Ukažte, že graf duální k mapě M , ve které bychom připustili smyčku (obr. 6), by nebyl rovinnou mapou.

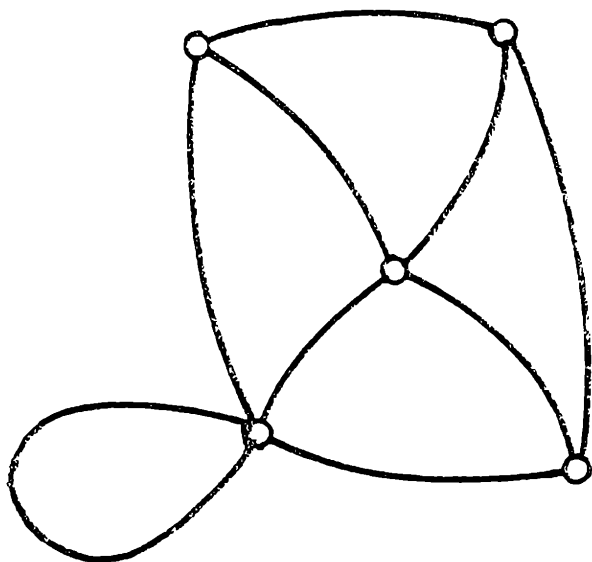
Ukažte, že graf duální k mapě M , ve kterém bychom připustili dvojúhelníkové území (obr. 7), by nebyl rovinnou mapou.

Z těchto důvodů nepřipouštíme v mapách smyčky (jednouhelníková území) a dvojúhelníková území.

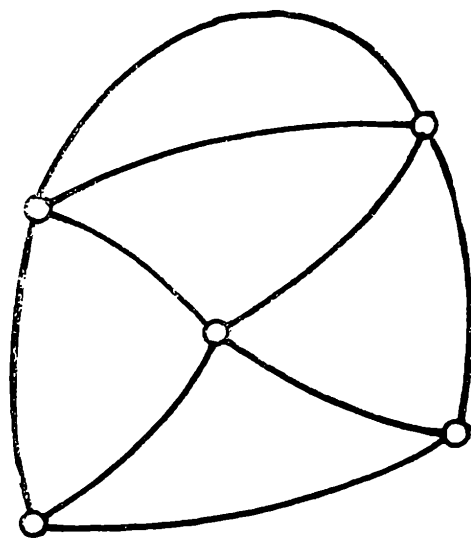
Jistě jste zpozorovali, že pro souvislou mapu M a duální mapu M' platí důležité vzájemné vztahy, a to:

1. Každá hrana mapy M protíná právě jednu hranu mapy M'
2. Uvnitř každého území jedné mapy leží právě jeden vrchol druhé mapy.

Stručně můžeme říci, že mezi územími, hranami a vrcholy souvislé rovinné mapy M a mapy duální M' existuje vzájemně jednoznačné zobrazení, přičemž územím mapy M odpovídají vrcholy mapy M' , vrcholům mapy M odpovídají území mapy M' a hranám mapy M odpovídají hrany mapy M' .



Obr. 6.



Obr. 7.

mapa $\mathbf{M}$		mapa $\mathbf{M}'$
území	$\longrightarrow$	vrchol
hrana	$\longrightarrow$	hrana
vrchol	$\longrightarrow$	území

Hraně oddělující dvě sousední území v mapě $\mathbf{M}$ odpovídá hrana spojující dva sousední vrcholy v mapě $\mathbf{M}'$ a obráceně hraně spojující dva sousední vrcholy v mapě $\mathbf{M}$ odpovídá hrana oddělující dvě sousední území v mapě $\mathbf{M}'$. Dvěma sousedním vrcholům mapy $\mathbf{M}$ odpovídají dvě sousední území mapy $\mathbf{M}'$ a obráceně.

Nechť je dána rovinná mapa $\mathbf{M}$ s vrcholy $A_1, \dots, A_n$. Stupeň vrcholu A_i budeme značit h_i , je to počet hran mapy $\mathbf{M}$, které vycházejí z vrcholu A_i . Podle definice rovinné mapy je $h_i \geq 3$.

Věta 1. Jestliže rovinná mapa $\mathbf{M}$ má vrcholy $A_1, \dots, A_n$, které mají po řadě stupně $h_1, h_2, \dots, h_n$, potom platí:

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n = 2h, \quad (1)$$

kde h je počet hran mapy $\mathbf{M}$.

Důkaz. Každá hrana rovinné mapy má právě dva krajní vrcholy, a tedy v součtu $h_1 + h_2 + \dots + h_n$ je každá hrana mapy $\mathbf{M}$ započtena dvakrát. V mapě duální k souvislé mapě $\mathbf{M}$ počtu hran k_i území u_i mapy $\mathbf{M}$ odpovídá stupeň k_i příslušného vrcholu A'_i v mapě duální. Tím je odvozena věta.

Věta 1' Jestliže $\mathbf{M}'$ je souvislá rovinná mapa, jejíž území $u_1, \dots, u_n$ mají postupně $k_1, k_2, \dots, k_n$ hran, potom platí:

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 2h, \quad (2)$$

kde h je počet hran mapy M' .

Říkáme, že věta 1' je duální větou k větě 1. Obecně platí, že každé větě z teorie souvislých rovinných map odpovídá duální věta pro duální mapy. To znamená, že v teorii rovinných souvislých map se uplatňuje princip duality.

Úloha. V rovině je dáno pět různých bodů $A_1, \dots, A_5$. Ukažte, že po spojení každých dvou různých bodů z těchto pěti obloukem *nezískáme* nikdy rovinnou mapu.

Předpokládejme, že těchto pět bodů se dá spojit neprotínajícími se křivkami. Vznikne potom rovinná souvislá mapa s pěti vrcholy, přičemž stupeň každého vrcholu je roven čtyřem. Pomocí vzorce (1) vypočítáme počet hran této mapy, který je roven

$$h = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Pomocí Eulerovy věty určíme počet území, který je roven

$$u = (2 + h) - v = 7.$$

Každé území je aspoň trojúhelníkové, tedy podle vzorce (2) platí nerovnost

$$3 \cdot 7 \leq 2 \cdot 10.$$

Došli jsme ke sporu, proto náš předpoklad nelze splnit. Vyřešenou úlohu můžeme vyjádřit formou věty.

Věta 2. Neexistuje rovinná souvislá mapa s pěti vrcholy, ve které by byly každé dva různé vrcholy sousední.

Vyslovte větu duální k větě 2 a podejte její duální důkaz.

Malé počítačí a rýsovací stroje a jejich užití

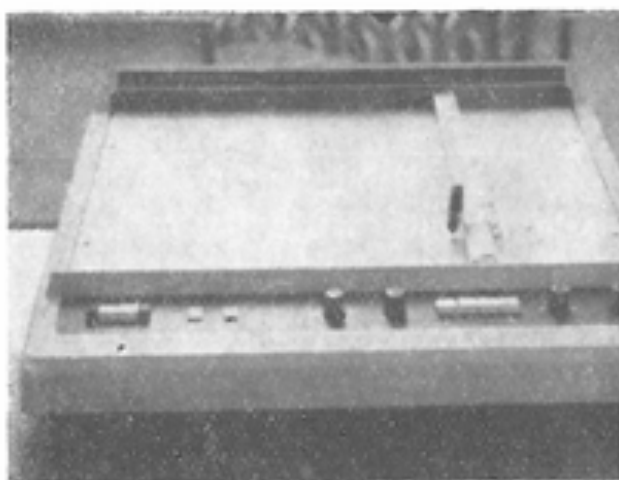
JOSEF KATEŘIŇÁK, VŠD Žilina

V tomto článku stručně popíšeme užívání malých rýsovacích strojů (plottrů), řízených malými počítačemi stroji.¹⁾

¹⁾ Čtenář už byl seznámen s velkými rýsovacími stroji řízenými velkými počítači stroji v článku Doc. Ing. L. Drse: Automatické kreslení. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 50 (1971–72), čís. 6–9.



Obr. 1.



Obr. 2.

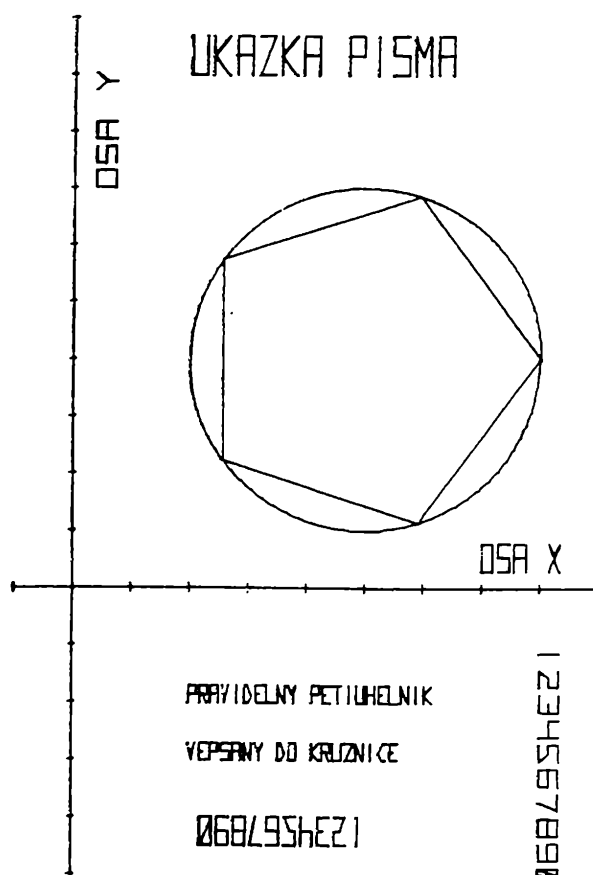
Malé počítačí a rýsovací stroje začaly být ve velkém počtu sériově vyráběny přibližně od roku 1967 různými firmami v různých státech, a byly velmi rychle zdokonalovány, protože jejich obsluha je jednoduchá a možnost užití velmi rozsáhlá.

Na obr. 1 a obr. 2 jsou fotografie malého počítačího a malého rýsovacího stroje typu Hewlett-Packard Calculator model 9820 A z roku 1972. Oba tyto malé stroje jsou přibližně stejně velké jako psací stroj, takže se vejdou vedle sebe na jeden psací stůl. Zapojují se do normální elektrické zásuvky na 220 V jako všechny běžné domácí elektrické spotřebiče. Jsou celotranzistorové a není možné je pokazit náhodným mačkáním kláves člověkem, který ještě neumí s nimi pracovat. Přitom jejich životnost je nesmírně dlouhá (u nás např. pracuje jeden z roku 1969 denně 12 i více hodin).

Malý počítačí stroj na obr. 1 dovede provádět numerické výpočty i velmi složitých matematických výrazů najednou tak, že se tyto výrazy pomocí klávesnice napíší na obrazovku stroje (obrazovka je na obr. 1 vlevo nad klávesnicí ohraničena bílým obdélníkem), a potom stroj na stisknutí jediné klávesy okamžitě buď rozsvítí výsledné číslo na obrazovce anebo toto číslo vytiskne na proužek papíru (proužek papíru se automaticky odvíjí z válečku ve stroji a vysunuje se ze stroje na obr. 1 uprostřed nad klávesnicí.) Kromě toho lze na tomto stroji stejně jednoduchým způsobem programovat. To znamená, že lze stroji vtisknout do „paměti“ postup, kterým má provádět výpočty a další činnost (např. řízení rýsování obrázků na plottru) sám už bez dalších zásahů člověka. Podrobněji to objasníme dále při řízení rýsování obrázků na plottru.

Plotter na obr. 2 připravíme pro automatické rýsování tak, že na něj položíme jakýkoliv druh čtvrtky papíru nejvýše do rozměru 45 cm vodorovně a 28 cm svisle. Dále vložíme do držáku z plexiskla rýsovací péro podobné jako naše tužky fix (černé, modré, červené, zelené) (na

Obr.



obr. 2 je péro dobře vidět). Všechno rýsování na plottru pak dále řídí podle vloženého programu malý počítač stroj z obr. 1.

Rýsovací péro v držáku na plottru z obr. 2 se může pohybovat buď vodorovně nebo svisle a dále pohyby skládanými z těchto dvou pohybů (řízenými malým počítačem strojem). V podstatě umí plotter narýsovat vlastně jen dvě věci:

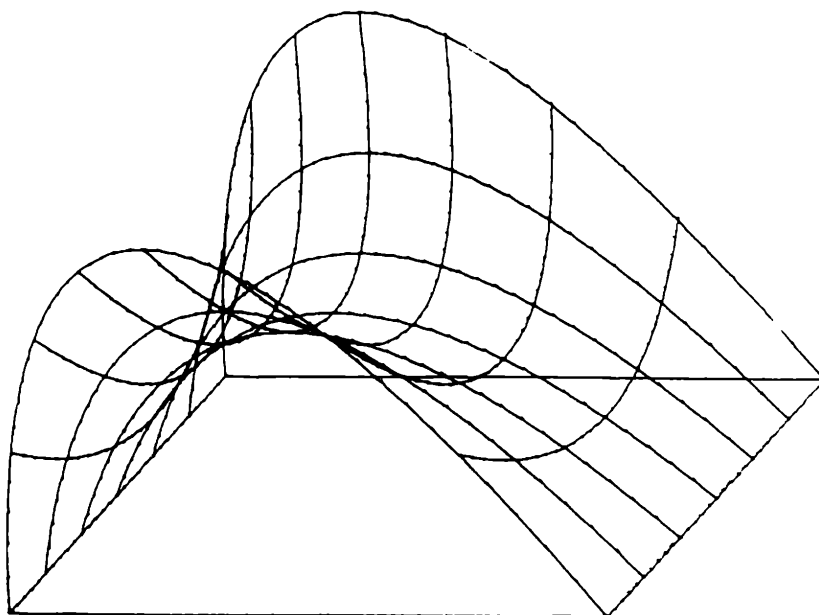
a) Bod jako malou tečku danou dvěma pravoúhlými souřadnicemi: vodorovnou (souřadnice x) a svislou (souřadnice y).

b) Spojit dva body (dané jejich souřadnicemi x, y) buď narýsovanou úsečkou na papíře (je-li péro spuštěné hrotem na papír) anebo jen pomyslnou úsečkou nad papírem (je-li péro zvednuté hrotem nad papír).

To znamená, že péro se pohybuje jen skoky po úsečkách z jednoho bodu do druhého. Je-li při tomto skoku péro spuštěné hrotem na papír, pak narýsuje úsečku spojující oba body, a je-li péro zvednuté hrotem nad papír, pak tuto úsečku nenarýsuje.

Na první pohled by se zdálo, že úsečkami se nedá narýsovat mnoho druhů čar. Avšak obr. 3, 4 byly celé narýsovány pomocí dvou strojů z obr. 1 a 2 tak, že se rýsovaly jen větší nebo menší úsečky (křivé čáry jsou narýsované jako lomené čáry složené z velmi malých úseček).

Některé často užívané „obrázky“ skládané z úseček jsou zabudovány nastálo do paměti stroje. Je to psaní písmenek a číslic na stisknutí jediné



klávesy označené tímto písmenem nebo číslicí (písmena jen velká tiskací). Ukázky písma jsou na obr. 3. Dále je nastálo zabudované do paměti stroje rýsování přímek rovnoběžných s osami x , y a vyznačování pravidelných dílků na těchto přímkách (obrázky ukazují takto narýsované osy x , y s dílky po jednotkách délky). Ostatní rýsování je nutno nejdříve člověkem pomocí klávesnice vtisknout jako program do paměti stroje. Princip je však jednoduchý a ukážeme ho na obr. 3, 4.

Na obr. 3 jsme chtěli narýsovat pravidelný 5úhelník vepsaný do kružnice. Zvolili jsme si tedy v pravoúhlých souřadnicích x , y nejdříve střed kružnice, např. bod $(5 ; 4)$, který není na obr. 3 narýsován (protože ho nepotřebujeme), a dále si zvolíme poloměr kružnice, např. 3. Víme ze školy, že jednotlivé body o pravoúhlých souřadnicích $(x ; y)$ patří uvažované kružnici právě, když splňují rovnice

$$x = 3 \cdot \cos \varphi + 5 \quad (1)$$

$$y = 3 \cdot \sin \varphi + 4$$

pro libovolně volená čísla φ z intervalu od 0 do $2\pi \doteq 6,28$ (tj. ve stupňové míře od 0° do 360°). Protože chceme pravidelný 5úhelník, musíme volit φ šestkrát pravidelně po délkách $2\pi/5$; např. $0 ; 0 + (2\pi/5) ; 0 + 2 \cdot (2\pi/5) ; 0 + 3 \cdot (2\pi/5) ; 0 + 4 \cdot (2\pi/5) ; 0 + 5 \cdot (2\pi/5) = 2\pi$. Dosadíme-li po řadě těchto šest čísel φ do rovnic (1) a body o vypočtených pravoúhlých souřadnicích $(x ; y)$ z rovnic (1) spojíme pěti úsečkami (pomyslně označenými 12, 23, 34, 45, 51), dostaneme narýsovaný pravidelný 5úhelník. Celý tento postup (výpočet souřadnic šesti bodů a narýsování pěti úseček) se zapíše jako program do paměti stroje, a stroj pak všechno vykoná sám. Přitom zapsání tohoto programu do paměti stroje (pomocí klávesnice) trvá celkem 1 minutu a počítání a narýsování trvá 1 vteřinu.

Kružnici na obr. 3 jsme narýsovali jako pravidelný 80úhelník stejným způsobem jako pravidelný 5úhelník. Přitom zapsání programu trvá opět 1 minutu a rýsování celkem 20 vteřin.

Na obr. 4 je na ukázkou narýsovaný kosoúhle-axonometrický průmět tzv. klínové plochy představující střechu nad obdélníkem (moderní střechy nad velkými objekty jako jsou kryté stadióny, montážní haly, budovy velkých nádraží nebo letišť atd.). Obr. 4 má celkem 16 příček = = křivých čar, z nichž každá je narýsována z 50 bodů spojených velmi malými úsečkami. Celkem tedy musel stroj spočítat a narýsovat 800 bodů a úseček podle mnohem složitějších rovnic než jsou výše uvedené rovnice (1). Přitom zapsání programu do paměti stroje trvalo 5 minut a narýsování trojbarevného obrázku 4 trvalo 6 minut. Celkem tedy 11 minut. Člověk by musel tuto práci dělat dosud užívanými ručními prostředky 8 hodin a nikdy by ji neudělal tak přesně jako tyto stroje.

Závěrem ještě několik slov o užívání malých a miniaturních (kapesních celotranzistorových) počítačích strojů. V současné době se už tyto stroje masově užívají v průmyslových závodech a začínají pronikat i na vysoké školy. V nejbližší době asi tak do 10 let se budou používat jako samozřejmá učební pomůcka i na středních a základních školách. Tím odpadne ze škol znechucující početní drezúra, a bude nahrazena zajímavou manipulací s počítačemi stroji. Bude pak možné na školách více času věnovat skutečné matematice (místo počtářské drezúře), která spočívá v rozumové myšlenkové činnosti lidí, což dosud žádné stroje nedovedou.

Nerovnosti v geometrii II

STANISLAV HORÁK, Praha

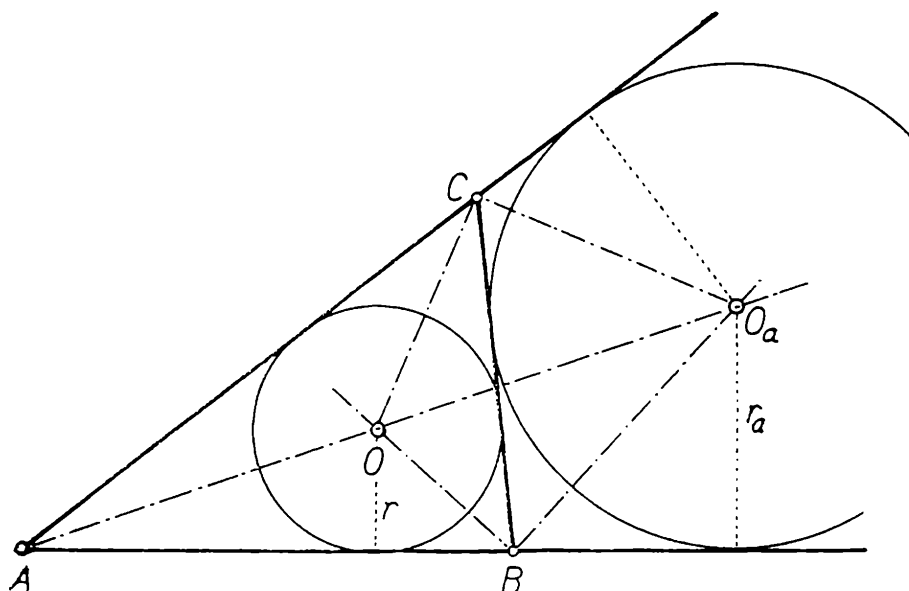
V tomto článku uvedeme opět několik zajímavých nerovností, platících o prvcích trojúhelníku.

1. pomocná věta. *Délka těžnice t_c je dána vzorcem*

$$t_c^2 = [2(a^2 + b^2) - c^2] : 4 .$$

2. pomocná věta. *O dvou nezáporných číslech x, y platí*

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} .$$



3. pomocná věta. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC má poloměr r daný vzorcem (při obvyklém označení)

$$r = S : s$$

Kružnice vně vepsané trojúhelníku ABC mají poloměry r_a, r_b, r_c , o nichž platí

$$r_a = S : (s - a), \quad r_b = S : (s - b), \quad r_c = S : (s - c).$$

Důkaz (obr. 1). Střed kružnice vepsané danému trojúhelníku označme O . Obsah trojúhelníku ABC je

$$\begin{aligned} S &= (ABO) + (BCO) + (CAO) = \\ &= \frac{1}{2} cr + \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br = r \cdot (a + b + c) : 2 = rs. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme již snadno uvedený vzorec.

Střed kružnice, která je vně vepsána trojúhelníku ABC tak, že se dotýká strany BC ve vnitřním bodě, označme O_a a její poloměr r_a . O obsahu trojúhelníku ABC pak platí

$$\begin{aligned} S &= (ABO_a) - (BCO_a) + (CAO_a) = \\ &= \frac{1}{2} cr_a - \frac{1}{2} ar_a + \frac{1}{2} br_a = r_a(s - a) \end{aligned}$$

Z tohoto vztahu snadno vyplývá uvedený vzorec. Cyklickou záměnou obdržíme pak vzorce pro r_b a r_c .

4. pomocná věta. Obsah S trojúhelníku je dán vzorcem

$$S = abc : 4R,$$

kde R je poloměr kružnice opsané danému trojúhelníku.

Důkaz. Vyjdeme ze známého vzorce

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

Poněvadž $\sin \gamma = c : 2R$, dostaneme po dosazení uvedený vzorec.

5. pomocná věta. *V trojúhelníku ABC platí*

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c &= \frac{S}{s-a} + \frac{S}{s-b} + \frac{S}{s-c} = \\ &= S \cdot \frac{3s^2 - 2s(a+b+c) + ab + bc + ca}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \\ &= S \cdot \frac{s^3 - 2s^3 + s(ab + bc + ca)}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \\ &= \frac{s^4 - s^3(a+b+c) + s^2(ab + bc + ca)}{Ss} = \\ &= \frac{(s^2 - as)(s^2 - bs - cs + bc) + abcs}{Ss} = \frac{S^2 + abcs}{Ss} = 4R + r. \end{aligned}$$

Po tomto nutném úvodě můžeme přistoupit k důkazu vlastní věty (viz literatura 1).

V. I. Těžnice, obvod, poloměr kružnice vepsané a opsané danému trojúhelníku jsou vázány vztahem

$$(bt_c)^2 + (ct_a)^2 + (at_b)^2 \geq rs^2 (4R + r).$$

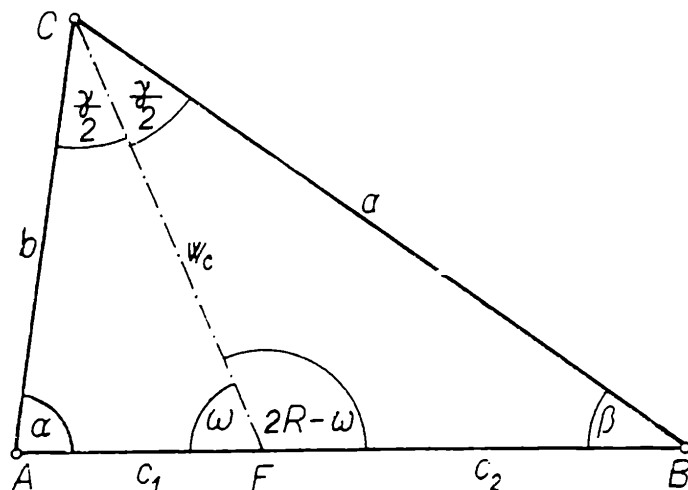
Rovnost platí právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Podle 1. pom. věty je

$$t_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{(b^2 + c^2) + b^2 + c^2 - a^2}{4}.$$

Na dvojčlen $(b^2 + c^2)$ použijeme 2. pom. věty, kde rovnost platí právě tehdy, když $b = c$, a dostaneme

$$\begin{aligned} t_a^2 &\geq \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} = \\ &= \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4} = \frac{2s \cdot 2(s-a)}{4} = (s-a). \end{aligned}$$



Obdobně

$$t_b^2 \geq s(s - b),$$

kde rovnost platí jen a jen v případě, že $c = a$.

$$t_c^2 \geq s(s - c),$$

kde rovnost platí tehdy a jen tehdy, když $a = b$. — Odtud již máme

$$\begin{aligned} (t_b t_c)^2 &\geq s^2(s - b)(s - c) = \frac{s \cdot [s(s - a)(s - b)(s - c)]}{s - a} = \\ &= \frac{s \cdot S^2}{s - a} = \frac{S}{s - a} \cdot sS = Ssr_a. \end{aligned}$$

Cyklicky další dva vztahy:

$$(t_c t_a)^2 \geq Ssr_b,$$

$$(t_a t_b)^2 \geq Ssr_c.$$

Sečtením

$$\begin{aligned} (t_b t_c)^2 + (t_c t_a)^2 + (t_a t_b)^2 &\geq Ss(r_a + r_b + r_c) = \\ &= rs \cdot s(r_a + r_b + r_c) = rs^2(4R + r). \end{aligned}$$

Rovnost platí jen a jen pro $a = b = c$, tj. pro rovnostranný trojúhelník. Tím je také důkaz vyslovené věty proveden.

II. Odvodíme ještě větu VII, která se týká délek os vnitřních úhlů. K jejímu důkazu potřebujeme 4 pomocné věty.

1. pomocná věta. Osa vnitřního úhlu γ protíná protější stranu v bodě F , o němž platí

$$AF \cdot BF = c_1 \cdot c_2 = b : a.$$

Důkaz (obr. 2). Z trojúhelníků ACF a BCF dostaneme postupně

$$\begin{aligned}c_1 \quad b &= \sin \frac{\gamma}{2} \sin \omega \\c_2 \quad a &= \sin \frac{\gamma}{2} \sin (2R - \omega) = \\&= \sin \frac{\gamma}{2} \sin \omega = c_1 : b\end{aligned}$$

Tudíž

$$c_2 \quad c_1 = a \quad b \quad (1)$$

2. pomocná věta. *Délka osy w_c vnitřního úhlu γ je*

$$w_c = 2ab \cos \frac{\gamma}{2} \quad (a + b) \quad (2)$$

Důkaz (obr. 2). Použijeme dvakrát kosinové věty.

Z trojúhelníku ACF : $c_1^2 = b^2 + w_c^2 - 2bw_c \cos \frac{\gamma}{2}$,

z trojúhelníku BCF : $c_2^2 = a^2 + w_c^2 - 2aw_c \cos \frac{\gamma}{2}$

Z těchto dvou rovnic obdržíme jedinou

$$c_1^2 \quad c_2^2 = \left(b^2 + w_c^2 - 2bw_c \cos \frac{\gamma}{2}\right) : \left(a^2 + w_c^2 - 2aw_c \cos \frac{\gamma}{2}\right),$$

která v důsledku pom. věty 1 se změní na

$$b^2 \quad a^2 = \left(b^2 + w_c^2 - 2bw_c \cos \frac{\gamma}{2}\right) : \left(a^2 + w_c^2 - 2aw_c \cos \frac{\gamma}{2}\right)$$

Po kratší úpravě vyjde vzorec (2). Cyklickou záměnou dostaneme obdobné vzorce pro poměry úseků na stranách BC , CA , které jsou vyřazeny po řadě osami úhlů α , β .

3. pomocná věta. *Pro dvě kladná čísla a , b platí*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b} \quad (3)$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $a = b$.

Důkaz. Víme již, že o nezáporných číslech — a tudíž i o kladných číslech — a , b platí

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Rovnost platí jedině tehdy, když $a = b$.

Tuto nerovnost budeme postupně upravovat

$$(a + b)^2 \geq 4ab$$

$$a + b \geq \frac{4ab}{a + b}$$

$$\frac{a + b}{ab} \geq \frac{4}{a + b},$$

a to je v podstatě vztah (3).

4. pomocná věta. *O vnitřních úhlech α, β, γ trojúhelníku platí*

$$\sec^2 \frac{\alpha}{2} + \sec^2 \frac{\beta}{2} + \sec^2 \frac{\gamma}{2} \geq 4.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$.

Důkaz. Pro snadnější a rychlejší písemné vyjadřování položíme

$$x = \frac{\alpha}{2}, \quad y = \frac{\beta}{2}, \quad z = \frac{\gamma}{2}$$

$$x + y = 90^\circ - z \Rightarrow \operatorname{tg}(x + y) = \operatorname{ctg} z$$

Potom

$$\begin{aligned} \sec^2 x + \sec^2 y + \sec^2 z &= 1 + \operatorname{tg}^2 x + 1 + \operatorname{tg}^2 y + 1 + \operatorname{tg}^2 z = \\ &= 3 + (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z) = 3 + V \end{aligned}$$

V dalším budeme upravovat jenom výraz V . Přitom použijeme známého vztahu, platícího pro každou dvojici úhlů u, v

$$\frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 u + \operatorname{tg}^2 v) \geq \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v$$

Rovnost platí jedině tehdy, když $u = v$.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y) + \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z) + \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 z + \operatorname{tg}^2 x) \geq \\ &\geq \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $x = y = z$, tj. když uvažovaný trojúhelník je rovnostranný. Při další úpravě použijeme identity, která platí o každé dvojici úhlů u, v

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v &= \operatorname{tg}(u + v) (1 - \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v) \\ V &\geq \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) = \\ &= \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z [\operatorname{tg}(x + y) (1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)] = \\ &= \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{ctg} z (1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y) = 1 \end{aligned}$$

Tudíž

$$\sec^2 \frac{\alpha}{2} + \sec^2 \frac{\beta}{2} + \sec^2 \frac{\gamma}{2} \geq 3 + V = 4,$$

jak jsme měli dokázat. Znovu si připomeňme, že rovnost platí jedině tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Uvedených čtyř pomocných vět použijeme k důkazu věty:

V. II. *O délkách stran a a os vnitřních úhlů trojúhelníku platí*

$$\frac{a^2 + b^2}{w_c^2} + \frac{b^2 + c^2}{w_a^2} + \frac{c^2 + a^2}{w_b^2} \geq 8.$$

Rovnost platí jen a jen tehdy, když $a = b = c$, tj. když trojúhelník je rovnostranný. (Viz použitá literatura [1].)

Důkaz. Z 2. pom. věty máme

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{a+b}{2ab} w_c = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) w_c.$$

S použitím 3. pom. věty máme dál

$$\cos \frac{\gamma}{2} \geq \frac{2}{a+b} w_c$$

Rovnost platí jen v případě, že $a = b$. Další úpravou dostaneme

$$\frac{a+b}{w_c} \geq \frac{2}{\cos \frac{\gamma}{2}} = 2 \sec \frac{\gamma}{2} \quad (4)$$

Ale

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

jak se můžeme snadno přesvědčit, a proto vztah (4) se dá upravit na

$$\frac{a^2 + b^2}{w_c^2} \geq 2 \sec^2 \frac{\gamma}{2}$$

Cyklicky dojdeme k dalším dvěma vztahům a sečtením všech tří při současném použití 4. pom. věty dostaneme uvedenou větu. V ní rovnost platí jedině tehdy, když $a = b = c$.

Použitá literatura

1. Mirko Jovanović, Inequalities for the triangle. Publikacije elektrotehničkog fakulteta univerziteta u Beogradu, No 443, str. 155 a násl.

fyzika

Metrologie

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc., Praha

Metrologií se rozumí soubor všech znalostí a činností z oblasti měření.*) Je to převzatý cizí výraz. V překladu je to vlastně nauka o měření (míře). Význam tohoto pojmu je v cizích jazycích v uvedeném smyslu zcela běžný (např. angličtině, francouzštině, zčásti i v ruštině aj.). U nás však není ještě dnes zcela ustálen, i když v české odborné literatuře se s ním můžete setkat již více než před sto lety.

Metrologie je pro národní hospodářství velmi významnou *průřezovou disciplínou* (především horizontálního charakteru), podobně jako technická normalizace, zkušebnictví a některé další vědní a technické obory.

Hlavní náplní metrologie v nejširším pojetí jsou:

A. měřicí jednotky, tzn. jednotky fyzikálních (případně též technických) veličin, které slouží k jejich kvantitativnímu určování. Tyto jednotky vytvářejí soubor nazývaný *soustava měřicích jednotek (měrová soustava)*, který má mít určité vlastnosti. Tento soubor jednotek přísluší určitému souboru veličin — *soustavě (fyzikálních) veličin*.

Do této první oblasti metrologie patří také realizace jednotek pomocí tzv. *etalonů*, jejich reprodukce, uchovávání a měrový přenos na etalony (resp. obecně měřicí prostředky) vyšších nebo naopak nižších přesností. Tato první část pokrývá do značné míry metrologii v užším pojetí, směřující k zabezpečování jednotnosti a přesnosti měření.

B. vlastní měření, tzn. provádění měření různými metodami a různými měřicími prostředky. Sem patří obecná i speciální měřicí metodika s analýzou a zpracováváním výsledků měření různými způsoby; dále posuzování dosažených výsledků. Jde tedy v této druhé oblasti metrologie o *měřicí a vyhodnocovací metody* (metody, kterými vyhodnocujeme měření). K tomu všemu patří posuzování různých objektů nebo postupů vzhledem ke hlavním metrologickým vlastnostem (např. vzhledem k přesnosti, správnosti, stálosti apod.). Sem patří i metody sledování a udržování průvodních ovlivňujících veličin, různé korekce, redukce apod.

*) Řecké slovo „metró“ $\mu\epsilon\tau\rho\omega$ značí „měřím, vyměřuji“.

C. měřicí prostředky, tzn. vše neživé a hmotné, čeho je k měření zapotřebí. Mohou to tedy být *míry*, *měřicí přístroje* (obojí se nazývá společně měřidla) a *pomocná měřicí zařízení*. Do skupiny měřicích přístrojů přitom zahrnujeme i velké celky (např. měřicí stroje) a měřicí převodníky (transduktory).

D. pozorovatelé, tj. pracovníci provádějící měření, tedy měřicí osoby (metrologové), resp. jejich vlastnosti, vztahující se k činnosti při měření, např. ke čtení údajů na měřicích přístrojích, ke vnímavosti různých čivů apod.

E. Do metrologie se zahrnují také stanovování fyzikálních konstant a vlastností různých látek a materiálů.

Tyto fyzikální konstanty (např. rychlost světla ve vakuu, rychlost akustických vln v určitých prostředích, gravitační konstanta, permeabilita či permitivita vakua aj.) mají základní význam pro výsledek měření řady veličin, protože se vyskytují v různých definičních vztazích. Podobný význam mají i látkové a materiálové konstanty. Z tohoto širokého pohledu přísluší do metrologie i *zkoušení materiálů*.

Do metrologie patří *problémy nejen teoretické, ale také praktické*. Podle toho hovoříme o *teoretické metrologii* (vědecké metrologii), kterou lze ještě dále dělit, a *metrologii aplikované*.

Podle sledované veličiny můžeme metrologii dělit např. na *metrologii délek*, *metrologii času* apod., dále podle aplikačního oboru např. na *průmyslovou metrologii*, *technickou (dílenskou) metrologii* nebo též na *astronomickou metrologii*, *lékařskou metrologii* aj. To už jsou ovšem příklady metrologií aplikovaných, o nichž hovoříme dále.

Obecnou metrologií rozumíme tu oblast metrologie, která se zabývá problémy společnými všem metrologickým oborům, zpravidla bez ohledu na měřenou veličinu. Sem patří např. obecné problémy teoretické (např. struktura soustavy jednotek, struktura řádové vazby etalonů apod.) i praktické (např. způsob záměny měřicích jednotek ve vzorcích aj.). Patří sem problémy chyb při měření, otázky metrologických vlastností měřicích přístrojů, platných pro jakoukoliv veličinu apod.

Metrologii, zabývající se měřením pro určitý účel, nazýváme *aplikovaná metrologie (užitá metrologie)*. Na rozdíl od metrologie obecné věnuje se aplikovaná metrologie otázkám měření určité veličiny, případně měření všech hlavních veličin, příslušejících do určité vědní nebo technické disciplíny, do určitého oboru lidské činnosti. Tak hovoříme např. o *technické metrologii*, zabývající se problémy měření v technice. Je ovšem nutno konstatovat, že adjektivum technický je někdy poněkud neurčité. Týká se nejen průmyslu a výroby, ale také dopravy aj. Význam pojmu technická metrologie bývá někdy nevhodně zužován (zvláště v zahraniční metrologii) jen na metrologický obor zabývající se měřením geometric-

kých veličin, obor, který býval u nás někdy zván *dílenskou metrologií* (dílenským měřením).

Přitom je vhodné poznamenat, že tutéž veličinu není zapotřebí v rozličných aplikačních oborech (např. ve strojírenském výzkumu, ve strojírenské výrobě, v chemické výrobě, v dopravě, ve zdravotnictví, v obchodě aj.) měřit se stejnou přesností. Mohou se tedy rozličné dílčí aplikované metrologie lišit mezi sebou nejen počtem a výčtem veličin, jejichž měření je v nich významné, ale i metodami měření, mírami, měřicími přístroji a jejich požadovanou i dosahovanou přesností i u jedné a téže veličiny.

Důležitou oblastí metrologie je *teoretická metrologie*, věnovaná teoretickým otázkám měření. Sem patří také např. teorie veličin a měřicích jednotek, teorie metrologických informací (tj. obecně pojímaných indikací měřicích přístrojů apod.). Teoretická metrologie je svou náplní blízká obecné problematice tzv. „praktické“ fyziky. Namísto teoretické metrologie se někdy také říká *vědecká metrologie*.

Legální metrologie se zabývá měřicími jednotkami, měřicími metodami a měřicími prostředky, které mají vztah k technickým a právním náležitostem vyhlášených zákonem (odtud název), jejichž účelem je metrologický pořádek z hlediska jednotnosti, bezpečnosti a náležité přesnosti při měření. V ČSSR je tento pojem již dostatečně vžitý. Je však někdy, a to ne zcela správně, omezován jen na ty veličiny a jim příslušející jednotky, jež jsou výslovně citovány zákonem, nebo přímo na zákon navazující normou (ČSN 01 1300: Zákonné měřicí jednotky) a na měřidla, nad nimiž je bezprostřední dohled stanoven zvláštní vyhláškou předsedy Úřadu pro normalizaci a měření (ÚNM). Správně se *legální metrologie* zabývá celým spektrem problémů spojených s celostátním zajišťováním jednotnosti, správnosti a náležité přesnosti všech měření, prováděných ve všech oblastech národního hospodářství. Část úkonů s tím spojených je svěřena výhradně *státní legální metrologii* (*státní metrologii*, *státní měrové službě*), ostatní část musí zajišťovat sám průmysl, doprava, zdravotnictví aj. To je tzv. *rezortní*, zejména *průmyslová metrologie* (přesněji vzato *průmyslová legální metrologie*), protože garantem plnění metrologických zásad daných zákonem je zde rezort (průmysl).

Státní metrologii, zabezpečovanou celkově úsekem metrologie v Úřadě pro normalizaci a měření, lze opět dělit na *státní vědeckou metrologii*, zajišťovanou v ČSSR Československým metrologickým ústavem se sídlem v Bratislavě, zabývajícím se prvotní etalonáží fyzikálních veličin a jejich měřením nejvyšší přesností, a *státní výkonnou metrologii*, reprezentovanou dalšími útvary ÚNM.

Setkáme se také s pojmem *technika měření*. Tou rozumíme souhrn metod, jimiž se měření provádí, včetně potřebného technického a přístrojového vybavení. Toto materiální vybavení označujeme někdy ná-

zvem *měřicí technika*, což je tedy zpravidla pojem užší, značící jen technické a přístrojové vybavení, potřebné pro měření.

Terminologie v celé metrologii není dosud zcela ustálena, některé termíny jsou však již dohodnuty i mezinárodně. Byl totiž v široké mezinárodní kooperaci vypracován a vydán slovník základních metrologických pojmů.

Uvedené pojetí metrologie je velmi široké. Někdy se však význam tohoto pojmu zužuje, a to na oblast zabezpečování jednotnosti a přesnosti měřidel a měření. V takovém případě je do metrologie zahrnována v plném rozsahu otázka veličin, jednotek, jejich definic a základních realizací; ostatní oblasti, jako měřicí metody, vyhodnocování měření, pozorovatelé aj. týkají se jen etalonů vyšších či nižších řádů a jejich vzájemného ověřování (cejchování) a ovšem i ověřování (cejchování) provozních měřidel. Toto pojetí však lépe vystihuje teoretická metrologie s metrologií legální jako podobory metrologie v širokém pojetí.

V krátkosti se zmíníme o typických úkolech teoretické metrologie, vrcholné disciplíny v zajišťování jednotnosti a přesnosti měření.

Základem jednotnosti měření je soubor měřících jednotek — *soustava jednotek* a jejich realizace — *etalony*. Proto prvním hlavním úkolem teoretické metrologie je stále pokračující výzkum *definic jednotek fyzikálních (případně technických) veličin* tak, aby odpovídaly neustále rostoucím požadavkům na přesnost. Tento úkol je ovšem velmi náročný a řeší se v mezinárodní kooperaci a případnou specializací. Kromě rostoucí přesnosti rozšiřuje se také celkový interval měření. Extrémní hodnoty veličin jsou často zvláště definovány. K definicím jednotek přistupuje *způsob jejich realizace*, při níž je nutno dbát o optimální metrologické vlastnosti etalonů (přesnost reprodukce, stálost aj.) a jejich soubor v určitém intervalu příslušné veličiny.

K těmto úkolům přistupuje často navrhování *nových měřících principů*, které někdy vyplývají z přesné vědecké práce, aniž byly objeveny cílevědomě. To má charakter základního výzkumu.

U každé veličiny je vhodné sestavit podle řádů návaznosti měřicí prostředky, měřidla — od prvotních etalonů až po provozní měřidla. Výzkum *metod této řádové vazby* je dalším důležitým úkolem. Rovněž *stanovení zásad* a vypracování *schémat této vazby* pro jednotlivé veličiny (případně pro určité význačné principy měření) nebo určitá měřidla je velmi důležité.

Na první z uvedených úkolů navazují mnohé úkoly další. Především *výzkum časové stálosti etalonů 0. řádu*, případně etalonů nižších řádů a *časové stálosti měřících zařízení* určených *pro vzájemnou vazbu měřidel*: ČSMŮ uschovává většinu státních etalonů (v předepsaných podmínkách a bezpečně) a pro stanovení časové stálosti *porovnává hlavní etalon 0. řádu* jednak mezinárodně (zejména v Mezinárodním úřadě pro váhy

a míry v Sèvres nebo v jiných význačných metrologických institutech, zejména v SSSR), jednak se *svědeckými etalony 0. řádu*. Navazování etalonů pokračuje pak směrem dolů na etalony nižších řádů (až na provozní nebo kontrolní měřidla) — tímto ověřováním se zajišťuje jednotnost měření, správnost a stálost. Tento poslední úkol je ovšem již technického rázu, i když klade velké nároky na provádění srovnávacích měření (ověřování). Ovšem *hledání nových metod přenosu jednotek* pro nové rozsahy nebo přesnějších metod pro rozsahy dosavadní nebo metod ekonomičtějších, využívajících moderních technických prostředků (automatických apod.), zvláště pro ověřování velkých sérií měřidel, patří k výzkumným úkolům. ¶

Časovou stálost lze ovšem stanovit až po poměrně dlouhé době, tj. po několika letech, někdy i desetiletích. Mezitím ovšem shromažďujeme výsledky periodicky prováděných pozorování (např. jednou ročně) a ty pak po zmíněné dlouhé etapě můžeme zpracovat do obsáhlé práce, v níž se provádějí analýzy případných změn. Po dlouhodobém sledování stálosti můžeme výjimečně příslušnou hodnotu ze zjištěné závislosti extrapolovat.

Výzkum se týká také nových spolehlivějších, ekonomičtějších nebo speciálních *měřicích metod*. Zvláště významný je tento výzkum u *veličin časově nestálých*, případně kmitajících. Pro takové veličiny je zapotřebí zpravidla jiné reprodukce jednotek nežli za ustálených (stacionárních) podmínek.

Významnou činností, důležitou pro porovnávání etalonů a pro vyhodnocování jejich hodnot, je výzkum *závislosti metrologických vlastností etalonů* (nebo zvláště přesných měřidel) na *některých vnějších a vnitřních podmínkách*. Výsledkem bývají různé korekční postupy při zpracování výsledků měření. Určování závislosti musí předcházet rozvaha o těchto podmínkách (*průvodních, ovlivňujících veličinách*) a o jejich specifikaci plynoucí z předchozích zkušeností při obdobných měřeních.

Způsob, jak *odvozovat od etalonu hlavní jednotky etalony násobné nebo dílčí* (zvané také *poddělení*), je dalším významným úkolem teoretické metrologie. Přitom je ovšem žádoucí zvolit předem *potřebnou hustotu sad etalonů*. Sady etalonů často jako etalony pracovní slouží k ověřování provozních měřidel příslušné přesnosti, případně také k ověřování obdobných etalonů nejbližší nižších stupňů.

Základem jednotnosti, správnosti a stálosti měření nejsou jen etalony, nýbrž i význačné *fyzikální konstanty*, jejichž co nejjistější stanovení je rovněž významným úkolem vědecké metrologie. Takovými konstantami jsou např.: rychlost světla ve vakuu, Boltzmannova konstanta, Planckova konstanta, gravitační konstanta, elementární náboj a řada dalších konstant univerzálního i speciálního charakteru. Jistota stanovení je velmi důležitá i u rozličných (fyzikálních) *materiálových konstant*, ať již

pro vlastní metrologickou potřebu nebo pro externí zájemce, kteří kladou vyšší nároky na přesnost stanovení.

Je zapotřebí zmínit se ještě o úkolech *obecného charakteru*, důležitých pro všechny ostatní úkoly vědecké metrologie. Sem patří otázky spojené se *získáváním a zpracováváním výsledků měření* (metody statistické, teorie chyb, teorie informací, číslicová a výpočetní technika aj.), s *dálkovým měřením*, se stanovením a s vyšetřováním *metrologických vlastností měřidel*, s volbou a sjednocováním *metrologických termínů* a jejich *definováním*. Většina těchto otázek prerůstá hranice jedné země a řeší se *mezinárodní spoluprací*.

Úkolem teoretické metrologie je samozřejmě i *výchova odborných vědeckých pracovníků* specializovaných na metrologii. Zde se uplatňuje úzká aktivní spolupráce s vysokými školami, s ústavy akademií, výzkumnými ústavy aj. K tomu přistupuje *zveřejňování výsledků metrologických prací*; *popularizování* významu metrologie, organizování a účast na *výměně zkušeností* na speciálních konferencích, sympoziích, seminářích apod. Do úkolů teoretické metrologie patří i *ověřování různých měřidel*, je-li požadována zvláště vysoká přesnost (např. pro výrobce nebo opravce měřidel, pro měření v základním výzkumu apod.). Některá z těchto ověřování je zapotřebí provést i v zahraničí, nelze-li je dosud zajistit na vlastních pracovištích.

Na uvedené úkoly navazují ještě další, jako např. *měření různých veličin* při požadované vysoké přesnosti, kdy je často zapotřebí speciálních měřicích prostředků, které vlastní jen pracoviště vědecké metrologie, dále *měření rozhodujícího charakteru* (např. pro arbitráž apod.), *zpracovávání metrologických projektů, metrologických expertiz* apod.

Významné je i *zpracovávání různých metrologických předpisů a instrukcí* např. formou norem apod.

Zdánlivá (střední) hmotnost kilomolu směsi dvou plynů

EVA PROCHÁZKOVÁ, prom. fyz., České Budějovice

(Dokončení)

E) Hmotnost kilomolu je možno určit i z molárních tepel ideálního plynu. Pro molární teplo při konstantním objemu C_v a molární teplo při konstantním tlaku C_p platí

$$C_v = M c_v, \quad C_p = M c_p,$$

kde c_v , c_p jsou měrná tepla při konstantním objemu nebo tlaku. Z věty o ekvipartici plynou pro ideální plyny s jednoatomovými molekulami

hodnoty

$$C_v = 1,5 R, \quad C_p = 2,5 R,$$

pro plyny s dvouatomovými molekulami hodnoty

$$C_v = 2,5 R, \quad C_p = 3,5 R.$$

Tvoří-li plyny se stejným počtem atomů v molekulách směs, lze i zdánlivou (střední) hmotnost kilomolu této směsi určit ze vztahů

$$\bar{M} = C_v/c_v \quad \text{nebo} \quad \bar{M} = C_p/c_p,$$

kde c_v , c_p jsou měrná tepla směsi. Pro měrné teplo c směsi platí

$$c = q_1 c_1 + q_2 c_2,$$

kde c_1 , c_2 jsou měrná tepla složek směsi.

Tato metoda je poměrně málo přesná, neboť skutečná molární tepla plynů se poněkud liší od teoretických hodnot plynoucích z věty o ekvipartici pro ideální plyn.

Podle odvozených vzorců vypočteme $\bar{M}$ ve dvou konkrétních případech. Použité číselné hodnoty veličin v příkladech jsou převzaty z tabulek [1] podobně jako v textu.

Příklad 1

Určete zdánlivou (střední) hmotnost kilomolu směsi dvou plynů, vytvořené ze 73,6 % dusíku a 26,4 % kyslíku. (Složení směsi je voleno tak, aby její měrná hmotnost byla stejná jako u vzduchu; složení vzduchu je poněkud jiné).

Je tedy $M_1 = 28,01 \text{ kg kmol}^{-1}$, $M_2 = 32,00 \text{ kg kmol}^{-1}$, $q_1 = 0,736$, $q_2 = 0,264$. Podle vzorce určeného způsobem A až D je

$$\bar{M} = \frac{28,01 \cdot 32}{0,736 \cdot 32 + 0,264 \cdot 28,01} \doteq 28,963 \text{ kg kmol}^{-1}.$$

Za fyzikálních podmínek p_0 , T_0 uvedených v oddíle D je měrná hmotnost dusíku $\varrho_1 = 1,234 \text{ kg m}^{-3}$, kyslíku $\varrho_2 = 1,410 \text{ kg m}^{-3}$. Měrná hmotnost směsi je tedy

$$\varrho_0 = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 q_2 + \varrho_2 q_1} = \frac{1,234 \cdot 1,410}{1,234 \cdot 0,264 + 1,410 \cdot 0,736} = 1,276 \text{ kg m}^{-3}.$$

Podle oddílu D tedy platí

$$\bar{M} = V_n \varrho_0 = 22,7 \cdot 1,276 \doteq 28,965 \text{ kg kmol}^{-1}.$$

Měrná hmotnost směsi vyšla stejná jako měrná hmotnost vzduchu za týchž podmínek, která je rovna $1,276 \text{ kg m}^{-3}$. Proto zdánlivá (střední) hmotnost kilomolu směsi $28,96 \text{ kg kmol}^{-1}$ vypočtená v příkladě má stejnou velikost se zdánlivou (střední) hmotností kilomolu vzduchu a souhlasí s hodnotou uvedenou v tabulkách [1] i učebnicích [2], [3], [4].

K výpočtu podle E je nutno určit měrné teplo c_p směsi. Jeho hodnota pro dusík je $c_{p1} = 1,037 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, pro kyslík $c_{p2} = 9,012 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Pro směs vychází $c_p = q_1 c_{p1} + q_2 c_{p2} = 0,736 \cdot 1,037 \cdot 10^3 + 0,264 \cdot 9,012 \cdot 10^3 = 1,004 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Po dosazení do výrazu pro $\bar{M}$ dostaneme

$$\bar{M} = \frac{3,5 R}{c_p} = \frac{3,5 \cdot 8,314 \cdot 10^3}{1,004 \cdot 10^3} \doteq 28,983 \text{ kg kmol}^{-1}.$$

Příklad 2

Určete zdánlivou (střední) hmotnost kilomolu směsi dvou kilomolů vodíku a jednoho kilomolu kyslíku.

Platí $M_1 = 2,02 \text{ kg kmol}^{-1}$, $M_2 = 32,00 \text{ kg kmol}^{-1}$, $q'_1 = \frac{2}{3}$, $q'_2 = \frac{1}{3}$, $q_1 = 4,04/36,04$, $q_2 = 32/36,04$. Pro řešení tohoto příkladu je nejvhodnější výchozí vzorec oddílu B.

Podle něj

$$\bar{M} = q'_1 M_1 + q'_2 M_2 = \frac{2}{3} \cdot 2,02 + \frac{1}{3} \cdot 32 \doteq 12,013 \text{ kg kmol}^{-1}.$$

Podle E určíme nejprve měrné teplo směsi c_p z hodnot pro vodík $c_{p1} = 14,189 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ a kyslík $c_{p2} = 0,912 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Pro směs dostaneme

$$c_p = \frac{4,04}{36,04} \cdot 14,189 \cdot 10^3 + \frac{32}{36,04} \cdot 0,912 \cdot 10^3 = 2,400 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Pro $\bar{M}$ platí

$$\bar{M} = \frac{3,5 R}{c_p} = \frac{3,5 \cdot 8,314 \cdot 10^3}{2,400 \cdot 10^3} \doteq 12,123 \text{ kg kmol}^{-1}.$$

Jak je vidět v obou příkladech, hodnoty vypočtené pomocí molárních tepel se poněkud liší od hodnot vypočtených pomocí hmotností kilomolů složek. Důvody pro to jsme již uvedli.

Hodnotu zdánlivé (střední) hmotnosti kilomolu směsi plynů lze použít při výpočtech stavových veličin směsi plynů ze stavové rovnice i v jiných případech, kde se užívá hmotnosti kilomolu. Lze jí použít i pro výpočet střední kvadratické rychlosti molekul např. vzduchu [1], [2] ze vzorce

$$v_k = \sqrt{\frac{3 R T}{\bar{M}}}$$

Takto vypočtená střední kvadratická rychlost má tento význam: Pohybuje-li se ve směsi plynů střední kvadratickou rychlostí molekula se střední hmotností, má střední kinetickou energii. Jak lze početně do-

kázat, takto uvažovaná střední kvadratická rychlost má jinou hodnotu než střední kvadratická rychlost určená definičním vzorcem

$$v_k = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n},$$

kde $v_1, v_2, \dots, v_n$ jsou rychlosti skutečných molekul obou plynů tvořících směs. Podobná úvaha by platila i pro použití zdánlivé (střední) hmotnosti kilomolu pro výpočet střední rychlosti a nejpravděpodobnější rychlosti molekul směsi plynů z analogických vzorců plynoucích z Maxwellova zákona o rozdělení molekul podle rychlostí.

astronomie

Hvězdy s neviditelnými průvodci

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Při studiu vlastních pohybů hvězd bylo již v minulém století zjištěno, že některé hvězdy se nepohybují po přímce, ale po vlnovce; přes přímočarý vlastní pohyb se překládá pohyb po elipse. Tyto hvězdy se tedy pohybují stejně jako složky dvojhvězdy. Astronomové z tohoto pohybu usoudili, že kolem takových hvězd obíhají menší tělesa, která buď nemají vlastní zdroje záření nebo září velmi slabě a projevují se tedy jen svými gravitačními účinky. Tato tělesa dostala název *neviditelní průvodci hvězd*.

Postupně, jak se zdokonalovala pozorovací technika, bylo mnoho těchto těles objeveno. Jedním z prvních byl průvodce Síría, u nějž se ukázalo, že jde o bílého trpaslíka, tj. hvězdu s hmotností srovnatelnou s hmotností Slunce, ale s velmi malými rozměry a tedy také malou zářivostí. Bílí trpaslíci ani jiné slabě zářící hnězdy se dnes ovšem mezi neviditelné průvodce nepočítají; patří k nim jen tělesa, která vizuálně nebyla objevena jako zářící objekty a jejichž hmotnost je podstatně menší než hmotnost Slunce — svými vlastnostmi připomínají spíše planety sluneční soustavy.

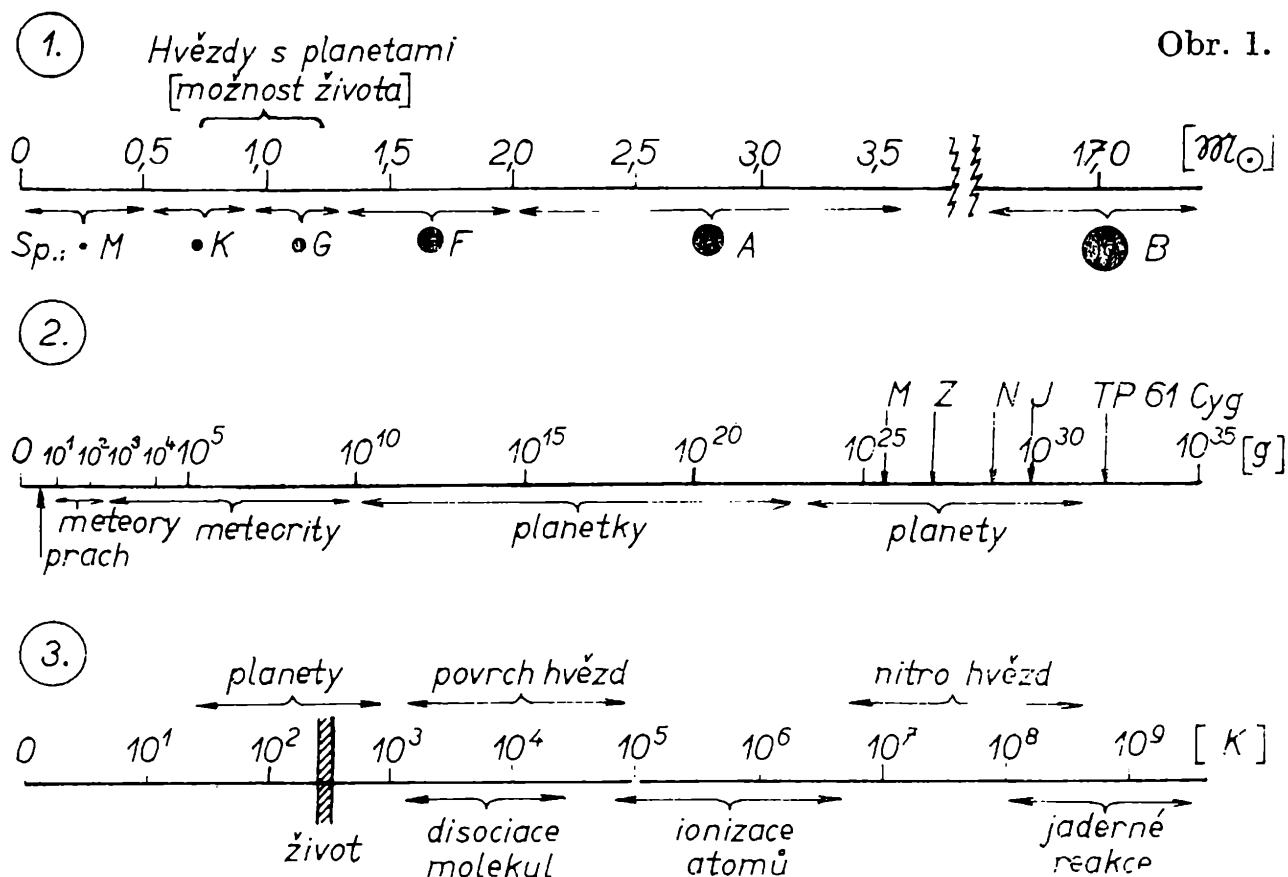
V posledních desetiletích začali astronomové intenzivně pátrat po hvězdách s neviditelnými průvodci planetárního typu; hlavní zásluhu na tom má švédský astronom Holmberg. Studium takových hvězd má totiž velký význam pro řešení otázky o možnosti existence života ve vesmíru. První výzkumy v tomto směru byly vykonány těsně před

Hvězda	π	$\frac{a}{\text{AU}}$	$\frac{P}{\text{rok}}$	Hmotnost průvodce (hmotnost Jupitera = = 1)
Proxima Centauri.	0,762	0,010	2,47	1,8 (?)
Barnardova hvězda .	0,530	0,0245	24	1,5
BD + 16°2147 = Lalande 21185	0,388	0,0336	8,0	10
61 Cygni. .	0,292	0,0102	4,8	8
Krüger 60 A .	0,249	0,03	16	9
BD + 20°2465	0,213	0,11	25,5	32
α^2 Eridani .	0,201	0,012	2,99	29
70 Ophiuchi .	0,193	0,015	17	8
Cincinnati 2354.	0,184	0,028	10,8	20

druhou světovou válkou a od té doby bylo objeveno již mnoho hvězd, u nichž lze předpokládat existenci planet. Výběr z nejlépe prozkoumaných hvězd s neviditelnými průvodci je uveden v tab. I. O prvních dvou hvězdách z této tabulky, Proximě Centauri a Barnardově hvězdě, jsme přinesli samostatné články v minulých letech (Proxima Centauri, RMF, 51, 1972/73, č. 10 a Barnardova hvězda, 49, 1970/71, č. 6). Jde o poměrně blízké hvězdy, proto bylo možné z odchylek od přímočarého vlastního pohybu zjistit existenci neviditelných průvodců o nejmenších dosud známých hmotnostech: hmotnost průvodce Proximy Centauri je 1,8 hmotnosti Jupitera, hmotnost průvodce Barnardovy hvězdy jen 1,5 hmotnosti Jupitera, jde tedy s největší pravděpodobností o tělesa planetárního typu.

Dobře prozkoumanou soustavou je rovněž hvězda 61 Cygni, jejímž výzkumem se v minulých letech velmi podrobně zabýval sovětský astronom A. N. Dejč. 61 Cygni je vizuální dvojhvězda s oběžnou dobou 720 roků. Při sledování zdánlivé dráhy slabší složky kolem hlavní hvězdy byly zjištěny odchylky, které svědčí o tom, že kolem jedné složky dvojhvězdy obíhá neviditelný průvodce. Oběžná doba tohoto tělesa je necelých pět roků a jeho hmotnost se odhaduje na osm hmotností Jupitera. Podobného průvodce má také hvězda 70 Ophiuchi, Krüger 60A a Lalande 21185. Hmotnosti dalších tří neviditelných průvodců, uvedených v tab. I, jsou již podstatně vyšší. U těchto těles zatím nelze rozhodnout, zda jde o tělesa planetárního typu nebo o velmi malé hvězdy. Podle výzkumů sovětského astrofyzika Idlise totiž nejmenší možná hmotnost hvězdy, jako tělesa s vlastními zdroji energie, jsou dvě setiny hmotnosti Slunce, čili asi dvacet hmotností Jupitera.

Současnými pozorovacími prostředky není možné objevit průvodce



s hmotností menší než je hmotnost Jupitera — odchylky od přímočaré dráhy vlastního pohybu jsou příliš malé — proto také dosud nebyly u hvězd dokázány planetární soustavy. Objevy neviditelných průvodců však nasvědčují tomu, že Slunce se svou planetární soustavou není ve vesmíru výjimečným jevem. V nynější době snad již neexistuje žádný vědec, který by vylučoval možnost vzniku života na planetách u některých hvězd v naší Galaxii. Prvním člověkem, který si otázku o možnosti života ve vesmíru položil, byl italský filosof Giordano Bruno (1545 až 1600), stoupenec Koperníkovy heliocentrické soustavy. Giordano Bruno Koperníkovy názory rozvinul i za oblast sluneční soustavy; zavrhl představu tzv. „sféry stálic“, kterou byla podle tehdejších představ sluneční soustava obklopena, a uvažoval, že vesmír je nekonečný, vyplněný hvězdami podobnými Slunci, kolem nichž obíhají rovněž planety a na těchto planetách snad existuje život. Bruno byl původně mnichem dominikánského kláštera v Neapoli. Pro své názory, které odporovaly tehdy platným církevním názorům, byl vyloučen z mnišského řádu i z církve, vydán inkvizici a jako kacíř upálen v r. 1600 na Náměstí květů v Římě.

V dnešní době se otázkou vzniku života ve vesmíru zabývá řada vědců. Nutnou podmínkou vzniku života je existence planetární soustavy podobné sluneční soustavě. V naší Galaxii je kolem 150 miliard hvězd. Budeme-li předpokládat, že jen nepatrný zlomek těchto hvězd má planetární soustavy, pak by existence života byla velmi častým jevem. Podle odhadu A. G. Camerona existují planetární soustavy po-

dobné sluneční soustavě asi u 2 miliónů hvězd v Galaxii. Samotná existence planetární soustavy ovšem ke vzniku života nestačí (máme na mysli život podobný životu na Zemi, tj. vázaný na vodu, kyslík atd.). Musí být splněna celá řada dalších podmínek, jako je vhodná teplota na povrchu planety, vhodné chemické složení atmosféry, přiměřené tíhové zrychlení na povrchu planety, konstantní zářivost hlavní hvězdy po velmi dlouhou dobu atd. Vlastnosti hvězd i planet značně závisí na hmotnosti těchto těles. Na obr. 1 jsou zakresleny tři stupnice: na první jsou vyznačeny hmotnosti hvězd různých spektrálních tříd v jednotkách hmotnosti Slunce, na druhé stupnici hmotnosti různých kosmických těles od prachových částic přes meteory a planetky až k planetám (v gramech) a na třetí stupnici teploty v Kelvinech.

Ukazuje se, že existenci planetárních soustav, u nichž by na některé planetě mohl vzniknout život, lze předpokládat především u hvězd, které se svými fyzikálními vlastnostmi příliš neliší od Slunce. Jde o hvězdy spektrálních tříd K až G, jejichž zářivost je po velmi dlouhou dobu prakticky konstantní. Hmotnost planety, na níž předpokládáme vznik života pozemského typu, se nemůže příliš lišit od hmotnosti Země (vhodné tíhové zrychlení, existence atmosféry). Na druhé stupnici jsou šipkami vyznačeny hmotnosti čtyř planet sluneční soustavy: Merkura, Země, Neptuna a Jupitera; za Jupiterem následuje temný průvodce (*TP*) hvězdy 61 Cygni. Srovnáním hmotností tohoto průvodce s hmotnostmi planet přijdeme k závěru, že tento průvodce se svými vlastnostmi pravděpodobně nepodobá planetě, na níž by mohl vzniknout život. Na třetí stupnici je šrafováním vyznačen teplotní interval na povrchu planet, v němž je podle současných úvah možný život. Je zřejmé, že tento teplotní interval je velmi úzký; z planet sluneční soustavy do něj spadají jen Země a Mars.

Skutečnost, že dosud nebyl objeven život mimo naši Zemi a že dosud neznáme jiné těleso, na němž by byly vhodné podmínky pro vznik života, ovšem neznamená, že ve vesmíru život neexistuje. Je velmi nepravděpodobné, že by byla Země v tomto směru ve vesmíru zcela výjimečným tělesem. Dílo polského vědce M. Koperníka i jeho následovníků skončilo s představou Země jako ústředního tělesa, kolem něhož obíhají všechna ostatní tělesa včetně Slunce. Novější výzkumy pak přesvědčivě dokázaly, že ani Slunce není nijak výjimečným tělesem — patří svými rozměry mezi průměrné hvězdy v Galaxii a nemá v Galaxii žádnou význačnou polohu — je spíše na jejím okraji. Dnes již také bezpečně víme, že ani Galaxie není „středem vesmíru“, ale jen členem soustavy vyššího řádu, kterou nazýváme místní skupina galaxií, a má rovněž vzhledem k ostatním galaxiím zcela průměrné rozměry.

Závěrem můžeme říci, že život ve vesmíru nevznikl na Zemi proto, že by měla nějaké zvláštní, výjimečné postavení mezi ostatními kosmickými

tělesy, ale jen z toho důvodu, že pro vznik života nastaly na Zemi vhodné podmínky. Je velmi pravděpodobné, že podobných těles je více nejen ve vesmíru, ale i v naší Galaxii a je možné, že život existuje i na planetě některé poměrně blízké hvězdy.

olympiády

První trojice úloh pro první kolo XVI. ročníku FO

Kategorie A

1. Měření elektrického proudu bez ampérmetru

Změřte bez použití ampérmetru elektrický proud procházející žárovkou.

Pro měření máte k dispozici aspoň tyto přístroje a materiál: teploměr, váhy, stopky, voltmetr, kovový drát z látky, jejíž měrný odpor je uveden ve fyzikálních tabulkách, délkové měřítko, mikrometr, termosku, žárovku na napětí 6 V (nebo 12 V) s jmenovitým příkonem nejméně 20 W, zdroj proudu (např. akumulátor do 12 V).

Postup při měření:

- Navrhněte vhodnou měřicí metodu (popište svůj návrh, přidejte i obrázek a podle potřeby doplňte seznam pomůcek).
- Proveďte měření a výpočet; uveďte chybu měření.
- Na závěr připojte svůj posudek (názor) na vhodnost metody.
- Navrhněte případná zlepšení, jak zvýšit přesnost měření aj.

Poznámky :

1. Kdyby opatření některého z předmětů uvedených v seznamu činilo obtíže, můžete si pomoci jiným vhodným zařízením i když méně dokonalým.

2. Doporučená literatura: Košťál: Hodnoty a chyby veličin měřených a vypočtených; Škola mladých fyziků, svatek 6, SPN 1972 Praha.

2. Dva zdroje o stálých elektromotorických napětích E_1 , E_2 a vnitřních odporech R_1 , R_2 jsou spojeny paralelně a připojeny ke spotřebiči.

a) Určete, jaký odpor R musí mít spotřebič, aby dostal předepsaný příkon p ; proveďte diskusi.

b) Podle výsledku bodu a) určete, jakou největší hodnotu $P_{\max}$ může mít příkon dodávaný spotřebiči.

c) Určete, jakou velikost R_{opt} má v tomto případě odpor spotřebiče.

d) Pro případ $R = R_{\text{opt}}$ určete velikosti proudů, které procházejí oběma zdroji I_{1m} , I_{2m} a spotřebičem I_m .

e) Nalezněte podmínku, aby v případě bodu d) byly proudy procházející oběma zdroji stejně velké $I_{1m} = I_{2m}$.

3. Žiarovka, na ktorej je údaj „12 V/5 W“, má sa pripojiť na sieť ($U = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$) tak, aby svietila plným príkonom, ale nesmie sa použiť transformátor.

A) Ako by ste riešili úlohu použitím prvkov:

- a) len rezistora,
- b) len tlmičky, ktorej odpor je $1/4$ odporu žiarovky,
- c) len kondenzátora.

Pre všetky prípady a) b) a c) nakreslite schémy zapojenia a vypočítajte hodnoty veličín, charakteristických pre uvedené prvky, potom posúďte hospodárnosť jednotlivých obvodov.

B) Keby všetky tlmičky, ktoré máte k dispozícii, mali väčšiu indukčnosť, než ste v bode A-b) vypočítali, a tiež kapacity kondenzátorov by boli menšie, ako vyžaduje výpočet z bodu A-c), dala by sa úloha rozriešiť kombináciou jednej tlmičky a jedného kondenzátora? Odpoveď na túto otázku odôvodnite a uveďte konkrétny príklad.

Poznámka :

Všetky výpočty urobte najprv obecně.

Kategorie B.

1. Na pružině o tuhosti k je zavěšena miska hmotnosti m_1 . Z výšky h nad rovinou misky uvolníme závaží o hmotnosti m_2 , které dopadne na misku. Po dopadu závaží na misku začne miska se závažím konat ve svislém směru harmonický pohyb.

Určete jeho amplitudu A .

Dopad závaží na misku považujte za dokonale nepružný.

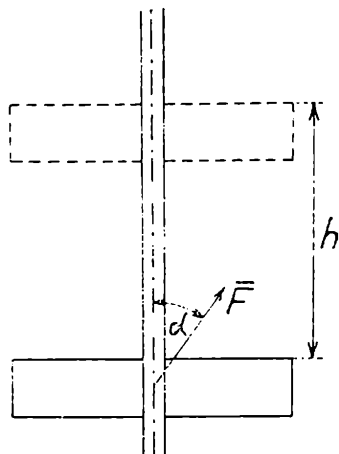
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 0,90 \text{ kg}$; $m_2 = 0,10 \text{ kg}$; $h = 0,10 \text{ m}$; $k = 5,0 \text{ kg s}^{-2}$; $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

2. Na plný váleček o průměru d , který je z tvrdé oceli, je nasunut stejně vysoký litinový prstenec o průměru D . Soustava je vložena mezi čelisti lisu, jimiž se na válec a prstenec přenáší síla $\mathbf{F}$ ve směru geometrické osy válce.

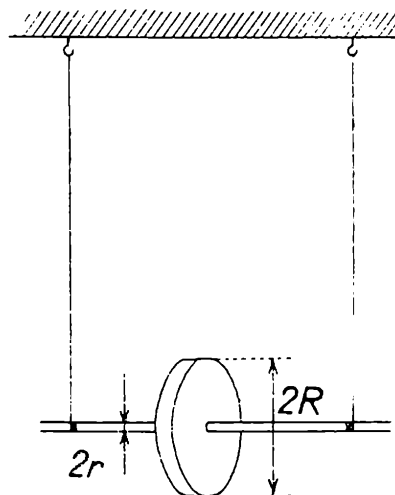
a) Určete nejmenší velikost F' síly $\mathbf{F}$, při níž dojde k porušení jedné ze součástí. Poruší se nejprve ocelový válec nebo litinový prstenec?

b) Určete velikosti sil F'_1 , F'_2 , které v okamžiku splnění podmínky a) působí na ocelový válec a na litinový prstenec.

c) Stanovte nejmenší mez pevnosti σ_p , kterou by měla mít druhá součástka, aby po porušení první součástky působením síly o velikosti F' nedošlo k následnému porušení druhé součástky. Modul pružnosti oceli je E_1 , modul pružnosti litiny E_2 , mez pevnosti oceli je σ_{p1} a mez pevnosti litiny σ_{p2} . Boční deformaci válce a litinového prstence a síly tření mezi



Obr. 1.



Obr. 2.

válcem a prstencem zanedbejte. Předpokládáme, že pro deformaci oceli i litiny platí Hookův zákon.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 5,0$ cm; $D = 6,0$ cm; $E_1 = 2,1 \cdot 10^5$ N mm⁻²; $E_2 = 1,0 \cdot 10^5$ N mm⁻²; $\sigma_{p1} = 8,0 \cdot 10^2$ N mm⁻²; $\sigma_{p2} = 1,0$ N mm⁻².

3. Tri tělesa 1, 2, 3 mají teplotu T_1 , T_2 , T_3 , pro které platí $T_1 > T_2 > T_3$. Ideální tepelný stroj pracuje na základě Carnotova cyklu.

a) Tepelný stroj koná práci tak, že těleso 1 slouží jako ohřeváč a těleso 3 jako chladič stroja.

b) Tepelný stroj koná práci tak, že těleso 1 slouží jako ohřeváč. V první části děja těleso 2 je chladič, v druhé části děja je ohřeváč. Těleso 3 je chladič stroja. Nech teplo přijaté tělesom 2 v první části děja je rovné teplu odovzdanému v druhé části děja.

1. Za předpokladu, že v oboch případech bylo tělesu 1 odebrané rovnaké teplo, uvažte, či celkové práce vykonané dějmi v případech a) a b) sú rovnaké.

2. Koľko tepla je odovzdané tělesu 3 v případech a) a b)? Tepelné kapacity telies vú veľmi veľké, takže zmeny teplôt počas děja zanedbávajte.

Kategorie C

1. Těleso o hmotnosti m se může posunovat po svislé tyči působením síly $\mathbf{F}$, jejíž vektorová přímka svírá se svislým směrem ostrý úhel (obr. 1). Působením síly $\mathbf{F}$ se pohybuje těleso rovnoměrným pohybem vzhůru po dráze délky h . Součinitel smykového tření při pohybu tělesa po tyči je f .

a) Znázorněte všechny síly, které na těleso při pohybu působí a určete velikost síly $\mathbf{F}$.

b) Určete mechanickou práci A vykonanou působením síly $\mathbf{F}$ na těleso po dráze h .

c) Určete poměr η práce A_0 vykonané při zvedání tělesa svisle vzhůru rovnoměrným pohybem bez zvedacího zařízení a práce A . Vyjádřete tento poměr v procentech, η je účinnost zvedacího zařízení. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $m = 2,0 \text{ kg}$, $\alpha = 45^\circ$, $h = 4,0 \text{ m}$, $f = 0,20$, $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

2. Maxwelllovo kyvadlo je masivní kotouč o hmotnosti m a poloměru R , upevněný na čepu o poloměru r , na jehož koncích jsou navinuty dvě nitě stejné délky. Soustava je zavěšena na nitích na vodorovném ramenu (obr. 2). Spustíme-li soustavu z nejvyšší polohy, koná kotouč s čepem posuvný pohyb svisle dolů a současně otáčivý pohyb kolem vodorovné osy. Po dosažení nejnižší polohy stoupá soustava vzhůru opět za současného otáčení kotouče kolem vodorovné osy.

a) Určete zrychlení a posuvného pohybu kyvadla dolů. Moment setrvačnosti a hmotnost čepu, hmotnost nití a tření neuvažujeme. Za těchto podmínek je posuvný pohyb kotouče a čepu rovnoměrně zrychlený, vyloučí-li se krajní polohy kyvadla. Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k vodorovné ose je $J = \frac{m R^2}{2}$

b) Jak velikou silou F je napínána každá nit při pohybu kotouče s čepem dolů? Změní se velikost této síly, pohybuje-li se kotouč s čepem vzhůru?

Řešte úlohu obecně a potom pro hodnoty: $m = 1,0 \text{ kg}$, $R = 50 \text{ mm}$, $r = 4,0 \text{ mm}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

3. Měsíc obíhá kolem Země průměrnou rychlostí $v_M = 1,02 \text{ km s}^{-1}$. Průměrná vzdálenost Měsíce od Země je $60,3$ poloměru Země R_z . Předpokládáme, že Měsíc koná rovnoměrný pohyb po kružnici rychlostí v_M . Z těchto dat určete:

a) rychlost v_{D_1} , kterou by se pohybovala umělá družice Země v těsné blízkosti jejího povrchu a rychlost v_{D_2} , kterou by se pohybovala umělá družice Země po kruhové dráze ve vzdálenosti R_z od povrchu Země;

b) poloměr dráhy R_S a rychlost v_S stacionární umělé družice Země. Stacionární umělá družice obíhá kolem Země po kruhové dráze v rovině rovníku a zůstává stále nad tímž místem na povrchu Země.

c) Narýsujte model kruhových drah tří uvažovaných umělých družic Země a kruhové dráhy Měsíce za předpokladu, že všechna tři tělesa obíhají kolem Země v téže rovině. Poloměr dráhy Měsíce zobrazíte úsečkou délky 100 mm .

Kategorie D

1. Cestující ve vlaku pohybujícím se rychlostí v_1 vidí v okně po dobu t_1 nákladní vlak délky d_2 , jedoucí souběžně s ním v témž směru.

a) Jaká je rychlost v_2 nákladního vlaku?

b) Jak dlouho pozoruje v okně vlakvedoucí nákladního vlaku první vlak délky d_1 ?

c) Řešte úlohu pro případ, že se vlaky pohybují rychlostmi v_1 , v_2 po souběžných kolejích vzájemně proti sobě. Jak dlouho bude možno pozorovat vstřícný vlak?

Řešte obecně, potom pro hodnoty $v_1 = 45 \text{ km h}^{-1}$, $t_1 = 60 \text{ s}$, $d_1 = 500 \text{ m}$, $d_2 = 600 \text{ m}$.

2. Sánky kloužou z výšky h po svahu s úhlem sklonu α . Tření zanedbejte a určete v úlohách a—c:

a) zrychlení a pohybu sáněk,

b) rychlost v sáněk na konci svahu,

c) dráhu s a dobu t pohybu po svahu.

Ve skutečnosti působí za pohybu smykové tření, charakterizované součinitelem f . Stanovte nyní:

d) zrychlení a' pohybu,

e) rychlost v' sáněk na konci svahu,

f) dráhu s' a dobu t' pohybu sáněk po svahu,

g) celkovou dráhu s^* a dobu t^* pohybu sáněk, než se zastaví na vodorovné rovině po sjezdu ze svahu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $h = 30 \text{ m}$, $\alpha = 20^\circ$, $f = 0,20$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

3. Strojvůdce vlaku pohybujícího se rovnoměrně přímočaře po vodorovné trati začne náhle brzdit. Rychlost vlaku se za dobu t rovnoměrně změní z hodnoty v_1 na hodnotu v_2 .

a) Určete zrychlení pohybů.

b) Ve vagonu vlaku leží na podlaze kufr. Vyznačte na obrázku všechny síly, které během brzdění vlaku působí na kufr ve vztažné soustavě spojené s vagónem.

c) Při které hodnotě součinitele f_0 statického tření mezi kufrem a podlahou začne kufr právě klouzat po podlaze vagónu?

d) Určete dráhu, kterou vlak během brzdění urazil.

e) Součinitel smykového tření při pohybu kufru má hodnotu $f \leq f_0$. Jakou dráhu vykoná kufr během brzdění vzhledem k podlaze vagónu a jakou dráhu vykoná kufr během brzdění vzhledem ke kolejnicím?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_1 = 45 \text{ km h}^{-1}$, $v_2 = 18 \text{ km h}^{-1}$, $t = 4,0 \text{ s}$, $f = 0,15$.

Předmět a charakter fyziky

JOSEF KOTYK, Pardubice

Fyzika jako celek je jednou z přírodních věd, jež jsou souborem našich vědomostí o přírodě. V dějinách se začíná poprvé zřetelně rýsovat v období starověké kultury řecké, a to jako věda o přírodě vůbec. Odtud lze doložit také původ jejího jména (řec. *fysis* = příroda). Máme-li však na mysli pouze ten obor přírodních jevů, jež do fyzikálního zkoumání zahrnujeme nyní, můžeme říci, že starověká fyzika nepokročila za hranice statického pojmání přírody. Problematika pohybu zůstala způsobu jejího nazírání na svět nedosažitelnou. V průběhu staletí oddělily se od fyziky v širším smyslu mnohé obory, které byly dříve její součástí (chemie, astronomie, meteorologie aj.), a staly se vědami samostatnými. Vývojem přistoupily zároveň další obory, statistická fyzika, atomistika, kvantová fyzika, fyzika pevné fáze, jaderná fyzika aj. Tak se postupně vyhranil předmět fyziky, jak ji známe dnes.

Fyzikální problematika ve srovnání s ostatními přírodními vědami je dána zkoumáním nejjednodušších procesů a nejjednodušších forem hmoty (matérie). Základní procesy, jimiž se fyzika zabývá, jsou zároveň společné všem druhům hmoty. Tak pochopíme, že právě fyzika mohla ze všech přírodních věd proniknout nejdále. Úspěchy, kterých dosáhla zejména v posledních desetiletích, jsou dokonce tak významné, že fyzika zaujala již mezi přírodními vědami místo přímo výjimečné.

Poněvadž fyzika odhaluje zákonitosti, které mají platnost obecnou a již v minulosti mocně působily na vznik filosofických směrů, má velkou důležitost i pro vývoj filosofie. V dnešní době jsou obecné zákony fyziky významnou oporou dialektickému materialismu. Zvláštní pozornosti zasluhuje zejména okolnost, že změnou fyzikální teorie nemůže být dialektický materialismus vyvrácen, nýbrž naopak potvrzen, doplněn a tím obohacen. Příkladem dobrodružné cesty fyziků za pravdivým poznáním nejobecnějších zákonitostí světa a správným dialekticko-materialistickým nazíráním na svět mohou být geniální úvahy Einsteinovy.¹⁾ Jejich základem bylo bezvýhradné uznání hmotného

¹⁾ Viz autorův článek „Albert Einstein, vědec a prorok“ v Rozhledech, ročník 48, číslo 7, str. 326 až 329.

světa jako reality objektivně existující a zásada, která by se měla stát všem fyzikům vlastní: Nevměstňovat tuto realitu do ztrnulých schémat navyklých představ, nic jí nepředpisovat, nýbrž ji přijímat jako něco mnohotvárného a nevyčerpatelného v mnohosti jejích rysů. Einsteinovo svérázné vědecké dílo se tak stalo význačným článkem procesu, nad nímž Vladimír Iljič Lenin pronesl svá památná slova: „Fyzika v bolestech rodí dialektický materialismus.“²⁾

Moderní fyzika potvrdila již všechny téze dialektického materialismu. Ve svém díle „Materialismus a empiriokriticismus“ vyložil Lenin dialekticko-materialistické učení nejen o hmotě, prostoru a času, ale také o příčinnosti a nutnosti v přírodě. Ukázal, že pro důsledně materialistický názor jsou i příčinnost a nutnost přírodní objektivní. Moderní fyzika potvrdila dialektický materialismus proto také jako celek, a to ve formě nejdokonalejší, jež odpovídá soudobému stavu našeho vědění.

* *

*

Fyzika má velmi úzký vztah také k matematice.

Jistý starověký filosof řekl: „Budme tiši, neboť uslyšíme šepot bohů!“ Po mnoha staletích dodal k tomu Galileo Galilei (1564—1642), že kniha přírody je napsána jazykem matematickým. Pro matematický šepot přírody dovedl být zvláště Isaac Newton (1643—1727) velmi vnímavý. Nic neposílilo úctu k mladé fyzice té doby tak jako Newtonovy výpočty planetárních drah. Roku 1846 byla z perturbací (poruch) dráhy Uranovy vypočtena a ihned potom i pozorována poloha další nové planety — Neptuna.³⁾ Od těch časů stala se z fyziky již „velmoc, kterou žádná jiná moc nemůže beztretně ignorovat“.⁴⁾

Vliv fyziky na vývoj matematiky se v celé své šíři dá těžko zhodnotit. Také opačný vliv matematiky na rozvoj metod teoretické fyziky je ovšem ohromný. Nevšimavost k rychlému, ba téměř každodennímu růstu matematiky by nevyhnutelně zdržovala i růst fyziky. Kritické obtíže v tak vysoce matematických disciplínách, jakou je např. kvantová teorie pole, budou překonány jen ještě užší spoluprací fyziky s matematikou, než je tomu dosud.

Přehlížíme-li velkolepou cestu, kterou přírodní vědy prošly od objevu ohně k atomové elektrárně, shledáváme, že fyzika, má-li se vyvíjet

²⁾ V podrobnostech viz stať J. Čeledy, „Filosofie a soudobá fyzika“ v sborníku „Filosofie a přírodní vědy“ (Praha, SNPL 1961), str. 132 až 269.

³⁾ „Astronom najde hvězdu vždy tam, kde podle výpočtu být má, a byl by vysoce překvapen, kdyby na tomto místě nebyla.“ (Viz autorův článek „Charakter matematiky“ v Rozhledech, ročník 52, číslo 4, str. 179 až 183.)

⁴⁾ Viz Max von Laue, „Dějiny fyziky“ (Malá moderní encyklopedie, svazek 11, Praha — Orbis 1963). Cit. str. 32.

progresivním směrem a bez zbytečných překážek, musí splnit dvě základní podmínky:

a) Jako věda empirická (řec. *empeiria* = zkušenost) musí své úvahy i závěry opírat o faktický materiál získaný pozorováním. Tato podmínka je od dob Galilea Galileiho většinou splňována. Kromě Galileiho se o to přičinili také někteří jeho vrstevníci, zejména Francis Bacon z Verulamu a Otto von Guericke. Podle Bacona je příroda jediným zdrojem všeho vědění; toto vědění získáváme zkušeností. Buď pozorujeme přímo úkazy, jež se v přírodě dějí samovolně bez našeho přispění (např. blesk, duhu, tání aj.), nebo sami fyzikální jevy vzbuzujeme účelnými experimenty (pokusy). „Jen zkušenost je řešitelkou všech pochyb, rádkyní ve všech obtížích a jedinou učitelkou pravdy,“ prohlásil Otto von Guericke. Příroda a zákony v ní vládnuocí staly se podle Engelse nejlepším zkušebním kamenem dialektiky.

b) Při interpretaci výsledků získaných metodami experimentálními a vytyčování dalších úkolů musí fyzika vycházet z pozic vědecké filosofie. Splnění této podmínky, uplatnění správné teoretické základny je však dosud mnohdy požadavkem. Významem teoretického výzkumu ve fyzice se obšírně zabýval prezident Akademie věd SSSR A. N. Nėsmejanov ve svém referátu na XIX. sjezdu Komunistické strany Sovětského svazu roku 1952. „Musíme usilovněji rozvíjet teorii a základní výzkum, především fyzikálně-matematický,“ prohlásil. „Fyzika a matematika nám musí svítit na cestu do neznámé budoucnosti nové techniky. V tom tkví základní úkol těchto věd.“

Tato pamětihodná slova platí dosud.

Průkopníci bezdrátové telegrafie

K 110. výročí narození významného slovenského vynálezce Jozefa Murgaše

RUDOLF KOLOMÝ, Mor. Třebová

Dnešní obrovské úspěchy ve sdělovací a spojovací technice mají své počátky ve velkých objevech v oboru elektřiny a magnetismu v minulém století.

Již Angličan M. Faraday (1791—1867) dokazoval v prvních desetiletích 19. stol. myšlenku, že nositelem elektrických a magnetických vlastností nejsou sama elektrická a magnetická tělesa, nýbrž prostor

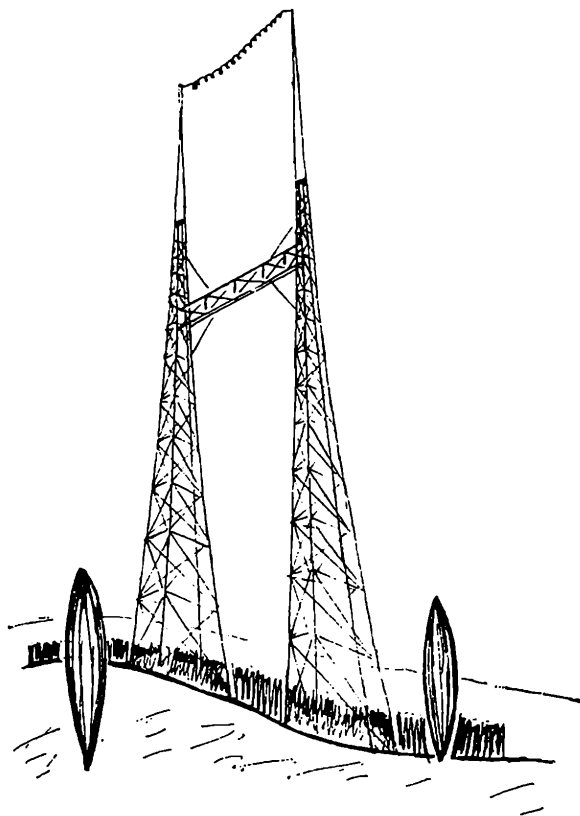
kolem nich. Tak dospěl k pojmu elektrického a magnetického pole. U střídavých proudů se obě pole doprovázejí a střídají a vzniká elektromagnetické pole. Faradayovy práce vrcholí roku 1831 objevem elektromagnetické indukce. Jeho myšlenky a představy matematicky zpracoval jiný anglický fyzik J. C. Maxwell (1831—1879) v teorii elektromagnetického pole, z níž teoreticky dokázal existenci elektromagnetických vln. Experimentálně ji potvrdil v r. 1888 významný německý fyzik H. Hertz (1857—1894). Tím byla otevřena cesta rozvoji spojovací a sdělovací technice (bezdrátové telegrafii, rozhlasu, televizi, radaru aj.).

V Hertzových pokusech úspěšně pokračoval významný ruský elektrotechnik A. S. Popov (16. III. 1859—13. I. 1906; 115. výročí narození), který zdokonalil oscilátor a zkonstruoval citlivý a praktický detektor elektromagnetických vln a objevil význam antény. Dne 7. května 1895 přednášel na schůzi v Ruské fyzikálně-chemické společnosti na petrohradské universitě na téma: „O chování kovových prášků k elektrickým kmitům.“ Při přednášce demonstroval svůj přijímač a proto se tato přednáška všeobecně považuje za první Popovovo veřejné sdělení o vynálezu radia (vynález si však nedal patentovat). Dne 24. března 1896 na schůzi téže společnosti při přednášce: „Ukázky přístroje k předvádění Hertzových pokusů v přednáškách“ předvedl zdokonalený vysílač a přijímač a na vzdálenost asi 250 m z jedné budovy do druhé přenesl pomocí Morseových značek slova „Heinrich Hertz“. Byl to první radiový telegram na světě, demonstrováný veřejnosti.

V letech 1895—96 řešil problém bezdrátové radiotelegrafie i italský inženýr G. Marconi (25. IV. 1874—20. VII. 1937; 100. výročí narození) a r. 1896 zadal v Anglii k patentování svůj vynález radiotelegrafického přístroje. Podporován bohatými příbuznými založil v Londýně společnost „Marconi's Wireless Telegraph Co.“ a začal uplatňovat nárok na prvenství v objevu radiotelegrafie. Před Popovem však žádný vynález neuveřejnil. R. 1901 dosáhl prvního radiotelegrafického spojení Evropy s Amerikou. Během svého života si dal patentovat velkou řadu významných vynálezů z oblasti radiotelegrafie. V uznání za velké zásluhy o vědecký a technický pokrok obdržel r. 1909 spolu s K. F. Braunem Nobelovu cenu za fyziku. Avšak r. 1943 Nejvyšší federální soud USA zrušil některé Marconiovy patenty z oblasti radiotelegrafie s odůvodněním, že jsou v podstatě obsaženy v patentech významného jihoslovenského vědce N. Tesly (1856—1943; v letním semestru r. 1880 studoval matematiku a fyziku na pražské universitě) žijícího v USA, které získal téměř 10 roků před Marconim. A my se můžeme pochlubit, že slovenský průkopník bezdrátové telegrafie Jozef Murgaš v některých směrech předstihl i Marconiho. Věnujme tomuto neprávem zapomínanému vědci, který bezesporu patří do okruhu zmíněných badatelů, u příležitosti jeho 110. výročí narození, několik řádek.

Jozef Murgaš se narodil jako chalupnický synek 17. února 1864

Obr.



v Tajově u Banské Bystrice. Přestože se za středoškolských studií intenzívně zajímal o přírodní vědy a techniku, vystudoval teologii. Měl i velkou zálibu pro výtvarné umění. Studoval na malířských akademiích postupně v Budapešti a v Mnichově, avšak studia nedokončil. Musel se vrátit do vlasti a vykonávat duchovní povolání. Pro své národní a slovenské cítění byl maďarským úřadům nepohodlný, a proto byl překládán z jedné chudé fary na jinou ještě chudší. Jako tisíce jeho krajanů se r. 1896 rozhodl, že se vystěhuje do USA. Peníze na cestu si ušetřil usilovným malováním. V USA se stal farářem ve slovenské hornické kolonii ve Wilkes-Barre v Pensylvanii, kde se po celý život neúnavně staral o zlepšení kulturních a sociálních poměrů svých spoluobčanů. Zde založil slovenskou školu a pod vlivem Marconiho a Braalyho velkých úspěchů začal technicky experimentovat. Na faře vybudoval velkou elektrotechnickou laboratoř a zahájil pokusy s elektromagnetickými vlnami. Brzo vystihl nedostatky Marconiho bezdrátového telegrafního systému a již r. 1903 podal do Washingtonu žádost o udělení patentu na vlastní bezdrátový přístroj tzv. „Ton-System“, který na rozdíl od dosud běžných přístrojů nevysílal Morseovy značky, ale dva stejně dlouhé, avšak frekvenčně různé tóny (odtud také název jeho přístroje, na který následujícího roku obdržel patent). Tímto způsobem značně zkrátil čas odesílání depeše. R. 1905 postavil ve Wilkes-Barre a ve Scrantonu vysílací a přijímací stanici s 60 m vysokými věžemi pro antény (viz obr. 1) a úspěšně předvedl svůj vynález na veřejné zkoušce, při níž se mu podařilo poslat

a zachytit signály z dálky asi 35 km. Byl to velký průkopnický čin v americké radiotelegrafii.

V letech 1903—1911 podal Murgaš ještě 11 významnějších patentů a vynálezů z oboru bezdrátové telegrafie. Všechny našly v různých obměnách praktické uplatnění (opisy všech patentů jsou uloženy v Národním technickém muzeu v Praze). Úspěšné Murgašovy pokusy daly r. 1906 podnět k založení společnosti „Universal Aether Company“ se sídlem ve Philadelphii. Ovšem tato společnost neměla dlouhého trvání, pro různé nesnáze a zejména finanční obtíže se brzo rozpadla. Murgašův „Ton-System“ pak podrobně prozkoumali Marconi a Fessenden, trochu jej zdokonalili a nazvali jej „Sonorous-System“. Roku 1920 si začali přisvojovat prioritu a celá záležitost se dostala až před soud. Nejvyšší soud v New Yorku přiřkl Murgašovi nejen původcovství, ale navíc uznal, že jeho systém je snadněji ovladatelný a lacinější než Marconiův.

Přestože v zahraničí dosáhl Murgaš velkých úspěchů, ve své vlasti se nesetkal s pochopením. R. 1920 se ucházel o místo profesora elektrotechniky na vysoké škole technické v Praze, ale neuspěl. Byl odmítnut s odůvodněním, že nemá předepsané vzdělání. Vrátil se zpět do USA a 23. května 1929 náhle umírá ve své pracovně (45. výročí). Svým průkopnickým dílem se zařadil mezi významné slovenské techniky.

Od Murgašových pokusů k dnešku uplynul poměrně krátký čas, avšak málokteré jiné odvětví techniky dosáhlo za tuto dobu tak pronikavých úspěchů a doslova převrátilo svět jako právě spojovací technika. Vždyť např. lety umělých družic, raket, kosmických lodí nejsou vůbec myslitelné bez přenosu signálů pomocí radiových vln.

Nejmladším členářům

Jedna zanedbávaná úloha z geometrie

EVŽEN ŘÍMAN, CSc. Praha

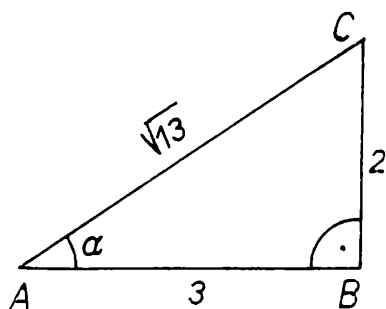
Pri písomnej prijímacej skúške na vysokú školu technickú sa často zadáva úloha určiť ostatné goniometrické funkcie, ak je daná hodnota jednej; napr. $\operatorname{tg} \alpha = 2/3$ alebo $\operatorname{cotg} \beta = 7$.

Táto úloha robí skúšaným dosť ťažkostí; poznajú však neskoršie na

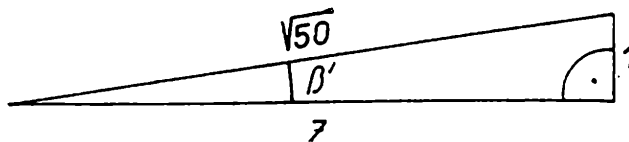
technike, ako je dôležité znáť jej riešenie. Pripomeňme preto tento najjednoduchší spôsob,*) ako ju riešiť.

Úloha 1. Stanovte hodnoty ostatných goniometrických funkcií, ak $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$

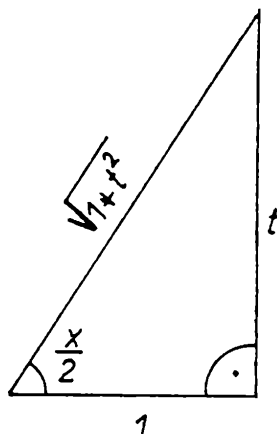
Riešenie. Vieme, že pre $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ sa definuje $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{protiľahlá}}{\text{priľahlá}}$ pomerom odvesien, preto načrtnite pravouhlý $\triangle ABC$ s odvesnami



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

$BC = 2$, $AB = 3$. Potom Pythagorovou vetou určíte preponu $\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, čo vpíšete do obrázku a ihneď hlásite

$$(2) \quad \sin \alpha = \frac{\text{protiľahlá}}{\text{priľahlá}} = \frac{2}{\sqrt{13}};$$

ďalej

$$\cos \alpha = 3/\sqrt{13}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}; \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{3}{2}$$

(Hodnotu tangenty určujeme znovu z obrázku — pre kontrolu! Zvykajte si ustavične sa kontrolovať!)

*) Za povodcu tejto metódy je považovaný G. REUSCHLE.

Úloha 2. Dané je $\cotg \beta = 7$, kde β je v treťom kvadrante; majú sa určiť hodnoty ostatných goniometrických funkcií.

Riešenie: Načrtneme zas pravouhlý $\triangle$ s uhlom β' (ponechávajúc písmeno β pre označenie hľadaného uhla β) a píšeme $\cotg \beta' = 7 = \frac{7}{1}$. (Táto premena čísla 7 na $\frac{7}{1}$ je dôležitá!) Pomocou Pythag. vety určíme preponu $\sqrt{50}$ a pomocou náčrtku píšeme hneď $\sin \beta' = \frac{1}{\sqrt{50}}$; $\cos \beta' = \frac{7}{\sqrt{50}}$; $\tg \beta' = \frac{1}{7}$; $\cotg \beta' = 7$.

Vieme, že sinus a kosinus majú v treťom kvadrante záporné hodnoty; preto hľadané hodnoty budú

$$\sin \beta = -\sin \beta' = -1/\sqrt{50}; \quad \cos \beta = -\cos \beta' = -7/\sqrt{50};$$

$$\tg \beta = -\tg \beta' = -1/7; \quad \cotg \beta = -\cotg \beta' = -7.$$

Úloha 3. Integrálny počet užíva často substitúciu

$$(3) \quad \tg \frac{x}{2} = t \quad \text{kde } 0^\circ < x < 90^\circ$$

Stanovte vzťahy pre hodnoty goniometrických funkcií uhlov $\frac{x}{2}$ aj x a vypočítajte diferenciály dx , dt . Pomocou nich stanovte integrál

$$I = \int \frac{dx}{(1 + \cos x)^2}$$

Riešenie: Náš trojuholník s uhlom $\frac{x}{2}$ má odvesny t , 1 , takže prepona $= \sqrt{1 + t^2}$. Z neho určíme (ako prv)

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$$

$$\tg \frac{x}{2} = t; \quad \cotg \frac{x}{2} = 1/t.$$

Pre dvojnásobný uhol použijeme vzťah

$$(4) \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

takže

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$$

$$\operatorname{tg} x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1-t^2} = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1-t^2}{2t}$$

Stanoviť diferenciál dx je obťažnejšie. Spomeňme na derivácie:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \text{ z čoho vyplýva } dy = y' \cdot dx.$$

Teda ak

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{x}{2} \right)^{-1}$$

čiže

$$dt = dx / \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} \right) \text{ a konečne } dx = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \cdot dt = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

(posledný výraz sme dostali dosadením vzťahu pre $\cos \frac{x}{2}$ hore)

Teraz len vidíme výhody substitúcie (3): Goniom. funkcie uhlu x aj diferenciál dx možno vyjadriť racionálnou (lomenou) funkciou (tj. *bez odmocniny!*) novej premennej t .

Zadanú integráciu I začneme úpravou menovateľa takto:

$$(1 + \cos x)^2 = \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 = \dots = \frac{4}{(1+t^2)^2},$$

čo ľahko dostaneme uvedením na spoločného menovateľa a slúčením čitateľovho mnohočlena. Potom už integrácia nerobí ťažkosti, ak rozumieme formuli

$$\int x^n dx = \frac{1}{n} x^{n-1}.$$

Integrujme teda

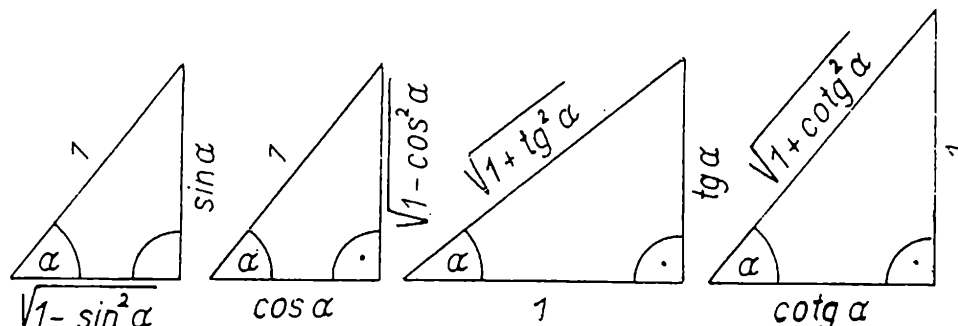
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(1 + \cos x)^2} dx = \int \frac{(1+t^2)^2}{4} \cdot \frac{2dt}{(1+t^2)} = \frac{1}{2} \int (1+t^2) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{3} t^3 \right) = \frac{1}{2} t + \frac{1}{6} t^3 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Presvedčte sa o správnosti výsledku derivovaním!

Úloha 4. Zostavte tabuľku prevodných vzťahov pre goniometrické funkcie uhla, ak je daná hodnota jedinej funkcie. Pretože tabuľka má

platí pre obecný uhol (tj. v ktoromkoľvek kvadrante), treba písať absolútne hodnoty. Znamienka $+$ resp. $-$ pripisujeme potom podľa toho, v ktorom kvadrante daný uhol je.

Riešenie: Načrtáme štyri trojuholníky $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \triangle_4$, a pod ne 5-stĺpcovú tabuľku, ako je nižšie.



Vypočítajme v každom trojuholníku preponu (pomocou zvolených odvesien), zopakujme si definície v ostrom uhle a píšme:

$ f \backslash$ Pomocou trojuholníka	$\triangle_1$	$\triangle_2$	$\triangle_3$	$\triangle_4$
$ \sin \alpha $		$= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$= \frac{ \operatorname{tg} \alpha }{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}}$
$ \cos \alpha $	$= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$		$= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$= \frac{ \operatorname{cotg} \alpha }{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}}$
$ \operatorname{tg} \alpha $	$= \frac{ \sin \alpha }{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{ \cos \alpha }$		$= \frac{1}{ \operatorname{cotg} \alpha }$
$ \operatorname{cotg} \alpha $	$= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{ \sin \alpha }$	$= \frac{ \cos \alpha }{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$= \frac{1}{ \operatorname{tg} \alpha }$	

Napr.: Má sa určiť $|\cos \alpha|$ pomocou $\operatorname{cotg} \alpha$. Užijeme $\triangle_4$ a definíciu

$$\cos \alpha = \frac{\text{priľahlá}}{\text{protiľahlá}} \left\{ \begin{array}{l} \text{a z obrázku} \\ \text{čítame} \end{array} \right\} |\cos \alpha| = \frac{|\operatorname{cotg} \alpha|}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}}$$

Ako vidieť, stačí mať nakreslené 4 trojuholníky a celá tabuľka je zbytočná. Preto si ju ani nikam nepoznamenávajújte! Veď napr. aj Pasca-

lov trojuholník pre bionomické koeficienty si netreba písať, pretože všetky riadky vieme odvodiť!

Technik si musí vedieť pomôcť; potom nemusí zafažovať pamäť spúšťou vzorcov a viet.

Vymýšľajte si sami úlohy, kde je daná goniometrická funkcia a kvadrant a rýchlo (z načrtnutého trojuholníka!) píšete priamo hľadané hodnoty. Veľa zdaru pri riešení aj pri skúškach na technike praje redakcia.

1. Jaké hodnoty musí nabýt přirozené číslo a , aby dvojčlen $a + 3$ byl dělitelný dvojčlenem $a - 2$?

2. Pro která přirozená čísla n je $n^2 + 1$ dvojčíferné prvočíslo?

3. V rovnici

$$2(2ax - 3) = 3ax + 6$$

je x neznámá a $a \neq 0$. Pro které přirozené číslo a je i kořen dané rovnice přirozené číslo?

4. Obsah obdélníku je 72 cm^2 a jeho strany mají délky vyjádřené (v centimetrech) přirozenými čísly. Najděte délky stran tohoto obdélníku.

5. Je dán pravoúhlý různostranný trojúhelník ABC . Na přeponě AB určíme vnitřní body D, E tak, aby $BD = BC$ a $AE = AC$. Vypočítejte délky stran trojúhelníku CDE pomocí délek stran trojúhelníku ABC .

Řešení a výsledky.

$$1. \frac{a + 3}{a - 2} = \frac{(a - 2) + 5}{a - 2} = 1 + \frac{5}{a - 2}; a = 3, 7.$$

2. Za n dosazujeme jen sudá čísla. Vyhovuje $n = 2, 4, 6$.

$$3. x = \frac{12}{a}. a = 1, 2, 3, 4, 6, 12.$$

4. Rozměry obdélníku jsou: $(1; 72), (2; 36), (3; 24), (4; 18), (6; 12), (8; 9)$.

5. Při obvyklém označení platí: $DE = a + b - c$; $EC =$

$$= a \sqrt{\frac{2(c - a)}{c}}, DC = b \sqrt{\frac{2(c - b)}{c}}$$

K tomu potřebujeme vzorec pro výšku pravoúhlého trojúhelníku

$$v = \frac{ab}{c}$$

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

continuity
continuous
continuum
contour
 contour line
contraction
contradiction
contrapositive statement

converge
convergence
 uniform convergence
convergent
 absolutely convergent
 conditionally convergent

 uniformly convergent

converse
conversely
conversion
convex
 convexity
coordinates
coplanar
copunctal planes
corollary
correct
correction
correlation
 correlation coefficient
correspond
correspondence
 reciprocally one-to-one c.
corresponding
cosecant
cosine

spojitost
spojitý
kontinuum
obrys, vrstevnice
 vrstevnice
kontrakce
protiklad, spor
kontraponovaný,
kontraponovaný, obměněný, ekvi-
 valentní výrok
konvergovat
konvergence
 stejněměrná konvergence
konvergentní
 absolutně konvergentní
 neabsolutně, relativně convergent-
 ní
 stejněměrné konvergentní
obrácený, obrácení, věta obrácená
obráceně
převedení, úprava
konvexní
 konvexnost
souřadnice
komplanární
roviny procházející jedním bodem
poučka, dodatek
správný
oprava
korelace
 koeficient korelace
odpovídat
zobrazení, přiřazení
 vzájemně jednoznačné přiřazení
odpovídající
kosekans
kosinus

direction-cosines	směrové kosiny
cotangent	kotangens
count	spočítat
counter-revolution	inverzní otočení
counter-clockwise	proti smyslu hodinových ručiček
counting	čítání, počítání
countable set	spočetná množina
couple	pár, dvojice
cover	pokrývat, pokrytí
Cramer's rule	Cramerovo pravidlo
criterion	kriterium
cross point	průsečík
cross product	vektorový součin
cross ratio	dvojpoměr
crossing number	průsečíkové číslo (teorie grafů)
cross section	normálový řez
cube	krychle, kostka, třetí mocnina, umocnit na třetí
cubed	na třetí
cubic	krychlový, 3. stupně, křivka 3. st.
cubic equation	rovnice 3. stupně, kubická rovnice
cubic polynomial	mnohočlen 3. stupně
cubic root	třetí odmocnina
cubical contents, capacity	objem
cuboid	kvádr
cursor	běžec (na logaritmickém pravítku)
curvature	křivost, zakřivení
curve	křivka, oblouk
closed curve	uzavřená křivka
skew, space curve	prostorová křivka
curve order	stupeň křivky
curved	křivý, oblý
cut	protínat, řez
cybernetics	kybernetika
cycle	cyklus, perioda
cyclic	cyklický
cycloid	cyklolda
cylinder	válec
circular cylinder	kruhový válec
hollow cylinder	dutý válec
cylinder of revolution	rotační válec
cylindric(al)	válcový
cylindrical surface	válcová plocha

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

10

ROČNÍK 52, 1973-1974, CERVEN



rozhled

ROČNÍK 52
ČERVEN 1974

10

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava/ dr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1974.

OBSAH

Prof. E. Kraemer: K 25. výročí Pionýrské organizace SSM	433
Ing. M. Fídmuc: Vlastnosti funkcí reálné proměnné vzhledem k sčítání argumentu	434
Dr. B. Zelinka: Kapesní průvodce po království matematiky (Pokračování)	441
D. C. Vu: Poznámka o kořenech úplné kvadratické rovnice	445
V. Drápalík: O dělitelnosti sedmi	447
S. Horák: Nerovnosti v geometrii III.	448
P. Dub: O jednom problému z elektrostatiky	453
S. Valchař: Moderní využití Wheatstonova můstku v praxi	457
Dr. M. Šíroká-Dr. J. Šíroky: Konstelace planet	461
Olympiády	464
Recenze	474
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český 3. a 4. str. obálky	

K 25. výročí Pionýrské organizace SSM

PROF. EMIL KRAEMER, UK Praha

K významným výročím, která letos oslavujeme, patří také 25. výročí vzniku Pionýrské organizace. Byla založena 24. dubna 1949 na slučovací konferenci svazů české a slovenské mládeže v Praze, z nichž vznikl Československý svaz mládeže, na jehož činnost navazuje nynější Svaz socialistické mládeže.

Pionýrská organizace SSM je dnes mohutnou organizací, v níž bylo ke dni 30. dubna 1973 v celé ČSSR soustředěno 1 123 997 pionýrů a jisker a 98 980 pionýrských pracovníků, vedoucích a instruktorů. Ve své nynější činnosti se PO SSM řídí programovými a organizačními zásadami, které byly přijaty na I. sjezdu SSM v září 1972. Výchovný systém PO SSM zahrnuje jednak povinnosti závazné pro všechny členy, jednak část výběrovou, která umožňuje rozvíjet bohatou, všestrannou a pestrou činnost dětí a mládeže. Tak např. mimoškolní zájmová činnost v chemii se provádí prakticky jenom v domech pionýrů a mládeže a ve stanicích mladých přírodovědců. Velmi bohatá je činnost PO SSM v oblasti technické, kde jde o vyhledávání a rozvíjení technických talentů dětí a mládeže. Přitom se dbá o to, aby se při zachování zájmového charakteru této činnosti neztrácela ze zřetele příprava mladé generace ke společenským úlohám v rozvinuté socialistické společnosti v období vědeckotechnické revoluce.

Při pohledu na tuto bohatou činnost PO SSM si přejeme, aby se obdobně rozvinula i v té oblasti, která se dotýká oborů matematicko-fyzikálních. Zatím domy pionýrů a mládeže málo využívají existující možnosti pro pomoc talentovaným pionýrům a svazákům, kteří se zajímají o matematiku, fyziku nebo astronomii. Správnou cestu na tomto úseku nastoupil Ústřední dom pionierov a mládeže Klementa Gottwalda v Bratislavě, který se v posledních letech výrazně podílel na organizování celostátních kol matematické a fyzikální olympiády, na přípravách soustředění pro úspěšné řešitele těchto kol apod. Bylo by žádoucí, aby se obdobně zaktivizovaly i ostatní domy pionýrů a mládeže a do svých plánů i do své činnosti zahrnuly také soustavnou péči o mladé talenty v oblasti matematiky a fyziky. Snad by jim v této činnosti mohl pomoci i náš časopis, jehož redakce a několikatisícová čtenářská obec přeje PO SSM ve veškeré další činnosti mnoho zdaru a úspěchů.

Vlastnosti funkcí reálné proměnné vzhledem k sčítání argumentu

ING. MILOŠ FIDRMUC, Praha

Zajímavým problémem, jehož řešení ukazuje vlastnosti známých funkcí z jiného, překvapivého hlediska, případně také umožňuje vytvářet funkce nové, je úkol najít všechny funkce (nebo aspoň všechny funkce určitého jednoduchého typu), vyhovující závislosti tvaru

$$f(\alpha + \beta) = F[f(\alpha), f(\beta)] \quad (1)$$

nebo

$$f(\alpha \cdot \beta) = G[f(\alpha), f(\beta)] \quad (2)$$

nebo

$$f(-\alpha) = H[f(\alpha)] \quad (3)$$

nebo

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = J[f(\alpha)] \quad (4)$$

nebo i jiným závislostem. Na rovnici typu (1) mohou vést například měření na neznámém, nepřístupném objektu — tzv. „černé schránce“ — a řešením této rovnice lze pak explicitně popsat vlastnosti této „černé schránky“. Rovnice typu (2) ve tvaru $f(\alpha \cdot \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ vedla v době Keplerově k definici nové funkce $y = \log x$. Systematický průzkum např. rovnic typu (1) vede k zjištění zajímavých společných vlastností u funkcí zdánlivě tak vzdálených jako funkce exponenciální, lineární a goniometrické. Závislosti typu (1) až (4) popisují úplně vlastnosti funkcí vzhledem ke všem čtyřem základním aritmetickým operacím.

V tomto článku je pomocí jednoduchých prostředků ukázáno, jak řešit otázky existence a jak nalézt vyhovující funkce pro určité jednoduché tvary rovnice (1), a je zde též posouzena otázka jednoznačnosti těchto řešení.

V celém článku se pro jednoduchost zabývám pouze reálnými funkcemi reálné proměnné, spojitými v $(-\infty, \infty)$, kromě bodů nespojitosti, kterých v každém intervalu $(-K, K)$ (pro K reálné, $K < \infty$) je konečný počet, přičemž v takovýchto bodech má funkce vždy nevlastní limity

zprava i zleva. Takovouto funkci budu nazývat funkcí s vlastností S. Slovy funkce $f(x)$ vyhovuje rovnici $f(\alpha + \beta) = F[f(\alpha), f(\beta)]$ v oboru $\mathbf{P}$ budu rozumět, že tento vztah platí pro všechny kombinace čísel $\alpha \in \mathbf{P}$, $\beta \in \mathbf{P}$, $\alpha + \beta \in \mathbf{P}$. Nebude-li obor $\mathbf{P}$, kde funkce f vyhovuje rovnici (1), uveden explicitně, bude jím rozuměn obor spojitosti této funkce. Množina reálných čísel bude značena $\mathbf{R}$.

Předně ke každé explicitně zadané funkci f , která má v určitém oboru $\mathbf{P}$ funkci inverzní g , lze snadno najít rovnici typu (1), které f v tomto oboru vyhovuje.

Jestliže $\alpha = g[f(\alpha)]$ pro všechna $\alpha \in \mathbf{P}$, platí $f(\alpha + \beta) = f\{g[f(\alpha)] + g[f(\beta)]\}$ pro $\alpha \in \mathbf{P}$, $\beta \in \mathbf{P}$, $\alpha + \beta \in \mathbf{P}$.

Např. reálná funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ vyhovuje mimo bod $x = 0$ rovnici typu (1)

$$f(\alpha + \beta) = \frac{1}{\frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{f(\beta)}} = \frac{f(\alpha) \cdot f(\beta)}{f(\alpha) + f(\beta)} \quad (5)$$

reálná funkce $f(x) = \ln x$ vyhovuje pro $x > 0$ rovnici

$$f(\alpha + \beta) = \ln [e^{f(\alpha)} + e^{f(\beta)}] \quad (6)$$

Důležitá je tato vlastnost rovnic typu (1): funkce $f(x)$ a funkce $f(\varphi x)$, kde φ je libovolné reálné číslo, $\varphi \neq 0$, vyhovují stejné rovnici (1), jak ukazuje následující věta.

Věta 1. Nechť funkce $f(x)$ vyhovuje rovnici (1) v oboru $\mathbf{P}$. Nechť funkce g souvisí s funkcí f vztahem $g(x) = f(\varphi x)$ pro $x \in \mathbf{H}$, φ nechť je libovolné reálné číslo, $\varphi \neq 0$, a nechť je $\varphi x \in \mathbf{P}$ pro $x \in \mathbf{H}$. Pak funkce g vyhovuje v oboru $\mathbf{H}$ stejné rovnici (1) jako funkce f v oboru $\mathbf{P}$, tj. v oboru $\mathbf{H}$ platí opět

$$g(\alpha + \beta) = F[g(\alpha), g(\beta)].$$

Důkaz. Je-li $\alpha \in \mathbf{H}$, $\beta \in \mathbf{H}$, $\alpha + \beta \in \mathbf{H}$, je

$$g(\alpha + \beta) = f(\varphi\alpha + \varphi\beta) = F[f(\varphi\alpha), f(\varphi\beta)] = F[g(\alpha), g(\beta)].$$

Funkce $g_1(x) = \frac{1}{kx}$ pro $k \neq 0$, $k \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, má tedy „aditivní vlastnosti“ popsány toutéž rovnicí (1) jako $f_1(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, tj. rovnicí (5), $g_2(x) = \ln(kx)$ pro $x > 0$ při $k > 0$ a pro $x < 0$ při $k < 0$ rovnicí (6) jako $f_2(x) = \ln x$ pro $x > 0$.

Naproti tomu násobení funkce konstantou nebo přičtení k ní konstanty může vést k podstatné změně „aditivních vlastností“ funkce.

Věta 2. Nechť funkce $f(x)$ vyhovuje rovnici (1) v oboru $\mathbf{P}$. Nechť funkce h souvisí s funkcí f vztahem $h(x) = k f(x)$ pro $x \in \mathbf{P}$, nechť je k libovolné reálné číslo, $k \neq 0$. Pak funkce h vyhovuje v oboru $\mathbf{P}$ rovnici

$$h(\alpha + \beta) = kF\left(\frac{h(\alpha)}{k}, \frac{h(\beta)}{k}\right) \quad (7)$$

Důkaz. Je-li $\alpha \in \mathbf{P}$, $\beta \in \mathbf{P}$, $\alpha + \beta \in \mathbf{P}$, je

$$h(\alpha + \beta) = kf(\alpha + \beta) = kF[f(\alpha), f(\beta)] = kF\left(\frac{h(\alpha)}{k}, \frac{h(\beta)}{k}\right)$$

Věta 3. Nechť funkce $f(x)$ vyhovuje rovnici (1) v oboru $\mathbf{P}$. Nechť funkce q souvisí s funkcí f vztahem $q(x) = f(x) + k$ pro $x \in \mathbf{P}$, k nechť je libovolné reálné číslo. Pak funkce q vyhovuje v oboru $\mathbf{P}$ rovnici

$$q(\alpha + \beta) = F[q(\alpha) - k, q(\beta) - k] + k. \quad (8)$$

Důkaz. Je-li $\alpha \in \mathbf{P}$, $\beta \in \mathbf{P}$, $\alpha + \beta \in \mathbf{P}$, je

$$q(\alpha + \beta) = f(\alpha + \beta) + k = F[q(\alpha) - k, q(\beta) - k] + k.$$

Např. pro funkci $f(x) = e^x$ platí v $\mathbf{R}$: $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$, ale pro $h(x) = ke^x$ při $k \neq 0$, $k \in \mathbf{R}$, platí v témže oboru

$$h(\alpha + \beta) = \frac{h(\alpha)}{k} \cdot \frac{h(\beta)}{k} \quad (9)$$

pro $q(x) = e^x + k$, při $k \in \mathbf{R}$, platí v $\mathbf{R}$

$$q(\alpha + \beta) = q(\alpha) \cdot q(\beta) - k[q(\alpha) + q(\beta)] + k^2 + k. \quad (10)$$

Vzhledem ke komutativnosti sčítání u reálných čísel je $f(\alpha + \beta) = f(\beta + \alpha)$, a tedy funkce F v rovnici (1), které f vyhovuje, musí splňovat podmínku

$$F[f(\alpha), f(\beta)] = F[f(\beta), f(\alpha)].$$

Této podmínce vyhovuje funkce F , obsahující kromě konstant pouze výrazy symetrické vzhledem k $f(\alpha)$, $f(\beta)$ $f(\alpha) + f(\beta)$, $f(\alpha) \cdot f(\beta)$, $f^2(\alpha) + f^2(\beta)$, atd.

Řešení dané rovnice (1) mohou být triviální $f(x) = \text{konst.}$ pro $x \in \mathbf{R}$, a netriviální. Triviální se obvykle snadno určí. Nebudu je dále sledovat a omezím se v dalším na takové funkce s vlastností S , které v nějakém intervalu $(0, X)$ ze svého oboru spojitosti jsou ryze monotonní a zobrazují tedy tento interval hodnot x na interval (A, B) hodnot $f(x)$, přičemž $A < B$. Takovouto funkci budu nazývat funkcí s vlastností SS , a tento interval (A, B) budu nazývat jejím „intervalem netriviality“. Důvod, proč je požadována ryzí monotonnost v intervalu sousedícím právě s $x = 0$, se osvětlí při diskusi jednoznačnosti řešení.

Aby existovala aspoň jedna funkce f s vlastností SS, vyhovující dané rovnici (1), musí funkce F z této rovnice splňovat určité podmínky. Předně existuje-li funkce f s vlastností SS, a která je v $x = 0$ spojitá a vyhovuje dané rovnici (1) všude ve svém oboru spojitosti, platí pak

$$F[f(\alpha), f(0)] = f(\alpha)$$

pro všechna α z tohoto oboru, a tedy též pro všechna $f(\alpha) \in (A, B)$, tj. „intervalu netriviality“ funkce f .

Věta 4. Aby existovala aspoň jedna funkce s vlastností SS, spojitá v $x = 0$, vyhovující dané rovnici (1), musí existovat reálné číslo p a interval (A, B) , $A < B$, takové, že

$$F(y, p) = y \quad (11)$$

identicky pro všechna $y \in (A, B)$.

Důkaz. Existuje-li pro danou rovnici (1) řešení f uvedených vlastností, existuje i číslo p a interval (A, B) uvedených vlastností. Stačí zvolit $p = f(0)$ a za (A, B) vzít „interval netriviality“ funkce f .

Odvození podobné podmínky, nutné pro existenci řešení s nevlastními limitami v $x = 0$ zprava i zleva, je poněkud složitější, ale zde ho nebude potřeba.

Podle věty 1 vyhovuje dané rovnici (1), kterou splňuje funkce $f(x)$, přinejmenším vždy celá skupina funkcí, lišících se pouze koeficientem φ u x . Proto k úplnému určení řešení kromě rovnice (1) je nutno zadat další podmínky, které podobně jako u diferenciálních rovnic mohou tvořit nějaké „počáteční“ podmínky.

Pomocí uvedených vět a představ lze již řešit vytčený úkol pro nejjednodušší tvar rovnice (1)

$$f(\alpha + \beta) = af(\alpha)f(\beta) + b[f(\alpha) + f(\beta)] + c, \quad (12)$$

kde a, b, c jsou libovolná reálná čísla.

Pro jaká a, b, c existuje (aspoň jedna) funkce vlastností SS, vyhovující rovnici (12)?

Rovnice (12) pro jakákoliv (konečná) a, b, c nemůže mít žádné takové řešení f s nevlastními limitami v bodě $x = 0$, protože u takového f lze najít $x_0 > 0$, $\delta > 0$, že v bodě $x = -x_0$, v bodech $0 < |x| < \delta$ a v bodech $|x - x_0| < \delta$ je f spojitá, a tedy pro $0 < |\xi| < \delta$ platí

$$f(x_0 + \xi - x_0) = f(\xi) = af(x_0 + \xi)f(-x_0) + b[f(x_0 + \xi) + f(-x_0)] + c,$$

a tedy

$$\lim_{\xi \rightarrow 0 \pm} f(\xi) = \pm \infty = af(x_0)f(-x_0) + b[f(x_0) + f(-x_0)] + c. \quad (13)$$

Přitom f uvedených vlastností by byla v $x = x_0$ a $x = -x_0$ spojitá, a tedy konečná, takže rovnice (13) by nemohla být splněna.

Aby rovnici (12) vyhovovala funkce vlastností SS, spojitá v $x = 0$, musí podle věty 4 existovat reálné číslo p a interval (A, B) , $A < B$ tak, že

$$ayp + b(y + p) + c = y \quad \text{pro } y \in (A, B),$$

tedy

$$y(1 - ap - b) - bp - c = 0,$$

a tedy

$$1 = ap + b \quad bp + c = 0.$$

Vyloučením p najdeme, že tyto podmínky je možno splnit buď při

$$\left. \begin{array}{l} c = \frac{b(b-1)}{a} \\ a \neq 0 \\ b \text{ libovolné} \end{array} \right\} \quad (14)$$

nebo při

$$\left. \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 1 \\ c \text{ libovolné} \end{array} \right\} \quad (15)$$

Snadno se najde skupina funkcí, vyhovujících (12) při parametrech (15). Rovnici $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta) + c$ vyhovují totiž zřejmě v $\mathbb{R}$ funkce

$$f(x) = \varphi x - c \quad (16)$$

pro φ libovolné reálné, $\varphi \neq 0$. Pro každou hodnotu c existuje tedy celá skupina řešení. K úplnému určení řešení je třeba ještě zadat „počáteční“ podmínku $f(x_0) = y_0$. Volbou φ lze splnit tuto podmínku při $x_0 \neq 0$ pro y_0 libovolné, $y_0 \neq -c$. Pro $y_0 = -c$ vyhovuje rovnici (12) triviální

$$f(x) = -c = \text{konst.} \quad (17)$$

Abychom našli řešení rovnice (12) při parametrech (14), uvážíme (9) a (10). V obecnějším případě

$$f(x) = ke^{\varphi x} + q \quad \text{pro } k \neq 0, q \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \quad (18)$$

je

$$f(\alpha + \beta) = \frac{f(\alpha) \cdot f(\beta)}{k} - \frac{q}{k} [f(\alpha) + f(\beta)] + q \left(\frac{q}{k} + 1 \right) \quad (19)$$

Volbou $k = \frac{1}{a}$, $q = -\frac{b}{a}$, φ libovolné reálné, $\varphi \neq 0$ dává (18) celou skupinu řešení rovnice (12) pro každou trojici a, b, c , vyhovující (14).

Tedy pro rovnici (12) je podmínka (11) nejen nutná, nýbrž i postačující pro existenci řešení vlastností SS.

Řešení (18) vyhovující téže rovnici (12) se liší mezi sebou hodnotami parametru φ . „Počáteční“ podmínkou $f(x_0) = y_0$ pro $x_0 \neq 0$ je možno určit φ a tím úplně řešení f . Přitom funkcemi (18) nelze žádnou volbou φ splnit „počáteční“ podmínku $f(x_0) = y_0$ pro

$$\text{nebo} \quad \left. \begin{aligned} y_0 &\leq q = -\frac{b}{a} \text{ při } k = \frac{1}{a} > 0 \\ y_0 &\geq q = -\frac{b}{a} \text{ při } k = \frac{1}{a} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Důležité je, že pro $f(x_0) = y_0$, zahrnuté v (20), vyjma $y_0 = -\frac{b}{a}$, vyplývají z

$$f(x_0) = af^2\left(\frac{x_0}{2}\right) + 2bf\left(\frac{x_0}{2}\right) + c \quad (21)$$

možné hodnoty $f\left(\frac{x_0}{2}\right)$ imaginární, jak je zřejmé z (21), (20), (14). Tato okolnost má podstatný význam v následujícím posouzení jednoznačnosti nalezených řešení.

Pro $y_0 = -\frac{b}{a}$ rovnicím (12) při parametrech (14) vyhovuje triviální

$$f(x) = -\frac{b}{a} = \text{konst.} \quad (22)$$

Z tvaru rovnice (12) vyplývá $f(0) = p$. Pro parametry (15) je $f(0) = -c$, pro parametry (14) je $f(0) = \frac{1-b}{a}$, jak vyplývá z (12) pro $\beta = 0$.

O jednoznačnosti nalezených řešení rovnice (12) lze užitím jednoduchých úvah říci: Existuje-li funkce g vlastností SS, vyhovující (12), lze najít funkci f tvaru (16) nebo (17) nebo (18) nebo (22), která s ní splývá v libovolně husté síti bodů $x = 0, \pm\varepsilon, \pm 2\varepsilon, \dots$, pro $0 < \varepsilon < \delta$, kde $\delta > 0$ je zadané libovolně malé číslo.

Splňují-li f a g tutéž rovnici (12), je $g(0) = f(0)$. Vezmu interval $(0, \delta)$, odstraním z něj body nespojitosti funkce g a též všechny body x_0 takové, že $\frac{x_0}{2}$ je bod nespojitosti funkce g . Dále, jestliže rovnice (12), které g vyhovuje, má $a \neq 0$, odstraním z $(0, \delta)$ všechny body x , pro které $g(x) = -\frac{b}{a}$. Protože g má vlastnosti SS, zbývá v $(0, \delta)$ stále nekonečně mnoho bodů. Za ε pak vyberu libovolné x ze zbývajících bodů intervalu $(0, \delta)$. Naleznu $g(\varepsilon) = y_0$ a dále skupinu funkcí (16) nebo (18),

vyhovujících též rovnici (12) jako g . Jestliže volbou φ nelze najít $f(x)$ z této skupiny funkcí, mající $f(\varepsilon) = g(\varepsilon)$ a $g(\varepsilon) \neq -c$ pro parametry (15) nebo $g(\varepsilon) \neq \frac{b}{a}$ pro parametry (14), patří zřejmě $y_0 = g(\varepsilon)$ do sku-

piny počátečních podmínek (20), a tedy $g\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ musí mít imaginární hodnotu, což je ve sporu se způsobem vybrání ε . Funkce g vlastností SS s touto hodnotou $g(\varepsilon)$ tedy nemůže existovat.

Jestliže naleznu $f(x)$ mezi funkcemi (16), (17), (18), (22), vyhovující též rovnici (12) jako $g(x)$ a mající $f(\varepsilon) = g(\varepsilon)$, mohu z této rovnice (12) vypočítat $f(2\varepsilon)$, $f(3\varepsilon)$, . . ., která musí být rovna $g(2\varepsilon)$, $g(3\varepsilon)$, protože f i g splňují touž rovnici (12). Z hodnoty $f(\varepsilon) = g(\varepsilon)$ a $f(0) = g(0)$ lze jednoznačně určit $f(-\varepsilon) = g(-\varepsilon)$, protože

$$f(0) = f[\varepsilon + (-\varepsilon)] = a f(\varepsilon) f(-\varepsilon) + b[f(\varepsilon) + f(-\varepsilon)] + c. \quad (23)$$

$$\text{Je-li } a = 0, \text{ je } f(-\varepsilon) = \frac{f(0) - c}{b} - f(\varepsilon) = g(-\varepsilon).$$

Kdyby $a = b = 0$, byla by příslušná rovnice (12) $g(\alpha + \beta) = c$, tedy by bylo g triviální, což je ve sporu s předpokladem, že g má vlastnosti SS. Pro $a \neq 0$ vyplývá tedy z (23)

$$f(-\varepsilon) = \frac{f(0) - c - b f(\varepsilon)}{a f(\varepsilon) + b} = g(-\varepsilon).$$

Protože ε bylo zvoleno tak, že $f(\varepsilon) \neq -\frac{b}{a}$, je jmenovatel $a f(\varepsilon) + b \neq 0$. Z hodnoty $f(-\varepsilon) = g(-\varepsilon)$ lze pomocí (12) opět určit síť $x = -\varepsilon, -2\varepsilon, \dots$, kde se f rovněž shoduje s g .

Tedy všechna řešení rovnice (12) s vlastností SS v libovolně husté síti splývají s jedním z nalezených řešení (16), (17), (18), (22). V tomto smyslu jsou tedy tato nalezená řešení jediná.

Podobně je možno řešit složitější úlohu pro (1) tvaru

$$f(\alpha + \beta) = \frac{af(\alpha)f(\beta) + b[f(\alpha) + f(\beta)] + c}{f(\alpha)f(\beta) + e[f(\alpha) + f(\beta)] + m} \quad (24)$$

Ukazuje se, že řešení této rovnice, mající vlastnosti SS, jsou tvaru

$$f = k \operatorname{tg}(\varphi x + c) + q$$

nebo

$$f = \frac{k\varphi x + q}{\varphi x + c}$$

nebo

$$f = \frac{ke^{\varphi x} + q}{e^{\varphi x} + c}$$

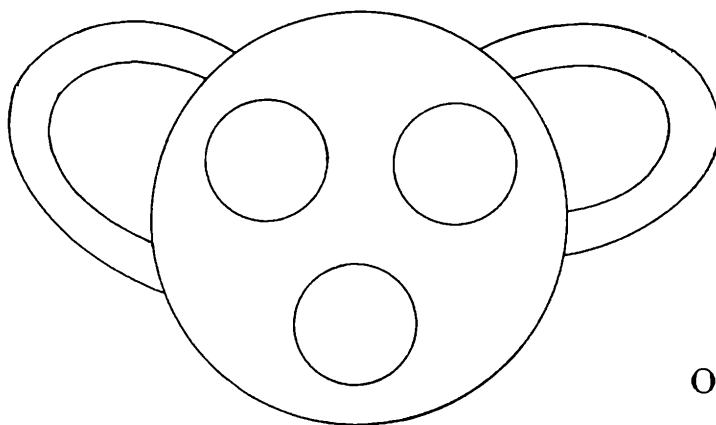
kde k, q, c, φ jsou reálná čísla, $\varphi \neq 0$. Tak řešení rovnic (1) pro jednoduché tvary (12) a (24) ukazují zajímavou souvislost funkcí lineárních a exponenciálních, funkcí trigonometrických, podílu dvou funkcí lineárních a podílu dvou funkcí exponenciálních.

Kapesní průvodce po království matematiky

RNDr. BOHDAN ZELINKA, CSc., Liberec

(Pokračování)

Na geometrii navazuje topologie. Toto slovo vzniklo z řeckého slova *τοπος*, což znamená místo a nazývala se původně „analysis situs“, tedy analýza místa. Topologie jde v Kleinově Erlangenském programu nejdále; zkoumá invarianty grupy spojitých transformací. Stručně řečeno, nerozlišuje například kružnici od elipsy ani od obvodu trojúhelníka, zajímá ji u kružnice jen to, že jde o jednoduchou uzavřenou křivku. Máme-li tedy drát v podobě kružnice, můžeme jej různě mačkat a natahovat a z hlediska topologie se s ním nic neděje, neboť to mačkání



Obr. 1

a natahování jsou spojitě transformace. Teprve kdybychom drát roztrhli nebo z něj sletovali osmičku, topolog by si toho všiml, protože by tím už vzniklo něco jiného. Jsou různé druhy topologie jako algebraická, množinová, kombinatorická a podobně. Právě ta okolnost, že příliš nezáleží na tvaru, vede topology k tomu, že kreslí topologické útvary ve svých knihách ve formě různých žertovných obrázků. Svého času se maďarský matematik Kérékjártó nějak nepohodl s německým matematikem Bessellem a vyvedl mu pěkný topologický žertík. V autorském rejstříku jedné své knihy uvedl jméno Bessel a u něho číslo stránky; na dotyčné stránce však nebyla žádná zmínka o Besselovi, ale zato tam byl topologický útvar, který reprodukuje na obr. 1. (A pak se říká, že matematikové jsou suší patroni bez smyslu pro humor!)

Od topologie se jako samostatná disciplína oddělila teorie grafů. Nejde zde o grafy funkcí, ale o útvary, které s nimi mají společný jen ten název odvozený z řeckého *γραφειν* — psáti. Grafy zkoumané v teorii grafů se skládají z koleček, kterým se říká uzly, a z čáreček, kterým se říká hrany a které tyto uzly spojují. Jsou-li u těch čáreček ještě šipky, jde o graf orientovaný, v opačném případě je to graf neorientovaný. Grafem je například mapa železniční sítě; v ní uzly jsou železniční stanice a hrany jsou úseky trati mezi nimi. Podobně lze grafem znázornit i silniční nebo telefonní síť nebo elektrický obvod. Teorie grafů se vyznačuje bohatostí své terminologie. Mluví se v ní nejen o cestách, drahách, mostech, listech, hvězdách a stromech, ale setkáme se tu dokonce i s termíny (matematickými!) had a kaktus. Přitom platí, že každý strom je kaktus, ale ne každý kaktus je strom. Jeden autor píše dokonce i o stromech obsahujících třešně! Z neřešených problémů teorie grafů uvedme slavný problém čtyř barev, který byl sice už mnohokrát „vyřešen“, ale vždy se v „řešení“ našla nějaká chyba. Představme si mapu, na níž jsou znázorněna nějaká území; tuto mapu máme vybarvit tak, aby sousední území měla různou barvu (jak je to obvyklé na politických mapách). Pět barev na to stačí, tři nikoliv. Otázkou je, zda na to stačí čtyři barvy.

Teorie grafů úzce souvisí s kombinatorikou. I ta dospěla již mnohem dále než k známým faktoriálům a tvoří důležitou součást moderní matematiky.

Nebývá zpravidla zvykem, aby seriózní přednášející hovořil na své přednášce o takových předmětech neřesti, jako jsou hrací kostky a karty, nebo je dokonce s sebou na přednášku nosil a manipuloval s nimi jako varietní kouzelník. A přece existuje matematická disciplína, kde je to pravidlem. Je to teorie pravděpodobnosti. Pojem pravděpodobnosti lze asi stěží vysvětlit lépe než právě pomocí kostek a karet. Samozřejmě to neznamená, že by tato teorie měla význam jen pro herny hazardních her. Má stále větší význam pro řadu vědeckých oborů i pro moderní průmysl. S teorií pravděpodobnosti totiž úzce souvisí matematická statistika a statistika vůbec. O statistice se sice kdosi vyjádřil, že je to věda, zabývající se přesnými součty nepřesných čísel, přesto však je její význam pro moderní hospodářství nesporný.

Začali jsme zde už mluvit o hrách. Existují samozřejmě ušlechtilější hry než vrhcáby, oko nebo gotes — například šach. Ani takovéto hry neunikly pozornosti matematiků. Pokud jde o šach, nedošla matematika v tomto zkoumání příliš daleko, neboť počet různých pozic v této hře je obrovský. Existují sice samočinné počítače, které hrají šach, rozhodně však nejsou neporazitelné. Jednodušší hry jako mlýn nebo ovčinec se však podařilo zvládnout matematickou teorií. Matematický obor, který se nazývá hrami, se nazývá teorie her. A opět se význam této disciplíny neomezuje jen na kratochvilné hry. Například hospodářské plánování

lze často pojímat jako hru, kterou hraje člověk proti silám přírody; i v této hře lze uplatnit zákonitosti teorie her.

S hospodářským plánováním rovněž souvisí teorie optimalizace, která umožňuje volit nejvýhodnější hodnoty určitých parametrů za daných podmínek. Součástí této teorie je například lineární programování nebo dynamické programování. (Nezaměňovat s programováním samočinných počítačů, o němž bude ještě řeč.)

Nyní už vidíme, že přece jen zdaleka není pravda, že by se v moderní matematice vůbec nepočítalo. Jakmile se mají teoretické výsledky uplatnit v praxi, je skutečně nutno počítat. Řešíme-li například nějakou diferenciální rovnici, může se stát, že její řešení vůbec nenajdeme v takovém tvaru, v němž by byla na jedné straně proměnná a na druhé zápis nějaké funkce, do něhož bychom mohli přímo dosazovat, přitom však toto řešení existuje a jednotlivé jeho hodnoty vypočítat můžeme, alespoň v určité přibližné hodnotě (aproximaci). Stejně tak můžeme nalézt přibližná řešení algebraických rovnic vyšších stupňů nebo takzvaných transcendentních rovnic nebo přibližné hodnoty určitých integrálů. Metody, jimiž tato řešení získáváme, se nazývají numerické metody a tvoří samostatnou matematickou disciplínu.

Podobným oborem jsou grafické metody. Mezi ně patří například nomografie. Ta nám umožňuje rychle hledat určité číselné hodnoty (rychleji než listováním v tabulkách) třeba tak, že si na určitém obrázku (nomogramu) najdeme hodnoty dvou nezávisle proměnných na dvou stupnicích, příslušnými body proložíme přímkou a ta nám na třetí stupnici ukáže hodnotu závisle proměnné.

Počítat podle numerických metod s tužkou a papírem by bylo ovšem úmornou dřinou. Avšak i v matematice v moderní době platí heslo: Dřinu strojům! O významu samočinných počítačů zajisté víte z denního tisku a různých populárně vědeckých časopisů. Každý počítač musí být ovšem konstruován a řízen člověkem. Člověk musí dávat stroji příkazy, ale musí je dávat tak, aby jim stroj rozuměl. Kdyby vás někdo o něco žádal jazykem kmene Mohawků, asi by se jeho slova minula s účinkem. Podobně i ke stroji musíme „mluvit“ tak, aby nám rozuměl. Musíme mluvit v jeho jazyce, kterému se říká strojový kód. Různých typů počítačů je však možná více než národů na zeměkouli. Proto byly zavedeny takzvané univerzální programovací jazyky, které jsou jakýmsi počítačovým esperantem. Počítač si soustavu příkazů (program) v takovémto jazyce přečte a pomocí takzvaného kompilátoru přeloží do svého kódu. Nejvýznamnější univerzální programovací jazyky jsou Algol, Fortran a Cobol. Podobně jako lidské jazyky se i tyto jazyky neustále vyvíjejí, a tak vznikají stále nové varianty těchto jazyků. Varianta se zpravidla označuje názvem příslušného jazyka a posledním dvojčíslím roku, v němž byla zavedena — například Algol 60.

Kromě řízení (programování) počítačů se matematikové zabývají také

konstrukcí počítačů, v této práci se ovšem musejí spojit s techniky. Čistě matematickými základy počítačů (ale i jiných systémů) se zabývá teoretická kybernetika. Významnou složkou tohoto oboru je teorie automatů. Automaty mohou být různé, například konečné automaty nebo Turingovy stroje. Zkusme například navštívit pracoviště, které se zabývá Turingovými stroji. Očekávali bychom, že již zdáli uslyšíme hukot motorů. Slyšíme však naprosté ticho a ani na pracovišti samém se nic nepohybuje kromě tužek píšících a kreslících na papíře. Chceme-li se tvářit jako odborníci a zeptáme-li se, kolik kilowatthodin taková mašina sežere, bude odpovědí jen shovívavý úsměv. Turingův stroj totiž nelze ve skutečnosti sestavit, protože by musel obsahovat nekonečnou pásku. (Lépe řečeno, on ji obsahuje, protože o něm uvažujeme jako o existujícím.) Je to pouze určitý matematický pojem, který bychom mohli přirovnat k pojmu ideálního plynu ve fyzice. Ten také neexistuje, ale úvahy o něm pomáhají při zkoumání skutečných plynů. Tak i Turingův stroj a ostatní typy automatů jsou vlastně jakési idealizované počítače.

A konečně přistupujeme k aplikované matematice. Mluvili jsme už o aplikacích matematiky v ekonomii. Dále je všeobecně známo, že fyzika, chemie, astronomie a technické vědy by se bez matematiky neobešly. Matematika se však uplatňuje i v biologii, psychologii, sociologii a dokonce i v právní vědě a v medicíně. Zabývat se aplikovanou matematikou není ovšem snadné. Člověk zde potřebuje důkladné znalosti jak matematiky, tak i oboru, jehož se aplikace týkají.

Zmiňme se trochu podrobněji o aplikacích matematiky v jazykovědě. Zabývá se jimi matematická lingvistika. Ta se dělí na několik částí. Kvalitativní lingvistika zkoumá gramatickou strukturu vět i delších textů. Může vycházet z dané gramatiky a pomocí ní jazyk konstruovat (generativní lingvistika) nebo naopak analyzovat již hotový jazyk (analytická lingvistika). Netýká se to ovšem jen přirozených (národních) jazyků, ale i programovacích jazyků a dalších matematických konstrukcí, kterým se také říká jazyky. Můžeme mít například jazyk, jehož slovník se skládá pouze ze symbolů a a b a jehož věty jsou posloupnosti složené z určitého počtu áček, po nichž následuje stejný počet béček. Kvantitativní lingvistika zkoumá například četnosti hlásek nebo slov v různých jazycích; poučí nás o tom, že v češtině je nejčastěji používanou souhláskou n , zatímco v angličtině t . Konečně se matematická lingvistika zabývá i problémy strojového překladu.

S kvantitativní lingvistikou souvisí teorie informace. Zkoumá zákonitosti předávání informací. Z dětství znáte možná hru na tichou poštu. Zmíněný obor se stará mimo jiné i o to, aby to při předávání opravdu důležitých informací nedopadalo jako v této hře. Setkáváme se zde i s pojmem redundance, což znamená nadbytečnost. Dovíme-li se, že čeština má redundanci přes tři bity (což jsou jednotky zavedené v této teorii), asi tím budeme znepokojeni, protože si připomeneme přísloví, že

všeho moc škodí, a chtěli bychom, aby tato nadbytečnost byla raději nulová. Nevěřme však vždy příslovím. V textech psaných jazykem s nulovou redundancí by tiskařský šotek způsobil nesmírné škody, protože jakákoliv záměna i jediného písmene by dala textu jiný význam.

Z toho velikého množství matematických oborů se vám už asi točí hlava. Aby se udržel přehled nad těmito obory a mohly se zobecňovat výsledky jednotlivých disciplín, je tu filosofie matematiky. Při cestování královstvím matematiky musíme zachovat ve vděčné paměti ty, kteří nám naše cesty v minulosti proklestili; proto máme historii matematiky. Ale nestačí jen hledět do minulosti, je třeba myslet i na budoucnost. Budoucnost matematiky bude taková, jaké budou příští generace matematiků. Mezi ně budou patřit i mnozí z vás. O tom, jak co nejlépe vpravovat matematické poznatky do mozků nové generace, nás poučuje teorie vyučování matematice.

Tak tedy vypadá království matematiky. Je velmi rozsáhlé a stále se zvětšuje. V království matematiky není lanovek, každý vrchol je třeba zdolat vlastní silou. Doufám však, že vás to od zamýšlené cesty neodradí. Turistické průvodce také uvádějí kilometráže silnic a značkových cest i nadmořské výšky horských vrcholů a nečiní tak proto, aby turisty odradily od cestování, ale aby je informovaly o tom, co na ně čeká, a připravily je na cestu. A tak i vy se připravte na cestu královstvím matematiky. Přeji vám na ní mnoho zdaru!

Poznámka o kořenech úplné kvadratické rovnice

DINH CÔNG VU, Vietnamská demokratická republika

Při studijním pobytu v Československu jsem se seznámil s rozsahem učiva o řešení kvadratických rovnic v československých školách. Snad bude čtenáře Rozhledů zajímat jedna speciální věta o kořenech úplné kvadratické rovnice, kterou jsem v učebnicích ČSSR nenašel. Zní:

Úplná kvadratická rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad abc \neq 0$$

má kořeny 1 a c/a právě tehdy, když $a + b + c = 0$.

Důkaz: a) Je-li $a + b + c = 0$, pak $a + c = -b$ a po dosazení do vzorce pro kořeny úplné kvadratické rovnice dostaneme

$$x_{1,2} = \frac{(a + c) \pm \sqrt{(a + c)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(a + c) \pm \sqrt{(a - c)^2}}{2a}$$

Protože

$\sqrt{(a - c)^2} = |a - c|$, je $\sqrt{(a - c)^2} = a - c$ pro $a > c$ a $\sqrt{(a - c)^2} = -(a - c)$ pro $a < c$. V obou případech je tedy

$$x_{1,2} = \frac{(a + c) \pm (a - c)}{2a}$$

a odtud

$$x_1 = 1 \quad \text{a} \quad x_2 = c/a.$$

b) Nechť má kvadratická rovnice kořeny 1 a a/c ; pak pro $x = 1$ platí

$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0,$$

tedy

$$a + b + c = 0;$$

pro druhý kořen c/a platí

$$a \cdot \frac{c^2}{a^2} + b \cdot \frac{c}{a} + c = 0;$$

odtud po násobení číslem $a^2 \neq 0$

$$ac^2 + abc + a^2c = 0$$

a po vytknutí

$$ac(c + b + a) = 0.$$

Protože $ac \neq 0$, musí být $c + b + a = 0$.

Zcela obdobně by se dokázala věta:

Úplná kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $abc \neq 0$ má kořeny -1 a $-c/a$ právě tehdy, když

$$a - b + c = 0.$$

Pomocí uvedených vět můžeme rychle vypočítat kořeny kvadratických rovnic, jejichž koeficienty splňují uvedené podmínky.

Příklady: V rovnici $5x^2 - 4x - 1 = 0$ je součet koeficientů $a + b + c = 5 - 4 - 1 = 0$, takže podle první z uvedených vět je

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1/5 = -0,2.$$

V rovnici $13x^2 + 9x - 4 = 0$ platí o koeficientech a, b, c , že $a - b + c = 19 - 9 - 4 = 0$, takže podle druhé z uvedených vět je

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{(-4)}{13} = \frac{4}{13}$$

0 dělitelnosti sedmi

VLADIMÍR DRÁPALÍK, stud. gymnasia ve Strakonících

Ve škole jsem několikrát slyšel, že není znám znak dělitelnosti sedmi, podle něhož by se na otázku, zda dané celé číslo je dělitelné sedmi, dalo odpovědět pohodlněji a rychleji, než když dané číslo sedmi vydělíme. Snad právě proto jsem se nad tímto problémem hlouběji zamyslel a zdá se mi, že s určitým úspěchem.

Pro každé přirozené číslo A , jehož zápis v desítkové soustavě má číslice $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, kde indexy značí řady těchto číslic, platí

$$A = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n.$$

Dále víme, že platí

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 1 \pmod{7},^1) \\ 10 &\equiv 3 \pmod{7}, \\ 100 &\equiv 2 \pmod{7}, \\ 1\,000 &\equiv 6 \equiv -1 \pmod{7}, \\ 10\,000 &\equiv 4 \equiv -3 \pmod{7}, \\ 100\,000 &\equiv 5 \equiv -2 \pmod{7}, \\ 1\,000\,000 &\equiv 1 \pmod{7}, \\ 10\,000\,000 &\equiv 3 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Jelikož platí

$$10^6 \equiv 1 \pmod{7},$$

platí pro každé přirozené číslo m

$$10^{6m} \equiv 1^m \pmod{7},$$

čili

$$10^{6m} \equiv 1 \pmod{7}.$$

Pro libovolná čísla k, m platí $10^{k+6m} = 10^k \cdot 10^{6m}$, takže pro každá dvě přirozená čísla k, m je

$$10^{k+6m} \equiv 10^k \pmod{7}.$$

Použijeme-li vlastností kongruencí, dostáváme

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + a_4 \cdot 10^4 + a_5 \cdot 10^5 + \\ &+ a_6 \cdot 10^6 + a_7 \cdot 10^7 + a_8 \cdot 10^8 + a_9 \cdot 10^9 + \dots + a_n \cdot 10^n \equiv \\ &\equiv a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot (-1) + a_4 \cdot (-3) + a_5 \cdot (-2) + \\ &+ a_6 \cdot 1 + a_7 \cdot 3 + a_8 \cdot 2 + a_9 \cdot (-1) + \dots + a_n \cdot z \pmod{7}, \end{aligned}$$

kde $z \equiv 10^n \pmod{7}$ a přitom $z \in \{1, 3, 2, -1, -3, -2\}$.

¹⁾ Zápis $a \equiv b \pmod{m}$, kde a, b jsou celá čísla a m je přirozené číslo, se čte „ a je kongruentní s b podle modulu m “ a vyjadřuje, že čísla a a b dávají při dělení číslem m též zbytek.

Tolik tedy teorie, s čím je dané číslo A kongruentní podle modulu 7. Pro početní praxi to znamená, že při zjišťování dělitelnosti sedmi napíšeme pod dané přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě odzadu začátek periodické posloupnosti 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, ... tak, že pod cifrou řádu 0 je číslo 1, pod cifrou řádu 1 je číslo 3 atd. Poté každou cifru daného čísla znásobíme číslem pod ním napsaným a všechny tyto součiny sečteme. Je-li tento součet roven 0 nebo je-li dělitelný sedmi beze zbytku, je i dané číslo dělitelné sedmi beze zbytku. Není-li uvedený součet dělitelný sedmi, je potom jeho zbytek při dělení sedmi roven zbytku daného čísla při dělení sedmi.

Příklady: 1. Máme zjistit, zda číslo 217 147 je dělitelné sedmi.

$$\begin{array}{rcccccc} 2 & 1 & 7 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline -4 & - & 3 & - & 7 & + & 2 & + & 12 & + & 7 & = & 7 \end{array}$$

Součet 7 znamená, že číslo 217 147 je dělitelné 7.

Zkouška: $217\,147 : 7 = 31\,021$.

2. Máme vyšetřit, zda číslo 1 520 031 187 je dělitelné sedmi.

$$\begin{array}{rcccccccccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 8 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline -1 & + & 10 & + & 6 & + & 0 & + & 0 & - & 9 & - & 1 & + & 2 & + & 24 & + & 7 & = & 38 \end{array}$$

Číslo 38 dává při dělení sedmi zbytek 3, takže číslo 1 520 031 187 dává při dělení sedmi zbytek 3. Kdybychom nevěděli, že $38 = 5 \cdot 7 + 3$, pak bychom mohli podle našeho znaku dělitelnosti pokračovat dále. Postupně dostáváme:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{r} 3 \quad 8 \\ 3 \quad 1 \\ \hline 9 + 8 = 17, \end{array} & \begin{array}{r} 1 \quad 7 \\ 3 \quad 1 \\ \hline 3 + 7 = 10, \end{array} & \begin{array}{r} 1 \quad 0 \\ 3 \quad 1 \\ \hline 3 + 0 = 3. \end{array} \end{array}$$

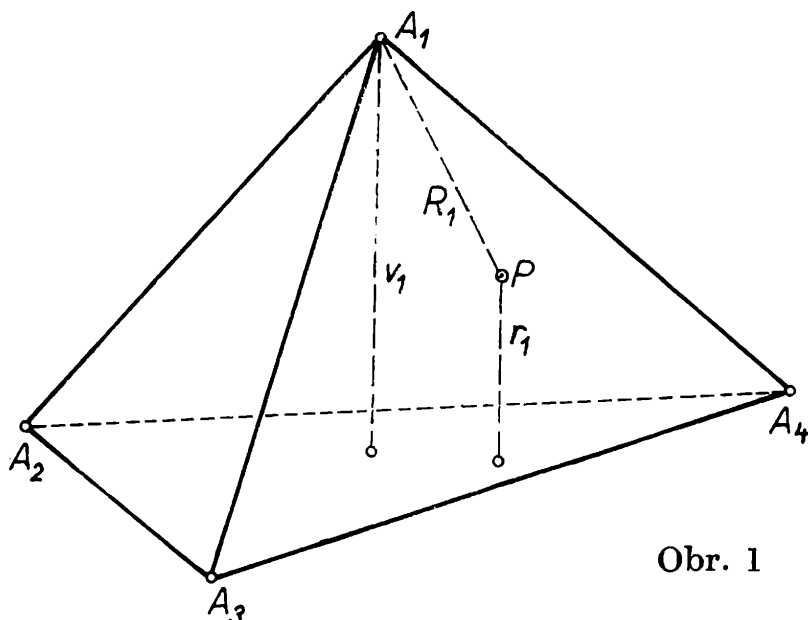
Zkouška: $1\,520\,031\,187 = 7 \cdot 217\,147\,312 + 3$.

Jak je vidět, je popsáný způsob vhodný zvláště pro víceciferná čísla.

Nerovnosti v geometrii III

STANISLAV HORÁK, Praha

Mějme daný čtyřstěn $A_1A_2A_3A_4$ a jeho vnitřní bod P . Označme: V objem daného čtyřstěnu, V_1 (V_2 , V_3 , V_4) objem čtyřstěnu $A_2A_3A_4P$ ($A_3A_4A_1P$, $A_4A_1A_2P$, $A_1A_2A_3P$), S_i obsah té stěny čtyřstěnu, která leží



Obr. 1

proti vrcholu A_i , v_i výška čtyřstěnu, procházející vrcholem A_i , $R_i = PA_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), r_i je vzdálenost bodu P od stěny neobsahující vrchol A_i .

Věta 1. Pro daný čtyřstěn platí

$$\sum_{i=1}^4 \frac{R_i}{v_i} \geq 3.$$

Rovnost platí právě tehdy, když daný čtyřstěn je ortocentrický.

Důkaz (obr. 1). Z obrázku je okamžitě patrné, že

$$R_1 + r_1 \geq v_1.$$

Rovnost platí právě tehdy, když bod P leží na výšce v_1 . Napsanou nerovnost postupně upravujeme

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{v_1} &\geq \frac{v_1 - r_1}{v_1} = \frac{v_1 S_1 - r_1 S_1}{v_1 S_1} \\ \frac{R_1}{v_1} &\geq \frac{V - V_1}{V} \end{aligned} \tag{1}$$

Cyklickou záměnou dojdeme k dalším třem nerovnostem:

$$\frac{R_2}{v_2} \geq \frac{V - V_2}{V} \tag{2}$$

$$\frac{R_3}{v_3} \geq \frac{V - V_3}{V} \tag{3}$$

$$\frac{R_4}{v_4} \geq \frac{V - V_4}{V} \tag{4}$$

Rovnost ve vztahu (1) [(2), (3), (4)] platí právě tehdy, když bod P leží na výšce v_1 (v_2, v_3, v_4).

Sečtením všech nerovností dostaneme vztah uvedený ve větě (1). Přitom jsme užili vztahu

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V$$

Rovnost platí právě tehdy, když bod P leží na všech čtyřech výškách čtyřstěnu současně. To však je možné jen a jen u čtyřstěnu ortocentrického.

Pro důkaz další věty budeme potřebovat tuto pomocnou větu:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$$

Důkaz této věty i její aplikace nalezne čtenář v článku Př. Vihana, Didoniny úlohy. Viz Rozhledy roč. 5, 1972/73, str. 152.

Věta 2. *Je-li ϱ_i poloměr kulové plochy vně vepsané danému čtyřstěnu tak, že se stěny proti vrcholu A_i dotýká ve vnitřním bodě, pak platí*

$$M \equiv \sum_{i=1}^4 \frac{v_i}{\varrho_i} \geq 8.$$

Rovnost nastane jedině tehdy, když v daném čtyřstěnu platí $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

Důkaz. Pro objem daného čtyřstěnu platí

$$3V = S_2 \varrho_1 + S_3 \varrho_1 + S_4 \varrho_1 - S_1 \varrho_1,$$

z čehož

$$\varrho_1 = \frac{3V}{S_2 + S_3 + S_4 - S_1}$$

Poněvadž

$$v_1 = \frac{3V}{S_1},$$

dostáváme

$$\frac{v_1}{\varrho_1} = \frac{S_2 + S_3 + S_4}{S_1} - 1$$

Odtud

$$\begin{aligned} M \equiv \sum_{i=1}^4 \frac{v_i}{\varrho_i} &= \frac{S_2 + S_3 + S_4}{S_1} + \frac{S_3 + S_4 + S_1}{S_2} + \frac{S_4 + S_1 + S_2}{S_3} + \\ &+ \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_4} - 4. \end{aligned}$$

Nyní pro pravou stranu rovnice použijeme předeslané pomocné věty a dostaneme

$$M \geq 4 \sqrt[4]{\frac{S_2 + S_3 + S_4}{S_1} \cdot \frac{S_3 + S_4 + S_1}{S_2} \cdot \frac{S_4 + S_1 + S_2}{S_3} \cdot \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_4}} - 4.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když

$$S_2 + S_3 + S_4 = S_3 + S_4 + S_1 = S_4 + S_1 + S_2 = S_1 + S_2 + S_3$$

tj., když $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Rovnost tedy platí jen a jen pro čtýrstěn omezený trojúhelníky téhož obsahu.

Na náš výraz znovu použijeme pomocné věty:

$$S_2 + S_3 + S_4 \geq 3 \sqrt[3]{S_2 S_3 S_4},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $S_2 = S_3 = S_4$. Dále:

$$S_3 + S_4 + S_1 \geq 3 \sqrt[3]{S_3 S_4 S_1} \quad (\text{rovnost jen pro } S_3 = S_4 = S_1)$$

$$S_4 + S_1 + S_2 \geq 3 \sqrt[3]{S_4 S_1 S_2} \quad (\text{rovnost jen pro } S_4 = S_1 = S_2)$$

$$S_1 + S_2 + S_3 \geq 3 \sqrt[3]{S_1 S_2 S_3} \quad (\text{rovnost jen pro } S_1 = S_2 = S_3)$$

a tudíž

$$M \geq 4 \sqrt[4]{\frac{3^4}{S_1 S_2 S_3 S_4} \sqrt[3]{S_2 S_3 S_4 \cdot S_3 S_4 S_1 \cdot S_4 S_1 S_2 \cdot S_1 S_2 S_3}} - 4 = 4 \cdot 3 - 4 = 8.$$

Tím je důkaz proveden. Připomeňme ještě, že rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4.$$

Tato rovnost platí např. o čtýrstěnech, jejichž protější hrany mají touž délku.

Pro poslední větu budeme potřebovat dvě pomocné věty.

1. pomocná věta. *Součet kladného čísla a jeho převrácené hodnoty je větší nebo roven číslu 2. Rovnost nastane právě tehdy, když dané číslo je rovno 1.*

Důkaz se provede tak, že do známé nerovnosti pro kladná čísla

$$a + b \geq 2 \sqrt{ab},$$

(kde rovnost platí právě tehdy, když $a = b$) dosadíme $b = \frac{1}{a}$

2. pomocná věta. Jsou-li a_1, a_2, a_3, a_4 kladná čísla, potom

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \right) \geq 16 \quad (5)$$

Rovnost platí tehdy a jen tehdy, když $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Důkaz. Na levé straně vynásobíme a pak použijeme výsledku 1. pomocné věty:

$$4 + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \right) + \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3}{a_1} \right) + \left(\frac{a_1}{a_4} + \frac{a_4}{a_1} \right) + \left(\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2} \right) + \\ + \left(\frac{a_2}{a_4} + \frac{a_4}{a_2} \right) + \left(\frac{a_3}{a_4} + \frac{a_4}{a_3} \right) \geq 16.$$

Tím je důkaz proveden.

3. věta. Jestliže ϱ je poloměr kulové plochy vepsané danému čtyřstěnu, pak platí

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 \geq 8\varrho \quad (6)$$

Rovnost platí tehdy a jen tehdy, když

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4,$$

tj. jde-li o čtyřstěn, jehož protější stěny mají stejné obsahy.

Důkaz. Pro objem V čtyřstěnu platí

$$3V = S_1\varrho + S_2\varrho + S_3\varrho + S_4\varrho,$$

z čehož

$$\varrho = 3V : (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$$

Z důkazu věty 2. víme, že

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= 3V : (S_2 + S_3 + S_4 - S_1) \\ \varrho_2 &= 3V : (S_3 + S_4 + S_1 - S_2) \\ \varrho_3 &= 3V : (S_4 + S_1 + S_2 - S_3) \\ \varrho_4 &= 3V : (S_1 + S_2 + S_3 - S_4) \end{aligned} \quad (7)$$

Podle toho

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = 2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) : 3V = \frac{2}{\varrho}$$

S použitím vztahu (5) se tato rovnost změní ve vztah (6). Rovnost platí právě tehdy, když

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4.$$

Avšak s použitím rovnic (7) dojdeme k rovnicím

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4.$$

Rovnost tedy platí, jde-li o čtyřstěn, jehož všechny stěny mají též obsah.

fyzika

0 jednom problému z elektrostatiky

PETR DUB, stud. G, Brno, Křenová

Všimněme si jednoho zajímavého problému z elektrostatiky, kde teprve podrobný rozbor vyřeší zdánlivý paradox.

Mějme rovinný kondenzátor, u něhož můžeme plynule měnit vzdálenost obou polepů. Každý z polepů má plošný obsah S a permitivita dielektrika je ε . Zjistíme, jakou kapacitu má tento kondenzátor v poloze I, kdy vzdálenost obou polepů je d_1 , a v poloze II, kdy vzdálenost polepů je $d_2 > d_1$. Kapacity označíme C_1 a C_2 . Platí pro ně:

$$C_1 = \frac{\varepsilon S}{d_1} \quad (1a)$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon S}{d_2}. \quad (1b)$$

Energie elektrostatického pole v kondenzátoru v poloze I je

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2 \quad (2a)$$

a v poloze II

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U^2, \quad (2b)$$

jestliže v obou případech je kondenzátor připojen na týž zdroj stejnosměrného proudu o napětí U .

Nyní uvažujme o tomto problému:

Nechť je kondenzátor v poloze I, tzn., že vzdálenost desek je d_1 . Oddalme desky kondenzátoru tak, aby vzdálenost mezi nimi byla d_2 , přičemž je kondenzátor stále napojen na zdroj stejnosměrného proudu o napětí U . Pak se hodnota elektrostatické energie změní o $\Delta_1 W = W_2 - W_1$, kam dosadíme z (2a), (2b) a užijeme vztahů (1a) a (1b); pak

$$\Delta_1 W = \frac{1}{2} \frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2} \varepsilon S U^2, \quad (3)$$

protože $d_2 > d_1$ (viz předpoklad) je nutně $\Delta_1 W < 0$.

Desky kondenzátoru se navzájem přitahují, proto při oddalování desek vnější síly konaly práci, označme ji A .

Výpočet práce A rozdělme do tří částí:

1. Určíme velikost síly F , kterou se navzájem přitahují desky kondenzátoru.
2. Provedeme výpočet práce A elementárními prostředky.
3. Práci A určíme také užitím integrálního počtu.

Ad 1. Výpočet síly F .

Homogenní elektrické pole mezi deskami kondenzátoru se vyznačuje intenzitou o velikosti E , která je podle Coulombovy věty rovna

$$E = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon S}, \quad (4)$$

kde Q je náboj na jedné z desek. Je to intenzita pole mezi deskami kondenzátoru o nábojích $+Q$ a $-Q$, takže jedna deska s nábojem Q budí pole o intenzitě

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{Q}{\varepsilon S}$$

Pak pro velikost síly F , která působí na desku o velikosti S s nábojem Q , platí:

$$F = Q E_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon S} = \frac{1}{2} \frac{C U^2}{d} \quad (5)$$

Ad 2. Výpočet práce A elementárními prostředky.

Síla, kterou se přitahují desky kondenzátoru v poloze I, má podle (5) velikost:

$$F_1 = \frac{1}{2} \frac{C_1 U^2}{d_1} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon S}{d_1^2} U^2$$

a síla, kterou se přitahují desky kondenzátoru v poloze II, má velikost:

$$F_2 = \frac{1}{2} \frac{C_2 U^2}{d_2} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon S}{d_2^2} U^2$$

Protože závislost velikosti přitažlivé síly na vzdálenosti polepů není lineární, je průměrná velikost síly, kterou je nutno působit při oddalování desek z polohy I do polohy II, rovna geometrickému průměru sil F_1 a F_2 . Tedy

$$F = \sqrt{F_1 \cdot F_2} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon S}{d_1 d_2} U^2$$

Pak práce A vykonaná silou F na dráze $\Delta d = d_2 - d_1$ je rovna:

$$A = F \Delta d = \frac{1}{2} \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} \varepsilon S U^2 \quad (6)$$

je patrné, že $A > 0$.

Ad 3. Výpočet práce užitím integrálního počtu.

Práce na elementární dráze je dána vztahem $dA = F \cdot dd$, kde dd je diferenciál vzdálenosti mezi polepy kondenzátoru. (Uvažujeme, že

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dS} = 0.)$$

Pak

$$\begin{aligned} A &= \int_{d_1}^{d_2} dA = \frac{1}{2} \varepsilon S U^2 \int_{d_1}^{d_2} \frac{dd}{d^2} = \frac{1}{2} \varepsilon S U^2 \left[-\frac{1}{d} \right]_{d_1}^{d_2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} \varepsilon S U^2, \end{aligned}$$

což je výsledek stejný, jako v bodu 2.

Uvážíme-li, že $A > 0$ a $\Delta_1 W < 0$, pak vzniká tento paradox: Přestože vnější síly vykonaly kladnou práci, tzn. dodaly energii, elektrostatická energie v kondenzátoru se snížila.

Všimněme si náboje na kondenzátoru. Označíme-li Q_1 náboj na kondenzátoru v poloze I a Q_2 v poloze II, pak platí

$$Q_1 = C_1 U = \frac{\varepsilon S}{d_1} U \quad a$$

$$Q_2 = C_2 U = \frac{\varepsilon S}{d_2} U$$

z čehož plyne, že $Q_2 < Q_1$, protože $d_2 > d_1$. Tedy náboj na kondenzátoru se zmenšil. Do zdroje se vrátil náboj

$$\Delta Q = \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} \varepsilon S U$$

při napětí U , čímž se energie zdroje zvýšila o hodnotu

$$\Delta_2 W = \Delta Q U = \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} \varepsilon S U^2. \quad (7)$$

Tedy práce A se přeměnila v energii $\Delta_2 W$ a $\Delta_1 W$ a platí

$$A = \Delta_1 W + \Delta_2 W,$$

což lze ověřit dosazením ze (3), (6) a (7) do tohoto vztahu:

$$\frac{1}{2} \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} \varepsilon S U^2 = \frac{1}{2} \frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2} \varepsilon S U^2 + \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} \varepsilon S U^2.$$

Zákon zachování energie je splněn a zdánlivý paradox odstraněn.

Rozeberme ještě případ, když je tentýž kondenzátor nabit konstantním nábojem Q a není připojen ke zdroji. Energie kondenzátoru o kapa-

citě C nabitého náboje Q je $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$, což plyne ze vztahu (2), dosadíme-li za napětí $U = \frac{Q}{C}$. Pak pro změnu energie elektrostatického pole v kondenzátoru při oddálení desek z polohy I do polohy II platí:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{d_2 - d_1}{\varepsilon S} Q^2; \quad (8)$$

protože $d_2 > d_1$, je i $\Delta W > 0$.

Do (8) jsme za C_1 , C_2 dosadili z (1a) a (1b.).

Tuto změnu energie můžeme určit také takto:

Víme, že objemová hustota energie elektrostatického pole je $w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$, kde E je intenzita elektrostatického pole mezi deskami kondenzátoru.

Podle vztahu (4) pro ni platí: $E = \frac{Q}{\varepsilon S}$. Potom pro hustotu energie vychází:

$$w = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon S^2} \quad (9)$$

Změna objemu, ve kterém je elektrostatické pole, je při oddálení desek rovna

$$\Delta V = S (d_2 - d_1). \quad (10)$$

Pro změnu energie elektrostatického pole kondenzátoru platí:

$$\Delta W = w \cdot \Delta V.$$

Dosadíme-li sem z (9) a (10), obdržíme výraz stejný, jako je ve vztahu (8).

Desky kondenzátoru se přitahují, a proto při jejich oddálení vykonají vnější síly kladnou práci. Velikost síly, kterou se tyto desky přitahují, je

podle vztahu (5) rovna: $F = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon S}$ Velikost práce, kterou vykonají vnější síly při oddalování desek kondenzátoru, je pak dána:

$$A' = \int_{d_1}^{d_2} dA' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon S} \int_{d_1}^{d_2} dd = \frac{1}{2} \frac{d_2 - d_1}{\varepsilon S} Q^2.$$

Protože v tomto případě k jiným energetickým změnám nedochází, musí platit, že

$$\Delta W = A'.$$

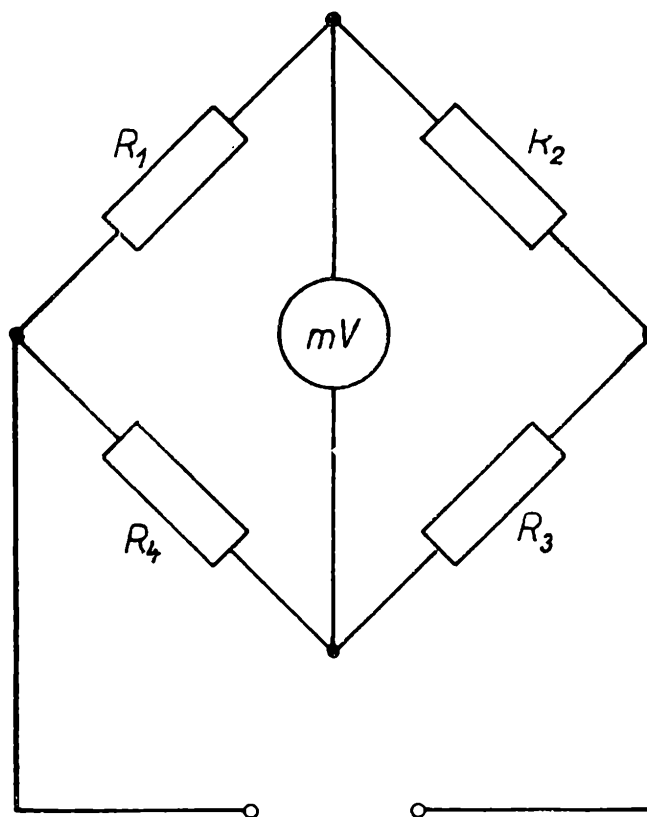
O správnosti tohoto vztahu se přesvědčíme, dosadíme-li sem ze vztahů (8) a (11).

Tento článek chce ukázat, že při řešení fyzikálních problémů je nutno podrobně zkoumat daný jev i s hlediska energetického. Takovýto přístup umožnil v daném konkrétním případě odstranit zdánlivý paradox.

Moderní využití Wheatstonova můstku v praxi

STANISLAV VALCHAŘ, Ostrava - Kunčice

Z fyziky je známo, že zapojení na obr. 1 se nazývá Wheatstonův můstek. Náhradou odporů kapacitami, indukčnostmi nebo jejich vzájemnou kombinací vzniknou různé jiné typy můstků (Thomsonův, Scher-



Obr. 1

gův, Wienův, Sautyho a další), které jsou základem některých měřicích metod. Princip Wheatstonova můstku však v praxi nabízí mnoho možností uplatnění i mimo tuto oblast.

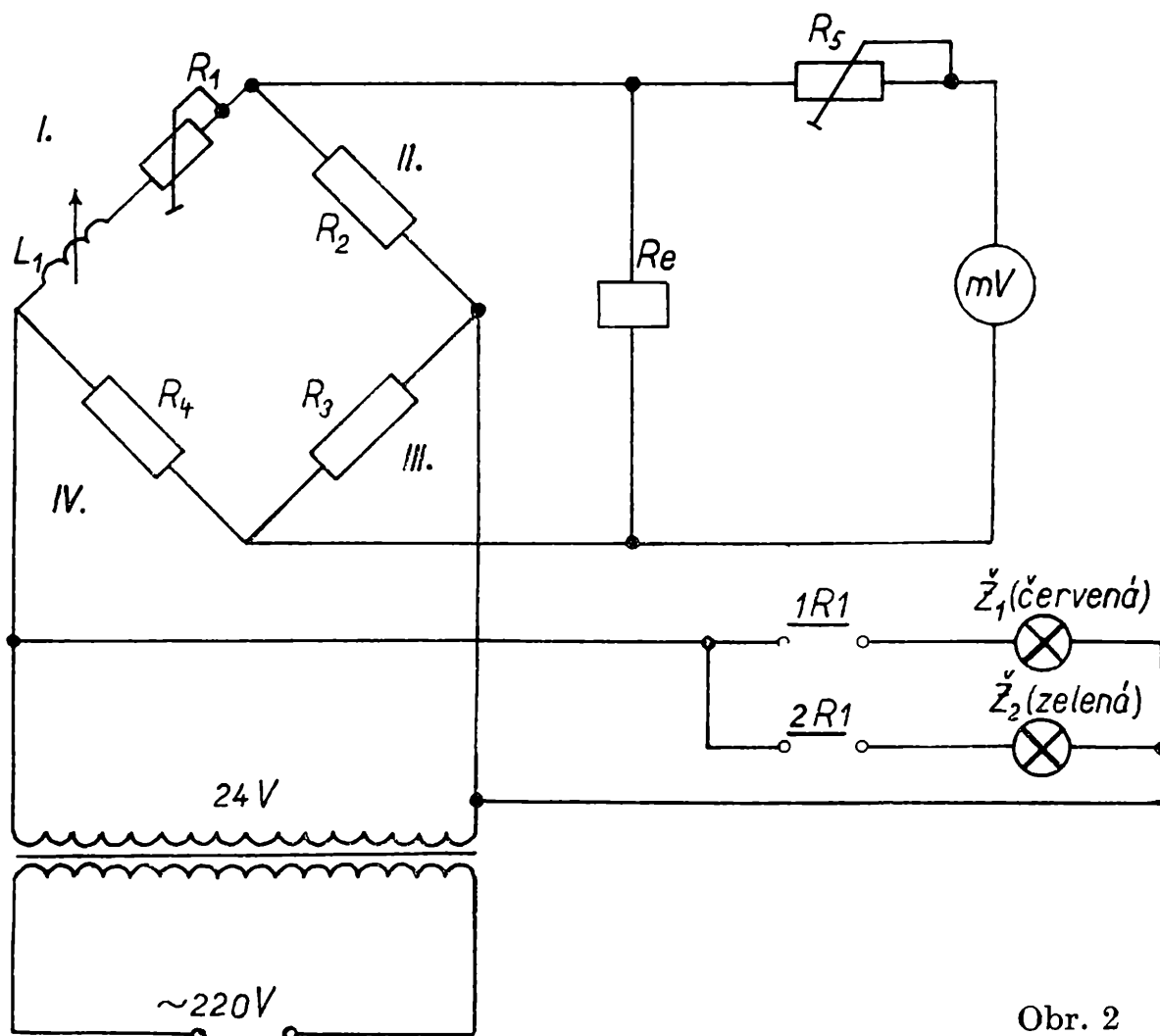
a) V chemickém průmyslu je často třeba přesně znát výšku h kapaliny v nádrži resp. maximální výšku $h_{\max}$, kterou je třeba signalizovat. Na obr. 2 je zapojení, které indikuje tuto max. výšku. Je to v podstatě zapojení Wheatstonova můstku, který je ve větvi I. rozšířen o proměnnou indukčnost L_1 .

Pro rovnováhu můstku platí

$$Z_1 \cdot Z_3 = Z_2 \cdot Z_4 ,$$

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}, \quad Z_2 = R_2, \quad Z_3 = R_3, \quad Z_4 = R_4 \text{ } [\Omega].$$

Indukčnost cívky závisí mimo jiné na materiálu a délce jádra, které je v cívce zasunuto. Bude-li se jádro do cívky zasouvat (obr. 3), poroste



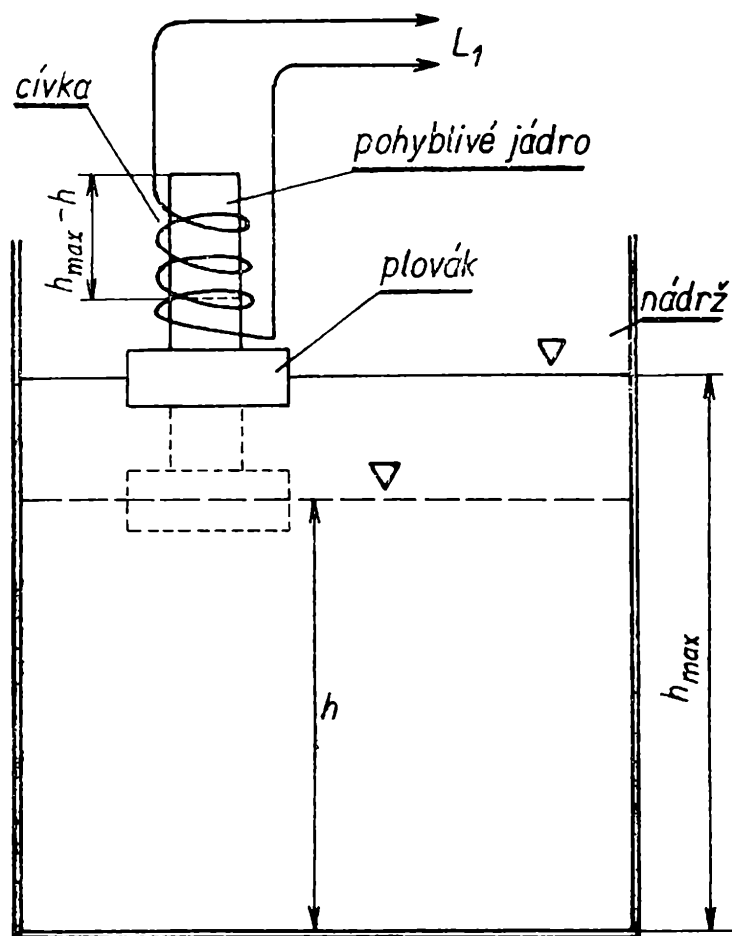
Obr. 2

indukčnost L_1 a poruší se rovnováha můstku, což má za následek vzrůst napětí mezi body A , B . Vzroste-li napětí na jistou hodnotu U_1 , sepne relé R_1 červenou signalizační žárovku, což znamená, že hladina dostoupila do výšky $h_{\max}$. Při poklesu hladiny klesne napětí na hodnotu $U_2 < U_1$, relé sepne zelenou žárovku, což značí, že hladina je obecně ve výšce $h < h_{\max}$.

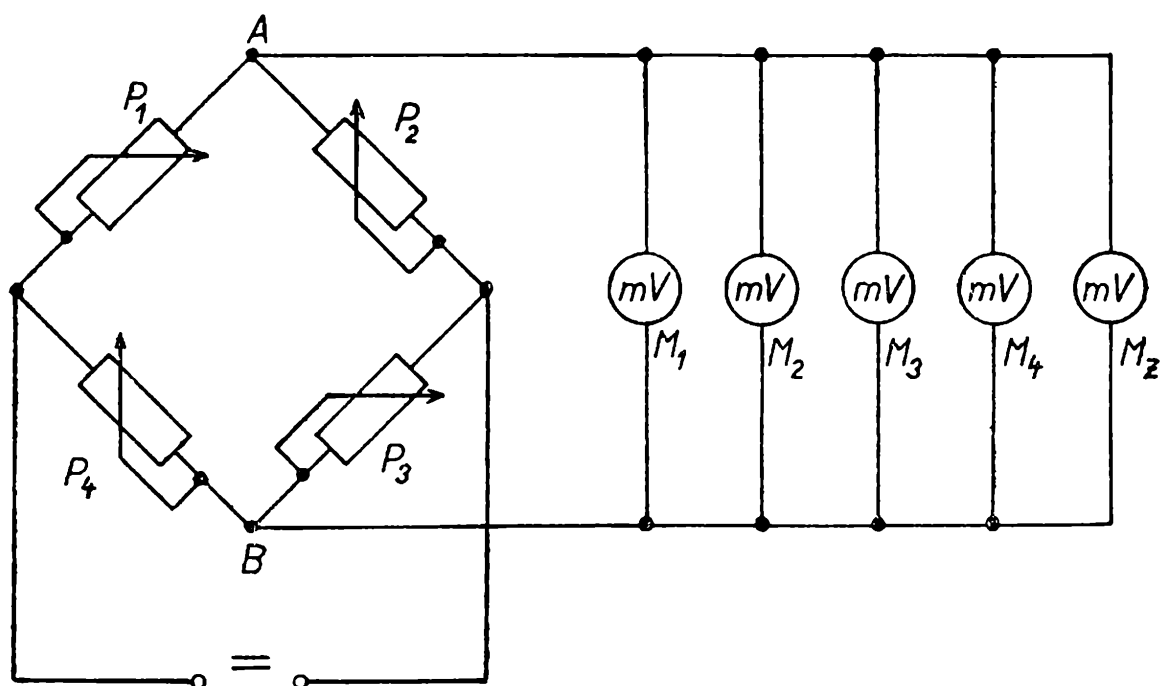
b) Princip Wheatstonova můstku je možno taktéž použít v moderních psychologických testech. Popíšme stručně přístroj zvaný „Homeostat“ (obr. 4). Čtyři účastníci testu sledují ukazatel měřicího přístroje (voltmetru). Každý z nich má možnost ovládat regulační prvek (potenciometr) a ukazatel měřicího přístroje posunout do nulové polohy. Potíž je v tom, že jeden každý účastník ovlivňuje polohu ukazatele dalších zkoušených. Pro porovnání (tedy i pro nulovou polohu ukazatele) musí platit

$$R_{P_1} \cdot R_{P_3} = R_{P_2} \cdot R_{P_4},$$

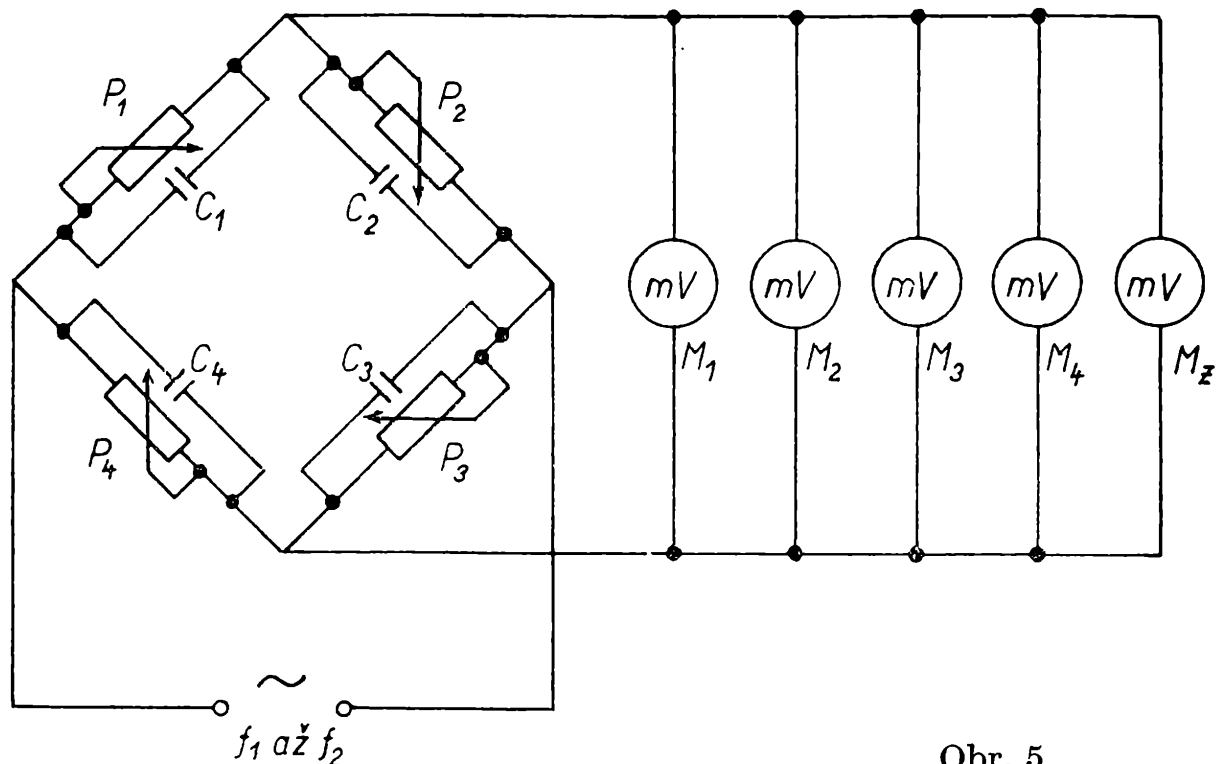
tedy mezi body A , B musí být nulové napětí. Rovnováhy se zřejmě podaří dosáhnout tehdy, ujmě-li se někdo ze zkoušených iniciativy a ostatní se mu podřídí, tj. nemění hodnotu odporu na svém potenciometru.



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Toto zařízení je však pro praktické použití doplněno různými kapacitami C_1 až C_4 paralelně připojenými k potenciometru a napájení je prováděno střídavým proudem v rozsahu frekvencí f_1 až f_2 z generátoru (obr. 5). Tím se matematické vyjádření rovnováhy můstku stává komplikovanějším (rovnováha je závislá na osmi proměnných) a je závislé na okamžité napájecí frekvenci f . Zkoušející může změnou frekvence o Δf porušit rovnováhu můstku, aniž si to zkoušení uvědomí, a proces ustavení ukazatele do nulové polohy opakovat.

Tohoto zařízení spolu s jinými moderními psychologickými metodami je možno použít při komplexním zkoumání osobnosti.

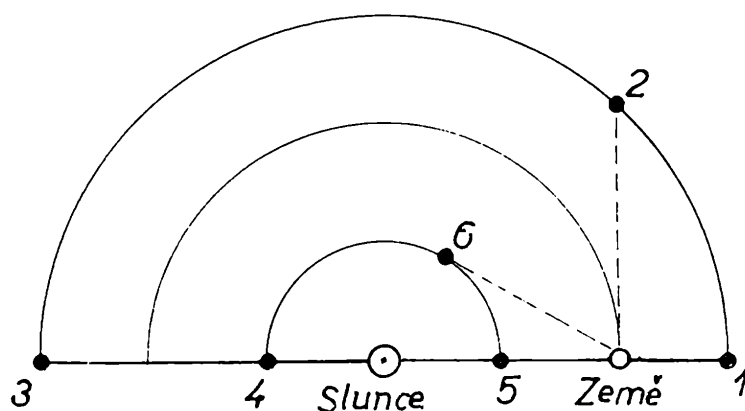
Tyto dva příklady použití Wheatstonova můstku dokazují, že fyzika není věda samoúčelná a její principy jsou široce využívány v budování naší socialistické společnosti.

astronomie

Konstelace planet

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Při oběhu Země a ostatních planet kolem Slunce se neustále mění vzájemná poloha těchto těles. Pro astronomii má velký význam poloha planety vzhledem k Slunci a Zemi, neboť na této poloze závisí podmínky k pozorování planety. Některé významné polohy planet vzhledem ke Slunci a Zemi dostaly zvláštní názvy; souhrnně se nazývají konstelace planet. Je ovšem třeba rozlišovat planety vnitřní, tj. planety obíhající uvnitř dráhy Země (jsou to Merkur a Venuše) a planety vnější, obíhající kolem Slunce po dráhách o větším poloměru než je dráha Země (Mars, Jupiter, Saturn, Uran, Neptun a Pluto). Na obr. 1 jsou schematicky znázorněny dráhy jedné vnitřní a jedné vnější planety a význačné polohy planet na těchto dráhách.



Obr. 1. Konstelace planet

Probereme nejprve konstelace vnějších planet. Jak je patrné z obr. 1, mohou u vnějších planet nastat tři význačné polohy. V poloze 1 leží Slunce, Země a planeta na společné přímce (pro jednoduchost nebereme v úvahu sklon dráhy planety vzhledem k rovině ekliptiky), přičemž planeta je na opačné straně než Slunce. Tato poloha planety se nazývá *opozice*. Je-li planeta v opozici se Sluncem, jsou nejlepší podmínky pro její pozorování. Planeta vychází při západu Slunce, vrcholí nad obzorem kolem půlnoci a zapadá při východu Slunce, takže je pozorovatelná po celou noc. K tomu přistupuje ještě ta skutečnost, že při opozici je

planeta v nejmenší vzdálenosti od Země a úhlový průměr kotoučku planety dosahuje tedy největší hodnoty. Kdyby byly dráhy planet i Země přesně kruhové, pak by při každé opozici byla vzdálenost planety od Země stejná (rovnala by se rozdílu poloměrů drah planety a Země) a úhlový průměr kotoučku by dosahoval vždy téže hodnoty. Dráha planet i Země však mají určitou výstřednost, jsou eliptické, proto se vzdálenost planety od Země při opozici mění. Tyto změny mají zvlášť velký význam u nejbližší vnější planety — Marsu. Je-li při opozici planeta současně v perihéliu své dráhy, její vzdálenost od Slunce a tedy i od Země nabývá nejmenší hodnoty. Hovoříme pak o tzv. velké neboli perihéliové opozici. Při velké opozici Marsu klesne vzdálenost Marsu od Země na pouhých 56 miliónů km a úhlový průměr kotoučku planety dosáhne 25'', zatímco při aféliové opozici (Mars je při opozici v aféliu své dráhy) je úhlový průměr Marsu jen 14''. Perihéliové opozice Marsu se opakují po 15 až 17 letech a v době těchto opozic je Mars intenzívně pozorován. Připomeňme, že v době před vysláním první kosmické sondy k Marsu byla pozorování v době velkých opozic jediným možným způsobem zkoumání této planety.

Další významnou polohou vnějších planet je *kvadratura*, při níž je úhel planeta—Země—Slunce roven 90° . Na obr. 1 je polohou 2 vyznačena tzv. západní kvadratura, kdy planeta vychází kolem půlnoci, vrcholí kolem 6 hodin ráno a zapadá kolem poledne, je tedy pozorovatelná ve druhé polovině noci. Při východní kvadratuře (poloha symetrická k poloze 2, na obrázku není zakreslena) je naopak planeta pozorovatelná ve večerních hodinách: vychází v poledne, vrcholí kolem 18 hodin a zapadá kolem půlnoci.

Je-li planeta v poloze 3, říkáme, že je v *konjunkci* se Sluncem. Planeta je opět na spojnici Slunce a Země, leží však na stejné straně od Země jako Slunce. To znamená, že vychází i zapadá současně se Sluncem, je na denní obloze v malé úhlové vzdálenosti od Slunce a není tedy pozorovatelná. V době konjunkce je planeta v největší vzdálenosti od Země — tato vzdálenost je rovna součtu poloměrů oběžných drah planety a Země.

U vnitřních planet, jak je patrné z obr. 1, nemůže nastat opozice ani kvadratura — planeta se nemůže dostat na opačnou stranu od Země než Slunce a úhel planeta—Země—Slunce, nazývaný *elongace*, je vždy ostrý, nemůže nabýt hodnoty 90° . Z význačných poloh, které jsme uváděli u vnějších planet, může tedy u vnitřních planet nastat jen konjunkce. Na rozdíl od vnějších planet však u vnitřních planet rozlišujeme horní a dolní konjunkci. Při *horní konjunkci*, označené polohou 4, je planeta „za Sluncem“, čili Slunce je mezi Zemí a planetou; tato poloha odpovídá konjunkci vnějších planet. Naproti tomu při *dolní konjunkci* (5) je planeta „před Sluncem“ — je mezi Sluncem a Zemí. Dolní konjunkce u vnějších planet nastat nemůže. Vnitřní planety jeví fáze



Obr. 2. Konjunkce Venuše s Měsícem (foto A. Neckař)

podobně jako Měsíc, na rozdíl od Měsíce se však současně s fází mění také vzdálenost planety od Země a tím i úhlový průměr kotoučku planety. Při horní konjunkci je planeta „v úplňku“ a současně nejdále od Země — kotouček planety má nejmenší úhlový průměr; v dolní konjunkci je planeta „v novu“ a současně nejbližší Zemi — úhlový průměr kotoučku planety je největší. Zde je třeba připomenout, že „úplněk“ ani „nov“ u planety nemůžeme pozorovat, neboť při konjunkci planeta vychází i zapadá současně se Sluncem. Kdyby dráhy vnitřních planet měly nulový sklon neboli kdyby ležely přesně v rovině ekliptiky, pak by při každé dolní konjunkci nastával velmi zajímavý úkaz — přechod planety přes sluneční disk. Vzhledem ke sklonu drah však tento přechod nastává jen tehdy, ocitne-li se planeta v konjunkci v blízkosti výstupného nebo sestupného uzlu své dráhy. Poslední přechod Merkura přes Slunce nastal 9. listopadu 1973, k nejbližšímu dojde 12. listopadu 1986. Přechody Venuše přes sluneční disk jsou ještě vzácnější — poslední byl pozorován 6. prosince 1882, nejbližší nastane až 7. června 2004.

Poslední význačnou polohou vnitřních planet je *maximální elongace*; na obr. 1 je polohou 6 vyznačena maximální západní elongace. Při maximální elongaci je planeta v největší úhlové vzdálenosti od Slunce a je tedy velmi dobře pozorovatelná. Při západní elongaci planeta vychází i zapadá před Sluncem, je tedy pozorovatelná v časných ranních hodinách (Venuši se v tomto případě lidově říká Jitřenka), při východní elongaci planeta vychází i zapadá po Slunci a je na večerní obloze (Venuše byla v tomto případě pojmenována Večernice).

Vzhledem k výstřednostem drah vnitřních planet i dráhy Země nemají maximální elongace konstantní hodnotu; u Merkura se mění v mezích od 16° (Merkur je v perihéliu své dráhy) do 28° (Merkur je v aféliu). U Venuše, jejíž dráha má velmi malou výstřednost, jsou také

změny maximální elongace menší: od $45^{\circ}54'$ do $46^{\circ}44'$. Merkur je pouhým okem prakticky nepozorovatelný, zato Venuše v době maximálních elongací patří mezi nejnápadnější objekty na ranní nebo večerní obloze; bývá zpravidla nejjasnějším objektem na hvězdné obloze (může nabýt zdánlivé hvězdné velikosti až $-4,31m$) a upoutá pozornost již na soumrakové obloze, kdy ostatní planety ani hvězdy nejsou ještě viditelné.

Tytéž konstelace vnějších i vnitřních planet se opakují vždy po uplynutí synodické oběžné doby planety a vzhledem k jejich důležitosti pro viditelnost planet je každoročně přináší Hvězdářská ročenka.

Názvů některých konstelací planet se používá i pro jiná tělesa. Tak např. je-li Měsíc v novu, říkáme, že je v konjunkci se Sluncem, je-li v úplňku, říkáme, že je v opozici se Sluncem; první a poslední čtvrt pak odpovídají kvadraturám. O konjunkci planet s Měsícem nebo s jasnými hvězdami mluvíme tehdy, je-li rozdíl rektascenzí těchto těles roven 0° , podobný význam má i konjunkce dvou planet, např. Marsu a Jupitera. Rovněž o těchto zajímavých úkazech, kdy jsou na obloze dvě tělesa v malé úhlové vzdálenosti, informuje Hvězdářská ročenka, přičemž je uvedena také úhlová vzdálenost obou těles při konjunkci. Na obr. 2 je fotografie konjunkce Venuše s Měsícem, k níž došlo 8. června 1951.

olympiády

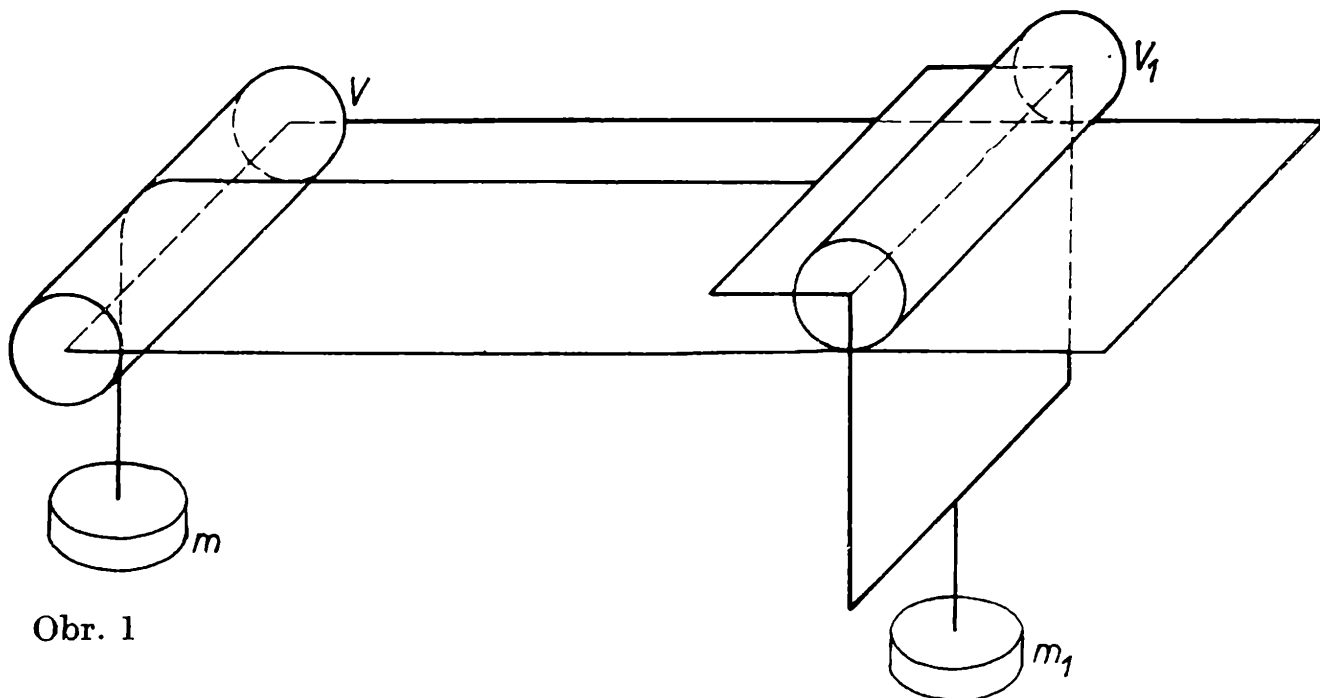
Druhá skupina úloh pro první kolo XVI. ročníku FO

Kategorie A

4. Malá lehká kulička o hmotnosti m má kladný elektrický náboj Q a je zavěšena na tenkém izolujícím vlákně délky l v homogenním elektrickém poli, jehož intenzita E svírá se směrem tíhy ostrý úhel. V důsledku toho je vlákno závěsu odchýleno od svislého směru o úhel α , jestliže je kulička v klidu. Vychýlíme-li kuličku z rovnovážné polohy ve svislé rovině procházející vláknem a uvolníme, začne elektrické kyvadélko kmitat.

Jaká je doba kmitu T kyvadla?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 1,5 \text{ g}$; $Q = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$; $l = 10,0 \text{ cm}$; $E = 1,0 \cdot 10^6 \text{ V m}^{-1}$; $\alpha = 15^{\circ}$. Které veličiny se



Obr. 1

mohou určit použitím tohoto kyvadla, je-li doba kmitu známa z přímého měření (např. $T = 0,20$ s)?

5. Kruhový válec V_1 o hmotnosti m_2 je spojen se závažím o hmotnosti m_1 podle obr. 1. Válec se závažím se valí po vodorovné dráze délky h působením tíhy závaží o hmotnosti m , které je s válcem spojeno vláknem. Vlákno je vedeno přes válec V_2 stejné hmotnosti a stejného poloměru jako válec V_1 . Ve druhém případě se k závaží o hmotnosti m_1 přidá závaží o hmotnosti $m_3 = m_1 + m_2$. Zároveň se k závaží o hmotnosti m přidá další závaží stejné hmotnosti m .

- Určete rychlosti a zrychlení soustavy v obou případech.
- Vysvětlete, proč je jedna rychlost větší než druhá.
- Vysvětlete, proč je jedno zrychlení posuvného pohybu větší než druhé, i když poměr síly a hmotnosti je v obou případech stejný.

Tření a hmotnost vlákna zanedbáváme.

Moment setrvačnosti kruhového válce vzhledem k jeho geometrické ose je $J = \frac{1}{2} m r^2$, kde m značí hmotnost válce a r jeho poloměr.

6. Centrovaná optická soustava sa skladá zo 4 tenkých šošoviek. Prvá a tretia sú rozptylky, druhá a štvrtá sú spojky. Vzdialenosti medzi šošovkami sú postupne d_1 , d_2 , d_3 . Ohniskové vzdialenosti všetkých šošoviek majú rovnakú absolútnu hodnotu f . Pred prvou šošovkou je na optickej osi vo vzdialenosti a_1 svietiaci bod. Určte polohu jeho obrazu.

Úlohu riešte výpočtom pre hodnoty $a_1 = 12,0$ cm; $d_1 = 8,0$ cm; $d_2 = 6,0$ cm; $d_3 = 12,0$ cm; $f = 6,0$ cm.

Výpočet overte konštrukciou!

7. Přímohledný hranol je sestaven ze tří trojbokých hranolů. Prostřední je z flintového skla o indexu lomu n_2 , postranní shodné hranoly jsou z korunového skla o indexu lomu n_1 , $n_2 > n_1$. Lámací hrany všech tří hranolů jsou vzájemně rovnoběžné a rovinný řez vedený kolmo k lámavým hranám představuje rovnoramenný lichoběžník $ABED$ skládající se ze tří trojúhelníků. Prostřední je pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C , přičemž bod C je středem úsečky ED .

a) Načrtněte řez přímohledného hranolu a vyznačte v něm chod paprsku, který prochází středním hranolem rovnoběžně s úsečkou AB .

b) Vypočítejte lámavý úhel γ postranních hranolů pro případ, že paprsek zeleného světla (pro který mají indexy lomu hodnoty $n_1 = 1,5186$ a $n_2 = 1,7623$) vstupuje do soustavy i vystupuje z ní rovnoběžně se základnou AB .

c) Vypočítejte odchylku červeného paprsku, který dopadá sice rovnoběžně se základnou AB , ale vystupuje v odchýleném směru. (Indexy lomu pro červený paprsek jsou $n_1 = 1,5099$, $n_2 = 1,7351$).

d) Vypočítejte odchylku také pro fialový paprsek (indexy lomu: $n_1 = 1,5267$, $n_2 = 1,7922$).

Počítejte pětimístnými logaritmickými tabulkami co nejpřesněji.

Kategorie B

4. Z nádoby uniklo určité množství dvouatomového dokonalého plynu. Tento děj je možno považovat za adiabatický. Připojený tlakoměr ukázal pokles tlaku z původní hodnoty p_1 na hodnotu p_2 . Plyn zbylý v nádobě potom přijímal teplo z okolí, až se jeho teplota ustálila na hodnotě, kterou měl před dějem.

a) Určete změnu $\Delta\rho$ hustoty plynu a vyjádřete ji v procentech.

b) Jaká je hodnota konečného tlaku p_3 plynu v nádobě?

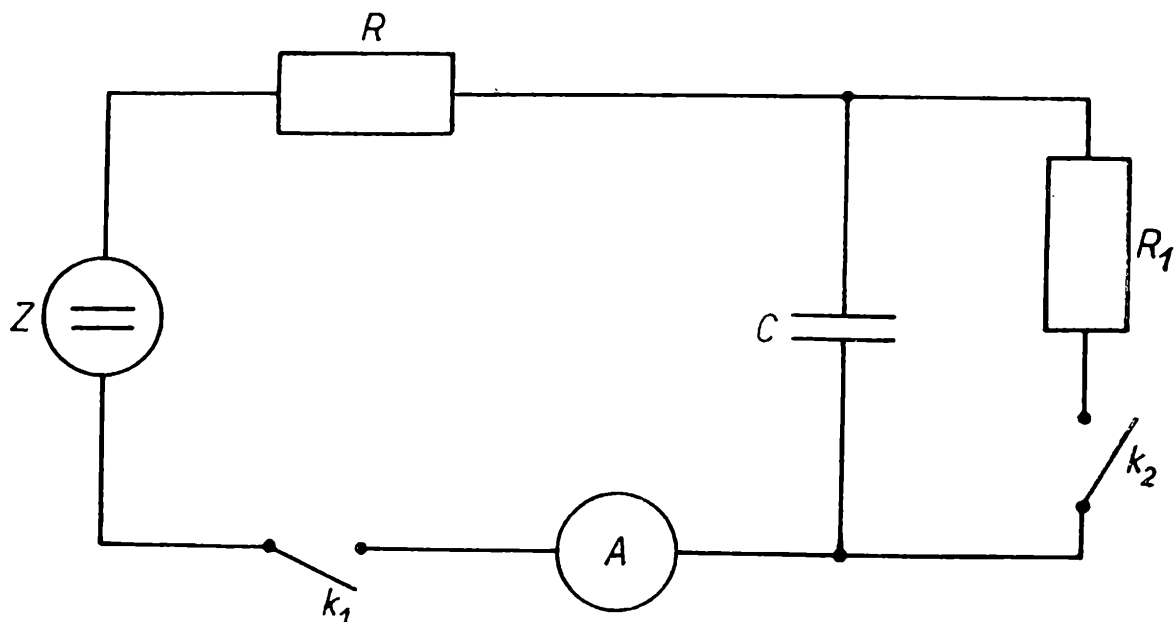
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $p_1 = 50 \text{ kp. cm}^{-2}$; $p_2 = 46 \text{ kp. cm}^{-2}$.

5. Vyšetřovanie priebehu nabíjacieho prúdu kondenzátora v obvode RC .

Pomôcky

Zdroj Z jednosmerného napätia do 200 V, rezistor $R = 470 \text{ k}\Omega$, kondenzátor s kapacitou (60 až 70) μF na napätie najmenej 200 V, miliampér-meter do 3 mA (napr. Avomet, DU 10), dva vypínače, rezistor $R_1 = (1 \text{ až } 2 \text{ k}\Omega)$, stopky.

Cieľ merania:



Obr. 2

Stanoviť závislosť $I = I(t)$ nabíjacieho prúdu I kondenzátora od času t .

Postup práce

1. Zostavíme obvod podľa schémy na obr. 2.

2. Za zdroji napätia Z nastavíme také napätie U_0 , aby po zapnutí vypínača k_1 miliampérmetr ukázal plnú výchylku. Počas nabíjania kondenzátora výchylka ampérmetra postupne klesá. Po každom nabití kondenzátora vypneme vypínač k_1 a zapneme vypínač k_2 . Kondenzátor sa vybíja cez odpor R_1 (vybíjanie trvá 1 až 2 s).

3. Zapneme vypínač k_1 a súčasne stlačíme stopky. Ukazovateľ miliampérmetra ukáže najskôr maximálnu výchylku a potom sa vracia k nulovej polohe. Meriame postupne časy t_i , za ktoré výchylka prístroja klesne na jednotlivé vopred zvolené hodnoty I_i prúdu. Vykonáme 10 až 15 meraní dvojíc t_i, I_i . Hodnoty času t_i sú priemery vypočítané z viacerých meraní. Namerané hodnoty zapisujeme do tabuľky.

i	$\frac{I}{mA}$	$\frac{t}{s}$	$\log I$	$\log t$
1				
2				
3				

Spracovanie výsledkov merania

1. Narysujte graf (a) závislosti $I = I(t)$ nabíjacieho prúdu kondenzátora od času.

2. Zobrazená závislosť by mala mať tvar grafu jednej z dvoch funkcií

$$I = A t^n \quad (1)$$

$$I = B a^{kt} \quad (2)$$

kde A , B , n , k sú konštanty. Hodnoty z tabuľky použite na zostrojenie grafov (b) a (c) v súradnicových systémoch:

$$(b) \ x = \log t, \quad y = \log I,$$

$$(c) \ x = t, \quad y = \log I.$$

Skúmaním narysovaných grafov rozhodnite, ktorá z rovníc (1) a (2) vyhovuje výsledkom merania. Rozhodnutie vysvetlite a zdôvodnite vhodnou matematickou úpravou vzťahu (1) alebo (2).

6. Dva bodové náboje Q_1 a Q_2 sú vo vákuu vo vzájomnej vzdialenosti d . Jeden z nich je kladný, druhý záporný a o ich veľkostiach platí $|Q_1| = p |Q_2|$, kde $p > 1$.

a) Dokážte, že body nulového potenciálu elektrického poľa nábojov Q_1 , Q_2 vytvárajú v každej rovine, ktorá obsahuje uvedenú dvojicu nábojov, kružnicu. Aký tvar má ekvipotencionálna plocha nulového potenciálu?

b) Určte polomer kružnice nulového potenciálu a polohu ich stredov ako funkcie p vo zvolenom súradnicovom systéme.

c) Uvážte, ako sa mení poloha stredu kružnice nulového potenciálu a jej polomer, ak p nadobúda hodnoty z intervalu $1 < p < \infty$.

7. Beztiažový stav telesa je taký stav, keď vo vzťažnej sústave sporej s telesom je tiaž telesa nulová. Lietadlo sa pohybuje v zvislej rovine po kruhovej dráhe o polomere R .

a) V ktorom bode dráhy môže byť lietadlo v beztiažovom stave? Svoje tvrdenie fyzikálne odôvodnite.

b) Akú okamžitú rýchlosť v má lietadlo v beztiažovom stave?

c) Určte dobu t' , počas ktorej bude lietadlo v tzv. približnom beztiažovom stave, kedy veľkosť a výsledného zrýchlenia lietadla spĺňa podmienku $a \leq 0,1 g$, kde g je tiažové zrýchlenie. Veľkosť v rýchlosti lietadla považujte počas približného beztiažového stavu za stálu.

Tiažové zrýchlenie vo všetkých bodoch dráhy pohybu lietadla je g . Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnotu $R = 1,0 \cdot 10^3$ m.

Kategorie C

4. Vnitřní průřez koryta o délce l je rovnoramenný lichoběžník, jehož dolní základna je a , horní c a výška h . Koryto má vodorovné dno a je zcela naplněno vodou o hustotě ρ .

a) Určete tlakovou sílu F_1 , kterou působí voda na dno a tlakové síly F_2 a F_3 , jimiž působí voda na šikmé podélné stěny koryta.

b) Určete výslednici F těchto sil a porovnejte s tíhou G vody v korytě. Jak se uplatní tlakové síly F_4 a F_5 , kterými působí voda na svislé příčné stěny koryta?

Řešte úlohu obecně a potom pro hodnoty: $l = 10,0$ m, $a = 1,0$ m, $c = 3,0$ m, $h = 1,0$ m, $\rho = 1,0 \cdot 10^3$ kg m⁻³, $g = 10$ m s⁻².

5. Ocelová koule o objemu V a hustotě ρ_1 plove ve rtuti o hustotě ρ_2 .

a) Určete poměr p objemu V_1 části koule ponořené ve rtuti a objemu V celé koule. Vyjádřete poměr p v procentech. Neuvažujeme vztlakovou sílu, kterou působí vzduch nad volným povrchem rtuti na kouli.

b) Nad rtuť nalejeme do nádoby takový objem vody hustoty ρ_0 , aby koule byla ponořena pod povrchem vody. Koule vystoupí částí objemu V'_1 ze rtuti. Určete poměr p' objemu V'_1 a objemu koule V . Vyjádřete poměr p' v procentech.

c) Řešte úlohu a) tak, že uvážíte také vztlakovou sílu, kterou působí vzduch o hustotě ρ nad volným povrchem rtuti na kouli. Odhadněte relativní chybu, které se dopustíme, zanedbáme-li vzduch nad povrchem rtuti.

Řešte úlohu obecně a potom pro hodnoty: $\rho_1 = 7,700 \cdot 10^3$ kg m⁻³, $\rho_2 = 13,600 \cdot 10^3$ kg m⁻³, $\rho_0 = 1,000 \cdot 10^3$ kg m⁻³, $\rho = 1,280$ kg m⁻³.

6. Určení měrného tepla oceli

Příprava úlohy

Měrné teplo c látky definujeme vztahem

$$c = \frac{Q}{m \Delta t}.$$

Měrné teplo je podíl tepla dodaného tělesu z dané látky a součinu hmotnosti tělesa a příslušného zvýšení teploty tělesa. Předpokládejme, že přitom nenastane změna skupenství látky.

Jednotkou měrného tepla je J kg⁻¹ K⁻¹.

Měrné teplo určíme použitím kalorimetru.

Označme K tepelnou kapacitu kalorimetru. Jestliže kalorimetr přijme teplo Q_1 a jeho teplota se přitom zvýší o Δt_1 , platí $Q_1 = K \Delta t_1$. Odtud

$K = \frac{Q_1}{\Delta t_1}$; tepelnou kapacitu K kalorimetru určíme jako podíl tepla

Q_1 dodaného kalorimetru a příslušného zvýšení teploty t_1 . Jednotkou tepelné kapacity K kalorimetru je J K^{-1} .

Při měření použijeme vody jako kalorimetrické kapaliny, protože voda ocel nerozpouští, ani s ní chemicky nereaguje. Označme hmotnost vody kalorimetru m_1 , její počáteční teplotu t_1 a měrné teplo c_1 ; označme hmotnost ocelového předmětu m , jeho počáteční teplotu t_2 , $t_2 > t_1$, měrné teplo oceli c . Ponoříme-li ocelový předmět do vody v kalorimetru, předpokládáme, že nastane výměna tepla v izolované soustavě, kterou tvoří ocelový předmět, voda a kalorimetr. Výslednou teplotu označme T , $t_2 > T > t_1$. Voda a kalorimetr přijmou teplo $(m_1 c_1 + K) (T - t_1)$; ocelový předmět odevzdá teplo $m c (t_2 - T)$. Platí tedy:

$$(m_1 c_1 + K) (T - t_1) = m c (t_2 - T),$$

$$c = \frac{(m_1 c_1 + K) (T - t_1)}{m (t_2 - T)} \quad (1)$$

Měrné teplo c určíme ze vzorce (1), jestliže známe hodnoty všech veličin na pravé straně vzorce.

V tabulkách MFChT (vydání 1971) č. 49 vyhledáme pro vodu měrné teplo c_{20} . Pokud teplota vody v kalorimetru během měření se příliš neliší od 20°C , dosadíme $c_1 = c_{20} = 4.18 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Hodnoty ostatních veličin ve vzorci (1) určíme měřením:

určíme tepelnou kapacitu K kalorimetru,
změříme hmotnost m_1 vody v kalorimetru, hmotnost m_2 ocelového předmětu, teploty t_1 , t_2 , T .

K měření potřebujeme tedy tyto pomůcky: ocelový předmět, směšovací kalorimetr s míchačkou, teploměr se stupnicí, jejíž nejmenší dílek je $0,1^\circ\text{C}$, váhy k určení hmotnosti s přesností $0,1 \text{ g}$.

Postup měření

1. Určete tepelnou kapacitu K kalorimetru.
Do kalorimetru nalezte (studenou) vodu o hmotnosti m_1 , uzavřete kalorimetr a za stálého míchání měřte teplotu vody v minutových intervalech (asi po dobu 10 min), až se teplota ustálí. Měření zapište do tabulky 1. Změřte teplotu t_1 vody a kalorimetru. Pak do kalorimetru přilejte vodu o hmotnosti m_2 a o teplotě t_2 , $t_2 > t_1$. Za stálého míchání měřte opět teplotu vody v minutových intervalech, až se teplota ustálí (tab. 2). Změřte teplotu T soustavy, $t_2 > T > t_1$.

Teplo přijaté vodou o hmotnosti m_1 a kalorimetrem se rovná teplu odevzdanému vodou o hmotnosti m_2

$$(m_1 c_1 + K) (T - t_1) = m_2 c_1 (t_2 - T),$$

$$K = m_2 c_1 \frac{t_2 - T}{T - t_1} - m_1 c_1 \quad (2)$$

2. Změřte hodnoty zbývajících veličin ve vzorci (1).

Změřte hmotnost m ocelového předmětu.

Předmět vložte do vhodné zkumavky tak, abyste jej mohli rychle a bezpečně vyjmout. Zkumavku upevněnou na stojanu ponořte do vodní lázně, jejíž teplotu udržujete stálou, blízkou teplotě varu vody. Změřte ustálenou teplotu vzduchu ve zkumavce, která se rovná teplotě t_2 předmětu.

Změřte hmotnost m_1 vody, kterou nalezete do kalorimetru. Jako v případě 1. měřte teplotu vody v minutových intervalech, až se teplota soustavy ustálí (tab. 3); změřte teplotu t_1 vody a kalorimetru.

Ocelový předmět vyjměte ze zkumavky a rychle ponořte do vody v kalorimetru. Měřte teplotu vody v půlminutových intervalech, až dosáhne maximální hodnoty t (tab. 4).

Aby tepelné ztráty vzniklé výměnou tepla mezi kalorimetrem a okolím byly pokud možno malé, volíme teplotu t_1 tak, aby teplota vzduchu v místnosti byla asi uprostřed mezi teplotami t_1 a t .

Naměřené hodnoty veličin použijte k výpočtu měrného tepla c podle vzorce (1). Nalezenou číselnou hodnotu správně zaokrouhlete podle přesnosti měření hodnot ostatních veličin.

Závěr

Podle teplot vody použité v kalorimetru při měření posuďte, zda byl splněn předpoklad stálosti měrného tepla vody vyjádřený konstantou c_{20} .

Posuďte, jak byl splněn předpoklad, že teplota vzduchu v místnosti, kde jste měření konali, byla asi uprostřed mezi teplotami t_1 a t .

Podle tabulek 1 až 4 sestrojte na milimetrový papír grafy změny teploty v čase. Podle grafů posuďte, jak měření přispěla ke stanovení konečných teplot soustavy.

Posuďte, proč je účelnější ohřívat ocelový předmět v horkém vzduchu v suché zkumavce než přímo v horké vodní lázni.

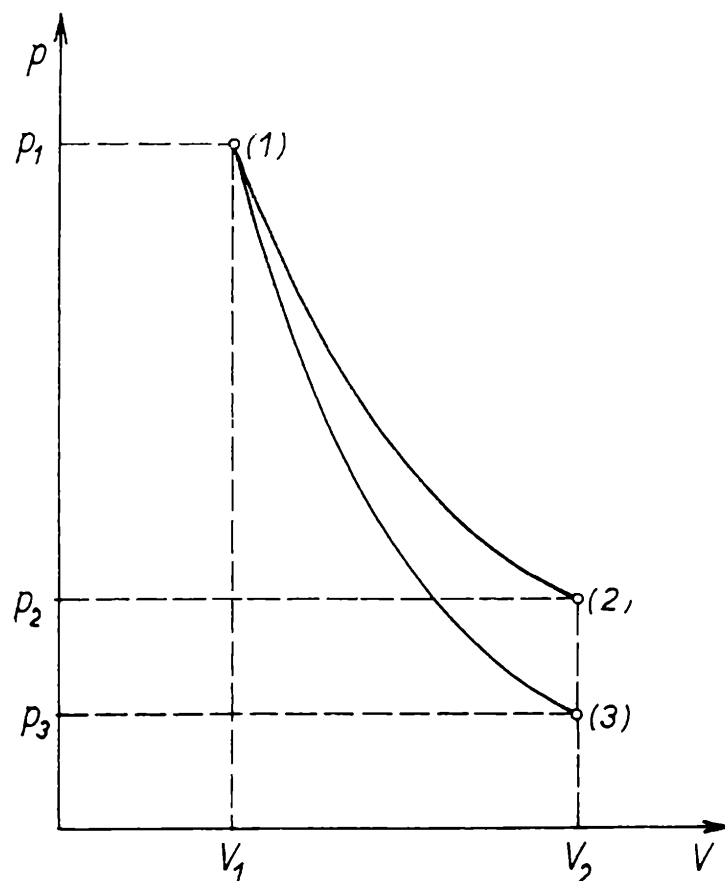
Posuďte, které okolnosti řešení úlohy přispěly k tomu, že jsme mohli předpokládat platnost kalorimetrické rovnice a použít při řešení úlohy vztahů (1) a (2) z ní vyvozených.

Porovnejte nalezenou hodnotu c měrného tepla oceli s hodnotou c_{20} chemicky čistého železa (tab. č. 34).

Výsledky svých úvah запиšte.

7. Dusík dané hmotnosti m , počátečního tlaku p_1 (obr. 3, bod [1]) a teploty T_1 zvětšil objem z hodnoty V_1 na V_2 , $V_2 = n V_1$, n celé kladné číslo, dějem izotermickým [(1)–(2)] nebo adiabatickým [(1)–(3)].

a) Určete rozdíl tlaků plynu $\Delta p = p_2 - p_3$ na konci prvního a druhého děje.



Obr. 3

b) Určete změnu střední kvadratické rychlosti molekul plynu, která nastane během děje izotermického a během děje adiabatického.

c) Určete, jak se změní počet molekul v jednotce objemu plynu při ději izotermickém a při ději adiabatickém.

Dusík považujte za dokonalý plyn.

Řešte úlohu obecně a potom pro hodnoty: $p_1 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $T_1 = 300 \text{ K}$, molová hmotnost dusíku $M_m = 28 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$, Poissonova konstanta $= 1,4$, $n = 4$.

Kategorie D

4. Dva závodníci A , B startují současně na běžecké trase délky s . Závodník A běží první polovinu dráhy rychlostí v_1 a druhou polovinu rychlostí v_2 . Závodník B běží v první polovině celkové doby svého běhu rychlostí v_1 a ve druhé polovině rychlostí v_2 , $v_2 > v_1$.

a) Který z obou běžců doběhl do cíle první?

b) Určete dobu a délku dráhy předstihu vítěze.

c) Řešte pro hodnoty $s = 1\,500 \text{ m}$, $v_1 = 4,0 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 6,0 \text{ m s}^{-1}$ výpočtem. Výsledky ověřte grafickým řešením. Grafy dráhy $s = f(t)$ sestrojte na milimetrový papír.

5. Dva automobily vyjely současně z místa A a za dobu t_0 dojelely do místa B . První automobil urazil první polovinu dráhy stálou rychlostí v_1 a druhou polovinu stálou rychlostí v_2 , $v_2 > v_1$. Druhý automobil projel celou trasu se stálým zrychlením a .

a) Sestrojte na milimetrový papír do týchž os souřadnic (t, v) grafy rychlosti obou automobilů jako funkce času pro hodnoty $v_1 = 30 \text{ km h}^{-1}$, $v_2 = 45 \text{ km h}^{-1}$, $t_0 = 10$ minut. Z grafů rozhodněte, zda automobily na své trase dosáhnou stejné rychlosti. Ve kterém čase od počátku pohybu se to stane?

b) Sestrojte na milimetrový papír do těchže os souřadnic (t, s) grafy dráhy obou automobilů jako funkce času pro uvedené hodnoty. Z grafů rozhodněte, zda na své trase předhoní jeden z automobilů druhý. Ve kterém čase od počátku pohybu se to stane?

c) Řešte úlohu a) obecně, proveďte diskusi a ověřte správnost grafického řešení pro dané hodnoty.

6. Měření plošného obsahu rovinného obrazce.

Potřeby: Kladívkový papír (prešpan nebo jiný vhodný materiál), nůžky, laboratorní váhy a sada závaží, délkové měřítko, milimetrový papír, pravítko, tužka.

Návod:

a) Z papíru nebo jiného vhodného materiálu vystříhněte kruh o poloměru $r = 10 \text{ cm}$ a čtverec o straně $a = 10 \text{ cm}$. Určete plošný obsah obrazců S_1 , S_2 výpočtem a odhadněte relativní a absolutní chybu měření.

b) Položte kruh na milimetrový papír a ostrou tužkou proveďte jeho obrys. Určete počet n_1 celých čtverečků centimetrové sítě ($S_0 = 1 \text{ cm}^2$), ležících uvnitř obrazce a počet n_2 čtverečků této sítě, jimiž prochází obrysová čára obrazce. Potom střední hodnotu $\bar{S}_1$ určíme

$$\bar{S}_1 = n_1 S_0 + 0,5 n_2 S_0.$$

Meze intervalu pro hodnotu S_1 jsou dány

$$S_{\min} = n_1 S_0 \qquad S_{\max} = (n_1 + n_2) S_0.$$

c) Vezměte v úvahu jemnější síť čtverečků se stranou $a' = 5 \text{ mm}$ (plošný obsah $S'_0 = 0,25 \text{ cm}^2$). Proveďte stejné měření jako v bodě b) a srovnejte střední hodnotu i šířku intervalu obou měření.

d) Rozdělte kruh dvěma navzájem kolmými průměry na 4 kvadranty a zaveďte vhodnou soustavu souřadnic (x, y) . Potom průměr ležící v ose x rozdělte nejprve na dílky po $x_1 = 1 \text{ mm}$, později $x_2 = 0,5 \text{ cm}$ (popř. i $x_3 = 3 \text{ mm}$). Daný kruh potom pokryjte soustavou pásků dané šířky a o proměnných výškách $2h_i$. Potom

$$S_1 = \sum_{i=1}^n 2h_i x = 2x \sum_{i=1}^n h_i.$$

Protože počet pásků je velký, lze psát přibližně

$$S_1 \doteq 2x \sum_{i=1}^n y_i,$$

kde x a $2y_i$ jsou délky stran daných obdélníků, pokrývajících obrazec. Zřejmě lze opět zvolit dvě soustavy těchto obdélníků: jedna obsahuje daný obrazec, druhá je danému obrazci vepsána.

Navrhněte způsob, jak tuto metodu lze zjednodušit, jak lze stanovit střední hodnotu a chybu měření.

e) Obsah rovinného obrazce stanovte vážením na laboratorních vahách. Navrhněte metodu měření, přičemž použijte čtverce známého obsahu S_2 . Určete chybu měření.

V případě, že sami na metodu měření nepřijdete, použijte návod, který je uveřejněn v ročence X. ročník fyzikální olympiády. Praha, 1970, 299 s.; viz s. 186—192.

f) Srovnajte střední hodnoty a šířku intervalu pro S_1 v uvedených metodách měření. Jako kontrolní úkol proveďte ve všech případech podíl S_1/S_2 a vysvětlete, o jakou hodnotu se jedná.

7. Automobil o hmotnosti m jede rovnoměrně zrychleným pohybem do kopce se stoupáním p %. Počáteční rychlost automobilu je nulová. Na konci dráhy s je rychlost automobilu rovna v . Úhrnná odporová síla proti pohybu je $F = kG$. Určete:

a) užitečnou práci motoru automobilu,

b) průměrný užitečný výkon motoru automobilu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 1,5 \cdot 10^3$ kg, $s = 100$ m, $p = 2,0$ %, $v = 45$ km h⁻¹, $k = 0,10$.

Naum Jakovlevič Vilenkin:
VYPRÁVĚNÍ O MNOŽINÁCH

— SPN, Praha 1973. Stran 196.
72 obr., 56 př. a cv., cena Kčs 12,50

„Teorie množin pronikla do mnohých oblastí matematiky a nesmírně je ovlivnila; zvláště mimořádnou úlohu hraje při studiu logických a filosofických základů matematiky,“ řekl kdysi R. Courant a N. V. Vilenkin použil tento citát spolu s dalšími jako úvodní vysvětlení, proč napsal tuto knihu, která vyšla v překladu dr. M. Vlacha v posledním únorovém týdnu 1974 (byť s předčasnou tiráží 1973).

Tato publikace si klade za cíl přiblížit čtenáři populární formou obsah a význam teorie množin. Proto také autor začíná vysvětlením samotného pojmu množina a její symboliky. V dalších pasážích pokračuje vysvětlením, jak se určují množiny, uvádí paradoxy při zadávání množiny, vlastnosti prázdné množiny, podmnožiny, univerzální množiny, vztah teorie množin a kombinatoriky, závislosti při průniku, sjednocení, rozkladech a rozdílu množin, připomíná aritmetiku zbytkových tříd, algebru množin a Booleovu algebru. V další, tj. druhé kapitole se pak N. V. Vilenkin zabývá myšlenkou nekonečna z historického hlediska i z hlediska matematických operací: porovnávání množin (spočetné a nespočetné množiny, problém kontinua). Třetí kapitola asi čtenáře po-

těší nejvíce, je totiž sbírkou různých matematických kuriozit. N. J. Vilenkin v ní předvádí řadu překvapivých až paradoxních příkladů, na které je teorie funkcí reálné proměnné dosti bohatá. Autor vypráví, jak vznikaly základní kameny teorie množin a připojuje řešené úlohy. Začíná v této třetí kapitole tím, jak se rozvíjel pojem funkce, pokračuje vysvětlením práce Lobačevského, Jordana, Cantora, aby skončil u Urysonovy definice dimenze.

N. J. Vilenkin napsal učebnici, která neslouží k mechanickému naučení, ale zábavnému studiu. I čtenář, který je s teorií množin seznámen lépe, než je obsahem knihy, jistě si rád přečte, jak profesor Tarantoga dokáže Iljonovi, že jím uváděný počet oblud na planetě Hesiod je vymyšlený, či jak Iljon pomohl řediteli kosmického hotelu s nekonečným počtem pokojů ubytovat do tohoto plně obsazeného hotelu dalších nekonečně mnoho skupin o nekonečně mnoha návštěvnících, nebo jinou vtipnou ukázkou. Kniha je určena jako úvod do studia pro studenty. Bude výbornou pomůckou i pro pedagogické pracovníky. Nelze také přehlédnout, že v souvislosti s diskusí v přírodovědeckých oborech (zejména chemii), jak využít teorie množin pro výuku těchto disciplín, bude mít toto české znění poměrně dosti široký okruh čtenářů.

Josef Berger

LITERATURA PRO ŽÁKY

Karel Kindl: MATEMATIKA — PŘEHLED UČIVA ZÁKLADNÍ ŠKOLY
SPN, Praha 1972

34,50 Kčs

V knize je přehledně zpracováno veškeré matematické učivo základní školy. Jsou zde vysvětleny základní pojmy, poučky a vzorce ilustrované na názorných příkladech.



Josef Polák: PŘEHLED STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATIKY
SNP, Praha 1972

41,— Kčs

Knihla navazuje na současné středoškolské učebnice matematiky s přihlédnutím k modernizačnímu procesu ve vyučování matematice. Obsahuje definice a věty z celého středoškolského matematického učiva a mnoho příkladů a cvičení.



Doc. Jiří Kůst: SFÉRICKÁ TRIGONOMETRIE
SPN, Praha 1964

9,50 Kčs

Hlubší studium astronomie se neobejde bez matematického aparátu, jehož základem je sférická geometrie a trigonometrie. Tato zajímavá matematická disciplína se uplatňuje v řadě přírodovědných i technických oborů. Publikace navazuje na středoškolské učivo a uplatní se především v zájmové matematice na středních školách.



Doc. dr. Miroslav Menšík: GEOMETRICKÉ ZÁKLADY FOTOGRAMMETRIE
SNP, Praha 1966

9,50 Kčs

Fotogrammetrie je měřicí metoda, užívaná v nejrůznějších vědeckých a technických oborech. Umožňuje např. z fotografických snímků určitého objektu zjistit jeho tvar, rozměry i polohu v prostoru. Je zajímavou aplikací středoškolského učiva z geometrie a deskriptivní geometrie. Příručka je vhodná pro zájmovou matematiku na středních školách a pro žáky, kteří chtějí studovat na vysokých školách technického směru.



Štefan Novoveský a kol.: 777 MATEMATICKÝCH ZÁBAV A HER
SPN, Praha 1971

16,— Kčs

Knížka je určena mládeži a svou zábavnou formou má vzbudit její zájem o matematiku. Obsahuje hádanky, hlavolamy a hry, jejichž řešení vyžaduje důkladnou pozornost a soustředění. Tematika většiny příkladů souvisí s požadavky učiva ZDŠ. Publikace sleduje cíl rozvíjet co nejvšestranněji rozumové schopnosti. Může posloužit i zájmovým kroužkům.



Dr. Miloslav Mačát: ČÍSELNÉ SOUSTAVY

5,50 Kčs

Knížka, určená čtenářům už od 9. ročníku ZDŠ, seznamuje přístupným a zcela přirozeným způsobem se čtyřmi základními početními výkony v soustavách, jejichž základem je jiné číslo než 10. Obsahuje též stručný výklad používání jiných soustav — zejména dvojkové — v práci samočinných počítačů.

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

D

dashed	čárkovaný, s čárkou (např. A')
data	údaje
decadic	desítkový, dekadický
decagon	desetiúhelník
decahedron	desetistěn
decide	rozhodnout
decimal	desetinný
decimal fraction	desetinný zlomek
decimal notation	desetinný zápis
decimal number	desetinné číslo
decimal place	desetinné místo
decimal point	desetinná tečka
decimal system	desítková soustava
decompose	rozložit
decomposition	rozklad
decrease	klesat
decreasing	klesající
deduce	odvodit
deduction	odvození, dedukce
deficiency	nedostatek, defekt
define	definovat
defined	definovaný
definite	určitý, jistý
definition	definice
deformation	deformace, zkreslení
degeneracy	degenerace
degenerate	degenerovat, degenerovaný
degeneration	degenerace
degree	stupeň
deltoid	deltoid
denary	desítkový, desetinný
denary system	desítková soustava
denial	negace, popření
denominate number	pojmenované číslo
denominator	jmenovatel
denote by	označit

dense
 denumerable
 dependence
 dependent
 depth
 derivative
 first(-order) derivative
 partial derivative
 derive
 derived
 descend
 describe
 description
 descriptive geometry
 design
 destination
 detached
 determinant
 determine
 developable
 development
 deviation
 diagonal
 diagram
 dot diagram
 Venn diagram
 diameter
 differ
 difference
 different
 differentiable
 differential
 differential calculus
 differential coefficient
 differential equation
 differentiate
 differentiation
 digit
 two-digit
 digital
 dihedral angle, dihedron
 dilatation
 dimension
 dimension of equation
 three-dimensional
 direct
 directed
 directed angle
 directed number
 direction
 direction cosines
 director circle
 directrix
 disappear
 discontinuous
 disconnected
 discount

hustý
 spočetný
 závislost
 závislý
 hloubka
 derivace
 první derivace
 parciální derivace
 odvodit
 odvozený, derivovaný
 klesat
 probíhat, opsat
 popis
 deskriptivní geometrie
 návrh, vyznačit
 určení
 oddělený
 determinant
 určit
 rozvinutelný
 rozvinutí
 odchylka
 úhlopříčka, diagonála
 graf, diagram
 bodový diagram
 Vennův diagram
 průměr
 lišiti se, být rozdílný
 rozdíl, difference
 rozdílný
 mající derivaci, diferencovatelný
 diferenciál, diferenciální
 diferenciální počet
 derivace
 diferenciální rovnice
 derivovat, diferencovat
 derivování, diferencování
 cifra, číslice
 dvojciferný
 číslicový
 klín
 dilatace, prodloužení, roztažení
 rozměr, dimenze
 stupeň rovnice
 trojrozměrný
 příčný
 orientovaný
 orientovaný úhel
 relativní číslo, číslo se znaménkem
 směr, orientace
 směrové kosiny
 řídící kružnice
 direktrix, řídící přímka, řídící křivka
 anulovat se, vymizet, zmizet
 nespojitý
 nesouvislý
 sleva



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamení Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 52, 1973-74

Vydává

ministerstvo školství

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

VEDOUCÍ REDAKTOR: Prof. Emil KRAEMER,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR: Doc. Ota SETZER,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA: Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nositel vyznamenání Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha

O B S A H

Úvodníky

Kraemer Emil: Do dalšího ročníku Rozhledů	1
K 25. výročí Pionýrské organizace SSM	433
Na počátku roku 1974	89
Žofka Josef: Třicet let československo-sovětské smlouvy	193

Matematika

Calda Emil: Rovnice rovinných útvarů	195
Drábek Jaroslav, Zach Jiří: Dualita rovinných map	390
Eulerova věta pro rovinné grafy	349
Drápalík Vladimír: O dělitelnosti sedmi	447
Fidrmuc M.: Vlastnosti funkcí reálné proměnné vzhledem k sčítání argumentu	434
Hladký Miroslav: O konečných automatech a jejich vlastnostech	310
Horák Stanislav: Nerovnosti v geometrii	10, 339, 398, 449
Vzdálenost dvou bodů	151
Ilaš Štefan: Topologická historka	305
Kateřinák Josef: Malé počítací a rýsovací stroje a jejich užití	394
Kršňák Pavel: O soustavě lineárních rovnic	97
Kůst Jiří: Diagonální cesty ve čtvercové síti	49, 103
Litomišský Miroslav: O úhlech pythagorských trojúhelníků	58
Malík Marek: Význačné prvky v uspořádané množině	200
Morávek Jaroslav: O neobvyklém násobení komplexních čísel a matic	108
Nečas Jiří: Misionáři a kanibalové	242
Vzorce pro součty k-tých mocnin přirozených čísel	344
Novák Jiří: Příspěvek k problému dr. Zítka	204
Odvárko Oldřich: Sčítat nebo násobit?	298
Okřina Vilém: Nebojte se diferenciálních rovnic	6, 55
Úlohy o neexistenci	145
Sedláček Jiří: Největší dnes známé prvočíslo	50
Skuhra Jiří: Problém divokých kachen	248, 303, 347
Šarounová Alena: Heronův vzorec pro tětiové čtyřúhelníky	342
Hledejte nejlíbivější pravoúhelník	241
O zlatém řezu úsečky, zlatém obdélníku a o zlaté spirále	251
Šedivý Jaroslav: George Boole a jeho algebry	148
O čísle π	337
Vrba Antonín: O sjednocení a průniku konečných množin	3
Vu Công Đình: Poznámka o kořenech úplné kvadratické rovnice	445
Wohlmuthová Anežka: Konvexní množiny	289
Zahradník Jan: Dva způsoby zadání booleovských funkcí	295
Zelinka Bohdan: Kapesní průvodce po království matematiky	385, 441

Konstruktivní geometrie

Cířka Edvard: Ke kolineaci kružnice s kuželosečkou	356
Drábek Jaroslav, Zach Jiří: Eulerova věta pro konvexní mnohostrany	255
Horák Stanislav: Kadeřávkova konstrukce normál elipsy	316
Hradecký František: Řetězce kružnic na kulové ploše a v rovině	356
Společné tečny a společné body kuželoseček	14
Stereografická projekce a Möbiova rovina	207
Setzer Ota: Dovedete sestřít čtverec pouhým kružítkem?	319

Fyzika

Baník Ivan, Zámečník Jozef: Niekoľko zaujímavostí vysokých tlakov	380
Bednařík Milan, Šírká Miroslava: Až si jednou pořídíte motorové vozidlo	28, 72, 117
	166, 210, 259, 324
Čeká vás zkouška z fyziky?	264
Dub Petr: O jednom problému z elektrostatiky	453

Ferko Pavol: Relativistický pohyb elektrónu	20
Tunelový efekt	320
Kašpar Emil: Proutkaření	61, 112, 135
Kolomý Rudolf: Cesta za elektrickým světlem	24
Levantovskij V. J.: Raketou ke Slunci	363
Procházková Eva: Zdánlivá hmotnost kilomolu směsi dvou plynů	365, 410
Šindelář Václav: Metrologie	405
Valchař Stanislav: Moderní využití Wheatstonova můstku v praxi	457

Astronomie

Široká Miroslava, Široký Jaromír: Dva Lunochody zkoumaly Měsíc	175
Dvanáct Jupiterových měsíců	369
Hvězdy s neviditelnými průvodci	413
Konstelace planet	461
Mračna Magellanova	125
O pohybech hvězd	271
Plejády v Býku	60
Roční paralaxa hvězd	172
Saturnův prstenec	329
Spirální galaxie v Andromedě	127
Zatmění Měsíce do roku 2000	213
Zatmění Slunce	221

Různé

Chajda Ivan: Pranostiky a matematická logika	184
Kolomý Rudolf: Průkopníci bezdrátové telegrafii	474
Kotyk Josef: Actio in distans	69
Charakter matematiky	172
Na závěr Koperníkova roku	42
Newtonův gravitační zákon	44
Nikolaj Ivanovič Lobačevskij	372
Počátky radiotelegrafie	279
Předmět a charakter fyziky	422
Skotnický Jozef: O příčinnosti	376

Naše soutěž

Řešení úloh loňského ročníku	83, 132, 188, 276
Výsledky loňské soutěže	186
V zamyšlení nad výsledky 1972/73	274
Úlohy k řešení	41, 139

Olympiády

XXIII. ročník matematické olympiády	33
Třetí kolo kat. A XVI. ročníku FO	87
První trojice úloh pro 1. kolo XVI. ročníku FO	417
Druhá skupina úloh pro 1. kolo XVI. ročníku FO	464
Nejmladším čtenářům	47, 92, 144, 287, 427
Matematické zábavy	286
Ze zahraničních časopisů	142, 336

Recenze

Bednařík, Široká: Rychlost a bezpečná jízda	46
Kleczeck: Slunce a člověk	284
Koryta: Michael Faraday	334
Morávek: O dynamickém programování	384
Široký, Široká: Základy astronomie v příkladech	285
Vilenkin: Vyprávění o množinách	475
Vyšín, Kučerová: Druhý výlet do moderní matematiky	303
Redakce hovoří	48, 192, 240